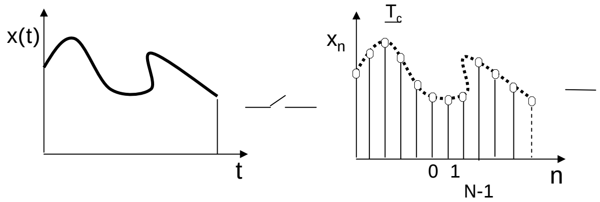
Campionamento

esercizi

1

Campionamento



Segnale analogico

Segnale campionato

$x(n)=x(nT_c)$

con T_c: passo di campionamento e $f_c=1/T_c$ frequenza di campionamento

$$x_c(t)=x(t)p(t) \qquad p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_c)$$

$$x_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_c)\delta(t-nT_c)$$

Il segnale campionato è formato da una sequenza di campioni del segnale analogico

2

p(t) è periodico di periodo T ed è sviluppabile in serie di Fourier

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \quad \rightarrow \quad p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi\frac{k}{T}t} \quad \Leftrightarrow \quad P(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{k}{T})$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}p(t)e^{j2\pi\frac{k}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{j2\pi\frac{k}{T}t}dt=\frac{1}{T}$$

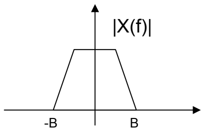
$$x_c(t)=x(t)p(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X_c(f)=X(f)*P(f)=X(f)*\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{k}{T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-\frac{k}{T})}$$

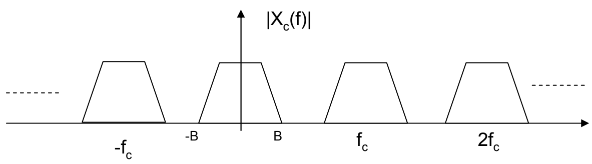
3

Lo spettro del segnale campionato è la somma di infinite repliche del segnale analogico traslate di multipli interi di f_c

$$X_c(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-kf_c)$$

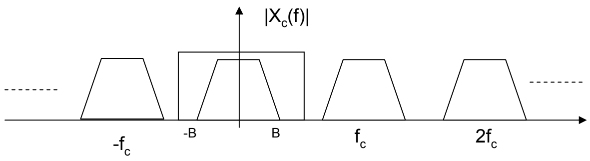
Se il segnale X(f) è a banda limitata e $f_c \geq 2B$ → Condizioni di non distorsione





È possibile idealmente ricostruire il segnale originario partendo dai campioni senza distorsione

4



$$H(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{f_C} & |f|\le \dfrac{f_C}{2}\\ 0 & altrove\end{cases}$$

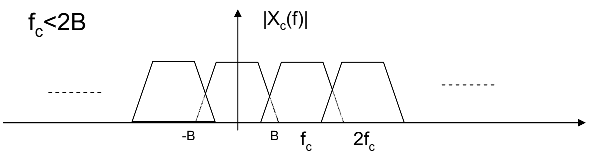
$$\begin{cases} x_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t-nT_c) \\ h(t)=\dfrac{\sin\pi f_c t}{\pi f_c t}\end{cases}$$

$$X(f)=X_C(f)H(f) \quad\Rightarrow\quad x(t)=x_C(t)*h(t)$$

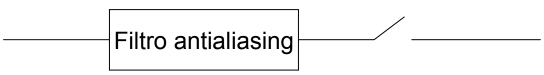
$$\boxed{x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin\pi f_C(t-nT)}{\pi f_C(t-nT)}}$$

5

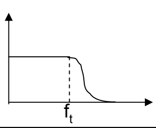
Se non sono soddisfatte le condizioni di non distorsione c'è ALIASING:



In generale non abbiamo a che fare con segnali in banda limitata ovvero nulli da un certo punto in poi → prima del campionamento filtro ANTIALIASING

