COMPITI SVOLTI

DI

COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

Prof. Monica GHERARDELLI

Anno Accademico 2004-2005

CLASSIFICAZIONE DEGLI ESERCIZI DAI COMPITI

Energia e Potenza
12/2/2002 n. 1 (parziale)
16/4/2002 n. 3 (quesito obbligatorio)
18/4/2003 n. 1
12/9/2003 n.1 (1° quesito)
14/7/2004 n.1, n.3 (3° quesito)

Serie di Fourier
14/11/2001 n.1
17/07/2002 n.1
04/02/2003 n.1
30/06/2003 n.2
13/02/2004 n.1
23/04/2004 n.1
23/06/2004 n.1
14/07/2004 n.1
14/09/2004 n.1
12/11/2004 n.1 (2° quesito)
12/11/2004 n.2 (1° quesito)
11/02/2004 n. 1 (1° quesito)
28/06/2005 n. 1 (2° quesito)

Trasformata di Fourier
14/11/2001 n.2
17/07/2002 n.2
16/04/2002 n.1
12/09/2002 n.1
18/11/2002 n.1
04/02/2003 n.3
18/02/2003 n.1
18/07/2003 n.1
12/09/2003 n.1
14/11/2003 n.1
23/06/2004 n.2 (1° quesito)
14/07/2004 n.2
14/09/2004 n.2
12/11/2004 n.1 (1° quesito)
27/01/2004 n.1
27/01/2005 n.1 (1° quesito)
21/04/2005 n.2
28/06/2005 n.1 (1° quesito)
15/07/2005 n.1 (1° e 2° quesito)
15/09/2005 n.2 (2° quesito)

Convoluzione Grafica
29/01/2002 n.1
12709/2002 n. 3
30/06/2003 n.1
30/01/2004 n. 1
21/04/2005 n.1

Funzione Delta di Dirac
04/02/2003 n.2

Autocorrelazione/Parseval/Densità Spettr.di Energia
29/01/2002 n.2
12/09/2002 n.2 (1° quesito)
13/02/2004 n.2
12/11/2004 n. 2 (2° quesito)
15/07/2005 n. 1 (3° quesito)

Classificazione Sistemi
12/02/2002 n.2
18/02/2003 n.2
18/07/2003 n. 2
30/01/2004 n. 2
15/07/2005 n. 2

Sistemi
14/11/2001 n.3
20/01/2002 n.3
12/02/2002 n.1
17/07/2002 n.3
18/11/2002 n.3
18/02/2003 n.3
18/04/2003 n.3
30/06/2003 n.3
18/07/2003 n.3
12/09/2003 n.3
14/11/2003 n.3
30/01/2004 n.3
13/02/2004 n.3
23/04/2004 n.3
23/06/2004 n.2 (2° quesito)
23/06/2004 n.3
14/07/2004 n.3
12/11/2004 n.3
27/01/2005 n.1 (2° quesito)
11/02/2005 n.1 (2° e 3° quesito)
28/06/2005 n.3
15/09/2005 n.2 (1° quesito)
15/09/2005 n.3

Inviluppo Complesso/ Trasformata di Hilbert
16/04/2002 n.2
18/11/2002 n. 2
12/09/2003 n.2
14/11/2003 n.2
11/02/2005 n.2
15/09/2005 n.2 (3° quesito)

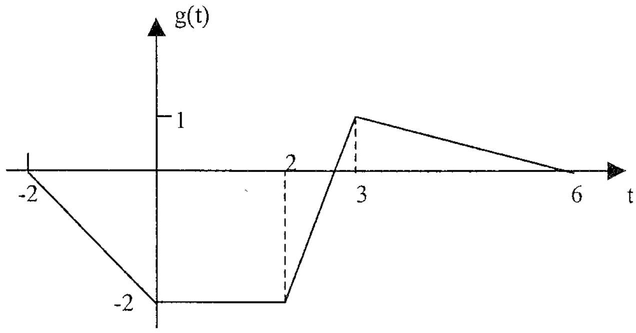
Campionamento
12/02/2002 n.3
12/09/2002 n.2 (2° quesito)
18/04/2003 n.2
23/04/2004 n.2
14/09/2004 n.3
27/01/2005 n.2
21/04/2005 n.3
28/06/2005 n.2
15/07/2005 n.3

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

12 Novembre 2004

Esercizio 1

Sia g(t) il segnale rappresentato in figura, determinare:



- La trasformata di Fourier del segnale g(t), sfruttando le proprietà della trasformata stessa.
- La componente continua del segnale periodico $g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT_0)$, con $T_0=8$

Esercizio 2

Applicando il teorema o l'uguaglianza di Parseval:

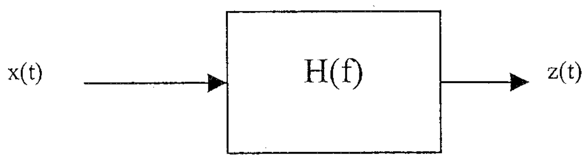
- valutare la potenza del segnale y(t)= $6\cos(2\pi f_0 t) + 4\,\mathrm{sen}(4\pi f_0 t) - j2e^{-j2\pi f_0 t}$
- determinare il valore del seguente integrale: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinc(2t)}{2 + j2\pi\, t}\, dt$

Esercizio 3

Rappresentare graficamente il segnale periodico $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n tri\left(\frac{t - n3T}{T}\right)$ e valutarne il periodo.

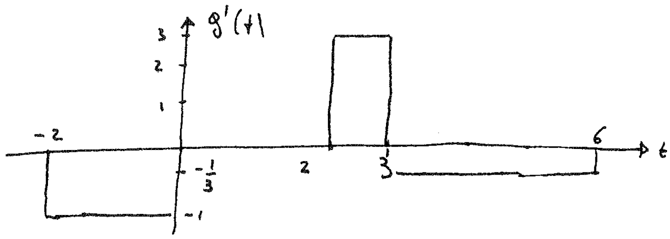
Se tale segnale è posto in ingresso al sistema di figura in cui $H(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right)$, dove $B = \frac{1}{2T}$,

Determinare il segnale z(t) e la sua potenza.



ESERCIZIO 1

Valutiamo la derivata prima di $g(t)$



a) $$g'(t) = -\text{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + 3\,\text{rect}(t-2,5) - \frac{1}{3}\,\text{rect}\left(\frac{t-4,5}{3}\right)$$

$$\updownarrow$$

$$G'(f) = -2\,\text{sinc}(2f)\,e^{+j2\pi f} + 3\,\text{sinc}(f)\,e^{-j2\pi f\frac{5}{2}} - \text{sinc}(3f)\,e^{-j\pi f 9}$$

Pertanto, poiché $G'(f) = j2\pi f\,G(f)$, otteniamo che

$$G(f) = \frac{3\,\text{sinc}(f)}{j2\pi f}\,e^{-j\pi f 5} - \frac{2\,\text{sinc}(2f)}{j2\pi f}\,e^{-j2\pi f} - \frac{\text{sinc}(3f)}{j2\pi f}\,e^{-j\pi f 9}$$

b) Il coeff. di Fourier per $n = 0$ è la comp. continua del segnale indicato, pertanto

$$G_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-2}^{6} g(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\left(4+\frac{2}{3}+2\right)\cdot\frac{2}{2} + \left(3+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\frac{20}{3} + \frac{5}{3}\right] = -\frac{15}{8\cdot 3} = -\frac{5}{8}$$

