BÀI TẬP VỀ NHÀ 1

MTH56-2425

Nguyễn Thị Mỹ Kim
MSSV: 23122040

Ngày 14 tháng 4 năm 2025

1 Trường (Field)

1.1

Yêu cầu. Giả sử F là một trường. Chứng minh rằng $0 \cdot a = 0, \forall a \in F$

Chứng minh. $\forall a \in F$, ta có:

$$0 \cdot a = (0+0) \cdot a \Leftrightarrow \ 0 \cdot a + (-0 \cdot a) = 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-0 \cdot a) \Leftrightarrow \ 0 = 0 \cdot a$$

□

1.2

Yêu cầu. Chứng minh rằng tồn tại đúng một cách xây dựng trường trên tập $F = \{0, 1, \alpha\}$

Chứng minh.
Để xây dựng cấu trúc trường cho tập hợp $F = \{0, 1, \alpha\}$, khi đó, ta cần xác định phép toán $+, \times$ cho F với 0 là phần tử đơn vị của phép cộng và 1 là phần tử đơn vị của phép nhân. Do đó, với mọi $x \in F$ thì $0 + x = x + 0 = x$ và $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (giả thiết $0 \neq 1$ như khi xét trường hai phần tử gồm $0, 1$).
Xác định phép cộng $(F, +)$ phải thỏa mãn tính giao hoán, kết hợp và mỗi phần tử có phần tử đối của phép cộng. Ta xây dựng bảng cộng như sau:

$+$	0	1	α
0	0	1	α
1	1		
α	α		

và tìm giá trị của $1+1$, $1+\alpha$, $\alpha+1$, $\alpha+\alpha$.

- Xét $1+1=0$. Khi đó 1 là phần tử đối của 1:
  Do đó: $1+\alpha \neq 0$ (α không thể là phần tử đối của 1 do 1 là phần tử đối của 1)

  Giả sử: $1+\alpha = 1 \Leftrightarrow 1+1+\alpha = 1+1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ (mâu thuẫn)

  Giả sử: $1+\alpha = \alpha \Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha' = \alpha+\alpha' \Leftrightarrow 1 = 0$ (mâu thuẫn với giả định α' là phần tử đối của α)

  Vậy $1+1 \neq 0$

- Xét $1+1=1$. Khi đó rõ ràng 0 và 1 không thể là phần tử đối của 1:
  Do đó, chỉ α có thể là phần tử đối của 1 (và ngược lại, chỉ 1 có thể là phần tử đối của α) thỏa $1+\alpha = \alpha+1 = 0$

  Giả sử: $\alpha+\alpha = 1 \Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha = 1+1 \Leftrightarrow 0+\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ (mâu thuẫn)

  Giả sử: $\alpha+\alpha = 0 \Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha = 1 \Leftrightarrow 0+\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ (mâu thuẫn)

  Giả sử: $\alpha+\alpha = \alpha \Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha = 1+\alpha \Leftrightarrow 0+\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ (mâu thuẫn)

  Vậy $1+1 \neq 1$

- Xét $1+1=\alpha$. Tương tự, khi đó rõ ràng 0 và 1 không thể là phần tử đối của 1:
  Do đó, chỉ α có thể là phần tử đối của 1 (và ngược lại, chỉ 1 có thể là phần tử đối của α) thỏa $1+\alpha = \alpha+1 = 0$

  Giả sử: $\alpha+\alpha = 0 \Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha = 1 \Leftrightarrow 0+\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ (mâu thuẫn)

  Giả sử: $\alpha+\alpha = \alpha \Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha = 1+\alpha \Leftrightarrow 0+\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ (mâu thuẫn)

  Giả sử: $\alpha+\alpha = 1 \Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha = 1+1 \Leftrightarrow 0+\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \alpha$

  Do đó: $\alpha+\alpha = 1$. Ta không chứng minh được $\alpha+\alpha = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $1+1=\alpha$

Xác định phép nhân $(F, \times)$ phải thỏa mãn mỗi phần tử khác 0 của F phải tồn tại phần tử nghịch đảo của phép nhân. Ta xây được bảng nhân như sau:

$\times$	0	1	α
0	0	0	0
1	0	1	α
α	0	α	

và tìm giá trị của $\alpha \times \alpha$.