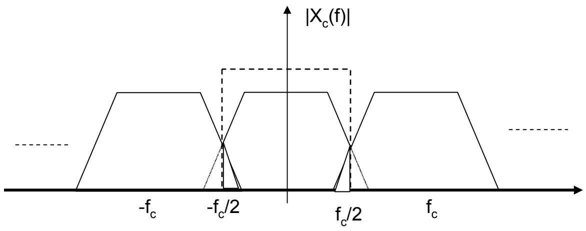


Se il filtro fosse ideale (rect) riuscirei a limitare perfettamente la banda



6

Rimane sempre una porzione di segnale oltre $f_c/2$ → i contributi delle repliche per $k \neq 0$ nella banda del segnale utile non sono nulli:



$$S = \int_{-\frac{f_c}{2}}^{\frac{f_c}{2}} |X(f)|^2 df = 2\int_{0}^{\frac{f_c}{2}} |X(f)|^2 df$$

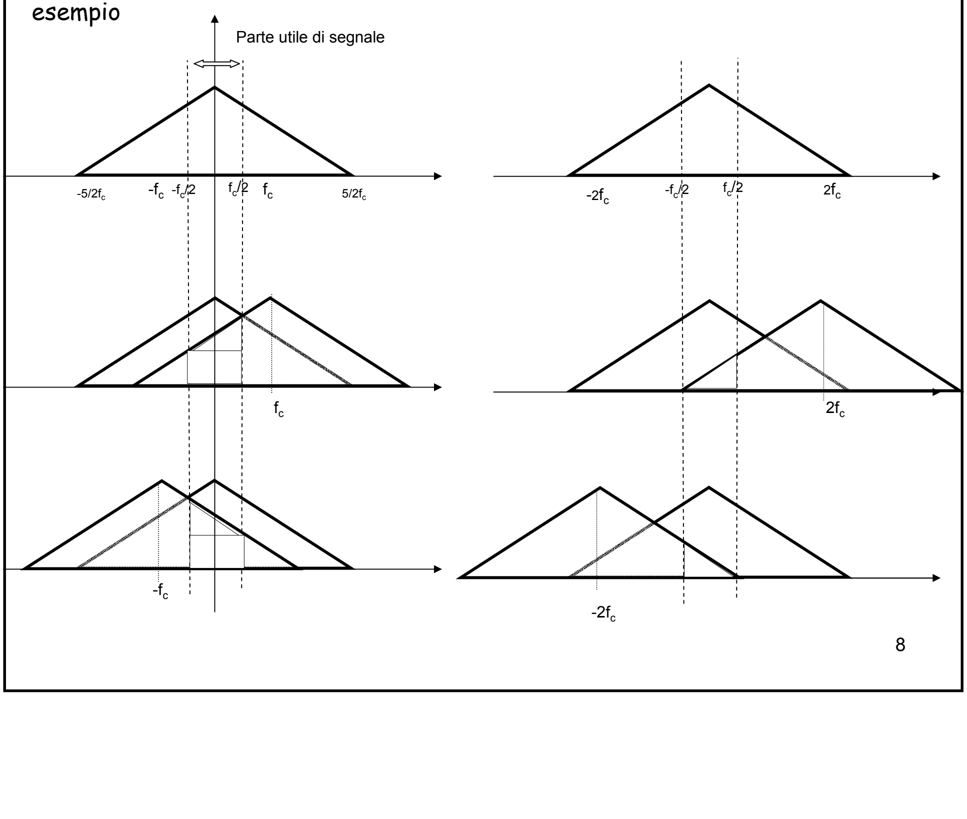
Energia (per segnali ad en finita)

$$D = \int_{-\infty}^{-\frac{f_c}{2}} |X(f)|^2 df + \int_{\frac{f_c}{2}}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2\int_{\frac{f_c}{2}}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$\frac{S}{D}$$ Rapporto segnale rumore

