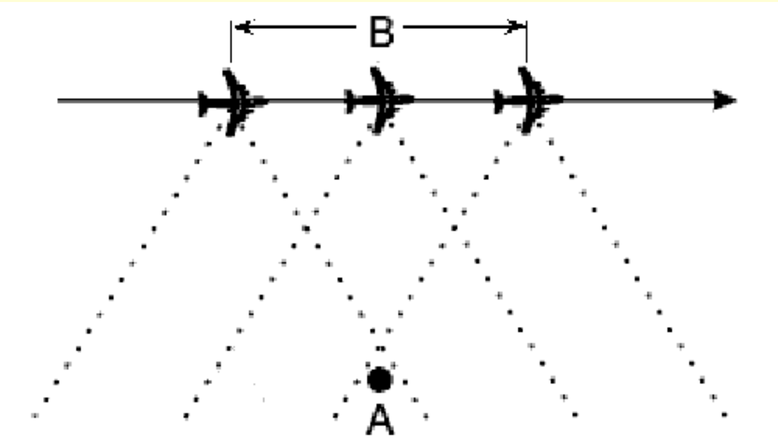
Il radar ad apertura sintetica: la teoria

Cos'è?

- È un sistema radar ad osservazione laterale che accumula dati mentre si muove lungo la sua traiettoria. Settori parzialmente sovrapposti della superficie terrestre vengono illuminati in sequenza, ed i ritorni registrati.

