

Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Ingegneria

PROPRIETÀ QUANTISTICHE DEL CAMPO ELETTRROMAGNETICO

Relazione di Complementi di Fisica
2007-2008

Autore

Laurent Ntibarikure, ntilau@gmail.com

Correlatore

Prof. Franco Bogani, bogani@unifi.it

Sommario

1. Introduzione.....	3
2. Oscillatore armonico semplice.....	4
2.1. Soluzioni dell'equazione di Schrödinger agli stati stazionari.....	5
2.2. Metodo di Dirac.....	6
3. Cavità risonante e problema elettromagnetico.....	11
3.1. Soluzioni spaziali della cavità risonante.....	13
3.2. Soluzioni temporali della cavità risonante.....	15
3.3. Energia immagazzinata.....	15
4. Quantizzazione dei modi di cavità.....	16
4.1. Quantizzazione di un sistema monomodale.....	16
4.2. Principio di indeterminazione e fluttuazioni dell'energia di punto zero.....	17
4.3. Stati quantici del campo elettromagnetico.....	18
4.4. Sistema multimodale.....	19
5. Energia di punto zero ed effetto Casimir.....	20
6. Conclusione.....	22
7. Bibliografia.....	23

1. Introduzione

Le onde elettromagnetiche, ipotizzate da Maxwell nel 1873 e successivamente confermate dagli esperimenti di Hertz nel 1886, hanno visto il loro impiego crescere esponenzialmente nel secolo scorso e molte sono le applicazioni odierne che ne prevedono l'utilizzo: ad esempio, i sistemi di telecomunicazione, i radar di telerilevamento, i forni a microonde, etc. Le equazioni di Maxwell costituiscono i pilastri della Teoria Elettromagnetica Classica, un potente strumento per trattare i campi elettromagnetici nel mondo macroscopico.

La fine del diciannovesimo secolo vide la nascita di una nuova percezione dei meccanismi di radiazione, in grado di risolvere i problemi di interazione della luce con la materia. Planck fu il primo, nel 1889, ad esplicitare la natura corpuscolare del campo elettromagnetico, dando spunto alla costruzione della Teoria quantistica del campo elettromagnetico, che successivamente portò ad una teoria generale, la Teoria quantistica dei campi. Nel 1927, Dirac riuscì a quantizzare il campo elettromagnetico impiegando il metodo canonico¹ di quantizzazione, e propose successivamente un metodo alternativo che fa uso di operatori adimensionali. Tale metodo si è rivelato decisamente più semplice per trattare l'evoluzione di sistemi quantistici. Oggi, la Teoria quantistica del campo elettromagnetico è oramai consolidata e vede la sua applicazione in molti settori industriali. Si pensi, per esempio, ai sistemi di illuminazione che vedono progressivamente aumentarne l'efficienza energetica con l'impiego di nuovi materiali, alle tecniche di fotorilevazione in campi visibili e non, oppure alle recenti celle fotovoltaiche.

Uno dei primi problemi che furono analizzati successivamente allo sviluppo della meccanica quantistica è quello dell'oscillatore armonico. Questo modello meccanico di considerevole importanza scientifica e tecnologica rappresenta una lunga serie di sistemi dinamici, descrivendo il comportamento di una particella confinata entro un potenziale quadratico. L'oscillatore armonico, rivisto in campo quantistico, è in grado di descrivere i modi vibrazionali delle molecole e le vibrazioni reticolari dei cristalli (fononi), ma anche i campi elettrici e magnetici delle onde elettromagnetiche (fotoni), in quanto rispondono ad equazioni dinamiche della stessa forma.

Un'analisi delle proprietà quantistiche del campo elettromagnetico può essere condotta sfruttando l'analogia tra le caratteristiche classiche dell'oscillatore armonico e quelle del campo elettromagnetico, riconducendo quindi i risultati ottenuti per l'oscillatore armonico quantistico ad una soluzione quantizzata del campo elettromagnetico.

Nella prima parte di questa relazione didattica verrà descritto l'oscillatore armonico classico e la derivazione di quello quantistico. Verrà poi presentato il problema elettromagnetico della cavità risonante, con successivo confronto coll'oscillatore armonico. Verrà quindi ricavato il modello quantistico di tale cavità per un singolo modo armonico, da cui estrapoleremo in seguito una trattazione multimodale.

¹ Il metodo di quantizzazione canonico si basa sull'individuazione di variabili canoniche a partire dalla lagrangiana del sistema, ottenendo quindi operatori coniugati in grado di agire su rappresentazioni vettoriali di stati quantistici.

2. Oscillatore armonico semplice

Si consideri una particella di massa m fissata ad una molla di costante elastica k . L'equazione che descrive il moto unidimensionale di tale particella è

$$F_x = m \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -k x(t) \quad (1)$$

dove x è la deviazione della particella rispetto alla posizione di equilibrio. Questa equazione può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (2)$$

dove $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ è la pulsazione dell'oscillatore. L'energia potenziale della particella si ricava integrando entrambi i lati della $-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -kx$ e l'energia cinetica è data da $E(x) = \int m \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} dx$. Si ottiene quindi

$$V(x) = -\int_0^x -k x' dx' = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2, \quad E(x) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}. \quad (3)$$

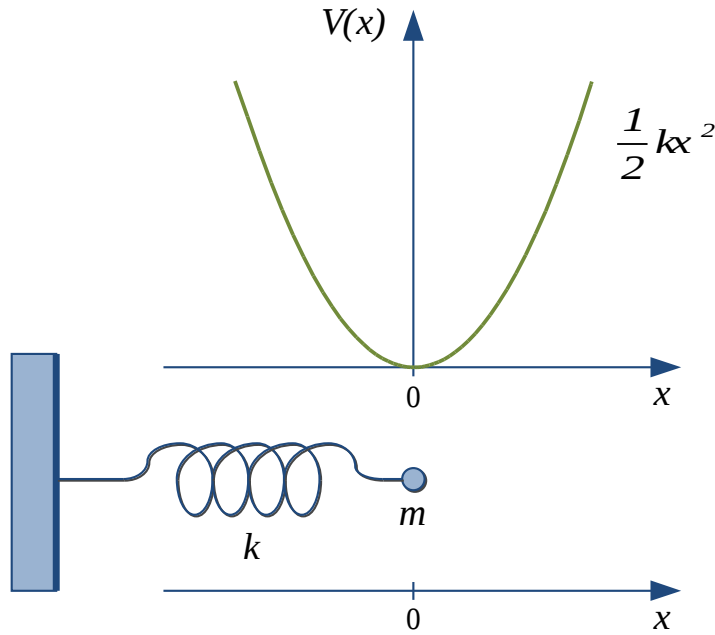


Fig. 1: Oscillatore armonico unidimensionale ed energia potenziale della particella

L'hamiltoniana classica del sistema è quindi $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$. Due metodi di quantizzazione dell'oscillatore armonico verranno presentati. Il primo è quello standard che prevede la risoluzione dell'equazione di Schrödinger agli stati stazionari, equazione differenziale a coefficienti variabili. Il secondo è basato sul formalismo di Heisenberg nell'elegante forma di Dirac, ossia un metodo che

sfrutta brillantemente le relazioni di commutazione tra gli operatori \hat{x} e \hat{p}_x per definire nuovi operatori adimensionali².

