Richiami di segnali aleatori

Processi aleatori discreti

x(t): processo aleatorio tempo continuo: è una v.a. funzione del tempo

x(nT) è una v.a.

al variare di *n* si ha n processo aleatorio discreto:

è dato da una sequenza di v.a. $\{x(nT)\}=\{x(n)\}$

Definizioni:

- Distribuzione di probabilità $P_{x_n}(x) = Pr\{x(n) \leq x\}$
- Densità di probabilità $p_{x_n}(x) = \frac{d}{dx} P_{x_n}(x)$

Analogamente dati due processi aleatori discreti si definiscono:

Distribuzione di probabilità congiunta:

$$P_{x_n,y_m}(x,y) = Pr\{x(n) \le x \ e \ y(m) \le y\}$$

Densità di probabilità congiunta:

$$p_{x_n,y_m}(x,y) = \frac{d^2}{dxdy} P_{x_n,y_m}(x,y)$$

Proprietà

INDIPENDENZA:
Due v.a. x(n) e x(m) sono indipendenti se

$$p_{x_n,y_m}(x,y) = p_{x_n}(x) p_{y_m}(y)$$

ovvero se il verificarsi dell'una non influenza il verificarsi dell'altra

STAZIONARIETA':
Un processo si dice stazionario quando le funzioni distribuzione e densità di probabilità sono indipendenti rispetto a traslazioni temporali:

$$p_{x_n}(x) = p_{x_{n+k}}(x) \quad \forall k$$

$$p_{x_n,y_n}(x,y) = p_{x_{n+k},y_{n+k}}(x,y) \quad \forall k$$ (congiuntamente stazionari)

Parametri di un processo aleatorio

- Momento di 1° ordine (valor medio):

$$m_{x_n} = E\left[x(n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{x_n}(x)dx = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p_i x_i \qquad p_{x_n}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{i}\, p_i \delta(x - x_i)$$

- Momento di 2° ordine:

$$E\left[x^2(n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{x_n}(x)dx = P_{x_n}$$

- Varianza:

$$\sigma^2_{x_n} = E\left[\left(x(n) - m_{x_n}\right)^2\right] = E\left[x^2(n)\right] - m_{x_n}$$

- Autocorrelazione:

$$r_x(n,m) = E\left[x(n)x^*(m)\right]$$

- Processo stazionario in senso lato (WSS)

$$m_{x_n} = E\left[x(n)\right] = m_x = cost$$

$$r_x(n,n+m) = r_x(m)$$

$$E\left[x^2(n)\right] = P_x = cost \quad \rightarrow \sigma^2_x = cost$$

- Processi scorrelati:

$$E\left[x(n)x(m)\right] = E\left[x(n)\right]E\left[x(m)\right]$$

Proc. INDIPENDENTI $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ Proc. SCORRELATI

- Processi ergodici:

Le medie temporali del processo coincidono con le medie d'insieme

Densità spettrale di potenza

Dato un processo stazionario in senso lato si definisce la densità spettrale di potenza $G_x(F)$ la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

$$G_x(F) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m) e^{-j2\pi Fm}$$

antitrasformata:

$$r_x(m) = \int_{-1/2}^{1/2} G_x(F) e^{j2\pi Fm} dF$$

Densità spettrale di potenza

$$r_x(0) = E\left[x^2(n)\right] = P_x$$

Se il processo è a <u>valor medio nullo</u>: $P_x = \sigma_x$

$$\Rightarrow \quad P_x = \left.\int_{-1/2}^{1/2} G_x(F) e^{j2\pi Fm} dF\right|_{m=0} = \int_{-1/2}^{1/2} G_x(F) dF = \frac{1}{T}\int_{-1/2T}^{1/2T} G_x(f) df$$

$G_x(F)$ è la densità spettrale di potenza

Se un processo è **BIANCO**:

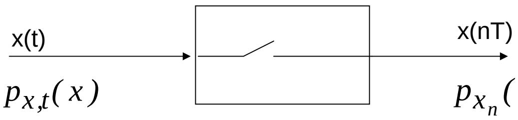
$$r_x(m) = r_x(0)\delta(m) \quad \leftrightarrow \quad G_x(f) = \text{costante} = r_x(0)$$

v.medio nullo

Campionamento di processi aleatori

I processi aleatori sono caratterizzati dalla funzione densità di probabilità

x(t) x(nT)