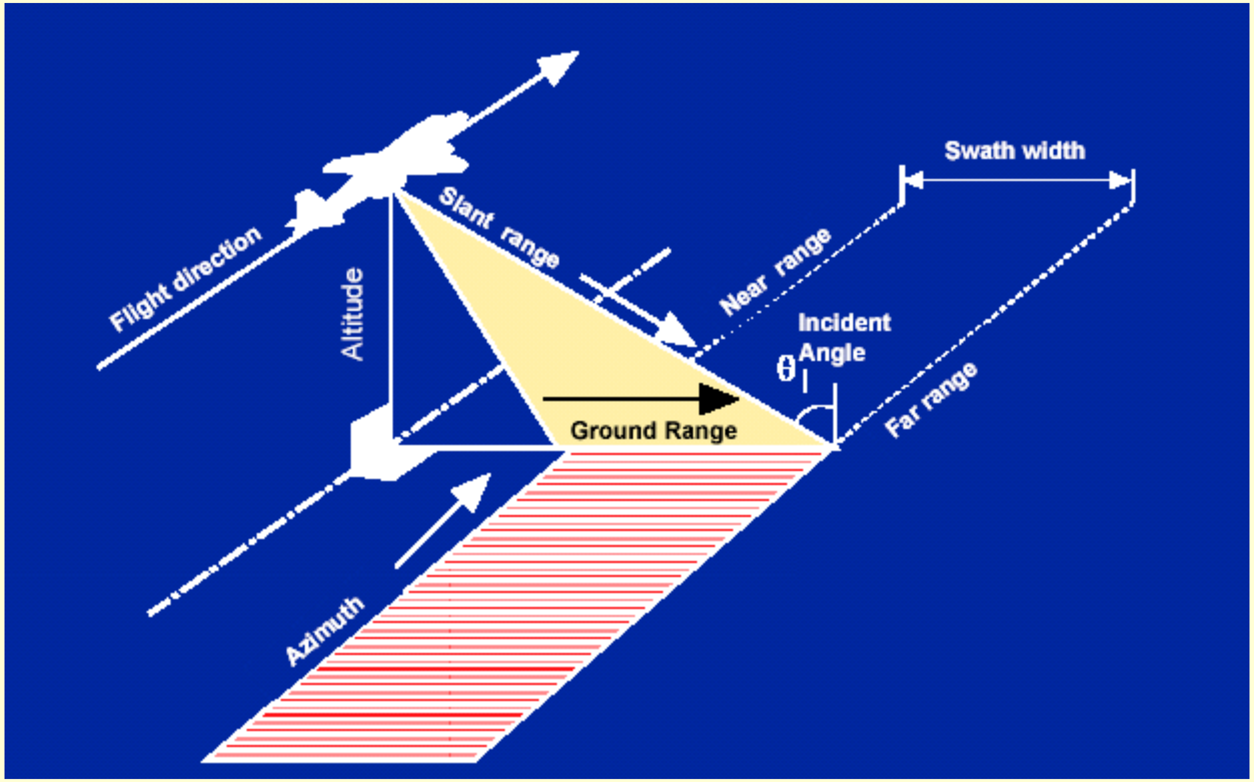


Apertura sintetica

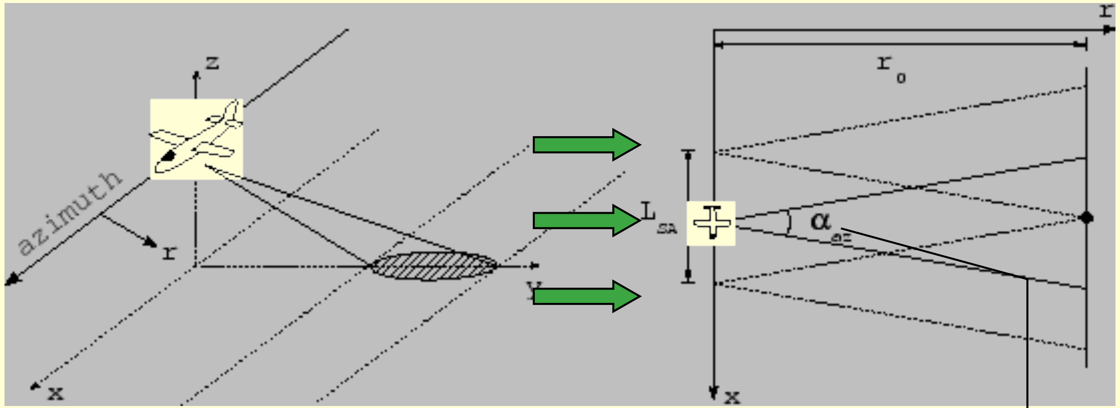
- L’acronimo SAR sta per “Synthetic Aperture Radar”, cioè Radar ad Apertura Sintetica; il nome è dovuto al fatto che si simula un’apertura più ampia di quella dell’antenna reale.

- La registrazione dei ritorni consente di svincolare la disponibilità di informazione (segnale) sull’oggetto osservato dalla sua illuminazione istantanea.

Geometria del SAR



Come una schiera …



Apertura reale:

$$\alpha_{sa} = \frac{\lambda}{2L_{sa}}$$

$$\alpha_r \cong \frac{\lambda}{L_r}$$

Risoluzione

- La massima lunghezza dell'apertura sintetica è la lunghezza del percorso nel quale lo stesso bersaglio è illuminato. Tale lunghezza è uguale alla dimensione dell'impronta a terra del fascio alla distanza r_0 alla quale si trova il bersaglio:

$$L_{sa} = \alpha_{ra} r_0 = \frac{\lambda r_0}{L} \quad .$$

- Se si sfrutta tutta l'apertura sintetica, la risoluzione spaziale azimutale alla distanza r_0 risulta essere:

$$\delta_{az} = \alpha_{sa} r_0 = \frac{\lambda}{2L_{sa}} r_0 = \frac{\lambda}{2r_0 \frac{\lambda}{L}} r_0 = \frac{L}{2}$$

Risoluzione

- La risoluzione è completamente indipendente dalla distanza ed è determinata solo dalle dimensioni dell'antenna reale!

- Questo risulta dalla lunghezza dell'apertura sintetica, crescente con la distanza del bersaglio.

- Un'antenna più corta produce un'apertura sintetica maggiore, a causa della sua maggiore apertura angolare.

Limitazioni

- Questo non significa che si possono ottenere risoluzioni arbitrariamente fini accorciando l'antenna, perché la limitazione dovuta alla bassa potenza di ritorno continua ad esistere, specie per le quote più alte …
- Occorre quindi un'antenna di dimensioni sufficienti per avere un segnale interpretabile.
- I sistemi SAR satellitari hanno quindi risoluzioni più basse rispetto ai SAR aviotrasportati. In ogni caso, la risoluzione raggiungibile rende l'impiego del radar interessante anche dallo spazio.

Visione alternativa

- Esiste anche un altro modo possibile di vedere il funzionamento del radar ad apertura sintetica.
- Il risultato è uguale, ma l'impostazione fisica e la relativa trattazione matematica sono differenti.
- Il fatto che alla fine si giunga allo stesso risultato conferma la correttezza della concezione di questo particolare tipo di radar.