2.1. Soluzioni dell'equazione di Schrödinger agli stati stazionari

L'equazione di Schrödinger per il problema dell'oscillatore armonico è

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right] \Psi(x, t) \quad (4)$$

dove $p = \hbar k$, il momento lineare di de Broglie è stato sostituito con il suo valore di aspettazione $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

Affinché l'eguaglianza in (4) possa verificarsi è necessario che entrambi i membri eguagliano una funzione $\Psi(x, t)$ moltiplicata per una qualche costante reale. Chiamiamo E tale costante ed applichiamo il metodo della separazione delle variabili considerando $\Psi(x, t) = \phi(x) \psi(t)$. Si ottengono le seguenti equazioni

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = E \psi(t), \quad (5)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right] \phi(x) = E \phi(x) \quad \text{“Equazioni agli stati stazionari”}. \quad (6)$$

Dalla (6) siamo in grado di calcolare gli stati quantici dell'oscillatore armonico. La soluzione di una tale equazione è nota in quanto tale equazione può essere ricondotta con pochi passaggi all'equazione di Hermite di note soluzioni. Si procede con l'introduzione delle seguenti quantità adimensionali $v = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x$ e $\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega_0}$ giungendo quindi all'equazione di Hermite per l'oscillatore armonico

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \phi(v) + (\epsilon - v^2) \phi(v) = 0. \quad (7)$$

Quest'equazione viene risolta espandendo in serie di potenze $\phi(v)$ ed individuando una relazione di ricorsione tra i coefficienti della serie. Infine si ottengono le soluzioni normalizzate³ della (7) che corrispondono agli stati legati dell'oscillatore armonico

$$\phi_n(v) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{\frac{v}{x\sqrt{\pi}}} H_n(v) e^{-\frac{v^2}{2}} \Rightarrow \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}} \quad (8)$$

dove $H_n(v) = (-1)^n e^{v^2} \frac{\partial^n}{\partial v^n} e^{-v^2}$ sono i polinomi di Hermite.

Gli autovalori dell'energia corrispondenti agli stati n sono dati da $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0$, relazione ricavata dai coefficienti della serie, e lo stato fondamentale $n=0$ possiede energia non nulla uguale ad

2 Questi operatori sono attribuiti a V. A. Fock che per primo gli impiegò nella descrizione del comportamento di particelle quantistiche.

3 Il coefficiente di normalizzazione $\sqrt{\frac{v}{x\sqrt{\pi}}}$ nella (8) si ottiene sfruttando la proprietà della gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ed imponendo che $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \phi_n(x) dx = 1$

⁴. Quest'ultima rappresenta, sulla base del principio di indeterminazione di Heisenberg, le fluttuazioni della particella intorno al punto di equilibrio in $x=0$ ⁵. In figura 2 vengono illustrate le autofunzioni $\phi_n(x)$ dei primi due stati eccitati e di quello fondamentale che riconosciamo dall'andamento a gaussiana.

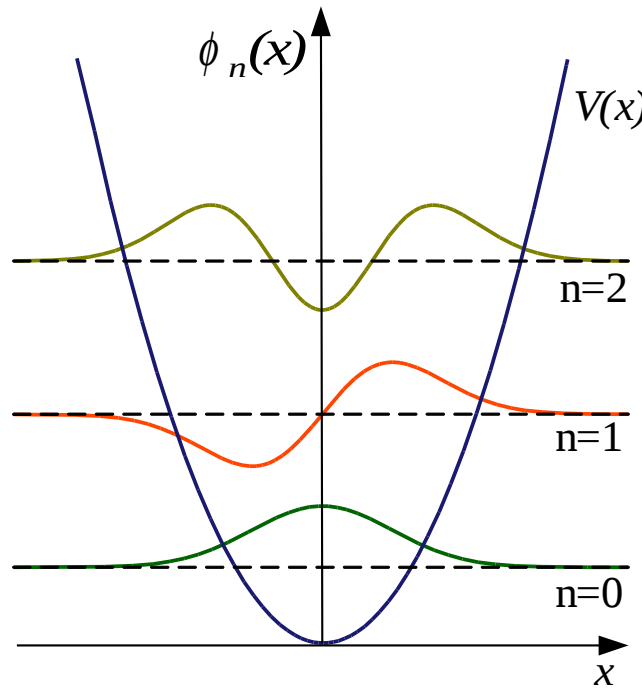


Fig. 2: Autofunzioni $\phi_n(x)$ confinate nel potenziale quadratico dell'oscillatore armonico semplice

2.2. Metodo di Dirac

Ricaviamo in primo luogo l'equazione del moto di Heisenberg. L'hamiltoniana quantistica $\hat{H} = \frac{\hat{p}_{xt}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \hat{x}_t^2$ corrisponde a quella classica in cui le variabili canoniche x e p sono sostituite dagli operatori \hat{x}_t e \hat{p}_{xt} . Siamo quindi in grado di ricavare le relazioni temporali tra tali operatori utilizzando il teorema di Ehrenfest:

$$\frac{\partial \hat{x}_t}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}_t] = \frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{\hat{p}_{xt}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \hat{x}_t^2 \right), \hat{x}_t \right] = \frac{\hat{p}_{xt}}{m} \quad (9)$$

dove si è utilizzata la relazione $[\hat{p}_{xt}^2, \hat{x}_t] = -i2\hbar \hat{p}_{xt}$ ⁶. Procedendo analogamente si giunge alla

$$\frac{\partial \hat{p}_t}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}_{xt}] = -m\omega_0^2 \hat{x}_t. \quad (10)$$

⁴ Si noti che l'energia dello stato fondamentale si ottiene imponendo $\epsilon=1$

⁵ Da un punto di vista classico, pur essendo a riposo, l'oscillatore armonico sarebbe in grado di oscillare. Quantisticamente lo si può intuire come se, qualora stesse effettivamente a riposo, qualsiasi esperimento che tentasse di rilevarne lo stato lo ponesse in uno stato oscillatorio ad energia non nulla.

⁶ $[\hat{p}_{xt}^2, \hat{x}_t] = \hat{p}_{xt}(\hat{p}_{xt}\hat{x}_t) - \hat{x}_t\hat{p}_{xt}^2 = \hat{p}_{xt}(\hat{x}_t\hat{p}_{xt} - i\hbar) - \hat{p}_{xt}^2\hat{x}_t = (\hat{x}_t\hat{p}_{xt} - i\hbar)\hat{p}_{xt} - i\hbar\hat{p}_{xt} - \hat{x}_t\hat{p}_{xt}^2 = -i2\hbar\hat{p}_{xt}$ ricordando il commutatore $[\hat{x}_t, \hat{p}_{xt}] = \hat{x}_t\hat{p}_{xt} - \hat{p}_{xt}\hat{x}_t = i\hbar$

Dalle (9) e (10) si ottiene infine l'equazione del moto di Heisenberg $\frac{\partial^2 \hat{x}_t}{\partial t^2} + \omega_0^2 \hat{x}_t = 0$ che ha la stessa forma di quella classica.

Introduciamo gli operatori adimensionali di creazione ed annichilazione. Questi operatori permettono, come vedremo, di ricavare in modo semplice ed elegante gli autovalori associati all'energia del sistema, contrariamente a quanto avveniva col metodo presentato nel paragrafo 2.1. L'operatore di creazione per l'oscillatore armonico è

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left(\hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{m\omega_0} \right), \quad (11)$$

coniugato hermitiano⁷ dell'operatore di annichilazione⁸

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}_x}{m\omega_0} \right). \quad (12)$$

Possiamo risolvere la derivata temporale dell'operatore di creazione $\frac{\partial}{\partial t} \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{x} - i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{p}_x}{m\omega_0} \right)$ sfruttando le (9) e (10). Si giunge alla relazione $\frac{\partial}{\partial t} \hat{a}^\dagger = i\omega_0 \hat{a}^\dagger$, la quale ha come soluzione quella dell'onda piana $\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) e^{-i\omega_0 t}$ ed è tale per cui il commutatore $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger]$ sia non nullo.

Si può procedere con la riformulazione dell'hamiltoniana nel modo seguente:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{m\omega_0}{2\hbar} \left(\hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{m\omega_0} \right) \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}_x}{m\omega_0} \right) = \frac{m\omega_0}{2\hbar} \left(\frac{\omega_0}{\omega_0} \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{m^2 \omega_0^2} + \frac{i}{m\omega_0} (\hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x}) \right) \quad (13)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{\hbar\omega_0} \left(\frac{m\omega_0^2}{2} \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + i \frac{\hbar\omega_0}{2\hbar} [\hat{x}, \hat{p}_x] \right) \quad (14)$$

Si riconosce al secondo membro della (14) la somma dell'hamiltoniana (parte reale) e del commutatore (parte immaginaria) $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$. Si ottiene quindi che

$$\hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2} \hbar\omega_0, \quad (15)$$

e l'hamiltoniana può essere riscritta nel modo seguente:

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0. \quad (16)$$

Procedendo analogamente per $\hat{a} \hat{a}^\dagger$ si ottiene che:

$$\hbar\omega_0 \hat{a} \hat{a}^\dagger = \hat{H} + \frac{1}{2} \hbar\omega_0. \quad (17)$$

⁷ Il coniugato hermitiano di una matrice H è la sua trasposizione coniugata: $H^\dagger = (H^T)^*$

⁸ Questi operatori possono essere ottenuti a partire dall'hamiltoniana, dividendo indipendentemente la radice di ciascun termine di energia per $\sqrt{\hbar\omega_0}$, poi ponendoli nel piano complesso rendendo l'energia potenziale immaginaria: $\left(\frac{\sqrt{\frac{\hat{p}_x^2}{2m}}}{\sqrt{\hbar\omega_0}} \pm i \frac{\sqrt{\frac{1}{2}m\omega_0^2 \hat{x}_t^2}}{\sqrt{\hbar\omega_0}} \right)$.

