

ANALISI NUMERICA DEI SEGNALE DI MISURA NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

1.1 Introduzione

La Trasformata Discreta di Fourier (*DFT*) e l'analisi dello spettro di potenza sono due strumenti ampiamente usati per analizzare i segnali di misura numerici ottenuti con i sistemi di acquisizione dati (*SAD*). Infatti, la *DFT* fornisce, a partire dalla sequenza di N campioni $x(n)$ di un segnale definito nel dominio del tempo, campionato ed acquisito dal *SAD*, una ulteriore sequenza di N valori, $X(n)$, che rappresentano i campioni della trasformata di Fourier della sequenza di ingresso. Poiché la sequenza dei valori $x(n)$ è stata ricavata dal segnale analogico $x(t)$ sottoposto ad un processo di campionamento, la sequenza $X(n)$ fornita dalla *DFT* non è altro che la sequenza dei campioni che si sarebbe ottenuta campionando la trasformata di Fourier $X(f)$ del segnale analogico $x(t)$. Questa osservazione costituisce la base per la valutazione della trasformata di Fourier di segnali analogici utilizzando un'unità di conversione A/D ed un'unità di calcolo che esegua un programma per il calcolo della *DFT*. Risulta poi ovvio che il tempo necessario per eseguire tale calcolo dipende dalla complessità degli algoritmi utilizzati, ma grazie ad algoritmi veloci per il calcolo della trasformata (algoritmi di FFT) è possibile ottenere una analisi spettrale "in tempo reale". Uno schema a blocchi di un *SAD* per l'esecuzione di tale analisi è rappresentato in fig. 1: Gli elementi costituenti tale schema a blocchi e le loro funzioni saranno chiarite nel corso di queste dispense.

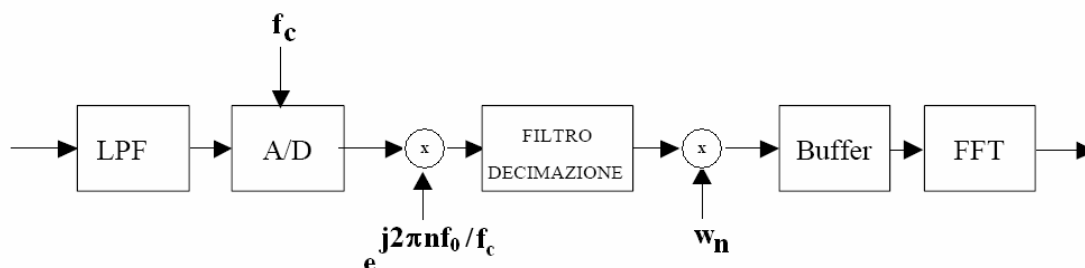


Fig. 1 – Schema a blocchi di un SAD per l'analisi in frequenza (FFT analyzer)

Per comprendere lo scopo di tali funzioni, è bene cominciare a precisare che per poter utilizzare in modo proficuo e, soprattutto, senza il pericolo di incorrere in false interpretazioni i risultati ottenuti con tali strumenti, è però necessario apprendere alcune nozioni basilari:

- quali sono e come si eseguono correttamente i principali algoritmi di elaborazione dei segnali nel dominio della frequenza;
- quali sono le precauzioni da usare nei front-end dei SAD per non incorrere nel fenomeno dell'aliasing;

Impossessandosi di tali nozioni fondamentali, sarà poi possibile adoperare le funzioni elementari di analisi nel dominio della frequenza come *mattoni* per eseguire ulteriori indagini misuristiche come ad esempio il rilievo della risposta in frequenza, della risposta all'impulso, degli spettri di ampiezza e fase, ecc.

Prima di procedere, si desidera esplicitamente dire che la trasformata di Fourier fornisce il contenuto spettrale del segnale di prova mediato nella finestra temporale di acquisizione. Pertanto, la *DFT* ben si adatta all'analisi di segnali stazionari o quasi stazionari (stazionari all'interno della finestra temporale di interesse). Viceversa, laddove si fosse interessati all'analisi di segnali transitori, sarebbe necessario far ricorso ad altri algoritmi specifici e in particolare a quelli basati

sull'impiego di funzioni *join time-frequency*, come ad esempio lo spettrogramma di Gabor. Questi ultimi, però, non saranno trattati nelle presenti dispense didattiche.

1.2 Prime nozioni sul trattamento dei dati ricavati dalla DFT

Le prime elaborazioni richieste per estrarre informazioni corrette dalla *DFT* sono:

- la conversione dello spettro di potenza bilatero in unilatero;
- la valutazione delle scale e tracciamento dello spettro di potenza;
- la valutazione degli spettri di ampiezza, fase e potenza;
- la conversione di potenza ed ampiezza in unità logaritmiche.

