LEZIONE XI

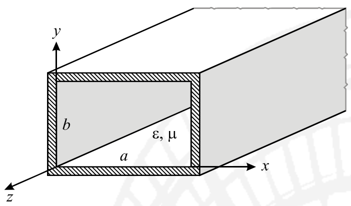
GUIDE D'ONDA RETTANGOLARI

Corso di
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: *http://www.cem.unifi.it/*

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DEL CAMPO



Assumendo una variazione lungo la direzione *z* del tipo:

$$e^{-jk_z z} \quad \text{dove} \quad k_z = \beta_z - j\alpha_z$$

Le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti diventano:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + jk_z H_y = j\omega\varepsilon E_x$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + jk_z H_x = -j\omega\varepsilon E_y$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + jk_z E_y = -j\omega\mu H_x$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + jk_z E_x = j\omega\mu H_y$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z$$

EQUAZIONI DEL CAMPO

Equazioni delle onde:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - k_z^2 E_z = -\omega^2 \mu\varepsilon E_z$$
$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - k_z^2 H_z = -\omega^2 \mu\varepsilon H_z$$

Si ottiene:

$$H_x = -j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} + j\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$
$$H_y = -j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} - j\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$
$$E_x = -j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} - j\frac{\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$
$$E_y = -j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\frac{\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Tutte le componenti del campo sono esprimibili per mezzo delle componenti lungo *z*

$$k_c^2 = k^2 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_z^2$$
$$k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$$

MODI DI PROPAGAZIONE

Il campo elettromagnetico all'interno della guida può essere rappresentato mediante due insiemi infiniti di configurazioni di campo (modi di propagazione):

Modi TE o modi H (trasversi elettrici) $E_z = 0$

Modi TM o modi E (trasversi magnetici) $H_z = 0$

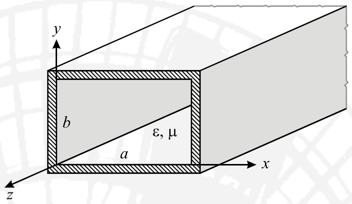
MODI TM (O MODI E)

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XI
Guide d'onda rettangolari

MODI TM (E)

$H_z = 0$



$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - k_{zE}^2 E_z = -\omega^2 \mu\varepsilon E_z$$

Condizioni al contorno:

$E_z = 0$ per $x = 0, x = a, y = 0, y = b$

Si assume la seguente forma della soluzione:

$$E_z(x,y) = X(x)Y(y)e^{-jk_{zE}z} = (C_1 \cos k_x x + C_2 \sin k_x x)(C_3 \cos k_y y + C_4 \sin k_y y)e^{-jk_{zE}z}$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

Modi TM (E)

Scelta delle costanti al fine di soddisfare le condizioni al contorno sulle pareti della guida:

$$C_1 = 0$$
$$C_3 = 0$$
$$k_y = \frac{n\pi}{b} \;\; ; \;\; n = 1,2,\ldots$$
$$k_x = \frac{m\pi}{a} \;\; ; \;\; m = 1,2,\ldots$$

$$E_z = X(x)Y(y)e^{-jk_{zE}z} = C\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zE}z}$$
$$C = C_2 C_4$$

A ciascuna coppia (m,n) è associato un modo TM in guida rettangolare che si indica con TM_{mn}

Poiché: $k_{cE} \equiv (k_{cE})_{mn} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

La costante di propagazione per i modi TM in guida rettangolare diventa:

$$k_{zE} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left[k_x^2 + k_y^2\right]} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]} = \sqrt{k^2 - (k_{cE})_{mn}^2}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XI
Guide d'onda rettangolari

Modi TM (E)

$$\omega^2\mu\varepsilon << 1 \Rightarrow k_z \approx \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = -j\alpha_z$$

La costante di propagazione è immaginaria: non ci sono modi che si propagano

$$\omega^2\mu\varepsilon > \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \Rightarrow k_z = \beta_z$$

