Capitolo 9

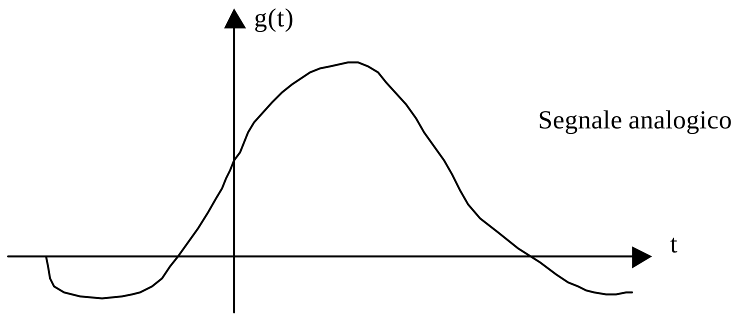
IL CAMPIONAMENTO DEI SEGNALI

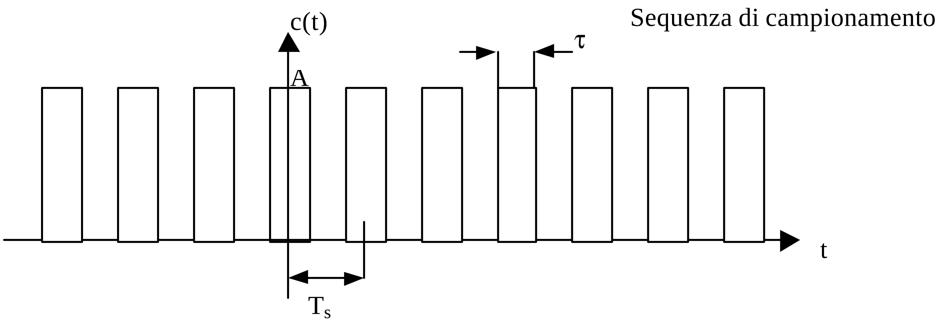
Questo capitolo è dedicato allo studio delle proprietà dell'operazione di campionamento di un segnale, che risulta di fondamentale importanza nelle applicazioni perché permette, sotto certe condizioni, di affidare l'intera informazione di un segnale continuo, che deve essere trasmesso, ai suoi campioni.
Questa tecnica lascia liberi degli intervalli di tempo, durante la trasmissione del segnale, che possono essere utilizzati per realizzare la trasmissione di altri segnali (multiplex a divisione di tempo).
Una trasmissione multipla nel dominio del tempo, ovvero una trasmissione contemporanea di due o più messaggi distinti lungo lo stesso canale di trasmissione, si realizza campionando i singoli segnali e interallacciando tra loro i corrispondenti campioni, in modo da inviare in ciascuno degli intervalli fra due campioni successivi dello stesso messaggio, un campione per ognuno dei segnali in trasmissione.
Successivamente viene operata la cosiddetta codifica dei livelli dei campioni così ottenuti. Ovvero, invece che trasmettere i singoli livelli del segnale in maniera diretta, si esprimono questi in forma approssimata mediante un insieme finito di livelli possibili (processo detto di quantizzazione, già analizzato nel capitolo 1) e, successivamente, si rappresentano i diversi livelli mediante un opportuno codice, ovvero mediante associazioni di simboli ("parole") di un "alfabeto" di segnali elementari prestabilito (trasmissione "numerica" o "digitale"). Come verrà mostrato nei corsi successivi, ciò consente una migliore strategia di difesa nei confronti del rumore.
Le due operazioni brevemente descritte sono ovviamente possibili solo se il segnale da trasmettere è rappresentabile indifferentemente sia mediante l'insieme di tutti i valori che esso assume nel tempo, sia mediante un insieme opportuno di "campioni", ovvero di valori da esso assunti in intervalli di tempo opportuni.
E’ una questione di ordine matematico, che viene affrontata dal cosiddetto "teorema del campionamento", riproposto ai fini delle applicazioni nel campo delle comunicazioni elettriche da Shannon, e che per questo da lui prende il nome.
Le possibilità offerte dalla applicazione del teorema del campionamento, oltre che al campo della trasmissione a distanza della informazione, si estendono anche al campo della elaborazione ed analisi digitale dei segnali, una conseguenza questache apre enormi prospettive.

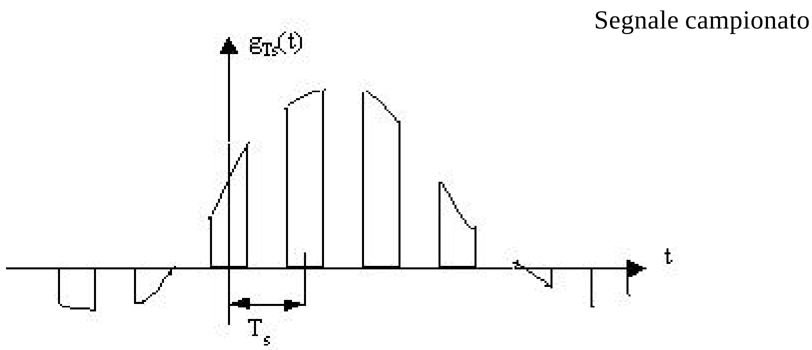
9.1 L'OPERAZIONE DI CAMPIONAMENTO

Da un punto di vista del tutto generale, per "campionamento" di un segnale reale continuo nel tempo (oppure nello spazio, nella frequenza, ecc.) g(t), si intende l'operazione mediante la quale si prelevano dal segnale originario i valori che esso assume durante intervalli di tempo di durata τ (in genere costante), separati da intervalli (T_s - τ), dove T_s si dice "periodo di campionamento" del segnale, ed il suo inverso f_s "frequenza di campionamento" (numero di campioni prelevati nell'unità di tempo)..

