Fisica dello Stato Solido

Appendice 1

Corso di Laurea Specialistica
Ingegneria Elettronica
a.a.07-08

Prof. Mara Bruzzi

SOMMARIO

Spettro elettromagnetico - Fotoni – Effetto Fotoelettrico – Lunghezza d’onda di de Broglie – Esperimento di Davisson e Germer – elettrone come pacchetto d’onda - principio di indeterminazione di Heisenberg – velocità di fase e di gruppo.

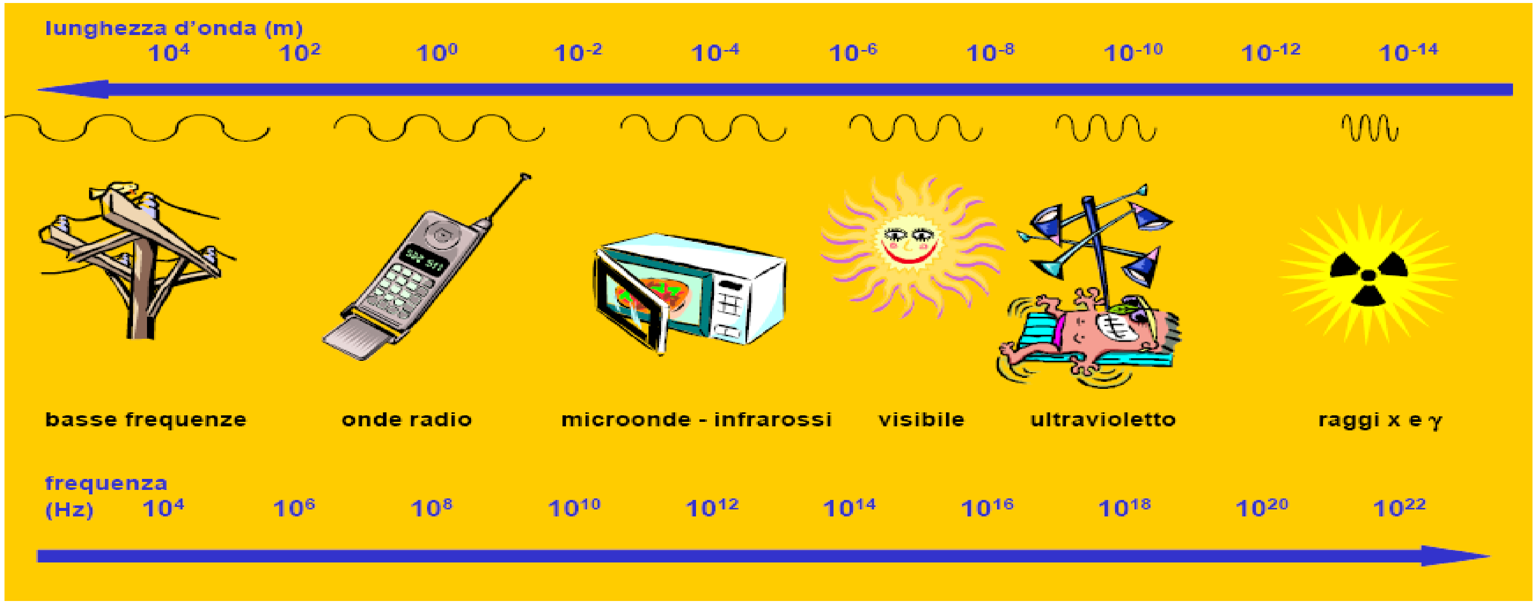
Dualismo onda - particella

Abbiamo visto studiando la fisica classica che una particella è caratterizzabile tramite le grandezze fisiche posizione, quantità di moto (detta anche *momento lineare* o più semplicemente *momento*) energia cinetica, massa, carica elettrica. Un'onda è invece classicamente caratterizzata da lunghezza d'onda, frequenza, velocità, ampiezza, intensità, energia, momento. Classicamente, una importante differenza tra i concetti di onda e particella è che la particella è localizzata in un punto dello spazio mentre l'onda è generalmente dispersa e può occupare una grande porzione di spazio.

