

Capitolo 5

Applicazioni della teoria delle linee di trasmissione

5.1 Analogia onda piana/linea di trasmissione

Così come mostrato nel primo capitolo, l'andamento della tensione e della corrente lungo una linea di trasmissione è descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, \omega) + k^2 V(z, \omega) = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} I(z, \omega) + k^2 I(z, \omega) = 0, \quad (5.2)$$

dove $k = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}}$, la cui soluzione generale risulta

$$V(z) = V_+ \exp(jkz) + V_- \exp(-jkz), \quad (5.3)$$

$$I(z) = \frac{V_+}{Z_0} \exp(jkz) - \frac{V_-}{Z_0} \exp(-jkz), \quad (5.4)$$

con $Z_0 = \sqrt{L_{eq}/C_{eq}}$. Si consideri ora un'onda piana che si propaga, parallelamente all'asse z con campo elettrico polarizzato linearmente lungo l'asse x , cioè $\vec{E} = E_x \hat{x}$, in un mezzo lineare, omogeneo ed isotropo, caratterizzato da una permittività ε ed una permeabilità μ . Per tale onda il sistema di equazioni differenziali che ne regolano la propagazione risulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z, \omega) + k^2 E_x(z, \omega) = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z, \omega) + k^2 H_y(z, \omega) = 0, \quad (5.6)$$

dove $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Soluzione generale di tale sistema risulta essere

$$E_x(z) = E_+ \exp(jkz) + E_- \exp(-jkz), \quad (5.7)$$

$$H_y(z) = \frac{E_+}{\zeta} \exp(jkz) - \frac{E_-}{\zeta} \exp(-jkz), \quad (5.8)$$

dove $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ e E_+ indica, per avere accordo con il sistema di riferimento convenzionalmente assunto per una linea di trasmissione, l'ampiezza dell'onda progressiva supposta propagarsi nel verso delle z negative.

Confrontando le soluzioni (5.7)–(5.8) con le (5.3)–(5.4) e' subito evidente che operando le sostituzioni

$$E_x \leftrightarrow V, \quad H_y \leftrightarrow I, \quad \mu \leftrightarrow L_{eq}, \quad \varepsilon \leftrightarrow C_{eq}, \quad (5.9)$$

e' possibile studiare in modo equivalente il problema della propagazione di un'onda piana in un mezzo indefinito utilizzando la teoria delle linee di trasmissione.

5.2 Analogia onda piana/linea di trasmissione: incidenza ortogonale

Si consideri ora il caso in cui un'onda piana, con campo elettrico polarizzato linearmente lungo x ed ampiezza E_+ , incida ortogonalmente sul semispazio $z < 0$ (mezzo 2) avente caratteristiche elettriche e magnetiche diverse da quello di provenienza dell'onda (mezzo 1). In entrambi i semispazi e' possibile descrivere la propagazione dell'onda tramite l'analogia delle linee di trasmissione precedentemente introdotta. In $z = 0$ e' poi necessario imporre la continuita' delle componenti tangenziali dei campi, cioe'

$$E_{x1}(z)|_{z=0} = E_{x2}(z)|_{z=0}, \quad (5.10)$$

$$H_{y1}(z)|_{z=0} = H_{y2}(z)|_{z=0}, \quad (5.11)$$

che si traduce nel richiedere

$$V_1(z)|_{z=0} = V_2(z)|_{z=0}, \quad (5.12)$$

$$I_1(z)|_{z=0} = I_2(z)|_{z=0}. \quad (5.13)$$

Cio' equivale a connettere in $z = 0$ le due linee che rappresentano la propagazione dell'onda piana in ciascun semispazio (Fig. 5.1).

Nel caso in cui il mezzo 2 su cui incide l'onda piana sia costituito da un conduttore elettrico perfetto la condizione al contorno $\hat{n} \times \vec{E}_1(z)|_{z=0} = 0$ si

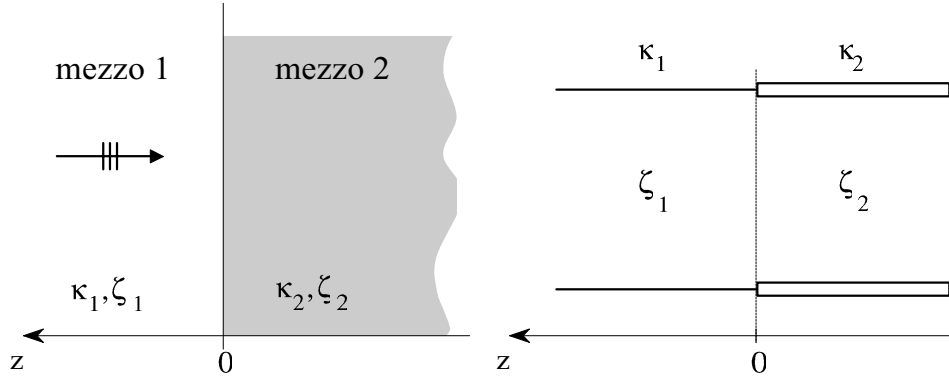


Figura 5.1: Equivalenza onda piana/linea di trasmissione.

traduce nell'imporre $V_1(z)|_{z=0} = 0$; cio' equivale a considerare la presenza di un corto circuito in corrispondenza del piano conduttore elettrico. Analogamente, nel caso in cui il mezzo 2 sia costituito da un conduttore magnetico perfetto la condizione al contorno $\hat{n} \times \vec{H}_1(z)|_{z=0} = 0$ si traduce nell'imporre $I_1(z)|_{z=0} = 0$ e quindi considerare un circuito aperto in corrispondenza del piano magnetico.

Esercizio 5.1 *Un'onda piana monocromatica avente frequenza $f = 2 \text{ GHz}$ e ampiezza $E_+ = 1 \text{ V/m}$, proveniente dallo spazio vuoto, incide ortogonalmente su una lastra dielettrica ($\epsilon_r = 4$) di spessore $d = 1.875 \text{ mm}$ che ricopre un piano perfettamente conduttore (Fig. 5.2). Si determini il modulo della densita' di corrente sostenuta dal campo sul conduttore.*

Si consideri un sistema di coordinate cartesiano, avente origine sul piano conduttore, il cui asse z risulta ortogonale ad esso e rivolto nella direzione di provenienza dell'onda. L'esercizio richiede di valutare il modulo della densita' di corrente elettrica superficiale \vec{J}_s che scorre sul conduttore; tuttavia in corrispondenza dell'interfaccia lastra dielettrica/conduttore ($z = 0$) dovranno essere verificate le condizioni

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{E} \Big|_{z=0} &= 0, \\ \hat{n} \times \vec{H} \Big|_{z=0} &= \vec{J}_s, \end{aligned}$$

per cui sara' sufficiente valutare il campo magnetico tangenziale al piano conduttore elettrico perfetto a cui la corrente e' direttamente legata.

