# TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER (DFT)

# TRASFORMATATA DISCRETA DI FOURIER (DFT)

**Definita per sequenze periodiche (o finite)**

$N$ **periodo (o durata) di** $x(n)$, $n = 0, 1, ..., N - 1$

$$DFT: X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \qquad (W_N = e^{-j2\pi/N})$$

$$IDFT: x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

**$X(k)$ e $x(n)$ sono due sequenze (generalmente complesse) periodiche di periodo $N$**

$$X(k) = X(k + pN)$$

$$x(n) = x(n + pN)$$

$p$ ***intero qualsiasi***

**Valori significativi:** $0 \leq n \leq N-1$

$$0 \leq k \leq N-1$$

**Se** $x(n)$ **è una sequenza di durata finita** $\leq N$ **essa va considerata come un periodo di una sequenza periodica**

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m} x(n+mN)$$

## ■ Relazione utile

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm j\frac{2\pi}{N}np} = 1\,,\quad p = m\,N \quad m \text{ intero}$$

$$= 0\,,\quad \textit{altrimenti}$$

# Dimostrazione IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

**moltiplicando entrambi i membri per** $e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$

**e, sommando da** $n=0$ **a** $N$-$1$, **si ha**

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)}$$

## Scambiando l'ordine della sommatoria

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)}$$

**ed essendo**

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} = \begin{cases} 1, \; per \;\; k = r \\ 0, \; altrimenti \end{cases}$$

**si ha**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

**periodica con periodo** $N$

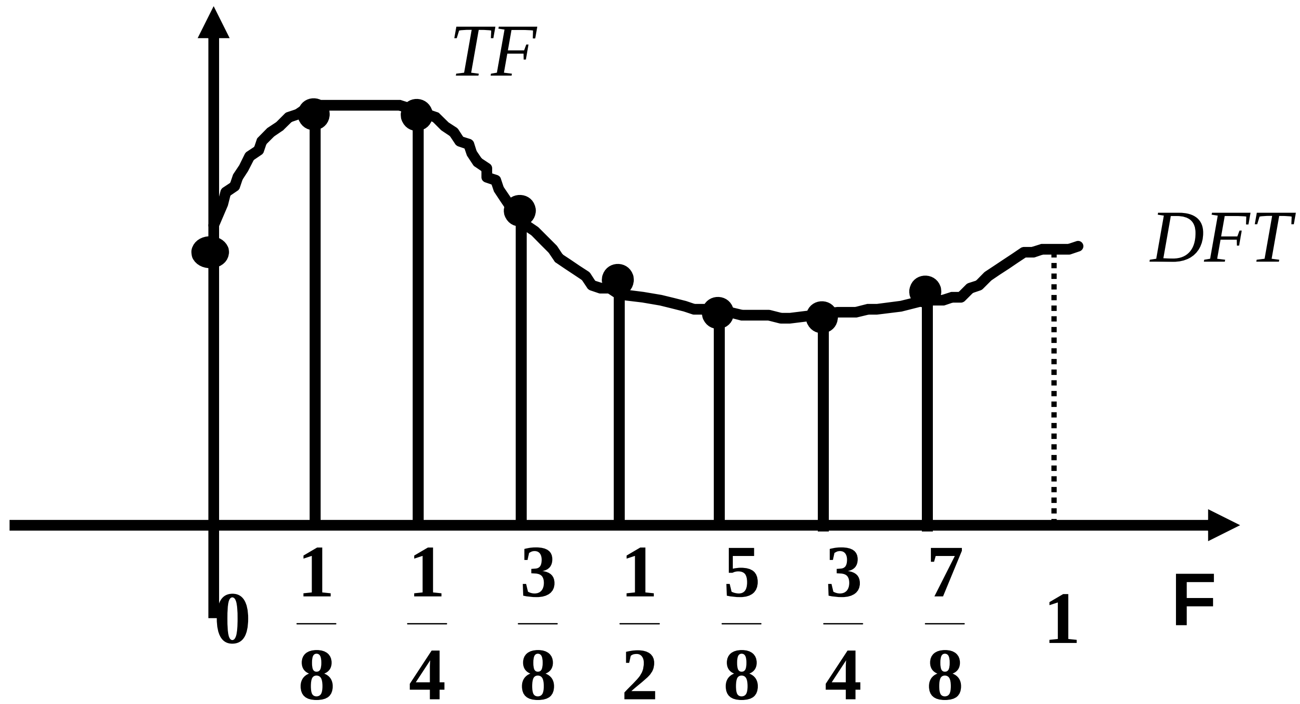
# Nota

**Per semplicità di notazione continuiamo ad usare lo stesso simbolo $X$ per denotare la trasformata discreta di Fourier $X(k)$, la trasformata di Fourier $X(F)$ e la trasformata-z $X(z)$ di una stessa sequenza $x(n)$ [ nel caso ovviamente esistano ]. Esse sono distinte senza ambiguità dal tipo del loro argomento:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Intero*** | $k$ | $\leftarrow\rightarrow$ | ***DFT*** |
| ***Reale*** | $F$ | $\leftarrow\rightarrow$ | ***TF*** |
| ***Complesso*** | $z$ | $\leftarrow\rightarrow$ | ***TZ*** |

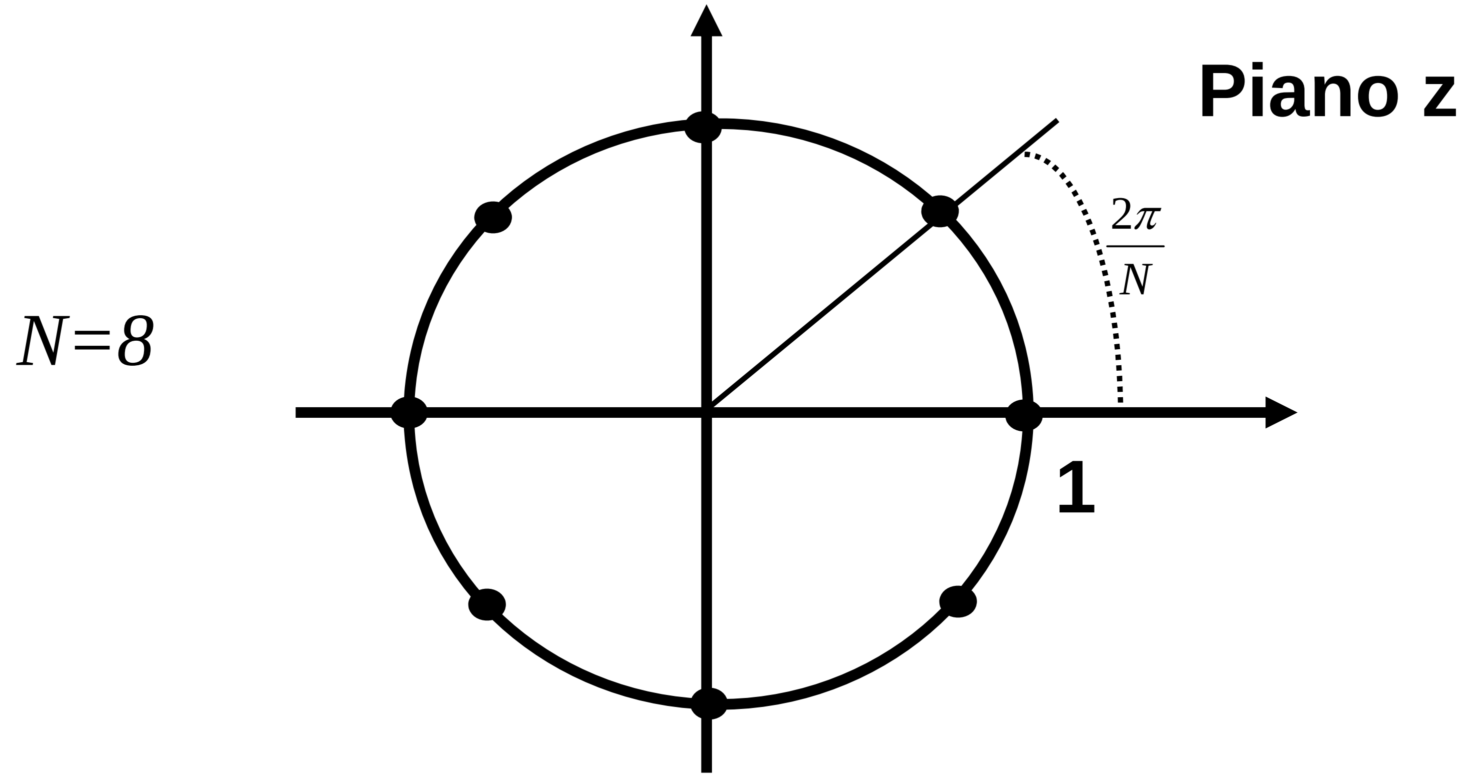
# RELAZIONE DELLA *DFT* CON LE *TF* E *TZ* PER SEQUENZE FINITE

N=8




**La *DFT* è la *TF* calcolata per $N$ frequenze equispaziate di** $\Delta f = f_c/N$ **ovvero** $\Delta F = 1/N$

$$X(k) = X(F)\Big|_{F=\frac{k}{N}}$$




**È la $TZ$ calcolata in $N$ punti equispaziati sulla circonferenza unitaria**

$$X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

- **Per sequenze <u>finite</u> ( di durata** $N$ **campioni) è possibile ottenere** $X(z)$ **a partire da** $X(k)$

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

**Dimostrazione:**

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}kN} z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} =$$

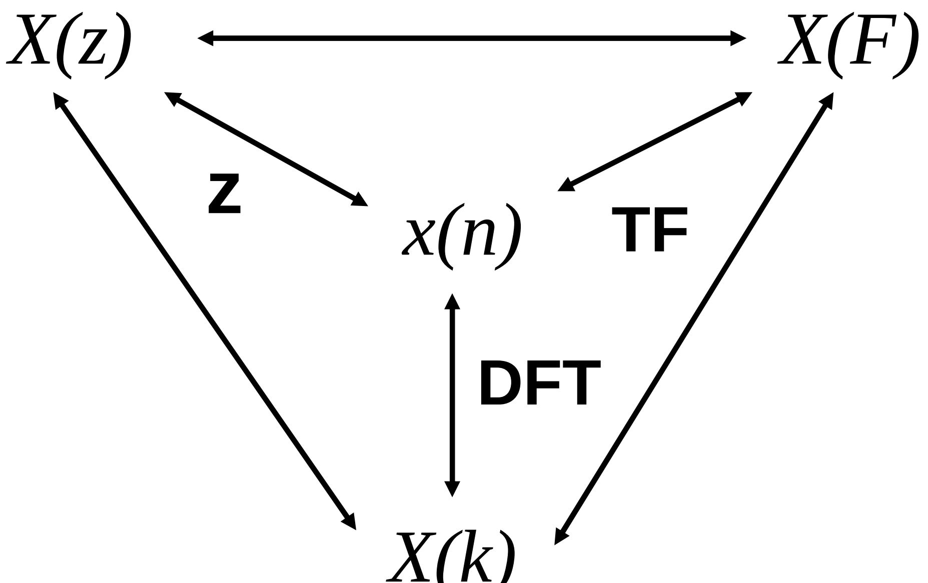
$$= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

- **Esprime** $X(z)$ **di una sequenza finita di durata** $N$ **campioni, in funzione di** $N$ **campioni equidistanti di** $X(z)$ **presi sul cerchio unitario (**$N$ **campioni in frequenza spaziati di** $\frac{1}{NT} = \frac{f_c}{N}$ **)**

- **Per sequenze <u>finite</u> ( di durata $N$ campioni) è possibile ottenere $X(F)$ a partire da $X(k)$**

$$X(F)=\frac{1-e^{-j2\pi FN}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j2\pi F}}$$

- **Per sequenze finite (di durata $N$ campioni)**



- **Data la** $TZ$ $X(z)$ **di una sequenza** $x(n)$**, il campionamento di** $X(z)$ **sulla circonferenza unitaria in** $N$ **punti equispaziati**

$$X(k) = X(z)\Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

**corrisponde alla DFT della sequenza:**

$$x'(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN)$$

## Dimostrazione:

- **La** *DFT* **inversa** $$x'(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

**Sostituendo** $$X(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)e^{-j\frac{2\pi}{N}kr}$$

**invertendo le sommatorie e tenendo conto delle proprietà degli esponenziali, si ottiene**

$$x'(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN)$$

**Osservazione:** $x'(n) = x(n) \quad 0 \le n \le N-1$

***solo se*** $x(n)$ ***è di durata finita*** $\le N$

## ■ Esempio di applicazione

**Calcolo della antitrasformata-z di una** $X(z)$ **(supponendo che** $x(n) \longrightarrow 0$ **per n** $\rightarrow \infty$ **).**

**Si determina la** $X(k)$ **per valori crescenti di** $N$ **fino a verificare che la** $IDFT$ **dia valori trascurabili (inferiori ad una prefissata soglia) per i valori** $n \geq N_0$

**Si possono determinare numericamente (e con buona approssimazione) i campioni della sequenza** $x(n)$**, che ha per trasformata-z** $X(z)$**, e la sua durata** $N_0$ **. (Es. applicaz.: Teoria delle code)**