ESERCIZIO 2

a) $y(t) = 6\cos(2\pi f_0 t) - 2j\, e^{-j2\pi f_0 t} +$

$+ 4\,\mathrm{sen}(2\pi\, 2f_0 t) =$

$= 3\, e^{j2\pi f_0 t} + (3 - 2j)\, e^{-j2\pi f_0 t} +$

$+ \frac{2}{j}\, e^{j2\pi 2 f_0 t} - \frac{2}{j}\, e^{-j2\pi 2 f_0 t}$

$$P_y = 9 + |3-2j|^2 + \underbrace{4}_{\left|\frac{2}{j}\right|^2} + \underbrace{4}_{\left|-\frac{2}{j}\right|^2} = 9 + (9+4) + 8 =$$

$= 30$

b) Per Parseval $\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\, g_2^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(f)\, G_2^*(f)$

$\frac{1}{2 + j2\pi t} \overset{②}{\longleftrightarrow} e^{+2f}\, u(-f)$ poiché $\frac{1}{2+j2\pi f} \longleftrightarrow e^{-2t}\, u(t)$

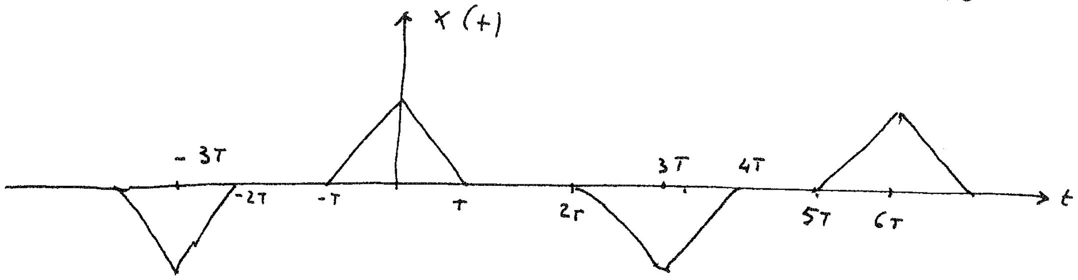
Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{sinc}(2t)}_{g_2^*(t)}\, \underbrace{\frac{1}{2+j2\pi t}}_{g_1(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)}_{G_2^*(f)}\, \underbrace{e^{2f}\, u(-f)}_{G_1(f)}\, df =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{2f}\, df = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

ESERCIZIO 3

$T_0 = 6T$



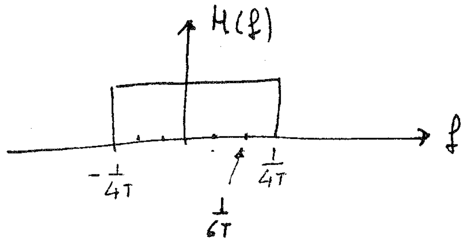
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{j 2\pi \frac{n}{T_0} t} \longleftrightarrow X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, \delta\left(f - \frac{n}{6T}\right)$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \mathcal{F}\left\{ x(t),\ t \in [-T, 5T] \right\}_{f = \frac{n}{T_0}} =$$

$$= \frac{1}{6T} \mathcal{F}\left\{ tri\left(\frac{t}{T}\right) - tri\left(\frac{t-3T}{T}\right) \right\}_{f = \frac{n}{6T}} =$$

$$= \frac{1}{6T} \left[T \, sinc^2(Tf) \left(1 - e^{-j 2\pi f 3T}\right) \right]_{f = \frac{n}{6T}} =$$

$$= \frac{1}{6} \, sinc^2\left(\frac{n}{6}\right) \left[1 - e^{-j\pi n} \right]$$



$X_0 = 0$

$$X_1 = X_{-1} = \frac{sinc^2(1/6)}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} sinc^2(1/6) = \frac{1}{3} \frac{36}{\pi^2} \frac{1}{4} = \frac{3}{\pi^2}$$

$$z(t) = 2|X_1| \cos\left(2\pi \frac{1}{6T} t\right) = \frac{2}{3} sinc^2\left(\frac{1}{6}\right) \cos\left(2\pi \frac{1}{6T} t\right) = \frac{6}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi t}{3T}\right)$$

$$P_z = 2|X_1|^2 = \frac{2}{9} sinc^4(1/6) = \frac{2}{9} \frac{6^4}{\pi^4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{18}{\pi^4}$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

27 Gennaio 2005

Esercizio 1

Sia dato il segnale $y(t) = \frac{d}{dt}\left[x\left(t - \frac{1}{4}\right)\right]$, con $x(t) = \left[\frac{1}{j\pi t} \otimes sinc(4t)\right]$

Determinare il modulo e la fase della trasformata di Fourier di y(t), applicandone le proprietà.

Si rappresenti graficamente il diagramma di fase

Esercizio 2

Sia dato il segnale $g(t) = \frac{2}{1 + \left(\pi \frac{t}{2}\right)^2} \Leftrightarrow G(f) = 4e^{-4|f|}$

a) Stabilire se il segnale g(t) rispetta le ipotesi del teorema di Shannon per segnali passa-basso.
b) Determinare l'energia del segnale r(t), ottenuto filtrando il segnale g(t) con un filtro rettangolare passa-basso di banda B.
c) Disegnare la trasformata di Fourier del segnale ottenuto campionando r(t)con campionamento istantaneo alla frequenza di Nyquist.

Esercizio 3

Sia dato il segnale $y(t) = x(t)\,\mathrm{sen}^2(2\pi f_o t)$, con $x(t) = [sinc(Bt) - sinc(2Bt)]$.

b) Rappresentare graficamente la trasformata di y(t) con f_0=3B.

c) Se y(t) viene inviato ad un filtro ideale passa-basso con risposta in frequenza $H(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)$, si verifichi se il segnale all'uscita di tale filtro è un segnale energia o un segnale potenza e se ne calcoli l'energia o potenza.

ESERCIZIO 1

$$y(t) = \frac{d}{dt}\left[x\left(t-\frac{1}{4}\right)\right] \longleftrightarrow Y(f) = j\,2\pi f\, X(f)\, e^{-j2\pi f\frac{1}{4}}$$

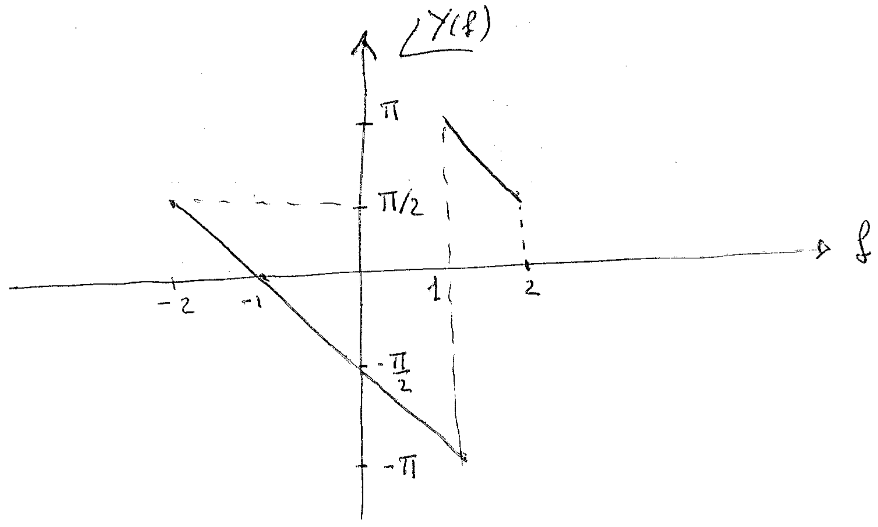
$$x(t) = \frac{1}{j\pi t} \otimes \mathrm{sinc}(4t) \longleftrightarrow X(f) = -\,\mathrm{sgn}(f)\cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right)$$

Quindi $$Y(f) = -j\,2\pi f\,\mathrm{sgn}(f)\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}f} =$$

$$= -j\,\frac{\pi}{2}\,|f|\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}f}$$

$$|Y(f)| = \frac{\pi}{2}\,|f|\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right)$$