Giả sử: $\alpha \times \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha \times (1+1) = 0 \Leftrightarrow \alpha+\alpha = 0$ (mâu thuẫn)

Giả sử: $\alpha \times \alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha \times (1+1) = \alpha \Leftrightarrow \alpha+\alpha = \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha$ (mâu thuẫn)

Giả sử: $\alpha \times \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha \times (1+1) = 1 \Leftrightarrow \alpha+\alpha = 1$

Do đó $\alpha \times \alpha = 1$. Bằng các lập luận trên, ta đã xác định duy nhất phép cộng và nhân cho trên F. Quan sát thêm, các phép toán này được xây dựng đúng theo qui tắc của phép modulo 3 khi đồng nhất $\alpha = 2$. Chẳng hạn:
Ta có phép cộng trên F với $\alpha + \alpha = 1$ tương ứng với phép cộng modulo $\alpha + \alpha = 2 + 2 \equiv 1 \pmod 3$ hay $1 + \alpha = 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$.
Ta có phép nhân trên F với $\alpha \times \alpha = 1$ tương ứng với phép nhân modulo $\alpha \times \alpha = 2 \times 2 \equiv 1 \pmod 3$.
Như vậy, tồn tại đúng một cách xây dựng trường trên tập $F = \{0, 1, \alpha\}$.
Kết quả cuối cùng ta xây được bảng cộng và bảng nhân cho F

$+$	0	1	α
0	0	1	α
1	1	α	0
α	α	0	1

Hình 1: Bảng cộng

$\times$	0	1	α
0	0	0	0
1	0	1	α
α	0	α	1

Hình 2: Bảng nhân

□

2 Không gian vector và hình học trong $\mathbb{R}^n$

2.1

Yêu cầu. Cho V là không gian vector trên trường F. Chứng minh rằng nếu $a \in F$, $\vec{v} \in V$ sao cho $a \cdot \vec{v} = \vec{0}$ thì $a = 0$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$.

Chứng minh.

- Xét $a \neq 0,\ a \in F$. Khi đó, $\exists\ a^{-1} \in F$ sao cho $a^{-1}a = 1$:

$$a\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow a^{-1}a\vec{v} = a^{-1}\vec{0} \Leftrightarrow 1\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

- Xét $a = 0,\ a \in F$. Khi đó, $a\vec{v} = 0\vec{v}$:

$$0\vec{v} = (0+0)\vec{v} \Leftrightarrow 0\vec{v} + (-0\vec{v}) = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} + (-0\vec{v}) \Leftrightarrow 0 = 0\vec{v}$$

□

2.2

Yêu cầu. Giả sử $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ là một cơ sở không gian vector V. Chứng minh rằng với mọi $\vec{v} \in V$, tồn tại duy nhất các hệ số $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sao cho $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v} + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$.

Chứng minh.
Giả sử $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ là một cơ sở của không gian vector V. Khi đó, tồn tại $\vec{v} \in V$ sao cho tồn tại các hệ số $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ biểu diễn $\vec{v}$ qua cơ sở S,

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$

và tồn tại các hệ số $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$ (khác $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) cũng biểu diễn $\vec{v}$ qua cơ sở S,

$$\vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \cdots + \beta_n \vec{v}_n$$

Lấy hai đẳng thức trên trừ nhau, ta có:

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{v}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{v}_n$$

Khi đó, để $\vec{0}$ là tổ hợp tuyến tính của các vector trong cơ sở $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, thì mỗi $\alpha_i - \beta_i$ bằng 0 với $i \in \overline{1, n}$. Do đó, $\alpha_i = \beta_i$ với $i \in \overline{1, n}$ (mâu thuẫn giả thiết $\beta_1, \dots, \beta_n$ khác $\alpha_1, \dots, \alpha_n$)
Vậy, với mỗi vector $\vec{v} \in V$, tồn tại duy nhất $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ để biểu diễn $\vec{v}$ qua cơ sở S. □

2.3

Yêu cầu. Cho không gian vector V và S là tập hợp các không gian con của V. Chứng minh

$$\bigcap_{W \in S} W$$

là không gian con của V.

