# APPLICAZIONI di MATEMATICA
# A.A. 2006-2007

Traccia delle lezioni del 23 e 24 ottobre 2006

October 24, 2006

## 1 Residuo all'infinito

Ricordiamo la definizione di residuo all'infinito, introdotta la lezione scorsa.

**Definizione.** *Sia* $f$ analitica per $|s|$ sufficientemente grande, i.e. per $|s| > R$. Questo fatto implica che $s = \infty$ è una singolarità isolata per $f$ oppure un punto di regolarità. Si chiama *Residuo di* $f$ *all'infinito,* e si indica con $\mathrm{Res}[f, \infty]$, il numero

$$Res[f, \infty] = -d_{-1}$$

*dove* $d_{-1}$ *è il coefficiente della serie di Laurent all'infinito, relativo al termine* $s^{-1}$.

Quindi, ricordando la definizione dei coefficienti $d_n$, si ha

$$Res[f, \infty] = -\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma f(s)ds$$

dove $\Gamma$ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo che contiene al proprio interno **tutte** le singolarità al finito di $f$ .

**2° Teorema dei Residui** *Sia* $f$ *analitica in tutto il piano complesso eccetto un numero FINITO di punti* $s_1, s_2, ..s_N$. *Allora la somma di tutti i Residui, compreso il Residuo all'infinito, è nulla, ossia*

$$Res[f, s_1] + Res[f, s_2] + ... + Res[f, s_N] + Res[f, \infty] = 0.$$

## 2 Formule per il calcolo del Residuo all'infinito.

Per quanto visto, il $\mathrm{Res}[f,\infty]$ è definito se e solo $f$ è analitica per $|s|$ sufficientemente grande o, EQUIVALENTEMENTE, se e solo se $s=\infty$ è una singolarità isolata per $f$ oppure un punto di regolarità.

Il $\mathrm{Res}[f,\infty]$ non è pertanto definito quando $s=\infty$ è una singolarità non isolata (di accumulazione) per $f$.

Diremo poi che $s=\infty$ *è uno zero di ordine $p$ per $f$* se $f$ è analitica per $|s|$ sufficientemente grande e

$$\lim_{s\to\infty} s^p f(s) \qquad \text{esiste finito e non nullo.}$$

Utilizzando la serie di Laurent all'infinito, si può provare che $s=\infty$ *è uno zero di ordine $p$ per $f$* se e solo se lo sviluppo di Laurent all'infinito è del tipo

$$f(s)=\frac{d_{-p}}{s^p}+\frac{d_{-p-1}}{s^{p+1}}+\frac{d_{-p-2}}{s^{p+2}}+........, \text{ con } d_{-p}\neq 0.$$

Supponiamo ora che $\mathrm{Res}[f,\infty]$ sia definito. Allora:

1. se inoltre $s=\infty$ è uno zero almeno doppio per $f$,

$$Res[f,\infty]=0.$$

2. In generale, il calcolo del Residuo all'infinito (se definito) può effettuarsi tramite la formula

$$Res[f,\infty]=-Res\left[g(u),0\right], \tag{1}$$

dove

$$g(u)=f(\frac{1}{u})\frac{1}{u^2}, \tag{2}$$

la quale riconduce il calcolo del residuo all'infinito al calcolo del residuo al finito (in zero) della funzione "ausiliaria" $g$.

## 3 Esempi e Esercizi

♦ 1) Calcolare

$$I_1=\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{4}{(s-4)^2 s}ds,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Le singolarità della funzione

$$f(s) = \frac{4}{(s-4)^2 s}$$

sono $s = 0$ (polo semplice) e $s = 4$ (polo doppio). Sono entrambe interne a $\gamma$ e quindi, per il primo Teorema dei Residui si ha

$$I_1 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4].$$

Applicando il secondo Teorema dei Residui si ha anche

$$\text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4] + \text{Res}[f, \infty] = 0$$

e quindi

$$I_1 = -\text{Res}[f, \infty].$$

Poiché $f$ ha in $s = \infty$ uno zero triplo, ne segue Res$[f, \infty]$=0 e quindi

$$I_1 = 0.$$

♦ 2) Calcolare

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{ds}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-10)},$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_2 = \text{Res}[f, 1] + \text{Res}[f, 2] + \text{Res}[f, 3]\text{Res}[f, 4] = - \text{Res}[f, 10] - \text{Res}[f, \infty].$$

