APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 9 ottobre 2006

October 9, 2006

1 Formula di Taylor

Teorema (Formula di Taylor) *Sia f analitica in un intorno I di un punto s_0. Allora per $s \in I$ si ha*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s - s_0)^k = a_0 + a_1(s - s_0) + a_2(s - s_0)^2 + ... \tag{1}$$

dove i coefficienti a_k sono dati dalla formula

$$a_k = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - s_0)^{k+1}} ds \tag{2}$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno I e contenente al proprio interno il punto s_0.

La formula (1) esprime il fatto che una funzione analitica in un intorno I di un punto s_0 è in tale intorno sviluppabile in serie di potenze e tale serie (i.e. (1)) si chiama *serie (o sviluppo) di Taylor di f in s_0.*

Poichè ogni serie di potenze è derivabile infinite volte, dal Teorema precedente si ha il risultato (già anticipato):

Corollario : *Sia I un intorno di s_0 e sia f una funzione, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Allora le seguenti quattro affermazioni sono **equivalenti**:*

-1) $f \in C^1(I)$ [i.e. f è analitica in I];

-2) le funzioni u, v ($u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) sono derivabili parzialmente in I con derivate continue ed inoltre in I valgono le formule (di Cauchy-Riemann):

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y); \end{aligned}$$

-3) $f \in C^\infty(I)$;

-4) f è sviluppabile in serie di potenze in I.

Si osservi che nell'ambito dell'analisi reale in generale si ha

$$\begin{aligned} 1) &\not\Rightarrow 3) \\ 3) &\not\Rightarrow 4). \end{aligned}$$

1.1 Sviluppi "notevoli"

Utilizzando la proprietà che lo sviluppo di Taylor (1) è unico, si ottengono i seguenti sviluppi "notevoli":

$$\begin{aligned} e^s &= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^n}{n!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\ \sin s &= s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\ \cos s &= 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{1-s} &= 1 + s + s^2 + ... + s^n + ... && \forall s : |s| < 1. \end{aligned}$$

1.2 Formule integrali di Cauchy

Sia f analitica in un intorno I di un punto s_0 e sia γ una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno I e contenente al proprio interno il punto s_0. Allora il valore della derivata k-esima di f in s_0 è dato da

$$\frac{f^{(k)}(s_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-s_0)^{k+1}} ds. \tag{3}$$

In particolare:
$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{f(s)}{s-s_0}ds.$$
Le formule (3) prendono nome di formule integrali di Cauchy.

Da (2) e (3) si ha anche
$$\frac{f^{(k)}(s_0)}{k!} = a_k$$
dove a_k sono i coefficienti di Taylor (vedi (1)).

Esercizio: Utilizzando le formule integrali di Cauchy (3) si provi che
$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{1}{(s-s_0)^k}ds = 0$$
per ogni intero positivo $k > 1$, dove γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, contenente al proprio interno il punto s_0.

2 Singolarità

Definizione 1 - *Un punto s_0 si dice **punto singolare per** f se non esiste alcun intorno I di s_0 tale che f sia analitica in TUTTO I.*

Definizione 2 - *Sia s_0 un punto singolare per f. Allora s_0 si dice **punto singolare isolato** (o **singolarità isolata**) se esiste un intorno V di s_0 tale che f sia analitica in $V/\{s_0\}$ (i.e. f è analitica in tutto V eccetto s_0). Altrimenti il punto s_0 si dice **non isolato** (o **punto di accumulazione**).*

Esempi

$f_1(s) = \dfrac{s^2+1}{(s-2)(s-4)^3} \Rightarrow s=2, s=4$ sono sing. isolate.

$f_2(s) = \overline{s} \qquad \Longrightarrow$ ogni punto $s \in \mathbb{C}$ è una sing. non isolata

$f_3(s) = \dfrac{1-\cos s}{s^2} \Longrightarrow \; s=0$ è singolarità isolata

$f_4(s) = \sin(1/s) \Longrightarrow s=0$ è sing. isolata

$f_5(s) = \dfrac{1}{\sin(1/s)} \Longrightarrow s=0$ è sing. non isol., $s_k = \dfrac{1}{k\pi}$ sono sing. isol. $(k \neq 0)$

Per quanto riguarda l'ultimo esempio, il ragionamento si basa anche sulla seguente proprietà delle funzioni trigonometriche in campo complesso :

Proprietà:

Gli zeri della funzione seno (o coseno) in $\mathbb{C}$ coincidono con gli zeri della funzione seno (o, rispettivamente, coseno) in $\mathbb{R}$"

2.1 Singolarità isolate

Definizione 3 - *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora s_0 si chiama:*

♦ ***singolarità eliminabile*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) \text{ esiste finito:}$$

♦ ***singolarità polare*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = \infty;$$

♦ ***singolarità essenziale*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) \text{ non esiste.}$$

♦ *Nel caso in cui s_0 sia una singolarità polare, allora s_0 si dice* ***polo di ordine N***> 0 *(con N numero naturale) se*

$$\lim_{s \to s_0} (s - s_0)^N f(s) \text{ è finito e diverso da } 0 \text{ .}$$

In riferimento agli esempi di prima si ha: la funzione f_1 ha in $s = 2$ un polo semplice e in $s = 2$ un polo triplo. La funzione f_3 ha in $s = 0$ una sing. eliminabile. La funzione f_4 ha in $s = 0$ una singolarità essenziale. La funzione f_5 ha in $s_k = 1/(k\pi)$ $(k \neq 0)$ singolarità polari semplici.