Appunti dal Corso di
Sistemi di Telecomunicazione A.A. 2008/09
Prof. Mario Fossi

CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI 2-PORTE

Introduzione al Corso

Scopo del Corso è quello di fornire nella **prima parte** una serie di conoscenze generali - di tipo sistemistico - che permettano di analizzare e modellizzare un generico sistema di radiocomunicazione. Nella **seconda parte** sono illustrati gli elementi principali di alcuni sistemi di comunicazione quali la Radio e la Televisione analogica, i Ponti radio terrestri e satellitari.
Per iniziare, consideriamo lo schema a blocchi nella forma più generale di un sistema di telecomunicazione:

La sorgente di informazione è da considerarsi esterna al sistema di telecomunicazione, così come ovviamente l'utente finale dell'informazione. Tutti i blocchi del sistema sono del tipo a **due porte**, una di ingresso ed una di uscita. L'ingresso del "trasmettitore" coincide con l'ingresso dell'intero sistema. Similmente, l'uscita del "ricevitore" coincide con l'uscita dell'intero sistema e vede a valle l'utente finale. L'ingresso del canale coincide con l'uscita del trasmettitore e l'uscita del canale con l'ingresso del ricevitore.
In questo Corso ci occupiamo in particolare di sistemi di **radio**comunicazione, cioè consideriamo come canale di trasmissione il "**canale radio**". Per canale radio intendiamo l'insieme dell'**antenna trasmittente**, del **dielettrico** in cui si propagano le onde radio e dell'**antenna ricevente**.

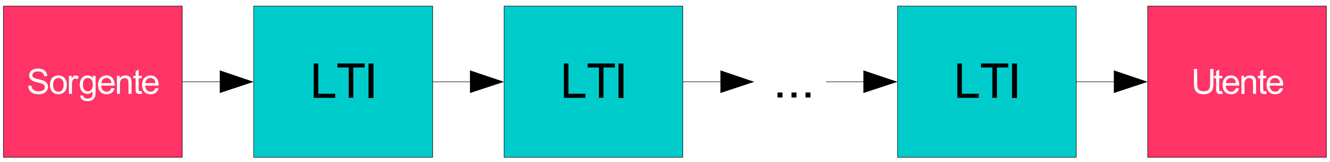
Canale radio

Tra gli altri, possiamo individuare due tipi di canale radio: **terrestre** e **satellitare**. Il canale radio si definisce terrestre quando le antenne trasmittenti e riceventi sono tutte sulla superficie terrestre e l'onda radio trasmessa rimane praticamente confinata

all'interno dell'atmosfera; il canale si definisce satellitare quando è presente almeno un ripetitore posizionato su un satellite in orbita entro o fuori l'atmosfera terrestre.
Alcuni canali di trasmissione possono essere considerati - sotto opportune condizioni - del tipo **LOS** (*Line Of Sight*), nel senso che ogni coppia di antenne trasmittente e ricevente opera in assenza di significativi effetti da parte di ostacoli tra esse interposti o comunque vicini. Di conseguenza la propagazione si può approssimare - a meno di alcuni effetti che saranno discussi nell'ultima parte del Corso - come propagazione nello "spazio libero" (vuoto). Citiamo tra questi ad es. i canali relativi ai collegamenti satellitari; anche le tratte di ponte radio terrestre a microonde comunicano in modo LOS, almeno nei periodi di tempo in cui sono assenti fenomeni di *fading*. I canali radio dei sistemi di telefonia mobile cellulare, invece, sperimentano normalmente condizioni di tipo **NOLOS** (*NOt Line Of Sight*), in quanto le relative antenne non sono normalmente in visibilità ed inoltre sussistono contemporaneamente più percorsi propagativi tra le stesse. Gli effetti di tale tipo di propagazione (*fading*) non sono oggetto di studio in questo Corso.

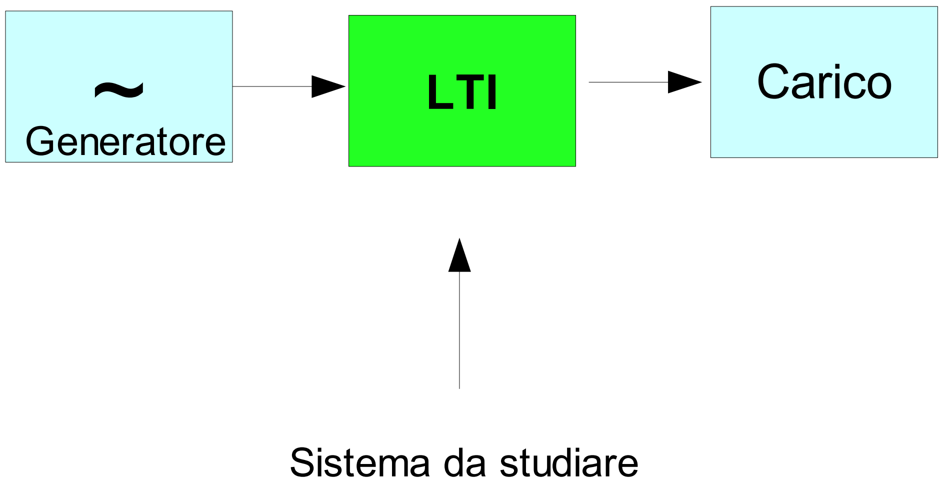
Circuito equivalente di un sistema 2-porte LTI

Analizzando la struttura di un generico sistema di telecomunicazione, possiamo osservare come esso sia prevalentemente composto di un certo numero di sistemi del tipo a **due porte** o quadripoli, connessi in cascata, secondo quanto illustrato in figura:

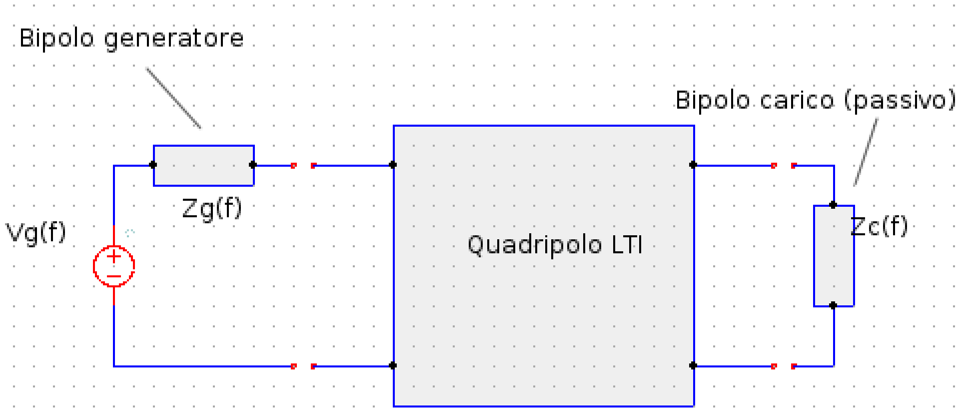


A parte il sistema "canale radio", tali sistemi sono costituiti da opportune connessioni di componenti elettrici/elettronici attivi e/o passivi, lineari e tempo-invarianti. Ciascuna rete 2-porte è accessibile dall'esterno, per quanto riguarda i segnali utili, da due connettori ("porte") normalmente riferiti come ingresso e uscita del sistema.
Normalmente sono presenti sia quadripoli **attivi** (nel senso che contengono generatori comandati, come avviene ad es. per gli amplificatori) che **passivi** (combinazioni di resistenze, induttanze e capacità, come ad es. linee di trasmissione, filtri, attenuatori). E' quindi opportuno analizzare alcune formalizzazioni analitiche del comportamento di tali sistemi, al fine di poterne valutare le prestazioni sia nei confronti dei segnali utili che li attraversano, che di quelli indesiderati, tra cui quelli generati dal sistema stesso, quali ad es. il rumore e le distorsioni.
L'ipotesi di base che assumiamo per lo studio dei singoli blocchi è che questi possano essere considerati come sistemi di tipo **lineare** e **tempo-invariante** (**LTI**). La linearità è richiesta per non introdurre distorsione non lineare nel segnale (come armoniche o prodotti di intermodulazione), ma tutt'al più distorsione lineare (moltiplicazione del segnale per una costante e/o introduzione di un ritardo di tempo). La tempo-invarianza è

un'ipotesi che può considerarsi quasi sempre verificata, salvo che nel sistema canale radio; tuttavia, per periodi di tempo sufficientemente limitati, anche canali radio tempo-varianti possono essere considerati tempo-invarianti, ipotesi che consente di semplificare notevolmente la caratterizzazione di essi. Peraltro come già accennato lo studio dei canali radio tempo-varianti non è oggetto di questo Corso.
Consideriamo dunque un **generico** sistema 2-porte della connessione in cascata prima illustrata: l'insieme dei blocchi che esso vede a monte della porta di ingresso, può essere rappresentato come un unico bipolo generatore equivalente (ad es. secondo quanto consente il teorema di Thévenin), mentre tutto ciò che il sistema 2-porte vede a valle (della porta di uscita), può essere rappresentato come un unico bipolo passivo, nel senso di privo di generatori indipendenti. Questo è vero tenuto conto che nelle nostre applicazioni i segnali di interesse (l'informazione) si propagano da sinistra verso destra.
Possiamo quindi studiare il nostro generico sistema 2-porte LTI nella tipica connessione indicata in figura:

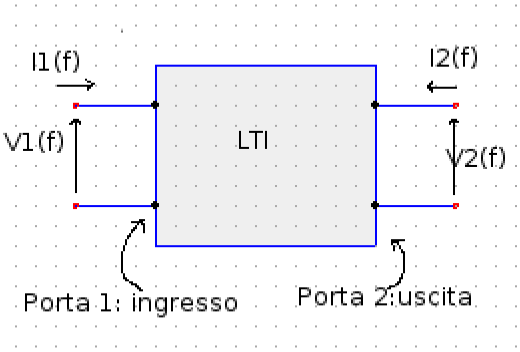


Possiamo anche rappresentare la connessione in modo più "circuitale", come indicato nella figura seguente, dove la caratterizzazione adottata è nel dominio della frequenza:



Il bipolo generatore equivalente è stato ricavato utilizzando il teorema di Thévenin, quindi è stato rappresentato mediante un generatore ideale di tensione $V_g(f)$ con in serie

l'impedenza $Z_g(f)$. Avendo utilizzato il teorema di Thévenin, risulta conveniente - per caratterizzare il sistema 2-porte - usare un modello basato sui **parametri *Z*** (impedenza). Esistono come è noto molte altre famiglie di parametri possibili, come i parametri *S* (scattering), i parametri *Y* (ammettenza) o i parametri ibridi (per reti attive), ma per la trattazione che segue è vantaggioso e sufficiente utilizzare i parametri *Z*.
Per definire e calcolare i parametri *Z* di un quadripolo, consideriamo il seguente modello circuitale:



Ponendoci da un punto di vista del tutto generale per quanto riguarda ambedue le connessioni, consideriamo come segnali in <u>ingresso</u> al sistema le due correnti I_1, I_2 e come segnali in <u>uscita</u> le due tensioni V_1, V_2. Supponiamo dapprima di alimentare **solo** la porta 1, mediante un generatore ideale di corrente I_1 (resistenza interna infinita). Per l'ipotesi fatta di linearità del sistema, potremo scrivere:

$$V_1(f)=Z_{11}(f)I_1(f)$$

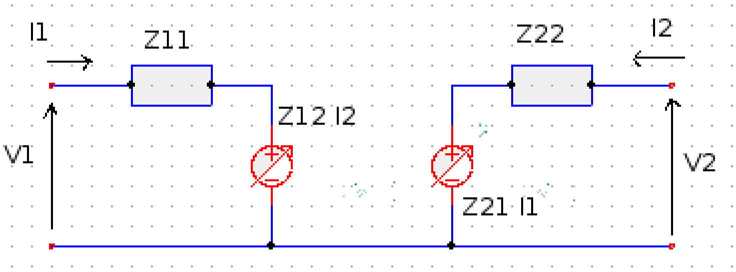
Il coefficiente Z_{11} ha ovviamente le dimensioni di un'impedenza (Ω) ed è detto **impedenza di ingresso <u>a vuoto</u>** del sistema, perché corrisponde al rapporto $\frac{V_1}{I_1}$ <u>quando</u> la porta 2 è aperta. Z_{11} è il primo dei quattro parametri *Z*; essi sono scritti tutti nella forma Z_{ij}, dove *i* indica la porta sulla quale è misurata la tensione e *j* indica la corrente alla quale si riferisce il parametro. Infatti come detto il parametro Z_{11} è il rapporto tra la tensione sulla porta 1 e la corrente entrante nella porta 1. Sempre secondo questa convenzione, il rapporto tra la tensione sulla porta 2 e la corrente in ingresso alla porta 1 sarà Z_{21} e potremo scrivere, sempre per la linearità del sistema: $V_2(f)=Z_{21}(f)I_1(f)$. Possiamo chiamare Z_{21} **impedenza di trasferimento diretto** del sistema. Se ora alimentiamo la porta 2 con un generatore ideale di corrente I_2 <u>tenendo aperta</u> la porta 1 potremo scrivere, similmente al caso precedente: $V_2(f)=Z_{22}(f)I_2(f)$ e $V_1(f)=Z_{12}(f)I_2(f)$. Sempre in analogia al caso precedente, chiamiamo Z_{22} **impedenza di uscita <u>a vuoto</u>** del sistema, e Z_{12} **impedenza di trasferimento inverso**.
Alimentando le due porte contemporaneamente, possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti (sicuramente valido per un sistema LTI), ottenendo le seguenti relazioni generali ingresso-uscita del sistema, espresse mediante i parametri *Z*:

$$V_1=Z_{11}I_1+Z_{12}I_2$$
$$V_2=Z_{21}I_1+Z_{22}I_2 \quad .$$

Per come sono definiti, un'importante caratteristica dei parametri Z è quella di dipendere, (oltre che in generale dalla frequenza) **esclusivamente** dalle caratteristiche interne del sistema, di essere cioè indipendenti dalle caratteristiche degli altri sistemi con cui esso è connesso.
Dato un quadripolo, si possono misurare i suoi parametri Z in modo diretto:

