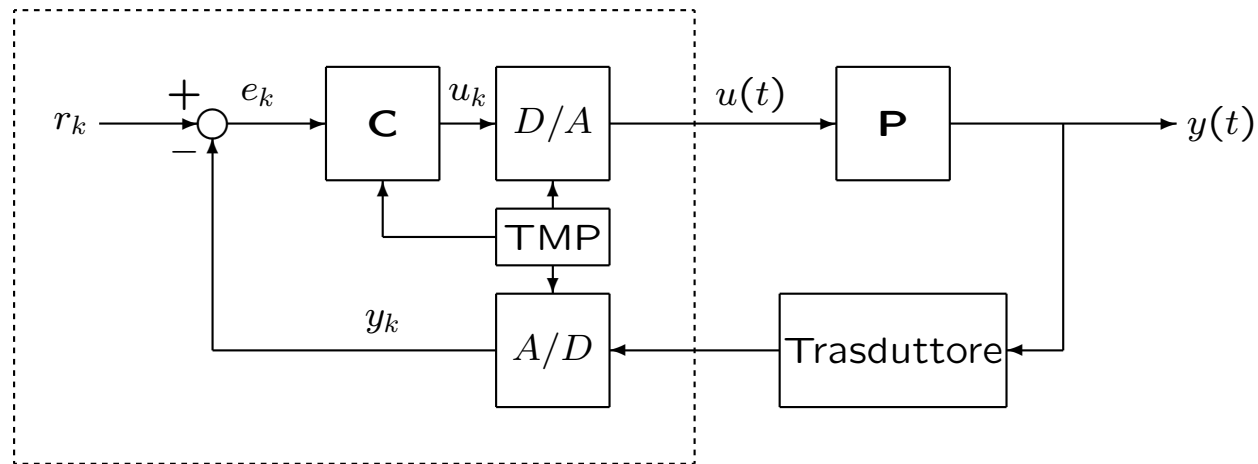


SISTEMI A DATI CAMPIONATI: INTRODUZIONE

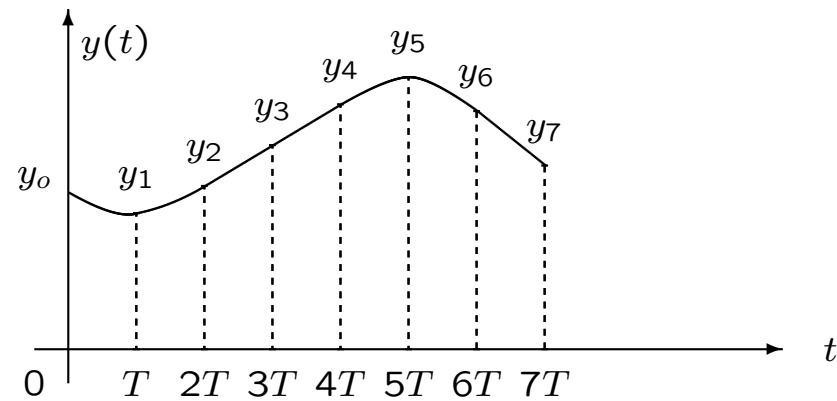


Schema di base di un sistema di controllo digitale

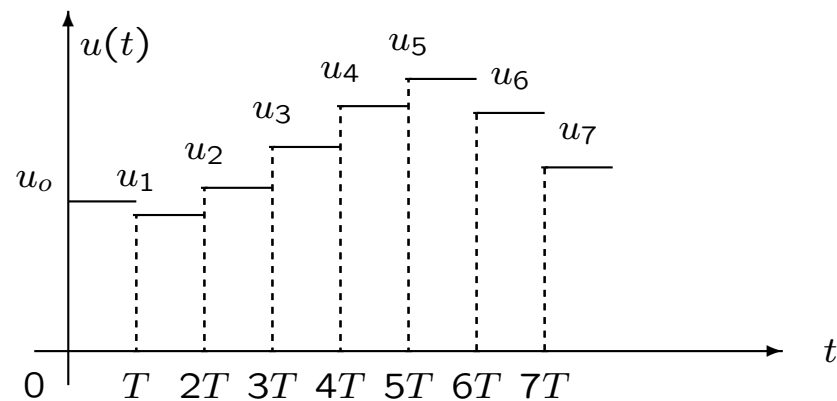
- A/D : convertitore analogico digitale
- **C**: controllore digitale
- D/A : convertitore digitale analogico
- **P**: processo/impianto sotto controllo
- **TMP**: temporizzatore
- $y(t)$, $u(t)$: variabili a tempo continuo
- y_k , u_k : variabili a tempo discreto (campionate)
- r_k , e_k : variabili a tempo discreto

