

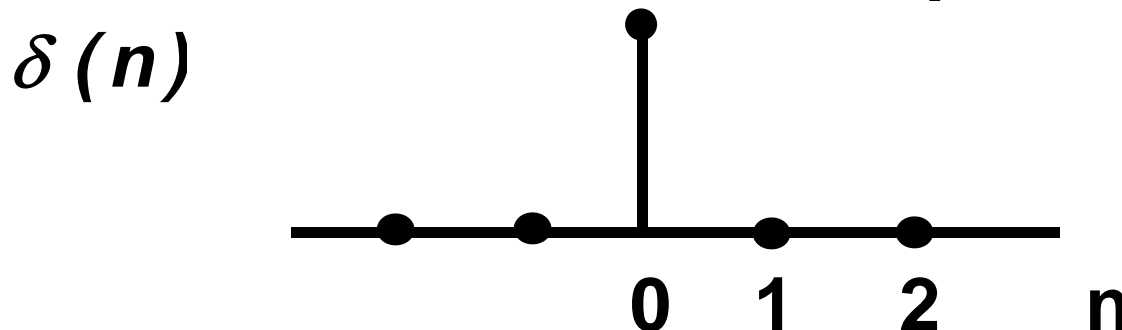
SISTEMI LINEARI DISCRETI

SISTEMI DISCRETI

Per semplicità : $x(n) = x(nT)$, T passo di campionamento costante

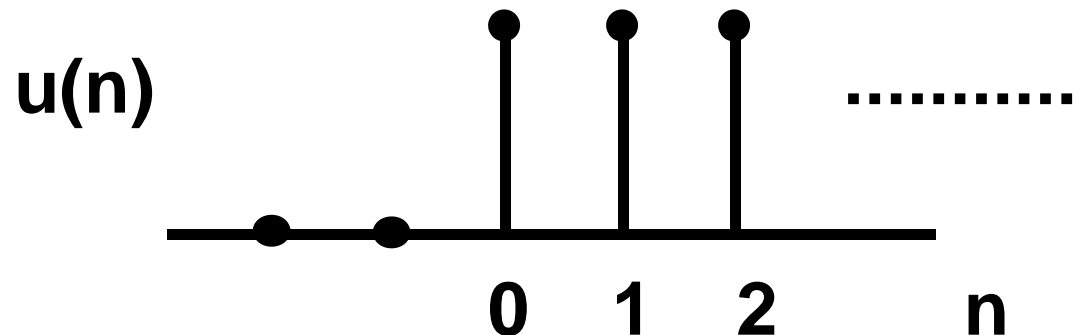
Esempi di sequenze

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{impulso unitario} \\ \text{(o sequenza campione)}$$



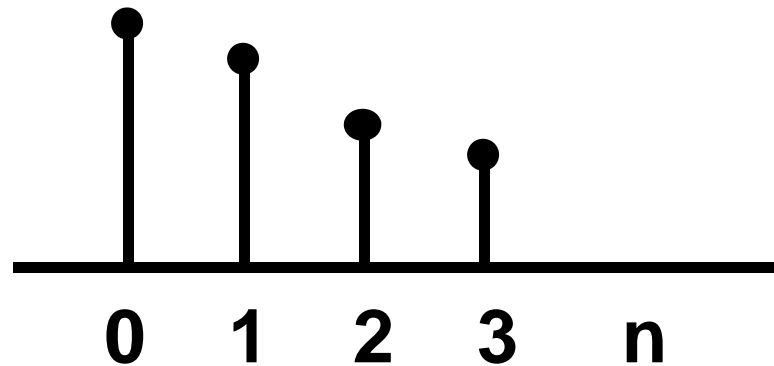
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{sequenza gradino}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n - k)$$



$$g(n) = a^n$$

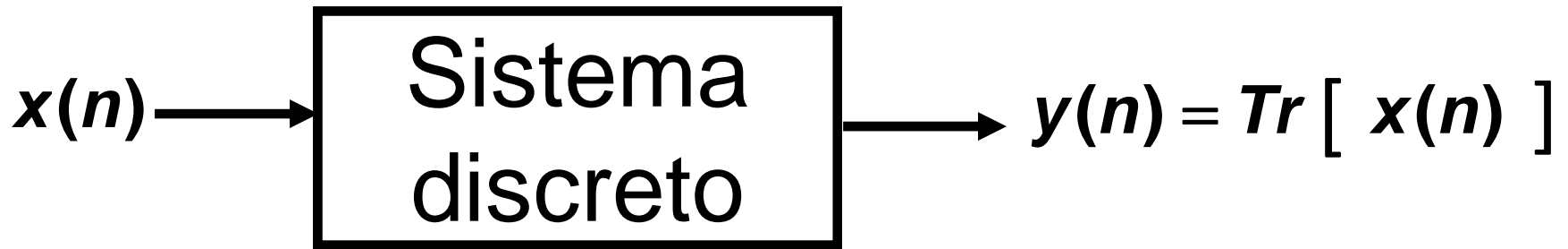
sequenza geometrica



In generale

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)$$

Esempi di sistemi discreti (s.d.)



$$y(n) = x^2(n), \quad \text{*s.d. non lineare senza memoria*}$$

$$y(n) = x^3(n) + 2x(n-1), \quad \text{*s.d. non lineare con memoria (finita)*}$$

$$y(n) = \log [x(n)] - y(n - 1) , \quad \textbf{s.d. non lineare con memoria (infinita)}$$

$$y(n) = \frac{1}{n} x(n) + \frac{n - 1}{n} y(n - 1) ,$$

s.d. lineare tempo-variante (con memoria infinita)
[calcolo ricorsivo del valore medio di una sequenza]

SISTEMI DISCRETI LINEARI

■ Definizione

Dati $y_1(n) = Tr[x_1(n)]$

e $y_2(n) = Tr[x_2(n)]$,

si ha

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \text{Tr}[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = \\
 &= a_1 \text{Tr}[x_1(n)] + a_2 \text{Tr}[x_2(n)] = \\
 &= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)
 \end{aligned}$$

a_1, a_2 costanti (reali o complesse)

Si estende ad una combinazione lineare di un numero qualunque (anche infinito) di termini.

