Capitolo 2

LO SPAZIO DEI SEGNALI[1]

I segnali tempo-continui o analogici possono considerarsi elementi di un insieme che chiameremo spazio dei segnali. I segnali ad energia finita possono essere caratterizzati con vettori a N dimensioni, mediante espansioni ortonormali.
Prima di affrontare le definizioni proprie di uno spazio come quello dei segnali, richiamiamo brevemente alcuni concetti di base relativi agli spazi metrici e agli spazi vettoriali.

2.1 RICHIAMI

Spazi metrici
Siano x e y due elementi di un generico insieme, caratterizziamo la differenza tra x e y per mezzo di un numero reale e positivo che chiamiamo distanza.
La distanza d(x,y) si chiama metrica se possiede le seguenti proprietà

1. $d(x,y) \geq 0$ per ogni x e y
   $d(x,y) = 0$ solo se $x= y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y)= d(x,z) + d(z,y)$

Un insieme X di elementi ed una metrica ad esso associata formano uno spazio metrico (X,d).
Due metriche diverse definite sullo stesso insieme formano due spazi metrici diversi.
Consideriamo ora l'insieme dei segnali, e due elementi di esso , x(t) e y(t), reali o complessi, definiti in un intervallo di tempo $T=[t_a, t_b]$ finito o infinito. Due possibili definizioni di metrica per tale insieme sono:

$$d_1(x,y) = \int_{t_a}^{t_b} |x(t) - y(t)| dt$$

$$d_2(x,y) = \int_{t_a}^{t_b} |x(t) - y(t)|^2 dt$$

Spazi lineari e vettoriali
Per spazio lineare o spazio vettoriale si intende un insieme di elementi, chiamati vettori, e un insieme di regole che definiscono le operazioni di somma tra vettori e di moltiplicazione per uno scalare. Tali regole sono le seguenti

A. Dati due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ nell'insieme, esiste nello stesso insieme un vettore ($\underline{x} + \underline{y}$), chiamato vettore somma , tale per cui:

[1] Le trattazione comprende richiami e dimostrazioni di matematica, evidenziati in aree ombreggiate.

la somma è commutativa, cioè $\underline{x}+\underline{y} = \underline{y}+\underline{x}$

- la somma è associativa, cioè $\underline{x}+(\underline{y}+\underline{z})=(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}$
- esiste il vettore nullo o (chiamato origine), per il quale vale la regola $\underline{x}+\underline{0}=\underline{x}$
- dato $\underline{x}$, esiste un unico vettore $(-\underline{x})$, tale per cui $\underline{x}+(-\underline{x}) = \underline{0}$.

B. Esiste un insieme di elementi (detti scalari) tale per cui a ciascun scalare α e a ciascun vettore $\underline{x}$ è associato un vettore $\alpha\underline{x}$ dello spazio vettoriale. A tale operazione di moltiplicazione per uno scalare sono associate le seguenti proprietà:

- la moltiplicazione per uno scalare è associativa, cioè $\alpha(\beta\,\underline{x}) = \alpha\beta\underline{x}$
- $1\underline{x} = \underline{x}$ e $0\underline{x} = \underline{0}$
- vale la legge distributiva: $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}$
- vale la legge distributiva: $(\alpha+\beta)\,\underline{x} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{x}$

Se gli scalari sono reali, allora diremo che lo spazio vettoriale è uno spazio lineare reale; se gli scalari sono complessi avremo uno spazio lineare complesso.
Chiamiamo combinazione lineare il vettore:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{x}_i$$

La base

Consideriamo n vettori $\underline{w}_i$ e un generico vettore $\underline{x}$ ottenuto come combinazione lineare degli n vettori $\underline{w}_i$, cioè:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{w}_i$$

Se $\underline{x} = \underline{0}$ soltanto quando $\alpha_i=0$ per qualsiasi i, allora si dice che gli n vettori sono linearmente indipendenti.
Se invece esiste una n-pla di scalari $\alpha_i \neq 0$ tale per cui $\underline{x}=\underline{0}$, allora vuol dire che è possibile scrivere

$$\underline{w}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \beta_i \underline{w}_i$$

e quindi almeno uno dei vettori $\underline{w}_i$ può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti.

