

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
 Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
 Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII  
 Parametri fondamentali delle antenne

LEZIONE VIII  
 PARAMETRI FONDAMENTALI DELLE ANTENNE

Corso di  
 "Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi  
 Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni  
 Università di Firenze  
 E-mail: [giuseppe.pelosi@unifi.it](mailto:giuseppe.pelosi@unifi.it)  
 URL: <http://www.cem.unifi.it/>

1/45


Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
 Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
 Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

PARAMETRI FONDAMENTALI DELLE ANTENNE

Lezione VIII  
 Parametri fondamentali delle antenne

- Diagrammi di radiazione
- Direttività e guadagno
- Circuiti equivalenti e impedenza d'ingresso

2/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

Parametri fondamentali delle antenne

---

COS'È UN'ANTENNA?

Un'antenna è un sistema di interfaccia, bi-direzionale, tra propagazione guidata e propagazione nello spazio libero

**Antenna in trasmissione**


assorbe potenza da una linea di trasmissione, a cui è connessa, per poi irradiare tale potenza nello spazio

**Antenna in ricezione**

investita da una radiazione elettromagnetica proveniente dallo spazio circostante, dissipa potenza sul carico su cui è chiusa la linea di trasmissione ad essa connessa

Per qualunque sistema radiante vale il principio di reciprocità secondo il quale un'antenna irradia energia elettromagnetica nello spazio con le stesse proprietà con le quali essa può riceverla, purché la frequenza sia la stessa in ricezione e in trasmissione

3/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

Parametri fondamentali delle antenne

---

ANTENNA ISOTROPA

L'antenna isotropa è una sorgente puntiforme che irradia con lo stesso campo in tutte le direzioni.

Tale antenna, che è solamente teorica, è utile come elemento di confronto per molti tipi di antenne, le cui prestazioni possono esprimersi meglio facendo riferimento a questo radiatore elementare.

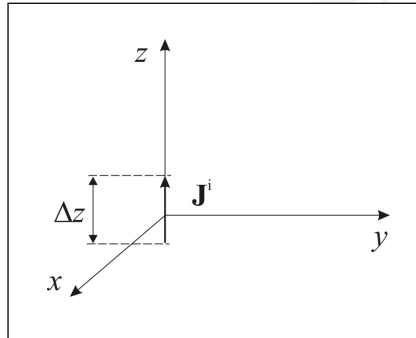
4/45



## DIPLO ELETTRICO CORTO (DEC)

## Lezione VIII

## Parametri fondamentali delle antenne



$$\begin{cases} E_r^{(e)} = \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos \vartheta e^{-jkr} \\ E_\vartheta^{(e)} = \zeta \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin \vartheta e^{-jkr} \\ E_\phi^{(e)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_r^{(e)} = 0 \\ H_\vartheta^{(e)} = 0 \\ H_\phi^{(e)} = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \vartheta e^{-jkr} \end{cases}$$

Campi radiativi

$$\mathbf{E}^{(e)} = E_\vartheta^{(e)} \hat{\vartheta} = jk\zeta \frac{I \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta e^{-jkr} \hat{\vartheta}$$

$$\mathbf{H}^{(e)} = H_\phi^{(e)} \hat{\phi} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^{(e)}}{\zeta} = \frac{E_\vartheta^{(e)}}{\zeta} \hat{\phi} = jk \frac{I \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta e^{-jkr} \hat{\phi}$$

5/45



## DIPLO ELETTRICO CORTO (DEC)

## Lezione VIII

## Parametri fondamentali delle antenne

Modulo del campo elettrico in zona lontana

$$\mathbf{E}^{(e)} = E_\vartheta^{(e)} \hat{\vartheta} = jk\zeta \frac{I \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta e^{-jkr} \hat{\vartheta}$$

$$|\mathbf{E}^{(e)}| = |E_\vartheta^{(e)}| = k\zeta \frac{|I| \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta$$

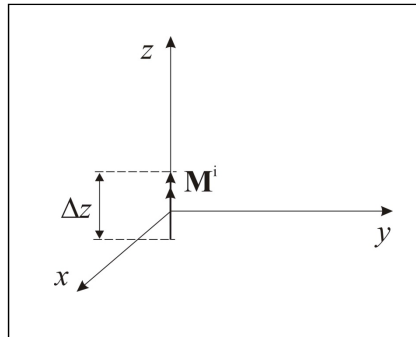
$$|\mathbf{E}^{(e)}|_{\max} = |E_\vartheta^{(e)}|_{\max} = k\zeta \frac{|I| \Delta z}{4\pi r} \quad \text{per } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

6/45



### DIPOLO MAGNETICO CORTO (DMC)

### Lezione VIII Parametri fondamentali delle antenne



$$\begin{cases} E_r^{(m)} = 0 \\ E_\theta^{(m)} = 0 \\ E_\phi^{(m)} = -\frac{I_m \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta e^{-jkr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_r^{(m)} = \frac{1}{\zeta} \frac{I_m \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos\theta e^{-jkr} \\ H_\theta^{(m)} = \frac{1}{\zeta} \frac{I_m \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin\theta e^{-jkr} \\ H_\phi^{(m)} = 0 \end{cases}$$

#### Campi radiativi

$$\mathbf{E}^{(m)} = E_\phi^{(m)} \hat{\phi} = -jk \frac{I_m \Delta z}{4\pi r} \sin\theta e^{-jkr} \hat{\phi}$$

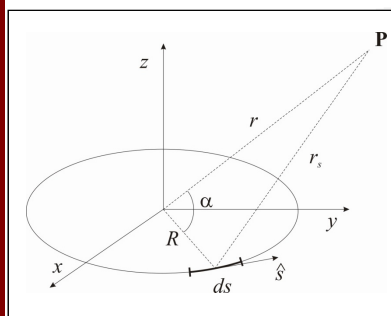
$$\mathbf{H}^{(m)} = H_\theta^{(m)} \hat{\theta} = \frac{\hat{r} \times \mathbf{E}^{(m)}}{\zeta} = \frac{E_\phi^{(m)}}{\zeta} \hat{\theta} = j \frac{k I_m \Delta z}{\zeta 4\pi r} \sin\theta e^{-jkr} \hat{\theta}$$