1.3 Conversione dello spettro di potenza bilatero in unilatero

Lo spettro di potenza di un segnale campionato nel dominio del tempo si presenta sotto forma di spettro di potenza *bilatero*, ciò significa che il vettore contenente le componenti spettrali presenta valori corrispondenti a frequenze sia negative che positive. Però, poiché lo spettro di potenza dei segnali reali è simmetrico rispetto alla componente continua (quindi è simmetrico rispetto allo 0), l'informazione dello spettro relativo alle frequenze negative è ridondante. Questo è il motivo per cui la maggior parte degli analizzatori di spettro presenti sul mercato visualizzano solo la metà dello spettro relativa alle frequenze positive. Per convertire uno spettro di potenza bilatero nel corrispondente spettro unilatero, bisogna considerare che nello spettro bilatero metà dell'energia è rappresentata in corrispondenza delle frequenze negative e metà in corrispondenza di quelle positive. Quindi, nella conversione, per evitare di non considerare il contributo di energia associato alle frequenze negative, è necessario raddoppiare quello associato alle frequenze positive. Fa ovviamente eccezione la componente di indice 0 (componente continua) alla quale è già associato tutto il contributo energetico del segnale di ingresso.

In formule:

$$G(0) = S(0)$$

$$G(i) = 2 \cdot S(i), \quad i = 1.. \frac{N}{2} - 1$$

in cui con $S(i)$ si è indicato il vettore dello spettro bilatero, con $G(i)$ quello dello spettro unilatero, con N la dimensione del vettore contenente lo spettro bilatero. La parte dello spettro relativo alle frequenze negative non va ovviamente considerato. Si noti tali componenti spettrali sono rappresentate nel vettore dello spettro di potenza negli indici:

$$\frac{N}{2} \leq i \leq N - 1$$

Ciò è dovuto al fatto che lo spettro di un segnale campionato è periodico (di periodo uguale alla frequenza normalizzata N). Tale periodicità impone l'uguaglianza:

$$S(-i) = S(N - i)$$

condizione questa che giustifica l'affermazione precedente. Si consideri, a titolo di esempio, il segnale di equazione:

$$v(t) = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 128 \cdot t) + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 256 \cdot t) + 2$$

Tale segnale è costituito dalla somma di due sinusoidi di ampiezza uguale a $3 V_{\text{eff}}$, rispettivamente di frequenze 128 e 256 Hz, a cui è sovrapposta la componente continua di 2 V. Siccome lo spettro è bilatero, esso presenta, oltre alla componente continua, componenti spettrali per frequenze sia negative che positive ($i=0$, $i=\pm 128$, $i=\pm 256$). Se, ad esempio, $N=1024$:

$$S(-128) = S(1024-128) = S(896)$$

$$S(-256) = S(1024-256) = S(768)$$

Ci attendiamo allora 5 righe spettrali corrispondenti agli indici:

$$i=0, 128, 256, 768, 896$$

per quanto riguarda le ampiezze:

- indice 0 (componente continua):

$$V_{DC} = 2V \Rightarrow V_{RMS}^2 = 4V^2$$

- indice 128 (componente a +128 Hz):

$$V_{128Hz} = 3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow V_{+128Hz} = \frac{V_{128Hz}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{+128Hz}^2 = \frac{9}{2} = 4.5V^2$$

- indice 256 (componente a +256 Hz)

$$V_{256Hz} = 3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow V_{+256Hz} = \frac{V_{256Hz}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{+256Hz}^2 = \frac{9}{2} = 4.5V^2$$

- indice 768 (componente a -256 Hz)

$$V_{256Hz} = 3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow V_{-256Hz} = \frac{V_{256Hz}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{-256Hz}^2 = \frac{9}{2} = 4.5V^2$$

- indice 896 (componente a -128 Hz)

$$V_{128Hz} = 3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow V_{-128Hz} = \frac{V_{128Hz}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{-128Hz}^2 = \frac{9}{2} = 4.5V^2$$

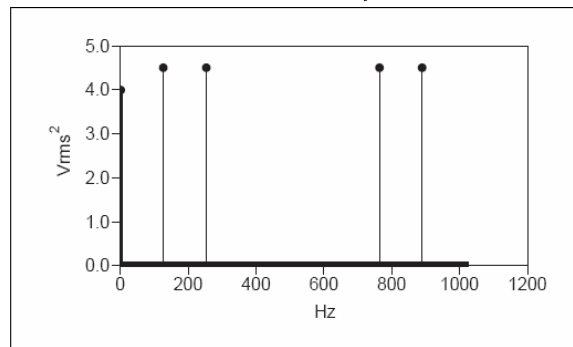


Fig. 2 – Spettro di potenza bilatero

Per convertire lo spettro di potenza bilatero di Fig.2 in spettro unilatero (Fig. 3), occorre:

- mantenere inalterata l'ampiezza della componente continua;
- raddoppiare l'ampiezza delle righe spettrali a 128 Hz e 256 Hz;
- limitare lo spettro alle prime 512 righe.

