TRASFORMATA ZETA

Trasformata zeta

- E’ una generalizzazione della Trasformata di Fourier per segnali tempo-discreti (sequenze)

[come la Trasformata di Laplace e’ una generalizzazione della Trasformata di Fourier per segnali tempo-continui]

- E’ uno strumento fondamentale per l’analisi e la rappresentazione di segnali discreti e di sistemi discreti tempo-invarianti

- Pre-requisiti: teoria delle variabili complesse

Definizione:

sequenza: $x(n) = x(nT), \quad -\infty < n < +\infty$

reale o complessa

Trasformata zeta: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n},$

z **variabile complessa**

Relazione con la Trasformata di Fourier

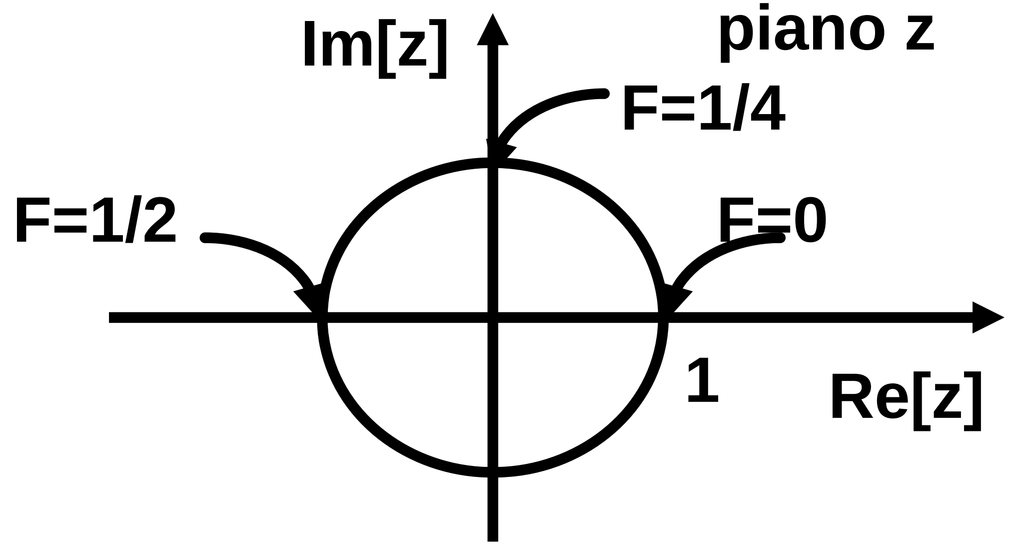
Se $X(z)$ **esiste, la Trasformata di Fourier** $X(f)$ **o** $X(F)$ **della sequenza** $x(n)$ **si ottiene per**

$$z = e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi F}$$

$$X(f) = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi fT}}$$

ovvero

$$X(F) = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi F}}$$



[Nota: per semplicità stesso simbolo $X(\cdot)$ **per Trasformata zeta e Trasformata di Fourier]**

Esistenza (convergenza della trasformata zeta)

- $X(z)$ **esiste per un certo valore di** $z = re^{j\alpha}$ **se**

$$|X(z)| < \infty$$

- **Condizione sufficiente**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

ovvero

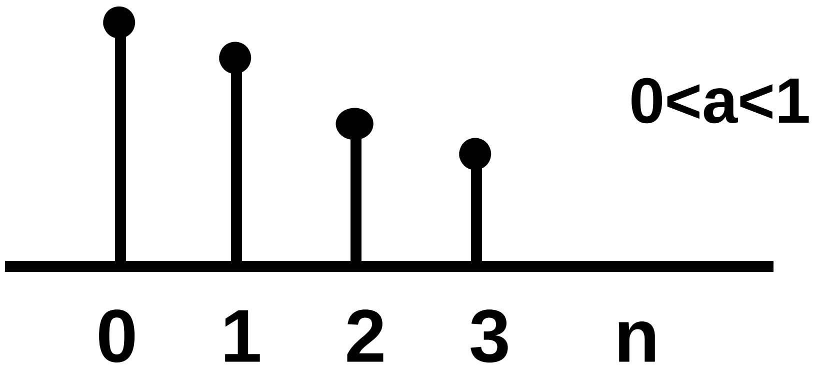
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty$$

