TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione II
Teoria dei potenziali

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
e-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
web: *http://www.cem.unifi.it/*

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA
Lezione II
Teoria dei potenziali

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Programma del corso

Propagazione radiata

- Le equazioni di Maxwell e il principio di equivalenza
- Teoria dei potenziali
- Dipolo elettrico corto
- Dipolo magnetico e spira di corrente
- Sorgente di Huygens e radiogoniometro
- Parametri fondamentali delle antenne
- Antenne filari
- Antenne a patch
- Altre tipologie di antenne
- Esercizi sulla propagazione radiata

Propagazione guidata

- Strutture guidanti
- Modi di propagazione in guida
- Guide d'onda rettangolari
- Guide d'onda circolari
- Perdite in guida
- Cavità risonanti
- Alimentazione delle guide d'onda
- Guide ridged
- Linea in microstriscia
- Matrice ABCD e matrice S
- Esercizi sulla propagazione guidata

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI MAXWELL CON SORGENTI ELETTRICHE ($\mathbf{J}^i$) NELLO SPAZIO LIBERO

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \nabla\times\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{B}_A \\
&(2) \quad \nabla\times\mathbf{H}_A = j\omega\mathbf{D}_A + \mathbf{J}^i \\
&(3) \quad \nabla\cdot\mathbf{D}_A = 0 \\
&(4) \quad \nabla\cdot\mathbf{B}_A = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\mathbf{E}_A \equiv \mathbf{E}_A(\mathbf{r},\omega) & \left[V/m\right] \\
\mathbf{H}_A \equiv \mathbf{H}_A(\mathbf{r},\omega) & \left[A/m\right] \\
\mathbf{D}_A \equiv \mathbf{D}_A(\mathbf{r},\omega) & \left[C/m^2\right] \\
\mathbf{B}_A \equiv \mathbf{B}_A(\mathbf{r},\omega) & \left[Wb/m^2\right] \\
\mathbf{J}^i \equiv \mathbf{J}^i(\mathbf{r},\omega) & \left[A/m^2\right]
\end{cases}
$$

Relazioni costitutive del mezzo

$$
\mathbf{B}_A = \mu\mathbf{H}_A \qquad \mathbf{D}_A = \varepsilon\mathbf{E}_A
$$

6 equazioni scalari in 6 incognite!

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE - 1/6

$$
(4) \quad \nabla\cdot\mathbf{B}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_A = \nabla\times\mathbf{A}
$$

$$
(1) \quad \nabla\times\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{B}_A = -j\omega\nabla\times\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\nabla\times(\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\phi
$$

$$
\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \qquad \mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}
$$

A è un vettore detto potenziale vettore di tipo elettrico

ϕ è uno scalare detto potenziale scalare di tipo elettrico

I campi sono espressi in termini del potenziale vettore **A** (3 incognite) e scalare ϕ (1 incognita)

Noti i potenziali i campi vengono dedotti attraverso operazioni di tipo differenziale

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE - 2/6

$$(2)\quad \nabla\times\mathbf{H}_A=\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}\right)=j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A+\mathbf{J}^i$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A+\mathbf{J}^i \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\mu}\left[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}\right]=j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A+\mathbf{J}^i$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\mathbf{A}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{A}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}+j\omega\varepsilon\mu\phi)=-\mu\,\mathbf{J}^i$$

In modo del tutto analogo si ottiene:

$$\nabla^2\phi+\omega^2\varepsilon\mu\phi+j\omega(\nabla\cdot\mathbf{A}+j\omega\varepsilon\mu\phi)=0$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE - 3/6

In definitiva per determinare il campo elettromagnetico occorre risolvere 4 equazioni in 4 incognite che risultano accoppiate tra loro

$$\mathbf{E}_A=-j\omega\mathbf{A}-\nabla\phi$$

$$\mathbf{H}_A=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{A}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}+j\omega\varepsilon\mu\phi)=-\mu\,\mathbf{J}^i$$

$$\nabla^2\phi+\omega^2\varepsilon\mu\phi+j\omega(\nabla\cdot\mathbf{A}+j\omega\varepsilon\mu\phi)=0$$

La scelta dei potenziali **A** e ϕ non è univoca !!!

