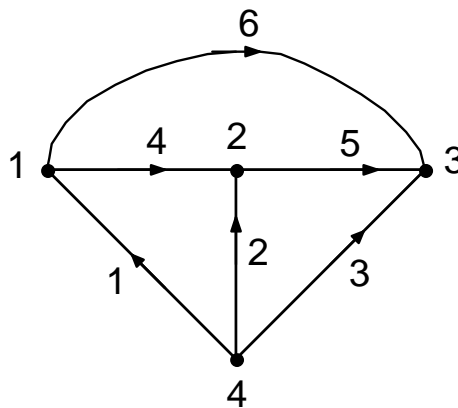


Matrice incidenza

La **matrice d'incidenza completa** \mathbf{A}_c di un grafo orientato \mathbf{G} con N nodi ed R rami, è una matrice rettangolare di N righe ed R colonne che si costruisce come segue: si numerano con $n=1,2,\dots,N$ tutti i nodi e con $r=1,2,\dots,R$ tutti i rami. Gli elementi generici a_{nr} ($n=1,2,\dots,N$), ($r=1,2,\dots,R$) della matrice \mathbf{A}_c hanno valore +1 se il ramo r ha verso uscente dal nodo n , -1 se il ramo r ha verso entrante nel nodo n , 0 se il ramo r non interessa il nodo n .

Esempio



$$\mathbf{A}_c = \begin{array}{c} \text{nodi} \downarrow \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \leftarrow \text{rami} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice di incidenza completa definisce matematicamente la struttura del grafo orientato ad esso associata.

In \mathbf{A}_c ciascuna colonna contiene solo due elementi non nulli: un +1 e un -1. Ogni riga di \mathbf{A}_c può essere ottenuta come somma, cambiata di segno, delle altre righe. Quindi $\text{rank}(\mathbf{A}_c) \leq N - 1$.

Se si sceglie un nodo di riferimento e si elimina la corrispondente riga da \mathbf{A}_c si ottiene la **Matrice incidenza**.

Per esempio, scegliendo come nodo di riferimento il nodo 4, si ha la matrice incidenza:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che:

- un albero del grafo ha matrice incidenza (quadrata con $N-1$ righe ed $N-1$ colonne) con determinante pari a +1 o -1. Di conseguenza: $\text{rank}(\mathbf{A}) = N - 1$.
- il numero di alberi possibili del grafo è uguale a: $n_a = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)$.

Introduciamo nella rete di bipoli che vogliamo studiare i vettori di tensione \mathbf{v} e di corrente \mathbf{i} come vettori colonna di R righe, aventi come elementi le tensioni v_k ($k = 1, 2, \dots, R$) e le correnti i_k ($k = 1, 2, \dots, R$) dei rami assunte con il loro verso:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$$

La KCL fa sì che il prodotto della matrice d'incidenza \mathbf{A} per il vettore delle correnti \mathbf{i} è nullo:

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0$$

Questa relazione matriciale corrisponde ad $(N - 1)$ equazioni scalari e sintetizza le equazioni di Kirchhoff delle correnti agli $N - 1$ nodi indipendenti del grafo.

Nell' esempio considerato:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

corrisponde alle tre equazioni:

$$\begin{cases} -i_1 + i_4 + i_6 = 0 \\ -i_2 - i_4 + i_5 = 0 \\ -i_3 - i_5 - i_6 = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni non sono altro che le equazioni di Kirchhoff delle correnti nei nodi indipendenti 1, 2 e 3.

La matrice di incidenza \mathbf{A} consente quindi di scrivere in forma matriciale tutte le equazioni di Kirchhoff indipendenti delle correnti.

La matrice d'incidenza permette di scrivere anche le equazioni di Kirchhoff indipendenti delle tensioni. Per far questo introduciamo un nuovo vettore \mathbf{v}_n che chiameremo vettore delle tensioni ai nodi. Tale vettore è una matrice colonna con un numero di righe pari al numero dei nodi indipendenti $N - 1$ ed avente come elementi le $N - 1$ tensioni ai nodi $v_{k,0}$ tra il nodo k ($k = 1, 2, \dots, N - 1$) ed il nodo di riferimento:

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \\ \vdots \\ v_{N-1,0} \end{bmatrix}$$

Introducendo la matrice trasposta \mathbf{A}^t ottenuta dalla matrice di incidenza \mathbf{A} scambiando le righe con le colonne, si ha che il prodotto di tale matrice per il vettore \mathbf{v}_n delle tensioni ai nodi determina il vettore \mathbf{v} delle tensioni sui rami della rete:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

Tale relazione matriciale corrisponde ad R equazioni scalari. Eliminando da queste equazioni le $N - 1$ tensioni ai nodi, si ottengono le $R - N + 1$ equazioni di Kirchhoff indipendenti delle tensioni.

