LEZIONE XIII

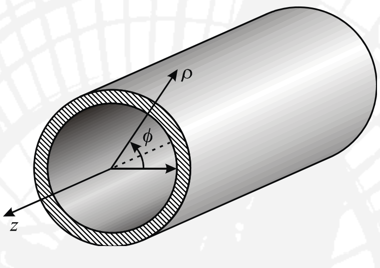
GUIDE D'ONDA CIRCOLARI

Corso di
"Teoria e tecnica delle onde elettromagnetiche"

Prof. Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: *http://www.cem.unifi.it/*

Soluzione delle equazioni di Maxwell in una struttura cilindrica metallica cava riempita di dielettrico

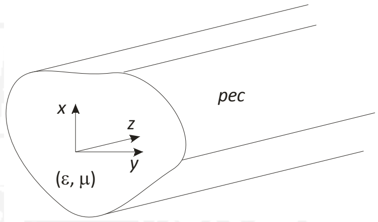
Obiettivo: trovare le possibili configurazioni del campo elettromagnetico all'interno di una guida d'onda circolare con pareti *pec* riempita di dielettrico isotropo



Si lavora in coordinate cilindriche!

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Struttura cilindrica (nella direzione dell'asse z) con pareti *pec* riempita di dielettrico isotropo



Ipotesi di lavoro per il campo elettromagnetico nel dielettrico all'interno della struttura

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\mathbf{E}(x,y)e^{-jk_z z}$$
$$\mathbf{H}(x,y,z)=\mathbf{H}(x,y)e^{-jk_z z}$$

Equazioni delle onde o di Helmholtz nelle strutture cilindriche (equazioni agli autovalori)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)E_z=0 \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2}+(k^2-k_z^2)E_z=0$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)H_z=0 \qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2}+(k^2-k_z^2)H_z=0$$

Coordinate cartesiane — Coordinate cilindriche

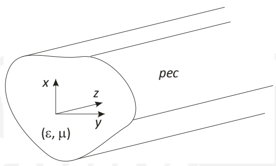
Costante di propagazione caratteristica del dielettrico e numero d'onda di cut-off

$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu$$
$$k_c^2=k^2-k_z^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2-k_z^2$$

SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL IN UNA STRUTTURA CILINDRICA METALLICA CAVA RIEMPITA DI DIELETTRICO

Lezione XIII
Guide d'onda circolari

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

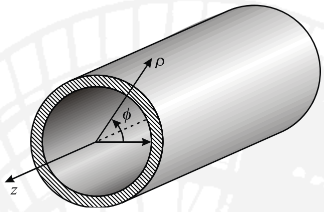


Le componenti trasverse del campo e.m. possono essere espresse mediante le componenti longitudinali

$$E_x=-j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}-j\frac{\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad E_\rho=-\frac{1}{k_c^2}\left(jk_z\frac{\partial E_z}{\partial \rho}+\frac{j\omega\mu}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right)$$
$$E_y=-j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}+j\frac{\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad E_\varphi=\frac{1}{k_c^2}\left(-\frac{jk_z}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}+j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)$$
$$\Rightarrow$$
$$H_x=-j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}+j\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad H_\rho=\frac{1}{k_c^2}\left(\frac{j\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}-jk_z\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)$$
$$H_y=-j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}-j\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad H_\varphi=-\frac{1}{k_c^2}\left(j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial \rho}+\frac{jk_z}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right)$$

Coordinate cartesiane — Coordinate cilindriche

MODI IN GUIDA CIRCOLARE



$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2}+(k^2-k_z^2)E_z=0$$
$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2}+(k^2-k_z^2)H_z=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}+(k^2-k_z^2)\psi=0$$

Ipotesi di lavoro: separazione delle variabili

$$\psi(\rho,\varphi,z)=R(\rho)F(\varphi)e^{-jk_z z}$$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIII
Guide d'onda circolari

MODI IN GUIDA CIRCOLARE

$$\psi(\rho,\varphi,z)=R(\rho)F(\varphi)e^{-jk_z z} \qquad \psi=\begin{cases}E_z\\H_z\end{cases}$$

