APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2005-2006

Traccia della lezione del 25 settembre 2006

September 28, 2006

1 Richiami sui numeri complessi

1.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j, detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \mathrm{Re}z, b = \mathrm{Im}z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$; poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale*. Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario.*

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a+jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di* z, e si indica con $\overline{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A, il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \overline{z \pm s} &= \overline{z} \pm \overline{s} \\ \overline{zs} &= \overline{z}\ \overline{s} \\ \overline{\left(\frac{z}{s}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{s}} \qquad \text{se } s \neq 0. \end{aligned}$$

Si chiama poi *modulo di* z, e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \text{Re}z, \text{Im}z$:

$$\begin{aligned} z\ \bar{z} &= |z|^2 \\ \text{Re}z &= (z + \bar{z})/2 \\ \text{Im}z &= (z - \bar{z})/2j. \end{aligned}$$

1.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned} z + s &= (a + c) + (b + d)j \\ z - s &= (a - c) + (b - d)j \\ zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\ \frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \text{ (se } s \neq 0). \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$: questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi e sarà provata successivamente.

1.3 Distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, dove la distanza $d(z, s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z, s) = |z - s|.$$

Verificare la relazione

$$|z + s|^2 + |z - s|^2 = 2(|z|^2 + |s|^2).$$

Tale relazione è nota come "Identità del parallelogrammo" in quanto esprime la ben nota proprietà della geometria euclidea che in un parallelogrammo la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali coincide con la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ.

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1$$

rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $3 - 2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

1.4 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di* z, e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a+jb$, indicando con ρ il modulo di z, risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Le formule di passaggio sono quindi:

$$a = \rho\cos\theta$$
$$b = \rho\sin\theta$$

$$
\rho = \sqrt{a^2 + b^2}
$$
$$
\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases}
$$

1.5 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del prodotto e del rapporto di tali due numeri ($s_1, s_2 \neq 0$). Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica: $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$, si ha

$$
s_1 s_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)]
$$
$$
\frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)].
$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

$$
z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}.
$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$
\left(\sqrt{3} + j\right)^6 = -64.
$$

Se interpretiamo i numeri complessi come vettori piani, allora la somma o la differenza tra due numeri complessi s, z. ha, rispettivamente, il significato tradizionale di somma o differenza tra vettori. Il prodotto di un numero complesso z per un numero complesso assegnato s_0, con $z \neq 0$ e $s_0 \neq 0$, puo' essere interpretato come una rotazione del vettore z accompagnata da una omotetia (dilatazione se $|s_0| > 1$, contrazione se $|s_0| < 1$). Ad esempio jz è il vettore che si ottiene ruotando in senso antiorario di $\pi/2$ il vettore z.

1.6 Radici in campo complesso e risoluzione di equazioni algebriche.

Determinare le radici n-esime di un dato numero complesso $s_0 \neq 0$ significa risolvere l'equazione $z^n = s_0$. Utilizzando la forma trigonometrica

$s_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0)$, $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$ (ρ_0, θ_0 dati del problema, ρ, θ incognite), mediante l'utilizzo delle formule di De Moivre si ottiene

$$\rho^n = \rho_0, \quad n\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti due numeri complessi coincidono se e solo se hanno uguale modulo e argomento che differisce per multipli di 2π. Essendo ρ_0 reale positivo, la prima equazione ha come unica soluzione $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ (radice reale). Dalla seconda: $\theta = \theta_0/n + 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$; si osserva che soltanto per $k = 0, 1, \ldots n-1$ risulta $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto le radici n-esime di s_0 sono date da:

$$\sqrt[n]{s_0} = \sqrt[n]{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

dove $\rho_0 = |s_0|$, $\theta_0 = \mathrm{Arg}(s_0)$.

Pertanto:

- **Le radici distinte sono esattamente** n.
- **Tali radici hanno tutte lo stesso modulo** e quindi si trovano su una medesima circonferenza, di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$.
- Tali radici **sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in tale circonferenza.** Quindi tali radici differiscono tra loro per una rotazione di un multiplo di $2\pi/n$.

La radice n-esima in $\mathbb{C}$ quindi *non* è una funzione, ma una applicazione a più valori. Ad esempio la radice quadrata in $\mathbb{C}$ restituisce due valori (opposti) ($\sqrt{-4} = \pm 2j$).

2 Successioni e serie numeriche

Poichè $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, la nozione di convergenza è quella usuale. precisamente diremo che

$$\lim_n s_n = s_0 \tag{1}$$

o, equivalentemente,

$$s_n \to s_0$$

con $s_n, s_0 \in \mathbb{C}$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste n_0 tale che $|s_n - s_0| < \epsilon \ \forall \ n \geq n_0$. E' facile mostrare che (1) è equivalente all'esistenza dei due limiti

$$\lim_n \mathrm{Re}\, s_n = \mathrm{Re}\, s_0, \qquad \lim_n \mathrm{Im}\, s_n = \mathrm{Im}\, s_0.$$

Poiche $\mathbb{C}$ è completo, ogni successione convergente in $\mathbb{C}$ è di Cauchy, ossia verifica

$$\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ n_0 \ : |s_n - s_m| < \epsilon \qquad \forall n, m \geq n_0$$

e viceversa.

Analogamente al caso reale, diremo poi che la serie di numeri complessi

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i$$

converge, se converge la successione $\{S_N\}$ delle somme parziali, dove

$$S_N = \sum_{i=0}^{N} s_i.$$

In particolare vale il seguente risultato "*Se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|$ è convergente (in $\mathbb{R}$), allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ è convergente in $\mathbb{C}$*".

2.1 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\mathrm{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^i}{i!} + ...$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:
2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:

3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y, \qquad e^{-jy} = \cos y - j \sin y \qquad$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

4. indicando rispettivamente con ρ e θ il modulo e l'argomento di un numero complesso $s \neq 0$ si ha che tale numero può essere rappresentato (oltreché in forma algebrica e trigonometrica) mediante la *forma esponenziale:* $s = \rho e^{j\theta}$

5. $|e^s| = e^{\mathrm{Re} s}$, $\mathrm{Arg}(e^s) = \mathrm{Im}(s)$, $\mathrm{Re}\, e^s = e^{\mathrm{Re}\, s} \cos \mathrm{Im}\, s$, $\mathrm{Im}\, e^s = e^{\mathrm{Re}\, s} \sin \mathrm{Im}\, s$

6. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$

7. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

2.2 Il concetto di infinito in $\mathbb{C}$

Nel seguito consideremo l'insieme $\mathbb{C}$ ampliato con l'aggiunta di $\{\infty\}$ (*punto all'infinito)* e chiameremo *intorno di* ∞ di raggio R, l'esterno della circonferenza di centro l'origine e raggio R. Tale definizione è giustificata dal fatto che l'insieme dei numeri complessi, ampliato con $\{\infty\}$, puo' essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti della superficie di una sfera mediante la nota "proiezione stereografica". Il punto $\{\infty\}$ corrisponde, sulla superficie sferica, al polo e l'intorno di ∞ ad una calotta polare.

Diremo poi che una successione $\{s_n\}$ converge a ∞ se

$$\lim_n |s_n| = +\infty.$$

Anche tale definizione può essere giustificata rappresentando $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sulla superficie di una sfera mediante la proiezione stereografica.