1.

Bruker delbrøkoppspalting:

$$\int \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1) = x^2 \tag{2}$$

$$\begin{gathered} x = -1 \Rightarrow A(-2)(-3) = (-1)^2 \Rightarrow A = \frac{1}{6} \\ x = 1 \Rightarrow B(2)(-1) = 1^2 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \Rightarrow C(3)(1) = 2^2 \Rightarrow C = \frac{4}{3} \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \int \frac{1}{6}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{4}{3}\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \\ = \frac{1}{6}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{4}{3}\ln(|x-2|) + C \end{gathered} \tag{4}$$

2.

Vi finner den minste vertikale avstanden ved å undersøke forskjellen mellom funksjonsverdiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)-(x-x^2) \\ &= 2x^2-x+1 \end{aligned} \tag{5}$$

Vi deriverer for å lete etter kritiske punkter:

$$f'(x) = 4x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \tag{6}$$

Vi kan bekrefte dette visuelt ved å se på skissen at $x = \frac{1}{4}$ er et fornuftig svar, da denne x-verdien befinner seg midt mellom topp/bunn-punktene til y_1 og y_2 (og deres koeffisienter er kun ± 1).

3.

Newtons metode får vi fra formelarket:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7}$$

Først flytter vi alt til venstresiden slik at

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \sqrt{1-x} \tag{8}$$

og skæringspunktet befinner seg når $f(x) = 0$.

Vi kommer til å trenge f', så vi beregner ut den først:

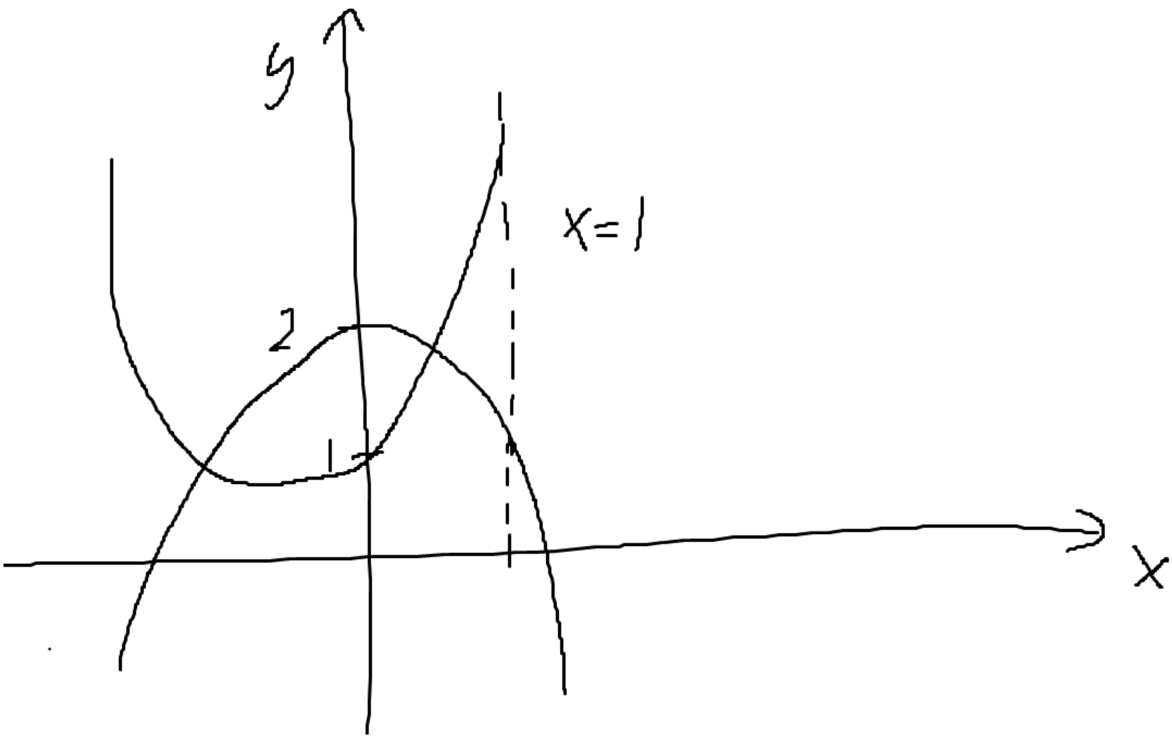
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)1 - x(2x)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{1-x^2}{x^4+2x^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned} \tag{9}$$

Gitt at $x_0 = 0.8$ får vi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.8 - \frac{f(0.8)}{f'(0.8)} \approx 0.7676 \\ x_2 &= 0.7676 - \frac{f(0.7676)}{f'(0.7676)} \approx 0.7668 \\ x_3 &= 0.7668 - \frac{f(0.7668)}{f'(0.7668)} \approx 0.7668 \end{aligned} \tag{10}$$

Avrundet til 2 desimalers nøyaktighet er skjæringspunktet ved $x = 0.77$

4.



