

## Capitolo 3

**SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER**

Da quanto abbiamo studiato nel capitolo precedente, possiamo dedurre che,

*Un segnale, in generale complesso  $g(t)$ , appartenente al sottospazio dei segnali a energia finita definiti su un intervallo limitato  $[-T/2, T/2]$ , può essere rappresentato mediante lo sviluppo*

$$g(t) = \sum_{i \in I} c_i \mathbf{f}_i(t)$$

*dove  $\{\mathbf{f}_i(t)\}_{i \in I}$  è un insieme di segnali ortonormali appartenenti allo stesso sottospazio*

$$\text{se, posto } c_i = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \mathbf{f}_i^*(t) dt \quad \forall i \in I$$

$$\text{risulta: } E_g = \sum_{i \in I} |c_i|^2$$

L'insieme di infiniti segnali ortonormali:

$$\mathbf{f}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp \left[ j \frac{2\pi n t}{T} \right] \quad -\infty < n < \infty$$

rispetta la condizione sopra enunciata per tutti i segnali a energia finita definiti nell'intervallo  $[-T/2, T/2]$ , sono cioè un insieme completo per i segnali del sottospazio in considerazione.

Possiamo quindi rappresentare un segnale complesso di tale tipo, definito nell'intervallo  $[-T/2, T/2]$ , come:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \exp \left[ j \frac{2\pi n t}{T} \right] \right\}$$

$$\text{con: } c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \exp \left[ -j \frac{2\pi n t}{T} \right] dt$$

Ovvero semplificando le espressioni sopra:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \exp \left[ j \frac{2\pi n t}{T} \right]$$

$$\text{con: } G_n \triangleq \frac{c_n}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \exp \left[ -j \frac{2\pi n t}{T} \right] dt$$

Se ora consideriamo un segnale  $g_T(t)$ , periodico di periodo  $T$ , coincidente con  $g(t)$  nel periodo fondamentale, osserviamo che  $g_T(t)$  e la rappresentazione in serie di segnali ortonormali coincidono, in quanto i segnali ortonormali sono anch'essi periodici di periodo uguale o multiplo di  $T$ .

Tale rappresentazione prende il nome di sviluppo in serie di Fourier e si deve intendere che il segno di uguaglianza vale nel senso della uguaglianza tra le potenze dei segnali a sinistra e a destra del segno stesso.

Questo significa che i due segnali sono uguali quasi ovunque escluso che in un insieme di punti di dimensione nulla.

### 3.1 RELAZIONE DI PARSEVAL SULLA POTENZA MEDIA

Dalla uguaglianza di Parseval precedentemente vista,  $E_x = \sum_{i \in I} |c_i|^2$ , sappiamo che l'energia del segnale nell'intervallo limitato  $[-T/2, T/2]$  è data da:

$$E_g = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

D'altra parte possiamo osservare che la potenza  $P_g$  del segnale periodico coincidente con  $g(t)$  nel periodo fondamentale è, per la relativa definizione:

$$P_g = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{T} E_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{c_n}{\sqrt{T}} \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_n|^2$$

Allo stesso risultato si giunge nel seguente modo, poiché  $g_T(t)$  è rappresentabile con la corrispondente serie:

$$\begin{aligned} P_g &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn2\frac{p}{T}t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m^* e^{-jn2\frac{p}{T}t} \right] dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m^* \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn2\frac{p}{T}t} e^{-jm2\frac{p}{T}t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n G_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_n|^2 \end{aligned}$$

La trattazione seguente considererà lo sviluppo in serie di Fourier applicato a segnali periodici, ovviamente le stesse considerazioni potranno essere ripetute per lo sviluppo in serie di Fourier di segnali a energia finita definiti su un intervallo limitato, introducendo però le opportune modifiche.

### 3.2 SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DI SEGNALI REALI

Se il segnale  $g_T(t)$ , periodico di periodo  $T$ , è reale, si verifica che:

$$\begin{aligned} G_n^* &= \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \exp \left[ -j \frac{2\pi n t}{T} \right] dt \right]^* = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \exp \left[ j \frac{2\pi n t}{T} \right] dt = G_{-n} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
g_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} G_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} + G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} G_n^* e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} + G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}}
\end{aligned}$$

Da queste otteniamo immediatamente che:

$$\begin{aligned}
g_T(t) &= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ G_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \right\} = \\
&= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2 \operatorname{Re} \left\{ |G_n| e^{j\mathbf{j}_n} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \right\} \right] = \\
&= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2 |G_n| \operatorname{Re} \left\{ e^{j\mathbf{j}_n} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \right\} \right] = \\
&= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2 |G_n| \cos \left\{ 2\pi n \frac{t}{T} + \mathbf{j}_n \right\} \right]
\end{aligned}$$