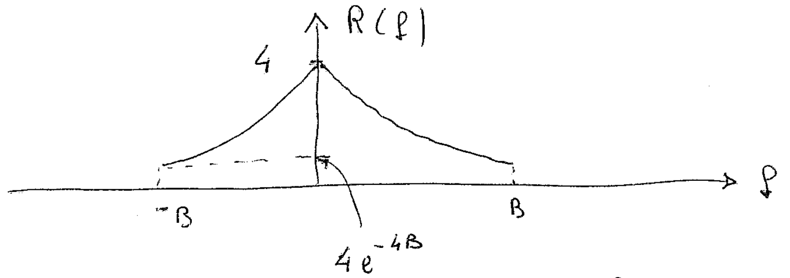
$$\angle Y(f) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} f \qquad f \in [-2, 2]$$



ESERCIZIO 2

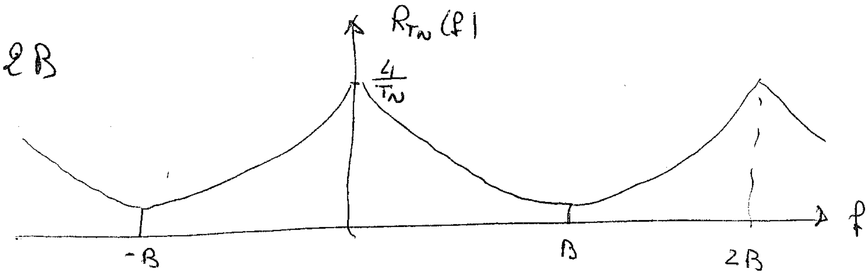
a) Il segnale $g(t)$ è reale, tempo continuo e Fourier trasformabile, ma non "è banda limitata". A causa di quest'ultima caratteristica non rispetta le ipotesi del teorema di Shannon

b) $$R(f) = G(f) \cdot H(f) = G(f)\, \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = $$
$$= 4e^{-4|f|} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$



$$E_r = 2\int_0^B \left|4e^{-4f}\right|^2 df = 2 \cdot 16 \int_0^B e^{-8f}\, df =$$
$$= 32 \left[-\frac{e^{-8f}}{8}\right]_0^B = 4\left[1 - e^{-8B}\right]$$

c) $f_N = 2B$



ESERCIZIO 3

$$x(t) = \text{sinc}(Bt) - \text{sinc}(2Bt)$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = \frac{1}{B}\,\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) - \frac{1}{2B}\,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{1}{B}\left[\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) - \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right]$$

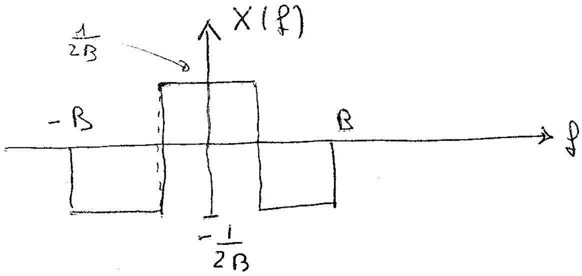
a)

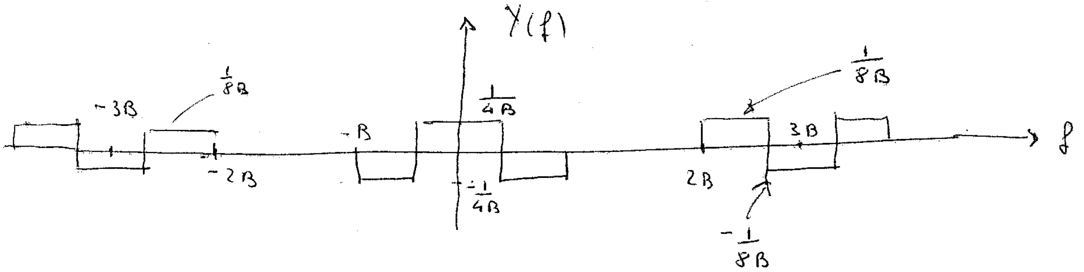
$$y(t) = x(t)\,\text{sen}^2(2f_0 t) = x(t)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi 2f_0 t)\right]$$

$$\updownarrow$$

$$Y(f) = \frac{X(f)}{2} - \left[\frac{X(f)}{2} \otimes \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}\right] =$$

$$= \frac{X(f)}{2} - \frac{X(f-f_0)}{4} - \frac{X(f-f_0)}{4}$$





b)

$$r(t) = y(t) \otimes 2B\,\text{sinc}(t\,2B) \longleftrightarrow R(f) = Y(f)\,H\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{X(f)}{2}$$

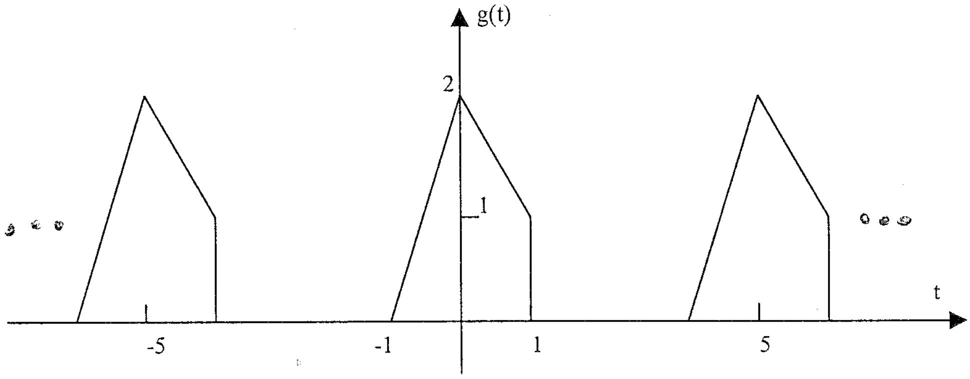
$$E_r = \int_{-B}^{B} \left|\frac{X(f)}{2}\right|^2 df = \frac{1}{4}\int_{-B}^{B} |X(f)|^2\, df = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^B \frac{1}{4B^2}\, df = \frac{1}{8B}$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

11 Febbraio 2005

Esercizio 1

1) Il segnale periodico di figura è inviato all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva *h(t)=2 exp(-6t) u(t)*. Determinare la componente continua del segnale in ingresso, il periodo del segnale in uscita e la potenza associata alla componente continua del segnale di uscita del sistema.



Esercizio 2

Sia dato il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi f_0 t+\pi/2)$, con $f_0 > B$, determinarne:

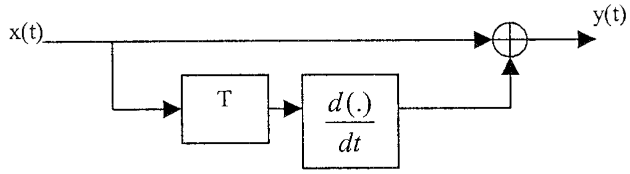
- trasformata di Hilbert
- segnale analitico
- inviluppo complesso
- componenti in fase e in quadratura

Esercizio 3

Sia dato il sistema di figura:

- determinarne la risposta in frequenza
- valutarne il guadagno di potenza
- determinare la potenza associata alla componente di prima armonica del segnale y(t), quando in ingresso è posto il segnale di periodo 4T

  $$x(t)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} tri\left(\frac{t-4nT}{T}\right)$$



ESERCIZIO 1

a) $G_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t)\,dt = \frac{1}{5}\int_{-2.5}^{2.5} g(t)\,dt = \frac{1}{5}\left[1+\frac{3}{2}\right] = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

poiché $T_0 = 5$

b)

$$w(t) \triangleq h(t) \otimes g(t) \Longleftrightarrow W(f) = G(f)\,H(f) =$$

$$= H(f)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n\,\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{G_n\,H\left(\frac{n}{T_0}\right)}_{W_n}\,\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

