

## Capitolo 3

### MODELLI DI ALCUNI SEGNALE FISICI

All'ingresso dei ricevitori dei sistemi di tale comunicazione, al segnale utile, ovvero il segnale che porta l'informazione, spesso considerato di tipo deterministico, si aggiungono altri segnali, indesiderati, di origine sia interna che esterna al ricevitore, che possono essere classificati come rumore oppure come disturbi intenzionali e non (interferenze). Questi segnali sono di tipo aleatorio e vengono modellati con processi stocastici più o meno complessi a seconda dei casi di studio.

In questo capitolo sono presentati alcuni semplici modelli per la rappresentazione del rumore.

#### 3.1 PROCESSO “RUMORE BIANCO”(stazionario)

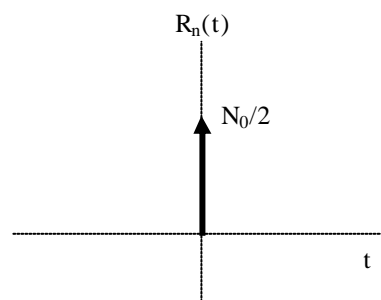
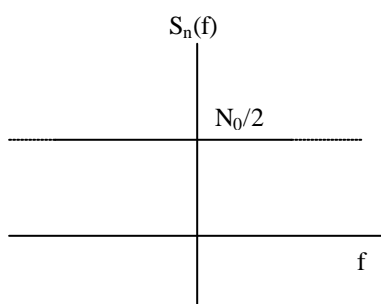
Con il termine "rumore bianco", si intende un processo aleatorio  $n(t)$  (di solito reale), a valor medio nullo e spettro di potenza media costante:

$$E\{n(t)\} = 0$$

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad (\text{dove } N_0 \text{ è l'ampiezza dello spettro } \underline{\text{unilaterale}})$$

La funzione di autocorrelazione vale quindi:

$$R_n(t) = \frac{N_0}{2} d(t)$$



Si tratta evidentemente di un processo fisicamente non realizzabile, in quanto a potenza media,  $R_n(0)$ , infinita. Ma esso risulta di grande utilità formale in quanto, come vedremo, mediante esso è possibile caratterizzare il più ricorrente (sempre) tipo di segnale indesiderato presente nei sistemi di comunicazione elettrica, a spettro praticamente bianco entro bande ampie rispetto a quelle occupate dai segnali utili.

Il rumore bianco, a motivo della forma impulsiva della sua autocorrelazione, presenta la caratteristica particolare che qualunque coppia di variabili aleatorie su di esso individuate sono

ortogonali. In aggiunta, essendo un processo a valor medio nullo, qualunque coppia di variabili aleatorie sono anche incorrelate.

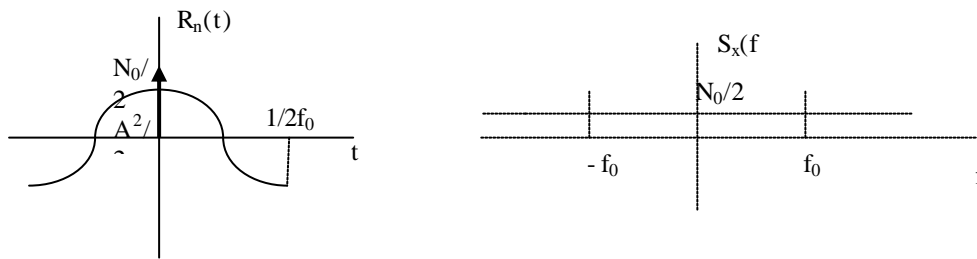
Se infine, tale processo è di tipo gaussiano, allora, come abbiamo mostrato nel capitolo precedente, qualunque coppia di variabili aleatorie sono anche statisticamente indipendenti. Quindi anche ogni n-pla di variabili aleatorie su di esso individuate sono tra loro statisticamente indipendenti.

### Esempio 3.1

Consideriamo un processo risultante dalla somma di una portante a radiofrequenza con fase iniziale aleatoria e di rumore bianco (portante immersa in rumore AWGN<sup>1</sup>).

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \mathbf{j}) + n(t)$$

Si verifica facilmente come il processo risultante sia a valor medio nullo e autocorrelazione pari alla somma delle singole autocorrelazioni (per la indipendenza dei due processi).



## 3.2 RUMORE BIANCO FILTRATO PASSA-BASSO

Ha interesse per le applicazioni, valutare come si modifica il processo "rumore bianco gaussiano", nel passaggio attraverso circuiti lineari tempo invarianti. Supponiamo dapprima di considerare un filtro ideale passa basso, di banda B. Sia  $n(t)$  il processo rumore gaussiano bianco in ingresso al filtro. Per la linearità del filtro, in uscita avremo un processo  $n_u(t)$  che è anche stazionario e gaussiano, perché stazionario e gaussiano è il processo di ingresso (i processi di ingresso e di uscita sono congiuntamente gaussiani).

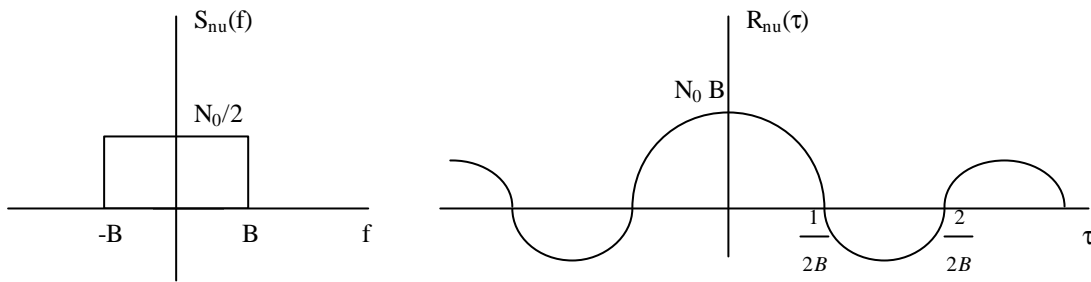
La relativa densità spettrale di potenza media vale:

$$S_{n_u}(f) = |H(f)|^2 S_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Antitrasformando, si ottiene la relativa autocorrelazione:

$$R_{n_u}(t) \triangleq \mathcal{F}^{-1}[S_{n_u}(f)] = N_0 B \text{sinc}(2Bt)$$

<sup>1</sup> AWGN è l'acronimo di "Additive White Gaussian Noise"



Si verifica che, essendo il processo  $n_i(t)$  reale, anche  $n_u(t)$  è reale, e quindi il suo spettro di potenza e la sua autocorrelazione sono funzioni reali e pari.

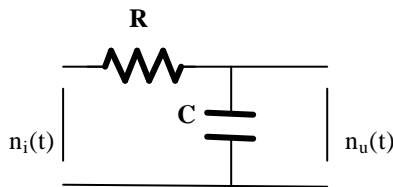
Si osservi anche come il processo di uscita sia a valor medio nullo, e valore quadratico medio o potenza media finita, pari a  $R_{n_u}(0) = N_0 B$ , come deve essere.

