

Linee di trasmissione: teoria, esercizi e dintorni

Appunti delle lezioni di Campi Elettromagnetici

A.A. 2001/2002

A. Freni

La presente dispensa rispecchia parte delle lezioni con cui ho annoiato i numerosi studenti che hanno seguito il corso di Campi Elettromagnetici da me tenuto nell'A.A. 2001/2002 presso la Facolta' di Ingegneria dell'Universita' degli Studi di Firenze. Essa e' stata scritta con la sola intenzione di fornire allo studente un aiuto per la preparazione dell'esame e quindi non ha la pretesa di essere un testo completo e rigoroso. Si suggerisce percio' al lettore di approfondire gli argomenti sui testi qui di seguito elencati che costituiscono anche la bibliografia della dispensa:

R. E. Collin, *Foundation for microwave engineering*, McGraw-Hill, London, 1966.

R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, IEEE Press, New York, 1991.

J. D. Kraus, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, London, 1984.

G. Franceschetti, *Campi elettromagnetici*, Boringhieri, Torino, 1988.

G. Franceschetti, *Lezioni di campi elettromagnetici e circuiti*, L. & D. Pironi, Napoli, 1976.

D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1990.

N. N. Rao, *Elements of engineering electromagnetics*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2000.

Si esprime inoltre un particolare ringraziamento alla Sig.ina Mayazzurra Ruggiano per l'attenta e competente opera di revisione eseguita a tempo di record.

Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte del presente libro puo' essere riprodotta sotto ogni forma e con qualsiasi mezzo senza permesso scritto dell'autore. ISBN 0-13-013201-2

Indice

1	Linee di Trasmissione	5
1.1	Propagazione in una linea di trasmissione	6
1.2	Analisi di una linea di trasmissione chiusa su un generico carico	16
1.3	Potenza in una linea di trasmissione	19
1.4	Comportamento di una linea per particolari valori del carico .	21
1.4.1	Linea chiusa sulla propria impedenza caratteristica . .	21
1.4.2	Linea chiusa in corto circuito	24
1.4.3	Linea aperta	28
1.4.4	Linea chiusa su un carico reattivo	33
1.4.5	Linea chiusa su un generico carico Z_u	33
1.5	Rapporto d'onda stazionaria	36
2	Linee con perdite	43
2.1	Valutazione della conduttanza e della resistenza per unita' di lunghezza di una linea	43
2.2	Linee con piccole perdite	46
2.3	Linea con piccole perdite chiusa su un generico carico	50
3	La carta di Smith	55
3.1	Costruzione della carta di Smith	55
3.2	Carta di Smith letta in termini di ammettenza	65
4	Il problema dell'adattamento	73
4.1	Adattamento tramite trasformatore in quarto d'onda	77
4.2	Considerazioni sull'uso di un trasformatore in quarto d'onda	81
4.3	Analisi di un trasformatore in quarto d'onda tramite riflessioni multiple	82
4.4	Adattamento tramite stub parallelo	85
4.5	Adattamento tramite doppio stub	95

5	Applicazioni della teoria delle linee di trasmissione	99
5.1	Analogia onda piana/linea di trasmissione	99
5.2	Analogia onda piana/linea di trasmissione: incidenza ortogonale	100
5.3	Analogia onda piana/linea di trasmissione: incidenza obliqua .	104
5.3.1	Polarizzazione perpendicolare (caso TE_z)	105
5.3.2	Polarizzazione parallela (caso TM_z)	110
5.4	Il problema di N linee in cascata	113
5.5	Teoria delle piccole riflessioni	116

Capitolo 1

Linee di Trasmissione

Si consideri una struttura costituita da due o più superfici cilindriche indefinite realizzate mediante un buon conduttore e si supponga che tali conduttori siano immersi in un mezzo omogeneo ed isotropo.

Sia $\Sigma(x, y, z)$ un sistema di coordinate cartesiano con asse z parallelo alle generatrici delle superfici cilindriche (Fig. 1.1). In tale tipo di struttura, che generalmente prende il nome di linea di trasmissione, si può avere, in funzione della frequenza di lavoro, la propagazione di un campo elettromagnetico secondo più configurazioni o modi. Tra questi, il modo trasverso elettromagnetico (TEM), per cui le componenti di campo longitudinale risultano assenti ($E_z = H_z = 0$), risulta certamente il principale. Infatti per tale configurazione si ha la propagazione di tutte le componenti di frequenza del segnale ed è possibile determinare univocamente tensione e corrente lungo i due o più conduttori.

In seguito, se non espressamente specificato, considereremo sempre che nella linea si propaghi il solo modo TEM.

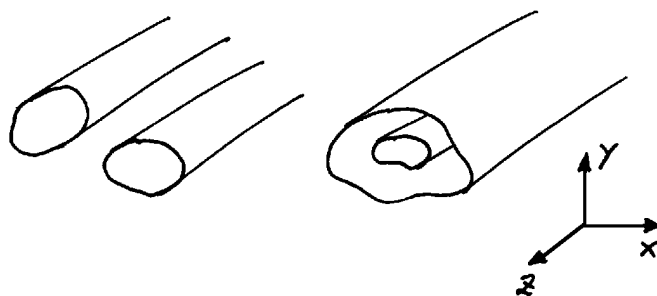


Figura 1.1: Esempi di linea di trasmissione.

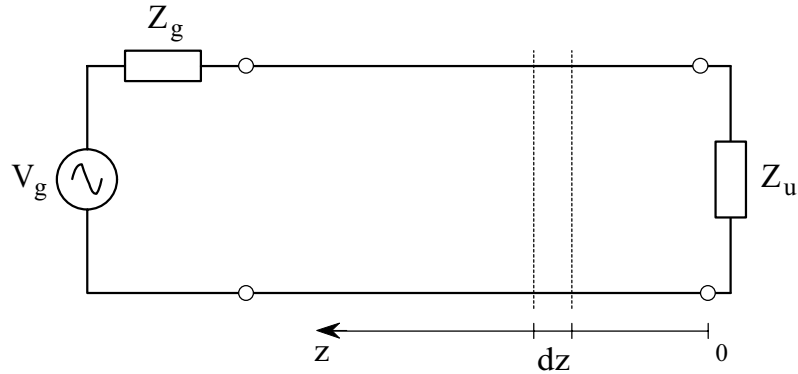


Figura 1.2: Schematizzazione di una linea di trasmissione chiusa su un carico Z_u e alimentata da un generatore avente impedenza interna Z_g .

Le equazioni cui obbediscono tensione e corrente lungo la linea possono essere ricavate in modo rigoroso risolvendo le equazioni di Maxwell soggette a specifiche condizioni al contorno per la particolare struttura in esame. Tuttavia esse possono essere anche ricavate mediante un semplice approccio di tipo circuitale: approccio che cronologicamente ha costituito il primo metodo per lo studio delle linee di trasmissione.

1.1 Propagazione in una linea di trasmissione

Si consideri la generica linea descritta in Fig. 1.2 chiusa su un carico di impedenza Z_u ed alimentata da un generatore di tensione V_g di impedenza interna Z_g . Si prenda ora in esame un tratto di linea dz molto corto, in modo tale da poter applicare le normali tecniche dei circuiti a costanti concentrate. In tal caso il tratto di linea dz può essere schematizzato come rappresentato in Fig. 1.3, dove le quantità C , L , R , G sono chiamate costanti primarie della linea e sono rispettivamente:

- C —capacità per unità di lunghezza $[F/m]$ (tiene conto dei fenomeni capacitivi tra i due conduttori);
- L —coefficiente di autoinduzione $[H/m]$ (tiene conto dei fenomeni di autoinduzione dei conduttori);
- R —resistenza per unità di lunghezza $[\Omega/m]$ (tiene conto delle perdite ohmiche nei conduttori);

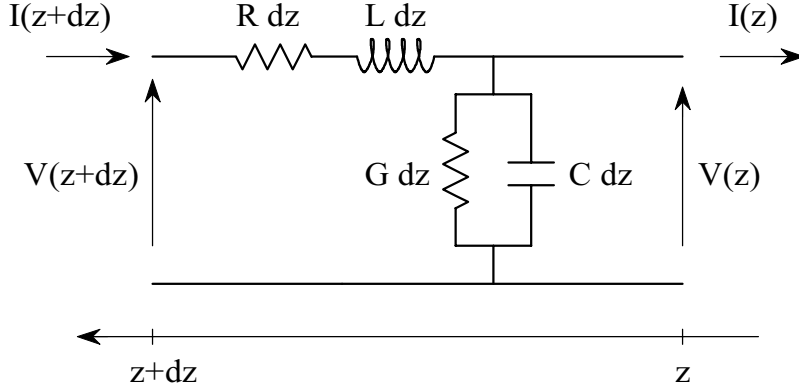


Figura 1.3: Circuito equivalente di un tratto dz infinitesimo di linea.

- G —conduttanza per unita' di lunghezza $[\Omega^{-1}/m]$ (tiene conto delle perdite dovute all'isteresi ed alla conducibilita' residua nel mezzo in cui sono immersi i conduttori cosi' come delle eventuali perdite per radiazione della linea).

Se le costanti primarie risultano costanti lungo la linea, questa e' detta uniforme. Nello specifico caso, verranno in seguito analizzate solo linee uniformi.

Analizzando il circuito equivalente di un tratto infinitesimo di linea nel dominio della frequenza, si puo' scrivere:

$$V(z) = V(z + dz) - I(z + dz) (R + j\omega L) dz, \quad (1.1)$$

$$I(z) = I(z + dz) - V(z) (G + j\omega C) dz, \quad (1.2)$$

da cui, per $dz \rightarrow 0$,

$$\frac{V(z + dz) - V(z)}{dz} = \frac{dV(z)}{dz} = (R + j\omega L) I(z + dz), \quad (1.3)$$

$$\frac{I(z + dz) - I(z)}{dz} = \frac{dI(z)}{dz} = (G + j\omega C) V(z). \quad (1.4)$$

Definendo $L_{eq} = L - jR/\omega$, $C_{eq} = C - jG/\omega$ si ottiene

$$\frac{dV(z)}{dz} = j\omega L_{eq} I(z + dz), \quad (1.5)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = j\omega C_{eq} V(z). \quad (1.6)$$

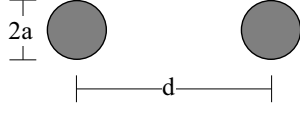
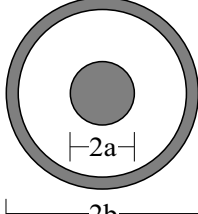
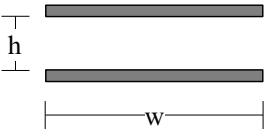
		
$L = \frac{\mu_0}{\pi \operatorname{arccosh}(d/2a)}$	$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$	$L \simeq \frac{\mu_0 h}{w}, w \gg h$
$C = \pi \varepsilon_1 \operatorname{arccosh}(d/2a)$	$C = \frac{2\pi \varepsilon_1}{\ln(b/a)}$	$C \simeq \frac{\varepsilon_1 w}{h}, w \gg h$
$R = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi \sigma}}$	$R = \frac{a+b}{2ab} \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi \sigma}}$	$R = \frac{2}{w} \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi \sigma}}$
$G \simeq 2\pi f C \tan \gamma$	$G \simeq 2\pi f C \tan \gamma$	$G \simeq 2\pi f C \tan \gamma$
dove: $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2, \tan \gamma = \frac{\varepsilon_2 + \sigma/\omega}{\varepsilon_1}$		

Tabella 1.1: Costanti primarie per alcune linee di trasmissione di uso comune.

Potendo esprimere

$$I(z + dz) = I(z) + \frac{dI(z)}{dz} dz, \quad (1.7)$$

la prima equazione puo' essere riscritta nella forma

$$\frac{dV(z)}{dz} = j\omega L_{eq} I(z) + j\omega L_{eq} \frac{dI(z)}{dz} dz. \quad (1.8)$$

Avendo supposto la linea uniforme, non potranno essere presenti su di essa brusche variazioni della corrente, per cui la derivata della corrente assumerà valori finiti ed il secondo termine a secondo membro risulterà trascurabile rispetto al primo. Pertanto le equazioni differenziali che descriveranno l'andamento di tensione e corrente lungo la linea risulteranno le seguenti:

$$\frac{dV(z)}{dz} = j\omega L_{eq} I(z), \quad (1.9)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = j\omega C_{eq} V(z). \quad (1.10)$$

Derivando quindi la prima equazione differenziale rispetto alla variabile z e facendo uso della seconda, si perviene ad una equazione differenziale in cui

compare la sola tensione

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} + \omega^2 L_{eq} C_{eq} V(z) = 0. \quad (1.11)$$

Analogamente, derivando la seconda equazione differenziale rispetto alla variabile z , tramite la prima, si perviene ad una equazione differenziale in cui compare la sola corrente

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} + \omega^2 L_{eq} C_{eq} I(z) = 0. \quad (1.12)$$

E' conveniente definire *costante di propagazione* k la quantita' $k^2 = \omega^2 L_{eq} C_{eq}$, per cui le due equazioni differenziali appena scritte assumono la forma

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} + k^2 V(z) = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} + k^2 I(z) = 0. \quad (1.14)$$

Tali equazioni differenziali risultano del secondo ordine, lineari, omogenee, a coefficienti costanti, inoltre sono formalmente uguali ed hanno soluzioni generali:

$$V(z) = V_+ \exp(jkz) + V_- \exp(-jkz), \quad (1.15)$$

$$I(z) = I_+ \exp(jkz) + I_- \exp(-jkz), \quad (1.16)$$

dove le costanti complesse V_+ , V_- , I_+ , I_- dovranno essere determinate in base alle condizioni al contorno (una volta cioe' specificato il carico ed il generatore).

Si noti come la costante di propagazione sia in generale una quantita' complessa

$$k = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}} = \beta - j\alpha \in \mathbb{C}, \quad (1.17)$$

dove $\beta > 0$ e' detta *costante di fase* mentre $\alpha \geq 0$ *costante di attenuazione*.

Nel caso in cui non siano presenti perdite, cioe' $R = G = 0$, la costante di propagazione risulta puramente reale e pari alla costante di fase

$$k = \omega \sqrt{LC} = \beta \in \mathbb{R}^+. \quad (1.18)$$

A questo punto e' utile esaminare le soluzioni generali della propagazione lungo la linea ed in particolare quella dell'andamento della tensione:

$$V(z) = V_+ \exp(jkz) + V_- \exp(-jkz). \quad (1.19)$$

Sara' nostro compito dimostrare che il termine $V_+ \exp(jkz)$ rappresenta una onda di tensione che si propaga dal generatore verso il carico (onda diretta) mentre il termine $V_- \exp(-jkz)$ rappresenta un'onda che si propaga dal carico verso il generatore (onda riflessa).

Per verificare cio' e' comunque necessario esaminare l'andamento della tensione nel dominio del tempo: si consideri quindi la sola onda diretta e si operi la trasformata inversa di Fourier

$$\begin{aligned} v_+(z, t) &= \mathcal{F}^{-1} [V_+(\omega) \exp[jk(\omega)z]] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_+(\omega) \exp[jk(\omega)z] \exp(j\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Poiche' la tensione sulla linea $v_+(z, t)$ e' una quantita' reale, per ogni ascissa z , dovra' essere verificata la condizione:

$$V_+(-\omega) \exp[jk(-\omega)z] = \left(V_+(\omega) \exp[jk(\omega)z] \right)^*, \quad (1.21)$$

dove l'operatore $*$ indica il complesso coniugato. Essendo il segnale in ingresso alla linea reale, lo spettro dell'ampiezza dell'onda diretta godra' della seguente proprieta'

$$V_+(-\omega) = V_+^*(\omega), \quad (1.22)$$

per cui la precedente condizione equivale a richiedere

$$k(\omega) = -k^*(\omega), \quad (1.23)$$

od equivalentemente, in termini di costante di fase e di attenuazione,

$$\beta(-\omega) = -\beta(\omega), \quad \alpha(-\omega) = \alpha(\omega). \quad (1.24)$$

Si supponga che il mezzo sia non dispersivo, cioe' che $\chi = \beta/\omega$ risulti una costante rispetto alla pulsazione ω , ed inoltre che anche la costante di attenuazione α risulti costante rispetto alla pulsazione ω .

In tali ipotesi,

$$v_+(z, t) = \exp(\alpha z) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_+(\omega) \exp(j\omega\chi z) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (1.25)$$

da cui, ricordando la proprieta' di traslazione temporale della trasformata di Fourier, per cui

$$\mathcal{F}^{-1} [G(\omega) \exp(j\omega\tau)] = g(t + \tau) \quad (1.26)$$

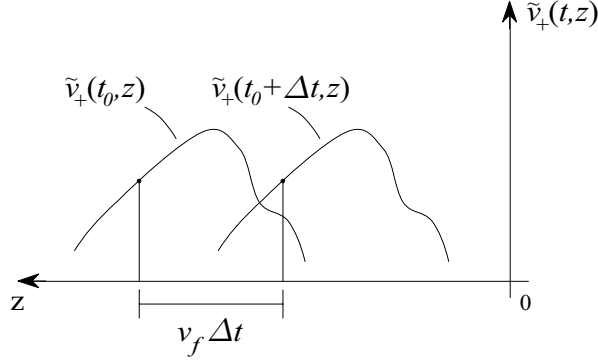


Figura 1.4: Andamento lungo la linea dell'onda di tensione per due istanti successivi ($\alpha = 0$).

dove $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$, si avra':

$$v_+(z, t) = \mathcal{F}^{-1}[V_+(\omega) \exp(j\omega\chi z)] \exp(\alpha z) = \tilde{v}_+(t + \chi z) \exp(\alpha z), \quad (1.27)$$

dove $\tilde{v}_+(t) = \mathcal{F}^{-1}[V_+(\omega)]$.

Si noti che esistono valori temporali e spaziali in cui la funzione $\tilde{v}_+(x)$ assume sempre lo stesso valore. Infatti, incrementando opportunamente i valori della coordinata z e del tempo t , rispettivamente di Δz e Δt , si potra' avere

$$\tilde{v}_+(t + \chi z) = \tilde{v}_+(t + \Delta t + \chi[z + \Delta z]). \quad (1.28)$$

Cio' si verifichera' qualora gli argomenti della funzione $\tilde{v}_+(\cdot)$ risultano uguali, cioe' quando

$$t + \chi z = t + \Delta t + \chi z + \chi \Delta z, \quad (1.29)$$

e quindi

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = -\frac{1}{\chi} = -\frac{\omega}{\beta} = -v_f. \quad (1.30)$$

La quantita' $v_f = \frac{\omega}{\beta}$ ha dimensioni di una velocita' ed e' definita *velocita' di fase*. Nel caso in cui non sia presente alcuna perdita ($\alpha = 0$) tale velocita' di fase risulta quella con cui l'onda diretta di tensione trasla dal generatore verso il carico (verso negativo della coordinata z) come mostrato in Fig. 1.4.

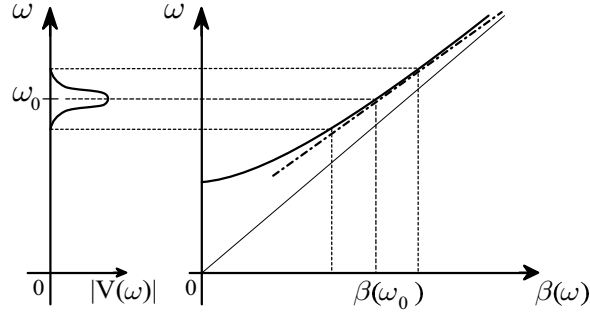


Figura 1.5: Diagramma di Brilluin.

Analogamente per l'onda riflessa

$$v_-(z, t) = \mathcal{F}^{-1} [V_-(\omega) \exp(j\omega z/v_f)] \exp(\alpha z) = \tilde{v}_-(t - z/v_f) \exp(-\alpha z), \quad (1.31)$$

per cui l'onda riflessa traslerà sempre con velocità v_f ma dal carico verso il generatore (verso positivo della coordinata z).

Nel caso in cui siano invece presenti delle perdite ($\alpha \neq 0$) l'onda diretta e/o riflessa trasleranno ancora con velocità v_f ma nel loro propagarsi si attenueranno esponenzialmente essendo ora presente il termine $\exp(\pm\alpha z)$.

Consideriamo il caso in cui il mezzo sia privo di perdite ($\alpha = 0$) ma dispersivo: in tal caso la costante di fase $\beta(\omega)$ risulterà una funzione non lineare della pulsazione ω (Fig. 1.5). Nella maggior parte delle applicazioni il suo andamento in funzione della pulsazione ω è tuttavia generalmente linearizzabile nella banda di frequenza in cui l'ampiezza del segnale è ancora apprezzabile.

Sia $V(\omega) = V_s(\omega) + V_d(\omega)$ lo spettro del segnale reale $\tilde{v}(t)$ in ingresso alla linea, dove

$$V_s(\omega) = V(\omega)U(-\omega), \quad V_d(\omega) = V(\omega)U(\omega), \quad (1.32)$$

con $U(\omega)$ funzione gradino unitario di Heaviside ($U(\omega) = 0$ per $\omega < 0$, $U(\omega) = 1$ per $\omega \geq 0$), e gli spettri destro $V_d(\omega)$ e sinistro $V_s(\omega)$ siano centrati rispettivamente su ω_0 e $-\omega_0$ (Fig. 1.6).

Si consideri il caso in cui sia presente la sola onda diretta, cioè $V_+(\omega) = V(\omega)$, e se ne operi la trasformata inversa di Fourier. Poiché il segnale

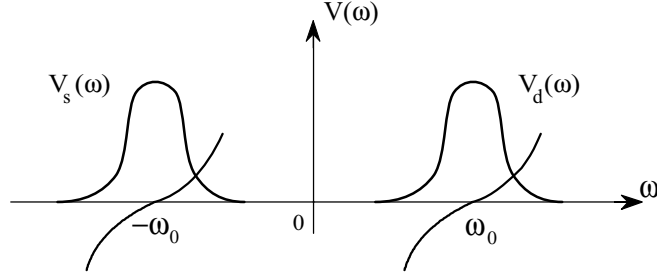


Figura 1.6: Spettro del segnale all'ingresso della linea.

applicato alla linea e' una funzione reale esso sara' rappresentabile come

$$\begin{aligned} v_+(z, t) &= \mathcal{F}^{-1} [V_+(\omega) \exp(j\beta z)] = \mathcal{F}^{-1} [V(\omega) \exp(j\beta z)] = \\ &= 2\mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [V(\omega) \exp(j\beta z)] \exp(j\omega t) d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

A questo punto si sviluppi in serie di potenze la costante di fase $\beta(\omega)$ nell'intorno della frequenza centrale ω_0

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + O(\omega - \omega_0)^2, \quad (1.34)$$

dove

$$\beta'(\omega_0) = \left. \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad \beta''(\omega_0) = \left. \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (1.35)$$

Nell'ipotesi precedentemente introdotta, in cui l'andamento della costante di fase $\beta(\omega)$ risulta pressoché lineare nella banda di frequenza nella quale $|V_d(\omega)| > 0$, e' possibile trascurare, nello sviluppo, i termini superiori al primo ordine. In tal caso si avra':

$$\begin{aligned} v_+(z, t) &\simeq \\ &2\mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} V_d(\omega) \exp[j\beta(\omega_0)z] \exp[j\beta'(\omega_0)z(\omega - \omega_0)] \exp[j\omega t] d\omega \right\}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

e, moltiplicando e dividendo l'integrando per la quantita' $\exp(j\omega_0 t)$, risultera'

$$\begin{aligned} v_+(z, t) &= 2\mathcal{R}e \left\{ \exp \left[j \left(\beta(\omega_0)z + \omega_0 t \right) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} V_d(\omega) \exp \left[j \left(\omega - \omega_0 \right) \left(\beta'(\omega_0)z + t \right) \right] d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Lo spettro complesso $V_d(\omega)$ e' non nullo solo nell'intervallo $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$, per cui, operando il cambiamento di variabile $x = \omega - \omega_0$:

$$v_+(z, t) = 2\mathcal{R}e \left\{ \exp \left[j \left(\beta(\omega_0)z + \omega_0 t \right) \right] \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} V_d(x + \omega_0) \exp \left[jx \left(\beta'(\omega_0)z + t \right) \right] dx \right\} = \quad (1.38)$$

$$= 2\mathcal{R}e \left\{ \exp \left[j \left(\beta(\omega_0)z + \omega_0 t \right) \right] \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_d(x + \omega_0) \exp \left[jx \left(\beta'(\omega_0)z + t \right) \right] dx \right\} = \quad (1.39)$$

$$= 2\mathcal{R}e \left\{ \exp \left[j \left(\beta(\omega_0)z + \omega_0 t \right) \right] \mathcal{F}^{-1} [V_d(\omega + \omega_0) \exp [j\omega \beta'(\omega_0)z]] \right\}. \quad (1.40)$$

L'integrale che appare nella precedente espressione risulta quindi l'antitrasformata della parte destra dello spettro del segnale traslato in banda base, valutata in $\beta'(\omega_0)z + t$.

Si consideri adesso, per semplicita', il caso in cui il segnale applicato alla linea sia l'esito di una modulazione di ampiezza (o comunque di una modulazione che porta ad un segnale simmetrico rispetto a ω_0). Per tale tipo di segnale l'antitrasformata che appare nella precedente espressione risultera' reale

$$\mathcal{F}^{-1} [V_d(\omega + \omega_0) \exp [j\omega \beta'(\omega_0)z]] = \frac{1}{2} \tilde{v}_+ \left(\beta'(\omega_0)z + t \right) \in \mathbb{R}, \quad (1.41)$$

per cui

$$v_+(z, t) = \cos \left(\beta(\omega_0)z + \omega_0 t \right) \tilde{v}_+ \left(\beta'(\omega_0)z + t \right). \quad (1.42)$$

Si noti ora come l'onda di tensione sia data dal prodotto di un'onda sinusoidale avente pulsazione ω_0 che trasla, nel verso delle z negative, con velocita' pari alla velocita' di fase $v_f = \omega_0/\beta_0$ calcolata nel centro banda e un'onda che si propaga ancora lungo il verso delle z negative ma con una velocita', che definiremo *velocita' di gruppo* v_g , pari a

$$v_g = [\beta'(\omega_0)]^{-1} = \left[\frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right]^{-1} = \frac{d\omega(\beta)}{d\beta} \Big|_{\beta=\beta_0}. \quad (1.43)$$

Tale velocita' di gruppo esprime quindi la velocita' con cui si propaga l'involuppo del segnale. Nel caso di dispersione normale ($dv_f/d\omega < 0$) tale

velocita' di gruppo rappresenta anche la velocita' di trasferimento dell'energia, per cui risultera' sempre minore od uguale alla velocita' della luce nel vuoto ¹.

Si noti come la velocita' di fase v_f calcolata nel centro banda possa risultare, per mezzi dispersivi con dispersione normale, maggiore della velocita' della luce. Questo non e' in contrasto con i principi della teoria della relativita', dato che la velocita' di fase v_f non e' la velocita' con cui si spostano masse ed energie, ma e' una entita' puramente geometrica.

Solo nel caso in cui un mezzo sia non dispersivo la velocita' di trasferimento dell'energia coincide con la velocita' di gruppo e con quella di fase e quindi quest'ultima dovra' risultare minore o uguale alla velocita' della luce nel vuoto.

Nel caso in cui non si possano trascurare i termini di ordine superiore nello sviluppo della costante di fase $\beta(\omega)$ (cio' accade per tempi di propagazione troppo lunghi o per andamenti della costante di fase non linearizzabili rapportati alla banda del segnale utilizzato), l'involuppo del segnale ad alta frequenza si deformerà ed in particolare tenderà ad allargarsi ed a ridursi in ampiezza (dispersersi).

Per esprimere le ampiezze dell'onda di corrente I_+ e I_- in funzione delle ampiezze dell'onda di tensione V_+ e V_- , derivando rispetto alla variabile z l'espressione della tensione lungo la linea

$$\frac{dV(z)}{dz} = jkV_+ \exp(jkz) - jkV_- \exp(-jkz) \quad (1.44)$$

e facendo uso dell'equazione (1.9) si ottiene

$$I(z) = \frac{k}{\omega L_{eq}} [V_+ \exp(jkz) - V_- \exp(-jkz)] . \quad (1.45)$$

Definendo *impedenza caratteristica* della linea la quantita'

$$Z_0 = \frac{\omega L_{eq}}{k} = \frac{\omega L_{eq}}{\omega \sqrt{C_{eq} L_{eq}}} = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} \in \mathbb{C} , \quad (1.46)$$

e' possibile rappresentare la corrente lungo la linea nel seguente modo:

$$I(z) = \frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) - \frac{V_-}{Z_0} \exp(-jkz) , \quad (1.47)$$

¹Nel caso di dispersione anomala ($dv_f/d\omega > 0$), ad esempio per la dispersione introdotta dalla conduttività del mezzo, generalmente tale asserzione non e' valida.

da cui, confrontando quest'ultima relazione con l'eq. (1.16), e' immediato esprimere le ampiezze dell'onda di corrente in funzione di quelle dell'onda di tensione:

$$I_+ = \frac{V_+}{Z_0}, \quad I_- = -\frac{V_-}{Z_0}. \quad (1.48)$$

L'espressione generale della tensione e della corrente lungo la linea assume quindi la forma:

$$V(z) = V_+ \exp(jkz) + V_- \exp(-jkz), \quad (1.49)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) - \frac{V_-}{Z_0} \exp(-jkz). \quad (1.50)$$

Nel caso di assenza di perdite ($R = G = 0$) l'impedenza caratteristica della linea risultera' puramente reale

$$Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \in \mathbb{R}^+. \quad (1.51)$$

Tuttavia, anche in presenza di perdite ($R \neq 0, G \neq 0$), si puo' verificare il caso in cui l'impedenza caratteristica della linea risulta reale. Infatti se e' soddisfatta la condizione di Heaviside², ovvero

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{G}{\omega C}, \quad (1.52)$$

e' facile verificare che la parte immaginaria dell'impedenza caratteristica della linea risulta nulla:

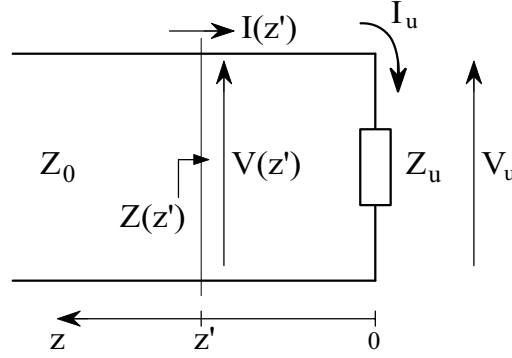
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{L - jR/\omega}{C - jG/\omega}} = \sqrt{\frac{(LC + RG/\omega^2)}{C^2 + G^2/\omega^2} - j \frac{(CR/\omega - LG/\omega)}{C^2 + G^2/\omega^2}}. \quad (1.53)$$

Si noti comunque che, in tal caso, anche se l'impedenza caratteristica della linea risulta puramente reale, a causa della presenza delle perdite, l'onda si attenuera' nel suo propagarsi.

1.2 Analisi di una linea di trasmissione chiusa su un generico carico

Si prenda ora in esame una linea di impedenza caratteristica Z_0 chiusa su un generico carico Z_u e si indichi con V_u ed I_u , rispettivamente, il valore della tensione e della corrente sul carico (Fig. 1.7):

²Oliver Heaviside 1850–1925

Figura 1.7: Linea chiusa sul generico carico Z_u .

$$V_u = V(0) = V_+ \exp(jkz) + V_- \exp(-jkz) \Big|_{z=0} = V_+ + V_- , \quad (1.54)$$

$$I_u = I(0) = \frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) - \frac{V_-}{Z_0} \exp(-jkz) \Big|_{z=0} = \frac{V_+ - V_-}{Z_0} . \quad (1.55)$$

Esprimendo tali relazioni in termini delle ampiezze V_+ e V_- si ha

$$V_+ = \frac{1}{2} (V_u + Z_0 I_u) , \quad (1.56)$$

$$V_- = \frac{1}{2} (V_u - Z_0 I_u) . \quad (1.57)$$

Cio' permette di esprimere la tensione e la corrente ad una qualsiasi distanza z dal carico in funzione della tensione V_u e della corrente I_u sul carico. Infatti:

$$\begin{aligned} V(z) &= V_+ \exp(jkz) + V_- \exp(-jkz) = \\ &= V_u \left\{ \frac{\exp(jkz) + \exp(-jkz)}{2} \right\} + jZ_0 I_u \left\{ \frac{\exp(jkz) - \exp(-jkz)}{2j} \right\} , \end{aligned} \quad (1.58)$$

per cui

$$V(z) = V_u \cos(kz) + jZ_0 I_u \sin(kz) , \quad (1.59)$$

ed analogamente

$$I(z) = I_u \cos(kz) + j \frac{V_u}{Z_0} \sin(kz) . \quad (1.60)$$

E' uso comune definire questa forma della soluzione *soluzione di tipo stazionario* mentre la forma (1.49)–(1.49) *soluzione di tipo viaggiante*. E' poi

conveniente definire una impedenza *locale* $Z(z)$ che la linea, chiusa su un carico Z_u , presenta all'ascissa z come il rapporto tra la tensione e la corrente a tale ascissa z , quindi:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_u \cos(kz) + jZ_0 I_u \sin(kz)}{I_u \cos(kz) + j\frac{V_u}{Z_0} \sin(kz)}. \quad (1.61)$$

La suddetta espressione può essere convenientemente riscritta tenendo conto che $Z_u = V_u/I_u$:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_u + jZ_0 \tan(kz)}{Z_0 + jZ_u \tan(kz)}. \quad (1.62)$$

Quest'ultima equazione esprime il fatto che l'impedenza della linea, oltre ad essere funzione dell'impedenza caratteristica della linea, è funzione del valore dell'impedenza del carico su cui è chiusa e varia al variare della distanza z dal carico stesso. Fa eccezione il caso in cui la linea è chiusa sulla propria impedenza caratteristica (cioè $Z_u = Z_0$) per cui $Z(z) = Z_0$ lungo tutta la linea. In tal caso si può notare che non è presente l'onda riflessa, infatti:

$$V_- = \frac{1}{2} \{V_u - Z_0 I_u\} = \frac{1}{2} I_u \{Z_u - Z_0\}|_{Z_u=Z_0} = 0. \quad (1.63)$$

Nel caso generale sarà comunque presente un'onda riflessa e l'impedenza della linea oscillerà, in modulo, tra un minimo ed un massimo.

