APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 2 ottobre 2006

October 2, 2006

1 Derivabilità e analiticità

1.1 Proprietà

Valgono le usuali regole di derivazione, viste nell'ambito dell'analisi reale:

$$\begin{aligned}
(f(s) \pm g(s))' &= f'(s) \pm g'(s) \\
(f(s)\ g(s))' &= f'(s)g(s) + f(s)g'(s) \\
\left(\frac{f(s)}{g(s)}\right)' &= \frac{f'(s)g(s) - f(s)g'(s)}{g^2(s)} \\
\frac{d}{ds} f(g(s) &= \frac{df}{dg}\ \frac{dg}{ds}
\end{aligned}$$

Teorema *Sia Ω un aperto di C. Allora f è analitica in Ω [ossia $f \in C^1(\Omega)$] se e solo se $f \in C^\infty(\Omega)$.*

Definizione *Una funzione $h : R^2 \to R, h = h(x, y)$ si dice armonica in un aperto Ω se in tale aperto h soddisfa l'equazione*

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0. \tag{1}$$

Teorema 3 *Sia f analitica in un intorno I di un punto s_0. Allora le funzioni*

$$u = \mathrm{Re}\, f, \qquad v = \mathrm{Im}\, f$$

sono funzioni armoniche in tale intorno, ossia in tale intorno verificano l'equazione

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Viceversa sia $u = u(x, y)$ *[*$v = v(x, y)$*] una funzione armonica in un intorno* I *di* (x_0, y_0)*. Allora esiste una funzione analitica* f*, individuata a meno di una costante reale, tale che* $\operatorname{Re} f = u$ *[*$\operatorname{Im} f = v$*].*

Corollario 1 *Una funzione* $u = u(x, y)$*, definita in un intorno* I *di un punto* (x_0, y_0) *è parte reale di una funzione analitica in* I *se e solo se* u *è armonica in tale intorno, ossia soddisfa l'equazione (1) in* I*. Analogamente una funzione* $v = v(x, y)$*, definita in* I *è parte immaginaria di una funzione analitica in* I *se e solo se* v *è armonica in* I*, ossia soddisfa l'equazione (1) in* I*.*

Esempi. La funzione $u(x, y) = 2xy + y$ è parte reale di una funzione analitica. La funzione $v(x, y) = x^2 + 4xy$ non è parte immaginaria di una funzione analitica. Analogamente, la funzione $u(x, y) = 2x - 7y^2$ non è parte reale di una funzione analitica.

1.2 Ricostruzione di una funzione analitica f, assegnata la parte reale $u = \operatorname{Re} f$ oppure la parte immaginaria $v = \operatorname{Im}\ f$.

Procediamo con un esempio. La funzione $u(x, y) = 6xy - x - 2$, come è immediato verificare, è armonica. Troviamo dunque le funzioni f tali che $\operatorname{Re} f = u$.

Si ha

$$u_x(x, y) = 6y - 1, \qquad u_y(x, y) = 6x$$

Tenendo conto delle formule di Cauchy-Rieman si ottiene

$$\begin{aligned} v_y(x, y) &= 6y - 1 \\ v_x(x, y) &= -6x \end{aligned}$$

Integrando la prima equazione rispetto a y e la seconda rispetto a x si ha rispettivamente

$$v(x,y) = 3y^2 - y + c(x)$$
$$v(x,y) = -3x^2 + d(y)$$

dove $c = c(x)$ è una funzione della **sola** x e $d = d(y)$ è una funzione della **sola** y. Allora

$$3y^2 - y + c(x) = -3x^2 + d(y)$$

ossia

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x)$$

Poichè il primo membro dipende solo da y e il secondo soltanto da x, necessariamente entrambi devono essere costanti, ossia esiste una costante reale k tale che

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x) = k.$$

Ne segue $c(x) = -3x^2 + k$ e quindi $v(x,y) = 3y^2 - y + -3x^2 + k$. In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned} f(s) = f(x+jy) = u(x,y) + jv(x,y) = \\ = [6xy - x - 2] + j[3y^2 - y + -3x^2 + k] \end{aligned} \tag{2}$$

Per determinare l'espressione di f in funzione della variabile s si puo' usare il seguente:

Teorema di Weierstrass (dell'unicità dell'estensione analitica) *Sia* $\widehat{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Allora esiste al più una estensione di* $\widehat{h}$ *al piano complesso che risulti analitica, i.e. esiste al piu' una funzione* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica e tale che $h(x) = \widehat{h}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Il teorema di Weierstrass è un risultato di "unicità" e sinteticamente è chiamato "Teorema dell'unicità dell'estensione analitica".