Se il rumore di ingresso, oltre che bianco è anche gaussiano, ogni variabile aleatoria definita sul processo di uscita è gaussiana, a valor medio nullo e varianza  $\sigma^2 = N_0 B$ .

In generale però, pur essendo il processo  $n_i(t)$  gaussiano, una generica coppia di variabili aleatorie tuttavia non identifica variabili aleatorie incorrelate e quindi indipendenti, come risulta evidente dall'esame della forma dell'autocorrelazione.

Da tale andamento risulta però che le variabili aleatorie  $n_u(k/2B)$ ,  $\pm k=1, 2, \dots$  sono ortogonali e anche incorrelate, quindi, essendo il processo gaussiano, sono statisticamente indipendenti<sup>2</sup>.

Consideriamo ora un filtro passa-basso reale, del tipo R-C serie già analizzato in altri corsi:



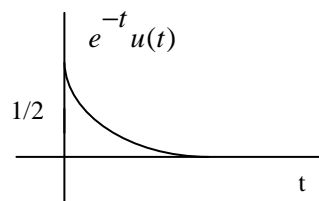
Esso presenta una funzione di trasferimento:  $H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$

La densità spettrale di potenza media del processo di uscita  $n_u(t)$  vale ora:

$$S_{n_u}(f) = |H(f)|^2 S_{n_i}(f) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

Per ricavare l'autocorrelazione, è necessario antitrasformare l'espressione sopra scritta. Si ricordi a tale scopo la seguente trasformata dell'impulso "esponenziale":

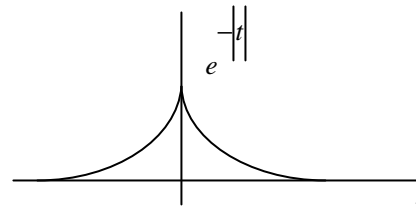
$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{1 + j2\pi f}$$



<sup>2</sup> Si rimanda all'appendice 2 per la trattazione del teorema del campionamento applicato ad un segnale aleatorio

Consideriamo ora la seguente funzione:

$$e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^t u(-t)$$



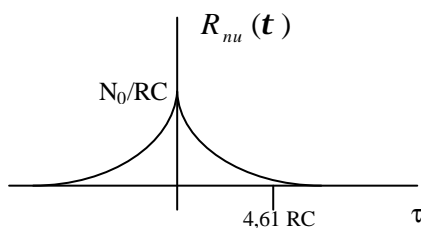
Si ha allora:

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{1}{1 + j2pf} + \frac{1}{1 - j2pf} = \frac{2}{1 + (2pf)^2}$$

Si ha infine:

$$R_{n_u}(t) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + (2pf)^2} \right\} = \frac{N_0}{4RC} e^{-\frac{|t|}{RC}}$$

L'autocorrelazione del rumore in uscita da un filtro passa-basso RC serie ha quindi l'andamento:



Si osserva come essa si riduce all' 1% del valore massimo, per  $\tau = 4.61 RC$ . Definiamo tale valore come tempo di decorrelazione: esso rappresenta il minimo periodo di campionamento del segnale di uscita, affinché le variabili aleatorie così definite siano incorrelate, e, essendo il processo gaussiano, statisticamente indipendenti.

Il concetto di tempo di decorrelazione trova ovviamente applicazione per qualunque tipo di filtraggio e quindi per qualunque tipo di processo aleatorio in uscita. In generale, più piccolo è tale tempo, più rapido è il decadimento della funzione di autocorrelazione, rispetto al valore massimo  $R_n(0)$ .

Si osserva inoltre, come, maggiore è la banda passante del filtro, minore è il tempo di decorrelazione del processo alla sua uscita. Al limite, per B tendente all'infinito, il tempo di decorrelazione tende a 0, come deve essere (rumore bianco non filtrato).

Se si tiene conto che al crescere di B, cresce parallelamente anche la rapidità di variazione temporale delle singole funzioni campione del processo, si può concludere come piccoli valori di tempo di decorrelazione (o, in modo equivalente, rapidi decadimenti della funzione di autocorrelazione) corrispondono a rapide fluttuazioni temporali delle funzioni campione che descrivono il processo aleatorio. Il caso estremo è rappresentato ovviamente dal rumore non filtrato.

### 3.3 BANDA EQUIVALENTE DI RUMORE DI UN FILTRO

Dagli esempi precedenti abbiamo visto come la potenza di rumore in uscita da un filtro sia proporzionale alla banda passante (a -3dB) del filtro:  $B$  nel caso di filtro ideale,  $B_r = \frac{1}{2pRC}$  nel caso di filtro RC.

Si ha infatti:  $P_n = B N_0$   $P_n = B_r N_0 \frac{p}{2}$

Può essere utile cercare di generalizzare e semplificare questo risultato, nel caso di un filtro passa-basso o anche passa-banda di tipo qualunque.

Si definisce a tale scopo il parametro "banda equivalente di rumore" di un filtro. Esso rappresenta un parametro complessivo del filtro, che ci consente di valutare la potenza di rumore in uscita da esso, noto il guadagno del filtro a centro banda e supposto bianco il rumore al suo ingresso (in pratica almeno in una banda molto maggiore di quella del filtro).

Si ricordi come, dato un sistema LTI con funzione di trasferimento  $H(f)$ , si chiama guadagno di potenza del sistema:

$G(f) \triangleq |H(f)|^2$  (funzione reale e pari se  $h(t)$  è reale).

Nel caso di sistemi filtranti, si indica con  $G_0$  il valore del guadagno a centro banda, intendendo per "centro banda" il valore della frequenza attorno alla quale la risposta in ampiezza del filtro è centrata. Quindi è  $G_0 = G(0)$  per un filtro passa-basso, e  $G_0 = G(f_0)$  per un filtro passa-banda con frequenza di centro banda  $f_0$ .

Se l'ingresso di un tale filtro è un processo rumore bianco di densità spettrale  $N_0/2$ , in uscita avremo una potenza media di rumore:

$$R_{nu}(0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df = N_0 \int_0^{\infty} G(f) df$$

La stessa potenza di uscita si avrebbe da un filtro ideale con guadagno costante  $G_0$  e banda  $B_n$  definita dalla relazione:

$$B_n \triangleq \frac{\int_0^{\infty} G(f) df}{G_0}$$

Allora, se del filtro reale sono noti solo  $G_0$  e  $B_n$ , la potenza di rumore in uscita è data dalla semplice espressione:

$$P_{nu} = N_0 G_0 B_n$$

Ad esempio, nel caso di semplice filtro passa-basso RC serie, si ha:  $B_n = B_r \frac{p}{2} = \frac{1}{4RC}$

### 3.4 CARATTERISTICHE STATISTICHE DEL RUMORE GAUSSIANO A BANDA STRETTA<sup>3</sup>

Allo scopo di ridurre la potenza del rumore in uscita dai ricevitori, è opportuno introdurre al loro ingresso circuiti filtranti passa-banda, il cui effetto è appunto di lasciare pressoché invariato il segnale utile, e ridurre la potenza di rumore ad esso accompagnata.

