LEZIONE IV
DIPOLO ELETTRICO CORTO
DAL POTENZIALE AI CAMPI

Corso di
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
e-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
web: *http://www.cem.unifi.it/*

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Il potenziale vettore associato al dipolo elementare è dunque

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_z(r)\hat{z} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\Delta z}{r}e^{-jkr}\,\hat{z}}$$

Dal potenziale ai campi elettromagnetici

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTRICO

Riscriviamo il potenziale vettore in coordinate sferiche e ricordando che è diversa da zero solo la componente lungo zeta si ha:

$$\mathbf{A}(r,\theta,\phi)=\mathbf{A}(r,\theta)=A_z(r)\cos\theta\,\hat{r}-A_z(r)\sin\theta\,\hat{\theta}=$$

$$=\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\mathrm{e}^{-jkr}\right]\cos\theta\,\hat{r}-\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\mathrm{e}^{-jkr}\right]\sin\theta\,\hat{\theta}=A_r(r,\theta)\hat{r}+A_\vartheta(r,\theta)\hat{\theta}$$

I singoli termini possono essere scritti come segue:

$$\boxed{\begin{aligned}&A_r(r,\vartheta)=A_z(r)\cos\vartheta=\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\Delta z}{r}e^{-jkr}\right]\cos\vartheta\\&A_\vartheta(r,\vartheta)=-A_z(r)\sin\vartheta=-\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\Delta z}{r}e^{-jkr}\right]\sin\vartheta\\&A_\phi=0\end{aligned}}$$

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA
Lezione IV
Dipolo elettrico corto
Dal potenziale ai campi

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTRICO

Riscriviamo la divergenza in coordinate sferiche

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right)+\underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi}_{=0}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2A_r(r,\theta)\right]}_{*}+\underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\theta(r,\theta)\sin\theta\right]}_{**}$$

Sostituiamo le precedenti espressioni del potenziale vettore secondo r e θ otteniamo:

$$*)\quad -\frac{\mu}{4\pi}I\Delta z e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$**)\quad \frac{\mu}{4\pi}I\Delta z e^{-jkr}\frac{2}{r}\cos\theta$$

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{\mu}{4\pi}I\Delta z e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTRICO

Riscriviamo anche il gradiente della divergenza in coordinate sferiche ricordando la non dipendenza da ϕ

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})=\nabla g=\frac{\partial g}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\hat{\theta}+\underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}}_{=0}\hat{\phi}=$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\mu}{4\pi}I\Delta z\,e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta\right]}_{*}\hat{r}+\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{\mu}{4\pi}I\Delta z\,e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta\right]}_{**}\hat{\theta}$$

Sostituiamo le precedenti espressioni della divergenza del potenziale vettore otteniamo:

$$*)\quad \frac{\mu}{4\pi}I\Delta z e^{-jkr}\left(-\frac{k^2}{r}+\frac{j2k}{r^2}+\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{r}$$

$$**)\quad \frac{\mu}{4\pi}I\Delta z e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\boxed{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})=\frac{\mu}{4\pi}I\Delta z e^{-jkr}\left[\left(-\frac{k^2}{r}+\frac{j2k}{r^2}+\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{r}+\left(\frac{jk}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\theta}\right]}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTRICO

Riepilogando le operazioni svolte si ha:

$$\mathbf{E}=-j\omega\mathbf{A}+\frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$A_r(r,\theta)=A_z(r)\cos\theta=\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}e^{-jkr}\right]\cos\theta$$

$$A_\theta(r,\theta)=-A_z(r)\sin\theta=-\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}e^{-jkr}\right]\sin\theta$$

$$A_\phi=0$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})=\frac{\mu}{4\pi}I\Delta z e^{-jkr}\left[\left(-\frac{k^2}{r}+\frac{j2k}{r^2}+\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{r}+\left(\frac{jk}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTRICO

Il campo elettrico può essere visto secondo le sue componenti in coordinate sferiche

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi)=E_r\hat{r}+E_\theta\hat{\theta}+E_\phi\hat{\phi}$$

Ricordando la relazione esistente tra potenziale vettore e campo elettrico

$$\mathbf{E}=-j\omega\mathbf{A}+\frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

Sostituendo le espressioni viste precedentemente per il potenziale vettore si ottiene l'espressione del campo elettrico in coordinate sferiche generato da un dipolo elettrico elementare

$$\boxed{\begin{cases} E_r=\zeta\dfrac{I\Delta z}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \\ E_\vartheta=\zeta\dfrac{I\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \\ E_\phi=0 \end{cases}}$$

Dove: $\zeta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ rappresenta l'impedenza caratteristica dello spazio libero.