7/45



### ANTENNA A LOOP (A SPIRA O A TELAIO)

### Lezione VIII Parametri fondamentali delle antenne



$$\begin{cases} E_1^{(s)} = 0 \\ E_2^{(s)} = 0 \\ E_\phi^{(s)} = -\frac{j\omega\mu(R^2\pi)I_s}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta e^{-jkr} \\ H_1^{(s)} = \frac{j\omega\mu(\pi R^2)I_s}{2\pi} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos\theta e^{-jkr} \\ H_2^{(s)} = \frac{j\omega\mu(\pi R^2)I_s}{4\pi} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin\theta e^{-jkr} \\ H_\phi^{(s)} = 0 \end{cases}$$

#### Campi radiativi

dmc equivalente


$$\mathbf{E}^{(s)} = E_\phi^{(s)} \hat{\phi} = k\omega\mu \frac{I_s (R^2\pi)}{4\pi r} \sin\theta e^{-jkr} \hat{\phi}$$

$$I_m \Delta z = j\omega\mu \Delta s I_s$$

$$\text{con } \Delta s = \pi R^2$$

$$\mathbf{H}^{(s)} = H_\theta^{(s)} \hat{\theta} = \frac{\hat{r} \times \mathbf{E}^{(s)}}{\zeta} = \frac{E_\phi^{(s)}}{\zeta} \hat{\theta} = -\frac{k\omega\mu I_s (R^2\pi)}{\zeta 4\pi r} \sin\theta e^{-jkr} \hat{\theta}$$

8/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

Parametri fondamentali delle antenne

---

DIPOLLO MAGNETICO CORTO (DMC)

Modulo del campo elettrico in zona lontana

$$\mathbf{E}^{(m)} = E_{\varphi}^{(m)} \hat{\varphi} = -jk \frac{I_m \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta e^{-jkr} \hat{\varphi}$$

$$|\mathbf{E}^{(m)}| = |E_{\varphi}^{(m)}| = k \frac{|I_m| \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta$$


$$|\mathbf{E}^{(m)}|_{\max} = |E_{\varphi}^{(m)}|_{\max} = k \frac{|I_m| \Delta z}{4\pi r} \quad \text{per } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

spira equivalente

$$I_m \Delta z = j\omega \mu \Delta S I_s$$

con  $\Delta S = \pi R^2$

9/45



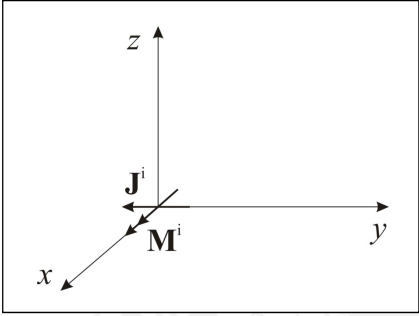
Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

Parametri fondamentali delle antenne

---

SORGENTE DI HUYGENS



$I_m = \zeta I$

$$\mathbf{E}^{(h)}(\mathbf{r}) = jk \frac{I_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \vartheta) (\sin \varphi \hat{\vartheta} + \cos \varphi \hat{\varphi})$$

$$\mathbf{H}^{(h)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\zeta} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^{(h)}(\mathbf{r}) = j \frac{k}{\zeta} \frac{I_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \vartheta) (\sin \varphi \hat{\varphi} - \cos \varphi \hat{\vartheta})$$

10/45



Modulo del campo elettrico in zona lontana

$$\mathbf{E}^{(H)}(\mathbf{r}) = jk \frac{I_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \vartheta) (\sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \varphi \hat{\phi})$$

$$E_{\vartheta}^{(H)} = jk \frac{I_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \vartheta) \sin \varphi$$

$$E_{\varphi}^{(H)} = jk \frac{I_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \vartheta) \cos \varphi$$

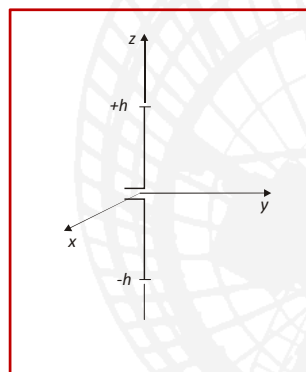
$$|\mathbf{E}^{(H)}(\mathbf{r})| = |\mathbf{E}_{\vartheta}^{(H)} \hat{\vartheta} + \mathbf{E}_{\varphi}^{(H)} \hat{\phi}| = \sqrt{E_{\vartheta}^{(H)2} + E_{\varphi}^{(H)2}} = k \frac{I_m |\Delta l|}{4\pi r} (1 + \cos \vartheta)$$

$$|\mathbf{E}^{(H)}(\mathbf{r})|_{\max} = 2k \frac{I_m |\Delta l|}{4\pi r} \quad \text{per } \vartheta = 0$$

11/45



$$I(z) = I_0 \cos(kz) \quad -h \leq z \leq +h \quad h = \frac{\lambda}{4}$$



Modulo del campo elettrico in zona lontana

$$\mathbf{E}^{(\lambda/2)} = E_{\vartheta}^{(\lambda/2)} \hat{\vartheta} = \frac{j\zeta I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} e^{-jkr} \hat{\vartheta}$$

$$|\mathbf{E}^{(\lambda/2)}| = |E_{\vartheta}^{(\lambda/2)}| = \frac{\zeta |I_0|}{2\pi r} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \right|$$

$$|\mathbf{E}^{(\lambda/2)}|_{\max} = |E_{\vartheta}^{(\lambda/2)}|_{\max} = \frac{\zeta |I_0|}{2\pi r} \quad \text{per } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

