APPENDICE 1

FORMULE TRIGONOMETRICHE

Formule di addizione e sottrazione

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Formule di Werner

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

Le formule di Werner si possono ricavare da quelle di addizione e sottrazione

Formule di Prostaferesi

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Queste si ricavano dalle formule di Werner, ponendo α=p+q e β=p-q

Formule di Eulero

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

poiché : $e^{j\alpha} \underline{\Delta} \cos\alpha + j\operatorname{sen}\alpha$

Formule di De Moivre

Si consideri $\left[e^{j\alpha}\right]^2 \underline{\Delta}\left[\cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha\right]^2$, da questa otteniamo:

$$e^{j2\alpha} = \cos 2\alpha + j\mathrm{sen}\,2\alpha \,\underline{\Delta}\, \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha + 2j\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

quindi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$$
$$\mathrm{sen}\,2\alpha = 2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Formule di duplicazione

In generale:

$$\left[e^{j\alpha}\right]^N \underline{\Delta}\left[\cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha\right]^N$$

poiche` $(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(a)^k(b)^{N-k}$

$$\left[\cos(N\alpha) + j\mathrm{sen}(N\alpha)\right] = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(\cos\alpha)^k(j)^{N-k}(\mathrm{sen}\,\alpha)^{N-k}$$

Potenze di funzioni trigonometriche

Dalle formule di Werner si ottiene:

$$(\cos\alpha)^2 = \cos\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha)+1\right]$$

$$(\mathrm{sen}\,\alpha)^2 = \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\left[1-\cos(2\alpha)\right]$$

$$(\cos\alpha)^3 = (\cos\alpha)^2\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\alpha)\right]\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha\cos(2\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos(3\alpha) + \frac{1}{2}\cos\alpha\right] = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos(3\alpha)$$

NB: L’elevazione al quadrato di un’oscillazione sinusoidale provoca l’insorgere di una componente continua e di un segnale sinusoidale a frequenza doppia .
L’elevazione al cubo di un’oscillazione sinusoidale provoca l’insorgere di una oscillazione a frequenza tripla.