Un'altra espressione della serie di Fourier per segnali reali è la seguente:

$$\begin{aligned}
g(t) &= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ G_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \right\} = \\
&= G_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \operatorname{Re}\{G_n\} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) - \operatorname{Im}\{G_n\} \operatorname{sen}\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right] = \\
&= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right]
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
A_0 &= G_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) dt \\
A_n &= 2 \operatorname{Re}\{G_n\} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\
B_n &= -2 \operatorname{Im}\{G_n\} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt
\end{aligned}$$

### 3.3 LA CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER

Lo sviluppo in serie di Fourier è stato qui ottenuto per segnali periodici, ovvero a potenza media finita.

Per tali segnali si può allora affermare che esiste lo sviluppo in serie di Fourier, i cui coefficienti sono finiti. Inoltre tale sviluppo converge al segnale in media, cioè lo scarto quadratico medio tende a zero al crescere del numero delle funzioni ortonormali costituenti la rappresentazione. Quindi, il

tipo di convergenza è tale che la differenza (errore) fra il segnale e la relativa rappresentazione di Fourier abbia potenza nulla: ciò non significa che il segnale coincida con la serie di Fourier in tutti gli istanti.

Un set alternativo di condizioni sul segnale (più restrittive), che ne garantisce la rappresentazione in serie di Fourier, è conosciuto con il nome di condizioni di Dirichlet. Queste sono soddisfatte da quasi tutti i segnali che hanno interesse nelle telecomunicazioni e garantiscono una convergenza uniforme di tipo puntuale: il segnale e la sua rappresentazione di Fourier sono infatti uguali ovunque, eccetto nei punti in cui il segnale presenta delle discontinuità. In questi punti la serie converge alla semisomma dei limiti destro e sinistro.

### Condizioni di Dirichlet

Le condizioni di Dirichlet sono un insieme di ipotesi, *sufficienti* per la validità dello sviluppo proposto:

- 1)  $g(t)$  sia ad un solo valore in  $[-T/2, T/2]$  ;
- 2) abbia al più un numero finito di discontinuità di prima specie in  $[-T/2, T/2]$ ;
- 3) abbia al più un numero finito di massimi e minimi in  $[-T/2, T/2]$ , ovvero possieda derivata limitata in  $[-T/2, T/2]$ , salvo un numero finito di punti nei quali esistano limitate le derivate destra e sinistra;

$$4) \text{ sia assolutamente integrabile in } [-T/2, T/2]: \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)| dt < \infty$$

Per la violazione delle condizioni di Dirichlet occorre pertanto riferirsi a segnali “patologici”, che non hanno riscontro fisico.

Per questo al problema della convergenza della serie di Fourier non sarà dato eccessivo rilievo.

### 3.4 SPETTRO DEL SEGNALE - ("a righe" o "discreto")

Ai fini della caratterizzazione analitica di un segnale periodico  $g_T(t)$ , ripetizione del segnale  $g(t)$  definito in  $[-T/2, T/2]$ , è sufficiente conoscere l'insieme dei coefficienti (di Fourier)  $G_n$  del suo sviluppo, ciascuno caratterizzato da un'ampiezza (modulo) e da una fase (argomento di  $G_n$ ): essi costituiscono la rappresentazione del segnale  $g(t)$  nel dominio della frequenza, o "spettro".

Si possono così tracciare i rispettivi spettri di ampiezza e di fase, bilaterali o unilaterali, questi ultimi validi solo per funzioni reali.

Consideriamo la grandezza complessa, funzione del tempo:

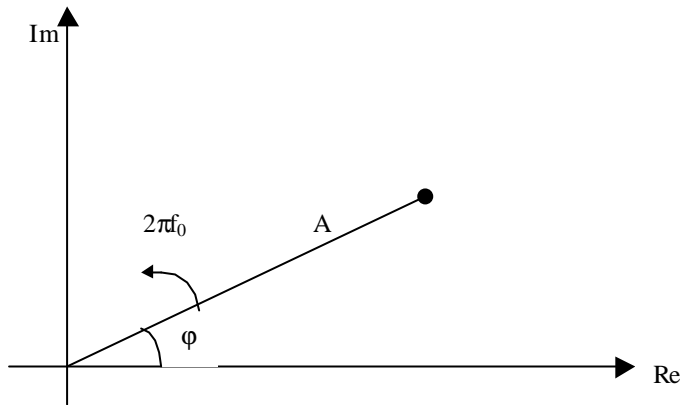
$$A e^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$$

quando  $t=0$ , questa corrisponde sul piano complesso, o piano di Gauss, ad un vettore di ampiezza  $A$  e argomento, o fase iniziale,  $\phi$ .