Al fine di caratterizzare quanta parte di onda viene riflessa, è utile introdurre una quantità chiamata *coefficiente di riflessione di tensione*, definita come il rapporto tra l'onda riflessa e l'onda diretta di tensione:

$$\Gamma(z) = \frac{V_- \exp(-jkz)}{V_+ \exp(jkz)} = \frac{V_-}{V_+} \exp(-j2kz). \quad (1.64)$$

Si noti come sul carico tale coefficiente di riflessione risulti

$$\Gamma(0) = \frac{V_-}{V_+}, \quad (1.65)$$

per cui il coefficiente di riflessione di tensione lungo la linea può essere riscritto nella forma

$$\Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(-j2kz). \quad (1.66)$$

Analogamente, si definisce anche un *coefficiente di riflessione di corrente* come il rapporto tra l'onda riflessa e l'onda diretta di corrente:

$$\Gamma_I(z) = \frac{I_- \exp(-jkz)}{I_+ \exp(jkz)} = \frac{-V_- \exp(-jkz)}{V_+ \exp(jkz)} = -\Gamma(z). \quad (1.67)$$

Tramite il coefficiente di riflessione di tensione (o analogamente di corrente) e' possibile rappresentare convenientemente tensione, corrente ed impedenza lungo la linea:

$$V(z) = V_+ \exp(jkz) \left\{ 1 + \frac{V_- \exp(-jkz)}{V_+ \exp(jkz)} \right\} = V_+ \exp(jkz) \{ 1 + \Gamma(z) \}, \quad (1.68)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) \left\{ 1 - \frac{V_- \exp(-jkz)}{V_+ \exp(jkz)} \right\} = \frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) \{ 1 - \Gamma(z) \}, \quad (1.69)$$

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_+ \exp(jkz) \{ 1 + \Gamma(z) \}}{\frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) \{ 1 - \Gamma(z) \}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}. \quad (1.70)$$

Dalla relazione (1.70) e' evidente come l'impedenza lungo la linea puo' essere posta in funzione della sola impedenza caratteristica e del coefficiente di riflessione di tensione. Inoltre, essendo tale relazione invertibile, si ottiene:

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}. \quad (1.71)$$

In particolare per $z = 0$

$$\Gamma(0) = \frac{Z_u - Z_0}{Z_u + Z_0}, \quad (1.72)$$

per cui

$$\Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(-j2kz) = \left\{ \frac{Z_u - Z_0}{Z_u + Z_0} \right\} \exp(-j2kz). \quad (1.73)$$

Cio' esprime il fatto che, assegnate le costanti secondarie della linea e nota l'impedenza del carico, e' possibile determinare il valore del coefficiente di riflessione di tensione lungo tutta la linea. Tale conoscenza permette altresì di valutare, tramite l'espressione (1.70), il valore di impedenza che la linea presenta a una generica ascissa z .

1.3 Potenza in una linea di trasmissione

La potenza complessa fluente attraverso una generica sezione trasversa,

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z), \quad (1.74)$$

puo' essere espressa, tramite le equazioni (1.68) e (1.69), in funzione del coefficiente di riflessione di tensione:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \left(V_+ \exp(jkz) \{1 + \Gamma(z)\} \right) \left(\frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) \{1 - \Gamma(z)\} \right)^* = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2 \exp(-2\mathcal{I}m\{k\}z)}{Z_0^*} \{ [1 - |\Gamma(z)|^2] + [\Gamma(z) - \Gamma^*(z)] \} . \end{aligned} \quad (1.75)$$

Si noti come il primo termine tra parentesi quadre risulta reale mentre il secondo puramente immaginario. Pertanto, nel caso in cui la linea sia priva di perdite ($R = G = 0 \Rightarrow Z_0 = R_0 \in \mathbb{R}$), il termine

$$\frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma(z)|^2] \quad (1.76)$$

rappresenta la potenza attiva che fluisce attraverso una generica sezione trasversa, mentre il termine

$$\frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} [\Gamma(z) - \Gamma^*(z)] \quad (1.77)$$

la potenza reattiva.

Si noti che in assenza di perdite la costante di propagazione e' puramente reale ($k = \beta \in \mathbb{R}^+$) per cui il modulo del coefficiente di riflessione risulta costante lungo tutta la linea cosi' come la potenza attiva che transita attraverso una generica sezione. Ne consegue che, in questo caso, la potenza attiva fluente attraverso una qualsiasi sezione trasversa della linea e' anche la potenza che si dissipa sul carico su cui la linea e' chiusa.

Supponiamo adesso di aver chiuso la linea sulla propria impedenza caratteristica: in tal caso, non essendo presente onda riflessa, il coefficiente di riflessione e' nullo e la potenza attiva fluente risultera'

$$P_{inc} = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} [1] . \quad (1.78)$$

Tale potenza e' legata alla sola onda diretta e rappresenta la potenza attiva incidente su una generica sezione trasversa.

Consideriamo ora il caso in cui la linea venga chiusa su un generico carico Z_u per cui $|\Gamma(z)| \neq 0$: la potenza attiva fluente attraverso una generica sezione trasversa sara'

$$P_a = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} [1] - \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} |\Gamma(z)|^2 = P_{inc} - P_{rif} . \quad (1.79)$$

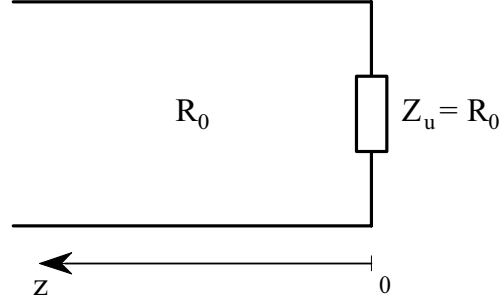


Figura 1.8: Schematizzazione di una linea chiusa sulla propria impedenza caratteristica.

Quindi il secondo termine a secondo membro rappresenta la potenza attiva riflessa dal carico. Il segno meno sta ad indicare che essa fluisce nel verso contrario a quello in cui fluisce la potenza incidente.

A meno che non esistano generatori a destra della sezione trasversa considerata, in una linea senza perdite la potenza attiva riflessa dovra' risultare sempre minore o al piu' uguale a quella incidente sulla sezione stessa. Dovra' essere quindi sempre verificata la condizione:

$$|\Gamma(z)|^2 \leq 1. \quad (1.80)$$

1.4 Comportamento di una linea per particolari valori del carico

In seguito si supporra', se non altrimenti esplicitamente espresso, che le linee prese in esame siano prive di perdite ($R = G = 0$) per cui

$$k = \beta \in \mathbb{R}^+, \quad Z_0 = R_0 \in \mathbb{R}^+. \quad (1.81)$$

1.4.1 Linea chiusa sulla propria impedenza caratteristica

La linea e' ritenuta chiusa sulla propria impedenza caratteristica, cioe' su un carico $Z_u = R_0$ (Fig. 1.8). Da cio' consegue che

$$V_+ = \frac{1}{2}(V_u + R_0 I_u) = \frac{1}{2}V_u \left(1 + R_0/Z_u\right) \Big|_{Z_u=R_0} = V_u, \quad (1.82)$$

$$V_- = \frac{1}{2}(V_u - R_0 I_u) = \frac{1}{2}V_u \left(1 - R_0/Z_u\right) \Big|_{Z_u=R_0} = 0, \quad (1.83)$$

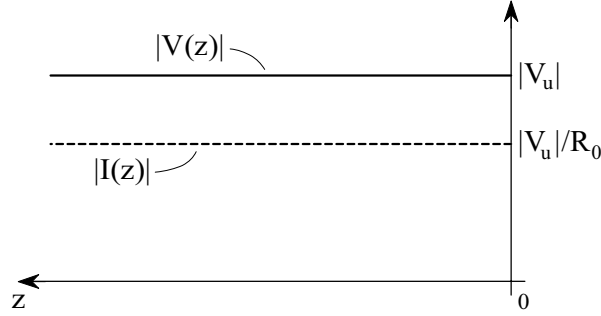


Figura 1.9: Andamento del modulo della tensione e della corrente lungo una linea chiusa sulla propria impedenza caratteristica.

$$\Gamma(0) = \frac{V_-}{V_+} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) = 0, \quad (1.84)$$

$$V(z) = V_u \exp(j\beta z) = |V_u| \exp(j\phi_u) \exp(j\beta z), \quad (1.85)$$

$$I(z) = \frac{V_u}{R_0} \exp(j\beta z) = \frac{|V_u|}{R_0} \exp(j\phi_u) \exp(j\beta z), \quad (1.86)$$

$$Z(z) = R_0. \quad (1.87)$$

Dalle precedenti espressioni e' evidente che per tale configurazione

- manca l'onda riflessa sia di tensione che di corrente;
- il modulo di $V(z)$, cosi' come quello di $I(z)$, e' costante lungo la linea (Fig. 1.9);
- tensione e corrente in ogni punto della linea sono in fase;
- la fase $\Phi(z) = \phi_u + \beta z$ della tensione $V(z)$ cosi' come quella della corrente $I(z)$, cresce linearmente all'aumentare della distanza del punto di osservazione dal carico (Fig. 1.10);
- l'impedenza della linea $Z(z)$ e' pari all'impedenza caratteristica R_0 della linea in ogni punto della linea (Fig. 1.11).

Si vuole ora analizzare il comportamento reale delle quantita' elettriche al variare del tempo t . Supponendo il segnale isofrequenziale

$$v(z, t) = \text{Re} \{ V(z) \exp(j\omega t) \} = |V_u| \cos(\omega t + \beta z + \phi_u), \quad (1.88)$$

$$i(z, t) = \text{Re} \{ I(z) \exp(j\omega t) \} = \frac{|V_u|}{R_0} \cos(\omega t + \beta z + \phi_u). \quad (1.89)$$

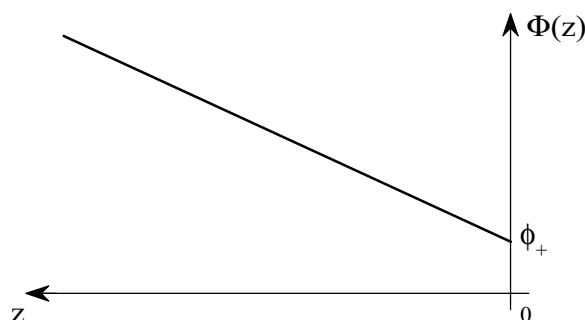


Figura 1.10: Andamento della fase della tensione e della corrente lungo una linea chiusa sulla propria impedenza caratteristica.

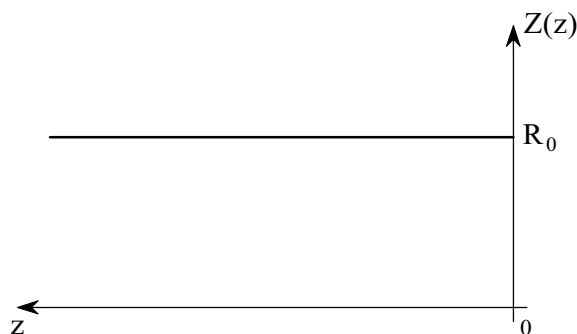


Figura 1.11: Andamento dell'impedenza lungo una linea chiusa sulla propria impedenza caratteristica.

Quindi, allo specifico istante di tempo t_0 , la distribuzione lungo la linea della tensione e/o della corrente risulta cosinusoidale con ampiezza indipendente dall'istante considerato, così come mostrato in Fig. 1.12 (linea continua). Se si considera l'andamento della distribuzione ad un istante di tempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ (linea tratteggiata) questa risulta traslata verso il carico di una lunghezza $\Delta z = v_f \Delta t$ dove con $v_f = \omega/\beta$ si è indicata la velocità di fase dell'onda. In tal caso si parla di onda progressiva di tensione e/o di corrente.

Si noti che la velocità con la quale si sposta l'energia è in realtà pari alla velocità di gruppo v_g che, nello specifico caso considerato di linee prive di perdite e non dispersive (induttanza e capacità per unità di lunghezza della linea indipendenti dalla frequenza), coincide con la velocità di fase.

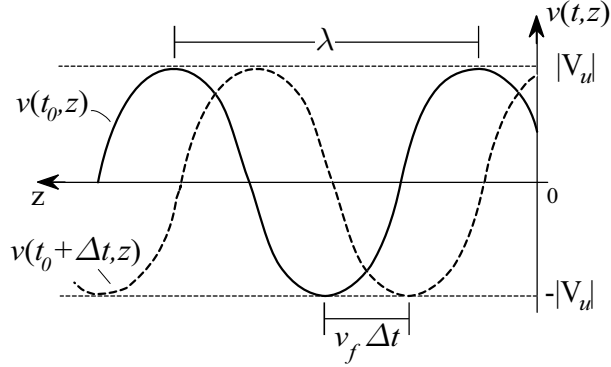


Figura 1.12: Andamento della tensione lungo la linea al generico istante t_0 e $t_0 + \Delta t$.

Ad uno specifico istante di tempo $t = t_0$ l'andamento della tensione al variare della coordinata z ,

$$v(z, t_0) = |V_u| \cos(\omega t_0 + \phi_u + \beta z), \quad (1.90)$$

si evidenzia che la funzione coseno è una funzione periodica di periodo 2π , per cui, la linea presenterà uno stesso valore di tensione ad ogni ascissa

$$z = n \frac{2\pi}{\beta} + z_0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad \forall z_0. \quad (1.91)$$

Comportamento analogo si avrà anche per le altre quantità elettriche.

Definendo lunghezza d'onda della linea il periodo

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \quad (1.92)$$

deriva che la velocità di fase si esprime anche:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{2\pi f \lambda}{2\pi} = f \lambda. \quad (1.93)$$

1.4.2 Linea chiusa in corto circuito

Si definisce corto circuito un carico ai capi del quale la tensione risulta nulla ($V_u = 0$) (Fig. 1.13). Da ciò consegue che

$$V_+ = \frac{1}{2} (V_u + R_0 I_u) \Big|_{V_u=0} = +\frac{1}{2} I_u R_0, \quad (1.94)$$

$$V_- = \frac{1}{2} (V_u - R_0 I_u) \Big|_{V_u=0} = -\frac{1}{2} I_u R_0, \quad (1.95)$$

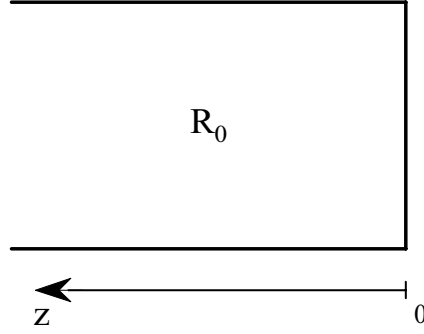


Figura 1.13: Schematizzazione di una linea in corto circuito.

$$\Rightarrow V_+ = -V_- , \quad (1.96)$$

$$\Gamma(0) = \frac{V_-}{V_+} = -1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) = -\exp(-j2\beta z) , \quad (1.97)$$

$$V(z) = V_+ \left(\exp(j\beta z) - \exp(-j\beta z) \right) = 2jV_+ \sin(\beta z) = jI_u R_0 \sin(\beta z) , \quad (1.98)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{R_0} \left(\exp(j\beta z) + \exp(-j\beta z) \right) = 2 \frac{V_+}{R_0} \cos(\beta z) = I_u \cos(\beta z) , \quad (1.99)$$

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{jI_u R_0 \sin(\beta z)}{I_u \cos(\beta z)} = jR_0 \tan(\beta z) = jX(z) . \quad (1.100)$$

Per quanto riguarda l'impedenza del carico risulta

$$Z_u = \lim_{z \rightarrow 0^+} Z(z) = \lim_{z \rightarrow 0^+} jR_0 \tan(\beta z) = 0 . \quad (1.101)$$

Dalle precedenti espressioni e' evidente che per tale configurazione

- l'onda riflessa di tensione ha la stessa ampiezza di quella diretta a meno del segno;
- il modulo della tensione $V(z)$ ha un andamento proporzionale al modulo di un seno, si annulla per $z = n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ed e' massimo per $z = \lambda(1 + 2n)/4$ (Fig. 1.14);

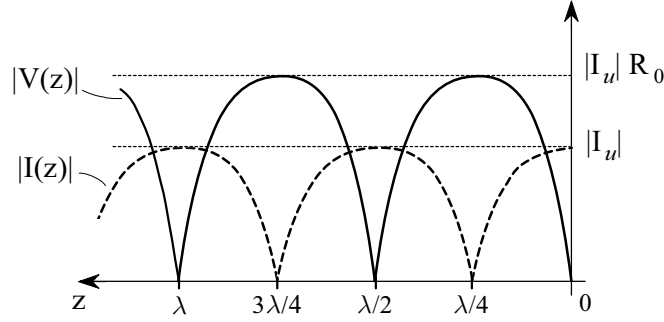


Figura 1.14: Andamento del modulo della tensione e della corrente lungo una linea chiusa in corto circuito.

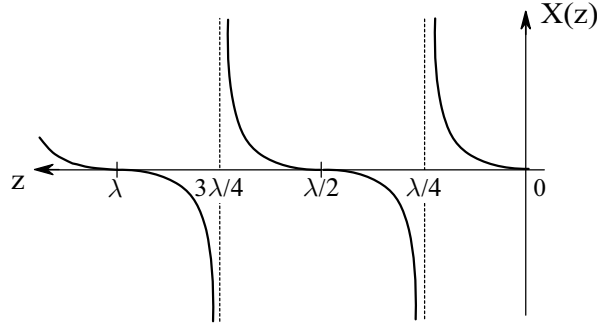


Figura 1.15: Andamento della reattanza in una linea chiusa in corto circuito.

- il modulo della corrente $I(z)$ ha un andamento proporzionale al modulo di un coseno, si annulla per $z = \lambda(1+2n)/4$ ed è massimo per $z = n\lambda/2$ (Fig. 1.14);
- tensione e corrente in ogni punto della linea risultano sfasate di $\pm\pi/2$ per cui in una linea chiusa in corto circuito non si potrà misurare alcuna potenza attiva ma solo potenza reattiva;
- l'impedenza della linea $Z(z)$, per linee prive di perdite, è puramente reattiva; tale impedenza risulta induttiva per $z \in (n\lambda/2, \lambda/4+n\lambda/2)$, capacitiva per $z \in (\lambda/4+n\lambda/2, \lambda/2 + n\lambda/2)$ e può assumere tutti i valori compresi tra $-j\infty$ e $+j\infty$ (Fig. 1.15).

Il fatto che un tal tipo di linea, al variare della sua lunghezza, possa realizzare un qualsiasi valore reattivo fa sì che essa possa essere impiegata per realizzare in modo distribuito una qualsiasi reattanza. Si noti tuttavia

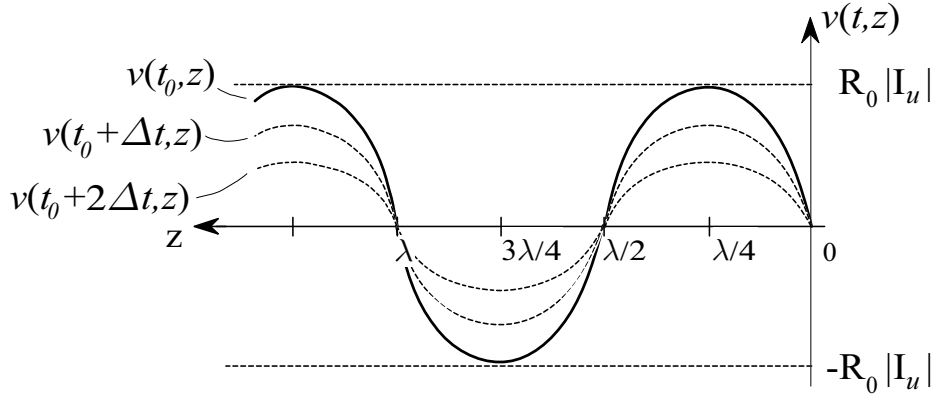


Figura 1.16: Andamento della tensione al variare del tempo in una linea chiusa in corto circuito.

che, anche se cio' e' teoricamente possibile, nella realizzazione pratica le inevitabili tolleranze di costruzione non permettono di realizzare valori di reattanza in modulo elevati. Infatti cio' equivalrebbe a lavorare nell'intorno di $z = \lambda/4 + n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) in cui l'andamento della funzione tangente risulta molto ripido e quindi un piccolo errore nella lunghezza della linea comporta un grande errore nella realizzazione dell'induttanza desiderata.

Si vuole analizzare, anche per questa configurazione, il comportamento delle quantita' elettriche al variare del tempo t , supponendo il segnale isofrequenziale e $I_u = |I_u| \exp(j\phi_u)$

$$v(z, t) = \text{Re} \{ V(z) \exp(j\omega t) \} = -R_0 |I_u| \sin(\beta z) \sin(\omega t + \phi_u), \quad (1.102)$$

$$i(z, t) = \text{Re} \{ I(z) \exp(j\omega t) \} = |I_u| \cos(\beta z) \cos(\omega t + \phi_u), \quad (1.103)$$

Quindi, ad ogni specifico istante di tempo, la distribuzione lungo la linea della tensione e/o della corrente risulta il prodotto di due funzioni cosinusoidali, una funzione dello spazio e l'altra del tempo. Entrambe le distribuzioni non traslano al variare del tempo ma pulsano mantenendo i valori massimi e quelli nulli sempre negli stessi punti della linea (Fig. 1.16). In tal caso si parla di configurazione stazionaria della tensione e/o della corrente.

Esercizio 1.1 *Si confronti l'andamento della tensione in una linea in aria, lunga 20 cm e chiusa in corto circuito, nel caso in cui si lavori ad una frequenza $f_1 = 50 \text{ Hz}$ oppure ad una frequenza $f_2 = 300 \text{ MHz}$.*

Ove la frequenza di lavoro sia $f_1 = 50 \text{ Hz}$, poiche' i due conduttori sono supposti circondati solo da aria che con buona approssimazione presenta le stesse

costanti dielettriche e magnetiche del vuoto, la lunghezza d'onda risultera'

$$\lambda_1 = \frac{v_f}{f_1} = \frac{c}{f_1} = \frac{300 \cdot 10^6}{50} = 6000 \text{ Km}.$$

Ne deriva che spostandosi 20 cm dal corto circuito si misurerà una tensione normalizzata pari a

$$\left| \frac{V(0.2)}{V_+} \right| = \left| 2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} z\right) \right|_{z=0.2} = 4.188 \cdot 10^{-7} \simeq 0.$$

Per una frequenza di lavoro di $f_2 = 300 \text{ MHz}$ la lunghezza d'onda risultera'

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{300 \cdot 10^6}{300 \cdot 10^6} = 1 \text{ m},$$

e quindi a 20 cm dal corto circuito si misurerà una tensione normalizzata pari a

$$\left| \frac{V(0.2)}{V_+} \right| = \left| 2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} z\right) \right|_{z=0.2} = 1.9.$$

Dall'esempio si può facilmente comprendere come mai nella pratica in bassa frequenza un tratto di linea in corto circuito realizzi comunque un buon corto circuito anche se ha una lunghezza finita. Si noti infatti che per la frequenza di lavoro di 50 Hz una linea in aria chiusa in corto circuito dovrebbe essere lunga 1200 Km al fine di presentare la stessa tensione normalizzata di una analoga linea lunga solo 20 cm ma alimentata con un segnale a frequenza 300 MHz. \square

1.4.3 Linea aperta

Si definisce circuito aperto un carico su cui scorre una corrente nulla ($I_u = 0$) (Fig. 1.17). Da ciò ne consegue che

$$V_+ = \frac{1}{2} \left(V_u + R_0 I_u \right) \Big|_{I_u=0} = \frac{1}{2} V_u, \quad (1.104)$$

$$V_- = \frac{1}{2} \left(V_u - R_0 I_u \right) \Big|_{I_u=0} = \frac{1}{2} V_u, \quad (1.105)$$

$$\Rightarrow V_+ = V_-, \quad (1.106)$$

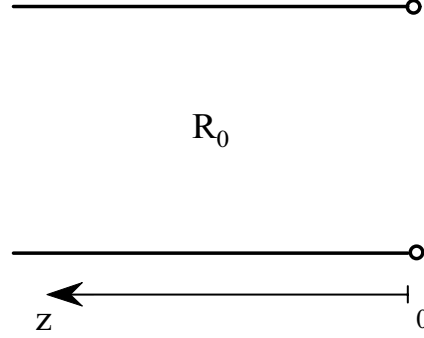


Figura 1.17: Schematizzazione di una linea in circuito aperto.

$$\Gamma(0) = \frac{V_-}{V_+} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) = \exp(-j2\beta z), \quad (1.107)$$

$$V(z) = V_+ \left(\exp(j\beta z) + \exp(-j\beta z) \right) = 2V_+ \cos(\beta z) = V_u \cos(\beta z), \quad (1.108)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{R_0} \left(\exp(j\beta z) - \exp(-j\beta z) \right) = 2j \frac{V_+}{R_0} \sin(\beta z) = j \frac{V_u}{R_0} \sin(\beta z), \quad (1.109)$$

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_u R_0 \cos(\beta z)}{j V_u \sin(\beta z)} = -j R_0 \cot(\beta z) = j X(z). \quad (1.110)$$

Per quanto riguarda l'impedenza del carico essa risulta

$$Z_u = \lim_{z \rightarrow 0^+} Z(z) = \lim_{z \rightarrow 0^+} -j R_0 \cot(\beta z) = -j\infty. \quad (1.111)$$

Dalle precedenti espressioni e' evidente che per tale configurazione:

- l'onda riflessa di tensione ha stessa ampiezza di quella diretta;
- il modulo della tensione $V(z)$ ha un andamento proporzionale al modulo di un coseno, si annulla per $z = \lambda(1+2n)/4$ ed e' massimo per $z = n\lambda/2$;
- il modulo della corrente $I(z)$ ha un andamento proporzionale al modulo di un seno, si annulla per $z = n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ed e' massimo per $z = \lambda(1+2n)/4$;
- l'impedenza della linea $Z(z)$, per linee prive di perdite, e' puramente reattiva; tale impedenza risulta inoltre capacitiva per $z \in (n\lambda/2, \lambda/4 + n\lambda/2)$, induttiva per $z \in (\lambda/4 + n\lambda/2, \lambda/2 + n\lambda/2)$ e puo' teoricamente assumere tutti i valori compresi tra $-j\infty$ e $+j\infty$;

- tensione e corrente in ogni punto della linea risultano sfasate di $\pm\pi/2$ per cui in una linea aperta non si potrà misurare alcuna potenza attiva ma solo potenza reattiva.

E' inoltre da notare che dopo aver percorso una distanza di $z = \lambda/4$ dal carico, l'andamento dell'impedenza di una linea aperta, così come delle altre quantità elettriche, risulta lo stesso di quello di una linea chiusa in corto circuito. Quindi anche per una linea aperta possono essere fatte considerazioni analoghe a quelle già espresse per una linea in corto circuito.

Esercizio 1.2 Si calcoli la lunghezza ℓ che deve avere un cavo coassiale di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$, riempito di dielettrico caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$, per rappresentare, alla frequenza $f_0 = 600 \text{ MHz}$, un condensatore di 1 pF .

Alla frequenza di lavoro f_0 il condensatore da 1 pF presenta una reattanza pari a:

$$jX = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi f_0 C} = -j \frac{1}{2\pi} \frac{1}{600 \cdot 10^6} \frac{1}{10^{-12}} \simeq -j265 \Omega,$$

mentre per il cavo coassiale in esame, in cui è supposto propagarsi il modo TEM, la costante di fase risulterà:

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi 600 \cdot 10^6}{300 \cdot 10^6} \sqrt{4} = 8\pi \text{ rad/m}.$$

Qualora si voglia realizzare la suddetta reattanza con una configurazione a linea aperta è possibile ricavare la lunghezza ℓ_a desiderata tramite l'espressione dell'impedenza di una linea chiusa su un circuito aperto:

$$jX(\ell_a) = -jR_0 \cot(\beta\ell_a) = jX = -j265 \Omega,$$

$$\Rightarrow \ell_a = \frac{\arctan(-R_0/X)}{\beta} + \frac{n\pi}{\beta} \simeq 0.0548 + \frac{n}{8} \text{ m} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nel caso si avesse voluto metallizzare una estremità del cavo coassiale, cioè usare una linea chiusa su un corto circuito, sarebbe stato sufficiente aggiungere alla misura calcolata per la configurazione in circuito aperto una lunghezza pari ad un quarto della lunghezza d'onda nel cavo, cioè:

$$\ell_c = \ell_a + \frac{\lambda}{4} = \ell_a + \frac{2\pi}{\beta} \frac{1}{4} = (0.0548 + n/8) + \frac{1}{16} \simeq 0.1173 + \frac{n}{8} \text{ m}.$$

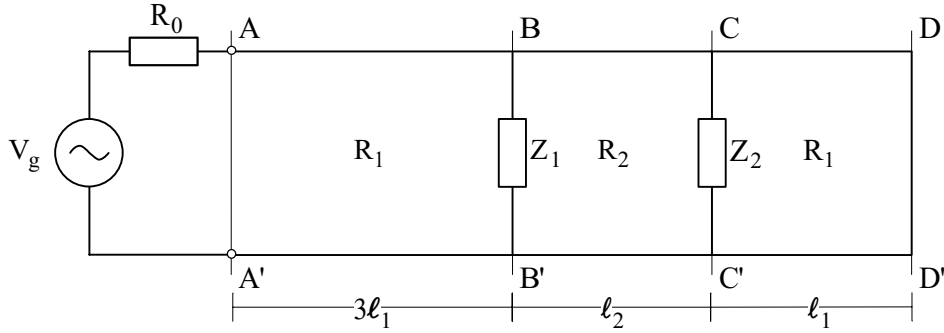


Figura 1.18: Geometria del problema relativa all'esercizio 1.3.

Qualora cercassimo di verificare questo risultato tramite una misura noteremmo che, mentre per un cavo chiuso in corto circuito di lunghezza ℓ_c l'impedenza è quella richiesta, per un cavo in circuito aperto di lunghezza ℓ_a l'impedenza misurata risulta di poco discosta da quella desiderata. Ciò è dovuto al fatto che non metallizzando l'estremità del cavo non si riesce a realizzare un circuito aperto ideale, cioè caratterizzato da un'impedenza infinita, in quanto la configurazione del modo TEM è perturbata ed il cavo irradia nello spazio circostante. L'estremità del cavo infatti si comporta come una antenna ad apertura avente una bassa efficienza, caratterizzabile da un'impedenza avente una piccola parte reale ed una parte immaginaria grande ma comunque non infinita. Tale problema è comune a tutte le linee di trasmissione, anche se in modo maggiore o minore a seconda del tipo di linea. Questo spiega perché, laddove è possibile, per realizzare reattanze distribuite è preferibile utilizzare una configurazione a circuito chiuso rispetto ad una a circuito aperto. \square

Esercizio 1.3 *Nel circuito di figura 1.18 la linea di impedenza R_1 è costituita da un cavo coassiale riempito da un dielettrico caratterizzato da $\epsilon_{r1} = 16$, mentre quella di impedenza R_2 da un cavo coassiale riempito da un dielettrico avente $\epsilon_{r2} = 4$. Si determini il modulo della tensione alla sezione BB' per una frequenza di lavoro $f_0 = 300 \text{ MHz}$. ($\ell_1 = \ell_2 = 0.125 \text{ m}$, $Z_1 = 100 + j100 \Omega$, $Z_2 = 200 \Omega$, $R_0 = R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$)*

Alla frequenza $f_0 = 300 \text{ MHz}$ il cavo coassiale di impedenza R_1 , in cui è supposto propagarsi il modo TEM, presenta una lunghezza d'onda λ_1 pari a:

$$\lambda_1 = \frac{v_f}{f_0} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \frac{1}{f_0} = \frac{300 \cdot 10^6}{\sqrt{16}} \frac{1}{300 \cdot 10^6} = 0.25 \text{ m},$$

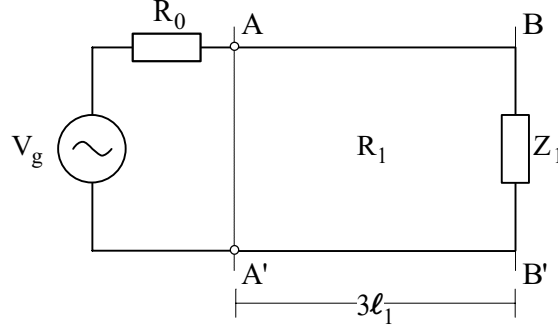


Figura 1.19: Circuito equivalente (Es. 1.3).

mentre per il tratto di cavo di impedenza R_2 la lunghezza d'onda λ_2 risulta:

$$\lambda_2 = \frac{v_f}{f_0} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \frac{1}{f_0} = \frac{300 \cdot 10^6}{\sqrt{4}} \frac{1}{300 \cdot 10^6} = 0.50 \text{ m},$$

Quindi, in termini di lunghezza d'onda, il tratto di linea compreso tra le sezioni $CC'-DD'$ risulta pari a:

$$\ell_1 = \frac{\ell_1}{\lambda_1} \lambda_1 = \frac{0.125}{0.25} \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{2},$$

mentre quello compreso tra le sezioni $BB'-CC'$:

$$\ell_2 = \frac{\ell_2}{\lambda_2} \lambda_2 = \frac{0.125}{0.50} \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{4}.$$

E' subito evidente che il corto circuito alla sezione DD' dopo un tratto di linea $\ell_1 = \lambda_1/2$ si presenta come un corto circuito in parallelo al carico Z_2 . Percio', qualsiasi sia il valore del carico Z_2 , alla sezione CC' si avra' un carico equivalente costituito ancora da un corto circuito. Spostandosi dalla sezione CC' alla sezione BB' di $\ell_2 = \lambda_2/4$ tale corto circuito equivalente si trasformerà in un circuito aperto posto in parallelo all'impedenza Z_1 . Ci si riduce quindi al semplice circuito equivalente di Fig. 1.19, dove il tratto di linea $AA'-BB'$ di impedenza R_1 risulta pari a $3\ell_1 = 3\lambda_1/2$. Poiche' sia l'impedenza che il modulo della tensione lungo una linea risultano quantita' periodiche con periodo pari a $\lambda_1/2$, invece di calcolare il modulo della tensione alla sezione BB' si puo' equivalentemente valutare tale modulo ai capi dell'impedenza Z_1 riportata alla sezione AA' , cioe':

$$|V_{BB'}| = |V_{AA'}| = \frac{|V_g|}{|R_0 + Z_1|} |Z_1| \simeq 0.785 |V_g|.$$

□

1.4.4 Linea chiusa su un carico reattivo

Si e' visto come e' sempre possibile sostituire un carico puramente reattivo con un opportuno tratto di linea in corto circuito (circuito aperto). Nel caso in cui la linea sia chiusa su un carico reattivo si puo' quindi pensare di sostituire il carico reattivo con un tratto di lunghezza ℓ della stessa linea chiusa in corto circuito (circuito aperto). Ne deriva che gli andamenti della tensione, della corrente e dell'impedenza lungo la linea equivalente in corto circuito (circuito aperto) coincideranno, a partire dall'ascissa $z = \ell$, con quelli della linea chiusa sul carico reattivo.

1.4.5 Linea chiusa su un generico carico Z_u

Nel caso di una linea priva di perdite chiusa su un carico Z_u generico, esprimendo le ampiezze dell'onda diretta e riflessa di tensione in termini di modulo e fase, cioe'

$$V_+ = |V_+| \exp(j\phi_+), \quad V_- = |V_-| \exp(j\phi_-), \quad (1.112)$$

il coefficiente di riflessione di tensione assume la forma:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{|V_-| \exp(j\phi_-) \exp(-j\beta z)}{|V_+| \exp(j\phi_+) \exp(+j\beta z)} = \\ &= \frac{|V_-|}{|V_+|} \exp[j(\phi_- - \phi_+ - 2\beta z)] = |\Gamma(0)| \exp[j(\phi_- - \phi_+ - 2\beta z)]. \end{aligned} \quad (1.113)$$

All'aumentare dell'ascissa z , cioe' spostandosi dal carico verso il generatore, l'angolo $(\phi_- - \phi_+)$ verra' decrementato della quantita' $2\beta z$. Quindi, spostandosi dal carico verso il generatore, il vettore rappresentante nel piano dei fasori il coefficiente di riflessione di tensione ruotera' in senso orario, descrivendo una circonferenza di raggio $|\Gamma(0)| \leq 1$ (Fig. 1.20). Si noti che nel caso si percorra lungo la linea di trasmissione una distanza pari a $z = \lambda/2$, corrispondente ad un angolo $2\beta z = 2\pi$, tale vettore compie un giro completo della circonferenza, mettendo cosi' in evidenza che il coefficiente di riflessione e' una quantita' periodica di periodo $\lambda/2$. Viceversa spostandosi dal generatore verso il carico, tale vettore ruotera' in senso antiorario.