Sottraendo la (15) alla (17), ne consegue che il commutatore tra operatori di creazione ed annichilazione è $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Valutiamo altre proprietà di questi nuovi operatori che ci permetteranno di facilitare la derivazione degli stati dell'oscillatore armonico e delle loro dinamiche. Dalle (15) e (17) si ricava il commutatore $[\hat{a}, \hat{H}]$, moltiplicando nella prima per \hat{a} a sinistra e nella seconda a destra:

$$\hbar\omega_0\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}\hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{a}, \quad (18)$$

$$\hbar\omega_0\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{H}\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{a}. \quad (19)$$

Sottraendo la (19) alla (18) si ottiene quindi il commutatore $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}\hat{H} - \hat{H}\hat{a} = \hbar\omega_0\hat{a}$. Il commutatore $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ci permette di ricavare un'altra proprietà: moltiplicando per \hat{a}^\dagger a sinistra del commutatore si ottiene $\hat{a}^\dagger \cdot [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a}^\dagger - (\hat{a}^\dagger)^2\hat{a} = [\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^2] - \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \cdot 1$. Si vede quindi che $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^2] = 2\hat{a}^\dagger$ ed operando ricorsivamente sui commutatori ottenuti si giunge alla formula generale $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$ con n intero positivo.

Supponiamo adesso di avere H' autovalore di \hat{H} (operatore hermitiano quindi con autovalori reali) e $|H'\rangle$ il ket⁹ associato. Dalla (15) si ottiene che

$$\hbar\omega_0\langle H'|\hat{a}^\dagger\hat{a}|H'\rangle = \langle H'|\hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega_0|H'\rangle = \left(H' - \frac{1}{2}\hbar\omega_0\right)\langle H'|H'\rangle. \quad (20)$$

Siccome $\langle H'|\hat{a}^\dagger\hat{a}|H'\rangle$ è il quadrato del ket $\hat{a}|H'\rangle$, allora si può dire che $\langle H'|\hat{a}^\dagger\hat{a}|H'\rangle \geq 0$ e l'uguaglianza si verifica solo se $\hat{a}|H'\rangle = 0$. Si ha anche che $\langle H'|H'\rangle > 0$ in uno spazio ortonormale di vettori non nulli. Quindi dalla (20) si conclude che $H' \geq \frac{1}{2}\hbar\omega_0$. L'energia minima del sistema è $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ e questo risultato si ottiene solo se $\hat{a}|H'\rangle = 0$.

Dal commutatore $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}\hat{H} - \hat{H}\hat{a} = \hbar\omega_0\hat{a}$ si ottiene che

$$\hat{H}\hat{a}|H'\rangle = (\hat{a}\hat{H} - \hbar\omega_0\hat{a})|H'\rangle = (H' - \hbar\omega_0)\hat{a}|H'\rangle. \quad (21)$$

Se $H' \neq \frac{1}{2}\hbar\omega_0$, allora $\hat{a}|H'\rangle \neq 0$ ed è un autoket associato all'autovalore $(H' - \hbar\omega_0)$. Si può ripetere il ragionamento considerando questo nuovo autovalore come associato all'operatore \hat{H} , purché rimanga vera la disuguaglianza $(H' - \hbar\omega_0) \neq \frac{1}{2}\hbar\omega_0$, così non violare la relazione di limite inferiore $H' \geq \frac{1}{2}\hbar\omega_0$. Otteniamo quindi la serie di autovalori $H', H' - \hbar\omega_0, H' - 2\hbar\omega_0, H' - 3\hbar\omega_0, \dots$.

Procedendo questa volta col complesso coniugato del commutatore $[\hat{a}, \hat{H}]$ quindi con $\hat{H}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger$ si ottiene la relazione

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger|H'\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{H} + \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger)|H'\rangle = (H' + \hbar\omega_0)\hat{a}^\dagger|H'\rangle \quad (22)$$

che dimostra, analogamente a quanto fatto precedentemente, che $(H' + \hbar\omega_0)$ è un autovalore di \hat{H} e che $\hat{a}^\dagger|H'\rangle$ è un autoket associato a tale operatore purché sia non nullo. In effetti, nel caso di

⁹ Il ket è una base di autovettori appartenente allo spazio di Hilbert che ne rappresenta lo stato.

$\hat{a}^+|H'\rangle=0$ si avrebbe, moltiplicando a destra per $\hbar\omega_0\hat{a}$ ed usando la (17), che $0=\hbar\omega_0\hat{a}\hat{a}^+|H'\rangle=(\hat{H}+\frac{1}{2}\hbar\omega_0)|H'\rangle=(H'+\frac{1}{2}\hbar\omega_0)|H'\rangle$, la quale violerebbe la condizione $H'\geq\frac{1}{2}\hbar\omega_0$. Si ottengono con questo procedimento gli autovalori della serie $H', H'+\hbar\omega_0, H'+2\hbar\omega_0, H'+3\hbar\omega_0, \dots$.

Gli autovalori dell'hamiltoniana sono quindi la successione infinita dei numeri $\frac{1}{2}\hbar\omega_0, \frac{3}{2}\hbar\omega_0, \frac{5}{2}\hbar\omega_0, \frac{7}{2}\hbar\omega_0, \dots$, possibili valori di energia per l'oscillatore armonico. Si comprende adesso il significato del nome assegnato agli operatori adimensionali: quello di annichilazione relativamente alla (21), in cui la sua applicazione sottrae al sistema un quanto di energia pari $\hbar\omega_0$ e quello di creazione che ne aggiunge, riferendosi alla (22).

Definiamo $|\phi_0\rangle$ l'autoket normalizzato¹⁰ di \hat{H} appartenente allo stato di minor energia corrispondente all'autovalore $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ per il quale si ha $\hat{a}|H'\rangle=0$. È possibile formare la sequenza di kets sulla base di $|\phi_0\rangle$ applicando l'operatore di creazione. Ne derivano i kets $(\hat{a}^+)^n|\phi_0\rangle$ ai quali corrispondono gli autovalori $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_0$ con $n=0, 1, 2, \dots$ stati del sistema.

Dalle relazioni $[\hat{a}, (\hat{a}^+)^n]=n(\hat{a}^+)^{n-1}$ e $\hat{a}|\phi_0\rangle=0$ si ricava che

$$\hat{a}\hat{a}^{+n}|\phi_0\rangle=n\hat{a}^{+n-1}|\phi_0\rangle. \quad (23)$$

Siamo in grado di passare da uno stato all'altro del sistema operando \hat{a}^+ oppure \hat{a} ad un ket $\hat{a}^{+n}|\phi_0\rangle$, ottenendo i ket $\hat{a}^{+n+1}|\phi_0\rangle$ o $n\hat{a}^{+n-1}|\phi_0\rangle$ ad esso proporzionali. I ket $\hat{a}^{+n}|\phi_0\rangle$ formano un set completo in grado di rappresentare gli stati dell'oscillatore armonico con valore energetico $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_0$.

