TRASFORMATA ZETA

Trasformata zeta

- E' una generalizzazione della Trasformata di Fourier per segnali tempo-discreti (sequenze)

  [come la Trasformata di Laplace e' una generalizzazione della Trasformata di Fourier per segnali tempo-continui]

- E' uno strumento fondamentale per l'analisi e la rappresentazione di segnali discreti e di sistemi discreti tempo-invarianti

- Le funzioni di nostro interesse sono prevalentemente funzioni razionali semplici

Definizione:

sequenza: $x(n) = x(nT)\,, \quad -\infty < n < +\infty$

reale o complessa

Trasformata zeta: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}\,,$

X(z) è una funzione complessa di variabile complessa

z può essere sempre scritta come $z = re^{j\omega}$

Richiami: Trasformata di Fourier per sequenze

sequenza: $\boldsymbol{x(n) = x(nT)\,, \quad -\infty < n < +\infty}$

reale o complessa

Trasformata Fourier per sequenze:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\varpi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi Fn} = X(F) \quad con \quad F = {}^{f}\!\big/_{f_c}$$

Relazione della Trasformata Zeta con la Trasformata di Fourier 1/2

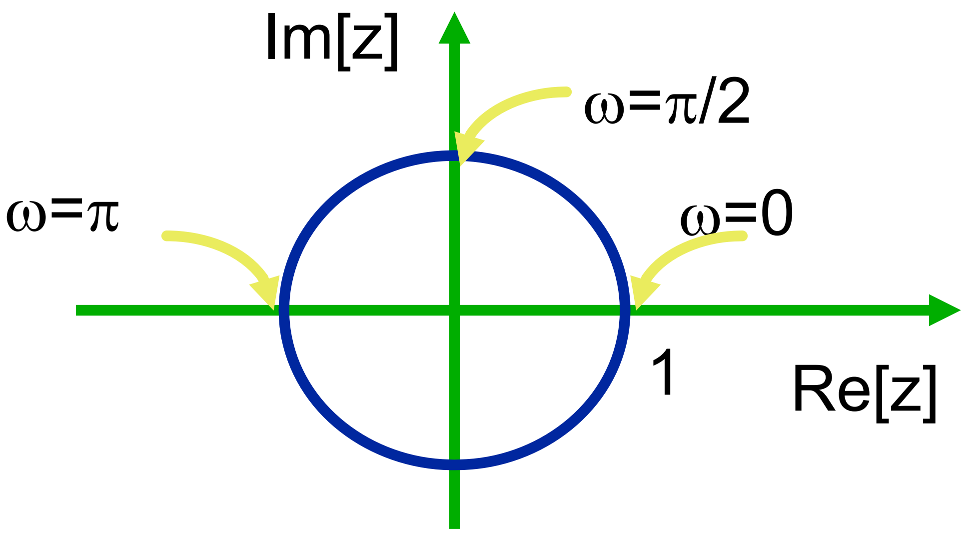
Se X(z) esiste, la Trasformata di Fourier X(ω) o X(F) della sequenza x(n) si ottiene per

$$z = e^{j\varpi} = e^{j2\pi F}$$

$$X(\varpi) = X(z)\Big|_{z=e^{j\varpi}}$$

ovvero

$$X(F) = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi F}}$$



piano z

Relazione della Trasformata Zeta con la Trasformata di Fourier 2/2

Se X(z) esiste:

la Trasformata di Fourier è uguale alla Trasformata Zeta per r=1

$$z = e^{j\varpi}$$

Per valori di r differenti:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, r^{-n} e^{-j\varpi n}$$

La trasformata Zeta è la Trasformata di Fourier della sequenza $x(n)r^{-n}$

Esistenza (convergenza della trasformata zeta)

- **X(z) esiste per un certo valore di** $z = r\, e^{j\varpi}$ **se**

$$|X(z)| < \infty$$

- **Condizione sufficiente**

$$\left|X(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}\right| \le \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, x(n)\, z^{-n}\, | < \infty}$$

Regione di convergenza
(RoC – Region of Convergence)

Regione di convergenza 1/2

- Insieme di punti sul piano complesso z, per i quali X(z) esiste (la serie converge)

$$\boxed{RoC=\{z: X(z) \text{ converge}\}}$$

Regione di convergenza 2/2

- **Sequenze finite**

  Convergono sempre, su tutto il piano al più con l'eccezione di $z=0$ e $z=\infty$
- **Sequenze monolatere destre**

