1o ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΙΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

__ΕΙΣΑΓΩΓΉ:__

Το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε έχει ως εξής: Καλούμαστε να ελαχιστοποιήσουμε 3 δοσμένες κυρτές συναρτήσεις μίας μεταβλητής στο διάστημα [-1,3], στο οποίο ξέρουμε ότι βρίσκεται η λύση X*. Θα υλοποιήσουμε 4 διαφορετικούς αλγορίθμους ελαχιστοποίησης, οι οποίοι δέχονται ως ορίσματα:

→ τα α=-1, β=3
→ την προδιαγεγραμμένη ακρίβεια l>0
(→ το βήμα e)

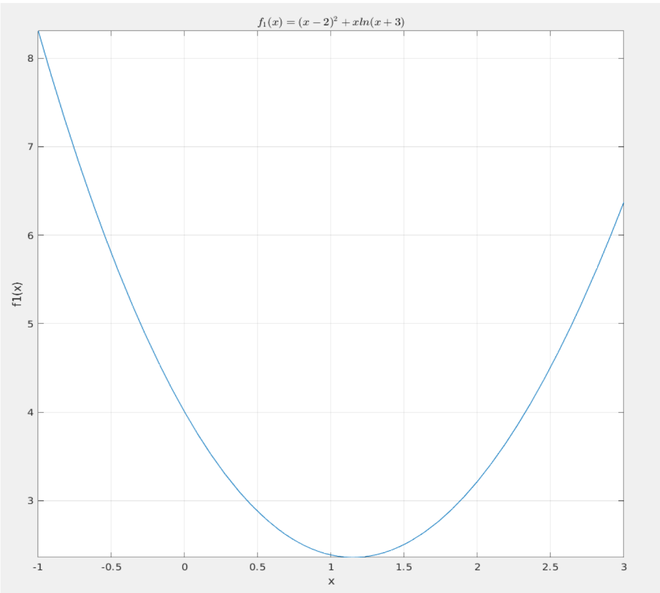
και στον τερματισμό τους επιστρέφουν:

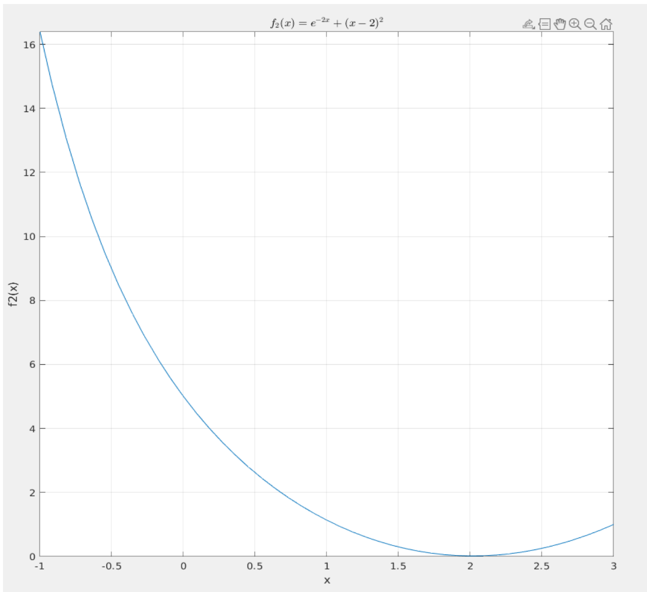
→ το διάστημα σύγκλισης [ακ, βκ]
→ τον αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου (k)
→ το πλήθος των αριθμητικών υπολογισμών της εκάστοτε fi(x) (cnt)