Dai primi anni del secolo ventesimo ci si è resi conto che molti fenomeni osservati sperimentalmente venivano spiegati con successo se si interpretavano le onde come corpuscoli e le particelle come onde: un fenomeno detto *dualismo onda-particella*.

Spettro Elettromagnetico

Denominazione	ν [Hz]	λ
Onde radio	< $3\ 10^{9}$	> 10 cm
Microonde	$3\ 10^{9} – 3\ 10^{11}$	10 cm – 1 mm
Infrarossi	$3\ 10^{11} – 428\ 10^{12}$	1 mm – 700 nm
Luce visibile	$428\ 10^{12} – 749\ 10^{12}$	700 nm – 400 nm
Ultravioletti	$749\ 10^{12} – 3\ 10^{16}$	400 nm – 10 nm
Raggi X	$3\ 10^{16} – 3\ 10^{18}$	10 nm – 1 pm
Raggi gamma	> $3\ 10^{18}$	< 1 pm



Fotoni - La radiazione elettromagnetica può essere interpretata, secondo la teoria della meccanica quantistica, come trasportata da particelle dette fotoni o quanti di energia elettromagnetica. Ogni fotone ha un'energia E che dipende solo dalla frequenza della radiazione elettromagnetica stessa:

$$E = h\,\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

h = 6.626×10^{-34} *Js* è costante di Planck ;
λ lunghezza d'onda ; c velocità della luce. Nel vuoto $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

I fotoni viaggiano alla velocità della luce, hanno massa a riposo nulla ($m_0 = 0$). Il momento del fotone è definito come $p = E/c$. L'intensità del fascio monocromatico è :

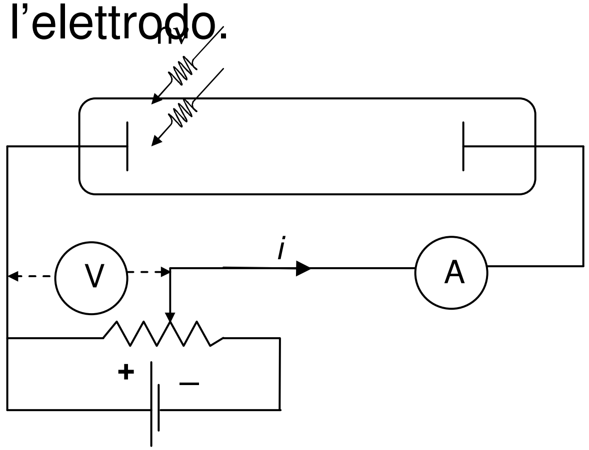
$$I = E\frac{N}{A \cdot t}$$

Con N = numero di fotoni, A = sezione normale alla direzione del fascio; t = tempo di esposizione. Per convenienza di calcolo si utilizzano anche le seguenti espressioni in unità non standard:

$$h = 4.136 x 10^{-15}\, eV \cdot s$$

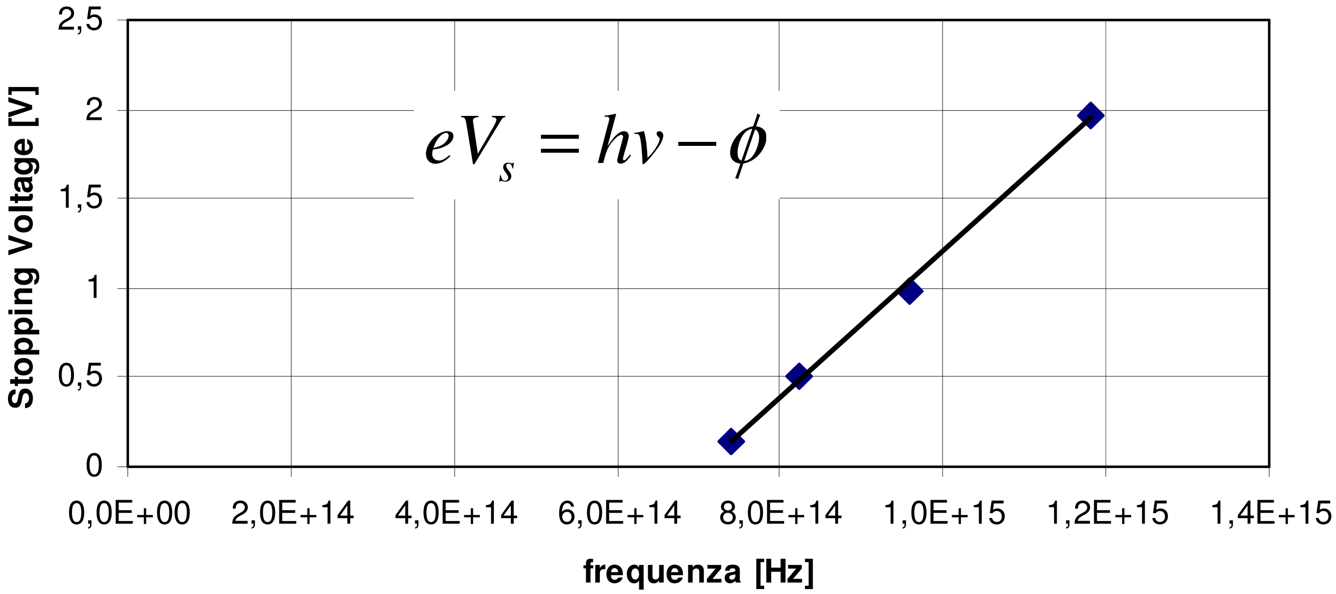
$hc = 12.4 keV$ Å, dove 1eV = 1.602×10^{-19} J e 1 Å = 10^{-10}m.

Effetto Fotoelettrico - In un tubo a vuoto sono inseriti due elettrodi metallici mantenuti ad una differenza di potenziale V. Un fascio di radiazione elettromagnetica incide sull'elettrodo mantenuto a potenziale maggiore. Sia V che la frequenza e l'intensità della radiazione incidente possono essere variati, così come il materiale di cui è costituito l'elettrodo.



Gli elettroni che vengono emessi ed hanno energia cinetica sufficiente a superare il potenziale ritardante tra i due elettrodi faranno registrare una corrente nell'amperometro posto in serie. L'esperienza mostra che quando la frequenza e l'intensità della luce sono mantenute costanti, la corrente diminuisce al crescere della tensione ritardante V, raggiungendo lo zero per un certo 'stopping voltage' V_s, il cui valore è indipendente dall'intensità della radiazione. Per un dato materiale, lo stopping voltage dipende linearmente dalla frequenza ν, in accordo con la relazione:

$$eV_s = h\nu - \phi$$



Esempio con emettitore di Ca

Il valore del termine costante ϕ dipende dal materiale emettitore; la pendenza della retta, *h*, è la stessa per ogni materiale, ed è pari alla costante di Planck. Inoltre, per ogni materiale, esiste una frequenza di soglia ν_{th}, sotto al quale valore non vengono emessi elettroni, qualsiasi sia l'intensità della luce incidente.

Nell'interpretazione quantistica dell'effetto fotoelettrico l'energia portata da un fotone viene assorbita da un singolo elettrone. Se questo viene emesso dall'elettrodo, la differenza tra energia assorbita dall'elettrone e l'energia con cui esso era legato al materiale corrisponde all'energia cinetica dell'elettrone estratto. L'energia più piccola con cui gli elettroni possono essere legati al materiale è detta *funzione lavoro*, ϕ, del materiale. Gli elettroni verranno quindi emessi con energia cinetica variabile da zero al valore massimo che è dato dalla differenza tra l'energia trasportata dal fotone, $h\nu$, e la funzione lavoro del materiale, ϕ. Perché gli elettroni raggiungano l'elettrodo di raccolta e diano quindi luogo al passaggio di corrente nel circuito, tale energia cinetica deve essere maggiore o uguale all'energia corrispondente allo stopping voltage: eV_s. La frequenza di soglia dei fotoni incidenti è quella che corrisponde alla funzione lavoro: $h\nu_{th} = \phi$. Per frequenze minori di ν_{th} i fotoni incidenti non avranno sufficiente energia per estrarre elettroni dal materiale.

