Quantizzazione del Campo Elettromagnetico

R. Mori

Prefazione

L'elaborato svolto si sviluppa in una forma, in una struttura strettamente connessa allo scopo per cui è stato preposto. Rappresenta un lavoro scolastico, di ricerca per approfondimento dell'argomento, pertanto prende inevitabilmente spunto dai testi di riferimento citati, soprattutto da [3] e [4] per quel che riguarda il cuore dela trattazione, ovvero l'analisi quantistica del campo elettromagnetico. Da essi si traggono metodi di analisi e procedimenti, talvolta ripetuti nelle stesse esatte sequenze, dato che il primo obiettivo è quello di "capire" l'argomento, e per questo non ho cercato di trovare strade alternative quando a mio parere non erano necessarie, o che comunque non ritenevo per la comprensione. Però non mancano interpretazioni del tutto personali, concetti, spiegazioni, tecniche di analisi che propongo perchè nate direttamente dal mio studio sul tema[1]. Esse possono apparire agli occhi di esperti come banali, ovvie e talvolta inutili, ma ai miei occhi, una volta che in futuro avrò bisogno di studiare nuovamente l'argomento, spero che risulteranno utili per seguire con naturale svolgimento la trattazione. Voglio sottolineare questo aspetto, che caratterizza fortemente l'elaborato: riporto nell'analisi concetti e argomenti elementari, talvolta ripetendoli, e tralasciando concetti comunque connessi sottintendendoli, per ottenere una trattazione che spero sia utile per la comprensione prima che per un'esaminazione. In questo contesto si comprende la motivazione che mi ha spinto a svolgere le premesse (Par.(1)), che trattano argomenti storici sicuramente banali, un contorno, una cornice che mi è utile per contestualizzare il tutto, per dare un senso più concepibile al cuore dell'elaborato. Analogamente vale per l'analisi classica del campo elettromagnetico (Par.(2.1)) e per le Appendici (A), (B), che ritengo una base utile per dare un senso a dei passi concettuali che forse in futuro non saranno così immediati come lo sono adesso che ho ancora freschi i concetti appresi sull'analisi quantistica[2].

Spero vivamenteche questo elaborato mi risulterà utile per uno studio futuro. Per adesso rappresenta il mio impegno in fisica, nell'anno della fisica.

---

[1] In particolare è svolta totalmente in mia interpretazione la definizione degli operatori di potenziale per la quantizzazione del campo nello spazio libero basata sull'equivalenza con l'Hamiltoniano generico espresso in termini di operatori di creazione e annichilazione, anziché seguire procedimenti in parallelo all'Oscillatore Armonico Semplice (vedi Par.(4.1)). Tale procedimento può quindi risultare inappropriato, o inessenziale

[2] Per riferimento sulla trattazione delle premesse mi è stato utile il testo [2], sulla trattazione classica il testo [1], che raccomando vivamente.

Indice

1 Premesse

La nascita della fisica quantistica viene identificata con la presentazione del testo *"On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum"* di Max Planck, il 14 Dicembre del 1900, che rappresenta un punto di rottura determinante con le teorie di fisica classica note fino ad allora. Pochi anni dopo, con gli studi di Schrödinger e altri, nasce la fisica quantistica moderna, per certi aspetti in contrasto con la fisica di Planck denominata da allora come *vecchia fisica quantistica*, ma soprattutto che dimostra altri aspetti fondamentali non interpretabili in termini di teoria classica.

La fisica quantistica rapresenta come la teoria della relatività un'estensione della fisica classica, non un crollo dei risultati, pertanto le leggi classiche risultano comunque verificate quantisticamente come limite fisico per ipotesi opportune di osservabilità.

1.1 Radiazione termica e Postulato di Planck

La teoria di Plank nasce dalla divergenza di risultati sperimentali con i risultati ottenuti da leggi classiche a proposito dello spettro di radiazione termica di un corpo. Un corpo a temperatura maggiore dell'ambiente circostante emette energia fino a che non viene ripristinato l'equilibrio termico, e in particolare la materia in stato condensato emette uno spettro continuo principalmente funzione della temperatura. La definizione di *Corpo Nero* come entità ideale che assorbe tutta la radiazione incidente, permette di trarre una relazione tra lo spettro di emissione e la temperatura, fondamentalmente indipendente dalla composizione materiale del corpo. Considerando una Cavità di corpo nero, classicamente si determina dal *Principio di Equipartizione dell'Energia*[3] un'energia media per modo di campo pari a $\overline{\mathcal{E}} = kT$.

Dalla densità di modi per unità di volume, si ottiene la *Legge di Rayleigh-Jeans* che esprime un'energia radiata dal corpo nell'intervallo di frequenza $\nu \div \nu + \mathrm{d}\nu$ proporzionale al quadrato della frequenza, quindi un'energia totale irradiata infinita, che portò storicamente a definire il risultato come *catastrofe*

[3] Il Principio enuncia che per un sistema che contiene un grande numero di entità analoghe si ha un'energia cinetica media per grado di libertà di movimento pari a $\overline{\mathcal{KE}} = kT/2$. Nel sistema considerato le entità sono costituite dalle onde elettromagnetiche stazionarie, in infinità numerabile per le condizioni al contorno di cavità, con energia totale pari al doppio dell'energia cinetica media (onda sinusoidale oscillante) e un grado di libertà (ampiezza di campo).

ultravioletta:

$$\rho(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\mathrm{d}\nu \propto \nu^2 \tag{1}$$

Il risultato ottenuto classicamente, plausibilmente inattendibile, viene smentito dai risultati sperimentali, che concordano con la teoria in regime di relativamente bassa frequenza ma rilevano una densità di energia radiata dal corpo che decresce fino a diventare infinitesima per frequenze molto elevate:

$$\overline{\mathcal{E}} \overset{\nu\to 0}{\longrightarrow} kT \qquad , \qquad \overline{\mathcal{E}} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La *Teoria di Planck* sulla radiazione di cavità di corpo nero si sviluppa a partire dalla base sulla quale si sviluppa il principio di equipartizione dell'energia classico, ovvero dalla statistica di *Boltzmann* secondo cui la probabilità di avere un'entità ad energia $\mathcal{E}$ è distribuita con la legge:

$$p(\mathcal{E})\mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{e^{-\mathcal{E}/(kT)}}{kT}\mathrm{d}\mathcal{E} \tag{2}$$

Il Postulato di Planck, vera origine della fisica quantistica, consiste nel considerare l'energia non come una grandezza continua, ma quantizzata in intervalli discreti $\Delta\mathcal{E}$. Si deduce una distribuzione statistica in analogia a quella di Boltzmann che, in concordanza con i risultati sperimentali, dimostra un'ampiezza di quanto proporzionale alla frequenza. In tale contesto viene definita la *Costante di Planck* h che, come la velocità della luce nel vuoto per la fisica relativistica, rappresenta una costante fondamentale per la fisica quantistica.

Postulato 1.1 (Planck) *Ogni entità fisica con un grado di libertà la cui coordinata*[4] *è sinusoidale funzione del tempo (ad esempio che esegue oscillazioni armoniche semplici) ammette un'energia totale che soddisfa la relazione:*

$$\mathcal{E} = nh\nu \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

dove ν *è la frequenza di oscillazione, e* h *è una costante universale.*

Da 1.1 deriva la *Legge di Planck* che dimostra l'inattendibilità della catastrofe ultravioletta e comunque rispetta il risultato classico sullo spettro di radiazione in regime in cui esso può essere considerato corretto:

$$\overline{\mathcal{E}}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \qquad \Rightarrow \qquad \rho(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}\mathrm{d}\nu \tag{3}$$

[4]Per *coordinata* si intende una quantità che descrive univocamente l'entità all'istante considerato.

Il postulato nasce quindi dall'analisi delle onde elettromagnetiche in una cavità di corpo nero, ma esprime una legge fondamentale generale, estesa ad ogni sistema con entità definite da una coordinata e oscillanti sinusoidalmente. A partire da esso si sviluppano le teorie di *Einstein* che confermano ed estendono i risultati di Planck portando alla totale reinterpretazione delle leggi classiche, ma che lo stesso Planck non riuscì ad accettare completamente.

1.2 Sviluppi della Vecchia Fisica Quantistica

Le teorie di Einstein in ambito di fisica quantistisca, sviluppate a partire dalle ipotesi di Planck, prendono spunto dalla divergenza delle teorie classiche con i risultati sperimentali dell'esperimento di *Hertz* del 1887, mirato a rilevare la corrente in un tubocatodico stimolato da onde luminose. Tale esperimento dimostrò come l'intensità di corrente massima proporzionale all'intensità della luce incidente, e che esiste un potenziale di arresto del flusso di cariche che ne risulta indipendente, ma che è funzione della frequenza delle onde luminose, in contrasto con le teorie classiche secondo cui tale potenziale ha da essere indipendente dalla frequenza.

L'interpretazione di Einstein del 1905 che dimostra il fenomeno noto come *Effetto Fotoelettrico*, e che gli valse il Premio Nobel, si basa sulla supposizione che l'energia radiata può essere vista come composta da quanti elementari di energia elettromagnetica $\Delta\mathcal{E} = h\nu$ denominati *fotoni*, localizzati, che si muovono alla velocità della luce nel vuoto, dato che una sorgente come una cavità di corpo nero (come da 1.1) emette per passaggi di stato $\Delta\mathcal{E}$.
Tale supposizione dimostra il risultato dell'esperienza di Hertz giustificando la dipendenza del potenziale di arresto dalla frequenza, con l'assunzione che l'emissione di elettroni dal fotocatodo del tubo catodico, origine della corrente, può avvenire solo nel caso in cui la luce incidente sia composta da fotoni con energia tale da compiere il lavoro di estrazione degli elettroni, ovvero con frequenza opportunamente elevata. Tramite esperienze compiute su materiali di fotocatodo differenti, quindi con lavoro di estrazione differente, si arriva a determinare un valore sperimentale della costante universale di Planck: $h = 6,6262 \cdot 10^{-34} Js$.

Un ulteriore passo fondamentale di sviluppo della teoria quantistica è costituito dalla dimostrazione del fenomeno noto come *Effetto Compton*, elaborata nel 1923 da parte del fisico da cui esso trae il nome. L'esperienza effettuata irradiando cristalli di grafite con raggi x rileva la presenza di onde luminose diffratte con stessa frequenza del fascio incidente come dimostrabile dalle teorie classiche, per diffusione elastica dovuta elettroni legati, ma anche di onde a diversa frequenza per gli elettroni liberi, funzione dell'angolo di incidenza sulo cristallo del fascio sorgente, nota come diffusione anelastica.

Compton suppose che i fotoni componenti il fascio si comportassero come particelle a massa nulla, con impulso definito dal rapporto tra la loro energia di onda elettromagnetica e la velocità di spostamento pari a quella della luce, coerentemente alla definizione di Einstein, e partendo da tali ipotesi dimostrò l'effetteiva consistenza della diffusione anelastica applicando il *Principio di conservazione della quantità di moto* sulla radiazione diffratta.

Quindi, in definitiva, il fotone viene definito come particella a massa nulla, o quanto di energia radiata, che si muove alla velocità della luce, caratterizzato da energia $\mathcal{E}$ ed impulso p :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = h\nu = \hbar\omega \\ p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{2\pi h}{\lambda} = \hbar k \end{cases} \qquad , \qquad \hbar \triangleq h/2\pi \tag{4}$$

1.3 La nascita della Fisica Quantistica Moderna

Nel 1924 *Luis de Broglie* presentò presso la Facoltà di scienze dell'Università di Parigi la sua tesi di dottorato nella quale propose l'esistenza delle *onde di materia*. Il suo postulato enuncia che al movimento di una particella materiale con impulso p è associata una lunghezza d'onda di onda materiale $\lambda = h/p$. Le sue ipotesi trovano negli anni seguenti delle verifiche sperimentali che aprono definitivamente una nuova strada alle teorie fisiche per la dualità della natura onda-particella, e portano quindi alla nascita della fisica quantistica moderna.

Per la descrizione contemporanea tanto degli effetti dovuti alla natura particellare, quanto di quelli della natura ondulatoria, viene introdotta per l'analisi la *funzione d'onda* $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$, che non ha un valore fisico se non nel suo modulo quadro, che rappresenta la probabilità di trovare la particella nel punto $\boldsymbol{r}$ all'istante t. Tale funzione diviene la base matematica per formulare le teorie quantistiche. Si dimostra che una particella materiale può essere rappresentata da un pacchetto d'onda, sovrapposizione di onde piane, nella cui definizione subentrano le ipotesi di de Broglie e di Einstein che ne caratterizzano la natura ondulatoria:

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) \triangleq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{p}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega(\boldsymbol{k})t)} \mathrm{d}\boldsymbol{k} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{p}) e^{i(\frac{\boldsymbol{p}}{\hbar}\cdot\boldsymbol{r} - \frac{\mathcal{E}}{\hbar}t)} \mathrm{d}\boldsymbol{p} \quad (5)$$

Tramite operazioni di derivate parziali nel tempo e nello spazio della funzione assunta si ottiene l'*equazione d'onda di meccanica quantistica* della particella in moto nello spazio libero[5]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\boldsymbol{r}, t) \quad (6)$$

L' equazione viene estesa al caso di particella in un potenziale $V(\boldsymbol{r})$ da *Schrödinger* nel 1926, il quale propone una forma generale con il termine relativo additivo, la cui validità viene giustificata aposteriori per l'elettrone dell'atomo di idrogeno sottoposto a potenziale coulombiano:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\boldsymbol{r}, t) + V(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r}, t) \quad (7)$$

L'*Equazione di Schrödinger* rappresenta la legge fondamentale della meccanica quantistica moderna.

In tale contesto si colloca anche un principio di base della filosofia quantistica, il *Principio di Indeterminazione di Heisemberg*. Considerando un sistema fisico descritto da grandezze a e b, siano esse *coniugate* ovvero tali da verificare una relazione matematica specifica[6], si dimostra che esse non possono essere a priori determinate con precisione infinita contemporaneamente. Si ha una relazione di disuguaglianza tra gli scarti quadratici medi di misura delle grandezze:

$$a, b \quad \text{coniugate} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta a \Delta b \geq \hbar/2 \quad (8)$$

Ne consegue l'individuazione di proprietà fisiche molto importanti, come ad esempio l'indeterminazione tempo-energia che porta a dedurre la larghezza naturale di riga di una qualsiasi grandezza armonica nota[7].

Einstein interpretò gli effetti quantistici come legati ad una nostra incapacità di misura, alla presenza di *variabili nascoste* che non riusciamo ancora

[5]Per lo spazio libero si detemina coerentemente con le ipotesi di de Broglie la Relazione di Dispersione $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

[6]Devono essere tali da avere operatori quantistici relativi con commutazione $[\hat{a}, \hat{b}]$ non nulla.

[7]Si verifica: $\Delta\mathcal{E}\Delta t \geq \hbar/2 \Rightarrow \Delta\omega_{min} = 1/(2\Delta t)$.

a rilevare, comunque affermando che ogni grandezza fisica è deterministica. Oggi, secondo la filosofia della scuola di Copenaghen, le proprietà quantistiche vengono intese come caratteristiche proprie dei sistemi fisici reali per cui si dimostra che non esiste la condizione di perfetto equilibrio e che si ha una continua fluttuazione di stati energetici da noi rappresentabili solo come sovrapposizione contemporanea di stati possibili in termini di distribuzione di probabilità.

1.4 Teoria Quantistica della Radiazione

Lo sviluppo della fisica quantistica nasce dal postulato di Planck, quindi dalle proprietà quantistiche del campo elettromagnetico e più specificatamente della radiazione luminosa.