7

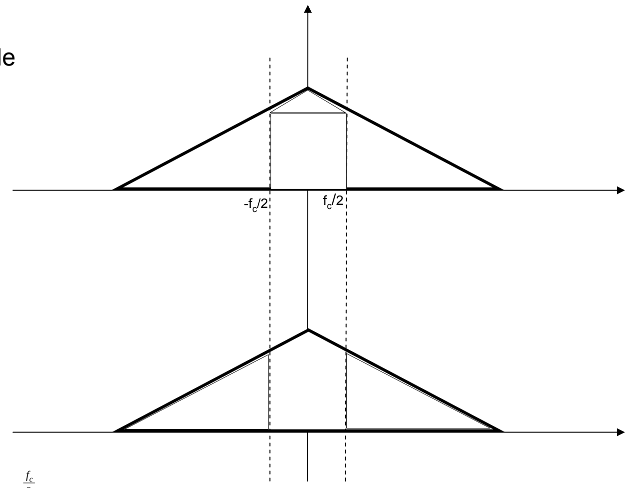
esempio



8

Segnale utile

Disturbo

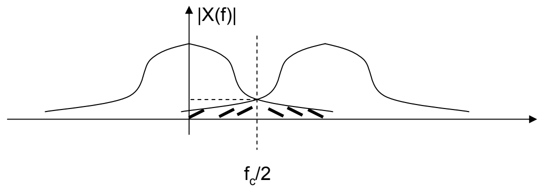


$$S = \int_{-\frac{f_c}{2}}^{\frac{f_c}{2}} |X(f)|^2 \, df = 2\int_{0}^{\frac{f_c}{2}} |X(f)|^2 \, df$$

$$D = \int_{-\infty}^{-\frac{f_c}{2}} |X(f)|^2 \, df + \int_{\frac{f_c}{2}}^{\infty} |X(f)|^2 \, df = 2\int_{\frac{f_c}{2}}^{\infty} |X(f)|^2 \, df$$

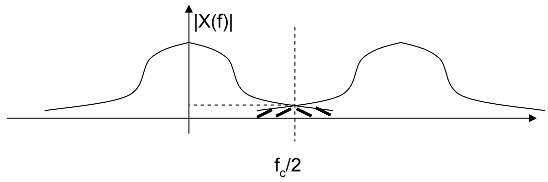
9

Un metodo approssimato per scegliere f_c tale che la degradazione sia sotto una certa soglia è:



In $f_c/2$ le repliche che si incontrano hanno lo stesso valore; supponendo che lo spettro vada velocemente a zero → le repliche k>1 e k<-1 sono trascurabili → un indice della distorsione è dato da $|X(f_c/2)|$

Più $|X(f_c/2)|$ è piccolo minore è la distorsione introdotta



$$\left| X\left(\frac{f_c}{2}\right) \right| < a\,(dB)$$

10

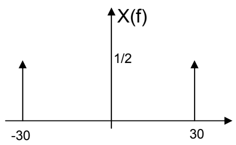
Esercizio

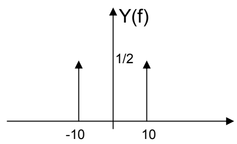
Si consideri x(t)=cos2π30t e y(t)=cos2π10t.
Si calcolino gli spettri dei segnali campionati alla frequenza f_c=40Hz

soluzione

$$x(t) = \cos 2\pi 30t = \frac{e^{j2\pi 30t} + e^{-j2\pi 30t}}{2} \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-30) + \frac{1}{2}\delta(f+30)$$

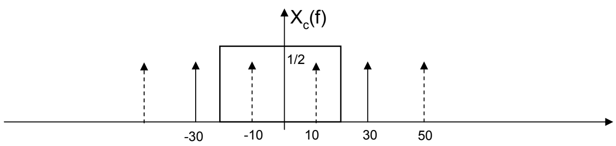
$$y(t) = \cos 2\pi 10t = \frac{e^{j2\pi 10t} + e^{-j2\pi 10t}}{2} \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-10) + \frac{1}{2}\delta(f+10)$$

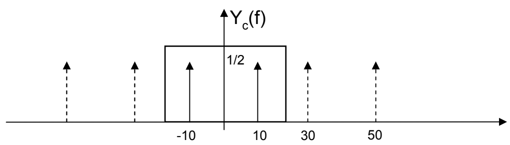


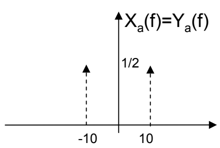


Per non avere aliasing in x(t) f_c>60Hz
fc=40Hz c'è distorsione

Per non avere aliasing in x(t) f_c>20Hz
fc=40Hz → non c'è distorsione





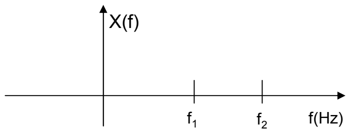


Per entrambi si ha lo stesso segnale "ricostruito"

$$X_a(f) = Y_a(f) = \frac{1}{2}\delta(f-10) + \frac{1}{2}\delta(f+10)$$
$$x_a(t) = y_a(t) = \cos 2\pi 10t$$

