Lezione XII: Classificazione punti di equilibrio in dim. 2

- 4 casi possibili:
  - Nodo
  - Sella
  - Centro
  - Fuoco

Classificazione per sistemi 2-dimensionali

$$\dot{x} = Ax$$

con $x \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Si hanno i seguenti casi:

- λ_1, λ_2 reali concordi in segno
- λ_1, λ_2 reali e discordi in segno
- λ_1, λ_2 immaginari puri
- λ_1, λ_2 complessi coniugati

Autovalori reali e concordi in segno: Nodo

Supponiamo che il sistema sia diagonalizzabile, λ_1, λ_2 reali e $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

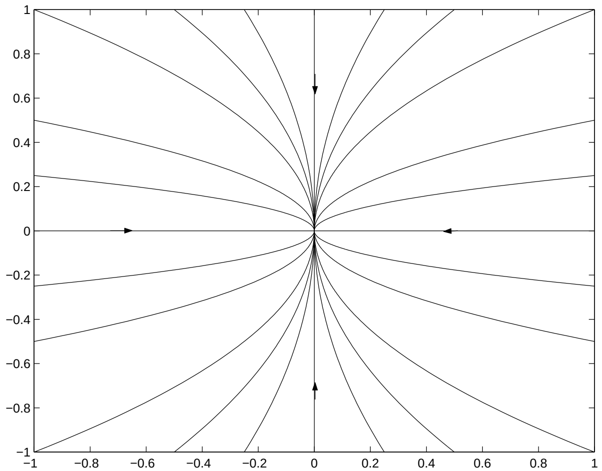
$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \qquad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$$

Si noti che

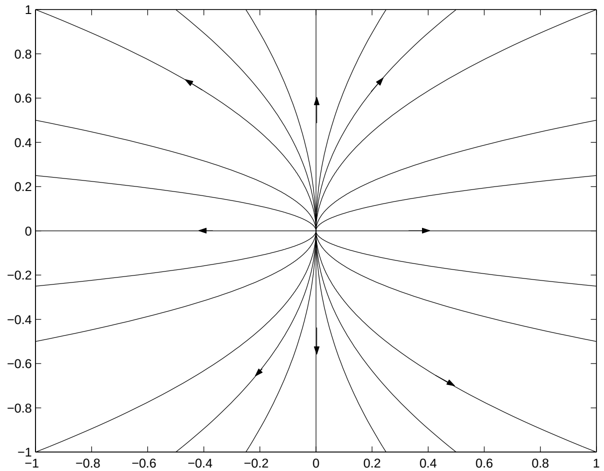
$$\frac{d}{dt} x_1^{\lambda_2} / x_2^{\lambda_1} = 0$$

Dunque le traiettorie soddisfano

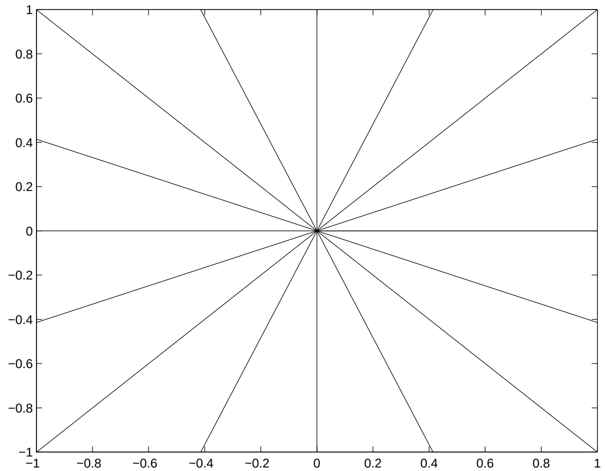
$$x_1^{\lambda_2} = c \cdot x_2^{\lambda_1}$$



Nodo stabile $\lambda_i < 0$



Nodo instabile $\lambda_i > 0$



$\lambda_1 = \lambda_2$

Se il sistema non è diagonalizzabile si parla comunque di nodo.