Tale vettore, allo scorrere del tempo, ruota con velocità angolare  $2\pi f_0$  radianti al secondo (rad/s) , in senso antiorario se la grandezza  $f_0$  è positiva, in senso orario se  $f_0$  è negativa.

Il termine  $f_0$  definisce la frequenza del segnale complesso indicato, e rappresenta il numero di rotazioni complete (angoli giri) compiute dal vettore nell'unità di tempo. Come è noto, nel sistema internazionale di misura la frequenza si esprime in Hertz (Hz).

Secondo quanto appena introdotto avremo che, per convenzione, ad un vettore ruotante in senso orario sarà associata una frequenza "negativa". Valori di frequenza negativa sono un concetto matematico utile, ma non corrispondente al concetto fisico di frequenza usato nei segnali sinusoidali.

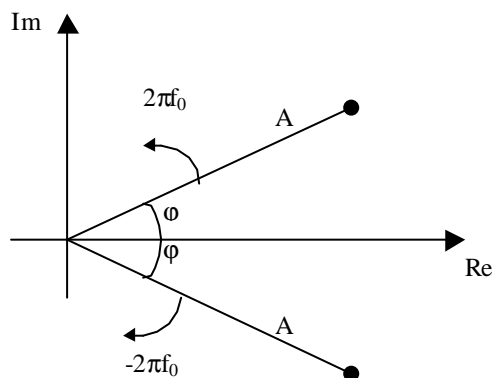


**Figura 3.1** - Rappresentazione sul piano di Gauss della funzione  $A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ , mediante un vettore di modulo  $A$  e fase iniziale  $\varphi$ , ruotante con velocità angolare  $2\pi f_0$ .

Consideriamo ora la funzione cosinusoidale

$$g(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)} = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}$$

ad essa si associa la rappresentazione sul piano complesso, mostrata in figura seguente, di due vettori controrotanti, con velocità angolari una positiva (verso antiorario) e una negativa.



**Figura 3.2** - Rappresentazione sul piano di Gauss della funzione  $A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ , mediante due vettori ruotanti in senso opposto.

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, un generico segnale periodico può essere sviluppato in serie di Fourier:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_n| e^{j\varphi_n} e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

ad ognuno dei contributi della sommatoria, quindi, corrisponde sul piano di Gauss, un vettore di ampiezza  $|G_n|$ , fase iniziale  $\varphi_n$ , ruotante a velocità angolare  $2\pi \frac{n}{T}$ , cioè con frequenza  $n/T$ , dove  $T$  è il periodo del segnale.

La rappresentazione sul piano di Gauss dà una descrizione completa del segnale dato, come la sua rappresentazione in serie di Fourier.

In modo alternativo possiamo rappresentare graficamente il segnale  $g(t)$  riportando, in funzione del parametro frequenza, le ampiezze e le fasi dei diversi vettori componenti. Tale rappresentazione grafica prende il nome di spettro: parleremo di "spettro di ampiezza" nel primo caso e di "spettro di fase" nel secondo.

L'insieme dei  $|G_n|^2$ , riportato in funzione della frequenza, definisce lo **spettro di potenza media**.

Come si osserva, esso dipende solo da quello di ampiezza del segnale, per cui è lo stesso per tutte quelle funzioni distinte, che abbiano però lo stesso spettro di ampiezza.

### 3.5 PROPRIETA' DELLA SERIE DI FOURIER

Riportiamo, senza dimostrazione, alcune fra le proprietà di cui gode la serie di Fourier.

#### Linearità

Se  $g_T(t)$  è un segnale periodico combinazione lineare di altri segnali periodici aventi lo stesso periodo, il suo sviluppo in serie di Fourier ha coefficienti che sono combinazione lineare dei coefficienti dei diversi segnali componenti, secondo le stesse costanti.

Gli spettri si sommano vettorialmente in quanto numeri complessi.

#### Traslazione temporale

Se  $g_T(t)$  è un segnale periodico di periodo  $T$ , il cui sviluppo in serie di Fourier è caratterizzato dai coefficienti  $G_n$ ,  $g_T(t-t_0)$  ha uno sviluppo in serie di Fourier con coefficienti  $[G_n e^{-j2\pi \frac{n}{T} t_0}]$

#### Simmetria coniugata

Se la funzione  $g(t)$  è reale, i coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier sono caratterizzati dalla proprietà:

$$G_{-n} = G_n^* \\ |G_{-n}| = |G_n|, \quad \mathbf{j}_{-n} = -\mathbf{j}_n$$

ovvero lo spettro di ampiezza è simmetrico rispetto alla frequenza zero, e quello delle fasi è antisimmetrico (simmetria coniugata).

