Compito di "Analisi e simulazione dei sistemi dinamici"- 06/02/2003 **FILA: A**

Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1. Dato il seguente sistema lineare tempo invariante, SISO:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -p & 2 & 3 \\ 0 & p-2 & -1 \\ 0 & 1 & p-2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ p-3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

- Si calcoli la funzione di trasferimento I/O del sistema, $G(s) =$

Si determinino, inoltre, i valori di p per i quali:

- le equazioni precedenti costituiscono una realizzazione minimale della $G(s)$:
  Si giustifichi la risposta:
- il sistema è in decomposizione canonica di raggiungibilità:
- il sistema è asintoticamente stabile:
- il sistema è BIBO stabile:
- Per $p = 3$ si calcoli la risposta forzata (nell'uscita) al seguente segnale di ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{se } t \in [0, \pi] \\ 0 & \text{se } t > \pi \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) =$$

Esercizio 2. Tracciare il Diagramma di Bode (asintotico e reale) della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s(s-1)(s^2+s+64)}$$

Esercizio 3. Dato il seguente sistema dinamico TD

$$y(t+1) - ry(t) + ry^2(t) = 0$$

determinare, al variare del parametro r,

- stati di equilibrio:
- soluzioni periodiche di periodo $T = 2$:
- stabilità degli equilibri:
- stabilità delle soluzioni periodiche ($T = 2$) per $r = 1 + \sqrt{5}$:

Compito di "Analisi e simulazione di sistemi dinamici"- 17/02/2003 **FILA: A**

Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1. Dato il sistema lineare tempo invariante SISO,

$$\begin{cases} x_1(t+1) &=& -\frac{1}{2}\, x_1(t) + x_2(t) + 2u(t) \\ x_2(t+1) &=& \frac{1}{2}\, x_2(t) + u(t) \\ x_3(t+1) &=& -\frac{3}{2}\, x_1(t) + \frac{3}{2}\, x_2(t) + x_3(t) + u(t) \\ y(t) &=& x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

rispondere ai seguenti punti giustificando sempre la risposta.

/2 Calcolare la funzione di trasferimento del sistema:

/2 Le equazioni precedenti costituiscono una realizzazione minimale?:
In caso negativo, costruire una realizzazione minimale del sistema:

/3 Il sistema è completamente raggiungibile?:
In caso negativo, calcolare il sottospazio di raggiungibilità:

/3 Il sistema è completamente osservabile?:
In caso negativo, calcolare il sottospazio di osservabilità:

/2 Studiare la stabilità interna:

/2 Studiare la stabilità esterna:

/2 Si calcoli la risposta nell'uscita ad un segnale a gradino in ingresso e condizioni iniziali $x(0) = [1\ \ 0 -1]'$.
$y(t) =$

Esercizio 2. Tracciare il Diagramma di Bode (asintotico e reale) della funzione di trasferimento:

/8 $$G(s) = \frac{81(s+1)}{(s^2 - s)(s^2 - s + 81)}$$ ☐ Allegato

Esercizio 3. Dato il seguente sistema dinamico dipendente dai parametri reali α e ϵ

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& -\varepsilon \dfrac{1}{x_1(t)} + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& \alpha x_1^3(t) - x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

/5 Assumendo $u(t) \equiv 1$ e $\varepsilon = 0$, determinare i punti di equilibrio del sistema:
Discuterne la stabilità:

/5 Assumendo $u(t) \equiv 0$ e $\varepsilon = 1$, determinare i punti di equilibrio del sistema:
Discuterne la stabilità:

Compito di "Analisi e simulazione di sistemi dinamici"- 17/04/2003 **FILA: A**

Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1. Sperimentalmente si è osservato che un ingresso sinuisodale alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec (di modulo e fase non noti) in ingresso ad un sistema strettamente causale del II ordine inizialmente a riposo produce un'uscita:

$$y(t) = e^{-t}\cos(t) - \cos(t) - \sin(t)/2 \qquad t \geq 0$$

/6 Si calcoli la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ e il segnale di ingresso $u(t)$ sapendo che il sistema ha guadagno in continua pari a 1:

/4 Si calcoli una realizzazione minimale del sistema:

/4 Il sistema è stabile BIBO ? :

/4 Si calcoli l'uscita, corrispondente a condizioni iniziali nulle e all'ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) =$$

Esercizio 2. Tracciare il Diagramma di Bode (asintotico e reale con eventuali asintoti) della funzione di trasferimento:

/10
$$G(s) = \frac{s^2 - s}{(100s^2 + 1)(2s + 1)}$$
☐ Allegato

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema nonlineare tempo discreto:

$$x(t+1) = \frac{Ax(t)}{\|Ax(t)\|}$$

dove $\|v\|$ indica la norma euclidea di un vettore, cioè $\sqrt{v'v}$.

/4 Si determinino i punti di equilibrio del sistema quando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

/4 Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio:

/4 Si giustifichi la seguente affermazione: Per ogni condizione iniziale per cui il modo relativo all'autovettore $[0, 1, 1]'$ è eccitato, si ha

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

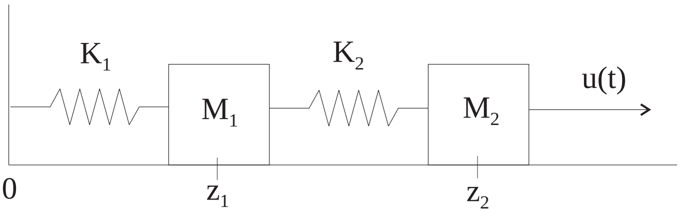
Suggerimento si dimostri prima di tutto che in generale vale per ogni $t > 0$

$$x(t) = \frac{A^t x(0)}{\|A^t x(0)\|}$$

Compito di "Analisi e simulazione di sistemi dinamici"- 25/06/2003 **FILA: A**

Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1.



