LEZIONE XV

CAVITA' RISONANTI

Corso di
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: *http://www.cem.unifi.it/*

Lezione XV
Cavità risonanti

Alle frequenze delle microonde i dispositivi selettivi in frequenza realizzati mediante circuiti risonanti di tipo LC non possono essere utilizzati

- aumento delle perdite ohmiche (soprattutto negli induttori) per aumento dell'effetto pelle all'aumentare della frequenza
- aumento delle perdite per radiazione (soprattutto nei condensatori a causa della distanza finita tra le armature)
- il fattore di merito del risonatore LC si abbassa a valori proibitivi

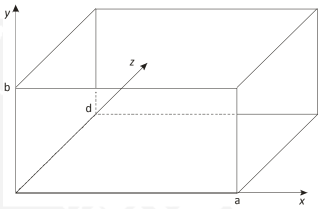
Per realizzare un risonatore a microonde si impiega quindi uno spezzone di linea di trasmissione, poiché una reattanza pura (elevato fattore di merito a vuoto) è ottenibile mediante una linea a basse perdite chiusa in cortocircuito o lasciata a circuito aperto.

Tra le varie tipologie di linee, al fine di minimizzare le perdite per radiazione, si preferisce utilizzare strutture guidanti "chiuse", in cui l'energia elettromagnetica è confinata all'interno di una regione schermata (cavi coassiali o guide d'onda).

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Cavità rettangolare

Si lavora in coordinate cartesiane



$$\nabla^2 \mathbf{E} = -k_r^2 \mathbf{E}$$
$$\nabla^2 \mathbf{H} = -k_r^2 \mathbf{H}$$

Nel caso di cavità rettangolare chiusa da pareti pec si può cercare la soluzione dell'equazione di Helmholtz del tipo

$$T(x,y,z) = T_x(x)\,T_y(y)\,T_z(z)$$

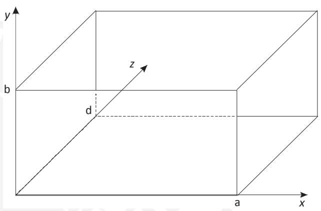
$$\frac{\partial T_x(x)}{\partial} = -k_{rx}^2 T_x(x)$$
$$\frac{\partial T_y(y)}{\partial} = -k_{ry}^2 T_y(y)$$
$$\frac{\partial T_z(z)}{\partial} = -k_{rz}^2 T_z(z)$$
$$k_r^2 = k_{rx}^2 + k_{ry}^2 + k_{rz}^2$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CONFIGURAZIONI DI CAMPO IN CAVITÀ RETTANGOLARE

Lezione XV
Cavità risonanti

Imponendo le condizioni al contorno per i modi TE e TM si trova



$$k_{rx}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$
$$k_{ry}^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$
$$k_{rz}^2 = \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$$
$$k_r^2 = k_{rx}^2 + k_{ry}^2 + k_{rz}^2$$

Numeri d'onda di risonanza nelle tre direzioni dello spazio

Per i modi TE:
p>0
se a>b e n=0 allora m>0

Per i modi TM:
m,n>0

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CONFIGURAZIONI DI CAMPO IN CAVITÀ RETTANGOLARE: MODI TE$_{mnp}$

Espressioni del campo elettromagnetico associato al generico modo TE$_{mnp}$

$$H_z = C\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

$$H_x = -\frac{C}{k_{rx}^2+k_{ry}^2}\left(\frac{p\pi}{d}\right)\left(\frac{m\pi}{d}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d}$$

$$H_y = -\frac{C}{k_{rx}^2+k_{ry}^2}\left(\frac{p\pi}{d}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

$$E_x = \frac{j\omega C}{k_{rx}^2+k_{ry}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

$$E_y = -\frac{j\omega C}{k_{rx}^2+k_{ry}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

$$E_z = 0$$

$C =$ costante arbitraria

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAVITÀ RISONANTE PARALLELEPIPEDA: MODI TM$_{mnp}$

Lezione XV
Cavità risonanti

Espressioni del campo elettromagnetico associato al generico modo TM$_{mnp}$

$$E_z = D\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

$$E_x = -\frac{D}{k_{rx}^2+k_{ry}^2}\left(\frac{p\pi}{d}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

$$E_y = -\frac{D}{k_{rx}^2+k_{ry}^2}\left(\frac{p\pi}{d}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon D}{k_{rx}^2+k_{ry}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d}$$

$$H_y = -\frac{j\omega\varepsilon D}{k_{rx}^2+k_{ry}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d}$$

$$H_z = 0$$

$C =$ costante arbitraria

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Fattore di merito

Come qualsiasi altro dispositivo risonante la prestazione di un risonatore in guida d'onda è espressa in termini del fattore di merito Q definito come

$$Q = \frac{\omega_0 U}{W_p}$$

$\omega_0 =$ frequenza di risonanza

$U =$ energia elettromagnetica immagazzinata nella cavità risonante

$W_p =$ potenza media dissipata nella cavità risonante (pareti non pec e materiale interno)

Se la cavità è accoppiata con circuiti esterni si dovrà distinguere tra perdite dovute esclusivamente alla cavità e perdite dovute all'accoppiamento.

