Esercizi per la Seconda Settimana

Esercizio 2.1 Sia $\underline{v}$ un vettore non nullo ortogonale a $\underline{t}$, $\underline{w}$ ed $\underline{s}$. Mostrare che quest'ultimi sono complanari.

Esercizio 2.2 Siano $\underline{v}$, $\underline{t}$, $\underline{w}$ tre versori tali che $\underline{v} \cdot \underline{t} = 1/2$ e $\underline{w} \cdot \underline{t} = 1$. Calcolare l'angolo convesso determinato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Esercizio 2.3 Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ due versori. Può accadere che $|\underline{v}+\underline{w}| = 1$ e $|\underline{v}-\underline{w}| = \sqrt{3}$?

Esercizio 2.4 Dati due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ non paralleli, trovare un'espressione per la proiezione ortogonale di un generico vettore $\underline{t}$ lungo la direzione individuata dalla bisettrice dell'angolo convesso formato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Esercizio 2.5 Dato un vettore $\underline{t}$, mostrare che l'applicazione dall'insieme dei vettori liberi in sè stesso definita da

$$T(\underline{v}) = (\underline{v} \cdot \underline{t})\underline{t}$$

non è iniettiva.

Esercizio 2.6 Mostrare che i vettori $(\underline{v} \wedge \underline{w}) \wedge \underline{v}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ non formano mai una base.

Esercizio 2.7 Siano $\underline{v}$ e $\underline{t}$ non paralllleli e sia $\underline{x}$ tale che

$$(\underline{x} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{t} = 3(\underline{x} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{t} \ .$$

È lecito concludere che $\underline{x}$ è necessariamente il vettore nullo?

Esercizio 2.8 Sia $\underline{v}$ un vettore non nullo assegnato. Determinare l'insieme dei vettori $\underline{x}$ tali che $(\underline{x} \wedge \underline{v}) \wedge \underline{v} = \underline{0}$.

Esercizio 2.9 Sia $\underline{v}$ un vettore non nullo e siano $\underline{w}$ e $\underline{w}'$ tali che $\underline{w} - \underline{w}'$ sia parallelo a $\underline{v}$. Mostrare che se $\underline{w}$ non è parallelo a $\underline{v}$, allora l'area del parallelogramma individuato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$ è uguale all'area del parallelogramma individuato da $\underline{v}$ e $\underline{w}'$.

Esercizio 2.10 Se $(\underline{v}, \underline{w}, \underline{t})$ è una base positivamente orientata, è vero che anche $(\underline{v}, \underline{v} + \underline{w}, \underline{t})$ lo è?

Esercizio 2.11 Se $\underline{v}, \underline{w}$ e $\underline{t}$ costituiscono una base, è vero che anche i vettori $\underline{v} \wedge \underline{w}$, $\underline{w}$ e $\underline{t}$ formano una base?

In tutti gli esercizi che seguono, la terna $\underline{i}$, $\underline{j}$ e $\underline{k}$ sta sempre a indicare una base ortonormale positivamente orientata

Esercizio 2.12 Costruire una base ortonormale della quale il primo elemento sia parallelo a $\underline{i} + \underline{j}$.

Esercizio 2.13 Sia U il piano vettoriale determinato da $\underline{v} = \underline{j} - \underline{k}$ e $\underline{w} = \underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k}$ (per *piano vettoriale* si intende l'insieme dei vettori complanari con $\underline{v}$ e $\underline{w}$). Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\underline{t} = \underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ sul piano vettoriale U.

Esercizio 2.14 Sia U il piano vettoriale determinato da $\underline{v} = \underline{i} + 3\underline{j} + 4\underline{k}$ e $\underline{w} = 2\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$. Trovare un'espressione per la proiezione ortogonale di un generico vettore $\underline{x}$ sul piano vettoriale U.

Esercizio 2.15 Trovare l'espressione generale della proiezione ortogonale di un vettore $\underline{x}$ sul piano vettoriale U determinato da due generici vettori non paralleli $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Esercizio 2.16 Determinare il vettore simmetrico di $\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ rispetto alla direzione determinata da $\underline{u} = \underline{i} - 2\underline{j} - 2\underline{k}$.

