Lezione III: Rappresentazione dei sistemi dinamici

- Tipi di rappresentazione
- Rappresentazione globale I/S/U
- Rappresentazione locale I/S/U
- Rappresentazione globale I/U
- Rappresentazione locale I/U

Tipi di rappresentazione

Un sistema dinamico è una 8-upla:

$$(T, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, X, \phi, \psi)$$

quindi posso specificare un sistema dinamico definendo ciascuno degli oggetti precedenti. In particolare le mappe ϕ e ψ. Questa é la **Rappresentazione globale I/S/U** del sistema.

- È soltanto una di varie possibili alternative.
- Le rappresentazioni si dividono in *locali* vs. *globali*
- I/S/U e I/U

Rappresentazione globale I/S/U

Pro:

- Valida in ambiti molto diversi tra loro
- Descrizione esplicita della dinamica

Contro:

- Leggi della fisica non sono date in questa forma
- Non utile in fase di modellizzazione
- Non calcolabile esplicitamente per la quasi totalità dei sistemi NL

Rappresentazione locale I/S/U (1/2)

Un sistema dinamico è una 8-upla:

$$(T, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, X, f, h)$$

- Dove gli insiemi $T, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, X$ sono come nella Rappresentazione Globale
- $f : T \times X \times U \to X$ è la *mappa di transizione locale dello stato*
- $h : T \times X \times U \to Y$ è la *mappa di uscita*
- Vale la seguente relazione:

$$\left.\begin{array}{c} \dot{x}(t) \\ x(t+1) \end{array}\right\} = f(t, x(t), u(t))$$

- E per il calcolo delle uscite:

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

Rappresentazione locale I/S/U (2/2)

Pro:

- Leggi della fisica sono espresse in questo formalismo
- Possibilità di identificare modelli lasciando liberi un numero limitato di parametri
- Facilità di implementazione su calcolatore

Contro:

- Descrizione implicita della dinamica
- Necessità di utilizzare strumenti di analisi per dimostrare determinate proprietà del sistema in considerazione

Rappresentazione globale I/U

- Idea: esprimere il sistema come una funzione che associa ad ogni segnale di ingresso un segnale di uscita

- **Definizione formale:** Un sistema in questa rappresentazione è individuato da una 6-upla

$$(T, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, F)$$

- gli insiemi $T, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y$ hanno lo stesso significato della rappresentazione globale I/S/U

- $F : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ è la mappa di transizione ingresso/uscita

$$y(\cdot) = F(u(\cdot))$$

- Prescinde dalla comprensione fisica del funzionamento del sistema

- Stessi limiti e vantaggi della rappresentazione globale I/S/U

Rappresentazione locale I/U

- Un sistema in questa rappresentazione è individuato da una 6-pla

$$(T,\mathcal{U},U,\mathcal{Y},Y,\tilde{f})$$

- gli insiemi $T,\mathcal{U},U,\mathcal{Y},Y$ hanno lo stesso significato della rappresentazione globale I/S/U

- $\tilde{f} : T \times Y^{n-1} \times U^m \to Y$ è la mappa di transizione locale ingresso-uscita

  1. Caso TC:

  $$\dot{y}^{(n)}(t) = \tilde{f}(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots y^{(n-1)}(t), u(t), \dot{u}(t), \ldots u^{(m-1)}(t))$$

  2. Caso TD:

  $$y(t) = \tilde{f}(t, y(t-1), \ldots y(t-n), u(t), u(t-1), \ldots u(t-m+1))$$

- Pro e Contro tipici delle rappresentazioni locali

Esempio: condensatore

- Nel caso del condensatore si ha: $(T = \mathbb{R}, U = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, X = \mathbb{R})$

- Rappresentazione globale I/U:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(s)\, ds$$

- Rappresentazione locale I/U:

$$\dot{v}(t) = \frac{i(t)}{C}$$

- Rappresentazione globale I/S/U

$$x(t) := \int_{-\infty}^{t} i(s)\, ds$$

$$\phi(t_i, t_f, x_i, i_{[t_i,t_f]}) := x_i + \int_{t_i}^{t_f} i(s)\, ds\ , \qquad \psi(t_i, t_f, x_i, i_{[t_i,t_f]}) := \frac{x_i + \int_{t_i}^{t_f} i(s)\, ds}{C}$$

- Rappresentazione locale I/S/U

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & i(t) \\ v(t) & = & x(t)/C \end{array}$$

Esempio: nastro trasportatore

- $(T = \mathbb{R}, U = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, X := \{x :$ funzioni da [0,1] $\to \mathbb{R}\})$

- Rappresentazione globale I/U

$$y(t) = u(t-1) \qquad F(u(\cdot)) := u(\cdot - 1)$$

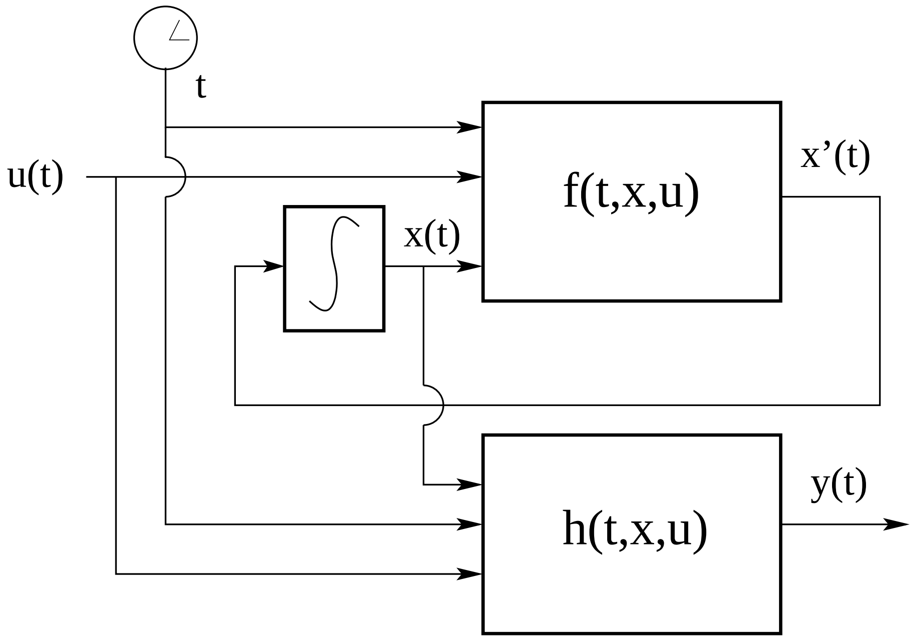
- Rappresentazione globale I/S/U

$$x(t) = u_{[t-1,t]}$$

$$\psi(t_i, t_f, x_i, u_{[t_i,t_f]}) = \begin{cases} x_i(1 - t_f + t_i) & \text{se } t_f - t_i \leq 1 \\ u(t_f - 1) & \text{se } t_f - t_i > 1 \end{cases}$$

- Rappresentazioni locali I/S/U e I/U non esistono in dimensione finita.

Interpretazione grafica della Rappresentazione locale I/S/U



- Utile in linguaggi con interfacce grafiche: Simulink
- Per sistemi tempo discreto sostituire l'integratore con il ritardo unitario.