

PROGETTO DI FILTRI A RISPOSTA IMPULSIVA INFINITA (IIR)

FILTRI IIR (Infinite Impulse Response)

- **DOMINIO TEMPORALE**
(equazione alle differenze finite)

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$

Ordine del filtro: N

- **DOMINIO DELLA TRASFORMATATA ZETA
(funzione di trasferimento)**

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - Z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - P_k z^{-1})}$$

$$M \leq N$$

**Se $M > N \rightarrow$ filtro IIR di ordine N +
filtro FIR di ordine $M - N$**

Z_k zeri del filtro

P_k poli del filtro

a_k e b_k reali: filtro reale

a_k e b_k complessi: filtro complesso

- **DOMINIO DELLA FREQUENZA**

$$H(F) = H(z)_{|z=e^{j2\pi F}} = |H(F)| e^{j\varphi(F)}$$

CARATTERISTICHE

- **Risposta impulsiva infinita**
- **Eccellenti risposte in ampiezza ma risposte di fase non lineari (filtri causali)**
- **È necessario verificare la stabilità del filtro**

Caso particolare: $N = 2$

Sezione del 2° ordine (reale)

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Due zeri complessi coniugati: Z_0 e Z_0^*

Due poli complessi coniugati: P_0 e P_0^*

Filtro passa - tutto (2° ordine)

$$H_p(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^{-2} D(z^{-1})}{D(z)}$$

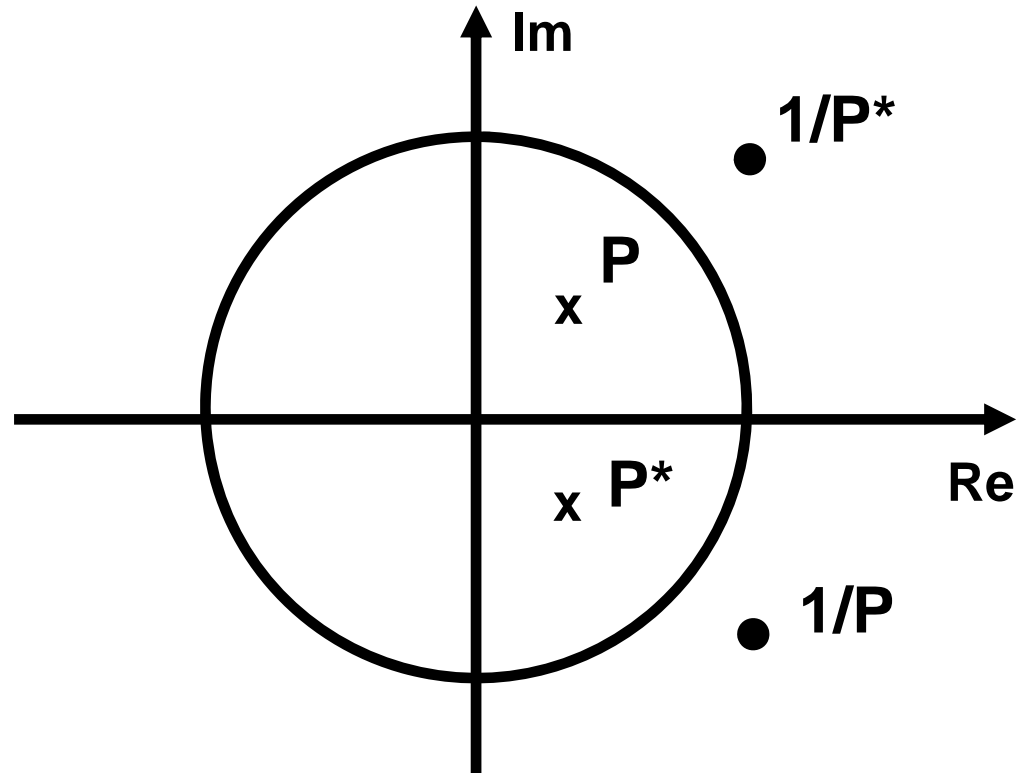
$N(z)$ e $D(z)$ sono polinomi speculari

$$\left| H_p(F) \right| = \frac{\left| D(e^{-j2\pi F}) \right|}{\left| D(e^{j2\pi F}) \right|} = \text{coeff. reali} = 1$$

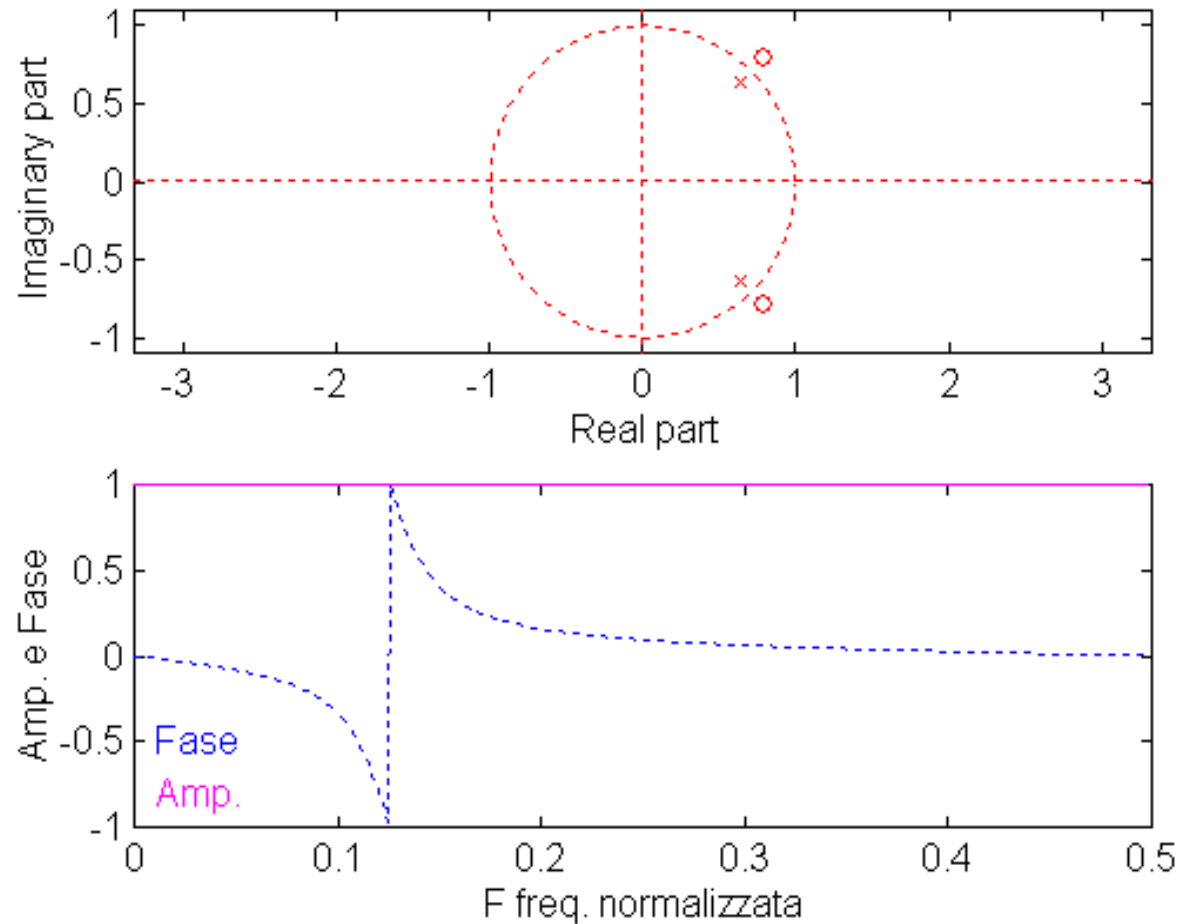
$$\varphi(F) \leq 0$$

Poli : P e P^*

Zeri : P^{-1} e P^{*-1}



Proprietà che si può estendere a filtri passa tutto di ordine N qualunque (> 2).



Filtro Passa-Tutto

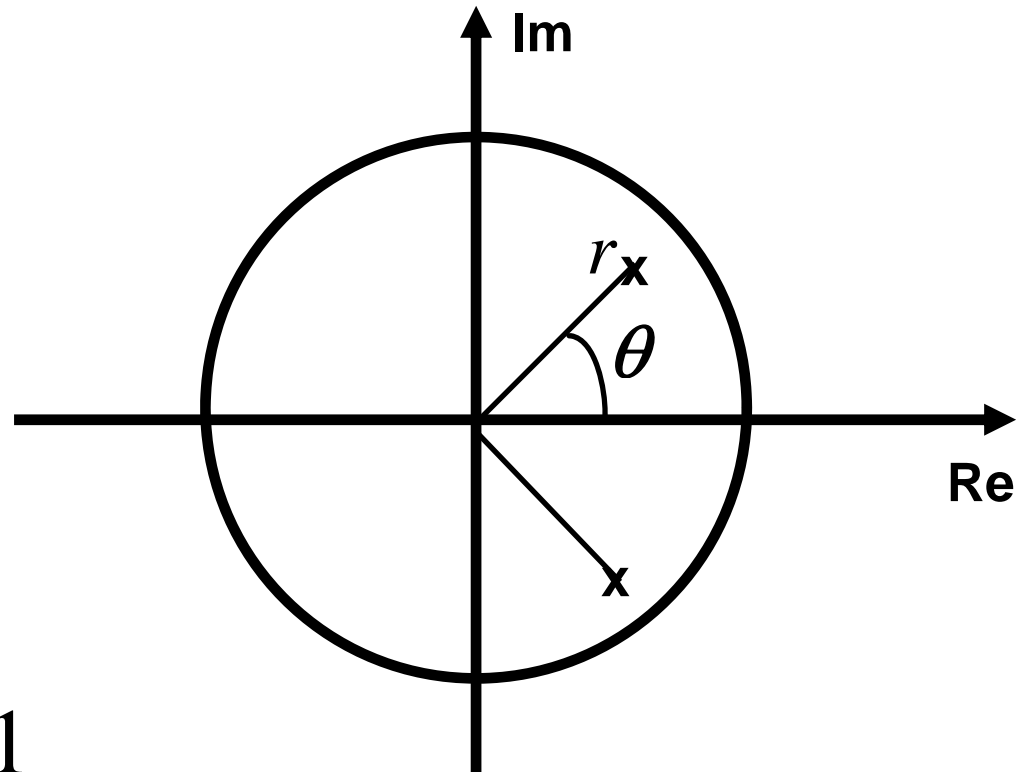
Risposta in frequenza di un filtro Passa-Tutto del 2° ordine.