Esercizio

Si consideri un segnale x(t) avente spettro limitato alla banda (720,920)Hz. Si determini la minima frequenza di campionamento che permette di ricostruire il segnale a partire dai suoi campioni.



f_1=720Hz
f_2=920Hz

soluzione

Sicuramente se campioniamo a f_c>$2f_2$=1840Hz non c'è aliasing
Può essere trovata una frequenza di campionamento minore che garantisce l'assenza di distorsione.

Si deve avere: $f_c \geq 2B = 2(f_2 - f_1) = 400Hz$

Inoltre possiamo trovare f_c tale che:

$$k\frac{f_c}{2} \leq f_1 = 720Hz \quad e \quad (k+1)\frac{f_c}{2} \geq f_2 = 920Hz \quad con \quad k \quad intero$$

13

$$\begin{cases} \frac{f_c}{2} \geq 200Hz \\ k\frac{f_c}{2} \leq f_1 = 720Hz \\ (k+1)\frac{f_c}{2} \geq f_2 = 920Hz \end{cases}$$

$$con \quad k=1 \quad \frac{f_c}{2} \geq 200Hz$$

$$con \quad k=2 \quad 2\frac{f_c}{2} \geq 400Hz$$

$$con \quad k=3 \quad 3\frac{f_c}{2} \geq 600Hz$$

$$con \quad k=4 \quad 4\frac{f_c}{2} \geq 800Hz \quad ma \quad 4\frac{f_c}{2} \leq 760Hz$$

Quindi al massimo k=3

$$k=3$$

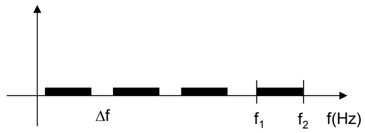
$$\begin{cases} 3\frac{f_c}{2} \leq 720Hz \\ 4\frac{f_c}{2} \geq 920Hz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_c \leq 480Hz \\ f_c \geq 460Hz \end{cases} \rightarrow 460 \leq f_c \leq 480Hz \Rightarrow \boxed{f_{c,min} = 460Hz}$$

14

Altra soluzione:

Numero di repliche di segnale che possono stare tra l'origine e f_1

$$M = \left\lfloor \frac{f_1}{B} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{720}{200} \right\rfloor = 3$$

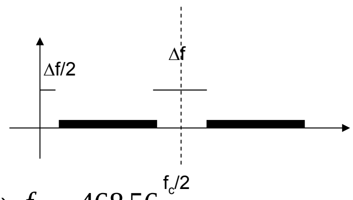


Banda di guardia tra le repliche:

Spazi di guardia uniformi

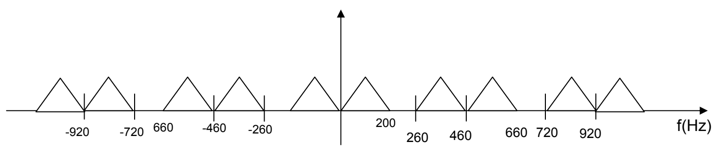
$$\Delta f = \frac{f_1 - MB}{M + \frac{1}{2}} = \frac{720 - 3 \cdot 200}{3{,}5} = \frac{120}{3{,}5} = 34{,}28\,Hz$$

Frequenza di campionamento:

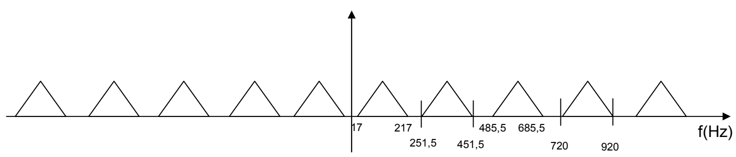


$$\frac{f_c}{2} = B + \frac{f_1 - MB}{M + 1/2} = 200 + 34{,}28 = 234{,}28 \quad \Rightarrow f_c = 468{,}56$$

