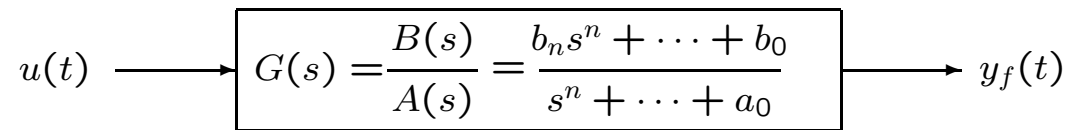


RISPOSTA PERMANENTE NEI SISTEMI LINEARI



- Classe di funzioni di ingresso

$$U(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\prod_{i=1}^l (s - z_i)}{\prod_{i=1}^r (s - p_i)}, \quad l \leq r$$

- Forma di $Y_f(s)$ (caso p_i distinti e \neq dai poli di $G(s)$)

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = H(s) + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}$$

- Scomposizione risposta forzata: $y_f(t) = y_f^G(t) + y_f^U(t)$.

- Parte dipendente dai poli di $G(s)$ (“transitorio”: tende a zero se $G(s)$ è stabile)

$$y_f^G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

- Parte dipendente dai poli di $U(s)$ (“regime permanente”)

$$y_f^U(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}\right\}$$

RISPOSTA PERMANENTE NEI SISTEMI LINEARI

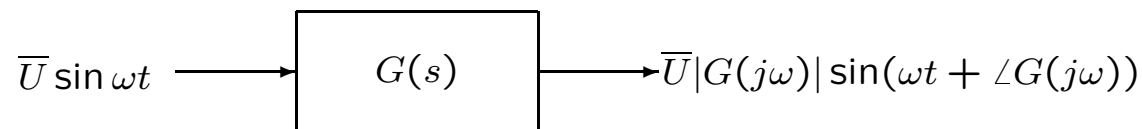
- È di più semplice valutazione rispetto all'intera risposta forzata.
- Fornisce indicazioni della risposta dopo il transitorio iniziale.
- Sono di pratico interesse i casi in cui l'ingresso è una funzione limitata del tempo (e che non tende a zero):

1. Risposta permanente al Gradino:

$$u(t) = \bar{U}\mathbf{1}(t) \longleftrightarrow U(s) = \frac{\bar{U}}{s}$$
$$y_f^U(t) = \bar{U}G(0)\mathbf{1}(t)$$

2. Risposta Armonica (o Risposta in Frequenza):

$$u(t) = \bar{U} \sin \omega t \longleftrightarrow U(s) = \frac{\bar{U}\omega}{s^2 + \omega^2}$$
$$y_f^U(t) = \bar{U}|G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

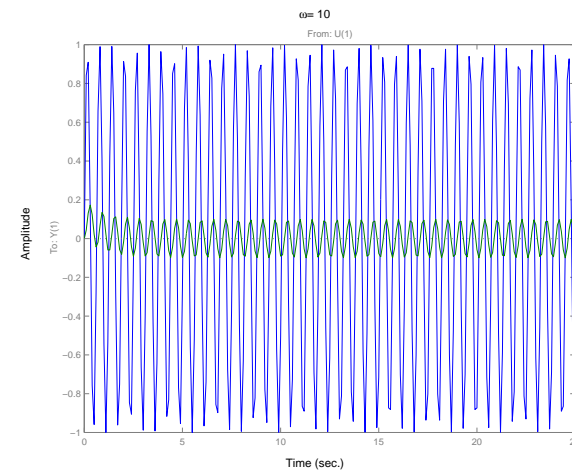
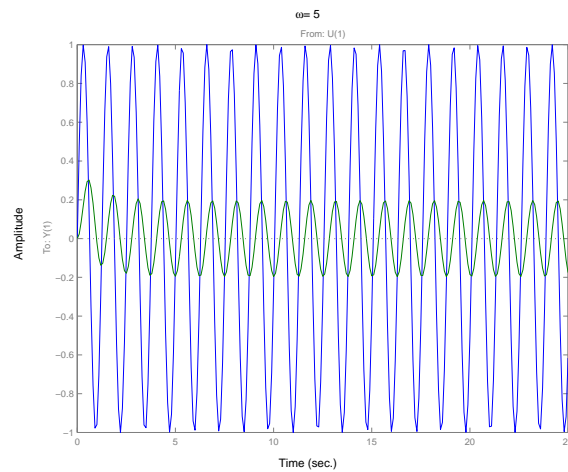
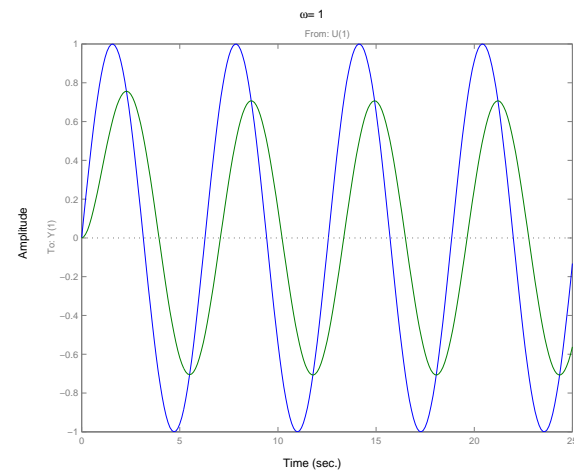
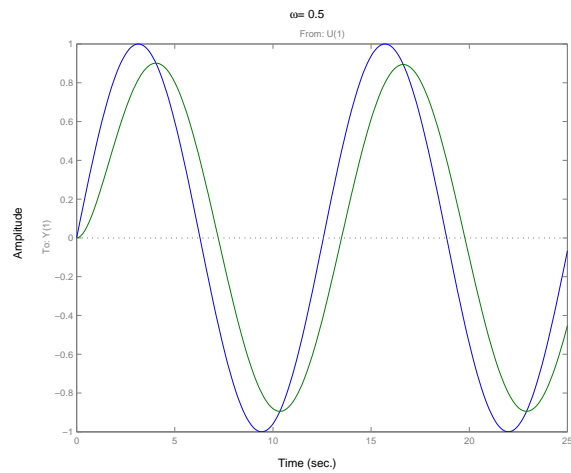


