Capitolo 7

TRASFORMAZIONI LINEARI DI SEGNALI A TEMPO CONTINUO

Da un punto di vista fisico, e nella accezione più semplice del termine, si definisce "sistema" un qualunque oggetto sul quale una determinata azione produce un effetto, in accordo con le leggi fisiche che ne caratterizzano il comportamento.
I circuiti elettronici costituiscono una particolare classe di sistemi; in essi l'azione è costituita dal segnale di ingresso (tensione o corrente elettrica applicata nel punto considerato "ingresso" del sistema), mentre l'effetto è costituito dal segnale in "uscita" dal sistema, e si chiama "risposta" del sistema.
Ci occuperemo prevalentemente, ma non esclusivamente, di sistemi con un solo ingresso e una sola uscita, quasi sempre di tipo reale e, per adesso, affronteremo lo studio dei sistemi continui.
Un sistema si dice continuo quando opera una trasformazione su un segnale di ingresso continuo dando luogo ad una uscita continua, determinata in modo univoco.
Da un punto di vista grafico, il sistema può essere rappresentato mediante un rettangolo detto anche "blocco", con l'indicazione dell'ingresso, dell'uscita, e dei relativi segnali:

In senso più generale, un sistema può avere un numero di ingressi e di uscite maggiore di uno.
Esistono anche sistemi privi di ingresso: essi costituiscono i generatori di segnale.
In relazione al grado di dettaglio con cui stiamo analizzando il sistema, con un singolo blocco possiamo rappresentare un intero sistema elettronico (es.: un sistema di comunicazione elettrica, oppure un sistema radar), oppure un singolo elemento di cui esso è costituito (es.: il "ricevitore" del sistema di comunicazione elettrica), o infine un singolo circuito elettronico di cui esso è costituito (es.: l '"amplificatore" di un ricevitore).
In questo corso ci occuperemo prevalentemente di descrivere l'aspetto funzionale dei sistemi, ovvero di descrivere da un punto di vista matematico la relazione esistente tra segnale di ingresso e segnale di uscita del sistema, senza entrare nel merito di come questa funzione è fisicamente realizzata.
Da un punto di vista matematico, il sistema è determinato quando è noto l'insieme delle operazioni da compiere sul segnale di ingresso $s_i(t)$ per ottenere il segnale di uscita $s_u(t)$
Indichiamo con T tale operatore matematico: possiamo allora scrivere la relazione matematica tra ingresso e uscita come: $s_u(t) = T[s_i(t)]$.

7.1 CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI ELETTRONICI

Sistemi lineari

Siano $s_{i1}(t)$, $s_{i2}(t)$ due segnali reali in ingresso ad un sistema, e siano

$s_{u1}(t) = T[s_{i1}(t)]$ $s_{u2}(t) = T[s_{i2}(t)]$

i corrispondenti segnali in uscita.

Se si ha: $T[a\, s_{i1}(t) + b\, s_{i2}(t)] = a\, T[s_{i1}(t)] + b\, T[s_{i2}(t)]$ $\forall\, s_{i1}(t), s_{i2}(t)$ $\forall$ a, b costanti

il sistema si dice lineare.

Ovvero, ad ogni combinazione lineare di singoli ingressi, corrisponde la combinazione lineare delle singole uscite secondo gli stessi coefficienti. È noto anche come "principio di sovrapposizione degli effetti".

Frequentemente nei circuiti elettronici è richiesto un funzionamento lineare, che in pratica si verifica quasi sempre solo per valori limitati del segnale di ingresso.

Sistemi tempo-invarianti

Un sistema si dice tempo-invariante se la risposta al segnale di ingresso è indipendente (nella sua forma) dal tempo in cui esso è stato applicato. Matematicamente ciò equivale a scrivere che:

Un sistema, la cui relazione ingresso/uscita è $s_u(t) = T[s_i(t)]$
si dice tempo-invariante quando

$$s_u(t- t_0) = T[s_i(t-t_0)] \qquad \forall\, t_0$$

Sistemi causali

Un sistema si dice causale se il segnale di uscita all'istante t_0 non dipende dai valori assunti dal segnale di ingresso agli istanti di tempo $t > t_0$

Ovvero dato un ingresso $s_i(t)$ nullo per $t < t_0$, il sistema è causale se non risponde all'eccitazione prima di $t = t_0$.

I sistemi operanti in tempo reale realizzabili fisicamente sono necessariamente causali.

Sistemi stabili

Un sistema si dice stabile se ad ogni segnale di ingresso di valore limitato, corrisponde anche un'uscita di valore limitato.