Caso 1 f_c=460Hz



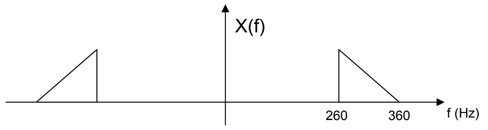
Caso 2 f_c=468,5Hz



Le ripetizioni dello spettro sono tutte separate

Esercizio

E' dato un segnale con spettro in figura:



Trovare la minima frequenza di campionamento che non da aliasing.

soluzione

$$\left.\begin{cases} \dfrac{f_c}{2} \geq B = 100Hz \\ k\dfrac{f_c}{2} \leq f_1 = 260Hz \\ (k+1)\dfrac{f_c}{2} \geq f_2 = 360Hz \end{cases}\right\} \quad con \quad k=3 \quad 3\frac{f_c}{2} \geq 300Hz \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{K<3}}$$

$$k = 2$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{f_c}{2} \leq 260Hz \\ 3\dfrac{f_c}{2} \geq 360Hz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_c \leq 260Hz \\ f_c \geq 240Hz \end{cases} \rightarrow 240 \leq f_c \leq 260Hz \quad \Rightarrow f_{c,min} = 240Hz$$

17

Altre soluzioni:

Bande di guardia uniformi tra le repliche

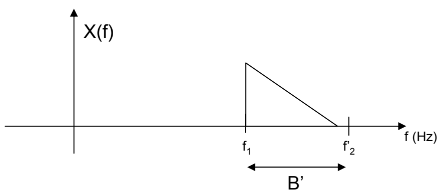
1

$$M = \left\lfloor \frac{f_1}{B} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{260}{100} \right\rfloor = 2 \qquad \Delta f = \frac{f_1 - MB}{M + 1/2} = \frac{260 - 2\cdot 100}{2{,}5} = \frac{120}{5} = 24Hz$$

$$\frac{f_c}{2} = B + \frac{f_1 - MB}{M + 1/2} = 100 + 24 = 124Hz \quad \Rightarrow f_c = 248Hz$$

Equivale a pensare di avere una banda un po' più ampia del segnale in modo che:

2

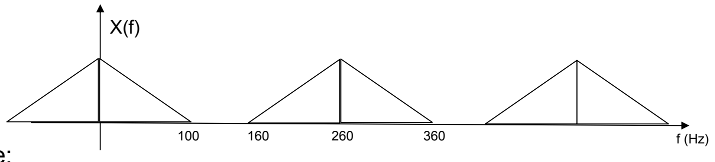


$$M = \frac{f_1}{B'} = intero \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor \frac{f_1}{B} \right\rfloor B' = f_1$$

$$f_c = 2B'$$

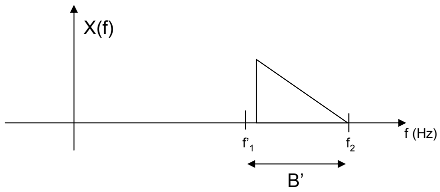
$$f_1 = \left\lfloor \frac{260}{100} \right\rfloor B' = 2B' \quad B' = \frac{f_1}{2} = 130Hz \quad f_2' = f_1 + 130 = 390Hz \quad f_c = 2B' = 260Hz$$

18



Oppure:

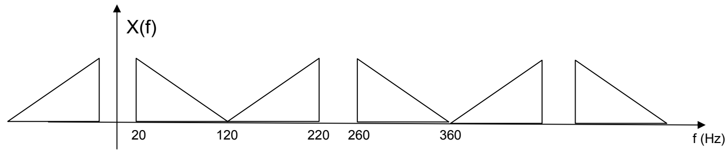
3



$$M = \frac{f_2}{B'} = intero \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor \frac{f_2}{B} \right\rfloor B' = f_2$$

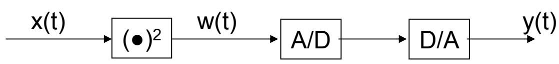
$$f_c = 2B'$$

$$f_2 = \left\lfloor \frac{360}{100} \right\rfloor B' = 3B' \quad B' = \frac{f_2}{3} = 120Hz \quad f_1' = f_2 - 120 = 240Hz \quad f_c = 2B' = 240Hz$$



Esercizio

Data la catena:

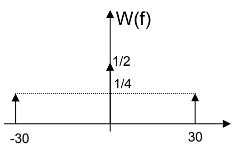


Se x(t)=cos30πt e f_c=40Hz determinare y(t).

