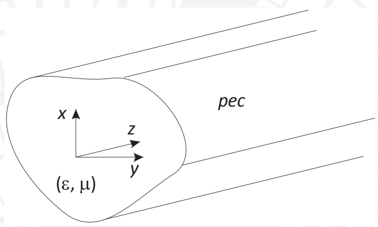
LEZIONE XVII
POTENZA NELLE STRUTTURE GUIDANTI

Corso di
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: *http://www.cem.unifi.it/*

EQUAZIONE DELLE ONDE NELLE STRUTTURE CILINDRICHE

Struttura cilindrica (nella direzione dell'asse *z*) con pareti *pec* riempita di dielettrico isotropo



Ipotesi di lavoro per il campo elettromagnetico nel dielettrico all'interno della struttura

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,y)e^{-jk_z z} = \left[\mathbf{E}_t(x,y) + E_z(x,y)\hat{z}\right]e^{-jk_z z}$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x,y)e^{-jk_z z} = \left[\mathbf{H}_t(x,y) + H_z(x,y)\hat{z}\right]e^{-jk_z z}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Le componenti longitudinali E_z e d H_z soddisfano l'equazioni delle onde o di Helmholtz (equazioni agli autovalori)

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 - k_z^2)E_z = 0$$
$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 - k_z^2)H_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - k_z^2$$

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Coordinate cartesiane

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Coordinate cilindriche

Costante di propagazione caratteristica del dielettrico $\quad k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

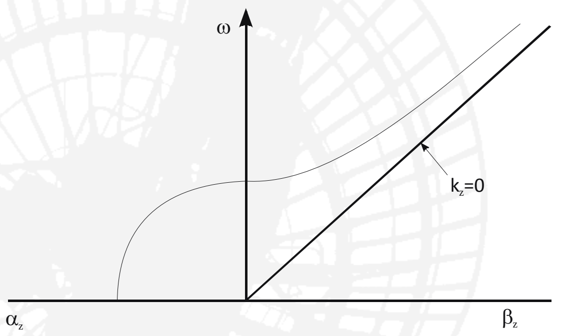
Costante di propagazione

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \omega_c\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi f_c\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$\underline{k > k_c}$
$(\omega > \omega_c;\, f > f_c;\, \lambda < \lambda_c)$
$k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \beta_z$

$\underline{k < k_c}$
$(\omega < \omega_c;\, f < f_c;\, \lambda > \lambda_c)$
$k_z = -j\sqrt{k_c^2 - k^2} = -j\alpha_z$

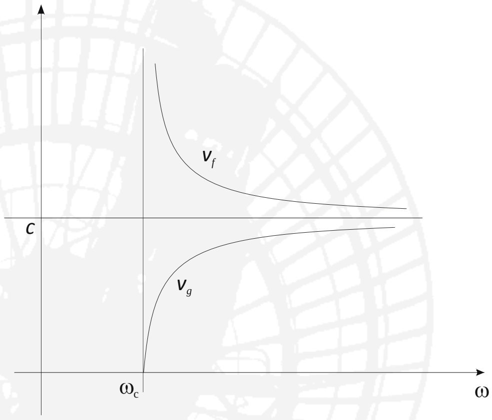


Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Velocità di fase e di gruppo

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \qquad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = c\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad \Rightarrow \quad v_f v_g = c^2$$

Mezzo dispersivo di tipo “normale”



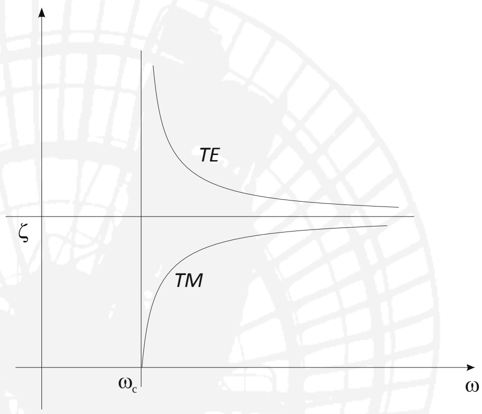
Lezione XVII
Potenza nelle strutture guidanti
EQUAZIONE DELLE ONDE NELLE STRUTTURE CILINDRICHE