Consideriamo ora n vettori $\underline{w}_i$ linearmente indipendenti e tutti i vettori $\underline{x}_i$ che si possono ottenere come combinazione lineare dei vettori $\underline{w}_i$. Essi costituiscono uno spazio vettoriale ***M*** a n dimensioni, descritto dalla base { $\underline{w}_i$ }. È bene sottolineare che in uno spazio ***M*** qualsiasi insieme di n vettori linearmente indipendenti può essere utilizzato come base; in altre parole, la base di uno spazio lineare non è unica.

La norma

Si definisce norma dell'elemento $\underline{x}$ dello spazio lineare, che rappresentiamo col simbolo ||x||, il numero reale che soddisfa alle seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0$ per ogni $\underline{x}$; $\|\underline{x}\| = 0$ se e solo se $\underline{x}=0$
2. $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$
3. $\|\alpha\,\underline{x}\| = |\alpha|\,\|\underline{x}\|$

Uno spazio lineare in cui è definita una norma, i cui elementi hanno tutti norma finita, è detto spazio normato.
Se ricordiamo le proprietà che deve avere una metrica vediamo che possiamo definire la metrica di uno spazio vettoriale come $d(x,y) \triangleq \|\underline{x} - \underline{y}\|$

Prodotto interno o scalare

Per arrivare alla costruzione di una base è necessario introdurre una operazione nuova, il prodotto scalare fra due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dello spazio lineare, che indichiamo con la scrittura:

$<\underline{x} , \underline{y}>$

il prodotto interno è una funzione che assegna a ciascuna coppia $\underline{x}$, $\underline{y}$ di uno spazio lineare un numero complesso che soddisfa alle seguenti proprietà:

$$1. <\underline{x},\underline{y}> = \left(<\underline{y},\underline{x}>\right)^* \quad \text{per ogni } \underline{x},\underline{y}$$

$$2. \left(<\alpha\underline{x}+\beta\underline{y},\underline{z}>\right) = \alpha<\underline{x},\underline{z}> + \beta<\underline{y},\underline{z}> \quad \text{per ogni } \underline{x},\underline{y},\underline{z},\alpha,\beta$$

$$3. <\underline{x},\underline{x}> \geq 0 \quad \text{per ogni } \underline{x}$$

$$4. <\underline{x},\underline{x}> = 0 \quad \text{se e solo se } \underline{x}=0$$

Uno "spazio lineare a prodotto interno" è uno spazio in cui ogni coppia di elementi ha un prodotto interno finito.

Una relazione importante fra prodotto interno e norma è la disuguaglianza di Schwartz:

$$\left|<\underline{x},\underline{y}>\right|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2$$

Definizione di ortogonalità

Riscrivendo la disuguaglianza di Schwartz come:

$$\left|<\underline{x},\underline{y}>\right|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2$$

|possiamo definire l'angolo θ tra due vettori come:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\left\{<\underline{x},\underline{y}>\right\}}{\|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|}$$

Diciamo che due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono ortogonali se

$$\left|<\underline{x},\underline{y}>\right|^2 = 0$$

Se i due vettori ortogonali sono anche a norma unitaria diciamo che sono ortonormali.

Diamo ora una interpretazione geometrica della espressione precedente che esprime θ; e della definizione di ortogonalità nel caso di spazio lineare reale. Coinsideriamo la figura seguente, Fig.2.1, in cui sono rappresentati geometricamente i due vettori-segnali $\underline{x}$ e $\underline{y}$ in uno spazio a due dimensioni. Se i due segnali sono ortogonali allora $<\underline{x} , \underline{y}>= 0$, quindi cos θ =0 e i due vettori possono essere disegnati ad angolo retto, essendo θ =π/2 . Se invece $<\underline{x} , \underline{y}> \neq 0$, cos θ ≠ 0, θ ≠ π/2 e i due vettori non saranno più rappresentabili ad angolo retto. Se proiettiamo geometricamente il vettore $\underline{y}$ su $\underline{x}$ otteniamo un vettore di lunghezza [$\|\underline{y}\|$ cos θ], che è uguale a $\frac{\mathrm{Re}\left\{<\underline{x},\underline{y}>\right\}}{\|\underline{x}\|}$, come si ricava dalla definizione di θ. Da queste considerazioni ricaviamo l'interpretazione geometrica di prodotto scalare: esso rappresenta la lunghezza della componente di $\underline{y}$ nella direzione di $\underline{x}$.