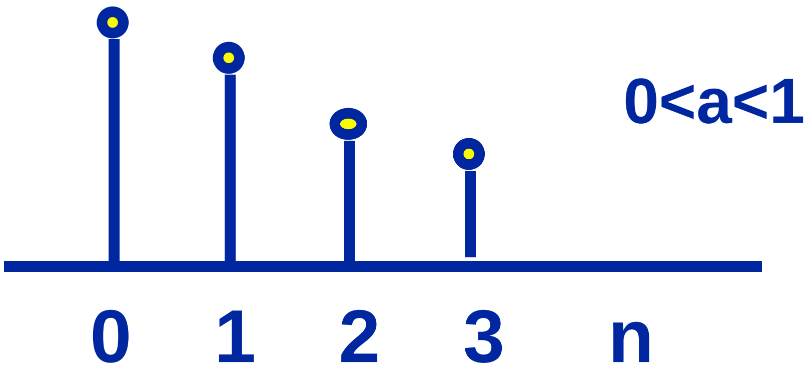
  Convergono in una regione esterna ad un cerchio
- **Sequenze monolatere sinistre**

  Convergono in una regione interna ad un cerchio
- **Sequenze bilatere**

  <u>Se</u> convergono, convergono in un "anello"

Esempio 1

$$x(n) = a^n\, u(n)$$



Monolatera destra

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

sequenza gradino

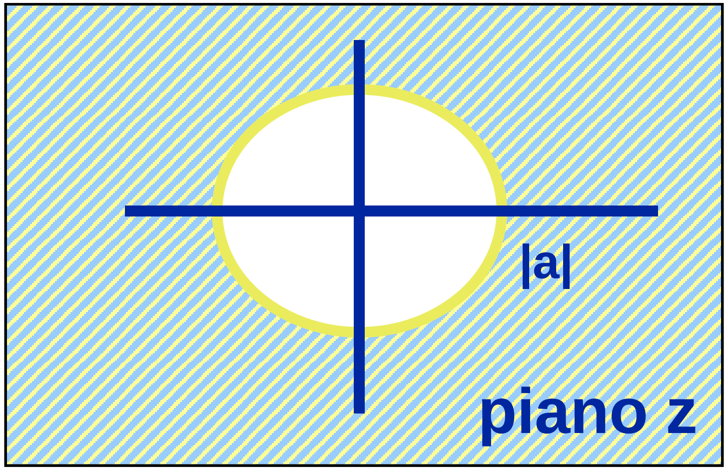
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\, z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}}$$

$$\boxed{se \quad |a\, z^{-1}| < 1}$$

<u>Quindi</u>

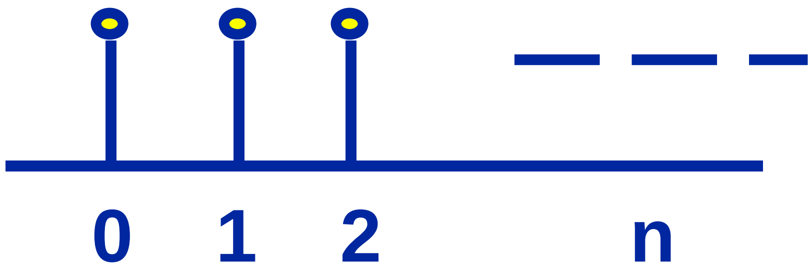
$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad per \qquad |z| > |a|$$

