Lezione XV: Realizzazione, proprietà strutturali e cancellazioni

- Realizzazione di FdT SISO
- Forma canonica di Raggiungibilità
- Realizzazione minimale
- Completa Raggiungibilità di sistemi LTI
- Completa Osservabilità di sistemi LTI

Realizzazione di FdT SISO

- Il problema della realizzazione consiste nel determinare, data una FdT Ingresso/Uscita

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

una **rappresentazione di stato del sistema**. (Analoga definizione per il caso TD)

- Dunque vogliamo determinare delle matrici A, B, C, D di dimensioni opportune, in modo che si abbia:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- La soluzione non è unica ! (per esempio sistemi algebricamente equivalenti hanno la stessa FdT)

- Possibilmente la realizzazione deve essere semplice (ad esempio la dimensione di A deve essere minima).

- Se la funzione di trasferimento ha un significato fisico può convenire adottare realizzazioni che facciano riferimento alla fisica del sistema

Forma canonica di Raggiungibilità

Sia data $G(s) = B(s)/A(s)$, con

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$$

$$B(s) = b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_n$$

- ci si può sempre ricondurre a questo caso scegliendo D opportunamente come il primo coefficiente della divisione lunga fra $B(s)$ e $A(s)$

- Posso scegliere A,B e C nel modo seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [b_n \; b_{n-1} \; b_{n-2} \ldots b_1]$$

Esempio di realizzazione

- Funzione di trasferimento desiderata: $G(s) = \frac{2s^3+s^2-3s+4}{s^3+5s}$

- Mi riduco al caso di funzione strettamente propria:

$$G(s) = 2 + \frac{s^2 - 13s + 4}{s^3 + 5s}$$

- La realizzazione in forma canonica di raggiungibilità è dunque data da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [4 \;\; -13 \;\; 1] \qquad D = 2$$

Realizzazione minimale

- **Definizione** Una realizzazione (A, B, C, D) di $G(s)$ si dice minimale se per qualsiasi altra realizzazione $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ si ha

$$\mathrm{dim}(\tilde{A}) \geq \mathrm{dim}(A)$$

- Si noti che per ogni realizzazione $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ si ha necessariamente

$$\mathrm{dim}(\tilde{A}) \geq n = \text{ grado di } G(s)$$

- Dunque la forma canonica di raggiungibilità è una realizzazione minimale, poichè $\mathrm{dim}(A) = \text{grado } (\ A(s)\ )$

- **Definizione:** Dato un sistema SISO $\dot{x} = Ax + Bu$ e $y = Cx + Du$ si dice che la funzione di trasferimento corrispondente presenta delle *cancellazioni* tra numeratore e denominatore, se esistono delle radici in comune tra i polinomi:

$$\mathrm{det}(sI - A) \qquad \text{e} \qquad C\ \mathrm{adj}(sI - A)B$$

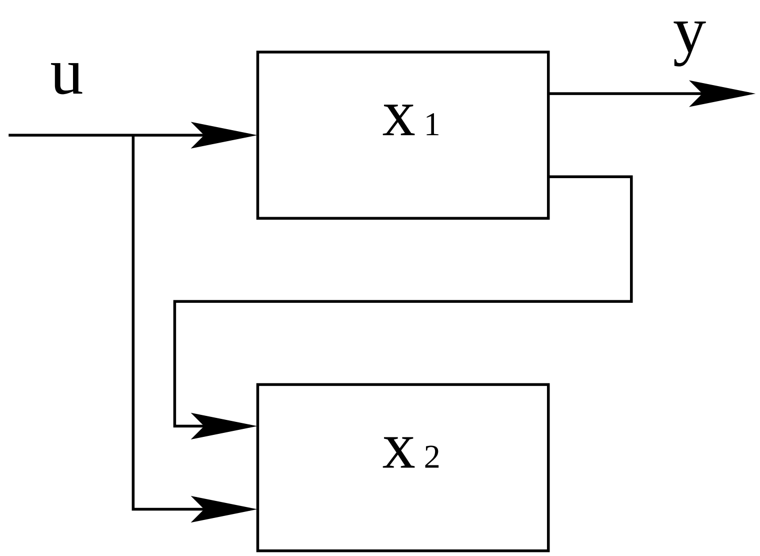
- **Teorema:** Una realizzazione (A, B, C, D) di una FdT SISO $G(s)$ (ridotta ai minimi termini) è minimale se e solo se *non presenta delle cancellazioni* tra numeratore e denominatore

