

Capitolo 1

INTRODUZIONE AI SEGNALI

Nell'ambito dei temi trattati dalle Telecomunicazioni due sono i problemi legati alla propagazione dell'**informazione**: la trasmissione di questa a grande distanza (telecomunicazioni propriamente dette) e la sua acquisizione dall'ambiente circostante (telerilevamento).

Nel senso più generale, la parola "**comunicazione**" indica infatti la trasmissione di informazione da un luogo ad un altro attraverso un mezzo.

Con il termine **segnale** si denomina invece una grandezza fisica, in generale variabile nel tempo, che contiene l'informazione, e la cui natura può essere diversa: acustica, ottica, elettrica

Anche se i segnali possono essere rappresentati in molti modi, l'informazione è sempre contenuta nelle variazioni di una o più grandezze in qualche dominio: ad esempio il segnale può essere costituito dalle variazioni di una grandezza nel tempo o nello spazio.

Per trasmettere l'informazione, e quindi il segnale che la contiene, da un luogo all'altro si usa un **sistema di comunicazione**: questo raccoglie l'informazione dalla sorgente e la consegna all'utente o destinatario, situato in un punto dello spazio distinto.

Consideriamo lo schema a blocchi della pagina seguente, che rappresenta un sistema di comunicazione per la trasmissione di segnali di tipo elettrico, cioè un sistema di comunicazioni elettriche.

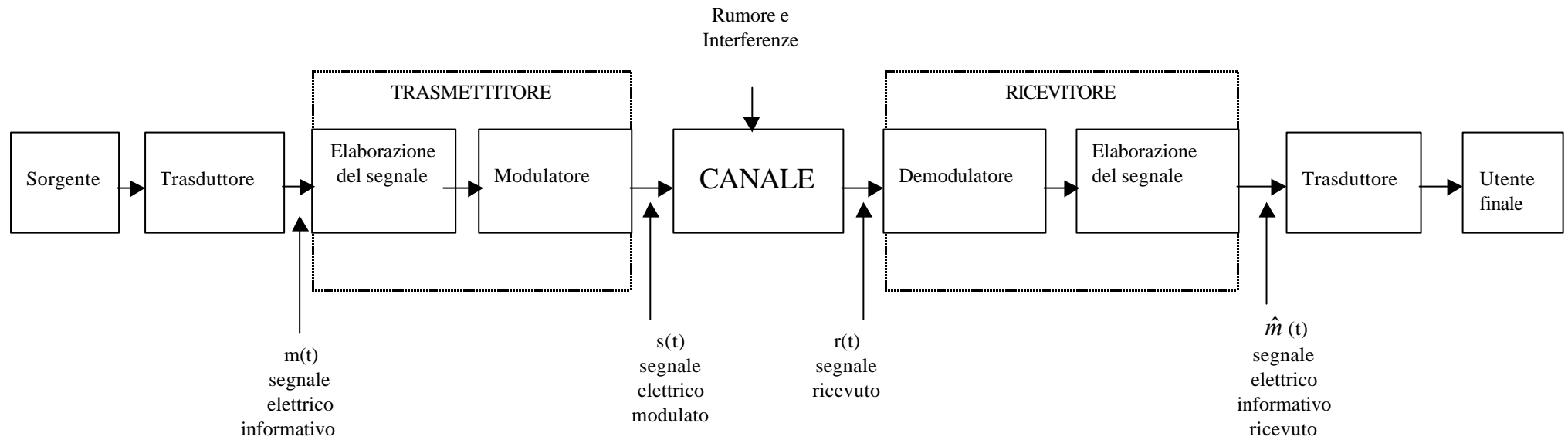
Un trasduttore è inserito all'uscita della sorgente con lo scopo di convertire il messaggio informativo in un segnale elettrico variabile nel tempo. In uscita dal sistema un altro trasduttore ricrea il messaggio originale da consegnare all'utente finale. Il sistema di comunicazione in questo caso è composto da tre blocchi:

- 1) trasmettitore
- 2) canale di comunicazione
- 3) ricevitore

La funzione principale di un trasmettitore è quella di **modificare** il segnale elettrico al suo ingresso (segnale utile) in una forma più adatta alla trasmissione nel canale. Questa modifica è ottenuta sia con un'elaborazione del segnale, sia per mezzo di un processo conosciuto come **modulazione**, che consiste nel far variare alcuni parametri di un'**onda portante** (ampiezza, frequenza, fase) in accordo alle variazioni del segnale originale, ovvero del segnale utile.