2. Le onde di de Broglie: elettroni interpretati come onde di materia

Abbiamo visto che l'onda elettromagnetica può essere interpretata come corpuscolo di energia pari a E = hν e zero massa a riposo. Tale interpretazione, data da Albert Einstein nel 1905 e che gli valse il premio Nobel, spiega con successo l'effetto fotoelettrico. Nel 1924 Louis de Broglie propose che, se la radiazione elettromagnetica poteva essere interpretata come una particella, allora particelle dotate di massa, come gli elettroni, potevano in certe circostanze comportarsi come onde. Se per il fotone abbiamo:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

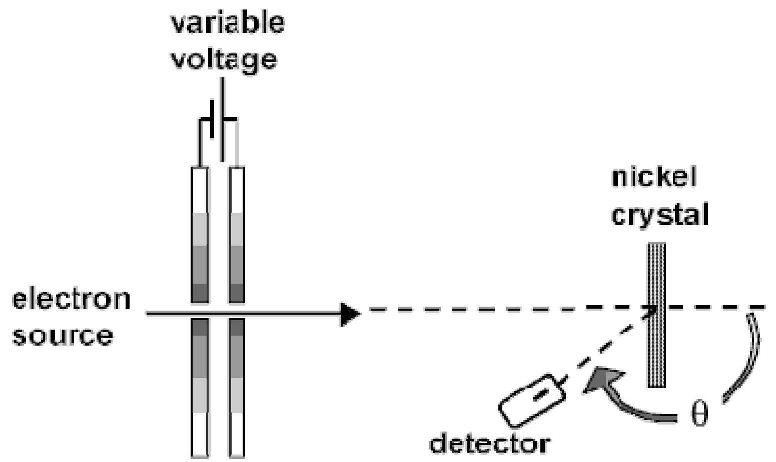
possiamo per analogia associare alla particella dotata di massa m e momento p = mv una lunghezza d'onda (detta lunghezza d'onda di de Broglie)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon}$$

Esperimenti di diffrazione con fasci di elettroni

I primi esperimenti per osservare la diffrazione di fasci di elettroni sono stati compiuti da C.J. Davisson e L. H. Germer presso i Bell Telephone Laboratories nel 1927. Essi diressero un fascio di elettroni da 54eV contro un cristallo di Nickel, la cui distanza interatomica era stata determinata essere 2.15Å per diffrazione di fasci X, e misurarono l'intensità degli elettroni riflessi in funzione dell'angolo di incidenza .

Trovarono un picco di intensità per angoli intorno a 50° rispetto alla normale della superficie del cristallo. Utilizzando la relazione di Bragg determinarono una lunghezza d'onda pari a 1.65Å, in accordo con l'ipotesi di de Broglie (a meno di una piccola correzione dovuta al potenziale accelerante del cristallo di Nickel).



N.B: Poco più tardi, G. P. Thomson, studiò la trasmissione di elettroni attraverso sottili fogli di metallo, osservando figure di diffrazione circolari . Fisico inglese, figlio di J. J. Thomson che scoprì l'elettrone. Come il padre egli vinse il premio Nobel che gli venne assegnato nel 1937 assieme a C. J. Davisson per avere dimostrato il comportamento ondulatorio degli elettroni previsto anni prima da Louis de Broglie (Nobel nel 1929). Thomson e Davisson pervennero indipendentemente allo stesso risultato.