Sistemi dispersivi

Un sistema si dice dispersivo se il valore dell'uscita ad un qualunque istante t_0 dipende dal segnale di ingresso a quell'istante e da un insieme di istanti $t \neq t_0$ (dove $t < t_0$ se il sistema è causale).

Sistemi attivi e passivi

Si dicono "attivi" quei circuiti elettronici in cui - oltre a elementi quali resistenze, induttanze e capacità - sono presenti elementi che si possono schematizzare come generatori di tensione o di corrente, detti appunto "attivi" in quanto capaci di generare energia. In generale, gli elementi attivi sono costituiti da transistor o da tubi a vuoto.

Esempi

Determinare se i seguenti sistemi sono lineari, tempo varianti, causali:

1) $T[s_i(t)] = |s_i(t)|$
2) $T[s_i(t)] = t^2\, s_i(t)$
3) $T[s_i(t)] = s_i(t) \cos(2\pi f_0\, t + \psi)$
4) $T[s_i(t)] = F\{ s_i(t)\}$, operatore che effettua la trasformata di Fourier di $s_i(t)$.

Risposte:

1) Il sistema è non lineare, tempo invariante, causale.
La non linearità si verifica immediatamente attraverso la seguente relazione:
$|a\, s_{i1}(t) + b\, s_{i2}(t)| \leq |a|\, |s_{i1}(t)| + |b|\, |s_{i2}(t)|$

2) Il sistema è lineare, tempo-variante, causale.
Il fatto che il sistema sia tempo variante si verifica come segue:
$T[(s_i(t- t_0)] = t^2\, s_i(t- t_0)$ $\quad s_u(t- t_0) = (t - t_0)^2\, s_i(t- t_0)$
Quindi chiaramente $s_u(t- t_0)$ è diverso da $T[s_i(t - t_0)]$.

3) Il sistema è lineare, tempo-variante, causale.
Ancora una volta occorre confrontare $s_u(t- t_0)$ con $T[s_i(t- t_0)]$ per verificare se il sistema sia tempo invariante, infatti:
$T[s_i(t- t_0)] = s_i(t- t_0) \cos(2\pi f_0\, t + \psi)$
$s_u(t- t_0) = s_i(t- t_0) \cos[2\pi f_0\, (t- t_0) + \psi]$

4) Il sistema è lineare per la linearità dell'integrale di Fourier, infatti posto f = kt
- è tempo - variante poiché l'uscita del sistema all'istante $(t- t_0)$ è $S(t- t_0)$, mentre la risposta del sistema all'ingresso $s(t- t_0)$ è data da $T[s(t- t_0)] = s(t)e^{-j2\pi(kt)\, t_0}$
- è non causale: la sua risposta al segnale gradino è data da $[\delta(kt)/2 + 1/(j2\pi(kt)]$ chiaramente diversa da zero per t<0, quando l'ingresso è nullo.

7.2 CARATTERIZZAZIONE ANALITICA DEL FUNZIONAMENTO DEI SISTEMI LINEARI E TEMPO-INVARIANTI (LTI)

Può essere condotta sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza, in dipendenza del fatto che si utilizzi la rappresentazione dei segnali nel dominio del tempo oppure della frequenza.
Volendo descrivere il comportamento di un sistema lineare, tempo invariante nel dominio del tempo, è utile fare ricorso al modello formale di segnale costituito dall'impulso unitario o delta di Dirac.
Definiamo *risposta impulsiva di un sistema lineare e tempo invariante*, la risposta h(t) del sistema ad un impulso di Dirac applicato in ingresso all'istante t = 0, quando il sistema è a riposo.
Quindi:

$$h(t) \triangleq T[\delta(t)]$$

poiché il sistema è T.I. vale: $h(t-\tau)=T[\delta(t-\tau)]$
Ricordando la proprietà della delta di Dirac, possiamo scrivere:

$$s_i(t) = s_i(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

e anche:

$$\begin{aligned}
s_u(t) &= T[s_i(t)] = T[s_i(t) \otimes \delta(t)] = \\
&= T\left[\int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] = \qquad (\textit{per la linearità}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau =
\end{aligned}$$

Se ora introduciamo l'ulteriore ipotesi di *sistema tempo-invariante*, otteniamo

$$s_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Quindi, un sistema LTI risulta completamente caratterizzato, qualora sia nota la "risposta impulsiva" h(t).
Per tale motivo si usa rappresentare graficamente tale sistema indicando la sua risposta impulsiva nel seguente modo:

$$s_i(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow s_u(t)$$

In definitiva si ha, per sistemi LTI:
$s_u(t)=s_i(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes s_i(t)$
per la proprietà commutativa dell'operatore convoluzione.