CONVERTITORI A/D e D/A

- Campionatore (periodico) ideale: $y_k = y(kT)$, $k = 0, 1, \dots$



- Mantenitore di ordine zero (zero order hold): $u(t) = u_k$, $kT \leq t < (k+1)T$



CONTROLLORE DIGITALE

- Forma generale della legge di controllo:

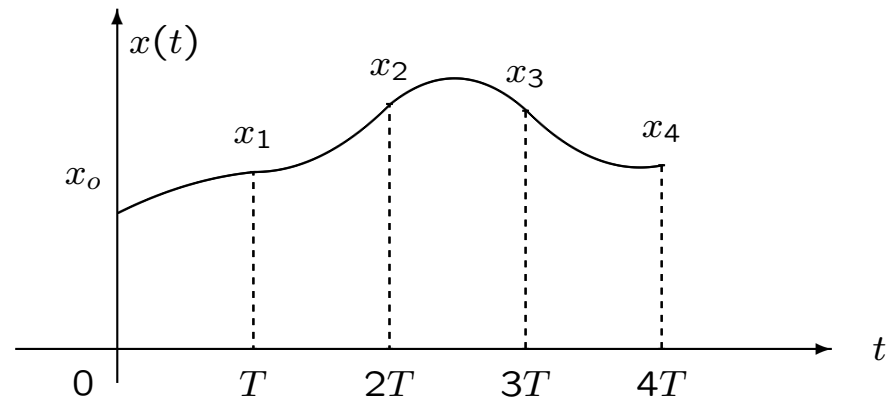
$$u_k = \Phi(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, e_k, e_{k-1}, e_{k-2}, \dots) , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Legge di controllo lineare e stazionaria:

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + \dots + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2} , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- T : tempo di campionamento del campionatore e del mantenitore
- Δ : tempo di calcolo richiesto dalla legge di controllo
- Se nella legge di controllo u_k non dipende da e_k e l'hardware garantisce che $\Delta < T$:
 - Procedura per il calcolo di u_k attivabile all'istante $(k-1)T$;
 - Aggiornamento di u_k esattamente all'istante kT .

PROBLEMA DEL CAMPIONAMENTO



- Problema: ricostruzione univoca di $x(t)$ da una sequenza x_k
- Teorema del campionamento di Shannon
 - Sia $x(t)$ un segnale a banda limitata in $[0, \hat{\omega}]$.
Può essere ricostruito dai campioni $x_k = x(kT)$ se

$$\hat{\omega} < \omega_N := \frac{\pi}{T}$$

dove la pulsazione ω_N è nota come pulsazione di Nyquist.

RELAZIONI TC - TD

- Osservazione:

$$f(t) = e^{-at} \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s + a}$$
$$f_k = e^{-akT} \longrightarrow F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

- Risultato generale per funzioni razionali fratte:

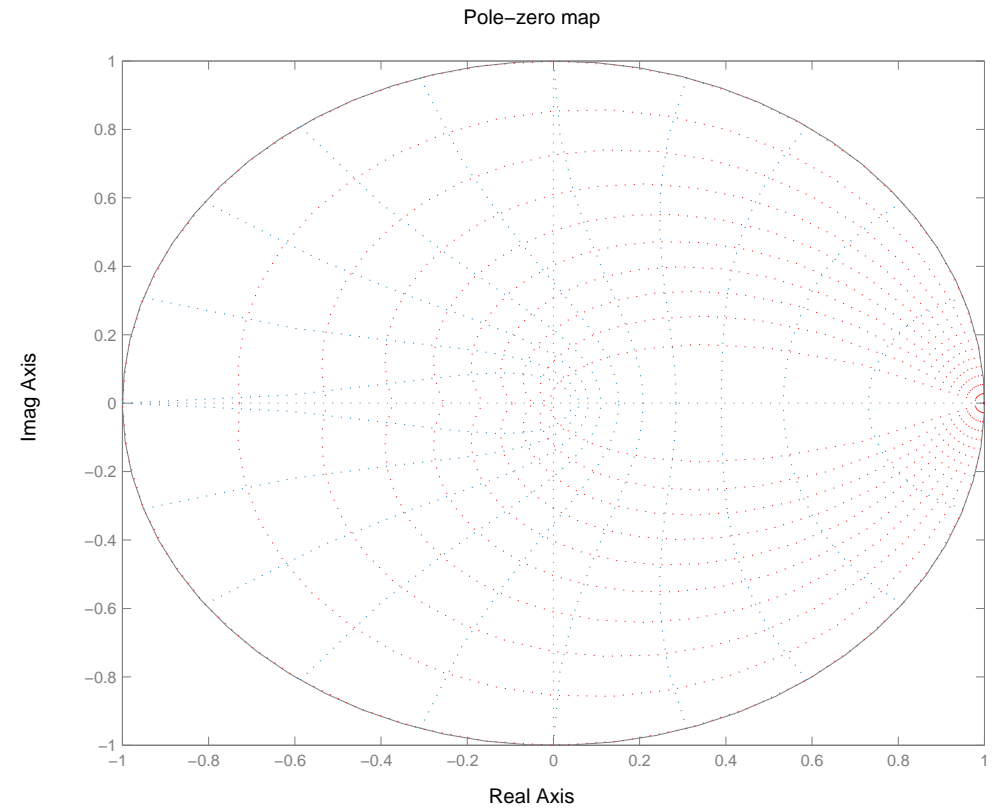
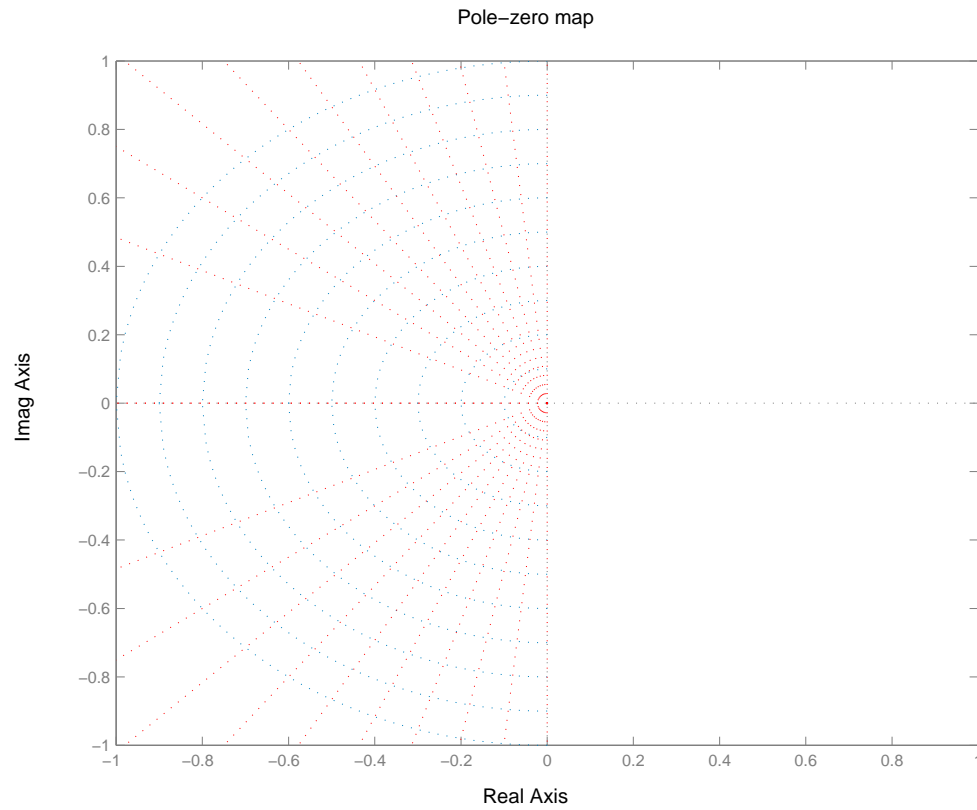
- i poli della trasformata di Laplace si trasformano in poli della trasformata zeta attraverso la relazione

$$z = e^{sT}$$

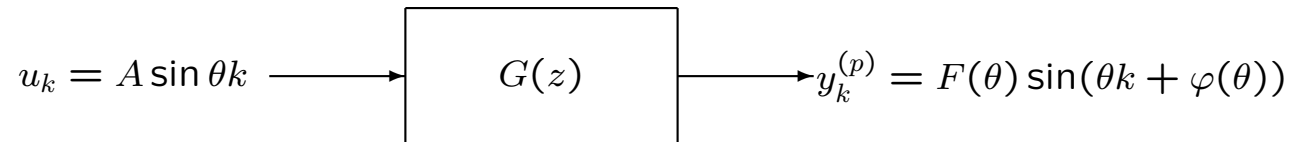
- Alcune considerazioni:

- La regione di stabilità asintotica è l'interno del cerchio unitario
- Rette orizzontali in s corrispondono a rette radiali in z
- Rette verticali in s , $\text{Re}[s] < 0$, corrispondono a circonferenze interne al cerchio unitario
- Analogia fra $s = 0$ e $z = 1$
- Il tempo di campionamento è un fattore di normalizzazione
- Rilettura teorema del campionamento

TRASFORMAZIONE LUOGHI A ζ E ω_n COSTANTE



RISPOSTA IN FREQUENZA (REGIME PERMANENTE)

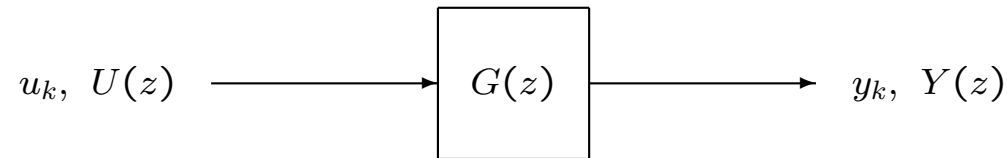


- Teorema della risposta in frequenza

$$F(\theta) = A|G(e^{j\theta})|; \quad \varphi(\theta) = \arg G(e^{j\theta})$$

- Osservazioni:
 - Per sistemi a dati campionati: $\theta = \omega T$
 - Non esistono regole per il tracciamento di diagrammi asintotici di Bode
 - I diagrammi di Bode, Nichols, Nyquist si ricavano numericamente

STABILITÀ SISTEMI A TEMPO DISCRETO (TD)



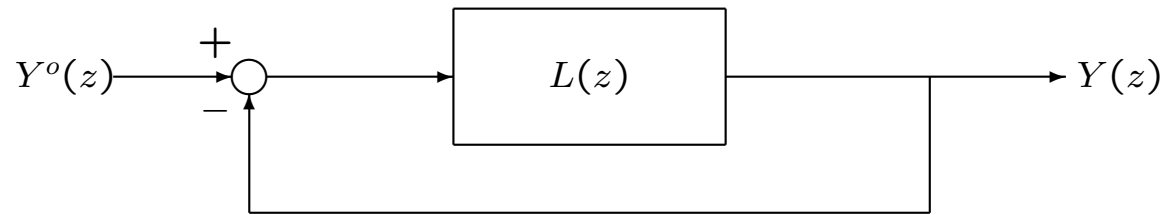
- Condizione per la stabilità: Non esistono poli della funzione di trasferimento con modulo maggiore di uno e quelli con modulo unitario sono semplici.
- Condizione per la stabilità asintotica: Tutti poli della funzione di trasferimento hanno modulo minore di uno.

Criteri di Stabilità per Sistemi TD

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots a_1z + a_0$$

- Criterio di Jury (c. necessaria e sufficiente)
Il polinomio è asintoticamente stabile se e solo se i primi elementi delle righe di indice dispari della Tabella di Jury sono tutti diversi da zero e hanno segno positivo.

SISTEMA TD A RETROAZIONE UNITARIA



- Stabilità del sistema TD ad anello chiuso
 - Si può usare il criterio di Nyquist considerando la risposta in frequenza $G(e^{j\theta})$ e il cerchio unitario come percorso di Nyquist
 - Si può usare il luogo delle radici (il cerchio unitario è la regione di stabilità)
- Esempi

$$L(z) = \frac{K}{z - 0.5}$$

$$L(z) = \frac{K}{(z - 2)(z + 1)}$$

PROBLEMA DEL CAMPIONAMENTO

- Scelta del passo di campionamento nei sistemi di controllo

- Relazione approssimata usata in pratica

$$B_3 < \omega_N < 10B_3$$

- Giustificazione:

- * il limite inferiore è dovuto al Teorema di Shannon e al fatto che nei sistemi di controllo l'informazione è contenuta nella banda B_3
- * il limite superiore deriva dal fatto che al diminuire del tempo di campionamento aumenta il costo dei convertitori ed è richiesta una maggiore velocità di calcolo al controllore digitale

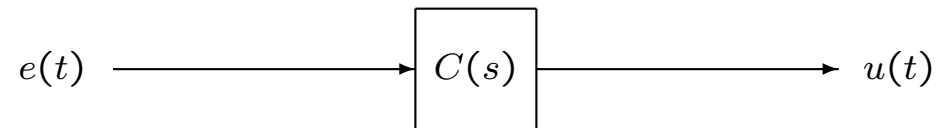
- Osservazione: nei sistemi di controllo sono sempre presenti dei disturbi alle alte frequenze → filtro anti-aliasing prima del campionatore

- Filtro anti-aliasing del primo ordine

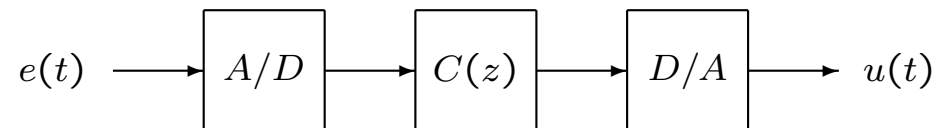
$$F(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_N}$$

PROGETTO CONTROLLO DIGITALE: INTRODUZIONE

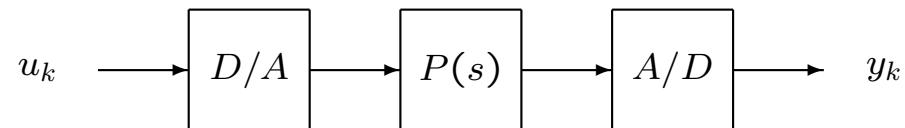
- Tecniche basate sulla discretizzazione di un controllore analogico:
 - determinato il controllore analogico



farne una realizzazione digitale.

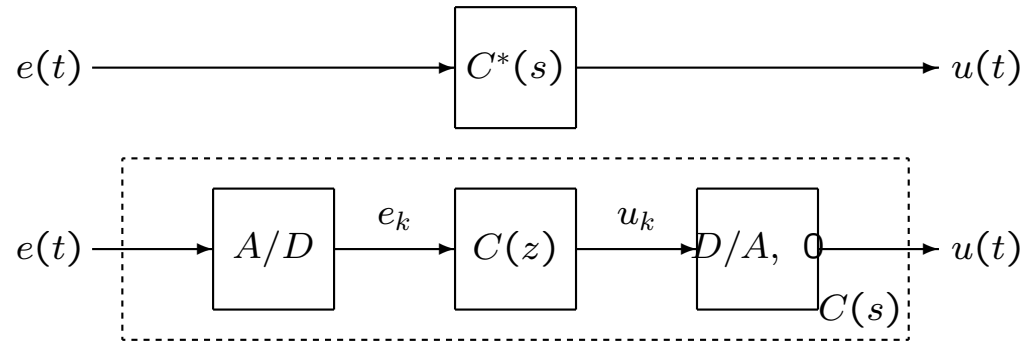


- Tecniche “dirette” a tempo discreto:
 - discretizzato il processo



progettare il controllore direttamente nel tempo discreto.

TECNICHE DI DIGITALIZZAZIONE



- Problema:

- determinare il controllore $C(z)$ in modo che

$$C(j\omega) \approx C^*(j\omega), \quad \omega \in [0, B_3]$$

- I metodi si basano sul determinare opportune trasformazioni dal piano s al piano z , ovvero

$$z = T(s) \quad \longrightarrow \quad C(z) = C^*(T^{-1}(z))$$

- Due tecniche:

- tecniche di integrazione
- tecniche di matching dei poli e degli zeri (MPZ)