RISPOSTA ARMONICA

Esempio - Sistema del I ordine:

$$u(t) = \sin \omega t$$

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

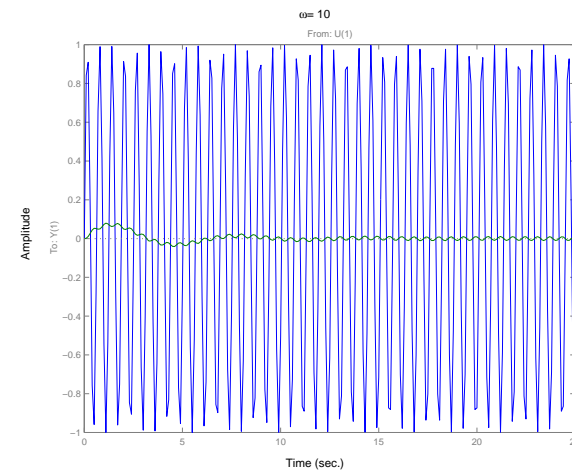
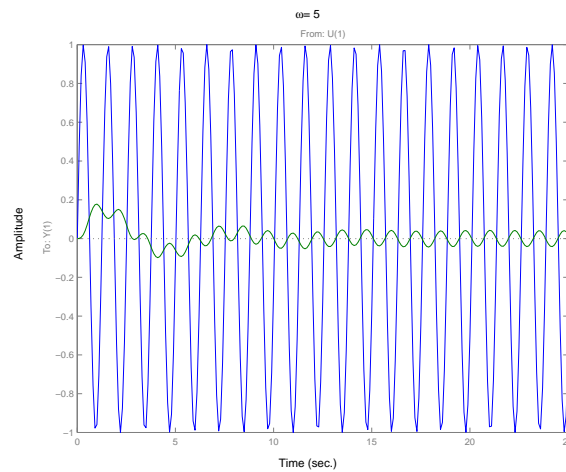
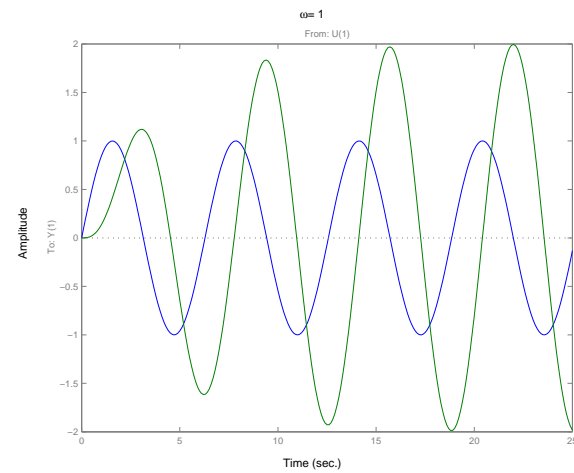
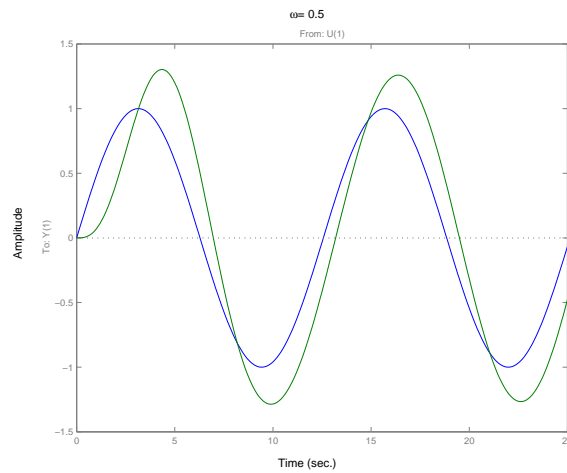


RISPOSTA ARMONICA

Esempio - Sistema del II ordine:

$$u(t) = \sin \omega t$$

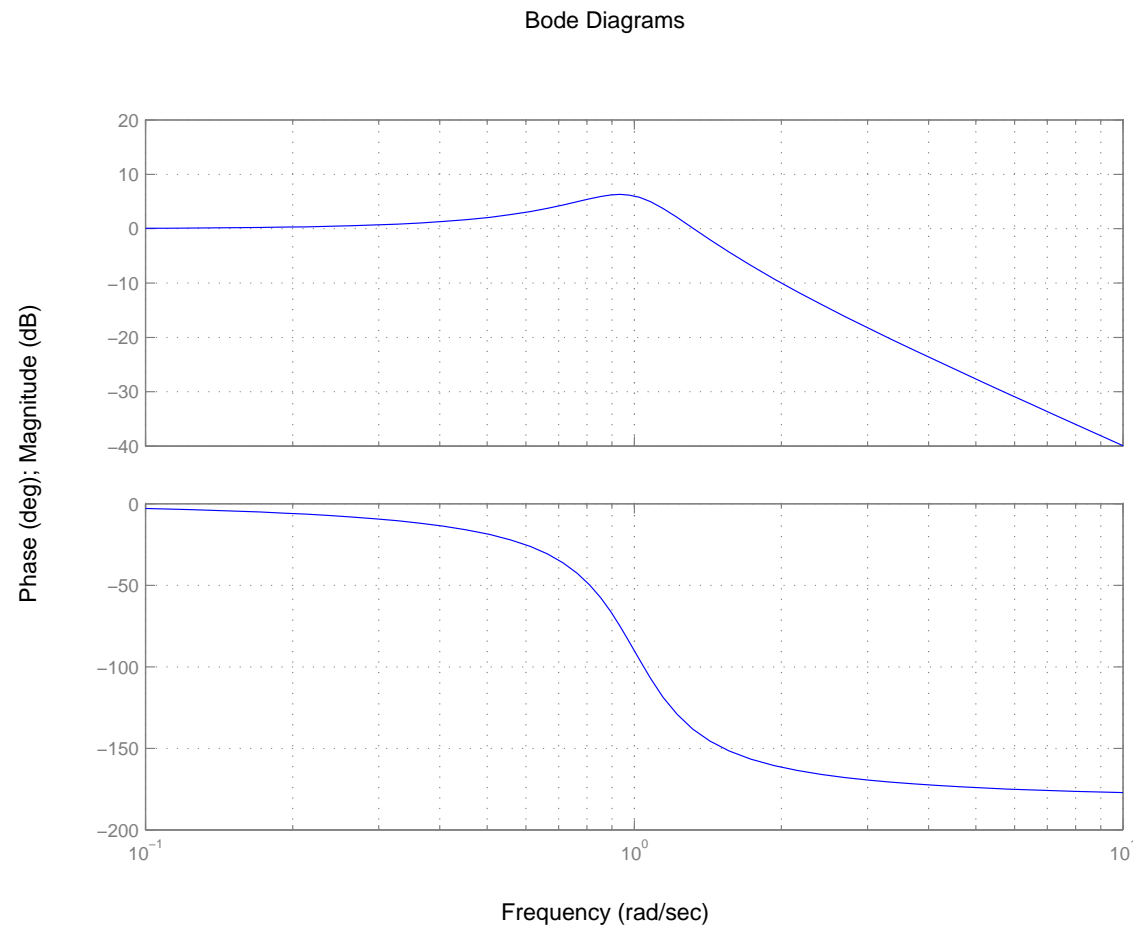
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$



RISPOSTA ARMONICA: DIAGRAMMI DI BODE

Rappresentazione grafica della risposta in frequenza:

- Diagramma di Bode (Modulo): Ascisse: $\log_{10}(\omega)$ — Ordinate: $|G(j\omega)|_{dB} \doteq 20 \log_{10} |G(j\omega)|$
- Diagramma di Bode (Fase): Ascisse: $\log_{10}(\omega)$ — Ordinate: $\angle G(j\omega) \doteq \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \right\}$



RISPOSTA ARMONICA: DIAGRAMMI DI BODE

È utile per $G(s)$ la forma in costanti di tempo (o di Bode)

$$G(j\omega) = \frac{K_B(1 + \tau'_1 j\omega) \cdots (1 + \tau'_m j\omega)}{(j\omega)^h (1 + \tau_1 j\omega) \cdots (1 + \tau_n j\omega)}$$

Principali proprietà dei diagrammi di Bode.

- La scala in decibel trasforma prodotti in somme:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} = & |K_B|_{dB} + |1 + \tau'_1 j\omega|_{dB} + \cdots + |1 + \tau'_m j\omega|_{dB} - \\ & - h|\omega|_{dB} - |1 + \tau_1 j\omega|_{dB} - \cdots - |1 + \tau_n j\omega|_{dB} \end{aligned}$$

- La fase di prodotti è anch'essa uguale alla somma delle fasi:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) = & \angle K_B + \angle(1 + \tau'_1 j\omega) + \cdots + \angle(1 + \tau'_m j\omega) - \\ & - h(\pi/2) - \angle(1 + \tau_1 j\omega) - \cdots - \angle(1 + \tau_n j\omega) \end{aligned}$$

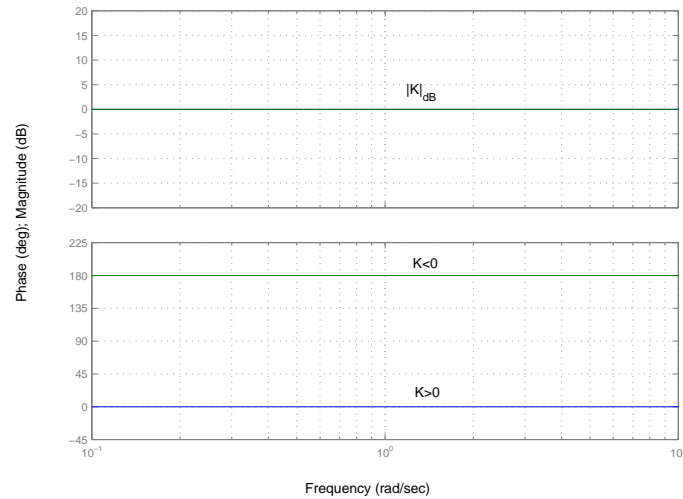
- Inoltre:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)^{-1}|_{dB} &= -|G(j\omega)|_{dB} \\ \angle G(j\omega)^{-1} &= -\angle G(j\omega) \end{aligned}$$

DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI ELEMENTARI

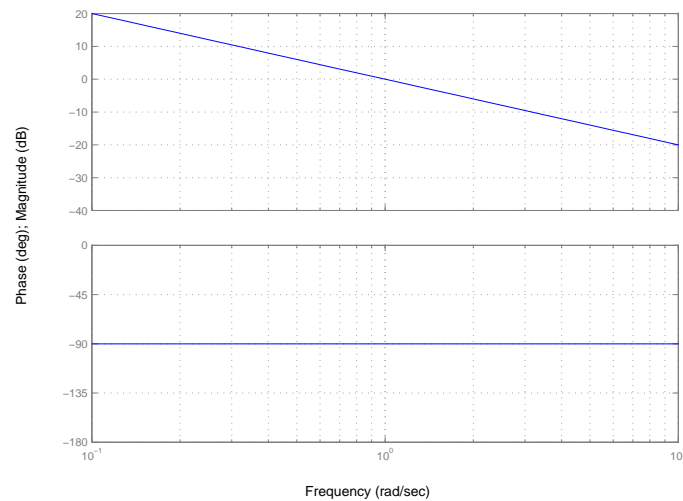
Guadagno semplice: $G(s) = K \implies |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |K|$. $\angle G(j\omega) = \angle K = 0 \text{ } (\pi)$

