

**Appunti dal Corso di  
Sistemi di Telecomunicazione A.A. 2008/09  
Prof. Mario Fossi**

**2 - RUMORE INTERNO**

**Caratterizzazione del rumore di un bipolo passivo**

Indichiamo con il termine **rumore “interno”** o **“di apparato”** l'insieme dei segnali non desiderati e di tipo aleatorio, che per vari meccanismi si generano internamente ai circuiti del ricevitore e del trasmettitore, indipendentemente dai segnali utili. In tal senso si parla di rumore **additivo**, che è quello che consideriamo in questo Corso. Esiste anche una componente del rumore “esterna” agli apparati trasmettente e ricevente, che si genera all'interno del dielettrico del canale radio e dentro l'antenna ricevente, che discuteremo successivamente.

Per modellizzare il rumore interno dobbiamo considerare i suoi vari contributi. Il primo contributo che analizziamo è quello di origine termica: rumore **termico**.

Questo tipo di rumore è presente in ogni conduttore che si trovi a temperatura assoluta diversa da zero. Consideriamo una sezione qualunque di un conduttore resistivo, a temperatura  $T > 0$  K: essa può essere considerata un **sistema ad una porta** o bipolo, caratterizzato da una resistenza. Anche in assenza di campo elettrico esterno applicato ai capi del conduttore, esiste un moto **casuale** dei singoli elettroni in tutte le direzioni possibili all'interno del conduttore, per effetto del suo stato termico. Questi movimenti elementari generano complessivamente una corrente elettrica e quindi una tensione ai capi della sezione di conduttore considerata. Non potendo praticamente calcolare in maniera deterministica il contributo di ogni elettrone e poi sommarli tutti, ottenendo la corrente complessiva  $i_n(t)$ , ci limitiamo a determinarne alcuni **parametri statistici** di interesse. In particolare, considerando il **teorema limite centrale** possiamo supporre che l'intensità di corrente complessiva abbia una distribuzione statistica **gaussiana**. Inoltre, in assenza di campo elettrico esterno applicato al conduttore, il processo aleatorio gaussiano corrente di rumore  $i_n(t)$  è anche a media nulla:  $E\{i_n(t)\} = 0$ .

Infine, se la temperatura del conduttore si mantiene costante, la corrente di rumore  $i_n(t)$  è un processo **stazionario in senso lato** (WSS) ed **ergodico** rispetto ai parametri che ci interessano. La sua densità spettrale media di potenza **disponibile** è stata calcolata da Planck e si esprime come:

$$S_{nd}(f) = \frac{h|f|}{2\left(e^{\frac{h|f|}{kT}} - 1\right)} \quad \leftarrow \text{bilatera} \quad ; \quad S_{nd}(f) = \frac{hf}{\left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1\right)} \quad \leftarrow \text{monolatera} \quad [W/Hz]$$

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \text{costante di Planck} = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \text{costante di Boltzmann} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

La legge di Planck sopra enunciata è un risultato della meccanica quantistica.

Sotto opportune condizioni, è possibile approssimarla; a tal fine consideriamo lo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale a denominatore:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots ; \text{ per } x \ll 1 \text{ possiamo porre } e^x \simeq 1 + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{nd}(f) = \frac{h|f|}{2 \left( 1 + \frac{h|f|}{kT} - 1 \right)} = \frac{\frac{h|f|}{kT}}{2 \cdot \frac{h|f|}{kT}} = \frac{kT}{2} \leftarrow \text{indipendente dalla frequenza: rumore bianco.}$$

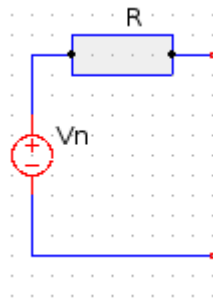
Vogliamo verificare fino a quali valori di frequenza quest'approssimazione può ritenersi valida. Consideriamo ad es.

$$x \ll 1 \Leftrightarrow x \leq 0,01 \Rightarrow \frac{h}{k} \cdot \frac{|f|}{T} \leq 10^{-2} ; \quad \frac{h}{k} \simeq 5 \cdot 10^{-11} \Rightarrow 5 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{|f|}{T} \leq 10^{-2} \Rightarrow \frac{f_{reale}}{T} \leq 2 \cdot 10^8 \Rightarrow$$

$$\text{supponendo } T = 300 \text{ K } (27^\circ \text{C}) \Rightarrow f_{reale} \leq 6 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

L'approssimazione è dunque verificata - a temperatura non inferiore a  $27^\circ \text{C}$  - per frequenze fino alle decine di  $\text{GHz}$ , condizione quest'ultima soddisfatta nella maggior parte dei sistemi di telecomunicazione; in tale ipotesi lo scarto rimane al di sotto dello 0,5%.

Vogliamo ora modellizzare il generatore di rumore rappresentato dal conduttore resistivo rumoroso considerato, utilizzando il teorema di Thévenin:



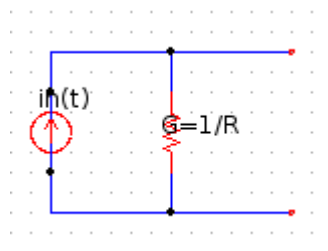
Riguardo al valore del generatore ideale di tensione, trattandosi di processi aleatori, non possiamo conoscerne l'effettiva espressione nel tempo  $v_n(t)$ , ma solo il suo “spettro” di tensione  $S_{vn}(f)$ , la cui espressione può essere ricavata dalla relazione:

$$S_{nd}(f) = \frac{S_{vn}(f)}{4R} = \frac{kT}{2} \Rightarrow S_{vn}(f) = 2kTR \text{ (bilatero)} ; \quad S_{vn}(f) = 4kTR \text{ (unilatero)} \quad \left[ \frac{V^2}{\text{Hz}} \right]$$

Lo spettro di tensione (d'ora in poi bilatero)  $S_{vn}(f)$  può essere interpretato, come abbiamo già visto, come valore quadratico medio della tensione nell'intervallo infinitesimo di frequenza:

$$S_{vn} = \frac{1}{2} \frac{d\overline{v_n^2}}{df} = 2kTR \Rightarrow \overline{dv_n^2} = 4kTR df \quad [V^2] .$$

Possiamo anche modellizzare il rumore utilizzando il teorema di Norton invece che quello di Thévenin:



A tal fine, utilizziamo la relazione generale che lega spettro di corrente e spettro di tensione:

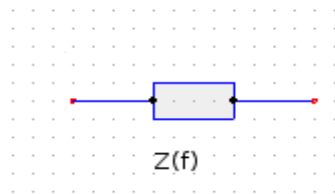
$$v(t) = i(t) * z(t) \Leftrightarrow S_i(f) = \frac{S_v(f)}{|Z(f)|^2} \Rightarrow S_{in}(f) R^2 = S_{vn}(f) = 2kTR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{in}(f) = \frac{2kT}{R} = 2kTG, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{R} \quad \left[ \frac{A^2}{Hz} \right]$$

Ancora, passando dallo spettro di corrente al valore quadratico medio, otteniamo:

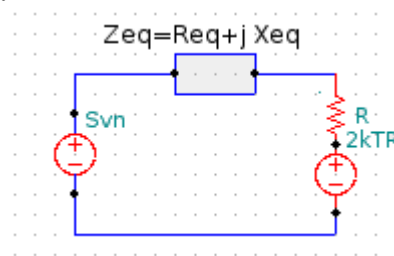
$$\overline{di_n^2} = 4kTG df \quad [A^2]$$

Passiamo ora a caratterizzare il rumore termico di bipoli più complessi di un semplice elemento resistivo, analizzando il caso del rumore generato da un generico bipolo **passivo** e privo di generatori di rumore non termico, ovvero una rete comunque complessa ma costituita di soli elementi resistivi e reattivi, accessibile dall'esterno tramite una coppia di morsetti. Circuitualmente, essa può essere caratterizzata mediante la sua impedenza:



Ipotizziamo dapprima che **tutti gli elementi resistivi che compongono la rete in esame si trovino alla stessa temperatura** (quella degli elementi puramente reattivi non interessa, in quanto non partecipano alla generazione di rumore termico). Possiamo modellizzare il bipolo ancora con il teorema di Thévenin.

Ovviamente possiamo ricavare il valore del generatore ideale di tensione risolvendo la rete una volta sostituiti a ciascuna resistenza il suo generatore equivalente. Tuttavia è possibile ricavare in maniera più semplice l'espressione dello spettro di tensione, senza fare riferimento alla particolare topologia del bipolo. Supponiamo di chiudere la rete da caratterizzare su di una resistenza  $R$ , e poniamoci **nell'ipotesi** che anche questa si trovi alla stessa temperatura  $T$  del bipolo:



Utilizziamo un risultato che deriva dal **secondo principio della termodinamica**: se due corpi si trovano alla stessa temperatura, **mediamente** si scambiano la stessa energia. Questo significa che la densità spettrale di potenza **media** ceduta dal bipolo alla resistenza è la stessa che la resistenza cede al bipolo. Calcoliamo, quindi, lo spettro di potenza media di rumore  $S_n(f)$  generata dalla resistenza  $R$  ed assorbita dal bipolo:

$$S_n(f) = \frac{2kTR}{[R + R_{eq}(f)]^2 + X_{eq}^2(f)} R_{eq}(f)$$

Per il secondo principio della termodinamica, uguagliando questa densità spettrale di potenza con quella generata dal bipolo e ceduta alla resistenza  $R$ , otteniamo quest'ultima:

$$\frac{2kT R \cdot R_{eq}(f)}{[R + R_{eq}(f)]^2 + X_{eq}^2(f)} = \frac{S_{vn} \cdot R}{[R + R_{eq}(f)]^2 + X_{eq}^2(f)} \Rightarrow S_{vn}(f) = 2kT R_{eq}(f)$$

Osserviamo il risultato interessante che lo spettro di tensione del rumore termico si può esprimere nella stessa forma del caso di semplice resistenza, considerando come resistenza la parte resistiva dell'impedenza equivalente della rete.