Først finner vi skjæringspunktene for å vite integralgrensene:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
x^2 + x + 1 &= 2 - x^2 \\
2x^2 + x - 1 &= 0 \\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\
x &= -1 \vee x = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Forskyver grafene til venstre slik at vi kan dreie om y-aksen

$$
\begin{aligned}
f(x+1) &= (x+1)^2 + x + 2 = x^2 + 2x + 1 + x + 2 = x^2 + 3x + 3 \\
g(x+1) &= 2 - (x+1)^2 = 2 - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 - 2x + 1
\end{aligned} \tag{12}
$$

Skjæringspunktene blir også forskjøvet 1 til venstre (trekk fra 1).

Området R blir da

$$
\begin{aligned}
&2\pi\left(\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} -xg(x+1)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} -xf(x+1)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\pi\left(\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} x^3 + 2x^2 - x\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} -x^3 - 3x^2 - 3x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\pi\left(\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} 2x^3 + 5x^2 + 2x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + x^2\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2\pi\left(\left(\frac{1}{32} - \frac{5}{24} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{16}{2} - \frac{40}{3} + 4\right)\right) \\
&= \frac{45}{16}\pi
\end{aligned}
\tag{13}
$$

5.

Oppgåve 5 Rekn ut

$$\int_1^R \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

der $R > 1$.

Bestem ein verdi av a slik at integralet

$$\int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2+1} - \frac{1}{2x}\right) dx$$

konvergerer. Rekn så ut integralet for denne verdien av a.

$\left(\text{Vink: Du kan få bruk for at } \lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{R^2+1}}{R}\right) = 0.\right)$

$$\begin{aligned}
&\int_1^R \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^R \frac{x}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2x} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^R \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}[\ln(|u|)]_1^R \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left|x^2+1\right|\right)\right]_1^R \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\left|R^2+1\right|\right) - \ln(|2|)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{R^2+1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

La $a \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{ax}{x^2+1} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{a}{2} \ln\left(\frac{R^2+1}{2}\right) - \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{a}{2} \ln\left(\frac{R^2+1}{2}\right) - \frac{1}{2}(\ln(R) - \ln(1)) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{a}{2} \ln\left(\frac{R^2+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(R) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{R^2+1}{2}\right)^a\right) - \frac{1}{2}\ln(R) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\left(\frac{R^2+1}{2}\right)^a}{R}\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(R^2+1)^a}{R}\frac{1}{2^a}\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{(R^2+1)^a}{R}\right) - \ln(2^a)\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Velger $a = \frac{1}{2}$ for å bruke vinket:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{(R^2+1)^{\frac{1}{2}}}{R}\right) - \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 - \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&= -\frac{\ln(2)}{4}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

6.

Oppgåve 6 Det har brote ut ein ulækjeleg sjukdom i ein avsidesliggande by med totalt 5000 innbyggarar. Endringsraten for talet på smitta innbyggarar i byen er proporsjonal (med proporsjonalitetskonstant a) med produktet av dei som er smitta og dei som ikkje er smitta.

La $S(t)$ vere talet på innbyggarar i byen som er smitta ved tid t dagar etter at smitta braut ut.

Forklar kvifor

$$\frac{dS}{dt} = aS(5000 - S).$$

Ved utbrotet av sjukdommen er det 250 innbyggarar som har fått påvist smitte. Etter 7 dagar er det 1250 innbyggarar som har fått påvist smitte. Kor mange dagar vil det ta før 80 % av innbyggarane i byen er smitta?

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = aS(5000 - S) \tag{17}$$

De som er smittet er gitt ved S, de som ikke er smittet er gitt ved total $- S = 5000 - S$. Produktet av dette er $S(5000 - S)$. Dette produktet er skalert av en proporsjonalitetskonstant a: $aS(5000 - S)$. Dette skal beskrive endringsraten til antall smittede gitt ved: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S$. Altså får vi likningen gitt.

Vi har at $S(0) = 250$ og $S(7) = 1250$. Vi vil løse $S(x) = 80\% \cdot 5000 = 4000$

Løser differensiallikningen ved separasjon:

$$\begin{gathered}\int \frac{1}{S(5000 - S)}\,\mathrm{d}S = \int a\,\mathrm{d}t \\ \Updownarrow \\ \int \frac{A}{S} + \frac{B}{5000 - S}\,\mathrm{d}S = \int a\,\mathrm{d}t\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}A(5000 - S) + BS = 1 \\ S = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{5000} \\ S = 5000 \Rightarrow B = \frac{1}{5000}\end{gathered} \tag{19}$$

$$\int \frac{1}{5000}\frac{1}{S} + \frac{1}{5000}\frac{1}{5000-S}\,\mathrm{d}S = \int a\,\mathrm{d}t$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{5000}\ln(|S|) - \frac{1}{5000}\ln(|5000-S|) = at + C$$
$$\Updownarrow \tag{20}$$
$$\ln\left(\frac{S}{5000-S}\right) = 5000at + C$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{S}{5000-S} = Ke^{5000at}$$

