



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE  
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V  
Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro


## LEZIONE V

### DIPOLO MAGNETICO, SPIRA DI CORRENTE, SORGENTE DI HUYGENS E RADIOGONIOMETRO

Corso di  
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni  
Università di Firenze  
e-mail: [giuseppe.pelosi@unifi.it](mailto:giuseppe.pelosi@unifi.it)  
web: <http://www.cem.unifi.it/>

1/16



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE  
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

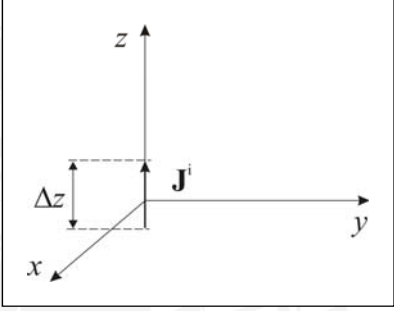
Lezione V  
Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro

### DIPOLO ELETTRICO CORTO (dec)

$$\mathbf{E}^e = E_r^e \hat{r} + E_\theta^e \hat{\theta} + E_\phi^e \hat{\phi}$$

$$\mathbf{H}^e = H_r^e \hat{r} + H_\theta^e \hat{\theta} + H_\phi^e \hat{\phi}$$

$$\begin{cases} E_r^e = \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos \vartheta e^{-jkr} \\ E_\theta^e = \zeta \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin \vartheta e^{-jkr} \\ E_\phi^e = 0 \\ H_r^e = 0 \\ H_\theta^e = 0 \\ H_\phi^e = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \vartheta e^{-jkr} \end{cases}$$



$\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3} \rightarrow$  campi vicini o reattivi (trascurabili per  $r \gg \lambda$ )  
 $\frac{1}{r} \rightarrow$  campi lontani o radiativi

2/16



DIPOLO ELETTRICO CORTO (dec)

Campi radiativi

per  $r \gg \lambda$

$$\mathbf{E}^e = E_\theta^e \hat{\theta} = jk\zeta \frac{I\Delta z}{4\pi} \sin\theta e^{-jkr} \hat{\theta}$$

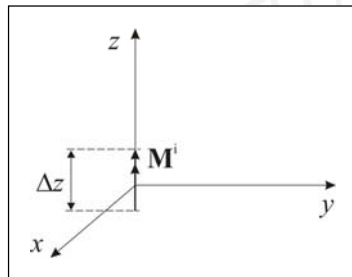
$$\mathbf{H}^e = H_\phi^e \hat{\phi} = \frac{\hat{r} \times \mathbf{E}^e}{\zeta} = \frac{E_\theta^e}{\zeta} \hat{\phi} = jk \frac{I\Delta z}{4\pi} \sin\theta e^{-jkr} \hat{\phi}$$

3/16



DIPOLO MAGNETICO CORTO (dmc)

Applicando il principio di dualità di Babinet



$$\mathbf{J}^i \rightarrow \mathbf{M}^i$$

$$I \rightarrow I_m$$

$$\mathbf{E}^e \rightarrow \mathbf{H}^m$$

$$\mathbf{H}^e \rightarrow -\mathbf{E}^m$$

$$\mu \rightarrow \varepsilon$$


$$\varepsilon \rightarrow \mu$$

$$\begin{cases} E_r^e = \zeta \frac{I\Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos\theta e^{-jkr} \\ E_\theta^e = \zeta \frac{I\Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin\theta e^{-jkr} \\ E_\phi^e = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} H_r^m = \frac{1}{\zeta} \frac{I_m \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos\theta e^{-jkr} \\ H_\theta^m = \frac{1}{\zeta} \frac{I_m \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin\theta e^{-jkr} \\ H_\phi^m = 0 \end{cases}$$

4/16



TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE  
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V  
Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro

---


DIPOLLO MAGNETICO CORTO (dmc)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}' &\rightarrow \mathbf{M}' \\
 I &\rightarrow I_m \\
 \mathbf{E}^e &\rightarrow \mathbf{H}^m \\
 \mathbf{H}^e &\rightarrow -\mathbf{E}^m \\
 \mu &\rightarrow \varepsilon \\
 \varepsilon &\rightarrow \mu
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_r^e = 0 \\ H_\theta^e = 0 \\ H_\phi^e = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \vartheta e^{-jkr} \end{cases}$$
 $\Rightarrow$ 

$$\begin{cases} E_r^m = 0 \\ E_\theta^m = 0 \\ E_\phi^m = -\frac{I_m \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \vartheta e^{-jkr} \end{cases}$$

5/16



TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE  
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V  
Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro

---

DIPOLLO MAGNETICO CORTO (dmc)