Nel paragrafo 1.2 si e' visto come e' possibile esprimere l'andamento della tensione e della corrente in funzione del coefficiente di riflessione, cioe':

$$V(z) = V_+ \exp(jkz) \left\{ 1 + \Gamma(z) \right\}, \quad (1.114)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{R_0} \exp(jkz) \left\{ 1 - \Gamma(z) \right\}. \quad (1.115)$$

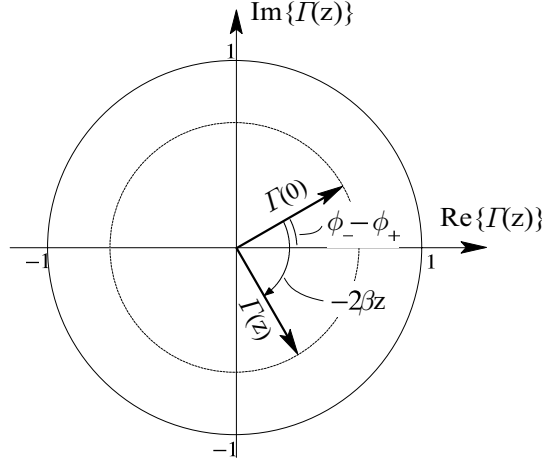


Figura 1.20: Rappresentazione nel piano dei fasori del coefficiente di riflessione.

Per valutare l'andamento del modulo sia della tensione che della corrente lungo la linea di trasmissione, operando il modulo delle precedenti espressioni, risulta:

$$|V(z)| = |V_+| |1 + \Gamma(z)| , \quad (1.116)$$

$$|I(z)| = \frac{|V_+|}{R_0} |1 - \Gamma(z)| . \quad (1.117)$$

Si rappresenti adesso nel piano dei fasori la quantità $1 + \Gamma(z)$, al cui modulo è proporzionale il modulo della tensione lungo la linea. Spostandosi lungo la linea, il vettore \overrightarrow{AP} , espressione del coefficiente di riflessione, ruoterà attorno al punto A (Fig. 1.21). Ne segue che il modulo del vettore $|\overrightarrow{OP}| \equiv |1 + \Gamma(z)|$ al variare del valore della coordinata z descriverà una cicloide (Fig. 1.22). In particolare tale cicloide, avente periodicità $\lambda/2$, presenterà un massimo $1 + |\Gamma(z)|$ in corrispondenza del punto M , ed un minimo $1 - |\Gamma(z)|$ in corrispondenza del punto N .

Il modulo della corrente lungo la linea risulta invece proporzionale al modulo della quantità $1 - \Gamma(z)$ che è rappresentata nel piano dei fasori dal vettore \overrightarrow{OQ} (Fig. 1.21). Il punto Q risulta sempre simmetrico al punto P rispetto al punto A , per cui il modulo della corrente avrà un andamento analogo a quello del modulo della tensione ma presenterà un minimo quando il modulo della tensione è massimo ed un massimo quando questo è minimo.

Per quanto riguarda l'impedenza della linea al variare della coordinata z ,

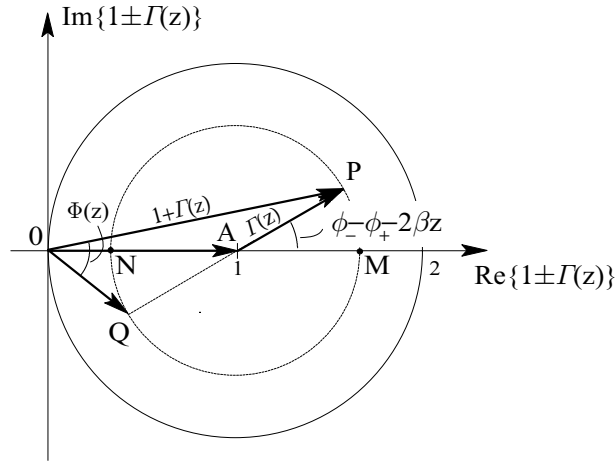


Figura 1.21: Rappresentazione della quantità $1 + \Gamma(z)$ nel piano dei fasori.

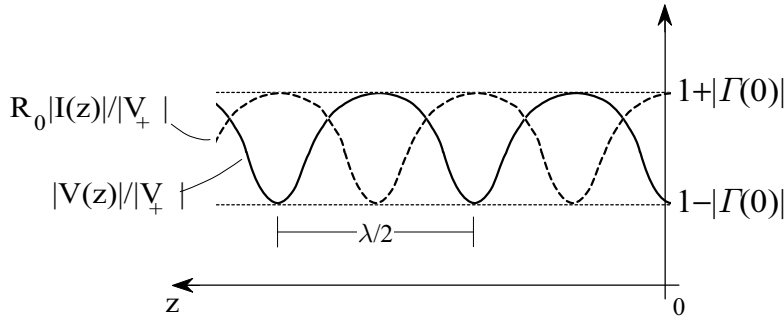


Figura 1.22: Andamento della tensione e della corrente normalizzata lungo una linea chiusa su un generico carico.

si avr :

$$Z(z) = R_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = R_0 \frac{|1 + \Gamma(z)|}{|1 - \Gamma(z)|} \exp[j\Phi(z)] , \quad (1.118)$$

dove $\Phi(z)$ risulta essere l'angolo compreso tra i vettori \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} . Si pu  osservare che nei punti M e N , corrispondenti rispettivamente al massimo ed al minimo di tensione lungo la linea, l'impedenza risulta puramente reale

($\Phi(z) = 0$) e pari a:

$$\text{p.to M} \Rightarrow |Z(z)|_{\max} = R_0 \frac{1 + |\Gamma(z)|}{1 - |\Gamma(z)|}, \quad (1.119)$$

$$\text{p.to N} \Rightarrow |Z(z)|_{\min} = R_0 \frac{1 - |\Gamma(z)|}{1 + |\Gamma(z)|}. \quad (1.120)$$

1.5 Rapporto d'onda stazionaria

Per una linea priva di perdite e' utile introdurre il rapporto d'onda stazionaria (ROS)³ definito come il rapporto tra il valore massimo e minimo della tensione misurato lungo la linea:

$$ROS = \frac{|V(z)|_{\max}}{|V(z)|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma(z)|}{1 - |\Gamma(z)|}. \quad (1.121)$$

Nel caso di segnale monocromatico $|V(z)|$ e' pari all'involuppo dell'andamento temporale della tensione. Quindi al fine di misurare il ROS sara' sufficiente misurare il valore massimo e minimo che tale involuppo presenta lungo la linea e poi operarne il rapporto.

La relazione (1.121) e' invertibile, per cui

$$|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)| = \frac{ROS - 1}{ROS + 1}. \quad (1.122)$$

Si noti che per una linea chiusa su un carico passivo $0 \leq |\Gamma(z)| \leq 1$, per cui il rapporto d'onda stazionaria risultera'

$$1 \leq ROS \leq +\infty, \quad (1.123)$$

dove il valore unitario sara' assunto quando nella linea sara' presente solo onda progressiva (assenza cioe' di onda riflessa), mentre il valore $+\infty$ sara' assunto quando nella linea e' presente solo onda stazionaria (l'onda diretta e' riflessa completamente dal carico).

Si noti inoltre come un valore del rapporto d'onda stazionaria pari a $ROS = 1.22$ equivale ad un modulo del coefficiente di riflessione $|\Gamma(z)| \simeq 0.1$. Quindi quasi il 10% dell'onda diretta viene riflesso verso il generatore. In termini di potenza cio' corrisponde solo all'1%, infatti $|\Gamma(0)|^2 \simeq 0.01$, per cui generalmente si parla di buon adattamento qualora il $ROS \leq 1.2$. In Fig. (1.23) si riporta la percentuale di potenza riflessa per un valore del rapporto d'onda stazionaria compreso tra 1 e 3.

³Tale quantita' e' generalmente anche indicata VSWR dall'inglese Voltage Standing Wave Ratio.

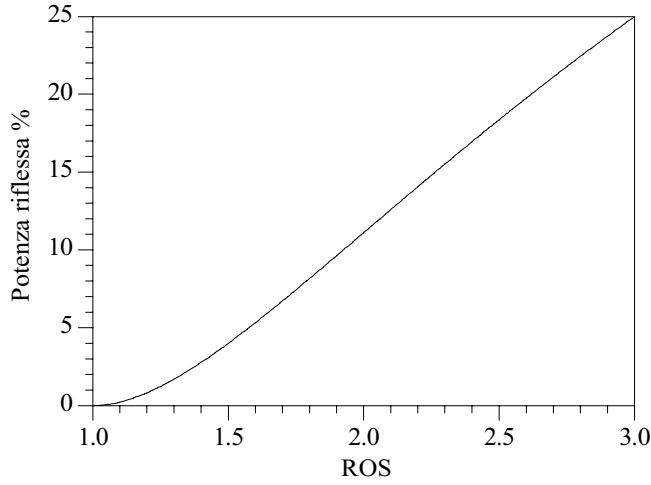


Figura 1.23: Percentuale di potenza riflessa verso il generatore in funzione del rapporto d'onda stazionaria.

Nel paragrafo precedente si era notato come la massima e la minima impedenza misurabile sulla linea fossero funzione del modulo del coefficiente di riflessione, ora tali quantità possono essere messe in funzione anche del rapporto d'onda stazionaria secondo le relazioni:

$$|Z(z)|_{max} = R_0 \frac{1 + |\Gamma(0)|}{1 - |\Gamma(0)|} = R_0 ROS, \quad (1.124)$$

$$|Z(z)|_{min} = R_0 \frac{1 - |\Gamma(0)|}{1 + |\Gamma(0)|} = \frac{R_0}{ROS}. \quad (1.125)$$

Esercizio 1.4 Per la linea priva di perdite descritta in Fig. 1.24 si determini il coefficiente di riflessione sul carico, il rapporto d'onda stazionaria misurato nel tratto $BB' - CC'$, quello nel tratto $AA' - BB'$, e l'impedenza alla sezione AA' ($R_0 = 50 \Omega$, $Z_u = 50 + j100 \Omega$, $Z_1 = 57 + j182 \Omega$). Si determini inoltre la potenza dissipata su ciascun carico.

Il coefficiente di riflessione sul carico risulta:

$$\Gamma(0) = \frac{Z_u - R_0}{Z_u + R_0} = \frac{(50 + j100) - 50}{(50 + j100) + 50} = \frac{1 + j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(j\pi/4).$$

Il rapporto d'onda stazionaria non varia nel tratto di linea compreso tra le sezioni BB' e CC' in quanto la linea è supposta priva di perdite e quindi il modulo del coefficiente di riflessione risulta costante rispetto alla coordinata

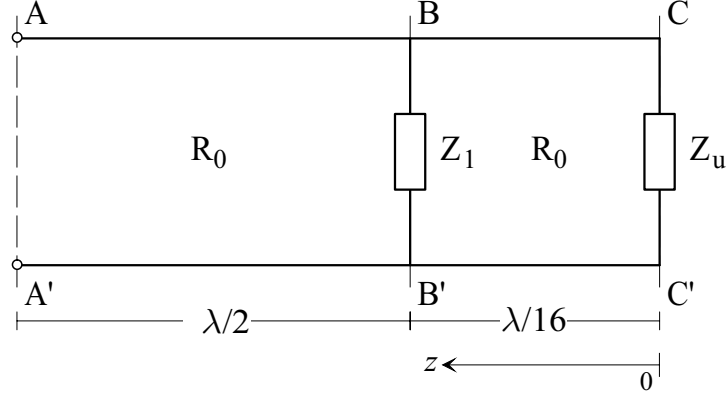


Figura 1.24: Geometria del problema relativa all'esercizio 1.4.

z , per cui

$$ROS_{BB'-CC'} = \frac{1 + |\Gamma(0)|}{1 - |\Gamma(0)|} = \frac{1 + \sqrt{2}/2}{1 - \sqrt{2}/2} \simeq 5.83.$$

Il coefficiente di riflessione subito a destra della sezione BB' risulta

$$\Gamma(\lambda/16) = \Gamma(0) \exp(-j2\beta z)|_{z=\lambda/16} = \Gamma(0) \exp(-j2 \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{16}) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

da cui deriva che il tratto di linea $BB'-CC'$ chiuso sul carico Z_u si presenta equivalentemente alla sezione BB' come una impedenza (Fig. 1.25):

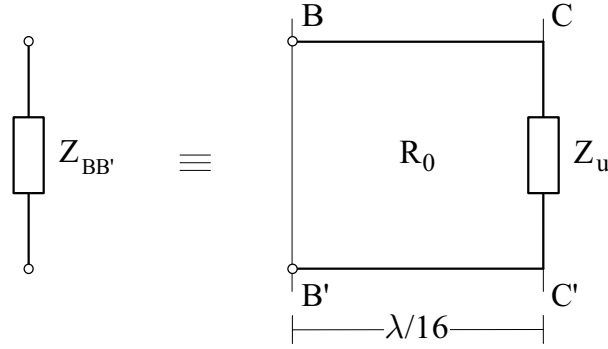
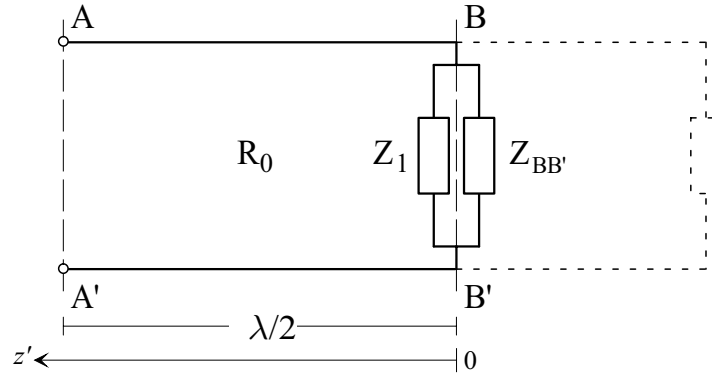
$$Z_{BB'} = R_0 \frac{1 + \Gamma(\lambda/16)}{1 - \Gamma(\lambda/16)} = R_0 \frac{1 + \sqrt{2}/2}{1 - \sqrt{2}/2} = R_0 ROS \simeq 291.4 \Omega.$$

Quindi alla sezione BB' si potrà considerare il parallelo dell'impedenza concentrata $Z_1 = 57 + j182 \Omega$ e dell'impedenza $Z_{BB'} = 291.4 \Omega$ (Fig. 1.26), cioè

$$Z_p = \frac{Z_1 Z_{BB'}}{Z_1 + Z_{BB'}} \simeq 100 + j100 \Omega.$$

Per calcolare l'impedenza che la linea presenta alla sezione AA' si può procedere in modo analogo a quello già fatto per calcolare l'impedenza $Z_{BB'}$. Tuttavia risulta più conveniente ricordare che il valore che l'impedenza assume lungo la linea risulta essere una quantità periodica con periodo $d = \lambda/2$. Poiché la distanza tra le sezioni AA' e BB' è appunto un multiplo di $\lambda/2$, alla sezione AA' si misurerà una impedenza pari a:

$$Z_{AA'} = Z_p = 100 + j100 \Omega.$$

Figura 1.25: Impedenza equivalente per il circuito a destra della sezione BB' .Figura 1.26: Circuito equivalente a sinistra della sezione BB' .

Per il calcolo del rapporto d'onda stazionaria nel tratto di linea $AA'-BB'$ necessita il modulo del coefficiente di riflessione in tale tratto

$$|\Gamma(z')| = \left| \frac{Z_p - R_0}{Z_p + R_0} \right| = \left| \frac{(100 + j100) - 50}{(100 + j100) + 50} \right| \simeq 0.62,$$

da cui

$$ROS_{AA'-BB'} = \frac{1 + |\Gamma(0)|}{1 - |\Gamma(0)|} = \frac{1 + 0.62}{1 - 0.62} \simeq 4.26.$$

La potenza P_d dissipata complessivamente sui due carichi Z_1 e Z_u sarà pari alla potenza attiva che fluirà attraverso la sezione AA' , in quanto, essendo la linea supposta priva di perdite, non esiste altra fonte di dissipazione. Tale potenza P_d dovrà quindi essere anche pari alla potenza dissipata dall'impedenza Z_p , che rappresenta equivalentemente la linea ed i carichi a destra

della sezione BB' . Dalla conoscenza del modulo del coefficiente di riflessione nel tratto $AA'-BB'$ essa risulterà:

$$\begin{aligned} P_d &= \mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \left[\left(1 - |\Gamma(z')|^2 \right) + \left(\Gamma(z') - \Gamma^*(z') \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \left[1 - |\Gamma(z')|^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{50} \left[1 - |0.62|^2 \right] \simeq 6.15 |V_+|^2 \text{ mW}. \end{aligned}$$

E' ora possibile esprimere tale potenza dissipata in funzione delle ammettenze Y_1 e $Y_{BB'}$ dei carichi e della tensione presente ai loro capi

$$P_d = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{Y_1 + Y_{BB'}\} |V_{BB'}|^2,$$

da cui

$$|V_{BB'}|^2 = \frac{2P_d}{\mathcal{R}e \{Y_1 + Y_{BB'}\}}.$$

La potenza dissipata su ciascun carico risulterà:

$$\begin{aligned} P_{d_1} &= \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{Y_1\} |V_{BB'}|^2 = P_d \frac{\mathcal{R}e \{Y_1\}}{\mathcal{R}e \{Y_1 + Y_{BB'}\}}, \\ P_{d_{BB'}} &= \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{Y_{BB'}\} |V_{BB'}|^2 = P_d \frac{\mathcal{R}e \{Y_{BB'}\}}{\mathcal{R}e \{Y_1 + Y_{BB'}\}}. \end{aligned}$$

In particolare la potenza dissipata sul carico Z_1 risulterà:

$$P_{d_1} = P_d \frac{\mathcal{R}e \{1/Z_1\}}{\mathcal{R}e \{1/Z_p\}} \simeq P_d 0.313,$$

mentre quella dissipata nel tratto di linea a destra della sezione BB' sarà pari a

$$P_{d_{BB'}} = P_d \frac{\mathcal{R}e \{1/Z_{BB'}\}}{\mathcal{R}e \{1/Z_p\}} \simeq P_d 0.687.$$

Poiche' la linea e' supposta priva di perdite tale potenza sarà anche quella dissipata sul carico Z_u . □

Esercizio 1.5 Per la linea di trasmissione priva di perdite mostrata in Fig. 1.27 si determini il valore del rapporto d'onda stazionario e del coefficiente di riflessione di tensione alle sezioni AA' e BB' . Si dimensionino inoltre la resistenza concentrata R e la lunghezza d dello stub in corto circuito posto

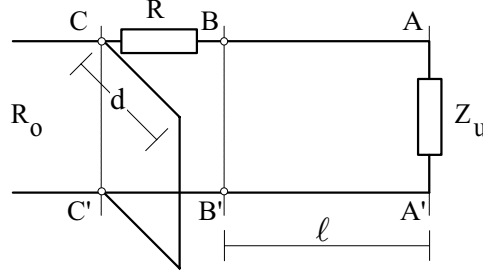


Figura 1.27: Geometria del problema relativa all'esercizio 1.5.

in parallelo alla sezione CC' in modo da non avere onda riflessa a sinistra della sezione CC' . ($R_0 = 50 \Omega$, $v_f = 0.8c$, $f_0 = 300 \text{ MHz}$, $Z_u = 62.5 + j62.5 \Omega$, $\ell = 20 \text{ cm}$).

Il coefficiente di riflessione di tensione sul carico risulta

$$\Gamma_{AA'} = \frac{Z_u - R_0}{Z_u + R_0} \simeq 0.495 \exp(j0.276\pi),$$

mentre il rapporto di onda stazionaria nel tratto di linea compreso tra le sezioni AA' e BB' è costante e pari a:

$$(ROS)_{AA'-BB'} = \frac{1 + |\Gamma_{AA'}|}{1 - |\Gamma_{AA'}|} \simeq 2.96.$$

Dalla conoscenza della frequenza di lavoro e della velocità di fase nella linea è possibile calcolare il valore della lunghezza d'onda in guida:

$$\lambda = \frac{v_f}{f_0} = 0.8 \text{ m}.$$

La distanza del carico Z_u dalla resistenza R può essere espressa in termini di tale lunghezza d'onda come:

$$\ell = \left(\frac{\ell}{\lambda}\right) \lambda = \frac{20 \text{ cm}}{80 \text{ cm}} \lambda = \lambda/4.$$

Ne segue che il coefficiente di riflessione di tensione alla sezione BB' , cioè a distanza $\lambda/4$ dal carico, risulta

$$\begin{aligned} \Gamma_{BB'} &= \Gamma_{AA'} e^{-2j\beta\ell} = \Gamma_{AA'} e^{-2j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}} \\ &= \Gamma_{AA'} e^{-j\pi} = -\Gamma_{AA'} \simeq 0.495 \exp(-j0.724\pi). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'impedenza equivalente che la linea chiusa sul carico Z_u presenta alla sezione BB' , si ha:

$$Z_{BB'} = R_0 \frac{1 + \Gamma_{BB'}}{1 - \Gamma_{BB'}} = R_0 \frac{Z_u + R_0 \tan(\beta z)}{R_0 + Z_u \tan(\beta z)} \Big|_{z=\lambda/4} = \frac{R_0^2}{Z_u} = 20 - j20 \, \Omega.$$

Per non avere onda riflessa a sinistra della sezione CC' l'ammettenza Y_s derivante dalla serie tra la resistenza R e l'impedenza equivalente $Z_{BB'}$ dovrà avere parte reale pari alla conduttanza $G_0 = 1/R_0$ caratteristica della linea. Così facendo è possibile dimensionare opportunamente lo stub in corto circuito in modo tale che il parallelo tra l'ammettenza Y_s e lo stub risulti pari all'impedenza caratteristica R_0 della linea, e quindi non sia presente onda riflessa a sinistra della sezione CC' . Si ricorda che inserire lo stub, cioè il tratto di linea in corto circuito, equivale a porre in parallelo alla linea una suscettanza B_s . Quindi

$$G_0 = \frac{1}{R_0} = \mathcal{Re}\{Y_s\} = \mathcal{Re}\left\{\frac{1}{Z_{BB'} + R}\right\} \Rightarrow \frac{1}{50} = \mathcal{Re}\left\{\frac{1}{20 - j20 + R}\right\}$$

$$\Rightarrow R^2 - 10R - 200 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado così ottenuta risultano essere $R = -10$ e $R = 20$. Tuttavia la prima delle due soluzioni (cioè $R = -10$) dovrà essere scartata in quanto non realizzabile fisicamente (si suppone infatti la resistenza R passiva). Per $R = 20$ la parte immaginaria jB dell'ammettenza Y_s assumerà il valore

$$jB = j\mathcal{Im}\left\{\frac{1}{Z_{BB'} + R}\right\} = j/100.$$

Quindi, per non avere onda riflessa, lo stub dovrà realizzare una suscettanza $B_s = -B = -0.01$.

Qualora si voglia costruire tale stub con uno spezzone di cavo della stessa linea chiuso in corto circuito esso dovrà risultare lungo:

$$jR_0 \tan(\beta d) = \frac{1}{jB_s},$$

$$d = \frac{\arctan\left[\frac{-1}{B_s R_0}\right]}{\beta} = \frac{\lambda \arctan(2)}{2\pi} \simeq 0.176 \lambda = 14.1 \, \text{cm}.$$

□

Capitolo 2

Linee con perdite

In una linea di trasmissione reale la non perfetta conducibilit  dei conduttori e le perdite di volume (cio  le perdite dovute alla isteresi dielettrica e alla conducibilit  del dielettrico in cui i conduttori sono immersi) fanno s  che una parte dell'energia elettromagnetica che si propaga nella linea sia dissipata sotto forma di calore. Per i materiali comunemente impiegati nella costruzione, e per frequenze non troppo elevate, tali perdite risultano molto piccole cos  che il loro effetto pu  essere generalmente trascurato se la linea di trasmissione non risulta troppo lunga oppure non   impiegata per realizzare un risuonatore. In caso contrario   necessario considerare un valore piccolo ma non nullo sia della resistenza R che della conduttanza G per unit  di lunghezza introdotte nel precedente capitolo.

2.1 Valutazione della conduttanza e della resistenza per unit  di lunghezza di una linea

Dal teorema di Poynting la potenza dissipata per isteresi dielettrica in un volume V di materiale, corrispondente ad un tratto di linea di lunghezza Δz , risulta

$$P_\varepsilon = \frac{\omega}{2} \int_V \varepsilon_2 \left| \vec{E} \right|^2 dV, \quad (2.1)$$

dove con ε_2 si   indicata la parte immaginaria della costante dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ del materiale. La potenza dissipata nello stesso volume a causa di una conducibilit  σ risulta invece

$$P_\sigma = \frac{1}{2} \int_V \sigma \left| \vec{E} \right|^2 dV. \quad (2.2)$$

Definendo l'angolo di perdita γ come

$$\tan(\gamma) = \frac{\varepsilon_2 + \sigma/\omega}{\varepsilon_1}, \quad (2.3)$$

la potenza dissipata per unita' di lunghezza nel materiale che separa i conduttori della linea risulta:

$$\begin{aligned} P_v &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_\varepsilon + P_\sigma}{\Delta z} = \\ &= \frac{\omega \varepsilon_1 \tan(\gamma)}{2 \Delta z} \int_S \int_0^{\Delta z} |\vec{E}|^2 dS dz = \frac{\omega \varepsilon_1 \tan(\gamma)}{2} \int_S |\vec{E}|^2 dS, \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove S e' la superficie trasversa della linea.

Dalla teoria dei circuiti elettrici $P_v = G|V|^2/2$, quindi la conduttanza per unita' di lunghezza della linea puo' essere espressa come:

$$G = \frac{\omega \varepsilon_1 \tan(\gamma)}{|V|^2} \int_S |\vec{E}|^2 dS. \quad (2.5)$$

Per quanto riguarda il calcolo della potenza dissipata nei conduttori della linea e' da notare che per la non perfetta conducibilita' di quest'ultimi e' presente un campo elettromagnetico non nullo anche all'interno di essi. Per risolvere il problema della propagazione nella struttura e' quindi necessario risolvere le equazioni di Maxwell sia nel mezzo dielettrico che nei conduttori ed imporre la continuita' dei campi tangenziali all'interfaccia. Tuttavia i materiali comunemente utilizzati nella realizzazione delle strutture guidanti, come rame, ottone e alluminio, possono essere considerati buoni conduttori anche alle frequenze delle microonde cosi' che e' possibile tener conto della propagazione del campo al loro interno attraverso una condizione al contorno approssimata, comunemente detta condizione di impedenza o condizione di Lentovich, che lega tra loro il campo elettrico a quello magnetico presenti all'interfaccia mezzo dielettrico/conduttore:

$$\vec{E} \times \hat{n} = Z_s \hat{n} \times \vec{H} \times \hat{n}, \quad (2.6)$$

dove \hat{n} e' la normale esterna alla superficie dei conduttori. Tale condizione permette di limitare l'osservazione del campo alla sola regione esterna ai conduttori. In tali ipotesi, poiche' la componente di campo elettrico tangente al conduttore non e' piu' identicamente nulla, si avra' un flusso di potenza reale attraverso le pareti della struttura guidante che si trasformerà in calore per effetto Joule. In tali ipotesi la potenza media attiva dissipata per unita' di lunghezza nelle pareti della linea a causa della conducibilita' finita risulta

$$P_c = \frac{1}{2} R_s \oint_{C_1+C_2} |\hat{n} \times \vec{H}|^2 d\ell, \quad (2.7)$$

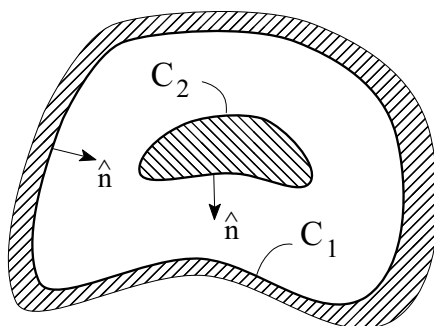


Figura 2.1: Sezione trasversale di una generica linea di trasmissione.

dove $R_s = 1/\sigma\delta$ e' la resistenza superficiale dei conduttori della linea, $\delta = \sqrt{2/(\mu\omega\sigma)}$ la profondita' di penetrazione, mentre $C_1 + C_2$ rappresenta il contorno dei conduttori nella sezione trasversale.

Dalla teoria dei circuiti elettrici $P_c = R|I|^2/2$, la resistenza per unita' di lunghezza della linea puo' essere scritta come:

$$R = \frac{R_s}{|I|^2} \oint_{C_1+C_2} \left| \hat{n} \times \vec{H} \right|^2 d\ell. \quad (2.8)$$

A rigore sarebbe necessario considerare il campo magnetico soluzione del problema della propagazione in una guida d'onda reale soggetta alla condizione di Leontovich; tuttavia poiche' nelle situazioni applicative i conduttori risultano sempre dei buoni conduttori e' lecito approssimare il campo magnetico all'interfaccia con quello che si misurerebbe in una linea ideale costituita da conduttori elettrici perfetti.

Esercizio 2.1 *Si determinino le espressioni delle costanti primarie di un cavo coassiale.*

L'andamento del campo elettromagnetico all'interno di un cavo coassiale con pareti perfettamente conduttrici e' descritto dalle relazioni

$$\vec{E} = \frac{V}{\rho \ln(b/a)} \hat{\rho},$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi},$$

dove $a < \rho < b$.

L'energia magnetica W_m immagazzinata nella linea per unita' di lunghezza e' legata all'induttanza L per unita' di lunghezza dalla relazione $W_m = L |I|^2 / 4$ per cui

$$L = \frac{4W_m}{|I|^2} = \frac{\mu}{|I|^2} \int_S |\vec{H}|^2 dS = \frac{\mu}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\phi d\rho = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a).$$

L'energia elettrica W_e immagazzinata nella linea per unita' di lunghezza e' invece legata alla capacita' C per unita' di lunghezza dalla relazione $W_e = C |V|^2 / 4$, da cui segue

$$C = \frac{4W_e}{|V|^2} = \frac{\varepsilon_1}{|V|^2} \int_S |\vec{E}|^2 dS = \frac{\varepsilon_1}{\ln^2(b/a)} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\phi d\rho = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\ln(b/a)}.$$

Per valutare la conduttanza G per unita' di lunghezza e' possibile utilizzare la relazione (2.5) e sfruttare l'espressione precedentemente ricavata per il calcolo della capacita' C per unita' di lunghezza

$$G = \frac{\omega\varepsilon_1 \tan(\gamma)}{|V|^2} \int_S |\vec{E}|^2 dS = 2\pi f \tan(\gamma) C = \frac{4\pi^2 f \varepsilon_1 \tan(\gamma)}{\ln(b/a)}.$$

Per valutare la resistenza R per unita' di lunghezza della linea e' invece sufficiente applicare la relazione (2.8)

$$\begin{aligned} R &= \frac{R_s}{|I|^2} \int_{C_1+C_2} |\hat{n} \times \vec{H}|^2 d\ell = \\ &= \frac{R_s}{|I|^2} \left[\int_0^{2\pi} \left| \hat{\rho} \times \hat{\phi} \frac{I}{2\pi a} \right|^2 a d\phi + \int_0^{2\pi} \left| -\hat{\rho} \times \hat{\phi} \frac{I}{2\pi b} \right|^2 b d\phi \right] = \\ &= \frac{R_s}{2\pi} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] = \frac{a+b}{2ab} \sqrt{\frac{\mu f}{\pi \sigma}}. \end{aligned}$$

□

2.2 Linee con piccole perdite

Come gia' visto nel primo capitolo, l'espressione della costante di propagazione k in funzione dei parametri primari della linea risulta

$$k = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}} = \omega \sqrt{(L - jR/\omega)(C - jG/\omega)}. \quad (2.9)$$

Supponiamo che siano verificate simultaneamente le condizioni:

$$R \ll \omega L, \quad G \ll \omega C, \quad (2.10)$$

cioè sia verificata l'*ipotesi di piccole perdite*. In tal caso è possibile scrivere l'eq. (2.9) nella forma

$$k = \omega \sqrt{LC} \sqrt{1 - jR/\omega L} \sqrt{1 - jG/\omega C}, \quad (2.11)$$

sviluppare le due radici in cui compare la pulsazione ω in serie di Taylor ed arrestare lo sviluppo al primo ordine. Entrambe le radici sono della forma $\sqrt{1+u}$ con $u \ll 1$, per cui ricordando che lo sviluppo di tale espressione risulta

$$\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + \dots \quad (2.12)$$

e trascurando i termini del secondo ordine e superiori, si ottiene

$$k \simeq \omega \sqrt{LC} \left\{ 1 - j \left[\frac{R}{2\omega L} + \frac{G}{2\omega C} \right] \right\} = \beta - j\alpha. \quad (2.13)$$

Si può subito notare che nel caso di piccole perdite la costante di fase

$$\beta \simeq \omega \sqrt{LC} \quad (2.14)$$

coincide con quella che si misurerebbe in assenza di perdite e, poiché la dipendenza dalla frequenza risulta lineare, la linea è non dispersiva. Per quanto riguarda invece la costante di attenuazione α , essa risulta ben approssimata dall'espressione

$$\alpha \simeq \frac{1}{2} \sqrt{LC} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{R_0} + R_0 G \right], \quad (2.15)$$

dove con $R_0 = \sqrt{L/C}$ si è indicata l'impedenza caratteristica che la linea presenterebbe in assenza di perdite. Anche se nelle ipotesi fatte la costante di attenuazione α non dipende esplicitamente dalla frequenza, è da tenere in conto che le costanti primarie R e G sono quantità proporzionali rispettivamente alla radice della frequenza e alla frequenza per cui le varie componenti di frequenza di un segnale informativo saranno attenuate in modo diverso durante la loro propagazione nella linea e si assisterà a una distorsione del segnale informativo che risulterà sempre più rilevante quanto più la linea è lunga.

Per quanto riguarda l'impedenza caratteristica, sempre nell'ipotesi di piccole perdite, si avra'

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{L - jR/\omega}{C - jG/\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\frac{\sqrt{1 - jR/\omega L}}{\sqrt{1 - jG/\omega C}} \right] = \\
 &\simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\frac{1 + j\frac{1}{2\omega} \left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right) + \frac{RG}{4\omega^2 LC}}{1 + \frac{G^2}{4\omega^2 C^2}} \right] = \\
 &\simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 + j\frac{1}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \right] = R_0 + jX_0. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Il termine immaginario nelle parentesi quadre e' differenza di due quantita' per ipotesi molto piccole, per cui la parte immaginaria X_0 dell'impedenza caratteristica e' generalmente trascurabile rispetto a quella reale. Di conseguenza l'impedenza caratteristica della linea puo' essere assunta reale e pari a quella che la stessa linea presenterebbe in assenza di perdite.

Nel caso in cui le perdite siano maggiori la costante di fase β non e' piu' in generale una funzione lineare della frequenza, la velocita' di fase v_f sara' funzione della frequenza e la linea risultera' dispersiva. Per evidenziare cio' e' sufficiente tenere in conto anche il termini quadratici nello sviluppo di Taylor:

$$\beta \simeq \omega \sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{G}{2\omega C} - \frac{R}{2\omega L} \right)^2 \right], \quad (2.17)$$

$$\alpha \simeq \frac{1}{2} \sqrt{LC} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{R_0} + R_0 G \right], \quad (2.18)$$

$$Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 + \frac{R^2}{8\omega^2 L^2} - \frac{3G^2}{8\omega^2 C^2} + \frac{RG}{4\omega^2 LC} + j\frac{1}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \right] \simeq R'_0. \quad (2.19)$$

Le relazioni (2.15) e (2.18) possono essere convenientemente impiegate per calcolare il valore della costante di attenuazione per unita' di lunghezza della linea, tuttavia tale valore raramente coincide con quello misurato, specialmente alle frequenza piu' elevate. Cio' in quanto le relazioni prescindono dalla inevitabile rugosita' della superficie dei conduttori della linea. L'effetto della rugosita' puo' essere considerato tramite la seguente relazione empirica:

$$\alpha = \alpha_s \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(1.4 \Delta^2 / \delta^2 \right) \right], \quad (2.20)$$

dove α_s e' la costante di attenuazione valutata nel caso di conduttori perfettamente lisci, Δ e' la rugosita' superficiale media e δ la profondita' di penetrazione del conduttore.