Per la geometria del problema il campo elettrico e magnetico risultano sempre appartenenti ad un piano parallelo alla superficie di separazione tra

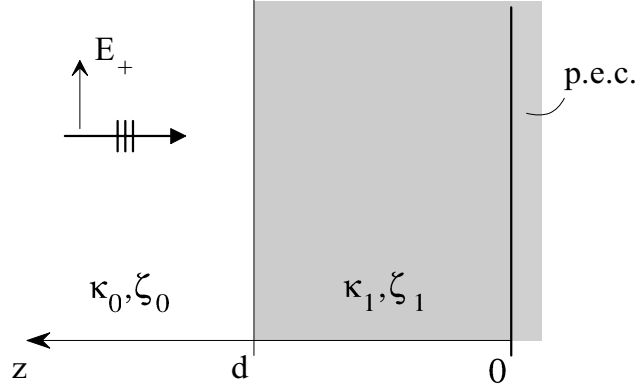


Figura 5.2: Onda piana incidente su una lastra dielettrica ($\varepsilon_r = 4$) di spessore $d = 1.875 \text{ mm}$ che ricopre un piano perfettamente conduttore.

i due mezzi ($\vec{E} = E_t \hat{t}$, $\vec{H} = H_t \hat{t} \times \hat{z}$, $\hat{t} \cdot \hat{z} = 0$) per cui, operando l'analogia

$$\begin{aligned} E_t &\leftrightarrow V, & k &= \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \leftrightarrow k = \omega \sqrt{C_{eq} L_{eq}}, \\ H_t &\leftrightarrow I, & \zeta &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \leftrightarrow Z = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}}, \end{aligned}$$

e' possibile studiare equivalentemente il circuito mostrato in Fig. 5.3. E' evidente che l'ampiezza del campo magnetico tangente al conduttore, e quindi anche quella della densita' di corrente superficiale, coincidono con l'ampiezza della corrente che scorre sul corto circuito. In particolare per una linea in corto circuito e' possibile scrivere $I(z) = I_u \cos(kz)$ per cui

$$I(d) = I_u \cos(\beta_1 d) \quad \Rightarrow \quad I_u = \frac{I(d)}{\cos(\beta_1 d)},$$

dove nel tratto $AA'-BB'$

$$k = \beta_1 = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \simeq 83.78.$$

Sara' quindi nostro obiettivo valutare la corrente $I(d)$ in funzione dell'ampiezza dell'onda incidente $V_{0+} \equiv E_+$. A tal fine e' conveniente valutare l'impedenza che la linea chiusa in corto circuito presenta in corrispondenza dell'interfaccia vuoto/lastra dielettrica (sez. AA'),

$$Z_{AA'} = j\zeta_1 \tan(\beta_1 d) = j \frac{\zeta_0}{2} \tan(\beta_1 d) = j0.079\zeta_0,$$

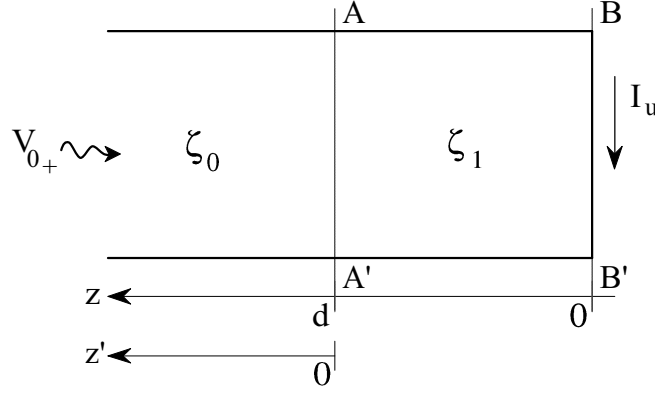


Figura 5.3: Circuito equivalente per la configurazione di Fig. 5.2

e considerare un nuovo sistema di riferimento z' parallelo al precedente e avente origine in corrispondenza di tale interfaccia. In tali ipotesi:

$$I(d) = I'(z')|_{z'=0} = \frac{V_{0+}}{\zeta_0} \exp(jk_0 z') [1 - \Gamma'(z')] \Big|_{z'=0} = \frac{V_{0+}}{\zeta_0} [1 - \Gamma'(0)] ,$$

dove

$$\Gamma'(0) = \frac{Z_{AA'} - \zeta_0}{Z_{AA'} + \zeta_0} = \exp(j2.99) .$$

Quindi

$$|I_u| = \frac{|I(d)|}{|\cos(\beta_1 d)|} = \frac{|V_{0+}|}{\zeta_0 |\cos(\beta_1 d)|} |1 - \Gamma'(0)| = 5.31 \cdot 10^{-3} A ,$$

da cui

$$|J_s| = 5.31 \text{ mA/m} .$$

□

Esercizio 5.2 Con riferimento alla configurazione dell'esercizio precedente si diano indicazioni sullo spessore e sulle caratteristiche elettriche e magnetiche del materiale con cui deve essere costruita la lastra che ricopre il piano perfettamente conduttore al fine di non avere onda riflessa nello spazio vuoto.

E' conveniente operare l'analogia onda piana/linea di trasmissione gia' introdotta nell'esercizio precedente.

Si puo' subito notare che non e' possibile dissipare potenza sul carico essendo questo costituito da un corto circuito. Per dissipare quindi la potenza associata all'onda incidente sara' necessario supporre che la lastra sia costituita da un materiale con perdite caratterizzato da una permeabilita' $\mu = \mu_1 - j\mu_2$ ed una permittivita' $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ complesse. A causa della presenza delle perdite anche la costante di propagazione risultera' complessa $k = \beta - j\alpha$ ed il modulo del coefficiente di riflessione, allontanandosi dal corto circuito, diminuira' esponenzialmente secondo l'espressione $|\Gamma(z)| = \exp(-2\alpha z)$. Per annullare l'effetto dell'onda riflessa dal piano conduttore sara' quindi sufficiente dimensionare lo spessore d della lastra in modo che il coefficiente di riflessione all'interfaccia lastra/vuoto risulti cosi' piccolo che la potenza associata all'onda riflessa sia inferiore, o al piu' confrontabile, con quella dovuta al rumore.