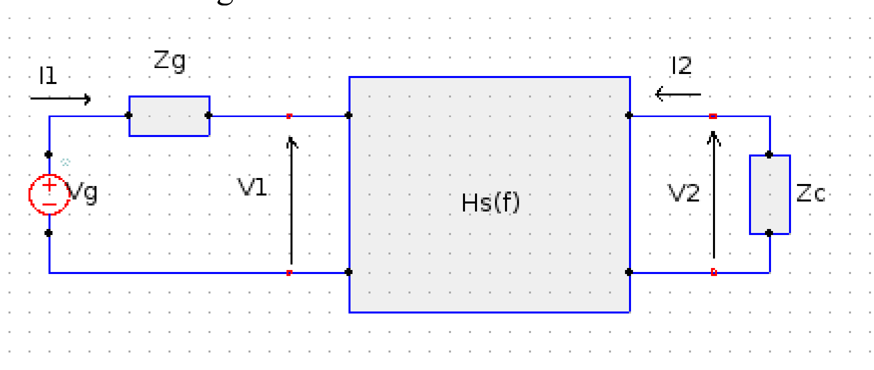
$$Z_{11}(Z_{22})=\frac{V_1}{I_1}\left(\frac{V_2}{I_2}\right) con\, la\, porta\, 2(1)\, aperta \quad ; \quad Z_{21}(Z_{12})=\frac{V_2}{I_1}\left(\frac{V_1}{I_2}\right) con\, la\, porta\, 2(1)\, aperta$$

Sulla base delle relazioni generali scritte, possiamo tracciare un circuito equivalente del quadripolo in funzione dei suoi parametri Z, dove sono presenti due impedenze e due generatori di tensione, comandati in corrente:



Questo circuito equivalente è di tipo "**circuitale**".
Per gli scopi di questo Corso ci interessa anche ricavare un circuito equivalente che possiamo definire di tipo "**sistemistico**", precisamente ci interessa trovare un circuito equivalente dove i parametri implicati siano:

- l'**impedenza di ingresso** (non a vuoto) $Z_i(f)$;
- l'**impedenza di uscita** (non a vuoto) $Z_u(f)$;
- la **funzione di trasferimento** $H_s(f)$, definita come rapporto tra tensione di uscita **a vuoto** e tensione di ingresso.



Per esprimere i 3 parametri sistemistici indicati, applichiamo la legge di Kirchhoff alle maglie di ingresso e di uscita del sistema:

$$V_g=Z_g I_1+V_1 \quad ; \quad V_2=-Z_c I_2 \quad .$$

Per semplicità di scrittura, d'ora in poi nelle relazioni scritte omettiamo la dipendenza dalla frequenza.
Il sistema + carico è visto dal generatore come un carico complessivo di impedenza:

$Z_i \overset{\text{def}}{=} \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$ "**impedenza di ingresso**" del sistema; dall'equazione della maglia di uscita abbiamo:

$V_2 = -Z_c I_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}+Z_c}$.

Sostituendo quest'ultima nell'espressione di Z_i si ottiene: $Z_i = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} = \boldsymbol{Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22}+Z_c}}$.

Si osserva che Z_i dipende in generale oltre che dal sistema, **anche** dall'impedenza di carico Z_c.

Si possono avere due condizioni limite notevoli:

- $Z_{21}=0$ oppure $Z_{12}=0 \Rightarrow Z_i = Z_{11}$
- Al crescere del carico verso la condizione di circuito aperto $Z_c \rightarrow \infty \Rightarrow Z_i \rightarrow Z_{11}$, coerentemente con la definizione di impedenza di ingresso a vuoto.

Cortocircuitando il generatore di ingresso e alimentando il sistema dalla porta di uscita, con ragionamento del tutto analogo ricaviamo l'"**impedenza di uscita**" del sistema: $Z_u \overset{\text{def}}{=} \frac{V_2}{I_2} = \boldsymbol{Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11}+Z_g}}$, dipendente in generale oltre che dal sistema anche dall'impedenza del generatore Z_g. Anche qui ci sono i due casi limite notevoli (duali):

- $Z_{12}=0$ oppure $Z_{21}=0 \Rightarrow Z_u = Z_{22}$
- $Z_g \rightarrow \infty \Rightarrow Z_u \rightarrow Z_{22}$ (impedenza di uscita a vuoto)

Delle condizioni limite elencate, nelle applicazioni è interessante la $Z_{12}=0$, in quanto essa risulta verificata con buona approssimazione nei sistemi amplificatori.

Per calcolare l'espressione della "**funzione di trasferimento"** $H_s(f)$ è necessario utilizzare il teorema di Thévenin: osservato dalla porta di uscita, tutto ciò che è a monte (sistema + generatore) è schematizzabile come un generatore ideale di tensione V_{eq} con in serie un'impedenza Z_{eq} , che abbiamo già valutata: $Z_{eq} = Z_u$; per calcolare la tensione V_{eq} bisogna aprire la maglia di uscita: $I_2 = 0 \Rightarrow V_1 = Z_{11} I_1, V_2 = Z_{21} I_1$. Osserviamo che $V_{eq} = V_2|_{I_2=0} = Z_{21} I_1$. Applicando la legge di Kirchhoff alla maglia di ingresso otteniamo: $V_g = Z_g I_1 + V_1 \Rightarrow V_g = (Z_g + Z_{11}) I_1 \Rightarrow V_{eq} = \boldsymbol{\frac{Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} V_g}$.

Ricaviamo ora $H_s(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{V_{eq}(f)}{V_1(f)}$; abbiamo già ricavato il valore del rapporto $\frac{V_{eq}}{V_g}$, quindi è sufficiente trovare V_g in funzione di V_1.