Chứng minh. Gọi W_i lần lượt là các phần tử của S. Khi đó:

- $\bigcap_{W \in S} W \subset V$ (vì $W_i \subset V$).
- $\vec{0} \in \bigcap_{W \in S} W$ (vì $\vec{0} \in W_i$). Suy ra $\bigcap_{W \in S} W \neq \emptyset$.
- $\forall \vec{u},\ \vec{v} \in \bigcap_{W \in S} W$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, vì $\vec{u}, \vec{v} \in W_i$ và $W_i \leq V$ nên $\alpha\vec{u} + \vec{v} \in W_i$.

Suy ra $\alpha\vec{u} + \vec{v} \in \bigcap_{W \in S} W$.
Vậy $\bigcap_{W \in S} W \leq V$. □

2.4

Yêu cầu. Cho không gian vector V, không gian con $W \subset V$ và $\vec{v} \in V$. Chứng minh rằng $\operatorname{proj}_W \vec{v}$ là nghiệm của bài toán cực trị: Tìm $\vec{w} \in W$ sao cho $\|\vec{v} - \vec{w}\|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Chứng minh.
Cho không gian con $W \subset V$ và $\vec{v} \in V$. Khi đó, hình chiếu của $\vec{v}$ lên W là $\vec{w}_0 \in W$ sao cho

$$(\vec{v} - \vec{w}_0) \in W^{\perp}$$

với $W^{\perp}$ là phần trực bù trực giao của không gian con $W \subset V$.
Ta lại có, W là một không gian con của không gian vector V nên có số chiều hữu hạn. Giả sử số chiều của W là k và $S = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ là một cơ sở trực chuẩn của W. Khi đó:

$$\vec{w}_0 = \operatorname{proj}_W \vec{v} = \operatorname{proj}_{\vec{w}_1} \vec{v} + \cdots + \operatorname{proj}_{\vec{w}_k} \vec{v}$$

Ta sẽ chỉ ra rằng:

- $\vec{w}_0$ xác định duy nhất
- $\vec{w}_0$ là nghiệm của bài toàn cực trị: $\min_{\vec{w} \in W} \|\vec{v} - \vec{w}\|$.

Phương pháp hình học.
Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của $\|\vec{v} - \vec{w}\|^2$ tương đương bài toán tìm giá trị nhỏ nhất cho $\|\vec{v} - \vec{w}\|$ do $\|\vec{v} - \vec{w}\| \geq 0$.
Xét $\vec{w} \in W$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 &= \|(\vec{v} - \vec{w}_0) + (\vec{w}_0 - \vec{w})\|^2 \\
&= \|\vec{v} - \vec{w}_0\|^2 + \|\vec{w}_0 - \vec{w}\|^2 + 2(\vec{v} - \vec{w}_0) \cdot (\vec{w}_0 - \vec{w}) \\
&= \|\vec{v} - \vec{w}_0\|^2 + \|\vec{w}_0 - \vec{w}\| \\
&\geq \|\vec{v} - \vec{w}_0\|^2
\end{aligned}$$

(Do $(\vec{v} - \vec{w}_0) \in W^{\perp}$ và $(\vec{w} - \vec{w}_0) \in W$ nên $(\vec{v} - \vec{w}_0) \cdot (\vec{w}_0 - \vec{w}) = 0$).
Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\vec{w} = \vec{w}_0$.
Vậy $\min_{\vec{w} \in W} \|\vec{v} - \vec{w}\| = \|\vec{v} - \operatorname{proj}_W(\vec{v})\|$ và $\operatorname{proj}_W(\vec{v})$ là nghiệm của bài toán cực trị. □

3 Ý nghĩa hình học của mô hình hồi quy tuyến tính

3.1

Yêu cầu. Cho V là tập hợp tất cả các hàm $f : S \to \mathbb{R}$ với $S = \{x_1, \dots, x_N\}$:

$$V := \{f : S \to \mathbb{R}\}$$

và tập W là những hàm số từ S đến R thỏa mãn:

$$W := \{f : S \to \mathbb{R} \mid \exists\, a, b \in \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_N) = a(x_1, \dots, x_N) + b(1, \dots, 1)\}$$

Chứng minh rằng W là không gian con của V.

