

Capitolo 3

La carta di Smith

La carta di Smith¹ (C.d.S.) non solo risulta un valido aiuto grafico per la determinazione delle grandezze elettriche della linea ma e' soprattutto un metodo per visualizzare l'andamento di tali grandezze lungo la linea e i fenomeni loro legati. Cio' ha fatto si' che anche con l'avvento dei moderni calcolatori essa non abbia perso di significato e anzi costituisca una delle rappresentazioni grafiche piu' usate nei programmi di CAD (Computer Aided Design) a microonde.

3.1 Costruzione della carta di Smith

Si consideri una linea uniforme, priva di perdite, con impedenza caratteristica $Z_0 = R_0 \in \mathbb{R}^+$, chiusa su un generico carico passivo $Z_u = R_u + jX_u$ ($\mathcal{Re}\{Z_u\} = R_u \geq 0$). Si definisce impedenza normalizzata il rapporto adimensionale tra l'impedenza $Z(z)$ lungo la linea e l'impedenza caratteristica R_0 della linea:

$$Z_n(z) = \frac{Z(z)}{R_0}. \quad (3.1)$$

Il coefficiente di riflessione di tensione $\Gamma(z)$ puo' essere espresso in funzione dell'impedenza normalizzata come

$$\Gamma(z) = \frac{Z_n(z) - 1}{Z_n(z) + 1} \quad (3.2)$$

e considerato una funzione complessa della variabile complessa Z_n . La relazione (3.2) trasforma quindi il dominio semplicemente connesso del semipiano $\mathcal{Re}\{Z_n\} \geq 0$, del piano della variabile Z_n , nel dominio semplicemente connesso $|\Gamma(z)| \leq 1$ del piano della variabile Γ (Fig. 3.1).

¹Ideata da P. Smith del Bell Telephone Laboratories nel 1939.

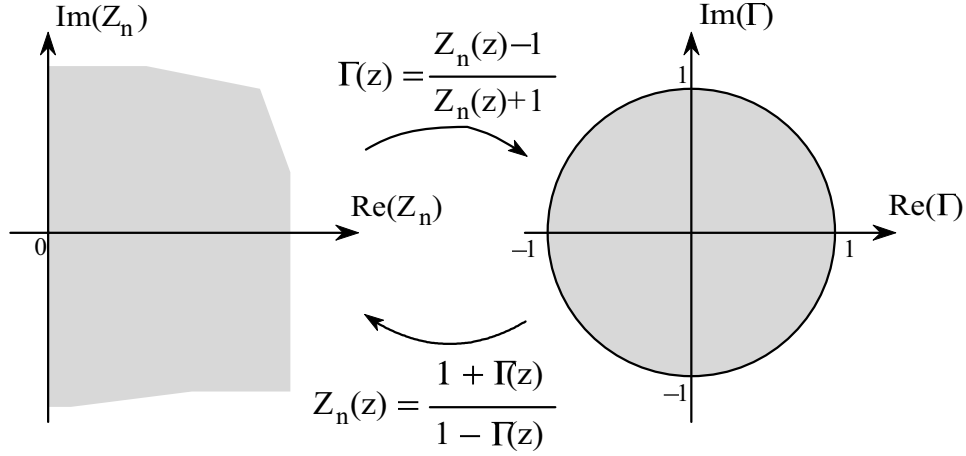


Figura 3.1: Trasformazione conforme dal piano complesso Z_n al piano Γ .

La trasformazione definisce una trasformazione conforme² di Z_n in Γ ed e' invertibile; infatti:

$$Z_n = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}. \quad (3.3)$$

Ponendo $\Gamma(z) = \gamma_r + j\gamma_x$ e $Z_n = r + jx$ l'espressione (3.3) puo' essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} r + jx &= \frac{1 + \gamma_r + j\gamma_x}{1 - \gamma_r - j\gamma_x} \\ &= \frac{(1 + \gamma_r + j\gamma_x)(1 - \gamma_r + j\gamma_x)}{(1 - \gamma_r)^2 + \gamma_x^2} = \frac{1 - \gamma_r^2 - \gamma_x^2 + j2\gamma_x}{(1 - \gamma_r)^2 + \gamma_x^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Eguagliando le parti reali dell'eq. (3.4) e' verificata la seguente relazione:

$$r = \frac{1 - \gamma_r^2 - \gamma_x^2}{(1 - \gamma_r)^2 + \gamma_x^2}, \quad (3.5)$$

o equivalentemente:

$$r(1 - \gamma_r)^2 + r\gamma_x^2 = 1 - \gamma_r^2 - \gamma_x^2, \quad (3.6)$$

²Siano ω_1, ω_2 due curve nel piano complesso (r, x) che si intersecano nel punto $P(r_0, x_0)$ e Ω_1, Ω_2 le curve trasformate nel piano complesso (γ_r, γ_x) che si intersecano nel punto $Q(\gamma_{r0}, \gamma_{x0})$. Se l'angolo formato dall'intersezione di ω_1 ed ω_2 e' uguale in ampiezza e verso a quello formato dall'intersezione delle curve Ω_1 e Ω_2 si dice che la trasformazione e' una trasformazione conforme.