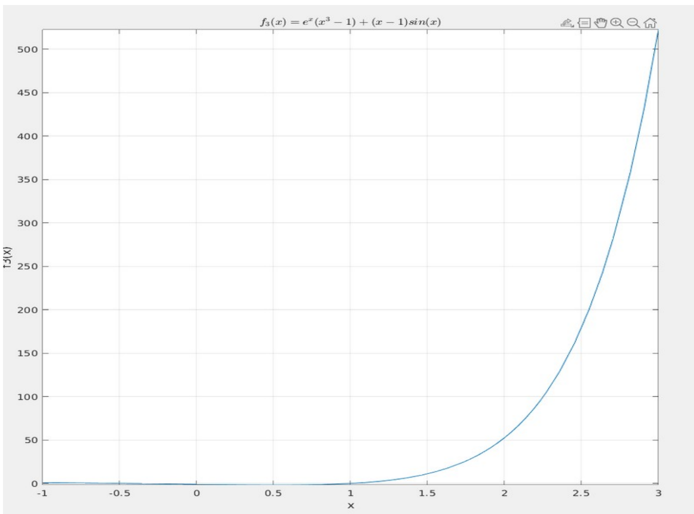
Σημασία επαναλήψεων του αλγορίθμου:

Θέλουμε ο αλγόριθμος να φτάνει στην ζητούμενη ακρίβεια διαστήματος σε όσο λιγότερες επαναλήψεις k γίνεται αλλά και να διατηρεί το πλήθος τον υπολογισμών της f(x) χαμηλό (καθώς άμα η f(x) είναι συνάρτηση της οποίας ο σημειακός υπολογισμός απαιτεί αρκετό υπολογιστικό χρόνο, ο αλγόριθμος θα αργήσει να φτάσει στο τελικό αποτέλεσμα).

ΠΑΡΑΚΆΤΩ φαίνονται οι 3 δοσμένες συναρτήσεις μας στο διάστημα [-1,3]







1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

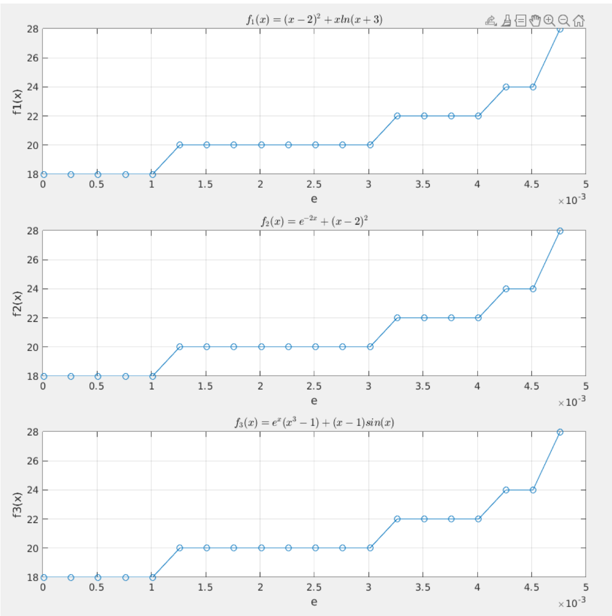
ΤΟΥΛΚΕΡΙΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

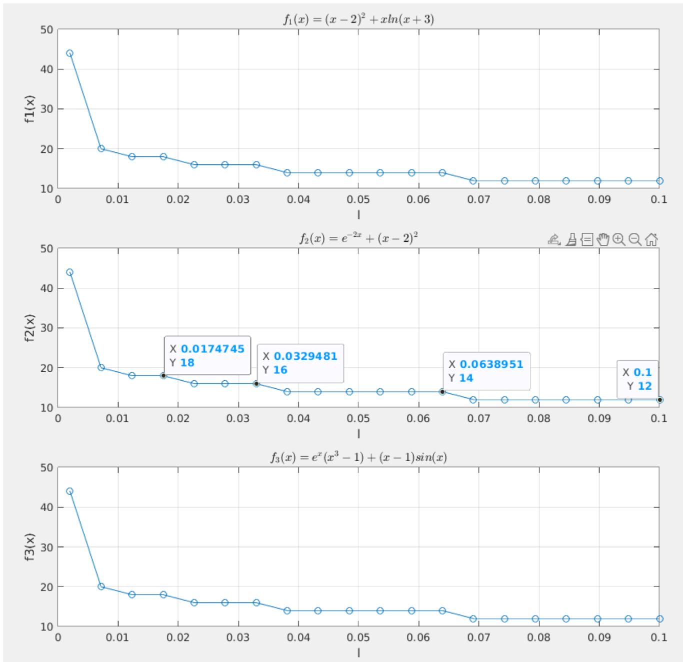
ΜΈΘΟΔΟΣ της ΔΙΧΟΤΌΜΟΥ χωρίς την χρήση παραγώγων

