



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Esercitazioni I  
Il principio delle immagini


**ESERCITAZIONI I**

**IL PRINCIPIO DELLE IMMAGINI**

Corso di  
“Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche”

Ing. Leonardo Lucci  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni  
Università di Firenze  
E-mail: [leonardo.lucci@unifi.it](mailto:leonardo.lucci@unifi.it)

1/19

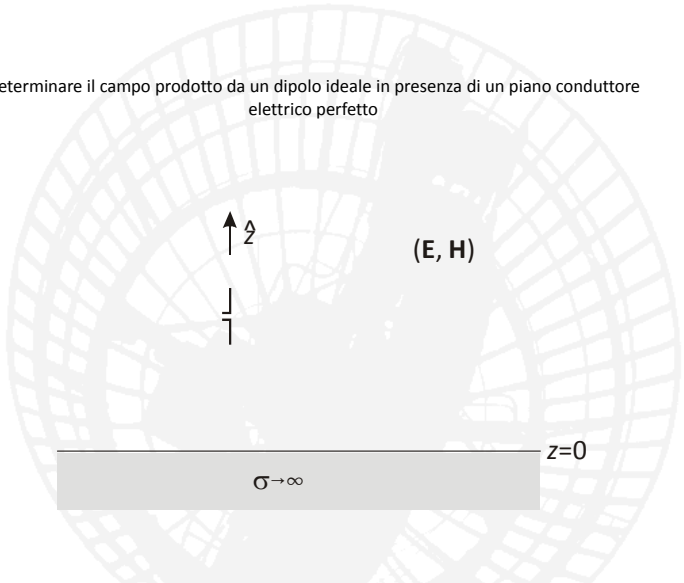


Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Esercitazioni I  
Il principio delle immagini

**DIPOLO IDEALE VERTICALE SU PIANO DI MASSA**

Determinare il campo prodotto da un dipolo ideale in presenza di un piano conduttore elettrico perfetto



2/19

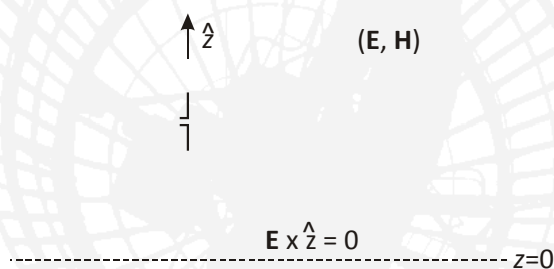


# DIPOLO IDEALE VERTICALE SU PIANO DI MASSA: PROBLEMA EQUIVALENTE

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

Nel generico punto  $P(x_p, y_p, z_p)$  del semispazio superiore si ottiene lo stesso campo elettromagnetico (stessa soluzione delle equazioni di Maxwell) se si rimuove il materiale conduttore e si impongono sulla superficie  $z=0$  le medesime condizioni al contorno del problema originario, ovvero

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad \text{per} \quad z = 0$$



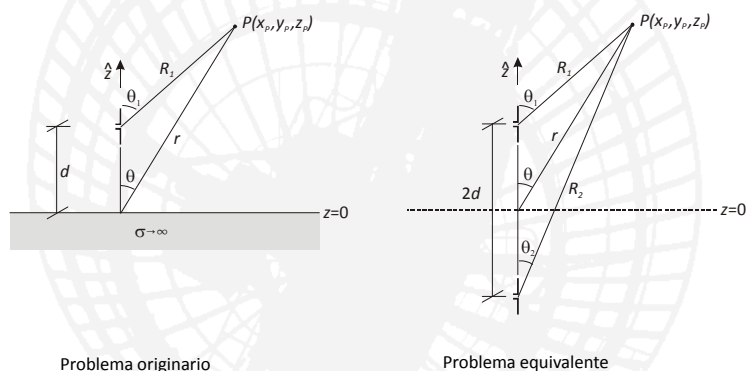
3/19



# DIPOLO IDEALE VERTICALE SU PIANO DI MASSA: SORGENTE IMMAGINE

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

Il principio delle immagini consente di rimuovere il materiale conduttore elettrico perfetto e di passare, mediante l'introduzione della sorgente immagine, ad un problema equivalente ai fini della valutazione del campo elettromagnetico nel semispazio  $z > 0$