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Impedenza d’onda

$$z_{TM} = \zeta\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \qquad z_{TE} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \quad \Rightarrow \quad Z_{TE} Z_{TM} = \zeta^2$$

$$\zeta \approx 120\pi\ \Omega$$



Dispersività

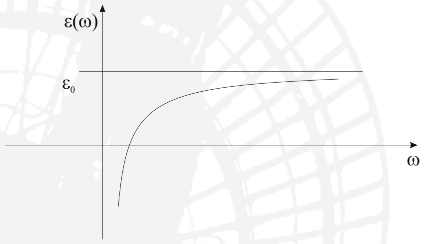
La guida d'onda è (come il plasma) un mezzo dispersivo nel tempo di tipo "normale"

$$\mathbf{d}(t) = \int_{-\infty}^{t} g_e(t-\tau)\mathbf{e}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}$$



$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad \Rightarrow \quad v_f v_g = c^2$$

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Mezzo dispersivo di tipo "normale"

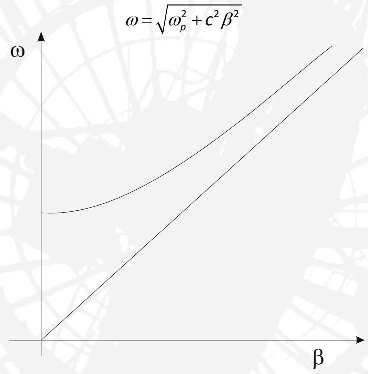
Lezione XVII
Potenza nelle strutture guidanti
EQUAZIONE DELLE ONDE NELLE STRUTTURE CILINDRICHE
Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Dispersività: diagramma di Brillouin

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon(\omega)} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

$$c^2\beta^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2\beta^2}$$



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Il campo all'interno della struttura guidante è esprimibile mediante sovrapposizione di:

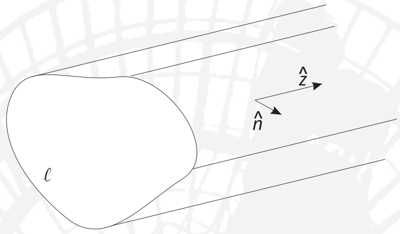
- modi TM (o modi E) (H_z=0)
- modi TE (o modi H) (E_z=0)
- poiché la struttura è semplicemente connessa non si propagano i modi TEM (E_z=H_z=0)

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Le componenti trasversali $\mathbf{E}_t$ ed $\mathbf{H}_t$ del campo elettromagnetico si ricavano dalle componenti longitudinali E_z (nel caso TM) o H_z (nel caso TE)

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Condizioni al contorno nelle guide d'onda con pareti perfettamente conduttrici



Modi TM o E (H_z=0)
(condizione di Dirichlet o condizione di tipo *soft*)

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 - k_z^2) E_z = 0$$

$$\mathbf{E}_z = 0 \quad \text{su } \ell$$

Modi TE o H (E_z=0)
(condizione di Neumann o condizione di tipo *hard*)

$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 - k_z^2) H_z = 0$$

$$\mathrm{E}_{\tan} = 0 \quad \text{su } \ell$$

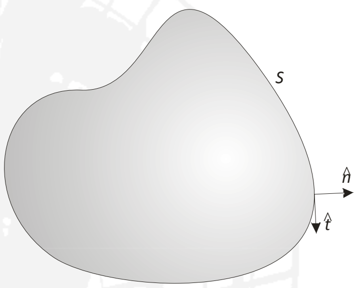
$$\nabla_t H_z \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{su } \ell$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \ell$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Una precisazione per la condizione al contorno di Neumann (caso *hard*) per i modi TE

$$\mathbf{E} \times \hat{n} = 0$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t \propto \hat{z} \times \nabla_t H_z$$
$$(\hat{z} \times \nabla_t H_z) \times \hat{n} = 0 \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
$$\hat{n} \times (\hat{z} \times \nabla_t H_z) = 0 \qquad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$
$$\hat{z}(\hat{n} \cdot \nabla_t H_z) - \nabla_t H_z (\hat{n} \cdot \hat{z}) = 0$$



$$\boxed{\nabla_t H_z \cdot \hat{n} = 0}$$

Modi TM (o modi E)