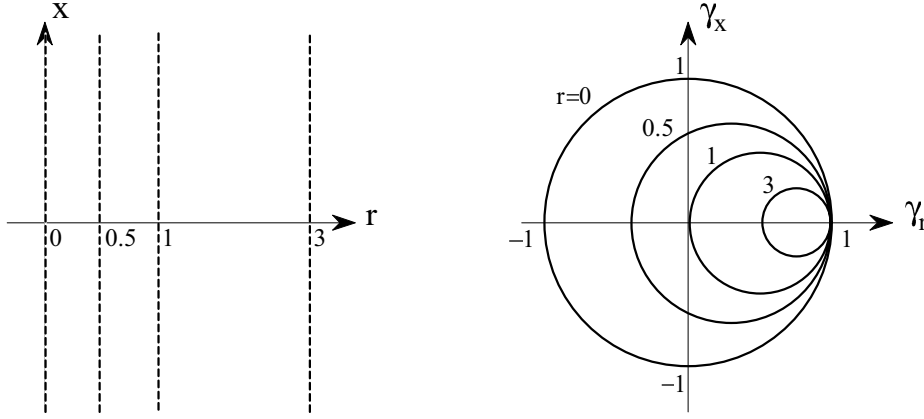


Figura 3.2: Trasformazione nel piano complesso del coefficiente di riflessione della parte reale dell'impedenza normalizzata.

$$r + r \gamma_r^2 - 2 r \gamma_r + r \gamma_x^2 = 1 - \gamma_r^2 - \gamma_x^2, \quad (3.7)$$

$$\gamma_r^2 (1 + r) + \gamma_x^2 (1 + r) - 2 r \gamma_r = 1 - r, \quad (3.8)$$

$$\gamma_r^2 + \gamma_x^2 - 2 \frac{r}{1+r} \gamma_r = \frac{1-r}{1+r}. \quad (3.9)$$

Sommando ad entrambi i membri la quantita' $(r/[1+r])^2$, l'ultima espressione risulta:

$$\left(\gamma_r - \frac{r}{1+r} \right)^2 + \gamma_x^2 = \left(\frac{1}{1+r} \right)^2, \quad (3.10)$$

che, nel piano (γ_r, γ_x) , rappresenta l'equazione di una famiglia di circonferenze con centro nel punto $(r/[1+r], 0)$ e raggio $1/[1+r]$. Cio' comporta che ogni retta parallela all'asse immaginario del piano complesso (r, x) , corrispondente ad uno specifico valore della parte reale dell'impedenza normalizzata, e' trasformata nel piano complesso (γ_r, γ_x) in una circonferenza passante per il punto $(1,0)$ con centro appartenente all'asse reale (Fig. 3.2). Se invece si eguagliano le parti immaginarie dell'eq (3.4) dovra' essere verificata la relazione:

$$x = \frac{2\gamma_x}{(1 - \gamma_r)^2 + \gamma_x^2}, \quad (3.11)$$

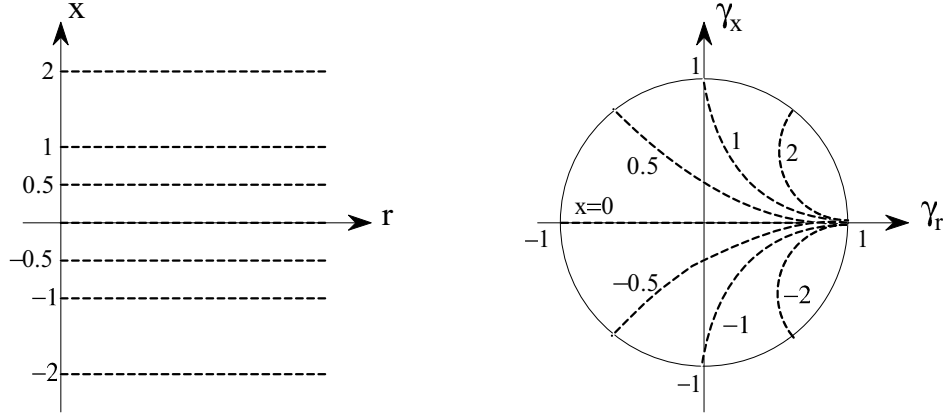


Figura 3.3: Trasformazione nel piano complesso del coefficiente di riflessione della parte immaginaria dell'impedenza normalizzata.

o equivalentemente:

$$x(1 - \gamma_r)^2 + x\gamma_x^2 = 2\gamma_x, \quad (3.12)$$

$$x + x\gamma_r^2 - 2x\gamma_r + x\gamma_x^2 = 2\gamma_x, \quad (3.13)$$

$$\gamma_r^2 + \gamma_x^2 - 2\gamma_r - \frac{2}{x}\gamma_x + 1 = 0. \quad (3.14)$$

Sommando ad entrambi i membri la quantità $(1/x^2)$ l'ultima espressione risulta:

$$\left(\gamma_r - 1\right)^2 + \left(\gamma_x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (3.15)$$

che, nel piano (γ_r, γ_x) , rappresenta l'equazione di una famiglia di circonferenze con centro nel punto $(1, 1/x)$ e raggio $1/x$. Perciò ogni retta parallela all'asse reale del piano complesso (r, x) , corrispondente ad uno specifico valore della parte immaginaria dell'impedenza normalizzata, è trasformata nel piano complesso (γ_r, γ_x) in una circonferenza, passante per il punto $(1, 0)$, con centro appartenente ad una retta passante per il punto $(1, 0)$ e parallela all'asse immaginario (Fig. 3.3). La condizione di carico passivo impone inoltre che il modulo del coefficiente di riflessione risulti minore o al più uguale all'unità, per cui le circonferenze a $x = \text{cost}$ saranno limitate dalla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Combinando insieme le due