Se ragioniamo in termini di valori quadratici medi, avremo l'espressione equivalente:

$$\overline{dv_n^2} = 4kT R_{eq}(f) df.$$

Lo spettro di corrente sarà, applicando il teorema di Norton:

$$S_{in}(f) = 2kT G_{eq}(f) \quad ; \quad \overline{di_n^2} = 4kT G_{eq}(f) df \quad \text{con } G_{eq}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \Re \left\{ \frac{1}{Z_{eq}(f)} \right\}$$

La densità spettrale di potenza media disponibile di rumore è ancora:

$$S_{nd}(f) = \frac{S_{vn}(f)}{4R_{eq}(f)} = \frac{kT}{2} \leftarrow \text{bilatera}; \quad S_{nd}(f) = kT \leftarrow \text{unilatera}.$$

Ricapitolando, il rumore termico di un bipolo passivo comunque complesso, ma i cui elementi resistivi siano **tutti alla stessa temperatura**, è caratterizzabile dalla sola conoscenza della sua temperatura (oltre che dalla parte reale della sua impedenza equivalente). Se l'ipotesi di temperatura costante **non** risulta verificata, è comunque utile cercare di mantenere una caratterizzazione **formalmente** analoga a quella utilizzata finora. A tale scopo introduciamo una **temperatura equivalente**  $T_{eq}$  del bipolo, in generale **dipendente dalla frequenza**, parametro che ci consente di esprimere gli spettri di tensione ancora nella forma:

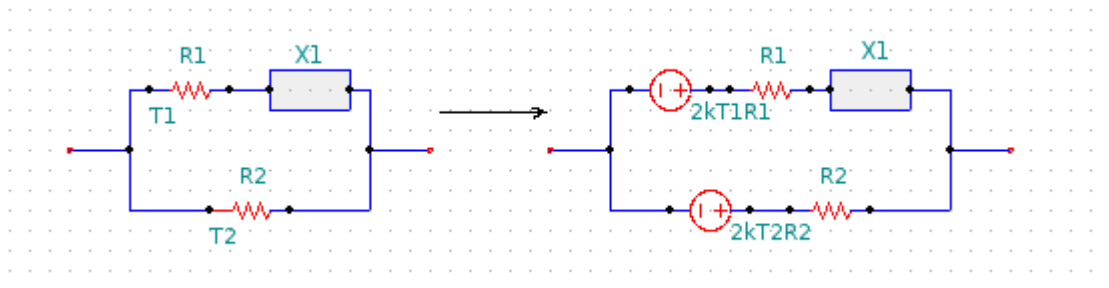
$$S_{vn}(f) = 2kT_{eq}(f)R_{eq}(f) \text{ e analogamente quelli di corrente: } S_{in}(f) = 2kT_{eq}(f)G_{eq}(f).$$

Per come è definita, la temperatura equivalente corrisponde alla temperatura **fisica** a cui dovrebbe essere portato il bipolo, per ottenere lo stesso contributo di rumore complessivo. Il calcolo della temperatura equivalente richiede ovviamente la conoscenza delle temperature dei singoli elementi resistivi, ma anche della particolare **struttura** della rete.

Il procedimento di calcolo consiste nel sostituire ad ogni elemento resistivo il suo circuito equivalente e quindi trovare i parametri equivalenti applicando alla rete le leggi di Kirchhoff.

Vediamo alcuni esempi:

**Esempio 1:** Impedenza a temperatura  $T_1$  in parallelo ad una resistenza a temperatura  $T_2$ :



Vogliamo caratterizzare il rumore termico generato da questa rete con un unico circuito equivalente secondo Thévenin, il che significa trovare tensione, impedenza e temperatura equivalenti.

Innanzitutto cortocircuitiamo i generatori ideali di tensione, per ottenere l'impedenza equivalente secondo Thévenin, che vale:

$$Z_{eq} = \frac{R_2(R_1 + jX_1)}{R_1 + R_2 + jX_1} = \frac{R_1 R_2 + j R_2 X_1}{R_1 + R_2 + jX_1}.$$

Ci interessa la parte reale di quest'impedenza:  $R_{eq} \stackrel{\text{def}}{=} \Re\{Z_{eq}\} = \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + R_2 X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2}.$

Passiamo ora a ricavare lo spettro di tensione equivalente. Osserviamo che i due processi aleatori che caratterizzano il rumore sono **statisticamente indipendenti** e che la rete è lineare, quindi possiamo utilizzare il **principio di sovrapposizione degli effetti**, cortocircuitando un generatore per volta. In particolare, cortocircuitando il generatore di rumore relativo a  $R_2$  avremo ai capi di  $R_2$ , per effetto del rumore generato da  $R_1$ :

$$S_{eq1} = S_{v1} \cdot \frac{R_2^2}{|R_2 + R_1 + jX_1|^2} = 2kT_1 R_1 \cdot \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2}$$

dove  $\frac{R_2}{R_2 + R_1 + jX_1}$  è la funzione di trasferimento del partitore.

Similmente, cortocircuitando il generatore di rumore relativo a  $R_1$  abbiamo, ai capi di  $R_1 + jX_1$ :

$$S_{eq2} = S_{v2} \cdot \left| \frac{R_1 + jX_1}{R_1 + R_2 + jX_1} \right|^2 = 2kT_2 R_2 \cdot \frac{R_1^2 + X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2}$$

Sommando i due contributi otteniamo lo spettro di tensione equivalente **totale** di rumore termico generato dalla rete, che eguagliato con l'espressione canonica in funzione della temperatura equivalente, ci consente di ricavare quest'ultima:

$$S_{vn} = 2k \frac{T_1 R_1 R_2^2 + T_2 R_2 (R_1^2 + X_1^2)}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} = 2kT_{eq} R_{eq} \Rightarrow \dots (\text{sostituendo l'espressione di } R_{eq}) \dots \Rightarrow$$

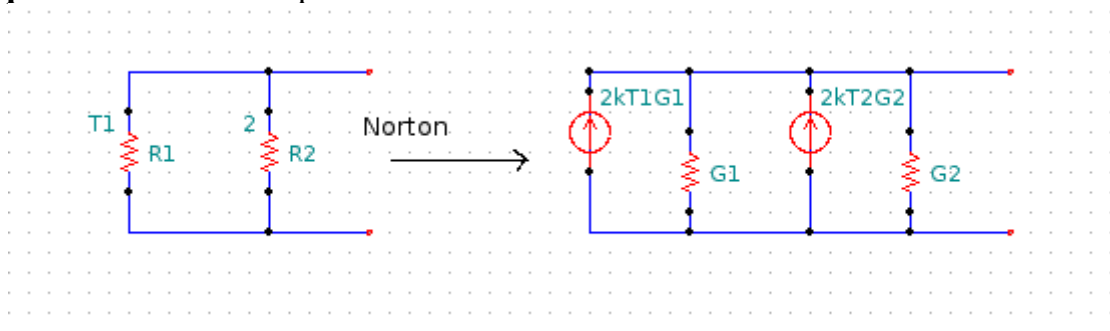
$$\Rightarrow T_{eq}(f) = \frac{T_1 R_1 R_2 + T_2 (R_1^2 + X_1^2)}{R_1 (R_1 + R_2) + X_1^2} \quad (\text{risultato valido ovviamente solo per questa rete}).$$

Il risultato evidenzia che la temperatura equivalente di rumore dipende dalle temperature fisiche a cui si trovano i dispositivi, dalla frequenza (tramite i termini reattivi presenti nella rete) e dalla topologia della rete. Guardando in particolare alla dipendenza dalla frequenza, abbiamo ottenuto il risultato che:

$$T_{eq} = T_{eq}(f) \Rightarrow S_{vn}(f) = k \frac{T_{eq}(f)}{2} \Rightarrow \text{il rumore non può generalmente essere considerato bianco}.$$

Si osserva anche, come deve essere, che per  $T_2 = T_1$  si ottiene  $T_{eq} = T_1$ .

