Lezione 14

Crosstalk nel Dominio della Frequenza

Giuseppe Pelosi - Stefano Selleri
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze

Sommario della Lezione

- ❖ Introduzione
- ❖ Soluzione Generale
- ❖ Soluzione generale (continued)
- ❖ Linea “Corta”

Introduzione

Il ***crosstalk*** è stato studiato nella lezione precedente nel dominio del tempo.

Estenderemo i risultati al dominio della frequenza

Questo perché tipicamente:

- i generatori forniscono delle sinusoidi;
- i clock forniscono onde quadre rappresentabili in serie di fourier;
- i l comportamento di segnali a banda stretta è assimilabile a quello della portante.

Soluzione Generale

Le equazioni nel dominio del tempo sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}(z,t)}{\partial z} = -\mathbf{L}\dfrac{\partial \mathbf{I}(z,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \mathbf{I}(z,t)}{\partial z} = -\mathbf{C}\dfrac{\partial \mathbf{V}(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Queste possono essere “completate” inserendo le perdite:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}(z,t)}{\partial z} = -\mathbf{L}\dfrac{\partial \mathbf{I}(z,t)}{\partial t} - \mathbf{RI}(z,t) \\ \dfrac{\partial \mathbf{I}(z,t)}{\partial z} = -\mathbf{C}\dfrac{\partial \mathbf{V}(z,t)}{\partial t} - \mathbf{GV}(z,t) \end{cases}$$

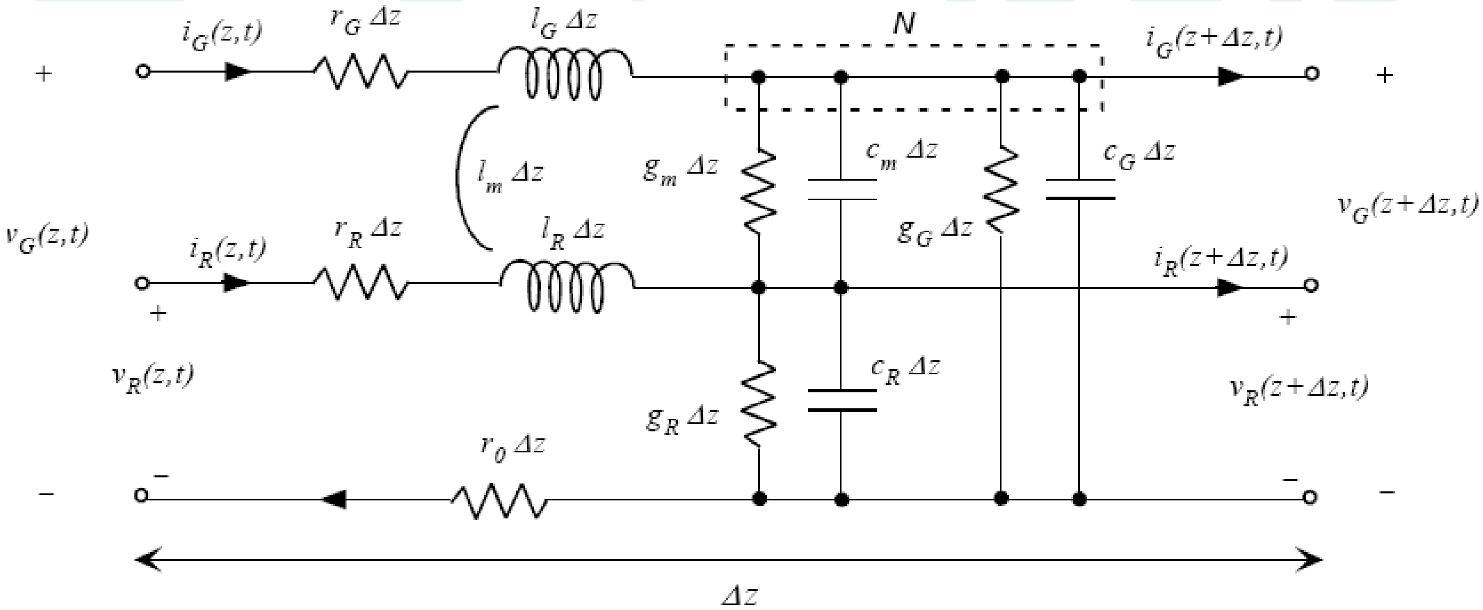
È importante notare come la soluzione nel dominio del tempo sia ottenibile analiticamente solo se **R**=**G**=0. Questo è un altro motivo per passare al dominio della frequenza…

Soluzione Generale

R e **G** sono

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_G + R_0 & R_0 \\ R_0 & R_R + R_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_G + G_0 & G_0 \\ G_0 & G_R + G_0 \end{bmatrix},$$

Come dal circuito:



Compatibilità Elettromagnetica I A. A. 2006-07
Prof. S. Selleri - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Soluzione Generale

Quindi nel dominio della frequenza

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}(z)}{\partial z} = -j\omega \mathbf{L}\mathbf{I}(z) - \mathbf{R}\mathbf{I}(z) \\ \dfrac{\partial \mathbf{I}(z)}{\partial z} = -j\omega \mathbf{C}\mathbf{V}(z) - \mathbf{G}\mathbf{V}(z) \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}(z)}{\partial z} = -\mathbf{Z}\mathbf{I}(z) \\ \dfrac{\partial \mathbf{I}(z)}{\partial z} = -\mathbf{Y}\mathbf{V}(z) \end{cases}$$

Con

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = j\omega \mathbf{L} + \mathbf{R} \\ \mathbf{Y} = j\omega \mathbf{C} + \mathbf{G} \end{cases}$$

Soluzione Generale

La soluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}(z)}{\partial z} = -\mathbf{Z}\mathbf{I}(z) \\ \dfrac{\partial \mathbf{I}(z)}{\partial z} = -\mathbf{Y}\mathbf{V}(z) \end{cases}$$

a pulsazione ω fissata, è formalmente identica alla soluzione in assenza di perdite.

Derivando la prima rispetto a z e sostituendovi la seconda, ovvero derivando la seconda rispetto a z e sostituendovi la prima

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{V}(z)}{\partial z^2} = \mathbf{Z}\mathbf{Y}\mathbf{V}(z) \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{I}(z)}{\partial z^2} = \mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{I}(z) \end{cases}$$

È importante notare che **L**,**C**,**R** e **G** sono simmetriche, quindi anche **Z** e **Y** lo sono, quindi commutano e le due equazioni sono identiche.

Soluzione Generale

Quindi

$$\mathbf{ZY} = \mathbf{YZ}$$

E tali matrici sono ancora simmetirche, quindi diagonalizzabili!

Se definisco

$$\mathbf{I} = \mathbf{T}\mathbf{I}_M$$

Dove le $\mathbf{I}_M$ sono opportune correnti, definite diversamente, che chiameremo ***Modali.***

Per esempio, se $\mathbf{T}$ è

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

È immediato verificare come $\mathbf{I}_M$ siano le correnti di modo comune (prima componente) e di modo differenziale (seconda componente)

Soluzione Generale

Se introduco le correnti modali…

$$\frac{\partial^2 \mathbf{I}(z)}{\partial z^2} = \mathbf{YZI}(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathbf{TI}_M(z)}{\partial z^2} = \mathbf{YZTI}_M(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathbf{I}_M(z)}{\partial z^2} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{YZTI}_M(z)$$

Con una scelta opportuna di **T**

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{YZT}$$

Può quindi essere diagonale!

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{YZT} = \boldsymbol{\gamma}^2 = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & 0 \\ 0 & \gamma_2^2 \end{bmatrix}$$

È immediato verificare come $\mathbf{I}_M$ soddisfino quindi a un set di equazioni ***disaccoppiate***

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 I_{M1}(z)}{\partial z^2} = \gamma_1^2 I_{M1}(z) \\ \dfrac{\partial^2 I_{M2}(z)}{\partial z^2} = \gamma_2^2 I_{M2}(z) \end{cases}$$

Soluzione Generale

Le due equazioni disaccoppiate hanno autovalori γ ***diversi***

Siccome tali autovalori sono le costanti di propagazione, se ne deduce che

Modi diversi viaggiano a velocità diverse sulla linea

La soluzione è

$$\begin{cases} I_{M1}(z) = I_{M1}^{+} e^{-\gamma_1 z} - I_{M1}^{-} e^{+\gamma_1 z} \\ I_{M2}(z) = I_{M2}^{+} e^{-\gamma_2 z} - I_{M2}^{-} e^{+\gamma_2 z} \end{cases}$$

Dove le costanti moltiplicative sono arbitrarie e dipendono dai carichi

Soluzione Generale

In forma matriciale…

$$\mathbf{I}_M(z) = \mathbf{I}_{M1}^{+} e^{-\gamma z} - \mathbf{I}_{M1}^{-} e^{+\gamma z}$$

dove

$$e^{\pm j\gamma z} = \begin{bmatrix} e^{\pm\gamma_1 z} & 0 \\ 0 & e^{\pm\gamma_2 z} \end{bmatrix}$$

Note le correnti modali è immediato tornare alle correnti sulle singole linee tramite

$$\mathbf{I} = \mathbf{T}\mathbf{I}_M = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1}^{+} e^{-\gamma_1 z} - I_{M1}^{-} e^{+\gamma_1 z} \\ I_{M2}^{+} e^{-\gamma_2 z} - I_{M2}^{-} e^{+\gamma_2 z} \end{bmatrix}$$

Soluzione Generale

Per risalire alle tensioni:

$$\frac{\partial \mathbf{I}(z)}{\partial z} = -\mathbf{Y}\mathbf{V}(z) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}(z) = -\mathbf{Y}^{-1}\frac{\partial \mathbf{I}(z)}{\partial z} = -\mathbf{Y}^{-1}\frac{\partial \mathbf{T}\mathbf{I}_M(z)}{\partial z}$$

quindi

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}\left[\mathbf{I}_M^{+}e^{-\gamma z} + \mathbf{I}_M^{-}e^{\gamma z}\right]$$

Ma se

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{T} = \boldsymbol{\gamma}^2$$

allora

$$\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{T} = \mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}$$

$$\mathbf{Z}\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}^{-1} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}$$

quindi

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{Z}\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\left[\mathbf{I}_M^{+}e^{-\gamma z} + \mathbf{I}_M^{-}e^{\gamma z}\right]$$

Soluzione Generale

Moltiplico e divido per **T** in modo opportuno

$$\mathbf{V}(z)=\underbrace{\mathbf{Z}\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\mathbf{T}^{-1}}_{\substack{\Downarrow \\ \text{cosa sarà?}}}\underbrace{\mathbf{T}\left[\mathbf{I}_M^{+}e^{-\gamma z}+\mathbf{I}_M^{-}e^{\gamma z}\right]}_{\text{correnti NON modali}}$$

definisco

$$\mathbf{Z}_C=\mathbf{Z}\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\mathbf{T}^{-1}$$

L'impedenza caratteristica della linea multiconduttore, per cui è

$$\mathbf{V}(z)=\mathbf{Z}_C\mathbf{I}^{\Diamond}(z)$$

Non è proprio **I** in quanto l'onda regressiva cambia segno!