Nell'esempio considerato, si ha:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \\ v_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

a cui corrispondono le sei equazioni:

$$\begin{cases} -v_{10} = v_1 \\ -v_{20} = v_2 \\ -v_{30} = v_3 \\ v_{10} - v_{20} = v_4 \\ v_{20} - v_{30} = v_5 \\ v_{10} - v_{30} = v_6 \end{cases}$$

Eliminando da queste equazioni le 3 tensioni ai nodi, si ottengono le 3 equazioni di Kirchhoff indipendenti per le tensioni:

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = v_4 \\ -v_2 + v_3 = v_5 \\ -v_1 + v_3 = v_6 \end{cases}$$

Teorema di Tellegen

Consideriamo nuovamente l'equazione:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

Il trasposto di questa equazione è uguale a:

$$\mathbf{v}^t = (\mathbf{v}_n)^t \mathbf{A}$$

moltiplichiamo per il vettore \mathbf{i} delle correnti di ramo i due membri dell'equazione:

$$\mathbf{v}^t \mathbf{i} = (\mathbf{v}_n)^t \mathbf{A} \mathbf{i}$$

Ricordando che: $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$, si ottiene:

$$\mathbf{v}^t \mathbf{i} = 0$$

Quest'ultima equazione esprime il **Teorema di Tellegen** che ha trovato notevoli applicazioni nella teoria delle reti. In particolare, secondo la convenzione di segno utilizzata, in una determinata rete la quantità:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots + v_l i_l$$

esprime la potenza istantanea entrante in tutti i bipoli della rete. Il Teorema di Tellegen assicura l'annullarsi di questa quantità ed esprime il *principio di conservazione delle potenze istantanee*.

Relazioni costitutive

Ciascun componente bipolare impone una relazione tra la tensione v_k e la corrente i_k del suo ramo. La forma più generale di questa relazione è:

$$y_k v_k + z_k i_k = w_k$$

che dipende dalle tre costanti y_k, z_k, w_k .

Esempi:

Resistore:

$$v_k - R_k i_k = 0$$

$$\text{quindi: } y_k = 1, z_k = -R_k, w_k = 0$$

Conduttore:

$$G_k v_k - i_k = 0$$

$$\text{quindi: } y_k = G_k, z_k = -1, w_k = 0$$

Generatore indipendente di tensione:

$$v_k = E$$

$$\text{quindi: } y_k = 1, z_k = 0, w_k = E$$

Generatore indipendente di corrente:

$$i_k = I$$

$$\text{quindi: } y_k = 0, z_k = 1, w_k = I$$

Induttore (nel dominio dei fasori):

$$\overline{V}_k - j\omega L_k \overline{I}_k = 0$$

$$\text{quindi: } y_k = 1, z_k = -j\omega L_k, w_k = 0$$

Condensatore (nel dominio dei fasori):

$$j\omega C_k \overline{V}_k - \overline{I}_k = 0$$

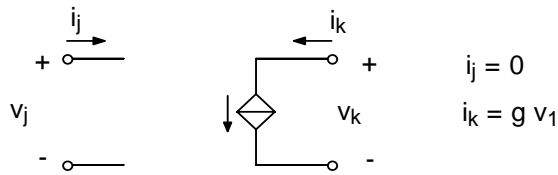
$$\text{quindi: } y_k = j\omega C_k, z_k = -1, w_k = 0$$

Nel caso di componenti multipolari la relazione costitutiva è una relazione matriciale del tipo:

$$\mathbf{YV} + \mathbf{ZI} = \mathbf{W}$$

Esempi:

Transconduttanza (generatore di corrente controllato in tensione):

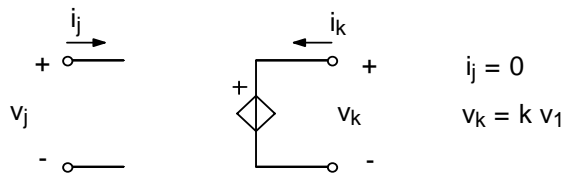


$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_j \\ i_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Generatore di tensione controllato in tensione:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_j \\ i_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

