C O M P I T I S V O L T I

D I

C O M U N I C A Z I O N I E L E T T R I C H E I

Prof. M o n i c a G H E R A R D E L L I

Anno Accademico 2002-2003

CLASSIFICAZIONE DEGLI ESERCIZI DAI COMPITI

Energia e Potenza
12/2/2002 n. 1 (parziale)
16/4/2002 n. 3 (quesito obbligatorio)
18/4/2003 n. 1
12/9/2003 n.1 (1° quesito)
14/7/2004 n.1, n.3 (3° quesito)

Serie di Fourier
14/11/2001 n.1
17/07/2002 n.1
04/02/2003 n.1
30/06/2003 n.2
13/02/2004 n.1
23/04/2004 n.1
23/06/2004 n.1
14/07/2004 n.1
14/09/2004 n.1
12/11/2004 n.1 (2° quesito)
12/11/2004 n.2 (1° quesito)
11/02/2004 n. 1 (1° quesito)
28/06/2005 n. 1 (2° quesito)

Trasformata di Fourier
14/11/2001 n.2
17/07/2002 n.2
16/04/2002 n.1
12/09/2002 n.1
18/11/2002 n.1
04/02/2003 n.3
18/02/2003 n.1
18/07/2003 n.1
12/09/2003 n.1
14/11/2003 n.1
23/06/2004 n.2 (1° quesito)
14/07/2004 n.2
14/09/2004 n.2
12/11/2004 n.1 (1° quesito)
27/01/2004 n.1
27/01/2005 n.1 (1° quesito)
21/04/2005 n.2
28/06/2005 n.1 (1° quesito)
15/07/2005 n.1 (1° e 2° quesito)
15/09/2005 n.2 (2° quesito)

Convoluzione Grafica
29/01/2002 n.1
12/09/2002 n. 3
30/06/2003 n.1
30/01/2004 n. 1
21/04/2005 n.1

Funzione Delta di Dirac
04/02/2003 n.2

Autocorrelazione/Parseval/Densità Spettr.di Energia
29/01/2002 n.2
12/09/2002 n.2 (1° quesito)
13/02/2004 n.2
12/11/2004 n. 2 (2° quesito)
15/07/2005 n. 1 (3° quesito)

Classificazione Sistemi
12/02/2002 n.2
18/02/2003 n.2
18/07/2003 n. 2
30/01/2004 n. 2
15/07/2005 n. 2

Sistemi
14/11/2001 n.3
20/01/2002 n.3
12/02/2002 n.1
17/07/2002 n.3
18/11/2002 n.3
18/02/2003 n.3
18/04/2003 n.3
30/06/2003 n.3
18/07/2003 n.3
12/09/2003 n.3
14/11/2003 n.3
30/01/2004 n.3
13/02/2004 n.3
23/04/2004 n.3
23/06/2004 n.2 (2° quesito)
23/06/2004 n.3
14/07/2004 n.3
12/11/2004 n.3
27/01/2005 n.1 (2° quesito)
11/02/2005 n.1 (2° e 3° quesito)
28/06/2005 n.3
15/09/2005 n.2 (1° quesito)
15/09/2005 n.3

Inviluppo Complesso/ Trasformata di Hilbert
16/04/2002 n.2
18/11/2002 n. 2
12/09/2003 n.2
14/11/2003 n.2
11/02/2005 n.2
15/09/2005 n.2 (3° quesito)

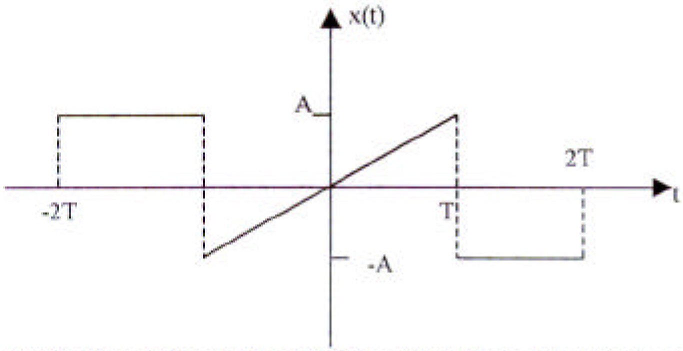
Campionamento
12/02/2002 n.3
12/09/2002 n.2 (2° quesito)
18/04/2003 n.2
23/04/2004 n.2
14/09/2004 n.3
27/01/2005 n.2
21/04/2005 n.3
28/06/2005 n.2
15/07/2005 n.3

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

18 Novembre 2002

Esercizio 1

Sia dato il segnale di figura.



Determinare le seguenti caratteristiche dello spettro X(f) applicando le proprietà della trasformata di Fourier:

a) Il segnale ha banda limitata?
b) X(f) per f=0
c) Re[X(f)]
d) $\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f \frac{T}{2}} df$
e) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

Esercizio 2

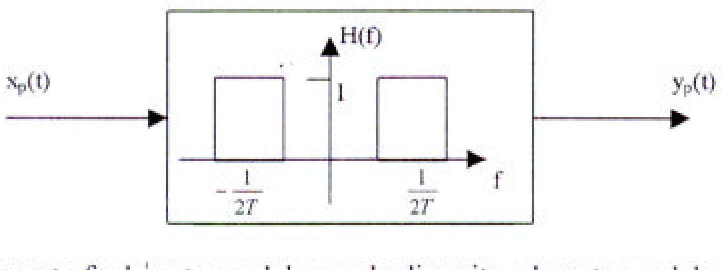
Determinare l'inviluppo complesso e la larghezza di banda del segnale

$x(t) = A\, sinc(4Bt) \cos(2\pi f_0 t)$ con $f_0 >> B$

Discutere la possibilità di campionare il segnale x(t).

Esercizio 3

Il segnale $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\, rect\left[\frac{t - n2T}{T}\right]$ è posto in ingresso al sistema di figura, avente banda $\frac{1}{2T}$.



Determinare il rapporto fra la potenza del segnale di uscita e la potenza del segnale in ingresso.