Risposta impulsiva di sistemi causali

Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema LTI sia causale è che $h(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$, infatti:

a) <u>condizione sufficiente</u> - $h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad \Rightarrow$ sistema causale
Supponiamo che $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$

$$s_u(t_0) = s_i(t_0) \otimes h(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_0} s_i(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau$$

quindi $s_i(\tau)$ non contribuisce per $\tau > t_0$ e l'uscita dipende solo dai valori di $s_i(\tau)$ precedenti a t_0.

b) <u>condizione necessaria</u> - Sistema causale $\Rightarrow \quad h(t) = 0 \quad \forall t < 0$
La risposta del sistema alla $\delta(t)$, che è proprio la risposta impulsiva, h(t), è nulla per t<0 perché il sistema è a riposo, cioè ha immagazzinata energia nulla.
In particolare, se il sistema è <u>causale</u>, l'integrale di convoluzione si esprime nelle due forme:

$$s_u(t) = s_i(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{t} s_i(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$s_u(t) = h(t) \otimes s_i(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau) s_i(t-\tau) d\tau$$

Risposta impulsiva di sistemi LTI <u>non dispersivi</u>

Un sistema non dispersivo è il cosiddetto sistema istantaneo, in cui l'uscita all'istante t dipende dall'ingresso al medesimo istante.
Fra i sistemi LTI non dispersivi o, come anche si dice, senza memoria, troviamo l'amplificatore ideale, la cui risposta impulsiva è del tipo: $h(t) = K\,\delta(t)$, con K costante, detta amplificazione. In tale ipotesi si ha: $s_u(t) = s_i(t) \otimes h(t) = s_i(t) \otimes K\delta(t) = K\, s_i(t)$

Risposta impulsiva di sistemi LTI stabili

Dalla definizione di stabilità: $|s_i(t)| < M \Rightarrow |s_u(t)| < N$ con M e N costanti.

Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è che $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

a) <u>Condizione sufficiente</u> - Sia $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \Rightarrow$ il sistema è stabile.

Supponiamo che sia limitato l'ingresso, il modulo del segnale di uscita si esprime:

$$|s_u(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s_i(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau) s_i(t-\tau)| d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |s_i(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Quindi, poiché la risposta impulsiva è assolutamente integrabile, la condizione di stabilità, per la quale deve essere $|s_u(t)| \leq N$, è verificata.

b) <u>Condizione necessaria</u> – Stabilità $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

Supponiamo $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \infty$ e dimostriamo che il sistema è non stabile, cioè che esiste almeno un ingresso limitato a cui corrisponde un'uscita illimitata.

Consideriamo l'ingresso $s_i(t) = \mathrm{sgn}[h(-t)]$, ingresso particolare detto "segnale del caso peggiore".

$$s_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \,\mathrm{sgn}\{h[-(t-\tau)]\} d\tau$$

In questo caso si ottiene che la risposta del sistema all'istante t=0 è proprio: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$, cioè illimitata. Infatti:

$$s_u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \,\mathrm{sgn}\{h[-(0-\tau)]\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \,\mathrm{sgn}\{h(\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Pertanto se il sistema è stabile, necessariamente la risposta impulsiva deve essere assolutamente integrabile.

7.3 ANALISI DEI SISTEMI LTI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Facendo riferimento alla rappresentazione dei segnali nel dominio della frequenza, alla risposta impulsiva del sistema h(t) corrisponde la cosiddetta "funzione di trasferimento", detta anche "risposta in frequenza", definita come trasformata di Fourier della risposta impulsiva:

$$H(f) = |H(f)|\, e^{j\varphi(f)} \triangleq F[h(t)]$$

Dalla proprietà delle trasformate di Fourier relativa all'integrale di convoluzione, si osserva come le trasformate di Fourier dei segnali di uscita e di ingresso di un sistema LTI sono relazionate semplicemente:

$$S_u(f) = H(f)\, S_i(f)$$

Questa relazione, di importanza fondamentale nell'analisi dei sistemi LTI, ci suggerisce anche un modo alternativo, più utile nelle applicazioni, di definire la funzione di trasferimento di un sistema:

$$H(f) \triangleq \frac{S_u(f)}{S_i(f)}$$

Poiché h(t) è funzione reale quando il sistema è reale, H(f) presenta simmetria coniugata, ovvero |H(f)| è funzione pari, φ(f) è funzione dispari.

