Lezione X: Risposta in Frequenza

- Rappresentazioni della Funzione di Trasferimento
- Risposta di regime permanente nei sistemi LTI
- Risposta armonica
- Diagrammi di Bode
- Diagrammi di Bode asintotici (approssimati)
- Esempi

Rappresentazioni della F.d.T.

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}} \longrightarrow y_f(t)$$

- Funzione di trasferimento razionale fratta

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0} \; , \quad m \leq n$$

- Forma poli-zeri

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

- Forma in costanti di tempo (o di Bode)

$$G(s) = \frac{K_B (1 + \tau_1' s) \cdots (1 + \tau_m' s)}{s^h (1 + \tau_1 s) \cdots (1 + \tau_n j s)}$$

Risposta Permanente nei Sistemi LTI

- Classe di funzioni di ingresso: $U(s) = \dfrac{Q(s)}{P(s)} = \dfrac{\prod_{i=1}^{l}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{r}(s - p_i)}, \quad l \leq r$

- Forma di $Y_f(s)$ (caso p_i distinti e $\neq$ dai poli di $G(s)$): $Y_f(s) = G(s)U(s) = H(s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s-p_i}$

- Scomposizione risposta forzata:

$$y_f(t) = y_f^G(t) + y_f^U(t)$$

  – Parte dipendente dai poli di $G(s)$ (*transitorio*):

$$y_f^G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

  – Parte dipendente dalle singolarità di $U(s)$ (*regime permanente*):

$$y_f^U(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - p_i} \right\}$$

Risposta Permanente nei Sistemi LTI

- È di più semplice valutazione rispetto all'intera risposta forzata.

- Fornisce indicazioni della risposta dopo il transitorio iniziale.

- Sono di pratico interesse i casi in cui l'ingresso è una funzione limitata del tempo (e che non tende a zero):

1. Risposta permanente al Gradino:

$$u(t) = \overline{U}\mathbf{1}(t) \longleftrightarrow U(s) = \frac{\overline{U}}{s}$$

$$y_f^U(t) = \overline{U}G(0)\mathbf{1}(t)$$

2. Risposta Armonica (o Risposta in Frequenza):

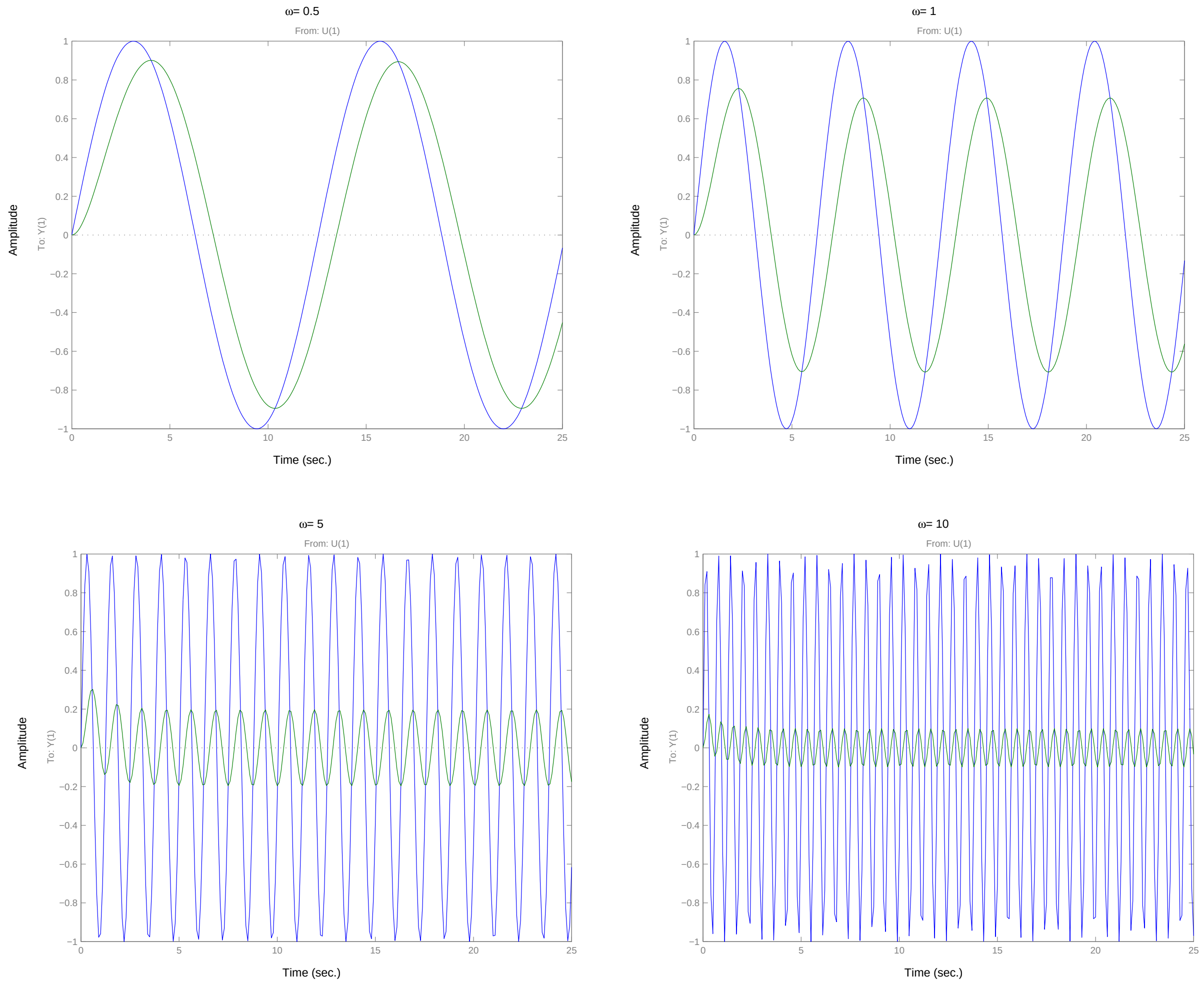
$$u(t) = \overline{U}\sin\omega t \longleftrightarrow U(s) = \frac{\overline{U}\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$y_f^U(t) = \overline{U}|G(j\omega)|\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Risposta Armonica