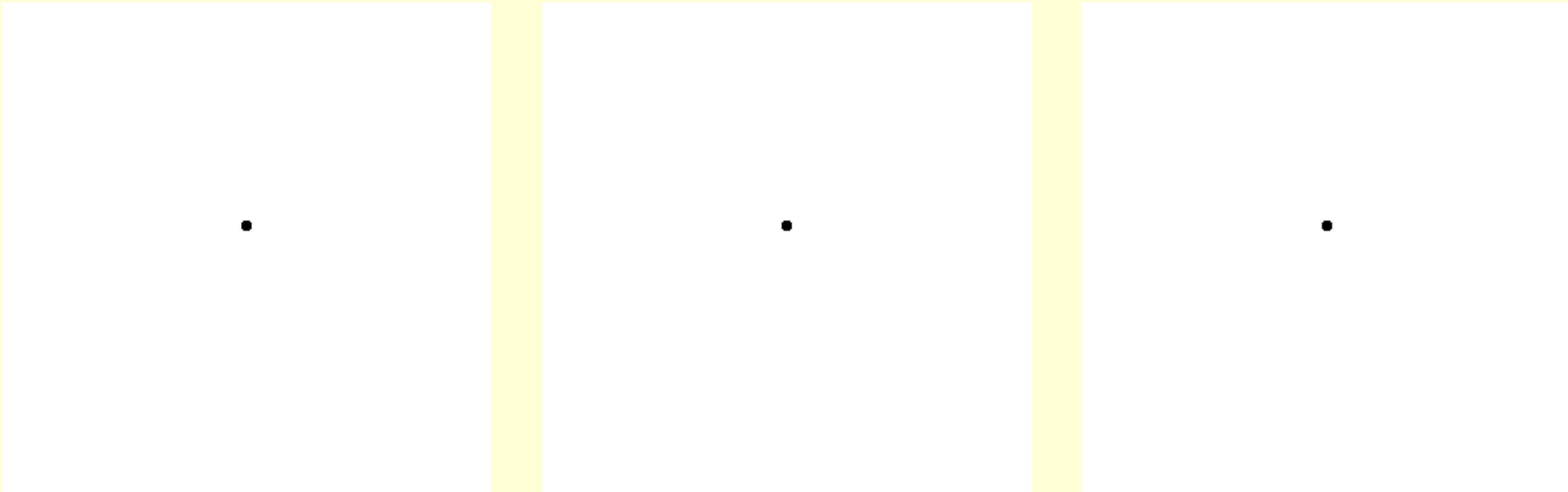
Apertura reale

- L’apertura reale di un SAR è la porzione di spazio dalla quale tutti i ritorni giungono al ricevitore nello stesso istante.

- Se si utilizzasse solo il tempo di ritorno per discriminare, tutti questi punti sarebbero indistinguibili fra di loro …

- Invece il SAR sfrutta anche l’effetto Doppler per determinare la posizione dell’ostacolo che ha causato il ritorno ad un determinato istante.

Effetto Doppler



- Christian Doppler, 1842.

