Anno Accademico selezionato: **2002/2003**

METODI MATEMATICI - IEL

BORGIOLI GIOVANNI

Prerequisiti necessari	Precedenze: Analisi Matematica I e II, Geometria
Programma dettagliato English	1 - EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO) Definizioni e terminologia; la forma normale; l'equazione del primo ordine y'(x) =f(x,y(x)) per funzioni y(x) definite su R ed a valori in R^n come forma generale rappresentativa di EDO di ordine n e di sistemi di n EDO del primo ordine; il problema di Cauchy o ai valori iniziali (PVI); il teorema di esistenza ed unicità (TEU) per il PVI: caso di equazioni del primo ordine per funzioni scalari (da R in R) e caso generale (senza dimostrazione); conseguenze del TEU per i sistemi lineari; metodi risolutivi per le equazioni scalari del primo ordine: a variabili separabili, equazioni omogenee, equazioni lineari complete, equazioni del tipo di Eulero. EDO del secondo ordine: metodi risolutivi per le equazioni riconducibili ad equazioni del primo ordine; equazioni integrabili per quadrature; equazioni lineari a coefficienti costanti, caso omogeneo e non omogeneo; interpretazione geometrica ed analisi qualitativa per le EDO del secondo ordine e per i sistemi del primo ordine di dimensione 2: il piano delle fasi. Stabilità delle soluzioni: definizione di stabilità secondo Liapunov, stabilità asintotica; il criterio di stabilità lineare (senza dimostrazione); classificazione della stabilità delle soluzioni di equilibrio nel piano delle fasi (centro, punto sella, fuoco, nodo); analisi qualitativa con il metodo dell'energia. Modelli meccanici ed in teoria dei circuiti che vengono formulati come EDO: l'oscillatore armonico, l'oscillatore armonico smorzato e forzato e la risonanza lineare, il pendolo non lineare. Modelli in Meccanica dei Continui che vengono formulati come equazioni differenziali a derivate parziali: l'equazione della diffusione e l'equazione delle onde (unidimensionali). 2 - SERIE DI FOURIER (SF) Polinomi di Fourier; serie di Fourier, calcolo dei coefficienti; convergenza in media quadratica; le condizioni di Dirichlet; l'uguaglainza di Parseval; convergenza puntuale della SF e delle serie derivate; funzioni pari e dispari e loro SF; SF di funzioni definite su un intervallo; forma complessa della SF. 3 - TRASFORMATA DI FOURIER (TF) Trasformata di Fourier dedotta in modo formale dalla SF in forma complessa; antitrasformata di Fourier (ATF); condizioni per l'esistenza della TF e della ATF; linearità della TF e della ATF; TF della funzione riscalata e traslata (formule del ritardo); TF della funzione derivata; TF del prodotto di convoluzione; teorema di Plancherel (senza dimostrazione); uguaglianza di Parseval. 4 - TRASFORMATA DI LAPLACE (TL) Definizione della Trasformata di Laplace; condizioni di esistenza; linearità della TL; TL del prodotto di convoluzione; formula del ritardo; TL di funzioni derivate e di primitive; derivata della TL; TL di una funzione periodica; la formula dell'antitrasformata; metodi per il calcolo di antitrasformate elementari.

Testi adottati	M.Bramanti, C.D.Pagani, S.Salsa - Matematica - Zanichelli Testi ausiliari: G.C.Barozzi - Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione - Zanichelli M.Codegone - Metodi Matematici per l'Ingegneria - Zanichelli M.Marini - Metodi Matematici per lo studio delle Reti Elettriche - CEDAM G. Borgioli - Modelli Matematici di Evoluzione ed Equazioni Differenziali - CELID

Scheda di Valutazione

$\boxed{\text{METODI MATEMATICI}}$

I° ordine

† Lineare • $y' = a(x)\, y + b(x)$

$\Rightarrow \quad y(x) = e^{A(x)} \left(\int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx \right)$

• $y' = a(x)\, y$

$\Rightarrow \quad y(x) = c\, e^{A(x)}$

† lin. A coef costanti : $y'' + a y' + b y = f(x)$ $\qquad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

omogenea $\Rightarrow$ $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ se $\Delta > 0$

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$ se $\Delta = 0$

$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ se $\Delta < 0$

con $\alpha = -b/2$ e $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$

NB: λ_1 e λ_2 le radici

non omogenea : $y'' + a y' + b y = V_0(x)$

come prima + $V_0(x) = x^h e^{\lambda x} \varphi_m(x)$ se $P(\lambda) \neq 0$

h = molteplicità di una radice

$= e^{\lambda x} \varphi_m(x)$ se $P(\lambda) = 0$

se $P(\lambda \pm i\mu) = 0$

$\Rightarrow \quad V_0(x) = x^h e^{\lambda x} \left[\varphi_m(x) \cos \mu x + S_n(x) \sin \mu x \right]$

