Capitolo 5

ANALISI SPETTRALE DI SEGNALI DI POTENZA

In questo capitolo consideriamo la classe dei segnali a potenza media finita, nei quali la potenza

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \qquad \text{è finita e non nulla.}$$

La potenza è non nulla solo se il segnale x(t) è ad energia infinita, quindi la relazione precedente non si applica ai segnali che esistono nella realtà fisica, per i quali si ha sempre un istante iniziale ed un istante finale, mentre l'ampiezza si mantiene limitata. Come sappiamo i segnali a potenza media finita costituiscono un'astrazione matematica molto utile per rappresentare segnali che hanno caratteristiche di regolarità in intervalli di tempo molto grandi e per questo sono chiamati <u>segnali persistenti</u>.
È evidente che non è possibile eseguire l'analisi in frequenza di tali segnali per mezzo dello spettro di energia, ma può essere utile introdurre una <u>densità spettrale di potenza</u> che tenga conto, in qualche modo, dei contributi di potenza forniti da ciascuna delle infinite armoniche che costituiscono il segnale.
Introdurremo quindi il concetto di <u>spettro di potenza</u> per segnali a potenza media finita, in modo analogo a quanto visto per i segnali ad energia finita.
Questo strumento di analisi risulterà fondamentale nello studio dei segnali di tipo casuale, che sono i principali protagonisti nell'analisi dei sistemi di telecomunicazioni.

5. 1 FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE E DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

Definiamo funzione di autocorrelazione di x(t), che indichiamo con $R_x(\tau)$:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

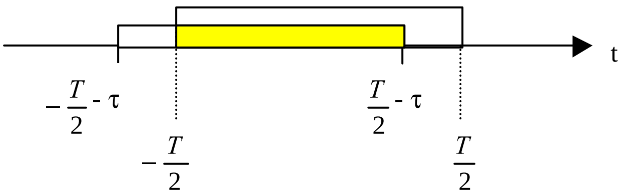
Consideriamo il segnale x(t) a potenza media finita e valutiamo $x^T(t)$, ottenuto per troncamento dal segnale x(t) nella finestra $|t| \leq T/2$: $x^T(t) = x(t)\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$.

Questa è una funzione di energia in quanto ottenuta da un segnale di potenza troncato. Per essa si può definire la funzione di autocorrelazione per segnali di energia:

$$R_{x^T}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^T(t+\tau)\left[x^T(t)\right]^* dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} x(t+\tau)x^*(t)dt =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt - \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

Nella figura seguente sono riportati su uno stesso asse gli intervalli di definizione di $x^T(t+\tau)$ e $x^T(t)$. Nell'immagine è anche evidenziato l'intervallo temporale in cui le due funzioni sono contemporaneamente diverse da 0 (nella figura τ>0).



Negli integrali dell'espressione precedente è stato sostituito a $x^T(t)$ il segnale x(t) in quanto nell'intervallo di integrazione considerato i due segnali coincidono.
La funzione $R_{x^T}(\tau)$ è definita per segnali di energia, qualunque sia T finito.
Se consideriamo l'espressione della funzione di autocorrelazione del segnale di potenza x(t) possiamo scrivere che:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt - \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt \right]$$

dal momento che il secondo integrale in parentesi è trascurabile rispetto a T, per T tendente all'infinito.
Si ha allora:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} R_{x^T}(\tau)$$

Determiniamo adesso la trasformata dell'autocorrelazione dei segnali di potenza, considerando pertanto:

$$\Im[R_x(\tau)] = \Im\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} R_{x^T}(\tau)\right]$$

Ipotizziamo di poter scambiare il limite con l'integrale:

$$\Im[R_x(\tau)] = \Im[R_{x^T}(\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|X^T(f)\right|^2}{T}$$

dove:

$$X^T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^T(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \qquad (*)$$

Si noti che $X^T(f)$ occupa tutto l'asse delle frequenze, perché $x^T(t)$ è definito in un intervallo limitato.

A $x^T(t)$ è associata la funzione, chiamata "periodogramma":

$$S^T(f) \triangleq \frac{1}{T}\left|X^T(f)\right|^2$$

Il periodogramma esiste se esiste, per qualsiasi valore finito di T, la trasformata (*). Nel seguito ipotizzeremo che ciò sia vero.