La costante di propagazione è reale: il modo si propaga con costante di attenuazione nulla (in assenza di perdite nel conduttore e nel dielettrico)

$$\omega_{cE} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Pulsazione di cut-off al di sotto della quale il modo non si propaga

$$k_{cE} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega_{cE}$$

Numero d'onda di cut-off (o di taglio)

MODI TM (E)

Per $\omega > \omega_{cE}$

costante di fase $\beta_{zE} = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \omega_{cE}^2 \mu\varepsilon}$

$$v_{zE} = \frac{\omega}{\beta_{zE}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\omega_{cE}^2/\omega^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_{cE}^2/\omega^2}}$$

velocità di fase del generico modo
(c è la velocità della luce nel vuoto)

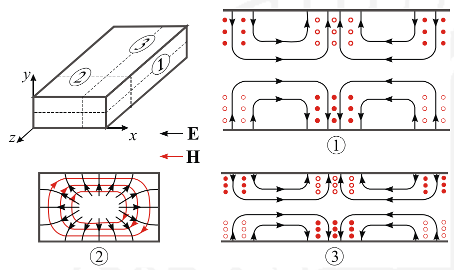
La velocità di fase dell'onda nella guida è maggiore della velocità della luce nel vuoto. Quando la pulsazione cresce oltre la pulsazione di cut-off la velocità di fase decresce tendendo alla velocità della luce nel vuoto

Lunghezza d'onda in guida associata al generico modo

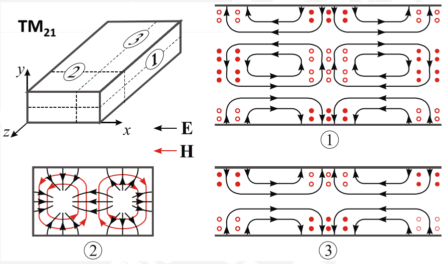
$$\lambda_{zE} = \frac{2\pi}{\beta_{zE}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \omega_{cE}^2 \mu\varepsilon}}$$

MODI TM (E)

TM_{11} Primo modo TM



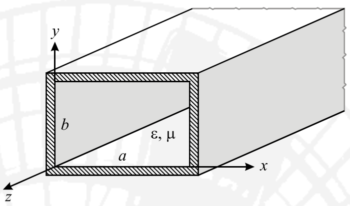
TM_{21}



MODI TE (O MODI H)

Modi TE (H)

$$E_z = 0$$



$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - k_{zH}^2 H_z = -\omega^2 \mu \varepsilon H_z$$

$$H_z = C \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jk_{zH} z}$$

A ciascuna coppia (m,n) è associato un modo TE in guida rettangolare che si indica con TE_{mn}

Per i modi TE è possibile scegliere m=0 ed n≠0 oppure m ≠ 0 ed n=0

Modi TE (H)

$$k_{zH} = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$ Costante di propagazione del generico modo

$$v_{zH} = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_{cH}^2/\omega^2}}$$ Velocità di fase del modo

$$\omega_{cH} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$ Pulsazione di cut-off del modo

$$\lambda_{zH} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \omega_{cH}^2 \mu\varepsilon}}$$ Lunghezza d'onda del modo

DISPERSIONE PER I MODI TE E TM

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Supponiamo ε,μ reali (assenza di perdite) e definiamo

$$\omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$
$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$
$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Si possono avere due casi:

1) $k > k_c \;\; (\omega > \omega_c \quad \lambda < \lambda_c)$

in generale $k_z = \beta_z - j\alpha_z$

in questo caso $k_z = \beta_z = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - k_c^2}$

La costante di propagazione è reale positiva e descrive quindi un fenomeno propagativo privo di attenuazione

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Andamento della costante di propagazione in funzione della pulsazione (diagramma di dispersione o di Brillouin)

$$k_z^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - k_c^2$$
$$\omega^2 \varepsilon\mu - k_z^2 = k_c^2$$
$$\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - \frac{k_z^2}{k_c^2} = 1$$

Equazione di una iperbole equilatera con asintoto per $\omega \to \infty$

Inoltre:

$$Z_{0H} = \frac{\omega\mu}{k_{zH}} \qquad \lim_{\omega\to\infty} Z_{0H} = \zeta$$

cioè l'impedenza di modo tende all'impedenza caratteristica dello spazio libero.

