LEZIONE XIV

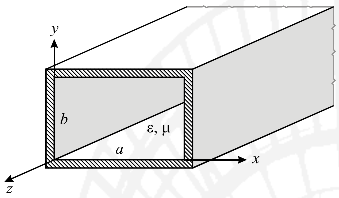
APPLICAZIONE DELLE FD AI PROBLEMI DI PROPAGAZIONE GUIDATA: GUIDA RIDGED

Corso di
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: *http://www.cem.unifi.it/*

L'equazione di Helmholtz per le strutture guidanti

Guida rettangolare: modi TM



$$\mathbf{E}(x,y,z)=\mathbf{E}(x,y)e^{-jk_z z}$$
$$\mathbf{H}(x,y,z)=\mathbf{H}(x,y)e^{-jk_z z}$$
$$H_z=0$$

Equazione di Helmholtz in coordinate cartesiane

$$\nabla_t^2 E_z=\lambda E_z \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}=-k_{cE}^2 E_z \quad (\lambda=-k_{cE}^2 \text{ è l'autovalore})$$

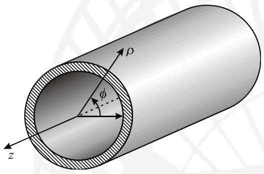
$$K_{cE}^2=k^2-k_{zE}^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \qquad (m=1,2\ldots;\; n=1,2\ldots)$$

$$E_z=C\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zE}z} \quad \text{(autofunzione)}$$

Guida circolare e cavo coassiale: modi TM

Equazione di Helmholtz in coordinate cilindriche

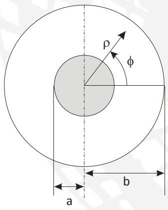
$$\nabla_t^2 E_z = \lambda E_z \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} = -k_{cE}^2 E_z \quad (\lambda = -k_{cE}^2 \text{ è l'autovalore})$$



$$k_{cE}^2 = k^2 - k_{zE}^2 = \left(\frac{p_{mn}}{a}\right)^2 \quad (m = 0,1,\ldots;\, n = 1,2,\ldots)$$

p_{mn}: zero n-esimo di $J_m(x)$

$$E_z = A J_m(k_{cE}\rho) e^{-k_{zE} z} \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad \text{(autofunzione)}$$



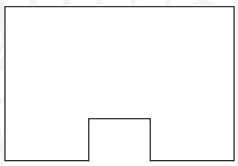
L'autofunzione è esprimibile mediante la combinazione di funzioni sinusoidali, cosinusoidali, di Bessel di prima e seconda specie oppure di Hankel

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

L'EQUAZIONE DI HELMHOLTZ PER LE STRUTTURE GUIDANTI

Lezione XIV
Applicazione delle FD ai problemi di propagazione guidata: guida ridged

Come si risolve il problema per strutture di questo tipo?



Guida ridged

Guida caricata con dielettrico

Microstriscia

SCHEMA ALLE DIFFERENZE FINITE

Un semplice esempio

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -k^2 f(x) \qquad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

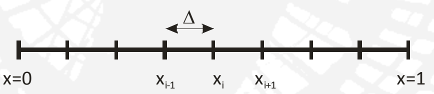
La soluzione generale della precedente equazione è:

$$f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Imponendo le condizioni al contorno si ha:

$$A = 0 \qquad e \qquad k = n\pi \qquad \text{dove } n \text{ è un intero}$$

Discretizziamo il dominio la funzione f(x) con un passo Δ $\quad x_i = i\Delta$



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIV
Applicazione delle FD ai problemi di propagazione guidata: guida ridged

SCHEMA ALLE DIFFERENZE FINITE

Il secondo passo è quello di sostituire alle espressioni continue delle derivate, le loro equivalenti discrete.