**Esempio 2:** Resistenze in parallelo:



In questo caso utilizziamo il teorema di Norton, per la semplicità conseguente nei calcoli: possiamo ricavare immediatamente lo spettro di corrente di rumore termico equivalente, come somma dei due generatori ideali di corrente ( $G_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{R_i}$ ):

$$S_{in} = 2k T_1 G_1 + 2k T_2 G_2 = 2k \left( \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) = 2k \cdot \frac{T_1 R_2 + T_2 R_1}{R_1 R_2}$$

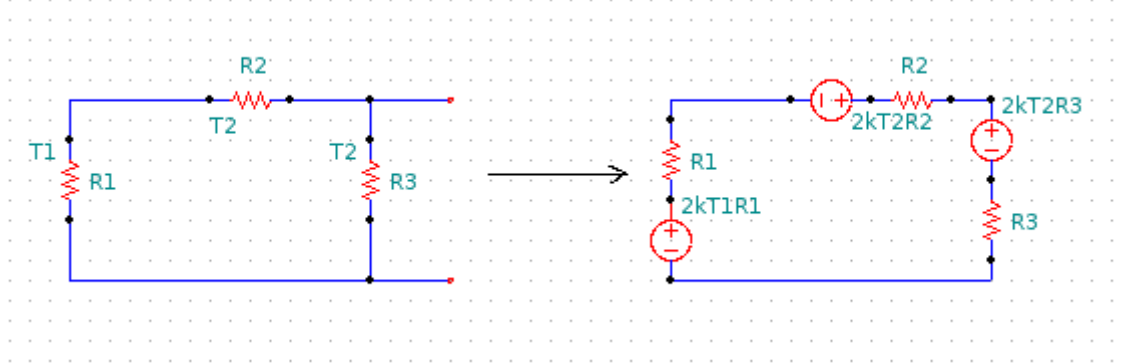
Apriamo i generatori di corrente per ottenere la conduttanza equivalente:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1 \parallel R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

Riconduciamo infine tutto all'espressione canonica dello spettro di corrente di rumore termico:

$$S_{in}(f) = 2k T_{eq}(f) G_{eq}(f) \Rightarrow \frac{T_1 R_2 + T_2 R_1}{R_1 R_2} = T_{eq} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \Rightarrow T_{eq} = \frac{T_1 R_2 + T_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

**Esempio 3:** Resistenza a temperatura  $T_1$  in serie ad un partitore resistivo a temperatura  $T_2$



Ricaviamo il circuito equivalente secondo Thévenin. Per prima cosa cortocircuitiamo i generatori per ottenere la resistenza equivalente:

$$R_{eq} = R_3 \parallel (R_1 + R_2) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_\Sigma}, \quad R_\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} R_1 + R_2 + R_3$$

Per calcolare lo spettro di tensione equivalente, utilizziamo il principio di sovrapposizione degli effetti, cortocircuitando a turno coppie di generatori:

$$\begin{aligned} S_{eq1} &= S_{V_1} \cdot \frac{R_3^2}{R_\Sigma^2}; & S_{eq2} &= S_{V_2} \cdot \frac{R_3^2}{R_\Sigma^2}; & S_{eq3} &= S_{V_3} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_\Sigma^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{vn} &= \frac{2k T_1 R_1 R_3^2 + 2k T_2 R_2 R_3^2 + 2k T_2 R_3 (R_1 + R_2)^2}{R_\Sigma^2} = \frac{2k}{R_\Sigma^2} \cdot \left[ (T_1 R_1 + T_2 R_2) R_3^2 + R_3 T_2 (R_1 + R_2)^2 \right] \end{aligned}$$

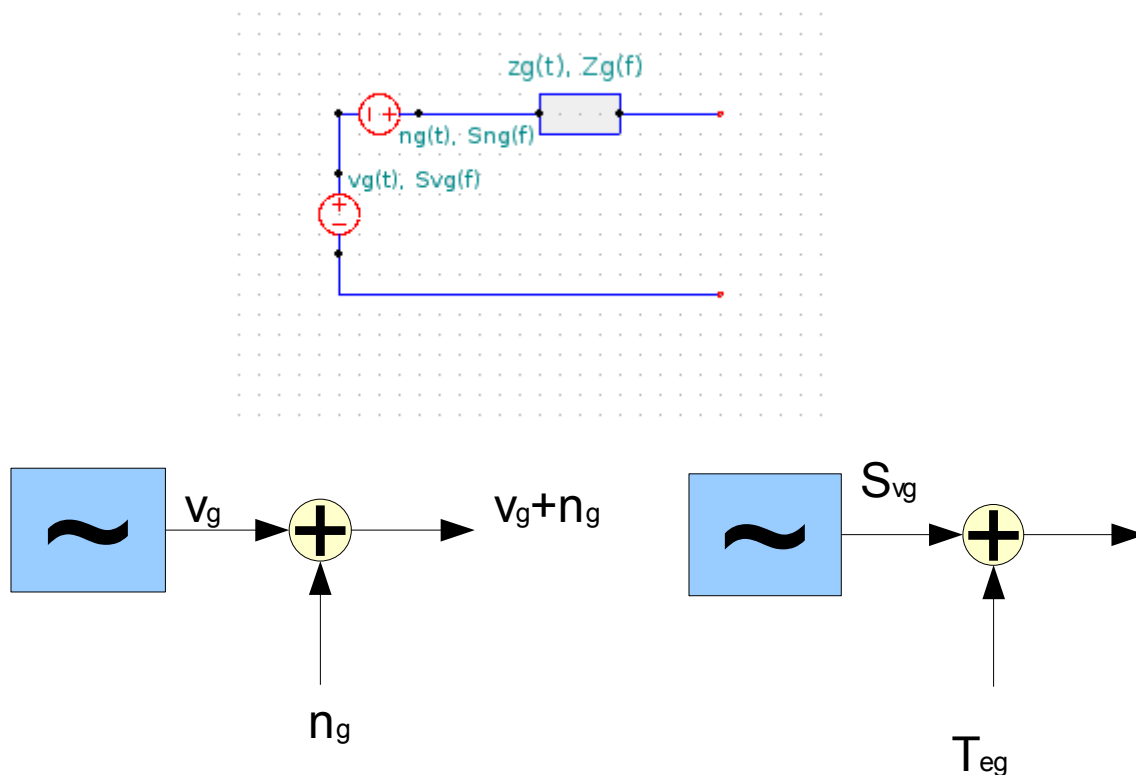
Volendo caratterizzare il rumore termico nella forma canonica  $2k T_{eq} R_{eq}$  otteniamo infine:

$$T_{eq} = \frac{(T_1 R_1 + T_2 R_2) R_3 + T_2 (R_1 + R_2)^2}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} = T_1 \cdot \frac{R_1 R_3}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} + T_2 \cdot \frac{R_2 R_3 + (R_1 + R_2)^2}{R_\Sigma (R_1 + R_2)}$$

L'utilità dell'espressione in quest'ultima forma risulterà chiara in seguito.

## Caratterizzazione del rumore di un bipolo attivo

Introduciamo ora il concetto di “bipolo generatore rumoroso” o “bipolo attivo”: in una connessione di più sistemi 2-porte in cascata, esso rappresenta quella parte della connessione che sta a monte di un qualunque punto considerato, come si è già visto. Per caratterizzare a livello di rumore un generico bipolo attivo, consideriamo il caso che i vari generatori di rumore in esso presenti siano statisticamente **indipendenti**, oltre che tra loro, anche dal generatore di segnale utile (e quindi anche da eventuali generatori comandati dal segnale utile). Il modello presuppone quindi che il rumore sia **additivo**, ovvero che si possa sommare la potenza del rumore a quella del segnale utile. Il bipolo può essere rappresentato sia circuitalmente che sistemisticamente nei modi seguenti:



Nello schema sistemistico si è chiamata  $T_{eg}(f)$  la temperatura equivalente di rumore **complessiva**, nel senso che essa tiene conto non solo dei contributi di rumore termico, ma anche eventualmente di quelli dovuti ad altre cause, come quelli presenti ad es. nei dispositivi attivi del bipolo, e che per uniformità di trattazione sistemistica conviene ancora quantificare in termini di temperature equivalenti.

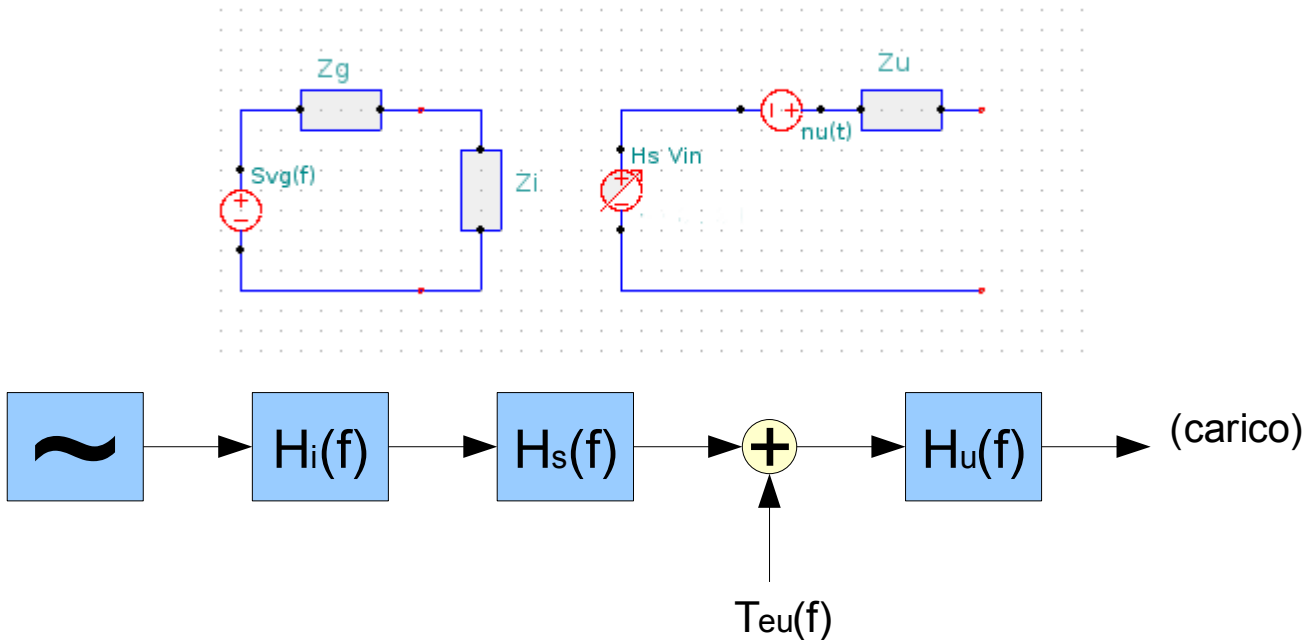
Come è noto, ai fini della valutazione delle prestazioni di un sistema di telecomunicazione, non è tanto importante il valore assoluto del segnale utile, quanto il **rapporto segnale-rumore**; questo, relativamente ad un bipolo generatore, può essere definito come:

$$SNR_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{gd}(f)}{S_{nd}(f)} = \frac{S_{gd}(f)}{\frac{1}{2} \cdot k T_{eg}(f)} = \frac{2 S_{gd}(f)}{k T_{eg}(f)} \quad \text{dove } S_{gd} \text{ e } S_{nd} \text{ indicano rispettivamente la densità}$$