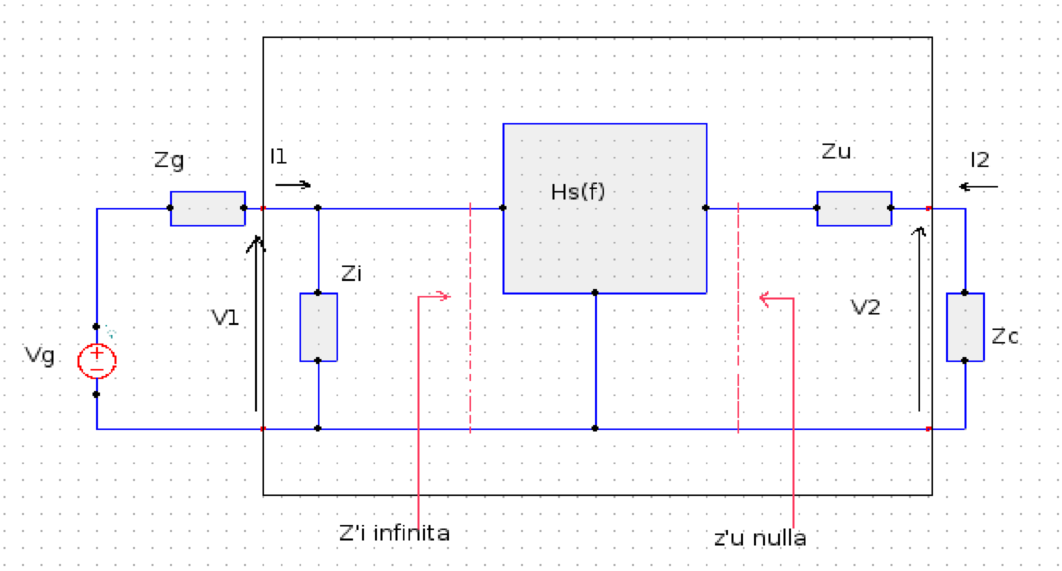
Definiamo a tal fine altre due funzioni di trasferimento:

$H_i(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{V_1(f)}{V_g(f)} = \frac{Z_i}{Z_i + Z_g}$ e $H_u(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{V_2(f)}{V_{eq}(f)} = \frac{Z_u}{Z_u + Z_c}$, rispettivamente funzione di trasferimento del partitore in ingresso e di quello in uscita (**a porte <u>non</u> aperte**). Quindi:

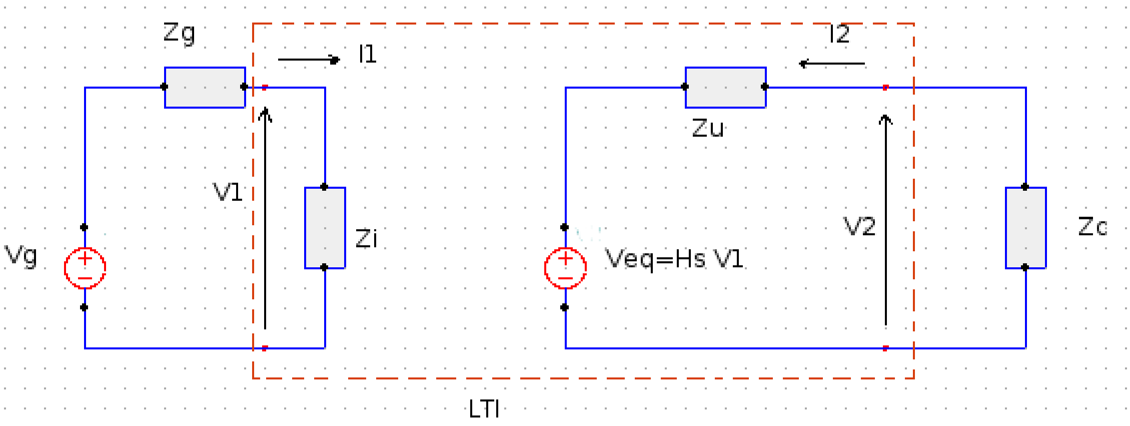
$$V_{eq} = \frac{Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} \cdot V_g = \frac{Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} \cdot \frac{Z_i + Z_g}{Z_i} V_1 \Rightarrow H_s(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{V_{eq}}{V_1} = \frac{Z_{21}}{Z_i} \frac{(Z_i + Z_g)}{(Z_g + Z_{11})}$$

Si osserva come in generale $H_s(f)$ dipende non solo dalle caratteristiche interne del

sistema, ma anche da quelle del generatore e del carico su cui è chiuso.
Siamo ora in grado di ricavare un nuovo circuito equivalente, di tipo **sistemistico** come desiderato:



Il blocco due porte di funzione di trasferimento $H_s(f)$ è da considerarsi **ideale**, nel senso di avere impedenza di ingresso **infinita** e impedenza di uscita **nulla**, perché le impedenze di ingresso e di uscita sono già esplicitate in Z_i e Z_u. Valendo queste 2 ipotesi, esso è visto dalla porta di uscita come un generatore ideale di tensione V_{eq} e da quella d'ingresso come un circuito aperto; si può quindi anche utilizzare il seguente circuito equivalente:



Richiamando quanto già detto precedentemente, un caso particolare di interesse è quello di un sistema **unidirezionale**, che avviene quando $Z_{12}=0$. In questo caso si ha che:

$Z_i = Z_{11}$ non dipendente dal carico

$Z_u = Z_{22}$ non dipendente dal generatore

$H_s = \dfrac{Z_{21}}{Z_{11}}$ dipendente solo dal sistema.

Come già detto, in prima approssimazione un amplificatore può considerarsi un sistema unidirezionale.
In taluni casi è utile anche caratterizzare il trasferimento dei segnali in senso inverso (ovvero dalla porta di uscita a quella di ingresso). Possiamo utilizzare a tale scopo ancora

un circuito equivalente sistemistico come quello appena descritto, con parametri che similmente a questo indichiamo come Z'_i , Z'_u , H'_s . Per la simmetria del problema, è facile verificare che essi valgono:

$$Z'_u = Z_i$$

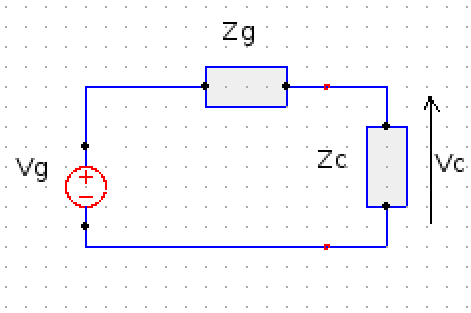
$$Z'_i = Z_u$$

$$H'_s = \frac{Z_{12}}{Z_u} \cdot \frac{Z_u + Z_g}{Z_g + Z_{22}}$$

Ovviamente, troviamo ancora che il trasferimento inverso si annulla se è nullo il parametro Z_{12}.