L'elaborazione del segnale nel trasmettitore ha la funzione di "condizionare" la sorgente per effettuare una trasmissione più efficiente. In un sistema analogico l'elaboratore di segnale può semplicemente essere un filtro passa-basso che restringe adeguatamente la banda del segnale in ingresso. In un sistema ibrido analogico-digitale, l'elaboratore può essere un convertitore analogico-digitale, ADC, che produce una parola in codice rappresentativa di un campione del segnale analogico d'ingresso. In questo caso l'ADC svolge la funzione di codifica di sorgente. L'elaboratore aggiunge alla parola digitale alcuni bit aggiuntivi, attuando così la funzione di codifica di canale. In questo modo, l'elaboratore di segnale gemello, presente nel ricevitore, può rilevare e correggere eventuali errori di trasmissione.

Il canale di comunicazione può essere una linea di trasmissione, una fibra ottica, l'atmosfera terrestre, lo spazio libero, nel quale un'onda elettromagnetica contenente il segnale viene irradiata. Durante la propagazione lungo il canale il segnale trasmesso viene distorto a motivo delle non linearità e/o delle imperfezioni nella risposta in frequenza del canale.



Altre sorgenti di degradazione sono il rumore e le interferenze incontrati dal segnale durante la trasmissione. Lo scopo principale del ricevitore è quello di ricreare il segnale utile originale dalla versione degradata del segnale trasmesso attraverso il canale, presente all'uscita di quest'ultimo.

Questa rigenerazione viene attuata usando un'opportuna elaborazione del segnale ricevuto e un procedimento noto come **demodulazione**, che è il complementare della modulazione operata dal trasmettitore.

Il problema principale di questo sistema è quello di riuscire ad ottenere un segnale perfettamente identico al segnale originario, questo a causa della presenza inevitabile del rumore, di eventuali interferenze e della "non conoscenza" del segnale utile originario da parte del ricevitore. Lo scopo di un progetto è quindi quello di realizzare un sistema di comunicazione che minimizzi la degradazione dell'informazione rispettando alcune **specifiche** (vincoli) progettuali, come la **potenza in trasmissione**, la **larghezza di banda** e il **costo**.

Per i sistemi digitali la misura più diffusa e più semplice della fedeltà o, se vogliamo, della degradazione, è la *probabilità di errore* (P_e) chiamata anche *tasso d'errore* o *Bit-Error-Rate* (BER) sui dati ricostruiti. Per i sistemi analogici le prestazioni sono quantificate attraverso il *rapporto segnale-rumore* (Signal to Noise Ratio, SNR) all'uscita del ricevitore.

Da quanto sopra illustrato risulta evidente che per studiare i meccanismi che intervengono nella "elaborazione" dell'informazione, dal momento della sua emissione da parte della sorgente al momento del suo arrivo all'utente finale, occorre fare ricorso a dei modelli matematici.

**La Teoria dei Segnali ha lo scopo di sviluppare metodi matematici idonei a
RAPPRESENTARE, RICONOSCERE e ANALIZZARE i segnali fisici.
Secondo tale teoria i segnali fisici si possono classificare in due grandi categorie:
segnali determinati, segnali aleatori**

Un segnale determinato o deterministico è un segnale di cui è noto l'andamento nel tempo. Un segnale di questo tipo è rappresentabile con funzioni matematiche che ne caratterizzano l'andamento in ogni istante. In questa classe di segnali possono allocarsi i segnali trattati dal trasmettitore.