Campi radiativi

per  $r \gg \lambda$

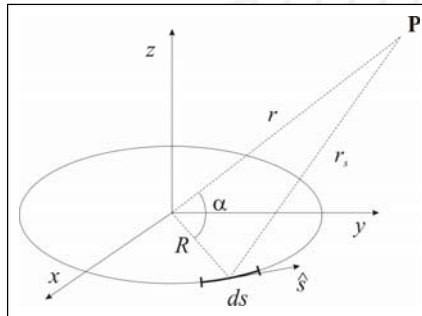
$$\mathbf{E}^m = E_\phi^m \hat{\phi} = -jk \frac{I_m \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta e^{-jkr} \hat{\phi}$$

$$\mathbf{H}^m = H_\theta^m \hat{\theta} = \frac{\hat{r} \times \mathbf{E}^m}{\zeta} = -\frac{E_\phi^m}{\zeta} \hat{\theta} = j \frac{k I_m \Delta z}{4\pi r} \sin \vartheta e^{-jkr} \hat{\theta}$$

6/16



ANTENNA A LOOP (a spira o a telaio)



$$2\pi R \ll \lambda$$

I costante spazialmente e con dipendenza temporale di tipo armonico

$$d\mathbf{A}^{\ell}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I_{\ell} ds}{4\pi} \frac{e^{-jk r_s}}{r_s} \hat{s}$$

$$\mathbf{A}^{\ell}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I_{\ell}}{4\pi} \oint_C \frac{e^{-jk r_s}}{r_s} \hat{s} ds$$

7/16



ANTENNA A LOOP (a spira o a telaio)

Sviluppo multipolare di Stratton

$$\frac{e^{-jk r_s}}{r_s} = -jk \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kR) h_n^{(2)}(kr) P_n(\cos \alpha)$$

$P_n(\cos \alpha)$

polinomi di Legendre

$j_n(kR)$

funzioni sferiche di Bessel di prima specie

$h_n^{(2)}(kr)$

funzioni sferiche di Hankel di seconda specie

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{A}^{\ell} = \mathbf{A}_0^{\ell} + \mathbf{A}_1^{\ell} + \mathbf{A}_2^{\ell} + \dots$$


$$\mathbf{A}_0^{\ell} = \frac{\mu I_{\ell}}{4\pi} \int_0^{2\pi} -jk [j_0(kR) h_0^{(2)}(kr) P_0(\cos \alpha)] R \hat{\phi} d\phi$$

$$\mathbf{A}_1^{\ell} = \frac{\mu I_{\ell}}{4\pi} \int_0^{2\pi} -jk [3j_1(kR) h_1^{(2)}(kr) P_1(\cos \alpha)] R \hat{\phi} d\phi$$

$\vdots$

$$\mathbf{E}^{\ell} = \mathbf{E}_0^{\ell} + \mathbf{E}_1^{\ell} + \mathbf{E}_2^{\ell} + \dots$$

8/16



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V

Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro

ANTENNA A LOOP (a spira o a telaio)

Dato che la spira è circolare  $\mathbf{A}_0^e = 0$

$$\mathbf{E}_1^e = -j\omega \left( \mathbf{A}_1^e + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_1^e}{k^2} \right)$$


Fermendosi al termine  $\mathbf{A}_1^e$  (spira piccola) si ha:

$$\mathbf{H}_1^e = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}_1^e$$

$$\begin{cases} H_{1r}^e = \frac{j\omega\mu(\pi R^2)I_e}{2\pi} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos\vartheta e^{-jkr} \\ H_{1\vartheta}^e = \frac{j\omega\mu(\pi R^2)I_e}{4\pi} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin\vartheta e^{-jkr} \\ H_{1\phi}^e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{1r}^e = 0 \\ E_{1\vartheta}^e = 0 \\ E_{1\phi}^e = -\frac{j\omega\mu(R^2\pi)I_e}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta e^{-jkr} \end{cases}$$

9/16



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata  
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V

Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro

ANTENNA A LOOP (a spira o a telaio)

Dipolo magnetico corto diretto come z

$$\begin{cases} H_r^m = \frac{1}{\zeta} \frac{I_m \Delta z}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos\vartheta e^{-jkr} \\ H_\vartheta^m = \frac{1}{\zeta} \frac{I_m \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin\vartheta e^{-jkr} \\ H_\phi^m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r^m = 0 \\ E_\vartheta^m = 0 \\ E_\phi^m = -\frac{I_m \Delta z}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta e^{-jkr} \end{cases}$$

Spira di corrente elettrica sul piano xy

$$\begin{cases} H_{1r}^e = \frac{1}{\zeta} \frac{j\omega\mu(\pi R^2)I_e}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos\vartheta e^{-jkr} \\ H_{1\vartheta}^e = \frac{1}{\zeta} \frac{j\omega\mu(\pi R^2)I_e}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin\vartheta e^{-jkr} \\ H_{1\phi}^e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{1r}^e = 0 \\ E_{1\vartheta}^e = 0 \\ E_{1\phi}^e = -\frac{j\omega\mu(R^2\pi)I_e}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta e^{-jkr} \end{cases}$$