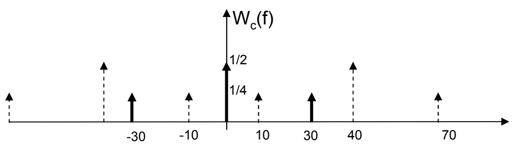
soluzione

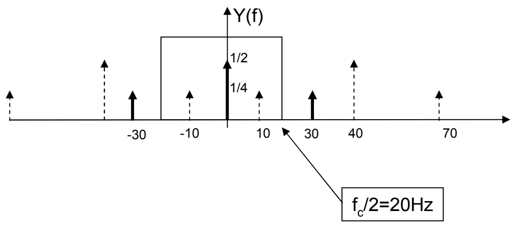
$$x(t) = \cos 30\pi t = \cos 2\pi 15t$$

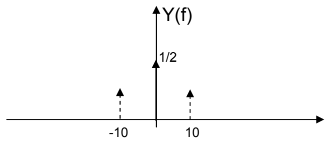
$$w(t) = \cos^2 2\pi 15t = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\pi 30t\right) = \frac{1}{2} + \frac{e^{j2\pi 15t} + e^{-j2\pi 15t}}{4} \Rightarrow$$



Per non avere aliasing dovrei avere f_c>60Hz



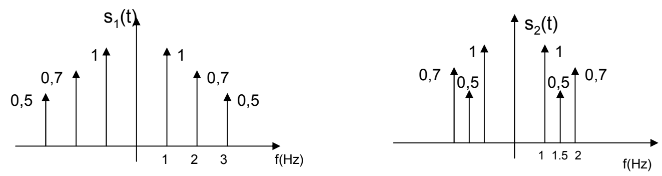




$$Y(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f-10)+\frac{1}{4}\delta(f+10) \quad \Leftrightarrow \quad y(t)=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\pi 10t\right)=\cos^2\left(\pi 10t\right)$$

Esercizio

Sono dati due segnali reali continui $s_1(t)$ e $s_2(t)$ con spettri:

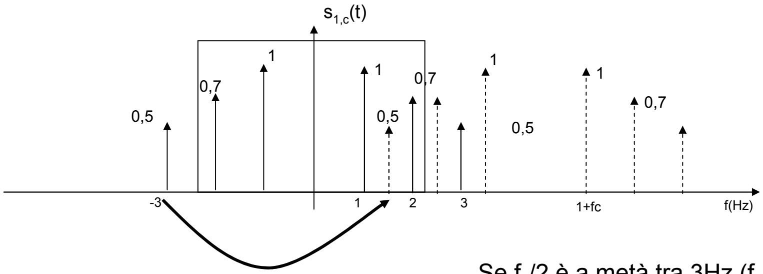


Determinare la frequenza di campionamento f_c per cui gli spettri dei due segnali campionati sono indistinguibili.

soluzione

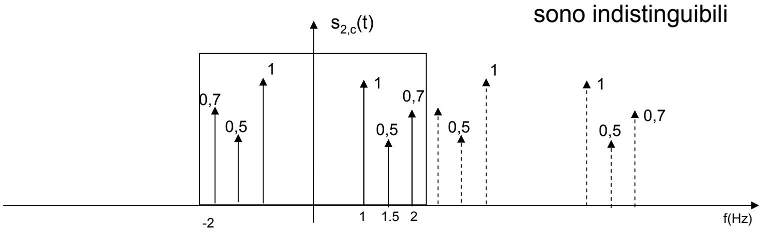
Devo fare in modo che la componente a 3Hz di $s_1(t)$ cada in 1.5Hz.