La velocità di fase e quella di gruppo sono:

$$v_z = \frac{\omega}{k_{zH}} \qquad v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k_{zH}} = \frac{k_{zH}}{\omega} c^2$$

ed è facile verificare che

$$v_z v_g = c^2$$

2) $k < k_c \quad (\omega < \omega_c \quad \lambda > \lambda_c)$

$$k_z = -j\alpha_z = -j\sqrt{k_c^2 - k^2}$$

$$\alpha_z^2 = k_c^2 - \omega^2 \varepsilon\mu$$

$$\frac{\alpha_z^2}{k_c^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon\mu}{\omega_c^2 \varepsilon\mu} = 1$$

$$\frac{\alpha_z^2}{k_c^2} + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 1$$

il diagramma di Brillouin è quindi una ellisse.

Inoltre: $Z_{0H} = \dfrac{\omega\mu}{k_{zH}} = \dfrac{\omega\mu}{-j\alpha_z} = j\dfrac{\omega\mu}{\alpha_z}$

Risultano immaginarie anche

- la velocità di gruppo
- la velocità di fase
- la lunghezza d'onda in guida

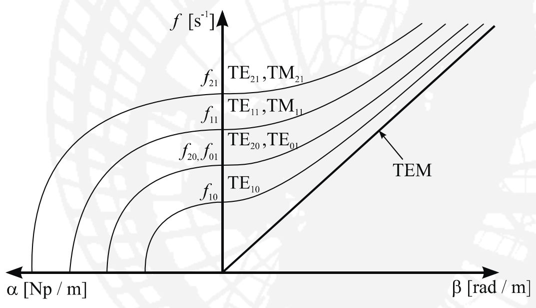
che perdono quindi il loro usuale significato

$$k_{zH} = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\omega > \omega_{cH} \; (f > f_{cH}) \Rightarrow \beta_{zH} = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \omega_{cH}^2 \mu\varepsilon}$$

$$\omega < \omega_{cH} \; (f < f_{cH}) \Rightarrow \alpha_{zH} = \sqrt{\omega_{cH}^2 \mu\varepsilon - \omega^2 \mu\varepsilon}$$

Diagramma di dispersione o **"diagramma di Brillouin"** per una guida standard b = a/2



GUIDA STANDARD

PERCHÉ SI USA LA GUIDA STANDARD?

Consideriamo un guida quadrata *a=b*: frequenze di cut-off (normalizzate rispetto a $f_{c,10}$)

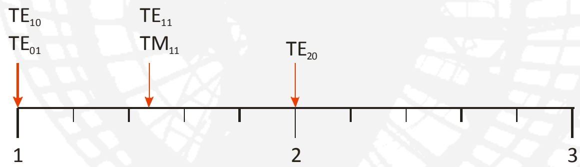
$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\, f_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cH})_{10} = \frac{\pi}{a}$$ non dipende da *b*!

$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cH})_{01} = \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{a} = (f_{cH})_{10}$$

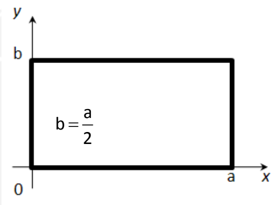
$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cH})_{11} = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cE})_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{a} = \sqrt{2}\,(f_{cH})_{10}$$

$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cH})_{20} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{a} = 2\,(f_{cH})_{10}$$ non dipende da *b*!



GUIDA STANDARD: $b=a/2$

Volendo allargare la banda unimodale occorre diminuire b al fine di spostare verso destra il TE_{11}, il TM_{11} ed il TE_{01} fino al limite massimo rappresentato dal TE_{20}



Se $b=a/2$ si ottiene:

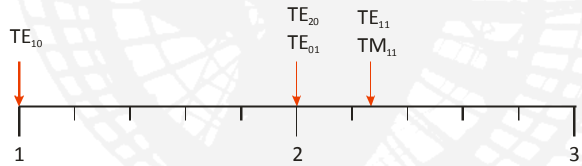
$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\, f_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cH})_{10} = \frac{\pi}{a}$$ rimane invariato!