# Principali proprietà della DFT

- **Linearità**

$$Se \quad x(n) \Leftrightarrow X(k) \quad e \quad y(n) \Leftrightarrow Y(k)$$

$$ax(n) + by(n) \Leftrightarrow aX(k) + bY(k)$$

$a, b$ ***costanti reali o complesse***

- **Inversione temporale**

$$x(-n) = x(N-n) \Leftrightarrow X(-k) = X(N-k)$$

- **Complesso coniugato**

$$x^*(n) \Leftrightarrow X^*(N-k)$$

- **Inversione temporale e complesso coniugato**

$$x^*(N-n) \Leftrightarrow X^*(k)$$

- **Simmetrie per sequenze <u>reali</u>**
  - $x(n)$ ***reale***

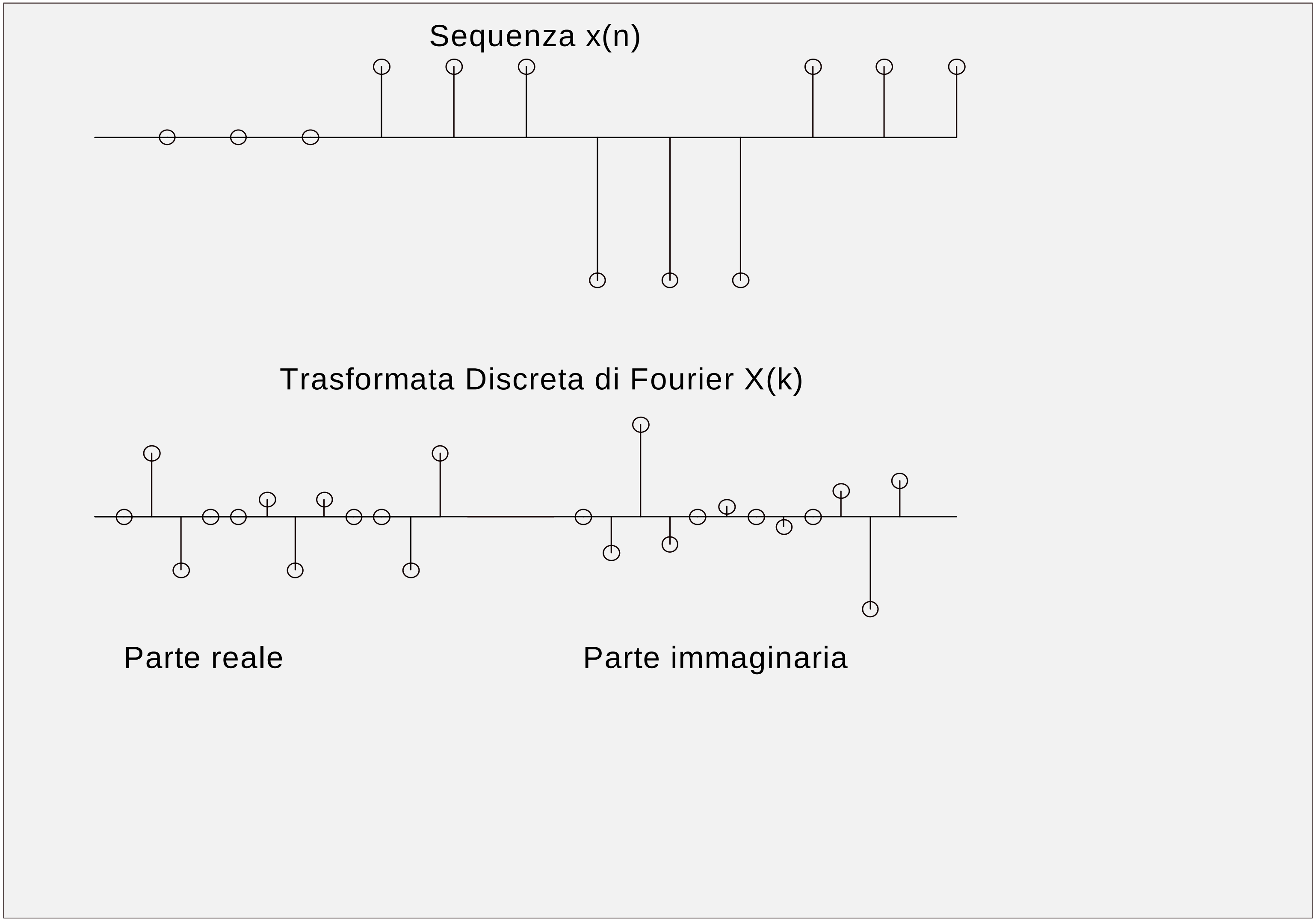
    $$X(N-k) = X^*(k)$$

  - $x(n)$ ***reale e pari :*** $x(N-n) = x(n)$

    $X(k)$ ***reale e pari :*** $X(N-k) = X(k)$

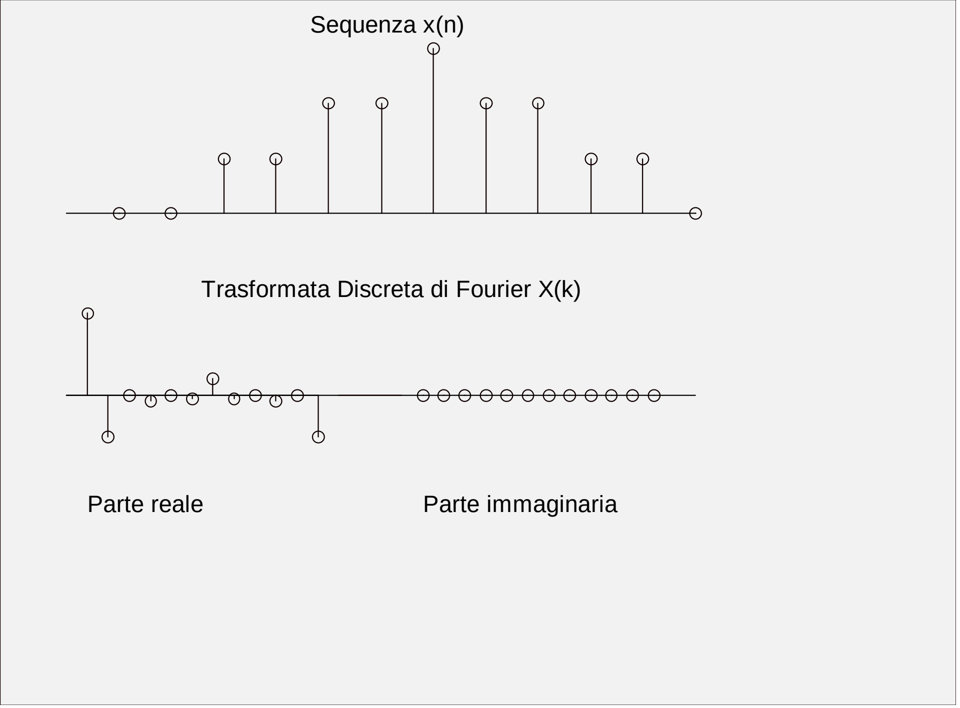
  - $x(n)$ ***reale e dispari :*** $x(N-n) = -x(n)$

    $X(k)$ ***immaginaria e dispari :*** $X(N-k) = -X(k)$

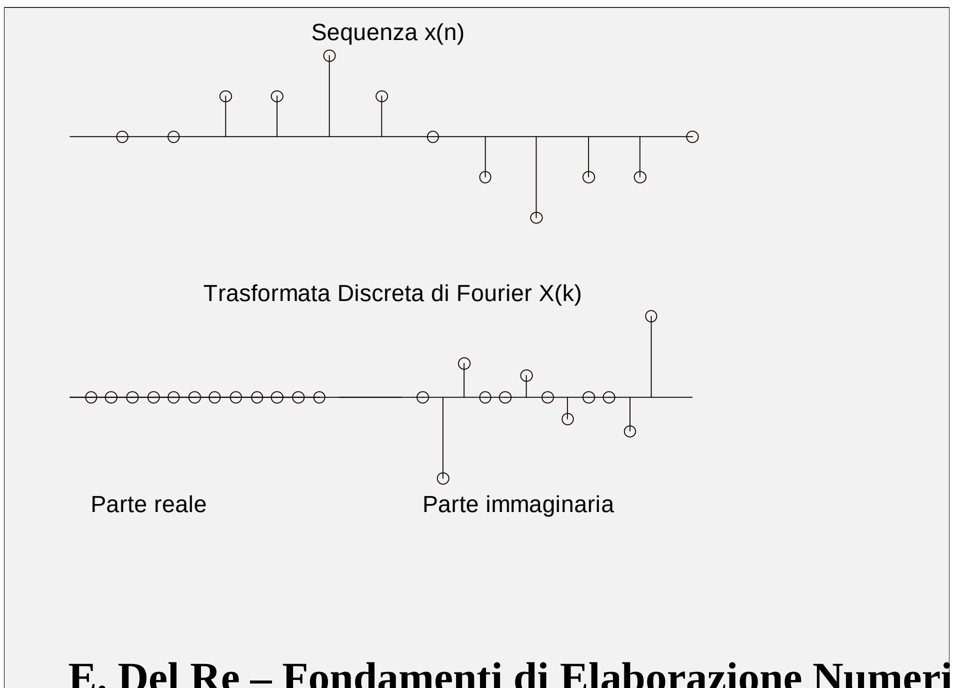



Proprietà della DFT [x(n) reale]

Se x(n) è una sequenza reale: $X(N - k) = X^*(k)$




Proprietà della DFT sequenza
[x(n) reale e pari]
Se x(n) è una reale e pari
X(k) è reale e pari.




Proprietà della DFT
[x(n) reale e dispari]
Se x(n) è una sequenza reale e dispari
X(k) è immaginaria pura e dispari.

## Teorema di Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|x(n)\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left|X(k)\right|^2$$

***Energia di un periodo della sequenza***

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left|x(n)\right|^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1} \left|X(k)\right|^2$$

***Potenza della sequenza***

# Dimostrazione

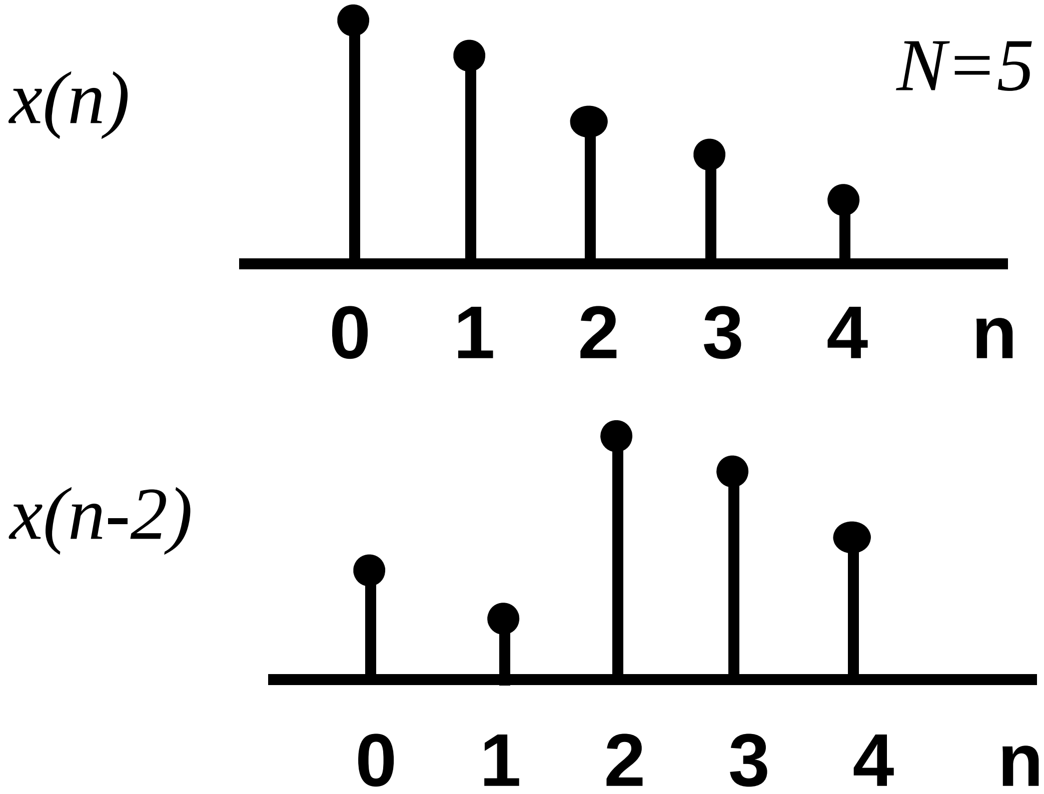
$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|x(n)\right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X^*(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{N} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left|X(k)\right|^2$$

## ■ Traslazione circolare




$$x(n-m)_N \Leftrightarrow X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

**rotazione di fase pari a:** $-\dfrac{2\pi km}{N}$

**Analogamente (in modo duale)**

$$X(k-l)_N \Leftrightarrow x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nl}$$

