

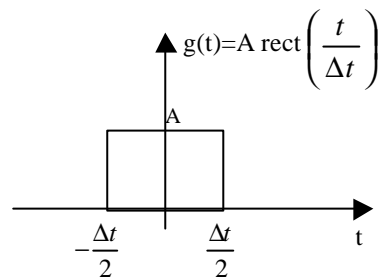
## Capitolo 4

**TRASFORMATTA DI FOURIER**

Anche per segnali di tipo aperiodico può esistere una rappresentazione in termini di combinazione lineare di segnali di tipo sinusoidale, se il segnale è reale, o di termini esponenziali complessi, se il segnale è complesso.

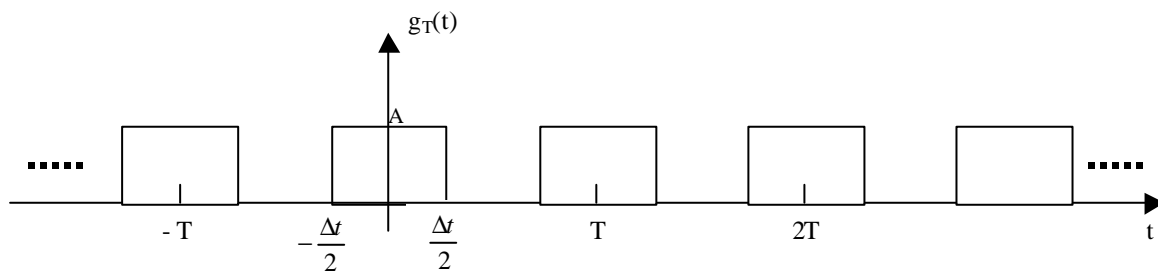
In maniera intuitiva, possiamo introdurre tale rappresentazione come forma limite dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale ottenuto per ripetizione periodica del segnale aperiodico in oggetto.

A tal fine consideriamo una funzione  $g(t)$ , della quale vogliamo ricavare la rappresentazione nel dominio della frequenza. In questa fase consideriamo che  $g(t)$  sia di durata finita  $\Delta t$ :



A partire da questa, possiamo costruire un segnale periodico di periodo  $T > \Delta t$ :

$$g_T(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT)$$



Essa sia sviluppabile in serie di Fourier (segnale a energia finita nell'intervallo  $(-T/2, T/2)$  o condizioni di Dirichlet), cioè:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\ g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{G}_n e^{j2\pi n f_0 t} \end{array} \right.$$

Osserviamo che possiamo scrivere:  $g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t)$

Per comodità del ragionamento che ora sviluppiamo, introduciamo i seguenti simboli:

$$\Delta f \triangleq \frac{1}{T} = f_0 \quad \text{scarto di frequenza tra una riga e la successiva}$$

$$f_n \triangleq \frac{n}{T} = n f_0$$

$$G(f_n) \triangleq G_n T = \frac{G_n}{\Delta f}$$

Riscriviamo ora lo sviluppo in serie di Fourier con la nuova notazione:

$$\begin{cases} g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j2\pi f_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f_n) e^{j2\pi f_n t} \Delta f \\ G(f_n) \triangleq G_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \end{cases}$$

Osserviamo ora come al crescere di  $T$ , diminuisce la separazione  $f_0 = 1/T$  tra una riga dello spettro e la successiva. Al limite, per  $T \rightarrow \infty$ , la distanza tra le righe diviene infinitesima, e lo spettro diviene di tipo continuo. In più,  $G_n$  diviene infinitesimo, mentre si mantiene finita la quantità  $G(f_n)$ . Infine, la sommatoria diviene un integrale.

Quindi, riassumendo, per  $T \rightarrow \infty$  si ha:  $\Delta f \rightarrow df$   $f_n \rightarrow f$  e possiamo scrivere<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df \\ G(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{cases}$$

La funzione  $G(f)$  introdotta definisce la cosiddetta trasformata di Fourier del segnale  $g(t)$ , che a sua volta è l'antitrasformata di  $G(f)$ . Si noti che il segno di uguaglianza qui introdotto indica una definizione, in quanto i passaggi matematici descritti non costituiscono una dimostrazione.

Simbolicamente possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} G(f) &= \mathfrak{F}[g(t)] & g(t) &= \mathfrak{F}^{-1}[G(f)] \\ \text{o anche, brevemente: } & g(t) \longleftrightarrow G(f) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Nel seguito si definisce, anche se impropriamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) dt$$

integrale conosciuto con il nome di "valore principale di Cauchy".

In realtà questo simbolismo risulta scorretto, poichè il primo segno di uguaglianza sussiste solo nel caso in cui la  $G(f)$  sia assolutamente integrabile.

Tuttavia per semplificare il formalismo nel seguito trascureremo tale distinzione.

#### 4.1 CONDIZIONI PER L'ESISTENZA E CONVERGENZA DELLA TRASFORMATA

Sebbene la trasformata e l'antitrasformata di Fourier siano state ottenute ipotizzando la durata finita del segnale, le relative espressioni rimangono valide per una classe estremamente ampia di segnali di durata infinita.

Poiché nella nostra trattazione si è supposto che valessero le stesse condizioni ipotizzate per la convergenza della serie di Fourier, questo fa pensare che tali condizioni si debbano applicare anche alla trasformata di Fourier. Infatti se il segnale è a quadrato integrabile, ovvero ad energia finita, allora la sua rappresentazione può differire dal segnale stesso significativamente in alcuni valori di  $t$ , ma l'energia della loro differenza è nulla.

Quindi possiamo affermare che (Teorema di Plancherel) se il segnale  $g(t)$  è ad energia finita, cioè a quadrato integrabile,  $G(f)$  esiste per tutti i valori di  $f$ , eccetto al più un insieme di misura nulla, ed è anch'esso a quadrato integrabile, per cui si lascia invertire secondo l'espressione sopra definita, nel senso che l'integrale di detta espressione esiste e converge a  $g(t)$  con errore quadratico medio nullo (la convergenza di questa al segnale è in norma  $L_2$ ).

Come con i segnali periodici, esiste una condizione alternativa, sufficiente ad assicurare l'esistenza della trasformata di Fourier: il segnale da trasformare deve essere assolutamente integrabile su tutto l'asse reale. L'esistenza dell'antitrasformata e la convergenza puntuale dell'antitrasformata al segnale, eccetto che nei punti di discontinuità, dove essa uguaglia il valor medio della discontinuità, sono garantite dalle condizioni di Dirichlet in ogni intervallo finito di definizione del segnale  $g(t)$ :

- 1) il segnale sia assolutamente integrabile
- 2) il segnale abbia un numero finito di massimi e minimi all'interno di qualunque intervallo finito
- 3) il segnale abbia un numero finito di discontinuità all'interno di qualunque intervallo finito.

Si noti, comunque, che i segnali con cui avremo a che fare sono fisici, cioè di durata limitata, con un numero finito di discontinuità di I specie e di ampiezza limitata. Inoltre risulta che anche la loro rappresentazione nel dominio della frequenza gode di queste stesse proprietà.

#### 4.2 SPETTRO

Abbiamo così introdotto anche per segnali aperiodici una rappresentazione nel dominio della frequenza. Si definisce in tale dominio a:

- uno spettro di ampiezza  $|G(f)|$ ,
- uno spettro di fase  $\phi(f)=\arg[G(f)]$ ,

In questo caso gli spettri sono di tipo continuo.

#### 4.3 ESEMPIO DI TRASFORMATA DI FOURIER

Consideriamo l'impulso quadrato di area unitaria  $g(t) = \text{rect}(t)$ . Si ha:

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{j2\pi f} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} d(j2\pi ft) = \\ &= -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi f} \left( \frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2j} \right) = \text{sinc}(f) \end{aligned}$$

È utile ricordare questa trasformata, che elencheremo in una serie di proprietà notevoli di cui godono le trasformate di Fourier, utili per le applicazioni di nostro interesse.

#### 4.4 PROPRIETA' DELLA TRASFORMATATA DI FOURIER

1.  $\text{rect}(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(f)$

2. Linearita': se  $g_1(t) \leftrightarrow G_1(f)$  e  $g_2(t) \leftrightarrow G_2(f)$  si ha:

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \leftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f) \text{ con } a_1 \text{ e } a_2 \text{ costanti arbitrarie}$$

3. Dualita':  $\forall g(t) \leftrightarrow G(f) \Rightarrow G(t) \leftrightarrow g(-f)$

4. Variazione "scala" temporale:

Per ogni  $a$  reale:  $g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$

5. Traslazione nel dominio del tempo

$$g(t \pm t_0) \leftrightarrow G(f) e^{\pm j2\pi f t_0}$$

6. Traslazione nel dominio della frequenza

$$g(t) e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow G(f \mp f_0)$$

7. Coniugazione

Se  $g(t) \longleftrightarrow G(f)$  allora:  $g^*(t) \longleftrightarrow G^*(-f)$

a)  $\forall g(t)$  reale:  $G(-f) = G^*(f)$ , cioè

il modulo di  $G(f)$  è funzione pari

la fase di  $G(f)$  è funzione dispari

b)  $\forall g(t)$  reale: la parte reale di  $G(f)$  è funzione pari della frequenza;

la parte immaginaria è funzione dispari.

c)  $\forall g(t)$  reale e pari,  $G(f)$  è una funzione reale e pari della frequenza.

d)  $\forall g(t)$  reale e dispari,  $G(f)$  è immaginaria pura e dispari.