Nel primo capitolo si era visto che l'impedenza caratteristica di una linea risulta reale anche in presenza di perdite nel caso sia verificata la condizione di Heaviside:

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{G}{\omega C}. \quad (2.21)$$

In tale ipotesi la costante di propagazione lungo la linea assume la forma

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}} = \omega \sqrt{(L - jR/\omega)(C - jG/\omega)} = \\ &= \omega \sqrt{LC} \sqrt{\left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right) \left(1 - j\frac{G}{\omega C}\right)} = \omega \sqrt{LC} \left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right) = \\ &= \omega \sqrt{LC} - jR \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega \sqrt{LC} - j\frac{R}{R_0} = \beta + j\alpha, \end{aligned} \quad (2.22)$$

dalla quale e' evidente che la costante di fase $\beta = \omega \sqrt{LC}$ e' una funzione lineare della frequenza e la linea risulta non dispersiva anche se non e' soddisfatta la condizione di piccole perdite. Per tale motivo la condizione di Heaviside e' anche detta condizione di non distorsione (*distortionless condition*). Riguardo alla costante di attenuazione $\alpha = R \sqrt{C/L} = R/R_0$ anche se questa esplicitamente non risulta dipendente dalla frequenza, lo e' attraverso il valore che la resistenza R per unita' di lunghezza assume al variare della frequenza. Tale variazione risulta comunque minore rispetto a quella che si ha nel caso di piccole perdite. Si noti che la resistenza R e la conduttanza G per unita' di lunghezza hanno una differente dipendenza dalla frequenza, per cui la condizione di Heaviside risulta rigorosamente soddisfatta alla sola frequenza di progetto, anche se in pratica puo' essere considerata con buona approssimazione soddisfatta per una banda relativamente ampia nell'intorno di tale frequenza. Per allargare tale banda di frequenza possono essere inserite periodicamente in serie alla linea delle opportune induttanze (*pupinizzazione*). Alternativamente e' possibile caricare periodicamente la linea con delle capacita' in parallelo alla linea (*krarupizzazione*).

Nel caso si operi a bassa frequenza l'ipotesi (2.10) di piccole perdite non sara' piu' verificata ma risulteranno valide le condizioni

$$R \gg \omega L, \quad G \gg \omega C. \quad (2.23)$$

In tal caso la costante di propagazione puo' essere approssimata dalla relazione

$$k = -j\sqrt{RG} \sqrt{1 + j\omega L/R} \sqrt{1 + j\omega C/G} = \\ \simeq -j\sqrt{RG} \left[1 + j\frac{1}{2} \left(\frac{\omega L}{R} + \frac{\omega C}{G} \right) \right], \quad (2.24)$$

da cui

$$\beta \simeq \frac{\sqrt{RG}}{2} \left[\frac{\omega L}{R} + \frac{\omega C}{G} \right], \quad (2.25)$$

$$\alpha \simeq \sqrt{RG}. \quad (2.26)$$

Anche in questo caso la costante di fase β risulta direttamente proporzionale alla frequenza anche se, a causa del termine in parentesi quadra, avra' un valore molto piccolo. Per quanto riguarda l'impedenza caratteristica si ha

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R}{G}} \frac{\sqrt{1 + j\omega L/R}}{\sqrt{1 + j\omega C/G}} \simeq \sqrt{\frac{R}{G}} \left[1 + j\frac{1}{2} \left(\frac{\omega C}{G} - \frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad (2.27)$$

e, analogamente a quanto visto nel caso di alta frequenza, la parte immaginaria puo' essere trascurata rispetto a quella reale.

2.3 Linea con piccole perdite chiusa su un generico carico

Si consideri adesso il caso in cui una linea con piccole perdite sia chiusa su un generico carico Z_u . Anche se la costante di propagazione $k = \beta - j\alpha$ risulta complessa, nel precedente paragrafo si era visto come, a causa delle ridotte perdite, l'impedenza caratteristica della linea puo' essere ancora considerata una quantita' reale $Z_0 = R_0 \in \mathbb{R}^+$. In tale ipotesi le espressioni relative alla corrente ed alla tensione lungo la linea risultano

$$V(z) = V_+ \exp(j\beta z) [1 + \Gamma(z)] \exp(\alpha z), \quad (2.28)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{R_0} \exp(j\beta z) [1 - \Gamma(z)] \exp(\alpha z), \quad (2.29)$$

dove

$$\Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) \exp(-2\alpha z). \quad (2.30)$$

Si noti che V_+ rappresenta l'ampiezza dell'onda diretta di tensione in $z = 0$, per cui il termine $\exp(\alpha z)$ nelle equazioni (2.28) e (2.29) tiene conto del fatto che l'onda diretta si attenua man mano che si propaga nella linea. Il coefficiente di riflessione contiene invece il fattore $\exp(-2\alpha z)$ che tiene conto del fatto che sia l'onda diretta che quella riflessa dal carico cedono energia alla linea mentre si propagano in essa. Segue che il modulo del coefficiente di riflessione diminuisce allontanandosi dal carico mentre l'impedenza della linea,

$$\begin{aligned} Z(z) &= R_0 \frac{Z_u + R_0 \tan[(\beta - j\alpha)z]}{R_0 + Z_u \tan[(\beta - j\alpha)z]} = \\ &= R_0 \frac{1 + \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) \exp(-2\alpha z)}{1 - \Gamma(0) \exp(-j2\beta z) \exp(-2\alpha z)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

non risulta essere piu' una quantita' periodica ed il suo valore tendera' a quello dell'impedenza caratteristica della linea per una linea infinitamente lunga ($z \rightarrow \infty$). Cio' implica che qualora si volesse rappresentare l'andamento del coefficiente di riflessione nel piano dei fasori, cosi' come visto nel paragrafo 1.4.5, nel muoversi lungo la linea non si percorrera' piu' una circonferenza ma ci si sposterà su una spirale centrata nell'origine della carta. Se tuttavia la linea non e' troppo lunga il tratto di spirale percorso puo' essere generalmente assimilato ad una circonferenza.

Sempre nella ipotesi che l'impedenza della linea possa essere considerata come una quantita' puramente reale, la potenza attiva in ingresso alla linea, supposta di lunghezza ℓ e chiusa sul carico Z_u , e' pari a

$$P(\ell) = \frac{1}{2} \mathcal{R}e [V(\ell) I^*(\ell)] = P_{inc}(\ell) [1 - |\Gamma(0)|^2 \exp(-4\alpha\ell)], \quad (2.32)$$

dove il termine

$$P_{inc}(\ell) = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \exp(2\alpha\ell) \quad (2.33)$$

rappresenta la potenza incidente su una sezione della linea posta a distanza ℓ dal carico. La potenza dissipata sul carico risulta invece

$$P(0) = \frac{1}{2} \mathcal{R}e [V(0) I^*(0)] = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma(0)|^2], \quad (2.34)$$

da cui segue che la potenza dissipata nella linea e' esprimibile come:

$$P_\ell = P(\ell) - P(0) = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \left[\left(\exp(2\alpha\ell) - 1 \right) + |\Gamma(0)|^2 \left(1 - \exp(-2\alpha\ell) \right) \right]. \quad (2.35)$$

In quest'ultima relazione il primo termine nella parentesi quadra tiene conto della potenza persa dall'onda diretta mentre il secondo termine tiene conto della potenza persa dall'onda riflessa. Si noti che entrambi i termini aumentano all'aumentare delle perdite e quindi della costante di attenuazione α . Esplicitando invece la potenza incidente all'ingresso della linea, la relazione (2.35) assume la forma:

$$P_\ell = P(\ell) - P(0) = P_{inc}(\ell) [1 - \exp(-2\alpha\ell)] [1 + |\Gamma(0)|^2 \exp(-2\alpha\ell)] . \quad (2.36)$$

Esercizio 2.2 *Si consideri un cavo coassiale in aria avente impedenza $R_0 = 100\Omega$ la cui parte finale risulta riempita, per il tratto $\ell = 1\text{ cm}$, da un materiale speciale avente impedenza caratteristica ζ_1 , pari ad un quarto di quella del vuoto, e costante di propagazione $k_1 = (1 - j)\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Il cavo e' inoltre metallizzato al suo estremo tramite un conduttore elettrico perfetto. Si determini il rapporto tra il modulo dell'ampiezza dell'onda riflessa e quello dell'onda incidente presenti nel tratto di cavo in aria nel caso in cui la frequenza di lavoro sia pari a 3 GHz. Si calcoli quindi la potenza dissipata nel primo tratto (a partire dall'interfaccia aria/materiale speciale) di lunghezza $d = 2\text{ mm}$ della struttura guidante riempita di materiale speciale.*

Dai dati del problema si puo' ricavare la lunghezza d'onda nel tratto in aria

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{f} = 10\text{ cm} ,$$

da cui segue

$$\ell = \lambda_0/10 .$$

Poiche' si suppone propagarsi in tutto il cavo un modo TEM, la costante di propagazione del tratto di linea riempita con il materiale speciale coincide con quella del materiale stesso $k_1 = \beta_1 - j\alpha_1 = k_0 - jk_0$. Tale ipotesi, insieme con il fatto che la metallizzazione al termine del cavo coassiale costituisce un corto circuito, fa si che il coefficiente di riflessione subito a destra dell'interfaccia aria/materiale speciale risulti:

$$\begin{aligned} \Gamma(\ell) &= \Gamma(0) \exp(-j2k_1\ell) = (-1) \exp(-j2\beta_1\ell) \exp(-2\alpha_1\ell) \\ &= -\exp(-j2k_0\ell) \exp(-2k_0\ell) = -0.285 \exp(-j0.4\pi) . \end{aligned}$$

Quindi lo spezzone di cavo riempito di materiale speciale chiuso in corto circuito si presenta all'interfaccia AA' come una impedenza equivalente pari

a

$$Z_{AA'} = Z(\ell) = Z_1 \frac{1 + \Gamma(\ell)}{1 - \Gamma(\ell)},$$

dove con Z_1 si e' indicata l'impedenza caratteristica del tratto di cavo riempito con il materiale speciale. Poiche' la struttura guidante e' omogenea e, rispetto al tratto in aria, variano soltanto le caratteristiche elettriche e magnetiche ma non quelle geometriche, l'impedenza caratteristica Z_1 e' legata a quella del tratto in aria, R_0 , dalla relazione

$$Z_1 = R_0 \frac{\zeta_1}{\zeta_0} = R_0 \frac{\zeta_0/4}{\zeta_0} = R_0/4 \in \mathbb{R}^+,$$

da cui segue che il rapporto tra il modulo dell'ampiezza dell'onda riflessa e quello dell'onda incidente e' pari a

$$\frac{|V_-|}{|V_+|} = |\Gamma_{AA'}| = \left| \frac{Z_{AA'} - R_0}{Z_{AA'} + R_0} \right| = \left| \frac{\frac{R_0}{4} \frac{1+\Gamma(\ell)}{1-\Gamma(\ell)} - R_0}{\frac{R_0}{4} \frac{1+\Gamma(\ell)}{1-\Gamma(\ell)} + R_0} \right| = \left| \frac{-3 + 5\Gamma(\ell)}{5 - 3\Gamma(\ell)} \right| = 0.7.$$

La potenza dissipata nella linea riempita di materiale speciale risultera' pari alla potenza fluente nel tratto di guida in aria, e quindi:

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma_{AA'}|^2] = 2.55 |V_+|^2 \text{ mW}.$$

Tale potenza e' anche esprimibile in funzione dell'ampiezza dell'onda diretta V'_+ sul carico Z_u come

$$P_d = P(\ell) = \frac{1}{2} \frac{|V'_+|^2}{Z_1} [\exp(2\alpha_1\ell) + |\Gamma(0)|^2 \exp(-2\alpha_1\ell)].$$

da cui si deduce che, essendo $\exp(2\alpha_1\ell) \gg \exp(-2\alpha_1\ell)$,

$$\begin{aligned} |V'_+|^2 &= \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma_{AA'}|^2] \frac{Z_1}{[\exp(2\alpha_1\ell) + |\Gamma(0)|^2 \exp(-2\alpha_1\ell)]} = \\ &\simeq \frac{|V_+|^2}{R_0} [1 - |\Gamma_{AA'}|^2] Z_1 \exp(-2\alpha_1\ell). \end{aligned}$$

La precedente relazione permette di calcolare la potenza dissipata nel tratto

terminale della linea di lunghezza $(\ell - d)$

$$\begin{aligned}
 P(\ell - d) &= \frac{1}{2} \frac{|V'_+|^2}{Z_1} \left[\exp[2\alpha_1(\ell - d)] + |\Gamma(0)|^2 \exp[-2\alpha_1(\ell - d)] \right] = \\
 &\simeq \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \left[1 - |\Gamma_{AA'}|^2 \right] \left[\exp(2\alpha_1(\ell - d)) \exp(-2\alpha_1\ell) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|V_+|^2}{R_0} \left[1 - |\Gamma_{AA'}|^2 \right] \exp(-2\alpha_1 d) \simeq 1.98 |V_+|^2 \text{ mW},
 \end{aligned}$$

da cui si ricava che la potenza dissipata nel tratto d risulta

$$P_{\ell-d} = P(\ell) - P(\ell - d) \simeq 0.566 |V_+|^2 \text{ mW}.$$

□

Capitolo 3

La carta di Smith

La carta di Smith¹ (C.d.S.) non solo risulta un valido aiuto grafico per la determinazione delle grandezze elettriche della linea ma e' soprattutto un metodo per visualizzare l'andamento di tali grandezze lungo la linea e i fenomeni loro legati. Cio' ha fatto si' che anche con l'avvento dei moderni calcolatori essa non abbia perso di significato e anzi costituisca una delle rappresentazioni grafiche piu' usate nei programmi di CAD (Computer Aided Design) a microonde.

3.1 Costruzione della carta di Smith

Si consideri una linea uniforme, priva di perdite, con impedenza caratteristica $Z_0 = R_0 \in \mathbb{R}^+$, chiusa su un generico carico passivo $Z_u = R_u + jX_u$ ($\mathcal{Re}\{Z_u\} = R_u \geq 0$). Si definisce impedenza normalizzata il rapporto adimensionale tra l'impedenza $Z(z)$ lungo la linea e l'impedenza caratteristica R_0 della linea:

$$Z_n(z) = \frac{Z(z)}{R_0}. \quad (3.1)$$

Il coefficiente di riflessione di tensione $\Gamma(z)$ puo' essere espresso in funzione dell'impedenza normalizzata come

$$\Gamma(z) = \frac{Z_n(z) - 1}{Z_n(z) + 1} \quad (3.2)$$

e considerato una funzione complessa della variabile complessa Z_n . La relazione (3.2) trasforma quindi il dominio semplicemente connesso del semipiano $\mathcal{Re}\{Z_n\} \geq 0$, del piano della variabile Z_n , nel dominio semplicemente connesso $|\Gamma(z)| \leq 1$ del piano della variabile Γ (Fig. 3.1).

¹Ideata da P. Smith del Bell Telephone Laboratories nel 1939.

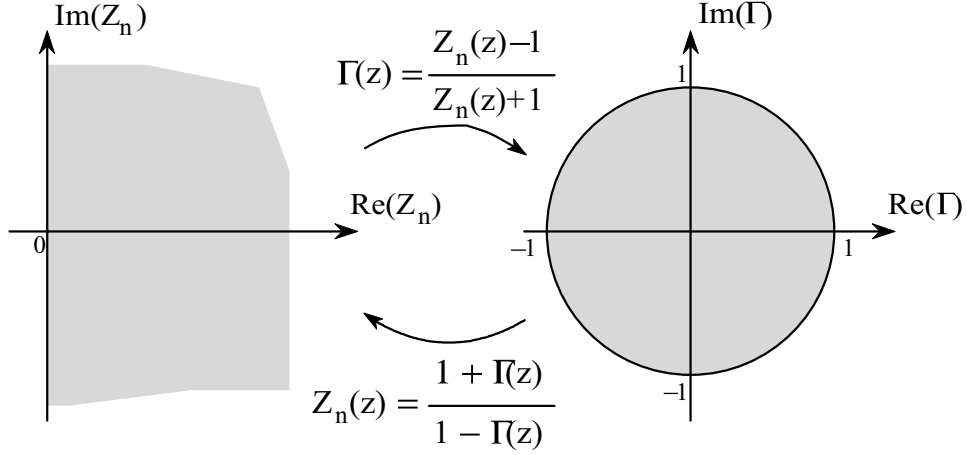


Figura 3.1: Trasformazione conforme dal piano complesso Z_n al piano Γ .

La trasformazione definisce una trasformazione conforme² di Z_n in Γ ed e' invertibile; infatti:

$$Z_n = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}. \quad (3.3)$$

Ponendo $\Gamma(z) = \gamma_r + j\gamma_x$ e $Z_n = r + jx$ l'espressione (3.3) puo' essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} r + jx &= \frac{1 + \gamma_r + j\gamma_x}{1 - \gamma_r - j\gamma_x} \\ &= \frac{(1 + \gamma_r + j\gamma_x)(1 - \gamma_r + j\gamma_x)}{(1 - \gamma_r)^2 + \gamma_x^2} = \frac{1 - \gamma_r^2 - \gamma_x^2 + j2\gamma_x}{(1 - \gamma_r)^2 + \gamma_x^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Eguagliando le parti reali dell'eq. (3.4) e' verificata la seguente relazione:

$$r = \frac{1 - \gamma_r^2 - \gamma_x^2}{(1 - \gamma_r)^2 + \gamma_x^2}, \quad (3.5)$$

o equivalentemente:

$$r(1 - \gamma_r)^2 + r\gamma_x^2 = 1 - \gamma_r^2 - \gamma_x^2, \quad (3.6)$$

²Siano ω_1, ω_2 due curve nel piano complesso (r, x) che si intersecano nel punto $P(r_0, x_0)$ e Ω_1, Ω_2 le curve trasformate nel piano complesso (γ_r, γ_x) che si intersecano nel punto $Q(\gamma_{r_0}, \gamma_{x_0})$. Se l'angolo formato dall'intersezione di ω_1 ed ω_2 e' uguale in ampiezza e verso a quello formato dall'intersezione delle curve Ω_1 e Ω_2 si dice che la trasformazione e' una trasformazione conforme.

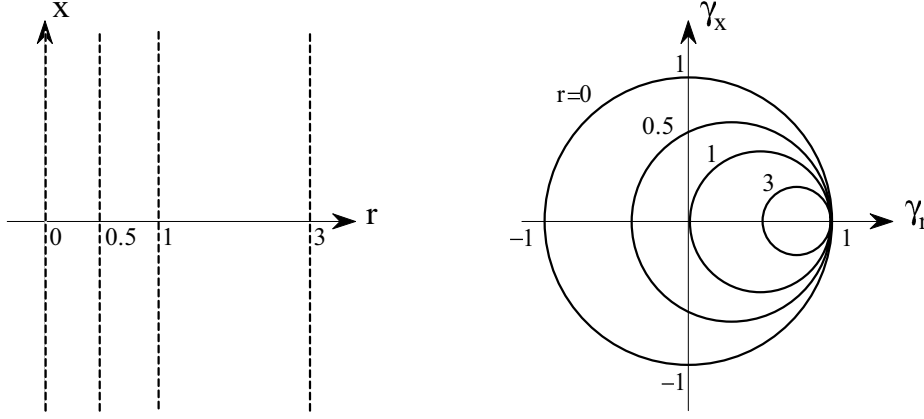


Figura 3.2: Trasformazione nel piano complesso del coefficiente di riflessione della parte reale dell'impedenza normalizzata.

$$r + r \gamma_r^2 - 2 r \gamma_r + r \gamma_x^2 = 1 - \gamma_r^2 - \gamma_x^2, \quad (3.7)$$

$$\gamma_r^2 (1 + r) + \gamma_x^2 (1 + r) - 2 r \gamma_r = 1 - r, \quad (3.8)$$

$$\gamma_r^2 + \gamma_x^2 - 2 \frac{r}{1+r} \gamma_r = \frac{1-r}{1+r}. \quad (3.9)$$

Sommando ad entrambi i membri la quantita' $(r/[1+r])^2$, l'ultima espressione risulta:

$$\left(\gamma_r - \frac{r}{1+r} \right)^2 + \gamma_x^2 = \left(\frac{1}{1+r} \right)^2, \quad (3.10)$$

che, nel piano (γ_r, γ_x) , rappresenta l'equazione di una famiglia di circonferenze con centro nel punto $(r/[1+r], 0)$ e raggio $1/[1+r]$. Cio' comporta che ogni retta parallela all'asse immaginario del piano complesso (r, x) , corrispondente ad uno specifico valore della parte reale dell'impedenza normalizzata, e' trasformata nel piano complesso (γ_r, γ_x) in una circonferenza passante per il punto $(1,0)$ con centro appartenente all'asse reale (Fig. 3.2). Se invece si eguagliano le parti immaginarie dell'eq (3.4) dovra' essere verificata la relazione:

$$x = \frac{2\gamma_x}{(1 - \gamma_r)^2 + \gamma_x^2}, \quad (3.11)$$

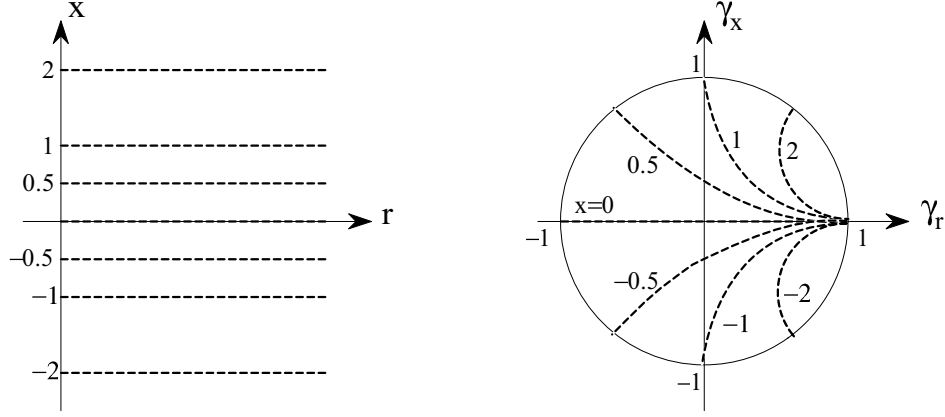


Figura 3.3: Trasformazione nel piano complesso del coefficiente di riflessione della parte immaginaria dell'impedenza normalizzata.

o equivalentemente:

$$x(1 - \gamma_r)^2 + x\gamma_x^2 = 2\gamma_x, \quad (3.12)$$

$$x + x\gamma_r^2 - 2x\gamma_r + x\gamma_x^2 = 2\gamma_x, \quad (3.13)$$

$$\gamma_r^2 + \gamma_x^2 - 2\gamma_r - \frac{2}{x}\gamma_x + 1 = 0. \quad (3.14)$$

Sommando ad entrambi i membri la quantita' $(1/x^2)$ l'ultima espressione risulta:

$$\left(\gamma_r - 1\right)^2 + \left(\gamma_x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (3.15)$$

che, nel piano (γ_r, γ_x) , rappresenta l'equazione di una famiglia di circonferenze con centro nel punto $(1, 1/x)$ e raggio $1/x$. Percio' ogni retta parallela all'asse reale del piano complesso (r, x) , corrispondente ad uno specifico valore della parte immaginaria dell'impedenza normalizzata, e' trasformato nel piano complesso (γ_r, γ_x) in una circonferenza, passante per il punto $(1, 0)$, con centro appartenente ad una retta passante per il punto $(1, 0)$ e parallela all'asse immaginario (Fig. 3.3). La condizione di carico passivo impone inoltre che il modulo del coefficiente di riflessione risulti minore o al piu' uguale all'unita', per cui le circonferenze a $x = \cos t$ saranno limitate dalla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Combinando insieme le due

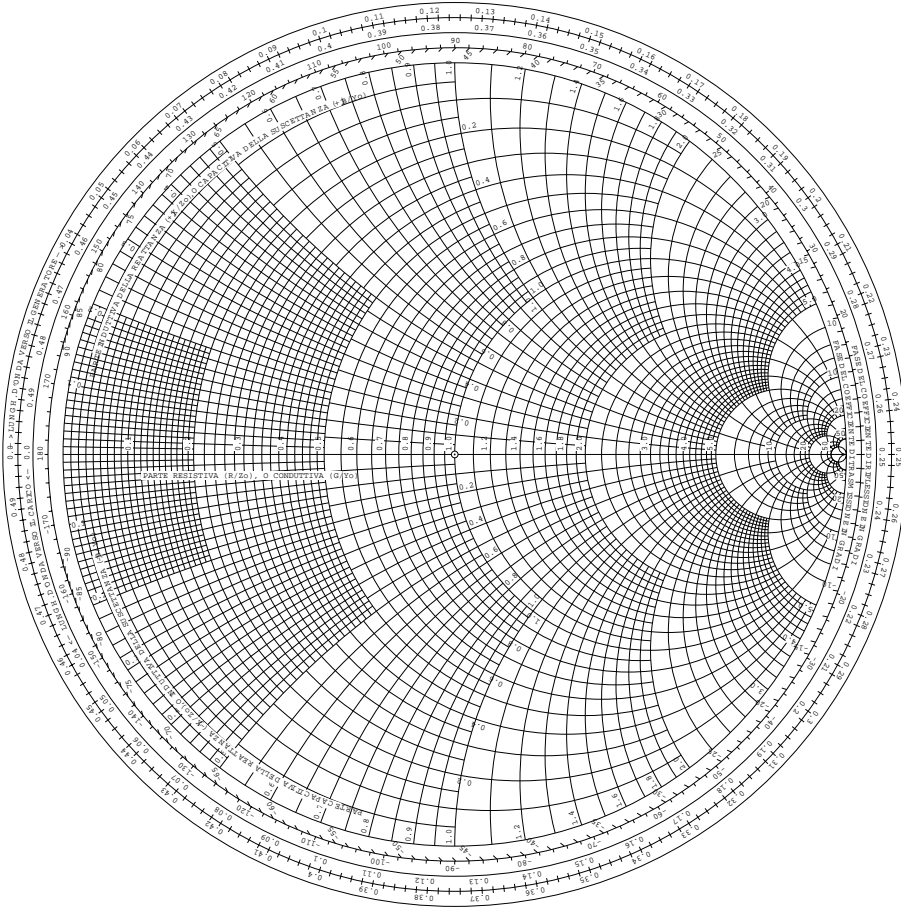


Figura 3.4: La carta di Smith.

famiglie di circonferenze si ottiene la carta di Smith (C.d.S.) che fornisce una corrispondenza biunivoca tra i valori dell'impedenza normalizzata e i valori del coefficiente di riflessione di tensione (Fig. 3.4). Per come e' stata costruita la C.d.S. e' evidente che l'asse γ_r corrisponde al cerchio $x = 0$, per cui tutti i punti appartenenti a tale asse rappresentano un carico puramente resistivo. Nel semispazio superiore giacciono tutte le circonferenze con $x > 0$ e in tale semispazio sono localizzati tutti i carichi che presentano una parte induttiva. Nel semispazio inferiore giacciono invece tutte le circonferenze con $x < 0$, caratteristiche di carichi che presentano una parte capacitiva.

Per quanto riguarda le circonferenze a $r = \text{cost}$ si puo' notare che tutti i carichi che presentano una parte resistiva maggiore dell'impedenza caratteristica della linea R_0 sono localizzati all'interno del cerchio $r = 1$ che risulta passante per l'origine del piano complesso del coefficiente di riflessione. Il

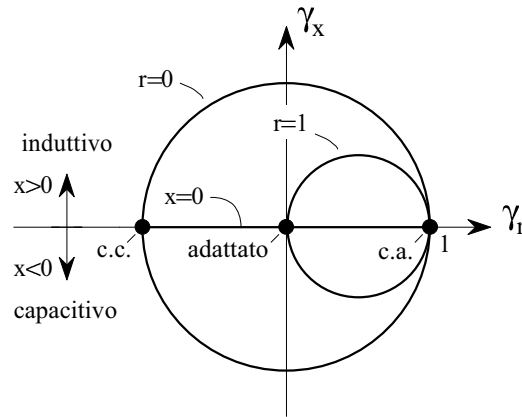


Figura 3.5: Punti caratteristici sulla carta di Smith.

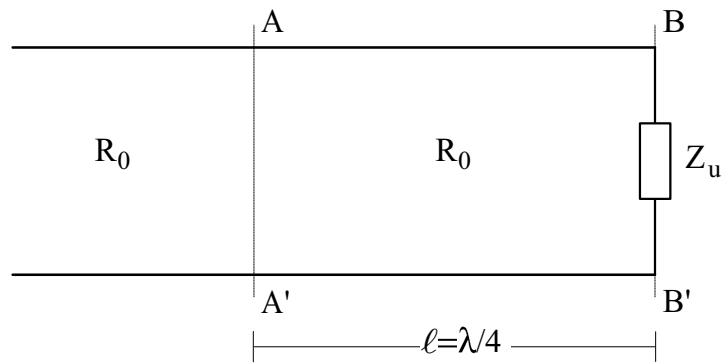


Figura 3.6: Geometria del problema relativa all'esercizio 3.1.

cerchio $r = 0$, centrato nell'origine, rappresenta invece il luogo dei punti dei carichi puramente reattivi. Sulla C.d.S. si possono anche individuare i punti caratteristici di un corto circuito ($r = 0, x = 0$), di un circuito aperto ($r = 0, x = -\infty$) e di un carico adattato ($r = 1, x = 0$), in cui cioè la linea risulta chiusa sulla propria impedenza caratteristica, così come mostrato in Fig. 3.5.

Esercizio 3.1 Per la linea descritta in Fig. 3.6, si valuti sia il coefficiente di riflessione di tensione sul carico che il valore dell'impedenza alla sezione AA' facendo uso della C.d.S.. ($R_0 = 50 \Omega$, $Z_u = 150 - j100 \Omega$).

Come primo passo sarà necessario determinare l'impedenza normalizzata

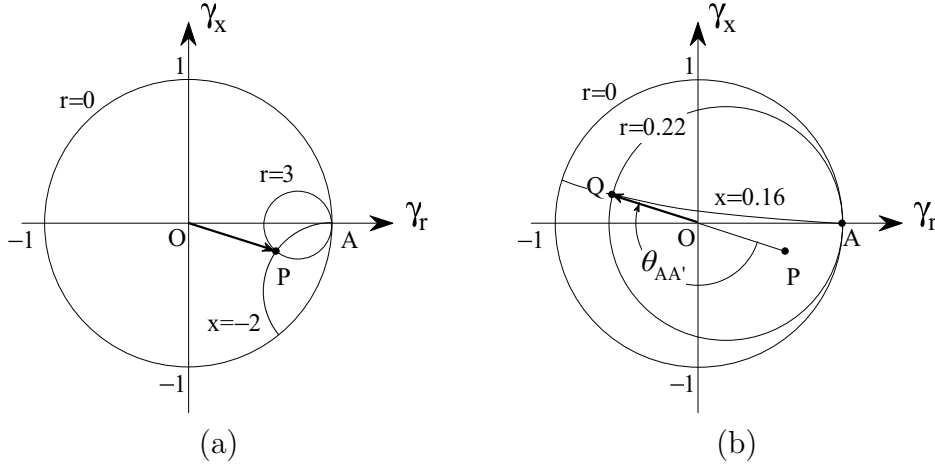


Figura 3.7: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.1.

della linea in corrispondenza del carico

$$Z_n(0) = \frac{Z_u}{R_0} = \frac{150 - j100}{50} = 3 - j2,$$

per poi individuare sulla C.d.S. il punto P , intersezione delle due circonferenze a $r = 3$ e a $x = -2$ (Fig. 3.7a). Tale punto P rappresenta anche il coefficiente di riflessione di tensione nel piano complesso (γ_r, γ_x) e quindi il segmento \overrightarrow{OP} rappresenta il modulo del coefficiente di riflessione di tensione. Tuttavia, al fine di valorizzare tale modulo, la lunghezza del segmento \overrightarrow{OP} dovrà essere rapportata a quella del segmento \overrightarrow{OA} che rappresenta il coefficiente di riflessione di tensione unitario. In particolare, per i dati del problema si ottiene

$$|\Gamma(0)| = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA}} \simeq 0.63,$$

$$\arg \{\Gamma(0)\} = \theta \simeq -0.1\pi.$$

Nel primo capitolo si è dimostrato che qualora ci si muove lungo la linea di una distanza ℓ nella direzione del generatore il vettore rappresentante il coefficiente di riflessione ruota, in senso orario, di un angolo $\theta = -2\beta\ell$. Nel problema in analisi, la sezione AA' è posta ad una distanza $\ell = 0.25\lambda$ dal carico quindi spostarsi dal carico alla sezione AA' equivale a ruotare il vettore \overrightarrow{OP} di un angolo

$$\theta_{AA'} = -2\beta\ell = -2\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0.25\lambda = -\pi.$$

Ruotando tale vettore in senso orario di un angolo $\theta_{AA'}$ si individua un punto Q simmetrico al punto P rispetto all'origine O rappresentativo del coefficiente di riflessione alla sezione AA' (Fig. 3.7b). Tale punto Q risulta l'intersezione della circonferenza a resistenza normalizzata costante $r = 0.22$ con quella a reattanza normalizzata costante $x = 0.16$. Ne deriva che nella sezione AA' l'impedenza normalizzata della linea risulta

$$Z_n(\ell) = 0.22 + j0.16 \Omega$$

e quindi, denormalizzando, l'impedenza della linea a tale sezione e'

$$Z(\ell) = Z_n(\ell)R_0 = 11 + j8 \Omega.$$

□

Dall'esercizio precedente appare evidente che spostarsi lungo una linea supposta priva di perdite per un tratto ℓ in direzione del generatore equivale a ruotare il fasore del coefficiente di riflessione in senso orario di un angolo $2\beta\ell = 4\pi\ell/\lambda$. In senso antiorario qualora ci si sposti verso il carico. Al fine di facilitare la rotazione la C.d.S. presenta quindi una scala calibrata in termini di lunghezza d'onda intorno al perimetro circolare esterno. Poiche' spostarsi lungo la linea di un tratto $\ell = 0.5\lambda$ equivale a compiere un giro completo della C.d.S., comportamento che esprime la periodicit  del coefficiente di riflessione e dell'impedenza normalizzata lungo la linea, la scala copre solo l'intervallo $(0, 0.5)\lambda$.