Poiché la funzione integranda ha uno zero di ordine 5 in $s = \infty$, si ha Res$[f, \infty]$=0. Inoltre, essendo $s = 10$ polo semplice, si ha

$$\text{Res}[f, 10] = \lim_{s \to 10} \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)} = \frac{1}{3024}$$

e quindi

$$I_2 = -\frac{1}{3024}.$$

♦ 3) Calcolare

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{(s+1)\sin(1/s)}{s} ds,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

L'unica singolarità della funzione integranda al finito è $s = 0$, che è di tipo essenziale. In $s = \infty$ la funzione integranda ha uno zero semplice.

Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_3 = \text{Res}[f, 0]\text{=-Res}[f, \infty].$$

Da (2) si ha

$$g(u) = \frac{1+u}{u^2} \sin u$$

e poiché $u = 0$ è un polo semplice per $g$, si ha

$$\text{Res}[g, 0] = \lim_{u \to 0} u g(u) = \lim_{u \to 0} (1+u) \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Applicando la formula (1) si ottiene:

$$\text{Res}[f, \infty] = -1.$$

**Esercizi:** Calcolare i seguenti integrali lungo le curve indicate:

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{5s+1}{s^4+2} ds \qquad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{4s^8+3}{s^9+1} ds \qquad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_6 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{s e^{1/s}}{(s-1)(s-3)} ds \qquad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_7 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{s e^{1/S}}{(s-1)(s-3)} ds \qquad \gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione : $I_4 = 0$, $I_5 = 4$, $I_6 = 1$, $I_7 = 1 - e^{1/3} 3/2$.

## 4 Funzioni analitiche e limitate

**Teorema 1**. *Sia $V$ un intorno di $s_0$ e sia $f$ analitica e limitata in $V/\{s_0\}$. Allora il limite*

$$\lim_{s \to s_0} f(s)$$

*esiste finito.*

Si osservi che tale proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Infatti, come è ben noto, per le funzioni reali di variabile reale la limitatezza di una funzione $\varphi$ nell'intorno di un punto $x_0$ NON implica l'esistenza del limite $\lim_{x \to x_0} \varphi(x)$ [Ad esempio è sufficiente considerare la funzione $\varphi(x) = \sin(1/x)$, che è limitata in un intorno di $s = 0$, ma per la quale il $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ non esiste]. Dal Teorema precedente si ha subito il seguente Corollario, che fornisce un'altra caratterizzazione delle singolarità eliminabili.

**Corollario 1**. *Sia $s_0$ una singolarità isolata per $f$. Allora $s_0$ è eliminabile SE E SOLO SE $f$ è limitata in un intorno di $s_0$.*

**Teorema 2 (di Liouville).** *Sia $f$ analitica e limitata in tutto il piano complesso. Allora $f$ è costante.*

Anche questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Ad esempio la funzione reale $\psi(x) = \sin x$ è limitata e sviluppabile in serie di potenze, ma non è costante!

Dal Teorema di Liouville si hanno poi le due seguenti conseguenze:

**Corollario 2**. *Sia $f$ priva di singolarità al finito e all'infinito. Allora $f$ è costante.*

**Corollario 3 (Teorema fondamentale dell'algebra di D'Alembert)** *Ogni polinomio $P$ di grado $n \geq 1$ ha almeno uno zero in $C$.*

## 5 Esercizi

Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire:

(i) se è applicabile il secondo Teorema dei Residui;

(ii) se esiste il residuo all'infinito e, in caso affermativo, calcolarlo.

$$f_1(s) = \frac{e^{1/s^2}}{\sin s^2}; \qquad f_2(s) = e^{1/s^2}(\sin s^2)$$

$$f_3(s) = \sin(s^2 + s^4 + 3); \qquad f_4(s) = \frac{\sin(s^2 + s^4 + 3)}{s - 3}.$$