LEZIONE VII

IL TEOREMA DI RECIPROCITÀ

Corso di
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URI: *http://www.cem.unifi.it/*

GLI INTEGRALI DI REAZIONE

V.H. Rumsey, "The reaction concept in electromagnetic theory", *Physical Review*, 2, 94, October 1954

Le equazioni di Maxwell relative al campo prodotto dalle sorgenti

$$(\mathbf{J}_1,\mathbf{M}_1)\rightarrow(\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1)$$

$$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{E}_1=-j\omega\mu\mathbf{H}_1-\mathbf{M}_1\\ \nabla\times\mathbf{H}_1=+j\omega\varepsilon\mathbf{E}_1+\mathbf{J}_1\end{cases}$$

Considerando poi le sorgenti

$$(\mathbf{J}_2,\mathbf{M}_2)\rightarrow(\mathbf{E}_2,\mathbf{H}_2)$$

$$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{E}_2=-j\omega\mu\mathbf{H}_2-\mathbf{M}_2\\ \nabla\times\mathbf{H}_2=-j\omega\varepsilon\mathbf{E}_2+\mathbf{J}_2\end{cases}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Moltiplicando scalarmente – con l'opportuno campo - ambedue i membri delle equazioni del primo sistema si avrà

$$\begin{matrix} \mathbf{H}_2 \cdot \\ \mathbf{E}_2 \cdot \end{matrix} \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_1 = -j\omega\mu \mathbf{H}_1 - \mathbf{M}_1 \\ \nabla \times \mathbf{H}_1 = +j\omega\varepsilon \mathbf{E}_1 + \mathbf{J}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 = -j\omega\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1 = +j\omega\varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \end{cases}$$

Analogamente per il secondo sistema

$$\begin{matrix} \mathbf{H}_1 \cdot \\ \mathbf{E}_1 \cdot \end{matrix} \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_2 = -j\omega\mu \mathbf{H}_2 - \mathbf{M}_2 \\ \nabla \times \mathbf{H}_2 = +j\omega\varepsilon \mathbf{E}_2 + \mathbf{J}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 = -j\omega\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_2 = +j\omega\varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \end{cases}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Sottraendo il secondo sistema dal primo segue

$$\begin{cases} \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 = -\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{H}_2 + \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_2 = +\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \end{cases}$$

Sommando ambo i membri delle equazioni di quest'ultimo sistema

$$\left(\mathbf{H}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_2\right) - \left(\mathbf{H}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1\right) = \left(\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{H}_2\right) - \left(\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{H}_1\right)$$

Applicando l'identità

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{a} x \mathbf{b}\right) = \mathbf{b} \cdot \nabla x \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla x \mathbf{b}$$

GLI INTEGRALI DI REAZIONE

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right)=\left(\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{J}_1-\mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2\right)-\left(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{J}_2-\mathbf{M}_2\cdot\mathbf{H}_1\right)$$

Si integri ambedue i membri in un volume V limitato da una superficie S qualsiasi. Si ha per il termine a sinistra

$$\iiint_V \nabla\cdot\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right)dv=\iint_S\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right)\cdot\hat{n}ds$$

Di conseguenza

$$\iint_S\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right)\cdot\hat{n}ds=\iiint_v\left(\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_2-\mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2\right)dv-\iiint_v\left(\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{E}_1-\mathbf{M}_2\cdot\mathbf{H}_1\right)dv$$

$\iiint_v\left(\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_2-\mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2\right)dv$ reazione o integrale di reazione della sorgente (2) sulla sorgente (1)

$\iiint_v\left(\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{E}_1-\mathbf{M}_2\cdot\mathbf{H}_1\right)dv$ reazione o integrale di reazione della sorgente (1) sulla sorgente (2)

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione VII
Teorema di reciprocità

IN QUALI CASI GLI INTEGRALI DI REAZIONE COINCIDONO ?

$$\iint_S\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right)\cdot\hat{n}ds=\iiint_v\left(\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_2-\mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2\right)dv-\iiint_v\left(\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{E}_1-\mathbf{M}_2\cdot\mathbf{H}_1\right)dv$$

$$\iint_S\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right)\cdot\hat{n}ds=0$$

$$\iiint_v\left(\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_2-\mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2\right)dv=\iiint_v\left(\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{E}_1-\mathbf{M}_2\cdot\mathbf{H}_1\right)dv$$

CASO 1) la superficie S viene realizzata mediante un conduttore elettrico (o magnetico) perfetto
CASO 2) Il volume V comprende tutto lo spazio e le sorgenti sono al finito

IN QUALI CASI GLI INTEGRALI DI REAZIONE COINCIDONO ?

CASO 1) la superficie S viene realizzata mediante un conduttore elettrico (o magnetico) perfetto

$$\iint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)\cdot \hat{n}\, ds = \iiint_v (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{H}_2)\, dv - \iiint_v (\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{H}_1)\, dv$$

$$(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2)\cdot \hat{n} = (\hat{n} \times \mathbf{E}_1)\cdot \mathbf{H}_2 = 0 \qquad (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)\cdot \hat{n} = (\hat{n} \times \mathbf{E}_2)\cdot \mathbf{H}_1 = 0$$

$$\iint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)\cdot \hat{n}\, ds = 0$$

$$\iiint_v (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{H}_2)\, dv = \iiint_v (\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{H}_1)\, dv$$

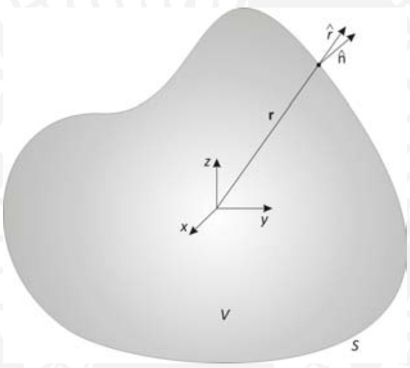
Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione VII
Teorema di reciprocità

IN QUALI CASI GLI INTEGRALI DI REAZIONE COINCIDONO ?