Poli: modulo 0.9, fase $\pm 0.25 \pi$,

Zeri sono definiti come il reciproco dei poli)

Sezione del 2° ordine con solo poli

$$\text{Poli} = re^{\pm j\theta}$$



$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Si può verificare che

$|H(F)|$ ha un max relativo se : $\cos \theta < \frac{2r}{1+r^2}$

per F_0 : $\cos 2\pi F_0 = \frac{\cos \theta (1+r^2)}{2r}$,

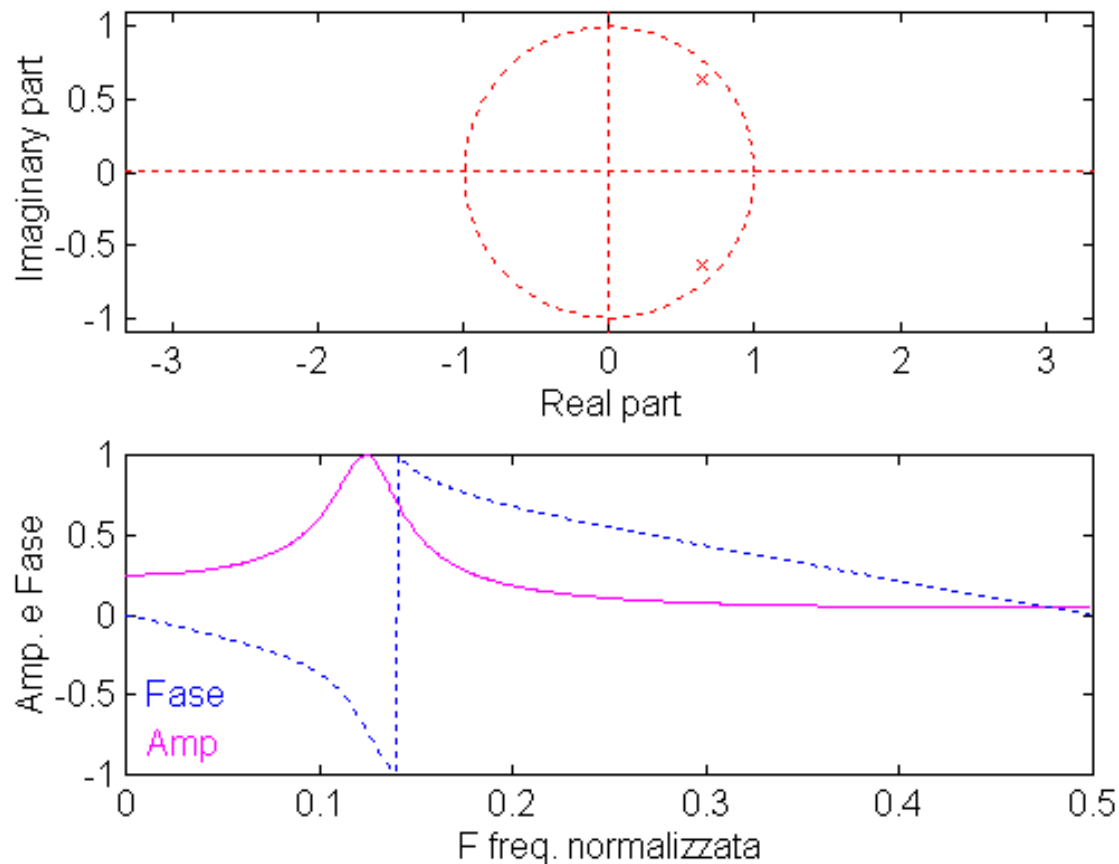
che vale $H_M = \frac{1}{1-r} \frac{1}{(1+r)\sin \theta}$

**~ inversamente proporzionale alla distanza
del polo dal cerchio unitario**

Per $r \cong 1$, la banda a - 3dB

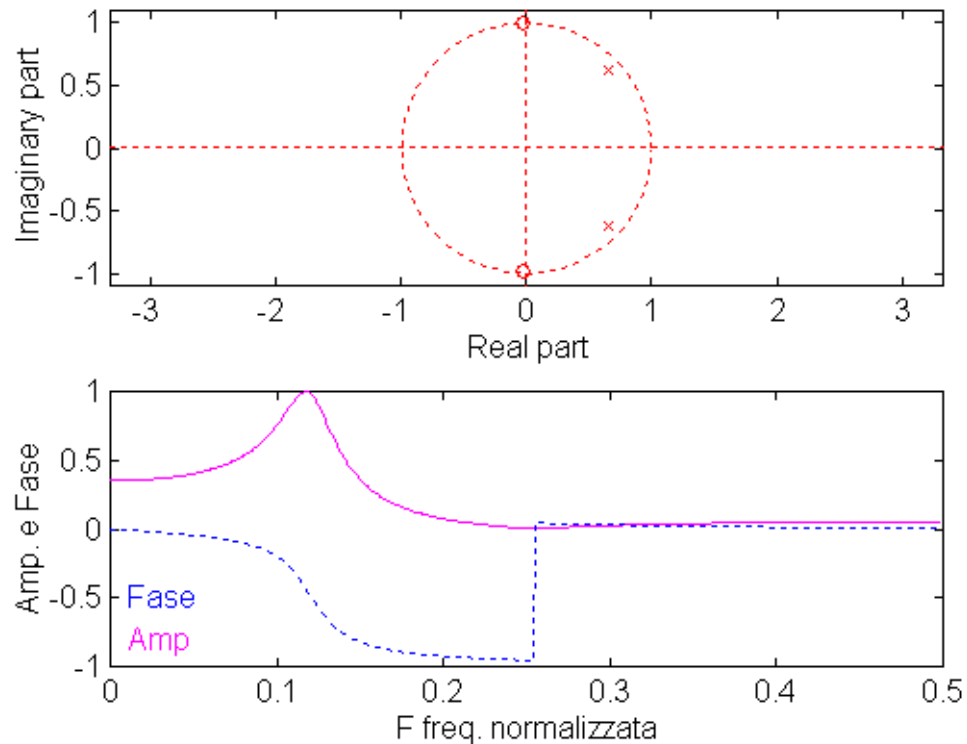
$$B_{-3dB} \cong \frac{1-r}{\pi}$$

- **Il filtro è tanto più selettivo quanto più il polo si avvicina al cerchio unitario**



Risposta in frequenza di un filtro IIR del 2° Ordine con soli poli
Poli: modulo 0.9, fase $\pm 0.25 \pi$

IIR del 2° ordine con zeri sul cerchio unitario

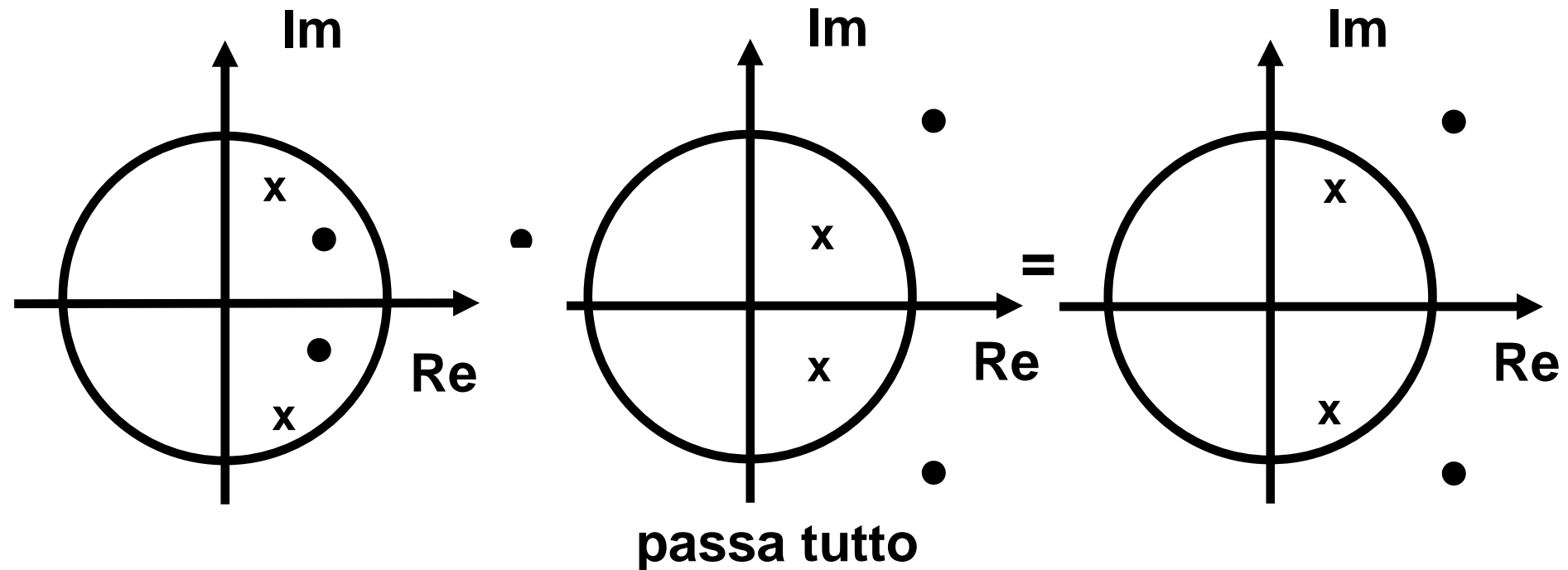


Risposta in frequenza di un filtro IIR del 2° ordine con zeri e poli.
Poli: modulo 0.9, fase $\pm 0.24 \pi$
Zeri: modulo 1, fase $\pm 0.5 \pi$

Sistemi a fase minima

Consideriamo la seguente operazione:

$$H_1(z) \bullet H_2(z) = H_3(z)$$



poichè $\varphi_2(F) \leq 0 \Rightarrow \varphi_3(F) \leq \varphi_1(F)$

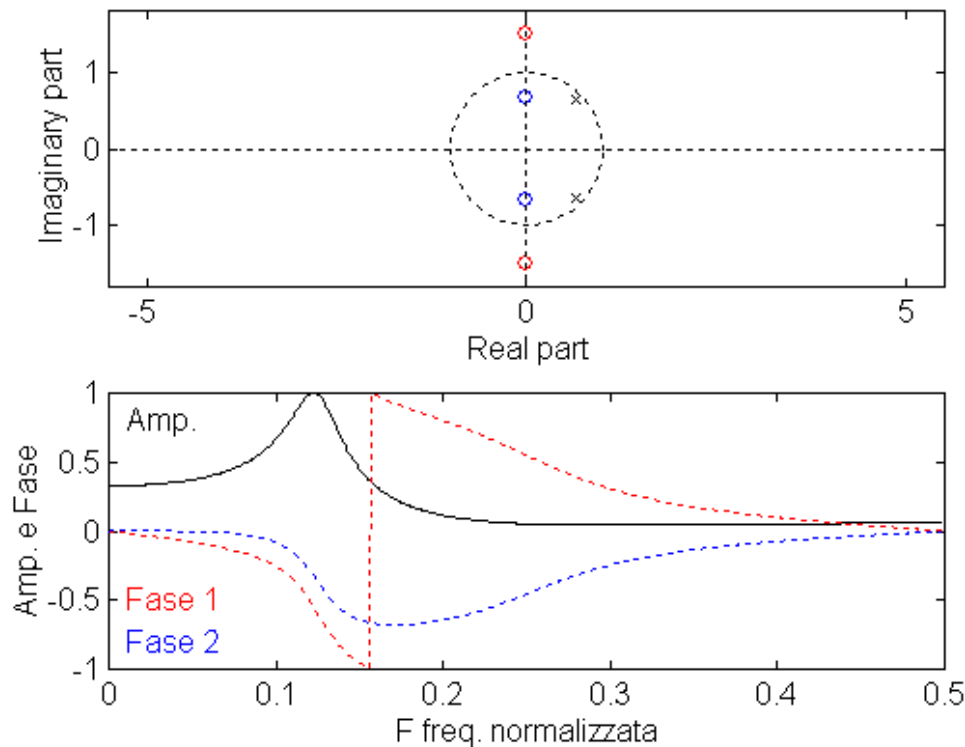
● I sistemi lineari $H_1(z)$ e $H_3(z)$ hanno la stessa risposta in ampiezza. Differiscono per la posizione degli zeri che sono invertiti in modulo rispetto alla circonferenza unitaria sul piano zeta.

