



## Lezione 03

# Contenuto Spettrale dei Segnali

Giuseppe Pelosi - Stefano Selleri  
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni  
Università di Firenze



## Sommario della Lezione

- ❖ Transizione
- ❖ Impulso trapezoidale
- ❖ Impulso triangolare
- ❖ Segnali periodici
- ❖ Segnali in uscita da sistemi lineari
- ❖ Segnali aperiodici
- ❖ Segnali randomici



## Introduzione

Dovrebbe esser chiaro, dalla lezione precedente, come la CEM/EMI è definibile, in termini di normativa, tramite maschere nel dominio della frequenza.

È quindi di vitale importanza risalire al contenuto spettrale dei segnali possibili sorgenti di EMI per verificarne la compatibilità con le suddette maschere.

I segnali a radiofrequenza sono usualmente emissioni intenzionali a spettro noto.

I segnali digitali di clock sono invece usualmente sorgenti di disturbo non intenzionale, il cui spettro è importante studiare

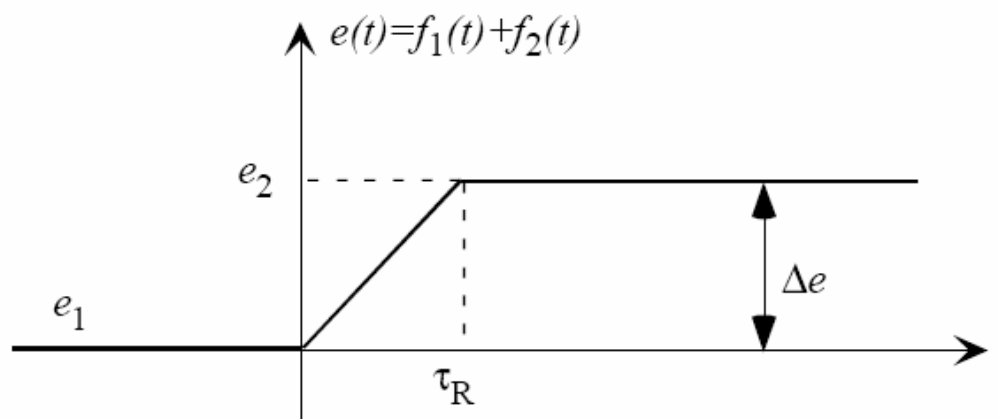


## Transizione

### ❖ Transizione

La transizione, o cambiamento di stato, è il passaggio di un segnale da un livello ad un altro. Essa non è mai istantanea ma è definita da una funzione a gradino con tempo di salita  $\tau_R$  finito.

Detta  $\Delta e$  la variazione di stato, la pendenza della rampa è  $\frac{\Delta e}{\tau_R}$





## Transizione

La funzione gradino con tempo di salita finito può essere espressa in termini di funzione gradino ideale  $u(t)$  come:

$$e(t) = \frac{\Delta e}{\tau_R} [tu(t) - (t - \tau_R)u(t - \tau_R)]$$

Ricordando come la seguente trasformata di Fourier:

$$tu(t)e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$$

E che

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \rightarrow f(t - \tau) \Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

Si ha:

$$e(t) \Leftrightarrow E(\omega) = \frac{\Delta e}{\tau_R} \left[ \frac{1}{(j\omega)^2} - \frac{e^{-j\omega\tau_R}}{(j\omega)^2} \right] = \frac{\Delta e}{\tau_R} \frac{e^{-\frac{j\omega\tau_R}{2}}}{(j\omega)^2} \left( e^{\frac{j\omega\tau_R}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau_R}{2}} \right) = \frac{\Delta e}{\tau_R} \frac{e^{-j\pi f\tau_R}}{2j(\pi f)^2} \sin(\pi f\tau_R)$$



## Transizione

Il modulo è

$$|E(\omega)| = \frac{\Delta e}{2\pi f} \left| \frac{\sin(\pi f \tau_R)}{\pi f \tau_R} \right|$$

Ovvero, a parte il fattore moltiplicativo, un sinc, il quale,

- per  $\pi f \tau_R \ll 1 \rightarrow f \ll \frac{1}{\pi \tau_R}$  vale circa 1,

$$\text{quindi } |E(\omega)| \approx \frac{\Delta e}{2\pi f}$$

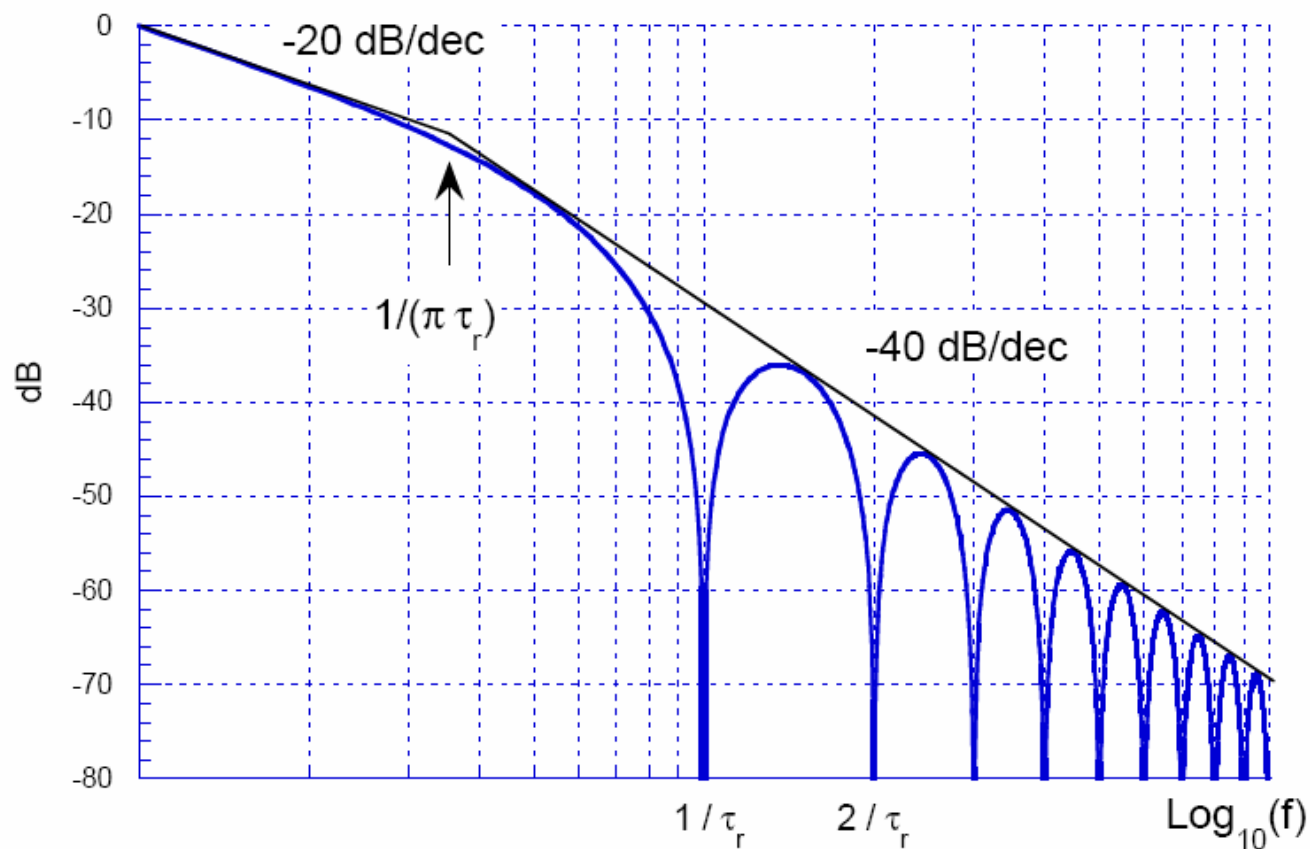
- per  $\pi f \tau_R \gg 1 \rightarrow f \gg \frac{1}{\pi \tau_R}$  è limitato dall'iperbole  $\frac{1}{\pi f \tau_R}$

$$\text{quindi } |E(\omega)| \approx \frac{\Delta e}{2\pi^2 \tau_R f^2}$$



## Transizione

Sul diagramma di Bode possiamo quindi individuare un tratto a pendenza  $-20\text{dB/dec}$  (comportamento di  $1/f$ ) e un tratto a  $-40\text{dB/dec}$  (comportamento di  $1/f^2$ )