I valori da attribuire al segnale campionato negli intervalli di tempo (T_s - τ) non sono definiti, ma possono essere per comodità considerati nulli.







Si parla di campionamento naturale, quando τ assume un valore finito, mentre si parla di campionamento istantaneo quando l'intervallo τ si riduce ad un punto.

Se indichiamo con: $c(t) \underline{\Delta}\, A \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t-nT_s}{\tau}\right)$

l'espressione analitica di un treno periodico di impulsi rettangolari di ampiezza A, durata τ e periodo di ripetizione T_s, il segnale campionato $g_{Ts}(t)$ si esprime:

$$g_{Ts}(t) = g(t)c(t) \triangleq A\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)rect\left(\frac{t-nT_s}{\tau}\right)$$

dove A rappresenta una costante di proporzionalità.
Nel caso di campionamento istantaneo, il segnale campionato è del tipo "a tempo discreto" e si può esprimere nella forma:

$$g_{Ts}[n] = g_{Ts}(nT_s) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Possiamo considerare una rappresentazione ideale del segnale campionato con campionamento istantaneo, mediante un passaggio al limite della espressione che caratterizza il campionamento naturale:

$$\lim_{t \to 0} g_{Ts}(t) = \lim_{t \to 0} g(t)c(t) = \lim_{t \to 0} A\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)rect\left(\frac{t-nT_s}{\tau}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\lim_{t \to 0} Arect\left(\frac{t-nT_s}{\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta\left(\frac{t-nT_s}{\tau}\right)$$

dove abbiamo posto A=1/τ;.

Il problema che ci poniamo è ricavare <u>se e in quali ipotesi</u>, noto il segnale campionato $g_{Ts}(t)$, è possibile ricavare g(t).

Sotto opportune condizioni che ricaveremo, la risposta a tale problema è affermativa e, in corrispondenza di differenti classi di segnali g(t) e tipi diversi di algoritmi di ricostruzione del segnale originario a partire dai suoi campioni, si hanno differenti espressioni di quello che è comunemente detto "teorema del campionamento".

9.2 CAMPIONAMENTO ISTANTANEO DI SEGNALE ANALOGICO IN BANDA BASE

Sia g(t) un segnale <u>reale</u>, <u>continuo</u>, <u>a energia finita</u> e <u>banda limitata B</u>.
Consideriamo inizialmente la forma del ,campionamento istantaneo, di tipo ideale, ottenuto moltiplicando il segnale da campionare g(t) per un treno periodico di impulsi di Dirac

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) \qquad \text{con } T_s \text{ periodo di ripetizione}$$

Se indichiamo con $g_\delta(t)$ tale <u>segnale campionato ideale</u>, esso si esprime:

$$g_\delta(t) = g(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

Ricordando che lo sviluppo in serie di Fourier di $\delta_{T_s}(t)$ vale:

$$\delta_{T_s}(t) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nf_s t} \qquad f_s = 1/T_s$$

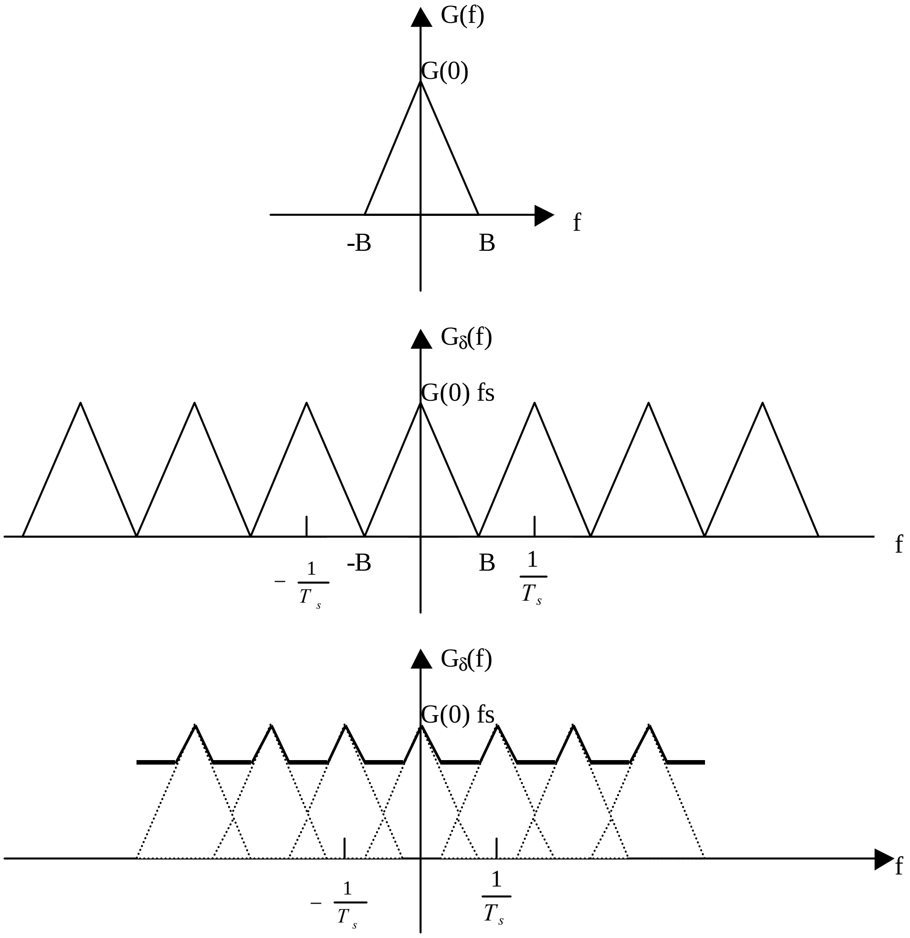
Allora $g_\delta(t)$ si esprime:

$$g_\delta(t) = g(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) = g(t) f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nf_s t}$$