Vogliamo adesso un insieme completo di kets ortonormali col quale potremo rappresentare qualsiasi funzione di stato Φ dell'oscillatore armonico, ossia nella serie di potenze $(\hat{a}^+)^n|\phi_0\rangle$. Si deve valutare il rapporto di proporzionalità tra i diversi kets del nostro insieme. Definiamo gli autokets normalizzati $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$ tali che il loro bra-ket (prodotto interno) sia unitario $\langle\phi_0|\phi_0\rangle=\langle\phi_1|\phi_1\rangle=\langle\phi_2|\phi_2\rangle=\langle\phi_3|\phi_3\rangle=\dots=\langle\phi_n|\phi_n\rangle=1$. Prima di procedere nella normalizzazione, vediamo una proprietà interessante degli operatori di creazione ed annichilazione: l'“operatore numero” $\hat{a}^+\hat{a}$. Appliciamo l'hamiltoniana ad un generico ket $|\phi_n\rangle$:

$$\hat{H}|\phi_n\rangle=\left(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0|\phi_n\rangle \Leftrightarrow E_n|\phi_n\rangle=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_0|\phi_n\rangle \quad (24)$$

da cui ricaviamo la proprietà $\hat{a}^+\hat{a}|\phi_n\rangle=n|\phi_n\rangle$. Quindi applicare $\hat{a}^+\hat{a}$ ad un ket che rappresenta un generico stato del sistema significa individuarne il livello.

Proseguiamo con la normalizzazione definendo in primo luogo α_n , una costante di proporzionalità reale tra kets di stati successivi tale che

$$\hat{a}^+|\phi_n\rangle=\alpha_n|\phi_{n+1}\rangle \quad (25)$$

¹⁰ Per cui vale $\langle\phi_0|\phi_0\rangle=1$

Visto che $|\phi_n\rangle$ e $|\phi_{n+1}\rangle$ sono normalizzati e sfruttando la relazione di commutazione $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]=1$, il *bra-ket* del membro sinistro della (25) è

$$\langle \phi_n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | (1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}) | \phi_n \rangle = (1+n) \langle \phi_n | \phi_n \rangle = n+1 \quad (26)$$

e quello del membro destro è

$$\langle \phi_n | \alpha_n \alpha_n | \phi_n \rangle = (\alpha_n)^2 \langle \phi_n | \phi_n \rangle = (\alpha_n)^2. \quad (27)$$

Dalle (26) e (27) si deduce che $\alpha_n = \sqrt{n+1}$. La (25) diventa quindi $\hat{a}^\dagger |\phi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle$. Procedendo analogamente per l'operatore di annichilazione, si può dimostrare che $\hat{a} |\phi_n\rangle = \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle$. Ad esempio, utilizzando l'operatore di creazione, le costanti che legano lo stato $|\phi_3\rangle$ a quelli sottostanti sono

$$|\phi_3\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{3}} |\phi_2\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{\sqrt{3 \cdot 2}} |\phi_1\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^3}{\sqrt{3!}} |\phi_0\rangle \quad (28)$$

e in generale vale la relazione

$$|\phi_n\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}} |\phi_{n-1}\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\phi_0\rangle \quad (29)$$

Possiamo infine ricavare le autofunzioni $\phi_n(x)$, senza dover risolvere alcuna equazione differenziale a coefficienti variabili. Iniziamo col ricavare la $\phi_0(x)$ dello stato fondamentale per costruire le autofunzioni di livello superiore. Per fare ciò si sfrutta il fatto che $\hat{a} |\phi_0\rangle = 0$ e si sostituisce \hat{a} col suo valore definito in (12). Si ottiene quindi il seguente *ket*

$$\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}_x}{m\omega_0} \right) |\phi_0\rangle = 0 \quad (30)$$

Il seguente prodotto *bra-ket* in (31) è tale da fornirci informazioni sullo stato del sistema rispettivamente alla variabile di posizione x .

$$\langle x' | \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left(\hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{m\omega_0} \right) |\phi_0\rangle = 0 \quad (31)$$

L'applicazione dell'operatore \hat{a} sul *bra* $\langle x' |$ fornisce la seguente relazione

$$\left[\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} x' + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \frac{\partial}{\partial x'} \right] \langle x' | \phi_0 \rangle \quad (32)$$

dove $\langle x' | \phi_0 \rangle$ corrisponde alla funzione di stato $\phi_0(x)$. Dobbiamo adesso risolvere una semplice equazione differenziale del primo ordine nella variabile x' :

$$\frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \phi_0 \rangle + \frac{m\omega_0}{\hbar} x' \langle x' | \phi_0 \rangle = 0 \quad (33)$$

La soluzione è della forma

$$\langle x' | \phi_0 \rangle = C_0 e^{-\frac{m\omega_0 x'^2}{2\hbar}}, \quad (34)$$

e C_0 viene scelto uguale a $\left(\frac{m\omega_0}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$ in modo da normalizzare la funzione dello stato fondamentale. Per ottenere gli stati eccitati è sufficiente utilizzare la (29). Ne risulta

$$\langle x' | \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} | \phi_0 \rangle = \langle x' | \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left(\hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{m\omega_0} \right) \right)^n | \phi_0 \rangle \quad (35)$$

che giunge, sostituendo $\langle x' | \phi_0 \rangle$ col valore ottenuto in (34), a

$$\langle x' | \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} | \phi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega_0}} \right)^n \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x} - m\omega_0 x \right)^n \left(\frac{m\omega_0}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}}. \quad (36)$$

La soluzione ricorsiva del problema permette di limitarsi ad operazioni di derivazione del primo ordine, facilitando la deduzione delle funzioni di stato.

3. Cavità risonante e problema elettromagnetico

Supponiamo di avere una cavità risonante a pareti di conduttore elettrico perfetto. Quest'ipotesi permette la trattazione della cavità indipendentemente dalla frequenza del modo. In effetti, a frequenze maggiori delle microonde e onde millimetriche, il modello con conduttore reale cade e gli effetti di interazione campo-materia non si possono più trascurare. Questi effetti si manifestano in perdite per attenuazione del campo. La quantizzazione di un problema realistico necessiterebbe di un modello quantistico della cavità, considerando quindi le interazioni del campo col metallo.

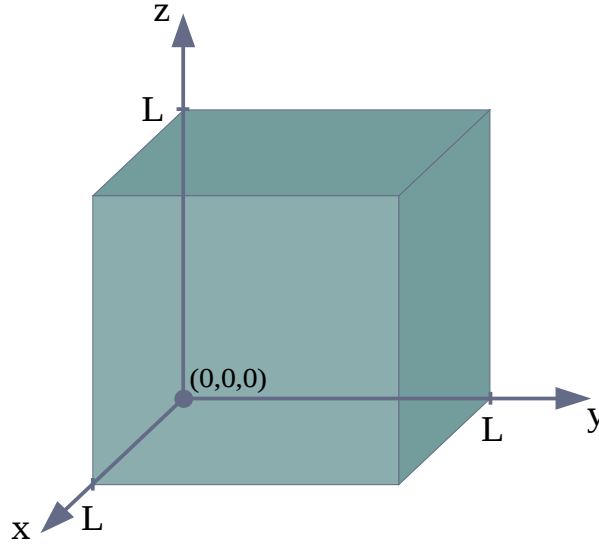


Fig. 3: Cavità risonante a pareti di conduttore elettrico perfetto

Per la condizione di annullamento delle componenti trasverse del campo alla superficie del conduttore perfetto, all'interno della cavità si sostengono dei modi oscillatori stazionari.

Ricaviamo adesso le soluzioni delle equazioni di Maxwell per il problema presentato. Nel vuoto ed in assenza di distribuzioni di corrente, tali equazioni sono:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (38)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (39)$$

$$\nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (40)$$

È possibile trattare il problema della cavità con il metodo di separazione delle variabili. Definiamo quindi i campi vettoriali $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, in modo che rappresentino i modi spaziali statici del campo elettromagnetico, e le funzioni tempo-varianti $e(t)$ e $h(t)$ per descriverne la dinamica, tale che

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e(t) \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad (41)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = h(t) \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (42)$$

Otteniamo quindi le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial e(t)}{\partial t} \epsilon_0 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = h(t) \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (43)$$

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} \mu_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -e(t) \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad (44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad (45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0. \quad (46)$$

Le (43) e (44) possono essere riscritte separando le variabili temporale e spaziale, quest'ultima rappresentata in un sistema di riferimento cartesiano. Dalla (43) si ha

$$\epsilon_0 \frac{\partial e(t)}{h(t)} = \frac{[\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})]_x}{u_x(\mathbf{r})} = \frac{[\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})]_y}{u_y(\mathbf{r})} = \frac{[\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})]_z}{u_z(\mathbf{r})} \quad (47)$$

e dalla (44)

$$\mu_0 \frac{\partial h(t)}{e(t)} = -\frac{[\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})]_x}{v_x(\mathbf{r})} = -\frac{[\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})]_y}{v_y(\mathbf{r})} = -\frac{[\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})]_z}{v_z(\mathbf{r})}. \quad (48)$$

Affinché le eguaglianze siano verificate è necessario che i singoli membri eguaglino una qualche costante k . Scegliamo, per mantenere la simmetria del problema, che tale costante sia la stessa sia per la (47) che la (48). Procediamo quindi con l'effettiva separazione delle variabili distinguendo due equazioni tempo-varianti:

$$\frac{\partial e(t)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} k h(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} k e(t), \quad (49)$$

e due nella sola variabile spaziale:

$$k \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) \text{ e } k \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) . \quad (50)$$

Le (49) tengono conto della dinamica del campo elettromagnetico, e come vedremo nel paragrafo 3.2, le loro soluzioni sono oscillanti. Le (50) danno la forma dell'onda stazionaria, ossia l'ampiezza massima raggiungibile in ogni punto dello spazio interno alla cavità.