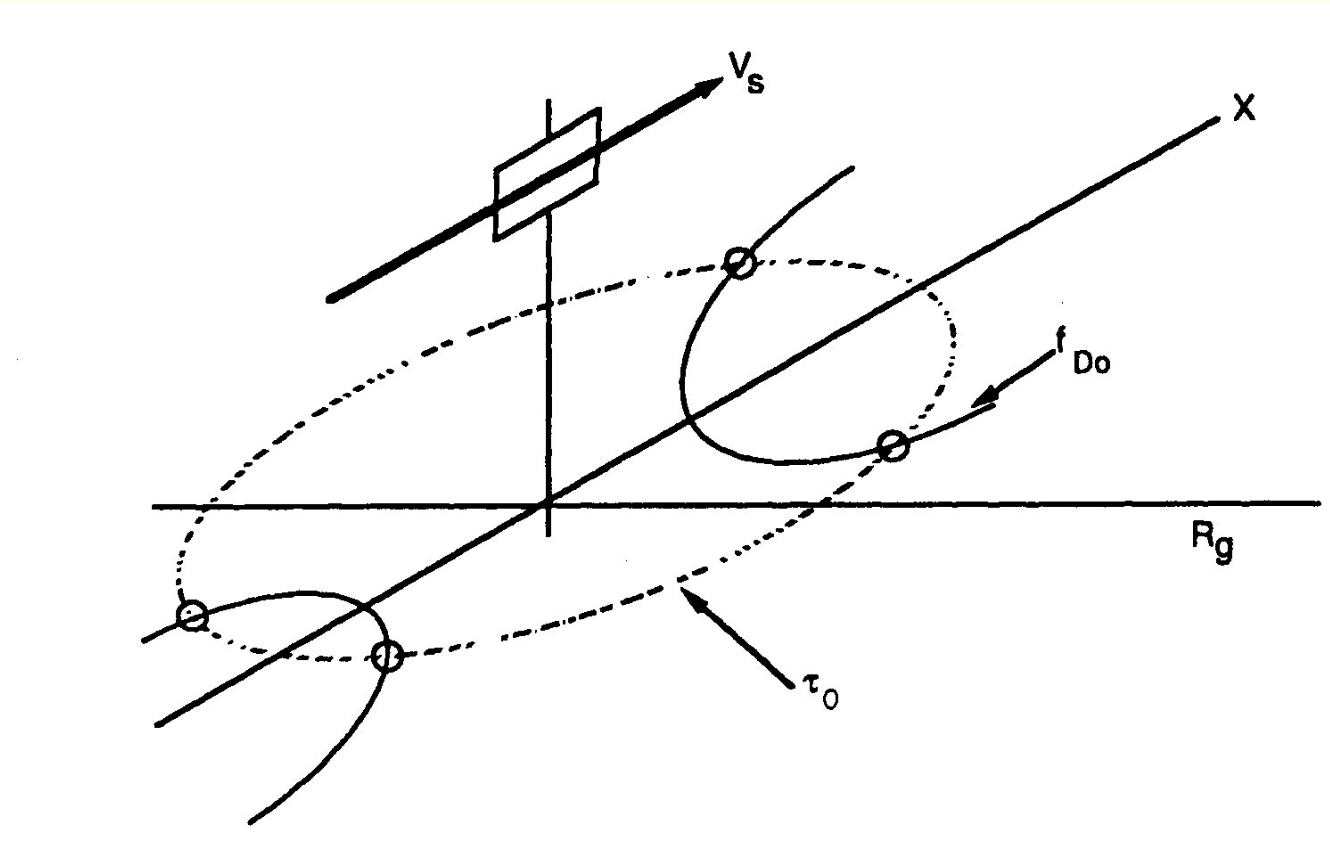
Effetto Doppler: deriva in frequenza

- La frequenza percepita (f') è collegata alla frequenza vera (f_0) e le velocità relative della sorgente (v_s), dell'osservatore (v_o), ed alla velocità di propagazione (v) nel mezzo dalla relazione:

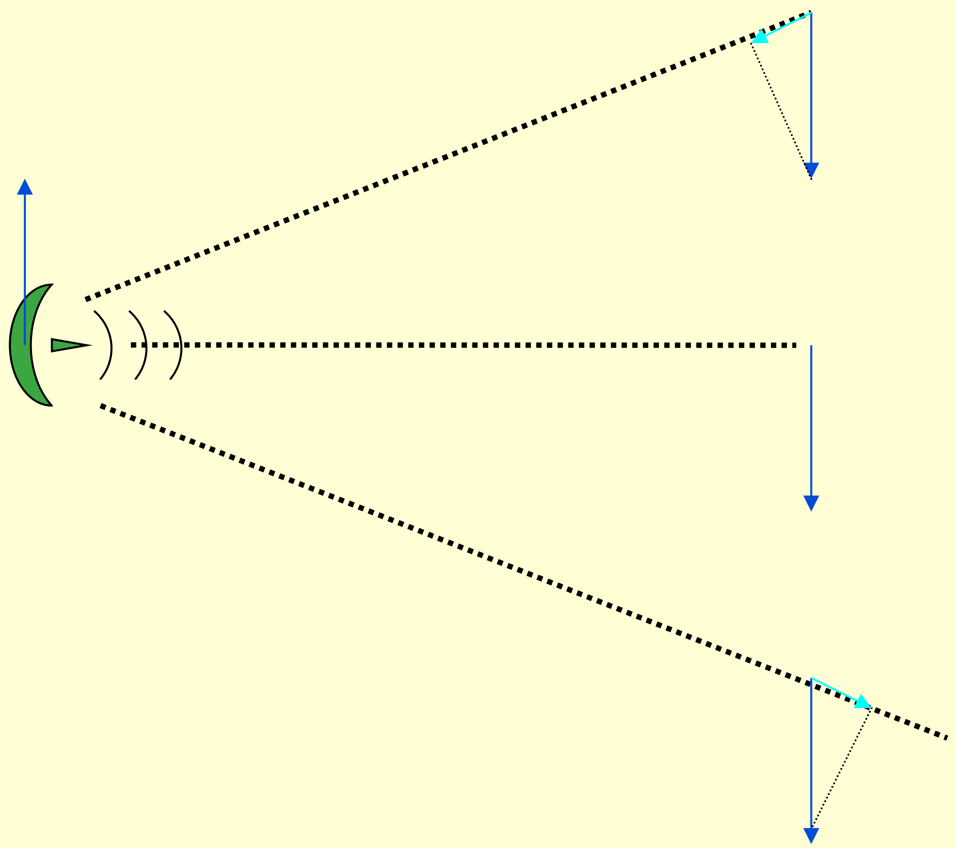
$$f' = f_0 \left(\frac{v \pm v_0}{v \pm v_s} \right)$$

- Il segno va scelto in modo che la frequenza percepita sia minore di quella vera quando sorgente ed osservatore si allontanano l'uno dall'altro.
- Dalla deviazione di frequenza si può stimare la velocità relativa.

