APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 27 settembre 2006

September 28, 2006

1 Funzioni in $\mathbb{C}$

1.1 Generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione puo' essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di* f e *parte immaginaria di* f.

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

La funzione f prende nome di *"inversione per raggi reciproci"* e gode della seguente proprieta': f trasforma circonferenze di centro l'origine in circonferenze di centro l'origine e ne inverte il senso di percorrenza. Inoltre f trasforma l'interno di tali circonferenze nell'esterno e viceversa.

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$
\begin{aligned}
f_1(s) &= 7js + s^2 \\
f_2(s) &= s + |s|^2 \\
f_3(s) &= \frac{\overline{s}}{s-4} \\
f_4(s) &= \frac{3}{s - |s!}
\end{aligned}
$$

1.2 Limiti e continuità

Poiché $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, la definizione di limite in $\mathbb{C}$ è simile a quella data in $\mathbb{R}$: è sufficiente interpretare il $|....|$ come modulo. Precisamente, data una funzione complessa $z = f(s)$ diremo che

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L, \qquad (L \in \mathbb{C})$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|s - s_0| < \delta$ e $s \neq s_0$ si ha $|f(s) - L| < \varepsilon$.

E' facile provare che

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L, \qquad (L \in \mathbb{C})$$

se e solo se

$$\lim_{s \to s_0} \operatorname{Re} f(s) = \operatorname{Re} L \qquad \text{e} \qquad \lim_{s \to s_0} \operatorname{Im} f(s) = \operatorname{Im} L.$$

La funzione complessa $z = f(s)$ si dice *continua in* s_0 se

$$\lim_{s \longrightarrow s_0} f(s) = f(s_0).$$

Una funzione f è continua in s_0 se e solo se sono continue in (x_0, y_0) [dove $s_0 = x_0 + jy_0$] la parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$. Somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni continue sono funzioni continue (nel caso del quoziente sono **esclusi** i punti in cui il denominatore si annulla).

Poichè $\mathbb{C}$ è non ordinato, non è possibile estendere al piano complesso il concetto di funzione monotona e le relative proprietà viste nell'ambito dell'analisi reale.

2 Derivabilità e analiticità

2.1 Definizioni

Una funzione f, definita in un intorno di un punto s_0, si dice *derivabile in* s_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{s \to s_0} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}$$

e tale limite si indica con il simbolo $f'(s_0)$.

Esempi: per le funzioni

$$f(s) = 1, g(s) = s, h(s) = s^2$$

si ha rispettivamente

$$f'(s) = 0, g'(s) = 1, h'(s) = 2s.$$

In generale, è possibile provare che, se $n \in \mathbb{N}$, allora

$$f(s) = s^n \Longrightarrow f'(s) = ns^{n-1}.$$

Le funzioni $f(s) = \overline{s}, g(s) = |s|$ non sono derivabili in $s_0 = 0$.

Sia Ω un insieme aperto del piano complesso. Una funzione f si dice *analitica in* Ω [e si scrive $f \in C^1(\Omega)$] se f è derivabile in tutto l'insieme Ω ed ha derivata continua. Vale il seguente importante risultato:

Teorema di Cauchy-Riemann. *Sia Ω un insieme aperto del piano complesso. Una funzione f è analitica in Ω* ***se e solo se*** *le funzioni $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ sono derivabili parzialmente rispetto a x e y [dove, al solito, $s = x + jy$] con derivate continue e verificano in tutto Ω le relazioni*

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y). \end{aligned} \tag{1}$$

Inoltre si ha

$$f'(s) = u_x(x,y) + jv_x(x,y). \tag{2}$$

Le formule (1) prendono nome di *formule di Cauchy-Riemann*.

La formula (2) fornisce l'espressione della derivata di una funzione analitica. Da essa, tenendo conto di (1), è possibile ottenere altre equivalenti espressioni per la derivata. Ad esempio si ha

$$f'(s) = v_y(x, y) - j u_y(x, y).$$

Esempi : i) provare che la funzione $f(s) = \overline{s}$ non è analitica in $\mathbb{C}$; ii) provare che $g(s) = s^2 + js$ è analitica in $\mathbb{C}$ e si ha $g'(s) = 2s + j$; iii) provare che $h(s) = e^s$ è analitica in $\mathbb{C}$ e si ha $h'(s) = e^s$.