Tali circuiti filtranti sono in generale del tipo a banda stretta, ovvero con banda passante molto minore della frequenza della portante del segnale utile (spesso quella di centro banda). E' quindi opportuno caratterizzare statisticamente il rumore in uscita da tali circuiti, che è quello che effettivamente va ad interferire con il segnale utile stesso, in un modo che è in relazione sia al tipo di modulazione impiegato, che al particolare ricevitore utilizzato. Tale tipo di rumore si dice quindi a banda stretta, e può essere caratterizzato in termini di pre-involuppo e involuppo complesso delle relative funzioni campione.

Indicato allora con  $n(t)$  il processo aleatorio reale rappresentativo del rumore in oggetto, possiamo scrivere il suo pre-involuppo come:

$$n^+(t) \triangleq n(t) + j \hat{n}(t)$$

e quindi l'involuppo complesso:

$$\tilde{n}(t) = n_I(t) + j n_Q(t) \triangleq n^+(t) e^{-j2\pi f_0 t} = [n(t) + j \hat{n}(t)] e^{-j2\pi f_0 t}$$

Uguagliando parti reali e coefficienti dell'immaginario:

$$\begin{aligned} n_I(t) &= n(t) \cos(2\pi f_0 t) + \hat{n}(t) \sin(2\pi f_0 t) && \text{- componente "in fase"} \\ n_Q(t) &= \hat{n}(t) \cos(2\pi f_0 t) - n(t) \sin(2\pi f_0 t) && \text{- componente "quadratura"} \end{aligned}$$

da cui anche la forma canonica del segnale passa-banda rumore (moltiplicando per cos la prima, per sen la seconda, e sottraendole):

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Elenchiamo ora una serie di proprietà caratteristiche di cui gode il rumore gaussiano a banda stretta:

- 1) Se  $n(t)$  è un processo a valor medio nullo, anche le sue componenti in fase e quadratura  $n_I(t)$ ,  $n_Q(t)$  sono processi a valor medio nullo.

Questa proprietà deriva dal fatto che  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono somme pesate di processi a valor medio nullo. Infatti anche  $\hat{n}(t)$  è a valor medio nullo, ottenendosi come uscita da un filtro lineare (filtro di Hilbert) al cui ingresso è il processo  $n(t)$  a valor medio nullo (rumore bianco filtrato linearmente).

- 2) Se  $n(t)$  è un processo gaussiano, allora  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono processi congiuntamente gaussiani.

Osserviamo anzitutto come  $n(t)$ , rumore a banda stretta, sia gaussiano, se lo è il processo in ingresso al ricevitore. Questo perché si può vedere il processo in uscita dal filtro a banda stretta, caratterizzato da variabili aleatorie che risultano dalla combinazione lineare (l'integrale di convoluzione) delle variabili aleatorie definite sul processo gaussiano di ingresso.

Per una proprietà vista delle variabili aleatorie congiuntamente gaussiane, si ha quindi che qualunque vettore aleatorio in uscita dal filtro è gaussiano. Quindi anche il processo  $n(t)$  è gaussiano.

Si osservi ora come i due processi  $n(t)$  e  $\hat{n}(t)$  sono congiuntamente gaussiani, in quanto le variabili aleatorie definite su  $\hat{n}(t)$  sono combinazioni lineari di quelle definite su  $n(t)$ , dal quale

<sup>3</sup> In Appendice II sono riassunte le proprietà qui illustrate più diffusamente.

deriva per filtraggio. Infine, anche  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono congiuntamente gaussiani, in quanto entrambi combinazioni pesate di processi  $n(t)$  e  $\hat{n}(t)$  congiuntamente gaussiani.

- 3) Se  $n(t)$  è stazionario in senso lato, allora  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono congiuntamente stazionari in senso lato.

Si osservi dapprima come  $\hat{n}(t)$  è stazionario, se lo è  $n(t)$ , in quanto ottenuto da questo per filtraggio lineare tempo-invariante. Si tratta allora di verificare che le autocorrelazioni di  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  dipendono solo da  $\tau$ , e che solo da  $\tau$  dipende la crosscorrelazione tra  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$ .

$$\begin{aligned} \text{Si ha: } R_{n_I}(\mathbf{t}) &\triangleq E\{n_I(t+\mathbf{t})n_I(t)\} = \\ &= E\{[n(t+\mathbf{t})\cos(2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})) + \hat{n}(t+\mathbf{t})\sin(2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t}))][n(t)\cos(2\mathbf{p}f_0t) + \hat{n}(t)\sin(2\mathbf{p}f_0t)]\} = \\ &= E\{n(t+\mathbf{t})n(t)\cos[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\cos(2\mathbf{p}f_0t) + E\{n(t+\mathbf{t})\hat{n}(t)\cos[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\sin(2\mathbf{p}f_0t) + \\ &+ E\{\hat{n}(t+\mathbf{t})n(t)\sin[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\cos(2\mathbf{p}f_0t) + E\{\hat{n}(t+\mathbf{t})\hat{n}(t)\sin[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\sin(2\mathbf{p}f_0t)\} = \\ &= R_n(\mathbf{t})\cos[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\cos(2\mathbf{p}f_0t) + R_{\hat{n}}(\mathbf{t})\cos[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\sin(2\mathbf{p}f_0t) + \\ &+ R_{\hat{n}n}(\mathbf{t})\sin[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\cos(2\mathbf{p}f_0t) + R_n(\mathbf{t})\sin[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\sin(2\mathbf{p}f_0t) \end{aligned}$$

Si osservi ora che è:  $R_n(\mathbf{t}) = R_{\hat{n}}(\mathbf{t})$ , in quanto entrambe le autocorrelazioni hanno la stessa densità spettrale di potenza. Infatti:

$$S_{\hat{n}}(f) = S_n(f) |H(f)|^2 = S_n(f) |1 - j \operatorname{sgn}(f)|^2 = S_n(f)$$

Inoltre si ha:

$$R_{n\hat{n}}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\mathbf{t}-\mathbf{a})h(\mathbf{a})d\mathbf{a} = R_n(\mathbf{t}) \otimes h(\mathbf{t}) = R_n(\mathbf{t}) \otimes \frac{1}{\mathbf{p}t} = \hat{R}_n(\mathbf{t})$$

Infine, essendo reali i due processi, si ha:

$$R_{n\hat{n}}(\mathbf{t}) = R_{\hat{n}n}(-\mathbf{t}) = R_n(-\mathbf{t}) \otimes [-h(\mathbf{t})] = -\hat{R}_n(\mathbf{t})$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} R_{n_I}(t, \mathbf{t}) &\triangleq R_n(\mathbf{t})\{\cos[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\cos(2\mathbf{p}f_0t) + \sin[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\sin(2\mathbf{p}f_0t)\} + \\ &+ \hat{R}_n(\mathbf{t})\{\sin[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\cos(2\mathbf{p}f_0t) - \cos[2\mathbf{p}f_0(t+\mathbf{t})]\sin(2\mathbf{p}f_0t)\} = \\ &= R_n(\mathbf{t})\sin(2\mathbf{p}f_0t) + \hat{R}_n(\mathbf{t})\cos(2\mathbf{p}f_0t) = R_{n_I}(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

