# APPLICAZIONI di MATEMATICA
# A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 3 ottobre 2006

October 3, 2006

## 1 Integrale in $\mathbb{C}$

### 1.1 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a,b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto $(a,b)$ [i.e. $x, y \in C^1(a,b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in $(a,b)$.

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni $x, y$ sono di classe $C^1$ in tutto $(a,b)$ eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora $\gamma$ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro $s_0$, raggio $\rho$ e percorsa in senso antiorario.

Una curva $\gamma$ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva $\gamma$ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Sia $\gamma$ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di* $\gamma$ il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

## 1.2 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia $\gamma$ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di* $f$ *esteso a* $\gamma$ il numero complesso

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))y'(t)dt.$$

Esempi: Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} |s|ds \text{ dove } \gamma_1(t) = 4e^{jt}, t \in [0, \pi]; \\ I_2 &= \int_{\gamma_2} |s|ds \text{ dove } \gamma_2(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]; \\ I_3 &= \int_{\gamma_3} \overline{s}ds \text{ dove } \gamma_3(t) = e^{jt}, t \in [0, \pi/2]; \\ I_4 &= \int_{\gamma_4} sds \text{ dove } \gamma_4(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

Si ha $I_1 = -32, I_2 = 0, I_3 = \pi j/2, I_4 = -4$.

"**Esercizio**" Si ha

$$\int_C \frac{1}{s - s_0} ds = 2\pi j,$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, i.e. $C$ è una circonferenza di centro $s_0$, raggio $r$ e percorsa (**una sola volta**) in senso antiorario (positivo).

# 2 Proprietà dell'integrale in C

1. **Linearità** ($c_1, c_2$ costanti complesse):

$$\int_\gamma [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)]ds = c_1 \int_\gamma f_1(s)ds + c_2 \int_\gamma f_2(s)ds$$

2. **Ordine:**

$$\int_\gamma f(s)ds = -\int_{-\gamma} f(s)ds.$$

3. **Additività:**

$$\int_{\gamma 1+\gamma 2} f(s)ds = \int_{\gamma 1} f(s)ds + \int_{\gamma 2} f(s)ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :

$$\left| \int_\gamma f(s)ds \right| \leq L_\gamma \max_{s\in\gamma} |f(s)|$$

dove $L_\gamma$ indica la lunghezza della curva $\gamma$.

# 3 Teoremi di Cauchy per l'integrale

**Teorema 1 (di Cauchy)** *Sia $\gamma$ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia $f$ una funzione analitica all'interno di $\gamma$ e continua su $\gamma$. Allora:*

$$\int_\gamma f(s)ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che in una regione in cui $f$ è analitica, l'integrale è indipendente dal cammino.

Si osservi che se la funzione integranda non è analitica in TUTTA la regione limitata dalla curva $\gamma$, allora l'integrale puo' non essere nullo, come illustra l'esempio (visto prima)

$$\int_C \frac{1}{s - s_0} ds = 2\pi j. \tag{1}$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

**Teorema 2 (di Cauchy)** *Siano* $\gamma_1$ *e* $\gamma_2$ *due curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso con* $\gamma_1$ *contenente* $\gamma_2$ *[vedi figura 1]. Sia* $s_0$ *un punto interno a* $\gamma_2$ *e sia* $f$ *analitica all'interno di* $\gamma_1$ *eccetto il punto* $s_0$*. Sia poi* $f$ *continua su* $\gamma_1$*. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(s)ds = \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

Tale risultato esprime il fatto che l'integrale lungo una curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa non cambia se si "deforma con continuità la curva" purchè la funzione considerata sia analitica in tutta la regione compresa tra la curva originaria e la curva "deformata".

Ricordando l'integrale (1), si ha allora

$$\int_{\gamma} \frac{1}{s - s_0} ds = 2\pi j$$

dove $\gamma$ è una **qualunque** curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa **contenente al proprio interno** il punto $s_0$.

**Teorema 3 (di Cauchy)** *Siano* $\Gamma, \gamma_1$ *e* $\gamma_2$ *tre curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso poste come in figura 2. Siano* $s_1$ *e* $s_2$ *due punti interni rispettivamente a* $\gamma_1$ *e* $\gamma_2$ *e sia* $f$ *analitica all'interno di* $\Gamma$ *eccetto i punti* $s_1$ *e* $s_2$*. Sia poi* $f$ *continua su* $\Gamma$*. Allora*

$$\int_{\Gamma} f(s)ds = \int_{\gamma_1} f(s)ds + \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

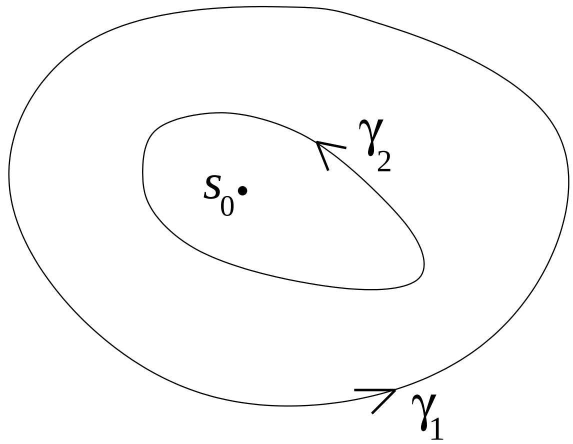


Figura 1

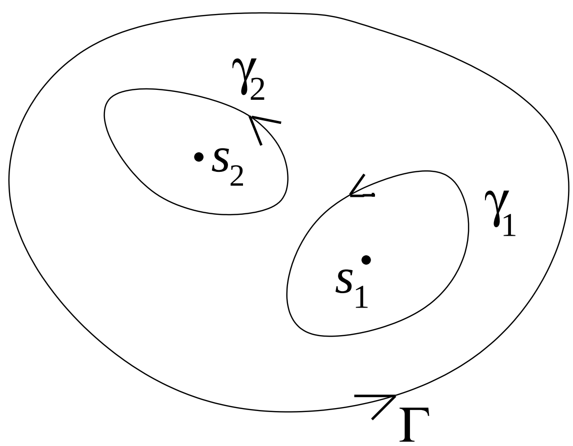


Figura 2