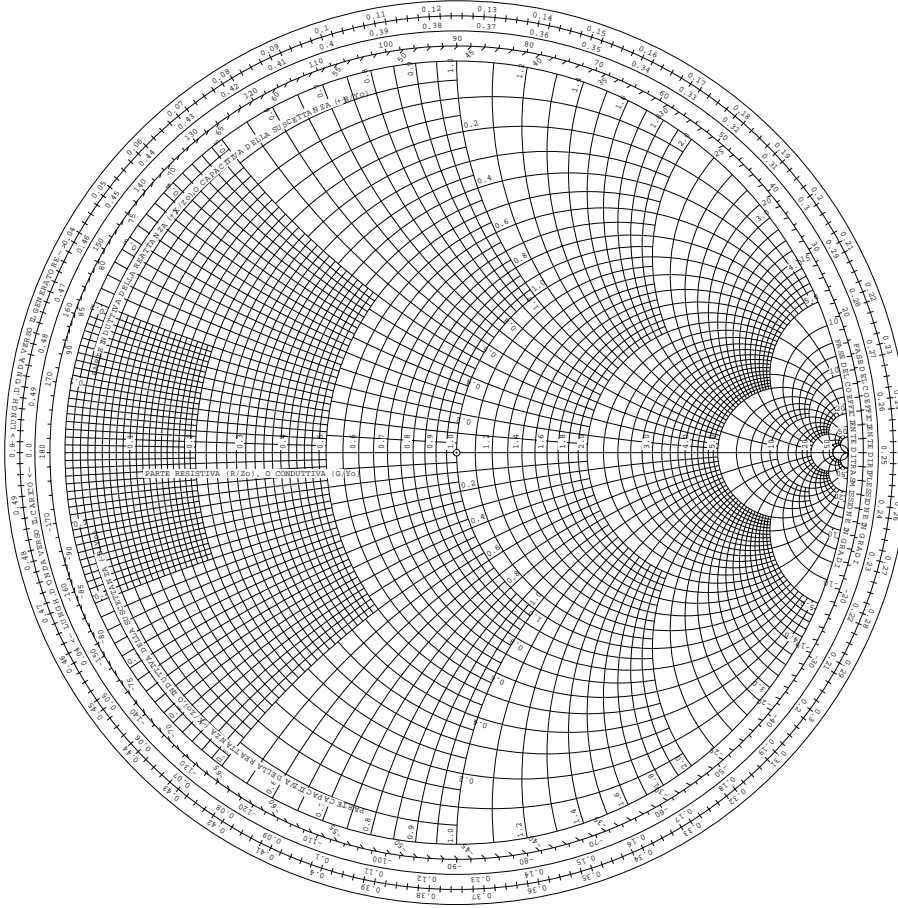


Figura 3.4: La carta di Smith.

famiglie di circonferenze si ottiene la carta di Smith (C.d.S.) che fornisce una corrispondenza biunivoca tra i valori dell'impedenza normalizzata e i valori del coefficiente di riflessione di tensione (Fig. 3.4). Per come è stata costruita la C.d.S. è evidente che l'asse γ_r corrisponde al cerchio $x = 0$, per cui tutti i punti appartenenti a tale asse rappresentano un carico puramente resistivo. Nel semispazio superiore giacciono tutte le circonferenze con $x > 0$ e in tale semispazio sono localizzati tutti i carichi che presentano una parte induttiva. Nel semispazio inferiore giacciono invece tutte le circonferenze con $x < 0$, caratteristiche di carichi che presentano una parte capacitiva.

Per quanto riguarda le circonferenze a $r = \text{cost}$ si può notare che tutti i carichi che presentano una parte resistiva maggiore dell'impedenza caratteristica della linea R_0 sono localizzati all'interno del cerchio $r = 1$ che risulta passante per l'origine del piano complesso del coefficiente di riflessione. Il

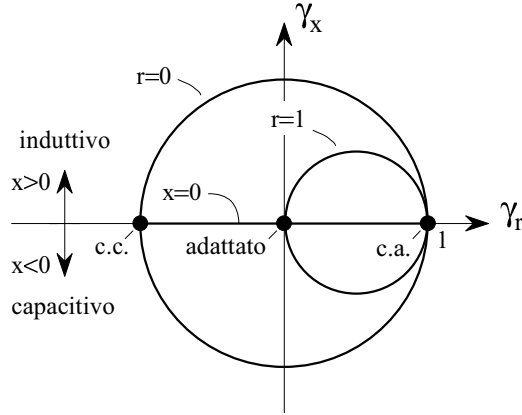


Figura 3.5: Punti caratteristici sulla carta di Smith.

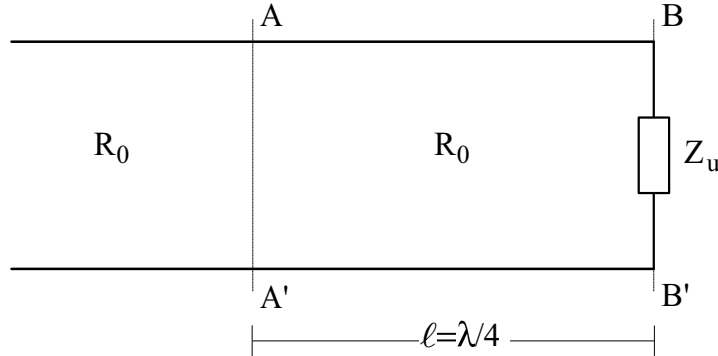


Figura 3.6: Geometria del problema relativa all'esercizio 3.1.

cerchio $r = 0$, centrato nell'origine, rappresenta invece il luogo dei punti dei carichi puramente reattivi. Sulla C.d.S. si possono anche individuare i punti caratteristici di un corto circuito ($r = 0, x = 0$), di un circuito aperto ($r = 0, x = -\infty$) e di un carico adattato ($r = 1, x = 0$), in cui cioè la linea risulta chiusa sulla propria impedenza caratteristica, così come mostrato in Fig. 3.5.

Esercizio 3.1 Per la linea descritta in Fig. 3.6, si valuti sia il coefficiente di riflessione di tensione sul carico che il valore dell'impedenza alla sezione AA' facendo uso della C.d.S.. ($R_0 = 50 \Omega$, $Z_u = 150 - j100 \Omega$).