In modo analogo si verifica che:

$$R_{n_Q}(t, \mathbf{t}) = R_{n_Q}(\mathbf{t}) \quad \text{e} \quad R_{n_I, n_Q}(\mathbf{t}) = R_n(\mathbf{t})\sin(2\mathbf{p}f_0t) - \hat{R}_n(\mathbf{t})\cos(2\mathbf{p}f_0t) = -R_{n_Q, n_I}(\mathbf{t})$$

dove  $\hat{R}_n(\mathbf{t})$  è la trasformata di Hilbert di  $R_n(\mathbf{t})$ .

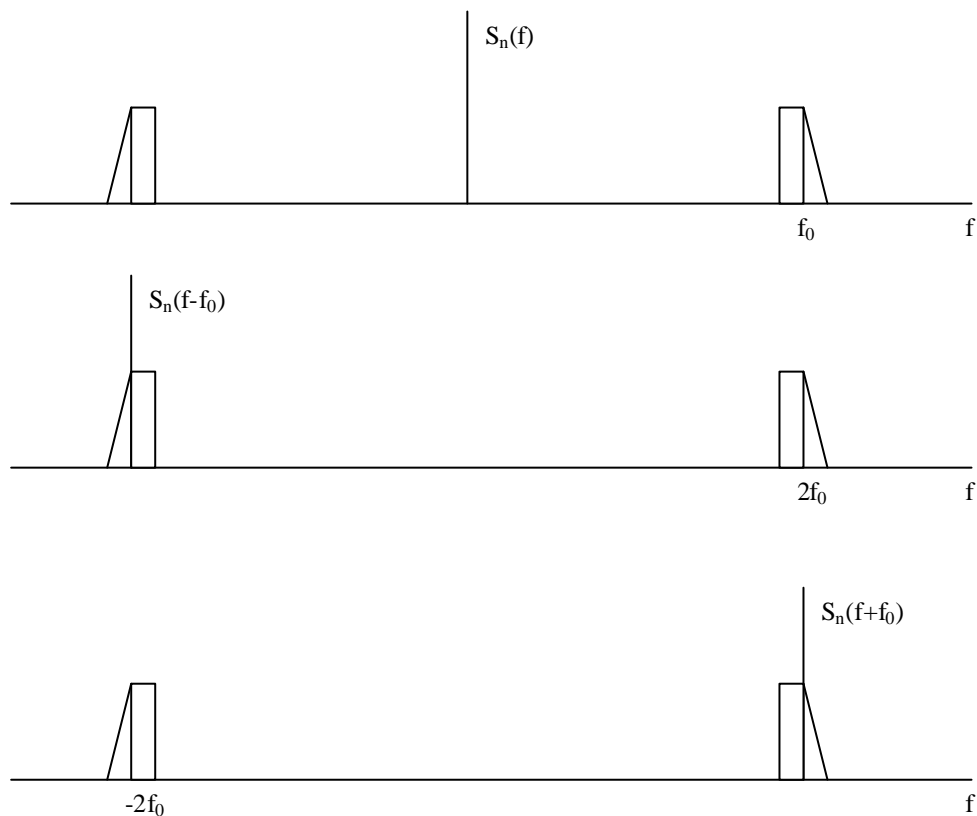
- 4) I processi  $n_I(t)$ ,  $n_Q(t)$  hanno la stessa densità spettrale di potenza media, così relazionata a quella di  $n(t)$ :

$$S_{n_I}(f) = S_{n_Q}(f) = \begin{cases} S_n(f-f_0) + S_n(f+f_0) & \forall f \in (-B, B) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

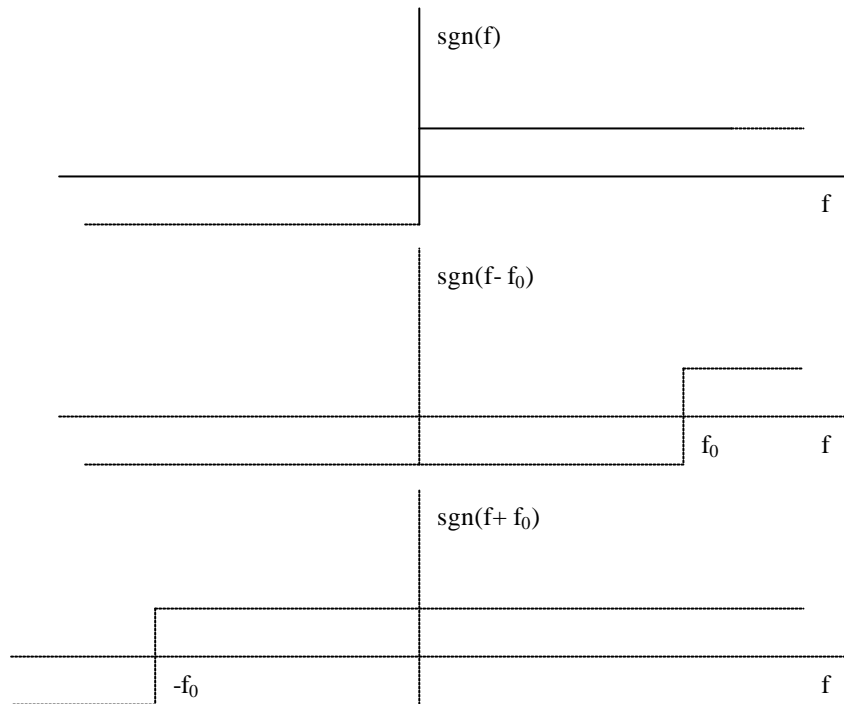
Infatti, si osservi che la trasformata di Fourier delle autocorrelazioni  $R_{n_I}(\mathbf{t})$ ,  $R_{n_Q}(\mathbf{t})$  vale:

$$\begin{aligned}
 S_{n_i}(f) &= S_{n_i}(f) = S_n(f) \otimes \frac{1}{2}[\mathbf{d}(f - f_0) + \mathbf{d}(f + f_0)] + \Im \left\{ R_n(t) \otimes \frac{1}{pt} \right\} \otimes \frac{\mathbf{d}(f - f_0) - \mathbf{d}(f + f_0)}{2j} = \\
 &= \frac{1}{2}[S_n(f - f_0) + S_n(f + f_0)] - \frac{1}{2}[S_n(f - f_0)\text{sgn}(f - f_0) - S_n(f + f_0)\text{sgn}(f + f_0)] = \\
 &= \frac{1}{2}S_n(f - f_0)[1 - \text{sgn}(f - f_0)] + \frac{1}{2}S_n(f + f_0)[1 + \text{sgn}(f + f_0)]
 \end{aligned}$$

Dai grafici della figura che segue si può allora agevolmente verificare la proprietà enunciata.







