

CALCOLO DEI POLI DI $W(s)$

- Passaggio da G a W quando G è assegnata in forma poli-zeri.

– Espressione di G :

$$G(s) = K' \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad m < n$$

– Poli di W :

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K' \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0 \quad (1)$$

- Problema:

– Assegnati i poli p_i e gli zeri z_j di G determinare le soluzioni di (1) al variare del guadagno K' , ovvero il luogo delle radici (luogo positivo per $K' > 0$, luogo negativo per $K' < 0$).

PROPRIETÀ DEL LUOGO DELLE RADICI

- Condizione di fase:

- un punto s del piano complesso appartiene al luogo delle radici se soddisfa:

$$\sum_{i=1}^n \arg[s - p_i] - \sum_{j=1}^m \arg[s - z_j] = \begin{cases} (2h + 1)\pi, & h = 0, 1, \dots & \text{se } K' > 0 \\ 2h\pi, & h = 0, 1, \dots & \text{se } K' < 0 \end{cases}$$

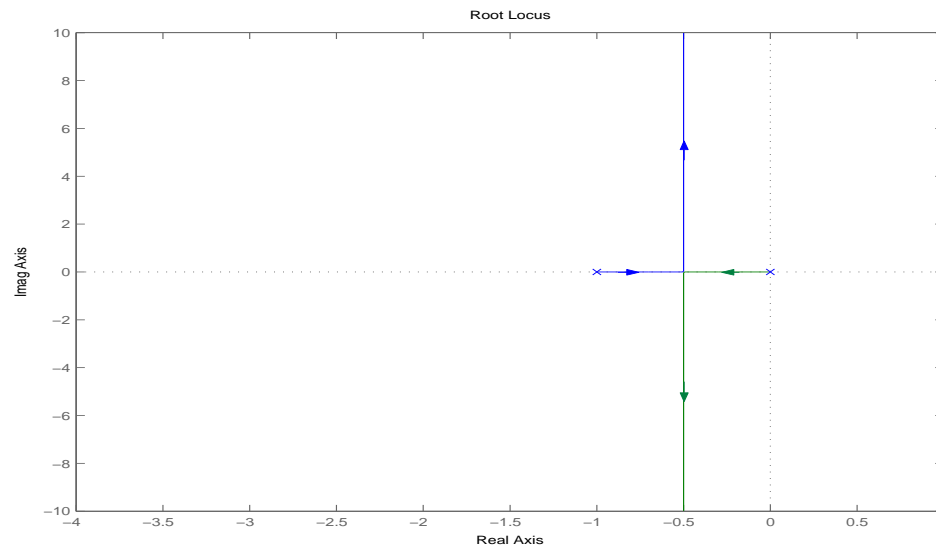
- Condizione di modulo:

- ad ogni punto s appartenente al luogo delle radici corrisponde un guadagno:

$$|K'| = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

- Esempio:

$$G(s) = K' \frac{1}{s(s - p)}, \quad p < 0$$



PROPRIETÀ DEL LUOGO DELLE RADICI

1. Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale; la forma del luogo è invariante rispetto a traslazioni orizzontali del complesso di poli e zeri
2. Il luogo ha n rami che escono dai poli; m di questi arrivano negli zeri, gli altri $n - m$ divergono verso l'infinito
3. Al luogo positivo ($K' > 0$) appartengono i punti dell'asse reale che hanno alla propria destra un numero totale dispari di poli e zeri; la restante parte dell'asse reale appartiene al luogo negativo
4. Una radice multipla di ordine μ corrisponde a un punto in comune fra μ rami del luogo delle radici
5. Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi uscenti dal punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

e inclinati di (luogo positivo)

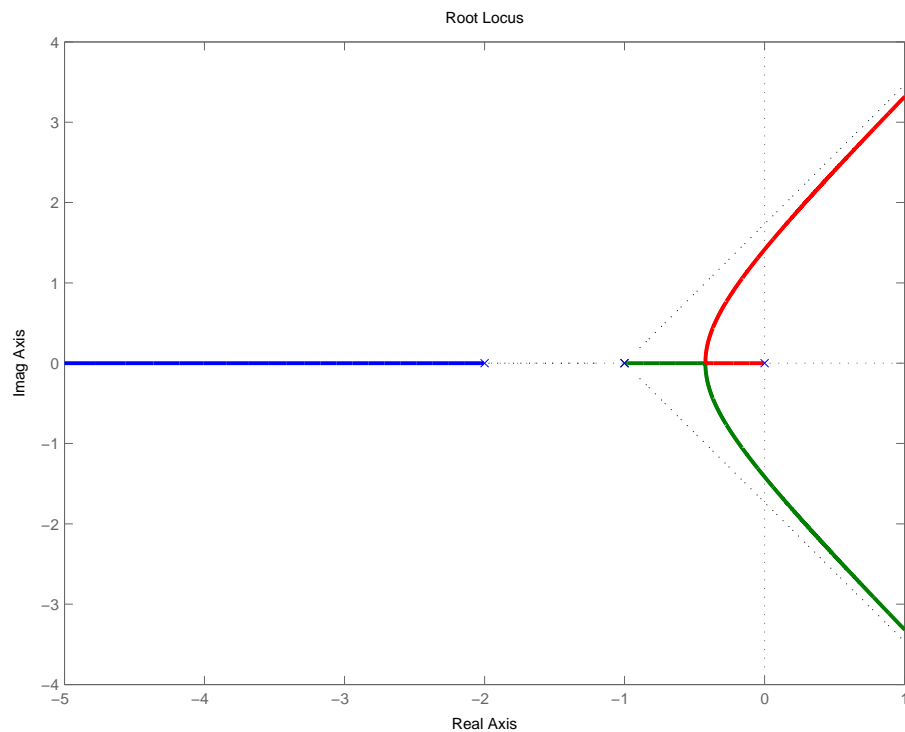
$$\theta = \frac{(2h + 1)\pi}{n - m}, \quad h = 0, 1, \dots$$