Bode Diagrams



Integratore: $G(s) = \frac{1}{s} \implies |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10}(\omega)$, $\angle G(j\omega) = -\pi/2$

Bode Diagrams

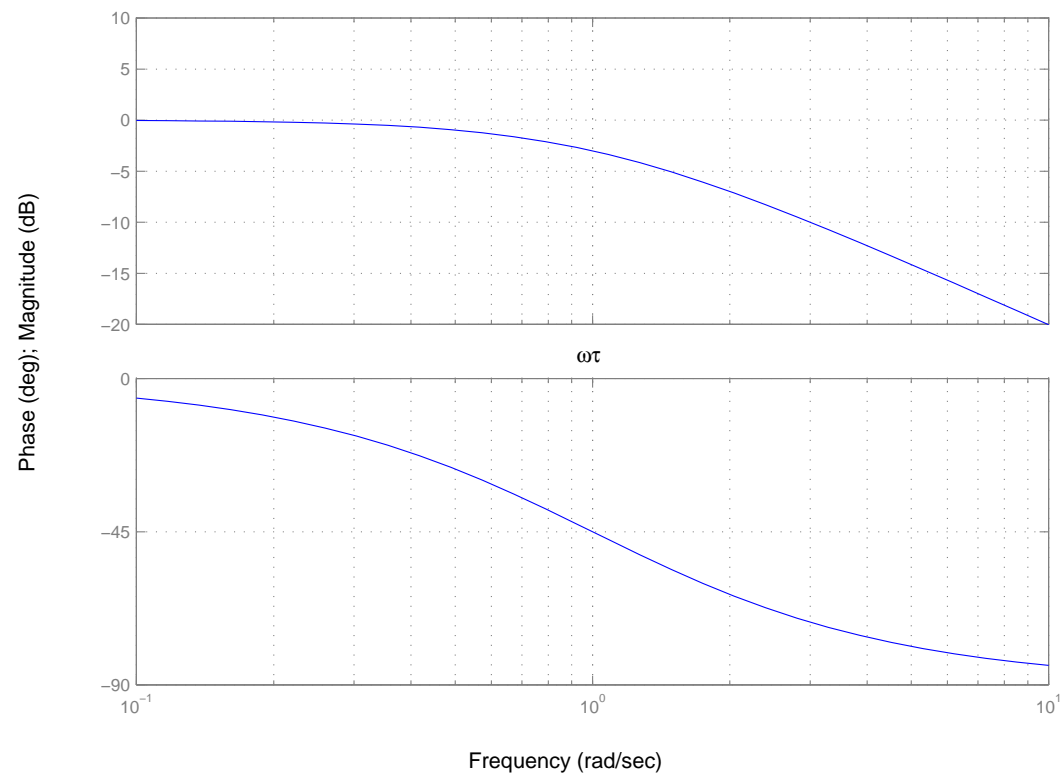


DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI ELEMENTARI

Polo semplice: $G(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \angle G(j\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

Bode Diagrams

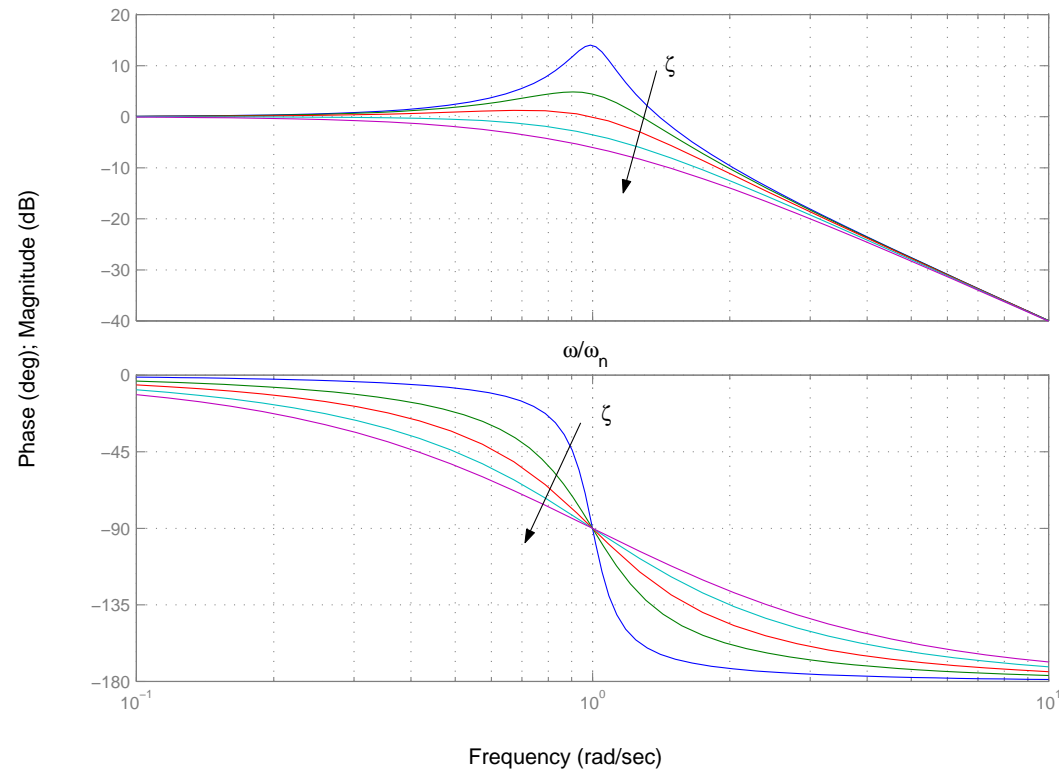


DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI ELEMENTARI

Poli complessi coniugati: $G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad \angle G(j\omega) = -\arctan \left[\frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