Il periodo, vista la forma della trasformata $W(f)$ è ancora $T_0 = 5$

c) $W_0 = G_0\,H(0) = G_0 \cdot \mathcal{F}\{h(t)\}\Big|_{f=0} = \left[\frac{2}{6+j2\pi f}\right]_{f=0} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$|W_0|^2 = P_0 = \frac{1}{36}$

ESERCIZIO 2

a) $$x(t) = \mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi f_0 t + \pi/2) =$$

$$= \mathrm{sinc}^2(Bt)\left[\cos(2\pi f_0 t)\cos\pi/2 - \mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= -\mathrm{sinc}^2(Bt)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = -\frac{1}{B}\mathrm{tri}\left(\frac{f}{B}\right)\otimes\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j} =$$

$$= \frac{1}{2B}j\left[\mathrm{tri}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]$$

$$\hat{X}(f) = X(f)\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\right] = \frac{1}{2B}\left[\mathrm{tri}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]$$

$$\updownarrow$$

$$\hat{x}(t) = \mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi f_0 t)$$

b) $$x^+(t) = -\mathrm{sinc}^2(Bt)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) + j\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi f_0 t) =$$

$$= j\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\left[j\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_0 t)\right] =$$

$$= j\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\,e^{j2\pi f_0 t}$$

c) $$\tilde{x}(t) = j\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$$

d) $x_I(t) = 0 \qquad x_Q(t) = \mathrm{sinc}^2(Bt)$

ESERCIZIO 3

a)
$$Y(f) = X(f) + X(f)\, j\, 2\pi f\, e^{-j2\pi f T}$$
$$Y(f) = X(f)\left[1 + j2\pi f\, e^{-j2\pi f T}\right]$$
$$H(f) = 1 + j\,2\pi f\, e^{-j2\pi f T}$$

b)
$$G(f) = |H(f)|^2 = \left|1 + 2\pi f \operatorname{sen}(2\pi f T) + j\,2\pi f \cos(2\pi f T)\right|^2 =$$
$$= \left[1 + 2\pi f \operatorname{sen}(2\pi f T)\right]^2 + (2\pi f)^2 \cos^2(2\pi f T) =$$
$$= 1 + (2\pi f)^2 + 4\pi f \operatorname{sen}(2\pi f T)$$

c)
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{tri}\left(\frac{t - n4T}{T}\right) \longleftrightarrow \begin{cases} X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n\, \delta\left(f - \frac{n}{4T}\right) \\ X_n = \frac{1}{4T}\, \mathcal{F}\left\{\operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\}_{f=\frac{n}{4T}} \end{cases}$$

$$X_n = \frac{1}{4\cancel{T}}\, \cancel{T} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{nT}{4T}\right) = \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$X_1 = X_{-1} = \frac{1}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{sen}^2(\pi/4)}{(\pi/4)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}$$

$$|Y_1|^2 = |Y_{-1}|^2 = G\left(\frac{1}{4T}\right)\cdot |X_1|^2 = \left[1 + 2\pi\frac{1}{4T}\right]^2 \cdot \frac{4}{\pi^4} =$$
$$= \frac{4}{\pi^4}\left[1 + \frac{\pi}{2T}\right]^2$$

$$P = 2\cdot|Y_1|^2 = \frac{8}{\pi^4}\left[1 + \frac{\pi}{2T}\right]^2$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

21 Aprile 2005

Esercizio 1

Si consideri il segnale $x(t) = r(t) - r(t-2)$ con $r(t) = \exp(-t)u(t)$

Valutare la convoluzione grafica fra x(t) e y(t)= 2 u(t-1)

Esercizio 2

Si consideri il segnale $g(t) = AB\,sinc\left[2B\left(t - \frac{1}{4B}\right)\right] + AB\,sinc\left[2B\left(t + \frac{1}{4B}\right)\right]$.

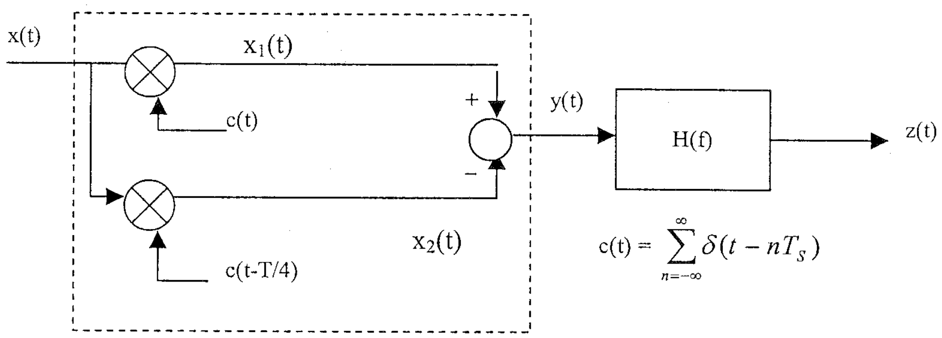
Valutare:
- l'area sottesa dal segnale g(t),
- la sua energia
- l'autocorrelazione

Esercizio 3

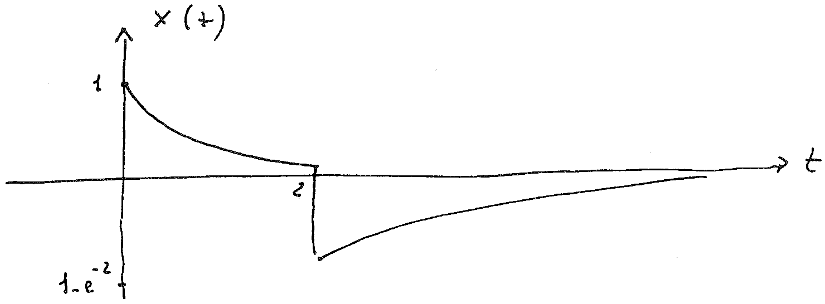
Sia dato il sistema di figura, in cui sono presenti due interruttori uguali, che campionano il segnale al loro ingresso in modo istantaneo e con periodo T_s=T/2 e un sistema con $H(f) = rect\left(\frac{f-3B}{4B}\right) + rect\left(\frac{f+3B}{4B}\right)$, B=1/T

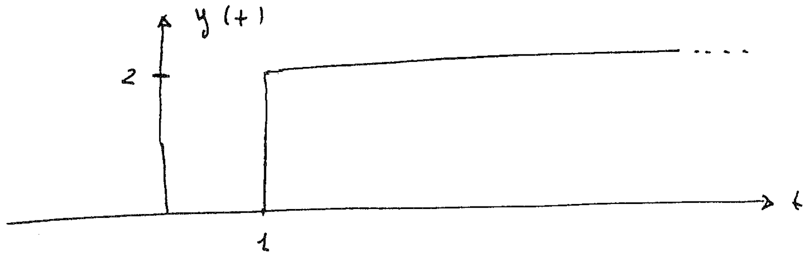
In ingresso al sistema è presente il segnale x(t)=Bsinc^2(Bt).