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

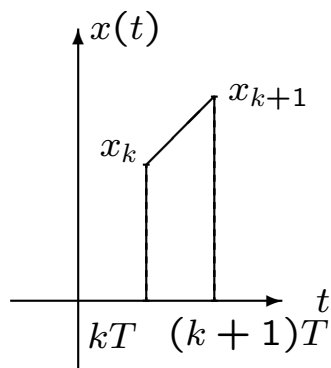
- Integrando nell'intervallo $[kT, (k+1)T]$ le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \\ u(t) = Cx(t) + De(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{kT}^{(k+1)T} x(t) dt \approx [(1-\alpha)x_k + \alpha x_{k+1}]T \\ \int_{kT}^{(k+1)T} e(t) dt \approx [(1-\alpha)e_k + \alpha e_{k+1}]T \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha \in [0, 1] \\ \alpha \in [0, 1] \end{matrix}$$

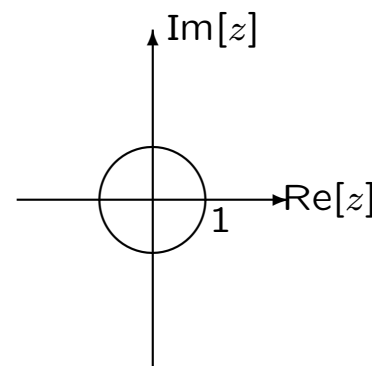
Metodo di Tustin ($\alpha = 1/2$):

$$s = T^{-1}(z) = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad \longrightarrow \quad C(z) = C^*(T^{-1}(z))$$

- Interpretazione grafica formula di integrazione



Dominio del tempo



Dominio della frequenza

- Osservazione: per piccoli valori del tempo di campionamento i poli si addensano nella zona del cerchio unitario vicino al punto $z = 1$.

TECNICHE DI MATCHING

- Tecniche di matching dei poli e degli zeri (MPZ):
 - i poli e gli zeri del sistema tempo continuo si trasformano secondo la mappa

$$z = e^{sT}$$

- Procedura per progetto $C(z)$:
 - assegnata

$$C^*(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - r_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$C(z)$ risulta

$$C(z) = K_d \frac{\prod_{i=1}^m (z - e^{r_i T})}{\prod_{i=1}^n (z - e^{p_i T})}$$

dove K_d è selezionato in modo da avere lo stesso guadagno in continua del controllore analogico, ovvero

$$K_d = K \frac{\prod_{i=1}^m (-r_i)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)} \frac{\prod_{i=1}^n (1 - e^{p_i T})}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{r_i T})}$$

TECNICHE DI DIGITALIZZAZIONE

- Confronto fra le tecniche di digitalizzazione

$$C^*(s) = \frac{5}{s + 5}$$

Metodo	$\omega_N = 50 \text{ rad/s}$	$\omega_N = 10 \text{ rad/s}$
MPZ	$0.285 \frac{1}{z - 0.715}$	$0.811 \frac{1}{z - 0.189}$
Tustin	$0.143 \frac{z + 1}{z - 0.713}$	$0.454 \frac{z + 1}{z - 0.0914}$

TECNICHE DI DIGITALIZZAZIONE

- Processo

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Specifiche di controllo

$$\begin{array}{llll} 1) & y_p^0 = 0.2 & \longrightarrow & m_\phi^o = 55^\circ \\ 2) & B_3^o = 0.8 \text{ rad/s} & \longrightarrow & \omega_a^o = 0.5 \text{ rad/s} \end{array}$$

- Progetto controllore analogico

$$C^*(s) = 0.1 \frac{1 + 5s}{1 + 0.5s}$$

- Digitalizzazione controllore

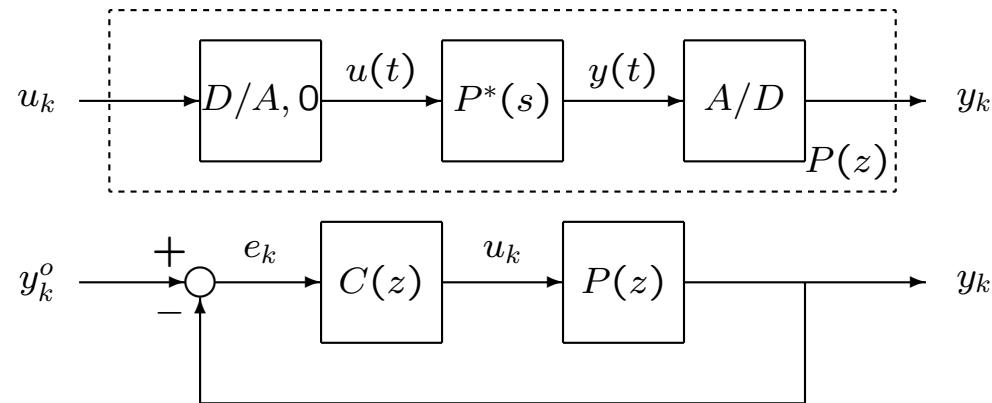
- Scelta del tempo di campionamento:

$$B_3^o = 0.8 < \omega_c/2 = \pi/T < 10 \cdot B_3^o = 8 \quad \longrightarrow \quad T = 1 \text{ s}$$