COMPITO DI COM. ELETTRICHE I 18/11/2002

TEMA 3

1) a. Il segnale non è limitato in banda perchè di durata limitata

b. $X(f)|_{f=0} = 0$ perchè l'area sottesa da $x(t)$ è nulla (prop. 8)

c. $\mathrm{Re}\{X(f)\} = 0$ perchè il segnale è reale e dispari (prop. 7)

d. $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f \frac{T}{2}}\, df = \frac{A}{2}$ perchè l'integrale dato è $\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}|_{t=T/2}$

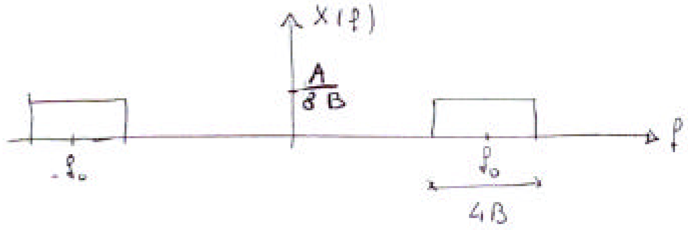
e. $$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 2\int_0^{2T} |x(t)|^2 dt =$$

$$= 2\int_0^{T} \left(\frac{At}{T}\right)^2 dt + 2\int_T^{2T} A^2\, dt =$$

$$= 2\left[\frac{A^2}{T^2}\frac{t^3}{3}\right]_0^T + 2\left[A^2 t\right]_T^{2T} = \frac{2}{3}\frac{A^2 T^{\cancel{3}}}{\cancel{T^2}} + 2A^2T =$$

$$= \frac{2}{3}A^2T + 2A^2T = \frac{8}{3}A^2T$$

2) Il segnale $x(t)$ è passabanda con freq. di centrobanda f_0



$$x(t) = A\,\mathrm{sinc}(4Bt)\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{A}{4B}\frac{1}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{4B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{4B}\right)\right]$$

L'inviluppo complesso del segnale è $\tilde{x}(t) = A\,\mathrm{sinc}(4Bt)$

La banda del segnale è pari a $4B$

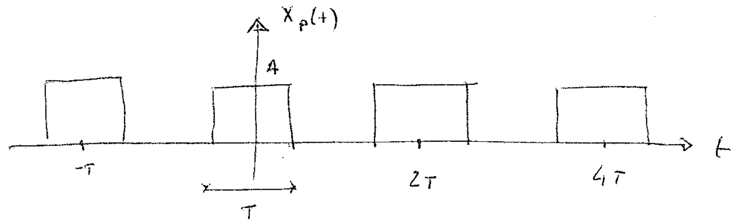
Poichè il segnale è passabanda, a en. finito, continuo e reale può essere campionato con camp. del 1° ordine, mediante il quale si ottiene un'unica sequenza di campioni prelevati a frequenza minima $f_s = 2(4B) = 8B$

Se si applica il campionamento del 2° ordine è possibile prelevare 2 sequenze di campioni (in questo caso non esiste la comp. in quadratura, quindi è suff. 1 sequenza) a frequenza $f_s\big|_{min} = 4B$

3) Il segnale $x_p(t)$ è sviluppabile in serie di Fourier

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{j 2\pi \frac{n}{T_0} t} \qquad T_0 = 2T$$

$$X_n = \frac{AT}{2T} \operatorname{sinc}\left(\frac{nT}{2T}\right) = \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$P_{x_p} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x_p(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left|A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right|^2 dt = \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 \, dt = \frac{A^2}{2}$$

In uscita avremo una sola componente armonica, quella corrispondente alla freq. di 1ª armonica, la potenza della quale, per l'uguaglianza di Parseval è:

$$P_{y_p} = |Y_1|^2 + |Y_{-1}|^2 = 2\,|X_1|^2 = 2\,\frac{A^2}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A^2}{2}\,\frac{4}{\pi^2} =$$

$$= 2\left(\frac{A}{\pi}\right)^2$$

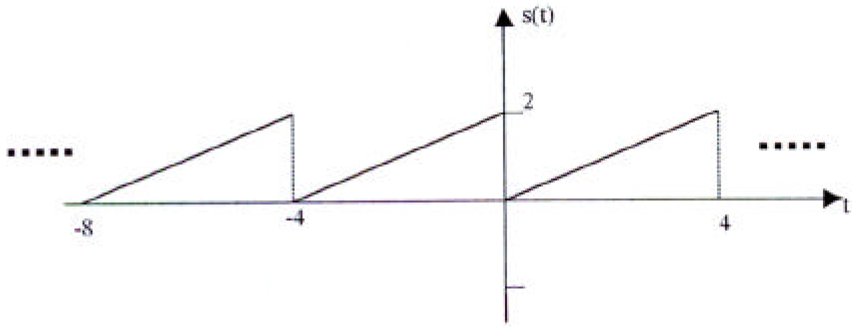
$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{2A^2}{\pi^2}\,\frac{2}{A^2} = \frac{4}{\pi^2}$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

4 Febbraio 2003

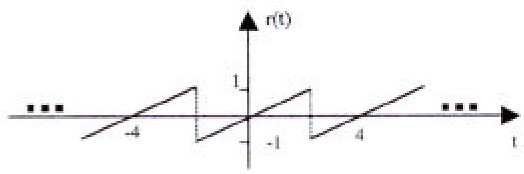
Esercizio 1

Rappresentare graficamente lo spettro del segnale di figura



Sapendo che i coefficienti di r(t) valgono

$$R_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ j\dfrac{1}{n\pi}(-1)^n & n \neq 0 \end{cases}$$



Esercizio 2

Elencare le caratteristiche del segnale $d(t) = -5\delta\left(t+\dfrac{1}{4}\right)$

Determinare: d(t) rect(t)
<d(t) , rect(t)>
$d(t) \otimes rect(t)$

Esercizio 3

Disegnare lo spettro delle ampiezze e lo spettro delle fasi del segnale

$g(t) = -[2B\, \mathrm{sinc}^2(Bt/2)\, \mathrm{sen}(\pi Bt)] \otimes B\mathrm{sinc}(Bt)$

