Capitolo 6

RELAZIONI TEMPO/FREQUENZA E BANDA DI UN SEGNALE

Con un ragionamento del tutto intuitivo possiamo dire che un segnale che varia molto rapidamente deve contenere delle componenti sinusoidali a frequenza elevata; infatti un segnale composto di sole componenti a bassa frequenza, cioè di sinusoidi che variano lentamente, non può presentare brusche variazioni di ampiezza.
In questo paragrafo vedremo come formalizzare questo risultato ed altri relativi alla descrizione dei segnali nel dominio del tempo e della frequenza, ricavando espressioni che mettono in evidenza la relazione esistente tra l'andamento di un segnale nel tempo e la distribuzione in frequenza delle sue componenti armoniche.
La trattazione che segue è relativa ai segnali ad energia finita, ma gli stessi concetti si possono sviluppare anche nel caso di segnali a potenza media finita, con le opportune modifiche in termini di definizioni e grandezze.

6.1 VARIABILITA' DI UN SEGNALE

Consideriamo un segnale g(t) a energia finita e banda limitata, cioè con G(f) = 0 per |f| > B.
La variazione di g(t) nell'intervallo (t_1,t_2) può essere espressa tramite la seguente espressione:

$$\left|g(t_2)-g(t_1)\right| = \left|\int_{-B}^{B} G(f)\left(e^{j2\pi f t_2} - e^{-j2\pi f t_1}\right)df\right|$$

e, poichè il modulo di un integrale è minore dell'integrale del modulo, possiamo scrivere:

$$\left|g(t_2)-g(t_1)\right| \le \int_{-B}^{B} \left|G(f)\right|\left|e^{j2\pi f t_2} - e^{-j2\pi f t_1}\right|df$$

Osservando che:

$$\begin{aligned}\left|e^{j2\pi f t_2} - e^{-j2\pi f t_1}\right| &= \left|e^{j2\pi f t_1}\right|\left|e^{j2\pi f(t_2-t_1)} - 1\right| = \\ &= \left|e^{j\pi f(t_2-t_1)}\right|\left|e^{j\pi f(t_2-t_1)} - e^{-j\pi f(t_2-t_1)}\right| = \\ &= 2\left|\sin\left[\pi f\left(t_2-t_1\right)\right]\right| \le 2\pi|f|\left|t_2-t_1\right|\end{aligned}$$

possiamo scrivere:

$$\left|\frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}\right| \le 2\pi\int_{-B}^{B}|f|\left|G(f)\right|df \le 2\pi B\int_{-B}^{B}\left|G(f)\right|df$$

Dall'ultima espressione si vede che la variazione relativa al segnale g(t) nell'intervallo (t_1,t_2) è proporzionale alla larghezza di banda B del segnale stesso. Se B cresce, la variazione può crescere, consentendo al segnale di variare bruscamente. Se B diminuisce, la possibile variazione decresce e quindi il segnale non può che variare lentamente.

6.2 SEGNALE A SUPPORTO LIMITATO

Sia g(t) un segnale a energia finita e a supporto limitato nell'intervallo (-T/2, T/2). Tale segnale può essere espresso nella forma g(t) = g'(t)rect(t/T), dove rect(t/T) è una porta simmetrica di ampiezza unitaria e di durata T, e g'(t) è un segnale generico uguale a g(t) nell'intervallo (-T/2, T/2). Dalle proprietà della trasformata di Fourier, possiamo scrivere lo spettro di g(t) nella forma:

$$G(f) = G'(f) \otimes F\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = G'(f) \otimes T\mathrm{sinc}(Tf)$$

Essendo sinc(fT) illimitata in frequenza, è lecito aspettarsi che anche G(f) sia illimitata in frequenza.

Scambiando tempo e frequenza si può verificare che vale anche la proprietà inversa. Pertanto possiamo concludere con la seguente affermazione: un segnale strettamente limitato nel tempo è illimitato in frequenza; viceversa un segnale a banda strettamente limitata è illimitato nel tempo.

6.3 BANDA DI UN SEGNALE

Se un segnale generico di energia ha uno spettro delle ampiezze, ovvero una densità spettrale di energia, nullo al di fuori di un certo intervallo di frequenza, si dice che il segnale è strettamente limitato in banda, si definisce banda del segnale l'intervallo di frequenze in cui il modulo della sua trasformata è diverso da zero e larghezza di banda la misura di tale intervallo.

Per segnali di potenza, la banda è definita in termini di distribuzione spettrale della potenza.

Nel caso di segnali reali bisogna prestare attenzione ad una possibile ambiguità: poiché gli spettri sono funzioni pari, la loro banda può essere definita considerando le sole frequenze positive (banda unilaterale) o le frequenze positive e negative (banda bilaterale).

Nel seguito intenderemo sempre la banda unilaterale.

Si distinguono due classi di segnali reali, diverse in termini di occupazione spettrale:

- Segnali passa-basso o in banda-base, quando il loro spettro è diverso da zero su un intervallo di frequenza comprendente l'origine[1];
- Segnali passa-banda o in banda traslata, quando il loro spettro è diverso da zero su intervalli di frequenza simmetrici rispetto all'origine e non comprendenti l'origine stessa.

Per i segnali non strettamente limitati in banda, cioè con spettro delle ampiezze non nullo sull'intero asse delle frequenze, si usano definizioni diverse.

Il teorema di Parseval applicato ai segnali di energia , cioè trasformabili secondo Fourier, consente di individuare un intervallo di frequenze che sia significativo, a cui si dà il nome di banda del segnale, che è definito in termini del contenuto percentuale di energia del segnale (ovvero dell'errore percentuale di energia).

La trattazione qui svolta riguarda segnali il cui contenuto energetico è concentrato su un intervallo di frequenza comprendente l'origine. Analogo sviluppo può essere ottenuto per segnali il cui contenuto energetico è concentrato su intervalli di frequenza simmetrici non comprendenti l'origine.

Indicando con $g_a(t)$ il segnale approssimante ottenuto considerando quella parte dello spettro G(f) del segnale g(t) compresa nell'intervallo di frequenze [-B, B], l'errore percentuale di approssimazione è espresso dalla relazione:

$$e_2 = \frac{\langle e(t), e(t)\rangle}{\langle g(t), g(t)\rangle} = \frac{\langle g(t) - g_a(t), g(t) - g_a(t)\rangle}{\langle g(t), g(t)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t) - g_a(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt}$$

[1] In alcuni casi lo spettro potrebbe essere nullo in un intorno di estensione limitata della frequenza 0.

cioè dal rapporto tra l'energia dell'errore di approssimazione e l'energia del segnale. Tenendo conto del teorema di Parseval e del fatto che lo spettro dell'errore è la parte dello spettro di g(t) che cade al di fuori dell'intervallo [-B, B], si ottiene:

$$e_2 = \frac{\int_{-\infty}^{-B} |G(f)|^2 dt + \int_{B}^{\infty} |G(f)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 dt}$$

Nel caso di segnali reali, e quindi con |G(f)| pari, tale espressione si può semplificare come:

$$e_2 = \frac{2\int_{B}^{\infty} |G(f)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 dt}$$

Una volta ricavato B in funzione dell'errore percentuale e_2 dato, si tratta di verificare se il considerare la banda limitata non alteri troppo il segnale g(t), in quanto l'errore introdotto è relativo a fatti puramente energetici. Si può pertanto considerare lo spettro troncato:

$$G_a(f) = G(f) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

e antitrasformarlo, ottenendo il segnale $g_a(t)$ che approssima il segnale desiderato. Si tratta quindi di stabilire se l'intervallo di frequenze (cioè la banda) considerato può essere ritenuto soddisfacente dal confronto fra g(t) e la sua approssimazione.

Segnali che subiscono alterazioni trascurabili, si dicono praticamente limitati in banda.

Fin qui è stato introdotto un concetto di banda che fa riferimento all'errore percentuale della energia per individuare la regione di frequenza in cui il segnale è più significativo: si è verificato nel caso di impulsi rettangolari (ma il risultato è più generale), che tale banda è inversamente proporzionale alla durata del segnale. Allora si può affermare che per avere lo stesso errore percentuale nella rappresentazione , segnali di durata maggiore hanno bisogno di bande più strette.

Come già detto, quella introdotta non è l'unica definizione di banda: un'altra è quella di banda a -3 dB, definita come l'intervallo di frequenza in cui l'ampiezza dello spettro non è inferiore a 0.707 volte il valore massimo. Tale definizione si applica più propriamente ai sistemi filtranti.

Un'ulteriore definizione che è possibile assumere è la cosiddetta banda equivalente del segnale definita dall'uguaglianza:

$$[B_{eq}]^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |G(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df}$$

Considerando anche la durata equivalente come:

$$\left[\tau_{eq}\right]^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left|g(t)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \left|g(t)\right|^2 dt}$$

Si può dimostrare che il prodotto fra queste due grandezze è limitato inferiormente dalla quantità $\frac{1}{4\pi}$:

$$\tau_{eq} B_{eq} \geq \frac{1}{4\pi}$$

Questa espressione rappresenta il principio di indeterminazione applicato alla teoria dei segnali: se l'impulso ha una durata equivalente piccola, la sua banda equivalente deve essere larga, e viceversa.
Al di là delle diverse formalizzazioni del concetto di banda si può osservare che, sempre, la durata e la banda stanno tra loro in un rapporto di proporzionalità inversa.
Vogliamo precisare che alla stessa conclusione si perviene adottando definizioni di durata e banda diverse da quelle qui introdotte; tali definizioni sono numerose e dipendono dal particolare problema trattato, per cui non vengono qui esaminate.

Tenuto conto che un segnale fisico è limitato temporalmente, perché ha un inizio ed un termine, si deve concludere che la banda è infinita; tuttavia poiché lo spettro è praticamente nullo al di fuori di un certo intervallo di frequenze, nel senso che il contributo all'energia del segnale dovuto alle frequenze esterne a detto intervallo è del tutto trascurabile, è appropriato, dal punto di vista applicativo, parlare di segnali praticamente limitati sia in durata che in banda.