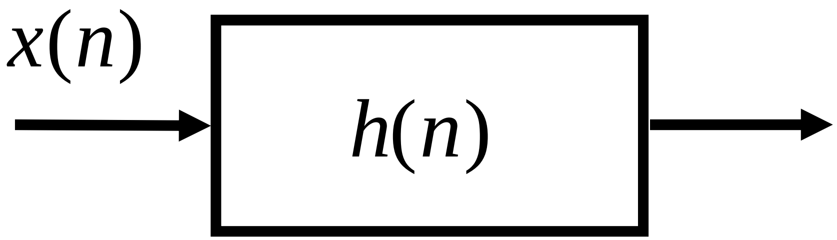
PROGETTO DI FILTRI
A RISPOSTA IMPULSIVA FINITA
(FIR)

PROPRIETA' DEI FILTRI FIR
(Finite Impulse Response)



$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

Proprietà e caratteristiche principali

- Filtri FIR sono fra i più usati
- Possono avere una risposta in fase esattamente lineare (assenza di distorsione di fase e di gruppo)

- **Sempre stabili**
- **Strutture più facili da realizzare**
- **Minore sensibilità nei confronti di una realizzazione con aritmetica a precisione finita**
- **Possono richiedere un numero di operazioni anche elevato**

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E RISPOSTA IN FREQUENZA

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

- **Funzione di trasferimento**

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

solo zeri (escludendo l'origine)

■ Risposta in frequenza

$$H(F) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi F n} \; ,$$

$$= A(F) e^{j\varphi(F)}$$

$$F = \frac{f}{f_c}$$ ***freq. normalizzata***

$A(F)$, **risposta in ampiezza**

$\varphi(F)$, **risposta in fase**

da cui si ottengono:

$$\Delta(F) = -\frac{\varphi(F)}{2\pi F}\,,$$

ritardo di fase (campioni)

$$\tau(F) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(F)}{dF}\,,$$

ritardo di gruppo (campioni)

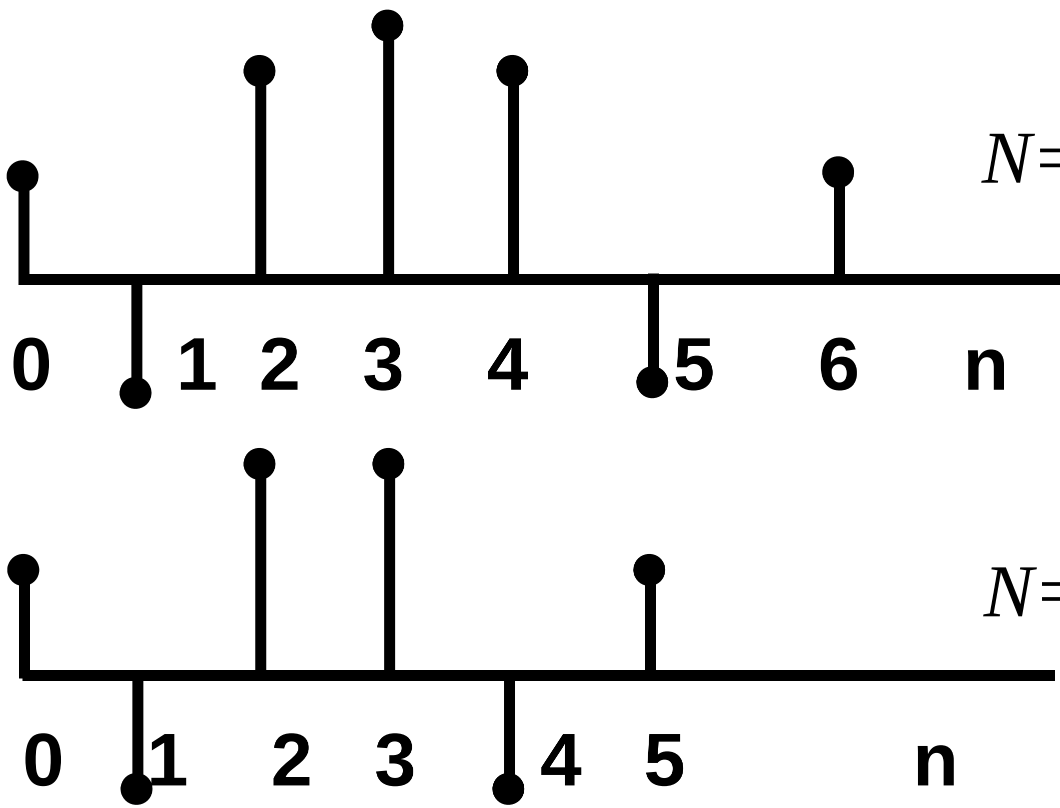
- **Fase lineare**

$$\varphi(F) = -aF$$

$$\Delta(F) = \tau(F) = \frac{a}{2\pi} = \alpha = \text{cost}$$

■ Condizione per la fase lineare (FIR reali)

1. $h(n) = h(N - 1 - n),$ **risposta simmetrica**



N=7 (dispari)

N=6 (pari)

Sfruttando la condizione di simmetria nell'espressione

$$H(F) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi F n}$$

isoliamo i termini simmetrici (N pari)

$$H(F) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-j2\pi F n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n) e^{-j2\pi F(N-1-n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} \left[e^{-j2\pi F(n-\frac{N-1}{2})} + e^{j2\pi F(n-\frac{N-1}{2})} \right] =$$

$$= e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos 2\pi F (n - \frac{N-1}{2})$$

Analogamente per N dispari

$$H(F)=\begin{cases} e^{-j2\pi F\frac{N-1}{2}}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n)\cos\left[2\pi F\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]\right\} & N \textbf{ dispari} \\ e^{-j2\pi F\frac{N-1}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n)\cos\left[2\pi F\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]\right\} & N \textbf{ pari} \end{cases}$$

$$e^{j\varphi(F)} \qquad\qquad A\_(F)$$

la fase $\varphi(F)$ è esattamente lineare e vale

$$\varphi(F) = -2\pi F \frac{N-1}{2}$$

$$H(F) = A\_(F)\, e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}}$$

$A\_(F)$ **funzione reale**

Es.:

Passa basso
Passa alto
Passa banda
Multi-banda

Ritardo

$$\Delta(F) = \tau(F) = \frac{N-1}{2}$$

intero (N dispari)
intero + 1/2 (N pari)

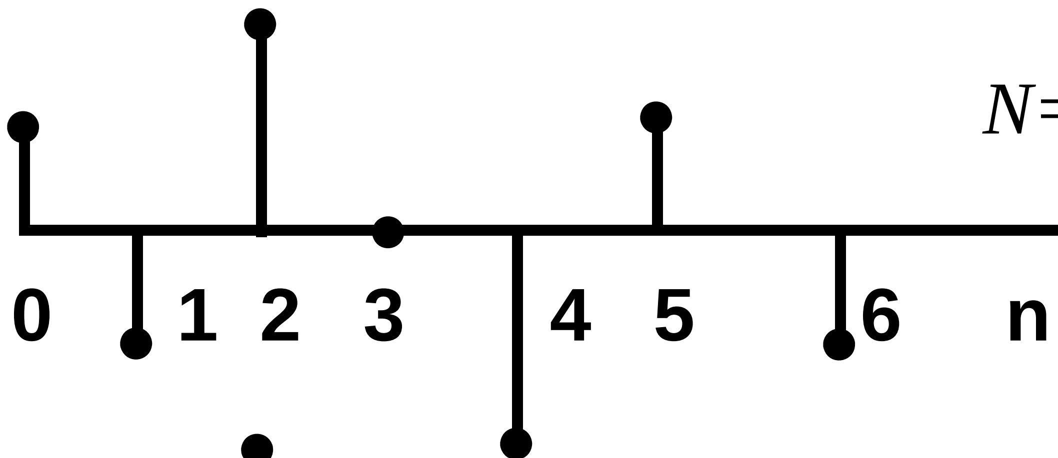
<u>N **dispari**</u>

Uscita (ritardata) generata in corrispondenza di istanti di campionamento dell'ingresso

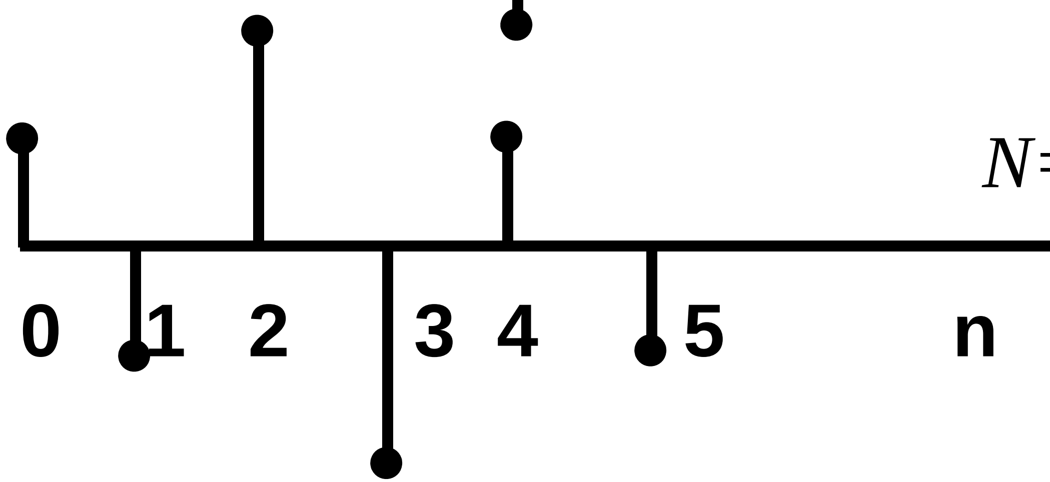
<u>N **pari**</u>

Uscita (ritardata) generata in corrispondenza di istanti di campionamento traslati di $T/2$ rispetto all'ingresso

2. $h(n) = -h(N-1-n)$, **risposta antisimmetrica**



$N=7$ **(dispari)**



$N=6$ **(pari)**

Analogamente

$$H(F)=\begin{cases} -je^{-j2\pi F\frac{N-1}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n)sen\left[2\pi F\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]\right\} & N \textbf{ dispari} \\ -je^{-j2\pi F\frac{N-1}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n)sen\left[2\pi F\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]\right\} & N \textbf{ pari} \end{cases}$$

$e^{j\varphi(F)}$ $\qquad$ $A\_(F)$

la fase $\varphi(F)$ **vale**

$$\varphi(F) = -\frac{\pi}{2} - 2\pi F \frac{N-1}{2}$$

$$H(F) = jA_-(F)e^{-j2\pi F\frac{N-1}{2}}$$

$A_-(F)$ ***reale***

Es.:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{derivatori}} & A_-(F) = cF \\ \textbf{\textit{tr. Hilbert}} & A_-(F) = -\operatorname{sgn} F \end{cases}$$

Ritardo

Come nel caso precedente è uguale a

$$\frac{N-1}{2}$$ **campioni**

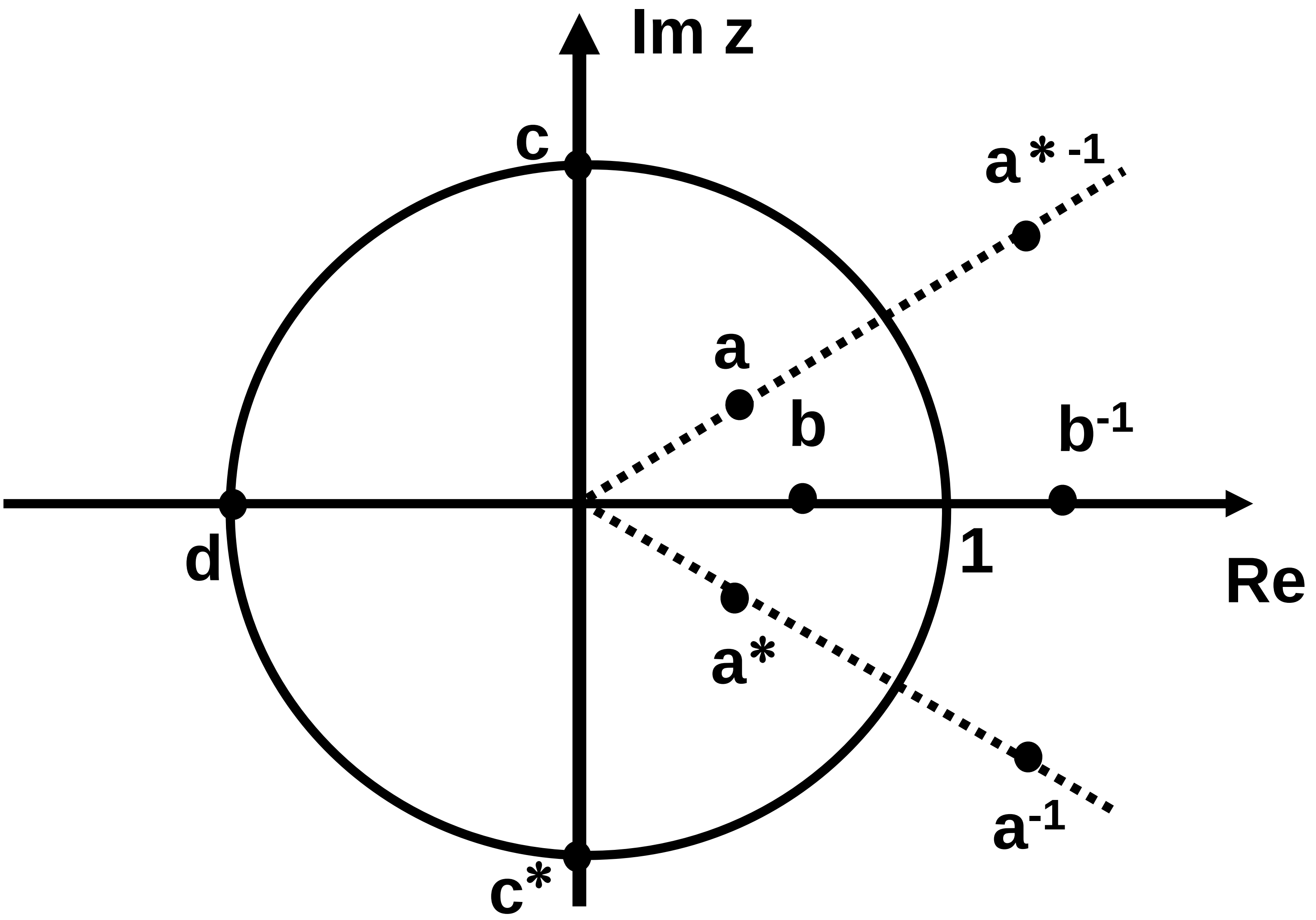
- **In più è introdotta una rotazione di fase di $\pm$ 90° [a seconda del segno di $A\_(F)$] per ogni componente spettrale.**