Esercizio 1

Possiamo osservare che $s(t) = 1 + r(t+2)$

Quindi in $s(t)$ è presente una componente continua $S_0 = +1$, mentre i coefficienti S_n per $n \neq 0$ differiscono dagli R_n per uno sfasamento:

$$S_n = R_n \, e^{j 2\pi \frac{n}{T_0}(2)} \qquad n \neq 0$$

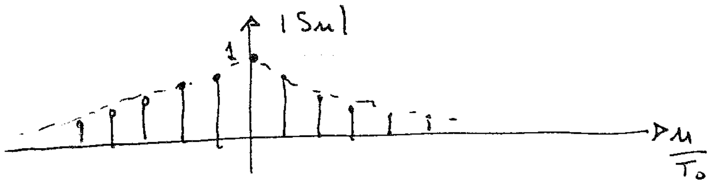
$$S_n = R_n \, e^{j n\pi} =$$

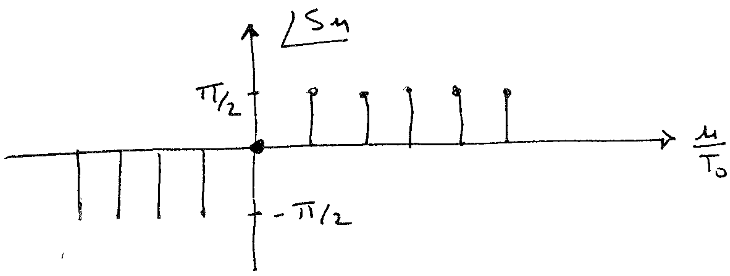
$$= j \frac{1}{n\pi} (-1)^n (-1)^n =$$

$$= \frac{j}{n\pi}$$

Le ampiezze dei coefficienti sono pertanto: $|S_n| = \frac{1}{|n|\pi}$

Le fasi: $\angle S_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & n < 0 \end{cases}$





Esercizio 2

$d(t)$ è proporzionale ad una δ di Dirac, pertanto

a) ha area -5

b) è applicata in $t = -\frac{1}{4}$

c) ha ampiezza ∞

d) ha durata nulla

e) energia infinita

$$d(t)\,\mathrm{rect}(t) = -5\,\delta(t)\,\mathrm{rect}(t) = -5\,\delta(t)$$

$$\langle d(t), \mathrm{rect}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\, d(t)\, dt = -5\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\,\delta\left(t+\frac{1}{4}\right) dt =$$

$$= -5\,\mathrm{rect}\left(-\frac{1}{4}\right) = -5$$

sifting property

$$d(t) \otimes \mathrm{rect}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -5\,\delta\left(\alpha+\frac{1}{4}\right)\mathrm{rect}(t-\alpha)\, d\alpha =$$

$$= -5\,\mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{4}\right)$$

ESERCIZIO 3

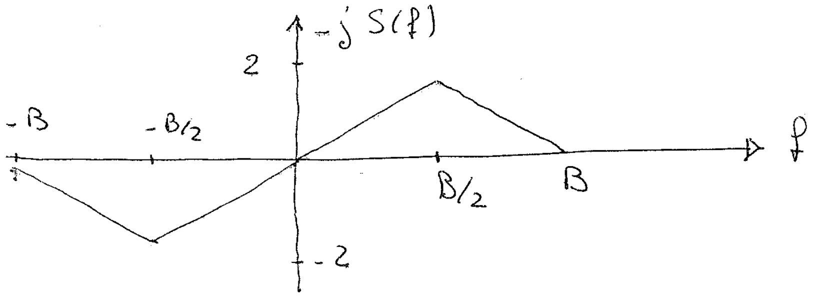
$$g(t) = -\left[2B\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{B}{2}t\right)\,\mathrm{sen}\left(2\pi\frac{Bt}{2}\right)\right] \otimes B\,\mathrm{sinc}(Bt)$$

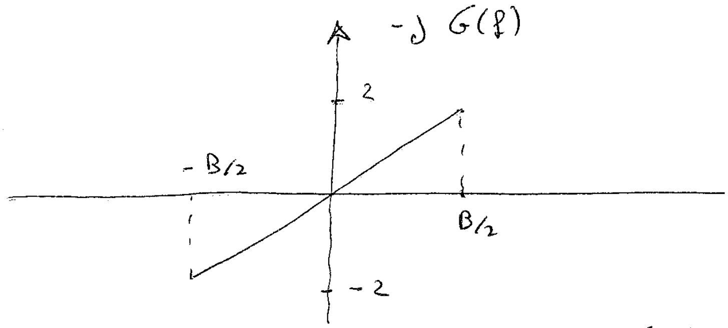
$$\updownarrow$$

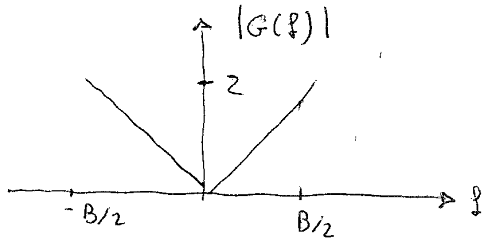
$$G(f) = -\left[4\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{B/2}\right) \otimes \frac{\delta(f-B/2)-\delta(f+B/2)}{2j}\right]\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) =$$

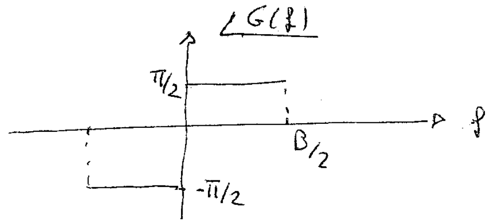
$$= \left[-\frac{2}{j}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f-B/2}{B/2}\right) + \frac{2}{j}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f+B/2}{B/2}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) =$$

$$= \underbrace{\left[2j\,\mathrm{tri}\left(\frac{f-B/2}{B/2}\right) - 2j\,\mathrm{tri}\left(\frac{f+B/2}{B/2}\right)\right]}_{\triangleq S(f)}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$









COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

18 Febbraio 2003

Esercizio 1

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale s(t)=exp(-t+4)u(t-2).

Determinare modulo e fase di tale trasformata nel punto $f = \frac{1}{2\pi}$.

Esercizio 2

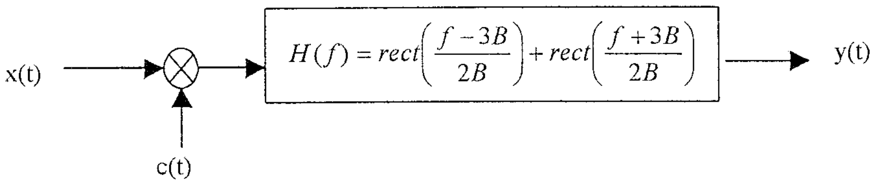
Sia dato un sistema LTI, quali sono le condizioni perché:

a) il sistema sia causale
b) il sistema sia stabile

Verificare se il sistema LTI, con ingresso x(t) = 2 δ(t-1) e uscita y(t)=exp(-t+4)u(t-2), è causale e/o stabile.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di figura



Dove

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\frac{T}{2}\right)$$

$$x(t) = B\, sinc^2(Bt) \qquad B = \frac{1}{T}$$

Si rappresenti graficamente la trasformata dell'uscita Y(f).