Ritardo di fase:

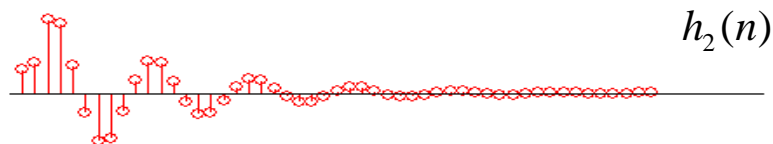
$$\Delta_3(F) = -\frac{\varphi_3(F)}{2\pi F} \geq \Delta_1(F) = -\frac{\varphi_1(F)}{2\pi F}$$

**$H_1(z)$: sistema a ritardo di fase minimo
(brevemente a fase minima) fra tutti quelli
che hanno la stessa risposta in ampiezza**

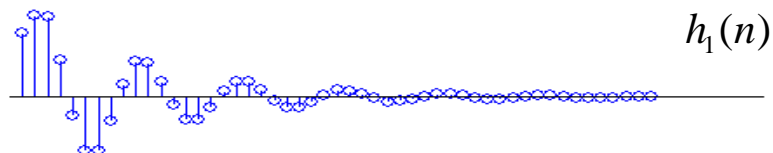
**Nota: generalizzazione possibile a IIR di
qualsunque ordine e ai FIR**



Risposta impulsiva del sistema ROSSO



Risposta impulsiva del sistema AZZURRO



Sistemi IIR a fase minima

Il sistema descritto da poli/zeri di colore rosso dà origine al corrispondente sistema a fase minima descritto dai poli/zeri di colore azzurro.

Poli: modulo 0.9, fase $\pm 0.25\pi$;

Zeri del sistema a fase non minima: modulo 1.5, fase $\pm 0.5\pi$

➤ Si noti la concentrazione della risposta impulsiva del sistema a fase minima verso l'origine:

$$\sum_{n=0}^m |h_1(n)|^2 \geq \sum_{n=0}^m |h_2(n)|^2 \quad \forall m$$

Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

(reperibili a: <http://lenst.det.unifi.it/node/379>)

- Rispfreq II ord
- IIR-II ord
- IIR-fase min

PROGETTO FILTRI IIR

■ Due principali metodi di progetto

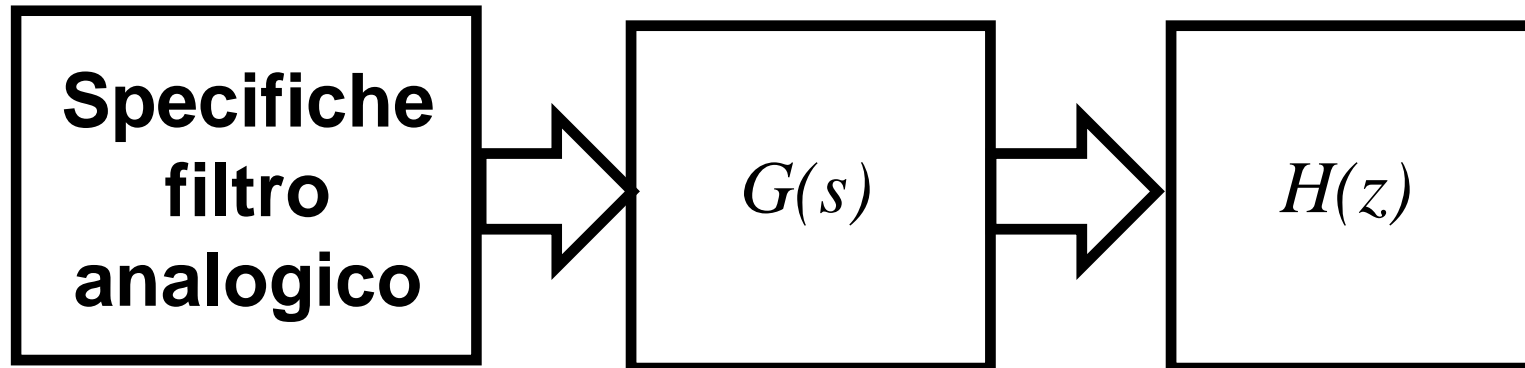
1 - Progetto indiretto da prototipi di filtri analogici

- sono disponibili espressioni note di filtri analogici, semplici e efficienti**
- metodo relativamente semplice e algebrico**

2 - Progetto diretto del filtro numerico

- filtri molto efficienti**
- flessibilità di progetto**
- con l'ausilio del calcolatore
(metodo non algebrico)**

IIR: PROGETTO DA PROTOTIPI ANALOGICI



- **si parte da una funzione di trasferimento $G(s)$ del filtro analogico**
- **successivamente $G(s)$ viene trasformata tramite una appropriata corrispondenza tra il piano s e il piano z per dare la corrispondente funzione di trasferimento $H(z)$ del filtro digitale**

Trasformazione $s \longleftrightarrow z$ tale che:

**asse immaginario \longleftrightarrow circonferenza unitaria
(risposta in frequenza)**

**funzione razionale \longleftrightarrow funzione razionale
(realizzazione circuitale)**

**semipiano sinistro \longleftrightarrow interno della
circonferenza unitaria
(stabilità)**

TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$s = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{k + s}{k - s}$$

k **costante opportuna (reale)**

1) per $z = e^{j2\pi F}$

$$s = k \frac{1 - e^{-j2\pi F}}{1 + e^{-j2\pi F}} =$$

$$= k \frac{e^{-j\pi F} (e^{j\pi F} - e^{-j\pi F})}{e^{-j\pi F} (e^{j\pi F} + e^{-j\pi F})} = jk \operatorname{tg} \pi F$$

2) Una funzione razionale è trasformata in una funzione razionale

3) $|z| < 1$ per $Re(s) < 0$

Verifica le tre condizioni

La trasformazione bilineare è quella più comunemente usata. Altre trasformazioni sono possibili e usate.

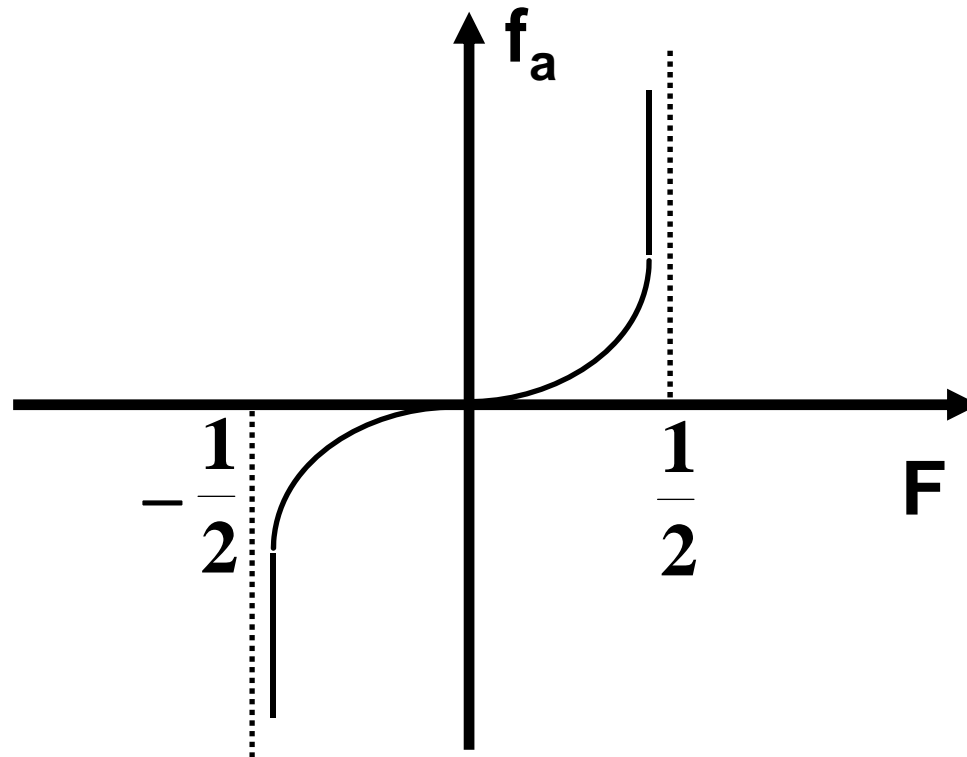
PROCEDURA DI PROGETTO

$G(s)$ **funzione di trasferimento di
un filtro analogico (disponibile)**

$$H(z) = G(s) \Big|_{s=k \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Relazione fondamentale [che segue dal punto 1]

$$2\pi f_a = k \operatorname{tg} \pi F \Leftrightarrow f_a = \frac{k}{2\pi} \operatorname{tg} \pi F$$





Attenzione

Le frequenze del filtro analogico f_a non corrispondono alle frequenze $f = F f_c$ del filtro numerico \Rightarrow deformazione dell'asse delle frequenze (che deve essere tenuta in conto nel progetto)

■ Esempio di determinazione di k

Progettare un filtro (es. passa basso) con frequenza di taglio F_t

A disposizione un prototipo (passa basso) con frequenza di taglio f_{at}

Molto spesso sono disponibili filtri normalizzati.

$$\omega_{at} = 2\pi f_{at} = 1$$

Si sceglie k :

$$k = 2\pi f_{at} \cotg \pi F_t = \omega_{at} \cotg \pi F_t$$

■ **Trasformazione bilineare: svantaggi**

- **distorsione dell'asse delle frequenze**
- **risposta in frequenza del filtro numerico diversa da quella del filtro analogico**
- **trasforma un filtro analogico in un filtro numerico “dello stesso tipo” (per esempio un passa basso analogico in un passa basso numerico)**

PROGETTO DI FILTRI IIR PASSA-ALTO, PASSA-BANDA e ELIMINA-BANDA

**Normalmente sono disponibili prototipi analogici passa-basso (generalmente normalizzati).
Si possono seguire diverse procedure.**

Per esempio:

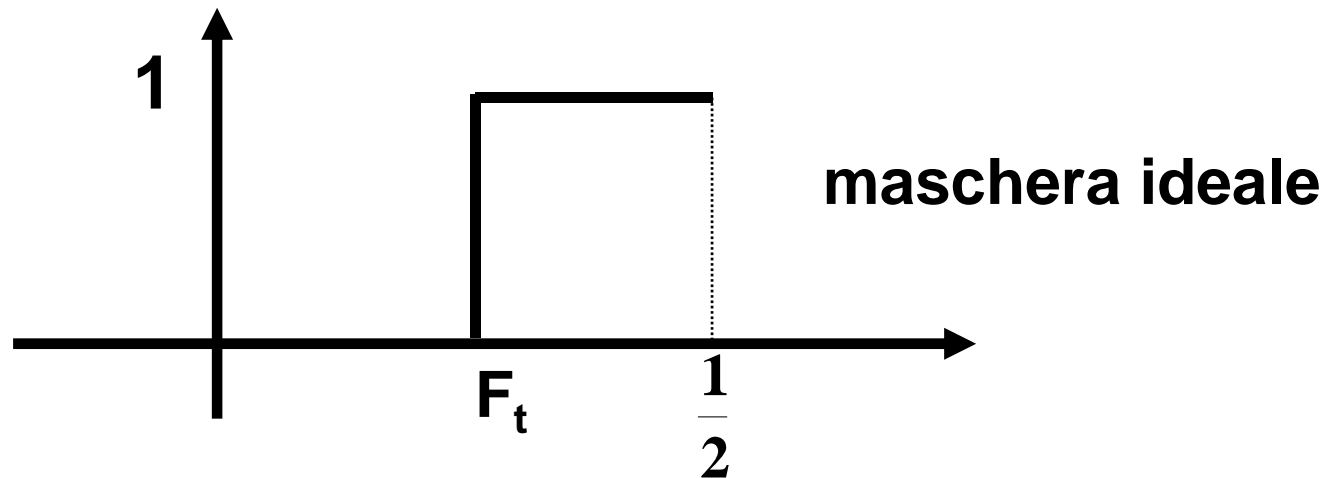
- A) Progettare un prototipo passa-basso numerico mediante la bilineare ed operare successivamente una trasformazione nel piano z da passa-basso al tipo di filtro desiderato. Queste trasformazioni sono riportate in diversi testi.**
- B) Operare una trasformazione diretta dal prototipo analogico passa-basso al filtro numerico del tipo desiderato.**

La prima procedura richiede due trasformazioni.

La seconda procedura richiede una sola trasformazione, che può essere dedotta combinando le due della prima procedura.

Di seguito sono riportate le trasformazioni da effettuare per la procedura B.

■ Progetto di filtri passa-alto



$$s = k \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

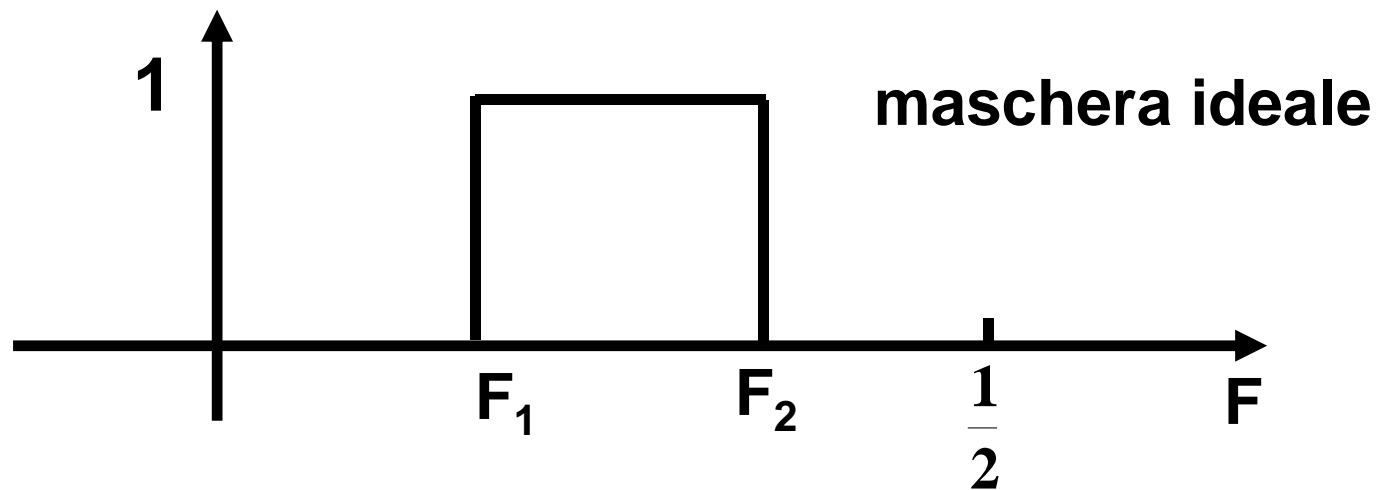
$$k = 2\pi f_{at} \operatorname{tg} \pi F_t$$

con

F_t frequenza di taglio del filtro numerico

f_{at} frequenza di taglio del prototipo passa-basso analogico [se normalizzata $f_{at} = 1/(2\pi)$]

■ Progetto di filtri passa-banda



$$s = k \frac{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

$$k = 2\pi f_{at} \cotg \pi (F_2 - F_1)$$

$$\alpha = \frac{\cos \pi (F_2 + F_1)}{\cos \pi (F_2 - F_1)}$$

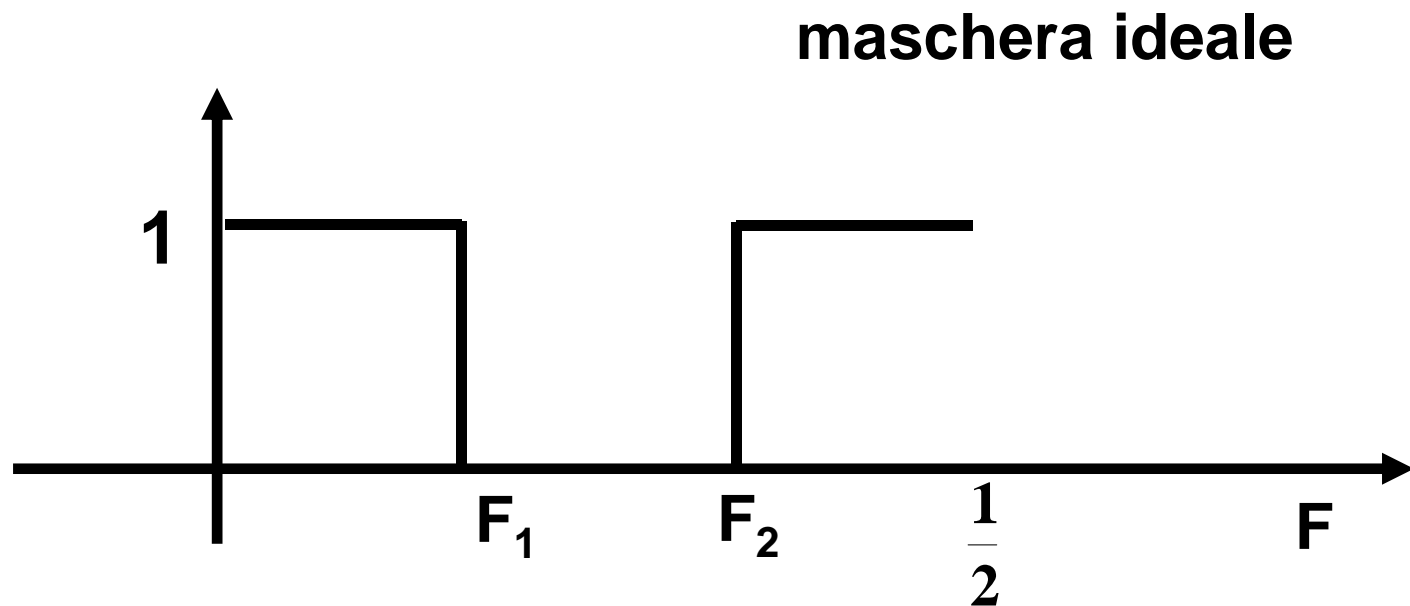
con

F_1 **frequenza di taglio inferiore del filtro numerico**

F_2 **frequenza di taglio superiore del filtro numerico**

f_{at} **frequenza di taglio del prototipo passa-basso analogico**

■ Progetto di filtri elimina-banda



$$s = k \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}$$

$$k = 2\pi f_{at} \operatorname{tg} \pi(F_2 - F_1)$$

$$\alpha = \frac{\cos \pi(F_2 + F_1)}{\cos \pi(F_2 - F_1)}$$

con

F_1 **frequenza di taglio inferiore del filtro numerico**

F_2 **frequenza di taglio superiore del filtro numerico**

f_{at} **frequenza di taglio del prototipo passa-basso analogico**

Nota

Ordine del filtro numerico rispetto a quello del prototipo analogico:

- Rimane invariato per i filtri passa-basso e passa-alto**
- Raddoppia per i filtri passa-banda e elimina banda.**

Prototipi analogici disponibili:

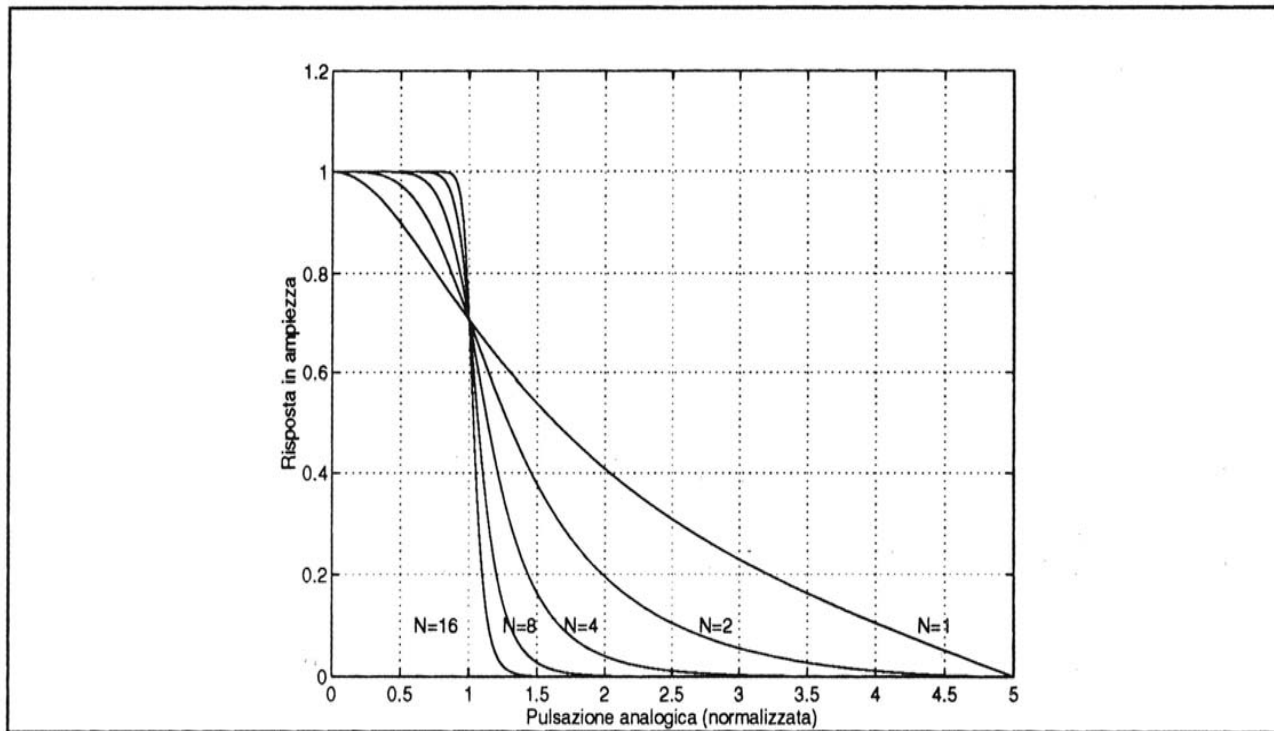
- **Butterworth**
- **Chebyshev I**
- **Chebyshev II**
- **Ellittici**

