Lezione IX: Analisi Modale

- Evoluzione libera dei sistemi lineari TC e TD
- Modi reali TC
- Modi complessi coniugati TC
- Modi positive TD
- Modi complessi coniugati TC (e negativi)
- Classificazione dei modi

Evoluzione libera dei sistemi lineari TC

- Nel dominio della variabile s si ha:

$$X_l(s) = (s\mathrm{I} - A)^{-1}\, x(0)$$

- Introducento il cambio di coordinate $z = Tx$ si ha:

$$Z_l(s) = (s\mathrm{I} - TAT^{-1})^{-1}\, z(0)$$

- Se ho autovalori distinti o più in generale se molteplicità geometrica = molteplicità algebrica posso diagonalizzare A scegliendo T opportunamente:

$$Z_l(s) = (s\mathrm{I} - \Lambda)\, z(0)$$

con $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

- Dunque:

$$Z_l(s) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{s-\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{s-\lambda_n}\right) z(0)$$

- Antitrasformando:

$$z_l(t) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t} z_1(0), \ldots, e^{\lambda_n t} z_n(0)\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} z_i(0)\, e_i$$

dove e_i è l'elemento i-esimo della base canonica.

- Il sistema lineare è disaccoppiato; ogni modo evolve indipendentemente dagli altri.

- il modo j-esimo si dice eccitato se $z_j(0) \neq 0$.

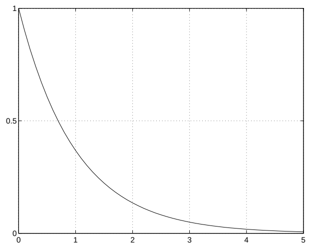
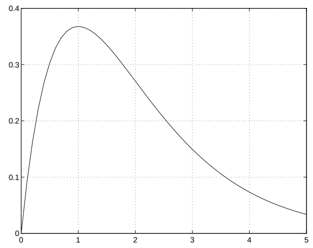
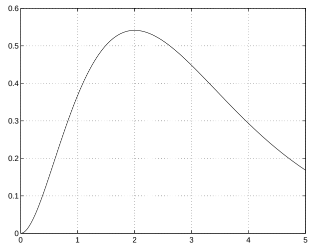
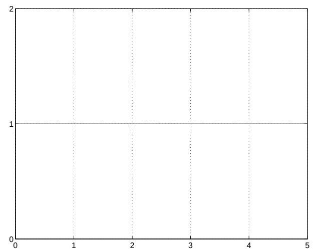
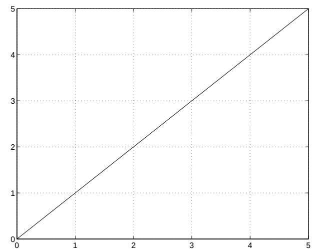
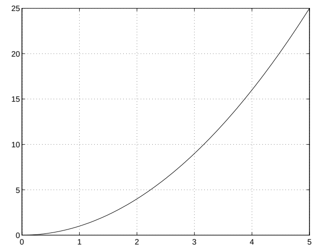
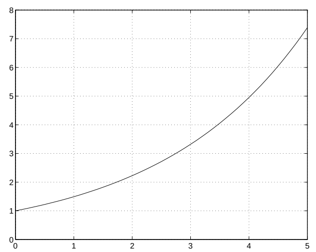
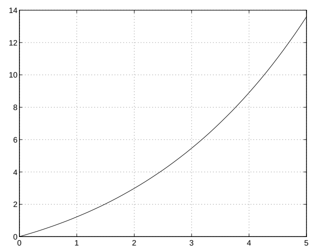
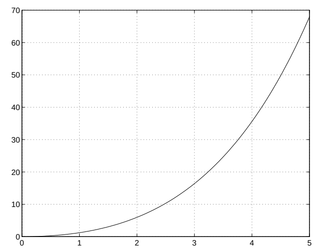
- Ritornando in coordinate originali:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} z_i(0)\, v_i$$

  Dunque la risposta libera del sistema è una sommatoria finita di modi che evolvono nelle direzioni degli autovettori di A.