Esercizio 1

$$s(t) = e^{+2}\, e^{-(t-2)}\, u(t-2) = e^{2}\, g(t-2)$$

dove $g(t) = e^{-t}\, u(t) \longleftrightarrow G(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$

$$S(f) = e^{2}\, G(f)\, e^{-j2\pi f 2} = \frac{e^{2}}{1+j2\pi f}\, e^{-j4\pi f}$$

$$S\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{e^{2}}{1+j}\, e^{-j2}$$

$$\angle S\left(\frac{1}{2\pi}\right) = -\frac{\pi}{4} - 2 \qquad \left| S\left(\frac{1}{2\pi}\right) \right| = \frac{e^{2}}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 2

a) Condizione nec. e suf. perchè un sistema sia causale è che $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$

b) Cond nec. e suf. perchè il sistema sia stabile è che $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

Nel nostro caso $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{Y(f)}{2}\, e^{j2\pi f} =$

$$\Updownarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{2}\, y(t+1) = \frac{1}{2}\, e^{-t+3}\, u(t-1)$$

Il sistema è causale

Inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \frac{1}{2}\int_{1}^{\infty} |e^{-t}|\, e^{3}\, dt = \frac{e^{3}}{2}\int_{1}^{\infty} e^{-t}\, dt = \frac{e^{2}}{2}$$

Il sistema è anche stabile

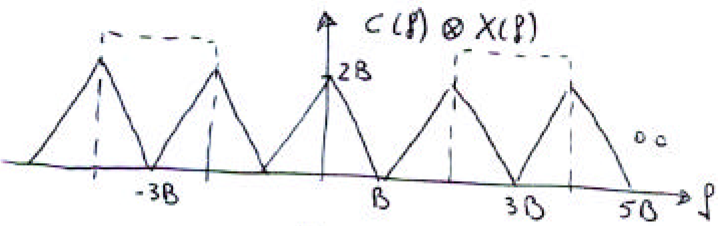
Esercizio 3

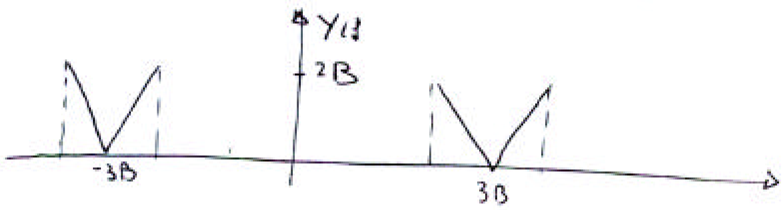
$$c(t)\cdot x(t) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t - nT/2\right)$$

$$\updownarrow$$

$$C(f)\otimes X(f) = \mathrm{tri}\left(\frac{f}{B}\right)\otimes\frac{2}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f - n2B) =$$

$$= 2B\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{tri}\left(\frac{f - n2B}{B}\right)$$



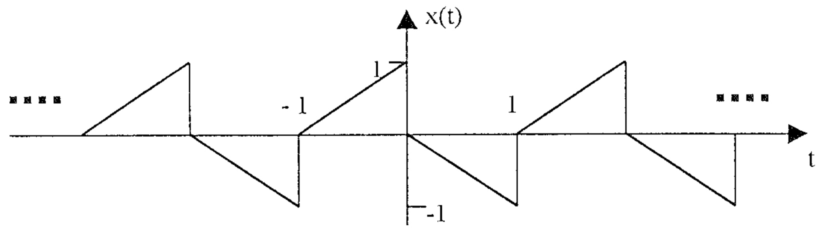


COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

18 Aprile 2003

Esercizio 1

Determinare il rapporto tra la potenza associata alla componente di prima armonica e la potenza totale del seguente segnale periodico.



Esercizio 2

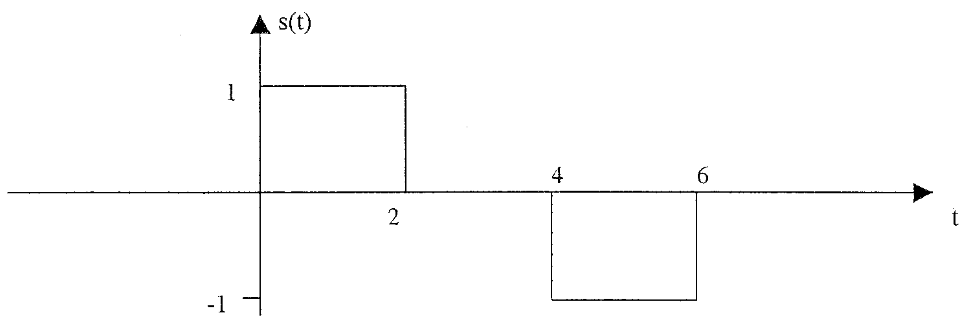
Sia dato il segnale w(t)=$4sinc^2(2t)$

Disegnare lo spettro del segnale campionato in modo naturale ad una frequenza pari a 4 Hz, con una sequenza di impulsi rettangolari di durata $\tau = \frac{1}{8}$ s.

Esercizio 3

Sia dato il sistema con risposta in frequenza H(f)= $2j\,\mathrm{sen}(2\pi f)\,e^{-j2\pi f 2}$

- determinare la risposta in ampiezza e la risposta in fase del sistema
- determinare l'uscita del sistema quando in ingresso è posto il segnale di figura.



ESERCIZIO 1

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 |x(t)|^2 dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$P_{1^a\,arm} = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = 2\,|X_1|^2$ perché il segnale $x(t)$ è reale

$$X_1 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\, e^{-j2\pi\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathfrak{F}\left\{x(t),\ t\in[-1,1]\right\}_{f=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathfrak{F}\left\{ tri(t) - rect\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}_{f=\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[sinc^2\left(\frac{1}{2}\right) - sinc\left(\frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left[sinc^2\left(\frac{1}{2}\right) - sinc\left(\frac{1}{2}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}(-j)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{\pi} + j\right]$$

$$|X_1|^2 = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{4}{\pi^2} + 1\right] \simeq \frac{1,4}{\pi^2} \simeq 0,14$$