■ Risposta impulsiva o indice

$$h_k(n) = Tr[\delta(n - k)]$$

**risposta del sistema all'impulso
applicato all'istante k.**

■ Proprietà fondamentale

$$\begin{aligned} y(n) &= Tr[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Tr[\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h_k(n) \end{aligned}$$

L'uscita è una combinazione lineare degli ingressi con coefficienti (generalmente) tempo varianti.

SISTEMI DISCRETI LINEARI TEMPO INVARIANTI (LTI)

■ Definizione

$$Tr[x(n - k)] = y(n - k)$$

quindi

$$h_k(n) = h_0(n - k) = h(n - k)$$

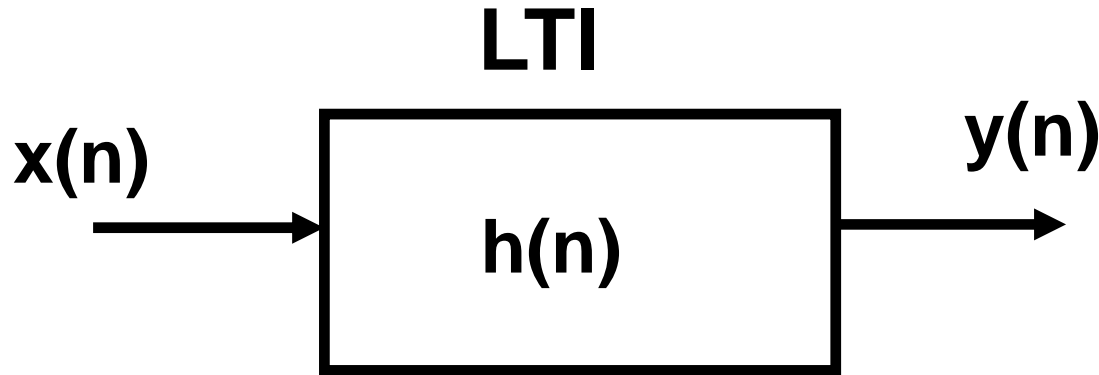
L'uscita è data da:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$$

$$= x(n) * h(n) \quad \text{(Convoluzione discreta)}$$

■ Sistema discreto lineare tempo-invariante (LTI)



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$$

**$h(n)$ risposta impulsiva del sistema
[risposta all'impulso unitario $\delta(n)$]**

■ Causalità

L'uscita al tempo m dipende solo dagli ingressi passati e presente, cioè per $n \leq m$.

Equivale a: $h(n) = 0$, $n < 0$

Quindi:
$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

Due classi di sistemi discreti causali LTI

- IIR (risposta impulsiva infinita)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

- FIR (risposta impulsiva finita)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

durata della risposta impulsiva: N campioni.

Da notare che un sistema FIR non causale

$$y(n) = \sum_{k=-M}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

può essere sempre trasformato in un sistema FIR causale (della stessa durata) ritardando l'uscita di M campioni e traslando di M campioni la risposta impulsiva:

$$y'(n) = y(n-M) = \sum_{k=0}^{N+M-1} h(k-M) x(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N+M-1} h'(k) x(n-k)$$

Stabilità (BIBO = Bounded Input Bounded Output)

Ogni ingresso limitato in ampiezza genera una uscita limitata in ampiezza.

Condizione necessaria e sufficiente:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

FIR: sempre stabili

IIR: stabilità da verificare

EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE FINITE

Modo alternativo di definire un sistema LTI

■ **Sistema di ordine N (causale)**

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \quad , \quad n \geq 0$$

a_k, b_k coefficienti (costanti) del sistema e condizioni iniziali

$$y_i = y(i) \quad , \quad i = -N, \dots, -1.$$

FIR : tutti i $b_k = 0$

IIR : alcuni $b_k \neq 0$

Esempio: sistema LTI, causale, stabile,

$$y(n) = by(n-1) + x(n) \quad , \quad y(-1) = 0$$

che ha una risposta impulsiva (tipo IIR)

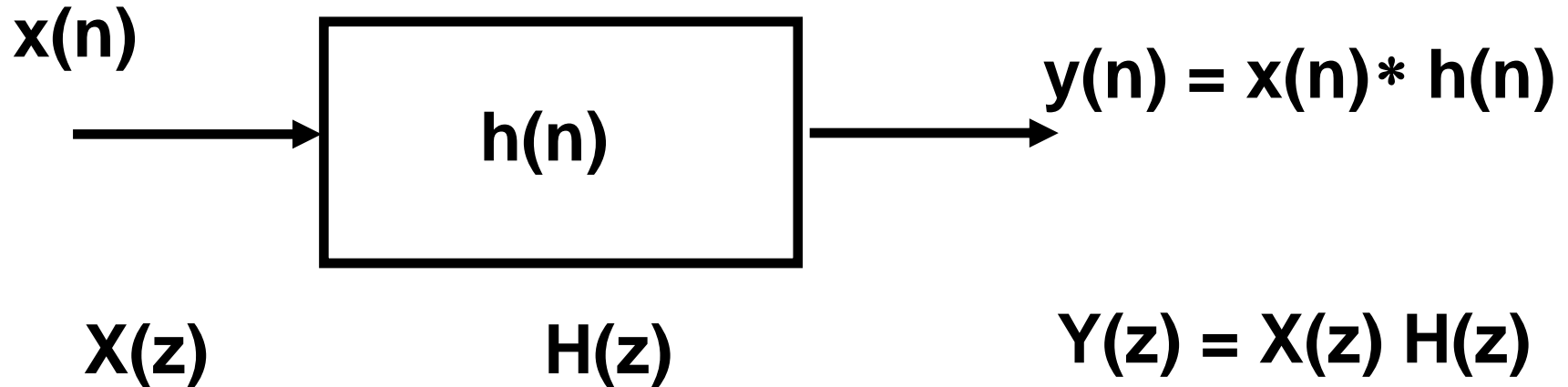
$$h(n) = b^n u(n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{1 - |b|}$$

