

# Table des matières

|   |          |
|---|----------|
| <b>Introduction au rapport</b>  | <b>2</b> |
| <b>Taux de change US/Euro</b>   | <b>3</b> |
| Analyse primaire du jeu de données . . . . .                                  | 3        |
| Test de stationnarité . . . . .   | 3        |
| Transformation des données . . . . .  | 3        |
| Identification du modèle . . . . .  | 4        |
| Estimation des paramètres des différents modèles et test de résidus . . . . . | 5        |
| d) . . . . .  | 5        |
| e) . . . . .  | 5        |
| f) . . . . .  | 7        |
| <b>Annexe</b>   | <b>8</b> |
| Tableaux et figures . . . . .   | 8        |
| Code informatique . . . . .   | 13       |

## Introduction au rapport

Le présent rapport se veut être l'analyse de différentes séries chronologiques. Plus précisément, ce rapport a pour but de trouver le modèle qui s'ajuste le plus exactement à nos échantillons de données. Le travail en bref sera alors de séparer nos bases de données en un échantillon *entraînement* qui servira à trouver un modèle et en un échantillon *test* qui servira à valider la précision du modèle retenu. Le travail est fait à partir de deux bases de données pour un total de cinq variables à modéliser. La première base de données, traitée au numéro 1, contient les données mensuelles du taux de change du dollar américain par rapport à la monnaie Euro de janvier 1999 à décembre 2016. La seconde base de données contient une série de statistiques de la *SAAQ*, soit le nombre d'accidents automobiles avec dommages corporels, le nombre de personnes accidentés, le nombre de demandes d'indemnités et le coût total de l'indemnisation (en dollar constants 2015) pour les années 1978 à 2015 inclusivement. Ces données seront traitées au numéro 2. Afin d'alléger la lecture du présent rapport, les figures et tableaux furent placés en annexe.

# Taux de change US/Euro

## Analyse primaire du jeu de données

Tout d'abord, nous observons, à la *Figure 1* en annexe, la série chronologique du taux de change américain/européen depuis janvier 1999 jusqu'à décembre 2016. Les données ont été collectées de façon quotidienne pour ensuite être transformées en taux mensuelles.

Grâce à une première analyse, on remarque sur le tableau de la fonction d'autocorrélation échantillonnale qu'il y a une forte autocorrélation dans notre jeu de données et que celle-ci diminue lentement plus le lag augmente (voir *Figure 2*). On soupçonne donc fortement ce processus d'être non-stationnaire. Il n'est pas nécessaire de tracer le graphique de la fonction d'autocorrélation partielle puisque on doit d'abord stationnariser notre processus avant de réellement débiter son analyse.

## Test de stationnarité

Le test de stationnarité de Dickey-Fuller est alors effectué sur notre base de données. On remarque que pour un ordre  $k = 2$  de processus auto-autoregressif tel que proposé par la fonction *ar* de *R*, notre processus est non stationnaire à un niveau de confiance de 5% selon ce test avec une *p-value* très forte de 91.33%. On vérifie alors si une transformée Box-Cox est appropriée à notre modèle avant de tester la stationnarité d'une première différenciation.

## Transformation des données

Étant donné que les données sont positives, il est possible d'utiliser la transformée de Box-Cox afin de stabiliser notre processus. On rappelle que la famille des fonctions de puissance est définie de la façon suivante:

$$g(x) = \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} \times 1_{\{\lambda \neq 0\}} + \ln(x) \times 1_{\{\lambda = 0\}}$$

$\lambda$  est donc déterminé en maximisant la fonction de log-vraisemblance de nos données fournie à la *Figure 3*.

On constate que  $\lambda = 0.1$  semble être l'estimé MLE situé au centre de l'intervalle de confiance 95%, soit  $[-0.5, 0.7]$ . Puisque  $\lambda = 0$  est dans notre intervalle de confiance, cette valeur du paramètre est également à considérer. Dans le cas où le processus serait à différencier une seule fois, la transformation logarithmique est particulièrement attirante puisqu'elle permet de modéliser non pas le «prix» du taux de change, mais son rendement comme il est usage de la faire dans le cas d'outils financiers. En effet, soit  $Y_t$  le prix d'un outil financier au temps  $t$ , le modèle logarithmique modélise le rendement de la façon suivante.<sup>1</sup> SI ON GARDE PLUS LOIN LE MODELE ARIMA(0,1,1) CELA REVIENS AU MODELE LOGNORMALE (A MENTIONNER)

$$Y_t = Y_{t-1}e^X$$

Où  $X$ , le rendement continu mensuelle, est la variable aléatoire à modéliser. Ainsi, suite à une première différenciation de notre modèle logarithmique, on obtient direction ce rendement. Soit,

$$\log\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}\right) = X$$

On conservera alors cette transformation à condition que la première différenciation de notre processus soit stationnaire. Le graphique de cette transformation est affiché à la *Figure 4*.

