# 1.

Vis at

$$e^x > 1 + x \qquad \text{for } x > 0. \tag{1}$$

(Vink: Sekantsetningen.)

Både $e^x$ og $1 + x$ er deriverbare når $x > 0$ og kontinuerlige når $x \geq 0$. La $f(x) = e^x$. Sekantsetningen forteller da at det må finnes et punkt $c \in (0, \infty)$ slik at $\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = f'(c)$, hvor $a > 0$.

Siden $e^x \mid_{x=0} = 1 + x \mid_{x=0} = 1$, må vi vise at $\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} \mid_{x=c} > \frac{\mathrm{d}(1+x)}{\mathrm{d}x} = 1$ for at $e^x > 1 + x$.

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{e^a - e^0}{a} = \frac{e^a - 1}{a} \tag{2}$$

Vi kjenner fra før at $f'(x) = e^x$.

$$f'(c) = e^c \tag{3}$$

Siden $c \in (0, \infty)$, er $e^c > 1$. Vi får:

$$\begin{gathered} \frac{e^a - 1}{a} = f'(c) = e^c > 1 \\ \Updownarrow \\ \frac{e^a - 1}{a} > 1 \\ \Updownarrow \\ \underline{\underline{e^a > a + 1}} \end{gathered} \tag{4}$$

Merk det siste steget som er lovlig uten å snu ulikhetstegnet siden vi fastslo tidligere at $a > 0$.

Vi har nå brukt sekantsetningen til å vise at for alle $a = x > 0$ så gjelder ulikheten. ■

# 2.

Sandra har fått i oppgave på eksamen å regne ut den deriverte til

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

i $x = 0$, altså $g'(0)$. Hun ser med en gang at for $x \neq 0$ får hun

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Hun konkluderer så med at siden $\lim_{x\to 0} g'(x)$ ikke eksisterer, vil ikke g'(0) eksistere heller.

Rett før hun skal levere eksamensbesvarelsen sin ser hun at hun har gjort en feil.

Klarer du å se hvorfor Sandras argument er feill? Husk å begrunne hva du mener er feil i Sandras besvarelse og skriv ned hva du mener vil være en riktig konklusjon.

(Vink: Hva er forskjellen mellom utsagnene *den deriverte eksisterer* og *den deriverte er kontinuerlig*?)

Sandras argument er feil fordi hun tenker at grenseverdien for den deriverte må eksistere for at $g'(0)$ skal eksistere, noe som ikke stemmer alltid. Med denne utregningen vil hun finne ut om den deriverte er kontinuerlig i stedet (evt. at $g(x)$ er dobbelderiverbar)

For å finne ut av $g'(0)$ kan vi gå tilbake til den gode gamle definisjonen av den deriverte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\Updownarrow \\ g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Verdimengden til sinusfunksjonen er $[0, 1]$. Altså vet vi at:

$$
\begin{gathered}
-1 \leq \sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq 1 \\
\Updownarrow \\
-h \leq h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq h
\end{gathered} \tag{8}
$$

Når $h \to 0$, går både venstre og høyredelen av ulikheten mot 0. Skviseteoremet gir at $\lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$.

Altså eksisterer den deriverte i 0 og er

$$
g'(0) = 0 \tag{9}
$$

# 3.

I denne oppgaven ser vi på en funksjon $f(x)$ som oppgis å være kontinuerlig og deriverbar. Vi får også oppgitt at

- funksjonen er odde, det vil si $f(-x) = -f(x)$,
- funksjonen er periodisk med periode $2\pi$, det vil si $f(x + 2\pi) = f(x)$,
- $f(x) \geq 0$ for $0 \leq x \leq \pi$,
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,
- $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Regn så ut:

## 3a.

$$\int_{7\pi}^{9\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x \tag{10}$$

Siden funksjonen er periodisk vet vi at:

$$\int_{7\pi}^{9\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+3)\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

Vi setter $n = -1$ og får:

$$\int_{7\pi}^{9\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x \tag{12}$$

Absoluttverdien av en odde-funksjon er en like-funksjon. Vi vet at $f(x) = -f(-x)$ så $|f(x)| = |-f(-x)| = |f(-x)|$. Vi ser tydeligere at dette er en like-funksjon hvis vi lar $g(x) = |f(x)|$, da får vi at $g(x) = g(-x)$, som er definisjonen på en like-funksjon. Regneregler for like-funksjoner forteller oss at $\int_{-a}^{a} f(x) \,\mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{a} f(x) \,\mathrm{d}x$.

