

Fondamenti di ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALE

E. Del Re

Università di Firenze

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

**Laboratorio di Elaborazione Numerica dei Segnali e
Telematica (LENST)**



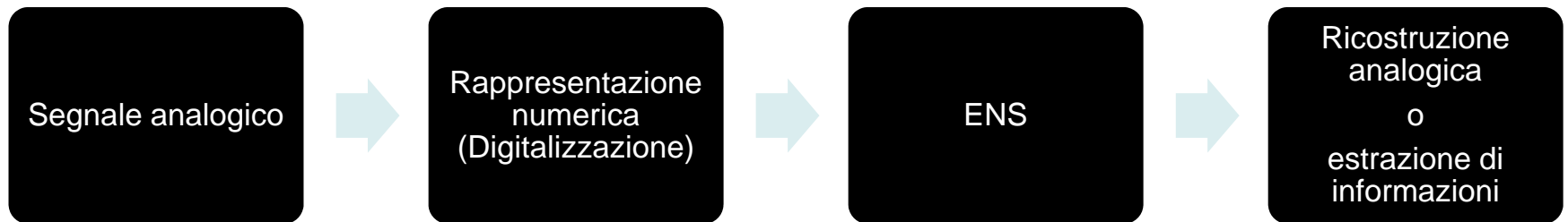
Elaborazione Numerica dei Segnali (ENS)

- Cosa è?
- Perché?
- Dove?

ENS – Cosa è?

- L'elaborazione numerica dei segnali è la applicazione di una sequenza opportuna di operazioni aritmetiche o logiche (algoritmo) ad una serie numerica (es. cifre binarie) che rappresenta (in modo esatto o sufficientemente approssimato) un segnale (in genere originariamente analogico)
- Con lo scopo (elaborazione) di migliorarne la qualità o di estrarne delle informazioni

Schema di principio della ENS



ENS – Perché?

PRO

- Universalità, flessibilità, estesa gamma di (nuove) elaborazioni realizzabili
- Programmabilità (processori digitali, es. DSP)
- Precisione facilmente controllabile con il numero di bit usati
- Realizzazioni più facilmente riproducibili : HW dedicato (es. VLSI-Very Large Scale Integration) o logica programmabile (DSP- Digital Signal Processor); trascurabili effetti termici e di invecchiamento
- Compatibilità maggiore con i sistemi già numerici (ad es. comunicazioni numeriche, dati,...)

CONTRO

- Velocità di elaborazione: limitata dalla complessità algoritmica e dalla tecnologia
- Consumi di potenza (spesso, ma non sempre) superiori ad ‘equivalenti’ soluzioni analogiche

ENS – Dove?



- File multimediali: CD, DVD, MP3, JPEG, MPEG,....



- Tx/Rx cellulari; codifica audio, immagini e video; GPS; internet mobile



- TV digitale terrestre e satellitare (DVB)



- Applicazioni: telecomunicazioni, biomedica, sismica, disabili, automazione industriale, traffico, sonar e radar, array di sensori, stime spettrali, etc.

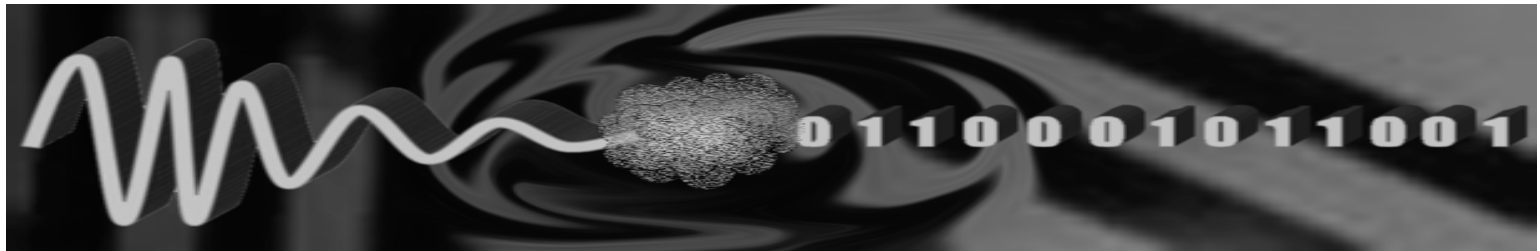
...e ...in futuro..



.... ovunque (pervasiva)

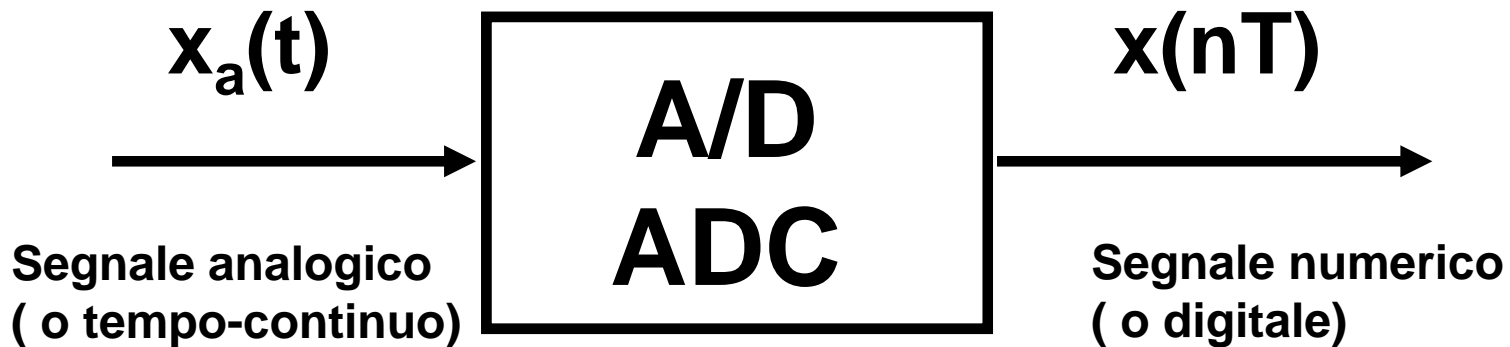
ENS – Contenuto del corso

- Digitalizzazione dei segnali
- Sistemi discreti lineari tempo-invarianti
- Trasformata discreta di Fourier
- Filtri FIR
- Filtri IIR
- Realizzazione di sistemi di ENS
- Laboratorio con MATLAB

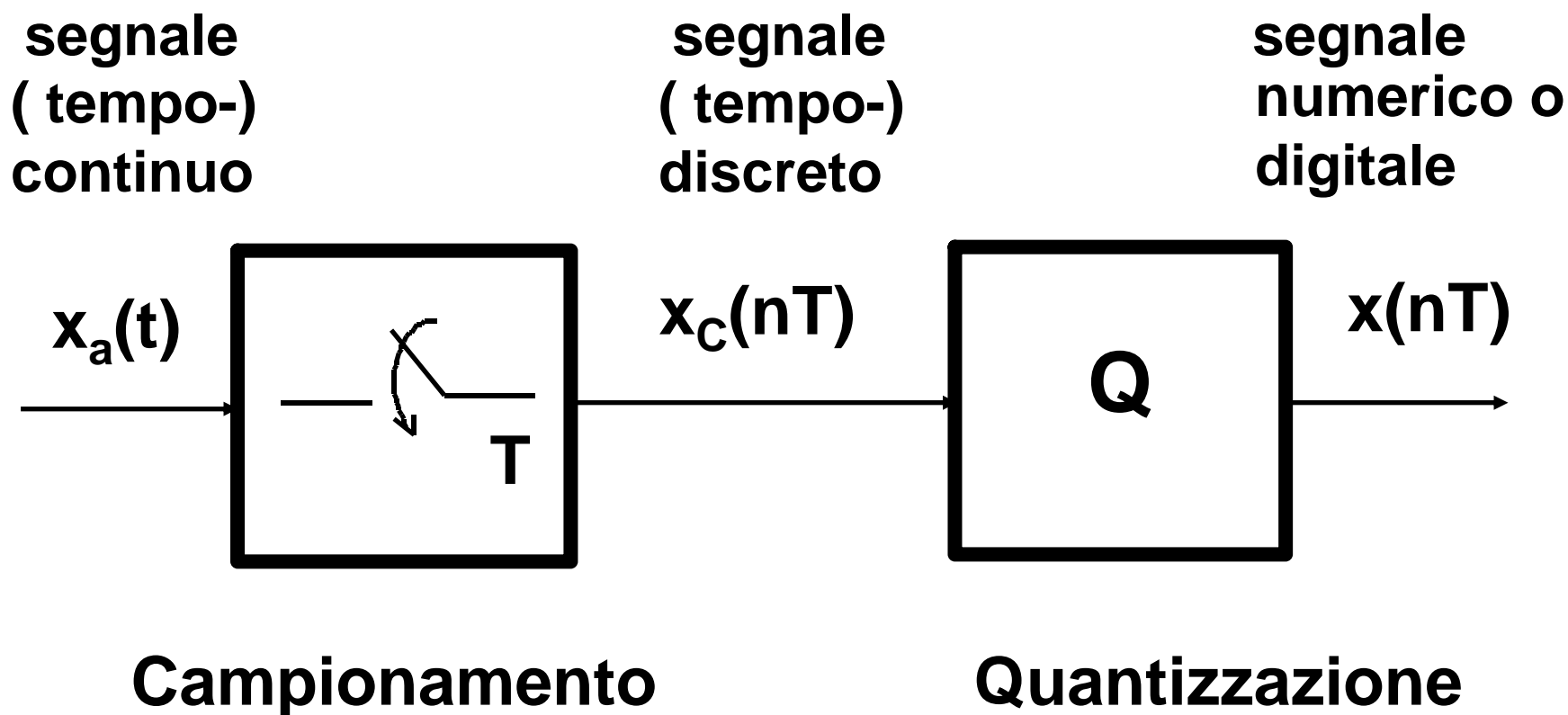


DIGITALIZZAZIONE DEI SEGNALI

Conversione analogico - digitale



Due operazioni:



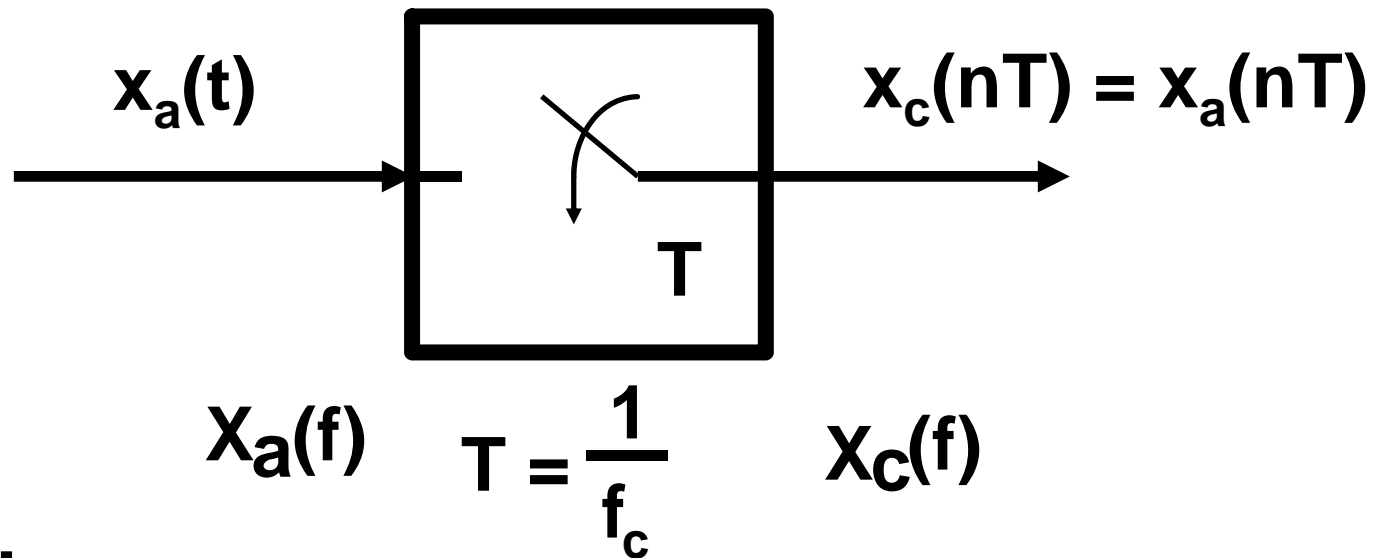
Campionamento

***in teoria* può non introdurre
distorsione sul segnale**

Quantizzazione

**introduce comunque un errore
(*errore di quantizzazione*)**

CAMPIONAMENTO IDEALE



Ideale:

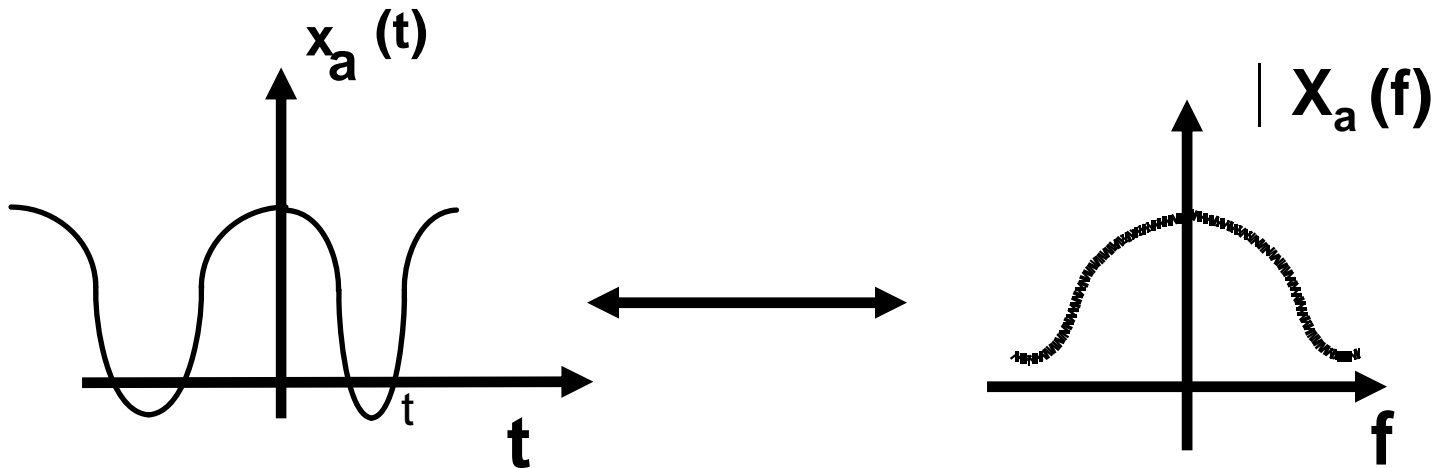
tempo istantaneo di chiusura dell'interruttore
con passo di campionamento T (frequenza di
campionamento $f_c = 1/T$)

Relazioni tempo-frequenza (Trasformata di Fourier)

Segnale continuo

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \text{spettro (T.F. diretta)}$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{(T.F. inversa)}$$



Segnale discreto

$$X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j 2 \pi f n T}$$

T.F. diretta
(tempo-discreta)

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j 2 \pi F n}$$

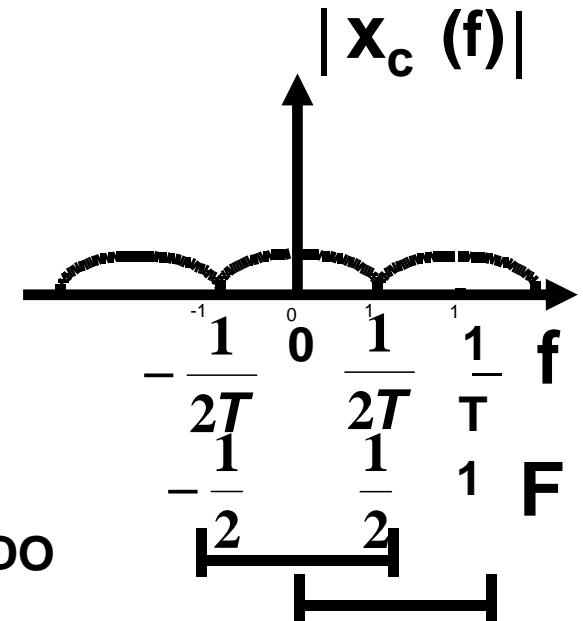
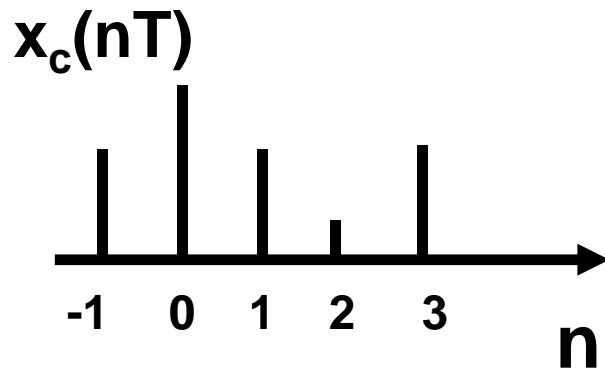
$$= X_c(F)$$

$$F = f T = \frac{f}{f_c} \quad \text{frequenza normalizzata}$$

(è quella che conta nella ENS!)

$$\begin{aligned}
 x_c(nT) &= T \int_{-1/2T}^{1/2T} X_c(f) e^{j2\pi f nT} df \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} X_c(F) e^{j2\pi F n} dF \\
 &= \int_0^1 X_c(F) e^{j2\pi F n} dF
 \end{aligned}$$

T. F. inversa



Osservazioni

- **Dimensioni diverse per $X_a(f)$ e $X_c(f)$**
- **$X_c(f)$ non sempre esiste (serie non convergente)**

Condizione sufficiente:

$$\sum_n |x_c(nT)| < \infty \quad (\text{serie assolutamente sommabile})$$

- **$X_c(f)$ periodica di periodo $f_c = 1/T$
ovvero
 $X_c(F)$ periodica di periodo 1**

- **Banda utile del segnale campionato:**
per definizione quella compresa fra:

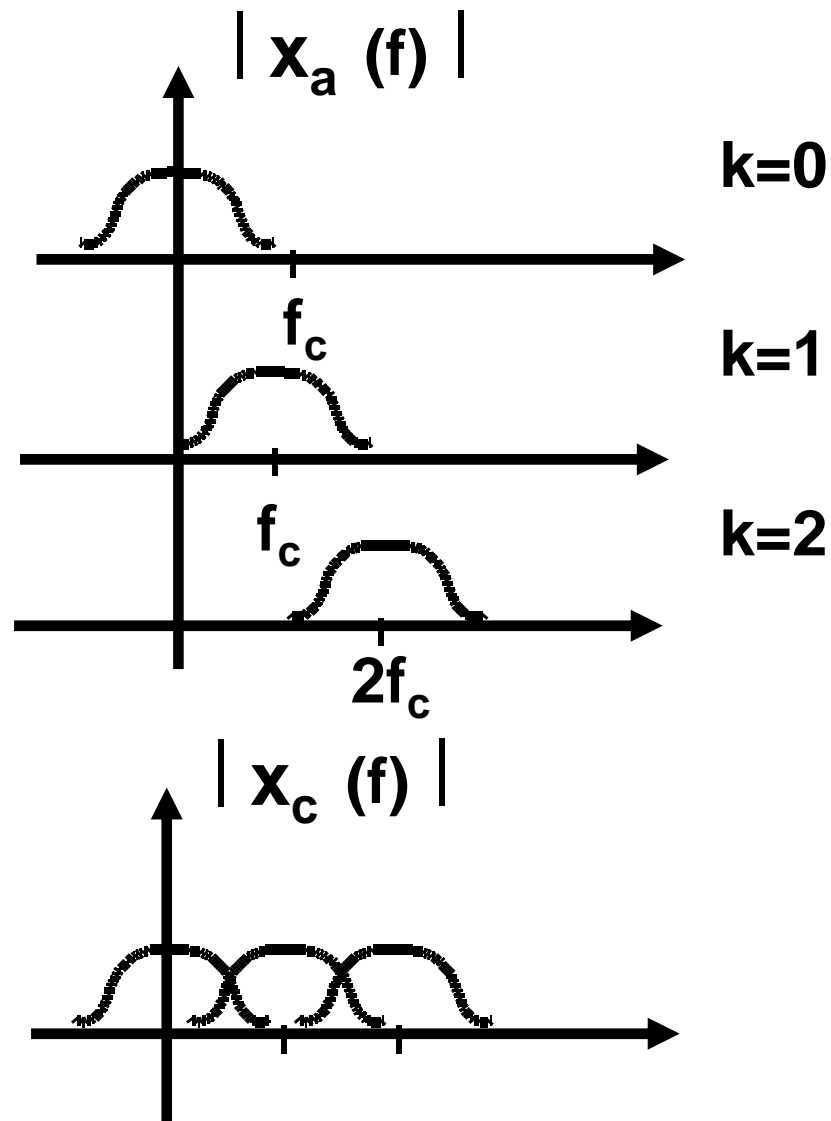
$$|f| \leq \frac{f_c}{2} \quad \text{ovvero} \quad |F| \leq \frac{1}{2}$$

Teorema del campionamento

Relazione fra $X_c(f)$ e $X_a(f)$

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(f - k f_c)$$

$X_c(f)$ somma di un numero infinito di repliche dello spettro di $x_a(t)$, ciascuna traslata di un multiplo intero della frequenza f_c



N.B.: può presentarsi il fenomeno detto aliasing o sovrapposizione spettrale (distorsione spettrale)

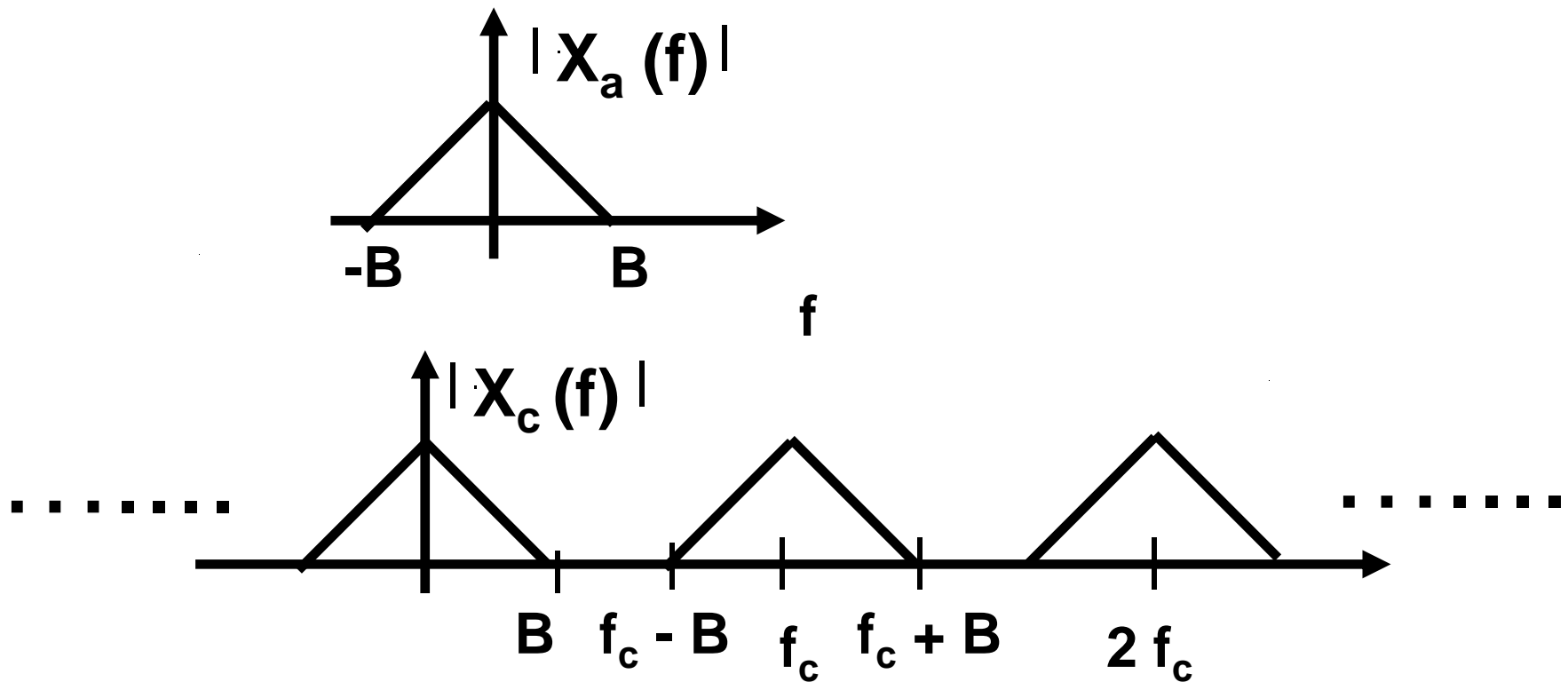
Condizione di assenza di distorsione spettrale (*condizione di Nyquist*)

1) segnale limitato in banda B

$$X_a(f) = 0 \quad \text{per } |f| > B$$

2) $f_c > 2B$

(1 e 2) \longrightarrow repliche disgiunte in frequenza



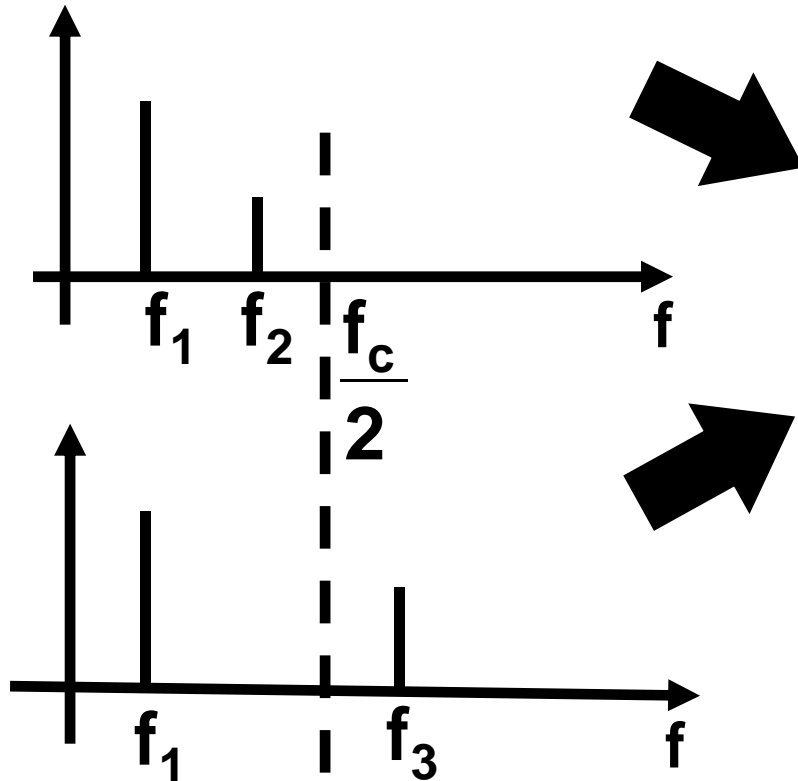
Banda di guardia: $f_c - 2B$

Se 1 o 2 non sono **entrambe verificate:
parziale o totale sovrapposizione delle
repliche (distorsione spettrale dovuta al
campionamento)**

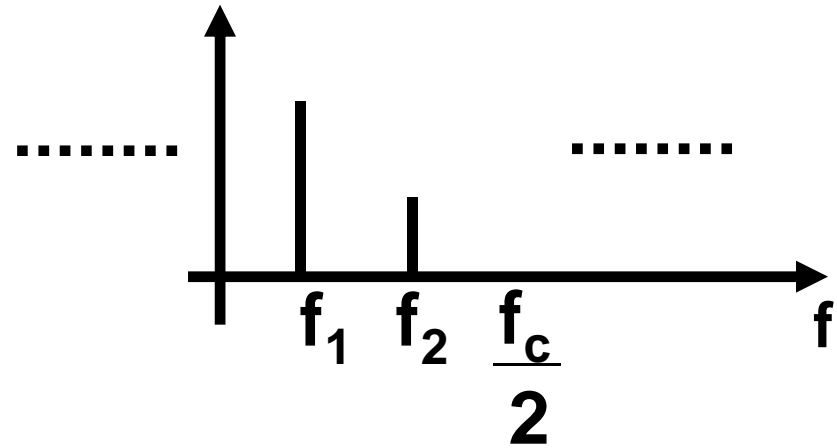
Esempio

Segue dal teorema del campionamento che campionando a f_c i due segnali reali continui (mostrate solo le frequenze positive):

segnale continuo



segnale discreto

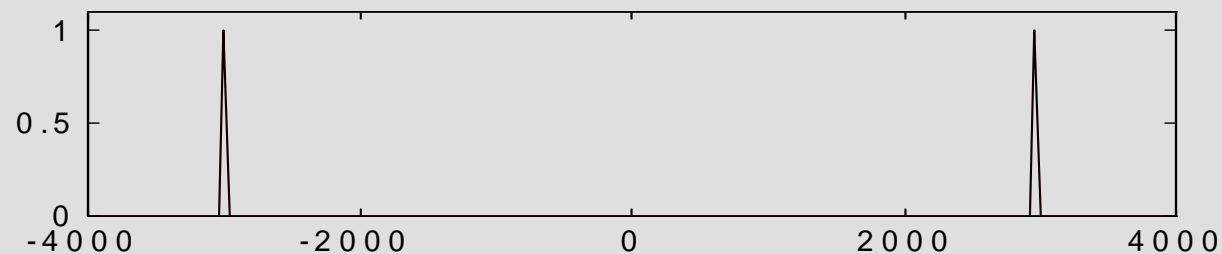
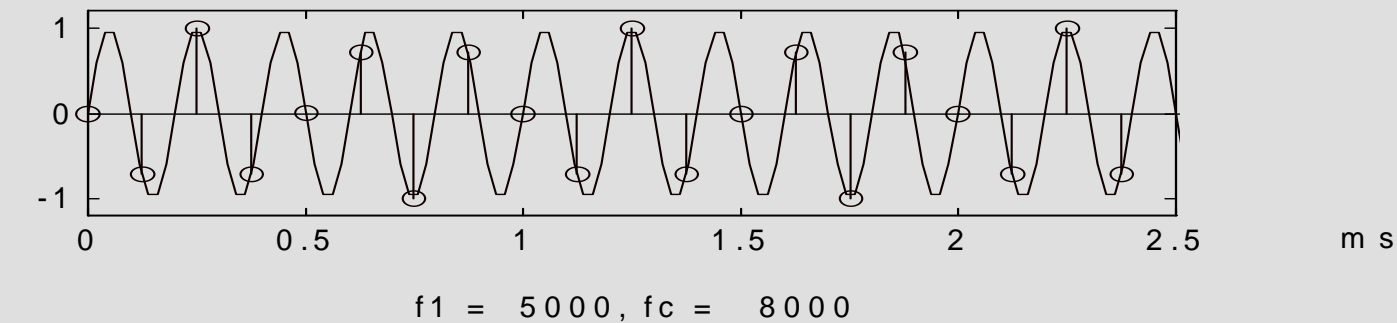
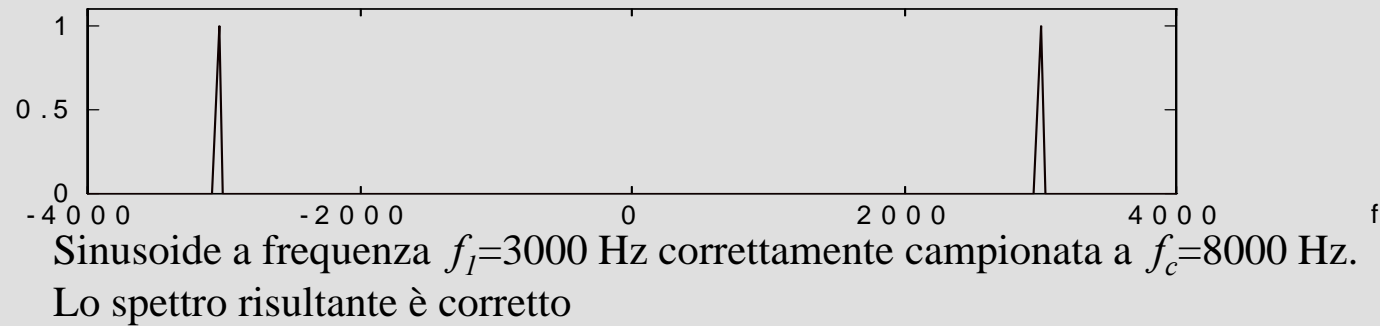
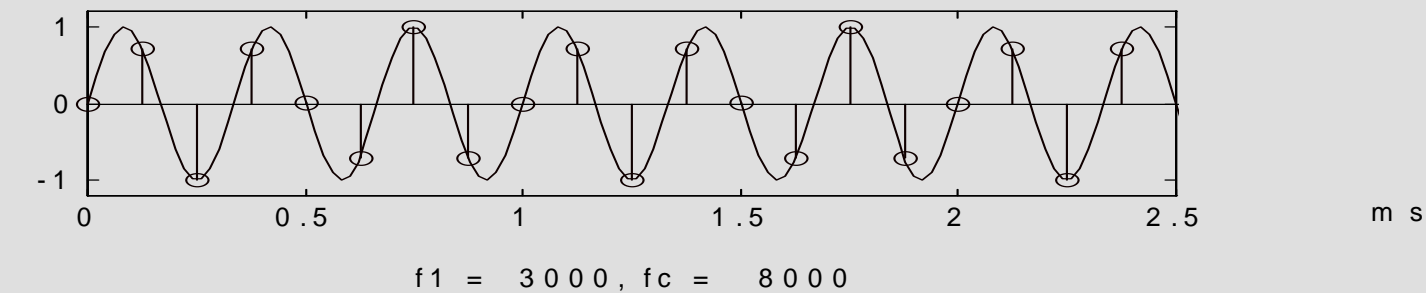


se
$$f_3 - \frac{f_c}{2} = \frac{f_c}{2} - f_2$$

dopo il campionamento le frequenze f_2 e f_3 sono indistinguibili

Osservazione

➤ tutte le frequenze oltre $f_c/2$ sono ribaltate nella banda utile



Sinusoide a frequenza $f_1=5000$ Hz campionata a $f_c=8000$ Hz.
La sinusoide appare ribaltata rispetto a $f_c/2$.

Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

(reperibili a: <http://lenst.det.unifi.it/node/379>)

- **Aliasing**

Ricostruzione del segnale analogico

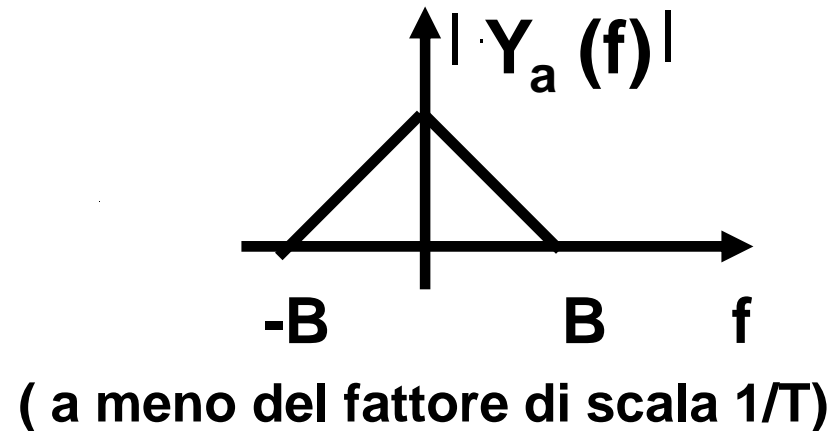
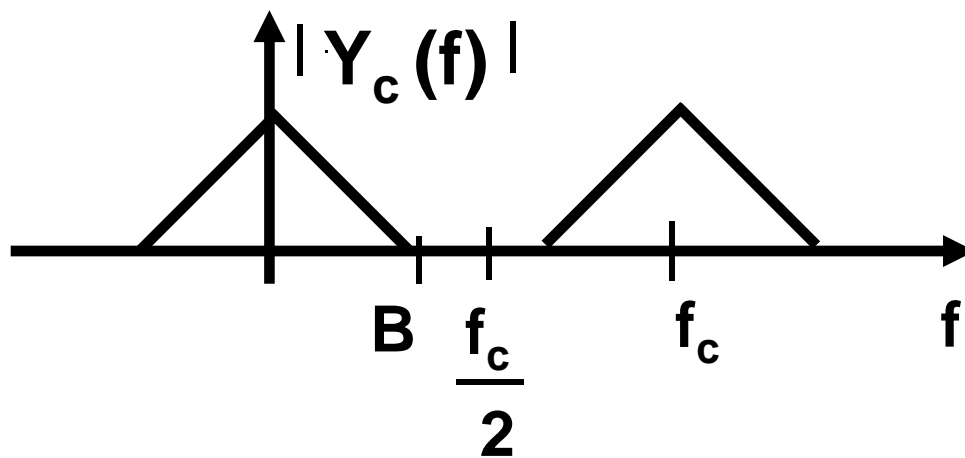
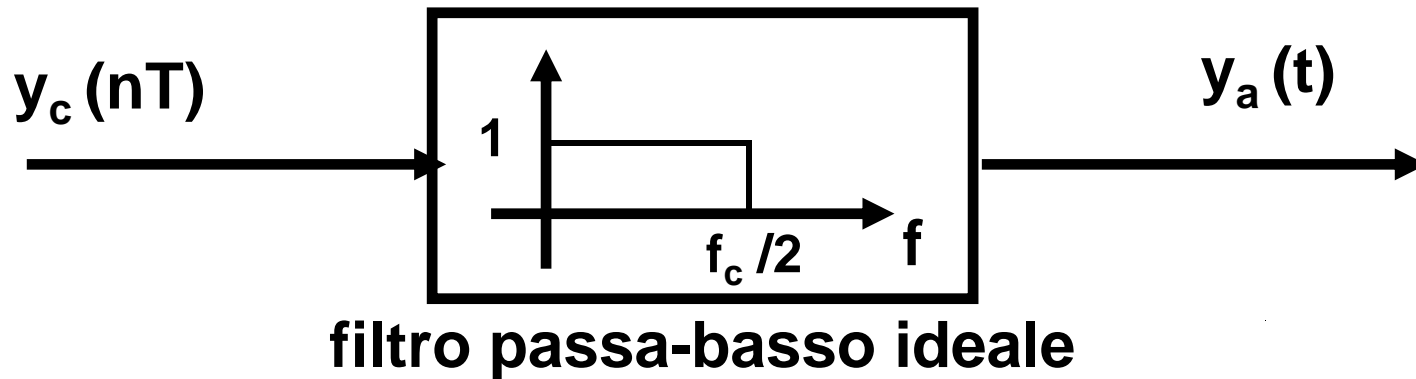


Formula di ricostruzione

Per ottenere il segnale continuo dai suoi campioni, nel caso di assenza di distorsione:

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_c(nT) \frac{\text{sen } \pi f_c(t - nT)}{\pi f_c(t - nT)}$$

che equivale alla realizzazione (ideale):



Osservazione:

i campioni sono una rappresentazione equivalente del segnale analogico

CAMPIONAMENTO DI SEGNALI ALEATORI

$x_a(t)$ **segnale aleatorio**

- $x_c(nT)$ **ha la stessa densità di probabilità di $x_a(t)$**
- **segnali stazionari in senso lato**

$$E\{x_c(nT)\} = m_x \quad \text{media}$$

$$E\{x_c(nT)x_c(nT + mT)\} = r_x(mT) \quad \text{autocorrelazione}$$

$r_x(mT)$ **corrisponde al campionamento della autocorrelazione continua $r(\tau)$ di $x_a(t)$**

- **Spettro di potenza** $G_x(f)$ di $x_c(nT)$

$G_x(f)$ è la Trasformata di Fourier di $r_x(mT)$

Se $G_a(f)$ è lo spettro di potenza di $x_a(t)$,
cioè la trasformata di Fourier di $r(\tau)$, si ha

$$G_x(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(f - k f_c)$$

- **Sequenze stazionarie ed ergodiche**

Quelle per cui coincidono le medie temporali e le medie di insieme

- **Sequenze a spettro bianco**

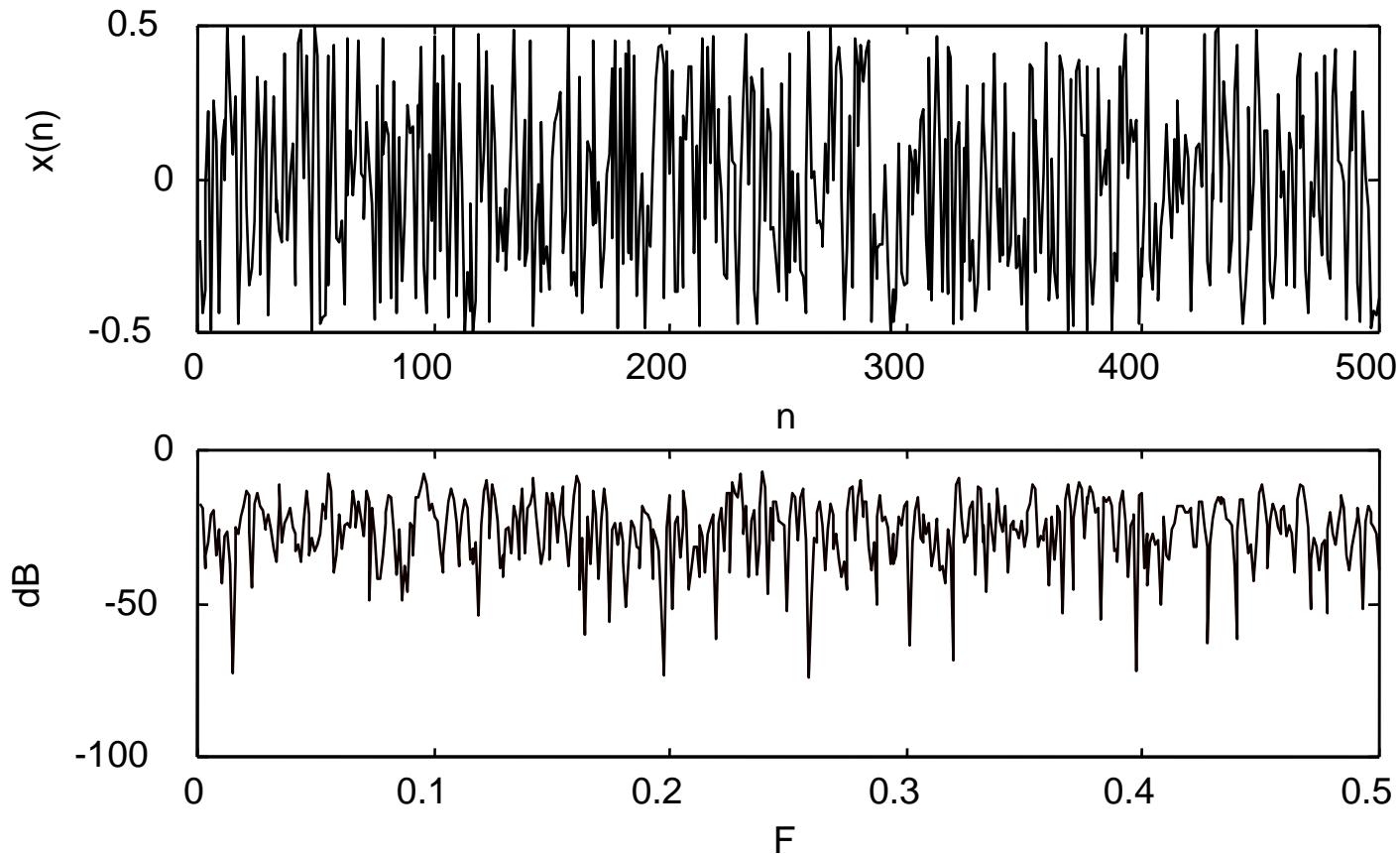
$$r_x(mT) = r_x(0) \delta(mT) \longleftrightarrow G_x(f) = \text{costante} = r_x(0)$$

- **Potenza di una sequenza (a media nulla)**

$$S_x = E \{ x_c^2(nT) \} = r_x(0)$$

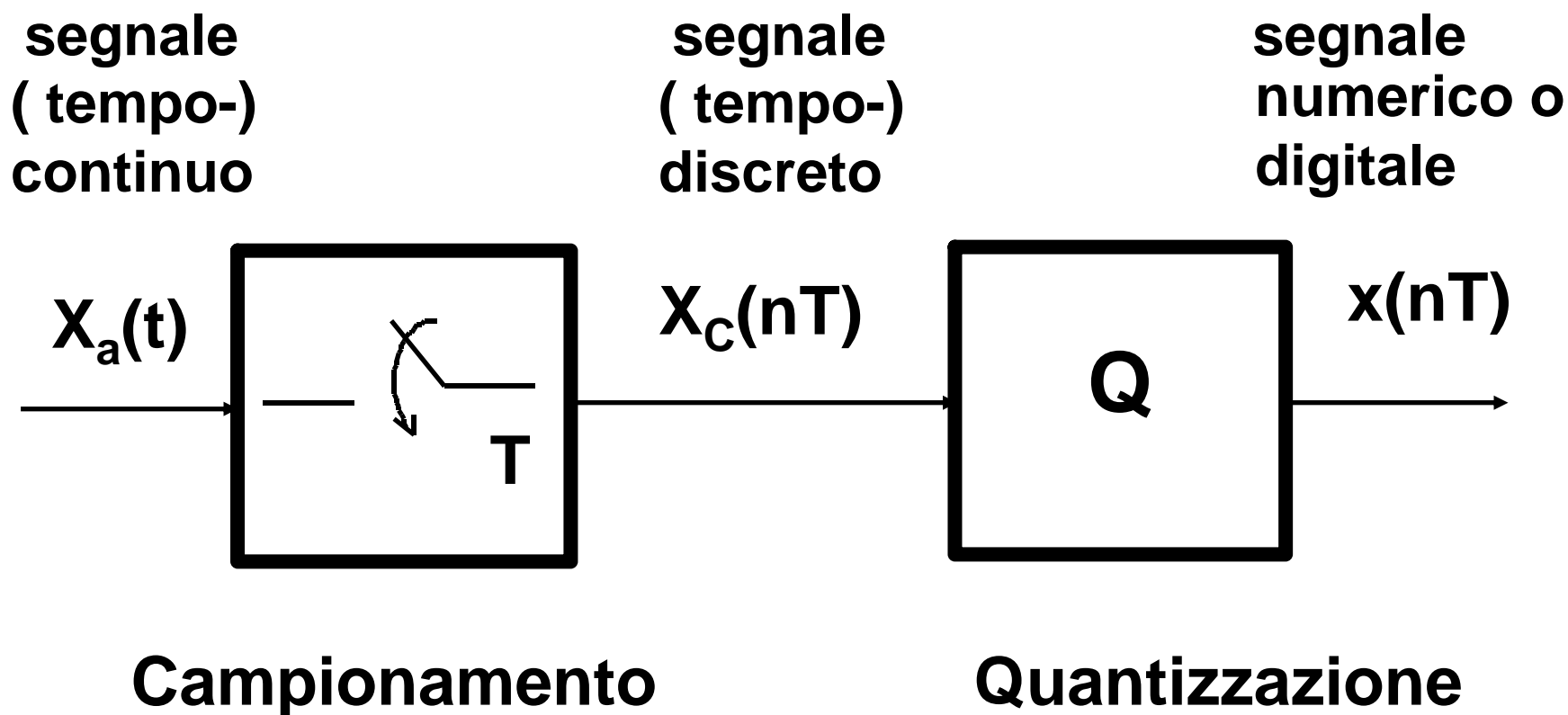
che coincide con la varianza σ_x^2 della sequenza

Esempio di segnale a spettro bianco

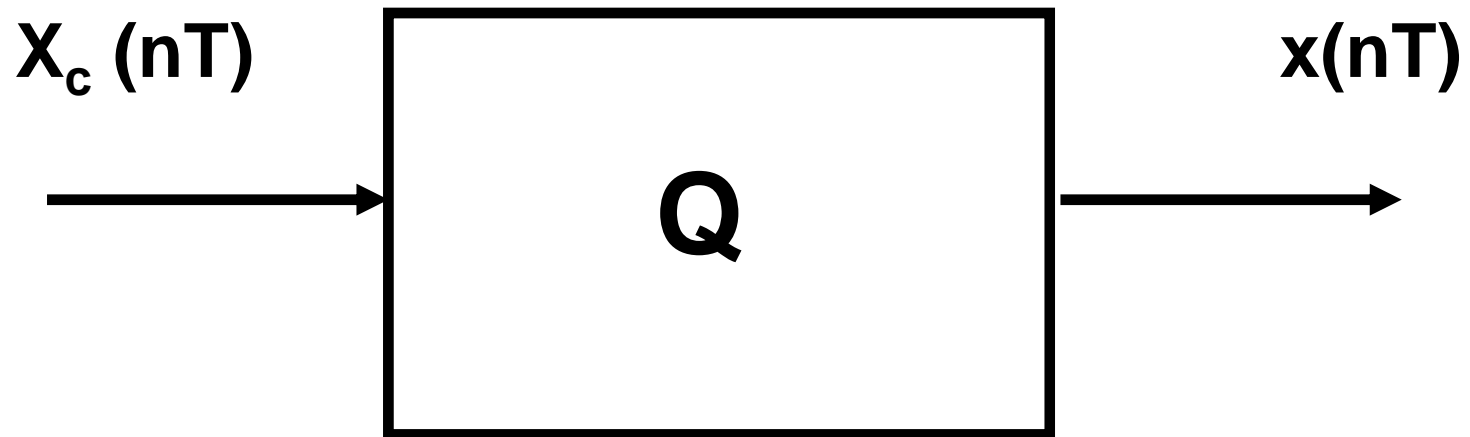


QUANTIZZAZIONE

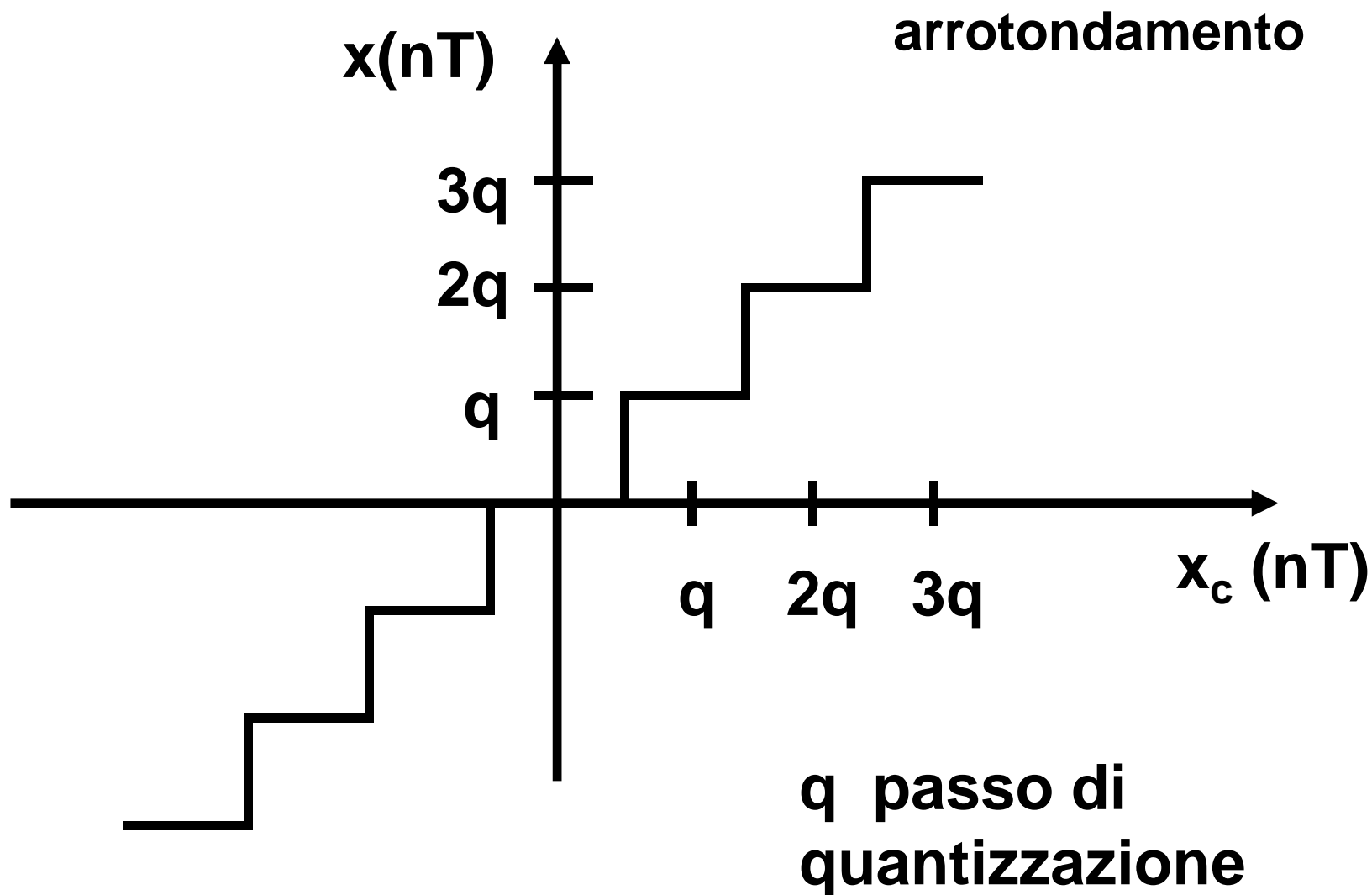
Due operazioni:



QUANTIZZAZIONE



Quantizzazione uniforme



Errore di quantizzazione

$$e(nT) = x_c(nT) - x(nT)$$

ovvero

$$x_c(nT) = x(nT) + e(nT)$$

$$\left| e(nT) \right| \leq \frac{q}{2} \quad \text{arrotondamento}$$

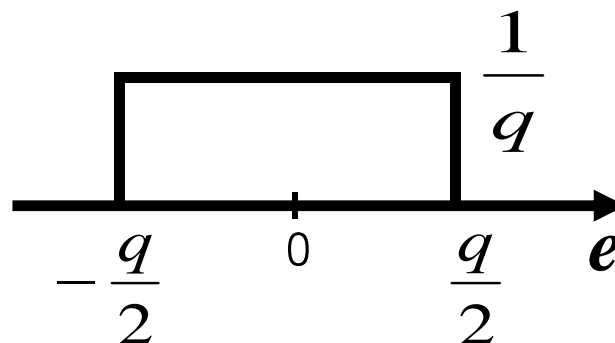
$$\left[0 \leq e(nT) < q \quad \text{troncamento} \right] \quad \text{non usato in ENS}$$

Modello dell'errore di quantizzazione

(comunemente assunto)

- $e(nT)$: ◆ segnale aleatorio
- ◆ indipendente da $x_c(nT)$ e quindi da $x(nT)$

- ◆ densità di probabilità
uniformemente distribuita:
(arrotondamento)



- ◆ bianco

- valor medio: 0 *arrotondamento*
 $[q/2$ *troncamento*]

- varianza: $\sigma_e^2 = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{q^2}{12}$

Potenza dell'errore di quantizzazione:

$$N_q = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_e(F) dF = \frac{q^2}{12}$$

Densità spettrale di potenza:

$$G_e(f) = \frac{q^2}{12} \quad \text{ovvero} \quad G_e(F) = \frac{q^2}{12}$$

Valutazione critica del modello

- **Controesempi banali di non validità del modello**

Es.:

- **segnale costante**
- **sinusoide con frequenza sottomultipla della frequenza di campionamento**
- **onda quadra**
- **molti segnali deterministici**
- **ecc....**

- **Si può supporre valido se il segnale è sufficientemente “complicato”: per esempio se da campione a campione attraversa diversi livelli di quantizzazione ed in modo “apparentemente” non deterministico**
- **Modello adeguato nella maggior parte dei segnali di interesse**
- **Modello matematicamente trattabile**

Rapporto segnale - rumore di quantizzazione

B bit (compreso il segno): 2^B livelli

Dinamica quantizzatore $2(\pm 1) \Rightarrow q = \frac{2}{2^B}$
(in uscita)

$$SNR_q = \frac{S}{N_q} = \frac{\text{Potenza del segnale}}{\text{Potenza err. di quantizzazione}} =$$
$$= \frac{S}{q^2 / 12} = 3S2^{2B}$$

$$(SNR_q)_{dB} = 6.02B + 4.77 + S_{dB} \quad (dB)$$

➤ **Ogni bit aggiunto fa aumentare SNR_q di 6.02 dB**

Esempi particolari

- **Segnale sinusoidale** (*val. max = 1, S=1/2*)

$$(SNR_q)_{dB} = 6.02B + 1.76 \quad (\text{dB})$$

- **Segnale gaussiano**

Semi-Dinamica quantizzatore: $1 = 4\sigma = 4\sqrt{S}$

$$\left[\text{Prob} \left\{ \left| x_c(nT) \right| > 4\sigma \right\} \cong 6.3 \cdot 10^{-5} \right]$$

$$S = \frac{1}{16}$$

$$(SNR_q)_{dB} = 6.02B - 7.27 \quad (\text{dB})$$

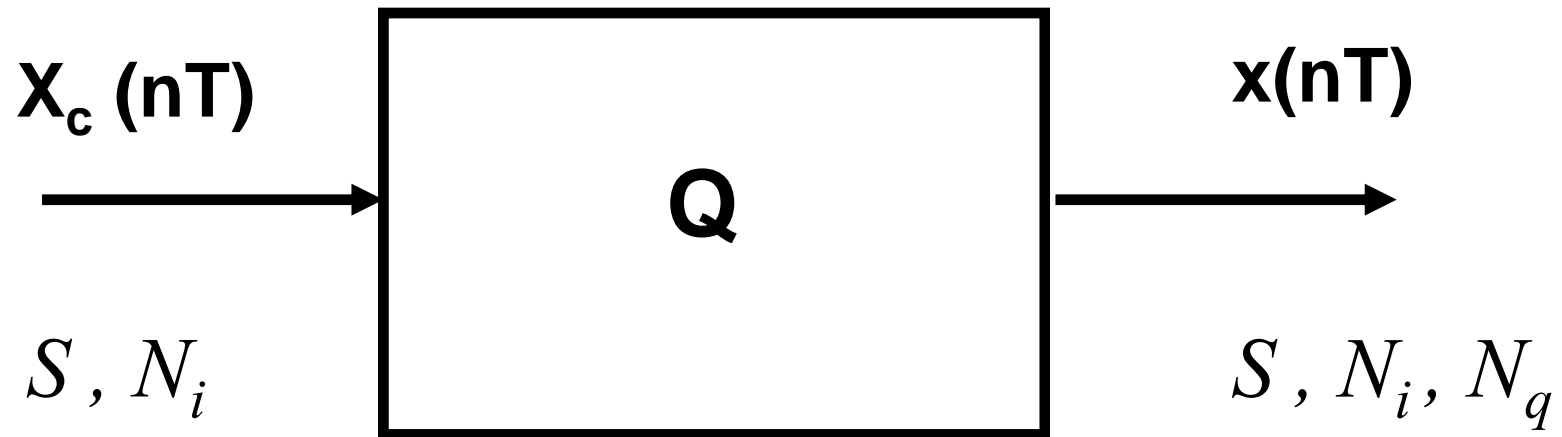
Esempi numerici: $SNR_q(dB)$

B	sinusoide	gaussiano
2	13.8	4.77
4	25.8	16.8
6	37.9	28.9
8	49.9	40.9
10	62.0	52.9
12	74.0	65.0
14	86.0	77.0
16	98.0	89.0

Degradazione del rapporto segnale/rumore

Segnale + rumore

Segnale + rumore + err. quantizz.



$$SNR_i = \frac{S}{N_i} \quad SNR_{uq} = \frac{S}{(N_i + N_q)}$$

Ipotesi: rumore ed errore di quantizzazione incorrelati

$$\frac{1}{SNR_{uq}} = \frac{1}{SNR_i} + \frac{1}{SNR_q}$$

degradazione

$$\Delta_{dB} = (SNR_i)_{dB} - (SNR_{uq})_{dB}$$

- **Dati SNR_i e B , si determina Δ_{dB}**
- **Dati SNR_i e Δ_{dB} si determina SNR_q e quindi B .**

Esempio

- Segnale con un dato rapporto segnale-rumore

$$SNR_i$$

Possiamo considerare SNR_i come generato da una “equivalente” ipotetica quantizzazione.



Domanda: quanti bit aggiuntivi rispetto a questa *ipotetica* quantizzazione devo aggiungere nel quantizzatore per avere una degradazione di

$$\Delta_{dB} ?$$

Δ_{dB}	<i>bit aggiuntivi “rispetto all’ingresso”</i>
3	0
1	+1
0.27	+2
0.067	+3
0.016	+4
0.004	+5
0.001	+6

CONVERSIONE A/D DI SEGNALI PASSA-BANDA

1. Campionamento diretto

Se la banda del segnale $x_a(t)$ è compresa fra

$$k f_x \leq |f| \leq (k+1) f_x \quad k \text{ intero}$$

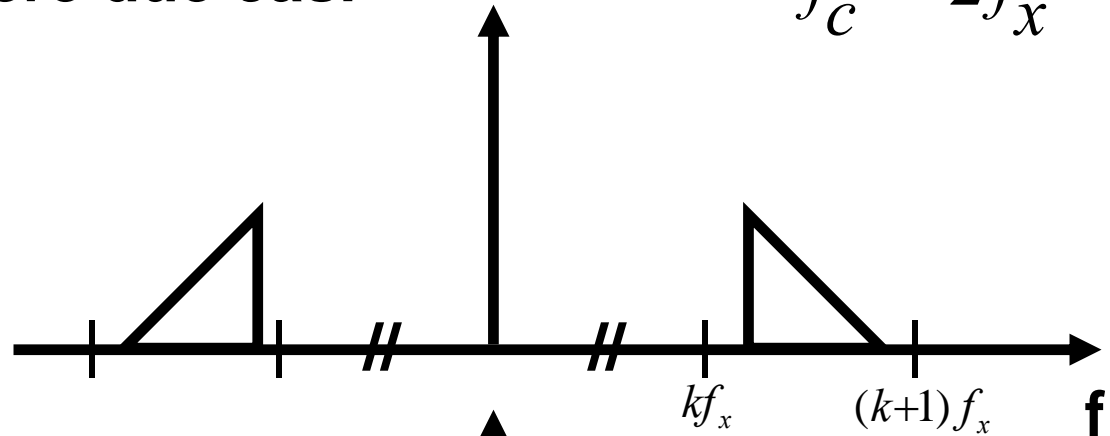
si ha assenza di sovrapposizione spettrale delle repliche (assenza di distorsione spettrale) se si campiona il segnale alla frequenza:

$$f_c = 2 f_x$$

Possiamo distinguere due casi

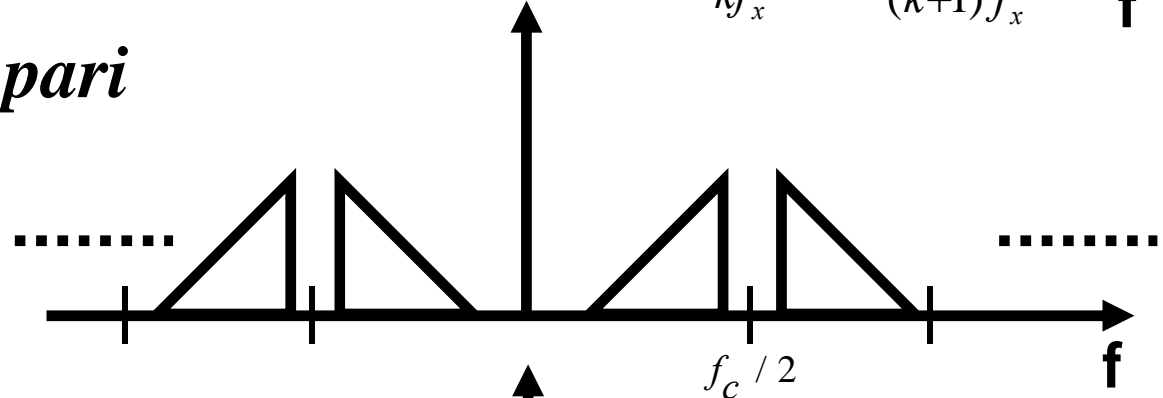
$$f_c = 2f_x$$

$x_a(t)$ \longleftrightarrow



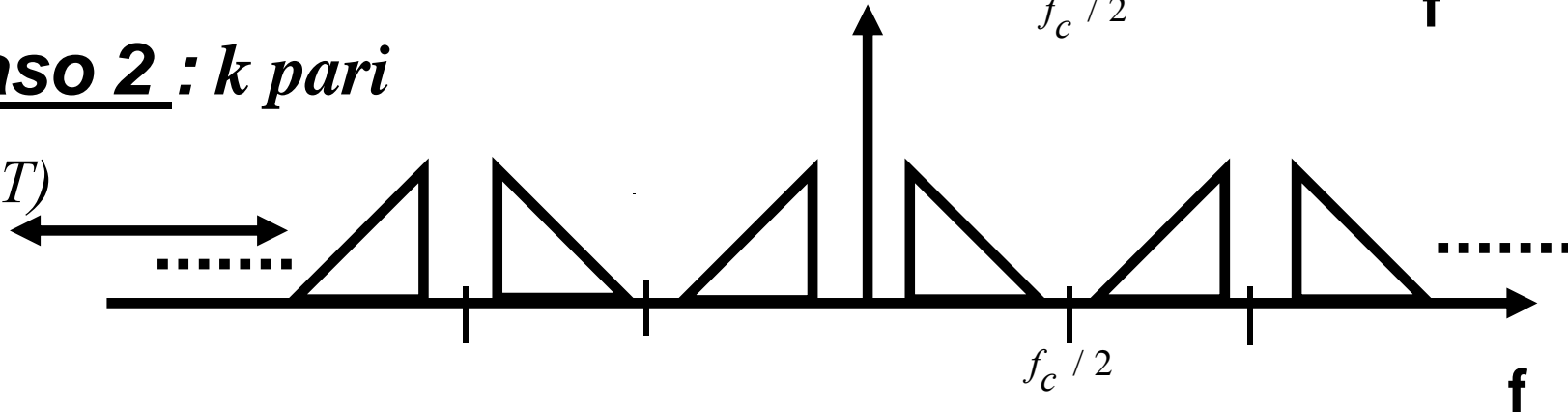
Caso 1 : k dispari

$x_c(nT)$ \longleftrightarrow

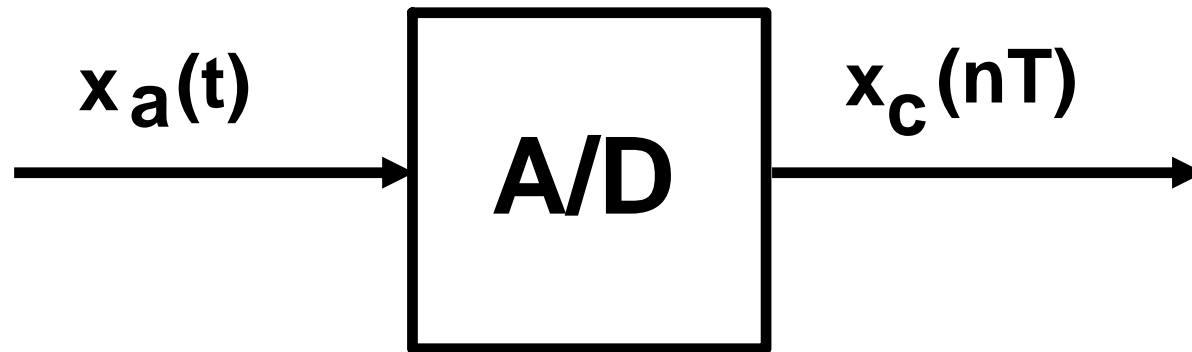


Caso 2 : k pari

$x_c(nT)$ \longleftrightarrow



Per questi tipi di segnali si può convertire alla frequenza $f_c = 2f_x$, senza distorsione



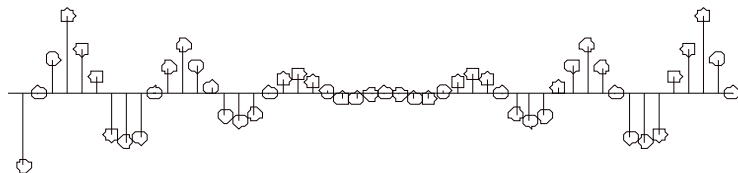
$$T = 1/f_c$$

➡ f_x da scegliere in modo che la banda del segnale sia compresa fra due suoi multipli interi consecutivi (*soluzione non univoca*)

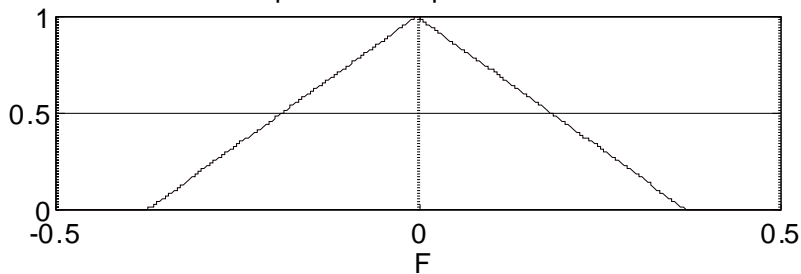
Osservazione

- ★ **Nel caso 1 (k dispari) la replica dello spettro in banda base è invertita rispetto a quella nella banda originaria**
- ★ **Nel caso 2 (k pari) la replica dello spettro in banda base non è invertita rispetto a quella nella banda originaria**
- **Se l'inversione spettrale è un problema.....**

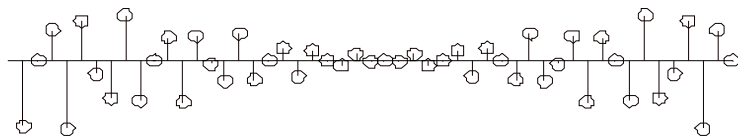
Segnale



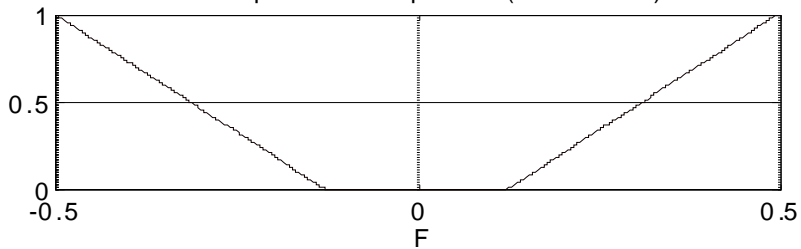
Spettro di ampiezza



Segnale



Spettro di ampiezza (inversione)



Inversione spettrale per segnali numerici.

$x(nT)$

Si invertono di segno i campioni dispari del segnale originale.
Il relativo spettro risulta invertito.

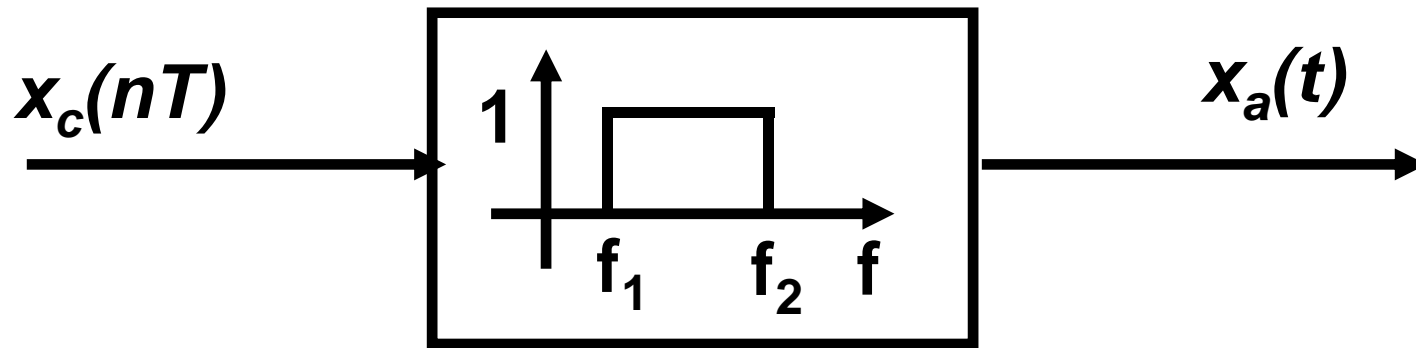
$$x'(nT) = (-1)^n x(nT)$$

Formula di ricostruzione

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \frac{\sin \pi f_c (t-nT)/2}{\pi f_c (t-nT)/2} \cos 2\pi f_0 (t-nT)$$

$$f_0 = \frac{2k+1}{2} \frac{f_c}{2} \quad \text{frequenza di centro banda}$$

Ovvero:

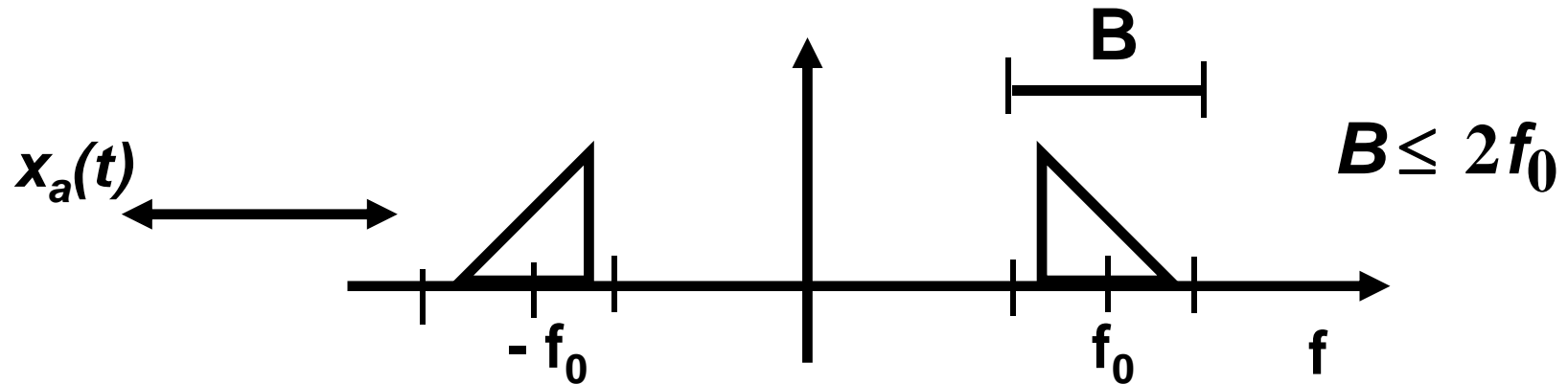


filtro passa-banda ideale

$$f_1 = k \frac{f_c}{2}$$

$$f_2 = (k + 1) \frac{f_c}{2}$$

2. Campionamento delle componenti I e Q



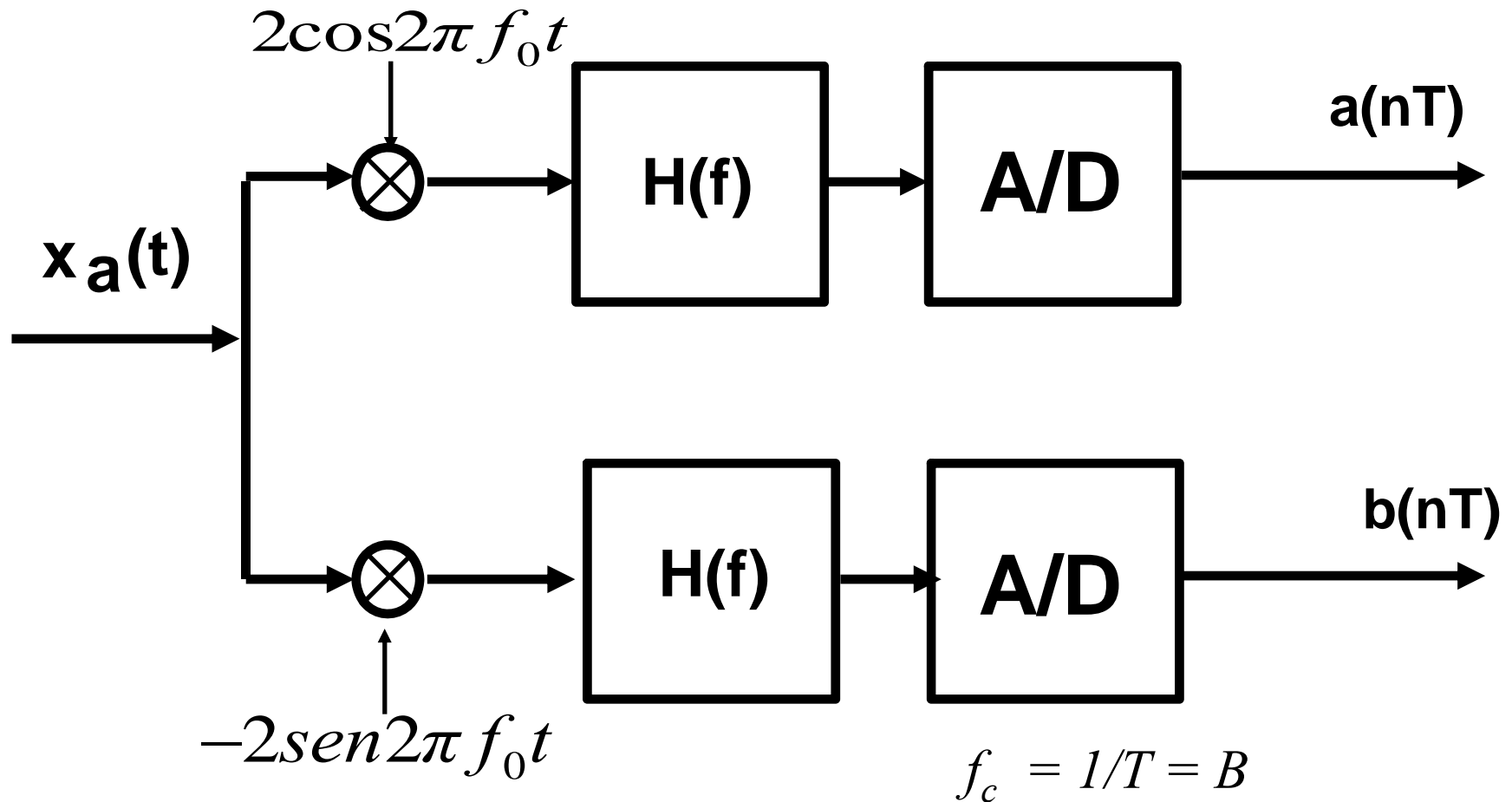
$$x_a(t) = a(t)\cos 2\pi f_0 t - b(t)\sin 2\pi f_0 t$$

a(t) componente I

b(t) componente Q

$$\left. \begin{aligned} a(t) &\Leftrightarrow A(f) \\ b(t) &\Leftrightarrow B(f) \end{aligned} \right\} = 0, \text{ per } |f| \geq \frac{B}{2}$$

A. Metodo tradizionale

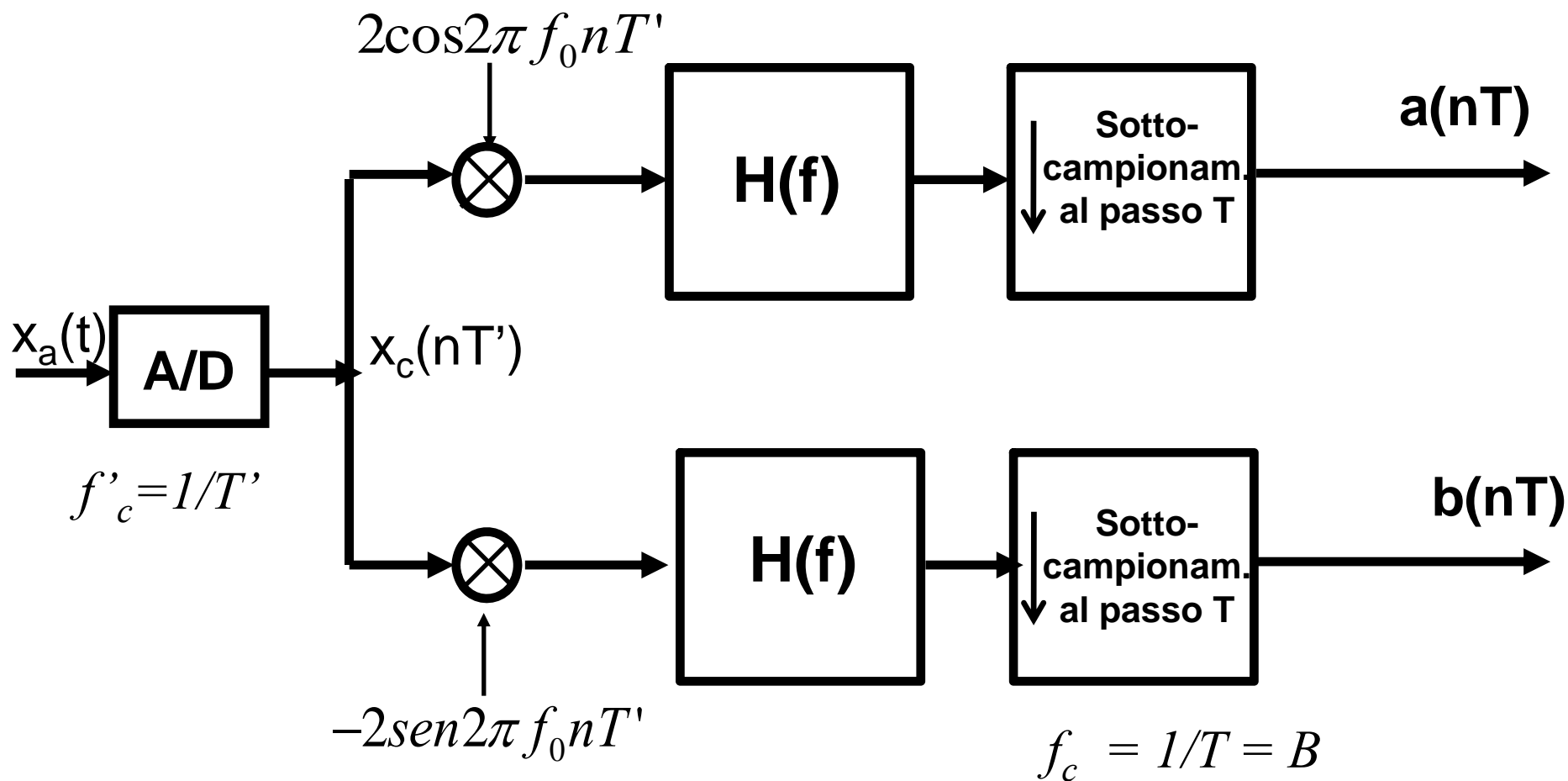


$H(f)$ **filtro passa-basso per** $|f| \leq \frac{B}{2}$

Problemi:

- **moltiplicatori identici (analogici)**
- **sinusoidi esattamente sfasate di 90°**
(generate analogicamente)
- **filtri (analogici) identici nei due rami**
- **due A/D sincroni**

B. Metodo numerico



$H(f)$ filtro *numerico* passa-basso per $|f| \leq \frac{B}{2}$

Vantaggi:

- **un solo A/D (anche se più veloce)**
- **sinusoidi (numeriche) esattamente sfasate di 90°**
- **filtri identici (numerici)**

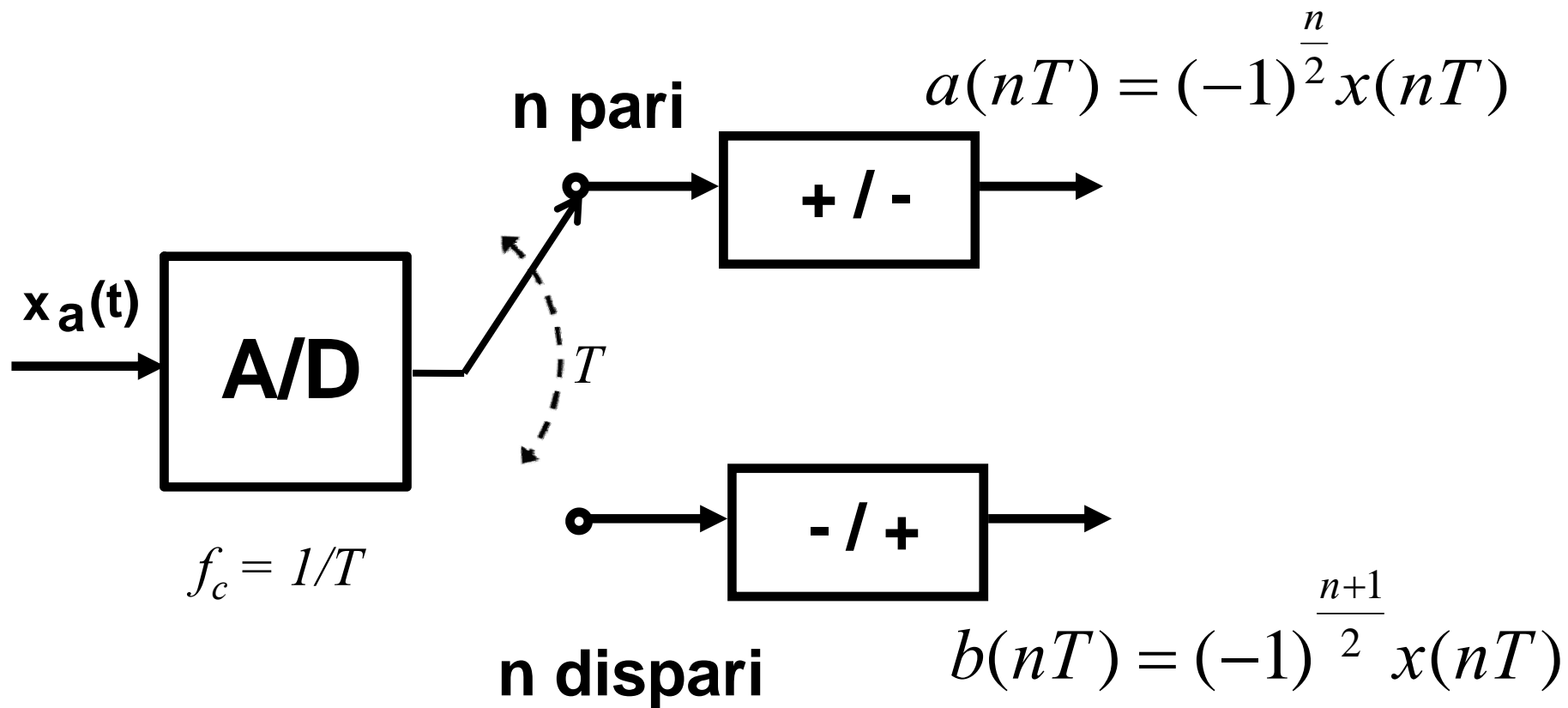
C. Metodo con $f_c = 4 f_0$

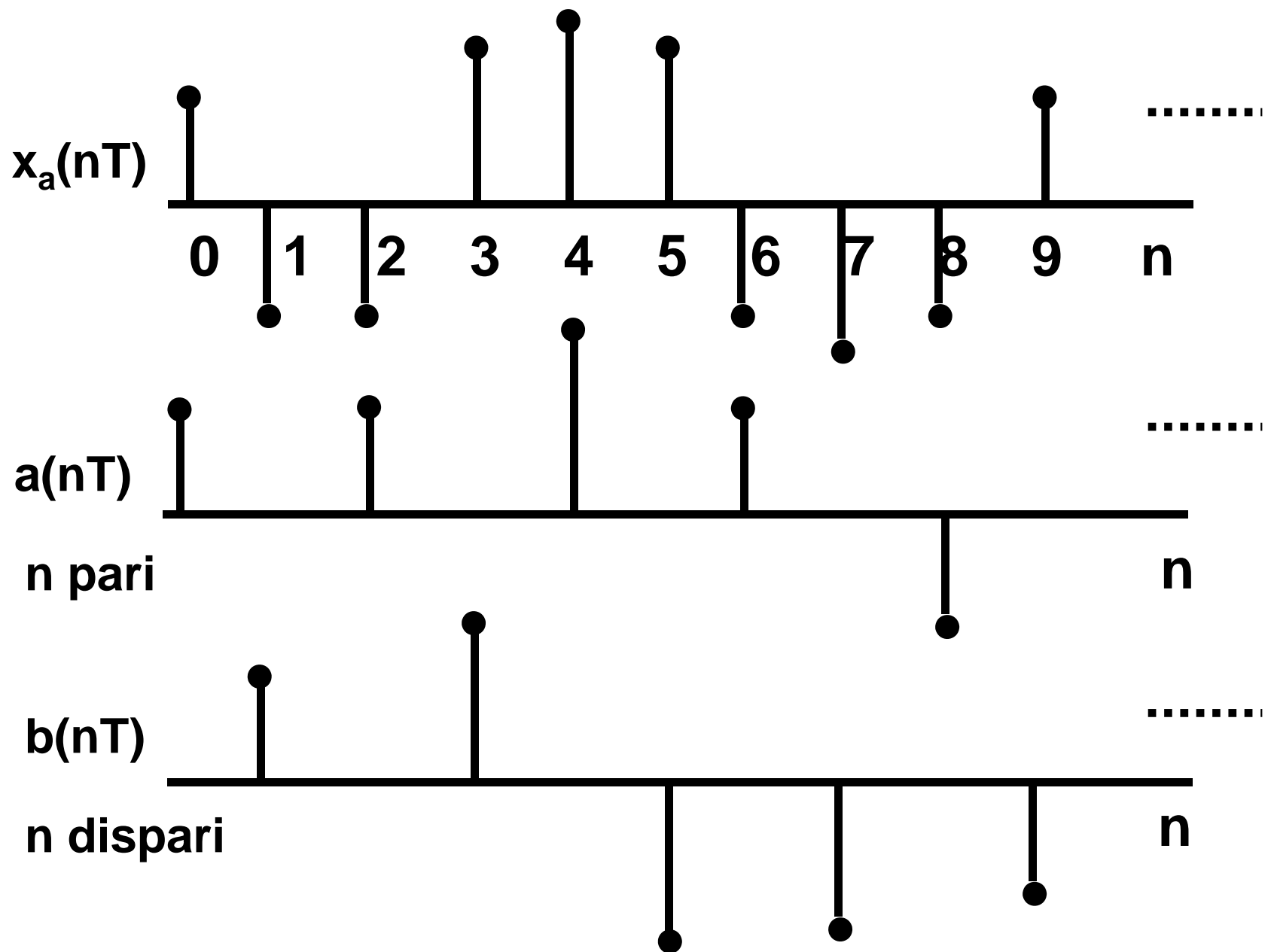
$$x_c(nT) = a(nT) \cos 2\pi f_0 \frac{n}{4f_0} - b(nT) \sin 2\pi f_0 \frac{n}{4f_0}$$

$$= a(nT) \cos \frac{n\pi}{2} - b(nT) \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$[1, 0, -1, 0]$$

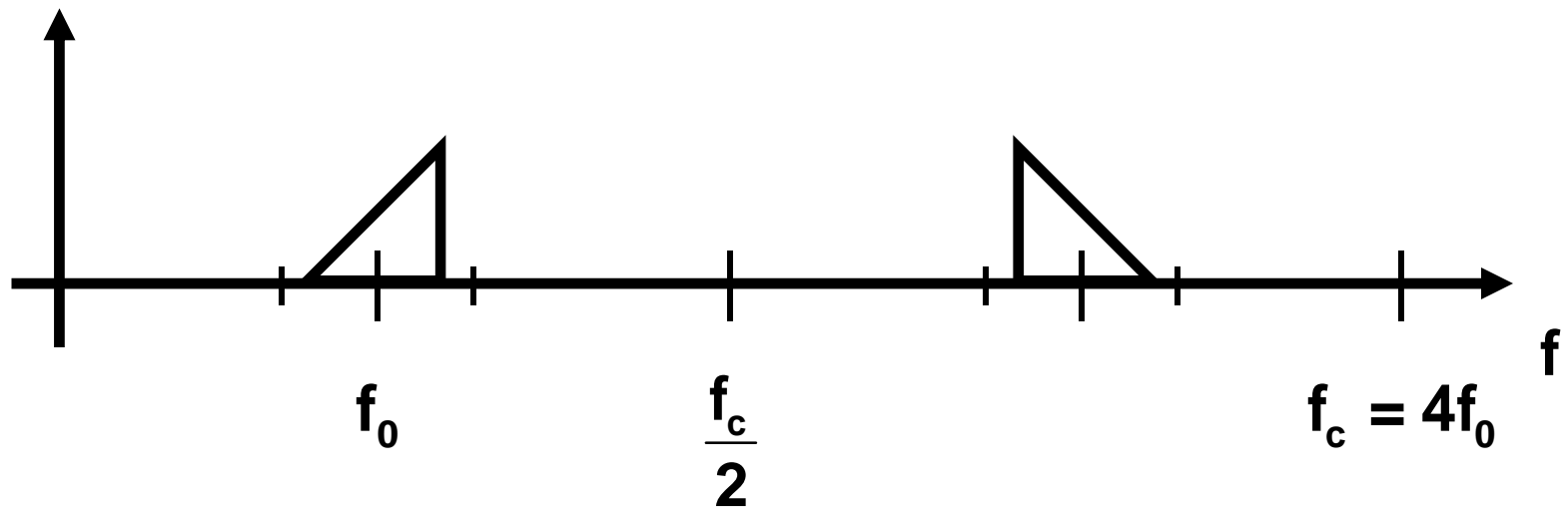
$$[0, 1, 0, -1]$$





Realizzazione

Si deve convertire il segnale $x_a(t)$ ad una frequenza intermedia f_0 e poi campionarlo a $f_c = 4f_0$



$a(nT)$

sottosequenza pari a segni alterni

$b(nT)$

sottosequenza dispari a segni alterni

Osservazioni

1. I e Q **correttamente** campionate a

$$f'_c = \frac{1}{2T} = \frac{f_c}{2} = 2f_0 \geq B$$

2. I e Q **non allineate** temporalmente (**ma** possono essere allineate con un'operazione di interpolazione)

➤ $f_c = 4f_0$ è troppo grande?

- **Soluzione: generalizzazione (usata in pratica)**

È sufficiente scegliere una

$$f_c = 4f_0 / (2k + 1), \quad k \text{ intero}$$

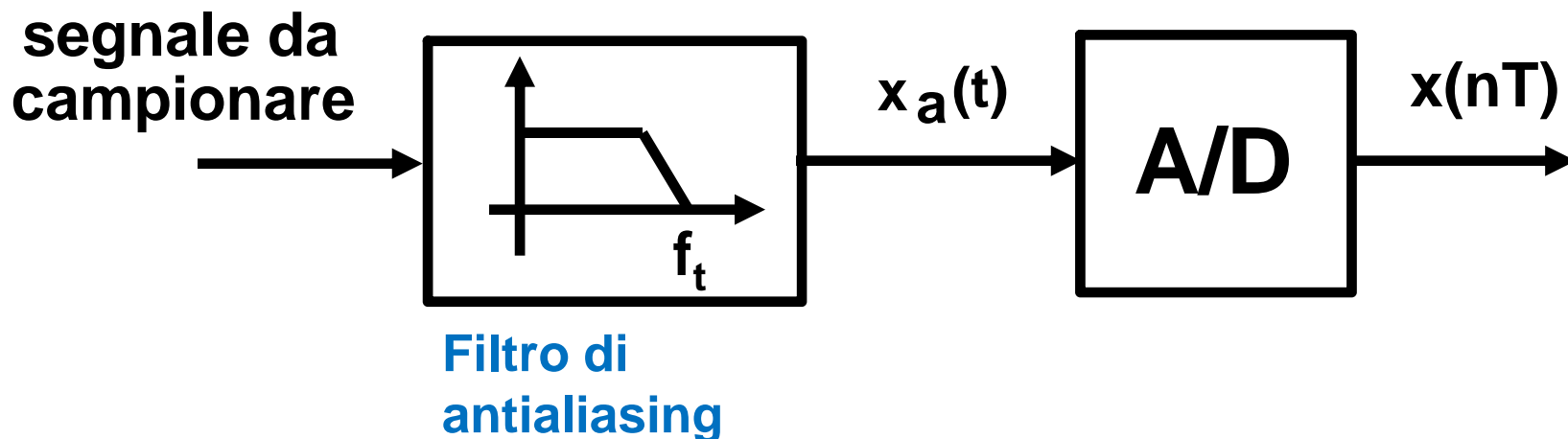
$$f_c > 2B$$

CONVERSIONE A/D **CON CAMPIONAMENTO REALE**

Due contributi:

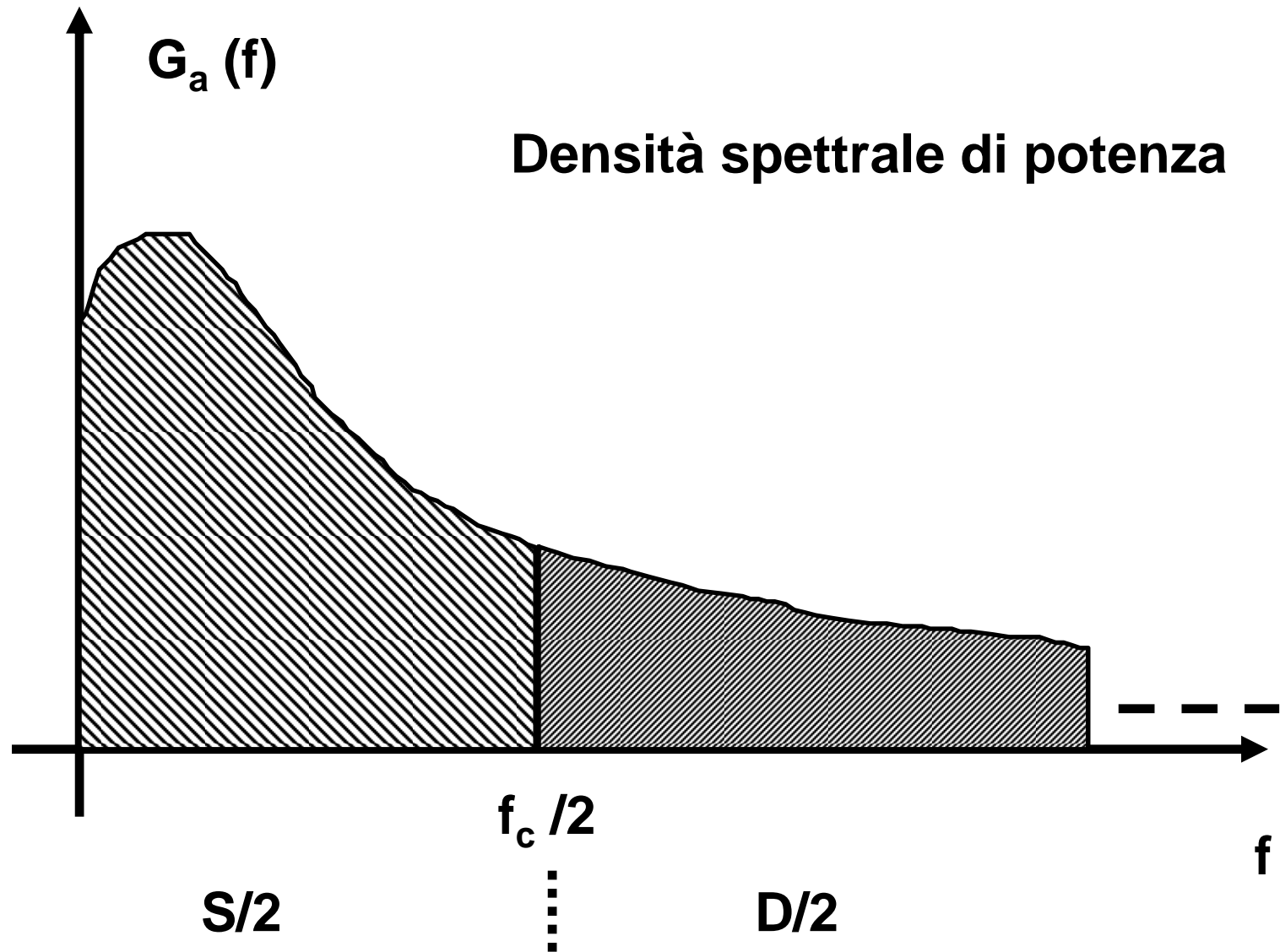
- 1. Aliasing o ripiegamento dello spettro**
- 2. Tempo non istantaneo di campionamento
(*aperture time del S/H*)**

1. Ripiegamento dello Spettro e Filtro di antialiasing



Il filtro di antialiasing limita la banda del segnale in modo da ridurre la distorsione spettrale

Filtro di antialiasing = passa basso non ideale



Distorsione spettrale introdotta dal campionamento

In generale

$$D_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k \neq 0} G_a(f - k f_c) \quad |f| < \frac{f_c}{2}$$

Se verificate le condizioni **1) e **2)** di assenza di sovrapposizione spettrale $D_c(f) = 0$**

Altrimenti $D_c(f) \neq 0$

**Si può definire un rapporto
segnale/distorsione di campionamento:**

$$\frac{S}{D} = \frac{\textit{Potenza del segnale utile}}{\textit{Potenza della distorsione}}$$

$$S = \frac{2}{T} \int_0^{f_c/2} G_a(f) df$$

$$D = 2 \int_0^{f_c/2} D_c(f) df$$

Esempio:

Procedura alternativa e più semplice di valutazione e controllo della distorsione introdotta dal campionamento.

Supponiamo che dopo un filtro di antialiasing di Butterworth di ordine n e di frequenza di taglio f_t si abbia:

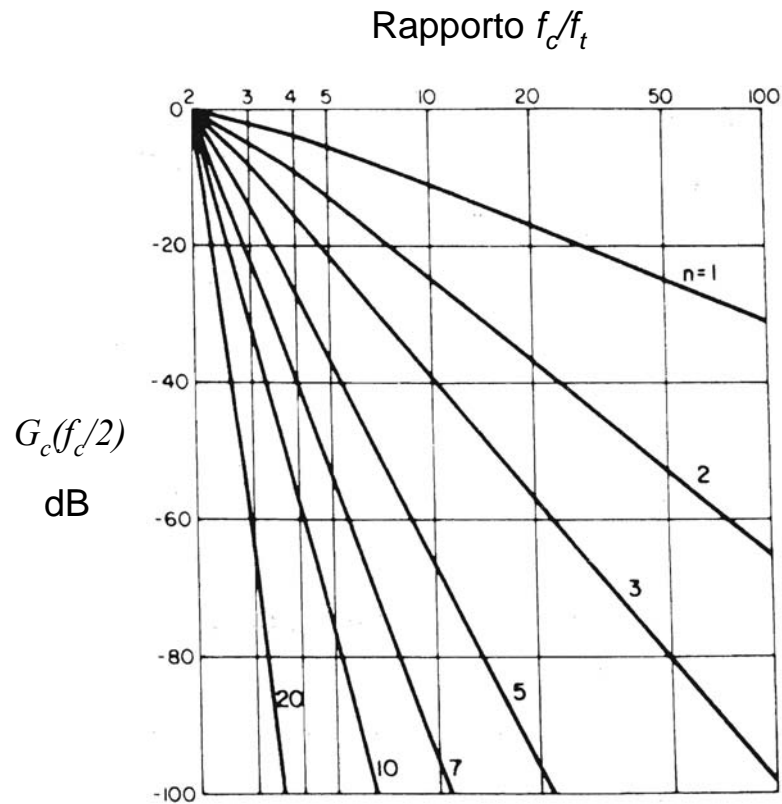
$$G_a(f) = -10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_t} \right)^{2n} \right] \quad (dB)$$

Dopo il campionamento

$$G_c(f_c/2) \cong -10 \log \left[1 + \left(\frac{f_c}{2f_t} \right)^{2n} \right] + 3 \quad (dB)$$

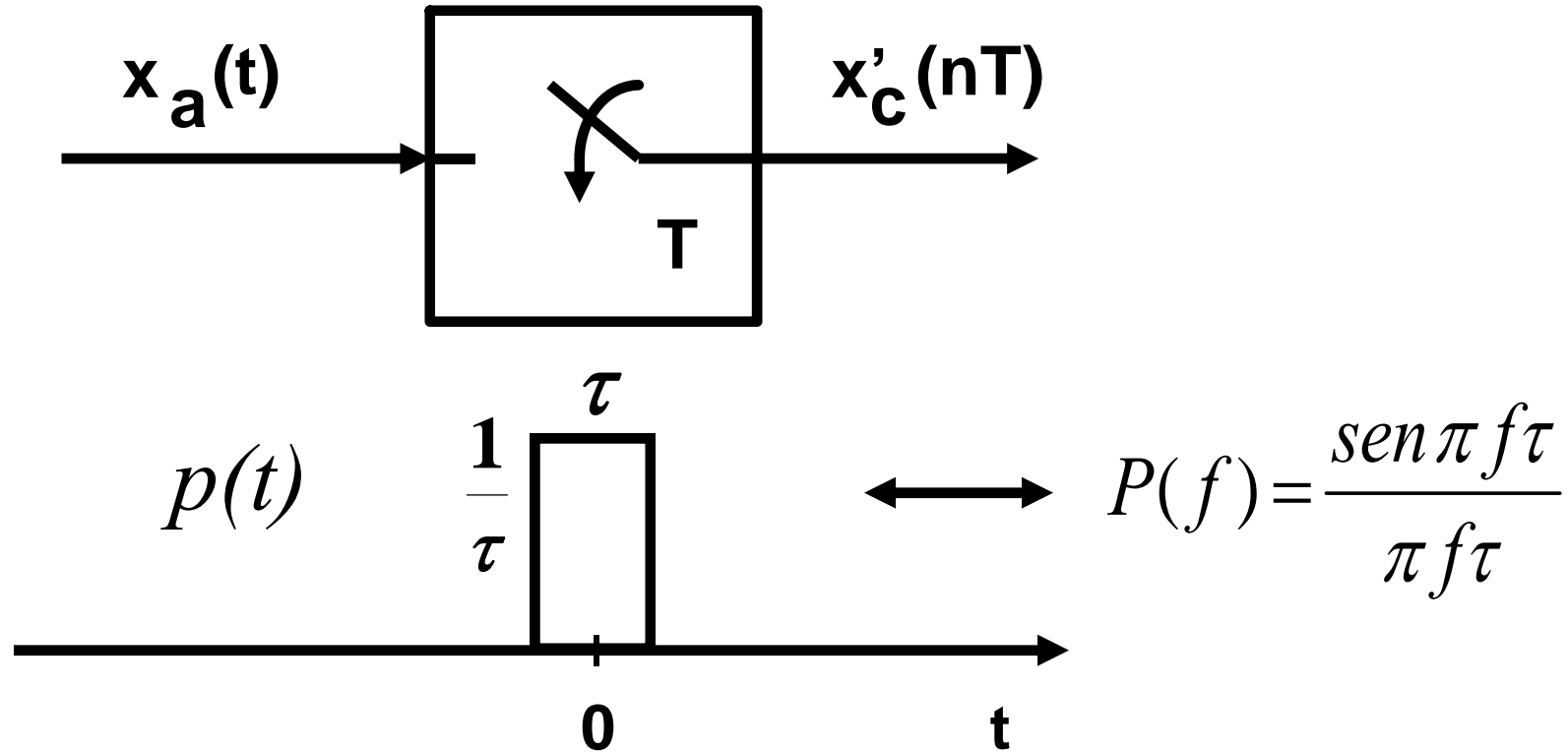
dove il termine 3 è dovuto al ripiegamento spettrale.
Si deve scegliere f_c o n in modo che:

$$G_c(f_c/2) < a \quad (dB) \quad (\text{per un prefissato } a)$$



**Relazione fra il livello dello spettro a $f_c/2$ e la frequenza di campionamento normalizzata, al variare del fattore n di decadimento dello spettro di ingresso (di tipo Butterworth).
Generalmente $f_c > 2f_t$ ($3, 10 f_t$)**

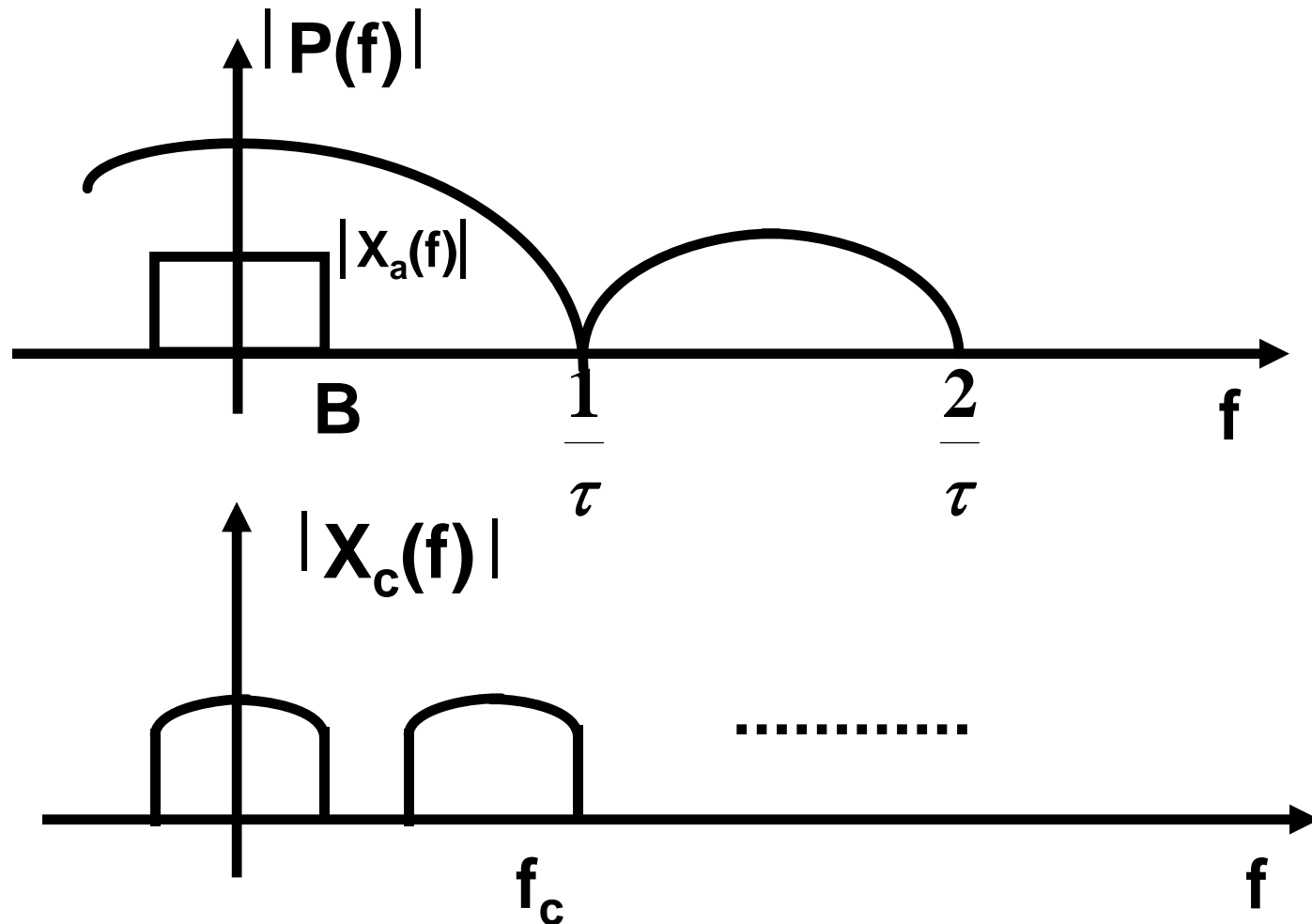
2. Tempo di campionamento non istantaneo



$$x'_c(nT) = \frac{1}{\tau} \int_{nT-\tau/2}^{nT+\tau/2} x_a(t) dt \quad \text{invece di } x_c(nT)$$

$$= [x_a(t) * p(t)]_{t=nT}$$

Si campiona un segnale con spettro $X_a(f)$ $P(f)$
[invece di $X_a(f)$]



Conclusione

Il campionamento di un segnale mediante un impulso di durata non nulla può essere trattato come il campionamento ideale del segnale filtrato dallo spettro dell'impulso di campionamento.

→ Conclusione valida per qualsiasi $P(f)$

→ Se $\tau \ll T$ effetti trascurabili

Altrimenti se ne deve tenere conto



OSSERVAZIONE

**Questo effetto è più sensibile
per il campionamento di
*segnali in alta frequenza.***

Nel caso di impulso rettangolare lo spettro del segnale campionato viene distorto da una funzione

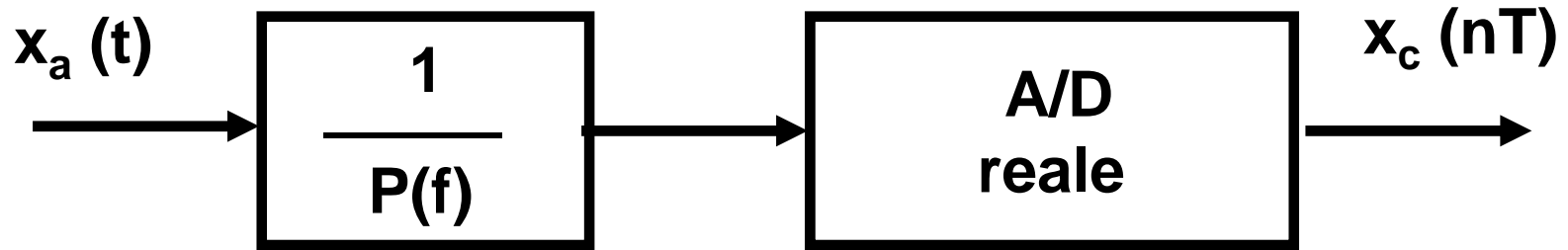
$$P(f) = \frac{\text{sen } \pi f \tau}{\pi f \tau}$$

spesso trascurabile se τ è piccolo.

Altrimenti si compensa la distorsione con un filtro con risposta nella banda utile del segnale del tipo

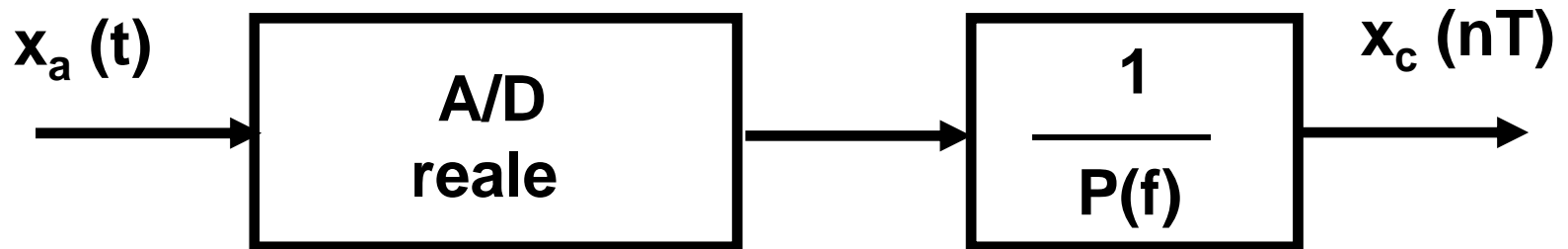
$$\frac{1}{P(f)} = \frac{\pi f \tau}{\text{sen } \pi f \tau} \quad |f| \leq B$$

a) prima del campionamento (compensazione analogica)



**Filtro analogico
(può essere incluso
nel filtro di antialiasing)**

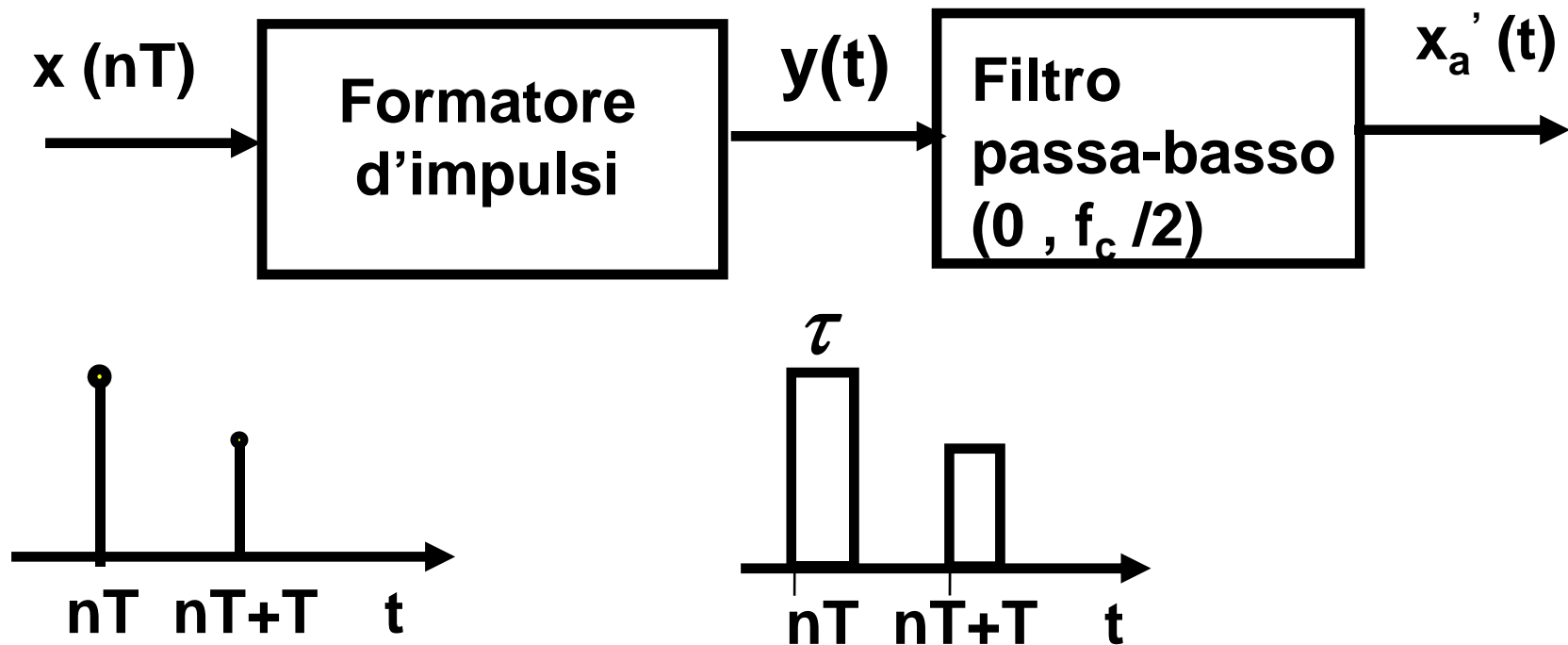
b) dopo il campionamento (compensazione digitale)



**Filtro numerico
(è sufficiente nella banda
del segnale di ingresso)**

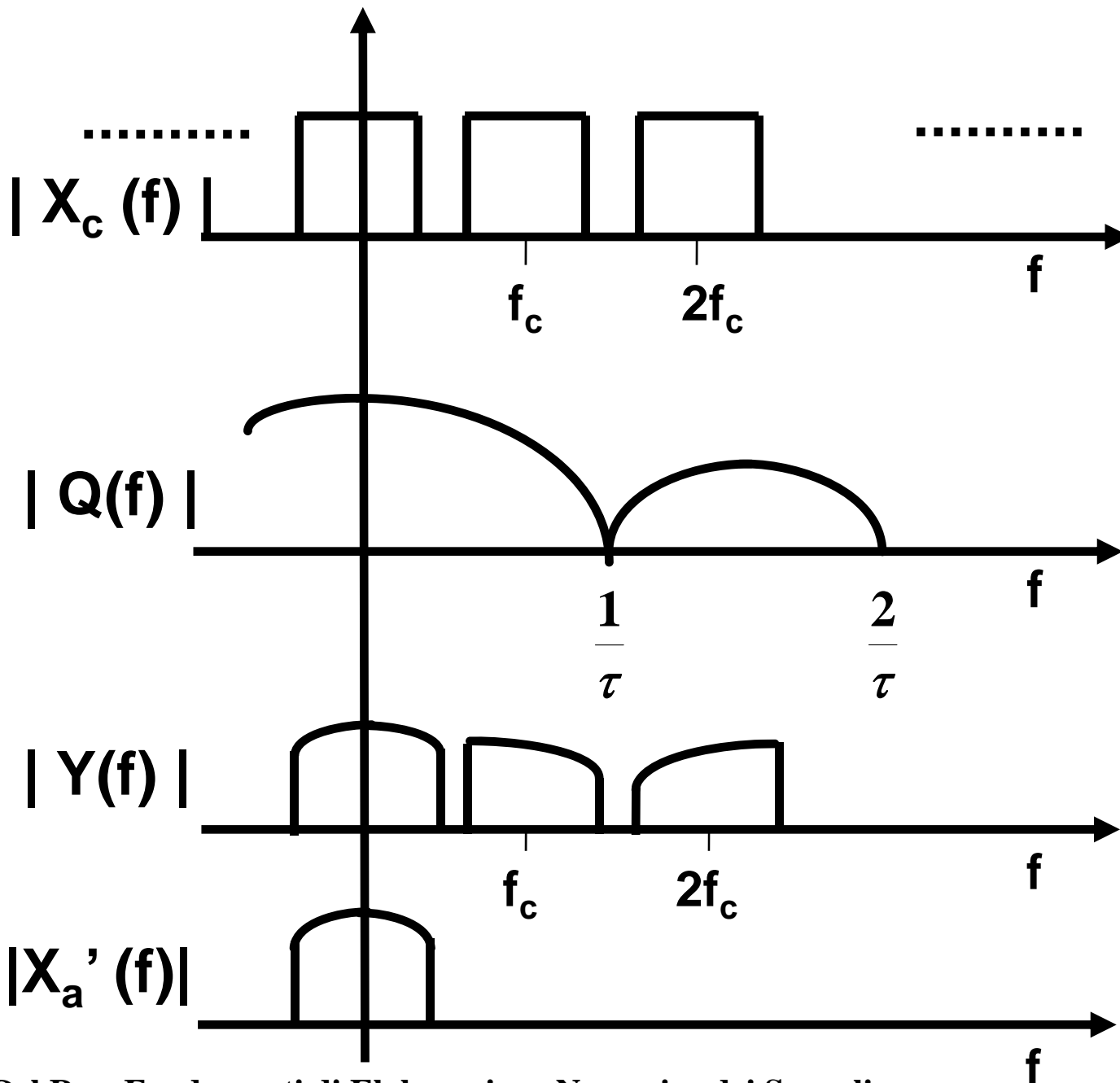
CONVERSIONE D/A - RICOSTRUZIONE REALE

Conversione digitale - analogica (D/A)



$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_c(nT)\delta(t - nT)] * q(t)$$

$$q(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \longleftrightarrow Q(f) = \tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}$$



Distorsione che può essere compensata come nel caso del campionamento non istantaneo

COMPENSAZIONE ANALOGICA

Includere la funzione $1/Q(f)$ nel filtro analogico passa-basso di ricostruzione

COMPENSAZIONE DIGITALE

Far precedere al blocco formatore di impulsi (e quindi al convertitore D/A) un filtro numerico con risposta in frequenza $1/Q(f)$



OSSERVAZIONE

**Effetto più sensibile per la
ricostruzione di *segnali in alta
frequenza con filtri passa-banda***

Considerazioni finali sulla Conversione A/D

La codifica dei livelli quantizzati deve essere fatta associando a ciascun livello il numero binario proporzionale al valore (ampiezza) del livello stesso (codifica lineare)

Quantizzazione uniforme + codifica lineare = quantizzazione lineare

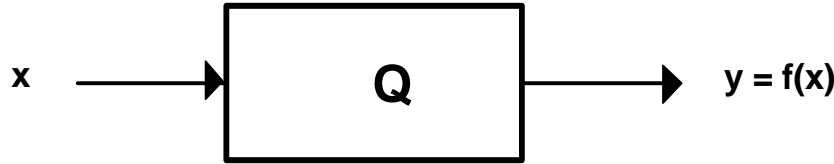
L'elaborazione numerica dei segnali richiede una quantizzazione lineare

Per esempio nella codifica internazionale PCM della voce a 64 kbit/s questo non è vero: la quantizzazione è di tipo logaritmico.

Se si deve elaborare il segnale vocale PCM occorre prima transcodificarlo in una quantizzazione lineare

8 bit PCM \longleftrightarrow 13 ÷ 14 bit quant. lineare

Quantizzazione segnale vocale PCM



Q approssima le seguenti leggi:

- **legge A (Europa)**

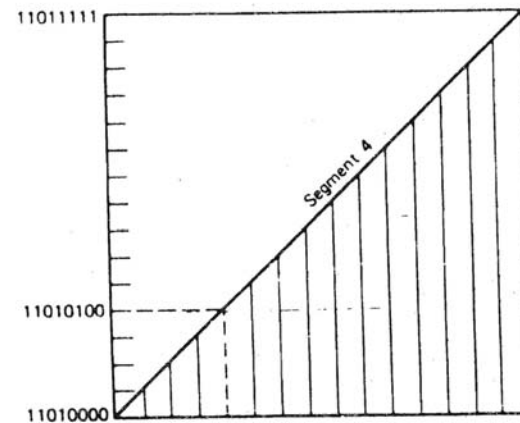
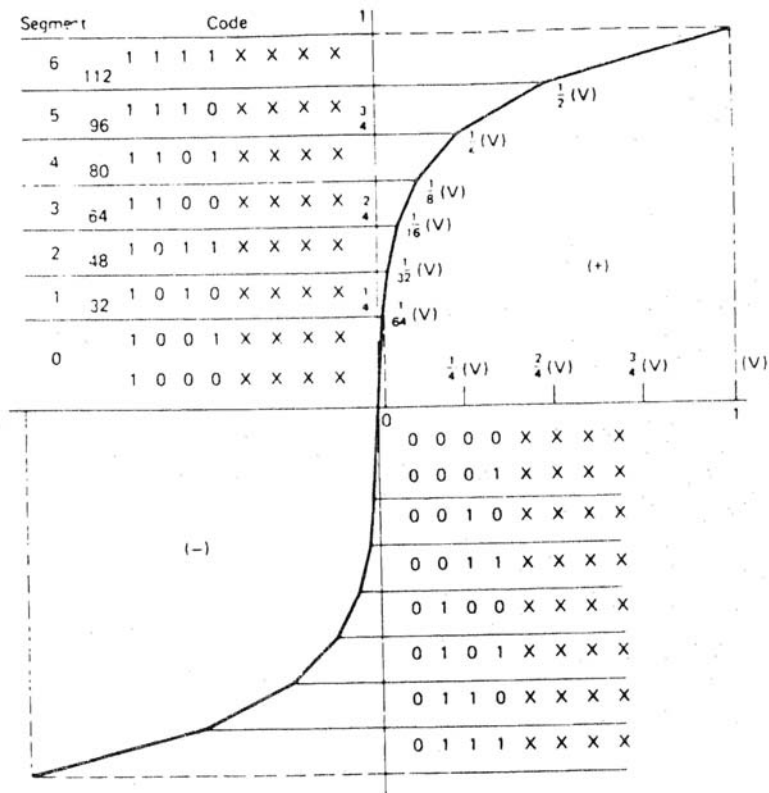
$$y = \frac{Ax}{1 + \log A}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{A}$$
$$= \frac{1 + \log Ax}{1 + \log A}, \quad \frac{1}{A} \leq x \leq 1$$

$$A = 87.6$$

- **legge μ (Nord America)**

$$y = \frac{\log(1 + \mu x)}{\log(1 + \mu)}$$

$\mu = 100$ o 225 (a seconda della gerarchia PCM)



Caratteristica della legge A

Rappresentazioni binarie più usate

- **Virgola fissa**
 modulo e segno
 complemento a 2
- **Virgola mobile**

Caratteristiche delle rappresentazioni binarie

	Virgola fissa frazionaria	Virgola fissa intera	Virgola mobile
Traboccam. con moltiplic.	NO	SI	Improbabile
Traboccam. con somme	SI (spesso ininfluente)	SI	Improbabile
Errore nelle moltiplic.	SI	NO	SI
Errore nelle somme	NO	NO	SI
Dinamica	moderata	moderata	enorme
Realizzazione	semplice	semplice	complessa

Generalmente in virgola fissa si usa la rappresentazione frazionaria perché non ha traboccamento nelle moltiplicazioni