Significato fisico della risposta in frequenza

In termini di funzionamento di un sistema reale, quindi con **h(t) reale**, in regime sinusoidale (cioè con segnali di ingresso di tipo sinusoidale), si osserva facilmente come la funzione di trasferimento del sistema determina con il suo modulo come viene modificata dal sistema l'ampiezza della sinusoide di ingresso, e con il suo argomento come viene modificata la fase iniziale del segnale in uscita, rispetto a quella del segnale in ingresso.
Supponiamo inizialmente di avere in ingresso un segnale complesso esponenziale, del tipo:

$$s_i(t) = \exp[j2\pi f_0 t] = \cos(2\pi f_0 t) + j\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$$

Possiamo considerare l'uscita come:

$$\begin{aligned} S_u(f) &= S_i(f) H(f) = \\ &= \delta(f - f_0) H(f) = \\ &= [H(f_0)\delta(f - f_0)] \\ s_u(t) &= |H(f_0)|\, e^{j[2\pi f_0 t + \varphi(f_0)]} \end{aligned}$$

Quindi

$$s_u(t) = |H(f_0)| \cos[2\pi f_0 t + \varphi(f_0)] + j|H(f_0)|\,\mathrm{sen}[2\pi f_0 t + \varphi(f_0)]$$

In generale se pensiamo il segnale $s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(f)\, e^{j2\pi f t} df$

composto di sinusoidi di ampiezza complessa, $S_i(f)\,df$, allora $s_u(t)$ è formata da infinite sinusoidi con ampiezza $H(f)\,S_i(f)df$.

7.4 RELAZIONE FRA LE DENSITA' SPETTRALI DI ENERGIA O POTENZA IN INGRESSO E IN USCITA DA UN SISTEMA LTI

Dalla relazione ingresso-uscita di un sistema LTI, nel dominio della frequenza:

$$S_u(f) = S_i(f)\ H(f)$$

si ottiene, valutandone il modulo al quadrato:

$$|\ S_u(f))\ |^2 = |\ S_i(f)|^2\ |H(f)|^2$$

Osservato che $|\ S_u(f)\ |^2$ e $|\ S_i(f)|^2$ sono le densità spettrali di energia (se il segnale è un segnale energia) dei segnali di uscita e di ingresso, si ha che la densità spettrale di energia del segnale di uscita si ottiene moltiplicando quella del segnale di ingresso per il modulo al quadrato della funzione di trasferimento del sistema.

Tale grandezza, $|H(f)|^2$, è denominata "**guadagno di potenza del sistema**", mentre l'ampiezza della risposta in frequenza del sistema, $|H(f)|$, è chiamata ***guadagno di tensione.***

Comunemente ***i guadagni*** dei sistemi si esprimono in forma logaritmica, quasi sempre in "decibel", in quanto in tale forma risultano più "maneggevoli", specie quando assumono, come spesso avviene, valori molto maggiori dell'unità o molto minori. In più la forma logaritmica ci consente di esprimere il guadagno complessivo di un sistema costituito da più sottosistemi posti "in cascata" (cioè con l'uscita del generico blocco che rappresenta l'ingresso di quello successivo), come semplice somma algebrica dei guadagni o perdite dei singoli sottosistemi.

Con riferimento a tale forma, se $s_i(t)$ e $s_u(t)$ rappresentano tensioni (o correnti), allora $|H(f)|$, ampiezza della risposta in frequenza, e' legata al ***guadagno espresso in decibel*** dalla seguente relazione

$$G(f)\big|_{dB} \underline{\Delta} 20 Log_{10}|H(f)|$$

Alcune considerazioni sui Decibel

Il decibel è una unità di misura che si usa per esprimere i rapporti di potenza.

Per paragonare la potenza in uscita da un circuito rispetto a quella in ingresso, infatti, si usa esprimere il rapporto delle due potenze in decibel anziché in valori assoluti.

Il guadagno di un circuito, espresso in decibel, è dato da $G_{dB} = 10\ \log_{10}\left(\dfrac{P_{out}}{P_{in}}\right)$.

Questa relazione dà un numero che indica il valore relativo fra potenza in uscita e potenza in ingresso, ma non indica l'effettiva ampiezza dei livelli di potenza. Si noti che lo stesso valore numerico in decibel si ottiene sia che si usino rapporti di tensione e di corrente oppure di potenza, infatti: $G_{dB} = 20\ \log_{10}\left(\dfrac{V_{out}}{V_{in}}\right) = 20\ \log_{10}\left(\dfrac{I_{out}}{I_{in}}\right)$, supposto che il carico in uscita ed in ingresso siano uguali. Riportiamo di seguito alcuni valori della grandezza definita.

