TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER (DFT)

Definita per sequenze periodiche (o finite)

N periodo (o durata) di x(n), n = 0, 1, ..., N -1

$$DFT : X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\ e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0,\ 1, \cdots,\ N-1$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\ W_N^{nk} \qquad (W_N = e^{-j2\pi/N})$$

$$IDFT : x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\ W_N^{-nk}$$

X(k) e x(n) sono due sequenze (generalmente complesse) periodiche di periodo N

$$X(k) = X(k + pN)$$

$$x(n) = x(n + pN)$$

p *intero qualsiasi*

Valori significativi: $0 \leq n \leq N - 1$

$$0 \leq k \leq N - 1$$

Se x(n) è una sequenza di durata finita $\leq$ N essa va considerata come un periodo di una sequenza periodica

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m} x(n+mN)$$

- **Relazione utile**

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm j\frac{2\pi}{N}np} = 1\,,\quad p = m\,N \quad m \text{ intero}$$

$$= 0\,,\quad \text{altrimenti}$$

Dimostrazione IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

moltiplicando entrambi i membri per $e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$

e sommando da n=0 a N-1 si ha

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)}$$

Scambiando l'ordine della sommatoria

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)}$$

ed essendo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} = \begin{cases} 1, & \textit{per } k = r \\ 0, & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

si ha

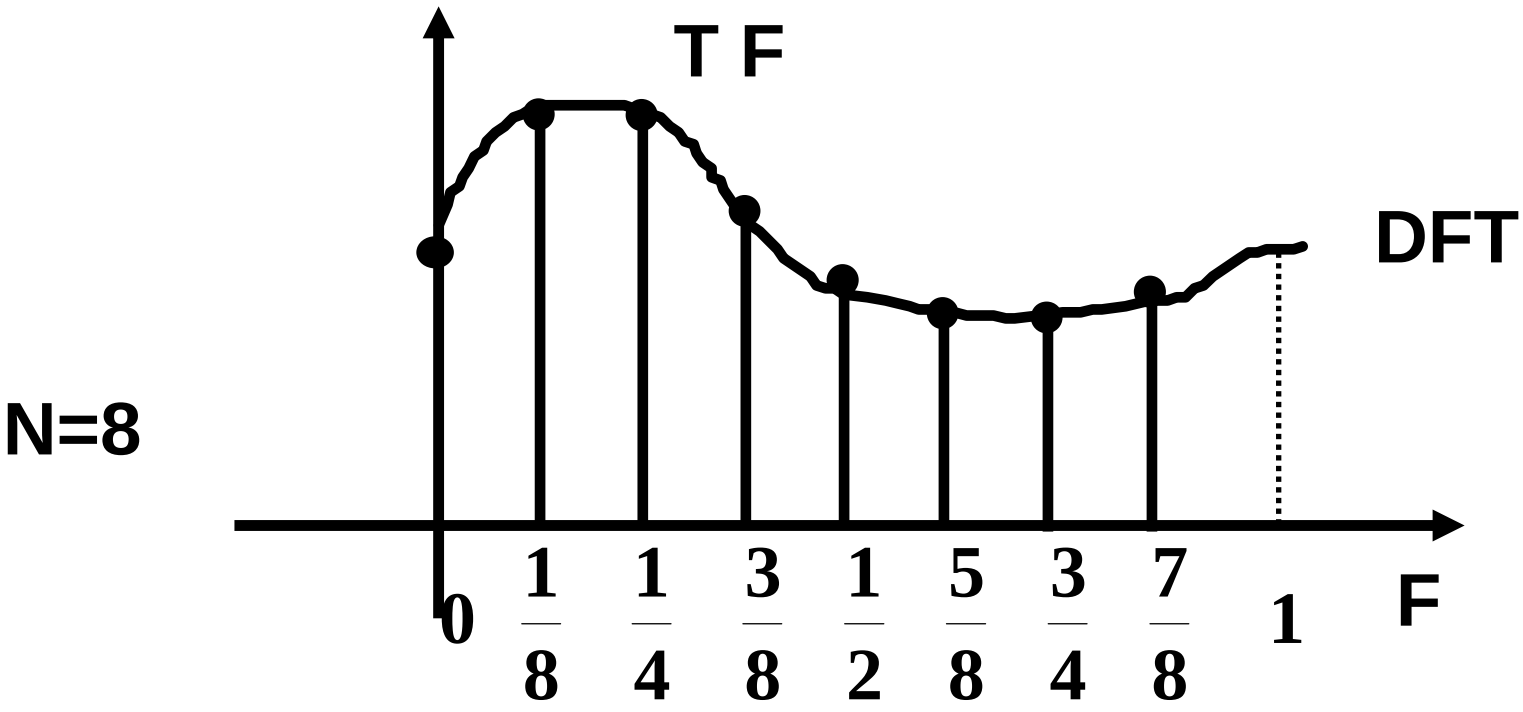
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$ **periodica con periodo N**

Nota

Per semplicità di notazione continuiamo ad usare lo stesso simbolo X per denotare la trasformata discreta di Fourier X(k), la trasformata di Fourier X(F) e la trasformata-z X(z) di una stessa sequenza x(n) [nel caso ovviamente esistano]. Esse sono distinte senza ambiguità dal tipo del loro argomento:

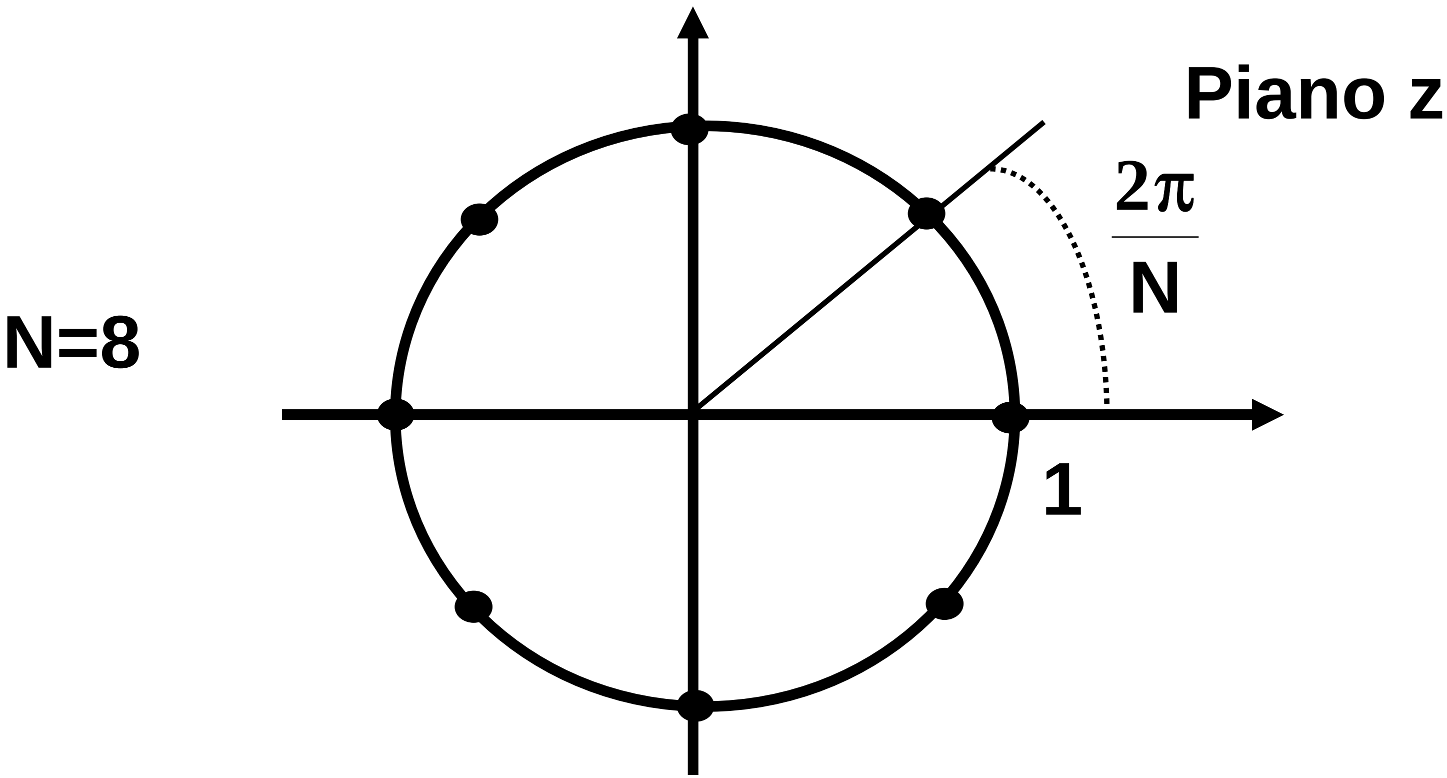
intero k	$\leftarrow \rightarrow$	***DFT***
reale F	$\leftarrow \rightarrow$	***TF***
complesso z	$\leftarrow \rightarrow$	***TZ***

RELAZIONE CON TF E TZ PER SEQUENZE FINITE



E' la TF calcolata per N frequenze equispaziate di $\Delta f = f_c/N$ ovvero $\Delta F = 1/N$

$$X(k) = X(F)\Big|_{F=\frac{k}{N}}$$



E' la TZ calcolata in N punti equispaziati sulla circonferenza unitaria

$$X(k) = X(z)\Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

- **Per sequenze <u>finite</u> (di durata N campioni) è possibile ottenere X(z) a partire da X(k)**

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

Dimostrazione:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, z^{-n} =$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\; z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\; z^{-1} \right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}kN} z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} =$$