Soluzione: $\psi(\rho,\varphi,z)=J_m(\rho k_c)\{A_m\cos(m\varphi)+B_m\sin(m\varphi)\}e^{-jk_z z}$

$J_m(\rho k_c)\rightarrow$ Funzione di Bessel di prima specie di ordine m

L'imposizione delle condizioni al contorno per ρ=a consente di determinare k_c, autovalore di ciascun modo

modi TM: $E_z\big|_{\rho=a}=0 \Rightarrow J_m(k_{cE}a)=0$

modi TE: $\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a}=0 \Rightarrow J'_m(k_{cH}a)=0$

autovalori modi TM: $k_{cE,mn}=\frac{p_{mn}}{a}$ $(m=0,1,\ldots;n=1,2,\ldots)$ p_{mn}: zero n-esimo di $J_m(x)$

autovalori modi TE: $k_{cH,mn}=\frac{p'_{mn}}{a}$ $(m=0,1,\ldots;n=1,2,\ldots)$ p'_{mn}: zero n-esimo di $J'_m(x)$

MODI TM

TM_{mn}

$$E_z = A J_m\left(k_{cE,mn}\rho\right)e^{-k_{zE}z}\begin{cases}\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{cases}$$

$$E_\rho = H_\varphi Z_E$$

$$E_\varphi = -H_\rho Z_E$$

$$H_\rho = jA\frac{f}{f_{cE}}\frac{m}{k_{cE}\rho}J_m(k_{cE}\rho)e^{-k_{zE}z}\begin{cases}\sin(m\varphi)\\ -\cos(m\varphi)\end{cases}$$

$$H_\varphi = -jA\frac{f}{\zeta f_{cE}}J'_m(k_{cE}\rho)e^{-k_{zE}z}\begin{cases}\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{cases}$$

$$H_z = 0$$

$$Z_E = \frac{k_{zE}}{\omega\varepsilon} = \zeta\sqrt{1-\left(\frac{f_{cE}}{f}\right)^2}$$

Impedenza d'onda dei modi TM

$$k_{cE,mn} = \frac{p_{mn}}{a} \quad (m = 0,1,\dots;\ n = 1,2,\dots)$$

p_{mn}: zero n-esimo di $J_m(x)$

MODI TM

$k_{cE,mn}$ Numero d'onda di cut-off del generico modo TM; l'indice *m* si riferisce all'ordine della funzione di Bessel, mentre l'indice *n* si riferisce all'ordine dello zero della funzione stessa

$$\beta_{zE} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_{cE,mn}^2}$$

Costante di fase del generico modo TM

$$\omega_{cE,mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}k_{cE,mn}$$

Pulsazione di cut-off del generico modo TM

$$v_{zE} = \frac{\omega}{\beta_{zE}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_{cE,mn}^2}}$$

Velocità di fase del generico modo TM

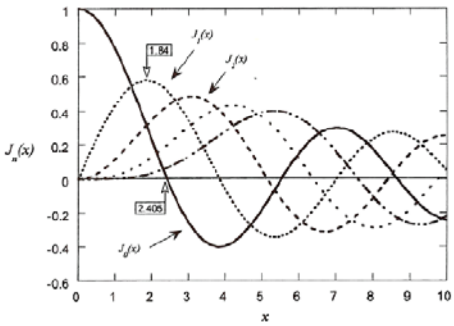
MODI TM

$$k_{cE,01} = \frac{2.405}{a}$$

$$k_{cE,11} = \frac{3.85}{a}$$

$$k_{cE,02} = \frac{5.52}{a}$$

$$k_{cE,12} = \frac{7.02}{a}$$



$ak_{cE,mn} = p_{mn}$	**m = 0**	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 9	m = 10
n = 1	2.4049	3.8318	5.1357	6.3802	7.5884	8.7715	9.9361	11.0864	12.2251	13.3543	14.4755
n = 2	5.5201	7.0156	8.4173	9.7610	11.0647	12.3386	13.5893	14.8213	16.0378	17.2412	18.4335
n = 3	8.6537	10.1735	11.6199	13.0152	14.3726	15.7002	17.0038	18.2876	19.5545	20.8071	22.0470
n = 4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	20.3208	21.6415	22.9452	24.2339	25.5095
n = 5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	23.5861	24.9349	26.2668	27.5838	28.8874