Esempi di prototipi di Butterworth

La risposta in ampiezza è massimamente piatta nella banda passante.
La risposta in ampiezza è

$$|H_a(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{at}}\right)^{2N}}$$

pulsazione di taglio $\omega_{at} = 2\pi f_{at}$



$$H_a(\omega_{at}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (-3dB)$$

L'ordine N specifica completamente il filtro: per $N \rightarrow \infty$ si approssima la risposta ideale del filtro passa-basso

Esempio di scelta dell'ordine N

Si vuole un filtro numerico con frequenza di taglio F_t e con un'attenuazione A ad una F_1

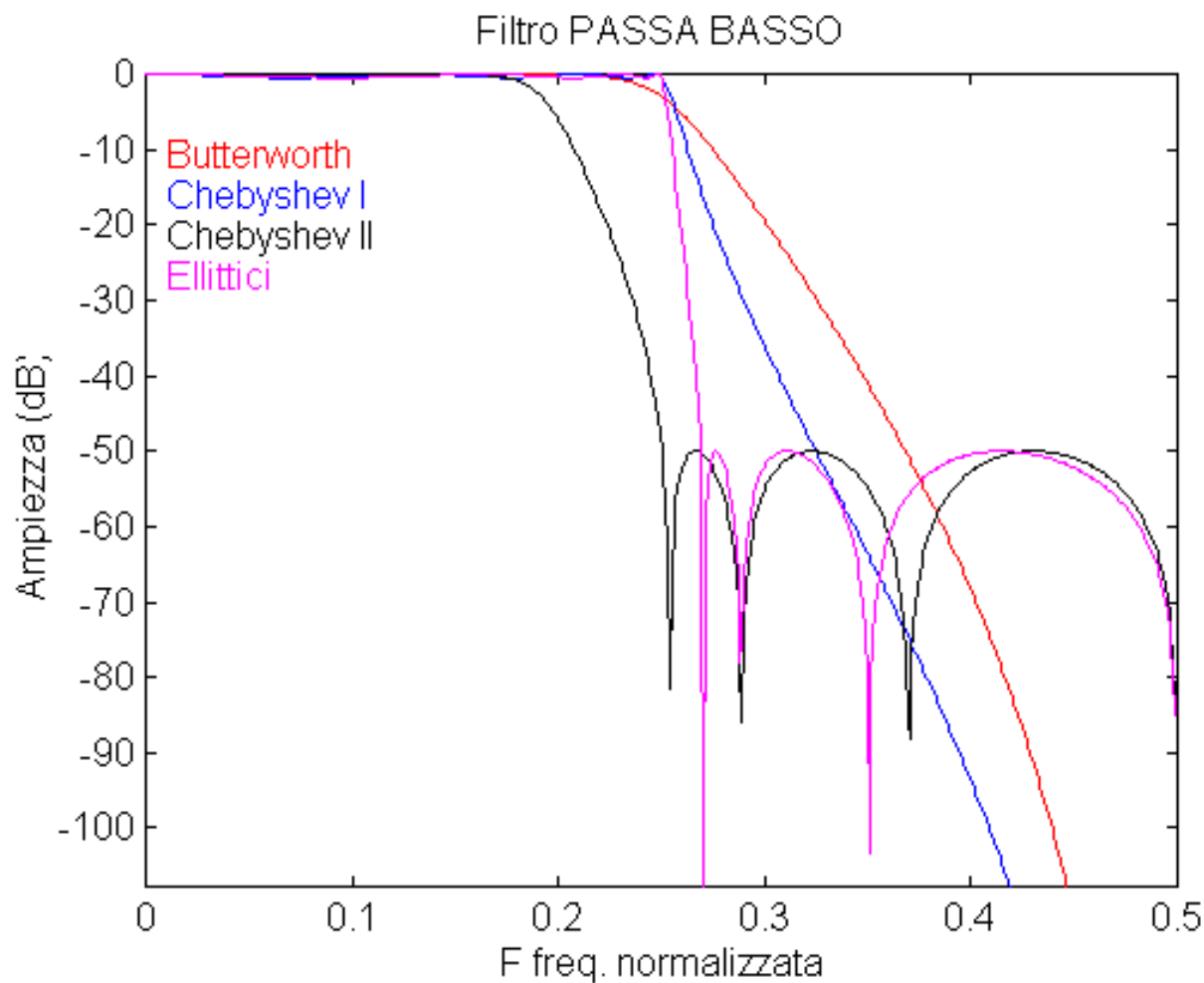
Per esempio per un passa-basso alla frequenza F_1 corrisponde:

$$\omega_{a1} = k \operatorname{tg} \pi F_1 = \omega_{at} \operatorname{cotg} \pi F_t \operatorname{tg} \pi F_1$$

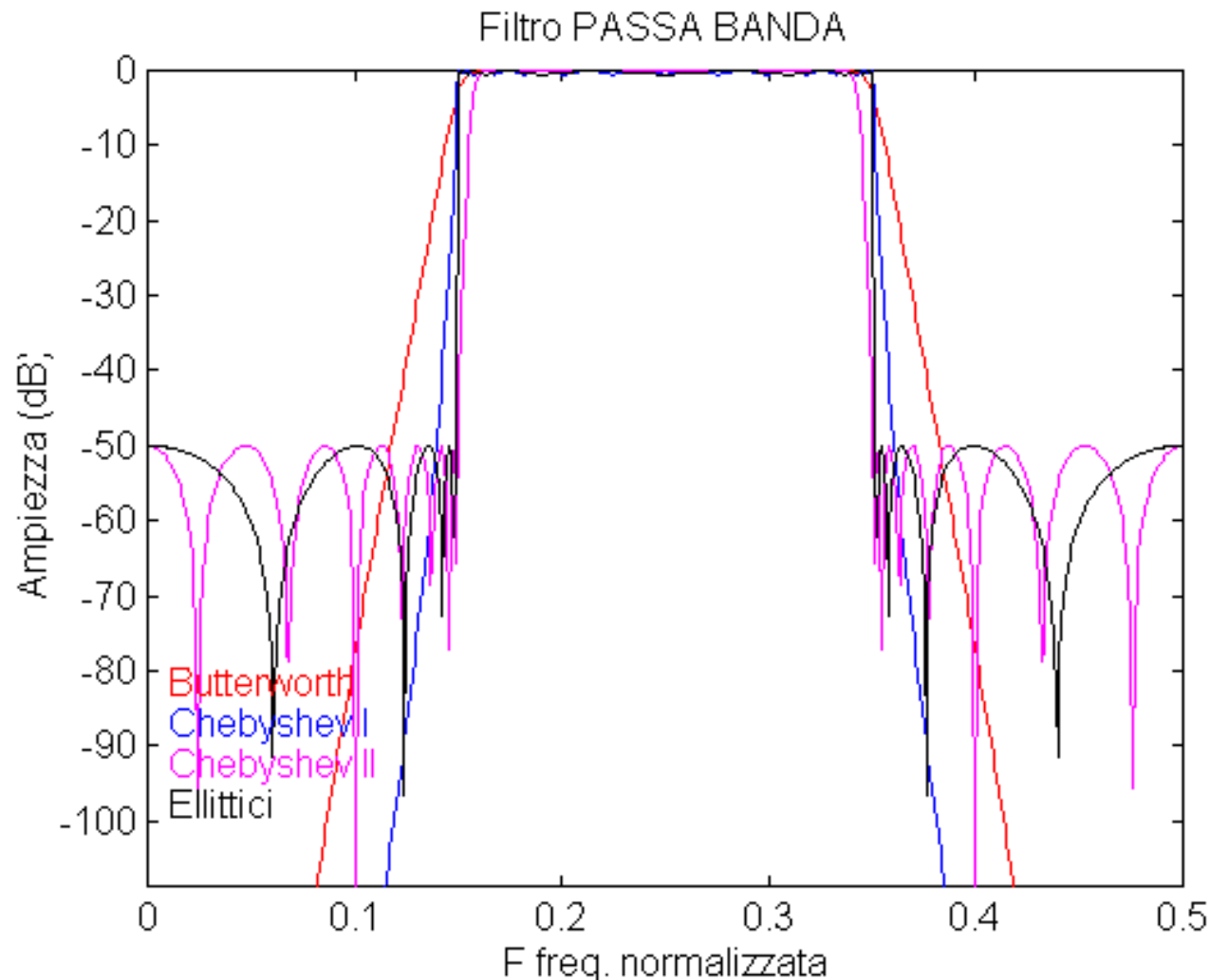
dove $\omega_{at} = 2\pi f_{at}$ è la pulsazione di taglio del prototipo.

