Capitolo 8

SEGNALE ANALITICO E INVILUPPO COMPLESSO DI UN SEGNALE PASSABANDA

In questo capitolo introdurremo una nuova tecnica per rappresentare segnali e sistemi reali, basata sul concetto di segnale analitico. Tale tecnica risulta particolarmente utile nell'analisi dei segnali e dei sistemi di tipo passa - banda ed è molto diffusa nello studio dei sistemi di telecomunicazioni.

8.1 SEGNALE ANALITICO ASSOCIATO AD UN SEGNALE DI ENERGIA

È noto che un segnale reale g(t), ad energia finita, ha uno spettro G(f) che presenta alcune forme di simmetria intorno all'origine dell'asse delle frequenze. In particolare la parte reale di G(f) è una funzione pari e la parte immaginaria una funzione dispari. Ne segue che la parte destra dello spettro, cioè i valori G(f) per f > 0, contengono tutta l'informazione necessaria per descrivere in frequenza il segnale reale g(t). Da ciò segue ancora che il segnale g(t) deve potersi ricostruire esattamente a partire da una funzione del tipo $\alpha G(f)u(f)$, dove u(t) è il gradino unitario e α una costante nota. L'unica eccezione è costituita dai segnali il cui spettro contiene una singolarità (cioè, una funzione delta di Dirac) nell'origine. Per questo motivo tali segnali non vengono considerati nella trattazione del segnale analitico svolta in questo capitolo.

Trasformata di Hilbert

Consideriamo una funzione g(t) che ammetta trasformata di Fourier, G(f).
Si definisce trasformata di Hilbert della funzione g(t) l'integrale (se esiste):

$$\hat{g}(t) \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{t-\tau}d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{g(\tau)}{t-\tau}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{g(\tau)}{t-\tau}d\tau\right]$$

"valore principale di Cauchy".

Si osserva come questo integrale rappresenta anche la convoluzione tra la g(t) stessa e la funzione $1/\pi t$:

$$\hat{g}(t) \triangleq g(t) \otimes \frac{1}{\pi t}$$

Si può valutare quindi agevolmente la trasformata di Fourier della trasformata di Hilbert .

Dalla trasformata di Fourier della funzione sgn(t) già valutata, si ha:

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

e dalla proprietà di dualità della trasformata di Fourier:

$$\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow \mathrm{sgn}(-f) = -\mathrm{sgn}(f)$$

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j\,\mathrm{sgn}(f)$$

Si ha quindi:

$$\hat{G}(f)=\Im\left\{g(t)\otimes\frac{1}{\pi t}\right\}=\Im\{g(t)\}\Im\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}=-j\,\mathrm{sgn}(f)G(f)$$

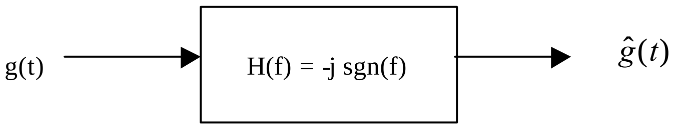
L'operazione inversa della trasformata di Hilbert è rappresentata dall'integrale

$$g(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(\tau)}{t-\tau}d\tau=\hat{g}(t)\otimes\left(-\frac{1}{\pi t}\right)$$

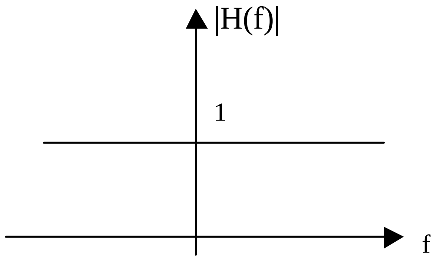
Infatti, la trasformata di Fourier dell'integrale di convoluzione sopra indicato vale:

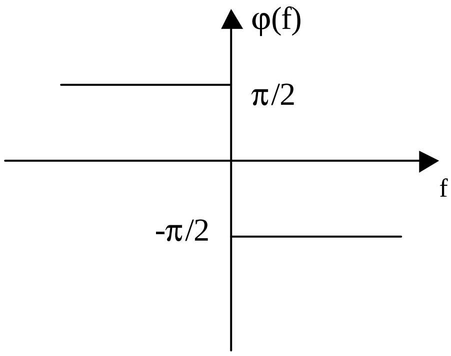
$$\hat{G}(f)[j\,\mathrm{sgn}(f)]=j\,\mathrm{sgn}(f)[-j\,\mathrm{sgn}(f)G(f)]=G(f)$$

L'espressione della trasformata di Hilbert, in termini di integrale di convoluzione, ci consente di esprimere tale trasformazione del segnale mediante l'elaborazione dello stesso attraverso un sistema lineare e tempo-invariante con risposta impulsiva h(t) = $\frac{1}{\pi t}$ o, equivalentemente, con funzione di trasferimento H(f) = - j sgn(f).



Tale sistema (ideale) ha funzione di trasferimento a modulo unitario e fase pari a $\pm\pi/2$ a seconda che f sia maggiore o minore di 0. Per tale motivo si chiama "trasformatore di Hilbert".





Esempio: Valutiamo la trasforma di Hilbert della funzione coseno:

$$g(t)=\cos(2\pi f_0 t)$$

Si ha, come è noto:

$$G(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

e quindi:

$$\hat{G}(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)\,G(f)=-j\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\mathrm{sgn}(f)$$

$$=-j\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+j\frac{1}{2}\delta(f+f_0)=\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}=\Im\{\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\}$$

Quindi: $\hat{g}(t)=\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$

Similmente, $g(t)=\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(t)=-\cos(2\pi f_0 t)$

Elenchiamo alcune proprietà notevoli di cui gode la trasformata di Hilbert:

1. Il segnale g(t) e la sua trasformata di Hilbert hanno la stessa densità spettrale di energia.
   Questa proprietà deriva da quella per cui, segnali che hanno lo stesso spettro di ampiezza, hanno conseguentemente anche stessa densità spettrale di energia.

   $$|G(f)| = |\hat{G}(f)| \cdots \Rightarrow \cdots |G(f)|^2 = |\hat{G}(f)|^2 \cdots \Rightarrow \cdots S_{\hat{g}}(f) = S_g(f)$$

   Da questa proprietà derivano due corollari:
   - Se g(t) è un segnale a banda limitata, cioè con G(f)=0 $\forall |f| > B$, allora lo è anche la sua trasformata di Hilbert;
   - g(t) e $\hat{g}(t)$ hanno la stessa energia (o la stessa potenza media, se sono segnali potenza).

2. Un segnale e la sua trasformata di Hilbert hanno la stessa funzione di autocorrelazione, essendo questa l'antitrasformata della densità spettrale.

3. Un segnale g(t) e la sua trasformata di Hilbert costituiscono una coppia di funzioni ortogonali.

   Assegnate due funzioni, in generale complesse, $g_1(t)$ e $g_2(t)$, queste si dicono ortogonali se:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\, g_2^*(t)\, dt = 0$$

   Osserviamo ora come l'espressione della crosscorrelazione tra g(t) e $\hat{g}(t)$, valutata per τ=0, si esprima:

   $$R_{g\hat{g}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau)\hat{g}^*(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ \hat{g}^*(t)\ dt = \Im^{-1}\left[G(f)\hat{G}^*(f)\right]_{t=0} =$$

   $$= \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\hat{G}^*(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)[-j\,\mathrm{sgn}(f)G(f)\,]^* df =$$

   $$= j\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(f)|G(f)|^2\ df = 0$$

   Dove i vari passaggi sono stati realizzati applicando il teorema di Parseval e la proprietà della trasformata di Fourier per la quale: segnali reali hanno spettro delle ampiezze pari.
   Se infine si osserva che la condizione di ortogonalità tra g(t) e $\hat{g}(t)$ equivale a scrivere : $R_{g\hat{g}}(0) = 0$, si ha che tale condizione risulta verificata.