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIII
Guide d'onda circolari

MODI TE

TE_{mn}

$$H_z = BJ_m\left(k_{cH,mn}\rho\right)e^{-k_{zH}z}\begin{cases}\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{cases}$$

$$H_\rho = -\frac{E_\varphi}{Z_H}$$

$$H_\varphi = \frac{E_\rho}{Z_E}$$

$$E_\rho = jB\frac{\zeta f}{f_{cH}}\frac{m}{k_{cH}\rho}J_m\left(k_{cH,mn}\rho\right)e^{-k_{zH}z}\begin{cases}\sin(m\varphi)\\ -\cos(m\varphi)\end{cases}$$

$$E_\varphi = jB\frac{\zeta f}{f_{cH}}J'_m\left(k_{cH,mn}\rho\right)e^{-k_{zH}z}\begin{cases}\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{cases}$$

$$E_z = 0$$

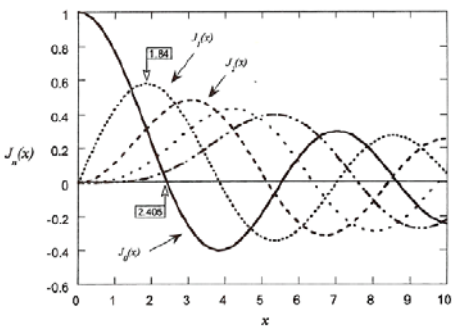
$$Z_H = \frac{\omega\mu}{k_{zH}} = \zeta\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{cH}}{f}\right)^2}}$$

Impedenza d'onda dei modi TE

$$k_{cH,mn} = \frac{p'_{mn}}{a} \quad \left(m = 0,1,\dots\,;\, n = 1,2,\dots\right)$$

p'_{mn}: zero n-esimo di $J'_m(x)$

MODI TE



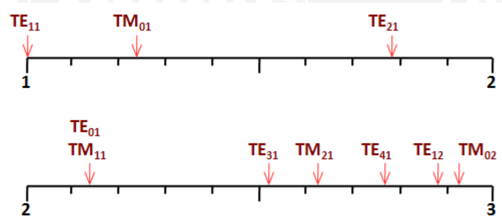
$ak_{cH,mn} = p'_{mn}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$
$n = 1$	3.8318	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175	6.4155	7.5013	8.5777	9.6474	10.7114	12.8264
$n = 2$	7.0156	5.3315	6.7062	8.0153	9.2824	10.5199	11.7349	12.9324	14.1155	15.2867	16.4479
$n = 3$	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	17.3129	18.6375	19.9419	21.2291	22.5014	23.7607
$n = 4$	13.3237	11.7060	13.1704	14.5859	15.9641	17.3129	18.6375	19.9419	21.2291	22.5014	23.7607
$n = 5$	16.4706	14.8636	16.3475	17.7888	19.1960	20.5755	21.9317	23.2681	24.5872	25.8913	27.1820

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIII
Guide d'onda circolari

DISTRIBUZIONE FREQUENZE DI CUT-OFF

Frequenze di cut-off (normalizzate rispetto a $f_{cH,11}$) dei modi in una guida circolare



$$\frac{f_{cE,01}}{f_{cH,11}} = \frac{2.405}{1.84} \approx 1.31$$

La banda unimodale è indipendente dal raggio della guida

DISTRIBUZIONE FREQUENZE DI CUT-OFF

A parità di frequenza del modo fondamentale, è più grande la banda unimodale di una guida d'onda rettangolare standard (b=a/2) o quella di una guida circolare (raggio r)?

	guida d'onda	
	rettangolare	circolare
modo fondamentale	TE_{10} $(\lambda_{tH})_{10}=2a$	TE_{11} $(\lambda_{tH})_{11}=\frac{2\pi r}{1.841}\simeq 3.412r$
1° modo superiore	TE_{20} $(\lambda_{tH})_{20}=a$	TM_{01} $(\lambda_{tE})_{01}=\frac{2\pi r}{2.4}\simeq 2.618r$