Anche se le perdite introdotte permettono di mascherare la riflessione introdotta dal piano conduttore, si avra' sempre una riflessione all'interfaccia lastra/vuoto dovuta alla discontinuita' nell'impedenza caratteristica dei due mezzi. Per ovviare sara' necessario scegliere il materiale con cui realizzare la lastra in modo che questa presenti una impedenza caratteristica ζ_1 pari a quella del vuoto, cioe' $\zeta_1 = \zeta_0 = 120\pi$. Poiche' tale impedenza risulta puramente reale sara' necessario verificare la condizione di Heaviside

$$\varepsilon_2/\varepsilon_1 = \mu_2/\mu_1,$$

da cui

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} = 120\pi.$$

Agendo opportunamente sulla permittivita' e la permeabilita' della lastra e' quindi possibile rimuovere anche l'effetto di discontinuita' materiale all'interfaccia lastra/vuoto. □

5.3 Analogia onda piana/linea di trasmissione: incidenza obliqua

Si consideri il problema di un'onda piana, proveniente da un semispazio caratterizzato da una costante di propagazione k_1 ed una impedenza caratteristica ζ_1 (mezzo 1), incidente su un semispazio con costante di propagazione k_2 ed impedenza caratteristica ζ_2 (mezzo 2). Indicando con \hat{z} la normale al

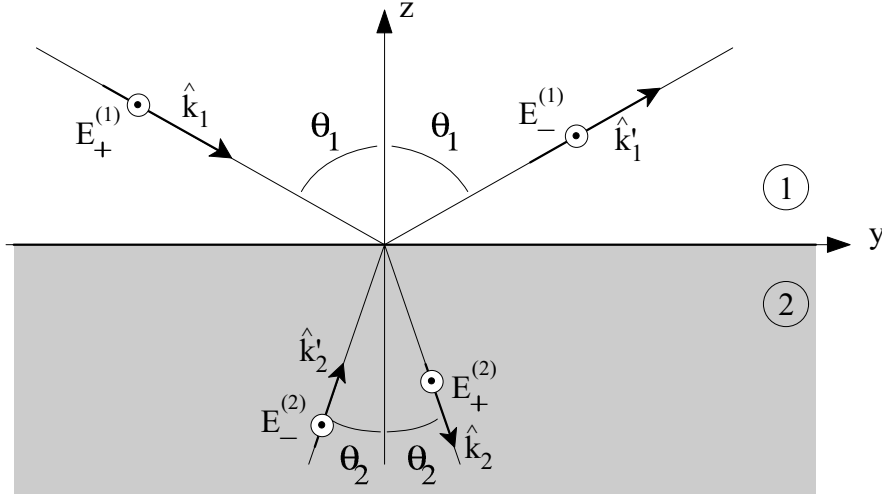


Figura 5.4: Incidenza obliqua di una onda piana su un semispazio materiale: polarizzazione perpendicolare (caso TE_z).

piano di separazione tra i due mezzi e con \hat{k}_1 la direzione di propagazione dell'onda piana incidente e' possibile individuare un piano di incidenza di normale $\hat{x} = \hat{z} \times \hat{k}_1$. Per una qualsiasi polarizzazione dell'onda piana e' sempre possibile rappresentare il campo elettromagnetico associato come somma del campo di due onde piane, una avente campo elettrico perpendicolare al piano di incidenza (polarizzazione perpendicolare), l'altra caratterizzata da un campo elettrico parallelo a tale piano (polarizzazione parallela). L'onda polarizzata perpendicolarmente ha il campo elettrico sempre ortogonale alla normale \hat{z} per cui e' anche denominata onda trasversa elettrica rispetto all'asse z (caso TE_z). L'onda polarizzata parallelamente e' invece caratterizzata da un campo magnetico ortogonale alla normale \hat{z} per cui e' anche denominata onda trasversa magnetica rispetto all'asse z (caso TM_z).

5.3.1 Polarizzazione perpendicolare (caso TE_z)

Si consideri un'onda piana incidente con campo elettrico diretto parallelamente all'asse x e direzione di propagazione

$$\hat{k}_1 = \sin \theta_1 \hat{y} - \cos \theta_1 \hat{z}, \quad (5.14)$$

dove θ_1 e' l'angolo che tale direzione forma con la normale \hat{z} (Fig. 5.4). In

tali ipotesi il campo associato all'onda risulterà

$$\vec{E}^i = E_+^{(1)} \hat{x} \exp(-jk_1 \hat{k}_1 \cdot \hat{r}) = E_+^{(1)} \hat{x} \exp(-jk_{y1}y) \exp(jk_{z1}z), \quad (5.15)$$

$$\vec{H}^i = \frac{1}{\zeta_1} \hat{k}_1 \times \vec{E}^i = -\frac{E_+^{(1)}}{\zeta_1} \left(\cos \theta_1 \hat{y} + \sin \theta_1 \hat{z} \right) \exp(-jk_{y1}y) \exp(jk_{z1}z), \quad (5.16)$$

con

$$k_{y1} = k_1 \sin \theta_1, \quad k_{z1} = k_1 \cos \theta_1. \quad (5.17)$$

La discontinuità piana tra i due mezzi in $z = 0$ origina un'onda piana riflessa avente direzione di propagazione

$$\hat{k}'_1 = \sin \theta_1 \hat{y} + \cos \theta_1 \hat{z}, \quad (5.18)$$

e campo elettromagnetico

$$\vec{E}^r = E_-^{(1)} \hat{x} \exp(-jk_1 \hat{k}'_1 \cdot \hat{r}) = E_-^{(1)} \hat{x} \exp(-jk_{y1}y) \exp(-jk_{z1}z), \quad (5.19)$$

$$\vec{H}^r = \frac{1}{\zeta_1} \hat{k}'_1 \times \vec{E}^r = -\frac{E_-^{(1)}}{\zeta_1} \left(-\cos \theta_1 \hat{y} + \sin \theta_1 \hat{z} \right) \exp(-jk_{y1}y) \exp(-jk_{z1}z). \quad (5.20)$$