Il (semplice) procedimento è il seguente. Da (2) si ha

$$\widehat{h}(x) = f(x + j0) = -x - 2 - 3x^2 j + kj. \tag{3}$$

Si consideri poi l'estensione a $\mathbb{C}$ della funzione $\widehat{h}$, ossia si consideri la funzione h ottenuta da (3) sostituendo x con s :

$$h(s) = -s - 2 - 3s^2 j + kj. \tag{4}$$

Le funzioni (2) e (4) sono due estensioni **analitiche** della stessa funzione $\widehat{h}$. Allora, per il Teorema di unicità di Weierstrass, tali funzioni devono necessariamente coincidere, e quindi

$$f(s) = -s - 2 - 3s^2 j + kj.$$

Esempi.

Determinare le funzioni analitiche tali che $u(x, y) = 3(x^2 - y^2)$ [Risposta $f(s) = 3s^2 + jk$].

Determinare la funzione analitica f tale che $\mathrm{Re}\, f = x + 10xy$, $f(0) = 0$.

1.3 Complementi

1. Si osservi che i teoremi di Rolle e di Lagrange non sono estendibili al piano complesso. Si giustifichi tale affermazione con un esempio (suggerimento: utilizzare la funzione $F(s) = e^s$.

2. Sia f una funzione analitica in $\mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Im}\, f = 0$. Provare che f è necessariamente una funzione costante.

2 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b).

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempi. (i) La curva

$$\gamma(t) = \cos t + j \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro l'origine, raggio 1 e percorsa in senso antiorario (il senso delle "t crescenti"). Ricordando le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)[1]

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}, \tag{5}$$

tale curva si puo' esprimere anche nella forma compatta

$$\gamma(t) = e^{jt}, t \in [0, 2\pi].$$

(ii) La curva

$$\gamma(t) = 6 + 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro 6, raggio 3 e percorsa in senso antiorario.

(iii) La curva

$$\gamma(t) = 1 + j + 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro $1 + j$, raggio 2 e percorsa in senso antiorario.

(iv) La curva

$$\gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi]$$

[1] Le formule di Eulero si ottengono dalle relazioni

$$e^{jy} = \cos y + j \sin y, \qquad e^{-jy} = \cos y - j \sin y$$

mediante somma e sottrazione.

rappresenta una semicirconferenza di centro l'origine, raggio 2, giacente nel 1^o e 2^o quadrante e percorsa in senso antiorario.

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di* γ il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

3 Funzioni trigonometriche in $\mathbb{C}$

Si definiscono le funzioni trigonometriche seno e coseno in $\mathbb{C}$ come estensione al campo complesso delle formule di Eulero nel modo seguente:

$$\sin s =_{\text{def}} \frac{e^{js} - e^{-js}}{2j}, \qquad \cos s =_{\text{def}} \frac{e^{js} + e^{-js}}{2}, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Le principali proprietà di tali funzioni sono le seguenti.

1. Le funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ sono le estensioni al campo complesso delle corrispondenti funzioni reali;

2. Le *formule trigonometriche* note in campo reale e che non coinvolgono disuguaglianze, continuano a valere in $\mathbb{C}$. Ad esempio sono valide (e la verifica è immediata) l'identità fondamentale

   $$\sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

   le formule di somma, di sottrazione, di duplicazione, ecc... .

3. Le funzioni seno e coseno sono *periodiche* di periodo 2π.

4. La funzione seno è dispari, mentre la funzione coseno è pari:

   $$\sin(-s) = -\sin s, \qquad \cos(-s) = \cos s.$$

5. Valgono le relazioni

   $$\sin s = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$$
   $$\cos s = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y,$$

da cui segue

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\ \ \sin s = \sin x \cosh y, \qquad &&\mathrm{Im}\ \ \sin s = \cos x \sinh y \\
&\mathrm{Re}\ \ \cos s = \cos x \cosh y, \qquad &&\mathrm{Im}\ \ \cos s = -\sin x \sinh y.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

6. Utilizzando (6) e le formule di Cauchy Riemann si ottiene facilmente che le funzioni seno e coseno sono *analitiche* in tutto $\mathbb{C}$ e vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sin s = \cos s, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \cos s = -\sin s;$$

   inoltre valgono le relazioni

$$\overline{\sin s} = \sin \overline{s}, \qquad \overline{\cos s} = \cos \overline{s}.$$

7. Le funzioni seno e coseno *assumono tutti i valori complessi.* Dunque l'equazione $\sin s = \alpha$ ammette infinite soluzioni qualunque sia $\alpha \in \mathbb{C}$, e analogamente $\cos s = \alpha$. Di conseguenza **le funzioni seno e coseno NON sono limitate in $\mathbb{C}$.**

8. Se $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1$, l'equazione $\sin s = a$ ha come soluzioni *tutte e sole* le soluzioni (reali) di $\sin x = a$ in $\mathbb{R}$; analogo per il coseno. Quindi, in particolare scegliendo $a = 0$ si ha che **gli zeri delle funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ coincidono con gli zeri delle corrispondenti funzioni reali.**