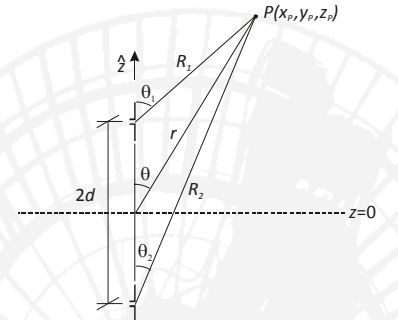


4/19



# DIPOLIO IDEALE VERTICALE SU PIANO DI MASSA: SORGENTE IMMAGINE

## Esercitazioni I Il principio delle immagini



$$E_r^1 = \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{jkR_1^3} \right) \cos \vartheta_1 e^{-jkR_1}$$

$$E_\theta^1 = \zeta \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{R_1} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{jkR_1^3} \right) \sin \vartheta_1 e^{-jkR_1}$$

$$H_\varphi^1 = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{R_1} + \frac{1}{R_1^2} \right) \sin \vartheta_1 e^{-jkR_1}$$

Sorgente reale

$$E_r^2 = \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{jkR_2^3} \right) \cos \vartheta_2 e^{-jkR_2}$$

$$E_\theta^2 = \zeta \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{R_2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{jkR_2^3} \right) \sin \vartheta_2 e^{-jkR_2}$$

$$H_\varphi^2 = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \sin \vartheta_2 e^{-jkR_2}$$

Sorgente immagine

5/19

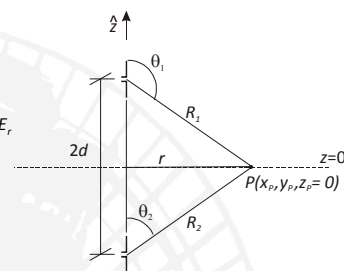


# DIPOLIO IDEALE VERTICALE SU PIANO DI MASSA: CAMPO ELETTRONOMETICO

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

Punto di osservazione sul piano  $z=0$

- La componente del campo elettrico normale all'interfaccia è  $E_r$
- $R_1 = R_2 = R$
- $\vartheta_1 = \pi - \vartheta_2 \rightarrow (\cos \vartheta_1 = -\cos \vartheta_2) \text{ e } (\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2)$



$$E_r = E_r^1 + E_r^2 = \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{jkR_1^3} \right) \cos \vartheta_1 e^{-jkR_1} + \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{jkR_2^3} \right) \cos \vartheta_2 e^{-jkR_2} =$$

$$= \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{jkR^3} \right) e^{-jkR} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) = \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{jkR^3} \right) e^{-jkR} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_1) = 0$$

$$E_\theta = E_\theta^1 + E_\theta^2 = \zeta \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{jkR^3} \right) (\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2) e^{-jkR} = \zeta \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{jkR^3} \right) 2 \sin \vartheta_1 e^{-jkR}$$

$$H_\varphi = H_\varphi^1 + H_\varphi^2 = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} \right) (\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2) e^{-jkR} = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} \right) 2 \sin \vartheta_1 e^{-jkR}$$

Per l'unicità della soluzione delle equazioni di Maxwell nel semispazio superiore si ottiene lo stesso campo elettromagnetico del problema originario

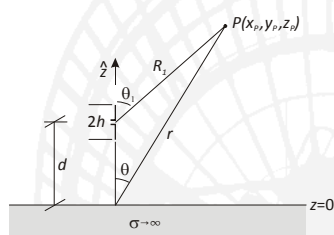
6/19



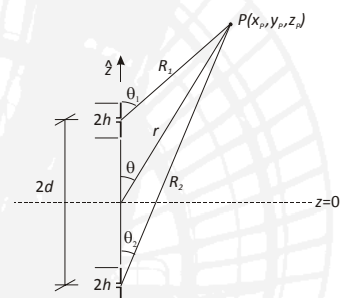
# ANTENNA FILARE CORTA VERTICALE SU PIANO DI MASSA

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

Determinare il campo a grande distanza prodotto da un'antenna filiforme corta di altezza  $2h$  in presenza di un piano conduttore elettrico perfetto