Elettrone come Pacchetto d'Onda

L'interpretazione moderna della natura ondulatoria delle particelle è che l'intensità dell'onda, misurata come quadrato della sua ampiezza, dà in ogni punto la probabilità relativa di trovare la particella in quel punto. Questa interpretazione è stata formulata da Max Born nel 1926: Se la funzione d'onda associata all'elettrone è y(*r*,*t*) allora |y(*r*,*t*)|^2*Δr* è la probabilità relativa di trovare l'elettrone nello spazio Δr al tempo t. Supponiamo ora di scrivere la relazione tra le proprietà corpuscolari e quelle ondulatorie dell'elettrone:

$$\frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 = \mathrm{E} = \mathrm{h}\nu; \quad \mathrm{mv} = \mathrm{p} = \frac{\mathrm{h}}{\lambda}.$$

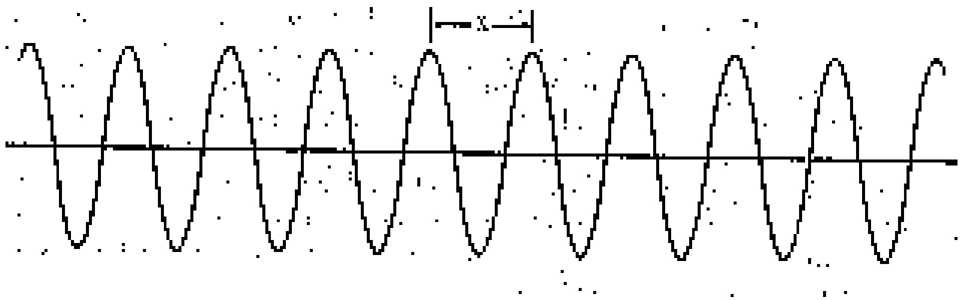
Possiamo da queste immediatamente determinare la velocità dell'onda per esempio calcolando il prodotto $\lambda\ \nu$. Otteniamo:

$$\lambda\nu = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{mv}}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{mv}^2}{\mathrm{h}} = \frac{1}{2}\mathrm{v}.$$

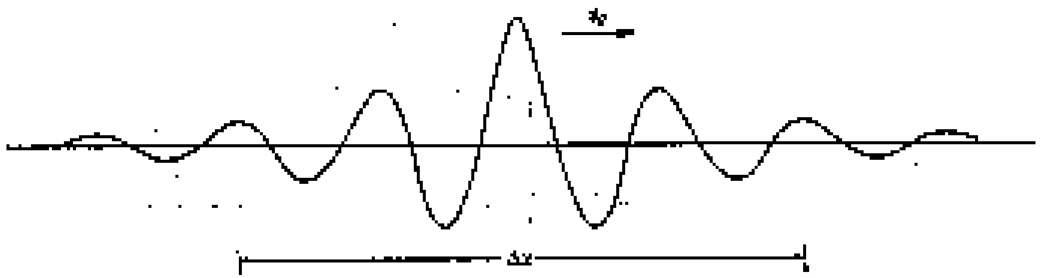
Così la velocità dell'onda sembra essere solo la metà di quella dell'elettrone !!! In cosa abbiamo sbagliato ?

Onda piana con lunghezza d'onda λ e frequenza ν:

$$\varphi(x,t) = Asen(kx - \omega t)$$



con $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi\nu$. Questa onda si estende verso infinito in entrambe le direzioni spaziali, quindi non può rappresentare una particella, che essendo localizzata, deve essere non nulla solo in una limitata regione dello spazio. Perciò per rappresentare una particella localizzata dobbiamo sovraimporre onde con diversa lunghezza d'onda.



Pacchetto d'onda corrispondente ad una particella localizzata nella distanza Δx.
E' costruita per sovrapposizione di onde piane con vettor d'onda k diversi.