$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cH})_{01} = \frac{\pi}{b} = \frac{2\pi}{a} = 2(f_{cH})_{10}$$

$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cH})_{11} = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cE})_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{5}\,(f_{cH})_{10}$$

$$2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\,(f_{cH})_{20} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{a} = 2(f_{cH})_{10}$$ rimane invariato!



DISTRIBUZIONE DELLA CORRENTE SULLE PARETI DELLA GUIDA

La distribuzione di corrente sulle pareti di una guida è legata alla distribuzione del campo magnetico sulle stesse tramite la relazione

$$\mathbf{J}_s = \hat{n}\times\mathbf{H}\left[\frac{A}{m}\right]$$

Nel caso di propagazione in guida rettangolare si hanno in generale entrambe le componenti del campo magnetico

trasversale $\mathbf{H}_t$

e longitudinale $\mathbf{H}_z$

a cui saranno associate rispettivamente una densità di corrente superficiale

longitudinale $\mathbf{J}_z$

e trasversale $\mathbf{J}_t$

Prendiamo in esame il generico modo TM_{mn}

L'andamento dei campi di guida è il seguente:

$$\begin{cases} E_x = -E\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_{zE}}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zE}z} \\ E_y = -E\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_{zE}}{\omega\varepsilon\mu}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zE}z} \\ E_z = -jE\dfrac{k_{cE}^2}{\omega\varepsilon\mu}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zE}z} \\ H_x = E\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{1}{\mu}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zE}z} \\ H_y = -E\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{1}{\mu}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zE}z} \\ H_z = 0 \end{cases}$$

Andamento delle correnti sulle pareti:

$y=0$

$$\mathbf{J}_s = \hat{y}\times\mathbf{H} = -H_x\hat{z} = -E\frac{n\pi}{b}\frac{1}{\mu}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos(n\pi)e^{-jk_{zE}z}\,\hat{z}$$

$y=b$

$$\mathbf{J}_s = -\hat{y}\times\mathbf{H} = H_x\hat{z} = E\frac{n\pi}{b}\frac{1}{\mu}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos(n\pi)e^{-jk_{zE}z}\,\hat{z}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Andamento della corrente sulla pareti laterali:

$$x = 0$$

$$\mathbf{J}_s = \hat{x} \times \mathbf{H} = H_y \hat{z} = -E \frac{m\pi}{a} \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jk_{zE} z} \hat{z}$$

$$x = a$$

$$\mathbf{J}_s = -\hat{x} \times \mathbf{H} = H_y \hat{z} = -E \frac{m\pi}{a} \frac{1}{\mu} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jk_{zE} z} \hat{z}$$

Si nota come la corrente su tutte le facce abbia un andamento sinusoidale ed inoltre la corrente che scorre su facce opposte ha senso opposto solo se il modo ha indice intero pari: cioè per un TM_{22} si hanno correnti di senso opposto su facce opposte mentre per il TM_{11} le correnti hanno uguale senso.

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Caso TM_{11}

Per calcolare l'andamento delle correnti è sufficiente sostituire nelle relazioni precedenti m=1, n=1

$$y = 0$$

$$\mathbf{J}_s = \hat{y} \times \mathbf{H} = -H_x \hat{z} = E \frac{\pi}{b} \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jk_{zE} z} \hat{z}$$

$$x = 0$$

$$\mathbf{J}_s = \hat{x} \times \mathbf{H} = H_y \hat{z} = -E \frac{\pi}{a} \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) e^{-jk_{zE} z} \hat{z}$$

Passando nel dominio del tempo:

$$\mathbf{J}_s(x, y=0) = E \frac{\pi}{b} \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta_{zE} z) \hat{z}$$

$$\mathbf{J}_s(x=0, y) = -E \frac{\pi}{a} \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \cos(\omega t - \beta_{zE} z) \hat{z}$$