La quantizzazione de campo elettromagnetico radiato si colloca nel contesto storico del dilemma fisico sulla natura della luce, tra la teoria corpuscolare descritta dalle Leggi di Newton e la teoria ondulatoria del Principio di Huygens. A fianco di tali leggi si ha la certezza della validità delle *Equazioni di Maxwell*, sperimentalmente rispettate in un regime senza limiti (o comunque non noti tuttora). Tuttavia esse risultano inadeguate nella loro forma canonica,per descrivere gli effetti quantistici del campo radiato. Anche gli studi di Einstein e la definizione del fotone, non andarono oltre al dimostrare che l'intensità di radiazione è proporzionale al numero di quanti elementari, non espresse una teoria dinamica come richiesto per la descrizione delle onde di campo. Furono gli studi di Dirac nei tardi anni '20 che portarono alla definizione della *Teoria di Radiazione Quantistica* fondata sul metodo di *Quantizzazion Canonica* elaborato per un generico sistema fisico. La teoria viene dedotta direttamente dalle equazioni di Maxwell, pertanto prevede naturalmente il limite classico di validità e concorda con le teorie semiclassiche sulla radiazione di corpo nero, sui Rate di Emissione e di Assorbimento di fotoni di Einstein e con l'Effetto Compton quando combinata con la teoria relativistica dell'elettrone. Di fatto, si ottiene una descrizione esaustiva dei fenomeni osservabili quando si combina la quantizzazione del campo radiato con la trattazione quantistica della materia. In particolare solo con tale approccio si riescono a spiegare fenomeni come la coerenza dei fasci di luce e di interazione della radiazione con la materiacome le transizioni di stato indotte per urto fotone-elettrone. Quantisticamente si ricavano le proprietà fondamentali del campo elettromagnetico che sono osservabili tanto in regime di ridotta intensità, per cui è evidente la natura fotonica, quanto in termini di indeterminazione che lega grandezze come ampiezza e fase di campo.

In conclusione, nonostante per molte applicazioni risulti sufficiente un'analisi classica o semiclassica, la quantizzazione del campo elettromagnetico assume particolare interesse nella fisica quantistica, se non altro perché ne è all'origine.

1.5 Procedimento di Quantizzazione

La quantizzazione del campo elettromagnetico è tesa ad esprimere una funzione d'onda che definisca la distribuzione di probabilità di una variabile che rappresenti il campo. Tale funzione può essere ricavata dalla soluzione di un'equazione che ne definisca le caratteristiche, l'equazione di Schrödinger, che può essere dedotta per un sistema fisico qualunque a partire dall'identificazione delle variabili coniugate rappresentanti grandezze che lo caratterizzano.

A tale scopo è stato sviluppato il *Metodo di Quantizzazione Canonica*, che nella sua forma generale individua le variabili coniugate e ne definisce la forma degli operatori quantistici associati. Determinati gli operatori opportuni, l'analisi quantistica procede con l'analisi operatoriale del sistema, individuandone le proprietà di indeterminazione, di valori di aspettazione ed altre caratteristiche statistiche.

La quantizzazione del campo, che porta alla definizione della Teoria di Radiazione Quantistica procede a partire direttamente dalle Equazioni di Maxwell. Si illustrano le relazioni fondamentali che legano i campi e il potenziale ponendoci in condizioni di radiazione nello spazio libero. Si ricava l'equazione d'onda che descrive l'evoluzione temporale, la dinamica di sistema, analizzando inizialmente le soluzioni per una cavità risonante ideale, per poi estenderle al caso generale di radiazione nello spazio applicando condizioni al contorno periodiche sulla base dell'indipendenza dal volume di cavità considerato. La quantizzazione avviene per analogia tra la soluzione dinamica di campo della cavità risonante con l'Oscillatore Armonico Semplice[8] pur procedendo con un metodo di analisi generale basato sulla definizione di operatori specifica al prolema esaminato.

[8] L'analisi quantistica dell'oscillatore armonico semplice è storicamente precedente alla quantizzazione del campo (vedi [2] o altri testi comuni di meccanica quantistica).

2 Campo Elettromagnetico Classico

2.1 Equazioni di Maxwell e Teoria dei Potenziali

Le Equazioni di Maxwell in forma differenziale assumono la forma generale:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \quad \text{(Legge di Gauss)} \tag{9}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{(Legge di Gauss per il Campo Magnetico)} \tag{10}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{(Legge di Faraday)} \tag{11}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \text{(Legge di Ampere generalizzata)} \tag{12}$$

Nelle ipotesi di mezzo isotropo omogeneo si hanno le Relazioni Costitutive[9]:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{13}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{E} \tag{14}$$

Dalla (10) si osserva che $\boldsymbol{B}$ è *solenoidale*, per cui può essere definito come rotore di un *Potenziale Vettoriale Elettrico* $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} \triangleq \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{15}$$

Dalla (11) si ha che la somma di $\boldsymbol{E}$ con la derivata temporale di $\boldsymbol{A}$ costituisce un campo *irrotazionale*, per tanto esprimibile come gradiente (convenzionalmente negativo) di un *Potenziale Scalare Elettrico* ϕ:

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \triangleq -\nabla \phi \tag{16}$$

Dalle (12, 9), applicando relazioni di identità vettoriale si esprimono le *Equazioni di Helmholtz ai Potenziali*:

$$\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu \boldsymbol{J} \tag{17}$$
$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{18}$$

Tali equazioni, non indipendenti, possono essere disaccoppiate tramite la trasformazione che sfrutta la non unicità di definizione dei potenziali $\boldsymbol{A}$ e ϕ.

[9]Per il vuoto: $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m \quad ; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F/m$.

Infatti, siano $\boldsymbol{A}_0$ e ϕ_0 soluzione delle equazioni, allora lo sono anche $\boldsymbol{A}$ e ϕ genericamente definiti su una funzione arbitraria $\Theta(\boldsymbol{r}, t)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 - \nabla \cdot \Theta(\boldsymbol{r}, t) \\ \phi = \phi_0 + \frac{\partial \Theta(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \end{cases}$$

In Particolare, si applica il *Gauge di Coulomb*:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A}_0 = \nabla^2 \Theta(\boldsymbol{r}, t) \tag{19}$$

Data l'arbitrarietà di $\Theta(\boldsymbol{r}, t)$, scelta tale da verificare $\nabla^2 \cdot \Theta(\boldsymbol{r}, t) = 0$, si dimostra che ogni soluzione delle (17, 18) soddisfa $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, quindi si ottengono le equazioni semplificate:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} = \mu \boldsymbol{J} \tag{20}$$

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{21}$$

La (21) è nella forma di *Equazione di Poisson*, la cui soluzione risulta essere:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \tag{22}$$

La soluzione del potenziale vettore viene ricavata con il *Teorema di Helmholtz*. Si scompone $\boldsymbol{J}$ nelle componenti solenoidale (o *trasversa*) $\boldsymbol{J}_T : \nabla \cdot \boldsymbol{J}_T = 0$, e irrotazionale (o *longitudinale*) $\boldsymbol{J}_L : \nabla \times \boldsymbol{J}_L = 0$. Dalle equazioni di Maxwell (12, 9) si ottiene la relazione per $\boldsymbol{J}_L$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_L = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{23}$$

Dato che $\boldsymbol{J}_L$ e solenoidale, può essere espressa come gradiente di un potenziale ψ, quindi:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{24}$$

Dalla (21) si ottiene la soluzione di ψ quindi di $\boldsymbol{J}_L$:

$$\psi = \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}_L = \varepsilon \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \tag{25}$$

Si ricava l'equazione (20) in funzione del solo potenziale $\boldsymbol{A}$, la cui soluzione è dipenedente dal tempo, ed è quindi espressione del *potenzaile ritardato* che tiene conto del principio di relatività fisica[10]:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J}_T \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{26}$$

Noti i potenziali dalle sorgenti $\boldsymbol{J}$ e ρ, si ottengono i campi in funzione dei potenziali. Definendo $\boldsymbol{E}$ nelle sue componenti solenoidale $\boldsymbol{E}_T$ e irrotazionale $\boldsymbol{E}_L$, si ottiene:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{E}_T = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{E}_L = -\nabla\phi \end{cases} \tag{27}$$

In funzione delle componenti vettoriali distinte, le equazioni di Maxwell possono essere convenientemente riscritte:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_T = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E}_L = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{28}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{29}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_T = 0 - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{30}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_T + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}_T}{\partial t} \quad , \quad \boldsymbol{J}_L = -\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}_L}{\partial t} \tag{31}$$

2.2 Soluzione di Campo per Cavità Risonante

Si considera per l'analisi matematica delle equazioni, una ipotetica scatola di dimensioni $L \times L \times L$ di *conduttore elettrico perfetto* (PEC) ideale ad ogni frequenza, ove non vi siano sorgenti interne. Il campo elettromagnetico che vi si instaura soddisfa le equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \varepsilon \boldsymbol{E} = \rho \tag{32}$$

$$\nabla \cdot \mu \boldsymbol{H} = 0 \tag{33}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \boldsymbol{H}) \tag{34}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \boldsymbol{E}) \tag{35}$$

[10] Il potenziale scalare ϕ non è ritardato, ma esso non costituisce una grandezza fisica osservabile.

La soluzione può essere ricavata applicando la separazione per variabili della dipendenza temporale da quella spaziale, che considera implicitamente la polarizzazione. Siano:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \triangleq e(t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \tag{36}$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \triangleq e(t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{37}$$

Le equazioni di Maxwell separate nei termini temporali e spaziali sono ricondotte alla forma:

$$\varepsilon\frac{\frac{\partial e(t)}{\partial t}}{h(t)} = \frac{[\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})]_x}{u_x(\boldsymbol{r})} = \frac{[\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})]_y}{u_y(\boldsymbol{r})} = \frac{[\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})]_z}{u_z(\boldsymbol{r})} \tag{38}$$
$$\mu\frac{\frac{\partial h(t)}{\partial t}}{e(t)} = -\frac{[\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})]_x}{v_x(\boldsymbol{r})} = -\frac{[\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})]_y}{v_y(\boldsymbol{r})} = -\frac{[\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})]_z}{v_z(\boldsymbol{r})} \tag{39}$$

Si definisce la costante k che determina la soluzione di campo per la configurazione di problema esaminato, comune alle due equazioni per convenienza, senza perdere soluzioni:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial e(t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}kh(t)\\ k\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial h(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}ke(t)\\ k\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\end{array}\right. \tag{40}$$

Dalle condizioni al contorno per la scatola di PEC con versore di superficie $\boldsymbol{i}_n$:

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{i}_n\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = 0\\ \boldsymbol{i}_n\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 0\end{array}\right. \quad , \quad \boldsymbol{r}\equiv(x,y,z) = \left\{\begin{array}{l}x = 0, L\\ y = 0, L\\ z = 0, L\end{array}\right. \tag{41}$$

si ricava la forma generale di soluzione delle componenti spaziali:

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}(x,y,z)\\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}(x,y,z)\end{array}\right\} = C\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\\ \cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\end{array}\right\}\times\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\\ \cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\end{array}\right\}\times\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)\\ \cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)\end{array}\right\} \tag{42}$$

Dalle condizioni (40) sulle componenti spaziali, si deduce che con k fissato esistono due soluzioni di modo indipendenti, tramite le quali può essere espressa la soluzione ad un qualsiasi problema specifico. Convenzionalmente, per le proprietà di simmetria di cui godono, si esprimono le soluzioni in termini di modi di *Campo Trasverso Elettrico* (TE) e *Campo Trasverso Magnetico* (TM), rispetto ad una direzione di riferimento $\boldsymbol{i}_z$ nel sistema considerato. In particolare si determina la costante di ampiezza dalle condizioni di normalizzazione all'unità di volume:

$$\int |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = L^3 = V \quad , \quad \int |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = L^3 = V \tag{43}$$

Quindi:
TE: $E_z = 0$

$$\begin{cases} u_x(x,y,z) = \frac{\sqrt{8}n_y}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \\ u_y(x,y,z) = -\frac{\sqrt{8}n_x}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \\ u_z(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(x,y,z) = \frac{\sqrt{8}n_x n_y}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \\ v_y(x,y,z) = \frac{\sqrt{8}n_y n_z}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \\ v_z(x,y,z) = -\frac{\sqrt{8}(n_x^2+n_y^2)}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \end{cases} \tag{44}$$

TM: $H_z = 0$

$$\begin{cases} u_x(x,y,z) = -\frac{\sqrt{8}n_x n_z}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \\ u_y(x,y,z) = -\frac{\sqrt{8}n_y n_z}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \\ u_z(x,y,z) = \frac{\sqrt{8}(n_x^2+n_y^2)}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} v_x(x,y,z) = \frac{\sqrt{8}n_y}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \\ v_y(x,y,z) = -\frac{\sqrt{8}n_x}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \\ v_z(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Con: $k : k^2 = \frac{\pi^2}{L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$.

La soluzione temporale alle equazioni (40) che esprime la dinamica dei campi, ovvero l'equazione d'onda, è di tipo oscillante con frequenza che dipende dalla costante k, con campo elettrico e campo magnetico temporalmente sfasati di un quarto di periodo e con ampiezza in rapporto costante:

$$\begin{cases} e(t) = e_0 \sin(\omega_k t + \vartheta) \\ h(t) = h_0 \cos(\omega_k t + \vartheta) \end{cases} \quad , \quad \frac{e_0}{h_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad , \quad \omega_k = \frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = ck \tag{46}$$

dove si è considerato il campo nel vuoto per la relazione di dispersione ($c = 1/(\sqrt{\mu_0\varepsilon_0})$). Si è quindi ricavata la soluzione generale nel tempo e nello spazio del campo elettromagnetico in una cavità, costituito da un'infinità numerabile di soluzioni determinate dalla costante k che assume valori discreti multipli di π/L.

Data l'assenza di flusso attraverso la scatola, l'energia totale immagazzinata all'interno risulta:

$$\mathcal{E} = \int_V \left[\frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\boldsymbol{H}|^2\right] \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{47}$$

In particolare, considerando la condizione di normalizzazione sul volume, ogni modo di campo ha energia:

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}\varepsilon e(t)^2 \int_V |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\mu h(t)^2 \int_V |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \frac{\varepsilon V}{2} e(t)^2 + \frac{\mu V}{2} h(t)^2 \tag{48}$$

2.3 Soluzione di Campo Radiato

Le relazioni tra i campi nello spazio libero in assenza di sorgentisono espresse dalle equazioni di Maxwell (Ref). La soluzione può essere espressa in termini di sovrapposizione di onde piane, soluzione nota delle equazioni di Maxwell, con dipendenza spaziale $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$,dove $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{i}_k$ rappresenta il *Vettore d'Onda*. In tale forma l'ampiezza dei campi di singola onda $e_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)$, $h_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)$ che determina l'evoluzione temporale è necessariamente una variabile complessa, per cui la soluzione reale può essere vista come somma di onde piane coniugate.

Si esprime quindi il campo in termini di serie di Fourier, con funzioni di base ortogonali rappresentate dalle onde piane, dove si evidenzia la polarizzazione del campo elettrico $\boldsymbol{i}_\sigma$ ortogonale alla direzione di propagazione $\boldsymbol{i}_k$, quindi del campo magnetico $(\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_\sigma)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{i}_\sigma \left[e_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + e^*_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_\sigma) \left[h_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + h^*_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \end{cases} \tag{49}$$

Considerando $\boldsymbol{i}_k = -\boldsymbol{i}_{-k}$, posso esprimere i campi in forma più comoda come serie di onde piane con ampiezza dei campi complessa $E_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)$, $H_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) & = & \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{i}_\sigma \left[e_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + e^*_{-\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] = \\ & = & \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{i}_\sigma E_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ & & \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) & = & \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_\sigma) \left[h_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - h^*_{-\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] = \\ & = & \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_\sigma) H_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \end{array}\right. \tag{50}$$

Il vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ e la polarizzazione σ rappresentano gli elementi caratterizzanti ogni singola onda piana, quindi le variabil ideterminanti la soluzione allo specifico problema esaminato. L'analisi può procedere[11] considerando la soluzione per un generico volume cubico $L \times L \times L$ e dimostrandone l'indipendenza dalla suascelta sia in dimensioni che in forma. L'estensione del volume allo spazio infinito equivale a considerare condizioni al contorno per una cavità in modo periodico, ovvero in altri termini, le onde piane tramite le quali si costruisce la soluzione al campo nello spazio libero, possono essere intermpretate come modi di una cavità dal volume generico. Pertanto la soluzione ammette vettori d'onda nella generica forma:

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi n_x}{L}\boldsymbol{i}_x + \frac{2\pi n_y}{L}\boldsymbol{i}_y + \frac{2\pi n_z}{L}\boldsymbol{i}_z \quad , \quad n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \in \mathbb{Z} \tag{51}$$

Per quanto riguarda la polarizzazione, essa può essere comunque rappresentata dalla sovrapposizione lineare di due polarizzazioni distinte, dato che si è osservato per la cavità che le soluzioni spaziali di ampo ammettono due soluzioni indipendenti.