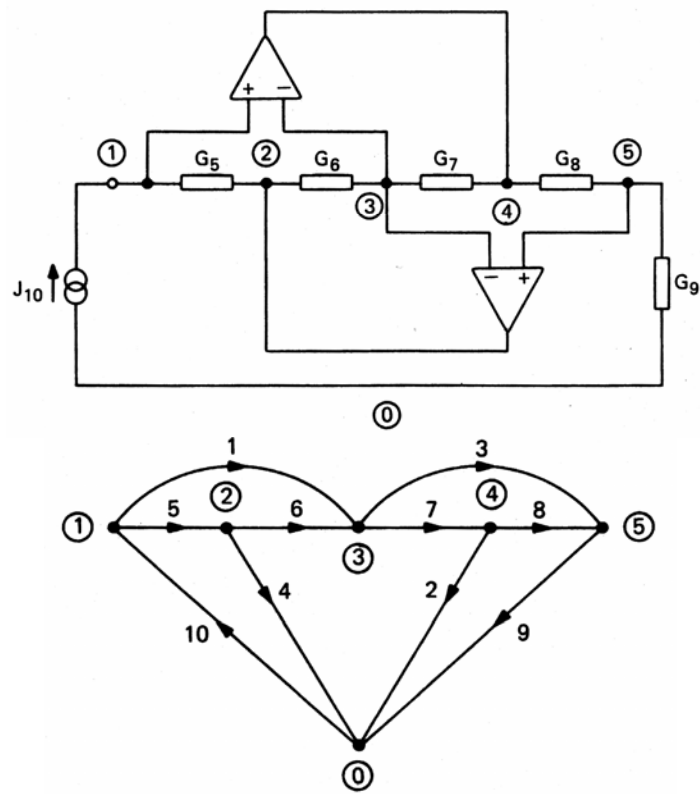
cioè:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nella tabella seguente, altri esempi:

ELEMENT	SYMBOL	CONSTITUTIVE EQUATIONS
VCT		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $i_1 = 0; i_2 = g v_1$
VVT		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $i_1 = 0; v_2 = \mu v_1$
CCT		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_1 = 0; i_2 = \alpha i_1$
CVT		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_1 = 0; v_2 = r i_1$
OPAMP		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_1 = 0; i_1 = 0$

Esempio:



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	
1	1										-1					V_1
2		1														V_2
3			1													V_3
4				1												V_4
5					1											V_5
6						1										V_6
7							1									V_7
8								1								V_8
9									1							V_9
10										1						V_{10}
1	1															I_1
2		1														I_2
3			1													I_3
4				1												I_4
5					1											I_5
6						1										I_6
7							1									I_7
8								1								I_8
9									1							I_9
10										1						I_{10}
1																V_{n1}
2																V_{n2}
3																V_{n3}
4																V_{n4}
5																V_{n5}

=

J_{10}

Metodo ai nodi

Se si fa l'ipotesi di avere tutti componenti con rappresentazione ammettenza e solo gen. indipendenti di corrente, le relazioni costitutive possono essere espresse nella forma:

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV} + \mathbf{J}$$

e, poiché $\mathbf{V} = \mathbf{A}^t \mathbf{V}_n$, si ha:

$$\mathbf{I} = \mathbf{YA}^t \mathbf{V}_n + \mathbf{J}$$

sostituendo in $\mathbf{AI} = \mathbf{0}$, si ha:

$$\mathbf{A}(\mathbf{YA}^t \mathbf{V}_n + \mathbf{J}) = \mathbf{0}$$

cioè:

$$\mathbf{AYA}^t \mathbf{V}_n = -\mathbf{AJ}$$

e quindi:

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{V}_n = \mathbf{J}_n$$

questa è la classica rappresentazione ai nodi valida per componenti con rappresentazione ammettenza e gen. ind. di corrente.

In particolare \mathbf{Y}_n è la matrice delle ammettenze della rete (di dimensioni $N-1 \times N-1$) e \mathbf{J}_n è il vettore dei generatori indipendenti di corrente.

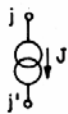
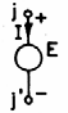
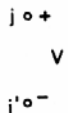
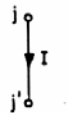
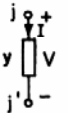
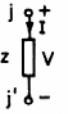


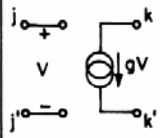
Metodo ai nodi modificato (MNA)

Per tener conto dei componenti che non hanno rappresentazione ammettenza (es. generatori di tensione, resistori, induttori, gen. controllati, ecc.) si aumenta l'ordine del sistema aggiungendo equazioni e incognite.