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione IV
Dipolo elettrico corto
Dal potenziale ai campi

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO MAGNETICO

Ricordando la relazione esistente tra potenziale vettore e campo Magnetico **H**

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

e ricordando l'espressione del potenziale vettore **A** in coordinate sferiche

$$\begin{cases} A_r(r,\theta)=A_z(r)\cos\theta=\left[\dfrac{\mu}{4\pi}\dfrac{I\Delta z}{r}\mathrm{e}^{-jkr}\right]\cos\theta \\ A_\theta(r,\theta)=-A_z(r)\sin\theta=-\left[\dfrac{\mu}{4\pi}\dfrac{I\Delta z}{r}\mathrm{e}^{-jkr}\right]\sin\theta \\ A_\phi=0 \end{cases}$$

e l'espressione assunta dal rotore in coordinante sferiche,

$$\nabla\times\mathbf{A}=\underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\phi}A_\theta\right]}_{=0}\hat{r}+\underbrace{\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_r-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]}_{=0}\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\hat{\phi}=$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\hat{\phi}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO MAGNETICO

Per sostituzione si ottiene l'espressione del rotore del potenziale vettore in coordinate sferiche

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu I\,\Delta z}{4\pi}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\, \mathrm{e}^{-jkr}\,\hat{\phi}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} = \frac{I\,\Delta z}{4\pi}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\, \mathrm{e}^{-jkr}\,\hat{\phi}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\vartheta = 0 \\ H_\phi = \dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \end{cases}}$$

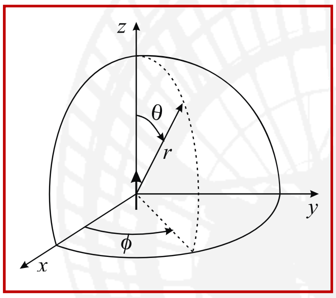
TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione IV
Dipolo elettrico corto
Dal potenziale ai campi

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTROMAGNETICO

$$\mathbf{E} = E_r\hat{r} + E_\vartheta\hat{\vartheta} + E_\phi\hat{\phi}$$
$$\mathbf{H} = H_r\hat{r} + H_\vartheta\hat{\vartheta} + H_\phi\hat{\phi}$$



$$\begin{cases} E_r = \zeta\dfrac{I\Delta z}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\exp(-jkr) \\ E_\vartheta = \zeta\dfrac{I\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\exp(-jkr) \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\vartheta = 0 \\ H_\phi = \dfrac{I\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\exp(-jkr) \end{cases}$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi f\frac{1}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ad una distanza radiale $r_0=\lambda/2\pi$ o analogamente ad un prodotto $kr_0 = 1$, ricordando l'espressione assunta dalla costante di propagazione $k=\omega(\varepsilon\mu)^{1/2}=2\pi f\, 1/c=2\pi/\lambda$, si ha l'uguaglianza delle ampiezze dei termini all'interno delle parentesi tonde

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

POTENZA ASSOCIATA AL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Vettore di Poynting

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*=\frac{1}{2}\left(E_\theta H_\phi^*-E_\phi H_\theta^*\right)\hat{r}+\frac{1}{2}\left(-E_r H_\phi^*+E_\phi H_r^*\right)\hat{\theta}+\frac{1}{2}\left(E_r H_\theta^*-E_\theta H_r^*\right)\hat{\phi}$$

$$S_r=\zeta\frac{I^2\Delta z^2}{32\pi^2}\sin^2\theta\left(\frac{k^2}{r^2}-j\frac{1}{kr^5}\right)$$

$$S_\theta=\zeta\frac{I^2\Delta z^2}{16\pi^2}\sin\theta\cos\theta\left(-j\frac{k}{r^3}-j\frac{1}{kr^5}\right)$$

$$S_\phi=0$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

POTENZA ASSOCIATA AL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Flusso di potenza attraverso una sfera di raggio *r* centrata nell'origine

$$P^e=\oiint_S \mathbf{S}\cdot\hat{r}\,ds=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(S_r)\,d\phi\, d\theta=\int_0^{2\pi}d\phi\left[\int_0^{\pi}S_r\; r^2\sin\theta\, d\theta\right]=$$
$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\zeta\frac{I^2\Delta z^2}{32\pi^2}\sin^2\theta\left(\frac{k^2}{r^2}-j\frac{1}{kr^5}\right)r^2\sin\theta\, d\theta=$$
$$=\underbrace{\frac{\pi}{3}\zeta|I|^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2}_{\mathrm{Re}\{P^e\}=P_r^e}-\underbrace{j\frac{1}{24\pi^2}\zeta|I|^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{r}\right)^3}_{\mathrm{Re}\{P^e\}=P_i^e}$$

Re{Pᵉ} è la potenza attiva radiata dal dipolo a cui contribuiscono soltanto le componenti radiative del campo, cioè quelle che decadono come 1/r

Im{Pᵉ} è la potenza reattiva immagazzinata nel campo elettromagnetico a cui contribuiscono le componenti reattive del campo, cioè quelle che decadono come $1/r^2$ e come $1/r^3$

