Esercizi per la Sesta Settimana

Esercizio 6.1 Calcolare le matrici inverse delle due matrici $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 6.2 Stabilire per quali valori di h la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & h \end{bmatrix}$ è invertibile e per tali valori calcolarne l'inversa.

Esercizio 6.3 Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e supponiamo che λ_1 e λ_2 siano gli autovalori (reali) dell'applicazione $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $T(X) = AX$, con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Mostrare allora che

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (a_{11} + a_{22})$$

e che

$$\lambda_1 \lambda_2 = detA$$

Esercizio 6.4 Supponiamo che le seguenti condizioni siano verificate per un'applicazione lineare $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Il vettore $\underline{v}$ è un autovettore per T con autovalore λ_1, il vettore $\underline{w}$ è un autovalore per T con autovalore λ_2 ed il vettor $\underline{v} + \underline{w}$ è un un autovalore per T con autovalore λ_1. Che cosa si può dedurre su λ_1 e λ_2?

Esercizio 6.5 Stabilire se esiste una base di autovettori per un'applicazione $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ che, rispetto ad un a base ortonormale fissata, ha come matrice associata $\begin{bmatrix} 7 & -11 & -5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -2 \end{bmatrix}$

Esercizio 6.6 Stabilire se esiste una base di autovettori per un'applicazione $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ che, rispetto ad una base ortonormale fissata, ha come matrice associata $\begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

Esercizio 6.7 Trovare la soluzione approssimata col metodo dei minimi quadrati del sistema

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Esercizio 6.8 Trovare la soluzione approssimata col metodo dei minimi quadrati del sistema

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ 5x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Esercizio 6.9 Trovare per quali valori di k la soluzione approssimata col metodo dei minimi quadrati del sistema

$$\begin{cases} kx = 1 \\ 2x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

è $x = 5/9$.

Esercizio 6.10 Trovare i valori di h per i quali la soluzione x che approssima col metodo dei minimi quadrati il sistema

$$\begin{cases} 4x = h \\ x = 1 \\ 2x = 1 \end{cases}$$

è tale che $x < 0$.

Esercizio 6.11 Trovare la soluzione approssimata col metodo dei minimi quadrati del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 6.12 Trovare la soluzione approssimata, col metodo dei minimi quadrati, del sistema

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 5x + 3y = 2 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases}$$

Esercizio 6.13 Trovare (x_0, y_0) soluzione approssimata, col metodo dei minimi quadrati, del sistema

$$\begin{cases} hx + y = 1 \\ x - 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

e determinare i valori di h per i quali $x_0 < 0$ e $y_0 < 0$.

Esercizio 6.14 Mostrare che se (x_0, y_0) è soluzione approssimata, col metodo dei minimi quadrati, del sistema

$$\begin{cases} kx + 2y = 2 \\ x + 2y = -1 \\ x + 2y = k \end{cases}$$

allora non esiste alcun valore di k per il quale $x_0 = y_0 = 0$.

Esercizio 6.15 Trovare la retta di interpolazione lineare dei tre punti

$$P_1 = (1, -1),\ P_2 = (2, 1),\ P_3 = (1, 3)$$

Esercizio 6.16 Trovare la retta di interpolazione lineare dei tre punti

$$P_1 = (2, 0),\ P_2 = (1, 1),\ P_3 = (2, 3)$$

Esercizio 6.17 Trovare la retta interpolazione di lineare dei tre punti

$$P_1 = (1, 3),\ P_2 = (h, -1),\ P_3 = (3, -1)$$

e mostrare che tale retta incontra sempre l'asse y in punti con ordinata positiva.