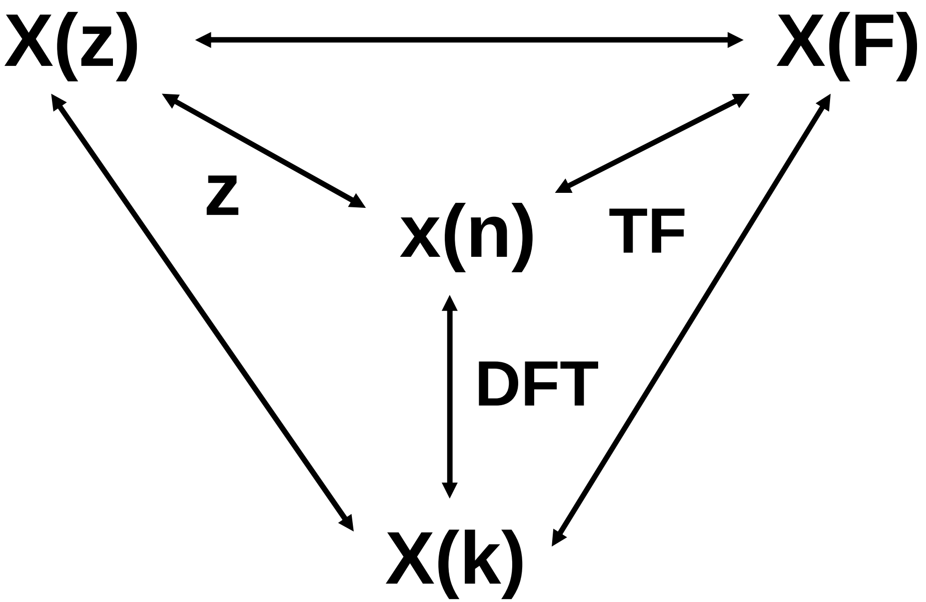
$$= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

- **Esprime X(z) di una sequenza finita di durata N campioni, in funzione di N campioni equidistanti di X(z) presi sul cerchio unitario (N campioni in frequenza spaziati di $\frac{1}{NT} = \frac{f_c}{N}$)**

- **Per sequenze <u>finite</u> (di durata N campioni) è possibile ottenere X(F) a partire da X(k)**

$$X(F) = \frac{1-e^{-j2\pi FN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}\, e^{-j2\pi F}}$$

- Per sequenze finite (di durata N campioni)



- **Data la TZ X(z) di una sequenza x(n), il campionamento di X(z) sulla circonferenza unitaria in N punti equispaziati**

$$X(k) = X(z)\Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

corrisponde alla DFT della sequenza:

$$x'(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN)$$

Dimostrazione:

- **La DFT inversa** $$x'(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Sostituendo $$X(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kr}$$

invertendo le sommatorie e tenendo conto delle proprietà degli esponenziali, si ottiene

$$x'(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN)$$

Osservazione: $\mathbf{x'(n) = x(n)} \qquad 0 \le n \le N - 1$

solo se $x(n)$ ***è di durata finita*** $\le N$

■ Esempio di applicazione

Calcolo della antitrasformata-z di una X(z) (supponendo che x(n) $\rightarrow$ 0 per n $\rightarrow \infty$).

Si determina la X(k) per valori crescenti di N fino a verificare che la IDFT dia valori trascurabili (inferiori ad una prefissata soglia) per i valori n $\geq N_0$

Si possono determinare numericamente (e con buona approssimazione) i campioni della sequenza x(n), che ha per trasformata-z X(z), e la sua durata N_0.

Esercizi Proposti

- **Esercizi scritti**

  (dal testo di riferimento: E. Del Re, “Elementi di elaborazione numerica dei segnali”)

  3.1 3.2 3.4 3.12 3.15

- **Esercizi al calcolatore**

  (dal testo di esercitazioni di laboratorio: C.S. Burrus et al.,”Computer-based exercises for signal processing using Matlab”)

Capitolo 2

DFT Properties: Project 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Principali proprietà della DFT

- **Linearità**

Se $\quad x(n) \Leftrightarrow X(k) \quad$ e $\quad y(n) \Leftrightarrow Y(k)$

$$a\,x(n) + b\,y(n) \Leftrightarrow a\,X(k) + b\,Y(k)$$

a, b costanti reali o complesse

- **Inversione temporale**

$$x(-n) = x(N-n) \Leftrightarrow X(-k) = X(N-k)$$

- **Complesso coniugato**

$$x^*(n) \Leftrightarrow X^*(N-k)$$

- **Inversione temporale e complesso coniugato**

$$x^*(N-n) \quad \Leftrightarrow \quad X^*(k)$$

- **Simmetrie per sequenze <u>reali</u>**
  - *x(n) reale*

    $$X(N-k) = X^*(k)$$

  - *x(n) reale e pari :* $x(N-n) = x(n)$

    X(k) reale e pari : $X(N-k) = X(k)$

  - *x(n) reale e dispari :* $x(N-n) = -x(n)$

    X(k) immaginaria e dispari : $X(N-k) = -X(k)$

■ Teorema di Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Energia di un periodo della sequenza

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Potenza della sequenza

Dimostrazione

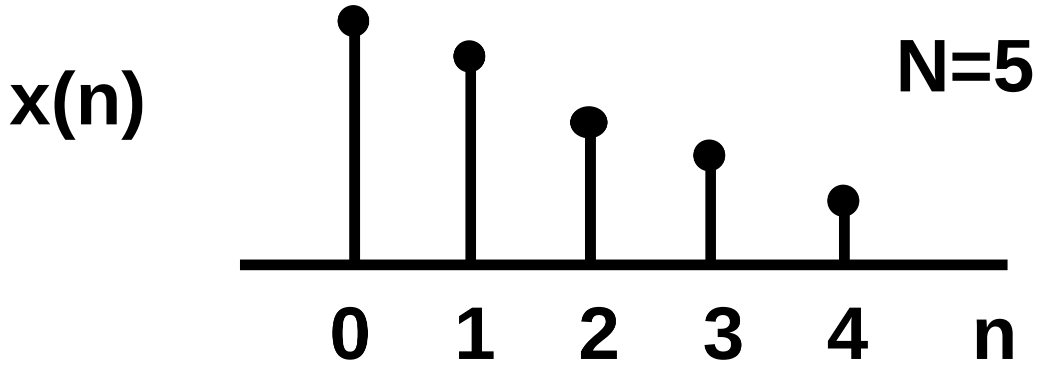
$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, x^*(n) =$$

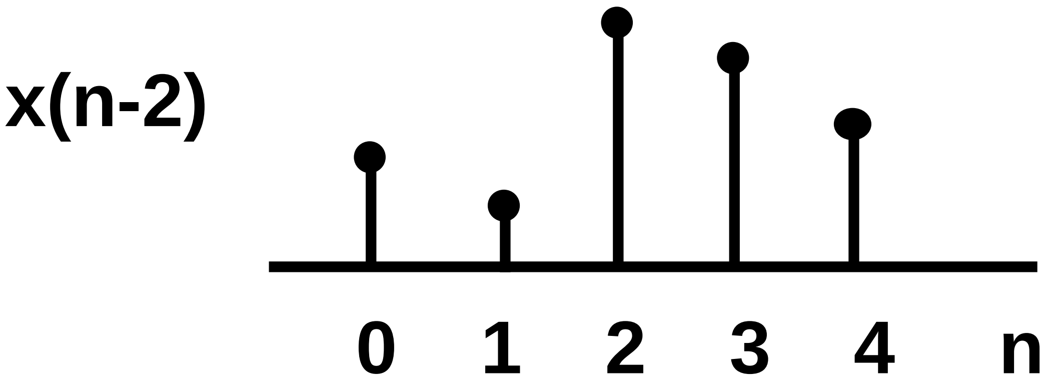
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X^*(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{N} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

■ Traslazione circolare





$$x(n-m)_N \quad \Leftrightarrow \quad X(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

rotazione di fase pari a $-\dfrac{2\pi km}{N}$

Analogamente (in modo duale)

$$X(k-l)_N \quad \Leftrightarrow \quad x(n)\, e^{j\frac{2\pi}{N}nl}$$

modulazione con esponenziale complesso

■ Convoluzione circolare

Proprietà molto importante per le implicazioni applicative e realizzative

Definizione

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\, x_2(n-m)_N$$

$$\Rightarrow Y(k) = X_1(k)\, X_2(k)$$

• **Il prodotto $X_1(k)$ $X_2(k)$ è la DFT di una convoluzione circolare di due sequenze (e non di una convoluzione tradizionale, detta per distinzione lineare o aperiodica)**

Convoluzione lineare

$$x_l(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\, x_2(n-m)$$

Per sequenze di durata N

$x_c(n)$ è periodica con periodo N

$x_l(n)$ ha durata di L = 2N-1

Per poter utilizzare la DFT per il calcolo della convoluzione lineare [p.es. $y(n) = x(n) * h(n)$], occorre usare tecniche opportune

[Overlap - add, overlap - save]

Esercizi Proposti

- **Esercizi scritti**

  (dal testo di riferimento: E. Del Re, "Elementi di elaborazione numerica dei segnali")

  3.3 3.5 3.10 3.17 3.18 3.19

- **Esercizi al calcolatore**

  (dal testo di esercitazioni di laboratorio: C.S. Burrus et al.,"Computer-based exercises for signal processing using Matlab")

Capitolo 2

Convolution: Circular and Block

Project 1, 2, 3

TRASFORMATA VELOCE DI FOURIER

TRASFORMATA VELOCE DI FOURIER (FFT)

La DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \; W_N^{nk} \quad , \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

richiede

N^2 moltiplicazioni complesse
[4 N^2 m. reali + 2 N^2 s. reali]

N (N-1) somme complesse [2N (N-1) s. reali]

■ Algoritmi FFT

⇒ ***Radice - 2 decimazione nel tempo***

⇒ ***Radice - 2 decimazione in frequenza***

⇒ ***Estensioni di questi algoritmi base***

■ FFT RADICE - 2 DECIMAZIONE NEL TEMPO

$$N = 2^{v}$$

$$X(k) = \sum_{n\ pari} x(n)\ W_N^{nk} + \sum_{n\ dispari} x(n)\ W_N^{nk}$$

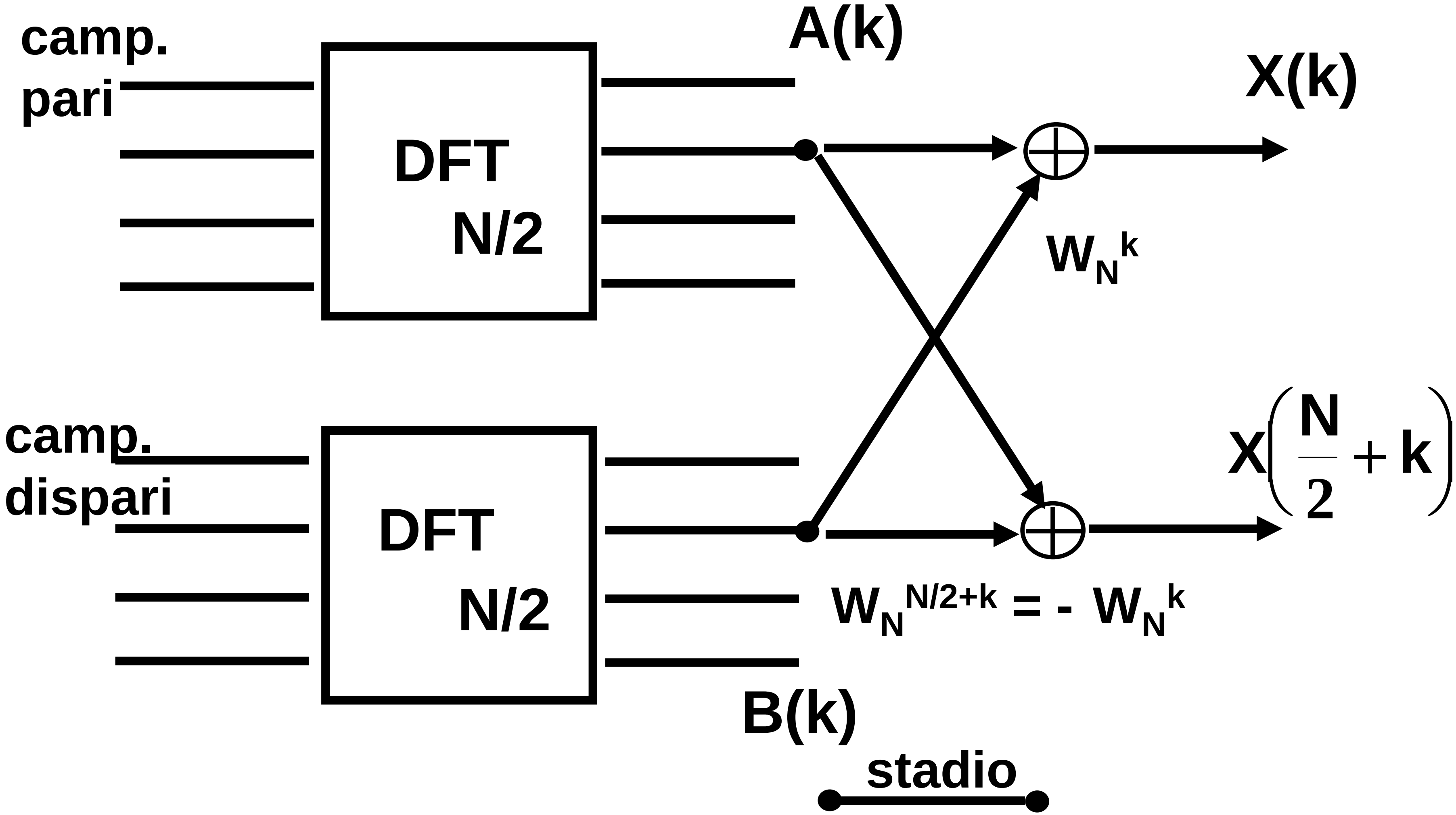
$$= \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2p) W_N^{2pk} + W_N^{k} \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2p+1)\ W_N^{2pk}$$

$$\left(W_N^2 = W_{N/2}\right) \quad =$$

$$= \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2p)\, W_{N/2}^{pk} + W_N^k \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2p+1)\, W_{N/2}^{pk}$$

$$= \quad A(k) + W_N^k \; B(k)$$

- A(k), B(k) sono $DFT_{N/2}$



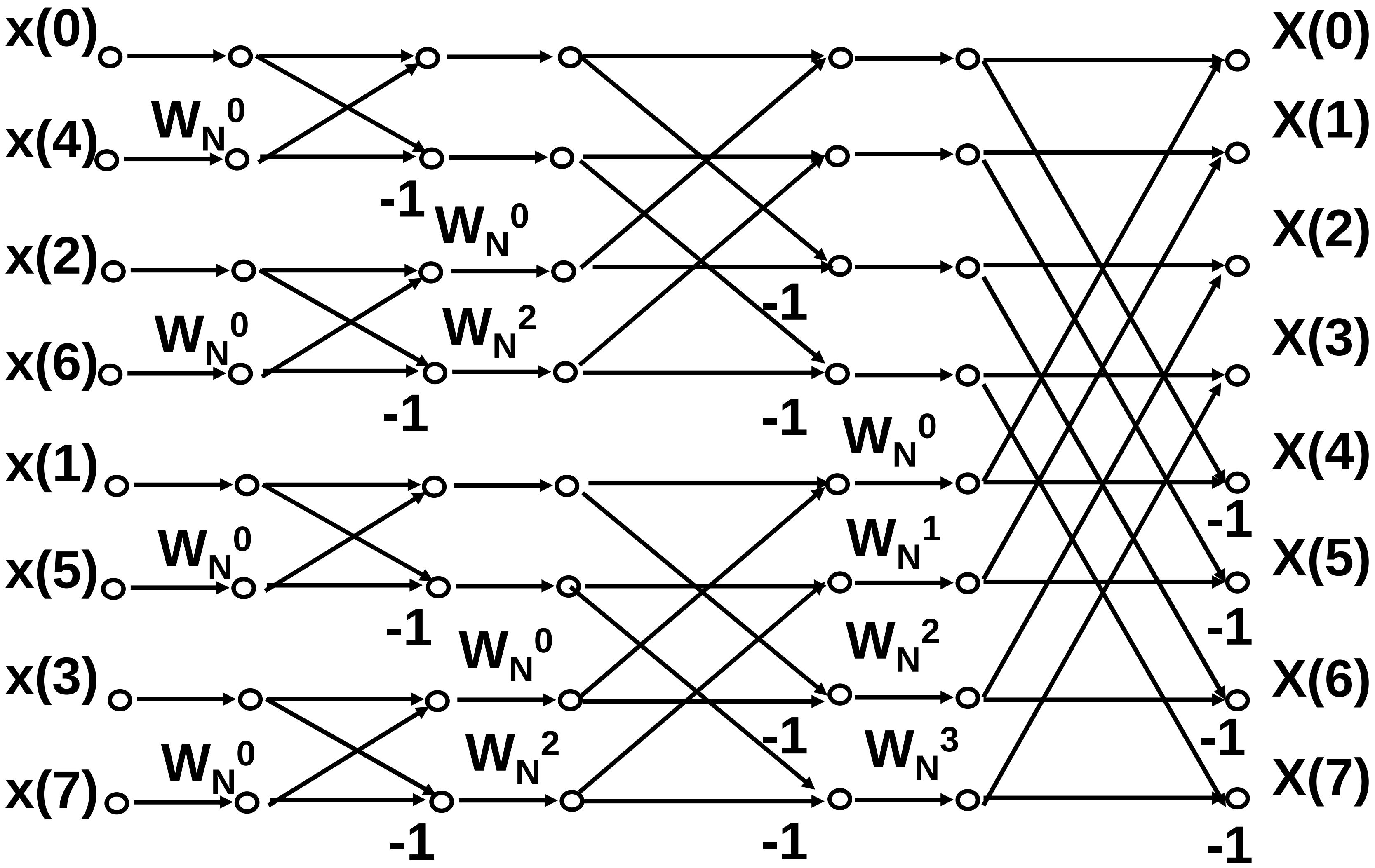
N/2 m.c. + N s.c.
(farfalle)

- **Il procedimento può essere iterato fino ad arrivare a DFT_2.**

- **Il numero di stadi : $v = \log_2 N$**

Esempio: N = 8

Grafo



■ Complessità finale

$\frac{N}{2} \log_2 N$ *moltiplicazioni complesse*

$\left[\frac{N}{2} \log_2 \frac{N}{2}\right.$ *m.c. eliminando le moltiplicazioni del primo stadio* $\left.\right]$