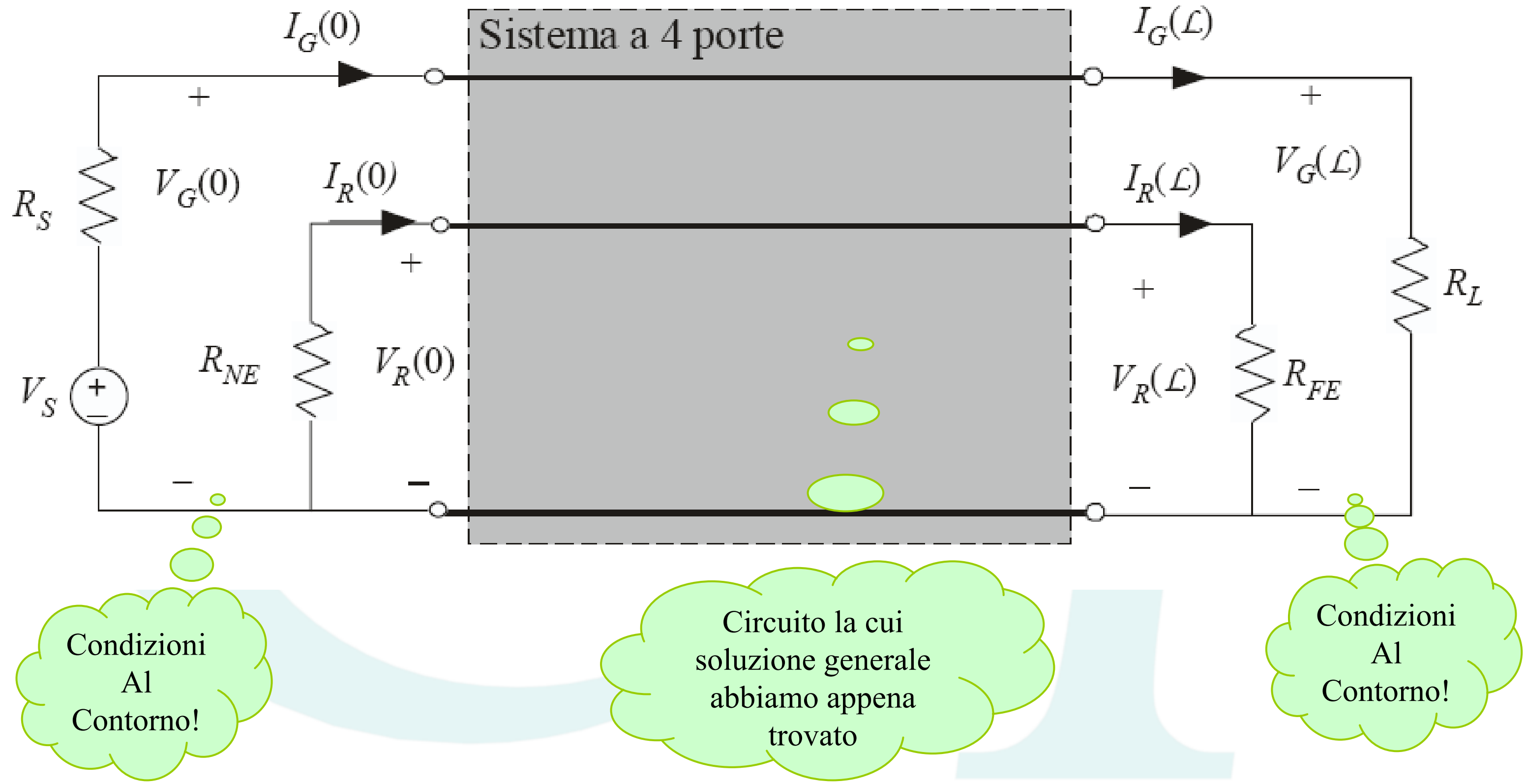
O, per esteso

$$\mathbf{I}(z)=\mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+}e^{-\gamma z}-\mathbf{I}_{M1}^{-}e^{-\gamma z}\right)$$

$$\mathbf{V}(z)=\mathbf{Z}_C\mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+}e^{-\gamma z}+\mathbf{I}_{M1}^{-}e^{-\gamma z}\right)$$

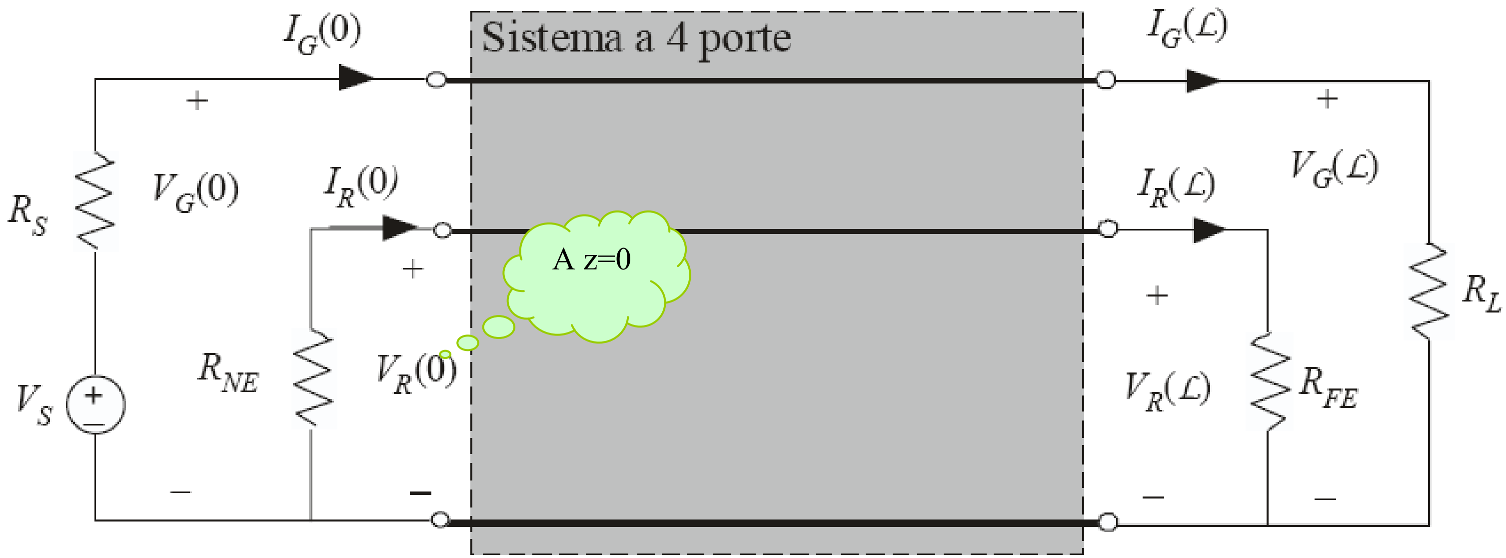
Esempio

Torniamo al caso in esame:



Esempio

Condizioni al contorno!



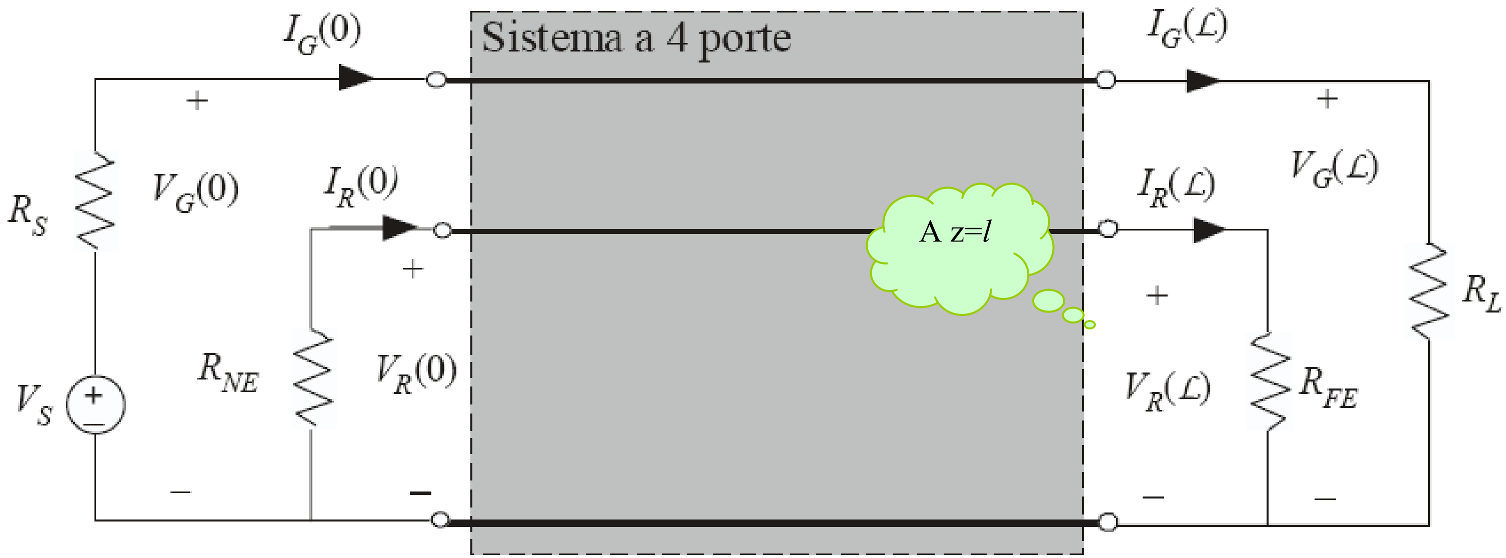
$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_S - \mathbf{Z}_S \mathbf{I}(0)$$

Con

$$\mathbf{V}_S = \begin{bmatrix} V_S \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{Z}_S = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_{NE} \end{bmatrix}$$

Esempio

Condizioni al contorno!



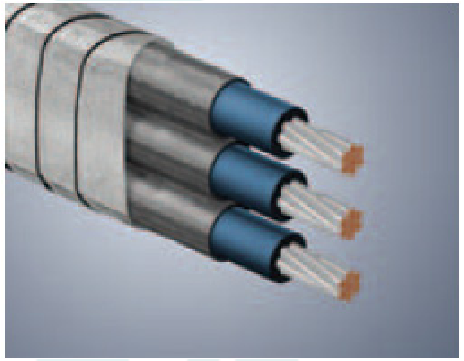
$$\mathbf{V}(l) = \mathbf{Z}_L \mathbf{I}(l)$$

Con

$$\mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} R_L & 0 \\ 0 & R_{FE} \end{bmatrix}$$

Esempio

Torniamo alla nostra linea trifilare…



$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}0.753 & 0.24\\ 0.24 & 0.753\end{bmatrix}\mu H m^{-1} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}16.38 & -5.18\\ -5.18 & 16.38\end{bmatrix} pF m^{-1}$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

A 300MHz

$$\mathbf{Z}=j\begin{bmatrix}1.42 & 0.45\\ 0.45 & 1.42\end{bmatrix} k\Omega m^{-1} \qquad \mathbf{Y}=j\begin{bmatrix}30.9 & -9.7\\ -9.7 & 30.9\end{bmatrix} mS m^{-1}$$

$$\mathbf{ZY}=\begin{bmatrix}-39.48 & 0\\ 0 & -39.48\end{bmatrix} m^{-2} \quad \Rightarrow \quad \text{è già diagonale!} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma}^2=\begin{bmatrix}-39.48 & 0\\ 0 & -39.48\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Esempio

Quindi

$$\gamma_1 = \gamma_2 = j6.28m^{-1}$$

2π/λ con λ=1m!!