→$s_1(t)$ deve essere "distorto" → f_c<6Hz
→$s_2(t)$ deve non essere distorto → f_c>4Hz



f_3=3Hz $-f_3+f_c$=1,5Hz
f_c=1,5-(-3) Hz=4,5Hz

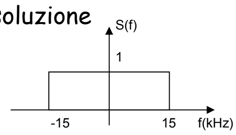
Se $f_c/2$ è a metà tra 3Hz (f_3)e 1.5Hz (f_2') dopo il campionamento i due segnali sono indistinguibili



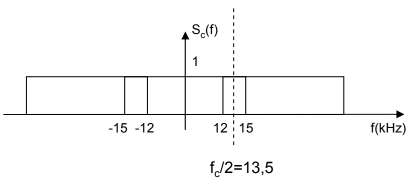
Esercizio

Si ha un segnale con spettro fino a 15KHz e densità spettrale di potenza uniforme e fc=27KHz determinare:
A- quale è la porzione di spettro del segnale non distorta
B- calcolare il rapporto tra la potenza di segnale utile la potenza della distorsione in dB

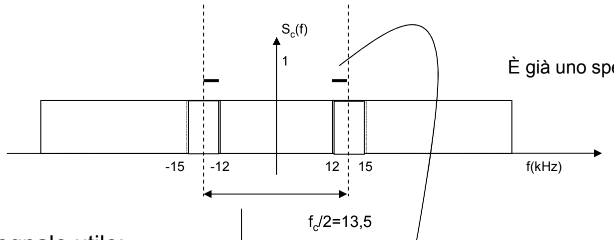
soluzione



f_c=27KHz →



A- la porzione di spettro del segnale campionato non distorta è [-12,12] KHz



È già uno spettro di potenza

Potenza del segnale utile:

$$P_u = \int_{-f_c/2}^{f_c/2} S(f)\,df = 2\int_{0}^{13,5} df = 27\,W$$

Potenza del disturbo:

$$P_u = \int_{-\infty}^{-f_c/2} S(f)\,df + \int_{f_c/2}^{\infty} S(f)\,df = 2\int_{13,5}^{15} df = 3\,W$$

$$SNR_{lin} = \frac{P_u}{P_d} = 9$$

$$SNR_{dB} = 10\,log_{10}\frac{P_u}{P_d} = 9{,}54\,dB$$

Esercizio

Dato: $x(t) \leftrightarrow |X(f)|^2 = 10^3 e^{-|f|/5000}$ trovare f_c tale che SNR_{dB}>30dB

soluzione

$$S = 2\int_0^{f_c/2} |X(f)|^2 df = 2\int_0^{f_c/2} 10^3 e^{-|f|/5000} df = 2\int_0^{f_c/2} 10^3 e^{-f/5000} df = -2\cdot 10^3 \cdot 5000\, e^{-f/5000}\Big|_0^{f_c/2} = 10^7 - 10^7 e^{-f_c/10^4}$$

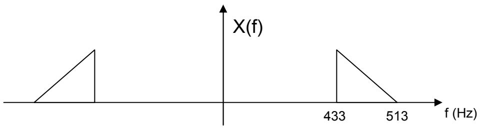
$$N = 2\int_{f_c/2}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2\int_{f_c/2}^{\infty} 10^3 e^{-f/5000} df = -2\cdot 10^3 \cdot 5000\, e^{-f/5000}\Big|_{f_c/2}^{\infty} = 10^7 e^{-f_c/10^4}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{10^7 - 10^7 e^{-f_c/10^4}}{10^7 e^{-f_c/10^4}} = \frac{1 - e^{-f_c/10^4}}{e^{-f_c/10^4}} > 10^3 \;\rightarrow\; e^{-f_c/10^4} < \frac{1}{(10^3+1)} \;\rightarrow -f_c/10^4 < -ln(1001)$$

$$\boxed{f_c > 10^4\, ln(1001)}$$

Esercizio

Dato un segnale con spettro come in figura, determinare la minima frequenza di campionamento tale che non ci sia aliasing e si possa ricavare lo stesso segnale in banda base.



soluzione

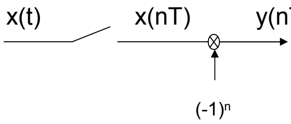
$$\begin{cases} \dfrac{f_c}{2} \geq B = (513-433)Hz = 80Hz \\ k\dfrac{f_c}{2} \leq f_1 = 433Hz \\ (k+1)\dfrac{f_c}{2} \geq f_2 = 513Hz \end{cases} \qquad con \quad k=6 \quad 6\frac{f_c}{2} \geq 480Hz$$

