1.

Oppgave 1 Finn ligningen til tangenten til kurven

$$y^3 - 2xy = 4e^{2x-y}$$

i punktet $(1, 2)$. Vis utregningen.

Vi mangler $y'(1)$. Vi deriverer derfor implisitt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^3 - 2xy &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 4e^{2x-y} \\
3y^2y' - 2(xy' + y) &= 4e^{2x-y}(2 - y') \\
3y^2y' - 2xy' - 2y &= 8e^{2x-y} - 4y'e^{2x-y} \\
3y^2y' - 2xy' + 4y'e^{2x-y} &= 2y + 8e^{2x-y} \\
y'(3y^2 - 2x + 4e^{2x-y}) &= 2y + 8e^{2x-y} \\
y' &= \frac{2y + 8e^{2x-y}}{3y^2 - 2x + 4e^{2x-y}}
\end{aligned} \tag{1}$$

For å finne $y'(1)$ setter vi inn punktet vårt:

$$\begin{aligned}
y'(1) &= \frac{2(2) + 8e^{2(1)-(2)}}{3(2)^2 - 2(1) + 4e^{2(1)-(2)}} \\
&= \frac{4 + 8e^0}{10 + 4e^0} \\
&= \frac{12}{14} = \frac{6}{7}
\end{aligned} \tag{2}$$

Vi bruker ettpunktsformelen og får:

$$T(x) = \frac{6}{7}(x - 1) + 2 = \frac{6}{7}x - \frac{6}{7} + 2 = \frac{6}{7}x + \frac{8}{7} \tag{3}$$

2.

Oppgave 2 Finn løsningen på initialverdiproblemet

$$y' + 3xy = 2x, \qquad y(0) = 0.$$

Vis utregningen.

Vi lar $P(x) = 3x$ og $Q(x) = 2x$, den integrerende faktoren blir da $e^{\int P(x)} = e^{\frac{3}{2}x^2}$:

$$e^{\frac{3}{2}x^2}y' + e^{\frac{3}{2}x^2}(3xy) = e^{\frac{3}{2}x^2}(2x)$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{3}{2}x^2}y &= \int e^{\frac{3}{2}x^2}(2x)\,\mathrm{d}x \\ e^{\frac{3}{2}x^2}y &= \int e^{u}(2x)\frac{\mathrm{d}u}{3x} \\ e^{\frac{3}{2}x^2}y &= \frac{2}{3}\int e^{u}\,\mathrm{d}u \\ e^{\frac{3}{2}x^2}y &= \frac{2}{3}e^{u} + C \\ e^{\frac{3}{2}x^2}y &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x^2} + C \end{aligned} \tag{4}$$

Setter inn initialverdien:

$$e^{0}0 = \frac{2}{3}e^{0} + C \Rightarrow C = -\frac{2}{3} \tag{5}$$

Løsningen på differensiallikningen er

$$y(x) = \frac{2e^{\frac{3}{2}x^2} - 2}{3e^{\frac{3}{2}x^2}} \tag{6}$$

3.

Oppgave 3 La funksjonen $f(x)$ være definert på intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ slik:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Begrunn at f er kontinuerlig i $x = 0$. Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at f også er deriverbar i $x = 0$, og bestem $f'(0)$.

f er kontinuerlig i $x = 0$ hvis $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Ser at vi får $\frac{0}{0}$ i grenseverdien, vi bruker derfor l'Hôpitals:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \frac{(\sin x(1-\cos x))'}{(x^2)'} \\ &= \frac{\sin x(\sin x) + \cos x(1-\cos x)}{2x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos x - \cos^2 x}{2x} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned} \tag{7}$$

Vi anvender l'Hôpitals på nytt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \frac{(\sin^2 x + \cos x - \cos^2 x)'}{(2x)'} \\ &= \frac{2\sin x\cos x - \sin x + 2\cos x\sin x}{2} \\ &= \frac{0}{2} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Siden grenseverdien er lik funksjonsverdien er f kontinuerlig i $x = 0$

f er deriverbar i 0 hvis grenseverdien eksisterer:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - \cancel{f(0)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h(1-\cos h)}{h^3} \end{aligned} \tag{9}$$