Per la soluzione "generica" serve ancora $\mathbf{Z}_C$

$$\mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\mathbf{T}^{-1} = j\begin{bmatrix} 1.42 & 0.45 \\ 0.45 & 1.42 \end{bmatrix} k\Omega m^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} -0.159 & 0 \\ 0 & -0.159 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_C = \begin{bmatrix} 226 & 71 \\ 71 & 226 \end{bmatrix} \Omega$$

Confrontando con l'esercizio nel dominio del tempo abbiamo trovato "circa" la Z in presenza di linea sulla diagonale e "circa" la differenza con la Z isolata fuori dalla diagonale

Esempio

Infine!

$$\mathbf{I}(z) = \mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+}e^{-\gamma z} - \mathbf{I}_{M1}^{-}e^{+\gamma z}\right)$$
$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{Z}_C\mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+}e^{-\gamma z} + \mathbf{I}_{M1}^{-}e^{+\gamma z}\right)$$

Cioè

$$I_1(z) = \left(I_1^{+}e^{-j6.28z} - I_1^{-}e^{+j6.28z}\right)$$
$$I_2(z) = \left(I_2^{+}e^{-j6.28z} - I_2^{-}e^{+j6.28z}\right)$$

$$V_1(z) = 226\left(I_1^{+}e^{-j6.28z} + I_1^{-}e^{+j6.28z}\right) + 71\left(I_2^{+}e^{-j6.28z} + I_2^{-}e^{+j6.28z}\right)$$
$$V_2(z) = 71\left(I_1^{+}e^{-j6.28z} + I_1^{-}e^{+j6.28z}\right) + 226\left(I_2^{+}e^{-j6.28z} + I_2^{-}e^{+j6.28z}\right)$$

Esempio

Le equazioni sono

$$I_1(z)=\left(I_1^+e^{-j6.28z}-I_1^-e^{+j6.28z}\right) \qquad V_1(z)=226\left(I_1^+e^{-j6.28z}+I_1^-e^{+j6.28z}\right)+71\left(I_2^+e^{-j6.28z}+I_2^-e^{+j6.28z}\right)$$

$$I_2(z)=\left(I_2^+e^{-j6.28z}-I_2^-e^{+j6.28z}\right) \qquad V_2(z)=71\left(I_1^+e^{-j6.28z}+I_1^-e^{+j6.28z}\right)+226\left(I_2^+e^{-j6.28z}+I_2^-e^{+j6.28z}\right)$$

Le condizioni al contorno sono

$$V_1(0)=V_S-R_SI_1(0) \qquad V_1(l)=R_LI_1(l)$$

$$V_2(0)=-R_{NE}I_2(0) \qquad V_2(l)=R_{FE}I_2(l)$$

Scrivendo simbolicamente

$$6.28=2\pi m^{-1}$$

$$Z_1=226\Omega$$

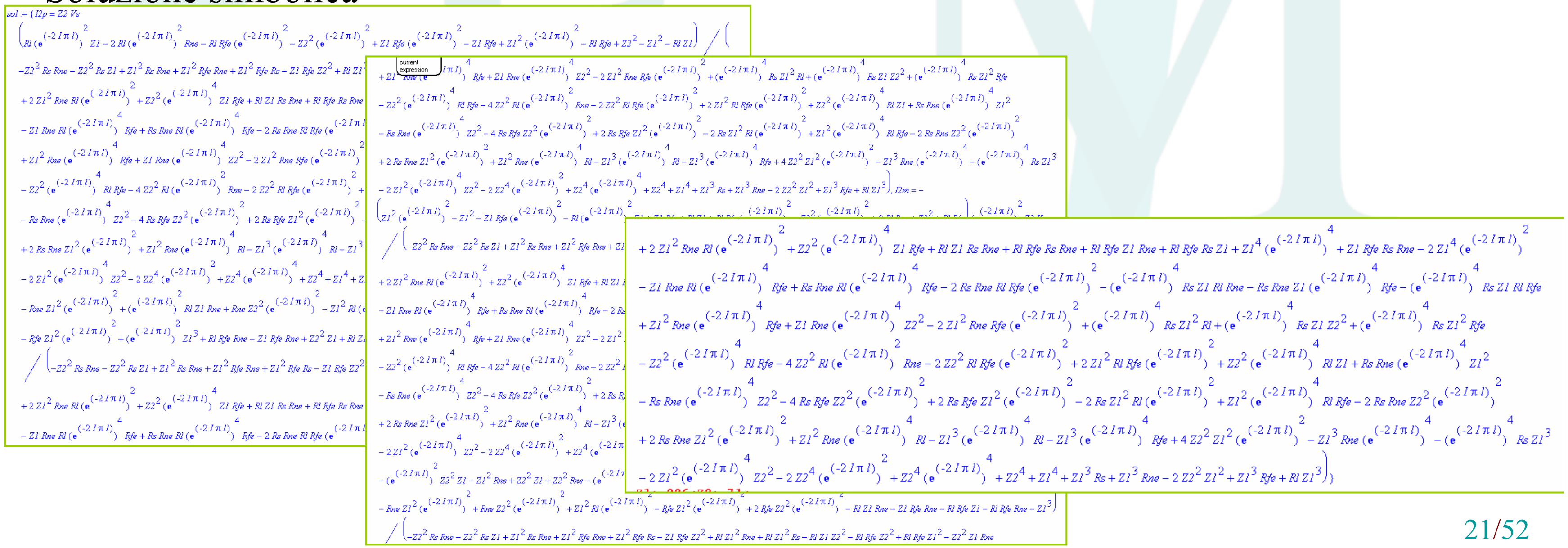
$$Z_2=71\Omega$$

Esempio

Ovvero

$$
\begin{cases}
Z_1\left(I_1^+ + I_1^-\right) + Z_2\left(I_2^+ + I_2^-\right) = V_S - R_S\left(I_1^+ - I_1^-\right) \\
Z_2\left(I_1^+ + I_1^-\right) + Z_1\left(I_2^+ + I_2^-\right) = -R_{NE}\left(I_2^+ - I_2^-\right) \\
Z_1\left(I_1^+ e^{-j2\pi l} + I_1^- e^{+j2\pi l}\right) + Z_2\left(I_2^+ e^{-j2\pi l} + I_2^- e^{+j2\pi l}\right) = R_L\left(I_1^+ e^{-j2\pi l} - I_1^- e^{+j2\pi l}\right) \\
Z_2\left(I_1^+ e^{-j2\pi l} + I_1^- e^{+j2\pi l}\right) + Z_1\left(I_2^+ e^{-j2\pi l} + I_2^- e^{+j2\pi l}\right) = R_{FE}\left(I_2^+ e^{-j2\pi l} - I_2^- e^{+j2\pi l}\right)
\end{cases}
$$

Soluzione simbolica



Esempio

Se ci metto i numeri…

$$V_S = 12V \qquad R_{NE} = 50\Omega \qquad R_L = 215\Omega$$
$$R_S = 50\Omega \qquad R_{FE} = 50\Omega \qquad R_l = 1m$$

Soluzione numerica

$$\begin{cases} 226\left(I_1^+ + I_1^-\right) + 71\left(I_2^+ + I_2^-\right) = 12 - 50\left(I_1^+ - I_1^-\right) \\ 71\left(I_1^+ + I_1^-\right) + 226\left(I_2^+ + I_2^-\right) = -50\left(I_2^+ - I_2^-\right) \\ 226\left(I_1^+ + I_1^-\right) + 71\left(I_2^+ + I_2^-\right) = 215\left(I_1^+ - I_1^-\right) \\ 71\left(I_1^+ + I_1^-\right) + 226\left(I_2^+ + I_2^-\right) = 50\left(I_2^+ - I_2^-\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1^+ = 46.54mA \\ I_1^- = 1.26mA \\ I_2^+ = -7.51mA \\ I_2^- = -7.51mA \end{cases}$$

Esempio

Le correnti totali sono

$$\begin{cases} I_1(z) = 46.54e^{-j2\pi z} - 1.26e^{j2\pi z} mA \\ I_2(z) = -7.51e^{-j2\pi z} + 7.51e^{j2\pi z} mA \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1(0) = 44.28mA \\ I_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1(l) = 44.28mA \\ I_2(l) = 0 \end{cases}$$

Soluzione numerica

$$\begin{cases} V_1(z) = 226\left(46.54e^{-j6.28z} + 1.26e^{+j6.28z}\right) + 71\left(-7.51e^{-j6.28z} - 7.51e^{+j6.28z}\right) mV \\ V_2(z) = 71\left(46.54e^{-j6.28z} + 1.26e^{+j6.28z}\right) + 226\left(-7.51e^{-j6.28z} - 7.51e^{+j6.28z}\right) mV \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1(0) = 9.51V \\ V_2(0) = -71.72mV \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1(l) = 9.51V \\ V_2(l) = -71.72mV \end{cases}$$

Soluzione Generale bis

In realtà più che la soluzione completa, basta la soluzione a z=0 e z=l. Se

$$\mathbf{I}(z) = \mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+} e^{-\gamma z} - \mathbf{I}_{M1}^{-} e^{+\gamma z}\right)$$
$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{Z}_C \mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+} e^{-\gamma z} + \mathbf{I}_{M1}^{-} e^{+\gamma z}\right)$$

Allora

$$\mathbf{I}(0) = \mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+} - \mathbf{I}_{M1}^{-}\right)$$
$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{Z}_C \mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+} + \mathbf{I}_{M1}^{-}\right)$$
$$\mathbf{I}(l) = \mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+} e^{-\gamma l} - \mathbf{I}_{M1}^{-} e^{+\gamma l}\right)$$
$$\mathbf{V}(l) = \mathbf{Z}_C \mathbf{T}\left(\mathbf{I}_{M1}^{+} e^{-\gamma l} + \mathbf{I}_{M1}^{-} e^{+\gamma l}\right)$$

Definendo delle nuove variabili

Soluzione Generale bis

Dalle prime due

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{I}(0) = \mathbf{I}_{M1}^{+} - \mathbf{I}_{M1}^{-}$$
$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0) = \mathbf{I}_{M1}^{+} + \mathbf{I}_{M1}^{-}$$

Per cui

$$\mathbf{I}_{M1}^{+} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{I}(0) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0)\right]$$
$$\mathbf{I}_{M1}^{-} = \frac{1}{2}\left[-\mathbf{T}^{-1}\mathbf{I}(0) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0)\right]$$