Caso TM$_{21}$

Per calcolare l'andamento delle correnti è sufficiente sostituire nelle relazioni precedenti m=2, n=1

$$y=0$$

$$\mathbf{J}_s=\hat{y}\times\mathbf{H}=-H_x\hat{z}=E\frac{\pi}{b}\frac{1}{\mu}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos(\omega t-\beta_{zE}z)\hat{z}$$

$$x=0$$

$$\mathbf{J}_s=\hat{x}\times\mathbf{H}=H_y\hat{z}=-E\frac{2\pi}{a}\frac{1}{\mu}\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\cos(\omega t-\beta_{zE}z)\hat{z}$$

DISTRIBUZIONE DI CORRENTE SULLE PARETI DELLA GUIDA - CASO TM (E)
Lezione XI
Guide d'onda rettangolari

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Caso TM$_{mn}$

In generale l'andamento della corrente sulle facce laterali (x=0, x=a) ha n lobi in cui la corrente $\mathbf{J}_s$ assume alternativamente versi opposti $\pm\hat{z}$ ed è influenzata dall'indice m solo nell'ampiezza $E\frac{m\pi}{a}$

Analogamente la corrente sulle facce orizzontali (y=0, y=b) ha m lobi in cui la corrente assume alternativamente versi opposti $\pm\hat{z}$ ed è influenzata dall'indice n solo nell'ampiezza $E\frac{n\pi}{b}$

Andamento dei campi associati al generico modo TE_{mn}

$$\begin{cases} E_x = H\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{1}{\varepsilon}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z} \\ E_y = -H\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{1}{\varepsilon}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z} \\ E_z = 0 \\ H_x = H\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_{zH}}{\omega\varepsilon\mu}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z} \\ H_y = H\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_{zH}}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z} \\ H_z = -jH\dfrac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z} \end{cases}$$

Valendo per l'impedenza di modo la relazione

$$Z_{0H} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k_{zH}}$$

si otiene:

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{0H}} = \frac{H}{Z_{0H}}\frac{m\pi}{a}\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z}$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_{0H}} = -\frac{H}{Z_{0H}}\frac{n\pi}{b}\frac{1}{\varepsilon}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z}$$

$$H_z = -jH\frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z}$$

$$k_{cH}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$k_{zH} = \sqrt{k^2 - k_{cH}^2}$$

DISTRIBUZIONE DI CORRENTE SULLE PARETI DELLA GUIDA - CASO TE (H)
Lezione XI
Guide d'onda rettangolari

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

L'andamento della corrente è quindi del tipo:

sulla parete orizzontale y=0

$$\mathbf{J}_s = \hat{y}\times\mathbf{H} = H_z\hat{x} - H_x\hat{z} = \left[-jH\frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\hat{x} - \frac{H}{Z_{0H}}\frac{m\pi}{a}\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\hat{z}\right]e^{-jk_{zH}z}$$

sulla parete orizzontale y=b

$$\mathbf{J}_s = \hat{y}\times\mathbf{H} = H_z\hat{x} - H_x\hat{z} = \left[-jH\frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos(n\pi)\hat{x} - \frac{H}{Z_{0H}}\frac{m\pi}{a}\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos(n\pi)\hat{z}\right]e^{-jk_{zH}z}$$

sulla parete verticale x=0

$$\mathbf{J}_s = \hat{x}\times\mathbf{H} = H_y\hat{z} - H_z\hat{y} = \left[-\frac{H}{Z_{0H}}\frac{n\pi}{b}\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\hat{z} + jH\frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\hat{y}\right]e^{-jk_{zH}z}$$

sulla parete verticale x=a

$$\mathbf{J}_s = \hat{x}\times\mathbf{H} = H_y\hat{z} - H_z\hat{y} = \left[-\frac{H}{Z_{0H}}\frac{n\pi}{b}\frac{1}{\varepsilon}\cos(m\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\hat{z} + jH\frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu}\cos(m\pi)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\hat{y}\right]e^{-jk_{zH}z}$$

Anche in questo caso si nota come l'andamento della corrente su facce opposte è opposto solo nel caso in cui l'indice *m* per le facce laterali (*n* per quelle orizzontali) sia pari, in quanto $\cos(k\pi) = (-1)^k$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Caso TE$_{10}$