Esempio - Sistema del I ordine:

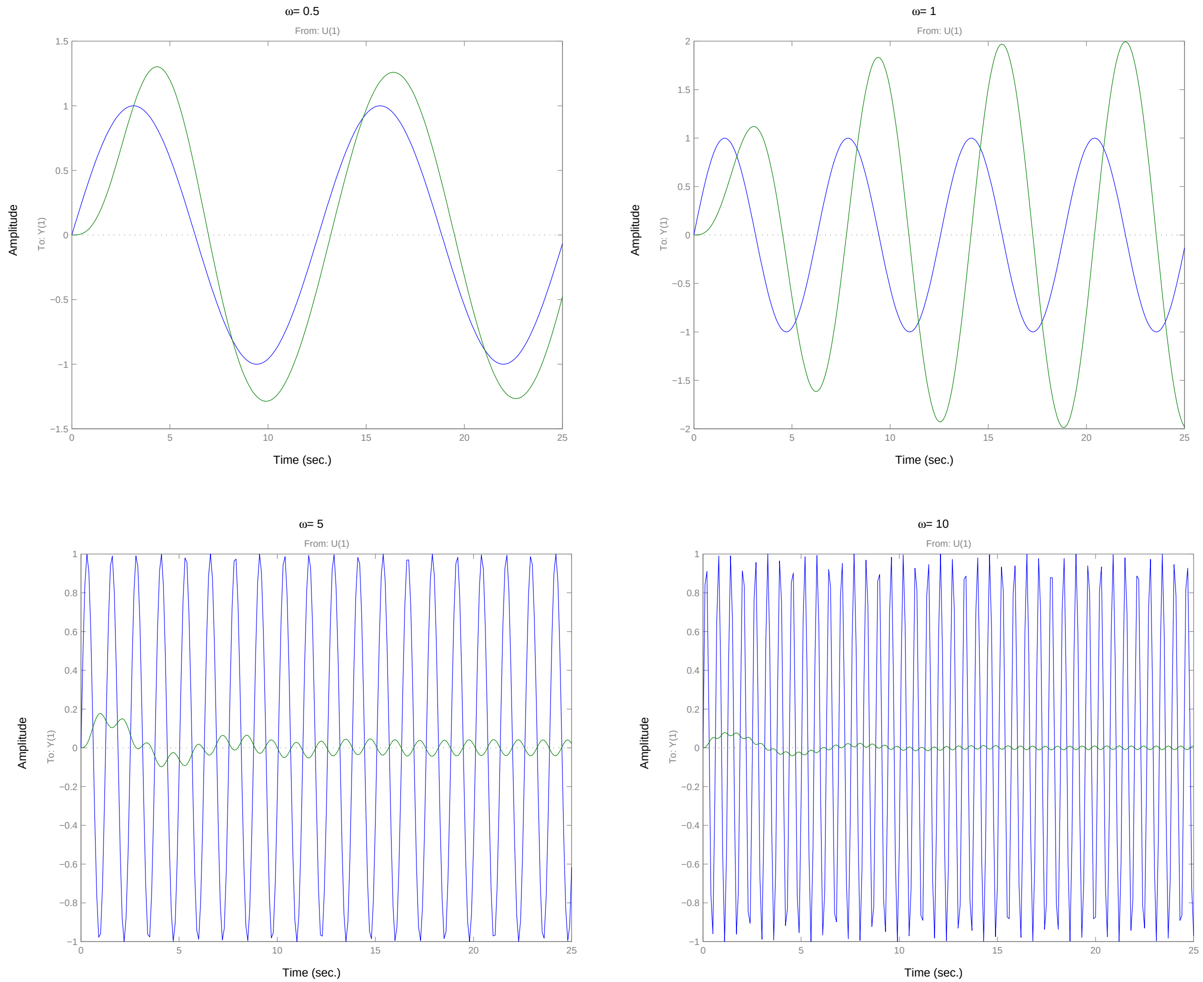
$$u(t) = \sin \omega t \quad , \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$



