COMPITI SVOLTI

DI

COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

Prof. Monica GHERARDELLI

Anno Accademico 2003-2004

CLASSIFICAZIONE DEGLI ESERCIZI DAI COMPITI

Energia e Potenza
12/2/2002 n. 1 (parziale)
16/4/2002 n. 3 (quesito obbligatorio)
18/4/2003 n. 1
12/9/2003 n.1 (1° quesito)
14/7/2004 n.1, n.3 (3° quesito)

Serie di Fourier
14/11/2001 n.1
17/07/2002 n.1
04/02/2003 n.1
30/06/2003 n.2
13/02/2004 n.1
23/04/2004 n.1
23/06/2004 n.1
14/07/2004 n.1
14/09/2004 n.1
12/11/2004 n.1 (2° quesito)
12/11/2004 n.2 (1° quesito)
11/02/2004 n. 1 (1° quesito)
28/06/2005 n. 1 (2° quesito)

Trasformata di Fourier
14/11/2001 n.2
17/07/2002 n.2
16/04/2002 n.1
12/09/2002 n.1
18/11/2002 n.1
04/02/2003 n.3
18/02/2003 n.1
18/07/2003 n.1
12/09/2003 n.1
14/11/2003 n.1
23/06/2004 n.2 (1° quesito)
14/07/2004 n.2
14/09/2004 n.2
12/11/2004 n.1 (1° quesito)
27/01/2004 n.1
27/01/2005 n.1 (1° quesito)
21/04/2005 n.2
28/06/2005 n.1 (1° quesito)
15/07/2005 n.1 (1° e 2° quesito)
15/09/2005 n.2 (2° quesito)

Convoluzione Grafica
29/01/2002 n.1
12709/2002 n. 3
30/06/2003 n.1
30/01/2004 n. 1
21/04/2005 n.1

Funzione Delta di Dirac
04/02/2003 n.2

Autocorrelazione/Parseval/Densità Spettr.di Energia
29/01/2002 n.2
12/09/2002 n.2 (1° quesito)
13/02/2004 n.2
12/11/2004 n. 2 (2° quesito)
15/07/2005 n. 1 (3° quesito)

Classificazione Sistemi
12/02/2002 n.2
18/02/2003 n.2
18/07/2003 n. 2
30/01/2004 n. 2
15/07/2005 n. 2

Sistemi
14/11/2001 n.3
20/01/2002 n.3
12/02/2002 n.1
17/07/2002 n.3
18/11/2002 n.3
18/02/2003 n.3
18/04/2003 n.3
30/06/2003 n.3
18/07/2003 n.3
12/09/2003 n.3
14/11/2003 n.3
30/01/2004 n.3
13/02/2004 n.3
23/04/2004 n.3
23/06/2004 n.2 (2° quesito)
23/06/2004 n.3
14/07/2004 n.3
12/11/2004 n.3
27/01/2005 n.1 (2° quesito)
11/02/2005 n.1 (2° e 3° quesito)
28/06/2005 n.3
15/09/2005 n.2 (1° quesito)
15/09/2005 n.3

Inviluppo Complesso/ Trasformata di Hilbert
16/04/2002 n.2
18/11/2002 n. 2
12/09/2003 n.2
14/11/2003 n.2
11/02/2005 n.2
15/09/2005 n.2 (3° quesito)

Campionamento
12/02/2002 n.3
12/09/2002 n.2 (2° quesito)
18/04/2003 n.2
23/04/2004 n.2
14/09/2004 n.3
27/01/2005 n.2
21/04/2005 n.3
28/06/2005 n.2
15/07/2005 n.3

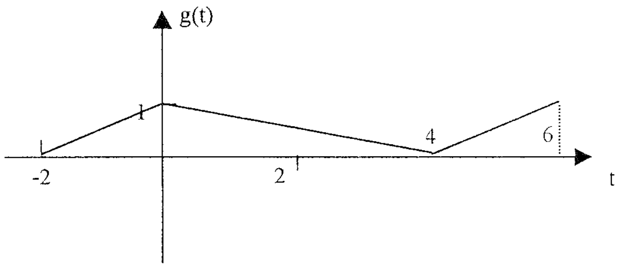
COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

14 Novembre 2003

Esercizio 1

Sia g(t) il segnale rappresentato in figura.
Sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier determinare, motivando la risposta:

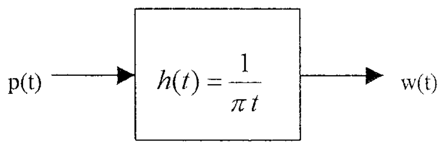
- $G(f)|_{f=0}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi f 2} df$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f\, G(f)\, e^{j2\pi f 2} df$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, 4 sinc(4f)\, df$



Esercizio 2

Illustrare le caratteristiche del segnale w(t) e disegnarne lo spettro, quando in ingresso al sistema di figura è posto:

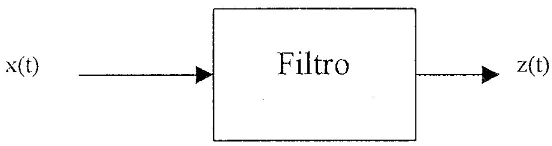
$p(t) = B\, sinc^2(Bt)\cos(2\pi Bt)$



Esercizio 3

Disegnare il segnale periodico $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t - T - n2T}{T}\right)$.

Determinare il segnale z(t) in uscita dal sistema di figura nel caso in cui $H(f) = tri\left(\frac{f-B}{B}\right) + tri\left(\frac{f+B}{B}\right)$ con $B > 0$ $B = \frac{1}{2T}$.



ESERCIZIO 1 (TEMA 1)

- $G(f)\Big|_{f=0} \overset{\text{prop. 8}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 3 + 1 = 4$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, e^{j2\pi f 2}\, df = \mathcal{F}^{-1}\left\{ G(f) \right\}_{t=2} = g(2) = \frac{1}{2}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} j\, 2\pi f\, G(f)\, e^{j2\pi f 2} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ j\, 2\pi f\, G(f) \right\}_{t=2} =$

$$= \frac{d\, g(t)}{dt}\Big|_{t=2} = -\frac{1}{4}$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\; 4\, \mathrm{sinc}(4f)\, df \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parseval}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\; \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right) dt =$

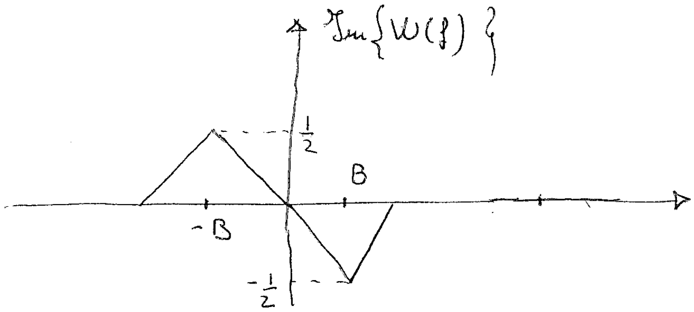
$$= \frac{2 \cdot 1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

ESERCIZIO 2 (tema 4)

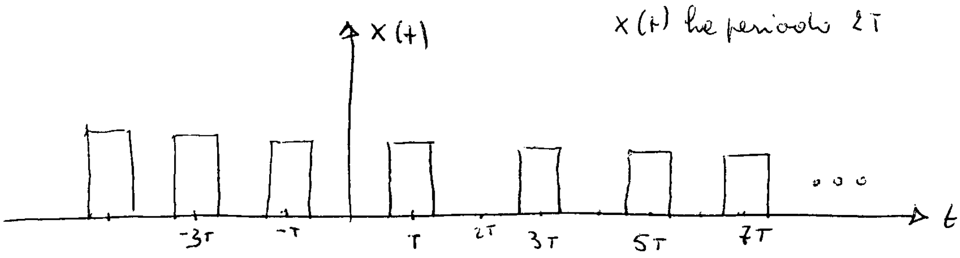
Il segnale $w(t)$ è la trasformata di Hilbert di $p(t)$, segnale reale passabanda. Pertanto $w(t)$ ha la stessa energia, densità spettrale di E, banda e autocorrelazione di $p(t)$. Inoltre $w(t)$ e $p(t)$ sono ortogonali.

$$p(t) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi Bt) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\left[\frac{e^{j2\pi Bt}+e^{-j2\pi Bt}}{2}\right] \longleftrightarrow P(f) = \frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{f-B}{B}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{f+B}{B}\right)$$

$$W(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,P(f) = -j\frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{f-B}{B}\right)+j\frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{f+B}{B}\right)$$



ESERCIZIO 3 (tema 4)

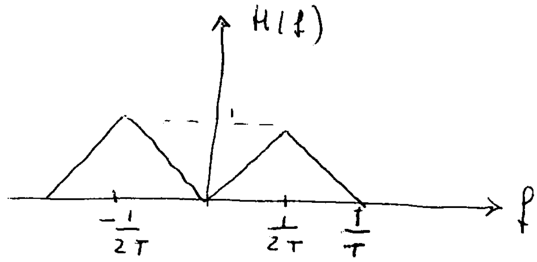


$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{j 2\pi \frac{n}{2T} t}$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, \delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

$$Z(f) = X(f) \, H(f)$$



Quindi $\quad Z(f) = X_{-1} \, \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right) + X_1 \, \delta\left(f - \frac{1}{2T}\right)$

$$X_n = \frac{1}{2T} \, \mathcal{F}\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right)\right\}\Big|_{f=\frac{n}{2T}} = \frac{1}{2\cancel{T}} \, \cancel{T} \, \mathrm{sinc}(Tf) \, e^{-j2\pi f T}\Big|_{f=\frac{n}{2T}} =$$

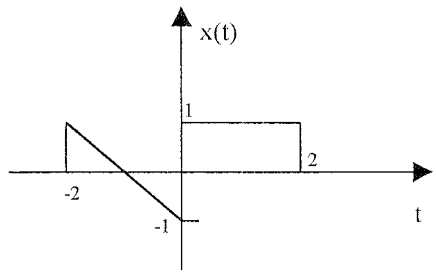
$$= \frac{1}{2} \, \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\pi n} = (-1)^n \frac{1}{2} \, \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$z(t) = -\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \cos\left(2\pi \frac{1}{2T} t\right)$$

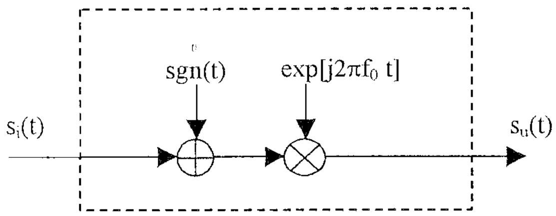
COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

30 Gennaio 2004

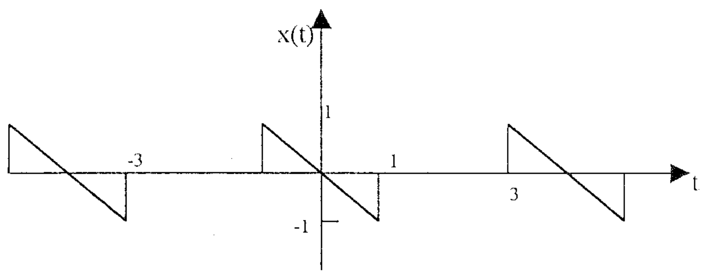
Esercizio 1
Determinare la convoluzione grafica tra i segnali $x(t)$ e $y(t)$.
Con $x(t)$ riportato in figura e
$y(t) = 2\,u(t+1)$.



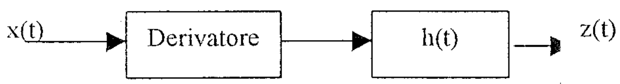
Esercizio 2
Il sistema in figura seguente è lineare e/o tempo-invariante? (Giustificare la risposta)
Se in ingresso è posto il segnale $s_i(t)=\exp(-t)\,u(t)$, determinare l'energia o la potenza media del segnale in uscita (a seconda se è un segnale di energia o di potenza).



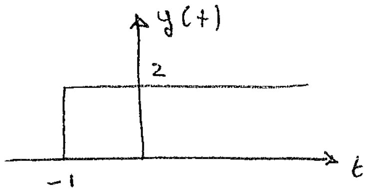
Esercizio 3
Sia dato il segnale $x(t)$ riportato in figura.

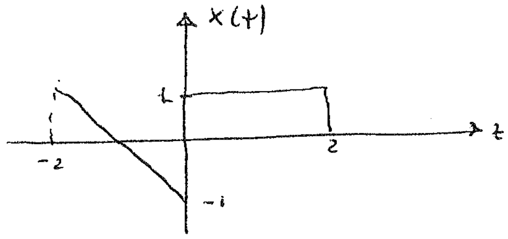


Se $x(t)$ è posto in ingresso al sistema rappresentato nella figura seguente, dove $H(f)=\mathrm{sinc}(2f)e^{-j2\pi f}$, disegnare $z(t)$ e $Z(f)$

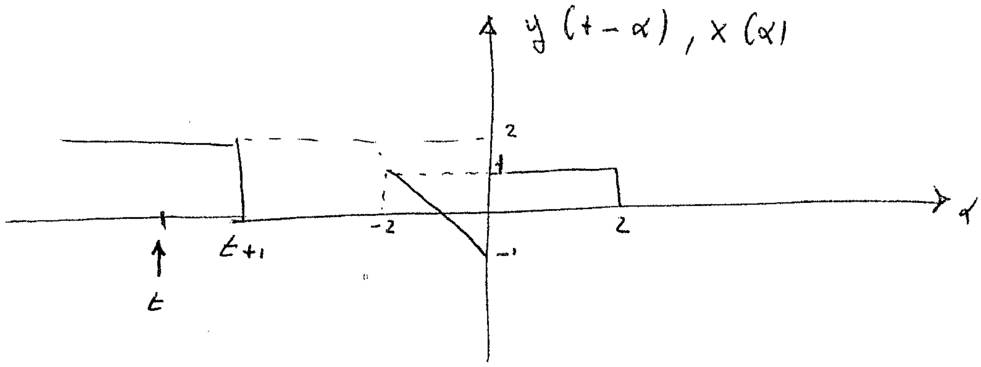


ESERCIZIO 1





Procediamo al calcolo grafico della convoluzione



$t+1<-2 \Rightarrow t<-3 \qquad c(t)=0$

$t+1 \geq -2,\ t+1<0 \Rightarrow -3 \leq t < -1$

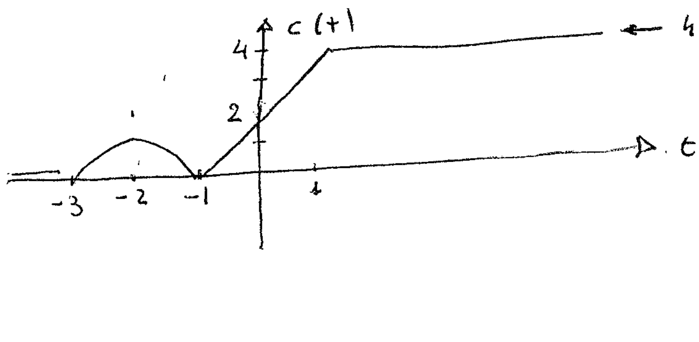
$$c(t) = \int_{-2}^{t+1} 2\cdot(-\alpha-1)\,d\alpha = -2\left[\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\right]_{-2}^{t+1} = \left[-\alpha^2-2\alpha\right]_{-2}^{t+1} = -(t+1)^2 - 2(t+1)$$

$t+1 \geq 0,\ t+1<2$

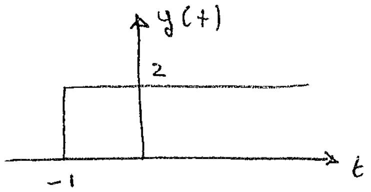
$-1 \leq t < 1$

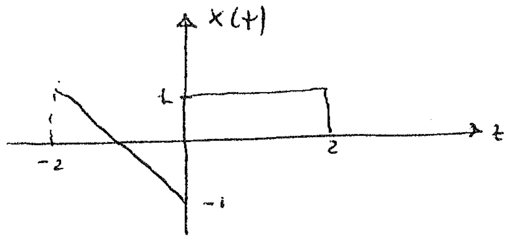
$$c(t) = 0 + \int_{0}^{t+1} 2\cdot 1\,d\alpha = 2(t+1)$$

$t+1 \geq 2 \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow c(t) = 4$

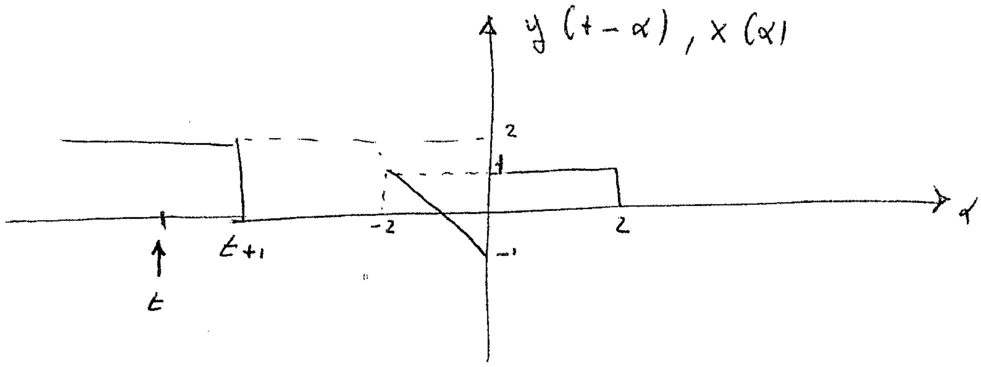


ESERCIZIO 1





Procediamo al calcolo grafico della convoluzione



$t+1<-2 \Rightarrow t<-3 \qquad c(t)=0$

$t+1\geq -2,\ t+1<0 \Rightarrow -3\leq t<-1 \qquad c(t)=\int_{-2}^{t+1} 2\cdot(-\alpha-1)\,d\alpha=$

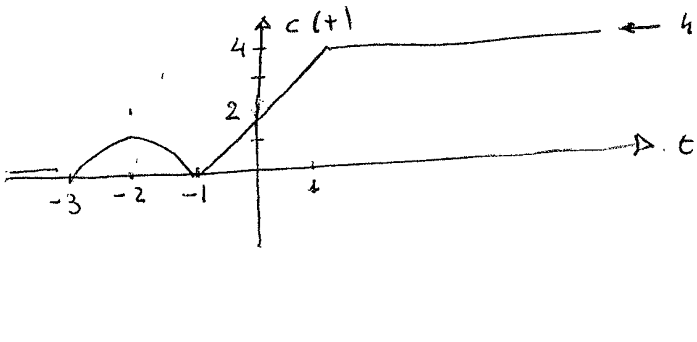
$$=-2\left[\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\right]_{-2}^{t+1}=\left[-\alpha^2-2\alpha\right]_{-2}^{t+1}=$$

$$=-(t+1)^2-2(t+1)$$

$t+1\geq 0,\ t+1<2 \qquad c(t)=0+\int_0^{t+1} 2\cdot 1\,d\alpha=2(t+1)$

$-1\leq t<1$

$t+1\geq 2 \Rightarrow t\geq 1 \Rightarrow c(t)=4$



ESERCIZIO 2

- Il sistema non è lineare

$$s_u(t) = [s_i(t) + \mathrm{sgn}(t)]\, e^{j2\pi f_0 t}$$

Sia $s_i(t) = a\, s_1(t) + b\, s_2(t)$

$$s_u(t) = [a\, s_1(t) + b\, s_2(t) + \mathrm{sgn}(t)]\, e^{j2\pi f_0 t}$$

è chiaramente diverso da $[a\, s_{u1}(t) + b\, s_{u2}(t)]$

- Il sistema non è TI.

$$s_u(t-t_0) = [s_i(t-t_0) + \mathrm{sgn}(t-t_0)]\, e^{j2\pi f_0 (t-t_0)}$$

$$T[s_i(t-t_0)] = [s_i(t-t_0) + \mathrm{sgn}(t)]\, e^{j2\pi f_0 t}$$

Quindi $s_u(t-t_0) \neq T[s_i(t-t_0)]$

-

$$|s_u(t)|^2 = |\mathrm{sgn}(t) + s_i(t)|^2$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\mathrm{sgn}(t) + s_i(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{|s_i(t)|^2 + 2 s_i(t)\,\mathrm{sgn}(t) + 1\}\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} dt \right] = 1$$

Poichè il 1° addendo è nullo in quanto potenza di un segnale di energia

Il 2° addendo dà luogo a $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 2\, e^{-t}\, dt$, anch'esso nullo.

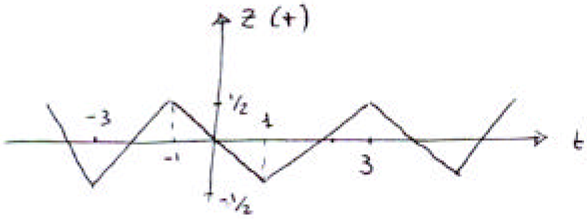
ESERCIZIO 3

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{sinc}(2f)\, e^{-j2\pi f}\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

La risposta impulsiva totale del sistema di figura è

$$h_{TOT}(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) \otimes h(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t-2)$$

Quindi $z(t) = x(t) \otimes h_{TOT}(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(t-2)$

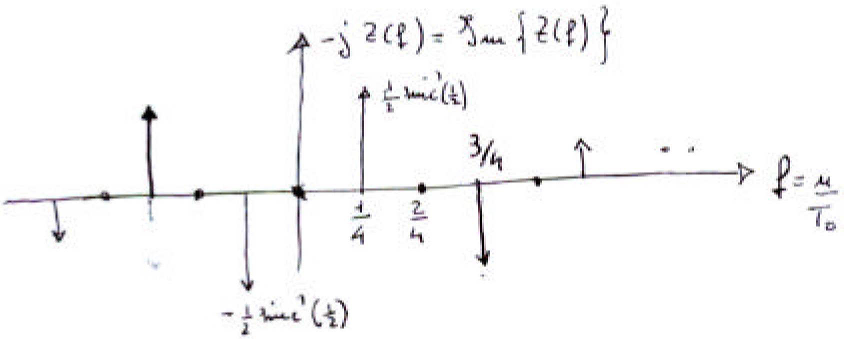


$$z(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\left(\frac{t-1-4n}{2}\right)$$

$$\updownarrow$$

$$Z(f) = \frac{1}{2}\delta(f) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{T_0}\,\mathrm{sinc}^2\left(2\frac{n}{T_0}\right) e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}}\,\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) =$$

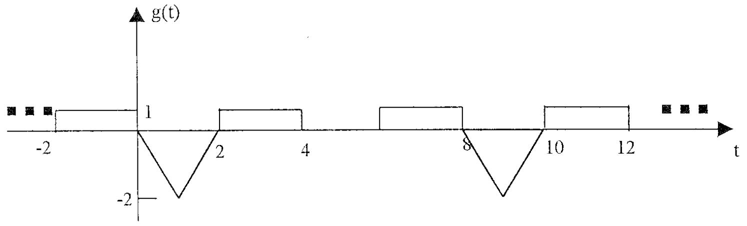
$$= \frac{1}{2}\delta(f) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}n}\,\delta\left(f-\frac{n}{4}\right)$$



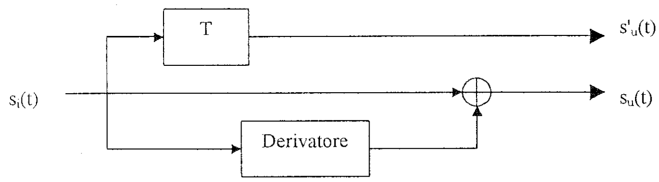
COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

13 Febbraio 2004

Esercizio 1
Disegnare la componente di 1° armonica del segnale periodico di figura e la potenza media ad essa associata.

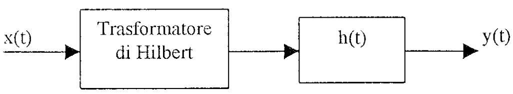


Esercizio 2
Sia data l'autocorrelazione di un generico segnale reale e di energia, $R_{si}(\tau)$, ed il sistema di figura, dove T è il ritardo applicato dal blocco ritardatore sul segnale al suo ingresso.



- Determinare l'autocorrelazione di $s'_u(t)$ ed elencarne le caratteristiche principali.
- Determinare l'autocorrelazione di $s_u(t)$ nel caso $s_i(t) = 3\exp(-t)\,u(t)$.

Esercizio 3
Si consideri il sistema in figura, dove $h(t) = 2B\mathrm{sinc}(2Bt)$.
Disegnare la risposta in frequenza globale del sistema con ingresso x(t) e uscita y(t).
Se in ingresso al sistema è posto il segnale $x(t)=\delta(t - T/4)$, con $T=1/B$, disegnare Y(f).



ESERCIZIO 1

Il segnale di figura è periodico, costituito dalla somma di due segnali periodici $g_1(t)$ e $g_2(t)$

$$g_1(t) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\, tri\left(\frac{t-1-8n}{1}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{1n}\, e^{+j2\pi\frac{n}{8}t}$$

$$g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t+1-4n}{2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{2m}\, e^{+j2\pi\frac{m}{4}t}$$

Notiamo che il segnale $g(t)$ ha periodo uguale al periodo di $g_1(t)$ [periodo maggiore]

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{1n}\, e^{j2\pi\frac{n}{8}t} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{2m}\, e^{j2\pi\frac{m}{4}t}$$

Quindi

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n\, e^{j2\pi\frac{n}{8}} \quad ; \quad G_n = \begin{cases} G_{1n} + G_{2m} & n \text{ pari},\ n=0 \\ G_{1n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$G_0 = G_{10} + G_{20} = \frac{1}{8}\left[-\frac{4}{2} + 2\cdot 2\right] = \frac{1}{4}$$

$$G_1 = G_{11} = \frac{1}{8}\mathcal{F}\left\{-2tri\left(\frac{t-1}{1}\right)\right\}_{\frac{1}{8}=f} = -\frac{2}{8}\, sinc^2(f)\, e^{-j2\pi f} =$$

$$= -\frac{1}{4}\, sinc^2\left(\frac{1}{8}\right) e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Componente di 1ª armonica:

$$2|G_1| \cos\left[2\pi\frac{1}{8}t + \angle G_1\right] =$$

$$= \frac{2}{4}\, sinc^2\left(\frac{1}{8}\right) \cos\left[\frac{\pi}{4}t + \frac{3}{4}\pi\right]$$

$$P_{1a} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 sinc^4\left(\frac{1}{8}\right)$$

ESERCIZIO 2

- $s_u'(t) = s_i(t-T) \longleftrightarrow S_u'(f) = S_i(f)\, e^{-j2\pi f T}$

$$R_{s_u'}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(t+\tau-T)\, s_i^*(t-T)\, dt =$$

$$= R_{s_i}(\tau) \longleftrightarrow \mathfrak{F}\{R_{s_i}(\tau)\} = |S_i(f)|^2$$

$R_{s_u'}(\tau) \equiv R_{s_i}(\tau)$, quindi è simmetrica rispetto a $\tau=0$, i suoi valori in $\tau \neq 0$ sono $\leq$ al valore $R_{s_i}(0) = E_{s_i}$.

- $s_u(t) = s_i(t) + \dfrac{d\, s_i(t)}{dt} \longleftrightarrow S_u(f) = S_i(f)\,[1 + j2\pi f]$

$$|S_u(f)|^2 = |S_i(f)|^2\, |1+j2\pi f|^2 = |S_i(f)|^2\, [1+(2\pi f)^2]$$

Se $s_i(t) = 3\, e^{-t} u(t) \longleftrightarrow S_i(f) = \dfrac{3}{1+j2\pi f}$

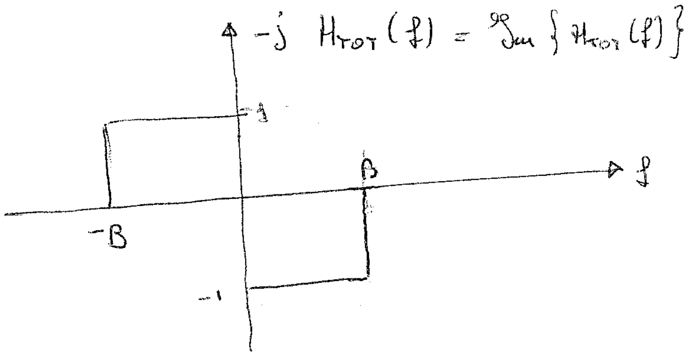
Quindi $|S_i(f)|^2 = \dfrac{9}{1+(2\pi f)^2}$

Si ha pertanto $|S_u(f)|^2 = \dfrac{9}{1+(2\pi f)^2}\,[1+(2\pi f)^2] = 9$

$$R_{s_u}(\tau) = 9\, \delta(\tau)$$

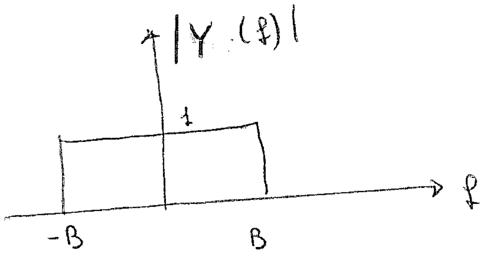
ESERCIZIO 3

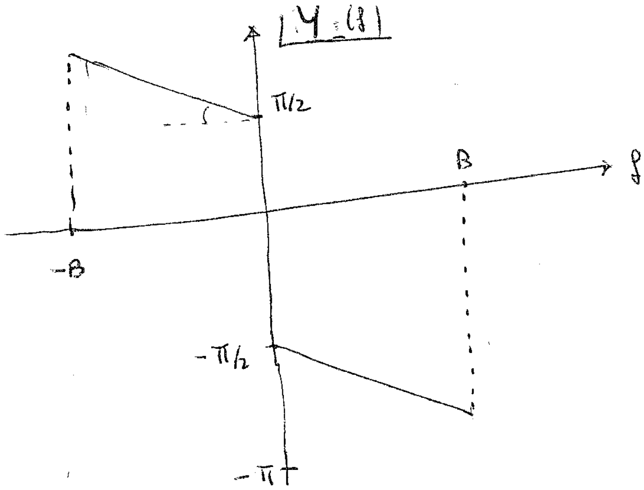
$$H_{TOT}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,H(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$



$$h_{TOT}(t) \otimes \delta(t - T/4) = y(t) \Rightarrow y(t) = h_{TOT}(t - T/4)$$

$$Y(f) = H_{TOT}(f)\,e^{-j2\pi f T/4} = |H_{TOT}(f)|\,e^{-j\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(f)}\,e^{-j\frac{\pi}{2}fT}$$





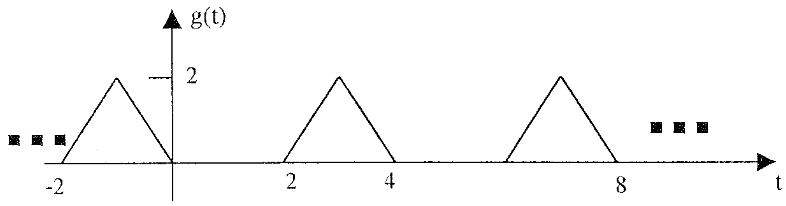
COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

23 Aprile 2004

Esercizio 1

Sia dato il segnale ottenuto considerando lo sviluppo in serie di Fourier del segnale di figura limitato a 2N+1 termini, cioè con $-N \leq n \leq N$.

Si determini il valore minimo di N in modo tale che la potenza del segnale ottenuto sia superiore al 85% della potenza del segnale di figura.



Esercizio 2

Sia g(t) un generico segnale che rispetti le ipotesi del teorema del campionamento per segnali passa-basso.

Determinare analiticamente lo spettro del segnale campionato <u>con campionamento sample-hold</u>, in cui la sequenza campionatrice è costituita da un'onda quadra di periodo T con impulsi rettangolari di durata τ e ampiezza unitaria.

Disegnare qualitativamente lo spettro nel caso che la frequenza di campionamento sia uguale alla frequenza di Nyquist e $T = 4\tau$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema con risposta in frequenza $H(f)= j\, f\, \mathrm{rect}(f/10)$

In ingresso a tale sistema è posto il segnale $x(t)= 50 \cos(8\pi t)+25\, \mathrm{sen}[16\pi t+(\pi/4)]$

Determinare l'uscita y(t) del sistema e disegnarne lo spettro.

ESERCIZIO 1

$$P_g = \frac{1}{4}\, 2\left[\int_{-2}^{0} |g(t)|^2 dt\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-2t)^2\, dt = 2\, \frac{t^3}{3}\Big]_{-1}^{0} = \frac{2}{3}$$

Il segnale ottenuto dal troncamento della serie di Fourier

$$\begin{cases} g_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} G_n\, e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} = \sum_{n=-N}^{N} G_n\, e^{j2\pi \frac{n}{4} t} \\ G_n = \frac{1}{T_0}\, \mathfrak{F}\left\{2\,\mathrm{tri}(t+1)\right\}_{f=\frac{n}{T_0}} = \frac{1}{4}\, 2\left[\mathrm{sinc}^2(f)\, e^{j2\pi f}\right]_{f=\frac{n}{4}} = \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right) e^{j\pi\frac{n}{2}}$$

La potenza di questo segnale è, per l'uguaglianza di Parseval,

$$P_{g_N} = \sum_{n=-N}^{N}\left|\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{sinc}^4\left(\frac{n}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=-N}^{N}\frac{\mathrm{sen}^4\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)^4}$$

Notiamo che considerando $n = 0, \pm 1$ otteniamo l'85% della P

$$P_{g_{N=1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, 2\left[\frac{\mathrm{sen}^4(\pi/4)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)^4 \simeq 0,25 + 0,33 = 0,58$$

$$\frac{P_{g_{N=1}}}{P_g} = 0,58 \cdot \frac{3}{2} = 0,87$$

Quindi $N = 1$

ESERCIZIO 2

Il seguente campionato sample-hold ha la forma

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT)\, rect\left(\frac{t-\tau/2-nT}{\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT)\, h(t-nT)$$

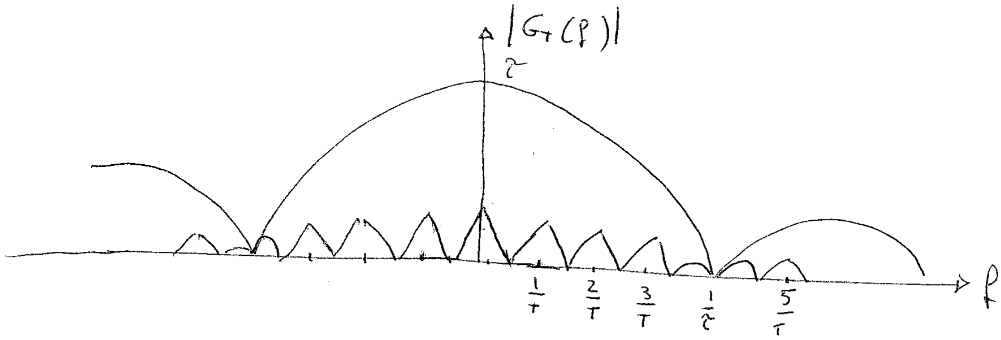
dove $h(t) \triangleq rect\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right) \longleftrightarrow H(f) = \tau\, sinc(\tau f)\, e^{-j\pi f\tau}$

Quindi

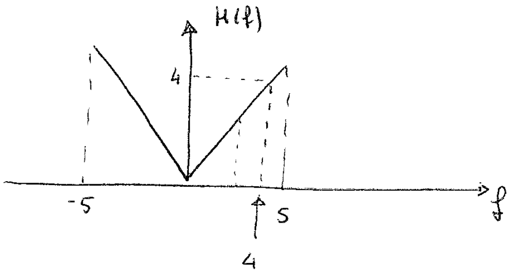
$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT)\, \delta(t-nT) \otimes h(t) = g_\delta(t) \otimes h(t)$$

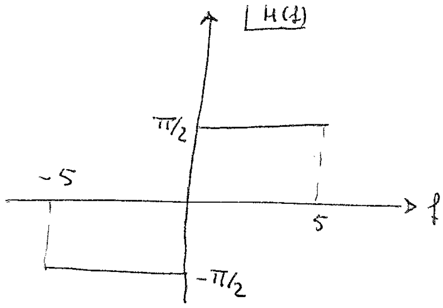
$$\updownarrow$$

$$G_T(f) = \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G\left(f-\frac{n}{T}\right)}_{G_\delta(f)} \cdot H(f)$$

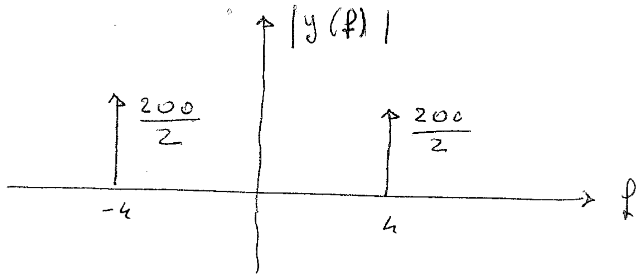


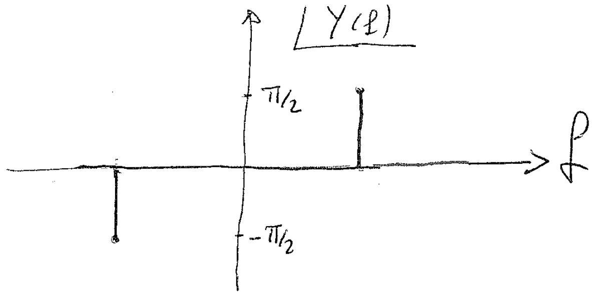
Esercizio 3





$$x(t) = 50\cos(8\pi t) + 25\,\text{sen}\left[16\pi t + (\pi/4)\right] =$$
$$= 50\cos\left[2\pi 4 t\right] + 25\,\text{sen}\left[2\pi 8 t + \pi/4\right]$$
$$y(t) = 50 \times |H(4)| \cos\left[2\pi 4 t + \pi/2\right] =$$
$$= 50 \times 4 \cos\left[2\pi 4 t + \pi/2\right] =$$
$$= 200\left[-\,\text{sen}(2\pi 4 t)\right]$$



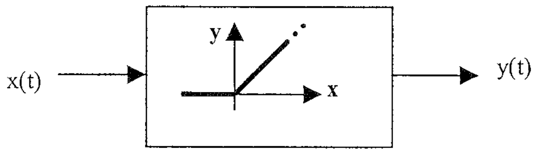


COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

23 Giugno 2004

Esercizio 1

Sia dato il sistema non lineare di figura, al cui ingresso sia posto il segnale x(t)=A cos[2π f_0 (t-2)], con f_0=1/4: determinare lo sviluppo in serie di Fourier di y(t).



Esercizio 2

Determinare il segnale z(t) in funzione di s(t), sapendo che

a) il segnale s(t) è reale e passa-banda,

b) le trasformate di Fourier dei due segnali sono legate dalla relazione
Z(f)= 6 S(f) u(f) con u(f) gradino unitario nel dominio della frequenza

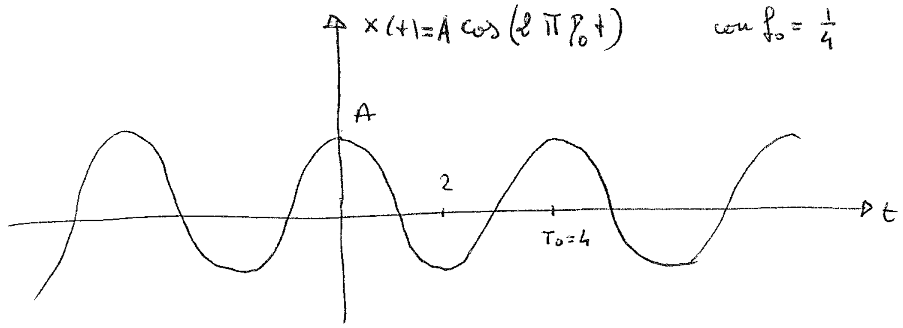
La funzione z(t) può rappresentare la risposta impulsiva di un sistema LTI fisicamente realizzabile? Perché?

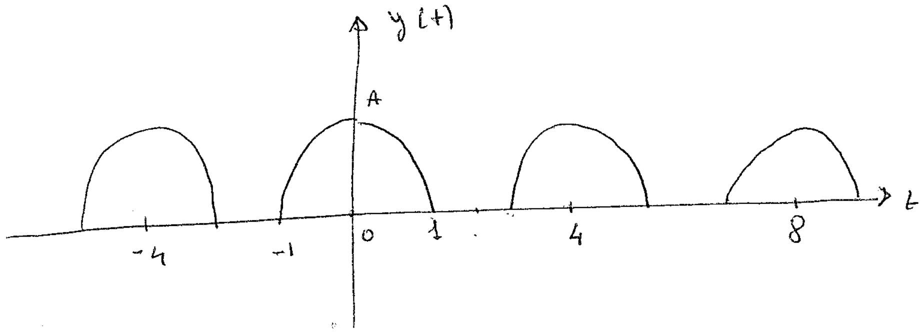
Esercizio 3

Sia dato il segnale s(t) = $A\,rect\left[\frac{t}{2T}\right]$, che sia posto in ingresso al sistema LTI con risposta impulsiva h(t) = $rect\left[\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right]$, disegnare il segnale in uscita da tale sistema.

Se in ingresso allo stesso sistema è posta l'onda quadra s'(t)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A\,rect\left[\frac{t-4nT}{2T}\right]$, qual è la corrispondente uscita?

ESERCIZIO 1





$y(t)$ è periodico di periodo $T_0 = 4$, quindi

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \, e^{j2\pi \frac{n}{4} t} \\ Y_n = \frac{1}{4} \mathfrak{F}\left\{ A\cos[2\pi f_0 t] \, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \right\}_{f=\frac{n}{4}} \end{cases}$$

$$Y_n = \frac{A}{4} \mathfrak{F}\left\{ \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j2\pi f_0 t} \right\}_{f=\frac{n}{4}} =$$

$$= \frac{A}{8}\left\{ 2\,\mathrm{sinc}\left[2(f-f_0)\right] + 2\,\mathrm{sinc}\left[2(f+f_0)\right] \right\}_{f=\frac{n}{4}} =$$

$$= \frac{A}{4}\,\mathrm{sinc}\left[2\,\frac{n-1}{4}\right] + \frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}\left[2\,\frac{n+1}{4}\right] =$$

$$= \frac{A}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n-1}{2}\right) + \frac{A}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Se $x(t) = A\cos[2\pi f_0 (t-2)] \Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \, e^{j2\pi \frac{n}{4}(t-2)} =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[Y_n \, e^{-j\pi n} \right] e^{j2\pi \frac{n}{4} t}$$

ESERCIZIO 2

$$z(f) = 6\, S(f) \cdot u(f) \longleftrightarrow z(t) = 6\, s(t) \otimes \left[-\frac{1}{j\pi 2t} + \frac{\delta(t)}{2} \right] =$$

$$= 6\, j\frac{1}{2}\left[s(t) \otimes \frac{1}{\pi t} \right] + 3\, x(t) =$$

$$= 3\left[s(t) + j\, \hat{s}(t) \right]$$

Si ha pertanto che $z(t)$ è pari a 3 volte il preinviluppo di $s(t)$.

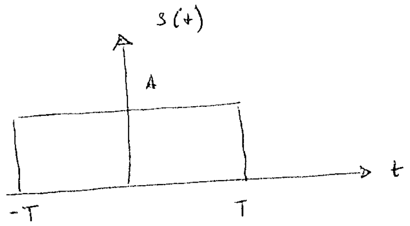
Poichè $z(t)$ è un segnale <u>complesso</u> e <u>limitato in banda</u> non può rappresentare la risposta impulsiva di un sistema LTI fisicamente realizzabile.

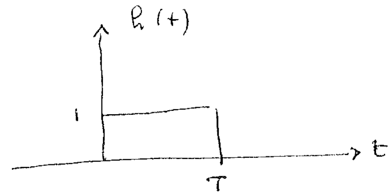
Le condizioni di fisica realizzabilità infatti sono:

1) risp. impulsiva reale
2) risp. impulsiva nulla per $t<0$

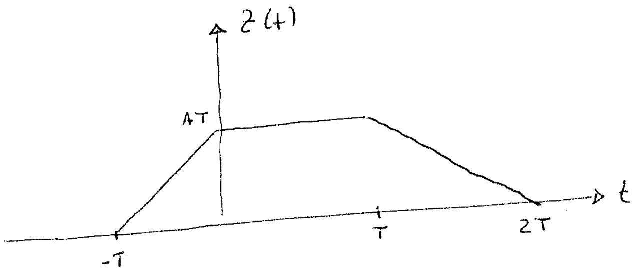
Esercizio 3

Il segnale in uscita è $z(t) = s(t) \otimes h(t)$

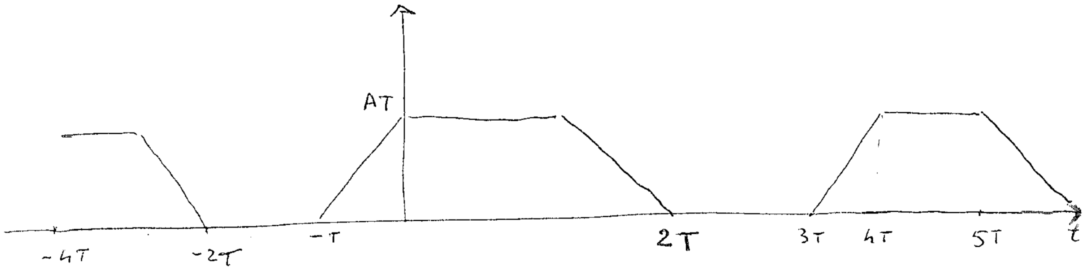




Eseguendo la convoluzione grafica si ottiene



Se in ingresso al sistema poniamo $s'(t)$, per la linearità dello stesso si ha una ripetizione periodica, con periodo $4T$, di $z(t)$.



COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

14 Luglio 2004

Esercizio 1

Sia $x(t) = 2 + \cos(2\pi \frac{3}{2} f_0 t) + \frac{1}{2} \mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$.

- Disegnare x(t) nel dominio della frequenza
- Disegnare la sua densità spettrale di potenza media
- Determinare la potenza media di x(t)

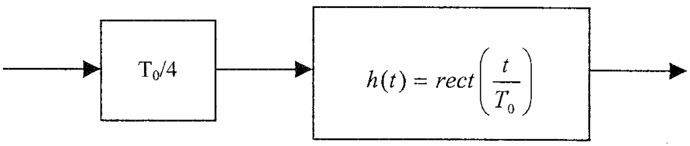
Esercizio 2

Sia dato il segnale $s(t) = e^{-4|t-2|} + \mathrm{sgn}[4(t-2)]$

- Determinarne la trasformata facendo uso delle trasformate note di alcune funzioni generalizzate e delle proprietà della trasformata di Fourier.
- Determinare la trasformata della derivata di s(t): $\Im\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\}$

Esercizio 3

Sia posto in ingresso al sistema di figura il segnale x(t) dell'esercizio 1, determinare l'uscita del sistema.

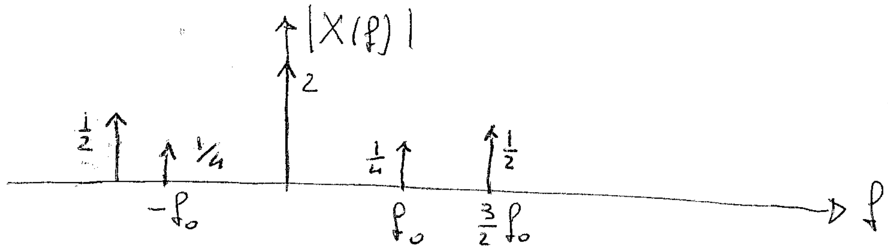


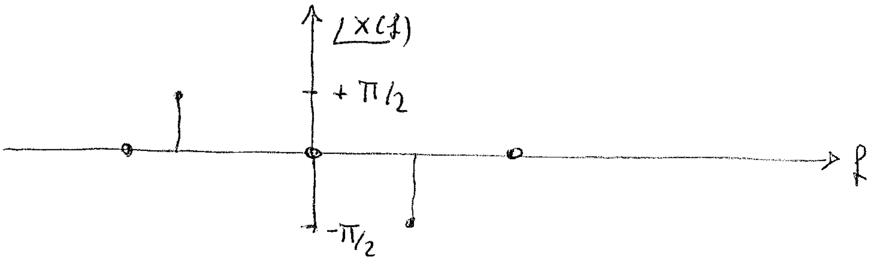
ESERCIZIO 1

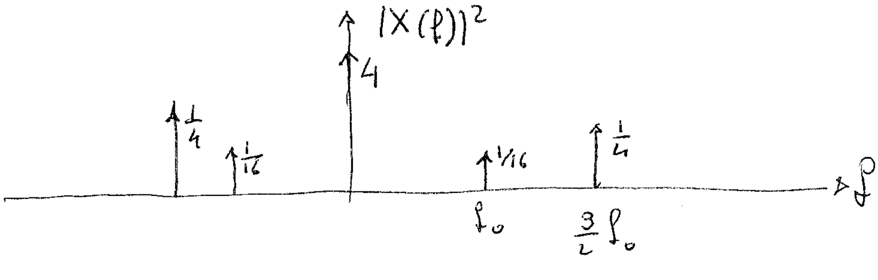
$$x(t) = 2 + \cos\left(2\pi \frac{3}{2} f_0 t\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(2\pi f_0 t\right)$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = 2\delta(f) + \frac{\delta(f - \frac{3}{2}f_0)}{2} + \frac{\delta(f + \frac{3}{2}f_0)}{2} + \frac{1}{4j}\delta(f - f_0) + $$
$$- \frac{\delta(f + f_0)}{4j} =$$
$$= 2\delta(f) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{3}{2}f_0\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{3}{2}f_0\right) - \frac{j}{4}\delta(f - f_0) + $$
$$+ \frac{j}{4}\delta(f + f_0)$$







$$P_m = 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 4 = \frac{32+1+4}{8} = \frac{37}{8}$$

Il periodo del segnale è $2T_0$ [m.c.m fra T_0 e $\frac{2}{3}T_0$]

ESERCIZIO 2

$$s(t) = e^{-4|t-2|} + \operatorname{sgn}[4(t-2)]$$

$$e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$

$$e^{-4|t|} \overset{④}{\longleftrightarrow} \frac{1}{4}\frac{2}{1+(2\pi\, f/4)^2}$$

$$e^{-4|t-2|} \overset{5}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\frac{1}{1+(\pi \frac{f}{2})^2} e^{-j2\pi f 2}$$

$$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{sgn}(4t) \longleftrightarrow \frac{1}{4}\frac{1}{j\pi f/4} = \frac{1}{j\pi f}$$ infatti $\operatorname{sgn}(t) \equiv \operatorname{sgn}(4t)$

$$\operatorname{sgn}[4(t-2)] \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f} e^{-j2\pi f 2}$$

Quindi
$$S(f) = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\frac{\pi f}{2})^2} + \frac{1}{j\pi f}\right] e^{-j4\pi f}$$

La derivata di $s(t)$ ha per trasformata $j2\pi f\, S(f)$

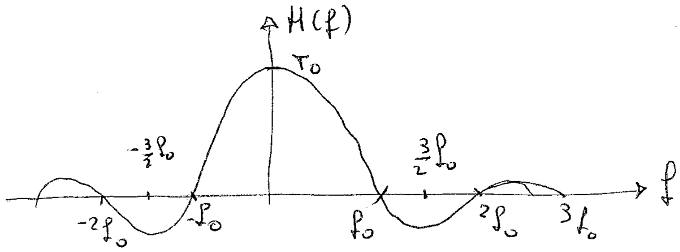
$$\mathcal{F}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = \left[2 + \frac{j2\pi f}{2+\frac{(\pi f)^2}{2}}\right] e^{-j4\pi f}$$

ESERCIZIO 3

$$x\left(t-\frac{T_0}{4}\right) = 2 + \cos\left[2\pi \frac{3}{2} f_0 \left(t - \frac{T_0}{4}\right)\right] + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left[2\pi f_0 \left(t - \frac{T_0}{4}\right)\right] =$$

$$= 2 + \cos\left[2\pi \frac{3}{2} f_0 t - \frac{3}{4}\pi\right] + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left[2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right]$$

Sappiamo che $h(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \longleftrightarrow H(f) = T_0 \,\text{sinc}(T_0 f)$



In uscita non sarà presente il segnale a frequenza f_0 poiché $|H(f_0)| = 0$ mentre avremo gli altri contributi

$$y(t) = 2\,H(0) + \left|H\left(\frac{3}{2}f_0\right)\right| \cos\left[2\pi \frac{3}{2} f_0 t - \frac{3}{4}\pi + \pi\right] =$$

$$= 2T_0 + T_0 \,\text{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) \cos\left[2\pi \frac{3}{2} f_0 t + \frac{\pi}{4}\right]$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

14 Settembre 2004

Esercizio 1

Sia dato lo sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico x(t),

$$x(t)=\sum_{n=-2}^{2} 3sinc^2\left[\frac{n}{2}\right]e^{j\pi\frac{n}{4}t}$$

Determinare:
- il periodo,
- la potenza media,
- il grafico del segnale x(t) nel dominio di t.

Esercizio 2

Completare la seguente tabella, sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier

Funzione nel dominio del tempo, s(t)	Trasformata di Fourier di s(t)
$s(t)=e^{-t}u(t)$	$S(f)=\frac{1}{1+j2\pi f}$
$s(t)=e^{-\lvert t\rvert}=e^{-t}u(t)+e^{t}u(-t)$	
$s(t)=\frac{1}{1+j2\pi t}$	
$s(t)=\frac{1}{1+j\pi t}$	
$s(t)=\frac{t}{1+j\pi t}=\frac{1}{j2\pi}\;\frac{j2\pi t}{1+j\pi t}$	

Esercizio 3

Si consideri il segnale x(t), reale e pari, in banda base, con banda B=1KHz.

Si costruisca il segnale $y(t)= 2\, x(t) \cos^2(2\pi f_o t)$ con f_o= 1,5 KHz

a) Disegnare Y(f) [ipotizzando un andamento di X(f) a piacere]

b) Qual è la minima frequenza di campionamento necessaria per campionare y(t)?

c) Disegnare lo schema di un sistema in grado di recuperare il segnale x(t) dalla sequenza di campioni prelevata da y(t).

ESERCIZIO 1

$$x(t) = \sum_{n=-2}^{2} 3\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) e^{j2\pi \frac{n}{4\cdot 2}t} =$$

$$= \sum_{n=-2}^{2} X_n\, e^{j2\pi \frac{n}{T_0}t}$$

1) Pertanto $T_0 = 8$

2) Per l'uguaglianza di Parseval:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = \sum_{n=-2}^{2} |X_n|^2 =$$

$$= |3|^2 + \left|3\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2 + \left|3\,\mathrm{sinc}^2\left(-\frac{1}{2}\right)\right|^2 =$$

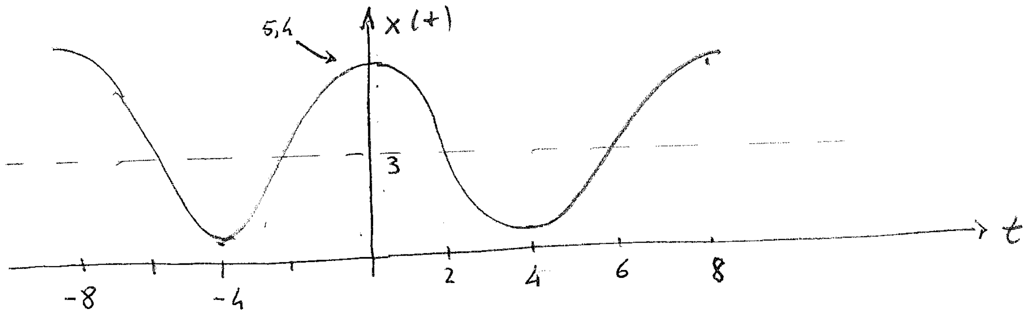
$$= 9 + 9\,\frac{1}{(\pi/2)^4} + 9\,\frac{1}{(\pi/2)^4} =$$

$$= 9\left[1 + 2\,\frac{16}{\pi^4}\right] \simeq 9\,[1 + 0{,}32] = 11.88$$

3) Il segnale è costituito da 2 componenti:

$$x_0(t) = 3 \qquad x_1(t) = 2\cdot\left[3\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cos\left[2\pi\frac{t}{8}\right] =$$

$$= 6\,\frac{4}{\pi^2}\cos\left(2\pi\,\frac{1}{8}\,t\right)$$



Esercizio 2
Completare la seguente tabella, sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier

	Funzione nel dominio del tempo, s(t)	Trasformata di Fourier di s(t)
1)	$s(t)=e^{-t}u(t)$	S(f)= $\frac{1}{1+j2\pi f}$
2)	s(t) = $e^{-\|t\|} = e^{-t}u(t)+e^{t}u(-t)$	$S(f)=\frac{1}{1+j2\pi f}+\frac{1}{1-j2\pi f}=\frac{2}{1+(2\pi f)^2}$
3)	s(t) = $\frac{1}{1+j2\pi t}$	$S(f)=e^{f}\,u(-f)$
4)	s(t) = $\frac{1}{1+j\pi t} = \frac{1}{1+j2\pi t/2}$	$S(f)=2\,e^{2f}\,u(-f)$
5)	s(t) = $\frac{t}{1+j\pi t}=\frac{1}{j2\pi}\;\frac{j2\pi t}{1+j\pi t}$	$S(f)=\frac{1}{j2\pi}\left\{-\frac{d}{df}\left[2\,e^{2f}\,u(-f)\right]\right\}$

2). Si applica la proprietà 4 per la quale, in questo caso, se:

$$s(t) \longleftrightarrow S(f)$$

$$s(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{|-1|}\,S\left(\frac{f}{-1}\right)=S(-f)$$

3) Si applica la proprietà di dualità

4) Si applica la proprietà 4 alla trasformata del punto 3

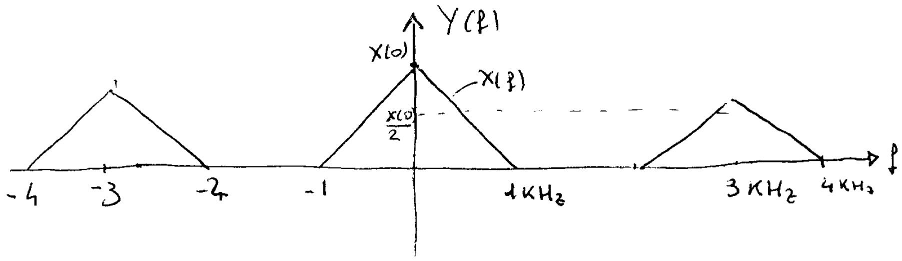
5) Si applica la prop. di derivazione + dualità alla trasformata del punto 4

Esercizio 3

$$y(t) = 2x(t)\cos^2(2\pi f_0 t) = 2x(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi\, 2f_0 t)\right] =$$
$$= x(t) + x(t)\cos(2\pi\, 2f_0\, t)$$

$\updownarrow$

1) $$Y(f) = X(f) + X(f) \otimes \left[\frac{\delta(f-2f_0)}{2} + \frac{\delta(f+2f_0)}{2}\right]$$



2) La minima freq. di campionamento di $y(t)$ è $f_N = 2 \times 4$ KHz $= 8$ KHz

3)

Per recuperare $x(t)$ da $y(t)$ è sufficiente un filtro passabasso con banda $B_F \in [1 \div 2]$ KHz