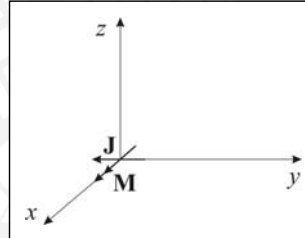
Dal confronto si ha:

$$I_m \Delta z = j\omega\mu \Delta s I_e \quad \text{con} \quad \Delta s = \pi R^2$$

10/16



#### SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)



$$I_m = \zeta I$$

Il campo irradiato può essere trovato come somma dei campi irradiati dal d.e.c. e dal d.m.c

$$\mathbf{E}^H(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^m(\mathbf{r})$$

11/16




#### SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)

La sorgente di Huygens (antenna a loop più dipolo elettrico corto) può essere utilizzata come radiogoniometro per individuare la direzione di provenienza di una radiazione elettromagnetica

Radiogoniometro aeronautico (1944)



12/16

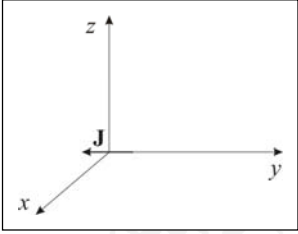


TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE  
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V  
Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro

---

**SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)**



Dipolo elettrico diretto come -y

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I \Delta y}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \quad \text{con} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

↓

$$\hat{y} = \sin \vartheta \sin \phi \hat{r} + \cos \vartheta \sin \phi \hat{\vartheta} + \cos \phi \hat{\phi}$$


$$\mathbf{A}^e(\mathbf{r}) = \frac{\mu I \Delta y}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (-\hat{y}) = \frac{\mu I \Delta y}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (-\sin \vartheta \sin \phi \hat{r} - \cos \vartheta \sin \phi \hat{\vartheta} - \cos \phi \hat{\phi})$$

$$\mathbf{E}^e = -j\omega \mathbf{A}^e + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}^e}{j\omega \epsilon \mu}$$

In campo lontano ( $kr \gg \lambda$ )

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) \approx -j\omega \frac{\mu I \Delta y}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (-\cos \vartheta \sin \phi \hat{\vartheta} - \cos \phi \hat{\phi})$$

13/16

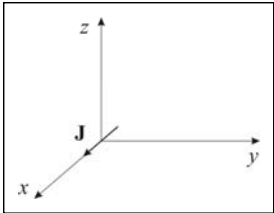


TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE  
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V  
Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro

---

**SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)**



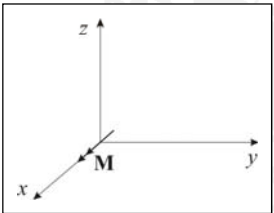
Dipolo elettrico diretto come x

$$\hat{x} = \sin \vartheta \cos \phi \hat{r} + \cos \vartheta \cos \phi \hat{\vartheta} - \sin \phi \hat{\phi}$$

campo lontano

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = -j\omega \frac{\mu I \Delta x}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\cos \vartheta \cos \phi \hat{\vartheta} - \sin \phi \hat{\phi})$$

Dipolo magnetico diretto come x (applicando il principio di dualità o di Babinet)




campo lontano

$$\mathbf{H}^m(\mathbf{r}) = -j\omega \frac{\epsilon I_m \Delta x}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\cos \vartheta \cos \phi \hat{\vartheta} - \sin \phi \hat{\phi})$$

↓

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = \zeta \mathbf{H}^m(\mathbf{r}) \times \hat{r} = -j\omega \zeta \frac{\epsilon I_m \Delta x}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (-\sin \phi \hat{\vartheta} - \cos \phi \cos \vartheta \hat{\phi})$$

14/16




TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE  
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V  
Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro


---

SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)

$I_m = \zeta I$   


$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = j\omega \frac{\mu I \Delta y}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\cos \vartheta \sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \phi \hat{\phi}) = j\omega \frac{\mu I_m \Delta y}{\zeta 4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\cos \vartheta \sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \phi \hat{\phi})$$


$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = j\omega \zeta \frac{\varepsilon I_m \Delta x}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \phi \cos \vartheta \hat{\phi})$$

$\omega \zeta \varepsilon = \frac{\omega \mu}{\zeta} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = k$ 


$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = jk \frac{I_m \Delta y}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\cos \vartheta \sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \phi \hat{\phi})$$

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = j \frac{I_m \Delta x}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \phi \cos \vartheta \hat{\phi})$$

15/16



TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE  
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione V  
Dipolo magnetico, spira di corrente,  
sorgente di Huygens e radiogoniometro

---

SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)

Campo totale

 $\Delta x = \Delta y = \Delta l$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^H(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = \\ &= jk \frac{I_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\cos \vartheta \sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \phi \hat{\phi}) + j \frac{I_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \phi \cos \vartheta \hat{\phi}) = \\ &= jk \frac{I_m \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \vartheta) (\sin \hat{\phi} \hat{\vartheta} + \cos \phi \hat{\phi}) \end{aligned}$$

16/16