Si consideri il sistema composto da due masse e due molle, rappresentato in figura, le cui equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} 0 = M_1\ddot{z}_1(t) + K_1 z_1(t) - K_2(z_2(t) - z_1(t)) \\ u(t) = M_2\ddot{z}_2(t) + K_2(z_2(t) - z_1(t)) \end{cases}$$

Si assumano i seguenti valori numerici: $M_1 = 2$, $M_2 = 1$, $K_1 = 4$, $K_2 = 2$.

/4 Determinare una rappresentazione del sistema in equazioni di stato, assumendo quale vettore di stato $x(t) = [z_1(t) \;\; z_2(t) \;\; \dot{z}_1(t) \;\; \dot{z}_2(t)]'$:

/4 Assumendo la condizione iniziale $z_1(0) = 0.1$, $z_2(0) = 0$, $\dot{z}_1(0) = 0$, $\dot{z}_2(0) = 0$, determinare la risposta libera $z_{2l}(t)$, relativa a z_2:

/8 Assumendo quale uscita del sistema $y(t) = z_1(t)$, determinare la funzione di trasferimento $W(s)$ dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ e tracciarne il diagramma di Bode:

/4 $W(s)$ è BIBO-stabile?:

Esercizio 2. Si consideri il sistema tempo-continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{4}{3}x_1^3(t) - 3x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

/5 Determinare i punti di equilibrio del sistema.

/5 Discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

Esercizio 3. Si consideri il sistema tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{2}x_1(t) \\ x_2(t+1) = x_3(t) + u(t) \\ x_3(t+1) = \varepsilon x_2(t) + \frac{1}{2}x_3(t) + u(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

dove ε è un parametro reale.

/5 Determinare gli autovalori non raggiungibili del sistema, al variare di ε:

/5 Determinare gli autovalori non osservabili del sistema, al variare di ε:

Compito di "Analisi e simulazione di sistemi dinamici"- 17/07/2003 **FILA: A**

Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1. In un videogame si pilotano contemporaneamente due astronavi. La prima direttamente tramite joystick, la seconda è accoppiata alla prima secondo una dinamica data dall'equazione differenziale:

$$\ddot{x} = -V'(z) - \dot{x}$$

dove x è la posizione della seconda astronave, u è la posizione della astronave controllata mediante joystick e

$$V(z) = z^4 - 8z^2 \ , \quad z = x - u$$

è una funzione che svolge il ruolo di energia potenziale.

/5 Si scrivano le equazioni di stato del sistema

/5 Si calcolino le possibili configurazioni di equilibrio nel caso in cui l'astronave madre sia ferma.

/5 Si discuta la stabilità delle configurazioni determinate al punto precedente

/5 I giocatori più abili riescono a mantenere le due astronavi a distanza molto ravvicinata e quasi immobili per tempi lunghi. Volendo mantenere le due astronavi al centro dello schermo $x = 0$ un modo è quello di scegliere $u = kx$ per k sufficientemente grande. Si calcolino i valori di k che consentono di rendere tale posizione stabile.

Esercizio 2. Si tracci (su carta millimetrata) l'andamento del diagramma di Bode (asintotico) per la seguente funzione di trasferimento:

/10

$$W(s) = \frac{s^2 - 6s - 16}{s^5 + 63s^3 - 64s}$$

☐ Allegato

Esercizio 3. Un sistema TD ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(k) = k^2 \qquad k = 0, 1, \ldots + \infty$$

/5 Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema $H(z)$.

/5 Si scriva una realizzazione minimale della FDT calcolata.

/5 Sfruttando la conoscenza di $H(z)$ si scriva una formula esplicita per il calcolo della somma dei primi n quadrati.

Compito di "Analisi e simulazione di sistemi dinamici"- 09/09/2003 **FILA: A**

Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo-discreto definito da

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= \frac{1}{2}x_1(t) + x_3(t) \\ x_2(t+1) &= -\frac{3}{2}x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3(t+1) &= -x_1(t) + x_2(t) + \frac{1}{2}x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

/5 Calcolare la funzione di trasferimento $G(z)$ del sistema:

/5 Determinare il valore della risposta forzata $y_f(t)$ al tempo $t = 5$, relativa all'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, 1 \\ 0 & t \leq 0 \ , \ t \geq 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y_f(5) =$$

/4 Studiare la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema:

/4 Determinare gli autovalori non raggiungibili e quelli non osservabili:

Esercizio 2. Si tracci (su carta millimetrata) l'andamento del diagramma di Bode (asintotico e reale) per la seguente funzione di trasferimento:

/10 $$G(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + s}$$ ☐ Allegato

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo-continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= 8x_2(t) - 8x_2^3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{2}x_1(t) \end{cases}$$

/3 Determinare gli stati di equilibrio del sistema:

/3 Discutere la stabilità del sistema linearizzato nell'intorno degli stati di equilibrio:

/3 Discutere la stabilità degli stati di equilibrio del sistema non lineare: