COMPITI SVOLTI

DI

COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

Prof. Monica GHERARDELLI

Anno Accademico 2001-2002

CLASSIFICAZIONE DEGLI ESERCIZI DAI COMPITI

Energia e Potenza

12/2/2002 n. 1 (parziale)
16/4/2002 n. 3 (quesito obbligatorio)
18/4/2003 n. 1
12/9/2003 n.1 (1° quesito)
14/7/2004 n.1, n.3 (3° quesito)

Serie di Fourier

14/11/2001 n.1
17/07/2002 n.1
04/02/2003 n.1
30/06/2003 n.2
13/02/2004 n.1
23/04/2004 n.1
23/06/2004 n.1
14/07/2004 n.1
14/09/2004 n.1
12/11/2004 n.1 (2° quesito)
12/11/2004 n.2 (1° quesito)
11/02/2004 n. 1 (1° quesito)
28/06/2005 n. 1 (2° quesito)

Trasformata di Fourier

14/11/2001 n.2
17/07/2002 n.2
16/04/2002 n.1
12/09/2002 n.1
18/11/2002 n.1
04/02/2003 n.3
18/02/2003 n.1
18/07/2003 n.1
12/09/2003 n.1
14/11/2003 n.1
23/06/2004 n.2 (1° quesito)
14/07/2004 n.2
14/09/2004 n.2
12/11/2004 n.1 (1° quesito)
27/01/2004 n.1
27/01/2005 n.1 (1° quesito)
21/04/2005 n.2
28/06/2005 n.1 (1° quesito)
15/07/2005 n.1 (1° e 2° quesito)
15/09/2005 n.2 (2° quesito)

Convoluzione Grafica

29/01/2002 n.1
12/09/2002 n. 3
30/06/2003 n.1
30/01/2004 n. 1
21/04/2005 n.1

Funzione Delta di Dirac

04/02/2003 n.2

Autocorrelazione/Parseval/Densità Spettr.di Energia

29/01/2002 n.2
12/09/2002 n.2 (1° quesito)
13/02/2004 n.2
12/11/2004 n. 2 (2° quesito)
15/07/2005 n. 1 (3° quesito)

Classificazione Sistemi

12/02/2002 n.2
18/02/2003 n.2
18/07/2003 n. 2
30/01/2004 n. 2
15/07/2005 n. 2

Sistemi

14/11/2001 n.3
20/01/2002 n.3
12/02/2002 n.1
17/07/2002 n.3
18/11/2002 n.3
18/02/2003 n.3
18/04/2003 n.3
30/06/2003 n.3
18/07/2003 n.3
12/09/2003 n.3
14/11/2003 n.3
30/01/2004 n.3
13/02/2004 n.3
23/04/2004 n.3
23/06/2004 n.2 (2° quesito)
23/06/2004 n.3
14/07/2004 n.3
12/11/2004 n.3
27/01/2005 n.1 (2° quesito)
11/02/2005 n.1 (2° e 3° quesito)
28/06/2005 n.3
15/09/2005 n.2 (1° quesito)
15/09/2005 n.3

Inviluppo Complesso/ Trasformata di Hilbert

16/04/2002 n.2
18/11/2002 n. 2
12/09/2003 n.2
14/11/2003 n.2
11/02/2005 n.2
15/09/2005 n.2 (3° quesito)

Campionamento

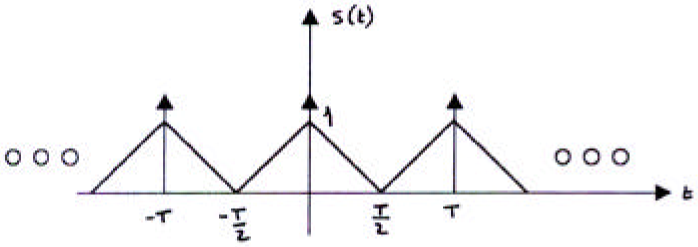
12/02/2002 n.3
12/09/2002 n.2 (2° quesito)
18/04/2003 n.2
23/04/2004 n.2
14/09/2004 n.3
27/01/2005 n.2
21/04/2005 n.3
28/06/2005 n.2
15/07/2005 n.3

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

14 Novembre 2001

Esercizio 1

Determinare i coefficienti della serie di Fourier del seguente segnale periodico



Esercizio 2

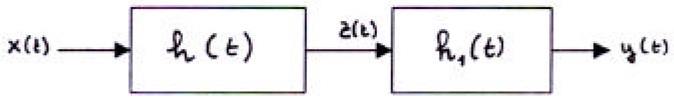
Stabilire, motivando la risposta anche con un esempio, a quali condizioni deve soddisfare il segnale g(t) perché:

G(f) exp(-j2πfT) sia reale e pari

G(f) sia una funzione periodica

Esercizio 3

Sia x(t) il segnale in ingresso al seguente sistema LTI.



Determinare z(t) e la potenza del segnale in uscita, y(t), quando:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\,2T)$$

$$h(t) = rect\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

$$H_1(f) = rect\left(\frac{f}{\Delta}\right) \qquad \Delta = \frac{3}{2T}$$

ESERCIZIO 1

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[A \, \mathrm{tri}\left(\frac{t - nT}{T/2} \right) + \delta(t - nT) \right]$$

Lo sviluppo in serie di Fourier è dato da:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \, e^{j 2\pi \frac{n}{T} t}$$

dove T è il periodo della funzione

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \, e^{-j 2\pi \frac{n}{T} t} \, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[A \, \mathrm{tri}\left(t/_{T/2} \right) \right] e^{-j 2\pi \frac{n}{T} t} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \, e^{-j 2\pi \frac{n}{T} t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \mathcal{F} \left\{ A \, \mathrm{tri}\left(t/_{T/2} \right) \right\}_{f = \frac{n}{T}} + \frac{1}{T} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{T} \left[A \frac{T}{2} \, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{T}{2} f \right) \right]_{f = \frac{n}{T}} + \frac{1}{T} =$$

$$= \frac{A}{2} \, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2} \right) + \frac{1}{T}$$

ESERCIZIO 2

La trasformata $G(f)\,e^{-j2\pi fT}$ è reale e pari

a) $G(f)\,e^{-j2\pi fT} \longleftrightarrow g(t-T)$

$g(t-T)$ reale e pari

b) $G(f)$ periodico $\Rightarrow$ $g(t)$ è un segnale campionato

Infatti se $s(t)$ è una funzione periodica, il suo spettro è una funzione della frequenza di tipo discreto

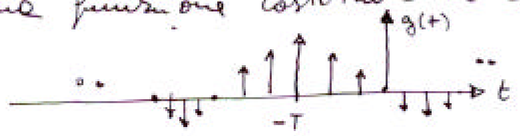
$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n\,\delta(f - nF)$$

con $F = \frac{1}{T}$, T periodo della funzione $s(t)$

S_n coeff. di Fourier di $s(t)$

Pertanto, per la propr. della dualità (3) si ha che è vero che se $G(f)$ è periodico, $g(t)$ è una funzione costituita da campioni.

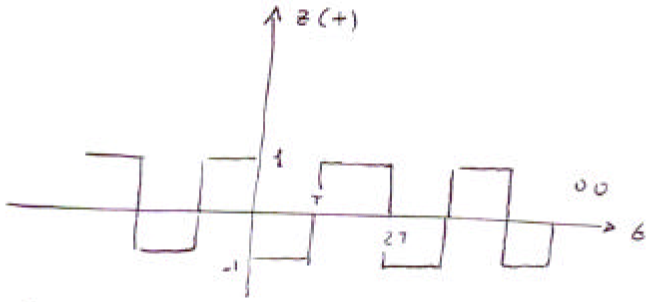
Esempio:



Esercizio 3

$$z(t) = x(t) \otimes h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n2T) \otimes h(t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(t - n2T)$$



Il segnale $z(t)$ è periodico, quindi il suo spettro è costituito da una sequenza di righe.

$y(t)$ è costituito da 2 sole righe spettrali, cioè

$y(t)$ è una sinusoide oscillante alla freq. di prima armonica $\left(\frac{1}{2T}\right)$

Quindi

$$P_y = |Y_1|^2 + |Y_{-1}|^2 = 2|Y_1|^2$$

$$Y_1 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} h(t)\, e^{-j2\pi \frac{1}{2T} t}\, dt = \frac{1}{2T}\left[T\,\mathrm{sinc}(Tf)\, e^{j2\pi f T/2} - T\,\mathrm{sinc}(Tf) \cdot e^{-j2\pi f T/2}\right]_{f=\frac{1}{2T}} =$$

$$= \frac{1}{2T}\, T\,\mathrm{sinc}(Tf)\left[e^{j\cancel{2}\pi f T/\cancel{2}} - e^{-j\cancel{2}\pi f T/\cancel{2}}\right]_{f=\frac{1}{2T}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(Tf)\, 2j\pi f T\, \frac{\mathrm{sen}(\pi f T)}{\pi f T}\right]_{f=\frac{1}{2T}} = \left[\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2} j\pi f T\, \mathrm{sinc}^2(fT)\right]_{f=\frac{1}{2T}} =$$

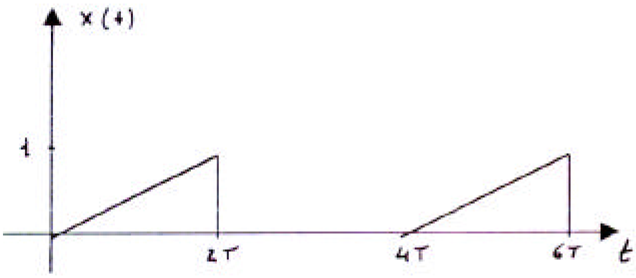
$$= j\pi \frac{1}{2T} T\, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right) = j\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right) \qquad P = 2\left|\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2$$

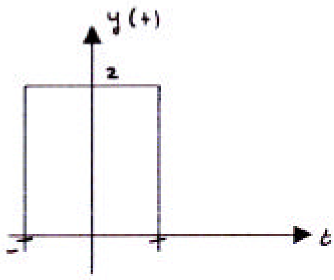
COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

29 Gennaio 2002

Esercizio 1

Calcolare la convoluzione grafica fra i segnali di figura.





Esercizio 2

Stabilire, motivando la risposta, se le seguenti funzioni possono rappresentare l'autocorrelazione di un segnale reale ad energia finita.

$g_1(t) = e^{-|t|}$

$g_2(t) = e^{-t}\ u(t)$

$g_3(t) = -\ e^{-|t|}$

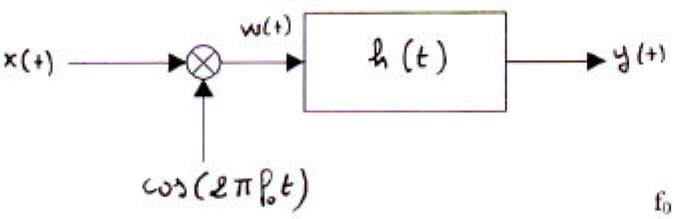
Esercizio 3

In ingresso al seguente sistema, con H(f) = rect[f/4B], è posto il segnale x(t).

Determinare l'uscita y(t) nei due casi seguenti:

a) $X(f) = K\ \delta(f)$

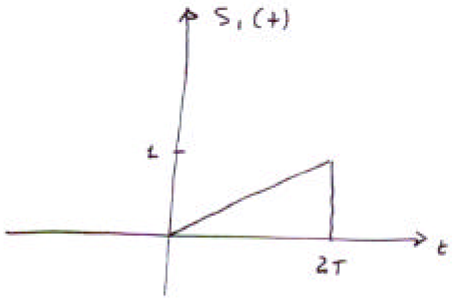
b) $X(f) = \mathrm{tri}(f/2B)$



$f_0 = B$

Esercizio 1

Il segnale s(t) è costituito da due segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$, dove $s_2(t) = s_1(t - 4T)$



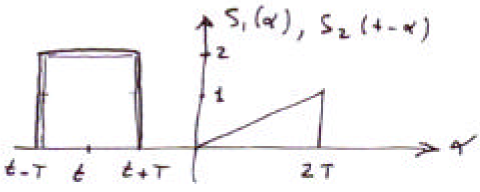
$$s_1(t) = \frac{t}{2T} \quad \forall t \in [0, 2T]$$

Poichè la convoluzione è un operatore lineare possiamo spezzare in due il calcolo grafico

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha)\, z(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\alpha)\, z(t-\alpha)\, d\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(\alpha)\, z(t-\alpha)\, d\alpha$$

Procediamo con il calcolo del primo dei due integrali

$$c_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\alpha)\, z(t-\alpha)\, d\alpha$$



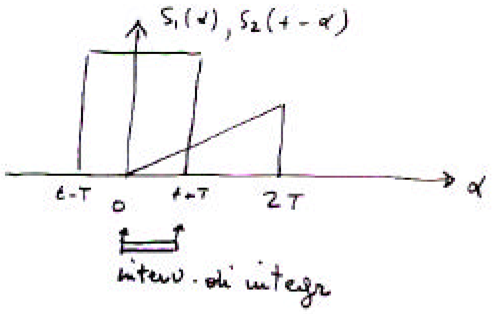
Individuiamo i vari intervalli di t

1) $t+T<0 \qquad C_1(t)=0$

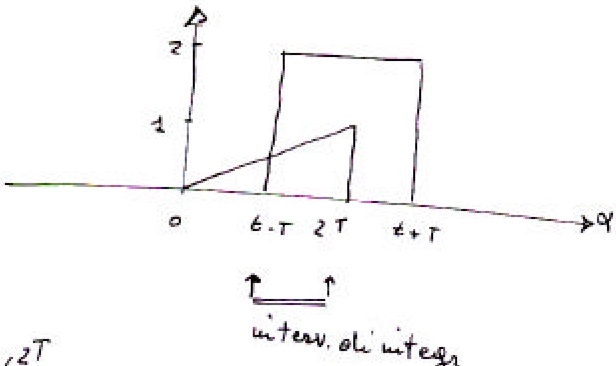
2) $t+T \geq 0 \;,\; t+T<2T \implies -T \leq t < T$

$$C_1(t)=\int_0^{t+T} 2\cdot\frac{\alpha}{2T}\,d\alpha=\frac{\alpha^2}{2T}\Bigg|_0^{t+T}=\frac{(t+T)^2}{2T}=$$

$$=\frac{t^2+2tT+T^2}{2T}$$



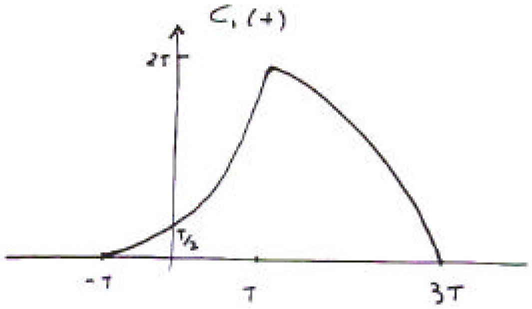
3) $t+T>2T \;,\; t-T \leq 2T \implies T \leq t < 3T$



$$C_1(t)=\int_{t-T}^{2T} 2\,\frac{\alpha}{2T}\,d\alpha=\frac{\alpha^2}{2T}\Bigg|_{t-T}^{2T}=\frac{4T^2}{2T}-\frac{(t-T)^2}{2T}=$$

$$=2T-\frac{t^2}{2T}+t-\frac{T}{2}=\frac{3}{2}T+t-\frac{t^2}{2T}$$

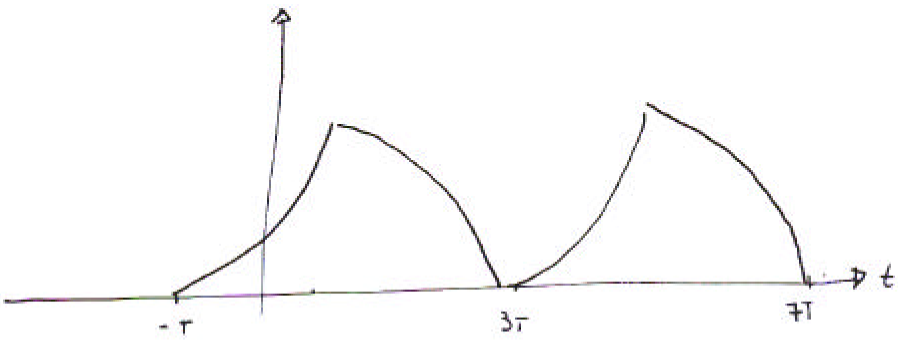
4) $t \geq 3T \qquad C_1(t)=0$



La seconda convoluzione, $c_2(t)$, sarà nella forma uguale a $c_1(t)$, ma traslata di $4T$, cioè

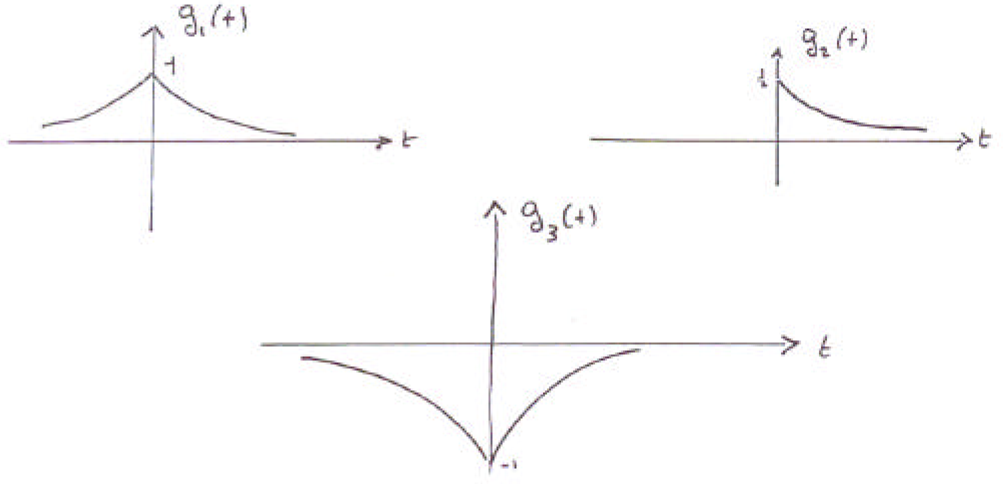
$$c_2(t) = c_1(t-4T)$$

Quindi si avrà



Esercizio 2

Possiamo rappresentare graficamente le tre funzioni



Le proprietà dell'autocorrelazione sono:

Se $g_i(t)$ è reale ... $\Longrightarrow$ 1) $R_g(0) = E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_i(t)|^2 dt > 0$

2) $|R_g(\tau)| \leq R_g(0)$

3) $R_g(\tau)$ reale e simmetrica

Solo la prima funzione soddisfa a tutte le proprietà e quindi solo questa può rappresentare la autocorrelazione di un segnale reale, che ha $E = 1$.

3) Il segnale all'ingresso del sistema è dato da

$$w(t) \triangleq x(t)\cos(2\pi B t) = \frac{X(t)}{2} e^{j2\pi Bt} + \frac{X(t)}{2} e^{-j2\pi Bt}$$

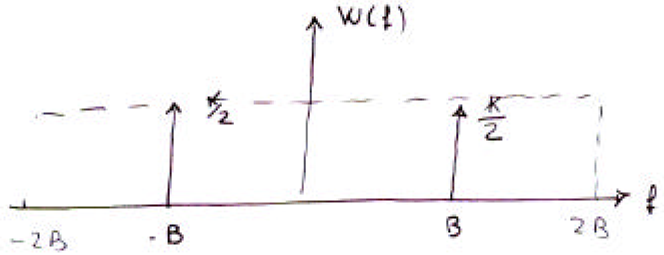
Possiamo valutare la sua trasformata.

$$W(f) = \frac{X(f-B)}{2} + \frac{X(f+B)}{2}$$

All'uscita del filtro avremo

$$Y(f) = W(f)H(f) = \frac{X(f-B)}{2}H(f) + \frac{X(f+B)}{2}H(f)$$

Caso a)

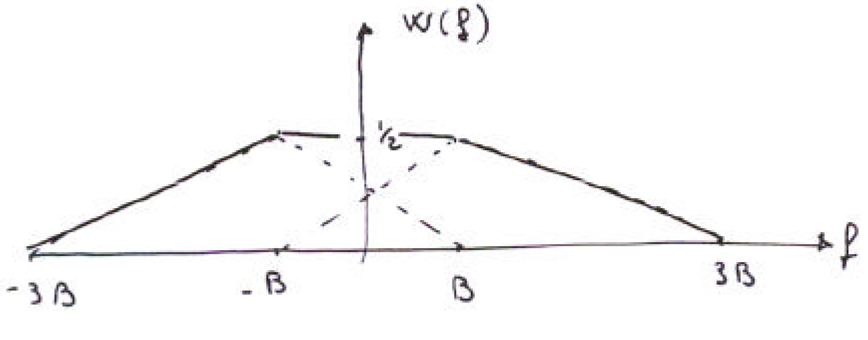


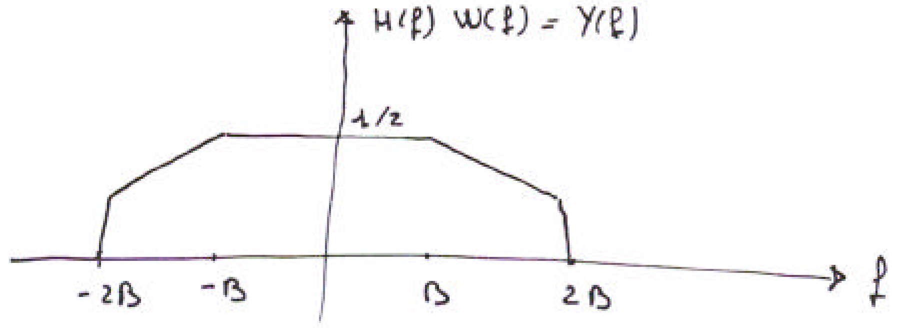
Quindi $$Y(f) = K\frac{\delta(f-B)}{2} + K\frac{\delta(f+B)}{2} =$$

$$y(t) = K\cos(2\pi B t)$$

Caso b)

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{X(f-f_0)}{2} + \frac{X(f+f_0)}{2}$$





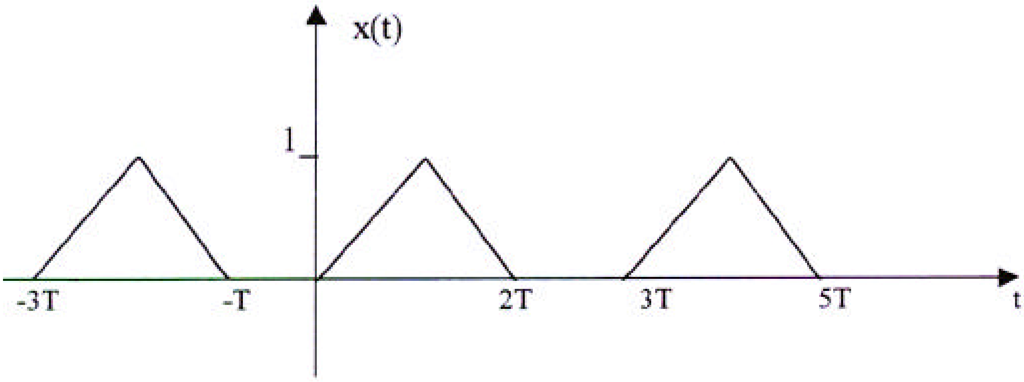
COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

12 Febbraio 2002

Esercizio 1

Il segnale periodico di periodo 3T riportato in figura è posto in ingresso al filtro con risposta in frequenza H(f) = rect(f/2B), con B= 1/(4T).

Determinare il rapporto fra la potenza in uscita e la potenza in ingresso al sistema.



Esercizio 2

Stabilire se il sistema con ingresso x(t) e uscita y(t) è lineare, tempo invariante e causale (in questo caso con t>0).

$$y(t) = \int_0^t x(\alpha)d\alpha$$

Esercizio 3

Il segnale

$s(t) = sinc^2(Bt)\cos(2\pi Bt)$

viene campionato con campionamento istantaneo ad una frequenza f_s doppia della frequenza di Nyquist.

Disegnare lo spettro del segnale campionato.

Esercizio 1

La potenza in ingresso si calcola attraverso la definizione di Potenza di un segnale periodico di periodo T_0

$$P \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

Nel nostro caso $T_0 = 3T$, quindi

$$P = \frac{1}{3T} \int_{-T}^{2T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{3T} \int_{0}^{2T} |x(t)|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{3T} 2 \int_0^T \frac{t^2}{T^2} dt = \frac{2}{3T} \left[\frac{t^3}{3T^2} \right]_0^T =$$

$$= \frac{2}{9T} \frac{T^3}{T^2} = \frac{2}{9}$$

Il segnale, in quanto periodico, è sviluppabile in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j 2\pi \frac{n}{3T} t}$$

In uscita dal filtro si avrà solo una riga spettrale, quella in corrispondenza della freq. nulla.

Quindi, per il teorema di Parseval, se $y(t)$ è l'uscita

$$P_{out} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |Y_n|^2 = |Y_0|^2 = |X_0|^2 = \left| \frac{1}{3T} \int_{-T}^{2T} x(t) dt \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{1}{3T} \frac{2T \cdot 1}{2} \right|^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{P_{out}}{P_{IN}} = 50\%$$

ESERCIZIO 2

$$y(t) = \int_0^t x(\alpha)\, d\alpha$$

LINEARE: la relazione ingresso/uscita è di tipo integrale, che è un operatore lineare, quindi il sistema è lineare

TEMPO-INVARIANTE: dalla def si ha che se $y(t) \triangleq \int_0^t x(\alpha)\,d\alpha$

il sistema è tempo invariante quando

$$y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$$

Nel nostro caso:

$$y(t-t_0) = \int_0^{t-t_0} x(\alpha)\,d\alpha \qquad T[x(t-t_0)] = \int_0^t x(\alpha-t_0)\,d\alpha$$

poniamo $\alpha - t_0 = \beta$ nella 2^a relazione $\Rightarrow T[x(t-t_0)] = \int_{-t_0}^{t-t_0} x(\beta)\,d\beta$

E' evidente che le due espressioni sono diverse

CAUSALE: Il sistema è causale, in quanto, per $t>0$ l'uscita dipende solo dagli ingressi agli istanti precedenti.

Esercizio 3

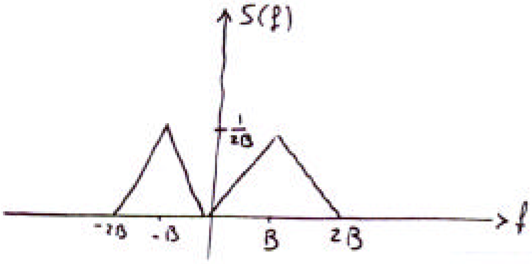
$$s(t) = \mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi Bt)$$

Sappiamo che $\mathrm{sinc}^2(Bt) \longleftrightarrow \frac{1}{B}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{B}\right)$

$$\cos(2\pi Bt) \longleftrightarrow \frac{\delta(f-B)+\delta(f+B)}{2}$$

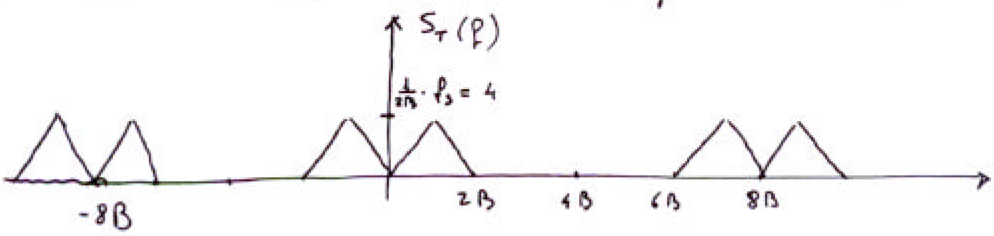
Quindi

$$S(f) = \frac{1}{2B}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f-B}{B}\right) + \frac{1}{2B}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f+B}{B}\right)$$



La frequenza di campionamento minima, per il segnale $s(t)$, ovvero la frequenza di Nyquist, è $f_N = 2 \times 2B = 4B$

: $f_s = 2 f_N \Rightarrow f_s = 8B$ è la frequenza di camp. scelta



$$S_T(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - n f_s)$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

16 Aprile 2002

Esercizio 1

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$s(t) = \sum_{n=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n rect\left[\frac{t-2n}{2}\right]$$

In particolare, si calcolino modulo e fase di tale trasformata per f=1/2.

Esercizio 2

Trovare il segnale inviluppo complesso relativo al segnale passa-banda

$s(t)= \mathrm{sinc}^2(20\, t) \cos[400\, \pi\, t]$

Indicare la procedura di campionamento per una corretta ricostruzione.

Esercizio 3

Calcolare la potenza media del segnale

$$s(t) = 3\cos(8\pi t) - 4\cos[4\pi(t-3)]$$

Facoltativo: Se il segnale è posto in ingresso ad un sistema con risposta impulsiva $h(t)= 2\, \mathrm{sinc}^2(t) \cos(8\, \pi\, t)$, determinarne l'uscita.

Esercizio 1

$$s(t) = \sum_{n=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{rect}\left(\frac{t-2n}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \sum_{n=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t-2n}{2}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2\,\mathrm{sinc}(2f)\, e^{-j2\pi f 2n} =$$

$$= 2\,\mathrm{sinc}(2f) \sum_{n=0}^{4} \left(\frac{1}{2} e^{-j4\pi f}\right)^n$$

$$S(f)\Big|_{f=\frac{1}{2}} = 0 \implies \text{fase nulla e modulo nullo}$$

Esercizio 2

$s(t) = \operatorname{sinc}^2(20t)\cos[2\pi(200)t]$

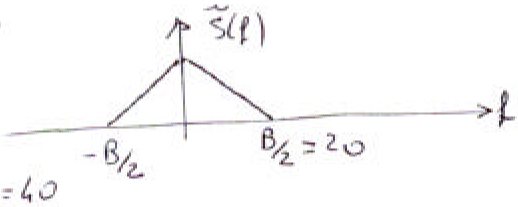
La frequenza portante $f_0 = 200$

Confrontando l'espressione di $s(t)$ con quella canonica di un segnale passabanda espresso in termini di inviluppo complesso: $g(t) = g_I(t)\cos(2\pi f_0 t) - g_Q(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$, si ha

$\tilde{s}(t) = \operatorname{sinc}^2(20t)$ segnale reale, coincidente con la componente in fase

Poichè l'inviluppo complesso è costituito da un segnale reale, il campionamento potrà essere effettuato prelevando una sequenza di campioni da $s_I(t) \equiv \tilde{s}(t)$ con frequenza $f_S \geq 2\left(\frac{B}{2}\right)$, dove B è la banda del segnale $s(t)$

$\tilde{s}(t) = \operatorname{sinc}^2(20t) \longleftrightarrow \tilde{S}(f) = \frac{1}{20}\operatorname{tri}\left(\frac{f}{20}\right)$



Quindi $f_{s} = 20 \cdot 2 = 40$

ESERCIZIO 3

a) $s(t) = 3\cos[2\pi 4t] - 4\cos[2\pi 2t - 12\pi] =$

$$= 3\,\frac{e^{j2\pi 4t}}{2} + 3\,\frac{e^{-j2\pi 4t}}{2} - 4\,\frac{e^{j(2\pi 2t - 12\pi)}}{2} - 4\,\frac{e^{-j(2\pi 2t - 12\pi)}}{2} =$$

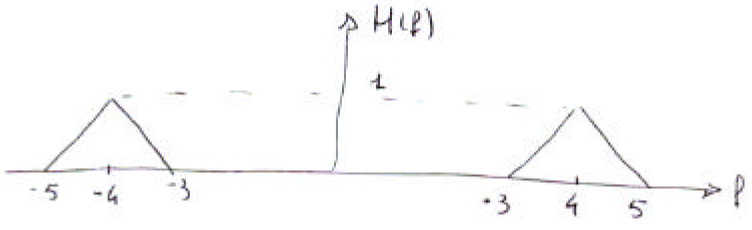
$$= \frac{3}{2}\,e^{j2\pi 4t} + \frac{3}{2}\,e^{-j2\pi 4t} - 2\,e^{j(2\pi 2t - 12\pi)} - 2\,e^{-j(2\pi 2t - 12\pi)}$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2 = \left|\frac{3}{2}\right|^2 + \left|\frac{3}{2}\right|^2 + |2|^2 + |2|^2 =$$

$$= \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2}$$

b) $H(f) = 2\,\mathrm{tri}(f) \circledast \left[\frac{\delta(f-4) + \delta(f+4)}{2}\right] =$

$$= \mathrm{tri}(f-4) + \mathrm{tri}(f+4)$$



L'uscita è $y(t) = 3\cos(2\pi 4t)$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

17 Luglio 2002

Esercizio 1

Determinare lo sviluppo in serie di Fourier del segnale di figura e calcolare la potenza media associata alla componente continua.

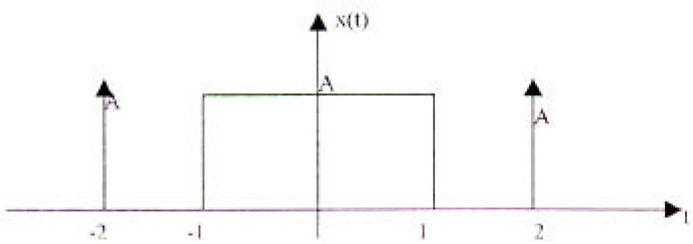
Esercizio 2

La trasformata di Fourier del segnale g(t) = exp[-t] u(t) è, come noto, $G(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$.

Determinare la trasformata di Fourier del segnale: $h(t) = \frac{1}{1-j6\pi t}$ giustificando la risposta.

Esercizio 3

Disegnare, nel dominio del tempo, l'uscita del sistema con risposta impulsiva h(t)= rect(t/2), quando in ingresso è posto il segnale x(t) riportato in figura.



ESERCIZIO 1

$x_T(t)$ è un segnale periodico di periodo $T_0 = 4$

Quindi $x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j\pi \frac{n}{2} t}$

$X_n = \frac{1}{T_0}\left[X(f)\right]_{f=\frac{n}{T_0}}$ dove $X(f) = \mathcal{F}\left\{ x_T(t)\, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)\right\}$

Quindi $X(f)$ è la trasformata di Fourier del segnale nel periodo fondamentale:

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-1/2}{1}\right)$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f)\, e^{-j2\pi f} + 2\,\mathrm{sinc}(f)\, e^{-j\pi f}$$

$$X_n = \frac{1}{T_0}\left[X(f)\right]_{f=\frac{n}{T_0}} = \frac{1}{4}\left[2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\pi\frac{n}{2}} + 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{4}\right) e^{-j\frac{\pi n}{4}}\right]$$

$$P_{x_0} = |X_0|^2 = \left[\frac{1}{4}(2+2)\right]^2 = 1$$

ESERCIZIO 2

$$g(t) = e^{-t}\,u(t) \longleftrightarrow G(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$G(t) = \frac{1}{1+j2\pi t} \overset{\text{prop. 3}}{\longleftrightarrow} g(-f) = e^{f}\,u(-f)$$

$$G(3t) = \frac{1}{1+j2\pi 3t} \underset{a=3}{\overset{\text{prop 4}}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{|a|}g\left(-\frac{f}{a}\right) = \frac{1}{3}\,e^{f/3}\,u(-f/3)$$

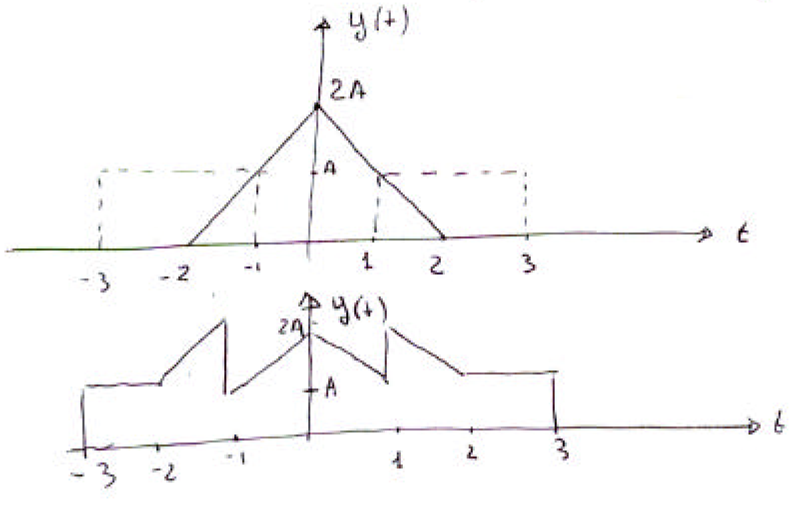
$$h(t) = G(-3t) = \frac{1}{1-j2\pi 3t} \longleftrightarrow H(f) = \frac{1}{3}\,e^{-f/3}\,u(f)$$

ESERCIZIO 3

$$x(t) = A\delta(t-2) + A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + A\delta(t+2)$$

$$h(t) = \mathrm{rect}(t/2)$$

$$y(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right) + 2A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2}\right) + A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right)$$

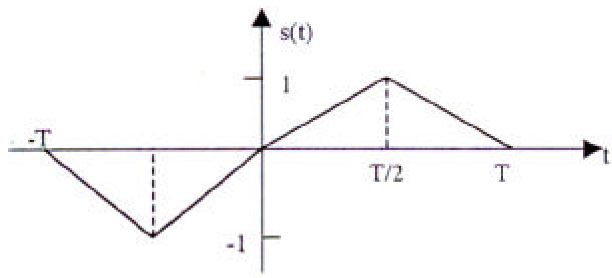


COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

12 Settembre 2002

Esercizio 1

Sia dato il segnale ad energia finita riportato in figura.
Determinarne la trasformata di Fourier e disegnare lo spettro delle fasi.

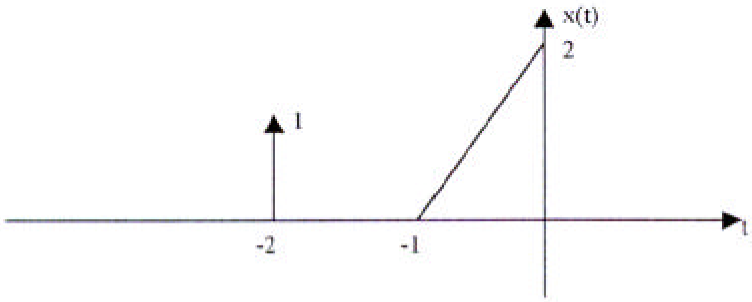


Esercizio 2

Stabilire se la funzione della frequenza $S_x(f) = T^2 sinc^2(Tf) rect\left(\frac{Tf}{2}\right)$ può rappresentare la densità spettrale di energia di un segnale reale x(t).
Il segnale x(t) rispetta le condizioni del teorema del campionamento?

Esercizio 3

Determinare la convoluzione grafica fra il segnale x(t) riportato in figura e la funzione gradino unitario u(t)



Esercizio 1

$$s(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{t + T/2}{T/2}\right)$$

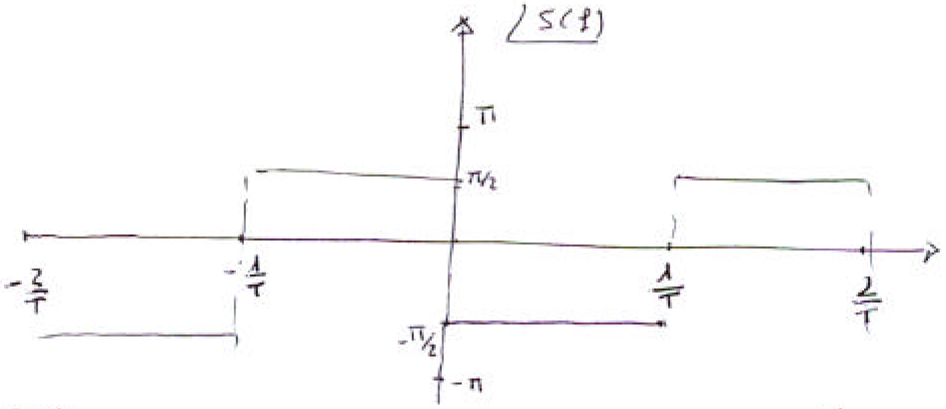
$$\updownarrow$$

$$S(f) = \frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right) e^{-j2\pi f T/2} - \frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right) e^{j2\pi f T/2} =$$