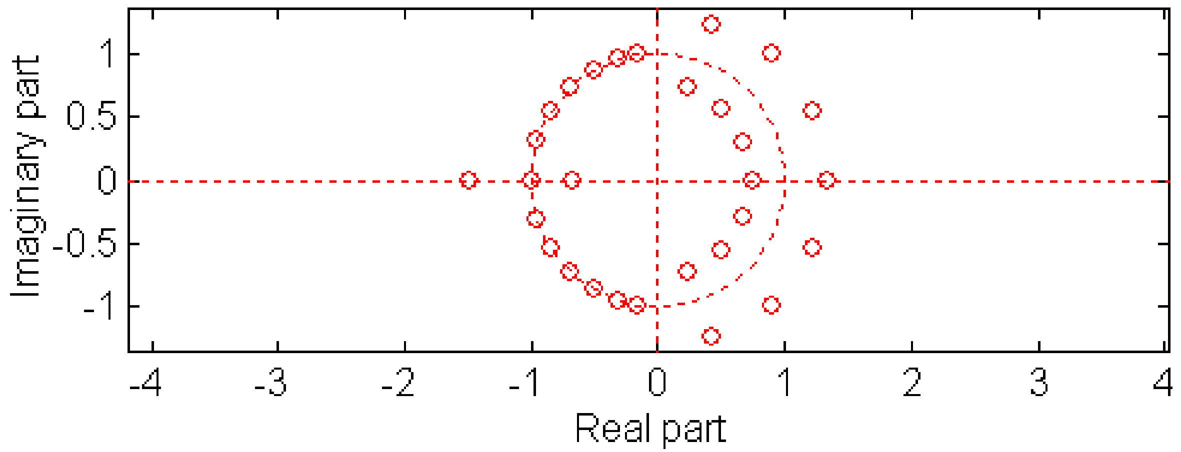
■ Zeri dei FIR (reali) a fase lineare

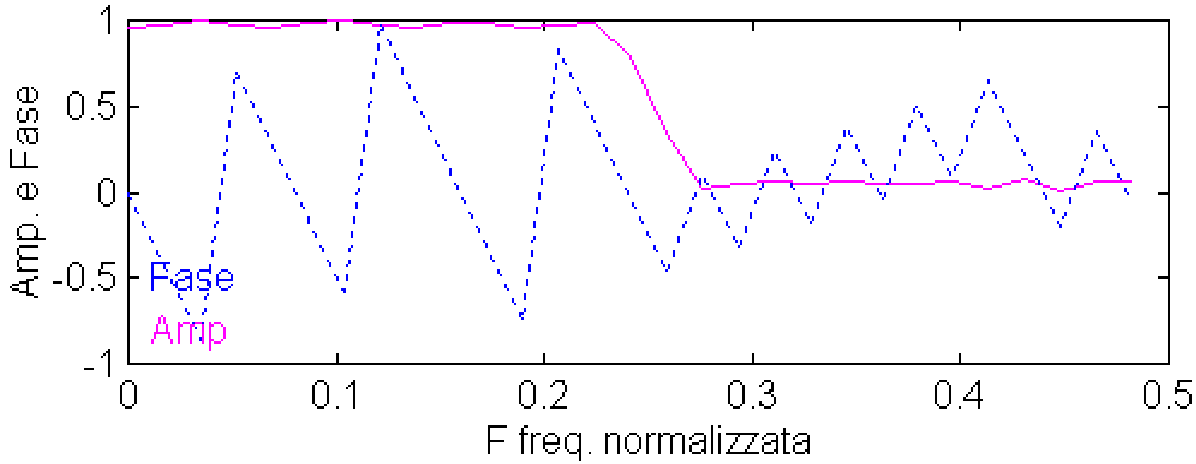
Dalle condizioni di simmetria della $h(n)$, **segue che se** z_0 **è uno zero, cioè**

$$H(z_0) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z_0^{-n} = 0$$

anche z_0^{-1} **è uno zero. Per filtro con** $h(n)$ **reale (filtri reali) le posizioni degli zeri sono del tipo:**


Im z
c
a* -1
a
b
b-1
d
1
Re
a*
a-1
c*





Configurazione degli zeri nel piano complesso

Risposta in ampiezza e fase di un filtro a fase lineare.

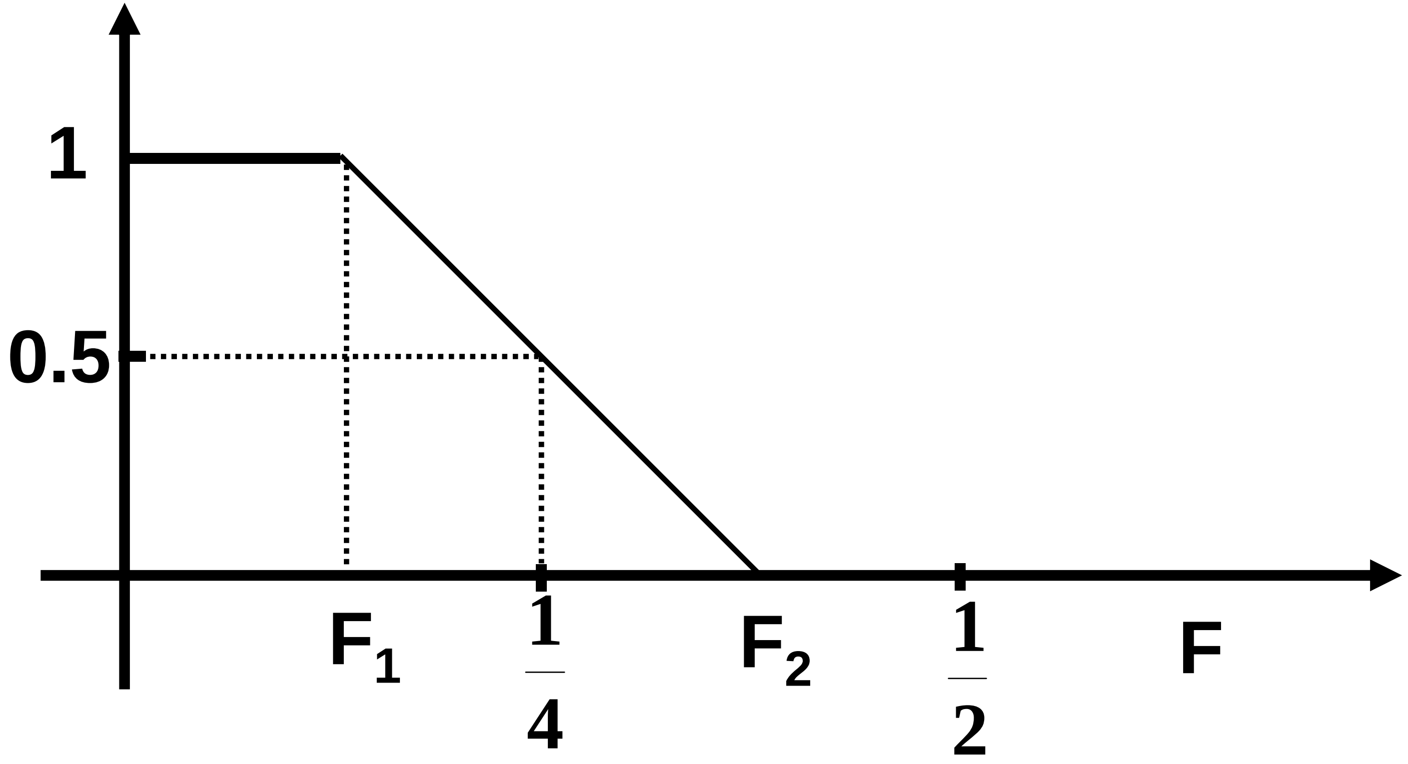
$F_1 = 0.23$ fine banda passante, $F_2 = 0.27$ inizio banda attenuata

$W = 0.3$ peso relativo banda attenuata

$N = 30$ lunghezza del filtro (equiripple)

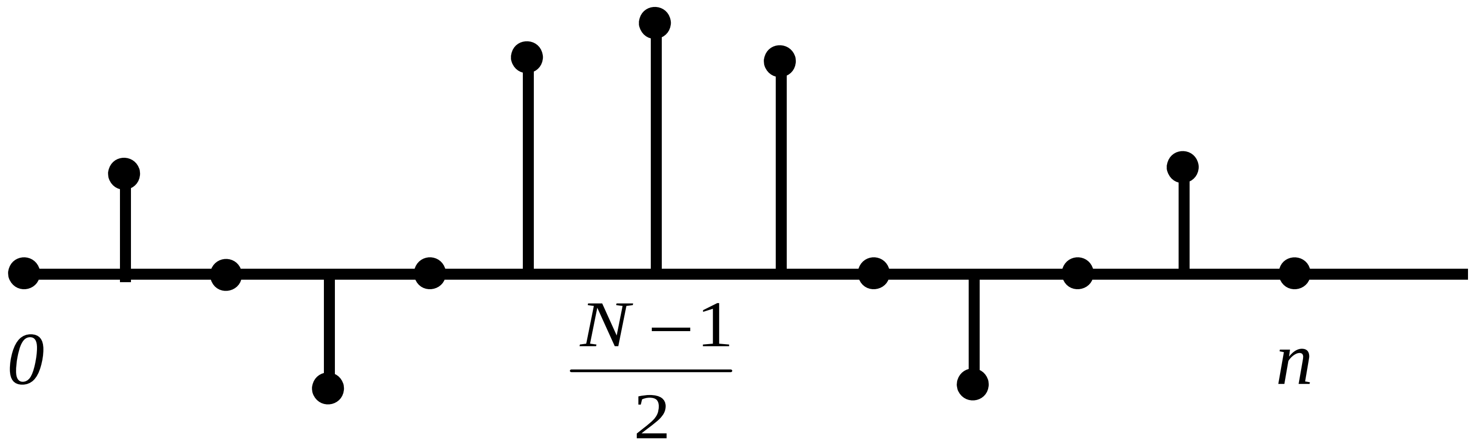
FILTRI FIR "HALF - BAND"

$$H(F) = 1 - H(\frac{1}{2} - F)$$



Proprietà utile

$N = dispari$



- **In corrispondenza di multipli pari dal campione centrale la risposta impulsiva è nulla.**

  ~ metà coefficienti uguali a zero

- **semplificazione realizzativa**

  se $N = 4P + 1$**, solo** $2P + 1$ **coefficienti sono** $\neq 0$

Per ogni campione d'uscita:

$2P + 1$ **moltiplicazioni (senza sfruttare la simmetria)**

$P + 1$ **moltiplicazioni (sfruttando la simmetria)**

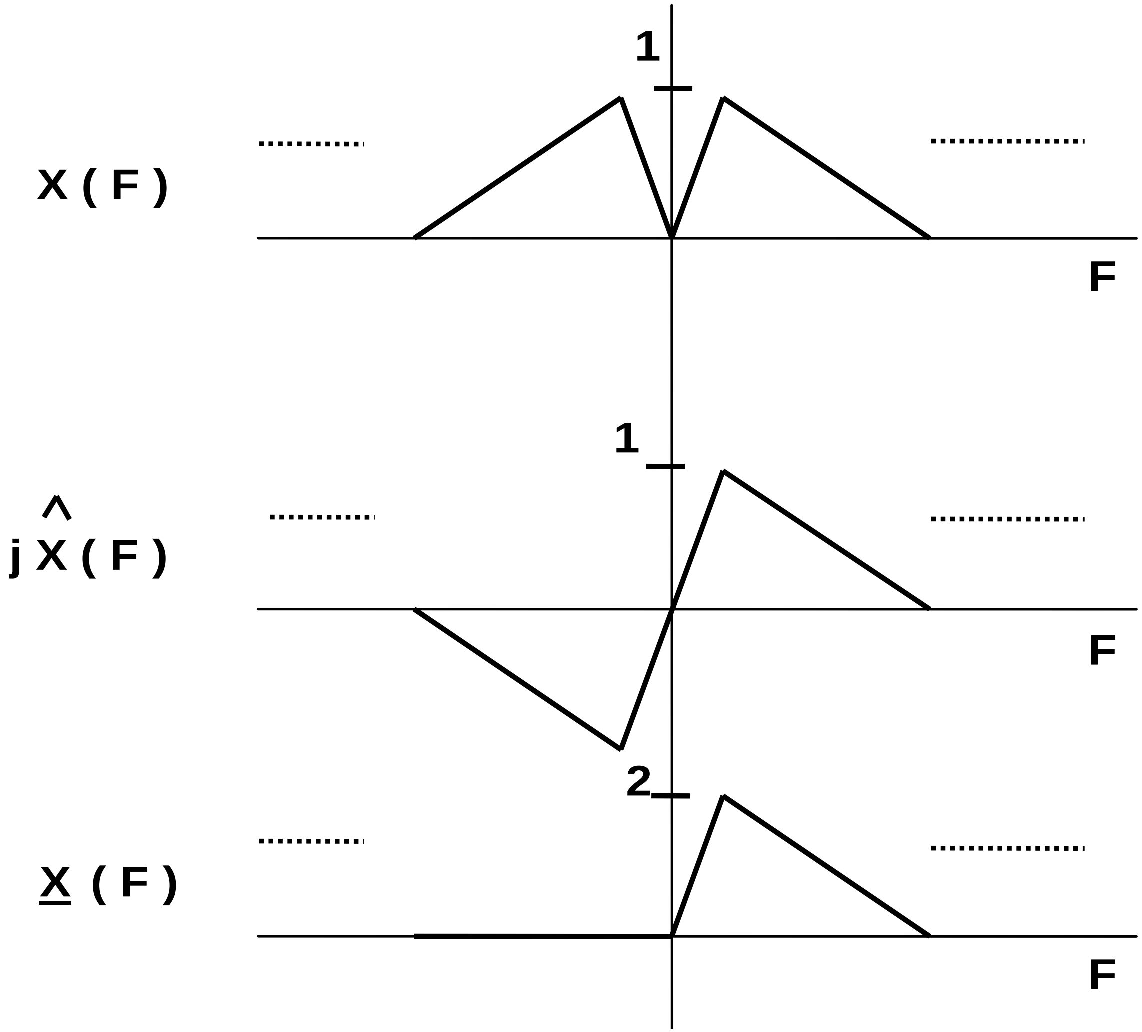
Segnale analitico discreto

Ad un segnale reale $x(n) \rightarrow \underline{x}(n) = x(n) + j\hat{x}(n)$

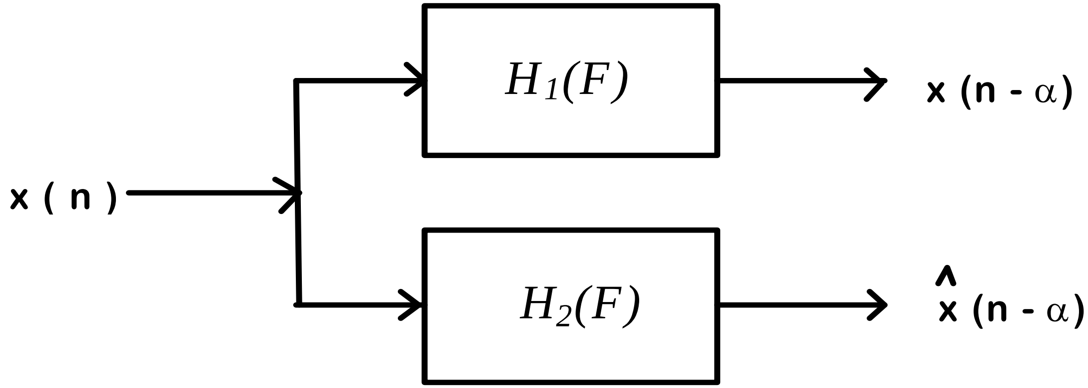
$\underline{x}(n)$ segnale analitico discreto