Si dicono aleatori quei segnali per i quali istante per istante esiste un grado di indeterminazione riguardo all'effettivo valore da essi assunto (non se ne può predire il valore in anticipo): di questi segnali sono note soltanto alcune grandezze statistiche e pertanto essi sono rappresentabili con modelli probabilistici.

I segnali aleatori possono essere caratterizzati, invece che mediante una singola funzione del tempo, con un insieme di funzioni dove resta indeterminata la funzione che descrive il segnale coinvolto nelle operazioni del sistema. Si parla in tal caso di processo aleatorio o stocastico.

Tra questi segnali sono riconoscibili quelli presenti in ricezione dove la mancanza di informazione relativa al segnale trasmesso, tra quelli che il sistema può emettere, rende applicabile la modellizzazione sopra menzionata.

Un altro esempio di segnale aleatorio è il generico disturbo che si sovrappone nel canale o nella generica catena ricevente al segnale trasmesso: di esso non conosciamo né la natura né l'andamento temporale. Possiamo tuttavia caratterizzarlo mediante le sue proprietà statistiche, come la potenza media, la distribuzione spettrale della potenza media, ecc.

Un altro tipo di classificazione è quello che divide i segnali in:

- 1) **segnali tempo continui o analogici**¹
- 2) **segnali discreti nel tempo o tempo-discreti**
- 3) **segnali numerici o digitali**

Esempio: Consideriamo la trasmissione della voce attraverso una linea telefonica. L'informazione da trasmettere è un'onda sonora che viene trasformata in segnale elettrico dal microfono (trasduttore) e ripristinata in forma di suono all'auricolare del telefono ricevente: la trasmissione a distanza avviene totalmente per via elettrica. Il segnale elettrico che si ottiene è una funzione del tempo.

Quindi si dicono analogici o continui quei segnali rappresentabili mediante una funzione del tempo, in cui la variabile indipendente, t , può assumere con continuità tutti i valori nell'intervallo di definizione della funzione stessa.

Tale segnale verrà indicato con $g(t)$, $t \in (a,b)$.

In molti casi i segnali che rappresentano il fenomeno fisico di interesse non sono rappresentabili come funzioni di variabile continua, oppure tali funzioni sono note solo per determinati valori della variabile su cui sono definite.

Esempio: nelle moderne reti telefoniche che utilizzano la tecnica PCM, il segnale elettrico analogico viene "campionato" ad intervalli di tempo predeterminati, producendo in tal modo una sequenza di numeri che rappresenta il segnale vocale.

In questo caso il segnale che si deve studiare ed elaborare è noto solamente in alcuni istanti di tempo. Parliamo pertanto di segnali a tempo discreto. In termini matematici definiamo come segnale a tempo discreto, indicato con $g[n]$, una sequenza di numeri reali o complessi, definita per valori interi di n , che rappresenta il "tempo discreto" (nT , T periodo di campionamento). Si vedrà nel prosieguo come dalla conoscenza di una sequenza di campioni, sotto opportune ipotesi, sia possibile ottenere il segnale analogico di origine.

Un segnale si dice digitale (o anche "numerico") se esso soddisfa le seguenti condizioni:

1. è *a tempo discreto*, cioè è definito solo per un insieme numerabile di istanti temporali (sequenza di numeri);
2. è *quantizzato*, cioè può assumere solo un numero finito di valori distinti;
3. è *codificato*, cioè l'insieme dei valori che esso può assumere, viene espresso mediante parole, cioè associazioni di simboli di un codice opportuno, dove ciascun simbolo è espresso fisicamente mediante un predeterminato segnale elementare.