Se  $g(t)$  oltre che funzione reale del tempo è anche funzione pari, cioè  $g(-t) = g(t)$ , si ha:

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \left[ \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] dt \\ = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \left[ \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \left[ \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] dt$$

si nota che il secondo addendo è nullo perché la funzione integranda è dispari, quindi si ha che  $G_n$  è una grandezza reale, ovvero lo spettro è reale, e poiché  $G_{-n} = G_n$ , si ha anche che lo spettro è funzione pari.

Lo spettro di una funzione reale e pari del tempo è una funzione reale e pari della frequenza.

In più  $g(t)$  si sviluppa in serie di soli coseni.

Similmente, si osserva che una funzione reale e dispari, si sviluppa in serie di soli seni, cioè il suo spettro è immaginario e dispari (spettro di ampiezza simmetrico, spettro di fase antisimmetrico a due valori:  $[\pi/2, -\pi/2]$ ).

### 3.6 ESEMPI DI APPLICAZIONE DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

#### Segnale cosinusoidale

Iniziamo da un esempio banale, relativo allo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni coseno e seno, dove indichiamo con  $T_0=1/f_0$  il periodo del segnale:

$$g(t) = A_M \cos(2\pi f_0 t + \mathbf{j}) = \frac{A_M}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \mathbf{j})} + \frac{A_M}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \mathbf{j})} = \frac{A_M}{2} e^{j2\pi f_0 t} e^{j\mathbf{j}} + \frac{A_M}{2} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\mathbf{j}}$$

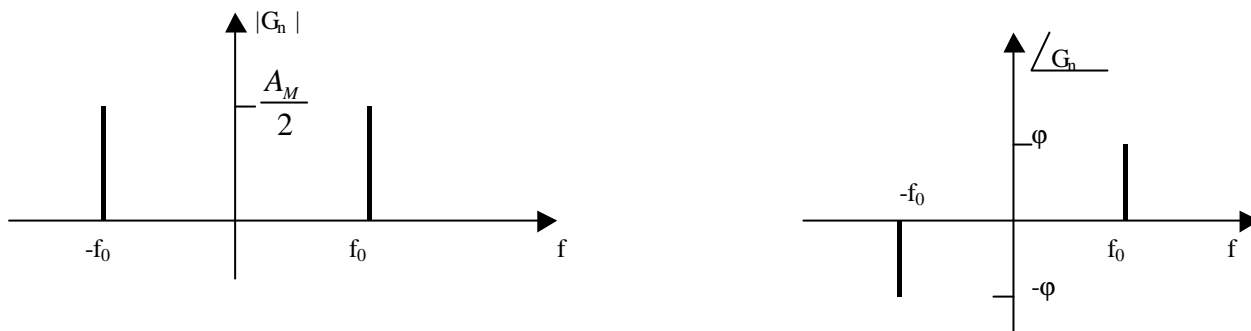
$$= \frac{A_M}{2} e^{ij} e^{j2pf_0t} + \frac{A_M}{2} e^{-ij} e^{-j2pf_0t} = \left[ \frac{A_M}{2} e^{ij} \right] e^{j2pf_0t} + \left[ \frac{A_M}{2} e^{-ij} \right] e^{-j2pf_0t}$$

Si osserva come i soli coefficienti di Fourier diversi da 0 siano  $G_{\pm 1}$ :

$$G_1 = \frac{A_M}{2} e^{ij} \quad (\text{simmetria coniugata})$$

$$G_{-1} = \frac{A_M}{2} e^{-ij}$$

Da cui gli spettri di ampiezza e fase.



**Figura 3.3** - Rappresentazione grafica, in modulo e fase, dello spettro del segnale  $g(t) = A_M \cos(2p f_0 t + j)$

Dalla relazione di Parseval, si può valutare facilmente la potenza media:

$$P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_n|^2 = |G_{-1}|^2 + |G_1|^2 = 2 \frac{A_M^2}{4} = \frac{A_M^2}{2} = A^2$$

dove  $A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$  definisce il cosiddetto "valore efficace" del segnale, come definito in elettrotecnica.