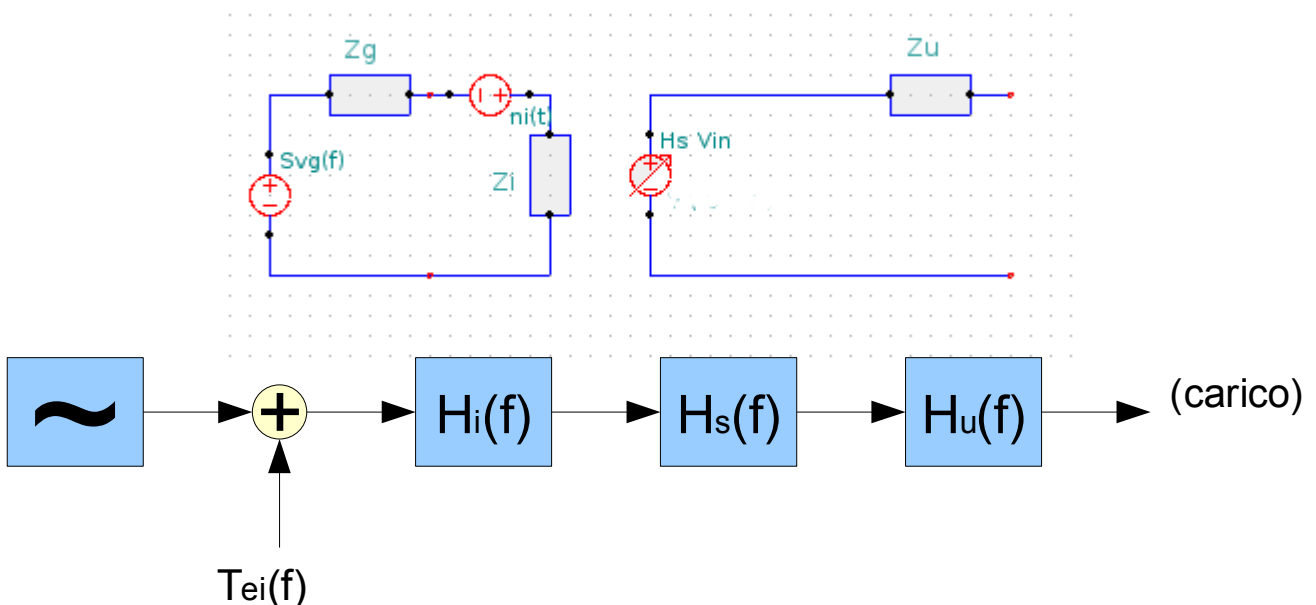
spettrale di potenza media disponibile del segnale utile prodotto dalla sorgente e del rumore complessivo del bipolo. Esso è quindi un parametro di tipo puntuale, ovvero dipendente dalla frequenza.

## Caratterizzazione del rumore introdotto dai sistemi 2-porte

Evidenziamo, nel modello di generatore rumoroso prima introdotto, il circuito equivalente del quadripolo che precede immediatamente l'uscita. Possiamo schematizzare anche questa situazione in modo circuitale oppure sistemistico:



Visto dall'uscita, l'insieme costituito dal **generatore + sistema 2-porte** rappresenta infatti un unico bipolo generatore rumoroso, il cui contributo **complessivo** di rumore può quindi ancora essere caratterizzato dalla sua temperatura equivalente, che indichiamo in questo caso con  $T_{eu}(f)$ , e il cui spettro di tensione si esprime quindi:  $S_{vnu}(f) = 2 k T_{eu}(f) R_u(f)$ . E' peraltro possibile introdurre anche una rappresentazione alternativa, nella quale si suppone di riportare il generatore di rumore complessivo in **ingresso** al sistema 2-porte, invece che all'uscita:





In questi due modelli sono state quindi introdotte due temperature equivalenti:  $T_{eu}(f)$  rappresenta la temperatura equivalente di rumore complessivo in **uscita** dal blocco LTI, mentre  $T_{ei}(f)$  è lo stesso parametro, ma riportato in **ingresso**.

Tra i due generatori di rumore, vale ovviamente la relazione:

$$n_u(t) = h_o(t) * n_i(t) \Rightarrow S_{vnu}(f) = |H_o(f)|^2 S_{vni}(f)$$

dove  $H_o(f) \stackrel{\text{def}}{=} H_i(f) H_s(f) \Leftrightarrow h_o(t) = h_i(t) * h_s(t)$

Possiamo scrivere la stessa relazione in termini di temperature equivalenti:

$$2k T_{eu}(f) R_u(f) = 2k T_{ei}(f) R_g(f) \cdot |H_o(f)|^2 \Rightarrow T_{eu}(f) = T_{ei}(f) |H_o(f)|^2 \cdot \frac{R_g}{R_u} = T_{ei}(f) |H_i(f)|^2 \cdot |H_s(f)|^2 \cdot \frac{R_g}{R_u}$$

Ricordando l'espressione del guadagno di potenza disponibile del sistema 2-porte

$$G_d(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_d}{S_{gd}} = \frac{S_{V_{eq}}}{4 R_u} \cdot \frac{4 R_g}{S_{V_g}} = |H_i(f)|^2 |H_s(f)|^2 \cdot \frac{R_g}{R_u} \text{ e sostituendola nella relazione sopra scritta, si}$$

ottiene l'importante risultato, che ci indica come si modifica la temperatura equivalente di rumore al variare del punto in cui si inserisce il generatore equivalente:

$$T_{eu}(f) = T_{ei}(f) \cdot G_d(f) \Leftrightarrow T_{ei}(f) = \frac{T_{eu}(f)}{G_d(f)}.$$

Esso è congruente se si tiene conto che  $\frac{1}{2} \cdot k T_{ei}(f)$  è la **densità spettrale di potenza**

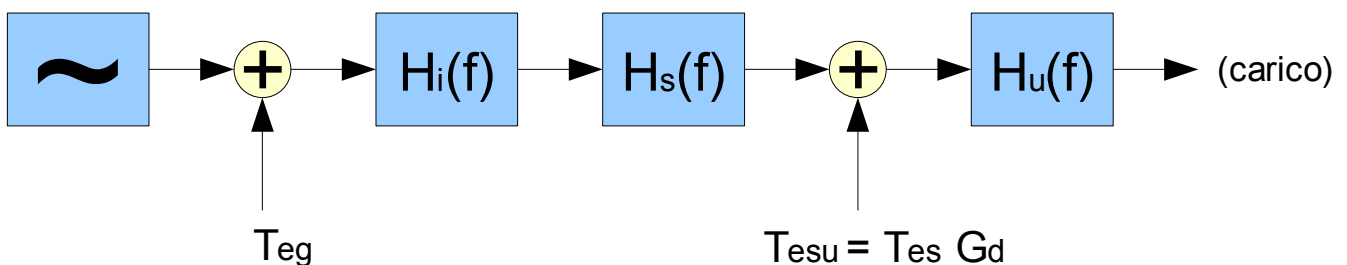
**media** (bilatera) di rumore **disponibile in ingresso** al sistema, mentre  $\frac{1}{2} \cdot k T_{eu}(f)$  è la

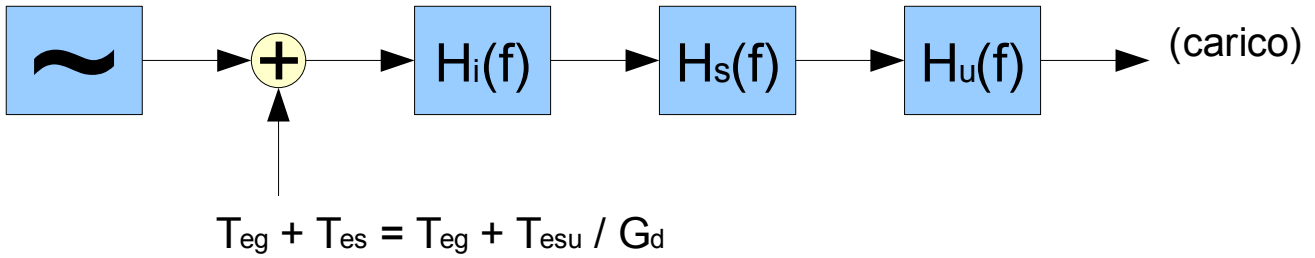
**densità spettrale di potenza media** (bilatera) di rumore **disponibile in uscita** dal sistema.