RoC={z: |z|>|a|}



Esempio 2

$$x(n) = u(n)$$



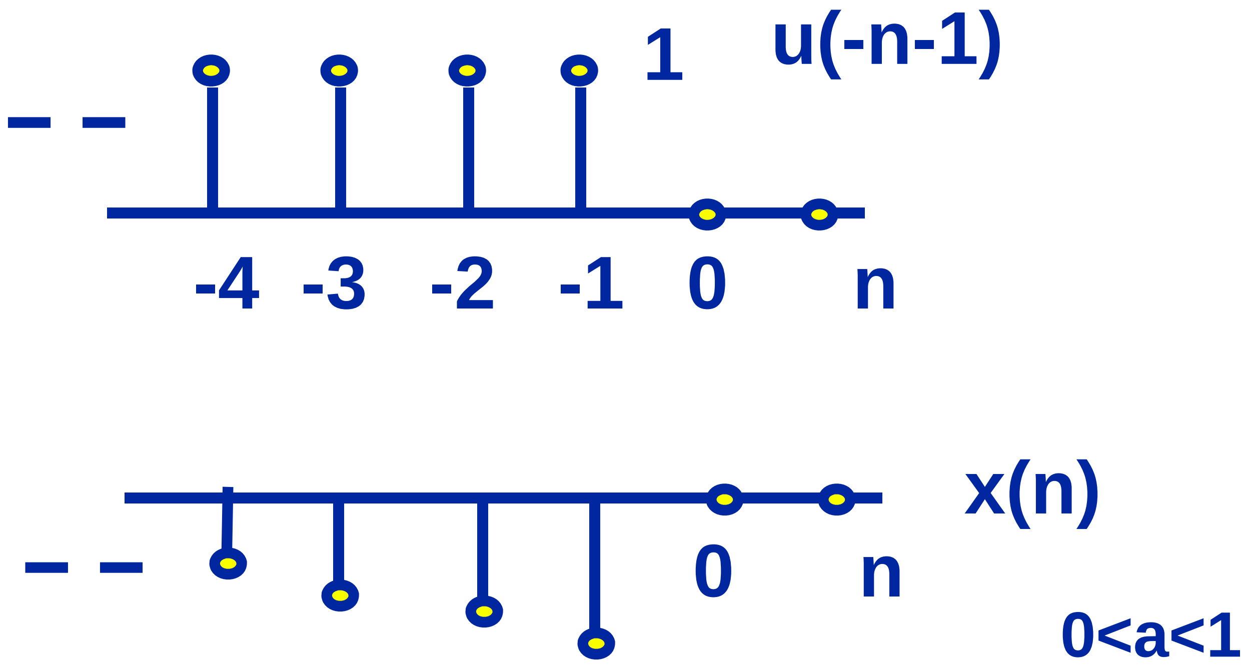
Caso particolare con a =1

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad per \qquad |z| > 1$$

RoC={z: |z|>1}

Esempio 3

$$x(n) = -a^n\, u(-n-1)$$



Monolatera sinistra

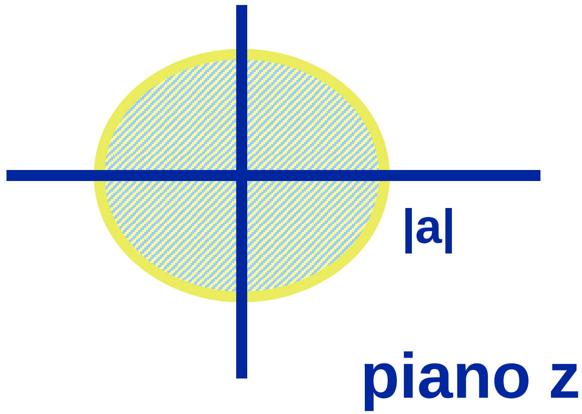
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} =$$

$$[\ n=-m\ ] = \sum_{m=1}^{\infty} -a^{-m} z^m = -\sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1} z)^m + 1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z}, \qquad |a^{-1} z| < 1$$

Quindi

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad per \quad |z| < |a|}$$



RoC={z: |z|<|a|}

Esempio 1 e 3: stessa espressione di $X(z)$, ma diversa regione di convergenza

⇨ **La trasformata zeta non è definita solo dalla $X(z)$ ma anche dalla sua Regione di Convergenza**

- La regione di convergenza può includere o meno la circonferenza unitaria (di raggio 1) nel piano complesso zeta

Esempio 1: $|a| < 1$ include la circonferenza unitaria
$|a| \geq 1$ non include la circonferenza unitaria

Esempio 3: $|a| > 1$ include la circonferenza unitaria
$|a| \leq 1$ non include la circonferenza unitaria

- Nel corso interessano soprattutto le Trasformate zeta che includono la circonferenza unitaria nella loro regione di convergenza

Proprietà della Trasformata Z

Linearità

$$\left.\begin{array}{l} x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z) \\ x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \\ Y(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) \end{array}\right.$$

a_1 , a_2 costanti reali o complesse

$$RdC\ \{\ Y(z)\ \} = RdC\ \{\ X_1(z)\ \} \cap RdC\{\ X_2(z)\ \}$$

Esempio 4

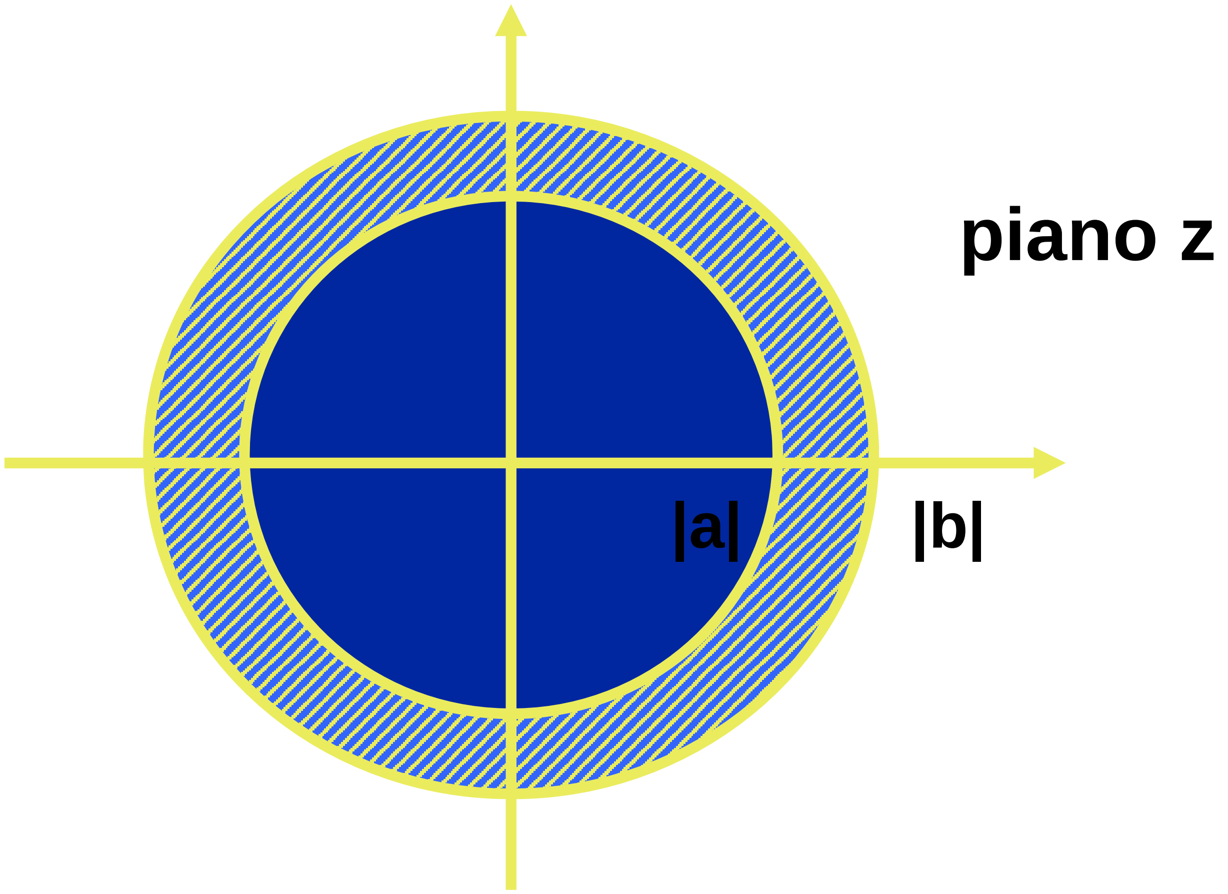
$$x(n) = a^n\, u(n) - b^n u(-n-1)\,,$$

a,b reali o complessi

$$X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} = \frac{[\,2z-(a+b)]\,z}{(z-a)(z-b)}$$

$$RdC\!: \{\; |z| > |a| \;\} \cap \{\; |z| < |b| \;\}$$

Esiste la trasformata z di x(n) solo se |b| > |a|



Esempio 5

$$x(n) = (3 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n)\, u(n) = 3\,[2^n u(n)] - 4\,[3^n u(n)]$$

$$X(z) = 3\,\frac{z}{z-2} - 4\,\frac{z}{z-3} = \frac{-z^2 - z}{z^2 - 5z + 6} =$$

$$= \frac{-z(z+1)}{(z-2)(z-3)}$$

RoC : |z| > 3

Moltiplicazione per un esponenziale

$$x(n) \Leftrightarrow X(z)$$

RoC: $R_1 < |z| < R_2$

$$\boxed{y(n) = a^n \, x(n),}$$

Con a reale o complessa

$$\Rightarrow \boxed{Y(z) = X(a^{-1}z), \quad \text{RoC: } |a|\,R_1 < |z| < |a|\,R_2}$$

fattore di scala nel dominio z

Esempio

$$u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad RdC: |z| > 1$$

$$a^n\, u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad RdC: |z| > |a|$$

Ribaltamento temporale

$$x(n) \quad \Leftrightarrow \quad X(z)$$

RoC: $R_1 < |z| < R_2$

$y(n) = x(- n)$

$$\boxed{Y(z) = X(z^{-1}),}$$

$$RoC: \frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1}$$

Esempio

$$y(n) = u(-n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z} \qquad RoC = \{z : 0 < |z| < 1\}$$

Traslazione temporale (k intero)

$$x(n) \Leftrightarrow X(z)$$

$$x(n-k) \Leftrightarrow X'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)\, z^{-n} =$$

$$\underset{[n-k=m]}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, z^{-m} z^{-k} =$$

$$= \boxed{z^{-k}\, X(z)}$$

$RoC_x = RoC_y$

Osservazione: z^{-k} (k positivo) svolge il ruolo di un operatore che introduce un ritardo di k campioni sulla sequenza di origine

Moltiplicazione per una rampa (derivazione nel dominio z)

$$x(n) \quad \Leftrightarrow \quad X(z)$$

$$\boxed{y(n) = nx(n) \Leftrightarrow Y(z) = -z\,\frac{dX(z)}{dz}},$$

RoC inalterata

Dimostrazione

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,(-n)\, z^{-n-1}$$

$$= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{n\, x(n)}_{y(n)}\, z^{-n} = -z^{-1}\, Y(z)$$

Esempio

$$y(n) = n\,a^n\,u(n)$$

Sappiamo che

$$a^n\,u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}\,, \qquad RdC: \quad |z| > |a|$$

$$Y(z) = -z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = -z \quad \frac{z-a-z}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

Convoluzione discreta

Date: $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z)$

$$x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z)$$

Si definisce la convoluzione discreta:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = X_1(z)\, X_2(z),$$

$$RdC\{Y(z)\} = RdC\{X_1(z)\} \cap RdC\{X_2(z)\}$$

Dimostrazione

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\, x_2(n-k)\right] z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k) z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\, z^{-k}\, X_2(z) =$$

$$= X_1(z)\, X_2(z)$$

Esempio

$$x_1(n) = a^n\, u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$x_2(n) = u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k\, u(k)\, u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad n \geq 0$$

Direttamente: $y(n) = \dfrac{1}{1-a}\left[u(n) - a\, a^n\, u(n)\right]$

$$Y(z) = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right] =$$

|z|>1

|z|>|a|

$$= \frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}$$

Allo stesso risultato si arriva, più facilmente, con la regola della convoluzione

Coniugazione

$$x(n) \Leftrightarrow X(z)$$

$$\boxed{y(n) = x^*(n) \Leftrightarrow Y(z) = X^*(z^*)}$$

RoC inalterata

Dimostrazione

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\, z^{-n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n}\right]^* = X^*(z^*)$$

Esempio 6

$$x(n) = u(n)\cos\alpha n$$

$$= \frac{e^{j\alpha n} + e^{-j\alpha n}}{2} u(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{j\alpha} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\alpha} z^{-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) z^{-1}}{1 - (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) z^{-1} + z^{-2}} =$$

$$= \frac{1 - \cos\alpha\, z^{-1}}{1 - 2\cos\alpha\, z^{-1} + z^{-2}}$$

Esempio 7

$$x(n) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & altrove \end{Bmatrix} = u(n) - u(n-N)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - z^{-N}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

ovvero direttamente

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

Serie geometrica troncata

TRASFORMATA ZETA INVERSA

- **La Trasformata z inversa (o antitrasformata z) permette di passare dalla funzione complessa X(z), definita in una certa regione di piano, alla sequenza x(n).**

- **Le funzioni di maggiore interesse ai fini del corso sono quelle <u>RAZIONALI</u>:**

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

con N(z) e D(z) polinomi in z

Definizione generale

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c} X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

dove l'integrale è calcolato su un cerchio C che contiene l'origine percorso in senso antiorario.

Tale espressione si risolve con il teorema dei residui

Antitrasformata di funzioni razionali

<u>**CASO 1**</u>: i poli ($a_0, a_1, \ldots, a_N$) della funzione X(z) sono <u>*semplici*</u>

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{N(z)}{zD(z)} = \frac{A_0}{(z-a_0)} + \frac{A_1}{(z-a_1)} + \cdots + \frac{A_N}{(z-a_N)}$$

(scomposizione in fratti semplici)

dove

$$A_k = \frac{X(z)}{z}\left(z-a_k\right)\Big|_{z=a_k}$$

Antitrasformata di funzioni razionali

Quindi si ha:

$$X(z) = A_0 \frac{z}{(z-a_0)} + A_1 \frac{z}{(z-a_1)} + \cdots + A_N \frac{z}{(z-a_N)}$$

Per la proprietà di linearità della trasformata zeta, posso antitrasformare separatamente i vari pezzi tutti della forma →

$$\boxed{\frac{z}{(z-a_k)}}$$

di cui si conosce l'antitrasformata

$$= \begin{cases} a_k^n u(n) & se\ |z| > |a_k| \\ -a_k^n u(-n-1) & se\ |z| < |a_k| \end{cases}$$

Esempio

$$X(z)=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} \Rightarrow \frac{X(z)}{z}=\frac{A}{(z-a)}+\frac{B}{(z-b)}$$

La funzione ha due poli semplici: a, b

$$A=\frac{X(z)}{z}(z-a)\Big|_{z=a}=\frac{z}{(z-b)}\Big|_{z=a}=\frac{a}{a-b}$$

$$B=\frac{X(z)}{z}(z-b)\Big|_{z=b}=\frac{z}{(z-a)}\Big|_{z=b}=\frac{b}{b-a}$$

$$X(z)=\boxed{\frac{a}{a-b}\frac{z}{(z-a)}}+\boxed{\frac{b}{b-a}\frac{z}{(z-b)}}$$

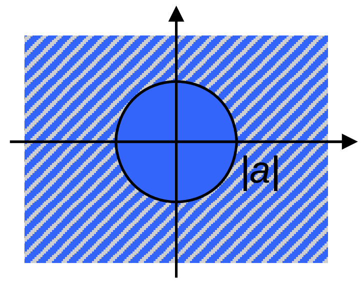
1 2

$$A\frac{z}{z-a}\Rightarrow\begin{cases}Aa^n u(n) & |z|>a\\ -Aa^n u(-n-1) & |z|<a\end{cases}$$

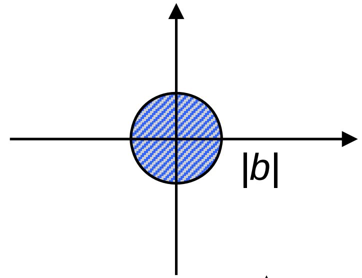
$$A\frac{z}{z-b}\Rightarrow\begin{cases}Ab^n u(n) & |z|>b\\ -Ab^n u(-n-1) & |z|<b\end{cases}$$

$$se\ |a| > |b|$$

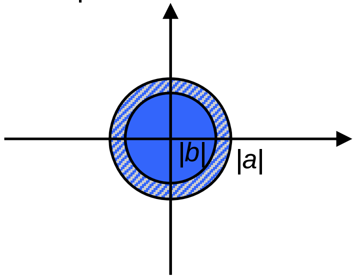
$$1- \quad RoC = \{z : |z| > |a|\} \quad x(n) = \left[Aa^n + Bb^n\right]u(n)$$



$$2- \quad RoC = \{z : |z| < |b|\} \quad x(n) = -\left[Aa^n + Bb^n\right]u(-n-1)$$



$$3- \quad RoC = \{z : |b| < |z| < |a|\} \quad x(n) = -Aa^n u(-n-1) + Bb^n u(n)$$



(analogamente se |a|<|b|)

Si hanno 2 poli → 3 possibili regioni di convergenza quindi 3 possibili antitrasformate

Esempio

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}$$

La funzione ha due poli semplici: $a_1=1$ e $a_2=0{,}5$

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5)} \quad \Rightarrow \quad \frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0{,}5)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-0{,}5)}$$

$$A = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Big|_{z=1} = \frac{z}{(z-1)(z-0{,}5)}(z-1)\Big|_{z=1} = 2$$

$$B = \frac{X(z)}{z}(z-0{,}5)\Big|_{z=1} = \frac{z}{(z-1)(z-0{,}5)}(z-0{,}5)\Big|_{z=1} = -1$$

$$X(z) = 2\frac{z}{(z-1)} - 1\frac{z}{(z-0{,}5)}$$

$$X(z) = 2\frac{z}{(z-1)} - 1\frac{z}{(z-0{,}5)}$$

Più sequenze x(n) possono avere questa X(z) come trasformata, senza informazioni sulla RoC non si conosce l'antitrasformata:

$$x(n) = 2u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad |z| > 1 \cap |z| > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{RoC = \{z : \ |z| > 1\}}$$

$$x(n) = -2u(-n-1) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad |z| < 1 \cap |z| > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{RoC = \left\{z : \ \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}}$$

$$x(n) = -2u(-n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \quad |z| < 1 \cap |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{RoC = \left\{z : \ |z| < \frac{1}{2}\right\}}$$

Antitrasformata di funzioni razionali

CASO 2: non tutti i poli della funzione X(z) sono semplici:

Es: la funzione ha un polo (a_i) con molteplicità p:

$$\frac{X(z)}{z} = termini\ con\ poli\ semplici + \sum_{j=1}^{p} \frac{A_{i,j}}{(z-a_i)^j}$$

con:

$$A_{i,j} = \frac{1}{(p-j)!} \frac{d^{p-j}}{dz} \left[\frac{X(z)}{z} (z-a_i)^p \right] \Bigg|_{z=a_i}$$

In generale quindi X(z) può essere scomposta nella combinazione lineare di termini del tipo:

$$\boxed{\frac{z}{(z-a_k)^s} \qquad s \in N}$$

Le antitrasformate di questi termini si ottengono applicando la proprietà della derivazione a sequenze note.

Esempio:

$$a^n u(n) \rightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

$$na^n u(n) \rightarrow \frac{az}{(z-a)^2} \qquad \Rightarrow \qquad na^{n-1}u(n) \rightarrow \frac{z}{(z-a)^2}$$

$$na^{n-1}u(n) = \frac{d}{da}\left(a^n u(n)\right)$$

Generalizzando:

- $$a^n u(n) \quad \rightarrow \quad \frac{z}{z-a} \quad |z|>|a|$$

- $$\frac{d}{da}\left[a^n u(n)\right] = na^{n-1}u(n) \quad \rightarrow \quad \sum_n \frac{d}{da}\left[a^n u(n)\right] z^{-n} = \frac{d}{da}\left[\frac{z}{(z-a)}\right] = \frac{z}{(z-a)^2}$$

- $$\frac{d}{da}\left[na^{n-1}u(n)\right] = n(n-1)a^{n-2}u(n) \rightarrow \quad \frac{d}{da}\left[\frac{z}{(z-a)^2}\right] = 2\frac{z}{(z-a)^3}$$

- $$\frac{d}{da}\left[n(n-1)a^{n-2}u(n)\right] = n(n-1)(n-2)a^{n-3}u(n) \rightarrow \quad \frac{d}{da}\left[2\frac{z}{(z-a)^3}\right] = 2\cdot 3\frac{z}{(z-a)^4}$$

$$\ldots\ldots$$

- $$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)a^{n-m}\; u(n) \rightarrow \quad m!\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$$

Quindi in generale si ha che:

$$\binom{n}{m} a^{n-m} u(n) \rightarrow \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \qquad |z| > |a|$$

$$-\binom{n}{m} a^{n-m} u(-n-1) \rightarrow \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \qquad |z| < |a|$$

Esempio

$$X(z)=\frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2} \qquad RoC=\{z:\ |z|>1\}$$

La funzione ha un polo semplice in z=-1 e uno doppio in z=1

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{A}{(z+1)}+\frac{B}{(z-1)}+\frac{C}{(z-1)^2}$$

$$A=\frac{X(z)}{z}(z+1)\Big|_{z=-1}=\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}(z+1)\Big|_{z=-1}=\frac{1}{4}$$

$$B=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz}\left[\frac{X(z)}{z}(z-1)^2\right]\Big|_{z=1}=\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}(z-1)^2\right]\Big|_{z=1}=\frac{3}{4}$$

$$C=\frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{2-2}}{dz}\left[\frac{X(z)}{z}(z-1)^2\right]\Big|_{z=1}=\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}(z-1)^2\Big|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{z}{(z+1)}+\frac{3}{4}\frac{z}{(z-1)}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2}\quad con\quad RoC=\{z:\ |z|>1\}$$

$$\frac{1}{4}(-1)^n u(n)\quad |z|>1$$

$$-\frac{1}{4}(-1)^n u(-n-1)\quad |z|<1$$

$$\frac{3}{4}u(n)\quad |z|>1$$

$$-\frac{3}{4}u(-n-1)\quad |z|<1$$

$$\frac{1}{2}\binom{n}{1}1^{n-1}u(n)=\frac{1}{2}nu(n)\quad |z|>1$$

$$-\frac{1}{2}\binom{n}{1}1^{n-1}u(-n-1)=-\frac{1}{2}nu(-n-1)\quad |z|<1$$

$$x(n)=\left[\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}n\right]u(n)$$

Esempio

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0{,}5z^{-2}}=\frac{z^2+z}{z^2-z+0{,}5} \qquad RoC=\left\{z: \quad |z|>\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

La funzione ha due poli complessi: $a_{1,2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2} \quad \Rightarrow |a_{1,2}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)}=\frac{A}{\left(z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)}+\frac{B}{\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)}$$

$$A=\frac{X(z)}{z}\left(z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j}=\frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}j$$

$$B=\frac{X(z)}{z}\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j}=\frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}j$$

$$X(z)=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}j\right)\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}j\right)\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)}\qquad RoC=\left\{z:\quad |z|>\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$x(n)=\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}j\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)^n+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}j\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)^n\right]u(n)$$

Ma può essere scritta diversamente:

$$a_1=re^{j\varpi}\qquad a_2=re^{-j\varpi}=(a_1)^*\qquad con\qquad r=|a_1|=|a_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \varpi=tg^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[a_1]}{\mathrm{Re}[a_1]}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$B=A^*=Me^{j\varphi}\qquad con\qquad M=|A|=\sqrt{\frac{5}{2}}\qquad \varphi=tg^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[A]}{\mathrm{Re}[A]}\right)=71{,}56°$$

$$x(n)=\left[Me^{j\varphi}\left(re^{j\varpi}\right)^n+Me^{-j\varphi}\left(re^{-j\varpi}\right)^n\right]u(n)=Mr^n\left[e^{j(\varpi n+\varphi)}+e^{-j(\varpi n+\varphi)}\right]u(n)=$$

$$=2Mr^n\cos(\varpi n+\varphi)u(n)=\boxed{2M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\left(\frac{\pi}{4}n+\varphi\right)}u(n)$$

Esempio

Determinare le possibili antitrasformate di:

$$X(z)=\frac{z+2}{2z^2-7z+3}$$

$$X(z)=\frac{z+2}{2z^2-7z+3}=\frac{z+2}{2(z-3)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \qquad \frac{X(z)}{z}=\frac{z+2}{2z(z-3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{(z-3)}+\frac{C}{(z-\frac{1}{2})}$$

$$A=\frac{X(z)}{z}z\Big|_{z=0}=\frac{2}{3} \qquad B=\frac{X(z)}{z}(z-3)\Big|_{z=3}=\frac{1}{3} \qquad C=\frac{X(z)}{z}(z-\frac{1}{2})\Big|_{z=\frac{1}{2}}=-1$$

$$X(z)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \frac{2}{3}\delta(n)+\frac{1}{3}3^n u(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) & |z|>3 \\ \frac{2}{3}\delta(n)-\frac{1}{3}3^n u(-n-1)-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) & \frac{1}{2}<|z|<3 \\ \frac{2}{3}\delta(n)-\frac{1}{3}3^n u(-n-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) & |z|<\frac{1}{2} \end{cases}$$

Esempio

Determinare la trasformata zeta di y(n) in funzione di X(z)

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n \quad pari \\ x(n) & n \quad dispari \end{cases}$$

$$Y(z) = \sum_n y(n) z^{-n} = \sum_{n\ dispari} x(n) z^{-n}$$

$$\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & n\ pari \\ 1 & n\ dispari \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$Y(z) = \sum_{n\ dispari} x(n) z^{-n} = \sum_n \frac{1-(-1)^n}{2} x(n) z^{-n}$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} \sum_n x(n) z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n x(n) z^{-n} = \frac{1}{2} \left[X(z) - X(-z) \right]$$