4. Se $\hat{g}(t)$ è la trasformata di Hilbert di g(t), allora [–g(t)] è la trasformata di Hilbert di $\hat{g}(t)$
   Questa proprietà si ricava dalla definizione di trasformata inversa di Hilbert.

Segnale analitico o pre-inviluppo

Assegnato un segnale reale g(t) che ammetta trasformata di Hilbert e di Fourier, si definisce "pre-inviluppo" o anche "segnale analitico" di g(t) il segnale complesso $g^+(t)$:

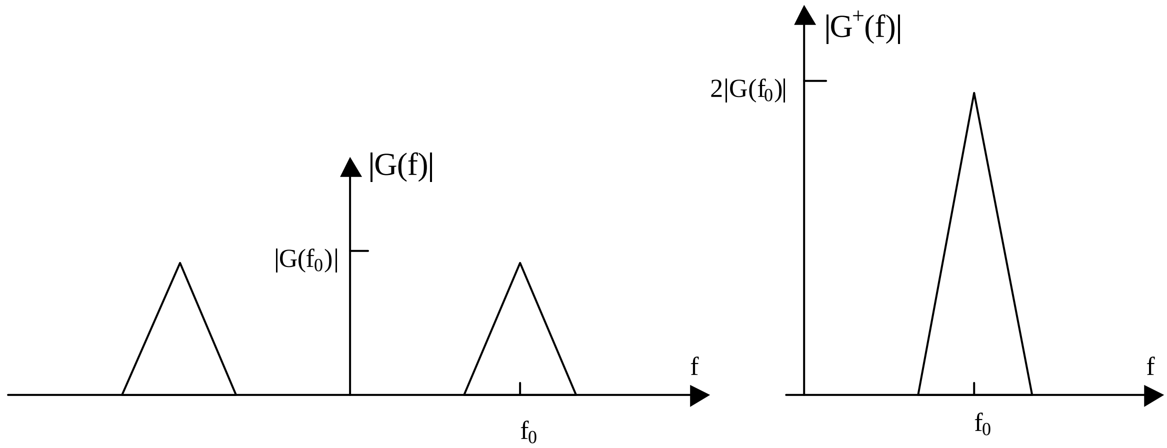
$$g^+(t) \triangleq g(t) + j\,\hat{g}(t)$$

Valutiamo lo spettro di tale segnale:

$$G^+(f) = G(f) + j\,[-j\,\mathrm{sgn}(f)G(f)] = G(f)[1 + \mathrm{sgn}(f)]$$

Dalla definizione di funzione segno, si osserva facilmente che:

$$G^+(f) = \begin{cases} 2G(f) & f > 0 \\ G(0) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} = 2G(f)u(f)$$



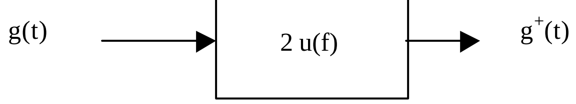
Per calcolare il pre-inviluppo di un segnale dato g(t) (passa - banda) si possono seguire due strade:

1. Valutare la trasformata di Hilbert di g(t) e quindi applicare la definizione di pre-inviluppo;
2. Valutare la trasformata di Fourier di g(t) e applicare la relazione di antitrasformata di $G^+(f)$

$$g^+(t) = 2\int_0^{\infty} G(f)\, e^{j2\pi ft} df$$

Nota

Il segnale che si ottiene all'uscita del sistema lineare della seguente figura è il segnale analitico di g(t) ingresso di tale sistema.