Come primo passo sarà necessario determinare l'impedenza normalizzata

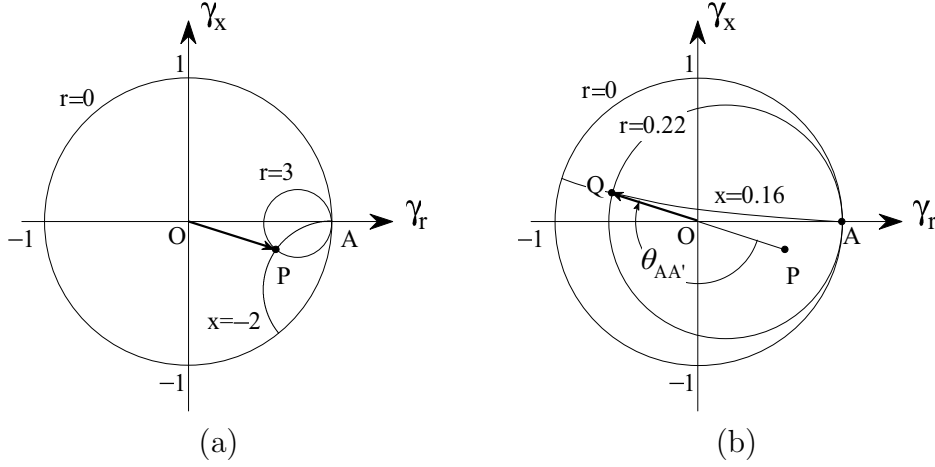


Figura 3.7: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.1.

della linea in corrispondenza del carico

$$Z_n(0) = \frac{Z_u}{R_0} = \frac{150 - j100}{50} = 3 - j2,$$

per poi individuare sulla C.d.S. il punto P , intersezione delle due circonferenze a $r = 3$ e a $x = -2$ (Fig. 3.7a). Tale punto P rappresenta anche il coefficiente di riflessione di tensione nel piano complesso (γ_r, γ_x) e quindi il segmento \overrightarrow{OP} rappresenta il modulo del coefficiente di riflessione di tensione. Tuttavia, al fine di valorizzare tale modulo, la lunghezza del segmento \overrightarrow{OP} dovrà essere rapportata a quella del segmento \overrightarrow{OA} che rappresenta il coefficiente di riflessione di tensione unitario. In particolare, per i dati del problema si ottiene

$$|\Gamma(0)| = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA}} \simeq 0.63,$$

$$\arg\{\Gamma(0)\} = \theta \simeq -0.1\pi.$$

Nel primo capitolo si è dimostrato che qualora ci si muove lungo la linea di una distanza ℓ nella direzione del generatore il vettore rappresentante il coefficiente di riflessione ruota, in senso orario, di un angolo $\theta = -2\beta\ell$. Nel problema in analisi, la sezione AA' è posta ad una distanza $\ell = 0.25\lambda$ dal carico quindi spostarsi dal carico alla sezione AA' equivale a ruotare il vettore \overrightarrow{OP} di un angolo

$$\theta_{AA'} = -2\beta\ell = -2\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0.25\lambda = -\pi.$$

Ruotando tale vettore in senso orario di un angolo $\theta_{AA'}$ si individua un punto Q simmetrico al punto P rispetto all'origine O rappresentativo del coefficiente di riflessione alla sezione AA' (Fig. 3.7b). Tale punto Q risulta l'intersezione della circonferenza a resistenza normalizzata costante $r = 0.22$ con quella a reattanza normalizzata costante $x = 0.16$. Ne deriva che nella sezione AA' l'impedenza normalizzata della linea risulta

$$Z_n(\ell) = 0.22 + j0.16 \Omega$$

e quindi, denormalizzando, l'impedenza della linea a tale sezione e'

$$Z(\ell) = Z_n(\ell)R_0 = 11 + j8 \Omega.$$

□

Dall'esercizio precedente appare evidente che spostarsi lungo una linea supposta priva di perdite per un tratto ℓ in direzione del generatore equivale a ruotare il fasore del coefficiente di riflessione in senso orario di un angolo $2\beta\ell = 4\pi\ell/\lambda$. In senso antiorario qualora ci si sposti verso il carico. Al fine di facilitare la rotazione la C.d.S. presenta quindi una scala calibrata in termini di lunghezza d'onda intorno al perimetro circolare esterno. Poichè spostarsi lungo la linea di un tratto $\ell = 0.5\lambda$ equivale a compiere un giro completo della C.d.S., comportamento che esprime la periodicità del coefficiente di riflessione e dell'impedenza normalizzata lungo la linea, la scala copre solo l'intervallo $(0, 0.5)\lambda$.

Sulla carta di Smith e' possibile leggere anche il rapporto d'onda stazionaria (ROS); infatti si era già dimostrato come $|Z(z)|_{max} = R_0(ROS)$ da cui ne deriva che

$$(ROS) = \frac{|Z(z)|_{max}}{R_0} = r_{max}, \quad (3.16)$$

cioè che il valore del rapporto d'onda stazionario coincide con il massimo valore della resistenza normalizzata della linea che si incontra muovendosi su di essa. Ora, nel caso di linea senza perdite, muoversi lungo la linea equivale a ruotare su una circonferenza centrata nell'origine avente raggio pari al modulo del coefficiente di riflessione. Il valore del (ROS) potrà essere quindi calcolato leggendo il valore della più piccola circonferenza a resistenza costante intersecante la circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante. La circonferenza cercata risulta tangente a quest'ultima e quindi facilmente individuabile sulla C.d.S.. Si noti come nella figura 3.8 il punto M di tangenza appartenga all'asse reale del piano complesso del coefficiente