12/45

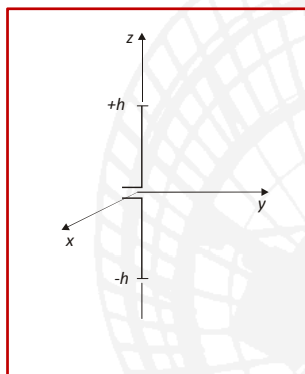


# ANTENNA FILARE CORTA

## Lezione VIII

### Parametri fondamentali delle antenne

Per un'antenna filare corta ( $2h \leq \lambda/10$ ) la distribuzione di corrente è sostanzialmente di tipo triangolare



$$I(z) = I_0 \left[ 1 - \frac{|z|}{h} \right]$$

$$\mathbf{E} = E_\theta \hat{\theta} = \frac{jk\zeta I_0 \sin\theta}{4\pi r} e^{-jkr} h \hat{\theta}$$

$$|\mathbf{E}| = |E_\theta| = \left| \frac{k\zeta I_0 \sin\theta}{4\pi r} h \right|$$

$$|\mathbf{E}|_{\max} = |E_\theta|_{\max} = \frac{k\zeta |I_0| h}{4\pi r} |\sin\theta|_{\max} = \frac{k\zeta |I_0| h}{4\pi r} \quad \text{per } \theta = 0$$

13/45



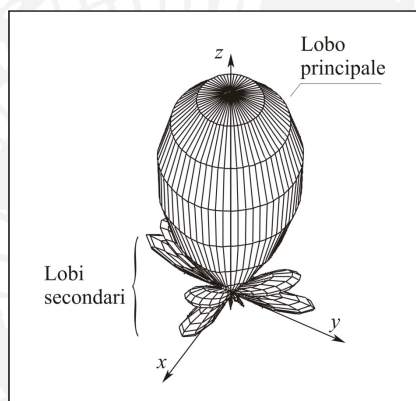
# SOLIDO DI RADIAZIONE

## Lezione VIII

### Parametri fondamentali delle antenne

#### Solido di radiazione

segmento proporzionale al modulo del campo elettrico irradiato,  $|\mathbf{E}|$ , riportato in ogni direzione dello spazio, a partire dall'origine del sistema di coordinate associato all'antenna



14/45



## SOLIDO DI RADIAZIONE - DEC

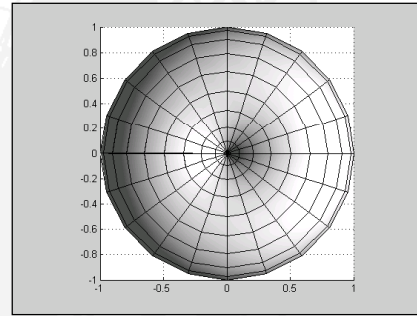
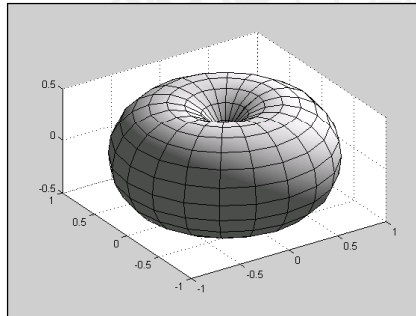
## Lezione VIII

## Parametri fondamentali delle antenne

$$|\mathbf{E}^{(e)}| = |E_{\vartheta}^{(e)}| = k\zeta \frac{|I|\Delta z}{4\pi r} \sin\vartheta$$

$$|\mathbf{E}^{(e)}|_{\max} = |E_{\vartheta}^{(e)}|_{\max} = k\zeta \frac{|I|\Delta z}{4\pi r} \text{ per } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$|\mathbf{E}^{(e)}| / |\mathbf{E}^{(e)}|_{\max} = \sin\vartheta$$



15/45



## SOLIDO DI RADIAZIONE - DMC

## Lezione VIII

## Parametri fondamentali delle antenne

$$|\mathbf{E}^{(m)}| = |E_{\varphi}^{(m)}| = k \frac{|I_m|\Delta z}{4\pi r} \sin\vartheta$$

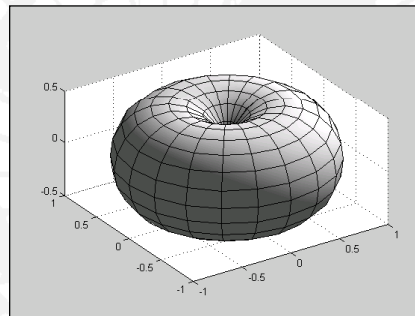
spira equivalente

$$|\mathbf{E}^{(m)}|_{\max} = |E_{\varphi}^{(m)}|_{\max} = k \frac{|I_m|\Delta z}{4\pi r} \text{ per } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$I_m \Delta z = j\omega\mu\Delta s I_s$$

$$\text{con } \Delta s = \pi R^2$$

$$|\mathbf{E}^{(m)}| / |\mathbf{E}^{(m)}|_{\max} = \sin\vartheta$$



16/45





# SOLIDO DI RADIAZIONE - SORGENTE DI HUYGENS

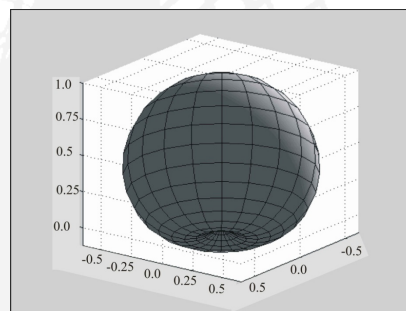
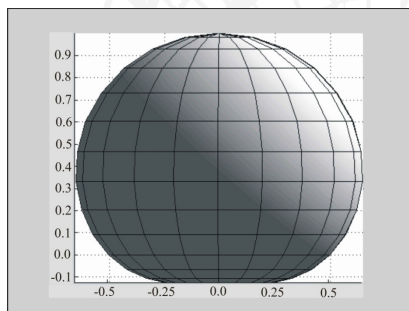
## Lezione VIII

### Parametri fondamentali delle antenne

$$|\mathbf{E}^{(H)}(\mathbf{r})| = |\mathbf{E}_\theta^{(H)} \hat{\theta} + \mathbf{E}_\phi^{(H)} \hat{\phi}| = \sqrt{|\mathbf{E}_\theta^{(H)}|^2 + |\mathbf{E}_\phi^{(H)}|^2} = k \frac{l_m |\Delta I|}{4\pi r} (1 + \cos \vartheta)$$

$$|\mathbf{E}^{(H)}(\mathbf{r})|_{\max} = 2k \frac{l_m |\Delta I|}{4\pi r} \quad \text{per } \vartheta = 0$$

$$\frac{|\mathbf{E}^{(H)}|}{|\mathbf{E}^{(H)}|_{\max}} = \frac{1 + \cos \vartheta}{2}$$



17/45



# DIAGRAMMI DI RADIAZIONE

## Lezione VIII

### Parametri fondamentali delle antenne

#### Diagrammi di radiazione

opportune sezioni piane del solido di radiazione

Le sezioni riportate sono tipicamente relative a due piani fra loro perpendicolari.

I piani utilizzati per effettuare le sezioni sono spesso il piano E, contenente il vettore del campo elettrico e la direzione di massima radiazione, e il piano H, contenente il vettore del campo magnetico e la direzione di massima radiazione.

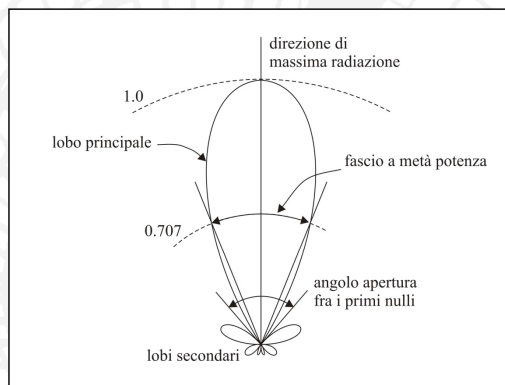
I diagrammi di radiazione possono essere normalizzati rispetto al loro valore massimo ed alternano massimi a minimi, presentando quelli che sono noti come lobi di radiazione

18/45


**DIAGRAMMI DI RADIAZIONE**
**Lezione VIII**
**Parametri fondamentali delle antenne**

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
 Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
 Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Diagramma di radiazione in coordinate polari

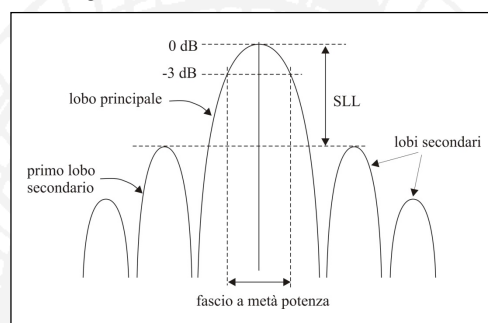


19/45


**DIAGRAMMI DI RADIAZIONE**
**Lezione VIII**
**Parametri fondamentali delle antenne**


Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
 Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
 Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Diagramma di radiazione in coordinate cartesiane



$$20 \log_{10} \frac{|E(r)|}{|E|_{\max}}$$

20/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

**Lezione VIII**  
**Parametri fondamentali delle antenne**

---

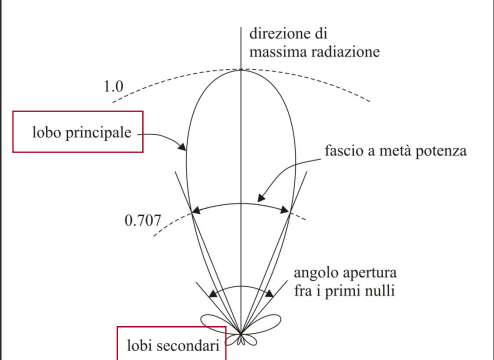
Parametri principali che caratterizzano i diagrammi di radiazione

**Lobo principale**


**Lobi secondari**

lobo che contiene la direzione di massima radiazione

sono i lobi che si sviluppano in direzione diversa da quella di massima radiazione



21/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

**Lezione VIII**  
**Parametri fondamentali delle antenne**

---

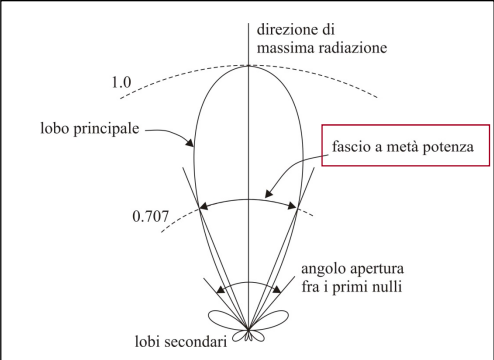
Parametri principali che caratterizzano i diagrammi di radiazione

**Angolo di apertura a metà potenza, o fascio a metà potenza**  
*Half Power Beamwidth, HPBW*

angolo fra le due direzioni in cui il modulo del campo elettrico è :

$$|E(r)| = |E|_{\max} / \sqrt{2}$$

Tale angolo fornisce in pratica una misura di quanto l'energia irradiata sia concentrata intorno alla direzione di massima radiazione



22/45



# DIAGRAMMI DI RADIAZIONE

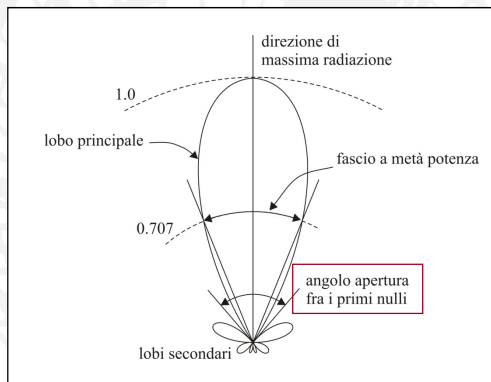
## Lezione VIII

### Parametri fondamentali delle antenne

Parametri principali che caratterizzano i diagrammi di radiazione

#### First Nulls Beamwidth, FNBW

angolo di apertura del lobo principale fra i primi due nulli del diagramma di radiazione