Bode Diagrams

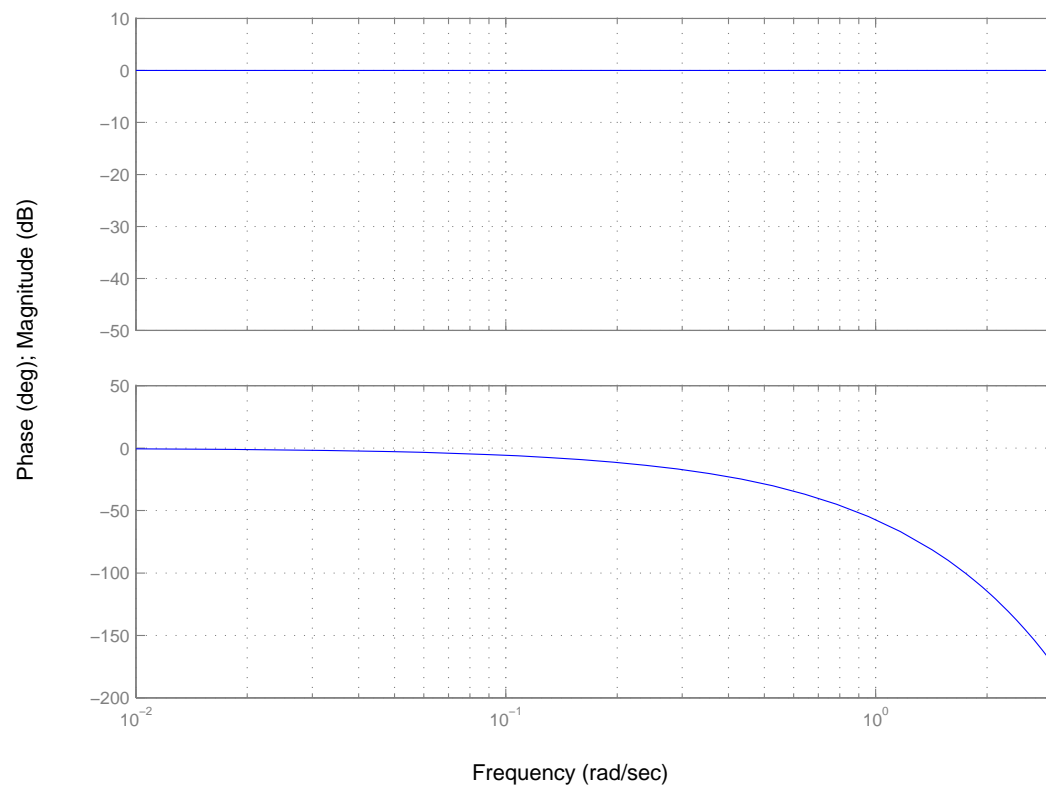


DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI ELEMENTARI

Elemento di ritardo: $G(s) = e^{-sT}$, ($T > 0$)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 0 \qquad \angle G(j\omega) = -\omega T$$

Bode Diagrams



PARAMETRI CARATTERISTICI RISPOSTA ARMONICA

- **B_3 : Banda a 3dB**

Pulsazione corrispondente ad una attenuazione di 3dB rispetto al modulo per $\omega = 0$

$$\Rightarrow |G(jB_3)| = |G(0)|/\sqrt{2}$$

- **M_r : Picco di risonanza**

Picco del modulo della risposta in frequenza

$$\Rightarrow M_r = \max_{\omega} |G(j\omega)|$$

- **ω_r : Pulsazione di risonanza**

Pulsazione corrispondente al picco del modulo della risposta in frequenza

Sistemi del I ordine:

- Banda a 3dB

$$B_3 = 1/|\tau|$$

Sistemi del II ordine:

- Banda a 3dB

$$B_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

- Picco di risonanza

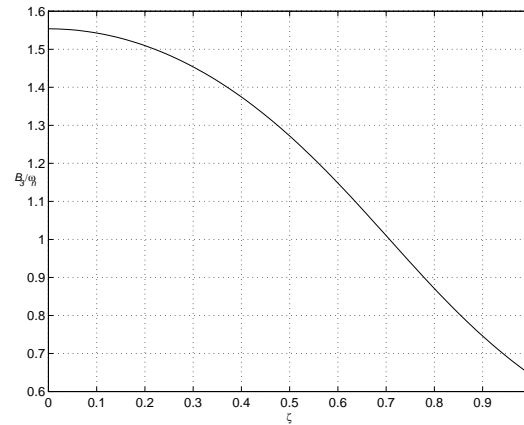
$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- Pulsazione di risonanza

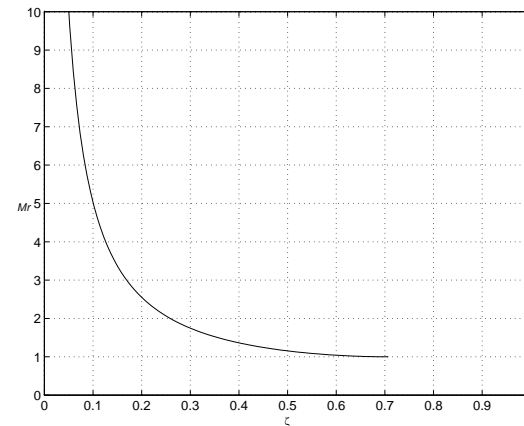
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

RELAZIONI PARAMETRI SISTEMI II ORDINE

- B_3 in funzione di ζ : $B_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$