Problema originario



Problema equivalente

7/19



# ANTENNA FILARE CORTA VERTICALE SU PIANO DI MASSA

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

Si assume una distribuzione di corrente triangolare con valore massimo  $I_0$

$$E_{\theta}^1 = \frac{jk_0' I_0 h}{4\pi} \sin \vartheta \frac{e^{-jkR_1}}{R_1}$$

$$H_{\varphi}^1 = \frac{jk_0' h}{4\pi} \sin \vartheta \frac{e^{-jkR_1}}{R_1}$$


Sorgente reale

$$E_{\theta}^2 = \frac{jk_0' I_0 h}{4\pi} \sin \vartheta \frac{e^{-jkR_2}}{R_2}$$

$$H_{\varphi}^2 = \frac{jk_0' h}{4\pi} \sin \vartheta \frac{e^{-jkR_2}}{R_2}$$

Sorgente immagine

8/19



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

**Esercitazioni I**  
**Il principio delle immagini**

---

**ANTENNA FILARE CORTA VERTICALE SU PIANO DI MASSA: CAMPO ELETTRICO**

$$E_{\vartheta} = E_{\vartheta}^1 + E_{\vartheta}^2 = \frac{jk_0' I_0 h}{4\pi} \sin \vartheta \left( \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \right)$$

$$H_{\varphi} = H_{\varphi}^1 + H_{\varphi}^2 = \frac{jk I_0 h}{4\pi} \sin \vartheta \left( \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \right)$$

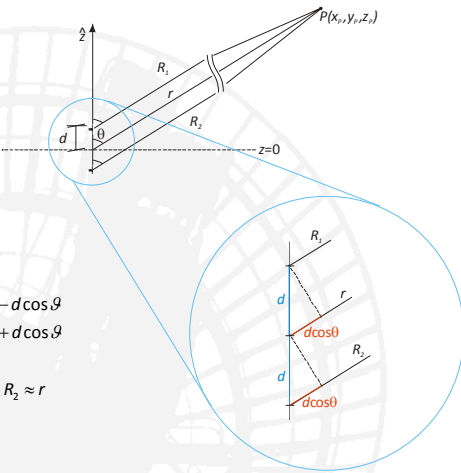
all'esponente:  $\begin{cases} R_1 \approx r - d \cos \vartheta \\ R_2 \approx r + d \cos \vartheta \end{cases}$

al denominatore:  $R_1 \approx R_2 \approx r$


Facendo uso delle formule di Eulero:

$$E_{\vartheta} = E_{\vartheta}^1 + E_{\vartheta}^2 = \frac{jk_0' I_0 h}{2\pi} \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \cos(kd \cos \vartheta)$$

$$H_{\varphi} = H_{\varphi}^1 + H_{\varphi}^2 = \frac{jk I_0 h}{2\pi} \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \cos(kd \cos \vartheta)$$



9/19



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

**Esercitazioni I**  
**Il principio delle immagini**

---

**ANTENNA FILARE CORTA VERTICALE SU PIANO DI MASSA: POTENZA RADIATA**

$$P_r = \frac{1}{2} \iint_{\text{emisfera}} E_{\vartheta} H_{\varphi}^* ds = \frac{\pi}{\zeta} \int_0^{\pi/2} |E_{\vartheta}|^2 r^2 \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{(kh)^2 |I_0|^2 \zeta}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2(kd \cos \vartheta) \sin^3 \vartheta d\vartheta$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(kd \cos \vartheta) \sin^3 \vartheta d\vartheta = \int_0^1 \cos^2(\alpha u) (1-u^2) du =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2\alpha} \sin(2\alpha) - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2\alpha u) u^2 du$$

$$\int_0^1 \cos(2\alpha u) u^2 du = \frac{1}{(2\alpha)^3} [2\alpha \cos(2\alpha) + (2\alpha^2 - 1) \sin(2\alpha)]$$


$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(kd \cos \vartheta) \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{3} + \frac{\sin(2kd)}{(2kd)^3} - \frac{\cos(2kd)}{(2kd)^2}$$

dove l'integrale è eseguito su una grande semisfera che contiene la sorgente reale