23/45



# DIAGRAMMI DI RADIAZIONE

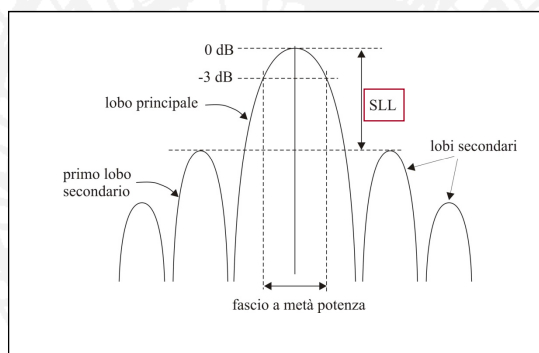
## Lezione VIII

### Parametri fondamentali delle antenne

Parametri principali che caratterizzano i diagrammi di radiazione

#### Side Lobe Level, SLL

rapporto fra l'ampiezza massima presentata dal diagramma di radiazione nel primo lobo secondario e l'ampiezza del lobo principale



24/45



# DIAGRAMMI DI RADIAZIONE - DEC

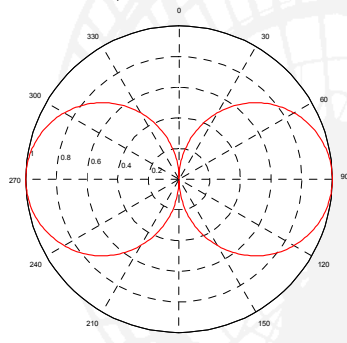
## Lezione VIII

### Parametri fondamentali delle antenne

$$|E^{(e)}| = |E_{\theta}^{(e)}| = k_c \frac{I \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta$$

$$\frac{|E^{(e)}|}{|E^{(e)}|_{\max}} = \sin \vartheta$$

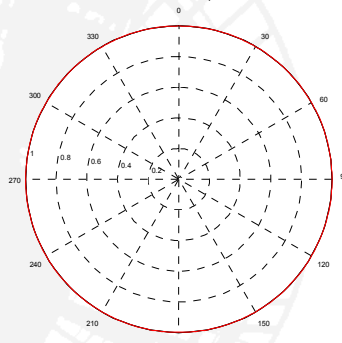
piano verticale  
 $\varphi = 0 \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi$



$$\sin \vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \vartheta = \pi/4$$

$$HPBW = \frac{\pi}{2}$$

piano orizzontale  
 $\vartheta = \pi/2 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$



25/45



# DIAGRAMMI DI RADIAZIONE - DMC E SPIRA

## Lezione VIII

### Parametri fondamentali delle antenne

Per il DMC e la spira di corrente valgono gli stessi risultati per quanto riguarda i diagrammi di radiazione, ma cambia la polarizzazione del campo

26/45



# DIAGRAMMI DI RADIAZIONE - ANTENNA FILARE A MEZZ'ONDA

## Lezione VIII

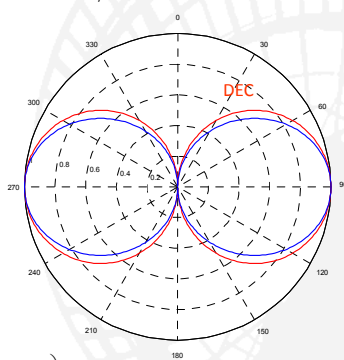
### Parametri fondamentali delle antenne

$$|\mathbf{E}^{(\lambda/2)}| = |\mathbf{E}_\theta^{(\lambda/2)}| = \frac{\zeta |I_0|}{2\pi r} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \right|$$

$$|\mathbf{E}^{(\lambda/2)}| / |\mathbf{E}^{(\lambda/2)}|_{\max} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}$$

piano verticale

$$\varphi = 0 \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

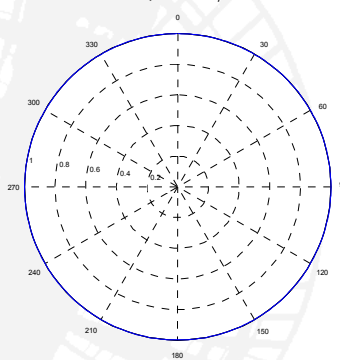


$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \vartheta \approx 0.68 \text{ rad}$$

$$\text{HPBW} \approx 1.36 \text{ rad}$$

piano orizzontale

$$\vartheta = \pi/2 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



27/45



# DIAGRAMMI DI RADIAZIONE - SORGENTE DI HUYGENS

## Lezione VIII

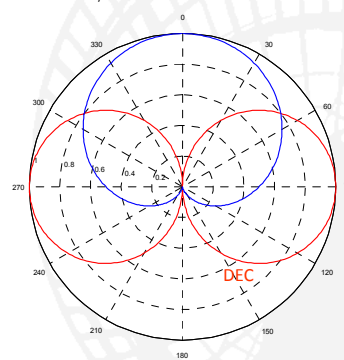
### Parametri fondamentali delle antenne

$$|\mathbf{E}^{(H)}(\mathbf{r})| = |\mathbf{E}_\vartheta^{(H)} \hat{\vartheta} + \mathbf{E}_\varphi^{(H)} \hat{\varphi}| = \sqrt{|\mathbf{E}_\vartheta^{(H)}|^2 + |\mathbf{E}_\varphi^{(H)}|^2} = k \frac{|I_m| \Delta l}{4\pi r} (1 + \cos \vartheta)$$

$$|\mathbf{E}^{(H)}| / |\mathbf{E}^{(H)}|_{\max} = \frac{1 + \cos \vartheta}{2}$$