† EULERO : $x^2 y'' + p x y' + q y = f(x)$

$\lambda^2 + (p-1)\lambda + q = 0$

$\Rightarrow y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$ se $\Delta > 0$

con $\log x$ se $\Delta = 0$

† Non lineare : BERNOULLI $\qquad y' = a(x)\, y + b(x)\, y^{\alpha}$

$z' = (1-\alpha)\, a(x)\, z + (1-\alpha)\, b(x)$

$z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$

+ $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

$z = \frac{y}{x}$ o $y = xz$

$\Rightarrow \quad xz' = g(z) - z$

+ $y' = g(ax + by)$

$z(x) = ax + by(x)$

$z' = a + by' = a + b\,g(z)$

+ Non normali $\quad x = g(y')$

$y' = t \quad x = g(t)$

$y(t) = t\,g(t) - G(t) + c$

+ Non normali $\quad y = g(y')$

$y' = t$

$$x(t) = \int \frac{g'(t)}{t}\,dt$$

$$y(t) = g(t)$$

+ CLAIRAUT $\quad y = xy' + g(y')$

$y = xt + g(t)$

$x(t) = -g'(t) \qquad y(t) = -t\,g'(t) + g(t)$

$y = cx + g(c)$

ORDINE SUPERIORE

+ $g(x, y', y'') = 0$

$z = y' = \frac{dy}{dx}$

+ $g(y, y', y'') = 0$

$z = y' \quad y'' = z'z$

FOURIER

$$a_0 = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{\lambda}$$

Serie di Fourier

Un segnale $f(t)$ può essere approssimato in una somma pesata di sinusoidi;

$$f(t) = f(t + nT) \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{di periodo } T$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin n\omega_0 t$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{N} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

per $n = 1 \Rightarrow$ sinusoide fondamentale $\left(C_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) \right)$

per $n = k \Rightarrow$ termine armonico di ordine k. $\left(C_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \right)$

ω_0 = frequenza fondamentale

$k\omega_0$ = k-esima armonica

$+\ k \to \infty \Rightarrow$ si ha una miglior approssimazione della nostra $f(t)$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt \quad = \text{valore medio su } T$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t\, dt$$

C.d.L. in Ingegneria Elettronica

PROVA SCRITTA di METODI MATEMATICI – 20/04/2004

(Prof. G. Borgioli)

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1:

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$x(2+x)\frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = 1 + 3x^2 \qquad , \; y(-1) = 1 \; .$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x(x+2)} \qquad\qquad -2 < x < 0.$$

ESERCIZIO 2:

Determinare la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y} \quad .$$

SOLUZIONE:

$$|x+y||y+4x|^2 = C.$$

una volta.

ESERCIZIO 3:

Determinare per l'intervallo $x \in [0,1]$ il ritratto di fase per la seguente equazione differenziale:

$$\cancel{\ddot{x} + 4x = x^2 + 3e^x} \; .$$

$$\ddot{x} + e^x = 2$$

SOLUZIONE:

ESERCIZIO 4:

Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$2y'' + 2y' + y = 0.$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = C_1 e^{-x/2} \cos\frac{x}{2} + C_2 e^{-x/2} \sin\frac{x}{2} \; .$$

ESERCIZIO 5:

Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' + y' - 2y = 2x \ , \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1 \ .$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = e^{x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - x - \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 6:

Disegnare il grafico della seguente funzione e calcolare l'espressione della serie di Fourier:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -3 \le x < 0 \\ 2, & 0 \le x < 3 \end{cases}$$

$$f(x + 6) = f(x) \ ,$$

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right]}{2n-1} \ .$$

MetMat 20/04/2004

Esercizio 3

$e^x - 2x$

$\ddot{x} + f(x) = 0$

$f(0) = 1$

$f(x) = 4x - x^2 - 3e^x$

$f(1) = e - 2 \simeq 0.7$

$f'(x) = e^x - 2 = 0$

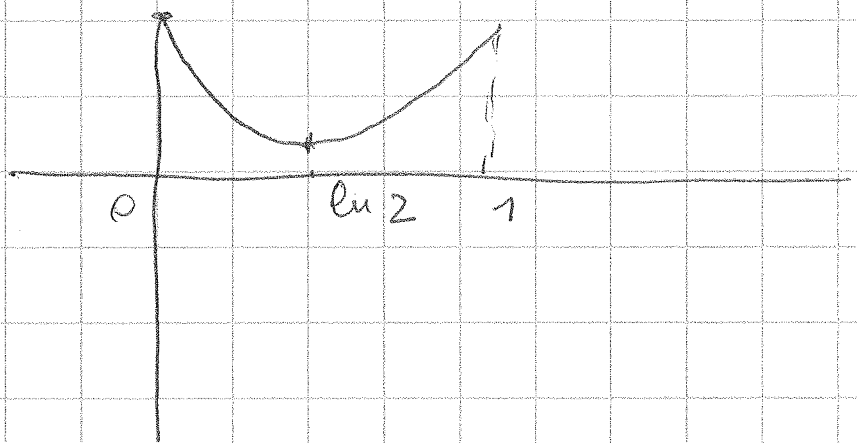
$x = \ln 2$

$F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3e^x$

Studio della funzione nell'intervallo $[0,1]$

$F(0) = -3$

$F(1) = 2 - \frac{1}{3} - 3e \simeq \frac{5}{3} - 3e < 0 \simeq -7$



METMAT 20/04/2004

(1) PVI I ORDINE LINEARE

$$x(2+x)\,y' + 2(1+x)\,y = 1+3x^2 \qquad y(-1) = 1$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{x^3+x+1}{x\,(x+2)} \,, \qquad -2 < x < 0$$

