LEZIONE III
DIPOLO ELETTRICO CORTO
SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI HELMHOLTZ

Corso di
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
e-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
web: *http://www.cem.unifi.it/*

POTENZIALE VETTORE DI TIPO ELETTRICO

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

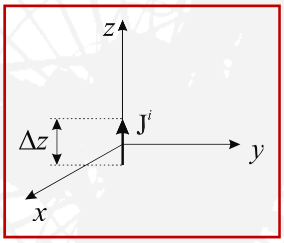
$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}^i$$

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$$

DISTRIBUZIONE DI CORRENTE ELEMENTARE (DIPOLO ELEMENTARE)

$$\mathbf{J}^i = I(z)\delta(x)\delta(y)\hat{z} \qquad \text{con} \qquad I(z) = \begin{cases} I & z \in \left[-\frac{\Delta z}{2}, \frac{\Delta z}{2}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\Delta z << \lambda$$



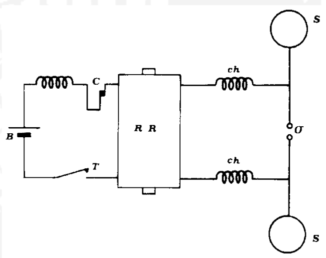
TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

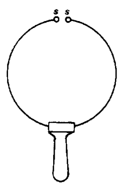
Lezione III
Dipolo elettrico corto
Soluzione dell'equazione di Helmholtz

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

DIPOLO ELEMENTARE DI HERTZ

Heinrich Hertz (1857 - 1894)





Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

POTENZIALE VETTORE IN PRESENZA DI UNA DISTRIBUZIONE DI CORRENTE ELEMENTARE - 1/3

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}^i$$

$$\mathbf{J}^i = I(z)\delta(x)\delta(y)\hat{z}$$

$$\Rightarrow$$

$$\nabla^2 A_x + k^2 A_x = 0$$
$$\nabla^2 A_y + k^2 A_y = 0$$
$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I(z)\delta(x)\delta(y)$$

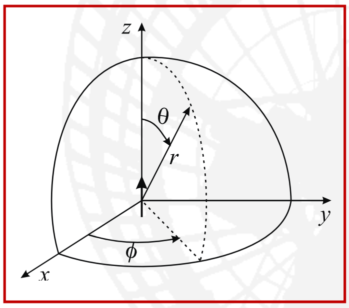
TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA
Lezione III
Dipolo elettrico corto
Soluzione dell'equazione di Helmholtz

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

POTENZIALE VETTORE IN PRESENZA DI UNA DISTRIBUZIONE DI CORRENTE ELEMENTARE - 2/3

Soluzione per le componenti *x* e *y* $\quad A_x = A_y = 0$

Soluzione per la componente *z* $\quad$ per $r \neq 0 \Rightarrow \nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0$



La simmetria sferica del problema impone

$$A_z = A_z(r)$$

POTENZIALE VETTORE IN PRESENZA DI UNA DISTRIBUZIONE DI CORRENTE ELEMENTARE - 3/3

Esplicitiamo l'equazione omogenea in coordinate sferiche per $r \neq 0$

$$\nabla^2 A_z(r) + k^2 A_z(r) = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial A_z(r)}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_z(r)}{\partial \phi^2} + k^2 A_z(r) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\right) + k^2 A_z(r) = 0}$$

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA
Lezione III
Dipolo elettrico corto
Soluzione dell'equazione di Helmholtz

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ - 1/8

La soluzione delle equazione vettoriale di Helmholtz è soggetta alle condizioni di radiazione all'infinito che per considerazioni energetiche richiede, per un mezzo illimitato, omogeneo e isotropo che a grande distanza dalle sorgenti i campi diminuiscano di intensità almeno come $1/r$ ossia, esplicitando tale dipendenza per il potenziale vettore si può scrivere:

$$A_z(r) = \frac{f(r)}{r}$$

Inoltre si ha che localmente e a grande distanza dalle sorgenti, il campo irradiato non differisce sostanzialmente da quello di un'onda piana propagatesi nella direzione e nel verso di **r** ossia:

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \zeta\, \mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \hat{r}\right] = 0$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ - 2/8

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\right)+k^2A_z(r)=0\\ A_z(r)=\frac{f(r)}{r}\end{aligned}\right\} \qquad \frac{d^2f(r)}{dr^2}+k^2f(r)=0$$

$$f=C\exp(-jkr)+F\exp(jkr)$$

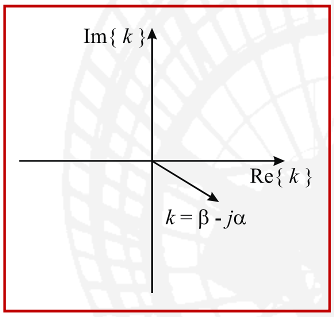
$$A_z(r)=\frac{C}{r}e^{-jkr}+\frac{F}{r}e^{+jkr}$$