Analogamente a quanto svolto per la cavità, dalle equazioni di Maxwell si ricava l'equazione dinamica per le ampiezze dei campi per singola onda piana[12], corrispondenti ad equazioni armoniche semplici di funzioni complesse:

$$\frac{\partial E_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)}{\partial t} = -i\frac{k}{\varepsilon}H_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) \tag{52}$$

$$\frac{\partial H_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)}{\partial t} = -i\frac{k}{\mu}E_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) \tag{53}$$

[11] Il procedimento adottato è utile per estendere la quantizzazione del campo nela cavità, analoga ad un'oscillatore armonico semplice, allo spazio libero.

[12] Ogni singolo termine d'onda è soluzione delle equazioni di Maxwell, quindi dell'equazione d'onda.

Si ottiene la soluzione oscillante, con relazione di dispersione che esprime la pulsazione di modo:

$$\begin{cases} e_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) = E_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{-i\omega_k t} \\ h_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) = H_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{-i\omega_k t} \end{cases} \quad , \quad \omega_k = ck \tag{54}$$

Mentre per l'analisi della soluzione di campo per la cavità, o comunque per problemi di studio in cui siano presenti dei corpi, risulta comodo operare con i campi per la semplice aplicazione delle condizioni al contorno, nello spazio libero è spesso conveniente operare con il potenziale, in funzione di cui possono essere espressi entrambi. Pertanto, dalla definizione (15) si ricava la soluzione in forma generale:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{i}_\sigma \left[A_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + A^*_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right] = \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{i}_\sigma A^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{55}$$

dove $\boldsymbol{k}$ soddisfa le condizioni al contorno periodiche (51). Ogni singolo modo di potenziale soddisfa l'equazione armonica semplice, dedotta dalle equazioni di Helmholtz (20) in assenza di sorgenti, la cui soluzione è analogamente ai campi oscillante.

Dalle (15, 27) si ottiene la relazione tra il potenziale e icampi di ogni singolo modo:

$$E_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) = i\omega_k A^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) \tag{56}$$

$$H_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) = \frac{i}{\mu} \boldsymbol{k} \times A^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{k},\sigma}(t) \tag{57}$$

L'energia del campo totale radiato, coerentemmente al procedimento di analisi svolto, è costituita dalla somma delle energie $\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}$ di ogni singola onda piana, quindi di ogni singolo modo del generico volume $V = L \times L \times L$:

$$\mathcal{E} = \int_V \left[\frac{1}{2}\varepsilon |\boldsymbol{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu |\boldsymbol{H}|^2 \right] \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}} \tag{58}$$

Con:

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\varepsilon V}{2} E_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)^2 + \frac{\mu V}{2} H_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)^2 \tag{59}$$

Dalle relazioni (56, 57), si ricava analogamente per il potenziale:

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}} = 2\varepsilon V \omega_k^2 |A_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)|^2 \tag{60}$$

In analisi generica, senza riferirsi alla rappresentazione della soluzione in termini di modi di cavità espansi, l'energia di campo elettromagnetico viene espressa dal Teorema di Poynting. Il vettore di Poynting, che esprime il flusso di energia di campo, viene definito come:

$$\boldsymbol{S} \triangleq \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{61}$$

Considerando la densità di energia elettrica e magnetica:

$$\varpi(\boldsymbol{r},t) = \varpi_e(\boldsymbol{r},t) + \varpi_m(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\boldsymbol{H}|^2 \tag{62}$$

In assenza di sorgenti, per il campo elettromagnetico nello spazio libero, il teorema che enuncia la conervazione dell'energia assume la forma:

$$\frac{\partial\varpi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{63}$$

3 Quantizzazione del Campo di Cavità Risonante

Si è premesso che il procedimento di quantizzazione parte dal definire la funzione d'onda di una grandezza di interresse del problema fisico di studio e nel definire l'equazione di Schrödinger sulla funzione che lega variabili coniugate.

Nel caso specifico si definisce una funzione che descrive la distribuzione di probabilità dell'ampiezza di campo elettrico nel tempo, $\Psi(e,t)$, e si esprime l'equazione di Schrödinger traendola direttamente dall'equazione classica dell'energia.

La quantizzazione del campo nella cavità può essere effettuata sul modo singolo generico descritto dalla costante k, considerando che esso costituisce una delle infinite soluzioni di base ammesse, che assumono la stessa forma.

3.1 Quantizzazione di Singolo Modo

Classicamente si ha, come visto, un'energia per ogni modo k di cavità:

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}\varepsilon e_k(t)^2\int_V|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\mu h_k(t)^2\int_V|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2 + \frac{\mu V}{2}h_k(t)^2 \tag{64}$$

Da tale equazione che descrive il sistema, unitamente alle equazioni dinamiche (40), si individuano le variabili coniugate con il *Metodo di Quantizzazione Canonica* di Dirac.

3.1.1 Metodo di Quantizzazione Canonica

Si descrive il Metodo di Quantizzazione Canonica per un generico sistema fisico per poi ricondurlo all'analisi quantistica del campo elettromagnetico.

Considerando un sistema classico descritto da un *Lagrangiano* nella forma canonica dell'equazione di Schrödinger[13] funzione di grandezze $q_1(t), q_2(t), \cdots$ e delle loro derivate prime:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t), \cdots; \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots) \tag{65}$$

Di tale sistema, si considerino le variabili di interesse per l'analisi quantistica $q_i(t)$ in funzione di cui si esprime la funzione d'onda, definite come *Variabili Canoniche*, ovvero relativamente alle quali si associa un operatore diretto:

$$q_i(t) \to \widehat{q}_i = q_i(t) \tag{66}$$

Si definiscono le Variabili Coniugate a quelle di interesse con la relazione classica sul lagrangiano:

$$p_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \tag{67}$$

L'analisi quantistica, individuate le variabili coniugate di sistema, procede col definire gli operatori opportuni sulla funzione d'onda nelle variabili canoniche, che non commutano con gli operatori relativi ad esse:

$$[\widehat{q}_i, \widehat{p}_i] = i\hbar \tag{68}$$

Da cui, per la (66) e la (67):

$$\widehat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \tag{69}$$

Si dimostra che solo operatori di variabili coniugate hanno commutazione non nulla.

Per l'analisi quantistica del campo nella cavità si definisce come variabile di interesse l'ampiezza di campo elettrico di singolo modo k nel tempo $e_k(t)$. Consideriamo le equazioni dinamiche del campo:

$$\frac{de_k(t)}{dt} = \frac{k}{\varepsilon} h_k(t) \quad ; \quad \frac{dh_k(t)}{dt} = -\frac{k}{\mu} e_k(t) \tag{70}$$

[13] Per Lagrangiani diversi si ha un'estensione del metodo.

Si dimostra che il lagrangiano classico associato è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu V \left(\frac{\varepsilon}{k}\frac{de_k(t)}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon V\, e_k(t)^2 \tag{71}$$

Definendo la variabile canonica di sistema $q(t) = e_k(t)$, la variabile coniugata associata risulta essere:

$$p(t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}(t)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{de_k(t)}{dt}\right)} = \frac{\mu\varepsilon^2 V}{k^2}\frac{de_k(t)}{dt} = \frac{\mu\varepsilon V}{k}h_k(t) \tag{72}$$

Si definisce coerentemente alla (69) l'operatore di variabile coniugata, che per l'analisi riferiamo ad un definito operatore di campo magnetico dalla (40):

$$\widehat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial e_k(t)} = -i\hbar\frac{\mu\varepsilon V}{k}\widehat{h}_k \quad\Rightarrow\quad \widehat{h}_k \triangleq -i\frac{\hbar k}{\mu\varepsilon V}\frac{\partial}{\partial e_k(t)} \tag{73}$$

Riferendoci alla pulsazione di modo nello spazio vuoto ($k = \omega_k\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega_k/c$), si sono in definitiva ottenuti gli operatori di quantizzazione coniugati, con commutazione non nulla, per l'analisi quantistica:

$$\begin{cases} \widehat{e}_k \triangleq e_k(t) \\ \widehat{h}_k \triangleq -i\frac{\hbar k}{\mu\varepsilon V}\frac{\partial}{\partial e_k(t)} \end{cases} \quad , \quad [\widehat{e}_k, \widehat{h}_k] = i\hbar\frac{\omega_k c}{V} \tag{74}$$

L' equazione di Schrödinger sulla funzione d'onda $\Psi_k(e_k, t)$ viene dedotta da una "traduzione quantistica" con operatori associati dell'equazione di energia di modo classica (65), che lega le variabili coniugate. Come noto dall' Oscillatore Armonico Semplice, l'operatore di *Energia* sulla funzione d'onda di ampiezza di campo risulta:

$$\widehat{\mathcal{E}}_k \triangleq i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{75}$$

Definendo l'operatore *Hamiltoniano* relativo di sistema:

$$\widehat{H}_k \triangleq \left[\frac{\mu V}{2}\widehat{h}_k^2 + \frac{\varepsilon V}{2}\widehat{e}_k^2\right] = \left[-\frac{\hbar^2\omega_k^2}{2\varepsilon V}\frac{\partial^2}{\partial e_k(t)^2} + \frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2\right] \tag{76}$$

si ottiene l'equazione di Schrödinger per singolo modo di cavità:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_k(e_k,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2\omega_k^2}{2\varepsilon V}\frac{\partial^2}{\partial e_k(t)^2} + \frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2\right]\Psi_k(e_k,t) \tag{77}$$

3.1.2 Soluzione dell'Equazione di Schrödinger

La soluzione dell'equazione di Schrödinger viene ricavata tramite la separazione per variabili della funzione d'onda definita. Si considera $\Psi_k(e_k,t)$ scomposta nella sua dipendenza temporale $\varphi_k(t)$ e da quella di ampiezza $\phi_k(e_k)$:

$$\begin{aligned}\Psi_k(e_k,t) &\triangleq \phi_k(e_k)\varphi_k(t) &(78)\\ \Rightarrow i\hbar\left(\frac{\partial\varphi_k(t)}{\partial t}\right)\phi_k(e_k) &= -\frac{\hbar^2\omega_k^2}{2\varepsilon V}\left(\frac{\partial^2\phi_k(e_k)}{\partial e_k(t)^2}\right)\varphi_k(t)+\frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2\phi_k(e_k)\varphi_k(t)\end{aligned}$$

Quindi, separando l'equazione con la definizione della costante $\mathcal{E}_k$ di equivalenza delle equazioni separate, *Autovalore Energetico* dell'operatore Hamiltoniano $\widehat{H}_k$ che rappresenta un valore possibile di energia per la funzione d'onda $\Psi_k(e_k,t)$:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{1}{\varphi_k(t)}\frac{\partial\varphi_k(t)}{\partial t}=\mathcal{E}_k\\ -\frac{\hbar^2\omega_k^2}{2\varepsilon V}\frac{1}{\phi_k(e_k)}\frac{\partial^2\phi_k(e_k)}{\partial e_k(t)^2}+\frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2=\mathcal{E}_k\end{cases} \tag{79}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varphi_k(t)}{\partial t}=-i\frac{\mathcal{E}_k}{\hbar}\varphi_k(t)\\ -\frac{\hbar^2\omega_k^2}{2\varepsilon V}\frac{\partial^2\phi_k(e_k)}{\partial e_k(t)^2}+\frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2\phi_k(e_k)=\mathcal{E}_k\phi_k(e_k)=\widehat{H}_k\phi_k(e_k)\end{cases} \tag{80}$$

Dall'equazione in funzione del tempo si ottiene la soluzione oscillante a pulsazione $\mathcal{E}_k/\hbar$:

$$\varphi_k(t)=\phi_0 e^{-i(\mathcal{E}_k/\hbar)t}\triangleq e^{-i(\mathcal{E}_k/\hbar)t} \tag{81}$$

dove si considera ampiezza normalizzata senza perdere in generalità, considerando il fattore costante nella soluzione di ampiezza.

La funzione di ampiezza $\phi_k(e_k)$ soddisfa l'*Equazione agli Autovalori* dell'Hamiltoniano, dove $\mathcal{E}_k$ costituisce appunto il valore di aspettazione dell'energia:

$$\mathcal{E}_k=<\phi_k|\widehat{H}_k|\phi_k>=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_k^*(e_k)\widehat{H}_k\phi_k(e_k)\mathrm{d}e_k \tag{82}$$

L'equazione può essere ricondotta ad una forma nota alle derivate ordinarie, studiata da *Hermite*:

$$-\frac{d^2\phi_k(e_k)}{d\zeta^2}+\zeta^2\phi_k(e_k)=\lambda\phi_k(e_k) \tag{83}$$

Con:

$$\zeta \triangleq \alpha e_k(t) \quad , \quad \alpha \triangleq \sqrt{\frac{\varepsilon V}{\hbar\omega_k}} \tag{84}$$

$$\lambda \triangleq \frac{2\varepsilon V}{\hbar^2\omega_k^2}\mathcal{E}_k \tag{85}$$

Si dimostra costruendo la soluzione con funzioni test[14] che l'equazione ammette autovalori λ_n dispari, ed autofunzioni corrispondenti espressi dai *Polinomi di Hermite* di grado n, H_n:

$$\phi_{k,n}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{\zeta^2}{2}}H_n(\zeta) \quad , \quad \lambda_n = 2n+1, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{86}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \phi_{k,n}(e_k) = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon V}{\pi\hbar\omega_k}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{\frac{1}{2}\varepsilon V e_k(t)^2}{\hbar\omega_k}}H_n\left(\sqrt{\frac{\varepsilon V}{\hbar\omega_k}}e_k(t)\right) \\ \mathcal{E}_{k,n} = \hbar\omega_k\left(n+\frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{87}$$

Dove $|\phi_{k,n}(e_k)|^2$ rappresenta la probabilità di avere ampiezza di modo k pari a e_k.

La soluzione generale della funzione d'onda può essere espressa come combinazione lineare delle autofunzioni di ampiezza e temporali degli stati n, ortogonali:

$$\Psi_k(e_k,t) = \sum_n A_{k,n}\phi_{k,n}(e_k)e^{-i\frac{\mathcal{E}_{k,n}}{\hbar}t} \quad , \quad \mathcal{E}_{k,n} = \hbar\omega_k\left(n_k+\frac{1}{2}\right) \tag{88}$$

È utile definire gli operatori per compiere l'analisi delle proprietà quantistiche in modo semplice, senza dover calcolare integrali complessi nella funzione d'onda. Come da Appendice (A) si definiscono gli operatori *Creazione* $\widehat{a}_k^\dagger$ e *Annichilazione* $\widehat{a}_k$ per l'equazione sulla funzione di campo:

$$\widehat{a}_k^\dagger \triangleq \sqrt{\frac{\varepsilon V}{2\hbar\omega_k}}e_k(t) - \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}\frac{d}{de_k(t)} \tag{89}$$

$$\widehat{a}_k \triangleq \sqrt{\frac{\varepsilon V}{2\hbar\omega_k}}e_k(t) + \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}\frac{d}{de_k(t)} \tag{90}$$

[14] Hermite risolve l'equazione con funzioni test simmetriche e antisimmetriche con ampiezza determinata da una serie di potenze convergente ad una Gaussiana per grandi valori di variabile (vedi [2]).