$\log_{10}(1) = 0$	
$\log_{10}(2) = 0{,}3$ $\log_{10}(1/2) = -0{,}3$	$10\log_{10}(2) = 3$ dB $10\log_{10}(1/2) = -3$ dB
$\log_{10}(3) = 0{,}477$	
$\log_{10}(4) = 0{,}6$	$\log_{10}(4) = \log_{10}(2^2) = 2 * 0{,}3$
$\log_{10}(5) = 0{,}6989$	
$\log_{10}(6) = 0{,}777$	$\log_{10}(6) = \log_{10}(2*3) = 0{,}3 + 0{,}477$
$\log_{10}(7) = 0{,}0{,}845$	
$\log_{10}(8) = 0{,}9$	$\log_{10}(8) = \log_{10}(2^3) = 3 * 0{,}3$
$\log_{10}(9) = 0{,}954$	$\log_{10}(9) = \log_{10}(3^2) = 2 * 0{,}477$

7.5 CONDIZIONI DI FISICA REALIZZABILITA'

Abbiamo visto che i sistemi LTI sono completamente caratterizzati dalla loro risposta all'impulso h(t) o, equivalentemente, dalla loro funzione di trasferimento H(f) = F[h(t)].
Ci chiediamo ora sotto quali condizioni un segnale h(t) può rappresentare la risposta all'impulso di un sistema che può essere realizzato nella pratica. Tali condizioni, dette di fisica realizzabilità, affermano che un sistema è fisicamente realizzabile se è reale e causale. Precisiamo ora questi due concetti.

a) Sistemi reali

Diciamo che un sistema LTI è reale, se la sua risposta all'impulso h(t) è una funzione reale. Poiché la trasformata di Fourier di h(t) è la funzione di trasferimento H(f), dalle proprietà della trasformata risulta che un sistema reale ha una H(f) con:

- modulo pari
- fase dispari

b) Sistemi causali

Diciamo che un sistema LTI è causale se la sua risposta all'impulso, h(t), è nulla per t<0; cioè

$h(t) = 0 \qquad \forall t < 0$

Come visto in precedenza, questa condizione equivale ad imporre che non si possa ottenere un segnale all'uscita del sistema prima che venga applicato un segnale all'ingresso.

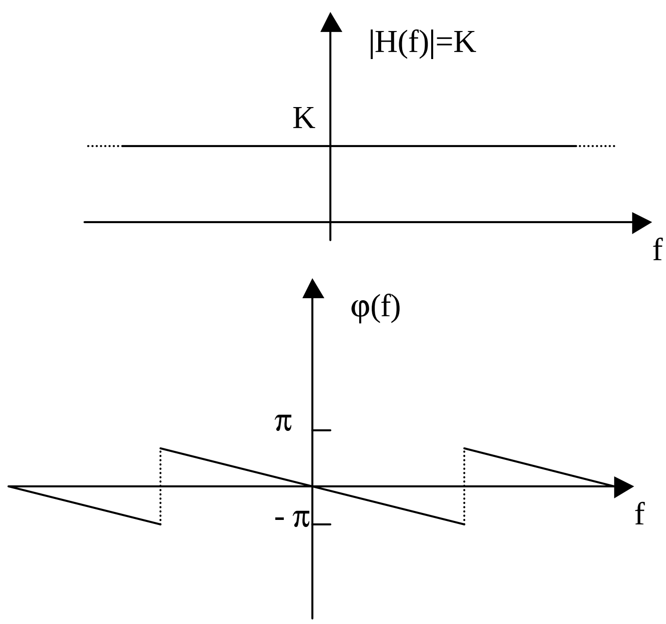
7.6 CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE

Se $s_i(t)$ è il segnale in ingresso, si dice che **il sistema non introduce distorsioni**, se il segnale di uscita è relazionato a quello di ingresso nel seguente modo:

$$s_u(t) = K s_i(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad S_u(f) = K\, S_i(f)\exp(j2\pi f t_0)$$

dove K è una costante, che si chiama "amplificazione" del sistema, se è maggiore di 1, e "attenuazione" se minore di 1.
La funzione di trasferimento di un sistema LTI che non introduca distorsioni lineari deve allora essere del tipo:

$$H(f) = \frac{S_u(f)}{S_i(f)} = K\, e^{-j2\pi f t_0}$$



Parallelamente la risposta impulsiva h(t) deve valere:

$$h(t) = F^{-1}[H(f)] = K\,\delta(t - t_0)$$

Per la periodicità della funzione esponenziale complesso si può osservare come la condizione di non distorsione si può scrivere, nella forma più generale possibile come:

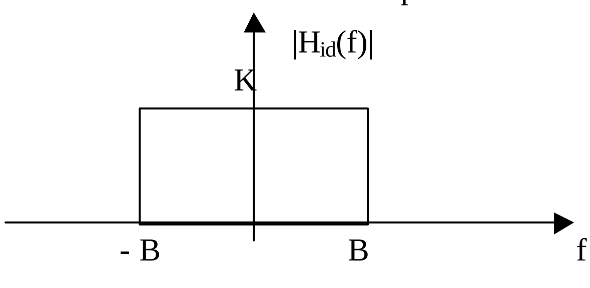
$$H(f) = K\, e^{-j(2\pi f t_0 \pm 2n\pi)} \qquad n = 0,1,2....$$