RESISTENZA DI RADIAZIONE

$$\boxed{P^e = \frac{\pi}{3}\zeta |I|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{3}k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{4\pi}}$$

$$P_r^{(e)} = \frac{1}{3}k^2 \zeta \frac{|I|^2 \Delta z^2}{4\pi} = \frac{1}{2}R_r^{(e)}|I|^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_r^{(e)} = \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 \frac{2}{3}\pi\zeta}$$

resistenza di radiazione

CAMPO ELETTROMAGNETICO E DISTANZA RADIALE

$$\text{se}\left(kr_0 = 1 \ \text{ ovvero } \ r_0 = \frac{\lambda}{2\pi}\right) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{P^e\} = P_r^e = \frac{\pi}{3}\zeta |I|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 \\ \mathrm{Im}\{P^e\} = P_i^e = -j\frac{1}{24\pi^2}\zeta |I|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^3 = -j\frac{\pi}{3}\zeta |I|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 \end{cases}$$

La potenza radiata dal dipolo e quella reattiva immagazzinata nelle sue vicinanze si uguagliano

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

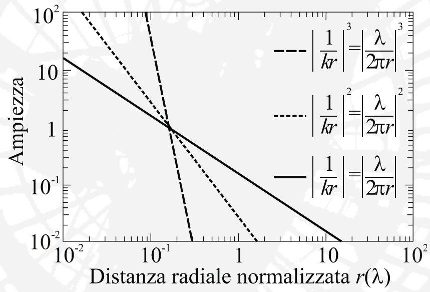
Lezione IV
Dipolo elettrico corto
Dal potenziale ai campi

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTROMAGNETICO E DISTANZA RADIALE

Per distanze $r < r_0$ ($kr < 1$) prevalgono i termini del campo elettrico e magnetico che decadono come $1/r^2$ e $1/r^3$; tali termini divengono predominanti per $r << r_0$ ($kr << 1$)

Per distanze $r > r_0$ ($kr > 1$) prevalgono i termini del campo elettrico e magnetico che decadono come $1/r$; tali termini divengono predominanti per $r >> r_0$ ($kr >> 1$)



15/18

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione IV
Dipolo elettrico corto
Dal potenziale ai campi

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

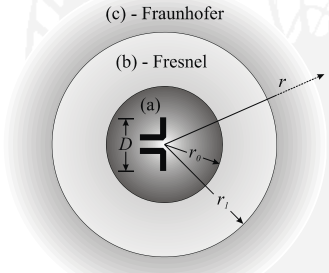
CAMPO ELETTROMAGNETICO E DISTANZA RADIALE

Ai fini pratici lo spazio attorno all'antenna è qualitativamente suddivisibile in tre regioni:

a) Campo vicino reattivo

b) Campo vicino radiato (Fresnel)

c) Campo lontano radiato (Fraunhofer)



Dipolo elettrico elementare:

$$r_0 = \frac{\lambda}{2\pi}$$
$$r_1 = \text{non esiste}$$

Espressione generale:

$$r_0 = 0.62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}}$$
$$r_1 = \frac{2D^2}{\lambda}$$

16/18

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO LONTANO

Per problemi di antenna e quindi di collegamento radio siamo interessati alla propagazione delle onde elettromagnetiche a grande distanza ($r >> r_0$ e $r >> \lambda$)

$$\begin{cases} E_r = E_\phi = H_r = H_\vartheta = 0 \\ E_\vartheta = jk\zeta \dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\dfrac{e^{-jkr}}{r}\sin\vartheta \\ H_\phi = jk\dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\dfrac{e^{-jkr}}{r}\sin\vartheta = \dfrac{E_\vartheta}{\zeta} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi) = E_\vartheta(r,\theta)\hat{\theta}$$

$$\mathbf{H}(r,\theta,\phi) = H_\phi(r,\theta)\hat{\phi} = \frac{E_\vartheta(r,\theta)}{\zeta}\hat{\phi}$$

TEORIA E TECNICA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE
PROPAGAZIONE RADIATA E PROPAGAZIONE GUIDATA

Lezione IV
Dipolo elettrico corto
Dal potenziale ai campi

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

ESEMPIO

Telefonia mobile:

f = 800 MHz => λ = 37.5 cm
$D \approx$ 10 cm

$$r_0 = 0.62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} = 0.62\sqrt{\frac{10^3}{37.5}} \cong 3.2\text{cm}$$

$$r_1 = \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2\cdot 10^2}{37.5} \cong 5.33\text{cm}$$

$D \approx$ 10cm

Campo lontano, $r >> r_1$ e $r >> \lambda$

Per r > 375 cm si può già dire di essere nelle condizioni di campo lontano

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi) = E(r,\theta)\hat{\theta} = jk\zeta\frac{I\,\Delta z}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\vartheta\,\hat{\theta}$$

$$\mathbf{H}(r,\theta,\phi) = H(r,\theta)\hat{\phi} = \frac{E(r,\theta)}{\zeta}\hat{\phi}$$