Autovalori reali e discordi in segno: Sella

Siano λ_1, λ_2 reali e $\lambda_1\lambda_2 < 0$, dunque A è diagonalizzabile e in opportune coordinate

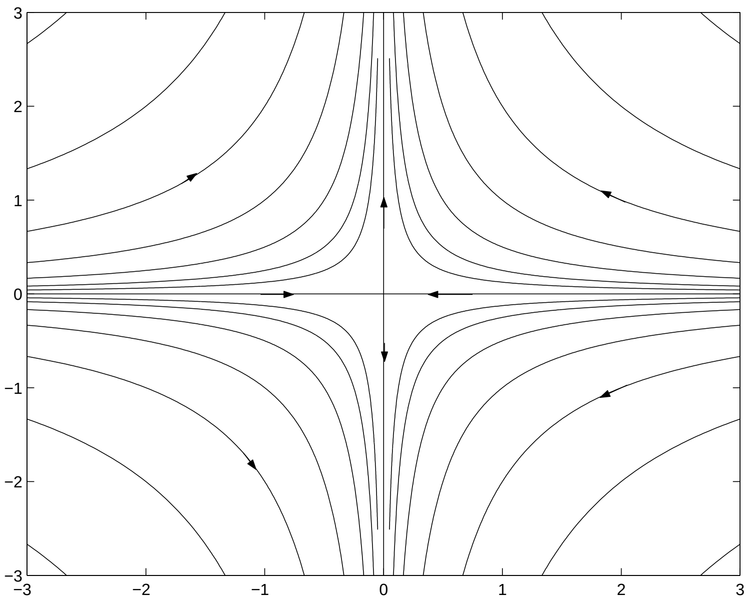
$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \qquad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$$

Si noti che

$$\frac{d}{dt} x_1^{\lambda_2} x_2^{-\lambda_1} = 0$$

Dunque le traiettorie soddisfano

$$x_1^{\lambda_2} \cdot x_2^{-\lambda_1} = c$$



Nota: La sella è sempre instabile

Autovalori immaginari puri: Centro

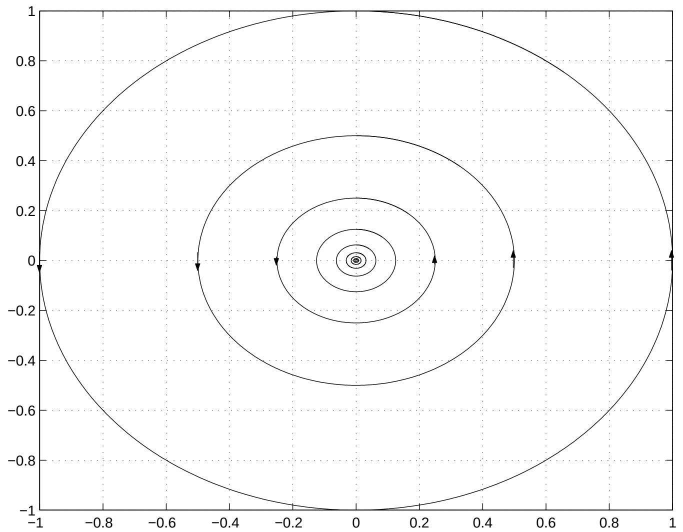
Supponiamo che A abbia autovalori immaginari puri in $\pm j\omega$ Dunque, scegliendo le coordinate opportune:

$$\dot{x}_1 = -\omega x_2 \qquad \dot{x}_2 = \omega x_1$$

Si noti che:

$$\frac{d}{dt}x_1^2 + x_2^2 = 0$$

Il sistema ha dunque traiettorie circolari:



Nota: il centro è sempre marginalmente stabile (non attrattivo)