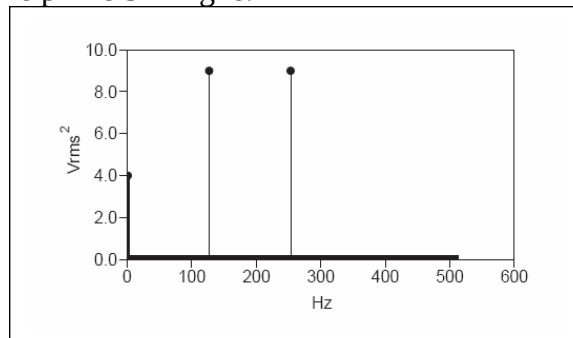


Fig. 3 – Spettro di potenza unilatero

1.4 Definizione della scala orizzontale (asse delle frequenze)

Le figure 2 e 3 mostrano l'andamento dello spettro di potenza del segnale $v(t)$ definito nel dominio del tempo. L'estensione del campo di frequenza come pure la risoluzione in frequenza dell'asse orizzontale dipendono dalla frequenza di campionamento e dal numero di punti acquisiti. Dalla Fig.3, in particolare, si vede che il numero di punti, dopo aver trasformato lo spettro bilatero in unilatero si è dimezzato:

$$\frac{N}{2} = \frac{1024}{2} = 512$$

essendo $N=1024$ il numero di campioni ipotizzati per il segnale $v(t)$. La prima riga spettrale è la componente continua e quindi corrisponde a 0 Hz. L'ultima riga spettrale corrisponde alla frequenza:

$$\frac{F_s}{2} - \frac{F_s}{N}$$

in cui F_s è la frequenza con cui è stato campionato il segnale $v(t)$. La distanza Δf intercorrente tra le righe spettrali (risoluzione spettrale) è quindi:

$$\Delta f = \frac{F_s}{N}$$

Poiché il reciproco della frequenza di campionamento rappresenta l'intervallo di tempo intercorrente tra due campioni successivi Δt , la risoluzione spettrale può anche essere calcolata come:

$$\Delta f = \frac{F_s}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta t}$$

Il termine $N \cdot \Delta t$ rappresenta la durata della finestra temporale per cui è stato campionato il segnale $v(t)$. Pertanto, la risoluzione spettrale può essere anche definita come il reciproco della durata della finestra di acquisizione.

Perché gli assi delle frequenze di Fig.2 e Fig.3 siano esatti, i 1024 campioni del segnale $v(t)$ devono essere stati campionati in modo da avere $\Delta f=1$. Quindi:

$$\Delta f = 1 = \frac{F_s}{1024} \Rightarrow F_s = 1024 \text{ Hz}$$

1.5 Spettri di ampiezza, fase e potenza mediante FFT

Lo spettro di potenza indica l'energia associata a ciascuna riga spettrale però non fornisce alcuna indicazione sulla fase iniziale di tali righe. Se si è interessati a questa informazione, bisogna sapere che la FFT contiene tale informazione, in quanto assume l'istante iniziale di acquisizione come riferimento temporale per definire la fase iniziale delle componenti spettrali. Volendo mantenere coerenti le misure di fase in acquisizioni successive è quindi necessario iniziare le acquisizioni usando un apposito segnale di trigger per la definire l'inizio dell'acquisizione. Ad esempio, una sinusoide acquisita nel suo passaggio per lo zero con pendenza positiva ha una fase iniziale di -90° . Se, invece, nello stesso istante, si cominciasse ad acquisire una cosinusoide, ne risulterebbe una fase iniziale di 0° .

L'algoritmo di FFT restituisce lo spettro complesso bilatero del segnale di ingresso. L'asse delle frequenze si calcola allo stesso modo di quello ricavato per lo spettro di potenza bilatero. Per ottenere gli spettri di ampiezza e fase, bisogna rappresentare lo spettro complesso in forma polare. Pertanto, lo spettro di ampiezza si calcola come:

$$Ampiezza_{PICO} = \frac{MOD[FFT(A)]}{N} = \frac{\sqrt{\{real[FFT(A)]\}^2 + \{imag[FFT(A)]\}^2}}{N}$$

lo spettro di fase si calcola come:

$$Fase_{RADIANTI} = Fase[FFT(A)] = \arctan \left\{ \frac{imag[FFT(A)]}{real[FFT(A)]} \right\}$$

in cui la funzione arcotangente restituisce i valori di fase tra $-\pi$ e $+\pi$. Ovviamente usare le precedenti formule significa convertire in forma polare il vettore complesso:

$$\frac{FFT(A)}{N}$$

ottenendo l'ampiezza (r) e la fase (ϕ).

Anche per quanto riguarda lo spettro di ampiezza si possono fare considerazioni analoghe a quelle già svolte per il caso dello spettro di potenza: lo spettro di ampiezza bilatero per essere convertito in

unilatero richiede che le ampiezze vengano raddoppiate (ad eccezione della componente continua che rimane inalterata). Lo spettro unilatero viene troncato alle prime $\frac{N}{2}$ righe. I valori così ottenuti rappresentano le ampiezze in valore di picco.

Per rappresentare lo spettro di ampiezza in valori efficaci bisogna dividere tutte le componenti (ad eccezione della componente continua) per la radice di due. In conclusione, partendo dalla FFT, lo spettro di ampiezza in valori efficaci si calcola come segue:

$$\begin{aligned} Ampiezza_{RMS} &= \sqrt{2} \cdot \frac{MOD[FFT(A)]}{N}, \quad i = 1 \dots \frac{N}{2} - 1 \\ &= \frac{MOD[FFT(A)]}{N}, \quad i = 0 \end{aligned}$$

in cui i rappresenta il numero di riga spettrale (indice del vettore FFT).