$N \log_2 N$ *somme complesse*

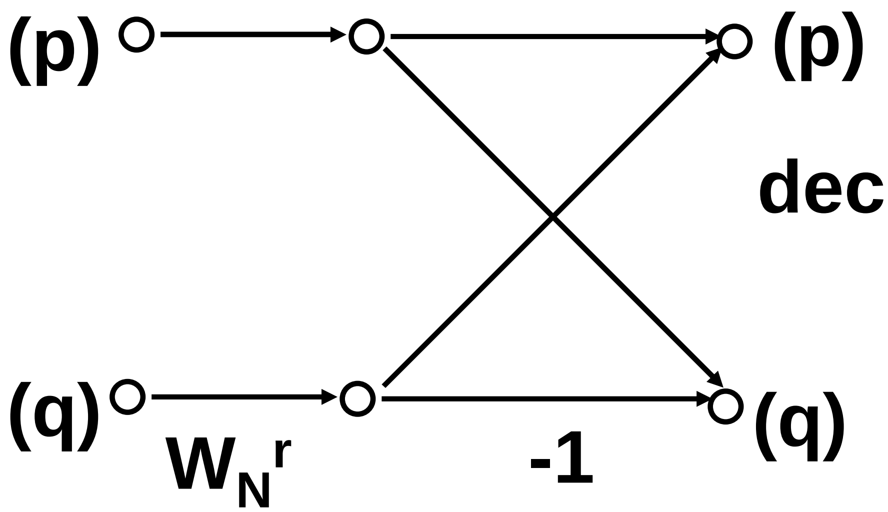
Ingressi: bit-reversed order

Gli ingressi non sono in sequenza. Devono essere ordinati come nell'esempio (N = 8):

Posizione	Campione
0 = 000	x(0) = x(000)
1 = 001	x(4) = x(100)
2 = 010	x(2) = x(010)
3 = 011	x(6) = x(110)
4 = 100	x(1) = x(001)
5 = 101	x(5) = x(101)
6 = 110	x(3) = x(011)
7 = 111	x(7) = x(111)

■ Calcolo "in-place"

Gli ingressi e le uscite di ogni "farfalla" stanno sulla stessa linea orizzontale.
Bastano N locazioni di memoria (complesse), perchè a coppie subiscono una trasformazione e il risultato può essere rimemorizzato nelle stesse locazioni degli ingressi.



decim. nel tempo

N	DFT m.c.	DFT s.c.	FFT m.c.	FFT s.c.
32	1024	992	80	160
1024	1048576	1047552	5120	10240

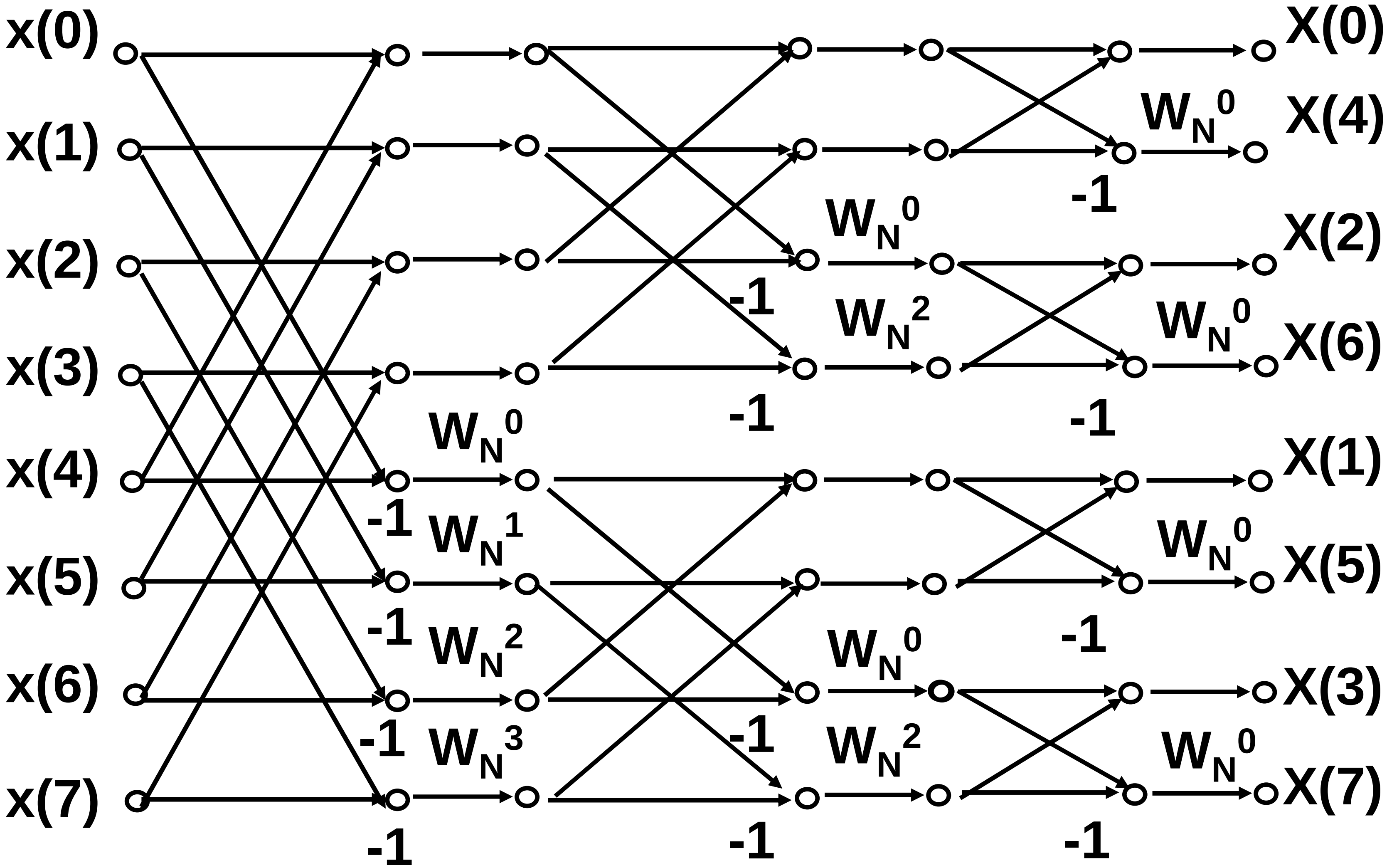
FFT RADICE - 2 DECIMAZIONE IN FREQUENZA

$$N = 2^{v}$$

- **Algoritmo duale**

- **Scompone la sequenza di uscita X(k) in due termini, il primo relativo alla prima metà (k= 0...N/2-1), il secondo relativo alla seconda metà (k=N/2...N-1)**

Grafo N=8



- Uscite: bit-reversed order
- Calcolo: “in place”.

■ Complessità

$$\frac{N}{2} \log_2 N$$ *m. c.*

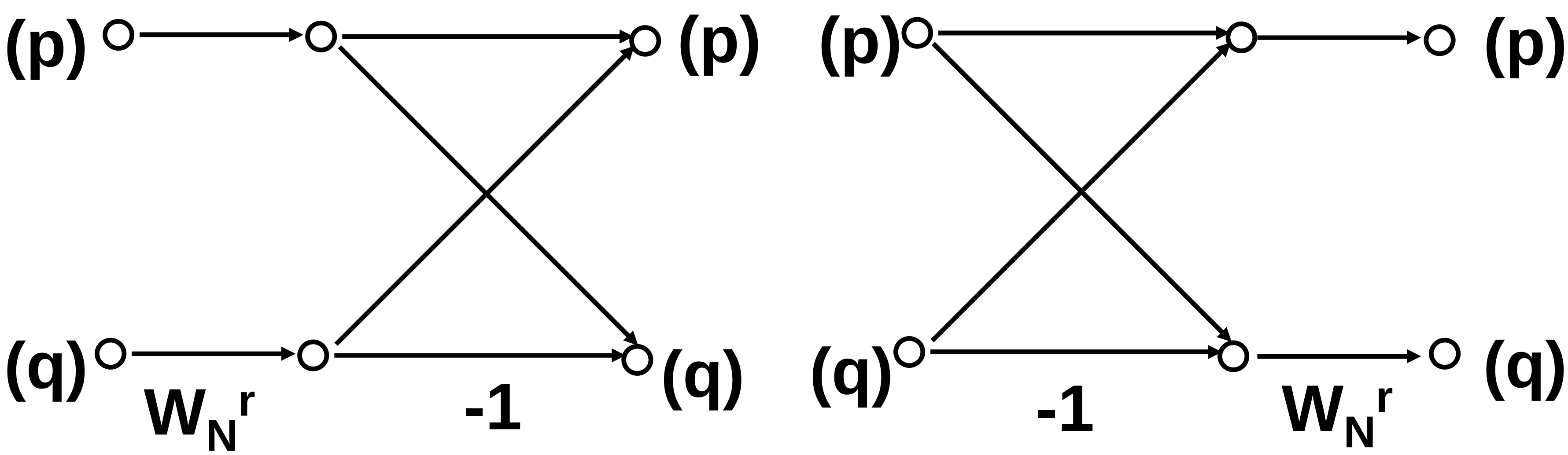
$$\left[\frac{N}{2} \log_2 \frac{N}{2} \right]$$ *m. c.* ***eliminando le moltiplicazioni dell'ultimo stadio***

$$N \log_2 N$$ *s. c.*

■ Relazione fra i due algoritmi FFT radice-2

Struttura delle farfalle

decim. nel tempo **decim. in frequenza**



Sono scambiati ingressi e uscite e invertito il senso del flusso dei segnali.