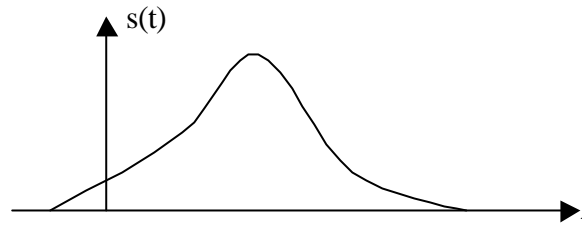
L'uscita di un computer è un classico esempio di segnale numerico. Naturalmente un segnale analogico può essere convertito in uno numerico operando separatamente campionamento, quantizzazione e codifica. L'operazione inversa non ha in genere l'effetto di ricondurre al segnale analogico originario.

La conversione da segnale analogico a segnale numerico è in molti casi consigliata per venire incontro ad esigenze di efficienza e risparmio nella progettazione dei sistemi di comunicazione.

¹ I segnali tempo continui, detti per brevità segnali continui, sono segnali che hanno come dominio della variabile indipendente tutto l'insieme dei numeri reali o tutti i numeri appartenenti all'intervallo di definizione del segnale. L'aggettivo continuo è quindi riferito alla variabile indipendente t , perché può assumere con continuità tutti i valori entro un determinato campo.

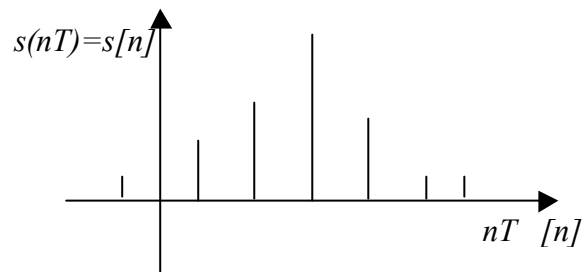
La conversione analogico digitale

Sia $s(t)$ un segnale tempo-continuo come in figura:

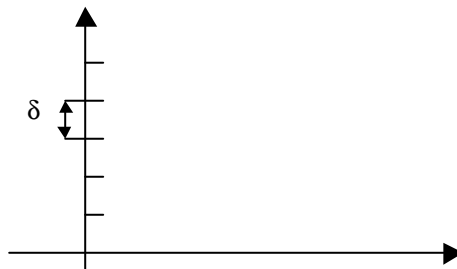


Un segnale è numerico o digitale quando è tempo-discreto, cioè campionato con periodo T , è quantizzato e codificato.

1. La prima operazione è schematizzata nella figura seguente:



2. Per effettuare la seconda operazione, la quantizzazione, consideriamo un quanto fisso di ampiezza d e suddividiamo l'asse delle ordinate con passo pari a d .



Associamo ad ogni campione il valore q_i più prossimo alla sua ampiezza (il valore dell'intervallo i -esimo in cui cade l'estremo del campione).

Nel nostro caso avremo:

$s[-1] \text{ } \textcircled{R} \text{ } q_0$
 $s[0] \text{ } \textcircled{R} \text{ } q_1$
 $s[1] \text{ } \textcircled{R} \text{ } q_1$
 $s[2] \text{ } \textcircled{R} \text{ } q_2$
 $s[3] \text{ } \textcircled{R} \text{ } q_4$
 $s[4] \text{ } \textcircled{R} \text{ } q_2$
 $s[5] \text{ } \textcircled{R} \text{ } q_1$

dove abbiamo indicato con q_i il valore del centro dell' i -esimo intervallo, con Q il numero di intervalli di quantizzazione

3. L'operazione di codifica associa ad ogni livello fra i Q disponibili, cioè ad ogni valore q_i , una parola in codice.

Occorre scegliere il codice attraverso il quale rappresentare i livelli q_i

Generalmente viene usato il codice binario, in cui le parole in codice sono rappresentate con due soli simboli: 0, 1

Se Q sono i livelli e due soli i simboli, occorrono parole in codice di g simboli (lunghezza della parola) per rappresentare tutti i livelli [Dal calcolo combinatorio: le disposizioni con ripetizione di 2 simboli].²

Quindi se $Q=8$ e i simboli sono 2: $Q = 2^g \text{ --- } g = 3$

Associamo ai q_i le seguenti parole in codice:

$q_0 \text{ ---} 000$
 $q_1 \text{ ---} 001$
 $q_2 \text{ ---} 010$
 $q_3 \text{ ---} 011$
 $q_4 \text{ ---} 100$
 $q_5 \text{ ---} 101$
 $q_6 \text{ ---} 110$
 $q_7 \text{ ---} 111$

Abbiamo pertanto una parola in codice di 3 bit per ogni livello e ad ogni campione del segnale originario è associata una parola.

