Lezione II: Classificazione dei sistemi dinamici

- Definizione formale di sistema dinamico
- Sistemi Tempo continui e Tempo discreti
- Sistemi statici e dinamici
- Sistemi tempo-varianti e tempo-invarianti
- Sistemi a stato vettore, a stato discreto
- Sistemi lineari e nonlineari

Definizione formale di Sistema Dinamico (1/2)

Un sistema dinamico è una 8-upla:

$$(T, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, X, \phi, \psi)$$

1. $T \subset \mathbb{R}$ è l' insieme dei tempi

2. $\mathcal{U}$ è l'insieme dei *segnali* di ingresso. Un segnale di ingresso è una funzione

$$u(t) : T \to U$$

   dove U è l'insieme dei valori di ingresso.

3. $\mathcal{Y}$ è l'insieme dei *segnali* di uscita. Un segnale di uscita è una funzione

$$y(t) : T \to Y$$

   dove Y è l'insieme dei *valori* di uscita

4. X è l'insieme dei *valori* possibili per lo stato del sistema. Dunque lo stato del sistema è una funzione:

$$x(t) : T \to X$$

Definizione formale di Sistema Dinamico (2/2)

5. ϕ è la mappa di transizione globale dello stato:

$$\phi(t, \tau, x(t), u_{[t,\tau]}) \rightarrow x(\tau)$$

6. ψ è la mappa di transizione globale dell'uscita

$$\psi(t, \tau, x(t), u_{[t,\tau]}) \rightarrow y(\tau)$$

Inoltre le seguenti proprietà sono verificate:

$$\begin{aligned} \phi(t, t, x, u) &= x \\ \phi(t_i, t_f, x, u_{[t_i,t_f]}) &= \phi(\bar{t}, t_f, \phi(t_i, \bar{t}, x_i, u_{[t_i,\bar{t}]}), u_{[\bar{t},t_f]}) \end{aligned}$$

e analogamente per la mappa di uscita:

$$\psi(t_i, t_f, x, u_{[t_i,t_f]}) = \psi(\bar{t}, t_f, \phi(t_i, \bar{t}, x_i, u_{[t_i,\bar{t}]}), u_{[\bar{t},t_f]})$$

Sistemi tempo-continuo e tempo-discreto

- Si dice che il sistema è a tempo-discreto se $T = \mathbb{Z}$.

- Se invece $T = \mathbb{R}$ il sistema è a tempo-continuo.

- Esempi:

  1. Circuito elettrico (tempo continuo)
  2. Microprocessore (tempo discreto)
  3. Sistema meccanico (tempo continuo)
  4. Automa a stati finiti (tempo discreto)

Sistemi statici e dinamici

- **Definizione.** Un sistema si dice *statico* se

$$y(t) = f(u(t))$$

- Spesso i sistemi statici sono idealizzazioni di sistemi dinamici, valide solo entro una certa banda di ingressi.

- Esempi:

  1. Resistenza vs. Condensatore

  2. Transistor: Modello alle basse frequenze e modello di Giacoletto

  3. Trasformatore ideale e trasformatore reale

  4. Ingranaggio ideale e Ingranaggio con gioco

Sistemi tempo-varianti e tempo-invarianti

- Idea intuitiva di sistema *tempo-invariante*: l'esito di ogni esperimento non dipende dall'istante in cui si effettua

- **Definizione formale:** Un sistema si dice tempo-invariante se comunque scelto $\tau > 0$:

$$\phi(t_i, t, x_i, u_{[t_i,t]}) = \phi(t_i + \tau, t + \tau, x_i, v_{[t_i+\tau,t+\tau]})$$

  dove $v(t) := u(t - \tau)$.

- Esempi:

  1. Le leggi della fisica sono tempo-invarianti (per quanto se ne sa allo stato attuale)
  2. Spesso i sistemi tempo-varianti derivano da ingressi al sistema (provenienti da sistemi esterni) e volutamente non inclusi nel modello.
  3. Circuito in corrente alternata: 2 possibilità

- S.p.d.g. immagino gli esperimenti siano condotti ad istante iniziale 0.

- Notazione compatta: $\phi(0, t, x, u) \rightarrow \phi(t, x, u)$

Sistemi lineari e non-lineari

- I sistemi lineari sono quei sistemi per cui vale il **principio di sovrapposizione degli effetti**

- A parole: la risposta corrispondente alla somma di cause (ingressi e/o condizioni iniziali) corrisponde alla somma delle risposte alle singole cause.

- **Definizione formale:** (linearità ingresso-stato)

$$\phi(t_i, t, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \phi(t_i, t, x_1, u_1) + \lambda_2 \phi(t_i, t, x_2, u_2)$$

- Analogamente per le uscite:

$$\psi(t_i, t, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \psi(t_i, t, x_1, u_1) + \lambda_2 \psi(t_i, t, x_2, u_2)$$

- Un sistema è lineare se la mappa di transizione globale è una funzione lineare in x e u congiuntamente.

Esempi

1. Massa con forza di richiamo elastica (lineare) vs. pendolo gravitazionale (nonlineare)

2. Amplificatore ideale e saturato

3. Modello di Malthus vs. Equazione Logistica

Altre proprietà

- Sistemi autonomi (senza ingressi)
  (esempio: sistema solare in meccanica celeste o sistemi isolati in termodinamica)

- Sistemi a parametri concentrati vs. sistemi a parametri distribuiti
  (esempio barra di metallo riscaldata ad un'estremità vs. barra di metallo riscaldata uniformemente)

- Sistemi a stato vettore

- Sistemi a stati finiti (automi)

Esercizi

Si classifichino in base alle proprietà viste il sistema flipper e il nastro trasportatore