Si definiscono gli operatori di interesse per lo studio del campo in funzione di essi, e dell'operatore *Numero* $\widehat{n}_k$, le cui proprietà sono note (vedi Appendice (A)):

$$\widehat{H}_k \triangleq \hbar\omega_k\left(\widehat{a}_k^\dagger\widehat{a}_k+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega_k\left(\widehat{n}_k+\frac{1}{2}\right) \quad , \quad \widehat{n}_k \triangleq \widehat{a}_k^\dagger\widehat{a}_k \tag{91}$$

$$\widehat{e}_k \triangleq \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}(\widehat{a}_k+\widehat{a}_k^\dagger) \tag{92}$$

$$\widehat{h}_k \triangleq -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}}(\widehat{a}_k-\widehat{a}_k^\dagger) \tag{93}$$

3.2 Quantizzazione del Campo Multimodale

La quantizzazione del campo multimodale avviene per naturale estensione del campo quantizzato di singolo modo. Un campo multimodale è composto da sovrapposizione lineare di più modi k, per cui si definisce la funzione d'onda rispetto all'ampiezza di singolo modo $e_k(t)$, che soddisfa l'equazione di Schrödinger espressa dalla sovrapposizione dei termini energetici di ogni modo:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(e_{k1},e_{k2},\cdots;t)}{\partial t}=\sum_k\left\{-\frac{\hbar^2\omega_k^2}{2\varepsilon V}\frac{\partial^2}{\partial e_k(t)^2}+\frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2\right\}\Psi(e_{k1},e_{k2},\cdots;t) \tag{94}$$

Con la separazione dalla dipendenza temporale, che porta ad una soluzione oscillante analoga alla (81), si ottiene un'equazione agli autovalori che può essere a sua volta scomposta separando la funzione per variabili di ampiezza di campo di ogni singolo modo:

$$\mathcal{E}\phi(e_{k1},e_{k2},\cdots) = \sum_k\left\{-\frac{\hbar^2\omega_k^2}{2\varepsilon V}\frac{\partial^2}{\partial e_k(t)^2}+\frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2\right\}\phi(e_{k1},e_{k2},\cdots) \tag{95}$$

$$\phi(e_{k1},e_{k2},\cdots) \triangleq \phi_{k1}(e_{k1})\phi_{k2}(e_{k2})\cdots \tag{96}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{ki}\phi_{ki}(e_{ki}) = \left[-\frac{\hbar^2\omega_{ki}^2}{2\varepsilon V}\frac{\partial^2}{\partial e_{ki}(t)^2}+\frac{\varepsilon V}{2}e_{ki}(t)^2\right]\phi_{ki}(e_{ki})=\widehat{H}_{ki}\phi_{ki}(e_{ki})$$

La soluzione di ogni singola equazione di modo, nota dalla (87), porta ad un corrispondente autovalore di energia totale $\mathcal{E}_n$ di stato n:

$$\mathcal{E}_n=\sum_k\hbar\omega_k\left(n_k+\frac{1}{2}\right) \tag{97}$$

Considerando i modi in stato relativo n_k, la soluzione generale all'equazione di Schrödinger risulta quindi espressa dalla sovrapposizione lineare delle funzioni ortogonali calcolate per ogni combinazione possibile degli stati dei modi:

$$\begin{aligned}\Psi_{n_{k1},n_{k2},\cdots}(e_{k1}, e_{k2}, \cdots; t) &= \sum_{\forall\,\text{comb.}\,\{n_k\}} A_{\{\overline{n_{ki}}\}}\phi_{k1}(e_{k1})\phi_{k2}(e_{k2})\cdots\varphi(t) = \\ &= \sum_{\forall\,\text{comb.}\{n_k\}} \left[A_{\{\overline{n_{ki}}\}}\Pi_k\phi_{k,n_k}(e_k)\right] \qquad (98)\end{aligned}$$

Si defenisce l'Hamiltoniano totale $\widehat{H}$ come somma degli Hamiltoniani di singolo modo $\widehat{H}_k$ nella forma come dalla (91):

$$\widehat{H} \triangleq \sum_k \left\{-\frac{\hbar^2\omega_k^2}{2\varepsilon V}\frac{\partial^2}{\partial e_k(t)^2} + \frac{\varepsilon V}{2}e_k(t)^2\right\} = \sum_k \hbar\omega_k\left(\widehat{a}_k^\dagger\widehat{a}_k + \frac{1}{2}\right) \qquad (99)$$

Analogamente si definiscono gli operatori di campo elettrico $\widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{r})$ e magnetico $\widehat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{r})$ totale considerando i vettori spaziali di modo $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$:

$$\widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{r}) \triangleq \sum_k \widehat{e}_k\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r}) = \sum_k\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r})(\widehat{a}_k + \widehat{a}_k^\dagger) \qquad (100)$$

$$\widehat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{r}) \triangleq -i\sum_k \widehat{h}_k\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{r}) = \sum_k\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}}\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{r})(\widehat{a}_k - \widehat{a}_k^\dagger) \qquad (101)$$

3.3 Proprietà Quantistiche del Campo di Cavità

Note le soluzioni ammesse dall'equazione di Schrödinger si possono osservare le proprietà quantistiche del campo di cavità rilevando il *Limite Classico* dai valori di aspettazione delle variabili quantizzate, il *Principio di Indeterminazione*, che risulta essere la prima proprietà quantistica fondamentale, nonché le proprietà energetiche dello *Stato Fondamentale.*

3.3.1 Limite Classico dei Valori di Aspettazione

L'analisi quantistica di un qualunque sistema fisico costituisce un'estensione delle leggi classiche che lo descrivono, e i risultati ottenuti hanno da essere coerenti con le proprietà classiche note dall'esperienza. Il limite classico viene verificato dal valore di aspettazione delle variabili, calcolato sulla base della funzione d'onda che è legata in particolare alla densità di probabilità dell'ampiezza di campo elettrico, tramite gli operatori quantistici definiti. I modi di campo risultano essere funzioni oscillanti, pertanto quantisticamente si rilevano valori medi nulli per ogni modo di cavità k considerato ed ogni stato relativo n:

$$\begin{aligned} < e_k(t) >_n =& < \phi_{k,n}(e_k)|\widehat{e}_k|\phi_{k,n}(e_k) >= \\ =& \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}} \left[< \phi_{k,n}|\widehat{a}_k|\phi_{k,n} > + < \phi_{k,n}|\widehat{a}_k^\dagger|\phi_{k,n} > \right] = \\ =& \, 0 \quad , \quad \forall n \end{aligned} \tag{102}$$

$$< h_k(t) >_n = < \phi_{k,n}|\widehat{h}_k|\phi_{k,n} >= 0 \quad , \quad \forall n \tag{103}$$

Il valor medio di energia di modo, corrispondente all'autovalore delle equazioni, risulta essere ovviamente dipendente dall'autostato considerato n, che indica il numero di quanti energetici (fotoni) di modo:

$$< \mathcal{E}_k >_n = < \phi_{k,n}|\widehat{H}_k|\phi_{k,n} >= \hbar\omega_k \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{104}$$

Considerando comunque un singolo modo, per quel che riguarda gli *Stati Non Stazionari* espressi dalla soluzione generale (88), si determina un valore di aspettazione oscillante a pulsazione ω_k, come ci si aspetta classicamente. In funzione degli operatori, il valore di aspettazione dei campi è costituito da sovrapposisione di stati espressa da un sistema lineare risolvente con elementi di matrice $< \phi_{k,n}|(\widehat{e}_k, \widehat{h}_k)|\phi_{k,m} >$, integrali nelle funzioni d'onda di ampiezza. Considerando il campo elettrico (analogamente per il campo magnetico):

$$\begin{aligned} < e_k(t) > &= < \Psi_k|\widehat{e}_k|\Psi_k >= \\ &= \sum_n \sum_m e^{i\frac{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n}{\hbar}t} A_{k,n}^* A_{k,m} < \phi_{k,n}|\widehat{e}_k|\phi_{k,m} > \end{aligned} \tag{105}$$

Data la proprietà degli operatori di campo $\widehat{e}_k$, $\widehat{h}_k$, linearmente proporzionali agli operatori di creazione e annichilazione $\widehat{a}_k^\dagger$, $\widehat{a}_k$, in grado di determinare elementi di matrice (vedi A) non nulli solo tra autofunzioni con differenza di stato unitaria:

$$< \phi_{k,n}|\widehat{e}_k|\phi_{k,n} >= \quad \sqrt{\tfrac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}} < \phi_{k,n}|(\widehat{a}_k + \widehat{a}_k^\dagger)|\phi_{k,m} >=$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}\left[\sqrt{m}\delta_{n,m-1} + \sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}\right] \quad (106)$$

$$< \phi_{k,n}|\widehat{h}_k|\phi_{k,n} >= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}}\left[\sqrt{m}\delta_{n,m-1} - \sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}\right] \quad (107)$$

si calcola il valor medio di campo, costituito da una singola armonica oscillante alla pulsazione di modo $\omega_k = (\mathcal{E}_{i+1} - \mathcal{E}_i)/\hbar$:

$$\begin{aligned}
< e_k(t) > &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}e^{i\frac{\mathcal{E}_{n+1}-\mathcal{E}_n}{\hbar}t}A^*_{k,n}A_{k,n+1}\sqrt{n+1}+ \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}e^{-i\frac{\mathcal{E}_{n+1}-\mathcal{E}_n}{\hbar}t}A_{k,n}A^*_{k,n+1}\sqrt{n+1} = \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k 2(n+1)}{\varepsilon V}}|A^*_{k,n}A_{k,n+1}|\right)\cos(\omega_k t + \angle(A^*_{k,n}A_{k,n+1})) \\
&\triangleq e_0\cos(\omega_k t + \vartheta)
\end{aligned} \quad (108)$$

3.3.2 Principio di Indeterminazione

Dal Principio di Indeterminazione di Heisemberg (8), con ampiezze di campo elettrico e magnetico di modo coniugate, si verifica la consistenza di tale incertezza di misura a priori. Si calcola, con le proprietà degli operatori di creazione e annichilazione $\widehat{a}_k^\dagger$, $\widehat{a}_k$ (vedi Appendice (A)), la varianza delle ampiezze di campo:

$$\begin{aligned}
(\Delta e_k(t))^2_n &= \left\langle < e_k(t)^2 >_n - < e_k(t) >^2_n \right\rangle =< e_k(t)^2 >_n= \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V} < \phi_{k,n}|(\widehat{a}_k + \widehat{a}_k^\dagger)^2|\phi_{k,n} >= \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}\Big[< \phi_{k,n}|(\widehat{a}_k)^2|\phi_{k,n} > + < \phi_{k,n}|\widehat{a}_k\widehat{a}_k^\dagger|\phi_{k,n} > + \\
&\quad + < \phi_{k,n}|\widehat{a}_k^\dagger\widehat{a}_k|\phi_{k,n} > + < \phi_{k,n}|(\widehat{a}_k^\dagger)^2|\phi_{k,n} > \Big] \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}(2n+1)
\end{aligned} \quad (109)$$

$$(\Delta h_k(t))^2_n = \frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}(2n+1) \quad (110)$$

Da cui si verifica:

$$(\Delta e_k(t)\Delta h_k(t))_n = \hbar\omega_k\frac{c}{2V}(2n+1) \quad (111)$$

In particolare è interessante notare come si verifichi per lo stato fondamentale di campo il limite minimo della condizione di indeterminazione. Dalle variabili canonica e coniugata originarie per la quantizzazione, con operatori $\widehat{q} = \widehat{e}_k$, $\widehat{p} = -i\hbar(\omega_k c/V)\widehat{h}_k$, ci si aspetta indeterminazione che verifica la condizione di Heisemberg (8):

$$(\Delta p \Delta q) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{112}$$

quindi per $e_k(t)$, $h_k(t)$:

$$\Delta e_k(t) \Delta h_k(t) \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\omega_k c}{V} \right) \tag{113}$$

Per lo stato fondamentale si verifica appunto:

$$\Delta e_k(t) \Delta h_k(t) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\omega_k c}{V} \right) \tag{114}$$

3.3.3 Proprietà di Stato Fondamentale ed Effetto Casmir

Coerentemente al Principio di Indeterminazione verificato per i campi, si rileva un'energia di stato fondamentale non nulla, legata alle fluttuazioni intrinseche delle ampiezze dei campi che esprimono la caratteristica tipica quantistica dello *Stato di Equilibrio Dinamico* del sistema. Per un singolo modo, come dalla (104), si ha un'energia di stato fondamentale, nota come *Energia di Punto-Zero* o *Energia di Vuoto*, pari a:

$$< \mathcal{E}_k >_0 = \frac{\hbar \omega_k}{2} \tag{115}$$

Considerando un generico sistema, che ammette infiniti modi, si ottiene un risultato apparentemente eclatante, l'energia risulta infinita:

$$< \mathcal{E} >_0 = \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2} \quad , \forall \omega_k \quad \rightarrow \infty \tag{116}$$

È un risultato difficile da spiegare, ma che non causa problemi osservabili. Ogni strumento reale, tramite il quale si possono osservare valori di grandezze fisiche, fornisce misure che non sono proporzionali al valore assoluto dell'energia, ma alla variazione dovuta ad una eccitazione di interesse rispetto ad un riferimento di stato fondamentale, per cui usualmente nei casi reali si possono osservare le proprietà quantistiche di energia dai quanti $\Delta\mathcal{E} = \hbar\omega_k$, ma non $\mathcal{E}_0$. Tale proprietàè però rilevabile con il fenomeno noto come *Effetto Casmir*. Casmir, dal fatto che una cavità di volume limitato ammette un'infinità di modi minore rispetto allo spazio libero e rispetto che ad una cavità di volume superiore, rilevò l'effettiva presenza di una forza, debolissima ma non nulla, variabile al variare della distanza tra pareti conduttive molto vicine tra loro. Infatti, considerando una cavità cubica di lato L, la pulsazione minima di modo ammessa risulta: $\omega_k|_{min} = \sqrt{2}\pi c/(L)$. Ad una variazione di distanza $\Delta L = L_1 - L_2$ corrisponde quindi una variazione di energia di punto-zero finita:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_0 &= \sum_{k\in\Delta k(\Delta L)} \tfrac{1}{2}\hbar\Delta\omega_k|_{min} = \sum_{k\in\Delta k(\Delta L)} \tfrac{1}{2}\hbar\left[\tfrac{\sqrt{2}\pi c}{L_2} - \tfrac{\sqrt{2}\pi c}{L_1}\right] = \\ &= \sum_{k\in\Delta k(\Delta L)} \tfrac{1}{2}\hbar\sqrt{2}\pi c\tfrac{\Delta L}{L_1 L_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathcal{E}_0 \quad \exists \text{ finita.} \end{aligned}$$

La forza è nota come *forza di van der Walls*, ed è osservabile quando corpi macroscopici (come le pareti della cavità di Casmir) sono a distanza ottica, ma decresce rapidamente con la terza e la quarta potenza della distanza. È stata sperimentalmente misurata in modulo e variazione per distanze sull'ordine dei μm e decine di μm. Ciò dimostra inevitabilmente che il variare dello spettro di campo, anche se di ampiezza deterministica nulla, è inevitabilmente connesso ad una variazione di energia, l'energia di punto-zero.

4 Quantizzazione del Campo Radiato

La quantizzazione del campo radiato avviene per naturale estensione del campo di cavità risonante tramite l'applicazione delle condizioni al contorno periodiche, per un volume generico indefinito in forma e volume, ma ciò comporta valutazione opportune per la definizione delle variabili canoniche.

Il problema elettromagnetico di radiazione nello spazio libero si distingue da quello di cavità in quanto l'onda piana, soluzione di base con la quale si costruisce la soluzione generica (vedi **??**), ha una dinamica con campi elettrico e magnetico che si evolvono similarmente, crescono, decrescono e invertono la polarità insieme, mentre nella cavità risultano essere in controfase, espressi da vettori ortogonali. Nella cavità risonante l'energia di sistema è espressa da una conversione continua tra energia elettrica ed energia magnetica (così come avviene nel "palleggiamento" dell'energia tra i componenti capacitivi e induttivi di un circuito, e nell'oscillatore armonico tra energia cinetica ed energia potenziale). Pertanto sono definiti campi reattivi, dipendenti dalle sorgenti che li generanoe indipendenti l'un con l'altro. Nello Spazio libero si ha energia che non si converte, ma che fluisce con l'onda piana viaggiante dei campi radiati, che risultano mutuamente accoppiati, si autosostengono. Ciò comporta un'equazione dinamica che, mentre nella cavità è funzione delle ampiezze che risultano essere variabili coniugate, nello spazio libero è espressa da campi elettrico e magnetico non coniugati, e si nota dalla (??) che in una forma analoga a quella della cavità si hanno variabili complesse che descrivono l'evoluzione.