Battimenti

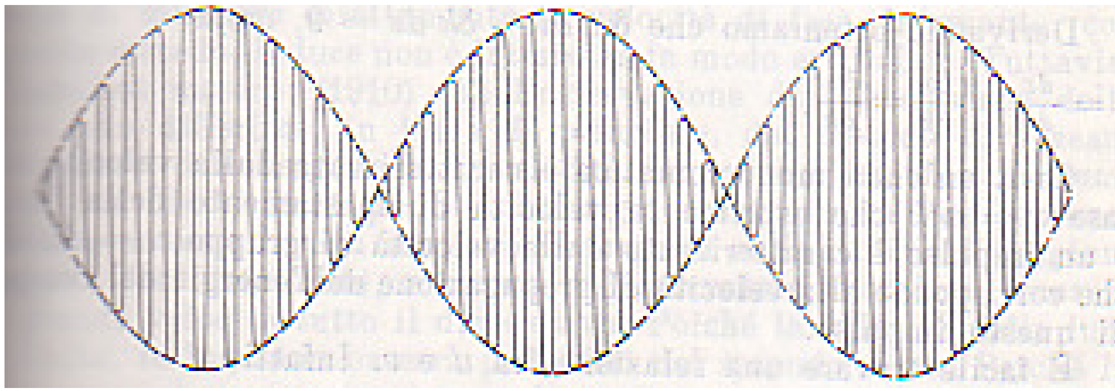
Per chiarire con un esempio sovrapponiamo due onde con vettor d'onda un po' diversi: $k_1 = (k + \Delta k)$ e $k_2 = (k - \Delta k)$.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = sen[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t] + sen[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

Utilizzando la formula trigonometrica di addizione otteniamo:

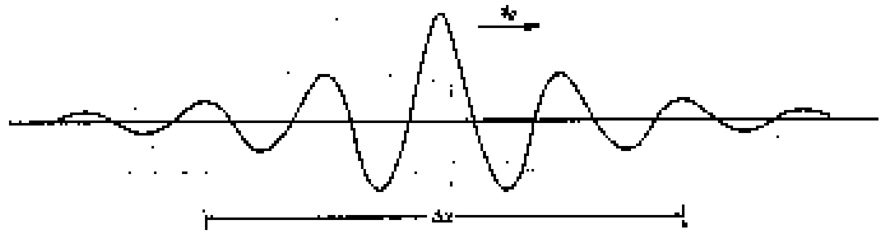
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2sen[kx - \omega t]\cos[\Delta kx - \Delta\omega t]$$

Il primo termine, $2\sin[kx-\omega t]$, oscilla con frequenza che è media delle due frequenze. Esso è modulato in ampiezza dal secondo termine, lentamente variabile nel tempo, che oscilla su una dimensione spaziale dell'ordine di $\pi/\Delta k$: distanza tra le quali le due onde, inizialmente in fase all'origine, divengono completamente fuori fase. Ad un'ulteriore distanza $\pi/\Delta k$, le onde torneranno ad essere tra loro sincronizzate. Perciò due onde con frequenza simile rompono l'onda continua in una serie di pacchetti equispaziati.



Sovrapposizione di due onde piane monocromatiche con frequenza simile

Per descrivere un elettrone singolo che si muove nello spazio, abbiamo però bisogno di un singolo pacchetto. Questo può essere ottenuto sovrapponendo onde con una distribuzione continua di vettori d'onda all'interno dell'intervallo Δk intorno a k. In questo caso le onde saranno fuori fase dopo una distanza dell'ordine di $\pi / \Delta k$ e non torneranno mai in fase in un'altra regione dello spazio. Tutto questo è spiegato quantitativamente dalla teoria delle trasformate di Fourier.