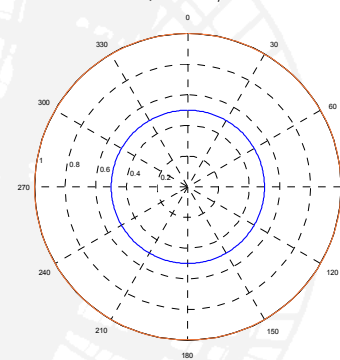
piano verticale

$$\varphi = 0 \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi$$



piano orizzontale

$$\vartheta = \pi/2 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



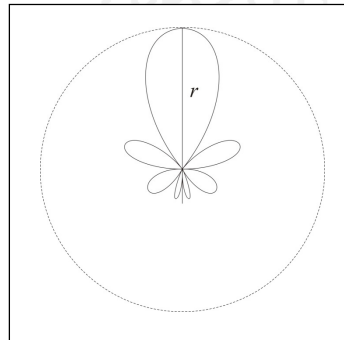
28/45



## DIRETTIVITÀ

### Lezione VIII Parametri fondamentali delle antenne

potenza radiata da un'antenna isotropa per  
creare un campo di modulo  $|\mathbf{E}|$  in un punto  $\mathbf{P}(r, \vartheta, \varphi)$   
potenza necessaria all'antenna presa in considerazione  
per ottenere il campo  $|\mathbf{E}|$  nel punto  $\mathbf{P}(r, \vartheta, \varphi)$



$$D(\vartheta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{\zeta}}{P_r}$$

$P_r \rightarrow$  potenza radiata dall'antenna

29/45



## DIRETTIVITÀ - DIPOLO ELETTRICO CORTO (DEC)

### Lezione VIII Parametri fondamentali delle antenne


Potenza radiata

$$\mathbf{E}^{(e)} = E_{\vartheta}^{(e)} \hat{\vartheta} = jk\zeta \frac{l\Delta z}{4\pi r} \sin\vartheta e^{-jkr} \hat{\vartheta} \quad |\mathbf{E}^{(e)}| = |E_{\vartheta}^{(e)}| = \left| jk\zeta \frac{l\Delta z}{4\pi r} \sin\vartheta e^{-jkr} \right| = k\zeta \frac{|l|\Delta z}{4\pi r} \sin\vartheta$$

$$P_r^{(e)} = \Re \left\{ \iint_S \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(e)} \times \mathbf{H}^{(e)*}) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \right\} = \iint_S \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}^{(e)}|^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\zeta} k^2 \zeta^2 \frac{|l|^2 \Delta z^2}{(4\pi)^2 r^2} \sin^2\vartheta r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} k^2 \zeta \frac{|l|^2 \Delta z^2}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2} k^2 \zeta \frac{|l|^2 \Delta z^2}{(4\pi)^2} 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta$$

30/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

DIRETTIVITÀ - DIPOLO ELETTRICO CORTO (DEC)

Parametri fondamentali delle antenne

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = -\int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta) d(\cos \vartheta) = \int_{-1}^{+1} (1 - u^2) du = \left( u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{+1} = 1 - \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$


$$p_r^{(e)} = \frac{1}{2} k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{(4\pi)^2} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{(4\pi)^2} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{1}{3} k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{4\pi}$$

$$p_r^{(e)} = \frac{1}{3} k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{4\pi}$$

$$p_r^{(e)} = \frac{1}{3} k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{4\pi} = \frac{1}{2} R_r^{(e)} |I|^2 \Rightarrow R_r^{(e)} = \frac{2}{3} k^2 \zeta \frac{\Delta z^2}{4\pi}$$

resistenza di radiazione

31/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

DIRETTIVITÀ - DIPOLO ELETTRICO CORTO (DEC)

Parametri fondamentali delle antenne

Direttività

$$D^{(e)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2} \frac{|E^{(e)}|^2}{\zeta}}{p_r^{(e)}} = \frac{4\pi \frac{1}{2} k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{(4\pi)^2} \sin^2 \vartheta}{\frac{1}{3} k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{4\pi}} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta$$


$$D^{(e)} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \Rightarrow D_{\max}^{(e)} = \frac{3}{2}$$

direttività massima

$$D_{\max}^{(e)} (dB) = 10 \log_{10} \left( \frac{3}{2} \right) = 1.76 \text{ dB}$$

32/45





Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

**DIRETTIVITÀ - DIPOLO MAGNETICO CORTO (DMC)**

Lezione VIII  
Parametri fondamentali delle antenne

Si utilizza il principio di dualità di Babinet

Potenza radiata

$$P_r^{(e)} = \frac{1}{3} k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{4\pi} = \frac{1}{2} R_r^{(e)} |I|^2$$

→

$$P_r^{(m)} = \frac{1}{3} \frac{k^2 |I_m|^2 \Delta z^2}{\zeta 4\pi}$$

Resistenza di radiazione

$$R_r^{(e)} = \frac{2}{3} k^2 \zeta \frac{\Delta z^2}{4\pi}$$

→

$$R_r^{(m)} = \frac{2}{3} \frac{k^2 \Delta z^2}{\zeta 4\pi}$$


Direttività

$$D^{(e)} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \quad D_{\max}^{(e)} = \frac{3}{2}$$

→

$$D^{(m)} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \quad D_{\max}^{(m)} = \frac{3}{2} = 1.76 \text{ dB}$$

33/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

**DIRETTIVITÀ - ANTENNA A LOOP (A SPIRA O A TELAIO)**

Lezione VIII  
Parametri fondamentali delle antenne

dmc equivalente:  $I_m \Delta z = j\omega\mu\Delta s I_s$ , con  $\Delta s = \pi R^2$

Potenza radiata

$$P_r^{(m)} = \frac{1}{3} \frac{k^2 |I_m|^2 \Delta z^2}{\zeta 4\pi}$$

→

$$P_r^{(s)} = \frac{1}{3} \frac{k^2 \omega^2 \mu^2 |I_s|^2 \Delta s^2}{\zeta 4\pi}$$

Resistenza di radiazione

$$R_r^{(m)} = \frac{2}{3} \frac{k^2 \Delta z^2}{\zeta 4\pi}$$

→

$$R_r^{(s)} = \frac{2}{3} \frac{k^2 \omega^2 \mu^2 \Delta s^2}{\zeta 4\pi}$$


Direttività

$$D^{(m)} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \quad D_{\max}^{(m)} = \frac{3}{2}$$

