Lezione VIII: Funzioni di Trasferimento

- Sistemi LTI - TC (TD): soluzione nel dominio della frequenza e del tempo
- Evoluzione libera ed evoluzione forzata
- Modi naturali
- Funzione di Trasferimento
- Risposta impulsiva
- Esempi

Sistemi LTI - TC: soluzione nel DF

Il sistema LTI TC con rappresentazione locale I/S/U

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}$$

si può $\mathcal{L}$-trasformare introducendo le trasformate di Laplace $U(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ di $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, ed usando la proprietà di trasformata della derivata:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

da cui, esplicitando rispetto a $x(0)$ e $U(s)$

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}\,x(0) + (sI - A)^{-1}B\,U(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}\,x(0) + \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]\,U(s) \end{aligned}$$

- Si evidenzia il principio di sovrapposizione degli effetti

$$X(s) = X_l(s) + X_f(s) \qquad\qquad Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s)$$

dove $X_l(s)$ e $Y_l(s)$ individuano l'**evoluzione libera** (quando $u(t) \equiv 0$), mentre $X_f(s)$ e $Y_f(s)$ individuano l'**evoluzione forzata** (quando $x(0) = 0$)

Sistemi LTI - TC: soluzione nel DT e modi naturali

- Calcolando

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(At)^q}{q!} 1(t) \doteq e^{At} 1(t)$$

si ricava la rappresentazione globale

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \ , \quad y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

- Poiché

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{M_{ij}}{(s-\lambda_i)^j} \quad \text{con} \quad \lambda_i \in \text{sp}(A), \ M_{ij} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

$\Longrightarrow$ e^{At} presenta coefficienti combinazioni lineari dei **modi naturali del sistema**

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \ldots, t^{m_i-1} e^{\lambda_i t} \quad \forall \ i \quad \text{t.c.} \quad \sum_{i=1}^{l} m_i = n$$

$\Longrightarrow$ la risposta libera $x_l(t) = e^{At}x(0)$ evolve secondo le combinazioni lineari dei modi naturali "eccitati" dallo stato iniziale $x(0)$ lungo le direzioni degli autovettori di A.

Sistemi LTI - TD: soluzione nel DF

Il sistema LTI TD con rappresentazione locale I/S/U

$$\begin{array}{rcl} x(t+1) & = & A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) & = & C\,x(t) + D\,u(t) \end{array}$$

si può $\mathcal{Z}$-trasformare introducendo le trasformate Zeta $U(z)$, $X(z)$, $Y(z)$ di $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, ed usando la proprietà di trasformata dell'anticipo temporale:

$$\begin{array}{rcl} zX(z) - zx(0) & = & AX(z) + BU(z) \\ Y(z) & = & CX(z) + DU(z) \end{array}$$

da cui, esplicitando rispetto a $x(0)$ e $U(z)$

$$\begin{array}{rcl} X(z) & = & z(zI-A)^{-1}\,x(0) + (zI-A)^{-1}B\,U(z) \\ Y(z) & = & Cz(zI-A)^{-1}\,x(0) + \left[C(zI-A)^{-1}B + D\right]\,U(z) \end{array}$$

- Si evidenzia il principio di sovrapposizione degli effetti

$$X(z) = X_l(z) + X_f(z) \qquad Y(z) = Y_l(z) + Y_f(z)$$

dove $X_l(z)$ e $Y_l(z)$ individuano l'**evoluzione libera** (quando $u(t) \equiv 0$), mentre $X_f(z)$ e $Y_f(z)$ individuano l'**evoluzione forzata** (quando $x(0) = 0$)

Sistemi LTI - TD: soluzione nel DT e modi naturali

- Calcolando

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[z(zI-A)^{-1}\right] = A^t 1(t)$$

si ricava la rappresentazione globale

$$x(t) = A^t x(0) + \sum_{q=0}^{t-1} A^{t-1-q} B u(q)\ , \quad y(t) = CA^t x(0) + \sum_{q=0}^{t-1} CA^{t-1-q} B u(q) + Du(t)$$

- Poiché

$$z(zI-A)^{-1} = z\frac{\text{adj}(zI-A)}{\det(zI-A)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{zM_{ij}}{(z-\lambda_i)^j} \quad \text{con} \quad \lambda_i \in \text{sp}(A),\ M_{ij} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

$\Longrightarrow$ A^t presenta coefficienti combinazioni lineari dei **modi naturali del sistema**

$$\lambda_i^t, t\lambda_i^t, \ldots, t^{m_i-1}\lambda_i^t \quad \forall\ i \quad \text{t.c.} \quad \sum_{i=1}^{l} m_i = n$$

$\Longrightarrow$ la risposta libera $x_l(t) = A^t x(0)$ evolve secondo le combinazioni lineari dei modi naturali "eccitati" dallo stato iniziale $x(0)$ lungo le direzioni degli autovettori di A.

Funzione di Trasferimento

- Definizione di **Funzione di Trasferimento** di un sistema LTI - TC [TD]:

$$G(s) \doteq \frac{Y_f(s)}{U(s)} \qquad \left[G(z) \doteq \frac{Y_f(z)}{U(z)} \right]$$

  – Rappresentazione I/S/U

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad \left[G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \right]$$

  – Rappresentazione I/U

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \qquad \left[G(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} \right]$$

- Proprietà della F.d.T.:
  – non dipende dal segnale di ingresso $u(t)$
  – non dipende dalla scelta dello stato $x(t)$
  – è caratteristico del sistema

Risposta Impulsiva

Definizione:
la *Risposta Impulsiva* di un sistema LTI è la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \delta(t)$

Poiché

$$Y_f(s) = G(s)U(s) \qquad \left[Y_f(z) = G(z)U(z)\right]$$

se $U(s) = 1$ $[U(z) = 1]$, allora

$$y_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \qquad \left[y_\delta(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}\right]$$

$$\Downarrow$$

- (TC) Antitrasformata di Laplace di $G(s)$: $g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$
- (TD) Antitrasformata Zeta di $G(z)$: $g(t) = CA^tB + D\delta(t)$

Esempi di Funzioni di Trasferimento TC

F.d.T. di alcuni sistemi elementari:

- Integratore

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{s}$$

- Doppio integratore

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Oscillatore

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Esempi di Funzioni di Trasferimento TD

F.d.T. di alcuni sistemi elementari:

- Integratore

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \Longrightarrow \quad G(z) = \frac{1}{z-1}$$

- Doppio integratore

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \Longrightarrow \quad G(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 1}$$

- Oscillatore

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) \end{cases} \Longrightarrow \quad G(z) = \frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}{z^2 - z + 1}$$