(2) I ORDINE OMOGENEA

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$$

SOLUZIONE:

$$|y+x|\,|y+4x|^2 = c$$

(3) SOLUZIONE GENERALE II ORDINE

$$2y'' + 2y' + y = 0$$

$$y = c_1\, e^{-x/2} \cos\frac{x}{2} + c_2\, e^{-x/2} \sin\frac{x}{2}$$

④ PVI EQ II ordine

$$y'' + y' - 2y = 2x \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

SOLUZIONE

$$y = e^{x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$$

⑤ PVI EQ II ordine (o piano delle fasi)

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^{x} \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 2$$

SOLUZIONE

$$y = \frac{7}{10} \sin 2x - \frac{19}{40} \cos 2x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5} e^{x}$$

⑥ Serie di Fourier

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$$

SOLUZIONE

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\pi x/2\right]}{2n-1}$$

(1) $y' + \dfrac{2(1+x)}{x(2+x)}\,y = \dfrac{1+3x^2}{x(2+x)}$

$$y(x) = e^{-\int \frac{2(1+x)}{x(2+x)}dx}\left[\int \frac{1+3x^2}{x(2+x)}\, e^{\int \frac{2(1+x)}{x(2+x)}dx}\, dx + C\right]$$

$$y(x) = e^{-\ln|x(2+x)|}\left[\int \frac{1+3x^2}{x(2+x)}\, e^{\ln|x(2+x)|} + C\right] =$$

$$= \frac{1}{|x(2+x)|}\left[\int (1+3x^2)\,dx + C\right] =$$

$$= \frac{x+x^3}{x(2+x)} + \frac{C}{x(2+x)},$$

$$y(-1) = 1 = \frac{-2}{-1} + \frac{C}{-1}$$

$1 = 2 - C$

$C = 1$

$$y(x) = \frac{x^3+x+1}{x(x+2)}$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$$

$$z = \frac{y}{x} \qquad y = zx$$
$$y' = z + z'x$$

$$z + z'x = -\frac{4x+3zx}{2x+zx}$$

$$z'x = -\left[\frac{4x+3zx}{2x+zx} + z\right]$$

$$z'x = -\frac{4x+3zx+2zx+z^2x}{2x+zx} = -\frac{z^2x+5zx+4x}{2x+zx}$$

$$z' = -\frac{z^2+5z+4}{x(z+2)} = -\frac{(z+1)(z+4)}{x(z+2)}$$

$$\frac{(z+2)\,dz}{(z+1)(z+4)} = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{(z+2)\,dz}{(z+2)^2+z} \quad ??$$

$$\frac{z+2}{(z+1)(z+4)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+4}$$

$$4A + Az + Bz + B = z + 2$$

$$A + B = 1 \qquad A = B - 1 \qquad A = -\frac{1}{6}$$
$$4A + B = 2 \qquad 4B - 4 + B = 2 \qquad B = 5/6$$

(3)

$$2y'' + 2y' + y = 0$$

$$2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{4} \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{array} \right.$$

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \sin\frac{x}{2} + C_2 \cos\frac{x}{2} \right)$$

---

(4) $y'' + y' - 2y = 2x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array} \right.$$

$$y_{om} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$y^* = ax + b$$

$$y^{*''} = 0$$

$$y^{*'} = a$$

$$y^* = ax + b$$

$$a - 2ax - 2b = 2x$$

$$a = -1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

$$C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$C_1 - 2C_2 - 1 = 0$$

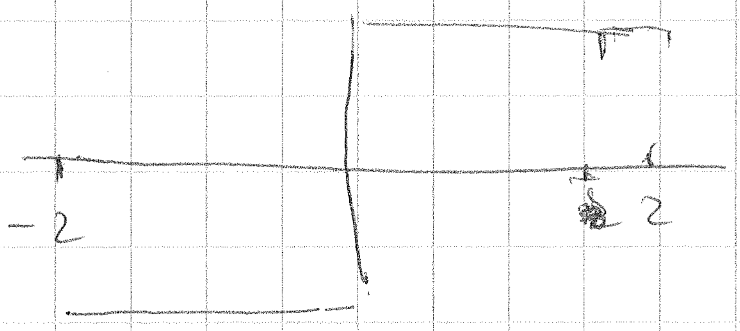
$$C_1 = 1$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$y = e^x - \frac{e^{-2x}}{2} - x - \frac{1}{2}$$