Infatti, per  $f \in (-B, B)$ , si ha:  $\text{sgn}(f - f_0) = -1$ ;  $\text{sgn}(f + f_0) = 1$   
e quindi:  $S_{n_I}(f) = S_{n_Q}(f) = S_n(f - f_0) + S_n(f + f_0)$

Per  $f \in (2f_0 - B, 2f_0 + B)$ , si ha:  $\text{sgn}(f - f_0) = 1$ ;  $S_n(f + f_0) = 0$   
e quindi:  $S_{n_I}(f) = S_{n_Q}(f) = 0$

Per  $f \in (-2f_0 - B, -2f_0 + B)$ , si ha:  $\text{sgn}(f + f_0) = -1$ ;  $S_n(f - f_0) = 0$   
e quindi:  $S_{n_I}(f) = S_{n_Q}(f) = 0$

- 5) Se  $n(t)$  è un processo a valor medio nullo, allora  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  hanno la stessa varianza di  $n(t)$ .  
Questa proprietà deriva dalla precedente. Infatti, dalla proprietà (4), si ha che  $S_n(f)$ ,  $S_{n_I}(f)$ ,  $S_{n_Q}(f)$  sono funzioni che hanno la stessa area. Quindi  $n(t)$ ,  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  hanno lo stesso valore quadratico medio, e, avendo valor medio nullo, hanno anche la stessa varianza.
- 6) I crosspettri delle componenti fase e quadratura di  $n(t)$  sono puramente immaginari e valgono

$$S_{n_I n_Q}(f) = -S_{n_Q n_I}(f) = \begin{cases} j[S_n(f - f_0) - S_n(f + f_0)] & \forall f \in (-B, B) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per mostrare questa proprietà si segue una procedura analoga a quella vista per gli spettri (proprietà 4). Si osservi che si ha, trasformando secondo Fourier l'ultima formula della proprietà 3):

$$S_{n_I n_Q}(f) = -S_{n_Q n_I}(f) = \frac{j}{2} S_n(f + f_0) [1 + \operatorname{sgn}(f + f_0)] - \frac{j}{2} S_n(f - f_0) [1 - \operatorname{sgn}(f - f_0)]$$

da cui la proprietà enunciata.

- 7) Se  $n(t)$  è un processo gaussiano a valor medio nullo e la sua densità spettrale di potenza media è funzione simmetrica rispetto alla frequenza di centro banda  $f_0$ , allora le componenti in fase e quadratura  $n_I(t)$ ,  $n_Q(t)$  sono statisticamente indipendenti

Infatti, se  $S_n(f)$  è simmetrico rispetto a  $f_0$ , allora

$$S_n(f - f_0) = S_n(f + f_0) \quad \forall f \in (-B, B)$$

Conseguentemente, dalla proprietà (6), si ha che il crossspettro dei due processi  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  è identicamente nullo.

Quindi deve anche essere identicamente nulla la crosscorrelazione dei due processi. Ciò significa che sono ortogonali qualunque coppia di variabili aleatorie definite una sul processo  $n_I(t)$ , l'altra su  $n_Q(t)$ . Ma poiché  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono a valor medio nullo (proprietà 1), allora anche la crosscovarianza dei due processi è identicamente nulla. Ciò significa che i due processi sono incorrelati.

Ma essendo  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  congiuntamente gaussiani, la condizione di incorrelazione comporta quella di indipendenza statistica dei due processi.

Due variabili aleatorie qualunque definite una su  $n_I(t)$ , l'altra su  $n_Q(t)$ , sono allora gaussiane, a valor medio nullo, stessa varianza e statisticamente indipendenti.

E' da sottolineare che, se il filtro passa-banda non ha risposta simmetrica in ampiezza rispetto alla frequenza di centro banda  $f_0$ , allora si può ancora dire che due coppie di variabili aleatorie, una su  $n_I(t)$ , l'altra su  $n_Q(t)$ , sono statisticamente indipendenti, se e solo se queste sono relative ad uno stesso valore di  $t$ . Infatti, qualunque sia la risposta del filtro, è sempre

$$R_{n_I n_Q}(0) = 0 \quad \text{essendo} \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_{n_I n_Q}(f) df = 0$$

Ricaviamo ora la statistica dell'involuppo e della fase di  $n(t)$ . Si ha:

$$a(t) = \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)} \geq 0$$

$$\mathbf{y}(t) = tg^{-1} \left[ \frac{n_Q(t)}{n_I(t)} \right]$$

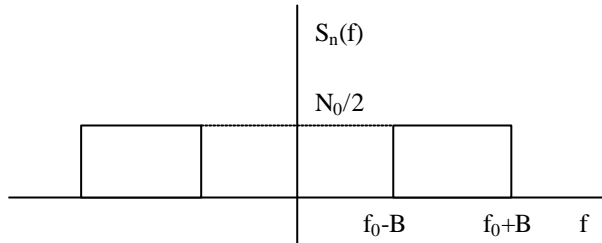
Allora, per ogni  $t$   $a(t)$  e  $\psi(t)$ , sono variabili aleatorie con d.d.p. congiunta del tipo:

$$f_{a,\mathbf{y}}(a, \mathbf{y}) = \frac{a}{2\pi \mathbf{s}_n^2} e^{-\frac{a^2}{2\mathbf{s}_n^2}} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{a}{\mathbf{s}_n^2} e^{-\frac{a^2}{2\mathbf{s}_n^2}} \right]$$

Quindi, l'involuppo  $a(t)$  ha una statistica di tipo Rayleigh, ed è indipendente dalla fase  $\psi(t)$  che a sua volta ha una statistica uniforme in  $[0, 2\pi]$  o  $[-\pi, \pi]$ .

### Autocorrelazione del rumore bianco filtrato da un filtro passa-banda ideale

L'espressione della densità spettrale di un processo rumore bianco filtrato da un filtro passa-banda ideale a guadagno unitario e larghezza di banda  $2B$  è rappresentato dalla seguente figura:



Analiticamente si ha:

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f - f_0}{2B}\right) + \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f + f_0}{2B}\right)$$

L'autocorrelazione di  $n(t)$  è l'antitrasformata di  $S_n(f)$  e vale:

$$R_n(t) = \mathcal{F}^{-1}[S_n(f)] = 2N_0B \text{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

Infatti, si ha:

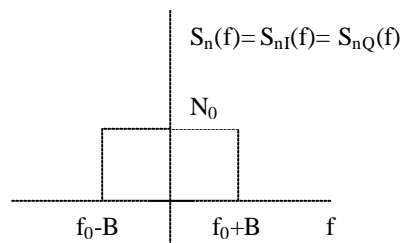
$$\text{rect}(t) \leftrightarrow \text{sinc}(f) \Rightarrow \text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f)$$

$$2B \text{sinc}(2Bt) \leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

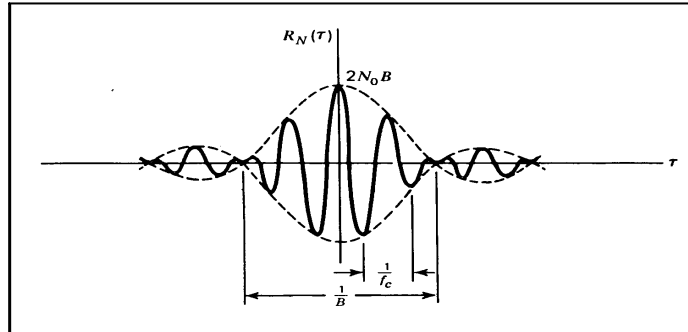
$$2B \text{sinc}(2Bt) e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{f \mp f_0}{2B}\right)$$

$$N_0B \text{sinc}(2Bt) e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f \mp f_0}{2B}\right)$$

La densità spettrale di potenza dei processi fase e quadratura  $n_I(t)$ ,  $n_Q(t)$ , vale:



e le relative autocorrelazioni:  $R_{n_I}(t) = R_{n_Q}(t) = 2N_0B \text{sinc}(2Bt)$

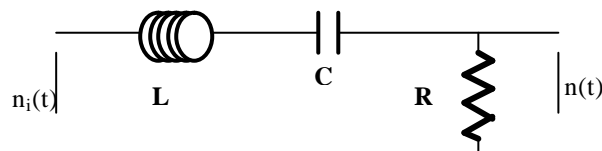


Si osserva come, a parte un fattore 2 a moltiplicare, l'autocorrelazione della componente in fase o quadratura è la stessa di quella relativa allo stesso rumore filtrato da un filtro passa-basso ideale. Il fattore 2 deriva dal fatto che nel caso di filtraggio passa-banda, la banda del filtro è stata scelta di valore doppio rispetto a quella del filtro passa-basso.

Se il rumore bianco di ingresso è anche gaussiano, allora dalla simmetria del filtro rispetto a  $f_0$  si deduce che una coppia qualunque di variabili aleatorie  $n_I(t_1)$ ,  $n_Q(t_2)$ , sono gaussiane e statisticamente indipendenti.

### Rumore bianco filtrato da un circuito risonante ad elevato Q.

Consideriamo il sistema passa-banda LCR serie di figura:



alimentato da un processo rumore bianco  $n_i(t)$ , Vogliamo ricavare le caratteristiche del processo  $n(t)$  in uscita.

La funzione di trasferimento del filtro vale:

$$H(f) = \frac{R}{R + j2\pi fL + \frac{1}{j2\pi fC}}$$

Ponendo  $f_0 \triangleq \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  e  $Q \triangleq \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$  si ha:

$$H(f) = \frac{1}{1 + jQ \left[ \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right]} = \frac{1}{1 + jQ \frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f}}$$

Se  $Q \gg 1$ , allora possiamo approssimare  $H(f)$ :

$$H(f) \cong \begin{cases} \frac{1}{1 + j2Q \frac{f - f_0}{f_0}} & \forall f > 0 \\ \frac{1}{1 + j2Q \frac{f + f_0}{f_0}} & \forall f < 0 \end{cases}$$

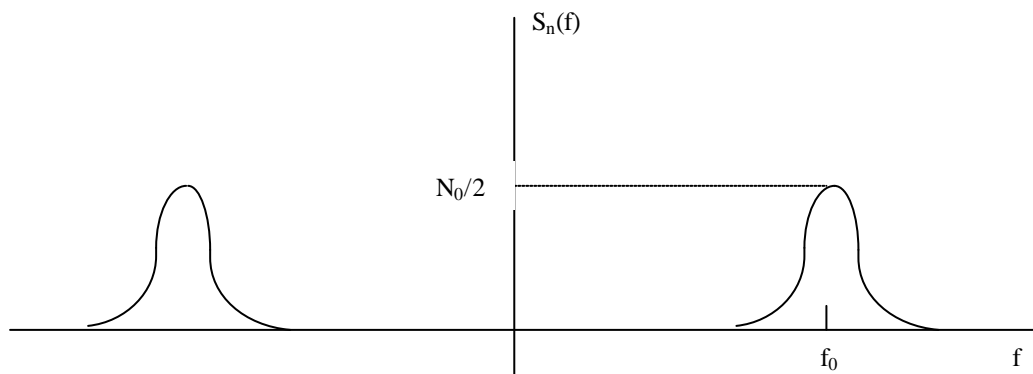
Questo perché - per  $Q \gg 1$  - i valori significativi di  $f$ , nel senso di quei valori che forniscono moduli di  $H(f)$  significativamente  $\neq 0$ , sono compresi in un intorno di  $f_0$  piccolo rispetto a  $f_0 \gg 1$ ; in tale intervallo si può quindi porre:

$$\frac{f + f_0}{f_0} \cong 2 \quad \text{se } f > 0$$

$$\frac{f - f_0}{f_0} \cong -2 \quad \text{se } f < 0$$

In tali ipotesi possiamo allora scrivere:

$$S_n(f) \cong \begin{cases} \frac{N_0/2}{1 + j2Q \frac{f - f_0}{f_0}} & \forall f > 0 \\ \frac{N_0/2}{1 + j2Q \frac{f + f_0}{f_0}} & \forall f < 0 \end{cases}$$



La corrispondente densità spettrale delle componenti in fase e quadratura è quindi:

$$S_{n_i}(f) = S_{n_Q}(f) \cong \frac{N_0}{1 + \left(2Q \frac{f}{f_0}\right)^2}$$

Si osserva come, a parte un fattore 2 nelle ampiezze, questo spettro è dello stesso tipo di quello ricavato nel caso di filtraggio RC passa-basso.

Infine, essendo  $Q \gg 1$ , lo spettro di  $n(t)$  è praticamente simmetrico rispetto a  $f_0$ , per cui se  $n(t)$  è gaussiano, qualunque coppia di variabili aleatorie individuate su  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$ , sono variabili aleatorie (gaussiane) statisticamente indipendenti.

### 3.5 STATISTICA DEL RUMORE FILTRATO CON PORTANTE DETERMINISTICA

Supponiamo che in ingresso al filtro passa-banda, oltre al rumore gaussiano bianco, sia presente una portante  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + f)$ . In uscita dal filtro, ipotizzando senza perdita di generalità, un guadagno a centro banda unitario, avremo i segnali:

$$y(t) = A \cos(2\pi f_0 t + f) + n(t)$$

dove  $f$  è un particolare valore della relativa variabile aleatoria.