Quindi nel semispazio superiore (mezzo 1) il campo totale, somma dell'onda incidente e di quella riflessa, risulta:

$$E_{x1}(y, z) = + \exp(-jk_{y1}y) \left[E_+^{(1)} \exp(jk_{z1}z) + E_-^{(1)} \exp(-jk_{z1}z) \right], \quad (5.21)$$

$$H_{y1}(y, z) = - \exp(-jk_{y1}y) \cdot \left[E_+^{(1)} \frac{\cos \theta_1}{\zeta_1} \exp(jk_{z1}z) - E_-^{(1)} \frac{\cos \theta_1}{\zeta_1} \exp(-jk_{z1}z) \right], \quad (5.22)$$

$$H_{z1}(y, z) = -\frac{\sin \theta_1}{\zeta_1} E_{x1}(y, z). \quad (5.23)$$

Nel semispazio inferiore (mezzo 2) e' invece presente un'onda diretta ed una riflessa la cui direzione di propagazione risulta rispettivamente

$$\hat{k}_2 = \sin \theta_2 \hat{y} - \cos \theta_2 \hat{z}, \quad (5.24)$$

$$\hat{k}'_2 = \sin \theta_2 \hat{y} + \cos \theta_2 \hat{z}. \quad (5.25)$$

Analogamente al semispazio superiore, le componenti del campo totale nel semispazio inferiore (mezzo 2) risultano:

$$E_{x2}(y, z) = + \exp(-jk_{y2}y) \left[E_+^{(2)} \exp(jk_{z2}z) + E_-^{(2)} \exp(-jk_{z2}z) \right], \quad (5.26)$$

$$H_{y2}(y, z) = - \exp(-jk_{y2}y) \cdot \left[E_+^{(2)} \frac{\cos \theta_2}{\zeta_2} \exp(jk_{z2}z) - E_-^{(2)} \frac{\cos \theta_2}{\zeta_2} \exp(-jk_{z2}z) \right], \quad (5.27)$$

$$H_{z2}(y, z) = - \frac{\sin \theta_2}{\zeta_2} E_{x2}(y, z), \quad (5.28)$$

dove $k_{y2} = k_2 \sin \theta_2$ e $k_{z2} = k_2 \cos \theta_2$. All'interfaccia ($z = 0$) tra i due semispazi i campi soddisfano le condizioni di continuit  delle componenti tangenziali

$$E_{x1}(y, z)|_{z=0} = E_{x2}(y, z)|_{z=0}, \quad \forall x, y, \quad (5.29)$$

$$H_{y1}(y, z)|_{z=0} = H_{y2}(y, z)|_{z=0}, \quad \forall x, y. \quad (5.30)$$

Perche' cio' si verifichi per ogni valore della coordinata y dovra' essere soddisfatta la condizione

$$k_{y1} = k_{y2} = k_y, \quad (5.31)$$

ovvero la legge di Snell

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2. \quad (5.32)$$

Inserendo la relazione (5.31) nelle (5.29), (5.30) e' facile verificare che in $z = 0$ dovranno essere equivalentemente soddisfatte le relazioni

$$E_+^{(1)} + E_-^{(1)} = E_+^{(2)} + E_-^{(2)}, \quad (5.33)$$

$$E_+^{(1)} \frac{\cos \theta_1}{\zeta_1} - E_-^{(1)} \frac{\cos \theta_1}{\zeta_1} = E_+^{(2)} \frac{\cos \theta_2}{\zeta_2} - E_-^{(2)} \frac{\cos \theta_2}{\zeta_2}. \quad (5.34)$$

Si considerino adesso due linee di trasmissione caratterizzate rispettivamente dai parametri:

$$\begin{aligned} &\text{Linea 1} \\ &k_{z1} = k_1 \cos \theta_1 \\ &Z_1 = \zeta_1 / \cos \theta_1 = \omega \mu_1 / k_{z1} \\ &V_+^{(1)} \equiv E_+^{(1)} \\ &V_-^{(1)} \equiv E_-^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Linea 2} \\ &k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 \\ &Z_2 = \zeta_2 / \cos \theta_2 = \omega \mu_2 / k_{z2} \\ &V_+^{(2)} \equiv E_+^{(2)} \\ &V_-^{(2)} \equiv E_-^{(2)} \end{aligned}$$

E immediato verificare che la tensione e la corrente su tali linee rappresentano, a meno del fattore $\exp(-jk_{yn}y)$, le componenti del campo totale nel generico n -esimo semispazio:

$$E_{xn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) V_n(z), \quad (5.35)$$

$$H_{yn}(y, z) = -\exp(-jk_{yn}y) I_n(z), \quad (5.36)$$

$$H_{zn}(y, z) = -\exp(-jk_{yn}y) \frac{\sin \theta_n}{\zeta_n} V_n(z), \quad (5.37)$$

dove

$$V_n(z) = \left[V_+^{(n)} \exp(jk_{zn}z) + V_-^{(n)} \exp(-jk_{zn}z) \right], \quad (5.38)$$

$$I_n(z) = \left[\frac{V_+^{(n)}}{Z_n} \exp(jk_{zn}z) - \frac{V_-^{(n)}}{Z_n} \exp(-jk_{zn}z) \right]. \quad (5.39)$$

Inoltre, soddisfare le condizioni (5.33), (5.34) equivale a richiedere

$$V_1(z)|_{z=0} = V_2(z)|_{z=0}, \quad (5.40)$$

$$I_1(z)|_{z=0} = I_2(z)|_{z=0}, \quad (5.41)$$

e cioè' a connettere le due linee in $z = 0$. Se ne deduce che al fine di risolvere il problema di onda piana si possono equivalentemente studiare le due linee di trasmissione precedentemente definite poste in cascata.

Esercizio 5.3 *Un'onda piana proveniente dallo spazio vuoto, polarizzata perpendicolarmente ed avente ampiezza $E_+ = 1 \text{ V/m}$, incide su un semispazio dielettrico caratterizzato da una costante dielettrica $\epsilon_r = 4$ formando un angolo $\theta_1 = 30^\circ$ rispetto alla normale all'interfaccia vuoto/dielettrico. Si determini l'ampiezza del campo elettrico nello spazio vuoto ad un'altezza $h = \lambda_0/4$ dall'interfaccia.*

Si consideri la configurazione di linee equivalenti mostrata in Fig. 5.5 in cui:

$$\begin{aligned} k_{z1} &= k_1 \cos \theta_1, & Z_1 &= \zeta_1 / \cos \theta_1, \\ k_{z2} &= k_2 \cos \theta_2, & Z_2 &= \zeta_2 / \cos \theta_2 \end{aligned}$$

e $V_+^{(1)} = 1 \text{ V} \equiv E_+^{(1)}$. Poiché il mezzo dielettrico è supposto indefinito per $z \rightarrow -\infty$, nella linea di impedenza Z_2 non sarà presente alcuna onda riflessa e la linea di impedenza Z_1 può essere considerata chiusa su un carico di impedenza $Z_u = Z_2$. L'ampiezza dell'onda riflessa nella linea di impedenza