Consideriamo lo sviluppo di Taylor:

$$f(x+\Delta) = f(x) + \Delta f'(x) + \frac{\Delta^2}{2} f''(x) + \frac{\Delta^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

Nell'ipotesi di $\Delta << 1$ possiamo ottenere l'espressione della derivata prima:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} - \frac{\Delta}{2} f''(x) - \frac{\Delta^2}{3!} f'''(x) - \cdots$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$ **forward-difference** (*differenze finite in avanti*)

Si approssima la derivata prima con il valore del rapporto incrementale, trascurando termini dello stesso ordine e di ordine superiore rispetto a Δ

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Consideriamo anche il seguente sviluppo di Taylor:

$$f(x-\Delta)=f(x)-\Delta f'(x)+\frac{\Delta^2}{2}f''(x)-\frac{\Delta^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$

Dalla quale si ricava:

$$f'(x)\approx\frac{f(x)-f(x-\Delta)}{\Delta}$$

backward-difference (*differenze finite all'indietro*)

Si approssima la derivata prima con il valore del rapporto incrementale, trascurando termini dello stesso ordine e di ordine superiore rispetto a Δ

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

$$f(x+\Delta)=f(x)+\Delta f'(x)+\frac{\Delta^2}{2}f''(x)+\frac{\Delta^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$

$$f(x-\Delta)=f(x)-\Delta f'(x)+\frac{\Delta^2}{2}f''(x)-\frac{\Delta^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$

Sottraendo le precedenti due approssimazioni della derivata prima si ottiene la seguente espressione:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+\Delta)-f(x-\Delta)}{2\Delta}$$

central-difference (*differenze finite centrali*)

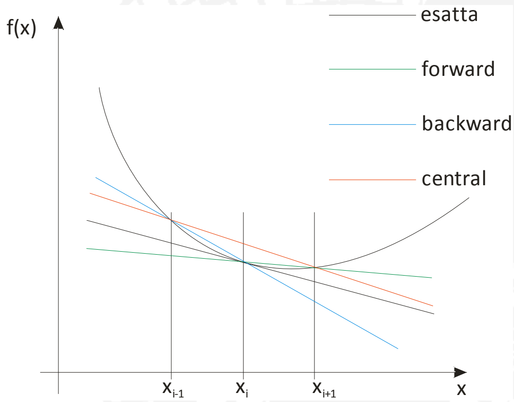
Si trascurando termini dello stesso ordine e di ordine superiore rispetto a Δ^2

Sommando le precedenti approssimazioni della derivata prima si ottiene l'espressione approssimata per la derivata seconda, dove si trascurano termini dello stesso ordine o di ordine superiore rispetto Δ^2

$$f''(x)\approx\frac{f(x+\Delta)-2f(x)+f(x-\Delta)}{\Delta^2}$$

formula dei tre punti

Andamento grafico della approssimazione della derivata prima



$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-\Delta)}{\Delta}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta)-f(x-\Delta)}{2\Delta}$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -k^2 f(x) \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ f(0)=0 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+\Delta)-2f(x)+f(x-\Delta)}{\Delta^2}$$

$$f_i = f(x_i) = f(i\Delta)$$

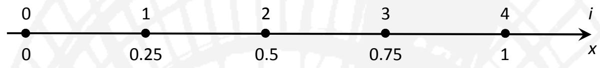
$$\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta^2} = -k^2 f_i$$

$$-f_{i-1}+\alpha f_i - f_{i+1} = 0 \qquad \alpha = 2-\Delta^2 k^2$$

Schema alle differenze finite

$$-f_{i-1} + \alpha f_i - f_{i+1} = 0 \qquad \alpha = 2 - \Delta^2 k^2$$

Consideriamo un passo di discretizzazione $\Delta = 0.25$.
Le incognite diventano 3, i punti in $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$ e $x_3 = 0.75$



$$f_0 = 0$$
$$f_4 = 0$$

Il sistema si scrive:

$$\begin{aligned} \alpha f_1 - f_2 &= f_0 \\ -f_1 + \alpha f_2 - f_3 &= 0 \\ -f_2 + \alpha f_3 &= f_4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix}}_{[A]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{[X]} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \\ f_4 \end{bmatrix}}_{[B]}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIV
Applicazione delle FD ai problemi di propagazione guidata: guida ridged

Schema alle differenze finite

Soluzioni non nulle di tale sistema esistono solamente se il determinante del sistema è pari a zero.