$y = 0$

$$\mathbf{J}_s = \hat{y} \times \mathbf{H} = H_z \hat{x} - H_x \hat{z} = \left[-jH \frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{x} - \frac{H}{Z_{0H}} \frac{\pi}{a} \frac{1}{\varepsilon} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{z} \right] e^{-jk_{zH}z}$$

$x = 0$

$$\mathbf{J}_s = \hat{x} \times \mathbf{H} = H_y \hat{z} - H_z \hat{y} = jH \frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu} e^{-jk_{zH}z}\ \hat{y}$$

Passando nel dominio del tempo:

$y = 0$

$$\mathbf{J}_s = \left[H \frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta_{zH} z + \pi/2)\hat{x} - \frac{H}{Z_{0H}} \frac{\pi}{a} \frac{1}{\varepsilon} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta_{zH} z)\hat{z} \right]$$

$x = 0$

$$\mathbf{J}_s = H \frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu} \cos(\omega t - \beta_{zH} z + \pi/2)\ \hat{y}$$

Dalla precedente si nota che per y=0 $\mathbf{J}_s$ è polarizzata ellitticamente, essendo la sovrapposizione di due oscillazioni sfasate di $\pi/2$ dirette secondo due direzioni perpendicolari

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Caso TE$_{mn}$

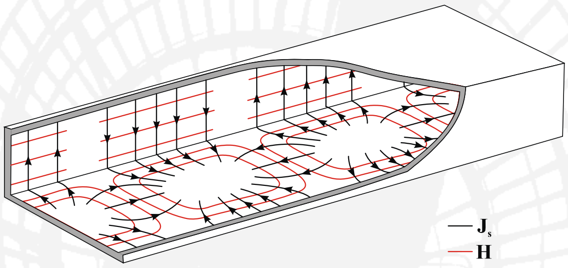
In generale l'andamento della corrente sulle facce laterali per un modo TE$_{mn}$ è sempre indipendente per quanto riguarda la forma dall'indice *m* (indice della larghezza orizzontale) così come quello sulle facce orizzontali è indipendente dall'indice *n* (indice della larghezza verticale).

Contrariamente al caso TM, su ogni faccia è presente anche una componente trasversale della corrente. Tale componente risulta massima in prossimità degli spigoli (congiunzione delle pareti), dove invece quella longitudinale risulta nulla.

Si noti la continuità della corrente attraverso gli spigoli.

Distribuzione di corrente sulle pareti della guida - conclusione

Distribuzione di corrente sulle pareti interne della guida per il modo fondamentale TE_{10}



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XI
Guide d'onda rettangolari

Tagli in una guida rettangolare

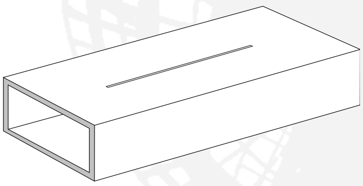
Le correnti sono dirette parallelamente all'asse *z* solo sulla mezzeria delle pareti larghe.

Questo permette di praticare una stretta fessura tale da non disturbare la propagazione del modo fondamentale, il quale continua a propagarsi come se la fessura non esistesse

La necessità di operare dei tagli sulle pareti di una guida nasce per:

a) prelevare un segnale (ad esempio misurare il ROS)

b) generare un'antenna



Caso (a)

E' necessario disturbare il meno possibile la distribuzione di corrente sulle pareti della guida e quindi il campo all'interno di essa.

Occorre quindi trovare il luogo dei punti in cui la corrente è costante in una direzione.
Se si vuole misurare il campo si deve inoltre tener conto anche dell'andamento dello stesso, per non tagliare in un punto in cui questo è nullo o molto piccolo.