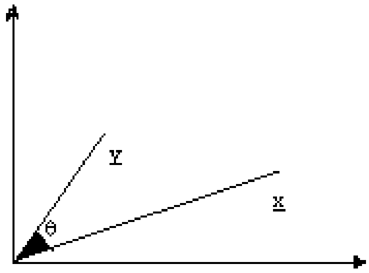

Figura 2.1 - Rappresentazione grafica di due vettori in uno spazio bidimensionale: $\langle x,y\rangle=\|x\|\,\|y\|\cos\theta$

Scomposizione di un vettore in funzione di una base ortonormale

Consideriamo ora uno spazio vettoriale ***M*** a n dimensioni e supponiamo di poterlo descrivere per mezzo di una base di n vettori $\underline{w}_i$ tra loro ortonormali. Abbiamo visto che un generico vettore $\underline{x}$ appartenente a si può scrivere come combinazione lineare dei vettori della base, cioè:

$$\underline{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\underline{w}_i$$

Si verifica facilmente che gli n scalari α_k si ottengono come prodotto scalare

$$\alpha_k=\langle\underline{x},\underline{w}_k\rangle$$

Infatti dalla combinazione lineare che esprime $\underline{x}$ possiamo scrivere:

$$\langle\underline{x},\underline{w}_k\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle\underline{w}_i,\underline{w}_k\rangle$$

Gli addendi della sommatoria a secondo membro sono tutti nulli a causa dell'ortogonalità dei vettori $\underline{w}_i$, tranne il termine per i=k, essendo

$$\langle\underline{w}_k,\underline{w}_k\rangle=\left\|\underline{w}_k\right\|^2=1$$

da cui segue la espressione di α_k, che geometricamente rappresenta la proiezione di $\underline{x}$ su $\underline{w}_k$.

2.2 LO SPAZIO DEI SEGNALI TEMPO-CONTINUI O ANALOGICI

Un segnale è un fenomeno fisico che rappresenta l'informazione (consideriamo per ora segnali tempo-continui). Poichè ogni segnale è parte di una molteplicità di segnali, questi possono essere rappresentati matematicamente come elementi dell'insieme dei segnali.

I segnali che considereremo in questo capitolo sono dei segnali tempo-continui, cioè rappresentabili con funzioni della variabile tempo continua.

L'insieme ***L*** di tutti i segnali tempo-continui è l'insieme di tutti i segnali complessi, funzioni complesse del tempo:è uno spazio vettoriale poichè in esso sono definite le operazioni

$(x+y)(t) = x(t) + y(t) \qquad t\in R$

$(\alpha x)(t) = \alpha x(t) \qquad t\in R,\ \alpha\in C$

La prima espressione rappresenta la composizione, istante per istante, dei due segnali x(t) e y(t), mentre la seconda esprime la variazione dell'ampiezza del segnale x(t) secondo una costante data.

Norma

La norma fornisce una misura della "grandezza" di un segnale. La norma del segnale x(t), che si indica con ||x||, deve essere definita in modo che sia un numero reale non negativo, che è zero se e solo se l'elemento è nullo, inoltre la norma deve essere omogenea rispetto alla moltiplicazione per uno scalare e soddisfare la disuguaglianza triangolare.

Si consideri uno spazio lineare e si definisca in esso una norma, allora se tutti i suoi elementi hanno norma finita lo spazio è detto normato.

Si possono definire diverse norme sullo spazio ***L*** dei segnali continui, ad esempio:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} & 1 \le p < \infty \\ \sup\limits_{t \in R} |x(t)| & p = \infty \end{cases}$$

dove $\sup\limits_{t \in R} |x(t)|$ è il numero reale, α, più piccolo tale che $|x(t)| \le \alpha$ qualunque sia t (massimo assoluto della funzione).

L'insieme $\boldsymbol{L}_\infty$ di tutti i segnali continui del tempo con ampiezza finita è spazio normato.

Si può vedere che anche i sottoinsiemi di tutti i segnali continui ad energia finita o assolutamente integrabili sono spazi normati.