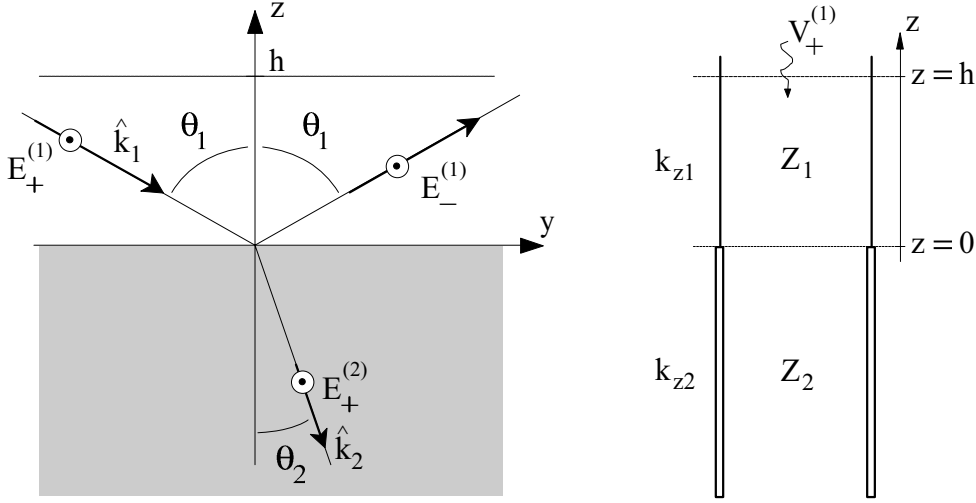


Figura 5.5: Incidenza obliqua di una onda piana, polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza, su un semispazio dielettrico e suo circuito equivalente.

Z_1 , ed equivalentemente l'ampiezza del campo elettrico riflesso nel semispazio vuoto, risulta

$$\begin{aligned} E_-^{(1)} \equiv V_-^{(1)} &= V_+^{(1)} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \\ &= V_+^{(1)} \frac{\zeta_2 / \cos \theta_2 - \zeta_1 / \cos \theta_1}{\zeta_2 / \cos \theta_2 + \zeta_1 / \cos \theta_1} = V_+^{(1)} \frac{\zeta_2 \cos \theta_1 - \zeta_1 \cos \theta_2}{\zeta_2 \cos \theta_1 + \zeta_1 \cos \theta_2}. \end{aligned}$$

Facendo uso della legge di Snell, $k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$, e' possibile esprimere il $\cos \theta_2$ in funzione dell'angolo θ_1 come:

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - (\sin \theta_2)^2} = \sqrt{1 - \left[\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_1 \right]^2},$$

da cui

$$k_{z2} = k_2 \sqrt{1 - \left[\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_1 \right]^2} = k_2 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} (\sin \theta_1)^2},$$

$$Z_2 = \zeta_2 / \sqrt{1 - \left[\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_1 \right]^2} = \frac{\zeta_0 / \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} (\sin \theta_1)^2}}.$$

Cio' permette di scrivere l'ampiezza del campo elettrico riflesso nel semispazio superiore come

$$\begin{aligned} E_-^{(1)} \equiv V_-^{(1)} &= V_+^{(1)} \frac{\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} (\sin \theta_1)^2}}{\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} (\sin \theta_1)^2}} = \\ &= V_+^{(1)} \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - (\sin \theta_1)^2}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - (\sin \theta_1)^2}}, \end{aligned}$$

da cui, inserendo i dati del problema, $E_-^{(1)} = E_+^{(1)} \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = -0.382$.

L'ampiezza del campo elettrico nel semispazio di provenienza dell'onda piana incidente ad un'altezza $h = \lambda_0/4$ dall'interfaccia risulta perciò

$$\begin{aligned} |E_{x1}(y, z)|_{z=h} &= \left| \exp(-jk_{y1}y) \left[E_+^{(1)} \exp(jk_{z1}h) + E_-^{(1)} \exp(-jk_{z1}h) \right] \right| = \\ &= \left| \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos \theta_1 \frac{\lambda_0}{4}\right) - 0.382 \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos \theta_1 \frac{\lambda_0}{4}\right) \right| = 0.67 V/m. \end{aligned}$$

□

5.3.2 Polarizzazione parallela (caso TM_z)

Si consideri ora un'onda piana incidente su un semispazio materiale avente campo magnetico diretto parallelamente all'asse x e direzione di propagazione

$$\hat{k}_1 = \sin \theta_1 \hat{y} - \cos \theta_1 \hat{z}, \quad (5.42)$$

dove θ_1 e' l'angolo che tale direzione forma con la normale \hat{z} (Fig. 5.6). Dualmente al caso di polarizzazione perpendicolare il campo totale nel generico n -esimo semispazio risulta:

$$H_{xn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) \left[\frac{E_+^{(n)}}{\zeta_n} \exp(jk_{zn}z) - \frac{E_-^{(n)}}{\zeta_n} \exp(-jk_{zn}z) \right], \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} E_{yn}(y, z) &= \exp(-jk_{yn}y) \cdot \\ &\cdot \left[E_+^{(n)} \cos \theta_n \exp(jk_{zn}z) + E_-^{(n)} \cos \theta_n \exp(-jk_{zn}z) \right], \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$E_{zn}(y, z) = \zeta_n \sin \theta_n H_{xn}(y, z) \quad (5.45)$$

dove

$$H_+^{(n)} = E_+^{(n)} / \zeta_n, \quad H_-^{(n)} = -E_-^{(n)} / \zeta_n, \quad (5.46)$$

$$k_{yn} = k_n \sin \theta_n, \quad k_{zn} = k_n \cos \theta_n. \quad (5.47)$$

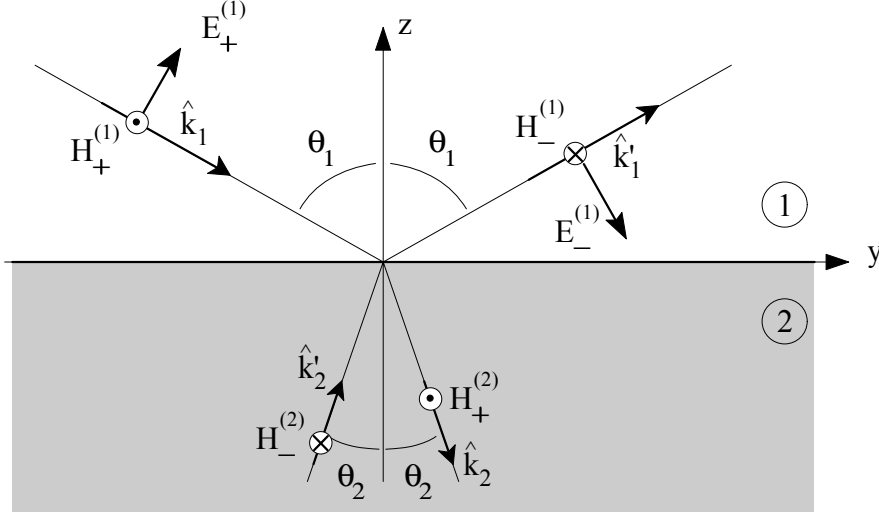


Figura 5.6: Incidenza obliqua di una onda piana su un semispazio materiale: polarizzazione parallela (caso TM_z).