Esercizio 2.17 Calcolare i valori di h per i quali i tre vettori $\underline{v} = \underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$, $\underline{w} = 3\underline{i} + h\underline{j} + 2\underline{k}$ e $\underline{t} = \underline{i} + \underline{k}$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2.18 Siano $\underline{x} = \underline{i} - h\underline{j} + 2\underline{k}$, $\underline{v} = \underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$ e $\underline{w} = 2\underline{i} - \underline{k}$. Trovare il valore di h per il quale $\underline{x}$ è complanare con $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Esercizio 2.19 Siano $\underline{x} = \underline{i} - \underline{j} - h\underline{k}$, $\underline{v} = \underline{i} - \underline{k}$ e $\underline{w} = \underline{j} - \underline{k}$. Trovare i valori di h per i quali $\underline{x}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ formano una base.

Esercizio 2.20 Siano $\underline{v} = 2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{w} = \underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$ e $\underline{t} = \underline{i} + h\underline{j} + \underline{k}$. Determinare per quali valori di h i vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{t}$ formano una base positivamente orientata.

Esercizio 2.21 Siano $\underline{v} = \underline{i} - h\underline{k}$, $\underline{w} = 2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$ e $\underline{t} = h\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$. Determinare per quali valori di h si ha che:

a) $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{t}$ formano una base;

b) $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{t}$ formano una base positivamente orientata;

c) $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{t}$ determinano un parallelepipedo di volume pari a 1

Esercizio 2.22 Siano $\underline{v} = h\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$, $\underline{w} = \underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k}$ e $\underline{t} = \underline{i} - \underline{k}$. Esistono dei valori per h tali per cui $\underline{v}$ è complanare con $\underline{w}$ e $\underline{t}$ ed è al tempo stesso ortogonale a $\underline{s} = \underline{i} + \underline{j}$?

Esercizio 2.23 Esprimere il vettore $\underline{x} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$ come combinazione lineare dei vettori della base $\{ \underline{i}, \underline{i} + \underline{j}, \underline{i} + \underline{j} + \underline{k} \}$.

Esercizio 2.24 Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ tali che $\underline{v} \wedge \underline{w} \cdot \underline{t} = 0$ per ogni vettore $\underline{t}$. Cosa si può dire di $\underline{v}$ e $\underline{w}$?

Esercizio 2.25 Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ due versori ortogonali. Quanti sono i vettori $\underline{x}$ che sono ortogonali sia a $\underline{v}$ che a $\underline{w}$ e che risolvono l'equazione vettoriale $\underline{v} \wedge \underline{w} \cdot \underline{x} = 2$?

Esercizio 2.26 Quanti sono i vettori $\underline{x}$ che risolvono l'equazione vettoriale dell'esercizio precedente senza essere vincolati da nessun'altra condizione?

Esercizio 2.27 Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non paralleli e si consideri il sistema di equazioni vettoriali

$$\begin{cases} \underline{x} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{v} = 0 \end{cases}$$

Descrivere l'insieme dei vettori $\underline{x}$ che risolvono il sistema.

Esercizio 2.28 Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non paralleli e si consideri il sistema di equazioni vettoriali

$$\begin{cases} \underline{x} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{v} = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{w} = 0 \end{cases}$$

Descrivere l'insieme dei vettori $\underline{x}$ che risolvono il sistema.

Esercizio 2.29 Se $\underline{t} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \wedge \underline{v} \cdot \underline{t}$, che cosa si può concludere sulla terna $\underline{t}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$?

Esercizio 2.30 Se $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{t}$ sono complanari è vero che anche $\underline{v} + 3\underline{w}$, $\underline{w} + 5\underline{t}$, $\underline{v} + \underline{w} + \underline{t}$ lo sono?

Esercizio 2.31 Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ due vettori paralleli non nulli e sia T l'applicazione che trasforma ogni vettore $\underline{x}$ nel vettore

$$T(\underline{x}) = \underline{x} \wedge \underline{v} + \underline{x} \wedge \underline{w} \ .$$

Quali sono i vettori $\underline{x}$ che vengono trasformati da T nel vettore nullo?

Esercizio 2.32 Determinare l'insieme dei vettori che sono complanari con i due vettori $\underline{v}_1 = \underline{i} + \underline{k}$ e $\underline{v}_2 = \underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ e, simultaneamente, complanari con i due vettori $\underline{w}_1 = \underline{i} - \underline{j}$ e $\underline{w}_2 = \underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$.

Esercizio 2.33 Siano $\underline{v} = \underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$ e $\underline{w} = (h+1)\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$. Determinare h in modo che l'angolo convesso formato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sia $\frac{\pi}{3}$.

Esercizio 2.34 Sapendo che $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{v} - \underline{w}$ sono tre versori, determinare l'angolo convesso formato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$.