Si definisce il fattore di merito a vuoto Q_0 e il fattore di merito esterno Q_{est}.
Il fattore di merito complessivo è dato da:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{est}}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Alla risonanza la parte magnetica dell'energia elettromagnetica immagazzinata all'interno della cavità uguaglia quella elettrica per cui si ha:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon |E|^2 \, dv = \frac{1}{2}\int_V \mu |H|^2 \, dv$$

Dove V è il volume della cavità racchiuso dalla superficie S

La potenza media dissipata sulle pareti è data da:

$$W_p = \frac{R_s}{2}\int_S |H_t|^2 \, ds$$

H_t è la componente tangenziale del campo magnetico ed R_s è la resistenza superficiale (σ conducibilità delle pareti della cavità e δ profondità di penetrazione)

profondità di penetrazione $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$

resistenza superficiale delle pareti $R_s = \dfrac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\dfrac{\pi f \mu}{\sigma}}$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

$$Q = \frac{\omega_0 U}{W_p} \qquad U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon |E|^2 \, dv = \frac{1}{2}\int_V \mu |H|^2 \, dv \qquad W_p = \frac{R_s}{2}\int_S |H_t|^2 \, ds$$

Ne segue che

$$Q = \frac{\omega_0 \mu \int_V |H|^2 \, dv}{R_s \int_S |H_t|^2 \, ds}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Per apprezzare l'ordine di grandezza del fattore di merito di un risonatore a cavità si consideri una cavità risonante rettangolare in aria, in presenza solo di perdite associate alla non perfetta conducibilità delle pareti, in cui è presente il modo risonante TE_{101}

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 |E|^2 \, dv = \frac{\varepsilon_0 abd E_0^2}{8}$$

$$W_p = \frac{R_s \lambda_0^2}{8\zeta_0^2} E_0^2 \left[\frac{ab}{d^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right) \right]$$

dove ζ_0 è l'impedenza caratteristica dello spazio libero.

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Il fattore di qualità Q può essere scritto come:

$$Q = \frac{\omega_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \zeta_0}{R_s \lambda_0^2} \frac{2ba^3 d^3}{2b(a^3 + d^3) + ad(a^2 + d^2)}$$

Ovvero come:

$$Q = \frac{\pi \zeta_0}{4R_s} \frac{2b(a^2 + d^2)^{3/2}}{2b(a^3 + d^3) + ad(a^2 + d^2)}$$

Si noti che per una cavità cubica (a=b=d) ne consegue che

$$Q = \frac{\sqrt{2}\pi \zeta_0}{6R_s}$$

per cui, essendo per il rame, alla frequenza di 10GHz, Rs=0.0261W, il fattore di merito assumerà il valore Q=10730.

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

A tale proposito si ricordi che

- per risonatori ottenuti da circuiti a parametri concentrati, l'ordine di grandezza di Q è di alcune centinaia
- per risonatori ottenuti dai circuiti con linee di trasmissione l'ordine di grandezza di Q è alcune migliaia

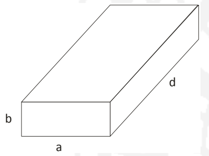
I fattori di merito di cavità in guida d'onda e in cavo coassiale sono riportati di seguito

Cavità rettangolare

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2}} = \text{lunghezza d'onda di risonanza nello spazio libero}$$

$$t = \frac{m}{a}; \quad q = \frac{n}{b}; \quad r = \frac{p}{d}$$

$\delta =$ profondità di penetrazione



Modo	$Q\delta / \lambda_0$
TE_{mnp}	$\frac{abd}{4} \frac{(t^2+q^2)(t^2+q^2+r^2)^{3/2}}{ad[(tr)^2+(t^2+q^2)^2]+bd[(qr)^2+(t^2+q^2)]+abr^2(t^2+q^2)}$
TE_{0np}	$\frac{abd}{2} \frac{(q^2+r^2)^{3/2}}{q^2d(b+2a)+r^2b(d+2a)}$
TE_{m0p}	$\frac{abd}{2} \frac{(t^2+r^2)^{3/2}}{t^2d(a+2b)+r^2a(d+2b)}$
TM_{mnp}	$\frac{abd}{4} \frac{(t^2+q^2)(t^2+q^2+r^2)^{1/2}}{t^2b(a+d)+q^2a(b+d)}$
TM_{mn0}	$\frac{abd}{2} \frac{(t^2+q^2)^{3/2}}{t^2b(a+2d)+q^2a(b+2d)}$