Regione di convergenza

- Insieme di valori di z sul piano complesso per i quali $X(z)$ esiste (la serie converge)

Esempio 1

$$x(n) = a^n \, u(n)$$



$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

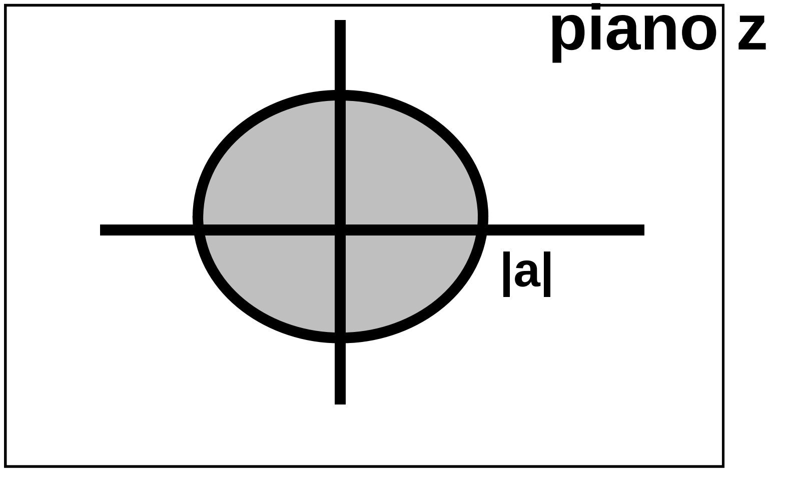
sequenza gradino

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$se \quad |az^{-1}|<1$$

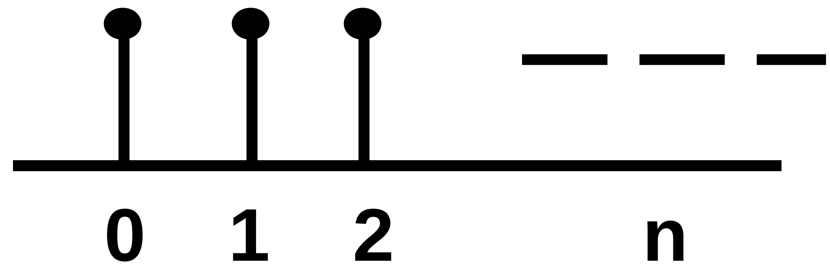
Quindi

$$X(z)=\frac{z}{z-a} \quad per\ |z|>|a|$$



Esempio 2

$$x(n) = u(n)$$

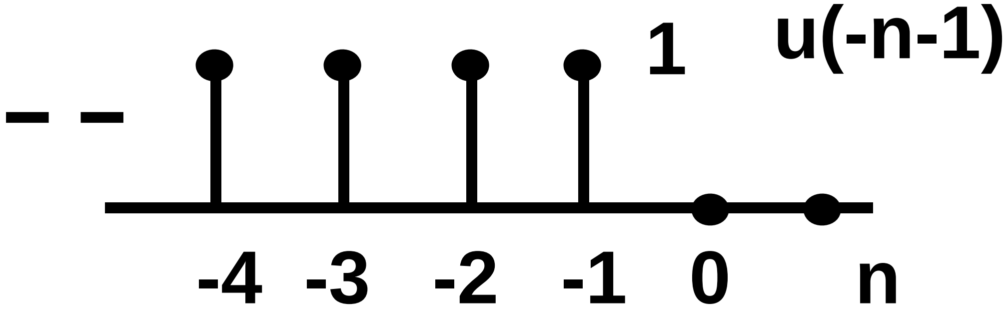


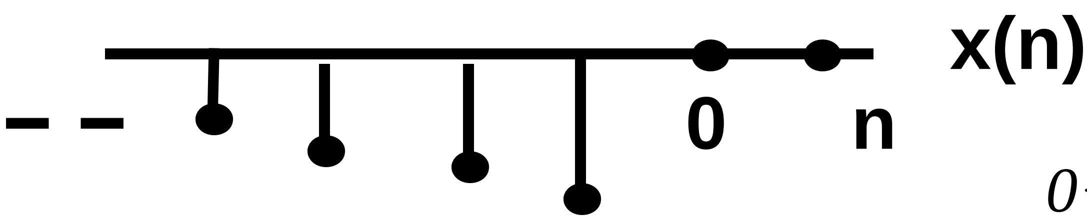
Caso particolare con $a = 1$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \qquad per\ |z| > 1$$