$\hat{x}(n)$ trasformata di Hilbert di $x(n)$

$$\underline{X}(F) = \begin{cases} 2X(F), \; 0 < F < \frac{1}{2} \\ 0, \; -\frac{1}{2} < F < 0 \end{cases}$$


1
X (F)
F
1
^
j X (F)
F
2
X (F)
F

Generazione del segnale analitico



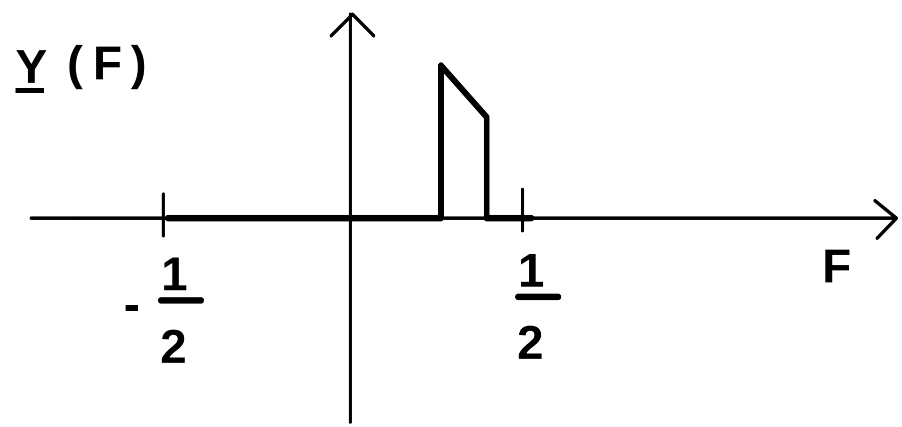
$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

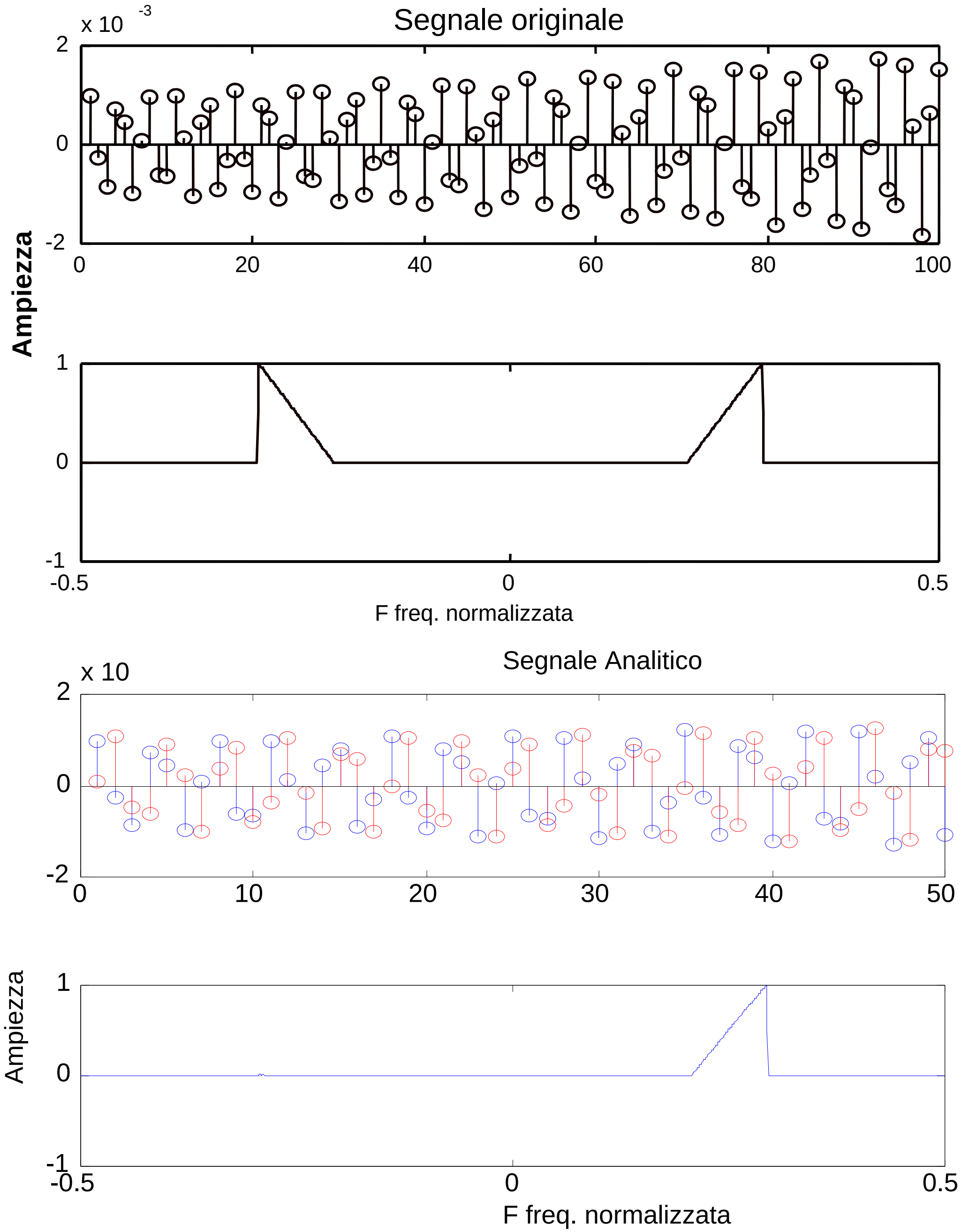
$H_1(F)$: ritardo α
$H_2(F)$: trasformatore di Hilbert FIR (N)

Generalizzazione

$H_1(F)$: passa banda (N) $\longrightarrow$ $y(n)$

$H_2(F)$: trasformatore di Hilbert
passa banda (N) $\longrightarrow$ $\hat{y}(n)$





Segnale analitico:

campioni reali blu

campioni immaginari rossi

Spettro del segnale analitico

Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

(reperibili a: http://lenst.det.unifi.it/node/379)

- **FIR fase lineare**
- **Segnale analitico**

METODI DI PROGETTO DI FILTRI FIR

METODI DI PROGETTO FILTRI FIR

- **Tre metodi fondamentali**
  - **Metodo delle finestre**

Vantaggi

- **Semplicità**
- $A(F) \cong 0.5$ **alla frequenza di taglio nominale**

Svantaggi

- **Funzione nota analiticamente ed integrabile**
- **Deviazioni massime uguali in banda passante e attenuata**
- **Oscillazione della deviazione non costante**
- N **più grande per confrontabili risposte in frequenza**

- **Metodo del campionamento in frequenza**

  <u>Vantaggi</u>
  - applicabile a qualunque risposta in frequenza
  - Disponibilità di programmi di progetto

  <u>Svantaggi</u>
  - Controllo difficile delle deviazioni
  - Oscillazione della deviazione non costante
  - N più grande per confrontabili risposte in frequenza

- **Criterio di Chebychev (minmax o equiripple)**

<u>Vantaggi</u>

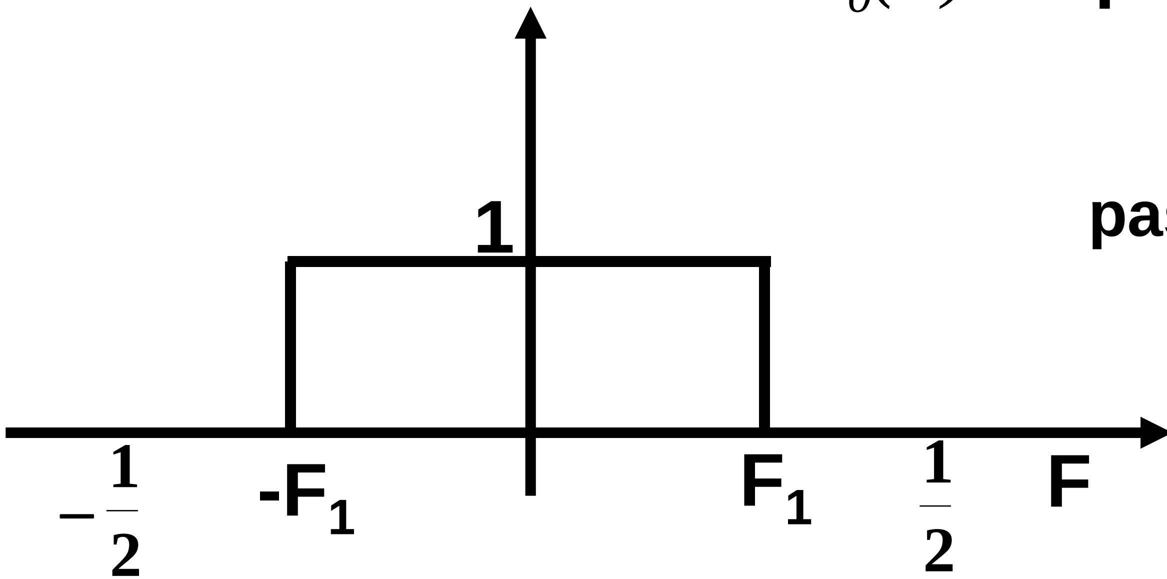
- **Criterio ottimo**
- N **più piccolo per confrontabili risposte in frequenza**
- **Disponibilità di programmi di progetto**

<u>Svantaggi</u>

- **Relativa flessibilità rispetto alla risposta in frequenza desiderata**
- **Progettazione più onerosa dal punto di vista dei tempi di calcolo**

METODO DELLE FINESTRE

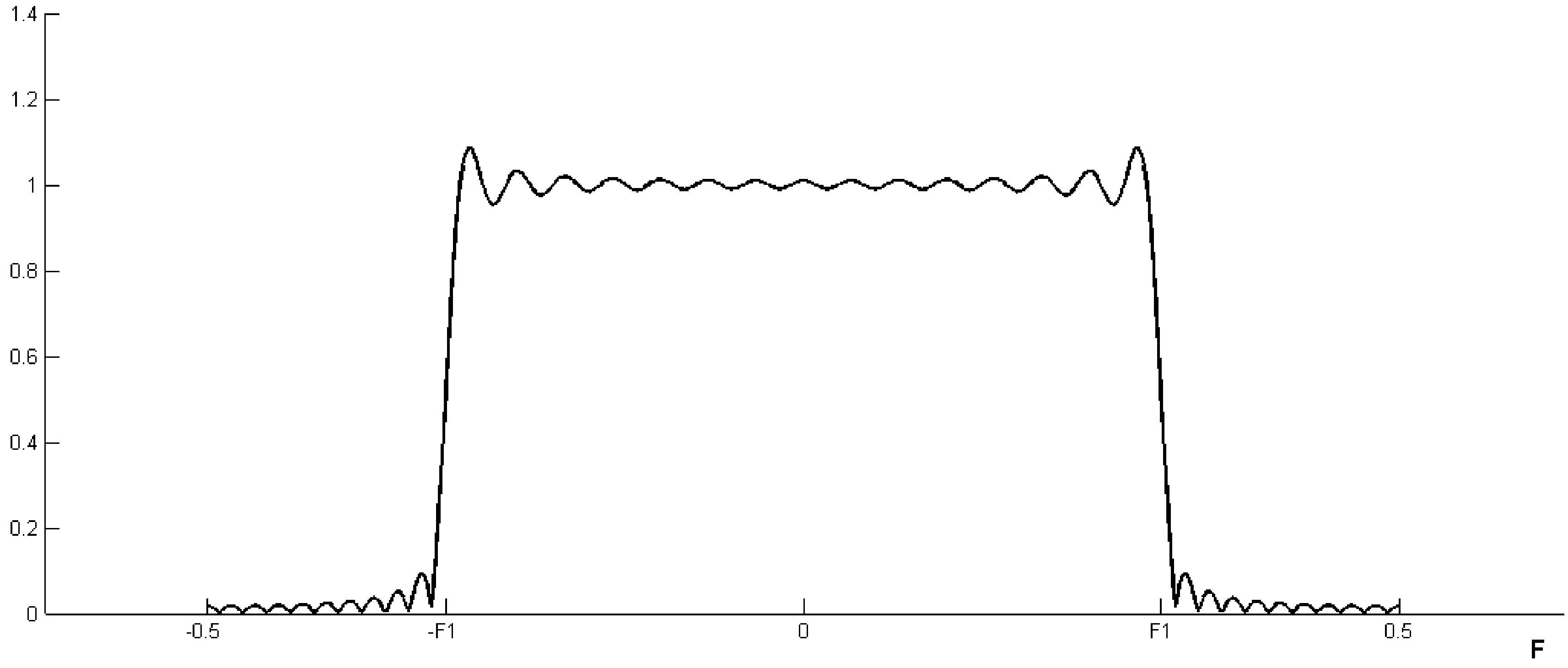
Data una desiderata $H_0(F)$ **: per esempio**



passa basso

$$h_0(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H_0(F) e^{j2\pi F n} dF \qquad -\infty < n < +\infty$$

- **troncamento fra** $0 \leq n \leq N-1$
  che dà luogo al fenomeno delle oscillazioni di Gibbs



- **finestre** *w(n)* **per ridurre le oscillazioni (problema analogo al caso delle stime spettrali)**

$$h(n) = h_0(n)\, w(n)\,, \qquad 0 \le n \le N-1$$

Una delle più usate (buon compromesso prestazioni / complessità)

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}\,, \qquad 0 \le n \le N-1$$

(Hamming)

■ **Esempi di finestre** $0 \le n \le N-1$

Rettangolare

$$w(n) = 1$$

Bartlett

$$w(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1}, & 0 \le n \le \dfrac{N-1}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{N-1}, & \dfrac{N-1}{2} \le n \le N-1 \end{cases}$$

Hanning

$$w(n) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]$$

Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

Blackman

$$w(n) = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

Kaiser

$$w(n)=\frac{I_0\left\{w_\alpha\sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2-\left[n-\left(\frac{N-1}{2}\right)\right]^2}\right\}}{I_0\left[w_\alpha\left(\frac{N-1}{2}\right)\right]}$$

$I_0(\bullet)=$ ***funzione di Bessel modificata di ordine zero***

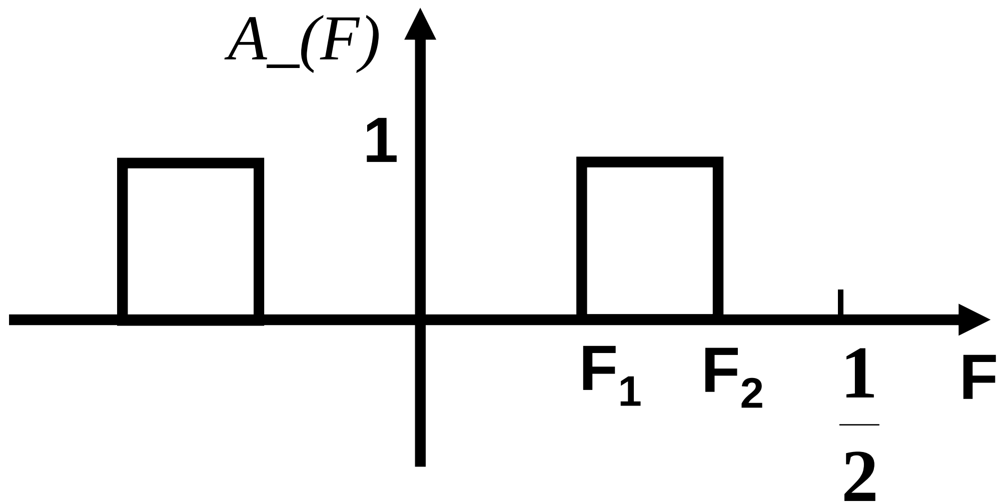
$w_\alpha=$ ***parametro di controllo per la larghezza del lobo principale e per l'ampiezza dei lobi laterali.***