8. Area di  $g(t)$

Se  $g(t)$  è reale, si ha:  $G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$  Area di  $g(t)$

9. Derivazione nel dominio del tempo<sup>2</sup>

$g(t)$  ammetta trasformata di Fourier assieme alle sue derivate fino a quella di ordine  $n$ :

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j2\pi f)^n G(f)$$

10. Convoluzione

$$g_1(t) \otimes g_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t - \tau) d\tau \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} g_1(t) \longleftrightarrow G_1(f) \\ g_2(t) \longleftrightarrow G_2(f) \end{array} \text{ segnali continui}$$

si dimostra che:  $g_1(t) \otimes g_2(t) \longleftrightarrow G_1(f) G_2(f)$

<sup>2</sup> Si noti che l'esistenza della trasformata della derivata fino all'ordine  $n$  non è assicurata; è stato solo stabilito che, se tale trasformata esiste, essa ha la forma indicata.

11.	<u>Prodotto</u> Se le funzioni $g_1(t)$ e $g_2(t)$ sono Fourier trasformabili, allora $g_1(t) g_2(t) \longleftrightarrow G_1(f) \otimes G_2(f)$
12.	<u>Integrazione</u> se $g(t)$ è Fourier trasformabile $\int_{-\infty}^t g(t) dt \longleftrightarrow \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{G(0)}{2} \delta(f)$
13.	<u>Crosscorrelazione</u> Assegnate due funzioni $g_1(t)$ e $g_2(t)$ , Fourier trasformabili: $R_{12}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t + \tau) g_2^*(t) dt \longleftrightarrow G_1(f) \cdot G_2^*(f)$
14.	<u>Autocorrelazione</u> Sia $g(t)$ Fourier trasformabile: $R_g(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau) \cdot g^*(t) dt \longleftrightarrow G(f) \cdot G^*(f) =  G(f) ^2$

Analizziamo ora, una per una, le proprietà della trasformata di Fourier riportate nella tabella precedente.

### 1) $\text{rect}(t) \leftrightarrow \text{sinc}(f)$

Questa corrispondenza è stata dimostrata nel paragrafo precedente.

### 2) **Linearità:** se $g_1(t) \leftrightarrow G_1(f)$ e $g_2(t) \leftrightarrow G_2(f)$ si ha:

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \leftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f) \text{ con } a_1 \text{ e } a_2 \text{ costanti arbitrarie}$$

Questa proprietà deriva dalla linearità dell'operatore integrale.

### 3) **Dualità:** $\forall g(t) \leftrightarrow G(f) \Rightarrow G(t) \leftrightarrow g(-f)$

Se  $G(f)$  è la trasformata di Fourier di  $g(t)$ , si può allora scrivere:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

Poniamo ora  $t' = f$  e  $f' = -t$ , l'integrale si scrive ora:

$$g(-f') = \int_{-\infty}^{\infty} G(t') e^{j2\pi t'(-f')} dt'$$

Ma questo integrale non è altro che la trasformata di Fourier della funzione  $G(t')$  per cui

$$g(-f') = \mathfrak{F}[G(t')]$$

L'antitrasformata si scrive:

$$G(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}[G(t')] e^{j2\pi t' f'} df'$$

da cui la proprietà enunciata.

$$\text{Es.: } \text{sinc}(t) \longleftrightarrow \text{rect}(-f) = \text{rect}(f)$$

**4) Variazione "scala" temporale:**

Per ogni  $a$  reale:

$$g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

Infatti, valutiamo la  $\mathfrak{F}[g(at)]$ :

$$\mathfrak{F}[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$\forall a > 0$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-j2\pi \frac{f}{a} at} d(at) =$$

ponendo:  $t' = (at)$   $f' = (f/a)$

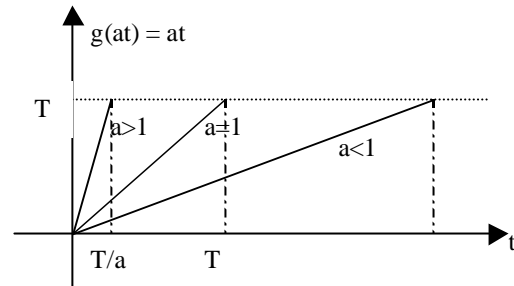
$$= \frac{1}{a} G(f') = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\forall a < 0$$

$$= \frac{1}{-|a|} \int_{+\infty}^{-\infty} g(-|a|t) e^{-j2\pi \left[\frac{f}{-|a|}\right](-|a|t)} d(-|a|t) =$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi \left[\frac{f}{-|a|}\right](x)} d(x) =$$

$$= \frac{1}{a} G\left(\frac{f}{-|a|}\right) = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$



Questa proprietà evidenzia una caratteristica fondamentale delle rappresentazioni spettrali dei segnali.

Al crescere della durata temporale del segnale, corrisponde una compressione dello spettro ovvero della banda di frequenza da esso occupata, e viceversa.

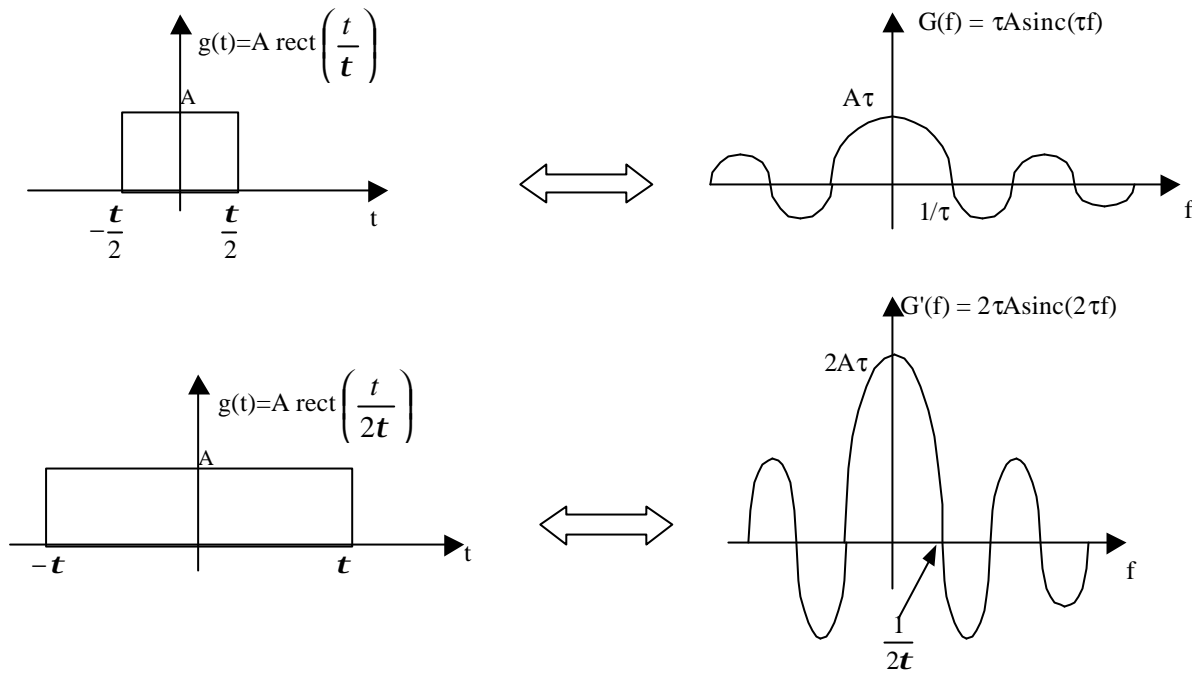
**Esempio**

Sia

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow G(f) = \tau \text{sinc}(\tau f)$$

$$g'(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2\tau}\right) \leftrightarrow G'(f) = 2\tau \text{sinc}(2\tau f)$$

Poiché  $g(t)$  e  $g'(t)$  sono reali e pari rappresentiamo graficamente la funzione  $G(f)$ , anziché lo spettro di ampiezza e di fase. Dalle figure si desume che una espansione della scala temporale comporta una riduzione dello spettro in frequenza.