- Disegnare lo spettro dei segnali, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ in uscita dai due campionatori
- Determinare il segnale y(t) nel dominio del tempo: a quale sistema è equivalente il blocco evidenziato con tratteggio?
- Determinare lo spettro del segnale z(t)



ESERCIZIO 1

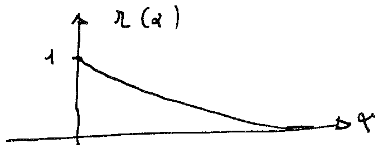


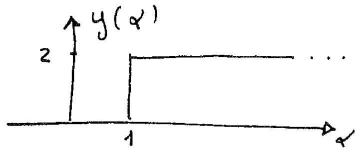


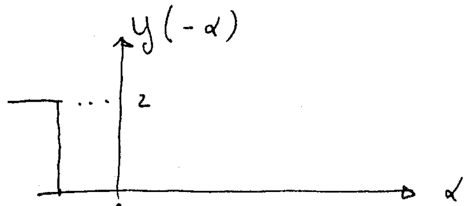
Per determinare la convoluzione grafica fra $x(t)$ e $y(t)$, possiamo determinare la convoluzione fra $r(t)$ e $y(t)$ e quindi ricostruire il segnale totale, infatti:

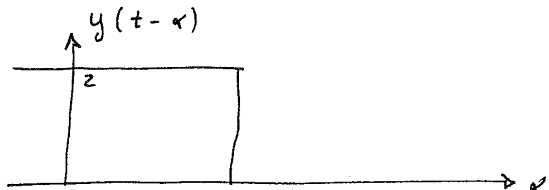
$$x(t) \otimes y(t) = \left[r(t) \otimes y(t) \right] - \left[r(t-2) \otimes y(t) \right] \qquad (*)$$

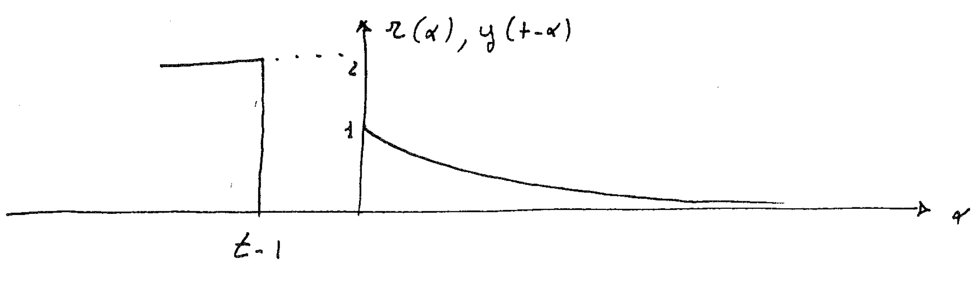
Consideriamo quindi











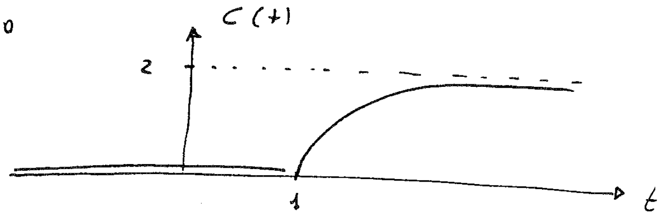
Per $t-1<0 \Rightarrow t<1 \Rightarrow C(t)=\int_0 y(t-\alpha)\,r(\alpha)\,d\alpha=0$

$t-1\geq 0 \Rightarrow t\geq 1 \Rightarrow C(t)=\int_0^{t-1} y(t-\alpha)\,r(\alpha)\,d\alpha=$

$$=\int_0^{t-1} 2\,e^{-\alpha}\,d\alpha=2\left[-e^{-\alpha}\right]_0^{t-1}=$$

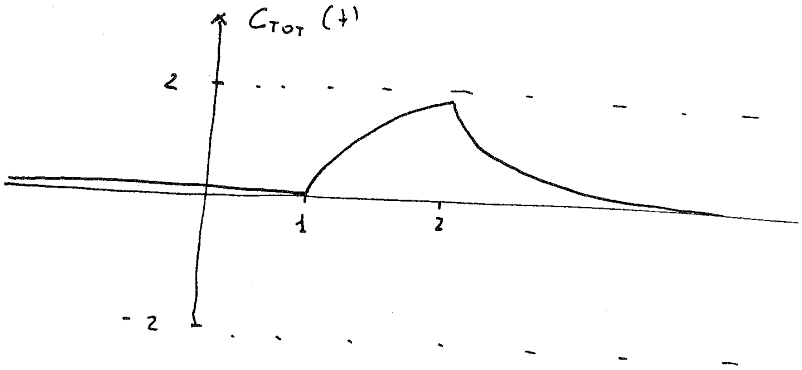
$$=2\left[1-e^{-(t-1)}\right]$$

Si ha pertanto



Componendo i due contributi come indicato nella (*) otteniamo

$$C_{TOT}(t)=C(t)-C(t-2)$$



ESERCIZIO 2

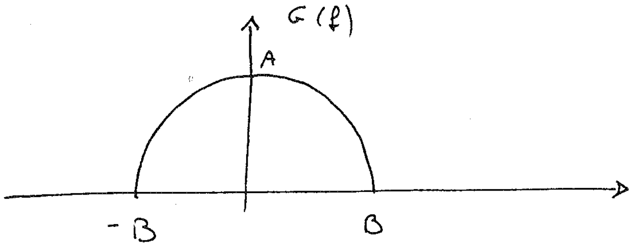
$$g(t) = AB\,\mathrm{sinc}\left[2B\left(t-\frac{1}{4B}\right)\right] + AB\,\mathrm{sinc}\left[2B\left(t+\frac{1}{4B}\right)\right]$$

$$\updownarrow$$

$$G(f) = \frac{A\cancel{B}}{2\cancel{B}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j2\pi f\cdot\frac{1}{4B}} + \frac{A\cancel{B}}{2\cancel{B}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) e^{j2\pi f\frac{1}{4B}} =$$

$$= \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\left[e^{-j2\pi\frac{f}{4B}} + e^{j2\pi\frac{f}{4B}}\right] =$$

$$= A\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\cos\left(2\pi\frac{f}{4B}\right)$$



1) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = G(0) = A$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = A^2\int_{-B}^{B}\cos^2\left(2\pi\frac{f}{4B}\right)df =$

$$= \frac{A^2}{2}\int_{-B}^{B} df + \frac{A^2}{2}\int_{-B}^{B}\cos\left(2\pi\frac{f}{2B}\right)df = \frac{A^2}{2}\cdot 2B = BA^2$$

3) $R_g(\tau) \longleftrightarrow |G(f)|^2 = A^2\cos^2\left(2\pi\frac{f}{4B}\right)\overbrace{=}^{\mathrm{rect}(f/2B)} \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi\frac{f}{2B}\right)$

$f \in [-B, B]$

$$R_g(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi\frac{f}{2B}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right\} =$$

$$= \frac{A^2}{\cancel{2}}\,2B\,\mathrm{sinc}(2B\tau) + \frac{A^2}{4}\,2B\,\mathrm{sinc}\left[2B\left(\tau-\frac{1}{2B}\right)\right] +$$

$$+ \frac{A^2}{4}\,2B\,\mathrm{sinc}\left[2B\left(\tau+\frac{1}{2B}\right)\right]$$

ESERCIZIO 3

$$X(f) = \mathcal{F}\left\{ B \,\mathrm{sinc}^2(Bt) \right\} = \mathrm{tri}\left(\frac{f}{B}\right)$$

Se campioniamo il segnale $x(t)$ con periodo $T_0 = T/2$ otteniamo:

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(n\tfrac{T}{2}\right) \delta\left(t - n\tfrac{T}{2}\right)$$

$$\updownarrow$$

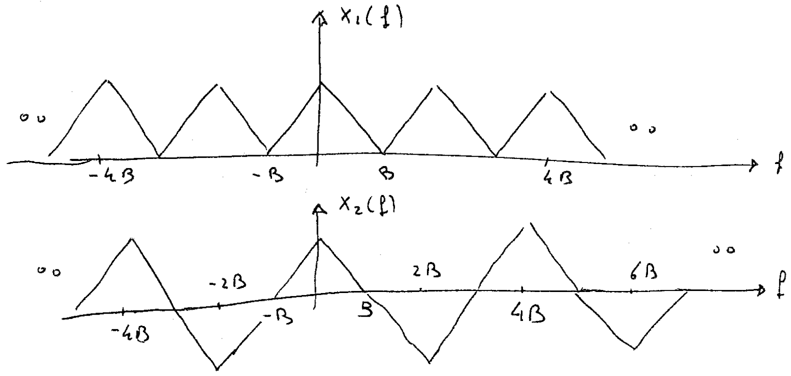
$$X_1(f) = \frac{2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{2n}{T}\right)$$