$$= \frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right)\left[e^{-j\cancel{2}\pi f T/\cancel{2}} - e^{j\cancel{2}\pi f T/\cancel{2}}\right] =$$

$$= -2j\,\frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right)\left[\frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j}\right] =$$

$$= -2j\,\frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right)\mathrm{sen}(\pi f T)$$



$$\angle S(f) = -\pi + \frac{\pi}{2} + \angle \mathrm{sen}(\pi f T) = -\pi + \frac{\pi}{2} + \begin{cases} \pi & \text{se } \mathrm{sen}(\pi f T) < 0 \\ 0 & \text{se } \mathrm{sen}(\pi f T) > 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

a) La funzione $S_x(f)$ in quanto reale e pari rappresenta la densità spettrale di energia del segnale reale $x(t)$. Infatti, dalla teoria

$$S_x(f) = |X(f)|^2 \implies |X(f)| = T|\mathrm{sinc}(Tf)|\,\mathrm{rect}\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

b) Il segnale $x(t)$ è reale, Fourier trasformabile e a banda limitata, poiché $|X(f)|$ è nullo per $|f| > \frac{1}{T}$. Per effettuare un campionamento privo di aliasing occorre che $f_s \geq \frac{2}{T}$

ESERCIZIO 3

Il segnale $x(t)$ è composto da due segnali, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, dove $x_1(t) \triangleq \delta(t+2)$

Pertanto $x(t) = \delta(t+2) + x_2(t)$

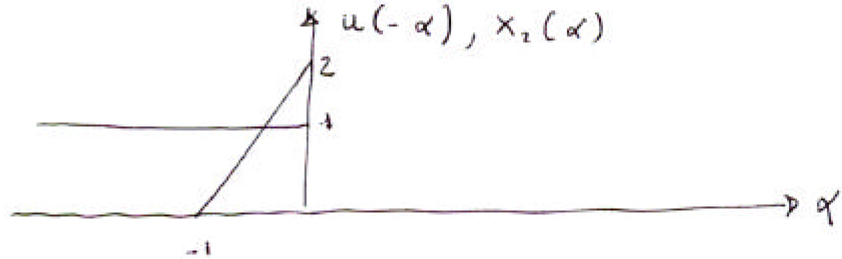
Possiamo procedere al calcolo separato delle convoluzioni:

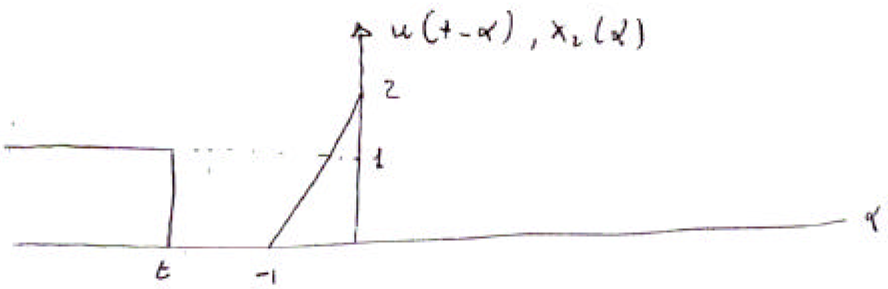
$$x_1(t) \otimes u(t) = \delta(t+2) \otimes u(t) = u(t+2)$$

$$x_2(t) \otimes u(t)$$

Questo per la linearità dell'operatore convoluzione.

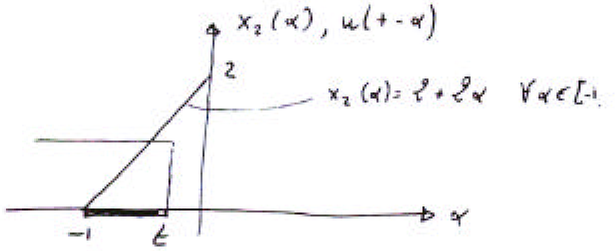
Calcoliamo graficamente la seconda espressione: ribaltiamo $u(t)$ intorno all'asse α.





Notiamo che per $\boxed{t<-1}$: $x_2(t)\otimes u(t)=0$

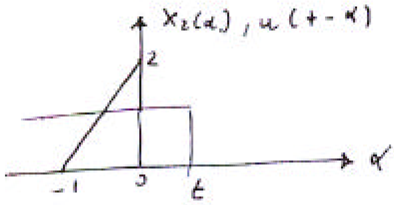
per $\boxed{-1\le t<0}$:



$$x_2(t)\otimes u(t) = \int_{-1}^{t}(2+2\alpha)\,d\alpha = 2\alpha+\alpha^2\Big|_{-1}^{t} =$$

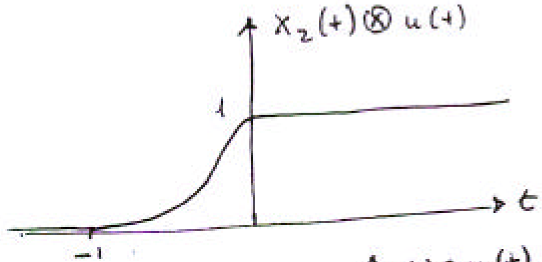
$$= 2t + t^2 - [-2+1] = t^2+2t+1$$

per $\boxed{t\ge 0}$



$$x_2(t)\otimes u(t) = \int_{-1}^{0}(2+2\alpha)\,d\alpha =$$

$$= 2\alpha+\alpha^2\Big|_{-1}^{0} = 2-1 = 1$$



Sommando i due contributi si ottiene $\Rightarrow$