Nel dominio del tempo l'espressione di $g^+(t)$ si ottiene eseguendo il prodotto di convoluzione tra g(t) e la risposta all'impulso del sistema LTI.

$$h(t) = \delta(t) + j\frac{1}{\pi t}$$

Esercizio: Segnale analitico di un segnale periodico
Possiamo estendere il concetto di segnale analitico anche ai segnali periodici.
Consideriamo dapprima il segnale
g(t)=A cos(2π f_0t + ϕ)
cui è associato lo spettro:

$$G(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\phi}\delta(f - f_0) + e^{-j\phi}\delta(f + f_0)\right]$$

Operando nel dominio della frequenza si vede che l'uscita del sistema della figura precedente è del tipo Aexp(jϕ)δ(f-f_0), cui corrisponde nel dominio del tempo, il segnale analitico:

$$g^+(t) = Ae^{j[2\pi f_0 t+\phi]}$$

In maniera analoga si ricava che il segnale analitico associato al segnale x(t)=A sin(2π f_0t + ϕ) è:

$$x^+(t) = \frac{A}{j}e^{j[2\pi f_0 t+\phi]}$$

Consideriamo ora un generico segnale reale periodico di periodo T. Per esso

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \delta(f - nf_0)$$

Nel caso particolare G_0=0, utilizzando la sovrapposizione degli effetti nell'operazione di filtraggio della figura precedente, si ottiene

$$G^+(f) = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n \delta(f - nf_0) \quad \longleftrightarrow \quad g^+(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{\frac{2\pi n f_0 t}{T}}$$

dove f_0= 1/T e G_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier esponenziale.
Il caso $G_0 \neq 0$ non viene considerato, perché implica la presenza di una δ(f) nell'origine dello spettro e questa situazione non è prevista nell'analisi dei segnali per mezzo del segnale analitico.

Esercizio: Segnale analitico di un segnale modulato in ampiezza
Una delle maggiori applicazioni del segnale analitico si ha nel caso di segnale a banda limitata modulato in ampiezza. Si consideri un segnale con spettro S(f) strettamente limitato in banda, cioè S(f) = 0 per |f| > B, modulante in ampiezza una portante sinusoidale c(t) = A cos(2π f_0t + ϕ), dove f_0>B. Si ottiene un segnale:

x(t)= s(t) c(t) =A s(t) cos(2π f_0t + ϕ)

il cui spettro si ottiene dal teorema della modulazione ed è dato dall'espressione:

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[S(f - f_0)e^{j\phi} + S(f + f_0)e^{-j\phi}\right]$$

Ponendo x(t) all'ingresso del sistema LTI già menzionato e operando nel dominio della frequenza, si ottiene immediatamente lo spettro in uscita A S(f-f_0) exp(j ϕ), a cui corrisponde nel dominio del tempo il segnale:

$$x^+(t) = A\,s(t)\,e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}$$

Ricordando che il segnale analitico associato alla portante sinusoidale c(t) = A cos(2π f_0t + ϕ) è proprio

$$c^+(t) = Ae^{j[2\pi f_0 t + \phi]}$$

si può scrivere infine

$$x^+(t) = s(t)\, c^+(t)$$

Si può dimostrare che questa relazione vale in tutti i processi di moltiplicazione del tipo

$$x(t) = s(t)\, z(t)$$

nel caso in cui s(t) sia un segnale a banda strettamente limitata e z(t) un segnale di tipo passabanda spettralmente separato da s(t).
In questi casi:

$$x^+(t) = s(t)\, z^+(t)$$

8.2 RAPPRESENTAZIONE DI SEGNALI PASSA-BANDA: INVILUPPO COMPLESSO

Si definisce "**passa - banda**" un segnale reale g(t) la cui trasformata di Fourier G(f) sia teoricamente diversa da zero solo in un intervallo di frequenze [±f_0–B/2 ; ±f_0+B/2], la cui estensione B si dice banda del segnale, con (f_0–B/2)>0.[1]

Si definisce " **a banda stretta** " un segnale reale di tipo passa - banda il cui spettro è concentrato intorno ad una certa frequenza f_0, ovvero tale che f_0>>B.