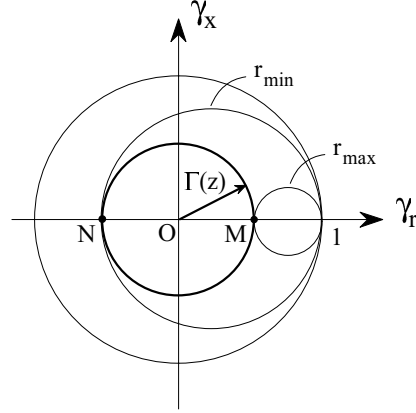


Figura 3.8: Massimo e minimo di tensione sulla carta di Smith.

di riflessione e corrisponda ad un massimo di tensione (minimo di corrente). In posizione simmetrica ad esso rispetto all'origine e' inoltre individuabile il punto N che rappresenta un minimo di tensione (massimo di corrente) e corrisponde al minimo modulo dell'impedenza normalizzata lungo la linea:

$$r_{\min} = \frac{R_0}{|Z(z)|_{\min}} = \frac{1}{(ROS)}. \quad (3.17)$$

Esercizio 3.2 Si valuti il modulo del coefficiente di riflessione ed il rapporto d'onda stazionaria per una linea priva di perdite di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ chiusa su un carico avente impedenza $Z_u = 100 + j75 \Omega$.

Si calcoli in primo luogo l'impedenza normalizzata del carico

$$Z_n(0) = \frac{Z_u}{R_0} = 2 + j1.5.$$

Cio' permette di individuare il punto P sulla C.d.S., intersezione dei cerchi a $r = 2$ e $x = 1.5$ (Fig. 3.9). La misura del segmento \overrightarrow{OP} rapportata a quella del segmento \overrightarrow{OA} fornira' il valore del modulo del coefficiente di riflessione:

$$|\Gamma(0)| = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA}} \simeq 0.53.$$

Per valutare il ROS sara' sufficiente muoversi sulla circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante fino ad intersecare l'asse reale positivo ($\gamma_r > 0$), individuando cosi' il punto M , per poi leggere il valore del cerchio a resistenza normalizzata costante passante per il punto M ($r = 3.3$). Il valore del rapporto d'onda stazionaria coincidera' con il valore di tale resistenza normalizzata, quindi: $ROS = 3.3$. □

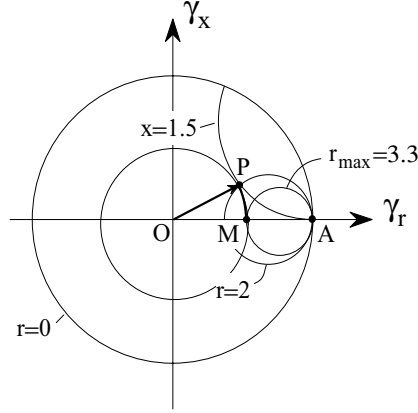


Figura 3.9: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.2.

Esercizio 3.3 *Si consideri una linea priva di perdite di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ chiusa su un carico passivo avente impedenza Z_u incognita. Tramite una serie di misure si perviene alla conoscenza che $ROS = 2$ ed il primo minimo di tensione e' localizzato ad una distanza $\ell = \lambda/10$ dal carico. Si determini il valore del carico Z_u incognito.*

La conoscenza del ROS permette di individuare sulla C.d.S. il punto M , intersezione tra il cerchio a $r = 2$ e l'asse reale γ_r , e quindi disegnare il cerchio a modulo del coefficiente di riflessione costante come quel cerchio con centro nell'origine O passante per il punto M (Fig. 3.10).

Il punto N sulla C.d.S. caratteristico della sezione in cui e' misurato il minimo di tensione dovra' quindi appartenere a tale circonferenza e risultare anche simmetrico del punto M rispetto all'origine. Tale punto N individuerà' altresì l'impedenza normalizzata che la linea presenta ad una sezione posta a $\ell = \lambda/10$ dal carico. Per valutare l'impedenza Z_u del carico sara' quindi necessario spostarsi da tale sezione sul carico, cioè ruotare, a partire dal punto N , in senso antiorario sulla circonferenza a modulo del coefficiente costante per

$$2\beta\ell = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{10} = 2\pi/5 \text{ rad}.$$

Si viene così ad individuare un punto P nel quale si intersecano le circonferenze $r = 0.68$ e $x = -0.48$. L'impedenza del carico risulterà quindi pari a:

$$Z_u = Z_n(0) R_0 = (0.68 - j0.48) \cdot 50 \simeq 34 - j24 \Omega$$

□

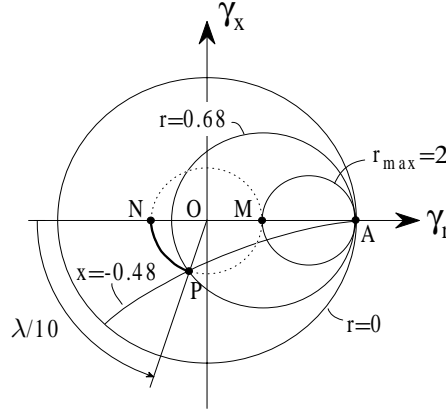


Figura 3.10: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.3.

3.2 Carta di Smith letta in termini di ammettenza

Spesso nelle applicazioni pratiche si deve studiare una linea di trasmissione cui e' posta in parallelo una altra linea di trasmissione o una impedenza concentrata. In tal caso e' sicuramente piu' conveniente lavorare in termini di ammettenza in quanto l'ammettenza equivalente dovuta al parallelo di due ammettenze e' data dalla semplice somma algebrica dei valori di tali ammettenze.