Finora abbiamo considerato il rumore **complessivo**, ovvero quello generato da tutto ciò che c'è a monte dell'uscita. Ci interessa invece trovare il rumore generato **solo** all'interno del sistema 2-porte LTI. Innanzitutto supponiamo il rumore del solo generatore statisticamente indipendente dal rumore generato internamente al blocco LTI; quindi vale, ancora una volta, il principio di sovrapposizione degli effetti in termini di spettri di potenze, per cui possiamo scrivere:  $T_{eu}(f) = T_{esu}(f) + T_{eg}(f) \cdot G_d(f)$ , dove abbiamo introdotto la temperatura equivalente di rumore **relativa solo al rumore generato dal sistema 2-porte** riportata in uscita ad esso,  $T_{esu}$ , mentre  $T_{eg}$  indica la temperatura equivalente di rumore relativa al solo generatore, che viene quindi riportata in uscita al sistema 2-porte mediante la moltiplicazione per  $G_d$ . A questo punto introduciamo anche la temperatura equivalente di rumore **del solo sistema LTI in ingresso**,  $T_{es}$ , che chiamiamo sinteticamente temperatura di rumore del sistema, che si ottiene riportando la  $T_{esu}$  in ingresso secondo la regola vista:

$$T_{es} = \frac{T_{esu}}{G_d}.$$

In termini di schemi a blocchi si ha quindi:





### Rumore introdotto dai sistemi 2-porte passivi

Riguardo al calcolo della temperatura equivalente di rumore di un sistema 2-porte, similmente a quanto visto per i bipoli, è possibile ricavare un'espressione **generale** (dipendente da pochi parametri sistemistici della rete) solo nel caso di quadripoli **passivi** generatori di solo rumore **termico** (come ad es. un filtro passivo, un attenuatore resistivo, una linea di trasmissione) **e** nell'ipotesi (quasi sempre verificata) che i suoi elementi interni **siano tutti alla stessa temperatura**. Ipotizziamo quindi che la temperatura sia costante e uguale a  $T$  in tutto il quadripolo. Sappiamo che in generale vale la relazione  $T_{eu} = T_{esu} + G_d T_{eg}$ . Considerando l'ipotesi già detta di temperatura costante, supponiamo di chiudere l'ingresso del sistema LTI su una resistenza  $R$ , **anch'essa alla stessa temperatura  $T$**  del quadripolo. Dato che il generatore è una resistenza pura, la  $T_{eg}$  verrà a coincidere con  $T$ .

Guardando dall'uscita del sistema 2-porte così connesso, vediamo complessivamente un unico bipolo rumoroso **tutto a temperatura  $T$**  e quindi con temperatura equivalente  $T_{eu} = T$ . Di conseguenza, utilizzando l'espressione generale vista avremo:

$$T = T_{esu} + T \cdot G_d \Rightarrow T_{esu} = T(1 - G_d), \text{ con } T_{esu} \leq T \quad (\text{sistema passivo} \Leftrightarrow G_d \leq 1) .$$

Se riportiamo il generatore di rumore in ingresso al sistema 2-porte, otteniamo:

$$T_{es} = \frac{T_{esu}}{G_d} = T \frac{1 - G_d}{G_d} = T \left[ \frac{1}{G_d} - 1 \right] = T(A_d - 1) \quad , \quad A_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{G_d} .$$

**Si osserva** che la temperatura equivalente di rumore del sistema  $T_{es}$  dipende, oltre che dalla temperatura fisica  $T$ , anche dal guadagno di potenza disponibile  $G_d$ ; quindi dipende **anche** dal parametro impedenza del generatore oltre che da quelli della rete 2-porte.

Si osservi però che il contributo di rumore introdotto dal sistema 2-porte **non** dipende dal rumore della sorgente che lo alimenta, essendo le due sorgenti statisticamente indipendenti. Conseguentemente, nel caso generale in cui il generatore abbia una temperatura equivalente generica  $T_{eg}$ , la relazione precedente diviene ovviamente:

$$T_{eu} = T(1 - G_d) + T_{eg} \cdot G_d .$$

Osserviamo il caso particolare  $G_d = 1 \Rightarrow T_{esu} = T_{eg} \cdot G_d$ , che ci dice che una rete puramente reattiva non introduce rumore, il che conferma il concetto per cui il rumore è legato solo agli elementi resistivi della rete. Altro caso particolare (non di interesse nelle applicazioni) è  $G_d = 0 \Rightarrow T_{esu} = T$ , dato che non c'è trasferimento di potenza tra ingresso e uscita del quadripolo.

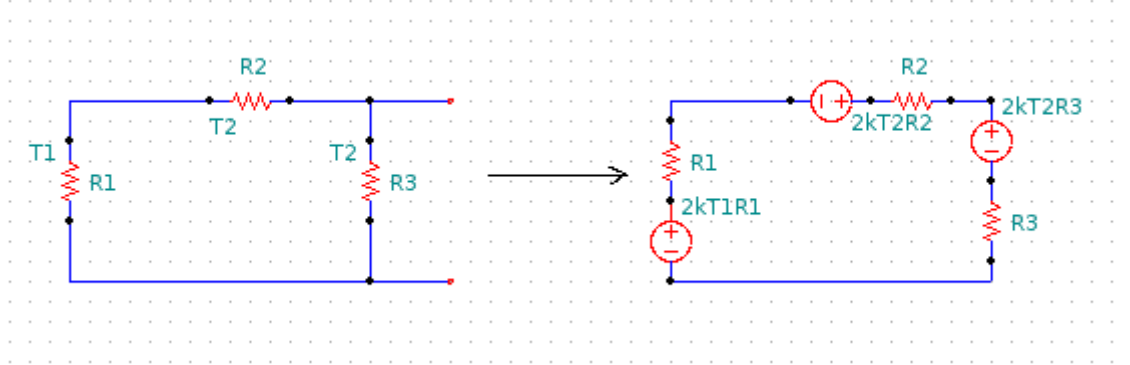
L'espressione della temperatura equivalente di rumore **complessivo riportata in ingresso** vale ovviamente:

$$T_{ei} = T_{eg} + T(A_d - 1) .$$

**Esempio 4:** Calcolo del rumore di un partitore resistivo, visto come quadripolo.

A titolo di esercizio, ricalcoliamo, sulla base dei risultati ora acquisiti, il rumore introdotto dal sistema esaminato nell'Esempio 3 e verifichiamone la coincidenza.

Di seguito riportiamo lo schema circuitale:



Verifichiamo dunque che vale la seguente uguaglianza:

$$T_{eu} = T_1 G_d + T_{esu} \equiv T_{eq}$$

$$\text{con } T_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} \cdot T_1 + \frac{R_2 R_3 + (R_1 + R_2)^2}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} \text{ prima calcolata (Es. 3) } .$$

Dobbiamo quindi calcolare il guadagno disponibile del sistema 2-porte rappresentato dal partitore resistivo \$R\_2 R\_3\$, la cui espressione generale abbiamo ricavato essere:

$$G_d(f) = \frac{|Z_{21}|^2}{|Z_{11} + Z_g|^2} \cdot \frac{R_g}{R_u} .$$

Ci servono quindi i parametri \$Z\$ del partitore, che calcoliamo:

$$\begin{aligned} Z_{11} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{V_1}{I_1} \right]_{I_2=0} = R_2 + R_3 \\ Z_{22} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{V_2}{I_2} \right]_{I_1=0} = R_3 \\ Z_{12} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{V_1}{I_2} \right]_{I_1=0} = R_3 \\ Z_{21} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{V_2}{I_1} \right]_{I_2=0} = R_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora i parametri sistemistici del quadripolo partitore:

$$R_u \equiv Z_u = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} = R_3 - \frac{R_3^2}{R_\Sigma} = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_\Sigma} \Rightarrow G_d(f) = \dots = \frac{R_1 R_3}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} \leq 1$$

Sostituendo infine questa espressione nella formula che relaziona le temperature

equivalenti otteniamo:

$$T_{eu} = T_1 G_d + T_{esu} = \frac{R_1 R_3}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} \cdot T_1 + \left[ 1 - \frac{R_1 R_3}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} \right] \cdot T_2 = \frac{R_1 R_3}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} \cdot T_1 + \frac{R_2 R_3 + (R_1 + R_2)^2}{R_\Sigma (R_1 + R_2)} \cdot T_2$$

c.v.v.

### **Osservazione:**

Guardando l'espressione della temperatura equivalente di rumore di un sistema due porte passivo,  $T_{esu} = T(1 - G_d)$ , si evince che il rumore di un sistema passivo cresce, oltre che al crescere della temperatura, anche con il crescere delle perdite introdotte dal sistema. Questo ci indica che, a meno che tale tipo di rete non debba essere un attenuatore, essa deve introdurre perdite minime, se non si vuole incrementare il rumore che introduce. A questo proposito consideriamo un esempio numerico, analizzando il comportamento di una linea di trasmissione con perdite. Consideriamo quattro valori diversi di attenuazione introdotta dalla linea di trasmissione, supposta a  $T = 300\text{ K}$  e valutiamone la corrispondente  $T_{esu}$ .

La seconda colonna della Tabella riporta i risultati, confermando quanto detto.