Si definisce **inviluppo complesso** $\tilde{g}(t)$ del segnale passa - banda g(t) la grandezza:

$$\tilde{g}(t) \triangleq g^+(t)\, e^{-j2\pi f_0 t} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{G}(f) = G^+(f + f_0)$$

Poiché lo spettro di $g^+(t)$ è diverso da zero solo entro l'intervallo di frequenze positivo (f_0-B/2, f_0+B/2), dalla proprietà di traslazione nel dominio delle frequenze della trasformata di Fourier, si deduce che lo spettro dell'inviluppo complesso $\tilde{g}(t)$ è limitato entro la banda (-B/2, B/2), cioè $\tilde{g}(t)$ è un segnale "passa - basso".

- In generale, possiamo esprimere l'inviluppo complesso $\tilde{g}(t)$ nella forma:

  $$\tilde{g}(t) \triangleq g_I(t) + j\, g_Q(t)$$

  dove, per quanto detto, anche g_I(t) e g_Q(t) sono segnali passa - basso, che si chiamano rispettivamente componenti in fase e in quadratura del segnale g(t).

- Poiché vale la seguente relazione g(t)= Re[g^+(t)], si può allora esprimere un generico segnale passa - banda reale nella forma:

  $$\begin{aligned} g(t) &= \mathrm{Re}\{g^+(t)\} = \mathrm{Re}\{\tilde{g}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\} = \\ &= \mathrm{Re}\{[g_I(t) + j g_Q(t)][\cos(2\pi f_0 t) + j \,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)]\} = \\ &= g_I(t)\cos(2\pi f_0 t) - g_Q(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

[1] Qui la frequenza f_0 è la frequenza di centro banda, ma, più in generale, può essere una frequenza qualunque interna all'intervallo in cui lo spettro è diverso da 0.

- Alternativamente possiamo esprimere l'inviluppo complesso in termini di modulo a(t) e argomento ö(t):

$$\tilde{g}(t) = a(t)\, e^{jf(t)}$$

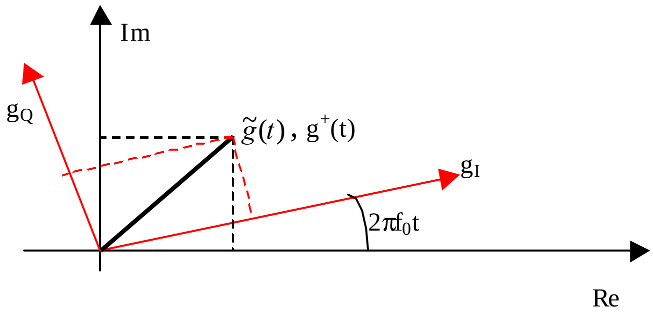
dove a(t) e ö(t) sono ancora segnali passa - basso.
Esprimendo $\tilde{g}(t)$ in questa forma, si può allora avere alternativamente il segnale passa - banda nella forma:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathrm{Re}\{g^+(t)\} = \mathrm{Re}\{\tilde{g}(t)\, e^{j2pf_0 t}\} = \\ &= \mathrm{Re}\{\, a(t) e^{jf(t)} e^{j2pf_0 t}\} = \\ &= a(t)\cos[2pf_0 t + f(t)] \end{aligned}$$

dove a(t) si chiama inviluppo e ö(t) fase del segnale g(t).
Si osservi che si ha:

$$a(t) = |\tilde{g}(t)| = |g^+(t)| = \sqrt{g_I^2(t) + g_Q^2(t)} > 0$$

Dalle relazioni scritte si può dedurre la seguente rappresentazione grafica nel piano complesso:



L'inviluppo complesso $\tilde{g}(t)$ si può interpretare come un fasore, variabile nel tempo, nel piano g_I, g_Q.
A sua volta tale piano ruota rispetto al piano [g(t), $\hat{g}(t)$], con velocità angolare costante $w_0 = 2pf_0$
Rispetto a quest'ultimo piano, $g^+(t)$ è quindi un vettore ruotante, con velocità angolare non costante ed ampiezza variabile, la cui proiezione sull'asse reale ci restituisce istante per istante l'andamento del segnale originario g(t).