Risposta Armonica

Esempio - Sistema del II ordine:

$$u(t) = \sin \omega t \quad , \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$



Risposta Armonica: Diagrammi di Bode

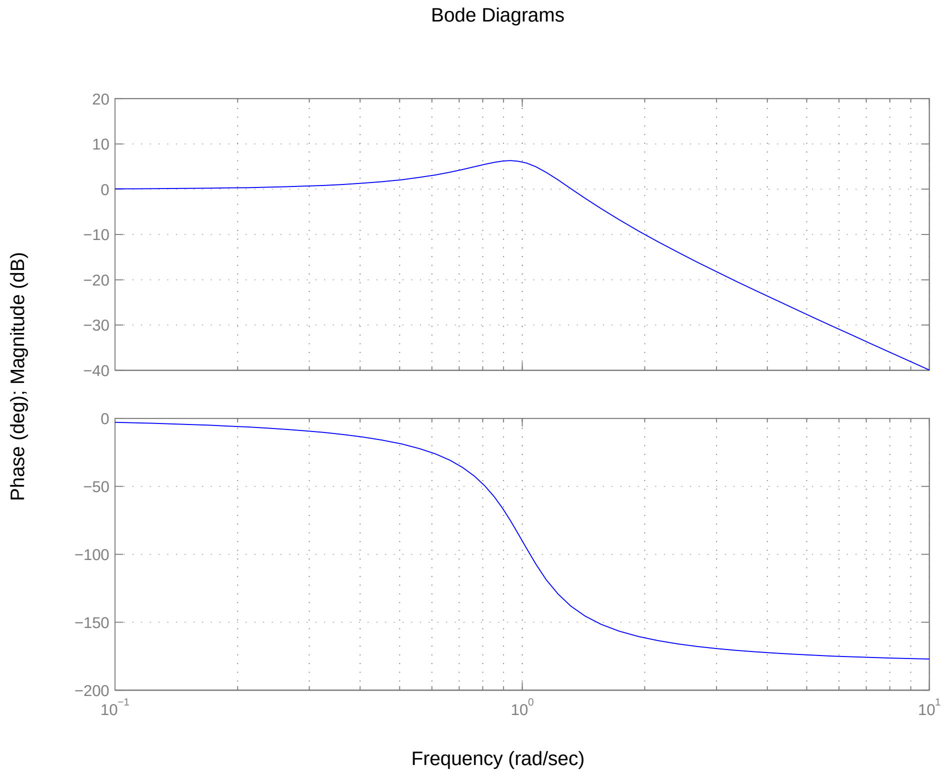
Rappresentazione grafica della risposta in frequenza:

- Diagramma di Bode (Modulo in decibel):

  Ascisse: $\log_{10}(\omega)$ — Ordinate: $|G(j\omega)|_{dB} \doteq 20\log_{10}|G(j\omega)|$

- Diagramma di Bode (Fase):

  Ascisse: $\log_{10}(\omega)$ — Ordinate: $\angle G(j\omega) \doteq \arctan\left\{\frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]}\right\}$



Risposta Armonica: Diagrammi di Bode

È utile per $G(s)$ la forma in costanti di tempo (o di Bode)

$$G(j\omega) = \frac{K_B(1+\tau_1' j\omega)\cdots(1+\tau_m' j\omega)}{(j\omega)^h(1+\tau_1 j\omega)\cdots(1+\tau_n j\omega)}$$

Principali proprietà dei diagrammi di Bode:

- La scala in decibel trasforma prodotti in somme:

$$|G(j\omega)|_{dB} = |K_B|_{dB} + |1+\tau_1' j\omega|_{dB} + \cdots + |1+\tau_m' j\omega|_{dB} - h|\omega|_{dB} - |1+\tau_1 j\omega|_{dB} - \cdots - |1+\tau_n j\omega|_{dB}$$

- La fase di prodotti è anch'essa uguale alla somma delle fasi:

$$\angle G(j\omega) = \angle K_B + \angle(1+\tau_1' j\omega) + \cdots + \angle(1+\tau_m' j\omega) - h(\pi/2) - \angle(1+\tau_1 j\omega) - \cdots - \angle(1+\tau_n j\omega)$$

- Inoltre:

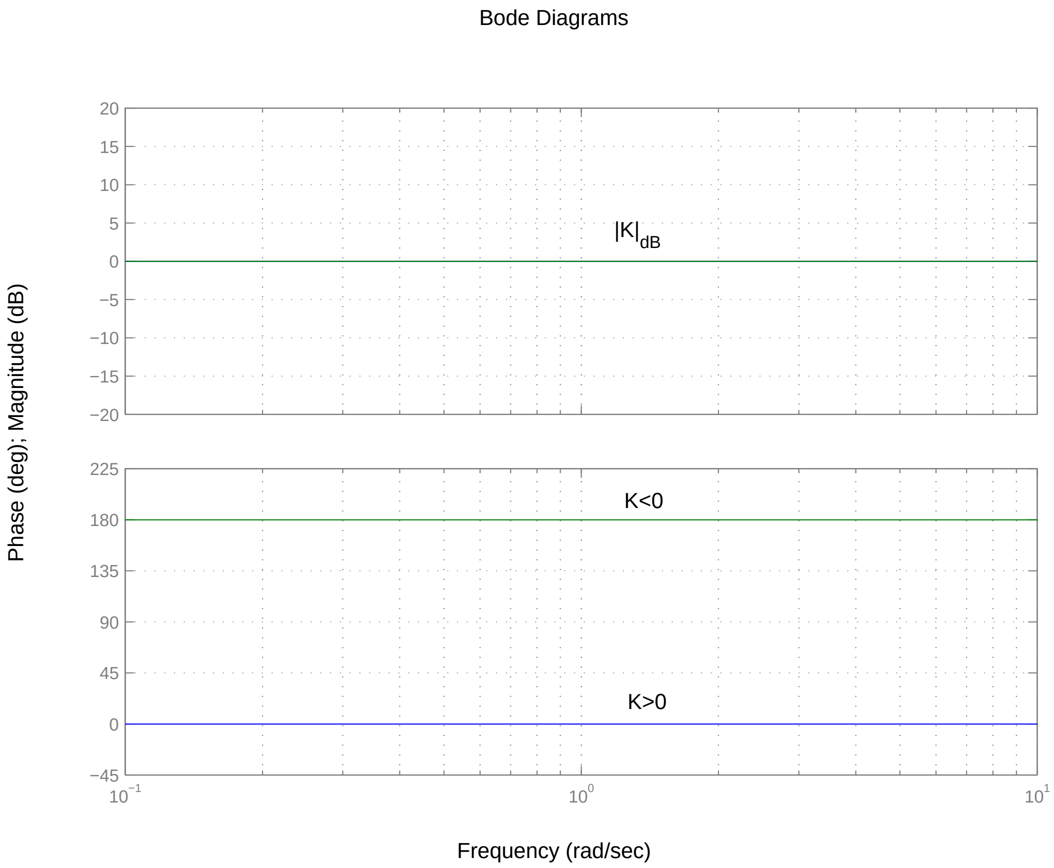
$$\left|G(j\omega)^{-1}\right|_{dB} = -\left|G(j\omega)\right|_{dB}$$