Analogamente all'impedenza normalizzata si puo' ora definire una ammettenza normalizzata

$$Y_n(z) = \frac{1}{Z_n(z)} = \frac{R_0}{Z(z)} = g + jb \quad (3.18)$$

che puo' essere espressa in funzione del coefficiente di riflessione di tensione tramite la relazione:

$$Y_n(z) = \frac{1}{Z_n(z)} = \frac{1 - \Gamma(z)}{1 + \Gamma(z)}. \quad (3.19)$$

Introducendo il coefficiente di riflessione di corrente $\Gamma_I(z) = \gamma_g + j\gamma_b$, legato a quello di tensione dalla relazione $\Gamma_I(z) = -\Gamma(z)$, l'espressione (3.19) puo' essere scritta nella forma

$$Y_n(z) = \frac{1 + \Gamma_I(z)}{1 - \Gamma_I(z)}, \quad (3.20)$$

forma che risulta uguale a quella della relazione (3.3) a meno di scambiare tra loro i simboli $Z_n \leftrightarrow Y_n$ e $\Gamma \leftrightarrow \Gamma_I$. Quindi, analogamente a quanto fatto

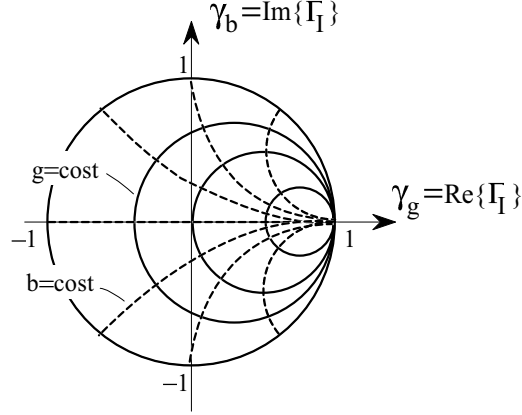


Figura 3.11: Carta di Smith letta in termini di ammettenza

per l'impedenza normalizzata ed il coefficiente di riflessione di tensione, e' possibile costruire una carta di Smith che lega l'ammettenza normalizzata al coefficiente di riflessione di corrente (Fig. 3.11). In particolare si otterranno le stesse famiglie di circonferenze: queste, invece di essere associate alla resistenza normalizzata r e alla reattanza normalizzata x , rappresentano, rispettivamente, la conduttanza normalizzata g e la suscettanza normalizzata b . Nello stesso tempo gli assi di riferimento rappresentano la parte reale ed immaginaria del coefficiente di riflessione di corrente $\Gamma_I(z) = \gamma_g + j\gamma_b$.

Esercizio 3.4 *Su una linea di trasmissione priva di perdite avente impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ si misura, a distanza $\ell = 0.2 \lambda$ dal carico, un coefficiente di riflessione di tensione pari a 0.5. Si determini l'ammettenza del carico su cui e' chiusa la linea (Fig. 3.12).*

Il coefficiente di riflessione di corrente alla sezione BB' , distante 0.2λ dal carico, risulta

$$\Gamma_I(\ell) = -\Gamma(\ell) = -0.5 = 0.5 \exp(j\pi).$$

E' quindi possibile individuare sulla C.d.S. letta in termini di ammettenza un punto B, rappresentativo del coefficiente di riflessione $\Gamma_I(\ell)$ ed appartenente all'asse reale, in cui si intersecano le circonferenze $g = 0.34$ e $b = 0$ (Fig. 3.12). Spostandosi lungo la linea dalla sezione BB' al carico, il punto B ruoterà sulla C.d.S. in senso antiorario fino a raggiungere il punto A. Tale punto individuerà le circonferenze $g = 1.7$ e $b = -1.3$ rappresentative dell'ammettenza normalizzata del carico. Ne segue che, denormalizzando rispetto all'ammettenza caratteristica della linea $G_0 = 1/R_0$, l'impedenza del

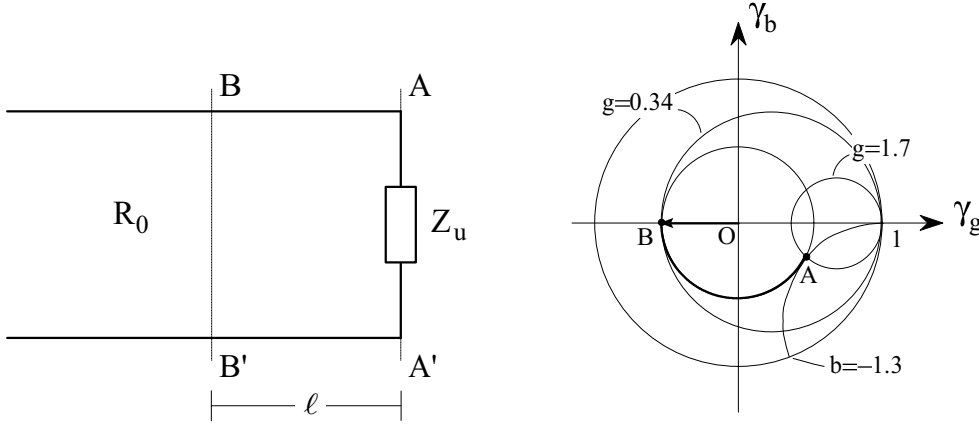


Figura 3.12: Geometria del problema e carta di Smith relative all'esercizio 3.4.

carico risulta:

$$Y_u = (g + jb)G_0 = \frac{g + jb}{R_0} = \frac{1.7 - j1.3}{50} = 0.034 - j0.026 \Omega^{-1}.$$