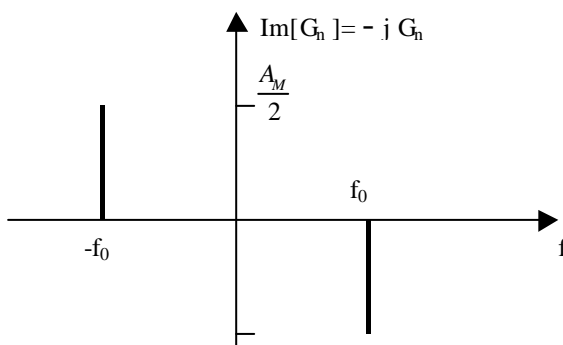
### Segnale sinusoidale

Sia ora  $g(t) = A_M \sin(2\pi f_0 t)$ .

Si può scrivere:

$$g(t) = A_M \frac{e^{j(2pf_0t)} - e^{-j(2pf_0t)}}{2j} = \frac{A_M}{2j} e^{j(2pf_0t)} - \frac{A_M}{2j} e^{-j(2pf_0t)} = \frac{A_M}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(2pf_0t)} + \frac{A_M}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{+j(2pf_0t)}$$

Da cui otteniamo il relativo spettro.



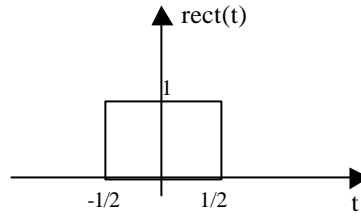
**Figura 3.4** - Rappresentazione grafica dello spettro del segnale  $g(t) = A_M \sin(2\pi f_0 t)$ : rappresentazione della parte immaginaria.

Lo spettro di ampiezza è identico a quello precedente, e quindi anche la potenza media.

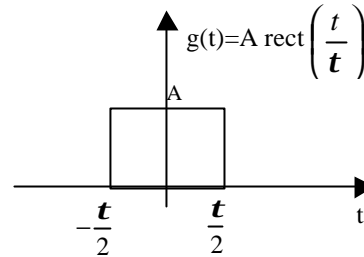
**Onda quadra**

Definiamo con la notazione  $\text{rect}(t)$  la funzione "impulso quadrato di area unitaria":

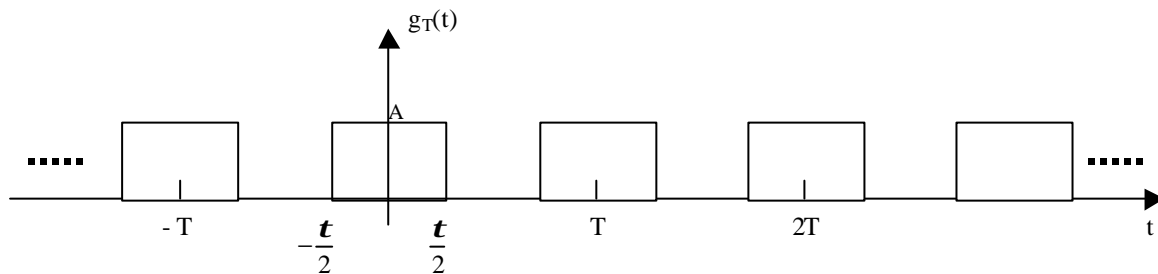
$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Un impulso rettangolare di ampiezza  $A$  e durata  $\tau$  si può esprimere:  $g(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$



Definiamo "onda quadra" la funzione:  $g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \text{rect}\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$ .



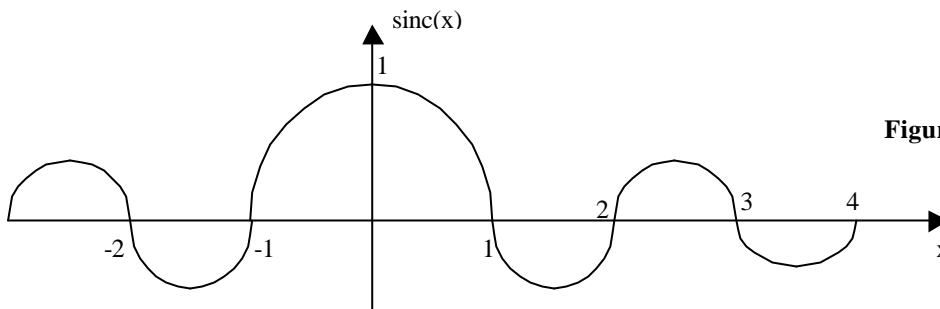
**Figura 3.5** - Il segnale "onda quadra", periodico di periodo  $T$ , con impulsi di ampiezza  $A$  e durata  $\tau$ .