OK

(6) Serie di Fourier



$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\; x\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\; x\Big|_{0}^{2} = -1+1=0$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = 0 \qquad \text{(DISPARI)}$$

$$b_n = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx =$$

PARI

$$b_n = \int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_{0}^{2} =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big] = \cancel{\frac{2}{n\pi}\Big[(1)^{n-1}+1}$$

$$= +\frac{4}{(2n-1)\pi} \qquad \text{OK}$$

30

TESTO A

COGNOME: NTIBARIKURE LAURENT
NOME: LAURENT
N. matricola: 3700407

C.d.L. in Ingegneria Elettronica

PROVA SCRITTA di METODI MATEMATICI
14/07/2004

Prof. G. Borgioli

ESERCIZIO 1 (**punti 4**):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}, \qquad y(0) = 1$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3} \ln(1+x^3) + 1}$$

~ SI

4

ESERCIZIO 2 (**punti 6**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} - 2y = -y^4 e^{2x}$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{c e^{-6x} + \frac{3}{8} e^{2x}}}$$

SI

6

ESERCIZIO 3 (**punti 6**):

Determinare per l'intervallo $x \in [-1, 2]$ il ritratto di fase per la seguente equazione differenziale:

$$\ddot{x} + x^3 = x^2$$

dove $\ddot{x} := \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

SOLUZIONE:

Vedere allegati

~ SI 5

ESERCIZIO 4 (**punti 6**):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali :

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 2e^{2t}, \qquad x(0) = 1 \,,\; \dot{x}(0) = 0$$

dove $\dot{x} := \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} := \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

SOLUZIONE:

$x(t) = (t - 1)^2 e^{2t}$ SI 6

TESTO A
COGNOME: NTIBATRIKURE
NOME: LAURENT
N. matricola: 3700407

ESERCIZIO 5 (**punti 8**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 + x\,, \quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)\,,$$

se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} + \frac{2}{\pi^2}\right) \cdot (-1)^n \cdot \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n}\right) \cdot (-1)^n \cdot \sin nx$$

No

un errore di calcolo

6

ESERCIZIO 6 (**punti 3**):

Risolvere in campo complesso la seguente equazione:

$$z^3 - 3i = 0$$

SOLUZIONE:

$$z_0 = \sqrt[3]{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

SI 3

$$z_1 = \sqrt[3]{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

$$z_2 = -i\sqrt[3]{3}$$

NTIBARIKURE

1 $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

$$\int y\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + c$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\ln(1+x^3)+c}$$

$$y(0) = \pm\sqrt{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{\frac{2}{3}\ln(1+x^3)+1}$$

2. $$y' = 2y - e^{2x}y^4$$

BERNOULLI
$\alpha = 4$
$1-\alpha = -3$

$$z' = \underbrace{-6}_{a(x)} z + \underbrace{3e^{2x}}_{b(x)}$$

$A = -6x$

$$z = e^{-6x}\cdot\left[\underbrace{\int e^{6x}\cdot 3e^{2x}\,dx}\right]$$

$$\int 3e^{8x}\,dx = \frac{3}{8}\int 8e^{8x}\,dx = \frac{3}{8}e^{8x} + c$$

$$z = e^{-6x}\left[\frac{3}{8}e^{8x} + c\right] = ce^{-6x} + \frac{3}{8}e^{2x}$$

$$z = (y)^{-3} = \frac{1}{y^3} \Rightarrow y^3 = \frac{1}{z} \qquad y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$$

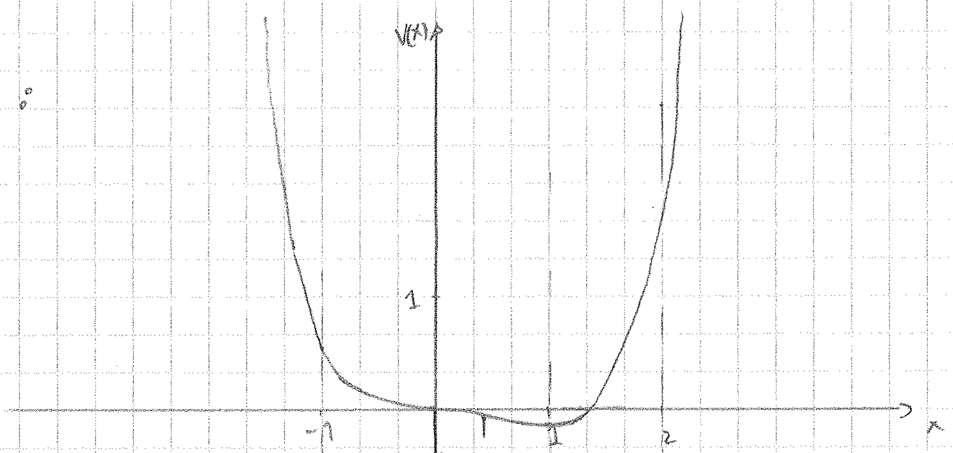
$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{6e^{-6x} + \frac{3}{8}e^{2x}}}$$