$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

La valutazione del determinante porta alla equazione: $\alpha(\alpha^2 - 2) = 0$

La cui soluzione è: $\alpha = 0, \quad \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}$

$$\alpha = 2 - \Delta^2 k^2$$

Si trovano gli autovalori (approssimati) del problema: $k_1 = 3.0615, \quad k_2 = 5.6569, \quad k_3 = 7.3910$

Gli autovalori ricavati analiticamente: $k = 3.1416, \quad 6.2832, \quad 9.4248$

Tale discrepanza è dovuta alla grossolana discretizzazione spaziale del dominio della funzione.

Trovati gli autovalori (approssimati) come si determinano i campioni delle autofunzioni?

Per ciascun autovalore si risolve la relativa equazione matriciale trovando i campioni dell'autofunzione corrispondente

Schema alle differenze finite: modi TM in guida rettangolare

Un problema più realistico è l'individuazione degli autovalori che determinano la propagazione in una guida d'onda rettangolare con propagazione nella direzione dell'asse *z*.

Consideriamo i modi TM e le quattro componenti del campo E_x, E_y, H_x, H_y, i quali possono essere espressi in termini della sola componente E_z

$$E_z(x,y,z) = E_z(x,y)e^{-jk_z z}$$

Dove E_z soddisfa:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_{cE}^2 E_z = 0 \qquad \text{con} \quad E_z = 0 \text{ sul contorno}$$

Il parametro k_{cE} determina la costante di fase tramite la relazione:

$$k_{cE}^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2$$

Il problema agli autovalori richiede la soluzione per $E_z(x,y)$ e k_{cE} simultaneamente

SCHEMA ALLE DIFFERENZE FINITE: MODI TM IN GUIDA RETTANGOLARE

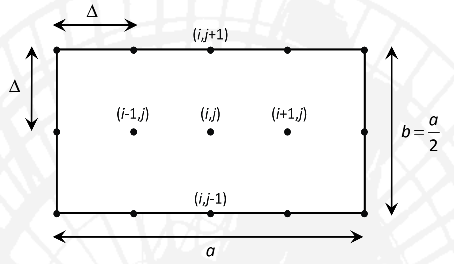
Allo scopo di alleggerire la notazione nella trattazione che segue omettiamo il pedice "z" per il campo elettrico ed il pedice "cE" per il numero d'onda di cut-off

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIV
Applicazione delle FD ai problemi di propagazione guidata: guida ridged

SCHEMA ALLE DIFFERENZE FINITE: MODI TM IN GUIDA RETTANGOLARE

L'uso delle differenze finite richiede la discretizzazione spaziale del dominio, che in questo caso considereremo uniforme in tutte e due le direzioni e pari a Δ



L'equazione di Helmholtz può essere scritta:

$$\frac{E(i+1,j)+E(i-1,j)+E(i,j+1)+E(i,j-1)-4E(i,j)}{\Delta^2}+k^2E(i,j)=0$$

Che si può scrivere anche nel seguente modo:

$$-E(i+1,j)-E(i-1,j)-E(i,j+1)-E(i,j-1)+\left(4-k^2\Delta^2\right)E(i,j)=0$$

Schema alle differenze finite: modi TM in guida rettangolare

ponendo: $\alpha = 4 - k^2\Delta^2$

si ottiene:

$$-E(i+1,j) - E(i-1,j) - E(i,j+1) - E(i,j-1) + \alpha E(i,j) = 0$$

Questa permette la scrittura di un sistema algebrico per ogni punto interno del dominio, che in forma di matrice si può scrivere come:

$$[A(\alpha)][E] = 0$$

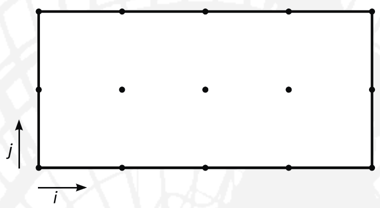
Tale sistema ammette soluzioni se il determinante della matrice è uguale a zero:

$$\det[A(\alpha)] = 0$$

Come è noto, tale determinate è un polinomio in α con grado pari al numero dei punti interni al dominio

Schema alle differenze finite: modi TM in guida rettangolare

Consideriamo $\Delta = \frac{a}{4}$ la discretizzazione è visibile in figura



Incognite del problema sono solamente il valore del campo *E* nei tre punti interni (campioni delle autofunzioni) e i corrispettivi autovalori (*k*)

$$\begin{aligned} \alpha E_1 - E_2 &= 0 \\ -E_1 + \alpha E_2 - E_3 &= 0 \\ E_2 + \alpha E_3 &= 0 \end{aligned}$$