$H_z = 0$

$$\mathbf{E}_t = -\frac{jk_z}{k^2 - k_z^2}\nabla_t E_z$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{j\omega\varepsilon}{k^2 - k_z^2}\hat{z}\times\nabla_t E_z$$

$$\mathbf{H}_t = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{k}{k_z}\hat{z}\times E_t = \frac{\hat{z}\times E_t}{Z_{TM}}$$

$Z_{TM} = \zeta\frac{k_z}{k} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}$ Impedenza di modo dei modi TM

Modi TE (o modi H)

$E_z = 0$

$$\mathbf{E}_t = \frac{j\omega\mu}{k^2 - k_z^2}\hat{z}\times\nabla_t H_z$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{jk_z}{k^2 - k_z^2}\nabla_t H_z$$

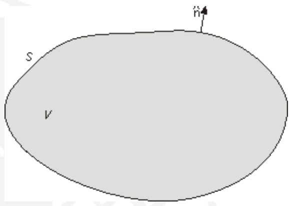
$$\mathbf{H}_t = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{k_z}{k}\hat{z}\times E_t = \frac{\hat{z}\times E_t}{Z_{TE}}$$

$Z_{TE} = \zeta\frac{k}{k_z} = \frac{\omega\mu}{k_z}$ Impedenza di modo dei modi TE

UNA PREMESSA MATEMATICA: IDENTITÀ DI GREEN

Partiamo dal teorema di Gauss in forma integrale

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{a}\,dv = \iint_S \mathbf{a}\cdot\hat{n}ds$$



E poniamo $\mathbf{a} = \phi\nabla\Psi$ per cui si ha:

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \nabla\cdot(\phi\nabla\Psi) = \phi\nabla^2\Psi + \nabla\phi\cdot\nabla\Psi$$

Da cui segue la **1° identità di Green**

$$\boxed{\iiint_V \left(\phi\nabla^2\Psi + \nabla\phi\cdot\nabla\Psi\right)dv \;=\; \iint_S (\phi\nabla\Psi)\cdot\hat{n}\,ds}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

UNA PREMESSA MATEMATICA: IDENTITÀ DI GREEN

Poniamo poi $\mathbf{a} = \Psi\nabla\phi$ per cui si ha:

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \nabla\cdot(\Psi\nabla\phi) = \Psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\Psi$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{a}\,dv = \iint_S \mathbf{a}\cdot\hat{n}ds$$

Da cui segue la:

$$\iiint_V \left(\Psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\Psi\right)dv \;=\; \iint_S (\Psi\nabla\phi)\cdot\hat{n}\,ds$$

Sottraendo membro a membro dalla 1° identità di Green si ottiene la **2° identità di Green**

$$\boxed{\iiint_V \left(\phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\phi\right)\,dv \;=\; \iint_S (\phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\phi)\cdot\hat{n}\,ds}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

UNA PREMESSA MATEMATICA: IDENTITÀ DI GREEN

Per le funzioni di due variabili definite su un opportuno dominio piano le due identità di Green assumono la seguente forma:

$$\iint_S \left(\phi\,\nabla_t^2\Psi + \nabla_t\phi\cdot\nabla_t\Psi\right) = \int_{(\ell)} \phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}dl$$

$$\iint_S \left(\phi\,\nabla_t^2\Psi - \Psi\,\nabla_t^2\phi\right)ds = \int_{(\ell)} \left(\phi\frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dl$$

PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI

Consideriamo l'equazione agli autovalori

$$\nabla_t^2\Psi_n + \xi_n^2\Psi_n = 0$$

Con la condizione al contorno di Neumann (o di tipo *hard*)

