

# Teoria dei campi

tratto dal testo omonimo di L. Landau e E. Lifchitz

---

*Dispense per il Corso di Laurea in Astronomia*

**F. Paccanoni** maggio 2004



# Prefazione

Questo testo presenta in forma ridotta, adatta quindi al nuovo Corso di Laurea in Astronomia, gli argomenti di relatività ristretta e generale che per molti anni hanno fatto parte del programma di Istituzioni di Fisica Teorica. Al testo di L. Landau e E. Lifchitz, Teoria dei Campi, devo la linea logica della presentazione e, di questo testo, alcuni paragrafi compaiono qui con piccole modifiche perchè in questo modo venivano svolti a lezione. Il corso è dedicato alla teoria del campo elettromagnetico e del campo gravitazionale. Questo testo è diviso in nove capitoli:

Il **Capitolo 1** è dedicato al principio di relatività e all'espressione matematica di tale principio. I concetti e le definizioni di questo capitolo sono alla base di tutto il libro. Si accenna anche alla geometria dello spazio-tempo e al calcolo tensoriale nello spazio di Minkowski.

Il **Capitolo 2** descrive alcune applicazioni della meccanica relativistica ai decadimenti e agli urti. Il formalismo Lagrangiano e il principio di minima azione, che useremo spesso nel seguito, sono qui sviluppati in dettaglio.

Il **Capitolo 3** introduce l'interazione fra cariche puntiformi e il campo elettromagnetico e arriva alle equazioni del moto e alla loro soluzione in casi semplici. Si definisce anche il tensore elettromagnetico e le trasformazioni dei campi nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro. Il concetto di quadricorrente permetterà di riscrivere l'equazione di continuità in forma quadridimensionale.

Il **Capitolo 4** è dedicato alle equazioni del campo elettromagnetico, le equazioni di Maxwell, riscritte nel formalismo quadridimensionale. Alle equazioni di Maxwell si arriverà tramite il principio di minima azione. Ritroveremo concetti noti, come la densità di energia del campo e il vettore di Poynting, introducendo il tensore energia-impulso.

Il **Capitolo 5** sviluppa la soluzione delle equazioni di Maxwell nel vuoto. Si mostra come l'equazione d'onda abbia come soluzione generale una sovrapposizione di onde piane e monocromatiche. Una applicazione all'effetto Doppler fa parte di questo capitolo.

Il **Capitolo 6** completa lo studio del campo elettromagnetico dipendente dal tempo in presenza di cariche animate di moto arbitrario. Partendo dalla derivazione dei potenziali ritardati si affronterà lo studio del campo creato da un sistema di cariche e, in particolare, alla radiazione nella zona delle onde. L'approssimazione di dipolo, con alcuni esempi, completa questo capitolo.

Il **Capitolo 7**, dopo aver chiarito il significato del principio di equivalenza, fornisce le basi per lo studio del moto di particelle in un campo gravitazionale. Si sviluppa qui la geometria dello spazio-tempo in coordinate curvilinee e si forniscono concetti importanti come quelli di trasporto parallelo e di derivata covariante.

Il **Capitolo 8** è dedicato alle equazioni del campo gravitazionale, le equazioni di Einstein. Partendo dalla definizione del tensore di curvatura si arriverà alle equazioni del campo e a mostrare come tali equazioni, nel limite di campo debole, portino alla legge di Newton della meccanica non relativistica.

Il **Capitolo 9** conclude il programma con la soluzione esplicita delle equazioni del campo per un campo gravitazionale a simmetria centrale. Le prove sperimentali della teoria della relatività, la precessione del perielio di Mercurio e la deflessione di un raggio luminoso insieme ad altri esperimenti recenti, fanno parte integrante di questo capitolo.

L'**Appendice** riassume le proprietà dell'operatore "nabla" e tratta il moto di una carica nel campo di un'onda elettromagnetica.

Ci si assicuri di leggere con cura i problemi proposti, perché in essi sono contenute molte informazioni e spiegazioni che non hanno trovato posto nel testo.

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Il principio di relatività</b>	<b>1</b>
1.1 Propagazione delle interazioni . . . . .	1
1.2 Intervallo . . . . .	4
1.3 Tempo proprio . . . . .	9
1.4 Trasformazioni di Lorentz . . . . .	13
1.5 Calcolo tensoriale. Generalità . . . . .	18
1.5.1 Vettori . . . . .	19
1.5.2 Tensori . . . . .	21
1.6 Tensori nello spazio-tempo di Minkowski . . . . .	24
1.7 Quadrirelatività e quadriaccelerazione . . . . .	29
<b>2 Meccanica relativistica</b>	<b>33</b>
2.1 Principio di minima azione . . . . .	33
2.2 Energia ed impulso . . . . .	34
2.3 Cinematica dei decadimenti e degli urti . . . . .	40
2.3.1 Decadimenti . . . . .	40
2.3.2 Urti tra particelle . . . . .	46
2.4 Particelle in meccanica relativistica . . . . .	50
<b>3 Carica in un campo elettromagnetico</b>	<b>55</b>
3.1 Quadripotenziale . . . . .	55
3.2 Equazioni del moto . . . . .	57
3.3 Invarianza di gauge . . . . .	61
3.4 Moto di una carica nel campo . . . . .	62
3.4.1 Campo elettrico uniforme e costante . . . . .	64
3.4.2 Campo magnetico uniforme e costante . . . . .	65
3.5 Trasformazioni di Lorentz per il campo . . . . .	69
3.6 Invarianti del campo . . . . .	72
<b>4 Campo elettromagnetico</b>	<b>75</b>
4.1 L'azione per il campo . . . . .	77
4.2 Quadricorrente . . . . .	78

4.3	Equazioni di Maxwell . . . . .	80
4.4	Tensore energia-impulso . . . . .	82
4.5	Applicazione al campo E.M. . . . .	86
4.6	Corpi macroscopici . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Onde elettromagnetiche</b>	<b>91</b>
5.1	Equazione d'onda . . . . .	91
5.2	Soluzione generale . . . . .	93
5.3	Tensore energia-impulso di un'onda piana . . . . .	96
5.4	Effetto Doppler . . . . .	98
5.5	Soluzioni particolari dell'equazione d'onda . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Radiazione elettromagnetica</b>	<b>103</b>
6.1	Potenziali ritardati . . . . .	103
6.2	Potenziali di Lienard-Wiechert . . . . .	105
6.3	Campi di Lienard-Wiechert . . . . .	107
6.4	Decomposizione spettrale . . . . .	110
6.5	Campo nella zona delle onde . . . . .	112
6.6	Radiazione di dipolo . . . . .	113
6.7	Caso relativistico . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Campo gravitazionale</b>	<b>123</b>
7.1	Principio di equivalenza . . . . .	123
7.2	Coordinate curvilinee . . . . .	126
7.3	Distanze e intervalli di tempo . . . . .	128
7.4	Derivazione covariante . . . . .	132
7.5	Simboli di Christoffel e tensore metrico . . . . .	137
7.6	Moto di una particella . . . . .	140
7.7	Campo gravitazionale costante . . . . .	143
<b>8</b>	<b>Equazioni del campo gravitazionale</b>	<b>149</b>
8.1	Tensore di curvatura . . . . .	149
8.2	Proprietà del tensore di curvatura . . . . .	151
8.3	L'azione del campo . . . . .	155
8.4	Tensore energia-impulso . . . . .	157
8.5	Equazioni di Einstein . . . . .	159
8.6	La legge di Newton . . . . .	163
<b>9</b>	<b>Campo dei gravi</b>	<b>165</b>
9.1	Simmetria centrale . . . . .	165
9.2	Traiettorie nel campo di Schwarzschild . . . . .	170
9.2.1	Precessione del perielio . . . . .	173
9.2.2	Deflessione gravitazionale della luce . . . . .	176

**Appendice** **179**

- .1 L'operatore vettoriale "nabla" . . . . . 179
- .2 Moto di una carica in un'onda piana . . . . . 180





# Elenco delle figure

1.1	<i>I sistemi di riferimento inerziali <math>K\{Oxyz\}</math> e <math>K'\{O'x'y'z'\}</math>.</i> . . .	3
1.2	<i>Eventi simultanei in <math>K'</math> non lo sono in <math>K</math>.</i> . . . . .	5
1.3	<i>Relazione fra l'evento <math>\mathbf{O}</math> e gli altri punti d'universo. Cono di luce.</i> . . . . .	9
1.4	<i>Orologio in moto vario rispetto a <math>K</math>.</i> . . . . .	10
2.1	<i>Decadimento in due corpi. <math>\mathbf{P} = 0</math> nel sistema del centro di massa.</i> . . . . .	41
2.2	<i>Definizione delle variabili per una reazione a due corpi.</i> . . . .	47
2.3	<i>Ipersuperficie di integrazione. <math>\mathcal{V}</math> è il volume dello spazio tridimensionale.</i> . . . . .	53
7.1	<i>Linea d'universo del segnale (tratteggiata) e linee d'universo dei due punti (linea continua) fra i quali si vuole determinare la distanza.</i> . . . . .	130
7.2	<i>Trasporto parallelo nello spazio euclideo (a) e nello spazio curvo (b).</i> . . . . .	134
7.3	<i>Effetto Sagnac.</i> . . . . .	147
8.1	<i>Cammini <math>PQS</math> e <math>PRS</math> per il trasporto parallelo di un vettore.</i>	150
9.1	<i>Notazioni per la deflessione di un raggio di luce.</i> . . . . .	177



# Capitolo 1

## Il principio di relatività

### 1.1 Propagazione delle interazioni

Per descrivere i processi che avvengono in natura è necessario introdurre un sistema di riferimento, cioè un sistema di coordinate per indicare la posizione dei corpi nello spazio e un orologio che misura lo scorrere del tempo. L'origine di tale sistema di riferimento, così come la direzione degli assi, sarà determinata da corpi materiali opportunamente scelti. Per esempio, il "sistema di riferimento solare" ha l'origine posta nel baricentro del sistema solare e gli assi diretti verso stelle fisse.

Le leggi della meccanica classica, le leggi di Newton, sono valide in una classe particolare di sistemi di riferimento: i sistemi di riferimento **inerziali** (o Galileiani) la cui definizione è contenuta nella prima legge di Newton. Così diremo inerziale quel sistema di riferimento in cui il moto di un corpo non soggetto a forze, o libero, è rettilineo e uniforme. Evidentemente tutti i sistemi di riferimento che si muovono di moto traslatorio uniforme rispetto ad un sistema inerziale sono pure inerziali perchè, anche per essi, il moto di una particella libera appare rettilineo e uniforme.

Il principio detto **di relatività**, che è basato sull'esperienza, richiede che tutte le leggi della natura abbiano la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Ciò significa che le leggi della natura sono invarianti per le trasformazioni delle coordinate e del tempo che si presentano nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema pure inerziale. E' quindi impossibile determinare se una trasformazione che lascia invarianti le equazioni del moto ha avuto luogo oppure no. Per esempio, la legge di Newton per il campo gravitazionale è invariante per la trasformazione  $t' = t + \Delta$  e nessun fenomeno descritto da questa legge può dirci se stiamo usando  $t$  o  $t'$  come orologio. Ciò è vero anche se consideriamo traslazioni spaziali o un sistema di riferimento ruotato rispetto all'originale.

In meccanica classica, le equazioni di Newton

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \sum_b \mathbf{F}_{ab}(|\mathbf{r}_{ab}|), \quad (1.1)$$

che descrivono il moto della particella  $a$  interagente con le particelle  $b$ , implicano l'istantaneità delle interazioni. Le forze  $\mathbf{F}_{ab}$ , infatti, dipendono solamente dalla posizione della particella  $a$  rispetto alle altre e non dal tempo. Se cambia la posizione di una qualunque delle particelle interagenti con  $a$  questo cambiamento si riflette istantaneamente sulle altre particelle. In meccanica classica vale infatti il principio di relatività di Galileo che suppone infinita la velocità di propagazione delle interazioni.

Tuttavia l'esperienza ci mostra che non esistono in natura interazioni istantanee e che la meccanica Newtoniana non è più applicabile e deve essere modificata in modo sostanziale se la scala dei tempi dei fenomeni considerati è dello stesso ordine di grandezza del tempo necessario alla propagazione dell'interazione. Se consideriamo l'interazione come un segnale che si propaga da una particella all'altra per informarsi a vicenda delle variazioni del rispettivo stato di moto, possiamo introdurre il concetto di velocità di propagazione delle interazioni e identificarla con la velocità del segnale. Sappiamo che le equazioni del campo elettromagnetico, le equazioni di Maxwell, predicono per la velocità della luce nel vuoto un'unica velocità  $c$ ,  $c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ , indipendente dalla velocità dell'osservatore o della sorgente. Questa è la massima velocità di propagazione di un'onda elettromagnetica e anche di un qualsiasi segnale di origine elettromagnetica. Questa velocità,  $c$ , è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali e il principio di relatività di Einstein si basa su questo fatto e postula inoltre che  $c$  sia il limite superiore per la velocità di propagazione di qualsiasi interazione. La meccanica relativistica, basata su questo principio, si ridurrà alla meccanica classica nel limite  $c \rightarrow \infty$ .

E' facile capire perchè le equazioni di Maxwell sono incompatibili con il principio di relatività Galileiano e, a questo scopo, è utile ricordare la forma esplicita delle trasformazioni di Galileo e le ipotesi su cui si basano. Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali  $K$  e  $K'$  con assi coordinati  $Oxyz$  e  $O'x'y'z'$ . Il sistema  $K'$   $\{O'x'y'z'\}$  si muove di moto traslatorio uniforme rispetto a  $K$   $\{Oxyz\}$  con velocità  $V$  e gli assi  $Ox$  e  $O'x'$  coincidenti.

In figura (1.1) sono raffigurati i due sistemi di riferimento e entrambi gli osservatori  $O$  e  $O'$  studiano il moto di un punto materiale  $P$  di raggio vettore  $\overline{OP} = \mathbf{r}$  rispetto a  $K$  e  $\overline{O'P} = \mathbf{r}'$  rispetto a  $K'$ . Per Galileo, entrambi i sistemi di riferimento usano lo stesso tempo,  $t = t'$ , e si hanno le relazioni vettoriali

$$\overline{OP} = \overline{O'P} + \overline{OO'}, \quad \overline{OO'} = \mathbf{V}t, \quad (1.2)$$

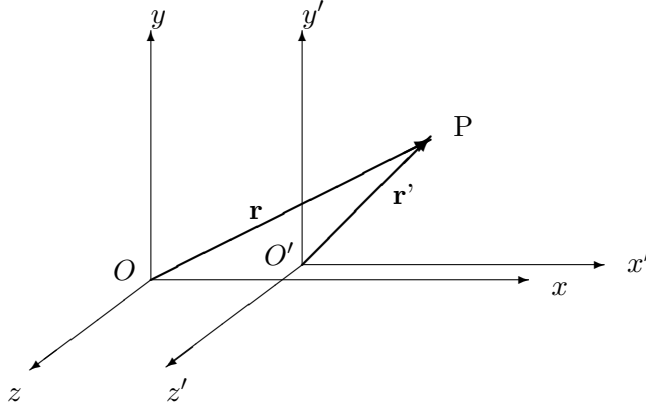


Figura 1.1: I sistemi di riferimento inerziali  $K\{Oxyz\}$  e  $K'\{O'x'y'z'\}$ .

che, proiettate sugli assi coordinati, danno

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z' \quad (1.3)$$

mentre dalle derivate delle (1.2), essendo  $\mathbf{V}$  un vettore costante, si ottiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (1.4)$$

La legge di composizione delle velocità, che proiettata sugli assi coordinati diventa

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z, \quad (1.5)$$

è incompatibile con la presenza nelle equazioni di Maxwell di una velocità costante  $c$  indipendente dal moto della sorgente e dell'osservatore. Le equazioni di Newton (1.1), invece, sono invarianti per le trasformazioni (1.3) come risulta chiaro anche dalla (1.4):  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento (si dice che è invariante in forma).

Le ipotesi alla base delle trasformazioni di Galileo sono:

- a) Lo spazio vuoto è omogeneo e isotropo ed il tempo è omogeneo. L'omogeneità implica l'equivalenza di tutti i punti dello spazio e di tutti gli istanti di tempo, mentre l'isotropia implica che tutte le direzioni sono equivalenti. Nello spazio vuoto non esistono punti o direzioni privilegiate e l'origine del tempo è arbitraria. Ne consegue la linearità delle trasformazioni che legano due sistemi di riferimento inerziali e la validità stessa del calcolo vettoriale.
- b) Il tempo è assoluto, cioè le proprietà del tempo sono considerate indipendenti dal sistema di riferimento inerziale: esso scorre nello stesso modo per tutti gli osservatori inerziali. Se due eventi qualsiasi

sono simultanei per un osservatore lo sono anche per qualsiasi altro osservatore.

Non si può rinunciare all'ipotesi a) che, per un sistema isolato, assicura l'invarianza per rototraslazioni e la conservazione dell'impulso, dell'energia e del momento angolare. Questi principi di conservazione, ben consolidati dall'esperienza, rendono necessaria l'ipotesi a). Il principio di relatività di Einstein sostituisce l'ipotesi b) con la richiesta che la velocità della luce sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Tale principio è confermato dall'esperienza, le misure fatte nel 1881 da Michelson hanno rivelato la completa indipendenza della velocità della luce, proveniente da una stella e misurata dalla terra, dalla direzione di propagazione relativa al moto della terra. In meccanica classica la velocità della luce dovrebbe dipendere dal moto della terra in accordo con le equazioni (1.4).

La conseguenza principale del principio di relatività sta quindi nel fatto che il tempo non è più assoluto. Esso scorre in modo diverso in sistemi di riferimento diversi e ciò introduce cambiamenti molto profondi nelle leggi della meccanica classica. I risultati classici costituiscono quindi una buona approssimazione alla realtà solo nei casi in cui le velocità in gioco sono molto più piccole della velocità della luce e ritornano ad essere esatti nel limite formale <sup>1</sup>  $c \rightarrow \infty$ .

Per spiegare quali conseguenze può avere la rinuncia al tempo assoluto ricorriamo ad un semplice esempio. Dalla sorgente A, fissa nel sistema  $K'$  in figura (1.2), si inviano segnali luminosi verso i punti B e C equidistanti da A.

Nel sistema di riferimento  $K'$  i due segnali raggiungeranno i punti B e C nello stesso istante per un osservatore fisso in  $K'$ . Per un osservatore di  $K$ , l'arrivo del segnale in B e C non sarà simultaneo perchè la velocità dei segnali è sempre  $c$ , anche per  $K$ , ma il punto B si muove, rispetto a  $K$ , incontro al segnale mentre C si muove nello stesso senso del segnale. Quindi il segnale arriva, per  $K$ , prima in B che in C. Eventi simultanei in un sistema di riferimento non saranno più simultanei in un altro sistema.

## 1.2 Intervallo

Useremo frequentemente nel seguito il concetto di *evento* definito da tre coordinate spaziali e da un istante di tempo. Nello spazio a quattro dimensioni, in cui tre assi si riferiscono alle coordinate spaziali e un asse al tempo, un evento è rappresentato da un punto che chiameremo *punto d'universo*.

---

<sup>1</sup>Sappiamo infatti che tale limite non è fisicamente corretto ma può essere un'ottima approssimazione per le velocità con cui abbiamo a che fare tutti i giorni.

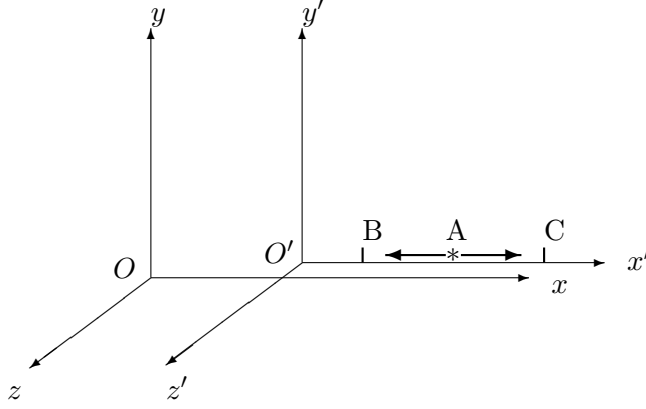


Figura 1.2: *Eventi simultanei in  $K'$  non lo sono in  $K$ .*

Per esempio, la creazione di una particella in un processo d'urto è un evento caratterizzato dal punto dello spazio tridimensionale in cui la particella è creata e dall'istante in cui essa appare. Il moto successivo della particella è completamente definito da una successione di punti d'universo che costituiscono la *linea d'universo* della particella. Se la particella si muove di moto rettilineo uniforme la sua linea d'universo è una retta nello spazio quadridimensionale,

L'introduzione di uno spazio-tempo quadridimensionale è importante per dare una veste matematica al principio di invarianza della velocità della luce. Consideriamo ancora i due sistemi di riferimento inerziali  $K$  e  $K'$ , come in figura (1.1), in moto relativo lungo  $Ox \equiv Ox'$  con velocità  $V$  e indichiamo con  $t$  e  $t'$  i tempi in  $K$  e  $K'$ . Se  $\{x_1, y_1, z_1, t_1\}$  e  $\{x_2, y_2, z_2, t_2\}$  sono due eventi, che corrispondono all'emissione di un segnale luminoso e alla sua ricezione rispettivamente, nel sistema di riferimento  $K$  potremo scrivere la distanza percorsa dalla luce come  $c(t_2 - t_1) \equiv c\Delta t$  oppure, tramite le coordinate spaziali, come  $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \equiv [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}$ . I due modi di descrivere la distanza percorsa dal raggio luminoso devono dare lo stesso risultato

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = 0 \quad (1.6)$$

I due eventi possono essere osservati anche nel sistema  $K'$  dove la velocità della luce è sempre  $c$  e dove l'equazione (1.6) diventa

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = 0 \quad (1.7)$$

avendo indicato con un apice le coordinate dei due eventi in  $K'$ :  $\{x'_1, y'_1, z'_1, t'_1\}$  e  $\{x'_2, y'_2, z'_2, t'_2\}$ .

Chiameremo *intervallo* fra due eventi qualsiasi la grandezza

$$\Delta s = [c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2]^{1/2} \quad (1.8)$$

con la stessa notazione usata sopra per  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Dall'invarianza della velocità della luce deduciamo che, se l'intervallo fra due eventi è nullo in un sistema di riferimento, lo sarà anche in qualsiasi altro sistema.

Il quadrato dell'intervallo  $ds$  fra due eventi infinitamente vicini

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.9)$$

rappresenta anche il quadrato della distanza fra due punti dello spazio-tempo quadridimensionale,  $(x, y, z, ct)$  e  $(x + dx, y + dy, z + dz, ct + cdt)$ , e definisce ciò che si chiama una metrica in questo spazio. Nello spazio Euclideo la metrica è la **somma** dei quadrati dei differenziali delle coordinate, nello spazio-tempo della teoria della relatività i quadrati dei differenziali delle quattro coordinate compaiono nella metrica con segni diversi e la geometria di questo spazio, introdotta da H. Minkowski, presenta differenze sostanziali da quella Euclidea. Il quadrato della distanza fra due punti può essere positiva, negativa o nulla a differenza dello spazio Euclideo dove la distanza fra due punti non è mai negativa<sup>2</sup>. Chiameremo pseudo-Euclidea, o di Minkowski, la metrica (1.9) e spazio di Minkowski lo spazio corrispondente.

Mostriamo ora che l'intervallo fra due eventi è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento inerziali e quindi è invariante rispetto alle trasformazioni di un sistema di riferimento inerziale in qualsiasi altro sistema inerziale. Per la propagazione di un segnale luminoso, come abbiamo visto, si ha  $ds = 0$  in  $K$  e  $ds' = 0$  anche in un altro sistema  $K'$ . Ciò implica che  $ds^2$  e  $ds'^2$ , dovendo annullarsi contemporaneamente se i due eventi infinitamente vicini si riferiscono ad un raggio di luce, devono essere proporzionali

$$ds^2 = a ds'^2.$$

Il coefficiente  $a$  non può dipendere dalle coordinate spaziali o dal tempo perchè altrimenti punti diversi dello spazio-tempo avrebbero proprietà diverse in contrasto con l'ipotesi che spazio e tempo siano omogenei. Non può nemmeno dipendere dalla direzione della velocità relativa di  $K'$  rispetto a  $K$  perchè lo spazio è isotropo e quindi  $a$  può dipendere solamente dal modulo della velocità relativa dei due sistemi inerziali.

Se  $K$ ,  $K_1$  e  $K_2$  sono tre sistemi di riferimento inerziali e  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  sono le velocità relative di  $K_1$  e  $K_2$  rispetto a  $K$  si avrà

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2) ds_2^2$$

---

<sup>2</sup>Notiamo che, se il quadrato della distanza fra due punti è negativo, la distanza diventa un numero immaginario.



e anche

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2$$

dove  $V_{12} = |\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1| = [V_2^2 + V_1^2 - 2V_1V_2 \cos \theta]^{1/2}$  è il modulo della velocità relativa di  $K_2$  rispetto a  $K_1$  e  $\theta$  è l'angolo fra i vettori  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$ . Da queste tre relazioni si ottiene

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (1.10)$$

Nella (1.10) l'angolo  $\theta$  compare solo a secondo membro e questa relazione può essere soddisfatta per qualunque  $\theta$  solo se  $a(V)$  è una costante che non dipende da  $V$ . L'equazione (1.10) dà allora  $a = 1$  e quindi

$$ds^2 = ds'^2$$

uguaglianza che può essere estesa ad intervalli finiti,  $s_{12} = s'_{12}$ . L'invarianza dell'intervallo è l'espressione matematica della costanza della velocità della luce e da essa possiamo dedurre tutte le conseguenze del principio di relatività di Einstein.

Abbiamo visto che l'intervallo fra due eventi che si riferiscono alla propagazione di un raggio di luce è nullo in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Diremo che questo intervallo è di *genere luce* e cerchiamo di classificare i possibili intervalli in base a loro proprietà assolute, indipendenti cioè dal sistema di riferimento. Ritorniamo allora all'espressione (1.8) dell'intervallo in  $K$  che riscriviamo nella forma

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \ell)^2$$

avendo posto  $\Delta \ell = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}$ . Analogamente, in  $K'$  l'intervallo sia

$$(\Delta s')^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta \ell')^2$$

e ci chiediamo se esiste un sistema di riferimento  $K'$  in cui i due eventi coincidono nello spazio:  $\Delta \ell' = 0$ . Per l'invarianza dell'intervallo dovrà essere

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \ell)^2 = (\Delta s')^2 = c^2(\Delta t')^2 > 0.$$

e il sistema di riferimento che cerchiamo esiste se  $(\Delta s)^2 > 0$ , cioè se l'intervallo fra i due eventi è reale. Gli intervalli reali sono detti di *genere tempo* e, in tal caso, esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi hanno luogo nello stesso punto dello spazio. L'intervallo temporale fra questi eventi è, in  $K'$ ,

$$\Delta t' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \ell)^2} = \frac{\Delta s}{c}. \quad (1.11)$$

Quando due eventi riguardano lo stesso corpo il loro intervallo è sempre di genere tempo. La velocità del corpo, infatti, non può essere maggiore di  $c$  e lo spazio percorso non può essere maggiore di  $c\Delta t$  per cui:  $\Delta \ell < c\Delta t$ .

Vediamo ora se è possibile trovare un sistema di riferimento  $K'$  nel quale i due eventi siano simultanei:  $\Delta t' = 0$ . Allora

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \ell)^2 = -(\Delta \ell')^2 < 0$$

e il sistema di riferimento cercato esiste solo se l'intervallo  $\Delta s$  fra i due eventi è immaginario. Gli intervalli immaginari, il cui quadrato è negativo, sono detti di *genere spazio*. Se l'intervallo fra due eventi è di genere spazio esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono simultanei. La distanza spaziale fra i punti in cui questi eventi sono avvenuti è, in  $K'$

$$\Delta \ell' = \sqrt{(\Delta \ell)^2 - c^2(\Delta t)^2} = i\Delta s. \quad (1.12)$$

**La proprietà di un intervallo di essere di genere luce, spazio o tempo è un concetto assoluto, non dipende cioè dal sistema di riferimento.**

Una rappresentazione grafica semplificata dello spazio tempo permette di chiarire ulteriormente la nozione fondamentale di intervallo. Consideriamo un sistema di coordinate in due dimensioni in cui riportiamo sugli assi le coordinate  $ct$  e  $x$ , quest'ultima è rappresentativa delle tre coordinate spaziali. Prendiamo un evento qualunque  $O$  come origine dello spazio-tempo e ci chiediamo in quale rapporto stanno gli altri eventi dello spazio quadridimensionale con il punto di universo  $O$ . In figura (1.3) è tracciato il sistema di riferimento scelto, l'evento  $O$  e le due rette **ab** e **cd**, di equazione  $x = \pm ct$ , che rappresentano le linee d'universo di due segnali luminosi che si propagano nella direzione delle  $x$  positive e negative rispettivamente.

Se l'evento **O** si riferisce ad una particella materiale, la linea d'universo di quest'ultima dovrà avere in ogni punto una tangente che forma con l'asse  $ct$  un angolo minore di  $45^\circ$  e apparterrà necessariamente alle regioni **bOd** e **aOc**. Nella regione **bOd** in ogni punto d'universo si avrà  $c^2t^2 - x^2 > 0$  e l'intervallo fra ogni evento di questa regione e l'evento **O** è di genere tempo. Ogni evento di questa regione avviene "dopo" **O**, cambiando sistema di riferimento potremo cambiare la posizione spaziale relativa dei due eventi ma non potremo mai renderli simultanei. La regione **bOd** è il "futuro assoluto" rispetto ad **O**. Ragionando nello stesso modo si vede che la regione **cOa** racchiude gli eventi del "passato assoluto" rispetto ad **O** cioè gli eventi di questa regione precedono temporalmente **O** in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Gli eventi appartenenti alle regioni **cOb** e **aOd**, invece, presentano un intervallo di genere spazio rispetto ad **O**. Mentre le proprietà temporali di questi eventi rispetto ad **O** sono relative, saranno quindi precedenti, posteriori o simultanei ad **O** a seconda del sistema di riferimento, si potrà parlare

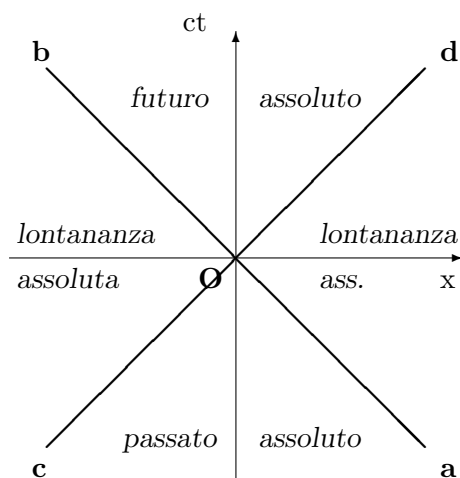


Figura 1.3: Relazione fra l'evento  $O$  e gli altri punti d'universo. Cono di luce.

per essi di "lontananza assoluta" perchè in nessun sistema di riferimento potranno coincidere spazialmente con  $O$ .

Pensata in quattro dimensioni, la figura (1.3) rappresenta un cono a due falde  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$  con l'asse del cono coincidente con l'asse  $ct$ . Questo cono, nello spazio quadridimensionale, viene chiamato il "cono di luce" e le sue due falde contengono gli eventi del "futuro assoluto" e del "passato assoluto" rispetto ad  $O$ . In meccanica Galileiana il principio di causalità stabilisce semplicemente che nessun effetto può esistere prima della causa che lo produce. La velocità finita di propagazione delle interazioni rende più complicato questo principio: una relazione di causa ed effetto fra due eventi può esistere solo se il loro intervallo è di genere tempo. L'invarianza dei concetti di "futuro assoluto" e "passato assoluto" dà un senso preciso a questa nuova forma di causalità.

### 1.3 Tempo proprio

Supponiamo di osservare da un sistema di riferimento inerziale  $K \{x, y, z, ct\}$  un orologio che si muove di moto vario rispetto a noi. Ciò significa che, in generale, la velocità dell'orologio potrà variare sia in modulo che in direzione ma ad ogni istante avrà un valore ben definito. Ad ogni istante si potrà quindi immaginare un sistema di riferimento inerziale in cui l'orologio è in quiete, sistema di riferimento che però cambierà nel tempo. La figura (1.4) mostra l'orologio e il sistema di riferimento  $K$  in cui viene osservato, ma

non il sistema  $K'$  fissato rigidamente all'orologio perchè esso cambia lungo la traiettoria.

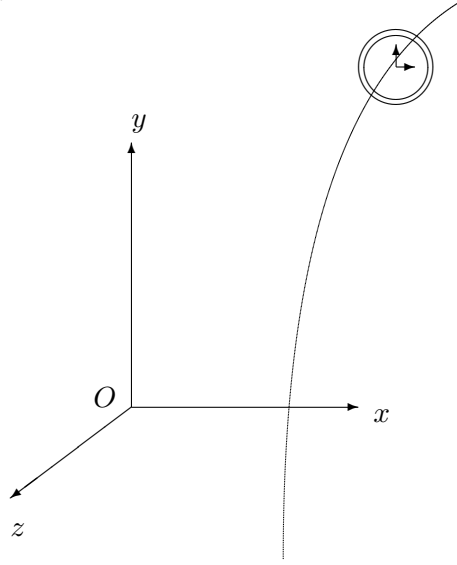


Figura 1.4: Orologio in moto vario rispetto a  $K$ .

Nel tempo infinitesimo  $dt$  in  $K$ , l'orologio mobile percorre la distanza  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  misurata da  $K$  e, essendo a riposo in  $K'$ , si avrà  $dx' = dy' = dz' = 0$ . Per l'invarianza dell'intervallo otteniamo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds'^2 = c^2 dt'^2$$

ovvero

$$dt' = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}.$$

Sappiamo che

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2,$$

dove  $v$  è la velocità istantanea dell'orologio mobile rispetto a  $K$ , e quindi

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.13)$$

Ad un intervallo finito di tempo in  $K$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ , corrisponde in  $K'$  l'integrale

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.14)$$

e il tempo indicato da un orologio che viaggia rigidamente attaccato ad un corpo dato è chiamato *tempo proprio* di questo corpo. Diremo che le equazioni (1.13) e (1.14) esprimono il tempo proprio in funzione del tempo del sistema di riferimento rispetto al quale si studia il moto in esame. Queste formule mostrano che il tempo proprio di un corpo in moto è sempre minore del corrispondente intervallo di tempo nel sistema fisso. Un orologio in moto sarà sempre in ritardo rispetto agli orologi del sistema  $K$ .

L'apparente contraddizione, che sorge se il moto dell'orologio in figura (1.4) è rettilineo ed uniforme e il sistema di riferimento ad esso solidale è pure inerziale, trova una soluzione nel modo in cui vengono misurati gli intervalli di tempo. Se  $K'$  resta inerziale durante il moto dell'orologio ad esso collegato rigidamente, avremo che l'orologio di  $K'$  ritarda rispetto agli orologi di  $K$  ma anche gli orologi di  $K$  ritarderanno rispetto a quelli di  $K'$  perchè diventa lecito invertire il ragionamento. Per affermare che l'orologio di  $K'$  ritarda,  $K$  procede così: pone due suoi orologi sincronizzati sulla traiettoria dell'orologio mobile e segna i tempi di passaggio di questo. Ottiene così il valore di  $\Delta t$  che viene paragonato con l'intervallo di tempo  $\Delta t'$ . L'operazione di misura non è un processo simmetrico e la predizione della formula (1.14) afferma che è l'orologio, che viene confrontato con più orologi di un altro sistema di riferimento, che ritarda.

La relazione fra tempo proprio e tempo coordinato

$$\Delta t' = \frac{1}{c} \int_{t'_1}^{t'_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (1.15)$$

trova conferme sperimentali in molti processi studiati presso i laboratori dove grandi macchine acceleratrici creano particelle instabili. Il confronto fra la vita media di queste particelle (misurata in tempo proprio) e "gli orologi" del laboratorio è in perfetto accordo con la (1.15). Un esempio ancora più suggestivo è fornito dalle particelle  $\mu$ , o "leptoni"  $\mu$ . I leptoni  $\mu$  vengono creati dai raggi cosmici nell'alta atmosfera, a circa 15 Km dalla terra, con velocità vicine a quella della luce. Nel sistema di riferimento in cui il  $\mu$  è a riposo, la vita media è  $\tau \simeq 2.2 \times 10^{-6}$  s e il decadimento avviene principalmente, per il  $\mu^-$ , nel canale

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu.$$

Il gran numero di  $\mu$ ,  $N$ , che arriva sulla terra è indipendente dal sistema di riferimento ed è una funzione decrescente del tempo di volo,  $t_v$ , diviso per la vita media:

$$N(t_v) = N(0) \exp \left[ - \frac{\text{tempo di volo}}{\text{vita media}} \right].$$

Poichè  $\tau c \simeq 658$  m l'arrivo di un gran numero di  $\mu$  sulla terra, che superano una distanza  $\ell = 15$  Km, può essere spiegato solo dal fatto che, nel sistema

di riferimento terrestre la vita media del  $\mu$  è

$$\frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \gg \tau,$$

essendo  $v$  di poco inferiore a  $c$ .

Resta però il problema di spiegare questo fenomeno visto dal sistema di riferimento in cui il  $\mu$  è in quiete. Come vedremo la spiegazione corretta si basa sul fatto che, nel sistema di quiete del  $\mu$ , il tempo di volo è ridotto e quindi anche la distanza dalla terra vista dal  $\mu$ , che chiameremo  $\ell'$ , deve essere di molto inferiore a  $\ell = 15 \text{ Km}$ . Il rapporto fra il tempo di volo e la vita media deve essere lo stesso nei due sistemi di riferimento

$$\frac{\ell}{v} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\tau} = \frac{\ell'}{v\tau}$$

e quindi

$$\ell' = \ell \sqrt{1 - v^2/c^2} \ll \ell \quad (1.16)$$

che ritroveremo come "contrazione di Lorentz" delle lunghezze.

Consideriamo ora gli orologi di due gemelli, uno di essi vive in un sistema di riferimento inerziale mentre l'altro viaggia per molti anni nel cosmo a bordo di una veloce astronave. Quando si incontrano di nuovo il gemello esploratore sarà più giovane, il suo orologio sarà in ritardo rispetto a quello rimasto nel sistema di riferimento inerziale. Questo risultato, che si può derivare dalla (1.14), coinvolge solo due orologi, uno in  $K$  e uno in  $K'$ , ma non costituisce un paradosso. Infatti le leggi della natura sono le stesse solamente nei sistemi di riferimento inerziali, l'orologio del gemello esploratore ha subito certamente delle accelerazioni e i due sistemi di riferimento godono di proprietà diverse. Il ragionamento per cui anche l'orologio rimasto in un sistema inerziale dovrebbe ritardare rispetto all'altro non è corretto.

Abbiamo visto che il tempo indicato da un orologio è uguale all'integrale

$$\frac{1}{c} \int_a^b ds,$$

esteso alla linea d'universo di questo orologio. Ritornando all'esempio dei due gemelli, la linea d'universo dell'orologio del gemello sedentario è una retta mentre l'orologio del gemello esploratore compie una traiettoria curva nello spazio-tempo che incontra in due punti la linea d'universo dell'orologio immobile. D'altra parte il tempo segnato dall'orologio immobile è sempre maggiore del tempo segnato dall'altro orologio. Da qui segue una proprietà non banale dello spazio di Minkowski: l'integrale  $\int ds$ , preso fra due punti d'universo dati, ha un massimo lungo la retta d'universo che congiunge questi due punti. Ovviamente tutti gli elementi  $ds$  nell'integrale devono essere di genere tempo come è il caso negli esempi fatti.

## 1.4 Trasformazioni di Lorentz

Le formule di trasformazione da un sistema inerziale  $K$  ad un altro sistema inerziale  $K'$  sono una diretta conseguenza dell'invarianza dell'intervallo. Come origine dei tempi,  $t$  in  $K$  e  $t'$  in  $K'$ , prendiamo l'istante in cui i due sistemi di coordinate coincidono e supponiamo che la velocità relativa  $V$ , di  $K$  rispetto a  $K'$ , sia diretta secondo l'asse  $x$ , come in figura (1.1). Se come intervallo consideriamo la "distanza" nello spazio quadridimensionale fra un punto d'universo e l'origine delle coordinate le trasformazioni cercate, che vengono chiamate allora le *formule di trasformazione di Lorentz*, si ottengono dalla condizione di invarianza dell'intervallo

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (1.17)$$

Le distanze nello spazio-tempo sono invarianti per traslazioni e, nel caso considerato in cui l'asse  $y$  resta parallelo a  $y'$  e l'asse  $z$  a  $z'$ , dovremo avere

$$y = y' \quad \text{e} \quad z = z'. \quad (1.18)$$

Infatti, poichè un moto parallelo all'asse  $x$  in  $K'$  deve rimanere tale in  $K$ , dovremo avere  $y = \lambda y'$  e  $z = \lambda z'$ , con  $\lambda$  fattore di scala indipendente dal tempo. Per l'omogeneità dello spazio e del tempo e l'isotropia dello spazio, il fattore di scala può dipendere solamente dal modulo della velocità relativa tra i due sistemi,  $\lambda = \lambda(V)$ , e  $\lambda(0) = 1$ . Se si considera un terzo riferimento  $K''$ , che si muove con velocità  $-V$  rispetto a  $K'$ ,  $K''$  è proprio il sistema originale  $K$  e quindi

$$\lambda(V)\lambda(-V) = 1.$$

Ma  $\lambda(V)$  non può dipendere dal segno di  $V$  perchè rappresenta una trasformazione di scala nella direzione trasversa ad  $x$ , e quindi a  $V$ . Si ha allora  $\lambda(V) = 1$ .

La condizione (1.17) diventa allora

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 \quad (1.19)$$

e le trasformazioni che cerchiamo devono essere lineari cioè della forma

$$x = \alpha x' + \lambda(ct'), \quad ct = \gamma x' + \delta(ct') \quad (1.20)$$

con  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  costanti, indipendenti da  $x'$  e  $t'$ . Sostituendo le (1.20) nella (1.19) ed eguagliando i coefficienti delle diverse potenze di  $x'$  e  $t'$  troviamo tre equazioni per le costanti

$$\delta^2 - \lambda^2 = 1, \quad \alpha^2 - \gamma^2 = 1, \quad \gamma\delta = \alpha\lambda$$

che, ponendo  $\alpha = \cosh \Psi$ ,  $\gamma = \sinh \Psi$ ,  $\delta = \cosh \Psi'$ ,  $\lambda = \sinh \Psi'$  danno la condizione

$$\tanh \Psi = \tanh \Psi'$$

con l'unica soluzione

$$\Psi = \Psi'.$$

Resta una incognita,  $\Psi$ , che si determina imponendo che la velocità di  $O'$  in  $K$  sia pari a  $V$  e, dalle (1.20) con  $x' = 0$ ,

$$\frac{x}{ct} = \frac{V}{c} = \frac{\lambda}{\delta} = \tanh \Psi \quad (1.21)$$

per cui

$$\cosh \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \sinh \Psi = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1.22)$$

Otteniamo così le formule di trasformazione di Lorentz

$$x = \frac{x' + (V/c)ct'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \frac{ct' + (V/c)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1.23)$$

che si riducono alla (1.3), cioè alle trasformazioni di Galileo, per  $c \rightarrow \infty$ .

Nel seguito indicheremo sempre con  $V$  la velocità relativa di due sistemi di riferimento inerziali e useremo la lettera minuscola  $v$  per la velocità di una particella. Notiamo che, nelle (1.23),  $V$  deve essere minore di  $c$ , altrimenti  $x$  e  $t$  diventerebbero immaginarie, se  $V > c$ , o infinite se  $V = c$ . Questo corrisponde all'impossibilità di un moto con velocità superiore a quella della luce o con velocità  $c$  per un corpo materiale. Abbiamo, infatti, già messo in evidenza il fatto che un sistema di riferimento è sempre associato a corpi materiali.

Con la notazione, comunemente usata in letteratura,

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (1.24)$$

le equazioni (1.23) possono essere riscritte nella forma

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \gamma(ct' + \beta x'). \quad (1.25)$$

Le equazioni (1.23) e (1.25) valgono se le origini dei due sistemi di coordinate coincidono all'istante che entrambi gli osservatori chiamano "tempo zero". Per evitare ogni confusione su questo punto è sufficiente riscriverle, per esempio le (1.25), come

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c \Delta t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad c \Delta t = \gamma(c \Delta t' + \beta \Delta x'), \quad (1.26)$$



dove  $\Delta x$  e  $\Delta t$  sono l'intervallo spaziale e temporale fra due eventi in  $K$  e  $\Delta x'$ ,  $\Delta t'$  i corrispondenti intervalli in  $K'$ . Le equazioni (1.26) non dipendono dalle origini del tempo scelte da  $O$  e  $O'$ .

Nell'ultima formula delle (1.26) ritroviamo il tempo proprio, se poniamo  $\Delta x' = 0$  per l'orologio in quiete in  $K'$ , mentre nella prima equazione in (1.26) ritroviamo la contrazione di Lorentz ponendo  $\Delta t' = 0$  per i due orologi di  $K'$  che coincidono ad un dato istante con gli estremi di un'asta, di lunghezza  $\Delta x$ , in quiete in  $K$ . Si chiama *lunghezza propria* di un'asta la sua lunghezza nel sistema di riferimento dove essa è in quiete. Indicando con  $\ell_0 = \Delta x$  la lunghezza propria e con  $\ell$  la lunghezza della stessa asta misurata nel sistema  $K'$ , otteniamo la relazione

$$\ell_0 = \gamma \ell, \quad \text{ovvero} \quad \ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Quindi  $\ell < \ell_0$  (contrazione di Lorentz) e, poichè le dimensioni trasversali rispetto alla velocità relativa dei due sistemi di riferimento non cambiano, avremo anche

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

dove  $\mathcal{V}_0$  è il volume proprio.

La sostituzione  $\beta \rightarrow -\beta$  permette di scambiare nelle (1.26) le coordinate di  $K$  con quelle di  $K'$  e di ottenere le formule inverse in cui  $\Delta x'$  e  $\Delta t'$  vengono espresse tramite  $\Delta x$  e  $\Delta t$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad c \Delta t' = \gamma(c \Delta t - \beta \Delta x).$$

Le equazioni (1.26) risolvono tutti i problemi in cui è coinvolta una singola trasformazione di Lorentz. E' infatti sempre possibile scegliere gli assi dei sistemi inerziali  $K$  e  $K'$  in modo che gli assi  $x$  e  $x'$  siano coincidenti con la velocità relativa  $\mathbf{V}$  e gli assi  $y$  e  $z$  restino paralleli a  $y'$  e  $z'$ . Ciò non è più vero se si considerano due trasformazioni di Lorentz successive con velocità differenti. Una volta scelti gli assi in modo da semplificare la prima trasformazione non è più possibile cambiarli per la seconda trasformazione. Consideriamo allora una trasformazione che lascia invariante l'intervallo e in cui la velocità di  $K'$  rispetto a  $K$  è  $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{n}} V$ , con  $\hat{\mathbf{n}}^2 = 1$ , e supponiamo che  $(ct, \mathbf{r})$  siano le coordinate di un evento in  $K$ . Decomponendo  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  in una parte perpendicolare a  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{r}_\perp$ , e in una parte parallela,  $\mathbf{r}_\parallel$ ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel$$

si ha

$$\mathbf{r}_\parallel = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}).$$

Sappiamo che le componenti trasverse a  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{r}_\perp$ , giocano lo stesso ruolo di  $y$  e  $z$  nelle (1.23) mentre la componente longitudinale,  $\mathbf{r}_\parallel$ , trasforma come  $x$ . Avremo quindi

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_\perp + \hat{\mathbf{n}}[\cosh(\Psi) (\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \sinh(\Psi) (ct')], \quad (1.27)$$

$$ct = \cosh(\Psi) (ct') + \sinh(\Psi) (\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{n}}), \quad (1.28)$$

dove

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = \tanh(\psi) \hat{\mathbf{n}} \quad (1.29)$$

Le equazioni (1.27), (1.28) e (1.29) risolvono completamente il problema.

Introduciamo ora una notazione che useremo abitualmente nel seguito, è importante ricordarla. Le coordinate  $(ct, x, y, z)$  di un evento saranno indicate con  $x^i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , dove

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

e cercheremo di evitare nel seguito ogni possibile confusione con il quadrato e il cubo di  $x$ . Queste saranno anche le componenti, nello spazio-tempo, del raggio vettore quadridimensionale dell'evento rispetto all'origine. Nel seguito, le lettere latine dalla  $i$  in poi ( $i, k, l, \dots$ ) indicheranno gli indici quadridimensionali che assumono i valori  $0, 1, 2, 3$ . Le trasformazioni di Lorentz (1.25) si semplificano con questa notazione e diventano

$$x^i = \sum_{j=0}^3 \Lambda_j^i x'^j \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (1.30)$$

con  $\Lambda_0^0 = \gamma$ ,  $\Lambda_1^0 = \gamma\beta$ ,  $\Lambda_0^1 = \gamma\beta$ ,  $\Lambda_1^1 = \gamma$ ,  $\Lambda_2^2 = 1$ ,  $\Lambda_3^3 = 1$  mentre tutti gli altri elementi  $\Lambda_j^i$ , diversi dai precedenti, sono nulli. Ricordiamo che  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  e  $\beta = V/c$ .

E' conveniente riscrivere le quattro equazioni (1.30) come un'unica equazione matriciale introducendo le matrici  $x$  e  $x'$ , con quattro righe e una colonna, di componenti  $x^i$  e  $x'^i$  rispettivamente,

$$x = \Lambda x' \quad (1.31)$$

ovvero, esplicitando le componenti,

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Le trasformazioni inverse si ottengono dalle (1.32) scambiando le coordinate in  $K'$  con quelle in  $K$  e cambiando il segno di  $\beta$ . Si lascia al lettore mostrare

che questa operazione è equivalente a considerare l'inversa della matrice di trasformazione perchè, dalla (1.31), si ha  $x' = \Lambda^{-1}x$ .

Si vede facilmente che  $\det |\Lambda_j^i| = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$  e, essendo

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \Lambda_j^i,$$

è uguale ad uno anche lo Jacobiano della trasformazione,  $\det |\partial x^i / \partial x'^j| = \det |\partial x'^i / \partial x^j| = 1$ . Le trasformazioni (1.30), o (1.32), sono lineari perchè i coefficienti della trasformazione non dipendono dalle coordinate dello spazio-tempo e questo permette di trovare facilmente le formule che legano le velocità di una particella nei sistemi di riferimento  $K$  e  $K'$  in moto relativo con velocità  $V$  lungo  $x \equiv x'$ . Avremo infatti

$$dx^i = \sum_{j=0}^3 \Lambda_j^i dx'^j \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (1.33)$$

e, dividendo membro a membro le equazioni con  $i = 1$  e  $i = 0$ , si ha

$$\frac{dx^1}{dx^0} = \frac{\gamma(dx'^1 + \beta dx'^0)}{\gamma(dx'^0 + \beta dx'^1)} = \frac{\beta + dx'^1/dx'^0}{1 + \beta dx'^1/dx'^0} \quad (1.34)$$

mentre, dalle equazioni con  $i = 2$  e  $i = 0$ , otteniamo

$$\frac{dx^2}{dx^0} = \frac{dx'^2}{\gamma(dx'^0 + \beta dx'^1)} = \frac{dx'^2/dx'^0}{\gamma(1 + \beta dx'^1/dx'^0)}$$

e una espressione analoga considerando  $i = 3$  e  $i = 0$ . Così, se la velocità della particella in  $K$  è  $\mathbf{v} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$  e in  $K'$  è  $\mathbf{v}' = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt')$ , si avrà dalla (1.34)

$$v_x = c \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2} \quad (1.35)$$

e, procedendo nello stesso modo,

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + v'_x V/c^2)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + v'_x V/c^2)}. \quad (1.36)$$

Nel limite  $c \rightarrow \infty$  riotteniamo le trasformazioni di Galileo per la velocità ma, se consideriamo una particella che si muove parallelamente all'asse  $x$  (e quindi anche all'asse  $x'$ ), si ottiene dalla (1.35)

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}$$

che mostra come la somma di due velocità non può mai essere superiore alla velocità della luce anche se  $v'$  fosse la velocità di un raggio luminoso. Infatti, se  $v' = c$  si ottiene  $v = c$  in accordo con il principio di relatività di Einstein.