Autovalori complessi coniugati: Fuoco

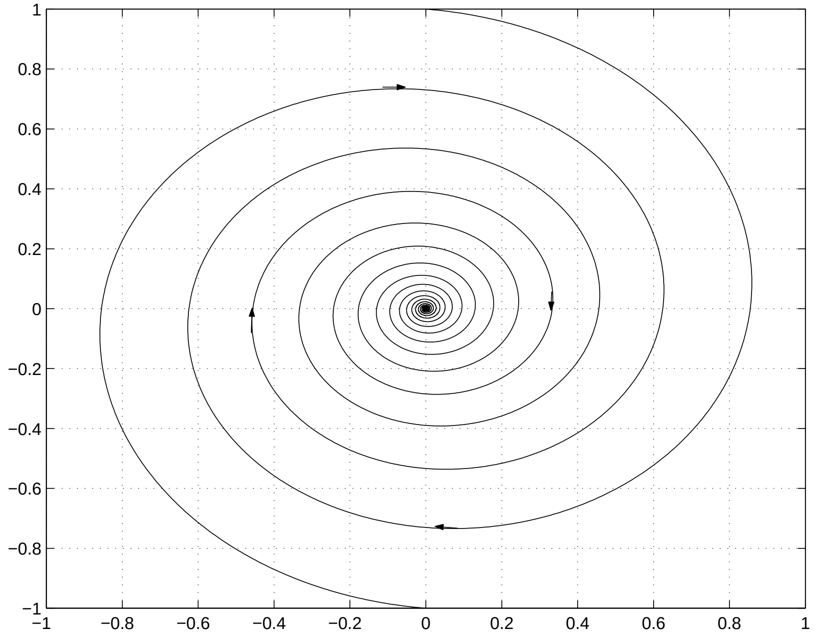
Supponiamo che A abbia autovalori complessi coniugati in $\sigma \pm j\omega$ Dunque, scegliendo le coordinate opportune:

$$\dot{x}_1 = \sigma x_1 - \omega x_2 \qquad \dot{x}_2 = \sigma x_2 + \omega x_1$$

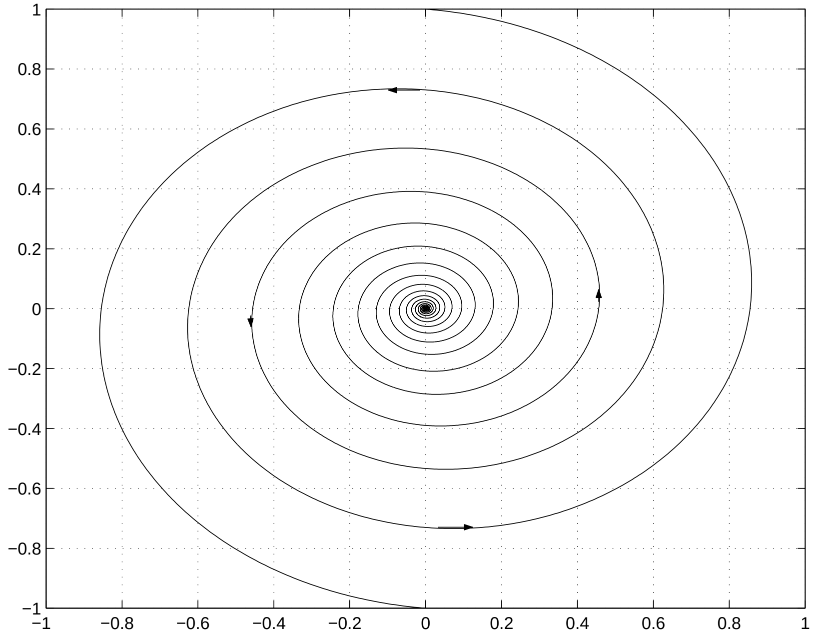
Si noti che:

$$x_1 = \cos(\omega t)e^{\sigma t} \qquad x_2 = \sin(\omega t)e^{\sigma t}$$

Il sistema ha dunque traiettorie a spirale:



Fuoco stabile Re$(\lambda) < 0$



Fuoco instabile Re$(\lambda) > 0$