Sulla carta di Smith e' possibile leggere anche il rapporto d'onda stazionaria (ROS); infatti si era gia' dimostrato come $|Z(z)|_{max} = R_0(ROS)$ da cui ne deriva che

$$(ROS) = \frac{|Z(z)|_{max}}{R_0} = r_{max}, \quad (3.16)$$

cioe' che il valore del rapporto d'onda stazionario coincide con il massimo valore della resistenza normalizzata della linea che si incontra muovendosi su di essa. Ora, nel caso di linea senza perdite, muoversi lungo la linea equivale a ruotare su una circonferenza centrata nell'origine avente raggio pari al modulo del coefficiente di riflessione. Il valore del (ROS) potra' essere quindi calcolato leggendo il valore della piu' piccola circonferenza a resistenza costante intersecante la circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante. La circonferenza cercata risulta tangente a quest'ultima e quindi facilmente individuabile sulla C.d.S.. Si noti come nella figura 3.8 il punto M di tangenza appartenga all'asse reale del piano complesso del coefficiente

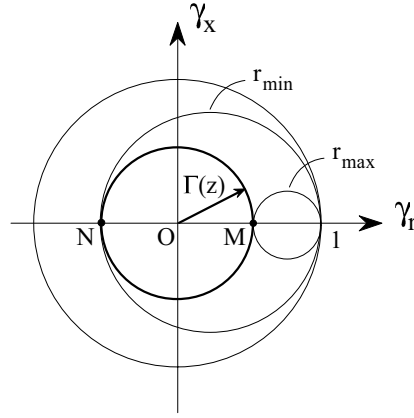


Figura 3.8: Massimo e minimo di tensione sulla carta di Smith.

di riflessione e corrisponda ad un massimo di tensione (minimo di corrente). In posizione simmetrica ad esso rispetto all'origine e' inoltre individuabile il punto N che rappresenta un minimo di tensione (massimo di corrente) e corrisponde al minimo modulo dell'impedenza normalizzata lungo la linea:

$$r_{min} = \frac{R_0}{|Z(z)|_{min}} = \frac{1}{(ROS)}. \quad (3.17)$$

Esercizio 3.2 Si valuti il modulo del coefficiente di riflessione ed il rapporto d'onda stazionaria per una linea priva di perdite di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ chiusa su un carico avente impedenza $Z_u = 100 + j75 \Omega$.

Si calcoli in primo luogo l'impedenza normalizzata del carico

$$Z_n(0) = \frac{Z_u}{R_0} = 2 + j1.5.$$

Cio' permette di individuare il punto P sulla C.d.S., intersezione dei cerchi a $r = 2$ e $x = 1.5$ (Fig. 3.9). La misura del segmento \overrightarrow{OP} rapportata a quella del segmento \overrightarrow{OA} fornira' il valore del modulo del coefficiente di riflessione:

$$|\Gamma(0)| = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA}} \simeq 0.53.$$

Per valutare il ROS sara' sufficiente muoversi sulla circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante fino ad intersecare l'asse reale positivo ($\gamma_r > 0$), individuando cosi' il punto M , per poi leggere il valore del cerchio a resistenza normalizzata costante passante per il punto M ($r = 3.3$). Il valore del rapporto d'onda stazionaria coincidera' con il valore di tale resistenza normalizzata, quindi: $ROS = 3.3$. \square

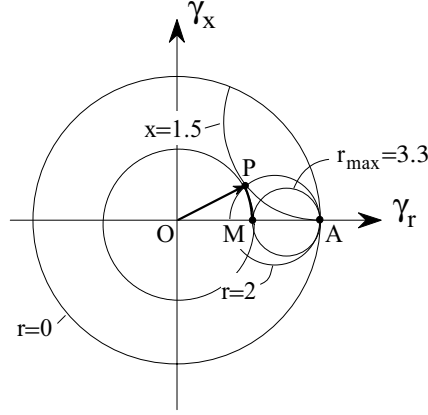


Figura 3.9: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.2.

Esercizio 3.3 *Si consideri una linea priva di perdite di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ chiusa su un carico passivo avente impedenza Z_u incognita. Tramite una serie di misure si perviene alla conoscenza che $ROS = 2$ ed il primo minimo di tensione è localizzato ad una distanza $\ell = \lambda/10$ dal carico. Si determini il valore del carico Z_u incognito.*

La conoscenza del ROS permette di individuare sulla C.d.S. il punto M , intersezione tra il cerchio a $r = 2$ e l'asse reale γ_r , e quindi disegnare il cerchio a modulo del coefficiente di riflessione costante come quel cerchio con centro nell'origine O passante per il punto M (Fig. 3.10).

Il punto N sulla C.d.S. caratteristico della sezione in cui è misurato il minimo di tensione dovrà quindi appartenere a tale circonferenza e risultare anche simmetrico del punto M rispetto all'origine. Tale punto N individuerà altresì l'impedenza normalizzata che la linea presenta ad una sezione posta a $\ell = \lambda/10$ dal carico. Per valutare l'impedenza Z_u del carico sarà quindi necessario spostarsi da tale sezione sul carico, cioè ruotare, a partire dal punto N , in senso antiorario sulla circonferenza a modulo del coefficiente costante per

$$2\beta\ell = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{10} = 2\pi/5 \text{ rad}.$$

Si viene così ad individuare un punto P nel quale si intersecano le circonferenze $r = 0.68$ e $x = -0.48$. L'impedenza del carico risulterà quindi pari a:

$$Z_u = Z_n(0) R_0 = (0.68 - j0.48) \cdot 50 \simeq 34 - j24 \Omega$$

□

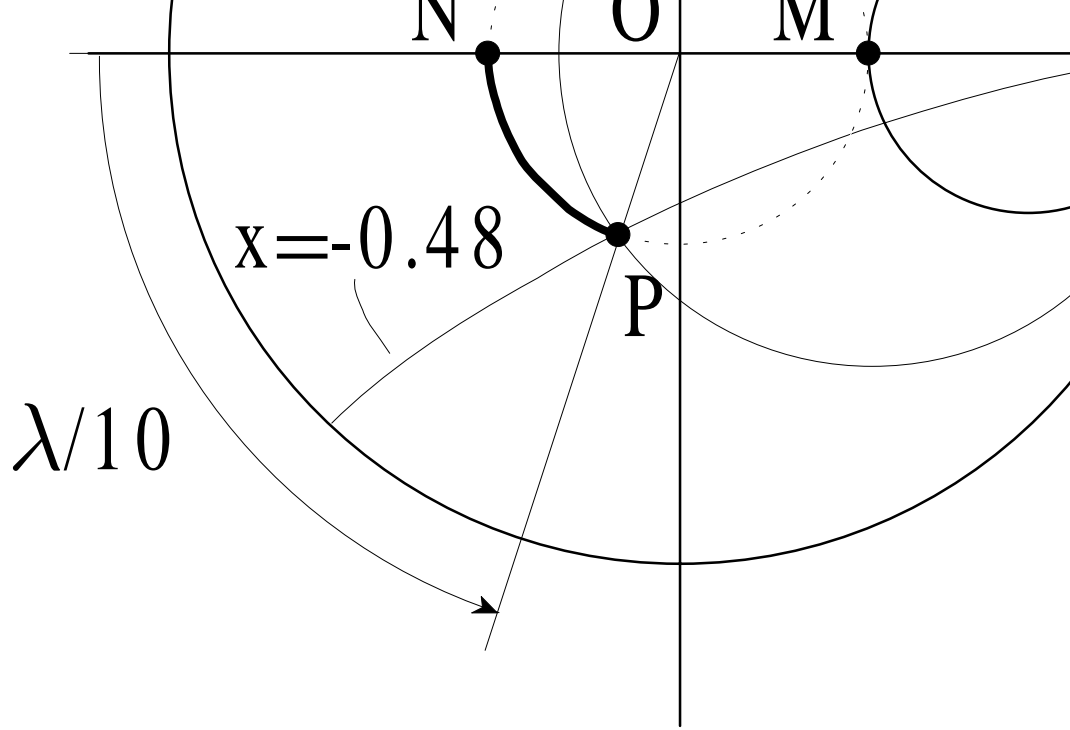


Figura 3.10: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.3.

3.2 Carta di Smith letta in termini di ammettenza

Spesso nelle applicazioni pratiche si deve studiare una linea di trasmissione cui è posta in parallelo una altra linea di trasmissione o una impedenza concentrata. In tal caso è sicuramente più conveniente lavorare in termini di ammettenza in quanto l'ammettenza equivalente dovuta al parallelo di due ammettenze è data dalla semplice somma algebrica dei valori di tali ammettenze.

Analogamente all'impedenza normalizzata si può ora definire una ammettenza normalizzata

$$Y_n(z) = \frac{1}{Z_n(z)} = \frac{R_0}{Z(z)} = g + jb \quad (3.18)$$

che può essere espressa in funzione del coefficiente di riflessione di tensione tramite la relazione:

$$Y_n(z) = \frac{1}{Z_n(z)} = \frac{1 - \Gamma(z)}{1 + \Gamma(z)}. \quad (3.19)$$

Introducendo il coefficiente di riflessione di corrente $\Gamma_I(z) = \gamma_g + j\gamma_b$, legato a quello di tensione dalla relazione $\Gamma_I(z) = -\Gamma(z)$, l'espressione (3.19) può essere scritta nella forma

$$Y_n(z) = \frac{1 + \Gamma_I(z)}{1 - \Gamma_I(z)}, \quad (3.20)$$

forma che risulta uguale a quella della relazione (3.3) a meno di scambiare tra loro i simboli $Z_n \leftrightarrow Y_n$ e $\Gamma \leftrightarrow \Gamma_I$. Quindi, analogamente a quanto fatto

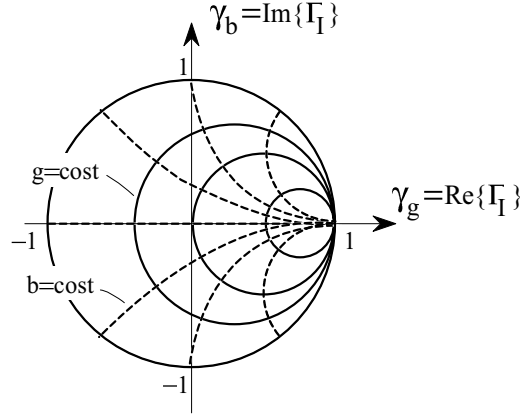


Figura 3.11: Carta di Smith letta in termini di ammettenza

per l'impedenza normalizzata ed il coefficiente di riflessione di tensione, e' possibile costruire una carta di Smith che lega l'ammettenza normalizzata al coefficiente di riflessione di corrente (Fig. 3.11). In particolare si otterranno le stesse famiglie di circonferenze: queste, invece di essere associate alla resistenza normalizzata r e alla reattanza normalizzata x , rappresentano, rispettivamente, la conduttanza normalizzata g e la suscettanza normalizzata b . Nello stesso tempo gli assi di riferimento rappresentano la parte reale ed immaginaria del coefficiente di riflessione di corrente $\Gamma_I(z) = \gamma_g + j\gamma_b$.

Esercizio 3.4 *Su una linea di trasmissione priva di perdite avente impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ si misura, a distanza $\ell = 0.2 \lambda$ dal carico, un coefficiente di riflessione di tensione pari a 0.5. Si determini l'ammettenza del carico su cui e' chiusa la linea (Fig. 3.12).*

Il coefficiente di riflessione di corrente alla sezione BB' , distante 0.2λ dal carico, risulta

$$\Gamma_I(\ell) = -\Gamma(\ell) = -0.5 = 0.5 \exp(j\pi).$$

E' quindi possibile individuare sulla C.d.S. letta in termini di ammettenza un punto B, rappresentativo del coefficiente di riflessione $\Gamma_I(\ell)$ ed appartenente all'asse reale, in cui si intersecano le circonferenze $g = 0.34$ e $b = 0$ (Fig. 3.12). Spostandosi lungo la linea dalla sezione BB' al carico, il punto B ruoterà sulla C.d.S. in senso antiorario fino a raggiungere il punto A. Tale punto individuerà le circonferenze $g = 1.7$ e $b = -1.3$ rappresentative dell'ammettenza normalizzata del carico. Ne segue che, denormalizzando rispetto all'ammettenza caratteristica della linea $G_0 = 1/R_0$, l'impedenza del

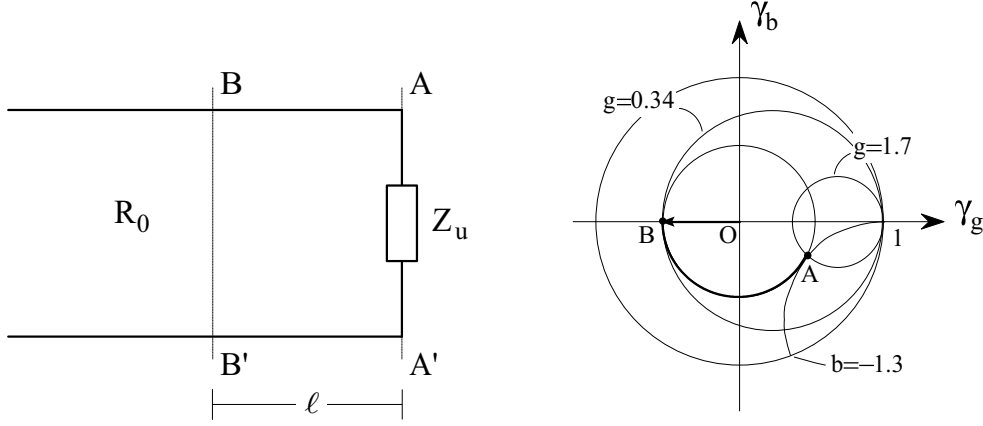


Figura 3.12: Geometria del problema e carta di Smith relative all'esercizio 3.4.

carico risulta:

$$Y_u = (g + jb)G_0 = \frac{g + jb}{R_0} = \frac{1.7 - j1.3}{50} = 0.034 - j0.026 \Omega^{-1}.$$

□

Sara' ora nostro obiettivo calcolare in modo grafico il valore dell'ammittenza normalizzata Y_n a partire dalla conoscenza dell'impedenza normalizzata Z_n . A tal fine si supponga di aver individuato sulla C.d.S, letta in termini di impedenza, un punto P caratteristico dell'impedenza normalizzata Z_n . Tale punto P individua un particolare valore del coefficiente di riflessione di tensione $\Gamma(P)$ a cui il corrispondente coefficiente di riflessione di corrente e' legato dalla relazione

$$\Gamma_I(P) = -\Gamma(P) = \Gamma(P) \exp(j\pi). \quad (3.21)$$

Quindi se si volesse rappresentare tale punto P nel piano complesso del coefficiente di riflessione di corrente questo risulterebbe ruotato di un angolo π rispetto a quello individuato nel piano complesso del coefficiente di riflessione di tensione. Cio' corrisponde ad individuare un punto P' simmetrico del punto P rispetto all'origine del piano dei fasori. Quindi ad un punto P , rappresentativo di una impedenza Z_n sulla C.d.S. letta in termini di impedenza, corrisponde, sulla C.d.S. letta in termini di ammettenza, un punto P' , simmetrico al punto P rispetto al centro della carta, rappresentativo dell'ammittenza normalizzata $Y_n = 1/Z_n$.

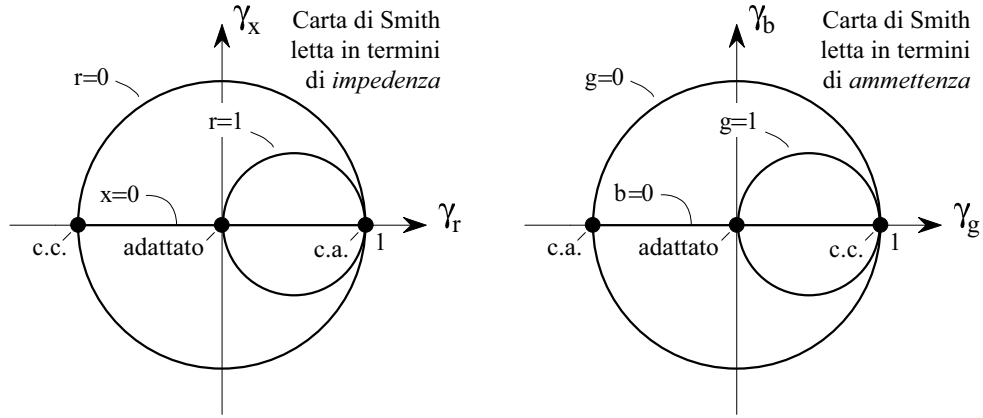


Figura 3.13: Posizione dei punti caratteristici nella carta di Smith letta in termini di impedenza (a sinistra) e in termini di ammettenza (a destra).

Si noti come sulla C.d.S. letta in termini di ammettenza il punto caratteristico di un corto circuito risulti ora coincidente con il punto $(1,0)$ del piano del coefficiente di riflessione di corrente, mentre il punto caratteristico di un circuito aperto è localizzato nel punto $(-1,0)$. Tali punti risultano cioè simmetrici rispetto all'origine degli analoghi punti già individuati sulla C.d.S. letta in termini di impedenza (Fig. 3.13). Nello stesso modo l'asse $\gamma_g > 0$ individua il luogo dei punti in cui si misura un minimo di tensione (massimo di corrente) lungo la linea, mentre l'asse $\gamma_g < 0$ il luogo dei punti in cui si ha un massimo di tensione (minimo di corrente).

Esercizio 3.5 *Si valuti l'impedenza del carico nel caso dell'esercizio precedente.*

Per valutare l'impedenza del carico è necessario individuare sulla C.d.S. il punto P simmetrico rispetto all'origine O del punto A già localizzato nell'esercizio precedente. Se si legge la C.d.S. in termini di impedenza il punto P è rappresentativo dell'impedenza normalizzata del carico, per cui per ottenere il valore dell'impedenza del carico è sufficiente individuare le due circonferenze $r = 0.37$ e $x = 0.29$ che si intersecano nel punto P e quindi denormalizzare rispetto all'impedenza caratteristica R_0 della linea:

$$Z_u = (r + jx)R_0 = (0.37 + j0.29)50 = 18.5 + j14.5 \Omega.$$

□

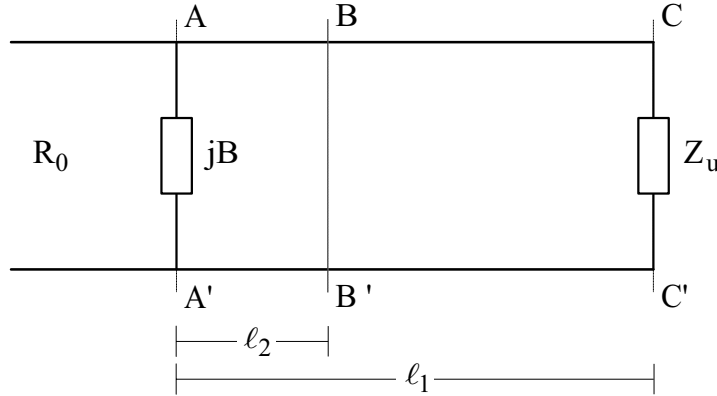


Figura 3.14: Geometria del problema relativa all'esercizio 3.6.

Esercizio 3.6 *Nel circuito schematizzato in Fig. 3.14, in cui la linea di trasmissione è costituita da un cavo coassiale privo di perdite, non è presente alcuna onda riflessa a sinistra della sezione AA' per una frequenza di lavoro pari a $f = 100 \text{ MHz}$. Spostandosi dalla sezione AA' verso il carico si misura un minimo di tensione alla sezione BB'. In tali ipotesi si determini sia il valore della costante dielettrica relativa ε_r del cavo che il valore del carico incognito. ($\ell_1 = 55 \text{ cm}$, $\ell_2 = 16.2 \text{ cm}$, $B = -0.01 \Omega^{-1}$, $R_0 = 100 \Omega$).*

Poiché a sinistra della sezione AA' non è presente alcuna onda riflessa, a tale sezione il circuito presenta una ammettenza equivalente uguale all'ammettenza caratteristica della linea, cioè $Y_{AA'} = G_0 = 1/R_0$. L'ammettenza $Y_{AA'}$ è data dal parallelo tra la suscettanza B e l'ammettenza equivalente Y_s , relativa allo spezzone di linea di lunghezza ℓ_1 chiuso sul carico Z_u . Considerando le relative ammettenze normalizzate dovrà quindi risultare

$$Y_{AA'_n} = \frac{Y_{AA'}}{G_0} = 1 = jB_n + Y_{s_n},$$

dove $B_n = B/G_0 = -0.01 \cdot 100 = -1$ e $Y_{s_n} = Y_s/G_0$. Dalla precedente relazione segue che

$$Y_{s_n} = 1 - jB_n = 1 + j,$$

per cui il tratto di linea di lunghezza ℓ_1 , chiuso sul carico Z_u incognito, è rappresentato sulla C.d.S letta in termini di ammettenza dal punto A intersezione delle curve $g = 1$, $b = 1$ (Fig. 3.15a). Spostarsi lungo la linea dalla sezione AA' alla sezione BB', in cui si incontra un minimo di tensione, equivale a percorrere in senso antiorario la circonferenza a modulo del

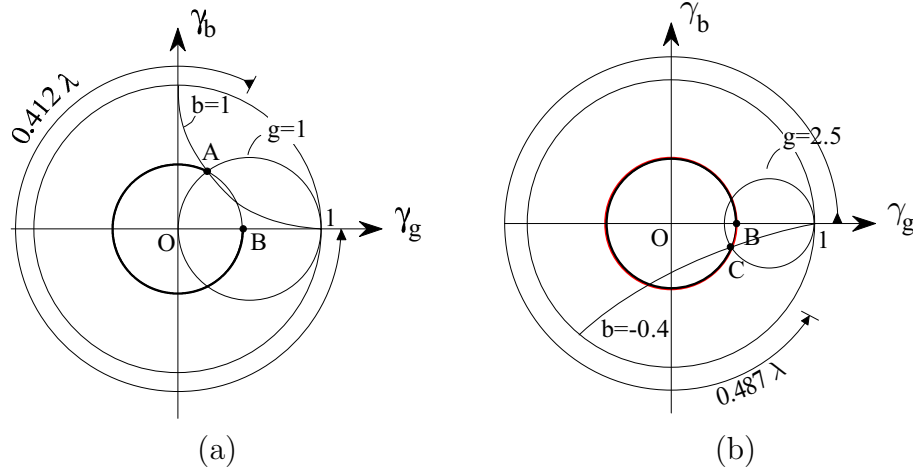


Figura 3.15: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.6.

coefficiente di riflessione costante passante per il punto A fino ad intersecare l'asse reale positivo $\gamma_g > 0$ del coefficiente di riflessione di corrente; i punti di tale asse infatti sono rappresentativi dei minimi di tensione lungo la linea. Si individua così sulla C.d.S. il punto B . Nello spostarsi dal punto A al punto B si percorre la C.d.S. per una distanza $\ell_2 = 0.412 \lambda$ da cui

$$\lambda = \frac{\ell_2}{0.412} = \frac{0.162}{0.412} \simeq 0.393 \text{ m}.$$

Supponendo che nel cavo coassiale si propaghi un modo TEM e che il materiale che separa i conduttori sia un materiale dielettrico, la velocità di fase risulta $v_f = c/\sqrt{\varepsilon_r}$, per cui

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{v_f^2} = \frac{c^2}{\lambda^2 f^2} \simeq \left[\frac{300 \cdot 10^6}{0.393 \cdot 100 \cdot 10^6} \right]^2 \simeq 58.3.$$

Per determinare l'impedenza del carico Z_u è sufficiente ruotare sulla C.d.S. in senso antiorario di $([\ell_1 - \ell_2]/\lambda)\lambda = ([0.55 - 0.162]/0.393)\lambda \simeq 0.987 \lambda$, a partire dal punto B . Ciò equivale a percorrere un giro completo della C.d.S. (pari a 0.5λ) più un tratto pari a 0.487λ ed individuare il punto C in cui si intersecano le circonferenze $g = 2.5$, $b = -0.4$ (Fig. 3.15b). Poiché però siamo interessati a calcolare l'impedenza del carico è conveniente individuare il punto C' simmetrico del punto C rispetto all'origine e leggere la C.d.S. in termini di impedenza (Fig. 3.16). Nel punto C' si intersecano le circonferenze a $r = 0.39$ e $x = 0.06$ per cui:

$$Z_u = (r + jx)R_0 = (0.39 + j0.06) \cdot 100 = 39 + j6 \Omega.$$

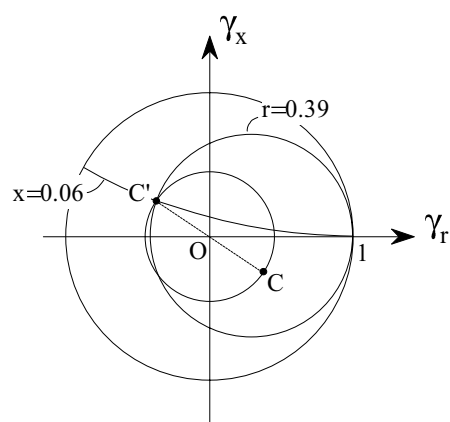


Figura 3.16: Carta di Smith relativa all'esercizio 3.6.

□

Capitolo 4

Il problema dell'adattamento

Il problema consiste nel collegare un carico di impedenza Z_u ad un generatore di impedenza interna Z_g tramite una linea di trasmissione supposta priva di perdite, di impedenza caratteristica R_0 , ottenendo il massimo trasferimento di potenza (Fig. 4.1). Se Z_{in} e' l'impedenza che la linea chiusa sul carico Z_u presenta all'ingresso del generatore (Sez. AA'), la potenza fornita dal generatore al carico risulta massima qualora si verifichi la condizione¹:

$$Z_{in} = Z_g^* . \quad (4.1)$$

¹La potenza attiva fornita dal generatore all'impedenza $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ risulta

$$P_a = \frac{1}{2} |V_g|^2 R_{in} / |Z_g + Z_{in}|^2 = \frac{1}{2} |V_g|^2 R_{in} / [(R_g + R_{in})^2 + (X_g + X_{in})^2] .$$

E' evidente che al variare di X_{in} essa risultera' massima per $X_{in} = -X_g$ e sara' pari a

$$P_a|_{X_{in}=-X_g} = \frac{1}{2} |V_g|^2 R_{in} / (R_g + R_{in})^2 .$$

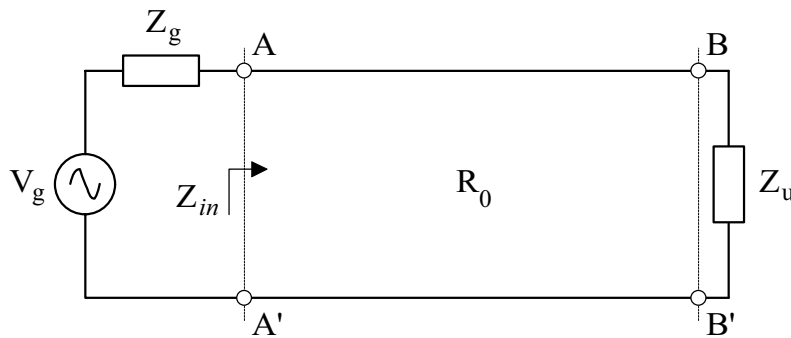


Figura 4.1: Schema del collegamento di un generatore reale ad un carico tramite una linea di trasmissione.

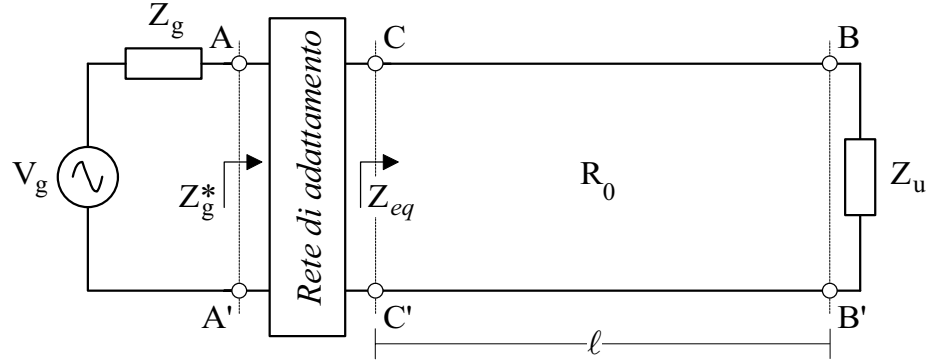


Figura 4.2: Possibile posizionamento della rete di adattamento.

In tal caso si ha il massimo trasferimento di potenza e si dice che è realizzata la condizione di adattamento.

In generale tuttavia una linea chiusa su un generico carico Z_u presenta, alla sezione AA' , una impedenza $Z_{in} \neq Z_g^*$ per cui si rende necessario inserire lungo la linea degli opportuni dispositivi, comunemente chiamati reti di adattamento, capaci di assicurare il richiesto valore di impedenza all'ingresso del generatore.

Si vuole ora discutere il posizionamento lungo la linea di una o più reti di adattamento in relazione ai vantaggi e svantaggi che ciò comporta, rimandando la descrizione del funzionamento di tali dispositivi ai paragrafi successivi.

In particolare una possibile configurazione è quella in cui la rete di adattamento è interposta tra il generatore e la linea di trasmissione ed agisce in modo tale che l'impedenza Z_{eq} che la linea presenta alla sezione CC' sia trasformata in una impedenza $Z_{in} = Z_g^*$ alla sezione AA' (Fig. 4.2). Tale configurazione ha il pregio di impiegare una sola rete di adattamento ma è sconsigliabile nel caso in cui la linea si possa ritenere lunga in termini di lunghezza d'onda. Ciò è dovuto principalmente al fatto che la rete di adattamento, per funzionare correttamente, deve essere posizionata ad una specifica distanza dal carico, distanza misurata in termini di lunghezza d'onda. Ora una piccola variazione nella frequenza operativa, dovuta ad esempio

Al variare di R_{in} si ottiene invece un massimo per

$$\left. \frac{dP_a}{dR_{in}} \right|_{R_{in}=R_g} = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{(R_{in} + R_g)^2 - 2R_{in}(R_g + R_{in})}{(R_g + R_{in})^4} = 0.$$

Poiché $R_{in} \in \mathbb{R}^+$ e $R_g \in \mathbb{R}^+$ l'ultima condizione sarà verificata per $R_{in} = R_g$.

al fatto che il segnale informativo presenta comunque una certa banda di frequenza, provoca una piccola variazione nella lunghezza d'onda λ e quindi nel valore della costante di propagazione $\beta = 2\pi/\lambda$. Se la rete di adattamento e' posta ad una distanza $\ell \gg \lambda$ la conseguente variazione della quantita' $\beta\ell$ puo' risultare una apprezzabile frazione di radiante e quindi modificare sensibilmente l'impedenza vista dal generatore attraverso la rete. Si supponga infatti che la rete di adattamento debba essere posizionata ad una ben determinata frazione δ della lunghezza d'onda dal carico. Poiche' alla generica frequenza di lavoro f_0 le quantita' in gioco sono periodiche di periodo λ_0 , la precedente ipotesi individuera' in realta' infinite sezioni poste a distanza d_0 dal carico, dove:

$$d_0 = \delta\lambda_0 + n\lambda_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Consideriamo ora una piccola variazione di frequenza $\Delta f \ll f_0$ a cui corrispondera' una piccola variazione della lunghezza d'onda $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. Alla nuova frequenza $f_1 = f_0 + \Delta f$, per un corretto funzionamento, sara' necessario posizionare la rete ad una distanza d_1 dal carico pari a:

$$d_1 = \delta\lambda_1 + n\lambda_1 = (\delta\lambda_0 + n\lambda_0) + \delta\Delta\lambda + n\Delta\lambda = d_0 + \delta\Delta\lambda + n\Delta\lambda. \quad (4.3)$$

La differenza tra le sezioni individuate alle due frequenze in gioco risultera' quindi:

$$d_1 - d_0 = \delta\Delta\lambda + n\Delta\lambda. \quad (4.4)$$

E' evidente come tale differenza risulta sempre piu' grande all'aumentare del valore intero n e come puo' diventare apprezzabile anche per $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ con $n \gg 1$. Cio' comporta che la rete di adattamento, anche nel caso in cui le variazioni di frequenza intorno a quella di lavoro siano molto piccole, non opera correttamente se posizionata a molte lunghezze d'onda ($n \gg 1$) dal carico.

Esercizio 4.1 *Per una linea in aria, priva di perdite, di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$, chiusa su un carico $Z_u = 100 \Omega$ e lunga $\ell = 10 \text{ m}$, si determini sia la variazione della sua lunghezza in termini di lunghezza d'onda per le frequenze di lavoro di $f_1 = 900 \text{ MHz}$ e di $f_2 = 910 \text{ MHz}$, sia l'impedenza che la linea presenta al suo ingresso relativamente alle due frequenze.*

Si valuti la lunghezza d'onda della linea alle due frequenze:

$$\lambda_1 = c/f_1 = 300 \cdot 10^6 / 900 \cdot 10^6 = 0.33333,$$

$$\lambda_2 = c/f_2 = 300 \cdot 10^6 / 910 \cdot 10^6 = 0.32967.$$

La variazione della lunghezza d'onda risulta

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = -3.6 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

mentre

$$\delta_1 = \ell/\lambda_1 = 10/0.33333 = 30.0,$$

$$\delta_2 = \ell/\lambda_2 = 10/0.32967 = 30.\bar{3},$$

da cui

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = 0.3333 = 1/3.$$

Pertanto una variazione della frequenza di lavoro di soli 10 MHz comporta una variazione della lunghezza della linea pari ad un terzo della lunghezza d'onda λ_1 , rispetto alla quale si sarebbe dimensionato un eventuale dispositivo di adattamento. Inoltre l'impedenza che la linea presenta al suo ingresso alle due diverse frequenze di lavoro risulta:

$$Z_1 = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \tan(\beta_1 \ell)}{R_0 + jZ_u \tan(\beta_1 \ell)} = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \tan(2\pi\delta_1)}{R_0 + jZ_u \tan(2\pi\delta_1)} = 100 \Omega,$$

$$Z_2 = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \tan(\beta_2 \ell)}{R_0 + jZ_u \tan(\beta_2 \ell)} = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \tan(2\pi\delta_2)}{R_0 + jZ_u \tan(2\pi\delta_2)} = 30.77 + j19.98 \Omega.$$

□

Un ulteriore svantaggio della configurazione analizzata e' dato dal fatto che, non risultando il carico adattato alla linea, nella linea e' presente una certa stazionarieta'. Anche se la potenza attiva che fluisce attraverso la linea e' tutta quella che il generatore puo' fornire, a causa della presenza di un'onda diretta ed una riflessa in alcune sezioni della linea si misurera' un valore della tensione e della corrente maggiore rispetto al caso in cui e' presente la sola onda diretta. Tale situazione riduce la massima potenza trasferibile dal generatore al carico in quanto ad un piu' elevato valore di tensione e' associata una maggiore ampiezza del campo elettrico e quindi una maggiore probabilita' di superare la rigidita' dielettrica del mezzo interposto tra i conduttori (cioe' di superare l'ampiezza massima del campo elettrico

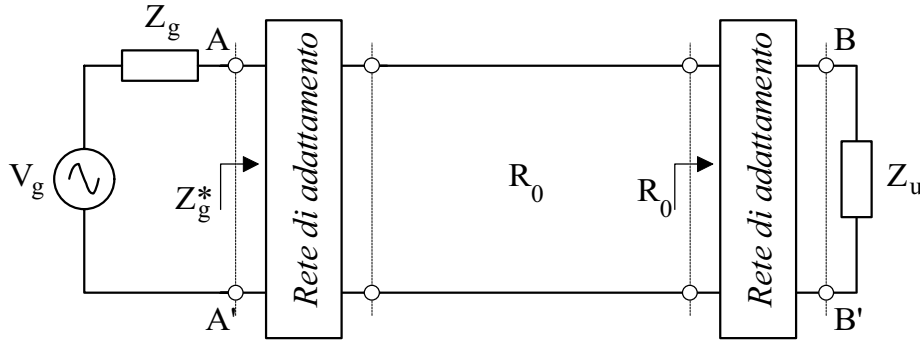


Figura 4.3: Posizionamento alternativo della rete di adattamento.

oltre la quale si ha una elevata probabilità di scarica elettrica nel mezzo). Inoltre, poiché le perdite per conducibilità nei conduttori della linea sono proporzionali al quadrato della corrente, sulla linea saranno presenti delle perdite maggiori rispetto al caso in cui nella linea sia presente la sola onda diretta.