È agevole valutare la trasformata di Fourier di questa funzione, e quindi lo spettro del segnale campionato ideale:

$$G_\delta(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f-nf_s)$$

Si osserva l'interessante risultato che - a meno del parametro costante f_s - lo spettro del segnale campionato ideale è ottenuto per ripetizione periodica con periodo f_s di quello del segnale originario g(t). In relazione al valore della frequenza di campionamento f_s rispetto alla banda B del segnale da campionare, si hanno due situazioni distinte nello spettro del segnale campionato: se $f_s \geq 2B$ non si ha sovrapposizione delle repliche dello spettro G(f), mentre si ha parziale sovrapposizione se $f_s < 2B$.
Nelle figure successive sono mostrati, partendo dall'alto, lo spettro del segnale analogico da campionare, che qui si suppone reale e pari, lo spettro del segnale campionato alla frequenza di Nyquist e lo spettro del segnale campionato in presenza di "aliasing".



Ricostruzione del segnale

L'osservazione dello spettro del segnale campionato suggerisce anche la procedura da seguire per la ricostruzione del segnale originario a partire da quello campionato e le condizioni sotto cui essa è valida.
A tale scopo, supponiamo di moltiplicare lo spettro periodico del segnale campionato per una funzione "finestra" del tipo $\left\{\frac{1}{2B'} rect\left[\frac{f}{2B'}\right]\right\}$, con $B \leq B' \leq f_s - B$

Si ottiene:

$$G'(f) = \frac{1}{2B'} rect\left[\frac{f}{2B'}\right] G_d(f)$$

Si osserva facilmente che $G'(f)=\frac{f_s}{2B'}G(f)$ se e solo se $f_s \geq 2B$.
Sotto tale ipotesi, antitrasformando G'(f) si ottiene:

$$F^{-1}[G'(f)]=\frac{f_s}{2B'}F^{-1}[G(f)]=\frac{f_s}{2B'}g(t)$$

Il calcolo dell'antitrasformata ci consente di ricavare la formula di ricostruzione del segnale originario, noti i suoi campioni $g(nT_s)$:

$$\frac{f_s}{2B'}g(t)=F^{-1}[G'(f)]=F^{-1}\left[\frac{1}{2B'}rect\left(\frac{f}{2B'}\right)G_\delta(f)\right] \qquad (*)$$

Consideriamo ora il segnale campionato ideale $g_\delta(t)$ nella forma

$$g_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

Allora, tenendo conto della trasformazione: $F[\mathrm{sinc}(2B'\,t)]=\frac{1}{2B'}rect\left(\frac{f}{2B'}\right)$

la (*) si esprime:

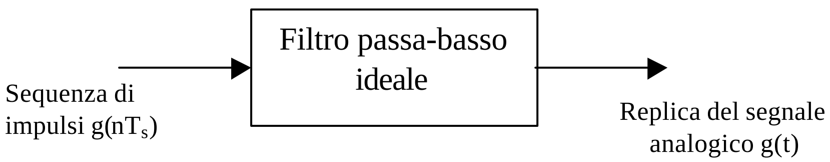
$$\frac{f_s}{2B'}g(t)=F^{-1}[G'(f)]=F^{-1}\left[\frac{1}{2B'}rect\left(\frac{f}{2B'}\right)G_\delta(f)\right]=sinc(2B't)\otimes\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s)\delta(t-nT_s)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s)sinc[2B'(t-nT_s)]$$

Questa espressione rappresenta la cosiddetta *formula di interpolazione*; deve questo nome al fatto che nei punti in cui il segnale da ricostruire non è noto, i suoi valori si ottengono dalla combinazione lineare delle funzioni (di interpolazione) sinc.

Abbiamo così ricavato condizioni di validità e formula di interpolazione del teorema del campionamento per il tipo di segnale ipotizzato.

La trattazione sopra riportata ci indica anche la possibile realizzazione circuitale di ricostruzione del segnale originario g(t), avendo in ingresso il segnale campionato ideale.
Si osserva infatti che una replica del segnale originario, eventualmente moltiplicata per una costante, può essere ottenuta in uscita da un filtro ideale passa-basso, con banda passante B', al cui ingresso venga posto il segnale campionato.



Nelle applicazioni può risultare vantaggioso campionare il segnale con una f_0 maggiore della frequenza di Nyquist, ottenendo repliche dello spettro sufficientemente separate in frequenza, in modo tale che anche un filtro passa-basso reale possa isolare il singolo spettro.