Ciascuna delle due strutture può essere ottenuta dall’altra applicando queste regole (regole di trasposizione di grafi lineari):

- scambiare ingressi e uscite
- invertire il flusso dei segnali
- scambiare i punti di diramazione e i punti di somma

FFT: VARIAZIONI ED ESTENSIONI

- **Si possono modificare i grafi in modo che ingressi e uscite siano nell'ordine naturale (crescente).**
  Si perde la proprietà di calcolo "in place".

- **Algoritmi radice- 4 ($N = 4^v$)**

$\sim$ $N \log_4 N$ *m. c.*

$\sim$ $2N \log_4 N$ *s. c.*

- **Altri algoritmi**

Winograd (fattori primi)

Mixed-radix (radice diversa per ogni stadio)

Split-radix (mescolanza di radice-2 e radice-4).

FFT: CONSIDERAZIONI FINALI

- La IDFT$_N$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \quad W_N^{-nk}$$

può essere calcolata (a meno del fattore 1/N) da un algoritmo FFT sul quale si operi la sostituzione

$$W_N \quad \rightarrow \quad W_N^{-1}$$

(FFT) (IFFT)

La divisione per il fattore N può essere eseguita mediante divisione per un fattore 2 ad ogni stadio.

- **In pratica per il calcolo della DFT conviene sempre impiegare un algoritmo di FFT, a meno che non interessino <u>pochi</u> punti della DFT.**

APPLICAZIONI DELLA DFT

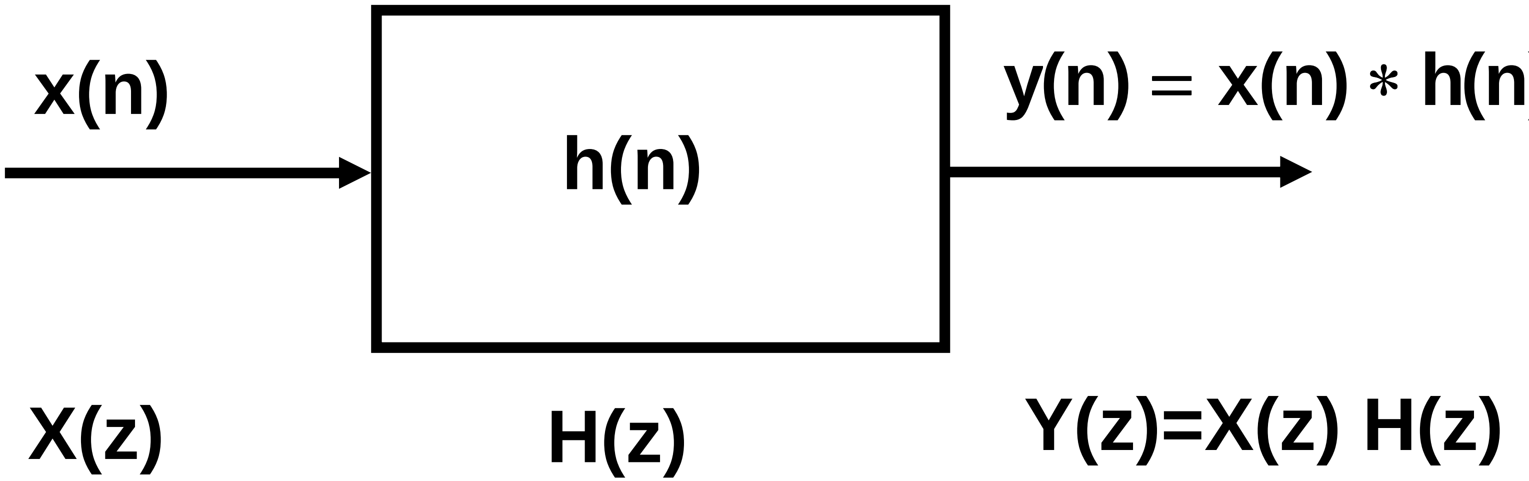
APPLICAZIONI DELLA DFT

Sono numerosissime. Qui vedremo alcune delle più importanti e significative:

- Convoluzione di sequenze
- Correlazione di sequenze
- Stime spettrali

CONVOLUZIONE LINEARE

Convoluzione lineare fra due sequenze (filtraggio FIR) effettuata mediante l'impiego della DFT.



h(n) di durata N (FIR)

x(n) di durata >> N (generalmente)

Due tecniche

1. Sovrapposizione e somma (Overlap and add)
2. Sovrapposizione e selezione (Overlap and save)

Prima di descrivere queste due tecniche occorre considerare la convoluzione lineare mediante DFT di due sequenze di durata finita (N e L rispettivamente) per due motivi:

- ✓ **quando le durate N e L non sono *"troppo diverse"* essa realizza <u>direttamente</u> la loro convoluzione**
- ✓ **quando la durata del segnale di ingresso è >> N, la convoluzione lineare può essere realizzata con DFT di dimensioni opportune.**

■ Convoluzione lineare fra sequenze finite

Durata delle sequenze non troppo lunga

h(n), durata N

x(n), durata L

$$y(n) = x(n) * h(n), \quad \textit{durata} \quad M = N + L - 1$$

$$= x_0(n) \otimes h_0(n)$$

$$h_0(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & N \le n \le M-1 \end{cases}$$

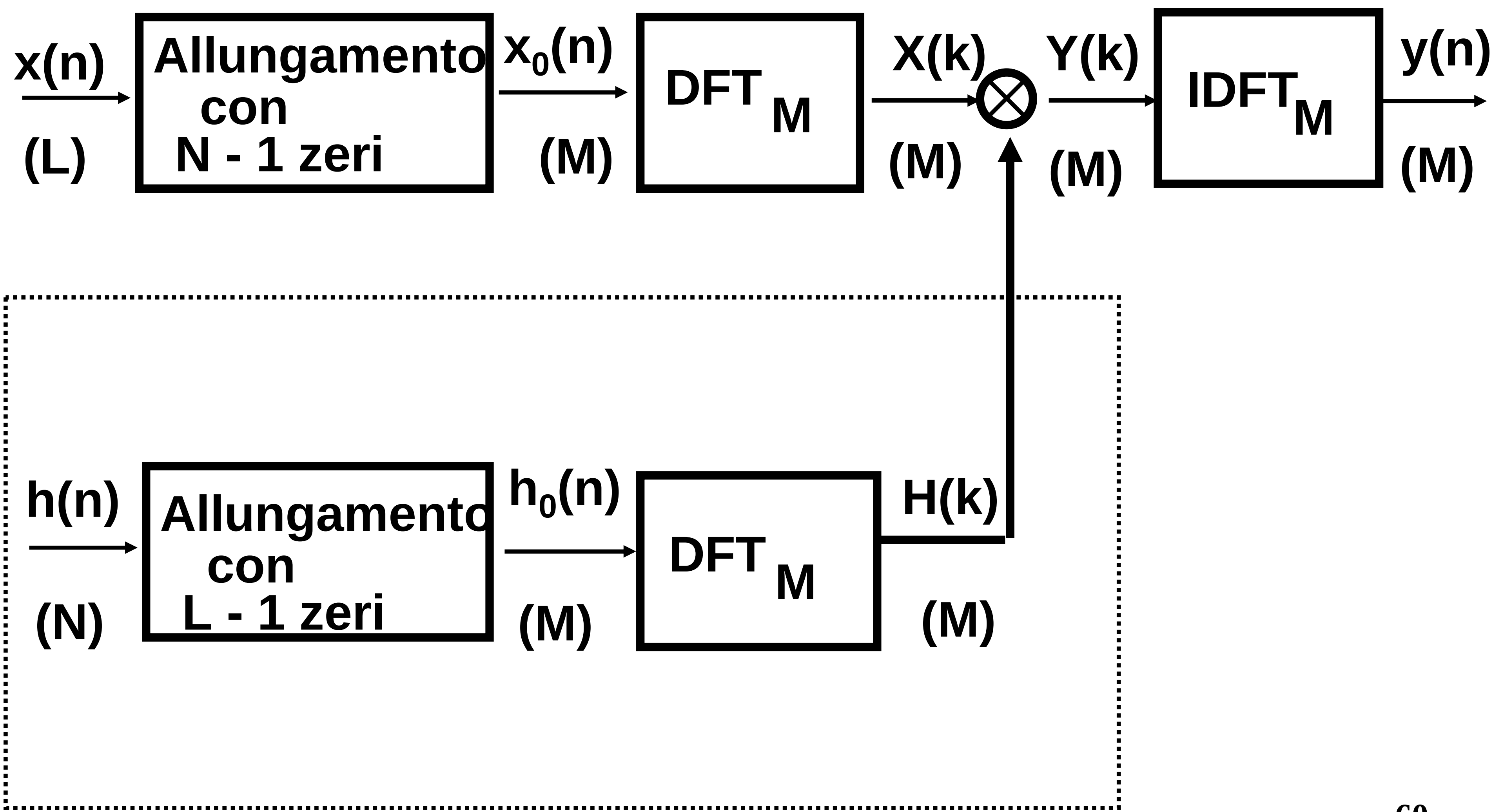
$$x_0(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & L \le n \le M-1 \end{cases}$$

sequenze allungate con valori nulli (zeri)

$$Y(k) = X(k)\ H(k)$$ **DFT a M punti**

La DFT dell'uscita è il prodotto delle DFT delle due sequenze di partenza allungate con valori nulli.