$$|b| < 1 \quad \textbf{stabile}$$

$$|b| \geq 1 \quad \textbf{non stabile}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO



$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} ,$$

**funzione di trasferimento
del sistema**

Sistemi causali

- FIR

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}$$

- IIR

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = a_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - Z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - P_k z^{-1})}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

Ordine del sistema: N

Z_k : zeri del sistema

P_k : poli del sistema

Stabilità : poli interni al cerchio unitario nel piano z .

Sistemi reali : zeri e poli reali o complessi coniugati

- **$H(z)$ è la trasformata- z di $h(n)$
 $h(n)$ è la trasformata- z inversa di $H(z)$
[modo alternativo di ottenere $h(n)$
rispetto al calcolo diretto]**

RISPOSTA IN FREQUENZA

Sistema discreto LTI

**Ingresso: esponenziale complesso alla
frequenza normalizzata F**

$$x(n) = e^{j 2 \pi F n}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j2\pi F(n-k)}$$

$$= e^{j2\pi Fn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j2\pi Fk}$$

$$= e^{j2\pi Fn} H(z) \big|_{z=e^{j2\pi F}}$$

$$= e^{j2\pi Fn} H(F)$$

La funzione complessa $H(F)$ della frequenza F è la risposta in frequenza del sistema

- **$H(F)$ è la trasformata di Fourier della sequenza $h(n)$**

- Per sistemi reali [sequenze $h(n)$ reali]

$$H(-F) = H^*(F)$$

Risposta in ampiezza:

$$|H(F)| \quad \textit{simmetrica}$$

Risposta in fase:

$$\arg H(F) \quad \textit{antisimmetrica}$$

Ritardo di fase:

$$\Delta(F) = - \frac{\arg H(F)}{2\pi F} \quad (\textit{campioni})$$

Ritardo di gruppo:

$$\tau (F) = - \frac{1}{2\pi} \frac{d \arg H(F)}{dF} \quad (\text{campioni})$$

- **Sistemi non distorcenti in ampiezza
(o passa-tutto)**

$$| H(F) | = \textit{costante}$$

- **Sistemi non distorcenti in fase
(o a fase lineare)**

$$\Delta(F) = \tau (F) = \textit{costante}$$

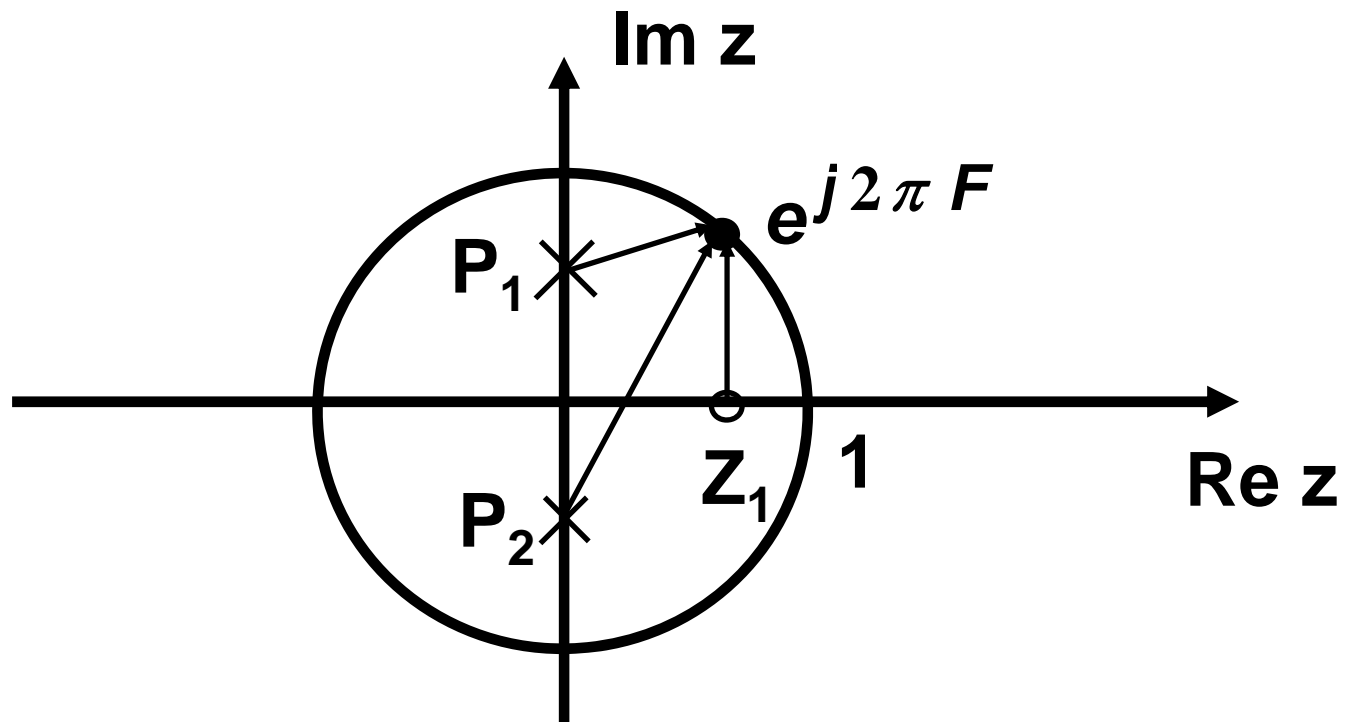
**Esempio: sistema reale
ingresso sinusoidale reale**

