

PROGETTO DI FILTRI A RISPOSTA IMPULSIVA INFINITA (IIR)

FILTRI IIR (Infinite Impulse Response)

- **DOMINIO TEMPORALE**
(equazione alle differenze finite)

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$

Ordine del filtro: N

- **DOMINIO DELLA TRASFORMATATA ZETA**
(funzione di trasferimento)

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - Z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - P_k z^{-1})}$$

$$M \leq N$$

Se $M > N \rightarrow$ filtro IIR di ordine N + filtro FIR di ordine $M - N$

Z_k zeri del filtro

P_k poli del filtro

a_k e b_k reali: filtro reale

a_k e b_k complessi: filtro complesso

- **DOMINIO DELLA FREQUENZA**

$$H(F) = H(z)|_{z=e^{j2\pi F}} = |H(F)| e^{j\varphi(F)}$$

CARATTERISTICHE

- **Risposta impulsiva infinita**
- **Eccellenti risposte in ampiezza ma risposte di fase non lineari**
- **E' necessario verificare la stabilità del filtro**

Caso particolare: $N = 2$

Sezione del II ordine (reale)

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Due zeri complessi coniugati: Z_0 e Z_0^*

Due poli complessi coniugati: P_0 e P_0^*

Filtro passa - tutto (II ordine)

$$H_p(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^{-2} D(z^{-1})}{D(z)}$$

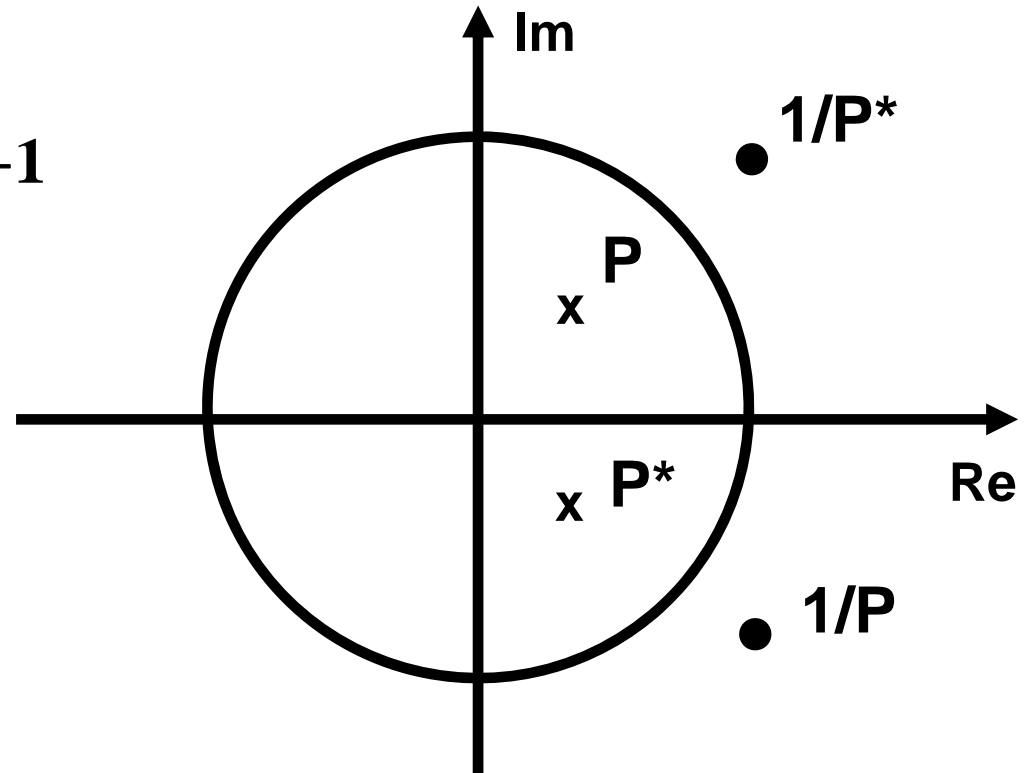
N(z) e D(z) sono polinomi speculari

$$|H_p(F)| = \frac{|D(e^{-j2\pi F})|}{|D(e^{j2\pi F})|} = (\text{coeff. reali}) = 1$$

$$\varphi(F) \leq 0$$

Poli : P e P^*

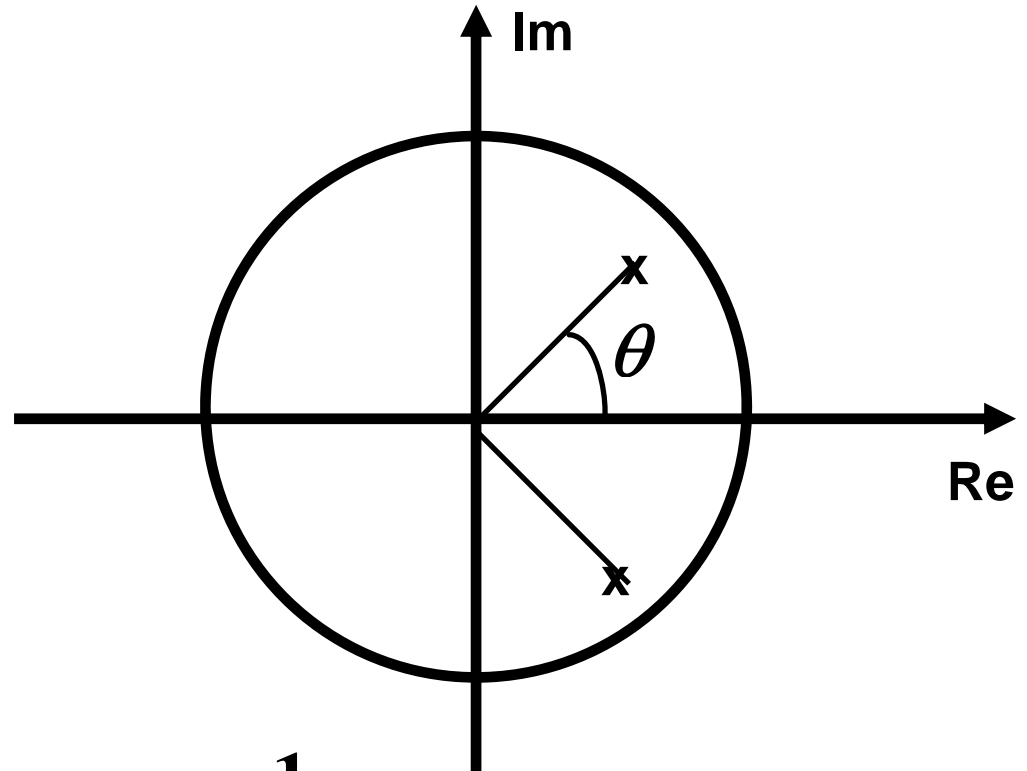
Zeri : P^{-1} e P^{*-1}



Proprietà che si può estendere a filtri passa tutto di ordine N qualunque (> 2).

Sezione del II° ordine con solo poli

$$\text{Poli} = r e^{\pm j\theta}$$



$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Si può verificare che

$|H(F)|$ ha un max relativo se : $\cos \theta < \frac{2r}{1+r^2}$

per F_0 : $\cos 2\pi F_0 = \frac{\cos \theta (1+r^2)}{2r}$, che vale

$$H_M = \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{(1+r) \sin \theta}$$

inversamente proporzionale alla distanza del polo dal cerchio unitario

Per $r \cong 1$, la banda a - 3dB

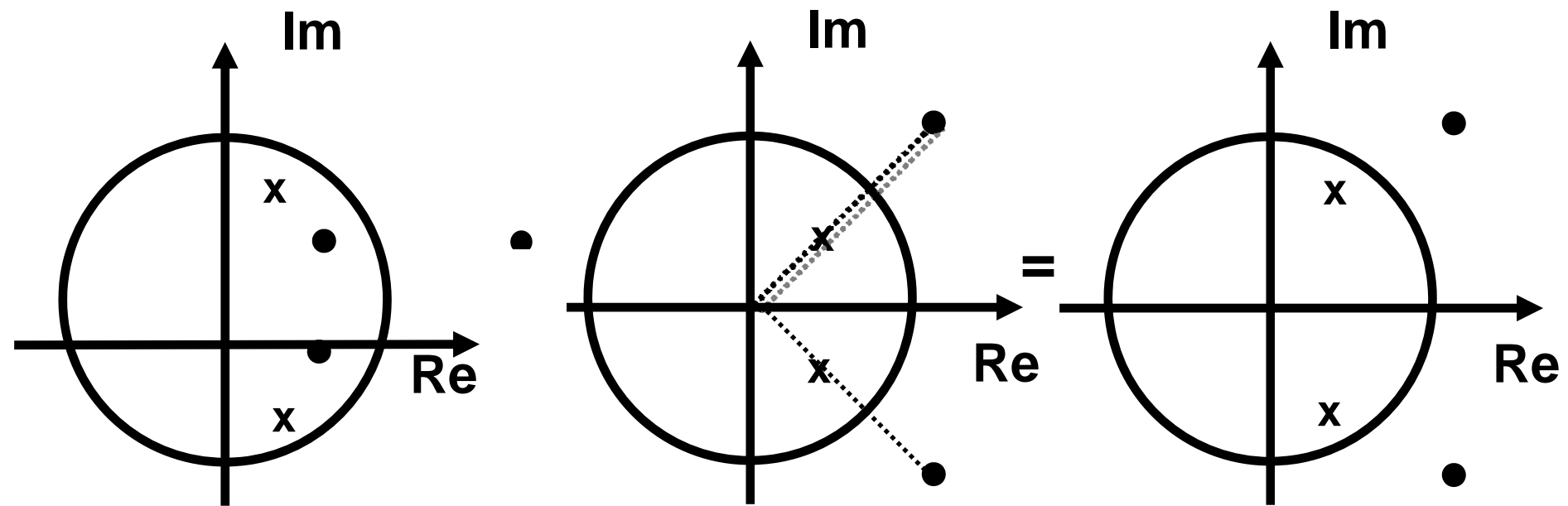
$$B_{-3dB} \cong \frac{1-r}{\pi}$$

- **Il filtro è tanto più selettivo quanto più il polo si avvicina al cerchio unitario**

Sistemi a fase minima

Consideriamo la seguente operazione:

$$H_1(z) \cdot H_2(z) = H_3(z)$$



passa tutto

poichè $\varphi_2(F) \leq 0 \Rightarrow \varphi_3(F) \leq \varphi_1(F)$

- I sistemi lineari $H_1(z)$ e $H_3(z)$ hanno la stessa risposta in ampiezza. Differiscono per la posizione degli zeri che sono invertiti in modulo rispetto alla circonferenza unitaria sul piano zeta.

Ritardo di fase:

$$\Delta_3(F) = -\frac{\varphi_3(F)}{2\pi F} \geq \Delta_1(F) = -\frac{\varphi_1(F)}{2\pi F}$$

**$H_1(z)$: sistema a ritardo di fase minimo
(brevemente a fase minima) fra tutti quelli
che hanno la stessa risposta in ampiezza**

**Nota: generalizzazione possibile a IIR di
qualsunque ordine e ai FIR**

PROGETTO FILTRI IIR

■ Due principali metodi di progetto

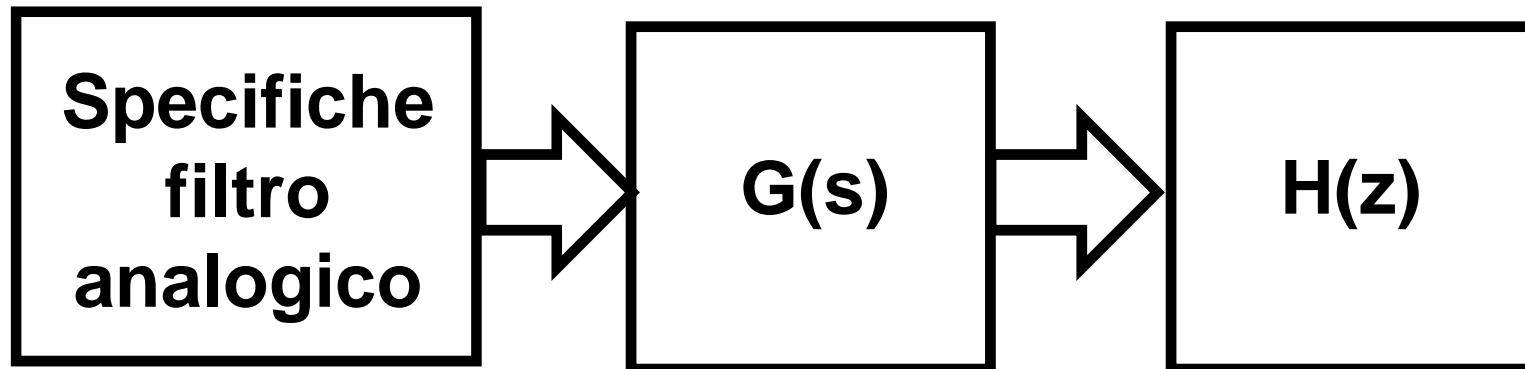
1 - Progetto indiretto da prototipi di filtri analogici

- sono disponibili espressioni note di filtri analogici, semplici e efficienti
- metodo relativamente semplice e algebrico

2 - Progetto diretto del filtro numerico

- filtri molto efficienti**
- flessibilità di progetto**
- con l'ausilio del calcolatore
(metodo non algebrico)**

IIR: PROGETTO DA PROTOTIPI ANALOGICI



- **si parte da una funzione di trasferimento $G(s)$ del filtro analogico**
- **successivamente $G(s)$ viene trasformata tramite una appropriata corrispondenza tra il piano s e il piano z per dare la corrispondente funzione di trasferimento $H(z)$ del filtro digitale**

Trasformazione $s \longleftrightarrow z$ tale che:

**asse immaginario \longleftrightarrow circonferenza unitaria
(risposta in frequenza)**

**funzione razionale \longleftrightarrow funzione razionale
(realizzazione circuitale)**

**semipiano sinistro \longleftrightarrow interno della
circonferenza unitaria
(stabilità)**

TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$s = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Leftrightarrow z = \frac{k + s}{k - s}$$

k costante opportuna (reale)

1) per $z = e^{j2\pi F}$

$$s = k \frac{1 - e^{-j2\pi F}}{1 + e^{-j2\pi F}} =$$

$$= k \frac{e^{-j\pi F} (e^{j\pi F} - e^{-j\pi F})}{e^{-j\pi F} (e^{j\pi F} + e^{-j\pi F})} = j k \operatorname{tg} \pi F$$

2) Una funzione razionale è trasformata in una funzione razionale

3) $|z| < 1$ per $\text{Re}(s) < 0$

Verifica le tre condizioni

La trasformazione bilineare è quella più comunemente usata. Altre trasformazioni sono possibili e usate.

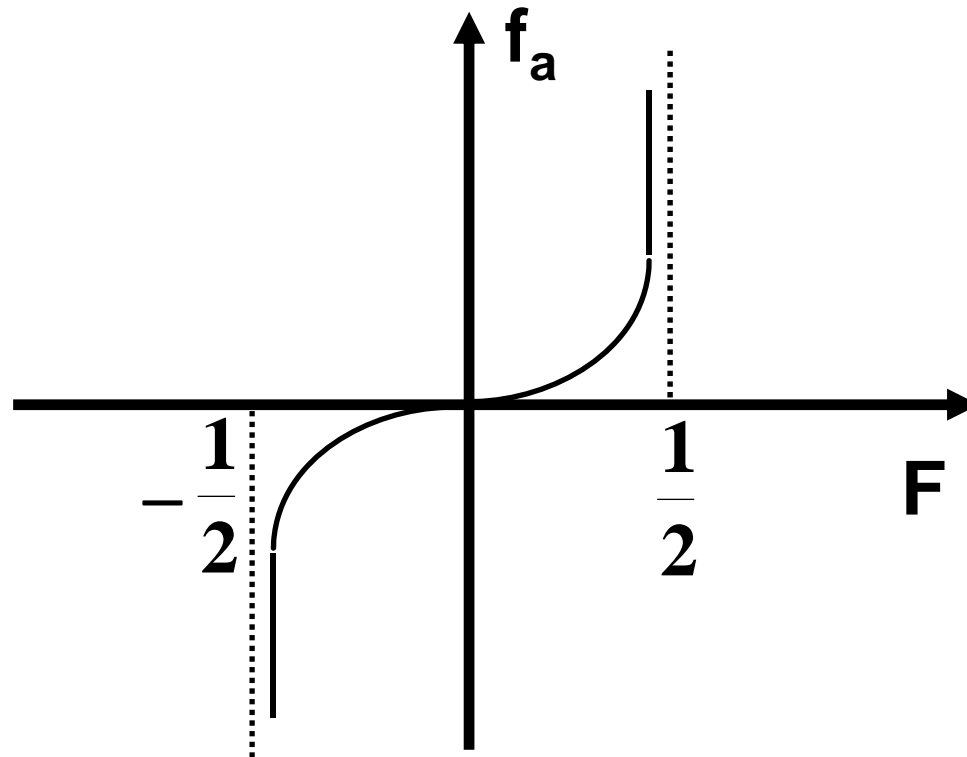
PROCEDURA DI PROGETTO

$G(s)$ **funzione di trasferimento di
un filtro analogico (disponibile)**

$$H(z) = G(s) \Big|_{s = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

Relazione fondamentale [che segue dal punto 1]

$$2\pi f_a = k \operatorname{tg} \pi F \Leftrightarrow f_a = \frac{k}{2\pi} \operatorname{tg} \pi F$$



Attenzione

Le frequenze del filtro analogico f_a non corrispondono alle frequenze $f = F f_c$ del filtro numerico \Rightarrow deformazione dell'asse delle frequenze (che deve essere tenuta in conto nel progetto)

■ Esempio di determinazione di k

Progettare un filtro (es. passa basso) con frequenza di taglio F_t

A disposizione un prototipo (passa basso) con frequenza di taglio f_{at} .

Molto spesso sono disponibili filtri normalizzati.

$$\omega_{at} = 2\pi f_{at} = 1$$

Si sceglie k:

$$k = 2\pi f_{at} \cot g \pi F_t = \omega_{at} \cot g \pi F_t$$

■ **Trasformazione bilineare: svantaggi**

- **distorsione dell'asse delle frequenze**
- **risposta in frequenza del filtro numerico diversa da quella del filtro analogico**
- **trasforma un filtro analogico in un filtro numerico “dello stesso tipo” (per esempio un passa basso analogico in un passa basso numerico)**

PROGETTO DI FILTRI IIR PASSA-ALTO, PASSA-BANDA E ELIMINA BANDA

**Normalmente sono disponibili prototipi analogici passa-basso (generalmente normalizzati).
Si possono seguire diverse procedure.**

Per esempio:

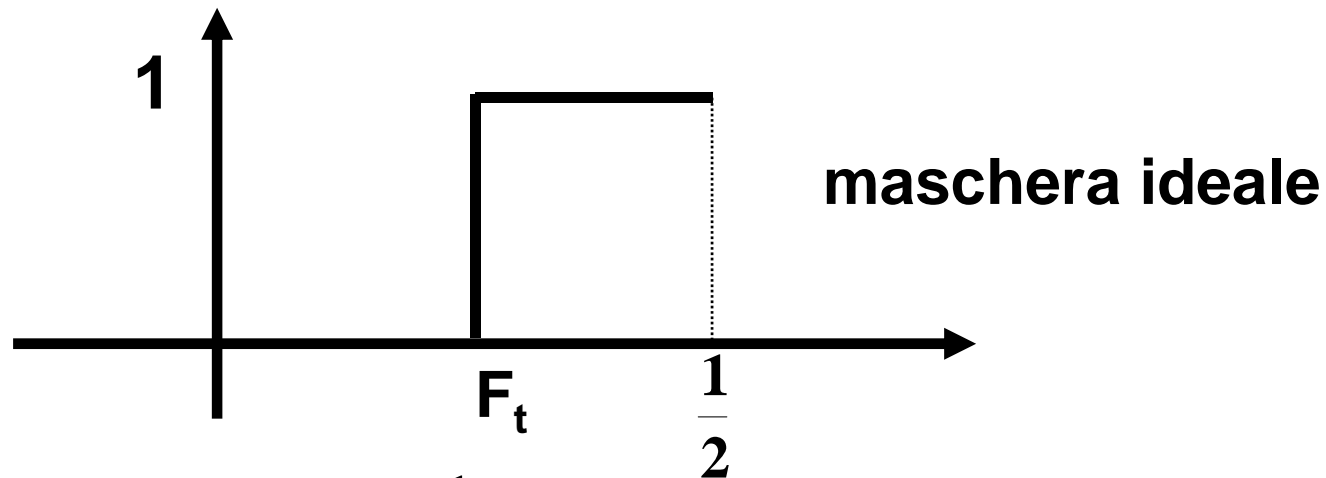
- A) Progettare un prototipo passa-basso numerico mediante la bilineare ed operare successivamente una trasformazione nel piano z da passa-basso al tipo di filtro desiderato. Queste trasformazioni sono riportate in diversi testi.**
- B) Operare una trasformazione diretta dal prototipo analogico passa-basso al filtro numerico del tipo desiderato.**

La prima procedura richiede due trasformazioni.

La seconda procedura richiede una sola trasformazione, che può essere dedotta combinando le due della prima procedura.

Di seguito sono riportate le trasformazioni da effettuare per la procedura B.

■ Progetto di filtri passa-alto



$$s = k \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

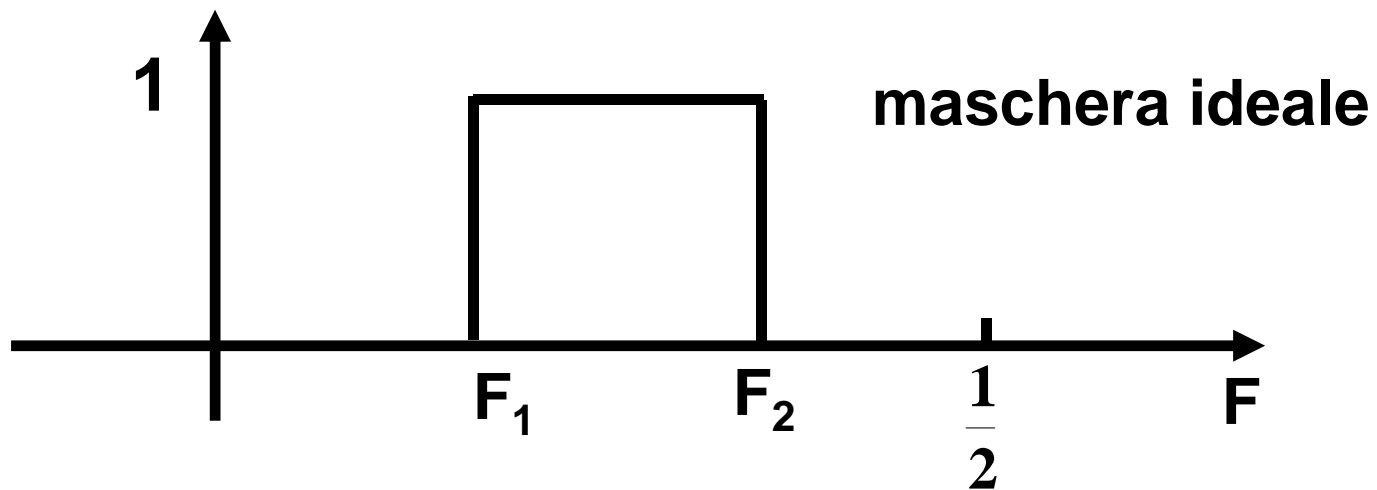
$$k = 2\pi f_{at} \operatorname{tg} \pi F_t$$

con

F_t frequenza di taglio del filtro numerico

f_{at} frequenza di taglio del prototipo passa-basso analogico [se normalizzata $f_{at} = 1/(2\pi)$]

■ Progetto di filtri passa-banda



$$s = k \frac{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

$$k = 2\pi f_{at} \cot g \pi (F_2 - F_1)$$

$$\alpha = \frac{\cos \pi (F_2 + F_1)}{\cos \pi (F_2 - F_1)}$$

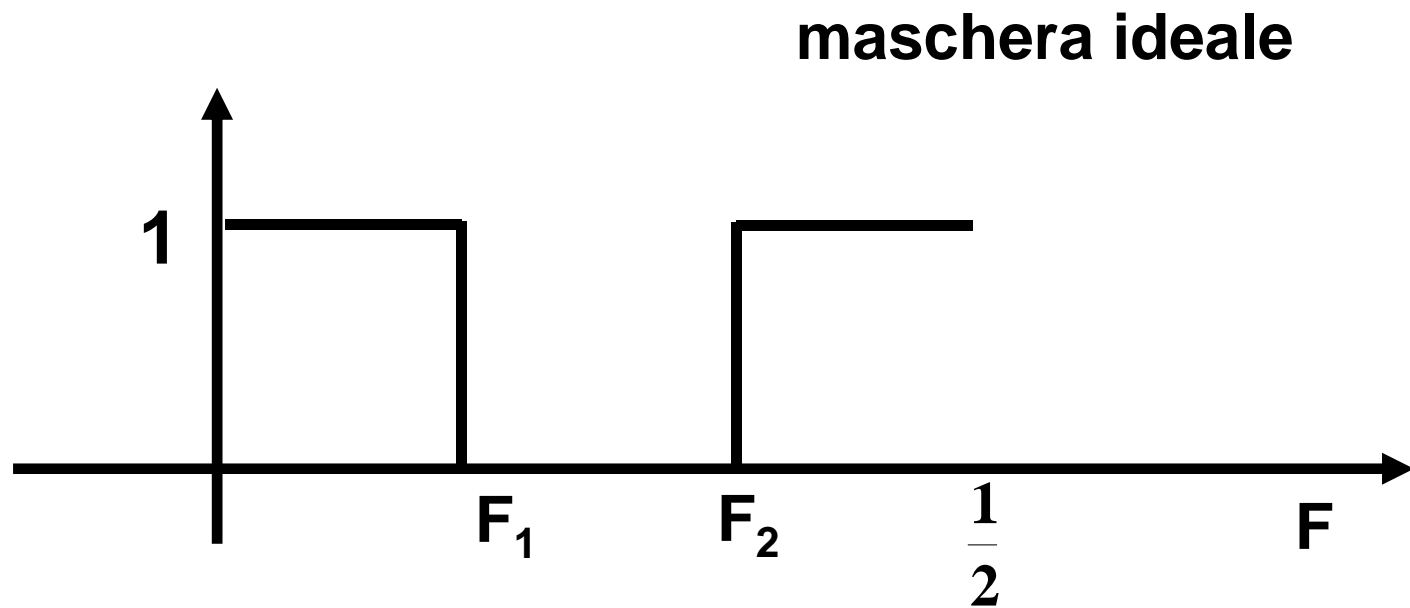
con

F_1 frequenza di taglio inferiore del filtro numerico

F_2 frequenza di taglio superiore del filtro numerico

f_{at} frequenza di taglio del prototipo passa-basso analogico

■ Progetto di filtri elimina-banda



$$s = k \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}$$

$$k = 2\pi f_{at} \operatorname{tg} \pi (F_2 - F_1)$$

$$\alpha = \frac{\cos \pi (F_2 + F_1)}{\cos \pi (F_2 - F_1)}$$

con

F_1 frequenza di taglio inferiore del filtro numerico

F_2 frequenza di taglio superiore del filtro numerico

f_{at} frequenza di taglio del prototipo passa-basso analogico

Nota

Ordine del filtro numerico rispetto a quello del prototipo analogico:

- Rimane invariato per i filtri passa-basso e passa-alto**
- Raddoppia per i filtri passa-banda e elimina banda.**

PROGETTO DIRETTO DI FILTRI IIR CON **METODI ITERATIVI**

Non si parte da prototipi analogici, ma si progetta direttamente il filtro numerico dalle specifiche in frequenza

Minimizzazione dell'errore quadratico medio

$H_0(F)$ risposta in frequenza desiderata

$$\text{e.q.m. } E = \sum_{i=1}^M \{ |H(F_i)| - |H_0(F_i)| \}^2$$

*da
minimizzare*

F_i sono M prescelte frequenze

Supponiamo che il filtro da progettare sia

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

Si impone (per N=M):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial a_k} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b_k} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2N+1 \text{ equazioni non lineari in} \\ 2N+1 \text{ incognite} \end{array}$$

- **Algoritmi e programmi per la soluzione del sistema (con metodi iterativi, per es. programma di Yule-Walker in Matlab)**

**Se il filtro da progettare è fattorizzato
in S sezioni del II ordine**

$$H(z) = C \prod_{k=1}^S \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} = C G(z)$$

Si impone:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}_k} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{b}_k} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{c}_k} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{d}_k} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\}$$

**4S + 1 equazioni non lineari in
4S + 1 incognite**

**Ci sono metodi efficienti
(algoritmi: es. Fletcher-Powell)
per la soluzione di questo
sistema.**

Osservazione

**Il metodo non pone vincoli sui poli e zeri.
Poli e zeri possono risultare esterni al cerchio
unitario → filtro instabile**

Metodo da completare con:

- **determinazione dei poli**
- **ogni polo esterno P_0 viene sostituito con il suo inverso e coniugato $1 / P_0^* \rightarrow$ risposta in frequenza inalterata.**

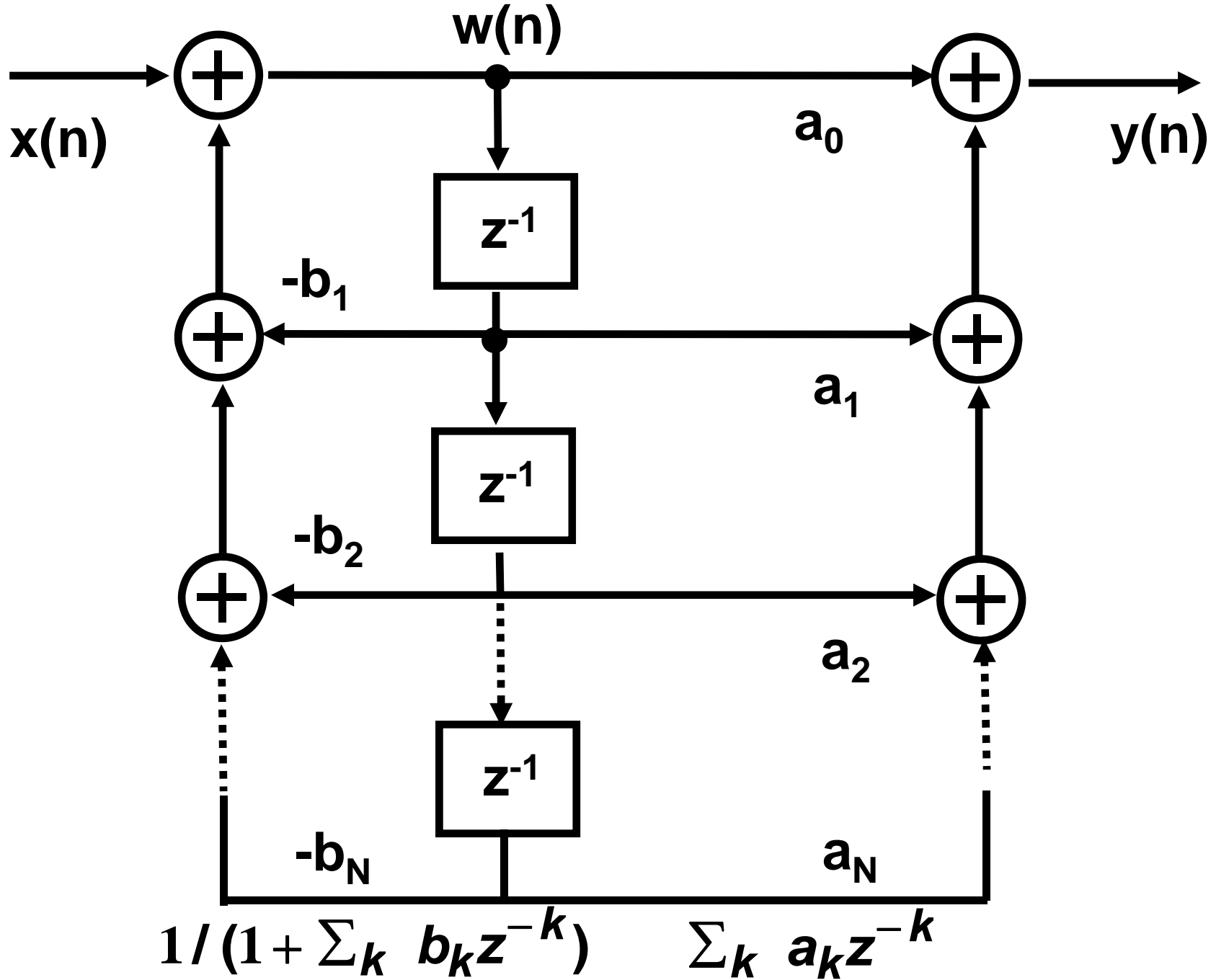
STRUTTURE REALIZZATIVE CANONICHE

Sono quelle che impiegano il minimo numero di operatori (memorie, moltiplicatori, addizionatori) elementari

■ Struttura canonica diretta

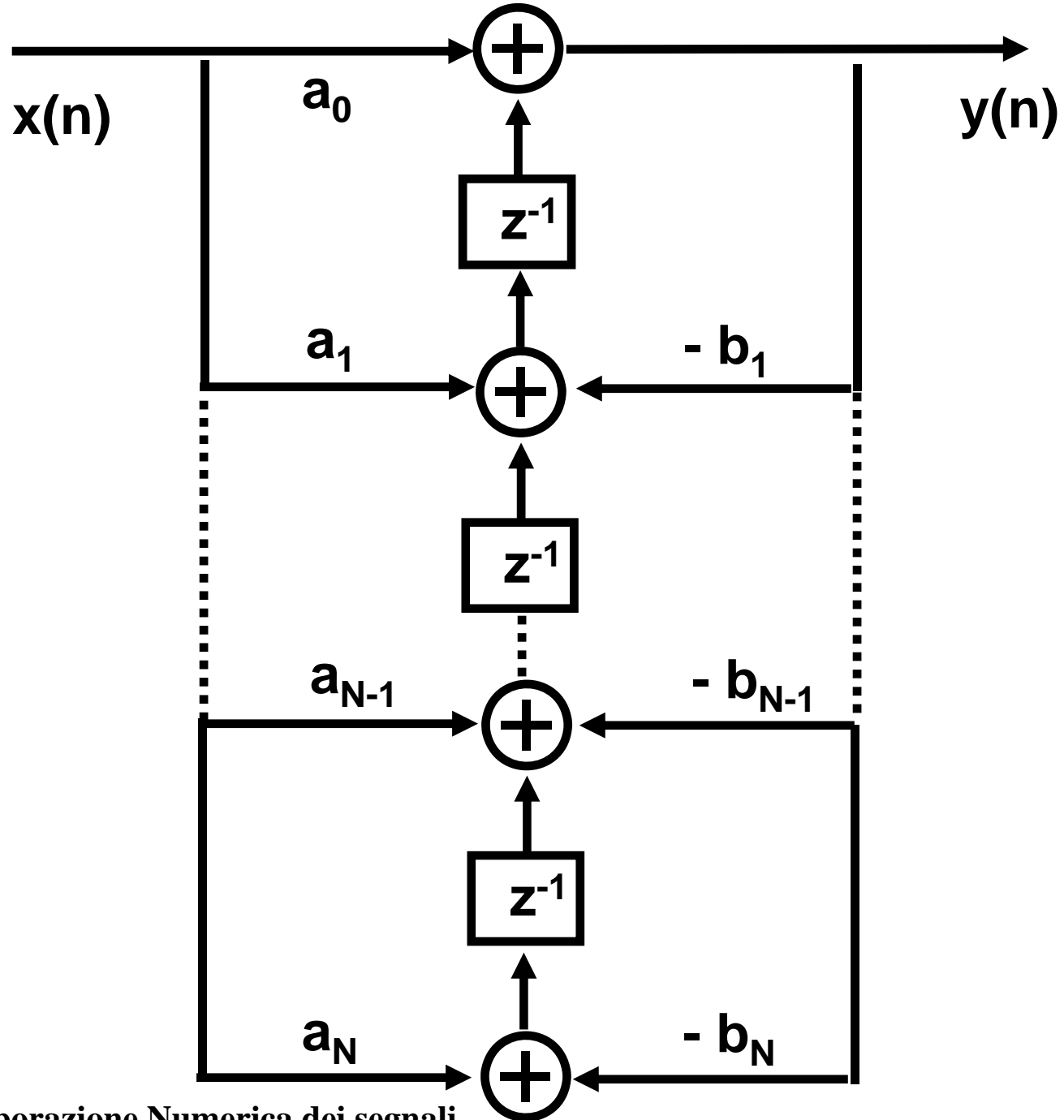
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$



■ **Struttura canonica trasposta**

Si ottiene con le operazioni di trasposizione per reti lineari



Caratteristica

Ciascun campione attuale dell'ingresso $x(n)$ e dell'uscita $y(n)$ è moltiplicato per tutti i corrispondenti coefficienti in successione: può semplificare la realizzazione hw/sw

■ Realizzazione con sezioni in cascata

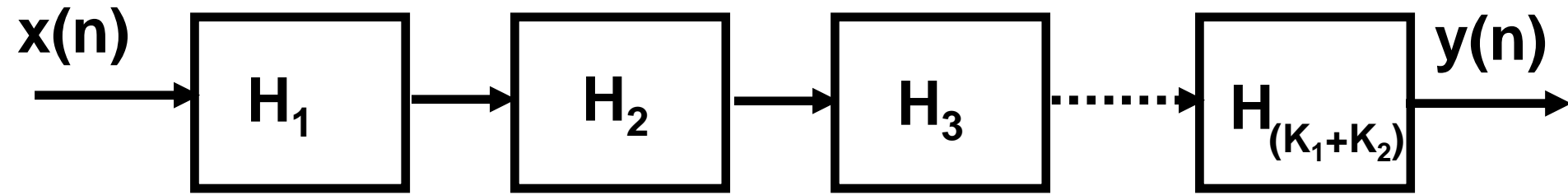
Si decompone

$$H(z) = a_0 \left[\prod_{i=1}^{K_1} H_i^{(1)}(z) \right] \left[\prod_{i=1}^{K_2} H_i^{(2)}(z) \right] ,$$

$$N = K_1 + 2K_2$$

$H_i^{(1)}(z)$, sistema del I ordine con poli e zeri reali

$H_i^{(2)}(z)$, sistemi del II ordine con poli e zeri complessi



K_1+K_2 filtri realizzati con strutture del I e del II ordine

■ Problemi connessi con questa struttura

1. Associazione di zeri e poli per ogni sezione
2. Ordinamento delle sezioni in cascata
3. Scalatura fra una sezione e l'altra per prevenire il generarsi di valori troppo grandi (overflow) o troppo piccoli (underflow).

Aritmetica “infinita”:

1, 2 e 3 non hanno conseguenze.

Aritmetica “finita”:

necessità di soluzioni adeguate per 1, 2 e 3

Associazione zeri e poli

Per ridurre gli effetti della realizzazione con aritmetica a precisione finita, si segue in pratica la seguente procedura:

- i) partire dal polo più vicino alla circonferenza unitaria ed associarvi lo zero ad esso più vicino**
- ii) continuare come in (i) fino ad esaurimento di tutti i poli restanti**

Ordinamento delle sezioni

La procedura seguita in pratica per ridurre gli effetti di una realizzazione in aritmetica a precisione finita e' la seguente:

- sezioni ordinate in ordine decrescente dei valori massimi delle loro risposte in ampiezza.**

■ Struttura parallela

Si esprime

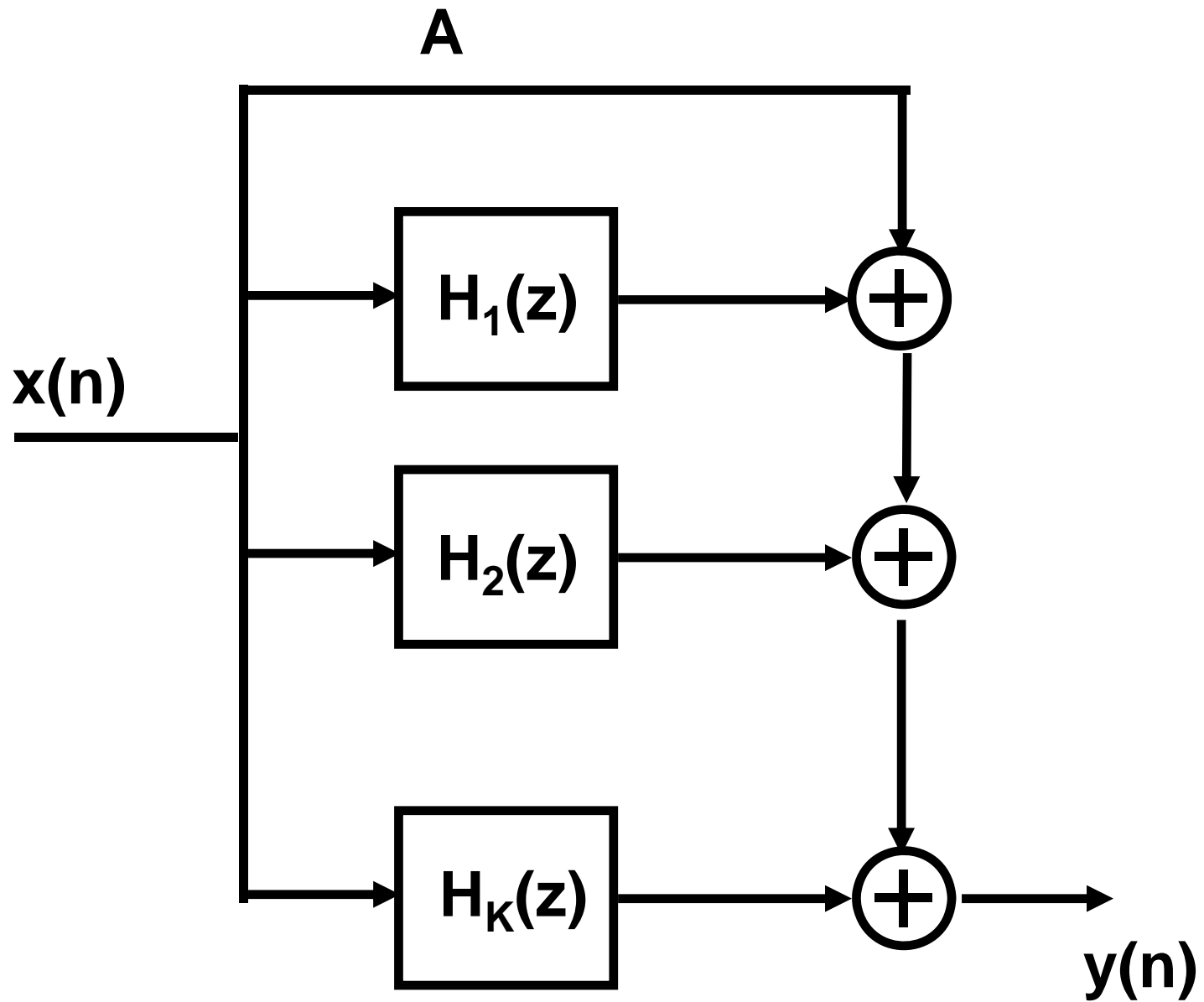
$$H(z) = A + \sum_{i=1}^k H_i(z)$$

con

K = interno opportuno

A = a_N / b_N

$H_i(z)$ sezione del I o II ordine
(a seconda del tipo di zeri e poli)



	FIR	IIR
Fase	puo' essere esattamente lineare	non lineare
Stabilita'	sempre	da controllare
Strutture realizzative	piu' facili e semplici	piu' complicate
Numero di operazioni	maggiore	minore
Precisione finita	effetti minori e piu' facili da analizzare	effetti maggiori e piu' difficili da analizzare
Procedure di progetto	mediante calcolatore	per filtri semplici procedura algebrica in genere mediante calcolatore