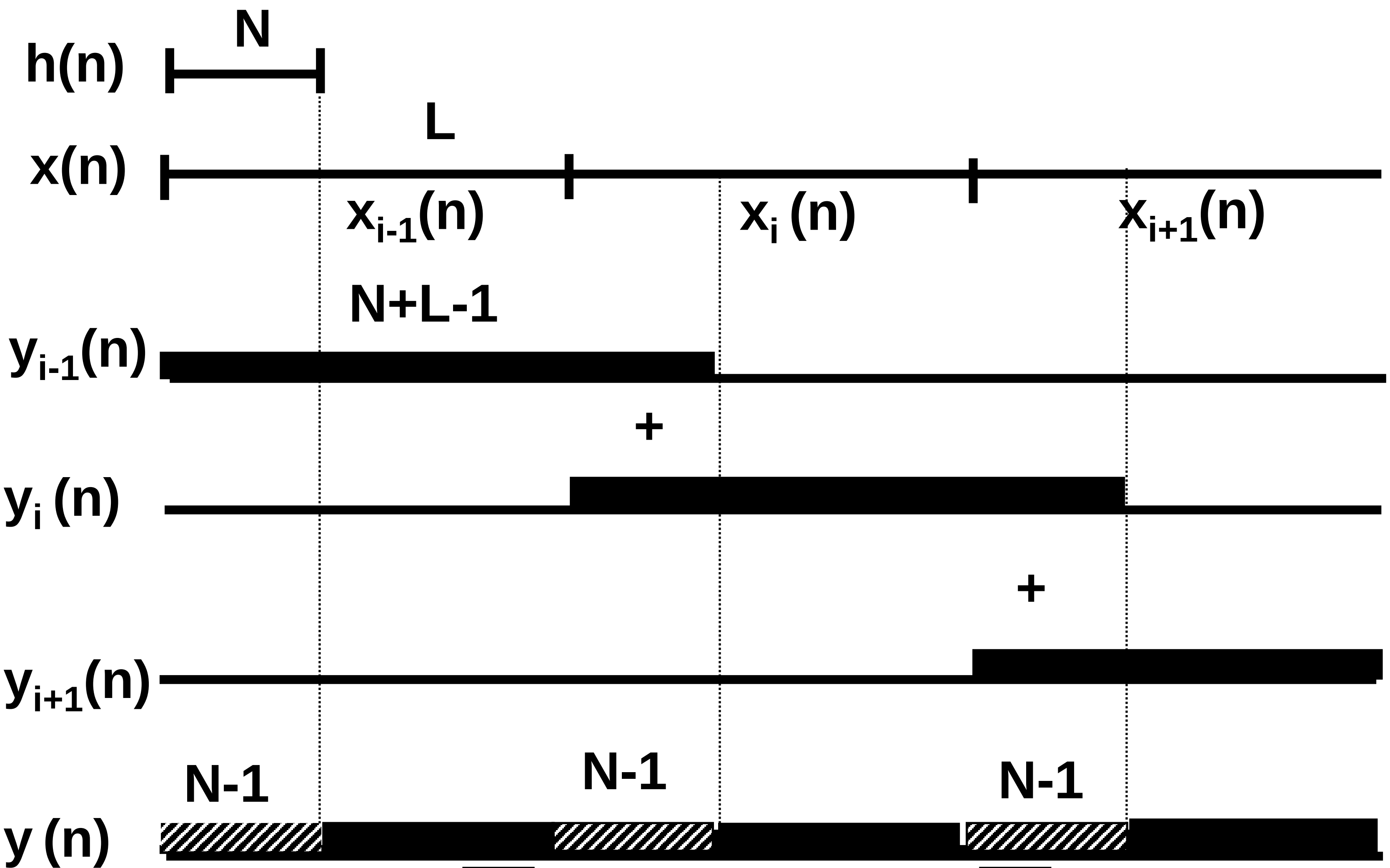
■ Schema realizzativo



■ <u>**Osservazione**</u>

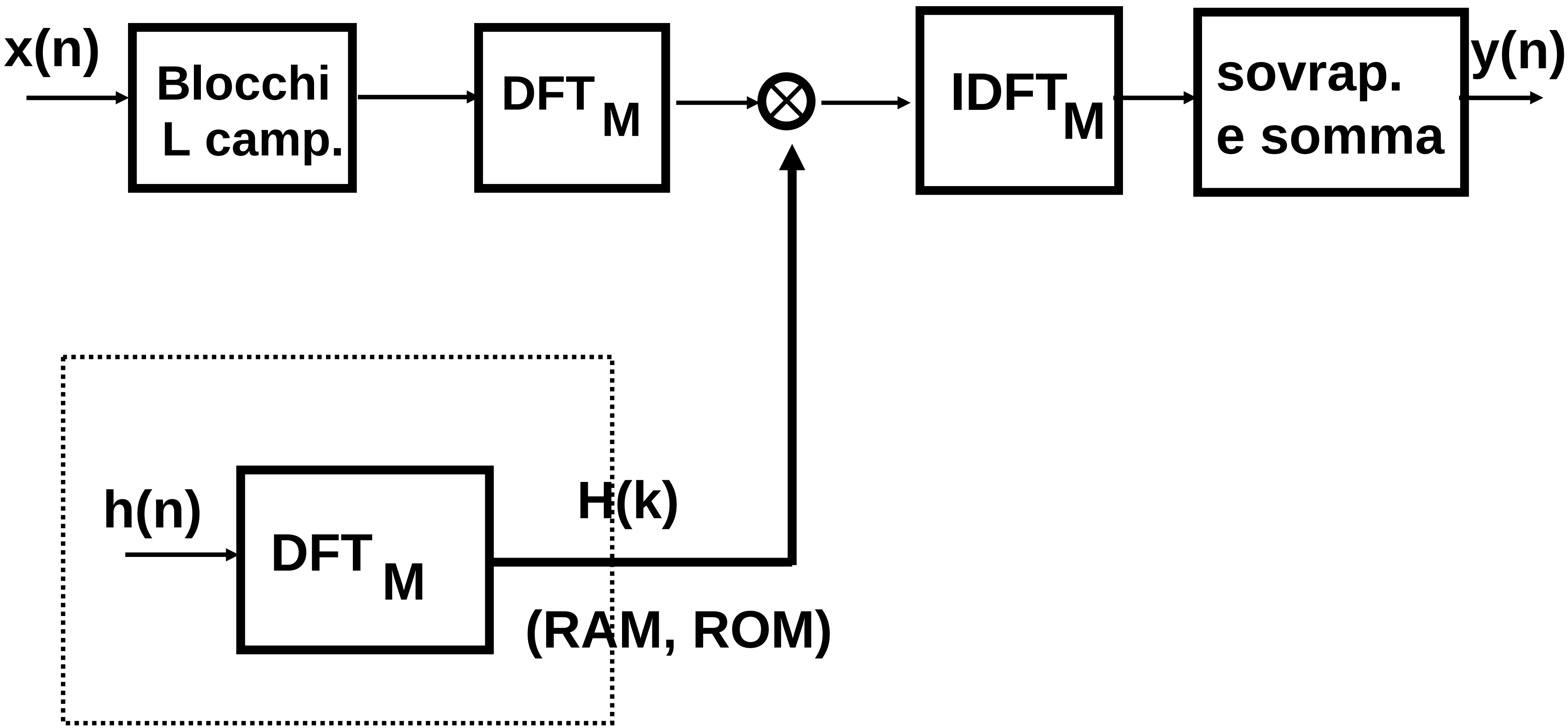
La parte dello schema racchiusa nel rettangolo tratteggiato può essere calcolata una sola volta se la stessa h(n) è usata per filtrare successivamente sequenze diverse aventi durata $\leq$ L.

■ Sovrapposizione e somma (Overlap and add)



$$y(n) = \sum_i x_i(n) * h(n) = \sum_i y_i(n)$$

■ Schema realizzativo



Scelta di M : $M \geq N + L - 1$

- **Osservazione**

- Per semplicità nello schema l’operazione di allungamento con zeri è inclusa nel blocco DFT

- La parte racchiusa nel rettangolo tratteggiato può essere calcolata una sola volta.

Overlap-add
Complessità realizzativa

$M \log_2 M + M$ m.c.

$\dfrac{M \log_2 M + M}{L}$ m.c./campione

da confrontare con N (m.r. o m. c.)
nel caso di realizzazione diretta
della convoluzione discreta