Per rappresentare lo spettro di fase in gradi:

$$Fase_{GRADI} = Fase[FFT(A)] \cdot \frac{180}{\pi}$$

Lo spettro di ampiezza è strettamente connesso allo spettro di potenza. Infatti, si può calcolare lo spettro unilatero di potenza semplicemente elevando a quadrato lo spettro di ampiezza (in valore efficace). Viceversa, è possibile calcolare lo spettro di ampiezza facendo la radice quadrata dello spettro di potenza. Lo spettro di potenza bilatero può anche essere ricavato dalla FFT nel modo seguente:

$$Potenza = \frac{FFT(A) \cdot FFT^*(A)}{N}$$

in cui con il simbolo $FFT^*(A)$ si denota il complesso coniugato di $FFT(A)$.

1.6 Conversione in unità logaritmiche

Molto spesso gli spettri di potenza e di ampiezza sono espressi nell'unità logaritmica dB (decibel). Tale unità rappresenta rapporti tra grandezze omogenee (siano essi potenze o ampiezze) usando una scala logaritmica. La scala logaritmica rende agevole la rappresentazione di dinamiche di segnale molto elevate, nel senso che rende più comodo trattare segnali che stanno in rapporto di alcuni ordini di grandezza. Il decibel, per esprimere il rapporto tra due potenze, si definisce come:

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \frac{P}{P_r}$$

in cui P si chiama potenza misurata e P_r potenza di riferimento.

Volendo, invece, usare il decibel per rappresentare rapporti di ampiezze, la definizione diventa:

$$dB = 20 \cdot \log_{10} \frac{A}{A_r}$$

in cui, analogamente al caso precedente, A si chiama ampiezza misurata e A_r ampiezza di riferimento. Queste definizioni comportano che, in decibel, il valore del rapporto tra le ampiezze di due segnali è uguale a quello del rapporto tra le loro potenze (media quadratica delle ampiezze). Infatti, dalle relazioni precedenti risulta:

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \frac{P}{P_r} = 10 \cdot \log_{10} \frac{A^2}{A_r^2} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{A}{A_r} \right)^2 = 20 \cdot \log_{10} \frac{A}{A_r}$$

Oltre ad esprimere rapporti tra ampiezze e potenze, il decibel consente anche di esprimere valori di ampiezza e potenza. In tal caso, si definisce in modo convenzionale la grandezza (ampiezza o potenza) di riferimento alla quale viene assegnato convenzionalmente il livello di 0 dB.

In campi di applicazione differenti si usano comunemente differenti convenzioni per definire la grandezza di riferimento. In particolare:

- l'unità dB_V , usata per le misure di ampiezza, fa riferimento al livello convenzionale di tensione di un volt efficace ($1 V_{\text{RMS}}$);
- l'unità $\text{dB}_{V_{\text{rms}}}$, usata per le misure di potenza, fa riferimento al livello convenzionale di potenza di un volt efficace a quadrato ($1 V_{\text{RMS}}^2$);
- l'unità dB_m , usata per le misure di potenza a *radiofrequenza*, fa riferimento al livello convenzionale di potenza di un milliwatt (1 mW) su un carico nominale di 50Ω . Poiché la definizione del dB_m fa riferimento ad un particolare valore del carico, essa consente anche di risalire al livello di tensione associato a 0 dB_m . Infatti:

$$1 \text{ mW} = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{50} \Rightarrow V = \sqrt{50 \cdot 10^{-3}} = 0.22 V_{\text{RMS}}$$

- l'unità dB_m crea talvolta qualche confusione in quanto, se usata per misure di potenza ad *audiofrequenza*, fa riferimento ancora al livello convenzionale di potenza di 1 mW ma, questa volta, su un carico nominale di 600Ω . Allora, in questo caso, il livello di tensione da associare a 0 dB_m diventa:

$$1 \text{ mW} = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{600} \Rightarrow V = \sqrt{600 \cdot 10^{-3}} = 0.78 V_{\text{RMS}}$$

- l'unità dB_U , usata nelle misure di indice di modulazione, usa come riferimento il livello di tensione della portante. Il livello di 0 dB_U (decibel Under carrier) è quindi all'ampiezza della portante.

1.7 Sistema di condizionamento per l'analisi di segnali mediante FFT

L'analisi dei segnali mediante FFT richiede innanzitutto il campionamento del segnale di ingresso. Secondo il criterio di Nyquist, la frequenza di campionamento F_s deve essere almeno due volte la massima componente spettrale del segnale di ingresso. Se si viola tale criterio, si verifica il noto fenomeno dell'*aliasing*. A titolo di esempio in Fig. 4 si riporta prima un segnale campionato con una frequenza di campionamento adeguata e poi lo stesso segnale sottocampionato.