Ponendo l'equivalenza

$$V_+^{(n)} \equiv E_+^{(n)} \cos \theta_n, \quad (5.48)$$

$$V_-^{(n)} \equiv E_-^{(n)} \cos \theta_n, \quad (5.49)$$

$$k_{zn} = k_n \cos \theta_n, \quad (5.50)$$

$$Z_n = \zeta_n \cos \theta_n = \frac{k_{zn}}{\omega \varepsilon_n}, \quad (5.51)$$

le eqn. (5.43)–(5.44) assumono la forma

$$H_{xn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) I_n(z), \quad (5.52)$$

$$E_{yn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) V_n(z), \quad (5.53)$$

$$E_{zn}(y, z) = \exp(-jk_{yn}y) \zeta_n \sin \theta_n I_n(z), \quad (5.54)$$

dove

$$V_n(z) = \left[V_+^{(n)} \exp(jk_{zn}z) + V_-^{(n)} \exp(-jk_{zn}z) \right], \quad (5.55)$$

$$I_n(z) = \left[\frac{V_+^{(n)}}{Z_n} \exp(jk_{zn}z) - \frac{V_-^{(n)}}{Z_n} \exp(-jk_{zn}z) \right]. \quad (5.56)$$

Analogamente al caso di polarizzazione perpendicolare, imporre la continuità delle componenti tangenziali del campo all'interfaccia $z = 0$ tra i due

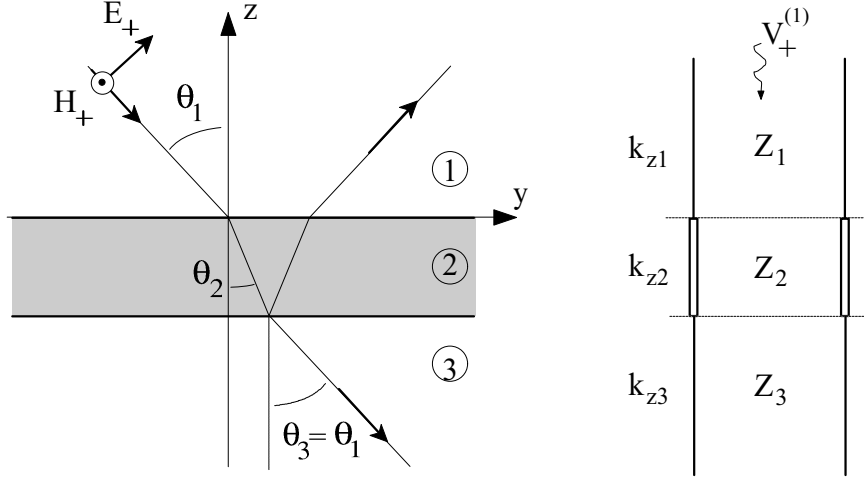


Figura 5.7: Onda piana incidente su uno strato dielettrico e suo circuito equivalente.

semispazi

$$E_{y1}(y, z)|_{z=0} = E_{y2}(y, z)|_{z=0} , \quad \forall x, y , \quad (5.57)$$

$$H_{x1}(y, z)|_{z=0} = H_{x2}(y, z)|_{z=0} , \quad \forall x, y , \quad (5.58)$$

equivale ad imporre

$$V_1(z)|_{z=0} = V_2(z)|_{z=0} , \quad (5.59)$$

$$I_1(z)|_{z=0} = I_2(z)|_{z=0} , \quad (5.60)$$

e quindi a porre in cascata le due linee equivalenti.

Esercizio 5.4 *Un'onda piana proveniente dallo spazio vuoto avente polarizzazione parallela incide con un angolo $\theta_1 = 30^\circ$ su uno strato dielettrico di spessore d caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$. Si determini lo spessore d per cui non si ha onda riflessa nel semispazio di provenienza dell'onda.*

Si consideri la configurazione di linee equivalenti mostrata in Fig. 5.7 in cui, facendo uso della legge di Snell:

$$k_{z1} = k_{z3} = k_0 \cos \theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos(\pi/6) ,$$

$$Z_1 = Z_3 = \zeta_0 \cos \theta_1 = 120\pi \cos(\pi/6) ,$$

$$k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r} \cos \theta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_r - (\sin \theta_1)^2} = \frac{\pi \sqrt{15}}{\lambda_0},$$

$$Z_2 = \zeta_2 \cos \theta_2 = \frac{\zeta_0}{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_r - (\sin \theta_1)^2} = 15\pi \sqrt{15}.$$

Per non avere onda riflessa nel semispazio di provenienza dell'onda incidente si dovra' equivalentemente realizzare un trasformatore a mezz'onda e quindi imporre $d = \lambda_{z2}/2$ dove con λ_{z2} si e' indicata la lunghezza d'onda nel tratto di linea di impedenza Z_2 . Essendo

$$\lambda_{z2} = \frac{2\pi}{k_{z2}} = 2\pi \frac{\lambda_0}{\pi \sqrt{15}} = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{15}},$$

lo spessore dello strato dielettrico risulta $d = \lambda_0/\sqrt{15}$. □

5.4 Il problema di N linee in cascata

Si vuole ora studiare il problema di N linee poste in cascata, o equivalentemente N strati piani su cui incide un'onda piana. A tal fine si prenda in considerazione un generico tratto di linea di lunghezza ℓ_n caratterizzato da una costante di propagazione k_n ed una impedenza caratteristica Z_n . Se con V_{n+1} , I_{n+1} e V_n , I_n si indicano la tensione e la corrente rispettivamente alla sezione $z = 0$ e $z = \ell_n$ (Fig. 5.8), dalla teoria generale delle linee di trasmissione e' possibile scrivere:

$$V_n = V_{n+} \exp(jk_n \ell_n) + V_{n-} \exp(-jk_n \ell_n), \quad (5.61)$$

$$I_n = \frac{V_{n+}}{Z_n} \exp(jk_n \ell_n) - \frac{V_{n-}}{Z_n} \exp(-jk_n \ell_n), \quad (5.62)$$

dove

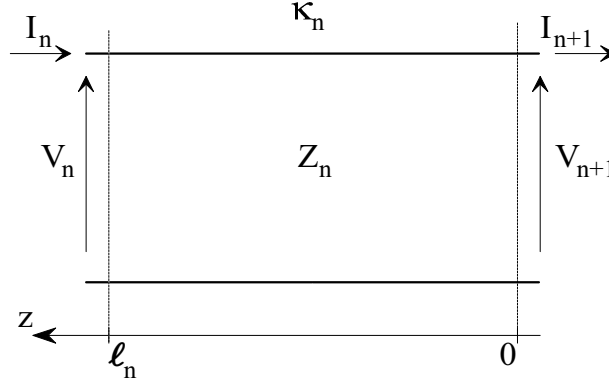
$$V_{n+} = \frac{1}{2} (V_{n+1} + I_{n+1} Z_n), \quad (5.63)$$

$$V_{n-} = \frac{1}{2} (V_{n+1} - I_{n+1} Z_n). \quad (5.64)$$

Sostituendo le eqn. (5.63)–(5.64) nelle (5.61)–(5.62), si ottiene:

$$V_n = V_{n+1} \cos(k_n \ell_n) + I_{n+1} j Z_n \sin(k_n \ell_n), \quad (5.65)$$

$$I_n = V_{n+1} \frac{j \sin(k_n \ell_n)}{Z_n} + I_{n+1} \cos(k_n \ell_n). \quad (5.66)$$

Figura 5.8: Generico tratto n della cascata di N linee.