---

1. WEISHAUS, Abraham, SOA Exam MFE Models for Financial Economics 10th Edition.

On effectue alors à nouveau, suite à une première différenciation, le test augmenté de Dickey-Fuller. On remarque cette fois qu'avec un processus autorégressif d'ordre 1 tel que suggéré par la fonction *ar*, on ne peut rejeter l'hypothèse de stationnarité avec un p-value inférieur à 1%. Ainsi, tel que mentionnée précédemment, la transformation logarithmique sera conservée. Le graphique de la première différenciation du logarithme de la série chronologique à l'étude se trouve à la *Figure 5*.

## Identification du modèle

Maintenant que la série est stationnaire, on peut en identifier le modèle. La première différenciation du logarithme du taux de change US/Euro sera dorénavant notre modèle de base. On fera ainsi référence à ce modèle par défaut.

On observe les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation affichées aux *Figure 6* et *Figure 7* de la série à l'étude. On remarque que la fonction d'autocorrélation suggère fortement un modèle à moyenne mobile d'ordre 1, soit IMA(1,1) pour notre modèle transformé alors que la fonction d'autocorrélation partielle suggère un modèle autorégressif d'ordre 1, soit ARI(1,1). On testera alors également le modèle ARIMA(1,1,1) qui est suggéré par la combinaison de ces graphiques.

On observe ensuite la fonction d'autocorrélation étendue afin de voir si ce test à un autre modèle à proposer. Le tableau de la fonction EACF est à la *Table I*. On observe d'abord de ce tableau que le modèle IMA(1,1) est suggéré pour la différenciation de notre modèle transformé initial. On peut également chercher à savoir si la valeur du  $\phi$  en ARMA(0,1) et du  $x$  en ARMA(1,1) sont significativement différents de leurs valeurs inverses ( $x$  pour le  $\phi$  et vice versa), sans quoi le modèle ARIMA(1,1,1) serait également suggéré par le tableau EACF. Cependant, comme il fut déjà décidé d'évaluer la pertinence du modèle ARIMA(1,1,1) suite à l'analyse des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle, il n'est pas nécessaire de tester la pertinence de ce modèle selon le EACF.

Le dernier test effectué pour ajuster un modèle à notre série chronologique est le test du BIC. Le tableau du BIC est tracé à la *Table II* propose un modèle ARI(1,1). L'ordre maximal de moyenne mobile pour ce test a été établi à 1, sans quoi la fonction *armasubsets* permettant de tracer le tableau du BIC retourne des avertissements de forte dépendance linéaire entre les paramètres. On étudiera ainsi les quatre tests proposés par les tests précédents qui peuvent être résumés de la façon suivante;

| Résumé            |                          |
|-------------------|--------------------------|
| Tests et tableaux | Modèles suggérés         |
| ACF               | IMA(1,1)<br>ARIMA(1,1,1) |
| PACF              | ARI(1,1)<br>ARIMA(1,1,1) |
| EACF              | IMA(1,1)                 |
| BIC               | ARI(1,1)                 |

On teste alors les modèles ARI(1,1), IMA(1,1) et ARIMA(1,1,1) qui sont développés, dans l'ordre, des façons suivantes.