$z > 0$   
 $r \rightarrow \infty$

dove  
 $u = \cos \vartheta$   
 $\alpha = kd$

10/19



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Esercitazioni I

Il principio delle immagini

---

ANTENNA FILARE CORTA VERTICALE SU PIANO DI MASSA: POTENZA RADIATA

L'espressione finale per la potenza radiata è allora

$$P_r = \frac{(kh)^2 |I_0|^2 \zeta}{4\pi} \left[ \frac{1}{3} + \frac{\sin(2kd)}{(2kd)^3} - \frac{\cos(2kd)}{(2kd)^2} \right]$$


$kd \rightarrow \infty$  la potenza radiata è uguale a quella radiata da un'antenna filare corta isolata

$$P_r \rightarrow \frac{1}{3} \frac{(kh)^2 |I_0|^2 \zeta}{4\pi}$$

$kd \rightarrow 0$  la potenza radiata è il doppio di quella radiata dall'elemento isolato

$$P_r \rightarrow \frac{2}{3} \frac{(kh)^2 |I_0|^2 \zeta}{4\pi}$$

11/19



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Esercitazioni I

Il principio delle immagini

---

ANTENNA FILARE CORTA VERTICALE SU PIANO DI MASSA: DIRETTIVITÀ

$$E_\theta = \frac{jk\zeta l_0 h}{2\pi} \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r} \cos(kd \cos\theta)$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{(kh)^2 |I_0|^2 \zeta^2}{4\pi^2 r^2} \sin^2\theta \cos^2(kd \cos\theta)$$

$$P_r = \frac{(kh)^2 |I_0|^2 \zeta}{4\pi} \left[ \frac{1}{3} + \frac{\sin(2kd)}{(2kd)^3} - \frac{\cos(2kd)}{(2kd)^2} \right]$$

$$D = \frac{4\pi r^2 \frac{|E_\theta|^2}{\zeta^2}}{P_r} = \frac{2 \sin^2\theta \cos^2(kd \cos\theta)}{\frac{1}{3} + \frac{\sin(2kd)}{(2kd)^3} - \frac{\cos(2kd)}{(2kd)^2}}$$

La direttività massima si ha per  $\theta = \pi/2$

$$D_{\max} = \frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{\sin(2kd)}{(2kd)^3} - \frac{\cos(2kd)}{(2kd)^2}}$$

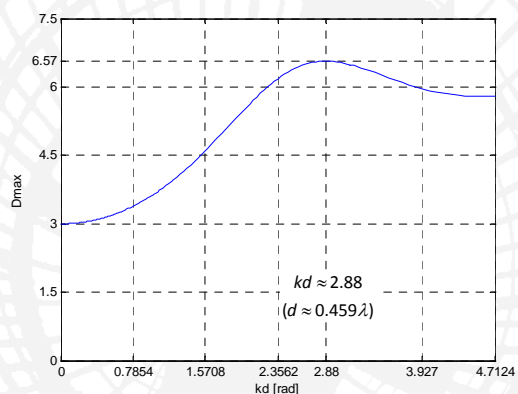
12/19



# ANTENNA FILARE CORTA VERTICALE SU PIANO DI MASSA: DIRETTIVITÀ

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

$$D_{\max} = \frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{\sin(2kd)}{(2kd)^3} - \frac{\cos(2kd)}{(2kd)^2}}$$