Secondo la teoria dell'analisi di Fourier, il pacchetto localizzato in Δx è costituito da onde aventi k nel dominio Δk tale che:

$\Delta x \, \Delta k \sim 2\pi$

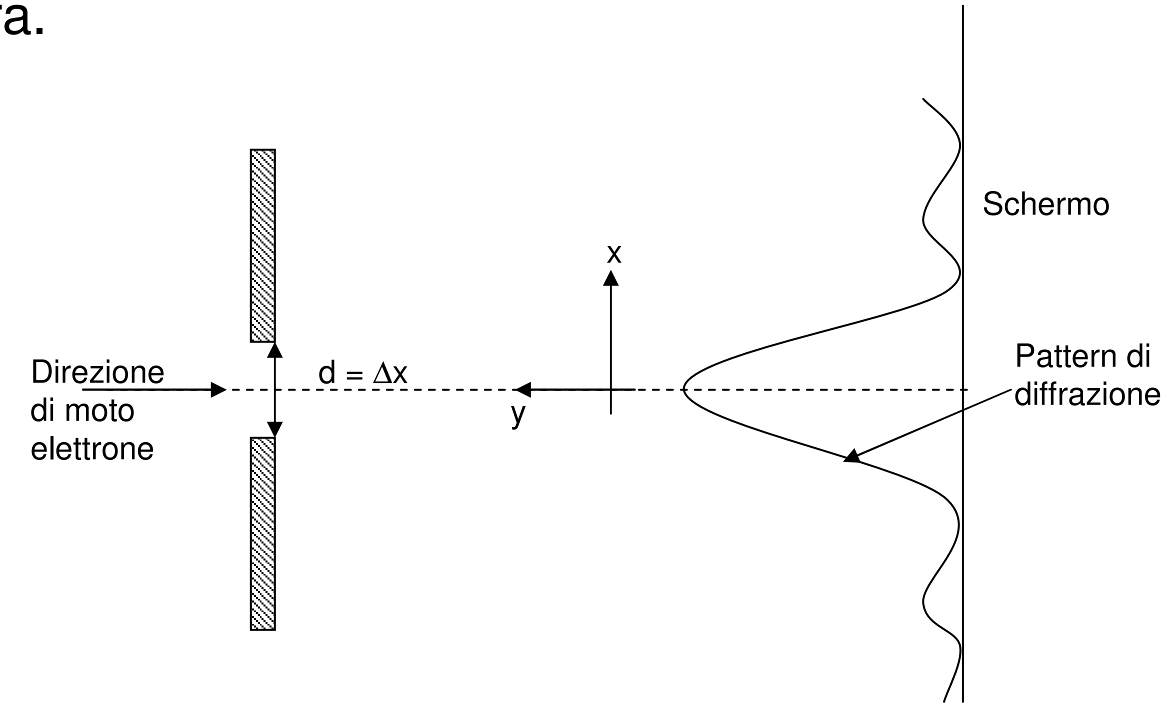
Ora, poichè: $k = 2\pi / \lambda$ e $p = h/\lambda$, allora $p = h \, k / 2\pi = \hbar \, k$. Otteniamo:

$$\Delta k = 2\pi \, \Delta p / h \quad \text{e quindi: } \Delta x \Delta p \sim h$$

che è l'espressione del principio di indeterminazione di Heisenberg.

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Consideriamo un elettrone di cui non si conosce la posizione ma di cui è noto il momento, sia in direzione che in verso. Per determinarne la posizione possiamo porre una fenditura di larghezza d perpendicolarmente alla sua direzione di moto e verificarne la posizione finale su uno schermo fluorescente posto ad una certa distanza. L'incertezza sulla posizione sarà data dalla larghezza della fenditura $\Delta x = d$. Per la sua natura ondulatoria la particella sarà diffratta nel passaggio dalla fenditura.

