APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2006-2007
ESERCIZI parte 2

October 16, 2006

1 Integrale in $\mathbb{C}$

Esercizio 1.1 - Per le funzioni razionali

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}; \qquad f_2(s) = \frac{7s^3+6}{s^2+4s+5}; \qquad f_3(s) = \frac{s}{s^2-1}$$
$$f_4(s) = \frac{3s-9}{s^3+6s^2+5s}; \qquad f_5(s) = \frac{s}{(s+j)^2}; \qquad f_6(s) = \frac{s}{s^2+j}.$$

calcolare

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove $\gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.2 - Per le funzioni non razionali

$$g_1(s) = \frac{s+1}{e^s(s-1)}; \qquad g_2(s) = \frac{e^s-1}{s(s-3)(s-6)}; \qquad g_3(s) = \frac{\sin s}{s^2-9s};$$
$$g_4(s) = \frac{\sin(1/s)}{s^2-5s}; \qquad g_5(s) = \frac{1-\cos s}{s^3-s^2}; \qquad g_6(s) = \frac{s^2+4s+3}{e^s};$$
$$g_7(s) = \frac{\sin(2s)}{s^2-2s}; \qquad g_8(s) = \frac{\sin(2s)}{(s^2-6s)^2}; \qquad g_9(s) = \frac{se^{1/s}}{s^2-9}.$$

calcolare :

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove $\gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.3 - Per le funzioni g_i definite nell'Esercizio 1.2, calcolare i seguenti integrali:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma [g_i(s) + s]ds$$
$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma [g_i(s) + \frac{1}{s}]ds$$
$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma [g_i(s) + \frac{\sin s}{s}]ds$$

dove $\gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$.

1.1 Residuo all'infinito

Esercizio 2.1 - Per le funzioni di cui all'Esercizio 1.2, calcolare, se esiste, il Residuo all'infinito.

Esercizio 2.2 - Calcolare $\mathrm{Res}[f, 0]$ e $\mathrm{Res}[f, \infty]$ delle seguenti funzioni:

$$f(s) = \frac{\sin s}{s^2}; \qquad f(s) = \frac{\exp(1/s)}{s^2};$$
$$f(s) = \frac{\exp s}{s^2}; \qquad f(s) = s\cos(\frac{1}{s});$$
$$f(s) = \frac{5}{s}\cos 4s; \qquad f(s) = \exp(s);$$
$$f(s) = \cos 5s; \qquad f(s) = \frac{3}{s}\sin\frac{1}{s}.$$

2 Esercizi "teorici"

Es. 1 Per le seguenti funzioni calcolare, se esiste, il residuo all'infinito

$$f_1(s) = s - |s|; \; f_2(s) = s - 4\exp(2s^3)$$

Es. 2 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ avente una sola singolarità al finito in $s = 0$, di tipo essenziale. Sia inoltre $s = \infty$ uno zero triplo. Quanto vale $\text{Res}[f, 0]$?

Es. 3 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\text{Re}\, f = x^2 - y$; la funzione f è analitica?

Es. 4 Si può applicare il 2° Teor. dei Residui alle funzioni

$$f_1(s) = \frac{\sin 7s}{s^2 + 9s + 8}; \; f_2(s) = \frac{\sin 7s}{(s^2 + 9s + 8)\exp(4s)};$$
$$f_3(s) = \frac{\exp(3s)}{(s^2 + 9s + 8)(\sin 7s)} \; ?$$

Es. 5 Siano

$$F_1(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)}; \; F_2(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)(s+11)}.$$

Le funzioni F_i sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = -7$? E in $s = \infty$?

Es. 6 Sia F una funzione razionale. Sono sviluppabili in serie di Laurent all'infinito le funzioni

$$G_1(s) = F(s)/\sin s; \; G_2(s) = F(s)/\exp(5s) \; ?$$

Es. 7 Sia F una funzione razionale con $F(0) = 1$. Sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = 0$ le funzioni

$$G_1(s) = e^{1/s}F(s); \qquad G_2(s) = \frac{F(s)}{s};$$
$$G_3(s) = \frac{F(s)}{\sin(1/s)}; \qquad G_4(s) = e^{-1/s}F(s) \qquad ?$$

Es. 8 Ciascuna delle seguenti domande ha UNA E UNA SOLA RISPOSTA ESATTA. Si individui quale, giustificando la risposta.

▲ *Domanda n.1 - E' applicabile il 2^o Teorema dei Residui alla funzione*

$$F(s) = \frac{2 + e^{1/s}}{\sin s} \ ?$$

a) - No, perché F ha infinite singolarità.
b) - Sì, perché F è limitata
c) - No, perché $s = 0$ è sing. essenziale
d) - Sì, perché F non è razionale.

▲ *Domanda n.2 - Sia F priva di singolarità al finito e all'infinito. Quale delle seguenti affermazioni è vera?*
a) $F(0) = 0, F(1) = 1$
b) $F(0) = 1, F(1) = 0$
c) $F(0) = F(1)$
d) $F(0) = 0, F(\infty) = 1$

▲ *Domanda n.3 - Sia F una funzione razionale propria [i.e. $F = N/D$,con N e D polinomi tali che grado N <grado D]. Sia poi $G(s) = 1/F(s)$. Allora:*
a) G ha almeno una singolarità essenziale
b) G ha almeno una singolarità polare
c) G ha almeno una singolarità non isolata
d) G è limitata.