REGOLE PER LA COSTRUZIONE DEL LUOGO DELLE RADICI

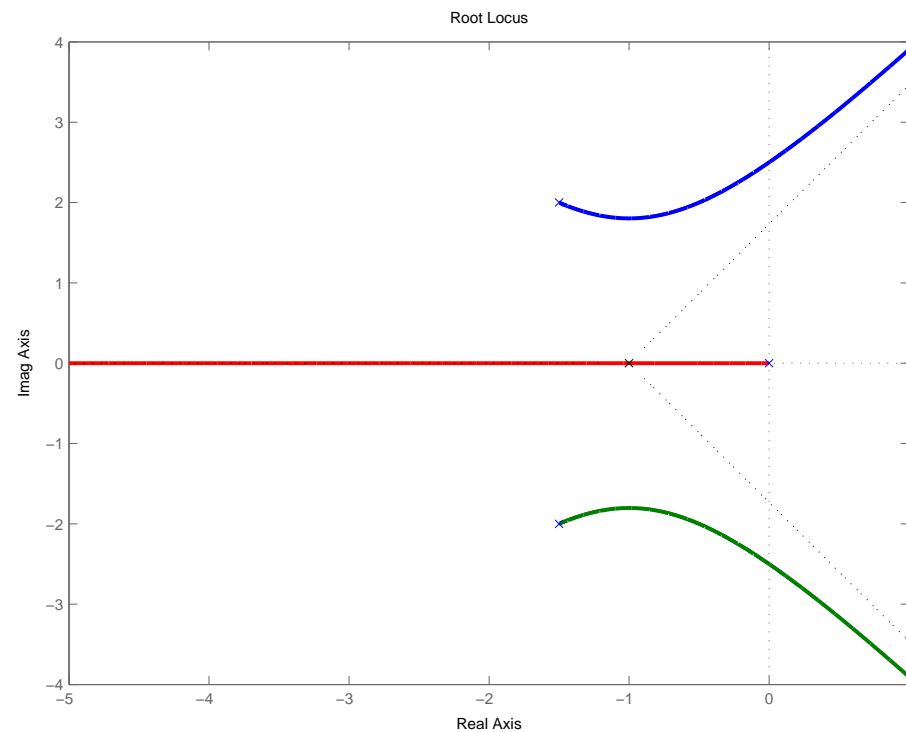
- Riportare i poli e gli zeri sul piano complesso
- Determinare le parti dell'asse reale che appartengono al luogo positivo
- Determinare il centro e l'inclinazione dei raggi della stella degli $n - m$ asintoti
- Tenere conto che sui tratti di luogo appartenenti all'asse reale e compresi fra due poli o fra due zeri è presente almeno un punto doppio
- Calcolo delle intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario:
 - Uso del criterio di Routh: calcolo dei valori di K' per i quali la corrispondente tabella di Routh ha una riga di tutti zeri.
 - Uso del diagramma di Nyquist di G : calcolo dei valori della parte reale di $G(j\omega)$ in corrispondenza delle ω per le quali la parte immaginaria di $G(j\omega)$ è nulla.

ESEMPI DI TRACCIAMENTO DEL LUOGO DELLE RADICI

$$G(s) = K' \frac{1}{s(s + p_1)(s + p_2)}, \quad \begin{cases} K', p_1, p_2 > 0 & \text{caso A} \\ K', \operatorname{Re}[p_1], \operatorname{Re}[p_2] > 0 & \text{caso B} \end{cases}$$



caso A



caso B

ESEMPI DI TRACCIAMENTO DEL LUOGO DELLE RADICI

$$G(s) = K' \frac{s - z}{s(s+1)(s+5)}$$