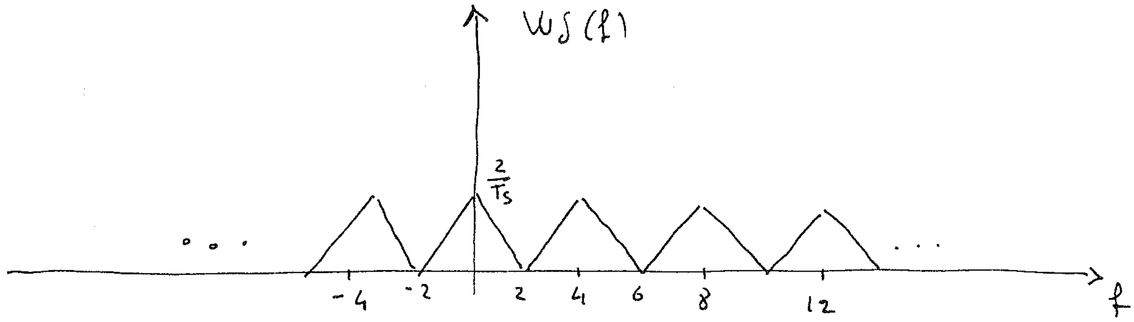
$$P_{1^a\,arm} = 2 \cdot 0,14 = 0,28$$

$$\frac{P_{1^a}}{P_x} = \frac{0,28}{1/3} = 0,84 = 84\,\%$$

ESERCIZIO 2

$$w(t) = 4\,\mathrm{sinc}^2(2t) \longleftrightarrow W(f) = 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{2}\right)$$

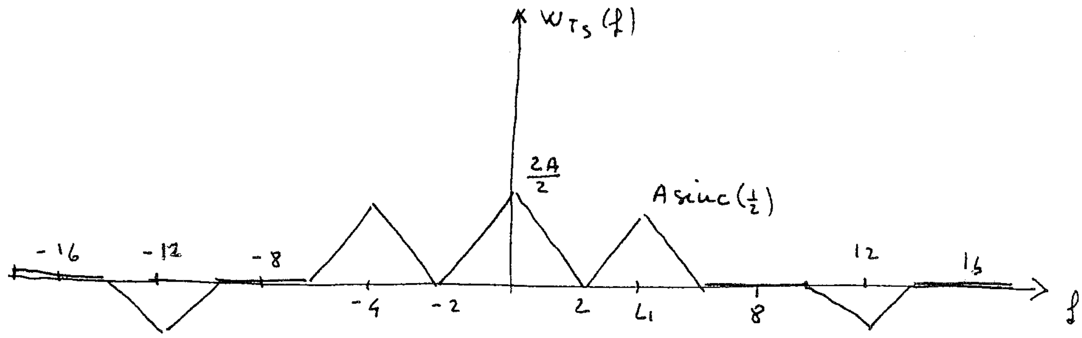
Con camp. ideale istantaneo: $W_\delta(f) = \frac{2}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\left(\frac{f-nT_s}{2}\right)$



Con camp naturale, lo spettro $W_\delta(f)$ viene pesato per costanti $[T_s C_n]$, che sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_s}{\tau}\right)$$

$$C_n = \frac{A\tau}{T_s}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_s}\right) = \left(A\,\frac{1}{8}\cdot 4\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{n4}{8}\right) = \frac{A}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$



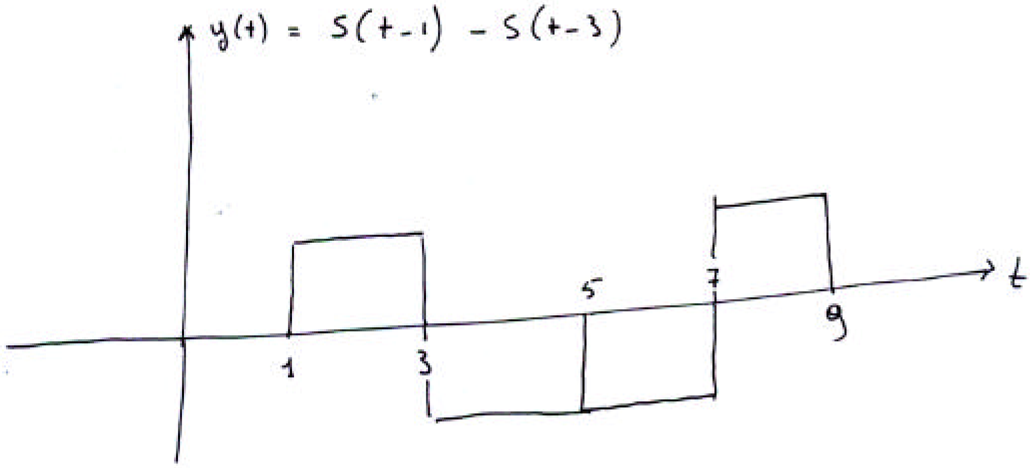
ESERCIZIO 3

$$H(f) = 2j\,\mathrm{sen}(2\pi f)\,e^{-j2\pi f 2}$$

$$|H(f)| = 2\,|\mathrm{sen}(2\pi f)| \qquad \angle H(f) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\left[1 - \mathrm{sgn}\left(\mathrm{sen}(2\pi f)\right)\right] - 4\pi f$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ 2j\,\frac{e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}}{2j}\,e^{-j4\pi f} \right\} =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{ e^{-2\pi f} - e^{-2\pi f 3} \right\} = \delta(f-1) - \delta(f-3)$$

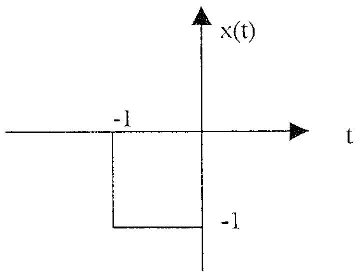


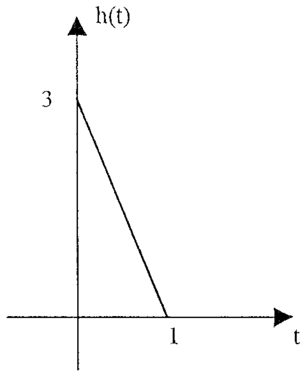
COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

30 Giugno 2003

Esercizio 1

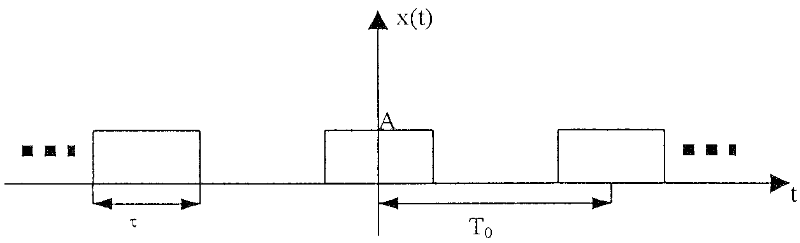
Determinare graficamente l'uscita di un sistema LTI con risposta impulsiva h(t), al cui ingresso sia posto il segnale x(t).





