

Lezione V: Esempi di sistemi lineari

- Modello TD di una popolazione scolastica
- Modello TD per il calcolo dei numeri di Fibonacci
- Modello meccanico TC
- Modello circuito elettrico TC
- Regole per l'individuazione dello stato di un sistema lineare

Esempio: una scuola media

- Scopo: modellizzare l'andamento dei neo-iscritti e dei diplomati per una scuola media
- $T = \mathbb{Z}$, sistema tempo discreto
- $u(t)$: numero di neo-iscritti in prima media nell'anno t
- $y(t)$: numero di diplomati nell'anno t
- Stato del sistema: $x_i(t)$: numero degli iscritti alla classe i -esima
- $\alpha_i(t)$: percentuale di promossi nella i -esima classe al tempo t

- Equazioni:

$$x_1(t+1) = (1 - \alpha_1(t))x_1(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = \alpha_1(t)x_1(t) + (1 - \alpha_2(t))x_2(t)$$

$$x_3(t+1) = \alpha_2(t)x_2(t) + (1 - \alpha_3(t))x_3(t)$$

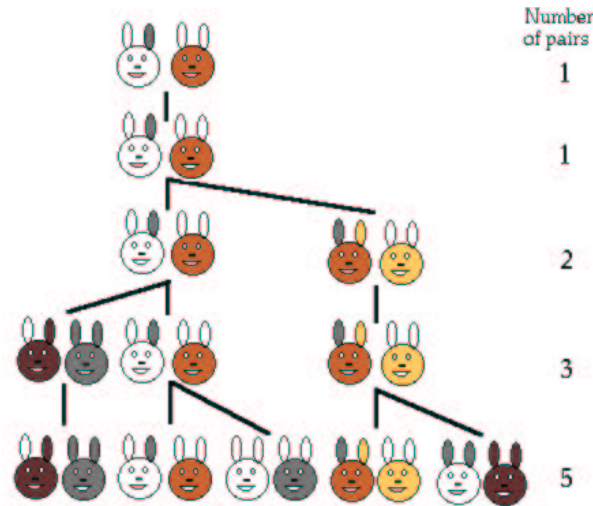
- Mappa di uscita:

$$y(t) = \alpha_3(t)x_3(t)$$

- Sistema LTV con matrici:

$$A(t) = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1(t)) & 0 & 0 \\ \alpha_1(t) & (1 - \alpha_2(t)) & 0 \\ 0 & \alpha_2(t) & (1 - \alpha_3(t)) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C(t) = [0 \ 0 \ \alpha_3(t)]$$

Esempio: numeri di Fibonacci



- Obiettivo: modellizzazione di serie numeriche definite ricorsivamente
- I numeri di Fibonacci sono definiti ricorsivamente come segue:

$$f_0 = 0 \quad f_1 = 1 \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

- Dunque:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144....

- Problema: come calcolare f_{100} senza calcolare i primi 99 numeri ?

- Introdotti nel 1202 da Fibonacci per studiare la rapidità di crescita di una famiglia di conigli. Per saperne di più:

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>

- Possiamo definire:

$$x(n) = \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

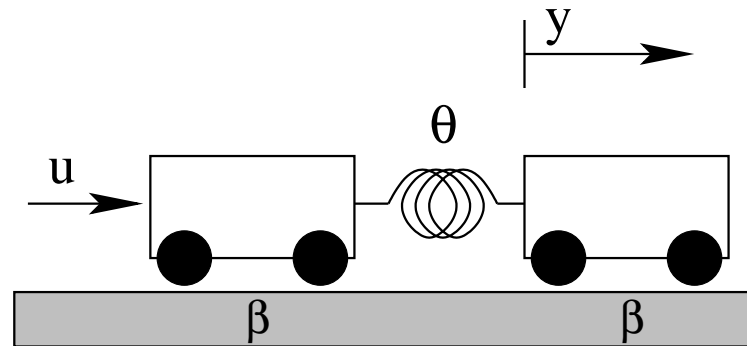
- Dunque all'istante successivo si ha:

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [0 \ 1] x(n)$$

- Per il calcolo dei numeri di Fibonacci basta risolvere il sistema LTI, con condizione iniziale $[1 \ 0]'$.

Esempio: sistema meccanico



- Scopo: modellizzare due carrelli, accoppiati mediante una costante di elasticità e soggetti a forze esterne
- Per le leggi della meccanica classica:

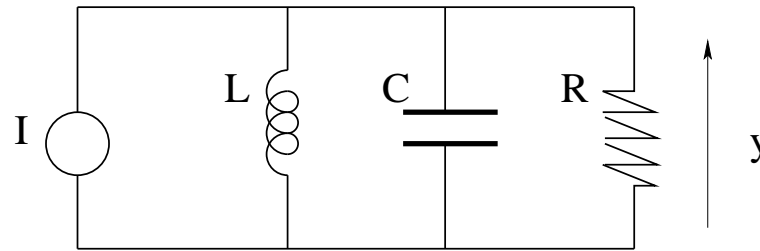
$$m_1 \ddot{x}_1 = -\theta(x_1 - x_2) - \beta \dot{x}_1 + F$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -\theta(x_2 - x_1) - \beta \dot{x}_2$$

- Scegliamo $x(t) = [x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t)]'$, $u(t) = F$ e $y(t) = x_2(t)$
- Equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\theta/m_1 & -\beta/m_1 & \theta/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \theta/m_2 & 0 & -\theta/m_2 & -\beta/m_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Esempio: circuito RLC



- Scopo: modellizzare l'andamento della tensione sul carico in funzione della corrente di ingresso
- Equazioni:

$$I(t) = i_L(t) + C\dot{v}_C(t) + v_C/R$$

$$v_C(t) = L\dot{i}_L(t)$$

- Scelgo $x(t) = [v_C(t), i_L(t)]'$ e $u(t) = I(t)$.
- Equazioni in Rappresentazione locale I/S/U:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

Regole per l'individuazione dello stato di un sistema

- Per sistemi “fisici”: variabili che caratterizzano elementi in grado di immagazzinare energia
 1. Circuiti elettrici: correnti sugli induttori e tensioni sui condensatori
 2. Sistemi meccanici: posizioni e velocità
 3. Sistemi termici: temperature
 4. Sistemi idraulici: pressioni e flussi
- Equazioni differenziali di ordine n in una variabile scalare y : $x(t) = [y(t), \dot{y}(t) \dots y^{(n-1)}(t)]$
- Equazioni differenziali di ordine n in più variabili $y_1, y_2 \dots y_m$:

$$x(t) = [y_1(t) \dots y_1^{(n-1)}(t) \ y_2(t) \dots y_2^{(n-1)}(t) \dots y_m(t) \dots y_m^{(n-1)}(t)]$$

In realtà l'ordine può essere diverso variabile per variabile