Queste ultime relazioni possono essere convenientemente espresse in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \underline{T}_n \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.67)$$

definendo la matrice di trasmissione

$$\underline{T}_n = \begin{bmatrix} \cos(k_n \ell_n) & j Z_n \sin(k_n \ell_n) \\ \frac{j \sin(k_n \ell_n)}{Z_n} & \cos(k_n \ell_n) \end{bmatrix}. \quad (5.68)$$

Tale forma risulta utile nel caso in cui si consideri la connessione di N tratti di linea aventi caratteristiche diverse. Infatti per ognuno di essi e' possibile, dopo aver valutato la corrispondente matrice di trasmissione, scrivere una relazione del tipo (5.67). Per i due generici tratti n -esimo e $n+1$ -esimo adiacenti tra loro e' possibile scrivere:

$$(\text{tratto } n\text{-esimo}) \quad \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \underline{T}_n \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.69)$$

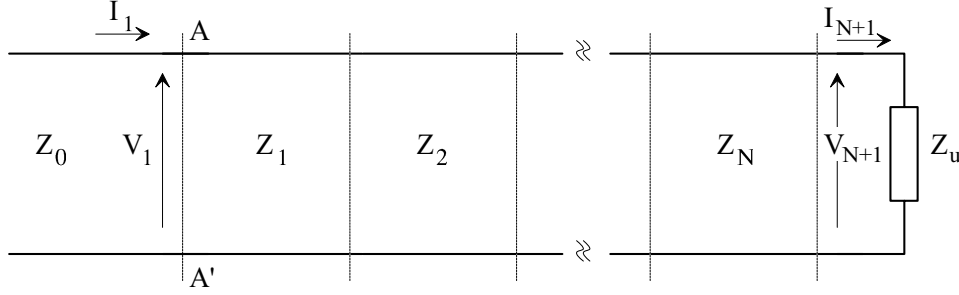
$$(\text{tratto } n+1\text{-esimo}) \quad \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{T}_{n+1} \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ I_{n+2} \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

da cui risulta evidente

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \underline{T}_n \underline{T}_{n+1} \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ I_{n+2} \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

Estendendo tale risultato al caso in cui si sia in presenza di N di tratti di linea connessi in cascata e' possibile scrivere

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \underline{T} \begin{bmatrix} V_{n+N} \\ I_{n+N} \end{bmatrix}, \quad (5.72)$$

Figura 5.9: Cascata di N tratti di linea con caratteristiche diverse.

oppure

$$\begin{bmatrix} V_{n+N} \\ I_{n+N} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}^{-1} \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

dove con $\underline{\underline{T}}$ si e' indicata la matrice risultante dal prodotto delle matrici di trasmissione caratterizzanti i singoli tratti di linea, cioe'

$$\underline{\underline{T}} = \left[\prod_{i=0}^{N-1} \underline{\underline{T}}_{n+i} \right]. \quad (5.74)$$

Esercizio 5.5 Si valuti il coefficiente di riflessione all'ingresso di una cascata di N tratti di linea terminata da un generico carico Z_u .

Il coefficiente di riflessione alla sezione AA' e' legato all'impedenza $Z_{AA'} = V_1/I_1$ che la cascata degli N tratti di linea presenta a tale sezione dalla relazione:

$$\Gamma_{AA'} = \frac{Z_{AA'} - Z_0}{Z_{AA'} + Z_0}.$$

La tensione V_1 e la corrente I_1 alla sezione AA' risulta legata alla tensione V_{N+1} e alla corrente I_{N+1} sul carico dalla relazione

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} V_{N+1} \\ I_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N+1} \\ I_{N+1} \end{bmatrix},$$

dove

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^N \underline{\underline{T}}_i \end{bmatrix}$$

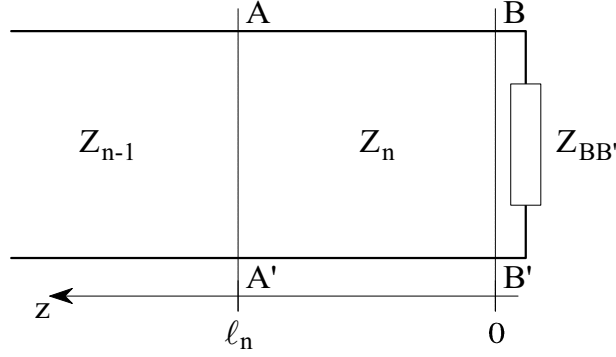


Figura 5.10: Due tratti di linea in cascata terminati su un carico $Z_{BB'}$.

e la matrice \underline{T}_i e' definita come nell'eq. (5.68). L'impedenza Z_u del carico e' anche esprimibile come $Z_u = V_{N+1}/I_{N+1}$ da cui

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_u \\ 1 \end{bmatrix} I_{N+1}$$

e

$$\begin{aligned} V_1 &= (t_{11}Z_u + t_{12})I_{N+1}, \\ I_1 &= (t_{21}Z_u + t_{22})I_{N+1}. \end{aligned}$$