Valori tipici: $4<w_\alpha\frac{N-1}{2}<9$

■ Alcuni esempi (fase lineare)

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

1. **Passa banda generalizzato**



$$H_0(F) = e^{-j2\pi F\alpha} \qquad F_1 < |F| < F_2$$

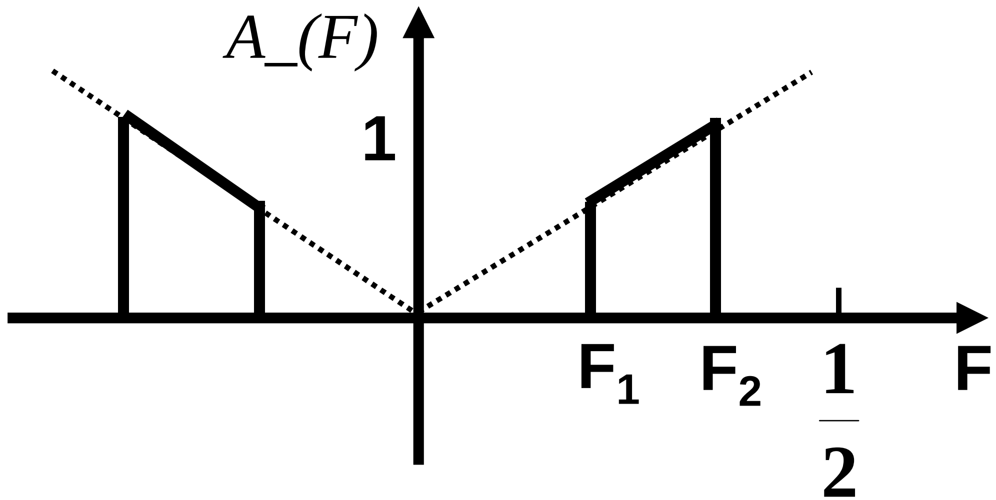
$$h_0(n) = \frac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\ sen\left[2\pi F_2(n-\alpha)\right] - \right.$$

$$\left. sen\left[2\pi F_1(n-\alpha)\right]\ \right\}, \quad n-\alpha \neq 0$$

$$h_0(n) = 2(F_2 - F_1), \quad n-\alpha = 0$$

(N ***dispari*****)**

2. Derivatore generalizzato



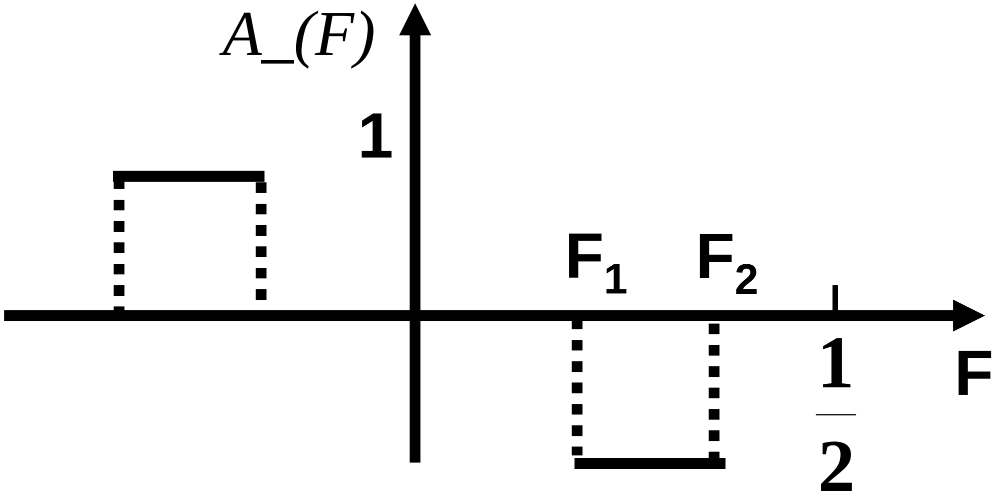
$$H_0(F) = jFe^{-j2\pi F\alpha}$$

$$h_0(n) = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{2\pi F_2\cos\left[2\pi F_2(n-\alpha)\right] - 2\pi F_1\cos\left[2\pi F_1(n-\alpha)\right]}{n-\alpha} - \right.$$

$$\left. \frac{sen\left[2\pi F_2(n-\alpha)\right] - sen\left[2\pi F_1(n-\alpha)\right]}{(n-\alpha)^2} \right\}, \quad n-\alpha \neq 0$$

$$h_0(n) = 0, \quad n-\alpha = 0$$ **(** N ***dispari*****)**

3. Trasformatore di Hilbert generalizzato



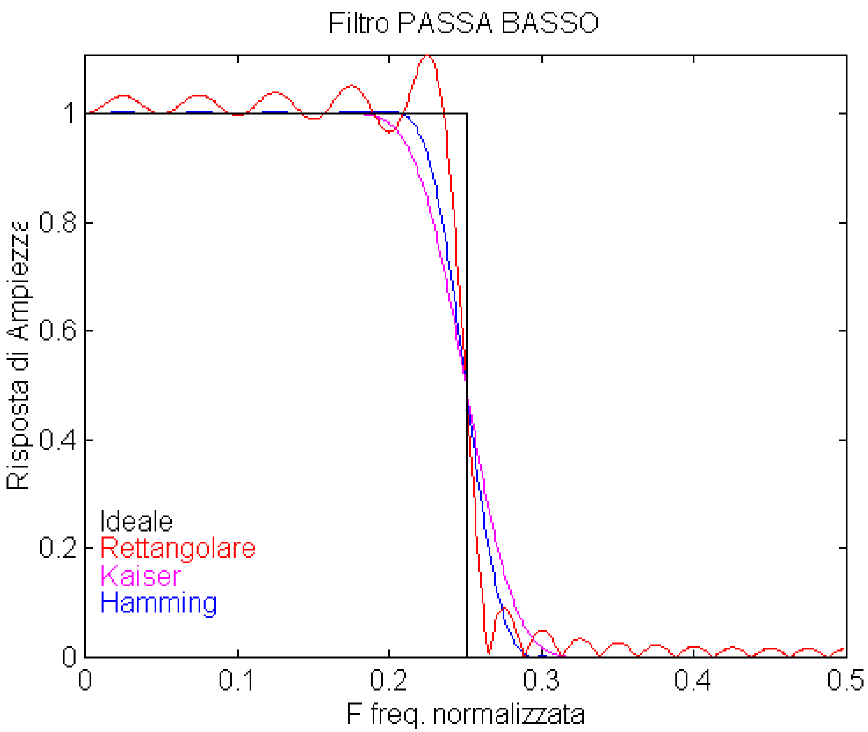
$$H_0(F) = -j\,\mathrm{sgn}\,F\,e^{-j2\pi F\alpha}, \qquad F_1 < |F| < F_2$$

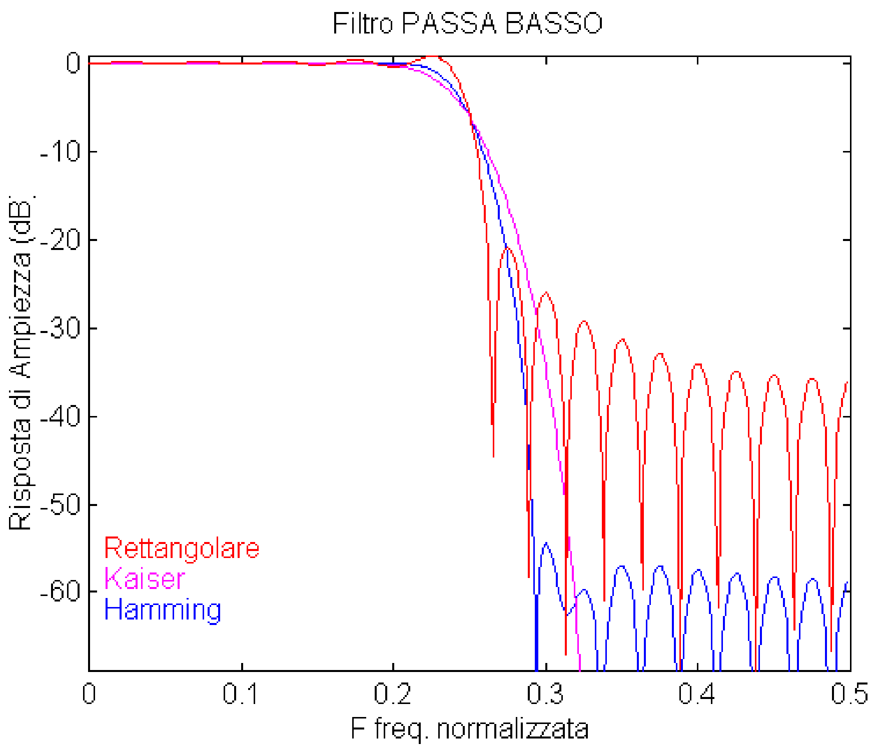
$$h_0(n) = \frac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{ \cos[2\pi F_1(n-\alpha)] - \right.$$

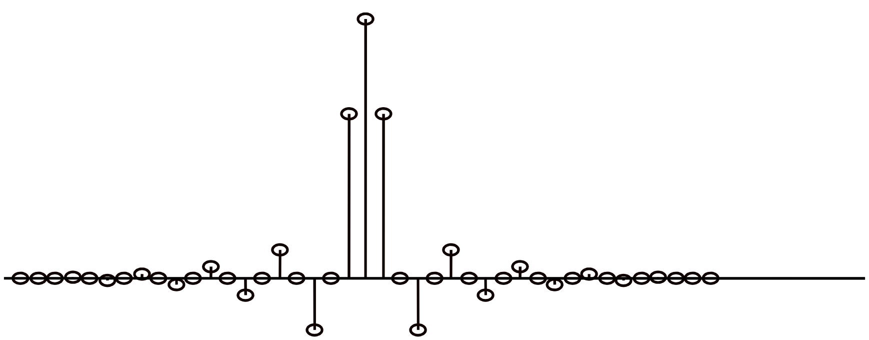
$$\left. \cos[2\pi F_2(n-\alpha)] \right\}, \quad n-\alpha \neq 0$$

$$h_0(n) = 0\,, \quad n-\alpha = 0$$ **(** N ***dispari*****)**

ESEMPI





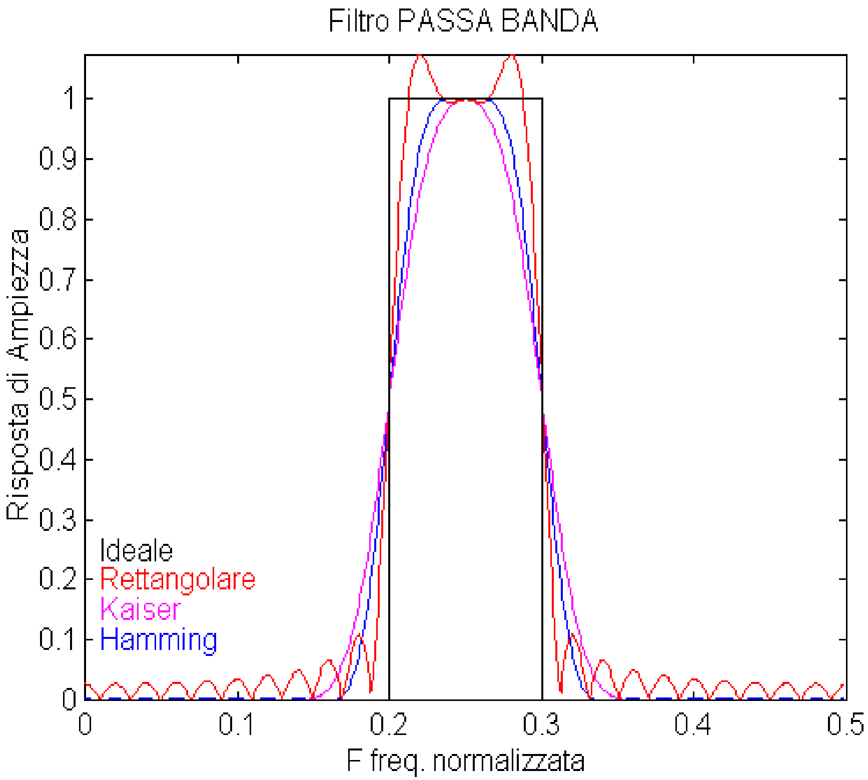


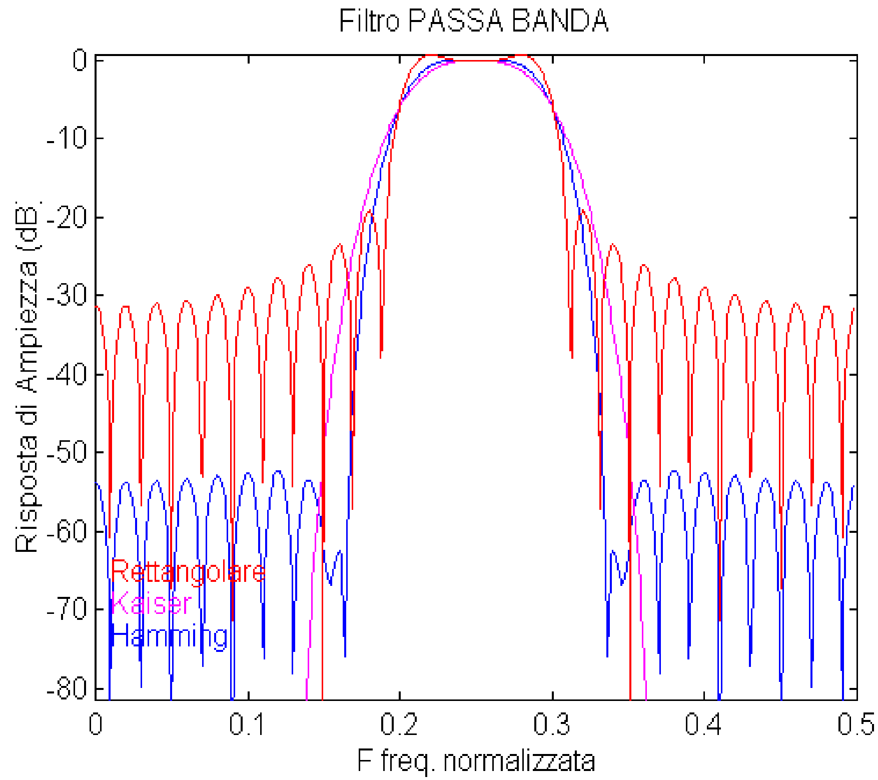
Progetto di filtro passa basso ($N=41$, banda passante 0-0.25)

Risposte in ampiezza (lineare e in dB) dei filtri progettati col metodo delle finestre confrontate con la risposta ideale desiderata.