Ovvero

$$\mathbf{I}_{M1}^{+} = \frac{1}{2}\mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0) + \mathbf{I}(0)\right]$$
$$\mathbf{I}_{M1}^{-} = \frac{1}{2}\mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0) - \mathbf{I}(0)\right]$$

Soluzione Generale bis

Sostituendo nelle seconde due

$$\mathbf{I}(l)=\mathbf{T}\left(\frac{1}{2}\mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0)+\mathbf{I}(0)\right]e^{-\gamma l}-\frac{1}{2}\mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0)-\mathbf{I}(0)\right]e^{+\gamma l}\right)$$

$$\mathbf{V}(l)=\mathbf{Z}_C\mathbf{T}\left(\frac{1}{2}\mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0)+\mathbf{I}(0)\right]e^{-\gamma l}+\frac{1}{2}\mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0)-\mathbf{I}(0)\right]e^{+\gamma l}\right)$$

Ovvero

$$\mathbf{I}(l)=\left(\frac{1}{2}\left[\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0)+\mathbf{I}(0)\right]e^{-\gamma l}-\frac{1}{2}\left[\mathbf{Z}_C^{-1}\mathbf{V}(0)-\mathbf{I}(0)\right]e^{+\gamma l}\right)$$

$$\mathbf{V}(l)=\left(\frac{1}{2}\left[\mathbf{V}(0)+\mathbf{Z}_C\mathbf{I}(0)\right]e^{-\gamma l}+\frac{1}{2}\left[\mathbf{V}(0)-\mathbf{Z}_C\mathbf{I}(0)\right]e^{+\gamma l}\right)$$

Da cui

Soluzione Generale bis

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}(l)\\ \mathbf{I}(l)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{-\gamma l}+e^{+\gamma l}\right) & \frac{1}{2}\mathbf{Z}_C\left(e^{-\gamma l}-e^{+\gamma l}\right)\\ \frac{1}{2}\mathbf{Z}_C^{-1}\left(e^{-\gamma l}-e^{+\gamma l}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-\gamma l}+e^{+\gamma l}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}(0)\\ \mathbf{I}(0)\end{bmatrix}$$

Ovvero, ricordando le relazioni fra esponenziali complessi e funzioni trigonometriche

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}(l)\\ \mathbf{I}(l)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\boldsymbol{\gamma} l) & -j\mathbf{Z}_C\sin(\boldsymbol{\gamma} l)\\ -j\mathbf{Z}_C^{-1}\sin(\boldsymbol{\gamma} l) & \cos(\boldsymbol{\gamma} l)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}(0)\\ \mathbf{I}(0)\end{bmatrix}$$

Con

$$\cos(\boldsymbol{\gamma} l)=\begin{bmatrix}\cos(\gamma_1 l) & 0\\ 0 & \cos(\gamma_2 l)\end{bmatrix};\qquad \sin(\boldsymbol{\gamma} l)=\begin{bmatrix}\sin(\gamma_1 l) & 0\\ 0 & \sin(\gamma_2 l)\end{bmatrix}$$

Soluzione Generale bis

La matrice

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{\gamma} l) & -j\mathbf{Z}_C \sin(\boldsymbol{\gamma} l) \\ -j\mathbf{Z}_C^{-1} \sin(\boldsymbol{\gamma} l) & \cos(\boldsymbol{\gamma} l) \end{bmatrix}$$

Che lega ingressi e uscite del multiporte è la matrice ***catena*** del circuito

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{11} & \mathbf{\Phi}_{12} \\ \mathbf{\Phi}_{21} & \mathbf{\Phi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_1 l) & 0 & j[Z_C]_{11} \sin(\gamma_1 l) & j[Z_C]_{12} \sin(\gamma_2 l) \\ 0 & \cos(\gamma_2 l) & j[Z_C]_{21} \sin(\gamma_1 l) & j[Z_C]_{22} \sin(\gamma_2 l) \\ j\dfrac{[Z_C]_{22}}{\Delta} \sin(\gamma_1 l) & j\dfrac{-[Z_C]_{12}}{\Delta} \sin(\gamma_2 l) & \cos(\gamma_1 l) & 0 \\ j\dfrac{-[Z_C]_{21}}{\Delta} \sin(\gamma_1 l) & j\dfrac{[Z_C]_{11}}{\Delta} \sin(\gamma_2 l) & 0 & \cos(\gamma_2 l) \end{bmatrix}$$

Con

$$\Delta = [Z_C]_{11} [Z_C]_{22} - [Z_C]_{12} [Z_C]_{21}$$

Soluzione Generale bis

Riconduciamoci al caso di assenza di perdite

$$\mathbf{R} = \mathbf{G} = 0$$

$$\mathbf{Z} = j\omega\mathbf{L}, \qquad \mathbf{Y} = j\omega\mathbf{C}$$

Con

$$\mathbf{LC} = \mathbf{CL} = \mu\varepsilon\mathbf{1}$$

Se la linea è in un mezzo omogeneo allora, trasportando il modo TEM, tutti i segnali vanno alla stessa velocità. La matrice γ è diagonale, immaginaria pura e tutti i termini sulla diagonale valgono $j\beta$

$$\mathbf{YZ} = -\beta^2\mathbf{1}; \qquad \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Soluzione Generale bis

Allora

$$\cos(\boldsymbol{\gamma} l) = \cos(\beta l)\mathbf{1}$$

$$\sin(\boldsymbol{\gamma} l) = \sin(\beta l)\mathbf{1}$$

Inoltre

$$\mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}\frac{1}{j\beta}\mathbf{T}\mathbf{1}\mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\beta}\mathbf{Z}$$

E quindi

$$\mathbf{Z}_C^{-1} = j\beta\mathbf{Z}^{-1}$$

Ma

$$\mathbf{Y}\mathbf{Z} = -\beta^2\mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta^2}\mathbf{Y} = -\mathbf{Z}^{-1}$$

$$\mathbf{Z}_C^{-1} = \frac{1}{j\beta}\mathbf{Y}$$

Soluzione Generale bis

Se ne deduce che

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_{11} &= \cos(\beta l)\mathbf{1} \\
\mathbf{\Phi}_{12} &= -j\sin(\beta l)\mathbf{Z}_C \\
\mathbf{\Phi}_{21} &= -j\sin(\beta l)\mathbf{Z}_C^{-1} \\
\mathbf{\Phi}_{22} &= \cos(\beta l)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Che preferiamo scrivere come

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_{11} &= \cos(\beta l)\mathbf{1} \\
\mathbf{\Phi}_{12} &= -j\omega l\frac{\sin(\beta l)}{\beta l}\mathbf{L} \\
\mathbf{\Phi}_{21} &= -j\omega l\frac{\sin(\beta l)}{\beta l}\mathbf{C} \\
\mathbf{\Phi}_{22} &= \cos(\beta l)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Soluzione Generale bis

Quindi

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix} \cos(\beta l) & 0 & j\omega l\dfrac{\sin(\beta l)}{\beta l}L_G & j\omega l\dfrac{\sin(\beta l)}{\beta l}L_m \\ 0 & \cos(\beta l) & j\omega l\dfrac{\sin(\beta l)}{\beta l}L_m & j\omega l\dfrac{\sin(\beta l)}{\beta l}L_R \\ j\omega l\dfrac{\sin(\beta l)}{\beta l}(C_G+C_m) & -j\omega l\dfrac{\sin(\beta l)}{\beta l}C_m & \cos(\beta l) & 0 \\ -j\omega l\dfrac{\sin(\beta l)}{\beta l}C_m & j\omega l\dfrac{\sin(\beta l)}{\beta l}(C_R+C_m) & 0 & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

Se infine introduciamo il ***coefficiente di accoppiamento***

$$\kappa=\frac{L_m}{\sqrt{L_G L_R}}=\frac{C_m}{\sqrt{(C_G+C_m)(C_R+C_m)}}$$

Soluzione Generale bis

Si possono scrivere le impedenze caratteristiche dei circuiti accoppiati come

$$Z_{C_G} = \sqrt{\frac{L_G}{C_G + C_m}} = cL_G\sqrt{1-k^2}; \qquad Z_{C_R} = \sqrt{\frac{L_R}{C_R + C_m}} = cL_R\sqrt{1-k^2}$$

Con *c* velocità dell’onda nel mezzo.

Linea "Corta"

Supponiamo di avere a che fare con una linea ***corta***, ovvero:

$$l \ll \lambda$$

Allora

$$\cos(\beta l) \cong 1, \qquad \sin(\beta l) \cong 1$$

E quindi

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j\omega l L_G & j\omega l L_m \\ 0 & 1 & j\omega l L_m & j\omega l L_R \\ j\omega l\left(C_G + C_m\right) & -j\omega l C_m & 1 & 0 \\ -j\omega l C_m & j\omega l\left(C_R + C_m\right) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linea “Corta”

Se la linea è corta cioè il termine di fase dovuto alla lunghezza della linea è trascurabile e, in pratica,

$$\mathbf{V}(l) \cong \mathbf{V}(0)$$
$$\mathbf{I}(l) \cong \mathbf{I}(0)$$

A questo punto il circuito generatore è facilmente risolubile considerando le correnti in continua:

$$I_{G_{DC}} = \frac{1}{R_S + R_L} V_{S_{DC}}$$

E, di conseguenza

$$V_{G_{DC}} = \frac{R_L}{R_S + R_L} V_{S_{DC}}$$

Linea “Corta”

Consideriamo inoltre di essere nel caso (desiderato!) di ***accoppiamento debole***

L’accoppiamento debole implica che gli effetti di una linea sull’altra siano piccoli.

In linea di principio la linea generatirce causa dei disturbi sulla linea recettrice, quewsta genera campi elettromagnetici che si riaccoppiano con la linea generatrice per cui nasce un disturbo anche su quest’ultima…. La linea generatrice ha quindi una corrente modificata e il suo effetto sulla recettrice varia…. Etc. etc.

Le equazioni considerate, completamente accoppiate considerano questo caso di completo accoppiamento.

Nel caso di accoppiamento debole consideriamo che gli effetti della recettrice sulla generatrice siano trascurabili.

Quindi che

le correnti sulla generatrice non varino per la presenza dell’accoppiamento

Linea "Corta"

In equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial z} = -L_G \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial z} = -(C_G + C_m)\dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Linea "Generatrice" Senza i termini "R"

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_R(z,t)}{\partial z} = -L_R \dfrac{\partial I_R(z,t)}{\partial t} - L_m \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial I_R(z,t)}{\partial z} = -(C_R + C_m)\dfrac{\partial V_R(z,t)}{\partial t} + C_m \dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

O, meglio

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial z} + L_G \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial z} + (C_G + C_m)\dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_R(z,t)}{\partial z} + L_R \dfrac{\partial I_R(z,t)}{\partial t} = -L_m \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial I_R(z,t)}{\partial z} + (C_R + C_m)\dfrac{\partial V_R(z,t)}{\partial t} = C_m \dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Linea "Corta"

La soluzione del circuito isolato

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial z} + L_G \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial z} + (C_G + C_m)\dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

È nota.