Per superare tali limitazioni è possibile utilizzare una diversa configurazione di adattamento che coinvolge due reti di adattamento (Fig. 4.3). In particolare, una delle due reti è posizionata in prossimità del carico e ha il compito di adattare il carico alla linea mentre l'altra, con la funzione di adattare la linea al generatore, è posizionata in prossimità di quest'ultimo. Operando in tal modo non è presente onda riflessa lungo il tratto di linea compreso tra i due dispositivi di adattamento e sono perciò minimizzate le perdite nei conduttori e massimizzato il valore limite della potenza trasportabile dalla linea di trasmissione. Inoltre, in qualsiasi sezione la linea presenterà una impedenza equivalente pari alla propria impedenza caratteristica R_0 . Ciò assicura che all'ingresso del secondo dispositivo di adattamento si misurerà sempre la stessa impedenza R_0 qualunque sia la lunghezza della linea, lunghezza che quindi risulta ora del tutto arbitraria.

4.1 Adattamento tramite trasformatore in quarto d'onda

Il dispositivo permette di adattare un carico resistivo ad una linea priva di perdite tramite l'inserimento di uno spezzone di altra linea avente opportuna lunghezza ed impedenza caratteristica. Per non avere dissipazione di potenza tale spezzone di linea è costituito da un tratto di linea priva di perdite ed è quindi caratterizzato da una impedenza caratteristica R_1 reale ($R_1 \in \mathbb{R}^+$).

Si consideri ora il caso dell'adattamento di un carico Z_u ad una linea priva di perdite di impedenza caratteristica R_0 , che in seguito chiameremo linea principale. Nei paragrafi precedenti si era visto che una linea di impedenza caratteristica R_1 chiusa su un carico Z_u presenta, ad una distanza ℓ dal carico, una impedenza:

$$Z(\ell) = R_1 \frac{Z_u + jR_1 \tan(\beta_1 \ell)}{R_1 + jZ_u \tan(\beta_1 \ell)}, \quad (4.5)$$

dove $\beta_1 \in \mathbb{R}^+$ e' la costante di fase della linea di impedenza R_1 . Si puo' quindi pensare di dimensionare opportunamente la linea di impedenza R_1 in modo che questa presenti al suo ingresso una impedenza $Z(\ell) = R_0$, pari cioe' all'impedenza caratteristica della linea principale. Poiche' la linea principale e' supposta priva di perdite ($R_0 \in \mathbb{R}^+$) il secondo membro dell'eq. (4.5) deve risultare reale. Cio' si verifica se:

- $\tan(\beta \ell) = 0$

cioe' $\ell = n\lambda_1/2$ con $n = 0, 1, \dots$, dove $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1$ e' la lunghezza d'onda nel tratto di linea di impedenza R_1 . Da cio' deriva che per avere adattamento dovra' essere verificata la condizione $Z_u = R_0$. Tale soluzione non e' tuttavia utile ai fini dell'adattamento in quanto richiede che il carico sia gia' adattato alla linea. Essa esprime comunque una importante proprieta': l'inserimento di un tratto di linea, di impedenza R_1 arbitraria ma di lunghezza pari ad un multiplo della meta' della lunghezza d'onda misurata in essa, non altera il comportamento della linea principale qualsiasi sia il punto in cui essa e' inserita. Alcuni esempi di applicazione pratica di tale proprieta' saranno riportati piu' avanti.

- $\tan(\beta \ell) = \infty$

cioe' $\ell = \lambda_1/4 + n\lambda_1/2$ con $n = 0, 1, \dots$, dove $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1$ e' la lunghezza d'onda nel tratto di linea di impedenza R_1 . Da tale ipotesi deriva che per avere adattamento dovra' essere verificata la condizione

$$\frac{R_1^2}{Z_u} = R_0. \quad (4.6)$$

Si trattera' percio' di interporre tra il carico e la linea principale un tratto di una linea di trasmissione avente lunghezza $\lambda_1/4$ ed impedenza caratteristica $R_1 = \sqrt{R_0 Z_u} \in \mathbb{R}^+$. Si noti tuttavia che non e' possibile adattare direttamente un carico che presenta una impedenza complessa ($Z_u \in \mathbb{C}$) ma solo carichi di impedenza reale. Qualora l'impedenza del carico risulti

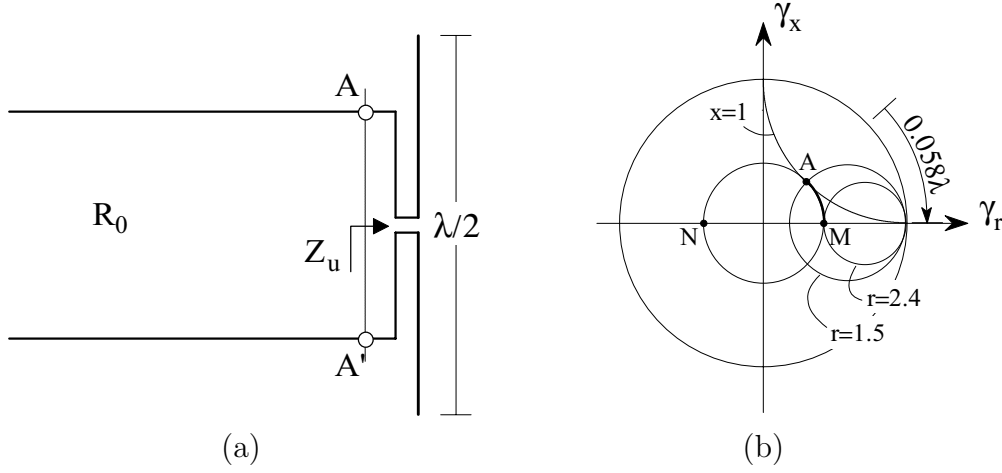


Figura 4.4: Geometria del problema relativa all'esercizio 4.2.

complessa e' necessario spostarsi opportunamente lungo la linea per individuare una sezione in cui l'impedenza risulta puramente reale e ivi applicare il trasformatore in quarto d'onda.

Esercizio 4.2 *Si adatti tramite un trasformatore in quarto d'onda un'antenna filare avente impedenza d'ingresso $Z_{in} = 75 + j50 \Omega$ ad una linea priva di perdite di impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ (Fig 4.4a).*

Risultando il carico Z_u complesso e' necessario individuare sulla linea una sezione in cui si misura una impedenza puramente reale ove applicare il trasformatore in quarto d'onda. A tal fine si puo' convenientemente utilizzare la C.d.S. letta in termini di impedenza (Fig 4.4b). Su tale carta l'impedenza normalizzata del carico,

$$Z_{u_n} = \frac{Z_u}{R_0} = \frac{75 + j50}{50} = 1.5 + j,$$

individua un punto A intersezione delle circonferenze $r = 1.5$, $x = 1$. Per valutare la sezione in cui la linea presenta una impedenza puramente resistiva si dovra' ruotare in senso orario sulla circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante passante per il punto A fino ad incontrare la circonferenza a $x = 0$. Cio' avverra' nel punto M che individua sulla linea una sezione BB' posta a 0.058λ dal carico (Fig. 4.5). Per il punto M passa la circonferenza $r = r_{max} = 2.4$ che coincide con il valore del ROS . Denormalizzando si ottiene il valore del carico resistivo che la linea presenta alla sezione BB'

$$R'_u = ROS R_0 = 2.4 \cdot 50 = 120 \Omega.$$

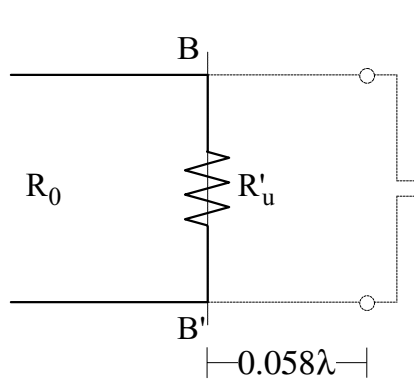
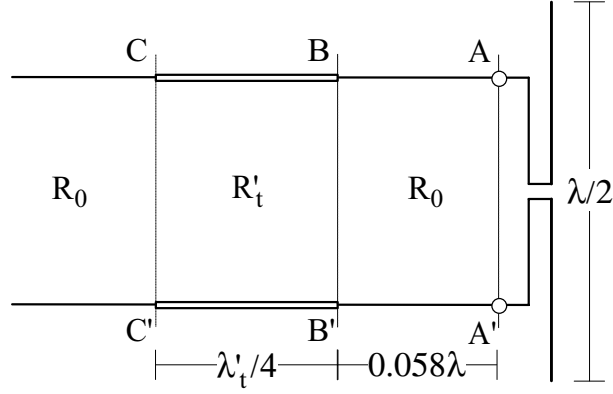
Figura 4.5: Circuito equivalente alla sez. BB' .

Figura 4.6: Possibile configurazione di adattamento tramite trasformatore in quarto d'onda.

E' quindi possibile inserire un tratto di linea di lunghezza $\lambda'_t/4$ (con λ'_t lunghezza d'onda nel tratto di linea con cui e' costruito il trasformatore) ed impedenza caratteristica

$$R'_t = \sqrt{R'_u R_0} = \sqrt{(R_0 ROS) R_0} = R_0 \sqrt{ROS} \simeq 77.5 \, \Omega,$$

come schematizzato in Fig. 4.6.

Oltre al punto M sarebbe possibile individuare sulla C.d.S. anche un punto N , caratteristico di una sezione DD' posta ad una distanza $\lambda/4$ dalla sezione BB' , in cui si misura una impedenza equivalente puramente reale. Tale punto corrisponde ad un minimo di tensione per cui l'impedenza

equivalente risulta

$$R_u'' = \frac{R_0}{ROS} = \frac{50}{2.4} \simeq 20.8 \Omega.$$

Per adattare il carico alla linea e' quindi possibile inserire, alla sezione DD' , un tratto di linea di lunghezza $\lambda_t''/4$ (con λ_t'' lunghezza d'onda nel tratto di linea con cui e' costruito il nuovo trasformatore) avente impedenza caratteristica

$$R_t'' = \sqrt{R_u'' R_0} = \sqrt{(R_0/ROS) R_0} = \frac{R_0}{\sqrt{ROS}} \simeq 32.3 \Omega.$$

Si noti come l'impedenza del trasformatore da porre nella sezione BB' , associata al punto M , risulti maggiore dell'impedenza caratteristica della linea principale mentre quella relativa al trasformatore da inserire nella sezione DD' , associata al punto N , risulti minore. Tale proprieta' e' generale e la scelta tra le due sezioni e' dettata da vantaggi costruttivi nella realizzazione del trasformatore. \square

4.2 Considerazioni sull'uso di un trasformatore in quarto d'onda

L'adattamento tramite trasformatore in quarto d'onda ha certamente lo svantaggio di richiedere la costruzione di linee di trasmissione di opportuna impedenza caratteristica. Tuttavia il problema maggiore risiede nel fatto che esso e' un dispositivo risonante, cioe' per funzionare correttamente la sua lunghezza deve essere pari a $\ell = \lambda/4$ (cioe' $\beta\ell = \pi/2$) e cio' si verifica alla sola frequenza di progetto. Si consideri ad esempio il caso dell'adattamento di un carico $R_u = 100 \Omega$ ad una linea $R_0 = 50 \Omega$ che impone una impedenza del trasformatore in quarto d'onda pari a $R_1 = \sqrt{R_u R_0} \simeq 70.7 \Omega$. In Fig. 4.7, in cui si riporta per il caso in esame l'andamento del modulo del coefficiente di riflessione al variare della frequenza, e' evidente come una piccola variazione dalla frequenza f_0 di progetto provochi un significativo incremento nell'ampiezza del coefficiente di riflessione. In generale si fissa un massimo valore ρ_m che puo' essere accettato relativamente allo specifico progetto e si definisce la banda di adattamento come la banda di frequenza entro la quale il modulo del coefficiente di riflessione e' minore di tale valore limite ρ_m .

Per allargare tale banda e' comunque possibile porre due o piu' trasformatori in quarto d'onda in cascata.

Si consideri ad esempio il caso di due trasformatori in quarto d'onda cosi' come schematizzato in Fig. 4.8. In questo caso l'impedenza alla sezione BB'

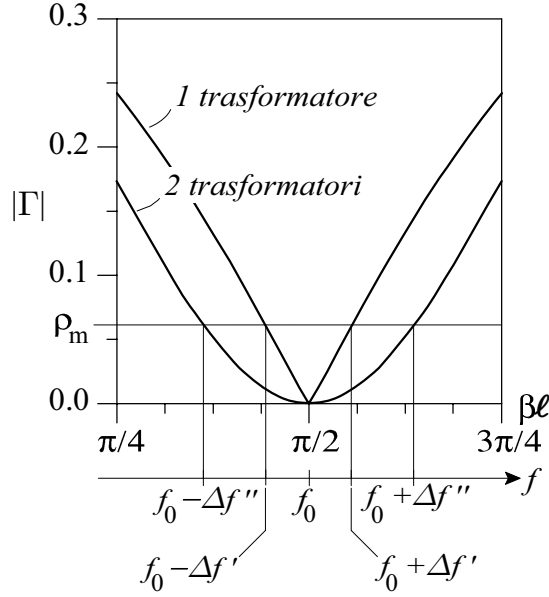


Figura 4.7: Modulo del coefficiente di riflessione al variare della frequenza.

dovrà risultare reale ma il suo valore è del tutto arbitrario. Infatti con il primo dispositivo è possibile trasformare il valore dell'impedenza del carico in una generica impedenza $R_{BB'}$ per poi riportarla al valore dell'impedenza caratteristica R_0 della linea principale con il secondo trasformatore. Una possibile scelta è quella per cui $R_{BB'} = \sqrt{R_u R_0} = 70.7 \Omega$. In tal caso:

$$R_1 = \sqrt{R_u R_{BB'}} \simeq 84.1 \Omega, \quad (4.7)$$

$$R_2 = \sqrt{R_{BB'} R_0} \simeq 59.4 \Omega. \quad (4.8)$$

Con riferimento alla Fig. 4.7), si può notare come nel caso dell'esempio, con l'impiego di due trasformatori in quarto d'onda, la banda di frequenza per un prefissato ρ_m risulti praticamente raddoppiata.

4.3 Analisi di un trasformatore in quarto d'onda tramite riflessioni multiple

Si vuole ora studiare un trasformatore in quarto d'onda partendo da un diverso punto di vista. In particolare si analizzerà, nel dominio del tempo, il comportamento di un'onda che si propaga lungo la linea principale, di impedenza caratteristica R_0 , ed incide sul trasformatore di impedenza Z_1 . Quando l'onda incontra per la prima volta la giunzione che la linea principale

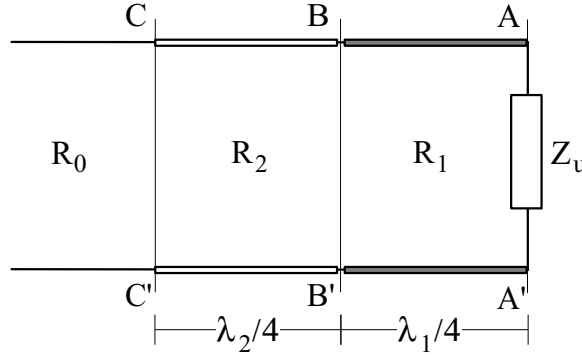


Figura 4.8: .

forma con il trasformatore essa verterà in parte riflessa verso il generatore ed in parte trasmessa nel tratto di linea che costituisce il trasformatore (Fig. 4.9). Poiché nel momento in cui tale onda incontra la giunzione non si è ancora propagata fino al carico Z_u , essa non potrà risentire del suo effetto e quindi sarà influenzata solo dalla linea di impedenza Z_1 . Ciò fa sì che il coefficiente di riflessione Γ_1 con cui l'onda è riflessa verso il generatore sia pari a

$$\Gamma_1 = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0}, \quad (4.9)$$

mentre il coefficiente di trasmissione τ_1 con cui l'onda è trasmessa nel tratto di linea di impedenza Z_1 risulterà:

$$\tau_1 = 1 + \Gamma_1 = \frac{2Z_1}{Z_1 + R_0}. \quad (4.10)$$

La parte dell'onda trasmessa nella linea costituente il trasformatore, dopo essersi propagata per un tratto pari a $\lambda_1/4$, viene riflessa dal carico secondo il coefficiente

$$\Gamma_u = \frac{Z_u - Z_1}{Z_u + Z_1}, \quad (4.11)$$

e quindi, percorrendo nuovamente un tratto di linea pari a $\lambda_1/4$, perviene alla giunzione linea principale/trasformatore. Ora, parte di quest'onda è riflessa nuovamente verso il carico, con coefficiente di riflessione

$$\Gamma_2 = \frac{R_0 - Z_1}{R_0 + Z_1} = -\Gamma_1, \quad (4.12)$$

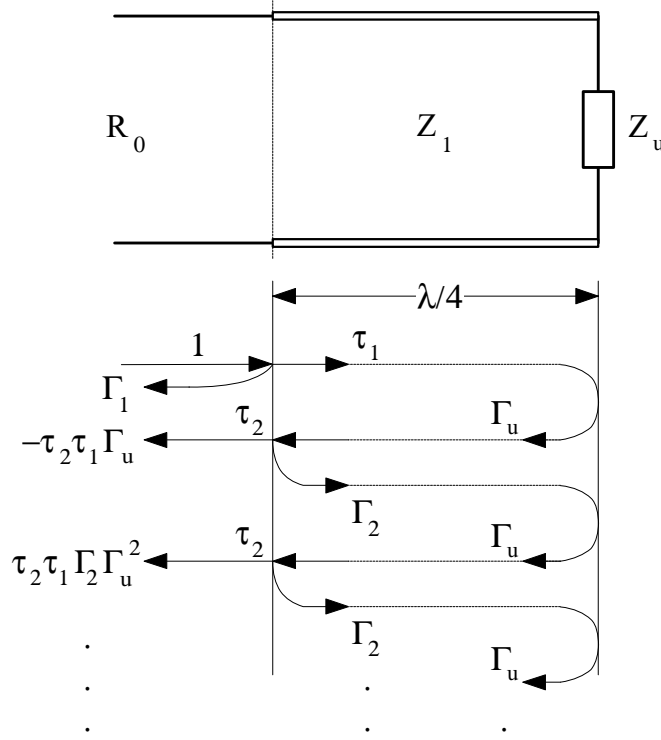


Figura 4.9: Riflessioni multiple in un trasformatore in quarto d'onda.

mentre parte e' trasmessa nella linea principale, con coefficiente di trasmissione

$$\tau_2 = 1 - \Gamma_1 = \frac{2R_0}{Z_1 + R_0}. \quad (4.13)$$

La parte di onda nuovamente riflessa verso il carico fa si' che il processo continui indefinitamente e si abbia un numero infinito di riflessioni tra la giunzione linea principale/trasformatore ed il carico. Il coefficiente di riflessione totale Γ , misurato alla giunzione linea principale-trasformatore, sara' quindi dato dal contributo di tutte le suddette infinite riflessioni. Poiche' l'onda nel propagarsi dalla giunzione al carico e dal carico alla giunzione percorre due volte un tratto di linea pari a $\lambda_1/4$ e subisce uno sfasamento pari a π , il coefficiente di riflessione totale puo' essere espresso come:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_1 - \tau_2\tau_1\Gamma_u + \tau_2\tau_1\Gamma_u\Gamma_2\Gamma_u - \tau_2\tau_1\Gamma_u(\Gamma_2\Gamma_u)^2 + \tau_2\tau_1\Gamma_u(\Gamma_2\Gamma_u)^3 - \dots \\ &= \Gamma_1 - \tau_2\tau_1\Gamma_u \sum_{n=0}^{\infty} (-\Gamma_2\Gamma_u)^n = \Gamma_1 - (1 - \Gamma_1^2) \Gamma_u \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1\Gamma_u)^n. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La serie che appare nell'eq. (4.14) e' una serie geometrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}, \quad \text{per } |s| < 1, \quad (4.15)$$

per cui essendo $|\Gamma_1 \Gamma_u| < 1$ si ottiene:

$$\Gamma = \Gamma_1 - \frac{(1 - \Gamma_1^2) \Gamma_u}{1 - \Gamma_1 \Gamma_u} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_u}{1 - \Gamma_1 \Gamma_u}. \quad (4.16)$$

E' evidente che qualora il coefficiente di riflessione alla giunzione linea principale/trasformatore sia uguale a quello misurato sul carico il coefficiente di riflessione totale si annulla e si ha l'adattamento del carico alla linea principale. Esprimendo ora i coefficienti di riflessione in funzione delle impedenze caratteristiche delle linee e l'impedenza del carico si ha:

$$\Gamma = \frac{(Z_1 - R_0)(Z_u + Z_1) - (Z_1 + R_0)(Z_u - Z_1)}{(Z_1 + R_0)(Z_u + Z_1) - (Z_1 - R_0)(Z_u - Z_1)} = \frac{Z_1^2 - R_0 Z_u}{Z_1^2 + R_0 Z_u} = 0 \quad (4.17)$$

e cio' equivale a richiedere che $Z_1 = \sqrt{R_0 Z_u}$.

L'effetto del trasformatore in quarto d'onda e' dunque quello di introdurre alla giunzione linea principale/trasformatore una onda riflessa uguale in ampiezza ma opposta in fase a quella dovuta al contributo di tutte le riflessioni multiple tra il carico e la linea principale. A regime, tutte le onde, che si propagano con la stessa velocita' di fase, si combinano in una singola onda viaggiante e quindi, nel tratto di linea costituente il trasformatore in quarto d'onda cosi' come nella linea principale, saranno presenti sia un'onda diretta che una riflessa, ma nella linea principale, per la particolare condizione imposta, quest'ultima avra' ampiezza nulla.

4.4 Adattamento tramite stub parallelo

Si vuole ora adattare il carico alla linea ponendo in parallelo alla linea uno stub, cioe' uno spezzone di cavo di opportuna lunghezza generalmente chiuso in corto circuito.

Si consideri il caso dell'adattamento di un carico Z_u ad una linea priva di perdite di impedenza caratteristica R_0 . Spostandosi dal carico verso il generatore l'ammettenza $Y(z)$ della linea variera' tra

$$G_0/(ROS) \leq |Y(z)| \leq G_0(ROS), \quad (4.18)$$

dove con $G_0 = 1/R_0$ si e' indicata la conduttanza caratteristica della linea.

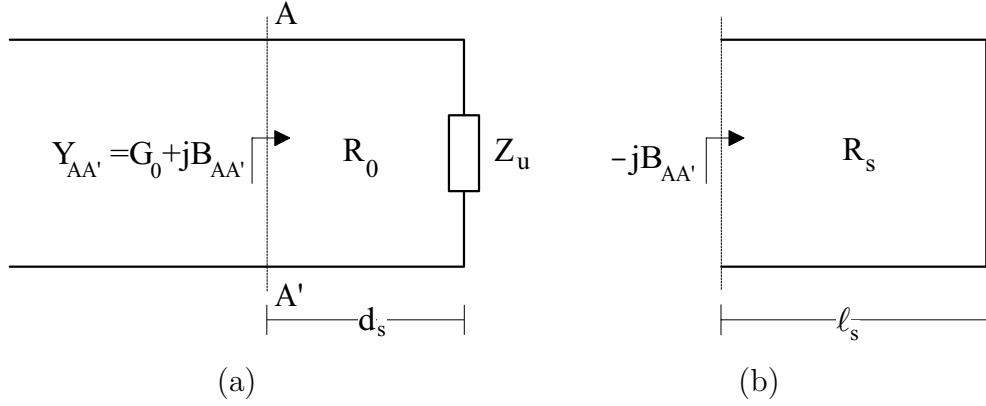


Figura 4.10: Adattamento tramite stub parallelo.

In particolare esisterà' almeno una sezione AA' (Fig. 4.10a) in cui la parte reale dell'ammettenza e' pari alla conduttanza caratteristica della linea, cioe':

$$Y_{AA'} = G_0 + jB_{AA'}. \quad (4.19)$$

Quindi per avere adattamento sara' sufficiente inserire in parallelo alla linea alla sezione AA' un elemento reattivo che compensi la suscettanza $B_{AA'}$. Tale elemento reattivo puo' essere realizzato con un tratto di linea, avente anche caratteristiche diverse rispetto alla linea principale, chiuso in corto circuito o in circuito aperto² (Fig 4.10b).

Al fine di valutare sia la posizione che le dimensioni dello stub si consideri dapprima il caso particolare in cui la linea principale risulta chiusa su un carico resistivo di ammettenza $G_u \in \mathbb{R}^+$. Per individuare la sezione AA' in cui inserire lo stub e' necessario risolvere l'equazione

$$Y_{BB'} = G_0 + jB_{AA'} = G_0 \frac{G_u + jG_0 \tan(\beta d_s)}{G_0 + jG_u \tan(\beta d_s)}. \quad (4.20)$$

Introducendo le quantita' normalizzate

$$g = G_u/G_0, \quad b = B_{AA'}/G_0, \quad (4.21)$$

la precedente espressione puo' essere posta nella forma

$$(1 - bg \tan(\beta d_s)) + j(b + g \tan(\beta d_s)) = g + j \tan(\beta d_s), \quad (4.22)$$

²Anche se si era evidenziato nei precedenti paragrafi come un circuito aperto reale si discosti da quello ideale, alcune condizioni realizzative ne consigliano comunque l'impiego.

da cui, eguagliando separatamente la parte reale e quella immaginaria, si ottiene:

$$1 - bg \tan(\beta d_s) = g, \quad (4.23)$$

$$j(b + g \tan(\beta d_s)) = j \tan(\beta d_s). \quad (4.24)$$

Risolvendo l'eq. (4.24) in termini della suscettanza normalizzata b e facendo uso della eq. (4.23), si ottiene

$$\tan^2(\beta d_s) = 1/g, \quad (4.25)$$

da cui, essendo $\beta = 2\pi/\lambda$,

$$d_s = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \sqrt{1/g} = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \sqrt{G_0/G_u}. \quad (4.26)$$

Si noti che sono possibili due valori principali per la lunghezza d_s a secondo del segno della radice scelto. Quindi se d'_s e' una soluzione dell'eq. (4.26) anche $d''_s = \lambda/2 - d'_s$ sara' una soluzione principale e la soluzione generale risultera' $d_s = \pm d'_s \pm n\lambda/2$ con $n = 0, 1, 2, \dots$.

Sostituendo poi il risultato espresso dall'eq. (4.25) nella eq. (4.24) si puo' porre la suscettanza normalizzata b in funzione della sola conduttanza g tramite la relazione

$$b = (1 - g) \tan(\beta d_s) = \frac{1 - g}{\sqrt{g}} \quad (4.27)$$

Alla sez. AA' , posta a distanza d_s dal carico, sara' quindi necessario posizionare uno stub che presenti una suscettanza

$$jB_s = -j(G_0 - G_u) \sqrt{G_0/G_u} \quad (4.28)$$

che, nel caso si voglia realizzare lo stub con un tratto di linea di ammettenza caratteristica G_s chiusa in corto circuito, equivale a richiedere una lunghezza della linea pari a

$$\ell_s = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left(\frac{G_s}{G_0 b} \right) = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left(\frac{G_s}{G_0 - G_u} \sqrt{G_u/G_0} \right). \quad (4.29)$$

Nel caso in cui il carico presenti una ammettenza Y_u complessa e' sempre possibile individuare, analogamente a quanto gia' visto per un trasformatore in quarto d'onda, una sezione della linea in cui l'ammettenza risulta puramente reale e quindi procedere come descritto sopra riferendo l'origine dell'asse z a tale sezione.

In particolare una tale sezione potrà essere certamente localizzata in corrispondenza di un minimo di tensione in cui l'ammettenza normalizzata risulta

$$g = \frac{1 + |\Gamma(z)|}{1 - |\Gamma(z)|} = ROS. \quad (4.30)$$

Sostituendo tale risultato nelle relazioni (4.26) e (4.29) si ottiene che per adattare il carico alla linea sarà sufficiente posizionare, a distanza

$$d'_s = \frac{\lambda}{4\pi} \arccos \sqrt{\frac{ROS - 1}{ROS + 1}} \quad (4.31)$$

dalla sezione in cui si è misurato il minimo di tensione, uno stub chiuso in corto circuito avente lunghezza

$$\ell'_s = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left(\frac{G_s}{G_0} \frac{\sqrt{ROS}}{ROS - 1} \right). \quad (4.32)$$

Nel caso si voglia invece far uso della C.d.S., letta in termini di ammettenza, sarà necessario muoversi in senso orario sulla circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante, individuata dall'ammettenza normalizzata del carico, fino ad intersecare la circonferenza $g = 1$. Tale punto individua sia la sezione AA' a cui porre lo stub sia il valore di suscettanza normalizzata (rispetto alla linea principale) che questo dovrà presentare, così come descritto nel seguente esercizio.

Esercizio 4.3 *Si adatti un carico di impedenza $Z_u = 150 + j50 \Omega$ ad una linea priva di perdite di impedenza $R_0 = 100 \Omega$ tramite uno stub parallelo realizzato con un tratto di linea di impedenza caratteristica $R_s = 3R_0 \Omega$.*

Poiché si vuole utilizzare la C.d.S. letta in termini di ammettenza, come primo passo si valuta l'ammettenza normalizzata del carico,

$$Y_{u_n} = \frac{R_0}{Z_u} = \frac{100}{150 + j50} = 0.6 - j0.2,$$

e si individua su di essa il punto P , intersezione dei cerchi a $g = 0.6$ e $b = -0.2$ (Fig. 4.11a). Tale punto P individua una circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante che interseca nel punto A la circonferenza a $g = 1$. Dalla C.d.S. è evidente che ad una distanza $d_s = 0.194 \lambda$ dal carico si può individuare una sezione AA' in cui l'ammettenza della linea principale chiusa sul carico Z_u risulta:

$$Y_{AA'} = \frac{Y_{AA'_n}}{R_0} = \frac{1 + j0.58}{R_0} = G_0 + j0.58/R_0 \Omega.$$

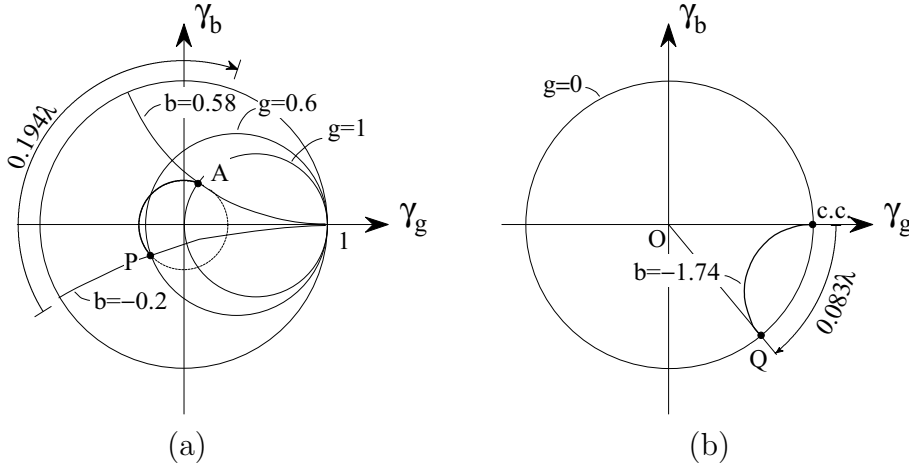


Figura 4.11: Carta di Smith relativa all'esercizio 4.3.

Sarà quindi sufficiente porre a tale sezione un elemento reattivo che realizzi una suscettanza $B_s = -j0.58/R_0$. In particolare si sceglie di realizzare tale elemento reattivo con un tratto di linea chiusa in corto circuito che, per i dati del problema, presenta una impedenza caratteristica $R_s = 3R_0 \Omega$. Volendo ancora utilizzare la C.d.S., è necessario normalizzare la suscettanza B_s rispetto alla conduttanza caratteristica G_s del tratto di linea con cui si costruisce lo stub, cioè

$$b_s = \frac{B_s}{G_s} = \frac{-0.58/R_0}{1/(3R_0)} = -1.74,$$

ed individuare la circonferenza a suscettanza costante $b_s = b = -1.74$ (Fig. 4.11b). Muovendosi ora in senso orario sulla circonferenza a $|\Gamma_I| = 1$ dal punto di corto circuito al punto Q (intesezione delle circonferenze $b = -1.74$ e $g = 0$) si percorre una distanza $\ell_s = 0.083 \lambda_s$ che corrisponde alla lunghezza che lo stub in corto circuito deve avere al fine di presentare al suo ingresso la richiesta suscettanza B_s . \square

Esercizio 4.4 Per il circuito descritto in Fig. 4.12 si determini la distanza d_1 dal carico alla quale posizionare uno stub in corto circuito, costituito da un tratto di linea di impedenza caratteristica $R_s = 2R_0$, e la sua lunghezza ℓ_1 tali da adattare il carico alla linea; la lunghezza ℓ_2 di un analogo stub posizionato alla sezione BB' e l'impedenza R_1 del trasformatore in quarto d'onda interposto tra il generatore e la linea tali da attuare il massimo trasferimento di potenza tra il generatore e la linea. Si determini inoltre la potenza dissipata sul carico Z_u in funzione della massima potenza trasferibile nel caso in cui

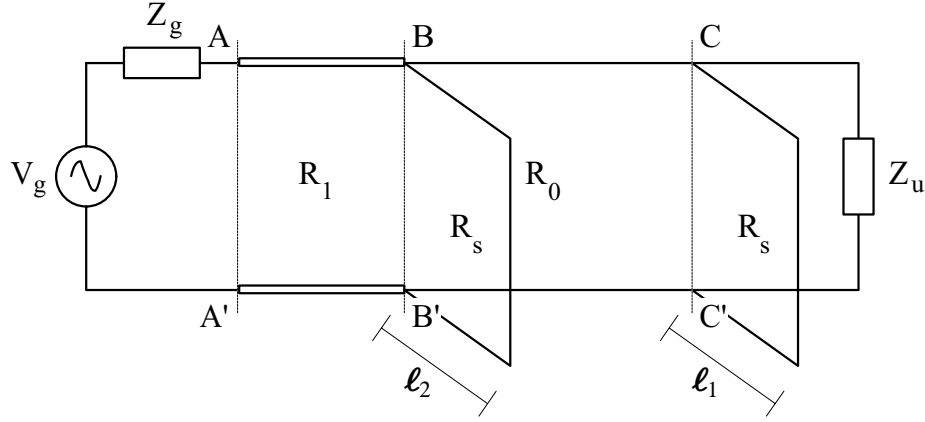


Figura 4.12: Geometria del problema relativa all'esercizio 4.4.

la lunghezza ℓ del trasformatore in quarto d'onda posto alla sezione BB' sia dimezzata. ($Z_u = 50 + j50 \Omega$, $R_0 = 50 \Omega$, $Z_g = 100 + j100 \Omega$)

Si adatti in primo luogo il carico Z_u alla linea. L'impedenza normalizzata del carico,

$$Z_{un} = \frac{Z_u}{R_0} = \frac{50 + j50}{50} = 1 + j,$$

individua sulla C.d.S. un punto P intersezione delle circonferenze a $r = 1$ e $x = 1$. Si individui ora il punto Q , simmetrico del punto P rispetto all'origine, e si legga la C.d.S. in termini di ammettenza. In tale punto Q , caratteristico dell'ammettenza normalizzata del carico, si intersecano le circonferenze $g = 0.5$, $b = -0.5$. E' ora necessario muoversi sulla circonferenza a modulo del coefficiente di riflessione costante individuata dal punto Q in senso orario fino ad incontrare la circonferenza a $g = 1$ nel punto C' , coincidente con il punto P . Cio' equivale a spostarsi alla sezione CC' posta ad una distanza $d_1 = \lambda/4$ dal carico. Poiche' a tale sezione CC' si misura una ammettenza

$$Y_{CC'} = Y_{CC'} G_0 = \frac{1 + j}{R_0} = \frac{1}{R_0} + j \frac{1}{R_0},$$

per realizzare l'adattamento sara' necessario inserire in parallelo alla linea principale uno stub in corto circuito che al suo ingresso presenti una suscettanza

$$B'_s = -\text{Im}[Y_{CC'}] = -\frac{1}{R_0} = -0.02 \Omega^{-1}.$$

Volendo realizzare lo stub con un tratto di linea in corto circuito avente impedenza caratteristica $R_s = 2R_0$, il valore di suscettanza normalizzata che

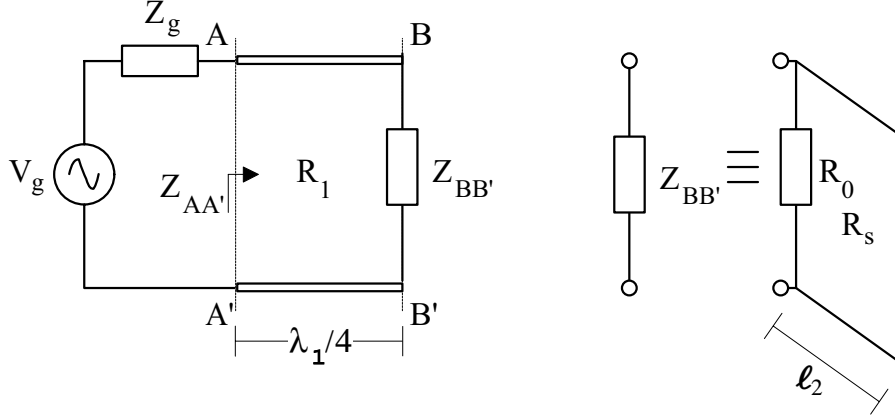


Figura 4.13: Circuito equivalente.

lo stub deve realizzare al suo ingresso sara'

$$b'_s = \frac{B_s}{1/R_s} = \frac{-1/R_0}{1/(2R_0)} = -2.$$

Dalla C.d.S. e' evidente che per realizzare tale valore di suscettanza normalizzata lo stub deve risultare lungo $\ell_1 = 0.074 \lambda_s$, dove con λ_s si e' indicata la lunghezza d'onda della linea con cui e' costruito lo stub. Il carico cosi' adattato si presentera' alla sezione BB' come una impedenza pari all'impedenza caratteristica della linea principale R_0 . Il problema si riduce quindi ad agire sul trasformatore in quarto d'onda e sul secondo stub in modo tale che l'impedenza R_0 si presenti equivalentemente alla sezione AA' come un carico $Z_{AA'}$ di impedenza pari al coniugato dell'impedenza interna Z_g del generatore (Fig. 4.13).