Se la velocità della particella appartiene al piano  $(x, y)$ ,  $v_z = v'_z = 0$ , possiamo porre  $v_x = v \cos \theta$ ,  $v_y = v \sin \theta$  in  $K$  e  $v'_x = v' \cos \theta'$ ,  $v'_y = v' \sin \theta'$  in  $K'$  con  $v$  e  $v'$  moduli delle velocità in  $K$  e  $K'$ , rispettivamente. Le formule (1.35) e (1.36) diventano allora le formule di trasformazione per la direzione della velocità, o per "gli angoli". Per esempio si ha

$$\tan \theta = \frac{v' \sin \theta'}{\gamma(v' \cos \theta' + V)}$$

che trova applicazioni nei processi d'urto se siamo interessati all'angolo formato dalle velocità di due particelle in sistemi di riferimento inerziali diversi.

Una applicazione particolarmente interessante delle formule di trasformazione degli angoli si presenta nel fenomeno dell'aberrazione della luce. In questo caso si ha  $v = v' = c$  e dalla prima delle equazioni (1.36)

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 + V \cos \theta'/c)} \quad (1.37)$$

che permetterebbe un calcolo esatto dell'aberrazione della luce emessa da una stella e vista dalla terra. In questo caso tuttavia la risposta esatta non si distingue dalla soluzione classica perchè  $V \simeq 30 \text{ Km/s}$  e  $V/c \simeq 10^{-4}$ . Sviluppando la (1.37) in serie di  $V/c$  si ha  $\gamma \sim 1$  e

$$\sin \theta \simeq \sin \theta' \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta'\right)$$

cioè

$$\sin \theta - \sin \theta' \simeq -\frac{V}{c} \sin \theta' \cos \theta'.$$

Ma  $\sin \theta - \sin \theta' = 2 \sin[(\theta - \theta')/2] \cos[(\theta + \theta')/2]$  e, tenendo solo i termini che vanno come  $V/c$ , si ha

$$\Delta \theta \equiv \theta' - \theta \simeq \frac{V}{c} \sin \theta'$$

che è la formula elementare ben nota dell'aberrazione della luce.

## 1.5 Calcolo tensoriale. Generalità

Ci poniamo ora il problema di scrivere le equazioni che esprimono le leggi della natura in forma covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, cioè equazioni che sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali e che non contengono esplicitamente la velocità dell'osservatore rispetto ad un dato sistema di coordinate. La risposta ci è suggerita dalla legge del moto (1.1) che è invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo: le equazioni devono connettere grandezze tensoriali della stessa natura, nel caso della (1.1) vettori

tridimensionali. Possiamo procedere nello stesso modo per le trasformazioni di Lorentz definendo tensori quadridimensionali tramite le loro proprietà di trasformazione per rotazioni dello spazio-tempo. Lo faremo dapprima in tutta generalità, ciò ci sarà utile anche nella descrizione del campo gravitazionale, e considereremo nel prossimo paragrafo il caso particolare dello spazio pseudo-euclideo. L'equivalente del raggio vettore in tre dimensioni, o meglio del suo differenziale  $d\mathbf{r}$ , è rappresentato dalle quattro grandezze  $dx^i$ , prototipo di un quadrivettore.

Adotteremo nel seguito la regola per la quale con ogni indice ripetuto due volte, in un *prodotto* di due o più termini, si sottintende la sommatoria da 0 a 3, ma il segno di somma va omissso. Questo modo di esprimere una sommatoria su indici ripetuti, detti muti, è molto comodo e semplifica notevolmente la scrittura delle formule. Per esempio, l'equazione (1.33) verrebbe scritta nel modo seguente

$$dx^i = \sum_{j=0}^3 \Lambda_j^i dx'^j \quad \Rightarrow \quad dx^i = \Lambda_j^i dx'^j,$$

e le due forme si devono considerare equivalenti. Questa convenzione si applica solo se, in ogni coppia di indici eguali, uno è in alto e l'altro in basso, come la coppia  $({}_j^j)$  nell'equazione precedente.

E' importante ricordare che un tensore è definito dalle sue proprietà di trasformazione ed è riferito ad un punto dato dello spazio in considerazione; le sue componenti sono definite in un dato sistema di riferimento in questo spazio. Tabelle di numeri che si riferiscono a sistemi di riferimento diversi, o a punti diversi dello stesso sistema di riferimento, non sono tensori ma matrici (per esempio, le matrici di trasformazione  $\Lambda_j^i$ ).

### 1.5.1 Vettori

Si dice che un insieme di grandezze  $A^0, A^1, A^2, A^3$  rappresenta, nello spazio-tempo, un vettore controvariante  $A^i$  se, per la trasformazione di coordinate

$$x^i = x^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

tali grandezze trasformano come <sup>3</sup>

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'^j$$

Quindi la legge di trasformazione di un vettore controvariante è la stessa di quella che trasforma i differenziali

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j$$

---

<sup>3</sup>La somma su  $j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , è sottintesa.

e possiamo notare che avremo anche le formule inverse

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \quad A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j.$$

Si può anche notare che le sole trasformazioni di coordinate che trasformano un vettore costante in un vettore costante sono le trasformazioni lineari

$$x^i = \alpha_j^i x'^j + \alpha^i$$

dove  $\alpha_j^i$ ,  $\alpha^i$  sono delle costanti.

Essendo data una funzione continua e derivabile  $f(x^0, \dots, x^3)$ , il differenziale di questa funzione è espresso dalla formula

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Per una trasformazione di coordinate  $f$  diventa una funzione delle  $x'^i$  e abbiamo

$$df = \frac{\partial f}{\partial x'^i} dx'^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

che è equivalente alle formule

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x'^j}.$$

Si dice che un sistema di quattro funzioni  $A_i(x^0, \dots, x^3)$  costituisce le componenti di un vettore covariante nello spazio quadridimensionale, rispetto alle variabili  $x^0, \dots, x^3$ , se le componenti  $A'_i$  dello stesso vettore, rispetto alle variabili  $x'^i$ , sono legate alle  $A_i$  dalle relazioni

$$A_i = \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} A'_r.$$

Si noti che queste formule hanno la stessa forma delle precedenti, ciò ci dice che le derivate parziali del primo ordine di una funzione, invariante per trasformazioni di coordinate, costituiscono le componenti di un vettore covariante. È evidente che esistono anche le formule inverse delle precedenti

$$\frac{\partial f}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad A'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A_i.$$

Dato un vettore controvariante  $a^i$  ed un vettore covariante  $b_i$ , la somma dei prodotti delle componenti è un invariante rispetto alle trasformazioni delle coordinate, perchè si ha

$$a^i b_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a'^j \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} b'_k = a'^j b'_j,$$

per la relazione

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \delta_j^k,$$

dove  $\delta_j^k$ , che si chiama anche  $\delta$  di Kroneker, vale zero se  $k \neq j$  e vale uno se  $k = j$ . L'invariante  $a^i a_i$  è chiamato *quadrato del quadrivettore*  $a^i$  e può essere positivo, negativo o nullo. Con la stessa terminologia usata per gli intervalli, si parlerà allora di quadrivettori di genere tempo ( $a^i a_i > 0$ ), di genere spazio ( $a^i a_i < 0$ ) e di genere luce o isotropi ( $a^i a_i = 0$ ).

Ne risulta in particolare che le espressioni

$$a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad a_i dx^i \quad (1.38)$$

sono invarianti per trasformazioni di coordinate e, inversamente, se le espressioni

$$A^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad A_i dx^i$$

sono invarianti per trasformazioni delle variabili, si può vedere facilmente che  $A^i$  sono le componenti di un vettore controvariante, mentre  $A_i$  sono le componenti di un vettore covariante. Ciò permette di definire un vettore controvariante  $A^i$ , o covariante  $A_i$ , come un sistema di 4 grandezze che realizzano l'invarianza di una, o dell'altra, delle formule precedenti o anche l'invarianza di una, o dell'altra, delle espressioni

$$a_i A^i, \quad a^i A_i,$$

dove  $a_i$  è un vettore covariante e  $a^i$  un vettore controvariante. <sup>4</sup>

### 1.5.2 Tensori

Date 16 quantità  $a_{ij}$ , funzioni delle variabili  $x^0, \dots, x^3$ , esse costituiscono le componenti di un tensore covariante di rango due se le  $a_{ij}$  cambiano, per una trasformazione delle coordinate, secondo le formule

$$a_{ij} = a'_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j}.$$

Se si moltiplicano queste formule per  $dx^i \delta x^j$ , dove  $dx^i$  e  $\delta x^j$  sono due differenziali delle variabili  $x^i$ , e si somma, si ottiene facilmente

$$a_{ij} dx^i \delta x^j = a'_{rs} dx'^r \delta x'^s.$$

---

<sup>4</sup>Certi autori interpretano le formule (1.38) dicendo che le 4 quantità  $\partial f / \partial x^i$  costituiscono in ogni punto  $P(x^0, \dots, x^3)$  4 vettori che formano la base di uno spazio vettoriale, che è quindi lo spazio dei vettori controvarianti, che vengono chiamati semplicemente vettori, mentre i 4 differenziali  $dx^i$  formano in ogni punto  $P$  una base per lo spazio vettoriale duale. Questo è lo spazio dei vettori covarianti che vengono chiamati anche covettori. Non seguiremo, nel seguito, questa convenzione.

Ciò mostra che l'espressione

$$a_{ij} dx^i \delta x^j$$

è invariante rispetto a trasformazioni di coordinate. Si può anche considerare questa proprietà come una definizione di un tensore covariante di rango due, essendo equivalenti le due definizioni date.

Se le componenti  $a_{ij}$  soddisfano alle condizioni di simmetria

$$a_{ij} = a_{ji}$$

si dice che il tensore covariante  $a_{ij}$  è *simmetrico*. Un tensore simmetrico ha in generale  $n(n+1)/2$  componenti indipendenti in uno spazio ad  $n$  dimensioni (10 componenti in 4 dimensioni) e la forma quadratica

$$a_{ij} dx^i dx^j$$

è invariante per trasformazioni delle coordinate.

Un tensore covariante  $a_{ij}$  è detto *antisimmetrico* se abbiamo, per qualunque  $i, j$ ,

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

e di conseguenza  $a_{ii} = 0$ . Esso avrà in generale  $n(n-1)/2$  componenti indipendenti (6 componenti in 4 dimensioni). Per un tensore antisimmetrico, la forma bilineare  $a_{ij} dx^i \delta x^j$  si può scrivere anche come

$$\frac{1}{2} a_{ij} (dx^i \delta x^j - dx^j \delta x^i).$$

Un tensore covariante di rango due  $a_{ij}$  può sempre essere considerato come la somma di due tensori, uno simmetrico e l'altro antisimmetrico. Infatti, se poniamo

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \quad \beta_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2},$$

$\alpha_{ij}$  è un tensore simmetrico,  $\beta_{ij}$  è antisimmetrico e

$$a_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}.$$

Si chiama tensore controvariante, di rango due, un sistema di  $n^2$  quantità  $a^{rs}$  che trasformano secondo le formule

$$a^{rs} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \frac{\partial x^s}{\partial x'^j} a'^{ij} \quad (1.39)$$

Ciò mostra che l'espressione

$$a^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j},$$



dove  $f$ ,  $\phi$  sono due funzioni scalari qualunque, è un invariante per trasformazioni delle coordinate. Anche in questo caso possiamo chiamare simmetrico, o antisimmetrico, il tensore le cui componenti soddisfano all'una o all'altra delle condizioni

$$a^{ij} - a^{ji} = 0, \quad a^{ij} + a^{ji} = 0.$$

Un sistema di  $n^2$  quantità  $a_j^i$  costituiscono le componenti di un tensore misto di rango due, controvariante in  $i$  e covariante in  $j$ , se soddisfa la legge di trasformazione

$$a_s^r = \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s} a_j'^i.$$

Ne segue in particolare che i simboli  $\delta_j^i$  costituiscono le componenti di un tensore misto, le cui componenti non cambiano per trasformazioni delle coordinate. Lo chiameremo tensore unità. Dato un tensore misto  $a_j^i$ , la forma mista

$$a_j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^j$$

è un invariante.

In modo analogo si possono introdurre i tensori di rango superiore a due, covarianti, controvarianti o misti. In generale, gli indici superiori sono controvarianti e gli indici inferiori covarianti.

Se indichiamo con

$$A_{rs \dots u}^{ij \dots m}$$

le componenti di un tensore con  $p$  indici controvarianti e  $q$  indici covarianti, prendendo la somma delle componenti che hanno un indice di controvarianza eguale ad un indice di covarianza, si ottiene un tensore  $p - 1$  volte controvariante e  $q - 1$  volte covariante, le cui componenti sono, se  $i = r$ ,

$$A_{is \dots u}^{ij \dots m}.$$

Si dice che questo tensore è stato ottenuto dal tensore dato, per contrazione o semplificazione. Se abbiamo un tensore misto  $a_j^i$  di rango due, si ottiene per contrazione l'invariante:  $a_i^i = a'^i_i$ . Notiamo una proprietà importante della contrazione completa di due tensori dei quali uno è simmetrico e l'altro antisimmetrico. Se  $a^{ij} = a^{ji}$  è simmetrico e  $b_{ij} = -b_{ji}$  è antisimmetrico, si avrà

$$a^{ij}b_{ij} = -a^{ji}b_{ji} = -a^{ij}b_{ij} = 0$$

Se abbiamo due tensori, il prodotto delle componenti di questi tensori costituiscono le componenti di un tensore che ha come rango di covarianza (controvarianza) la somma dei ranghi di covarianza (controvarianza) dei due tensori.

Dato un tensore covariante di rango due  $a_{ij}$ , il cui determinante  $a = |a_{ij}|$  è diverso da zero, gli elementi della matrice inversa  $a^{rs}$  costituiscono le componenti di un tensore controvariante, perchè abbiamo

$$a^{ij}a_{jk} = a'^{ij}a'_{jk} = \delta_k^i$$

che mostra che  $a^{ij}$  trasformano secondo le formule (1.39). Infatti, se  $a^{ij}$  trasforma come un tensore, allora

$$a'^{lr}a'_{rs} \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = \delta_k^i$$

è soddisfatta perchè  $a'^{lr}a'_{rs} = \delta_s^l$ . Se indichiamo il determinante delle  $a^{ij}$  con  $A$ , abbiamo evidentemente la formula  $aA = 1$ , mentre se indichiamo con  $J$  (Jacobiano) il determinante funzionale  $|\partial x'^i / \partial x^j|$  della trasformazione di coordinate, abbiamo

$$a = a'J^2, \quad A' = AJ^2,$$

come il lettore può facilmente verificare.

Essendo dato un tensore covariante di rango due con componenti  $g_{ij}$  o un tensore controvariante di componenti  $g^{ij}$  con determinante diverso da zero si può, utilizzando la moltiplicazione e la contrazione, cambiare gli indici di controvarianza di qualsiasi altro tensore in indici di covarianza e viceversa. Un esempio importante è fornito dal tensore metrico definito tramite il quadrato dell'intervallo fra due eventi infinitamente vicini, invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate,

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \quad (1.40)$$

dove  $g_{ik}$  sono, in generale, funzioni delle coordinate e possono essere prese simmetriche rispetto agli indici  $i$  e  $k$ ,  $g_{ik} = g_{ki}$ . Una parte antisimmetrica di  $g_{ik}$  non contribuirebbe a  $ds^2$  in (1.40), vale infatti la regola che un tensore di rango due antisimmetrico contratto con un tensore simmetrico dà zero.

## 1.6 Tensori nello spazio-tempo di Minkowski

Quanto abbiamo detto per uno spazio tempo qualsiasi può essere facilmente applicato al caso particolare dello spazio pseudoeuclideo della relatività ristretta. In questo caso

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (1.41)$$

e il tensore metrico è diagonale con le uniche componenti non nulle  $g_{00} = 1$ ,  $g_{11} = -1$ ,  $g_{22} = -1$ ,  $g_{33} = -1$ . Esso coincide con il suo inverso e possiamo

rappresentare entrambi nella forma di tabella

$$(g_{ik}) = (g^{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

dove l'indice  $i$  indica le righe e l'indice  $k$  le colonne nell'ordine 0, 1, 2, 3. Poichè

$$A_i = g_{ik} A^k$$

vale (ma solo nello spazio di Minkowski) la regola: per passare dalle componenti controvarianti di un quadrivettore  $A^i$  alle componenti covarianti, e viceversa, è sufficiente cambiare il segno delle tre componenti spaziali

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (1.43)$$

A volte è comoda la notazione in cui la componente temporale (0) è scritta separatamente dalle componenti spaziali che trasformano come un trivettore per rotazioni dello spazio tridimensionale. Ciò semplifica il calcolo del prodotto di due quadrivettori, per esempio nel caso del raggio quadrivettore avremo

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^i x_i = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2.$$

Le derivate di una funzione  $f$  sono le componenti covarianti di un quadrivettore e, in questa notazione,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla f \right)$$

dove  $\nabla f$  è il gradiente tridimensionale di  $f$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  la divergenza del vettore  $\mathbf{A}$  e  $\nabla \times \mathbf{A}$  il suo rotore.

Una proprietà importante delle trasformazioni di Lorentz è dovuta al fatto che, come abbiamo visto, la matrice di trasformazione ha determinante uno. Della stessa proprietà gode lo Jacobiano  $J$  della trasformazione e l'elemento di integrazione nello spazio-tempo

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dV \equiv d\Omega$$

è un invariante. Infatti, nella trasformazione, l'elemento di integrazione  $d\Omega$  viene sostituito da  $J^{-1} d\Omega'$ , dove  $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$  e  $J = |\partial x'^i / \partial x^j|$ , e quindi non cambia essendo  $J = 1$ . Tutti i teoremi del calcolo infinitesimale che non fanno esplicito riferimento alla metrica dello spazio valgono anche nello spazio-tempo, per esempio i teoremi di Gauss e di Stokes. Per capire come si generalizza il teorema di Gauss allo spazio quadridimensionale è

necessario però capire come si integra su una varietà tridimensionale dello spazio-tempo (una ipersuperficie).

Nello spazio di Minkowski le componenti dei tensori  $\delta_k^i$ ,  $g_{ik}$  e  $g^{ik}$  sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento e della stessa proprietà gode il tensore completamente antisimmetrico <sup>5</sup> di rango quattro  $e^{iklm}$ . Le componenti diverse da zero devono quindi avere tutti gli indici diversi e, se tutti gli indici sono diversi,  $e^{iklm} = \pm e^{0123}$ . dove si ha il segno più se  $iklm$  è una permutazione pari di 0123 e il segno meno per una permutazione dispari (oppure, che è lo stesso, per un numero pari o dispari di scambi di due indici qualsiasi). Poniamo  $e^{0123} = +1$  e notiamo che  $e^{iklm}$  è un pseudotensore, non cambia se una delle tre coordinate spaziali cambia di segno, e che

$$e^{iklm}e_{iklm} = -4! = -24, \quad (1.44)$$

il segno meno è dovuto al fatto che  $e_{iklm} = -e^{iklm}$  (si alzano tre indici spaziali).

Useremo nel seguito formule in cui compaiono prodotti del tipo  $e^{iklm}e_{pklm}$  in cui solo alcuni dei quattro indici sono contratti. Il modo più semplice per capire come si ottengono risultati del tipo

$$e^{iklm}e_{pklm} = -6\delta_p^i \quad (1.45)$$

è quello di considerare il tensore completamente antisimmetrico di rango due nello spazio euclideo  $e_{ab}$  ( $a, b = 1, 2$ ) con  $e_{12} = 1$ ,  $e_{21} = -1$ ,  $e_{11} = e_{22} = 0$ . Il tensore  $e_{ab}e_{cd}$  forma un vero tensore di rango quattro in due dimensioni e perciò deve potersi esprimere tramite il tensore unità bidimensionale  $\delta_{ab}$  (useremo le lettere latine, da  $a$  ad  $h$  per indicare indici che assumono i valori 1, 2 e lettere greche,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  per indicare indici che assumono i valori 1, 2, 3). E' facile vedere che questo prodotto può essere espresso nella forma

$$e_{ab}e_{cd} = \begin{vmatrix} \delta_{ac} & \delta_{ad} \\ \delta_{bc} & \delta_{bd} \end{vmatrix} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}$$

che ha le stesse proprietà di simmetria e lo stesso valore. Ponendo  $d = b$  e sommando su  $b$  si ottiene

$$\sum_{b=1}^2 e_{ab}e_{cb} = \delta_{ac}.$$

In tre dimensioni avremmo ottenuto come risultato della contrazione di due indici del tensore  $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda} \quad (\alpha, \lambda = 1, 2, 3). \quad (1.46)$$

---

<sup>5</sup>Vale la regola generale: ogni tensore completamente antisimmetrico di rango eguale al numero di dimensioni dello spazio, dove esso è definito, è invariante per rotazioni del sistema di coordinate in questo spazio.

La contrazione completa dà nei due casi

$$\sum_{a,b=1}^2 e_{ab}e_{ab} = 2, \quad \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^3 e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6 \quad (1.47)$$

e mostra che, in uno spazio ad  $n$  dimensioni, il risultato è  $n!$  ( $-4!$  nello spazio di Minkowski). La contrazione su tutti gli indici meno uno dà il prodotto di  $(n-1)!$  ( $-3!$  nello spazio di Minkowski) per la  $\delta$  di Kroneker degli indici non contratti.

L'utilità del tensore completamente antisimmetrico nel calcolo dei determinanti risulta chiaramente nel caso bidimensionale. Consideriamo infatti una matrice  $h$  con elementi  $h_{ab}$ , ( $a, b = 1, 2$ ) e calcoliamo la somma

$$\sum_{a,b=1}^2 e_{ab}h_{ac}h_{bd} = h_{1c}h_{2d} - h_{2c}h_{1d} = \det(h) e_{cd}$$

mentre

$$\sum_{a,b,c,d=1}^2 e_{cd}e_{ab}h_{ac}h_{bd} = 2 \det(h).$$

Nello spazio di Minkowski le formule corrispondenti sono

$$e^{prst}h_{ip}h_{kr}h_{ls}h_{mt} = -\det(h) e_{iklm} \quad (1.48)$$

e

$$e^{iklm}e^{prst}h_{ip}h_{kr}h_{ls}h_{mt} = 24 \det(h). \quad (1.49)$$

Ritorniamo ora all'integrazione su una ipersuperficie. Tre quadrivettori definiscono una varietà tridimensionale con la stessa regola con la quale costruiamo il volume di un parallelepipedo tramite tre vettori nello spazio tridimensionale, cioè considerando il determinante formato dalle componenti di questi vettori. Il tensore di rango tre antisimmetrico costruito sui tre quadrivettori  $dx^i, dx'^i, dx''^i$

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix}$$

fornisce l'elemento d'integrazione su una ipersuperficie. E' conveniente considerare il duale di questo tensore cioè il quadrivettore  $dS^i$  definito dalla relazione

$$dS^i = -\frac{1}{6}e^{iklm}dS_{klm} \quad (1.50)$$

la cui inversa è

$$dS_{klm} = e_{iklm}dS^i \quad (1.51)$$

come si vede facilmente applicando la (1.45) a quest'ultima <sup>6</sup>.  $dS^i$  è un quadrivettore che ha per lunghezza "l'area" dell'elemento di ipersuperficie ed è perpendicolare a tutte le rette tracciate in questo elemento. Per esempio, se

$$dx^i = (0, dx, 0, 0), \quad dx'^i = (0, 0, dy, 0), \quad dx''^i = (0, 0, 0, dz)$$

allora

$$dS^{123} = dx dy dz = dS^0$$

e  $dS^0$  rappresenta un elemento di volume  $dV$  a tre dimensioni cioè la proiezione dell'ipersuperficie sull'iperpiano  $x^0 = \text{costante}$ .

Il teorema di Gauss afferma che l'integrale esteso ad una ipersuperficie chiusa può essere trasformato in un integrale esteso al volume quadridimensionale da essa racchiuso, per esempio

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega \quad (1.52)$$

dove  $A^i$  è un quadrivettore. La relazione (1.52) verrà usata spesso nel seguito, è importante capire a fondo il suo significato.

*Problema. Stabilire le leggi di trasformazione delle componenti di un quadritensore di rango due  $A^{ij}$  per le trasformazioni di Lorentz (1.25). Considerare in particolare il caso di un tensore simmetrico e quello di un tensore antisimmetrico.*

Soluzione.

Ogni componente del tensore trasforma come il prodotto delle corrispondenti componenti di due quadrivettori

$$A^{ij} = \Lambda_k^i \Lambda_l^j A'^{kl}$$

e l'equazione (1.32) fornisce gli elementi non nulli della matrice  $\Lambda$ . Se  $i = 0, j = 0$  la coppia di indici  $(k, l)$  può assumere solamente i valori  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ . Si trova allora che

$$\begin{aligned} A^{00} &= \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 A'^{00} + \Lambda_0^0 \Lambda_1^0 A'^{01} + \Lambda_1^0 \Lambda_0^0 A'^{10} + \Lambda_1^0 \Lambda_1^0 A'^{11} = \\ &= \gamma^2 (A'^{00} + \beta A'^{01} + \beta A'^{10} + \beta^2 A'^{11}). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Le stesse coppie di indici  $(k, l)$  si presentano se  $(i, j) = (0, 1), (1, 0), (1, 1)$

$$A^{01} = \gamma^2 (\beta A'^{00} + A'^{01} + \beta^2 A'^{10} + \beta A'^{11}) \quad (1.54)$$

$$A^{10} = \gamma^2 (\beta A'^{00} + \beta^2 A'^{01} + A'^{10} + \beta A'^{11}) \quad (1.55)$$

<sup>6</sup> Anche nello spazio tridimensionale ordinario si ricorre al duale per descrivere una superficie: l'area, che è un tensore antisimmetrico costruito con le componenti di due vettori, è descritta dal duale di questo tensore che identifichiamo con il prodotto esterno dei due vettori.

$$A^{11} = \gamma^2(\beta^2 A'^{00} + \beta A'^{01} + \beta A'^{10} + A'^{11}) \quad (1.56)$$

Se uno solo degli indici  $i$  e  $j$  vale 2 oppure 3 si riottengono le leggi di trasformazione di un quadrivettore. Supponiamo, per esempio, che  $i = 2$

$$A^{20} = \gamma(A'^{20} + \beta A'^{21}), \quad A^{21} = \gamma(\beta A'^{20} + A'^{21})$$

Non è difficile ora ricavare le equazioni analoghe se  $i = 3$  o se  $j = 2, 3$ . Ovviamente, poichè gli indici 2 e 3 non trasformano si ottiene

$$A^{22} = A'^{22}, \quad A^{23} = A'^{23}, \quad A^{32} = A'^{32}, \quad A^{33} = A'^{33}.$$

Se il tensore  $A^{ij}$  è simmetrico,  $A^{ij} = A^{ji}$ , anche  $A'^{kl}$  godrà della stessa proprietà e avremo, per esempio, dalla (1.53)

$$A^{00} = \gamma^2(A'^{00} + 2\beta A'^{01} + \beta^2 A'^{11})$$

Se invece il tensore  $A^{ij}$  è antisimmetrico,  $A^{ij} = -A^{ji}$ , tutte le componenti diagonali sono nulle e si avrà dalla (1.54)  $A^{01} = A'^{01}$  perchè

$$A^{01} = \gamma^2(1 - \beta^2)A'^{01} = A'^{01}. \quad (1.57)$$

e così via.

## 1.7 Quadrivelocità e quadriaccelerazione

Per trasformazioni di Lorentz le grandezze

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (1.58)$$

trasformano come le componenti di un quadrivettore e, essendo strettamente legate alle componenti del vettore velocità tridimensionale, vengono chiamate le componenti della *quadrivelocità*. L'intervallo  $ds$  può essere espresso tramite la (1.13) nella forma

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

che permette il calcolo delle componenti della quadrivelocità

$$u^i = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (1.59)$$

Quindi la quadrivelocità è il rapporto fra lo spostamento  $dx^i$  nello spazio tempo e la corrispondente variazione di tempo proprio moltiplicata per  $c$ . Le sue componenti sono adimensionali e

$$u^i u_i = \frac{dx^i dx_i}{ds^2} = 1, \quad (1.60)$$

quindi, se  $dx^i$  rappresenta lo spostamento di una particella, la quadrivelocità è un quadriettore tangente alla linea d'universo della particella.

Nello stesso modo possiamo definire la quadriaccelerazione

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds} \quad (1.61)$$

e, essendo  $d(u^i u_i) = 2 u_i du^i = 0$ , quadrivelocità e quadriaccelerazione sono vettori ortogonali fra di loro

$$u_i w^i = 0.$$

Mentre  $u^i$  è un quadrivettore di genere tempo, il suo "quadrato" vale uno ed è quindi positivo, la quadriaccelerazione è di genere spazio. Ciò discende dall'ortogonalità dei due vettori, possiamo infatti trovare un sistema di riferimento nel quale solo la componente  $u^0$  è diversa da zero e, in questo sistema di riferimento, la componente  $w^0$  deve essere nulla e  $w^i w_i < 0$ . Ma la proprietà di un quadrivettore di essere di genere spazio o di genere tempo è un concetto assoluto e quindi vale in tutti i sistemi di riferimento.

Verifichiamo esplicitamente questo fatto usando l'espressione (1.13) per  $ds$  e rifacendo i calcoli, ora un pò più complessi, che ci hanno portato alle componenti della quadrivelocità. Si trova, indicando con  $\dot{\mathbf{v}}$  l'accelerazione tridimensionale,

$$w^i = \left( \frac{\gamma^4}{c^3} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}, \frac{\gamma^2}{c^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{\gamma^4}{c^4} (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{v} \right)$$

dove abbiamo usato la notazione  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , e finalmente

$$w_i w^i = -\frac{\gamma^4}{c^4} \left[ \dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2 \right] < 0. \quad (1.62)$$

---

*Problema.* Determinare il moto relativistico uniformemente accelerato di un corpo, cioè un moto rettilineo nel corso del quale l'accelerazione  $|\dot{\mathbf{v}}| \equiv w$  resta costante nel sistema di riferimento solidale con il corpo.

Soluzione.

Indichiamo con  $K'$  il sistema di riferimento dove la velocità della particella è nulla,  $v = 0$ , e nel quale l'equazione (1.62) dà

$$w^i w_i = \text{costante} = -\frac{w^2}{c^4}.$$

Supponiamo che il moto avvenga lungo l'asse  $x$  con velocità ed accelerazione parallele. Nel sistema di riferimento  $K$  in cui si osserva la particella in moto con velocità



$v$  diversa da zero l'invariante  $w^i w_i$  ha sempre lo stesso valore ma il quadrivettore  $w^i$  ha la forma generale, che abbiamo già calcolato,

$$\frac{\gamma^2 w}{c^2} (\gamma^2 \beta, 1 + \gamma^2 \beta^2)$$

dove la semplificazione è dovuta al fatto che il moto è rettilineo. Calcolando l'invariante  $w^i w_i$  in  $K$  troviamo, notando che  $d(\gamma v)/dt = \gamma^3 w$ ,

$$\sqrt{-w^i w_i} = \frac{\gamma^3 w}{c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(\gamma v) = \frac{w}{c^2}$$

dalla quale si ottiene facilmente

$$\gamma v = wt \quad \text{ovvero} \quad v = \frac{wt}{\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}}} \quad (1.63)$$

se  $v = 0$  per  $t = 0$ . Integrando ancora una volta e ponendo  $x = 0$  per  $t = 0$ , si ottiene

$$x = \frac{c^2}{w} \left( \sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) \quad (1.64)$$

Per  $wt \ll c$  queste formule si riducono alle espressioni classiche  $v \simeq wt$  e  $x \simeq wt^2/2$ . Per  $t \rightarrow \infty$  la velocità tende al valore costante  $c$ .

Il tempo proprio di una particella animata da un moto uniformemente accelerato è dato dall'integrale

$$\int \frac{ds}{c} = \int_0^t \gamma dt = \frac{c}{w} \operatorname{arcsinh} \frac{wt}{c}. \quad (1.65)$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ , esso cresce molto più lentamente di  $t$  secondo la legge

$$\frac{c}{w} \ln \frac{2wt}{c}.$$


---



## Capitolo 2

# Meccanica relativistica

### 2.1 Principio di minima azione

Le leggi della meccanica relativistica devono essere invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz e, per ottenerle, è necessario partire da una forma più generale della meccanica che contenga come caso particolare le leggi di Newton. Indichiamo con  $q$  l'insieme delle coordinate che descrivono il sistema:  $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  se il sistema ha  $n$  gradi di libertà. Indicheremo con  $\dot{q}$  la derivata delle coordinate rispetto al tempo. Il principio di minima azione afferma che ogni sistema meccanico è caratterizzato da una funzione  $L(q, \dot{q}, t)$ , la Lagrangiana del sistema, tale che, se il sistema occupa agli istanti  $t = t_1$  e  $t = t_2$  posizioni determinate, fra queste posizioni il sistema si muove in modo che l'azione  $S$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

ha un estremo, un minimo su ogni tratto sufficientemente piccolo di traiettoria. Se  $q(t)$  è la traiettoria vera e

$$q'(t) = q(t) + \delta q(t)$$

allora la variazione di  $S$  è nulla

$$\delta S = S(q') - S(q) = 0$$

essendo del secondo ordine nelle variazioni infinitesime  $\delta q$ .

Calcolando esplicitamente la variazione  $\delta S$  dalla (2.1)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

e ponendo  $\delta S = 0$  si ottengono, per l'arbitrarietà delle  $\delta q$ ,  $n$  equazioni della forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (2.3)$$

una per ogni  $q_i$ . Infatti il termine integrato nella (2.2) si annulla essendo  $\delta q = 0$  agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ . Oltre alle equazioni del moto, le equazioni di Eulero-Lagrange (2.3), la variazione (2.2) determina anche i momenti coniugati  $p$  alle coordinate  $q$ . Se consideriamo la (2.2) per traiettorie reali in funzione dei valori delle coordinate al limite superiore  $q(t_2)$ , l'integrale si annulla e otteniamo

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv p. \quad (2.4)$$

Un esempio tratto dalla meccanica classica chiarisce quanto abbiamo detto. La Lagrangiana di una particella è allora la differenza fra l'energia cinetica e l'energia potenziale

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\mathbf{r})$$

e l'equazione (2.3) fornisce le tre equazioni

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\nabla U,$$

cioè la seconda legge di Newton ( $-\nabla U$  è la forza agente sulla particella) mentre la (2.4) dà  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  che è l'impulso.

L'importanza del principio di minima azione risiede nel fatto che, se l'integrale d'azione non dipende dalla scelta del sistema di riferimento e quindi è invariante per trasformazioni di Lorentz, le equazioni del moto (2.3) sono invarianti in forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. La forma tensoriale corretta delle leggi della natura si ottiene imponendo che in (2.1) compaia l'integrale di un invariante relativistico.

## 2.2 Energia ed impulso

Definiamo ora l'integrale d'azione per una particella materiale libera, non soggetta cioè all'azione di forze esterne. Per una particella libera l'unico scalare disponibile è l'intervallo  $ds$  e

$$S = -\alpha \int_a^b ds \quad (2.5)$$

dove  $\alpha$  è una costante e gli eventi  $a$  e  $b$  rappresentano i punti d'universo occupati dalla particella agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ . Abbiamo visto che l'integrale

dell'intervallo, esteso alla linea d'universo di una particella, è massimo quando la linea d'universo è una retta. Per avere un minimo è necessario che  $\alpha > 0$ . Ricordando che

$$ds = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

otteniamo

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

e, dalla (2.1), la Lagrangiana relativistica

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

che, nel limite  $c \rightarrow \infty$ , deve trasformarsi nell'espressione classica  $mv^2/2$  per una particella libera (a meno di termini costanti). Avremo quindi

$$L = -\alpha c \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) = -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} + \dots$$

e concludiamo che dovrà essere  $\alpha = mc$ . Abbiamo trovato l'azione e la Lagrangiana relativistiche di una particella libera,

$$S = -mc \int_a^b ds \quad (2.6)$$

e

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.7)$$

rispettivamente. Queste formule sono applicabili ad ogni corpo costituito da una gran numero di particelle elementari,  $m$  rappresenterà allora la massa totale e  $v$  la velocità del corpo in blocco.

Sarebbe ora facile determinare l'impulso tridimensionale  $\mathbf{p}$  della particella libera dalle (2.4), che ora si scriverebbero come

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

e l'energia  $\mathcal{E}$  dalla

$$\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$$

ma è preferibile usare la notazione quadridimensionale con la quale affronteremo anche il caso della particella interagente con un campo elettromagnetico o gravitazionale.

Calcoliamo allora la variazione della (2.6), ricordando che  $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$  e che  $\delta ds = dx_i \delta(dx^i)/ds = dx_i d(\delta x^i)/ds = u_i d(\delta x^i)$ ,

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int_a^b \delta ds = -mc \int u_i d(\delta x^i) = \\ &= -mc u_i \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i du_i, \end{aligned} \quad (2.8)$$

avendo integrato per parti. La traiettoria effettiva si ottiene dalla  $\delta S = 0$  con le condizioni al contorno  $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$ , ottenendo  $du_i = 0$  ovvero

$$\frac{du_i}{ds} = 0 \quad (2.9)$$

e la quadriaccelerazione di una particella libera è nulla. Le equazioni (2.9) sono le equazioni del moto di questa particella. Se, invece, fissiamo solo il punto d'universo  $a$  e consideriamo variabile  $b$  con le equazioni del moto (2.9) soddisfatte si ha dalla (2.8)

$$\delta S = -mc u_i \delta x^i. \quad (2.10)$$

Il quadrivettore, con componenti covarianti

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i},$$

è detto *quadri-impulso*. In generale sono le componenti spaziali controvarianti di un quadrivettore che riproducono il corrispondente vettore tridimensionale con il segno corretto (come le componenti spaziali di  $x^i$  sono collegate a  $\mathbf{r}$ ). Ricordando che  $\mathbf{p} = (\partial S/\partial x, \partial S/\partial y, \partial S/\partial z)$  e che  $\partial S/\partial t = -\mathcal{E}$ , avremo

$$p^i = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right)$$

mentre  $p_i = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p})$ . Dalla (2.10) risulta che le componenti del quadri-impulso di una particella libera sono

$$p^i = mc u^i \quad (2.11)$$

e, dalle componenti già calcolate di  $u^i$ , discendono le espressioni esplicite dell'energia

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.12)$$

e del tri-impulso

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.13)$$

In meccanica relativistica l'impulso e l'energia sono le componenti di uno stesso quadri-vettore e, nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, trasformano per Lorentz come

$$p_x = \gamma \left( p'_x + \beta \frac{\mathcal{E}'}{c} \right), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \frac{\mathcal{E}}{c} = \gamma \left( \frac{\mathcal{E}'}{c} + \beta p'_x \right) \quad (2.14)$$

Dalla definizione di quadri-impulso (2.11) e dall'identità  $u^i u_i = 1$ , otteniamo per l'invariante  $p^i p_i$  la relazione importante

$$p^i p_i = m^2 c^2 \quad (2.15)$$

e sostituendovi l'espressione  $p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$  troviamo un legame fra energia e impulso

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (2.16)$$

La massa  $m$  di una particella, o di un corpo, è invariante per trasformazioni di Lorentz e la sua definizione è la stessa in meccanica classica e relativistica. Possiamo quindi riscrivere le equazioni del moto (2.9) nella forma

$$\frac{dp^i}{ds} = 0 \quad (2.17)$$

giungendo così al risultato che, per una particella libera, energia e impulso si conservano. Ci sono però alcune differenze importanti con la meccanica classica. L'equazione (2.13) mostra che la relazione fra  $d\mathbf{p}/dt$ , la forza agente sulla particella, e l'accelerazione  $d\mathbf{v}/dt$  non è più riconducibile alla forma semplice  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt$  valida in meccanica classica. Notiamo anche che l'energia di un corpo libero (2.12), o di qualsiasi sistema isolato, è una grandezza del tutto determinata in meccanica relativistica a differenza della meccanica classica dove all'energia è possibile aggiungere una costante arbitraria che può essere sia positiva che negativa. Per  $v = 0$ , l'energia assume il valore ben definito

$$\mathcal{E} = mc^2 \quad (2.18)$$

che è l'energia di riposo della particella o del corpo. L'energia di un corpo in quiete comprenderà, oltre all'energia di riposo delle particelle che lo compongono  $\sum m_a c^2$ , l'energia cinetica delle particelle e la loro energia di interazione. In altri termini,  $m$  non è uguale alla somma  $\sum m_a$  e, in meccanica relativistica, l'energia si conserva ma la legge di conservazione della massa non vale più. La massa di un atomo d'idrogeno, per esempio, è minore della somma delle masse del protone e dell'elettrone che lo compongono <sup>1</sup>

$$m_H - m_p - m_e \simeq -0.107 \frac{MeV}{c^2} \simeq -1.91 \times 10^{-31} \text{ Kg}.$$

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che  $1 \text{ eV}/c^2 = 1.782662 \times 10^{-36} \text{ Kg}$ .

Dividendo l'espressione (2.13) per la (2.12) si ottiene la seguente relazione tra l'energia, l'impulso e la velocità di una particella libera

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}. \quad (2.19)$$

Per  $v = c$ , l'impulso e l'energia della particella diventano infiniti. Ciò significa che una particella di massa  $m$ , non nulla, non può muoversi alla velocità della luce. Esistono tuttavia particelle di massa nulla, per esempio il quanto di luce o fotone, che devono muoversi alla velocità della luce per poter possedere energia ed impulso non nulli. La relazione (2.19) diventa in questo caso

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad (2.20)$$

formula valida approssimativamente anche per una particella con massa nel limite ultrarelativistico:  $\mathcal{E} \gg mc^2$ .

Anche se il concetto di forza non è più necessario, avendo il principio di minima azione sostituito la seconda legge di Newton, si può definire un quadrivettore forza  $g^i$  definito dalla

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc \frac{du^i}{ds}. \quad (2.21)$$

Le sue componenti soddisfano l'identità  $g^i u_i = 0$  e, se calcoliamo  $g^i$  per il problema del moto relativistico uniformemente accelerato risolto alla fine del primo capitolo, notiamo una profonda differenza con il vettore forza tridimensionale ordinario. Le componenti  $g^i$  sono infatti diverse in sistemi di riferimento inerziali diversi valendo per esse le formule di trasformazione di Lorentz. Ovviamente, per una particella libera la quadriforza è nulla in tutti i sistemi di riferimento.

*Problema.* Come applicazione delle equazioni di Eulero-Lagrange (2.3) si consideri il moto relativistico legato di una particella di massa  $m$  che si muove sotto l'azione di una forza centrale attrattiva  $-dU/dr \equiv -U'(r)$ .

Soluzione

Come in meccanica classica la traiettoria giace in un piano e possiamo introdurre le coordinate polari  $r$  e  $\varphi$ . La Lagrangiana relativistica diventa

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(r)$$

dove

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

è il quadrato della velocità in coordinate polari e il punto indica la derivata rispetto al tempo. Se consideriamo la variabile  $r$  troviamo dalle (2.3)

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) - \frac{mr\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + U'(r) = 0 \quad (2.22)$$



mentre l'equazione di Eulero-Lagrange per la variabile  $\varphi$  dà

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = 0. \quad (2.23)$$

Dall'equazione (2.23) si ottiene

$$m \frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = J, \quad (2.24)$$

dove  $J$  è una costante, e questa soluzione rappresenta la "legge delle aree" relativistica. Anche l'energia totale si conserva

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + U = E \quad (2.25)$$

dove  $E$  è una costante. E' ora facile ricavare  $\dot{\varphi}$  dalla (2.24), sostituire le derivate rispetto al tempo con derivate rispetto a  $\varphi$ , per esempio

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi},$$

e ottenere l'equazione

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{1}{r} + \frac{(E - U)U' r^2}{c^2 J^2} = 0$$

dove si è usata anche la (2.25). Il cambiamento di variabile  $r \rightarrow 1/u$  dà l'equazione differenziale, per il moto sotto l'azione di una forza centrale, nella forma più conveniente

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{(E - U)U'}{c^2 J^2 u^2} = 0. \quad (2.26)$$

Se  $U = -\mu/r = -\mu u$ , la forza va come l'inverso del quadrato della distanza ed è attrattiva se la costante  $\mu$  è positiva. E' il caso della forza Newtoniana fra due masse o della forza di Coulomb fra due cariche con una delle due masse, o una delle due cariche, fissa nello spazio. L'equazione (2.26) si riduce allora alla forma

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u(1 - a) - D = 0 \quad (2.27)$$

la cui soluzione è  $u = D/(1 - a) + C_1 \exp(-i\sqrt{1 - a} \varphi) + C_2 \exp(i\sqrt{1 - a} \varphi)$ , ovvero

$$u = \frac{1 + \epsilon \cos(\eta \varphi)}{\ell} \quad (2.28)$$

se scegliamo opportunamente le condizioni iniziali. Alcune costanti sono facili da calcolare:  $a = \mu^2/(c^2 J^2)$ ,  $D = \mu E/(c^2 J^2)$ ,  $\eta^2 = 1 - a$ ,  $\ell = (1 - a)/D$ , mentre trovare la costante  $\epsilon$  è più complesso perchè richiede il calcolo della componente radiale dell'impulso. La differenza fra la (2.28) e il risultato classico, cioè un'ellisse, si può capire senza calcolare  $\epsilon$ . Dalla (2.28) i punti absidali dell'orbita (perielio e

afelio nel caso del moto della terra attorno al sole) sono  $r = \ell/(1+\epsilon)$  e  $r = \ell/(1-\epsilon)$  che si presentano per

$$\eta\varphi = 2m\pi \text{ al perielio} \quad \eta\varphi = (2m+1)\pi \text{ all'afelio}$$

con  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Quindi l'angolo fra due successive linee absidali è  $\pi/\eta = \pi/(1-a)^{1/2}$ . In meccanica relativistica la traiettoria non può mai essere chiusa: al variare dell'angolo  $\varphi$  di  $2\pi$  la distanza  $r$  dal centro di forza non ritorna al valore iniziale. In luogo di ellissi abbiamo qui orbite non chiuse e un moto "a rosetta". Mentre questo risultato non spiega la precessione del perielio di Mercurio, che troverà una spiegazione soddisfacente solo nell'ambito della relatività generale, esso è perfettamente adeguato per la trattazione del moto di una carica  $e$  nel campo Coulombiano di una carica fissa  $e'$ . In questo caso  $\mu = -ee'$  in unità CGS-Gauss.

---

## 2.3 Cinematica dei decadimenti e degli urti

In questa sezione considereremo alcune applicazioni, tipiche nella teoria degli urti, delle trasformazioni relativistiche da un sistema di riferimento ad un altro. Molto spesso i dati sperimentali sono raccolti in un sistema di riferimento solidale con il laboratorio mentre la teoria preferisce il sistema di riferimento del centro di massa e il confronto fra le due predizioni richiede le formule di trasformazione fra i due sistemi inerziali.

Non affronteremo, per ora, il problema di determinare la probabilità di un dato processo. Diversi processi d'urto sono infatti caratterizzati dalle loro sezioni d'urto. La sezione d'urto differenziale  $d\sigma$  è definita come il rapporto fra il numero di particelle diffuse in un secondo nell'elemento di angolo solido  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  e il flusso delle particelle incidenti, che è il prodotto della densità per la velocità di tali particelle.

Vedremo che, anche se non discuteremo l'importante problema della dinamica dell'interazione, otterremo molte informazioni sui vari processi dalla conservazione del quadri-impulso. A grandi distanze dalla regione di interazione, le particelle possono essere considerate libere e, in una reazione, l'impulso e l'energia totali si conserveranno. Parlando qui di particelle non si richiede che siano elementari, quanto diremo è applicabile anche ad un corpo composto di molte particelle.

### 2.3.1 Decadimenti

Consideriamo il decadimento spontaneo di un corpo di massa  $M$  in due parti, o frammenti, di massa  $m_1$  e  $m_2$ . La conservazione dell'energia, nel

sistema di riferimento in cui la massa  $M$  che decade è a riposo, dà <sup>2</sup>

$$Mc^2 = \mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20} \quad (2.29)$$

dove  $\mathcal{E}_{10}$  e  $\mathcal{E}_{20}$  sono le energie dei due frammenti e l'indice 0 indicherà nel seguito il sistema di riferimento in cui  $M$  è in quiete. Poichè  $\mathcal{E}_{10} > m_1 c^2$  e  $\mathcal{E}_{20} > m_2 c^2$ , la relazione (2.29) può sussistere solo se  $M > m_1 + m_2$ . Se  $M < m_1 + m_2$ , il corpo di massa  $M$  non può decadere spontaneamente, si dice allora che è stabile e, perchè possa decadere, dovremmo fornirgli un'energia pari almeno alla sua *energia di legame* eguale a  $(m_1 + m_2 - M)c^2$ .

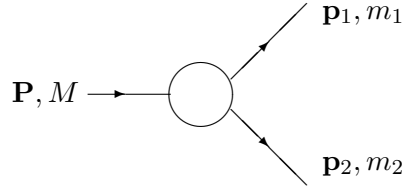


Figura 2.1: *Decadimento in due corpi.  $\mathbf{P} = 0$  nel sistema del centro di massa.*

La conservazione del quadri-impulso, con la notazione di figura (2.1), è

$$P^i = p_1^i + p_2^i \quad (2.30)$$

e, nel sistema di quiete di  $M$  con  $\mathbf{P} = 0$ , si ha  $P^i = (Mc, \mathbf{0})$ ,  $p_1^i = (\mathcal{E}_{10}/c, \mathbf{p}_{10})$  e  $p_2^i = (\mathcal{E}_{20}/c, \mathbf{p}_{20})$ . Dalla (2.30) discende, oltre alla (2.29), la conservazione dell'impulso:  $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0$ . Avremo quindi anche  $\mathbf{p}_{10}^2 = \mathbf{p}_{20}^2$  cioè  $\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4 = \mathcal{E}_{20}^2 - m_2^2 c^4$ . Conviene riscrivere quest'ultima relazione come

$$(\mathcal{E}_{10} - \mathcal{E}_{20})(\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20}) = (m_1^2 - m_2^2)c^4 \quad (2.31)$$

e la (2.31) insieme alla (2.29) danno il sistema

$$\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20} = Mc^2, \quad \mathcal{E}_{10} - \mathcal{E}_{20} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} c^2$$

con soluzione

$$\mathcal{E}_{10} = c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad \mathcal{E}_{20} = c^2 \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \quad (2.32)$$

<sup>2</sup>L'introduzione delle unità di misura in cui  $c = 1$  semplifica di molto le formule. Nella cinematica degli urti le espressioni che si ottengono possono essere molto lunghe e complesse, porre eguale ad uno la velocità della luce le rende più leggibili e l'analisi dimensionale permette facilmente di ritornare alle unità di misura che abbiamo usato finora. Non porremo  $c = 1$  nel seguito, ma si invita il lettore a fare un confronto fra le due unità di misura per le formule più importanti. Qualche esempio apparirà negli esercizi.

che determina univocamente l'energia dei frammenti.

La condizione che abbiamo trovato affinché un decadimento sia energeticamente possibile può essere estesa anche al caso dell'urto inelastico di due particelle in cui le particelle finali sono diverse dalle iniziali o vengono create ulteriori particelle. Consideriamo un sistema di riferimento in cui l'impulso totale delle particelle che urtano è nullo, lo chiameremo sistema del centro di massa o sistema c.m.. Il calcolo dell'energia totale, delle particelle che collidono, nel sistema c.m. dà un criterio che permette di valutare la possibilità di realizzare un processo inelastico perchè è equivalente alla conoscenza di  $Mc^2$  in un decadimento. Un processo potrà aver luogo solo se la somma delle masse delle particelle prodotte, moltiplicata per  $c^2$ , non supera l'energia totale delle particelle iniziali nel sistema c.m.. La somma delle masse delle particelle prodotte determina quella che si chiama *energia di soglia*, valore minimo dell'energia nel c.m. affinché il processo possa aver luogo.