Il procedimento di quantizzazione coerentemente al metodo canonico, avviene sulla base dell'individuazione di variabili coniugate dal lagrangiano che descrive il sistema fisico, e nel problema di campo radiato può seguire diverse strade in funzione delle variabili con cui si esprime la dinamica.

La descrizione del problema può essere effettuata nelle variabili complesse del campo elettrico e magnetico rappresentando la soluzione di onda piana con le componenti complesse di campo, quindi quantizzando separatamente due variabili per modo dato che si hanno due gradi di libertà indipendenti nell'equazione dinamica. In particolare è possibile qanalizzare il campo quantisticamente separando il problema nelle parti reale e immaginaria delle ampiezze di campo, associando operatori quantistici ad ognuna (vedi il testo [3]). Con tale procedimento si determina un'energia di sistema in termini quantistici, funzione dei quattro operatori di parte reale e immaginaria di campo elettrico e magnetico, corrispondente ad un problema analogo ad una cavità in due dimensioni.

Alternativamente e più semplicemente, si può considerare che il campo può essere espresso senza ambiguità da un unico vettore complesso in funzione di cui possono essere espressi tanto il campo elettrico che quello magnetico: il potenziale elettrico. Dalla definizione di operatori di potenziale opportunamente funzioni degli operatori di creazione e annichilazione, si può compierer l'analisi sfruttandone le proprietà, in modo da rendere più semplice la risoluzione matematica delle relazioni quantistiche, senza perdere in generalità rispetto allo studio del problema effettuato tramite operazioni svolte, come da definizione, sulla funzione d'onda. Infatti la funzione d'onda è soluzione dell'equazione di Schrödinger espressa nella stessa forma della

(**??**) per la cavità, con l'opportuna ridefinizione degli operatori[15].

La quantizzazione del campo radiato può avvenire per linearità a partire dalla quantizzazione dell'onda piana singola, tramite cui si costruisce per sovrapposizione la soluzione generale.

4.1 Quantizzazione di singola Onda Piana

Si è osservato che un'onda piana, soluzione di campo nello spazio libero, può essere rappresentata come modo $\boldsymbol{k}$ di una cavità indefinita, considerando il vettore complesso con polarizzazione σ. La sua espressione matematica generica avviene in termini di modo spaziale con esponenziale complesso tramite il potenziale elettrico come da (**??**). Dato che la variabile dinamica di ampiezza $A_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)$ risulta complessa, come premesso la quantizzazione del modo richiede la definizione di due operatori. In funzione dell'ampiezza si determina un'energia per singola onda esprimibile in funzione del vettore complesso (vedi **??**), che per estensione ad analisi quantistica si può ricondurre alla definizione dei due operatori.

Spesso l'analisi viene sviluppata per analogia con l'oscillatore armonico semplice, defniendo per il potenziale due quantità scalari corrispondenti alle variabili di momento e posizione dell'oscillatore, per descrivere con due gradi di libertà indipendenti il problema (vedi [4]).

Adottando un metodo più generale ed un pò più elegante, senza risolvere il problema in relazione ad altri, si possono determinare i due operatori coniugati necessari comunque dal potenziale, ma direttamente dall'equazione dell'energia classica. Essa può essere considerata come limite di un'equazione quantistica agli autovalori di un Hamiltoniano generico definito con operatori di creazione e annichilazione, la cui forma si definisce analoga a quella del campo di cavità, dato che le ampiezze complesse dei campi di onda piana non modificano la soluzione generale dell'equazione di Schrödinger. Pertanto le soluzioni temporale e di ampiezza sono analoghe alle (**??**),(**??**), in dipendenza delle variabili complesse di spazio libero. In particolare la soluzione di ampiezza, espressa dai polinomi di Hermite, può essere considerata in termini generali come autofunzione ϕ_n di stato energetico n sulla quale applicare gli operatori di campo che vi agiscono modificandone lo stato con gli operatori di creazione e annichilazionedi fotoni, come visto per la cavità e come si

[15] Ciò è dato dal fatto che l'estensione del problema dalla cavità allo spazio libero viene effettuata trsamite l'applicazione delle condizioni al contorno periodiche senza modificarte l'equazione dinamica se non nelle variabili che la esprimono, divenute complesse.

vede per lo spazio libero. In definitiva in tasl modo si giustifica l'analisi di carattere prettamente operatoriale.

Data la piena libertà di definizione, arbitrariamente si scegli di esprimere un operatore complesso $\widehat{A}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ con gli operatori di relativa parte reale $\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ e immaginaria $\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$, che si dimostrano essere variabili coniugate:

$$A_{\boldsymbol{k},\sigma} = A^{\Re}_{\boldsymbol{k},\sigma} + iA^{\Im}_{\boldsymbol{k},\sigma} \rightarrow \widehat{A}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} + i\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma} \tag{117}$$

L'Hamiltoniano che descrive quantisticamente l'equazione dell'energia di modo espresso analogamente alla cavità in funzione degli operatori di creazione e annichilazione (vedi **??**) risulta:

$$\widehat{H}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \hbar\omega_k \left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_k \left(\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \frac{1}{2}\right) \tag{118}$$

Analogamente a quanto vale per l'Hamiltoniano, gli operatori di potenziale da definire devono verificare la relazione classica:

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}} = 2\varepsilon V\omega_k^2 A_{\boldsymbol{k},\sigma}A^*_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

Quindi quantisticamente, con gli operatori, ha da verificarsi:

$$2\varepsilon V\omega_k^2\widehat{A}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{A}^*_{\boldsymbol{k},\sigma}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} = \widehat{H}_{\boldsymbol{k},\sigma}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} \tag{119}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&2\varepsilon V\omega_k^2\widehat{A}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{A}^*_{\boldsymbol{k},\sigma} = \widehat{H}_{\boldsymbol{k},\sigma}\\
&\Rightarrow 2\varepsilon V\omega_k^2(\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} + i\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma})(\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma}) = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_k(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})\\
&\Rightarrow 2\varepsilon V\omega_k^2[\widehat{A^{\Re}}^2_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{A^{\Im}}^2_{\boldsymbol{k},\sigma}] = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_k(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})
\end{aligned} \tag{120}$$

Lo scopo è quello di ricavare $\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ e $\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ in funzione di $\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ e $\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}$. Si osserva dalle proprietà che si può esprimere il termine $(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})$ come somma di due termini quadrati:

$$\begin{array}{rcl}
(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 & = & (\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 + (\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 + 2\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\\
\Rightarrow \quad \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} & = & \frac{1}{2}[(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 - (\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 - (\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2]\\
(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} - \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 & = & (\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 + (\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 - 2\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\\
\Rightarrow \quad \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} & = & \frac{1}{2}[(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 + (\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 - (\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2]
\end{array}$$

Da cui:

$$
\begin{aligned}
(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}) &= \tfrac{1}{2}[(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 - (\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2] = \\
&= \tfrac{1}{2}[(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2 + (i\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})^2]
\end{aligned}
$$

Per equivalenza di operatori si ricavano quindi $\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ e $\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$:

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon V\omega_k^2(\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} + i\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma})(\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma}) = \\
&\quad = \tfrac{1}{4}\hbar\omega_k[(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}) + i(i\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})][(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}) - i(i\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{2\varepsilon V\omega_k^2}\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} + i\sqrt{2\varepsilon V\omega_k^2}\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma}\right)\left(\sqrt{2\varepsilon V\omega_k^2}\widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\sqrt{2\varepsilon V\omega_k^2}\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma}\right) = \\
&\quad = \left[(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}) + i\frac{\sqrt{\hbar\omega_k}}{2}(i\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})\right] \\
&\quad \times \left[(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}) - i\frac{\sqrt{\hbar\omega_k}}{2}(i\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma})\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} \triangleq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V\omega_k}}(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}) \\ \widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma} \triangleq \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V\omega_k}}(\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}) \end{cases} \tag{121}
$$

Da cui:

$$
\begin{cases} \widehat{A}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} + i\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V\omega_k}}\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \\ \widehat{A}^{*}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \widehat{A^{\Re}}_{\boldsymbol{k},\sigma} - i\widehat{A^{\Im}}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V\omega_k}}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \end{cases} \tag{122}
$$

In definitiva, considerando i campi in relazione al potenziale, si ottengono gli operatori che descrivono univocamente l'onda piana quantizzata con vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ e polarizzazione σ:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{k},\sigma} &= \left(\widehat{A}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{A}^{*}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma = \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V\omega_k}}\left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma \qquad (123) \\
\widehat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{k},\sigma} &= i\omega_k\left(\widehat{A}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{A}^{*}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma = \\
&= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V\omega_k}}\left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma \qquad (124)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{H}}_{\boldsymbol{k},\sigma} &= i\frac{\boldsymbol{k}}{\mu} \times \left(\widehat{A}_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{A}^*_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \boldsymbol{i}_\sigma = \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V \omega_k}} \frac{\boldsymbol{k}}{\mu} \times \left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \boldsymbol{i}_\sigma \end{aligned} \tag{125}$$

4.2 Quantizzazione del Campo Radiato Totale

Ottenuta l'espressione quantistica della singola onda piana, del singolo modo di cavità indefinita, l'estensione al campo totale avviene per conseguente sovrapposizione lineare. Gli operatori di campo di singolo modo sono stati definiti in funzione di $\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}$ e $\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}$, che creano e distruggono quanti $\hbar\omega_k$ per il solo modo con vettore $\boldsymbol{k}$, che è quindi determinato in livello di eccitazione dal numero di fotoni $n_{\boldsymbol{k},\sigma} \in \mathbb{N}$ autovalore dell'operatore $\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}$, ovvero dall'autofunzione $\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}$.

Il campo totale viene univocamente determinato dal numero di fotoni $\overline{n_{\boldsymbol{k},\sigma,i}}$ eccitati per ogni modo $\boldsymbol{k}_i$. Per la proprietà di indipendenza delle autofunzioni singole di riflesso all'indipendenza statistica delle distribuzioni di probabilità di ampiezza di campo di ogni modo, si esprime lo stato di campo totale $[n_{\boldsymbol{k},\sigma,1}, n_{\boldsymbol{k},\sigma,2}, n_{\boldsymbol{k},\sigma,3}, \cdots]$ (indicato per semplicità con $\{\overline{n_{\boldsymbol{k},\sigma,i}}\}$) come prodotto di ogni termine individuale, applicando come per la cavità la separazione per variabili:

$$\phi_{n_{\boldsymbol{k},\sigma,1}, n_{\boldsymbol{k},\sigma,2}, \ldots} = \phi_{\{\overline{n_{\boldsymbol{k},\sigma,i}}\}} = \phi_{n_{\boldsymbol{k},\sigma,1}} \phi_{n_{\boldsymbol{k},\sigma,2}} \cdots \tag{126}$$

Di conseguenza, dato che $\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}$ e $\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}$, quindi $\widehat{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{k},\sigma}, \widehat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{k},\sigma}, \widehat{\mathbf{H}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$, agiscono solo sul modo $\boldsymbol{k}$, si esprimono gli operatori di campo totale come somma di ogni singolo operatore di modo:

$$\widehat{\mathbf{A}} = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \widehat{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V \omega_k}} \left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \boldsymbol{i}_\sigma \tag{127}$$

$$\widehat{\mathbf{E}} = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \widehat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V \omega_k}} \left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \boldsymbol{i}_\sigma \tag{128}$$

$$\widehat{\mathbf{H}} = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \widehat{\mathbf{H}}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon V \omega_k}} \frac{\boldsymbol{k}}{\mu} \times \left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \boldsymbol{i}_\sigma \tag{129}$$

Vale l'analogo per l'Hamiltoniano totale:

$$\widehat{H} = \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \widehat{H}_k = \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_k \left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} + \frac{1}{2} \right) \tag{130}$$

È utile infine ricordare che per il conteggio dei modi di campo totale si deve considerare la polarizzazione σ, che ammette due soluzioni indipendenti tramite le quali esprimerne una specifica.

4.3 Proprietà Quantistiche di Campo Radiato

La quantizzazione di campo radiato porta a risultati fisici molto importanti e necessari per spiegare fenomeni evidenti nelle applicazioni, come premesso.

Si osserva innanzitutto la coincidenza delle relazioni quantistiche con le leggi classiche note, le equazioni di Maxwell, verificate come limite in termini di valore di aspettazione degli operatori definiti. Per l'analisi si utilizza il *Teorema di Ehrenfest* (**??**) che permette di ricavare l'evoluzione dinamica in modo semplice. Si deducono proprietà energetiche come per il campo di cavità, osservando l'analoga divergenza dell'energia di punto-zero.

Le proprietà principali risultano comunque dall'indeterminazione di fase e di ampiezza di campo, evidenti non tanto nella rapresentazione quantistica con soluzione espressa dal prodotto delle autofunzioni di modo, utile comunque per l'analisi matematica, quanto nella rappresentazione con stati coerenti, riconducibile direttamente al campo osservabile reale, in funzione del numero di fotoni dell'onda[16].

4.3.1 Valori di Aspettazione e limite alle Equazioni di Maxwell

L'analisi quantistica del campo elettromagnetico è stata sviluppata a partire dalle leggi classiche che lo descrivono, per cui la proprietà verificata nel limite classico dei valori di aspettazione è intrinseca nella stessa definizione delle relazioni quantistiche. Risulta comunque utile "confermare" la validità

[16] La rappresentazione con stati coerenti porta a deduzioni quantistiche importanti riscontrabili per il campo elettrmagnetico in ambito generale, compreso quello di cavità, ma esse si enunciano per il campo nello spazio libero dato che esso rappresenta l'obiettivo di analisi quantistica primario della presente trattazione, e le proprietà osservate come conseguenza della soluzione per la cavità sono state anticipate in quanto sono strettamente legate a tale problema

delle equazioni di Maxwell anche nella rappresentazione fisica estesa con la quantizzazione. Il limite classico si verifica in particolare con l'applicazione del Teorema di Ehrenfest che permette di esprimere l'evoluzione dinamica di grandezze fisiche quantizzate in modo semplice, con gli operatori definiti. I risultati sono comunque verificabili anche con un'analisi statistica svolta sulla funzione d'onda.

In particolare si ricorda che l'analisi svolta per il campo nello spazio libero con grandezze fisiche quantistiche relative all'onda piana, ovvero con campo elettrico e magntico ortogonali alla direzione di propagazione (vedi **??**). Infatti, l'eventuale considerazione di sorgenti di carica e di corrente nell'analisi, pur con opportuna definizione quantistica, comporta risultati che divergono dal limite classico delle equazioni di Maxwell con gli operatori di campo così definiti che sottintendono la rappresentazione di campi trasversi[17].

Limite all'Equazione di Ampere Generalizzata nello Spazio Libero Consideriamo l'evoluzione dinamica del valore di aspettazione del campo elettrico. Si osserva dalla (**??**) che l'operatore relativo è tempo-indipendente, da cui: $\langle \partial\widehat{\mathbf{E}}/\partial t\rangle = 0$. Quindi il Teorema di Ehrenfest applicato all'operatore $\widehat{\mathbf{E}}$ esprime:

$$\frac{\partial\langle\widehat{\mathbf{E}}\rangle}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\langle[\widehat{\mathbf{E}},\widehat{H}]\rangle + \langle\frac{\partial\widehat{\mathbf{E}}}{\partial t}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\widehat{\mathbf{E}},\widehat{H}]\rangle \tag{131}$$

Si calcola la commutazione con l'Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
[\widehat{\mathbf{E}},\widehat{H}] &= \widehat{\mathbf{E}}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\mathbf{E}} = \\
&= \left[\sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} i\sqrt{\tfrac{\hbar}{2\varepsilon V\omega_k}}\left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma\right] \\
&\quad \times\left[\sum_{\sigma'}\sum_{\boldsymbol{k}'}\hbar\omega'_k\left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}',\sigma'} + \tfrac{1}{2}\right)\right] + \\
&\quad -\left[\sum_{\sigma'}\sum_{\boldsymbol{k}'}\hbar\omega'_k\left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}',\sigma'} + \tfrac{1}{2}\right)\right] \\
&\quad \times\left[\sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} i\sqrt{\tfrac{\hbar}{2\varepsilon V\omega_k}}\left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma\right]
\end{aligned}$$

[17] L'analisi di campo in presenza di sorgenti o di corpi, ovvero l'analisi di campo non nello spazio libero, esula dalla presente trattazione. Essa risulta un utile fondamento per lo studio dei fenomeni verificati nelle applicazioni specifiche come i Laser. Per approfondimenti si vedano testi relativi allo studio di tale problema come [4].