Poiché ogni T secondi avevamo un campione, ora ogni T secondi abbiamo una parola di g bit, quindi un bit ogni T/g secondi, detto tempo di bit.

Ogni bit può essere rappresentato da un segnale diverso, così come associazioni di bit possono essere rappresentate da segnali diversi.

1.1 SEGNALI DETERMINATI O DETERMINISTICI

Restringiamo la trattazione ai segnali determinati, rimandando ad altro corso un esauriente approfondimento della teoria che supporta l'analisi dei segnali aleatori.

Energia e Potenza di segnali tempo-continui: segnali energia/segnali di potenza

Fra i segnali continui si distinguono segnali ad energia finita e segnali a potenza media finita.

Sia R una resistenza, $v(t)$ e $i(t)$ rispettivamente la relativa caduta di tensione e corrente .

La potenza istantanea dissipata dalla resistenza R vale come è noto (effetto Joule):

$$p(t) = R[i(t)]^2 = \frac{[v(t)]^2}{R}$$

Si definisce potenza istantanea normalizzata di un segnale tensione o corrente $g(t)$, quella dissipata su una resistenza $R=1\Omega$. Questo è un concetto fisico, che viene trasferito ai modelli matematici dei segnali per definire una "potenza" e una "energia" del segnale.

² Le disposizioni con ripetizione di n simboli presi γ a γ . Se γ è la lunghezza della parola, n il numero dei simboli del codice, la scelta del primo, del secondo, ..., del k -esimo elemento può farsi fra gli n simboli dati e quindi in n modi diversi: $(n, n-1, \dots, n) \gamma$ volte

Si definisce allora *potenza media normalizzata*³ di un segnale continuo su un intervallo $[-T/2, T/2]$:

$$P_T \triangleq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt$$

dove con il simbolo $|\cdot|$ si intende il valore assoluto di una grandezza reale o il modulo di una grandezza complessa.

Si definisce *energia* del segnale continuo $g(t)$ nell'intervallo $[-T/2, T/2]$:

$$E_T \triangleq \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt$$

Il segnale $g(t)$ si dice segnale a potenza media finita (segnale-potenza) se esiste finito e diverso da 0 il limite:

$$P \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt$$

Il segnale $g(t)$ si dice segnale a energia finita (segnale-energia) se esiste finito e diverso da 0 il limite⁴:

$$E \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

Le due definizioni sono mutuamente esclusive.

Esistono anche segnali non fisici che non hanno né potenza né energia finita: $g(t)=t$; $g(t)=\exp[-at]$ con a reale e maggiore di 0.

Segnali periodici/segnali aperiodici

Un segnale reale o complesso $g(t)$ si dice *periodico* se esiste un numero $T_0 > 0$ tale che:

$$g(t + T_0) = g(t)$$

Il più piccolo valore di T_0 che soddisfa la relazione scritta si chiama periodo di ripetizione del segnale.

La condizione di periodicità può anche equivalentemente esprimersi:

$$g(t + kT_0) = g(t) \quad k=1,2,\dots$$

Un segnale periodico è ovviamente di durata infinita, e quindi fisicamente non realizzabile. Esso però rappresenta un utile modello teorico di segnale e può essere usato per rappresentare i *segnali ciclici*, cioè quei segnali che sono periodici in un certo intervallo di tempo e nulli al di fuori di questo.

Un segnale che non soddisfi alle condizioni sopra riportate si dice *aperiodico*.