Il segnale proposto verifica le condizioni di Dirichlet. Valutiamo i coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_T(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \frac{A}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \\ &= \frac{A}{T} \frac{1}{-j2\pi \frac{n}{T}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} (-j2\pi \frac{n}{T} dt) = \frac{A}{-j2\pi n} \left( e^{-j2\pi \frac{n}{T} \frac{\tau}{2}} - e^{j2\pi \frac{n}{T} \frac{\tau}{2}} \right) = \\ &= A \frac{\tau}{T} \frac{e^{j\pi \frac{n}{T} \tau} - e^{-j\pi \frac{n}{T} \tau}}{2j} \frac{1}{\pi \frac{n}{T} \tau} = A \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(n \frac{\tau}{T}\right) = A \frac{\tau}{T} \text{sinc}(nf_0 \tau) \end{aligned}$$



dove abbiamo indicato con  $f_0 = \frac{1}{T}$  e con  $\text{sinc}(x)$  la funzione:  $\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  mostrata nella figura seguente.

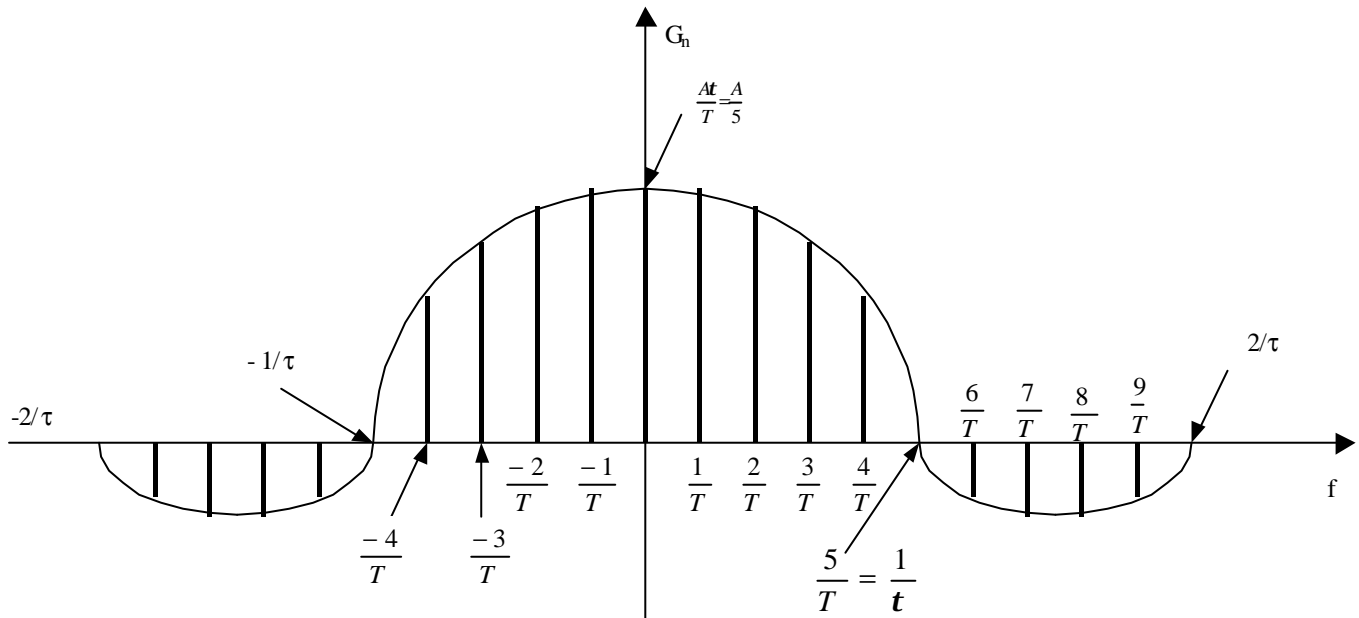


**Figura 3.6** - La funzione  $\text{sinc}(x)$ .

La funzione  $g(t)$  è reale e pari, quindi tale deve essere anche il suo spettro.

A scopo illustrativo supponiamo, ad esempio, che il rapporto  $\frac{\tau}{T}$  sia  $\frac{1}{5}$ .

Si ha uno spettro del tipo illustrato in Fig. 3.7.



**Figura 3.7** - Spettro del segnale "onda quadra": rappresentazione della parte reale dei coefficienti di Fourier.

La frequenza  $f_0 = \frac{1}{T}$  è detta prima armonica o frequenza fondamentale del segnale. Il coefficiente

$G_0$  prende il nome di componente continua, la sinusoide:  $2|G_1|\cos\left\{2\pi\frac{1}{T}t + \mathbf{j}_1\right\}$ , dove  $\mathbf{j}_1$  è la fase del primo coefficiente di Fourier, è chiamata componente di prima armonica, mentre  $2|G_1|$  è il coefficiente di prima armonica.