Con riferimento ad un  $f$  prefissato, vogliamo valutare la distribuzione statistica dell'involuppo della portante + rumore. In termini di componenti in fase e quadratura, il segnale (processo) complessivo si esprime:

$$y(t) = [A + n_I(t)] \cos(2\pi f_0 t + f) - n_Q(t) \sin(2\pi f_0 t + f)$$

Seguendo un ragionamento analogo a quello sviluppato nel caso di solo rumore, si perviene alle seguenti conclusioni, per filtri passa-banda simmetrici:

- 1)  $n_I(t)$  è a valor medio  $A$ ,  $n_Q(t)$  è a valor medio nullo;
- 2)  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  hanno la stessa varianza di  $n(t)$ ;
- 3) variabili aleatorie definite una su  $n_I(t)$ , l'altra su  $n_Q(t)$  sono gaussiane e statisticamente indipendenti.

La relativa d.d.p. congiunta si esprime quindi:

$$f_{n_I, n_Q}(n_I, n_Q) = \frac{1}{2\pi s^2} e^{-\frac{(n_I - A)^2 + n_Q^2}{2s^2}}$$

Vogliamo ora ricavare la statistica dell'involuppo e della fase di  $y(t)$ . Seguendo una procedura analoga a quella sviluppata nel caso di solo rumore, si ottiene:

$$\begin{aligned} f_{a, \psi}(a, \psi) &= \frac{a}{2\pi s^2} e^{-\frac{(a \cos \psi - A)^2 + a^2 \sin^2 \psi}{2s^2}} = \\ &= \frac{a}{2\pi s^2} e^{-\frac{a^2 + A^2 - 2aA \cos \psi}{2s^2}} \end{aligned}$$

Si osserva come in questo caso non sia possibile esprimere  $f_{a,y}(a,y) = f_a(a)f_y(y)$  e quindi  $a$  e  $y$  non sono variabili aleatorie indipendenti.

E' di interesse in particolare conoscere la distribuzione statistica dell'involuppo. Questa si può ricavare integrando la statistica congiunta, rispetto a  $y$ .

$$f_a(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{a,y}(a,y) dy = \frac{a}{2ps^2} e^{-\frac{a^2+A^2}{2s^2}} \int_0^{2p} e^{-\frac{Aa \cos y}{s^2}} dy$$

L'ultimo integrale può essere espresso in termini di funzione di Bessel modificata di prima specie e di ordine zero:

$$I_0(x) \triangleq \frac{1}{2p} \int_0^{2p} e^{x \cos y} dy$$

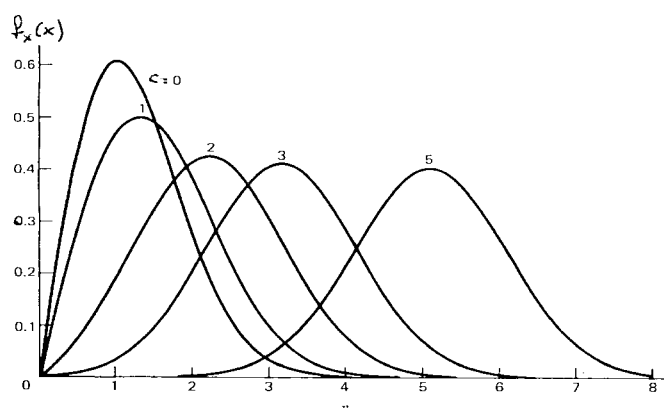
Quindi:

$$f_a(a) = \frac{a}{s^2} e^{-\frac{a^2+A^2}{2s^2}} I_0\left(\frac{aA}{s^2}\right)$$

Tale tipo di distribuzione si chiama di Rice, e presenta la seguente forma normalizzata,

ponendo:  $x \triangleq \frac{a}{s}$   $c = \frac{A}{s}$   $f_x(x) = s f_a(a)$

$$f_x(x) = x e^{-\frac{x^2+c^2}{2}} I_0(cx)$$

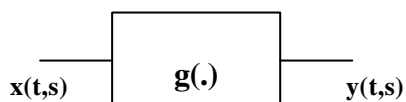


Si osserva, come deve essere, che per  $c = 0$ , si ha nuovamente la distribuzione di Rayleigh, essendo in tal caso  $A = 0$ .

Si osserva anche che, al crescere di  $c$ , cioè quando l'ampiezza  $A$  della portante è grande rispetto alla deviazione standard del rumore, ovvero per grandi rapporti potenza portante/potenza rumore, la forma della d.d.p. dell'involuppo tende ad essere di tipo gaussiano, almeno nell'intorno del suo massimo.

### 3.6 TRASFORMAZIONI NON-LINEARI, NON-DISPERSIVE, TEMPO-INVARIANTI DI UN PROCESSO ALEATORIO

Assegnata una funzione non-lineare di  $x$ ,  $g(x)$ , e un processo  $x(t, s)$ , si può definire un nuovo processo  $y(t, s) = g[x(t, s)]$



Con riferimento ai momenti del I e II ordine, si può scrivere:

$$E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x; t) dx$$

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g[x(t_1)] g[x(t_2)] f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

In generale, la d.d.p. di ordine  $n$  può essere ricavata da quella corrispondente di ingresso.

Se il sistema

$$g(x_i) = y_i; i = 1, 2, \dots, n$$

per un certo  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ammette  $m$  soluzioni reali, allora è:

$$f_y(y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^m \frac{f_x(x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j; t_1, t_2, \dots, t_n)}{|g'(x_1^j) g'(x_2^j) \dots g'(x_n^j)|}$$

Se  $x(t, s)$  è stazionario in senso stretto, anche  $y(t, s)$  è stazionario in senso stretto. Tale proprietà non vale, in generale, per la stazionarietà debole.

Consideriamo una trasformazione di tipo quadratico  $y = x^2$ . Valutiamo la d.d.p. del I ordine. Si osserva che:

$$\forall y \geq 0 \text{ si hanno due soluzioni reali } x = \pm\sqrt{y}$$

$$\forall y < 0 \text{ non si hanno soluzioni reali dell'equazione } x^2 = y$$

Quindi:

$$\forall y \geq 0 \quad f_y(y; t) = \frac{f_x(\sqrt{y}; t)}{2\sqrt{y}} + \frac{f_x(-\sqrt{y}; t)}{2\sqrt{y}}$$

$$\forall y < 0 \quad f_y(y; t) = 0$$

Valutiamo la d.d.p. del II ordine:  $\forall y_1, y_2 \geq 0$ , il sistema :



$$\begin{cases} x_1^2 = y_1 \\ x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

ammette 4 soluzioni reali, rappresentate dalle coppie distinte  $\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}$

Lo Jacobiano della trasformazione vale  $\pm 4\sqrt{y_1 y_2}$  e quindi:

$$f_y(y_1, y_2; t_1, t_2) = \frac{1}{4\sqrt{y_1 y_2}} \sum_{j=1}^m f_x(\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}; t_1, t_2) \quad \forall y_1, y_2 \geq 0$$

$$f_y(y_1, y_2; t_1, t_2) = 0 \quad \forall y_1, y_2 < 0$$

Osserviamo che se  $x(t)$  è stazionario almeno “di ordine 2”, ciò implica che:

$$f_x(x, t) \text{ è indipendente dal tempo}$$

$$f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2; \tau)$$

e quindi anche:

$$f_y(y, t) \text{ è indipendente da } t$$

$$f_x(y_1, y_2; t_1, t_2) = f_y(y_1, y_2; \tau)$$

Quindi, anche  $y(t)$  è stazionario di ordine 2, come deve essere.