### 5) Traslazione nel dominio del tempo

$$g(t \pm t_0) \leftrightarrow G(f) e^{\pm j2\pi f t_0}$$

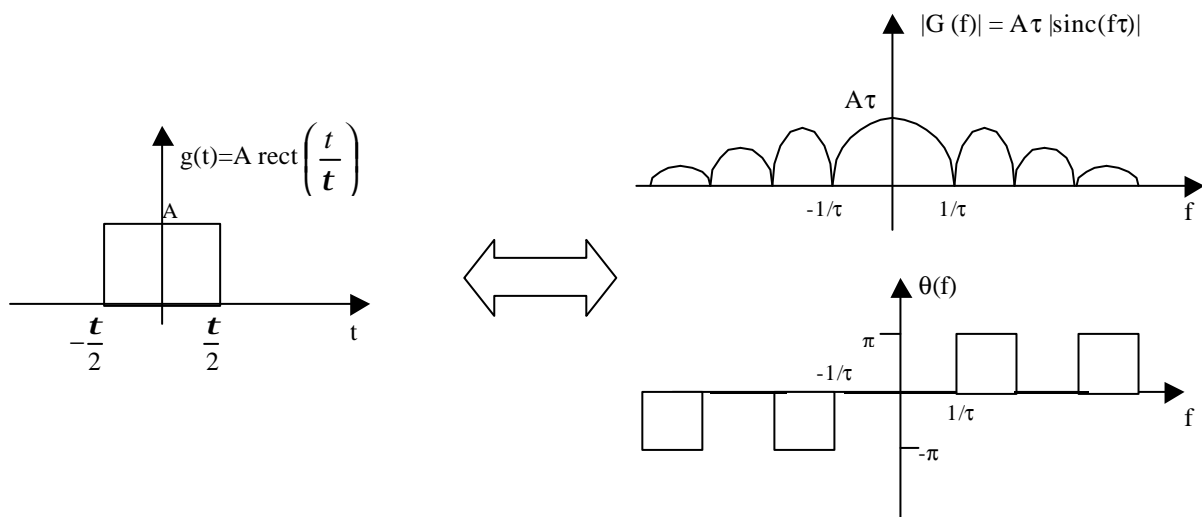
Si ha infatti:

$$\begin{aligned} F[g(t \pm t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t \pm t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= e^{\pm j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t \pm t_0) e^{-j2\pi f (t \pm t_0)} d(t \pm t_0) = \\ &= G(f) e^{\pm j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

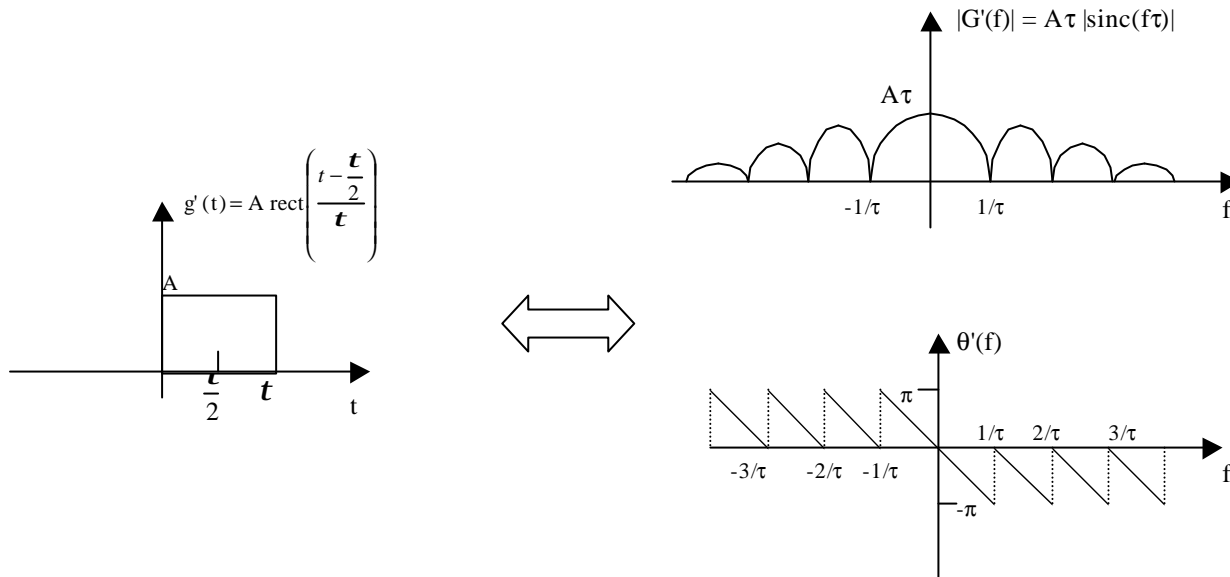
#### Esempio

Sia  $g(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow G(f) = A\tau \operatorname{sinc}(f\tau)$

Avremo le seguenti rappresentazioni grafiche:



Si consideri ora il segnale:  $g'(t) = A \operatorname{rect}\left[\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau}\right] \leftrightarrow G(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f) e^{-j\pi f \tau}$



#### 6) Traslazione nel dominio della frequenza

$$g(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow G(f \mp f_0)$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} F[g(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi(f \mp f_0)t} dt = G(f \mp f_0) \end{aligned}$$

#### **Esempio:** "Teorema della modulazione"

Consideriamo uno dei seguenti segnali

$$\begin{cases} g(t) = A s(t) \cos(2\pi f_0 t) \\ g(t) = A s(t) \sin(2\pi f_0 t) \end{cases}$$

Che nelle comunicazioni elettriche corrisponde all'operazione di "modulazione" di una "portante" a frequenza  $f_0$ , da parte di un segnale "modulante"  $s(t)$ .

Con il termine portante abbiamo indicato una delle seguenti oscillazioni:  $\begin{cases} c(t) = \cos(2\pi f_0 t) \\ c(t) = \sin(2\pi f_0 t) \end{cases}$

Dalle formule di Eulero possiamo scrivere:  $\begin{cases} g(t) = s(t) \left[ \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right] \\ g(t) = s(t) \left[ \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \right] \end{cases}$

Per quanto riguarda lo spettro si ottiene pertanto, se  $s(t) \rightarrow \mathcal{R}S(f)$



$$\begin{cases} G(f) = \frac{S(f - f_0) + S(f + f_0)}{2} \\ G(f) = \frac{S(f - f_0) - S(f + f_0)}{2j} \end{cases}$$

L'operazione di modulazione comporta una operazione di traslazione dello spettro di  $\pm f_0$

$$\text{Sia } s(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow S(f) = A \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$$

Il segnale modulato e' allora:

$$g(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos(2\pi f_0 t)$$

Il suo spettro, poiché il segnale è reale e pari, è una funzione della frequenza reale e pari

$$G(f) = \frac{A \tau}{2} \left\{ \operatorname{sinc}[\tau(f - f_0)] + \operatorname{sinc}[\tau(f + f_0)] \right\}$$

## 7) Coniugazione

Se  $g(t) \leftrightarrow G(f)$  allora:  $g^*(t) \leftrightarrow G^*(-f)$

Si ha infatti:

$$F[g^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) e^{-j2\pi f t} dt = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right]^* = G^*(-f)$$

Casi particolari:

7a)  $\forall g(t)$  reale:

$g^*(t) = g(t)$  e quindi:  $F[g^*(t)] = F[g(t)]$  ...cioè  $G(f) = G^*(-f)$

ovvero:

$G(-f) = G^*(f)$  "simmetria coniugata"

cioè:

lo spettro di una funzione reale è simmetrico (funzione pari) nelle ampiezze, antisimmetrico (funzione dispari) nelle fasi:

$$|G(-f)| = |G(f)|$$

$$\arg [G(-f)] = -\arg [G(f)]$$

### Osservazione:

Per segnali aperiodici reali si osserva, dalla proprietà 7a), come sia valida una rappresentazione analoga a quella già vista per segnali periodici reali:  $g(t)$  può essere rappresentato come combinazione lineare (integrale) di termini di tipo sinusoidale, in questo caso di ampiezza infinitesima e frequenza variabile con continuità tra 0 e  $\infty$ :

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df = G(0)df + 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{0^+}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df \right\} = \\ &= G(0) df + 2 \int_{0^+}^{\infty} |G(f)| \cos[2\pi f t + \varphi(f)] df \end{aligned}$$

dove  $\varphi(f) \triangleq \arg[G(f)]$

N.B.  $2|G(f)|$  è una "densità frequenziale" di ampiezza dei termini cosinusoidali.

**7b) Proprietà della parte reale e immaginaria della trasformata di Fourier di segnale reale**

Questa proprietà può essere ricavata sia direttamente che tramite la proprietà precedente. Seguendo quest'ultima strada, possiamo scrivere, indicando rispettivamente con  $G_r(f)$  e  $G_i(f)$  la parte reale e immaginaria di  $G(f)$ :

$$G_r(f) = \operatorname{Re}\{ |G(f)| e^{j\varphi(f)} \} = |G(f)| \cos \varphi(f)$$

$$G_i(f) = \operatorname{Im}\{ |G(f)| e^{j\varphi(f)} \} = |G(f)| \sin \varphi(f)$$

Da cui si ottiene:

$$G_r(-f) = |G(-f)| \cos \mathbf{j}(-f) = |G(f)| \cos \mathbf{j}(f) = G_r(f)$$

$$G_i(-f) = |G(-f)| \sin \mathbf{j}(-f) = |G(f)| [-\sin \mathbf{j}(f)] = -G_i(f)$$

ovvero:

la parte reale di  $G(f)$  è funzione pari della frequenza;

la parte immaginaria è funzione dispari.