$$W_t - \mu = \phi(W_{t-1} - \mu) + e_t \quad (1)$$

$$W_t - \mu = e_t - \theta e_{t-1} \quad (2)$$

$$W_t - \mu = \phi(W_{t-1} - \mu) + e_t - \theta e_{t-1} \quad (3)$$

Où

$$W_t = \nabla \log(Y_t)$$

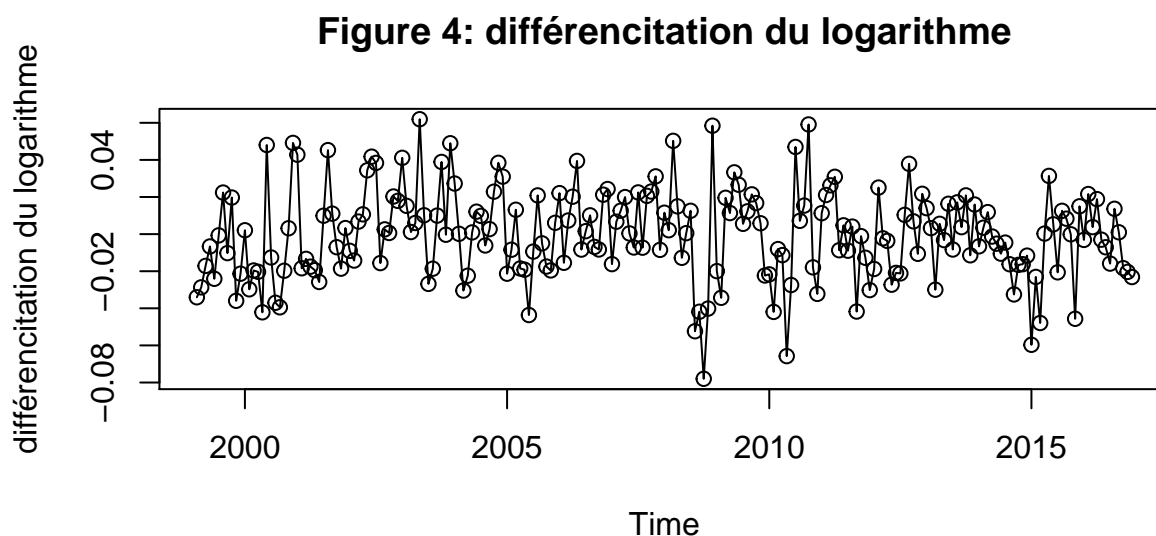
Et  $e_t$  est un bruit blanc et  $\mu$  la moyenne de la série chronologique non-centrée. Il est ici important de noter que les paramètres estimés  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\phi}$  ne seront pas les mêmes dans les trois modèles et devront donc être estimés pour chacun d'entre eux.

## Estimation des paramètres des différents modèles et test de résidus

On estime alors les valeurs des différents paramètres selon la méthode du maximum de vraisemblance à l'aide de la fonction *arima*. Les résultats se trouvent à la *Table III*. TESTER SI LES MU SONT VRAIMENT 0 OU SI CEST JUSTE A CAUSE DU LOG

d)

En revanche, si on effectue une première différenciation du log de notre série, on obtient la série de la figure 4 qui semble plus stable.

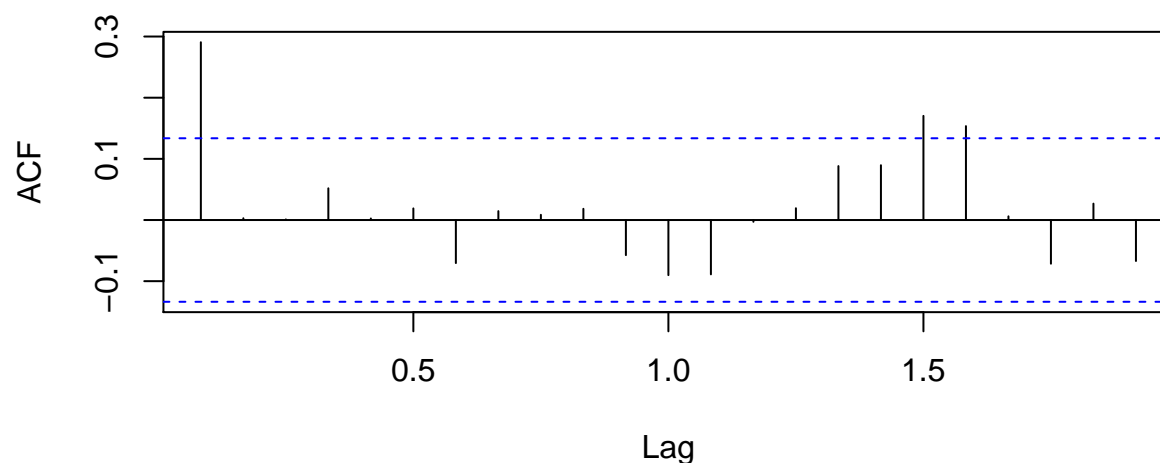


On vérifie alors si une première différenciation amène la stationnarité à notre processus en utilisant le test augmenté de Dickey-Fuller (ADF). En se concentrant sur la partie autorégressive, on obtient un processus AR(1) associé à notre modèle de la première différenciation du logarithme. Par la suite, on applique le test ADF à 95% et on obtient comme estimé  $a/\sigma_a$ ,  $t_{DF} = -9.5181$ , avec une p-value de 0.01. Le test semble corroborer que la série chronologique est stationnaire, i.e qu'une première différenciation doit s'appliquer.