Il segnale $x_2(t)$ è ottenuto dal campionamento di $x(t-T)$

Quindi

$$X_2(f) = \frac{2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{2n}{T}\right) e^{-j2\pi \frac{2n}{\cancel{T}} \frac{\cancel{T}}{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n X\left(f - \frac{2n}{T}\right)$$



$$Y(f) = X_1(f) + X_2(f) = 2 \cdot 2B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\left(f - \frac{4n}{T}\right)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\left(2B\frac{nT}{4}\right) \delta\left(t - n\tfrac{T}{4}\right)$$

è un campionatore di $x(t)$ con periodo $T/4$

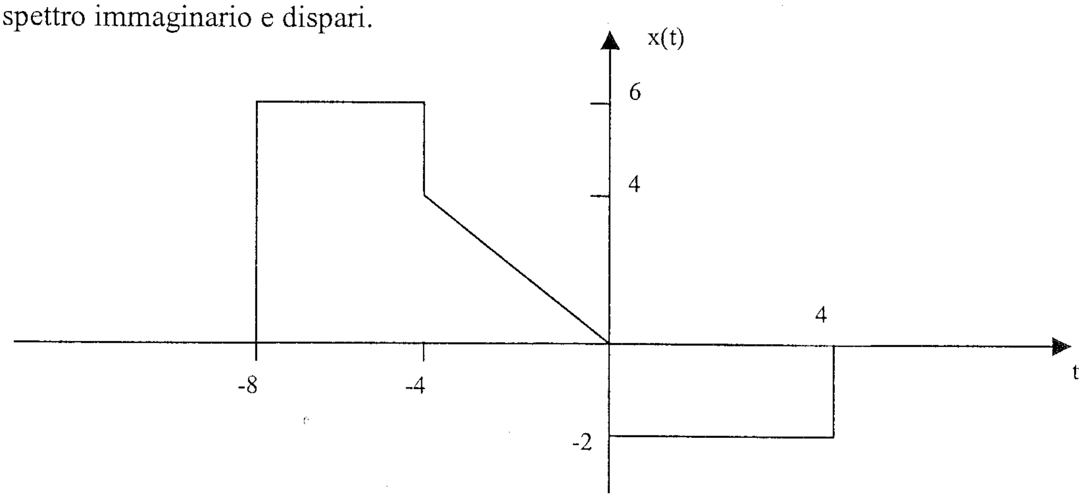
COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

28 Giugno 2005

Esercizio 1:

Sia dato il segnale x(t) mostrato in figura.

- Determinarne la trasformata di Fourier.
- Si consideri $x_T(t)= \sum_{-\infty}^{\infty} x(t-12n)$, si modifichi tale segnale periodico in modo che il nuovo segnale abbia spettro immaginario e dispari.



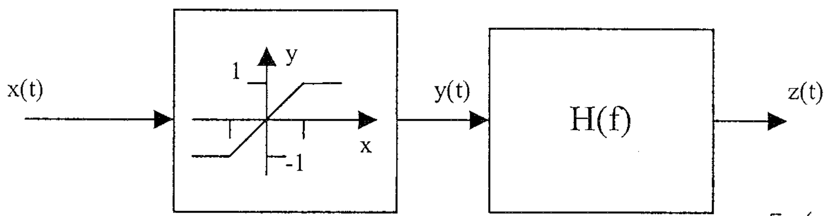
Esercizio 2

Sia dato il segnale g(t) con spettro G(f) = $A\,rect\left[\frac{(f+B)}{2B}\right]$

Classificare g(t). Illustrare in quale modo sia possibile applicare il teorema del campionamento a tale segnale e stabilire la corrispondente frequenza di Nyquist.

Esercizio 3

Sia dato il sistema di figura, costituito dalla cascata di un blocco non lineare e di un filtro passabasso con H(f)= $rect\left(\frac{f}{2B}\right)$



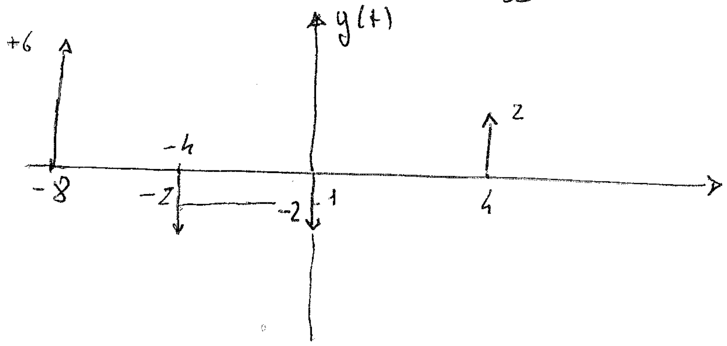
Determinare l'uscita quando in ingresso è posto il segnale x(t)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\,tri\left[\frac{2(t-nT)}{T}\right]$, dove T= $\frac{1}{2B}$.

Determinare il rapporto fra potenza in uscita e potenza in ingresso.

ESERCIZIO 1

La trasformata di Fourier del segnale di energia di figura può essere agevolmente calcolata applicando la proprietà di integrazione.

Infatti notiamo che $x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\alpha)\,d\alpha$ dove



$$y(t) = 6\,\delta(t+8) - 2\,\delta(t+4) - 2\,\delta(t) + 2\,\delta(t-4) - \mathrm{rect}\left(\frac{t+2}{4}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$Y(f) = 6\,e^{j2\pi f8} - 2\,e^{j2\pi f4} - 2 + 2\,e^{-j2\pi f4} - 4\,\mathrm{sinc}(4f)\,e^{j2\pi f2}$$

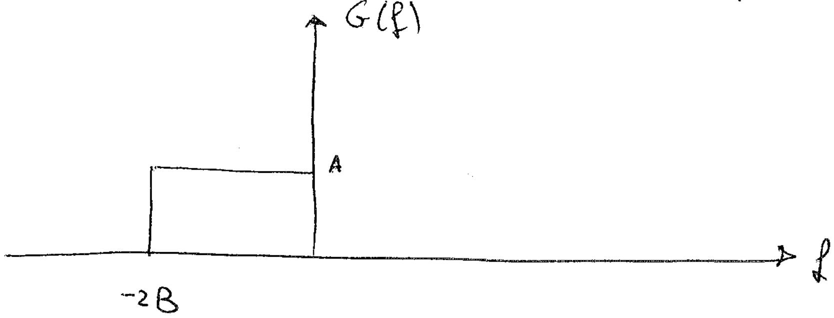
$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f}$$

Il segnale ottenuto traslando $x_T(t)$, che abbia trasformata immaginaria e dispari è

$$x_{MOD}(t) = x_T(t-2) - 2$$

Esercizio 2

Sia $g(t)$ t.c. $G(f) = A \; \mathrm{rect}\left(\frac{f+B}{2B}\right)$

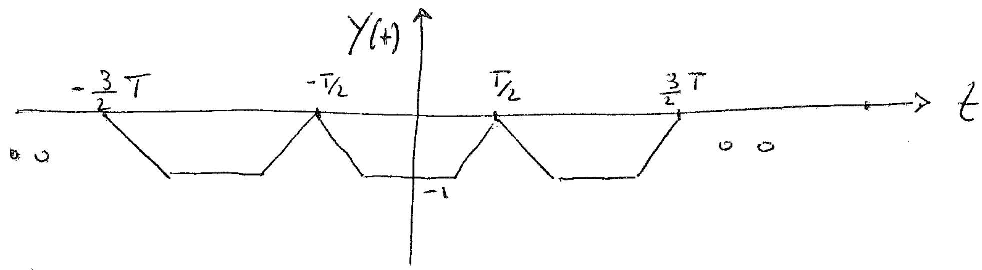


Lo spettro del segnale è reale e antisimmetrico, quindi il segnale $g(t)$ è complesso e ha spettro limitato in banda, il segnale è a en. finita

La parte reale e la parte immaginaria di $g(t)$ sono reali, passa basso, a en finita $\Rightarrow$ possono essere campionati secondo il teorema di Shannon.