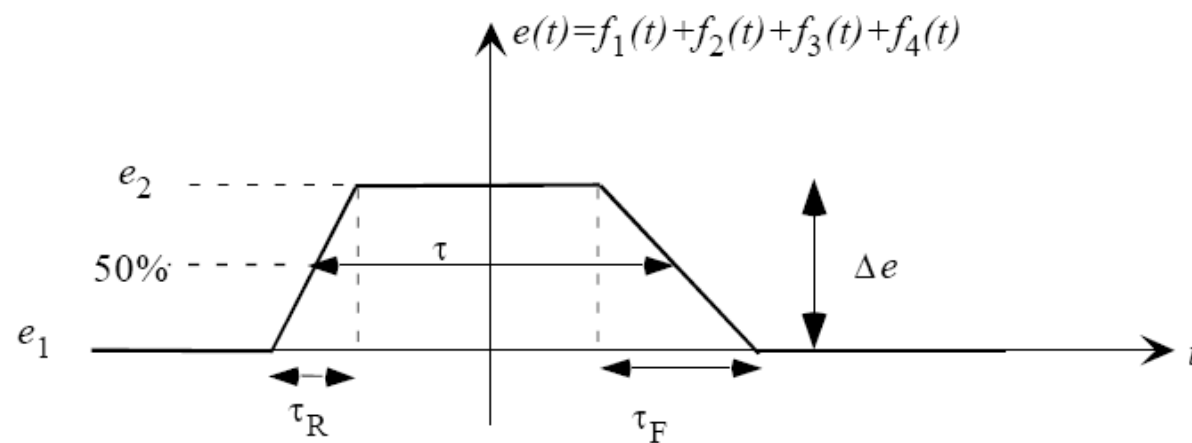


## Impulso Trapezoidale

La singola transizione è un tipo di segnale digitale che può essere presente ma è relativamente poco comune.

Molto più comune è l'impulso trapezoidale, dove il segnale cambia di stato per un tempo finito.

Questo può essere visto come una transizione in salita con un tempo di salita  $\tau_R$  ed una transizione in discesa con un tempo di discesa  $\tau_F$  finito. La durata totale dell'impulso è  $\tau$  ed definita come l'intervallo tra i due punti nei quali l'impulso assume metà del valor massimo.







## Impulso Trapezoidale

L'impulso trapezoidale può essere definito sulla base di quattro funzioni a gradino opportunamente ritardate:

$$e(t) = \frac{\Delta e}{\tau_R} \left[ \left( t + \frac{\tau + \tau_R}{2} \right) u \left( t + \frac{\tau + \tau_R}{2} \right) - \left( t + \frac{\tau - \tau_R}{2} \right) u \left( t + \frac{\tau - \tau_R}{2} \right) \right] +$$
$$- \frac{\Delta e}{\tau_F} \left[ \left( t - \frac{\tau - \tau_F}{2} \right) u \left( t - \frac{\tau - \tau_F}{2} \right) - \left( t - \frac{\tau + \tau_F}{2} \right) u \left( t - \frac{\tau + \tau_F}{2} \right) \right]$$

Di trasformata di Fourier:

$$E(\omega) = \frac{\Delta e}{\tau_R} \frac{1}{(j\omega)^2} \left[ e^{j\omega \frac{\tau + \tau_R}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau - \tau_R}{2}} \right] - \frac{\Delta e}{\tau_F} \frac{1}{(j\omega)^2} \left[ e^{-j\omega \frac{\tau - \tau_F}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau + \tau_F}{2}} \right] =$$
$$= \frac{\Delta e}{\tau_R} \frac{e^{j\pi f \tau}}{2j(\pi f)^2} \sin(\pi f \tau_R) - \frac{\Delta e}{\tau_F} \frac{e^{-j\pi f \tau}}{2j(\pi f)^2} \sin(\pi f \tau_F)$$



## Impulso Trapezoidale

Se il tempo di salita e il tempo di discesa sono uguali:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{\Delta e}{\tau_R} \frac{e^{j\pi f \tau}}{2j(\pi f)^2} \sin(\pi f \tau_R) - \frac{\Delta e}{\tau_R} \frac{e^{-j\pi f \tau}}{2j(\pi f)^2} \sin(\pi f \tau_R) = \\ &= \frac{\Delta e}{\tau_R} \frac{1}{2j(\pi f)^2} [e^{j\pi f \tau} - e^{-j\pi f \tau}] \sin(\pi f \tau_R) = \\ &= \Delta e \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \frac{\sin(\pi f \tau_R)}{\pi f \tau_R} \end{aligned}$$

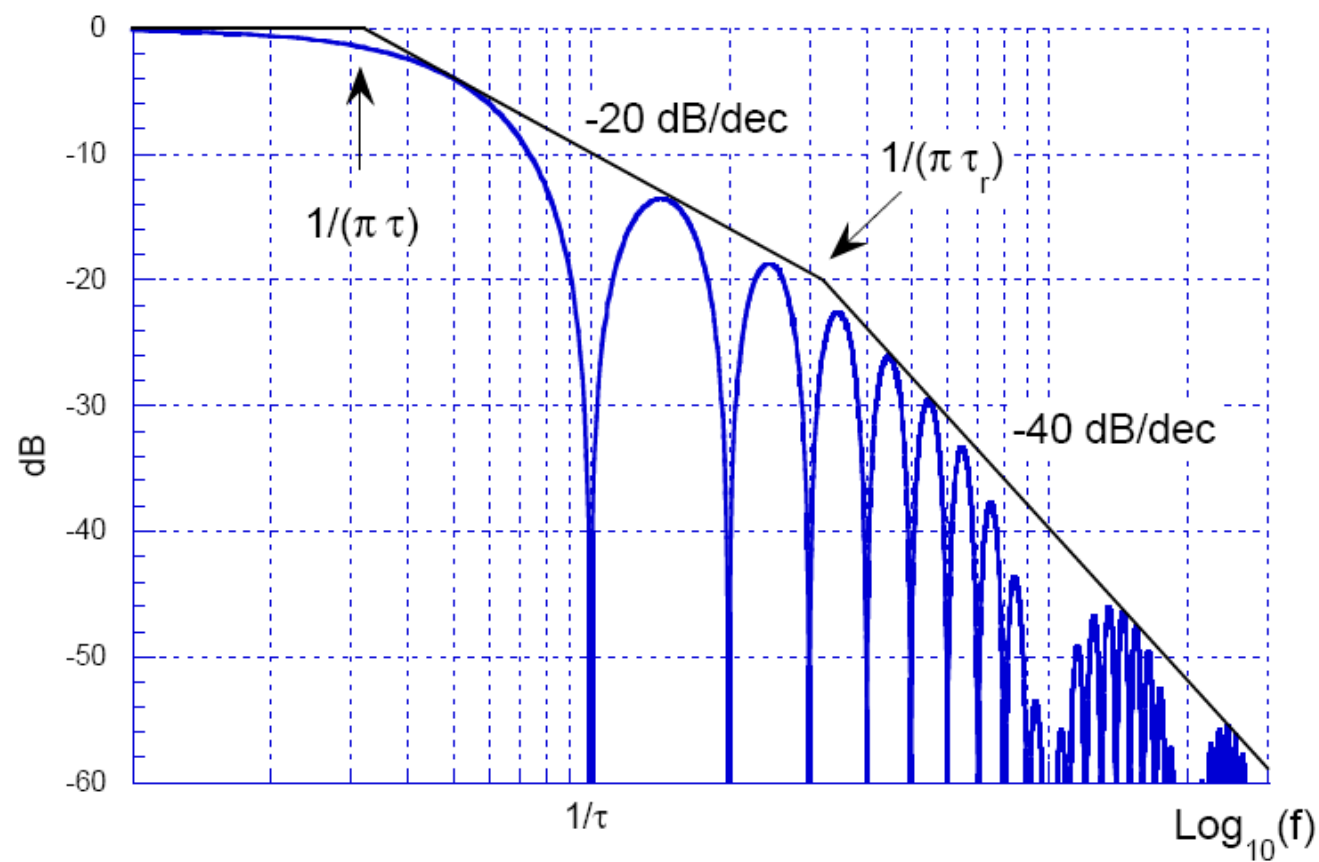
Con, plausibilmente  $\tau_R < \tau$  :

$$\begin{aligned} f &\ll \frac{1}{\pi \tau} &\Rightarrow |E(f)| &\approx \Delta e \tau \\ \frac{1}{\pi \tau} &\ll f \ll \frac{1}{\pi \tau_R} &\Rightarrow |E(f)| &\approx \frac{\Delta e \tau}{\pi f \tau} \propto \frac{1}{f} \\ \frac{1}{\pi \tau_R} &\ll f &\Rightarrow |E(f)| &\approx \frac{\Delta e \tau}{(\pi f \tau)(\pi f \tau_R)} \propto \frac{1}{f^2} \end{aligned}$$