**7c) Funzione reale e pari**

Dalla 4), per  $a=-1$ , si ha  $g(-t) \longleftrightarrow G(-f)$

Ora, poichè  $g(t)$  è funzione pari, si ha anche:

$$g(-t) = g(t) \implies G(-f) = G(f) \text{ funzione pari}$$

ma essendo  $g(t)$  anche funzione reale, si ha:

$$G(-f) = G^*(f) \text{ e quindi: } G(f) = G^*(f),$$

ovvero

la trasformata di Fourier di una funzione reale e pari è una funzione reale e pari della frequenza.

**7d) Funzione reale e dispari**

Se la funzione  $g(t)$  è dispari, si ha  $g(-t) = -g(t)$  da cui  $G(-f) = -G(f)$ , cioè  $G(f)$  è funzione dispari.

Ma poichè  $g(t)$  è anche reale:

$$G(-f) = G^*(f) \text{ e quindi: } -G(f) = G^*(f) \text{ che, espressa in termini di } G_r(f) \text{ e } G_i(f) \text{ si scrive:}$$

$$-G_r(f) - j G_i(f) = G_r(f) - j G_i(f) \text{ da cui necessariamente:}$$

$$G_r(f) = 0 \text{ quindi } G(f) \text{ è puramente immaginaria.}$$

Riassumendo, la trasformata di Fourier di una funzione reale e dispari è una funzione immaginaria e dispari della frequenza.

**8) Area di  $g(t)$** 

$$\text{Se } g(t) \text{ è reale, si ha: } G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$$

**9) Derivazione nel dominio del tempo**

Supponiamo che  $g(t)$  ammetta trasformata di Fourier, assieme alle sue derivate fino a quella di ordine  $n$ . Si dimostra che vale la seguente relazione<sup>3</sup>:

<sup>3</sup> Si noti che l'esistenza della trasformata della derivata fino all'ordine  $n$  non è assicurata; è stato solo stabilito che, se tale trasformata esiste, essa ha la forma indicata.

Si veda nel seguito un esempio in cui la trasformata della derivata non esiste nel senso classico del termine.

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j2\pi f)^n G(f)$$

Verifichiamo la proprietà enunciata per  $n=1$ .

L'estensione a  $n>1$  è immediata.

Deriviamo rispetto a  $t$  l'espressione dell'inversione della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \frac{d}{dt} (e^{j2\pi ft}) df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) (j2\pi f e^{j2\pi ft}) dt \end{aligned}$$

Si può quindi scrivere:  $\frac{dg(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f G(f)$  (\*)

Nel caso in cui  $g(t)$  sia Fourier trasformabile, ma abbia  $N$  punti di discontinuità di I specie (la sua derivata prima non ammette trasformata in senso classico), è possibile introdurre la trasformata in senso classico della derivata di  $g(t)$  nel seguente modo:

$$\frac{dg(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f G(f) - \sum_{i=1}^N [g(t_i^+) - g(t_i^-)] e^{-j2\pi f t_i}$$

Noi però considereremo sempre la derivata nel senso delle distribuzioni, pertanto varrà sempre la formula (\*)

## 10) Convoluzione

Indicando con integrale di convoluzione:

$$g_1(t) \otimes g_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\mathbf{a}) g_2(t - \mathbf{a}) d\mathbf{a}$$

con  $\begin{matrix} g_1(t) \longleftrightarrow G_1(f) \\ g_2(t) \longleftrightarrow G_2(f) \end{matrix}$  segnali continui.

si dimostra che:  $g_1(t) \otimes g_2(t) \longleftrightarrow G_1(f) G_2(f)$

Infatti:

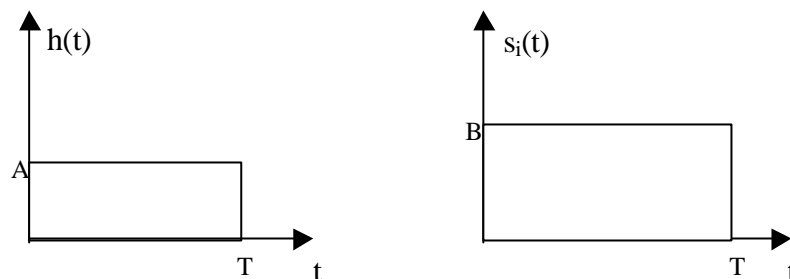
$$\begin{aligned} F[g_1(t) \otimes g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\mathbf{a}) g_2(t - \mathbf{a}) d\mathbf{a} \right] e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\mathbf{a}) \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t - \mathbf{a}) e^{-j2\pi ft} dt d\mathbf{a} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\mathbf{a}) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t - \mathbf{a}) e^{-j2\pi f(t - \mathbf{a})} dt \right] e^{-j2\pi f\mathbf{a}} d\mathbf{a} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\mathbf{a}) G_2(f) e^{-j2\pi f\mathbf{a}} d\mathbf{a} = G_1(f) G_2(f) \end{aligned}$$

## Valutazione grafica dell'integrale di convoluzione

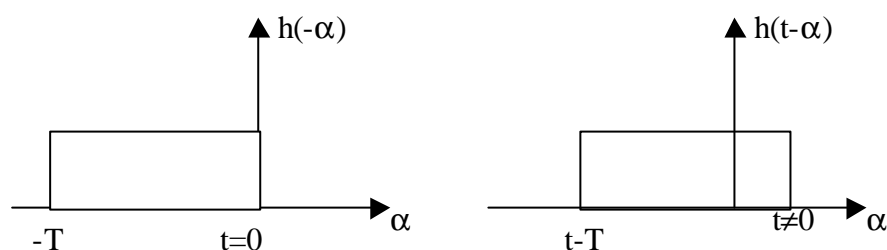
La valutazione dell'integrale di convoluzione può essere molto spesso agevolata utilizzando il metodo grafico descritto qui di seguito per mezzo di un esempio.

Si consideri la funzione  $h(t)$  ed il segnale  $s_i(t)$  mostrati nella figura.

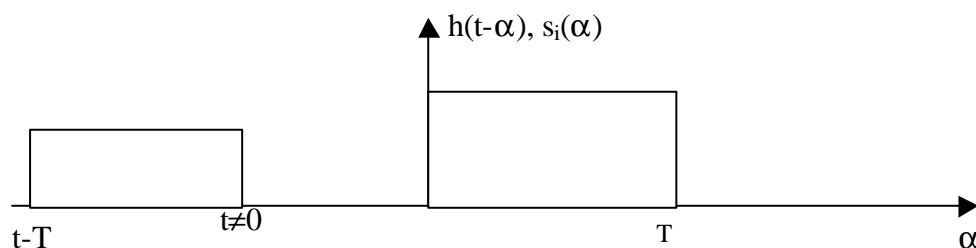
Per eseguire la convoluzione si devono disegnare  $s_i(\alpha)$  e  $h(t - \alpha)$  su uno stesso asse cartesiano  $\alpha$  ed eseguire il prodotto.



A tale scopo, come illustrato nelle figure seguenti, si disegna dapprima  $h(-\alpha)$ , ribaltando la figura geometrica intorno all'asse delle ordinate, in un secondo tempo si trasla  $h(-\alpha)$  di un intervallo generico  $t$ , in modo da ottenere  $h(t - \alpha)$ .

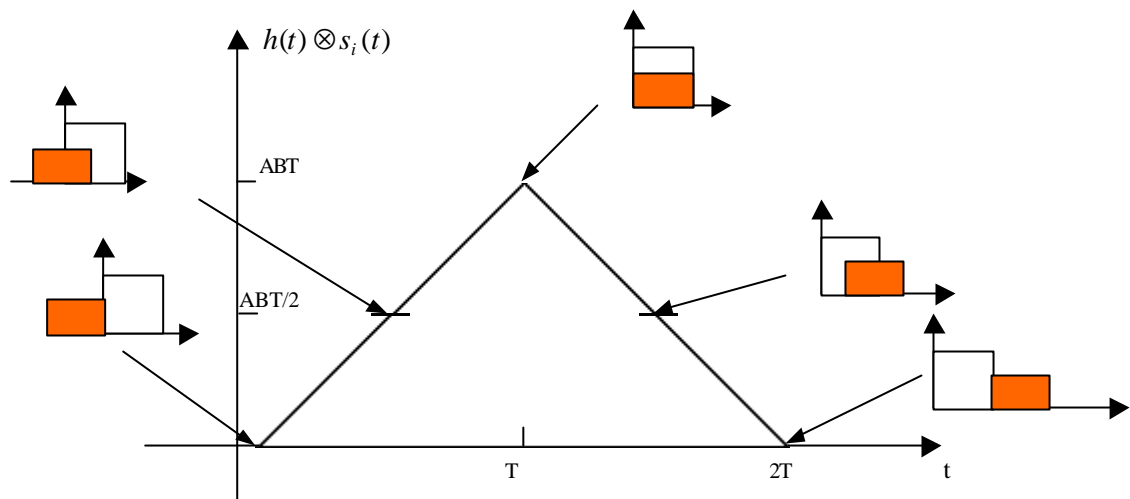


Si riporta sull'asse anche  $s_i(\alpha)$ , come mostrato in figura seguente:



Per valori diversi di  $t$  si esegue il prodotto delle due funzioni e se ne calcola l'integrale. Infine si traccia il grafico della funzione trovata in funzione di  $t$  (si veda la figura successiva).