Vi anvender l'Hôpitals siden nevneren er et polynom, kommer vi til å komme til en slutt. Vi benytter dobbelderiverte fra tidligere teller og går rett på tredjederivert:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(2\sin h\cos h - \sin h + 2\cos h\sin h)'}{3!} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(4\sin h\cos h - \sin h)'}{6} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4(\cos^2 h - \sin^2 h) - \cos h}{6} \\
&= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{10}
$$

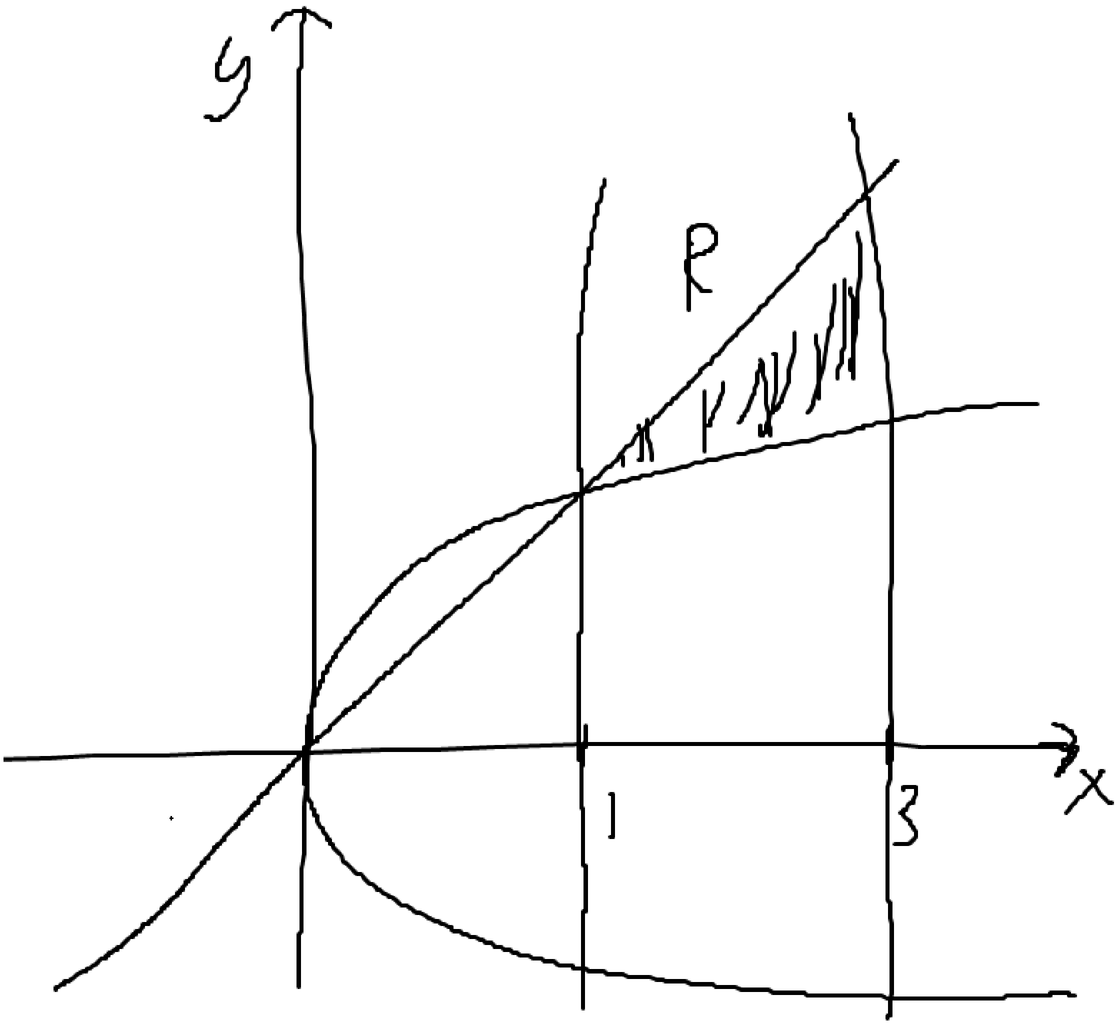
Grenseverdien eksisterer og den deriverte i $x = 0$ er lik $\frac{1}{2}$

4.