Esempio 3

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$





$0<a<1$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} =$$

$$\left[\ n = -m\ \right] = \sum_{m=1}^{\infty} -a^{-m} z^m = -\sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1}z)^m + 1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z}, \quad |a^{-1}z| < 1$$

Quindi

$$X(z)=\frac{z}{z-a} \qquad per\ |z|<|a|$$

Esempio 1 e 3: stessa espressione di X(z), ma diversa regione di convergenza

$\Rightarrow$ **di una trasformata zeta occorre definire anche la sua regione di convergenza**

- **La regione di convergenza può includere o meno la circonferenza unitaria (di raggio 1) nel piano complesso zeta**

Esempio 1: $|a|<1$ **include la circonferenza unitaria**

$|a|\geq 1$ **non include la circonferenza unitaria**

Esempio 3: $|a|>1$ **include la circonferenza unitaria**

$|a|\leq 1$ **non include la circonferenza unitaria**

- **Nel corso interessano soprattutto le Trasformate zeta che includono la circonferenza unitaria nella loro regione di convergenza**

Proprietà della Trasformata Z

Linearità

$$\left.\begin{array}{l} x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z) \\ x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \\ Y(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) \end{array}\right.$$

a_1 , a_2 **costanti reali o complesse**

$$RdC\left\{\ Y(z)\ \right\} = RdC\left\{\ X_1(z)\ \right\} \cap RdC\left\{\ X_2(z)\ \right\}$$

Esempio 4

$$x(n) = (3 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n)u(n) = 3[2^n u(n)] - 4[3^n u(n)]$$

$$X(z) = 3\frac{z}{z-2} - 4\frac{z}{z-3} = \frac{-z^2 - z}{z^2 - 5z + 6} =$$

$$= \frac{-z(z+1)}{(z-2)(z-3)}$$

RdC : $|z| > 3$

Esempio 5

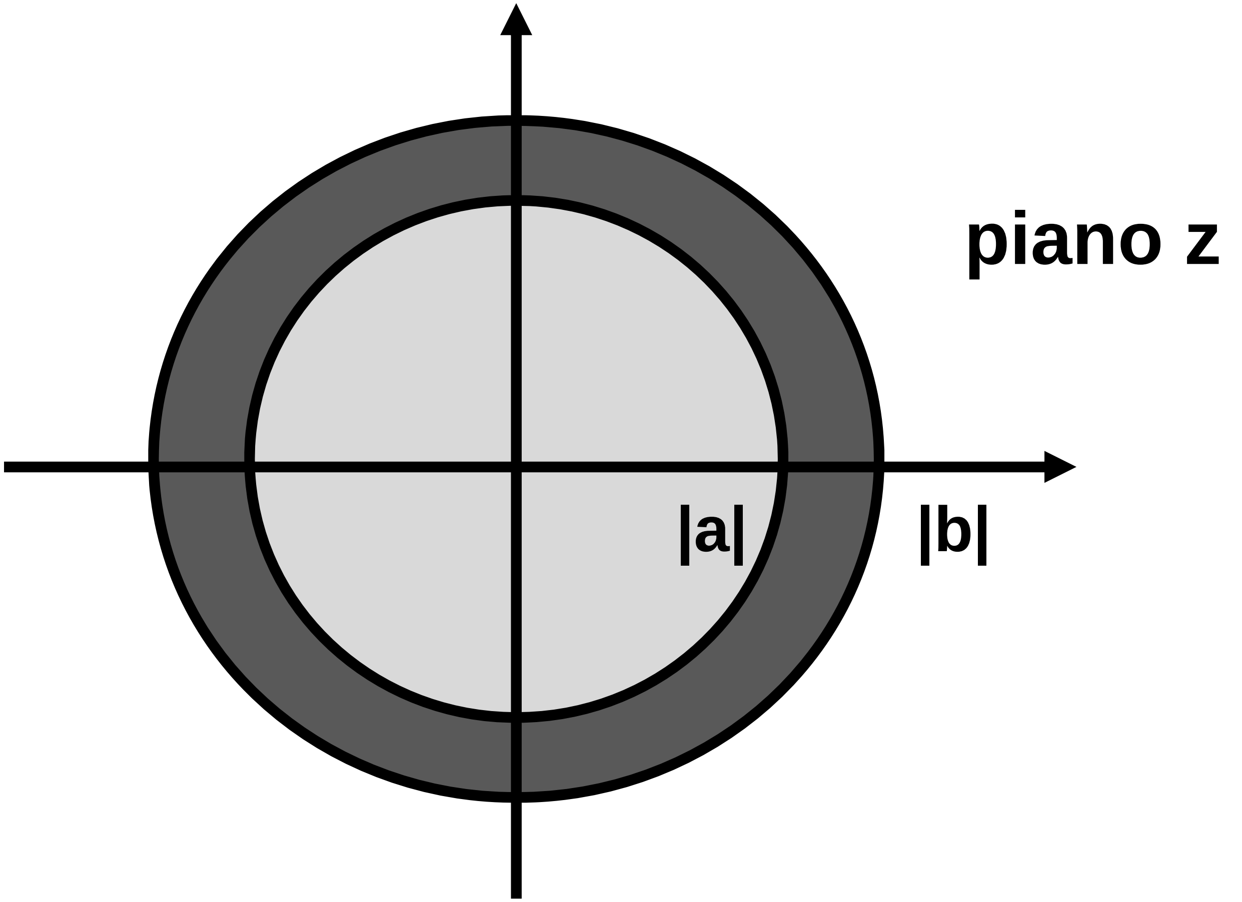
$$x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n-1)\,,$$

$a\,,\,b$ **reali o complessi**

$$X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} = \frac{[2z-(a+b)]z}{(z-a)(z-b)}$$

$$RdC: \{\ |z| > |a|\ \} \cap \{\ |z| < |b|\ \}$$

Esiste la trasformata z di $x(n)$ solo se $|b| > |a|$



Esempio 6

$$x(n) = u(n)\cos\alpha n$$

$$= \frac{e^{j\alpha n} + e^{-j\alpha n}}{2}u(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{j\alpha}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\alpha}z^{-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2-(e^{j\alpha}+e^{-j\alpha})z^{-1}}{1-(e^{j\alpha}+e^{-j\alpha})z^{-1}+z^{-2}} =$$

$$= \frac{1-\cos\alpha z^{-1}}{1-2\cos\alpha z^{-1}+z^{-2}}$$

- **Traslazione temporale (*k* intero)**

$$x(n) \Leftrightarrow X(z)$$

$$x(n-k) \Leftrightarrow X'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-n} =$$

$$[n-k=m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} z^{-k} =$$

$$= z^{-k} X(z)$$

Osservazione: z^{-k} **(*k* positivo) svolge il ruolo di un operatore che introduce un ritardo di *k* campioni sulla sequenza di origine**

Esempio 7

$$x(n) = \left\{ \begin{matrix} 1 \, 0 \le n \le N-1 \\ 0 \quad altrove \end{matrix} \right\} \quad = u(n) - u(n-N)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - z^{-N}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

ovvero direttamente

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

- **Moltiplicazione per un esponenziale**

$$x(n) \Leftrightarrow X(z)$$, **RdC:** $R_1 < |z| < R_2$

$$y(n) = a^n x(n),$$ a **reale o complessa**

$$\Rightarrow Y(z) = X(a^{-1}z),$$ **RdC:** $|a|\, R_1 < |z| < |a|\, R_2$

fattore di scala nel dominio z

Dimostrazione per esercizio

Esempio 8

$$u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad RdC: |z|>1$$

$$a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad RdC: |z|>|a|$$

● Ribaltamento temporale

$$x(n) \Leftrightarrow X(z) \quad , \qquad \textbf{RdC}: \; R_1 < |z| < R_2$$

$$y(n) = x(-n)$$

$$Y(z) = X(z^{-1}), \quad RdC: \frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1}$$

Dimostrazione: Per esercizio

<u>Esempio 9</u>

$$y(n) = u(-n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z}, \quad RdC: 0 < |z| < 1$$

- **Moltiplicazione per una rampa**

$$x(n) \Leftrightarrow X(z)$$

$$y(n) = nx(n) \Leftrightarrow Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz},$$ **RdC inalterata**

Dimostrazione

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} =$$

$$= -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = -z^{-1}Y(z)$$

Esempio 10

$$y(n) = na^n u(n)$$

Sappiamo che

$$a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad RdC: |z| > |a|$$

$$Y(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = -z\,\frac{z-a-z}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

● Convoluzione

Date: $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z)$

$$x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z)$$

definiamo:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$$

$$Y(z) = X_1(z) X_2(z),$$

$$RdC\{Y(z)\} = RdC\{X_1(z)\} \cap RdC\{X_2(z)\}$$

Dimostrazione

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k) \right] z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k) z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\, z^{-k} X_2(z) =$$

$$= X_1(z)\, X_2(z)$$

Esempio 11

$$x_1(n) = a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$x_2(n) = u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)\, u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},\ n \geq 0$$

Direttamente: $$y(n) = \frac{1}{1-a}\left[u(n) - a\,a^{n}u(n)\right]$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}$$

Allo stesso risultato, più facilmente, con la regola della convoluzione

TRASFORMATA ZETA INVERSA

- **La Trasformata z inversa (o antitrasformata z) ricostruisce la sequenza** $x(n)$ **a partire da** $X(z)$

Definizione generale

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

dove l'integrale è calcolato in senso antiorario su un contorno C, interno alla regione di convergenza che contiene l'origine ($z=0$**)**

- **Nell'elaborazione numerica dei segnali interessa principalmente l'inversione di funzioni $X(z)$ razionali**

Iniziamo da funzioni razionali elementari.

Abbiamo visto

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$$x(n) = \begin{cases} a^n u(n), & RdC: |z| > |a| \\ -a^n u(-n-1), & RdC: |z| < |a| \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{az}{(z-a)^2}$$

RdC: $|z| > |a|$

$$x(n) = na^n u(n)$$

Generalizzazione:
Applicando piu' volte il teorema della derivata rispetto a z si ottengono le trasformate z di funzioni razionali con poli superiori al secondo ordine e le espressioni delle relative sequenze

Esempio 12

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}} =$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}, \quad RdC : |z| > 1$$

Poli di $X(z)$ **[radici del denominatore]**

$P_1 = 1 \qquad P_2 = 0{,}5$

Possiamo scrivere

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0{,}5}$$

verificata per $A = 2$, $B = -1$

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}5} \Leftrightarrow x(n) = 2u(n) - (0{,}5)^n u(n)$$

- **Se RdC:** *0,5 < |z| < 1*

$$x(n) = -2u(-n-1) - (0,5)^n u(n)$$

- **Se RdC**: $|z| < 0,5$

$$x(n) = -2u(-n-1) + (0,5)^n u(-n-1)$$

Osservazione

Nel caso di poli semplici (primo grado), le costanti A e B si possono calcolare anche:

$$A = \frac{X(z)}{z}(z-P_1)\bigg|_{z=P_1} = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)}(z-1)\bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{1-0,5} = 2$$

$$B=\frac{X(z)}{z}(z-P_2)\bigg|_{z=P_2}=\frac{z}{(z-1)(z-0,5)}(z-0,5)\bigg|_{z=0,5}=$$

$$=\frac{0,5}{0,5-1}=-1$$

generalizzabile con un numero di poli qualsiasi

Esempio 13

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0{,}5z^{-2}}=\frac{z^{2}+z}{z^{2}-z+0{,}5},$$

$$RdC:|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Verificare per esercizio:

- i due poli sono

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j \quad e \quad P_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} j = P_1^*$$

- le due costanti sono

$$A = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} j \quad e \quad B = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} j$$

- $$x(n) = 2M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n + \varphi\right) u(n)$$

$$con\ M = |A| \quad e \quad \varphi = \arg A$$

Esempio 14

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}, \quad RdC: |z| > 1$$

Si può scrivere (verificare per esercizio)

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

con $A = \frac{1}{4},\ B = \frac{3}{4},\ C = \frac{1}{2}$

Quindi:

$$x(n) = \frac{1}{4}(-1)^n u(n) + \frac{3}{4}u(n) + \frac{1}{2}nu(n)$$

Esercizi proposti

1. **Dato** $x(n) \Leftrightarrow X(z)$, **dimostrare che**

$$(-1)^n x(n) \Leftrightarrow X(-z)$$ **, con la stessa RdC**

2. Calcolare la Trasformata z della sequenza

$$x(n) = r^n \frac{sen\left[(n+1)\theta\right]}{sen\theta} u(n), \qquad r \ \textbf{reale positiva}$$

Soluzione:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2r\cos\theta z + r^2}, \qquad Rdc: |z| > r$$

Poli:

$$P_1 = re^{j\theta}, \ P_2 = re^{-j\theta}$$

3. Data una sequenza $x(n) \Leftrightarrow X(z)$,

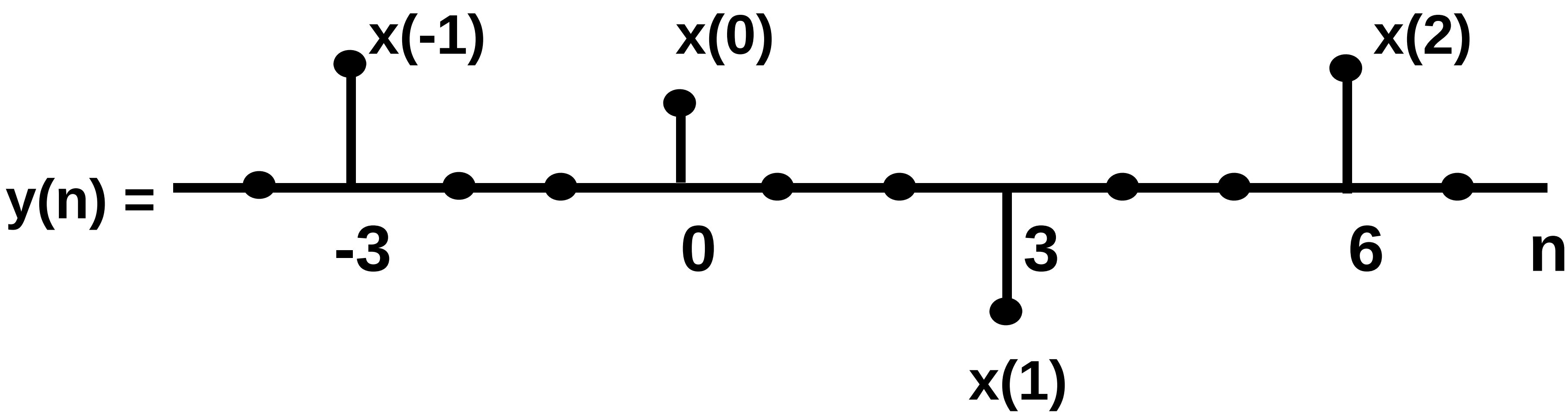
dimostrare che la sequenza

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{L}\right) & n = mL,\ L \text{ intero fissato, } m \text{ intero} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha trasformata z

$$Y(z) = X(z^L)$$

Osservazione: la sequenza $y(n)$ **è formata dai campioni di** $x(n)$ **con** $L\text{-}1$ **valori nulli inseriti fra due campioni consecutivi.**
Ad esempio per $L=3$



Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

(reperibili a: http://lenst.det.unifi.it/node/379)

- **Funz trasf**