Si consideri ora una guida rettangolare in cui si propaga il modo TE_{10} e si supponga di voler effettuare un taglio sulla faccia superiore della stessa per prelevare il campo elettrico:

$$\mathbf{J}_s(x, y=b, z, t) = A(x)\cos(\omega t - \beta z + \pi/2)\hat{x} + B(x)\cos(\omega t - \beta z)\hat{z}$$

$$A(x) = -H\frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$B(x) = -\frac{H}{Z_{0H}}\frac{\pi}{a}\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) = B\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Per effettuare la misura occorre che A(x)=0 e che B(x)=0, altrimenti si ha una polarizzazione non lineare

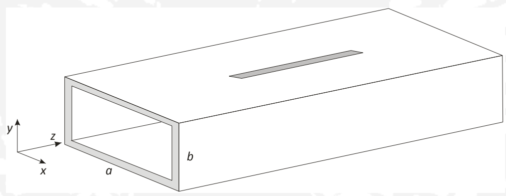
B(x)=0 si ha nei punti di coordinata x=0 o x=a, nei quali però il campo elettrico che vogliamo misurare è nullo.

A(x)=0 si ha nel punto x=a/2, in cui il campo elettrico è massimo e vale

$$\mathbf{E} = -H\frac{\pi}{a}\hat{y}$$

E' quindi necessario effettuare il taglio in x=a/2, in direzione dell'asse z.

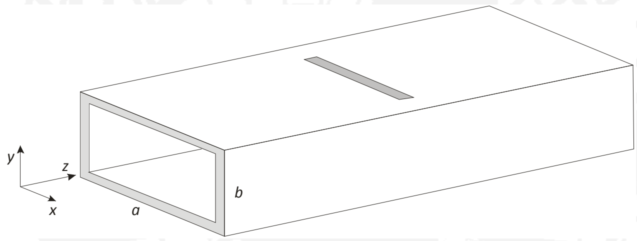
Analogamente un taglio sulla parete laterale lungo l'asse y non irradia.



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Caso (b)

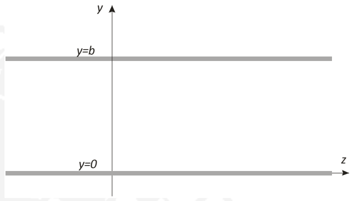
Volendo creare un'antenna a slot è invece necessario alterare le linee di corrente ad esempio realizzando una fessura trasversale sulla parete superiore della guida



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

INTERPRETAZIONE FISICA DELLA PROPAGAZIONE IN GUIDA RETTANGOLARE

Consideriamo due superfici perfettamente conduttrici parallele poste in y=0 e in y=b.
Per determinare il campo basta prendere le espressioni per la guida rettangolare e far tendere a all'infinito:



$$E_x = H\frac{n\pi}{b}\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z}$$
$$E_y = 0$$
$$E_z = 0$$

$$H_x = 0$$
$$H_y = H\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{\omega\varepsilon\mu}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z}$$
$$H_z = -jH\frac{k_{cH}^2}{\omega\varepsilon\mu}\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z}$$

Consideriamo ad esempio il campo E_x

Applicando le formule di Eulero si ha:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \frac{e^{j\frac{n\pi}{b}y} - e^{-j\frac{n\pi}{b}y}}{2j}$$

da cui:

$$E_x = H\frac{n\pi}{b}\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_{zH}z} = H\frac{n\pi}{b}\frac{1}{\varepsilon}\frac{e^{j\frac{n\pi}{b}y} - e^{-j\frac{n\pi}{b}y}}{2j}e^{-jk_{zH}z}$$

ponendo poi:

$$\frac{n\pi}{b} = k\cos\vartheta$$
$$k_{zH} = k\sin\vartheta$$

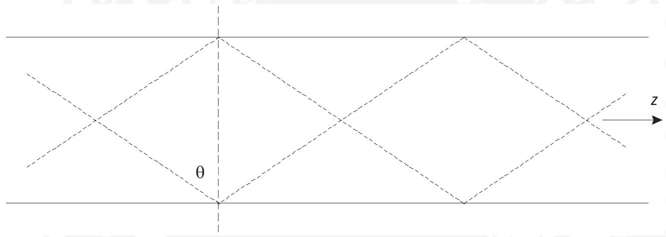
La scelta è consistente in quanto $\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_{zH}^2 = k^2$

$$\boxed{E_x = -jHk\cos\vartheta\frac{1}{2\varepsilon}\left[e^{jk(y\cos\vartheta - z\sin\vartheta)} - e^{jk(-y\cos\vartheta - z\sin\vartheta)}\right]}$$