Una volta trovata essa fornisce le sorgenti indotte del sistema

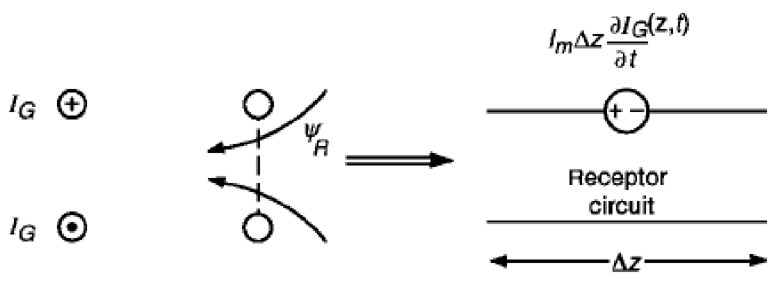
$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_R(z,t)}{\partial z} + L_R \dfrac{\partial I_R(z,t)}{\partial t} = -L_m \dfrac{\partial I_G(z,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial I_R(z,t)}{\partial z} + (C_R + C_m)\dfrac{\partial V_R(z,t)}{\partial t} = C_m \dfrac{\partial V_G(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Linea "Corta"

Concettualmente il termine

$$-L_m \frac{\partial I_G(z,t)}{\partial t}$$

Equivale a un generatore di tensione legato alla legge di Faraday:

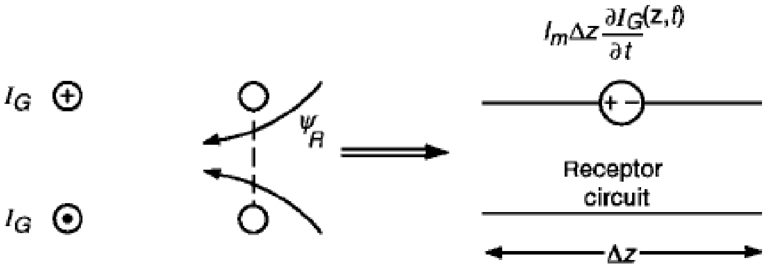


Linea "Corta"

Concettualmente il termine

$$-L_m \frac{\partial I_G(z,t)}{\partial t}$$

Equivale a un generatore di tensione legato alla legge di Faraday:



In formule

$$V_{S1} = L_R \frac{\partial I_R(z,t)}{\partial t}, \qquad V_{S2} = L_m \frac{\partial I_G(z,t)}{\partial t}$$

Trascurabile, in prima approssimazione

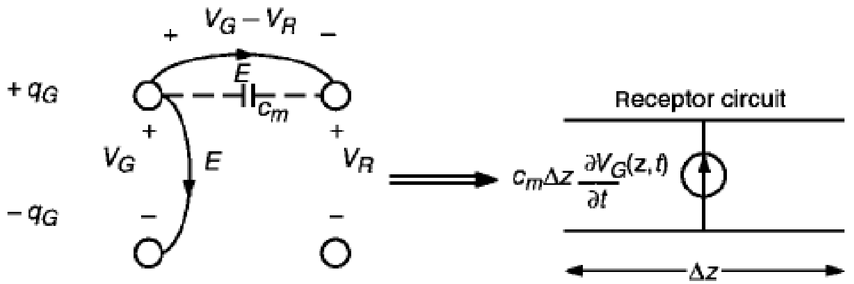
Sorgente sul recettore per ACCOPPIAMENTO INDUTTIVO

Linea “Corta”

Mentre il termine

$$C_m \frac{\partial V_G(z,t)}{\partial t}$$

Equivale a un generatore di corrente:



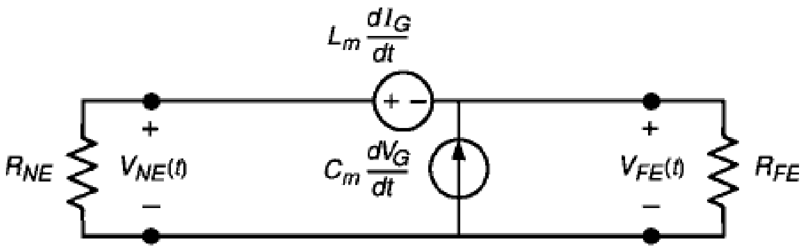
$$I_{S1} = (C_R + C_m)\frac{\partial V_R(z,t)}{\partial t}, \qquad V_{S2} = -C_m \frac{\partial V_G(z,t)}{\partial t}$$

Trascurabile, in prima approssimazione

Sorgente sul recettore per ACCOPPIAMENTO CAPACITIVO

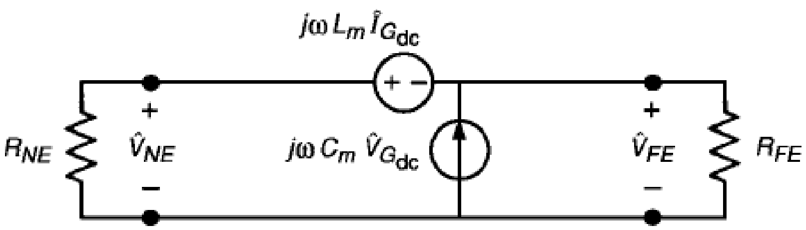
Linea "Corta"

Se la lunghezza l è piccola rispetto alla lunghezza d'onda allora possiamo passare dalle grandezze distribuite a quelle concentrate:



$$L_M = L_m l, \qquad C_M = C_m l$$

E, nel dominio della frequenza,



Linea "Corta"

Questo è noto come

Modello induttivo-capacitivo

Dell'accoppiamento.

Esso ci presenta il crosstalk come legato a due fenomeni distinti e separati:

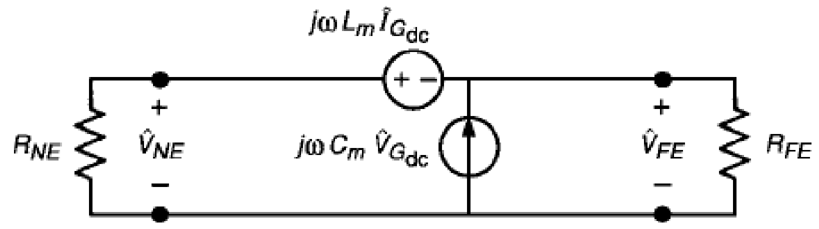
- Accoppiamento induttivo legato alle correnti
- Accoppiamento capacitivo legato alle tensioni

Il tutto, ricordiamo, è valido nell'ipotesi di

- accoppiamento debole;
- linea corta.

Linea “Corta”

A questo punto, avendo approssimato le correnti e le tensioni sul circuito generatore e avendo scritto l’accoppiamento come l’insieme di un generatore di tensione e uno di corrente si ottiene, ricordando il principio di sovrapposizione degli effetti:



$$V_{NE} = \underbrace{\frac{R_{NE}}{R_{NE}+R_{FE}} j\omega L_M I_{G_{dc}}}_{\text{Accoppiamento induttivo}} + \underbrace{\frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}} j\omega C_M V_{G_{dc}}}_{\text{Accoppiamento capacitivo}}$$

$$V_{FE} = \underbrace{-\frac{R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}} j\omega L_M I_{G_{dc}}}_{\text{Accoppiamento induttivo}} + \underbrace{\frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}} j\omega C_M V_{G_{dc}}}_{\text{Accoppiamento capacitivo}}$$

Linea "Corta"

Sostituendo quanto già calcolato per il circuito "generatore"

$$V_{NE} = \underbrace{\frac{R_{NE}}{R_{NE}+R_{FE}} j\omega L_M \frac{1}{R_S+R_L} V_S}_{\text{Accoppiamento induttivo}} + \underbrace{\frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}} j\omega C_M \frac{R_L}{R_S+R_L} V_S}_{\text{Accoppiamento capacitivo}}$$

$$V_{FE} = \underbrace{-\frac{R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}} j\omega L_M \frac{1}{R_S+R_L} V_S}_{\text{Accoppiamento induttivo}} + \underbrace{\frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}} j\omega C_M \frac{R_L}{R_S+R_L} V_S}_{\text{Accoppiamento capacitivo}}$$

Se riconosciamo il crosstalk come una funzione di trasferimento tra la tensione del generatore e le tensioni di near e far end…

$$\frac{V_{NE}}{V_S} = j\omega\left[\frac{R_{NE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{L_M}{R_S+R_L} + \frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{C_M R_L}{R_S+R_L}\right]$$

$$\frac{V_{FE}}{V_S} = j\omega\left[-\frac{R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{L_M}{R_S+R_L} + \frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{C_M R_L}{R_S+R_L}\right]$$

Linea “Corta”

La scrittura può essere compattata in:

$$\frac{V_{NE}}{V_S} = j\omega\left[M_{NE}^{IND} + M_{NE}^{CAP}\right]$$

$$\frac{V_{FE}}{V_S} = j\omega\left[M_{FE}^{IND} + M_{FE}^{CAP}\right]$$

Con

$$M_{NE}^{IND} = \frac{R_{NE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{L_M}{R_S+R_L}$$

$$M_{NE}^{CAP} = \frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{C_M R_L}{R_S+R_L}$$

$$M_{FE}^{IND} = -\frac{R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{L_M}{R_S+R_L}$$

$$M_{FE}^{CAP} = \frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{C_M R_L}{R_S+R_L}$$

Linea “Corta”

Verifichiamo i rapporti

$$\frac{M_{NE}^{IND}}{M_{NE}^{CAP}} = \frac{\dfrac{R_{NE}}{R_{NE}+R_{FE}}\dfrac{L_M}{R_S+R_L}}{\dfrac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\dfrac{C_M R_L}{R_S+R_L}} = \frac{L_M/C_M}{R_{FE}R_L}$$

$$\frac{M_{FE}^{IND}}{M_{FE}^{CAP}} = \frac{-\dfrac{R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\dfrac{L_M}{R_S+R_L}}{\dfrac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\dfrac{C_M R_L}{R_S+R_L}} = \frac{L_M/C_M}{R_{NE}R_L}$$

Ma ricordando come sia

$$C_m = \frac{L_m}{c^2(L_G L_C - L_m^2)}, \quad \Rightarrow \quad \frac{L_M}{C_M} = \frac{L_m l}{C_m l} = \frac{L_m}{C_m} = c^2(L_G L_C - L_m^2)$$

$$Z_{C_G} = \sqrt{\frac{L_G}{C_G + C_m}}; \qquad C_G + C_m = \frac{L_R}{c^2(L_G L_C - L_m^2)}; \quad \Rightarrow \quad Z_{C_G} = c\sqrt{\frac{L_G}{L_R}(L_G L_C - L_m^2)};$$

$$Z_{C_R} = \sqrt{\frac{L_R}{C_R + C_m}}; \qquad C_R + C_m = \frac{L_G}{c^2(L_G L_C - L_m^2)}; \quad \Rightarrow \quad Z_{C_R} = c\sqrt{\frac{L_R}{L_G}(L_G L_C - L_m^2)};$$

Linea “Corta”