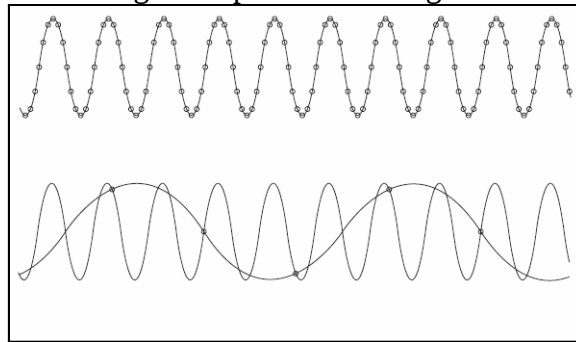


Fig. 4 –Campionamento adeguato ed inadeguato

Quando si campiona un segnale con frequenza di campionamento F_s che viola il criterio di Nyquist, le componenti spettrali del segnale di ingresso aventi frequenza superiore alla frequenza di Nyquist F_N (cioè per $f > F_N = \frac{F_s}{2}$) appaiono, in modo artefatto, come se fossero a frequenza di alias f_a definita dalla relazione:

$$f_a = F_s - f$$

Se questa relazione si coniuga insieme a quella derivante dalla periodicità dello spettro dei segnali campionati, si conclude che una qualsiasi componente spettrale, anche se a frequenza negativa, si ripropone periodicamente alle frequenze f'

$$f' = f + k \cdot F_s, \quad k = 1 \dots n$$

Quindi esisterà un particolare valore di k al quale corrisponderà una replica dello spettro compresa nell'intervallo $0 \div F_N$. Quanto ora affermato viene spesso espresso con il termine di *folding*

(ripiegamento) dello spettro: lo spettro di un segnale campionato si ripiega su se stesso nei limiti 0 e F_N .

A titolo di esempio, applicando le due relazioni su riportate, si riporta in Fig. 5 lo spettro di un segnale contenente componenti a 25, 70, 160 e 510 Hz, campionato con la frequenza di 100 Hz. Essendo $F_s=100\text{Hz}$, la frequenza di Nyquist è uguale a:

$$F_N = \frac{F_s}{2} = \frac{100}{2} = 50\text{Hz}$$

per cui:

- la componente spettrale del segnale di ingresso a $f_1=25\text{Hz}$ non supera la frequenza di Nyquist di 50Hz. Essa è campionata correttamente e quindi non comporta problemi di rappresentazione nello spettro segnale campionato;
- la componente spettrale del segnale di ingresso a $f_2=70\text{Hz}$ supera la frequenza di Nyquist. Essa da origine ad una frequenza di alias e sarà quindi rappresentata nello spettro del segnale campionato in corrispondenza di $f_a = F_s - f_2 = 100 - 70 = 30\text{Hz}$;
- la componente spettrale del segnale di ingresso a $f_3=160\text{Hz}$ supera la frequenza di Nyquist. Essa da origine ad una frequenza di alias $f_a = F_s - f_3 = 100 - 160 = -60\text{Hz}$. La frequenza di alias è quindi negativa ma, a causa della periodicità dello spettro del segnale campionato, si riproporrà, alla frequenza $f' = f_3 + k \cdot F_s, (k = 1 \cdots n)$. In particolare per $k=1$,
 $f' = f_3 + F_s = -60 + 100 = 40\text{Hz}$
- la componente spettrale del segnale di ingresso a $f_4=510\text{Hz}$ supera la frequenza di Nyquist. Essa da origine ad una frequenza di alias $f_a = F_s - f_4 = 100 - 510 = -410\text{Hz}$. La frequenza di alias è quindi negativa ma, a causa della periodicità dello spettro del segnale campionato, si riproporrà, alla frequenza $f' = f_a + k \cdot F_s, (k = 1 \cdots n)$. In particolare per $k=5$,
 $f' = f_a + 5 \cdot F_s = -410 + 500 = 90\text{Hz}$. Ma 90 Hz è ancora superiore alla frequenza di Nyquist, per cui si ha ancora aliasing con $f'_a = F_s - f' = 100 - 90 = 10\text{Hz}$.

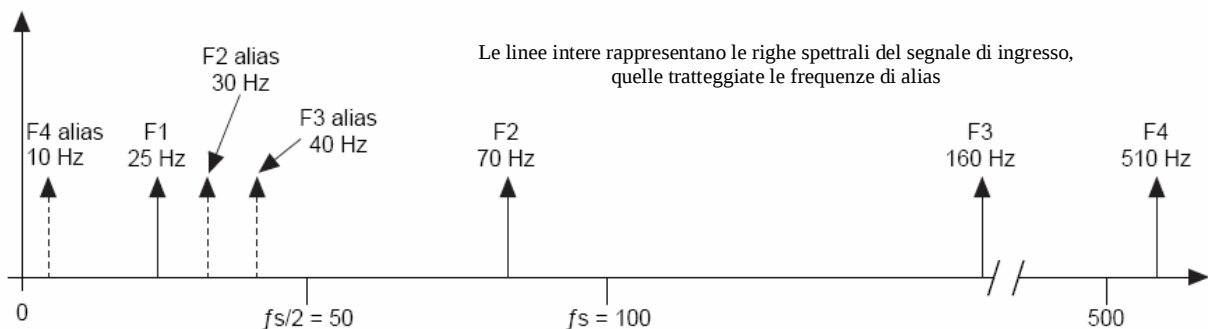


Fig. 5 - spettro di un segnale contenente componenti a 25, 70, 160 e 510 Hz, campionato con $F_s=100\text{ Hz}$