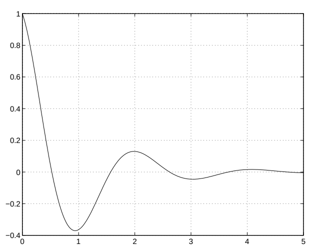
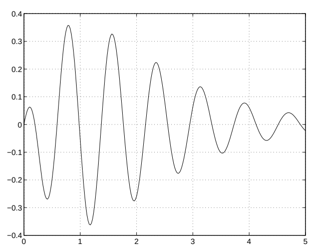
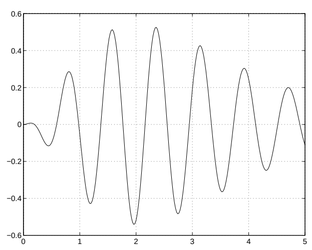
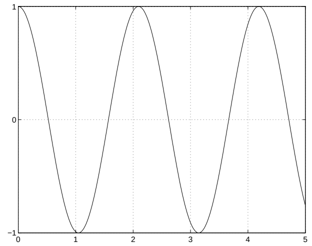
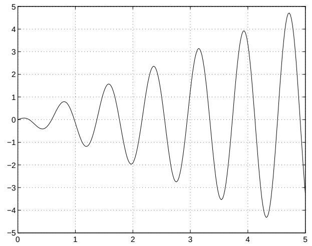
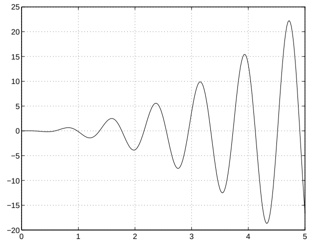
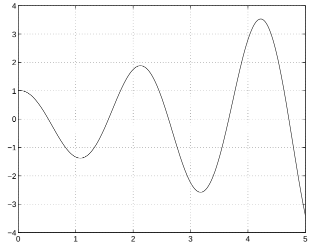
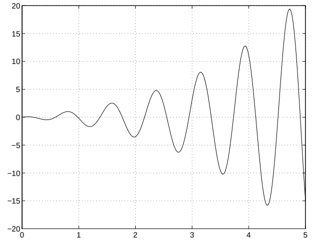
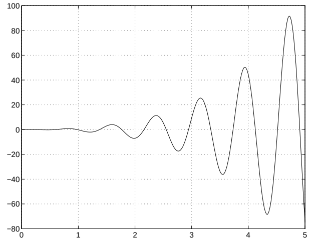
Modi reali TC: $t^m e^{\lambda t}$

Andamento qualitativo in funzione di m e di λ:

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$\lambda < 0$			
$\lambda = 0$			
$\lambda > 0$			

Modi complessi coniugati TC: $t^m e^{\lambda t}$

Andamento qualitativo in funzione di m e di Re $[\ \lambda\ ]$:

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
Re $[\lambda] < 0$			
Re $[\lambda] = 0$			
Re $[\lambda] > 0$			

Evoluzione libera dei sistemi lineari TD

- Nel dominio della variabile z si ha:

$$X_l(z) = z(z\mathrm{I} - A)^{-1}\, x(0)$$

- Introducento il cambio di coordinate $z = Tx$ si ha:

$$Z_l(s) = z(z\mathrm{I} - TAT^{-1})^{-1}\, z(0)$$

- Se ho autovalori distinti o più in generale se molteplicità geometrica = molteplicità algebrica posso diagonalizzare A scegliendo T opportunamente:

$$Z_l(z) = z(z\mathrm{I} - \Lambda)\, z(0)$$

  con $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

- Dunque:

$$Z_l(z) = \mathrm{diag}\left(\frac{z}{z-\lambda_1}, \ldots, \frac{z}{z-\lambda_n}\right) z(0)$$

- Antitrasformando (se $\lambda_i \neq 0$):

$$z_l(t) = \mathrm{diag}\left(\lambda_1^t z_1(0), \ldots, \lambda_n^t z_n(0)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t z_i(0)\, e_i$$

dove e_i è l'elemento i-esimo della base canonica.