Ne segue che l'impedenza alla sezione AA' e' valutabile attraverso la relazione

$$Z_{AA'} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{t_{11}Z_u + t_{12}}{t_{21}Z_u + t_{22}}$$

e da essa il coefficiente di riflessione richiesto. □

5.5 Teoria delle piccole riflessioni

Si consideri dapprima la configurazione schematizzata in Fig. 5.10. Indicato con

$$\Gamma_n = \frac{Z_{BB'} - Z_n}{Z_{BB'} + Z_n} \quad (5.75)$$

il coefficiente di riflessione di tensione alla sezione BB' , e' possibile esprimere il coefficiente di riflessione subito a destra della sezione AA' tramite la relazione

$$\Gamma'_n = \Gamma_n \exp(-j2k_n\ell_n), \quad (5.76)$$

dove k_n rappresenta la costante di propagazione nella linea di impedenza Z_n . Il carico $Z_{BB'}$ si presenta equivalentemente alla sezione AA' come una impedenza

$$Z_{AA'} = Z_n \frac{1 + \Gamma'_n}{1 - \Gamma'_n}, \quad (5.77)$$

per cui il coefficiente di riflessione subito a sinistra della sezione AA' puo' essere espresso come:

$$\Gamma_{AA'} = \frac{Z_{AA'} - Z_{n-1}}{Z_{AA'} + Z_{n-1}} = \frac{Z_n(1 + \Gamma'_n) - Z_{n-1}(1 - \Gamma'_n)}{Z_n(1 + \Gamma'_n) + Z_{n-1}(1 - \Gamma'_n)} = \frac{\frac{Z_n - Z_{n-1}}{Z_n + Z_{n-1}} + \Gamma'_n}{1 + \frac{Z_n - Z_{n-1}}{Z_n + Z_{n-1}} \Gamma'_n}. \quad (5.78)$$

Indicando con

$$\Gamma_{n-1} = \frac{Z_n - Z_{n-1}}{Z_n + Z_{n-1}}, \quad (5.79)$$

il coefficiente di riflessione alla sezione AA' risulta

$$\Gamma_{AA'} = \frac{\Gamma_{n-1} + \Gamma_n \exp(-j2k_n \ell_n)}{1 + \Gamma_{n-1} \Gamma_n \exp(-j2k_n \ell_n)}. \quad (5.80)$$

Si supponga ora che la discontinuita' tra le impedenze Z_{n-1} e Z_n , cosi' come tra le impedenze Z_n e $Z_{BB'}$, sia piccola e quindi sia valida la disuguaglianza $|\Gamma_{n-1} \Gamma_n| \ll 1$. In tali ipotesi al denominatore della eq. (5.80) e' possibile trascurare rispetto all'unita' il termine in cui appare la funzione esponenziale e quindi approssimare il coefficiente di riflessione alla sezione AA' tramite l'espressione

$$\Gamma_{AA'} \simeq \Gamma_{n-1} + \Gamma_n \exp(-j2k_n \ell_n). \quad (5.81)$$

Attraverso la relazione approssimata (5.81) la riflessione alla sezione AA' puo' essere interpretata come la somma della riflessione diretta alla sezione AA' , dovuta alla discontinuita' introdotta dalle differenti impedenze caratteristiche delle due linee di cui Γ_{n-1} rappresenta il coefficiente di riflessione, e della riflessione dovuta al carico con la relativa variazione di fase, ed eventualmente di ampiezza, $\exp(-j2k_n \ell_n)$ introdotta dal tratto di linea di impedenza Z_n .

Se ora si considera una cascata di N tratti di linea, cosi' come schematizzato in Fig. 5.9, e si definisce

$$\Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} \quad \text{per } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.82)$$

$$\Gamma_N = \frac{Z_u - Z_N}{Z_u + Z_N} \quad (5.83)$$

$$\theta_n = k_n \ell_n \quad \text{per } n = 1, 2, \dots, N, \quad (5.84)$$

nell'approssimazione di piccole riflessioni e' possibile stimare il coefficiente di riflessione all'ingresso della cascata delle N linee come:

$$\Gamma_{AA'} = \Gamma_0 + \Gamma_1 \exp(-j2\theta_1) + \Gamma_2 \exp(-j2\theta_1) \exp(-j2\theta_2) + \dots + \\ + \dots + \Gamma_N \prod_{i=1}^N \exp(-j2\theta_i). \quad (5.85)$$

Si consideri ora il caso in cui le linee siano prive di perdite, $Z_n = R_n$, e la lunghezza ℓ_n sia scelta in modo tale che la lunghezza elettrica di ogni linea risulti identica, cioe' $\theta_n = \beta_n \ell_n = \theta$ per $n = 1, 2, \dots, N$. In tali ipotesi

$$\Gamma_{AA'}(\theta) = \Gamma_0 + \Gamma_1 \exp(-j2\theta) + \Gamma_2 \exp(-j4\theta) + \dots + \Gamma_N \exp(-j2N\theta). \quad (5.86)$$

Si assuma inoltre che i coefficienti di riflessione risultino simmetrici¹, cioe' $\Gamma_0 = \Gamma_N$, $\Gamma_1 = \Gamma_{N-1}$, $\Gamma_2 = \Gamma_{N-2}$, \dots ; cio' permette di scrivere il coefficiente di riflessione alla sezione AA' nella forma:

$$\Gamma_{AA'}(\theta) = \exp(-jN\theta) \{ \Gamma_0 [\exp(jN\theta) + \exp(-jN\theta)] \\ + \Gamma_1 [\exp(j(N-2)\theta) + \exp(-j(N-2)\theta)] + \dots \}, \quad (5.87)$$

dove l'ultimo termine in parentesi graffa risultera' $\Gamma_{\frac{N}{2}}$ per N pari mentre $\Gamma_{\frac{N-1}{2}} [\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)]$ per N dispari. In particolare la relazione (5.87) puo' essere riscritta nella forma di serie finita di Fourier sia per N pari

$$\Gamma_{AA'}(\theta) = 2 \exp(-jN\theta) \{ \Gamma_0 \cos[N\theta] + \Gamma_1 \cos[(N-2)\theta] \\ + \dots + \Gamma_n \cos[(N-2n)\theta] + \dots + \frac{1}{2} \Gamma_{\frac{N}{2}} \}, \quad (5.88)$$

che per N dispari

$$\Gamma_{AA'}(\theta) = 2 \exp(-jN\theta) \{ \Gamma_0 \cos[N\theta] + \Gamma_1 \cos[(N-2)\theta] \\ + \dots + \Gamma_n \cos[(N-2n)\theta] + \dots + \Gamma_{\frac{N-1}{2}} \cos\theta \}. \quad (5.89)$$

L'importanza del risultato risiede nel fatto che, scegliendo opportunamente i coefficienti di riflessione Γ_n , che coincidono con i coefficienti della serie di Fourier, e un numero N sufficiente di sezioni, e' possibile sintetizzare qualsiasi andamento del coefficiente di riflessione $\Gamma_{AA'}$ in funzione della frequenza f a cui la lunghezza elettrica θ e' legata dalla relazione $f = \theta v_{f_n} / 2\pi \ell_n$, dove con v_{f_n} si e' indicata la velocita' di fase misurata in una qualsiasi sezione n .

¹Tale ipotesi non implica tuttavia un andamento simmetrico delle impedenze R_n .