9.3 ALIASING

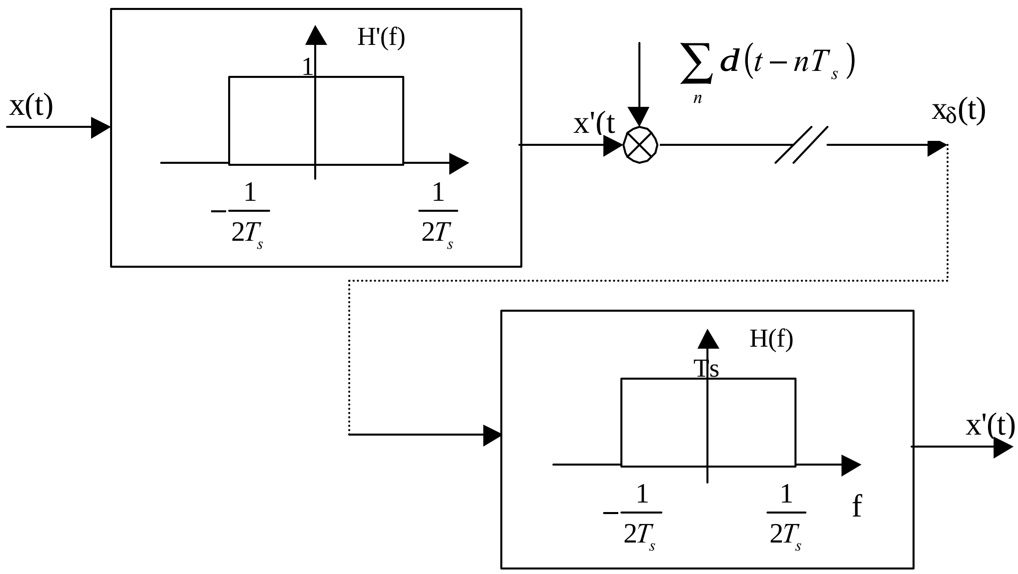
Il valore minimo di frequenza di campionamento necessaria affinché sia possibile ricostruire esattamente il segnale originario, è eguale al doppio della frequenza più alta in esso contenuta ($f_s = 2B$), e prende il nome di *frequenza di Nyquist*.
Qualora la frequenza di campionamento del segnale sia inferiore alla frequenza di Nyquist, si ha una specie di "ripiegamento" dello spettro, nel senso che componenti dello spettro di G(f) a frequenze maggiori di $f_s/2$ vengono traslate, nello spettro di G'(f), a frequenze minori di $f_s/2$.
Tale effetto è detto nella letteratura anglosassone "aliasing", e comporta una distorsione del segnale ricostruito rispetto a quello originario.

È opportuno a questo punto richiamare il fatto che un segnale di durata finita non può essere a banda rigorosamente limitata (e viceversa). Per verificare la validità di questo asserto si può ragionare nel modo che segue: supponiamo di avere g(t) diverso da zero in un intervallo di tempo finito (t_1, t_2), e quindi di durata finita $\Delta t = (t_1 - t_2)$.
Indichiamo con t_{max} il massimo dei valori assoluti di t_1 e t_2: $t_{max} = \mathrm{MAX}\,[\,|t_1|, |t_2|\,]$
e definiamo $T \triangleq (2\,t_{max})$. Allora rect(t/T) è una finestra di ampiezza unitaria e di durata T, tale da comprendere in ogni caso l'intervallo di tempo (t_1, t_2). Quindi il prodotto di tale funzione finestra per la funzione g(t) lascia quest'ultima invariata: g(t) rect[t/T] = g(t)

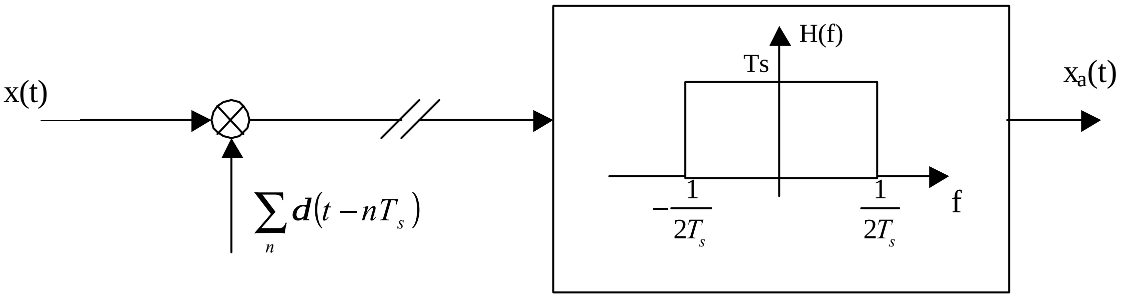
Poichè la trasformata del prodotto g(t) rect[t/T] è eguale alla convoluzione tra le rispettive trasformate e la trasformata della funzione "rect" è una funzione "sinc", diversa da zero in tutto il campo delle frequenze, dalle proprietà dell'integrale di convoluzione si ricava che esso, e quindi la funzione G(f), sono diversi da zero in tutto il campo delle frequenze. Il teorema del campionamento trova però egualmente pratica applicazione, se lo spettro del segnale da campionare è rilevante entro la banda B, e di ampiezza trascurabile al di fuori.
In ogni caso, per garantire tale condizione, è opportuno filtrare preventivamente il segnale che si vuole campionare, con un filtro passa-basso in grado di attenuare sufficientemente le frequenze al di fuori della banda B, ricostruibile con la frequenza di campionamento $f_s = 2B$.

Errore quadratico medio

Mostriamo come sia conveniente pre-filtrare il segnale nell'eventualità che sia di durata limitata.
Poniamo all'ingresso del sistema della figura seguente un segnale x(t) a banda illimitata e indichiamo con x'(t) il segnale in uscita.



Quindi consideriamo lo schema seguente ancora con il segnale x(t) in ingresso e indichiamo con $x_a(t)$ il segnale che si ottiene in uscita.



I due segnali, x'(t) e $x_a(t)$, sono ricostruzioni di x(t), alterate rispettivamente da un <u>errore di troncamento</u> e da un <u>errore di aliasing</u> . Adottiamo come metrica per il confronto fra questi, l'errore quadratico medio:

$$\varepsilon' = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)-x'(t)\right|^2 dt$$

$$\varepsilon_a = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)-x_a(t)\right|^2 dt$$

Notiamo che $\varepsilon' = \varepsilon_a = 0$ se x(t) è a banda limitata rispetto alla frequenza di Nyquist. Si può dimostrare che se x(t) è a banda illimitata:

$$\varepsilon' = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)-x'(t)\right|^2 dt \le \varepsilon_a = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)-x_a(t)\right|^2 dt$$

$$\varepsilon' = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(f)-X'(f)\right|^2 dt$$

$$X'(f) = \begin{cases} X(f) & |f|<B \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La funzione integranda è nulla per |f|<B. Pertanto:

$$\varepsilon' = \int_{-\infty}^{-B} \left|X(f)\right|^2 dt + \int_{B}^{\infty} \left|X(f)\right|^2 dt$$