Con le proprietà degli operatori (vedi **??**):

$$[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}, 1/2] = [\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}, 1/2] = 0$$

$$[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}, \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}',\sigma'}\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}] = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}', \sigma \neq \sigma' \\ \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}, & \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}', \sigma = \sigma' \end{cases}$$

$$[\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}, \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}',\sigma'}\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}] = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}', \sigma \neq \sigma' \\ -\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}, & \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}', \sigma = \sigma' \end{cases}$$

$$[\widehat{\mathbf{E}}, \widehat{H}] = \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}\hbar\omega_k \left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma \tag{132}$$

Da cui l'evoluzione dinamica del valore di aspettazione:

$$\frac{\partial\langle\widehat{\mathbf{E}}\rangle}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}\hbar\omega_k \left(\langle\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \langle\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma \tag{133}$$

Considerando il rotore del valore di aspettazione del campo magnetico:

$$\begin{aligned} \nabla\times\langle\widehat{\mathbf{H}}\rangle &= \nabla\times\textstyle\sum_\sigma\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}}\left(\langle\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \langle\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)(\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_\sigma) = \\ &= -i\textstyle\sum_\sigma\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}}|\boldsymbol{k}|\left(\langle\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \langle\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma \end{aligned} \tag{134}$$

Con $\omega_k = ck, c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, si verifica quantisticamente il limite alle Legge di Ampere Generalizzata nello spazio libero:

$$\frac{\partial\varepsilon\langle\widehat{\mathbf{E}}\rangle}{\partial t} = \nabla\times\langle\widehat{\mathbf{H}}\rangle \tag{135}$$

Limite alla Legge di Faraday nello Spazio Libero Si procede analogamente alla verifica della Legge di Ampere. Si considera l'evoluzione temporale del valore di aspettazione del campo magnetico dal Teorema di Ehrenfest, con operatore $\widehat{\mathbf{H}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ tempo-indipendente:

$$\frac{\partial\langle\widehat{\mathbf{H}}\rangle}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\widehat{\mathbf{H}}, \widehat{H}]\rangle \tag{136}$$

Si calcola la commutazione:

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathbf{H}}, \widehat{H}] &= \textstyle\sum_\sigma\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma'}\sum_{\boldsymbol{k}'}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}}\hbar\omega'_k \\ &\times \left([\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}, \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}',\sigma'}\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + [\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}, \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}',\sigma'}\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}]e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)(\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_\sigma) = \\ &= \textstyle\sum_\sigma\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}}\hbar\omega_k\left(\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)(\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_\sigma) \end{aligned}$$

Da cui:

$$\frac{\partial\langle\widehat{\mathbf{H}}\rangle}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\sum_{\sigma}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\mu V}}\hbar\omega_k\left(\langle\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \langle\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)(\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_\sigma) \quad (137)$$

Considerando il rotore del valore di aspettazione di campo elettrico:

$$\begin{aligned}\nabla\times\langle\widehat{\mathbf{E}}\rangle &= \nabla\times\textstyle\sum_\sigma\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}\left(\langle\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \langle\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{i}_\sigma = \\ &= i\textstyle\sum_\sigma\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}|\boldsymbol{k}|\left(\langle\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \langle\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\rangle e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)(\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_\sigma)\end{aligned} \quad (138)$$

Si verifica il limite alla Legge di Faraday nello spazio libero:

$$\frac{\partial\mu\langle\widehat{\mathbf{E}}\rangle}{\partial t} = -\nabla\times\langle\widehat{\mathbf{E}}\rangle \quad (139)$$

Limite al Teorema di Poynting nello Spazio Libero come Conservazione dell'Energia Il Teorema di Poynting che enuncia la conservazione dell'energia del campo elettromagnetico nello spazio libero (**??**) viene verificato come limite classico di rappresentazione fisica quantistica definendo gli operatori di densità di energia e di vettore di Poynting dagli operatori di campo.

Per quel che riguarda la densità di energia, classicamente è espressa da:

$$\varpi(\boldsymbol{r},t) = \varpi_e(\boldsymbol{r},t) + \varpi_m(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\boldsymbol{H}|^2 \quad (140)$$

da cui si definiscono:

$$\begin{aligned}\widehat{\varpi_e} &= \frac{1}{2}\varepsilon|\widehat{\mathbf{E}}|^2 = \sum_\sigma\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma'}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{\hbar}{4V}\sqrt{\omega_k\omega'_k}\left[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\ &\times\left[\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\right](\boldsymbol{i}_\sigma\cdot\boldsymbol{i}_\sigma{}') \qquad (141) \\ \widehat{\varpi_m} &= \frac{1}{2}\mu|\widehat{\mathbf{H}}|^2 = \sum_\sigma\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma'}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{\hbar}{4V}\sqrt{\omega_k\omega'_k}\left[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\ &\times\left[\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\right](\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_\sigma)\cdot(\boldsymbol{i}_k{}'\times\boldsymbol{i}_\sigma{}') \qquad (142)\end{aligned}$$

Per la proprietà vettoriale:

$$(\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_\sigma)\cdot(\boldsymbol{i}_k{}'\times\boldsymbol{i}_\sigma{}') = (\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{i}_k{}')(\boldsymbol{i}_\sigma\cdot\boldsymbol{i}_\sigma{}') - (\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{i}_\sigma{}')(\boldsymbol{i}_\sigma\cdot\boldsymbol{i}_k{}') \quad (143)$$

si determina l'operatore di densità totale:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varpi} &= \widehat{\varpi_e} + \widehat{\varpi_m} = \\
&= \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma'} \sum_{\boldsymbol{k}'} \frac{\hbar}{4V} \sqrt{\omega_k \omega_k'} \\
&\times \left[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right] \left[\widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} + \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} \right] \\
&\times [(\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_\sigma{}') + (\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_{\sigma'})(\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_k{}') - (\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_k{}')(\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_\sigma{}')] \qquad (144)
\end{aligned}$$

Si effettua la commutazione con l'Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
[\widehat{\varpi}, \widehat{H}] &= \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma'} \sum_{\boldsymbol{k}'} \frac{\hbar}{4V} \sqrt{\omega_k \omega_k'} \\
&\times \Big\{ [\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}, \widehat{H}] e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} + [\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}, \widehat{H}] e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} + \\
&+ [\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}, \widehat{H}] e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} + [\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}, \widehat{H}] e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \Big\} \\
&\times [(\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_\sigma{}') + (\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_{\sigma'})(\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_k{}') - (\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_k{}')(\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_\sigma{}')] \qquad (145)
\end{aligned}$$

Applicando le proprietà degli operatori:

$$[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}, \widehat{H}] = \hbar(\omega_k + \omega_k') \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \qquad (146)$$

$$[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}, \widehat{H}] = \hbar(\omega_k - \omega_k') \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \qquad (147)$$

$$[\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}, \widehat{H}] = -\hbar(\omega_k - \omega_k') \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \qquad (148)$$

$$[\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'}, \widehat{H}] = -\hbar(\omega_k + \omega_k') \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \qquad (149)$$

si calcola la variazione temporale del valore di aspettazione della densità di energia:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \widehat{\varpi} \rangle}{\partial t} &= \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma'} \sum_{\boldsymbol{k}'} \frac{\hbar}{4iV} \sqrt{\omega_k \omega_k'} \\
&\times \Big\{ (\omega_k + \omega_k') \left[\langle \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} - \langle \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \right] + \\
&+ (\omega_k - \omega_k') \left[\langle \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} - \langle \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \right] \Big\} \\
&\times [(\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_\sigma{}') + (\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_{\sigma'})(\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_k{}') - (\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_k{}')(\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_\sigma{}')] \qquad (150)
\end{aligned}$$

Considerando la definizione classica del vettore di Poynting (**??**) si definisce l'operatore relativo considerando una forma alternativa equivalente che permette di rendere più semplice la risoluzione matematica delle equazioni operatoriali:

$$\widehat{\mathbf{S}} \triangleq \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}} - \widehat{\mathbf{H}} \times \widehat{\mathbf{E}}) \tag{151}$$

Di esso si calcola la divergenza del valore di aspettazione:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \widehat{\mathbf{S}} &= \nabla \cdot \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma'} \sum_{\boldsymbol{k}'} \frac{\hbar c}{4V} \sqrt{\omega_k \omega_k'} \\
&\quad \times \Big[\langle \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle (\omega_k \boldsymbol{i}_k + \omega_k' \boldsymbol{i}_k{}') e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{r}} + \\
&\quad + \langle \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle (\omega_k \boldsymbol{i}_k - \omega_k' \boldsymbol{i}_k{}') e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{r}} + \\
&\quad - \langle \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle (\omega_k \boldsymbol{i}_k - \omega_k' \boldsymbol{i}_k{}') e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{r}} + \\
&\quad - \langle \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle (\omega_k \boldsymbol{i}_k + \omega_k' \boldsymbol{i}_k{}') e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{r}} \Big] \\
&\quad \times [(\boldsymbol{i}_\sigma \times (\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_\sigma{}') + \boldsymbol{i}_\sigma{}' \times (\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_\sigma))] = \\
&= \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma'} \sum_{\boldsymbol{k}'} \frac{\hbar}{4V} \sqrt{\omega_k \omega_k'} \\
&\quad \times \Big[\langle \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{r}} + \langle \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{r}} + \\
&\quad + \langle \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{r}} + \langle \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \rangle e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{r}} \Big] \\
&\quad \times [(\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_\sigma{}')(-\boldsymbol{i}_k + \boldsymbol{i}_k{}') - (\boldsymbol{i}_\sigma \cdot \boldsymbol{i}_k{}')\boldsymbol{i}_\sigma{}' + (\boldsymbol{i}_\sigma{}' \cdot \boldsymbol{i}_k)\boldsymbol{i}_\sigma]
\end{aligned} \tag{152}$$

In definitiva, si verifica il limite al Teorema di Poynting nello spazio libero:

$$\frac{\partial \langle \widehat{\varpi} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \widehat{\mathbf{S}} = 0 \tag{153}$$

Limite alle Leggi di Gauss nello Spazio Libero Le leggi di Gauss per il campo elettrico e magnetico nello spazio libero sono verificate semplicemente considerando che la divergenza dei termini spaziali di onda piana nella forma $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ con cui si compongono gli operatori di campo si annulla, per cui vale il limite classico:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \langle \widehat{\mathbf{E}} \rangle) = 0 \tag{154}$$

$$\nabla \cdot (\mu \langle \widehat{\mathbf{H}} \rangle) = 0 \tag{155}$$

Valore di Aspettazione di Energia Il valore di aspettazione dell'energia di singola onda piana e di campo totale è autovalore dell'Hamiltoniano, che ha la stessa forma per il campo sia nello spazio libero che nella cavità, per cui vale l'analogo di quanto visto in (**??**), considerando anche la polarizzazione delle onde ammesse:

$$< \mathcal{E}_{k,\sigma} >_n \; = \; \hbar\omega_k \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{156}$$

$$< \mathcal{E} >_n \; = \; \sum_\sigma \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_k \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{157}$$

Ne conseguono le stesse proprietà di stato fondamentale di energia di punto-zero divergente, che nello spazio libero non produce effetti osservabili, le infinite onde ammesse non risultano variabili in numero a meno che il volume di analisi non venga confinato, riconducendoci al caso di cavità.

4.3.2 Proprietà di indeterminazione di Ampiezza e Fase di Campo

La fisica quantistica appare come rivoluzione della fisica classica soprattutto per quel che riguarda l'indeterminazione intrinseca delle grandezze coniugate. Per la cavità si è osservata l'indeterminazione che lega le ampiezze di campo elettrico e magnetico. Nello spazio libero invece le ampiezze di campo sono legate ad operatori con commutazione non nulla solo per modi distinti[18]. In compenso, si dimostra che si ha indeterminazione tra fase ed ampiezza per ogni modo.

Data l'indipendenza dei termini di singola onda piana con i quali si esprime il campo quantizzato totale, si può considerare per l'analisi un singolo modo. Classicamente è usuale la rappresentazione di un'onda di campo in termini di ampiezza e fase nella forma:

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},t}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2} E_0 \left[e^{-i\omega_k t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + i\varphi} + e^{+i\omega_k t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\varphi} \right] \boldsymbol{i}_\sigma \tag{158}$$

Quantisticamente l'operatore di campo è definito con gli operatori di creazione e annichilazione, che possono essere considerati analogamente in termini di ampiezza e fase con operatori relativi da definire, rappresentando

[18] Si dimostra semplicemente applicando le proprietà degli operatori di creazione e annichilazione tramite cui sono espressi gli operatori di campo.

con $\varphi_{k,\sigma}$ analogo di fase classica:

$$\widehat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{k},t}(\boldsymbol{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}}\left[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{-i\omega_k t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}e^{+i\omega_k t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]\boldsymbol{i}_\sigma \tag{159}$$

La definizione di $\widehat{\alpha'}_{\boldsymbol{k},\sigma}$, $\widehat{\alpha}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ e $\widehat{e^{-i\varphi_{k,\sigma}}}$, $\widehat{e^{i\varphi_{k,\sigma}}}$ non è univoca, ma risulta comodo esprimerli in modo da avere caratteristiche tali da mostrare le proprietà fisiche quantistiche del campo.