3.1. Soluzioni spaziali della cavità risonante

Per ogni singolo modo, esistono diverse soluzioni linearmente indipendenti al problema della cavità risonante. k viene scelto in modo da rispettare le condizioni al contorno

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \text{ e } \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \quad (51)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale alle pareti del conduttore perfetto poste come in figura 3. Queste condizioni al contorno sono tali da annullare le componenti trasversali del campo elettrico (\mathbf{u}) e quelle longitudinali di quello magnetico (\mathbf{v}) in modo che quest'ultimo giaci esclusivamente alla superficie del conduttore perfetto¹¹. Dalle (50) è possibile dedurre le leggi di Gauss per il campo elettrico (45) e quello magnetico (46):

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \text{ e } \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \quad (52)$$

avendo calcolato la divergenza di ciascun membro ed utilizzato la relazione $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$, dove \mathbf{A} è un generico campo vettoriale. Le (50) e (52) costituiscono il set di equazioni da risolvere per ottenere l'equazione d'onda vettoriale che descrive l'onda stazionaria. Si procede sostituendo $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})$ in $k \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Si ottiene la seguente

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) , \quad (53)$$

e visto che $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0$, otteniamo la seguente equazione di Helmholtz per il campo elettrico :

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 . \quad (54)$$

Procedendo analogamente si ottiene l'equazione per il campo magnetico

$$\nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 . \quad (55)$$

Entrambe le (54) e (55) ammettono soluzioni spaziali della forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_i(x, y, z) \\ \mathbf{v}_i(x, y, z) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \\ \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \\ \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \\ \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \end{pmatrix} \quad (56)$$

dove k , il numero d'onda che può assumere infiniti valori discreti, quanti i modi della cavità, vale:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} , \quad (57)$$

in cui le componenti cartesiane sono le

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L} \quad i = x, y, z ; \quad n_i \in \mathbb{Z} . \quad (58)$$

¹¹ Il campo magnetico vi induce una densità di corrente \mathbf{J}_s tale che $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} = \mathbf{J}_s$.

Applicando la $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})=0$ si ricava che $u_x k_x + u_y k_y + u_z k_z = 0$, quindi il campo elettrico è perpendicolare al vettore d'onda $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$. $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ giace quindi in un piano perpendicolare a \mathbf{k} e le sole soluzioni linearmente indipendenti sono due, quelle che definiscono la polarizzazione del campo elettrico. Queste considerazioni valgono anche per il campo magnetico $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Le (50) implicano inoltre che il campo elettrico e quello magnetico siano perpendicolari tra di loro per componenti diverse; per esempio la componente $u_x \hat{\mathbf{x}}$ del campo elettrico è perpendicolare alla $v_y \hat{\mathbf{y}}$ del campo magnetico.

Nonostante vi siano due soluzioni linearmente indipendenti per ciascun modo, vi è un numero infinito di soluzioni modali. Inoltre la simmetria cubica del problema comporta che vi siano tre gradi di libertà nella scelta dell'asse di riferimento per il vettore d'onda. Viene tipicamente scelto l'asse z come riferimento, e le soluzioni delle equazioni di Maxwell nella cavità risonante posso essere distinte in modi TE, trasversi elettrici per cui $u_z=0$, e modi TM, trasversi magnetici con $v_z=0$.

Le soluzioni modali TE sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(x, y, z) = \frac{\sqrt{8} n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \\ u_y(x, y, z) = -\frac{\sqrt{8} n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \\ u_z(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (60)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_y(x, y, z) = -\frac{\sqrt{8} n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \end{array} \right. \quad (61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_z(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(x, y, z) = \frac{\sqrt{8} n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \end{array} \right. \quad (63)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_y(x, y, z) = \frac{\sqrt{8} n_y n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \end{array} \right. \quad (64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_z(x, y, z) = -\frac{\sqrt{8} (n_x^2 + n_y^2)}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \end{array} \right. \quad (65)$$

Le soluzioni modali TM sono :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(x, y, z) = -\frac{\sqrt{8} n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \end{array} \right. \quad (66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_y(x, y, z) = -\frac{\sqrt{8} n_y n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \end{array} \right. \quad (67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_z(x, y, z) = -\frac{\sqrt{8} (n_x^2 + n_y^2)}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \end{array} \right. \quad (68)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(x, y, z) = \frac{\sqrt{8} n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \\ v_y(x, y, z) = -\frac{\sqrt{8} n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \\ v_z(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(x, y, z) = -\frac{\sqrt{8} n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \\ v_y(x, y, z) = \frac{\sqrt{8} n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \\ v_z(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (70)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(x, y, z) = 0 \\ v_y(x, y, z) = 0 \\ v_z(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (71)$$

Simili soluzioni si ottengono utilizzando gli altri assi cartesiani imponendo per i modi TE $u_x=0$ oppure $u_y=0$ e per i modi TM $v_x=0$ o $v_y=0$.

3.2. Soluzioni temporali della cavità risonante

Le equazioni (49) tengono conto della dinamica dei campi. Da esse possiamo ricavare le seguenti relazioni :

$$\frac{\partial^2 e(t)}{\partial t^2} = -\frac{k^2}{\epsilon_0 \mu_0} e(t), \quad (72)$$

$$\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} = -\frac{k^2}{\epsilon_0 \mu_0} h(t). \quad (73)$$

Le loro soluzioni, oscillanti, sono della forma :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega_0 t + \theta), \quad (74)$$

$$h(t) = h_0 \cos(\omega_0 t + \theta), \quad (75)$$

con pulsazione $\omega_0 = \frac{k}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = ck$, dove c velocità della luce nel vuoto, e con θ un generico sfasamento identico per entrambi i campi. Il rapporto di ampiezze dei campi $\frac{e_0}{h_0} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)} = \zeta_0$ è l'impedenza elettromagnetica del vuoto.

3.3. Energia immagazzinata

Non essendovi flusso netto di energia, caratteristica peculiare di un'onda stazionaria, né dissipazione da parte delle pareti di conduttore perfetto, il teorema di Poynting applicato alla cavità risonante si limita al solo termine di energia immagazzinata e si ha :

$$E = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r}. \quad (76)$$

È possibile risolvere l'integrale spaziale in (76) separando le variabili temporali da quelle spaziali per un singolo modo:

$$E = \frac{1}{2} \epsilon_0 e^2(t) \int |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mu_0 h^2(t) \int |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 d^3 \mathbf{r}. \quad (77)$$

Gli integrali vengono quindi normalizzati al valore di L^3 in modo da attribuire l'ampiezza del campo, e quindi l'energia, alla componente temporale:

$$E = \frac{\epsilon_0 L^3}{2} e^2(t) + \frac{\mu_0 L^3}{2} h^2(t) . \quad (78)$$

4. Quantizzazione dei modi di cavità

Come anticipato nell'introduzione, è possibile quantizzare un modo della cavità risonante sfruttando le sue analogie coll'oscillatore armonico, e quindi quantizzare l'intero campo elettromagnetico confinato. Confrontando la (2) $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_0^2 x = 0$, equazione del moto dell'oscillatore armonico che descrive l'evoluzione temporale della posizione della particella, con la (72) $\frac{\partial^2 e(t)}{\partial t^2} = -\frac{k^2}{\epsilon_0 \mu_0} e(t)$ che descrive l'evoluzione temporale del campo elettrico per un particolare modo di cavità, si intuisce la possibilità di ricondurre il comportamento delle variabili x e p dell'oscillatore armonico alle e ed h del modo di cavità.

