Lezione XI: Stabilità interna

- Stabilità interna e esterna
- Stabilità alla Lyapunov
- Stabilità asintotica
- I sistemi lineari
- Esempi

Tipi di Stabilità

- Idea intuitiva di stabilità: robustezza delle traiettorie del sistema rispetto a perturbazioni di varia natura

- Stabilità interna: perturbazioni nelle condizioni iniziali

- Stabilità esterna: perturbazioni negli ingressi

- Stabilità strutturale: perturbazioni nei parametri del sistema

- Importanza pratica e significato del concetto di stabilità

Stabilità alla Lyapunov (o marginale)

- Una traiettoria $x(t, x_0)$ si dice *stabile alla Lyapunov*:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |\hat{x}_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, \hat{x}_0) - x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

- Significato intuitivo: perturbazioni (sufficientemente) "piccole" delle condizioni iniziali danno luogo a deviazioni (arbitrariamente) "piccole" nelle traiettorie.

- Si studiano spesso traiettorie di struttura speciale:
  soluzioni costanti o periodiche

- **Def. Punti di equilibrio**: soluzioni costanti del sistema (per ingresso costante).
  Per sistemi TC, $\dot{x} = f(x, u)$ sono le soluzioni di:

$$f(x, u) = 0$$

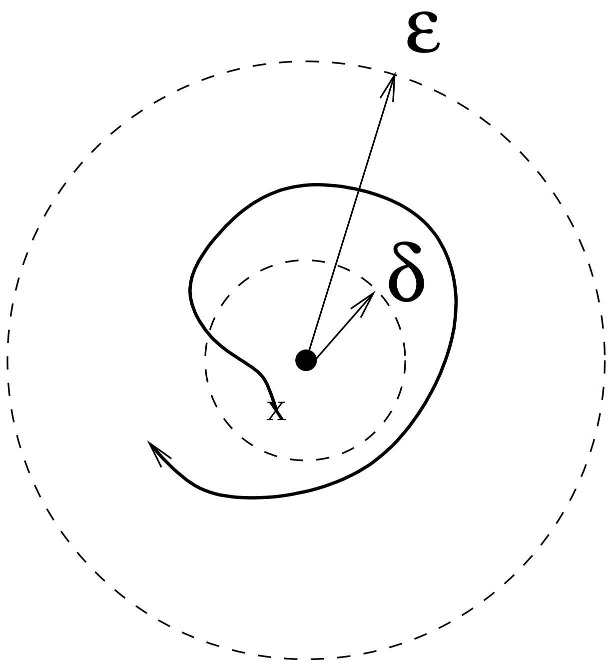
  Per sistemi TD, $x(t+1) = f(x(t), u)$ sono le soluzioni di:

$$x = f(x, u)$$

Stabilità dei punti di equilibrio

- Stabilità alla Lyapunov di un punto di equilibrio:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |\hat{x}_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, \hat{x}_0) - x_0| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0$$



- Problema: la definizione coinvolge la soluzione esplicita del sistema !

Attrattività (o convergenza)

- Un punto di equilibrio x_0 si dice *localmente attrattivo* se:

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, \hat{x}_0 : |\hat{x}_0 - x_0| < \delta \quad \lim_{t \to +\infty} |x(t, \hat{x}_0) - x_0| = 0$$

- Un punto di equilibrio x_0 si dice *globalmente attrattivo* se:

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t, \hat{x}_0) - x_0| = 0 \quad \forall\, \hat{x}_0$$

- Stabilità è un concetto indipendente dall'attrattività. Cioè:

Stabilità $\not\Rightarrow$ Attrattività (esempio $\dot{x} = 0$)

Attrattività $\not\Rightarrow$ Stabilità (esempio mediante piano delle fasi)

Stabilità asintotica

- **Stabilità asintotica locale:** Stabilità marginale + attrattività locale

- **Stabilità asintotica globale:** Stabilità marginale + attrattività globale

- Esempio mediante integrazione esplicita delle soluzioni:

$$\dot{x} = -x^3$$

- Stabilità esponenziale locale:

$$\exists\, M, \lambda, \delta > 0 : \quad |\hat{x}_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, \hat{x}_0) - x_0| \leq M e^{-\lambda t} |\hat{x}_0 - x_0|$$

- Stabilità esponenziale globale:

$$\exists\, M, \lambda > 0 : \quad \forall\, \hat{x}_0 : \ |x(t, \hat{x}_0) - x_0| \leq M e^{-\lambda t} |\hat{x}_0 - x_0|$$

- Stabilità asintotica $\not\Rightarrow$ Stabilità esponenziale

- Stabilità esponenziale $\Rightarrow$ Stabilità asintotica

Stabilità orbitale dei cicli limite

- Distanza tra punti e insiemi:

$$d(x, S) = \inf_{s \in S} |x - s|$$

- **Ciclo limite**: C una traiettoria chiusa e isolata nello spazio delle fasi.