Nel caso dell'esempio tutte le operazioni possono essere eseguite graficamente, infatti sia il prodotto  $s_i(\alpha) h(t - \alpha)$ , sia l'integrale non richiedono operazioni matematiche complesse. In generale si eseguiranno graficamente le operazioni di ribaltamento  $[h(-\alpha)]$  e traslazione  $[h(t - \alpha)]$ , mentre il prodotto e l'integrale si valuteranno matematicamente.



### 11) Prodotto

Se le funzioni  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  sono Fourier trasformabili, allora

$$g_1(t) g_2(t) \longleftrightarrow G_1(f) \otimes G_2(f)$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
 F[g_1(t) g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G_2(f') e^{-j2\pi f' t} df' \right] e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G_2(f') e^{-j2\pi(f-f')t} df' \right] dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G_2(f-\lambda) e^{-j2\pi\lambda t} d\lambda \right] dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} G_2(f-\lambda) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) e^{-j2\pi\lambda t} dt \right] d\lambda = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} G_2(f-\lambda) G_1(\lambda) d\lambda = G_1(f) \otimes G_2(f)
 \end{aligned}$$

#### 4.5 TRASFORMATE DI FOURIER DI ALCUNE FUNZIONI PARTICOLARI TRASFORMATE GENERALIZZATE

L'introduzione della funzione impulsiva  $\delta(t)$  permette di esprimere la Trasformata di Fourier di alcuni segnali di potenza, pur di interpretarli come forme limite.

Anche se queste trasformate dovrebbero essere inquadrare nella teoria delle distribuzioni, da un punto di vista applicativo possono considerarsi come trasformate ordinarie

##### Delta di Dirac o impulso unitario

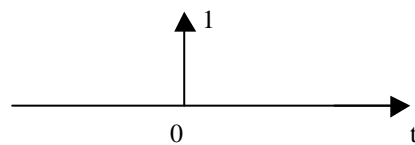
Consideriamo la funzione ad energia finita  $g(t) = A \text{ rect}(t/\tau)$ .

Supponiamo ora di far tendere a zero la durata  $\tau$  del segnale, mantenendo nel contempo costante e unitario il prodotto  $A\tau$ , ovvero unitaria l'area di ciascun impulso:  $A = 1/\tau$ .

Il limite cui tende tale funzione nelle condizioni anzidette definisce (mediante approccio intuitivo) un segnale con caratteristiche molto particolari, fisicamente non realizzabile, ma di grande interesse nell'analisi dei sistemi di comunicazione, che si chiama equivalentemente "delta di Dirac" o "funzione generalizzata" o "impulso matematico unitario"  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

È un impulso di ampiezza  $\infty$  e di durata nulla, ma di area unitaria, che si rappresenta schematicamente:

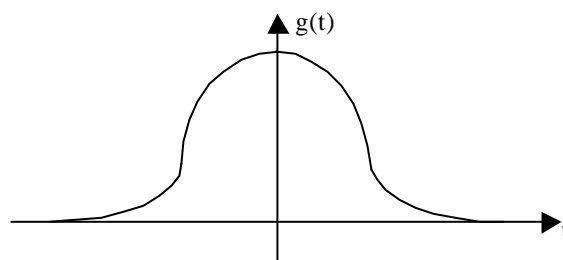


Anche altre funzioni, diverse dall'impulso rettangolare  $\frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ , tendono alla delta di Dirac mediante operazioni di passaggio al limite. Ricordiamo, tra le altre, la funzione gaussiana definita come:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{t^2}{2s^2}\right)$$

Si ha:

$$d(t) \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} g(t)$$



Da un punto di vista rigorosamente matematico, la  $\delta(t)$  trova giustificazione e definizione nella "teoria delle distribuzioni".

Per le nostre applicazioni, possiamo definire la delta di Dirac mediante la seguente relazione, dove  $g(t)$  è una qualunque funzione continua in t:

$$g(t) \otimes d(t) = g(t) \otimes d(-t) = g(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(a) d(t-a) da = \int_{-\infty}^{\infty} g(a) d(a-t) da = g(t) \quad (*)$$

Da questa relazione derivano le seguenti proprietà:

1)  $\delta(t)$  è pari cioè:  $\delta(t) = \delta(-t)$

2)  $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathbf{d}(t) dt = g(0)$  se  $g(t)$  è continua in 0

3)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  poiché qui  $g(t)=1$

4)  $\delta(t)=0 \quad \forall t \neq 0$

infatti se nella (2) consideriamo  $g(t)=\text{rect}(t/2\varepsilon)$  otteniamo:  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$ ,  
poiché il risultato non dipende da  $\varepsilon$ , allora  $\delta(t)=0 \quad \forall t \neq 0$

5)  $g(t) \delta(t) = g(0) \delta(t)$  e  $g(t) \delta(t - t_0) = g(t_0) \delta(t - t_0)$

Si osservi infine come la funzione delta di Dirac sopra introdotta, sia un segnale aperiodico a energia infinita.

### Trasformata dell'impulso unitario

Consideriamo la funzione delta di Dirac o impulso unitario  $\delta(t)$  già definita, la sua trasformata può essere ricavata semplicemente applicando la relazione (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathbf{d}(t) dt = g(0)$$

Infatti, si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t) \cos(j2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t) \sin(j2\pi f t) dt = 1$$

Definiamo quindi  $\mathfrak{Z}[\mathbf{d}(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t) e^{-j2\pi f t} dt$

Lo stesso risultato si ottiene per passaggio al limite della trasformata della funzione  $\frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ,  
che abbiamo visto tendere a  $\delta(t)$  quando  $\tau \rightarrow 0$ .

Infatti, dalle proprietà 1, 2 e 4, si ha:  $\frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow \text{sinc}(\tau f)$

Al limite, per  $\tau \rightarrow 0$ , il primo membro tende a  $\delta(t)$  e il secondo a 1, per cui:  $\delta(t) \longleftrightarrow 1$ .

Dalla proprietà 3, dualità, si ha anche:  $1 \longleftrightarrow \delta(f)$ .

### Altre proprietà dell'impulso unitario

Dalla definizione otteniamo anche le seguenti relazioni:

$$a) \quad g(t) \otimes \mathbf{d}(t - t_0) = g(t - t_0)$$

$$b) \quad 1 \leftrightarrow \mathbf{d}(f)$$

$$c) \quad G(f) \otimes \mathbf{d}(f - f_0) = G(f - f_0)$$

Infatti:

$$a) g(t) \otimes \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta[t - \tau - t_0] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta[\tau - t_0] g[t - \tau] d\tau = g(t - t_0) \longleftrightarrow G(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

### Segnale costante

Sia  $g(t) = A$  cioè  $g(t) = A \cdot 1$

Si ha perciò, per dualità, che  $G(f) = A \cdot \delta(f)$

### Segnale esponenziale

Per la proprietà della traslazione nel dominio della frequenza otteniamo:

$$g(t) = e^{j2\pi f_0 t} = 1 e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow G(f) = \delta(f - f_0)$$

### Funzioni seno e coseno

La trasformata delle funzioni  $\sin(2\pi f_0 t)$  e  $\cos(2\pi f_0 t)$ , si ottiene direttamente dalla trasformata dell'impulso di Dirac e dalla proprietà della traslazione nel dominio della frequenza, considerando le formule di Eulero, infatti:

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

da cui si ottiene che, poiché

$$e^{j2\pi f_0 t} = 1 \cdot e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0)$$

le trasformate cercate sono:

$$\sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

Ancora possiamo scrivere:

$$\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2} \longleftrightarrow \frac{\delta(f - f_0)e^{j\theta} + \delta(f + f_0)e^{-j\theta}}{2}$$

### Funzione segno

Per introdurre la funzione segno, che fa parte dei segnali generalizzati, e la sua trasformata di Fourier dobbiamo prima introdurre la trasformata della funzione impulso esponenziale.