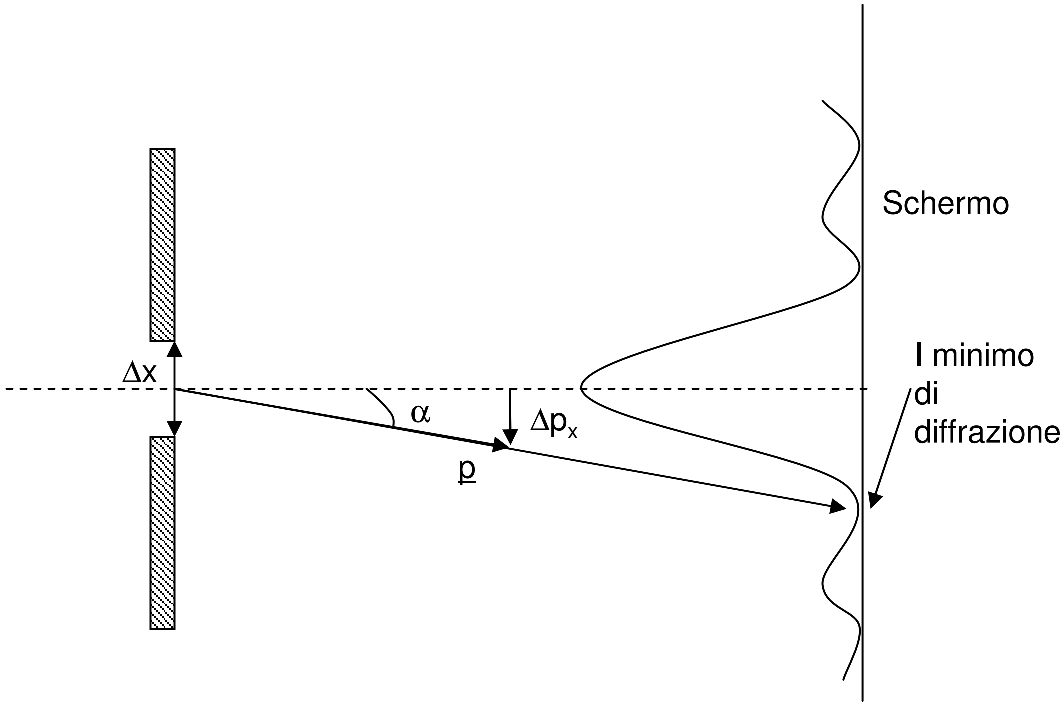


Prima di passare attraverso la fenditura la componente della quantità di moto lungo x è nota ($p_x = 0$) mentre non si conosce la posizione lungo x dell'elettrone. Al passaggio dalla fenditura la componente p_x del suo momento non è più sicuramente nulla, ma assume un'incertezza Δp_x perché la particella potrebbe stare muovendosi verso un punto sul pattern di diffrazione. Dalla teoria della diffrazione il primo punto di intensità nulla si trova all'angolo α tale che senα = λ/d. Poiché all'elettrone è associata la lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = h/p$. Anche se non sappiamo esattamente dove l'elettrone colpirà lo schermo, ossiamo essere ragionevolmente certi che p_x avrà valore tra 0 e psenα, cioè :

$$\Delta p_x \approx p \ sen\alpha = \frac{h}{\lambda}\frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d}$$

Da cui otteniamo:

$$\Delta x \Delta p_x \approx h$$



Velocità di Fase e di Gruppo

Il concetto di pacchetto d'onda risolve il paradosso della velocità dell'onda, che sembra diversa da quella dell'elettrone. Il punto è che le onde elettroniche, diversamente da quelle elettromagnetiche, hanno diversa velocità di fase e di gruppo.

Velocità di Fase $\upsilon_f = \dfrac{\omega}{k}$ **Velocità di Gruppo** $\upsilon_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

$$E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \frac{p^2}{2m} = \left(\frac{hk}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2m}$$

Dove abbiamo usato: $p = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{hk}{2\pi}$

Otteniamo la relazione: $\omega = \dfrac{hk^2}{4\pi m}$

Da cui deriviamo velocità di fase e di gruppo : $\Rightarrow$

$$\upsilon_f = \frac{\omega}{k} = \frac{hk}{4\pi m} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2}\upsilon$$

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{hk}{2\pi m} = \frac{p}{m} = \upsilon$$

Perciò il pacchetto d'onda viaggia alla velocità di gruppo, corrispondente alla velocità v dell'elettrone interpretato come particella.