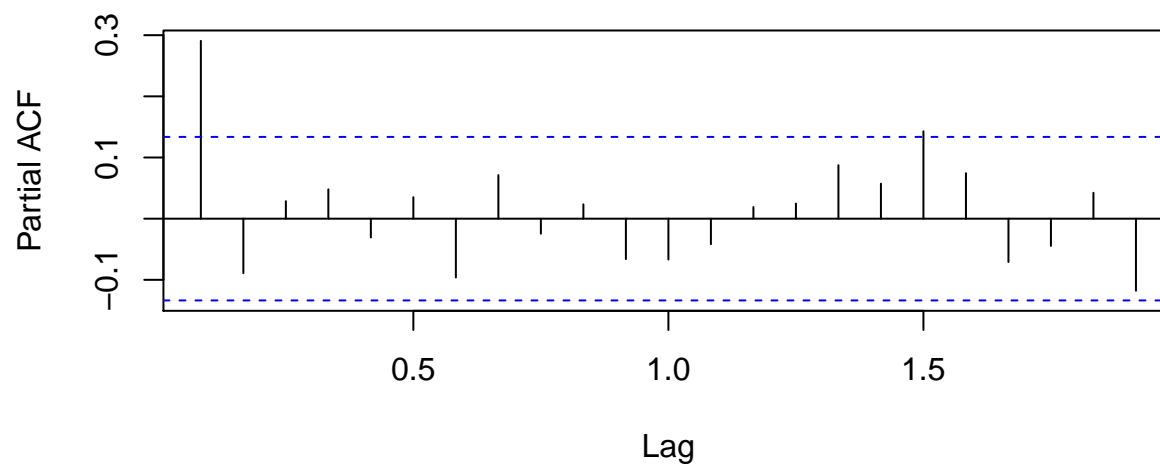
e)

On cherche maintenant le modèle de notre série stationnaire. En observant le graphique ACF et PACF de la figure 5 et 6. Il est à noter que le lag est exprimé en année, ce qui veut dire que 0.1 équivaut à 1/10 d'année et que 0.5 équivaut à 6 mois.

**Figure 5: ACF de la différence du logarithme**



**Figure 6: PACF de la différence du logarithme**

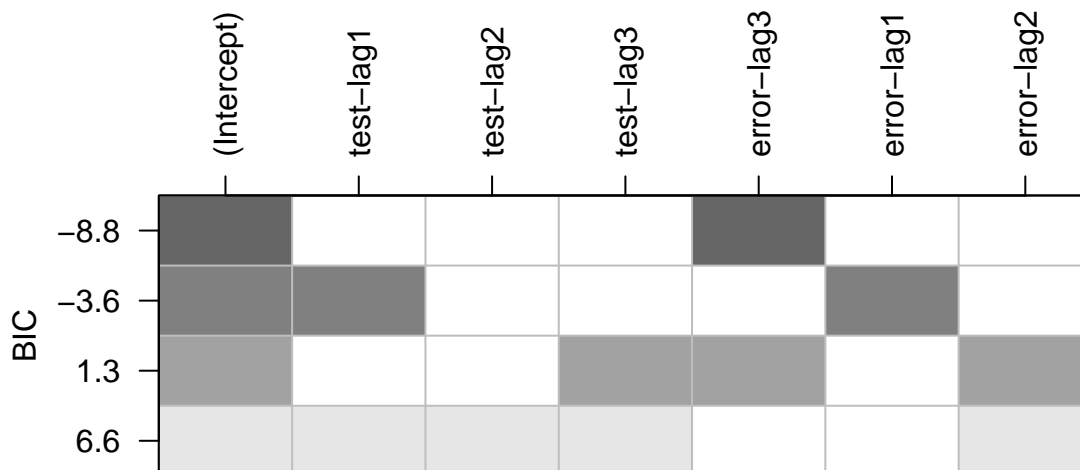


Il semblerait que l'on soit en présence d'un  $ARIMA(1,1,0)$  en se fiant au tableau ACF. Pour ce qui est du graphique PACF, on observe une  $ARIMA(0,1,1)$ . Nous confirmons le tout avec la fonction d'autocorrélation étendue (EACF) ci-dessous.

```
## AR/MA
##   0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
## 0 x o o o o o o o o o o o o o
## 1 x x o o o o o o o o o o o
## 2 x o o o o o o o o o o o o
## 3 x x x x o o o o o o o o o
## 4 x x o x o o o o o o o o o
## 5 x o x x o o o o o o o o o
## 6 x x x x o o o o o o o o o
## 7 x x x x x x o o o o o o o
```

Ce graphique porte à croire que l'on est en présence d'un modèle ARIMA(0,1,1), i.e. IMA(1). On continue notre analyse en appliquant le critère d'information Bayésienne (BIC).

```
## Warning in leaps.setup(x, y, wt = wt, nbest = nbest, nvmax = nvmax,
## force.in = force.in, : 2 linear dependencies found
## Reordering variables and trying again:
```



Nous concluons à partir de ce graphique que le meilleur modèle à considérer est l'ARIMA(0,1,3).