→

$$D^{(s)} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \quad D_{\max}^{(s)} = \frac{3}{2} = 1.76 \text{ dB}$$

34/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

Parametri fondamentali delle antenne

---

**DIRETTIVITÀ - SORGENTE DI HUYGENS**

$$\mathbf{E}^{(H)}(\mathbf{r}) = jk \frac{l_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \vartheta) (\sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \varphi \hat{\phi})$$

$$|\mathbf{E}^{(H)}| = \sqrt{|E_{\vartheta}^{(H)}|^2 + |E_{\phi}^{(H)}|^2} = k \frac{l_m \Delta l}{4\pi r} (1 + \cos \vartheta)$$

$$P_r^{(H)} = \Re \left\{ \iint_S \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(H)} \times \mathbf{H}^{(H)*}) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \right\} = \iint_S \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}^{(H)}|^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2\zeta} k^2 \frac{l_m^2 \Delta l^2}{(4\pi)^2 r^2} (1 + \cos \vartheta)^2 r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\zeta} k^2 \frac{l_m^2 \Delta l^2}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos \vartheta)^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2\zeta} k^2 \frac{l_m^2 \Delta l^2}{(4\pi)^2} 2\pi \int_0^\pi (1 + \cos \vartheta)^2 \sin \vartheta d\vartheta =$$


$$= \frac{1}{2\zeta} k^2 \frac{l_m^2 \Delta l^2}{(4\pi)^2} 2\pi \frac{8}{3} = \frac{1}{6} \frac{k^2 l_m^2 \Delta l^2}{\zeta \pi}$$

$P_r^{(H)} = \frac{1}{6} \frac{k^2 l_m^2 \Delta l^2}{\zeta \pi}$

$$P_r^{(H)} = \frac{1}{6} \frac{k^2 l_m^2 \Delta l^2}{\zeta \pi} = \frac{1}{2} R_r^{(H)} |I_m|^2 \quad \Rightarrow \quad R_r^{(H)} = \frac{1}{3} \frac{k^2 \Delta l^2}{\zeta \pi}$$

resistenza di radiazione

35/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

Parametri fondamentali delle antenne

---

**DIRETTIVITÀ - SORGENTE DI HUYGENS**

$$|\mathbf{E}^{(H)}| = k \frac{l_m \Delta l}{4\pi r} (1 + \cos \vartheta) \quad \quad P_r^{(H)} = \frac{1}{6} \frac{k^2 l_m^2 \Delta l^2}{\zeta \pi}$$

Direttività

$$D^{(H)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2 |\mathbf{E}^{(H)}|^2}{P_r^{(H)}} = \frac{4\pi r^2 k^2 \frac{l_m^2 \Delta l^2}{(4\pi r)^2} (1 + \cos \vartheta)^2}{\frac{1}{6} \frac{k^2 l_m^2 \Delta l^2}{\zeta \pi}} = \frac{3}{4} (1 + \cos \vartheta)^2$$

$$D^{(H)} = \frac{3}{4} (1 + \cos \vartheta)^2 \quad \Rightarrow \quad D_{\max}^{(H)} = 3 = 4.77 \text{ dB}$$

direttività massima

36/45



## DIRETTIVITÀ - ANTENNA FILARE A MEZZ'ONDA

## Lezione VIII

## Parametri fondamentali delle antenne

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

$$E_{\theta}^{(\lambda/2)} = \frac{j\zeta l_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{-jkr}$$

$$P_r^{(\lambda/2)} = \Re \left\{ \iint_S \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(\lambda/2)} \times \mathbf{H}^{(\lambda/2)*}) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \right\} = \iint_S \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}^{(\lambda/2)}|^2 dS =$$

$$= \frac{1}{2} \zeta \frac{|l_0|^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\zeta |l_0|^2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} d\theta$$

37/45



## DIRETTIVITÀ - ANTENNA FILARE A MEZZ'ONDA

## Lezione VIII

## Parametri fondamentali delle antenne

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze


$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} d\theta = \left[ u = \cos\theta \quad du = -\sin\theta d\theta \right] = - \int_0^1 \frac{\cos^2[(\pi/2)u]}{1-u^2} du =$$

$$= \left[ \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) \right] = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\cos^2[(\pi/2)u]}{1-u} du + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\cos^2[(\pi/2)u]}{1+u} du =$$

$$= [v = 1-u, w = 1+u] = \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{-\sin^2[(\pi/2)v]}{v} dv + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\sin^2[(\pi/2)w]}{w} dw =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin^2[(\pi/2)v]}{v} dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi v)}{2v} dv = [t = \pi v] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2t} dt$$

38/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

DIRETTIVITÀ - ANTENNA FILARE A MEZZ'ONDA

Parametri fondamentali delle antenne

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2t} dt = \text{Cin}(2\pi)$$

$$\text{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{2t} dt = \gamma + \ln(x) - \text{Ci}(x)$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \right) - \ln(n) \right] = 0.5772 \quad (\text{costante di Eulero})$$

$$\text{Ci}(x) = \int_0^x \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)t^2\right] dt \quad (\text{integrale di Fresnel})$$


$$\text{Cin}(2\pi) = 2.44$$

$$P_r^{(\lambda/2)} = \frac{\zeta^2 |I_0|^2}{2\pi} \frac{1}{2} \text{Cin}(2\pi) \approx \frac{120\pi |I_0|^2}{4\pi} \frac{2.44}{2} \approx 73 |I_0|^2$$

$$P_r^{(\lambda/2)} \approx 73 |I_0|^2 = \frac{1}{2} R_r^{(\lambda/2)} |I_0|^2 \Rightarrow R_r^{(\lambda/2)} \approx 73 \Omega$$

resistenza di radiazione

39/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

DIRETTIVITÀ - ANTENNA FILARE A MEZZ'ONDA

Parametri fondamentali delle antenne

$$|E^{(\lambda/2)}| = \frac{\zeta |I_0|}{2\pi r} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \right|$$