□

Sara' ora nostro obiettivo calcolare in modo grafico il valore dell'ammittenza normalizzata Y_n a partire dalla conoscenza dell'impedenza normalizzata Z_n . A tal fine si supponga di aver individuato sulla C.d.S, letta in termini di impedenza, un punto P caratteristico dell'impedenza normalizzata Z_n . Tale punto P individua un particolare valore del coefficiente di riflessione di tensione $\Gamma(P)$ a cui il corrispondente coefficiente di riflessione di corrente e' legato dalla relazione

$$\Gamma_I(P) = -\Gamma(P) = \Gamma(P) \exp(j\pi). \quad (3.21)$$

Quindi se si volesse rappresentare tale punto P nel piano complesso del coefficiente di riflessione di corrente questo risulterebbe ruotato di un angolo π rispetto a quello individuato nel piano complesso del coefficiente di riflessione di tensione. Cio' corrisponde ad individuare un punto P' simmetrico del punto P rispetto all'origine del piano dei fasori. Quindi ad un punto P , rappresentativo di una impedenza Z_n sulla C.d.S. letta in termini di impedenza, corrisponde, sulla C.d.S. letta in termini di ammettenza, un punto P' , simmetrico al punto P rispetto al centro della carta, rappresentativo dell'ammittenza normalizzata $Y_n = 1/Z_n$.

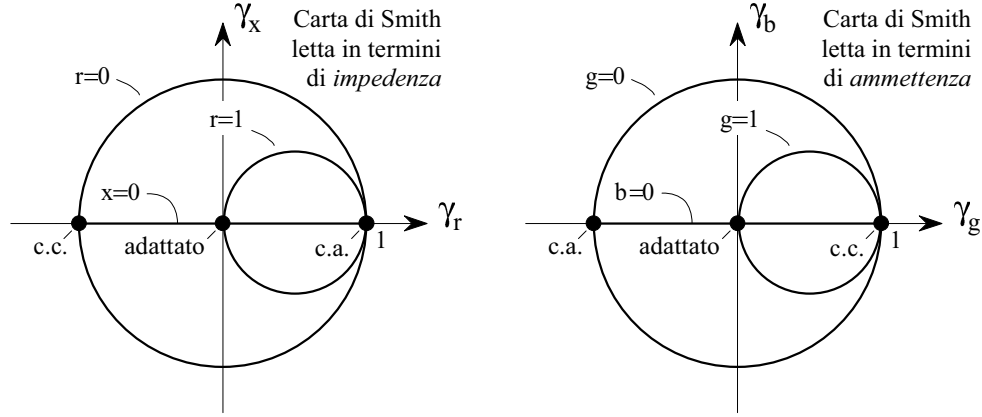


Figura 3.13: Posizione dei punti caratteristici nella carta di Smith letta in termini di impedenza (a sinistra) e in termini di ammettenza (a destra).

Si noti come sulla C.d.S. letta in termini di ammettenza il punto caratteristico di un corto circuito risulti ora coincidente con il punto $(1,0)$ del piano del coefficiente di riflessione di corrente, mentre il punto caratteristico di un circuito aperto è localizzato nel punto $(-1,0)$. Tali punti risultano cioè simmetrici rispetto all'origine degli analoghi punti già individuati sulla C.d.S. letta in termini di impedenza (Fig. 3.13). Nello stesso modo l'asse $\gamma_g > 0$ individua il luogo dei punti in cui si misura un minimo di tensione (massimo di corrente) lungo la linea, mentre l'asse $\gamma_g < 0$ il luogo dei punti in cui si ha un massimo di tensione (minimo di corrente).

Esercizio 3.5 *Si valuti l'impedenza del carico nel caso dell'esercizio precedente.*

Per valutare l'impedenza del carico è necessario individuare sulla C.d.S. il punto P simmetrico rispetto all'origine O del punto A già localizzato nell'esercizio precedente. Se si legge la C.d.S. in termini di impedenza il punto P è rappresentativo dell'impedenza normalizzata del carico, per cui per ottenere il valore dell'impedenza del carico è sufficiente individuare le due circonferenze $r = 0.37$ e $x = 0.29$ che si intersecano nel punto P e quindi denormalizzare rispetto all'impedenza caratteristica R_0 della linea:

$$Z_u = (r + jx)R_0 = (0.37 + j0.29)50 = 18.5 + j14.5 \Omega.$$

□

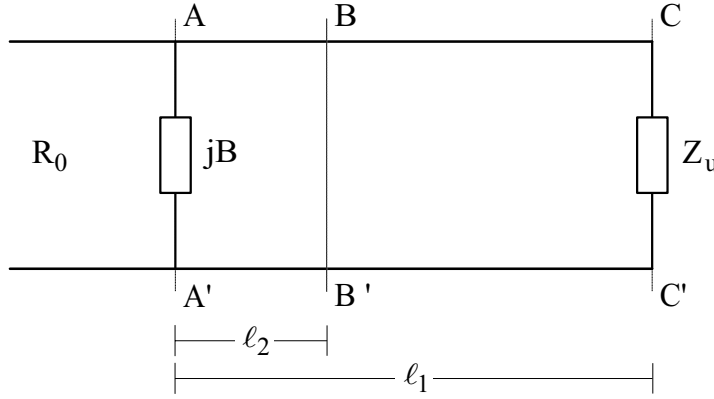


Figura 3.14: Geometria del problema relativa all'esercizio 3.6.