## Impulso Trapezoidale

Se il tempo di salita e il tempo di discesa sono uguali:



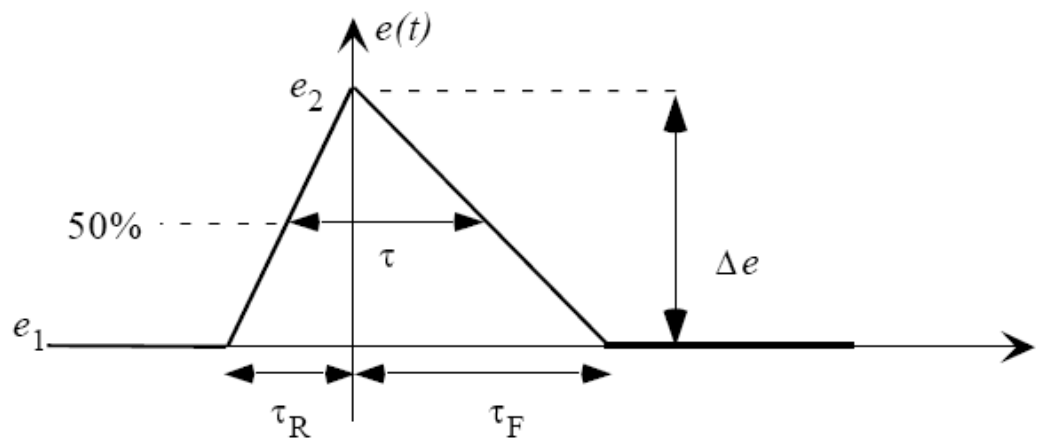


## Impulso Triangolare

L'impulso triangolare è un caso degenero di impulso trapezoidale per il quale

$$\tau = \frac{\tau_R + \tau_F}{2}$$

Che è ovviamente il valore minimo possibile per  $\tau$ .





## Impulso Triangolare

Se il tempo di salita e il tempo di discesa sono uguali è

$$\tau = \tau_R = \tau_F$$

E l'impulso triangolare simmetrico ha spettro:

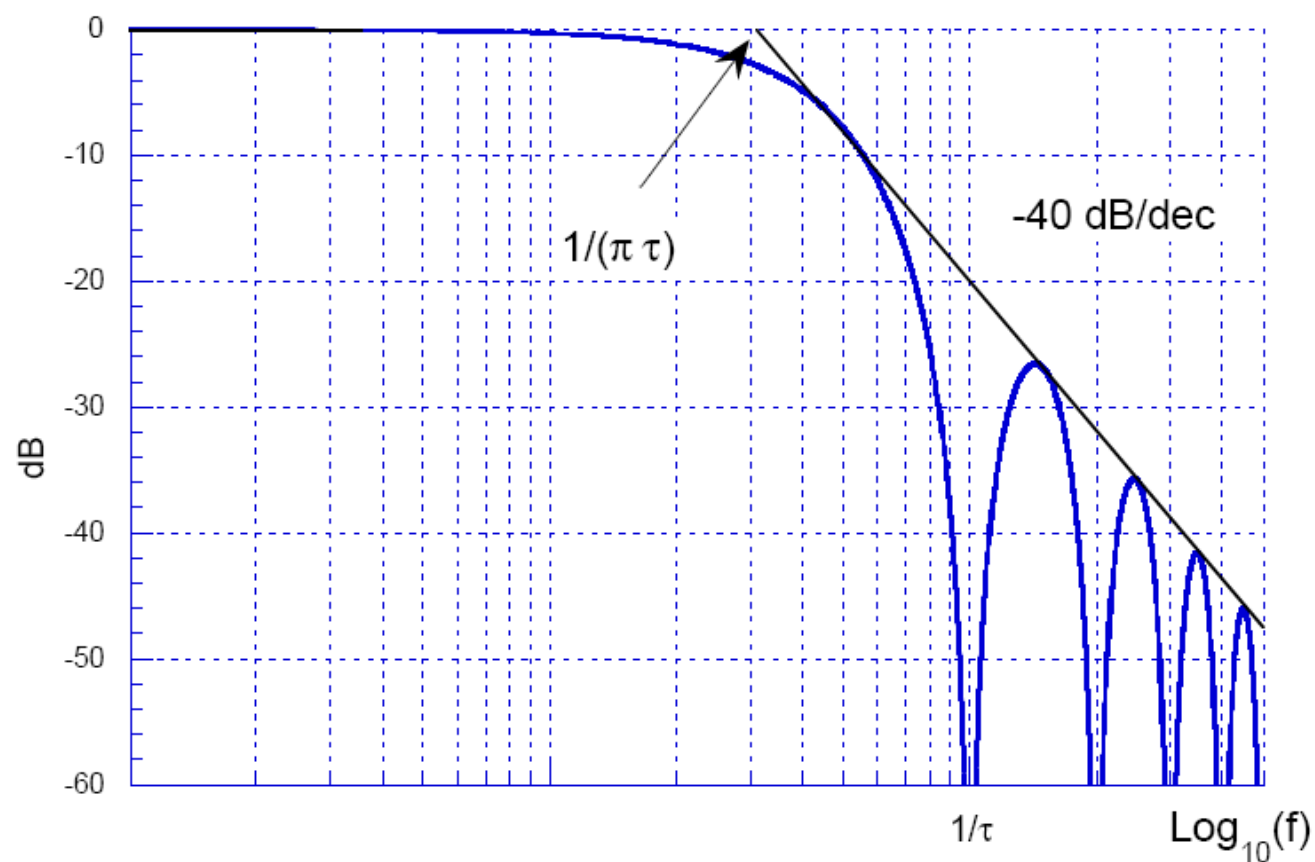
$$E(\omega) = \Delta e \tau \left( \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right)^2$$

Con andamento asintotico

$$\begin{aligned} f \ll \frac{1}{\pi \tau} &\Rightarrow |E(f)| \simeq \Delta e \tau \\ \frac{1}{\pi \tau} \ll f &\Rightarrow |E(f)| \simeq \frac{\Delta e \tau}{(\pi f \tau)^2} \propto \frac{1}{f^2} \end{aligned}$$