SCHEMA ALLE DIFFERENZE FINITE: MODI TM IN GUIDA RETTANGOLARE

Il determinante di questo sistema di equazioni si può scrivere:

$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

La cui valutazione porta al polinomio $\alpha^3 - 2\alpha = 0$

La cui soluzione è: $\alpha = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

Che porta per il coefficiente k i seguenti valori: $k = 6.4322, \quad 8.0000, \quad 9.3074$

Queste sono approssimazioni dei primi tre autovalori

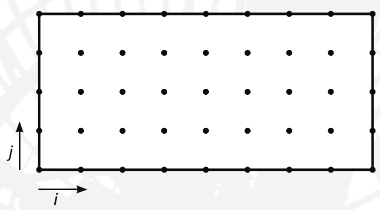
Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIV
Applicazione delle FD ai problemi di propagazione guidata: guida ridged

SCHEMA ALLE DIFFERENZE FINITE: MODI TM IN GUIDA RETTANGOLARE

Migliore approssimazione si può ottenere diminuendo il passo Δ

per $\Delta = \frac{a}{8}$ si ha la discretizzazione visibile in figura



In questo caso si ottiene una matrice 21x21 (21 punti interni) per cui la determinazione degli autovalori attraverso il polinomio caratteristico diventa non praticabile

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Alla precedente soluzione esplicita è preferibile una soluzione implicita di tipo iterativo

L'espressione per il campo al generico nodo (*i,j*) si può scrivere con α non zero come:

$$E(i,j)=\frac{E(i+1,j)+E(i-1,j)+E(i,j+1)+E(i,j-1)}{\alpha}$$

Se consideriamo l'equazione di Helmholtz, moltiplicandolo per *E*, e integrando su tutta la sezione della guida

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0$$

$$\int_0^a\int_0^b E\nabla^2 E\,dxdy + k^2\int_0^a\int_0^b E^2 dxdy = 0$$

Il numero d'onda *k* si può valutare a partire da quest'ultima espressione, ossia:

$$k^2 = -\frac{\nabla^2 E}{E} = -\frac{\iint E\nabla^2 E\,dxdy}{\iint E^2 dxdy}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Usando le differenze finite si può scrivere:

$$k^2\Delta^2 = \frac{\sum_i\sum_j E(i,j)\left[E(i+1,j)+E(i-1,j)+E(i,j+1)+E(i,j-1)-4E(i,j)\right]}{\sum_i\sum_j\left[E(i,j)\right]^2}$$

Riscrivendolo in termini di α si ha:

$$\alpha = \frac{\sum_i\sum_j E(i,j)\left[E(i+1,j)+E(i-1,j)+E(i,j+1)+E(i,j-1)\right]}{\sum_i\sum_j\left[E(i,j)\right]^2}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Schema alle differenze finite: modi TM in guida rettangolare

Essendo questo metodo di tipo iterativo, con la presenza di due incognite, il campo e gli autovalori, un uso alternativo delle seguenti due espressioni permette di ottenere sia il campo che gli autovalori

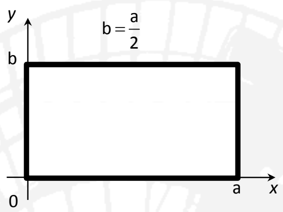
$$E(i,j) = \frac{E(i+1,j)+E(i-1,j)+E(i,j+1)+E(i,j-1)}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\sum_i \sum_j E(i,j)\left[E(i+1,j)+E(i-1,j)+E(i,j+1)+E(i,j-1)\right]}{\sum_i \sum_j \left[E(i,j)\right]^2}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

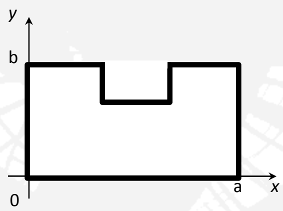
Guida ridged

Consideriamo una guida rettangolare standard



La sua banda di funzionamento monomodale è pari ad un rapporto di 2 : 1 ($f_{c20} = 2\,f_{c10}$)

In applicazioni dove è richiesta una maggiore banda di funzionamento monomodale, quali ad esempio per filtri in alta frequenza è preferibile utilizzare la guida ***ridged*** la cui banda di funzionamento monomodale può essere anche di un rapporto di 5 : 1, 6 : 1 o superiore



GUIDA RIDGED

L'introduzione di un "dente" longitudinale nella guida rettangolare permette di ottenere un effetto capacitivo che abbassa la frequenza di taglio del modo fondamentale e la sua impedenza.