Esercizio 2

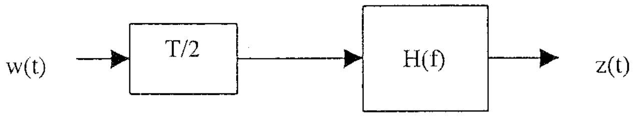
Sia dato il segnale onda quadra di figura, periodico di periodo $T_0=6$.
Determinare i valori di A e τ in modo tale che x(t) abbia componente continua uguale a 1 e sia privo di componenti armoniche multiple di 3
Modificare x(t) in modo che abbia componente continua nulla. Disegnare il nuovo segnale.



Esercizio 3

Sia dato il sistema di figura, in cui H(f) = $\frac{|f|}{2B} rect\left(\frac{f}{4B}\right)$.

Se in ingresso al sistema è posto il segnale $w(t) = 2 + 2\cos\left(2\pi \frac{B}{2} t\right)$, determinare z(t).

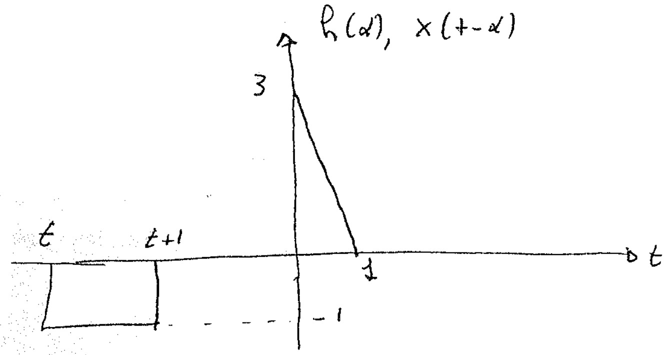


Esercizio 1

Supponiamo di calcolare la convoluzione grafica usando la formula

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha$$

si sceglie quindi di ribaltare $x(t)$



$t+1<0,\ t<0$

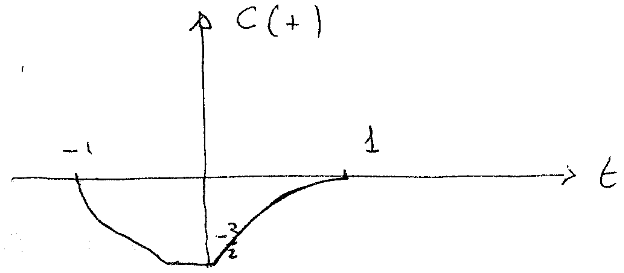
$$c(t) = \int_0^{t+1} (-1)(3-3\alpha)\, d\alpha = -\left[3\alpha - \frac{3}{2}\alpha^2\right]_0^{t+1} = -\left[3(t+1) - \frac{3}{2}(t+1)^2\right] =$$

$$= -\left[\cancel{3t} + 3 - \frac{3}{2}t^2 - \cancel{3t} - \frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2}\left[-1 + t^2\right]$$

$t+1>1,\ t\leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0<t\leq 1$

$$c(t) = \int_t^1 (-1)(3-3\alpha)\, d\alpha = \left[-3\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2\right]_t^1 =$$

$$= -3 + \frac{3}{2} + 3t - \frac{3}{2}t^2 = -\frac{3}{2} + 3t - \frac{3}{2}t^2$$

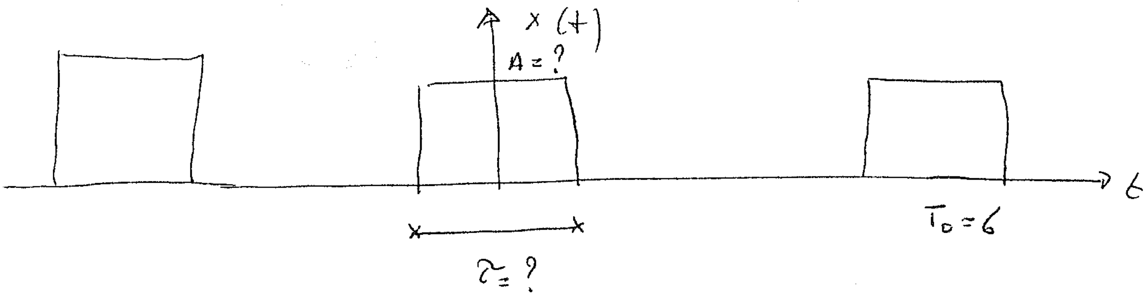


Esercizio 2

Il segnale $x(t)$ ha le seguenti caratteristiche:

1) è un'onda quadra
2) ha periodo $T_0 = 6$
3) è simmetrica rispetto a $t = 0$
4) ha componente continua uguale a 1
5) non ha componenti armoniche multiple di 3

Dalle prime 3 condizioni si ricava che

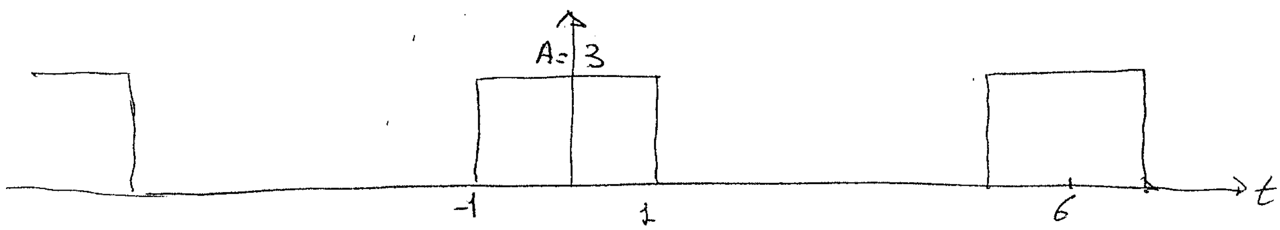


• La condizione 4 implica che la componente continua, cioè

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt = 0 \Rightarrow \frac{A\tau}{T_0} = 1 \Rightarrow A = \frac{T_0}{\tau}$$

• La condizione 5 implica che $\text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) = 0$ per $n = k3$

cioè $\text{sinc}\left(3k\frac{\tau}{T_0}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\tau}{T_0} = 1 \Rightarrow \tau = 2$