## Impulso Triangolare





## Impulso Triangolare

Di rilevante interesse applicativo è poi il caso

$$\tau_R \ll \tau_F$$

Che può fornire un'ottima approssimazione di molti transitori. In questo caso

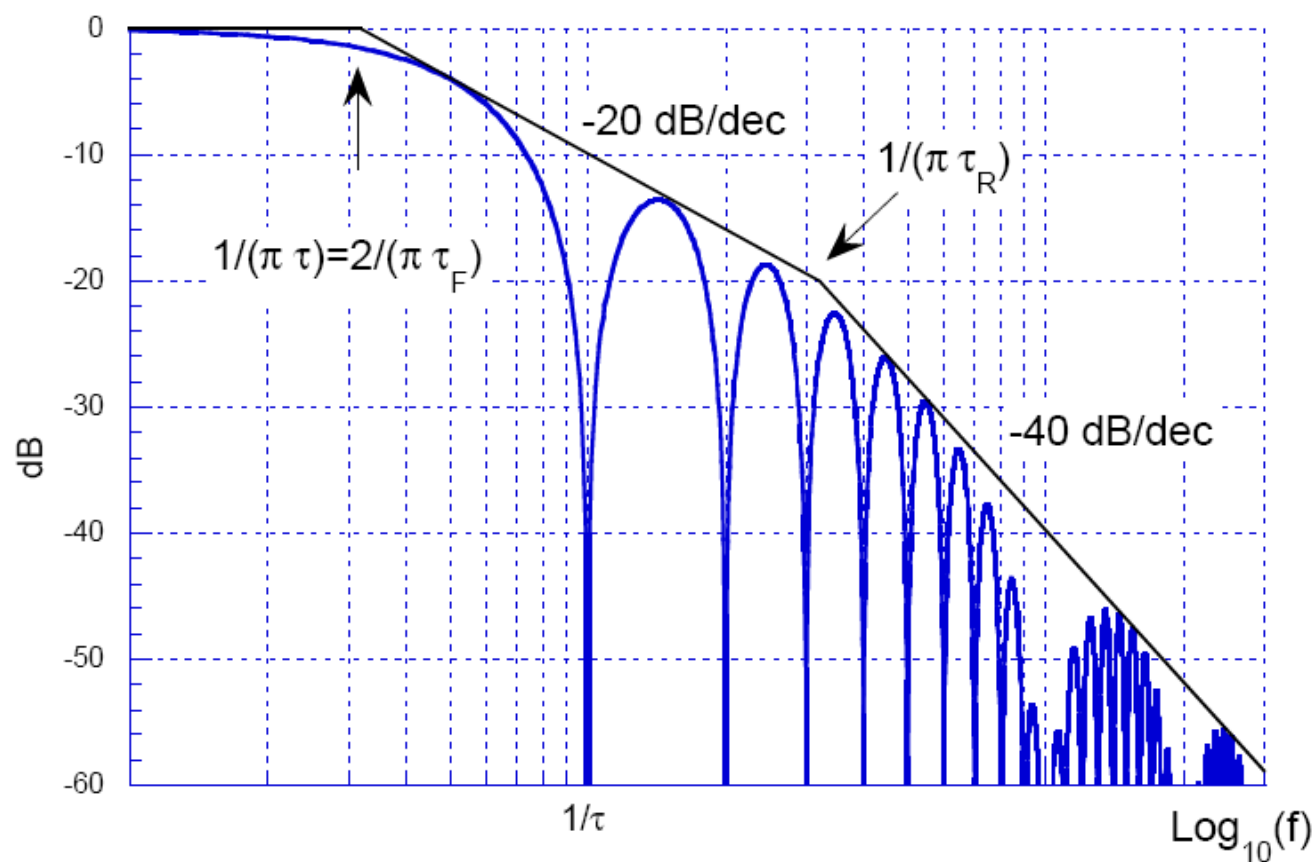
$$\tau = \frac{\tau_R + \tau_F}{2} \simeq \frac{\tau_F}{2}$$

E lo spettro diviene

$$E(\omega) = \frac{\Delta e}{\tau_R} \frac{e^{j\pi f \tau}}{2j(\pi f)^2} \sin(\pi f \tau_R) - \frac{\Delta e}{\tau_F} \frac{e^{-j\pi f \tau}}{2j(\pi f)^2} \sin(\pi f \tau_F)$$



## Impulso Triangolare







## Nota sulle ampiezze

I diagrammi di Bode mostrati sono normalizzati e presentano un massimo a 0 dB.

La trasformata di Fourier per sua natura è simmetrica e bilatera. Lo spettro di un qualunque segnale si estende su frequenze positive e negative.

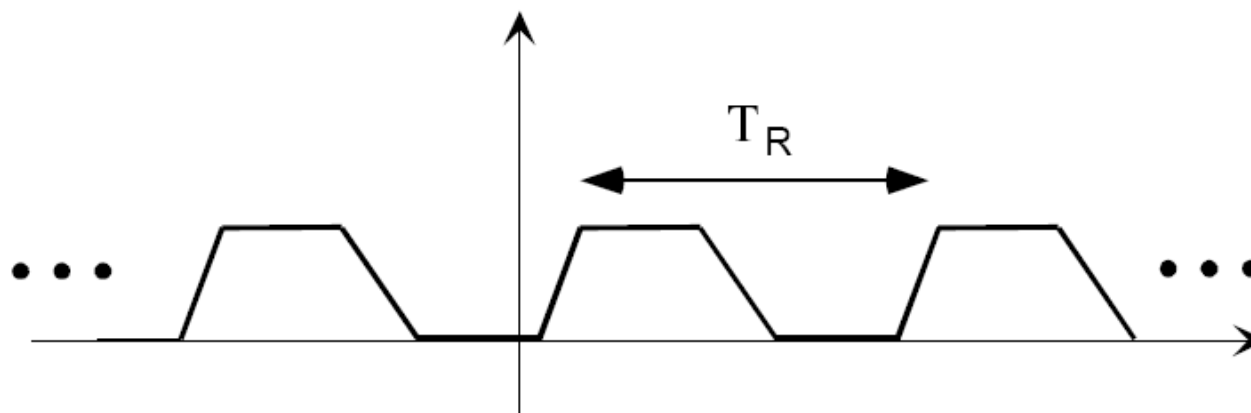
Per poter trattare correttamente il contenuto spettrale di energia del segnale, nel caso si vogliano utilizzare solo frequenze reali (positive) si deve passare alla trasformata di Fourier monolatera.

La trasformata di Fourier monolatera ha spettro definito solo per frequenze maggiori o uguali a zero, e, per  $f > 0$ , di **ampiezza doppia** rispetto alla trasformata di Fourier bilatera.



## Segnali Periodici

I limiti esposti per singoli segnali sono validi anche per ripetizioni regolari di questi segnali.



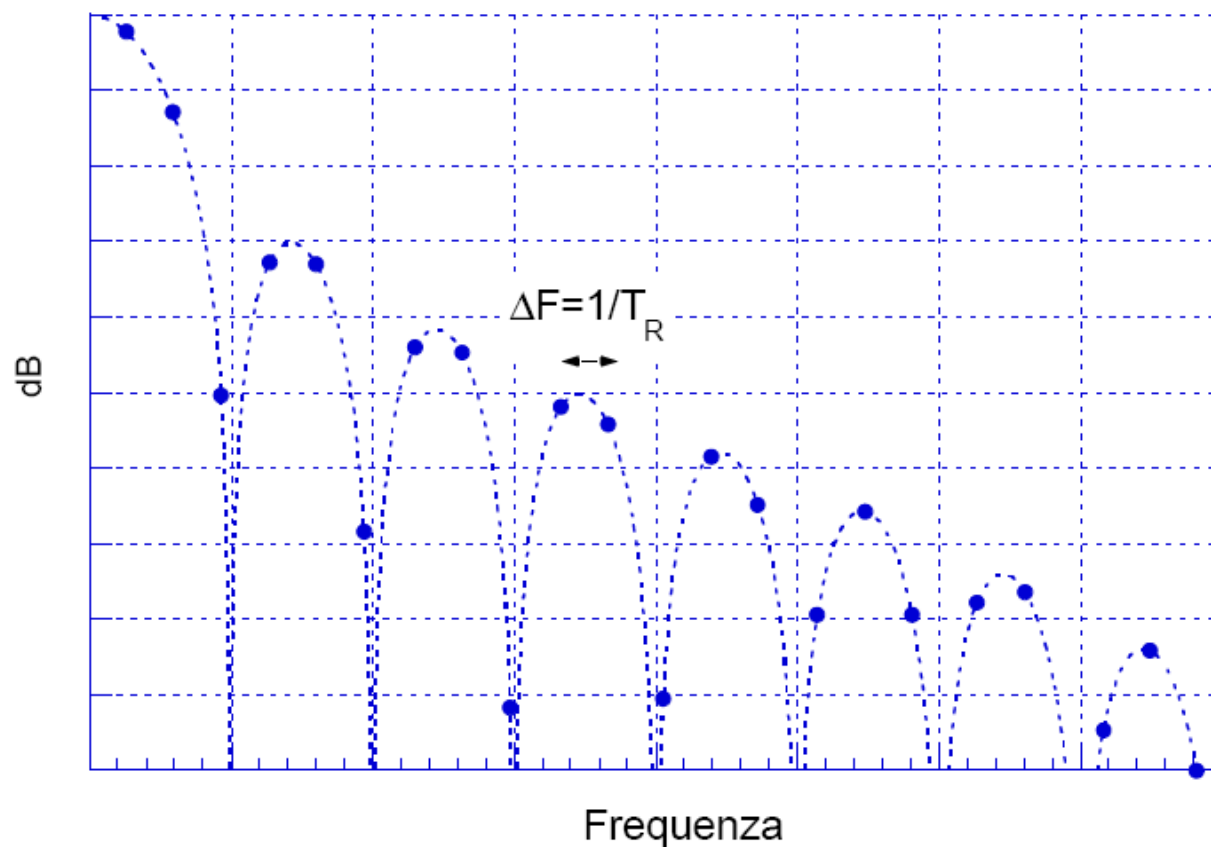
In presenza di un periodo di ripetizione  $T_R$  il segnale periodico infinito presenta uno spettro discreto che corrisponde al campionamento di passo  $1/T_R$  del segnale isolato