Mostriamo ora che non è sempre necessario usare le trasformazioni di Lorentz per determinare l'energia totale nel sistema c.m., trovare una opportuna grandezza invariante risolve, a volte, in modo semplice il problema. Supponiamo che una particella di massa  $m_1$  ed energia  $\mathcal{E}_1$  urti una particella a riposo di massa  $m_2$ . Chiameremo sistema del laboratorio, o sistema lab., il sistema di riferimento in cui ciò avviene. L'energia totale delle due particelle è

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 + m_2 c^2$$

e l'impulso totale è

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1.$$

La velocità delle due particelle, considerate come un unico sistema, è data dalla

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{p}_1 c^2}{\mathcal{E}_1 + m_2 c^2}$$

che rappresenta la velocità del sistema c.m. rispetto al laboratorio. Evidentemente una trasformazione di Lorentz permetterebbe di passare dal sistema lab. al sistema c.m.. Però, per il calcolo dell'energia totale nel c.m., risulta molto più semplice considerare l'invariante  $(p_1^i + p_2^i)(p_{1i} + p_{2i})$  che ha lo stesso valore nei due sistemi di riferimento e, nel sistema c.m., rappresenta proprio il quadrato dell'energia totale delle due particelle divisa per  $c^2$ . Nel laboratorio  $p_1^i + p_2^i = (\mathcal{E}_1/c + m_2 c, \mathbf{p}_1)$  e, se indichiamo con  $Mc^2$  l'energia totale nel centro di massa, si avrà

$$M^2 c^4 = c^2 \left[ \left( \frac{\mathcal{E}_1}{c} + m_2 c \right)^2 - \mathbf{p}_1^2 \right] = (\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 - (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4)$$

da cui

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \frac{\mathcal{E}_1}{c^2}. \quad (2.33)$$

---

*Problema 1. Determinare il modulo dell'impulso delle particelle prodotte in un decadimento nel sistema di riferimento dove  $M$  è in quiete.*

Soluzione

Poichè  $\mathbf{p}_{10}^2 = \mathbf{p}_{20}^2$ , è sufficiente calcolare  $p_{10} = |\mathbf{p}_{10}|$

$$p_{10} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{10}^2}{c^2} - m_1^2 c^2}$$

sapendo che

$$\mathcal{E}_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2.$$

Si trova

$$\begin{aligned} p_{10} = p_{20} &= \frac{c}{2M} [(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 M^2]^{1/2} = \\ &= \frac{c}{2M} ([M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2])^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

*Problema 2. Determinare la velocità relativa di due particelle con quadri-impulsi noti. Per velocità relativa si intende la velocità di una delle due particelle nel sistema di quiete dell'altra.*

Soluzione

Siano  $p_1^i$  e  $p_2^i$  i quadri-impulsi, noti, di due particelle in un sistema di riferimento arbitrario e consideriamo il sistema in cui la particella 1 è in quiete. L'invariante  $p_{1i}p_2^i$  avrà un valore noto nel sistema di riferimento arbitrario mentre, nel sistema di riferimento in cui la particella 1 è in quiete con  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,

$$p_{1i}p_2^i = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = m_1 c^2 \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}}$$

Risolvendo rispetto a  $v_{rel}$  si ha

$$v_{rel} = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_1 m_2 c^4}{p_{1i}p_2^i} \right)^2} \quad (2.35)$$

espressione che è simmetrica rispetto allo scambio delle due particelle.

*Problema 3. Una particella di massa  $M$ , che si muove con impulso  $\mathbf{P}$ , decade "in volo" in due particelle. Trovare la relazione fra gli angoli di deflessione di queste particelle e il loro impulso. L'angolo di deflessione è l'angolo tra l'impulso,  $\mathbf{p}_1$  oppure  $\mathbf{p}_2$ , delle particelle prodotte e  $\mathbf{P}$ .*

Soluzione

Consideriamo una delle due particelle, per esempio la particella 1, e riscriviamo la conservazione del quadri-impulso (2.30) nella forma

$$p_2^i = P^i - p_1^i$$

con  $p_1^i = (\mathcal{E}_1/c, \mathbf{p}_1)$  e  $P^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{P})$ . Quadrando ambo i membri di questa equazione si trova

$$m_2^2 c^2 = M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2P_i p_1^i$$

che, ricordando la (2.32), possiamo scrivere nella forma ( $P = |\mathbf{P}|$ ,  $p_1 = |\mathbf{p}_1|$ )

$$M\mathcal{E}_{10} + Pp_1 \cos \theta = \frac{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}{c^2}$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{P}$ . Scrivendo  $\mathcal{E}_1 = c\sqrt{p_1^2 + m_1^2 c^2}$  e quadrando questa espressione si ottiene una equazione di secondo grado in  $p_1$  le cui soluzioni sono

$$p_1 = \frac{1}{\mathcal{E}^2/c^2 - P^2 \cos^2 \theta} (M\mathcal{E}_{10}P \cos \theta \pm \pm [M^2 \mathcal{E}_{10}^2 P^2 \cos^2 \theta + (M^2 \mathcal{E}_{10}^2 - \mathcal{E}^2 m_1^2)(\mathcal{E}^2/c^2 - P^2 \cos^2 \theta)]^{1/2}) \quad (2.36)$$

Se  $(M^2 \mathcal{E}_{10}^2 - \mathcal{E}^2 m_1^2) < 0$  si avranno due radici possibili, mentre se  $(M^2 \mathcal{E}_{10}^2 - \mathcal{E}^2 m_1^2) > 0$  la (2.36) avrà una sola radice positiva e quindi fisicamente accettabile. Se indichiamo con  $V$  la velocità di  $M$ , le due possibilità corrispondono a  $V > v_{10}$  e a  $V < v_{10}$ , rispettivamente. La dimostrazione è facile, basta riconoscere che la condizione  $(M^2 \mathcal{E}_{10}^2 - \mathcal{E}^2 m_1^2) < 0$  equivale a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_{10}^2/c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

e che la disuguaglianza si inverte nel caso di una sola radice positiva.

L'annullarsi del discriminante nella (2.36) permette di determinare l'angolo per cui le due radici positive coincidono, lo chiameremo  $\theta_{\max}$ . Si trova

$$\cos^2 \theta_{\max} = \frac{m_1^2 \mathcal{E}^2 - M^2 \mathcal{E}_{10}^2}{m_1^2 p^2 c^2},$$

ovvero

$$\sin \theta_{\max} = \frac{Mp_{10}}{m_1 P}$$

che determina l'angolo massimo che l'impulso di uno dei frammenti può formare con l'impulso della particella che decade, se  $V > v_{10}$ .

*Problema 4. Trovare la distribuzione in energia delle particelle di decadimento nel sistema del laboratorio se, nel sistema c.m., il decadimento è isotropo. Poniamo  $c = 1$  in questo problema.*

*Soluzione*

Nel sistema c.m. le particelle prodotte sono distribuite uniformemente in tutte le direzioni e, se consideriamo un gran numero di decadimenti, il numero di particelle prodotte nell'angolo solido  $do_0 = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$  è dato dal numero di decadimenti moltiplicato per

$$dN = \frac{1}{4\pi} do_0 = \frac{1}{2} |d \cos \theta_0|. \quad (2.37)$$

L'energia nel sistema lab. si ottiene dalla trasformazione di Lorentz e, se  $V$  è la velocità relativa del c.m. rispetto al laboratorio,

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0 + p_0 V \cos \theta_0}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (2.38)$$

che è compresa nell'intervallo di valori

$$\frac{\mathcal{E}_0 - p_0 V}{\sqrt{1 - V^2}} \leq \mathcal{E} \leq \frac{\mathcal{E}_0 + p_0 V}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Dalla (2.38) troviamo

$$|d \cos \theta_0| = \frac{\sqrt{1 - V^2}}{p_0 V} d\mathcal{E}$$

e la distribuzione in energia

$$dN = \frac{1}{2V p_0} \sqrt{1 - V^2} d\mathcal{E}$$

che rappresenta, per ciascun tipo di particelle prodotte, il numero di frammenti con energia compresa fra  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$  in un decadimento.

*Problema 5. Trovare, nel sistema lab., la distribuzione angolare per particelle di decadimento di massa nulla. Si supponga che il decadimento sia isotropo nel c.m. e si ponga  $c = 1$ .*

Soluzione

Nel c.m. vale la relazione (2.37) e la trasformazione di Lorentz per  $\cos \theta_0$ , nel caso di una particella di massa nulla (ricordiamo che il c.m. si muove con velocità  $V$  rispetto al laboratorio) si può ottenere dalla (1.35) ponendo  $v_x = c \cos \theta$  e  $v'_x = c \cos \theta_0$

$$\cos \theta_0 = \frac{\cos \theta - V}{1 - V \cos \theta}.$$

Avremo allora

$$d \cos \theta_0 = \frac{1 - V \cos \theta + V(\cos \theta - V)}{(1 - V \cos \theta)^2} d \cos \theta = \frac{1 - V^2}{(1 - V \cos \theta)^2} d \cos \theta,$$

ma  $2\pi |d \cos \theta| = do$ , e quindi

$$dN = \frac{(1 - V^2) do}{4\pi (1 - V \cos \theta)^2}.$$

*Problema 6. Determinare l'energia massima che può competere a una delle particelle di decadimento quando una particella in quiete di massa  $M$  decade in tre particelle di massa  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ . Si ponga  $c = 1$ .*

Soluzione

Vogliamo che  $m_1$ , per esempio, possieda l'energia massima possibile. Dalla conservazione del quadri-impulso  $P^i = p_1^i + p_2^i + p_3^i$  abbiamo che  $p_2^i + p_3^i = P^i - p_1^i$ . Se costruiamo l'invariante  $m_{23}^2 = (p_2^i + p_3^i)(p_{2i} + p_{3i})$ , nel sistema di riposo di  $M$  esso vale

$$m_{23}^2 = (P^i - p_1^i)(P_i - p_{1i}) = M^2 + m_1^2 - 2M\mathcal{E}_1$$

e l'energia  $\mathcal{E}_1$  di  $m_1$  è massima quando  $m_{23}^2$  è minimo. Il minimo di  $m_{23}^2$  si ha, nel centro di massa di  $m_2$  e  $m_3$ , per  $(m_{23}^2)_{\min} = (m_2 + m_3)^2$ , quadrato dell'energia di soglia per la produzione delle due particelle. Nel sistema di quiete di  $M$  avremo invece, dalla definizione di quadri-impulso  $p^i = mu^i$ ,

$$m_{23}^2 = m_2^2 + m_3^2 + 2p_2^i p_{3i} = m_2^2 + m_3^2 + 2m_2 m_3 u_2^i u_{3i}$$

e, se deve essere eguale al valore minimo  $(m_2 + m_3)^2$ , dovrà essere  $u_2^i u_{3i} = 1$ , cioè  $u_2^i = u_3^i$ . Quindi le particelle  $m_2$  e  $m_3$  devono avere lo stesso vettore velocità e, muovendosi insieme, ci si riconduce al problema del decadimento in due corpi:  $m_1$  e  $(m_2 + m_3)$ . La soluzione è allora data dalla (2.32)

$$\mathcal{E}_{1\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M}. \quad (2.39)$$

### 2.3.2 Urti tra particelle

In generale, l'urto fra due particelle che produce due particelle nello stato finale, raffigurato in figura (2.2), è caratterizzato da due sole grandezze. Il motivo è che le 16 componenti diverse dei quadri-impulsi, quattro per ogni particella, devono soddisfare alcune condizioni:

1. quattro condizioni, dette di "mass shell", derivano dal fatto che il quadrato del quadri-impulso è determinato dalla massa della particella. Quindi  $p^i p_i = m^2 c^2$  per ognuna delle quattro particelle.
2. La conservazione del quadri-impulso

$$p_1^i + p_2^i = p_3^i + p_4^i \quad (2.40)$$

fornisce altre quattro condizioni.

3. L'invarianza per traslazioni e rotazioni implica che altre sei coordinate siano irrilevanti. Queste sono le tre componenti dell'impulso del centro di massa, i due angoli che determinano l'orientazione del piano in cui avviene il processo e la scelta degli assi in questo piano.

Come abbiamo visto nel caso dei decadimenti, l'introduzione di opportuni invarianti permette in molti casi di eseguire in modo semplice le trasformazioni fra il sistema del laboratorio (lab.) e del centro di massa



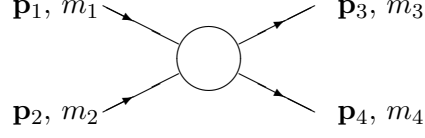


Figura 2.2: Definizione delle variabili per una reazione a due corpi.

(c.m.). Scegliamo, per le due grandezze che caratterizzano l'urto, le variabili di Mandelstam, invarianti per trasformazioni di Lorentz, definite dalle relazioni <sup>3</sup>

$$s = (p_1^i + p_2^i)(p_{1i} + p_{2i}) = (p_3^i + p_4^i)(p_{3i} + p_{4i}), \quad (2.41)$$

e

$$t = (p_1^i - p_3^i)(p_{1i} - p_{3i}) = (p_4^i - p_2^i)(p_{4i} - p_{2i}). \quad (2.42)$$

La terza variabile di Mandelstam  $u = (p_1^i - p_4^i)(p_{1i} - p_{4i})$  può essere espressa tramite  $s$  e  $t$ . E' facile convincersi infatti che  $s+t+u = c^2(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2)$ .

Ci limiteremo nel seguito, al caso dell'urto elastico di due particelle in cui le particelle non cambiano la loro natura nell'urto e  $m_1 = m_3$  e  $m_2 = m_4$ . Il sistema c.m., indicheremo ancora con l'apice 0 le energie e gli impulsi in questo sistema, è definito dall'annullarsi dell'impulso totale

$$\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}_{30} + \mathbf{p}_{40} = 0,$$

da cui discende  $\mathbf{p}_{10}^2 = \mathbf{p}_{20}^2$  e  $\mathbf{p}_{30}^2 = \mathbf{p}_{40}^2$ . La conservazione dell'energia

$$\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20} = \mathcal{E}_{30} + \mathcal{E}_{40}$$

implica che

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_{10}^2 c^2 + m_1^2 c^4)^{1/2} + (\mathbf{p}_{10}^2 c^2 + m_2^2 c^4)^{1/2} = \\ (\mathbf{p}_{30}^2 c^2 + m_1^2 c^4)^{1/2} + (\mathbf{p}_{30}^2 c^2 + m_2^2 c^4)^{1/2}, \end{aligned}$$

cioè  $\mathbf{p}_{10}^2 = \mathbf{p}_{20}^2 = \mathbf{p}_{30}^2 = \mathbf{p}_{40}^2$ . Quindi  $\mathcal{E}_{10} = \mathcal{E}_{30}$  e  $\mathcal{E}_{20} = \mathcal{E}_{40}$  come in meccanica classica.

Nel sistema c.m. l'invariante  $s$  è, a meno del fattore  $c^2$ , il quadrato dell'energia totale

$$s = \left( \frac{\mathcal{E}_{10}}{c} + \frac{\mathcal{E}_{20}}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20})^2 = \frac{1}{c^2} (\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20})^2 \quad (2.43)$$

<sup>3</sup>La notazione usuale è  $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$ , una forma semplificata delle formule che scriveremo. La notazione compatta potrà essere usata dopo aver capito e adoperato più volte le formule complete.

mentre l'invariante  $t$  è il quadrato della variazione dell'impulso fra le particelle 1 e 3 ("momentum transfer" in inglese)

$$t = \left( \frac{\mathcal{E}_{10}}{c} - \frac{\mathcal{E}_{30}}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}_{10} - \mathbf{p}_{30})^2 = -(\mathbf{p}_{10} - \mathbf{p}_{30})^2. \quad (2.44)$$

Notiamo che  $t$  è legato all'angolo di diffusione nel centro di massa

$$t = -2\mathbf{p}_{10}^2 + 2\mathbf{p}_{10}^2 \cos \theta_0 = -2\mathbf{p}_{10}^2 (1 - \cos \theta_0) \quad (2.45)$$

mentre  $s$ , equivalente alla grandezza  $(Mc)^2$  in un decadimento, determina per le (2.32) le energie nel c.m.

$$\mathcal{E}_{10} = c \frac{s + c^2(m_1^2 - m_2^2)}{2\sqrt{s}}, \quad \mathcal{E}_{20} = c \frac{s + c^2(m_2^2 - m_1^2)}{2\sqrt{s}}. \quad (2.46)$$

Ci convinciamo così che le due variabili  $s$  e  $t$  determinano effettivamente tutte le grandezze in un urto.

Il sistema del laboratorio è caratterizzato da  $\mathbf{p}_{2lab} = 0$ , cioè  $p_2^i = (m_2 c, \mathbf{0})$ . Conveniamo di indicare con l'indice  $lab$  le energie e gli impulsi in questo sistema di riferimento. La conservazione dell'energia diventa

$$\mathcal{E}_{1lab} + m_2 c^2 = \mathcal{E}_{3lab} + \mathcal{E}_{4lab} \quad (2.47)$$

e, dalla (2.41),

$$s = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_{1lab}. \quad (2.48)$$

L'invariante  $t$  determina  $\mathcal{E}_{4lab}$ , dalla seconda delle eguaglianze (2.42),

$$t = 2m_2^2 c^2 - 2m_2 \mathcal{E}_{4lab} \quad (2.49)$$

(ricordiamo che  $m_2 = m_4$  nell'urto elastico) e, dalla (2.47), anche  $\mathcal{E}_{3lab}$  risulta funzione solo di  $s$  e  $t$  e delle masse. Anche l'angolo di diffusione nel laboratorio può essere espresso tramite  $t$

$$t = 2m_1^2 c^2 - 2\mathcal{E}_{1lab} \mathcal{E}_{3lab} / c^2 + 2p_{1lab} p_{3lab} \cos \theta_{lab}. \quad (2.50)$$

L'invarianza di  $s$  e  $t$ , cioè il fatto che  $s$  e  $t$  abbiano gli stessi valori nel sistema c.m. o lab (o in qualsiasi altro riferimento) ci permette di trovare il legame fra gli angoli di diffusione nei due sistemi di riferimento e fra le energie nel c.m. e nel lab. Per esempio, eguagliando la (2.45) e la (2.50) si trova la relazione fra  $\cos \theta_0$  e  $\cos \theta_{lab}$ . Analogamente, sia  $\mathcal{E}_{10}$  che  $\mathcal{E}_{1lab}$  possono essere espresse tramite  $s$  usando le equazioni (2.46) e (2.48). Ciò permette di trovare una semplice relazione fra gli impulsi nei due sistemi di riferimento

$$p_{10} = c \frac{p_{1lab} m_2}{\sqrt{s}} \quad (2.51)$$

Così, se un fascio di mesoni  $\pi^+$  incide su un bersaglio di protoni fisso nel laboratorio, l'energia totale nel centro di massa è

$$\mathcal{E}_{c.m.} = c\sqrt{s} = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + m_p^2 c^4 + 2m_p c^2 \mathcal{E}_{\pi lab}}.$$

L'energia a riposo <sup>4</sup> del mesone  $\pi$  carico è  $m_\pi c^2 \simeq 0.14 \text{ GeV}$  e, per il protone,  $m_p c^2 \simeq 0.938 \text{ GeV}$ . Se il fascio di pioni ha un impulso nel laboratorio pari a  $p_{\pi lab} = 0.7 \text{ GeV}/c$ , e un'energia  $\mathcal{E}_{\pi lab} = \sqrt{p_{\pi lab}^2 c^2 + m_\pi^2 c^4} \simeq 0.71 \text{ GeV}$ , l'energia nel centro di massa della reazione è  $c\sqrt{s} \simeq 1.07 \text{ GeV}$  e l'impulso di entrambe le particelle nel c.m. è  $p_{\pi 0} = p_{p 0} \simeq 0.61 \text{ GeV}/c$ .

*Problema.* Sia  $\gamma$  l'angolo, nel laboratorio, compreso fra gli impulsi delle particelle finali in un urto elastico di due particelle di egual massa,  $m_1 = m_2 = m$ . Determinare il valore minimo di  $\gamma$ ,  $\gamma_{min}$ . Si ponga  $c = 1$  nella soluzione di questo problema.

Soluzione

Usando l'equazione (2.48) e la definizione di  $s$ , come quadrato della somma dei quadri-impulsi delle particelle finali, si trova

$$s = 2m(m + \mathcal{E}_1) = 2m^2 + 2\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4 - 2p_3p_4 \cos \gamma$$

da cui

$$\cos \gamma = \frac{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4 - m\mathcal{E}_1}{p_3p_4}. \quad (2.52)$$

Per trovare il massimo di  $\cos \gamma$ , deriviamo la (2.52) rispetto ad  $\mathcal{E}_3$  notando che, dalla conservazione dell'energia  $\mathcal{E}_1 + m = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$ , si ha  $d\mathcal{E}_4/d\mathcal{E}_3 = -1$  (l'energia  $\mathcal{E}_1$  si intende fissata), mentre da  $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2$  si ha in generale  $\mathcal{E}d\mathcal{E} = p dp$  e  $dp/d\mathcal{E} = \mathcal{E}/p$ . Quindi  $dp_3/d\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_3/p_3$  e

$$\frac{dp_4}{d\mathcal{E}_3} = \frac{dp_4}{d\mathcal{E}_4} \cdot \frac{d\mathcal{E}_4}{d\mathcal{E}_3} = -\frac{\mathcal{E}_4}{p_4}.$$

Annullando il numeratore della derivata, moltiplicato per il prodotto degli impulsi finali ( $p_3p_4$ ), si trova

$$(\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_3)p_3^2p_4^2 - (\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4 - m\mathcal{E}_1)(\mathcal{E}_3p_4^2 - \mathcal{E}_4p_3^2) = 0 \quad (2.53)$$

ma  $\mathcal{E}_3p_4^2 - \mathcal{E}_4p_3^2 = (\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_3)(\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4 + m^2)$  e

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_4$$

è una soluzione che implica  $p_3 = p_4$  essendo tutte le masse eguali. Le altre soluzioni,  $p_3 = 0$  oppure  $p_4 = 0$ , non sono accettabili. Sostituendo nella (2.52) la soluzione

<sup>4</sup>Nelle tavole delle proprietà delle particelle, dove si pone generalmente  $c = 1$ , questa viene indicata come la massa della particella e espressa in  $MeV$  o  $GeV$ , unità appropriata all'energia.

$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_4 = (\mathcal{E}_1 + m)/2$  (dalla conservazione dell'energia) si trova la risposta al problema di trovare il massimo di  $\cos \gamma$  e quindi l'angolo minimo  $\gamma_{min}$

$$\cos \gamma_{min} = \frac{(\mathcal{E}_1 + m)^2 - 4m\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1 + m)^2 - 4m^2} = \frac{\mathcal{E}_1 - m}{\mathcal{E}_1 + 3m}.$$

## 2.4 Particelle in meccanica relativistica

Nella meccanica classica elementare, come si impara al primo anno di un corso di laurea dedicato allo studio dei fenomeni naturali, ai corpi naturali si sostituiscono entità con caratteristiche geometriche ben definite attraverso un processo di astrazione e induzione. Questo è il caso del punto materiale e del corpo rigido. In relatività il corpo rigido non può esistere.

Ricordiamo che, in meccanica classica, un corpo rigido è un insieme di punti materiali, in numero finito o anche infinito, le cui mutue distanze sono invariabili. Se un corpo rigido inizia a muoversi per una causa esterna agente su uno dei suoi punti, tutti i suoi punti si metteranno in moto contemporaneamente a quello su cui agisce la forza esterna. Ciò è incompatibile con il principio di relatività perchè implicherebbe una interazione che si propaga istantaneamente.

Quando si parlava di particelle o corpi nei paragrafi precedenti, si intendeva corpi deformabili e ciò non cambia in alcun modo le conclusioni che abbiamo tratto. Il problema si pone nella definizione di particella "elementare", cioè di una particella il cui stato meccanico può essere descritto completamente da tre coordinate e da tre componenti della velocità. E' evidente che, se una particella elementare avesse dimensioni finite, essa non potrebbe deformarsi perchè il concetto di deformazione è legato alla possibilità di movimenti indipendenti delle diverse parti di un corpo. Ciò sarebbe in contrasto con il significato di "elementare" e, non potendo essere un corpo rigido, una particella elementare deve essere considerata puntiforme. L'interazione di una particella elementare con un campo di forza deve essere locale e quindi aver luogo solo nel punto in cui c'è la particella. Anche in una teoria quantistica relativistica non è facile liberarsi di questa condizione che è imposta dalla teoria della relatività.

Vogliamo ora definire una funzione  $\mu$ , che rappresenta la densità di massa di un insieme di particelle elementari, in modo tale che

$$\int_{\mathcal{V}} \mu dV \quad (2.54)$$

rappresenti la somma delle masse delle particelle contenute nel volume  $\mathcal{V}$ . In particolare, se  $\mathcal{V}$  è tutto lo spazio tridimensionale (o un iperpiano nello

spazio-tempo perpendicolare all'asse  $x^0$ ), l'integrale (2.54) è la massa totale del sistema di particelle. Poichè le particelle sono in realtà puntiformi, la densità  $\mu$  è nulla ovunque tranne che nei punti dove sono localizzate le particelle. Quindi  $\mu$  non è una funzione continua ma una funzione generalizzata, o *distribuzione*, che richiede un pò di attenzione nella sua definizione.

Supponiamo che

$$x_a^i = x_a^i(s) \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.55)$$

sia l'equazione parametrica della linea d'universo descritta dalla particella  $a$ . Il parametro  $s$ , pari al prodotto del tempo proprio per la velocità della luce, definisce la distanza percorsa dalla particella sulla sua traiettoria a partire da un punto dato. Se poniamo  $i = 0$  nella (2.55), dalla  $x_a^0 = x_a^0(s)$  otteniamo il tempo proprio

$$\frac{s}{c} = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

e, se sostituiamo  $s$  in funzione di  $t$  o di  $x^0 = ct$  nelle equazioni con  $i = 1, 2, 3$ , otteniamo la traiettoria

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(t).$$

Resta ora da imporre che  $\mu$ , come funzione di  $\mathbf{r}$ , sia diversa da zero solamente nel punto  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a(t)$ . A questo scopo introduciamo la distribuzione  $\delta$  di Dirac definita dalla equazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (2.56)$$

dove  $f(x)$  è una funzione continua. Evidentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - b) dx = f(b)$$

e  $\delta(-x) = \delta(x)$ ,  $\delta(bx) = \delta(x)/|b|$ . L'ultima eguaglianza è un caso particolare della relazione più generale

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{1}{|g'(b_i)|} \delta(x - b_i) \quad (2.57)$$

dove  $g(x)$  è una funzione ad un solo valore e  $b_i$  sono le radici semplici dell'equazione  $g(x) = 0$ . Possiamo definire anche una distribuzione  $\delta$  tridimensionale, per esempio  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ , tale che integrandola su tutto lo spazio con una funzione  $f(\mathbf{r})$  dia

$$\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) dV = f(\mathbf{0}).$$

La distribuzione  $\delta$  può essere rappresentata in vari modi come limite o come integrale, essa gioca infatti un ruolo importante nella trasformata di Fourier. Consideriamo, per esempio, la funzione discontinua  $\theta(x)$ , funzione gradino o funzione di Heviside molto usata in elettrotecnica.  $\theta(x)$  è eguale a zero per  $x < 0$  ed è eguale a  $+1$  per  $x > 0$  (non è necessario definirla per  $x = 0$  che è un insieme di misura nulla). La derivata della funzione gradino,  $\theta'(x)$ , integrata con una funzione continua ha lo stesso effetto della  $\delta$  di Dirac:  $\theta'(x) = \delta(x)$ . Un'altro esempio importante è fornito, in una dimensione dalla rappresentazione

$$\delta(x-b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{i\alpha(x-b)}. \quad (2.58)$$

Possiamo dunque esprimere la funzione generalizzata  $\mu$  nella forma

$$\mu = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (2.59)$$

dove la somma è estesa a tutte le particelle e  $\mathbf{r}_a$  è il raggio vettore della particella di massa  $m_a$ . L'integrale (2.54) fornirà allora la somma delle masse delle particelle contenute nel volume  $\mathcal{V}$ . Mentre la massa è un invariante di Lorentz  $\mu$  non lo è. Scrivendo  $dm = \mu dV$  vediamo subito perchè. Se moltiplichiamo questa eguaglianza per  $dx^i$ , otteniamo

$$dm dx^i = \mu dV dx^i = \mu \frac{dx^i}{dt} dV dt$$

e  $dm dx^i$  è un quadrivettore, perchè  $dm$  è uno scalare, mentre  $dV dt = d\Omega/c$  è un invariante di Lorentz, perchè elemento di volume dello spazio-tempo. Quindi

$$\mu \frac{dx^i}{dt} = (c\mu, \mu \mathbf{v}) \quad (2.60)$$

è un quadrivettore e la densità  $\mu$  trasforma come la componente temporale di un quadrivettore:

$$c\mu = \gamma(c\mu' + \beta\mu'v'_x).$$

La densità di quadri-impulso,  $\mu cu^i$ , non trasforma quindi come un quadri-vettore. Vedremo infatti che essa fa parte di un tensore, il tensore energia-impulso.

Se le particelle possono essere considerate come non interagenti, la massa totale si conserva ed è interessante vedere quale condizione deve essere imposta al quadrivettore (2.60). La massa totale è data dall'integrale  $\int \mu dV$  esteso a tutto lo spazio tridimensionale e, essendo un vero scalare, deve potersi esprimere come il prodotto scalare di due quadrivettori. Infatti

$$\int \mu dV = \frac{1}{c} \int \mu \frac{dx^0}{dt} dV = \frac{1}{c} \int \mu \frac{dx^i}{dt} dS_i, \quad (2.61)$$

dove l'integrazione va estesa a tutto l'iperpiano perpendicolare all'asse  $x^0$ , e l'integrale (2.61) è lo stesso qualunque sia l'iperpiano di integrazione  $x^0 = \text{costante}$ . La differenza fra due integrali (2.61), presi su due iperpiani a tempi diversi, deve quindi essere nulla e possiamo esprimere questa differenza come un integrale esteso ad una ipersuperficie chiusa che comprende i due iperpiani considerati e l'ipersuperficie all'infinito spaziale dove, per ipotesi, non ci sono particelle. La ipersuperficie di integrazione è rappresentata in figura (2.3) e

$$\frac{1}{c} \oint \mu \frac{dx^i}{dt} dS_i = 0.$$

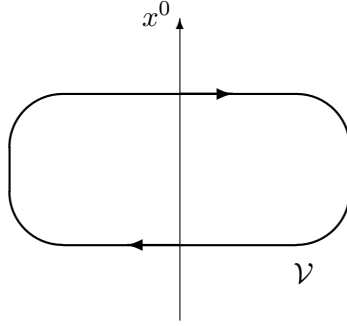


Figura 2.3: *Ipersuperficie di integrazione.*  $\mathcal{V}$  è il volume dello spazio tridimensionale.

Per il teorema di Gauss (1.52), si può trasformare questo integrale in un integrale esteso al volume quadridimensionale limitato dalla ipersuperficie chiusa

$$\frac{1}{c} \oint \mu \frac{dx^i}{dt} dS_i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \mu \frac{dx^i}{dt} \right) d\Omega = 0.$$

La conservazione della massa implica dunque che

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \mu \frac{dx^i}{dt} \right) = 0 \quad (2.62)$$

che, per la (2.60), possiamo riscrivere nella forma

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0. \quad (2.63)$$

L'equazione (2.63) è "l'equazione di conservazione della massa", o equazione di continuità, una delle equazioni fondamentali della meccanica dei fluidi. In relatività essa vale solo in assenza di interazione fra le particelle.

E' importante capire a fondo i concetti esposti in questa sezione, nel seguito avremo spesso a che fare con la densità di carica per cariche puntiformi e le equazioni (2.59), (2.60), (2.62) e (2.63) potranno essere riscritte scambiando solamente la massa con la carica e la densità di massa con la densità di carica. Ritroveremo la densità di massa nella definizione del tensore energia-impulso per un sistema di particelle.



## Capitolo 3

# Carica in un campo elettromagnetico

In meccanica relativistica l'interazione fra particelle deve essere descritta mediante il concetto di *campo di forza*. Invece di dire che una particella agisce su un'altra, si deve immaginare che essa crei attorno a sé un campo e ogni altra particella, che si trova in questo campo, sarà soggetta all'azione di una forza. In meccanica classica, l'introduzione del concetto di campo è facoltativa e non cambia le leggi di Newton che continuano a descrivere il fenomeno fisico mediante l'interazione istantanea tra particelle. Nella teoria della relatività, invece, la velocità di propagazione delle interazioni è finita e il campo acquista una realtà fisica intrinseca. Non possiamo più parlare di una interazione diretta fra particelle separate da una certa distanza, un'interazione può aver luogo ad ogni istante in un solo punto dello spazio. L'interazione tra due particelle rende quindi necessaria l'introduzione di un campo che, come nel caso di un'onda elettromagnetica, possiede energia e quantità di moto. Il campo di forza esiste perchè ha un quadri-impulso non nullo e di ciò dobbiamo tener conto quando scriviamo la legge di conservazione del quadri-impulso. Nei prossimi quattro capitoli considereremo il campo elettromagnetico.

### 3.1 Quadripotenziale e azione per una carica in un campo elettromagnetico

E' ben noto che il campo elettrostatico nel vuoto è un campo conservativo e quindi ammette un potenziale,  $\varphi$  che chiameremo *potenziale scalare*, legato al campo elettrico dalla relazione

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (3.1)$$

e funzione, in questo caso, delle sole coordinate. A sua volta, l'equazione di Poisson determina  $\varphi$ , se conosciamo la distribuzione delle cariche, a meno

di una costante arbitraria che viene scelta solitamente in modo tale che  $\varphi$  sia nullo all'infinito.

Meno noto è il *potenziale vettore*  $\mathbf{A}$ , poco usato nei corsi elementari di elettromagnetismo. Dalla legge di Gauss per il campo magnetico  $\mathbf{B}$  (in alcuni testi viene chiamato induzione magnetica, riservando il nome campo magnetico ad  $\mathbf{H}$ ),  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , sappiamo che  $\mathbf{B}$  è un campo solenoidale e, se introduciamo un nuovo vettore  $\mathbf{A}$ , tale che in ogni punto dello spazio si abbia

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.2)$$

la legge di Gauss è automaticamente soddisfatta. Se ad  $\mathbf{A}$  aggiungiamo il gradiente di una funzione scalare arbitraria, il vettore  $\mathbf{B}$  non cambia. Per un campo magnetico uniforme, definito dalla condizione che l'intensità del campo sia la stessa in tutti i punti dello spazio, possiamo esprimere  $\mathbf{A}$  mediante  $\mathbf{B}$  nella forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}.$$

Infatti, se  $\mathbf{B}$  non dipende dalle coordinate (si veda in Appendice le proprietà dell'operatore  $\nabla$ )

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{B}$$

perchè  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ . In generale, il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una linea chiusa è sempre eguale alla circuitazione del potenziale vettore  $\mathbf{A}$  lungo la linea stessa. Infatti

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{f},$$

dove  $d\mathbf{f}$  è l'elemento di superficie, e il teorema di Stokes dà

$$\Phi(\mathbf{B}) = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

cioè la circuitazione di  $\mathbf{A}$  lungo il contorno di  $S$ . Questo permette di calcolare  $\mathbf{A}$  in alcuni casi semplici.

Se consideriamo una particella in un campo elettromagnetico, le proprietà della particella sono definite, per quanto concerne la sua interazione con il campo, da un solo parametro cioè dalla sua carica  $e$  che può essere positiva, negativa o nulla. Vogliamo mostrare che le equazioni del moto sono consistenti con la forza di Lorentz

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.3)$$

se il potenziale scalare e il potenziale vettore formano le componenti di un quadrivettore  $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$ , il *quadripotenziale*, che caratterizza completamente il campo, e se scegliamo l'azione che descrive l'interazione della

particella con il campo nella forma <sup>1</sup>

$$S_{\text{int.}} = -\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i \quad (3.4)$$

dove le funzioni  $A^i$  sono calcolate nel punto d'universo occupato dalla particella nel suo moto. L'integrale è esteso alla linea d'universo compresa fra i due eventi dati  $a$  e  $b$ .

L'azione della carica in un campo elettromagnetico sarà composta da due termini: dall'azione (2.6) della particella libera e dall'azione (3.4)

$$S = \int_a^b \left( -mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right). \quad (3.5)$$

Riscrivendo l'equazione (3.5) nella forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi \right) dt,$$

dove  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  e abbiamo riscritto  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  come  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} dt$ , otteniamo la Lagrangiana della carica in un campo elettromagnetico

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi. \quad (3.6)$$

### 3.2 Equazioni del moto di una carica in campo elettromagnetico

Consideriamo una carica di prova, cioè una carica abbastanza piccola da non influenzare il campo esterno. Possiamo allora supporre dato il quadripotenziale del campo elettromagnetico in ogni punto d'universo. Questa è la stessa condizione che assicura la validità della forza di Lorentz. Il principio di minima azione, applicato alla (3.5), dà

$$\delta S = \delta \int_a^b \left( -mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) = 0 \quad (3.7)$$

---

<sup>1</sup>Scegliamo il sistema di unità di misura di Gauss. Le unità di base sono tre: centimetro, grammo e secondo. Poniamo anche  $4\pi\epsilon_0 = 1$  per tutte le grandezze elettriche e  $\mu_0/(4\pi) = 1$  per tutte le grandezze magnetiche. La connessione fra grandezze elettriche e magnetiche si ha attraverso la legge di Ampère e la legge di induzione elettromagnetica di Faraday-Henry. Quest'ultima diventa, per esempio,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

perchè un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , in unità per cui  $4\pi\epsilon_0 = 1$ , diventa  $c\mathbf{E}$  in unità per cui  $\mu_0/(4\pi) = 1$ .

e, per trovare l'equazione del moto, dobbiamo imporre che  $\delta x^i$  si annulli nei punti d'universo  $a$  e  $b$ . Integrando per parti i primi due termini nella variazione della funzione integranda

$$- \left( mc \frac{dx^i}{ds} d\delta x^i + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right)$$

otteniamo, cambiando nome agli indici di somma nell'ultimo termine,

$$\int_a^b \left( mc du_i \delta x^i + \frac{e}{c} dA_i \delta x^i - \frac{e}{c} \delta A_k dx^k \right) = 0$$

perchè il termine

$$- \left( mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b \quad (3.8)$$

si annulla. Abbiamo anche, ricordando che  $A_i$  è funzione delle coordinate spaziali e del tempo,

$$\delta A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \delta x^i, \quad dA_k = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k$$

e finalmente

$$\int_a^b \left( mc du_i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} dx^k \right) \delta x^i = 0.$$

Essendo le  $\delta x^i$  arbitrarie, la funzione integranda deve essere nulla

$$mc du_i - \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) dx^k = 0. \quad (3.9)$$

Definiamo il *tensore elettromagnetico* come

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (3.10)$$

tensore antisimmetrico di rango due, e dividiamo la (3.9) per  $ds$  ottenendo

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k, \quad (3.11)$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dp^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \quad (3.12)$$

Le (3.11), o le (3.12), sono le equazioni del moto di una carica in forma quadridimensionale. E' facile vedere che, delle quattro equazioni (3.12) per  $i = 0, 1, 2, 3$ , solo tre sono indipendenti. E' sufficiente moltiplicare ambo i

membri della (3.12) per  $u_i$ , allora i due membri dell'uguaglianza si annullano: il primo per l'ortogonalità dei quadrivettori  $u_i$  e  $du^i/ds$  e il secondo per l'antisimmetria del tensore  $F^{ik}$ .

Se nella variazione  $\delta S$  consideriamo solo traiettorie reali e facciamo variare il punto d'universo  $b$  lungo la traiettoria, otteniamo dalla (3.8)

$$\delta S = - \left( m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i$$

da cui

$$-\frac{\partial S}{\partial x^i} = m c u_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \quad (3.13)$$

Il quadrivettore  $-\partial S/\partial x^i$  è l'impulso generalizzato della particella,  $P_i$ , e dalla (3.13)

$$P^i = \left( \frac{\mathcal{E}_{tot}}{c}, \mathbf{P} \right) = \left( \frac{\mathcal{E} + e\varphi}{c}, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \quad (3.14)$$

dove abbiamo lasciato la notazione  $\mathcal{E}/c$  e  $\mathbf{p}$  per le componenti del quadriimpulso della particella libera e abbiamo introdotto il simbolo  $\mathcal{E}_{tot}$  per l'energia totale della particella nel campo. L'Hamiltoniana della particella nel campo elettromagnetico è allora

$$\mathcal{H} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi$$

e, notando che la relazione fra  $\mathcal{H} - e\varphi$  e  $\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c$  è la stessa che si ha fra  $\mathcal{E}$  e  $\mathbf{p}$  in assenza del campo, possiamo esprimere l'Hamiltoniana tramite l'impulso generalizzato perchè

$$\left( \frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2$$

e quindi

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c)^2} + e\varphi. \quad (3.15)$$

Per trovare le relazioni fra le componenti del quadripotenziale  $A^i$  e i campi elettrico e magnetico dobbiamo confrontare l'equazione del moto in forma quadridimensionale con la forza di Lorentz (3.3). Conviene partire dalla (3.11), con  $F_{ik}$  dato dalla (3.10), e ricordare che  $A^\alpha = -A_\alpha$  e  $p^\alpha = -p_\alpha$ . Le componenti  $F_{0\alpha}$  formano le componenti di un vettore polare<sup>2</sup> in tre dimensioni, cioè

$$F_{0\alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{c \partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^\alpha}$$

<sup>2</sup>Ricordiamo che, per inversione degli assi spaziali, le componenti di un vettore polare cambiano di segno mentre le componenti di un vettore assiale restano inalterate.

sono le componenti del vettore

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (3.16)$$

mentre le componenti  $F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}$  definiscono un vettore assiale:  $F_{12} = -(\nabla \times \mathbf{A})_z$ ,  $F_{23} = -(\nabla \times \mathbf{A})_x$  e  $F_{31} = -(\nabla \times \mathbf{A})_y$  (gli indici  $x, y, z$  si riferiscono alla corrispondente componente del rotore di  $\mathbf{A}$ ). Possiamo riscrivere queste componenti in forma compatta, ricordando le proprietà del tensore completamente antisimmetrico di rango tre nello spazio tridimensionale  $e_{\alpha\beta\gamma}$ ,

$$F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} = - \sum_{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} (\nabla \times \mathbf{A})_{\gamma}. \quad (3.17)$$

Se ora consideriamo le componenti spaziali della (3.11) si ha

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\alpha}}{ds} &= \frac{e}{c} F_{\alpha 0} u^0 + \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} u^{\beta} = \\ &= \frac{e}{c} \left( -\frac{\partial A_{\alpha}}{c \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{e}{c} \sum_{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} \frac{v_{\beta}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} (\nabla \times \mathbf{A})_{\gamma}. \end{aligned}$$

Ricordando che  $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$  e che

$$\sum_{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta} (\nabla \times \mathbf{A})_{\gamma} = [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_{\alpha}$$

otteniamo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} + \nabla \varphi \right) + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (3.18)$$

La componente temporale dell'equazione (3.11)

$$\frac{dp_0}{ds} = \frac{e}{c} F_{0\alpha} u^{\alpha}$$

dà la variazione dell'energia  $\mathcal{E}$  con il tempo

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -e \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) \cdot \mathbf{v}. \quad (3.19)$$

Il secondo membro della (3.18) rappresenta la forza agente sulla particella in un campo elettromagnetico ed è composta di due parti. La prima non dipende dalla velocità della particella e, riferita ad una carica unitaria, è chiamata vettore campo elettrico  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (3.20)$$

La seconda parte (l'ultimo termine nella (3.18)) dipende dalla velocità e il fattore di  $e\mathbf{v}/c$  è detto vettore campo magnetico  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.21)$$

Riotteniamo così l'equazione (3.3)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.22)$$

e, dalla (3.19)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (3.23)$$

cioè solo il campo elettrico compie lavoro sulla carica. La differenza sostanziale con il caso non relativistico, nella soluzione dell'equazione (3.22), risiede nel fatto che, ora,

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e le equazioni del moto (3.22) sono più difficili da risolvere delle corrispondenti equazioni non relativistiche pur avendo un'identica forma.

E' facile ora esplicitare le componenti del tensore  $F_{ik}$  e scriverle in forma di tabella dove l'indice  $i = 0, 1, 2, 3$  indica le righe e l'indice  $k$  le colonne. Confrontando le equazioni (3.16) e (3.17) con le (3.20) e (3.21), si ha

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Campo elettrico e magnetico formano quindi le componenti di un tensore antisimmetrico di rango due, il tensore elettromagnetico. Le equazioni (3.17) forniscono un modo semplice, che utilizzeremo nel seguito, di esprimere le componenti  $F_{\alpha\beta}$  tramite le componenti del campo magnetico.

### 3.3 Invarianza di gauge

Nell'azione (3.4) compare il quadripotenziale come grandezza che descrive il campo elettromagnetico, ma il campo è caratterizzato dall'azione che esso esercita sul moto delle cariche. Le equazioni del moto (3.22) non contengono il quadripotenziale, ma i vettori campo elettrico e campo magnetico, e due campi sono fisicamente identici se sono caratterizzati dagli stessi vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , o meglio dallo stesso tensore elettromagnetico  $F_{ik}$ .

Dato il quadripotenziale il tensore  $F_{ik}$ , e quindi anche  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , è determinato univocamente ma non è vero il contrario. Allo stesso tensore elettromagnetico possono corrispondere quadripotenziali diversi. Infatti, se sostituiamo ad  $A_k$  il nuovo potenziale

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}, \quad (3.25)$$

dove  $f$  è una funzione arbitraria delle coordinate spaziali e del tempo, si ha

$$\begin{aligned} F'_{ik} &= \frac{\partial A'_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A'_i}{\partial x^k} = \\ &= F_{ik} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} = F_{ik}. \end{aligned}$$

Anche l'azione (3.4) cambia, per la sostituzione (3.25), ma il nuovo termine che si aggiunge

$$\frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = d \left( \frac{e}{c} f \right)$$

è un differenziale totale che non influisce sulle equazioni del moto perchè, una volta integrato, ha variazione nulla agli estremi dell'intervallo di integrazione.

Quindi i potenziali non sono definiti univocamente, il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di una funzione arbitraria e il potenziale scalare a meno della derivata rispetto al tempo della stessa funzione:  $\mathbf{A} + \nabla f$  e  $\varphi - (\partial f / \partial t)/c$  determinano gli stessi campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  di  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$ .

Poichè solo le grandezze invarianti per la trasformazione (3.25) hanno un significato fisico, tutte le equazioni, che rappresentano leggi della natura, debbono rimanere invarianti in questa trasformazione. Questa invarianza è detta *invarianza di gauge*. La non unicità dei potenziali permette sempre di imporre ai potenziali una condizione arbitraria, per esempio si può sempre imporre che

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

che viene chiamata *gauge di Lorentz*.

### 3.4 Moto di una carica in campo elettromagnetico uniforme e costante

Cerchiamo di risolvere le equazioni del moto (3.22) nel caso più semplice. Consideriamo un campo indipendente dal tempo e la cui intensità è la stessa in tutti i punti dello spazio, allora il campo è detto costante e uniforme. Possiamo procedere in due modi: o cerchiamo di risolvere la (3.22) e ottenere la legge oraria del moto in funzione del tempo  $t$  del sistema fisso, rispetto al quale si studia il moto della carica, oppure risolviamo le equazioni (3.12) ottenendo la velocità e la posizione della carica in funzione del tempo proprio della carica. Il secondo approccio è più semplice ed istruttivo e sarà sviluppato in dettaglio. E' utile però capire anche il procedimento che si adotta nel primo metodo di soluzione.



Consideriamo, per esempio, il moto di una carica in un campo elettrico uniforme e costante  $\mathbf{E}$ . Essendo  $\mathbf{B} = 0$ , l'equazione (3.22) diventa

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}$$

che ha come soluzione

$$\mathbf{p}(t) = e\mathbf{E}t + \mathbf{p}(0), \quad (3.26)$$

dove  $\mathbf{p}(0)$  è l'impulso iniziale, per  $t = 0$ . L'energia della carica, senza l'energia potenziale  $e\varphi$  della carica nel campo, diventa funzione del tempo

$$\mathcal{E}(t) = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2} = c\sqrt{m^2c^2 + [e\mathbf{E}t + \mathbf{p}(0)]^2} \quad (3.27)$$

e la relazione (2.19),  $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$ , determina molto semplicemente la velocità della carica

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{c^2\mathbf{p}}{\mathcal{E}}. \quad (3.28)$$

La legge oraria del moto

$$\mathbf{r}(t) = c^2 \int \frac{\mathbf{p}(t)}{\mathcal{E}(t)} dt + \mathbf{r}_0, \quad (3.29)$$

dove  $\mathbf{r}_0$  è determinato dalla posizione iniziale  $\mathbf{r}(0)$  della particella per  $t = 0$ , si ottiene integrando nel tempo una funzione nota di  $t$ <sup>3</sup>.

Scriviamo ora le equazioni del moto della carica in forma quadridimensionale:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$$

e, indicando con  $\tau$  il tempo proprio e ricordando che  $ds = c d\tau$ , le esprimiamo tramite il tempo proprio

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^i_k u^k. \quad (3.30)$$

Le equazioni (3.30) permettono di risolvere facilmente qualsiasi problema relativo al moto di una carica in un campo elettromagnetico uniforme e costante in termini del *tempo proprio* (il tempo misurato da un orologio

---

<sup>3</sup>Se poniamo  $a = e^2\mathbf{E}^2$ ,  $b = 2e[\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}(0)]$  e  $d = \mathbf{p}(0)^2 + m^2c^2$ , gli integrali che risolvono completamente il problema sono

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{at^2 + bt + d}} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + d}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + bt + d}},$$

e

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + bt + d}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sinh^{-1} \left( \frac{2at + b}{\sqrt{4ad - b^2}} \right)$$

dove  $\sinh^{-1}$  è l'arcoseno iperbolico.

in moto con la carica stessa). La definizione stessa della quadrivelocità,  $u^i = dx^i/ds$ , completa l'insieme di equazioni da risolvere per ottenere la legge oraria del moto. Rivediamo dapprima in questo nuovo approccio il moto della carica in presenza di un solo campo elettrico. Seguiranno gli altri possibili casi.