**modulazione con esponenziale complesso**

## ■ Convoluzione circolare

**Proprietà *molto importante* per le implicazioni applicative e realizzative**

**Definizione**

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m)_N$$

$$\Rightarrow Y(k) = X_1(k) X_2(k)$$

• **Il prodotto** $X_1(k)\, X_2(k)$ **è la** $DFT$ **di una convoluzione circolare di due sequenze (e *non di una convoluzione tradizionale*, detta per distinzione lineare o aperiodica)**

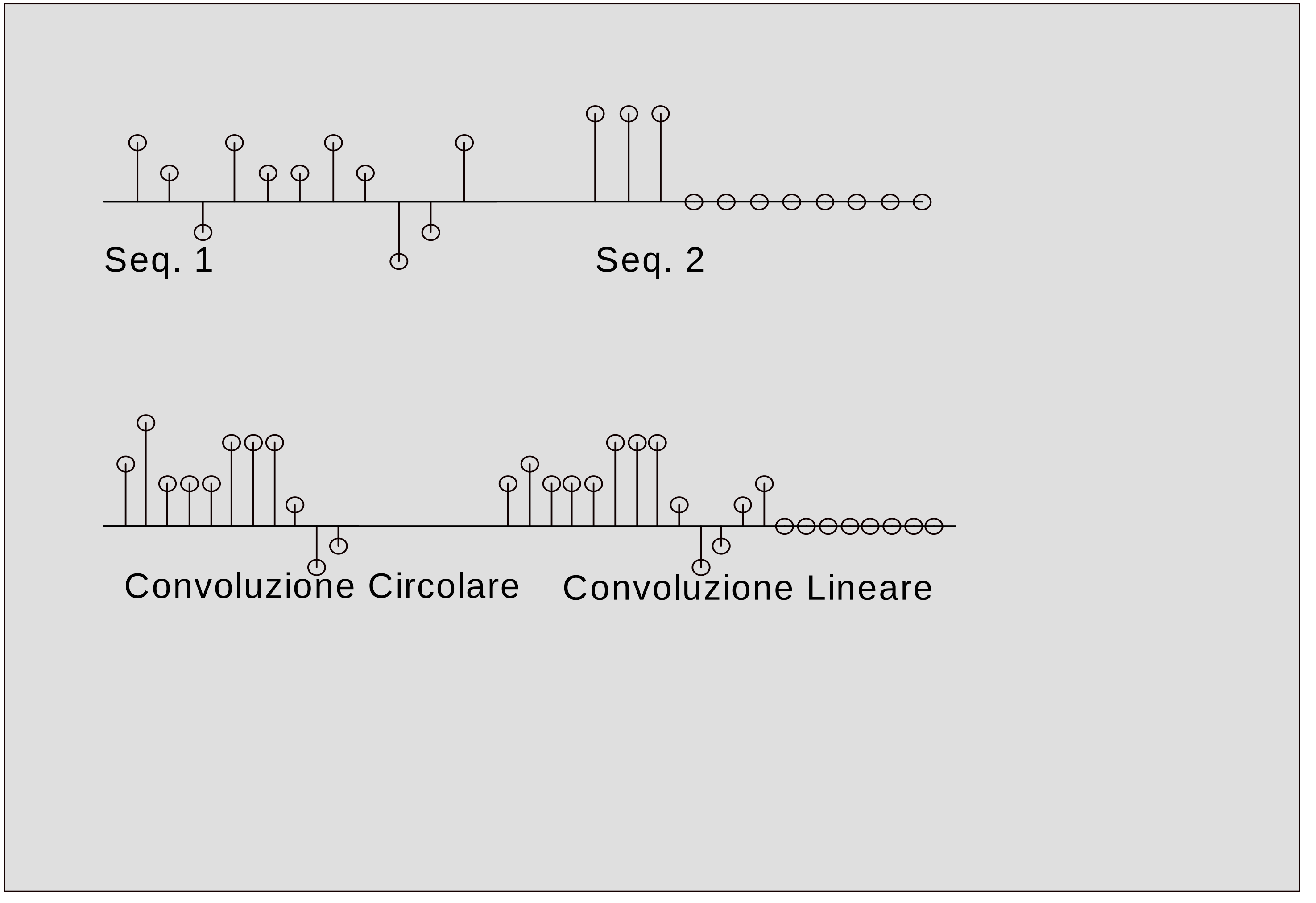
## Convoluzione lineare

$$x_l(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m)$$

**Per es. per sequenze di durata** $N$

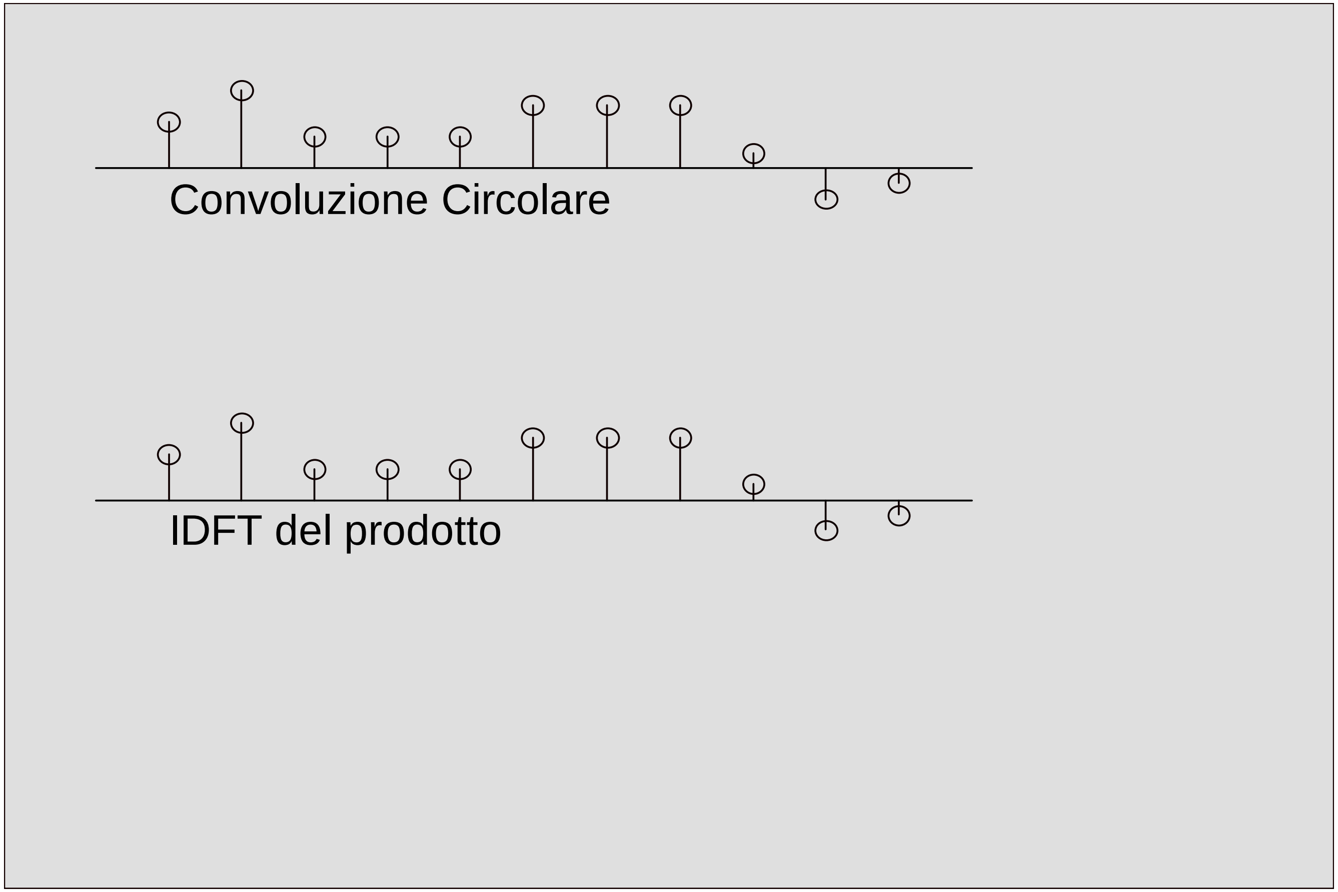
$x_c(n)$ **è periodica con periodo** $N$

$x_l(n)$ **ha durata pari a** $L = 2N\text{-}1$




Convoluzione circolare e lineare.

Le sequenze mostrate nella parte inferiore sono il risultato della convoluzione circolare e lineare tra le due sequenze mostrate nella parte superiore.




Confronto nel dominio del tempo

Sopra: il risultato della convoluzione circolare tra due sequenze

Sotto: la trasformata di Fourier inversa del prodotto delle loro DFT

**Per poter utilizzare la $DFT$ per il calcolo della convoluzione lineare [p.es. $y(n) = x(n) * h(n)$], occorre usare tecniche opportune**

**[ Overlap - add, overlap - save]**

# Esercizi Proposti

- **Esercizi scritti**
  ***(dal testo di riferimento: E. Del Re, "Elementi di elaborazione numerica dei segnali")***

**3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.10 3.12 3.15 3.17 3.18 3.19**

## Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

( reperibili a: http://lenst.det.unifi.it/node/379)

- **Prop DFT**
- **Conv-lin-circ**

# TRASFORMATA VELOCE DI FOURIER (FFT)

# TRASFORMATA VELOCE DI FOURIER (FFT)

**La DFT**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} , \qquad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

**richiede**

$N^2$ **moltiplicazioni complesse**
**[** $4\,N^2$ **m. reali +** $2\,N^2$ **s. reali ]**

$N\,(N\text{-}1)$ **somme complesse [** $2N\,(N\text{-}1)$ **s. reali ]**

■ **Algoritmi FFT**

$\Rightarrow$ ***Radice - 2 decimazione nel tempo***

$\Rightarrow$ ***Radice - 2 decimazione in frequenza***

$\Rightarrow$ ***Estensioni di questi algoritmi base***

## ■ FFT RADICE- 2 DECIMAZIONE NEL TEMPO

$$N = 2^{v}$$

$$X(k) = \sum_{n\,pari} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n\,dispari} x(n) W_N^{nk}$$

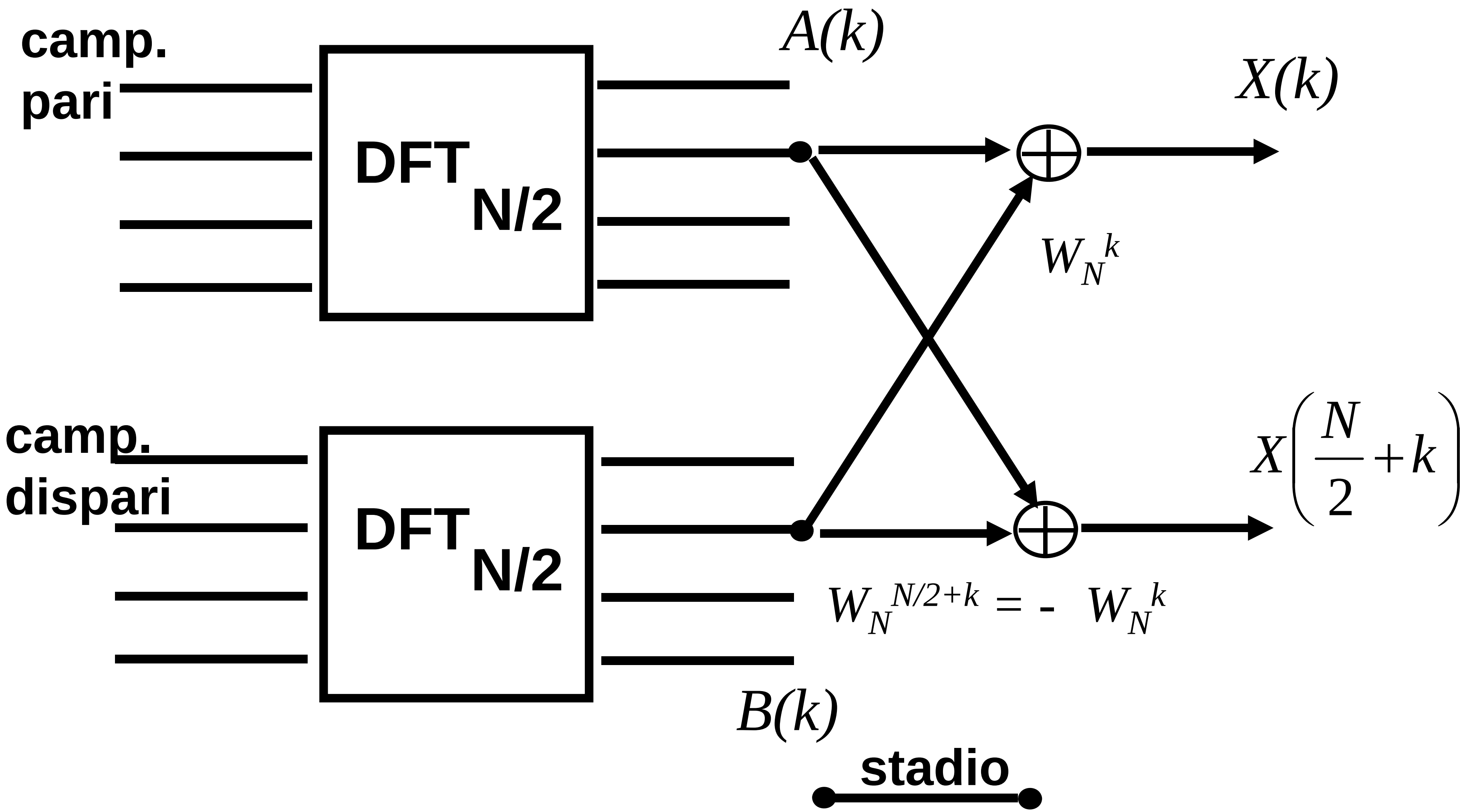
$$= \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2p) W_N^{2pk} + W_N^{k} \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2p+1) W_N^{2pk}$$

