Lezione IV: I sistemi lineari tempo-invarianti

- Sistemi lineari finito dimensionali
- Rappresentazione locale I/S/U sistemi lineari TV
- Rappresentazione locale I/S/U sistemi TI
- Rappresentazione locale I/S/U sistemi LTI
- Sistemi algebricamente equivalenti

Sistemi lineari finito-dimensionali

Un sistema dinamico lineare è una 8-upla:

$$(T, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, X, \phi, \psi)$$

- U, Y, X sono spazi vettoriali
- ϕ e ψ soddisfano il principio di sovrapposizione degli effetti
- Quando U, Y e X hanno dimensione finita il sistema si dice *finito dimensionale*.
- Si dice ordine del sistema la dimensione di X.
- Condensatore: lineare, ordine 1. Nastro trasportatore: lineare, ordine ∞.

Rappresentazione dei sistemi lineari TV

Teorema

Supponiamo dim$(X) = n$, dim$(U) = m$ e dim$(Y) = p$.

Allora il sistema lineare $(T,\mathcal{U},U,\mathcal{Y},Y,X,\phi,\psi)$ può essere descritto nella rappresentazione locale I/S/U nel seguente modo:

$$\left.\begin{array}{c}\dot{x}(t)\\ x(t+1)\end{array}\right\} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

dove:

- $A(t) : T \to \mathbb{R}^{n\times n}$
- $B(t) : T \to \mathbb{R}^{n\times m}$
- $C(t) : T \to \mathbb{R}^{p\times n}$
- $D(t) : T \to \mathbb{R}^{p\times m}$

Rappresentazione dei sistemi TI

Teorema

Supponiamo dim$(X) = n$, dim$(U) = m$ e dim$(Y) = p$.

Il sistema in rappresentazione locale I/S/U:

$$\left.\begin{array}{c} \dot{x}(t) \\ x(t+1) \end{array}\right\} = f(t, x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

è *tempo-invariante* se e solo se

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, u) = 0 \qquad \forall\, t, x, u$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x, u) = 0 \qquad \forall\, t, x, u$$

Rappresentazione dei sistemi LTI

Teorema

Supponiamo dim$(X) = n$, dim$(U) = m$ e dim$(Y) = p$.

Allora il sistema **lineare tempo-invariante** $(T, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, X, \phi, \psi)$ può essere descritto nella rappresentazione locale I/S/U nel seguente modo:

$$\left.\begin{array}{c} \dot{x}(t) \\ x(t+1) \end{array}\right\} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

dove:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$
- $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Sistemi algebricamente equivalenti

- La scelta di un vettore di stato per un determinato sistema reale non è univocamente determinata.

- Anche avendo individuato l'ordine minimo associabile ad un certo sistema dinamico posso esprimere lo stato in vari modi, in modo esattamente analogo al fatto che posso individuare un punto in uno spazio utilizzando vari sistemi di coordinate.

- Per sistemi lineari si considerano in genere cambi di coordinate lineari:

$$z = Tx$$

  dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è invertibile.

- Nelle nuove coordinate il sistema diventa:

$$\left.\begin{array}{c} \dot{z}(t) \\ z(t+1) \end{array}\right\} = TAT^{-1}z(t) + TBu(t)$$

$$y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t)$$

- La nuova rappresentazione del sistema si dice **algebricamente equivalente** alla rappresentazione in x. Rappresentazioni algebricamente equivalenti danno luogo alla stessa rappresentazione globale I/S/U.

- Rappresentazioni algebricamente equivalenti sono legate dalla relazione:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= TAT^{-1}\\ \tilde{B} &= TB\\ \tilde{C} &= CT^{-1}\\ \tilde{D} &= D\end{aligned}$$

- A e $\tilde{A}$ sono matrici simili