Supponiamo poi un generatore con una  $T_{eg} = 600\text{ K}$  applicato alla linea e valutiamo la temperatura equivalente di rumore in uscita dal sistema, riferita al rumore **complessivo**. Si hanno i risultati riportati nella terza colonna:

Att. disponibile	Rumore del sistema	Rumore complessivo
<b>A<sub>d</sub>=10 dB</b>	$T_{esu} = 300 \cdot \left( 1 - \frac{1}{10} \right) = 270\text{ K}$	$T_{eu} = 270 + \frac{600}{10} = 330\text{ K}$
<b>A<sub>d</sub>=3 dB</b>	$T_{esu} = 300 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = 150\text{ K}$	$T_{eu} = 150 + \frac{600}{2} = 450\text{ K}$
<b>A<sub>d</sub>=1 dB</b>	$T_{esu} = 300 \cdot \left( 1 - \frac{1}{1,26} \right) \approx 60\text{ K}$	$T_{eu} = 60 + \frac{600}{1,26} = 540\text{ K}$
<b>A<sub>d</sub>=0.1 dB</b>	$T_{esu} = 300 \cdot \left( 1 - \frac{1}{1,023} \right) \approx 7\text{ K}$	$T_{eu} = 7 + \frac{600}{1,023} = 596\text{ K}$

Quantitativamente si osserva che, con un generatore con temperatura equivalente di rumore pari a  $600\text{ K}$ , mentre i contributi di rumore del sistema 2-porte diminuiscono al diminuire delle perdite del sistema, la situazione in termini di rumore complessivo peggiora, e questo rimane valido in generale se  $T_{eg} > T$ . Questa apparente contraddizione è tale in quanto dobbiamo tenere presente che in un sistema di telecomunicazione, come già richiamato precedentemente, non è importante tanto il livello assoluto del rumore, quanto il valore del rapporto segnale-rumore. Di conseguenza, un sistema con elevate perdite attenuerà molto il rumore in ingresso (generato dagli stadi a monte) ma anche il segnale utile. Viceversa, un sistema con basse perdite attenuerà poco il segnale utile e il rumore degli stadi a monte. Pertanto il rapporto segnale-rumore in uscita da un sistema con perdite sarà sicuramente peggiore di quello in ingresso, ma l'entità della degradazione diminuisce al diminuire delle perdite del sistema. Questa affermazione sarà ulteriormente discussa nel seguito.

## Parametri del rumore dei sistemi 2-porte attivi

Per gli scopi di questo Corso non è necessario analizzare i diversi meccanismi fisici che generano il rumore nei singoli dispositivi attivi presenti in un sistema 2-porte: ci basta poter esprimere il rumore complessivo (termico e non termico) introdotto dal sistema, mediante parametri **sistemistici** del nostro quadripolo attivo, come ad es. la temperatura equivalente di rumore già introdotta, che quantifica il rumore complessivo, sotto specificate condizioni operative del sistema. Storicamente però, nel trattare i sistemi 2-porte **attivi** (quali ad es. gli amplificatori) si è ricorsi ad un parametro alternativo alla temperatura equivalente di rumore, la cosiddetta **cifra di rumore** (*Noise Figure*) del sistema. La cifra di rumore che andiamo a definire è un parametro **puntuale**, nel senso che esso in generale è funzione della frequenza, come lo è la temperatura equivalente di rumore. Essa può essere definita in più modi, tutti equivalenti. Un primo modo, che è quello che preferiamo, definisce la cifra di rumore come il rapporto tra la densità spettrale di potenza media di rumore **complessivo** (sistema + sorgente che lo alimenta) disponibile in uscita dal sistema, e quella che avremmo in uscita **se** il sistema fosse privo di rumore proprio:

$$F(f, T_{eg}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{nd}(f)}{S'_{nd}(f)}, \text{ dove quindi indichiamo con } S_{nd} \text{ la densità spettrale di potenza media}$$

di rumore in uscita dal sistema e  $S'_{nd}$  la densità spettrale di potenza media di rumore che avremmo in uscita nel caso ideale, cioè se il sistema non introducesse rumore e quindi in uscita avessimo solo il rumore generato dalla sorgente.

Per come è definita, la cifra di rumore dipende, oltre che dalla frequenza, **anche** dalla particolare temperatura di rumore della sorgente posta al suo ingresso. Inoltre, trattandosi di sistemi 2-porte attivi, la cifra di rumore dipende, oltre che dalla temperatura a cui il sistema si trova e dall'impedenza della sorgente che lo alimenta, anche dalle condizioni di polarizzazione dei dispositivi attivi in esso presenti.

Dalla definizione data, è possibile ricavare la relazione tra cifra di rumore e temperatura equivalente di rumore:

$$F(f, T_{eg}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{nd}}{S'_{nd}} = \frac{1/2k(T_{eg} + T_{es})G_d}{1/2kT_{eg}G_d} = \frac{T_{eg} + T_{es}}{T_{eg}} = 1 + \frac{T_{es}(f)}{T_{eg}} \geq 0 \text{ dB}$$

Il valore minimo viene raggiunto da un sistema ideale che non introduca rumore e rappresenta quindi un limite inferiore dei sistemi reali.

Un'altra possibile definizione di cifra di rumore, in tutto equivalente a quella appena data, è quella basata sul rapporto segnale-rumore in ingresso rispetto a quello in uscita dal sistema:

$$F'(f, T_{eg}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{SNR_g}{SNR_u}, \text{ dove } SNR_g \text{ indica il rapporto segnale-rumore (puntuale) del bipolo}$$

generatore prima introdotto e  $SNR_u$  l'analogo rapporto segnale-rumore in uscita dal sistema. Espressa in questi termini, la cifra di rumore puntuale assume il significato fisico di indicazione dell'entità della degradazione che il rapporto segnale-rumore subisce a causa dell'inserimento del sistema. Verifichiamo ora che le due definizioni sono equivalenti:

$$F'(f, T_{eg}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{SNR_g}{SNR_u} = \frac{S_{gd}}{1/2kT_{eg}} \cdot \frac{1/2k(T_{eg} + T_{es})G_d}{S_{gd}G_d} = 1 + \frac{T_{es}}{T_{eg}} = F(f, T_{eg}), \text{ come sopra.}$$

E' utile introdurre, per comodità, la **cifra di rumore standard**, definita come quella calcolata nell'ipotesi di una sorgente con temperatura di rumore standard  $T_0 = 290\text{ K}$ . Dalla definizione si ottiene anche la seguente relazione con la temperatura equivalente di rumore:

$$F_0(f) \stackrel{\text{def}}{=} F(f, T_{eg} = T_0) = 1 + \frac{T_{es}(f)}{T_0} \quad \text{e inversamente: } T_{es}(f) = T_0[F_0(f) - 1] .$$

Dalla conoscenza di  $F_0$  si può ovviamente risalire alla  $F(f, T_{eg})$ :

$$F(f, T_{eg}) = 1 + [F_0(f) - 1] \cdot \frac{T_0}{T_{eg}}$$

Ovviamente,  $F_0$  indica l'entità della degradazione del rapporto segnale-rumore **solo se** il rumore della sorgente in termini di temperatura equivalente è pari a 290 K.

Infine, un'altra possibile definizione di cifra di rumore fa riferimento al rapporto tra gli spettri di potenza **assorbita** dal carico, anziché tra gli spettri di potenza **disponibile**. Per il parametro cifra di rumore puntuale, le due definizioni coincidono ancora:

$$F''(f, T_{eg}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{nc}}{S'_{nc}} = \frac{S_{nd} \cdot M_u}{S'_{nd} \cdot M_u} = F(f, T_{eg}) .$$

dove  $M_u$  indica il fattore di adattamento tra sistema 2-porte e carico, prima definito.

Ricaviamo ora l'espressione della potenza di rumore effettivamente assorbita dal carico, in funzione della temperatura equivalente oppure della cifra di rumore del sistema:

$$P_{nc} = \int_0^\infty S_{nd}(f) M_u(f) df = \int_0^\infty k [T_{eg}(f) + T_{es}(f)] G_d(f) \cdot \frac{4 R_u(f) R_c(f)}{|Z_u(f) + Z_c(f)|^2} df$$

$$P_{nc} = \int_0^\infty k [ [F_0(f) - 1] T_0 + T_{eg}(f) ] \cdot G_d(f) \cdot \frac{4 R_u(f) R_c(f)}{|Z_u(f) + Z_c(f)|^2} df$$

**Osservazione:** se e solo se  $T_{eg} = T_0 = 290\text{ K}$  e c'è adattamento di potenza possiamo scrivere la semplice espressione:

$$P_{nc} = k T_0 \int_0^\infty F_0(f) G_d(f) df .$$

Proviamo ora ad esprimere la cifra di rumore di un sistema passivo a temperatura  $T$ :

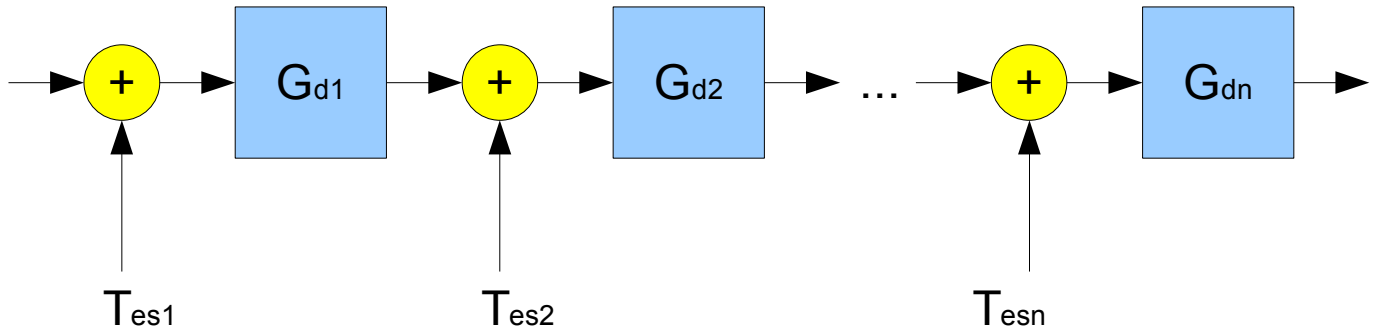
$$F(f, T_{eg}) = 1 + \frac{T_{es}}{T_{eg}} = 1 + \frac{T[A_d(f) - 1]}{T_{eg}} ;$$

$$\text{Caso particolare: se } T_{eg} = T \Rightarrow F(f, T_{eg}) = 1 + \frac{T[A_d(f) - 1]}{T} \equiv A_d(f)$$

L'ultima espressione conferma quanto precedentemente detto: all'aumentare dell'attenuazione introdotta da uno stadio del nostro sistema di telecomunicazione, il rapporto segnale-rumore del sistema peggiora.

