Lezione XIV: Stabilità Esterna

- Definizione di stabilità ingresso-uscita
- Stabilità BIBO nei sistemi LTI
- Stabilità BIBO nei sistemi FD-LTI
- Criteri algebrici per la stabilità
- Esempi

Stabilità Esterna

- Concetto intuitivo: stabilità rispetto alle variazioni del segnale di ingresso.

- Di tali perturbazioni si analizza l'effetto soltanto sull'uscita del sistema $\Longrightarrow$ stabilità ingresso-uscita.

- Necessità di definire una norma per i segnali.

Definizione (Sistema BIBO-stabile)
Un sistema dinamico $\mathcal{S}$ si definisce *BIBO-stabile* (nello stato nullo) se, per stato iniziale nullo, ad ogni ingresso limitato $u(\cdot)$ corrisponde un'uscita limitata $y(\cdot)$, vale a dire

$$\|u(\cdot)\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \|y(\cdot)\| \; = \; \|\psi(\cdot, t_0, 0, u(\cdot))\| < \infty.$$

Stabilità BIBO nei Sistemi LTI

Teorema

Un sistema LTI è BIBO-stabile se e solo se la sua risposta impulsiva $g(t)$ soddisfa

$$\int_0^\infty \|g(t)\| dt \; < \; \infty \quad \text{(TC)}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \|g(t)\| \; < \; \infty \quad \text{(TD)}$$

Teorema (**Stabilità BIBO di sistemi FDLTI**)

Il sistema LTI $\mathcal{S} = (A, B, C, D)$ è BIBO-stabile se e solo se

$g(t)$ è convergente.

Teorema (**Stabilità BIBO di sistemi FDLTI**)

Il sistema LTI $\mathcal{S} = (A, B, C, D)$ è BIBO-stabile se e solo se

$G(s)$ ha tutti i poli in $\mathbb{C}_s$.

Criteri Algebrici per la Stabilità

- Valido supporto per l'analisi di stabilità (asintotica o BIBO) per sistemi TC o TD (finito dimensionali).

- Definiscono condizioni per l'appartenenza delle radici λ_i di un polinomio di grado n $P_n(\lambda)$ alla regione di stabilità $\mathbb{C}_s$ del piano complesso:

$$\mathbb{C}_s = \begin{cases} \{s \in \mathbf{C} \text{ t.c. } Re[s] < 0\} & \text{(TC)} \\ \{z \in \mathbf{C} \text{ t.c. } \quad |z| < 1\} & \text{(TD)} \end{cases}$$

- (TC) $\quad P_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_1 s + a_0$
  - Condizione necessaria per la stabilità: $a_i > 0 \ \ \forall \ i = 0, 1, \ldots, n$
    (N.B.: è anche sufficiente per polinomi fino al II ordine)
  - Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità: Criterio di Routh.

- (TD) $\quad P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$
  - Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità: Criterio di Jury.

Criterio di Routh

- Costruzione Tabella di Routh:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
n & a_n & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_0 \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_1 & \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
2 & u_2 & u_0 & & & \\
1 & v_1 & & & & \\
0 & z_0 & & & &
\end{array}
$$

$$
b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \ , \ b_{n-4} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \ , \dots
$$

$$
z_0 = -\frac{1}{v_1} \begin{vmatrix} u_2 & u_0 \\ v_1 & 0 \end{vmatrix}
$$

- Ad ogni variazione di segno che si presenta nella prima colonna della tabella corrisponde una radice con parte reale positiva e ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.

- Casi critici: primo elemento nullo in una riga, tutti gli elementi nulli in una riga.

Criterio di Jury

- Costruzione Tabella di Jury:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
1 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
2 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
3 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\
4 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
2n+1 & z_0 & & & & & &
\end{array}
$$

- Le radici $z_i \in \mathbb{C}_s$, $\forall\ i = 1 \dots n$, se e solo se i primi elementi delle righe di indice dispari della Tabella di Jury sono tutti diversi da zero e hanno segno positivo.

Esempio

Si consideri il sistema TD

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= [1, \ \ 1, \ \ 0]\ x(t)
\end{aligned}
$$