Dovrebbe risultare a questo punto evidente che la rappresentazione di Fig. 5 è del tutto corrotta dalla presenza di aliasing. Per evitare che tale fenomeno insorga, la prima strada che si può cercare di perseguire è quella di aumentare la frequenza di campionamento in modo da far rientrare tutto lo spettro del segnale di ingresso all'interno della frequenza di Nyquist.

Però, non sempre tale strada è perseguibile poiché:

- il sistema di campionamento ha un limite superiore di frequenza al di sopra del quale non funziona correttamente;
- la frequenza del sistema di campionamento è anche limitata per rispettare i limiti imposti dal processo di conversione AD. La frequenza di campionamento è infatti limitata dal tempo necessario al convertitore A/D per fornire il codice di uscita, tempo di memorizzazione del

campione numerico in memoria, tempo di sample (tempo assestamento) del nuovo campione da attendere prima che una nuova conversione possa avere inizio;

- non sempre è nota *a-priori* la ampiezza dello spettro del segnale di ingresso.

Un accorgimento alternativo che si può adottare è quello di limitare la banda del segnale con un apposito filtro passa basso (*LPF*: filtro anti-aliasing) in modo che il segnale filtrato non presenti componenti spettrali che possano dar origine ad aliasing. Naturalmente le caratteristiche di tale filtro non sono ideali, nel senso che non esistono filtri capaci di non attenuare le componenti spettrali fino alla frequenza di Nyquist e, di bloccare completamente tutte le componenti spettrali a frequenza superiore. La possibile risposta di un filtro anti-aliasing reale è quella riprodotta in Fig.6.

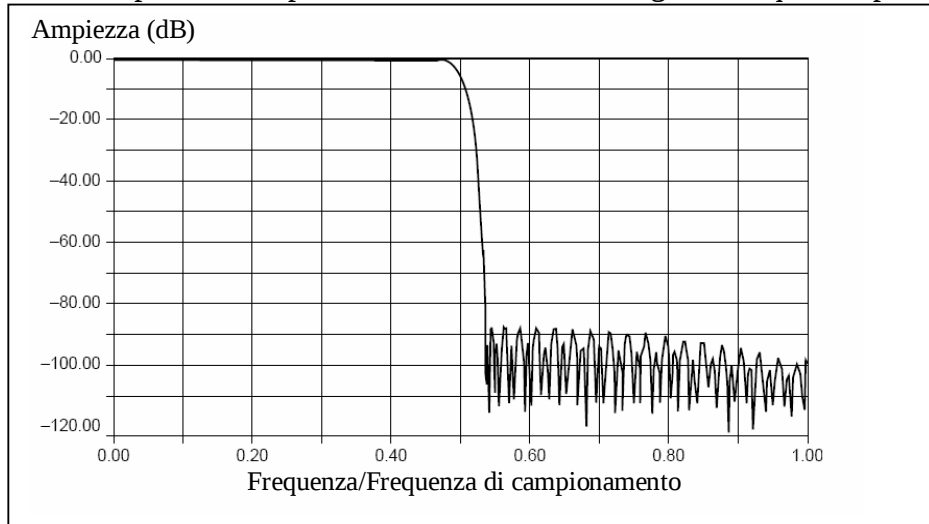


Fig. 6 – Risposta di un filtro anti-aliasing

Come si evince da tale figura, questo filtro anti-aliasing, attenua le componenti spettrali superiori alla frequenza di Nyquist (frequenza/frequenza di campionamento=0,5), di circa 90 dB. Ciò significa che tali componenti spettrali sono attenuate rispetto a quelle comprese all'interno della banda passante del filtro (corrispondenti quindi a 0 dB) in un rapporto pari a:

$$-90\text{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A}{A_r} \right) \Rightarrow \log_{10} \left(\frac{A}{A_r} \right) = -4.5 \Rightarrow \frac{A}{A_r} = 10^{-4.5} = \frac{1}{10^{4.5}} \approx 3.2 \cdot 10^{-5}$$

Si può dedurre che questo filtro è compatibile con l'impiego di un convertitore a 15 bit. La risoluzione del convertitore a 15 bit è uguale a:

$$Q = \frac{F.S.}{2^{15}} = F.S. \cdot 3.0 \cdot 10^{-5}$$

Quindi questo filtro riporta l'ampiezza delle componenti spettrali di frequenza superiore a quella di Nyquist a livelli comparabili con la risoluzione dello stesso anche nel worst case in cui l'ampiezza di tali componenti spettrali in ingresso al filtro sia uguale a F.S. del convertitore.