## Formula di Friis

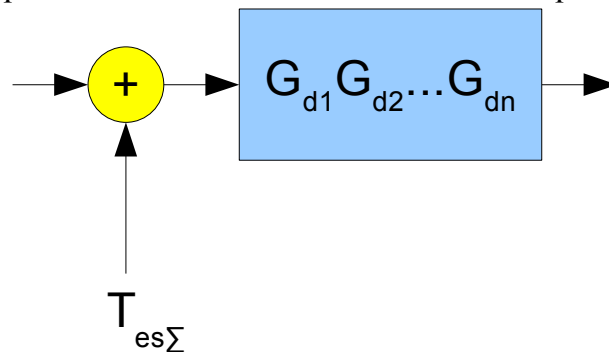
Supponiamo di avere un certo numero di blocchi LTI connessi in cascata, ognuno con la sua componente di rumore:



Possiamo riportare tutti i contributi di rumore all'ingresso della cascata. Per farlo dobbiamo dividere ciascun contributo per il guadagno disponibile di tutti i blocchi a monte, ottenendo la nota **formula di Friis**, espressa in termini di temperature equivalenti:

$$T_{es\Sigma}(f) = T_{es1}(f) + \frac{T_{es2}(f)}{G_{d1}(f)} + \frac{T_{es3}(f)}{G_{d1}(f)G_{d2}(f)} + \dots + \frac{T_{esn}(f)}{G_{d1}(f)G_{d2}(f)G_{d3}(f)\dots G_{d(n-1)}(f)} \quad .$$

Da questa formula otteniamo l'importante risultato di poter schematizzare una qualsiasi cascata di un qualunque numero di blocchi LTI rumorosi in questo modo:



Ricordando che  $T_{esi}(f) = [F_{oi}(f) - 1]T_0$ , si ottiene la nota formula di Friis espressa in termini di cifra di rumore (standard):

$$F_{0\Sigma}(f) = F_{01}(f) + \frac{F_{02}(f) - 1}{G_{d1}(f)} + \dots + \frac{F_{0n}(f) - 1}{G_{d1}(f)G_{d2}(f)\dots G_{d(n-1)}(f)}$$

Si osserva che il rumore generato da una cascata di blocchi dipende in modo prevalente solo dal rumore introdotto dal primo blocco, se questo è dotato di guadagno elevato. Conseguentemente, se vogliamo contenere il rumore introdotto da una cascata di sistemi 2-porte, è opportuno che il primo blocco abbia **bassa cifra di rumore** (pesa per intero nella formula di Friis) ed **elevato guadagno**. Un sistema con tali caratteristiche viene indicato con l'acronimo LNA (*Low Noise Amplifier*).

All'opposto, partire con un primo blocco della cascata a elevata cifra di rumore e guadagno inferiore all'unità (come ad es. un attenuatore, oppure un *mixer* passivo) è da sconsigliare, se vogliamo contenere il rumore.

Le considerazioni fatte valgono per connessioni di più blocchi in cascata che non prevedano controreazioni tra i vari blocchi, come sarà meglio chiarito quando tratteremo dei ricevitori.

## Parametri di rumore medi

Per caratterizzare sistemisticamente il rumore introdotto dai sistemi 2-porte, oltre ai parametri puntuali  $F_0(f)$  e  $T_{es}(f)$ , si possono definire due corrispondenti parametri medi, ovvero non dipendenti dalla frequenza:  $F_0$  e  $T_{es}$ . Questi semplici parametri possono essere sufficienti nel caso di sistemi passa-banda a banda stretta.

In analogia a quanto visto per l'analogo parametro puntuale, la definizione della **cifra di rumore media standard** è la seguente:

$F_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_{nd}}{P'_{nd}}$ , dove  $P_{nd}$  indica la potenza media di rumore disponibile in uscita dal sistema e

$P'_{nd}$  la potenza media di rumore disponibile che si avrebbe in uscita se il sistema fosse **ideale** dal punto di vista del rumore, cioè se l'unica fonte di rumore in uscita fosse quello originato dalla sorgente in ingresso al sistema 2-porte. Ricordiamo per confronto che la cifra di rumore puntuale era stata definita come rapporto tra densità spettrali di potenze disponibili, ottenendo per l'appunto un parametro funzione della frequenza.

Se la sorgente di rumore ha una temperatura equivalente di rumore **standard** ( $T_{eg}(f) = T_0$ ), la potenza media disponibile di rumore in uscita al sistema può essere espressa, dalla definizione precedente, come:

$$P_{nd} = F_0 \cdot P'_{nd} = F_0 \int_0^\infty k T_0 G_d(f) df = k T_0 F_0 \int_0^\infty G_d(f) df.$$

Se definiamo **banda equivalente di rumore** di un quadripolo l'espressione:

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^\infty G_d(f) df}{G_{d0}}, \text{ dove } G_{d0} \text{ è il guadagno disponibile massimo (di solito circa a centro}$$

banda per sistemi passa-banda), allora, grazie a questa definizione, l'espressione precedente può essere scritta:

$$P_{nd} = k T_0 F_0 G_{d0} B_n.$$

Questa semplice espressione rappresenta la potenza media **disponibile** di rumore in uscita dal sistema, **nell'ipotesi** che la sorgente che lo alimenta abbia una temperatura equivalente di rumore pari alla temperatura standard  $T_0 = 290 \text{ K}$ . Quindi essa rappresenta l'effettiva potenza media di rumore sul carico **solo se** siamo in condizione di **massimo trasferimento di potenza in uscita**, e la sorgente si trova a temperatura equivalente **standard**. In tali ipotesi non è necessario conoscere la cifra di rumore puntuale, ma è sufficiente la cifra di rumore media  $F_0$  per valutare la potenza media di rumore sul carico.

La potenza media disponibile di rumore in uscita generata dal solo sistema 2-porte può essere trovata per differenza e vale quindi:

$$P_{nd} - P'_{nd} = k T_0 F_0 G_{d0} B_n - k T_0 G_{d0} B_n = k T_0 (F_0 - 1) G_{d0} B_n.$$

Da questa possiamo ottenere l'espressione di  $P_{nd}$  in corrispondenza di una qualsiasi temperatura  $T_{eg}$ , sommando i due contributi:  $P_{nd} = k T_0 (F_0 - 1) G_{d0} B_n + \int_0^\infty k T_{eg}(f) \cdot G_d(f) df$ .

Se la temperatura di rumore del generatore può essere considerata costante ( $T_{eg}(f) \simeq T_{eg}$ ), almeno nella banda in cui il guadagno del sistema è significativamente diverso da zero, l'espressione precedente si semplifica:

$$P_{nd} = k T_0 (F_0 - 1) G_{d0} B_n + k T_{eg} G_{d0} B_n = k [T_0 (F_0 - 1) + T_{eg}] G_{d0} B_n.$$

Riassumendo, ai fini del calcolo della potenza media disponibile del rumore del quadripolo,



è sufficiente conoscere la sola cifra di rumore media; inoltre, ai fini del calcolo della potenza media disponibile del rumore complessivo, se  $T_{eg}$  è costante, delle caratteristiche di trasferimento del sistema è sufficiente conoscere solo il guadagno  $G_{d0}$  e la banda equivalente di rumore. Viceversa, se vogliamo calcolare le potenze medie di rumore **su carico generico**, dobbiamo conoscere come già visto il parametro di rumore puntuale e i parametri puntuali del trasferimento di potenza.

Abbiamo precedentemente visto anche come, per i parametri puntuali, la definizione di cifra di rumore riferita alle densità di potenza **disponibili** fosse equivalente alla definizione basata sulle densità di potenza su un **generico** carico:

$$F_0(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{nd}(f)}{S'_{nd}(f)} \equiv \frac{S_{nd}(f)M_u(f)}{S'_{nd}(f)M_u(f)} = \frac{S_{nc}(f)}{S'_{nc}(f)} .$$

Le due definizioni **non** si equivalgono invece per i parametri medi: se infatti definiamo una cifra di rumore media riferendoci alle potenze medie calcolate sul carico,  $F'_0$ , si vede che:

$$F'_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_{nc}}{P'_{nc}} = \frac{\int_0^\infty k T_0 F_0(f) G_d(f) M_u(f) df}{\int_0^\infty k T_0 G_d(f) M_u(f) df} \neq F_0 \text{ per via dell'integrale.}$$

**Tuttavia**, se si può considerare costante la cifra di rumore puntuale  $F_0(f)$ , gli integrali sopra scritti si semplificano e si ha equivalenza tra le due definizioni:  $[F'_0]_{F_0(f) \simeq F_0} \equiv F_0$ . **Anche** nel caso che  $M_u(f)$  sia costante, si ha uguaglianza tra le due definizioni.

Ricaviamo ora la relazione tra la cifra di rumore media e la cifra di rumore puntuale:

$$F_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_{nd}}{P'_{nd}} = \frac{\int_0^\infty k [T_0 + T_{es}(f)] G_d(f) df}{\int_0^\infty k T_0 G_d(f) df} = \frac{k T_0 \int_0^\infty F_0(f) G_d(f) df}{k T_0 \int_0^\infty G_d(f) df} = \frac{\int_0^\infty F_0(f) \cdot G_d(f) df}{B_n G_{d0}}$$

Si osserva che se, almeno nella banda in cui il guadagno  $G_d(f)$  è significativo, la cifra di rumore puntuale  $F_0(f)$  può essere considerata costante, ( $F_0(f) \simeq F_0$ ) i due parametri vengono a **coincidere** numericamente.