- Il sistema lineare è disaccoppiato; si noti che ogni modo evolve indipendentemente dagli altri.

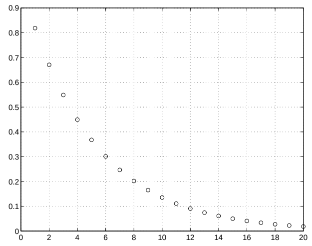
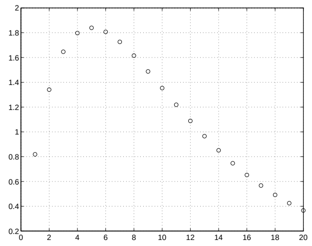
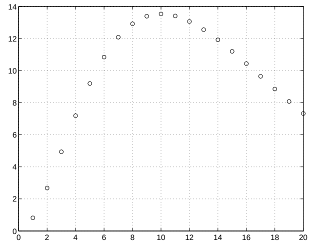
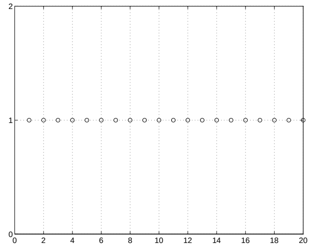
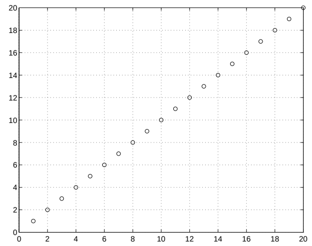
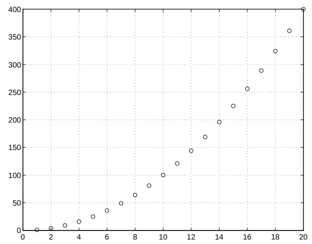
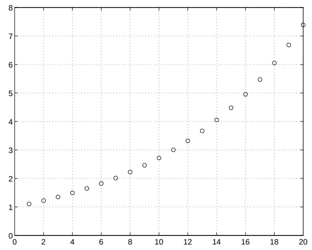
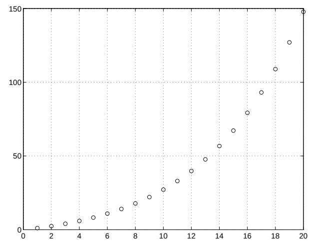
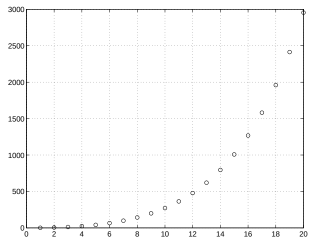
- il modo j-esimo si dice eccitato se $z_j(0) \neq 0$.

- Ritornando in coordinate originali:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t z_i(0)\ v_i$$

  Dunque la risposta libera del sistema è una sommatoria finita di modi che evolvono nelle direzioni degli autovettori di A