Caratteristiche del trasferimento dei segnali tramite sistemi 2-porte

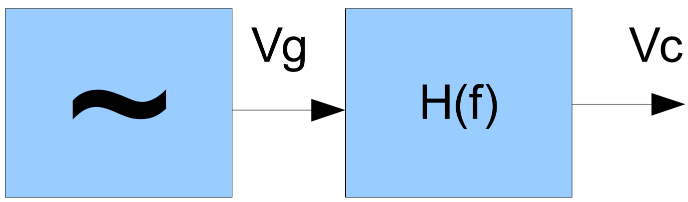
Ci interessa studiare alcune caratteristiche del trasferimento dei segnali da un generatore a un carico attraverso un sistema 2-porte lineare e tempo invariante. Consideriamo dapprima il caso di connessione diretta del generatore di segnale con il carico:



In questo caso, la funzione di trasferimento della connessione è quella di un **partitore di tensione**:

$$V_c = \frac{Z_c}{Z_c + Z_g} \cdot V_g \Leftrightarrow H(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_c}{V_g} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_g}$$

Questa connessione può anche essere espressa mediante il seguente schema a blocchi:



In molte applicazioni è richiesto che il segnale sul carico sia una versione **non distorta** o **fedele** del segnale fornito dal generatore, intendendo con questo un segnale uguale a quello originario, a meno di una eventuale costante moltiplicativa e/o di un ritardo temporale:

$$v_c(t) = k \cdot v_g(t - t_0)$$ (condizione di ***non distorsione lineare***).

Nel dominio della frequenza questo significa che la funzione di trasferimento deve avere modulo costante e fase ad andamento lineare con la frequenza, (almeno nella banda del segnale di interesse):

$H(f)=k\cdot e^{-j2\pi f t_0}$.

Osserviamo che questa condizione risulta in particolare soddisfatta se c'è una relazione di proporzionalità tra le impedenze del generatore e del carico $Z_c(f)=k'\cdot Z_g(f)$, condizione nota come "**adattamento di impedenza**" tra generatore e carico. Se questa condizione è rispettata, allora necessariamente risulta verificata la condizione di non distorsione lineare. Infatti, in tale ipotesi è:

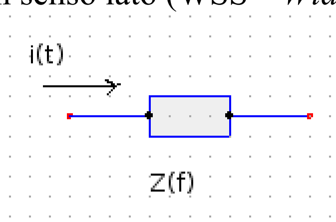
$$H(f)=\frac{Z_c}{Z_c+Z_g}=\frac{k'Z_g}{(k'+1)Z_g}=\frac{k'}{k'+1}=\text{ costante.}$$

Casi particolari di adattamento d'impedenza sono:

1. $Z_g(f)=Z_c(f)\Rightarrow$ adattamento;
2. Nella banda del segnale: $Z_g(f)\simeq Z_g \;\; e \;\; Z_c(f)\simeq Z_c$ (costanti)$\Rightarrow$adattamento;
3. $Z_g(f)=Z_c(f)=Z_0$ (costanti e uguali)$\Rightarrow$adattamento;
4. $Z_g(f)=Z_c(f)=R_0\in\mathbb{R}$ (puramente resistiva)$\Rightarrow$adattamento.

Una seconda condizione spesso di interesse nelle applicazioni è quella che garantisce il **massimo trasferimento di potenza** dal generatore al carico. Questa condizione è spesso richiesta perché, come vedremo successivamente, il canale radio attenua pesantemente i segnali che lo attraversano e di conseguenza è conveniente non dissipare ulteriore potenza nel trasferimento del segnale tra gli altri blocchi di cui è composto il sistema. La condizione di massimo trasferimento di potenza è detta anche "**adattamento di potenza**" oppure ***matching*** **(adattamento)** **<u>coniugato</u>** **di impedenza** (da <u>non</u> confondere con l'adattamento d'impedenza appena introdotto).

Per richiamare questa condizione, partiamo dal considerare un bipolo passivo ed al suo ingresso una corrente *i(t)* che lo attraversa, che per generalizzare caratterizziamo come un processo aleatorio, stazionario in senso lato (WSS – *Wide Sense Stationary*):



Definiamo **densità spettrale media di corrente** (o brevemente ma impropriamente **spettro di corrente**) la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di *i(t):*

$S_i(f)\overset{\text{def}}{=}F[R_i(\tau)]$. Si può dare una definizione alternativa ma equivalente dello spettro di corrente, come valore quadratico medio della corrente in un intervallo infinitesimo di frequenza: $S_i(f)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\frac{\overline{di^2}}{df}$ (spettro bilatero). Si osserva immediatamente che $S_i(f)$ si misura in A^2/Hz. Essendo il bipolo considerato un sistema lineare tempo-invariante, la tensione *v(t)* ai suoi capi sarà anch'essa un processo WSS.

Possiamo quindi anche definire la **densità spettrale media di tensione** o brevemente **spettro di tensione** in modo analogo alle definizioni date per la corrente:

$S_v(f) \overset{def}{=} F[R_v(\tau)] \overset{def}{=} \frac{1}{2}\frac{\overline{dv^2}}{df} \quad \left(\frac{V^2}{Hz}\right)$. Per la legge di Ohm, possiamo scrivere la tensione ai capi del bipolo come $V(f)=Z(f)\cdot I(f) \leftarrow F \rightarrow v(t)=i(t)*z(t)$ da cui otteniamo la nota relazione ingresso-uscita per sistemi lineari: $S_v(f)=|Z(f)|^2\cdot S_i(f)$.

Ritorniamo alla condizione di massimo trasferimento di potenza: a tal fine esprimiamo lo “spettro” di corrente che circola nella maglia, in funzione dello “spettro” di tensione del generatore. Per quanto appena detto possiamo scrivere:

$$S_i(f)=\frac{S_{V_g}(f)}{|Z_c(f)+Z_g(f)|^2} \quad .$$

A questo punto, utilizzando la legge di Joule siamo in grado di esprimere la **densità spettrale di potenza media** (attiva) (*W/Hz*) assorbita dal carico:

$$S_c(f)=S_i(f)\cdot\Re(Z_c)=S_i(f)\cdot R_c(f)=\frac{S_{V_g}(f)}{|Z_g(f)+Z_c(f)|^2}\cdot R_c(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_c(f)=\frac{S_{V_g}(f)}{[R_g(f)+R_c(f)]^2+[X_g(f)+X_c(f)]^2}\cdot R_c(f)}$$

La densità spettrale di potenza (e di conseguenza la potenza media) che un carico può assorbire da un <u>dato</u> generatore <u>dipende</u> dal valore del carico: come è noto, siamo in condizione di massimo trasferimento di potenza tra generatore e carico se e solo se $Z_c=Z_g^*$ $\Leftrightarrow R_c=R_g \;\; e\, X_c=-X_g$. In questa ipotesi si ottiene:

$[S_c]_{max}=\frac{S_{V_g}(f)}{4R_g(f)}$. Possiamo definire tale grandezza **spettro di potenza media <u>disponibile</u> *del* generatore** $S_{gd} \overset{def}{=} \frac{S_{V_g}}{4R_g}$ in quanto solo da esso dipende.