- M_r in funzione di ζ : $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$



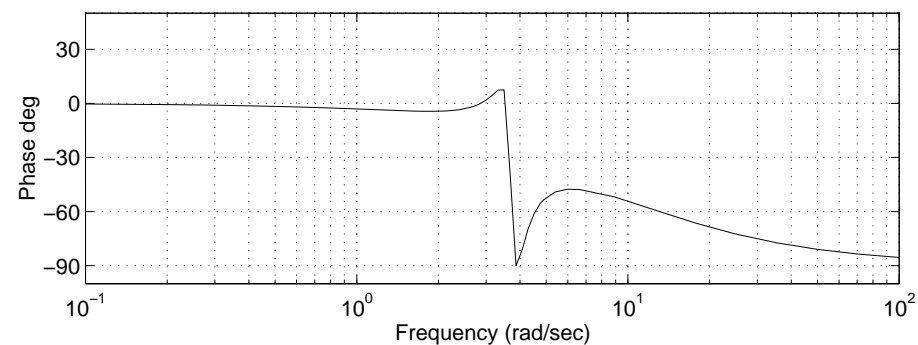
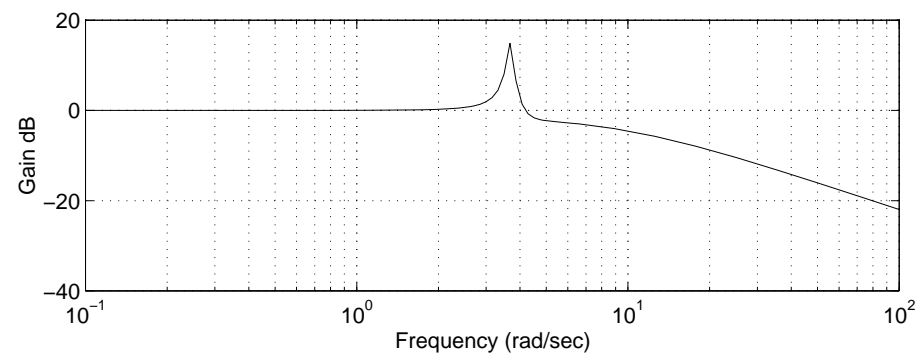
ESEMPI DI TRACCIAMENTO DIAGRAMMI DI BODE

$$G(s) = \frac{8(s^2 + s + 15)}{s^3 + 9s^2 + 15s + 120} \quad , \quad G(s) = e^{-sT} \frac{1 + s}{s(1 + 10s)(1 + 0.1s)^2}$$

- Forma di Bode

$$G(s) = \frac{1 + 2\zeta_z \frac{s}{\omega_{nz}} + \frac{s^2}{\omega_{nz}^2}}{(1 + s\tau_p)(1 + 2\zeta_p \frac{s}{\omega_{np}} + \frac{s^2}{\omega_{np}^2})}$$

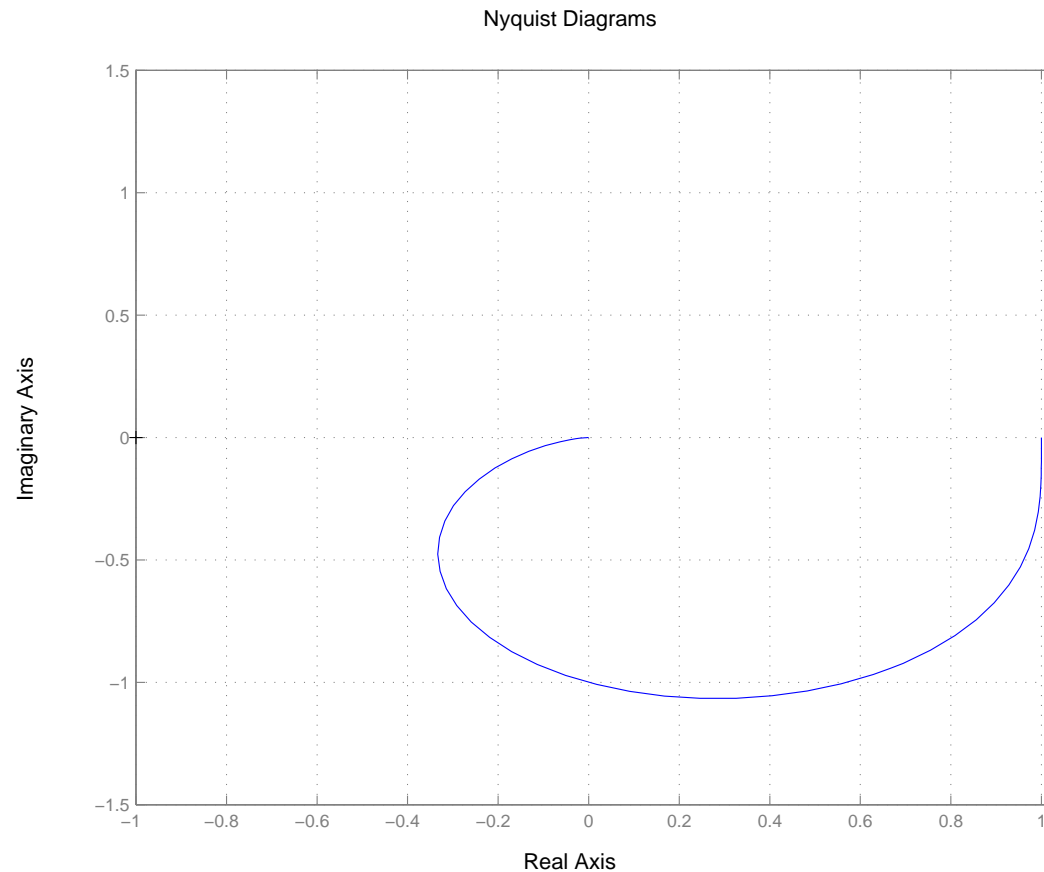
$$\omega_{nz} \approx 3.873; \quad \zeta_z \approx 0.129; \quad \tau_p \approx 0.113; \quad \omega_{np} \approx 3.685; \quad \zeta_p \approx 0.022$$