In generale  $\frac{n}{T}$ , con  $n$  positivo, rappresenta la  $n$ -esima armonica e il segnale  $2|G_n|\cos\left\{2\pi\frac{n}{T}t + \mathbf{j}_n\right\}$  la  $n$ -esima componente armonica.

Valutiamo ora la **potenza media** dell'onda quadra. Dalla definizione di potenza media di segnali periodici, abbiamo:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A^2 dt = \frac{A^2}{T} \tau < \infty \quad (\text{segnale "potenza"})$$

Possiamo anche valutare l'energia di ciascun impulso, come:

$$E_p = P_m T = A^2 \tau$$

Si osservi come l'onda quadra, almeno da un punto di vista teorico, occupi con la sua rappresentazione spettrale un intervallo di frequenze, o **banda**, di ampiezza infinita.

Possiamo osservare, comunque, che le componenti spettrali oltre un certo ordine  $N$  risultano trascurabili, e quindi considerare "praticamente" limitato lo spettro in questione.

**Esercizio:** Si valuti lo spettro dei segnali in figura. Si evidenzino le differenze fra questi e lo spettro del segnale "onda quadra" appena illustrato.

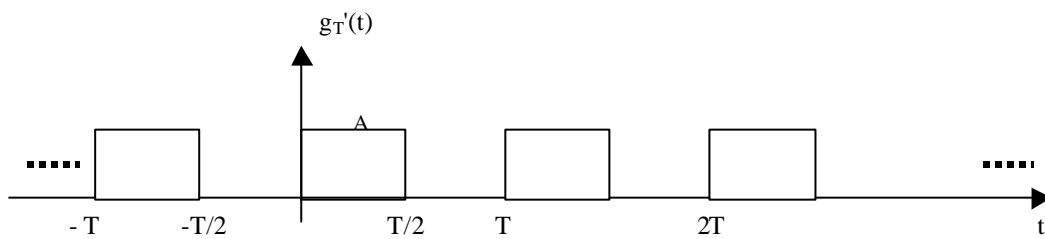


Figura 3.8 - Onda quadra traslata lungo l'asse delle ascisse.

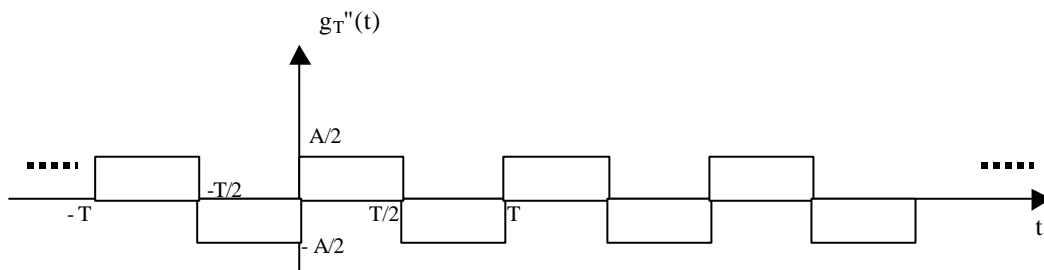


Figura 3.9 - Onda quadra traslata lungo i due assi cartesiani.

### 3.6 EFFETTI DELLE DISCONTINUITA' SULLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

Lo sviluppo in serie di Fourier, converge al valore della funzione  $g(t)$  in tutti i punti in cui essa è continua. Non altrettanto si può dire negli eventuali punti di discontinuità: in questi converge al valor medio aritmetico dei valori assunti dalla funzione  $g(t)$  sulla discontinuità. Precisamente, sia  $t_0$  un punto di discontinuità di  $g(t)$ . Relativamente ad esso, si ha:

$$\frac{g(t_0^+) + g(t_0^-)}{2}$$

dove con  $g(t_0^+)$  e  $g(t_0^-)$  abbiamo indicato rispettivamente il limite da destra e da sinistra della funzione in  $t_0$ .