A parità di modo fondamentale $3.41r = 2a \rightarrow r = \frac{2}{3.41}a \approx 0.585a$

$$(\Delta\lambda)_{rett} = a$$
$$(\Delta\lambda)_{circ} = (3.41-2.61)r = 0.8r \approx 0.46a$$
$$(\Delta\lambda)_{rett} > (\Delta\lambda)_{circ}$$

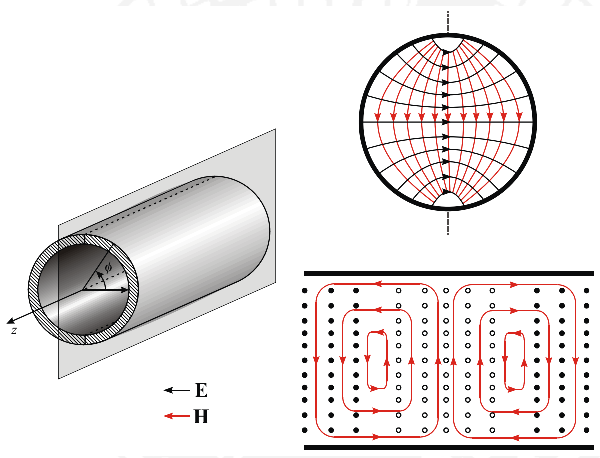
La guida d'onda rettangolare presenta una banda di funzionamento mono modale più ampia di una analoga guida circolare

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIII
Guide d'onda circolari

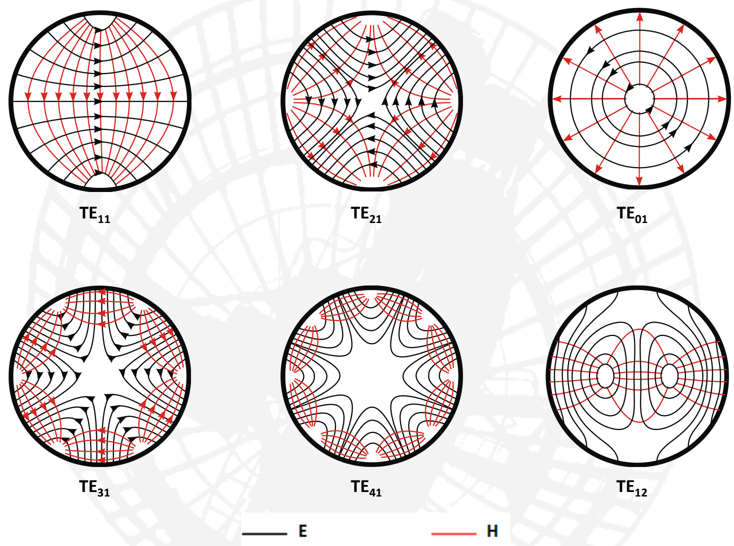
MODO FONDAMENTALE

Il primo modo (modo fondamentale) in guida d'onda circolare è il TE_{11}, (il modo con il numero d'onda $k_{c,mn}$ più piccolo):



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

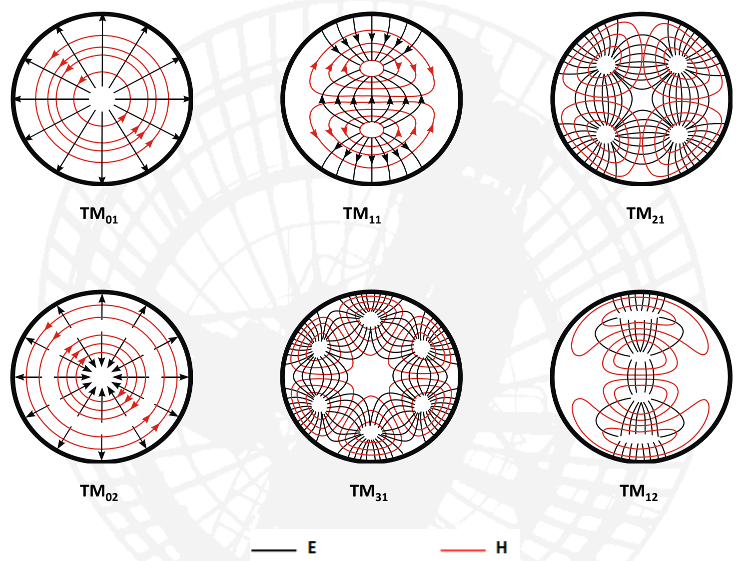
ALCUNI MODI TE



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione XIII
Guide d'onda circolari