Supponendo che all'ingresso del trasformatore in quarto d'onda sia presente una impedenza $Z_{BB'}$ questa sara' trasformata alla sezione AA' in una impedenza

$$Z_{AA'} = \frac{R_1^2}{Z_{BB'}} = R_1^2 Y_{BB'}.$$

Se si indica con

$$Y_{BB'} = \frac{1}{R_0} + jB''_s$$

l'ammettenza costituita dal parallelo tra lo stub di lunghezza ℓ_2 e l'impedenza R_0 , per avere il massimo trasferimento di potenza sara' sufficiente imporre

che

$$Z_g^* = R_1^2 \left[\frac{1}{R_0} + jB_s'' \right].$$

Eguagliando la parte reale e quella immaginaria cio' equivale a richiedere:

$$\mathcal{Re} \{ Z_g^* \} = \frac{R_1^2}{R_0},$$

$$\mathcal{Im} \{ Z_g^* \} = R_1^2 B_s''.$$

Inserendo i dati del problema si ricava: $R_1 = 50\sqrt{2}\Omega$, $B_s'' = -0.02\Omega^{-1}$. Si noti che il valore della suscettanza che il secondo stub deve presentare e' identico a quello precedentemente richiesto per il primo stub, per cui se ne deduce che anche in questo caso la lunghezza dello stub sara' pari a $\ell_2 = 0.074\lambda_s$.

Si consideri ora il caso in cui per i valori la lunghezza del trasformatore in quarto d'onda risulti dimezzata ($\ell = \lambda_1/8$). Avendo indicato con $Y_{BB'}$ l'ammettenza al suo ingresso e tenendo in conto che

$$\beta_1 \ell = \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{\lambda_1}{8} = \pi/4,$$

alla sezione AA' si misurera' una impedenza

$$Z_{AA'} = Z(\lambda_1/8) = R_1 \frac{Z_{BB'} + jR_1}{R_1 + jZ_{BB'}} = R_1 \frac{1 + jR_1 Y_{BB'}}{R_1 Y_{BB'} + j} = R_0(0.510 - j0.542).$$

Poiche' tutte le linee sono supposte prive di perdite la potenza attiva P_a che fluisce attraverso la sezione AA' e' la stessa che si dissipa sul carico Z_u , quindi

$$P_a = \frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{|Z_g + Z_{AA'}|^2} \mathcal{Re} [Z_{AA'}] = \frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{R_0} 0.0605.$$

Risultando poi la massima potenza trasferibile P_{max} al carico

$$P_{max} = \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{\mathcal{Re} [Z_g]},$$

si ha

$$P_a = 0.484 P_{max}.$$

□

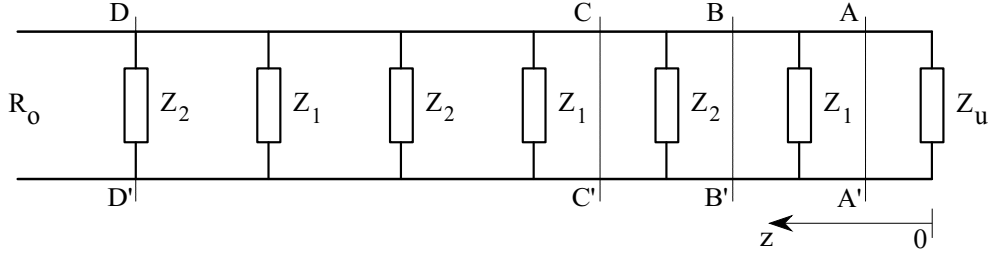


Figura 4.14: Geometria del problema relativa all'esercizio 4.5.

Esercizio 4.5 Su una linea sono poste, a distanza $\lambda/4$ tra loro, una serie di resistenze così come schematizzato in Fig. 4.14. I tratti di linea che le collegano hanno tutti impedenza caratteristica pari a $R_0 = 200 \Omega$. Si determini il valore del rapporto d'onda stazionario nelle sezioni AA' , BB' , CC' e la distanza ℓ , misurata in termini di lunghezze d'onda a partire dalla sezione DD' , a cui porre uno stub parallelo che permetta di adattare l'insieme dei carichi alla linea ($Z_1 = 1/50 \Omega$, $Z_2 = 50 \Omega$, $Z_u = Z_2$).

Si consideri il carico Z_u a destra della sezione AA' . Su di esso si misurerà un coefficiente di riflessione di tensione pari a

$$\Gamma(0) = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0} = \frac{50 - 200}{50 + 200} = -\frac{3}{5},$$

per cui, supponendo la linea priva di perdite e quindi il modulo del coefficiente di riflessione costante lungo di essa, il rapporto d'onda stazionario nella sezione AA' risulterà

$$(ROS)_{AA'} = \frac{1 + |\Gamma(0)|}{1 - |\Gamma(0)|} = 4.$$

Si noti ora che il tratto di linea che separa il carico Z_u dalla prima impedenza Z_1 a sinistra di AA' è pari a $\lambda/4$. Ciò fa sì che tale tratto agisca come un trasformatore in quarto d'onda, quindi

$$Z(\lambda/4 - \eta) = \frac{R_0^2}{Z_u} = 800 \Omega,$$

con $\eta \ll 1$. L'insieme impedenza Z_1 , linea, carico Z_u si presenterà perciò equivalentemente come l'impedenza risultante dal parallelo dell'impedenza Z_1 con l'impedenza $Z(\lambda/4 - \eta)$, cioè

$$Z(\lambda/4 + \eta) = \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z(\lambda/4 - \eta)} \right]^{-1} = \frac{1}{50 + 800^{-1}} \simeq \frac{1}{50},$$

mentre il coefficiente di riflessione risulterà'

$$\Gamma(\lambda/4 + \eta) = \frac{Z(\lambda/4 + \eta) - R_0}{Z(\lambda/4 + \eta) + R_0} = \frac{50^{-1} - 200}{50^{-1} + 200} \simeq 1.$$

Poiche' il modulo del coefficiente di riflessione e' pressoché unitario, alla sezione BB' si misurerà un rapporto d'onda stazionario

$$(ROS)_{BB'} \rightarrow \infty.$$

Considerando che anche il tratto di linea tra BB' e CC' agisce come un trasformatore in quarto d'onda, si avrà'

$$Z(\lambda/2 - \eta) = \frac{R_0^2}{Z(\lambda/4 + \eta)} \simeq 2 M\Omega.$$

Poiche' quest'ultima impedenza e' molto maggiore dell'impedenza Z_2 posta a sinistra della sezione BB' , il loro parallelo presenterà un valore pari all'impedenza Z_2 stessa

$$Z(\lambda/2 + \eta) = \left[\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z(\lambda/2 - \eta)} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{50} + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \right]^{-1} \simeq 50.$$

Quindi il coefficiente di riflessione, così come il rapporto d'onda stazionario, alla sezione CC' risulterà uguale a quello misurato alla sezione AA' .

Con ragionamenti del tutto analoghi e' possibile dimostrare che nella sezione DD' si misurerà una impedenza

$$Z_{DD'} = Z(3\lambda/2 + \eta) \simeq 50.$$

Per adattare un carico puramente resistivo ad una linea caratterizzata da un'impedenza caratteristica $R_0 = 200 \Omega$ tramite uno stub parallelo si dovrà porre lo stub parallelo ad una distanza ℓ a sinistra della sezione DD' tale che l'insieme carico-linea presenti per tale distanza una conduttanza $G_0 = 1/R_0$. Si dovrà quindi verificare la condizione

$$\mathcal{Re}\{Y_{DD'}\} = \mathcal{Re}\left\{G_0 \frac{Y_{DD'} + j G_0 \tan(\beta\ell)}{G_0 + j Y_{DD'} \tan(\beta\ell)}\right\} = G_0,$$

cioè

$$\mathcal{Re}\left\{\frac{Y_{DD'} + j G_0 \tan(\beta\ell)}{G_0 + j Y_{DD'} \tan(\beta\ell)}\right\} = 1.$$

Cio' e' assicurato per

$$\tan(\beta\ell) = \frac{G_0}{Y_{DD'}}, \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{\arctan(G_0/Y_{DD'})}{2\pi} \lambda \simeq 0.039 \lambda.$$

□

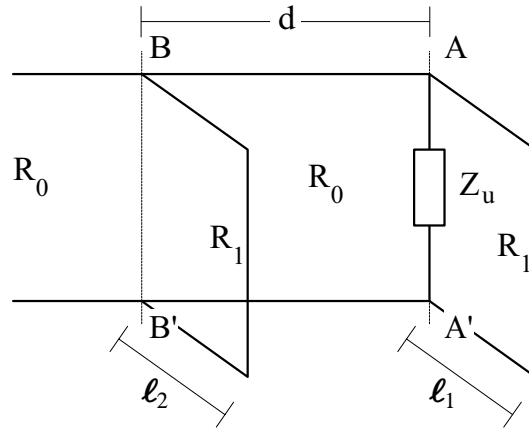


Figura 4.15: Adattamento tramite doppio stub.

4.5 Adattamento tramite doppio stub

Sara' ora nostro obiettivo quello di esaminare un dispositivo che sia in grado di adattare carichi di impedenza diversa variando in modo meccanico la posizione di alcune parti componenti.

Nel caso di un singolo stub sarebbe necessario variare con continuita' sia la lunghezza dello stub che la posizione dello stesso lungo la linea. Mentre per modificare la lunghezza dello stub si puo' impiegare un cortocircuito la cui posizione puo' essere variata agendo su una vite micrometrica, modificare la posizione dello stub lungo la linea non risulta sempre semplice. Per ovviare a tale inconveniente si preferisce impiegare un dispositivo denominato doppio stub costituito da due stub posti ad una prefissata distanza d l'uno dall'altro (tipicamente $d = \lambda/8$, $d = 3\lambda/8$, $d = 5\lambda/8$).

Per comprendere il funzionamento del dispositivo si consideri la configurazione descritta in figura in cui i due stub sono posti a distanza $d = 3\lambda/8$. Ciascuno dei due tratti di linea chiusa in corto circuito con cui sono realizzati gli stub costituiscono una reattanza in parallelo alla linea il cui valore e' determinato dalla lunghezza del tratto. Quindi agire sulla lunghezza degli stub equivale ad agire sulla parte immaginaria della ammettenza che la linea presenta alle sezioni AA' e BB' .

Si utilizzi ancora una volta la C.d.S. letta in termini di ammettenza e si analizzi la situazione alla sezione AA' . Il parallelo carico-stub individuerà sulla C.d.S. un generico punto A_1 . Spostandosi dalla sezione AA' alla BB' si percorrerà sulla linea una distanza pari a $d = 3\lambda/8$ il che equivale a ruotare il punto A_1 sulla C.d.S. di 270° in senso orario individuando così il punto B_1 . Si supponga ora di essere per caso pervenuti sulla circonferenza $g = 1$.

Se si realizza tale ipotesi si puo' operare analogamente a quanto fatto nel caso di adattamento tramite singolo stub e dimensionare opportunamente lo stub afferente alla sezione BB' in modo da non avere onda riflessa verso il generatore. Si disegni ora sulla C.d.S. una circonferenza avente raggio uguale a quello della circonferenza a $g = 1$ ma centro ruotato di 270° in senso antiorario. Tale circonferenza rappresentera' tutti i valori di impedenza normalizzata che nello spostarsi dalla sezione AA' alla sezione BB' apparterranno alla circonferenza $g = 1$ e potranno quindi essere adattati dimensionando opportunamente lo stub alla sezione BB' . Il compito dello stub alla sezione AA' sara' quindi quello di modificare la suscettanza normalizzata del carico in modo da pervenire sulla circonferenza ruotata di 270° .

Esercizio 4.6 *Si adatti un carico $Z_u = 100 + j100 \Omega$ ad una linea avente impedenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ tramite due stub in corto circuito di impedenza caratteristica $R_1 = 100 \Omega$ distanziati tra loro di $3\lambda/8$.*

L'ammettenza normalizzata del carico risulta

$$Y_{u_n} = \frac{R_0}{Z_u} = \frac{50}{100 + j100} = \frac{1 - j}{4} \quad (4.33)$$

che, sulla C.d.S. letta in termini di ammettenza, individua il punto A_0 intersezione delle circonferenze a $g = 0.25$ e $b = -0.25$. Modificando la lunghezza dello stub posto alla sezione AA' si varia la parte immaginaria dell'ammettenza normalizzata del carico muovendo cosi' il punto A_0 sulla circonferenza a $g = 0.25$. E' possibile percio' spostarsi sulla circonferenza a $g = 0.25$ fino ad intersecare nel punto A_1 ($Y_{AA'_n} = 0.25 - j0.34$) la circonferenza a $g = 1$ ruotata in senso antiorario di 270° . Cio' equivale ad inserire in parallelo al carico una suscettanza normalizzata pari a $b_{s_a} = (-0.34) - (-0.25) = -0.09$ e quindi una suscettanza

$$B_{s_a} = \frac{b_{s_a}}{R_0} = \frac{-0.09}{50} = -1.8 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}.$$

Volendo realizzare tale suscettanza con un tratto di linea di impedenza caratteristica $R_1 = 100 \Omega$ e' necessario prima normalizzare il valore di suscettanza rispetto a tale impedenza

$$b_{s_a} = B_{s_a} R_1 = -0.18.$$

quindi spostarsi sulla C.d.S dal punto di corto circuito fino ad intersecare la circonferenza $b = -0.18$ che equivale ad una lunghezza dello stub pari a $\ell_{s_a} = 0.22 \lambda_1$. Ora spostandosi dalla sezione AA' alla sezione BB' , il punto

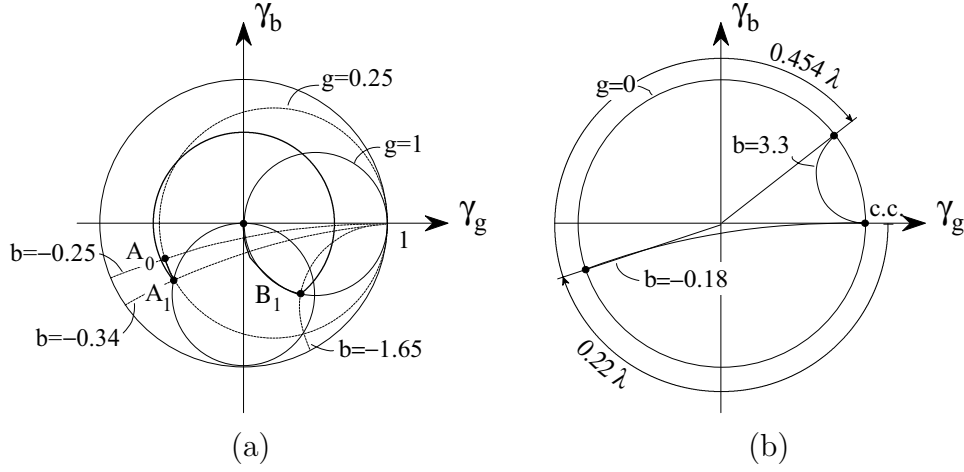


Figura 4.16: Carta di Smith relativa all'esercizio 4.6.

A_1 percorrerà tre quarti della C.d.S. sul cerchio a modulo del coefficiente di riflessione costante fino ad individuare, nel punto B_1 , una impedenza normalizzata

$$Y_{BB'_n} = 1 - j1.65.$$

Per ottenere l'adattamento sarà sufficiente fare in modo che lo stub posto alla sezione BB' compensi la parte immaginaria di tale impedenza. A tal fine lo stub dovrà presentare al suo ingresso una suscettanza

$$B_{s_b} = \frac{1.65}{R_0} = \frac{1.65}{50} = 0.033 \Omega^{-1}.$$

Per determinare la lunghezza di tale stub, analogamente a quanto operato per lo stub alla sezione AA' , sarà necessario normalizzare il valore della suscettanza B_{s_b} rispetto all'impedenza caratteristica $R_1 = 100 \Omega$ della linea in corto circuito con cui si realizza lo stub,

$$b_{s_b} = B_{s_b} R_1 = 3.3,$$

e spostarsi sulla C.d.S dal punto di corto circuito fino ad intersecare la circonferenza $b = 3.3$. Ciò equivale a realizzare uno stub di lunghezza $\ell_{s_b} = 0.454 \lambda_1$. \square

Si noti che non tutti i valori di ammettenza del carico possono essere adattati tramite un doppio stub. In particolare ciò non sarà possibile per tutti quei valori dell'ammettenza normalizzata del carico che individuano sulla

C.d.S. un punto interno alla circonferenza a conduttanza costante tangente alla circonferenza $g = 1$ ruotata della distanza d che intercorre tra gli stub (ad esempio per $d = 3\lambda/8$ tale circonferenza risulta essere $g = 2$). Infatti tali punti individuano circonferenze a conduttanza costante che non intersecano la circonferenza $g = 1$. La zona di non adattabilit  cosi' individuata potrebbe essere ridotta aumentando la distanza che intercorre tra gli stub fino a renderla prossima ad una lunghezza d'onda; tuttavia cosi' facendo si andrebbe a lavorare in zone caratterizzate da una elevata sensibilit  alle tolleranze costruttive ed una piccola variazione delle lunghezze calcolate comprometterebbe significativamente l'adattamento. Si preferisce perci  interporre tra il carico ed il dispositivo un tratto della stessa linea avente lunghezza $\lambda/4$. Alternativamente si pu  costruire un triplo stub ponendo sulla linea tre stub a distanza d l'uno dall'altro.

Capitolo 5

Applicazioni della teoria delle linee di trasmissione

5.1 Analogia onda piana/linea di trasmissione

Così come mostrato nel primo capitolo, l'andamento della tensione e della corrente lungo una linea di trasmissione è descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, \omega) + k^2 V(z, \omega) = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} I(z, \omega) + k^2 I(z, \omega) = 0, \quad (5.2)$$

dove $k = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}}$, la cui soluzione generale risulta

$$V(z) = V_+ \exp(jkz) + V_- \exp(-jkz), \quad (5.3)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) - \frac{V_-}{Z_0} \exp(-jkz), \quad (5.4)$$

con $Z_0 = \sqrt{L_{eq}/C_{eq}}$. Si consideri ora un'onda piana che si propaga, parallelamente all'asse z con campo elettrico polarizzato linearmente lungo l'asse x , cioè $\vec{E} = E_x \hat{x}$, in un mezzo lineare, omogeneo ed isotropo, caratterizzato da una permittività ε ed una permeabilità μ . Per tale onda il sistema di equazioni differenziali che ne regolano la propagazione risulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z, \omega) + k^2 E_x(z, \omega) = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z, \omega) + k^2 H_y(z, \omega) = 0, \quad (5.6)$$

dove $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Soluzione generale di tale sistema risulta essere

$$E_x(z) = E_+ \exp(jkz) + E_- \exp(-jkz), \quad (5.7)$$

$$H_y(z) = \frac{E_+}{\zeta} \exp(jkz) - \frac{E_-}{\zeta} \exp(-jkz), \quad (5.8)$$

dove $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ e E_+ indica, per avere accordo con il sistema di riferimento convenzionalmente assunto per una linea di trasmissione, l'ampiezza dell'onda progressiva supposta propagarsi nel verso delle z negative.

Confrontando le soluzioni (5.7)–(5.8) con le (5.3)–(5.4) e' subito evidente che operando le sostituzioni

$$E_x \leftrightarrow V, \quad H_y \leftrightarrow I, \quad \mu \leftrightarrow L_{eq}, \quad \varepsilon \leftrightarrow C_{eq}, \quad (5.9)$$

e' possibile studiare in modo equivalente il problema della propagazione di un'onda piana in un mezzo indefinito utilizzando la teoria delle linee di trasmissione.

5.2 Analogia onda piana/linea di trasmissione: incidenza ortogonale

Si consideri ora il caso in cui un'onda piana, con campo elettrico polarizzato linearmente lungo x ed ampiezza E_+ , incida ortogonalmente sul semispazio $z < 0$ (mezzo 2) avente caratteristiche elettriche e magnetiche diverse da quello di provenienza dell'onda (mezzo 1). In entrambi i semispazi e' possibile descrivere la propagazione dell'onda tramite l'analogia delle linee di trasmissione precedentemente introdotta. In $z = 0$ e' poi necessario imporre la continuita' delle componenti tangenziali dei campi, cioe'

$$E_{x1}(z)|_{z=0} = E_{x2}(z)|_{z=0}, \quad (5.10)$$

$$H_{y1}(z)|_{z=0} = H_{y2}(z)|_{z=0}, \quad (5.11)$$

che si traduce nel richiedere

$$V_1(z)|_{z=0} = V_2(z)|_{z=0}, \quad (5.12)$$

$$I_1(z)|_{z=0} = I_2(z)|_{z=0}. \quad (5.13)$$

Cio' equivale a connettere in $z = 0$ le due linee che rappresentano la propagazione dell'onda piana in ciascun semispazio (Fig. 5.1).

Nel caso in cui il mezzo 2 su cui incide l'onda piana sia costituito da un conduttore elettrico perfetto la condizione al contorno $\hat{n} \times \vec{E}_1(z)|_{z=0} = 0$ si

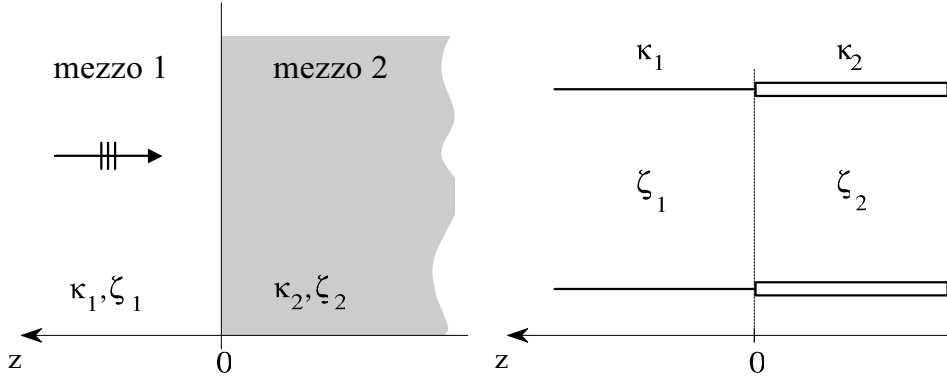


Figura 5.1: Equivalenza onda piana/linea di trasmissione.

traduce nell'imporre $V_1(z)|_{z=0} = 0$; cio' equivale a considerare la presenza di un corto circuito in corrispondenza del piano conduttore elettrico. Analogamente, nel caso in cui il mezzo 2 sia costituito da un conduttore magnetico perfetto la condizione al contorno $\hat{n} \times \vec{H}_1(z)|_{z=0} = 0$ si traduce nell'imporre $I_1(z)|_{z=0} = 0$ e quindi considerare un circuito aperto in corrispondenza del piano magnetico.

Esercizio 5.1 *Un'onda piana monocromatica avente frequenza $f = 2 \text{ GHz}$ e ampiezza $E_+ = 1 \text{ V/m}$, proveniente dallo spazio vuoto, incide ortogonalmente su una lastra dielettrica ($\epsilon_r = 4$) di spessore $d = 1.875 \text{ mm}$ che ricopre un piano perfettamente conduttore (Fig. 5.2). Si determini il modulo della densita' di corrente sostenuta dal campo sul conduttore.*

Si consideri un sistema di coordinate cartesiano, avente origine sul piano conduttore, il cui asse z risulta ortogonale ad esso e rivolto nella direzione di provenienza dell'onda. L'esercizio richiede di valutare il modulo della densita' di corrente elettrica superficiale \vec{J}_s che scorre sul conduttore; tuttavia in corrispondenza dell'interfaccia lastra dielettrica/conduttore ($z = 0$) dovranno essere verificate le condizioni

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{E} \Big|_{z=0} &= 0, \\ \hat{n} \times \vec{H} \Big|_{z=0} &= \vec{J}_s, \end{aligned}$$

per cui sara' sufficiente valutare il campo magnetico tangenziale al piano conduttore elettrico perfetto a cui la corrente e' direttamente legata.

Per la geometria del problema il campo elettrico e magnetico risultano sempre appartenenti ad un piano parallelo alla superficie di separazione tra

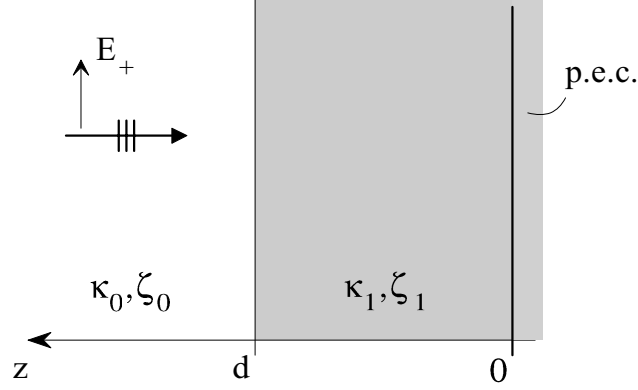


Figura 5.2: Onda piana incidente su una lastra dielettrica ($\varepsilon_r = 4$) di spessore $d = 1.875 \text{ mm}$ che ricopre un piano perfettamente conduttore.

i due mezzi ($\vec{E} = E_t \hat{t}$, $\vec{H} = H_t \hat{t} \times \hat{z}$, $\hat{t} \cdot \hat{z} = 0$) per cui, operando l'analogia

$$\begin{aligned} E_t &\leftrightarrow V, & k &= \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \leftrightarrow k = \omega \sqrt{C_{eq} L_{eq}}, \\ H_t &\leftrightarrow I, & \zeta &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \leftrightarrow Z = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}}, \end{aligned}$$

e' possibile studiare equivalentemente il circuito mostrato in Fig. 5.3. E' evidente che l'ampiezza del campo magnetico tangente al conduttore, e quindi anche quella della densita' di corrente superficiale, coincidono con l'ampiezza della corrente che scorre sul corto circuito. In particolare per una linea in corto circuito e' possibile scrivere $I(z) = I_u \cos(kz)$ per cui

$$I(d) = I_u \cos(\beta_1 d) \quad \Rightarrow \quad I_u = \frac{I(d)}{\cos(\beta_1 d)},$$

dove nel tratto $AA'-BB'$

$$k = \beta_1 = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \simeq 83.78.$$

Sara' quindi nostro obiettivo valutare la corrente $I(d)$ in funzione dell'ampiezza dell'onda incidente $V_{0+} \equiv E_+$. A tal fine e' conveniente valutare l'impedenza che la linea chiusa in corto circuito presenta in corrispondenza dell'interfaccia vuoto/lastra dielettrica (sez. AA'),

$$Z_{AA'} = j\zeta_1 \tan(\beta_1 d) = j \frac{\zeta_0}{2} \tan(\beta_1 d) = j0.079\zeta_0,$$

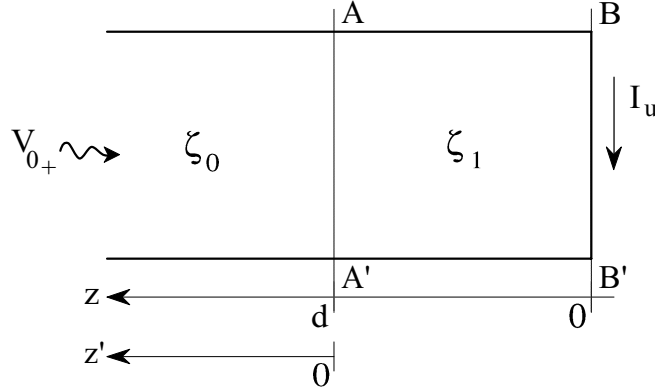


Figura 5.3: Circuito equivalente per la configurazione di Fig. 5.2

e considerare un nuovo sistema di riferimento z' parallelo al precedente e avente origine in corrispondenza di tale interfaccia. In tali ipotesi:

$$I(d) = I'(z')|_{z'=0} = \frac{V_{0+}}{\zeta_0} \exp(jk_0 z') [1 - \Gamma'(z')] \Big|_{z'=0} = \frac{V_{0+}}{\zeta_0} [1 - \Gamma'(0)] ,$$

dove

$$\Gamma'(0) = \frac{Z_{AA'} - \zeta_0}{Z_{AA'} + \zeta_0} = \exp(j2.99) .$$

Quindi

$$|I_u| = \frac{|I(d)|}{|\cos(\beta_1 d)|} = \frac{|V_{0+}|}{\zeta_0 |\cos(\beta_1 d)|} |1 - \Gamma'(0)| = 5.31 \cdot 10^{-3} A ,$$

da cui

$$|J_s| = 5.31 \text{ mA/m} .$$

□

Esercizio 5.2 Con riferimento alla configurazione dell'esercizio precedente si diano indicazioni sullo spessore e sulle caratteristiche elettriche e magnetiche del materiale con cui deve essere costruita la lastra che ricopre il piano perfettamente conduttore al fine di non avere onda riflessa nello spazio vuoto.

E' conveniente operare l'analogia onda piana/linea di trasmissione gia' introdotta nell'esercizio precedente.

Si puo' subito notare che non e' possibile dissipare potenza sul carico essendo questo costituito da un corto circuito. Per dissipare quindi la potenza associata all'onda incidente sara' necessario supporre che la lastra sia costituita da un materiale con perdite caratterizzato da una permeabilita' $\mu = \mu_1 - j\mu_2$ ed una permittivita' $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ complesse. A causa della presenza delle perdite anche la costante di propagazione risultera' complessa $k = \beta - j\alpha$ ed il modulo del coefficiente di riflessione, allontanandosi dal corto circuito, diminuira' esponenzialmente secondo l'espressione $|\Gamma(z)| = \exp(-2\alpha z)$. Per annullare l'effetto dell'onda riflessa dal piano conduttore sara' quindi sufficiente dimensionare lo spessore d della lastra in modo che il coefficiente di riflessione all'interfaccia lastra/vuoto risulti cosi' piccolo che la potenza associata all'onda riflessa sia inferiore, o al piu' confrontabile, con quella dovuta al rumore.

Anche se le perdite introdotte permettono di mascherare la riflessione introdotta dal piano conduttore, si avra' sempre una riflessione all'interfaccia lastra/vuoto dovuta alla discontinuita' nell'impedenza caratteristica dei due mezzi. Per ovviare sara' necessario scegliere il materiale con cui realizzare la lastra in modo che questa presenti una impedenza caratteristica ζ_1 pari a quella del vuoto, cioe' $\zeta_1 = \zeta_0 = 120\pi$. Poiche' tale impedenza risulta puramente reale sara' necessario verificare la condizione di Heaviside

$$\varepsilon_2/\varepsilon_1 = \mu_2/\mu_1,$$

da cui

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} = 120\pi.$$

Agendo opportunamente sulla permittivita' e la permeabilita' della lastra e' quindi possibile rimuovere anche l'effetto di discontinuita' materiale all'interfaccia lastra/vuoto. □

5.3 Analogia onda piana/linea di trasmissione: incidenza obliqua

Si consideri il problema di un'onda piana, proveniente da un semispazio caratterizzato da una costante di propagazione k_1 ed una impedenza caratteristica ζ_1 (mezzo 1), incidente su un semispazio con costante di propagazione k_2 ed impedenza caratteristica ζ_2 (mezzo 2). Indicando con \hat{z} la normale al

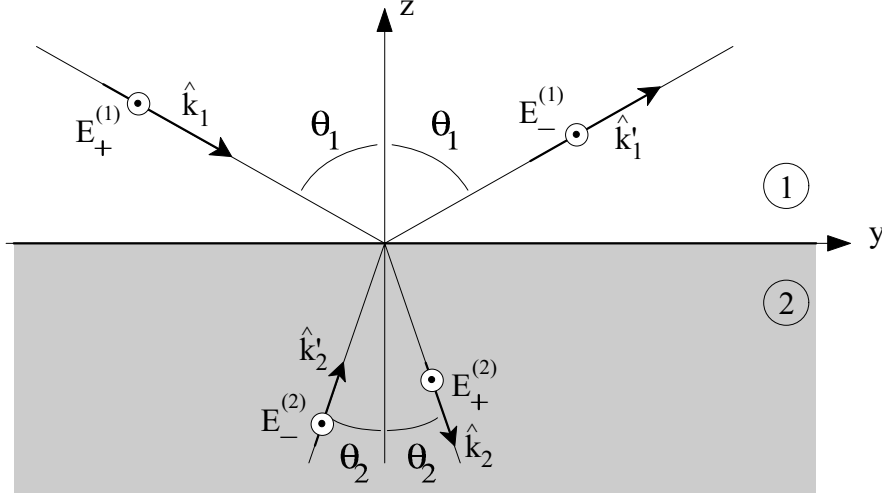


Figura 5.4: Incidenza obliqua di una onda piana su un semispazio materiale: polarizzazione perpendicolare (caso TE_z).

piano di separazione tra i due mezzi e con \hat{k}_1 la direzione di propagazione dell'onda piana incidente e' possibile individuare un piano di incidenza di normale $\hat{x} = \hat{z} \times \hat{k}_1$. Per una qualsiasi polarizzazione dell'onda piana e' sempre possibile rappresentare il campo elettromagnetico associato come somma del campo di due onde piane, una avente campo elettrico perpendicolare al piano di incidenza (polarizzazione perpendicolare), l'altra caratterizzata da un campo elettrico parallelo a tale piano (polarizzazione parallela). L'onda polarizzata perpendicolarmente ha il campo elettrico sempre ortogonale alla normale \hat{z} per cui e' anche denominata onda trasversa elettrica rispetto all'asse z (caso TE_z). L'onda polarizzata parallelamente e' invece caratterizzata da un campo magnetico ortogonale alla normale \hat{z} per cui e' anche denominata onda trasversa magnetica rispetto all'asse z (caso TM_z).