Otterremo così 2 sequenze di campioni con freq. di Nyquist $f_N = 4B$

ESERCIZIO 3



$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \, \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$Z(f) = Y(f)\, H(f) = Y_0 \, \delta(f)$$

$$\Updownarrow$$

$$z(t) = Y_0 = \frac{1}{T}\left[\left(T + T/2\right)\cdot(-1)\frac{1}{2}\right] = -\frac{3}{4}$$

$$P_{in} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[2\,\mathrm{tri}\left(\frac{2t}{T}\right)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\, 2\int_0^{T/2}\left(2 - \frac{4t}{T}\right)^2 dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{T/2}\left(2 - \frac{4t}{T}\right)^2 \left(-\frac{4\,dt}{T}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\left[2 - \frac{4}{T}t\right]^3 \Bigg|_0^{T/2} = \frac{4}{3}$$

$$P_{out} = |Y_0|^2 = \frac{9}{16}$$

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{9}{16} : \frac{4}{3} = \frac{27}{64}$$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

15 Luglio 2005

Esercizio 1

- Disegnare la funzione della frequenza $X(f) = -A^2 \text{rect}\left(\frac{f}{3B}\right)\cos^2\left(\frac{\pi f}{3B}\right)$
- Determinare il valore di $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi Bt}\, dt$
- Determinare il valore dell'integrale: $4B\int_{-\infty}^{\infty} x(t) sinc(4Bt)\, e^{-j2\pi 2Bt}\, dt$

Esercizio 2

L'uscita di un sistema con in ingresso il segnale *x(t)* è data da $y(t) = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(\lambda)d\lambda$

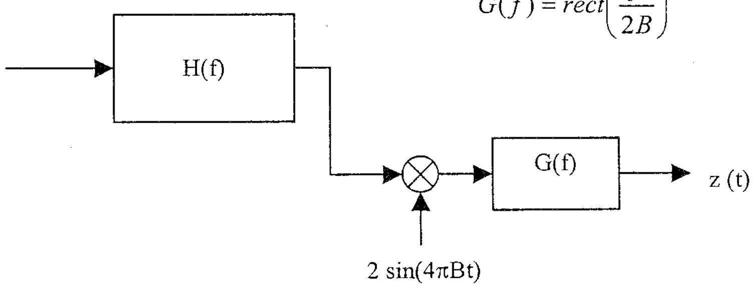
Il sistema è lineare? E' tempo invariante? E' causale? (Giustificare le risposte)
E' possibile associare al sistema una risposta impulsiva? Perchè?

Esercizio 3

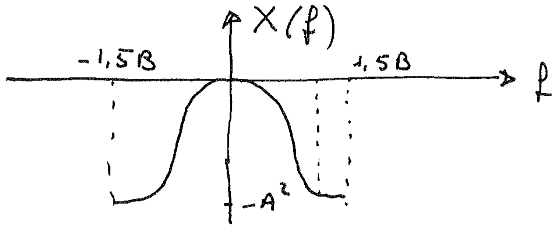
Una sequenza di campioni, ottenuta dal campionamento istantaneo del segnale $x(t)=B\text{sinc}^2(Bt)$ alla frequenza di Nyquist, viene posta in ingresso al sistema di figura.
Determinare il segnale in uscita z (t).

$$H(f) = rect\left(\frac{f-2B}{2B}\right) + rect\left(\frac{f+2B}{2B}\right)$$

$$G(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$



ESERCIZIO 1



$$X(f) = -A^2 \cos^2\left(2\pi \frac{f}{6B}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{f}{3B}\right) = -\frac{A^2}{2}\left[1+\cos\left(2\pi\frac{f}{3B}\right)\right] \underbrace{}_{}$$

rect(f/3B)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi Bt}\, dt = X(B) = -\frac{A^2}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right] = -\frac{A^2}{4}$$

$$4B\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \operatorname{sinc}(4Bt)\, e^{-j2\pi 2Bt}\, dt =$$

$$= 4B\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\operatorname{sinc}(4Bt)\, e^{j2\pi 2Bt}\right]^* dt = \text{per Parseval}$$

$$= 4B\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\left[\frac{1}{4B}\operatorname{rect}\left(\frac{f-2B}{4B}\right)\right]^* df =$$

$$= -\frac{A^2}{2}\int_0^{\frac{3}{2}B}\left[1-\cos\left(2\pi\frac{f}{3B}\right)\right] df = -\frac{A^2}{2}\left[\frac{3}{2}B\right] - \frac{A^2}{2}\left[-\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{f}{3B}\right)\frac{3B}{2\pi}\right]_0^{\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{3A^2B}{4}$$

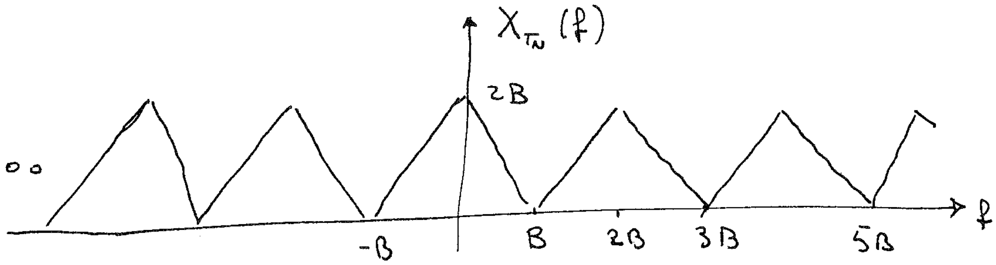
ESERCIZIO 2

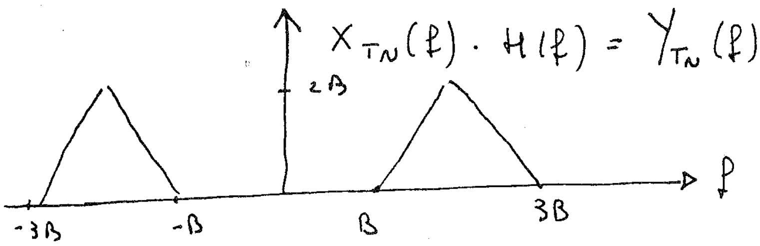
- Il sistema è lineare perchè l'operatore integrale è lineare.
- $y(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(\lambda)d\lambda = \frac{1}{T}\left[\int_{-\infty}^{t+T} x(\lambda)d\lambda - \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right] =$
- Vediamo quindi che $y(t)$ può essere viste come le differenze de l'uscita di 2 integratori, sistemi LTI. Pertanto il sistema con ingresso $x(t)$ e uscita $y(t)$ è LTI a sua volta.
- Il sistema non è causale perchè l'uscita all'istante t dipende da ingressi a istanti successivi a t.
- È possibile associare una risposta impulsiva, perchè il sistema è LTI

ESERCIZIO 3

$$x(t) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt) \Longleftrightarrow X(f) = \mathrm{tri}\left(\frac{f}{B}\right)$$

Campionando alla freq. $f_N = 2B$ si ottiene uno spettro del segnale campionato come in figura