$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 - k_z^2)H_z = 0 \qquad \frac{\partial\Psi_n}{\partial n} = 0 \quad \text{sul contorno,} \qquad \xi_n^2 = k^2 - k_z^2 = k_{cH}^2$$

o di Dirichlet (di tipo *soft*)

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 - k_z^2)E_z = 0 \qquad \Psi_n = 0 \quad \text{sul contorno,} \qquad \xi_n^2 = k^2 - k_z^2 = k_{cE}^2$$

PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI

Se consideriamo l'equazione agli autovalori e la moltiplichiamo per Ψ^*

$$\Psi^* \nabla_t^2 \Psi + \xi^2 \Psi^* \Psi = 0$$
$$\xi^2 = k^2 - k_z^2$$

ed integriamo sulla superficie S (sezione della struttura guidante)

$$\iint_S \Psi^* \nabla_t^2 \Psi ds = -\xi^2 \iint_S \Psi^* \Psi ds$$

Tenendo conto della I° identità di Green

$$\iiint_V \left(\phi \nabla^2 \Psi + \nabla \phi \cdot \nabla \Psi\right) dv = \iint_S \left(\phi \nabla \Psi\right) \cdot \hat{n}\, ds$$

e ponendo

$$\phi = \psi^*$$

si ottiene:

$$\iint_S \Psi^* \nabla_t^2 \Psi ds = -\iint_S \left(\nabla_t \Psi^* \nabla_t \Psi\right) ds + \int_\ell \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi_n}{\partial n}\right) dl = -\iint_S \left(\nabla_t \Psi^* \nabla_t \Psi\right) ds = -\iint_S \left|\nabla_t \Psi\right|^2 ds$$

PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI

Dove l'integrale di linea si annulla sfruttando le condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann

(si osserva che l'integrale non si annulla nel caso di condizione di impedenza)

Sostituendo le precedente espressione nell'equazione con gli integrali superficiali si ottiene:

$$\xi^2 \iint_S \left|\Psi\right|^2 ds = \iint_S \left|\nabla_t \Psi\right|^2 ds$$

$$\Downarrow$$

$$\xi^2 = \frac{\iint_S \left|\Psi\right|^2 ds}{\iint_S \left|\nabla_t \Psi\right|^2 ds} \geq 0$$

Ovvero, gli autovalori sono reali e positivi.

PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI

a) ξ_n^2 l'autovalore associato all'autofunzione Ψ_n

$$\nabla_t^2 \Psi_n + \xi_n^2 \Psi_n = 0 \qquad \text{(equazione-1)}$$

b) ξ_m^2 l'autovalore associato all'autofunzione Ψ_m

$$\nabla_t^2 \Psi_m^* + \xi_m^2 \Psi_m^* = 0 \qquad \text{(equazione-2)}$$

$$\Psi_m^* \cdot (\text{equazione-1}) - \Psi_n (\text{equazione-2})$$

$$\Psi_m^* \nabla_t^2 \Psi_n - \Psi_n \nabla_t^2 \Psi_m^* = -\xi_n^2 \Psi_m^* \Psi_n + \xi_m^2 \Psi_n \Psi_m^*$$

Lezione XVII
Potenza nelle strutture guidanti

PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Integrando quest'ultima espressione ed applicando la 2° identità di Green al primo membro si ottiene:

$$\iint_S \left(\varphi \nabla_t^2 \Psi - \Psi \nabla_t^2 \varphi \right) ds = \int_{(\ell)} \left(\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dl \qquad \varphi = \psi_m^*$$

$$\left(\xi_m^2 - \xi_n^2 \right) \iint_S \Psi_m^* \Psi_n \, ds = \int_{(\ell)} \left(\Psi_m^* \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} - \Psi_n \frac{\partial \Psi_m^*}{\partial n} \right) dl$$