$$\angle G(j\omega)^{-1} = -\angle G(j\omega)$$

Diagrammi di Bode di Sistemi Elementari

Guadagno semplice: $G(s) = K$

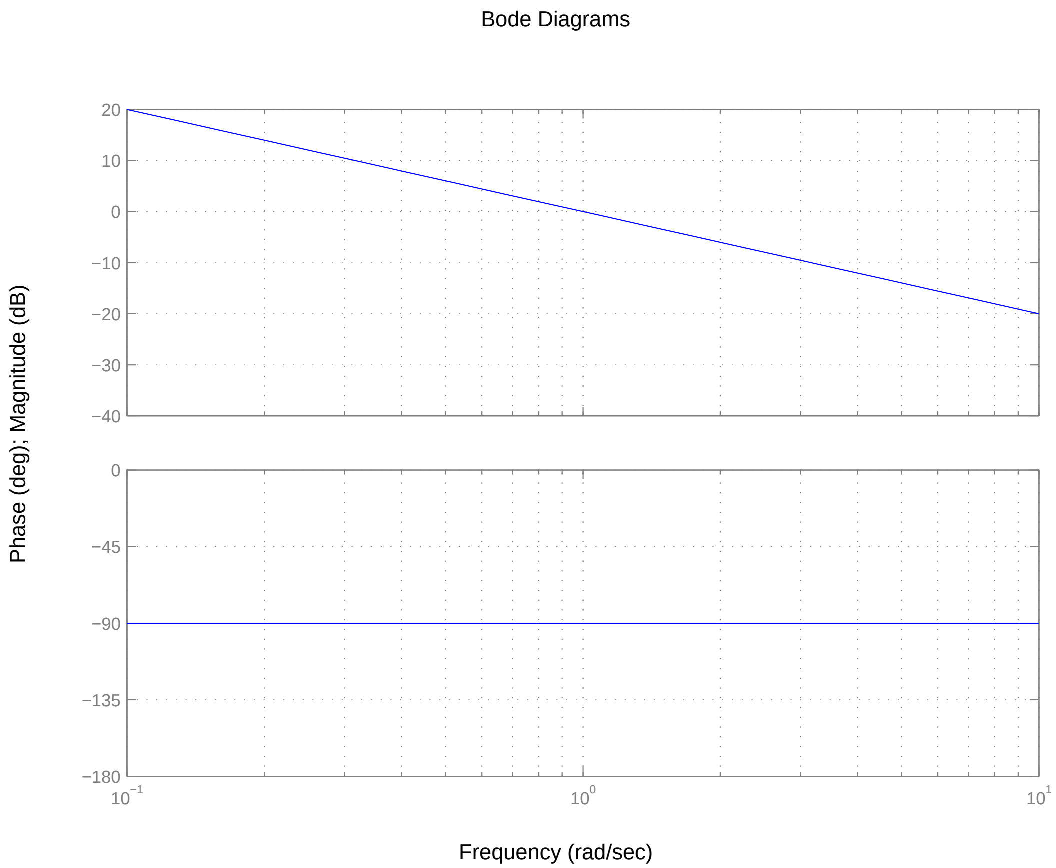
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|K| \quad , \quad \angle G(j\omega) = \angle K = 0 \quad (\pi)$$



Diagrammi di Bode di Sistemi Elementari

Integratore: $G(s) = \dfrac{1}{s}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}(\omega) \quad , \quad \angle G(j\omega) = -\pi/2$$