$p_{x,t}(x)$ $p_{x_n}(x)$

In particolare a noi interessano i processi stazionari in senso lato

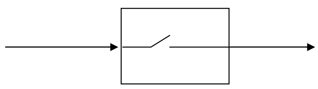
Il processo aleatorio è caratterizzato nel dominio della frequenza dalla funzione **densità spettrale di potenza**.

$$x(t) \quad r_x(\tau) \leftrightarrow G_{x_a}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Reale, non negativa e pari

$$x(nT) \quad r_x(m) \leftrightarrow G_{x_c}(F) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m) e^{-j2\pi mF} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m) e^{-j2\pi fmT} = G_{x_c}(f)$$

$x(t)$



$x(nT)$

$$r_x(\tau) \quad\quad r_x(m)$$
$$\updownarrow \quad\quad \updownarrow$$
$$G_{x_a}(f) \quad\quad G_{x_c}(F)$$

Posso osservare che:

$$r_{x_c}(m) = r_{x_a}(\tau)\Big|_{\tau=mT}$$

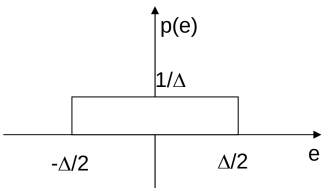
L'autocorrelazione del processo discreto coincide con l'autocorrelazione del processo continuo compionata in τ=mT quindi si ha:

$$\boxed{G_{x_c}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{x_a}(f - kf_c)}$$

Esempio

e(n) è un processo aleatorio discreto:

- stazionario in senso lato
- campioni della sequenza scorrelati
- distribuzione di probabilità uniforme



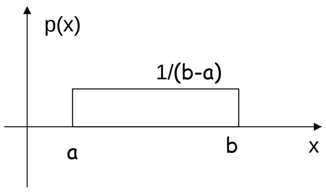
$$E[e(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} e p(e) de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e \frac{1}{\Delta} de = 0$$

$$E[e^2(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 p(e) de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12} = \sigma_e^2$$

$$E[e(n)e^*(n+m)] = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ \frac{\Delta^2}{12} & m = 0 \end{cases}$$

$$r_e(m) = \frac{\Delta^2}{12}\delta(m) \quad \leftrightarrow \quad G_e(f) = \frac{\Delta^2}{12}$$

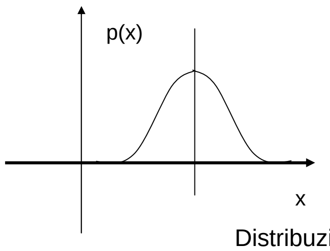
In generale:



$$E[x(n)] = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{12}\right)^2$$

Distribuzione uniforme



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Distribuzione gaussiana

Rumore AWGN

- Additive White Gaussian Noise
  - Rumore bianco

$$E[x(n)] = 0$$

$$\sigma_x^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$r_x(m) = \frac{N_0}{2}\delta(m) \qquad G_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

  - Distribuzione gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Se le v.a. x(n) e x(m) sono scorrelate e gaussiane allora sono anche indipendenti

Esempio

Siano x(n) e y(n) due processi aleatori tempo discreto stazionari e incorrelati: determinare media e varianza del processo w(n)=x(n)+y(n)

$$E\left[w(n)\right]=E\left[x(n)+y(n)\right]=E\left[x(n)\right]+E\left[y(n)\right]=m_x+m_y$$

$$E\left[\left(w(n)-m_w\right)^2\right]=E\left[\left(x(n)+y(n)-m_x-m_y\right)^2\right]=$$

$$=E\left[\left(x(n)-m_x\right)^2\right]+E\left[\left(y(n)-m_y\right)^2\right]-2E\left[\left(x(n)-m_x\right)\left(y(n)-m_y\right)\right]=$$

$$=\sigma_x^2+\sigma_y^2-2E\left[\left(x(n)-m_x\right)\right]E\left[\left(y(n)-m_y\right)\right]=$$

Covarianza tra due processi

$$=\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\left[E\left[x(n)\right]-m_x\right]\left[E\left[y(n)\right]-m_y\right]=\sigma_x^2+\sigma_y^2$$

Perché incorrelati