L'integrale al primo membro è nullo, sia che valgano le condizioni di tipo *hard* o di Neumann (modi TE) che quelle di tipo *soft* o di Dirichlet (modi TM), da cui se $\xi_m^2 \neq \xi_n^2$ si ha:

$$\iint_S \Psi_m^* \Psi_n \, ds = 0$$

Ovvero le autofunzioni sono ortogonali quando non siamo in presenza di degenerazione (ad esempio nel caso di una guida d'onda rettangolare con $a = 2b$ per i modi TE_{01} e TE_{20})

PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI

Inoltre se vale la condizione:

$$\iint_S \Psi_n^* \Psi_n \, ds = A$$

si può sempre imporre:

$$\iint_S \Psi_n^* \Psi_n \, ds = 1$$

Le autofunzioni sono ortonormali (ortogonali e normalizzate)

Lezione XVII
Potenza nelle strutture guidanti

PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI

E se le autofunzioni sono degeneri

$$\Psi_{1n}, \Psi_{2n} \quad \rightarrow \quad \xi_n^2$$

Si può definire:

$$\Psi_n^{(1)} = \Psi_{1n} \qquad \Psi_n^{(2)} = \Psi_{1n} + a\Psi_{2n}$$

Da cui imponendo

$$\iint \Psi_n^{(1)*} \Psi_n^{(2)} \, ds = 0$$

Si determina la costante *a*

$$a = \frac{\iint \left|\Psi_{1n}\right|}{\iint \Psi_{1n}^* \Psi_{2n} \, ds}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Significato fisico dell'ortogonalità dei modi

In una guida d'onda può propagarsi una infinità in generale doppiamente numerabile di modi

Si vuole mostrare che la potenza che si propaga nella guida è la semplice somma delle potenze associate ai singoli modi, questo viene sinteticamente espresso dicendo che i modi sono disaccoppiati

Basterà eseguire la dimostrazione nel caso di due modi TM ma evidentemente questo varrà per qualsiasi ordine di modi TE o TM

Detti ($\mathbf{E}_1$,$\mathbf{H}_1$) ed ($\mathbf{E}_2$,$\mathbf{H}_2$) i campi associati ai due modi la potenza nella guida sarà:

$$W = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left[\left(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\right)\times\left(\mathbf{H}_1^* + \mathbf{H}_2^*\right)\right]\cdot\hat{z}\,dS$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{t1} + E_{z1}\hat{z}$$
$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{t1}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{t2} + E_{z2}\hat{z}$$
$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{t2}$$

$$W = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1^*\right)\cdot\hat{z}\,dS + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2^*\right)\cdot\hat{z}\,dS + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1^*\right)\cdot\hat{z}\,dS + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_2^*\right)\cdot\hat{z}\,dS$$

Significato fisico dell'ortogonalità dei modi

$$W_{11} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1^*\right)\cdot\hat{z}\,dS \quad \text{potenza associata al modo 1}$$

$$\left.\begin{aligned} W_{12} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2^*\right)\cdot\hat{z}\,dS \\ W_{21} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1^*\right)\cdot\hat{z}\,dS \end{aligned}\right\} \text{potenza di accoppiamento}$$

$$W_{22} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S \left(\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_2^*\right)\cdot\hat{z}\,dS \quad \text{potenza associata al modo 2}$$

Significato fisico dell'ortogonalità dei modi

$$\iint_S \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^*\right)\cdot\hat{z}\, dS = \iint_S \left[\left(\mathbf{E}_{t1} + E_{z1}\hat{z}\right)\times \mathbf{H}_{t2}^*\right]\cdot \hat{z}\, dS =$$

$$= \iint_S \left[\mathbf{E}_{t1} \times \mathbf{H}_{t2}^*\right]\cdot\hat{z}\, dS + \iint_S \left[E_{z1}\hat{z}\times\mathbf{H}_{t2}^*\right]\cdot\hat{z}\, dS$$

$$\iint_S \left[E_{z1}\hat{z}\times\mathbf{H}_{t2}^*\right]\cdot\hat{z}\, dS = 0$$