Esercizio 3.6 *Nel circuito schematizzato in Fig. 3.14, in cui la linea di trasmissione è costituita da un cavo coassiale privo di perdite, non è presente alcuna onda riflessa a sinistra della sezione AA' per una frequenza di lavoro pari a $f = 100 \text{ MHz}$. Spostandosi dalla sezione AA' verso il carico si misura un minimo di tensione alla sezione BB'. In tali ipotesi si determini sia il valore della costante dielettrica relativa ε_r del cavo che il valore del carico incognito. ($\ell_1 = 55 \text{ cm}$, $\ell_2 = 16.2 \text{ cm}$, $B = -0.01 \Omega^{-1}$, $R_0 = 100 \Omega$).*

Poiché a sinistra della sezione AA' non è presente alcuna onda riflessa, a tale sezione il circuito presenta una ammettenza equivalente uguale all'ammettenza caratteristica della linea, cioè $Y_{AA'} = G_0 = 1/R_0$. L'ammettenza $Y_{AA'}$ è data dal parallelo tra la suscettanza B e l'ammettenza equivalente Y_s , relativa allo spezzone di linea di lunghezza ℓ_1 chiuso sul carico Z_u . Considerando le relative ammettenze normalizzate dovrà quindi risultare

$$Y_{AA'_n} = \frac{Y_{AA'}}{G_0} = 1 = jB_n + Y_{s_n},$$

dove $B_n = B/G_0 = -0.01 \cdot 100 = -1$ e $Y_{s_n} = Y_s/G_0$. Dalla precedente relazione segue che

$$Y_{s_n} = 1 - jB_n = 1 + j,$$

per cui il tratto di linea di lunghezza ℓ_1 , chiuso sul carico Z_u incognito, è rappresentato sulla C.d.S letta in termini di ammettenza dal punto A intersezione delle curve $g = 1$, $b = 1$ (Fig. 3.15a). Spostarsi lungo la linea dalla sezione AA' alla sezione BB', in cui si incontra un minimo di tensione, equivale a percorrere in senso antiorario la circonferenza a modulo del

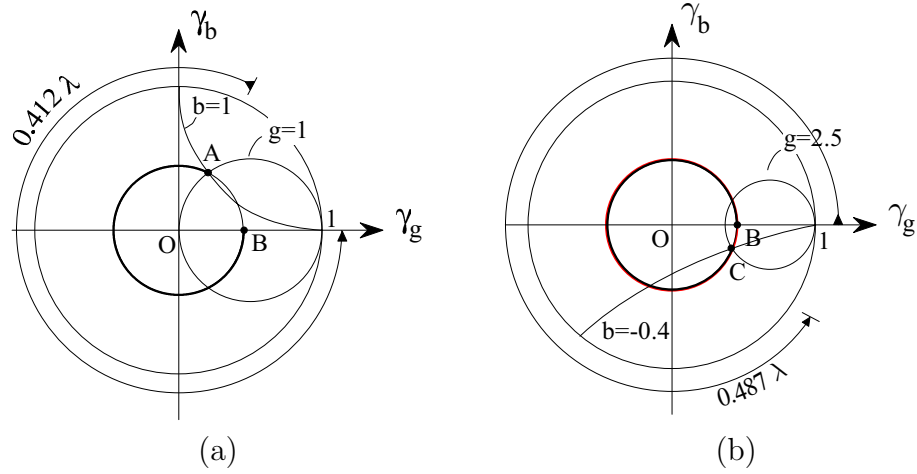


Figura 3.15: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.6.

coefficiente di riflessione costante passante per il punto A fino ad intersecare l'asse reale positivo $\gamma_g > 0$ del coefficiente di riflessione di corrente; i punti di tale asse infatti sono rappresentativi dei minimi di tensione lungo la linea. Si individua così sulla C.d.S. il punto B . Nello spostarsi dal punto A al punto B si percorre la C.d.S. per una distanza $\ell_2 = 0.412\lambda$ da cui

$$\lambda = \frac{\ell_2}{0.412} = \frac{0.162}{0.412} \simeq 0.393 \text{ m}.$$

Supponendo che nel cavo coassiale si propaghi un modo TEM e che il materiale che separa i conduttori sia un materiale dielettrico, la velocità di fase risulta $v_f = c/\sqrt{\epsilon_r}$, per cui

$$\epsilon_r = \frac{c^2}{v_f^2} = \frac{c^2}{\lambda^2 f^2} \simeq \left[\frac{300 \cdot 10^6}{0.393 \cdot 100 \cdot 10^6} \right]^2 \simeq 58.3.$$

Per determinare l'impedenza del carico Z_u e' sufficiente ruotare sulla C.d.S. in senso antiorario di $([\ell_1 - \ell_2]/\lambda)\lambda = ([0.55 - 0.162]/0.393)\lambda \simeq 0.987\lambda$, a partire dal punto B . Cio' equivale a percorrere un giro completo della C.d.S. (pari a 0.5λ) piu' un tratto pari a 0.487λ ed individuare il punto C in cui si intersecano le circonferenze $g = 2.5$, $b = -0.4$ (Fig. 3.15b). Poiche' pero' siamo interessati a calcolare l'impedenza del carico e' conveniente individuare il punto C' simmetrico del punto C rispetto all'origine e leggere la C.d.S. in termini di impedenza (Fig. 3.16). Nel punto C' si intersecano le circonferenze a $r = 0.39$ e $x = 0.06$ per cui:

$$Z_u = (r + jx)R_0 = (0.39 + j0.06) \cdot 100 = 39 + j6 \Omega.$$

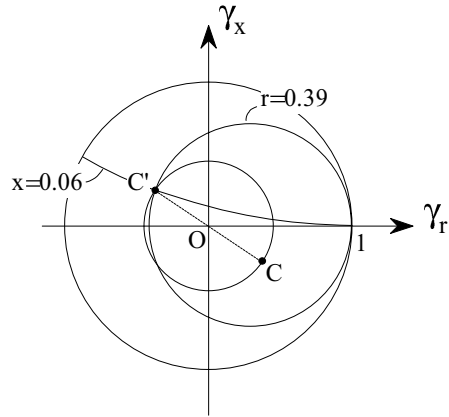


Figura 3.16: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.6.

□