3. $\ddot{x} = x^2 - x^3$

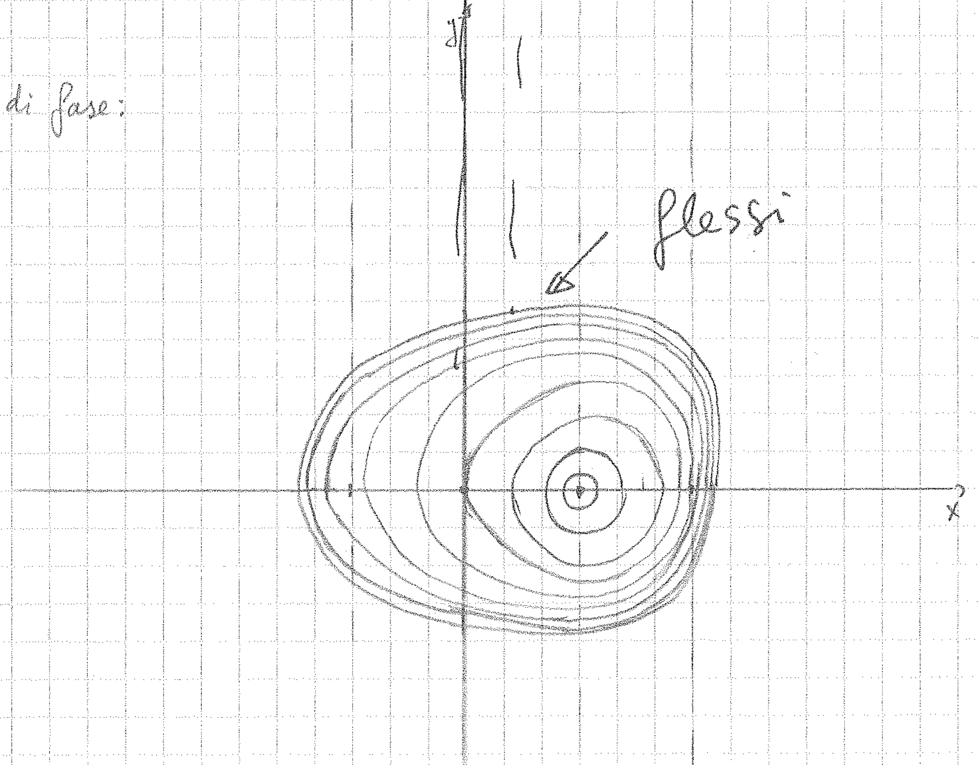
$f(x) = x^2 - x^3$ $\qquad f(x) = 0 \quad x = 1,\ x = 0$

$V(x) = -F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$ $\qquad -F(x) = 0 \quad x = 0,\ x = 4/3$

potenziale:



Ritratto di fase:



Il disegno viene ripreso in dettaglio su un altro foglio.

NTIBARIKURE

4.

$$x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t}$$

È lineare a coef costanti e non omogenea.

$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 = 0$

$\lambda_1 = \frac{4}{2} = 2$ con molteplicità 2

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + v_0(t)$$

$$v_0(t) = (at^2 + bt + c)e^{2t} = at^2e^{2t} + bte^{2t} + ce^{2t}$$

$$v_0'(t) = 2ate^{2t} + 2at^2e^{2t} + be^{2t} + 2bte^{2t} + 2ce^{2t}$$

$$v_0''(t) = 2ae^{2t} + 4ate^{2t} + 4ate^{2t} + 4at^2e^{2t} + 2be^{2t}$$
$$+ 2be^{2t} + 4bte^{2t} + 4ce^{2t}$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{2t}}(2a + 8at + 4at^2 + 4b + 4bt + 4c) - 4\cancel{e^{2t}}(2at^2 + 2at$$
$$+ 2bt + b + 2c) + 4(at^2 + bt + c)\cancel{e^{2t}} = 2\cancel{e^{2t}}$$

$$2a + \cancel{8at} + \cancel{4at^2} + \cancel{4b} + \cancel{4bt} + \cancel{4c} - \cancel{8at^2} - \cancel{8at} - \cancel{8bt} - \cancel{4b} - \cancel{8c} + \cancel{4at^2}$$
$$+ \cancel{4bt} + \cancel{4c} = 2$$

$\Rightarrow \quad 2a = 2 \qquad a = 1$

$$v_0(t) = t^2e^{2t}$$

In fine:

$$x(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + t^2e^{2t}$$
$$= (c_1 + c_2t + t^2)e^{2t}$$

$$x'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t} + 2t e^{2t} + 2t^2 e^{2t}$$

$$\Big(x''(t) = 4c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{2t} + 2c_2 e^{2t} + 4c_2 t e^{2t} + 2e^{2t} + 4t e^{2t} + 4t e^{2t} + 4t^2 e^{2t} \Big)$$

$$\left.\begin{array}{l} x'(0) = 2c_1 + c_2 = 0 \\ x(0) = c_1 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2 + c_2 = 0 \\ c_2 = -2 \end{array}$$