In sintesi:

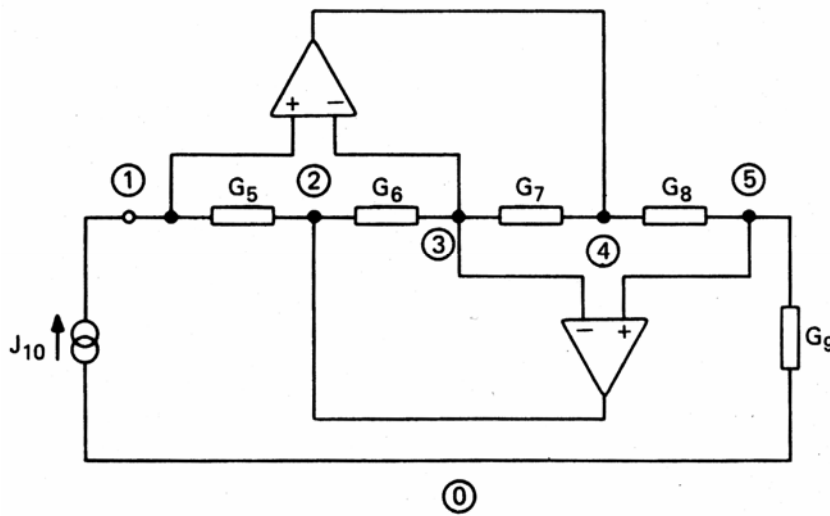
- A partire da una *netlist*, cioè da un elenco dei componenti presenti con indicazione dei nodi a cui sono collegati, si vuol rappresentare il circuito con un sistema lineare del tipo: $\mathbf{Tx} = \mathbf{w}$
- nel dominio dei fasori si vuole che \mathbf{T} sia esprimibile nella forma: $\mathbf{T} = \mathbf{G} + j\omega\mathbf{B}$
- Si contano i nodi indipendenti ($n=N-1$) e si dimensiona \mathbf{T} ad $n \times n$ e \mathbf{w} ad n
- Si esamina la netlist componente per componente:
- I componenti con rapp. Ammettenza vengono inseriti in \mathbf{T} con le regole note (matrice ammettenza ai nodi).
- Per i componenti con rapp. Impedenza, si aumenta l'ordine di \mathbf{T} e \mathbf{w} (si aggiunge a \mathbf{T} una riga ed una colonna) e si aggiunge un'incognita I .

Vedi tabella seguente.

ELEMENT	SYMBOL	MATRIX	EQUATIONS
CURRENT SOURCE		$\begin{matrix} j \\ j' \end{matrix} \begin{bmatrix} -J \\ J \end{bmatrix}$ SOURCE VECTOR	$I_j = J$ $I_{j'} = -J$
VOLTAGE SOURCE		$\begin{matrix} j \\ j' \\ m+1 \end{matrix} \begin{bmatrix} V_j & V_{j'} & I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{SOURCE} \\ \text{VECTOR} \\ \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$	$V_j - V_{j'} = E$ $I_j = I$ $I_{j'} = -I$
OPEN CIRCUIT		—	$V = V_j - V_{j'}$
SHORT CIRCUIT		$\begin{matrix} j \\ j' \\ m+1 \end{matrix} \begin{bmatrix} V_j & V_{j'} & I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$V_j - V_{j'} = 0$ $I_j = I$ $I_{j'} = -I$
ADMITTANCE		$\begin{matrix} j \\ j' \end{matrix} \begin{bmatrix} V_j & V_{j'} \\ y & -y \\ -y & y \end{bmatrix}$	$I_j = y(V_j - V_{j'})$ $I_{j'} = -y(V_j - V_{j'})$
IMPEDANCE		$\begin{matrix} j \\ j' \\ m+1 \end{matrix} \begin{bmatrix} V_j & V_{j'} & I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -z \end{bmatrix}$	$V_j - V_{j'} - zI = 0$ $I_j = -I_{j'} = I$
NULLATOR		$\begin{matrix} j \\ j' \\ m+1 \end{matrix} \begin{bmatrix} V_j & V_{j'} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$V_j - V_{j'} = 0$ $I_j = I_{j'} = 0$
NORATOR		$\begin{matrix} j \\ j' \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ I \\ -I \end{bmatrix}$	$V, I \text{ ARE ARBITRARY}$
VCT		$\begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \begin{bmatrix} V_j & V_{j'} \\ g & -g \\ -g & g \end{bmatrix}$	$I_j = 0$ $I_{j'} = 0$ $I_k = g(V_j - V_{j'})$ $I_{k'} = -g(V_j - V_{j'})$