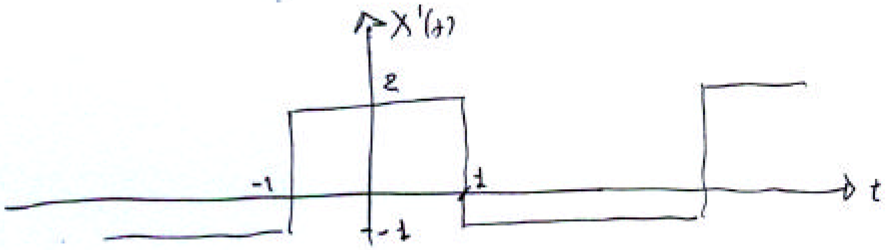


Affinchè la componente continua si annulli occorre traslare il segnale lungo l'asse verticale di una quantità pari a 1

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left[x(t)-L\right]dt = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{A\tau}{T_0} - L = 0 \implies L = 1$$

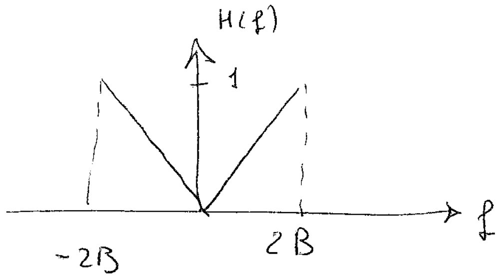


ESERCIZIO 3

All'ingresso del sistema è posto il segnale:

$$w'(t) = w(t - T/2) = 2 + 2\cos\left[2\pi \frac{B}{2}(t - T/2)\right]$$

All'uscita del sistema che ha risposta in freq.



si ha

$$z(t) = \left|H(B/2)\right| 2\cos\left[2\pi \frac{B}{2}(t - T/2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left[2\pi \frac{B}{2}(t - T/2)\right]$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

18 Luglio 2003

Esercizio 1

Determinare la funzione rappresentata dal seguente integrale, applicando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinc(\alpha)}{\pi(t-\alpha)}\, d\alpha$$

Esercizio 2

Sia dato il sistema che trasforma l'ingresso x(t) nell'uscita y(t) secondo la seguente trasformazione

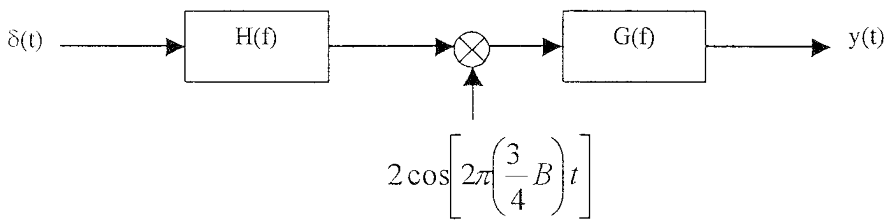
$y(t)=1-|x(t-2)|$

Classificare il sistema relativamente a linearità, tempo invarianza e causalità, motivando la risposta.

Se $x(t)=\cos(2\pi t)$, determinare la potenza di y(t)

Esercizio 3

Determinare l'uscita del sistema di figura al cui ingresso sia posto il segnale $\delta(t)$.



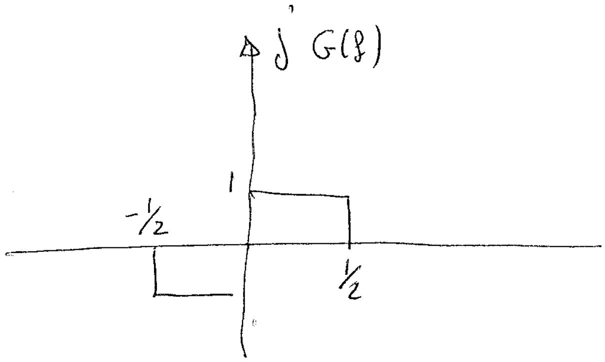
$$H(f) = rect\left(\frac{f-B}{B}\right) + rect\left(\frac{f+B}{B}\right) \qquad G(f) = rect\left(\frac{2f}{B}\right) \quad B > 0$$

ESERCIZIO 1

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sinc}(\alpha)}{\pi(t-\alpha)}\, d\alpha = \mathrm{sinc}(t) \otimes \frac{1}{\pi t}$$

$$\updownarrow$$

$$G(f) = \mathrm{rect}(f)\,\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\right]$$



$$G(f) = -j\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-1/4}{1/2}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{f+1/4}{1/2}\right)\right]$$

$$\updownarrow$$

$$g(t) = -j\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}t\right) e^{+j2\pi\frac{1}{4}t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}t\right) e^{-j2\pi\frac{t}{4}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\left[e^{j\frac{\pi t}{2}} - e^{-j\frac{\pi t}{2}}\right] =$$

$$= \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{\pi t}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

ESERCIZIO 2

- Il sistema è non lineare perché è non lineare l'operatore $|\cdot|$

- Il sistema è tempo invariante poiché

$$T[x(t+t_0)] = 1 - |x(t+t_0)|$$

coincide con $y(t+t_0)$

- Il sistema è causale perché l'uscita all'istante t dipende dall'ingresso all'istante t o precedenti (in questo caso $t-2$ è anteriore a t)

- $$P_y = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left|1 - |x(t)|\,\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} 1 - 2\,|x(t)| + |x(t)|^2\, dt = 1 + P_x - \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\,dt$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(2\pi t)\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\cos(2\pi t)|\, dt = 2\int_{-1/2}^{1/2} |\cos(2\pi t)|\, dt = \frac{4}{2\pi}\int_{-1/4}^{1/4} \cos(2\pi t)\quad 2\pi dt$$

$$= \frac{4}{2\pi}\Big[\operatorname{sen} 2\pi t\Big]_{-1/4}^{1/4} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$P_y = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}$$