Analogamente otteniamo:

$$\varepsilon_a = \int_{-\infty}^{-B} \left|X(f)\right|^2 dt + \int_{B}^{\infty} \left|X(f)\right|^2 dt + \int_{-B}^{B} \left|X(f)-X_a(f)\right|^2 dt$$

L'ultimo integrale è sempre <u>non negativo</u>, quindi risulta $\varepsilon' \le \varepsilon_a$

9.4 CAMPIONAMENTO NATURALE DI SEGNALI IN BANDA BASE

Abbiamo visto che il campionamento istantaneo rappresenta il caso limite del campionamento naturale, del quale conserva le caratteristiche peculiari.
Un segnale campionato in modo naturale può essere rappresentato mediante il prodotto

$$g_{T_s}(t) = g(t)c(t)$$

Ricordando l'espressione dello sviluppo in serie di Fourier di un treno periodico di impulsi rettangolari:

$$c(t) \triangleq A\sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t-nT_s}{\tau}\right) = \frac{A\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} sinc\left(\frac{n\tau}{T_s}\right)e^{j2\pi n f_s t}$$

Per il segnale campionato si ricava un'espressione del tipo:

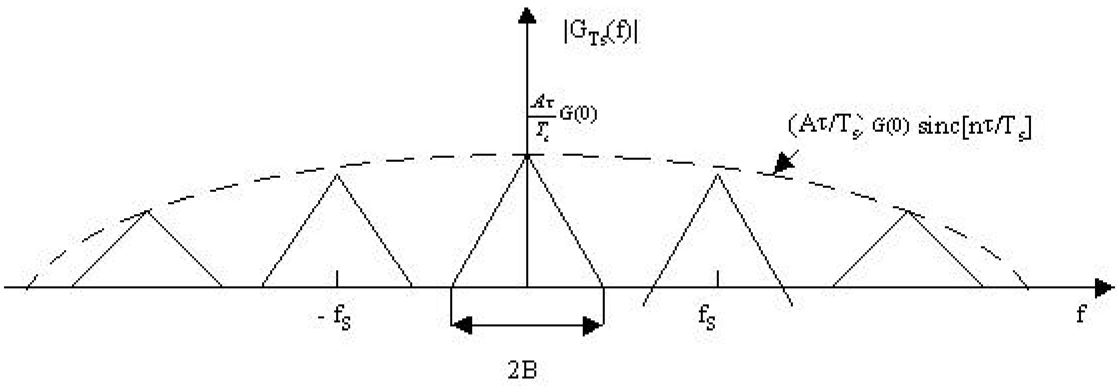
$$g_{T_s}(t) = g(t)c(t) = g(t)A\sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t-nT_s}{\tau}\right) =$$

$$= g(t)\frac{A\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} sinc\left(\frac{n\tau}{T_s}\right)e^{j2\pi n f_s t} = \frac{A\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} sinc\left(\frac{n\tau}{T_s}\right)g(t)e^{j2\pi n f_s t}$$

La trasformata di Fourier di questa vale:

$$G_{T_s}(f) = F\left\{\frac{A\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} sinc\left(\frac{n\tau}{T_s}\right)g(t)e^{j2\pi n f_s t}\right\} = \frac{A\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} sinc\left(\frac{n\tau}{T_s}\right)G\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

Si deduce dalla osservazione di quest'ultima come lo spettro di un segnale campionato in modo naturale sia ottenuto per ripetizione periodica - con periodo f_S - di quello del segnale originario, dove le singole repliche spettrali sono "pesate" dal valore assunto dalla funzione sinc(τf) per f = n f_S:



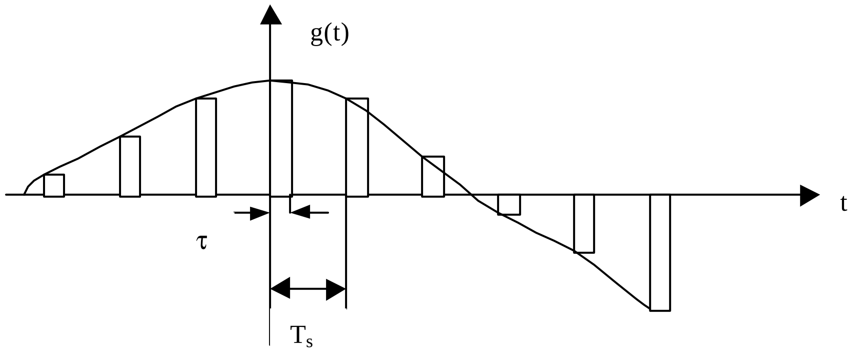
Tale modifica dello spettro complessivo non comporta però mutamenti delle condizioni sotto le quali è ricostruibile il segnale originario.
Esse sono quindi ancora quelle valide per il campionamento istantaneo ideale, al quale il campionamento naturale tende, quando τ tende a 0 e ($A\tau$) tende a 1.

L'operazione di campionamento viene effettuata in generale con una sequenza di impulsi non rettangolari, ai fini di un ovvio risparmio di banda, si ha pertanto che la trasformata del segnale campionato risulta costituita da repliche dello spettro del segnale in banda base, G(f), pesate da coefficienti C_n, che coincidono con i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del nuovo segnale periodico c(t).

9.5 CAMPIONAMENTO SAMPLE-HOLD DI SEGNALI IN BANDA BASE

Un tipo di campionamento largamente utilizzato nella pratica è quello ottenuto mediante circuiti elettronici del tipo "sample-hold", mediante i quali vengono compiute in successione due operazioni:

- campionamento praticamente istantaneo del segnale g(t);
- generazione di un impulso rettangolare di ampiezza $g(nT_s)$ e durata τ.