$$(W_N^2 = W_{N/2}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2p) W_{N/2}^{pk} + W_N^k \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2p+1) W_{N/2}^{pk}$$

$$= \quad A(k) + W_N^k \, B(k)$$

- $A(k)$, $B(k)$ **sono** $DFT_{N/2}$



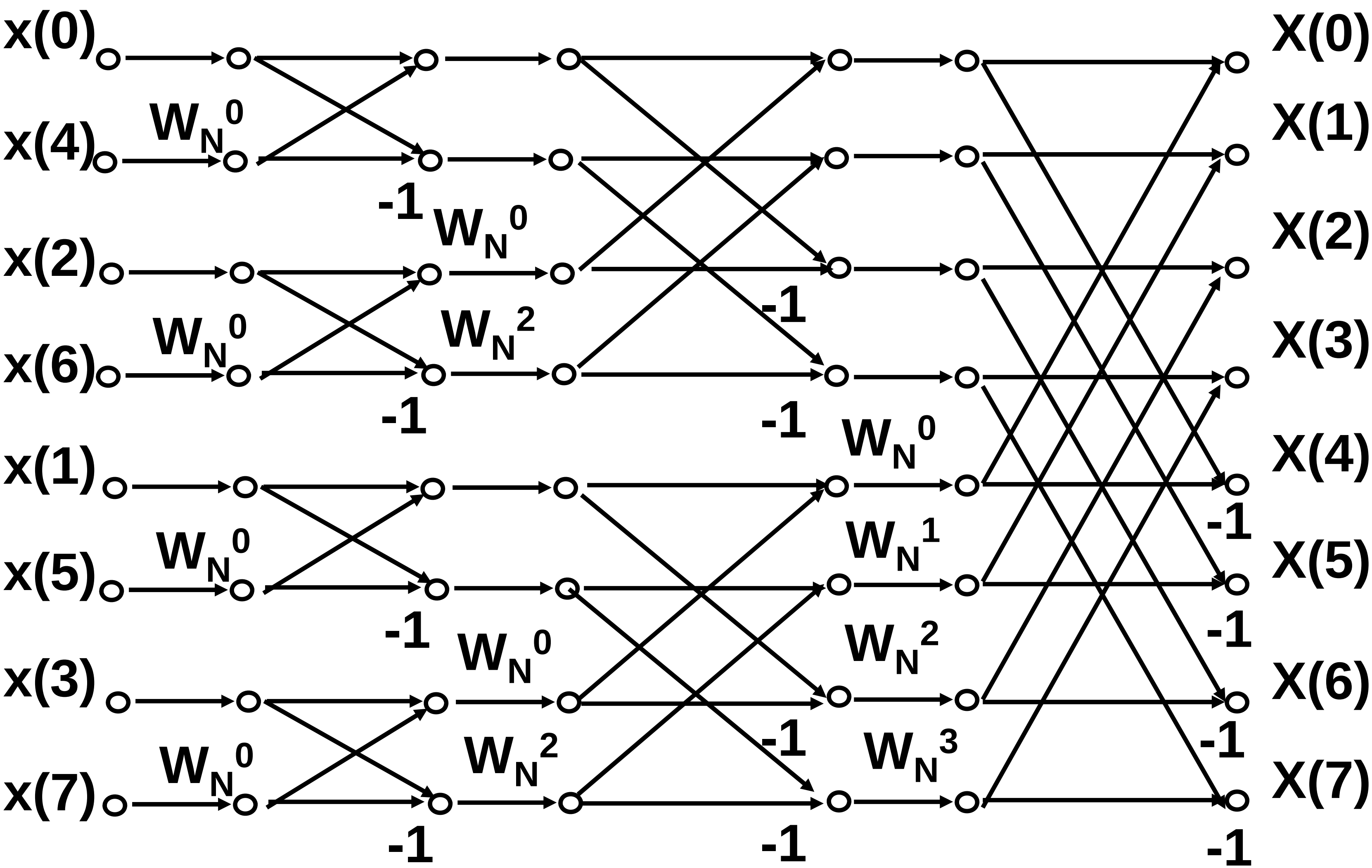

$N/2$ **m.c. +** $N$ **s.c.**
**(farfalle)**

- **Il procedimento può essere iterato fino ad arrivare a** $DFT_2$**.**

- **Il numero di stadi :** $v = log_2 N$

# Esempio: $N = 8$

## Grafo



- **Complessità finale**

$$\frac{N}{2}\log_2 N$$ ***moltiplicazioni complesse***

$$\left[\frac{N}{2}\log_2\frac{N}{2}\right.$$ ***m.c. eliminando le moltiplicazioni del primo stadio*** $$\left.\right]$$

$$N\log_2 N$$ ***somme complesse***

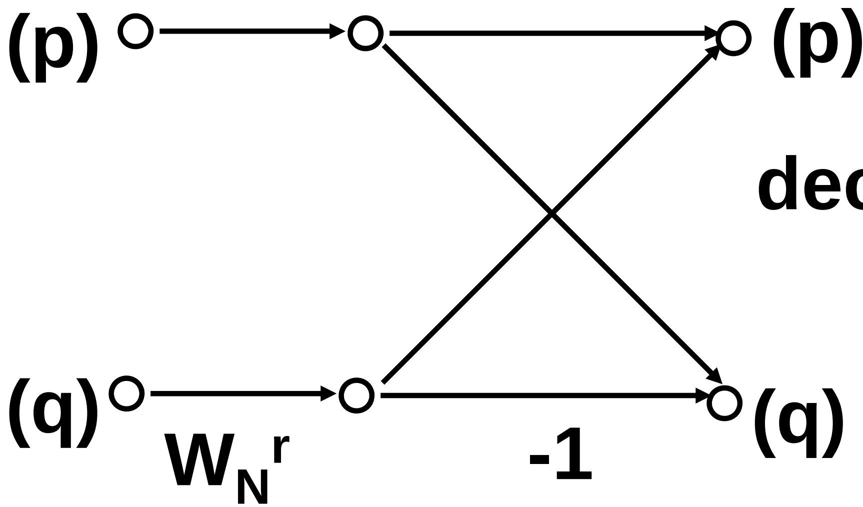
# Ingressi: bit-reversed order (ordine a bit invertiti)

**Gli ingressi non sono in sequenza. Devono essere ordinati come nell'esempio ($N = 8$):**

| Posizione | Campione |
|---|---|
| 0 = 000 | x(0) = x(000) |
| 1 = 001 | x(4) = x(100) |
| 2 = 010 | x(2) = x(010) |
| 3 = 011 | x(6) = x(110) |
| 4 = 100 | x(1) = x(001) |
| 5 = 101 | x(5) = x(101) |
| 6 = 110 | x(3) = x(011) |
| 7 = 111 | x(7) = x(111) |

## ■ Calcolo “in-place”

**Gli ingressi e le uscite di ogni “farfalla” stanno sulla stessa linea orizzontale.**
**Bastano $N$ locazioni di memoria (complesse), perché a coppie subiscono una trasformazione e il risultato può essere rimemorizzato nelle stesse locazioni degli ingressi.**




**decim. nel tempo**

| | DFT | | FFT | |
|---|---|---|---|---|
| **N** | **m.c.** | **s.c.** | **m.c.** | **s.c.** |
| 32 | 1024 | 992 | 80 | 160 |
| 1024 | 1048576 | 1047552 | 5120 | 10240 |

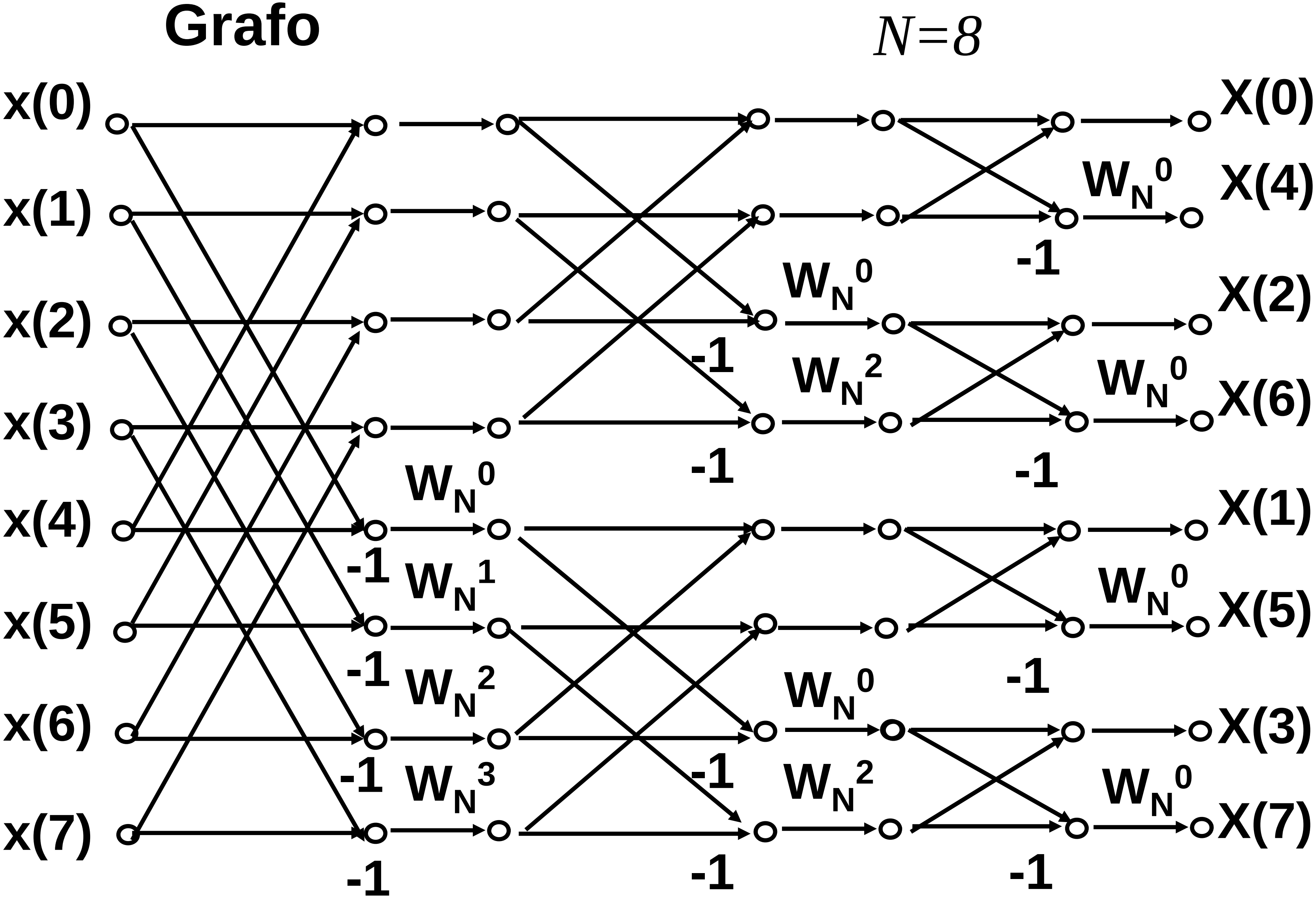
# FFT RADICE - 2 DECIMAZIONE IN FREQUENZA

$$N = 2^{v}$$

- **Algoritmo duale**

- **Scompone la sequenza di uscita** $X(k)$ **in due termini, il primo relativo alla prima metà (**$k = 0,\ldots,N/2 - 1$**), il secondo relativo alla seconda metà (**$k = N/2,\ldots,N-1$**)**

## Grafo




- Uscite: bit-reversed order
- Calcolo: “in place”.