Pour résumé, après avoir analysé les différents graphiques de corrélation et les différents tests, nous considérerons les 3 modèles suivants basés sur le logarithme:

- ARIMA(1,1,0);
- ARIMA(0,1,1);
- ARIMA(0,1,3).

f)

Par la suite, il faut estimer les paramètres de chacun des modèles énumérés en (e) par la méthode du maximum de vraisemblance (MLE).

Pour l'ARIMA(0,1,1), le paramètre  $\theta_1$  de notre MA(1) est de 0.3118, ce qui nous donne le modèle suivant:

$$\log Y_t = \log Y_{t-1} + e_t + 0.3118e_{t-1}$$

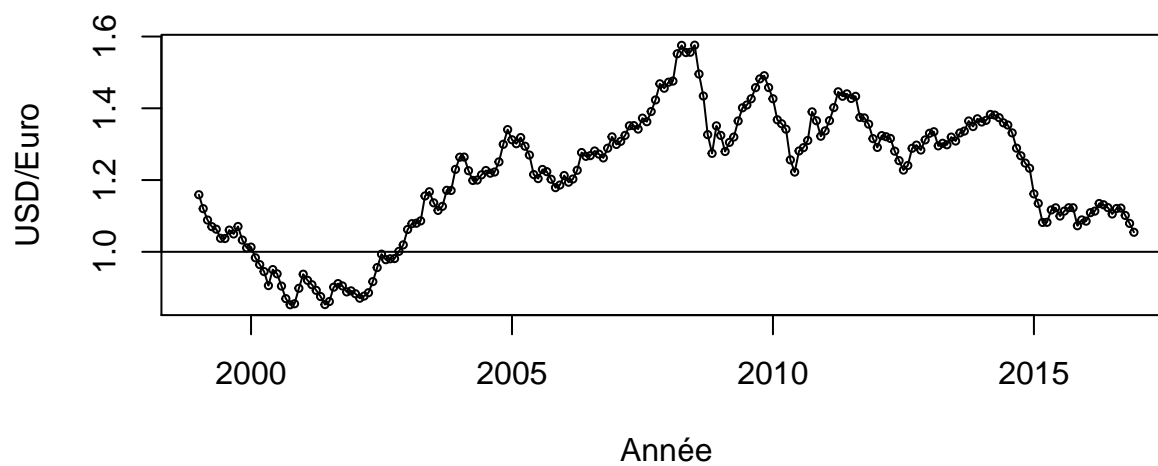
Pour l'ARIMA(1,1,0), le paramètre  $\phi_1$  de notre AR(1) est de 0.2933, ce qui nous donne le modèle suivante:

$$\log Y_t = 1,2933 \log Y_{t-1} - 0.2933 \log Y_{t-2} + e_t$$

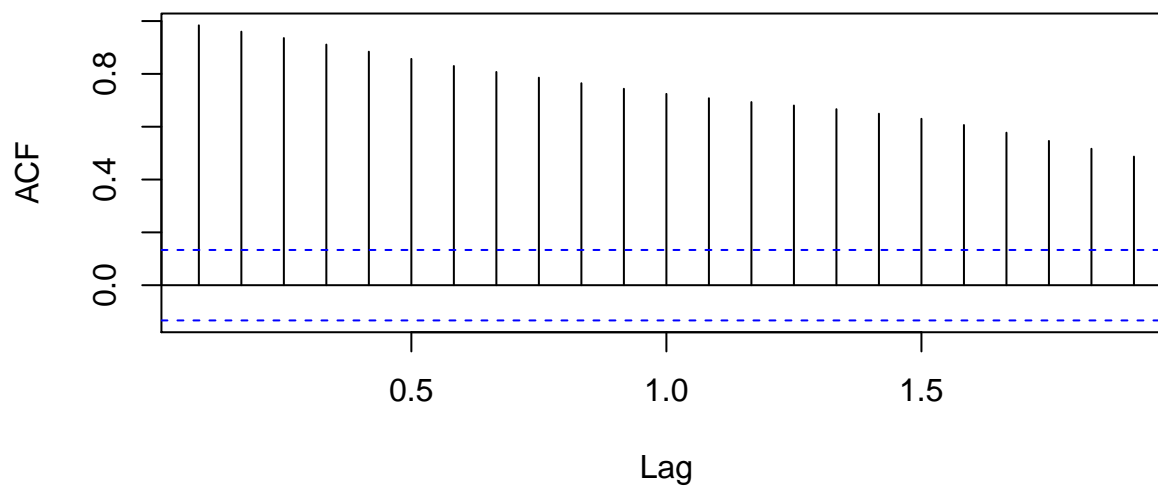
Pour l'ARIMA(0,1,3), le paramètre  $\phi_1$  de notre AR(1) est de 0.2933, ce qui nous donne le modèle suivante:  
# voir chapitre 5 pour écrire le modèle