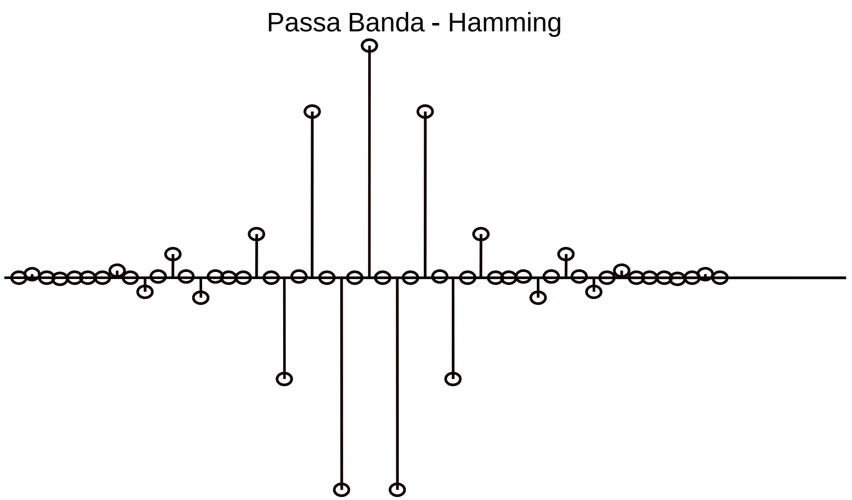
Risposta impulsiva del filtro progettato con la finestra di Hamming.

Notare i campioni nulli a passi dispari dal campione centrale, tipici di un filtro “half-band”.





Progetto di filtro passa banda ($N=51$, $F_1=0.20$, $F_2=0.30$) Risposte in ampiezza (lineare e in dB) dei filtri progettati col metodo delle finestre confrontate con la risposta ideale desiderata.



Risposta impulsiva del filtro progettato con la finestra di Hamming.

METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

- **Si campiona la risposta in frequenza desiderata in N punti equispaziati**

$$H(k) = H_0(F)\Big|_{F=\frac{k}{N}} \qquad\qquad 0 \le k \le N-1$$

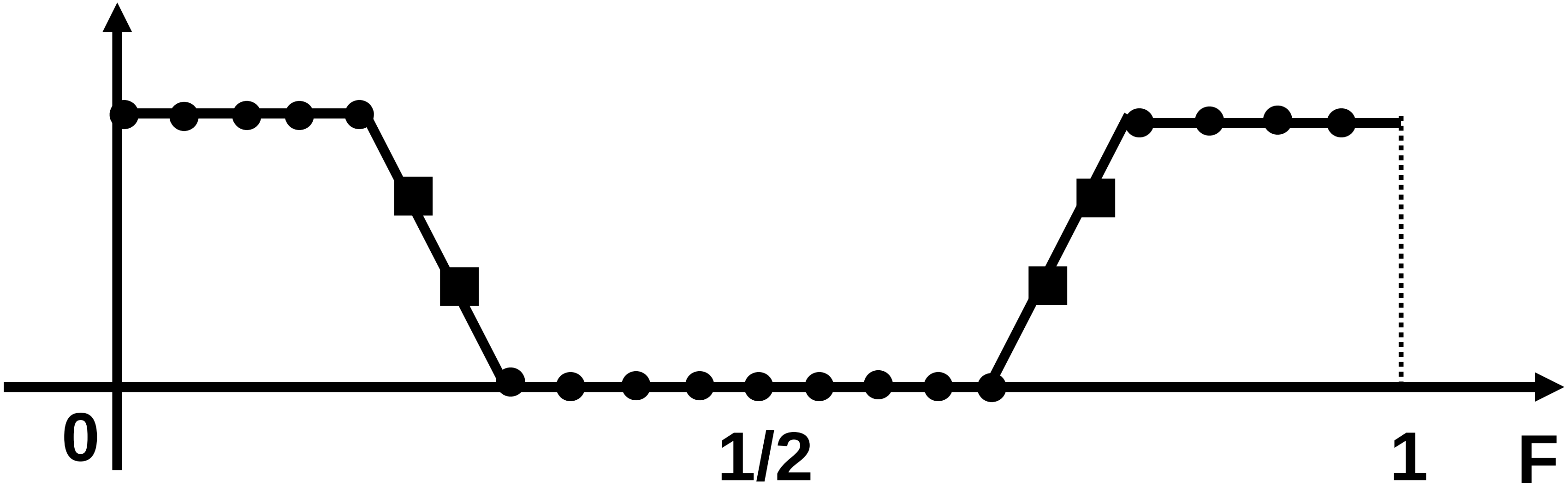
- **Si calcolano**

$$h(n) = IDFT_N\{H(k)\}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

che implica un errore

$$E(F) = H(F) - H_0(F) \neq 0 \qquad F \neq \frac{k}{N}$$

- **Per ridurre** $E(F)$



si fanno variare i campioni ■ nella banda di transizione, fino a minimizzare una norma prescelta di $E(F)$**. Generalmente due o tre campioni nella banda di transizione sono sufficienti. Soluzione mediante tecniche di programmazione lineare.**

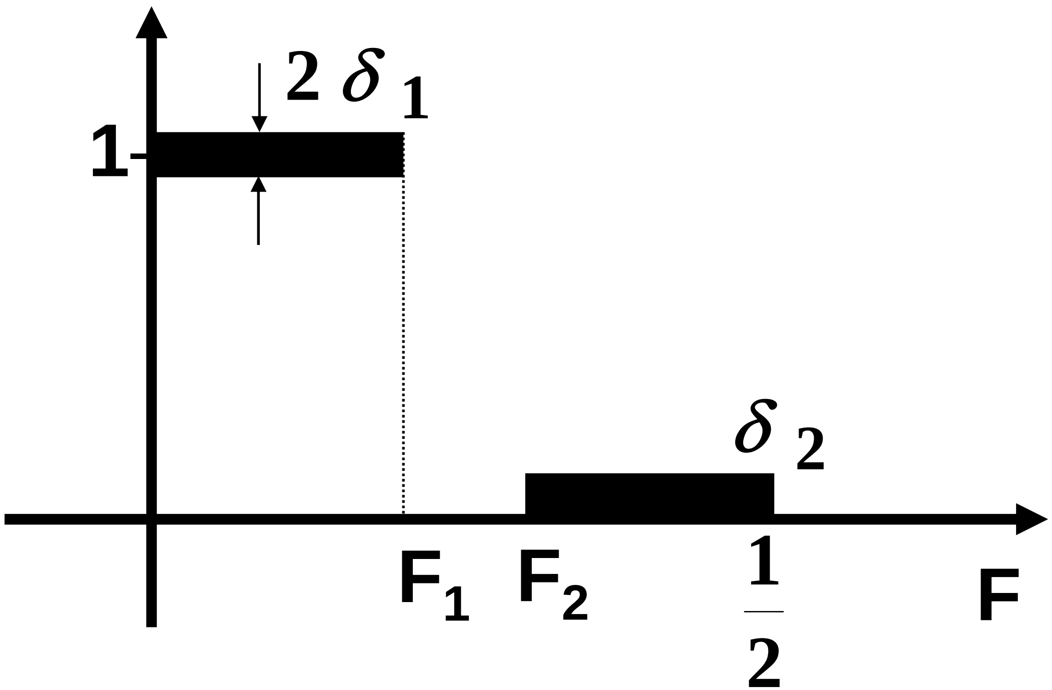
<u>Osservazione</u>: applicabile a qualunque risposta in frequenza

CRITERIO DI CHEBYCHEV

Con questo metodo si vuole minimizzare l'errore massimo della risposta in ampiezza ovvero avere uguali deviazioni massime rispetto alla risposta in ampiezza desiderata (minmax, equiripple)

CRITERIO DI CHEBYCHEV

- **Si parte da specifiche (es. passa-basso)**



δ_1 **deviazione max in banda passante**

δ_2 **deviazione max in banda attenuata**

- **cinque parametri interdipendenti**

$$N \quad F_1 \quad F_2 \quad \delta_1 \quad \delta_2$$

- **Programma Parks - Mc Clellan (FIR a fase lineare)**

Ingressi	**Uscite**
• **Tipo filtro (multibanda / derivatore / Hilbert)**	$h(n)$
• N	$\delta_1,\ \delta_2$ **(equiripple, minmax)**
• **Estremi bande (passanti e attenuate)**	
• **Peso relativo deviazione in banda passante e in banda attenuata**	

■ Formule di progetto per FIR a fase lineare

- **Stima di N per passa-basso (errore entro 10%)**

$$N \cong \frac{2}{3}\frac{1}{F_2 - F_1} Log_{10}\left(\frac{1}{10\delta_1\delta_2}\right)$$

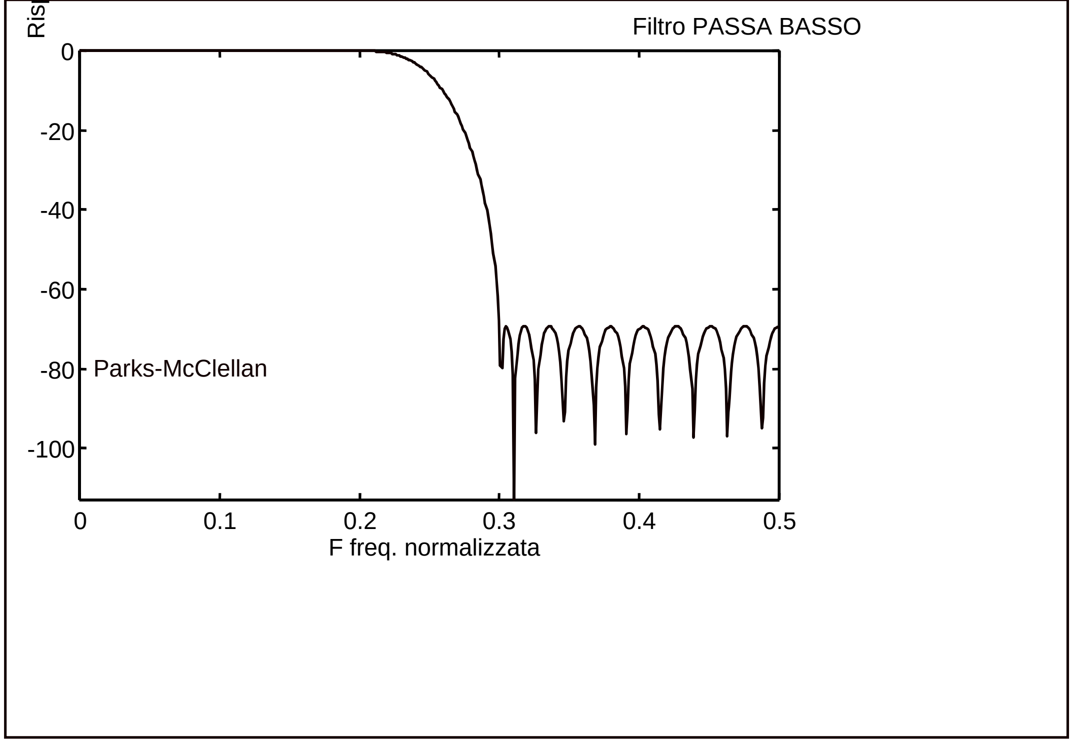
- **N è *inversamente proporzionale* alla larghezza della banda di transizione normalizzata $F_2 - F_1$**

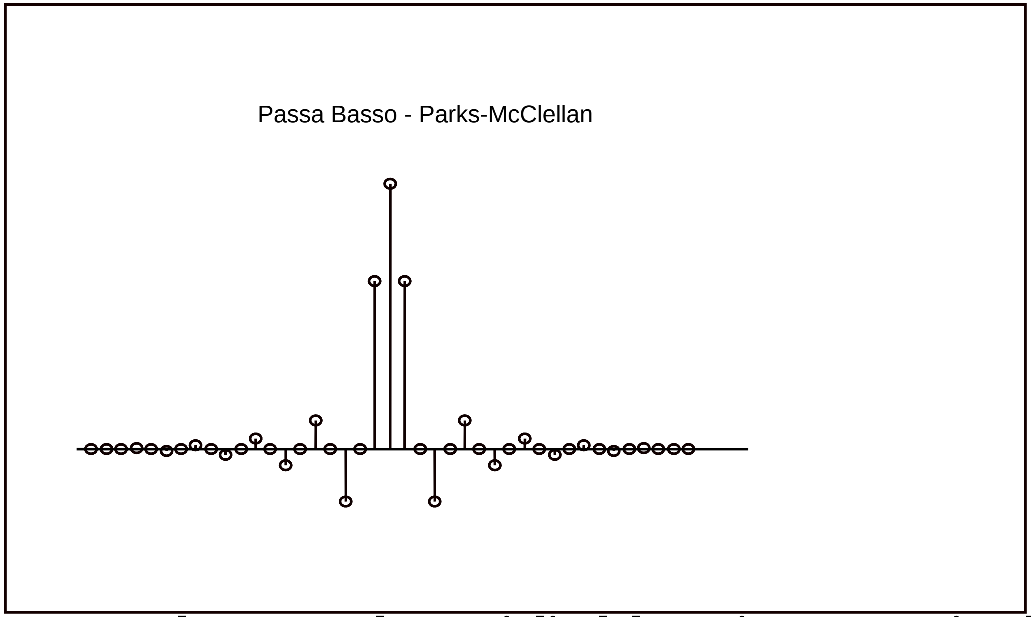
- N **è meno sensibile a variazioni di** $\delta_1 \, e \, \delta_2$

- N **non dipende da** F_1 **e da** F_2 **singolarmente, ma solo da** $(F_2 - F_1)$

  [con ottima approssimazione]

- **La stima di** N **si può estendere ragionevolmente anche a filtri di tipo diverso dal passa-basso**





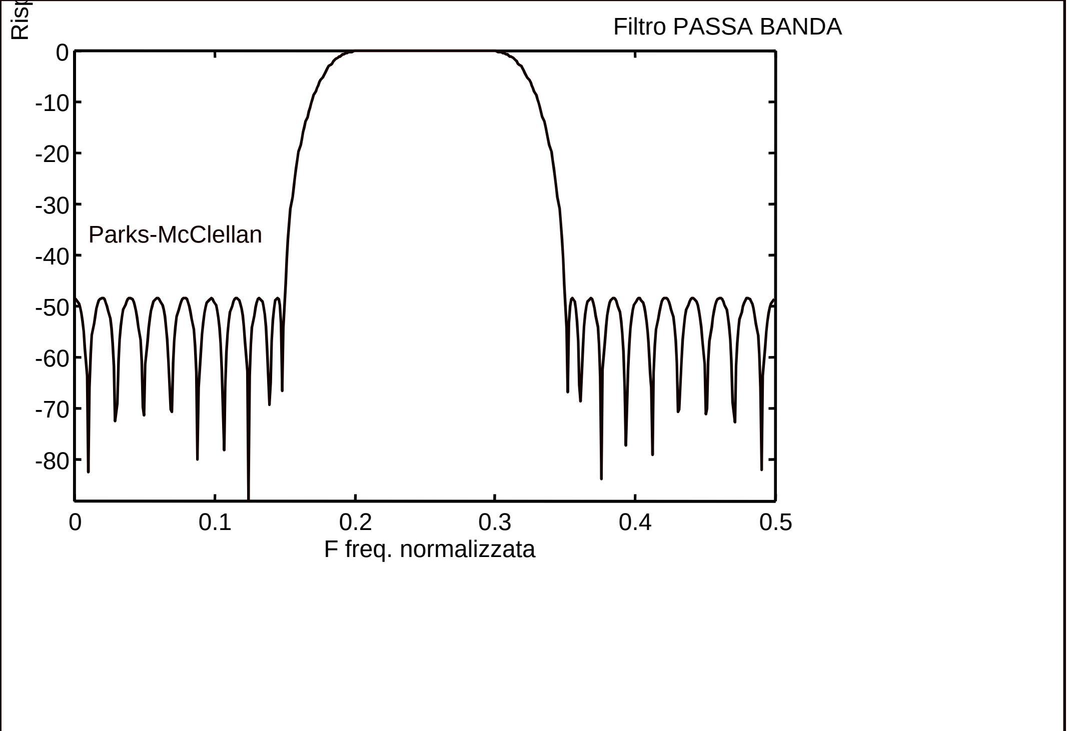
Risposta in ampiezza e impulsiva
di un filtro passa-basso equiripple