Videre vet vi at $\int_{0}^{\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x = 2$, siden for alle $x \in [0, \pi]$ så er $f(x) \geq 0$, altså endrer absoluttverditegnet ikke på noe. Vi får da at

$$\int_{7\pi}^{9\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x = 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}} \tag{13}$$

**3b.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{f(3x)} f'(3x)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

Vi gjenkjenner resultatet av kjerneregelen i integranden og dermed ved antiderivasjon får vi at

$$\int e^{f(3x)} f'(3x)\,\mathrm{d}x = e^{f(3x)} + C \tag{15}$$

Så bruker vi analysens fundamentalteorem til å finne det bestemte integralet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{f(3x)} f'(3x)\,\mathrm{d}x = \left[e^{f(3x)}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = e^{f(\frac{\pi}{2})} - e^{f(0)} \tag{16}$$

Vi vet at $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ fra definisjonen av $f$, og at $f(0) = 0$ fra definisjonen av en odde-funksjon. Vi kan bevise at $f(0) = 0$ ved motsigelsesbevis. Anta $f(0) = k$, hvor $k \neq 0$, da sier definisjonen av en odde-funksjon at $f(0) = -f(-0) = -f(0) = -k$. Vi har nå kommet frem til en motsigelse siden $f(0)$ har to funksjonsverdier $k$ og $-k$, men dette er ikke lovlig i matematikken (hvertfall ikke enda?), så den eneste lovlige måten er hvis $k = 0$, og det stemmer siden $f(0) = -f(-0) = -f(0) = -0 = 0$, og fjerner vi mellomregningen ser vi det tydeligere:

$$f(0) = -f(0) = 0 \tag{17}$$

Vi går tilbake fra digresjonen vår og får at:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{f(3x)} f'(3x)\,\mathrm{d}x = e^{f(\frac{\pi}{2})} - e^{f(0)} = e^1 - e^0 = \underline{\underline{e - 1}} \tag{18}$$

## 3c.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(f(x))^2} \sin(f(x)) \, \mathrm{d}x \tag{19}$$

(Jeg satt og stirret på denne i over 1 time og prøvde forskjellige ting før jeg fant ut av det)

Først ser jeg at integralgrensene er fra $-\pi$ til $\pi$, noe som tyder på at man skal bruke en regel for integraler fra $-a$ til $a$. La

$$g(x) = e^{(f(x))^2} \sin(f(x)) \tag{20}$$

Også tester vi om integranden $g(x)$ er en odde- eller like-funksjon.

For at en funksjon skal være en odde-funksjon må likningen $f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ stemme:

$$g(-x) = e^{(f(-x))^2} \sin(f(-x)) \tag{21}$$

Fra definisjonen til $f(x)$ vet vi at $f(-x) = -f(x)$:

$$g(-x) = e^{(-f(x))^2} \sin(-f(x)) \tag{22}$$

Vi vet at det finnes en trigonometrisk identitet $\sin(-v) = -\sin(v)$, og at ethvert kvadrat er et positivt uttrykk $(-k)^2 = k^2$. Dermed får vi:

$$g(-x) = e^{(f(x))^2} \cdot -\sin(f(x)) \tag{23}$$

Vi flytter minustegnet forrest og ser at uttrykket til høyre for minustegnet ikke er noe annet enn $g(x)$!

$$g(-x) = -e^{(f(x))^2} \sin(f(x)) = -g(x) \tag{24}$$

Siden vi har at $g(-x) = -g(x)$, er $g(x)$ en odde-funksjon, og da gjelder regelen $\int_a^a g(x) \, \mathrm{d}x = 0$

Altså er

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(f(x))^2} \sin(f(x)) \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{0}} \tag{25}$$

# 4.

Bruk en riemannsum til å finne grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{4i}{n^2+i^2} \tag{26}$$

Vi tolker summen som en riemannsum og må omskrive til formen

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \tag{27}$$

Vi lar

$$x_i = \frac{i}{n} \tag{28}$$

og får at

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x_i - x_{i-1}\\ &= \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\\ &= \frac{i-(i-1)}{n}\\ &= \frac{\cancel{i-i}+1}{n}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned} \tag{29}$$

Vi bruker resultatet fra de to forrige utregningene til å finne $f(x_i)$:

$$\begin{aligned}
f(x_i)\Delta x_i &= \frac{4i}{n^2+i^2} \\
&\Updownarrow \\
f(x_i) &= \frac{4i}{(n^2+i^2)\Delta x_i} \\
&= \frac{4i}{(n^2+i^2)\frac{1}{n}} \\
&= \frac{4\frac{i}{n}\cdot n}{(n^2+i^2)\frac{1}{n}} \\
&= \frac{4\frac{i}{n}}{(n^2+i^2)\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{4\frac{i}{n}}{\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)} \\
&= \frac{4\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \\
&= \underline{\frac{4x_i}{1+x_i^2}}
\end{aligned} \tag{30}$$

Integrasjonsgrensene er gitt ved $a = x_0$ og $b = x_n$.

$$x_0 = \frac{0}{n} = 0 \tag{31}$$

$$x_n = \frac{n}{n} = 1 \tag{32}$$

Altså er

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{4i}{n^2+i^2} = \int_0^1 \frac{4x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

Vi begynner å bestemme det bestemte integralet ved å antiderivere

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4x}{1+u}\frac{\mathrm{d}u}{(x^2)'} \\
&= \int \frac{4x}{1+u}\frac{\mathrm{d}u}{2x} \\
&= \int \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\ln(1+u) + C \\
&= \underline{2\ln(1+x^2) + C}
\end{aligned} \tag{34}
$$

Deretter anvender vi analysens fundamentalteorem

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{4x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[2\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\
&= 2\ln(1+1^2) - 2\ln(1+0^2) \\
&= 2\ln(2) - 2\ln(1) \\
&= 2\ln(2) - 2\cdot 0 \\
&= \underline{\underline{2\ln(2)}}
\end{aligned} \tag{35}
$$