Gli spazi $\boldsymbol{L}_p$ sono sottospazi lineari normati di ***L***

$L_\infty = \{x \in L : \|x\|_\infty < \infty\}$ insieme dei segnali tempo continui ad ampiezza finita

$L_2 = \{x \in L : \|x\|_2 < \infty\}$ insieme dei segnali tempo continui ad energia finita

$L_1 = \{x \in L : \|x\|_1 < \infty\}$ insieme dei segnali tempo continui ad "azione" finita

Fra le varie norme definibili sullo spazio ***L*** ne scegliamo alcune significative per i nostri scopi, che danno luogo a sottospazi normati:

a) nel caso di segnali di durata limitata (a supporto compatto) possiamo definire

$$\|x\| = \left\{ \int_T |x(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

b) nel caso di segnali di energia

$$\|x\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

c) nel caso di segnali di potenza

$$\|x\| = \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

d) nel caso di segnali periodici di periodo T_0

$$\|x\| = \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Prodotto interno

Anche nel caso dello spazio lineare dei segnali è possibile introdurre un prodotto interno, e lo si può definire in vari modi.
Ovviamente, mentre ***L*** in generale non è uno spazio lineare "a prodotto interno", cioè in cui il prodotto fra due dei suoi elementi è finito, qualunque sia la coppia di elementi scelta, alcuni suoi sottospazi sono a "prodotto interno", relativamente alla definizione che diamo di questa operazione.

a) Segnali definiti su un intervallo limitato

$$< x,y > \underline{\Delta} \int_T x(t) y^*(t) dt$$

b) Segnali ad energia finita

$$< x,y > \underline{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

c) Segnali a potenza media finita

$$< x,y > \underline{\Delta} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt$$

Disuguaglianza di Schwartz

Siano x(t) e y(t) due segnali, per essi vale la disuguaglianza di Schwartz, di cui forniamo la dimostrazione nel caso di segnali ad energia finita (analoga procedura si può ripetere per segnali a potenza finita o limitati nel tempo).

Per la dimostrazione consideriamo il particolare segnale z(t) = x(t) + a y(t) e calcoliamone l'energia. Si ottiene:

$$E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) + ay(t)|^2 dt = E(x) + a^2 E(y) + a^* \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt + a \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t) dt =$$

Tale espressione, essendo un'energia, deve essere sempre non negativa, anche per

$$a=-\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt}{E(y)}$$

Sostituendo nella espressione di E(z) tale valore di a, si ottiene:

$$E(z) = E(x) - \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt\right|^2}{E(y)} \geq 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

Da cui si ottiene anche che:

$$\left|\left\langle \underline{x}, \underline{y} \right\rangle\right|^2 \leq \left\|\underline{x}\right\|^2 \left\|\underline{y}\right\|^2$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt\right|^2 \leq E(y)E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

2.3 RAPPRESENTAZIONE DISCRETA DI SEGNALI CONTINUI (Signal expansion)

Esaminiamo il problema di associare una rappresentazione discreta ad un segnale continuo. In altre parole vogliamo rappresentare un dato segnale continuo in termini di una sequenza possibilmente finita.
Tale rappresentazione, effettuata nell'ambito di uno dei sottospazi prima definiti, può essere esatta o approssimata, nel qual caso sarà scelta con un compromesso fra accuratezza e semplicità.
Nella trattazione svolta di seguito considereremo segnali ad energia finita, ma la stessa dimostrazione è valida per segnali a potenza media finita o limitati nel tempo, a condizione di considerare corrispondentemente i diversi prodotti scalari.

Espansione ortonormale di segnali ad energia finita

Un tipo fondamentale di rappresentazione discreta è basata su insiemi di segnali detti ortonormali.
Si supponga di avere una sequenza $\{\psi_i(t)\}_{i\in I}$ di segnali ortogonali, cioè tali che:

$$<\psi_i \psi_j> = \begin{cases} E_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

dove I è finito
Se $E_i = 1$ per ogni $i \in I$, i segnali di questa sequenza si dicono ortonormali e vengono indicati con $\{\phi_i(t)\}_{i\in I}$.
Ovviamente una sequenza ortonormale può essere ottenuta da una ortogonale ponendo:

$$\phi_i(t) = \frac{\psi_i(t)}{\sqrt{E_i}} \qquad \forall i \in I$$

Data una sequenza ortonormale, vogliamo approssimare un dato segnale ad energia finita x(t) con una combinazione lineare di segnali appartenenti alla sequenza, cioè con il segnale:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i \in I} c_i \phi_i(t)$$

Un criterio adatto alla scelta delle costanti c_i che appaiono nella relazione precedente e, quindi, per la approssimazione di x(t), quando abbiamo a che fare con segnali di energia, è minimizzare l'energia del segnale errore (si parla allora di convergenza in norma $\boldsymbol{L_2}$, che significa minimizzare l'energia dell'errore, ovvero, se parliamo di segnali ad energia finita in un intervallo limitato, minimizzare lo scarto quadratico medio, definito come il rapporto fra energia dell'errore e intervallo di definizione della funzione considerata):

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

Per altri tipi di segnali (segnali di potenza, segnali limitati nel tempo,..) si opera analogamente.