- **Complessità finale**

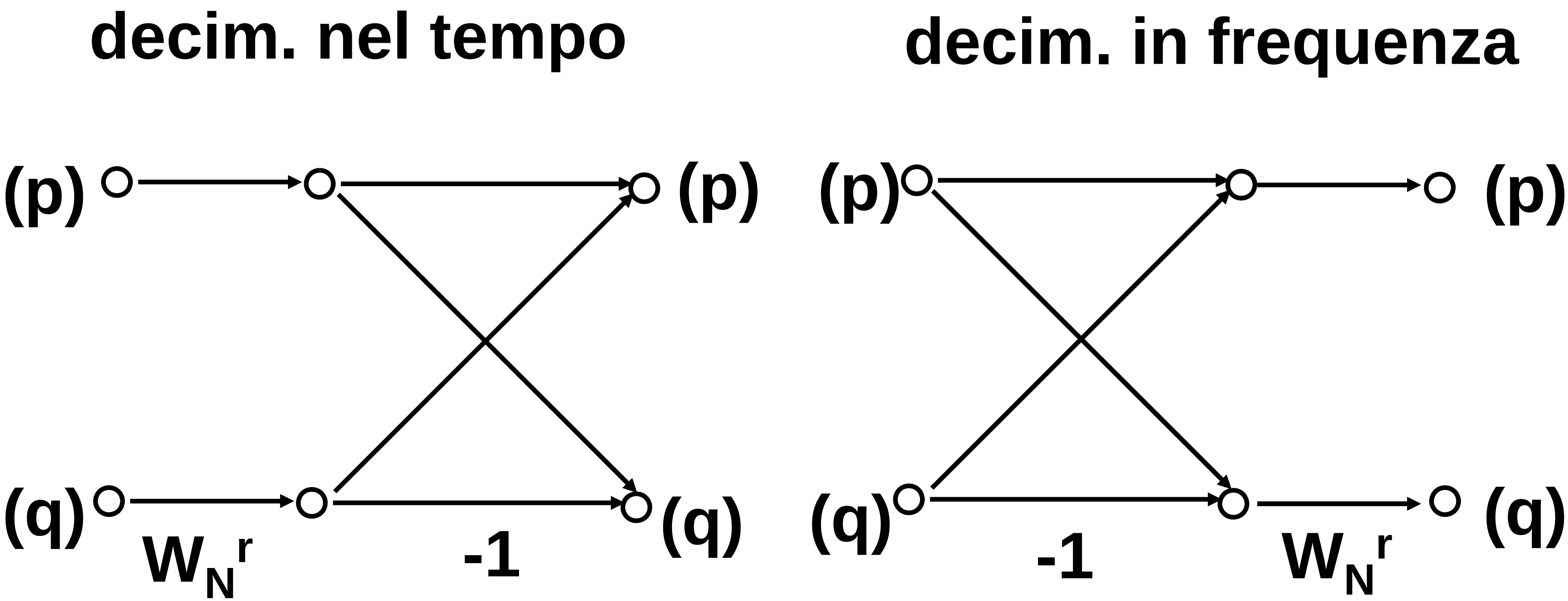
$$\frac{N}{2}\log_2 N$$ ***moltiplicazioni complesse***

$$\left[\frac{N}{2}\log_2\frac{N}{2}\right.$$ ***m.c. eliminando le moltiplicazioni del primo stadio*** $\left.\right]$

$$N\log_2 N$$ ***somme complesse***

## ■ Relazione fra i due algoritmi FFT radice-2

**Struttura delle farfalle**



**Sono scambiati ingressi e uscite e invertito il senso del flusso dei segnali.**

**Ciascuna delle due strutture può essere ottenuta dall'altra applicando queste regole (*regole di trasposizione di grafi lineari*):**

- **scambiare ingressi e uscite**
- **invertire il flusso dei segnali**
- **scambiare i punti di diramazione e i punti di somma**

# FFT: VARIAZIONI ED ESTENSIONI

- **Si possono modificare i grafi in modo che ingressi e uscite siano nell'ordine naturale (crescente).**
  **Si perde la proprietà di calcolo "in place".**

- **Algoritmi radice- 4 ($N = 4^{\nu}$)**

$\sim \quad N \log_4 N$ ***m. c.***

$\sim \quad 2N \log_4 N$ ***s. c.***

- **Altri algoritmi**

**Winograd (fattori primi)**

**Mixed-radix (radice diversa per ogni stadio)**

**Split-radix (mescolanza di radice-2 e radice-4).**

# FFT: CONSIDERAZIONI FINALI

- **La** $IDFT_N$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

**può essere calcolata (a meno del fattore** *1/N***) da un algoritmo FFT sul quale si operi la sostituzione**

$$\underset{(FFT)}{W_N} \rightarrow \underset{(IFFT)}{W_N^{-1}}$$

**La divisione per il fattore $N$ può essere eseguita mediante divisione per un fattore $2$ ad ogni stadio.**

- **In pratica per il calcolo della $DFT$ conviene sempre impiegare un algoritmo di $FFT$, a meno che non interessino <u>pochi</u> punti della DFT.**

# Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

( reperibili a: http://lenst.det.unifi.it/node/379)

- **Confronto DFT-FFT**

# APPLICAZIONI DELLA DFT

# APPLICAZIONI DELLA DFT

**Sono numerosissime. Qui vedremo alcune delle più importanti e significative:**

- **Stime spettrali**

- **Convoluzione di sequenze**

- **Correlazione di sequenze**

# STIME SPETTRALI

- **Operazione di filtraggio della** *DFT*

## $x(n)$ **sequenza di durata molto lunga**

**La sua** $DFT_N$ **(a** $N$ **punti), per esempio sui primi** $N$ **campioni,**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, w(n) e^{-j2\pi F n} \Big|_{F=\frac{k}{N}}$$

***con*** $w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ **(*finestra rettangolare*)**

**che ha come** $TF$

$$W(F) = \frac{1-e^{-j2\pi FN}}{1-e^{-j2\pi F}} = e^{-j\pi F(N-1)}\frac{sen(\pi FN)}{sen(\pi F)}$$

**con** $F = fT = f / f_c$ **frequenza normalizzata**

$$\Rightarrow \quad X(k) \quad \text{è la} \quad TF$$

**calcolata alle frequenze normalizzate** $\dfrac{k}{N}$

**(*ovvero alle frequenze*** $\dfrac{k}{NT} = \dfrac{k}{N} f_c$ **)**

**della sequenza**

$$x'(n) = x(n)\, w(n),$$ **il cui spettro è**

$$X'(F) = X(F) * W(F) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(a) W(F-a)\, da$$

**in definitiva:**

$$X(k) = X'(F)\Big|_{F=\frac{k}{N}}$$

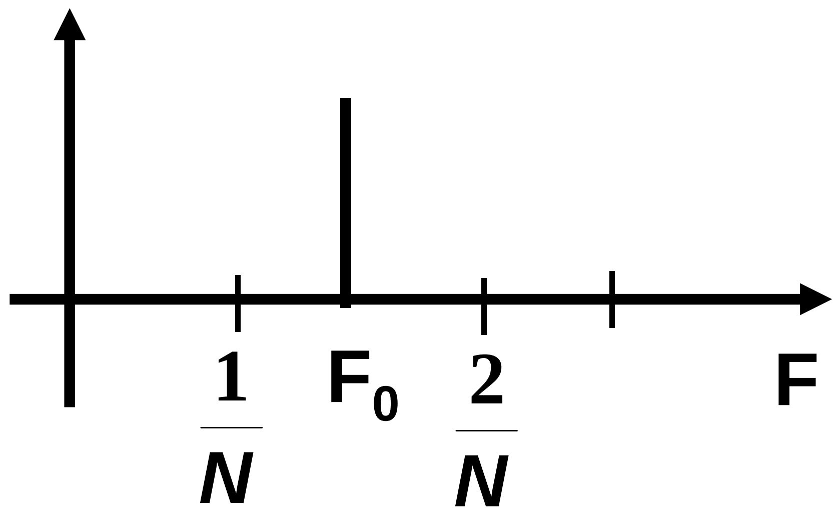
**ovvero il coefficiente k-esimo della** $DFT$ **è il valore mediato dello spettro** $X(F)$ **di** $x(n)$ **pesato dalla funzione** $W(F)$ **centrata sulla frequenza normalizzata** $k/N$**.**

**Non necessariamente la DFT coincide con i valori desiderati di** $X(F)$ **alle frequenze** $k/N$.

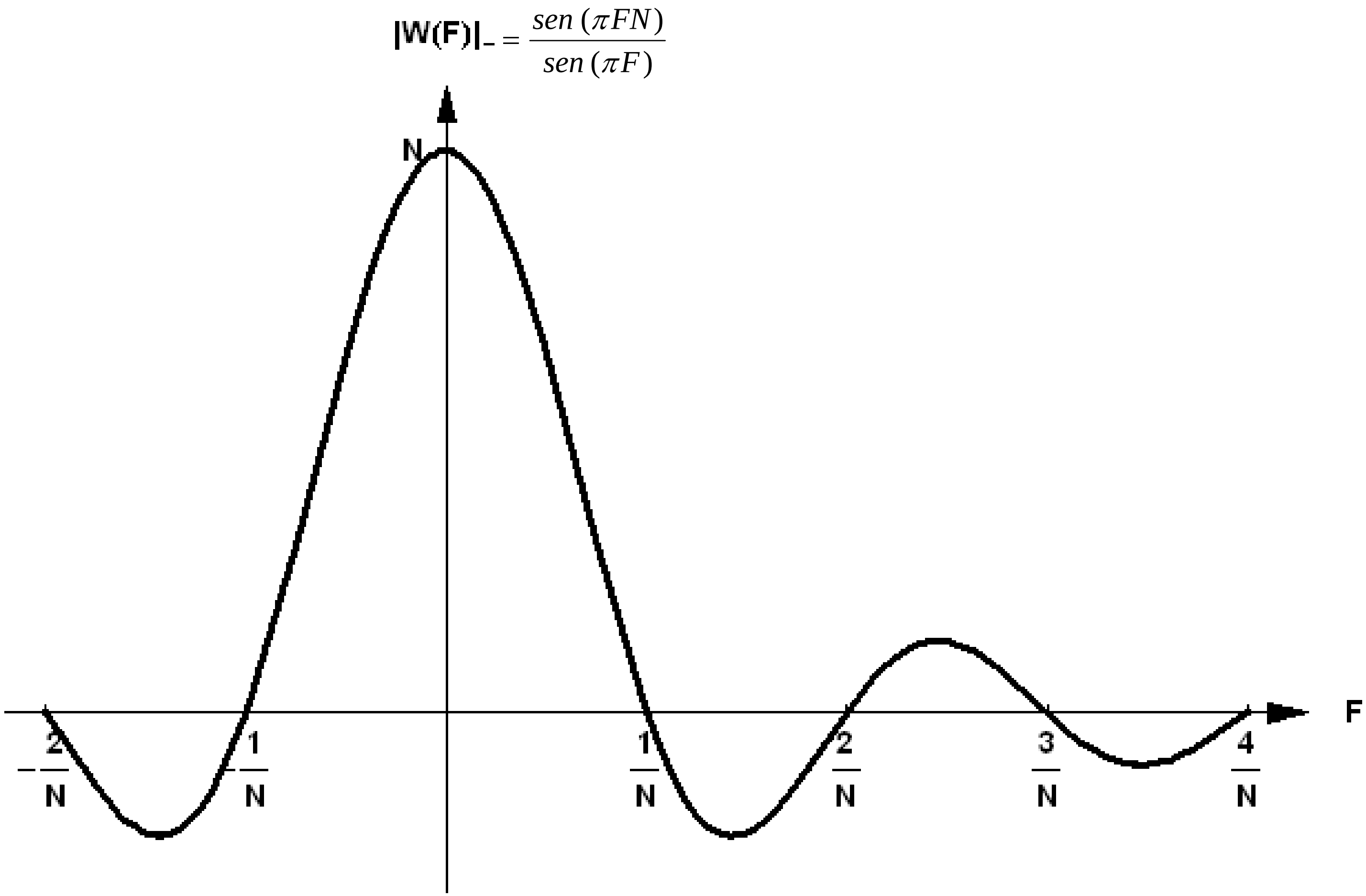
## ■ Esempio illustrativo

$x(n)$ **sia un esponenziale complesso (riga) ad una frequenza normalizzata** $F_0$ **intermedia fra** $1/N$ **e** $2/N$**.**

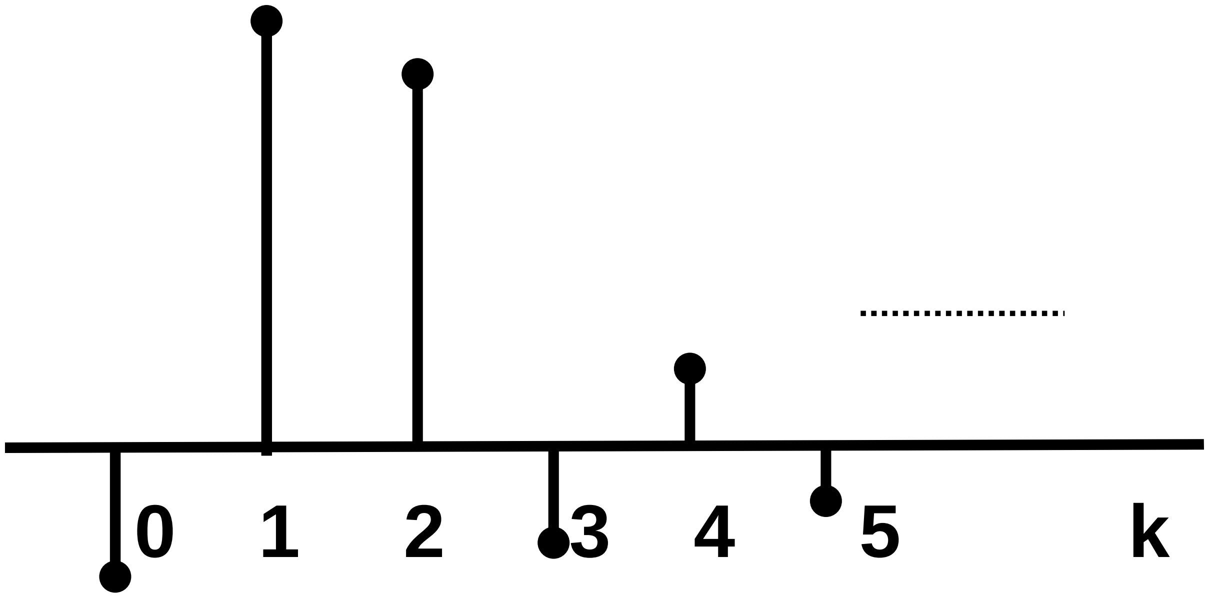
$x(n) \longleftrightarrow X(F) =$



## considerato che:



si ottiene per $X(k)$




Compaiono righe spettrali per tutti i valori di $k$.
(Nell'esempio per semplicità sono stati assunti valori reali invece che complessi per illustrare il meccanismo di generazione della $DFT$ )