Chiamiamo "impulso esponenziale", la funzione

$$g(t) \triangleq \begin{cases} e^{-bt} & \forall t \geq 0 \quad (b > 0) \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$

Si ha:

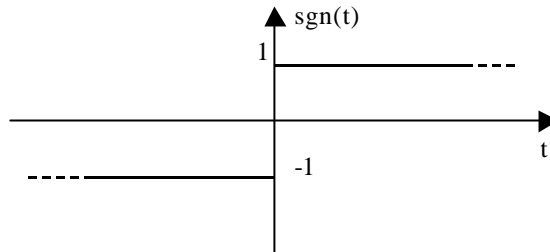
$$F[g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{1}{b + j2\pi f} \left[ e^{-(b + j2\pi f)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{b + j2\pi f}$$



Possiamo allora scrivere:  $g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{b + j2\pi f}$

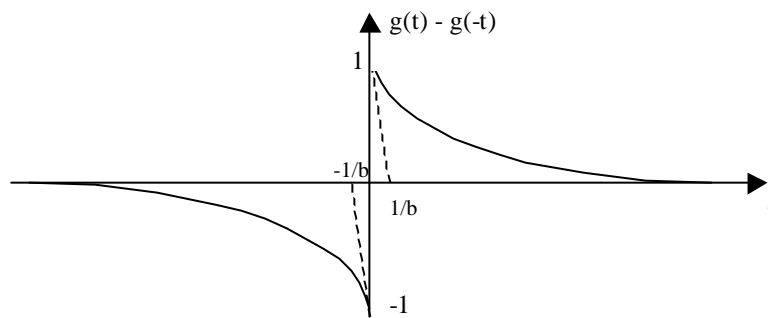
Consideriamo ora la seguente funzione particolare, chiamata "segno di t", così definita:

$$\text{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



Essa non è né ad energia né ad area assoluta finite. Valutiamo la trasformata di Fourier come caso limite della seguente funzione, quando  $b \rightarrow 0$ :

$$g'(t) = g(t) - g(-t)$$



Si ha:

$$F[g'(t)] = F[g(t)] - F[g(-t)] = \frac{1}{b + j2\pi f} - \frac{1}{b - j2\pi f}$$

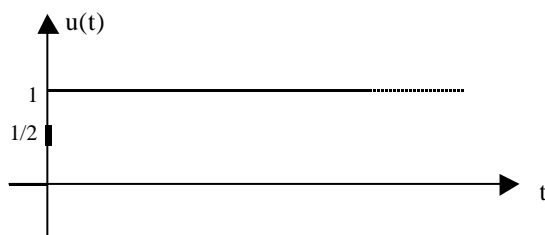
Infine, per  $b \rightarrow 0$ ,  $g(t) \rightarrow \text{sgn}(t)$  e si ha la seguente trasformazione:

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

### Funzione gradino

Consideriamo infine la seguente funzione particolare "gradino unitario":

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



La funzione gradino può essere ottenuta come

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx$$

$$\text{Infatti } u(t) = u(t) \otimes \delta(t) = u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Questo suggerisce di scrivere la relazione che lega la funzione impulsiva  $\delta(t)$  e il gradino unitario  $u(t)$  nella forma:

$$d(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

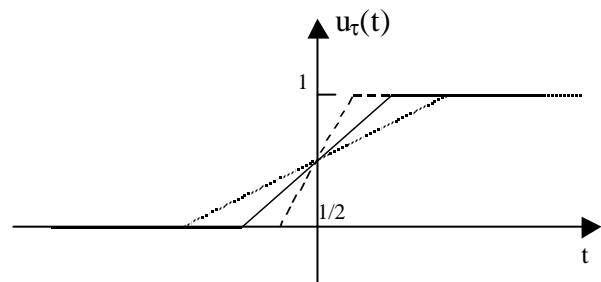
anche se a rigore tale relazione non può significare che la derivata di  $u(t)$  uguaglia  $\delta(t)$ , dato che la funzione  $u(t)$  non ammette derivata in  $t=0$ .

Tuttavia è possibile dare la seguente interpretazione: si consideri la successione di funzioni  $u_\tau(t)$

definite dall'integrale di  $r(t) = \frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$  e mostrata in figura.

Notiamo che:

$$u(t) \triangleq \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{x}{\tau}\right) dx = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Se consideriamo la definizione euristica di  $\delta(t)$ , per la quale

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

osserviamo che  $u_\tau(t)$  tende a  $u(t)$ , mentre la successione delle corrispondenti derivate,  $r(t)$ , tende a  $\delta(t)$  per  $\tau \rightarrow 0$ : in questo senso e solo in questo possiamo affermare che  $\delta(t)$  è la derivata di  $u(t)$ .

La funzione gradino non è ad energia né ad area assoluta finite.

Valutiamone la trasformata di Fourier tramite quella nota della funzione  $\text{sgn}(t)$ .

$$u(t) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(t) + 1]$$

Quindi:

$$F[u(t)] = \frac{1}{2} F[\text{sgn}(t)] + \frac{1}{2} F[1] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$$

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$$

#### 4.6 RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE UNIFICATA DI SEGNALI DI ENERGIA E DI SEGNALI PERIODICI

Abbiamo visto come per i segnali periodici (segnali a potenza media finita) sia possibile una rappresentazione nel dominio della frequenza, mediante uno spettro a righe, utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier. Parallelamente, per segnali aperiodici, a energia finita, è possibile dare una rappresentazione nel dominio della frequenza mediante uno spettro di tipo continuo (densità frequenziale) utilizzando la trasformata di Fourier.

Nell'ipotesi di trovarsi in presenza contemporanea sia di segnali periodici che aperiodici, è possibile dare una rappresentazione spettrale unica, in termini di trasformata di Fourier, utilizzando la funzione impulsiva di Dirac già introdotta. Mediante essa è infatti possibile rappresentare in termini di trasformata di Fourier anche segnali di tipo periodico. A tale scopo, ricordiamo la seguente trasformazione:  $1 \longleftrightarrow \delta(f)$

Se  $g(t)$  è funzione periodica di periodo  $T$ , sviluppabile in serie di Fourier, possiamo allora scrivere:

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \text{dove } f_0 = \frac{1}{T}$$

$$\text{con } G_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Applicando a  $g_T(t)$  le proprietà della trasformata di Fourier: linearità (n. 2) e traslazione nel dominio della frequenza (n. 6), abbiamo:

$$g_T(t) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \mathbf{d}(f - n f_0)$$

Si noti che nel caso di segnali periodici:  $g(t + iT) = g(t)$ ,

con  $g(t)$  forma d'onda elementare limitata nel tempo all'intervallo  $[-T/2, T/2]$ , e "i" numero intero.

Pertanto possiamo scrivere:

$$g_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(t - iT)$$

Quindi si ha che:

$$G_n \triangleq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T} G(n f_0) \dots \dots \text{poiche' } \dots g(t) = 0 \dots \text{per } \dots |t| > \frac{T}{2}$$

$$\text{cioè: } g_T(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n f_0) \mathbf{d}(f - n f_0)$$

In sintesi: - lo spettro di un segnale periodico è uno spettro a righe;

- le righe spettrali sono equispaziate di  $f_0 = 1/T$ ;

- l'area della riga è proporzionale al valore assunto in  $(n f_0)$  dalla trasformata di  $g(t)$ , questo significa che la successione di righe ha come involucro  $G(f)$ .

Pettine di Dirac

Ponendo  $g(t) = \delta(t)$  si ottiene un segnale periodico costituito da una sequenza di impulsi equispaziati (Pettine di Dirac)

$$g_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT)$$

il cui spettro può essere facilmente valutato da quanto appena ricavato, ricordando che:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$g(t) = \delta(t) \longleftrightarrow G(f) = 1$$

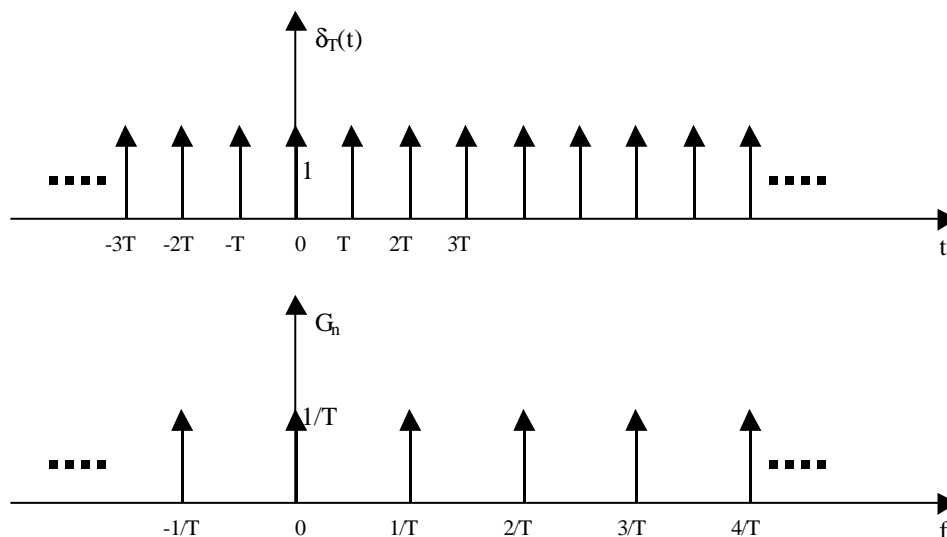
$$G_T(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(nf_0) \delta(f - nf_0) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 \delta(f - nf_0)$$

Dualmente, utilizzando la definizione di trasformata di Fourier, otteniamo:

$$\begin{aligned} G_T(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) \right] e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) e^{-j2\pi f t} dt \right] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f (iT)} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f (iT)} = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)$$



#### 4.7 PROPRIETA' DELLA TRASFORMATATA DI FOURIER (continua dal par. 4.4)

Le proprietà finora viste si possono estendere all'insieme delle funzioni Fourier trasformabili nel senso delle distribuzioni, con qualche cautela nel caso si consideri il prodotto di due funzioni (questa proprietà è applicabile se si considera il prodotto fra una funzione Fourier trasformabile in senso classico e una distribuzione)

#### 9 bis) Derivazione - Derivata di funzioni nei punti di discontinuità

Quando  $g(t)$ , Fourier trasformabile, ha delle discontinuità (in numero finito), non esiste la sua derivata prima nei punti di discontinuità, pertanto se vogliamo introdurre la trasformata di Fourier della derivata di  $g(t)$  in senso classico dobbiamo eliminare tali discontinuità cambiando di fatto il segnale originario (cfr. proprietà 9).