CONVOLUZIONE DI SEQUENZE

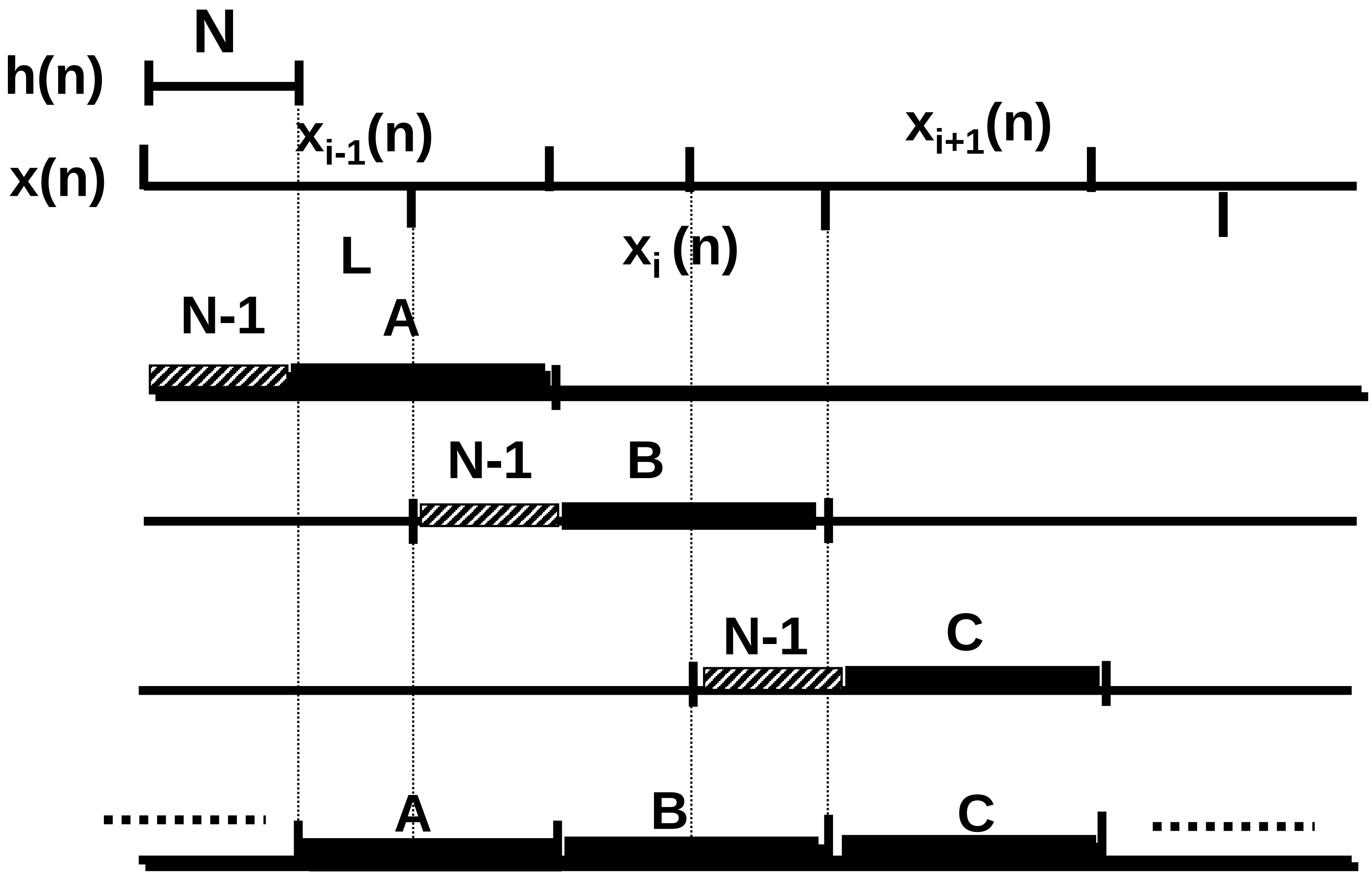
Due tecniche

1. Sovrapposizione e somma (Overlap and add)
2. Sovrapposizione e selezione (Overlap and save)

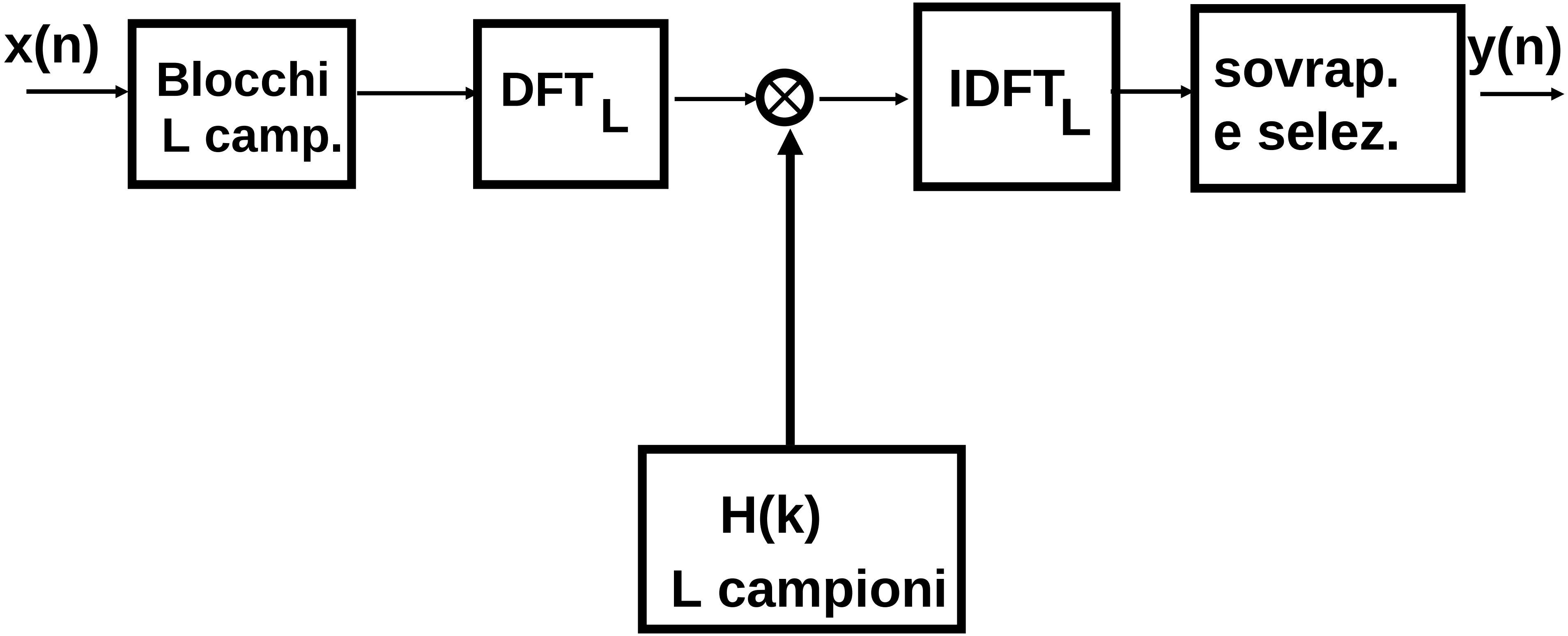
■ Sovrapposizione e selezione (Overlap and save)

Osservazione:

nella convoluzione circolare ad L punti di una sequenza di N campioni con una di L (> N) campioni, i primi N -1 campioni sono diversi mentre i successivi L-N+1 sono identici a quelli della convoluzione lineare fra le stesse sequenze


N
h(n)
x(n)
x_{i-1}(n)
x_{i+1}(n)
L
x_i (n)
N-1
A
N-1
B
N-1
C
A
B
C

■ Schema realizzativo



Overlap-save
Complessità realizzativa

$L \log_2 L + L$ m.c.

$$\frac{L \log_2 L + L}{L-N+1}$$ m.c./campione

da confrontare con N (m.r. o m. c.) nel caso di realizzazione diretta della convoluzione discreta

CORRELAZIONE

Data h(n) di durata N e x(n) di durata > N la loro correlazione (lineare) è data

$$v(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)\ x(n+m) = x(n) * h(-n)$$

Si possono applicare tutte le tecniche precedenti (sequenze entrambe finite, sovrapposizione e somma, sovrapposizione e selezione):

- usando $h(-n)$ al posto di $h(n)$, ovvero

  usando $H(P - k)$ al posto di $H(k)$

  (con P dimensione della DFT usata)

- **Convoluzione e correlazione veloce**

Si chiamano così quando si impiega un algoritmo FFT per il calcolo della DFT negli schemi precedenti.

STIME SPETTRALI

STIME SPETTRALI

- **Operazione di filtraggio della DFT** x(n) sequenza di durata molto lunga

La sua DFT_N (a N punti), per esempio sui primi N campioni,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, w(n)\, e^{-j2\pi Fn} \Big|_{F=\frac{k}{N}}$$

$$\text{con } w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ (*finestra rettangolare*)

che ha come TF

$$W(F) = \frac{1 - e^{-j2\pi F N}}{1 - e^{-j2\pi F}} = e^{-j\pi F(N-1)} \frac{\mathrm{sen}(\pi FN)}{\mathrm{sen}(\pi F)}$$

con $F = fT = f / f_c$ **frequenza normalizzata**

$\Rightarrow$ $\quad X(k)$ è la *TF*

calcolata alle frequenze normalizzate $\dfrac{k}{N}$

(*ovvero alle frequenze* $\dfrac{k}{NT} = \dfrac{k}{N} f_c$)

della sequenza

$x'(n) = x(n)\, w(n)$, il cui spettro è

$$X'(F) = X(F) * W(F) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(a)\, W(F-a)\, da$$

in definitiva:

$$X(k) = X'(F)\Big|_{F=\frac{k}{N}}$$

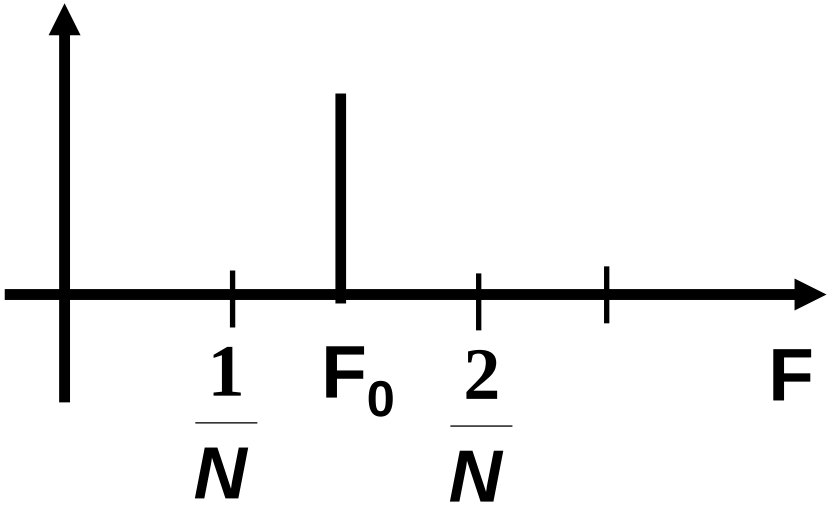
ovvero il coefficiente k-esimo della DFT è il valore mediato dello spettro X(F) di x(n) pesato dalla funzione W(F) centrata sulla frequenza normalizzata k/N.