Si definisce *duty cycle* del treno di impulsi la quantità

$$\delta = \frac{\tau}{T_R}$$



## Segnali Periodici



Segnali con *duty cycle* inferiore a  $10^{-5}$  presentano un campionamento dello spettro talmente fitto da risultare a tutti gli effetti continuo e possono di conseguenza essere considerati aperiodici.



## Segnali Periodici

Alcuni esempi pratici di segnali periodici che possono causare interferenza

	$1/T_R$	$\tau$	$\delta$
Lampade fluorescenti	100Hz	$10^{-7}$ s	$10^{-5}$
Accensione motore a scoppio	0.1-1kHz	$10^{-8}$ s	$10^{-6}$ - $10^{-7}$
Relay	$10^{-3}$ Hz	$10^{-7}$ s	$10^{-10}$
Interruttore a muro	$10^{-4}$ Hz	$10^{-6}$ s	$10^{-10}$
Radar			$10^{-3}$
Clock			0.5



## Segnali Periodici

Appurato che lo spettro dei segnali periodici è costituito da un insieme discreto di armoniche è importante definire *quante* di queste armoniche sono significative.

Ovvero quante armoniche sono necessarie per ricostruire il segnale originario.

Questa procedura ci porta a definire la banda del segnale.

Come regola euristica si considera il secondo punto di ginocchio, quello dove la caratteristica scende a -40dB per decade e si prende mezza decade, ovvero  $\sqrt{10} = 3.16$  per garantirsi di essere ulteriori -20dB dal ginocchio.

Visto che il ginocchio si trova a  $f = 1/(\pi\tau_R)$  porsi a mezza decade da questo punto significa porsi a

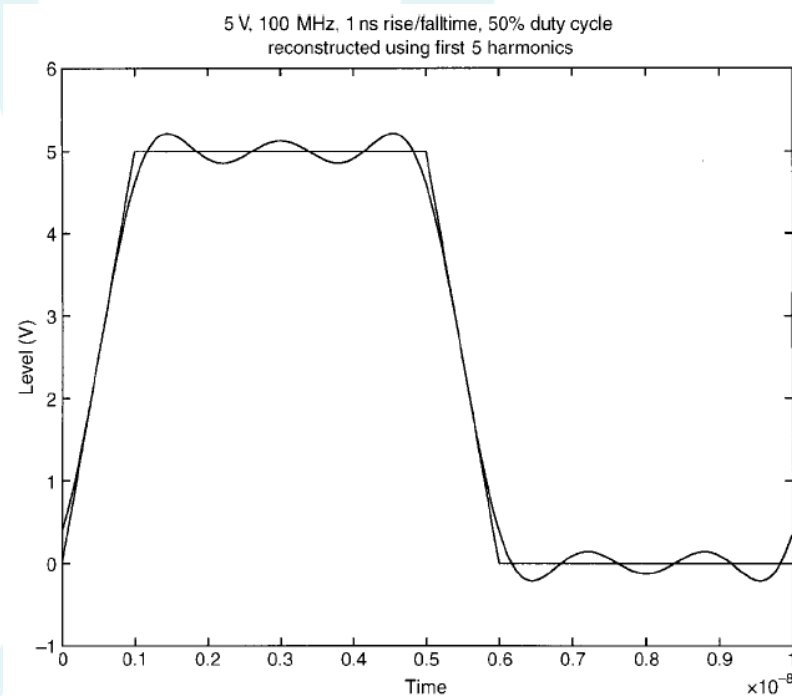
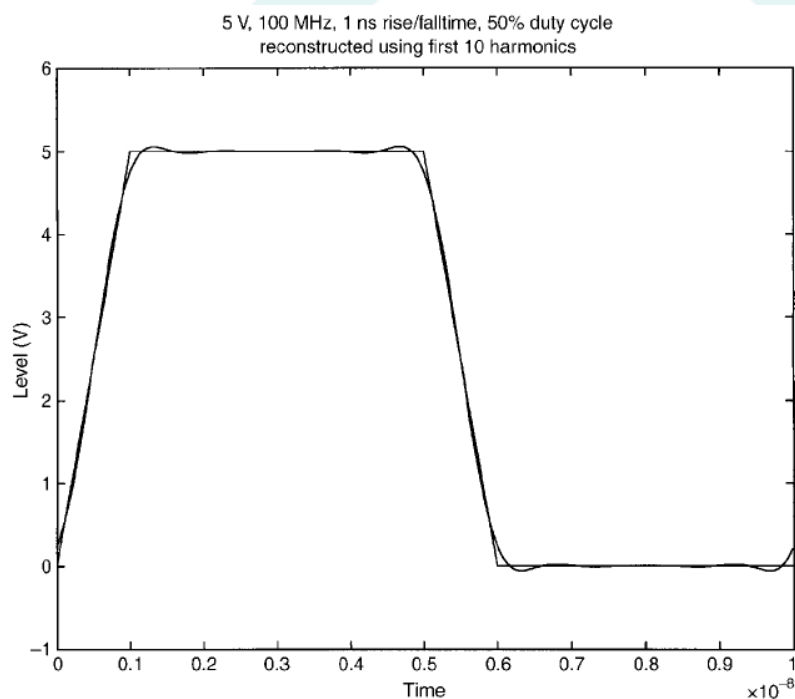
$$f = \frac{3.16}{\pi\tau_R} \approx \frac{1}{\tau_R}$$

Con questo criterio, per esempio, un impulso con tempo di salita pari a 1ns ha una banda di 1GHz



## Segnali Periodici

Consideriamo un segnale trapezoidale simmetrico con tempo di salita 1ns, frequenza di ripetizione 100MHz, duty cycle 0.5 e ampiezza della transizione 5V



Essendo la frequenza di ripetizione 100MHz le armoniche sono a 100, 200, 300,... MHz. Il tempo di salita di 1ns implica una banda di 1GHz e quindi 10 armoniche.



## Segnali Periodici

I coefficienti della serie di Fourier sono (spettro monolatero):

$$\begin{aligned}c_0 &= 2.5 & c_5^+ &= 0.4053 \\c_1^+ &= 3.131 & c_7^+ &= 0.1673 \\c_3^+ &= 0.9108 & c_9^+ &= 0.03865\end{aligned}$$

Oltre al termine in continua sono presenti solo i coefficienti dispari poiché il duty cycle è del 50%.