4.1. Quantizzazione di un sistema monomodale

Dalle equazioni del moto classiche dell'oscillatore armonico e le (49) per i campi elettromagnetici si hanno le seguenti similitudini:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{1}{m} p(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial e(t)}{\partial t} = \frac{k}{\epsilon_0} h(t) , \quad (79)$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = -m \omega_0^2 x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -\frac{k}{\mu_0} e(t) , \quad (80)$$

e le energie dei due sistemi sono :

$$E = \frac{1}{2m} p^2(t) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2(t) \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{\mu_0 L^3}{2} h^2(t) + \frac{\epsilon_0 L^3}{2} e^2(t) \quad (81)$$

In base all'equazione di Schrödinger in (4), possiamo in prima approssimazione scrivere la seguente equazione di Schrödinger per le ampiezze dei modi di cavità, ricordando che nella (78) i campi tempo-varianti contengono le informazioni sull'intensità del singolo modo :

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(e, t) = \left[\frac{\mu_0 L^3}{2} \hat{h}^2(t) + \frac{\epsilon_0 L^3}{2} \hat{e}^2(t) \right] \Psi(e, t) . \quad (82)$$

Vogliamo adesso definire una relazione tra gli operatori \hat{e} e \hat{h} , simile a quella che abbiamo per l'oscillatore armonico ossia $\hat{p} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Potremmo ottenere tale relazione applicando il metodo canonico di quantizzazione¹², ma vogliamo dimostrare l'efficacia di un metodo alternativo che sfrutti le analogie coll'oscillatore armonico. Definiamo quindi l'operatore campo magnetico

$$\hat{h} = -i \hbar A \frac{\partial}{\partial e} , \quad (83)$$

per il quale dobbiamo determinare la costante di normalizzazione A . Per fare ciò, si risolve l'equazione di Schrödinger agli stati stazionari

¹² Partendo quindi dal lagrangiano classico per ottenere la variabile coniugata ad \hat{h} tale che non commutino.

$$\left[-\frac{\mu_0 L^3 \hbar^2 A^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial e^2} + \frac{\epsilon_0 L^3}{2} e^2 \right] \phi(e) = E \phi(e) \quad (84)$$

riscrivendo l'equazione nella stessa forma della (7) con i valori $v = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \frac{1}{\hbar A}} e$ e $\epsilon = \frac{2E}{\hbar A \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} L^3}$. Si impone infine che lo stato fondamentale abbia energia $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$. Un metodo alternativo per ricavare A è quello di sfruttare il fatto che l'autovalore $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$ è quello per cui si ha $\epsilon = 1$ ¹³ e si ricava quindi che

$$E = \frac{\hbar A \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} L^3}{2} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad (85)$$

per cui $A = \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} L^3}$.

Possiamo riscrivere l'equazione di Schrödinger operando la sostituzione di \hat{h} appena ricavata:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(e, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \omega_0^2}{2 \epsilon_0 L^3} \frac{\partial^2}{\partial e^2} + \frac{\epsilon_0 L^3}{2} e^2 \right] \Psi(e, t) \quad (86)$$

Si noti che le componenti longitudinali del campo nella cavità, essendo statiche, non possono essere quantizzate con questo metodo. È necessario per ciò appoggiarsi alla teoria dei potenziali.

4.2. Principio di indeterminazione e fluttuazioni dell'energia di punto zero

Così come per l'oscillatore armonico, il principio di indeterminazione vale per il campo elettromagnetico confinato, le variabili di campo e ed h essendo coniugate. Il commutatore tra gli operatori \hat{e} ed \hat{h} è:

$$[\hat{e}, \hat{h}] = \langle \phi | \hat{e} \hat{h} | \phi \rangle - \langle \phi | \hat{h} \hat{e} | \phi \rangle = \langle \phi | \hat{e} \hat{h} | \phi \rangle + i \hbar A \frac{\partial}{\partial e} e \langle \phi | \phi \rangle - \langle \phi | \hat{e} \hat{h} | \phi \rangle = i \hbar A. \quad (87)$$

con $|\phi\rangle$ ket normalizzato. Si può facilmente dimostrare che il prodotto degli scarti quadratici medi di e e di h , ovvero le fluttuazioni Δe e Δh , è tale per cui vale la relazione di indeterminazione:

$$\Delta e \frac{\Delta h}{A} \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta e \Delta h \geq \frac{\hbar \omega_0 c}{2 L^3}. \quad (88)$$

Analizziamo adesso le fluttuazioni dello stato fondamentale. Questo stato è caratterizzato dall'avere i campi elettrico e magnetico medi nulli, ma questi presentano tuttavia fluttuazioni intorno allo zero tali per cui l'energia dello stato sia non nulla. Basandosi sul principio di indeterminazione, presentiamo un modo alternativo alla soluzione dell'equazione di Schrödinger per valutare quest'energia detta di "punto-zero". Procediamo sostituendo alle variabili di campo il loro scarto quadratico medio:

$$E = \frac{\mu_0 L^3}{2} \Delta h^2 + \frac{\epsilon_0 L^3}{2} \Delta e^2. \quad (89)$$

Poi, dalla relazione (88) per la quale consideriamo l'indeterminazione minima, otteniamo

¹³ Si veda la nota 4 a pagina 6

$$\Delta h = \frac{\hbar \omega_0 c}{2 L^3 \Delta e} \quad (90)$$

che possiamo sostituire nella (89):

$$E[\Delta e] = \frac{\hbar^2 \omega_0^2}{8 \epsilon_0 L^3 \Delta e^2} + \frac{\epsilon_0 L^3}{2} \Delta e^2. \quad (91)$$

L'energia minima dello stato fondamentale, che si calcola utilizzando $\frac{\partial}{\partial e} E[\Delta e] = 0$, si ha per

$$\Delta e = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 L^3}}. \quad (92)$$

Naturalmente sostituendo tale valore nella (91) ricaviamo il valore di energia pari a $\frac{1}{2} \hbar \omega_0$.

Le fluttuazioni sono tali che l'energia venga ugualmente distribuita tra campo elettrico e campo magnetico per un contributo pari a:

$$\frac{\mu_0 L^3}{2} \Delta h^2 = \frac{\epsilon_0 L^3}{2} \Delta e^2 = \frac{1}{4} \hbar \omega_0. \quad (93)$$

4.3. Stati quantici del campo elettromagnetico

La soluzione dell'equazione di Schrödinger agli stati stazionari (84) porta, analogamente a quanto fatto nella sezione 2.1, alle funzioni di stato :

$$\phi_n(e) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\epsilon_0 L^3}{\pi \hbar \omega_0} \right)^{\frac{1}{4}} H_n \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{\hbar \omega_0}} e \right) e^{-\frac{\epsilon_0 L^3 e^2}{2 \hbar \omega_0}} \quad (94)$$

dove il termine $\left(\frac{\epsilon_0 L^3}{\pi \hbar \omega_0} \right)^{\frac{1}{4}}$ ¹⁴ serve a normalizzare le funzioni e $H_n(u)$ sono polinomi di Hermite. Gli autovalori di energia corrispondenti sono $E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0$ dove il numero intero n corrisponde al numero di fotoni presenti nel modo evidenziato da ω_0 .

Definiamo gli operatori di creazione ed annichilazione¹⁵:

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{2 \hbar \omega_0}} (\hat{e} - i \zeta_0 \hat{h}) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 L^3}} e - \sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{2 \hbar \omega_0}} \frac{\partial}{\partial e}, \quad (95)$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{2 \hbar \omega_0}} (\hat{e} + i \zeta_0 \hat{h}) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 L^3}} e + \sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{2 \hbar \omega_0}} \frac{\partial}{\partial e}. \quad (96)$$

Questi operatori presentano le stesse proprietà di quelle enunciate nel paragrafo 2.1, in particolare quelle di passaggio ricorsivo da uno stato ad un altro con la creazione o la distruzione di un fotone. Questa proprietà è inclusa nelle relazioni $\hat{a}^\dagger |\phi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle$ e $\hat{a} |\phi_n\rangle = \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle$.