Tipi di Cancellazioni

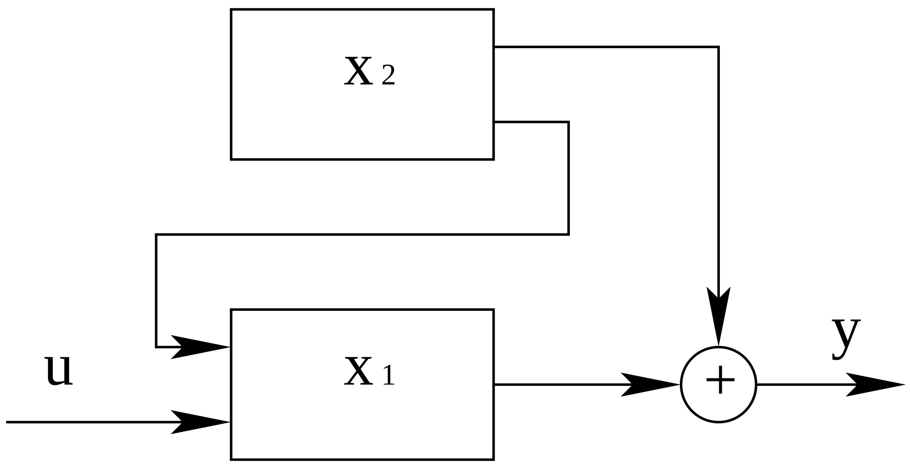
- La presenza di cancellazioni potrebbe sembrare un caso degenere e di scarsa rilevanza; al contrario corrispondono a proprietà della struttura del sistema di notevole importanza pratica e teorica.

- Sono dovute a due tipi di conformazioni del sistema:

  1. Una configurazione in due sottosistemi (in cascata) di cui quello più a valle non influenza l'uscita. In questo caso si dice che il sistema (A, B, C, D) **non è completamente osservabile**



2. Una configurazione in due sottosistemi (in cascata) di cui quello più a monte non è influenzato dall' ingresso. In questo caso si dice che il sistema (A, B, C, D) **non è completamente raggiungibile**



Decomposizioni canoniche di Raggiungibilità e Osservabilità

- Le configurazioni viste nel lucido precedente sono dette decomposizioni canoniche di Raggiungibilità e Osservabilità

- Un sistema si dice in decomposizione canonica di Raggiungibilità se

$$A = \begin{bmatrix} A_r & \star \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [C_r \; C_{\bar{r}}]$$

  e (A_r, B_r, C_r) non è ulteriormente riducibile in questa forma (mediante cambiamento di coordinate).

- Un sistema si dice in decomposizione canonica di Osservabilità se

$$A = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ \star & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} \qquad C = [C_o \; 0]$$

  e (A_o, B_o, C_o) non è ulteriormente riducibile in questa forma (mediante cambiamento di coordinate).

- Un sistema per cui $\dim(A_r) = \dim(A)$ si dice **completamente raggiungibile**

- Un sistema per cui $\dim(A_o) = \dim(A)$ si dice **completamente osservabile**

Criteri algebrici per la raggiungibilità e la osservabilità dei sistemi LTI

- **Teorema:** Un sistema LTI (A, B, C, D) (sia TD che TC) è completamente raggiungibile se e solo se

$$\mathcal{R} := [B \; AB \; A^2B \; \ldots A^{n-1}B]$$

(detta matrice di raggiungibilità) ha rango pieno

- **Teorema:** Un sistema LTI (A, B, C, D) (sia TD che TC) è completamente osservabile se e solo se

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

(detta matrice di osservabilità) ha rango pieno.

- Il sottospazio Im ($\mathcal{R}$) è detto autospazio raggiungibile.

- Il sottospazio Ker ($\mathcal{O}$) è detto autospazio inosservabile.

Come portarsi in decomposizione di Raggiungibilità

- Problema: Individuare il cambio di coordinate per cui A è triangolare a blocchi (superiore) e (A_r, B_r) è completamente raggiungibile.

- Si noti che le matrici di raggiungibilità relative a sistemi algebricamente equivalenti sono simili

- In decomposizione canonica si ha $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^{n_1} \times \{0_{n_2}\}$. Ciò caratterizza la decomposizione canonica di raggiungibilità.

- Dunque devo adottare un cambio di base i cui primi n_1 vettori sono una base per Im ($\mathcal{R}$). Questo è il cosiddetto autospazio raggiungibile.

Come portarsi in decomposizione di Osservabilità

- Problema: Individuare il cambio di coordinate per cui A è triangolare a blocchi (inferiore) e (A_o, C_o) è completamente osservabile.

- Si noti che le matrici di osservabilità relative a sistemi algebricamente equivalenti sono simili

- In decomposizione canonica si ha $\text{Ker}(\mathcal{O}) = \{0_{n_1}\} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Ciò caratterizza la decomposizione canonica di osservabilità.

- Quindi adotto un cambio di base i cui primi n_2 vettori sono una base per $\text{Ker}(\mathcal{O})$. Questo è il cosiddetto autospazio inosservabile.