## Annexe

### Tableaux et figures

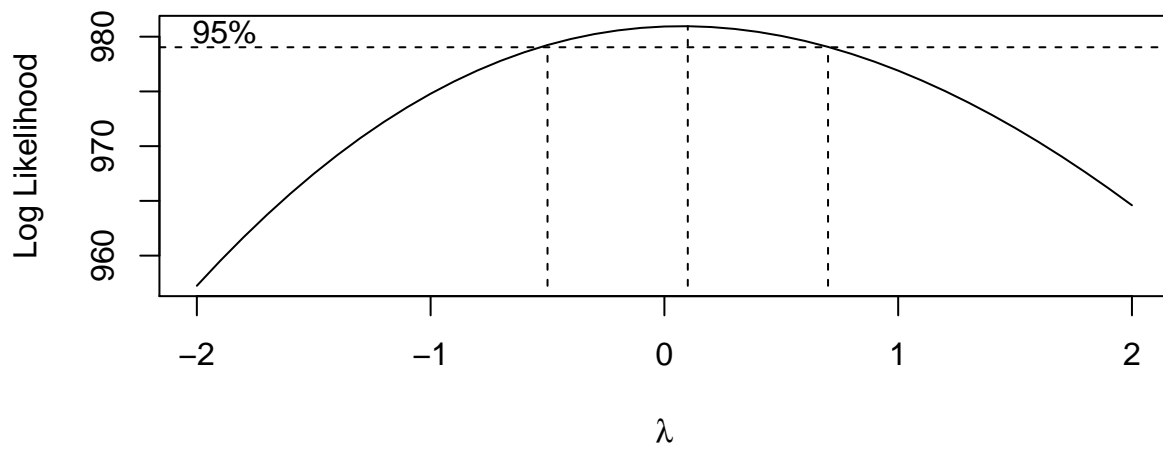


**Figure 1.** Taux de change US/Euro mensuelle de janvier 1999 à décembre 2015.

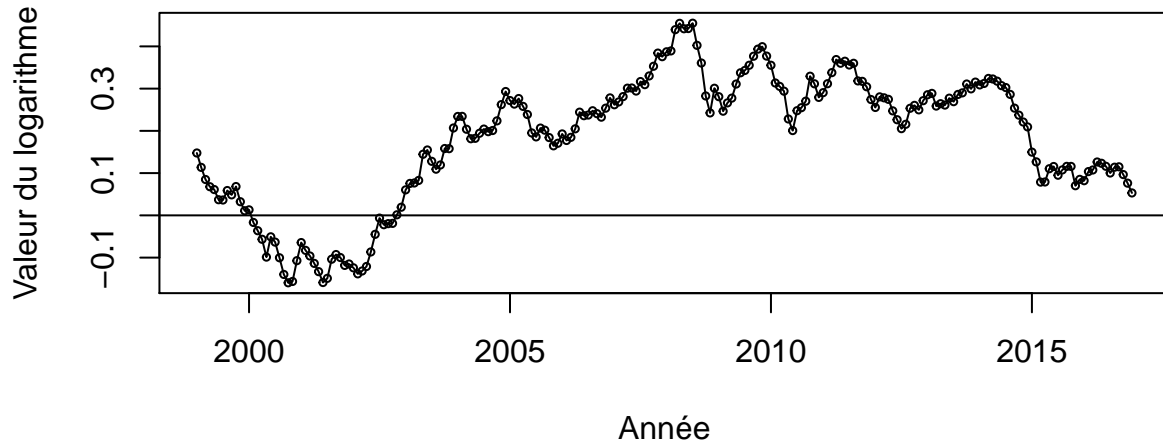


**Figure 2.** Fonction d'autocorrélation échantillonnale du taux de change US/Euro. Le lag étant exprimé en années.

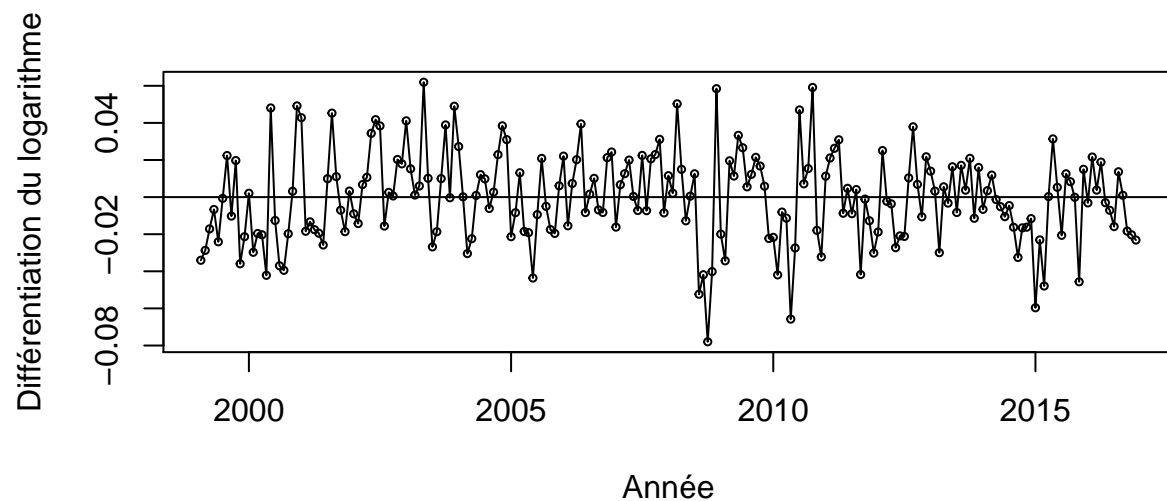