- Utilizzo del metodo MPZ

$$C(z) = 0.48 \frac{z - 0.82}{z - 0.135} \quad \longrightarrow \quad u_k = 0.135u_{k-1} + 0.48e_k - 0.394e_{k-1}$$

TECNICHE DIRETTE



- Fase (I). Discretizzazione processo analogico
- Fase (II). Progetto controllore $C(z)$:
 1. Tecniche basate sull'analisi dei sistemi a tempo discreto (per esempio, sintesi basate sul luogo delle radici)
 2. Tecniche di sintesi diretta per sistemi a tempo discreto

TECNICHE DIRETTE

Esempio di uso del luogo delle radici

- Processo continuo da controllare

$$P^*(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Specifiche di controllo (riportate sui poli dominanti)

$$\begin{array}{lll} 1) & y_p^0 = 0.2 & \longrightarrow \zeta^o = 0.5 \\ 2) & B_3^o = 0.8 \text{ rad/s} & \longrightarrow \omega_n^o = 0.6 \text{ rad/s} \end{array}$$

- Discretizzazione processo analogico ($T = 1$)

$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{z + 1}{(z - 1)^2}$$

- Controllore selezionato

$$C(z) = h \frac{z - a}{z} \longrightarrow u_k = h e_k - h a e_{k-1}$$

- Determinazione di h e a

$$\begin{array}{lll} s^* = \omega_n^o e^{j(\arcsin \zeta + \pi/2)} = -0.3 + j0.52 & \longrightarrow & e^{s^*T} = 0.64 + j0.37 \\ & \Downarrow & \\ 1 + C(e^{s^*T})P(e^{s^*T}) = 0 & \longrightarrow & h = 0.606; a = 0.745 \end{array}$$

TECNICHE DIRETTE

- Assegnata la funzione di trasferimento desiderata ad anello chiuso $W^o(z)$, la sintesi diretta fornisce il controllore digitale

$$C(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{W^o(z)}{1 - W^o(z)}$$

- Elementi fondamentali della tecnica di sintesi diretta
 - Realizzabilità del controllore: $E(W^o) \geq E(P)$
 - Stabilità interna sistema di controllo (singolarità distinte)

$$\begin{array}{ll} W^o(p) = 1 & \text{per ogni polo } p \text{ di } P(z) \text{ tale che } |p| \geq 1 \\ W^o(q) = 0 & \text{per ogni zero } q \text{ di } P(z) \text{ tale che } |q| \geq 1 \end{array}$$

- Scelta di $W^o(z)$ in modo da soddisfare alle specifiche

TECNICHE DIRETTE

- Processo continuo

$$P^*(s) = \frac{1}{s}$$

- Discretizzazione processo analogico:

$$P(z) = T \frac{1}{z - 1}$$

- Scelta della funzione di trasferimento desiderata

$$W^o(z) = \frac{1}{z}$$

- Controllore

$$C(z) = \frac{z - 1}{T} \frac{1}{z - 1} = \frac{1}{T}$$

MATLAB: CONVERSIONI SISTEMA CONTINUO-DISCRETO

`SYSD = C2D(SYSC,TS,METHOD)`

converts the continuous-time LTI model SYSC
to a discrete-time model SYSD with sample time TS.
The string METHOD selects the discretization
method among the following:

- 'zoh' Zero-order hold on the inputs.
- 'foh' Linear interpolation of inputs (triangle appx.)
- 'tustin' Bilinear (Tustin) approximation.
- 'prewarp' Tustin approximation with frequency prewarping.

The critical frequency W_c is specified as
fourth input by `C2D(SYSC,TS,'prewarp', W_c)`.

- 'matched' Matched pole-zero method (for SISO systems only).

The default is 'zoh' when METHOD is omitted.