**[ Esiste una condizione per la quale nella *DFT* ci sono tutte e sole le componenti presenti nel segnale di ingresso? ]**

**La *DFT* effettua una operazione di modifica, con il filtro $W(F)$, sullo spettro del segnale di ingresso**

**Si può cambiare l'effetto di filtraggio cambiando $W(F)$ e quindi $w(n)$**

**Per esempio:**

$$w(n) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n}{N-1}\right) \qquad \textbf{(\textit{Hanning})}$$

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1} \qquad \textbf{(\textit{Hamming})}$$

$$0 \le n \le N - 1$$

**(e molte altre) che hanno lobi laterali più piccoli)**

## • Risoluzione algoritmica e risoluzione spettrale

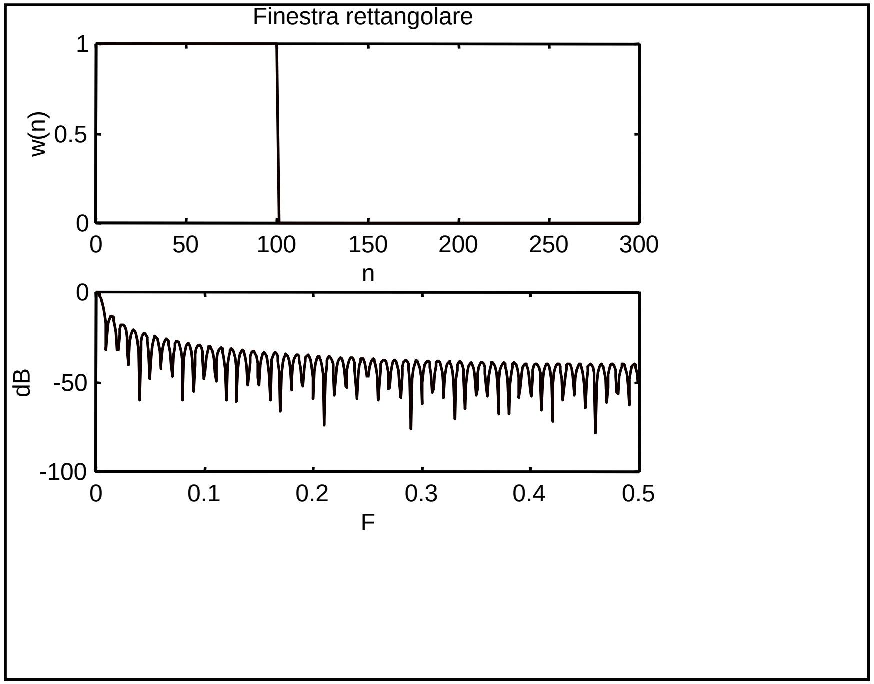
➢ **Risoluzione algoritmica**

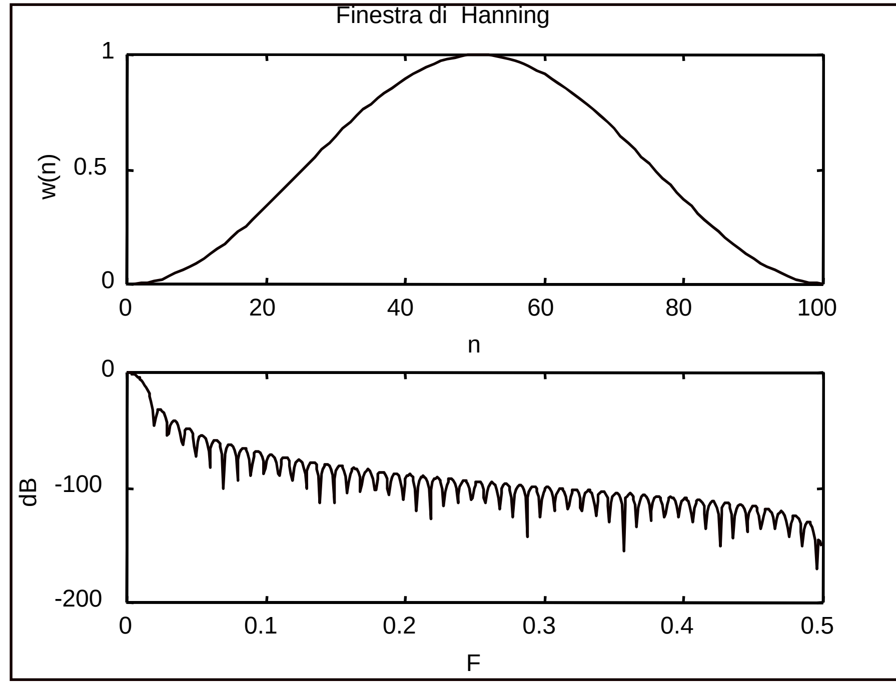
**Valori spaziati di** $\Delta F = \dfrac{1}{N}$

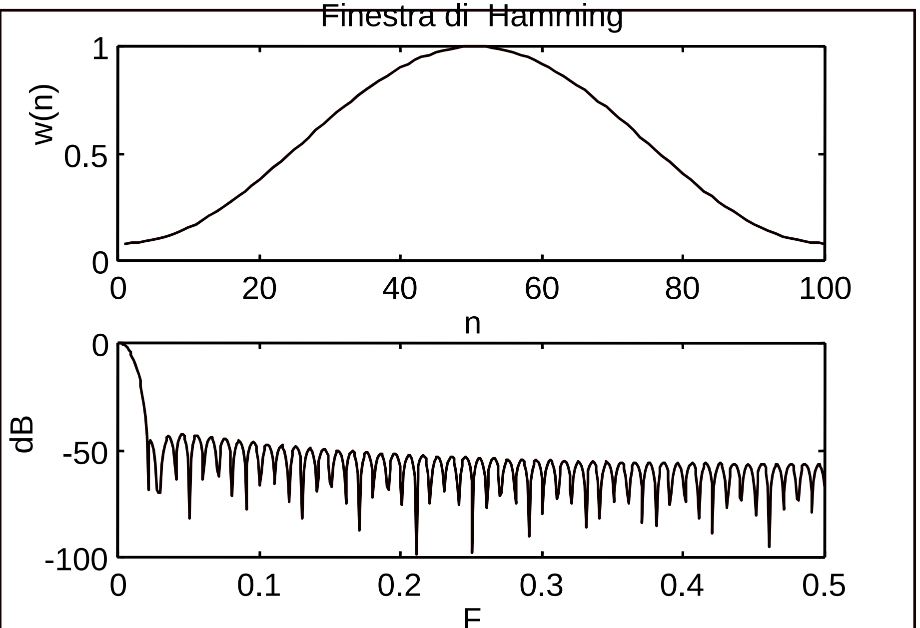
**ovvero** $\Delta f = \dfrac{f_c}{N} = \dfrac{1}{NT}$

**Tuttavia:**

**La risoluzione spettrale dipende dall'ampiezza del lobo principale della finestra; generalmente la si assume uguale all'ampiezza del lobo principale.**




Caratteristiche temporali e spettrali delle finestre:

- Rettangolare
- di Hanning
- di Hamming

| Finestra | Risoluzione spettrale ($\Delta F$) | Picco lobo laterale ($dB$) |
| --- | --- | --- |
| Rettangolare | $2/N$ | $-13$ |
| Hanning | $4/N$ | $-31$ |
| Hamming | $4/N$ | $-41$ |

## ■ Stime spettrali (Periodogramma)

**È uno dei metodi di stima spettrale. Impiega la** *DFT (FFT)*. $x(n)$ **sequenza molto lunga (** $L$ **)**

**Algoritmo**

- **si suddivide** $x(n)$ **in** $M = L/N$ **blocchi di** $N$ **campioni**

$$x_i(n) = x(n + iN), \quad 0 \le n \le N-1, 0 \le i \le M-1$$

- **Si forma**

$$x_i'(n) = x_i(n)\,w(n), \quad w(n) \text{ opportuna finestra}$$

- **Si calcola**

$$X_i'(k) = DFT_N\left[x_i'(n)\right]$$

$$A_i(k) = \frac{1}{NW}\,|X_i'(k)|^2$$

***con*** $$W = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n),$$ ***potenza della finestra***

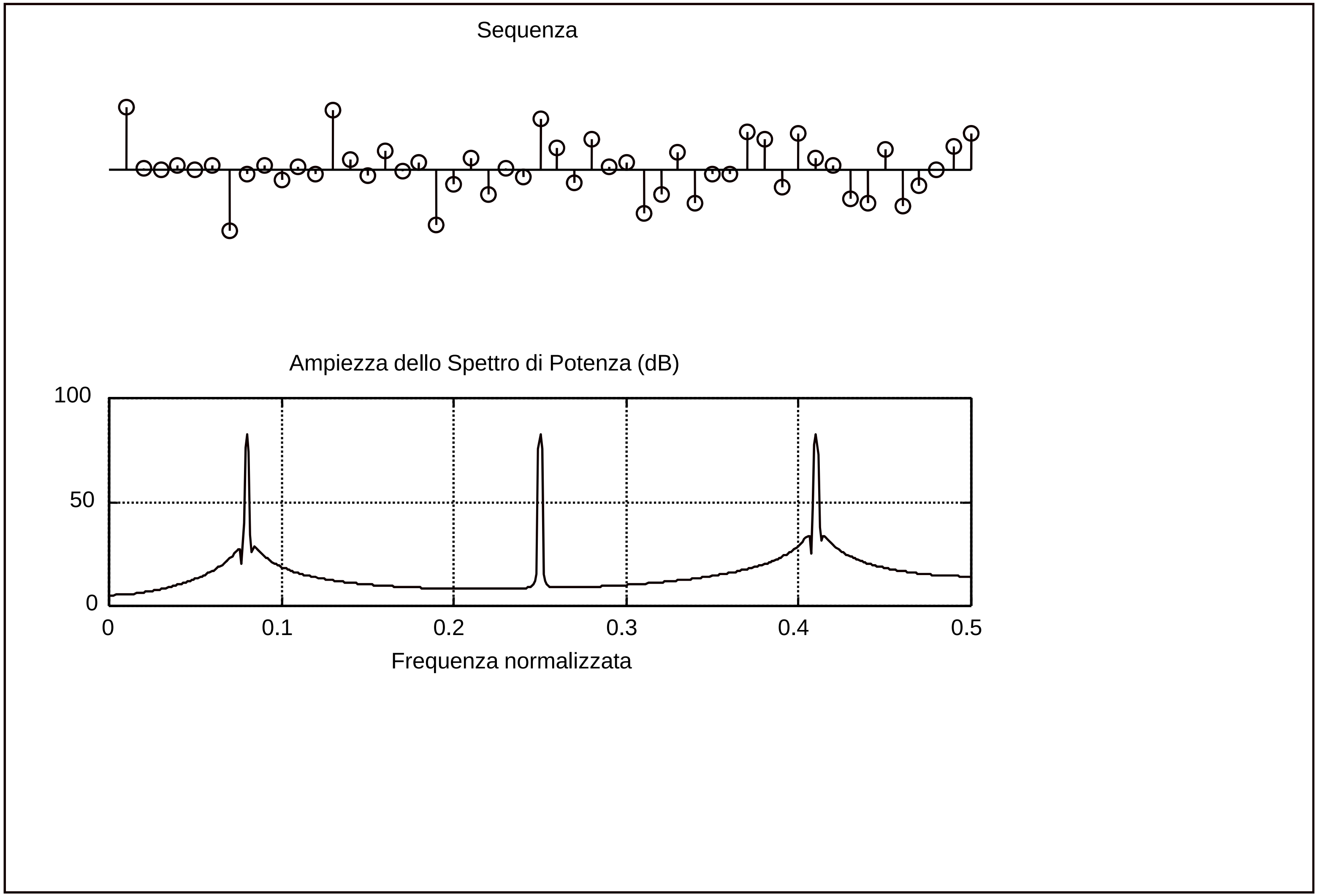
- **Si calcola la media**

$$P_x(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} A_i(k)$$

**Il valore** $P_x(k)$ **è la stima dello spettro di potenza del segnale** $x(n)$ **alla frequenza** $F = k/N$ **ovvero** $f = f_c k/N$.