N si stima con la relazione:

$$N \cong \frac{\log_{10} (A^2 - 1)}{2 \log_{10} \omega_{a1}}$$



Progetto di filtri IIR passa basso - Butterworth, Chebyshev (I e II), Ellittico
 Ordine dei filtri: 7, frequenza di taglio specificata: $F_1 = 0.25$
 Butterworth : F_1 frequenza a -3dB
 Chebyshev I : 0.5 dB ripple nella banda fino a F_1
 Chebyshev II : 50 dB attenuazione a partire da F_1
 Ellittici : 0.5 dB ripple, 50 dB attenuazione



Progetto di filtri IIR passa banda - Butterworth, Chebyshev (I e II), Ellittico
 Ordine dei filtri: 14, frequenze di taglio specificate: $F_1 = 0.15$, $F_2 = 0.35$
 Butterworth : F_1, F_2 frequenze a -3dB
 Chebyshev I : 0.5 dB ripple nella banda da F_1 a F_2
 Chebyshev II : 50 dB attenuazione prima di F_1 e a partire da F_2
 Ellittici : 0.5 dB ripple, 50 dB attenuazione

PROGETTO DIRETTO DI FILTRI IIR CON **METODI ITERATIVI**

Non si parte da prototipi analogici, ma si progetta direttamente il filtro numerico dalle specifiche in frequenza

- **Minimizzazione dell'errore quadratico medio**

$H_0(F)$ **risposta in frequenza desiderata**

e.q.m.
$$E = \sum_{i=1}^M \left\{ \left| H(F_i) - H_0(F_i) \right| \right\}^2$$

da minimizzare

➤ F_i **sono M prescelte frequenze arbitrarie**

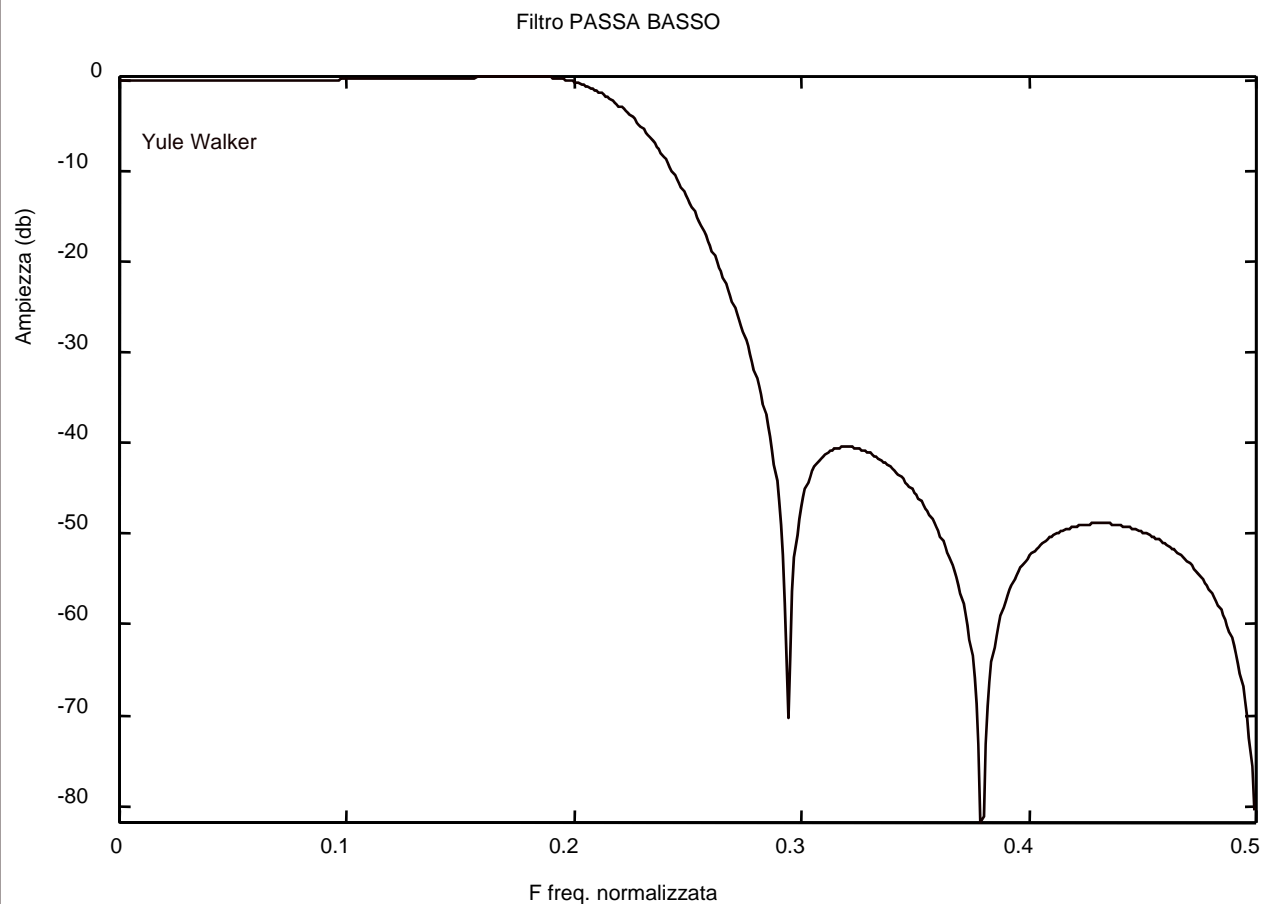
Supponiamo che il filtro da progettare sia

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

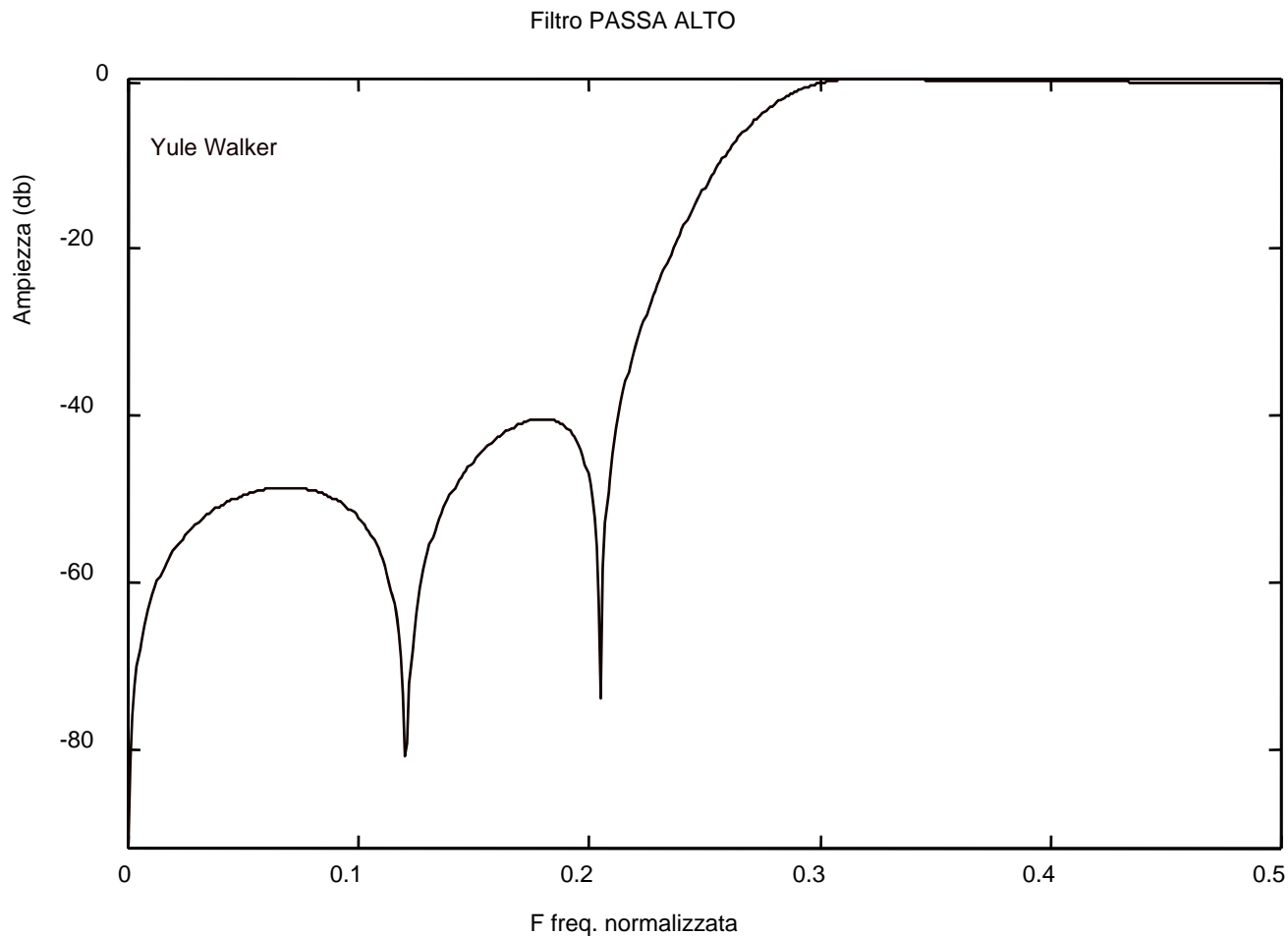
Si impone (per $N=M$):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial a_k} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b_k} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2N + 1 \\ 2N + 1 \end{array} \text{ equazioni non lineari in} \\ \text{incognite}$$

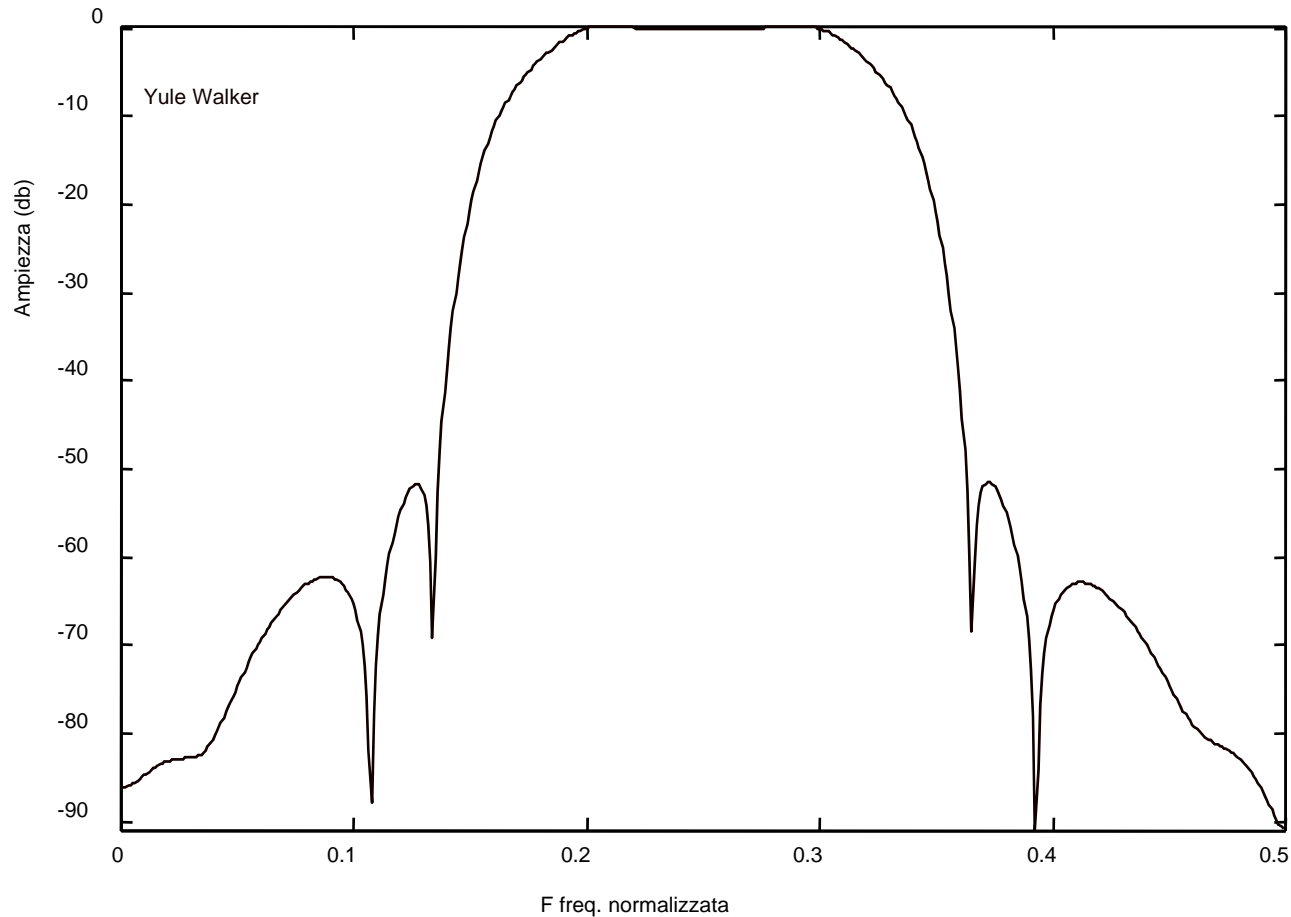
- **Algoritmi e programmi per la soluzione del sistema (con metodi iterativi, per es. programma di Yule-Walker in Matlab)**