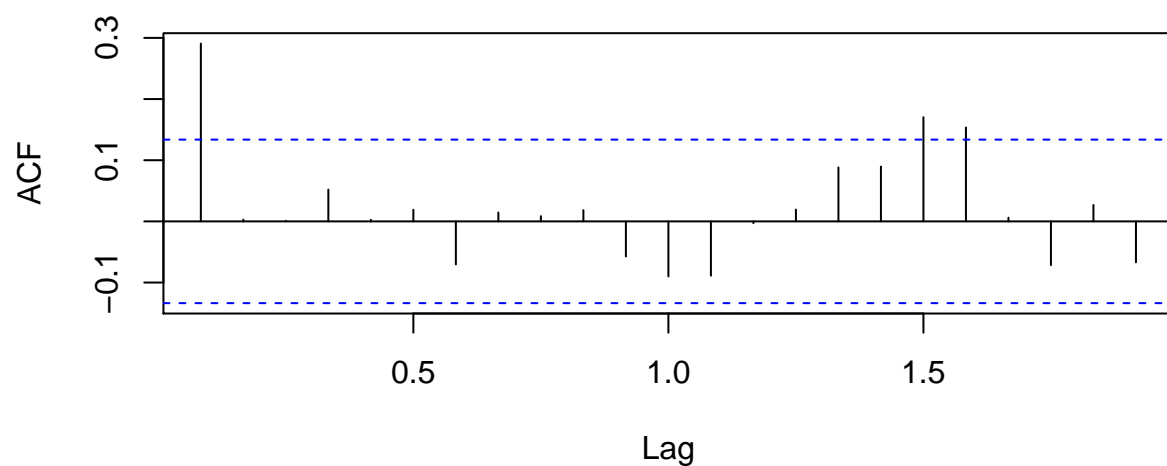
**Figure 3.** Fonction du logarithme de vraisemblance de la transformée de Box-Cox de la série chronologique du taux de change US/Euro.



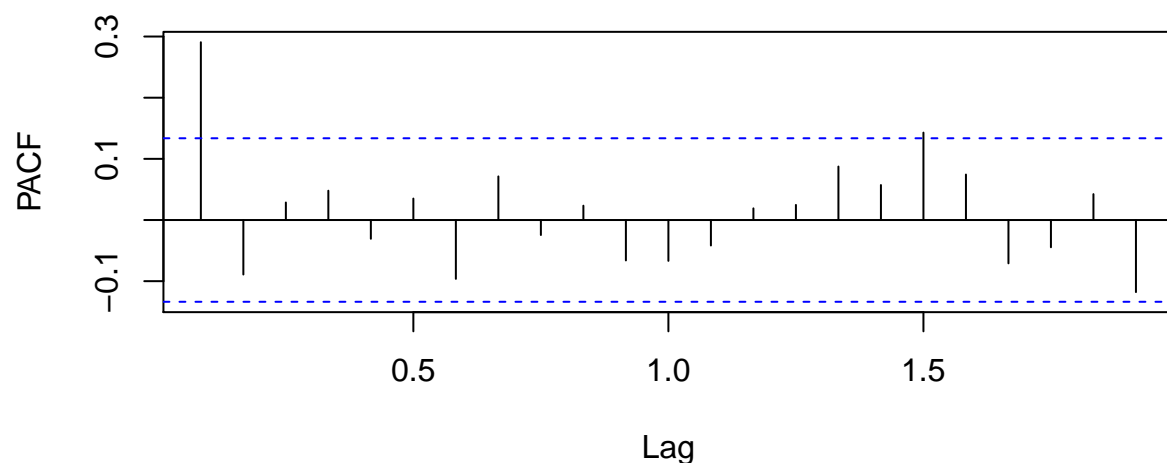
**Figure 4.** Logarithme du taux de change US/Euro mensuelle de janvier 1999 à décembre 2015.