$$x(n) = \cos 2\pi Fn$$

$$y(n) = |H(F)| \cos[2\pi Fn + \arg H(F)]$$

■ Calcolo grafico della risposta in frequenza

Esempio: sistema reale con 2 poli e 1 zero



Abbiamo visto per sistemi IIR:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = a_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - Z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - P_k z^{-1})}$$

A meno di un fattore costante (a_0) la risposta del sistema alla frequenza F si può calcolare dai vettori che congiungono il punto $e^{j2\pi F}$ con i poli e gli zeri.

**Poli vicini al cerchio unitario:
*picchi della risposta in frequenza***

**Zeri vicini al cerchio unitario:
*bassi valori della risposta in frequenza***

■ Descrizione di un sistema discreto LTI

Nel dominio temporale

- $h(n)$, risposta impulsiva
- Equazione alle differenze finite

Nel dominio trasformato

- $H(z)$, funzione di trasferimento
- $H(F)$, risposta in frequenza

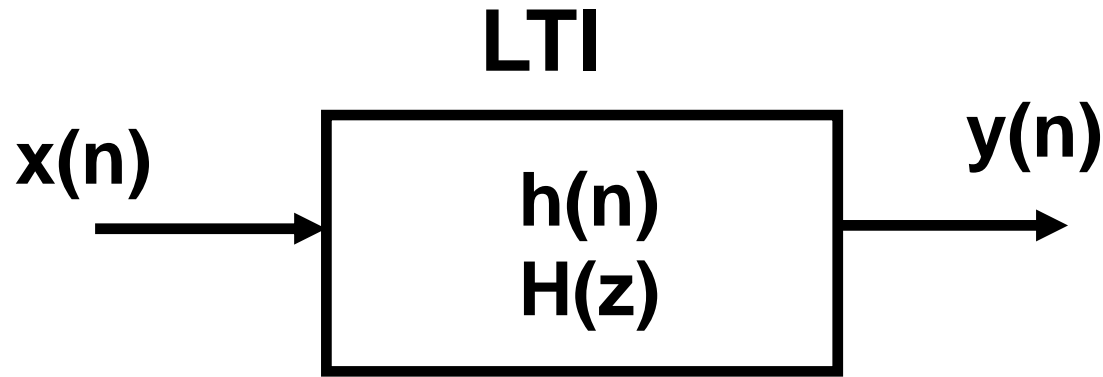
Nota

Per semplicità di notazione, per una stessa sequenza $h(n)$ usiamo lo stesso simbolo H per denotare la sua trasformata- z $H(z)$ e la sua trasformata di Fourier $H(F)$.

Le due trasformate sono distinte da:

- variabile indipendente complessa (z)
per la trasformata- z**
- variabile indipendente reale (F)
per la trasformata di Fourier**

SEGNALI ALEATORI



$x(n)$ segnale aleatorio stazionario in senso lato

$$m_x = E\{ x(n) \} \quad , \quad \text{valor medio}$$

$$r_x(m) = E\{ x(n) x(n + m) \} \quad , \quad \text{autocorrelazione}$$

- $$\begin{aligned}
 E\{ y(n) \} &= E\left\{ \sum_k h(k) x(n-k) \right\} = \\
 &= m_x \sum_k h(k) = m_x H(z)|_{z=1}
 \end{aligned}$$

- Per semplicità $m_x = 0$**

Definizioni: $R_x(z) \Leftrightarrow r_x(m)$

Spettro di potenza $G_x(F) = R_x(z)|_{z=e^{j2\pi F}}$

- **Potenza del segnale di ingresso**

$$S_x = \sigma_x^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_x(F) dF$$

- **Segnale di uscita**

Spettro di potenza

$$G_y(F) = |H(F)|^2 G_x(F)$$

Potenza

$$S_y = \sigma_y^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(F)|^2 G_x(F) dF$$