E' utile esprimere la relazione tra lo spettro assorbito da un carico e quello disponibile del generatore:

$$S_c(f)=\frac{R_c}{|Z_g+Z_c|^2}\cdot S_{V_g}=\frac{R_c}{|Z_g+Z_c|^2}\cdot\frac{S_{V_g}}{4R_g}\cdot 4R_g=S_{gd}\cdot\left[\frac{4R_cR_g}{|Z_g+Z_c|^2}\right] \quad .$$

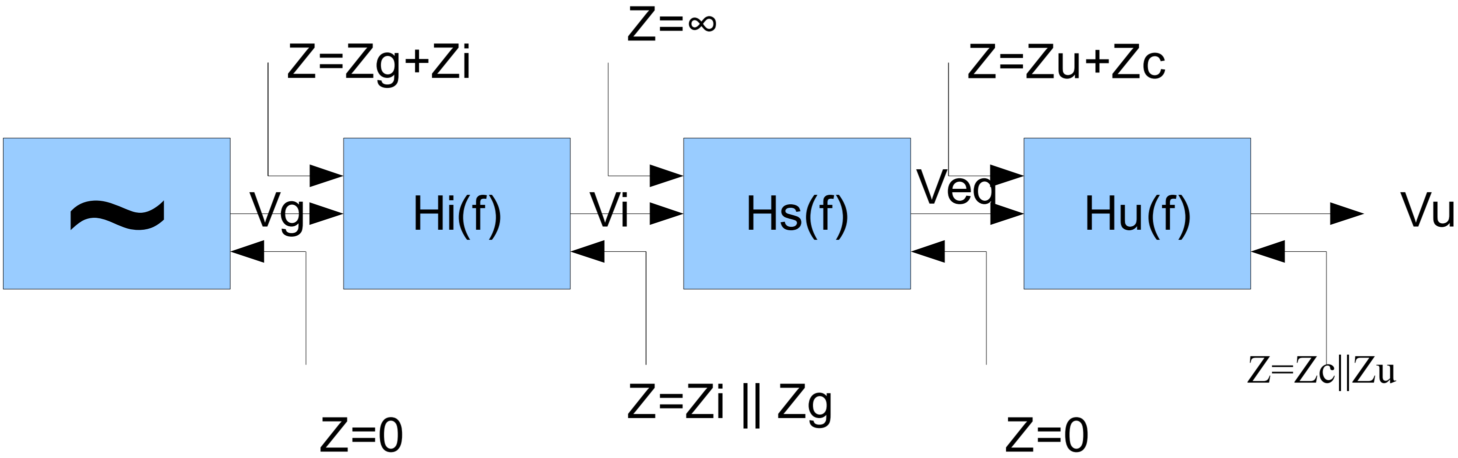
Definiamo **fattore di adattamento** tra generatore e carico *M(f)* la quantità:

$$M(f) \overset{def}{=} \frac{4R_cR_g}{|Z_g+Z_c|^2} \Rightarrow S_c(f)=M(f)S_{gd}(f) \quad .$$

M(f) è una funzione reale e pari, essendo funzioni reali e pari le densità spettrali di potenza, limitata come si può verificare fisicamente tra 0 e 1. I due estremi rappresentano rispettivamente il caso peggiore (al carico non arriva segnale) e il caso migliore $Z_c=Z_g^*$ (massimo trasferimento di potenza al carico). Normalmente è $Z_c \neq Z_g^*$ e se ritenuta necessaria, la condizione di adattamento di potenza (*matching* coniugato) può essere ottenuta inserendo tra generatore e carico un'opportuna rete 2-porte, detta appunto di adattamento, tale che la sua impedenza d'uscita Z_u sia la complessa coniugata di Z_c. Come è noto tali reti sono realizzate con elementi reattivi, anche al fine di non dissipare potenza utile. Consideriamo ora il caso particolare ma frequente nelle applicazioni di un carico resistivo di valore standardizzato $\boldsymbol{Z_c=R_c=R_o}$ connesso con un generatore di impedenza Z_g . Valori standardizzati d'impedenza R_o sono, a seconda

delle applicazioni e frequenze in gioco: 50, 75, 300, 600 Ω. Il progetto della rete di adattamento è semplice nel caso di segnali a banda stretta, relativamente ai quali è nota dai Corsi di elettromagnetismo la tecnica che utilizza circuiti a <u>costanti distribuite</u> (linee di trasmissione con *stub*). Una tecnica alternativa utilizza elementi reattivi a <u>costanti concentrate</u> in una connessione a L.
Generalmente, l'adattamento di impedenza e l'adattamento di potenza **non** coincidono. Coincidono, dando quindi luogo ad una trasmissione fedele del segnale ed a massimo trasferimento di potenza al carico, <u>se</u> $\boldsymbol{Z_g=R_g=Z_c=R_c=R_o}$ ovvero nel caso di impedenze resistive ed eguali. Tale ultima condizione è quindi desiderabile.

Estendiamo le considerazioni ora fatte, al caso di connessione del generatore al carico tramite un sistema 2-porte LTI. Possiamo fare riferimento al seguente schema a blocchi:



In questo schema le funzioni di trasferimento parziali sono:

$$H_i(f)=\frac{Z_i}{Z_i+Z_g}\ ;\ H_s(f)=\frac{Z_{21}}{Z_i}\cdot\frac{Z_i+Z_g}{Z_g+Z_{11}}\ ;\ H_u(f)=\frac{Z_c}{Z_c+Z_u}$$

Esprimiamo anche la funzione di trasferimento di <u>tutto</u> il collegamento:

$$H(f)\overset{\text{def}}{=}\frac{V_u}{V_g}=H_i\cdot H_s\cdot H_u=\frac{Z_{21}}{Z_{11}+Z_g}\cdot\frac{Z_c}{Z_c+Z_u}\quad .$$

Ora discutiamo nuovamente le condizioni per avere la trasmissione fedele ed il massimo trasferimento di potenza.
Per quanto riguarda la trasmissione fedele, potremmo pensare di estendere i risultati ottenuti per la connessione diretta generatore-carico ai due sottosistemi generatore-sistema LTI e sistema LTI-carico, controllando però anche che il segnale non subisca distorsione all'interno del blocco LTI:

$$Z_i=k'Z_g$$
$$Z_c=k''Z_u$$

$H_s(f)$ rispetti le condizioni di non distorsione lineare.

Si osserva quindi come le due condizioni di adattamento d'impedenza non sono da sole sufficienti a garantire la trasmissione fedele del segnale.
Per raggiungere tale scopo risulta però più semplice che la funzione di trasferimento **complessiva** del collegamento rispetti le condizioni di non distorsione lineare:

$|H(f)|$ costante
$arg[H(f)]$ lineare.