CASO 2) Il volume V comprende tutto lo spazio e le sorgenti sono al finito

Le sorgenti sono al finito. Le condizione di radiazione a grande distanza impongono che a grande distanza i campi si devono comportare localmente come un'onda piana. Si ha in questo caso in un qualsiasi punto della superficie *S*



IN QUALI CASI GLI INTEGRALI DI REAZIONE COINCIDONO ?

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\zeta}\left(\hat{r}\times\mathbf{E}_1\right) \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{\zeta}\left(\hat{r}\times\mathbf{E}_2\right)$$

$$\iint_S \left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right)\cdot\hat{n}\,ds = \frac{1}{\zeta}\iint_S \left[\mathbf{E}_1\times\left(\hat{r}\times\mathbf{E}_2\right) - \mathbf{E}_2\times\left(\hat{r}\times\mathbf{E}_1\right)\right]\cdot\hat{n}\,ds = 0$$

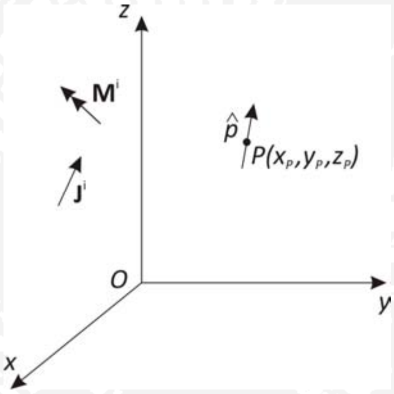
Ne consegue l'uguaglianza dei due integrali di reazione

$$\iiint_{V_1}\left(\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_2 - \mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2\right)dv = \iiint_{V_2}\left(\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{E}_1 - \mathbf{M}_2\cdot\mathbf{H}_1\right)dv$$

METODO DELLE SORGENTI DI PROVA

Calcolo del campo irradiato mediante il teorema di reciprocità – Le sorgenti di prova (*test source*)

Consideriamo un distribuzione assegnata di correnti elettriche $\mathbf{J}^i$ e magnetiche $\mathbf{M}^i$. Si vuole ad esempio valutare la componente del campo elettrico nel punto $P(x_P, y_P, z_P)$ nella direzione del versore $\hat{p}$



Si pone nel punto P un dipolo elettrico corto definito come

$$\mathbf{J}_{prova} = I\Delta z\,\delta(x-x_p)\delta(y-y_p)\delta(z-z_p)\hat{p} \qquad I\Delta z = 1$$

Applicando il teorema di reciprocità e ponendo

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}^i \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}^i \quad \mathbf{J}_2 = \delta(x-x_p)\delta(y-y_p)\delta(z-z_p)\hat{p} \quad \mathbf{M}_2 = 0$$

$$\iiint_{V_1} (\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_2 - \mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2)dv = \iiint_{V_2} (\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{E}_1 - \mathbf{M}_2\cdot\mathbf{H}_1)dv$$

$(\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1)$ è il campo elettromagnetico da calcolare (incognito)

$(\mathbf{E}_2,\mathbf{H}_2)$ è il campo elettromagnetico associato al dipolo elettrico corto e quindi noto

METODO DELLE SORGENTI DI PROVA
Lezione VII
Teorema di reciprocità

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

$$\iiint_{V_1} (\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_2 - \mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2)dv = \iiint_{V_2} \mathbf{E}_1\cdot\hat{p}\,\delta(x-x_p)\delta(y-y_p)\delta(z-z_p)dv$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\delta(x-x_p)\delta(y-y_p)\delta(z-z_p)\,dx\,dy\,dz = f(x_P,y_P,z_P)$$

$$\mathbf{E}_1(x_p,y_p,z_p)\cdot\hat{p} = \iiint_{V_1} (\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{E}_2 - \mathbf{M}_1\cdot\mathbf{H}_2)dv$$

Si determina in questo modo la componente del campo elettrico nel punto P e nella direzione-p.

Prendendo tre dipoli elettrici corti di prova (o *test sources*) che formano in sistema di coordinate ortogonale, si determina il completamente il campo elettrico.

Il campo magnetico nel punto P viene determinato prendendo ovviamente delle sorgenti di prova di tipo magnetico

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Una distribuzione di corrente superficiale elettrica nelle immediate vicinanze di un conduttore elettrico perfetto non irradia !!!

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}^s \quad \mathbf{M}_1 = 0 \quad \mathbf{J}_2 = \delta(x - x_p)\delta(y - y_p)\delta(z - z_p)\hat{p} \quad \mathbf{M}_2 = 0$$

$$\iiint_{V_1} \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv = \iiint_{V_2} \mathbf{E}_1 \cdot \hat{p}\delta(x - x_p)\delta(y - y_p)\delta(z - z_p) dv$$

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \Rightarrow \iiint_{V_2} \mathbf{E}_1 \cdot \hat{p}\delta(x - x_p)\delta(y - y_p)\delta(z - z_p) dv = \mathbf{E}_1(x_p, y_p, z_p) \cdot \hat{p} = 0$$