- Si dice che C è orbitalmente stabile se:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : d(\widehat{x}_0, C) < \delta \Rightarrow d(x(t, \widehat{x}_0), C) < \varepsilon$$

- Si dice che C è localmente asintoticamente stabile se esiste $\delta > 0$:

$$d(\widehat{x}_0, C) < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} d(x(t, \widehat{x}_0), C) = 0 \quad \forall\, t \geq 0$$

- Esempio:

$$\dot{x} = -(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)x - y$$

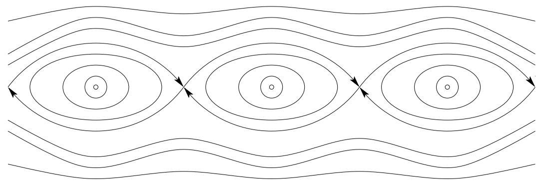
$$\dot{y} = -(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)y + x$$

(passare in coordinate polari)

Esempio: Il piano delle fasi di un pendolo

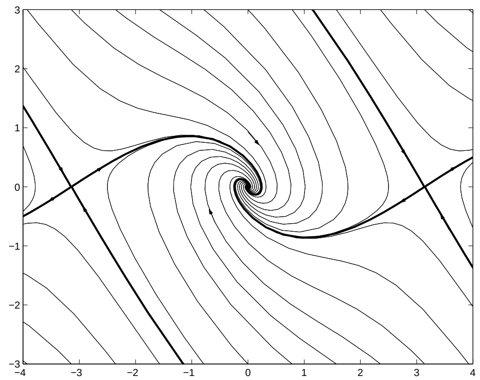
$$\ddot{\theta} = -\sin(\theta) - k\dot{\theta}$$

- Pendolo senza attrito ($k = 0$):



$\theta = 0$ è marginalmente stabile ma non attrattivo. $\theta = \pm\pi$ è instabile.

- Pendolo con attrito ($k > 0$):



$\theta = 0$ è asintoticamente stabile (stabile marginalmente + attrattivo).

$\theta = \pm\pi$ è instabile.

I sistemi lineari

- Senza perdita di generalità si considera $u = 0$.
- Punti di equilibrio: ker (A) in TC e ker $(I - A)$ in TD
- Tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità $\Rightarrow$ si può parlare di stabilità del sistema piuttosto che di stabilità di una traiettoria
- Posso ricondurmi sempre a studiare la stabilità dell'origine.

I sistemi lineari: stabilità marginale

- RISULTATO: Un sistema lineare è stabile marginalmente se e solo se: ogni soluzione (con ingresso nullo) è limitata

- COROLLARIO TC: **Un sistema lineare è stabile marginalmente se e solo se gli autovalori di A hanno parte reale negativa o nulla e la molteplicità algebrica eguaglia la molteplicità geometrica per quelli a parte reale nulla.**

- COROLLARIO TD: **Un sistema lineare è stabile marginalmente se e solo se gli autovalori di A hanno modulo ≤ 1 e la molteplicità algebrica eguaglia la molteplicità geometrica per quelli a modulo unitario.**

I sistemi lineari: stabilità asintotica

- RISULTATO: Un sistema lineare è *stabile asintoticamente* se e solo se: ogni soluzione (con ingresso nullo) è convergente

- Dunque per sistemi lineari:

$$\text{Attrattività} \Rightarrow \text{Stabilità}$$

- COROLLARIO TC: **Un sistema lineare è stabile asintoticamente se e solo se gli autovalori di A hanno parte reale negativa** .

- COROLLARIO TD: **Un sistema lineare è stabile asintoticamente se e solo se gli autovalori di A hanno modulo < 1.**

- OSSERVAZIONE: valido solo per sistemi tempo-invarianti