Per valutare gli scambi di potenza, esprimiamo preliminarmente la densità spettrale di potenza media assorbita dal sistema, $S_i(f)$, in funzione di quella disponibile del generatore.

Possiamo scrivere: $S_i(f)=S_{gd}(f)\cdot M_i(f)$; con $M_i(f)=\dfrac{4R_i R_g}{|Z_i+Z_g|^2}$ fattore di adattamento in ingresso al sistema. Analogamente, si può considerare il fattore di adattamento in uscita dal sistema $M_u(f)$ e scrivere la relazione tra la densità spettrale di potenza assorbita dal carico e la densità spettrale di potenza disponibile in uscita dal quadripolo $S_d(f)$:

$$S_c(f)=M_u(f)\cdot S_d(f)=\frac{4R_u R_c}{|Z_u+Z_c|^2}\cdot S_d \text{ ; ma è } S_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{V_{eq}}}{4R_u} \Rightarrow \boldsymbol{S_c=\frac{S_{V_{eq}}}{|Z_u+Z_c|^2}\cdot R_c}$$

Ricaviamo ora la relazione tra S_{veq} e S_{vg}. Tra le due tensioni ci sono i due blocchi $H_i(f)$ e $H_s(f)$, quindi:

$$S_{V_{eq}}=S_{V_g}\cdot|H_i|^2\cdot|H_s|^2 \text{ da cui infine: } S_c=\frac{S_{V_g}|H_i|^2|H_s|^2}{|Z_u+Z_c|^2}\cdot R_c=\ldots=\frac{|Z_{21}|^2 R_c S_{V_g}}{|Z_{11}+Z_g|^2\cdot|Z_u+Z_c|^2}$$

Tenendo conto di tutte queste relazioni, possiamo definire ed esprimere tre tipi di guadagno di potenza (parametri <u>puntuali</u>) per un sistema a due porte:

1. **Guadagno di potenza**: definito come il rapporto tra lo spettro di potenza media assorbita dal carico su cui è chiuso il sistema e lo spettro di potenza media assorbita dal sistema.
   La sua espressione in termini di parametri impedenza è:
   $\boldsymbol{G(f)\stackrel{\text{def}}{=}\dfrac{S_c(f)}{S_i(f)}}=\ldots=\dfrac{|Z_{21}|^2\cdot|Z_i+Z_g|^2}{|Z_{11}+Z_g|^2\cdot|Z_u+Z_c|^2}\cdot\dfrac{R_c}{R_i}$. Esplicitando l'espressione di Z_i e Z_u in funzione dei parametri Z si ottiene, dopo vari calcoli e semplificazioni:
   $$\boldsymbol{G(f)=\frac{|Z_{21}|^2}{|Z_{22}+Z_c|^2}\cdot\frac{R_c}{R_i}} \quad .$$
   Si osserva che il guadagno di potenza dipende dal sistema (attraverso i parametri Z) **ma anche** dal carico, attraverso Z_c. Inoltre esso risulta proporzionale al modulo quadro dell'impedenza di trasferimento diretto del sistema Z_{21}.
   Se il sistema è passivo, nel senso di privo di dispositivi di amplificazione dei segnali, allora deve essere $G(f)\le 1\Leftrightarrow[G(f)]_{dB}\le 0$. Per i quadripoli passivi si parla più spesso in termini di **attenuazione di potenza**, definita come l'inverso del guadagno:
   $A(f)\stackrel{\text{def}}{=}\dfrac{1}{G(f)}$; ma è $G(f)<1\Rightarrow A(f)>1\Leftrightarrow[A(f)]_{dB}>0$. Ovviamente se espressi in dB, risulta: $[A(f)]_{dB}=-[G(f)]_{dB}$.
   Dato che $S_i(f)$ e $S_c(f)$ sono funzioni reali, pari (e positive), anche $G(f)$ è reale, pari (e positiva).

2. **Guadagno di potenza disponibile** (brevemente: guadagno disponibile): definito come rapporto tra gli spettri di potenza disponibile in uscita dal sistema e del generatore che lo alimenta.
   La sua espressione in termini di parametri impedenza è:
   $\boldsymbol{G_d(f)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{S_d}}{\boldsymbol{S_{gd}}} = \frac{S_{V_{eq}}}{S_{V_g}} \cdot \frac{R_g}{R_u} = |H_i|^2 \cdot |H_s|^2 \cdot \frac{R_g}{R_u}$ tenuto conto che $S_d = \frac{S_{V_{eq}}}{4R_u}$
   e $S_{gd} = \frac{S_{V_g}}{4R_g}$. Dopo vari calcoli e semplificazioni otteniamo:
   $$\boldsymbol{G_d = \frac{|Z_{21}|^2}{|Z_g + Z_{11}|^2} \cdot \frac{R_g}{R_u}}$$
   Si osserva ancora la dipendenza dal modulo quadro di Z_{21} e inoltre la dipendenza dal sistema attraverso i parametri Z, **ma anche** dal generatore attraverso Z_g.
   Anche per quanto riguarda il guadagno disponibile, in caso di quadripolo passivo ($G_d<1$) si parla di **attenuazione disponibile** definita come l'inverso del guadagno disponibile:
   $G_d < 1 \Rightarrow A_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{G_d} > 1$

3. **Guadagno di potenza di trasduzione** (brevemente: guadagno di trasduzione): definito come il rapporto tra lo spettro di potenza media assorbita dal carico e lo spettro di potenza media <u>disponibile</u> del generatore che alimenta il sistema: $G_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_c}{S_{gd}}$.

   Ricordando che: $S_c = S_d \cdot M_u \Rightarrow G_t(f) = \left[\frac{S_d}{S_{gd}}\right] M_u = G_d M_u = \frac{|Z_{21}|^2}{|Z_g + Z_{11}|^2} \cdot \frac{R_g}{R_u} \cdot M_u \Rightarrow$