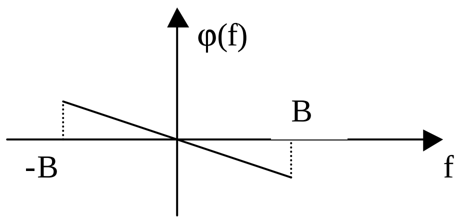
Quindi diciamo che un sistema lineare **introduce delle distorsioni** - dette per questo "**lineari**" - sul segnale da esso elaborato, quando si verifica che la forma del segnale di uscita è diversa da quella del segnale di ingresso, a meno che ciò non dipenda semplicemente da un fattore costante di ampiezza e/o di ritardo temporale.
Se il modulo |H(f)| della funzione di trasferimento del sistema non si mantiene costante rispetto alla frequenza, o almeno entro l'intervallo di frequenze occupata dal segnale, si dice che il sistema introduce una distorsione di ampiezza. In tal caso, non si mantengono invariati i rapporti tra le ampiezze delle righe corrispondenti dello spettro del segnale di uscita e di ingresso.
Analogamente, se la fase della funzione di trasferimento del sistema non varia linearmente con la frequenza, almeno nel campo di frequenze occupato dal segnale, si dice che il sistema introduce una distorsione di fase.
I sistemi elettronici praticamente realizzabili introducono sempre distorsioni lineari, anche se con opportune tecniche queste possono essere molto contenute.

7.7 SISTEMI FILTRANTI

Non sempre le caratteristiche di risposta non costante in ampiezza di un circuito sono da considerarsi elemento negativo: esse vengono utilizzate positivamente per realizzare i cosiddetti "filtri", cioè quei circuiti che servono ad eliminare una o più parti dello spettro delle frequenze di ingresso, non desiderate in uscita.
Essi restituiscono in uscita, praticamente non distorte, le componenti del segnale in ingresso interne alla loro banda passante.
Comunemente si definisce banda passante B di un sistema filtrante (circuito elettronico), l'intervallo di frequenze delimitato dai valori di frequenza in cui il guadagno di potenza del sistema è la metà (- 3 dB) del guadagno massimo.
In termini di guadagno di tensione, ciò equivale a dire quel valore di frequenza in corrispondenza del quale il guadagno di tensione è pari a 0.707 volte quello massimo.
In particolare, si parla di "filtri passa-basso", quando la risposta in ampiezza del sistema per frequenze $|f| > f_c = B$, presenta valori trascurabili, rispetto a quelli presentati per frequenze $|f| < f_c = B$.
La frequenza f_c si dice "frequenza di taglio" del filtro ed è l'estremo della "banda passante" B del filtro passa-basso in oggetto.

Un tipico esempio di sistema filtrante passabasso è il filtro "ideale", le cui risposte in ampiezza e in fase sono indicate nella figura seguente, dalla quale si evince che i segnali con spettro diverso da 0 entro la banda B non vengono distorti, mentre vengono completamente annullati i segnali con spettro che cade al di fuori della banda passante:



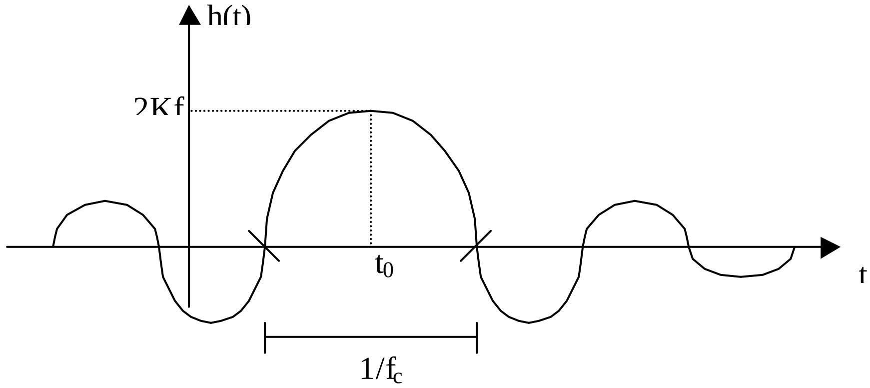


La funzione di trasferimento di un tale circuito si esprime analiticamente come:

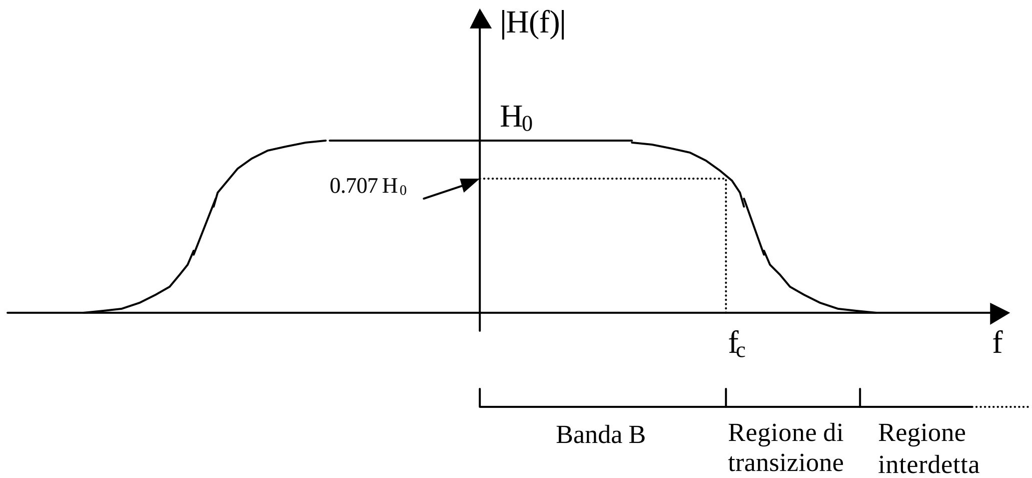
$$H(f) = K\ rect\left(\frac{f}{2f_c}\right) e^{-j2pft_0}$$

Utilizzando le proprietà viste delle trasformate di Fourier, per la risposta impulsiva h(t) otteniamo un'espressione del tipo:

$$h(t) = 2 f_c K sinc\left[2 f_c \left(t - t_0\right)\right]$$

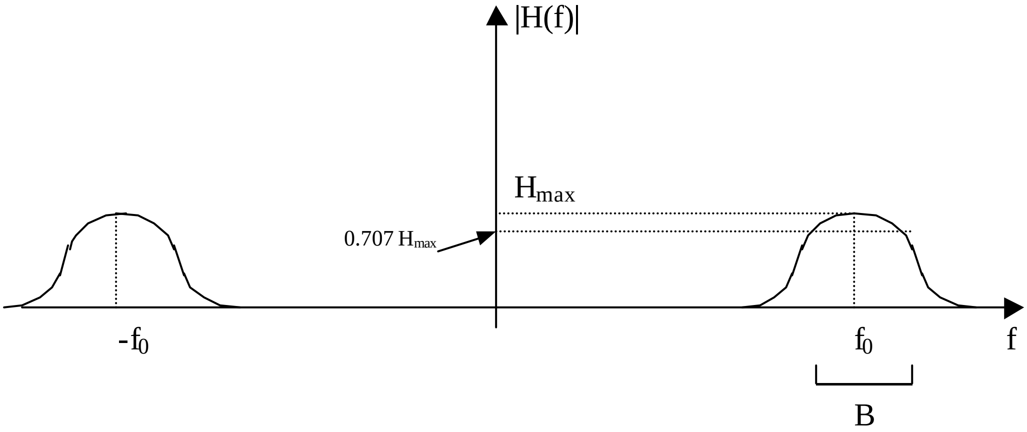


Come è evidente, tale funzione assume valori diversi da 0 su tutto l'asse reale, e quindi un filtro con tale risposta impulsiva non è fisicamente realizzabile. Tale modello di filtro (passa-basso ideale) costituisce comunque un utile strumento di analisi dei sistemi filtranti passa-basso a fase lineare, almeno in prima approssimazione.
Non potendo in questo corso entrare nel dettaglio dei vari tipi di filtro fisicamente realizzabili, diciamo che la più semplice tipologia di filtro passa-basso fisicamente realizzabile presenta una risposta in ampiezza del tipo indicato nella figura seguente.



Come si osserva, nel caso di filtro passa-basso reale esiste un intervallo di frequenze, al di sopra della frequenza di taglio f_c , per le quali il filtro presenta un'attenuazione non sufficiente ai fini di molte applicazioni. L'estensione di tale regione di transizione è inversamente proporzionale alla "pendenza" della risposta in frequenza del filtro in tale regione. A sua volta, la maggiore o minore pendenza del filtro in tale regione è in relazione alla maggiore o minore complessità del circuito elettronico che lo realizza.
Si deve anche osservare che in generale forti pendenze del filtro sono anche accompagnate da marcate non linearità della risposta in fase dello stesso, per cui si dovrà operare una scelta di compromesso in quelle applicazioni in cui sono richieste piccole distorsioni di fase.
Si definisce "regione interdetta" la gamma di frequenze per le quali $[G(f)- G_{max}]< -[30,40]$dB.