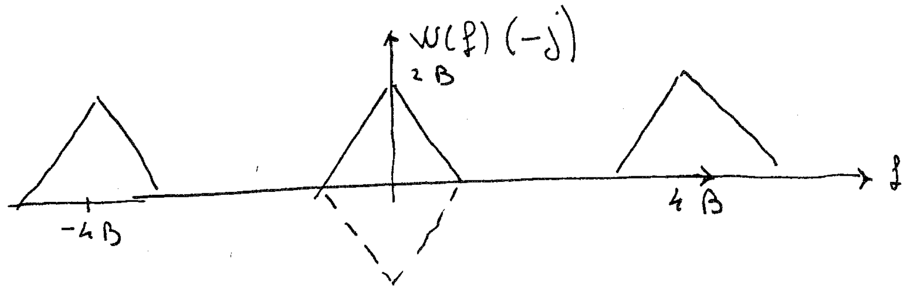




A valle del moltiplicatore, se consideriamo il dominio delle frequenze abbiamo il segnale $W(f)$:

$$W(f) = Y_{T_N}(f) \otimes \left[2\,\frac{\delta(f-2B) - \delta(f+2B)}{2j} \right] =$$

$$= -j\,Y_{T_N}(f-2B) + j\,Y_{T_N}(f+2B)$$



Quindi $Z(f) = 0$

COMPITO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE I

15 Settembre 2005

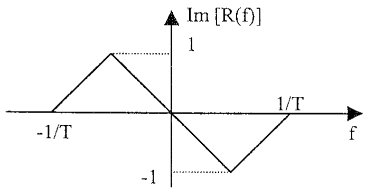
Esercizio 1

Sia s(t)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-n\ 8T)$, dove r(t) è un segnale di energia con trasformata R(f) immaginaria.

Disegnare lo spettro di ampiezza di s(t).

Determinare la componente continua di s(t).

Determinare la componente di prima armonica di s(t)



Esercizio 2

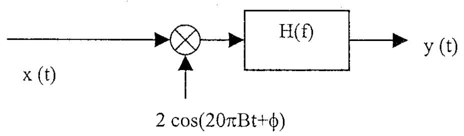
Sia dato il segnale g(t)=[$2\pi t\ \mathrm{sinc}^2(Bt)$], dire se questa può rappresentare la risposta impulsiva di un sistema LTI fisicamente realizzabile, motivando la risposta.

Calcolarne la trasformata di Fourier e la trasformata di Hilbert.

Esercizio 3

Il segnale x(t) è inviato in ingresso al ricevitore di figura.

x(t) è modulato DSB/SC, con modulante m(t) strettamente limitata in banda e portante c(t) = A cos($20\pi Bt$).



$$H(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

ϕ cos tan *te*

a) Stabilire la banda massima del segnale m(t) per una sua corretta ricostruzione in uscita.

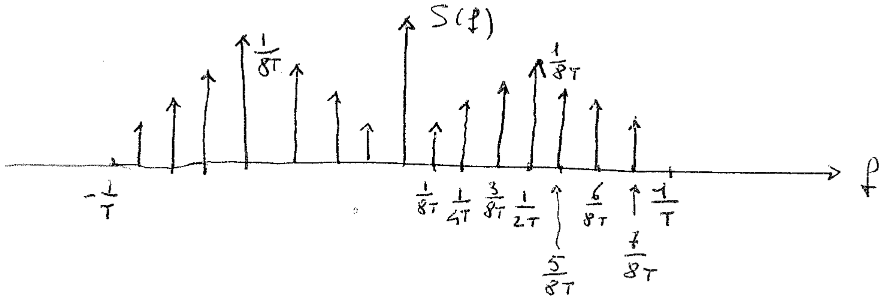
b) E' possibile trovare un valore di ϕ per il quale y(t)=0 per ogni valore di t?

c) Come cambierebbe l'uscita se x(t) fosse modulato SSB/SC e m(t) avesse la banda di cui al punto a ?

Esercizio 1

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - n8T) \longleftrightarrow \begin{cases} S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \, \delta\left(f - \frac{n}{8T}\right) \\ S_n = \frac{1}{8T} \mathcal{F}\{r(t)\}\Big|_{f=\frac{n}{8T}} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{1}{8T} R\left(\frac{n}{8T}\right)$$



Il segnale ha componente continua nulla.
La componente di 1a armonica è data dal contributo delle 2 righe spettrali in $\frac{1}{8T}$ e $-\frac{1}{8T}$, cioè:

$$2|S_1| \cos\Big[2\pi \frac{1}{8T} t \underbrace{- \frac{\pi}{2}}_{\text{fase di } S_1}\Big] =$$

$$= 2 \frac{1}{24T} \cos\left(2\pi \frac{1}{8T} t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{12T} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{1}{8T} t\right)$$

ESERCIZIO 2

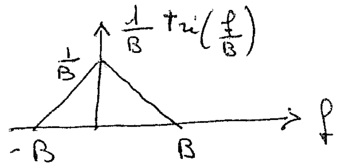
$g(t)$ non può rappresentare la risposta impulsiva di un sistema LTI fisicamente realizzabile perché $g(t) \neq 0$ per $t<0$

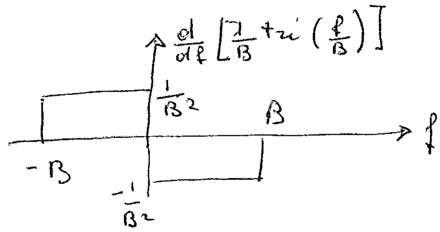
$$g(t) = j\,2\pi t\ \mathrm{sinc}^2(Bt)\,\frac{1}{j}$$

Sappiamo che $j2\pi f\, X(f) \longleftrightarrow \frac{d}{dt}x(t)$, quindi per dualità

$$j\,2\pi t\ x(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{df}X(f)$$

Pertanto $G(f) = -\frac{d}{df}\left[\frac{1}{B}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{B}\right)\right]\cdot\frac{1}{j}$





$$G(f) = \frac{1}{jB^2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-B/2}{B}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{f+B/2}{B}\right)\right]$$

$$\hat{G}(f) = G(f)\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\right] = -\frac{1}{B^2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-B/2}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+B/2}{B}\right)\right]$$

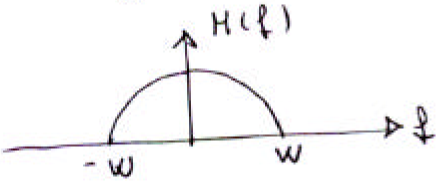
$$= -\frac{1}{B^2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$\updownarrow$$

$$\hat{g}(t) = -\frac{2}{B}\,\mathrm{sinc}(2Bt)$$

ESERCIZIO 3

Sia $m(t)$ il segnale modulante con banda W



$$x(t) = A\, m(t) \cos(20\pi B t) = A\, m(t) \cos[2\pi(10B)t]$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = \frac{A}{2} H(f) \otimes [\delta(f-10B) + \delta(f+10B)] =$$

$$= \frac{A}{2} H(f-10B) + \frac{A}{2} H(f+10B)$$

All'uscita del moltiplicatore si ha

$$x(t)\; 2\cos[2\pi(B10)t + \varphi] = 2A\, m(t) \cos(2\pi(10B)t + \varphi) \cdot$$

$$\cdot \cos[2\pi(10B)t] = A\, m(t) \{\cos[2\pi(20B)t + \varphi] + \cos\varphi\}$$

Pertanto $\quad y(t) = h(t) \otimes [A\, m(t) \{\cos[2\pi(20B)t + \varphi] + \cos\varphi]$

$$\updownarrow$$

$$Y(f) = H(f) \cdot Y(f)$$

a) Se $W \leq \frac{B}{2}$ si ha che $y(t) = A\, m(t) \cos\varphi$

b) Il valore $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ rende $y(t) = 0 \quad \forall t$

c) $y(t) = A\, m(t) \cos\varphi \pm A\, \hat{m}(t) \operatorname{sen}\varphi$