Discriminazione



Campo di velocità



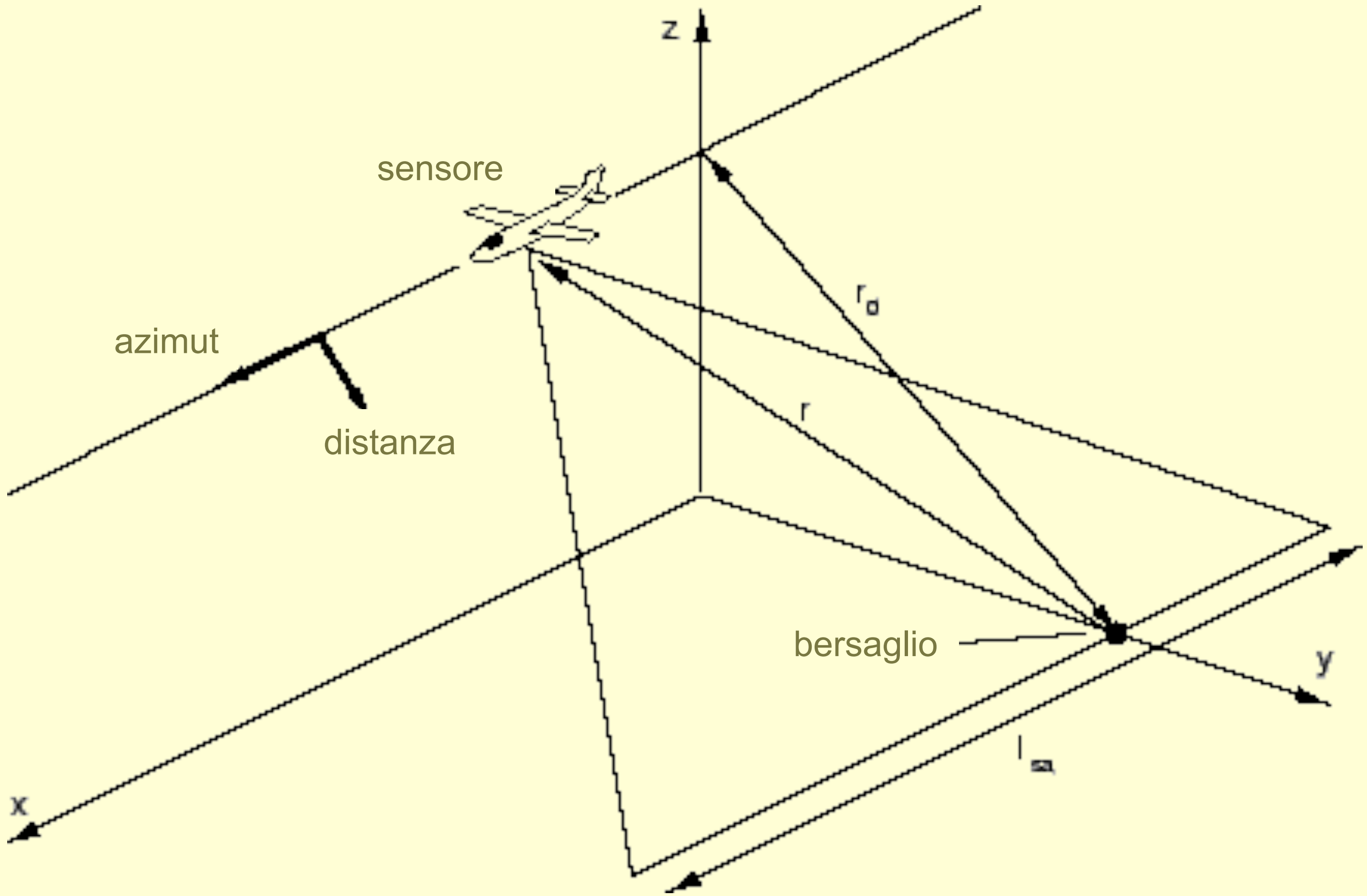
Discriminazione

- Il moto apparente del terreno rispetto all'antenna genera un campo di velocità dei punti visibili al suolo, nel quale le linee isovelocità sono iperboli.
- Il tempo trascorso dall'emissione dell'impulso delimita un luogo circolare di punti attorno all'antenna (isocrono).
- La frequenza di ritorno, ed in particolare la sua deviazione rispetto alla frequenza di emissione (segno compreso), individua la linea isovelocità.
- L'incrocio tra la linea isovelocità e cerchio isocrono consiste di 4 punti; il segno della deriva Doppler ed il lato di radiazione dell'antenna individuano il punto dove si trova il bersaglio.

Elaborazione SAR

- Una volta che il fascio radar è passato sopra un determinato punto del terreno, tutta l'informazione relativa a quel punto è stata acquisita ed immagazzinata in una "storia della fase" bidimensionale (portata ed azimut).
- Le "storie delle fasi" di tutti i punti di un'immagine sono combinati linearmente tra di loro per formare il dato "segnale SAR";
- L'elaborazione del "segnale SAR" trasforma la "firma di fase" di un oggetto in un impulso (focalizzazione).
- Per il teorema di Nyquist, il dato elaborato deve essere campionato almeno due volte per ogni larghezza dell'impulso.

Storia della fase



Storia della fase: analisi

- Il sensore si muove lungo l'asse *x* (azimut) ed emette verso il suolo gli impulsi radar, perpendicolarmente alla direzione di volo
- La distanza sensore-bersaglio può essere espressa tramite il teorema di Pitagora:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + r_0^2}$$

- r_0 = distanza perpendicolare bersaglio-linea di volo, o distanza minima sensore-bersaglio

Teorema di Taylor

Definizione: *Teorema di Taylor*

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile n volte nell'intervallo (a,b). Sia* x_0 *un punto appartenente a questo intervallo. Si ha:*

$$f(x) = Tf(x) + o((x-x_0)^n)_{per\, x \to x_0}$$

Dove Tf(x) è detto "polinomio di Taylor":

$$Tf(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Una definizione alternativa, ma del tutto equivalente è:

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile n volte nell'intervallo (a,b). Sia* x_0 *un punto appartenente a questo intervallo. Si ha:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \ \forall x \in (a,b)$$

con $R_n(x)$ *un infinitesimo di ordine superiore a* $x\text{-}x_0$ *cioè:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)} = 0$$

Wikipedia.org

$R_n(x)$ *si dice "resto nella forma di Peano".*

Definizione: Teorema di Taylor

Serie di Mac Laurin

Sviluppo di Mac Laurin:

Se la formula di Taylor è scritta intendendo che x_0 sia uguale a 0 si parla di formula di Mac Laurin. Il polinomio che si ottiene è l'approssimazione di ordine n di f(x) nell'intorno di 0

$$f(x) = f(0) + f'(x)x + \frac{f''(x)}{2}x^2 + \frac{f'''(x)}{6}x^3 + ... + \frac{f^n(x)}{n!}x^n + R_n(x).$$