Supponiamo ora che  $x(t)$  sia gaussiano e stazionario a valor medio nullo e autocorrelazione  $R_x(\tau)$ . Allora si ha, relativamente a  $y(t)$ :

$$E\{y(t)\} = E\{x^2(t)\} = R_x(0)$$

$$\begin{cases} f(y; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_x(0)}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2R_x(0)}} & \forall y \geq 0 \\ f(y; t) = 0 & \forall y < 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che essendo  $x(t)$  stazionario in senso lato, lo è anche in senso stretto, e così anche  $y(t)$ . Si osserva quindi come la d.d.p. del I° ordine sul processo  $y(t)$  è del tipo riportato in figura:



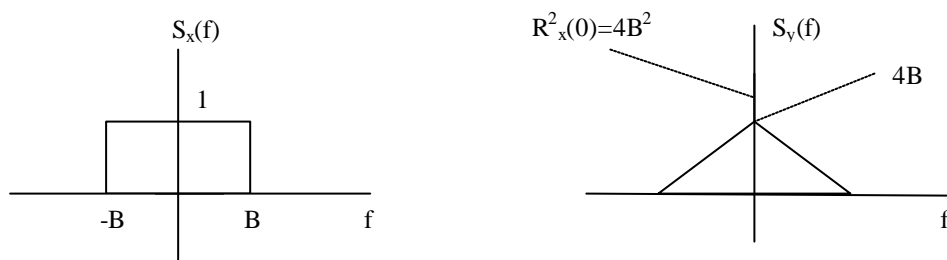
Riguardo all'autocorrelazione, è possibile dimostrare che è relazionata a quella del processo  $x(t, s)$  nel seguente modo:  $R_y(\tau) = R_x^2(0) + 2 R_x^2(\tau)$

Lo spettro di potenza media si esprime quindi:

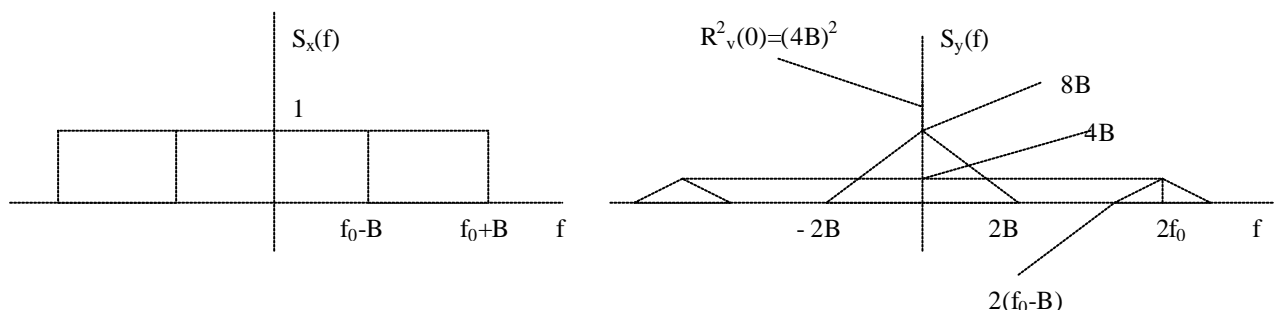
$$S(f) = R_x^2(0) \delta(f) + 2 S_x(f) \otimes S_x(f)$$

### Esempio 3.2

Se  $S_x(f)$  è l'uscita di un filtro passa-basso ideale con ingresso un processo bianco, in uscita dal sistema a risposta quadratica si ha:



Se il processo di ingresso è del tipo passa-banda, si ha:



Consideriamo una trasformazione del tipo  $y = |x|$ . L'equazione  $|x| = y$  ammette 2 soluzioni reali  $\forall y \geq 0$ , nessuna soluzione reale  $\forall y < 0$ :  $x = \pm y$ .

Quindi, relativamente alla d.d.p. del I ordine si ha:

$$\begin{cases} f_y(y, t) = f_x(y, t) + f_x(-y, t) & \forall y \geq 0 \\ f_y(y, t) = 0 & \forall y < 0 \end{cases}$$

In particolare, se  $f_x(x, t)$  è simmetrica, allora:

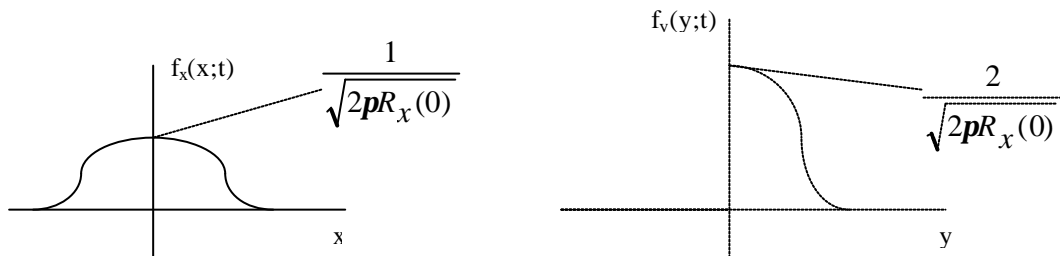
$$\begin{cases} f_y(y, t) = 2 f_x(y, t) & \forall y \geq 0 \\ f_y(y, t) = 0 & \forall y < 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che  $x(t)$  sia gaussiano e stazionario a valor medio nullo e autocorrelazione  $R_x(\tau)$ ; in tale ipotesi si ha:

$$\begin{cases} f_y(y, t) = \frac{2}{\sqrt{2p R_x(0)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2R_x(0)}\right) & \forall y \geq 0 \\ f_y(y, t) = 0 & \forall y < 0 \end{cases}$$

E quindi:

$$\begin{aligned} E\{y\} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) f_y(y; t) dy = \frac{2}{\sqrt{2p R_x(0)}} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2R_x(0)}} dy = \\ &= \sqrt{\frac{2R_x(0)}{p}} \int_0^{\infty} y e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2R_x(0)}}\right)^2} d\left(\frac{y}{\sqrt{2R_x(0)}}\right) = \sqrt{\frac{2R_x(0)}{p}} \end{aligned}$$



Riguardo all'autocorrelazione, è possibile esprimere questa nella seguente forma implicita:

$$R_y(t) = \frac{2}{p} R_x(0) [\cos(a) + \sin(a)] \quad -\frac{p}{2} < a \leq \frac{p}{2}$$

dove  $\sin(\alpha)$  è il coefficiente di correlazione delle variabili aleatorie normali  $x(t + \tau)$ ,  $x(t)$ , cioè:

$$\sin(a) \triangleq \frac{R_x(t)}{R_x(0)}$$