È

$$\frac{L_M}{C_M} = Z_{C_G} Z_{C_R}$$

E quindi

$$\frac{M_{NE}^{IND}}{M_{NE}^{CAP}} = \frac{Z_{C_G} Z_{C_R}}{R_{FE} R_L}$$

$$\frac{M_{FE}^{IND}}{M_{FE}^{CAP}} = \frac{Z_{C_G} Z_{C_R}}{R_{NE} R_L}$$

Cioè se è

$$\frac{Z_{C_G} Z_{C_R}}{R_{FE} R_L} > 1, \quad \Rightarrow \quad Z_{C_G} Z_{C_R} > R_{FE} R_L$$

$$\frac{Z_{C_G} Z_{C_R}}{R_{NE} R_L} > 1, \quad \Rightarrow \quad Z_{C_G} Z_{C_R} > R_{NE} R_L$$

Domina l’accoppiamento **Induttivo**

$$\frac{Z_{C_G} Z_{C_R}}{R_{FE} R_L} < 1, \quad \Rightarrow \quad Z_{C_G} Z_{C_R} < R_{FE} R_L$$

$$\frac{Z_{C_G} Z_{C_R}}{R_{NE} R_L} < 1, \quad \Rightarrow \quad Z_{C_G} Z_{C_R} < R_{NE} R_L$$

Domina l’accoppiamento **Capacitivo**

Linea “Corta”

Se le terminazioni della linea sono a bassa impedenza rispetto all’impedenza della linea

$$R_{FE}, R_{NE} < Z_{C_R}; \qquad R_L < Z_{C_G}$$

Allora ***domina l’accoppiamento induttivo***

Altrimenti, in caso di alta impedenza

$$R_{FE}, R_{NE} > Z_{C_R}; \qquad R_L > Z_{C_G}$$

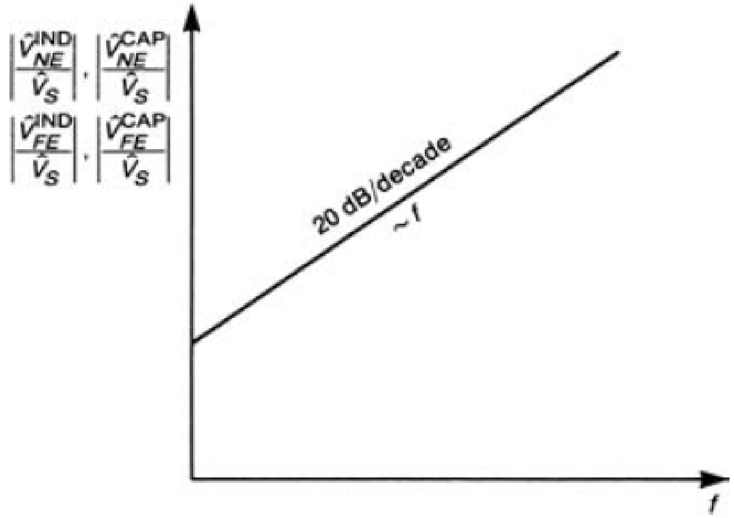
Allora ***domina l’accoppiamento capacitivo***

Ovvero nei circuiti a bassa impedenza tende a dominare l’accoppiamento induttivo, in quelli ad alta impedenza l’accoppiamento capacitivo.

Linea “Corta”

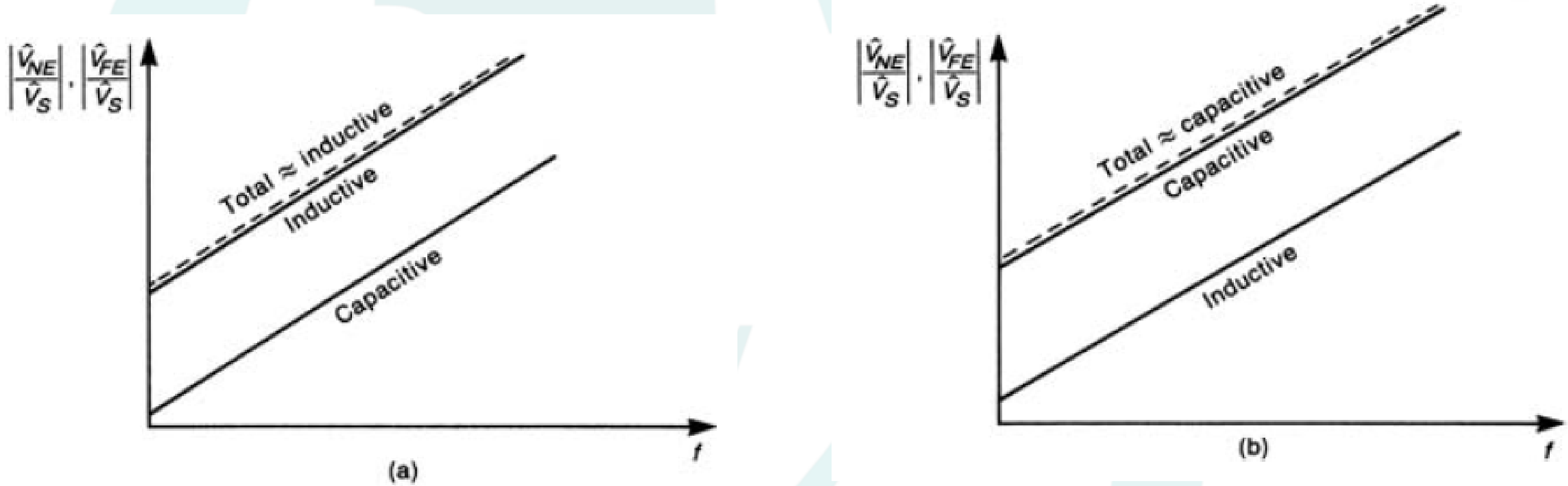
Osserviamo come sia l’accoppiamento induttivo sia l’accoppiamento capacitivo siano funzioni lineari della frequenza, quindi come essi crescano di 20dB per decade.

Di conseguenza anche l’accoppiamento complessivo cresce di 20dB/decade



Linea "Corta"

Questo fenomeno, a seconda delle impedenze di terminazione può essere interamente ascritto all'accoppiamento induttivo o capacitivo



Introduzione

Il ***crosstalk*** è stato studiato nel dominio della frequenza per poter includere le perdite… ma poi non le abbiamo mai inserite!

Considerare una linea priva di perdite può anche essere accettabile fin tanto che le frequenze sono basse (sotto il GHz)

A frequenze più elevate non è possibile prescindere dalle perdite!

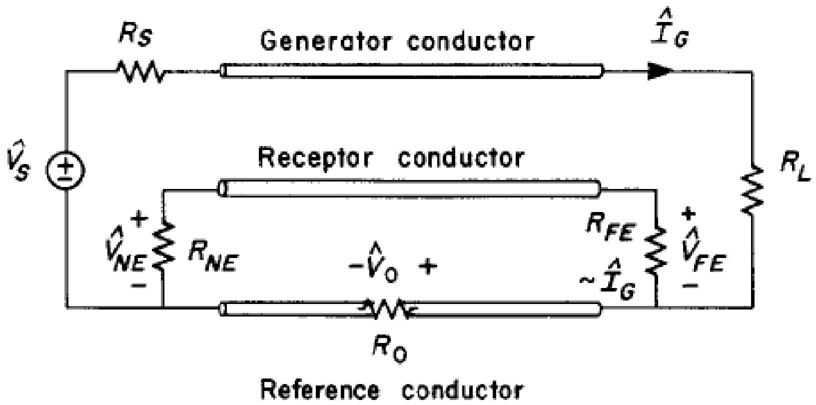
Inoltre le perdite possono generare accoppiamenti a bassa frequenza, per la resistenza del conduttore comune!

A questo punto verifichiamo l'effetto delle perdite.

Le Perdite

Accoppiamento di impedenza comune

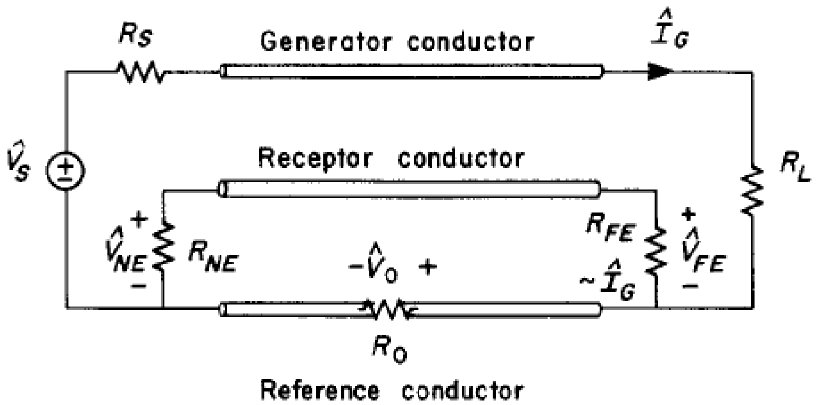
Se i conduttori sono imperfetti , nello specifico se lo è il conduttore di riferimento, si ha una caduta di tensione su di esso che si ritrova ai capi del recettore!



$$V_0 = R_0 I_G = \frac{R_0}{R_S + R_L + R_0} V_S \cong \frac{R_0}{R_S + R_L} V_S$$

Le Perdite

La tensione che cade sulle terminazioni del recettore è quindi:



$$V_{NE}^{ci} \cong \frac{R_{NE}}{R_{NE}+R_{FE}} V_0 \cong \frac{R_{NE} R_0}{(R_{NE}+R_{FE})(R_S+R_L)} V_S$$

$$V_{FE}^{ci} \cong -\frac{R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}} V_0 \cong -\frac{R_{FE} R_0}{(R_{NE}+R_{FE})(R_S+R_L)} V_S$$

Vi è quindi un contributo ***costante in frequenza***.

Le Perdite

Possiamo quindi definire dei coefficienti

$$\frac{V_{NE}^{ci}}{V_S} = M_{NE}^{ci} = \frac{R_{NE} R_0}{(R_{NE} + R_{FE})(R_S + R_L)}$$

$$\frac{V_{FE}^{ci}}{V_S} = M_{FE}^{ci} = -\frac{R_{FE} R_0}{(R_{NE} + R_{FE})(R_S + R_L)}$$

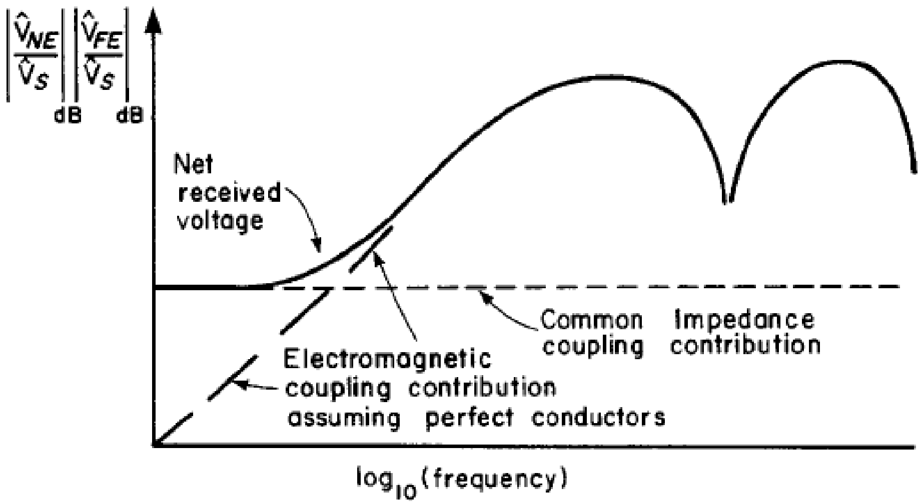
E completare i termini di accoppiamento con

$$\frac{V_{NE}}{V_S} = j\omega\left[M_{NE}^{IND} + M_{NE}^{CAP}\right] + M_{NE}^{ci}$$

$$\frac{V_{FE}}{V_S} = j\omega\left[M_{FE}^{IND} + M_{FE}^{CAP}\right] + M_{FE}^{ci}$$

Le Perdite

Graficamente:



Esempi

Riprendiamo la piattina a tre cavi studiata qualche lezione fa, calibro 28 7x36.