¹⁴ Si veda la nota 3 a pagina 5.

¹⁵ Si è impiegato il metodo descritto nella nota 8 a pagina 7.

Possiamo riscrivere gli operatori di campo elettrico e campo magnetico come combinazione lineare degli operatori di creazione ed annichilazione :

$$\hat{e} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 L^3}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \text{e} \quad \hat{h} = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \mu_0 L^3}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (97)$$

4.4. Sistema multimodale

L'estensione dei risultati ottenuti per il singolo modo ad un sistema multimodale è immediata. L'elettromagnetismo classico prevede di considerare ogni singolo modo indipendentemente dagli altri. In effetti, tramite l'analisi di Fourier¹⁶, l'insieme delle componenti spettrali permette di ricostruire il comportamento dinamico del campo elettromagnetico. I campi elettrico e magnetico totali della cavità risonante possono essere riscritti come somma dei singoli modi j e si hanno:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j e_j(t) \mathbf{u}_j(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_j h_j(t) \mathbf{v}_j(\mathbf{r}), \quad (98)$$

per cui le pulsazioni discretizzate dalla cavità sono le $\omega_j = c k_j = c \frac{\pi}{L} \sqrt{n_{x,j}^2 + n_{y,j}^2 + n_{z,j}^2}$. Sono sempre valide le equazioni dinamiche ricavate nel paragrafo 3.2. L'energia totale confinata nella cavità viene anche qui attribuita alla componente tempo-variante del campo e si ha:

$$E = \sum_j \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 e_j^2(t) \int |\mathbf{u}_j(\mathbf{r})|^2 d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mu_0 h_j^2(t) \int |\mathbf{v}_j(\mathbf{r})|^2 d^3 \mathbf{r} \right\}. \quad (99)$$

Normalizzando alle dimensioni della cavità la componente spaziale di ciascun modo, l'energia totale diviene:

$$E = \sum_j \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 L^3 e_j^2(t) + \frac{1}{2} \mu_0 L^3 h_j^2(t) \right\}. \quad (100)$$

Procediamo alla quantizzazione dei modi considerando, sulla base dell'energia totale precedentemente ricavata, il seguente operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} = \sum_j \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 L^3 \hat{e}_j^2 + \frac{1}{2} \mu_0 L^3 \hat{h}_j^2 \right\} = \sum_j \left\{ -\frac{\hbar^2 \omega_j^2}{2 \epsilon_0 L^3} \frac{\partial^2}{\partial e_j^2} + \frac{\epsilon_0 L^3}{2} e_j^2 \right\}, \quad (101)$$

dove gli operatori \hat{e} ed \hat{h} sono

$$\hat{e}_j = e_j = \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2 \epsilon_0 L^3}} (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger), \quad (102)$$

$$\hat{h}_j = -i \hbar \frac{\omega_j c}{L^3} \frac{\partial}{\partial e} = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2 \epsilon_0 L^3}} (\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger), \quad (103)$$

con gli operatori di creazione ed annichilazione:

¹⁶ Si ricordi che la trasformata di Fourier agisce in uno spazio di Hilbert di funzioni ortonormali (più precisamente nello spazio normato L^2) e che vale l'antitrasformata con le proprietà del suo integrale spettrale.

$$\hat{a}_j^\dagger = \sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{2 \hbar \omega_0}} (\hat{e}_j - i \zeta_0 \hat{h}_j) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 L^3}} e_j - \sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{2 \hbar \omega_0}} \frac{\partial}{\partial e_j}, \quad (104)$$

$$\hat{a}_j = \sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{2 \hbar \omega_0}} (\hat{e}_j + i \zeta_0 \hat{h}_j) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 L^3}} e_j + \sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{2 \hbar \omega_0}} \frac{\partial}{\partial e_j} \quad (105)$$

L'operatore hamiltoniano può essere riscritto nel modo seguente:

$$\hat{H} = \sum_j \hbar \omega_j \left[\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right]. \quad (106)$$

Basandosi sulle relazioni (98) dei campi elettrici e magnetici totali, possiamo scrivere, con l'ausilio degli operatori di creazione ed annichilazione, gli operatori di campo elettrico e campo magnetico totali:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_j \hat{e}_j \mathbf{u}_j(\mathbf{r}) = \sum_j \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2 \epsilon_0 L^3}} \mathbf{u}_j(\mathbf{r}) (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger) \quad (107)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \sum_j \hat{h}_j \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) = \sum_j \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2 \mu_0 L^3}} \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) (\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger). \quad (108)$$

L'equazione di Schrödinger completa per una cavità risonante in cui si sostiene un campo elettromagnetico stazionario multimodale è, sulla base della (82) e dell'hamiltoniano (101):

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(e_1, e_2, \dots, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \omega_j^2}{2 \epsilon_0 L^3} \frac{\partial^2}{\partial e_j^2} + \frac{\epsilon_0 L^3}{2} e_j^2 \right] \Psi(e_1, e_2, \dots, t). \quad (109)$$

Questa, risolta ad esempio col metodo di separazione delle variabili quindi colla soluzione dell'equazione agli stati stazionari, ha come soluzione generale:

$$\Phi_{n_1, n_2, \dots}(e_1, e_2, \dots) = \prod_j \phi_{n_j}(e_j) = \prod_j \frac{1}{\sqrt{2^{n_j} n_j!}} \left(\frac{\epsilon_0 L^3}{\pi \hbar \omega_j} \right)^{\frac{1}{4}} H_{n_j} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0 L^3}{\hbar \omega_j}} e_j \right) e^{-\frac{\epsilon_0 L^3 e_j^2}{2 \hbar \omega_j}}. \quad (110)$$

Alla funzione di stato totale $\Phi_{n_1, n_2, \dots}(e_1, e_2, \dots)$ è associata un'energia pari a:

$$E = \sum_j \hbar \omega_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right). \quad (111)$$

5. Energia di punto zero ed effetto Casimir

La relazione (111) è tale da attribuire allo stato fondamentale con $n_j=0$, per la possibilità di avere infiniti modi oscillatori ω_j benché discreti, un'energia infinita! Quest'energia, pari a $E = \sum_j \frac{1}{2} \hbar \omega_j$, $\omega_j \rightarrow \infty$, è tale da divergere per il fatto che abbiamo ipotizzato il nostro problema

elettromagnetico ideale, costituito da una cavità a pareti perfettamente conduttrici¹⁷. Ciò nonostante, quest'energia non è direttamente osservabile, ma soltanto per mezzo di particolari artifici. I fisici H. B. G. Casimir e D. Polder ipotizzarono nel 1948 la possibilità di percepire quest'energia sotto forma di una forza di attrazione tra due pareti metalliche poste in una camera a vuoto spinto. Il progressivo avvicinamento delle due lastre metalliche porta all'interno di esse ad un progressivo ridursi dei modi trasversali per effetto dell'innalzamento della frequenza di *cut-off*, ossia quella corrispondente al modo a pulsazione minore, corrispondente a $\omega_0|_{min} = \frac{\sqrt{2}\pi c}{L}$. All'esterno delle lastre, il campo di livello zero essendo confinato entro uno spazio maggiore è in grado di sostenere un maggior numero di modi. Questo sbilanciamento energetico, il cosiddetto “Effetto Casimir”, porta alla nascita di una forza attrattiva tra le due lastre. Tali lastre metalliche devono essere poste a distanze micrometriche e sub-micrometriche per poter percepire una forza di attrazione sostanziale. Questa forza, calcolata per unità di superficie delle lastre, evolve con la quarta potenza della distanza d tra le pareti metalliche, seguendo la relazione:

$$F_d = -\frac{\hbar c_0 \pi^2}{240 d^4} \left[\frac{N}{m^2} \right]. \quad (112)$$