Filtro IIR passa-basso (Yule-Walker)
Ordine: 8
 $F_1 = 0.2$ fine banda passante
 $F_2 = 0.25$ inizio banda attenuata



Filtro IIR passa-alto (Yule-Walker)
Ordine: 8
 $F_1 = 0.25$ fine banda attenuata
 $F_2 = 0.3$ inizio banda passante



Filtro IIR passa-banda (Yule-Walker)

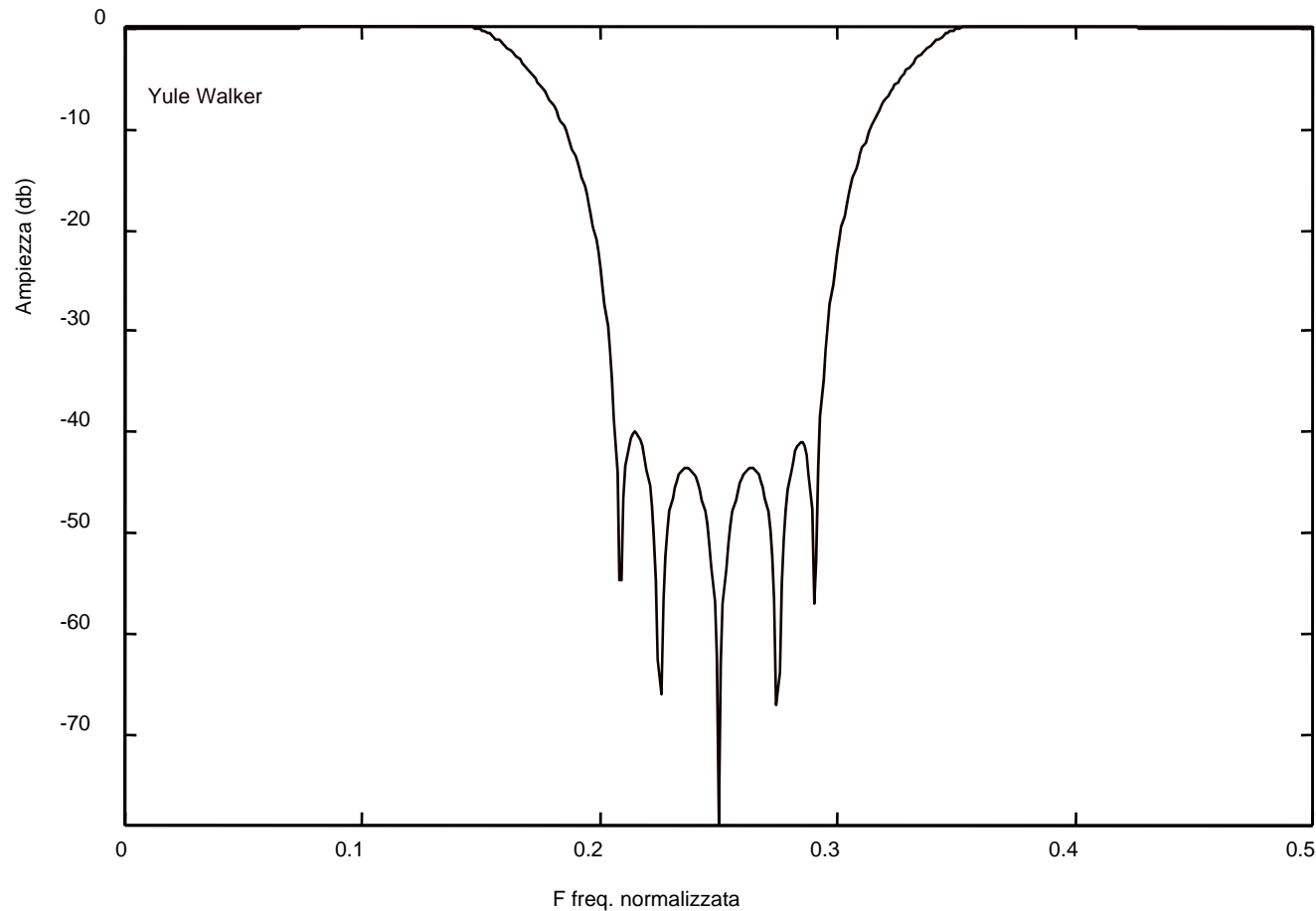
Ordine: 20

$F_1 = 0.15$ fine prima banda attenuata

$F_2 = 0.2$ inizio banda passante

$F_3 = 0.3$ fine banda passante

$F_4 = 0.35$ inizio II banda attenuata



Filtro IIR elimina-banda (Yule-Walker)

Ordine: 20

$F_1 = 0.15$ fine prima banda attenuata

$F_2 = 0.2$ inizio banda passante

$F_3 = 0.3$ fine banda passante

$F_4 = 0.35$ inizio II banda attenuata

- **Se il filtro da progettare è fattorizzato in S sezioni del II ordine**

$$H(z) = C \prod_{k=1}^s \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} = CG(z)$$

Si impone:

$$\frac{\partial E}{\partial C} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_k} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial d_k} = 0$$

**$4S + 1$ equazioni non lineari in
 $4S + 1$ incognite**

**Ci sono metodi efficienti
(algoritmi: es. Fletcher-Powell)
per la soluzione di questo
sistema.**

Osservazione

**Il metodo non pone vincoli sui poli e zeri.
Poli e zeri possono risultare esterni al cerchio
unitario → filtro instabile**

Metodo da completare con:

- **determinazione dei poli**
- **ogni polo esterno P_0 viene sostituito con il suo inverso e coniugato $1/P_0^* \rightarrow$ risposta in ampiezza inalterata.**

Esercitazioni di Laboratorio di MATLAB

(reperibili a: <http://lenst.det.unifi.it/node/379>)

- IIR-prot analogici
- IIR-diretto

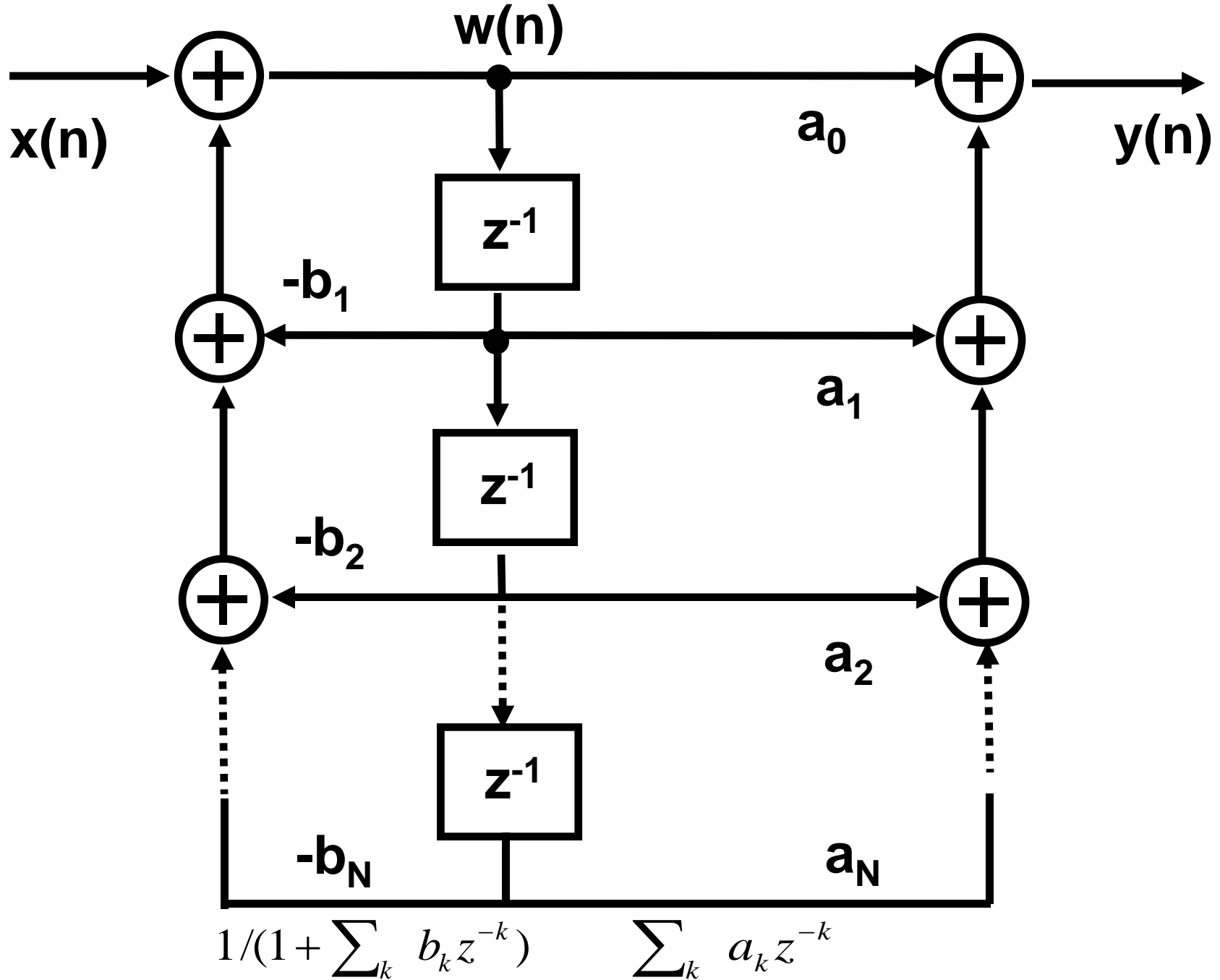
STRUTTURE REALIZZATIVE CANONICHE

Sono quelle che impiegano il minimo numero di operatori (memorie, moltiplicatori, addizionatori) elementari