Processi di moltiplicazione

Consideriamo segnali con forma: g(t)=s(t) c(t)
dove: s(t) sia un segnale reale a banda strettamente limitata [S(f)=0 per ogni f>B]
c(t) sia un segnale reale passa-banda spettralmente disgiunto da s(t).

In questi casi si è visto che: $g^+(t) = s(t)\, c^+(t)$

Se consideriamo gli <u>inviluppi complessi</u>: $\tilde{g}(t) = g^+(t) e^{-j2pf_0 t} = s(t) c^+(t) e^{-j2pf_0 t} = s(t)\,\tilde{c}(t)$

Quindi ancora: $\tilde{g}(t) = s(t)\,\tilde{c}(t)$

Esempi

1. Sia c(t)= A cos(2πf$_0$t) , allora $c^+(t)$= A exp(j2πf$_0$t) e $\tilde{c}(t)$ =A
   Se g(t) = A s(t) cos(2πf$_0$t), allora $g^+(t)$= A s(t) exp(j2πf$_0$t) e $\tilde{g}(t)$ = A s(t) = s(t) $\tilde{c}(t)$
2. Sia c(t)= A cos(2πf$_0$t + ϕ), allora $c^+(t)$= A s(t) exp(j2πf$_0$t+ ϕ) e $\tilde{c}(t)$ =A exp(jϕ)
   Se g(t) = A s(t) cos(2πf$_0$t + ϕ), allora $g^+(t)$= A s(t) exp(j2πf$_0$t + ϕ) e

$\tilde{g}(t)$ = A s(t) exp(jϕ) = s(t) $\tilde{c}(t)$

8.3 CARATTERIZZAZIONE DEI FILTRI PASSA-BANDA IN TERMINI DI FILTRO EQUIVALENTE PASSA-BASSO

Può essere utile, per valutare la risposta di un filtro passa - banda ad un segnale passa - banda, sviluppare una procedura che ci consenta di esprimere la risposta del filtro mediante quella di un filtro equivalente, del tipo passa - basso.

Utilizzando allora il concetto di inviluppo complesso di un segnale passa - banda, già definito, è possibile, mediante la definizione di risposta impulsiva del filtro equivalente passa basso, valutare come si modifica l'inviluppo complesso stesso, nel passaggio attraverso il filtro passa - basso, e quindi in definitiva ottenere la risposta al segnale di ingresso, che è legata a quella del suo inviluppo, come è noto, dalla relazione

g(t)= Re[$\tilde{g}(t)\, e^{-j2pf_0t}$]

In analogia a quanto già fatto per un segnale passa - banda, esprimiamo la risposta impulsiva di un filtro passa banda mediante l'espressione:

$$h(t) = \mathrm{Re}\{h^+(t)\}$$

dove $h^+(t)$è il preinviluppo associato alla risposta impulsiva legato all'inviluppo complesso relativo dalla relazione:

$$h^+(t) = \tilde{h}(t)e^{j2pf_0t}$$

Si ha poi che $\tilde{h}(t)$ può essere scritta in funzione della sua componente in fase e della componente in quadratura, cioè: $\tilde{h}(t) = h_I(t) + jh_Q(t)$

Da cui si ottiene

$$h(t) = \mathrm{Re}\left\{ h^+(t)\right\} = \mathrm{Re}\left\{ \tilde{h}(t)e^{j2pf_0t}\right\} = h_I(t)\cos(2pf_0t) - h_Q(t)\,\mathrm{sen}(2pf_0t)$$

Ancora $h_I(t)$ e $h_Q(t)$ sono segnali passa-basso, con banda limitata B/2, se B è la banda del filtro passa-banda di partenza.

