APPLICAZIONI di MATEMATICA A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 10 ottobre 2006

October 10, 2006

1 Serie di Laurent

Teorema di Laurent *Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora esiste un intorno V di s_0 tale che f sia analitica in $V/\{s_0\}$. Ciò posto per $s \in V/\{s_0\}$ si ha*

$$f(s) = \underbrace{...\frac{c_{-k}}{(s-s_0)^k} + ... + \frac{c_{-1}}{s-s_0}}_{(+)} + \underbrace{c_0 + c_1(s-s_0) + .. + c_k(s-s_0)^k + ...}_{(*)} \tag{1}$$

dove i coefficienti c_k (chiamati coefficienti di Laurent) sono dati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-s_0)^{k+1}}ds \tag{2}$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0.

La serie (+) in (1) si chiama **parte principale** della serie di Laurent e la parte (*) **parte analitica.**

PROPRIETA':

♦ Lo sviluppo in serie di Laurent è unico.

♦ La serie di Laurent è derivabile termine a termine in ogni insieme chiuso contenuto in $V/\{s_0\}$.

Teorema *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora:*

(i) *s_0 è singolarità eliminabile se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata non c'è (i.e. $c_k = 0$ per ogni indice $k < 0$);*

(ii) *s_0 è singolarità polare di ordine $N(> 0)$ se e solo se nella serie di Laurent associata si ha $c_{-N} \neq 0$ e $c_{-k} = 0$ per ogni indice $k > N$ (e quindi la parte principale è composta da un numero finito di termini);*

(iii) *s_0 è singolarità essenziale se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata ha infiniti termini.*

Esempio Si consideri la funzione $f(s) = s \sin(1/s)$. Sviluppando f in serie di Laurent in un intorno di $s = 0$ si ha

$$f(s) = s \sin \frac{1}{s} = s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^5} + ... \right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^4} + ... \qquad .$$

Poiché la parte principale di tale sviluppo ha infiniti termini, allora $s = 0$ è una singolarità essenziale per $f(s) = s \sin \frac{1}{s}$.

2 Classificazione dell'eventuale singolarità all'infinito.

La classificazione delle singolarità al finito si estende con facilità al punto all'infinito. Precisamente:

Definizione - *Il punto $s = \infty$ si dice singolarità (isolata o non isolata e, in quest'ultimo caso, eliminabile, polare o essenziale) se lo è il punto $u = 0$ per la funzione $g(u) = f(1/u)$.*

Esempi - Classificare il punto $s = \infty$ per le funzioni razionali

$$f(s) = \frac{2s}{9s+1}, \; g(s) = \frac{2s^5}{9s+1}, \; h(s) = \frac{2s}{9s^3+1}.$$

Per la funzione f, il punto $s = \infty$ è un punto di regolarità e così per h (in quest'ultimo caso $s = \infty$ è anche uno zero doppio). Per la funzione g, il punto $s = \infty$ è un polo di ordine 4.

In generale una funzione razionale (i.e. il rapporto tra due polinomi N e D)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ha un polo in $s = \infty$ di ordine $p > 0$ se e solo se

$$\text{grado}N - \text{grado}D = p.$$

Esercizio - Classificare $s = \infty$ per le funzioni seguenti:

$$f(s) = e^{1/s} \qquad (s = \infty \text{ punto "regolare"})$$
$$f(s) = s\sin(\frac{1}{s}) \qquad (s = \infty \text{ sing. elim.})$$
$$f(s) = \frac{1}{\sin s} \qquad (s = \infty \text{ sing. non isolata})$$
$$f(s) = e^{s} \qquad (s = \infty \text{ sing. essenziale})$$
$$f(s) = \frac{s^3+1}{s+4} \qquad (s = \infty \text{ polo di ordine 2}).$$

Nella classificazione delle singolarità si rivelano particolarmente utili i seguenti:

Teorema *Le UNICHE funzioni dotate di sole singolarità eliminabili e/o polari sono le funzioni razionali.*

Poichè, come vedremo, le uniche funzioni prive di singolarità al finito e all'infinito, sono le funzioni costanti, si ha allora il seguente:

Corollario *Sia f una funzione NON razionale. Allora f ha almeno una singolarità non isolata o essenziale.*

Esrecizio : Classificare le singolarità di

$$f(s) = \frac{\sin s}{(s-4)(e^s-1)}.$$