Setter inn punktene:

$$\frac{250}{5000-250} = Ke^{5000a\cdot 0} \Rightarrow K = \frac{1}{19} \tag{21}$$

$$\frac{1250}{5000-1250} = \frac{1}{19}e^{5000a\cdot 7} \Rightarrow a = \frac{\ln\left(\frac{1250\cdot 19}{5000-1250}\right)}{5000\cdot 7} = \frac{\ln\left(\frac{19}{3}\right)}{35000} \tag{22}$$

Så løser vi likningen når $S = 4000$, men t er ukjent:

$$\begin{gathered}
\frac{4000}{5000-4000} = \frac{1}{19}e^{\frac{1}{7}\ln\left(\frac{19}{3}\right)t} \\
\Updownarrow \\
4 = \frac{1}{19}\left(\frac{19}{3}\right)^{\frac{1}{7}t} \\
\Updownarrow \\
76 = \left(\frac{19}{3}\right)^{\frac{1}{7}t} \\
\Updownarrow \\
\ln(76) = \ln\left(\left(\frac{19}{3}\right)^{\frac{1}{7}t}\right) \\
\Updownarrow \\
\ln(76) = \frac{t}{7}\ln\left(\frac{19}{3}\right) \\
\Updownarrow \\
t = 7\frac{\ln(76)}{\ln\left(\frac{19}{3}\right)} \\
\Updownarrow \\
t \approx 16.42
\end{gathered} \tag{23}$$

7.

Oppgåve 7 Avgjer om rekkene

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2(n)}{n^{2022}} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 3n^3}{4n^3 + 1}$$

er absolutt konvergente, vilkårsbundne konvergente eller divergente.

i. Sjekker absolutt konvergens først. $\cos^2(n)$ er alltid i intervallet $[0, 1]$, altså må rekken være mindre enn eller lik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2022}}$, som er en p-rekke med eksponent $2022 > 1$, så den konvergerer absolutt.

ii. Rekken divergerer siden leddene ikke går mot 0. Ved gjentatt l'Hôpitals får vi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3! \cdot 3}{4!} = \frac{3}{4} \neq 0 \tag{24}$$

8.

Oppgåve 8 La $r > 0$. Finn taylorpolynomet til

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^r}$$

av grad 1, $P_1(x)$, om punktet $x = 0$, og bruk dette til å vise at

$$\frac{1}{(1+x)^r} > 1 - rx$$

for $x > 0$.

$$f'(x) = \left((1+x)^{-r}\right)' = -r(1+x)^{-r-1} = -\frac{r}{(1+x)^{r+1}} \tag{25}$$

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 - rx \tag{26}$$

Vi vil vise at $f(x) > P_1(x)$. Vi kan komme frem til dette med Taylors teorem:

$$E_1(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(s)}{2}x^2 \tag{27}$$

Siden

$$f''(x) = \frac{r(r+1)}{(1+x)^{r+2}} > 0 \tag{28}$$

er differansen mellom $f(x)$ og $P_1(x)$ positiv, siden $\frac{f''(s)}{2}x^2$ er positiv, og dermed er $f(x) > P_1(x)$

9.

Oppgåve 9 Anta at

$$f(x) = xg(x)$$

der $g(x)$ er ein funksjon som er kontinuerleg i $x = 0$ og kvar $g(0) = 2\pi$.

Vis at $f(x)$ er deriverbar i $x = 0$, og rekn ut $f'(0)$.

Bruker definisjonen av den deriverte:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)g(0 + \Delta x) - 0g(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)g(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} g(\Delta x) \\ &= g(0) = 2\pi \end{aligned} \tag{29}$$

Vi kan ikke fjerne grenseverdien dersom grenseverdien ikke eksisterer, så kontinuerligheten til g i $x = 0$ her medfører deriverbarhet i $x = 0$ på f.

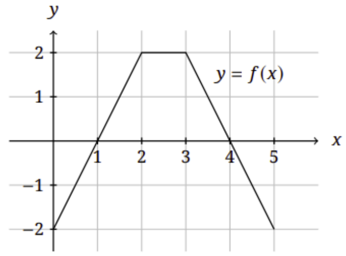
10.

Oppgåve 10

La

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Rekn ut $g(4)$ og $g'(4)$ når du veit at grafen til $f(x)$ er som vist på figuren til høgre.



Vi bruker arealmetoden for å bestemme integralet:

$$g(4) = \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \cancel{\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t} + \int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2+1}{2} \cdot 2 = 3 \tag{30}$$

Analysens fundamentalteorem gir at:

$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{31}$$

Altså er $g(4) = f(4) = 0$