È utile introdurre anche una **temperatura equivalente di rumore media**. In particolare ci interessa una definizione della temperatura equivalente media tale da dar luogo ad una relazione con la cifra di rumore media uguale a quella valida per gli analoghi parametri puntuali:

$$F_0(f) = 1 + \frac{T_{es}(f)}{T_0} \Leftrightarrow T_{es}(f) = T_0 [F_0(f) - 1] .$$

Questa definizione è la seguente:  $T_{es} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^\infty T_{es}(f) G_d(f) df}{B_n G_{d0}}$ . Grazie infatti ad essa, si può

introdurre il parametro  $T_{es}$  nell'espressione della potenza media disponibile di rumore:

$$P_{nd} = k T_{es} G_{d0} B_n + \int_0^\infty k T_{eg}(f) G_d(f) df \text{ e confrontandola con la precedente espressione di}$$

$P_{nd}$  in funzione di  $F_0$ , si ricava la relazione voluta:  $T_{es} = T_0 (F_0 - 1)$  e inversamente:

$F_0 = 1 + T_{es}/T_0$ . Anche in questo caso, se la temperatura equivalente di rumore del generatore  $T_{eg}(f)$  può essere considerata costante almeno nella banda in cui il guadagno del sistema è significativamente diverso da zero, ( $T_{eg}(f) \simeq T_{eg}$ ), l'espressione di  $P_{nd}$  si semplifica:  $P_{nd} = k (T_{es} + T_{eg}) G_{d0} B_n$ .

È interessante anche valutare se la cifra di rumore media possa essere definita **equivalentemente** in termini di rapporti segnale/rumore (in questo caso in termini di potenze medie), come abbiamo visto essere possibile per la cifra di rumore puntuale.

A tal fine, se definiamo il parametro  $F''_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{SNR_g}{SNR_u}$ , possiamo esprimerlo:

$$F''_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{SNR_g}{SNR_u} = \frac{\int_0^\infty S_{gd}(f) df}{kT_0 B_n} \cdot \frac{kT_0 B_n F_0 G_{d0}}{\int_0^\infty S_{gd}(f) G_d(f) df} = \frac{G_{d0} \int_0^\infty S_{gd}(f) df}{\int_0^\infty S_{gd}(f) G_d(f) df} \cdot F_0.$$

**Osservazione:** per dare significato fisico al confronto tra i due rapporti segnale-rumore, abbiamo valutato la potenza di rumore in ingresso nella banda equivalente del quadripolo.

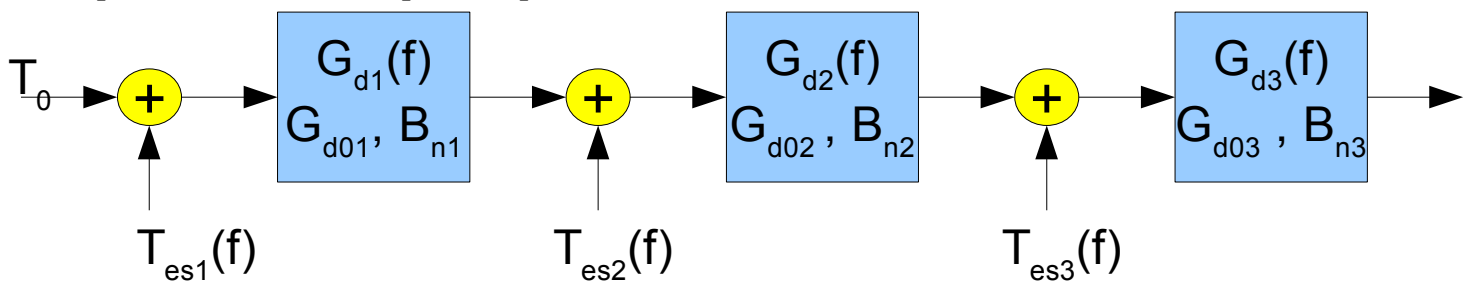
Dall'espressione scritta si osserva che se e solo se il guadagno disponibile del quadripolo si può considerare costante almeno nella banda in cui il segnale è significativamente diverso da zero ( $G_d(f) \approx G_{d0}$ ), allora i due parametri coincidono:

$$[F''_0]_{G_d(f) \approx G_{d0}} = \frac{G_{d0} \int_0^\infty S_{gd}(f) df}{G_{d0} \int_0^\infty S_{gd}(f) df} \cdot F_0 \equiv F_0. \text{ Normalmente però avviene che } G_d(f) \leq G_{d0},$$

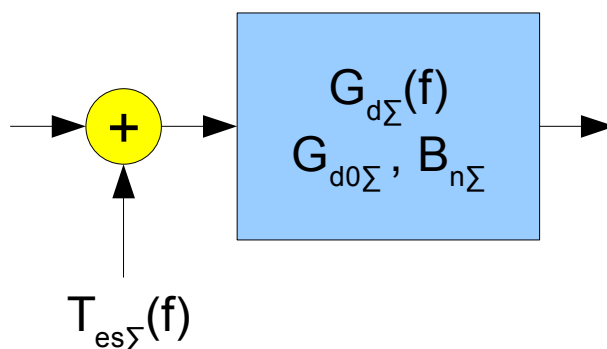
per cui si può dire che la cifra di rumore media rappresenta una valutazione un po' ottimistica della degradazione del rapporto segnale/rumore causata dall'introduzione del sistema: in realtà la effettiva degradazione è un po' maggiore di quanto indichi il valore della cifra di rumore media, mentre la cifra di rumore puntuale, invece, rappresenta sempre una valutazione precisa dell'entità di tale degradazione.

### Formula di Friis e cifre di rumore medie

È interessante verificare se si può applicare la formula di Friis ricavata per i parametri puntuali al caso dei parametri medi. A tal fine, consideriamo una cascata di sistemi due-porte, limitandoci a 3 per semplicità di scrittura:



Vogliamo rappresentare questa cascata con un unico sistema equivalente:



In riferimento a questo blocco complessivo abbiamo definito i seguenti parametri:

$$G_{d\Sigma}(f) \stackrel{\text{def}}{=} G_{d1}(f) G_{d2}(f) G_{d3}(f)$$

$$G_{d0\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} G_{d01} G_{d02} G_{d03}$$

$$B_{n\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^\infty G_{d\Sigma}(f) df}{G_{d0\Sigma}}$$

La cifra di rumore media **complessiva** si esprime, dalla definizione:

$$F_{0\Sigma} = \frac{\int_0^\infty k [T_0 + T_{es1}(f)] G_{d\Sigma}(f) df + \int_0^\infty k T_{es2}(f) G_{d2}(f) G_{d3}(f) df + \int_0^\infty k T_{es3}(f) G_{d3}(f) df}{\int_0^\infty k T_0 G_{d\Sigma}(f) df}$$

Dall'espressione scritta si deduce che in generale la formula di Friis non è valida se si sostituiscono semplicemente i parametri medi a quelli puntuali.

Osserviamo però che nell'ipotesi di avere temperature equivalenti di rumore circa costanti ( $T_{esi}(f) \simeq T_{es i}(f_0) \simeq T_{es i}$ ), si può scrivere l'espressione precedente nella forma:

$$F_{0\Sigma} = 1 + \underbrace{\frac{T_{es1}}{T_0}}_{F_{01}} + \frac{\int_0^\infty G_{d2}(f) G_{d3}(f) df}{\int_0^\infty G_{d\Sigma}(f) df} \cdot \underbrace{\frac{T_{es2}}{T_0}}_{F_{02}-1} + \frac{\int_0^\infty G_{d3}(f) df}{\int_0^\infty G_{d\Sigma}(f) df} \cdot \underbrace{\frac{T_{es3}}{T_0}}_{F_{03}-1}$$

Si comincia a intravedere una certa somiglianza con la formula di Friis espressa con i parametri di rumore puntuali. Introduciamo ora due nuove bande equivalenti di rumore:

$$B_{n23} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^\infty G_{d2}(f) G_{d3}(f) df}{G_{d02} G_{d03}} \quad ; \quad B_{n3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^\infty G_{d3}(f) df}{G_{d03}} \quad ; \quad \text{sostituendo queste espressioni nella}$$

relazione precedente, possiamo scrivere:

$$F_{0\Sigma} = F_{01} + (F_{02} - 1) \cdot \frac{B_{n23} G_{d02} G_{d03}}{G_{d01} G_{d02} G_{d03} B_{n\Sigma}} + (F_{03} - 1) \cdot \frac{B_{n3} G_{d03}}{G_{d01} G_{d02} G_{d03} B_{n\Sigma}}$$

Se ora **supponiamo** anche che tutte le bande equivalenti di rumore introdotte siano circa uguali, ipotesi che si può considerare valida se le bande dei vari sistemi della connessione in cascata vanno via via restringendosi dall'ingresso all'uscita, possiamo scrivere infine:

$$F_{0\Sigma} = F_{01} + \frac{F_{02} - 1}{G_{d01}} + \frac{F_{03} - 1}{G_{d01} G_{d02}} \quad .$$

Riassumendo possiamo dunque affermare che la formula di Friis vale anche utilizzando i parametri medi **se e solo se**  $T_{esi}(f) \simeq T_{es i}(f_0) \simeq T_{es i}$  **e**  $B_{n3} \simeq B_{n23} \simeq B_{n\Sigma}$  .