INTERPRETAZIONE FISICA DELLA PROPAGAZIONE GUIDATA (PIANI PARALLELI)

$$E_x = -jHk\cos\vartheta\frac{1}{2\varepsilon}\left[e^{jk(y\cos\vartheta - z\sin\vartheta)} - e^{jk(-y\cos\vartheta - z\sin\vartheta)}\right]$$

Onda piana che si propaga come segue



Inoltre:
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n\pi}{b} = k\cos\vartheta \rightarrow \cos\vartheta = \dfrac{n\pi}{kb} \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\vartheta = \frac{n}{2b}\frac{1}{f\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{n\pi}{kb} = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{f_c}{f}$$

INTERPRETAZIONE FISICA DELLA PROPAGAZIONE GUIDATA (PIANI PARALLELI)

per $\lambda \rightarrow 0$ si ha $f \rightarrow \infty$

si tende ad un modo TEM

$$\lim_{f\rightarrow\infty}\cos\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

- Al crescere di λ si ha che f decresce $\Rightarrow \cos\vartheta$ cresce

quando $\lambda = \dfrac{2b}{n} = \lambda_c$ si avrà $\cos\vartheta = 1$ ovvero $\vartheta = 0$

- per $\lambda > \dfrac{2b}{n}$ si ha $\cos\vartheta = \dfrac{n\lambda}{2b} > 1$ ovvero non si hanno soluzioni reali per ϑ e la propagazione non ha luogo

Fatte queste considerazioni vediamo alcune grandezze:

Lunghezza d'onda di cut-off $\lambda_c = \frac{2b}{n}$

Frequenza di cut-off $f_c = \frac{n}{2b\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Costante di propagazione nella direzione *y* $k\cos\vartheta = k\frac{n\pi}{kb} = \frac{n\pi}{b}$

Costante di propagazione nella direzione *z* $k\sin\vartheta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ che diventa immaginaria per $\lambda > \lambda_c$

Velocità di fase in guida in direzione *z* $v_z = \frac{\omega}{k\sin\vartheta} = \frac{2\pi}{\lambda_z}$

Supponiamo di lavorare a una frequenza *f*=10GHZ con *b*=5cm

Si calcolino per i modi TE_{10} TE_{20} e TE_{30} le seguenti grandezze

$\lambda_c \; f_c \; \vartheta \; \lambda_z$

$$\lambda_c = \frac{2b}{m} = \frac{10}{m}\,[\text{cm}]$$

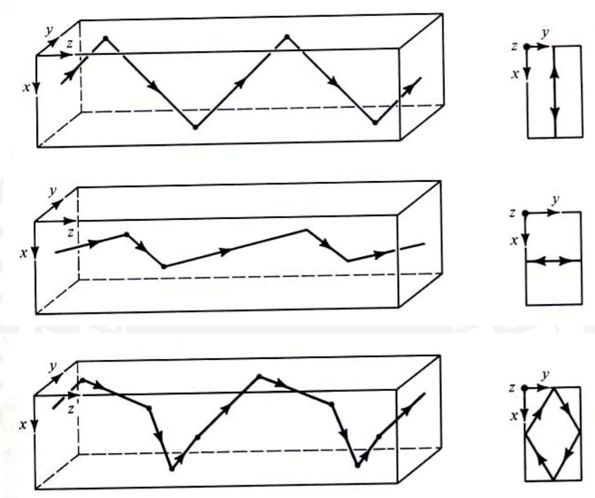
$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = 3m\,[\text{GHz}]$$

$$\vartheta = \sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\lambda_z = \frac{\lambda}{\sin\vartheta} = \frac{3}{\sin\vartheta}\,[\text{cm}]$$

Quindi si ottiene:

modi	TE_{10}	TE_{20}	TE_{30}
λ_c [cm]	10	5	3.33
f_c [GHz]	3	6	9
ϑ [°]	72.54	53.13	25.84
λ_z [cm]	3.269	4.687	15.789


y
z
x
y
z
x
y
z
x
y
z
x
y
z
x
y
z
x