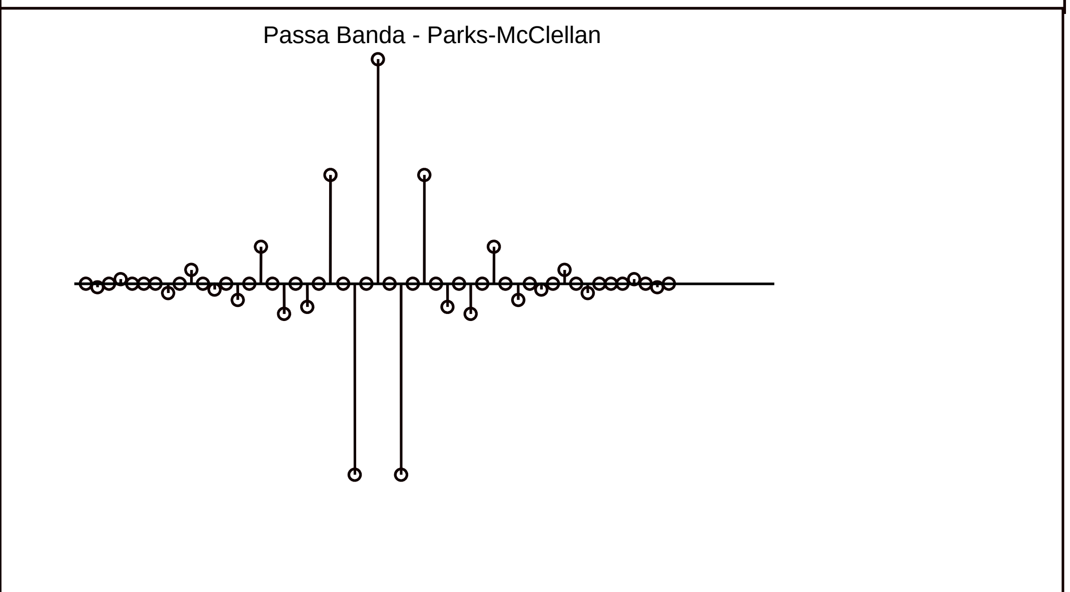
N=41

F1=0.2 fine banda passante

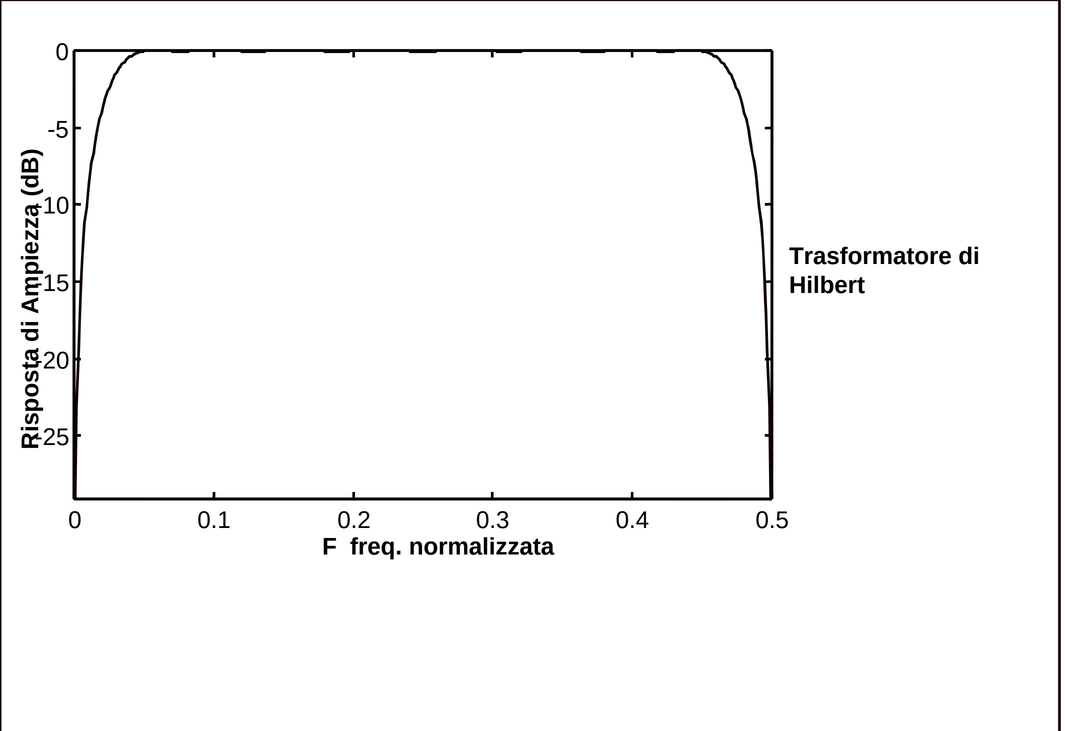
F2 =0.3 inizio banda attenuata

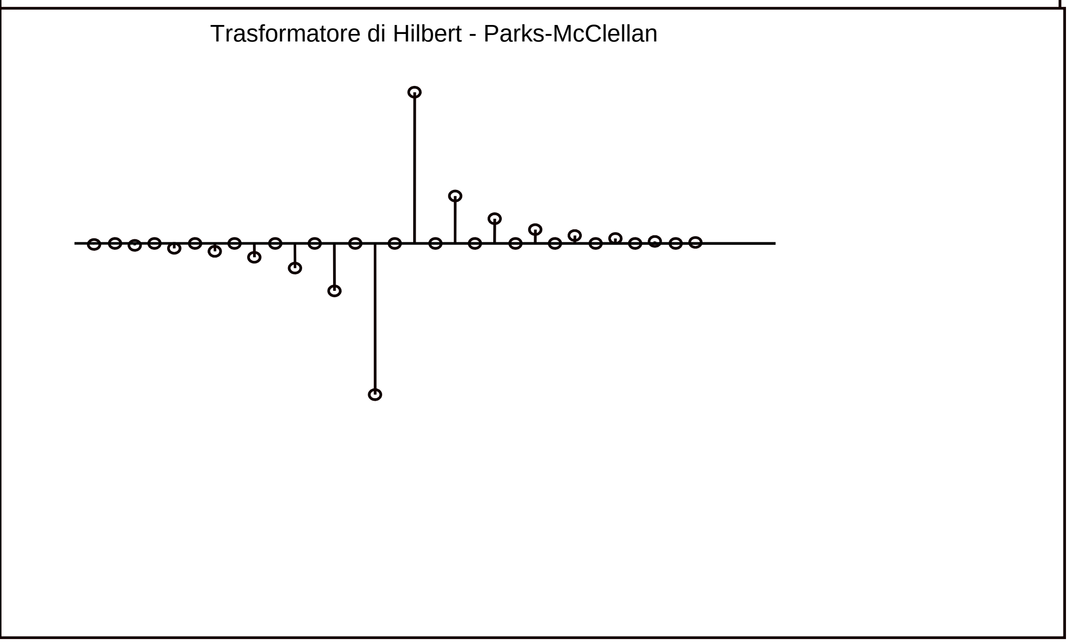
W =1 peso relativo banda attenuata



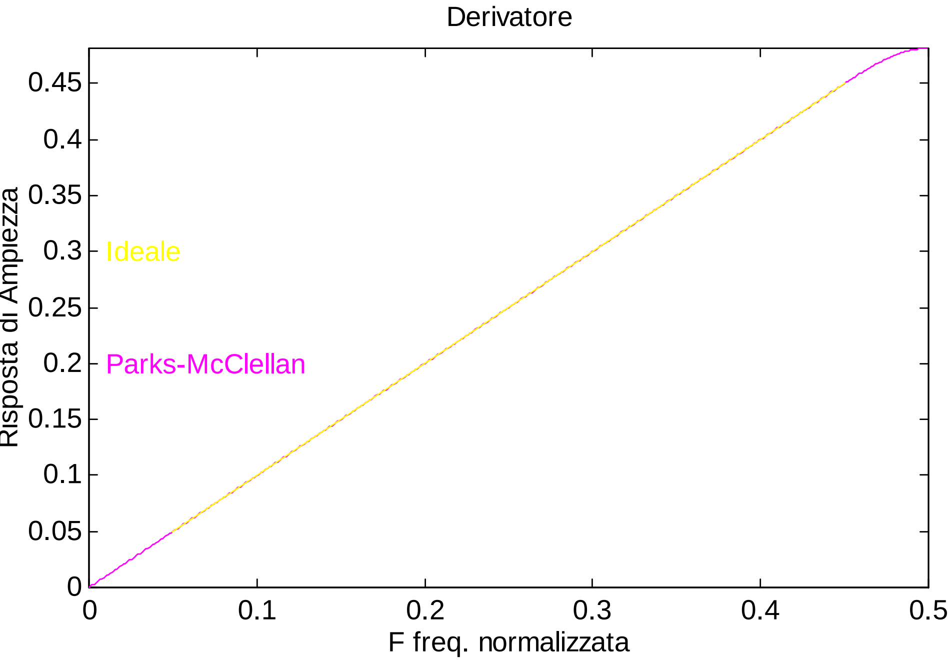


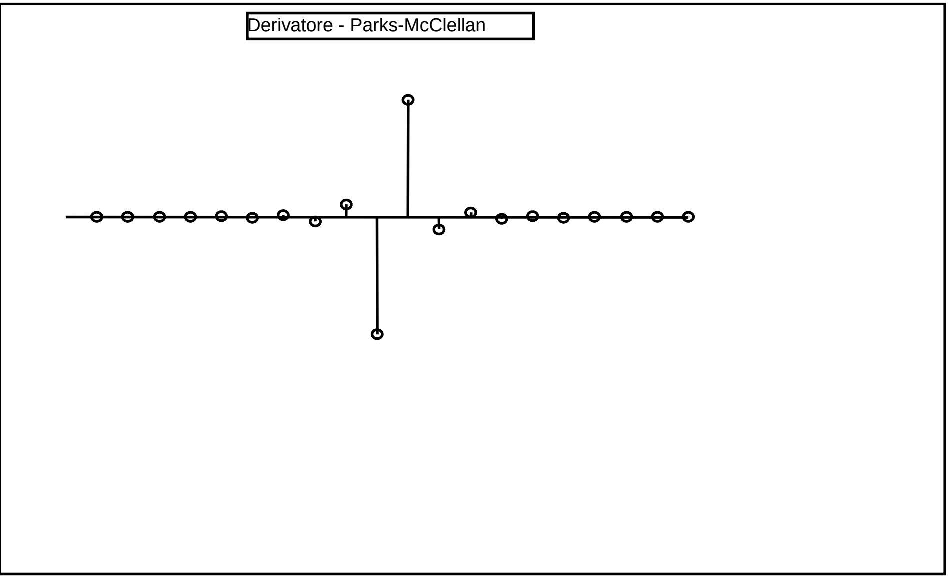
Risposta in ampiezza e impulsiva
di un filtro passa-banda equiripple
N=51
F1= 0.15 fine I banda attenuata
F2= 0.20 inizio banda passante
F3 =0.30 fine banda passante
F4 =0.35 inizio II banda attenuata





Risposta in ampiezza e impulsiva
di un trasformatore di Hilbert equiripple
N=31
F1= 0.05 inizio banda trasformatore
F2= 0.45 fine banda traformatore





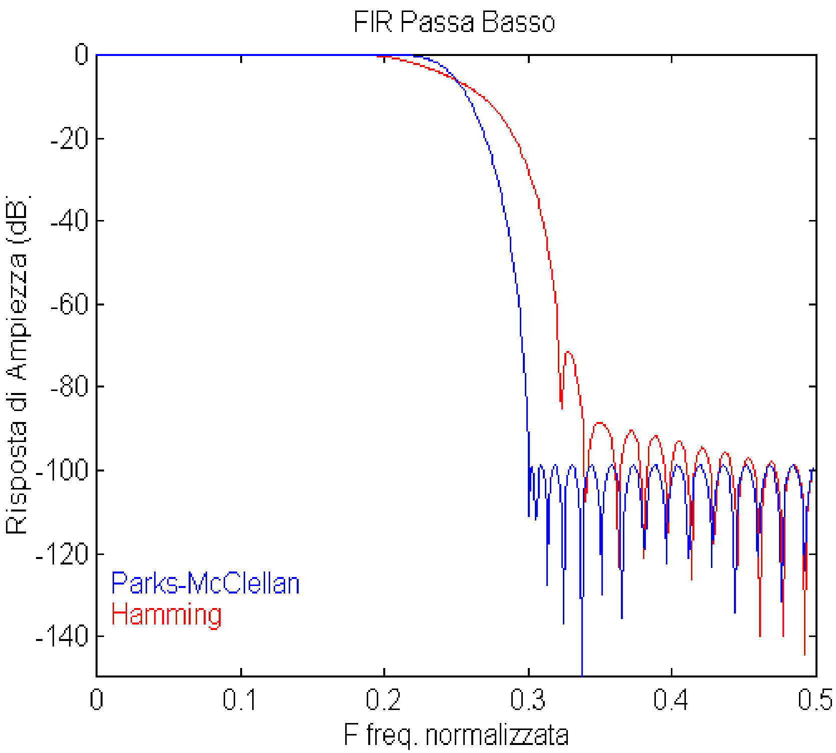
Risposta in ampiezza e impulsiva di un derivatore equiripple