■ Struttura canonica diretta

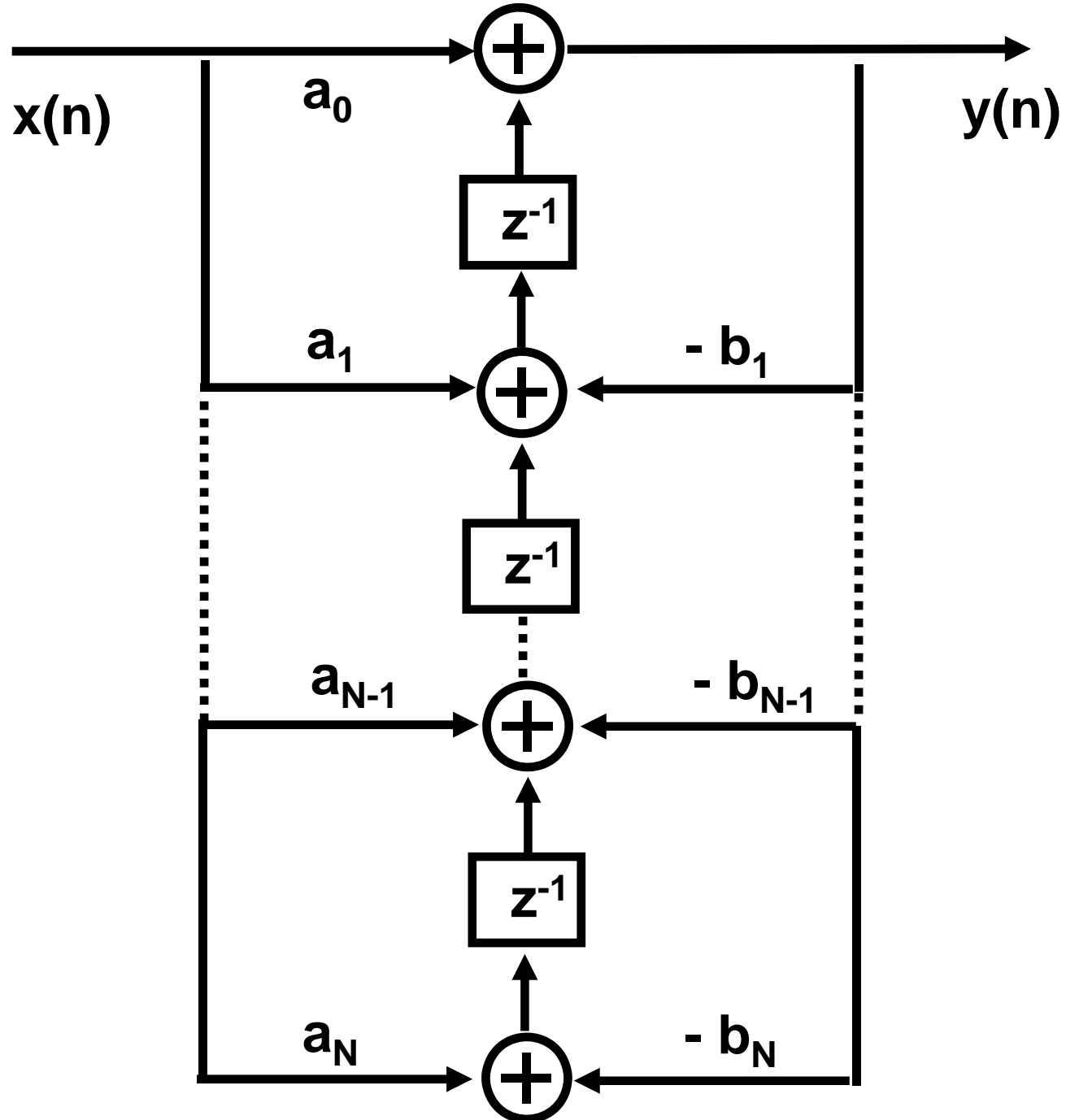
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$



■ **Struttura canonica trasposta**

Si ottiene con le operazioni di trasposizione per reti lineari



Caratteristica

Ciascun campione attuale dell'ingresso $x(n)$ e dell'uscita $y(n)$ è moltiplicato per tutti i corrispondenti coefficienti in successione: può semplificare la realizzazione HW/SW.

■ Realizzazione con sezioni in cascata

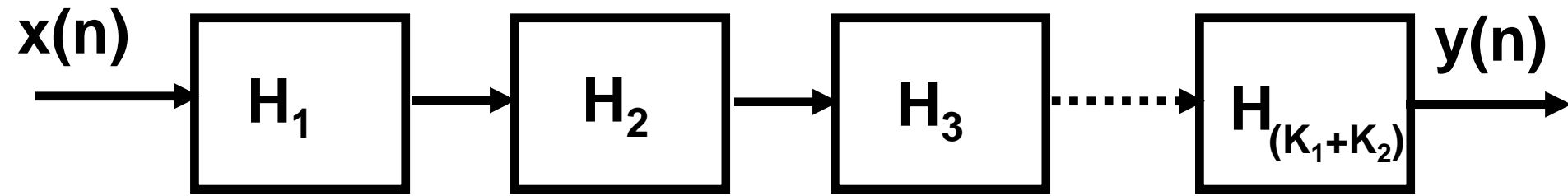
Si decompone

$$H(z) = a_0 \left[\prod_{i=1}^{K_1} H_i^{(1)}(z) \right] \left[\prod_{i=1}^{K_2} H_i^{(2)}(z) \right],$$

$$N = K_1 + 2K_2$$

$H_i^{(1)}(z)$, **sistema del 1° ordine con poli e zeri reali**

$H_i^{(2)}(z)$, **sistemi del 2° ordine con poli e zeri complessi**



**K_1+K_2 filtri realizzati con strutture del
 1° e del 2° ordine**

■ Problemi connessi con questa struttura

1. Associazione di zeri e poli per ogni sezione
2. Ordinamento delle sezioni in cascata
3. Scalatura fra una sezione e l'altra per prevenire il generarsi di valori troppo grandi (overflow) o troppo piccoli (underflow).

Aritmetica esatta (a precisione “infinita”):
1, 2 e 3 non hanno conseguenze.

Aritmetica a precisione “finita”:
necessità di soluzioni adeguate per 1, 2 e 3

➤ **Associazione zeri e poli**

Per ridurre gli effetti della realizzazione con aritmetica a precisione finita, si segue in pratica la seguente procedura:

- i) partire dal polo più vicino alla circonferenza unitaria ed associare ad esso lo zero più vicino**
- ii) continuare come in (i) fino ad esaurimento di tutti i poli restanti**

➤ **Ordinamento delle sezioni**

La procedura seguita in pratica per ridurre gli effetti di una realizzazione in aritmetica a precisione finita è la seguente:

- sezioni ordinate in ordine decrescente dei valori massimi delle loro risposte in ampiezza.**

■ Struttura parallela

Si esprime

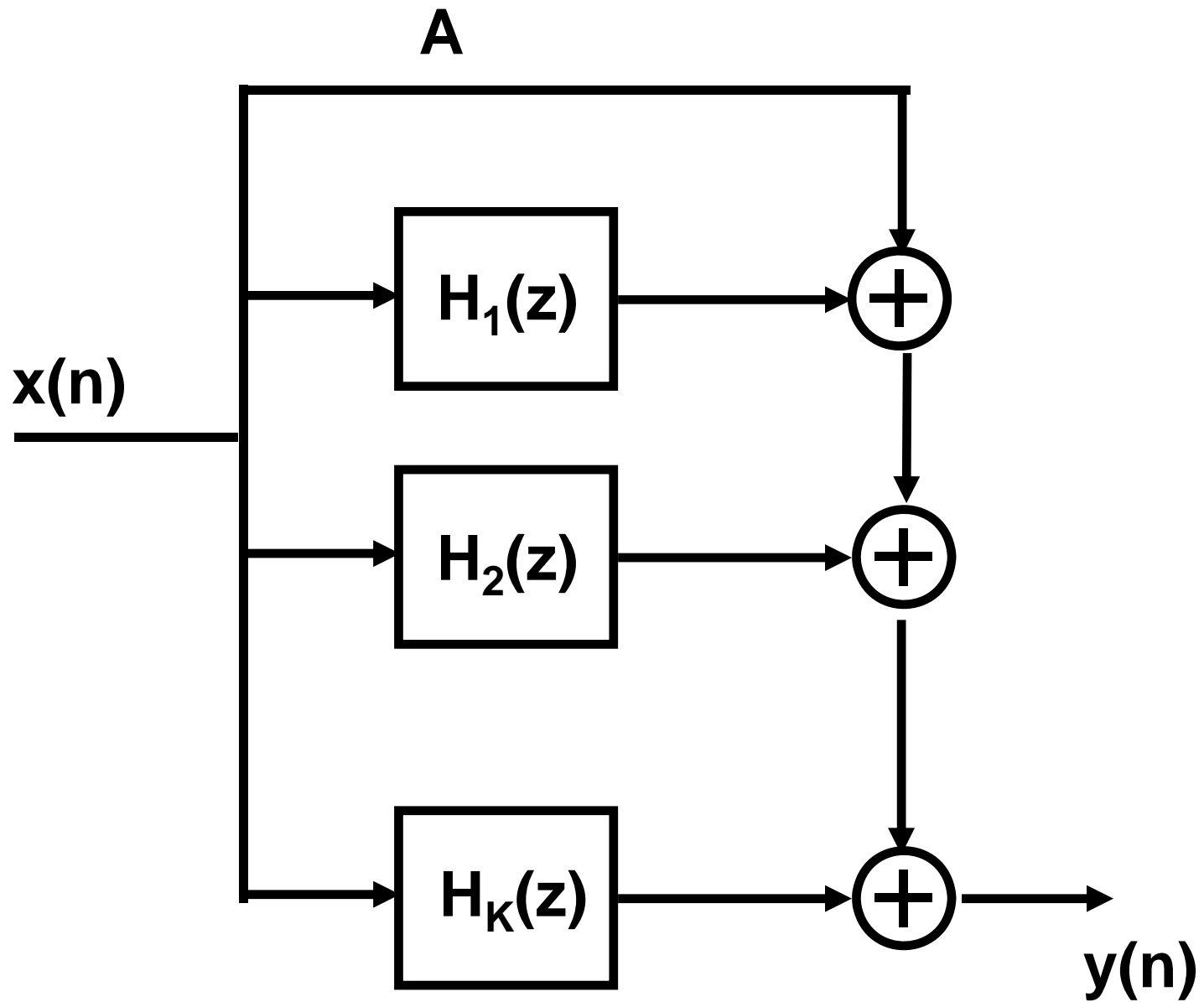
$$H(z) = A + \sum_{i=1}^K H_i(z)$$

con

K = intero opportuno

$$A = a_N / b_N$$

**$H_i(z)$ sezione del I o II ordine
(a seconda del tipo di zeri e poli)**



		FIR	IIR	
	Fase	può essere esattamente lineare	non lineare	
	Stabilità	sempre	da controllare	
	Strutture realizzative	più facili e semplici	più complicate	
	Numero di operazioni	maggiore	minore	
	Precisione finita	effetti minori e più facili da analizzare	effetti maggiori e più difficili da analizzare	
	Procedure di progetto	mediante calcolatore	per filtri semplici procedura algebrica in genere mediante calcolatore	