Definiamo quindi **densità spettrale di potenza** o **spettro di potenza** di x(t) il limite a cui tende la relazione precedente quanto T tende all'infinito (se esiste).

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|X^T(f)\right|^2$$

Esempio

Sia x(t)=A, costante

Sappiamo già che a questo particolare segnale possiamo associare una trasformata, secondo la teoria delle distribuzioni, infatti:

$x(t) \longleftrightarrow A\,\delta(f)$

Siamo però interessati ad esprimere matematicamente la densità spettrale di potenza di questo segnale, pertanto da quanto appena introdotto:

$$x^T(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) \quad \longleftrightarrow \quad X^T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$X^T(f) = AT\,sinc(Tf)$$

$$S^T(f) = \frac{1}{T}\left|X^T(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\left[AT\,sinc(Tf)\right]^2 = A^2T\,sinc^2(Tf)$$

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} S^T(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|X^T(f)\right|^2 = \lim_{T\to\infty}\left[A^2T\,sinc^2(Tf)\right] =$$
$$= A^2\lim_{T\to\infty}\left[T\,sinc^2(Tf)\right] = A^2\delta(f)$$

5.2 PROPRIETA' DELLO SPETTRO DI POTENZA

Verifichiamo che $\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df$ sia uguale alla potenza del segnale x(t).

Possiamo verificare che:

$$R_x(0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left|x(t)\right|^2 dt$$

è proprio uguale alla potenza del segnale per la definizione data.

Peraltro:

$$F^{-1}\left\{S_x(f)\right\} = R_x(\tau)$$

che per τ=0

$$R_x(0) = F^{-1}\left\{S_x(f)\right\}\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df$$

Quindi

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df$$

5.3 FUNZIONE DI MUTUA CORRELAZIONE E SPETTRO MUTUO

Siano x(t) e y(t) a potenza media finita e $x^T(t)$ e $y^T(t)$ le rispettive versioni troncate.

Definiamo funzione cross-correlazione o mutua correlazione dei due segnali

$$R_{xy}(\tau) \underline{\Delta} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)y^*(t)\,dt$$

È possibile dimostrare che la trasformata di $R_{xy}(\tau)$ ha espressione:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{X^T(f)\left[Y^T(f)\right]^*}{T}$$

dove $X^T(f)$ e $Y^T(f)$ sono le trasformate dei segnali troncati $x^T(t)$ e $y^T(t)$ rispettivamente.
Definiamo questa funzione della frequenza spettro mutuo di potenza di x(t) e y(t):

Quindi: $$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

5.4 SPETTRO DI POTENZA DI SEGNALI PERIODICI

I segnali periodici sono segnali a potenza media finita, pertanto non è possibile definire per essi uno spettro di energia.
La potenza di un segnale periodico è data da:

$$P_x \Delta \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

dove T_0 è il periodo del segnale.
Per i segnali periodici si introduce, in analogia ai segnali di potenza, una funzione di autocorrelazione e una densità spettrale.
Poiché x(t) è un segnale periodico di periodo T_0, anche il prodotto, fissato τ, sarà un segnale periodico con lo stesso periodo, quindi:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

Da cui otteniamo:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{j2\pi \frac{m}{T_0} t} \right]^* dt =$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^* \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau) e^{-j2\pi \frac{m}{T_0} t} dt =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^* X_m e^{j2\pi \frac{m}{T_0}\tau} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |X_m|^2 e^{j2\pi \frac{m}{T_0}\tau}$$

Si ha quindi:

$$S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |X_m|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T_0}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |X_m|^2 \delta(f - mf_0)$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \delta(f - nf_0)df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$$

Che coincide con la già nota uguaglianza di Parseval.

Possiamo introdurre altre forme della funzione di autocorrelazione per segnali periodici, facendo ricorso alla funzione nel periodo centrale, $x_g(t) \underline{\Delta}\, x(t)\, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)\, x_g^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_g^*(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_g(t+\tau - mT_0)\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_g^*(t)\, x_g(t+\tau - mT_0)\right] dt = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{x_g}(\tau - mT_0)$$