Consideriamo il segnale

$$g(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

la trasformata di Fourier della derivata di questo segnale, secondo la regola introdotta nella teoria classica, è nulla, infatti:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = j2\pi f G(f) - \left[ A e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}} - A e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} \right] = j2\pi f \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) - A j2\pi f \tau \left[ \frac{\operatorname{sen}(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right] = 0$$

Questo risultato non corrisponde alla realtà, in quanto tale trasformata è uguale a quella della derivata di un qualunque segnale costante.

Tuttavia se ricorriamo alle funzioni generalizzate è possibile recuperare la informazione perduta nella formula citata nella proprietà 9.

Infatti la funzione  $g(t)$  ha due discontinuità in  $-\tau/2$  e in  $\tau/2$ .

Possiamo peraltro scrivere:

$$g(t) = A u(t + \tau/2) - A u(t - \tau/2)$$

Pertanto andando a derivare:

$$\frac{dg(t)}{dt} = A \frac{du\left(t + \frac{\tau}{2}\right)}{dt} - A \frac{du\left(t - \frac{\tau}{2}\right)}{dt} = A \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - A \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$\Downarrow$

$$A \left( e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} \right) = A j2\pi f \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) = j2\pi f A \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) = j2\pi f \mathfrak{F}\left\{ A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\}$$

*Risulta in generale vero che, se  $g(t)$  ha discontinuità di I° specie, la sua derivata nel senso delle distribuzioni comprende, in corrispondenza dei punti di discontinuità, delle delta di Dirac, la cui trasformata è a noi conosciuta attraverso la teoria delle distribuzioni. Pertanto vale ancora la formula:*

$$\frac{dg(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f G(f)$$

## 12) Integrazione

Valutiamo l'espressione della trasformata di Fourier dell'integrale definito

$$\int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha$$

nota quella della funzione integranda  $g(t)$ .

$$\text{Si ha: } \int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha \longleftrightarrow \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{G(0)}{2} \delta(f)$$

Infatti notiamo che possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) u(t - \alpha) d\alpha = g(t) \otimes u(t)$$

Ma, dalla proprietà 10 (convoluzione), si può scrivere:

$$\begin{aligned} F\left[\int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha\right] &= F[g(t) \otimes u(t)] = F[g(t)]F[u(t)] = \\ &= G(f)\left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}\right] = \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{G(0)}{2} \delta(f) \end{aligned}$$

È opportuno osservare che la condizione:  $G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) d\alpha = 0$ , assicura che il

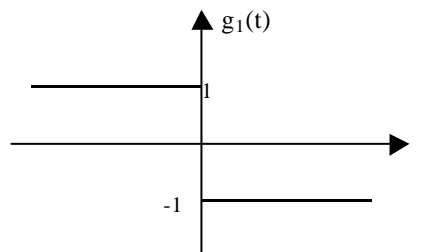
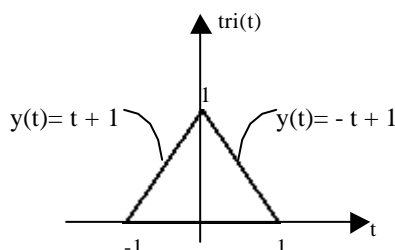
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha = 0$$

ciò è necessario affinché  $\varphi(t)$  risulti assolutamente integrabile, e quindi affinché esista  $F\{\varphi(t)\}$  in senso ordinario.

[Cioè se esiste  $F\{\varphi(t)\}$  ordinaria, allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha = 0$ , da cui deriva che  $G(0)$  è nulla, altrimenti non è detto.]

Esempio:

Si vuol calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale triangolare  $\text{tri}(t)$ :



Si osservi come esso possa ottenersi per integrazione del segnale  $g_1(t)$ :

$$\text{tri}(t) = \int_{-\infty}^t g_1(\alpha) d\alpha$$

Ma  $g_1(t)$  si può esprimere come:  $g_1(t) = \text{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$

da cui si ha la trasformata:

$$g_1(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(f) e^{j2\pi\frac{f}{2}} - \text{sinc}(f) e^{-j2\pi\frac{f}{2}}$$

Ma è anche:

$$\text{tri}(t) = \int_{-\infty}^t g_1(\alpha) d\alpha \longleftrightarrow \frac{G_1(f)}{j2\pi f} + \frac{G_1(0)}{2} \delta(f)$$

Osserviamo come  $G_1(0) = 0$ , in quanto area di  $g_1(t)$  e quindi:

$$\text{tri}(t) = \int_{-\infty}^t g_1(\alpha) d\alpha \longleftrightarrow \text{sinc}(f) \frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{j2\pi f} = \text{sinc}^2(f)$$

### 13) Crosscorrelazione

Assegnati due segnali a energia finita,  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$ , si definisce crosscorrelazione delle due funzioni l'integrale:

$$R_{12}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t + \tau) g_2^*(t) dt$$

Nel caso di funzioni reali, esso può essere interpretato come una misura della "somiglianza" delle funzioni  $g_1(t+\tau)$  e  $g_2(t)$ .

Se  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  sono Fourier trasformabili, si ha:

$$R_{12}(\tau) \longleftrightarrow G_1(f) \cdot G_2^*(f)$$

Infatti, poniamo  $\sigma \triangleq -t$ ; l'integrale proposto si esprime:

$$R_{12}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau - \sigma) g_2^*(-\sigma) d\sigma$$

ponendo:  $g_2'(\sigma) \triangleq g_2^*(-\sigma)$

$$R_{12}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau - \sigma) g_2'(\sigma) d\sigma \longleftrightarrow G_1(f) G_2'(f) = G_1(f) G_2^*(f)$$

Infatti, per la proprietà (7), si ha:

$$g_2^*(t) \longleftrightarrow G_2^*(-f)$$

e per la (4)

$$g_2^*(-t) \longleftrightarrow G_2^*(f)$$

*Proprietà della cross-correlazione:*

a) Posto  $S_{12}(f) \triangleq G_1(f) \cdot G_2^*(f)$  e  $S_{21}(f) \triangleq G_2(f) \cdot G_1^*(f)$

dove  $S_{12}(f)$  è detto spettro di energia mutua o densità spettrale di energia mutua,

si verifica che  $S_{12}(f) = S_{21}^*(f)$ , e per segnali reali  $S_{12}(f) = S_{21}(-f)$ .

b) Vale la seguente uguaglianza

$$S_{12}(f) \cdot S_{21}(f) = G_1(f) \cdot G_2^*(f) \cdot G_2(f) \cdot G_1^*(f) = |G_1(f)|^2 |G_2(f)|^2$$

### c) Teorema di Parseval

Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \cdot g_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f) \cdot G_2^*(f) df$$

Infatti:

$$R_{12}(0) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t+0) \cdot g_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \cdot g_2^*(t) dt = F^{-1} \{ G_1(f) \cdot G_2^*(f) \} \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f) \cdot G_2^*(f) \cdot e^{j2\pi f 0} df$$

**Esempio:** segnale radar + rumore

La cross-correlazione, la cui conoscenza è determinante nello studio dei segnali aleatori, viene utilizzata anche nel caso di segnali determinati per caratterizzare il confronto fra due forme d'onda.