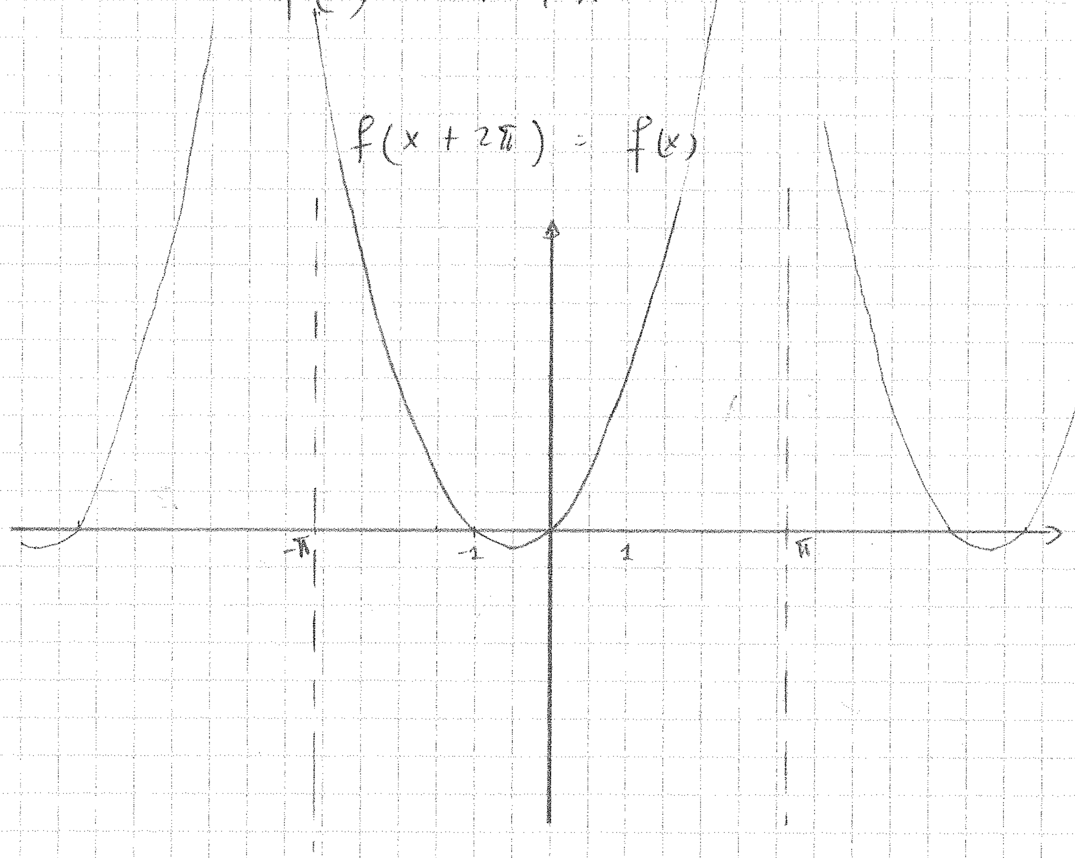
$$x(t) = (t^2 - 2t + 1)\, e^{2t} = (t-1)^2 e^{2t}$$

NIIBARIKURE

5.

$$f(x) = x^2 + x \qquad -\pi < x < \pi$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$



$$f(-\pi) = \pi^2 - \pi \simeq 6,73$$

$$f(\pi) = \pi^2 + \pi \simeq 13,01$$

Si vede dal grafico che la funzione non è né pari né dispari

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} + \cancel{\frac{\pi^2}{2}} + \frac{\pi^3}{3} - \cancel{\frac{\pi^2}{2}} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{3}\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x) \cos nx\,dx = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx}_{①} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\,dx}_{②}$$

$f = x^2 \quad f' = 2x \quad g' = \cos nx \quad g = \frac{1}{n} \sin nx$

$$① \Rightarrow \frac{1}{\pi} \left\{ \underbrace{\cancel{\frac{1}{n} x^2 \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi}}}_{0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{1}{n} \sin nx\,dx}_{} \right\}$$

$f = x \quad f' = 1$
$g' = \sin nx \quad g = -\frac{1}{n} \cos nx$

$$-\frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx = -\frac{2}{n} \left\{ -\frac{x}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx \right.$$

$$-\frac{2}{n}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi-\frac{\pi}{n}\cos(-n\pi)+\left[\frac{1}{n^2}\underbrace{\sin \cancel{n x}}_{0}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]\right\}$$

$$=-\frac{2}{n}\cdot-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi=\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi$$

$$① \Rightarrow \frac{1}{\pi}\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$② \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx \qquad \begin{matrix} f=x & f'=1 \\ g'=\cos nx & g=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}$$

dispari

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{x}{n}\underbrace{\sin \cancel{nx}}_{0}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\cancel{\frac{1}{\pi}\cos n\pi+\frac{1}{\pi}\cos(-n\pi)}\right\} \to 0$$

$$=\cancel{\frac{2}{\pi^2}\cos n\pi} \quad 0$$

$$a_n=\frac{4}{n^2}\cos n\pi+\frac{2}{\pi^2}\cos n\pi=\frac{4\pi^2+2n^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx}_{ⓐ}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx}_{ⓑ}\right\}$$

$$ⓐ \Rightarrow \quad f=x^2 \quad f'=2x \quad g'=\sin nx \quad g=-\frac{1}{n}\cos nx$$

$$-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{n}x\cos nx\,dx}$$

$$\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx \qquad f=x \quad f'=1 \quad g'=\cos nx \quad g=\frac{1}{n}\sin nx$$

$$=\frac{2}{n}\left\{\frac{x}{n}\underbrace{\cancel{\sin} nx}_{0}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right\}=\frac{2}{n}\left\{\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\cos n\pi\right)=0$$