La potenza associata al segnale originario è

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt = V^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\tau_R}{T} \right] = 11.667W$$

Quella associata al segnale a banda limitata è

Per definizione si considera che  
il segnale si dissipi su un  
resistore da  $1\Omega$

$$P_{av} = c_0^2 + \frac{1}{2} c_1^{+2} + \frac{1}{2} c_3^{+2} + \frac{1}{2} c_5^{+2} + \frac{1}{2} c_7^{+2} + \frac{1}{2} c_9^{+2} = 11.663W$$

Il segnale a banda limitata trasporta quindi il 99.97% della potenza del segnale a banda infinita. Nel caso di 5 armoniche la potenza è del 99.84%. In entrambi i casi il segnale a banda limitata contiene praticamente tutta la potenza del segnale originario



## Segnali Periodici

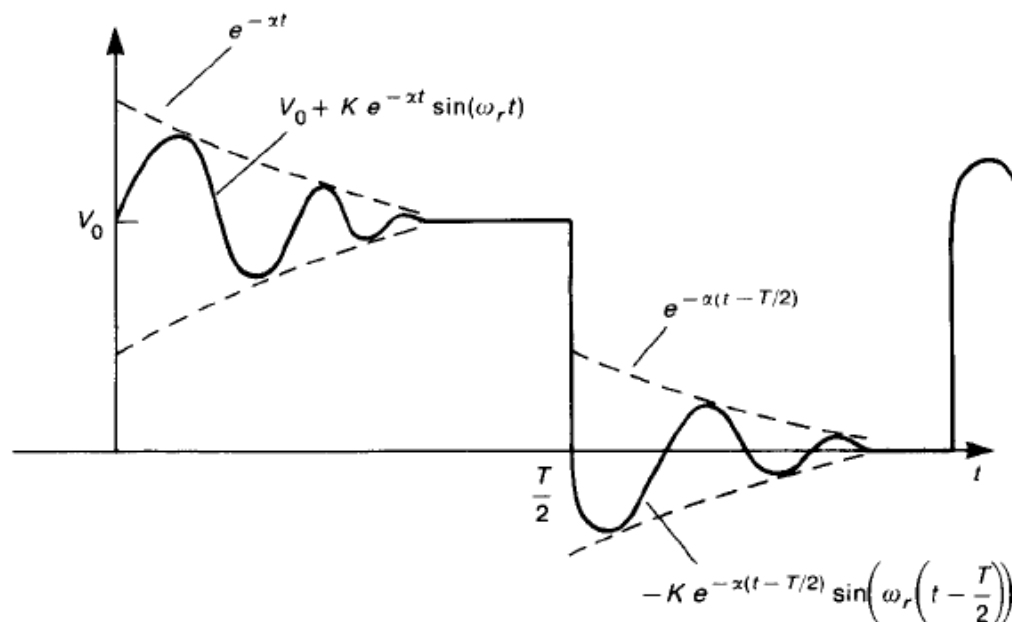
La presenza di componenti LC sul circuito può causare la presenza di risonanze che modificano le proprietà spettrali del treno di impulsi.

Questo si traduce nella superimposizione di una sinusoide smorzata del tipo

$$e^{-\alpha t} \sin(\omega_r t + \theta)$$

In coda a ogni transizione.

Il fenomeno è denominato *ringing*.

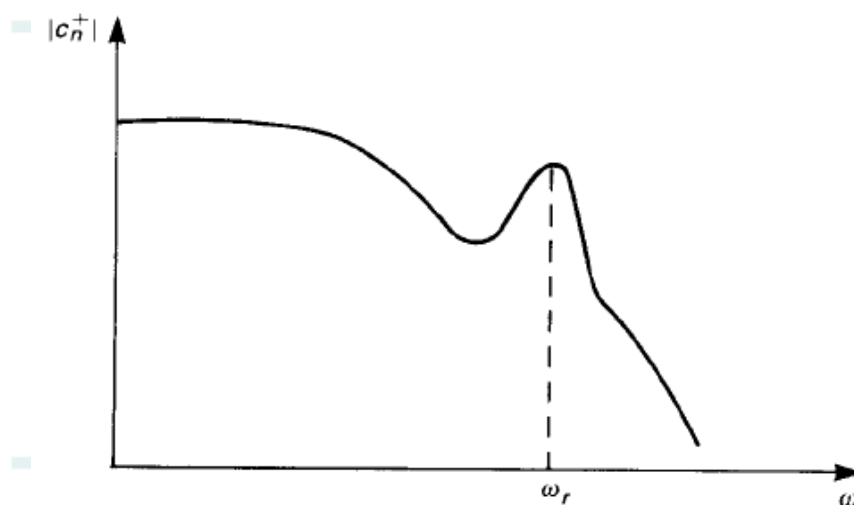






## Segnali Periodici

L'effetto sullo spettro, dal punto di vista qualitativo nasce un picco spettrale centrato su  $\omega_r$  che può portare lo spettro a superare la maschera





## Segnali in uscita da sistemi lineari

È possibile comporre le maschere del segnale viste in precedenza con le maschere della funzione di trasferimento di un sistema lineare per stimare lo spettro del segnale in uscita.

$x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \rightarrow$  segnale in ingresso

$h(t) \Leftrightarrow H(\omega) \rightarrow$  risposta impulsiva del sistema

$y(t) \Leftrightarrow Y(\omega) \rightarrow$  segnale in uscita

allora

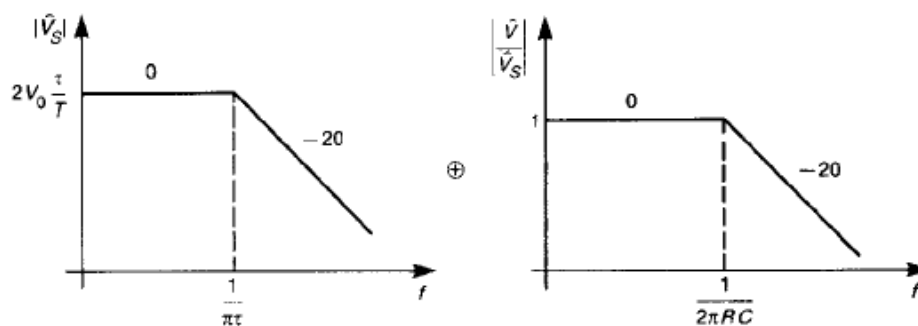
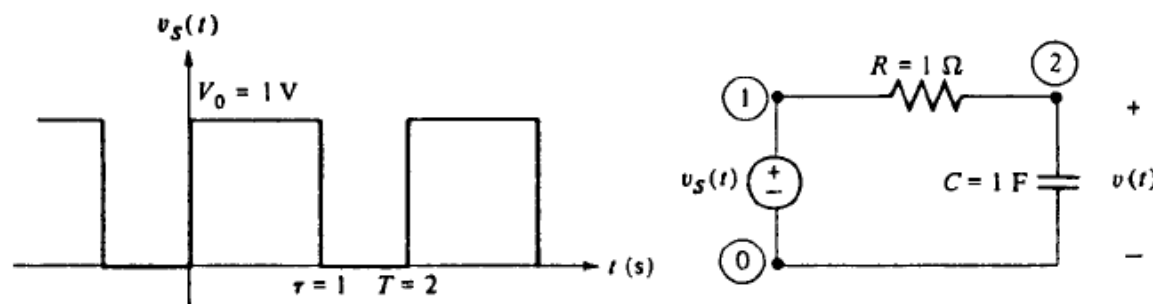
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| \times |X(\omega)| \Rightarrow 20\log_{10}|Y(\omega)| = 20\log_{10}|H(\omega)| + 20\log_{10}|X(\omega)|$$



## Segnali in uscita da sistemi lineari

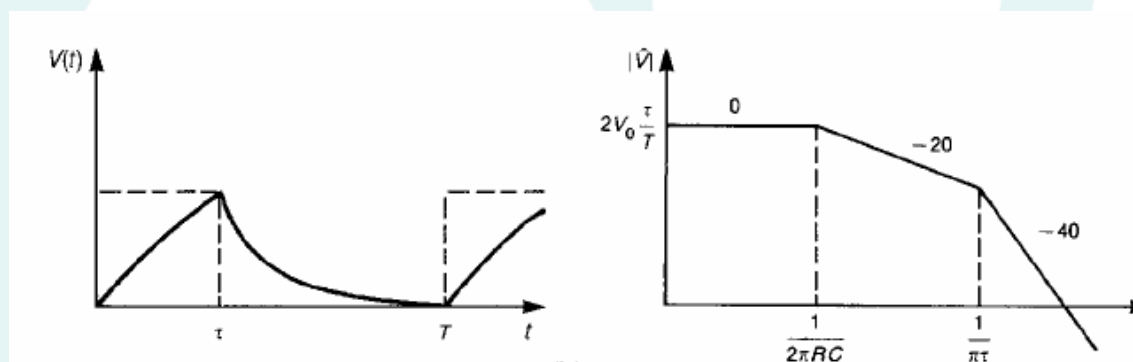
Consideriamo un'onda quadra ( $\tau_R=0$ ) con duty cycle 50% e ampiezza della transizione 1V applicata a un circuito RC. Sia il segnale d'uscita letto ai capi del condensatore.