**Figure 5.** Première différenciation du logarithme du taux de change US/Euro mensuelle de janvier 1999 à décembre 2015.



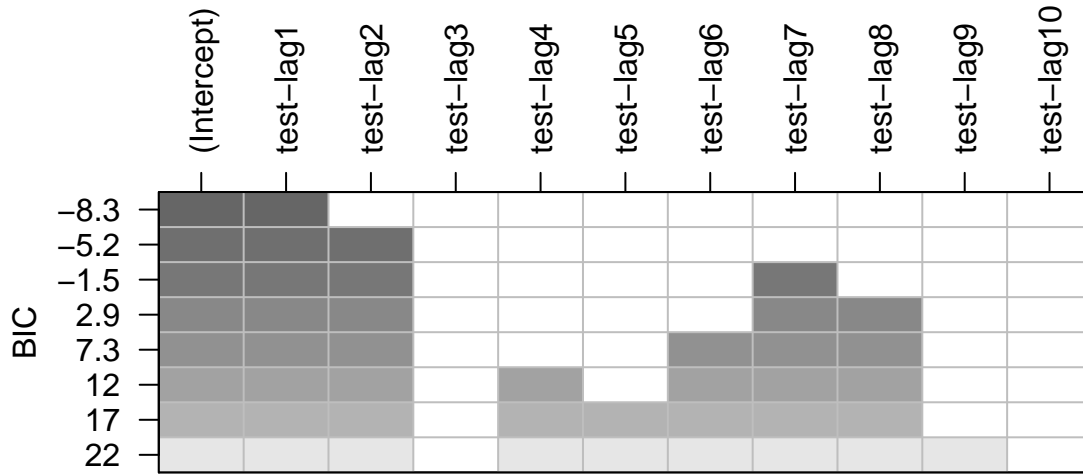
**Figure 6.** Fonction d'autocorrélation de la première différenciation du logarithme du taux de change US/Euro mensuelle de janvier 1999 à décembre 2015.



**Figure 7.** Fonction d'autocorrélation partielle de la première différentiation du logarithme du taux de change US/Euro mensuelle de janvier 1999 à décembre 2015.

```
## AR/MA
##  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
## 0 x o o o o o o o o o o o o o
## 1 x x o o o o o o o o o o o o
## 2 x o o o o o o o o o o o o o
## 3 x x x x o o o o o o o o o o
## 4 x x o x o o o o o o o o o o
## 5 x o x x o o o o o o o o o o
## 6 x x x x o o o o o o o o o o
## 7 x x x x x x o o o o o o o o
```

**Table I.** Tableau de la fonction EACF de la première différentiation du logarithme du taux de change US/Euro mensuelle de janvier 1999 à décembre 2015.



**Table II.** Tableau de la fonction BIC de la première différentiation du logarithme du taux de change US/Euro mensuelle de janvier 1999 à décembre 2015.

| Tests et tableaux | Modèles suggérés | res    |
|-------------------|------------------|--------|
| ARI(1,1)          | $\mu$            | 0      |
|                   | $\phi$           | 0.3118 |
| IMA(1,1)          | $\mu$            | 0      |
|                   | $\theta$         | 0.2933 |
| ARIMA(1,1,1)      | $\mu$            | 0      |
|                   | $\phi$           | 0.0557 |
|                   | $\theta$         | 0.2635 |

**Table III.** Tableau des valeurs estimées des différents coefficients obtenus de la fonction *arima* pour les trois modèles à l'étude du logarithme du taux de change US/Euro.

## Code informatique

```
library('TSA')
library('tseries')

# Importation des données
taux <- read.csv2("C:/Users/TEMP/Documents/GitHub/TP_ACT2010/Taux_de_change_US_Euro.csv")
rendement<-taux$US.Euro
anne.mois<-taux$Année.mois

# création de la série chronologique
ttaux<-ts(rendement,start=c(1999,1),end=c(2016,12),frequency = 12)

# Test augmenté de Dickey-Fuller (ADF)
ar(log(ttaux))
adf.test(log(ttaux), k=2)

ttaux011 <- arima(log(ttaux), order=c(0,1,1), method='ML')
```