$$\iint_S \left[\mathbf{E}_{t1} \times \mathbf{H}_{t2}^*\right]\cdot\hat{z}\, dS = (\text{costante})\iint_S \left[\nabla_t E_{z1} \times \left(\hat{z}\times\nabla_t E_{z2}\right)^*\right]\cdot\hat{z}\, dS$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad \nabla_t E_{z1}\times\left(\hat{z}\times\nabla_t E_{z2}\right)^* = \hat{z}\left(\nabla_t E_{z1}\cdot\nabla_t E_{z2}^*\right) - \nabla_t E_{z2}^*\left(\nabla_t E_{z1}\cdot\hat{z}\right)$$

$$\nabla_t E_{z2}\left(\nabla_t E_{z1}\cdot\hat{z}\right) = 0$$

$$(\text{costante})\iint_S \left[\hat{z}\left(\nabla_t E_{z1}\cdot\nabla_t E_{z2}^*\right)\right]\cdot\hat{z}\, dS = (\text{costante})\iint_S \left(\nabla_t E_{z1}\cdot\nabla_t E_{z2}^*\right) dS$$

Lezione XVII
Potenza nelle strutture guidanti

Significato fisico dell'ortogonalità dei modi

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

$$\boxed{(\text{costante})\iint_S \left(\nabla_t E_{z1}\cdot\nabla_t E_{z2}^*\right) dS = ?}$$

$$\iint_S \left(\phi\,\nabla_t^2\Psi + \nabla_t\phi\cdot\nabla_t\Psi\right) ds = \int_{(\ell)} \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dl$$

$$\iint_S \nabla_t\phi\cdot\nabla_t\Psi\, ds = \iint_S \phi\,\nabla_t^2\Psi\, ds + \int_{(\ell)} \phi\frac{\partial\Psi}{\partial n} dl$$

$$\varphi = E_{z1} \qquad \psi = E_{z2}$$

$$(\text{costante})\iint_S \nabla_t E_{z1}\cdot\nabla_t E_{z2}^*\, ds = (\text{costante})\iint_S E_{z1}\,\nabla_t^2 E_{z2}^*\, ds + (\text{costante})\int_{(\ell)} E_{z1}\frac{\partial E_{z2}^*}{\partial n} dl$$

$(\text{costante})\int_{(\ell)} E_{z1}\dfrac{\partial E_{z2}^*}{\partial n} dl = 0$ per le condizioni al contorno di Dirichlet

$$E_{z1}\,\nabla_t^2 E_{z2}^* = E_{z1}\left(-k_c^2 E_{z2}^*\right) \qquad \iint_S \Psi_m^*\Psi_n\, ds = 0$$

$$-(\text{costante})k_c^2 \iint_S E_{z1}E_{z2}^*\, ds = 0$$

Significato fisico dell'ortogonalità dei modi

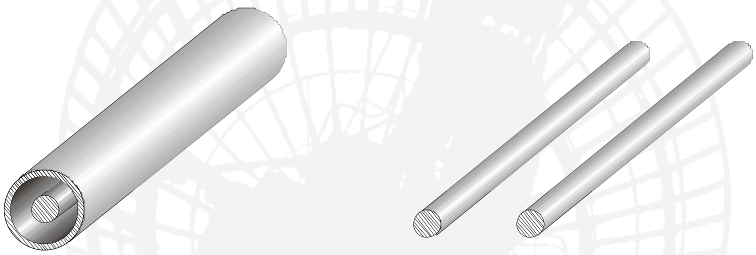
I modi non sono disaccoppiati nel caso in cui valga la condizione di impedenza!!!

$$\mathbf{E}-(\mathbf{E}\cdot\hat{n})\hat{n}=Z_s\hat{n}\times\mathbf{H}$$ condizione di impedenza di Leontovich

$$Z_s \simeq \sqrt{\frac{j\mu_0\omega}{\sigma}}=R_s(1+j)$$ Z_s è un'impedenza per unità di superficie

Tensione corrente e impedenza caratteristica per il modo TE_{10} nella guida rettangolare

E' noto che per una linea bifilare o per un cavo coassiale privi di perdite si può propagare un modo TEM nel mezzo dielettrico in cui la struttura è immersa.