Se indichiamo con h(t) la funzione impulso-rettangolare così definita: $h(t) = rect\left(\dfrac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)$

Il segnale campionato si esprime: $g_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)h(t-nT_s)$

Si osservi come questa espressione sia anche il risultato della convoluzione tra il segnale campionato nella forma ideale e la funzione h(t). Infatti si ha:

$$g_d(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_d(\tau)h(t-\tau)d\tau =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t-nT_s) \otimes h(t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)h(t-nT_s)$$

Si ricordi infatti che vale la seguente identità:

$$h(t-nT_s) = \delta(t-nT_s) \otimes h(t)$$

Quindi in definitiva possiamo scrivere:

$$g_{T_s}(t) = g_d(t) \otimes h(t)$$

Trasformando secondo Fourier si ottiene lo spettro del segnale campionato:

$$G_{T_s} = G_d(f)H(f)$$

e, ricordando l'espressione di $G_\delta(f)$:

$$G_{T_s}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_s) H(f)$$

Differentemente dai tipi di campionamento finora esaminati, in questo caso l'operazione di filtraggio ideale del segnale campionato non isola una funzione che rappresenta - a meno di un fattore costante - lo spettro del segnale da campionare, ma una funzione che risulta dal prodotto dello spettro di g(t) per la trasformata di Fourier della funzione "finestra" h(t).
Osservando lo spettro di ampiezza e di fase della funzione h(t), si deduce che nel caso di campionamento ora esaminato si introduce una distorsione di ampiezza nel segnale ricostruito rispetto a quello originario.

La sequenza di impulsi ottenuta con il campionamento sample-hold può essere vista come un segnale modulato, nel quale il segnale portante è un'onda quadra e il segnale modulante una sequenza di impulsi contenente tutta l'informazione originaria. Questa tecnica di modulazione è conosciuta con il nome di **Modulazione PAM** (Pulse Amplitude Modulation)

9.6 TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO GENERALIZZATO

Il teorema del campionamento generalizzato afferma che:
"Ogni insieme di 2B campioni al secondo, indipendenti ma non necessariamente ottenuti con campionamento periodico, individua univocamente il segnale passa-basso originario".
La dimostrazione di questo teorema deriva direttamente dalla definizione di g(t), segnale reale, attraverso la serie di Fourier, supponendo di poter considerare il segnale di durata limitata, anche se a banda limitata, in quanto segnale fisico.
Infatti, si supponga di considerare il segnale su un intervallo temporale di durata limitata D, sufficientemente grande da poter considerare che il segnale troncato g(t) rect[(t-D/2)/D] abbia ancora banda praticamente limitata B. Tale segnale può essere allora rappresentato dalla somma finita:

$$s(t) = S_0 + 2\sum_{n=1}^{BD} |S_n| \cos\left[\frac{2\pi nt}{D} + \theta_n\right] \quad [0 \le t \le D]$$

che coincide con lo sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico, il cui periodo centrale coincide con g(t) rect[(t-D/2)/D]

Nell'espressione precedente S_0 rappresenta la componente continua del segnale e generalmente non contiene informazione per cui può essere ignorata(quasi sempre non è presente).
Occorre quindi conoscere 2BD coefficienti, gli S_n, che possono essere calcolati specificando altrettanti valori di s(t) nell'intervallo D, purché risultino indipendenti; il numero di campioni richiesti è dunque 2BD, ovvero 2B al secondo, e la scelta degli istanti di campionamento non è vincolata in modo critico ad essere periodica. Il numero N=2BD è spesso indicato come dimensione del segnale.

9.7 CAMPIONAMENTO DI FUNZIONI COMPLESSE

Il teorema del campionamento per segnali di tipo passa-basso è stato sviluppato con riferimento all'ipotesi di segnale da campionare rappresentato da una funzione reale. Se il segnale da campionare è rappresentato da una **funzione complessa**, esso si applica egualmente.
Ovviamente, in questo caso è necessario operare un doppio campionamento, uno sulla parte reale e l'altro sulla parte immaginaria della funzione complessa, oppure sul modulo e la fase. L'istante di campionamento sulle due funzioni reali può non necessariamente coincidere.

9.8 TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO PER SEGNALI PASSA-BANDA

Finora abbiamo illustrato il teorema del campionamento per segnali in bassa frequenza, vediamo ora come si applichi il campionamento nel caso in cui il segnale g(t) sia passa-banda.
Supponiamo di voler campionare un segnale reale con banda limitata tra le frequenze:
$f_0 - B/2 < |f| < f_0 + B/2$
Ci domandiamo se sia possibile, e in quali ipotesi, esprimere un tale segnale mediante una sequenza di campioni opportunamente prelevati da esso. Per quanto visto nel campionamento dei segnali passa-basso, è ovvio che un tale segnale può essere completamente descritto a partire dalla conoscenza dei suoi campioni presi con frequenza di campionamento $f_s = 2(f_0 + B/2)$
Mostreremo però di seguito come non sia necessario operare con una frequenza di campionamento così elevata. In relazione al tipo di operazioni da compiere sul segnale da campionare, esistono differenti espressioni del teorema del campionamento per tale tipo di segnale.

Teorema del campionamento del 1° ordine

Questo teorema afferma che:
"Se un segnale passa-banda ha spettro di larghezza B, delimitato da una frequenza inferiore f_m e una superiore f_M, g(t) è completamente individuato dai valori istantanei $g(nT_S)$, se $f_s = \frac{1}{T_S} = \frac{2f_M}{m}$

dove m indica la parte intera di $\frac{f_M}{B}$.