## Segnali in uscita da sistemi lineari

$$\text{se } \frac{1}{\pi\tau} < \frac{1}{2\pi RC}, \text{ ovvero, } RC > \frac{1}{2}\tau$$

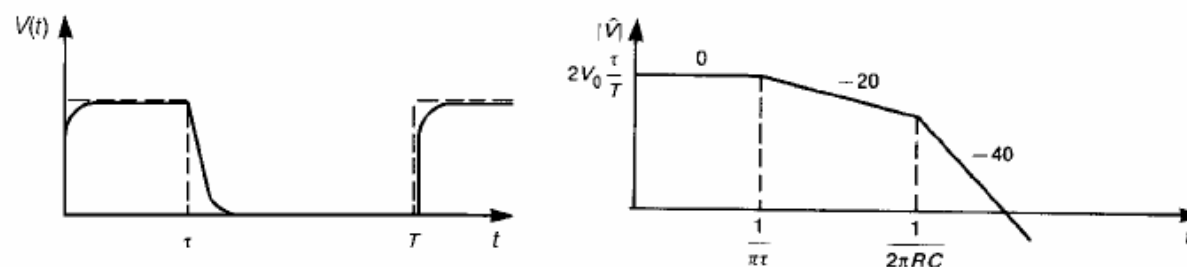


Se la costante di tempo  $RC$  è grande solo le componenti a più bassa frequenza del segnale sono inalterate e l'onda quadra tende a divenire triangolare, o a dente di sega, in quanto il condensatore non ha tempo di caricarsi completamente prima della successiva transizione del segnale.



## Segnali in uscita da sistemi lineari

$$\text{se } \frac{1}{\pi\tau} > \frac{1}{2\pi RC}, \text{ ovvero, } RC < \frac{1}{2}\tau$$



Se la costante di tempo  $RC$  è piccola solamente le componenti a frequenza più alta del segnale vengono significativamente ridotte e l'onda in uscita resta un'onda quadra con transizioni smussate.



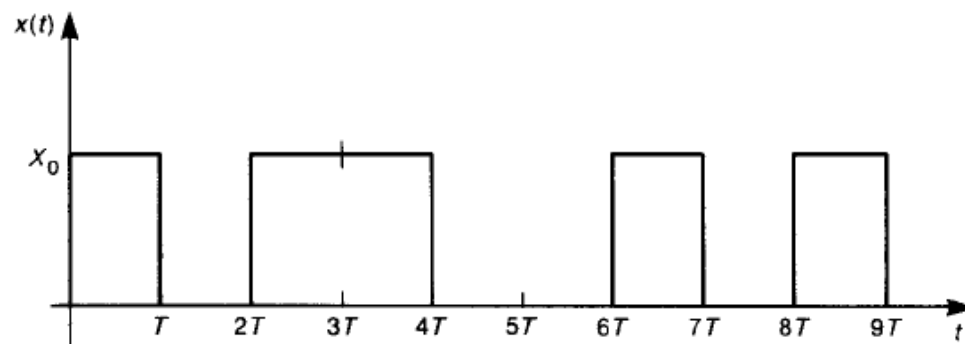
## Segnali Aperiodici

- ❖ Un segnale aperiodico è costituito da ripetizioni, a intervalli temporali diversi, di un impulso tipo.
- ❖ Un segnale aperiodico può essere studiato analizzando il comportamento dell'impulso tipo periodicizzato, ad ogni possibile periodo di ripetizione compreso fra il minimo e il massimo intervallo del segnale aperiodico
- ❖ Tale segnale periodicizzato ha uno spettro discreto il cui involucro non varia, ma dipende solo dall'impulso, mentre la sua frequenza di campionamento varia, dipendendo dal periodo di ripetizione.
- ❖ Si può quindi fare l'ipotesi conservativa che lo spettro del segnale aperiodico coincida con quello del singolo impulso.



## Segnali Randomici

- ❖ La dizione *segnale randomico* può essere fuorviante. Non si intende infatti un segnale casuale (rumore) ma un segnale non predicibile, quale quello che fluisce su una linea dati digitale.
- ❖ Prendiamo per esempio il segnale PCM-NRZ in figura (Pulse Code Modulation – Non Return to Zero)





## Segnali Randomici

- ❖ La trattazione di questi segnali può essere fatta partendo dalla considerazione che un segnale con una transizione dal livello 0 al livello  $X_0$  può essere rappresentato come

$$x(t) = \frac{1}{2} X_0 [1 + m(t)]$$

- ❖ Essendo  $m(t)$  una variabile aleatoria che assume il valori +1 o -1 (con eguale probabilità) all'interno del tempo di bit  $nT < t < (n+1)T$
- ❖ L'autocorrelazione di un segnale

$$R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}$$

- ❖ È data dal prodotto del segnale ed il segnale stesso, ritardato di  $\tau$ . Il soprasegno indica la media statistica su tutti i possibili segnali





## Segnali Randomici

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{4} X_0^2 \overline{[1 + m(t)][1 + m(t + \tau)]} = \\ &= \frac{1}{4} X_0^2 \left[ \overline{1 + m(t)} + \overline{m(t + \tau)} + \overline{m(t)m(t + \tau)} \right] = \\ &= \frac{1}{4} X_0^2 \left[ 1 + \overline{m(t)m(t + \tau)} \right] = \\ &= \frac{1}{4} X_0^2 [1 + R_m(\tau)] \end{aligned}$$

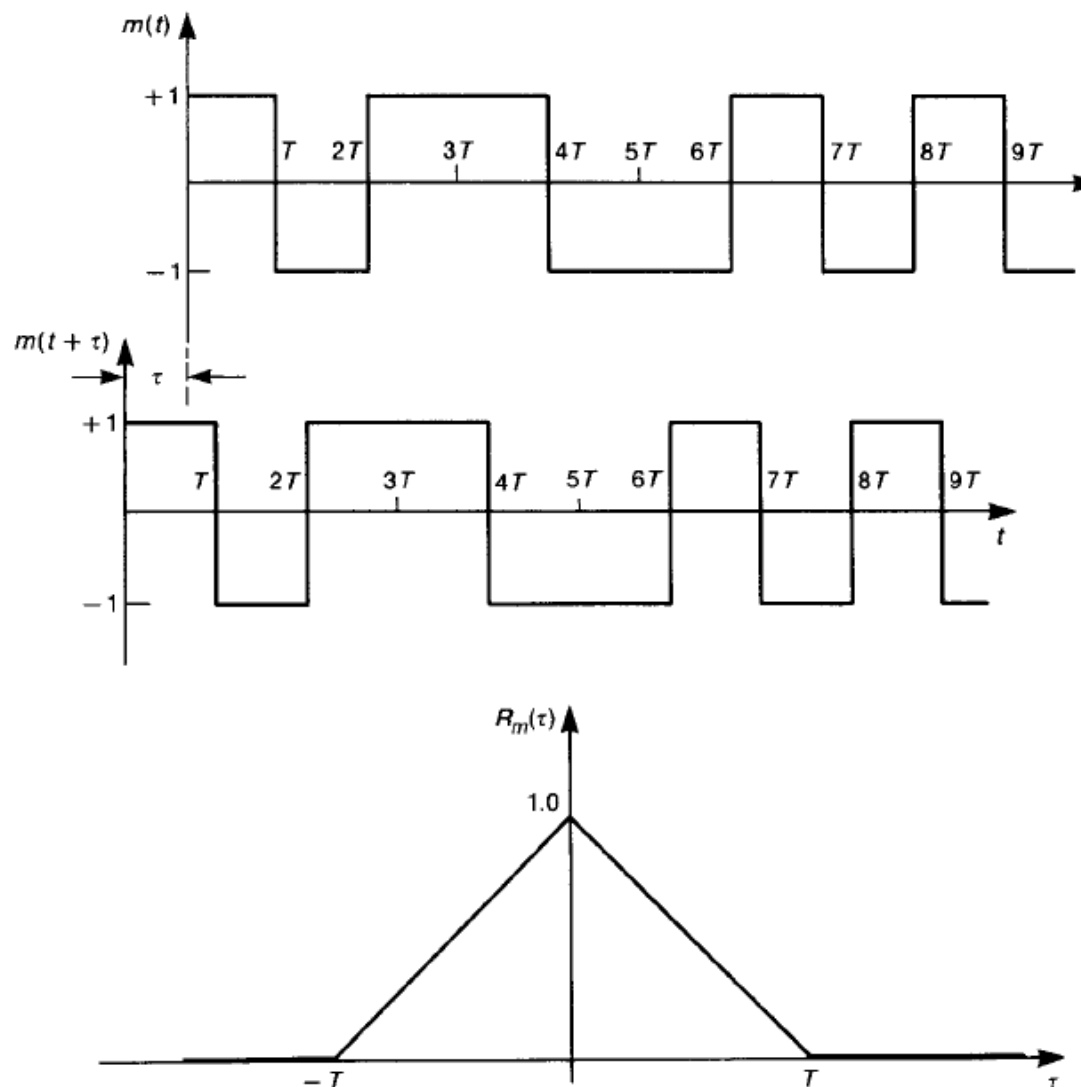
- ❖ È data dal prodotto del segnale ed il segnale stesso, ritardato di  $\tau$ . Il soprasegno indica la media statistica su tutti i possibili segnali