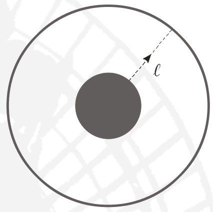
Cavo coassiale

Linea bifilare

TENSIONE CORRENTE E IMPEDENZA CARATTERISTICA PER IL MODO TE_{10} NELLA GUIDA RETTANGOLARE

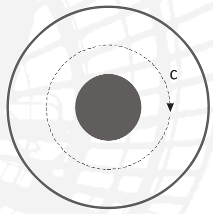
Le grandezze tensione e corrente relative ad una sezione trasversale generica sono definibili nel seguente modo:

a) la tensione è la differenza di potenziale tra i due conduttori in corrispondenza della sezione considerata; essa coincide con il seguente integrale, indipendente dal percorso prescelto, eseguito lungo una linea di lunghezza l contenuta nella sezione stessa, avente gli estremi sui conduttori:



$$\int_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\ell$$

b) la corrente è il flusso del vettore **J** attraverso la sezione di uno dei conduttori con il piano trasversale



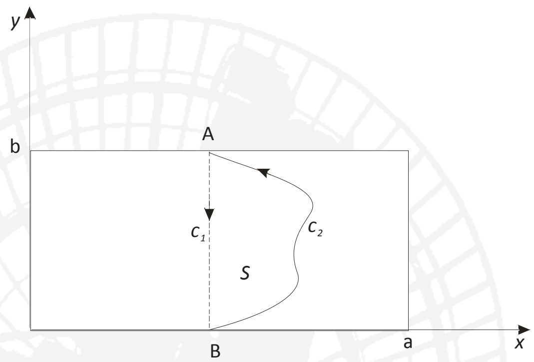
Per una struttura a semplice connessione non è possibile definire una tensione ed una corrente

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XVII
Potenza nelle strutture guidanti

TENSIONE CORRENTE E IMPEDENZA CARATTERISTICA PER IL MODO TE_{10} NELLA GUIDA RETTANGOLARE

Tensione



$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$$

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{z}\, ds = -j\omega\mu \iint_S \mathbf{H} \cdot \hat{z}\, ds = -j\omega\mu \iint_S H_z\, ds$$

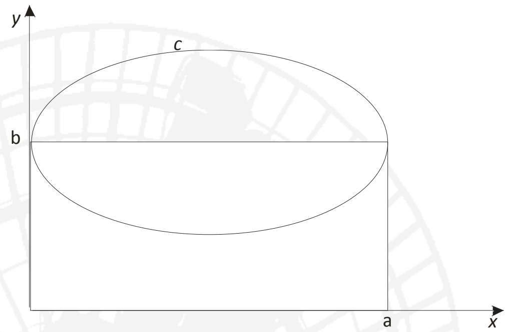
$$\int_{c_1} (\cdot) dc \neq \int_{c_2} (\cdot) dc$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot \hat{c}\, dc \begin{cases} \neq 0 \text{ per i modi TE } (E_z = 0, H_z \neq 0) \\ = 0 \text{ per i modi TM } (H_z = 0, E_z \neq 0) \end{cases}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

TENSIONE CORRENTE E IMPEDENZA CARATTERISTICA PER IL MODO TE_{10} NELLA GUIDA RETTANGOLARE

Corrente



$$\iint_s (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{z}\, ds = j\omega\varepsilon \iint_s \mathbf{E} \cdot \hat{z}\, ds + \iint_s \mathbf{J} \cdot \hat{z}\, ds = j\omega\varepsilon \iint_s E_z\, ds + \iint_s J_z\, ds$$

J è la corrente sulla parete superiore

$$\iint_s (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{z}\, ds = \oint_c \mathbf{H} \cdot \hat{c}\, dc =$$

$$= j\omega\varepsilon \iint_s E_z\, ds + \iint_s J_z\, ds \quad \begin{cases} \text{si trova la corrente per i modi TE } (E_z = 0, H_z \neq 0) \\ \text{la corrente non è univocamente definita per i modi TM } (H_z = 0, E_z \neq 0) \end{cases}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