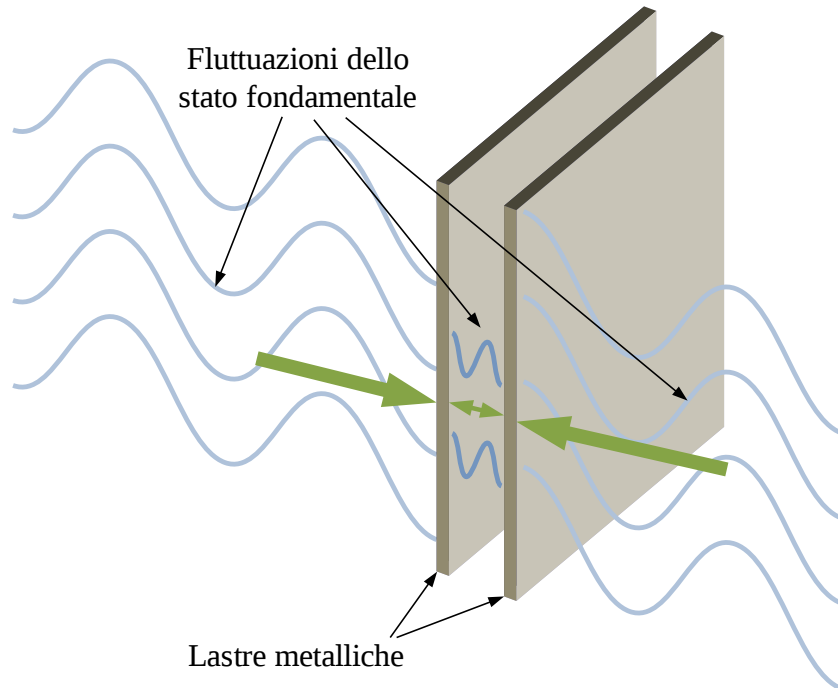


Fig. 4: Effetto Casimir nella configurazione a piani metallici paralleli

In passato, questa forza di Casimir-Polder era assimilata alle forze di van der Waals agenti su molecole neutre. È risultato però che questa forza può diventare repulsiva in certe configurazioni geometriche, ad esempio nel caso di due calotte sferiche ravvicinate. L'effetto Casimir è stato per la prima volta verificato sperimentalmente, nel 1997 da S. K. Lamoreaux, e successivamente da U. Mohideen e A. Roy nella configurazione di un piano ed una sfera conduttori. Nel 2001, gli scienziati

¹⁷ Una parete argentata o dorata (metalli nobili, idonei ad applicazioni a microonde ed onde millimetriche) ha una risposta spettrale diversa. Ad alta frequenza il metallo presenta conducibilità non infinita, traducendosi in perdite di energia per effetto Joule.

italiani G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio e G. Ruoso sono riusciti a misurare con una precisione del 15% la forza di Casimir-Polder nella configurazione a piani paralleli.

6. Conclusione

Abbiamo inizialmente studiato l'oscillatore armonico semplice in campo quantistico. Dal suo modello classico è stato possibile, impiegando due diversi metodi di quantizzazione, giungere alle equazioni di stato tempo-invarianti. È stato in seguito studiato il problema elettromagnetico della cavità risonante nella trattazione classica, in vista di fornirne soluzione quantizzate. Ciò è stato fatto con successo sfruttando le analogie tra le equazioni costitutive del campo elettromagnetico monomodale e quelle dell'oscillatore armonico. Le soluzioni ottenute per un singolo modo sono quindi state estese agli infiniti modi di cavità, con un risultato sorprendente associato al modo fondamentale: l'energia del vuoto è infinita! Quest'incredibile fonte di energia, derivante dal principio di indeterminazione di Heisenberg, può verificarsi come forza di Casimir-Polder, ossia come forza di attrazione o di repulsione tra mezzi riflettenti a seconda della geometria delle interfacce.

Si possono immaginare le ripercussioni che l'effetto Casimir avrà nella realizzazione di microsistemi elettromeccanici MEMS, in cui la forza di Casimir-Polder dovrà essere considerata vista la progressiva tendenza di miniaturizzazione. La possibilità di sfruttare tale forza per fare levitare elementi del sistema non è da escludere.

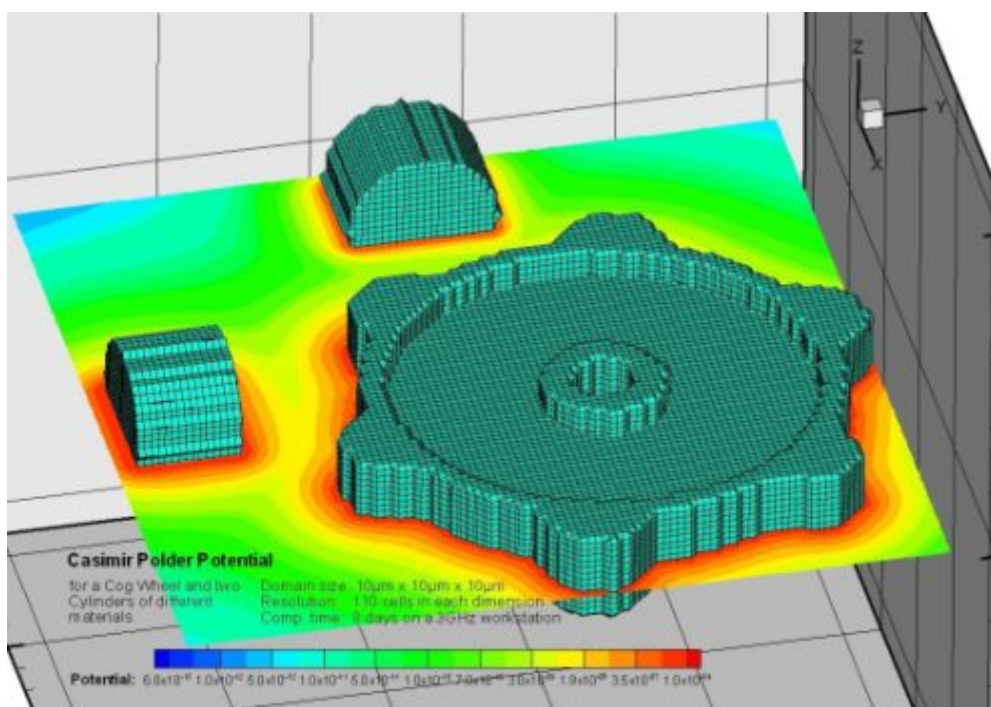


Fig. 5: Simulazione del potenziale di Casimir-Polder in un sistema micrometrico (metodo degli elementi finiti)

7. Bibliografia

- [1] “Introductory Applied Quantum and Statistical Mechanics” P. Hagelstein, S. Senturia, T. Orlando, Wiley-IEEE 2004
- [2] “Quantum Mechanics Demystified” D. McMahon, McGraw-Hill 2006
- [3] “Fundamentals of Quantum Mechanics for Solid State Electronics e Optics” C. L. Tang, Cambridge University Press 2005
- [4] “Principles of Quantum Mechanics” P.A.M. Dirac, 4th ed., Oxford Univerity Press 1958
- [5] “Electromagnetic Fields” J.G. van Bladel, 2nd ed., IEEE Press 2007
- [6] “The Force of Empty Space” U. Mohideen, A. Roy, APS Phys. Rev. Lett. 81/4549 12/1998 <http://focus.aps.org/story/v2/st28>
- [7] “Precision Measurement the Casimir Force from 0.1 to 0.9 μm ”, U. Mohideen, A. Roy, Phys. Rev. Lett. 81, 4549 - 4552 (1998) http://prola.aps.org/abstract/PRL/v81/i21/p4549_1
- [8] “Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces” G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G. Ruoso, Physical Review Letters, pubblicata nell'ottobre 2001. <http://prola.aps.org/abstract/PRL/v88/i4/e041804>
- [9] “The Casimir effect : Physical manifestations of the Zero Point Energy” K. A. Milton, arXiv Physical Papers, pubblicato a gennaio 1999 <http://arxiv.org/abs/hep-th/9901011/>
- [10] “Quantum levitation by left-handed metamaterials”, U. Leonhardt, T. G. Philbin, New Journal of Physics, pubblicato a gennaio 2007, <http://iopscience.iop.org/1367-2630/9/8/254>
- [11] “Repulsive Casimir Force between Dielectric Planes”, K. W. Wetz, <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0109134>