K è dispari; lo spettro in BB è invertito, si deve moltiplicare il segnale per $(-1)^n$

$$k = 5$$

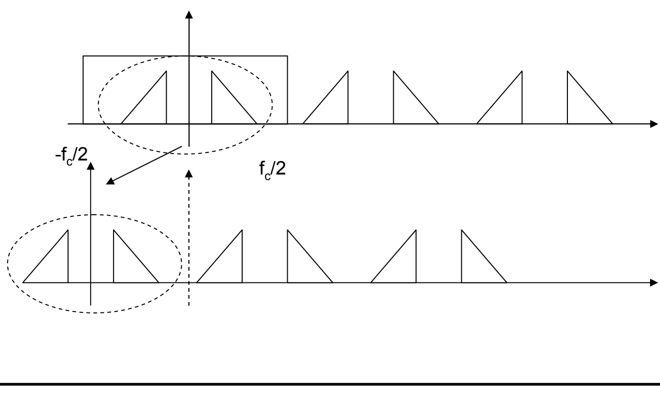
$$\begin{cases} 5\dfrac{f_c}{2} \leq 433Hz \\ 6\dfrac{f_c}{2} \geq 513Hz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_c \leq 193{,}2Hz \\ f_c \geq 171Hz \end{cases} \rightarrow 171 \leq f_c \leq 193{,}2Hz \quad \Rightarrow f_{c,min} = 171Hz$$

27



$$y(nT) = x(nT)(-1)^n \quad \Rightarrow \quad Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)(-1)^n e^{-j2\pi fnT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\pi n}e^{-j2\pi fnT} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi nT(f+\frac{1}{2T})} = X_c(f+\frac{1}{2T}) = X_c(f+\frac{f_c}{2})$$



28

Esercizio

Dato un segnale con spettro triangolare del tipo $|X(f)| = \begin{cases} -\frac{1}{12} f + 1 & f < 12Hz \\ 0 & f > 12Hz \end{cases}$
e con f_c=20Hz determinare:
-La distorsione dovuta alla sovrapposizione delle repliche
-La banda in cui è possibile avere informazioni sul segnale utile (non distorto)

soluzione

$$D = 2\int_{f_c/2}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2\int_{f_c/2}^{\infty} \left[-\frac{1}{12} f + 1\right]^2 df = 2\int_{10}^{12} \left[\frac{1}{12^2} f^2 + 1 - \frac{1}{6} f\right] df = 2\left[\frac{1}{3\cdot 12^2} f^3 + f - \frac{1}{12} f^2\right]_{10}^{12} \approx 0{,}04$$

Banda in cui non c'è distorsione è: [-8,8] Hz
Mentre la potenza utile va calcolata in [-10,10] Hz

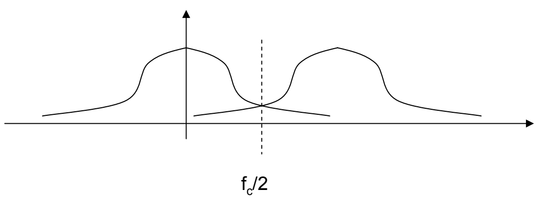
29

Esercizio

Lo spettro di potenza di un segnale è del tipo : $P(f) = Ae^{-\frac{1}{100}|f|}$

- Determinare la frequenza di campionamento in modo che la sovrapposizione spettrale sia sempre inferiore a 1/100 (considerare solo due repliche)

soluzione



Considerando solo due repliche, il valore max di sovrapposizione si ha in $f_c/2$ quindi:
$|P(f_c/2)|<1/100$

$$\left. e^{-\frac{|f|}{100}} \right|_{f=\frac{f_c}{2}} = e^{-\frac{f_c}{200}} = \frac{1}{100} \qquad -\frac{f_c}{200} \le -ln100 \quad f_c \ge 921Hz$$

$$D = 2\int_{f_c/2}^{\infty} e^{-\frac{f}{200}} df = -200 \left. e^{-\frac{f}{100}} \right|_{f=\frac{f_c}{2}}^{\infty} = 200 e^{-\frac{f_c}{200}} = 2$$

30