Vantaggi:

1. Banda monomodale più ampia
2. Minore dispersività

Svantaggi:

1. Costi più elevati
2. Minore potenza (rottura della rigidità dielettrica)
3. Maggiore attenuazione

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIV
Applicazione delle FD ai problemi di propagazione guidata: guida ridged

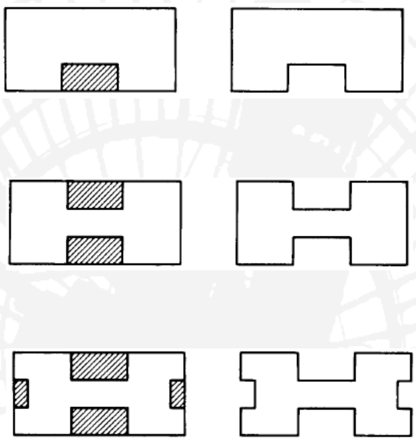
GUIDA RIDGED

Diverse tipologie di guide ridged.

Singola

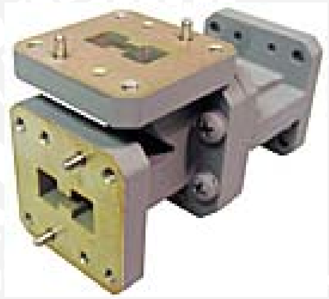
Doppia

Quadrupla



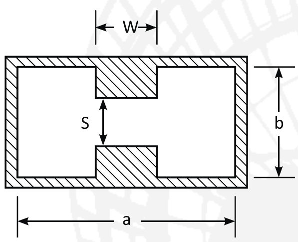
GUIDA RIDGED

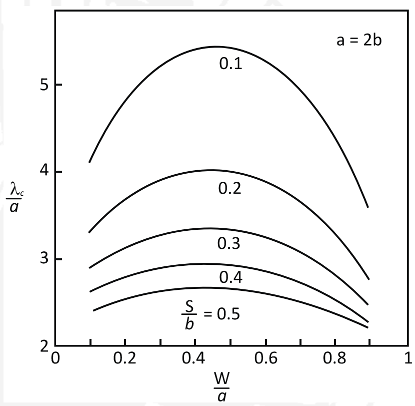
Divisore di potenza in guida ridged



GUIDA RIDGED

Consideriamo la guida ridged doppia:



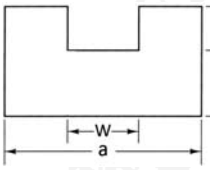


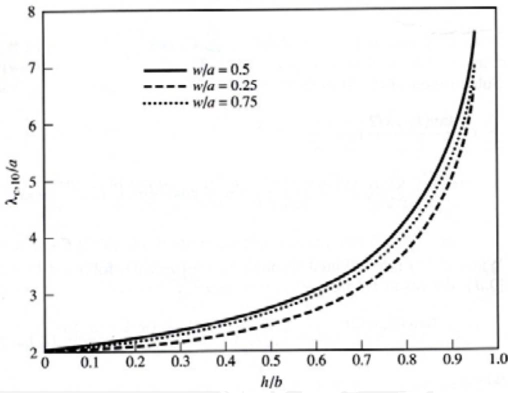
Lunghezza d'onda di *cut-off* normalizzata per la guida ridged

GUIDA RIDGED

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Consideriamo la guida ridged singola:





Lunghezza d'onda di *cut-off* normalizzata per il modo TE_{10}

Notiamo che la lunghezza d'onda di cut-off è poco sensibile alle variazioni dello spessore W ma è molto sensibile alle variazioni di h.
Per un rapporto di $h/b = 0$ (guida rettangolare standard) la lunghezza d'onda del modo TE_{10} è pari a $2a$

GUIDA RIDGED

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

La distribuzione di campo elettrico per la precedente guida nel caso di W/a = 0.5 e di h/b = 0.5