Oppgave 4 La R være området i xy-planet avgrenset av kurvene

$$x = y^2, \quad x = y, \quad x = 1 \quad \text{og } x = 3.$$

Finn volumet av rotasjonslegemet som framkommer når R roteres om linja $x = -1$. Vis utregningen.



Den delen av kurven $x = y^2$ som avgrenser R er den positive roten, $y = \sqrt{x}$.

Vi bruker sylinderskallmetoden:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^3 (x+1) \cdot x - (x+1) \cdot \sqrt{x} \, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_1^3 x^2 + x - x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x} \, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 \\
&\approx 2\pi \cdot 4.03 \\
&\approx 25.35
\end{aligned}
\tag{11}
$$

5.

Oppgave 5

Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{3+e^x}.$$

Begrunn at det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty \frac{dx}{3+e^x}$$

konvergerer, og finn verdien.

Vis utregningene.

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{3+e^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{u-3} \\ &= \int \frac{1}{u}\frac{1}{u-3}\,\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &A(u-3)+Bu = 1 \\ &u = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \\ &u = 3 \Rightarrow B = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&\int -\frac{1}{3}\frac{1}{u} + \frac{1}{3}\frac{1}{u-3}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{3}\ln(|u|) + \frac{1}{3}\ln(|u-3|) + C \\
&= -\frac{1}{3}\ln(3+e^x) + \frac{1}{3}\ln(e^x) + C
\end{aligned} \tag{14}$$

Vi lar

$$f(x) = -\frac{1}{3}\ln(3+e^x) + \frac{1}{3}\ln(e^x) + C \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{3+e^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} f(b) - f(0) \\
&= \lim_{b\to\infty} f(b) - \left(-\frac{1}{3}\ln(3+e^0) + \cancel{\frac{1}{3}\ln(e^0)} + C\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\ln\left(3+e^b\right) + \frac{1}{3}\ln\left(e^b\right) + \cancel{C}\right) - \left(-\frac{1}{3}\ln(4) + \cancel{C}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{3}\ln\left(3+e^b\right) + \frac{1}{3}\ln\left(e^b\right) + \frac{1}{3}\ln(4) \\
&= \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{4e^b}{3+e^b}\right) \\
&= \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{4}{\frac{3}{e^b}+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln(4) \\
&= \frac{2}{3}\ln(2)
\end{aligned} \tag{16}$$

6.

1. Rekken er alternerende, ergo konvergerer den. Sjekker absolutt konvergens ved å bruke integraltesten (som vi kan gjøre fordi integranden er strengt avtagende, dvs. for alle rektangel i, er arealet $\Delta x \cdot f(x_i)$ større enn integralet $\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} f(x)\,\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} > \int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{c\to\infty} \int_2^c \frac{1}{u\ln(u)}\,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{d\to\infty} \int_{\ln(2)}^d \frac{1}{uv}\,\mathrm{d}v \cdot u \\
&= \lim_{d\to\infty} \int_{\ln(2)}^d \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \\
&= \lim_{d\to\infty} [\ln(|v|)]_{\ln(2)}^d \\
&= \lim_{c\to\infty} [\ln(|\ln(u)|)]_2^c \\
&= \lim_{b\to\infty} [\ln(|\ln(x+1)|)]_1^b \\
&= \infty - \ln(|\ln(2)|)
\end{aligned} \tag{17}$$

Siden integralet divergerer, må rekken også divergere

2. Vi bruker forholdstesten:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{n!}}{\frac{3^n}{(n-1)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n-1)!}{3^n n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} 3\frac{1}{n} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Siden grenseverdien er i intervallet $[0, 1)$, så konvergerer rekken absolutt.