Dunque occorre minimizzare la seguente relazione rispetto a c_i:

$$\begin{aligned}
E_e &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)-\hat{x}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}^*(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\hat{x}(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt = \\
&= \|x\|^2 - \{<x,\hat{x}>\} - \{<x,\hat{x}>\}^* + \|\hat{x}\|^2 = \\
&= E_x - 2\,\mathrm{Re}\{<x,\hat{x}>\} + E_{\hat{x}} = E_x - 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{i\in I} c_i^* <x,f_i>\right\} + \sum_{i\in I}|c_i|^2 = \\
&= E_x + \sum_{i\in I}|c_i|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{i\in I} c_i^* <x,f_i>\right\} + \sum_{i\in I}|<x,f_i>|^2 - \sum_{i\in I}|<x,f_i>|^2 = \\
&= E_x + \sum_{i\in I}|c_i - <x,f_i>|^2 - \sum_{i\in I}|<x,f_i>|^2
\end{aligned}$$

Poichè il termine centrale è non negativo occorre che questo sia nullo per minimizzare E_e rispetto a c_i.

Otteniamo, pertanto che i coefficienti c_i hanno la forma:

$$c_i = <x,\phi_i> = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi_i^*(t)dt \quad \forall i \in I$$

Quindi:

$$(E_e)_{min} = E_x - \sum_{i\in I}|c_i|^2$$

$$E_x \geq \sum_{i\in I}|c_i|^2$$

Quest'ultima è detta disuguaglianza di Bessel

Il segnale $\hat{x}(t)$, quando i c_i sono calcolati usando l'espressione precedente, è detto proiezione di x(t) sullo spazio individuato dai segnali della sequenza $\{\phi_i(t)\}_{i\in I}$, cioè dall'insieme dei segnali che possono essere espressi come combinazione lineare dei $\phi_i(t)$.

Questa denominazione deriva dal fatto che se l'uguaglianza, $c_i = <x,f_i> \quad \forall i \in I$,
è valida, l'errore e(t) è ortogonale ad ogni $f_i(t)$, e quindi a $\hat{x}(t)$.

Un importante risultato di questa teoria è l'esame delle condizioni per cui $|E_e|_{min} = 0$

Quando questo accade la sequenza $\{\phi_i(t)\}_{i\in I}$, è detta <u>completa</u> per il segnale x(t) e abbiamo la uguaglianza di Parseval:

$$E_x = \sum_{i\in I} |c_i|^2$$

In questo caso scriviamo: $x(t) = \sum_{i\in I} c_i \phi_i(t)$

Questa uguaglianza non deve essere interpretata nel senso che la parte sinistra e la parte destra si uguagliano per ogni t, bensì che l'energia della loro differenza si annulla. Questo fatto si può esprimere dicendo che i due membri sono <u>uguali quasi ovunque</u>.
Una volta che sia stata scelta una sequenza di segnali ortonormali $\phi_i(t)$., un generico segnale x(t) a energia finita può essere rappresentato dalla sequenza $\{c_i\}_{i\in I}$ definita sopra. Questa rappresentazione è esatta se l'insieme è completo rispetto a x(t).

La conclusione è la seguente:

Un segnale a energia finita x(t), in generale complesso, può essere rappresentato mediante lo sviluppo

$$x(t) = \sum_{i\in I} c_i \phi_i(t)$$

dove $\{\phi_i(t)\}_{i\in I}$ *è un insieme ortonormale di segnali ad energia finita <u>se</u>, posto*

$$c_i = \langle x, \phi_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi_i^*(t)dt \quad \forall i \in I$$