- Quindi posso scrivere che:

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{r_0^2}} = 1 + 0 \cdot x + \frac{x^2}{2r_0^2} + o(x^3)$$

- Dato che il bersaglio solitamente rimane visibile per un tratto breve rispetto a r_0 (cioè $x << r_0$), si può approssimare:

$$r = r_0\sqrt{\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{r_0^2}{r_0^2}} = r_0\sqrt{1 + \frac{x^2}{r_0^2}} \approx r_0 + \frac{x^2}{2r_0} \qquad x << r_0$$

- La fase degli echi ricevuti sarà quindi:

$$\varphi(x) = 2\frac{2\pi}{\lambda}\left(r_0 + \frac{x^2}{2r_0}\right) = \underbrace{\frac{4\pi r_0}{\lambda}}_{\text{costante}} + \frac{2\pi x^2}{\lambda r_0} = k_1 + k_2 \cdot x^2$$

- Se si assume una velocità costante *v* del sensore e si trascura il termine costante che non è d'interesse per le fasi, si ottiene:

$$\varphi(t) = \underbrace{k_1 +}_{\textit{trascurato}} k_2 x^2 = k_2 (vt)^2 = \underbrace{k_2 v^2}_{\text{costante}} t^2 = kt^2$$

- Il comportamento quadratico della fase corrisponde ad un cambiamento lineare nella frequenza ricevuta, che viene detto effetto Doppler:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} 2kt = \frac{k}{\pi} t$$

- Ricordiamo che questo effetto Doppler lineare è presente solo fintanto che x rimane piccolo rispetto ad r_0

- In caso contrario occorre ricostruire esattamente la storia (iperbolica) delle fasi

- Questo succede solitamente per radar SAR:
  - Con un'apertura sintetica molto lunga (x diventa grande)
  - Per radar con osservazione obliqua in azimut (*squinted*)

Larghezza di banda

- Il massimo tempo di illuminazione di un bersaglio puntiforme è definito dall'estensione in azimut del fascio dell'antenna (pari a sua volta all'apertura sintetica):

$$t_{\max} = \frac{l_{as}}{v} = \frac{\theta_{ar} r_0}{v} = \frac{\frac{\lambda}{L} r_0}{v} = \frac{\lambda r_0}{L v}$$

- La banda del segnale in azimut è quindi pari a:

$$B_a = f\left(\frac{+t_{\max}}{2}\right) - f\left(\frac{-t_{\max}}{2}\right)$$

- Sapendo che $f(t) = \frac{k}{\pi} t \quad e \quad k = k_2 v^2 = 2\frac{\pi}{\lambda r_0} v^2$

… sostituendo $f(t)$ nell'espressione si ottiene:

$$B_a = \frac{k}{\pi}\frac{\lambda r_0}{2Lv} + \frac{k}{\pi}\frac{\lambda r_0}{2Lv} = \frac{k}{\pi}\frac{\lambda r_0}{Lv}$$

… sostituendo poi k si ottiene:

$$B_a = \frac{k}{\pi}\frac{\lambda r_0}{Lv} = \underbrace{\frac{2\pi v^2}{\lambda r_0}}_{k} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda r_0}{Lv} = \frac{2v}{L}$$

- L’espressione della banda Doppler:

$$B_a = \frac{2v}{L}$$

- Rappresenta anche la larghezza di banda della storia di fase del bersaglio
- Il SAR funziona ad impulsi, quindi la storia di fase è costituita di campioni: uno per ogni impulso SAR
- Perché la storia di fase conservi tutta l’informazione è necessario che sia soddisfatto il teorema di Nyquist

- La larghezza di banda della deriva Doppler impone quindi, attraverso il teorema di Nyquist, un limite inferiore alla frequenza di ripetizione degli impulsi (PRF):

$$PRF_{\min} = f_{Ny} = 2B_a = 2 \cdot \frac{2v}{L} = \frac{4v}{L}$$

- In termini spaziali si emetterebbe un impulso ogni:

$$\Delta s_{\min} = \frac{v}{PRF_{\min}} = \frac{\cancel{v}}{\frac{4\cancel{v}}{L}} = \frac{L}{4}$$