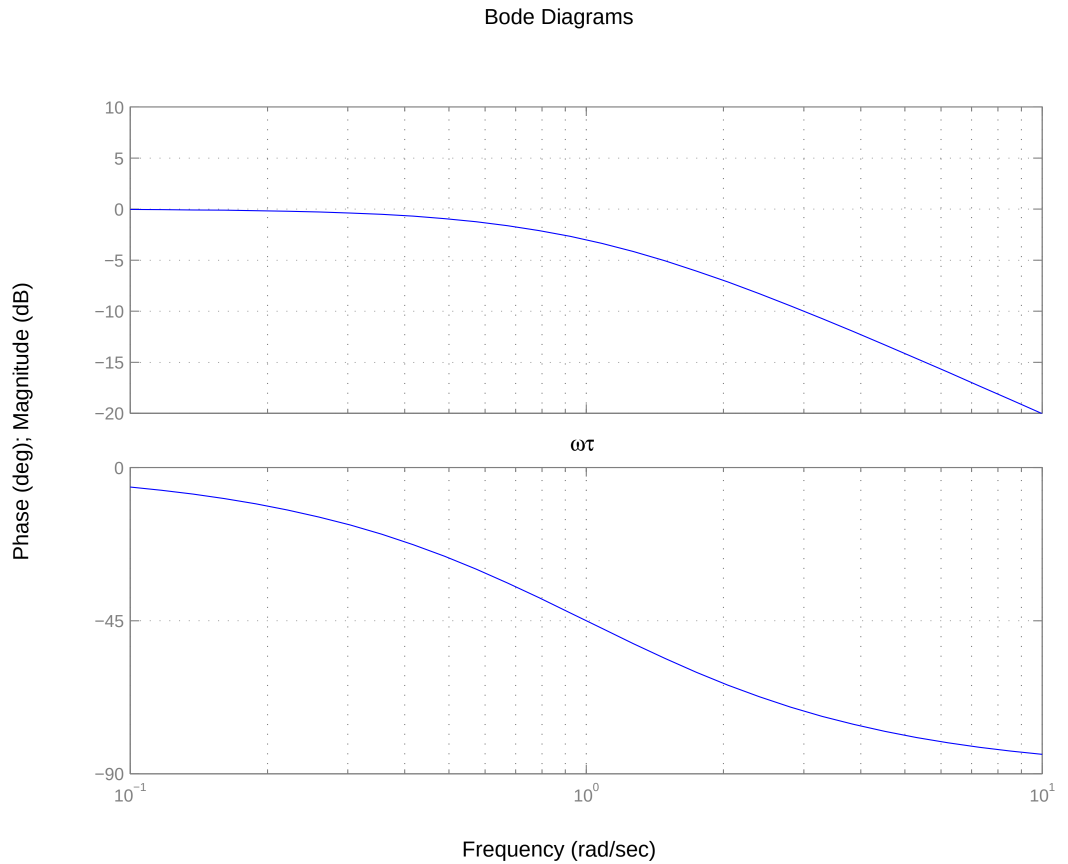


Diagrammi di Bode di Sistemi Elementari

Polo semplice: $G(s) = \dfrac{1}{1 + s\tau}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \quad , \quad \angle G(j\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