NTIBARIKURE

ⓐ $\Rightarrow \quad -\frac{x^2}{n}\cos n\pi \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{\pi}{n}\cos(-n\pi) = 0$

ⓑ $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \qquad f = x \quad f' = 1 \quad g' = \sin nx \quad g = -\frac{1}{n}\cos nx$

$-\frac{x}{n}\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos(-n\pi)$

$+ \frac{1}{n}\underbrace{\sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} = -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi$

$\Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}\cos n\pi$

- $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2 \qquad$ • $a_n = \left(\frac{4}{n^2} + \frac{2}{\pi^2}\right)\cos n\pi \qquad$ • $b_n = -\frac{2}{n}\cos n\pi$

$\left.\begin{array}{l} \cos n\pi \quad \text{per } n \text{ pari} = \cos 0 = 1 \\ \qquad\quad\ \ \text{per } n \text{ dispari} = \cos\pi = -1 \end{array}\right\} = (-1)^n$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2} + \frac{2}{\pi^2}\right)(-1)^n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)(-1)^n \sin nx$

$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2} + \frac{2}{\pi^2}\right)(-1)^n \cos nx - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$

6. $z^3 - 3i = 0$

$$z = \sqrt[3]{3i}$$

$$3i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rho = 3 \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z = \sqrt[3]{3i} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)$$

$$z_0 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{3}\, e^{i\pi/6}$$

$$= \underline{\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)} = \frac{3^{1/3}\cdot 3^{1/2}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

$$= \frac{3^{5/6}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

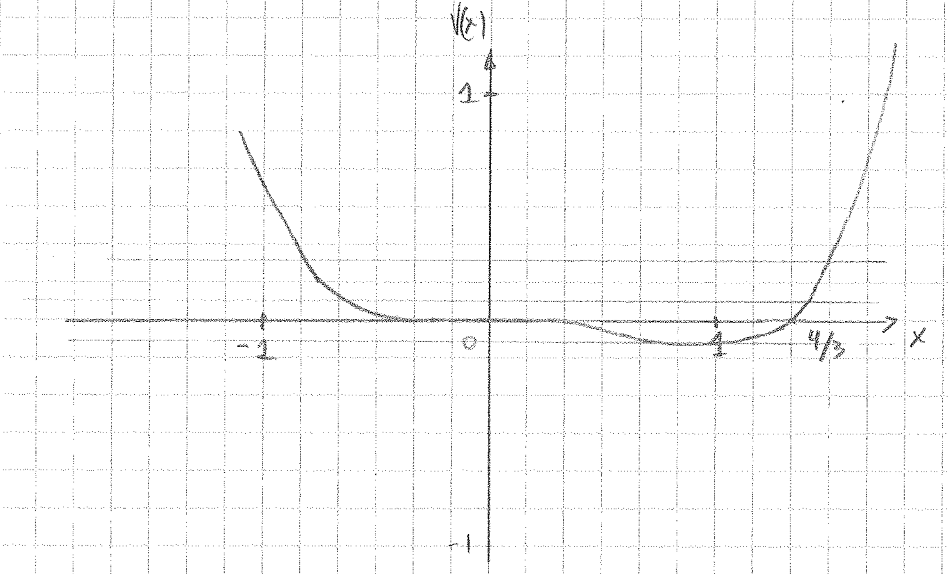
$$= \underline{\sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)}$$