Per un segnale periodico la potenza media è uguale a quella definita in un intervallo di tempo pari al periodo:

$$\begin{aligned} P &\triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt = \quad \text{dove } T = nT_0 + \epsilon \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(nT_0 + \epsilon)} \left[n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g(t)|^2 dt + \int_{T_0/2}^{(T_0/2)+\epsilon/2} |g(t)|^2 dt + \int_{-(T_0/2)-\epsilon/2}^{-(T_0/2)} |g(t)|^2 dt \right] = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g(t)|^2 dt \end{aligned}$$

³ D'ora in poi tralasceremo il termine "normalizzata", perché ipotizzeremo sempre $R=1$ ohm.

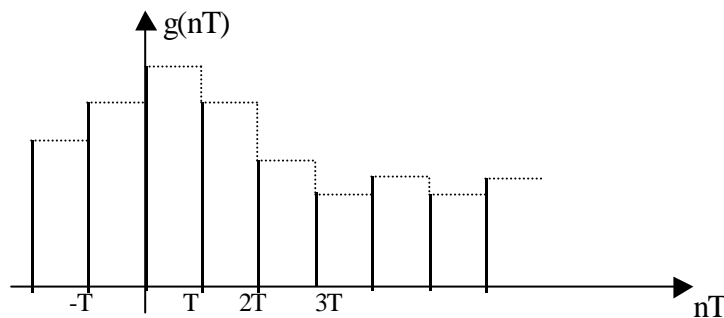
⁴ Il segno di uguaglianza non è corretto da un punto di vista matematico, ma lo adotteremo per semplicità di notazione, dato che tale uguaglianza è valida per i segnali generalmente trattati in telecomunicazioni.

Energia e Potenza per segnali tempo-discreti

Un segnale tempo-discreto $g[n]=g(nT)$, in quanto diverso da zero solo in un insieme numerabile di istanti, non possiede né energia né potenza secondo la definizione introdotta per i segnali continui.

Si può definire in modo convenzionale un'energia facendo riferimento ad un segnale continuo ottenuto da quello discreto mediante un'operazione di "tenuta".

Si mantiene cioè costante e pari a $g(nT)$ l'ampiezza del segnale nell'intervallo $nT \leq t \leq (n+1)T$.



Si chiama energia di $g(nT)$ la grandezza

$$E \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} |g(nT)|^2 T$$

Una definizione alternativa, più usata, ma che non è congruente con la successiva definizione di potenza è:

$$E \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} |g(nT)|^2$$

Comunque quando si ha $g[n]$, allora $E \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} |g[n]|^2$

Si definisce potenza del segnale discreto $g(nT)$ il limite: $P \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |g(nT)|^2$

1.2 RAPPRESENTAZIONE DI FOURIER DEI SEGNALE DETERMINISTICI

Per i segnali impiegati nei sistemi di comunicazione elettrica (ma non solo per questi), è possibile e vantaggioso utilizzare, oltre che la rappresentazione nel dominio del tempo, la "rappresentazione nel dominio della frequenza".

Tale tipo di rappresentazione fa riferimento ai risultati di quella che si chiama indifferentemente *Analisi armonica di Fourier* o *Analisi spettrale* dei segnali.

L'utilità di tale tipo di rappresentazione consiste nel fatto che essa consente di esprimere i segnali di forma qualunque come combinazione lineare di funzioni di tipo sinusoidale, le quali godono della notevole proprietà di conservarsi invariate, a meno di ampiezza e fase, attraverso operazioni di integrazione e derivazione.

Se ora si osserva, come vedremo meglio nel seguito, che i segnali elaborati dai sistemi di comunicazione obbediscono a equazioni integro-differenziali, si ha operando nel "dominio della frequenza" una notevole

semplificazione dei calcoli, in quanto in tale dominio le operazioni di derivazione e integrazione corrispondono più semplicemente a moltiplicazioni e divisioni.

La rappresentazione dei segnali nel dominio della frequenza consente inoltre di caratterizzare gli stessi mediante gli importantissimi concetti di spettro e di banda di frequenza da essi occupata, come vedremo meglio nel seguito.