**Il fattore** $1/NW$ **è introdotto per avere una stima non polarizzata (per** $N \rightarrow \infty$ **)**

**Modifica possibile: i blocchi** $x_i(n)$ **possono essere anche parzialmente sovrapposti (in genere di** $N/2$ **) per migliorare le stime.**

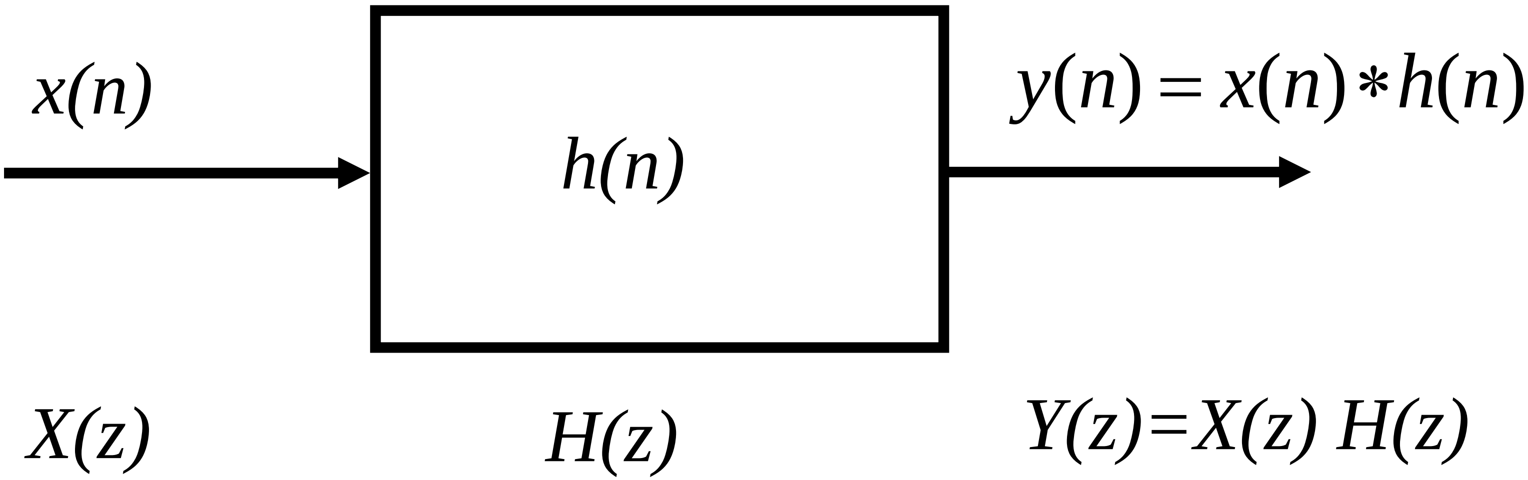



**Stima della densità spettrale di potenza**
**Metodo di Welch (periodogramma)**

Sequenza = somma di 3 segnali sinusoidali ($F_1 = 0.08$, $F_2 = 0.25$, $F_3 = 0.41$)
Finestra di Hamming, $N_{FFT} = 1024$

# CONVOLUZIONE LINEARE

**Convoluzione lineare fra due sequenze (*filtraggio FIR*) effettuata mediante l'impiego della $DFT$.**




$h(n)$ **di durata** $N$ **(FIR)**

$x(n)$ **di durata** $>> N$ **(generalmente)**

**Due tecniche**

1. **Sovrapposizione e somma (Overlap and add)**
2. **Sovrapposizione e selezione (Overlap and save)**

**Prima di descrivere queste due tecniche occorre considerare la convoluzione lineare mediante** $DFT$ **di due sequenze di durata finita (** $N$ **e** $L$ **rispettivamente) per due motivi:**

- ✓ **quando le durate** $N$ **e** $L$ **non sono *"troppo diverse"* essa realizza <u>direttamente</u> la loro convoluzione**
- ✓ **quando la durata del segnale di ingresso è** $>> N$**, la convoluzione lineare può essere realizzata con** $DFT$ **di dimensioni opportune.**

## ■ Convoluzione lineare fra sequenze finite

**Durata delle sequenze non troppo lunga**

$h(n)$, **durata** $N$

$x(n)$, **durata** $L$

$$y(n) = x(n) * h(n), \quad \textbf{\textit{durata}} \quad M = N + L - 1$$

$$= x_0(n) \otimes h_0(n)$$

# Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

( reperibili a: http://lenst.det.unifi.it/node/379)

- **Stime spettrali**

$$h_0(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & N \le n \le M-1 \end{cases}$$

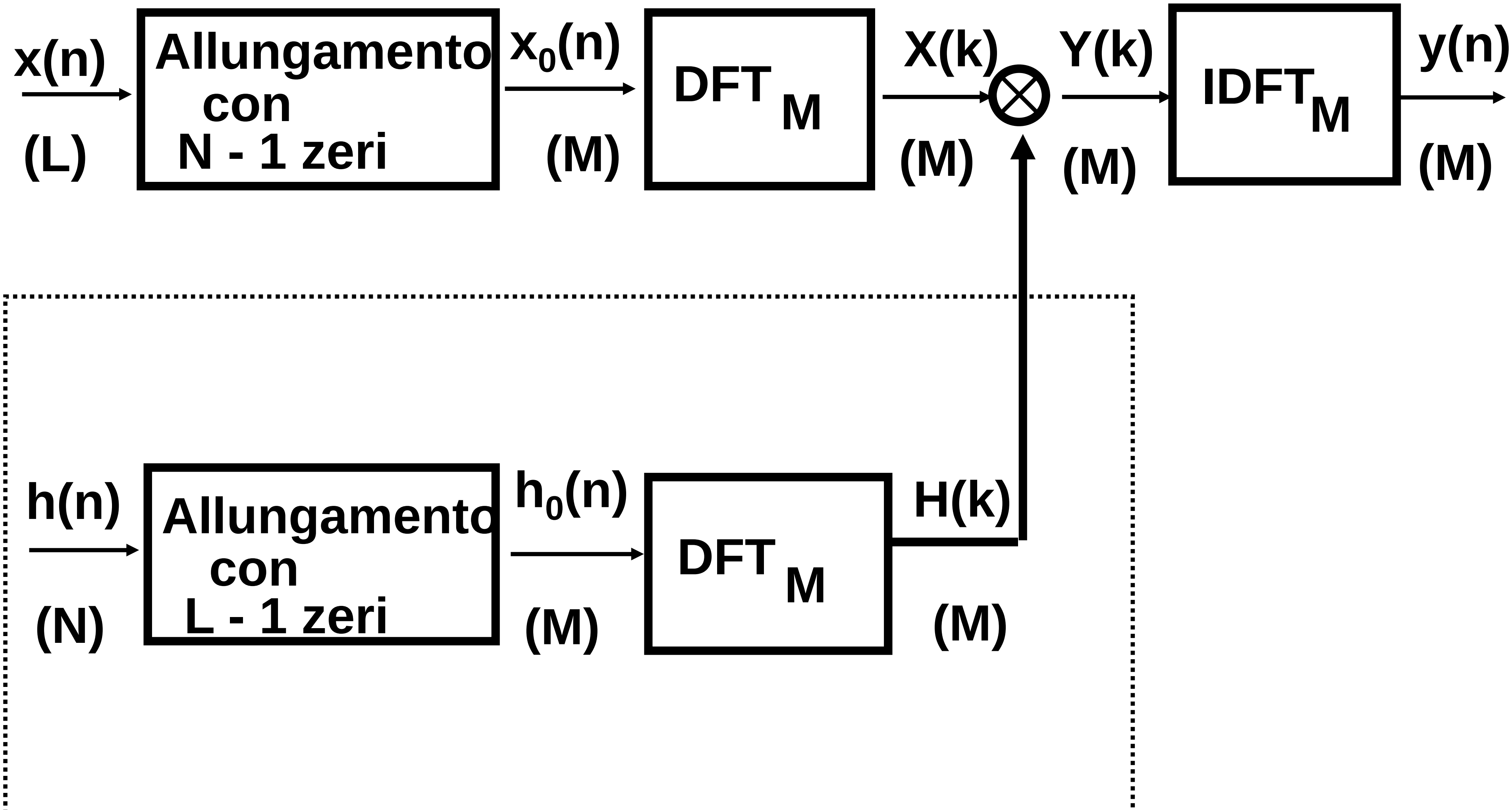
$$x_0(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & L \le n \le M-1 \end{cases}$$