Non necessariamente la DFT coincide con i valori desiderati di X(F) alle frequenze k/N.

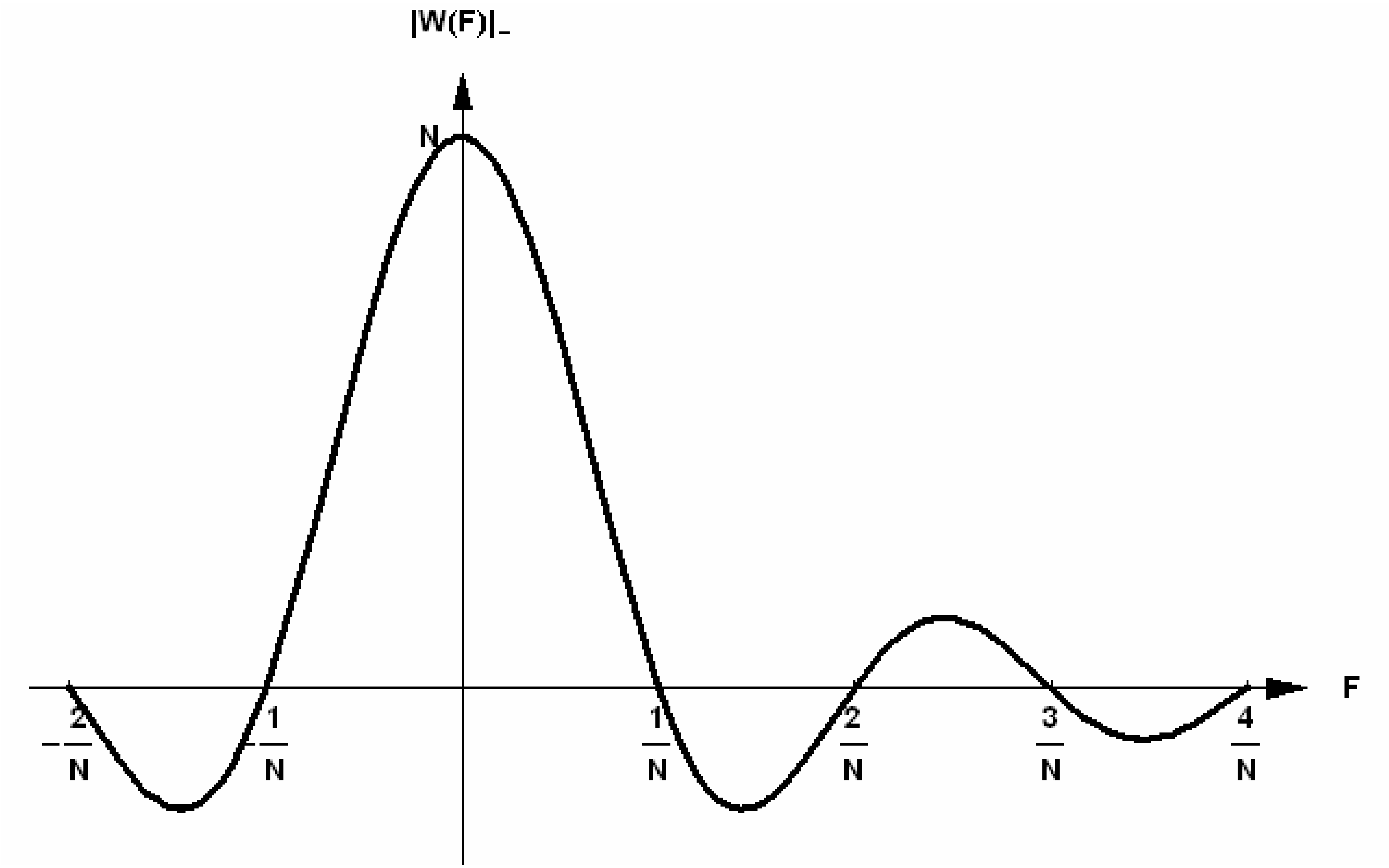
■ Esempio illustrativo

x(n) sia un esponenziale complesso (riga) ad una frequenza normalizzata F_0 intermedia fra 1/N e 2/N.

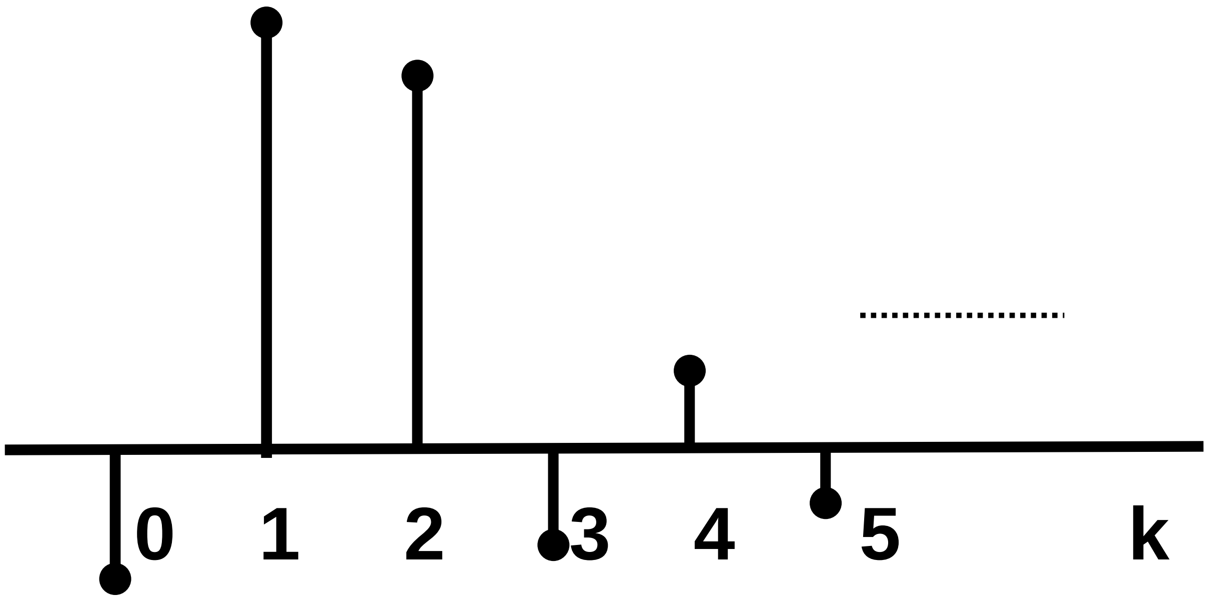
$$x(n) \longleftrightarrow X(F)=$$



considerato che:



si ottiene per X(k)



Compaiono righe spettrali per tutti i valori di k. (Nell’esempio per semplicità sono stati assunti valori reali invece che complessi per illustrare il meccanismo di generazione della DFT.)

[Esiste una condizione per la quale nella DFT ci sono tutte e sole le componenti presenti nel segnale di ingresso?]

La DFT effettua una operazione di modifica, con il filtro W(F), sullo spettro del segnale di ingresso

Si può cambiare l’effetto di filtraggio cambiando W(F) e quindi w(n) per esempio:

$$w(n) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n}{N-1}\right) \qquad \text{(Hanning)}$$

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1} \qquad \text{(Hamming)}$$

$$0 \le n \le N-1$$

(e molte altre) che hanno lobi laterali più piccoli

● Risoluzione algoritmica e risoluzione spettrale

Risoluzione algoritmica

Valori spaziati di $\Delta F = \dfrac{1}{N}$

ovvero $\Delta f = \dfrac{f_c}{N} = \dfrac{1}{NT}$

Tuttavia:
risoluzione spettrale dipende dall'ampiezza del lobo principale della finestra; generalmente la si assume uguale all'ampiezza del lobo principale.

Finestra	Risoluzione spettrale (ΔF)	Picco lobo laterale (dB)
Rettangolare	2/N	- 13
Hanning	4/N	- 31
Hamming	4/N	- 41

■ Stime spettrali (Periodogramma)

E' uno dei metodi di stima spettrale. Impiega la DFT (FFT). x(n) sequenza molto lunga (L)

<u>Algoritmo</u>

- **si suddivide x(n) in M = L/N blocchi di N campioni**

$$x_i(n) = x(n + iN), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad 0 \leq i \leq M - 1$$

- **Si forma**

$$x_i'(n) = x_i(n)\, w(n), \qquad w(n)$$

opportuna finestra

- **Si calcola**

$$X_i'(k) = DFT_N\left[x_i'(n)\right]$$

$$A_i(k) = \frac{1}{NW}\, |X_i'(k)|^2$$

$$\text{con } W = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n), \quad \textit{potenza della finestra}$$

- **Si calcola la media**

$$P_X(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} A_i(k)$$

Il valore $P_x(k)$ è la stima dello spettro di potenza del segnale x(n) alla frequenza F = k/N ovvero f = f_ck/N.
Il fattore 1/NW è introdotto per avere una stima non polarizzata (per N $\rightarrow \infty$)

Modifica possibile: i blocchi $x_i(n)$ possono essere anche parzialmente sovrapposti (in genere di N/2) per migliorare le stime.