Vogliamo dimostrare che fra ingresso e uscita esiste la relazione fra gli inviluppi complessi:

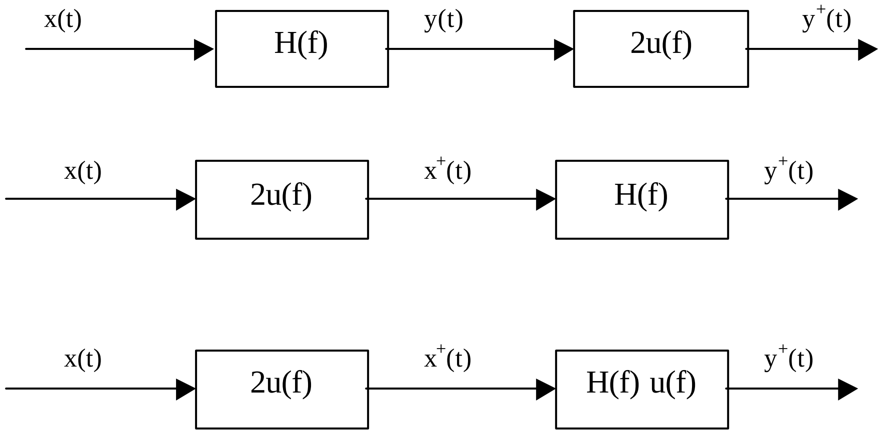
$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t)\right]$$

Sappiamo che la relazione ingresso - uscita è data da

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

Consideriamo ora il calcolo del segnale analitico di y(t).

Possiamo interpretare $y^+(t)$ come uscita di uno qualunque dei seguenti schemi:



Dall'ultimo otteniamo pertanto:

$$y^+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^+(t-\tau)\frac{h^+(\tau)}{2}d\tau$$

poiché sappiamo che

$$\tilde{y}(t) = y^+(t)e^{-j2\pi f_0 t}\tilde{y}(t) = e^{-j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} x^+(t-\tau)\frac{h^+(\tau)}{2}d\tau =$$

$$= e^{-j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(t-\tau)e^{j2\pi f_0 t}\frac{\tilde{h}(\tau)}{2}e^{j2\pi f_0(t-\tau)}d\tau$$

Quindi $$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(t-\tau)\frac{\tilde{h}(\tau)}{2}d\tau$$

Definiamo pertanto un filtro passa - basso equivalente mediante la risposta impulsiva complessa:

$$\tilde{h}_{PB}(t)\underline{\underline{\Delta}}\frac{\tilde{h}(t)}{2}$$

Si ha allora, evidentemente, che la h(t) del filtro passa - banda e la $\tilde{h}_{PB}(t)$ del filtro passa - basso equivalente sono legate dalla seguente espressione

$$h(t) = \mathrm{Re}\left\{2\,\tilde{h}_{PB}(t)\,e^{j2\pi f_0 t}\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{h}_{PB}(t)\,e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

Abbiamo quindi ricavato una procedura che ci consente di trattare l'elaborazione di segnali passa-banda da parte di sistemi passa-banda, in termini dei corrispondenti segnali e circuiti equivalenti passa - basso. Questa procedura può risultare particolarmente interessante o in quei problemi in cui è già nota la soluzione del circuito equivalente passa - basso, oppure nei quali l'interesse principale sia focalizzato sullo studio della evoluzione dell'inviluppo del segnale più che del segnale complessivo.

Ritardo di fase e ritardo di gruppo

Abbiamo visto quali siano le condizioni di non distorsione lineare per un sistema; in particolare, per non avere distorsione di fase la funzione di trasferimento del sistema deve presentare una variazione di fase lineare con la frequenza: $\varphi(f) = -2\pi f t_0$

Questa condizione è generale, cioè valida per segnali di ingresso di forma qualunque.

Se però abbiamo da elaborare segnali del tipo a banda stretta, cioè passa - banda con frequenza della portante molto maggiore della banda del segnale, f_0>>B, allora anche le risposte in fase non lineare possono dar luogo a non distorsione dei segnali con riferimento alla forma dell'inviluppo-complesso dei segnali stessi.

Sia H(f) la risposta in frequenza del sistema che vogliamo considerare, cioè:

H(f) = K exp[jΦ(f)]

con Φ(f) non lineare con la frequenza.

Il segnale di ingresso al sistema sia a banda stretta del tipo:

x(t)= x_c(t) cos(2πf_0t)

$x_c(t)$ ha spettro diverso da zero per $|f| \leq B$.
Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor della fase $\Phi(f)$ nell'intorno di f_0. Se consideriamo piccole escursioni di frequenza ($2B << f_0$) possiamo arrestare lo sviluppo ai primi due termini:

$$\Phi(f) = \Phi(f_0) + \left.\frac{d\Phi(f)}{df}\right|_{f=f_0} (f - f_0)$$

Se definiamo:

$$t_p = -\frac{\Phi(f_0)}{2\pi f_0} \qquad \text{"ritardo di fase" del segnale}$$

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \left.\frac{d\Phi(f)}{df}\right|_{f=f_0} \qquad \text{"ritardo di gruppo" del segnale}$$

possiamo scrivere la fase di H(f) nella seguente forma:

$$\Phi(f) = -2\pi f_0 t_p - 2\pi{}_0(f - f_0)t_g$$

e relativamente alla funzione di trasferimento si ottiene:

$$H(f) = K\, e^{-j2\pi f_0 t_p} e^{-j2\pi(f-f_0)t_g}$$

seguendo la procedura descritta precedentemente possiamo sostituire il sistema con risposta in frequenza H(f) mediente un filtro equivalente passa - basso, la cui funzione di trasferimento è in questo caso:

$$H_{eq}(f) = H(f + f_0)\, rect\left(\frac{f}{2B}\right) = K\, e^{-j2\pi f_0 t_p} e^{-j2\pi f t_g}$$

dove 2B è la banda del segnale, poiché consideriamo solo l'occupazione spettrale di questo.

Analogamente sostituiamo il segnale a banda stretta x(t) con il corrispondente inviluppo complesso $x_c(t)$, la cui trasformata di Fourier è semplicemente $X_c(f)$.
Pertanto la trasformata di Fourier dell'inviluppo complesso del segnale di uscita y(t) è data da:

$$\tilde{Y}(f) = H_{eq}(f)\tilde{X}(f) = X_c(f)\, H(f + f_0)\, rect\left(\frac{f}{2B}\right) = K\, X_c(f)\, e^{-j2\pi f_0 t_p} e^{-j2\pi f t_g}$$

$$\tilde{y}(t) = K\, e^{-j2\pi f_0 t_p}\; x_c(t - t_g)$$

Si osserva come l'inviluppo del segnale di uscita sia una versione semplicemente ritardata di un tempo pari al ritardo di gruppo di quello del segnale in ingresso.
La "portante" è invece ritardata di un tempo pari al ritardo di fase, in generale diverso da quello di gruppo.

8.4 SEGNALE ANALITICO DI UN SEGNALE DI POTENZA

Nei paragrafi precedenti abbiamo sempre considerato segnali per i quali era possibile definire lo spettro come trasformata di Fourier. Consideriamo ora segnali a potenza media finita, descritti in frequenza attraverso lo spettro di potenza $S_x(f)$.
Ponendo un segnale x(t) di questo tipo all'ingresso del sistema che ha come uscita $x^+(t)$, possiamo scrivere nel dominio della frequenza l'espressione dello spettro di potenza del segnale di uscita:

$$S_x^+(f) = 4\, S_x(f)\, u(f)$$

Utilizzando questo risultato definiamo come segnale analitico x^+ (t),associato ad x(t), il segnale complesso il cui spettro di potenza è dato dalla espressione appena scritta.
Consideriamo un segnale di potenza x(t) a banda stretta (cioè passa - banda con banda $2B \ll f_0$):

$$x^+(t) = \tilde{x}(t)\, e^{j2pf_0 t} \leftrightarrow S_x^+(f) = S_{\tilde{x}}(f - f_0)$$

dove $\tilde{x}(t)$ è l'inviluppo complesso di x(t).