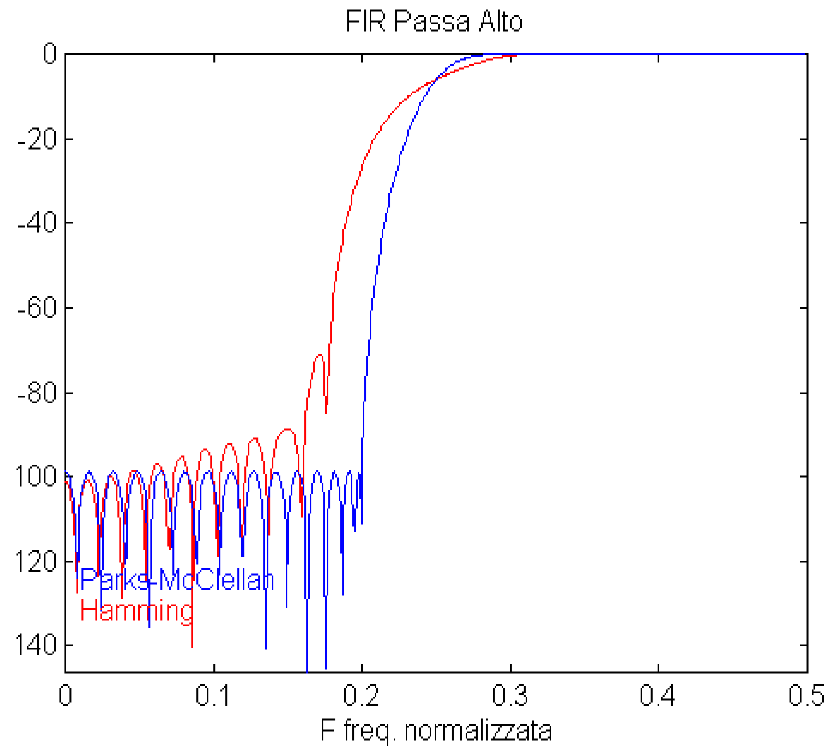
N=20

F1= 0.05 inizio banda derivatore

F2 =0.45 fine banda derivatore

Confronto FIR – Metodi Chebychev e finestre



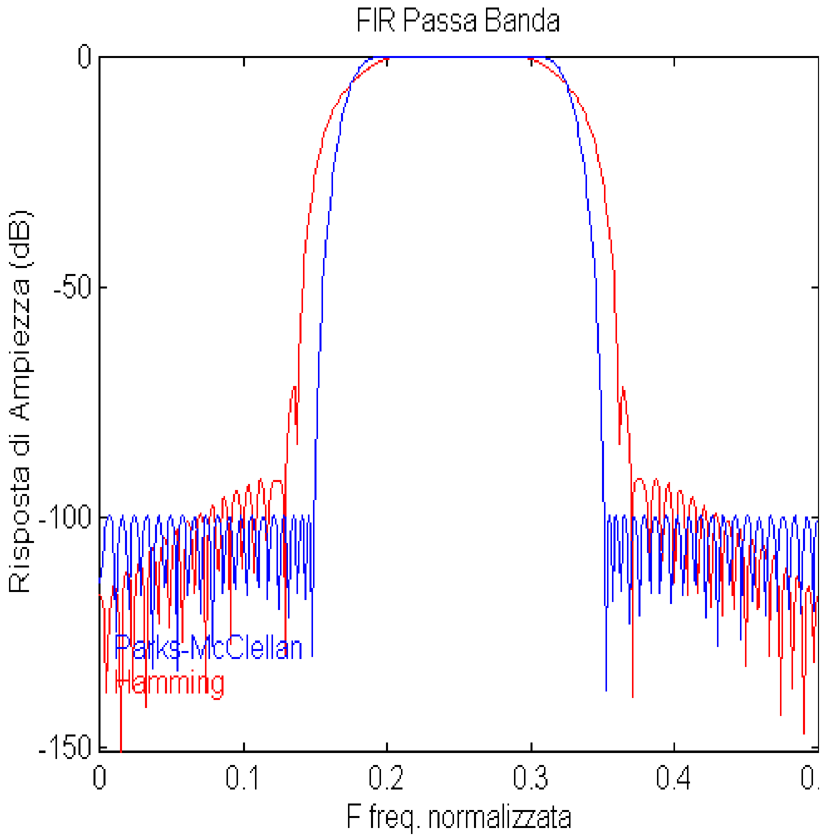


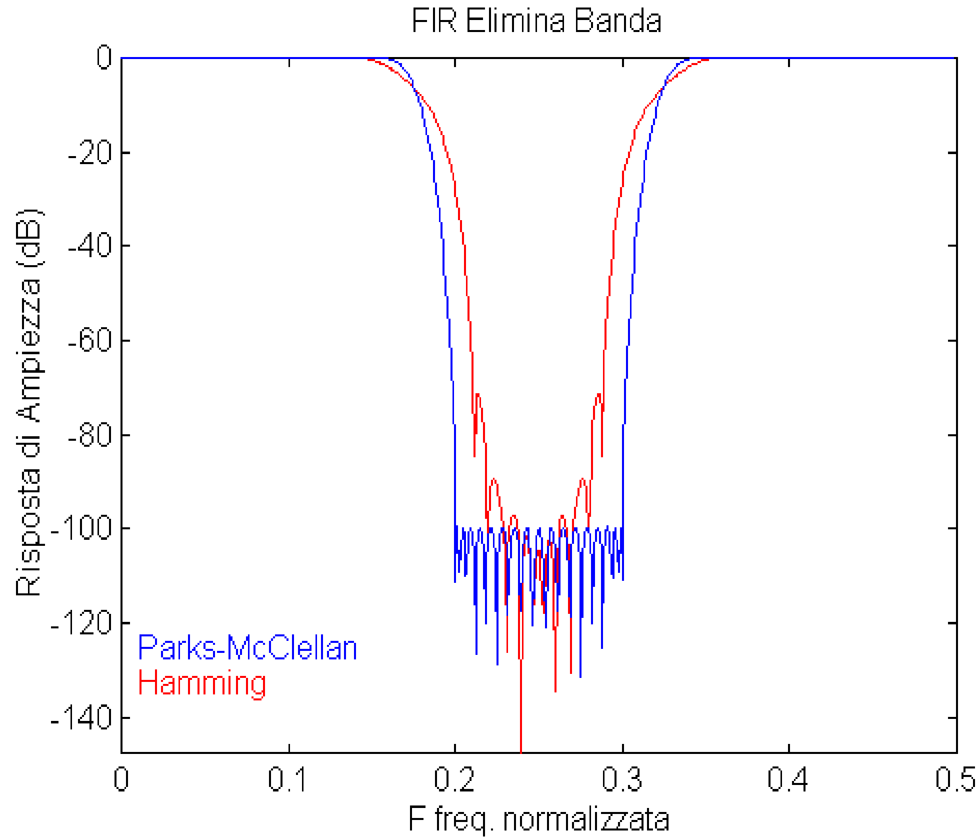
Confronto di progetti per un filtro passa-basso
- FIR progettato col metodo a finestre
- FIR progettato col metodo di Parks-McClellan (equiripple)

N=60,
F1 = 0.20 fine banda passante ,
F2 = 0.30 inizio banda attenuata

Confronto di progetti per un filtro passa-alto
- FIR progettato col metodo a finestre
- FIR progettato col metodo di Parks-McClellan (equiripple)

N=61,
F1 = 0.20 fine banda attenuata ,
F2 = 0.30 inizio banda passante





Confronto di progetti per un filtro passa-banda
- FIR progettato col metodo a finestre
- FIR progettato col metodo di Parks-McClellan (equiripple)

N=120,
0-0.15 prima banda attenuata,
0.2-0.3 banda passante,
0.35-0.5 seconda banda attenuata

Confronto di progetti per un filtro elimina-banda
- FIR progettato col metodo a finestre
- FIR progettato col metodo di Parks-McClellan (equiripple)

N=121,
0-0.15 prima banda passante,
0.2-0.3 banda attenuata,
0.35-0.5 seconda banda passante)

Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

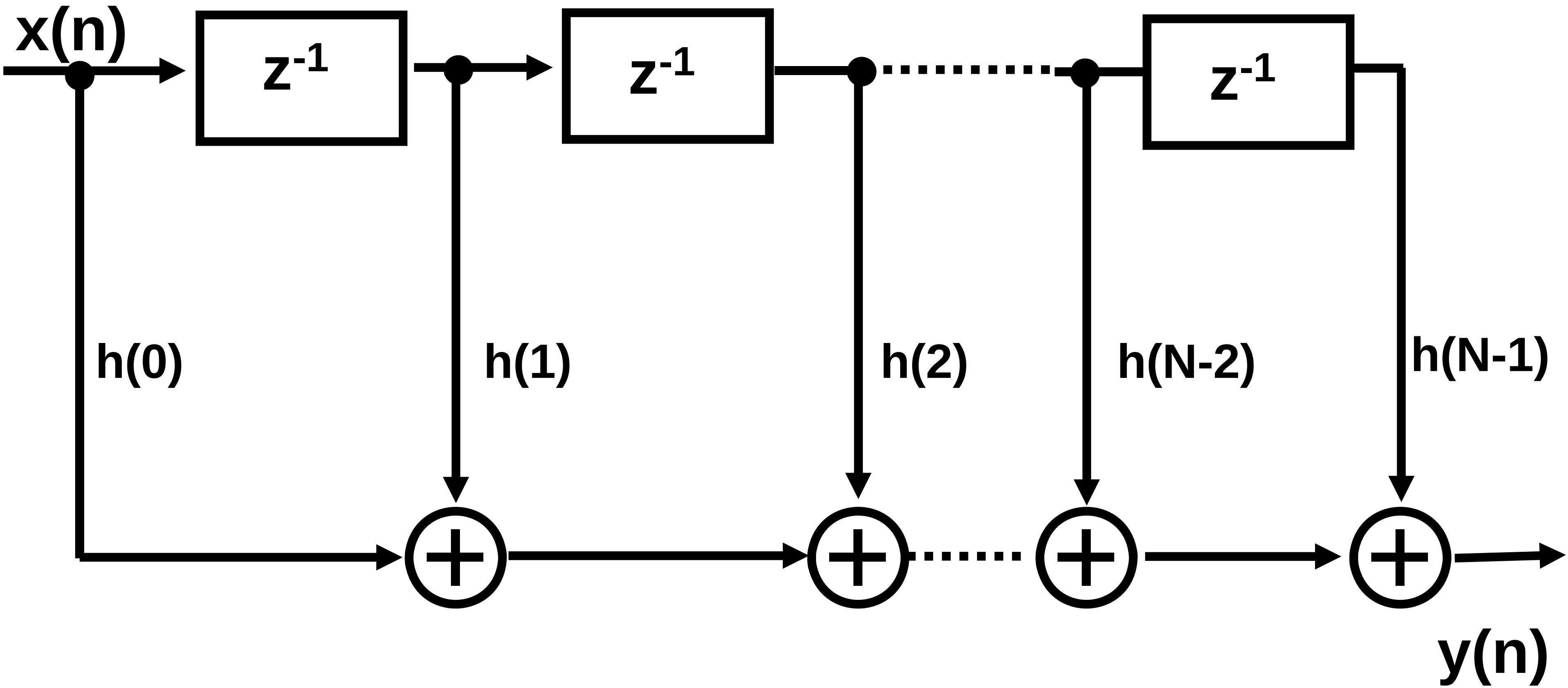
(reperibili a: http://lenst.det.unifi.it/node/379)

- FIR-finestre
- FIR-equi
- FIR-confronto

STRUTTURE REALIZZATIVE

**Rappresentano la struttura realizzativa <u>dell'algoritmo</u> di filtraggio.
Non necessariamente coincide con la struttura realizzativa circuitale.**

- **Diretta**



$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}\,, \qquad y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

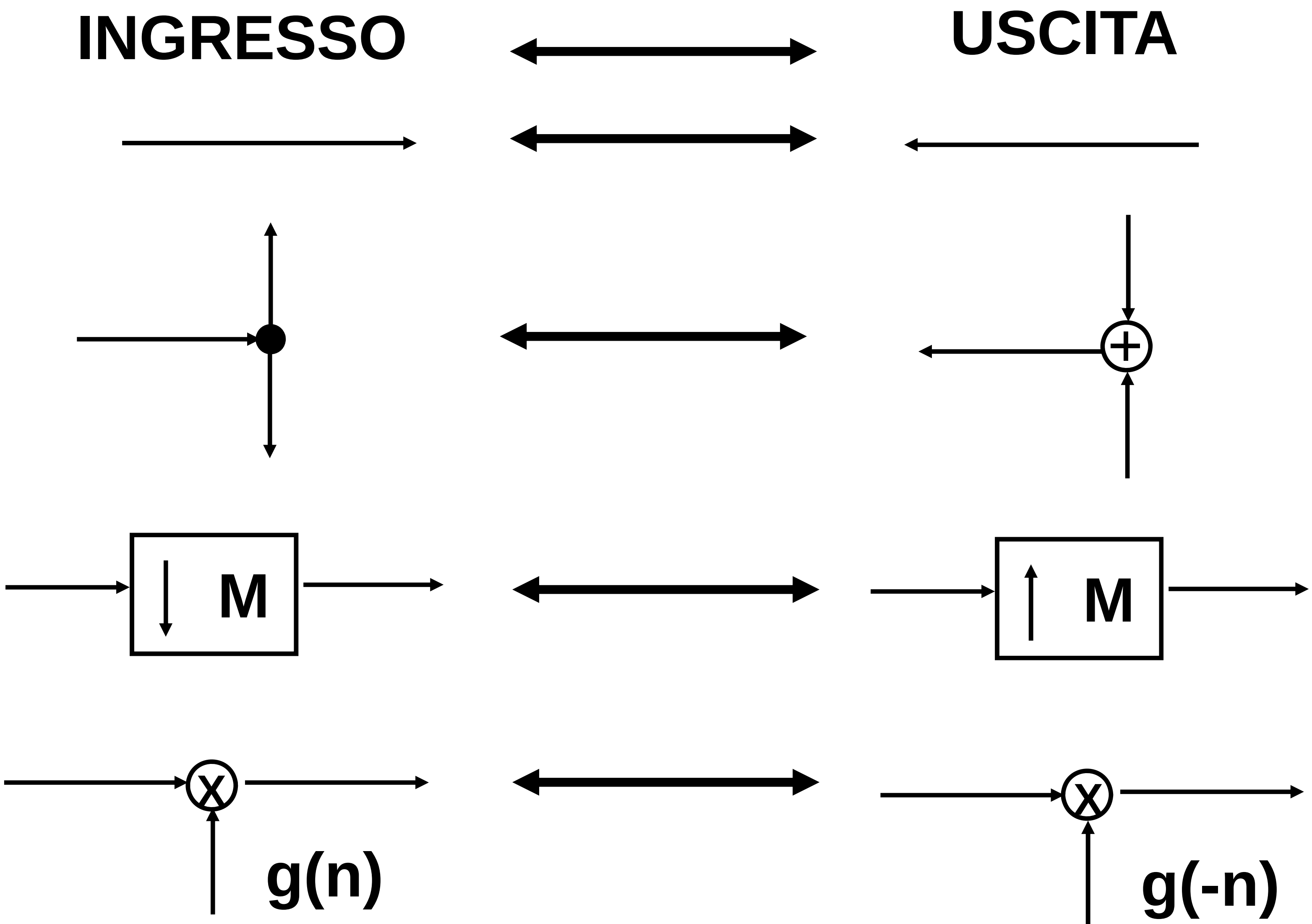
■ Teorema di trasposizione

La funzione di trasferimento del sistema non cambia applicando le regole di trasposizione ad una struttura realizzativa.