### 3.4.1 Campo elettrico uniforme e costante

Scegliamo il campo elettrico lungo l'asse  $x$ :  $\mathbf{E} = E \mathbf{u}_x$ . Poichè  $F^{0\alpha} = -F^0_{\alpha} = -E_{\alpha}$ , avremo che il moto lungo  $y$  e  $z$  è uniforme:  $du^{\alpha}/d\tau = 0$  se  $\alpha = 2$  oppure  $3$  (con soluzione  $x^{\alpha} = cA^{\alpha}\tau + B^{\alpha}$  per  $\alpha = 2, 3$  e  $A^{\alpha}, B^{\alpha}$  costanti determinate dalle condizioni iniziali). Le equazioni da risolvere, per le (3.30), sono

$$\begin{aligned}\frac{du^0}{d\tau} &= \frac{e}{mc} E u^1 \\ \frac{du^1}{d\tau} &= \frac{e}{mc} E u^0\end{aligned}$$

Definiamo allora le nuove incognite  $u_{\pm} = u^0 \pm u^1$  e, facendo la somma e la differenza delle due precedenti equazioni, otteniamo il nuovo sistema

$$\frac{du_{\pm}}{d\tau} = \pm \frac{e}{mc} E u_{\pm} \quad (3.31)$$

le cui soluzioni conterranno due costanti arbitrarie  $C_{\pm}$ ,

$$u_{\pm} = C_{\pm} \exp(\pm eE\tau/(mc))$$

Ritornando alle incognite di partenza, avremo

$$\begin{aligned}u^0 &= \frac{1}{2} \left( C_+ e^{\frac{eE\tau}{mc}} + C_- e^{-\frac{eE\tau}{mc}} \right) \\ u^1 &= \frac{1}{2} \left( C_+ e^{\frac{eE\tau}{mc}} - C_- e^{-\frac{eE\tau}{mc}} \right).\end{aligned}$$

Una ulteriore integrazione dà

$$t = \int u^0 d\tau = \frac{mc}{2eE} \left( C_+ e^{\frac{eE\tau}{mc}} - C_- e^{-\frac{eE\tau}{mc}} \right) \quad (3.32)$$

e

$$x = \frac{mc^2}{2eE} \left( C_+ e^{\frac{eE\tau}{mc}} + C_- e^{-\frac{eE\tau}{mc}} \right) \quad (3.33)$$

Se imponiamo la condizione iniziale che  $t = 0$  per  $\tau = 0$  si avrà, dalla (3.32),  $C_+ = C_- = C$ . Il moto della carica è piano e possiamo, per esempio, far coincidere il piano del moto con il piano  $xy$  e imporre che, per  $\tau = t = 0$ ,

$y = 0$  e che l'impulso della carica sia diretto secondo  $y$  e valga  $p_0$ . Se indichiamo con  $\mathcal{E}_0$  l'energia iniziale, anche  $C$  è fissata dalla soluzione per  $u^0$  perchè  $mc^2 u^0 = \mathcal{E}(t)$  e quindi  $C = \mathcal{E}_0/(mc^2)$ . Avremo quindi

$$\begin{aligned} t &= \frac{\mathcal{E}_0}{ceE} \sinh\left(\frac{eE\tau}{mc}\right) \\ x &= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh\left(\frac{eE\tau}{mc}\right) \\ y &= \frac{p_0\tau}{m} = \frac{p_0c}{eE} \sinh^{-1}\left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\right). \end{aligned}$$

L'equazione della traiettoria si ottiene dalla soluzione ottenuta, esprimendo  $\tau$  in funzione di  $y$  e sostituendolo nell'equazione per  $x$

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh\left(\frac{eEy}{cp_0}\right). \quad (3.34)$$

La curva (3.34) è nota dalla meccanica e appare risolvendo il problema della forma assunta da una fune pesante con gli estremi fissi nel campo della gravità. La carica in moto descrive una catenaria in un campo elettrico uniforme. Nel limite non relativistico,  $v \ll c$ , si può porre  $p_0 \simeq mv_0$  e  $\mathcal{E}_0 \simeq mc^2$ ; sviluppando la (3.34) in serie di potenze di  $1/c$  si ottiene, all'ordine più basso,

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \text{costante}$$

cioè una parabola, risultato già noto dalla meccanica classica.

### 3.4.2 Campo magnetico uniforme e costante

Consideriamo un campo magnetico uniforme e costante  $\mathbf{B}$  diretto lungo l'asse  $z$ ,  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ . Poichè  $F^{\alpha\beta} = -F^{\alpha}_{\beta} = -\sum_{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} B_{\gamma}$  si avrà che gli unici elementi non nulli del tensore elettromagnetico sono  $F^1_2 = -F^2_1 = B$ . Dalle equazioni  $du^0/ds = du^3/ds = 0$  si ottiene che  $u^0$  e  $u^3$  sono costanti e quindi l'energia,  $\mathcal{E}$ , e la terza componente della velocità,  $v_z$ , sono costanti del moto. Se imponiamo che  $t = 0$  per  $\tau = 0$ , avremo anche  $dt/d\tau = \mathcal{E}/(mc^2)$  che comporta

$$\tau = \frac{mc^2}{\mathcal{E}} t.$$

Per risolvere il sistema delle rimanenti equazioni (3.30)

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{d\tau} &= \frac{eB}{mc} u^2 \\ \frac{du^2}{d\tau} &= -\frac{eB}{mc} u^1, \end{aligned}$$

conviene porre, in questo caso,  $u = u^1 + iu^2$ . La prima equazione sommata alla seconda, moltiplicata per  $i$ , dà

$$\frac{du}{d\tau} = -i \frac{eB}{mc} u \quad (3.35)$$

e, sottraendole, si ottiene l'equazione complessa coniugata. Le soluzioni saranno allora

$$u = Ae^{-i \frac{eB\tau}{mc}} \quad (3.36)$$

e la sua complessa coniugata,  $u^*$ . La costante  $A$  è determinata dalle condizioni iniziali per la velocità nel piano  $x - y$

$$uu^* = |A|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2 = \frac{p_\perp^2}{m^2 c^2},$$

dove  $p_\perp$  è la componente dell'impulso nel piano perpendicolare a  $\mathbf{B}$ . La costante  $A$  è complessa e avrà anche una fase,  $\alpha$ . Le soluzioni si ottengono prendendo la parte reale ed immaginaria di  $u$  e possono essere facilmente integrate dando

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{p_\perp}{mc} \cos \left( \frac{eB\tau}{mc} + \alpha \right), \\ u^2 &= -\frac{p_\perp}{mc} \sin \left( \frac{eB\tau}{mc} + \alpha \right), \\ x &= \frac{cp_\perp}{eB} \sin \left( \frac{eB\tau}{mc} + \alpha \right) + x_0, \\ y &= \frac{cp_\perp}{eB} \cos \left( \frac{eB\tau}{mc} + \alpha \right) + y_0. \end{aligned}$$

In funzione di  $t$ , data la relazione di proporzionalità fra  $t$  e  $\tau$ , si avrà un moto circolare (un'elica nello spazio) con frequenza  $\omega = ceB/\mathcal{E}$  e raggio  $cp_\perp/(eB) = v_{0\perp}/\omega$  ( $v = pc^2/\mathcal{E}$ ). Se la velocità è piccola, rispetto alla velocità della luce, possiamo approssimativamente porre  $\mathcal{E} \simeq mc^2$ . La frequenza  $\omega$  diventa allora

$$\omega \simeq \frac{eB}{mc}.$$

Nei due problemi che seguono consideriamo il caso in cui sono presenti sia il campo elettrico che il campo magnetico. I due problemi che risolveremo esauriscono tutti i possibili casi, come vedremo nelle prossime sezioni, in cui appare un campo elettromagnetico uniforme e costante.

*Problema 1. Determinare il moto relativistico di una carica in un campo elettrico ed in un campo magnetico uniformi e paralleli.*

Soluzione

Scegliamo i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  nella direzione dell'asse  $z$ . Le componenti non nulle del tensore elettromagnetico sono:  $F^0_3 = F^3_0 = E$  e  $F^1_2 = -F^2_1 = B$ . Sia  $\mathcal{E}_0^2/c^2 = p_0^2 + m^2c^2$  il quadrato dell'energia iniziale della particella e poniamo  $k = e/mc$ . Le equazioni del moto diventano

$$\begin{aligned}\frac{du^0}{d\tau} &= kEu^3, \\ \frac{du^1}{d\tau} &= kB u^2, \\ \frac{du^2}{d\tau} &= -kB u^1, \\ \frac{du^3}{d\tau} &= kEu^0,\end{aligned}$$

e la loro soluzione si riconduce ai casi precedenti se consideriamo queste equazioni a coppie. Troviamo facilmente

$$\begin{aligned}u^0 \pm u^3 &= A_{\pm} e^{\pm kE\tau}, \\ A_+ &= \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} + \frac{p_{0z}}{mc}, \\ A_- &= \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} - \frac{p_{0z}}{mc},\end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare l'energia al tempo proprio  $\tau$  e l'impulso lungo  $z$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= mc^2 u^0 = \mathcal{E}_0 \cosh(kE\tau) + p_{0z} c \sinh(kE\tau), \\ p^3 &= mc u^3 = \frac{\mathcal{E}_0}{c} \sinh(kE\tau) + p_{0z} \cosh(kE\tau).\end{aligned}$$

Ne segue che la velocità lungo  $z$ ,  $v_z = c^2 p_z / \mathcal{E}$ , tende a  $c$  per  $\tau \rightarrow \infty$ . Se, per  $t = \tau = 0$ , la particella si trova nell'origine, dalle soluzioni delle precedenti sezioni si trova subito

$$\begin{aligned}t &= \frac{p_{0z}}{eE} (\cosh(kE\tau) - 1) + \frac{\mathcal{E}_0}{ceE} \sinh(kE\tau) \\ x &= \frac{p_{0x}c}{eB} \sin(kB\tau) - \frac{p_{0y}c}{eB} (\cos(kB\tau) - 1) \\ y &= \frac{p_{0x}c}{eB} (\cos(kB\tau) - 1) + \frac{p_{0y}c}{eB} \sin(kB\tau) \\ z &= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} (\cosh(kE\tau) - 1) + \frac{p_{0z}c}{eE} \sinh(kE\tau).\end{aligned}$$

In questo problema, e nel seguente, si può apprezzare la potenza del metodo.

*Problema 2. Determinare il moto relativistico di una carica in un campo elettrico ed in un campo magnetico mutuamente perpendicolari e di uguale intensità.*

*Soluzione*

Poniamo l'asse delle  $z$  lungo  $\mathbf{B}$  e l'asse delle  $y$  lungo  $\mathbf{E}$ . Poniamo anche  $B = E$  (scriveremo le equazioni tramite il solo campo elettrico), e  $k = e/(mc)$ . In questo

caso, le componenti non nulle del tensore elettromagnetico sono  $F^0_2 = F^2_0 = E$  e  $F^1_2 = -F^2_1 = E$  e le equazioni da risolvere sono

$$\begin{aligned}\frac{du^0}{d\tau} &= kEu^2, \\ \frac{du^1}{d\tau} &= kEu^2, \\ \frac{du^2}{d\tau} &= kE(u^0 - u^1), \\ \frac{du^3}{d\tau} &= 0.\end{aligned}$$

Supponiamo di conoscere  $u^i(0)$  all'istante iniziale  $\tau = 0$ . Facendo la differenza delle prime due equazioni si trova  $d(u^0 - u^1)/d\tau = 0$ , e  $u^0 - u^1$  è una costante del moto, che poniamo eguale ad  $\alpha$

$$u^0 - u^1 = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} - \frac{p_x(0)}{mc} \equiv \alpha. \quad (3.37)$$

Usando l'equazione (3.37) è facile risolvere la terza equazione,

$$u^2 = kE\alpha\tau + \frac{p_y(0)}{mc}$$

e, conoscendo  $u^2$ , ottenere la soluzione completa per gli integrali primi

$$\begin{aligned}u^0 &= \frac{p_y(0)kE}{mc}\tau + \frac{k^2E^2\alpha}{2}\tau^2 + \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}, \\ u^1 &= \frac{p_y(0)kE}{mc}\tau + \frac{k^2E^2\alpha}{2}\tau^2 + \frac{p_x(0)}{mc}, \\ u^3 &= \frac{p_z(0)}{mc}.\end{aligned}$$

Notiamo che la velocità del moto cresce più rapidamente nella direzione perpendicolare ad  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{B}$  (asse delle  $x$ ).

Per completezza diamo anche il risultato per la legge oraria del moto della carica

$$\begin{aligned}t &= \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\tau + \frac{p_y(0)kE}{2mc}\tau^2 + \frac{k^2E^2\alpha}{6}\tau^3, \\ x &= \frac{p_x(0)}{m}\tau + \frac{p_y(0)kE}{2m}\tau^2 + \frac{ck^2E^2\alpha}{6}\tau^3 + x(0), \\ y &= \frac{p_y(0)}{m}\tau + \frac{ckE\alpha}{2}\tau^2 + y(0), \\ z &= \frac{p_z(0)}{m}\tau + z(0).\end{aligned}$$

Come nei casi precedenti, volendo esprimere la variazione delle coordinate tramite il tempo coordinato  $t$ , bisogna risolvere la prima delle equazioni sopra nella variabile  $\tau$  e sostituirla nelle equazioni per  $x, y, z$ .

---

### 3.5 Trasformazioni di Lorentz per il campo

Campo elettrico e campo magnetico, per trasformazioni di Lorentz, cambiano come le corrispondenti componenti del tensore elettromagnetico  $F_{ik}$ . Le loro proprietà sono differenti in diversi sistemi di riferimento inerziali. Abbiamo già trovato, nel primo capitolo, le formule di trasformazione di un tensore antisimmetrico di rango due e, in particolare, nell'equazione (1.57) abbiamo visto che la componente  $F^{01} = -F_{01}$  non cambia nella trasformazione e, evidentemente, anche  $F^{23} = F_{23}$  resterà la stessa. Le componenti  $F^{02}$ ,  $F^{03}$  trasformano come  $x^0$ , mentre  $F^{12}$  e  $F^{13}$  trasformano come  $x^1$ . Nell'equazione (3.24) abbiamo esplicitato la corrispondenza fra le componenti del tensore elettromagnetico e le componenti dei vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Quindi, se nel sistema di riferimento  $K'$  il campo elettrico è  $\mathbf{E}'$ , le componenti di  $\mathbf{E}$  in  $K$  saranno

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - \beta B'_y), \quad (3.38)$$

mentre le trasformazioni di Lorentz per  $\mathbf{B}$  saranno

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma(B'_y - \beta E'_z), \quad B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y). \quad (3.39)$$

Le formule della trasformazione inversa si ricavano da queste spostando gli apici e cambiando il segno di  $\beta$ .

Notiamo, in particolare, che un campo magnetico può essere nullo in un sistema di riferimento ed essere nello stesso tempo presente in un altro sistema. La stessa proprietà vale per il campo elettrico. Se nel sistema  $K'$  si ha  $\mathbf{B}' = 0$ , dalle (3.38) e (3.39) si trova in  $K$

$$B_x = 0, \quad B_y = -\gamma\beta E'_z = -\beta E_z, \quad B_z = \gamma\beta E'_y = \beta E_y,$$

relazioni che possiamo riassumere nella formula

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{E}. \quad (3.40)$$

Analogamente, se nel sistema  $K'$  il campo elettrico è nullo,  $\mathbf{E}' = 0$ , nel sistema  $K$  si avrà

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}. \quad (3.41)$$

In entrambi i casi i campi, magnetico ed elettrico, risultano ortogonali fra di loro in  $K$ .

E' possibile seguire lo stesso ragionamento a ritroso: se in un sistema di riferimento  $K$  i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono mutuamente perpendicolari e di intensità diversa ( $V/c < 1$  nelle (3.40) e (3.41)), allora esiste un sistema  $K'$  dove il campo è solamente elettrico o solo magnetico. La velocità  $\mathbf{V}$  di  $K'$ , rispetto

a  $K$ , è perpendicolare ad  $\mathbf{E}$  e a  $\mathbf{B}$  e il suo modulo vale  $cB/E$  (se  $B < E$  e  $\mathbf{B}' = 0$ ) oppure  $cE/B$  (se  $E < B$  e  $\mathbf{E}' = 0$ ).

Se  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  formano fra di loro un angolo diverso da  $90^\circ$  in  $K$ , è sempre possibile trovare un sistema di riferimento  $K'$  in cui i due campi sono paralleli (o antiparalleli). Supponiamo che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  appartengano al piano  $yz$  e scegliamo la velocità  $\mathbf{V}$  di  $K'$ , rispetto a  $K$ , lungo l'asse  $x$ . In  $K'$ , vogliamo che  $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0$ , perciò è sufficiente che

$$E'_y B'_z - E'_z B'_y = 0 \quad (3.42)$$

perchè le componenti lungo  $x$  restano nulle anche in  $K'$ . Sostituendo in (3.42) le inverse delle (3.38) e (3.39) troviamo

$$\beta(E^2 + B^2) = (E_y B_z - E_z B_y)(1 + \beta^2)$$

che possiamo riscrivere in forma vettoriale

$$\frac{\mathbf{V}/c}{1 + \beta^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2 + B^2}. \quad (3.43)$$

L'equazione (3.43) determina la velocità  $\mathbf{V}$ , rispetto a  $K$ , del sistema di riferimento in cui i due campi risultano paralleli.

Nello studio del moto di una carica è allora necessario considerare contemporaneamente i due campi, campo elettrico e campo magnetico, solamente se essi sono ortogonali e di pari intensità oppure se possono essere resi paralleli. In tutti gli altri casi si può sempre trovare un sistema di riferimento in cui uno dei due campi si annulla. Trova così una giustificazione l'esposizione che abbiamo fatto del moto di una carica e la scelta dei problemi allora proposti.

*Problema 1. Determinare il campo generato da una carica e in moto uniforme con velocità  $V$ .*

*Soluzione*

Sia  $K$  il sistema di riferimento immobile e  $K'$  il sistema di riferimento in moto con la carica che supporremo fissa nell'origine di  $K'$ .  $K'$  trasla lungo l'asse  $x$  rispetto a  $K$ , mantenendo gli assi paralleli e supponiamo che, all'istante  $t = 0$ , le origini dei due sistemi coincidano. Le coordinate della carica nel sistema  $K$  sono allora:  $x_c = Vt$ ,  $y_c = z_c = 0$ .

Nel sistema  $K'$ , il campo magnetico  $\mathbf{B}'$  non esiste e il campo elettrico in un punto  $P$ , di raggio vettore  $\mathbf{R}'$  rispetto a  $K'$ , è eguale a

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$



Dalle formule di trasformazione del campo elettrico (3.38) troviamo

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \gamma E'_y = \gamma \frac{ey'}{R'^3}, \quad E_z = \gamma \frac{ez'}{R'^3}. \quad (3.44)$$

Resta ora da esprimere  $R'$  mediante le coordinate nel sistema  $K$

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

da cui

$$R' = \gamma \left[ (x - Vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2} \right]^{1/2} \equiv \gamma R^*,$$

avendo definito  $R^* = [(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)/\gamma^2]^{1/2}$ . Le componenti del campo  $\mathbf{E}$  diventano allora

$$E_x = \frac{e(x - Vt)}{\gamma^2 R^{*3}}, \quad E_y = \frac{ey}{\gamma^2 R^{*3}}, \quad E_z = \frac{ez}{\gamma^2 R^{*3}}$$

che possiamo riscrivere nella forma compatta

$$\mathbf{E} = \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \quad (3.45)$$

se indichiamo con  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R} = (x - Vt, y, z)$ , il vettore che va dalla carica  $e$  al punto di osservazione  $P(x, y, z)$  del campo.

Indicando con  $\vartheta$  l'angolo, in  $K$ , tra la direzione del moto e il raggio vettore  $\mathbf{R}$ , avremo che  $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \vartheta$  e

$$R^{*2} = \left[ (x - Vt)^2 + \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) (y^2 + z^2) \right] = R^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \right).$$

Per il campo  $\mathbf{E}$  abbiamo allora

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - V^2/c^2}{\left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \right)^{3/2}} \quad (3.46)$$

e il campo ha un minimo nella direzione del moto della carica ( $\vartheta = 0, \pi$ ), e un massimo, nella direzione perpendicolare al moto ( $\vartheta = \pi/2$ ), che vale in modulo

$$E(\vartheta = \pi/2) = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Per velocità  $V$  vicine a quella della luce, il denominatore della (3.46) è piccolo, in uno stretto intervallo di valori di  $\vartheta$  attorno al valore  $\vartheta = \pi/2$ . Poichè  $\sin^2(\pi/2 + \Delta\vartheta) = \cos^2 \Delta\vartheta \sim 1 - (\Delta\vartheta)^2 + \dots$  e, per  $V/c \sim 1$ ,

$$1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \simeq 1 - \frac{V^2}{c^2} + (\Delta\vartheta)^2,$$

la larghezza di questo intervallo è dell'ordine di

$$\Delta\vartheta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

in prossimità del piano perpendicolare al moto della carica.

In  $K'$  il campo magnetico è nullo e nel sistema  $K$  si avrà, per la (3.40),

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{E}$$

perpendicolare in ogni punto al campo elettrico.

---

### 3.6 Invarianti del campo

Con il tensore elettromagnetico  $F^{ik}$  si possono formare grandezze invarianti per trasformazioni di Lorentz e che quindi hanno lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali. E' facile trovare la forma di questi invarianti, con un tensore antisimmetrico infatti possiamo formare lo scalare

$$F_{1k}F^{ik} = \text{invariante} \quad (3.47)$$

e lo pseudoscalare

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{invariante}. \quad (3.48)$$

Calcoliamo esplicitamente l'invariante (3.47)

$$\begin{aligned} F_{ik}F^{ik} &= F_{0\alpha}F^{0\alpha} + F_{\alpha 0}F^{\alpha 0} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \\ &= 2F_{0\alpha}F^{0\alpha} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Dalle tabelle (3.24) troviamo facilmente che  $F_{0\alpha}F^{0\alpha} = -2E^2$  mentre, ricordando che  $F_{\alpha\beta} = -\sum_{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}B_{\gamma}$ , si avrà

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha,\beta} \left( -\sum_{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}B_{\gamma} \right) \left( -\sum_{\delta} e_{\alpha\beta\delta}B_{\delta} \right) = \\ &= 2 \sum_{\gamma} B_{\gamma}^2 = 2B^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la relazione (1.46). Troviamo quindi

$$F_{ik}F^{ik} = 2(B^2 - E^2) = \text{invariante}. \quad (3.49)$$

Il calcolo del secondo invariante è reso più semplice dal fatto che il tensore completamente antisimmetrico di rango quattro deve avere, per essere diverso da zero, un indice 0, temporale, e tre indici spaziali. Tenendo conto dell'antisimmetria di  $F_{ik}$  troviamo

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4e^{0\alpha\beta\gamma}F_{0\alpha}F_{\beta\gamma}$$

e, passando alla notazione tridimensionale,

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4 \sum_{\alpha, \beta, \gamma} e_{\alpha\beta\gamma}F_{0\alpha}(-e_{\beta\gamma\delta}B_{\delta}) = -8\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Anche il prodotto scalare  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  è invariante

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{invariante.} \quad (3.50)$$

Una trasformazione di Lorentz permette sempre di assegnare ad  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  valori arbitrari soggetti alla sola condizione che  $B^2 - E^2$  e  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  abbiano valori prefissati. Se, in qualche sistema di riferimento, i campi elettrico e magnetico sono mutuamente perpendicolari,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , essi sono perpendicolari in qualsiasi sistema di riferimento. Ritroviamo i risultati della sezione precedente, se  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono ortogonali si può sempre annullare  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{B}$  a seconda che  $B^2 - E^2$  sia, rispettivamente, maggiore o minore di zero. Se  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} > 0$  in un sistema di riferimento, il coseno dell'angolo da essi formato sarà positivo in qualsiasi altro sistema e l'angolo fra di essi sarà sempre un angolo minore di  $90^\circ$ . Se  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} < 0$ , l'angolo da essi formato sarà sempre ottuso.

L'invariante (3.49) assicura che, se  $E > B$  in un sistema di riferimento, si avrà  $E > B$  in ogni altro sistema. Tutte le conseguenze della (3.49) e della (3.50) sono assolute e valgono in qualsiasi sistema di riferimento inerziale. Se eseguiamo una trasformazione di Lorentz da  $K$  a  $K'$ , le relazioni

$$B'^2 - E'^2 = B^2 - E^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

potranno essere utilmente usate per determinare i campi nel nuovo sistema di riferimento. L'unico caso in cui non possiamo modificare in alcun modo i campi si presenta quando entrambi gli invarianti sono nulli. In tal caso  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono di modulo eguale e perpendicolari tra di loro in tutti i sistemi di riferimento.

Notiamo che, introducendo il duale  $\tilde{F}_{ik}$  del tensore elettromagnetico

$$\tilde{F}^{ik} = \frac{1}{2}e^{iklm}F_{lm}, \quad (3.51)$$

l'invariante (3.48) può essere scritto nella forma

$$F_{ik}\tilde{F}^{ik} = \text{invariante}$$

e si invita il lettore a verificare che anche  $\tilde{F}_{ik}\tilde{F}^{ik}$  è invariante. Si avrà anche

$$\frac{1}{2}e^{iklm}\tilde{F}_{lm} = -F^{ik}.$$


---

*Problema.* Esplicitare le componenti di  $\tilde{F}^{ik}$  e costruire la tabella delle componenti dove  $i$  indica le righe e  $k$  le colonne. Dal confronto con la (3.24) determinare la trasformazione dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  nel passaggio dal tensore elettromagnetico al suo duale.

Soluzione

Dalla definizione (3.51) si ha che  $\tilde{F}^{ik}$  è un tensore antisimmetrico e quindi  $\tilde{F}^{ii} = 0$ . Calcoliamo, come esempio, l'elemento  $\tilde{F}^{01}$

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2} (e^{0123} F_{23} + e^{0132} F_{32}) = F_{23} = -B_x.$$

Le altre componenti si calcolano allo stesso modo ottenendo

$$\tilde{F}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Il duale di  $F_{ik}$  si ottiene con la trasformazione dei campi

$$\mathbf{E} \Rightarrow -\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \Rightarrow -\mathbf{E}. \quad (3.52)$$


---

## Capitolo 4

# Equazioni del campo elettromagnetico

Come è noto, le equazioni di Maxwell determinano il campo elettromagnetico se è data la distribuzione delle cariche e il loro moto. La legge di Gauss per il campo magnetico e la legge di Faraday-Henry dell'induzione elettromagnetica non dipendono dalla densità di carica o dalla densità di corrente e determinano le proprietà "intrinseche" del campo. Così  $\mathbf{B}$  deve essere un campo solenoidale, a divergenza nulla, e non può esistere il monopolo magnetico perchè il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una qualunque superficie chiusa deve essere nullo e nulla sarà quindi la "carica magnetica" racchiusa da questa superficie. D'altra parte il rotore di  $\mathbf{E}$  dipende solamente dalla variazione nel tempo del campo magnetico. La circuitazione del campo elettrico, detta anche forza elettromotrice, è determinata dalla derivata temporale del flusso del campo magnetico attraverso una superficie che ha come contorno il circuito di integrazione di  $\mathbf{E}$ . Diremo che queste due equazioni di Maxwell formano la *prima coppia* delle equazioni del campo elettromagnetico.<sup>1</sup>

L'introduzione del quadripotenziale fornisce automaticamente la prima coppia delle equazioni di Maxwell. Ciò è chiaro per la legge di Gauss per  $\mathbf{B}$ , se scriviamo  $\mathbf{B}$  come rotore del potenziale vettore la sua divergenza è certamente nulla. Mostriamo che ciò è vero anche per la legge di Faraday-Henry. Consideriamo infatti il quadrivettore

$$e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = e^{iklm} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \right) = 2e^{iklm} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^k \partial x^l}.$$

La derivata  $\partial^2/(\partial x^k \partial x^l)$  è un tensore simmetrico negli indici  $k, l$ , e la contrazione con i corrispondenti indici del tensore completamente antisimmet-

---

<sup>1</sup>In realtà sono quattro equazioni perchè la legge di induzione elettromagnetica è una equazione vettoriale.

rico  $e^{iklm}$  è nulla

$$e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0, \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

L'equazione con  $i = 0$ , nella (4.1) dà

$$e^{0\alpha\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-e_{\beta\gamma\delta} B_\delta) = -2 \sum_{\alpha} \frac{\partial B_\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

cioè  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  che è la legge di Gauss per il campo magnetico. Se poniamo  $i = \alpha$  nella (4.1) si ottiene

$$e^{\alpha 0 \beta \gamma} \frac{\partial F_{\beta \gamma}}{\partial x^0} + 2e^{\alpha \beta 0 \gamma} \frac{\partial F_{0 \gamma}}{\partial x^\beta} = 0$$

ed è facile vedere che il primo termine di questa uguaglianza dà  $2\partial B_\alpha / (c\partial t)$  mentre il secondo termine è  $2(\nabla \times \mathbf{E})_\alpha$ . Otteniamo quindi l'equazione (vettoriale)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.2)$$

L'equazione (4.2) è la legge dell'induzione elettromagnetica e ciò prova che la prima coppia delle equazioni di Maxwell è contenuta nella definizione di  $F_{ik}$  tramite il quadripotenziale.

Possiamo riscrivere le equazioni (4.1) notando che è nullo anche il tensore antisimmetrico di rango tre

$$e_{pikl} e^{prst} \frac{\partial F_{st}}{\partial x^r} = 0$$

che non è identicamente nullo solo per  $i \neq k \neq l$ . Complessivamente sono quattro equazioni distinte, come le (4.1) e ad esse equivalenti, che possiamo riscrivere nella forma

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \quad (4.3)$$

In (4.3) appare la permutazione ciclica degli indici  $i, k, l$ . Nella (3.51) abbiamo definito il duale  $\tilde{F}^{ik}$  del tensore elettromagnetico. Le equazioni (4.1) e (4.3) sono equivalenti all'equazione

$$\frac{\partial \tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0. \quad (4.4)$$

La seconda coppia delle equazioni di Maxwell collega i campi elettrico e magnetico alla densità di carica e alla densità di corrente. Per ottenerle troveremo l'azione per il campo elettromagnetico e applicheremo il principio di minima azione.

## 4.1 L'azione per il campo elettromagnetico

Quando abbiamo trovato le equazioni del moto per una carica abbiamo considerato l'azione come somma dell'azione della particella libera e dell'azione dovuta all'interazione della particella con il campo. Il campo elettromagnetico era allora un dato del problema e il campo creato dalla carica veniva trascurato nell'ipotesi che si trattasse di una carica piccola, una carica di prova. Ora le cariche non sono affatto considerate piccole e il quadripotenziale, e il tensore elettromagnetico, descrivono anche il campo generato dalle cariche e dipendono dalla posizione e dalla velocità delle cariche. Per derivare le equazioni del campo, dobbiamo considerare dato il moto delle cariche e dobbiamo far variare soltanto i potenziali del campo quindi, agli effetti del calcolo della variazione dell'azione, dovremo considerare solamente l'azione che descrive l'interazione della particella con il campo,  $S_{\text{int}}$  data in equazione (3.4), e l'azione per il campo elettromagnetico in assenza di cariche, che chiameremo  $S_{\text{em}}$ .

Per stabilire la forma di  $S_{\text{em}}$  ricordiamo una proprietà fondamentale delle equazioni di Maxwell, esse sono equazioni differenziali lineari nei campi. La linearità delle equazioni implica che la combinazione lineare di due soluzioni è ancora una soluzione fisicamente possibile e, quindi, vale il principio di sovrapposizione. Il campo elettromagnetico generato da un sistema di cariche è la somma vettoriale dei campi elettrico e magnetico generati da ciascuna delle cariche. In  $S_{\text{em}}$  dovrà comparire un'espressione quadratica del campo e, variando l'azione, le equazioni del campo risulteranno così lineari. La condizione che l'azione sia l'integrale di una grandezza scalare e l'invarianza di gauge limitano la scelta all'invariante  $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$ . Questo invariante ha le dimensioni di una densità di energia e deve essere integrato nel volume di tutto lo spazio tridimensionale, per ottenere una grandezza con le dimensioni della Lagrangiana, e nel tempo, perchè abbia le dimensioni di una azione.

$S_{\text{em}}$  deve quindi avere la forma

$$S_{\text{em}} = a \int \int F_{ik}F^{ik} dV dt$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio, rispetto alle coordinate spaziali, e tra due istanti dati rispetto al tempo. La costante  $a$  deve essere negativa affinchè  $S_{\text{em}}$  possa avere un minimo. In generale, è il termine dell'energia cinetica che deve comparire nell'azione con il segno positivo, altrimenti l'azione potrebbe assumere valori negativi arbitrariamente grandi e quindi non avere un estremo. Ora il ruolo di "coordinate" è assunto dai potenziali e il termine cinetico è della forma  $(\partial \mathbf{A}/\partial t)^2$ , che compare in  $\mathbf{E}^2$ , e quindi  $a < 0$ .

Il valore di  $a$  è determinato dal risultato che vogliamo ottenere, la seconda coppia delle equazioni di Maxwell, e dalla scelta delle unità di misura. In unità CGS-Gauss si trova

$$S_{\text{em}} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega, \quad d\Omega = c dt dx dy dz, \quad (4.5)$$

che, in forma tridimensionale, diventa

$$S_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int \int (E^2 - H^2) dV dt.$$

La Lagrangiana per il campo elettromagnetico è allora

$$L_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV$$

e la quantità  $(E^2 - H^2)/(8\pi)$  può essere considerata una densità di Lagrangiana.

Dovremo quindi variare l'azione  $S = S_{\text{int}} + S_{\text{em}}$  dove  $S_{\text{int}}$ , se sono presenti più cariche, avrà la forma

$$S_{\text{int}} = - \sum \frac{e}{c} \int A_k dx^k \quad (4.6)$$

e, in ciascun termine di questa somma sulle cariche,  $A_k$  rappresenta il quadripotenziale del campo all'istante  $t$  e nel punto dello spazio in cui si trova la carica a cui il termine considerato si riferisce. Notiamo che gli integrali che compaiono in  $S_{\text{em}}$  e  $S_{\text{int}}$  sono diversi nel senso che, in  $S_{\text{em}}$ , si integra sullo spazio tempo compreso fra due ipersuperfici di genere spazio (perpendicolari a  $x^0$ ), mentre l'integrale in  $S_{\text{int}}$  è esteso alla linea d'universo delle cariche. Ciò rende problematica l'applicazione del principio di minima azione. Vedremo come l'introduzione del quadrivettore densità di corrente risolva questo problema.

## 4.2 Quadricorrente

La seconda coppia delle equazioni di Maxwell, in forma differenziale, lega le derivate dei campi alla densità di carica e alla densità di corrente. Ciò significa che la carica che compare in  $S_{\text{int}}$ , data nella (4.6), deve essere espressa mediante la densità di carica  $\rho$  definita dalla proprietà che  $\rho dV$  è la carica localizzata nel volume  $dV$ . In meccanica relativistica, abbiamo risolto il problema della "densità di massa" per particelle puntiformi. La densità di carica di un sistema di cariche puntiformi può essere definita, in analogia con la (2.59), come

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (4.7)$$



dove la somma è estesa a tutte le cariche presenti e  $\mathbf{r}_a$  è il raggio vettore della carica  $e_a$ .

Se moltiplichiamo ambedue i membri dell'uguaglianza  $de = \rho dV$  per  $dx^i$ , otteniamo

$$de dx^i = \rho dV dx^i = \rho \frac{dx^i}{dt} dV dt$$

e, a primo membro, abbiamo il prodotto dello scalare  $de$  per il quadrivettore  $dx^i$ , cioè un quadrivettore. Essendo  $dV dt$  invariante per trasformazioni di Lorentz,  $\rho dx^i/dt$  è un quadrivettore che indicheremo con  $j^i$  e chiameremo quadrivettore *densità di corrente*

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}. \quad (4.8)$$

Indicando con  $\mathbf{v}$  la velocità della carica nel punto dato e con  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  la densità tridimensionale di corrente, si ha

$$j^i = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (4.9)$$

Possiamo allora riscrivere l'azione  $S_{\text{int}}$  nella forma

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int \rho A_i dx^i dV = -\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i dV dt$$

dove la sommatoria su tutte le cariche è stata sostituita da un integrale esteso a tutto il volume. Dalla (4.8) e ricordando che  $c dV dt = d\Omega$ , otteniamo  $S_{\text{int}}$  come

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega \quad (4.10)$$

che ha lo stesso dominio di integrazione della (4.5) per  $S_{\text{em}}$ .

Prima di ottenere la seconda coppia delle equazioni di Maxwell variando l'azione, vediamo come si scrive l'equazione di continuità, o legge di conservazione della carica, in forma quadridimensionale. Abbiamo già visto in meccanica relativistica come si deriva la conservazione della massa per un sistema di particelle non interagenti fra di loro. Allo stesso modo si ottiene la conservazione della carica che ha invece validità generale e, in forma tridimensionale, è

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.11)$$

Ricordiamo che la (4.11) si ottiene considerando la carica contenuta in un volume finito  $V$  e imponendo che la carica, uscente da  $V$ , sia uguale alla sua variazione nel volume stesso

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

dove il secondo membro rappresenta la carica uscita nell'unità di tempo attraverso la superficie chiusa che delimita il volume  $V$ . Il teorema di Gauss permette di scrivere il secondo membro di questa uguaglianza come l'integrale sul volume  $V$  della divergenza di  $\mathbf{j}$  e di ottenere quindi la (4.11).

In forma quadridimensionale l'equazione di continuità (4.11) si esprime annullando la divergenza quadridimensionale della quadricorrente (4.9)

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (4.12)$$

Questo risultato può essere ottenuto anche in un altro modo. La carica contenuta in tutto lo spazio può essere scritta come

$$\int \rho dV = \frac{1}{c} \int j^0 dV = \frac{1}{c} \int j^i dS_i$$

dove l'integrazione è estesa ad una ipersuperficie di genere spazio che racchiude in sé tutto lo spazio tridimensionale (in particolare un iperpiano  $x^0 = \text{costante}$ ). Qualunque sia  $x^0$  l'integrale  $\int j^i dS_i$  deve essere lo stesso e la differenza tra due integrali  $\int j^i dS_i$ , presi a tempi diversi, può essere scritta nella forma  $\oint j^i dS_i$  dove l'integrale è esteso all'ipersuperficie chiusa che limita un volume quadridimensionale tra i due iperpiani considerati. Per il teorema di Gauss

$$\oint j^i dS_i = \int \frac{\partial j^i}{\partial x^i} d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

che ci riporta alla (4.12).

Conservazione della carica (4.12) e invarianza di gauge sono strettamente legate. Se, nella (4.10) sostituiamo  $A_i$  con  $A_i - \partial f / \partial x^i$ ,  $S_{\text{int}}$  cambia per un termine

$$\frac{1}{c^2} \int j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} d\Omega = \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial(f j^i)}{\partial x^i} d\Omega$$

che, in virtù del teorema di Gauss, può essere trasformato in un integrale esteso all'ipersuperficie di frontiera. Come vedremo questo termine non contribuisce alle equazioni del moto.

### 4.3 Seconda coppia delle equazioni di Maxwell

Il formalismo Lagrangiano e il principio di minima azione si possono estendere al campo elettromagnetico che, a differenza di una particella, ha un numero infinito di gradi di libertà. Sistemi con un numero infinito di gradi di libertà sono familiari nella meccanica dei fluidi, nell'elettromagnetismo, nella fisica dello stato solido ecc. Se consideriamo  $S_{\text{em}}$  data nell'equazione (4.5) e  $S_{\text{int}}$  in (4.10), vediamo che queste azioni hanno la forma generale

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda d\Omega \quad (4.14)$$

dove  $\Lambda$ , densità Lagrangiana, dipende solo dai potenziali e dalle loro derivate prime:  $\Lambda = \Lambda(A_i, \partial A_i / \partial x^k)$ . Per una trasformazione infinitesima dei potenziali,  $\delta A_i$ , la variazione dell'azione sarà

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d\Omega \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} \delta A_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_i / \partial x^k)} \delta \left( \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \right]$$

e, integrando per parti,

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d\Omega \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_i / \partial x^k)} \right) \right] \delta A_i \quad (4.15)$$

dove abbiamo ommesso il termine

$$\frac{1}{c} \int d\Omega \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_i / \partial x^k)} \delta A_i \right) = \frac{1}{c} \oint \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_i / \partial x^k)} \delta A_i dS_k = 0.$$

Infatti, gli estremi di integrazione dell'integrale, esteso alla ipersuperficie chiusa, sono le due ipersuperfici di genere spazio, sulle quali il quadripotenziale è noto dalle condizioni iniziali e  $\delta A_i = 0$ , e l'infinito spaziale dove il campo si annulla. Imponendo che l'azione (4.14) abbia un estremo si ottiene la generalizzazione delle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_i / \partial x^k)} \right) = 0 \quad (4.16)$$

valide anche se, invece di  $A_i$ , consideriamo un campo qualsiasi. Abbiamo una sola equazione, per  $i = 0, 1, 2, 3$ , per un sistema con infiniti gradi di libertà. In realtà sono equazioni differenziali alle derivate parziali che determinano  $A_i(x)$ ,  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ , in ogni punto dello spazio-tempo.

Annuliamo ora la variazione dell'azione  $S = S_{\text{int}} + S_{\text{em}}$

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik} \right] d\Omega = 0$$

dove abbiamo usato la relazione  $\delta(F_{ik} F^{ik}) = 2F^{ik} \delta F_{ik}$ . Sostituendo

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

e notando che

$$F^{ik} \delta F_{ik} = F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i = -2F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i$$

otteniamo

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega = 0$$

Integrando per parti il secondo termine nella funzione integranda si ha, a meno di un termine che si annulla,

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d\Omega = 0.$$

Per l'arbitrarietà delle variazioni  $\delta A_i$  dovrà essere

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (4.17)$$

Se consideriamo l'equazione (4.17) per  $i = 0$ , si ha ( $F^{0\alpha} = -E_\alpha$ ,  $j^0 = \rho c$ )

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (4.18)$$

che è la legge di Gauss per il campo elettrico. Per  $i = \alpha$ , si ottiene

$$\frac{\partial F^{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

cioè

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (4.19)$$

ricordando che  $F^{\alpha\beta} = -\sum_\gamma e_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma$ . Riconosciamo nella (4.19) l'equazione di Ampère-Maxwell e, nella grandezza  $(1/4\pi)\partial\mathbf{E}/\partial t$ , la corrente di spostamento. Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica, che determinano completamente il campo elettromagnetico, sono quindi la (4.17) e la (4.4)

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \quad \frac{\partial \tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0. \quad (4.20)$$

Prendendo la divergenza della (4.17) ritroviamo l'equazione di continuità

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$$

perchè, a primo membro, compare un tensore antisimmetrico  $F^{ik}$  contratto con il tensore simmetrico della derivata seconda.

## 4.4 Tensore energia-impulso

Cercheremo in questa sezione la forma quadridimensionale di grandezze che compaiono nei bilanci energetici. Nel caso del campo elettromagnetico, pensiamo a grandezze come la densità di energia  $W$  del campo

$$W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (4.21)$$

e il vettore di Poynting  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (4.22)$$

Quanto segue vale in generale per un campo qualsiasi.

Partiamo dall'equazione (4.14),  $S = (1/c) \int \Lambda d\Omega$ , con le ipotesi ivi specificate, e consideriamo una traslazione infinitesima dello spazio-tempo

$$x^i \Rightarrow x^i + \epsilon^i, \quad (4.23)$$

con  $\epsilon^i$  quadriettore indipendente dalle coordinate e infinitesimo. L'invarianza dell'azione per questa traslazione ci porterà ad identificare un quadriettore che si conserva e che potremo interpretare come il quadri-impulso del campo.

Per effetto della traslazione (4.23) i campi e le loro derivate cambieranno e, per semplicità, consideriamo un unico campo  $\phi$ ,  $\phi = \phi(x)$ , per cui  $\Lambda = \Lambda(\phi, \partial\phi/\partial x)$ . Avremo allora

$$\delta\phi = \phi(x + \epsilon) - \phi(x) = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \epsilon^i$$

e

$$\delta \left( \frac{\partial\phi}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^k \partial x^i} \epsilon^i.$$

Anche la Lagrangiana cambierà per effetto della traslazione ma, dipendendo dal punto d'universo solo tramite il campo e il suo gradiente, dovremo scrivere

$$\delta\Lambda = \epsilon^i \frac{\partial\Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial x^k)} \delta \left( \frac{\partial\phi}{\partial x^k} \right),$$

e, usando le variazioni appena calcolate per il campo,

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i} \epsilon^i = \left[ \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x^i} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial x^k)} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^k \partial x^i} \right] \epsilon^i.$$

Questa equazione vale per qualsiasi  $\epsilon^i$  e, per le equazioni del moto (4.16), possiamo riscriverla nella forma

$$\begin{aligned} \delta_i^k \frac{\partial\Lambda}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial x^k)} \right) \frac{\partial\phi}{\partial x^i} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial x^k)} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial x^k)} \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right). \end{aligned}$$

Ponendo

$$T_i^k = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\phi/\partial x^k)} - \delta_i^k \Lambda, \quad (4.24)$$

scriviamo la relazione ottenuta come

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (4.25)$$

Abbiamo già incontrato equazioni in cui l'annullamento della divergenza quadridimensionale di un vettore porta a leggi di conservazione. Nel caso delle equazioni (2.62) e (4.12) abbiamo visto che, se la divergenza di un quadrivettore è nulla, l'integrale di questo quadrivettore, su una ipersuperficie che comprende tutto lo spazio tridimensionale, si conserva. L'equazione (4.25) implica che il quadrivettore

$$P^i = \text{costante} \int T^{ik} dS_k$$

si conserva. Se calcoliamo  $T^{00}$ , dalla (4.24), si ha

$$T^{00} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial \phi / \partial t)} - \Lambda$$

e, ricordando le formule ricavate in meccanica relativistica:  $p_\alpha = \partial L / \partial v_\alpha$  e  $\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$ , dobbiamo concludere che  $T^{00}$  è la densità di energia del campo<sup>2</sup> e che

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k \quad (4.26)$$

è il quadri-impulso del sistema. Il tensore  $T^{ik}$  è detto *tensore energia-impulso*.

A differenza del quadri-impulso, il tensore  $T^{ik}$  non è definito univocamente dalla (4.24), possiamo infatti aggiungere ad esso un termine che non influisce sulle equazioni (4.25) e (4.26). Vedremo, nel caso del campo elettromagnetico, quale deve essere la struttura di questo termine. Cerchiamo ora di precisare il significato delle componenti di questo tensore integrando nella (4.26) sull'iperpiano  $x^0 = \text{costante}$

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} dV. \quad (4.27)$$

Abbiamo visto che  $T^{00}$  è la densità di energia, possiamo chiamare densità di impulso il vettore con componenti  $T^{\alpha 0}/c$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Se riscriviamo l'equazione (4.25) nella forma  $\partial T^{ik} / \partial x^k = 0$  e consideriamo  $i = 0$ , si ottiene

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (4.28)$$

---

<sup>2</sup>Integrando sull'iperpiano  $x^0 = \text{costante}$ , si ottiene

$$P^0 = \text{costante} \int T^{00} dV.$$

Integrando questa equazione in un volume  $V$ , si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{00} dV = -c \int_V \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} dV = -c \oint T^{0\alpha} df_\alpha \quad (4.29)$$

dove, avendo usato il teorema di Gauss in tre dimensioni, l'integrale a secondo membro è esteso alla superficie che limita il volume  $V$  e  $df$  è l'elemento di superficie. Il primo membro della (4.29) è la derivata rispetto al tempo dell'energia contenuta nel volume  $V$  e il secondo membro deve essere il flusso di energia, cioè l'energia che attraversa la superficie, che limita  $V$ , nell'unità di tempo. Il vettore  $\mathbf{S}^\alpha = cT^{0\alpha}$  è la quantità di energia che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo<sup>3</sup>. La densità del flusso di energia è quindi eguale al prodotto della densità di impulso per  $c^2$ . Ne deduciamo anche che il tensore  $T^{ik}$  deve essere simmetrico potendo scrivere le sue componenti, nella densità di impulso, come  $T^{\alpha 0}/c$  o come  $T^{0\alpha}/c$ . Ciò risulta chiaramente dal confronto della (4.27) con la (4.29).

Scriviamo ancora l'equazione (4.25) per  $i = \alpha$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

per capire il significato delle componenti  $T^{\alpha\beta}$ . Procedendo come nel caso precedente, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV = - \oint T^{\alpha\beta} df_\beta, \quad (4.30)$$

Le componenti  $T^{\alpha\beta}$ , che formano il *tensore degli sforzi* indicato anche con  $\sigma_{\alpha\beta}$ <sup>4</sup>, costituiscono il tensore tridimensionale della densità di flusso di impulso. Per esempio,  $T^{21}$  determina l'impulso lungo  $y$  che passa, nell'unità di tempo, attraverso l'unità di superficie perpendicolare all'asse  $x$ .

Consideriamo, come esempio, un sistema di particelle puntiformi, non interagenti tra loro, studiato alla fine del secondo capitolo. Avevamo introdotto allora la densità di quadri-impulso  $\mu c u^i$  che non è un vero quadrivettore. La densità di energia per questo sistema è  $T^{00} = \mu c^2 u^0$  mentre  $T^{0\alpha} = \mu c^2 u^\alpha$ . La densità di massa è la componente temporale del quadrivettore

$$\frac{\mu}{c} \frac{dx^i}{dt}$$

e non è difficile ricostruire il tensore energia-impulso del sistema di particelle, non interagenti fra loro,

$$T^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{dt} u^k = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}. \quad (4.31)$$

<sup>3</sup>Nel caso di un'onda, si tratta della grandezza chiamata *intensità* dell'onda.

<sup>4</sup>E' una grandezza fondamentale, e molto usata, in teoria dell'elasticità.

Il tensore (4.31) è simmetrico e la sua traccia è ( $u_i u^i = 1$ )

$$T_i^i = \mu c \frac{ds}{dt} = \mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

sempre positiva. La quadridivergenza di questo tensore è

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = c u_i \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \mu \frac{dx^k}{dt} \right) + \mu c \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x^k}$$

ma, per particelle non interagenti fra loro, vale la conservazione della massa (2.62) e

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = \mu c \frac{du_i}{dt}. \quad (4.32)$$

In assenza di forze esterne, la quadriaccelerazione di ogni particella è nulla e ritroviamo la (4.25), cioè la conservazione del quadri-impulso del sistema. Se sulle particelle agisce un campo elettromagnetico, scriviamo l'equazione del moto nella forma

$$\mu c \frac{du_i}{ds} = \frac{\rho}{c} F_{ik} u^k,$$

e

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F_{ik} \rho \frac{dx^k}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k. \quad (4.33)$$

## 4.5 Tensore energia-impulso del campo elettromagnetico

Per il campo elettromagnetico, in assenza di cariche, dalla (4.5) si ha

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl} F^{kl}$$

e, dalla (4.24),

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_l / \partial x^k)} - \delta_i^k \Lambda.$$

Abbiamo già calcolato la variazione di  $\Lambda$  nella derivazione della seconda coppia delle equazioni di Maxwell

$$\delta \Lambda = -\frac{1}{4\pi} F^{kl} \delta \left( \frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right)$$

e, dalla variazione, è facile risalire alla derivata il cui calcolo segue le stesse regole

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_l / \partial x^k)} = -\frac{1}{4\pi} F^{kl}.$$



Allora

$$T_i^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{jm} F^{jm}$$

ovvero, per le componenti controvarianti,

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} F^k_l + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{jm} F^{jm}. \quad (4.34)$$

Questo tensore non è simmetrico e non è neppure invariante di gauge. Per una trasformazione di gauge,  $A^l \Rightarrow A^l - \partial f / \partial x_l$ ,

$$T^{ik} \Rightarrow T^{ik} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} F^k_l$$

e ciò è spiacevole perchè il tensore energia-impulso è, in linea di principio, misurabile. La correzione introdotta dalla trasformazione di gauge suggerisce la scelta  $\partial f / \partial x_i = A^i$  e di aggiungere la correzione stessa a  $T^{ik}$

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{il} F^k_l + \frac{1}{4} g^{ik} F_{jm} F^{jm} \right) \quad (4.35)$$

ottenendo così un tensore simmetrico e gauge invariante. Le equazioni (4.25) e (4.26) non vengono modificate dall'aggiunta di questo termine. Inoltre la traccia di questo tensore è nulla

$$T_i^i = 0. \quad (4.36)$$

Verifichiamo che le grandezze (4.21) e (4.22) vengano riprodotte correttamente. Vediamo che

$$W = T^{00} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{0\alpha} F^0_\alpha + \frac{1}{2} (B^2 - E^2) \right) = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

e che  $cT^{0\alpha}$  dà effettivamente le componenti del vettore di Poynting  $\mathbf{S}$

$$cT^{0\alpha} = \frac{c}{4\pi} \left( -F^{0\beta} F^\alpha_\beta \right) = \frac{c}{4\pi} \sum_{\beta, \gamma} e_{\alpha\beta\gamma} E_\beta B_\gamma = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_\alpha.$$

Il calcolo di  $T^{\alpha\beta}$  dà il tensore tridimensionale, detto tensore degli sforzi di Maxwell,

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( -E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + B^2) \right). \quad (4.37)$$

Non è difficile ottenere la (4.37) se usiamo la relazione

$$\sum_{\gamma\mu\lambda} e_{\alpha\gamma\mu} e_{\beta\gamma\lambda} B_\mu B_\lambda = \delta_{\alpha\beta} B^2 - B_\alpha B_\beta.$$

Verifichiamo ora la conservazione del quadri-impulso del campo prendendo la quadridivergenza del tensore (4.35)

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi} \left( -F_{il} \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} - F^{kl} \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} F^{jm} \frac{\partial F_{jm}}{\partial x^i} \right).$$

Sostituendo in questa uguaglianza le equazioni di Maxwell (4.3) e (4.17)

$$\frac{\partial F_{jm}}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^m} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^l,$$

otteniamo

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{4\pi}{c} F_{il} j^l - F^{kl} \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} F^{jm} \frac{\partial F_{mi}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} F^{jm} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^m} \right).$$

Permutando gli indici è facile mostrare che gli ultimi tre termini si eliminano e resta

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} F_{il} j^l. \quad (4.38)$$

In assenza di cariche,  $j^l = 0$ , il tensore energia-impulso del solo campo elettromagnetico ha quadridivergenza nulla e il quadri-impulso del campo si conserva. In presenza di cariche, il tensore energia-impulso di tutto il sistema è la somma dei tensori energia-impulso del campo elettromagnetico e delle particelle. La legge di conservazione del quadri-impulso totale richiede che la quadridivergenza del tensore energia-impulso di tutto il sistema sia nullo. L'equazione (4.33) ci dice che questa cancellazione si verifica effettivamente.

## 4.6 Tensore energia-impulso per corpi macroscopici

Nelle equazioni del campo gravitazionale, che troveremo più avanti, le sorgenti del campo compaiono tramite il loro tensore energia-impulso. Avremo quindi bisogno di questo tensore per corpi macroscopici (terra, sole, ecc.) considerati come continui. L'ipotesi che il corpo macroscopico possa essere considerato come un fluido ideale, per il quale vale la legge di Pascal, semplifica notevolmente la trattazione.

Il flusso di impulso attraverso l'elemento di superficie di un corpo è definito come forza agente su questo elemento e  $\sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} df_{\beta}$  è la componente  $\alpha$  della forza agente sull'elemento di superficie  $d\mathbf{f}$ . Nel sistema di riferimento in cui il fluido ideale è in quiete, la pressione  $p$  esercitata su un elemento di volume del corpo è la stessa in tutte le direzioni e ovunque perpendicolare all'elemento di superficie su cui si esercita. La componente  $\alpha$  della forza agente sulla superficie  $d\mathbf{f}$  sarà allora  $\sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} df_{\beta} = p df_{\alpha}$ , da cui si ottiene

$\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$ . In questo sistema di riferimento, per l'elemento di volume dato si ha  $T^{\alpha 0} = 0$  e  $T^{00} = \varepsilon$  dove  $\varepsilon$  è la densità di energia e  $\varepsilon/c^2$  la densità di massa.

Nel sistema di quiete del corpo, il tensore energia-impulso per l'elemento di volume dato è

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

In un sistema di riferimento qualsiasi, l'elemento di volume del corpo ha quadrivelocità  $u^i$  e  $T^{ik}$  avrà la forma,  $A$  e  $B$  sono scalari da determinare,

$$T^{ik} = Au^i u^k + Bg^{ik},$$

dipenderà cioè dai tensori simmetrici che possiamo costruire. Imponendo che, nel sistema di riferimento in cui l'elemento di volume è in quiete e  $u^i = (1, \mathbf{0})$ , questo tensore abbia la forma (4.39), troviamo

$$T^{00} = A + B = \varepsilon, \quad T^{\alpha\alpha} = -B = p$$

da cui segue

$$T^{ik} = (p + \varepsilon)u^i u^k - pg^{ik}. \quad (4.40)$$

Dalla (4.40) discende che

$$T^{00} = W = \frac{\varepsilon + pv^2/c^2}{1 - v^2/c^2}, \quad \mathbf{S} = \frac{(p + \varepsilon)\mathbf{v}}{1 - v^2/c^2},$$

mentre

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{(p + \varepsilon)v_\alpha v_\beta}{c^2(1 - v^2/c^2)} + p\delta_{\alpha\beta}.$$

La traccia del tensore (4.40) è

$$T_i^i = \varepsilon - 3p$$

e, essendo sempre positiva per un corpo materiale,

$$p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nel limite ultrarelativistico, le masse delle particelle si possono trascurare e ci si riconduce al caso del campo elettromagnetico per il quale  $T_i^i = 0$ . L'equazione di stato di un gas ultrarelativistico sarà allora

$$p = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.41)$$



## Capitolo 5

# Onde elettromagnetiche

### 5.1 Equazione d'onda

Un campo elettromagnetico nel vuoto è determinato dalle equazioni di James Maxwell nelle quali bisogna porre  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ . Se i campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{B}$  variano con il tempo, le equazioni di Maxwell possono avere soluzioni diverse da zero, cioè il campo elettromagnetico può esistere anche in assenza di cariche<sup>1</sup>. Un campo elettromagnetico nel vuoto, in assenza di cariche, prende il nome di onda elettromagnetica.

Scriviamo la seconda coppia delle equazioni di Maxwell per un campo in assenza di cariche nella forma quadridimensionale

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

e, esprimendo  $F^{ik}$  in funzione dei potenziali

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k},$$

otteniamo

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0. \quad (5.1)$$

Imponiamo ai potenziali la condizione supplementare

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \quad (5.2)$$

(questa condizione è detta condizione di Lorentz e i potenziali, che soddisfanno questa condizione, sono detti potenziali nella *gauge di Lorentz*). Di

---

<sup>1</sup>Per un campo costante, il potenziale  $\phi = \int \frac{\rho}{R} dV$  e la media nel tempo del potenziale vettore  $\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV$  si annullano identicamente per  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ .

conseguenza nell'equazione (5.1) si annulla il primo termine e resta

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \quad (5.3)$$

Questa è l'equazione di D'Alembert o equazione d'onda scritta in forma quadridimensionale.

Se introduciamo l'operatore di D'Alembert <sup>2</sup>

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

l'equazione d'onda si scrive nella forma

$$\square A^i = 0. \quad (5.4)$$

E' importante notare che, oltre a tutte le componenti del quadripotenziale, anche ogni componente del campo elettrico,  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$ , e del campo magnetico,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , devono soddisfare, in un'onda, l'equazione (5.4).

Se il campo dipende da una sola coordinata spaziale, per esempio  $x$ , e dal tempo, l'equazione d'onda (5.4) assume la forma

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] f(x, t) = 0 \quad (5.5)$$

dove con  $f$  si intende una qualsiasi componente dei potenziali o dei vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . La soluzione generale di questa equazione è ben nota

$$f(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct),$$

cioè risulta dalla sovrapposizione di due onde che si propagano lungo l'asse  $x$  in versi opposti con velocità  $c$ . Le onde di questo tipo si chiamano *onde piane*, il loro fronte d'onda è un piano perpendicolare all'asse  $x$ .

Un caso particolare e importante d'onda elettromagnetica è quello in cui il campo è una funzione periodica semplice (seno o coseno) del tempo. Un'onda di questo tipo è detta *onda monocromatica*. Tutte le grandezze, potenziali e componenti dei campi, di un'onda monocromatica dipendono dal tempo mediante un fattore del tipo  $\exp[i(\omega t + \alpha)]$ , dove  $\omega$  è la frequenza ciclica (o semplicemente frequenza) dell'onda. L'equazione d'onda diventa, per un'onda monocromatica,

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$$

---

<sup>2</sup>In alcuni testi l'operatore di D'Alembert  $\square$  è definito con il segno opposto.

essendo  $d^2 f/dt^2 = -\omega^2 f$ .

L'importanza di questi casi particolari risulterà chiara nella prossima sezione dove mostreremo che qualsiasi onda può essere pensata come sovrapposizione di onde piane monocromatiche. Le definizioni, date qui in forma schematica, saranno riprese e sviluppate in dettaglio.

## 5.2 Soluzione generale dell'equazione d'onda

Se l'equazione (5.5) rappresentasse una perturbazione che si propaga lungo una corda tesa sarebbe facile determinare i modi normali di vibrazione della corda imponendo opportune condizioni al contorno. Per esempio, se le estremità della corda fossero fisse per  $x = 0$  e  $x = L$ , la perturbazione  $f(x, t)$  si annullerebbe in questi punti e  $f(x, t)$  assumerebbe la forma

$$f_n(x, t) = A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

L'intervallo  $(0, L)$  deve quindi contenere un numero intero di mezze lunghezze d'onda. Se inseriamo la (5.6) nella (5.5), otteniamo

$$\ddot{A}_n = -\omega_n^2 A_n,$$

dove

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2},$$

e un moto armonico semplice per l'ampiezza  $A_n(t)$  con frequenza  $\omega_n$ . Avendo trovato i modi normali di vibrazione della corda è facile ottenere il suo moto generale che sarà una sovrapposizione di modi

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

cioè una serie di Fourier.

Poichè non vogliamo considerare un campo definito su un intervallo finito, anche se talvolta si "mette il campo in una scatola" imponendo opportune condizioni al contorno, facciamo tendere  $L$  all'infinito cosicchè la serie di Fourier diventa un integrale di Fourier e le onde stazionarie sulla corda sono rimpiazzate da onde elettromagnetiche progressive. Possiamo allora rappresentare il quadripotenziale tramite l'integrale di Fourier

$$A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k f^i(k) e^{-ik_j x^j}, \quad (5.7)$$

dove  $f^i(k)$  è la *trasformata di Fourier* di  $A^i(x)$

$$f^i(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 x A^i(x) e^{ik_j x^j} \quad (5.8)$$

e  $d^4k = dk^0 dk^1 dk^2 dk^3$  è invariante per trasformazioni di Lorentz.  $k^i$  è chiamato *quadrivettore d'onda*

$$k^i = (k^0, \mathbf{k}), \quad (5.9)$$

vedremo poi perchè.  $f^i(k)$  trasforma, per trasformazioni di Lorentz, come un campo quadrivettoriale nella variabile  $k$  che, a sua volta, è un quadrivettore.

Le condizioni (5.2) e (5.3) su  $A^i(x)$  diventano, tramite la (5.7), condizioni su  $f^i(k)$ . Se applichiamo gli operatori differenziali  $\partial/\partial x^i$  e  $\square$  all'equazione (5.7), ogni volta che deriviamo rispetto ad  $x^l$ , la funzione  $f^i(k)$  viene moltiplicata per  $(-ik_l)$  e, se il risultato dell'integrale di Fourier deve essere nullo, anche la funzione integranda deve annullarsi. Dalla equazione (5.3) e dalla definizione (5.7), otteniamo

$$(k^l k_l) f^i(k) = k^2 f^i(k) = 0. \quad (5.10)$$

Vediamo, dalla (5.10), che  $f^i(k)$  è nulla ovunque eccetto i punti dove si annulla  $k^2$  (ipercono nello spazio quadridimensionale), quindi si annulla quasi ovunque. Vediamo perciò che non si tratta di una funzione continua ma di una distribuzione (o funzione generalizzata). Se poniamo

$$f^i(k) = g^i(k) \delta(k^2), \quad (5.11)$$

con  $\delta(k^2) = \delta[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2]$  e  $g^i(k) \equiv g^i(k^0, \mathbf{k})$  una vera funzione, la (5.11) è una soluzione dell'equazione (5.10) <sup>3</sup>.

La condizione di Lorentz, equazione (5.2), impone che

$$k_i f^i(k) = 0,$$

cioè

$$k_i g^i(k) = 0, \quad (5.12)$$

e questo completa la soluzione delle due condizioni. Il quadripotenziale, ma questo vale anche per il campo elettrico e magnetico, può essere pensato come una sovrapposizione di infinite onde elementari

$$g^i(k) e^{-ik_l x^l} \quad (k^2 = 0, k_i g^i = 0), \quad (5.13)$$

mattoni fondamentali con i quali possiamo costruire qualsiasi onda. Nel seguito, studieremo le proprietà di un'onda "elementare".

L'onda (5.13) ha lo stesso valore in tutti i punti  $x^i$  in cui

$$k_l x^l = ck_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{costante}. \quad (5.14)$$

---

<sup>3</sup>E' l'unica soluzione se imponiamo che  $A^i(x)$  si annulli all'infinito spaziale.



Se fissiamo il tempo  $t$ , ad un dato istante, la condizione  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{costante}$ , definisce un piano perpendicolare a  $\mathbf{k}$  e, in tutti i punti di questo piano, la fase è la stessa (*fronte d'onda*). Si tratta di onde piane.

Con una rotazione spaziale, possiamo metterci in un sistema di riferimento inerziale in cui  $\mathbf{k}$  è parallelo all'asse  $x$  e la condizione (5.14) diventa  $|\mathbf{k}|x - ck_0t = \text{costante}$ , ovvero

$$|\mathbf{k}|(x \pm ct) = \text{costante} \quad (5.15)$$

perchè  $k_0^2 = |\mathbf{k}|^2$ , essendo  $k_i k^i = 0$ . Il fronte d'onda si propaga con velocità  $c$  parallelamente all'asse  $x$ , in senso positivo o negativo a seconda del segno in (5.15). In questo sistema di riferimento, se fissiamo  $x$  oppure  $t$ , l'onda diventa una funzione periodica della variabile che non abbiamo fissato e riassume lo stesso valore quando la fase varia di  $2\pi$ . Se fissiamo  $t$ , l'onda riassume lo stesso valore nei punti consecutivi per cui

$$x' - x = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \equiv \lambda \quad (\text{lunghezza d'onda})$$

e, se fissiamo  $x$ , agli istanti separati dall'intervallo temporale

$$t' - t = \frac{2\pi}{ck_0} \equiv T \quad (\text{periodo}).$$

Si tratta quindi di un'onda monocromatica di *frequenza ciclica*  $\omega$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = ck_0$$

e il vettore

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}},$$

(dove  $\hat{\mathbf{n}}$  è il versore di propagazione dell'onda) è detto *vettore d'onda*. Possiamo quindi riscrivere il quadrivettore d'onda come

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right)$$

e notare che è di genere luce, o isotropo.

Per ognuna di queste onde

$$F^{ij} = -i(k^i g^j - k^j g^i) e^{-ik_l x^l}, \quad (5.16)$$

e, per le (5.13),

$$k_i F^{ij} = 0. \quad (5.17)$$

Dalla relazione

$$F^j_l F^{il} = -e^{-2ik_l x^l} (k^j g_l - k_l g^j) (k^i g^l - k^l g^i) = -k^i k^j (g_l g^l) e^{-2ik_l x^l},$$

e dalla (5.16), si ottiene

$$F_{ij}F^{ij} = 2(B^2 - E^2) = 0, \quad e^{ijkl}F_{ij}F_{kl} = -8\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.18)$$

Il campo magnetico e il campo elettrico risultano ortogonali a  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} = 0$ , perchè, dalla (5.17), si ha  $k_i F^{i0} = k_\alpha F^{\alpha 0} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ , e  $(\mathbf{B})_\alpha = -(1/2)e_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma} = i \exp(-ik_l x^l)(\mathbf{k} \times \mathbf{g})_\alpha$ . Se definiamo  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , versore di propagazione dell'onda, si avrà anche  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$  e  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}}$ . Infatti

$$\mathbf{E} = -i(\mathbf{k}g^0 - k^0 \mathbf{g})e^{-ik_l x^l}$$

e, quindi,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}}{k^0} \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{g}e^{-ik_l x^l}$$

Queste onde elementari sono polarizzate trasversalmente e i campi elettrico e magnetico, nello stesso punto di universo, sono tra di loro ortogonali ed eguali in modulo.

### 5.3 Tensore energia-impulso di un'onda piana

Ricordiamo l'espressione per il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{il}F^j{}_l + \frac{1}{4}g^{ij}F_{lm}F^{lm} \right) \quad (5.19)$$

e l'interpretazione di  $T^{00}$ , come densità di energia, e di  $cT^{0\alpha}$  come le componenti del vettore di Poynting. Per un'onda elettromagnetica piana la (5.19) si riduce, in virtù della (5.18), a

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} k^i k^j (g_l g^l) e^{-2ik_l x^l}. \quad (5.20)$$

Essendo

$$T^{00} = W = \frac{1}{4\pi} (k^0)^2 (g_l g^l) e^{-2ik_l x^l},$$

con  $k^0 = \omega/c$ , si può riscrivere l'equazione (5.20) nella forma

$$T^{ij} = \frac{c^2 W}{\omega^2} k^i k^j$$

ed ottenere il vettore di Poynting

$$S_\alpha = cT^{0\alpha} = \frac{c^3 W}{\omega^2} k^0 k^\alpha,$$

cioè

$$\mathbf{S} = cW\hat{\mathbf{n}}, \quad (5.21)$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}$  è il versore diretto nel senso di propagazione dell'onda. L'impulso dell'unità di volume del campo elettromagnetico è  $\mathbf{S}/c^2$ . Notiamo che la relazione tra l'energia e l'impulso  $W/c$  dell'onda elettromagnetica è identica a quella per le particelle che si muovono con la velocità della luce:  $p = \mathcal{E}/c$ .

Scelto un particolare sistema di riferimento, è possibile imporre ai potenziali le condizioni

$$\phi = 0, \quad (5.22)$$

(gauge di *radiazione* o gauge di *Hamilton*) e

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.23)$$

(gauge di *Coulomb*). Notiamo che le condizioni (5.22) e (5.23) non sono covarianti e, se cambiamo sistema di riferimento, tali condizioni, in generale, non saranno più soddisfatte, mentre la condizione di *Lorentz*

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

risulta vera in qualsiasi sistema di riferimento inerziale. La condizione (5.22) permette di scrivere il campo elettrico in termini del solo potenziale vettore:  $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/(c \partial t)$ . Notiamo che quest'ultima relazione non vale in presenza di cariche perchè, in tal caso,  $\phi$  non può essere nullo.

Il flusso di impulso del campo è dato dal tensore degli sforzi di Maxwell  $\sigma_{\alpha\beta}$

$$\sigma_{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} = \frac{c^2 W}{\omega^2} k^\alpha k^\beta. \quad (5.24)$$

Scegliendo per direzione di propagazione dell'onda l'asse delle  $x$ , troviamo che l'unica componente non nulla di  $\sigma_{\alpha\beta}$  è

$$\sigma_{xx} = W.$$

Come era logico aspettarsi, il flusso di impulso è diretto nel senso della propagazione dell'onda e la sua grandezza è uguale alla densità di energia. La legge di trasformazione delle componenti del tensore energia-impulso è quella di un tensore simmetrico di rango due.

*Problema. Determinare la forza agente su una parete dalla quale si riflette, con fattore di riflessione  $R$  noto, un'onda elettromagnetica piana incidente.*

*Soluzione*

La forza agente sull'unità di superficie della parete è data dal flusso di impulso che incide su questa superficie, cioè è il vettore con componenti

$$F_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}^{in} N_\beta + \sigma_{\alpha\beta}^{rif} N_\beta$$

dove  $\mathbf{N}$  è il versore della normale alla superficie della parete e  $\sigma_{\alpha\beta}^{in}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^{rif}$  sono le componenti dei tensori energia-impulso delle onde incidente e riflessa. Indichiamo con  $\hat{\mathbf{n}}$  il versore diretto nel senso di propagazione dell'onda incidente e, con  $\hat{\mathbf{n}}'$ , il versore dell'onda riflessa. Dall'equazione (5.24) si può scrivere, per l'onda incidente

$$\sigma_{\alpha\beta}^{in} = W n_{\alpha} n_{\beta}$$

e una relazione analoga per l'onda riflessa

$$\sigma_{\alpha\beta}^{rif} = W' n'_{\alpha} n'_{\beta}$$

Otteniamo quindi una forza

$$\mathbf{F} = W \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + W' \hat{\mathbf{n}}' (\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{n}}').$$

Per definizione di coefficiente di riflessione, abbiamo  $W' = RW$ . Introducendo anche l'angolo di incidenza  $\theta$ , uguale all'angolo di riflessione, e passando alle componenti troviamo la forza normale (pressione di radiazione)

$$F_N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = W(1 + R) \cos^2 \theta$$

e la forza tangenziale

$$F_t = W(1 - R) \sin \theta \cos \theta.$$

## 5.4 Effetto Doppler

Le trasformazioni di Lorentz per il quadrivettore d'onda determinano le formule per l'*effetto Doppler*, ossia una variazione della frequenza dell'onda emessa da una sorgente in moto rispetto ad un osservatore. Consideriamo un'onda piana di frequenza  $\omega$  e vettore d'onda  $\mathbf{k}$  nel sistema di riferimento inerziale  $K$ . Nel sistema in moto rispetto a  $K$ ,  $K'$ , quest'onda sarà ancora un'onda piana, perchè le trasformazioni di Lorentz sono lineari, ma avrà una frequenza diversa  $\omega'$  e un vettore d'onda  $\mathbf{k}'$ . La trasformazione di Lorentz lascerà invariante la fase dell'onda

$$k_i x^i = k'_i x'^i$$

e, se  $K'$  si muove rispetto a  $K$  con velocità  $V$  diretta lungo l'asse  $x$ ,

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1), \quad k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0), \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = k^3. \quad (5.25)$$

Supponiamo ora di avere una sorgente fissa in  $K'$ , la frequenza  $\omega' = ck'^0$  è detta frequenza propria e le equazioni (5.25) permettono di trovare la frequenza  $\omega = ck^0$  osservata dal sistema di riferimento  $K$ , in moto rispetto alla sorgente. Se indichiamo con  $\theta$  e  $\theta'$  gli angoli formati da  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  con l'asse  $x$ , si avrà

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$$

e la formula cercata è

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \quad (5.26)$$

La relazione fra  $\theta$  e  $\theta'$  è data da

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)}$$

e le equazioni inverse si ottengono scambiando le grandezze in  $K$  con quelle in  $K'$  e cambiando il segno di  $\beta$ . Se  $K'$  si muove rispetto a  $K$  con velocità  $\mathbf{V}$ , non necessariamente diretta lungo l'asse  $x$ , gli angoli  $\theta$  e  $\theta'$  saranno gli angoli formati dai vettori  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  con la velocità  $\mathbf{V}$ .

Per  $V \ll c$  e  $\theta$  non troppo vicino a  $\pi/2$ , abbiamo

$$\omega \approx \omega' \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \theta \right),$$

e, per  $\theta = \pi/2$ ,

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega' \left( 1 - \frac{V^2}{2c^2} \right) \quad (5.27)$$

L'effetto Doppler per  $\theta = \pi/2$ , che potremmo chiamare effetto Doppler trasverso, è tipicamente relativistico. Se avessimo usato le trasformazioni di Galileo, invece delle trasformazioni di Lorentz, per il calcolo dello spostamento Doppler avremmo ottenuto l'equazione (5.26) senza il fattore  $1/\gamma$  e quindi  $\omega = \omega'$  per  $\theta = \pi/2$ . Lo spostamento Doppler trasverso (5.27) è stato osservato per la prima volta, nella spettroscopia degli atomi in moto, nel 1938 (esperimento di Ives-Stilwell).

*Problema. Determinare la legge di riflessione di un'onda piana monochromatica da uno specchio che si muove con una velocità  $\mathbf{V}$  perpendicolare al suo piano. Determinare anche la variazione di frequenza nella riflessione e considerare in particolare il caso  $V \rightarrow c$  per incidenza normale allo specchio.*

Soluzione

Consideriamo il sistema  $K'$ , in cui lo specchio è a riposo, e il sistema del laboratorio  $K$ . Siano  $\alpha'_1$  e  $\alpha'_2$  gli angoli compresi fra i vettori d'onda  $\mathbf{k}'_1$  e  $\mathbf{k}'_2$ , delle onde incidente e riflessa, e la direzione della velocità  $\mathbf{V}$  dello specchio. Siano  $\omega'_1$  e  $\omega'_2$  le frequenze prima e dopo la riflessione. Le analoghe quantità in  $K$  saranno indicate con lo stesso simbolo ma senza l'apice. In  $K'$  valgono le leggi dell'ottica geometrica

$$\omega'_1 = \omega'_2 \equiv \omega', \quad \alpha'_2 = \pi - \alpha'_1$$

e quindi  $\cos \alpha'_2 = -\cos \alpha'_1$ .

Possiamo ora esprimere  $\omega'$  in funzione di  $\omega$  e  $\cos \alpha'$  in funzione di  $\cos \alpha$

$$\omega' = \omega \gamma (1 - \beta \cos \alpha), \quad \cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha}$$

ottenendo le due equazioni

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \gamma\omega_1(1 - \beta \cos \alpha_1) = \omega'_2 = \gamma\omega_2(1 - \beta \cos \alpha_2) \\ \cos \alpha'_1 &= \frac{\cos \alpha_1 - \beta}{1 - \beta \cos \alpha_1} = -\cos \alpha'_2 = -\frac{\cos \alpha_2 - \beta}{1 - \beta \cos \alpha_2}.\end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni per  $\omega_2$  e  $\cos \alpha_2$ , troviamo la soluzione

$$\cos \alpha_2 = -\frac{(1 + \beta^2) \cos \alpha_1 - 2\beta}{1 - 2\beta \cos \alpha_1 + \beta^2}, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{1 - 2\beta \cos \alpha_1 + \beta^2}{1 - \beta^2}. \quad (5.28)$$

Quando  $\beta \rightarrow 1$ , per incidenza normale ( $\cos \alpha_1 = 1$ ,  $\cos \alpha_2 = -1$ ), si ottiene  $\omega_2 \rightarrow 0$ , se lo specchio si allontana dalla sorgente ( $\beta = +1$ ), mentre  $\omega_2 \rightarrow \infty$ , se lo specchio si avvicina alla sorgente ( $\beta = -1$ ).

## 5.5 Soluzioni particolari dell'equazione d'onda

Abbiamo visto che la condizione di Lorentz (5.2) e l'equazione d'onda (5.3) impongono che le funzioni  $f^i(k)$ , che compaiono nell'integrale di Fourier

$$A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k f^i(k) e^{-ik_j x^j}, \quad (5.29)$$

soddisfino la condizione (5.11)

$$f^i(k) = g^i(k) \delta(k^2), \quad (5.30)$$

Ricordiamo ora la relazione (2.57)

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{1}{|g'(b_i)|} \delta(x - b_i)$$

dove  $b_i$  sono le radici semplici dell'equazione  $g(x) = 0$ , cui soddisfa la funzione  $\delta$  di Dirac e che ci permette di scrivere

$$\delta(k^2) = \delta[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2] = \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left( \delta(k^0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k^0 + |\mathbf{k}|) \right) \quad (5.31)$$

L'equazione (5.29) diventa allora

$$\begin{aligned}A^i(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4k}{2|\mathbf{k}|} \left( \delta(k^0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k^0 + |\mathbf{k}|) \right) g^i(k^0, \mathbf{k}) e^{-ik_j x^j} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[ g^i(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}) e^{-i|\mathbf{k}|ct} + g^i(-|\mathbf{k}|, \mathbf{k}) e^{i|\mathbf{k}|ct} \right] \quad (5.32)\end{aligned}$$

Se definiamo

$$g_{\pm}^i(\mathbf{k}) = g^i(\pm|\mathbf{k}|, \mathbf{k}) \quad (5.33)$$

possiamo scrivere

$$A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ g_+^i(\mathbf{k}) e^{-i|\mathbf{k}|ct} + g_-^i(\mathbf{k}) e^{i|\mathbf{k}|ct} \right] \quad (5.34)$$

dove  $g_{\pm}^0(\mathbf{k})$  sono determinate dalla condizione  $k_i g^i = 0$ .

Supponiamo che le condizioni iniziali siano date sull'iperpiano  $t = 0$ , cioè si conoscano  $A^i(0, \mathbf{x})$  e  $\partial A^i(0, \mathbf{x})/\partial t$  necessarie entrambe perchè l'equazione d'onda è del secondo ordine nel tempo. Allora la soluzione particolare dell'equazione d'onda, che soddisfa le date condizioni iniziali, si ottiene dalle equazioni

$$A^i(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ g_+^i(\mathbf{k}) + g_-^i(\mathbf{k}) \right] \quad (5.35)$$

e

$$\frac{\partial A^i(0, \mathbf{x})}{\partial t} = -\frac{ic}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ g_+^i(\mathbf{k}) - g_-^i(\mathbf{k}) \right] \quad (5.36)$$

Infatti, facendo la trasformata di Fourier in tre dimensioni di queste equazioni è possibile determinare le funzioni  $g_{\pm}^i(\mathbf{k})$  e, quindi, il quadripotenziale  $A^i(x)$  a qualsiasi istante.





## Capitolo 6

# Radiazione elettromagnetica

### 6.1 Potenziali ritardati

Vogliamo studiare il campo creato da cariche animate da un moto arbitrario e, per determinare i potenziali di questo campo, partiamo dalle equazioni di Maxwell

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i,$$

e imponiamo ai potenziali la condizione di Lorentz

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0,$$

ottenendo

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c}j^i. \quad (6.1)$$

Questa è l'equazione che definisce i potenziali di un campo elettromagnetico arbitrario e, in forma tridimensionale, otteniamo quattro equazioni, tre per le componenti di  $\mathbf{A}$  ed una per  $\varphi$ :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6.2)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (6.3)$$

Per un campo costante la (6.3) si riduce all'equazione di Poisson. La soluzione delle equazioni lineari non omogenee (6.2) e (6.3) può essere rappresentata come somma della soluzione generale delle equazioni omogenee associate, con le condizioni iniziali, e un integrale particolare delle equazioni stesse. Per trovare questo integrale particolare dividiamo tutto lo spazio in elementi di volume infinitesimi e determiniamo il campo generato da una carica in uno di questi elementi di volume. Per il principio di sovrapposizione il

campo reale sarà uguale alla somma dei campi creati da tutti gli elementi di questo tipo.

La carica  $de$  nell'elemento di volume dato è in generale una funzione del tempo perchè le cariche sono in moto e prendiamo l'origine delle coordinate nell'elemento di volume considerato. La densità di carica sarà allora  $\rho = de(t) \delta(\mathbf{R})$ , dove  $R$  è la distanza dall'origine delle coordinate. Consideriamo l'equazione (6.3) (il metodo di soluzione della (6.2) è simile) che ora diventa

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t) \delta(\mathbf{R}). \quad (6.4)$$

Al di fuori dell'origine delle coordinate la  $\delta(\mathbf{R})$  è nulla e l'equazione (6.4) coincide con l'omogenea associata, per  $R \neq 0$ ,

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (6.5)$$

Nel caso considerato,  $\varphi$  è dotata di simmetria centrale ed è funzione soltanto di  $R$  e  $t$ . Conviene riscrivere l'operatore di Laplace in coordinate sferiche e la (6.5) diventa

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

che può essere risolta facilmente ponendo  $\varphi = \chi(R, t)/R$  e ottenendo

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0,$$

che è l'equazione di D'Alembert in una sola variabile spaziale. Si tratta quindi di onde sferiche, come è evidente dalla simmetria del problema:

$$\chi = f_1 \left( t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{R}{c} \right).$$

Siamo interessati alla radiazione emessa dal sistema che, a grandi distanze, deve avere l'aspetto di un'onda che si propaga dal sistema verso l'esterno nella direzione degli  $R$  crescenti e quindi, per  $R \neq 0$

$$\varphi = \frac{\chi \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}, \quad (6.6)$$

dove  $\chi$  è per il momento arbitraria e può essere scelta in modo da ottenere il valore corretto anche nell'origine delle coordinate e quindi soddisfi l'equazione (6.4). Osserviamo che per  $R \rightarrow 0$  il potenziale tende all'infinito e che le sue derivate rispetto alle coordinate crescono più velocemente della derivata rispetto al tempo in questo limite. Perciò, quando  $R \rightarrow 0$ , si può trascurare nell'equazione (6.4) il termine  $\partial^2 \varphi / \partial t^2$  rispetto a  $\Delta\varphi$ . Allora (6.4) si riduce all'equazione di Poisson e, vicino all'origine delle coordinate,

la formula (6.6) deve coincidere con il potenziale Coulombiano, ne segue quindi che  $\chi(t) = de(t)$ , cioè

$$\varphi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}.$$

E' ora facile passare alla soluzione dell'equazione (6.2) per una distribuzione arbitraria delle cariche  $\rho(x, y, z, t)$ . E' sufficiente scrivere  $de$  come  $\rho dV$  ed integrare in tutto lo spazio. Alla soluzione dell'equazione (6.2) così ottenuta si può aggiungere una soluzione  $\varphi_0$  dell'omogenea associata che terrà conto delle condizioni iniziali. La soluzione generale è dunque

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) d^3\mathbf{r}' + \varphi_0, \quad (6.7)$$

dove

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad d^3\mathbf{r}' = dx' dy' dz',$$

e  $\mathbf{r}$  definisce il punto di osservazione mentre  $R$  è la distanza fra l'elemento di volume  $d^3\mathbf{r}'$  e il punto di osservazione nel quale vogliamo determinare il potenziale. In modo analogo si trova per il potenziale vettore

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) d^3\mathbf{r}' + \mathbf{A}_0, \quad (6.8)$$

dove  $\mathbf{A}_0$  è la soluzione dell'equazione omogenea associata. Le espressioni (6.7) e (6.8), senza  $\varphi_0$  e  $\mathbf{A}_0$ , si chiamano *potenziali ritardati*.

In pratica, le grandezze  $\varphi_0$  e  $\mathbf{A}_0$  sono determinate dalle condizioni cui devono soddisfare le equazioni in regioni molto distanti dal sistema di cariche che interagisce con un campo esterno e, in queste regioni, il campo generato dal sistema di cariche si distingue dal campo esterno soltanto per la radiazione emessa dal sistema. Questa radiazione, a grandi distanze deve avere la forma di un'onda che si propaga dal sistema verso l'esterno, nella direzione degli  $R$  crescenti, e questa condizione è soddisfatta dai potenziali ritardati, mentre  $\varphi_0$  e  $\mathbf{A}_0$  debbono essere identificati con il campo esterno agente sul sistema.

## 6.2 Potenziali di Lienard-Wiechert

Applichiamo le formule (6.7) e (6.8) al campo creato da una carica animata di un moto arbitrario. In questo caso le espressioni integrande nei potenziali ritardati possono essere diverse da zero solo in punti isolati. Più precisamente, è facile vedere che ad ogni istante esse sono diverse da zero solo in un punto dello spazio. A questo scopo, prendiamo un punto  $P$  di coordinate

$x, y, z$  e un istante di osservazione  $t$  come origine di un sistema quadridimensionale di coordinate e costruiamo il cono di luce relativamente all'evento  $P$ . La falda inferiore di questo cono, che racchiude la regione del passato assoluto rispetto ad  $P$ , è il luogo geometrico dei punti tali che un segnale luminoso emesso da questi punti raggiunge il punto di universo  $P$ . I punti di intersezione di questa "superficie" con la linea di universo descritta dalla carica sono evidentemente i punti di universo dove le espressioni integrande in (6.7) e (6.8) sono diverse da zero. Ma, poichè la velocità di una particella è sempre più piccola della velocità della luce, l'angolo che la sua linea di universo forma in ogni punto con l'asse del tempo è minore di quello formato dalla superficie del cono del passato. Di conseguenza, è chiaro che la linea di universo della particella può intersecare la falda inferiore del cono di luce solo in un punto. L'istante  $t'$  corrispondente a questo punto è definito dall'equazione

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t, \quad (6.9)$$

dove  $t$  è l'istante di osservazione e  $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  la distanza della carica dal punto di osservazione che è quindi una funzione nota del tempo. Per una carica puntiforme sarà possibile estrarre il fattore  $1/R$  dagli integrali dei potenziali ritardati ma non si potrà rimpiazzare l'integrale di  $\rho$  con il valore della carica  $e$  perchè, a diversi punti del dominio di integrazione, corrispondono istanti diversi  $t - R/c$ . Potremmo farlo solo se la carica fosse a riposo all'istante  $t'$  definito dalla (6.9).

Nel sistema di riferimento di quiete della particella nell'istante  $t'$ , il campo nel punto di osservazione all'istante  $t$  è dato semplicemente dal potenziale Coulombiano

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A} = 0. \quad (6.10)$$

Le espressioni dei potenziali in un sistema di riferimento arbitrario si possono ottenere scrivendo un quadrivettore  $A^i$  tale che, per  $\mathbf{v} = 0$ , dia le formule (6.10). Costruiamo allora un quadrivettore  $R^k = [c(t - t'), \mathbf{R}]$  che, per la (6.9), è di genere luce:  $R_k R^k = 0$  e, con il quale possiamo costruire l'invariante

$$R_k u^k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c} \right).$$

Troviamo allora l'espressione per  $A^i$

$$A^i = e \frac{u^i}{R_k u^k} \quad (6.11)$$

che, nel limite  $\mathbf{v} = 0$ , ridà le (6.10).

In notazione tridimensionale, i potenziali del campo creato da una carica

puntiforme in moto arbitrario sono

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c \left(R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}\right)}, \quad (6.12)$$

dove tutte le grandezze nei secondi membri delle uguaglianze debbono essere prese nell'istante  $t'$  definito dalla (6.9). I potenziali del campo nella forma (6.12) sono detti *potenziali di Lienard-Wiechert*.

### 6.3 Campi di Lienard-Wiechert

Per calcolare le intensità dei campi elettrico e magnetico dalle relazioni

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

bisogna derivare  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  rispetto alle coordinate  $x, y, z$  del punto  $P$  ed al tempo di osservazione  $t$ . Le formule (6.12) esprimono però i potenziali come funzioni di  $t'$  e la relazione (6.9) permette di esprimerli come funzioni implicite di  $x, y, z, t$ . Per esempio, la derivata di  $R$  rispetto a  $t$  deve essere fatta nel modo seguente

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t},$$

dove, per ottenere  $\partial R / \partial t'$ , abbiamo derivato l'identità  $R^2 = \mathbf{R}^2$  e sostituito  $\partial \mathbf{R} / \partial t' = -\mathbf{v}(t')$  perchè  $\mathbf{R}$  è il raggio vettore dalla carica  $e$  verso il punto  $P$ , e non il viceversa.

Per calcolare  $\partial t' / \partial t$  sarebbe sufficiente derivare la relazione (6.9) ma è più istruttivo e chiaro usare il formalismo quadridimensionale. Il punto d'universo occupato dalla carica in moto arbitrario è caratterizzato dal quadri-vettore  $x'^i = (ct', \mathbf{r}')$ , mentre i potenziali sono riferiti al punto  $x^i = (ct, \mathbf{r})$ , e abbiamo definito il quadri-vettore

$$R^i = x^i - x'^i$$

che soddisfa la condizione

$$R_i R^i = 0$$

equivalente alla (6.9). La linea d'universo descritta dalla carica può essere data mediante le equazioni parametriche

$$x'^i = x'^i(s)$$

dove  $s/c$  è il tempo proprio misurato da un orologio in moto con la carica. Evidentemente

$$\frac{\partial R^i}{\partial s} = -\frac{\partial x'^i}{\partial s} = -u^i$$

e, se dobbiamo derivare rispetto a  $x^i$  una funzione delle coordinate  $x^i$  e  $x'^i$ , dobbiamo in primo luogo derivare rispetto a  $x^i$  che compare esplicitamente nella funzione e quindi formare la derivata rispetto ad  $s$  e moltiplicarla per  $\partial s / \partial x^i$ . Avremo quindi che

$$\frac{\partial R^i}{\partial x^k} = \delta_k^i - u^i \frac{\partial s}{\partial x^k}$$

e la condizione che  $R^i$  sia di genere luce permette di ottenere  $\partial s / \partial x^k$ . Infatti

$$\frac{\partial(R_i R^i)}{\partial x^k} = 2R_i \frac{\partial R^i}{\partial x^k} = 2R_i \left( \delta_k^i - u^i \frac{\partial s}{\partial x^k} \right) = 0$$

e otteniamo l'importante relazione

$$\frac{\partial s}{\partial x^k} = \frac{R_k}{R_i u^i}. \quad (6.13)$$

Ricordiamo ora che  $ds = c dt' \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , la (6.13) diventa

$$\frac{\partial t'}{\partial x^k} = \frac{1}{c} \frac{R_k}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}}$$

e, prendendo  $k = 0$ , si ricava

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}}. \quad (6.14)$$

mentre, per  $k = \alpha$ , si ha il trivettore

$$\nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}}. \quad (6.15)$$

perchè  $R_k = (c(t - t'), -\mathbf{R})$ .

Ritorniamo ora al formalismo tridimensionale. In realtà non sarebbe difficile ottenere, con l'aiuto della (6.13), il gradiente dei potenziali (6.11) e il tensore elettromagnetico del campo creato dalla carica in moto risolvendo così il nostro problema. Sarebbe anche facile mostrare che  $\square A^i = 0$  ovunque al di fuori del punto occupato dalla carica. La parte più lunga e noiosa del calcolo riguarderebbe il passaggio dalle formule quadridimensionali, semplici e compatte, alla espressione esplicita di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Nel seguente problema si mostrerà come si esegue il calcolo esplicito dei campi partendo dai potenziali di Lienard-Wiechert.

*Problema. Determinare il campo elettrico e magnetico che risultano dai potenziali di Lienard-Wiechert.*

Soluzione

Per il calcolo dei campi conviene porre

$$\chi = R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}$$

allora, dalle (6.12), si ha

$$\varphi = \frac{e}{\chi} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\chi}, \quad (6.16)$$

e le equazioni (6.14) e (6.15) diventano

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{\chi}, \quad \nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\chi}. \quad (6.17)$$

Per il calcolo del campo elettrico ci servirà anche conoscere

$$-\nabla\varphi = \frac{e}{\chi^2}\nabla\chi = \frac{e}{\chi^2}\left[\hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\partial\chi}{\partial t'}\nabla t'\right]$$

e

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{e}{c^2}\left(\frac{\mathbf{a}}{\chi} - \frac{\mathbf{v}}{\chi^2}\frac{\partial\chi}{\partial t'}\right)\frac{\partial t'}{\partial t},$$

dove  $\mathbf{a} = \partial\mathbf{v}/\partial t'$ . E' ora facile calcolare il campo elettrico

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi,$$

se, dalla equazione (6.17), calcoliamo prima

$$\frac{\partial\chi}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{v}^2}{c} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c}.$$

Otteniamo infine

$$\frac{\chi^3}{e}\mathbf{E} = \left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\mathbf{R}}{c^2} \times \left[\left(\mathbf{R} - R\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{a}\right]. \quad (6.18)$$

Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  si calcolerà nello stesso modo:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{e}{c}\nabla \times \frac{\mathbf{v}}{\chi} =$$

$$\frac{e}{c\chi}\left(\nabla t' \times \mathbf{a} - \frac{1}{\chi}\nabla\chi \times \mathbf{v}\right)$$

dove

$$\nabla\chi = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\partial\chi}{\partial t'}\nabla t',$$

trovando infine

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E}.$$

Nella equazione (6.18) tutte le grandezze del secondo membro sono prese all'istante  $t'$  e lo stesso si deve fare per il campo magnetico che risulta ovunque perpendicolare al campo elettrico.

---

Il campo elettrico (6.18), che possiamo riscrivere nella forma più illuminante

$$\mathbf{E} = \frac{e}{(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \left\{ (1 - v^2/c^2) \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) + \frac{\mathbf{R}}{c^2} \times \left[ \left( \mathbf{R} - R\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{a} \right] \right\} \quad (6.19)$$

è composto di due termini di carattere diverso. Il primo dipende solo dalla velocità della particella, e non dalla sua accelerazione, e a grandi distanze va come  $1/R^2$ . Il secondo termine dipende dall'accelerazione e varia come  $1/R$  per  $R$  grandi. Mentre il primo termine è il campo elettrico creato da una carica in moto uniforme e si ottiene dal campo Coulombiano con una trasformazione di Lorentz, il secondo termine è legato alle onde elettromagnetiche irradiate dalla particella.

## 6.4 Decomposizione spettrale

Ogni onda può essere sottoposta alla cosiddetta decomposizione spettrale, cioè può essere rappresentata sotto forma di sovrapposizione di onde monocromatiche di diversa frequenza. Consideriamo il caso più semplice, cioè la decomposizione di un campo periodico, ma non periodico semplice. In questo caso si ha lo sviluppo in serie di Fourier che contiene tutte le frequenze multipli interi della frequenza fondamentale  $\omega_0 = 2\pi/T$ , dove  $T$  è il periodo del campo e, se  $f(t)$  è una grandezza che determina il campo, essa è della forma

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega_0 t}. \quad (6.20)$$

Le grandezze  $f_n$  possono essere determinate, a partire dalla funzione  $f$ , calcolando gli integrali

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega_0 t} dt, \quad (6.21)$$

e, se la funzione  $f(t)$  è reale, devono soddisfare la condizione di realtà

$$f_{-n} = f_n^* \quad (6.22)$$

per l'equazione (6.20).

Quando si prende la media nel tempo del quadrato del campo, per calcolare per esempio l'intensità media dell'onda, nel quadrato della somma (6.20) i prodotti di termini con frequenze diverse si annullano prendendo la media, e restano solo termini del tipo  $f_n f_{-n} = |f_n|^2$ . La media del quadrato del campo sarà quindi rappresentata dalla somma delle intensità delle componenti monocromatiche

$$\bar{f}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2, \quad (6.23)$$



perchè il valore medio rispetto al periodo della funzione periodica  $f(t)$  è nullo, cioè  $f_0 = \bar{f} = 0$ .

In altri casi, per esempio per la radiazione emessa negli urti di particelle cariche, i campi devono essere sviluppati in integrali di Fourier perchè contengono uno spettro continuo di frequenze diverse. Per la funzione  $f(t)$ , che in genere si annulla per  $t \rightarrow \pm\infty$ , lo sviluppo diventa

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (6.24)$$

dove le componenti di Fourier sono determinate dagli integrali

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (6.25)$$

La condizione di realtà di  $f(t)$  diventa

$$f_{-\omega} = f_{\omega}^*, \quad (6.26)$$

e l'intensità totale dell'onda, cioè l'integrale di  $f^2$  rispetto al tempo, può essere facilmente espressa tramite le intensità delle componenti di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (6.27)$$

Il campo creato da cariche in moto arbitrario può essere decomposto in onde monocromatiche. Cominciamo dalla decomposizione spettrale del potenziale scalare

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d^3\mathbf{r}', \quad (6.28)$$

dove  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e, il suo modulo, è la distanza tra l'elemento di volume  $dx' dy' dz'$  e il punto di osservazione nel quale vogliamo determinare il potenziale. Calcoliamo ora la trasformata di Fourier di  $\varphi$ ,  $\varphi_{\omega}$ , dalla (6.25) si ottiene

$$\varphi_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (6.29)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega} &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} e^{i\omega t} dt d^3\mathbf{r}' = \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} e^{i\omega(t' + R/c)} dt' d^3\mathbf{r}', \end{aligned}$$

con il cambiamento di variabile  $t' = t - R/c$ , e quindi

$$\varphi_{\omega} = \int \rho_{\omega} \frac{e^{ikR}}{R} d^3\mathbf{r}' \quad (6.30)$$

introducendo il modulo del vettore d'onda  $k = \omega/c$ . Analogamente per il potenziale vettore la decomposizione spettrale è

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} d^3\mathbf{r}' \quad (6.31)$$

e notiamo che le equazioni (6.30) e (6.31) potevano essere ottenute molto semplicemente sostituendo, nelle formule dei potenziali ritardati,  $\varphi$  e  $\rho$  con  $\varphi_\omega \exp(-i\omega t)$  e  $\rho_\omega \exp(-i\omega t)$ , rispettivamente, e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{j}$  con  $\mathbf{A}_\omega \exp(-i\omega t)$  e  $\mathbf{j}_\omega \exp(-i\omega t)$ . Una componente monocromatica del campo è determinata dalle componenti corrispondenti della densità di carica e della corrente. Vedremo, nel prossimo paragrafo, come queste espressioni si semplifichino se sono soddisfatte alcune condizioni.

## 6.5 Campo nella zona delle onde

Per il calcolo del campo di radiazione che un sistema di cariche in moto crea a distanze molto maggiori delle dimensioni del sistema, scegliamo un sistema di riferimento con l'origine delle coordinate  $O$  in un punto interno al sistema di cariche. Indichiamo con  $\mathbf{R}_0$  il raggio vettore che va da  $O$  al punto di osservazione  $P$  del campo e con  $\hat{\mathbf{n}}$  il vettore unitario in questa direzione,  $\mathbf{R}_0 = R_0 \hat{\mathbf{n}}$ . Sia anche  $\mathbf{r}$  il raggio vettore dell'elemento di carica  $de = \rho dV$  ed  $\mathbf{R}$  il raggio vettore dall'elemento di carica al punto  $P$ . Avremo quindi  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$  e, se  $R_0 \gg r$  si ha approssimativamente

$$R = \sqrt{(R_0 \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{r})^2} = R_0 \sqrt{1 - 2 \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}{R_0} + \frac{r^2}{R_0^2}} \approx R_0 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}.$$

Quando sostituiamo questa espressione nei potenziali ritardati possiamo trascurare  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}$  nella  $R$  a denominatore ma la possibilità di approssimare il tempo ritardato  $t - R/c$  dipende da quanto variano  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  nel tempo  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}/c$ .

A distanze sufficientemente grandi dal sistema di cariche, il campo può essere considerato, in regioni piccole dello spazio, come un'onda piana. Le distanze però devono essere grandi non soltanto rispetto alle dimensioni del sistema ma anche rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica irraggiata dal sistema. Una tale regione del campo è detta *zona delle onde* di radiazione. I campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono legati fra di loro dalla relazione <sup>1</sup>  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}}$  e, siccome  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , per determinare completamente il campo nella zona delle onde è sufficiente calcolare il potenziale vettore. Per un'onda piana, il potenziale vettore è funzione soltanto di  $t - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R}/c$  e quindi

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \left( t - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{A}}{d(t - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R}/c)} =$$

<sup>1</sup>Ora le superfici d'onda sono piani perpendicolari a  $\mathbf{R}$  ma, a grandi distanze, i versori di  $\mathbf{R}$  e di  $\mathbf{R}_0$  si possono considerare gli stessi.

$$= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (6.32)$$

dove abbiamo indicato con  $\dot{\mathbf{A}}$  la derivata di  $\mathbf{A}$  rispetto al tempo ritardato e Riassumendo, il campo magnetico e il campo elettrico sono espressi tramite il potenziale vettore dalle equazioni

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \mathbf{n}. \quad (6.33)$$

Il problema resta però molto difficile, negli integrali che danno i potenziali ritardati, la densità di carica e di corrente dipendono dal tempo ritardato  $t - R_0/c + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}/c$  ed in  $\mathbf{r}$  compaiono le variabili di integrazione. Chiediamoci quindi in quali condizioni il tempo  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}/c$  possa essere trascurato nelle espressioni integrande dei potenziali ritardati. E' evidentemente necessario che la distribuzione di cariche vari di poco in questo intervallo di tempo e, se  $T$  è il periodo della radiazione emessa dal sistema di cariche,  $T$  rappresenta anche l'ordine di grandezza del tempo durante il quale la distribuzione di cariche varia sensibilmente. Se indichiamo con  $a$  la dimensione del sistema, come ordine di grandezza, allora la condizione cercata diventa

$$\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}{c} \sim \frac{a}{c} \ll T.$$

Ma  $cT$  non è altro che la lunghezza d'onda della radiazione e questa condizione diventa

$$a \ll \lambda,$$

cioè le dimensioni del sistema debbono essere piccole rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione emessa che, a sua volta, deve essere piccola rispetto alla distanza del punto di osservazione per trovarsi nella zona delle onde. Se  $v$  è la velocità delle cariche, allora  $T \sim a/v$  e possiamo riscrivere questa condizione nella forma

$$v \ll c, \quad (6.34)$$

cioè il moto delle cariche deve essere non relativistico.

## 6.6 Radiazione di dipolo

Se la condizione (6.34) è soddisfatta e ci poniamo a distanze dal sistema di cariche grandi rispetto alla lunghezza d'onda e, a maggior ragione, alle dimensioni del sistema, allora il potenziale vettore assume la forma semplice

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t - R_0/c) d^3\mathbf{r} \quad (6.35)$$

e il tempo ritardato non dipende più dalle variabili di integrazione. Sostituendo in (6.35)  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \sum_a e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$  otteniamo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \sum e \mathbf{v},$$

dove le grandezze nei secondi membri delle uguaglianze, qui e nel seguito, verranno prese all'istante  $t - R_0/c$ . Poichè

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

dove  $\mathbf{d}$  è il momento di dipolo elettrico del sistema di cariche, otteniamo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}. \quad (6.36)$$

Le formule (6.33) e (6.36) permettono di calcolare il campo magnetico

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (6.37)$$

Le onde elettromagnetiche emesse dal sistema trasportano una certa energia il cui flusso è dato dal vettore di Poynting che in un'onda piana vale

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n} = c \frac{B^2}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}$$

L'intensità  $dI$  di radiazione nell'elemento di angolo solido  $do$  viene determinata come quantità di energia che attraversa nell'unità di tempo l'elemento  $df = R_0^2 do$  di una superficie sferica con centro nell'origine delle coordinate e con raggio  $R_0$ . Questa quantità è uguale alla densità di flusso di energia  $S$  moltiplicata per  $df$ , cioè a

$$dI = c \frac{B^2}{4\pi} R_0^2 do. \quad (6.38)$$

Siccome il campo  $B$  è inversamente proporzionale ad  $R_0$ , ne segue che la quantità di energia irradiata dal sistema nell'unità di tempo nell'elemento di angolo solido  $do$  è uguale per tutte le distanze (essendo uguali per queste distanze le differenze  $t - R_0/c$ ). E' ovvio che deve essere proprio così, poichè l'energia irradiata dal sistema si propaga nello spazio circostante con la velocità  $c$ , senza pozzi nè sorgenti.

Notiamo che, nell'approssimazione considerata, la radiazione è determinata dalla derivata seconda del momento di dipolo del sistema e, per tale motivo, è detta radiazione di *dipolo*. Siccome  $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\ddot{\mathbf{v}}$ , le cariche emettono radiazioni soltanto se compiono un moto accelerato. Per il principio di relatività, una carica in moto uniforme è in quiete in un opportuno sistema di riferimento inerziale e le cariche ferme non irradiano.

Sostituendo la (6.37) nella (6.38), otteniamo l'intensità della radiazione di dipolo

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{n}})^2 do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta do, \quad (6.39)$$

dove  $\theta$  è l'angolo compreso fra i vettori  $\ddot{\mathbf{d}}$  ed  $\hat{\mathbf{n}}$ . Tale è la quantità di energia irradiata dal sistema di cariche nell'unità di tempo e nell'elemento di angolo solido  $do$ . Notiamo che la distribuzione angolare della radiazione è data dal fattore  $\sin^2 \theta$ .

Sostituendo  $do = 2\pi \sin \theta d\theta$  ed integrando rispetto a  $d\theta$  nell'intervallo da 0 a  $\pi$ , otteniamo la radiazione totale

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \quad (6.40)$$

Se consideriamo una sola carica che si muove in un campo esterno, allora  $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$ , dove  $\mathbf{w}$  è l'accelerazione della carica e la radiazione totale emessa dalla carica è

$$I = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \quad (6.41)$$

Notiamo che un sistema chiuso costituito da particelle, aventi lo stesso rapporto fra le cariche e le rispettive masse, non può emettere radiazione di dipolo perchè

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{costante} \sum m\mathbf{r},$$

ma  $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R} \sum m$ , dove  $\mathbf{R}$  è il raggio vettore del centro di massa del sistema (siccome  $v \ll c$  la meccanica non relativistica è applicabile) e quindi  $\ddot{\mathbf{d}}$  è proporzionale all'accelerazione del centro di massa che è nulla.

Parlando della distribuzione spettrale dell'intensità di radiazione, è necessario distinguere la trasformata dalla serie di Fourier. Si ha la trasformata di Fourier quando la radiazione è dovuta ad urti di particelle cariche. In questo caso è interessante determinare la quantità totale di energia irradiata durante l'urto (e rispettivamente quella perduta dalle particelle collidenti). Sia  $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}$  l'energia irradiata nell'elemento di angolo solido  $do$  nella direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  sotto forma di onde con frequenze comprese nell'intervallo  $d\omega$ . Dal paragrafo della decomposizione spettrale, la frazione di radiazione totale relativa all'intervallo di frequenza  $d\omega/2\pi$  si ricava dall'espressione ordinaria dell'intensità sostituendo il quadrato del campo con il quadrato modulo della sua componente di Fourier e moltiplicando quindi per due. In luogo della (6.38) si ha quindi

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{B}_\omega|^2 R_0^2 do \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (6.42)$$

Per l'energia  $d\mathcal{E}_\omega$  emessa durante tutto il tempo dell'urto e in tutte le direzioni sotto forma di onde comprese nell'intervallo  $d\omega/2\pi$ , è sufficiente sostituire nella (6.40) il vettore  $\ddot{\mathbf{d}}$  con la sua componente di Fourier  $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$  e moltiplicare per due

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Poichè

$$\ddot{\mathbf{d}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}_{\omega}(-\omega^2)e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

avremo  $\ddot{\mathbf{d}}_{\omega} = -\omega^2 \mathbf{d}_{\omega}$  e otteniamo

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (6.43)$$

dove

$$\mathbf{d}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d} e^{i\omega t} dt.$$

Se le cariche compiono un moto periodico il campo della radiazione deve essere sviluppato in serie di Fourier. L'intensità di una singola componente dello sviluppo in serie di Fourier si deduce dall'espressione ordinaria dell'intensità sostituendo il campo con la sua componente di Fourier e moltiplicando quindi per due. L'intensità della radiazione di frequenza  $\omega = n\omega_0$ , dove  $\omega_0$  è la frequenza fondamentale, è allora della forma

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2. \quad (6.44)$$

Riprendiamo l'equazione (6.41) che, essendo  $I = d\mathcal{E}/dt$ , può essere riscritta nella forma

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} w^2 dt, \quad (6.45)$$

e poniamoci il problema di calcolare l'impulso totale irraggiato. Anche se la risposta è immediata, dalla forma del vettore di Poynting nell'approssimazione di dipolo, facciamo un calcolo esplicito. Integrando su tutto il volume l'equazione

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} = - \frac{\partial T^{\alpha \beta}}{\partial x^{\beta}},$$

che deriva dalla conservazione del quadri-impulso del campo di radiazione, si ha

$$\frac{\partial P^{\alpha}}{\partial t} = - \oint \sigma_{\alpha \beta} df_{\beta},$$

dove  $df_{\beta} = R_0^2 n_{\beta} d\Omega$ , con  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0$ , e l'integrale a secondo membro è esteso ad una superficie sferica chiusa. Ma

$$\sigma_{\alpha \beta} = \frac{1}{4\pi} [-E_{\alpha} E_{\beta} - B_{\alpha} B_{\beta} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha \beta} (E^2 + B^2)]$$

e

$$\sigma_{\alpha \beta} n_{\beta} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} n_{\alpha} = \frac{B^2}{4\pi} n_{\alpha}.$$

Otteniamo, in approssimazione di dipolo, dalla (6.37)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{1}{4\pi c^4} \oint \hat{\mathbf{n}}(\ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{n}})^2 d\omega.$$

Si ha  $(\ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{n}})^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\ddot{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2$  e, essendo <sup>2</sup>

$$\oint n_\alpha d\omega = 0 \quad \text{e} \quad \oint n_\alpha n_\beta n_\gamma = 0,$$

avremo per l'impulso totale irraggiato

$$d\mathbf{P} = 0. \quad (6.46)$$

*Problema 1. Determinare, in approssimazione di dipolo, la radiazione emessa da un dipolo  $\mathbf{d}$  che ruota in un piano con velocità angolare costante  $\Omega$ .*

Soluzione

Supponiamo che il dipolo ruoti nel piano  $xy$  e quindi sia  $\mathbf{d} = d(\cos \Omega t, \sin \Omega t, 0)$ , funzione periodica semplice del tempo. La radiazione emessa avrà la stessa frequenza e l'equazione (6.39) ci permetterà di calcolarla nella direzione del versore  $\hat{\mathbf{n}}$ , che forma un angolo  $\alpha$  con l'asse  $z$ . Scegliendo il versore  $\hat{\mathbf{n}}$  nel piano  $yz$ ,  $\hat{\mathbf{n}} = (0, \sin \alpha, \cos \alpha)$ , troviamo

$$(\ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{n}})^2 = d^2 \Omega^4 [\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2(\Omega t)]. \quad (6.47)$$

Per calcolare la distribuzione angolare della radiazione, mediata su un periodo di rotazione del dipolo, facciamo la media nel tempo della (6.47) ottenendo

$$\overline{dI} = \frac{d^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \alpha) d\omega \quad (6.48)$$

e, per l'intensità totale,

$$\bar{I} = \frac{2d^2 \Omega^4}{3c^3} \quad (6.49)$$

Dalle equazioni (6.33) e (6.37) otteniamo la polarizzazione della radiazione che è determinata dalla direzione del campo elettrico  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0^2} (\ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}}.$$

La direzione di  $\mathbf{E}$  è determinata dal vettore  $(-\cos \Omega t, \sin \Omega t \cos^2 \alpha, \sin \Omega t \sin \alpha \cos \alpha)$ . La proiezione di questo vettore sul piano  $yz$  ha un modulo pari a  $\sin \Omega t \cos \alpha$ , mentre la sua componente lungo  $x$  ha lunghezza  $\cos \Omega t$ . La polarizzazione è ellittica con

<sup>2</sup>L'integrale su tutto l'angolo solido del prodotto delle componenti di un versore non può dipendere dalla direzione e sarà esprimibile tramite il tensore unità in tre dimensioni  $\delta_{\alpha\beta}$  se il numero di componenti è pari, altrimenti è nullo.

rapporto fra le lunghezze dei semiassi pari a  $\cos \alpha$ . La radiazione nella direzione dell'asse  $z$ ,  $\cos \alpha = 1$ , è polarizzata circolarmente.

Notiamo che la soluzione di questo problema si applica anche al caso di una carica che si muove di moto circolare in un campo magnetico uniforme e costante  $\mathbf{B}$ , con velocità piccola rispetto a quella della luce. In questo caso l'accelerazione della carica è

$$\mathbf{w} = \frac{e}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

e  $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$ .

*Problema 2. Determinare, in approssimazione di dipolo, l'intensità della radiazione emessa da una particella carica investita da un'onda elettromagnetica piana polarizzata linearmente.*

Soluzione

Consideriamo un'onda piana, monocromatica e polarizzata linearmente. Se il moto della carica deve essere non relativistico, il campo elettrico  $\mathbf{E}$  sarà debole e la forza di Lorentz dovuta al campo magnetico,  $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c$ , trascurabile. L'accelerazione della carica è allora

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

e

$$\ddot{\mathbf{d}} = e \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Secondo l'equazione (6.39), la potenza irradiata è

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \hat{\mathbf{n}} \right)^2 do = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta do$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra la direzione dell'onda diffusa (il versore  $\hat{\mathbf{n}}$ ) e la direzione del campo elettrico  $\mathbf{E}$  dell'onda incidente. Se lo spostamento della particella in un periodo è trascurabile, rispetto alla lunghezza d'onda dell'onda incidente, possiamo dimenticare il fattore  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  e il valor medio nel tempo di  $(d\mathbf{v}/dt)^2$  diventa

$$\left\langle \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} = \frac{e^2}{2m^2} |E_0|^2$$

e così

$$dI = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} |E_0|^2 \sin^2 \theta do.$$

Il flusso di energia media incidente, per unità di tempo e unità d'area perpendicolare all'onda incidente, è dato dalla media del vettore di Poynting

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} |E_0|^2.$$

Definiamo la *sezione d'urto differenziale*,  $d\sigma/do$ , come il rapporto fra la potenza irradiata per unità di angolo solido e la potenza del flusso incidente per unità d'area

$$\frac{d\sigma}{do} = \frac{dI}{\langle S \rangle do} = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta. \quad (6.50)$$



Per un elettrone, la grandezza  $e^2/m_e c^2 \approx 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$  è chiamata raggio classico dell'elettrone e indicata con  $r_e$ . Se scegliamo l'asse  $z$  secondo  $\mathbf{E}_0$ , integrando la (6.50) su tutto l'angolo solido, si ottiene la *formula di Thomson* per la sezione d'urto totale

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2.$$

Per un elettrone  $\sigma \approx 0.66 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \approx 0.66 \text{ barn}$ .

*Problema 3. Determinare l'energia irradiata, nella zona delle onde, da una carica che ha subito una accelerazione istantanea. La velocità della carica non è supposta piccola rispetto alla velocità della luce.*

Soluzione

L'energia irradiata nell'elemento di angolo solido  $do$  sotto forma di onde con frequenza compresa nell'intervallo  $d\omega$  è data dall'equazione (6.42)

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{B}_\omega|^2 R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi}$$

ed in essa dobbiamo sostituire la trasformata di Fourier del campo magnetico

$$\mathbf{B}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B} e^{i\omega t} dt. \quad (6.51)$$

Ricordiamo che  $\mathbf{B} = \dot{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{n}}/c$ , dalla (6.32), e cerchiamo la forma assunta da  $\mathbf{A}$  per una carica che cambia improvvisamente la sua velocità, per esempio per effetto di un urto. Supponiamo che questo cambiamento del moto abbia luogo per  $t = 0$  nell'origine delle coordinate, allora

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}_1 t & \text{per } t < 0 \\ \mathbf{v}_2 t & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

con  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  vettori costanti, e

$$\mathbf{a}(t) = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \delta(t) \quad (6.52)$$

dove  $\delta(t)$  è la funzione delta di Dirac. Nella zona delle onde,  $\dot{\mathbf{A}}$  dipende solo dall'accelerazione della carica e, per le (6.51) e (6.52),

$$\mathbf{B}_\omega = \frac{1}{c} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \hat{\mathbf{n}}$$

dove la variazione del potenziale vettore può essere espressa tramite i potenziali di Lienard-Wiechert (6.12). Otteniamo così

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \left( \frac{\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{n}}}{1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_2}{c}} - \frac{\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{n}}}{1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_1}{c}} \right)^2 d\omega d\omega \quad (6.53)$$

dove il coefficiente di  $d\omega$  non dipende dalla frequenza. Per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, la (6.53) si riduce alla radiazione di dipolo.

Se una particella carica fosse prodotta in un decadimento, nel sistema di quiete della particella che decade potremmo porre  $\mathbf{v}_1 = 0$  e  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$  e sarebbe facile determinare la distribuzione spettrale della radiazione totale emessa. Dalla (6.53) otterremmo allora

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_\omega &= d\omega \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(1 - v \cos \theta/c)^2} 2\pi \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{e^2}{\pi c} \left( \frac{c}{v} \ln \left( \frac{c+v}{c-v} \right) - 2 \right) d\omega. \end{aligned}$$

Non potremmo però ottenere da queste equazioni l'energia totale irradiata perchè l'integrale divergerebbe a grandi frequenze. Ciò è dovuto al fatto che l'ipotesi di una accelerazione iniziale infinita non è più corretta al tendere all'infinito della frequenza.

## 6.7 Cenni alla radiazione emessa da una carica in moto rapido

Le formule in approssimazione di dipolo sono state ricavate nell'ipotesi che  $v \ll c$  e quindi non sono più valide nel caso relativistico ma, se ci poniamo nel sistema di riferimento in cui la carica è istantaneamente in quiete, le formule (6.45) e (6.46) sono evidentemente applicabili e permettono, come vedremo, di generalizzarle facilmente se passiamo ad un sistema di riferimento arbitrario. E' sufficiente trovare una espressione covariante per l'irraggiamento di 4-impulso  $dP^i$  che, nel sistema di riferimento in cui la carica è istantaneamente in quiete, riduca le equazioni (6.45) e (6.46). Ricordiamo che, in questo riferimento,  $w^i w_i = -w^2/c^4$  e che, per annullare il tri-impulso irraggiato dovrà comparire la quadrivelocità della carica. Il quadri-vettore che soddisfa queste condizioni è

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} u^i ds \quad (6.54)$$

e, se calcoliamo  $dP^0$  nel sistema di riposo della carica, troviamo

$$dP^0 = \frac{2e^2}{3c^4} w^2 dt = \frac{d\mathcal{E}}{c} \quad (v \rightarrow 0)$$

mentre le componenti spaziali sono nulle. Infine, l'accelerazione  $w^k$  può essere espressa mediante il tensore elettromagnetico del campo esterno tramite le equazioni del moto

$$mc \frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c} F_{kl} u^l,$$

permettendo così di risolvere numerosi problemi in cui l'approssimazione di dipolo non è valida.

Se vogliamo invece ottenere la distribuzione angolare della radiazione emessa da una carica nel caso relativistico è conveniente ricorrere all'espressione del campo elettrico ottenuto nella formula (6.18) dai potenziali di Lienard-Wiechert. Di questa espressione terremo soltanto la parte che dipende dall'accelerazione e calcoleremo l'intensità della radiazione nell'angolo solido  $do$  dalla (6.38) scritta nella forma <sup>3</sup>

$$dI = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 do.$$

Come si può immaginare, la distribuzione angolare della radiazione nel caso generale risulta assai complicata. Ricordando, tuttavia, la presenza nel campo elettrico del denominatore  $R^3(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}/c)^3$ , si può dedurre che, se il numeratore non si annulla, una particella ultrarelativistica irradia principalmente nella stessa direzione del suo moto. Se  $1 - v/c \ll 1$ , infatti,

$$1 - \frac{v}{c} \approx \frac{\theta^2}{2},$$

e l'intensità sarà grande in un intervallo ristretto di angoli

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

---

*Problema. Determinare come varia nel tempo l'energia di una carica relativistica che si muove in un campo magnetico, costante e uniforme, e irraggia energia.*

*Soluzione*

Dall'equazione (6.54) otteniamo, per  $i = 0$ , la dipendenza dal tempo dell'energia irraggiata

$$dP^0 = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^0$$

e, usando le equazioni del moto,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^2c^3} F^{kl} u_l F_{kj} u^j.$$

Se è presente solo un campo magnetico, le componenti non nulle di  $F_{kj} u^j$  sono  $F_{\alpha\beta} u^\beta$  che danno il trivettore  $-\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ . Analogamente,  $F^{kl} u_l$  fornisce le componenti del trivettore  $\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$  e, ricordando che  $\mathbf{v}$  è sempre perpendicolare a  $\mathbf{B}$  se è presente solo un campo magnetico, otteniamo

$$F^{kl} u_l F_{kj} u^j = -\frac{v^2 B^2}{c^2(1 - v^2/c^2)} = -\frac{B^2}{m^2 c^2} \mathbf{p}^2 = -\frac{B^2}{m^2 c^4} (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4).$$

---

<sup>3</sup>Nella zona delle onde  $E^2 = B^2$ .

L'energia persa dalla particella è l'opposto dell'energia irradiata e, dall'equazione

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^4 B^2}{3m^4 c^7} (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4),$$

otteniamo integrando

$$\ln \left( \frac{\mathcal{E} - mc^2}{\mathcal{E} + mc^2} \right) = -\frac{4e^4 B^2}{3m^3 c^5} t + \text{cost.}$$

L'energia è una funzione monotona decrescente del tempo e tende asintoticamente al valore  $\mathcal{E} = mc^2$  (la particella si ferma) quando  $t \rightarrow \infty$ .

---

## Capitolo 7

# Particella in un campo gravitazionale

### 7.1 Principio di equivalenza

La massa di un corpo gode della proprietà di attrarre altre masse, massa gravitazionale, e determina anche l'inerzia di un corpo all'azione di forze esterne, massa inerte. Tutti gli esperimenti mostrano che massa inerte e massa gravitazionale possono essere identificate e che il concetto di massa assume un significato univoco. In meccanica non relativistica, il moto di una particella in un campo gravitazionale è determinato dalla Lagrangiana

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\phi$$

dove  $\phi$  è il potenziale gravitazionale. Per esempio, nel campo di un corpo di massa  $M$

$$\phi = -\frac{kM}{r}$$

dove  $k$  è detta costante gravitazionale,  $k \simeq 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Le equazioni del moto hanno la forma

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi$$

e non contengono la massa o altre proprietà caratteristiche della particella<sup>1</sup>. Questa osservazione fondamentale permette di affermare che tutti i corpi, a parità di condizioni iniziali, si muovono allo stesso modo in un campo gravitazionale.

Della stessa proprietà godono i sistemi di riferimento non inerziali. Se, da un sistema di riferimento inerziale, in cui il moto libero di tutti i corpi è

---

<sup>1</sup>L'universalità dell'accelerazione dei corpi in caduta libera è stato verificato con una precisione di una parte su mille miliardi sia per corpi nel laboratorio che per le accelerazioni gravitazionali della terra e della luna verso il sole.

rettilineo e uniforme ed è il medesimo per tutti i corpi se le condizioni iniziali sono le stesse, si passa ad un sistema di riferimento non inerziale (per esempio in moto accelerato rispetto al sistema inerziale) anche rispetto a questo sistema tutti i corpi si muoveranno nello stesso modo. Un sistema di riferimento non inerziale è equivalente alla presenza di un campo gravitazionale in un sistema di riferimento inerziale; questo è il *principio di equivalenza*.

Per esempio, in regioni sufficientemente piccole dello spazio, dove il campo gravitazionale terrestre può essere considerato uniforme, il campo gravitazionale sarà equivalente ad un sistema di riferimento uniformemente accelerato con accelerazione opposta a quella di gravità. Il moto dei corpi nei due casi sarà il medesimo.

Tale equivalenza ha però solo un carattere *locale*. I campi di forza che nascono in un sistema di riferimento non inerziale non si annullano mai all'infinito, i campi gravitazionali reali tendono a zero a distanza infinita dalle masse che li generano. Passando ad un sistema inerziale si possono eliminare i campi di forze fittizie da tutto lo spazio mentre, per un campo gravitazionale reale, questo è possibile solo in una regione sufficientemente piccola perchè in essa il campo si possa considerare uniforme. Nel caso più generale l'equivalenza si dovrebbe intendere fra il campo gravitazionale e infiniti sistemi di riferimento non inerziali diversi, uno per ogni punto dello spazio.

Anche in meccanica relativistica la massa non è presente nelle equazioni del moto per una particella in un campo gravitazionale e il principio di equivalenza resta valido. In un sistema di riferimento inerziale, la metrica che determina l'intervallo in coordinate cartesiane è diagonale:  $g_{00} = 1$ ,  $g_{\alpha\alpha} = -1$  e  $g_{ik} = 0$  per  $i \neq k$ . In un sistema di riferimento non inerziale,  $ds^2$  non sarà più esprimibile tramite i quadrati dei differenziali delle coordinate e il sistema di coordinate diventerà curvilineo. Nel quadrato dell'intervallo

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k,$$

le  $g_{ik}$  saranno funzioni del punto d'universo  $x^i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) e, potendole considerare simmetriche <sup>2</sup>, avremo in generale dieci grandezze  $g_{ik}$  distinte.

Consideriamo, per esempio, un sistema di riferimento ruotante attorno all'asse  $z$  di un sistema di riferimento inerziale con velocità angolare  $\Omega$ . Se  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sono le coordinate di un punto nel sistema di riferimento non inerziale, avremo

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \quad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \quad z = z'$$

dove, senza apici, abbiamo indicato le coordinate del punto nel sistema inerziale. Sostituendo, nella metrica dello spazio di Minkowski, i differenziali di

<sup>2</sup>Una parte antisimmetrica del tensore  $g_{ik}$  non contribuirebbe a  $ds^2$ .

queste trasformazioni, otteniamo

$$ds^2 = \left[ c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2) \right] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + \\ + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt. \quad (7.1)$$

Quale che sia la legge di trasformazione del tempo, questa espressione non può essere ridotta alla somma dei quadrati dei differenziali delle quattro coordinate  $x', y', z', t'$ .

Le proprietà geometriche dello spazio-tempo, la metrica  $g_{ik}$ , determinano i campi di forza in un sistema di riferimento non inerziale e quindi anche un campo gravitazionale reale in base al principio di equivalenza. La teoria dei campi gravitazionali basata sulla teoria della relatività è detta *relatività generale* (Einstein, 1916). In essa la metrica determina tutte le proprietà fisiche di un campo gravitazionale.

Se dal sistema di riferimento non inerziale si passa ad un sistema inerziale i campi di forza fittizi si possono eliminare in tutto lo spazio. Ciò non è vero per un campo gravitazionale reale perchè non è possibile ridurre le dieci grandezze  $g_{ik}$  ad una forma assegnata mediante la trasformazione di quattro coordinate. Tuttavia, in un punto arbitrario di uno spazio-tempo e in presenza di un campo gravitazionale questa riduzione è possibile perchè le  $g_{ik}$  diventano dei numeri nel punto dato. Un tale sistema di coordinate, per cui la metrica è quella dello spazio di Minkowski, si chiama *sistema galileiano* per il punto dato.

In forma galileiana, la metrica ha un elemento diagonale positivo e tre elementi negativi e questa proprietà determina la *segnatura* della matrice delle  $g_{ik}$ . La segnatura delle matrici è invariante per trasformazioni generali di coordinate e, in uno spazio-tempo reale, il determinante della metrica deve essere negativo

$$g = \det |g_{ik}| < 0. \quad (7.2)$$

Questa è una condizione da ricordare. E' la condizione necessaria affinché il campo gravitazionale che consideriamo sia fisicamente possibile.

In presenza di un campo gravitazionale la geometria dello spazio diventa non euclidea e, se il campo gravitazionale varia con il tempo, anche i rapporti tra le distanze varieranno con il tempo. In tal caso la disposizione di particelle di prova poste nel campo non può restare inalterata in nessun sistema di coordinate. Ciò renderà più difficile, come vedremo, definire in tutta generalità un sistema di riferimento la cui scelta rimane arbitraria. E' sempre necessario esprimere le leggi della natura in forma covariante, valida per ogni sistema di coordinate. Ora però la descrizione dei fenomeni fisici, comprese le proprietà del moto dei corpi, è diversa in tutti i diversi sistemi

di riferimento che, dobbiamo ricordarlo, non sono più sistemi di riferimento inerziali.

## 7.2 Coordinate curvilinee

Nel primo capitolo abbiamo definito vettori e tensori nello spazio tempo in tutta generalità. Ricordiamo come abbiamo definito un quadrivettore controvariante: "Si dice che un insieme di grandezze  $A^0, A^1, A^2, A^3$  rappresenta, nello spazio-tempo, un vettore controvariante  $A^i$  se, per la trasformazione di coordinate

$$x^i = x^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \quad (7.3)$$

tali grandezze trasformano come <sup>3</sup>

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'^j$$

Quindi la legge di trasformazione di un vettore controvariante è la stessa di quella che trasforma i differenziali

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j."$$

Questa definizione è corretta qualunque siano la geometria dello spazio e il sistema di coordinate scelto. Saranno corrette anche le definizioni generali di un vettore covariante e dei tensori di rango qualsiasi.

Il cambiamento sostanziale si ha nell'interpretazione della trasformazione (7.3). In teoria della relatività, in assenza di campo gravitazionale, che potremo chiamare d'ora in poi *relatività speciale o ristretta*, le trasformazioni (7.3) sono lineari e mettono in relazione le coordinate di un punto d'universo in sistemi di riferimento inerziali diversi. Ora le trasformazioni (7.3) esprimono le coordinate  $x^i$  tramite funzioni arbitrarie (non lineari) delle coordinate  $x'^i$ . Mentre, in relatività speciale, anche le coordinate  $x^i$  formano un quadrivettore ciò non si verifica più in coordinate curvilinee e solo i loro differenziali formano un quadrivettore.

Il quadrato dell'elemento di lunghezza in coordinate curvilinee è una forma quadratica dei differenziali

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (7.4)$$

dove  $g_{ik}$  sono funzioni delle coordinate, simmetriche rispetto agli indici  $i$  e  $k$

$$g_{ik} = g_{ki} \quad (7.5)$$

---

<sup>3</sup>La somma su  $j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , è sottintesa.



e formano un tensore covariante di rango due, detto *tensore metrico*. Si chiama tensore metrico controvariante il tensore inverso di  $g_{ik}$  definito dall'equazione

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j \quad (7.6)$$

dove il quadritensore unità  $\delta_i^j$  ha sempre la stessa definizione e vale uno per  $i = j$  e zero altrimenti. I tensori metrici determinano il legame fra le componenti covarianti e controvarianti di una stessa grandezza fisica:  $A_i = g_{ij}A^j$ ,  $A^i = g^{ij}A_j$ , ...

In un elemento infinitesimo di quadrivolume dello spazio tempo possiamo, per il principio di equivalenza, scegliere un sistema di riferimento galileiano per il quale le componenti del tensore metrico sono

$$g_{ik}^{(0)} = g^{ik(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Calcoliamo ora lo Jacobiano  $J$  della trasformazione dalle coordinate galileiane  $x'^i$  alle coordinate curvilinee  $x^i$ , cioè il determinante composto dalle derivate  $\partial x^i / \partial x'^k$ . Scriviamo questa trasformazione per il tensore metrico

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g^{jm(0)}$$

e eguagliamo i determinanti delle grandezze che appaiono nei due membri di questa uguaglianza. Poichè la matrice  $|g^{ik}|$  è la matrice inversa della  $|g_{ik}|$ , che ha determinante  $g$  per la (7.2), a membro sinistro troviamo  $1/g$  mentre a destra il determinante è il prodotto  $J \cdot J \cdot (-1)$ . Troviamo quindi lo Jacobiano

$$J = \frac{1}{\sqrt{-g}}. \quad (7.8)$$

In coordinate galileiane  $x'^i$ , l'elemento di volume dello spazio-tempo  $d\Omega'$  è uno scalare ma, quando si passa a coordinate curvilinee  $x^i$ , l'elemento di integrazione diventa

$$d\Omega' \Rightarrow \frac{1}{J} d\Omega = \sqrt{-g} d\Omega.$$

In coordinate curvilinee, il prodotto  $\sqrt{-g} d\Omega$  si comporta come un invariante quando lo si integra in un volume quadridimensionale. Notiamo, tuttavia che  $\int A^i \sqrt{-g} d\Omega$  su una regione finita non può essere, in generale, un quadrivettore perchè le leggi di trasformazione del vettore  $A^i$  sono diverse nei diversi punti della regione. Cambia anche la definizione dei tensori duali. Con lo stesso procedimento che abbiamo usato per determinare lo Jacobiano, si può vedere che il tensore completamente antisimmetrico di rango quattro deve

essere definito <sup>4</sup>, in coordinate curvilinee, come  $\sqrt{-g}e_{iklm}$ . Quindi il duale di un elemento di ipersuperficie  $dS^{ikl}$  deve essere scritto nella forma

$$\sqrt{-g}dS_i = -\frac{1}{6}e_{iklm}dS^{klm}\sqrt{-g}.$$

Nel seguito useremo spesso il teorema di Gauss, che non è connesso alle proprietà tensoriali delle grandezze che vi compaiono e quindi la trasformazione di un integrale su una ipersuperficie chiusa in un integrale sul volume quadridimensionale racchiuso è sempre data dalla sostituzione

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}$$

In coordinate curvilinee la sostituzione rimane sempre la stessa però, per avere un significato, entrambi i membri devono essere divisi per lo Jacobiano

$$\sqrt{-g}dS_i \rightarrow \sqrt{-g}d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (7.9)$$

### 7.3 Distanze e intervalli di tempo

In relatività generale, la scelta del sistema di riferimento non è soggetta ad alcuna limitazione. Per determinare la posizione di una particella, e quindi le sue coordinate  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$ , possiamo pensare ad un numero infinito di corpi che occupano, come un mezzo continuo, tutto lo spazio e a cui associamo valori definiti delle coordinate spaziali. Un tale sistema di corpi, la cui disposizione nello spazio può cambiare nel tempo e a ciascuno dei quali è vincolato un orologio che segna un tempo arbitrario, costituisce un sistema di riferimento in relatività generale. Cerchiamo ora di determinare, a partire dai valori delle grandezze arbitrarie  $x^0$ ,  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$ , le distanze e gli intervalli di tempo reali.

Indichiamo con  $\tau$  il *tempo reale* e troviamo la relazione fra tempo reale e tempo coordinato  $x^0$ . Per due eventi, che avvengono nello stesso punto dello spazio agli istanti  $x^0$  e  $x^0 + dx^0$ , l'intervallo invariante  $ds$  non è altro

---

<sup>4</sup>Se indichiamo con  $E^{iklm}$ , in coordinate curvilinee, il tensore che chiamavamo  $e^{iklm}$  avremo

$$E^{iklm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} \frac{\partial x^l}{\partial x'^s} \frac{\partial x^m}{\partial x'^t} e^{prst} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}$$

e, abbassando gli indici di questo tensore con l'aiuto della formula

$$e^{prst} g_{ip} g_{kr} g_{ls} g_{mt} = -g_{iklm},$$

si ottiene

$$E_{iklm} = \sqrt{-g} e_{iklm}.$$

che  $cd\tau$  dove  $d\tau$  è l'intervallo di tempo reale (o *tempo proprio* per il punto dato). Se poniamo  $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$  nella (7.4), otteniamo

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2$$

da cui

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (7.10)$$

e, per un intervallo finito di tempo,

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (7.11)$$

E' importante ricordare che  $g_{00}$  può essere funzione delle coordinate del punto, in cui calcoliamo il tempo reale, e del tempo coordinato. In relatività speciale, il tempo scorre in modo diverso per orologi in sistemi di riferimento diversi, in relatività generale, invece, il tempo reale scorre in modo differente in punti diversi dello stesso sistema di riferimento.

Affinchè l'equazione (7.10) abbia un senso  $g_{00}$  deve essere positivo. Se  $g_{00}$  fosse negativo il corrispondente sistema di riferimento non potrebbe essere realizzato da corpi reali. Ciò risulta chiaramente dalla (7.1), i punti del sistema in rotazione per i quali  $\Omega^2(x'^2 + y'^2) > c^2$  si muovono con velocità maggiore di  $c$  e non possiamo vincolare un corpo materiale a questi punti. Però, con una trasformazione appropriata delle coordinate, si può sempre ottenere che  $g_{00}$  diventi positivo.

Il fatto che il tempo proprio sia ora legato al tempo coordinato  $x^0$  da una relazione che è diversa in diversi punti dello spazio non permette più di definire la distanza fra due punti ponendo  $dx^0 = 0$  nell'intervallo. Per determinare la distanza  $d\ell$  fra un punto  $A$ , di coordinate  $x^\alpha$ , e un punto  $B$ , di coordinate  $x^\alpha + dx^\alpha$ , supponiamo che un segnale luminoso venga emesso da  $B$  verso  $A$  e riflesso immediatamente lungo lo stesso cammino. La velocità della luce, se misurata in tempo reale, è sempre  $c$  e il tempo necessario (misurato da  $B$ ) affinché il segnale luminoso ritorni in  $B$  è il doppio della distanza, fra  $A$  e  $B$ , divisa per  $c$ . In figura (7.1) è raffigurato questo procedimento.

L'intervallo tra i due eventi, corrispondenti alla partenza da  $B$  del segnale luminoso e al suo ritorno in  $B$ , è nullo essendo di genere luce. Poniamo allora a zero l'intervallo dove abbiamo messo in evidenza la coordinata temporale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00}(dx^0)^2 = 0 \quad (7.12)$$

Le radici di questa equazione sono

$$\begin{cases} dx^{0(2)} \\ dx^{0(1)} \end{cases} = \frac{1}{g_{00}} \left[ -g_{0\alpha} dx^\alpha \pm \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right] \quad (7.13)$$

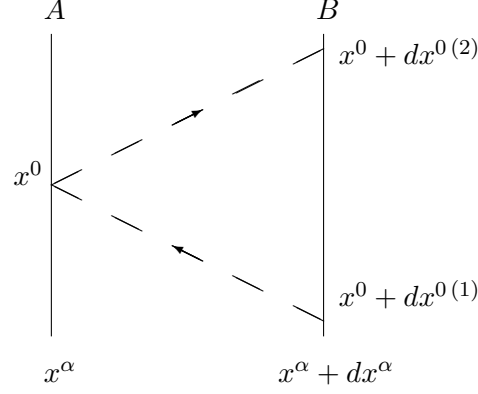


Figura 7.1: Linea d'universo del segnale (tratteggiata) e linee d'universo dei due punti (linea continua) fra i quali si vuole determinare la distanza.

che corrispondono alla propagazione del segnale nelle due direzioni tra i punti  $A$  e  $B$ . Se  $x^0$  è l'istante di arrivo del segnale in  $A$ , allora  $x^0 + dx^{0(1)}$  è l'istante di partenza del segnale da  $B$  e  $x^0 + dx^{0(2)}$  l'istante di arrivo in  $B$ . Il tempo totale impiegato dal segnale,  $dx^{0(2)} - dx^{0(1)}$ , deve essere moltiplicato per  $\sqrt{g_{00}}/c$ , per ottenere il tempo reale. Moltiplicando ancora per  $c/2$ , abbiamo la distanza  $d\ell$  fra  $A$  e  $B$

$$d\ell = \left(dx^{0(2)} - dx^{0(1)}\right) \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} \cdot \frac{c}{2}$$

e, sostituendo le radici (7.13), si trova

$$d\ell^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta.$$

Se indichiamo con  $\gamma_{\alpha\beta}$  il tensore metrico tridimensionale, la relazione

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \quad (7.14)$$

stabilisce una legame fra la metrica dello spazio ordinario e la metrica dello spazio-tempo e il quadrato della distanza diventa

$$d\ell^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (7.15)$$

La distanza così definita ha un significato solo locale se la metrica  $g_{ik}$  dipende dal tempo  $x^0$ . Non avrebbe senso infatti definire una distanza finita che varia nel tempo. Tuttavia se le  $g_{ik}$  non dipendono da  $x^0$ , il campo si dice

in tal caso *costante*, allora  $\int dl$  su una curva spaziale acquista un significato preciso.

La forma quadratica (7.15) deve essere definita positiva e il determinante  $\gamma$  delle  $\gamma_{\alpha\beta}$ ,  $\gamma = \det |\gamma_{\alpha\beta}|$ , è positivo. Se con  $dV$  indichiamo, come al solito, il prodotto dei differenziali delle tre coordinate spaziali, l'elemento di volume è dato, in coordinate curvilinee, da  $\sqrt{\gamma}dV$ . Per esempio, la densità di carica, in coordinate curvilinee, è definita dalla relazione

$$de = \rho\sqrt{\gamma}dV \quad (7.16)$$

dove  $de$  è la carica contenuta nell'elemento di volume  $\sqrt{\gamma}dV$ .

I determinanti  $g = \det |g_{ik}|$  e  $\gamma = \det |\gamma_{\alpha\beta}|$  sono legati fra loro dalla relazione semplice

$$-g = g_{00}\gamma. \quad (7.17)$$

Questa relazione si ottiene facilmente ricordando che il valore di un determinante non cambia se ad una sua riga (colonna) si aggiungono delle righe (colonne) parallele (colonne parallele), anche moltiplicate per dei fattori qualunque. Se aggiungiamo alla seconda colonna di  $|g_{ik}|$  la prima colonna moltiplicata per  $-g_{01}/g_{00}$ , alla terza colonna la prima moltiplicata per  $-g_{02}/g_{00}$  e alla quarta la prima moltiplicata per  $-g_{03}/g_{00}$  diventa immediato verificare la (7.17). L'utilità di questa relazione diviene chiara se cerchiamo di calcolare la quadricorrente dalla (7.16). Moltiplicando ambo i membri della (7.16) per  $dx^i$ , otteniamo con l'aiuto della (7.17)

$$de dx^i = \rho dx^i \sqrt{\gamma}dV = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{-g} d\Omega \frac{dx^i}{dx^0}.$$

Il prodotto  $\sqrt{-g}d\Omega$  è l'elemento invariante dello spazio-tempo, così la quadricorrente in relatività generale sarà definita dall'espressione

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0} \quad (7.18)$$

e la componente  $j^0$  della quadricorrente, moltiplicata per  $\sqrt{g_{00}}/c$ , dà la densità di carica spaziale.

La definizione di simultaneità in relatività generale richiede che gli orologi in diversi punti dello spazio siano prima sincronizzati fra loro e supponiamo, per iniziare, che due orologi si trovino in punti infinitamente vicini. Consideriamo, per esempio, gli orologi nei punti  $A$  e  $B$  della figura (7.1) e, usando lo scambio di un segnale luminoso fra di loro, cerchiamo di fare corrispondere le indicazioni dei due orologi. All'istante  $x^0$  nel punto  $A$  associamo l'indicazione dell'orologio in  $B$  nell'istante intermedio tra la partenza e il ritorno del segnale

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2} (dx^{0(1)} + dx^{0(2)})$$

e diciamo che l'evento in  $A$ , all'istante  $x^0$ , è *simultaneo* all'evento in  $B$  all'istante  $x^0 + \Delta x^0$ . Dalle (7.13) determiniamo  $\Delta x^0$

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha. \quad (7.19)$$

Questa relazione permette a  $B$  di sincronizzare il suo orologio con quello di  $A$  e, quindi, di sincronizzare gli orologi in qualsiasi volume infinitesimo dello spazio.

Continuando questo processo è possibile sincronizzare gli orologi lungo una linea ma, in generale, non è possibile farlo lungo una linea chiusa. Solo se  $\Delta x^0$  è un differenziale esatto si ha  $\oint \Delta x^0 = 0$  e, tornando al punto di partenza, non è necessario ritoccare la sincronizzazione dell'orologio da cui siamo partiti. Ciò non è dovuto alla presenza del campo gravitazionale ma all'arbitrarietà della scelta di un sistema di riferimento. In qualsiasi campo gravitazionale si può scegliere un sistema di riferimento in modo da annullare tutte le componenti  $g_{0\alpha}$  e rendere possibile la sincronizzazione degli orologi in tutto lo spazio. Se le grandezze  $g_{0\alpha}$  sono nulle anche  $\Delta x^0$  nella (7.19) è nullo.

*Problema.* Dimostrare che il tensore  $\gamma_{\alpha\beta}$  è l'inverso del tensore controvariante tridimensionale  $-g^{\alpha\beta}$ .

Soluzione

Esplicitando l'eguaglianza  $g^{ik}g_{kl} = \delta_l^i$  abbiamo, per  $i = \alpha$  e  $l = \gamma$ ,

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} = \delta_\gamma^\alpha,$$

e, per  $i = \alpha$  e  $l = 0$ ,

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} = 0.$$

Ricavando  $g^{\alpha 0}$  da quest'ultima equazione e sostituendolo nella prima si ha

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta}\frac{g_{\beta 0}g_{0\gamma}}{g_{00}} = \delta_\gamma^\alpha$$

e, ricordando la (7.14)

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha.$$

Si può dire che le grandezze  $-g^{\alpha\beta}$  formano un tensore controvariante corrispondente alla metrica (7.14)

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}.$$

## 7.4 Derivazione covariante

In coordinate cartesiane i differenziali  $dA_i$  di un quadrivettore  $A_i$  formano un quadrivettore e le derivate parziali  $\partial A_i/\partial x^k$ , delle sue componenti rispetto

alle coordinate, formano un tensore. La situazione è ben diversa in coordinate curvilinee:  $dA_i$  non è più un vettore e  $\partial A_i / \partial x^k$  non è più un tensore. Il motivo è semplice,  $dA_i$  è la differenza fra due vettori che si trovano in punti infinitamente vicini dello spazio, ma diversi, e in punti diversi dello spazio la legge di trasformazione dei vettori è differente. Dobbiamo infatti tener presente il fatto che ora i coefficienti della trasformazione sono, in generale, funzioni di tutte e quattro le coordinate.

Dalla legge di trasformazione di un vettore covariante

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

otteniamo

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

Dunque le componenti  $dA_i$  non trasformano come un vettore e solamente se l'ultimo termine, contenente la derivata seconda, si annulla ritroviamo la legge di trasformazione di un quadrivettore. Ciò succedeva in relatività speciale dove le  $x'^k$  erano funzioni lineari delle  $x^i$ .

Vogliamo ora trovare un tensore in coordinate curvilinee che sia l'analogo del tensore  $\partial A_i / \partial x^k$  in coordinate galileiane. Affinchè il differenziale di un vettore in coordinate curvilinee sia un vettore, è necessario che i due vettori dei quali si prende la differenza si trovino in uno stesso punto dello spazio. Bisogna quindi trasportare uno dei due vettori nel punto dove si trova il secondo e poi fare la differenza dei due vettori che si trovano nello stesso punto dello spazio. Questa operazione è usata comunemente nella costruzione grafica della differenza, o somma, di due vettori nello spazio euclideo. Quando vogliamo determinare l'accelerazione di una particella nello spazio euclideo procediamo come in figura (7.2 (a)), trasportiamo parallelamente a sé stesso il vettore velocità  $\mathbf{v}$  della particella in un punto infinitamente vicino, dove la velocità è  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , e poi facciamo la differenza. La stessa operazione permette di ottenere la differenza di due vettori nello spazio di Minkowski o in coordinate galileiane.

Nel *trasporto parallelo* di un vettore, le sue componenti in coordinate galileiane non cambiano; in coordinate curvilinee, invece, le componenti del vettore cambiano, in generale, come in figura (7.2 (b)). Consideriamo un vettore controvariante qualsiasi. Se il suo valore nel punto di coordinate  $x^i$  è  $A^i$ , esso sarà  $A^i + dA^i$  nel punto infinitamente vicino  $x^i + dx^i$ . Eseguiamo sul vettore  $A^i$  l'operazione di trasporto parallelo nel punto  $x^i + dx^i$  e indichiamo con  $\delta A^i$  la sua variazione. La differenza  $DA^i$  tra i due vettori che si trovano ora nello stesso punto è

$$DA^i = dA^i - \delta A^i \quad (7.20)$$

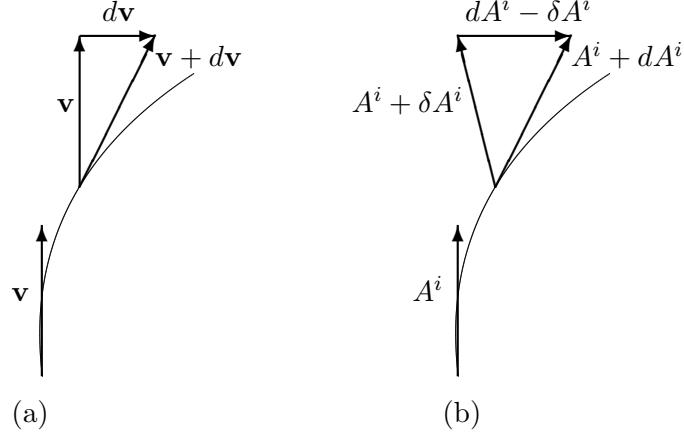


Figura 7.2: Trasporto parallelo nello spazio euclideo (a) e nello spazio curvo (b).

e chiameremo  $DA^i$  il *differenziale assoluto* di  $A^i$ . La variazione  $\delta A^i$  delle componenti del vettore nel trasporto parallelo infinitesimo dipenderà dalle componenti stesse e dallo spostamento infinitesimo in modo lineare. Vogliamo infatti che il trasporto parallelo della somma di due vettori sia la somma dei trasporti paralleli. Possiamo quindi scrivere

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l, \quad (7.21)$$

dove  $\Gamma_{kl}^i$  sono funzioni delle coordinate e vengono chiamati *simboli di Christoffel* o *connessioni*.

In un sistema di riferimento galileiano le  $\Gamma_{kl}^i$  sono tutte nulle e ciò significa che queste grandezze non formano un tensore, perchè un tensore nullo in un sistema di coordinate sarà nullo in qualsiasi altro sistema. E' sufficiente considerare le formule di trasformazione per convincersi di ciò. In uno spazio curvo <sup>5</sup> non si può annullare ovunque tutte le  $\Gamma_{kl}^i$  ma, scegliendo un sistema opportuno di coordinate, si possono annullare in un punto assegnato come vedremo più avanti. Useremo nel seguito anche le grandezze  $\Gamma_{i,kl}$  definite dalle relazioni

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im} \Gamma_{kl}^m \quad \text{e} \quad \Gamma_{kl}^i = g^{im} \Gamma_{m,kl}. \quad (7.22)$$

Uno scalare, come il prodotto scalare tra due vettori, non varia per

<sup>5</sup>Diremo che lo spazio è curvo se è presente un campo gravitazionale e la metrica non può essere ridotta alla forma galileiana in tutto lo spazio mentre nello spazio-tempo piatto questa riduzione è possibile.



trasporto parallelo e  $\delta(A_i B^i) = 0$  e quindi

$$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma_{kl}^i B^k A_i dx^l = \Gamma_{il}^k B^i A_k dx^l$$

da cui otteniamo la variazione di un vettore covariante per trasporto parallelo

$$\delta A_i = \Gamma_{il}^k A_k dx^l. \quad (7.23)$$

Troviamo così i tensori che rappresentano la generalizzazione della derivata di un vettore in coordinate curvilinee. Dal differenziale assoluto  $DA^i$  otteniamo

$$DA^i = \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l \quad (7.24)$$

che possiamo scrivere come

$$DA^i = A_{;l}^i dx^l$$

avendo definito il vero tensore, che chiameremo *derivata covariante*,

$$A_{;l}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k. \quad (7.25)$$

Analogamente, per un vettore covariante, poniamo  $DA_i = A_{i;l} dx^l$  dove

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \quad (7.26)$$

è la rispettiva derivata covariante. In coordinate galileiane  $\Gamma_{il}^k = 0$  e le derivate covarianti diventano derivate ordinarie.

Per determinare la variazione di un tensore per trasporto parallelo infinitesimo consideriamo un tensore misto  $A_i^j$ , formiamo lo scalare  $A_i^j B_j C^i$  e imponiamo che la variazione di questo scalare sia nulla:  $\delta(A_i^j B_j C^i) = 0$ . Dalle (7.21) e (7.23) è facile ottenere

$$\delta A_i^j = \left( \Gamma_{il}^m A_m^j - \Gamma_{ml}^j A_i^m \right) dx^l. \quad (7.27)$$

La (7.27) può essere generalizzata ad un tensore qualsiasi. Ogni indice comporta un termine nel trasporto parallelo, se è un indice controvariante il termine è della forma (7.21) mentre, se è un indice covariante, il termine da aggiungere è della forma (7.23). Per ogni tensore, il differenziale assoluto è la differenza fra il differenziale ordinario e il suo trasporto parallelo infinitesimo e troviamo così, per esempio, le derivate covarianti dei tensori di rango due, controvarianti e covarianti,

$$A_{;l}^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im}, \quad (7.28)$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m A_{mk} - \Gamma_{kl}^m A_{im}. \quad (7.29)$$

La derivata covariante di un prodotto segue le stesse regole della derivata ordinaria e la derivata covariante di uno scalare coincide con la sua derivata ordinaria.

Supponiamo ora che il vettore  $A_i$  sia il gradiente di uno scalare,  $A_i = \partial\varphi/\partial x^i$ . Poichè, in questo caso,

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i},$$

dalla (7.26) si ha, per il tensore  $A_{k;i} - A_{i;k}$ ,

$$A_{k;i} - A_{i;k} = (\Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ki}^l) A_l$$

e, in coordinate galileiane, le derivate covarianti diventano derivate ordinarie e il primo membro dell'uguaglianza si annulla. Poichè  $A_{k;i} - A_{i;k}$  è un tensore, essendo nullo in un sistema, dovrà essere nullo in qualsiasi altro sistema di coordinate e

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i \quad \text{e} \quad \Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \quad (7.30)$$

La simmetria dei simboli di Christoffel negli indici inferiori riduce il numero di simboli indipendenti, da  $4^3 = 64$  a 40.

Non è difficile mostrare che le grandezze  $\Gamma_{kl}^i$  trasformano per il passaggio da un sistema di coordinate ad un altro nel modo seguente (si veda il Problema alla fine del paragrafo)

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{np}^m \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}, \quad (7.31)$$

da cui si vede che le grandezze  $\Gamma_{kl}^i$  trasformano come tensori soltanto se le trasformazioni delle coordinate sono lineari. Dalla (7.31) si vede che è possibile scegliere il sistema di coordinate in modo tale da annullare tutte le  $\Gamma_{kl}^i$  in un punto arbitrario assegnato e chiameremo tale sistema *localmente inerziale* o *localmente geodetico*. Infatti, supponiamo che il punto assegnato sia l'origine delle coordinate  $x^i$  e  $(\Gamma_{kl}^i)_0$  sia il valore dei simboli di Christoffel in questo punto, con la trasformazione

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2} (\Gamma_{kl}^i)_0 x^k x^l$$

si ha

$$\left( \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \right)_0 = (\Gamma_{kl}^i)_0$$

e, per la (7.31), tutte le  $\Gamma_{np}^m$  si annullano. Per questa trasformazione si ha  $(\partial x'^i / \partial x^k)_0 = \delta_k^i$ , e i valori del tensore metrico non cambiano nel punto dato per cui l'annullamento dei simboli di Christoffel può essere fatto contemporaneamente con la riduzione della metrica alla forma galileiana.

---

*Problema.* Dimostrare la formula di trasformazione (7.31) per i simboli di Christoffel.

Soluzione

Consideriamo la formula di trasformazione per la derivata covariante di un vettore  $A^i$

$$A^i_{;l} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} A'^m_{;k}$$

e esplicitiamo le derivate covarianti

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \left( \frac{\partial A'^m}{\partial x'^k} + \Gamma'^m_{nk} A'^n \right) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \Gamma'^m_{np} A'^k + \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial A'^m}{\partial x^l}, \end{aligned}$$

ma

$$\frac{\partial A'^m}{\partial x^l} = \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^l \partial x^k} A^k + \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial A^k}{\partial x^l}$$

e

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial A'^m}{\partial x^l} = \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} A^k + \frac{\partial A^i}{\partial x^l}.$$

La legge di trasformazione dei simboli di Christoffel è così dimostrata.

---

## 7.5 Simboli di Christoffel e tensore metrico

La relazione tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico discende dalla proprietà del tensore metrico di avere derivata covariante nulla:  $g_{ik;l} = 0$ . Poichè  $DA_i$  è un vettore deve valere la relazione

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

e, d'altra parte,  $A_i = g_{ik} A^k$  e quindi

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A_k Dg_{ik}.$$

Per consistenza, il differenziale assoluto del tensore metrico deve essere nullo:  $Dg_{ik} = 0$  e anche la derivata covariante sarà nulla

$$g_{ik;l} = 0. \quad (7.32)$$

Esplicitiamo la (7.32), ricordando anche la (7.22),

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk} \Gamma^m_{il} - g_{im} \Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0$$

e notiamo che, in un sistema di coordinate localmente geodetico, anche le derivate ordinarie del tensore metrico si annullano nel punto dato. Se

scriviamo queste derivate ordinarie delle  $g_{ik}$  permutando gli indici  $i$ ,  $k$  e  $l$ , otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} &= \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}, & \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} &= \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}, \\ -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} &= -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}.\end{aligned}\quad (7.33)$$

Prendendo la semisomma di queste uguaglianze, e ricordando che i simboli di Christoffel sono simmetrici negli indici inferiori, troviamo

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) \quad (7.34)$$

ovvero, per la (7.22),

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (7.35)$$

che è la relazione cercata.

Dalla espressione fondamentale (7.35) si possono ottenere i simboli di Christoffel contratti  $\Gamma_{ki}^i$  e  $g^{kl}\Gamma_{kl}^i$ . A questo scopo è sufficiente usare le relazioni che si ottengono differenziando l'identità  $g_{il}g^{lk} = \delta_i^k$ , o direttamente la  $g_{ik}g^{ik} = 4$ ,

$$g^{ik}dg_{ik} = -g_{ik}dg^{ik}$$

e calcolando il differenziale del determinante della metrica  $dg$ . Si può trovare  $dg$  prendendo il differenziale di ciascuna componente del tensore  $g_{ik}$  e moltiplicandola per il suo complemento algebrico nella matrice che rappresenta il tensore della metrica. Ricordando che  $g^{ik}$  sono gli elementi della matrice inversa, della matrice formata dalle  $g_{ik}$ , e che l'elemento  $g^{ik}$  si ottiene prendendo il complemento algebrico di  $g_{ik}$  e dividendolo per il determinante, abbiamo anche che il complemento algebrico di  $g_{ik}$  è  $gg^{ik}$ . In definitiva

$$dg = g g^{ik} dg_{ik} = -gg_{ik} dg^{ik}. \quad (7.36)$$

Troviamo, per esempio,  $\Gamma_{ki}^i$ : si ha

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right)$$

e, nella parentesi, il primo e il terzo termine si annullano perchè antisimmetrici per lo scambio degli indici  $m$  e  $i$  e contratti con un tensore simmetrico  $g^{im}$ . Quindi

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$$

che, per la (7.36), si può scrivere nella forma

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \quad (7.37)$$

e diventa possibile esprimere la divergenza di un vettore in coordinate curvilinee nella forma semplice

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ki} A^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}. \quad (7.38)$$

Se applichiamo allora il teorema di Gauss per la trasformazione dell'integrale di un vettore su una ipersuperficie chiusa in integrale su un volume quadridimensionale otteniamo dalla (7.38)

$$\oint A^i \sqrt{-g} dS_i = \int \frac{\partial(\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i} d\Omega = \int A^i_{;i} \sqrt{-g} d\Omega \quad (7.39)$$

cioè l'integrale di uno scalare con il corretto elemento di integrazione nello spazio-tempo.

Ricaveremo altre relazioni che coinvolgono i simboli di Christoffel quando ci serviranno, ora notiamo che, per la simmetria di questi simboli, si ha

$$\begin{aligned} A_{i;k} - A_{k;i} &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} A_m - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} + \Gamma^m_{ki} A_m = \\ &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Diventa facile allora scrivere la prima coppia delle equazioni di Maxwell in uno spazio curvo, cioè nel caso in cui esiste un campo gravitazionale. La relazione tra il tensore elettromagnetico  $F_{ik}$  e il potenziale  $A_i$  non cambia per la (7.40) e le equazioni

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

conservano la loro forma e sono equivalenti alla scrittura con le derivate covarianti che, però, metterebbe in luce la loro covarianza.

*Problema.* Calcolare i simboli di Christoffel in una metrica in cui il tensore  $g_{ik}$  è diagonale.

Soluzione

Scriviamo le componenti non nulle del tensore metrico nella forma  $g_{ii} = g_i$ . Allora

$$g_{kl} = \delta_{kl} g_k, \quad g^{kk} = \frac{1}{g_{kk}} = \frac{1}{g_k}$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{kl} &= \frac{\delta_{im}}{2g_i} \left( \frac{\partial g_m}{\partial x^l} \delta_{mk} + \frac{\partial g_m}{\partial x^k} \delta_{ml} - \frac{\partial g_k}{\partial x^m} \delta_{kl} \right) \\ &= \frac{1}{2g_i} \left( \frac{\partial g_k}{\partial x^l} \delta_{ik} + \frac{\partial g_l}{\partial x^k} \delta_{il} - \frac{\partial g_k}{\partial x^i} \delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad (7.41)$$

Dall'equazione (7.41) si vede immediatamente che se  $i \neq k \neq l$  i simboli di Christoffel sono tutti nulli mentre, se  $k = l \neq i$ , si ottiene

$$\Gamma_{ll}^i = -\frac{1}{2g_i} \frac{\partial g_l}{\partial x_i}$$

Si avrà poi

$$\Gamma_{il}^i = \frac{1}{2g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^l}$$

dove la somma su  $i$  non è sottointesa, e espressioni analoghe se  $l = i \neq k$  oppure tutti gli indici sono eguali.

## 7.6 Moto di una particella in un campo gravitazionale

Nello spazio di Minkowski una particella libera si muove in modo tale che il vettore  $u^i$ , tangente in ogni punto alla linea d'universo della particella, rimanga parallelo a sé stesso. Il trasporto parallelo della tangente in relatività speciale definisce una "retta" nello spazio tempo ma, in uno spazio curvo, la quadrivelocità cambia le sue componenti per trasporto parallelo e ci aspettiamo che l'equazione del moto  $du^i = 0$  debba essere generalizzata nella forma

$$Du^i = 0. \quad (7.42)$$

Possiamo riottenere l'equazione (7.42) partendo dal fatto che ogni campo gravitazionale non è altro che una modificazione della metrica dello spazio-tempo e pertanto è determinato dalle grandezze  $g_{ik}$ . L'interazione della particella con il campo gravitazionale è contenuta nell'intervallo  $ds$  e il principio di minima azione determinerà il moto della particella come soluzione del problema variazionale

$$\delta S = -mc \delta \int ds = 0 \quad (7.43)$$

con  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ . Si può dimostrare che la soluzione della (7.43) è effettivamente la (7.42). Ora le linee estremali descritte dal punto d'universo della particella vengono chiamate *geodetiche*.

L'espressione (7.20) del differenziale assoluto permette di scrivere la (7.42) nella forma

$$du^i + \Gamma_{kl}^i u^k dx^l = 0$$

che, divisa per  $ds$ , dà

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0 \quad (7.44)$$

ovvero

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0.$$

Le equazioni (7.44) vengono dette *equazioni delle geodetiche* e mostrano che la scelta di un sistema localmente geodetico in un punto dato, in cui tutte le  $\Gamma_{kl}^i$  si annullano, equivale effettivamente all'annullamento del campo gravitazionale nel volume infinitesimo dato dello spazio tempo. La possibilità di tale scelta è l'espressione del principio di equivalenza in relatività generale.

Dalla condizione equivalente  $Du_i = 0$ , avremmo ottenuto

$$du_i - \Gamma_{il}^k u_k dx^l = 0$$

oppure, dividendo per  $ds$  e abbassando l'indice  $k$  dei simboli  $\Gamma_{il}^k$ ,

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,il} u^k u^l = 0.$$

Sostituendo in questa equazione i  $\Gamma_{k,il}$  ottenuti nella (7.34) e notando che  $u^k u^l$  forma un tensore simmetrico negli indici  $k, l$ , si ha

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \right) u^k u^l = 0$$

e, nella parentesi, il primo e terzo termine si annullano. Si ottiene quindi

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} u^k u^l = 0 \quad (7.45)$$

equazione importante che mostra come la metrica assuma il ruolo dei "potenziali" del campo gravitazionale e permette di determinare facilmente le costanti del moto. Se la metrica non dipende dalla coordinata  $x^j$ , allora  $du_j/ds = 0$  e  $u_j$  è costante lungo la traiettoria. In un campo gravitazionale il quadri-impulso della particella è definito come

$$p^i = mc u^i, \quad (7.46)$$

con  $p_i p^i = m^2 c^2$ . Se la metrica non dipende da  $x^j$ , la componente *covariante* dell'impulso  $p_j$  è una costante del moto.

La propagazione di un raggio luminoso non è descrivibile tramite la (7.44) perchè, in questo caso,  $ds = 0$ . La direzione di propagazione di un raggio di luce è determinata dal vettore d'onda e possiamo scrivere il quadrivettore d'onda nella forma

$$k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

dove  $\lambda$  è un parametro variabile lungo la traiettoria del raggio. Nel vuoto e in assenza di un campo gravitazionale si ha  $dk^i = 0$ , che diventa  $Dk^i = 0$  in uno spazio curvo. Le equazioni delle geodetiche per un raggio di luce saranno allora

$$\frac{\partial k^i}{\partial \lambda} + \Gamma_{jl}^i k^j k^l = 0. \quad (7.47)$$

Il parametro  $\lambda$  è determinato dalle stesse equazioni e  $k_i k^i = 0$ .

In un campo gravitazionale debole possiamo considerare il limite di velocità piccole rispetto a  $c$ . Le equazioni (7.44) si devono ridurre allora alle equazioni non relativistiche del moto di una particella in un campo gravitazionale. L'azione relativistica,  $S = -mc \int ds$ , deve allora ridursi all'azione costruita a partire dalla Lagrangiana non relativistica

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi \quad (7.48)$$

dove  $\phi$  è il potenziale del campo e la costante  $-mc^2$  compare nel limite non relativistico della Lagrangiana per una particella libera. Dalla (7.48) otteniamo

$$S = \int L dt = -mc \int \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt$$

che, paragonata con  $S = -mc \int ds$ , dà

$$ds = \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt.$$

Elevando al quadrato questa uguaglianza e tenendo conto che  $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$ , si ha

$$ds^2 = \left( c^2 + 2\phi \right) dt^2 - d\mathbf{r}^2 + \dots \quad (7.49)$$

dove abbiamo trascurato termini che si annullano per  $c \rightarrow \infty$ . Nel limite di campo debole e  $v \ll c$ , la componente  $g_{00}$  del tensore metrico è  $(g_{00}(dx^0)^2 = c^2 g_{00} dt^2)$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (7.50)$$

Il metodo seguito per ottenere  $g_{00}$  non permette di determinare le altre componenti della metrica che, non essendo moltiplicate per  $c^2$  come  $g_{00}$ , si annullano nel limite. Il calcolo completo darebbe infatti, nel limite di campo debole,

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

---

*Problema. Determinare le equazioni dell'elettrodinamica in presenza di un campo gravitazionale.*

*Soluzione*

Dalle equazioni (7.40) abbiamo visto che la prima coppia delle equazioni di Maxwell conserva la stessa forma che aveva in relatività speciale. Nelle equazioni (7.16) e



(7.18) abbiamo definito la densità di carica e la quadricorrente in uno spazio curvo, quest'ultima è definita dall'espressione

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0}.$$

La conservazione della carica è espressa dall'equazione di continuità in cui la derivata covariante prende il posto della derivata ordinaria

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow j^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} j^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (7.51)$$

dove abbiamo utilizzato l'equazione (7.38). Nella seconda coppia delle equazioni di Maxwell la stessa sostituzione porta all'equazione generalizzata

$$F^{ik}_{;k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (7.52)$$

e, analogamente, le equazioni del moto di una carica in campi gravitazionale ed elettromagnetico sarà

$$mc \frac{Du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k \quad (7.53)$$

dove  $Du^i$  è il differenziale assoluto della quadrirelatività.

Quando si considerano cariche puntiformi è importante notare che la definizione della  $\delta$  di Dirac è sempre la stessa anche in uno spazio curvo e, integrando su tutto lo spazio, si ha

$$\int \delta(\mathbf{r}) dV = 1.$$

Poichè, per la (7.16),  $de = \rho \sqrt{\gamma} dV$  dovrà essere

$$\rho = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\gamma}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

e

$$j^i = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx^i}{dx^0}.$$

## 7.7 Campo gravitazionale costante

Un campo gravitazionale è detto *costante* se è possibile scegliere un sistema di riferimento tale che tutte le componenti del tensore metrico non dipendono dalla coordinata temporale  $x^0$  che viene chiamata allora *tempo universale*. Il tempo universale non è definito univocamente, resta arbitraria la scelta dell'origine del tempo in ogni punto dello spazio e la sua unità di misura.

La scelta di un sistema di riferimento dove le  $g_{ik}$  non dipendono da  $x^0$  può essere fatta, a rigore, soltanto per un campo creato da un unico corpo. L'attrazione gravitazionale fra più corpi non permette al campo, da essi

creato, di essere costante in nessun sistema di riferimento. Consideriamo allora un unico corpo e supponiamo che esso sia immobile nel sistema di riferimento in cui le  $g_{ik}$  non dipendono da  $x^0$ . Allora si parla di un campo *statico* e l'intervallo  $ds^2$  non cambia se cambiamo segno a  $x^0$ . Tutte le componenti  $g_{0\alpha}$  del tensore metrico devono essere nulle. In un campo statico l'elemento di distanza spaziale è

$$d\ell^2 = -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

e si possono sincronizzare gli orologi in tutto lo spazio.

Anche un corpo, dotato di simmetria assiale, che ruota con velocità angolare uniforme attorno al suo asse, crea un campo gravitazionale costante. Se però, in questo caso, cambiamo il segno a  $x^0$ , cambia di segno anche la velocità angolare e l'intervallo non deve più essere invariante per inversione temporale. Chiameremo *stazionario* questo campo e le componenti  $g_{0\alpha}$  della metrica saranno, in generale, diverse da zero. In un campo stazionario, l'elemento di distanza spaziale ha la forma generale (7.15) e non sarà più possibile sincronizzare gli orologi lungo una linea chiusa perchè

$$\Delta x^0 = - \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$$

sarà, in generale, diverso da zero.

In un campo gravitazionale costante, l'intervallo di tempo universale,  $x^0$ , tra due eventi in un punto coincide con l'intervallo tra qualsiasi altri due eventi, in ogni altro punto dello spazio, simultanei ai primi due eventi. A intervalli di tempo universale identici corrispondono, in punti diversi dello spazio, diversi intervalli di tempo proprio  $\tau$ . La relazione (7.10) può essere ora integrata e vale per qualsiasi intervallo finito di tempo

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} x^0. \quad (7.54)$$

In un campo gravitazionale debole,  $|\phi| \ll c^2$ , e per velocità piccole, la (7.50) dà, sviluppando al primo ordine in  $\phi/c^2$ ,

$$\tau = \frac{x^0}{c} \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right). \quad (7.55)$$

Il tempo proprio scorre tanto più lentamente quanto più piccolo è il coefficiente di  $x^0$ . Ricordiamo che  $\phi$  è negativo e che il suo valore assoluto cresce avvicinandoci alla sorgente del campo. Se di due orologi identici, uno è stato per un certo tempo in un campo gravitazionale, questo orologio risulterà in ritardo rispetto all'altro.

Anche per la propagazione di un raggio luminoso possiamo trovare le costanti del moto, come abbiamo fatto per una particella, e riscrivere l'equazione (7.45) nella forma

$$\frac{dk_i}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} k^j k^l = 0. \quad (7.56)$$

In un campo costante,  $k_0$  sarà lo stesso in tutti i punti del raggio e la frequenza  $\omega_0$ , misurata secondo il tempo universale  $x^0/c$ , resterà costante. La frequenza  $\omega$ , misurata in tempo proprio, è diversa nei diversi punti dello spazio e, dalla (7.54), si ha

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (7.57)$$

Per un campo gravitazionale debole, il limite non relativistico fornisce il valore approssimato

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\phi}{c^2} \right) \quad (7.58)$$

che mostra come la frequenza della luce aumenti avvicinandosi ai corpi che creano il campo. Inversamente, se un raggio di luce si allontana dalle sorgenti del campo, la frequenza della luce diminuisce. Se un raggio luminoso, emesso in un punto dove il potenziale gravitazionale è  $\phi_1$ , ha in questo punto la frequenza  $\omega$  in tempo proprio ( $\omega_0 = \omega/(1 - \phi_1/c^2)$  in tempo universale), allora, arrivato al punto di potenziale  $\phi_2$  avrà la frequenza  $\omega_0(1 - \phi_2/c^2)$  in tempo proprio, cioè

$$\frac{\omega}{1 - \phi_1/c^2} \left( 1 - \frac{\phi_2}{c^2} \right) \simeq \omega \left( 1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2} \right).$$

La frequenza  $\omega$  risulterà spostata del valore

$$\Delta\omega = \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2} \omega, \quad (7.59)$$

dove  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono i potenziali del campo nel punto di emissione e nel punto di osservazione rispettivamente. Se si osserva sulla terra uno spettro emesso dal sole, allora  $|\phi_1| > |\phi_2|$  e, dalla (7.59), risulta che  $\Delta\omega < 0$ , cioè avviene uno spostamento verso le frequenze più piccole. Questo fenomeno è chiamato *spostamento verso il rosso* o, in inglese, *redshift*.

Quando una particella si muove in un campo costante, la componente temporale,  $p_0$ , del quadrivettore impulso  $p_i = mc u_i = mc g_{ik} u^k$  si conserva. In un campo statico,  $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - d\ell^2$  e, per l'energia, che indichiamo qui con  $\mathcal{E}_0$ , si ha

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2 - d\ell^2}}.$$

La velocità della particella, misurata in tempo proprio, è

$$v = \frac{d\ell}{d\tau} = \frac{cd\ell}{\sqrt{g_{00}}dx^0} \quad (7.60)$$

e, per l'energia, troviamo

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.61)$$

Questa è la grandezza che resta costante durante il moto della particella.

La formula (7.61) per l'energia resta valida anche in un campo stazionario se la velocità  $v$  è misurata in tempo proprio sincronizzato lungo la linea d'universo della particella. La differenza dei tempi universali fra punti infinitamente vicini, che nella (7.60) era  $dx^0$ , ora diventa

$$(x^0 + dx^0) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha\right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha.$$

Infatti, se la particella parte dal punto  $A$  all'istante  $x^0$  e arriva nel punto  $B$  all'istante  $x^0 + dx^0$ , l'intervallo corretto di tempo è dato dalla differenza fra  $x^0 + dx^0$  e l'istante in  $B$  che è simultaneo a  $x^0$  in  $A$ . L'espressione (7.60) per la velocità diventa allora

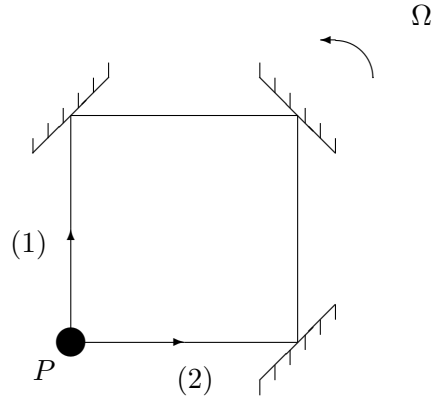
$$v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha\right)}. \quad (7.62)$$

*Problema. L'effetto Sagnac. Un osservatore  $P$ , solidale ad un corpo in rotazione, manda due segnali luminosi lungo una curva chiusa utilizzando degli specchi come in figura (7.3), un segnale in senso orario (1) e un segnale in senso antiorario (2). Se il corpo non ruotasse entrambi i raggi arriverebbero contemporaneamente in  $P$ . A causa della rotazione i tempi di arrivo saranno diversi.*

*Mostrare che, se la velocità dei punti nel sistema ruotante, attraverso i quali passa il segnale luminoso, è piccola rispetto alla velocità della luce, la differenza dei tempi di arrivo è*

$$\Delta T \simeq \frac{4\Omega A}{c^2}$$

*dove  $A$  è l'area racchiusa dalla traiettoria del segnale. L'intervallo  $\Delta T$  dà luogo ad una differenza di fase che può essere misurata mediante un interferometro. La misura permette di rivelare, per esempio, la rotazione di un satellite rispetto alle stelle fisse e, su questo effetto, sono basati diversi sensori ottici della rotazione.*

Figura 7.3: *Effetto Sagnac.*

Soluzione

Utilizziamo coordinate cilindriche nello spazio, con l'asse  $z$  diretto come l'asse di rotazione. In un sistema di riferimento immobile, di coordinate  $\rho', z', \varphi', t$ , il quadrato dell'intervallo ha la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\rho'^2 - \rho'^2 d\varphi'^2 - dz'^2$$

e, per passare al sistema ruotante di coordinate  $\rho, z, \varphi, t$ , è sufficiente sostituire  $\varphi'$  con  $\varphi + \Omega t$ , dove  $\Omega$  è la velocità angolare di rotazione. Con questa sostituzione troviamo

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 \rho^2) dt^2 - 2\Omega \rho^2 d\varphi dt - dz^2 - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2.$$

Come in ogni campo stazionario, gli orologi non si possono sincronizzare univocamente in tutti i punti di un corpo ruotante. Sincronizzando lungo un contorno chiuso si ha che il tempo segnato dall'ultimo orologio differisce dal tempo iniziale per

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$$

e, nel nostro caso, l'unica componente  $g_{0\alpha}$  non nulla è  $g_{0\varphi} = -\frac{\Omega \rho^2}{c}$ , mentre  $g_{00} = 1 - \Omega^2 \rho^2 / c^2 \sim 1$  se supponiamo che  $\Omega \rho \ll c$ . Otteniamo così

$$\Delta t \simeq \frac{1}{c^2} \oint \Omega \rho^2 d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} A \quad (7.63)$$

dove  $A$  è l'area racchiusa dal contorno e si sceglie il segno meno o più a seconda che il contorno sia descritto in senso orario o antiorario. Per i due raggi luminosi, la differenza dei tempi di arrivo è il doppio del valore ottenuto nella (7.63)

$$\Delta T = \frac{4\Omega A}{c^2}.$$



## Capitolo 8

# Equazioni del campo gravitazionale

### 8.1 Tensore di curvatura

In uno spazio curvo il trasporto parallelo di un vettore da un punto ad un altro porta a risultati differenti se viene effettuato lungo percorsi differenti. In particolare, risulta che se si trasporta un vettore parallelamente a se stesso lungo un contorno chiuso, il vettore finale non coinciderà con quello iniziale. Questo fatto fondamentale ci permetterà di costruire un tensore che ci fornirà un criterio per stabilire se lo spazio-tempo sia piatto o curvo e sarà alla base della derivazione delle equazioni del campo gravitazionale.

Il tensore  $R^i_{jkl}$  che vogliamo costruire può essere definito semplicemente tramite la formula

$$A_{j;k;l} - A_{j;l;k} = A_i R^i_{jkl} \quad (8.1)$$

ma la derivazione che faremo metterà in luce le sue proprietà geometriche contenute nella (8.1). Nel seguito, ci serviranno le equazioni (7.21) e (7.23) che definiscono le variazioni, per trasporto parallelo, di un vettore controvariante e di un vettore covariante:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \quad \delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l,$$

con una simbologia leggermente diversa che risulterà chiara dal testo.

Dati i punti  $P(x^i)$  e il punto vicino  $Q(x^i + \delta x^i)$  si può dire che il punto  $Q$  si ottiene applicando a  $P$  l'operatore  $\delta$ . Sia  $R(x^i + \hat{\delta} x^i)$  un altro punto, ottenuto applicando a  $P$  l'operatore  $\hat{\delta}$ . Se ora applichiamo al punto  $Q$  l'operatore  $\hat{\delta}$  e, al punto  $R$ , l'operatore  $\delta$ , otteniamo due altri punti,  $S$  e  $T$ , che hanno come coordinate

$$S[x^i + \delta x^i + \hat{\delta}(x^i + \delta x^i)], \quad T[x^i + \hat{\delta} x^i + \delta(x^i + \hat{\delta} x^i)]. \quad (8.2)$$

Introdotta questa notazione, se supponiamo che gli operatori del secondo ordine  $\hat{\delta}\delta$  e  $\delta\hat{\delta}$  siano definiti tramite il trasporto parallelo, cioè se poniamo

$$\hat{\delta}\delta x^i = -\Gamma_{jk}^i \delta x^j \hat{\delta} x^k,$$

e

$$\delta\hat{\delta} x^i = -\Gamma_{jk}^i \hat{\delta} x^j \delta x^k,$$

le componenti del vettore  $TS$ , ottenute come differenza delle componenti dei due vettori in (8.2), saranno date dalle equazioni

$$\delta\hat{\delta} x^i - \hat{\delta}\delta x^i = (\Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i) \hat{\delta} x^j \delta x^k = 0.$$

Questo vettore è dunque nullo perchè i coefficienti della connessione  $\Gamma_{jk}^i$  sono simmetrici in  $j$  e  $k$ . La figura  $PQSR$  costituisce un parallelogramma infinitesimo costruito, nel punto  $P$ , sui vettori  $PQ$  e  $PR$ .

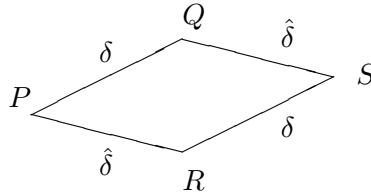


Figura 8.1: Cammini  $PQS$  e  $PRS$  per il trasporto parallelo di un vettore.

Consideriamo ora un vettore  $A_j$  nel punto  $P$ . Possiamo trasportare questo vettore lungo i cammini  $PQS$  e  $PRS$  arrivando in  $S$  con due valori, generalmente diversi, delle sue componenti  $A_j$ . Infatti, lungo il cammino  $PQS$ , si arriva alle componenti

$$A_j + \delta A_j + \hat{\delta}(A_j + \delta A_j),$$

mentre il trasporto lungo il cammino  $PRS$  porta alle componenti

$$A_j + \hat{\delta} A_j + \delta(A_j + \hat{\delta} A_j).$$

Facendo la differenza fra i valori delle componenti del vettore  $A_j$  in  $S$ , trasportato lungo  $PQS$ , e i valori delle componenti di  $A_j$ , trasportato lungo  $PRS$ , abbiamo

$$\Delta A_j = \hat{\delta}\delta A_j - \delta\hat{\delta} A_j. \quad (8.3)$$

Per calcolare questa differenza notiamo che

$$\delta\hat{\delta} A_j = \delta \left( \Gamma_{jk}^i A_i \hat{\delta} x^k \right) =$$



$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} A_i \hat{\delta} x^k \delta x^l + \Gamma_{jk}^m \delta A_m \hat{\delta} x^k + \Gamma_{jm}^i A_i \delta \hat{\delta} x^m. \quad (8.4)$$

E' ora sufficiente scambiare  $\delta$  con  $\hat{\delta}$  ed esplicitare  $\delta A_m$  in (8.4) per ottenere la differenza (8.3). Notando che l'ultimo termine in (8.4) non contribuisce e ridefinendo opportunamente gli indici muti, otteniamo

$$\Delta A_j = R^i_{jkl} A_i \hat{\delta} x^k \delta x^l \quad (8.5)$$

dove abbiamo posto

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{mk}^i \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{ml}^i \Gamma_{jk}^m. \quad (8.6)$$

Le formule (8.5) forniscono anche la variazione delle  $A_j$  quando questo vettore è trasportato per parallelismo lungo il contorno chiuso infinitesimo  $PQSRP$ . D'altra parte, poichè  $\Delta A_j$  rappresenta la differenza di due vettori nello stesso punto, è esso stesso un vettore e, dato il carattere covariante delle equazioni (8.5), risulta che  $R^i_{jkl}$  è un tensore di rango 4, il tensore di curvatura o *tensore di Riemann*. E' importante notare che, sebbene sia possibile in uno spazio curvo scegliere un sistema di coordinate localmente geodetiche per un punto dato, il tensore di curvatura non si annulla affatto in questo punto perchè le  $\Gamma_{kl}^i$  si annullano, ma non le loro derivate.

Nello spazio-tempo piatto il tensore di curvatura è nullo. Infatti, nello spazio piatto si può scegliere un sistema di coordinate dove  $\Gamma_{kl}^i = 0$  ovunque e, quindi, anche  $R^i_{jkl} = 0$ . Ma  $R^i_{jkl}$  è un tensore e le sue componenti saranno nulle anche in qualsiasi altro sistema di coordinate. Nello spazio piatto, il trasporto parallelo di un vettore da un punto ad un altro è una operazione univoca e il vettore non varia quando viene trasportato parallelamente lungo una linea chiusa.

Esiste anche il teorema inverso: se  $R^i_{jkl} = 0$ , lo spazio-tempo è piatto. Infatti in ogni spazio si può scegliere un sistema di coordinate galileiane in una regione infinitesima data. Se  $R^i_{jkl} = 0$ , allora il trasporto parallelo diventa una operazione univoca e, trasportando il sistema galileiano dalla regione infinitesima data in tutte le altre regioni, si può costruire un sistema galileiano in tutto lo spazio e lo spazio è piatto. Il fatto che il tensore di curvatura sia nullo o diverso da zero è quindi un criterio sufficiente per stabilire se lo spazio-tempo sia piatto o curvo <sup>1</sup>.

## 8.2 Proprietà del tensore di curvatura

Dalla definizione (8.6) del tensore di Riemann si vede immediatamente che esso è antisimmetrico negli indici  $kl$ . Per trovare tutte le proprietà di

<sup>1</sup>E' anche l'unico criterio di cui disponiamo.

simmetria conviene passare alle componenti covarianti

$$R_{ijkl} = g_{im} R^m{}_{jkl}$$

e scegliere un sistema di coordinate localmente geodetiche per un punto dato. Allora i simboli di Christoffel si annullano, nel punto, insieme alle derivate ordinarie del tensore metrico, perchè  $g_{ik;l} = 0$  per la (7.32), e

$$R_{ijkl} = \frac{\partial \Gamma_{i,jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial x^l} \quad (8.7)$$

ovvero, esplicitando,

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^i} \right). \quad (8.8)$$

Da questa espressione si deducono le seguenti proprietà di simmetria

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} \quad (8.9)$$

e

$$R_{ijkl} = R_{klij} \quad (8.10)$$

cioè il tensore  $R_{ijkl}$  è antisimmetrico nella prima coppia e nella seconda coppia di indici ed è simmetrico per lo scambio delle due coppie. Poichè le equazioni (8.9) e (8.10) sono equazioni covarianti fra tensori in un sistema di coordinate, esse sono vere in qualsiasi altro sistema <sup>2</sup>. Dalla (8.7) è facile ottenere, nel sistema localmente geodetico per il punto dato, la relazione

$$\frac{\partial R_{ijkl}}{\partial x^m} + \frac{\partial R_{ijmk}}{\partial x^l} + \frac{\partial R_{ijlm}}{\partial x^k} = 0$$

che è equivalente alla

$$R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijlm;k} = 0. \quad (8.11)$$

Ma questa è una equazione fra tensori valida in qualsiasi sistema di coordinate ed è chiamata *l'identità di Bianchi*.

Esprimendo il tensore di curvatura tramite la (8.7) è facile vedere che la somma ciclica delle componenti di  $R_{ijkl}$ , costituita da qualsiasi terna di indici, è nulla; per esempio

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{ikjl} = 0. \quad (8.12)$$

---

<sup>2</sup>Notiamo che una equazione, come la (8.8), non è una equazione tensoriale valida perchè dipende dalle derivate parziali ordinarie della metrica e non dalle derivate covarianti. Quindi essa è vera soltanto nel sistema di coordinate in cui è stata ottenuta.

Le altre relazioni, analoghe alla (8.12) per altre terne di indici, sono una conseguenza della (8.12) e delle (8.9), (8.10) e possiamo riassumere le conseguenze della (8.12) nell'identità

$$R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0. \quad (8.13)$$

Questa identità, e le proprietà di simmetria, riducono il numero di componenti indipendenti del tensore di curvatura a 20. Infatti, le due coppie di indici  $(ij)$  e  $(kl)$  formano ciascuna 6 componenti indipendenti, come un tensore antisimmetrico di rango due. In uno spazio a sei dimensioni, un tensore simmetrico ha  $(6 \times 7)/2 = 21$  componenti indipendenti, L'identità (8.13) riduce il numero di componenti indipendenti a 20.

Per contrazione del tensore di curvatura si può formare un tensore di rango due. La contrazione sugli indici antisimmetrici dà zero e restano quindi le possibilità di contrarre un indice  $i$  o  $j$  con  $k$  o  $l$ . Definiamo <sup>3</sup> il *tensore di Ricci*  $R_{jl}$  contraendo sugli indici  $i, k$

$$R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl} = R^k_{jkl} \quad (8.14)$$

e, quindi,

$$R_{jl} = \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^k_{mk} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^k_{ml} \Gamma^m_{jk}. \quad (8.15)$$

Il tensore di Ricci è simmetrico

$$R_{jl} = R_{lj}$$

come si vede facilmente se ricordiamo l'espressione (7.37) del simbolo di Christoffel contratto.

Contraendo  $R_{jl}$  si ottiene l'invariante

$$R = g^{jl} R_{jl} = g^{jl} g^{ik} R_{ijkl} \quad (8.16)$$

che è detto *curvatura scalare* dello spazio-tempo. Per semplificazione nell'identità di Bianchi (8.11) delle coppie di indici  $il$  e  $jk$  si trova

$$R^k_{m;k} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^m}. \quad (8.17)$$

Ora abbiamo tutte le definizioni che ci servono ma, prima di passare all'azione di un campo gravitazionale, consideriamo brevemente il significato geometrico della curvatura scalare nel caso di uno spazio a due dimensioni. La definizione del tensore di curvatura (8.6) vale qualunque sia il numero di

---

<sup>3</sup>Non c'è un accordo universale sul segno globale del tensore di Riemann e della sua contrazione. Conviene sempre controllare le convenzioni del libro che consultate.

dimensioni dello spazio. In uno spazio bidimensionale, cioè una superficie ordinaria, indichiamo con  $P_{abcd}$  il tensore di curvatura e con  $\gamma_{ab}$  il tensore metrico dove gli indici  $a, b, c$  e  $d$  assumono i valori 1 oppure 2. Si ha una sola componente indipendente per  $P_{abcd}$ ,  $a$  deve essere diverso da  $b$  e  $c$  da  $d$ , e la curvatura scalare è

$$P = \gamma^{ac} \gamma^{bd} P_{abcd}.$$

Se indichiamo con  $\gamma$  il determinante della metrica,  $\gamma = |\gamma_{ab}|$ , si ha con un semplice calcolo

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma} \quad (8.18)$$

essendo  $|\gamma^{ab}| = 1/\gamma$ .

In un intorno del punto  $x = y = 0$ , possiamo scrivere l'equazione della superficie nella forma

$$z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$$

dove  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono i raggi principali di curvatura della superficie nel punto dato. Il quadrato dell'elemento di lunghezza sulla superficie è

$$d\ell^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right) (dx)^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right) (dy)^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2} dx dy$$

e, nel punto  $x = y = 0$ , si ha  $\gamma = 1$  e  $P_{1212}$  può essere calcolato dalla (8.8) perchè tutte le derivate prime della metrica si annullano per  $x = y = 0$ . Si trova allora  $P_{1212} = 1/(\rho_1\rho_2)$  e

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{\rho_1\rho_2} \equiv K$$

dove  $K$  è la *curvatura di Gauss* della superficie.

*Problema.* Esprimere il tensore di curvatura  $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$  dello spazio tridimensionale mediante il tensore di rango due  $P_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} P_{\gamma\alpha\delta\beta}$ .

*Soluzione*

In uno spazio tridimensionale il tensore di curvatura ha sei componenti indipendenti <sup>4</sup>, come il tensore simmetrico  $P_{\alpha\beta}$ . Perciò  $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$  può essere espresso, tramite  $P_{\alpha\beta}$  e il tensore metrico  $\gamma_{\alpha\beta}$ , nella forma

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta}$$

che rispetta le proprietà di simmetria del tensore  $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ;  $A_{\alpha\beta}$  è un tensore simmetrico il cui legame con  $P_{\alpha\beta}$  si determina dalle condizioni

$$\gamma^{\alpha\gamma} P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\beta\delta}, \quad \text{e} \quad \gamma^{\beta\delta} P_{\beta\delta} = P.$$

<sup>4</sup>In uno spazio con  $n$  dimensioni, il tensore di curvatura ha  $n^2(n^2 - 1)/12$  componenti indipendenti.

Troviamo allora, con  $\gamma^{\beta\delta} A_{\beta\delta} = A$ ,

$$A\gamma_{\beta\delta} + A_{\beta\delta} = P_{\beta\delta}, \quad 4A = P,$$

da cui

$$A_{\beta\delta} = P_{\beta\delta} - \frac{1}{4}P\gamma_{\beta\delta}$$

e infine

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} + \frac{P}{2}(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}).$$

### 8.3 L'azione per un campo gravitazionale

Per trovare le equazioni che determinano il campo gravitazionale dobbiamo variare la somma delle azioni del campo e delle sorgenti del campo, corpi materiali o campi elettromagnetici. L'azione  $S_g$  del campo è l'integrale di uno scalare esteso al volume quadridimensionale limitato da due ipersuperfici di genere spazio che corrispondono a due valori dati del tempo  $x_0/c$ . Ora, i potenziali del campo sono le componenti del tensore metrico e, come in meccanica e in elettrodinamica, vorremmo che le equazioni del campo non contenessero le derivate dei potenziali di ordine superiore a due. In tal modo le condizioni iniziali dovrebbero essere date solo per i potenziali e le loro derivate prime. Poichè la variazione dell'azione aumenta di uno l'ordine delle derivate, nell'integrale per  $S_g$  dovrebbero comparire solamente le derivate prime delle  $g_{ik}$ .

L'unico scalare significativo però è la curvatura scalare  $R$  che contiene le derivate seconde delle  $g_{ik}$  nei termini in cui appaiono le derivate dei simboli di Christoffel. Queste derivate seconde delle  $g_{ik}$  appaiono linearmente in  $R$  e vedremo che, variando l'azione, le equazioni del campo gravitazionale dipenderanno dalle derivate prime e seconde dei potenziali. Possiamo quindi scrivere l'azione nella forma

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int R \sqrt{-g} d\Omega \quad (8.19)$$

dove  $k$  è la costante gravitazionale. Abbiamo così scelto le unità di misura e il segno meno è dovuto alla richiesta che il termine cinetico, che ora avrà la forma

$$g^{00} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0},$$

sia definito positivo. Calcolando la curvatura scalare per contrazione del tensore di Ricci nell'equazione (8.15) si vede che solo l'ultimo termine della (8.15) fornisce questo contributo con un segno meno.

Nel principio di minima azione per il campo gravitazionale si fanno variare le componenti del tensore metrico  $g_{ik}$  nella (8.19). Non tutte le variazioni di  $g_{ik}$  corrispondono ad una variazione reale del campo gravitazionale perchè le componenti  $g_{ik}$  cambiano anche per una semplice trasformazione di coordinate nello stesso spazio-tempo. Se passiamo dalle coordinate  $x^i$  alle coordinate  $x'^i$

$$x'^i = x^i + \xi^i, \quad (8.20)$$

dove le  $\xi^i$  sono infinitesime e dipendono dal punto  $x^i$  dello spazio-tempo, le componenti  $g^{ik}$  trasformano come

$$\begin{aligned} g'^{ik}(x') &= g^{lm}(x) \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = \\ &= g^{lm} \left( \delta_l^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \right) \left( \delta_m^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \right) \simeq g^{ik}(x) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

In questa equazione abbiamo introdotto le notazioni  $g'^{ik}(x')$  e  $g^{ik}(x)$  per ricordare che  $g'^{ik}$  è funzione di  $x'^i$  e  $g^{ik}$  delle vecchie coordinate  $x^i$ . Sviluppando, in serie di potenze di  $\xi$ , le  $g'^{ik}(x')$  si ha

$$g'^{ik}(x') = g^{ik}(x) + \xi^l \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \simeq g^{ik}(x) + \xi^l \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}$$

perchè  $\xi^l$  è infinitesimo e  $g'^{ik}$  differisce da  $g^{ik}$  per infinitesimi. Otteniamo quindi, dalla (8.21)

$$g'^{ik}(x) = g^{ik}(x) - \xi^l \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}$$

e, ricordando che  $g^{ik}{}_{;l} = 0$ , possiamo riscrivere gli ultimi tre termini di questa equazione nella forma  $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ . La legge di trasformazione del tensore metrico diventa allora <sup>5</sup>

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i} \quad (8.22)$$

e, per le componenti covarianti,

$$g'_{ik} = g_{ik} + \delta g_{ik}, \quad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i}. \quad (8.23)$$

Quest'ultima relazione deriva dalla condizione che, al primo ordine in  $\xi$ ,  $g'_{il}g'^{lk} = \delta_i^k$ .

Tutto ciò non influisce sulla derivazione delle equazioni del campo tramite il principio di minima azione. La possibilità di far variare tutte le componenti  $g_{ik}$  indipendentemente è legata alla richiesta che l'azione abbia un estremo e non necessariamente un minimo. Le equazioni (8.22) e (8.23) avranno invece un ruolo importante nella derivazione del tensore energia-impulso della sorgente del campo gravitazionale. Ci ricordano anche che, in un dato campo gravitazionale, una trasformazione di coordinate cambia la metrica.

<sup>5</sup>Le equazioni  $\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = 0$  definiscono le trasformazioni infinitesime di coordinate che non cambiano la metrica e vengono dette le *equazioni di Killing*.

## 8.4 Tensore energia-impulso

Scriviamo l'integrale d'azione per un sistema fisico generalizzando la forma (4.14) della relatività speciale al caso di coordinate curvilinee

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega, \quad (8.24)$$

$\Lambda$  è la densità Lagrangiana che dipende dai campi e dalle loro derivate prime e  $\sqrt{-g}d\Omega$  è il corretto elemento di integrazione nello spazio-tempo. Per una trasformazione di coordinate, per esempio la (8.20),  $S$  non varia perchè è uno scalare ma varieranno i campi e la metrica. Se supponiamo che le equazioni del moto del sistema fisico siano soddisfatte, le variazioni dei campi non daranno contributo a  $\delta S$  perchè le equazioni del moto si ottengono annullando la variazione dell'azione rispetto ai campi e ai loro gradienti. Restano i termini legati alla variazione delle componenti del tensore metrico.

Poniamo  $\delta g^{ik} = 0$  sulla frontiera di integrazione e calcoliamo la variazione dell'azione con l'aiuto del teorema di Gauss che elimina il termine calcolato sulla frontiera di integrazione

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial(\partial g^{ik}/\partial x^l)} \delta \left( \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) \right] d\Omega = \\ &= \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial(\partial g^{ik}/\partial x^l)} \right] \delta g^{ik} d\Omega. \end{aligned}$$

Definendo il tensore simmetrico  $T_{ik}$  tramite l'equazione

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial(\partial g^{ik}/\partial x^l)} \quad (8.25)$$

otteniamo per  $\delta S$

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (8.26)$$

Evidentemente  $\delta S = 0$  non significa che  $T_{ik} = 0$ , perchè le dieci grandezze  $\delta g^{ik}$  non sono indipendenti in quanto derivano da una trasformazione delle coordinate che sono solo quattro.

Sostituendo a  $\delta g^{ik}$  l'espressione (8.22) e tenendo conto della simmetria di  $T_{ik}$  otteniamo

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} (\xi^{i;k} + \xi^{k;i}) \sqrt{-g} d\Omega = \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^{i;k} \sqrt{-g} d\Omega.$$

Trasformiamo la funzione integranda, invariante, scrivendo

$$T_{ik} \xi^{i;k} = (T_i^k \xi^i)_{;k} - T_{i;k}^k \xi^i$$

e ricordiamo che, per la (7.38), si ha

$$(T_i^k \xi^i)_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k \xi^i).$$

L'integrale

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k \xi^i) d\Omega$$

è nullo perchè, per il teorema di Gauss, può essere trasformato in un integrale di ipersuperficie e, sulla frontiera di integrazione,  $\delta g^{ik} = 0$  e quindi  $\xi^i = 0$ .

Possiamo ora annullare  $\delta S$

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int T_{i;k}^k \xi^i \sqrt{-g} d\Omega = 0$$

e, per l'arbitrarietà delle  $\xi^i$ , otteniamo l'equazione

$$T_{i;k}^k = 0 \quad (8.27)$$

che è l'equivalente, in coordinate curvilinee, dell'equazione  $\partial T_i^k / \partial x^k = 0$  soddisfatta dal tensore energia impulso in relatività speciale.

E' facile mostrare, e lo faremo in un problema alla fine di questa sezione, che il tensore  $T_{ik}$ , definito dalla (8.25), è proprio il tensore energia-impulso. Per esempio, nel caso del campo elettromagnetico, partendo dalla Lagrangiana

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F_{lm} g^{il} g^{km},$$

si ottiene dalla (8.25)

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( -F_{il} F_k^l + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik} \right) \quad (8.28)$$

già in forma simmetrica. Ricordiamo anche la (4.40) che determina il tensore energia-impulso per un corpo macroscopico

$$T_{ik} = (p + \varepsilon) u_i u_k - p g_{ik} \quad (8.29)$$

con  $T_{00} > 0$ .

*Problema 1. Mostrare che l'equazione (8.25) porta alla forma (8.28) per il tensore energia impulso del campo elettromagnetico.*

Soluzione

Nella densità Lagrangiana

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F_{lm} g^{il} g^{km}$$



non compaiono le derivate delle  $g^{ik}$  e l'equazione (8.25) diventa

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ik}}.$$

Ricordiamo anche la (7.36) per cui

$$dg = -gg_{ik}dg^{ik}$$

e quindi

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{dg}{dg^{ik}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ik}.$$

Avremo

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ik}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ik}\Lambda - \frac{1}{8\pi}\sqrt{-g}F_{im}F_k{}^m \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} \cdot \frac{1}{4\pi} \left( -F_{im}F_k{}^m + \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik} \right)\end{aligned}$$

da cui si riottiene la (8.28).

*Problema 2. Dimostrare che  $T_{00}$ , per un corpo macroscopico, è una grandezza sempre positiva.*

Soluzione

Dalla (8.29) si ha

$$T_{00} = \varepsilon u_0^2 + p(u_0^2 - g_{00})$$

ed è sufficiente dimostrare che il termine  $p(u_0^2 - g_{00})$  è positivo. Infatti

$$u_0 = g_{00}u^0 + g_{0\alpha}u^\alpha = \frac{1}{ds}(g_{00}dx^0 + g_{0\alpha}dx^\alpha)$$

e

$$\begin{aligned}u_0^2 - g_{00} &= \frac{1}{ds^2} \left[ (g_{00}dx^0 + g_{0\alpha}dx^\alpha)^2 - g_{00}ds^2 \right] \\ &= \frac{1}{ds^2} (g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta = g_{00} \left( \frac{d\ell}{ds} \right)^2\end{aligned}$$

dove  $d\ell$  è l'elemento di distanza spaziale con la metrica (7.14). Quindi anche il secondo termine di  $T_{00}$  è sempre positivo.

## 8.5 Equazioni di Einstein

Le equazioni del campo gravitazionale si ottengono dal principio di minima azione nella forma  $\delta(S_m + S_g) = 0$  dove  $S_g$  e  $S_m$  rappresentano rispettivamente l'azione del campo gravitazionale e della materia. Se facciamo variare

il campo gravitazionale, cioè le grandezze  $g_{ik}$ ,  $\delta S_m$  è data dalla (8.26) mentre la variazione di  $S_g$  è, a meno del coefficiente costante,

$$\begin{aligned}\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega &= \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int \left( R_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + R \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g} \delta R_{ik} \right) d\Omega.\end{aligned}$$

Ricordando la (7.36) si ha

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik}$$

e quindi

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = \int \left( R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (8.30)$$

In un sistema di riferimento localmente geodetico, dove tutti i simboli di Christoffel sono nulli insieme con le derivate ordinarie del tensore metrico, si ottiene

$$\begin{aligned}g^{ik} \delta R_{ik} &= g^{ik} \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l \right) \\ &= g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^k = \frac{\partial w^l}{\partial x^l},\end{aligned}$$

dove

$$w^l = g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k.$$

Le grandezze  $\delta \Gamma_{kl}^i$ , a differenza delle  $\Gamma_{kl}^i$ , costituiscono un tensore. Infatti, se  $\Gamma_{il}^k A_k dx^l$  è la variazione di un vettore per trasporto parallelo da un punto  $P$  ad un punto  $Q$ , infinitamente vicino,  $\delta \Gamma_{il}^k A_k dx^l$  è la differenza tra due vettori ottenuti per trasporto parallelo, con le  $\Gamma_{il}^k$  variate e non variate, da  $P$  a  $Q$ . Poichè la differenza di due vettori nello stesso punto è un vettore,  $\delta \Gamma_{il}^k$  deve essere un tensore.

Allora  $w^l$  è un vettore e possiamo scrivere, in un sistema di coordinate arbitrario

$$g^{ik} \delta R_{ik} = w^l_{;l} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} w^l)}{\partial x^l}$$

e l'ultimo integrale nella (8.30) diventa

$$\int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{\partial(\sqrt{-g} w^l)}{\partial x^l} d\Omega.$$

Per il teorema di Gauss, questo integrale può essere trasformato in un integrale di  $w^l$  esteso alla ipersuperficie di frontiera ed è nullo perchè le variazioni

$\delta g^{ik}$  sono nulle agli estremi di integrazione. Troviamo quindi la variazione  $\delta S_g$  nella forma

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left( R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (8.31)$$

con il corretto coefficiente introdotto nella (8.19).

Ricordando la (8.26) possiamo ora imporre la condizione  $\delta S_m + \delta S_g = 0$

$$-\frac{c^3}{16\pi k} \int \left( R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = 0$$

e, per l'arbitrarietà delle  $\delta g^{ik}$ ,

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}, \quad (8.32)$$

oppure, per le componenti miste,

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k. \quad (8.33)$$

Queste sono le *equazioni del campo gravitazionale*, equazioni fondamentali della relatività generale dette anche *equazioni di Einstein*, che determinano il campo gravitazionale, ovvero il tensore metrico dello spazio-tempo, dalla conoscenza del tensore energia-impulso della sorgente del campo.

Notiamo che la costante gravitazionale è piccola,  $k \simeq 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , e quindi l'interazione gravitazionale entra in gioco solamente per corpi di massa sufficientemente grande. Per questo, nello studio del campo gravitazionale, si ha a che fare in generale con corpi macroscopici per i quali  $T_{ik}$  ha la forma (8.29).

Contraendo gli indici  $i$  e  $k$  nella (8.33) si trova

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4} T \quad (8.34)$$

dove  $T$  è la traccia del tensore energia-impulso,  $T = T_i^i$ . Possiamo quindi scrivere le equazioni del campo anche nella forma

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left( T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right). \quad (8.35)$$

Notiamo che le equazioni del campo gravitazionale non sono lineari e quindi il principio di sovrapposizione, che valeva per un campo elettromagnetico, non è più vero per un campo gravitazionale. Il campo creato da più corpi materiali non è la somma dei campi creati da ogni singolo corpo e,

solamente nel limite non relativistico, si ritroverà la linearità delle equazioni del campo. Mentre il campo elettromagnetico non può, essendo neutro, interagire con sé stesso, il campo gravitazionale interagisce con ogni forma di energia (o massa) e quindi anche con sé stesso.

In uno spazio vuoto si ha  $T_{ik} = 0$  e le equazioni del campo gravitazionale si riducono a

$$R_{ik} = 0. \quad (8.36)$$

Ciò non significa che uno spazio-tempo vuoto sia piatto, perchè si verifichi ciò sono necessarie le condizioni più restrittive  $R^i_{klm} = 0$ . Le equazioni del campo gravitazionale nel vuoto (8.36) hanno soluzioni che rappresentano onde gravitazionali che si propagano nel vuoto con la velocità della luce.

Sappiamo che la divergenza  $T^k_{i;k}$  del tensore  $T^k_i$  è nulla, per la (8.27), ne risulta che la divergenza del primo membro dell'equazione (8.33) deve essere nulla. L'identità

$$R^k_{i;k} - \frac{1}{2} (\delta^k_i R)_{;k} = R^k_{i;k} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^i} = 0$$

risulta dalla contrazione (8.17) dell'identità di Bianchi. Così le condizioni  $T^k_{i;k} = 0$  sono contenute nelle equazioni di Einstein (8.33), esse esprimono le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso della sorgente del campo gravitazionale e sono contenute nelle equazioni stesse del campo <sup>6</sup>. Nelle equazioni di Maxwell la distribuzione e il moto delle cariche potevano essere dati in modo arbitrario, purchè la carica totale si conservasse, e a questa distribuzione corrispondeva un campo elettromagnetico determinato dalle equazioni stesse. In un campo gravitazionale, la distribuzione e il moto dei corpi che generano il campo non possono essere scelti arbitrariamente ma devono essere determinati insieme con il campo creato da questi corpi.

Le dieci equazioni (8.32) non determinano solamente il tensore metrico  $g_{ik}$ . Una trasformazione arbitraria delle quattro coordinate  $x^i$  è sempre permessa e, tramite questa trasformazione, possiamo scegliere arbitrariamente quattro delle dieci componenti del tensore  $g_{ik}$ . Perciò solo sei componenti  $g_{ik}$  sono indipendenti. Inoltre le componenti delle quadrivelocità  $u^i$ , che appaiono nel tensore energia-impulso della materia, sono legate dalla relazione  $u_i u^i = 1$  e solo tre di esse sono indipendenti. Le equazioni (8.32) determinano dieci incognite: sei componenti  $g_{ik}$ , tre componenti  $u^i$  e la densità  $\varepsilon/c^2$  della materia (o la sua pressione  $p$ ). L'equazione di stato della materia, per esempio  $p = 0$  per la materia rarefatta o  $p = \varepsilon/3$  per un gas ultrarelativistico, deve essere data indipendentemente.

---

<sup>6</sup>La possibilità di eliminare il campo gravitazionale da una regione infinitesima dello spazio-tempo non permette di definire un tensore energia-impulso per il campo gravitazionale. Scelto un particolare sistema di coordinate è possibile però definire un pseudotensore energia-impulso.

Le equazioni di Einstein sono un sistema di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Le condizioni iniziali vengono date ad un certo istante e possiamo chiederci per quante grandezze è possibile scegliere arbitrariamente le distribuzioni spaziali iniziali. Le equazioni (8.32) non contengono le derivate seconde rispetto al tempo di tutte e dieci le componenti  $g_{ik}$ . Nell'espressione (8.8), ottenuta in un sistema di coordinate localmente geodetico, sono contenute tutte le derivate seconde dell  $g_{ik}$  che possono apparire in un sistema arbitrario e si vede che le derivate seconde rispetto al tempo compaiono solo nelle componenti  $R_{\alpha 0 \beta 0}$ , del tensore di curvatura, nel termine proporzionale a  $\partial^2 g_{\alpha\beta}/(\partial x^0)^2$ . Non compaiono derivate seconde, rispetto ad  $x^0$ , delle componenti  $g_{0\alpha}$  e  $g_{00}$  e lo stesso accadrà nelle equazioni (8.32). Possiamo quindi scegliere arbitrariamente, come condizioni iniziali, solo le derivate prime di sei grandezze. Dobbiamo aggiungere le distribuzioni iniziali di dieci componenti  $g_{ik}$ , di tre componenti della quadrirelatività e, per esempio, la densità; in tutto venti funzioni arbitrarie. Tenendo conto dell'arbitrarietà nella scelta del sistema di coordinate, il numero di funzioni arbitrarie, fisicamente diverse, è molto minore. Di questo ce ne renderemo conto negli esempi che faremo.

## 8.6 La legge di Newton

Eseguiamo nelle equazioni del campo gravitazionale (8.33) il passaggio al limite che porta alla meccanica classica. Abbiamo visto che, l'ipotesi che le velocità di tutte le particelle siano piccole, richiede allo stesso tempo che il campo gravitazionale sia debole, altrimenti una particella nel campo gravitazionale acquisterebbe una velocità grande.

Nel limite considerato

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

e possiamo scrivere, per il tensore energia-impulso, l'espressione  $T_i^k = \mu c^2 u_i u^k$  dove  $\mu$  è la densità di massa del corpo. Lo stesso limite impone che  $u^\alpha = 0$  e  $u^0 = u_0 = 1$  perchè anche il moto macroscopico è considerato lento. Di tutte le componenti  $T_i^k$  è diversa da zero solamente la componente  $T_0^0$

$$T_0^0 = \mu c^2$$

e lo scalare  $T = T_i^i$  avrà lo stesso valore  $\mu c^2$ . Se scriviamo le equazioni del campo (8.35) per le componenti miste

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4} \left( T_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k T \right)$$

otteniamo un'unica equazione significativa, per  $i = k = 0$ ,

$$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2} \mu \quad (8.37)$$

e tutte le altre equazioni diventano delle identità nell'approssimazione considerata.

Dobbiamo allora isolare nell'espressione per  $R_{00}$

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{0l}^l}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^m \Gamma_{lm}^l - \Gamma_{0l}^m \Gamma_{0m}^l$$

i termini che sono dell'ordine  $\phi/c^2$  e trascurare tutti gli altri. I simboli di Christoffel, che contengono le derivate di  $g_{00}$  e solo queste, presenteranno un fattore  $1/c^2$ , oppure  $1/c^3$  se la derivata è fatta rispetto ad  $x^0 = ct$ , e il loro prodotto è certamente trascurabile. Delle due derivate delle  $\Gamma_{kl}^i$  resta solo  $\partial \Gamma_{00}^l / \partial x^l$ , per  $l = \alpha$ , e

$$\Gamma_{00}^\alpha \simeq -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}.$$

Quindi

$$R_0^0 \simeq R_{00} = \frac{1}{c^2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2} \Delta \phi$$

e le equazioni del campo gravitazionale diventano, per la (8.37)

$$\Delta \phi = 4\pi k \mu, \quad (8.38)$$

che è l'equazione del campo in meccanica non relativistica.

Ricordiamo che, in elettrodinamica, l'equazione di Poisson  $\Delta \phi_{em} = -4\pi \rho$  ha come soluzione

$$\phi_{em} = \int \frac{\rho}{R} dV.$$

Analogamente, la soluzione della (8.38) è

$$\phi = -k \int \frac{\mu}{R} dV \quad (8.39)$$

che determina, in questa approssimazione, il potenziale del campo gravitazionale dalla distribuzione di massa corrispondente alla densità  $\mu$ . Per una particella puntiforme di massa  $m$ , il potenziale del campo da essa creato è

$$\phi = -\frac{km}{R} \quad (8.40)$$

e una particella di prova di massa  $m'$ , che si trova in questo campo, subisce una forza

$$F = -\frac{km m'}{R^2} \quad (8.41)$$

che è la *legge di attrazione di Newton*.

## Capitolo 9

# Campo dei gravi

### 9.1 Campo gravitazionale a simmetria centrale

Consideriamo un campo gravitazionale generato da una qualsiasi distribuzione di massa a simmetria sferica. Se anche il moto della materia gode della stessa simmetria, cioè la velocità in ogni punto è radiale verso il centro di simmetria e la metrica dello spazio-tempo è la stessa in tutti i punti equidistanti dal centro, diremo che il campo gravitazionale ha simmetria centrale.

In coordinate sferiche, l'intervallo nello spazio piatto con la metrica di Minkowski diventa

$$ds^2 = c^2 dt^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - dr^2. \quad (9.1)$$

Ogni superficie con  $r$  e  $t$  costanti è una superficie sferica bidimensionale e le distanze, lungo curve che giacciono sulla superficie di tale sfera, si ottengono dalla (9.1) ponendo  $dt = dr = 0$

$$d\ell^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.2)$$

Questa sfera ha una circonferenza pari a  $2\pi r$  e un'area  $4\pi r^2$ . In uno spazio-tempo curvo, con simmetria centrale, possiamo riscrivere la (9.2) nella forma

$$d\ell^2 = k(r, t)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (9.3)$$

con  $k(r, t)$  arbitraria, e ogni punto dello spazio-tempo si troverà su una superficie sferica bidimensionale con l'elemento di linea (9.3). L'area della sfera sarà ora  $4\pi k(r, t)$ .

L'espressione più generale di  $ds^2$ , che rispetta la simmetria centrale, sarà allora

$$ds^2 = h(r, t)dr^2 + k(r, t)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + l(r, t)dt^2 + a(r, t)dr dt$$

dove  $a$ ,  $h$ ,  $k$  e  $l$  sono funzioni arbitrarie di  $r$  e  $t$ . Sfruttiamo ora la possibilità di eseguire sulle coordinate  $r$  e  $t$  qualsiasi trasformazione che non alteri la simmetria centrale di  $ds^2$ , per esempio

$$r \Rightarrow f_1(r, t), \quad t \Rightarrow f_2(r, t) \quad (9.4)$$

dove  $f_1$  e  $f_2$  sono funzioni arbitrarie delle coordinate. Sostituendo in  $ds^2$  le nuove espressioni per  $r$  e  $t$  date dalle (9.4) e

$$dr \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial r} dr + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt, \quad dt \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial r} dr + \frac{\partial f_2}{\partial t} dt$$

vediamo che è possibile scegliere le funzioni  $f_1$  e  $f_2$  in modo da soddisfare due condizioni:  $k(r, t) = -r^2$  e  $a(r, t) = 0$ . Ora, una qualsiasi superficie con  $r$  e  $t$  costanti è una superficie sferica di area  $4\pi r^2$  e circonferenza  $2\pi r$ , ma  $r$  non deve essere confuso con la vera "distanza" della superficie dal centro perchè quest'ultima dipende dal coefficiente di  $dr^2$ .

Per i calcoli che faremo risulta comodo scrivere i coefficienti di  $dr^2$  e di  $dt^2$  come  $-\exp[\lambda(r, t)]$  e  $c^2 \exp[\nu(r, t)]$ , rispettivamente, ottenendo

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - e^\lambda dr^2. \quad (9.5)$$

Se poniamo  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \vartheta$ , e  $x^3 = \varphi$ , il tensore metrico

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \vartheta$$

è diagonale e si ottiene immediatamente la metrica controvariante

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}}, \quad g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}}, \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}}.$$

Possiamo calcolare ora i simboli di Christoffel  $\Gamma_{kl}^i$  che, introducendo la notazione  $\dot{\nu} = \partial\nu/\partial t$ ,  $\nu' = \partial\nu/\partial r$  e analoghe per  $\lambda$ , risultano essere

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} e^{\lambda-\nu} \dot{\lambda}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu', & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \vartheta e^{-\lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \vartheta. \end{aligned}$$

Tutte le altre componenti dei simboli  $\Gamma_{kl}^i$  sono nulle. Finora il calcolo non presenta alcuna difficoltà. Vogliamo ora affrontare il calcolo, semplice ma un pò più laborioso, del primo membro delle equazioni di Einstein nella forma

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k.$$



Dalle equazioni (8.15) si ottiene il tensore di Ricci covariante e, dalla (8.16), la curvatura scalare. Abbiamo

$$R_i^k = g^{km} R_{im}$$

e, alla fine, le componenti delle equazioni del campo, che ci interesseranno nel seguito, assumono la forma

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4} T_0^0, \quad (9.6)$$

$$-e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4} T_1^1, \quad (9.7)$$

$$-e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = \frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 \quad (9.8)$$

dove

$$T_i^k = (p + \epsilon) u_i u^k - p \delta_i^k$$

e le uniche componenti diverse da zero della quadrivelocità sono  $u^0$  e la componente radiale  $u^1$ . Non abbiamo scritto esplicitamente le due componenti diverse da zero  $R_2^2 - R/2 = R_3^3 - R/2$ , per cui  $T_2^2 = T_3^3$ , che danno luogo ad equazioni piuttosto complesse che non utilizzeremo nel seguito <sup>1</sup>.

Nel caso importante di una campo a simmetria centrale nel vuoto, cioè al di fuori delle masse che lo generano, le equazioni del campo per le componenti miste  $R_2^2$  e  $R_3^3$  diventano una conseguenza delle (9.6), (9.7) e (9.8) che sono, in questo caso, le uniche equazioni da risolvere. All'esterno del corpo che genera il campo, tutte le componenti del tensore energia-impulso sono nulle e possiamo riscrivere la (9.6) nella forma

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(r e^{-\lambda})}{\partial r} = 1, \quad (9.9)$$

la differenza delle equazioni (9.6) e (9.7) come

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (9.10)$$

e, infine, la (9.8)

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (9.11)$$

L'equazione (9.11) ci dice che  $\lambda$  non dipende dal tempo,  $\lambda = \lambda(r)$ , mentre l'equazione (9.10) afferma che  $\lambda + \nu$  non dipende da  $r$

$$\lambda(r) + \nu(r, t) = f(t). \quad (9.12)$$

---

<sup>1</sup>In realtà si ha

$$R_{22} = \frac{R_{33}}{\sin^2 \vartheta} = 1 - e^{-\lambda} + \frac{1}{2} e^{-\lambda} (\lambda' - \nu')$$

ed è la curvatura scalare che ha una espressione complicata.

Scegliendo l'intervallo nella forma (9.5), abbiamo imposto due condizioni che non determinano però univocamente la coordinata temporale, una trasformazione arbitraria del tempo,  $t = g(t')$ , è ancora possibile. Scegliamo  $g(t')$  in modo che  $\nu(r, g(t')) = \nu(r, t') + f(g(t'))$ , l'equazione (9.12) diventa allora

$$\lambda(r) + \nu(r) = 0$$

perchè  $\nu(r, t')$  non può più dipendere da  $t'$ . Notiamo che un campo gravitazionale a simmetria centrale nel vuoto diventa automaticamente statico.

L'equazione (9.9) può essere integrata facilmente

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{C}{r} \quad (9.13)$$

dove  $C$  è una costante di integrazione. Quando  $r$  tende all'infinito si ha  $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1$ , cioè la metrica diventa Galileiana, e a grandi distanze, dove il campo è debole, imponiamo la legge di Newton

$$e^{\nu} = g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

dove  $\phi$  è il potenziale Newtoniano,  $\phi = -km/r$  e la massa  $m$  è la massa totale del corpo che crea il campo. Otteniamo così il valore della costante  $C = -2km/c^2$  e

$$g_{00} = 1 - \frac{2km}{c^2 r} \equiv 1 - \frac{r_g}{r} \quad (9.14)$$

dove  $r_g = 2km/c^2$  è detto *raggio gravitazionale* del corpo <sup>2</sup>. La metrica dello spazio-tempo è

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (9.15)$$

soluzione delle equazioni di Einstein all'esterno di un corpo con simmetria centrale (K. Schwarzschild, 1916). La metrica (9.15) dipende solo dalla massa totale del corpo, come nell'analogo problema della teoria Newtoniana.

Consideriamo ora le distanze e gli intervalli di tempo nello spazio-tempo con la metrica di Schwarzschild. La metrica spaziale è determinata dall'elemento  $d\ell$  dove

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.16)$$

e, per  $dr = 0$ , si riduce alla (9.2) cioè alla distanza su una superficie sferica bidimensionale con area  $4\pi r^2$  e circonferenza  $2\pi r$ . E' importante notare

---

<sup>2</sup>Per il sole  $r_g \simeq 3 \text{ Km}$ , per la terra  $r_g \simeq 0.9 \text{ cm}$ .

che la distanza fra due punti  $r_1$  e  $r_2$ , giacenti sullo stesso raggio, è data dall'integrale

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r_g/r}} = \left( \sqrt{r(r - r_g)} + r_g \ln[\sqrt{r_g} + \sqrt{r - r_g}] \right) \Big|_{r_1}^{r_2} > r_2 - r_1. \quad (9.17)$$

Ciò è dovuto al fatto che  $e^\lambda = -g_{11} \geq 1$  e il segno di uguaglianza si ha per  $r \rightarrow \infty$ .

Ricordiamo anche la definizione di tempo reale, o tempo proprio,

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 = \sqrt{g_{00}} dt$$

che, essendo il campo costante, può essere integrata

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t. \quad (9.18)$$

Abbiamo quindi la disuguaglianza

$$\Delta\tau \leq \Delta t \quad (9.19)$$

e l'uguaglianza ha luogo all'infinito spaziale dove  $t$  coincide con il tempo reale. Quindi un orologio, a distanza finita dalla massa che genera il campo, ritarderà rispetto ad un orologio che si trova all'infinito o, in generale, ad una distanza maggiore dal centro del campo.

A grandi distanze dalle masse che generano il campo, ogni campo gravitazionale può essere considerato con buona approssimazione a simmetria centrale. Se sviluppiamo in serie di  $r_g/r$  la metrica di Schwarzschild, e ci arrestiamo al primo termine, troviamo

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{r_g}{r} (dr^2 + c^2 dt^2) \quad (9.20)$$

dove  $ds_0^2$  è la metrica Galileiana (9.1). La (9.20) determina la metrica a grandi distanze da qualsiasi sistema di corpi.

Resta da capire cosa succede alla metrica (9.15) quando  $r = r_g$ . Ricordiamo che la metrica di Schwarzschild (9.15) è stata ottenuta come soluzione delle equazioni di Einstein all'esterno del corpo che genera il campo. La sfera di Schwarzschild,  $r = r_g$ , cade all'interno di tutti i corpi del sistema solare, ma si conoscono esempi di corpi con massa abbastanza grande, per cui non esiste uno stato di equilibrio statico, che si comprimono indefinitamente tramite un processo che viene chiamato collasso gravitazionale. In tal caso il raggio del corpo può essere eguale, o minore, di  $r_g$ .

Anche se  $g_{00}$  si annulla e  $g_{11}$  diverge per  $r \rightarrow r_g$ , la metrica (9.15) non ha una singolarità vera perchè il determinante della metrica

$$g = -r^4 \sin^2 \vartheta$$

è sempre negativo per  $r = r_g$  e la condizione  $g < 0$  è soddisfatta. La vera singolarità della metrica si ha per  $r = 0$ . Tuttavia, il fatto che  $g_{00}$  si annulli per  $r = r_g$ , ci dice che per  $r < r_g$  diventa impossibile realizzare il corrispondente sistema di riferimento. Con una opportuna trasformazione di coordinate sarà possibile eliminare la singolarità dalla metrica.

Per l'equazione (9.18), gli intervalli di tempo proprio sulla superficie del corpo, rispetto agli intervalli di tempo  $t$  dell'osservatore infinitamente lontano, subiscono una contrazione per un fattore  $\sqrt{1 - r_g/r}$  e, per  $r \rightarrow r_g$ , tutti i processi che avvengono sul corpo richiederebbero un tempo infinito di osservazione per l'osservatore lontano. Un corpo che ha subito un collasso gravitazionale, per cui il suo raggio è diventato minore di  $r_g$ , non emette alcun segnale e interagisce con il mondo esterno solo tramite il suo campo gravitazionale statico. Un tale corpo viene chiamato *buccia nera* e la sfera di Schwarzschild è detta *orizzonte degli eventi* perchè può essere attraversata da particelle o raggi di luce in una sola direzione, dall'esterno verso l'interno.

## 9.2 Traiettorie nel campo di Schwarzschild

La geometria di Schwarzschild è la geometria dello spazio tempo vuoto all'esterno di una stella sferica. Essa è descritta dall'elemento di linea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (9.21)$$

dove  $r_g = 2km'/c^2$  è il raggio gravitazionale della sorgente. Abbiamo ora indicato con  $m'$  la massa della sorgente e adotteremo il simbolo  $m$  per la massa della particella di prova in questo campo.

Come conseguenza delle equazioni geodetiche in forma covariante (7.45), quando lo spazio-tempo ha una certa simmetria ci sarà una componente del vettore energia-impulso che si conserva lungo la traiettoria geodetica. Poichè lo spazio tempo (9.21) ha molte simmetrie, è un campo statico con simmetria sferica, la conoscenza delle grandezze conservate determina completamente la traiettoria. Dall'equazione (7.45)

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} u^k u^l = 0$$

si ha che, poichè il tensore metrico non dipende da  $x^0$  e da  $\varphi$ ,  $u_0$  e  $u_3$  sono costanti del moto insieme con le corrispondenti componenti del quadri-impulso  $p_0$  e  $p_3$ , essendo  $p_i = mc u_i$ . Possiamo riscrivere queste costanti

nella forma

$$u_0 = \frac{p_0}{mc} = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} = g_{00} \frac{dx^0}{ds} \quad \text{e} \quad u_3 = \frac{p_\varphi}{mc} = -\frac{L}{mc} = g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{ds}$$

che danno

$$\frac{dx^0}{ds} = g^{00} \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{ds} = -g^{\varphi\varphi} \frac{L}{mc} \quad (9.22)$$

dove le costanti  $\mathcal{E}_0$  e  $L$  devono essere determinate dalle condizioni iniziali. Notiamo che, per la metrica (9.21),  $g^{00} = 1/g_{00} = (1 - r_g/r)^{-1}$  e  $g^{\varphi\varphi} = 1/g_{\varphi\varphi} = -1/(r^2 \sin^2 \theta)$ .

A causa della simmetria sferica, il moto sarà confinato in un piano che possiamo scegliere come piano equatoriale, allora  $\theta = \pi/2$  sarà costante per l'orbita e  $d\theta/ds$  si annullerà insieme a  $p^\theta$ . Potremo ripetere quanto abbiamo detto finora per una particella di massa nulla, per esempio un fotone, o per un raggio di luce, in entrambi i casi sarà  $ds^2 = 0$ . Allora, saranno le componenti  $k_0$  e  $k_3$  che diventeranno costanti del moto e le equazioni (9.22) diventeranno

$$k^0 = \frac{dx^0}{d\lambda} = g^{00} \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} \quad \text{e} \quad k^3 = \frac{d\varphi}{d\lambda} = -g^{\varphi\varphi} \frac{L}{c} \quad (9.23)$$

dove, ora,  $\mathcal{E}_0$  è legata alla frequenza  $\omega_0$  del raggio.

Sia per la particella che per il raggio di luce, non abbiamo ancora determinato la componente  $p^r$  del quadri-impulso e, nel caso di una particella di massa  $m$ , possiamo ottenerla dalla relazione  $p_i p^i = m^2 c^2$  oppure, che è equivalente, dalla  $u_i u^i = 1$ . La condizione (ricordiamo che  $u^2 = u_2 = 0$ )  $u_0 u^0 - u_1 u^1 - u_3 u^3 = 1$  dà

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{L}{mc}\right)^2 = 1$$

che può essere risolta per determinare l'equazione fondamentale dell'orbita

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{m^2 c^4} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{L}{mc}\right)^2\right]. \quad (9.24)$$

Questa equazione diventa, per un raggio di luce e dalla condizione  $k_i k^i = 0$ ,

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{c^4} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{L}{c}\right)^2. \quad (9.25)$$

Le equazioni (9.22), (9.23), (9.24) e (9.25) ci permetteranno di derivare alcune delle predizioni della relatività generale che, confermate dagli esperimenti, rappresentano prove fondamentali della teoria. Prima di affrontare

questo calcolo è utile ricordare brevemente il problema di Keplero in meccanica non relativistica. Il ragionamento seguito per risolvere questo problema, ben noto dalla meccanica Newtoniana, ci sarà di aiuto nel seguito.

Nel limite non relativistico le equazioni (9.22) danno la conservazione dell'energia e la seconda legge di Keplero, la legge delle aree. Indichiamo con  $m'$  la massa del sole e con  $m$  la massa del pianeta, allora la conservazione dell'energia diventa, se la dividiamo per  $m$ ,

$$T + V = E \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{km'}{r} = \frac{E}{m}.$$

Nel piano del moto, scriviamo

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]$$

e, poichè  $d\varphi/dt = J/r^2$  con  $J$  costante (momento angolare per unità di massa), si ha

$$v^2 = J^2 \left[ \left(\frac{dr}{r^2 d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right].$$

Poniamo ora  $u = 1/r$ , trasformando l'equazione dell'energia in

$$\frac{1}{2}J^2 \left[ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \right] - km'u = \frac{E}{m},$$

e deriviamo rispetto a  $\varphi$

$$\frac{du}{d\varphi} \left[ J^2 \left( \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) - km' \right] = 0$$

notando che, se il moto non è circolare e  $du/d\varphi \neq 0$ , la parentesi deve annullarsi. Otteniamo un'equazione differenziale, lineare e omogenea, con coefficienti costanti del secondo ordine in  $u$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{km'}{J^2} \quad (9.26)$$

che ha come soluzione

$$u = \frac{km'}{J^2} - \frac{A}{J} \sin \varphi + \frac{B}{J} \cos \varphi \quad (9.27)$$

dove abbiamo preso  $A/J$  e  $B/J$  come costanti di integrazione. Questa è l'equazione di una sezione conica in coordinate polari con l'origine coincidente con uno dei fuochi della sezione conica.

Se scegliamo la linea  $\varphi = 0$  come l'asse sul quale sono posti il perielio e l'afelio, cioè i punti in cui  $r$  è un minimo o un massimo, otteniamo la condizione

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0 \quad \text{per} \quad \varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

e quindi  $A = 0$ . Se  $e$  è l'eccentricità dell'ellisse e  $a$  il semiasse maggiore, avremo, al perielio,  $\varphi = 0$  e  $r = a(1 - e)$ , cioè

$$\frac{1}{a(1 - e)} = \frac{km'}{J^2} + \frac{B}{J}$$

e, all'afelio, con  $\varphi = \pi$  e  $r = a(1 + e)$

$$\frac{1}{a(1 + e)} = \frac{km'}{J^2} - \frac{B}{J}.$$

Sommando e sottraendo queste equazioni, si ottiene

$$\frac{km'}{J^2} = \frac{1}{a(1 - e^2)} \quad \text{e} \quad \frac{B}{J} = \frac{e}{a(1 - e^2)} \quad (9.28)$$

da cui si deriva la nota orbita ellittica

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{a(1 - e^2)}. \quad (9.29)$$

Notiamo che l'orbita (9.29) in meccanica Newtoniana può essere ottenuta direttamente dalle equazioni del moto, analogamente in relatività generale la soluzione del problema della traiettoria può essere derivata dalle equazioni geodetiche. E' istruttivo però seguire lo stesso metodo, esposto qui, anche per lo spazio-tempo (9.21).

### 9.2.1 Precessione del perielio

È ben noto che le orbite descritte dai pianeti attorno al sole sono delle ellissi, in cui il sole (o più esattamente il centro di massa del sistema sole-pianeta) occupa uno dei fuochi. Tuttavia tale risultato è solo approssimativamente vero, anche all'interno della teoria Newtoniana della gravitazione. Infatti, se si tiene conto dell'influenza degli altri pianeti le orbite deviano dalla forma ellittica. Tale fenomeno è particolarmente evidente per Mercurio, la cui orbita mostra uno spostamento secolare del perielio (punto di massimo avvicinamento al sole), pari a circa  $532''$ /secolo. L'orbita di Mercurio quindi non è chiusa ma ha una forma *a rosetta*. Il valore osservato per la precessione del perielio di Mercurio può essere spiegato dalla teoria perturbativa solo in parte: esiste infatti un residuo, pari a circa  $43''$ /secolo, che non trova alcuna giustificazione all'interno della meccanica celeste Newtoniana. Come vedremo, la precessione residua del perielio di Mercurio trova invece una corretta interpretazione nell'ambito della teoria Einsteiniana della gravitazione. Il valore predetto dalla Relatività Generale è in ottimo accordo con il valore osservato e tale coincidenza, verificata sin dall'inizio degli anni venti, costituisce tuttora una delle conferme sperimentali più importanti della teoria della Relatività.

Per studiare la precessione del perielio assumiamo che il campo gravitazionale solare sia adeguatamente descritto dalla soluzione di Schwarzschild

(9.21) e che un pianeta possa essere trattato come una particella di prova in moto geodetico. Se dividiamo l'equazione (9.24) per il quadrato della seconda delle equazioni (9.22), con  $g^{\varphi\varphi} = -1/r^2$ , otteniamo

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4 m^2 c^2}{L^2} \left\{ \frac{\mathcal{E}_0^2}{m^2 c^4} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{L}{mc}\right)^2\right] \right\}.$$

Introduciamo ora una nuova variabile

$$u = \frac{1}{r},$$

per cui  $du = -dr/r^2$ , e definiamo le nuove costanti  $\epsilon = \mathcal{E}_0/mc^2$  e  $\ell = L/mc$ , per semplificare la notazione. Si ottiene

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\ell^2} [\epsilon^2 - (1 - r_g u)(1 + u^2 \ell^2)]$$

e, differenziando rispetto a  $\varphi$ , l'equazione della traiettoria

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{r_g}{2\ell^2} + \frac{3}{2} r_g u^2 \quad (9.30)$$

dove abbiamo semplificato la derivata  $du/d\varphi$  che moltiplica tutti i termini ed è diversa da zero.

Nel moto reale dei pianeti, il termine in  $u^2 = 1/r^2$  a secondo membro della (9.30) è molto piccolo rispetto al primo termine e, se lo trascurassimo, ritorneremmo alla soluzione non relativistica (9.27). E' facile vedere infatti che, nel limite non relativistico,  $r_g/(2\ell^2) \rightarrow km'/J^2 = [a(1 - e^2)]^{-1}$ , dalla (9.28). Usiamo allora il metodo delle approssimazioni successive per la soluzione della (9.30) e introduciamo nella (9.30), al posto di  $u^2$ , la soluzione della stessa equazione in cui il termine in  $u^2$  è stato trascurato, cioè il termine  $u_0$  dato dalla

$$u_0 = \frac{r_g}{2\ell^2} (1 + e \cos \varphi) \quad (9.31)$$

ottenendo

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \simeq \frac{r_g}{2\ell^2} + \frac{3r_g^3}{8\ell^4} (1 + 2e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi). \quad (9.32)$$

Poniamo

$$u = u_0 + u_1 + u_2,$$

dove  $u_0$  è dato nella (9.31) e  $u_1, u_2$  sono definiti dalle equazioni

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 3r_g \left(\frac{r_g}{2\ell^2}\right)^2 e \cos \varphi \quad (9.33)$$



e

$$\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + u_2 = \frac{3r_g}{2} \left( \frac{r_g}{2\ell^2} \right)^2 (1 + e^2 \cos^2 \varphi). \quad (9.34)$$

e cerchiamo un integrale particolare di queste equazioni. L'integrale particolare della (9.34) è periodico e limitato e quindi causa deformazioni dell'orbita ma non dà luogo ad una precessione <sup>3</sup>.

Ci concentriamo quindi su  $u_1$  e si trova facilmente che un integrale particolare della (9.33) è

$$u_1 = \frac{3r_g}{2} \left( \frac{r_g}{2\ell^2} \right)^2 e \varphi \sin \varphi,$$

così possiamo scrivere

$$\begin{aligned} u &\simeq u_1 + u_0 = \frac{r_g}{2\ell^2} \left[ 1 + e \left( \cos \varphi + \frac{3r_g^2}{4\ell^2} \varphi \sin \varphi \right) \right] = \\ &\simeq \frac{r_g}{2\ell^2} \left\{ 1 + e \cos \left[ \varphi \left( 1 - \frac{3r_g^2}{4\ell^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.36)$$

perchè, se  $\delta = 3r_g^2 \varphi / (4\ell^2)$  è piccolo,  $\cos(\varphi - \delta) \simeq \cos \varphi + \delta \sin \varphi$ .

Il perielio ha coordinate ( $\varphi = \delta$ ,  $u = (1 + e)r_g/(2\ell^2)$ ) e, poichè  $\delta$  dipende da  $\varphi$ , la direzione angolare del perielio cambia con  $\varphi$ . L'orbita ritorna allo stesso valore di  $u = 1/r$  quando l'argomento del coseno varia di  $2\pi$ . Quindi la variazione di  $\varphi$ , da un perielio al successivo, è

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{1 - \frac{3r_g^2}{4\ell^2}} \simeq 2\pi \left( 1 + \frac{3r_g^2}{4\ell^2} \right)$$

---

<sup>3</sup>La soluzione dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$y'' + y = f(x) \quad (9.35)$$

è la somma della soluzione generale della corrispondente equazione omogenea e di un integrale particolare dell'equazione non omogenea. La soluzione generale dell'omogenea associata è

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

mentre il "metodo della variazione delle costanti" dà un integrale particolare nella forma

$$\int_{x_0}^x f(\xi) \sin(x - \xi) d\xi$$

come è facile verificare esplicitamente per sostituzione ( $x_0$  è una costante arbitraria). Si ottiene il risultato dato nel testo, notando che

$$\int_0^x \sin(x - \xi) \cos \xi d\xi = \frac{x \sin x}{2}$$

e

$$\int_0^x \sin(x - \xi)(1 - \cos^2 \xi) d\xi = \frac{1}{2} - \frac{2 \cos x}{3} + \frac{\cos(2x)}{6}.$$

e lo spostamento angolare per rivoluzione è dato da

$$\hat{\varphi} = \Delta\varphi - 2\pi = \frac{3\pi r_g^2}{2\ell^2}. \quad (9.37)$$

Ricordiamo ora, dalla (9.31), che  $r_g/(2\ell^2) = [a(1-e^2)]^{-1}$  e otteniamo infine lo spostamento angolare cercato, cioè lo spostamento del perielio dell'orbita, nella forma

$$\hat{\varphi} = \frac{3\pi r_g}{a(1-e^2)}. \quad (9.38)$$

Per Mercurio  $e = 0.206$  ed  $a = 5.8 \times 10^7 \text{ Km}$  quindi, se  $r_g = 3 \text{ Km}$ ,  $\hat{\varphi} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ rad}$ . Poichè il periodo orbitale di Mercurio è di 88 giorni si trova che lo spostamento secolare dell'orbita è di  $207.4 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 43''$  ( $1'' = 4.85 \times 10^{-6} \text{ rad}$ ).

Per la Terra,  $e = 0.017$ ,  $a \approx 1.5 \times 10^8 \text{ Km}$ , e lo spostamento secolare del perielio risulta più piccolo:  $3.8''$ .

## 9.2.2 Deflessione gravitazionale della luce

Nella teoria della gravità Newtoniana i fotoni, o i raggi di luce, non presentano orbite finite. L'effetto per un raggio di luce, analogo alla precessione del perielio per un pianeta, consiste nella deviazione dal moto rettilineo del raggio quando esso passa attraverso un campo gravitazionale. Storicamente, questo è stato il primo effetto, conseguenza della teoria di Einstein, a essere predetto prima di essere osservato nell'eclisse del 1919. Anche oggi il fenomeno della deflessione della luce è importante per un astronomo, sia a causa delle osservazioni di immagini multiple dello stesso "quasar" (lenti gravitazionali) sia per le correzioni da applicare, alle misure ad alta precisione delle posizioni delle stelle, dovute alle deflessioni indotte dal sole e anche da Giove.

Dividendo la (9.25) per il quadrato della seconda equazione (9.23) si ottiene

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left[\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^4} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{L}{c}\right)^2\right] \frac{c^2 r^4}{L^2}$$

e, ponendo  $u = 1/r$ ,

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2 L^2} - u^2 + r_g u^3. \quad (9.39)$$

Differenziamo ora rispetto a  $\varphi$  e semplifichiamo la derivata  $du/d\varphi$  comune a tutti i termini. Abbiamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2} r_g u^2. \quad (9.40)$$

Se trascurassimo il termine  $r_g u^2$ , otterremmo la soluzione  $u_0 = (1/b) \cos \varphi$  e il risultato Newtoniano

$$r \cos \varphi = b$$

che rappresenta una retta che passa ad una distanza  $b$  dal centro del campo. Quindi  $b$  è il minimo valore di  $r$  nella teoria classica in cui non c'è deviazione del raggio.

La correzione a questo risultato si ottiene, per approssimazioni successive, sostituendo nella (9.40) la soluzione Newtoniana  $u_0$  che dà l'equazione approssimata

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3r_g}{2b^2} \cos^2 \varphi. \quad (9.41)$$

La soluzione, data nella nota dove si studia l'equazione (9.35), è

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \cos \varphi + \frac{r_g}{4b^2} [3 - \cos(2\varphi)] \quad (9.42)$$

perchè

$$\int^\varphi \sin(\varphi - t) \cos^2 t \, dt = \frac{3 - \cos(2\varphi)}{6}.$$

Il primo termine, a secondo membro dell'equazione (9.42), rappresenta una traiettoria rettilinea e l'ultimo termine la perturbazione. Le direzioni asintotiche del raggio di luce si ottengono ponendo  $u = 0$ , cioè considerando grandi distanze, nella (9.42). A grandi distanze, la deviazione può essere espressa scrivendo  $\varphi = \pm(\pi/2 + \delta)$ , quindi

$$-\frac{1}{b} \sin \delta + \frac{r_g}{4b^2} [3 + \cos(2\delta)] = 0$$

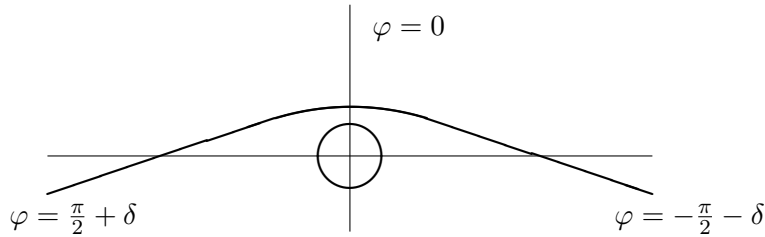


Figura 9.1: Notazioni per la deflessione di un raggio di luce.

e, essendo  $\delta$  una correzione piccola,

$$-\frac{\delta}{b} + \frac{r_g}{b^2} - O(\delta^2) = 0$$

da cui si ottiene

$$\delta = \frac{r_g}{b}.$$

La deflessione del raggio di luce è  $\Delta\varphi = 2\delta$ , cioè

$$\Delta\varphi = \frac{2r_g}{b} \quad (9.43)$$

e, sotto l'influenza del campo di attrazione, il raggio luminoso si incurva verso la sorgente del campo, come in figura (9.1).

Per un raggio di luce che passa vicino al sole, l'effetto massimo si ha quando  $b$  è il raggio del sole,  $b = 6.96 \times 10^5 \text{ Km}$ ,  $r_g \simeq 3 \text{ Km}$  e

$$(\Delta\varphi)_{max} \simeq 8.6 \times 10^{-6} \text{ rad} \simeq 1.7''.$$

Per Giove, con  $r_g = 2.24 \times 10^{-3} \text{ Km}$ , e  $b$  pari al raggio di Giove,  $b = 6.98 \times 10^4 \text{ Km}$  si ha  $(\Delta\varphi)_{max} = 6.42 \times 10^{-8} \text{ rad} = 0.013''$  grandezza che può ben essere rivelata dai satelliti che misurano la posizione delle stelle.

# Appendice

## .1 L'operatore vettoriale "nabla"

L'operatore vettoriale "nabla"<sup>4</sup>,  $\nabla$ , fornisce una notazione conveniente per scrivere le seguenti espressioni:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla \phi$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \dots = \nabla \times \mathbf{a}$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{a}$$

Esso gode delle proprietà

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

e, il suo quadrato, dà il Laplaciano  $\Delta$  nel senso che

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

e

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Identità che possono essere verificate scrivendo per esteso entrambi i membri:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) &= \phi (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\nabla \phi) \cdot \mathbf{a} \\ \nabla \times (\phi \mathbf{a}) &= \phi (\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{a} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} \\ \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}). \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Il nome gli è stato dato per la sua forma che ricorda un'arpa, nabla in greco ( $\nu\acute{\alpha}\beta\lambda\alpha$ ).

Dimostriamo la quarta di queste identità:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} \nabla_{\alpha} a_{\beta} b_{\gamma} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} e_{\gamma\alpha\beta} (\nabla_{\alpha} a_{\beta}) b_{\gamma} - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} e_{\beta\alpha\gamma} a_{\beta} (\nabla_{\alpha} b_{\gamma}).$$

## .2 Moto di una carica in un'onda piana

L'onda, che supponiamo polarizzata linearmente per semplicità, è caratterizzata dal quadrivettore d'onda  $k^i$ , di genere tempo, e dalla polarizzazione  $\epsilon^i$ . Questi due vettori soddisfano le condizioni

$$k^i k_i = \epsilon^i \epsilon_i = 0, \quad \epsilon^i \epsilon_i = -1. \quad (44)$$

dove abbiamo indicato con  $\epsilon^i$ , notazione molto usata in letteratura, il quadrivettore  $g^i(k)$  (si veda la (5.13)). Il quadrivettore polarizzazione deve essere di genere spazio essendo ortogonale al quadrivettore d'onda, che è di genere tempo. Il potenziale dipende solo da una funzione arbitraria della fase  $\xi = k^i x_i$ :

$$A^i(x) = \epsilon^i f(\xi). \quad (45)$$

Per un'onda piana monocromatica si avrà, per esempio,  $f(\xi) = a \sin \xi$ . Dalla equazione (44) segue subito che, indicando con  $f'(\xi)$  la derivata di  $f(\xi)$  rispetto a  $\xi$ ,

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \epsilon^i k_i f'(\xi) = 0,$$

mentre il tensore elettromagnetico è

$$F^{ij}(x) = \frac{\partial A^j}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_j} = (k^i \epsilon^j - k^j \epsilon^i) f'(\xi).$$

Si ha anche

$$\begin{aligned} F^i_j F^{jl} &= (k^i \epsilon_j - k_j \epsilon^i)(k^j \epsilon^l - k^l \epsilon^j)(f'(\xi))^2 \\ &= k^i k^l f'(\xi)^2 \\ \text{e } F^{ij} F_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

Quindi, come ci si aspettava,  $E^2 = B^2$  ed  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , mentre  $k_i F^{ij} = 0$ . Esiste una costante del moto facilmente determinabile. Infatti, se moltiplichiamo l'equazione del moto della carica, che supponiamo di massa  $m$ , per  $k_i$

$$k_i \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{mc} k_i F^i_k u^k = 0,$$

si ha che  $u^i k_i$  è una costante del moto ( $k^i$  è il quadrivettore d'onda, dato, e non dipende dal tempo proprio  $\tau$ ).

Scegliamo le coordinate in modo che, per  $\tau = 0$ , sia  $x^i(0) = 0$ , allora dall'equazione

$$\frac{d(x^i k_i)}{d\tau} = cu^i k_i = \text{cost.} = cu^i(0)k_i.$$

si ottiene

$$\xi = k^i x_i = cu^i(0)k_i \tau \equiv c\lambda\tau \quad (46)$$

avendo posto

$$\lambda = u^i(0)k_i. \quad (47)$$

Possiamo allora usare la variabile  $\xi$  al posto di  $\tau$  e l'equazione del moto della carica diventa

$$\begin{aligned} c\lambda \frac{du^i}{d\xi} &= \frac{e}{mc} (k^i \epsilon_l - k_l \epsilon^i) f'(\xi) u^l = \\ &= \frac{e\lambda}{mc} \left( \frac{\epsilon^l u_l}{\lambda} k^i - \epsilon^i \right) f'(\xi). \end{aligned} \quad (48)$$

Se semplifichiamo il fattore  $\lambda$  in entrambi i membri dell'equazione (48) e la moltiplichiamo per  $\epsilon_i$  possiamo ricavare  $u^i \epsilon_i$ . Infatti la soluzione della

$$\frac{d(\epsilon_i u^i)}{d\xi} = \frac{e}{mc^2} f'(\xi)$$

è

$$\epsilon_i u^i = u^i(0) \epsilon_i + \frac{e}{mc^2} (f(\xi) - f(0)).$$

Possiamo infine riscrivere l'equazione e la sua soluzione nella forma

$$\begin{aligned} \frac{du^i}{d\xi} &= \frac{e}{mc^2} f'(\xi) \left( \frac{k^i \epsilon_j u^j(0) + e(f(\xi) - f(0))/(mc^2)}{\lambda} - \epsilon^i \right) \\ u^i(\xi) &= u^i(0) + \frac{e}{mc^2} (f(\xi) - f(0)) \left( \frac{k^i \epsilon_j u^j(0)}{\lambda} - \epsilon^i \right) + \\ &+ \frac{e^2}{2m^2 c^4} (f(\xi) - f(0))^2 \frac{k^i}{\lambda}. \end{aligned}$$

E' interessante notare che, nella soluzione compaiono effetti non lineari nella perturbazione (termini in  $f^2$ ).

*Problema.* Determinare la soluzione  $x^i(\xi)$ , per un'onda piana monocromatica.

Soluzione

Scegliendo  $f(\xi) = a \sin(\xi)$  si ottiene facilmente

$$x^i(\xi) = u^i(0)\tau - \frac{2ea \sin^2 \xi/2}{mc^2 \lambda} \epsilon^i + \frac{2ea \epsilon^l u_l(0) \sin^2 \xi/2}{mc^2 \lambda^2} k^i +$$

$$+ \frac{e^2 a^2}{4m^2 c^4 \lambda^2} \left( \xi - \frac{1}{2} \sin(2\xi) \right) k^i.$$

con l'aiuto degli integrali

$$\int_0^\tau \sin(\xi) d\tau = \frac{2}{c\lambda} \sin^2(\xi/2)$$

e

$$\int_0^\tau \sin^2(\xi) d\tau = \frac{1}{c\lambda} \left( \xi - \frac{1}{2} \sin(2\xi) \right).$$

Bisogna ricordare che abbiamo posto  $\xi = c\lambda\tau$ .

Consideriamo ora un caso particolare dove si possa visualizzare la traiettoria della particella. Scegliamo la direzione di propagazione dell'onda lungo l'asse  $x$ ,  $k^i = (\omega/c, \omega/c, 0, 0)$ , il campo elettrico lungo l'asse  $y$ ,  $\epsilon^i = (0, 0, 1, 0)$  e supponiamo che inizialmente la particella si muova lungo l'asse  $x$ :  $u^i(0) = (\mathcal{E}/c, u_x(0), 0, 0)$ . Per l'onda piana monocromatica scegliamo  $f(\xi) = a \sin(\xi) = a \sin[\omega(t - x/c)]$ . Avremo allora

$$\epsilon_j u^j(0) = 0$$

e la soluzione trovata per  $u^i(\xi)$  dà

$$\begin{aligned} u^1 &= u_x(0) + \frac{e^2 a^2 \omega}{2m^2 c^5 \lambda} \sin^2 \xi = \text{cost.} - \frac{e^2 a^2 \omega}{2m^2 c^5 \lambda} \cos(2\xi), \\ u^2 &= -\frac{ea}{mc^2} \sin \xi, \\ u^3 &= 0. \end{aligned}$$

Scegliendo  $u_x(0)$  in modo tale che la costante in  $u^1$  si annulli, otteniamo dall'integrazione di queste equazioni le seguenti espressioni parametriche del moto, il parametro è  $\xi = \omega t - kx$ ,

$$x = -\frac{e^2 a^2 \omega}{8m^2 c^5} \sin 2\xi, \quad y = \frac{ea\lambda}{mc^2} (\cos \xi - 1), \quad z = 0. \quad (49)$$

La carica descrive nel piano  $xy$  una curva a forma di 8 con l'asse delle  $y$  come asse di simmetria. A un periodo del moto corrisponde la variazione del parametro  $\xi$  da 0 a  $2\pi$ .



# Indice analitico

- Aberrazione della luce, 18
- Buco nero, 170
- Campo
  - elettrico, 55
  - magnetico, 56
  - statico, 144
  - stazionario, 144
- Campo di forza, 55
- Condizioni di mass-shell, 46
- Cono di luce, 9
- Contrazione di Lorentz, 12, 15
- Costante gravitazionale, 155
- Curvatura
  - di Gauss, 154
  - scalare, 153
- Delta di Dirac, 51
- Differenziale assoluto, 134
- Effetto Sagnac, 146
- Energia di riposo, 37
- Equazione
  - di D'Alambert, 104
  - di Poisson, 103
  - di stato ultrarelativistica, 89
- Equazioni
  - del campo gravitazionale, 161
  - di Killing, 156
- Forza di Lorentz, 56
- Fronte d'onda, 95
- Gauge
  - di Hamilton, 97
  - di Coulomb, 97
  - di radiazione, 97
- Gauge di Lorentz, 62, 91
- Identità di Bianchi, 152, 162
- Integrale di Fourier, 93, 111
- Intensità di radiazione, 114
- Intervallo
  - di genere luce, 7
  - di genere spazio, 8
  - di genere tempo, 7
- Limite di campo debole, 163
- Linee geodetiche, 140
- Massa
  - gravitazionale, 123
  - inerte, 123
- Metrica
  - di Schwarzschild, 168
- Moto uniformemente accelerato, 30
- Operatore nabla, 179
- Orbita
  - della terra, 176
  - di Mercurio, 173
- Orizzonte degli eventi, 170
- Paradosso dei gemelli, 12
- Particella elementare, 50
- Principio
  - di equivalenza, 124
  - di sovrapposizione, 77, 161
- Problema di Keplero, 172
- Quadriforza, 38
- Serie di Fourier, 110, 116
- Simboli di Christoffel, 134, 138
- Simmetria

- centrale, 165
- sferica, 165
- Sincronizzazione degli orologi, 131
- Sistema di riferimento, 1
  - del centro di massa, 42
  - del laboratorio, 42
  - inerziale, 1
  - localmente geodetico, 136
- Spostamento Doppler trasverso, 99
- Spostamento verso il rosso, 145
- Tempo
  - proprio, 129
  - reale, 128
  - universale, 143
- Tensore
  - completamente antisimmetrico, 26
  - degli sforzi, 85
  - di Ricci, 153
  - di Riemann, 151
  - duale, 27
  - metrico, 24, 124
- Teorema
  - di Gauss, 28
- Trasformazioni di Galileo, 2
- Trasporto parallelo, 133
- Unità di Gauss, 57
- Vettore
  - d'onda, 95
  - di Poynting, 83