CRITERIO DI NYQUIST

- Si consideri il diagramma di Nyquist di $G(s)$ esteso ai valori negativi della pulsazione ω tenendo conto delle eventuali singolarità sull'asse immaginario
(percorso di Nyquist $\mathcal{D}$ e percorso di Nyquist indentato $\mathcal{D}_i$)

- Sia $n_i(G)$ il numero di poli di $G(s)$ con parte reale maggiore di zero.

- Criterio di Nyquist.
  - Il sistema di controllo a retroazione unitaria è internamente stabile se e solo se il diagramma esteso di Nyquist di $G(s)$ non passa per il punto $(-1, 0)$ e compie, intorno a questo punto, un numero di rotazioni antiorarie pari a $n_i(G)$.

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DI NYQUIST

- Lemma di Cauchy (principio degli argomenti).

  - Sia $F(s)$ una funzione di trasferimento razionale fratta e Γ una curva chiusa nel piano complesso orientata in senso orario. Siano $z_i(F)$ e $p_i(F)$ rispettivamente il numero di zeri e di poli di $F(s)$ interni alla regione limitata del piano complesso definita da Γ. Se nessun polo o zero di $F(s)$ appartiene a Γ, allora $F(\Gamma)$ è una curva chiusa e limitata che non passa per l'origine e compie intorno all'origine un numero di rotazioni orarie pari a $z_i(F) - p_i(F)$

- La dimostrazione del criterio di Nyquist deriva dall'applicazione del principio degli argomenti ponendo:

1. $F(s) = 1 + G(s)$
2. $\Gamma = \mathcal{D}$

CONSIDERAZIONI SUL CRITERIO DI NYQUIST

- Schema a retroazione unitaria.
  - Sia $n_i(W)$ il numero dei poli a parte reale maggiore di zero della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$. Allora, nelle ipotesi del criterio di Nyquist, vale:

$$n_i(W) \;=\; n_i(G) \;+\; N_{G,-1}$$

  - Se $n_i(G) = 0$ ($G(s)$ stabile), allora si parla di criterio di Nyquist ridotto.
  - Se $G(s)$ ha poli sull'asse immaginario, allora si deve usare il percorso indentato $\mathcal{D}_i$ richiudendo il diagramma esteso di Nyquist.
  - Se il diagramma di Nyquist di $G(s)$ passa per il punto $(-1, 0)$, allora $W(s)$ ha poli a parte reale nulla.
  - Si può estendere allo studio della stabilità di $K \cdot G(s)$ in funzione di K:

$$n_i(W) \;=\; n_i(G) \;+\; N_{G,-1/K}$$

CRITERIO DI NYQUIST: ESEMPI DI APPLICAZIONE

- Sistemi del primo e del secondo ordine stabili

- Sistemi di ordine superiore al secondo stabili

  - effetto delle variazioni del guadagno: $$G(s) = \frac{K}{(1+s\tau_0)(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

  - sistemi condizionatamente stabili: $$G(s) = \frac{K(1+s\tau_0)^2}{(1+s\tau_1)^3}$$

- Sistemi con poli in zero:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}; \qquad G(s) = \frac{K}{s^2(1+s\tau_1)}; \qquad G(s) = \frac{K(1+s\tau_0)}{s^2(1+s\tau_1)}$$

- Sistemi instabili:

$$G(s) = \frac{K(1+s\tau_0)}{(1-s\tau_1)(1-s\tau_2)}$$

MARGINI DI STABILITÀ : FASE E GUADAGNO

- Sistemi "comuni": la funzione di trasferimento $G(s)$, oltre a non avere poli e zeri a parte reale maggiore di zero, ha un andamento monotono decrescente del modulo $|G(j\omega)|$.

- Definizioni delle pulsazioni ω_a (pulsazione di attraversamento) e ω_π.
  - ω_a è la pulsazione alla quale il modulo di $G(j\omega)$ è unitario (è univocamente definita per i sistemi comuni);
  - ω_π è la pulsazione alla quale $G(j\omega)$ è reale ed ha minimo valore.

- Margine di fase:

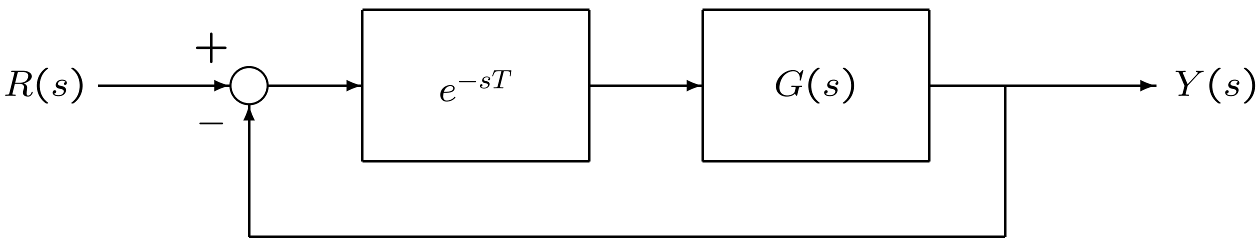
$$m_\phi := \arg G(j\omega_a) + \pi$$

- Margine di guadagno:

$$m_a := \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$$

- Lettura dei margini di fase sui diagrammi di Bode e Nyquist.

CRITERIO DI NYQUIST: SISTEMI CON RITARDO



- Ipotesi (I): $G(s)$ non ha poli a parte reale maggiore di zero.

- Ipotesi (II): se $T = 0$ (assenza di ritardo), allora il sistema ad anello chiuso non ha poli a parte reale maggiore di zero.

- Risultato: se $T > 0$, allora il sistema ad anello chiuso ha poli a parte reale maggiore di zero se il diagramma di Nyquist modificato compie delle rotazioni orarie intorno al punto $(-1, 0)$.
  - Ritardo critico T_c :
    è il minimo valore del ritardo T che fa perdere la stabilità al sistema ad anello chiuso.