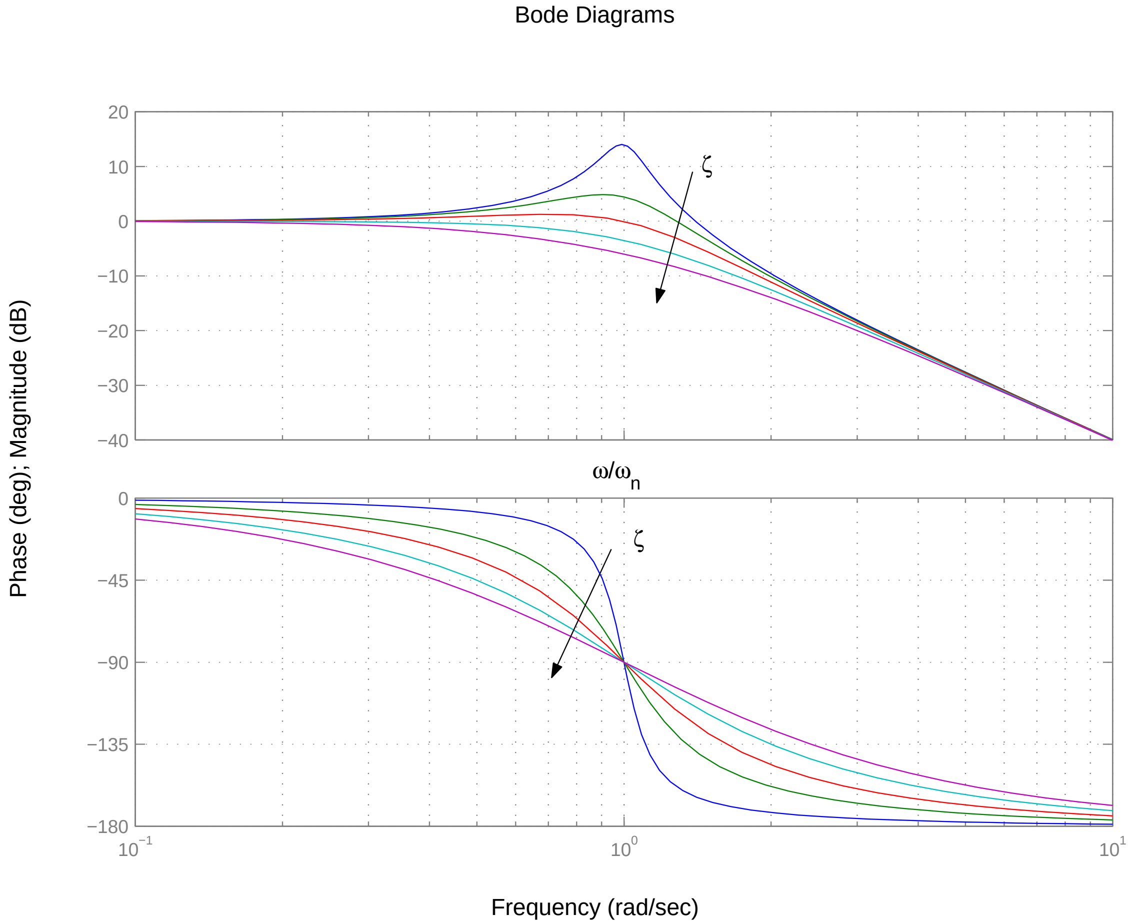
Approssimazione asintotica: $\quad 0dB$ per $\omega\tau << 1$, $-20\log_{10}|\omega\tau|$ per $\omega\tau >> 1$



Diagrammi di Bode di Sistemi Elementari

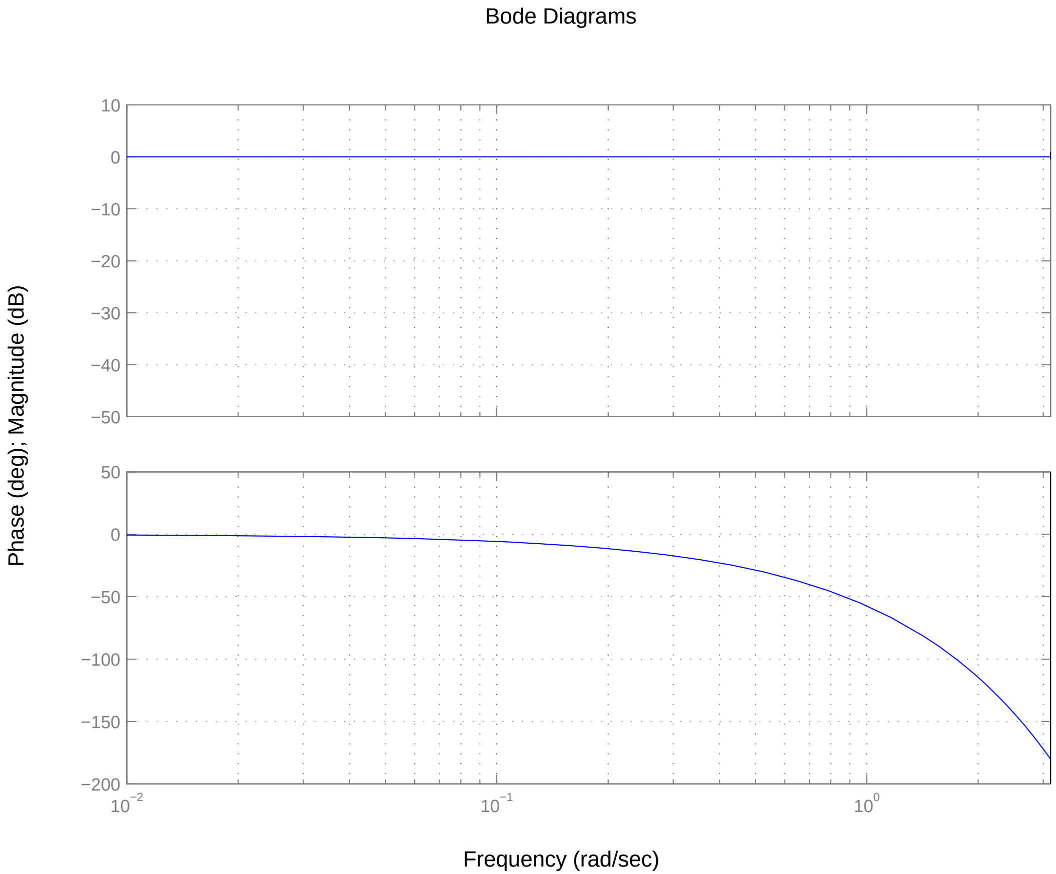
Poli complessi coniugati: $G(s) = \dfrac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad , \quad \angle G(j\omega) = -\arctan\left[\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$