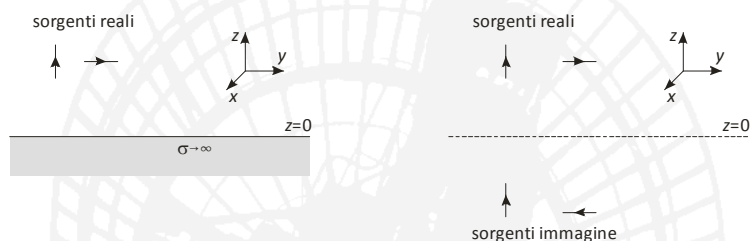
13/19



# DIPOLI IDEALI DIRETTI ARBITRARIAMENTE SU PIANO DI MASSA

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

Dipolo elettrico ideale con orientazione arbitraria



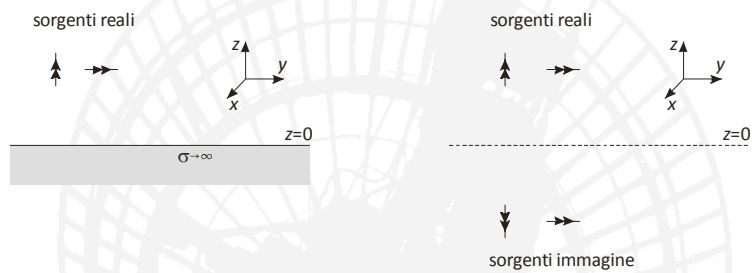
14/19



# DIPOLI IDEALI DIRETTI ARBITRARIAMENTE SU PIANO DI MASSA

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

Dipolo magnetico ideale con orientazione arbitraria



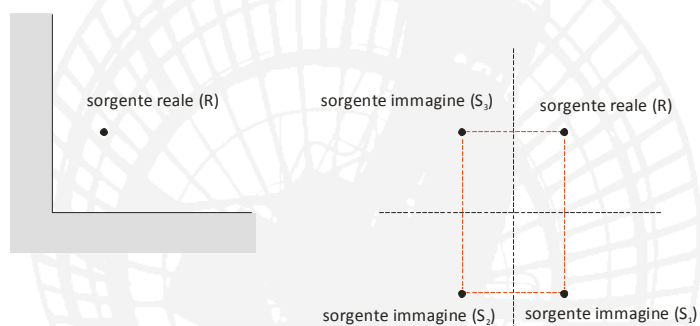
15/19



# IMMAGINI MULTIPLE: DUE SEMIPIANI PERPENDICOLARI

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

Ogni "specchio" riflette la sorgente reale e tutte le immagini prodotte dall'altro specchio



3 sorgenti immagine!!

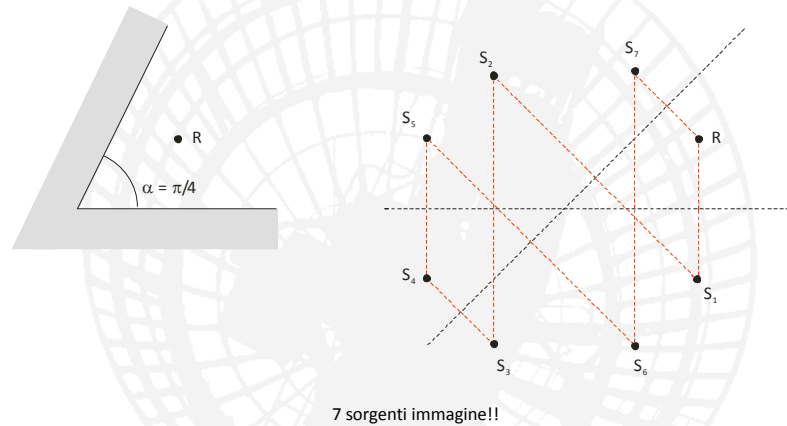
16/19





# IMMAGINI MULTIPLE: DUE SEMIPIANI A $\pi/4$

## Esercitazioni I Il principio delle immagini

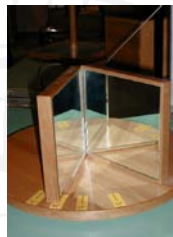
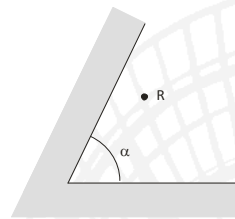


17/19



# IMMAGINI MULTIPLE: ANGOLO $\alpha$ TRA I DUE SEMIPIANI

## Esercitazioni I Il principio delle immagini



$$\alpha = \frac{\pi}{n} \quad n=1,2,\dots$$

$n$  dispari ed  $R$  non sulla bisettrice:  $2n$  immagini  
 $n$  dispari ed  $R$  sulla bisettrice:  $2(n-1)$  immagini  
 $n$  pari:  $2(n-1)$  immagini

$$\alpha \neq \frac{\pi}{n} \quad n=1,2,\dots$$

Il numero di sorgenti immagine è infinito: il campo totale è esprimibile mediante una serie a segni alterni con il termine generale che decresce e quindi convergente

18/19

IMMAGINI MULTIPLE: LO SPECCHIO DEL BARBIERE

Esercitazioni I  
Il principio delle immagini

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Il numero di sorgenti immagine è infinito!!

19/19