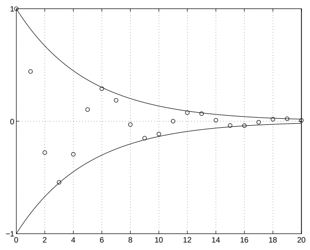
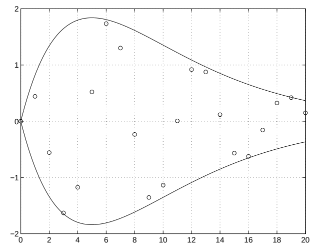
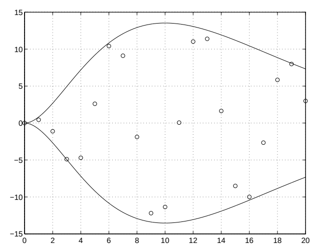
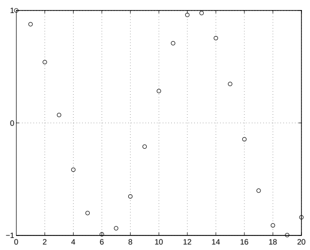
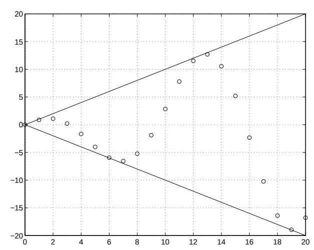
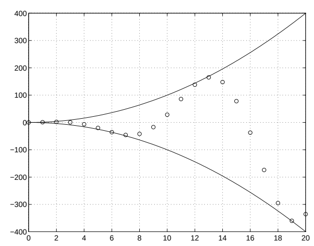
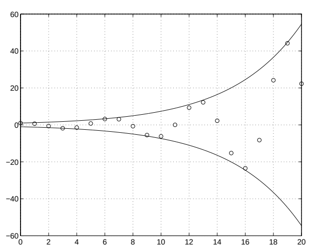
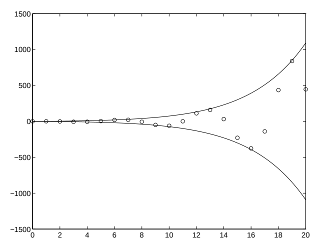
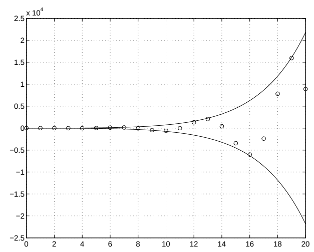
Modi reali positivi TD: $t^m\lambda^t$

	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$\lambda \in (0,1)$			
$\lambda = 1$			
$\lambda \in (1,+\infty)$			

Per $\lambda = 0$ si ottiene un modo che converge a zero in tempo finito. La molteplicità indica dopo quanti passi si ha convergenza.

Modi complessi coniugati TD: $t^m e^{\lambda t}$

Andamento qualitativo in funzione di m e di Re [λ]:

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$\lvert\lambda\rvert < 1$			
$\lvert\lambda\rvert = 1$			
$\lvert\lambda\rvert > 1$			

Classificazione dei modi

- Un modo di un sistema lineare TC $t^m e^{\lambda t}$ si dice convergente se:

$$\lim_{t \to +\infty} t^m e^{\lambda t} = 0$$

- Un modo (TC) si dice limitato se:

$$\exists\, c > 0 : |t^m e^{\lambda t}| < c \qquad \forall\, t \geq 0$$

- Un modo TC si dice illimitato se non è limitato

- Un modo di un sistema lineare TD $t^m \lambda^t$ si dice convergente se:

$$\lim_{t \to +\infty} t^m \lambda^t = 0$$

- Un modo (TD) si dice limitato se:

$$\exists\, c > 0 : |t^m \lambda^t| < c \qquad \forall\, t \geq 0$$

- Un modo TD si dice illimitato se non è limitato

Caratterizzazione algebrica dei modi

- **TEOREMA 1:**
  Il modo di un sistema lineare TC $t^m e^{\lambda t}$ è convergente se e solo se
  $$\mathrm{Re}[\lambda] < 0.$$

- **TEOREMA 2:**
  Il modo di un sistema lineare TC $t^m e^{\lambda t}$ è limitato se e solo se
  $$\mathrm{Re}[\lambda] < 0 \text{ o } (\mathrm{Re}[\lambda] = 0 \text{ purchè } m = 0)$$

- **TEOREMA 3:**
  Il modo di un sistema lineare TD $t^m \lambda^t$ è convergente se e solo se
  $$|\lambda| < 1.$$

- **TEOREMA 4:**
  Il modo di un sistema lineare TD $t^m \lambda^t$ è limitato se e solo se
  $$|\lambda| < 1 \text{ o } (|\lambda| = 1 \text{ purchè } m = 0)$$