Esempio: $x(n)$ processo bianco

$$G_x(F) = N_0$$

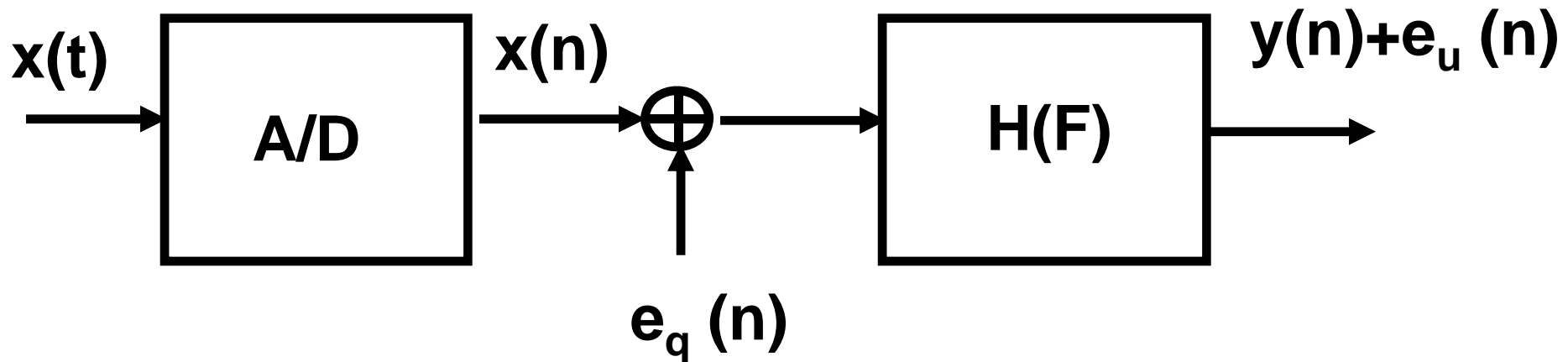
si ha

$$S_x = N_0$$

$$S_y = N_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(F)|^2 dF = N_0 \sum_k |h(k)|^2$$

L'ultima uguaglianza segue dal Teorema di Parseval

Esempio: Calcolo del rapporto segnale-rumore in uscita dal sistema



Note le caratteristiche del convertitore A/D e noto $x(t)$ si possono calcolare la potenza S_x del segnale $x(n)$ e la densità spettrale di potenza (bianca) di $e_q(n)$ (N_q)

In ingresso: $SNR_i = \frac{S_x}{N_q}$

In uscita: $S_y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_x(F) |H(F)|^2 dF$

$$N_u = N_q \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(F)|^2 dF$$

$$SNR_u = \frac{S_y}{N_u}$$

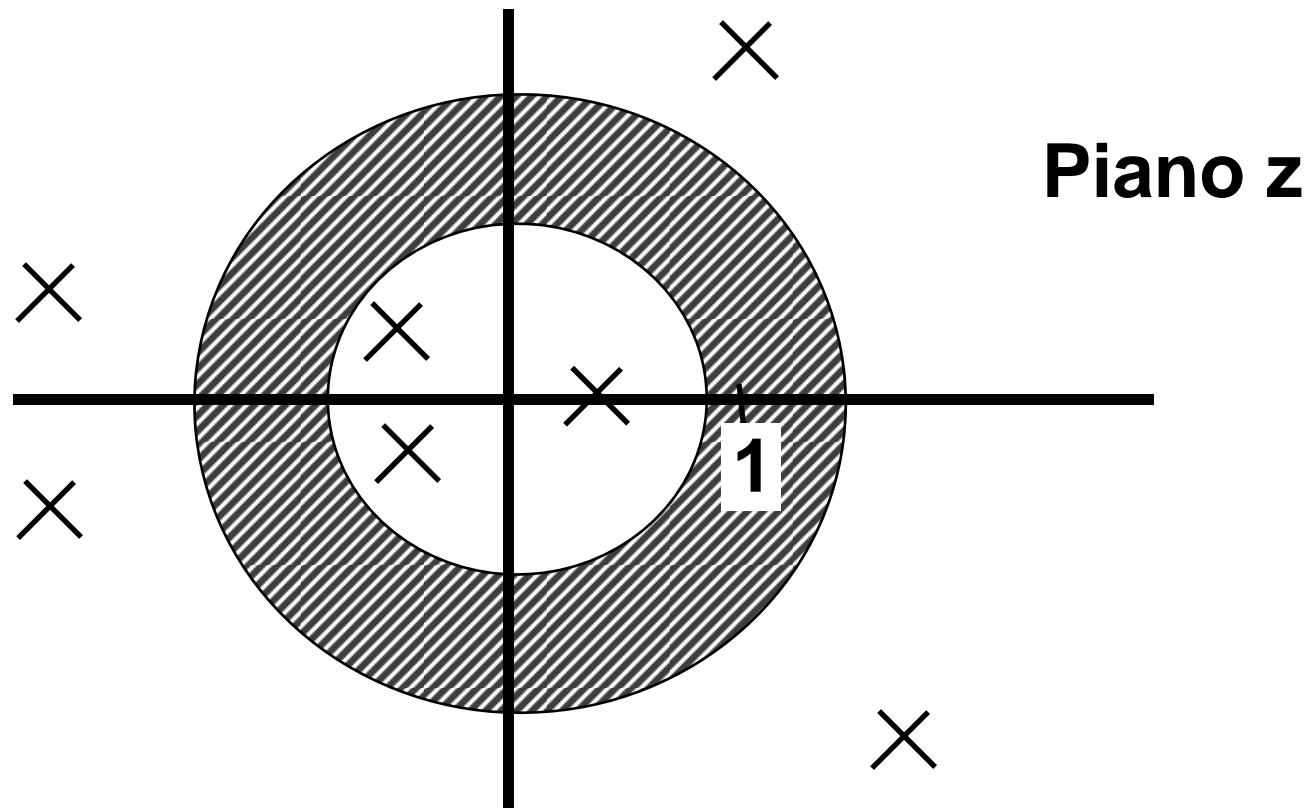
ALCUNE PROPRIETA'

■ Stabilità:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$$

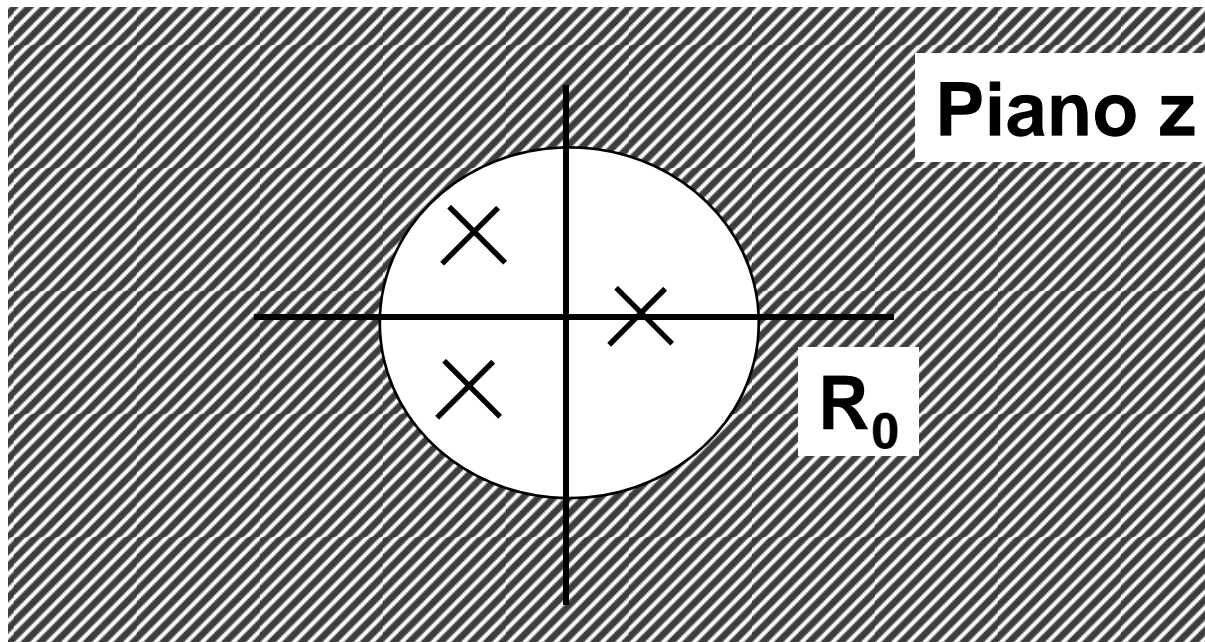
**Ha la RdC che include la
circonferenza unitaria**



**Poli: i) solo interni (sequenza infinita positiva)
ii) solo esterni (sequenza infinita negativa)
iii) interni e esterni (sequenza doppiamente infinita)**

■ Causalità: $h(n) = 0$ per $n < 0$

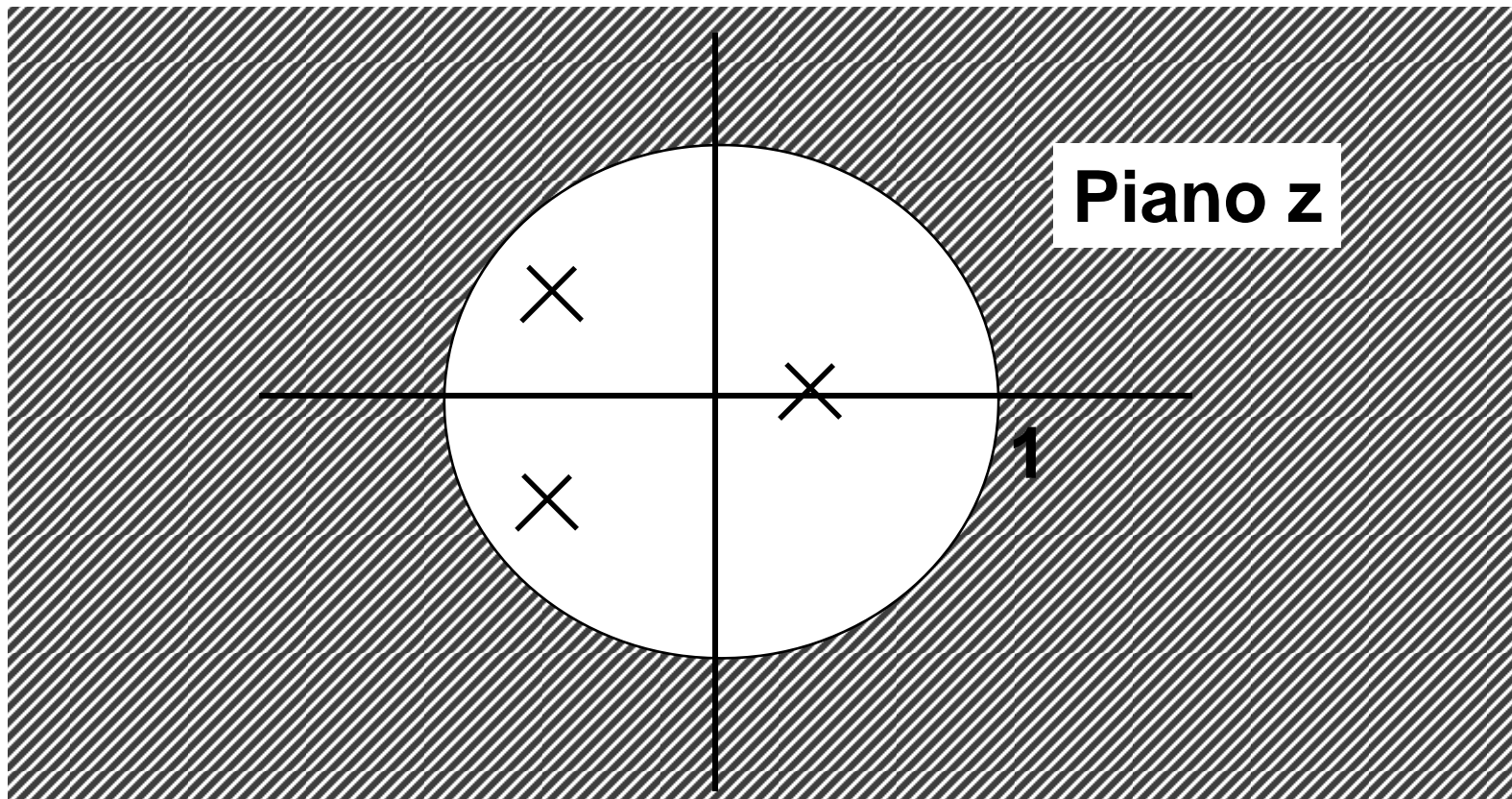
\Rightarrow RdC esterna a $|z| > R_0$



Poli interni al cerchio di raggio R_0

■ Sistemi causali e stabili

⇒ **Poli interni al cerchio unitario**



Zeri possono essere dovunque

■ Sistemi a fase minima

Def.: Sono quelli che hanno tutti i poli e tutti gli zeri di $H(z)$ interni al cerchio unitario

⇒ Hanno un ritardo di fase minimo fra tutti i sistemi che hanno la stessa risposta in ampiezza

NOTA: *il sistema inverso* $G(z) = \frac{1}{H(z)}$

*è ancora un sistema a fase minima
(oltre ad essere stabile e causale)*

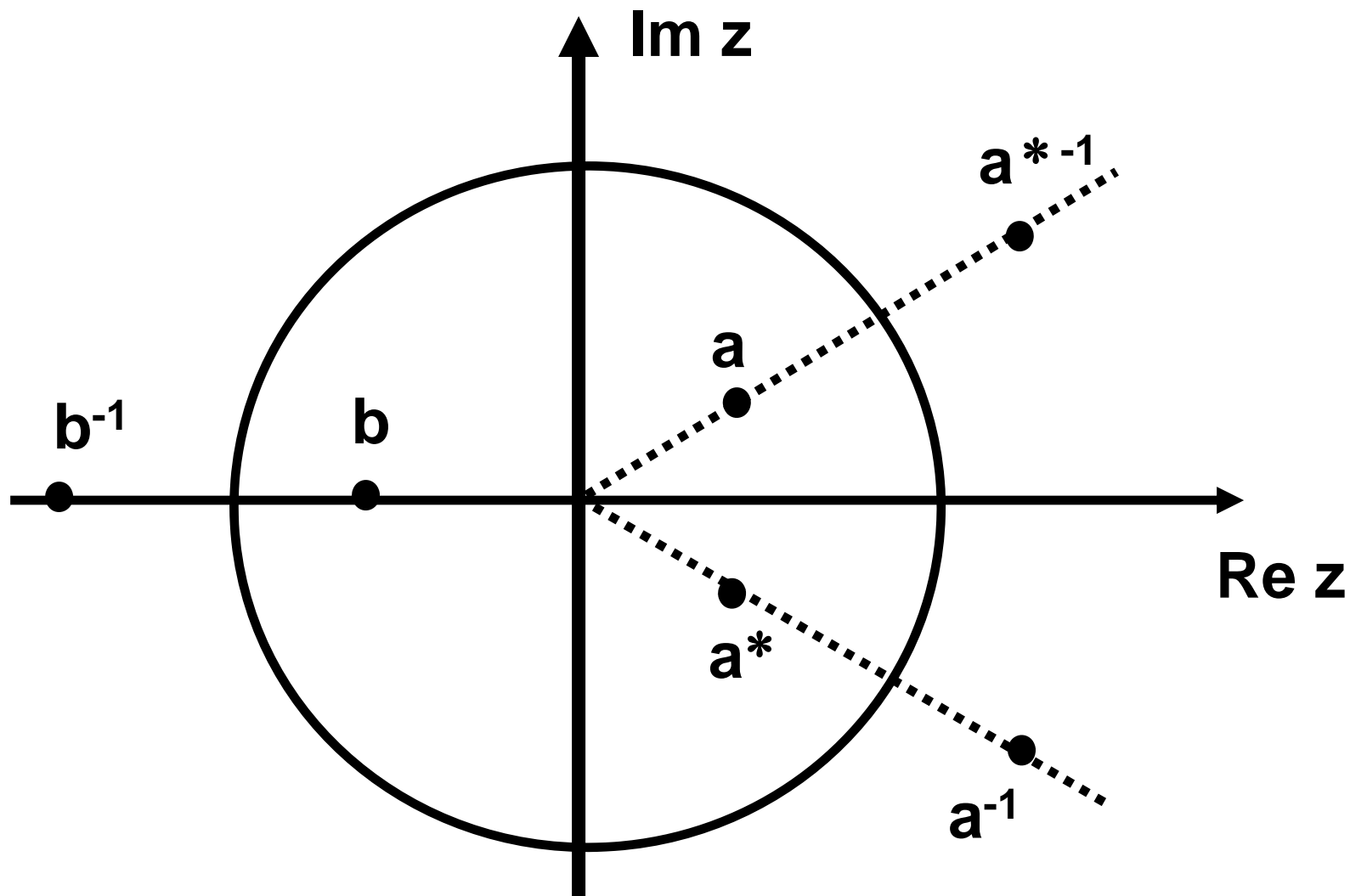
■ Sistemi a fase lineare

Hanno una risposta in fase lineare.

Non introducono distorsione di fase:

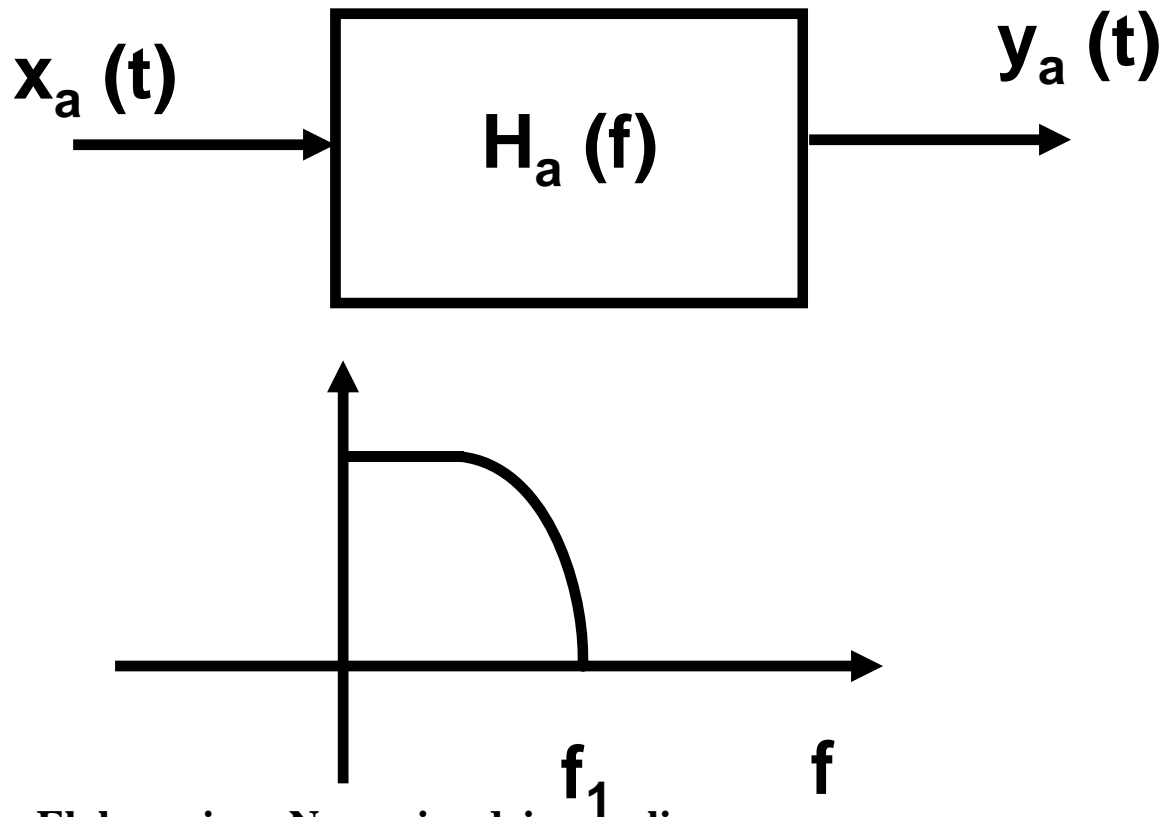
**Ritardo di fase = Ritardo di gruppo =
costante**

**⇒ Sistemi stabili e causali non hanno poli.
Nei sistemi reali gli zeri si presentano in
quadruple (se complessi) o in coppie (se
reali $\neq \pm 1$).**

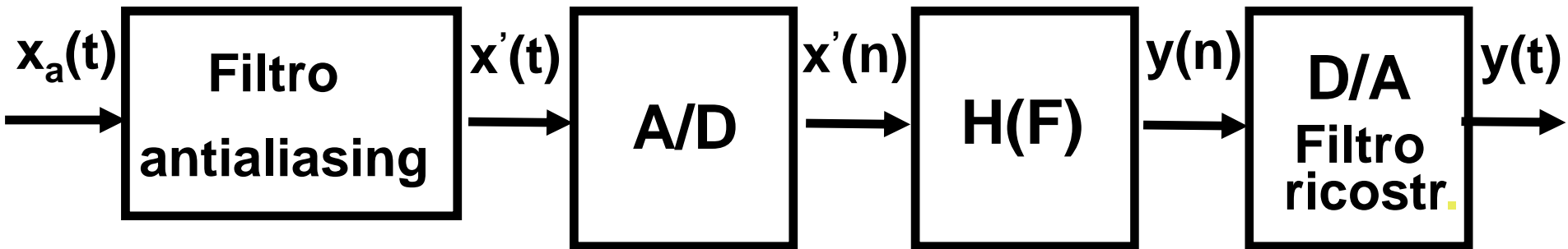


EQUIVALENZA FRA FILTRAGGIO ANALOGICO E NUMERICO

■ Analogico

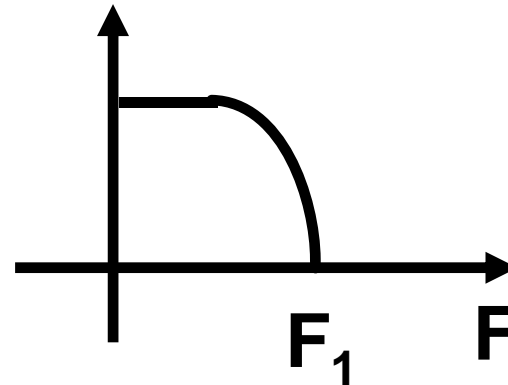


■ Numerico



$$f_1 < f_t < \frac{f_c}{2}$$

$$f_c \geq 2f_t$$



$$F_1 = \frac{f_1}{f_c}$$

$$y(t) \cong y_a(t)$$

L'approssimazione dipende da:

- **Caratteristiche spettro di $x_a(t)$**
- **Risposta filtro antialiasing**
- **Campionatore non ideale**
- **Quantizzazione**
- **Filtro numerico non ideale**
- **Risposta D/A e filtro ricostruzione**