Chứng minh.
V có cấu trúc không gian vector tương đương với $\mathbb{R}^N$, như vậy V cũng sẽ có các tính chất của không gian vector $\mathbb{R}^N$ (thỏa mãn các định lí về phép toán của không gian vector như phép cộng $(+)$ và phép nhân $(\times)$). Vậy V là không gian vector với $V = \{\vec{y} = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N\}$.
Với V là không gian vector trên $\mathbb{R}^N$ và $T = \{\vec{u}_1 = (x_1, \ldots, x_N), \vec{u}_2 = (1, \ldots, 1)\}$ là tập con khác rỗng của V. Gọi W là tập hợp tất cả các tổ tuyến tính của T và không gian W được gọi là không gian sinh bởi T:

$$W = \langle T \rangle = \{a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(ax_1 + b, \ldots, ax_N + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Như vậy ta có:

- $\vec{0} \in W$ vì $\vec{0} = (0, \ldots, 0) = (0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2) = (0x_1 + 0, \ldots, 0x_N + 0)$.

Với $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ và $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\vec{w}_1 = (a_1\vec{u}_1 + b_1\vec{u}_2) = (a_1x_1 + b_1, \ldots, a_1x_N + b_1) \text{ với } a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{w}_2 = (a_2\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2) = (a_2x_1 + b_2, \ldots, a_2x_N + b_2) \text{ với } a_2, b_2 \in \mathbb{R}$$

- $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = ((a_1+a_2)\vec{u}_1 + (b_1+b_2)\vec{u}_2) = ((a_1+a_2)x_1 + (b_1+b_2), \ldots, (a_1+a_2)x_N + (b_1+b_2))$
  Suy ra $(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \in W$ vì $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$
- $\alpha\vec{w}_1 = (\alpha a_1\vec{u}_1 + \alpha b_1\vec{u}_2) = (\alpha a_1x_1 + \alpha b_1, \ldots, \alpha a_1x_N + \alpha b_1)$
  Suy ra $\alpha\vec{w}_1 \in W$ vì $\alpha a_1, \alpha b_1 \in \mathbb{R}$

Suy ra $W \leq V$. □

3.2

Yêu cầu. Chứng minh $\dim W = 2$.

Chứng minh.
W sinh bởi $T = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ là không gian vector con của V. Ta xét phương trình:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 = 0$$

Lập ma trận $\tilde{A}$ bằng cách xếp $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thành các dòng:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_N \\ 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: $\vec{u}_1 = (x_1, \ldots, x_N)$ có các giá trị x_i đôi một khác nhau, nên $r(\tilde{A}) = 2$ bằng số vector nên hệ có nghiệm duy nhất $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Suy ra $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ độc lập tuyến tính, hơn nữa $T = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ là tập sinh của W nên T là cơ sở của W.
Vậy $dim(W) = 2$ □

3.3

Yêu cầu. Cho bộ dữ liệu $\theta = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)\} \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử các giá trị x_i là đôi một khác nhau. Tìm đường thẳng $y = ax + b$ sao cho hàm mất mát

$$L = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.
Chứng minh nghiệm của bài toán hồi quy tuyến tính với bộ dữ liệu θ tương ứng với hình chiếu của $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ lên W.

Chứng minh.
Cho $\vec{w} \in W$, khi đó $\vec{w} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = (ax_1 + b, \ldots, ax_N + b) = (\hat{y_1}, \ldots, \hat{y_N})$ với $a, b \in \mathbb{R}$ Do đó:

$$L = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \|\vec{y} - \vec{w}\|^2$$

Để L đạt giá trị nhỏ nhất, ta cần $\|\vec{y} - \vec{w}\|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của $\|\vec{y} - \vec{w}\|^2$ tương đương bài toán tìm giá trị nhỏ nhất cho $\|\vec{y} - \vec{w}\|$ do $\|\vec{y} - \vec{w}\| \geq 0$. Do đó, ta có thể phát biểu lại bài toán như sau:

Cho không gian vector V, không gian con $W \subset V$ và $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_N) \in V$. Chứng minh rằng $\operatorname{proj}_W \vec{y}$ là nghiệm của bài toán cực trị : Tìm $\vec{w} \in W$ sao cho $\|\vec{y} - \vec{w}\|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
Sử dụng kết quả từ bài 2.4, để $\|\vec{y} - \vec{w}\|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\vec{w} = \operatorname{proj}_W \vec{y}$. Nghĩa là $\vec{w}$ là hình chiếu của $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ lên W. Ta có điều phải chứng minh. □