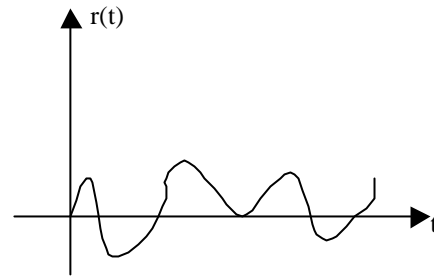
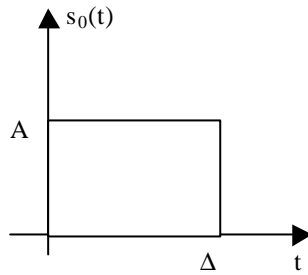
Se, ad esempio, un trasmettitore radar emette l'impulso di figura seguente  $s_0(t) = A \operatorname{rect} \left( \frac{t - \frac{\Delta}{2}}{\Delta} \right)$ ,

ed il segnale ricevuto ha l'andamento mostrato sempre in figura e indicato con  $r(t)$ . Da tale immagine risulta che non è agevole stabilire l'esistenza o meno di un'eco e quindi di un bersaglio. Ciò diventa possibile utilizzando l'operazione di cross-correlazione. Indicando con  $r(t)$  il segnale ricevuto, somma dell'eco  $s(t)$  (versione ritardata ed eventualmente distorta del segnale trasmesso) e del rumore,  $n(t)$  (funzione campione del corrispondente processo), la cross-correlazione fra segnale ricevuto e segnale trasmesso è:

$$R_{r,s_0}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} [s(t+\tau) + n(t+\tau)] \cdot s_0^*(t) dt = R_{n,s_0}(\tau) + R_{s,s_0}(\tau)$$

Supponendo  $s(t)$  e  $n(t)$  incorrelati, segue che  $R_{r,s_0}(\tau) = R_{s,s_0}(\tau)$ . Cioè la cross-correlazione fra segnale trasmesso e segnale ricevuto coincide con quella tra segnale utile e segnale trasmesso. Se il segnale ricevuto è solo rumore si ha  $s(t)=0$  e quindi  $R_{r,s_0}(\tau) = 0$





#### 14) Autocorrelazione

Si definisce autocorrelazione la crosscorrelazione di una funzione con se stessa:

$$R_g(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau) \cdot g^*(t) dt$$

Si ha evidentemente, se  $g(t)$  è Fourier trasformabile:

$$R_g(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau) \cdot g^*(t) dt \longleftrightarrow G(f) \cdot G^*(f) = |G(f)|^2$$

a) Se si osserva che l'energia del segnale  $g(t)$  si esprime (caso particolare del già definito Teorema di Parseval):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = R_g(0)$$

e, dalla formula di inversione della trasformata di Fourier:

$$E = R_g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

dalla quale si deduce un'importante proprietà dello spettro di ampiezza dei segnali di energia: per la convergenza dell'ultimo integrale deve risultare  $\lim_{f \rightarrow \infty} |G(f)| = 0$ ; lo spettro di ampiezza del segnale ad energia finita deve diventare trascurabile al tendere di  $f$  all'infinito.

Si può definire la quantità  $S_g(f) = |G(f)|^2$  come densità spettrale di energia del segnale

Vale allora la seguente relazione:

$$R_g(\tau) \longleftrightarrow S_g(f)$$

ed anche la seguente relazione di Parseval sull'energia:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

b) La funzione di autocorrelazione gode anche della proprietà di presentare simmetria coniugata, cioè:

$$R_g(-\tau) = R_g^*(\tau)$$

Infatti:

$$R_g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) \cdot g^*(t) dt$$

posto allora:  $t-\tau = t'$  si ha:

$$R_g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \cdot g^*(t'+\tau) dt' = R_g^*(\tau)$$

Per segnali reali:

$$R_g(-\mathbf{t}) = R_g(\mathbf{t})$$

c) Inoltre

$$|R_g(\tau)| \leq R_g(0)$$

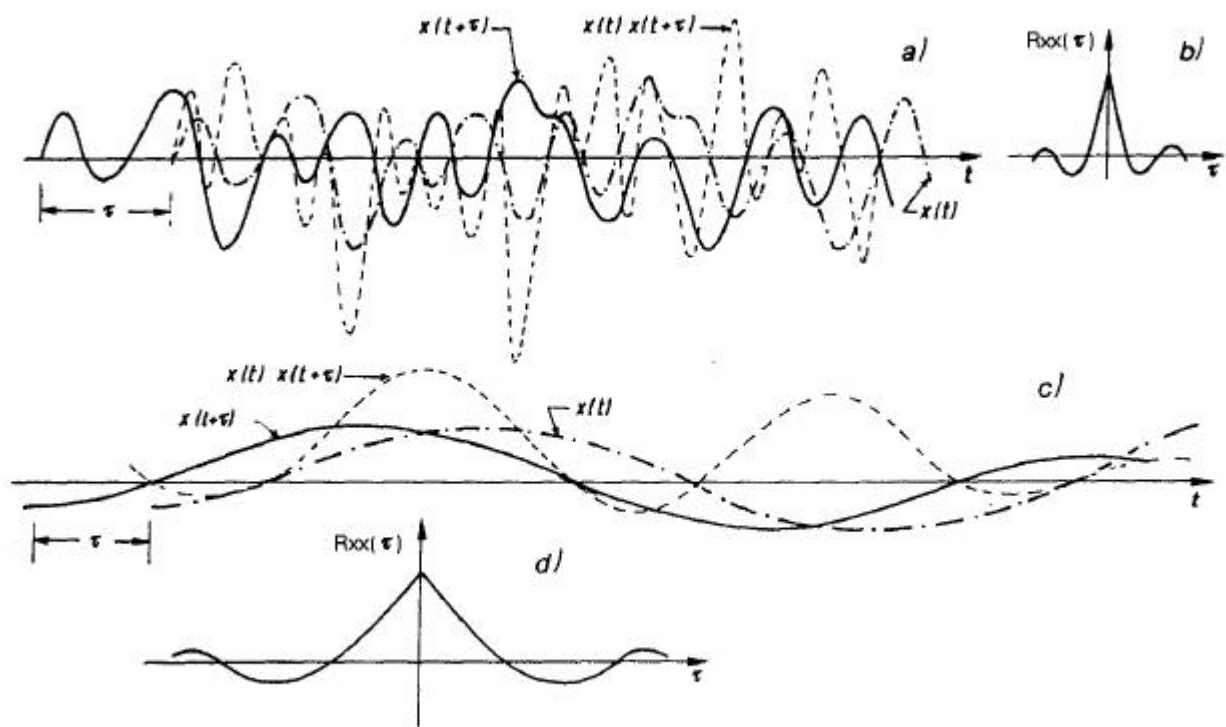
Infatti, per la disuguaglianza di Schwartz.:

$$|R_g(\mathbf{t})|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\mathbf{t}) \cdot g^*(t) dt \right|^2 = \left| \langle g(t+\mathbf{t}), g(t) \rangle \right|^2 \leq \|g(t+\mathbf{t})\|^2 \|g(t)\|^2 = E_g \cdot E_g = [R_g(0)]^2$$

Un aspetto significativo della funzione di autocorrelazione è illustrato mediante le immagini della pagina seguente, nelle quali un segnale reale  $x(t)$  è confrontato con se stesso. Se il segnale in esame varia rapidamente (fig. a) rispetto ad un prefissato valore  $\tau$ , l'area sottesa dalla curva prodotto  $x(t)x(t+\tau)$  assume valori positivi e negativi che, supponendo l'ampiezza distribuita uniformemente, tendono a compensarsi per  $T \rightarrow \infty$  per cui l'autocorrelazione è prossima allo zero.

Se invece  $x(t)$  varia lentamente (fig. c) il prodotto  $x(t)x(t+\tau)$  si mantiene quasi sempre dello stesso segno per cui la funzione di autocorrelazione è prossima al suo valore massimo, assunto in 0.

Quindi nel primo caso  $R_{xx}(\tau)$  decresce più rapidamente che nel secondo. Ciò conferma l'esistenza di una relazione fra la funzione di autocorrelazione e la velocità di variazione del segnale, che è legata alla larghezza dello spettro.



#### 4.8 DEFINIZIONI PER SEGNALI DI ENERGIA

Riportiamo alcune definizioni che si applicano ai segnali ad energia finita, che potranno risultare utili nel prosieguo.

a) Si dice che due segnali sono **ortogonali** quando:

$$R_{12}(0) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t+0) \cdot g_2^*(t) dt = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f) \cdot G_2^*(f) df$$

b) Si dice che due segnali sono **paralleli** se:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \cdot g_2^*(t) dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g_2(t)|^2 dt$$

c) Si dice che due segnali sono **incorrelati** quando:

$$R_{12}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t+\tau) \cdot g_2^*(t) dt = 0 \quad \forall \tau$$

Ovviamente se due segnali sono incorrelati sono anche ortogonali, poiché la loro crosscorrelazione si annulla per tutti i  $\tau$ , anche quando  $\tau=0$ .

d) Condizione necessaria e sufficiente perché due segnali siano incorrelati è che i loro spettri siano disgiunti.

Condizione sufficiente: se gli spettri sono disgiunti, allora i segnali sono incorrelati.

$$R_{12}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t+\tau) \cdot g_2^*(t) dt = F^{-1} \left\{ G_1(f) \cdot G_2^*(f) \right\} \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f) \cdot G_2^*(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} [0] \cdot e^{j2\pi f \tau} df = 0$$

Condizione necessaria: se i segnali sono incorrelati, allora gli spettri sono disgiunti)

$$R_{12}(\tau) = 0 \cdots \cdots G_1(f) \cdot G_2^*(f) = F \{ R_{12}(\tau) \} = 0$$