## Segnali Randomici

- ❖ Qualunque sia il segnale  $m(t)$  la sua autocorrelazione, trattandosi di segnali equiprobabili a media nulla, è legata alla sovrapposizione del primo bit

$$R_m(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$





## Segnali Randomici

- ❖ Ottenuto il valore dell'autocorrelazione del segnale è possibile caratterizzarne lo spettro applicando il teorema di Wiener-Kinchine, che afferma che la densità spettrale di potenza del segnale è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- ❖ E la potenza media associata al segnale può essere stimata come

$$P_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$$

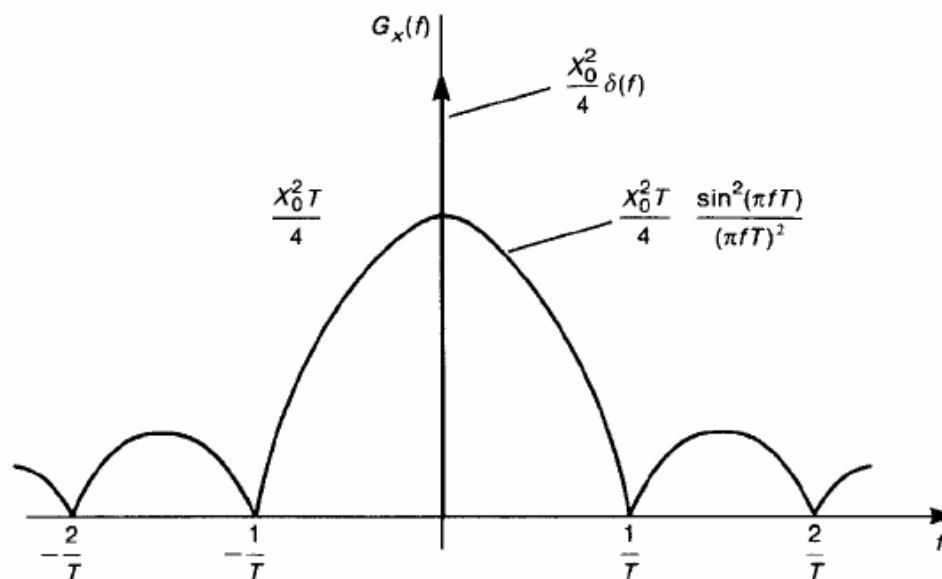
- ❖ Essa è la potenza media che ci si attende, dissipata su un resistore da  $1\Omega$ , per un segnale sufficientemente lungo affinché le medie statistiche siano significative.
- ❖ Nel nostro caso

$$G(\omega) = \frac{X_0^2}{4} \delta(\omega) + \frac{X_0^2 T}{4} \frac{\sin^2(\omega T / 2)}{(\omega T / 2)} \Rightarrow G(f) = \frac{X_0^2}{4} \delta(f) + \frac{X_0^2 T}{4} \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)} \quad \text{WHz}^{-1}$$



## Segnali Randomici

- ❖ Lo spettro è quindi:

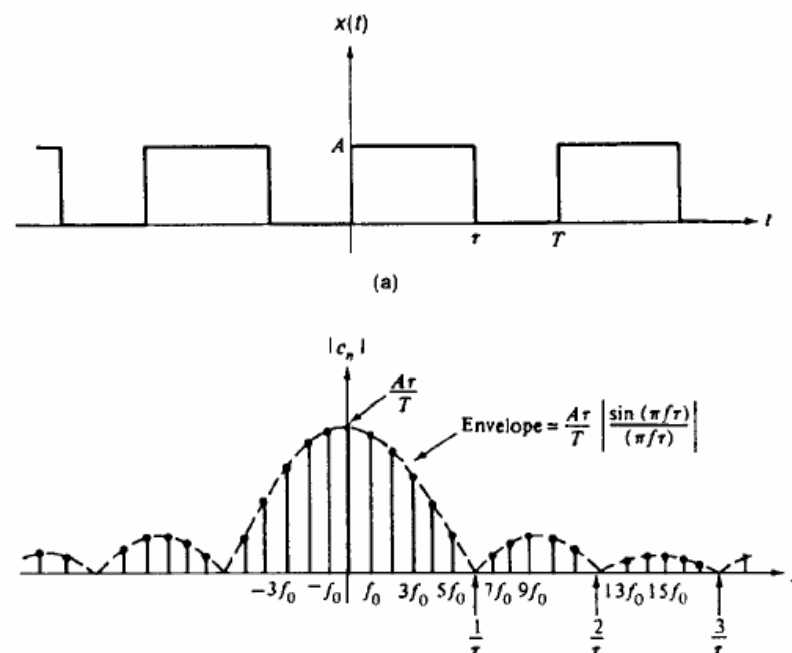
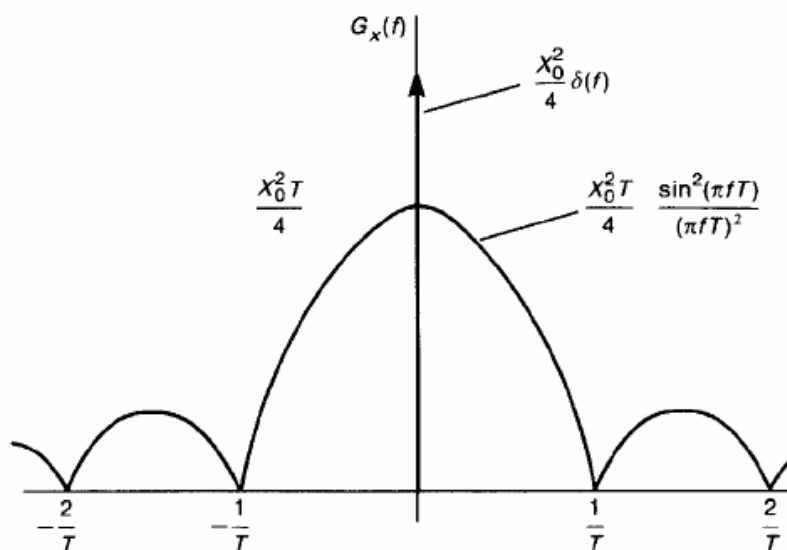


- ❖ Con zeri all'inverso del tempo di bit (ovvero il *bit rate*)
- ❖ Questa trattazione è però viziata dall'aver considerato nulli i tempi di salita e discesa.



## Segnali Randomici

- ❖ Se lo si paragona allo spettro di un segnale periodico analogo (stesso bit rate, ma deterministico, 1010101010.... si ha:



- ❖ Lo spettro è quindi sostanzialmente lo stesso ma continuo



## Segnali Randomici

- ❖ Di conseguenza possiamo dedurre, con sufficiente confidenza, che lo spettro di un segnale digitale con tempi di salita e discesa non nulli sia sostanzialmente analogo, ma continuo, allo spettro di un treno di impulsi periodici con pari tempi di salita e discesa.