Nel proporzionamento del filtro anti-aliasing bisogna porre l'attenzione anche su un altro aspetto. Come si evince sempre dalla stessa Fig.5, oltre ad attenuare le componenti spettrali superiori alla frequenza di Nyquist, il filtro anti-aliasing produce anche una attenuazione delle componenti spettrali inferiori alla frequenza di Nyquist. Ad esempio, per il filtro di Fig.5, per componenti spettrali comprese all'interno della frequenza $f = 0.464 \cdot F_s$ lo spettro rimane praticamente piatto (compreso all'interno di $\pm 0.1\text{dB}$), ma a frequenza $f = 0.493 \cdot F_s$ si ha una attenuazione di -3dB che potrebbe non essere tollerabile. Allora, è consigliabile di non mostrare lo spettro fra 0 e $F_N \text{ Hz}$ così come previsto dalla teoria, ma arrestarne la visualizzazione qualche *bin* prima. Quindi, avendo appurato che fino alla frequenza $f = 0.464 \cdot F_s$ la risposta del filtro in esame risulta essere sufficientemente piatta, basta limitare la visualizzazione dello spettro ad un numero di bin uguale a $0.464 \cdot N$ (indicando con N il numero di campioni presenti nel vettore di ingresso). Se ad esempio il sistema di acquisizione ha registrato 4096 campioni con una frequenza di campionamento di 1MHz,

converrà limitare la visualizzazione dello spettro alle prime $0.464 \cdot 4096 = 1900$ righe, corrispondenti all'intervallo $0 \div 464\text{kHz}$.

Notiamo che la frequenza di campionamento, f_c , e conseguentemente la frequenza di taglio del filtro antialiasing, dovrebbero essere commisurate alla banda del segnale da analizzare. Se abbiamo un segnale del quale conosciamo la banda, cioè la massima frequenza, f_B , da considerare nel suo spettro, il teorema di Nyquist ci obbliga a campionare ad una frequenza $f_c > 2f_B$ per non alterare il contenuto frequenziale dello spettro del segnale. Nella pratica, si desidera analizzare segnali con bande diverse, il che obbligherebbe a cambiare di volta in volta la frequenza di campionamento del A/D e di conseguenza la frequenza di taglio del filtro anti-aliasing che lo precede. In sostanza si dovrebbe disporre di un banco di filtri passa-basso e di un convertitore A/D a frequenza variabile.

Una simile soluzione è eccessivamente costosa, viste le elevate prestazioni richieste ad un buon filtro anti-aliasing. Una alternativa valida è quella di dimensionare la conversione con riferimento alla massima banda analizzabile, f_{Bmax} fissando quindi a tale valore frequenza di taglio dell'unico filtro antia-aliasing e ad un valore di poco superiore a $2f_{Bmax}$ la frequenza di campionamento del convertitore A/D, e facendo seguire a quest'ultimo un'operazione di *decimazione*, eseguita sul segnale campionato e quindi ottenibile per via numerica, come mostrato in fig.1.

Supponiamo allora di dover analizzare un segnale con banda f_B minore di f_{Bmax} , sia ad esempio $f_B = f_{Bmax}/8$. Poiché la frequenza di campionamento è fissata al valore $f_c = 2f_{Bmax}$, non si verificano problemi di aliasing però si osserverà che la parte significativa dello spettro interesserà solo la prime righe spettrali (esattamente $1/8$ di quelle fornite dalla *DFT*). Le rimanenti righe saranno di ampiezza nulla (avendo ipotizzato $f_B = f_{Bmax}/8$). Questo significa che l'algoritmo di *DFT* ha dovuto processare un numero di campioni ($7/8$ di N) senza fornire alcun contributo informativo ed invece ha fornito informazione concentrata su $1/8$ di N righe spettrali determinando una risoluzione spettrale

$$\Delta f = \frac{f_B}{\frac{N}{8}} = 8 \cdot \frac{f_B}{N}.$$

Sicuramente sarebbe meglio poter usare tutti gli N campioni nell'intervallo di interesse, cioè laddove si estende la banda del segnale. L'obiettivo dell'algoritmo di *decimazione* è quello di utilizzare tutti i campioni per dare contributo al contenuto di informazione.

In pratica, se la sequenza in uscita dal convertitore A/D viene decimata con fattore di decimazione pari ad 8 (si preleva un campione ogni 8), lo spettro che prima si estendeva fino a $1/8$ di f_B ora si estende fino a f_B , come se in origine il segnale fosse stato campionato alla sua frequenza di Nyquist $2f_B$. Per evitare che l'operazione di decimazione induca aliasing, essa deve essere sempre preceduta da una fase di filtraggio *numerico* passa-basso con frequenza di taglio pari a f_B . Con l'operazione di decimazione (preceduta da quella di filtraggio numerico) si riesce a concentrare l'analisi sulla banda di interesse, che si estende solo fino ad f_B e non oltre.

