APPLICAZIONI di MATEMATICA A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 16 ottobre 2006

October 16, 2006

1 Risoluzione di equazioni esponenziali (il logaritmo complesso).

Sia s_0 un numero complesso, $s_0 \neq 0$. Scrivendo tale numero in forma trigonometrica si ottiene $s_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0)$, con $\rho_0 \neq 0$. Ciò posto, si consideri l'equazione

$$e^z = s_0.$$

Ponendo $z = x + jy$ tale equazione allora diviene:

$$e^x(\cos y + j\sin y) = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0),$$

da cui

$$x = \log\rho_0, \quad y = \theta_0 + 2k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Otteniamo quindi infinite soluzioni date da:

$$z = x + jy = \log|s_0| + j(\mathrm{Arg}(s_0) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Tutte tali soluzioni hanno tutte la stessa parte reale (il logaritmo in $\mathbb{R}$ del modulo di s_0) e differiscono nella parte immaginaria per multipli di 2π. A tale espressione si dà il nome di *logaritmo in campo complesso*.

Sottolineiamo il fatto che, come nel caso della radice, questa non è una funzione "tradizionale" in $\mathbb{C}$, perchè assume più di un valore (precisamente assume infiniti valori).

Esempi:

1) - Risolvere l'equazione
$$e^s = 1.$$
Da (1) si ha
$$s = \log|1| + j(\text{Arg}(1) + 2k\pi) = 2k\pi j,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$
2) - Risolvere l'equazione
$$e^s = 4j.$$
Da (1) si ha
$$s = \log|4j| + j(\text{Arg}(4j) + 2k\pi) = \log 4 + j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}.$$
3) - Risolvere l'equazione
$$e^{1/(s-1)} = -1.$$
Ponendo
$$z = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$
si ottiene l'equazione
$$e^z = -1$$
Da (1) si ha poi
$$z = \log|-1| + j(\text{Arg}(-1) + 2k\pi) = j(\pi + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}$$
e quindi, in virtù di (2),
$$\frac{1}{s-1} = j(\pi + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z},$$
ossia
$$s = 1 + \frac{1}{j(\pi + 2k\pi)} = 1 - \frac{j}{(1+2k)\pi},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$