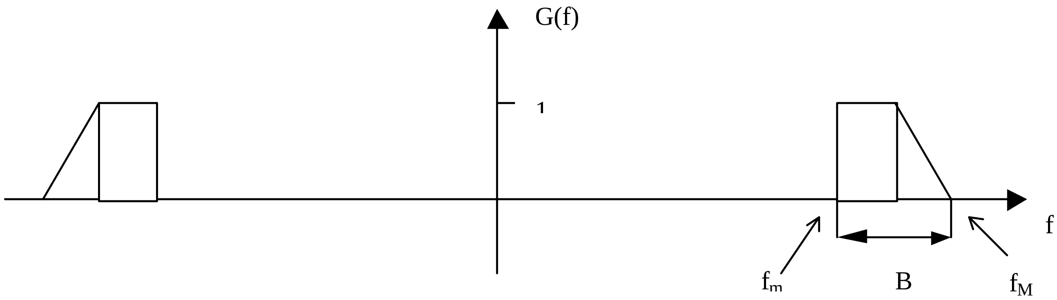
Il segnale g(t) può essere riprodotto dai suoi campioni mediante filtraggio ideale con risposta:

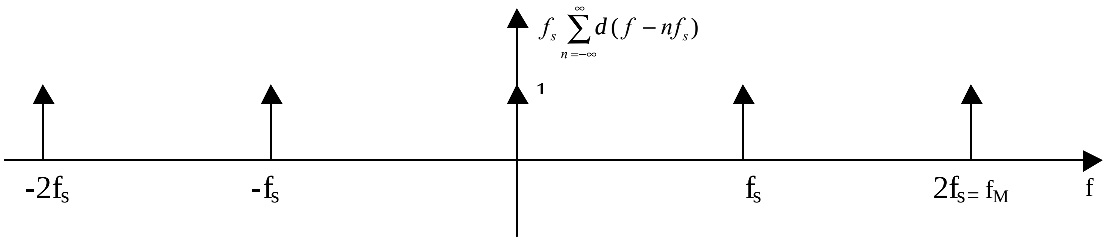
$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_m \le |f| \le f_M \\ 0 & altrove \end{cases}$$

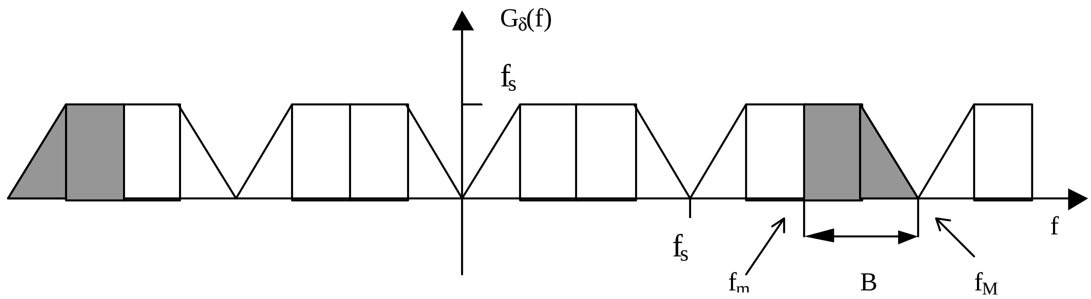
La formula di ricostruzione è: $g(t) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\cos[2\pi f_0 (t - nT_s)]sinc[B(t - nT_s)]$

dove $f_0 = \frac{f_m + f_M}{2}$ "

Verifichiamo con un esempio quanto sopra enunciato.
Consideriamo prima il caso in cui $\frac{f_M}{B}$ sia intero, cioè $\frac{f_M}{B} = m$, e quindi $f_s = 2B$.
Nel caso mostrato come esempio nella figura seguente risulta m=4 e quindi, da quanto stabilito nel teorema appena introdotto, $f_s = \frac{1}{T_S} = \frac{2f_M}{m} = \frac{f_M}{2} = 2B$.
La periodicizzazione dello spettro è ottenuta con un pettine di delta di Dirac tale che $G_{T_s}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_s)$





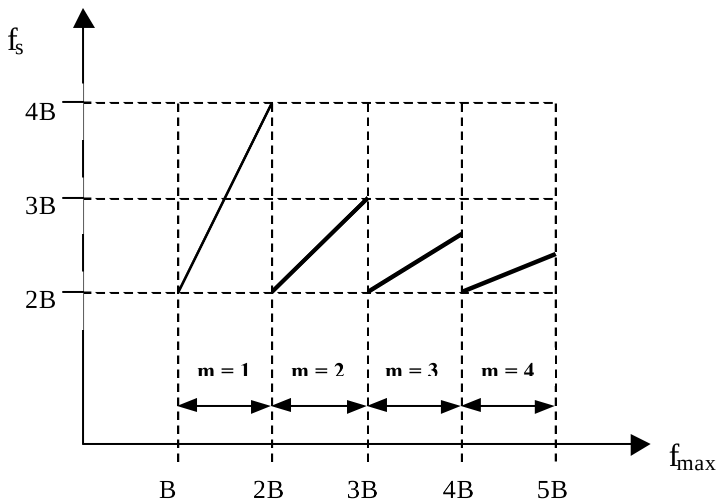


Filtrando questo spettro con un sistema avente risposta in frequenza $H(f) = rect\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f + f_0}{B}\right)$ si ottiene di nuovo la funzione g(t).