In realtà, sebbene sia conveniente pensare alle due fasi di filtraggio numerico passabasso e decimazione come logicamente distinte, esse sono eseguite in un unico blocco noto come *filtro di decimazione*. Naturalmente il filtro di decimazione dovrà essere in grado di variare le sue caratteristiche (frequenza di taglio del filtro numerico passabasso e fattore di decimazione), dovrà cioè essere *a passo variabile*. Ciò non rappresenta un problema, visto che è realizzato con un filtro numerico per il quale variare le caratteristiche significa solo variare il valore di alcuni parametri (coefficienti del filtro). In conclusione il complesso costruito da: filtro antialiasing analogico a frequenza fissa, convertitore A/D a frequenza fissa, filtro numerico di decimazione a passo variabile, costituisce un modo notevolmente economico di adeguare la frequenza di campionamento alla banda del segnale da analizzare. La massima banda di analisi è legata alla frequenza di campionamento a cui può operare il convertitore A/D: più alta è tale frequenza di campionamento, maggiore sarà la banda di analisi massima. Alla luce di quanto detto, a valle del filtro di decimazione abbiamo la effettiva frequenza di campionamento, f_c , alla quale far riferimento nelle successive considerazioni.

La presenza del filtro di decimazione offre anche la possibilità di concentrare l'analisi solo su di una porzione di spettro, effettuando uno *zoom* sullo spettro del segnale relativamente ad un prefissato intervallo di frequenza. Supponendo di voler fare uno *zoom* sulla parte di spettro compresa tra la frequenza zero e la frequenza f_{MAX} , possiamo eseguire un filtraggio numerico passa-basso, che elimini le componenti frequenziali oltre f_{MAX} e, poi, una decimazione, che allarghi la porzione di spettro selezionata sull'intero intervallo ($0 \div f_{MAX}$). Se la porzione di spettro su cui effettuare lo *zoom* non dovesse iniziare a frequenza zero, si può sfruttare una relazione matematica che lega un segnale nel dominio del tempo e la sua trasformata nel dominio della frequenza: moltiplicare nel dominio del tempo una sequenza di campioni per un esponenziale del tipo: $\exp(j2\pi f_o t)$ equivale, nel dominio della frequenza, a traslare lo spettro verso sinistra di una quantità pari ad f_o (teorema del ritardo in frequenza). La presenza di un blocco in grado di produrre la sequenza $\exp(j2\pi n f_o / f_s)$, con f_o selezionabile in modo da sceglierla pari alla frequenza di inizio della banda su cui effettuare lo *zoom* ($f_o = f_{min}$), permette di eseguire la moltiplicazione nel dominio del tempo tra tale sequenza e quella del segnale campionato in uscita dal convertitore A/D, trasladando lo spettro del segnale in modo che f_{min} coincida con la frequenza iniziale. Successivamente l'azione del filtro di decimazione elimina le componenti a frequenza maggiore di f_{max} ed espande su tutto l'intervallo ($0 \div f_o/2$) la porzione di spettro rimanente. Il risultato finale è che ora tutti gli N campioni calcolati dalla DFT saranno posizionati nella banda selezionata.

1.8 Rapporto segnale rumore del sistema di condizionamento

Il sistema di condizionamento può introdurre una certa aliquota di rumore nel sistema di misura. Il parametro che individua la qualità del segnale in merito alla presenza di rumore è il rapporto segnale rumore *SNR* che si definisce come:

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_s^2}{V_n^2} \right) dB$$

dove V_s e V_n sono rispettivamente i valori efficaci del segnale e del rumore. Perché tale espressione sia significativa è necessario definire la banda entro la quale è stato misurato il valore efficace del rumore. In genere, tale valore si assume uguale alla banda passante del sistema di condizionamento che deve tenere conto anche della eventuale presenza del filtro anti-aliasing.

1.9 Spurious free dynamic range

Oltre al rumore, il sistema di condizionamento può anche produrre una certa aliquota di distorsione del segnale di ingresso. Tale distorsione può alterare lo spettro del segnale con l'introduzione di frequenze spurie prodotte da fenomeni di intermodulazione o di distorsione armonica. Il parametro che misura tale fenomeno è lo *spurious free dynamic range (SFDR)* che esprime il rapporto tra l'ampiezza della fondamentale e quello della riga spettrale di maggiore ampiezza (escluse ovviamente le righe della componente continua e della fondamentale):

$$SFDR = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_1}{\max(V_i)_{i=2 \dots \frac{N}{2}}} \right)$$

in cui V_1 è il valore efficace della fondamentale V_i è il valore efficace della i -esima componente armonica, N il numero di campioni del segnale di ingresso. In base a tale definizione

1.10 Total harmonic distortion

A causa del comportamento non lineare del sistema di condizionamento viene introdotta nel segnale una certa aliquota di distorsione. Il parametro che misura la distorsione introdotta dal sistema di condizionamento è il (*THD*):

$$THD = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{\frac{N}{2}} V_i^2}}{V_1} \right)$$

In genere, per valutare il parametro *THD*, si sommano solo le prime 6 armoniche. Infatti, se si estende la sommatoria a tutte le righe spettrali (come mostrato nella formula), si misura anche l'influenza del rumore introdotto dal sistema di condizionamento. In tal caso, si ottiene un parametro che si indica come *THD-plus-noise-ratio*.