APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 17 ottobre 2006

October 17, 2006

1 Residui

Sia s_0 una singolarità isolata per f : esiste quindi un intorno V di s_0 tale che f è analitica in $V/\{s_0\}$. Si chiama *Residuo di f in s_0*, e si indica con $\mathrm{Res}[f, s_0]$ il numero

$$Res[f, s_0] = c_{-1}$$

dove c_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent associata, relativo al termine $(s - s_0)^{-1}$.

Dallo sviluppo in serie di Laurent ne segue (vedi lezioni scorse)

$$Res[f, s_0] = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma f(s)ds$$

dove γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo appartenente all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0.

1° Teorema dei Residui *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia f analitica all'interno di Γ eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, ..s_N$. Sia infine f continua su Γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma f(s)ds = Res[f, s_1] + Res[f, s_2] + ... + Res[f, s_N].$$

1.1 Formule per il calcolo dei Residui

Si ha:

s_0 sing. eliminabile $\Longrightarrow Res[f, s_0] = 0$;
s_0 polo semplice $\Longrightarrow Res[f, s_0] = \lim_{s \to s_0}(s - s_0)f(s)$
s_0 polo ordine $N > 1 \Longrightarrow Res[f, s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} \left[(s - s_0)^N f(s)\right]$

Esempio n. 1 Calcolare

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{2s + 1}{s(s + 4)(s + 1)^2} ds$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione: le singolarità della funzione

$$f(s) = \frac{2s + 1}{s(s + 4)(s + 1)^2}$$

interne a γ sono $s = 0$ e $s = -1$. Si ha poi che $s = 0$ è un polo semplice e $s = -1$ è un polo doppio. Pertanto

$$I_1 = Res[f, 0] + Res[f, -1]$$

e

$$Res[f, 0] = \lim_{s \to 0} sf(s) = \lim_{s \to 0} \frac{2s + 1}{(s + 4)(s + 1)^2} = \frac{1}{4}$$
$$Res[f, -1] = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \left[(s + 1)^2 f(s)\right] = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \frac{2s + 1}{s(s + 4)} = \frac{-4}{9}.$$

Esempio n. 2 Calcolare

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{\sin s}{s^3 + 6s^2 + 8s} ds$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione: le singolarità della funzione

$$f(s) = \frac{\sin s}{s^3 + 6s^2 + 8s}$$

interne a γ sono $s = 0$ e $s = -2$. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = -2$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = Res[f, 0] + Res[f, -2]$$

e

$$\begin{aligned} Res[f, 0] &= 0 \\ Res[f, -2] &= \lim_{s \to -2} (s + 2) f(s) = \lim_{s \to -2} \frac{\sin s}{s(s + 4)} = \frac{\sin 2}{4}. \end{aligned}$$

Esempio n. 3 Calcolare

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{\sin s}{s^2 - 7s} ds$$

dove $\gamma(t) = 8e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione: le singolarità della funzione

$$f(s) = \frac{\sin s}{s^2 - 7s}$$

sono $s = 0$ e $s = 7$. Entrambe sono interne a γ. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = 7$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = Res[f, 0] + Res[f, 7]$$

e

$$\begin{aligned} Res[f, 0] &= 0 \\ Res[f, 7] &= \lim_{s \to 7} (s - 7) f(s) = \lim_{s \to 7} \frac{(s - 7) \sin s}{s(s - 7)} = \frac{\sin 7}{7}. \end{aligned}$$

Esempio n. 4 Provare che

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{s}{e^{2s} - 1} ds = 0,$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Esempio n. 5 Provare che

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{4}{(s - 4)^2 s} ds = 0,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2 Serie di Laurent all'infinito

Si consideri

$$I_6 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{e^{1/s}}{(s-1)s} ds, \tag{1}$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Le singolarità della funzione integranda (interne a γ) sono $s = 0$ e $s = 1$. Entrambe sono, ovviamente, isolate e $s = 1$ è un polo semplice, mentre $s = 0$ è essenziale. Per calcolare il Res[f,0], e di conseguenza I_6, le formule precedenti non sono utilizzabili. In questo caso possiamo procedere estendendo il Teorema di Laurent all'infinito e introducendo il concetto di Residuo all'infinito. Precisamente

Teorema di Laurent in $s = \infty$

Sia f analitica all'ESTERNO di una circonferenza di centro l'origine e raggio R (sufficientemente grande). Allora per s tale che $|s| > R$ si ha

$$f(s) = \underbrace{...\frac{d_{-k}}{s^k} + ... + \frac{d_{-1}}{s} + d_0}_{(+)} + \underbrace{d_1 s + .. + d_k s^k + ...}_{(*)} \tag{2}$$

dove i coefficienti d_k (chiamati coefficienti di Laurent all'infinito) sono dati dalla formula

$$d_k = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma \frac{f(s)}{s^{k+1}} ds, \tag{3}$$

dove Γ è una circonferenza percorsa una sola volta in senso positivo, di centro l'origine e raggio $R_1 > R$.

La serie (2) prende nome di *serie di Laurent all'infinito*. Tale serie è **formalmente** analoga alla serie di Laurent in $s = 0$, ma solo formalmente. Infatti quest'ultima converge in un intorno di $s = 0$, mentre la serie di Laurent all'infinito (2) converge per $|s|$ grande.

La serie (+) in (2) si chiama *parte analitica* della serie di Laurent all'infinito e la parte (*) ***parte principale***. Quindi all'infinito parte analitica e parte principale "si scambiano" (eccetto d_0).

2.1 Residuo all'infinito

Definizione. *Sia* f analitica per $|s|$ sufficientemente grande, i.e. per $|s| > R$. Questo fatto implica che $s = \infty$ è una singolarità isolata per f oppure un punto di regolarità. Si chiama *Residuo di f all'infinito,* e si indica con $\mathrm{Res}[f, \infty]$, il numero

$$Res[f, \infty] = -d_{-1}$$

dove d_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent all'infinito (2), relativo al termine s^{-1}.

Da (3) si ha allora

$$Res[f, \infty] = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds$$

dove Γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo che contiene al proprio interno **tutte** le singolarità al finito di f .

I concetti di Residuo all'infinito e Residuo al finito presentano delle differenze **sostanziali**. Ad esempio $s = \infty$ puo' essere una singolarità eliminabile (oppure un punto di regolarità) ed aversi

$$Res[f, \infty] \neq 0$$

il che al finito NON puo' accadere. E' sufficiente considerare la funzione

$$f(s) = \frac{5}{s} + \frac{7}{s^2}$$

per la quale si ha $Res[f, \infty] = -5 \neq 0$, eppure $s = \infty$ è uno zero per f.

Inoltre $s = \infty$ puo' essere un polo semplice ed aversi

$$Res[f, \infty] = 0$$

il che al finito NON puo' accadere. E' sufficiente considerare la funzione

$$g(s) = 4s + 8$$

per la quale si ha $Res[g, \infty] = 0$, eppure $s = \infty$ è un polo semplice per g.