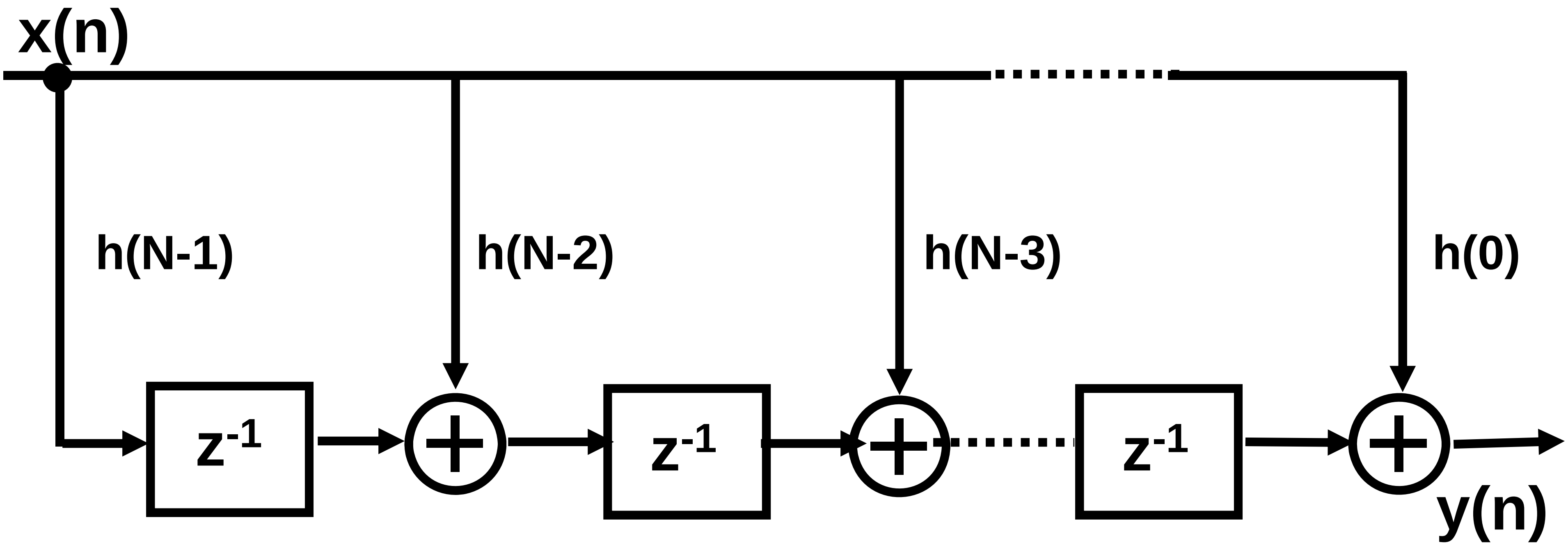
Regole di trasposizione

- scambiare ingresso e uscita
- invertire il senso del flusso dei segnali
- punti di diramazione diventano punti di somma e viceversa
- un’operazione di moltiplicazione per una sequenza $g(n)$ si trasforma in una moltiplicazione per $g(-n)$
- L’operazione di sottocampionamento si trasforma in operazione di incremento della frequenza di campionamento dello stesso fattore e viceversa

Operazioni di trasposizione fra strutture realizzative



Trasposta



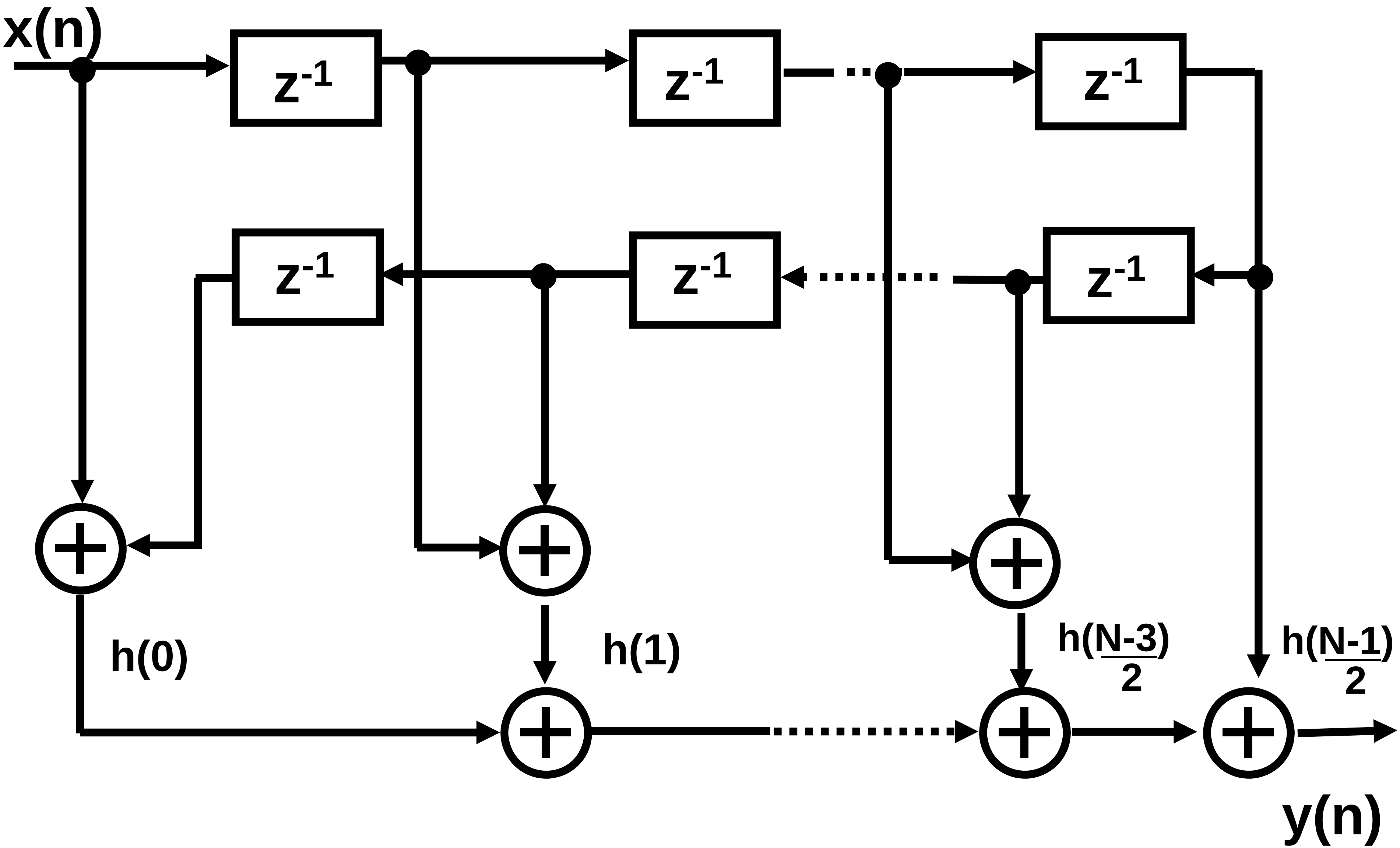
Complessità

Entrambe richiedono:

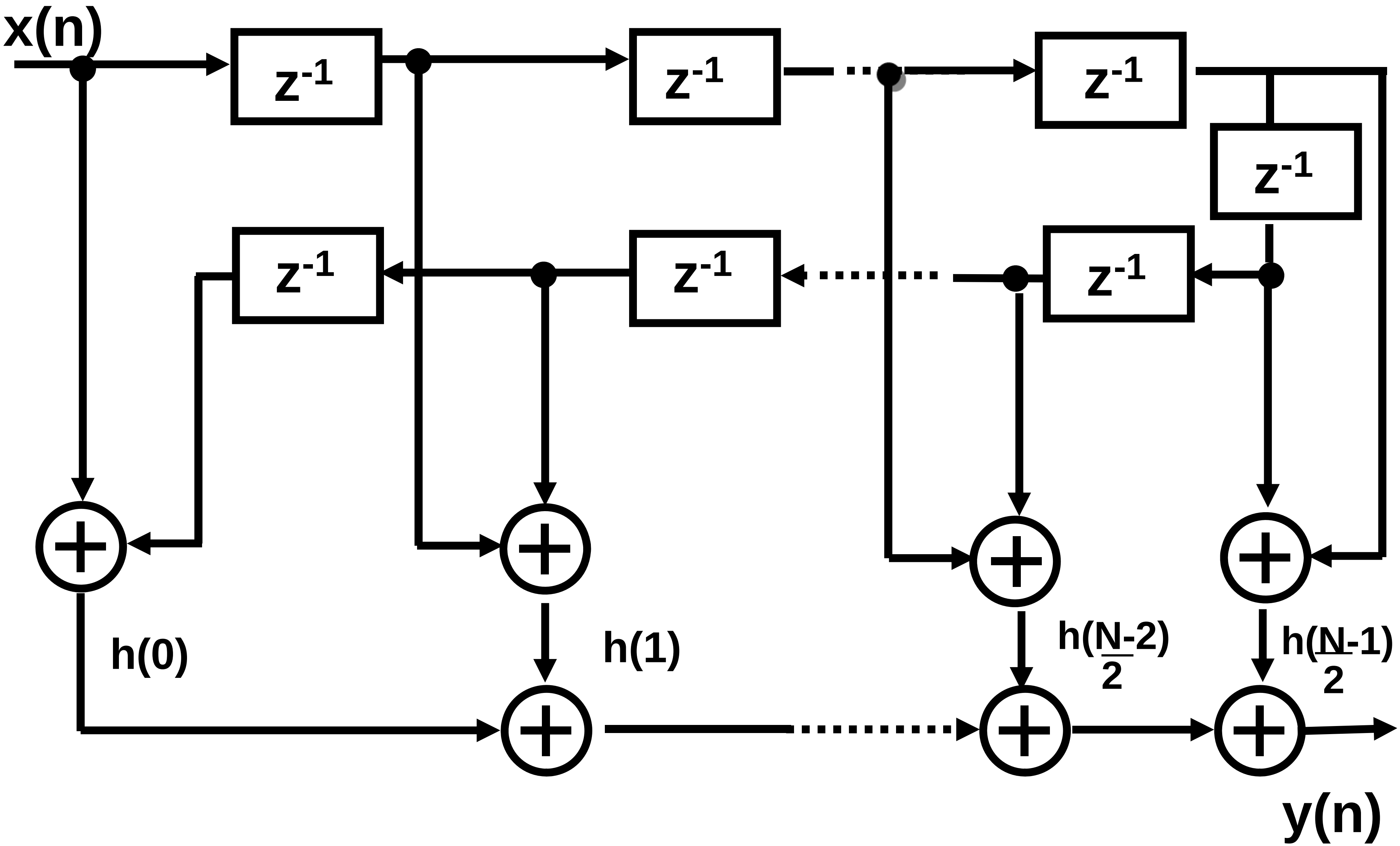
N **moltiplicazioni**

$N - 1$ **somme**

■ FIR a fase lineare N dispari



N pari



Complessità

***Moltiplicazioni* :** $\dfrac{N+1}{2}$ **(** N ***dispari*)**

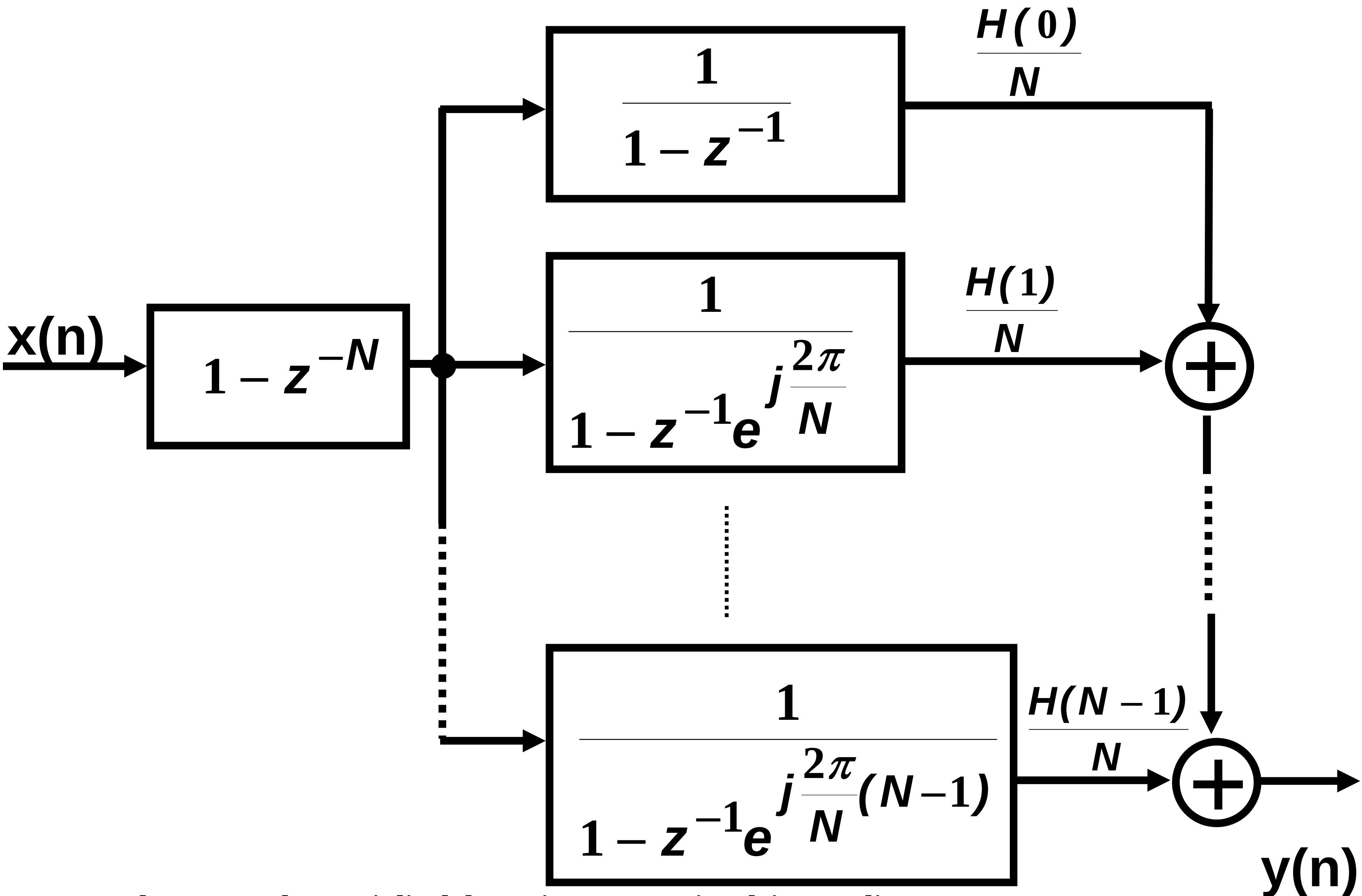
$\dfrac{N}{2}$ **(** N ***pari*)**

***Somme* :** $N-1$

■ FIR a campionamento in frequenza

In alternativa alle strutture precedenti

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$


x(n)
$1-z^{-N}$
$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$\frac{H(0)}{N}$
$\frac{1}{1-z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}}}$
$\frac{H(1)}{N}$
$\frac{1}{1-z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)}}$
$\frac{H(N-1)}{N}$
y(n)

- Un FIR più N IIR del $1°$ ordine (complessi)

- Struttura conveniente quando pochi $H(k) \neq 0$ (filtri a banda stretta)

- I filtri IIR hanno poli sul cerchio unitario: per evitare problemi di instabilità si spostano leggermente all'interno