**sequenze allungate con valori nulli (zeri)**

$$Y(k) = X(k)\,H(k)$$ $DFT$ **a** $M$ **punti**

**La** $DFT$ **dell'uscita è il prodotto delle** $DFT$ **delle due sequenze di partenza allungate con valori nulli.**

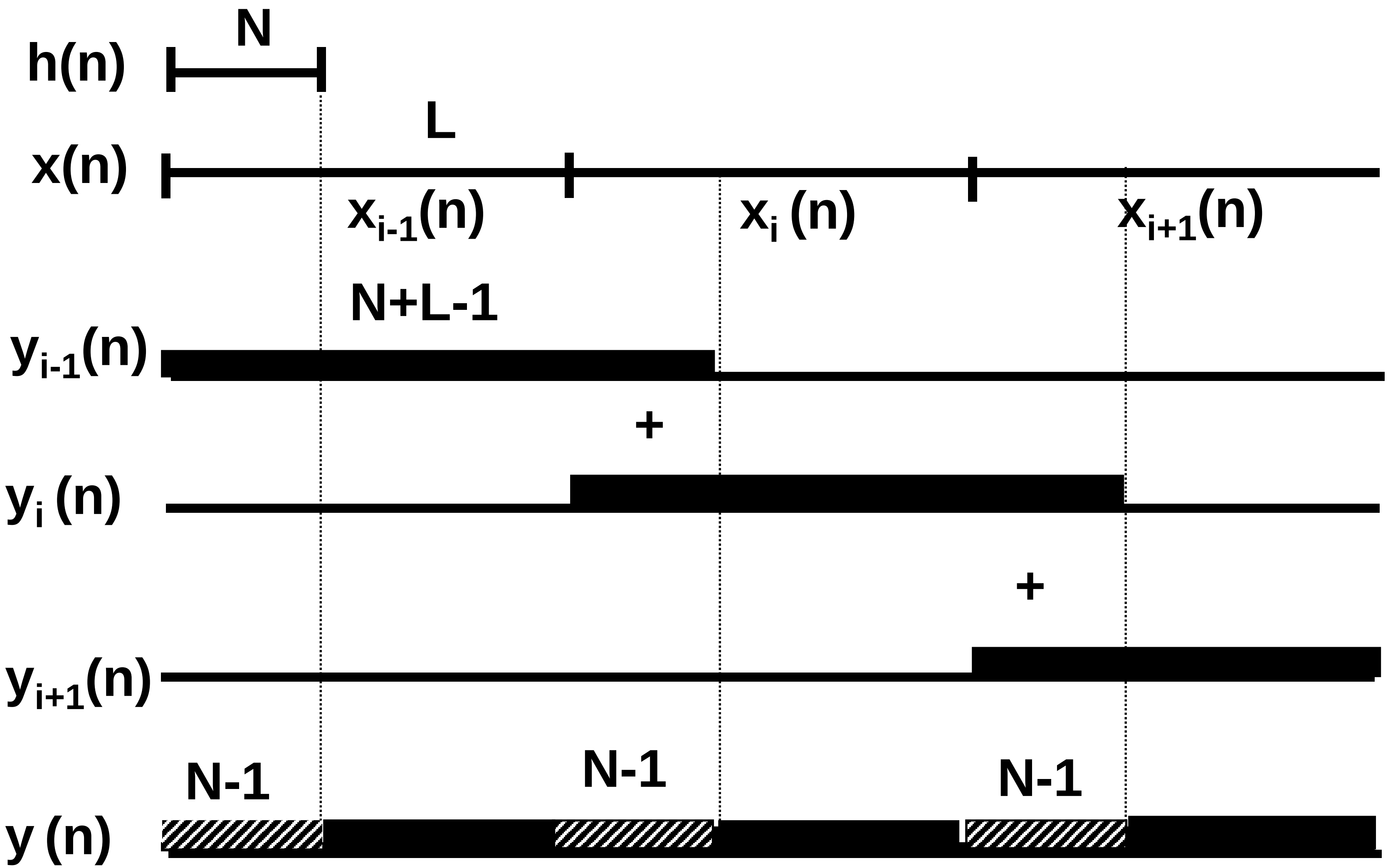
## Schema realizzativo



## ■ Osservazione

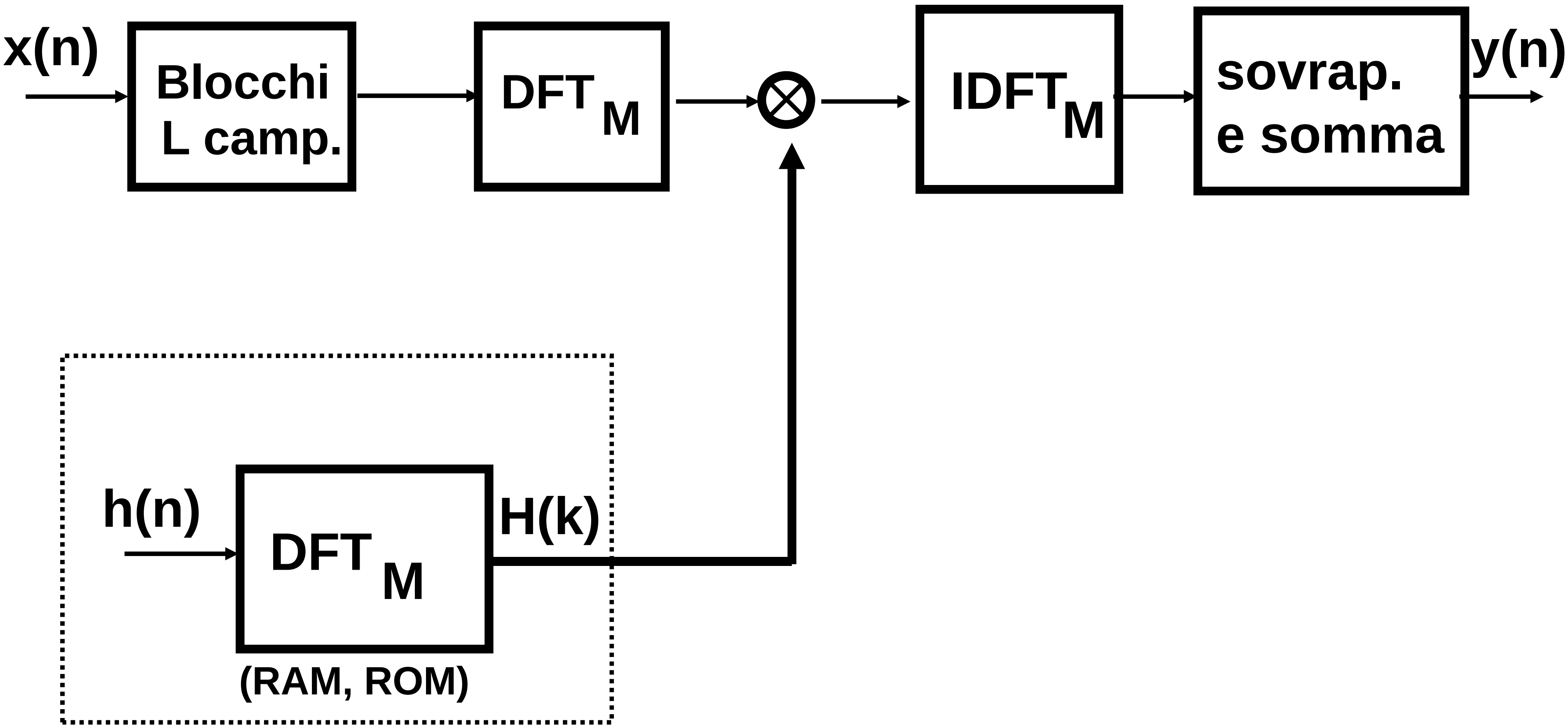
**La parte dello schema racchiusa nel rettangolo tratteggiato può essere calcolata una sola volta se la stessa $h(n)$ è usata per filtrare successivamente sequenze diverse aventi durata $\leq L$.**

## ■ Sovrapposizione e somma (Overlap and add)




$$y(n) = \sum_i x_i(n) * h(n) = \sum_i y_i(n)$$

## ■ Schema realizzativo




**Scelta di** $M \; : \; M \geq N + L - 1$

- **<u>Osservazione</u>**

- **Per semplicità nello schema l’operazione di allungamento con zeri è inclusa nel blocco DFT**

- **La parte racchiusa nel rettangolo tratteggiato può essere calcolata una sola volta.**

# Overlap-add
# Complessità realizzativa

$M \log_2 M + M$ **m.c.**

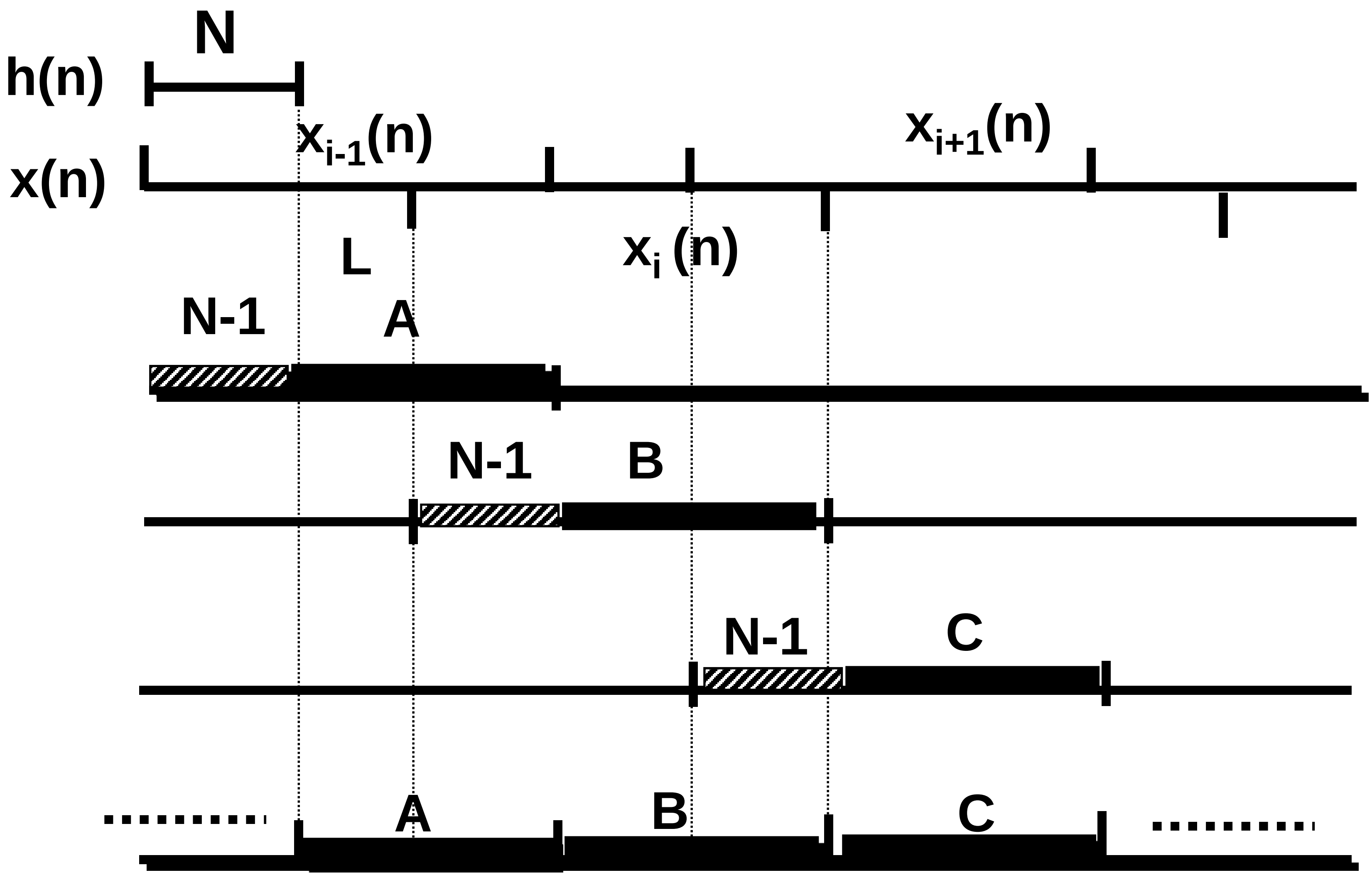
$$\frac{M \log_2 M + M}{L}$$ **m.c./campione**

**da confrontare con $N$ (m.r. o m.c.)**
**nel caso di realizzazione diretta**
**della convoluzione discreta**

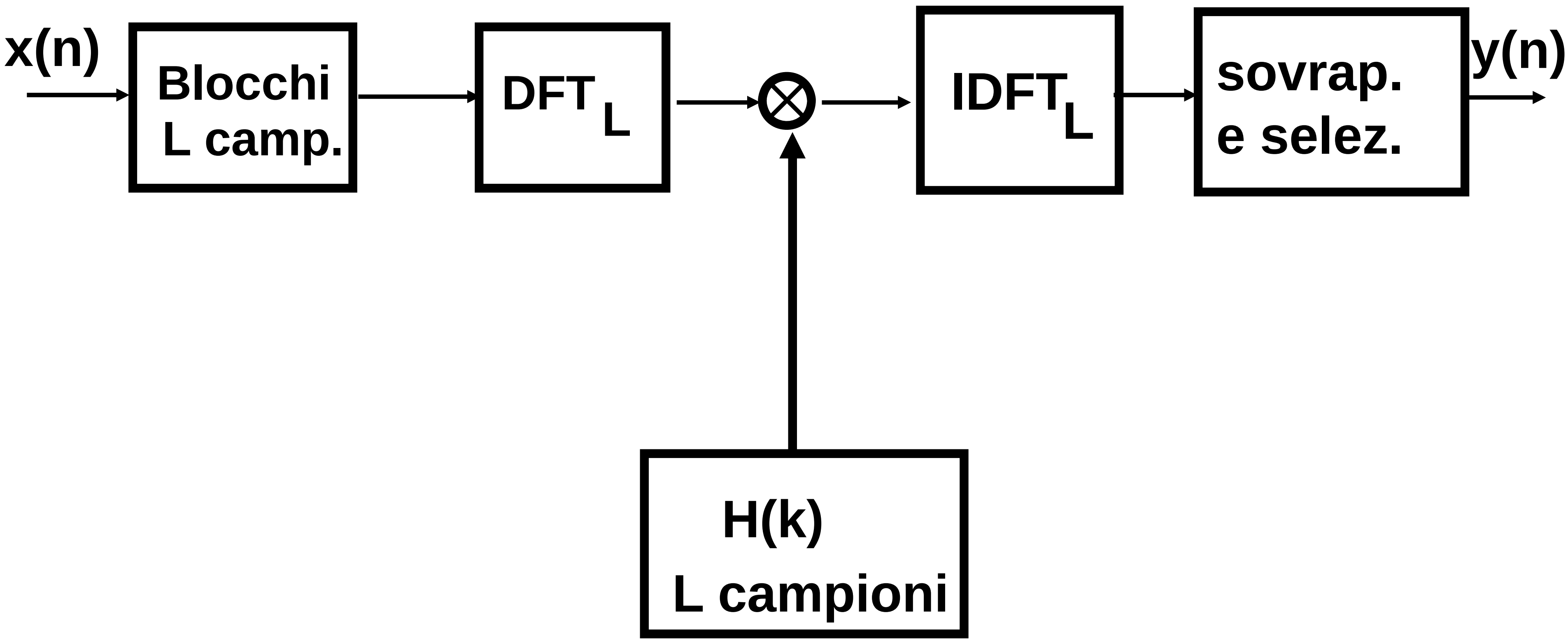
## ■ <u>Sovrapposizione e selezione (Overlap and save)</u>

**Osservazione:**

**nella <u>convoluzione circolare</u> ad $L$ punti di una sequenza di $N$ campioni con una di $L\ (>N)$ campioni i primi $N-1$ campioni sono diversi mentre i successivi $L-N+1$ sono identici a quelli della <u>convoluzione lineare</u> fra le stesse sequenze**


N
h(n)
$x_{i-1}(n)$
$x_{i+1}(n)$
x(n)
L
$x_i\,(n)$
N-1
A
N-1
B
N-1
C
A
B
C

- **Schema realizzativo**



# Overlap-save
# Complessità realizzativa

$L \log_2 L + L$ **m.c.**

$$\frac{L \log_2 L + L}{L-N+1}$$ **m.c./campione**

**da confrontare con $N$ (m.r. o m.c.) nel caso di realizzazione diretta della convoluzione discreta**

# CORRELAZIONE

**Data** $h(n)$ **di durata** $N$ **e** $x(n)$ **di durata** $> N$ **la loro correlazione (lineare) è data**

$$v(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)\, x(n+m) = x(n) * h(-n)$$

**Si possono applicare tutte le tecniche precedenti (sequenze entrambe finite, sovrapposizione e somma, sovrapposizione e selezione):**

**- usando** $h(-n)$ **al posto di** $h(n)$**, ovvero**

**usando** $H(P - k)$ **al posto di** $H(k)$

**(con** $P$ **dimensione della** $DFT$ **usata)**

- **Convoluzione e correlazione veloce**

**Si chiamano così quando si impiega un algoritmo *FFT* per il calcolo della *DFT* negli schemi precedenti.**

# Altre applicazioni della FFT

- **Modem OFDM** (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)
  - TV digitale terrestre (DVB-T)
  - TV sui cellulari (DVB-H)
  - DVB satellitare e mobile (DVB-SH)
  - WiMAX (rete wireless geografica a larga banda)
  - LTE (Long Term Evolution): future reti cellulari