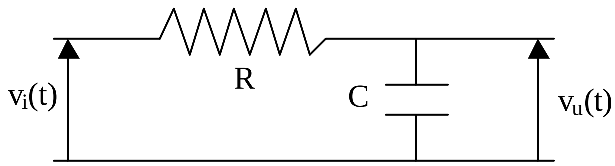
Un sistema filtrante si dice **passabanda** se la sua risposta in frequenza è significativamente diversa da zero entro un intervallo di frequenze che non comprende l'origine, come mostrato nella figura seguente.



I sistemi duali dei sistemi mostrati si chiamano "passa-alto" ed "elimina-banda".

Il circuito RC: esempio di filtro passabasso reale

Vediamo una semplice applicazione dei concetti esposti al circuito riportato in figura, che costituisce un sistema del primo ordine, del tipo detto "passa-basso":



dove $s_i(t) = v_i(t)$ è la tensione di ingresso e $s_u(t) = v_u(t)$ quella di uscita.
Dalla legge di Kirchoff alle maglie, possiamo scrivere:

$$v_i(t) = R\,i + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt$$

Ma è: $v_u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt$

E quindi: $\frac{dv_u(t)}{dt} = \frac{i}{C}$

da cui: $v_i(t) = RC\frac{dv_u(t)}{dt} + v_u(t)$ sistema del primo ordine

Come già accennato, per ricavare la funzione di trasferimento di tale sistema conviene trasformare secondo Fourier tale equazione differenziale e quindi applicare la definizione di risposta in frequenza : $H(f) = V_u(f)/V_i(f)$.

$$V_i(f) = j2\pi fRC\,V_u(f) + V_u(f)$$

da cui: $H(f) = \dfrac{V_u(f)}{V_i(f)} = \dfrac{1}{1 + j2\pi fRC}$

Infine, antitrasformando si ottiene h(t): $h(t) = \dfrac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$

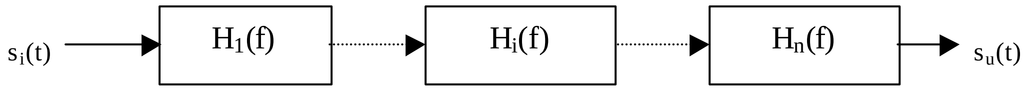
E' immediato verificare che la frequenza di taglio di questo sistema filtrante è pari a $\dfrac{1}{2\pi RC}$

Nota la risposta impulsiva o la funzione di trasferimento è possibile ricavare la risposta del sistema ad un ingresso qualunque, mediante l'integrale di convoluzione se si opera nel dominio del tempo, oppure mediante la più semplice relazione $V_u(f)=H(f)\ V_i(f)$ se si opera nel dominio della frequenza.

7.8 SISTEMI LTI IN CASCATA, IN PARALLELO E CON RETROAZIONE

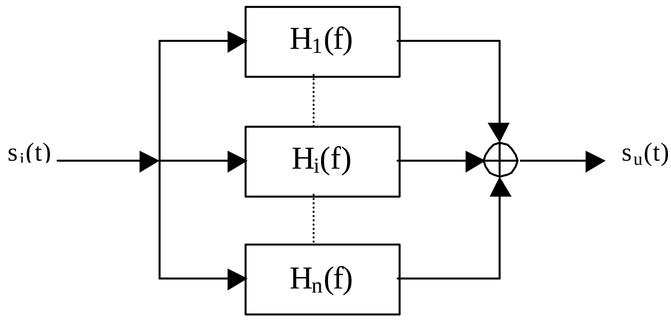
Consideriamo ora i sistemi costituiti dalla composizione di più sistemi LTI.
La risposta in frequenza di un sistema costituito dalla **cascata di più sistemi LTI** è data dal prodotto delle diverse risposte in frequenza:

$H_{tot}(f)= H_1(f).\ H_2(f).\ H_3(f)\ldots\ H_n(f)$



La risposta in frequenza di un sistema costituito dal **parallelo di più sistemi LTI** (figura successiva) è data dalla somma delle diverse risposte in frequenza:

$H_{tot}(f)= H_1(f)+H_2(f)+H_3(f)+\ldots\ H_n(f)$



La risposta in frequenza di un **sistema con retroazione** come quello in figura seguente è data da:

$H_{tot}(f) = \dfrac{H_1(f)}{1 + H_1(f) H_2(f)}$