DIAGRAMMI POLARI O DI NYQUIST DI $G(j\omega)$

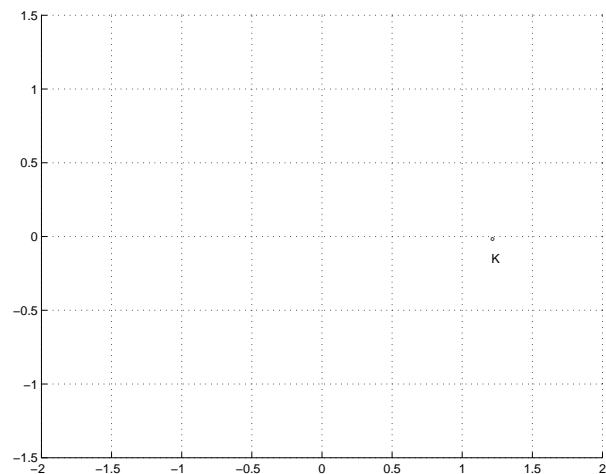
Il diagramma polare è la curva nel piano di complesso descritta da $G(j\omega)$ al variare della pulsazione ω in $[0, \infty]$.

- Diagramma di Nyquist: Ascisse: $\text{Re}[G(j\omega)]$ — Ordinate: $\text{Im}[G(j\omega)]$

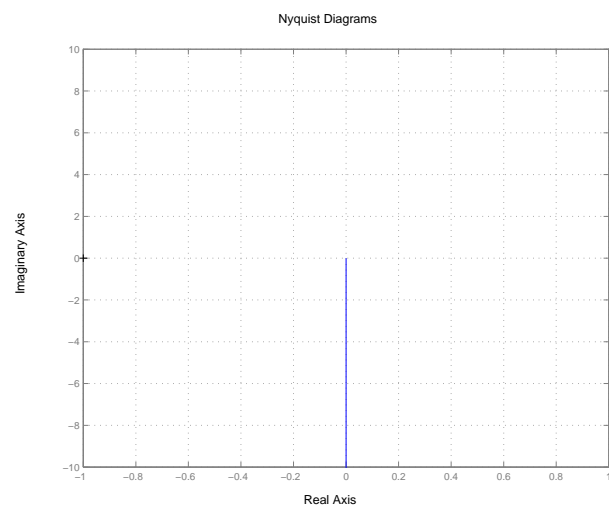


DIAGRAMMI DI NYQUIST DI SISTEMI ELEMENTARI

Guadagno semplice: $G(s) = K \implies \operatorname{Re}[G(j\omega)] = K$, $\operatorname{Im}[G(j\omega)] = 0$



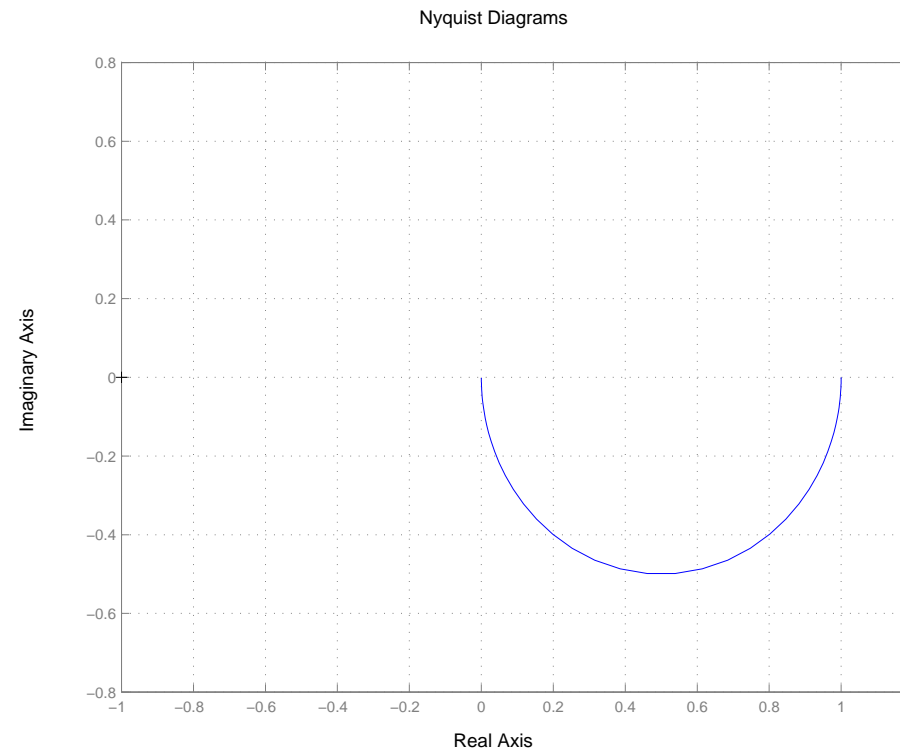
Integratore: $G(s) = \frac{1}{s} \implies \operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0$, $\operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\frac{1}{\omega}$



DIAGRAMMI DI NYQUIST DI SISTEMI ELEMENTARI

Sistema del I ordine: $G(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$, ($\tau > 0$)