ELEMENT	SYMBOL	MATRIX	EQUATIONS
VVT		$ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc c} V_j & V_{j'} & V_k & V_{k'} & I \\ \hline j & & & & \\ j' & & & & \\ k & & & & \\ k' & & & & \\ \hline m+1 & -\mu & \mu & 1 & -1 \end{array} \end{array} $	$ \begin{aligned} -\mu V_j + \mu V_{j'} + V_k \\ -V_{k'} &= 0 \\ I_k &= I \\ I_{k'} &= -I \end{aligned} $
CCT		$ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc c} V_j & V_{j'} & V_k & V_{k'} & I \\ \hline j & & & & \\ j' & & & & \\ k & & & & \\ k' & & & & \\ \hline m+1 & 1 & -1 & & \end{array} \end{array} $	$ \begin{aligned} V_j - V_{j'} &= 0 \\ I_j &= -I_{j'} = I \\ I_k &= -I_{k'} = aI \end{aligned} $
CVT		$ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc cc} V_j & V_{j'} & V_k & V_{k'} & I_1 & I_2 \\ \hline j & & & & 1 & \\ j' & & & & -1 & \\ k & & & & & 1 \\ k' & & & & & -1 \\ \hline m+1 & 1 & -1 & & & \\ m+2 & & & 1 & -1 & -r \end{array} \end{array} $	$ \begin{aligned} V_j - V_{j'} &= 0 \\ V_k - V_{k'} - rI_1 &= 0 \\ I_j &= -I_{j'} = I_1 \\ I_k &= -I_{k'} = I_2 \end{aligned} $
OPERATIONAL AMPLIFIER		$ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc c} V_j & V_{j'} & V_k & V_{k'} & I \\ \hline j & & & & \\ j' & & & & \\ k & & & & \\ k' & & & & \\ \hline m+1 & 1 & -1 & & \end{array} \end{array} $	$ \begin{aligned} V_j - V_{j'} &= 0 \\ I_k &= -I_{k'} = I \end{aligned} $
CONVERTOR		$ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc c} V_j & V_{j'} & V_k & V_{k'} & I \\ \hline j & & & & \\ j' & & & & \\ k & & & & \\ k' & & & & \\ \hline m+1 & 1 & -1 & -K_1 & K_1 \end{array} \end{array} $	$ \begin{aligned} V_j - V_{j'} - K_1 V_k + K_2 V_{k'} &= 0 \\ I_j &= -I_{j'} = I \\ I_k &= -I_{k'} = -K_2 I \\ \text{FOR IDEAL TRANSFORMER} \\ K_1 &= K_2 = n \end{aligned} $
TRANSFORMER		$ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc cc} V_j & V_{j'} & V_k & V_{k'} & I_1 & I_2 \\ \hline j & & & & 1 & \\ j' & & & & -1 & \\ k & & & & & 1 \\ k' & & & & & -1 \\ \hline m+1 & 1 & -1 & & -sL_1 & -sM \\ m+2 & & & 1 & -1 & -sM & -sL_2 \end{array} \end{array} $	$ \begin{aligned} V_j - V_{j'} - sL_1 I_1 - sM I_2 &= 0 \\ V_k - V_{k'} - sM I_1 - sL_2 I_2 &= 0 \\ I_j &= -I_{j'} = I_1 \\ I_k &= -I_{k'} = I_2 \end{aligned} $

Esempio:



NETLIST

```
J10 1 0 1
G5 1 2 0.1
G6 2 3 0.1
G7 3 4 0.1
G8 4 5 0.1
G9 5 0 0.1
OP1 4 0 1 3
OP2 2 0 5 3
```

$$\begin{bmatrix}
 G_5 & -G_5 & 0 & 0 & 0 \\
 -G_5 & G_5 + G_6 & -G_6 & 0 & 0 \\
 0 & -G_6 & G_6 + G_7 & -G_7 & 0 \\
 0 & 0 & -G_7 & G_7 + G_8 & -G_8 \\
 0 & 0 & 0 & -G_8 & G_8 + G_9 \\
 \hline
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_{n1} \\
 V_{n2} \\
 V_{n3} \\
 V_{n4} \\
 V_{n5} \\
 \hline
 I_{OP1} \\
 I_{OP2}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 J_{10} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Rif. Bibl.

Jiri Vlach, K. Singhal, "Computer Methods for Circuit Analysis and Design", Van Nostrand Reinhold, New York, 1994.