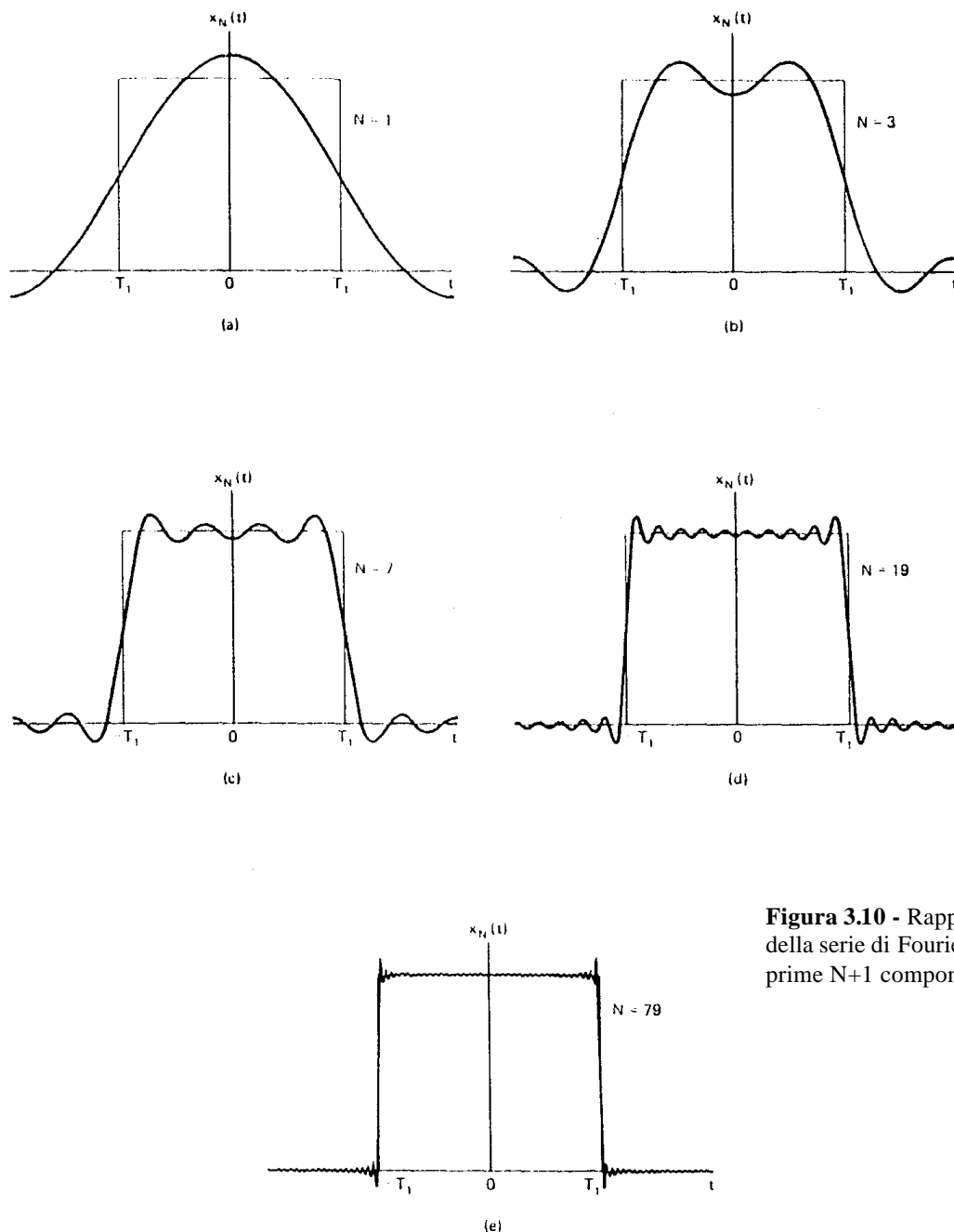
Un'altra caratteristica degli sviluppi di Fourier è quella che va sotto il nome di **"effetto Gibbs"**, ed anch'essa è relativa a segnali che presentino discontinuità.

Illustriamo tale effetto su di un tipico esempio di segnale (teorico) periodico: la già introdotta "onda quadra", o "treno periodico di impulsi rettangolari".

Indichiamo ora con  $g_N(t)$  il segnale sviluppo di Fourier, limitato alle prime N armoniche:

$$g_N(t) = \sum_{n=-N}^N G_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

In relazione al valore di N, si hanno andamenti del tipo riportato nella figura che segue.



**Figura 3.10** - Rappresentazioni della serie di Fourier troncata alle prime N+1 componenti.

Come si osserva, l'effetto Gibbs consiste nel manifestarsi, nel segnale ricostruito mediante le sole prime N armoniche, di fenomeni di oscillazione dello stesso nell'intorno dei punti di discontinuità.

Al crescere di N, tali oscillazioni tendono a smorzarsi sempre più rapidamente, mantenendo però ampiezza iniziale costante.