C e *F* sono costanti da determinare con le condizioni al contorno e/o iniziali

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ - 3/8

Tutti i mezzi reali in cui un onda elettromagnetica si propaga introducono una attenuazione dovuta alle perdite e/o dispersività del mezzo stesso



$$k=\beta-j\alpha$$

$\beta \rightarrow$ costante di fase
$\alpha \rightarrow$ costante di attenuazione

$$\mathrm{Re}\{k\}=\beta>0$$
$$\mathrm{Im}\{k\}=-\alpha<0$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ - 4/8

$$A_z(r) = \frac{C}{r} e^{-j\beta r} e^{-\alpha r} + \frac{F}{r} e^{j\beta r} e^{\alpha r}$$

Per le condizioni di radiazione all'infinito si ha

$$F = 0$$

$$A_z = \frac{C}{r} e^{-jkr}$$

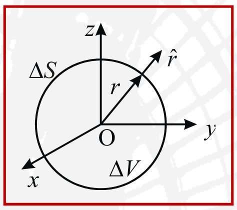
Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ - 5/8

La condizioni all'origine non è direttamente applicabile sotto forma di limite, in quanto l'espressione del potenziale vettore non è determinata per $r = 0$

$$A_z = \frac{C}{r} e^{-jkr}$$

Si considera un volume sferico ΔV limitato dalla superficie ΔS e centrato nell'origine



$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I(z)\delta(x)\delta(y)$$

$$\iiint_{\Delta V} \nabla^2 A_z(r)\,dv + k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r)\,dv = -\iiint_{\Delta V} \mu I(z)\delta(x)\delta(y)\,dv$$

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ - 6/8

Analizziamo l'espressione integrale in un sistema di riferimento sferico

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi$$
$$ds = r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi$$

$$\underbrace{\iiint_{\Delta V} \nabla^2 A_z(r) dv}_{*} + \underbrace{k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r) dv}_{**} = -\mu I \Delta z$$

$$**) \quad \iiint_{\Delta V} \nabla^2 A_z \, dv = \iiint_{\Delta V} \nabla \cdot (\nabla A_z(r)) dv = \oiint_{\Delta S} \nabla A_z(r) \cdot \hat{r} \, ds$$

$$**) \quad k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r) dv = k^2 \iiint_{\Delta V} \left(\frac{C}{r} e^{-jkr} \right) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Applicando il limite per $r \rightarrow 0$ l'espressione **) diviene identicamente nulla

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ - 7/8

$$*) \quad \iiint_{\Delta V} \nabla^2 A_z \, dv = \oiint_{\Delta S} \nabla A_z(r) \cdot \hat{r} \, ds$$

$$A_z = \frac{C}{r} e^{-jkr} \qquad\qquad ds = r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi$$

Esplicitiamo il gradiente in coordinate sferiche

$$\nabla A_z(r) = \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z(r)}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_z(r)}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla A_z(r) \cdot \hat{r} dS = \left[\frac{dA_z(r)}{dr} \hat{r} \right] \cdot \hat{r} \, ds = \left(C \frac{-jk \, e^{-jkr} r - e^{-jkr}}{r^2} \right) r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ - 8/8

$$*)\quad \oiint_{\Delta S} \nabla A_z(r)\cdot\hat{r}\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} C\left(-jkr\,e^{-jkr} - e^{-jkr}\right)\sin\theta\, d\phi$$

Applichiamo il limite per $r \to 0$

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} C\left(-jk\,e^{-jkr}r - e^{-jkr}\right)\sin\theta\, d\theta d\phi = -4\pi C$$

Ricordando che:

$$\underbrace{\iiint_{\Delta V}\nabla^2 A_z(r)dv}_{*} + \underbrace{k^2\iiint_{\Delta V} A_z(r)dv}_{=0} = -\mu I\Delta z$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C = \frac{\mu I \Delta z}{4\pi}}$$

Ricordando inoltre che:

$$\boxed{A_z = \frac{C}{r}e^{-jkr}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_z(r)\hat{z} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\Delta z}{r}e^{-jkr}\,\hat{z}}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ PER IL DIPOLO ELEMENTARE

Il potenziale vettore associato al dipolo elementare è dunque

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_z(r)\hat{z} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\Delta z}{r}e^{-jkr}\,\hat{z}$$

Dal potenziale ai campi elettromagnetici

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}\\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}\end{gathered}}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Potenziale di Hertz di tipo elettrico

$$\mathbf{A} = j\omega\varepsilon\mu\Pi^e$$

$$\begin{cases} H = \dfrac{1}{\mu}\nabla \times A \\ E = -j\omega A + \dfrac{\nabla\nabla \cdot A}{j\omega\varepsilon\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = j\omega\varepsilon\nabla \times \Pi^e \\ E = k^2\Pi^e + \nabla\left(\nabla \cdot \Pi^e\right) \end{cases}$$