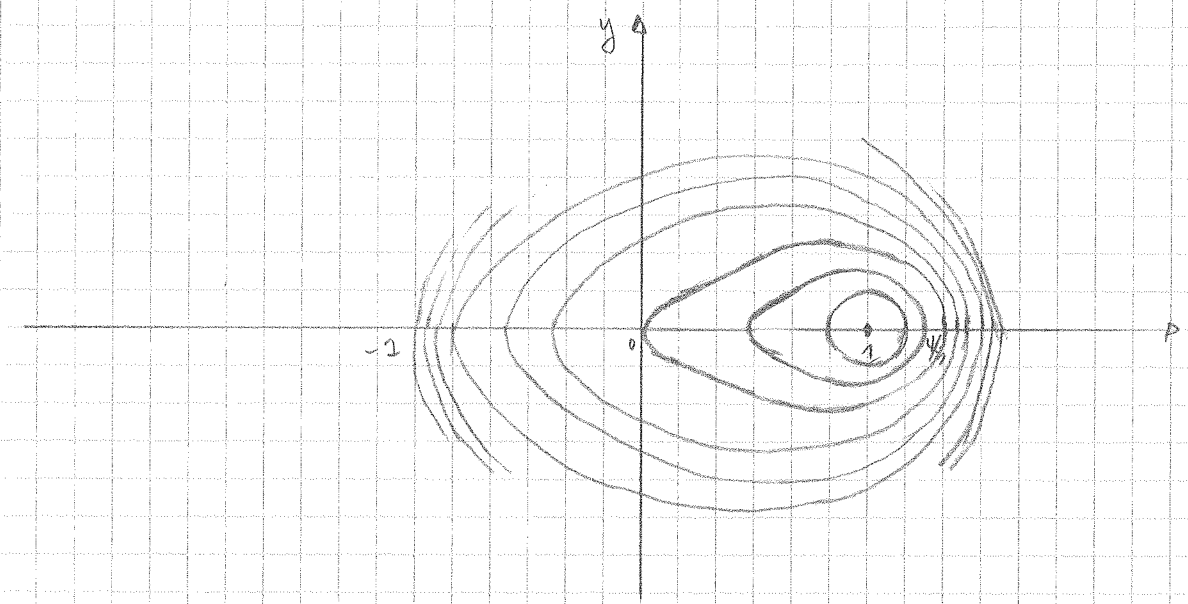
$$z_2 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$= \underline{-i\sqrt[3]{3}}$$

NTIBARIKURE

3.





I° ORDINE

LINEARE OMOGENEI

$$y' = a(x)\,y + b(x)$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)}\, b(x)\,dx\right)$$

$$y' = a(x)\,y$$

$$y(x) = c\,e^{A(x)}$$

1

II° ORDINE

EQUAZIONE OMOGENEA

Coef. Cost.

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

se $\Delta > 0$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\, x\, e^{\lambda_1 x}$$

se $\Delta = 0$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

se $\Delta < 0$

$$\alpha = -b/2$$

$$\beta = \sqrt{-\Delta}/2$$

Radici complesse: $\lambda_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/2$, $\lambda_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$

2

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)\, y_1(x) + \gamma_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ \gamma_1'(x)\, y_1'(x) + \gamma_2'(x)\, y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$y_0(x) = \gamma_1(x)\, y_1(x) + \gamma_2(x)\, y_2(x)$$

EULERO

$$x^2 y'' + p\,x\,y' + q\,y = f(x)$$

$$\lambda^2 + (p-1)\,\lambda + q = 0$$

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

3

I° ORDINE

NON LINEARE.

A VARIABILI SEPARABILI

BERNOULLI:

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,y^{\alpha}$$

$$y'/y^{\alpha} = a(x)\,y^{1-\alpha} + b(x)$$

$$z'(x) = (1-\alpha)\,\frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$$z' = (1-\alpha)\,a(x)\,z + (1-\alpha)\,b(x)$$

$$\Rightarrow z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$$

4

EQUAZIONI DELLA FORMA

$$y' = g\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

Bo!

EQUAZIONI NON NORMALI DELLA FORMA $x = g(y')$

$$y' = t \Rightarrow x = g(t)$$

$$y(t) = t\,g(t) - G(t) + c$$

5

CAUCHY ?

Esercizi di riepilogo!

EQU DIFF NON LINEARI DI ORDINE SUPERIORE

Eq della forma

$$f(x, y', y'') = 0$$

$$z = y' = \frac{dy}{dx}$$

Eq della forma

$$g(y, y', y'') = 0$$

6

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$x = \frac{\lambda}{\pi}\,t \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

7

$$y' = g(y/x)$$

$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = x\, z(x)$

$x z' = g(z) - z$

$$y' = g(ax + by)$$

$z(x) = ax + by(x)$

$z' = a + b y'$

$= a + b\, g(z)$

$x, \quad x \log x$

$\sim e^{x}, \quad e^{x} x$

SISTEMI

Non scordare gli autovalori e le caratteristiche.

EQUAZIONE NON OMOGENEA:

$v_0(x) = x^h e^{\lambda x} q_m(x)$

se $P(\lambda) \neq 0$

$v_0(x) = e^{\lambda x} p_m(x)$ se $P(\lambda) = 0$

se si ha $P(\lambda \pm i\mu) = 0$

$\Rightarrow v_0(x) = x^h e^{\lambda(x)} [q_m(x) \cos \mu x + s_m(x) \sin \mu x]$

$z = y' \quad y'' = z' z$

FOURIER

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Scarto quadratico $\int^{2\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 dx$

$= E_N = \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right]$

PARSEVAL: $\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$

EULERO $\cos nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$

$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$

Equ non normali della forma

$y = g(y')$

$y' = t$

$x(t) = \int \frac{g'(t)}{t}\, dt$

$y(t) = g(t)$

Equ. di CLAIRAUT

$y = x y' + g(y')$

$y = x t + g(t)$

$x(t) = -g'(t) \qquad y(t) = -t g'(t) + g(t)$

famiglia di rette

$y = cx + g(c)$