<u>risulta</u> $E_x = \sum_{i\in I} |c_i|^2$

Rappresentazione geometrica di un insieme di segnali

Abbiamo visto come la teoria delle espansioni ortonormali di segnali, nel caso specifico di segnali ad energia finita (ma quanto detto vale anche per altri tipi di segnali), indichi che un segnale x(t) può essere rappresentato dalla sequenza, in generale complessa, $\{c_i\}_{i\in I}$, di prodotti scalari, una volta che sia individuata una sequenza ortonormale completa per x(t).
Ora consideriamo una sequenza $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{m}$, di m segnali ortonormali, essa è completa per ogni segnale che può essere scritto come combinazione lineare dei $\phi_i(t)$. Se i$\phi_i(t)$ sono reali e x(t) è reale, allora i coefficienti c_i sono reali e il segnale x(t) può essere rappresentato dal vettore reale a m elementi:

$$\underline{x} = (c_1, c_2, ..., c_m)$$

od equivalentemente da un punto nello spazio Euclideo a m dimensioni, i cui assi coordinati corrispondono ai segnali $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{m}$.

Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Consideriamo ora un insieme $\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$ di segnali, possiamo sempre trovare una sequenza ortonormale che sia completa per tutti i segnali $x_i(t)$.
Dati m segnali $x_i(t)$, ci poniamo il problema di costruire una base ortonormale per rappresentarli. In altre parole vogliamo trovare n segnali ortonormali, $\phi_i(t)$, che ci consentano di esprimere gli m segnali $x_i(t)$ come loro combinazione lineare.
È quindi interessante esaminare degli algoritmi per costruire queste sequenze. Uno di questi, che è conveniente dal punto di vista del calcolo in quanto è iterativo, è chiamato procedura di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Si assuma che vi sia una sequenza di m segnali $x_i(t)$ linearmente indipendenti, per esempio, ad energia finita (o a potenza media finita o a supporto limitato nel tempo), cioè tali che la combinazione lineare:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i(t) = 0 \quad solo \quad se \quad c_i = 0$$

Una sequenza ortonormale $\{f_i(t)\}_{i=1}^{n}$, con n=m, può essere generata usando il seguente algoritmo:

$$1)\, y_1(t) = x_1(t)$$

$$f_1(t) = \frac{y_1(t)}{\sqrt{<y_1, y_1>}} = \frac{y_1(t)}{\|y_1\|}$$

$$2)\, y_2(t) = x_2(t) - <x_2, f_1> f_1(t)$$

$$f_2(t) = \frac{y_2(t)}{\sqrt{<y_2, y_2>}} = \frac{y_2(t)}{\|y_2\|}$$

$$3)\, y_3(t) = x_3(t) - <x_3, f_1> f_1(t) - <x_3, f_2> f_2(t)$$

$$f_3(t) = \frac{y_3(t)}{\sqrt{<y_3, y_3>}} = \frac{y_3(t)}{\|y_3\|}$$

....

$$m)\, y_m(t) = x_m(t) - \sum_{i=1}^{m-1} <x_m, f_i> f_i(t)$$

$$f_m(t) = \frac{y_m(t)}{\sqrt{<y_m, y_m>}} = \frac{y_m(t)}{\|y_m\|}$$

Osserviamo che la sequenza ottenuta dipende dall'ordine in cui sono presi i vettori $x_i(t)$. Cambiando l'ordine cambia la sequenza dei $\phi_i(t)$, i=1,2...m.
Assegnati m segnali non tutti linearmente indipendenti, occorre modificare il procedimento appena visto. Supponiamo ad esempio che $x_2(t)$ sia del tipo $[\alpha x_1(t)]$ con $\alpha \in$ R o C..
Dal procedimento di Gram-Schmidt otteniamo:

$$1) \quad \psi_1(t) = x_1(t)$$

$$\phi_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{\sqrt{<\psi_1, \psi_1>}} = \frac{\psi_1(t)}{\|\psi_1\|}$$

$$2) \quad \psi_2(t) = x_2(t) - <x_2, \phi_1> \phi_1(t) = \alpha x_1(t) - \alpha <x_1, \phi_1> \phi_1(t) = 0$$

Occorre pertanto scartare le funzioni $\phi_i(t)=0$ riducendo la dimensionalità dello spazio dei segnali $\{x_i(t)\}_{i=1}^{m}$.

Con l'insieme di n < m funzioni $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{n}$ è comunque possibile rappresentare tutti i segnali $x_i(t)$ come segue:

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} < x_i, \phi_i > \phi_i(t) \qquad \text{con } i=1,2,...n$$

per come è stato costruito l'insieme $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{n}$.