Il raggio dei cavi è 7.5 mils, la distanza 50 mils.

Specifichiamo che l'isolante del singolo cavo è cloruro di polivinile (PVC) spesso 10 mils [ε_r=3.5]

Prendiamone una lunghezza di 4.737m.

Se supponiamo la velocità di propagazione invariata rispetto all'aria, la linea è lunga una lunghezza d'onda a 63.3MHz, quindi la possiamo considerare corta fino a 6MHz

Esempi

Considereremo in un primo momento

$$R_L = R_{FE} = R_{NE} = 50\Omega; \qquad R_S = 0$$

E poi

$$R_L = R_{FE} = R_{NE} = 1k\Omega; \qquad R_S = 0$$

Avevamo originariamente calcolato

$$L_G = L_R = 0.759\,\mu H m^{-1} \qquad L_m = 0.24\,\mu H m^{-1}$$

$$C_G = C_R = 11.1\,pF m^{-1} \qquad C_m = 5.17\,pF m^{-1}$$

Trascurando l'isolante

Esempi

Con calcoli numerici più accurati si ottiene

$$L_G = L_R = 0.749\,\mu H m^{-1} \qquad L_m = 0.24\,\mu H m^{-1}$$

$$C_G = C_R = 18\,pF m^{-1} \qquad C_m = 6.27\,pF m^{-1}$$

Con questi valori più accurati si ha:

$$Z_{CG} = Z_{CR} = 173\Omega$$

Questo valore fa si che ci si aspetti un accoppiamento induttivo dominante nel caso in cui i carichi siano 50Ω, e un accoppiamento capacitivo dominante se il carico è 1kΩ

La resistenza di impedenza comune si può stimare sulla base della resistenza del cavo in continua,m pari a

$$r_0 = 0.194\Omega m^{-1}$$

Esempi

Ovvero

$$R_0 = 0.921\Omega$$

Per

$$R_L = R_{FE} = R_{NE} = 50\Omega$$

Si ha

$$M_{NE}^{IND} = \frac{R_{NE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{L_M}{R_S+R_L} = \frac{50}{50+50}\frac{0.24\times10^{-6}\times4.737}{0+50} = \frac{1.14\times10^{-6}}{100} = 1.14\times10^{-8}$$

$$M_{NE}^{CAP} = \frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{C_M R_L}{R_S+R_L} = \frac{50\times50}{50+50}\frac{6.27\times10^{-12}\times4.737\times50}{0+50} = 25\times29.8\times10^{-12} = 7.44\times10^{-10}$$

$$M_{NE}^{ci} = \frac{R_{NE}R_0}{(R_{NE}+R_{FE})(R_S+R_L)} = \frac{50\times0.921}{(50+50)(0+50)} = \frac{0.921}{100} = 9.21\times10^{-3}$$

Esempi

E

$$M_{FE}^{IND} = -\frac{R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{L_M}{R_S+R_L} = -\frac{50}{50+50}\frac{0.24\times10^{-6}\times4.737}{0+50} = -\frac{1.14\times10^{-6}}{100} = -1.14\times10^{-8}$$

$$M_{FE}^{CAP} = \frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}}\frac{C_M R_L}{R_S+R_L} = \frac{50\times50}{50+50}\frac{6.27\times10^{-12}\times4.737\times50}{0+50} = 25\times29.8\times10^{-12} = 7.44\times10^{-10}$$

$$M_{FE}^{ci} = \frac{R_{FE}R_0}{(R_{NE}+R_{FE})(R_S+R_L)} = \frac{50\times0.921}{(50+50)(0+50)} = \frac{0.921}{100} = -9.21\times10^{-3}$$

Si ha quindi

$$M_{NE}^{IND} = 1.14\times10^{-8} \qquad M_{FE}^{IND} = -1.14\times10^{-8}$$

$$M_{NE}^{CAP} = 7.44\times10^{-10} \qquad M_{FE}^{CAP} = 7.44\times10^{-10}$$

$$M_{NE}^{ci} = 9.21\times10^{-3} \qquad M_{FE}^{ci} = -9.21\times10^{-3}$$

Come atteso, l’accoppiamento induttivo domina sul capacitivo, superandolo di più di un ordine di grandezza.

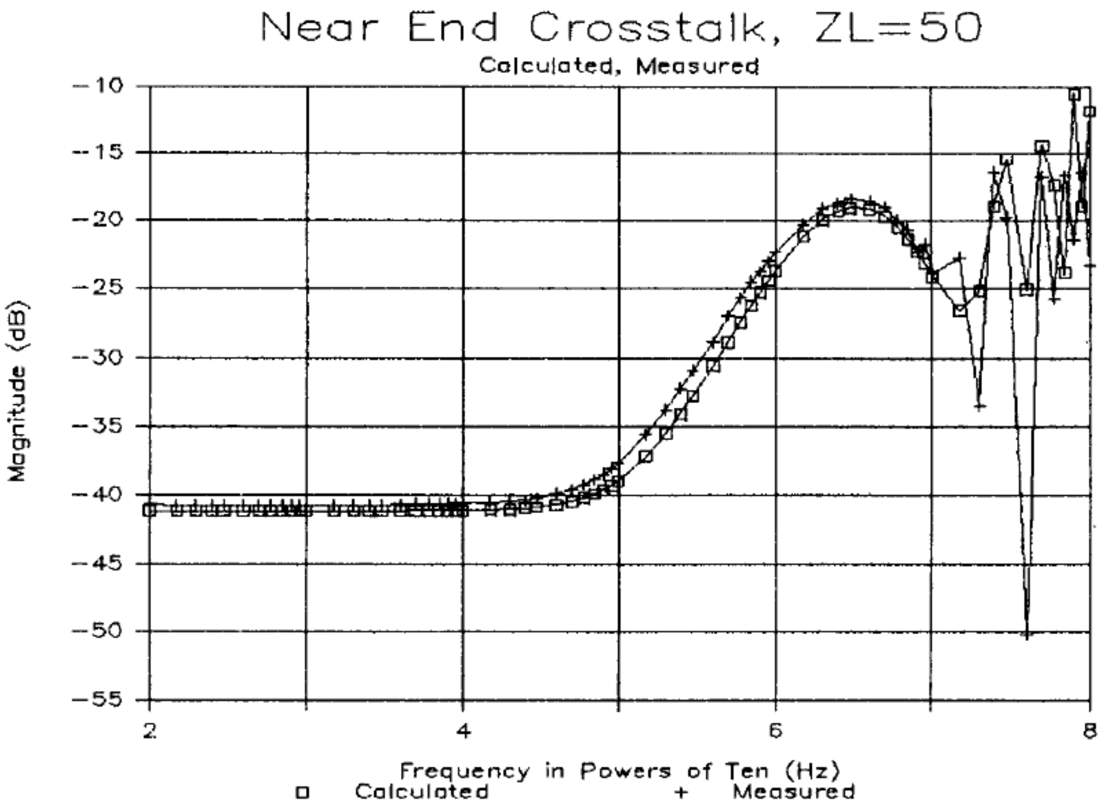
L’accoppiamento di impedenza comune è però di 5 ordini di grandezza maggiore, quindi è esso a dominare a bassa frequenza.

Esempi

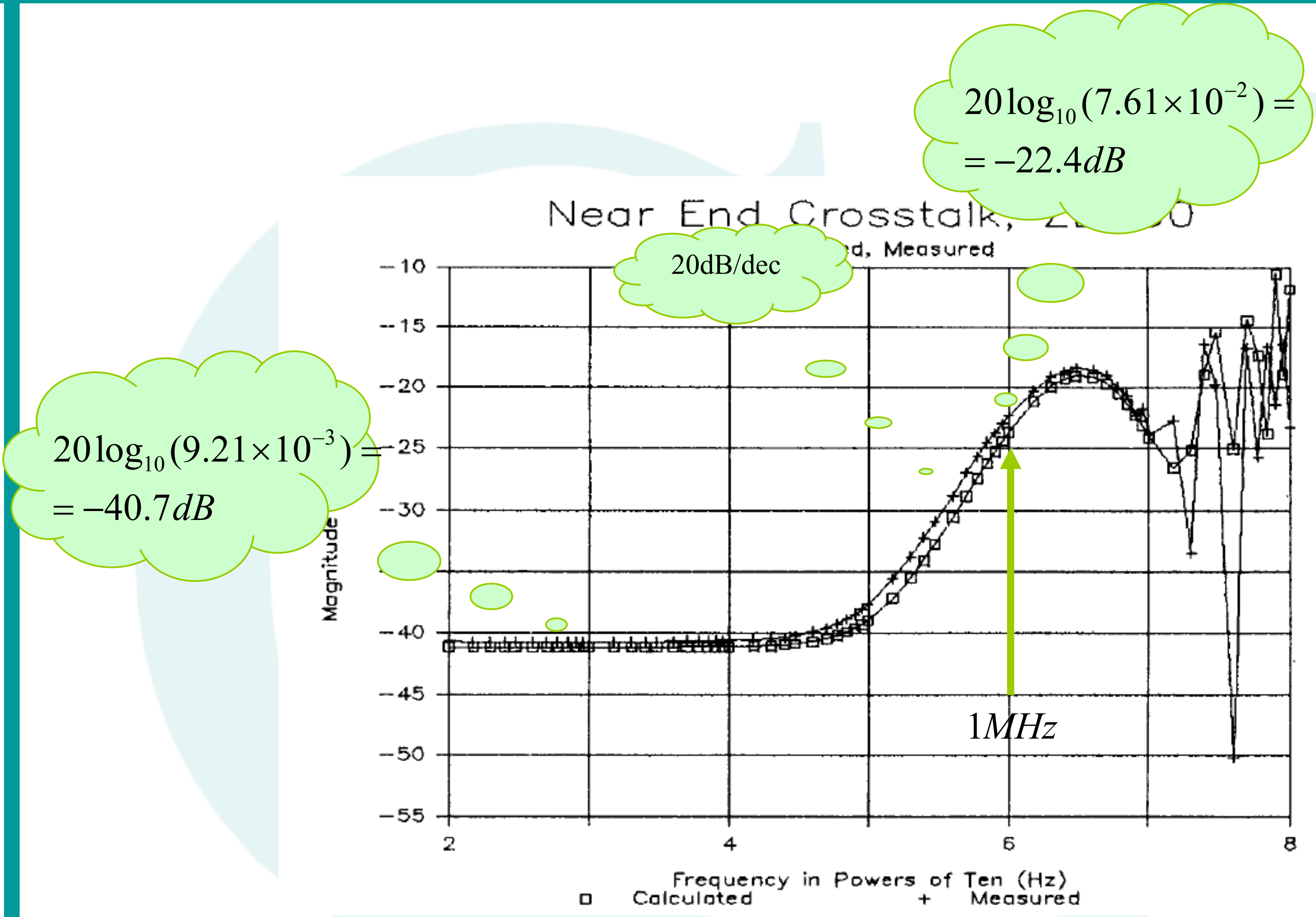
Infatti

$$\frac{V_{NE}}{V_S} = j\omega\left[1.14\times10^{-8} + 7.43\times10^{-10}\right] + 9.21\times10^{-3} = j7.6\times10^{-8} f + 9.21\times10^{-3}$$

$$\frac{V_{FE}}{V_S} = j\omega\left[-1.14\times10^{-8} + 7.43\times10^{-10}\right] - 9.21\times10^{-3} = -j6.72\times10^{-8} f + 9.21\times10^{-3}$$