5.3.1 Polarizzazione perpendicolare (caso TE_z)

Si consideri un'onda piana incidente con campo elettrico diretto parallelamente all'asse x e direzione di propagazione

$$\hat{k}_1 = \sin \theta_1 \hat{y} - \cos \theta_1 \hat{z}, \quad (5.14)$$

dove θ_1 e' l'angolo che tale direzione forma con la normale \hat{z} (Fig. 5.4). In

tali ipotesi il campo associato all'onda risulterà

$$\vec{E}^i = E_+^{(1)} \hat{x} \exp(-jk_1 \hat{k}_1 \cdot \hat{r}) = E_+^{(1)} \hat{x} \exp(-jk_{y1}y) \exp(jk_{z1}z), \quad (5.15)$$

$$\vec{H}^i = \frac{1}{\zeta_1} \hat{k}_1 \times \vec{E}^i = -\frac{E_+^{(1)}}{\zeta_1} \left(\cos \theta_1 \hat{y} + \sin \theta_1 \hat{z} \right) \exp(-jk_{y1}y) \exp(jk_{z1}z), \quad (5.16)$$

con

$$k_{y1} = k_1 \sin \theta_1, \quad k_{z1} = k_1 \cos \theta_1. \quad (5.17)$$

La discontinuità piana tra i due mezzi in $z = 0$ origina un'onda piana riflessa avente direzione di propagazione

$$\hat{k}'_1 = \sin \theta_1 \hat{y} + \cos \theta_1 \hat{z}, \quad (5.18)$$

e campo elettromagnetico

$$\vec{E}^r = E_-^{(1)} \hat{x} \exp(-jk_1 \hat{k}'_1 \cdot \hat{r}) = E_-^{(1)} \hat{x} \exp(-jk_{y1}y) \exp(-jk_{z1}z), \quad (5.19)$$

$$\vec{H}^r = \frac{1}{\zeta_1} \hat{k}'_1 \times \vec{E}^r = -\frac{E_-^{(1)}}{\zeta_1} \left(-\cos \theta_1 \hat{y} + \sin \theta_1 \hat{z} \right) \exp(-jk_{y1}y) \exp(-jk_{z1}z). \quad (5.20)$$

Quindi nel semispazio superiore (mezzo 1) il campo totale, somma dell'onda incidente e di quella riflessa, risulta:

$$E_{x1}(y, z) = + \exp(-jk_{y1}y) \left[E_+^{(1)} \exp(jk_{z1}z) + E_-^{(1)} \exp(-jk_{z1}z) \right], \quad (5.21)$$

$$H_{y1}(y, z) = - \exp(-jk_{y1}y) \cdot \left[E_+^{(1)} \frac{\cos \theta_1}{\zeta_1} \exp(jk_{z1}z) - E_-^{(1)} \frac{\cos \theta_1}{\zeta_1} \exp(-jk_{z1}z) \right], \quad (5.22)$$

$$H_{z1}(y, z) = -\frac{\sin \theta_1}{\zeta_1} E_{x1}(y, z). \quad (5.23)$$

Nel semispazio inferiore (mezzo 2) è invece presente un'onda diretta ed una riflessa la cui direzione di propagazione risulta rispettivamente

$$\hat{k}_2 = \sin \theta_2 \hat{y} - \cos \theta_2 \hat{z}, \quad (5.24)$$

$$\hat{k}'_2 = \sin \theta_2 \hat{y} + \cos \theta_2 \hat{z}. \quad (5.25)$$

Analogamente al semispazio superiore, le componenti del campo totale nel semispazio inferiore (mezzo 2) risultano:

$$E_{x2}(y, z) = + \exp(-jk_{y2}y) \left[E_+^{(2)} \exp(jk_{z2}z) + E_-^{(2)} \exp(-jk_{z2}z) \right], \quad (5.26)$$

$$H_{y2}(y, z) = - \exp(-jk_{y2}y) \cdot \left[E_+^{(2)} \frac{\cos \theta_2}{\zeta_2} \exp(jk_{z2}z) - E_-^{(2)} \frac{\cos \theta_2}{\zeta_2} \exp(-jk_{z2}z) \right], \quad (5.27)$$

$$H_{z2}(y, z) = - \frac{\sin \theta_2}{\zeta_2} E_{x2}(y, z), \quad (5.28)$$

dove $k_{y2} = k_2 \sin \theta_2$ e $k_{z2} = k_2 \cos \theta_2$. All'interfaccia ($z = 0$) tra i due semispazi i campi soddisfano le condizioni di continuit  delle componenti tangenziali

$$E_{x1}(y, z)|_{z=0} = E_{x2}(y, z)|_{z=0}, \quad \forall x, y, \quad (5.29)$$

$$H_{y1}(y, z)|_{z=0} = H_{y2}(y, z)|_{z=0}, \quad \forall x, y. \quad (5.30)$$

Perche' cio' si verifichi per ogni valore della coordinata y dovra' essere soddisfatta la condizione

$$k_{y1} = k_{y2} = k_y, \quad (5.31)$$

ovvero la legge di Snell

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2. \quad (5.32)$$

Inserendo la relazione (5.31) nelle (5.29), (5.30) e' facile verificare che in $z = 0$ dovranno essere equivalentemente soddisfatte le relazioni

$$E_+^{(1)} + E_-^{(1)} = E_+^{(2)} + E_-^{(2)}, \quad (5.33)$$

$$E_+^{(1)} \frac{\cos \theta_1}{\zeta_1} - E_-^{(1)} \frac{\cos \theta_1}{\zeta_1} = E_+^{(2)} \frac{\cos \theta_2}{\zeta_2} - E_-^{(2)} \frac{\cos \theta_2}{\zeta_2}. \quad (5.34)$$

Si considerino adesso due linee di trasmissione caratterizzate rispettivamente dai parametri:

$$\begin{aligned} &\text{Linea 1} \\ &k_{z1} = k_1 \cos \theta_1 \\ &Z_1 = \zeta_1 / \cos \theta_1 = \omega \mu_1 / k_{z1} \\ &V_+^{(1)} \equiv E_+^{(1)} \\ &V_-^{(1)} \equiv E_-^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Linea 2} \\ &k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 \\ &Z_2 = \zeta_2 / \cos \theta_2 = \omega \mu_2 / k_{z2} \\ &V_+^{(2)} \equiv E_+^{(2)} \\ &V_-^{(2)} \equiv E_-^{(2)} \end{aligned}$$

E immediato verificare che la tensione e la corrente su tali linee rappresentano, a meno del fattore $\exp(-jk_{yn}y)$, le componenti del campo totale nel generico n -esimo semispazio:

$$E_{xn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) V_n(z), \quad (5.35)$$

$$H_{yn}(y, z) = -\exp(-jk_{yn}y) I_n(z), \quad (5.36)$$

$$H_{zn}(y, z) = -\exp(-jk_{yn}y) \frac{\sin \theta_n}{\zeta_n} V_n(z), \quad (5.37)$$

dove

$$V_n(z) = \left[V_+^{(n)} \exp(jk_{zn}z) + V_-^{(n)} \exp(-jk_{zn}z) \right], \quad (5.38)$$

$$I_n(z) = \left[\frac{V_+^{(n)}}{Z_n} \exp(jk_{zn}z) - \frac{V_-^{(n)}}{Z_n} \exp(-jk_{zn}z) \right]. \quad (5.39)$$

Inoltre, soddisfare le condizioni (5.33), (5.34) equivale a richiedere

$$V_1(z)|_{z=0} = V_2(z)|_{z=0}, \quad (5.40)$$

$$I_1(z)|_{z=0} = I_2(z)|_{z=0}, \quad (5.41)$$

e cioè a connettere le due linee in $z = 0$. Se ne deduce che al fine di risolvere il problema di onda piana si possono equivalentemente studiare le due linee di trasmissione precedentemente definite poste in cascata.

Esercizio 5.3 *Un'onda piana proveniente dallo spazio vuoto, polarizzata perpendicolarmente ed avente ampiezza $E_+ = 1 \text{ V/m}$, incide su un semispazio dielettrico caratterizzato da una costante dielettrica $\varepsilon_r = 4$ formando un angolo $\theta_1 = 30^\circ$ rispetto alla normale all'interfaccia vuoto/dielettrico. Si determini l'ampiezza del campo elettrico nello spazio vuoto ad un'altezza $h = \lambda_0/4$ dall'interfaccia.*

Si consideri la configurazione di linee equivalenti mostrata in Fig. 5.5 in cui:

$$\begin{aligned} k_{z1} &= k_1 \cos \theta_1, & Z_1 &= \zeta_1 / \cos \theta_1, \\ k_{z2} &= k_2 \cos \theta_2, & Z_2 &= \zeta_2 / \cos \theta_2 \end{aligned}$$

e $V_+^{(1)} = 1 \text{ V} \equiv E_+^{(1)}$. Poiché il mezzo dielettrico è supposto indefinito per $z \rightarrow -\infty$, nella linea di impedenza Z_2 non sarà presente alcuna onda riflessa e la linea di impedenza Z_1 può essere considerata chiusa su un carico di impedenza $Z_u = Z_2$. L'ampiezza dell'onda riflessa nella linea di impedenza

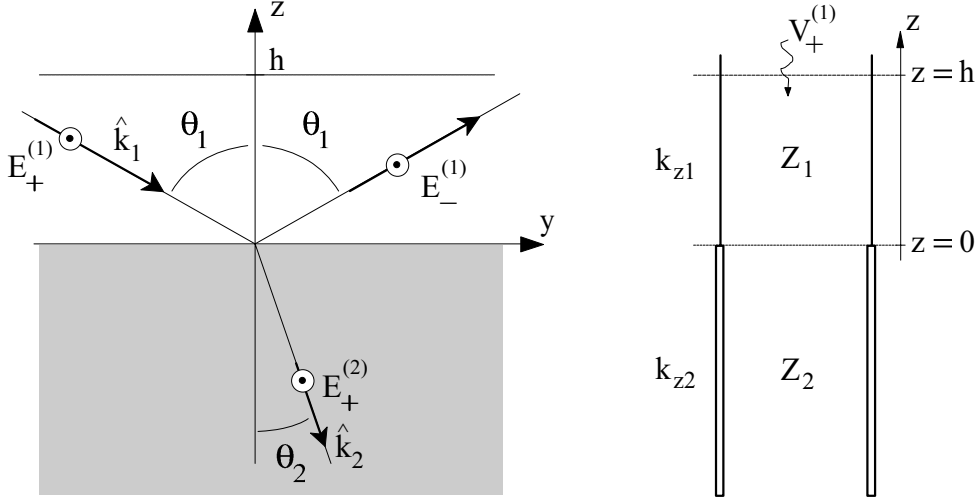


Figura 5.5: Incidenza obliqua di una onda piana, polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza, su un semispazio dielettrico e suo circuito equivalente.

Z_1 , ed equivalentemente l'ampiezza del campo elettrico riflesso nel semispazio vuoto, risulta

$$\begin{aligned} E_-^{(1)} \equiv V_-^{(1)} &= V_+^{(1)} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \\ &= V_+^{(1)} \frac{\zeta_2 / \cos \theta_2 - \zeta_1 / \cos \theta_1}{\zeta_2 / \cos \theta_2 + \zeta_1 / \cos \theta_1} = V_+^{(1)} \frac{\zeta_2 \cos \theta_1 - \zeta_1 \cos \theta_2}{\zeta_2 \cos \theta_1 + \zeta_1 \cos \theta_2}. \end{aligned}$$

Facendo uso della legge di Snell, $k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$, e' possibile esprimere il $\cos \theta_2$ in funzione dell'angolo θ_1 come:

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - (\sin \theta_2)^2} = \sqrt{1 - \left[\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_1 \right]^2},$$

da cui

$$k_{z2} = k_2 \sqrt{1 - \left[\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_1 \right]^2} = k_2 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} (\sin \theta_1)^2},$$

$$Z_2 = \zeta_2 / \sqrt{1 - \left[\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_1 \right]^2} = \frac{\zeta_0 / \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} (\sin \theta_1)^2}}.$$

Cio' permette di scrivere l'ampiezza del campo elettrico riflesso nel semispazio superiore come

$$E_-^{(1)} \equiv V_-^{(1)} = V_+^{(1)} \frac{\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} (\sin \theta_1)^2}}{\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} (\sin \theta_1)^2}} =$$

$$= V_+^{(1)} \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - (\sin \theta_1)^2}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - (\sin \theta_1)^2}},$$

da cui, inserendo i dati del problema, $E_-^{(1)} = E_+^{(1)} \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = -0.382$.

L'ampiezza del campo elettrico nel semispazio di provenienza dell'onda piana incidente ad un'altezza $h = \lambda_0/4$ dall'interfaccia risulta perciò

$$|E_{x1}(y, z)|_{z=h} = \left| \exp(-jk_{y1}y) \left[E_+^{(1)} \exp(jk_{z1}h) + E_-^{(1)} \exp(-jk_{z1}h) \right] \right| =$$

$$= \left| \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos \theta_1 \frac{\lambda_0}{4}\right) - 0.382 \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos \theta_1 \frac{\lambda_0}{4}\right) \right| = 0.67 V/m.$$

□

5.3.2 Polarizzazione parallela (caso TM_z)

Si consideri ora un'onda piana incidente su un semispazio materiale avente campo magnetico diretto parallelamente all'asse x e direzione di propagazione

$$\hat{k}_1 = \sin \theta_1 \hat{y} - \cos \theta_1 \hat{z}, \quad (5.42)$$

dove θ_1 e' l'angolo che tale direzione forma con la normale \hat{z} (Fig. 5.6). Dualmente al caso di polarizzazione perpendicolare il campo totale nel generico n -esimo semispazio risulta:

$$H_{xn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) \left[\frac{E_+^{(n)}}{\zeta_n} \exp(jk_{zn}z) - \frac{E_-^{(n)}}{\zeta_n} \exp(-jk_{zn}z) \right], \quad (5.43)$$

$$E_{yn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) \cdot \left[E_+^{(n)} \cos \theta_n \exp(jk_{zn}z) + E_-^{(n)} \cos \theta_n \exp(-jk_{zn}z) \right], \quad (5.44)$$

$$E_{zn}(y, z) = \zeta_n \sin \theta_n H_{xn}(y, z) \quad (5.45)$$

dove

$$H_+^{(n)} = E_+^{(n)} / \zeta_n, \quad H_-^{(n)} = -E_-^{(n)} / \zeta_n, \quad (5.46)$$

$$k_{yn} = k_n \sin \theta_n, \quad k_{zn} = k_n \cos \theta_n. \quad (5.47)$$

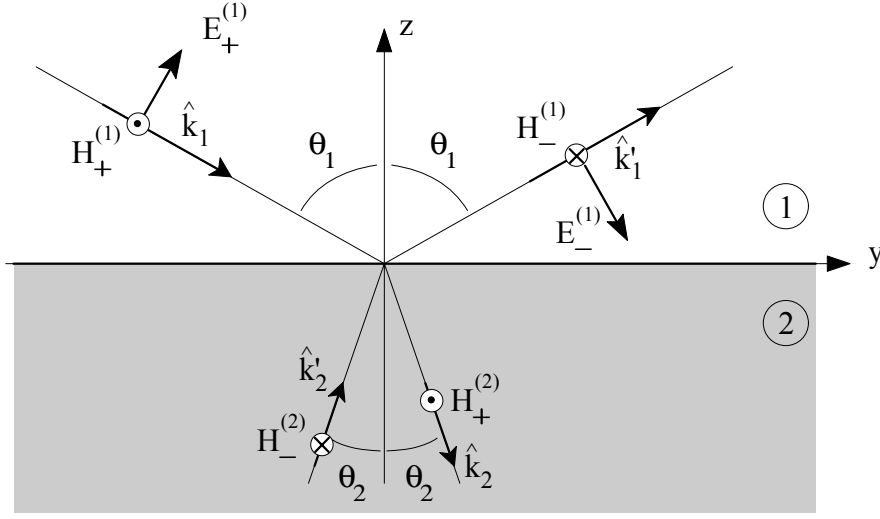


Figura 5.6: Incidenza obliqua di una onda piana su un semispazio materiale: polarizzazione parallela (caso TM_z).

Ponendo l'equivalenza

$$V_+^{(n)} \equiv E_+^{(n)} \cos \theta_n, \quad (5.48)$$

$$V_-^{(n)} \equiv E_-^{(n)} \cos \theta_n, \quad (5.49)$$

$$k_{zn} = k_n \cos \theta_n, \quad (5.50)$$

$$Z_n = \zeta_n \cos \theta_n = \frac{k_{zn}}{\omega \varepsilon_n}, \quad (5.51)$$

le eqn. (5.43)–(5.44) assumono la forma

$$H_{xn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) I_n(z), \quad (5.52)$$

$$E_{yn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) V_n(z), \quad (5.53)$$

$$E_{zn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) \zeta_n \sin \theta_n I_n(z), \quad (5.54)$$

dove

$$V_n(z) = \left[V_+^{(n)} \exp(jk_{zn}z) + V_-^{(n)} \exp(-jk_{zn}z) \right], \quad (5.55)$$

$$I_n(z) = \left[\frac{V_+^{(n)}}{Z_n} \exp(jk_{zn}z) - \frac{V_-^{(n)}}{Z_n} \exp(-jk_{zn}z) \right]. \quad (5.56)$$

Analogamente al caso di polarizzazione perpendicolare, imporre la continuità delle componenti tangenziali del campo all'interfaccia $z = 0$ tra i due

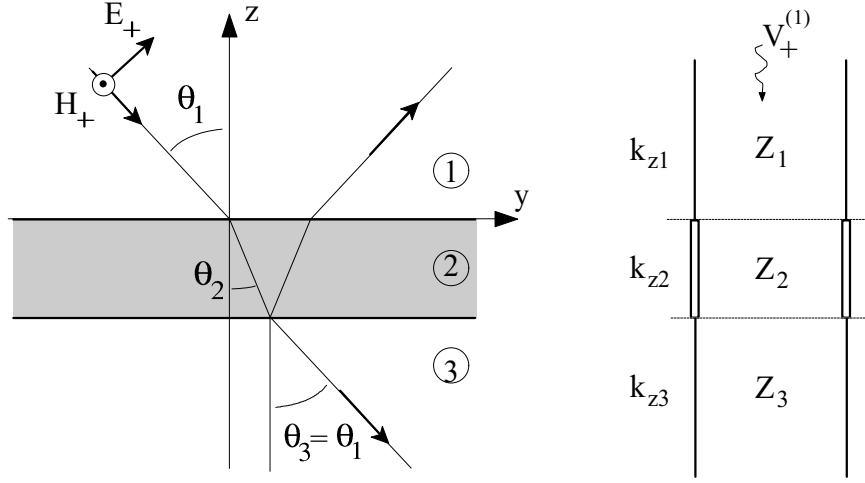


Figura 5.7: Onde piana incidente su uno strato dielettrico e suo circuito equivalente.

semispazi

$$E_{y1}(y, z)|_{z=0} = E_{y2}(y, z)|_{z=0}, \quad \forall x, y, \quad (5.57)$$

$$H_{x1}(y, z)|_{z=0} = H_{x2}(y, z)|_{z=0}, \quad \forall x, y, \quad (5.58)$$

equivale ad imporre

$$V_1(z)|_{z=0} = V_2(z)|_{z=0}, \quad (5.59)$$

$$I_1(z)|_{z=0} = I_2(z)|_{z=0}, \quad (5.60)$$

e quindi a porre in cascata le due linee equivalenti.

Esercizio 5.4 *Un'onda piana proveniente dallo spazio vuoto avente polarizzazione parallela incide con un angolo $\theta_1 = 30^\circ$ su uno strato dielettrico di spessore d caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$. Si determini lo spessore d per cui non si ha onda riflessa nel semispazio di provenienza dell'onda.*

Si consideri la configurazione di linee equivalenti mostrata in Fig. 5.7 in cui, facendo uso della legge di Snell:

$$k_{z1} = k_{z3} = k_0 \cos \theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos(\pi/6),$$

$$Z_1 = Z_3 = \zeta_0 \cos \theta_1 = 120\pi \cos(\pi/6),$$

$$k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r} \cos \theta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_r - (\sin \theta_1)^2} = \frac{\pi\sqrt{15}}{\lambda_0},$$

$$Z_2 = \zeta_2 \cos \theta_2 = \frac{\zeta_0}{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_r - (\sin \theta_1)^2} = 15\pi\sqrt{15}.$$

Per non avere onda riflessa nel semispazio di provenienza dell'onda incidente si dovrà equivalentemente realizzare un trasformatore a mezz'onda e quindi imporre $d = \lambda_{z2}/2$ dove con λ_{z2} si è indicata la lunghezza d'onda nel tratto di linea di impedenza Z_2 . Essendo

$$\lambda_{z2} = \frac{2\pi}{k_{z2}} = 2\pi \frac{\lambda_0}{\pi\sqrt{15}} = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{15}},$$

lo spessore dello strato dielettrico risulta $d = \lambda_0/\sqrt{15}$. □

5.4 Il problema di N linee in cascata

Si vuole ora studiare il problema di N linee poste in cascata, o equivalentemente N strati piani su cui incide un'onda piana. A tal fine si prenda in considerazione un generico tratto di linea di lunghezza ℓ_n caratterizzato da una costante di propagazione k_n ed una impedenza caratteristica Z_n . Se con V_{n+1} , I_{n+1} e V_n , I_n si indicano la tensione e la corrente rispettivamente alla sezione $z = 0$ e $z = \ell_n$ (Fig. 5.8), dalla teoria generale delle linee di trasmissione è possibile scrivere:

$$V_n = V_{n+} \exp(jk_n \ell_n) + V_{n-} \exp(-jk_n \ell_n), \quad (5.61)$$

$$I_n = \frac{V_{n+}}{Z_n} \exp(jk_n \ell_n) - \frac{V_{n-}}{Z_n} \exp(-jk_n \ell_n), \quad (5.62)$$

dove

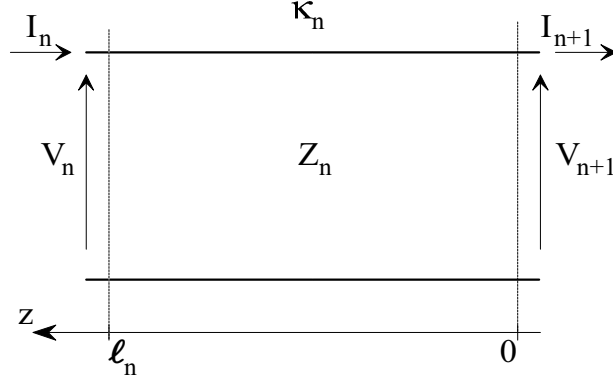
$$V_{n+} = \frac{1}{2} (V_{n+1} + I_{n+1} Z_n), \quad (5.63)$$

$$V_{n-} = \frac{1}{2} (V_{n+1} - I_{n+1} Z_n). \quad (5.64)$$

Sostituendo le eqn. (5.63)–(5.64) nelle (5.61)–(5.62), si ottiene:

$$V_n = V_{n+1} \cos(k_n \ell_n) + I_{n+1} j Z_n \sin(k_n \ell_n), \quad (5.65)$$

$$I_n = V_{n+1} \frac{j \sin(k_n \ell_n)}{Z_n} + I_{n+1} \cos(k_n \ell_n). \quad (5.66)$$

Figura 5.8: Generico tratto n della cascata di N linee.

Queste ultime relazioni possono essere convenientemente espresse in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \underline{T}_n \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.67)$$

definendo la matrice di trasmissione

$$\underline{T}_n = \begin{bmatrix} \cos(k_n \ell_n) & j Z_n \sin(k_n \ell_n) \\ \frac{j \sin(k_n \ell_n)}{Z_n} & \cos(k_n \ell_n) \end{bmatrix}. \quad (5.68)$$

Tale forma risulta utile nel caso in cui si consideri la connessione di N tratti di linea aventi caratteristiche diverse. Infatti per ognuno di essi e' possibile, dopo aver valutato la corrispondente matrice di trasmissione, scrivere una relazione del tipo (5.67). Per i due generici tratti n -esimo e $n+1$ -esimo adiacenti tra loro e' possibile scrivere:

$$(\text{tratto } n\text{-esimo}) \quad \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \underline{T}_n \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.69)$$

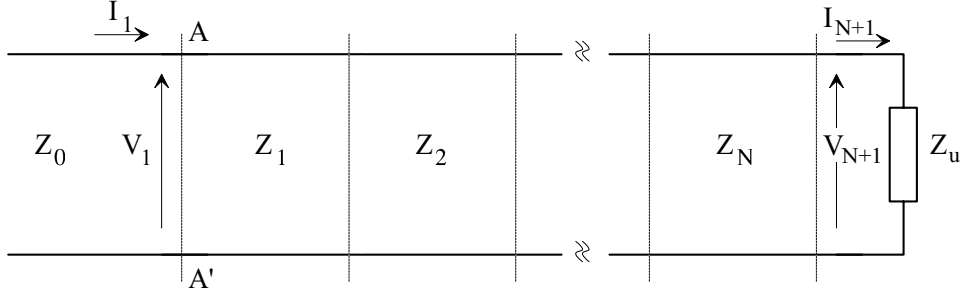
$$(\text{tratto } n+1\text{-esimo}) \quad \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{T}_{n+1} \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ I_{n+2} \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

da cui risulta evidente

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \underline{T}_n \underline{T}_{n+1} \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ I_{n+2} \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

Estendendo tale risultato al caso in cui si sia in presenza di N di tratti di linea connessi in cascata e' possibile scrivere

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \underline{T} \begin{bmatrix} V_{n+N} \\ I_{n+N} \end{bmatrix}, \quad (5.72)$$

Figura 5.9: Cascata di N tratti di linea con caratteristiche diverse.

oppure

$$\begin{bmatrix} V_{n+N} \\ I_{n+N} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}^{-1} \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

dove con $\underline{\underline{T}}$ si e' indicata la matrice risultante dal prodotto delle matrici di trasmissione caratterizzanti i singoli tratti di linea, cioe'

$$\underline{\underline{T}} = \left[\prod_{i=0}^{N-1} \underline{\underline{T}}_{n+i} \right]. \quad (5.74)$$

Esercizio 5.5 Si valuti il coefficiente di riflessione all'ingresso di una cascata di N tratti di linea terminata da un generico carico Z_u .

Il coefficiente di riflessione alla sezione AA' e' legato all'impedenza $Z_{AA'} = V_1/I_1$ che la cascata degli N tratti di linea presenta a tale sezione dalla relazione:

$$\Gamma_{AA'} = \frac{Z_{AA'} - Z_0}{Z_{AA'} + Z_0}.$$

La tensione V_1 e la corrente I_1 alla sezione AA' risulta legata alla tensione V_{N+1} e alla corrente I_{N+1} sul carico dalla relazione

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} V_{N+1} \\ I_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N+1} \\ I_{N+1} \end{bmatrix},$$

dove

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \left[\prod_{i=1}^N \underline{\underline{T}}_i \right]$$

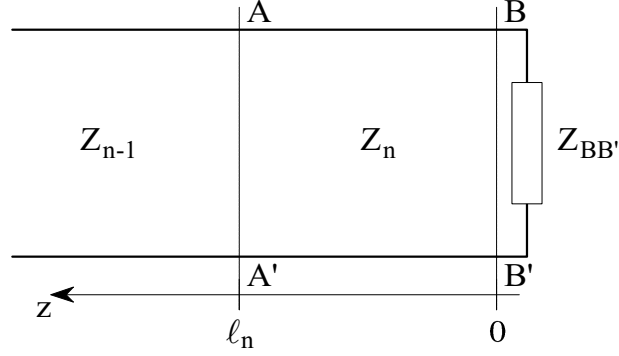


Figura 5.10: Due tratti di linea in cascata terminati su un carico $Z_{BB'}$.

e la matrice $\underline{\underline{T}}_i$ e' definita come nell'eq. (5.68). L'impedenza Z_u del carico e' anche esprimibile come $Z_u = V_{N+1}/I_{N+1}$ da cui

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_u \\ 1 \end{bmatrix} I_{N+1}$$

e

$$\begin{aligned} V_1 &= (t_{11}Z_u + t_{12})I_{N+1}, \\ I_1 &= (t_{21}Z_u + t_{22})I_{N+1}. \end{aligned}$$

Ne segue che l'impedenza alla sezione AA' e' valutabile attraverso la relazione

$$Z_{AA'} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{t_{11}Z_u + t_{12}}{t_{21}Z_u + t_{22}}$$

e da essa il coefficiente di riflessione richiesto. □

5.5 Teoria delle piccole riflessioni

Si consideri dapprima la configurazione schematizzata in Fig. 5.10. Indicato con

$$\Gamma_n = \frac{Z_{BB'} - Z_n}{Z_{BB'} + Z_n} \quad (5.75)$$

il coefficiente di riflessione di tensione alla sezione BB' , e' possibile esprimere il coefficiente di riflessione subito a destra della sezione AA' tramite la relazione

$$\Gamma'_n = \Gamma_n \exp(-j2k_n\ell_n), \quad (5.76)$$

dove k_n rappresenta la costante di propagazione nella linea di impedenza Z_n . Il carico $Z_{BB'}$ si presenta equivalentemente alla sezione AA' come una impedenza

$$Z_{AA'} = Z_n \frac{1 + \Gamma'_n}{1 - \Gamma'_n}, \quad (5.77)$$

per cui il coefficiente di riflessione subito a sinistra della sezione AA' puo' essere espresso come:

$$\Gamma_{AA'} = \frac{Z_{AA'} - Z_{n-1}}{Z_{AA'} + Z_{n-1}} = \frac{Z_n(1 + \Gamma'_n) - Z_{n-1}(1 - \Gamma'_n)}{Z_n(1 + \Gamma'_n) + Z_{n-1}(1 - \Gamma'_n)} = \frac{\frac{Z_n - Z_{n-1}}{Z_n + Z_{n-1}} + \Gamma'_n}{1 + \frac{Z_n - Z_{n-1}}{Z_n + Z_{n-1}} \Gamma'_n}. \quad (5.78)$$

Indicando con

$$\Gamma_{n-1} = \frac{Z_n - Z_{n-1}}{Z_n + Z_{n-1}}, \quad (5.79)$$

il coefficiente di riflessione alla sezione AA' risulta

$$\Gamma_{AA'} = \frac{\Gamma_{n-1} + \Gamma_n \exp(-j2k_n \ell_n)}{1 + \Gamma_{n-1} \Gamma_n \exp(-j2k_n \ell_n)}. \quad (5.80)$$

Si supponga ora che la discontinuita' tra le impedenze Z_{n-1} e Z_n , cosi' come tra le impedenze Z_n e $Z_{BB'}$, sia piccola e quindi sia valida la diseuguaglianza $|\Gamma_{n-1} \Gamma_n| \ll 1$. In tali ipotesi al denominatore della eq. (5.80) e' possibile trascurare rispetto all'unita' il termine in cui appare la funzione esponenziale e quindi approssimare il coefficiente di riflessione alla sezione AA' tramite l'espressione

$$\Gamma_{AA'} \simeq \Gamma_{n-1} + \Gamma_n \exp(-j2k_n \ell_n). \quad (5.81)$$

Attraverso la relazione approssimata (5.81) la riflessione alla sezione AA' puo' essere interpretata come la somma della riflessione diretta alla sezione AA' , dovuta alla discontinuita' introdotta dalle differenti impedenze caratteristiche delle due linee di cui Γ_{n-1} rappresenta il coefficiente di riflessione, e della riflessione dovuta al carico con la relativa variazione di fase, ed eventualmente di ampiezza, $\exp(-j2k_n \ell_n)$ introdotta dal tratto di linea di impedenza Z_n .

Se ora si considera una cascata di N tratti di linea, cosi' come schematizzato in Fig. 5.9, e si definisce

$$\Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} \quad \text{per } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.82)$$

$$\Gamma_N = \frac{Z_u - Z_N}{Z_u + Z_N} \quad (5.83)$$

$$\theta_n = k_n \ell_n \quad \text{per } n = 1, 2, \dots, N, \quad (5.84)$$

nell'approssimazione di piccole riflessioni e' possibile stimare il coefficiente di riflessione all'ingresso della cascata delle N linee come:

$$\Gamma_{AA'} = \Gamma_0 + \Gamma_1 \exp(-j2\theta_1) + \Gamma_2 \exp(-j2\theta_1) \exp(-j2\theta_2) + \dots + \\ + \dots + \Gamma_N \prod_{i=1}^N \exp(-j2\theta_i). \quad (5.85)$$

Si consideri ora il caso in cui le linee siano prive di perdite, $Z_n = R_n$, e la lunghezza ℓ_n sia scelta in modo tale che la lunghezza elettrica di ogni linea risulti identica, cioe' $\theta_n = \beta_n \ell_n = \theta$ per $n = 1, 2, \dots, N$. In tali ipotesi

$$\Gamma_{AA'}(\theta) = \Gamma_0 + \Gamma_1 \exp(-j2\theta) + \Gamma_2 \exp(-j4\theta) + \dots + \Gamma_N \exp(-j2N\theta). \quad (5.86)$$

Si assuma inoltre che i coefficienti di riflessione risultino simmetrici¹, cioe' $\Gamma_0 = \Gamma_N$, $\Gamma_1 = \Gamma_{N-1}$, $\Gamma_2 = \Gamma_{N-2}$, \dots ; cio' permette di scrivere il coefficiente di riflessione alla sezione AA' nella forma:

$$\Gamma_{AA'}(\theta) = \exp(-jN\theta) \{ \Gamma_0 [\exp(jN\theta) + \exp(-jN\theta)] \\ + \Gamma_1 [\exp(j(N-2)\theta) + \exp(-j(N-2)\theta)] + \dots \}, \quad (5.87)$$

dove l'ultimo termine in parentesi graffa risultera' $\Gamma_{\frac{N}{2}}$ per N pari mentre $\Gamma_{\frac{N-1}{2}} [\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)]$ per N dispari. In particolare la relazione (5.87) puo' essere riscritta nella forma di serie finita di Fourier sia per N pari

$$\Gamma_{AA'}(\theta) = 2 \exp(-jN\theta) \{ \Gamma_0 \cos[N\theta] + \Gamma_1 \cos[(N-2)\theta] \\ + \dots + \Gamma_n \cos[(N-2n)\theta] + \dots + \frac{1}{2} \Gamma_{\frac{N}{2}} \}, \quad (5.88)$$

che per N dispari

$$\Gamma_{AA'}(\theta) = 2 \exp(-jN\theta) \{ \Gamma_0 \cos[N\theta] + \Gamma_1 \cos[(N-2)\theta] \\ + \dots + \Gamma_n \cos[(N-2n)\theta] + \dots + \Gamma_{\frac{N-1}{2}} \cos \theta \}. \quad (5.89)$$

L'importanza del risultato risiede nel fatto che, scegliendo opportunamente i coefficienti di riflessione Γ_n , che coincidono con i coefficienti della serie di Fourier, e un numero N sufficiente di sezioni, e' possibile sintetizzare qualsiasi andamento del coefficiente di riflessione $\Gamma_{AA'}$ in funzione della frequenza f a cui la lunghezza elettrica θ e' legata dalla relazione $f = \theta v_{f_n} / 2\pi \ell_n$, dove con v_{f_n} si e' indicata la velocita' di fase misurata in una qualsiasi sezione n .

¹Tale ipotesi non implica tuttavia un andamento simmetrico delle impedenze R_n .