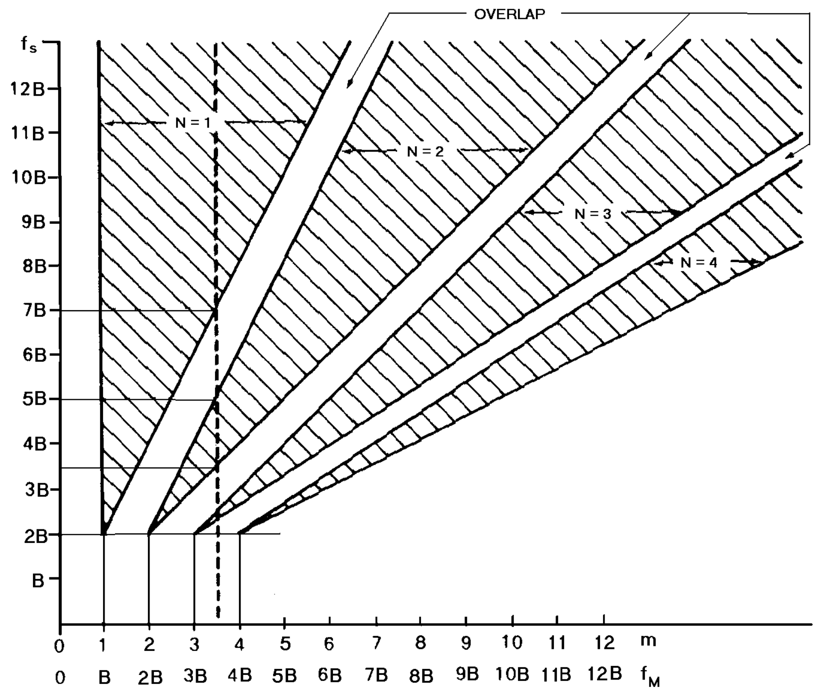
Nel caso in cui $\frac{f_M}{B}$ non sia intero si ha che $\frac{f_M}{B'} = m$ con $B'=B+\Delta B$

Allora la frequenza di campionamento è: $f_s = \frac{1}{T_S} = \frac{2f_M}{m} = 2(B + \Delta B)$

L'andamento di f_s in funzione di f_M è riportato nella figura seguente: si rileva che se il segnale è a banda stretta ($B \ll f_M$), la frequenza di campionamento è praticamente uguale a 2B.



Si noti che la figura precedente si riferisce alla **minima** frequenza di campionamento, mentre la successiva riporta l'andamento generale di f_s in funzione di f_M. Il parametro N si riferisce al numero d'ordine dell'armonica di f_s.



Le zone tratteggiate in questa figura rappresentano aree in cui è possibile scegliere la frequenza di campionamento f_s (sull'asse delle ordinate), nota la frequenza massima f_M caratteristica del segnale da campionare (sull'asse delle ascisse). L'area all'estrema sinistra corrisponde ad un campionamento operato come se il segnale fosse passa-basso, con banda (0 - f_M).
In figura è evidenziato anche un esempio: un segnale passa-banda caratterizzato da un rapporto f_M/B =3,5 può essere campionato con frequenze f_s comprese in tre intervalli, sempre più ampi al crescere di f_s, individuati dall'intersezione della retta verticale posizionata in f_M = 3,5B, con le aree tratteggiate.

Teorema del campionamento del 2° ordine

Nei segnali di tipo passa-banda derivati da processi di modulazione, l'informazione utile è contenuta nel solo <u>inviluppo complesso</u> del segnale stesso. Abbiamo già visto (capitolo precedente) come l'inviluppo complesso sia un segnale di tipo passa-basso a banda limitata. Esso in particolare può esprimersi in termini di componenti in fase e quadratura, che sono segnali reali, a banda limitata.
Ai fini dell'elaborazione digitale del contenuto informativo del segnale passa-banda, è possibile quindi applicare i risultati del teorema del campionamento per segnali passa-basso, alle componenti

fase e quadratura del suo inviluppo complesso, piuttosto che applicare il teorema del campionamento per segnali passa-banda al segnale in banda traslata.
Tale procedura trova diretta applicazione in quei tipi di demodulatore coerente, in cui sono disponibili ambedue le componenti fase e quadratura dell'inviluppo complesso del segnale.
Di seguito riportiamo alcune considerazioni relative a questa versione del teorema del campionamento per segnali passa-banda a banda relativa stretta, che considera però la rappresentazione in termini di inviluppo e fase dell'inviluppo complesso del segnale reale, g(t), considerato: $g(t) = \mathrm{Re}\left\{ g^+(t) \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \tilde{g}(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\} = a(t)\cos\left[2\pi f_0 t + \varphi(t)\right]$
Se analizziamo lo spettro dell'inviluppo complesso $\tilde{g}(t)$, notiamo che esso è ottenuto, a meno di una costante moltiplicativa, traslando lo spettro di $g^+(t)$ di $-f_0$.
La banda di $\tilde{G}(f)$ è quindi compresa fra le frequenze [- B/2 , B/2]: si può pertanto applicare il teorema del campionamento per segnali passa-basso alla funzione complessa $\tilde{g}(t)$. La spaziatura minima dei punti di campionamento è $T_s = \dfrac{1}{B}$ e la funzione $\tilde{g}(t)$, ricostruita dai valori complessi assunti in tali punti, è espressa da:

$$\tilde{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(nT_s)\, e^{j\varphi(nT_s)}\, sinc\left[f_s\left(t - nT_s\right)\right]$$

Il segnale reale g(t) allora risulta dato da:

$$g(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{g}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(nT_s)\cos\left[2\pi f_0 t + \varphi(nT_s)\right] sinc\left[f_s\left(t - nT_s\right)\right]$$

Vi è pertanto una differenza fondamentale rispetto al teorema del campionamento del segnale in bassa frequenza: per ogni istante di campionamento devono essere assegnate due quantità indipendenti. In altre parole vi sono due gradi di libertà per ogni punto di campionamento.

9.9 TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Il teorema del campionamento, enunciato nel dominio del tempo può essere espresso nella forma duale:
"un segnale a durata rigorosamente limitata s(t) = 0 per |t| > T_d è determinato in modo univoco dai campioni del suo spettro intervallati di $F \le \dfrac{1}{2T_d}$. La formula di ricostruzione dello spettro è:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nF)\, sinc\left[2T_d\left(f - nF\right)\right]$$