Il campo elettromagnetico è univocamente determinato dalle sorgenti

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE - 4/6

La scelta dei potenziali non è univoca, ma la soluzione del campo elettromagnetico sì.

$$(\mathbf{A},\phi) \rightarrow (\mathbf{E}_A,\mathbf{H}_A)$$
$$(\mathbf{A}',\phi') \rightarrow (\mathbf{E}_A,\mathbf{H}_A)$$

Prendiamo due nove espressioni per i potenziali **A**' e ϕ' come di seguito, si verifica per sostituzione che le espressioni del campo non variano

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\psi \\ \phi' = \phi + j\omega\psi \end{cases}$$

ψ è una funzione scalare arbitraria da determinare

Una sua corretta scelta permette di semplificare la soluzione

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE - 5/6

L'arbitrarietà dei potenziali è legata alla scelta della funzione ψ

$$\nabla\cdot\mathbf{A}' + j\omega\varepsilon\mu\phi' \equiv \nabla\cdot\mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi - \nabla\cdot\nabla\psi - \omega^2\varepsilon\mu\psi$$

Se vale $\nabla\cdot\mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi = \chi$

… e si sceglie la funzione ψ tale che $\nabla^2\psi + \omega^2\varepsilon\mu\psi = \chi$

Si ottiene $\boxed{\nabla\cdot\mathbf{A}' + j\omega\varepsilon\mu\phi' = 0}$

Tale condizione prende il nome di *gauge* di Lorentz, che nel caso di campi statici (ω=0) prende il nome di condizione di Coulomb.

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE - 6/6

Se vale la condizione di Lorentz, si ottengono due equazioni di Helmholtz (1 vettoriale e 1 scalare) disaccoppiate tra **A** e ϕ, ossia:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi = 0$$

$$\phi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}^i$$
$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$$
$$\text{con} \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$$

Ricordando il legame esistente tra le espressioni del campo e i potenziali si ottiene che per determinare il campo elettromagnetico (**E**$_A$, **H**$_A$) si deve conoscere solo il potenziale vettore **A**

$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi$$
$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$
$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA
Lezione II
Teoria dei potenziali

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ

Ricavare le espressioni del campo elettromagnetico richiede il calcolo della sola equazione vettoriale di Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}^i$$

Visto in un sistema di coordinate cartesiane

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial z^2}$$

Si ottengono tre equazioni scalari di identica forma analitica

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x + k^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z \end{cases}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI MAXWELL CON SORGENTI MAGNETICHE (Mi) NELLO SPAZIO LIBERO

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E}_F &= -j\omega\mathbf{B}_F - \mathbf{M}^i \\ \nabla\times\mathbf{H}_F &= j\omega\mathbf{D}_F \\ \nabla\cdot\mathbf{D}_F &= 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{B}_F &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E}_A &= -j\omega\mathbf{B}_A \\ \nabla\times\mathbf{H}_A &= j\omega\mathbf{D}_A + \mathbf{J}^i \\ \nabla\cdot\mathbf{D}_A &= 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{B}_A &= 0 \end{aligned}$$

Notiamo subito la similitudine con il sistema delle equazioni di Maxwell in presenza delle sole correnti elettriche ($\mathbf{J}^i$) nello spazio libero se consideriamo le seguenti trasformazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^i &\to \mathbf{M}^i \\ \mathbf{E} &\to \mathbf{H} \\ \mathbf{H} &\to -\mathbf{E} \\ \mu &\to \varepsilon \\ \varepsilon &\to \mu \end{aligned}$$

Tale trasformazione prende il nome di **PRINCIPIO DI DUALITA'** o di **BABINET**

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI MAGNETICHE

Un analogo procedimento a quello visto per le sorgenti elettriche si può seguire nel semplificare le equazioni di Maxwell in presenza delle sole correnti magnetiche

Tuttavia vista la dualità secondo il principiò di BABINET, il procedimento può essere evitato sfruttando la soluzione già ottenuta nel primo caso

Equazione di Helmholtz per il potenziale vettore di tipo magnetico (**F** è il potenziale di Fitzgerald)

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\varepsilon\,\mathbf{M}^i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_F &= -j\omega\mathbf{F} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}}{j\omega\varepsilon\mu} \\ \mathbf{E}_F &= -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F} \end{aligned}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

DAI POTENZIALI AL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Noti i potenziali **A** ed **F** il campo elettromagnetico può essere ottenuto tramite delle *relazioni differenziali* dai potenziali vettori **A** ed **F** e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) + \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione II
Teoria dei potenziali

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

RIEPILOGO

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} - \mathbf{M}^i \\ \nabla\times\mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} + \mathbf{J}^i \\ \nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}^i$$

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\varepsilon\mathbf{M}^i$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) + \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$