TENSIONE CORRENTE E IMPEDENZA CARATTERISTICA PER IL MODO TE_{10} NELLA GUIDA RETTANGOLARE

$$W = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \iint_s \mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^* \cdot \hat{z} dS = \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{E}_t \mathbf{H}_t^* dS = \frac{1}{2} V(0) I(0)$$

Si consideri un modo TE_{10} in guida d'onda rettangolare

$$E_t = E_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-jk_z z}$$

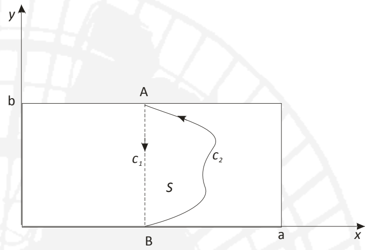
$$H_t = \frac{E_0}{Z_{TE}} \sin\frac{\pi x}{a} e^{-jk_z z}$$

$$W = \frac{1}{2} \iint_s E_t H_t^* dS = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_{TE}} b \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{ab}{4Z_{TE}} |E_0|^2$$

TENSIONE CORRENTE E IMPEDENZA CARATTERISTICA PER IL MODO TE_{10} NELLA GUIDA RETTANGOLARE

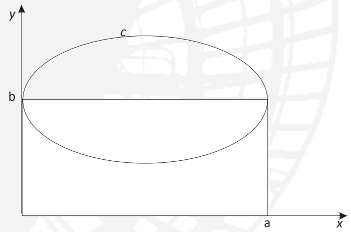
l'integrale del campo elettrico trasverso lungo la mediana più corta della sezione è

$$\int_l E_t dl = bE_0 e^{-jk_z z}$$



e la corrente che attraversa uno dei due lati lunghi della sezione, secondo la direzione di z, è data da

$$\int_0^a \mathbf{J}_s \cdot \hat{z}\, dx = \int_0^a H_t\, dx = \frac{E_0}{Z_{TE}} \frac{2a}{\pi} e^{-jk_z z}$$



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XVII
Potenza nelle strutture guidanti

TENSIONE CORRENTE E IMPEDENZA CARATTERISTICA PER IL MODO TE_{10} NELLA GUIDA RETTANGOLARE

$$W = \frac{ab}{4Z_{TE}} E_0^2 = \frac{1}{2} V(0) I(0)$$

Caso a)

$$V(0) = bE_0$$

ottenendo:

$$\frac{ab}{4Z_{TE}} E_0^2 = \frac{1}{2} bE_0 I(0) \Rightarrow I(0) = \frac{a}{2Z_{TE}} E_0$$

$$\frac{V(0)}{I(0)} = 2\frac{b}{a} Z_{TE}$$

$$E_t = \left(bE_0 e^{-jk_z z}\right)\left(\frac{1}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$H_t = \left(E_0 \frac{a}{2Z_{TE}} e^{-jk_z z}\right)\left(\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\right)$$

TENSIONE CORRENTE E IMPEDENZA CARATTERISTICA PER IL MODO TE_{10} NELLA GUIDA RETTANGOLARE

$$W = \frac{ab}{4Z_{TE}}E_0^2 = \frac{1}{2}V(0)I(0)$$

Caso b)

$$\frac{V(0)}{I(0)} = Z_{TE}$$

si ottiene:

$$|V(z)| = \sqrt{2\,W\,Z_{TE}} = \sqrt{2\frac{ab}{4}E_0^2} = \sqrt{\frac{ab}{2}}E_0$$

$$|I(z)| = \frac{|V(z)|}{Z_{TE}} = \frac{1}{Z_{TE}}\sqrt{\frac{ab}{2}}E_0$$

$$E_t = \left(\sqrt{\frac{ab}{2}}E_0 e^{-jk_z z}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$H_t = \left(\sqrt{\frac{ab}{2}}\frac{E_0}{Z_{TE}}e^{-jk_z z}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}\right)$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze