SISTEMI DISCRETI LINEARI

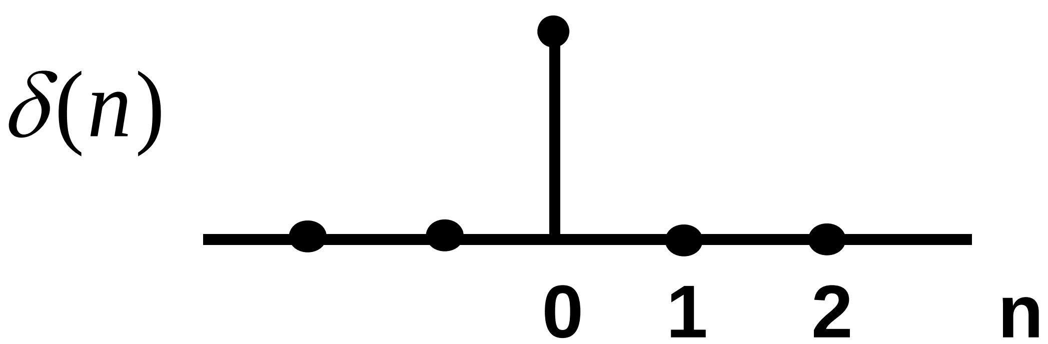
Alcuni esempi di segnali discreti

Per semplicità : $x(n) = x(nT)$, T **passo di campionamento costante**

Esempi di segnali discreti (sequenze)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

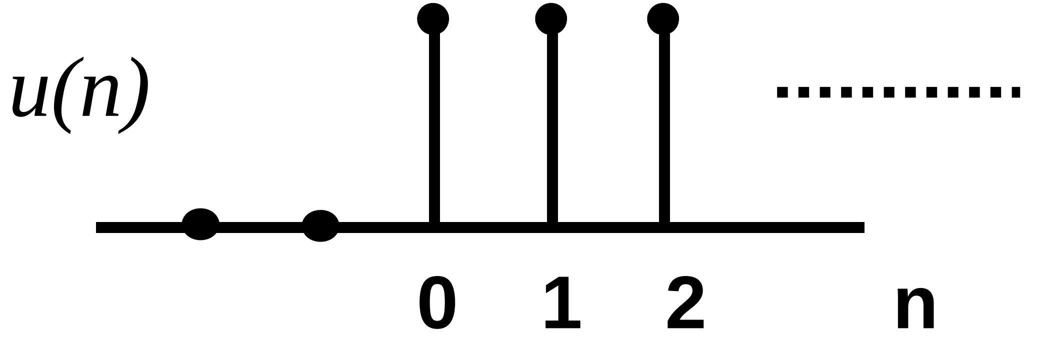
impulso unitario (o sequenza campione)



$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

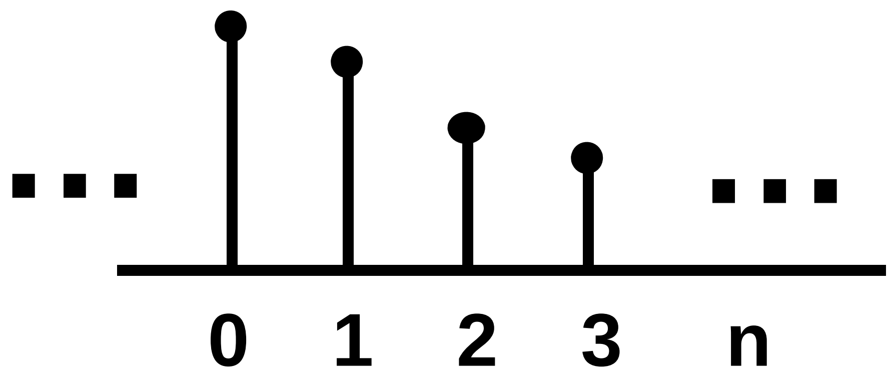
sequenza gradino

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(n-k)$$



$$g(n) = a^n$$

sequenza geometrica



$$a < 1,\ a \text{ reale}$$

Caso particolare:

$$a = e^{j2\pi F}$$

esponenziale complesso
alla frequenza normalizzata F

Segnale periodico (periodo N) :

$$x(n) = x(n + N) \quad \forall n \text{ e il minimo } N$$

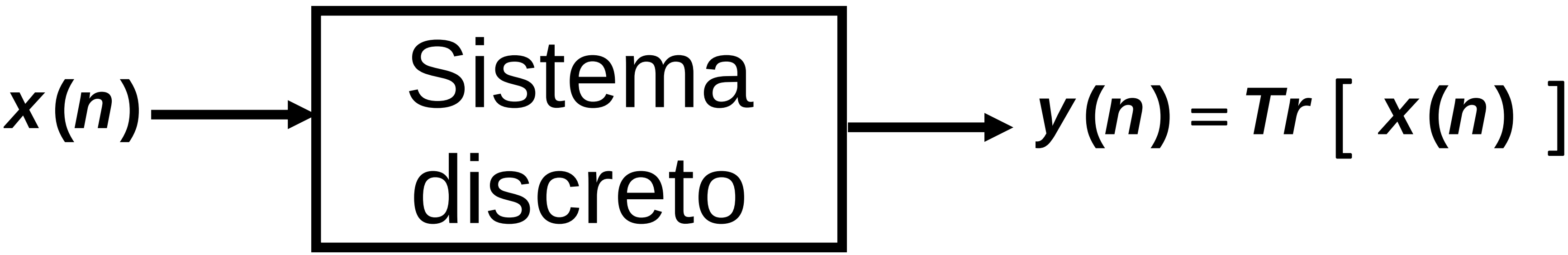
Da notare che un segnale continuo periodico di periodo P non necessariamente genera un segnale digitale con periodo $N=P/T$!!

In generale, per un qualunque segnale $x(n)$, si può scrivere:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Interpretabile come la combinazione lineare di impulsi unitari traslati $\delta(n-k)$ pesati da coefficienti costanti $x(k)$

Esempi di sistemi discreti (s.d.)



$y(n) = x^2(n)\,,$ ***s.d. non lineare senza memoria***

$y(n) = x^3(n) + 2x(n-1)\,,$ ***s.d. non lineare con memoria (finita)***

$$y(n) = \log\left[x(n)\right] - y(n-1),$$ ***s.d. non lineare con memoria (infinita)***

$$y(n) = \frac{1}{n}x(n) + \frac{n-1}{n}y(n-1),$$ ***s.d. lineare tempo-variante*** **(*con memoria infinita*)**

[*calcolo ricorsivo del valore medio dei valori di una sequenza da 1 a n*]

SISTEMI DISCRETI LINEARI

- **Definizione**

Dati $$y_1(n) = Tr\left[x_1(n)\right]$$

e $$y_2(n) = Tr\left[x_2(n)\right]$$

si ha

$$y(n) = Tr\left[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\right] =$$

$$= a_1 Tr\left[x_1(n)\right] + a_2 Tr\left[x_2(n)\right] =$$

$$= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

a_1 , a_2 costanti (reali o complesse)
Si estende ad una combinazione lineare di un numero qualunque (anche infinito) di termini.

- **Risposta impulsiva o indice**

$$h_k(n) = Tr\left[\delta(n-k)\right]$$

risposta del sistema all'impulso applicato all'istante k**.**

■ **Proprietà fondamentale**

$$y(n) = Tr\left[x(n)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Tr\left[\delta(n-k)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h_k(n)$$

L'uscita è una combinazione lineare degli ingressi con coefficienti (generalmente) tempo varianti.

SISTEMI DISCRETI LINEARI TEMPO INVARIANTI (LTI)

- **Definizione ($\forall\, x$ e k)**

$$Tr\left[x(n-k)\right] = y(n-k)$$

quindi

$$h_k(n) = h_0(n-k) = h(n-k)$$

L’uscita è data da:

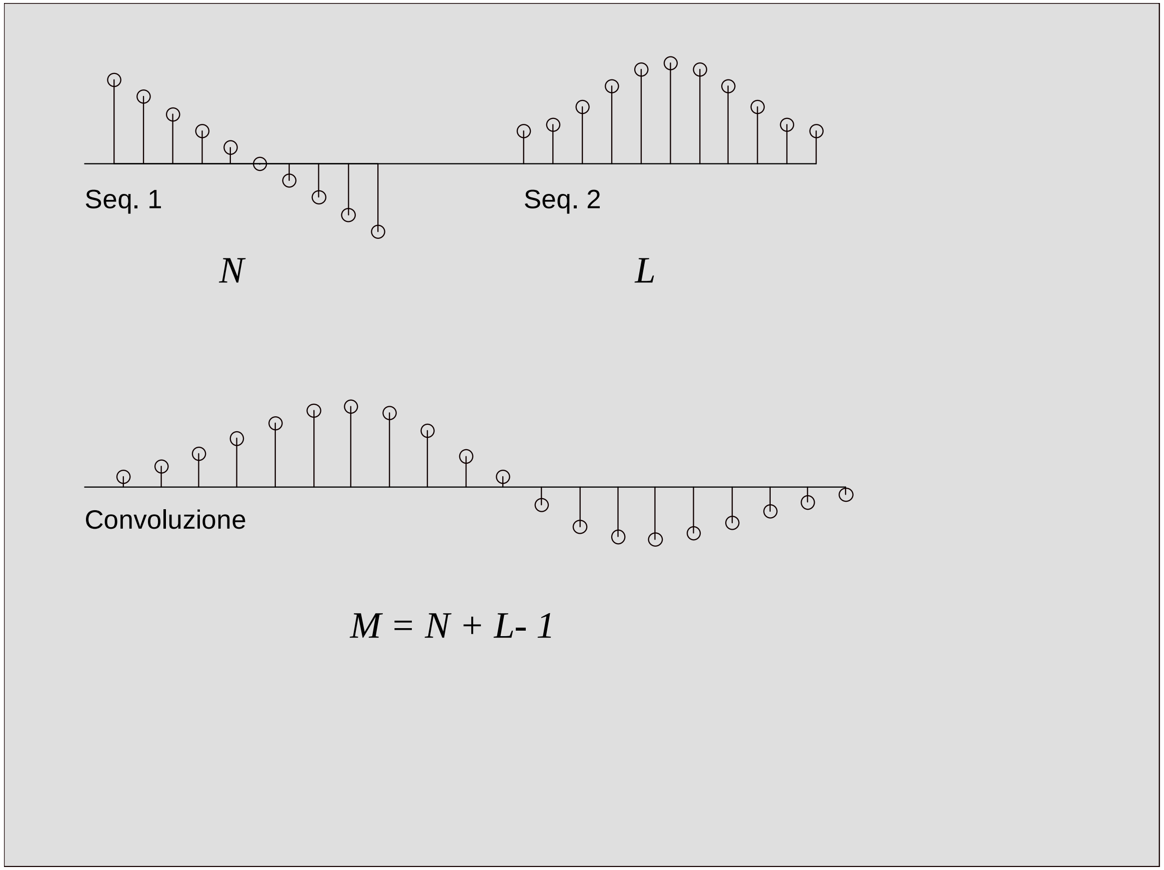
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

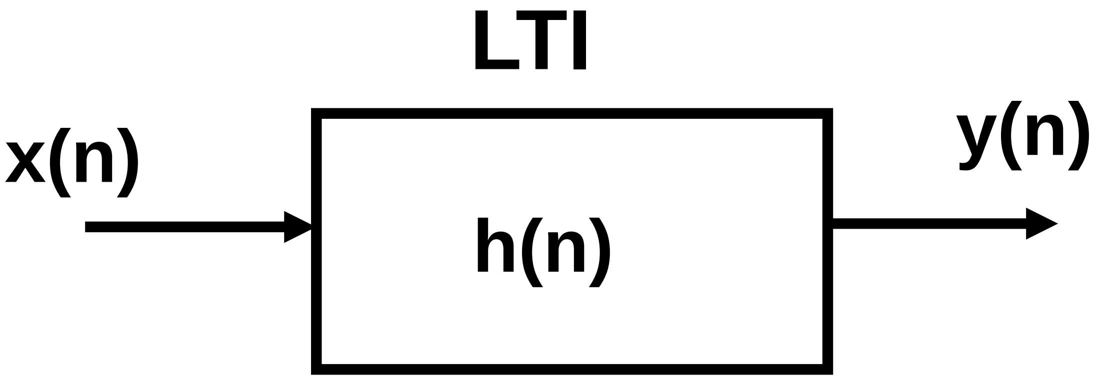
$$= x(n) * h(n)$$ **(*__Convoluzione discreta__*)**

Esempio di convoluzione discreta di sequenze

La sequenza mostrata nella parte inferiore è il risultato
della convoluzione discreta delle due sequenze mostrate nella parte superiore.



■ Sistema discreto lineare tempo-invariante (LTI)



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

$h(n)$ risposta impulsiva del sistema
[risposta all'impulso unitario $\delta(n)$].

➢ ***caratterizza completamente il sistema***

■ **Causalità**

L'uscita al tempo m **dipende solo dagli ingressi passati e presente, cioè per** $n \leq m$**.**

Equivale a: $h(n) = 0,\ n < 0$

Quindi: $$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Due classi di sistemi discreti causali LTI

- **IIR (risposta impulsiva infinita)**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- **FIR (risposta impulsiva finita)**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

durata della risposta impulsiva: N campioni.

Da notare che un sistema FIR non causale

$$y(n) = \sum_{k=-M}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

può essere sempre trasformato in un sistema FIR causale (della stessa durata) ritardando l'uscita di M **campioni e traslando di** M **campioni la risposta impulsiva:**

$$y'(n) = y(n-M) = \sum_{k=0}^{N+M-1} h(k-M)x(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N+M-1} h'(k)x(n-k)$$

Stabilità (BIBO = Bounded Input Bounded Output)

Ogni ingresso limitato in ampiezza genera una uscita limitata in ampiezza.

Condizione necessaria e sufficiente:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

FIR: sempre stabili

IIR: stabilità da verificare

EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE FINITE

Modo alternativo di definire un sistema LTI

- **Sistema di ordine N (causale)**

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k), \quad n \geq 0$$

a_k, b_k **coefficienti (costanti) del sistema e condizioni iniziali**

$y_i = y(i) \quad , \quad i = -N, \ldots, -1$

FIR : tutti i $b_k = 0$

IIR : alcuni $b_k \neq 0$

Esempio: sistema LTI, causale, stabile,

$$y(n) = b\,y(n-1) + x(n), \qquad y(-1) = 0$$

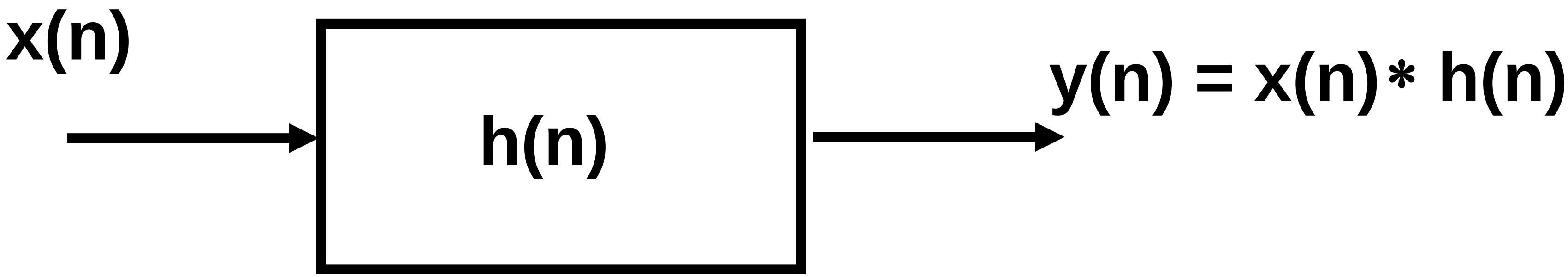
che ha una risposta impulsiva (tipo IIR)

$$h(n) = b^n u(n)$$

$$|b| < 1 \quad \textit{stabile} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{1-|b|}$$

$$|b| \geq 1 \quad \textit{non stabile}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO



$X(z)$ $\quad$ $H(z)$ $\quad$ $Y(z) = X(z)\,H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k},$$

funzione di trasferimento del sistema

Sistemi causali

- **FIR**

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$$

- **IIR**

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}}=a_0\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-Z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-P_k z^{-1})}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

Ordine del sistema: N

Z_k **: zeri del sistema**

P_k **: poli del sistema**

Stabilità : poli interni al cerchio unitario nel piano z.

Sistemi reali : zeri e poli reali o complessi coniugati

- $H(z)$ **è la trasformata-z di** $h(n)$
  $h(n)$ **è la trasformata-z inversa di** $H(z)$
  [modo alternativo di ottenere $h(n)$ **rispetto al calcolo diretto]**

RISPOSTA IN FREQUENZA

Sistema discreto LTI

Ingresso: esponenziale complesso alla frequenza normalizzata F

$$x(n) = e^{j2\pi F n}$$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{j2\pi F(n-k)}$$

$$=e^{j2\pi Fn}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j2\pi Fk}$$

$$=e^{j2\pi Fn}H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi F}}$$

$$=e^{j2\pi Fn}H(F)$$

La funzione complessa $H(F)$
della frequenza normalizzata F
è la <u>risposta in frequenza</u> del sistema

- $H(F)$ **è la trasformata di Fourier della sequenza** $h(n)$

- **<u>Per sistemi reali</u> [sequenze $h(n)$ reali]**

$$H(-F) = H^*(F)$$

Risposta in ampiezza:

$|H(F)|$ ***simmetrica***

Risposta in fase:

$\arg H(F)$ ***antisimmetrica***

Ritardo di fase:

$$\Delta(F) = -\frac{\arg H(F)}{2\pi F}$$ ***(campioni)***

Ritardo di gruppo:

$$\tau(F) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d \arg H(F)}{dF} \qquad \textit{(campioni)}$$

- **Sistemi non distorcenti in ampiezza (o passa-tutto)**

$$|\,H(F)\,| \quad = \quad \textit{costante}$$

- **Sistemi non distorcenti in fase (o a fase lineare)**

$$\Delta(F) = \tau(F) = \quad \textit{costante}$$

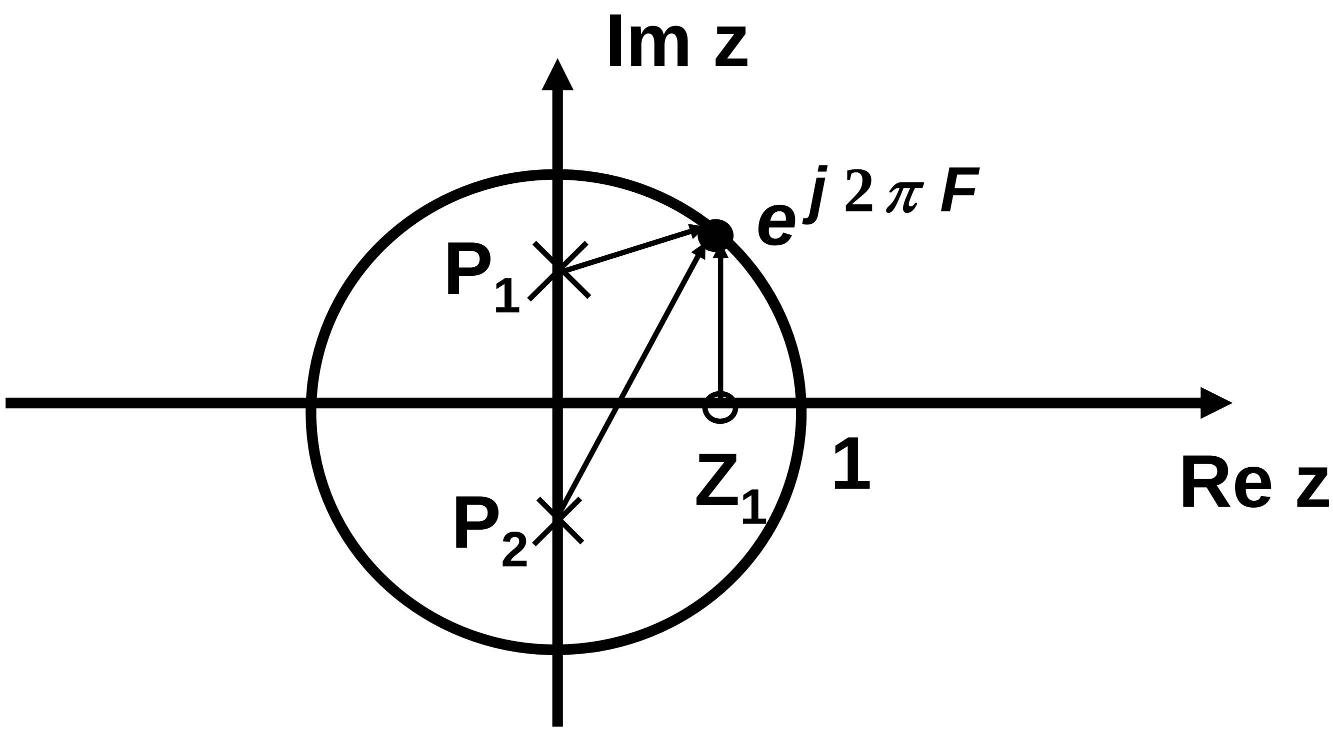
Esempio: sistema reale
ingresso sinusoide reale

$$x(n) = \cos 2\pi F n$$

$$y(n) = |H(F)| \cos\left[2\pi F n + \arg H(F)\right]$$

■ Calcolo grafico della risposta in frequenza

Esempio: sistema reale con 2 poli e 1 zero



Abbiamo visto per sistemi IIR:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}}=a_0\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-Z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-P_k z^{-1})}$$

$$=a_0\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-Z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-P_k)}\ z^{N-M}$$

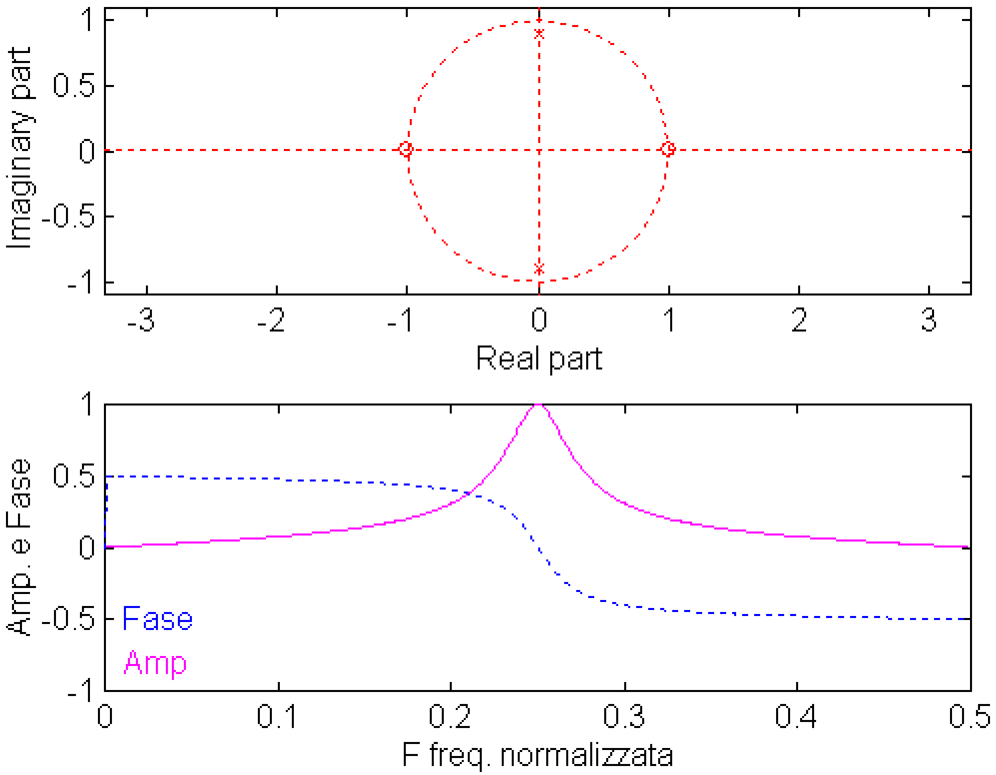
A meno di un fattore costante (a_0) la risposta del sistema alla frequenza F si può calcolare dai vettori che congiungono il punto $e^{j2\pi F}$ con i poli e gli zeri.

- **Poli vicini al cerchio unitario:**
  picchi della risposta in frequenza

- **Zeri vicini al cerchio unitario:**
  bassi valori della risposta in frequenza

Esempio di Risposta in frequenza del sistema

$$H(z) = \frac{1.0 - 1.0z^{-2}}{1.0 + 0.9z^{-2}}$$



■ Descrizione di un sistema discreto LTI

Nel dominio temporale

- *$h(n)$*, **risposta impulsiva**
- **Equazione alle differenze finite**

Nel dominio trasformato

- *$H(z)$*, **funzione di trasferimento**
- *$H(F)$*, **risposta in frequenza**

Nota

Per semplicità di notazione, per una stessa sequenza $h(n)$ usiamo lo stesso simbolo H per denotare la sua trasformata-z $H(z)$ e la sua trasformata di Fourier $H(F)$.

Le due trasformate sono distinte da:

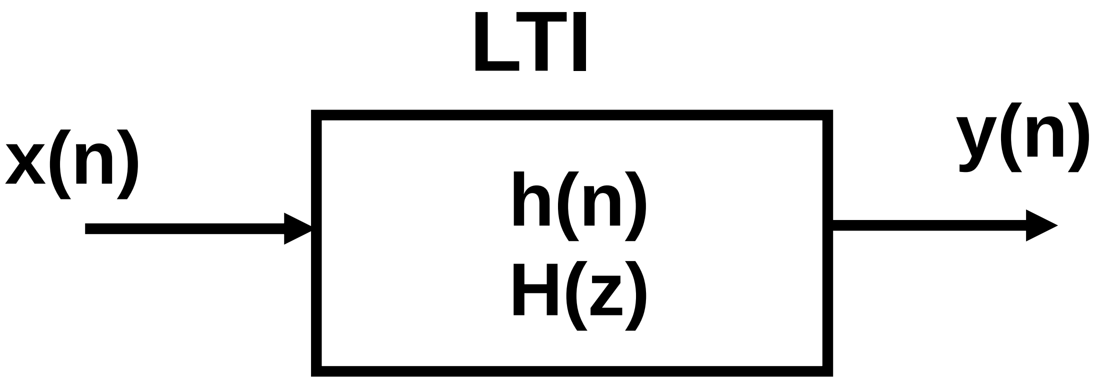
- **variabile indipendente complessa (z) per la trasformata-z**
- **variabile indipendente reale (F) per la trasformata di Fourier**

Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

(reperibili a: http://lenst.det.unifi.it/node/379)

- **Funz trasf**

SEGNALI ALEATORI



x(n) segnale aleatorio stazionario in senso lato

$$m_x = E\{\ x(n)\ \},$$ ***valor medio***

$$r_x(m) = E\{\ x(n)x(n+m)\ \},$$ ***autocorrelazione***

- $$E\left\{\ y(n)\ \right\} = E\left\{ \sum_k\ h(k)x(n-k)\ \right\} =$$
$$= m_x \sum_k\ h(k) = m_x H(z)\big|_{z=1}$$

- ***Per semplicità*** $m_x\ =\ 0$

Definizioni: $R_x(z) \Leftrightarrow r_x(m)$

Spettro di potenza: $G_x(F) = R_x(z)\,\big|_{z=e^{j2\pi F}}$

- **Potenza del segnale di ingresso**

$$S_x = \sigma_x^{\ 2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_x(F)dF$$

- **Segnale di uscita**

Spettro di potenza

$$G_y(F) = |H(F)|^2 G_x(F)$$

Potenza

$$S_y = \sigma_y^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(F)|^2 G_x(F)dF$$

Esempio: $x(n)$ **processo bianco**

$$G_x(F) = N_0$$

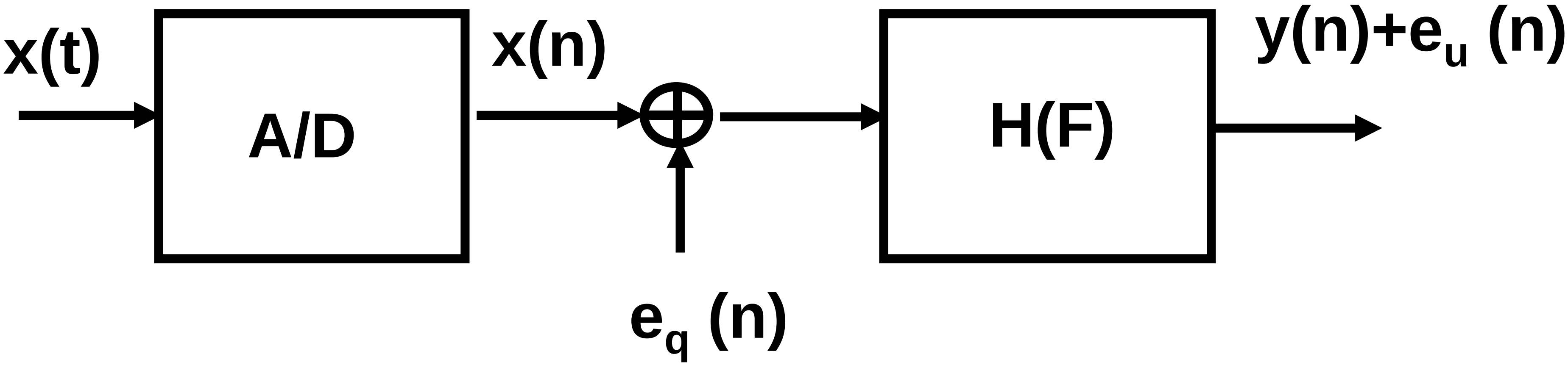
si ha

$$S_x = N_0$$

$$S_y = N_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(F)|^2 dF = N_0 \sum_k |h(k)|^2$$

L'ultima uguaglianza segue dal Teorema di Parseval

Esempio: Calcolo del rapporto segnale-rumore in uscita dal sistema



Note le caratteristiche del convertitore A/D e noto $x(t)$ si possono calcolare la potenza S_x del segnale $x(n)$ e la densità spettrale di potenza (bianca) di $e_q\,(n)$

In ingresso:

$$SNR_i = \frac{S_x}{N_q}$$

In uscita:

$$S_y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_x(F)\,|H(F)|^2 dF$$

$$N_u = N_q \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(F)|^2 dF$$

$$SNR_u = \frac{S_y}{N_u}$$

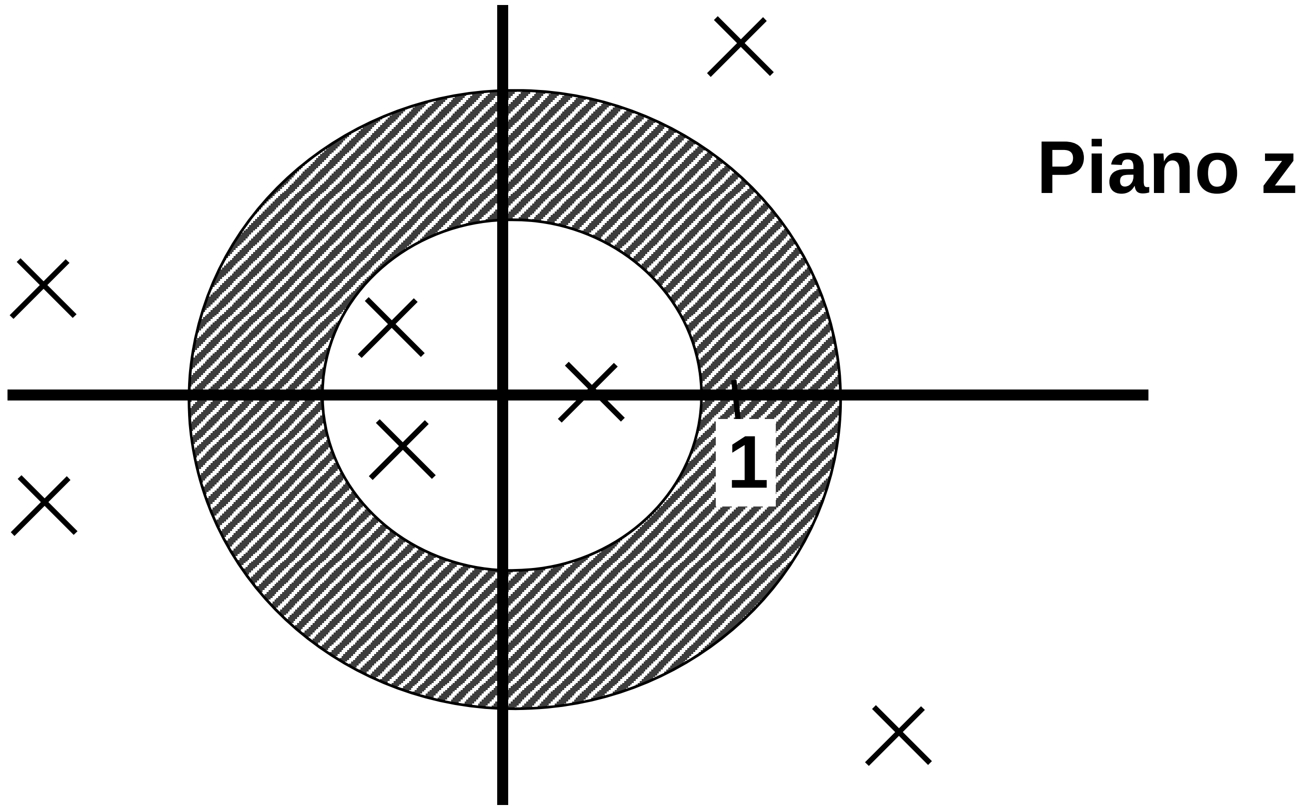
ALCUNE PROPRIETA'

- **Stabilità**:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)\, z^{-n}$$

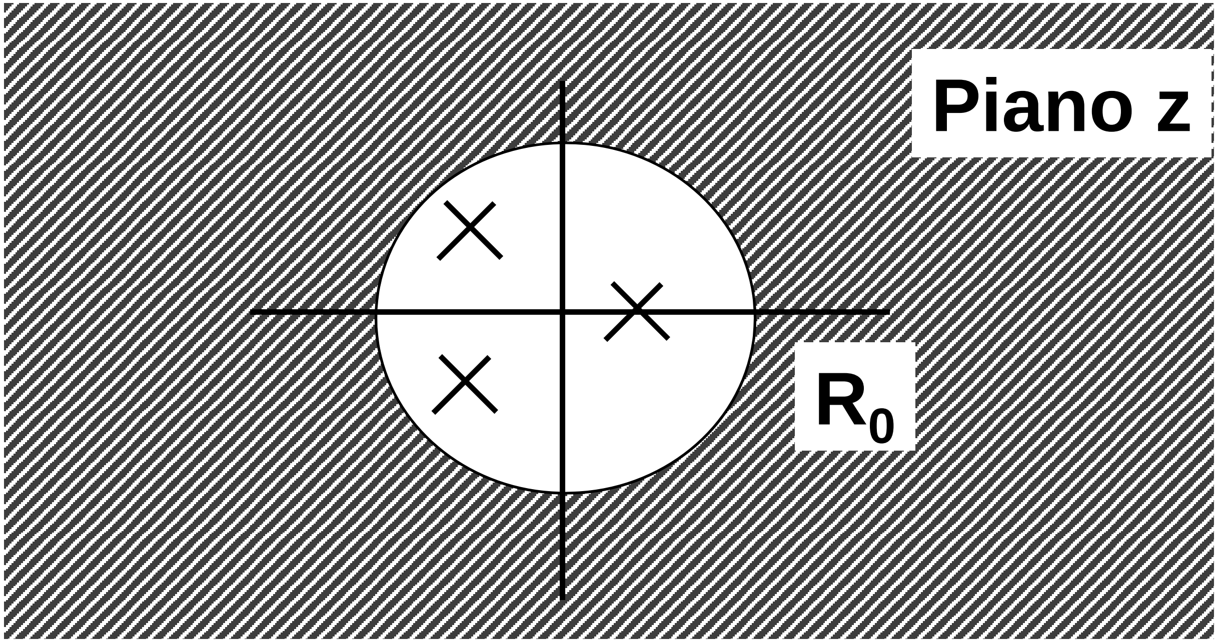
La RdC include la circonferenza unitaria



Poli: i) solo interni (sequenza infinita positiva)
ii) solo esterni (sequenza infinita negativa)
iii) interni e esterni (sequenza doppiamente infinita)

■ **Causalità**: $h(n) = 0$ **per** $n < 0$

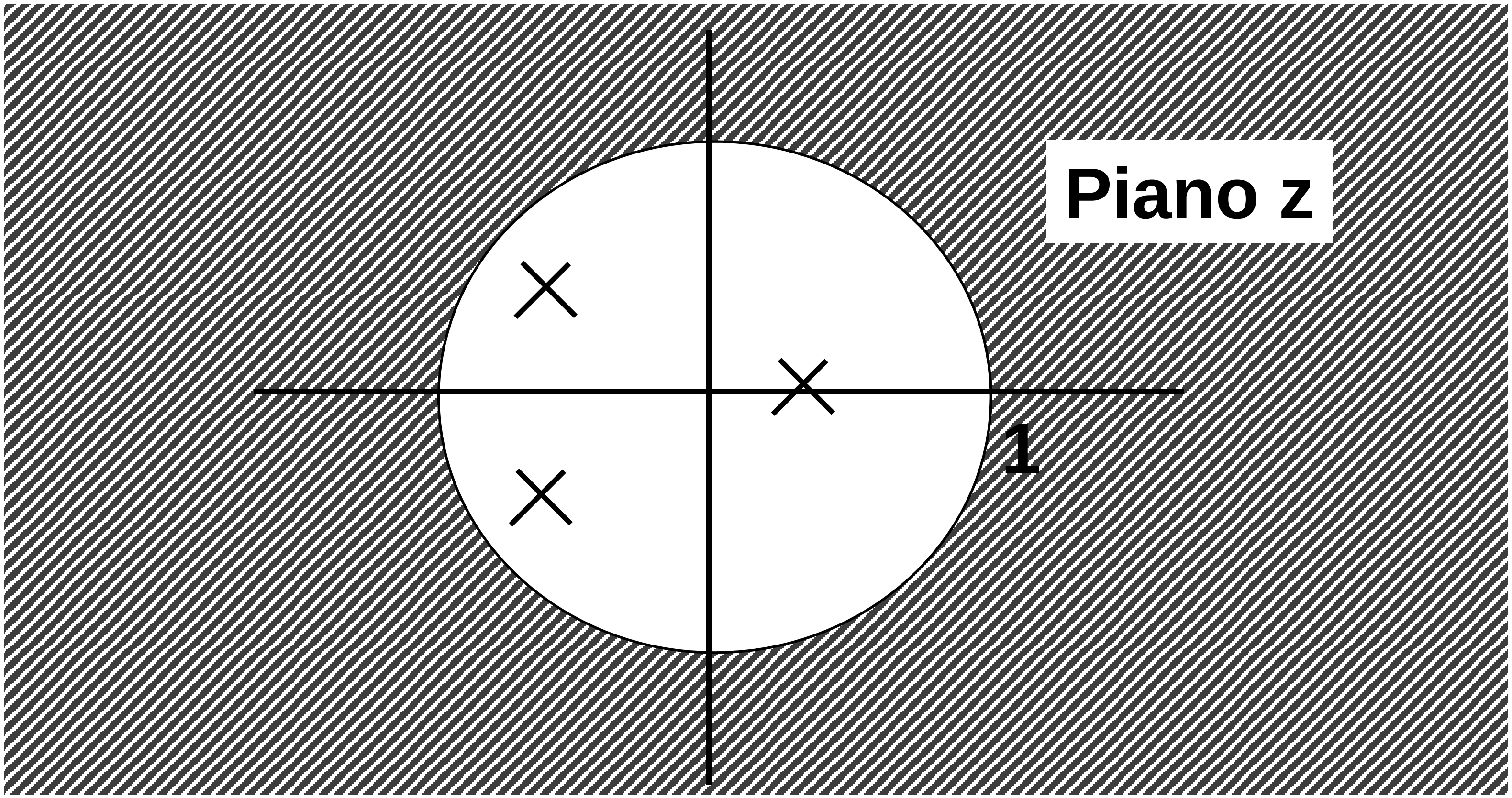
$\Rightarrow$ RdC ***esterna a*** $|z| > R_0$



Poli interni al cerchio di raggio R_0

■ Sistemi causali e stabili

$\Rightarrow$ **Poli interni al cerchio unitario**



Zeri possono essere dovunque

■ Sistemi a fase minima

Def.: Sono quelli che hanno tutti i poli e tutti gli zeri di $H(z)$ interni al cerchio unitario

$\Rightarrow$ **Hanno un ritardo di fase minimo fra tutti i sistemi che hanno la stessa risposta in ampiezza**

NOTA: ***il sistema inverso***

$$G(z) = \frac{1}{H(z)}$$

è ancora un sistema a fase minima (oltre ad essere stabile e causale)

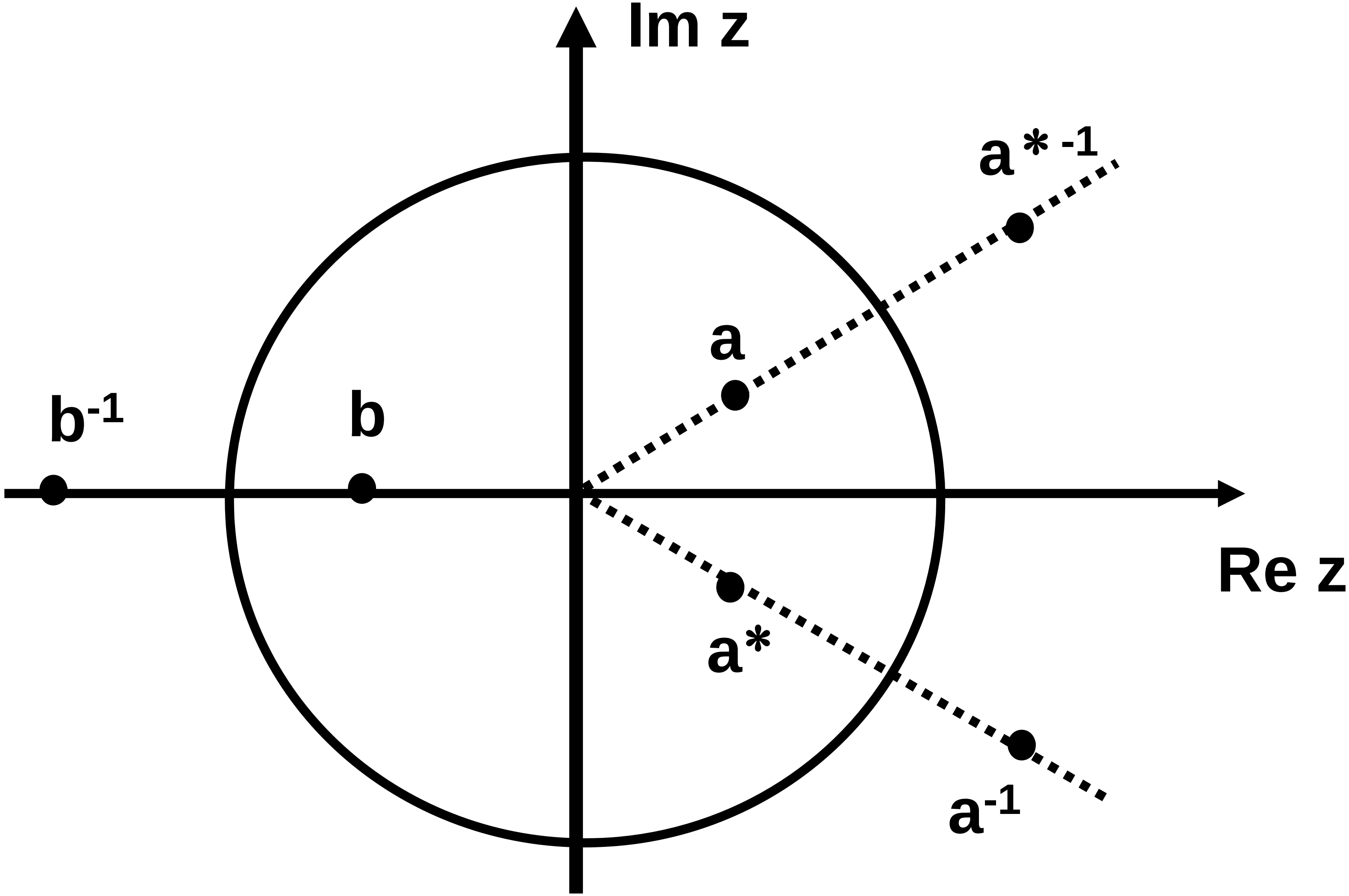
■ Sistemi a fase lineare

Hanno una risposta in fase lineare.

➢ **Non introducono distorsione di fase:**

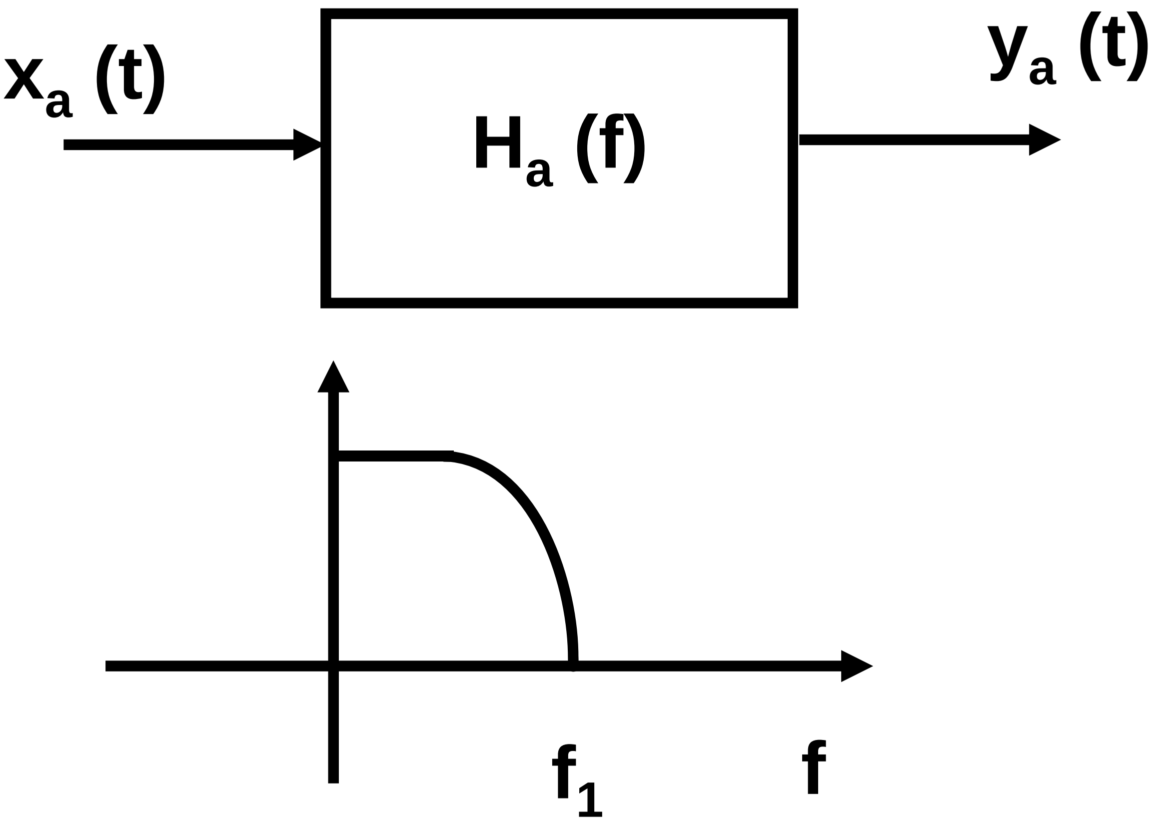
Ritardo di fase = Ritardo di gruppo = costante

$\Rightarrow$ **Sistemi stabili e causali non hanno poli. Nei sistemi reali gli zeri si presentano in quadruple (se complessi) o in coppie (se reali** $\neq \pm 1$ **).**

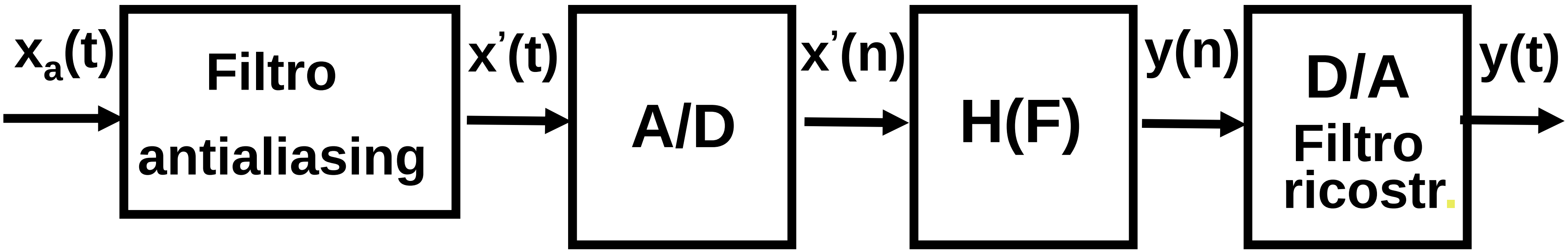

Im z
a* -1
a
b-1
b
Re z
a*
a-1

EQUIVALENZA FRA FILTRAGGIO ANALOGICO E NUMERICO

- **Analogico**

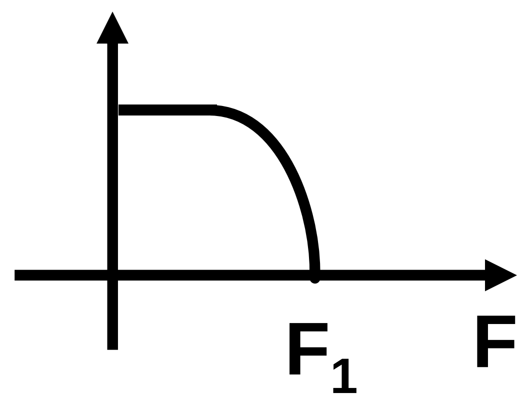


- **Numerico**



$$f_1 < f_t < \frac{f_c}{2}$$

$$f_c \geq 2 f_t$$



$$F_1 = \frac{f_1}{f_c}$$

$$y(t) \cong y_a(t)$$

L'approssimazione dipende da:

- **Caratteristiche spettro di** $x_a(t)$
- **Risposta filtro antialiasing**
- **Campionatore non ideale**
- **Quantizzazione**
- **Filtro numerico non ideale**
- **Risposta D/A e filtro ricostruzione**