ALCUNI MODI TM



Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

modi TM: $\alpha_{E,mn} = \frac{R_s}{a\zeta}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{cE,mn}}{f}\right)^2}}$

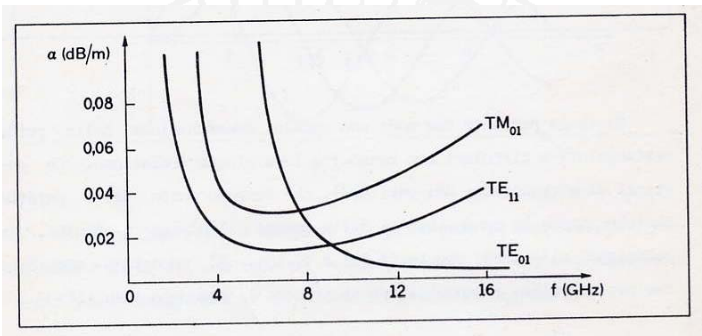
modi TE: $\alpha_{H,mn} = \frac{R_s}{a\zeta}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{cE,mn}}{f}\right)^2}}\left[\left(\frac{f_{cE,mn}}{f}\right)^2 + \frac{m^2}{p'_{mn} - m^2}\right]$

La costante di attenuazione risulta monotona decrescente soltanto per i modi TE_{0n}

profondità di penetrazione $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$

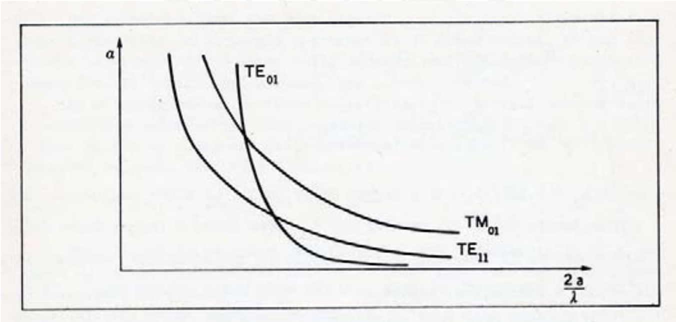
resistenza superficiale delle pareti $R_s = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze



Pareti di rame in una guida circolare con diametro interni di 2''

ATTENUAZIONE PER CONDUCIBILITÀ FINITA DELLE PARETI



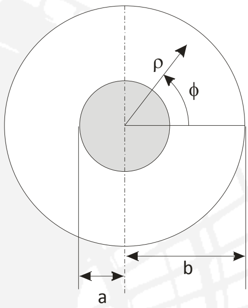
Andamento del fattore di attenuazione in funzione delle dimensioni elettriche della guida

Teoria e Tecnica delle Onde Elettromagnetiche - Propagazione radiata e propagazione guidata
Prof. G. Pelosi, Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAVO COASSIALE

Lezione XIII
Guide d'onda circolari

Si dimostra che in assenza di perdite si propaga un modo TEM (non vi sono componenti longitudinali né del campo elettrico né del campo magnetico), per cui non c'è frequenza di taglio e la velocità di fase è indipendente dalla frequenza



In un cavo coassiale senza perdite può propagarsi anche un'infinità numerabile di modi TE e TM; poiché ciascuno di essi ha una frequenza di taglio diversa da zero, ne segue che il modo fondamentale è il TEM

CAVO COASSIALE

Nel caso limite in cui la i raggi dei due conduttori divengono grandi rispetto alla distanza che li separa si possono determinare le lunghezze d'onda di taglio dei modi TM e TE:

modi TM: $\lambda_{cE} = \frac{2}{k}(b-a) \quad (k = 1,2,....)$

modi TE: $\lambda_{cH} = \frac{1}{k} 2\pi \frac{a+b}{2} \quad (k = 1,2,....)$

Il primo modo superiore in cavo coassiale risulta essere il TE_{10}

$$\lambda_{cH,10} = \pi(a+b)$$

$$f_{cH,10} = \frac{c}{\lambda_{cH,10}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{a+b}$$