L'operatore di ampiezza viene definito coerentemente alle proprietà di creazione e annichilazione di fotoni di modo. Si vuole verificare:

$$\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma} + 1 \tag{160}$$

Definendo:

$$\widehat{\alpha}_{\boldsymbol{k},\sigma} \triangleq \sqrt{\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}+1} \quad \Rightarrow \quad \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sqrt{\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}+1}\,\widehat{e^{i\varphi_{k,\sigma}}} \tag{161}$$

per le proprietà di $\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ Hermitiano, si ricava la forma relativa di $\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}$:

$$\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \widehat{e^{-i\varphi_{k,\sigma}}}\sqrt{\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}+1} \tag{162}$$

Da cui, per la (??) e per le altre proprietà di $\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ e $\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}$, seguono le proprietà conseguenti che devono rispettare gli operatori di fase:

$$\begin{cases} \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} = n_{\boldsymbol{k},\sigma}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} \\ \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} = \sqrt{n_{\boldsymbol{k},\sigma}}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n-1} \\ \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} = \sqrt{n_{\boldsymbol{k},\sigma}+1}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n+1} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{e^{i\varphi_{k,\sigma}}}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} = \sqrt{n_{\boldsymbol{k},\sigma}}\frac{1}{\sqrt{\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}+1}}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n-1} = \begin{cases} \phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n-1} & , \quad n_{\boldsymbol{k},\sigma} \neq 0 \\ 0 & , \quad n_{\boldsymbol{k},\sigma} = 0 \end{cases} \\ \widehat{e^{-i\varphi_{k,\sigma}}}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} = \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\frac{1}{\sqrt{n_{\boldsymbol{k},\sigma}+1}}\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} = \phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n+1} \end{cases} \tag{163}$$

Relativamente ad elementi di matrice per sovrapposizione di stati diversi:

$$\langle\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\widehat{e^{i\varphi_{k,\sigma}}}|\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,m}\rangle = \begin{cases} 1 & , \quad m-n=1 \\ 0 & , \quad m-n\neq 1 \end{cases} \tag{164}$$

$$\langle\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\widehat{e^{-i\varphi_{k,\sigma}}}|\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,m}\rangle = \begin{cases} 1 & , \quad n-m=1 \\ 0 & , \quad n-m\neq 1 \end{cases} \tag{165}$$

Si osserva dalle (**??**) che gli operatori di fase così definiti non sono Hermitiani, per cui si definiscono operatori alternativi che possano essere riconducibili a grandezze fisiche osservabili, con una definizione parallela alle relazioni classiche per le componenti "in fase" e in "quadratura" dell'ampiezza complessa:

$$\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}} \triangleq \frac{1}{2}\left[\widehat{e^{i\varphi_{k,\sigma}}} + \widehat{e^{-i\varphi_{k,\sigma}}}\right] \tag{166}$$

$$\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}} \triangleq \frac{1}{2i}\left[\widehat{e^{i\varphi_{k,\sigma}}} - \widehat{e^{-i\varphi_{k,\sigma}}}\right] \tag{167}$$

Tali operatori risultano essere Hermitiani:

$$\langle\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}|\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,m}\rangle = \langle\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,m}|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}|\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}\rangle = \begin{cases} 1/2 & , \quad m-n=1 \\ 0 & , \quad m-n\neq 1 \end{cases} \tag{168}$$

$$\langle\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}|\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,m}\rangle = -\langle\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,m}|\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}|\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}\rangle = \begin{cases} 1/(2i) & , \quad n-m=1 \\ 0 & , \quad n-m\neq 1 \end{cases} \tag{169}$$

Inoltre risultano operatori di variabili coniugate solo per lo stato fondamentale, in analogia alle componenti in fase e in quadratura classiche:

$$[\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}, \widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}] = \frac{1}{2i}\left[\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\frac{1}{\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}+1}\widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} - 1\right] \tag{170}$$

$$\langle\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|[\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}, \widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}]|\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,m}\rangle = \begin{cases} 1/(2i) & , \quad n=m=1 \\ 0 & , \quad n,m\neq 0 \end{cases} \tag{171}$$

In definitiva, considerando che l'operatore numero $\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ è connesso all'ampiezza dell'onda dato che esprime il numero di fotoni, e gli operatori $\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}, \widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}$ alla fase, si verificano le relazioni di indeterminazione sul campo di modo come conseguenza delle commutazioni di tali operatori:

$$\begin{cases} [\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}, \widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}] = -i\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}} \\ [\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}, \widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}] = i\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma}\Delta\cos\varphi_{k,\sigma} \geq \frac{1}{2}|\langle\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}\rangle| \\ \Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma}\Delta\sin\varphi_{k,\sigma} \geq \frac{1}{2}|\langle\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}\rangle| \end{cases} \tag{172}$$

Queste relazioni determinano risultati quantistici di indeterminazione ben osservabili con le proprietà fisiche dedotte dalle rappresentazioni di campo con stati numero e stati coerenti.

4.3.3 Proprietà di rappresentazione con Stati Numero

Le autofunzioni di campo $\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} \triangleq \varphi_{\boldsymbol{k},\sigma}(t)\phi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}$ relative al singolo modo $\boldsymbol{k}$ rappresentano la base conveniente con la quale rappresentare la soluzione alla funzione d'onda generale in quanto conveniente soluzione dell'equazione agli autovalori. Tali funzioni rappresentano la soluzione effettiva di campo quando il numero di fotoni $n_{\boldsymbol{k},\sigma}$ è definito, pertanto identificano i cosiddetti *Stati Numero*. Si osservano le proprietà fisiche quantistiche deducibili dalla rappresentazione di campo con uno stato numero di modo relativamente alle relazioni di indeterminazione.

Si considerino le proprietà (**??**) con il termine di evoluzione termporale $fotn$ che le lascia invariate, ed inoltre:

$$\langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}^2|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}\rangle = \langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}^2|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}\rangle = \begin{cases} 1/2 & , \quad n \neq 0 \\ 1/4 & , \quad n = 0 \end{cases} \tag{173}$$

Si deduce di conseguenza l'incertezza dei termini di fase:

$$\Delta\cos\varphi_{k,\sigma} = \sqrt{\langle|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}^2|\rangle - \langle|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}|\rangle^2} \tag{174}$$

$$\Delta\sin\varphi_{k,\sigma} = \sqrt{\langle|\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}^2|\rangle - \langle|\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}|\rangle^2} \tag{175}$$

$$\Rightarrow \Delta\cos\varphi_{k,\sigma} = \Delta\sin\varphi_{k,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad n \neq 0 \tag{176}$$

Si osserva, tranne che per lo stato fondamentale ($n_{\boldsymbol{k},\sigma} = 0$), la completa incertezza sulla determinazione della fase, dato che le componenti ortogonali determinano un fattore di fase d'onda con varianza unitaria:

$$(\Delta e^{-i\varphi_{k,\sigma}})^2 = (\Delta\cos\varphi_{k,\sigma})^2 + (\Delta\sin\varphi_{k,\sigma})^2 = 1 \tag{177}$$

Dato il numero di fotoni $n_{\boldsymbol{k},\sigma}$ esatto, quindi $\Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma} = 0$, si verificano le relazioni di indeterminazione (**??**). Si calcola analogamente dall'operatore relativo l'indeterminazione sull'ampiezza di campo elettrico:

$$\begin{cases} \langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\widehat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{k},\sigma}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}\rangle = 0 \\ \langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\widehat{\mathbf{E}}^2_{\boldsymbol{k},\sigma}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}\rangle = \frac{\hbar\omega_k}{\varepsilon V}\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \Delta\widehat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{\varepsilon V}}\sqrt{n + \frac{1}{2}} \tag{178}$$

Una rappresentazione qualitativa del campo osservabile da uno stato numero non ha molto significato, in quanto l'indeterminazione totale sulla fase, nonostante l'incertezza limitata sull'ampiezza, lo rende inesprimibile in relazione ad un'onda classica.

4.3.4 Proprietà di rappresentazione con Stati Coerenti

Per osservare le proprietà fisiche quantistiche di un singolo modo di campo si necessita una rappresentazione dell'onda che in limite di valore di aspettazione coincida con il campo reale osservabile, come descritto classicamente. Per tale scopo si definiscono gli *Stati Coerenti*, che assumono molta importanza per comprendere i fenomeni quantistici delle applicazioni e che traggono nome proprio dal limite osservabile che mostrano. Lo stato coerente generico rappresenta una base possibile con la quale esprimere la soluzione di campo con funzioni ortogonali, comprendente gli infiniti modi ammessi nello spazio libero.

Definizione dello Stato Coerente Idealmente lo stato coerente si definisce come rappresentazione di modo di campo che presenta incertezza nulla nei termini di fase, da cui ne consegue, per le relazioni di indeterminazione (**??**), completa incertezza sul numero di fotoni:

$$\Delta \cos \varphi_{k,\sigma}, \Delta \sin \varphi_{k,\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma} \to 0 \tag{179}$$

La definizione ideale corrisponde ad un'onda che non è realmente eccitabile, per cui si considera uno stato che al limite di numero infinito di fotoni presenta le proprietà di coerenza, coincidente con una rappresentazione classica dell'onda con ampiezza e fase determinata. Lo stato coerente di modo $\boldsymbol{k}$ viene espresso nella forma seguente:

$$\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} \triangleq e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n} \quad , \quad \alpha \triangleq |\alpha| e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \tag{180}$$

Si verifica che lo stato così definito risulta effettivamente uno "stato puro", base possibile di rappresentazione della funzione generale. Innanzitutto è immediato verificare che è soluzione dell'equazione agli autovalori in quanto combinazione lineare degli stati numero. Inoltre si dimostra la proprietà di normalizzazione:

$$\langle \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} | \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha^*)^n \alpha^n}{n!} = 1 \tag{181}$$

La base di stati ortogonali è rappresentata dai valori possibili del parametro complesso α. Infatti, considerando $\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq \alpha$:

$$\langle \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} | \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\beta} \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha^*)^n \beta^n}{n!} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta} \tag{182}$$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è più denso dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, pertanto la base di stati coerenti risulta di un'infinità numerabile maggiore rispetto alla base degli stati numero. In compenso si osserva che si ha ortogonalità significativa tra lo stato α e lo stato β quando i parametri risultano distanti nel piano $\mathbb{C}$:

$$|\langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\beta}\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad |\alpha-\beta| \gg 1 \tag{183}$$

La definizione della (**??**) è ricavata non casualmente, ma come conseguenza della proprietà del parametro α di essere autovalore dell'operatore di annichilazione[19]:

$$\widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma}\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n-1} = \alpha\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} \tag{184}$$

Talvolta lo stato coerente viene definito in funzione di $\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}$ applicato allo stato fondamentale, che mostra come possa essere matematicamente interpretato in termini di autofunzione originata dalla creazione multipla di fotoni sulla base della soluzione in assenza di fotoni:

$$\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{(\alpha\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma})^n}{n!}\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,0} = e^{\alpha\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma}-\frac{|\alpha|^2}{2}}\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,0} \tag{185}$$

Proprietà Fisiche Quantistiche Si osservano le proprietà fisiche quantistiche dello stato coerente di singolo modo analogamente a quanto effettuato per lo stato numero.

Come prima caratteristica si mostra la relazione tra α e il numero di fotoni per uno stato, espressi dal valore di aspettazione dell'operatore numero e dall'indeterminazione:

$$\overline{n_{\boldsymbol{k},\sigma}} = \langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}|\widehat{n}_{\boldsymbol{k},\sigma}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_n \frac{(\alpha^*\alpha)^n}{n!}n_{\boldsymbol{k},\sigma} = |\alpha|^2 \tag{186}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}|\widehat{n}^2_{\boldsymbol{k},\sigma}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}\rangle &= e^{-|\alpha|^2}\sum_n \frac{(\alpha^*)^n\alpha^n}{n!}n^2_{\boldsymbol{k},\sigma} = \\ &= e^{-|\alpha|^2}\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}[n_{\boldsymbol{k},\sigma}(n_{\boldsymbol{k},\sigma}-1)+n_{\boldsymbol{k},\sigma}] = \\ &= |\alpha|^4+|\alpha|^2\end{aligned} \tag{187}$$

[19]Si noti che non è comunque autovalore dell'operatore di creazione

$$\Rightarrow \quad \Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma} = |\alpha| \tag{188}$$

Si osserva l'incertezza relativa, che esprime il limite allo stato numero $\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}$. Con $\Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma} \to 0$ per $\alpha \to \infty$:

$$\frac{\Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma}}{\overline{n_{\boldsymbol{k},\sigma}}} = \frac{1}{|\alpha|} \tag{189}$$

In particolare, il numero di fotoni di modo, espresso dallo stato numero generico $n_{\boldsymbol{k},\sigma}$, nella rappresentazione con stato coerente segue la *Distribuzione di Probabilità di Poisson* in funzione di $|\alpha|$, che coincide appunto con lo scarto quadratico medio e con $|\alpha|^2$ valor medio:

$$|\langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,n}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \tag{190}$$

Si deducono le relazioni di indeterminazione con la fase di campo dai valori di aspettazione degli operatori $\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}$, $\widehat{\sin\varphi_{k,\sigma}}$. Considerando il coseno si determina un'espressione non sviluppabile analiticamente, ma da cui si osserva la proporzionalità rispetto al coseno della fase del numero complesso α:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}\rangle &= \frac{1}{2}e^{-|\alpha|^2}\sum_n \frac{(\alpha^*)^{n+1}\alpha^n + (\alpha^*)^n\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!n!}} = \\
&= |\alpha|\cos\vartheta e^{-|\alpha|^2}\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{(n+1)!}}
\end{aligned} \tag{191}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}^2|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}\rangle &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-|\alpha|^2} + |\alpha|^2\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)\cdot \\
&\quad \cdot e^{-|\alpha|^2}\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}}
\end{aligned} \tag{192}$$

Le espressioni possono essere approssimate considerando lo sviluppo della serie nell'ipotesi di $|\alpha|^2 \to \infty$, coincidente con il supporre un'elevato numero di fotoni di modo:

$$|\alpha|^2 \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{(n+1)!}} = \frac{e^{|\alpha|^2}}{|\alpha|}\left(1 - \frac{1}{8|\alpha|^2} + \cdots\right) \\ \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \frac{e^{|\alpha|^2}}{|\alpha|}\left(1 - \frac{1}{2|\alpha|^2} - \cdots\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}\rangle = \cos\vartheta\left(1 - \frac{1}{8|\alpha|^2} + \cdots\right) \\ \langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}|\widehat{\cos\varphi_{k,\sigma}}^2|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}\rangle = \cos^2\vartheta - \frac{\cos^2\vartheta - 1/2}{2|\alpha|^2} - \cdots \end{cases} \tag{193}$$

Si deduce di conseguenza l'incertezza sul termine di fase:

$$\Delta \cos \varphi_{k,\sigma} \simeq \frac{\sin \vartheta}{2|\alpha|} \quad , \quad |\alpha|^2 \gg 1 \tag{194}$$

Da cui con $\Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma} = |\alpha|$, la relazione con l'incertezza sul numero di fotoni:

$$\Delta n_{\boldsymbol{k},\sigma} \Delta \cos \varphi_{k,\sigma} \simeq \frac{1}{2} \sin \vartheta \quad , \quad |\alpha|^2 \gg 1 \tag{195}$$

Analogamente si dimostra per $\widehat{\sin \varphi_{k,\sigma}}$:

$$\langle \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} | \widehat{\sin \varphi_{k,\sigma}} | \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} \rangle \simeq \sin \vartheta \quad , \quad |\alpha|^2 \gg 1 \tag{196}$$

Si osseva che la relazione di indeterminazione (**??**) ricavata come proprietà generale degli operatori, viene verificata dallo stato coerente nel suo limite minimo. Lo stato coerente consiste come osservato in una sovrapposizione di stati numero, e si ottiene un valore di aspettazione di ampiezza di campo che risulta non nullo come invece risultava per lo stato numero. Infatti, considerando le proprietà:

$$\langle \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} | \widehat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma} | \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} \rangle = \alpha^* \tag{197}$$

$$\langle \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} | \widehat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} | \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} \rangle = \alpha \tag{198}$$

si calcola:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} | \widehat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{k},\sigma} | \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}} \left[\alpha e^{-i\omega_k t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \alpha^* e^{+i\omega_k t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right] \boldsymbol{i}_\sigma = \\ &= -2\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}} |\alpha| \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_k t + \vartheta) \boldsymbol{i}_\sigma \end{aligned} \tag{199}$$

$$\langle \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} | \widehat{\mathbf{E}}^2_{\boldsymbol{k},\sigma} | \psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha} \rangle = \frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V} \left[4|\alpha|^2 \sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_k t + \vartheta) + 1 \right] \boldsymbol{i}_\sigma \tag{200}$$

Da cui, si calcola lo scarto quadratico medio:

$$\Delta \mathbf{E}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon V}} \tag{201}$$

I risultati ottenuti portano a considerazioni importanti sulle proprietà della rappresentazione coerente. Si osserva che all'aumentare del numero medio di fotoni $\overline{n_{\boldsymbol{k},\sigma}} = |\alpha|^2$, tanto l'incertezza relativa sul numero quanto l'incertezza sulla fase si riducono, per cui l'onda si definisce fino al limite classico di osservazione deterministica. Ciò è in analogia alla rappresentazione delle particelle con il pacchetto d'onda, per le quali l'incertezza sulla posizione si riduce all'aumentare della massa. Inoltre si ha che l'incertezza sull'ampiezza di campo è indipendente dal numero di fotoni.

In definitiva, lo stato coerente rappresenta per il campo con dipendenza da $|\alpha|$ il limite classico di un'onda con fase ϑ (fase di α) e con ampiezza $E_0 = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_k}{\varepsilon V}}|\alpha|$. Infatti, considerando uno stato α con $\vartheta = \pi/2$, si determina un valore di aspettazione di campo equivalente all'espressione di onda classica, utilizzata nello studio dei problemi fisici con approccio semiclassico:

$$\langle\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}|\widehat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{k},\sigma}|\psi_{\boldsymbol{k},\sigma,\alpha}\rangle = E_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_k t) \tag{202}$$

5 Densità di Stati di Campo

Le proprietà quantistiche del cmpo elettromagnetico sono riassumibili nel concetto fondamentale dell'esistenza di un numero di stati di energia discretizzato, nella presenza di livelli ammessi non continua. Per esprimere quindi una grandezza fisica qualsiasi di interesse che è funzione dell'energia si deve necessariamente considerare il numero di stati possibili, che quantisticamente non può esistere uno stato stabile, ma solo una sovrapposizione di stati descritta statisticamente in termini di densità di probabilità.

5.0.5 Definizione della Densità di Stati

Il problema di analisi consiste nel fatto che in un volume finito esiste appunto un numero di autofunzioni, soluzione dell'equazione fisica che regola il sistema, discreto. Si vuole determinare il numero di livelli energetici, il numero di stati ammessi $N(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ in un intervallo $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \div \mathcal{E}_2$.

A tale scopo si definisce la *Densità di Stati* $g(\mathcal{E})$ relativamente ad un intervallo infinitesimo di energia $\delta\mathcal{E}$, definita quindi in generale nel continuo come:

$$g(\mathcal{E}): \quad N(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} g(\mathcal{E})\mathrm{d}\mathcal{E} \tag{203}$$

Quantisticamente, la presenza di livelli discreti riconduce la definizione ad una sommatoria:

$$g(\mathcal{E}) \triangleq \sum_i \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_i) \tag{204}$$

da cui consegue[20]:

$$N(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} \sum_i \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_i) \mathrm{d}\mathcal{E} = \sum_i \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_i) \mathrm{d}\mathcal{E} = \sum_{i:\mathcal{E}_i \in [\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2]} 1 \tag{205}$$

Quindi si può esprimere la densità in funzione del numero di stati in un intervallo di interesse $\Delta\mathcal{E}$:

$$g(\mathcal{E}_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{E}_2} = \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} g(\mathcal{E}) \mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{E}_2} N(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \tag{206}$$

Per intrinseca proprietà di definizione di una densità, è utile considerare il limite di *quasicontinuità* per l'intervallo di energia infinitesimo $\Delta\mathcal{E} \to 0$, per cui si definisce $g(\mathcal{E})$ approssimata in modo da contenere lo stesso numero di stati per unità di energia, corrispondente ad un valor medio $\overline{g(\mathcal{E}_0)}$:

$$g(\mathcal{E}_0) \simeq \overline{g(\mathcal{E}_0)} = \frac{1}{\Delta\mathcal{E}} \int_{\mathcal{E}_0 - \frac{\Delta\mathcal{E}}{2}}^{\mathcal{E}_0 + \frac{\Delta\mathcal{E}}{2}} g(\mathcal{E}) \mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{1}{\Delta\mathcal{E}} N(\mathcal{E}_0 - \frac{\Delta\mathcal{E}}{2}, \mathcal{E}_0 + \frac{\Delta\mathcal{E}}{2}) \tag{207}$$

I problemi fisici in analisi quantistica, data la rappresentazione per sovrapposizione di stati $\mathcal{E}_i$ espressa in termini di densità di probabilità $p(\mathcal{E}_i)$, vengono descritti da grandezze funzione dell'energia $Q(\mathcal{E}_i)$ osservabile, valore di aspettazione dell'operatore $\hat{Q}$ relativo, è espresso in generale nella forma:

$$\langle \hat{Q} \rangle = \sum_i p(\mathcal{E}_i) Q(\mathcal{E}_i) \tag{208}$$

Con la definizione di densità di stati $g(\mathcal{E})$, considerato il limite di quasicontinuità, l'espressione è quindi ricondotta all'integrale nel continuo:

$$\langle \hat{Q} \rangle = \int g(\mathcal{E}) p(\mathcal{E}) Q(\mathcal{E}) \mathrm{d}\mathcal{E} \tag{209}$$

[20]Si considera la relazione con la funzione gradino unitario $u(\mathcal{E})$: $\frac{\mathrm{d}u(\mathcal{E})}{\mathrm{d}t} = \delta(\mathcal{E})$

Densità di modi Spesso la densità di stati è caratterizzata con la densità di modi, esprimendo l'energia globale di un sistema multimodale come somma di energia media di ogni modo. Questo è giustificato dal fatto che talvolta si semplifica il procedimento di analisi definendo una *Densità di Modi* coerentemente alla densità di stati, rappresentando una grandezza in funzione dei modi ammessi piuttosto che in funzione dei livelli energetici. Inoltre è conveniente, in problemi analoghi a quello del campo elettromagnetico quantizzato, esprimere la *Densità Volumetrica di Modi*, rispetto all'unità di volume, anzichè rispetto all'energia.

5.0.6 Densità di Stati di Campo Elettromagnetico

La determinazione della densità di stati di campo elettrmagnetico esprime innanzitutto una caratteristica di fisica quantistica importante da determinare per una descrizione esaustiva del problema di studio, ma soprattutto consente di calcolare valori di grandezze di interesse, come da (**??**). Tramite essa si calcolano le transizioni di stato generati dal campo che interagisce con la materia e si determina l'energia radiata dal Corpo Nero.

Il calcolo della densità di stati si effettua in modo comodo tramite le condizioni a lcontorno periodiche che esprimono la discretizzazione dei modi ammessi nell'unità di volume, ovvero definendo la densità di modi, come preannunciato. Si consideri come per il procedimento di quantizzazione un volume indefinito $V = L \times L \times L$. I modi ammessi sono espressi dal vettore d'onda $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi n_x}{L}\boldsymbol{i}_x + \frac{2\pi n_y}{L}\boldsymbol{i}_y + \frac{2\pi n_z}{L}\boldsymbol{i}_z \quad , \quad n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \quad \in \mathbb{Z} \tag{210}$$

Ad ogni modo compete un volume nello spazio continuo $\boldsymbol{k}$ pari a $V_k = [L/(2\pi)]^3 = V/(2\pi)^3$,quindi una densità di modi per unità di volume in $\boldsymbol{k}$: $\rho_k = 1/V_k$. Ogni modo è associato ad un quanto di energia $\Delta\mathcal{E} = \hbar\omega_k = \hbar ck$, che dipende linearmente dal modulo di $\boldsymbol{k}$, k. Considerando un livello energetico $\mathcal{E}_0$ (corrispondente ad un modulo di vettore d'onda k_0), il numero di stati (vedi **??**) si calcola integrando sul volume sferico di raggio k_0 la densità volumetrica di modi ammessi, considerando che per ogni $\boldsymbol{k}$ si ammettono due soluzioni degeneri per polarizzazioni ortogonali:

$$N(\mathcal{E}_0) = \sum_{i:\mathcal{E}_i \leq \mathcal{E}_0} 1 = \int_0^{\mathcal{E}_0} g(\mathcal{E})\mathrm{d}\mathcal{E} =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{i:k_i\leq k_0} 1 = 2\int_{Sfera}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\rho_k} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{k_0}\frac{V}{(2\pi)^3}k^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}k = \\
&= 2\frac{4}{3}\pi k_0^3\frac{V}{(2\pi)^3} = \frac{k_0^3 V}{3\pi^2} \qquad (211)
\end{aligned}
$$

Quindi si determina la densità di stati, ovvero il numero di stati ammesso in un intervallo infinitesimo di energia $\mathrm{d}\mathcal{E}$, dalla relazione che lega il quanto di energia al modulo di vettore d'onda, per la condizione di quasicontinuità:

$$
g(\mathcal{E}) = \frac{\mathrm{d}N(\mathcal{E})}{\mathrm{d}\mathcal{E}} \simeq \frac{V}{3\pi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{E}}\left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar c}\right)^3 = \frac{V\mathcal{E}^2}{\pi^2\hbar^3c^3} \qquad (212)
$$

Si osserva che, come ovvio, la densità di stati dipende proporzionalmente dal volume di studio in cui si analizza il campo elettromagnetico: $g(\mathcal{E}) \propto V$. Questo fato non risulta comodo, non costituisce una rappresentazione elegante dato che legato ad un procedimento adottato per ottenere la soluzione al problema, appunto l'estensione da una cavità limitata allo spazio libero tramite le condizioni al contorno periodiche. Pertanto, si considera che la determinazione del numero di modi è comunque indipendente dalla scelta del volume per poter astrarre da esso definendo la densità di stati per unità di volume[21]:

$$
\rho(\mathcal{E}) = \frac{g(\mathcal{E})}{V} = \frac{\mathcal{E}^2}{\pi^2\hbar^3c^3} \qquad (213)
$$

Verifica della Legge di Planck La verifica della Legge di Planck tramite il calcolo con la densità di stati conferma la comodità della definizione di tale parametro. Il Postulato di Planck (**??**) che enuncia la quantizzazione dell'energia ha come diretta conseguenza la determinzione di un'energia media di modo di radiazione di un Corpo Nero a temperatura T. Calcolata in termini relativi differenziali, quindi in assenza di energia di punto-zero essa risulta:

Si esprime la densità volumetrica di stati in funzione della pulsazione di modo:

dalla quale si determina la densità spettrale di energia radiata dal corpo a temperatura T, equivalente alla Legge di Planck ed in concordanza con i risultati sperimentali:

[21] Dimensionalmente: $[\rho(\mathcal{E})] = J^{-1}m^{-3}$

A Operatori Creazione, Annichilazione, Numero

Gli operatori di *Creazione* e *Annichilazione* costituiscoo elemento di base dell'analisi quantistica in quanto sono definiti alla base dell'Hamiltoniano che descrive l'equazione di Schrödinger ed assumono significato connesso alla sua filosofia per le proprietà di cui godono quando applicati alle autofunzioni.

Si consideri l'equazione agli autovalori di Schrödinger, tempo-indipendente, in unità scalate (ovvero rappresentante un problema fisico generico con lagrangiano funzione di grandezze coniugate e delle loro derivate prime), sulla funzione d'onda ψ di variabile generica ζ:

Si definisce l'Hamiltoniano scalato come operatore il cui autovalore è costituito dal livello energetico $\mathcal{E}$:

Si dimostra matematicamente che può essere fattorizzato e scomposto in termini funzione delle derivate prime nella forma seguente:

Da tale scomposizione vengono definiti gli operatori di creazione $\widehat{a}^\dagger$ e annichilazione $\widehat{a}$:

Tali operatori sono legati dalle proprietà:

Creazione L'operatore di creaione viene così denominato dato che la sua applicazione allo stato fondamentale[22] "crea" uno stato energetico di primo livello, e conseguentemente su stati eccitati crea stati di ordine superiore, con coefficiente di normalizzazione:

Dimostrazione. Si consideri lo stato n di energia $\mathcal{E}_n$ ed autofunzione ψ_n che soddisfa l'equazione di Schrödinger:

Applicando l'operatore creazione all'autofunzione si crea una funzione $\psi' = \widehat{a}^\dagger\psi_n$ il cui Hamiltoniano, fattorizzato negli operatori definiti, risulta:

Dalla proprietà di legame:

si ottiene la relazione che esprime la funzione creata come autofunzione di ordine superiore $n+1$:

Annichilazione L'operatore di annichilazione opera similarmente all'operatore di creazione determinando da una autofunzione comunque un'altra autofunzione dell'equazione agli autovalori, ma di stato inferiore. Analoga-

[22]Soluzione dell'equazione di Schrödinger scalata di stato fondamentale: $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$

mente a quanto svolto in precedenza si dimostrain generale per lo stato fondamentale e gli stati eccitati:

L'applicazione degli operatori di creazione e annichilazione permette di risolvere gli integrali sulla funzione d'onda comuni in analisi quantistica per il calcolo dei valori di aspettazione, tramite le proprietà di cui godono.

Si verifica, ad esempio, la determinazione degli autovalori dell'equazione di Schrödinger:

Considerando una generica soluzione ψ_n si determina l'autovalore relativo di ordine n:

Operatore Numero Si definisce un operatore in grado di esprimere direttamente lo stato energetico, ovvero il numero di quanti, fotoni, di una soluzione generica considerata. Per far ciò si considera l'espressione dell'Hamiltoniano in funzione di un solo monomio operatoriale negli operatori $\widehat{a}^{\dagger}, \widehat{a}$, dalle loro proprietà:

Si definisce operatore *Numero* $\hat{n}$:

che applicato ad una autofunzione gode della proprietà, conseguente a quelle di creazione e annichilazione, di esprimere come suo autovalore il numero di fotoni (dalla quale prende nome):

Gli operatori quantistici specifici di problema in esame vengono usualmente definiti in funzione degli operatori $\widehat{a}^{\dagger}, \widehat{a}, \hat{n}$ per semplificare l'analisi. In particolare ad ogni problema specifico sono associati operatori in forma opportuna, riconducendo l'equazione di Schrödinger alla forma scalata sulla base della quale sono espresse le definizioni (**??**).

Considerazioni interpretative Dalla definizione matematica degli operatori si possono osservare caratteristiche legate alla realtà fisica, che che dimostrano anche il senso delle definizioni fornite. Infatti è principio fondamentale della fisica quantistica la rappresentazione di un sistema intermini di stati possibili sovrapposti, pesai da una densità di probabilità. Gli operatori esprimono questo concetto per le proprietà di esprimere autofunzioni, soluzioni di stato diverso rispetto a quella a cui sono applicate. La creazione mostra come dato uno stato n è sempre definibile, senza limiti, uno stato di ordine superiore con livello energetico maggiore di un quanto $\hbar\omega_k$, e analogamente l'annichilazione mostra l'esistenza di livelli inferiori, fino al limite di stato fondamentale $n = 0$. L'operatore numero, invece, non è connesso al principio di sovrapposizione di stati, ma esprime il concetto di quantizzazione, di livelli possibili discreti, dato che determina il numero intero positivo di quanti energetici oltre lo stato fondamentale.

B Teorema di Ehrenfest

Il Teorema di Ehrenfest esprime l'evoluzione temporale dei valori di aspettazione di variabili quantistiche.

Teorema B.1 (Ehrenfest) *Sia A una grandezza fisica descritta quantisticamente dall'operatore $\hat{A}$.*

Allora, l'evoluzione dinamica del valore di aspettazione della grandezza, costituente la quantità osservabile nelle applicazioni reali, risulta esprimibile come derivazione in termini di valore di aspettazione della commutazione tra l'operatore $\hat{A}$ e l'Hamiltoniano di sistema fisico $\hat{H}$ e della derivata temporale parziale dello stesso operatore $\hat{A}$:

Dimostrazione. *Considerando l'operatore $\hat{A}$ applicato alla funzione d'onda ψ, si esprime la variazione del valore di aspettazione:*

Dall'equazione di Schrödinger con Hamiltoniano $\hat{H}$: $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\psi$.

Dato che l'Hamiltoniano di un sistema fisico reale è Hermitiano, quindi verifica:

allora:

Nuovamente per la proprietà di $\hat{H}$ Hermitiano, vale: $\hat{H}\psi^*(\hat{A}\psi) = \psi^*\hat{H}(\hat{A}\psi)$. Per cui si dimostra il teorema di Ehrenfest:

Il Teorema di Ehrenfest rappresenta un risultato utile per la verifica del limite classico delle leggi quantistiche, data la semplicità di calcolo dell'evoluzione del valore di aspettazione tramite operazioni di commutazione tra operatori[23]. È interessante notare che ogni operatore tempo-indipendente che commuta con l'Hamiltoniano ha valore di aspettazione nullo.

[23]Tramite il Teorema di Ehrenfest si verificano semplicemente leggi classiche come la conservazione dell'energia (con $\hat{A} \equiv \hat{H}$)

Riferimenti bibliografici

[1] Simon Ramo, John R. Whinnery, Theodore Van Duzer, *Fields and Wave in Communication Electronics*, John Wiley and Sons, New York, 2^a ed., 1984, ISBN 0-471-87130-3.

[2] Robert Eisberg, Robert Resnick, *Quantum Physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*, John Wiley and Sons, New York, 2^a ed., 1985, ISBN 9814-12-615-2.

[3] Peter L. Hagelstein, Stephen D. Senturia, Terry P. Orlando, *Introductory Applied Quantum and Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons, New Jersey, 2004, ISBN 0-471-20276-2.

[4] Rodney Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Science Publications, New York, 2^a ed., 1983, ISBN 0-19-851155-8 Pbk.