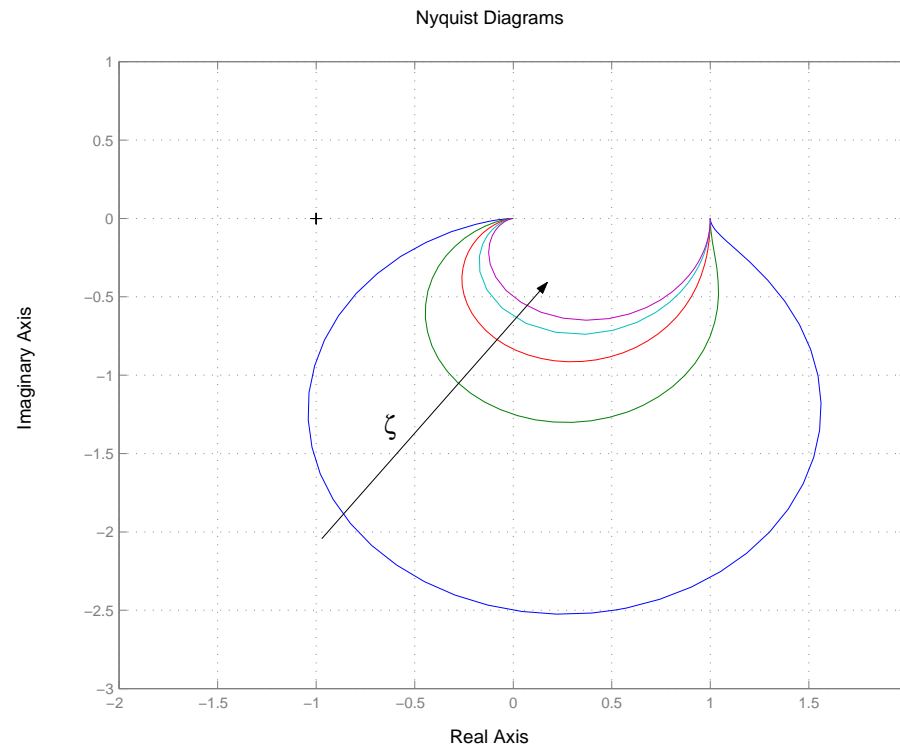
$$\Rightarrow \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \quad , \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{-\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$



DIAGRAMMI DI NYQUIST DI SISTEMI ELEMENTARI

Sistema del II ordine: $G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$, $(\omega_n > 0, 0 \leq \zeta < 1)$

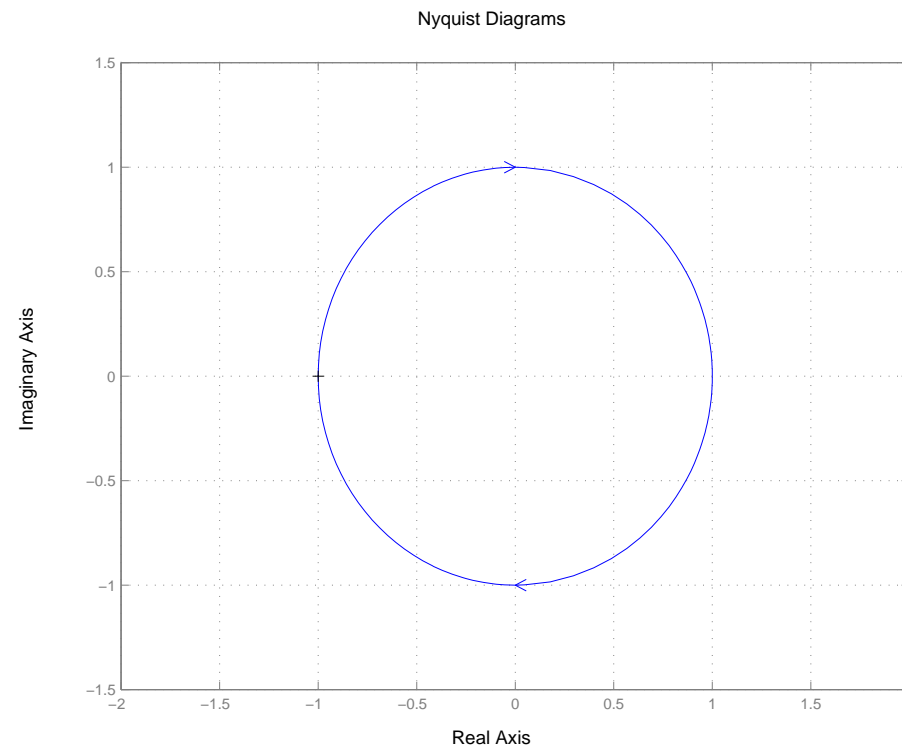
$$\Rightarrow \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{-2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



DIAGRAMMI DI NYQUIST DI SISTEMI ELEMENTARI

Elemento di ritardo: $G(s) = e^{-sT}$, ($T > 0$)

$$\Rightarrow \operatorname{Re}[G(j\omega)] = +\cos \omega T \quad , \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\sin \omega T$$



SINGOLARITÀ DEI DIAGRAMMI DI NYQUIST

$$G(s) = \frac{1}{s^h} G'(s)$$

- Un polo in zero ($h = 1$) \rightarrow asintoto verticale.

$$G(s) = \frac{G'_0}{s} + G'_1 + G'_2 s + G'_3 s^2 + \dots$$

$$G'_0 \doteq G'(0); \quad G'_1 \doteq \frac{d}{ds} G'(s)|_{s=0}; \quad G'_2 \doteq \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} G'(s)|_{s=0};$$

- Un polo doppio in zero ($h = 2$) \rightarrow genericamente asintoto parabolico.

$$G(s) = \frac{G'_0}{s^2} + \frac{G'_1}{s} + G'_2 + G'_3 s \dots$$

- Esempi.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

SINGOLARITÀ DEI DIAGRAMMI DI NYQUIST

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \hat{\omega}^2} G'(s)$$

- Un polo per $s = j\hat{\omega} \rightarrow$ asintoto obliquo.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \hat{\omega}^2} G'(s) = \frac{1}{s - j\hat{\omega}} G''(s)$$

$$G(s) = \frac{G''_o}{s - j\hat{\omega}} + G''_1 + G''_2(s - j\hat{\omega}) + \dots$$

$$G''_o \doteq G''(j\hat{\omega}); \quad G''_1 \doteq \frac{d}{ds} G''(s)|_{s=j\hat{\omega}}; \quad G''_2 \doteq \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} G''(s)|_{s=j\hat{\omega}}$$

- Esempio.

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+s^2)}$$