Cavità cilindrica circolare

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{p'_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2}} \quad \text{per i modo TE}$$

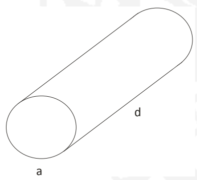
$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{p_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2}} \quad \text{per i modo TM}$$

$\lambda_0 =$ lunghezza d'onda di risonanza nello spazio libero
p'_{mn} per i modi TE n-esima radice di $J'_m(x) = 0$
p_{mn} per i modi TM n-esima radice di $J_m(x) = 0$

$\delta =$ profondità di penetrazione

$$r = \frac{2a}{d}$$

$$t = \frac{p\pi}{2}$$



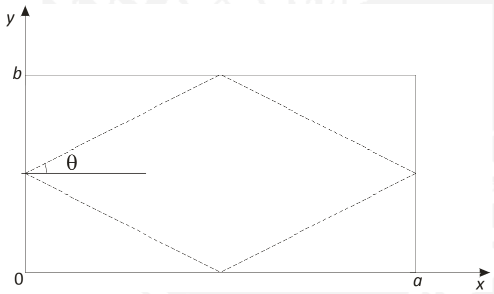
Modo	$Q\delta / \lambda_0$
TE_{mnp}	$\frac{\left[1-\left(\frac{m}{p'_{mn}}\right)\right][p'^{\,2}_{mn}+t^2r^2]^{3/2}}{2\pi\left[p'^{\,2}_{mn}+t^2r^2+(1-r)\left(\frac{trm}{p'_{mn}}\right)^2\right]}$
TM_{mnp}	$\frac{\sqrt{p^2_{mn}+t^2r^2}}{2\pi(1+r)} \quad (p>0)$
TM_{mn0}	$\frac{p_{mn}}{\pi(2+r)} \quad (p=0)$

CAVITÀ RISONANTE RETTANGOLARE: INTERPRETAZIONE FISICA

Si consideri un parallelepipedo retto a pareti metalliche di dimensioni *a* e *b* secondo gli assi *x* e *y* e di dimensioni indeterminata lungo *z*

Un'onda piana uniforme può propagarsi richiudendosi su se stessa secondo il percorso in figura se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\left.\begin{array}{ll} a\cos\vartheta = m\dfrac{\lambda}{2} & m=1,2,\ldots \\ b\sin\vartheta = n\dfrac{\lambda}{2} & n=1,2,\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow f^2 = c^2\left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2\right]$$



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAVITÀ RISONANTE RETTANGOLARE: INTERPRETAZIONE FISICA

Lezione XV
Cavità risonanti

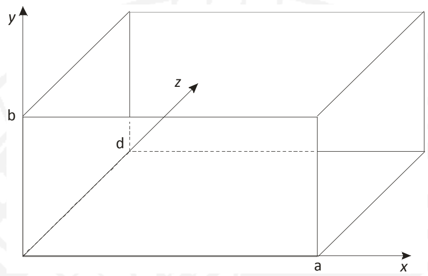
$$f_c^2 = c^2\left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2\right]$$

La condizione sulla frequenza per garantire la propagazione lungo il percorso tratteggiato con fasi che si ripetono uguali dopo ogni giro, corrisponde esattamente alla condizione di cut-off in guida rettangolare, per cui si ha un'onda che si propaga nel piano trasverso senza avanzare lungo l'asse *z*.
Una cavità risonante infinitamente lunga si comporta quindi come una guida rettangolare in cut-off.

La condizione sulla frequenza di risonanza fornisce un 'infinità numerabile di frequenze di risonanza, ognuna delle quali corrispondenti ad una coppia di indici (*m*,*n*).

Ogni cavità risonante ha dunque un'infinità numerabile di modi, tra cui il fondamentale è quello a frequenza di risonanza inferiore.

Cavità risonante rettangolare: interpretazione fisica



Se la dimensione lungo z è finita esistono nella cavità interpretabili con percorsi più complicati, con riflessioni sulle sei pareti

In generale un modo risonante in una cavità rettangolare è caratterizzato da tre indici interi i cui valori determinano la corrispondente frequenza di risonanza