Elemento di ritardo: $G(s) = e^{-s\tau}$, ($\tau > 0$).

$$|G(j\omega)|_{dB} = 0dB \quad , \quad \angle G(j\omega) = -\omega\tau$$



Parametri Caratteristici Risposta Armonica

- B_3: **Banda a 3dB**

  Pulsazione corrispondente ad una attenuazione di 3dB rispetto al modulo per $\omega = 0$

  $$\Longrightarrow \quad |G(jB_3)| = |G(0)|/\sqrt{2}$$

- M_r: **Picco di risonanza**

  Picco del modulo della risposta in frequenza

  $$\Longrightarrow \quad M_r = \max_{\omega} |G(j\omega)|$$

- ω_r: **Pulsazione di risonanza**

  Pulsazione corrispondente al picco del modulo della risposta in frequenza

Parametri Caratteristici Sistemi Elementari

Sistemi del I ordine:

- Banda a 3dB

$$B_3 = 1/|\tau|$$

Sistemi del II ordine:

- Banda a 3dB

$$B_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

- Picco di risonanza

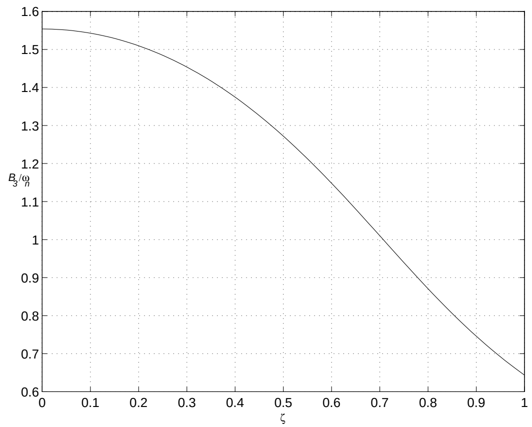
$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Pulsazione di risonanza

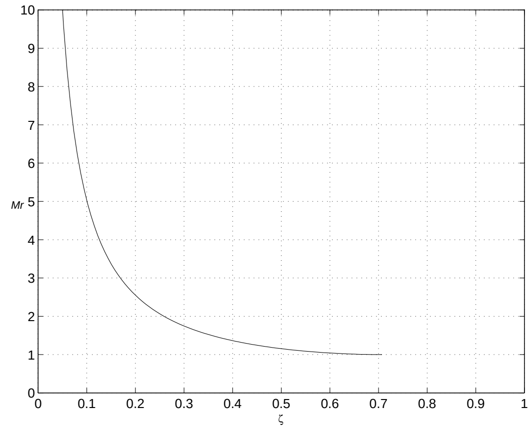
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Relazioni Parametri Sistemi II Ordine

- B_3 in funzione di ζ: $\quad B_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$



- M_r in funzione di ζ: $\quad M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$



Esempi di Tracciamento Diagrammi di Bode

- Esempio 1:

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s^3 + 2s^2 + 4s}$$

- Esempio 2:

$$G_2(s) = \frac{3(s+1)}{(s+3)(s+5)(s+10)}$$

- Esempio 3:

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s}{(s^2 - s + 1)(s+10)}$$