ESERCIZIO 3

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

Operando nel Dominio di f., all'uscita del 1° blocco si ha il seguente w(f):

$$W(f) = H(f) \iff w(t) = h(t)$$

Dopo il moltiplicatore

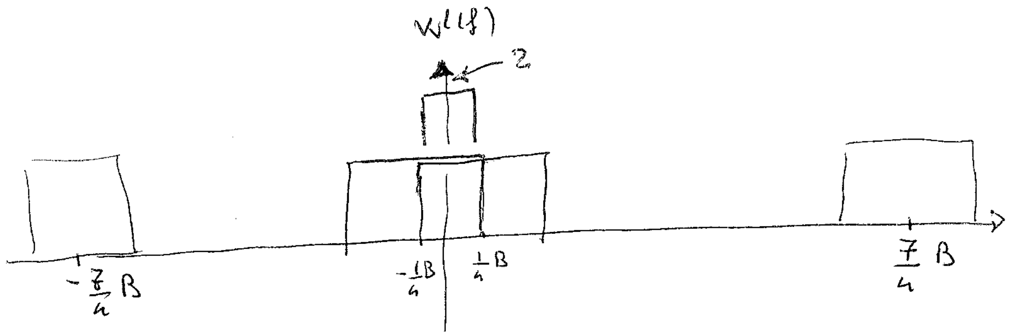
$$w'(t) = h(t)\, 2\cos\left[2\pi\left(\tfrac{3}{4}B\right)t\right]$$

$$\updownarrow$$

$$W'(f) = H\left(f - \tfrac{3}{4}B\right) + H\left(f + \tfrac{3}{4}B\right) =$$

$$= \mathrm{rect}\left(\frac{f - B - \frac{3}{4}B}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f + B - \frac{3}{4}B}{B}\right) +$$

$$+ \mathrm{rect}\left(\frac{f + \frac{3}{4}B + B}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(f + \tfrac{3}{4}B - B\right)$$



Quindi in uscita avremo $Y(f) = 2\, \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B/2}\right)$

$$y(t) = B\, \mathrm{sinc}\left(\frac{Bt}{2}\right)$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

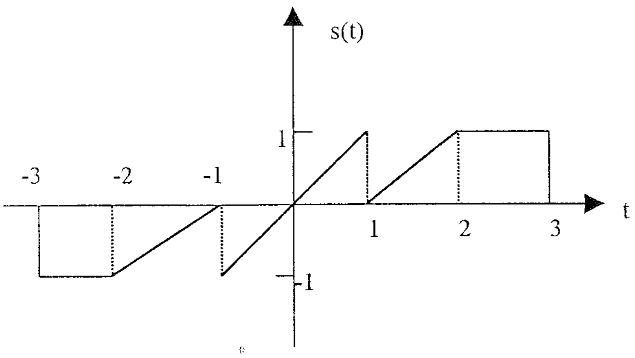
12 Settembre 2003

Esercizio 1

Sia s(t) il segnale rappresentato in figura.

Determinare l'energia del segnale e il valore in f=0 della sua trasformata.

Calcolare $\int_{-\infty}^{\infty} S(f) sinc(2f)\, e^{j4\pi f} df$



Esercizio 2

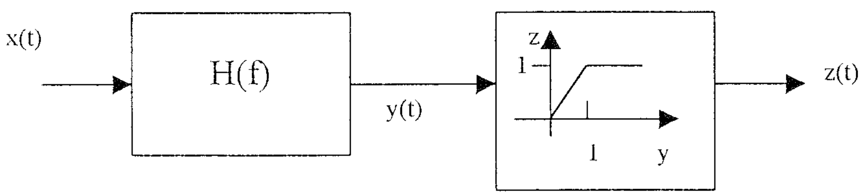
Sia dato il segnale passabanda $g(t) = sinc(2t)\cos[2\pi 5(t + \frac{1}{20})]$

Determinare la trasformata di Hilbert e l'inviluppo complesso di tale segnale.

Esercizio 3

Sia dato il sistema di figura, al cui ingresso sia posto il segnale onda quadra di periodo T, simmetrico rispetto all'asse t = 0, con impulsi di durata T/2 e ampiezza 1.

Disegnare z(t).



$H(f) = tri\left(\frac{f-B}{B}\right) + tri\left(\frac{f+B}{B}\right)$ $\quad B > 0 \quad B = 1/T$

ESERCIZIO 1

$s(t) \longleftrightarrow S(f)$

1) $S(0)$ = Area sottesa da $s(t) = 0$

2) $E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = 2\int_0^{\infty} |s(t)|^2 dt = 2\left[\int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (t-1)^2 dt + \int_2^3 1\, dt\right] = 2\left[2\frac{1}{3} + 1\right] = \frac{10}{3}$

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \underbrace{\mathrm{sinc}(2f)\, e^{+j4\pi f}}_{G(f)^*} df \overset{\uparrow}{\underset{\text{Parseval}}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, g^*(t)\, dt$$

$G(f) = \mathrm{sinc}(2f)\, e^{-j4\pi f} \longleftrightarrow g(t) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right)$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, \mathrm{sinc}(2f)\, e^{+j4\pi f} df = \frac{1}{2}\int_1^3 s(t)\, dt = \frac{1}{2}\left[2+1\right]\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

ESERCIZIO 2

$$g(t) = \mathrm{sinc}(2t)\cos\left(2\pi 5t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \mathrm{sinc}(2t)\left[-\mathrm{sen}\, 2\pi 5t\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right] = -\mathrm{sinc}(2t)\,\mathrm{sen}(2\pi 5t)$$

$$\updownarrow$$

$$G(f) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \otimes \frac{\delta(f-5) - \delta(f+5)}{2j} =$$

$$\hat{G}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\cdot G(f) = +\frac{1}{4}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-5}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+5}{2}\right)\right] =$$

$$= +\frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \otimes \frac{\delta(f-5) + \delta(f+5)}{2}$$

$$\updownarrow$$

$$\hat{g}(t) = \mathrm{sinc}(2t)\cos(2\pi 5t)$$

$$\tilde{g}(t) = \mathrm{sinc}(2t)\, e^{j\pi/2} = j\,\mathrm{sinc}(2t)$$

ESERCIZIO 3

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A \ \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A\tau}{T_0} \mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) e^{-j2\pi \frac{n t}{T_0}}$$

Nel nostro caso $\tau = \frac{T}{2}$, $T_0 = T$, $A = 1$

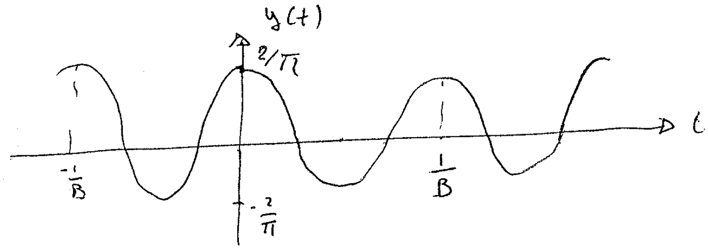
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} \longleftrightarrow X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Attraverso il filtro transitano le 2 righe spettrali posizionate in B e $(-B)$, cioè

$$Y(f) = \frac{1}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \delta(f - B) + \frac{1}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \delta(f + B)$$

$$\updownarrow$$

$$y(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \cos(2\pi B t)$$



$z(t)$ è quindi costituito dai lobi positivi di $y(t)$