Direttività

$$P_r^{(\lambda/2)} = \frac{1}{2} R_r^{(\lambda/2)} |I_0|^2 \approx \frac{1}{2} 73 |I_0|^2$$


$$D^{(\lambda/2)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{4\pi r^2}{2\zeta} |E^{(\lambda/2)}|^2}{P_r^{(\lambda/2)}} = \frac{\frac{4\pi r^2 \zeta^2 |I_0|^2}{2\zeta (2\pi r)^2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \right|^2}{\frac{1}{2} R_r^{(\lambda/2)} |I_0|^2} \approx \frac{\frac{\zeta}{\pi} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \right|^2}{73}$$

$$D_{\max}^{(\lambda/2)} \approx \frac{120\pi}{73\pi} \approx 1.64$$

direttività massima

$$D_{\max}^{(\lambda/2)} (\text{dB}) \approx 10 \log_{10}(1.64) \approx 2.15 \text{ dB}$$

40/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

Parametri fondamentali delle antenne

---

**GUADAGNO**

Se nella definizione di direttività  $D$  si sostituisce a  $P_r$  (potenza radiata),  $P_{in}$  (potenza fornita) si parla di guadagno.

Per un'antenna reale il guadagno in una direzione generica è minore della direttività, poiché una porzione della potenza fornita in ingresso viene persa (assorbita dall'antenna o dalle strutture che si trovano nelle sue immediate vicinanze) non compare come potenza radiata.

Antenna priva di perdite

Antenna con perdite

⇒

⇒

$G = D$


$G < D$

Spesso nella pratica si intende come guadagno (o direttività) di un'antenna il valore  $G_M$  (o  $D_M$ ) che la funzione  $G$  (o  $D$ ) assume nella direzione di massima radiazione.

Sia la direttività che il guadagno sono a volte espresse in dB (decibel)

$G_{dB} = 10 \log_{10} G$ 
 $D_{dB} = 10 \log_{10} D$

41/45



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Lezione VIII

Parametri fondamentali delle antenne

---

**RENDIMENTO O EFFICIENZA DI RADIAZIONE**

$$\eta = e = \frac{G}{D}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{\zeta}}{P_r}$$

$$P_r = \Re \left\{ \iint_S \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \right\} = \iint_S \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}|^2 dS = \frac{1}{2} |I_0|^2 R_r$$

$$G(\vartheta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{\zeta}}{P_{in}}$$

42/45



## RENDIMENTO O EFFICIENZA DI RADIAZIONE

### Lezione VIII

#### Parametri fondamentali delle antenne

$$\eta = e = \frac{G}{D} = \frac{P_r}{P_m} = \frac{P_r}{P_r + P_p}$$

$$P_m = \frac{1}{2} |I_0|^2 R_m = P_r + P_p = \frac{1}{2} |I_0|^2 (R_r + R_p)$$

$$\eta = e = \frac{G}{D} = \frac{P_r}{P_m} = \frac{P_r}{P_r + P_p} = \frac{R_r}{R_r + R_p}$$

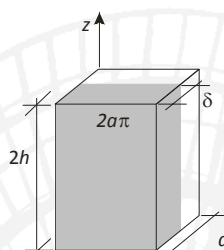
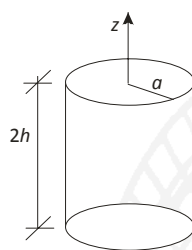
43/45



## RESISTENZA DI PERDITA

### Lezione VIII

#### Parametri fondamentali delle antenne



$$P_p = \frac{1}{2} |I_0|^2 R_p$$

$$P_p = \frac{R_s}{2\pi a} \int_{-h}^{+h} \frac{1}{2} |I(z)|^2 dz$$

$$R_p = \frac{R_s}{2\pi a} \int_{-h}^{+h} \frac{|I(z)|^2}{|I_0|^2} dz$$

$$(\text{resistenza elettrica per unità di lunghezza del filo conduttore}) = \frac{1}{\sigma \Delta S} = \frac{1}{\sigma (2\pi a \delta)}$$

$$\delta = (\text{profondità di penetrazione}) = \sqrt{\frac{2}{\sigma \omega \mu}}$$

$$\frac{1}{\sigma (2\pi a \delta)} = \frac{1}{\sigma 2\pi a} \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \frac{R_s}{2\pi a}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad (\text{resistenza superficiale})$$

44/45



Distribuzione di corrente triangolare  $I(z) = I_0 \left[ 1 - \frac{|z|}{h} \right]$

$$R_p = \frac{R_s}{2\pi a} \int_{-h}^{+h} \frac{|I(z)|^2}{|I_0|^2} dz = \frac{R_s}{2\pi a} 2 \int_0^h \frac{|I(z)|^2}{|I_0|^2} dz = \frac{R_s}{2\pi a} 2 \int_0^h \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^2 dz = \frac{R_s}{2\pi a} 2 \int_0^h \left( 1 - 2\frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) dz =$$

$$= \frac{R_s}{2\pi a} 2 \left[ h - \frac{2}{h} \frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2} \frac{h^3}{3} \right] = \frac{R_s}{2\pi a} \frac{2}{3} h$$

$$P_r = \frac{1}{3} k^2 \frac{\zeta |I_0|^2}{4\pi} h^2 = \frac{1}{2} R_r |I_0|^2 \rightarrow R_r = \frac{1}{3} k^2 \frac{\zeta h^2}{2\pi} \approx 20\pi^2 \left( \frac{2h}{\lambda} \right)^2$$

$$f = 1\text{MHz} \lambda = \frac{c}{f} = 300\text{m}$$

$$2h = 2\text{m}$$

$$R_r \approx 20\pi^2 \left( \frac{1}{300} \right)^2 \approx 0.0022\Omega$$

$$R_p \approx 0.0344\Omega$$



$$\eta = e = \frac{G}{R_r + R_p} = \frac{R_r}{R_r + R_p} = \frac{0.0022}{0.0022 + 0.0344} = 6.01\% \quad \text{E' una stufa!!!}$$