Esempi


Near End Crosstalk
d, Measured
20dB/dec
$20\log_{10}(7.61\times10^{-2}) =$
$= -22.4dB$
$20\log_{10}(9.21\times10^{-3}) =$
$= -40.7dB$
Magnitude
-10
-15
-20
-25
-30
-40
-45
-50
-55
2
4
6
8
$1MHz$
Frequency in Powers of Ten (Hz)
Calculated
Measured

Esempi

Per

$$R_L = R_{FE} = R_{NE} = 1k\Omega$$

Si ha

$$M_{NE}^{IND} = \frac{R_{NE}}{R_{NE}+R_{FE}} \frac{L_M}{R_S+R_L} = \frac{10^3}{10^3+10^3} \frac{0.24\times10^{-6}\times4.737}{0+10^3} = \frac{1.14\times10^{-6}}{2\times10^3} = 5.7\times10^{-10}$$

$$M_{NE}^{CAP} = \frac{R_{NE}R_{FE}}{R_{NE}+R_{FE}} \frac{C_M R_L}{R_S+R_L} = \frac{10^3\times10^3}{10^3+10^3} \frac{6.27\times10^{-12}\times4.737\times10^3}{0+10^3} = 0.5\times10^3\times29.8\times10^{-12} = 1.49\times10^{-8}$$

$$M_{NE}^{ci} = \frac{R_{NE}R_0}{(R_{NE}+R_{FE})(R_S+R_L)} = \frac{10^3\times0.921}{(10^3+10^3)(0+10^3)} = \frac{0.921}{2\times10^3} = 4.61\times10^{-4}$$

Ovvero

$$M_{NE}^{IND} = 5.7\times10^{-10} \qquad M_{FE}^{IND} = -5.7\times10^{-10}$$

$$M_{NE}^{CAP} = 1.49\times10^{-8} \qquad M_{FE}^{CAP} = 1.49\times10^{-8}$$

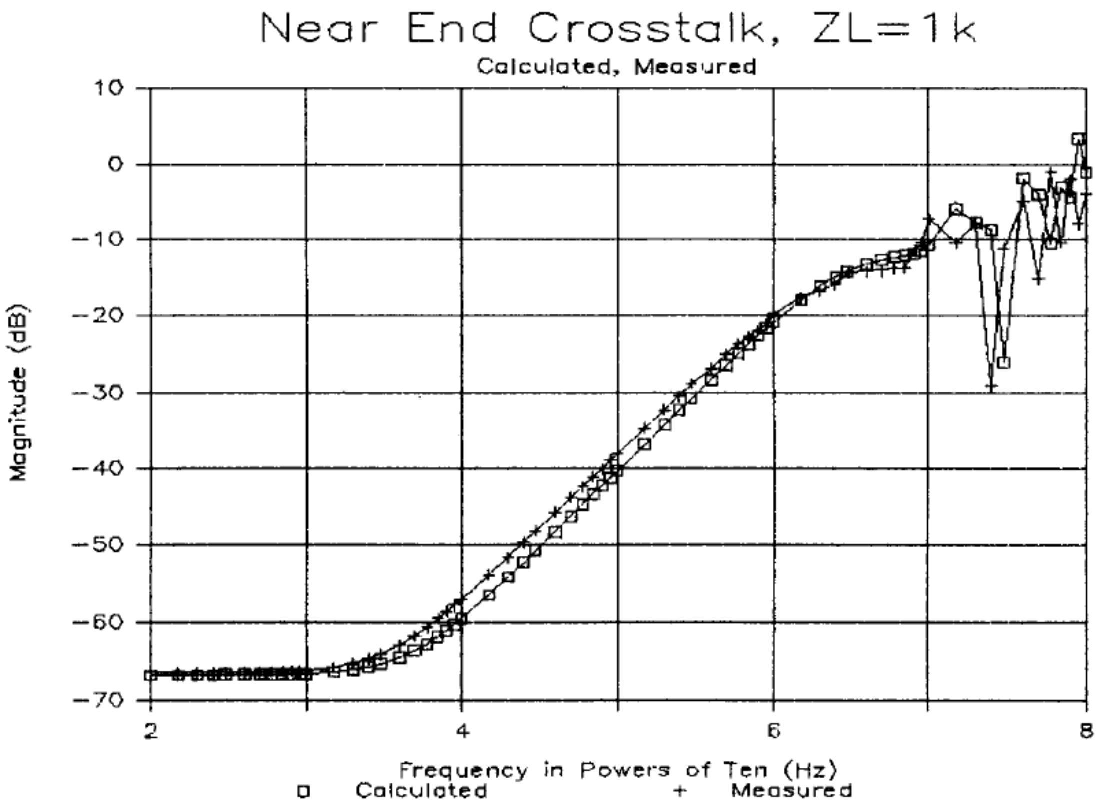
$$M_{NE}^{ci} = 4.61\times10^{-4} \qquad M_{FE}^{ci} = -4.61\times10^{-4}$$

Esempi

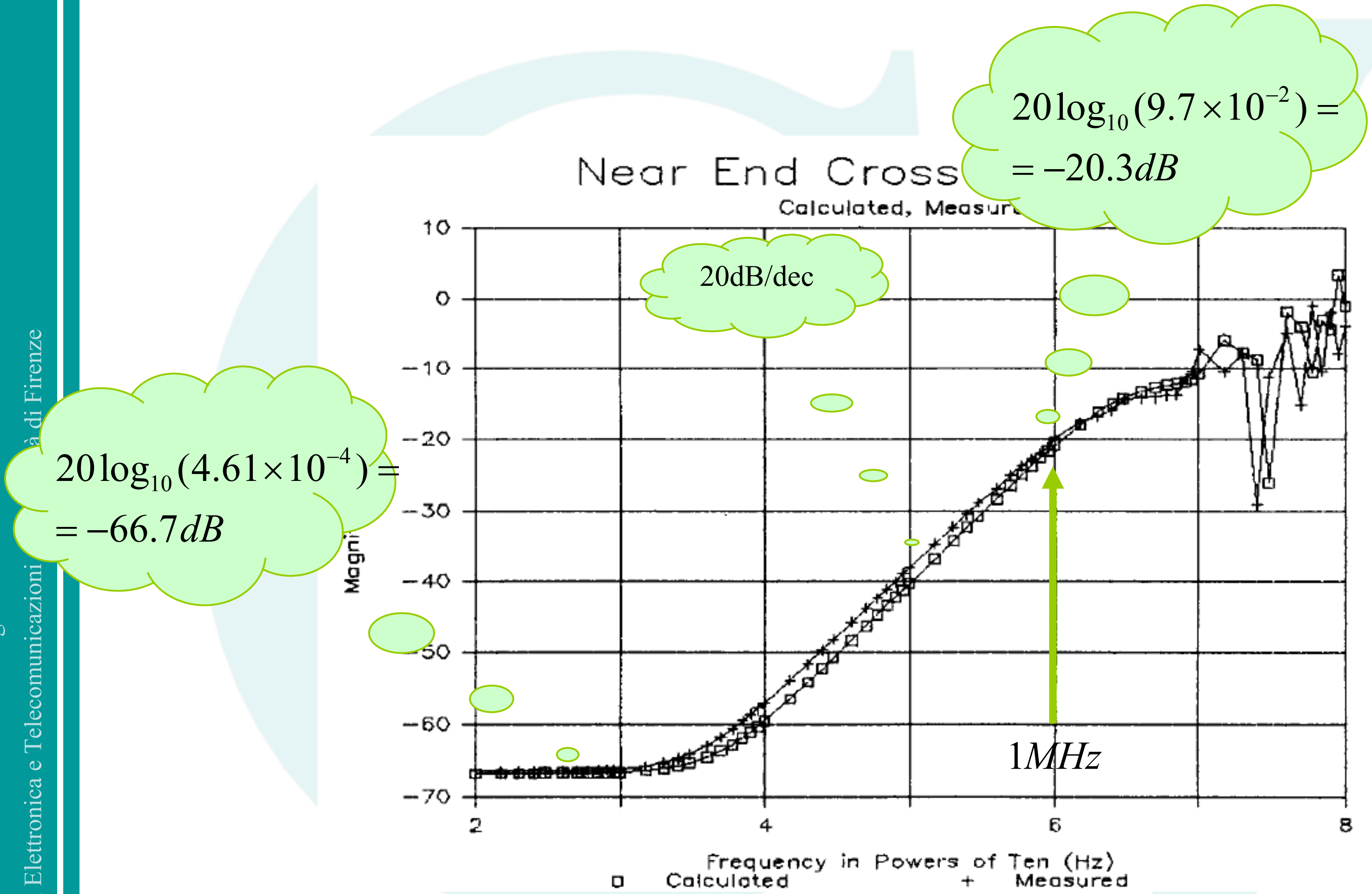
E stavolta domina l'accoppiamento capacitivo

$$\frac{V_{NE}}{V_S} = j\omega\left[5.7\times10^{-10} + 1.49\times10^{-8}\right] + 4.61\times10^{-4} = j9.7\times10^{-8} f + 4.61\times10^{-4}$$

$$\frac{V_{FE}}{V_S} = j\omega\left[-5.7\times10^{-10} + 1.49\times10^{-8}\right] - 4.61\times10^{-4} = j9.0\times10^{-8} f + 4.61\times10^{-4}$$



Esempi


Near End Cross
Calculated, Measur
Magni
Frequency in Powers of Ten (Hz)
Calculated
Measured
20dB/dec
$20\log_{10}(9.7\times10^{-2}) =$
$=-20.3dB$
$20\log_{10}(4.61\times10^{-4}) =$
$=-66.7dB$
$1MHz$