3. Siden $|\sin n| \leq 1$, er $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, og $\frac{1}{n^2}$ vet vi konvergerer (p-rekke med eksponent 2), da må rekken konvergere absolutt.

7.

For $0 \leq h \leq 5$ har vi:

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h \frac{15 \cdot 30}{5} x \, \mathrm{d}x \\ &= \left[45x^2\right]_0^h \\ &= 45h^2 \end{aligned} \tag{19}$$

For $5 < h \leq 6$ har vi:

$$\begin{aligned} V(h) &= V(5) + (h-5) \cdot 15 \cdot 30 \\ &= 1125 - 2250 + 450h \\ &= 450h - 1125 \end{aligned} \tag{20}$$

Altså blir funksjonen:

$$V(h) = \begin{cases} 45h^2 & \text{for } 0 \leq h \leq 5 \\ 450h - 1125 & \text{for } 5 < h \leq 6 \end{cases} \tag{21}$$

Vi bruker kjerneregelen fordi volumet avhenger av høyden (som avhenger av tid):

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V = -1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} V \mid_{h=3} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h = 90h \mid_{h=3} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h = 270 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h \\ \Updownarrow \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h = -\frac{1}{270} \end{gathered} \tag{22}$$

8.

Fordi i intervallet så er sinusfunksjonen strengt avtagende og x strengt voksende og funksjonsverdien er positiv i den første enden $2\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$, mens i den andre enden så er den negativ $2\sin\pi - \pi = 0 - \pi < 0$, og da forteller skjæringssetningen at det finnes et punkt $x = c$ i intervallet $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ slik at $f(c) = 0$

Vi trenger den deriverte:

$$f'(x) = 2\cos x - 1 \tag{23}$$

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_0 = 2 \Rightarrow x_1 \approx 1.90 \end{gathered} \tag{24}$$

9.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x \sin^2 x}{x - \arctan x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin^2 x}{\frac{1}{3}x^3 - \mathcal{O}(x^5)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x \sin^2 x\right)'}{\left(\frac{1}{3}x^3 - \mathcal{O}(x^5)\right)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x \cos x + \sin^2 x}{x^2 - \mathcal{O}(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2x \sin x \cos x + \sin^2 x\right)'}{\left(x^2 - \mathcal{O}(x^4)\right)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin x \cos x + 2x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 2 \sin x \cos x}{2x - \mathcal{O}(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2 \sin x \cos x + 2x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 2 \sin x \cos x\right)'}{\left(2x - \mathcal{O}(x^3)\right)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4\cos^2 x - 4\sin^2 x + 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 2x(-2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x)}{2 - \mathcal{O}(x^2)} \\
&= \frac{4 - 0 + 2(1) + 0}{2} \\
&= 3
\end{aligned}
\tag{25}
$$

10.

Vi finner kandidater til ekstremalpunkter ved å finne kritiske punkter. Vi deriverer:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{2x^2-1} \cdot 4x \cdot x - e^{2x^2-1}}{x^2} \\ &= \frac{e^{2x^2-1}(4x^2-1)}{x^2} \end{aligned} \tag{26}$$

Og setter den deriverte lik 0:

$$\begin{gathered} f'(x) = 0 \\ \Updownarrow \\ \frac{e^{2x^2-1}(4x^2-1)}{x^2} = 0 \\ \Updownarrow \\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2} \end{gathered} \tag{27}$$

Vi vet at $f(x)$ kommer til å «likne» på $\frac{1}{x}$ siden $e^{2x^2-1} > 0$ for alle x, hvor det jeg mener med «likne» er at alle funksjonsverdiene befinner seg i samme kvadrant. Siden telleren vokser mye raskere enn nevneren kommer det også til å være en slags bueform. Vi vet derfor at de lokale ekstremalpunktene er $x = -\frac{1}{2}$ (toppunkt) og $x = \frac{1}{2}$ (bunnpunkt)