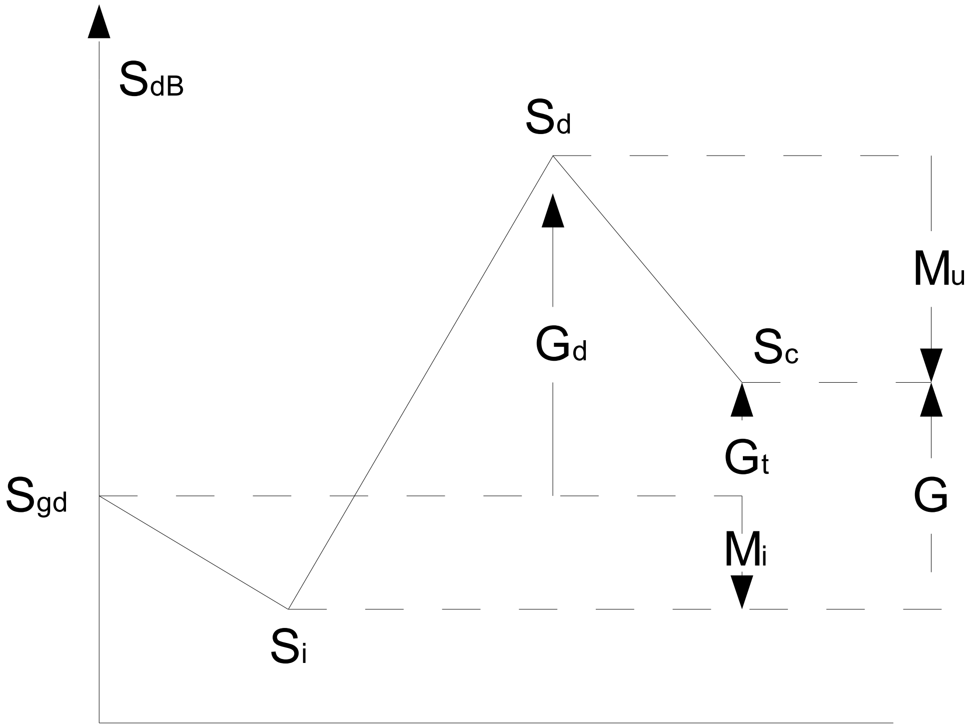
   dopo calcoli e semplificazioni: $\boldsymbol{G_t(f) = \frac{4|Z_{21}|^2 R_g R_c}{|[Z_{11}+Z_g][Z_c+Z_{22}] - Z_{12}Z_{21}|^2}}$

   Si osserva che il guadagno di trasduzione dipende, oltre che come al solito dai parametri Z del sistema, sia dal generatore (compare Z_g) che dal carico (Z_c).

E' interessante considerare le relazioni che intercorrono tra i tre guadagni introdotti:

- $G_d = \frac{S_d}{S_{gd}} = \frac{S_c}{M_u} \cdot \frac{M_i}{S_i} = \left[\frac{S_c}{S_i}\right] \cdot \frac{M_i}{M_u} = \frac{M_i}{M_u} \cdot G$ Tra $G(f)$ e $G_d(f)$ non c'è quindi alcuna relazione, potendo il rapporto M_i/M_u essere maggiore, uguale o minore dell'unità.
- $G_t = M_u G_d = \cancel{M_u} \cdot \frac{M_i}{\cancel{M_u}} \cdot G = M_i \cdot G$ da cui:
- $G_t(f) \le G_d(f)$; $G_t(f) \le G(f)$.

Considerando, ad esempio, come quadripolo un amplificatore, si possono vedere anche graficamente i guadagni e i due coefficienti di adattamento in un diagramma (in *dB*) della densità spettrale di potenza nei diversi punti del circuito:



E' importante osservare infine, che solo il guadagno di potenza *G(f)* ha sempre pieno significato fisico, in quanto corrisponde sempre a potenze effettivamente scambiate nel circuito.

In generale i disadattamenti di potenza in ingresso ed in uscita non rendono ottimale l'interconnessione, nel senso che da un lato non viene ceduta dal generatore al sistema la massima potenza possibile ($S_i < S_{gd}$) e dall'altro il sistema non cede al carico la massima potenza possibile ($S_c < S_d$).
Se in particolare c'è adattamento di potenza tra generatore e sistema, allora $S_i = S_{gd}$ e il guadagno di potenza coincide con quello di trasduzione (condizione desiderabile in ingresso).
Similmente, se in particolare c'è adattamento di potenza in uscita, tra sistema (+ generatore) e carico, allora $S_c = S_d$ ed il guadagno di trasduzione coincide con quello disponibile (condizione desiderabile in uscita).
Ai fini della condizione per il massimo trasferimento di potenza, notiamo quindi che le due condizioni sono entrambe verificate se e solo se:

$$M_i = M_u = 1 \Rightarrow G(f) = G_d(f) = G_t(f) \quad .$$

Normalmente nessun sistema è di per sé adattato per il massimo trasferimento di potenza.
L'adattamento può però essere ottenuto interponendo tra generatore e quadripolo e tra quadripolo e carico due ulteriori quadripoli reattivi, reti di adattamento , similmente a quanto accennato nel caso di connessione diretta del generatore con il carico. La

caratteristica da richiedere alla rete di adattamento di ingresso è quella di avere impedenza di ingresso “adattata” all'impedenza di uscita del generatore (parti resistive uguali, parti reattive opposte), mentre la rete di adattamento di uscita deve avere impedenza di uscita adattata all'impedenza del carico.
Per segnali a banda stretta l'adattamento per il massimo trasferimento di potenza è facilmente ottenibile, ad esempio con l'utilizzo di *stub* reattivi. Quando si opera su segnali a banda larga, invece, l'adattamento risulta molto più complicato e non si ottiene mai un adattamento perfetto su tutto il range di frequenze del segnale. La discussione dettagliata del problema del *matching* coniugato d'impedenza di un sistema 2-porte esula dalla portata di questo Corso.

Espressioni della potenza media in uscita da un sistema due-porte

Le espressioni dei parametri puntuali che abbiamo introdotto consentono ovviamente la valutazione di quelli medi, integrando rispetto alla frequenza.
Dalla conoscenza della densità spettrale di potenza media assorbita da un generico carico Z_c posto in uscita ad un sistema 2-porte LTI, possiamo ottenere direttamente la potenza media P_c assorbita dal carico, integrando su tutto l'asse delle frequenze:
$P_c=\int_0^{\infty} S_c(f)\,df=\int_0^{\infty} G(f)S_i(f)\,df=\int_0^{\infty} G_t(f)S_{gd}(f)\,df$, dove abbiamo indicato con $S_i(f)$ e $S_{gd}(f)$ rispettivamente lo spettro di potenza unilatero e lo spettro di potenza disponibile unilatero in ingresso al sistema due-porte.
Consideriamo ora ad esempio un quadripolo amplificatore. Può succedere che nella banda del segnale utile i tre guadagni introdotti siano circa costanti: $G(f)=G\ ;\ G_t(f)=G_t\ ;\ G_d(f)=G_d$. In questo caso la potenza assorbita dal carico si esprime semplicemente come:

$P_c=G\int_0^{\infty} S_i(f)\,df=G P_i$, con P_i potenza media in ingresso

$P_c=G_t\int_0^{\infty} S_{gd}(f)\,df=G_t P_{gd}$, con P_{gd} potenza media disponibile del generatore.

Se siamo in condizioni di massimo trasferimento di potenza, avremo anche:

$$P_c=G_d\cdot P_{gd}\ .$$