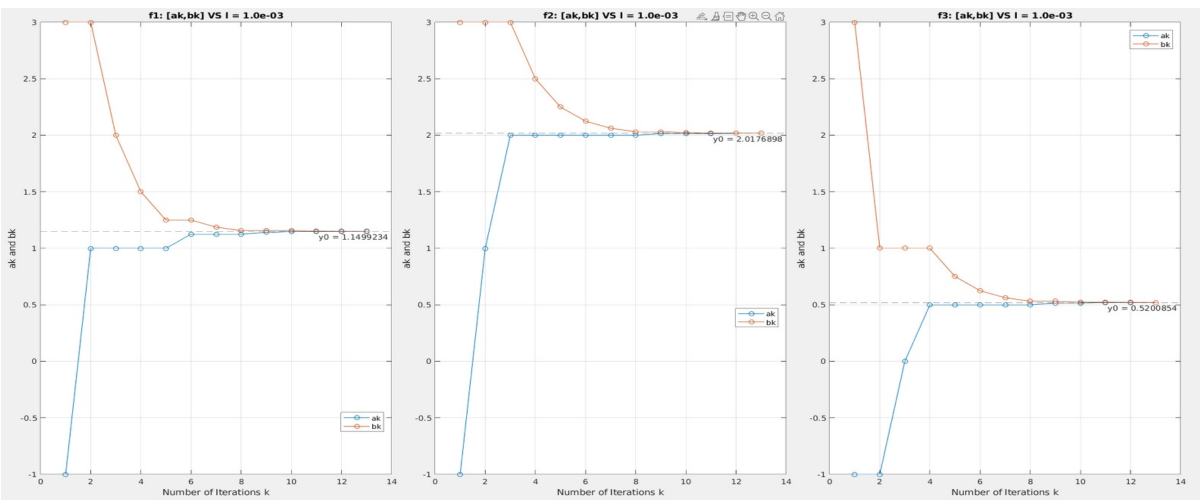
Ο τρόπος λειτουργίας της μεθόδου της διχοτόμου είναι αρκετά απλός.
Έχουμε ως όρισμα κάποιο διάστημα αναζήτησης [α1, β1] και την επιθυμητή ακρίβεια του τελικού διαστήματος l.
Η μέθοδος επιλέγει δύο σημεία χ1 και χ2 εντός του [α1,β1] ως εξής:
χ1=(α1+β1)/2 + e και χ2=(α1+β1)/2 – e, όπου e το βήμα, δοσμένο από τον χρήστη ως όρισμα.
Υπολογίζει και συγκρίνει τις fi(x1), fi(x2), και: αν fi(x1)>=fi(x2), απο θεωρία **αποκλείεται η κυρτή f να παρουσιάσει ελάχιστο στο [a1,x1],** οπότε πρέπει να συρρικνώσουμε το διάστημα αναζήτησης μας στο **[x1,b1].** Αν fi(x1)<fi(x2), τότε αντίστοιχα συρρικνώνεται στο **[a1, x2].** (*η διαδικασία σύγκρισης και συρρίκνωσης είναι κοινή και για τις 4 μεθόδους)*

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στο υποδιάστημα που προέκυψε.
Η μέθοδος θα τερματίσει όταν **|bk-ak| < l**, δηλαδή όταν το μήκος του διαστήματος αναζήτησής μας γίνει μικρότερο από την επιθυμητή ακρίβεια l.

Ιδιαίτερα σημεία κώδικα:
→για να διατηρείται οριακά η ισχύς της σχέσης 2e<=l, οι τιμές των e και l έχουν αυξηθεί ή μειωθεί κατά 0.001 στα όρια των διαστημάτων τους



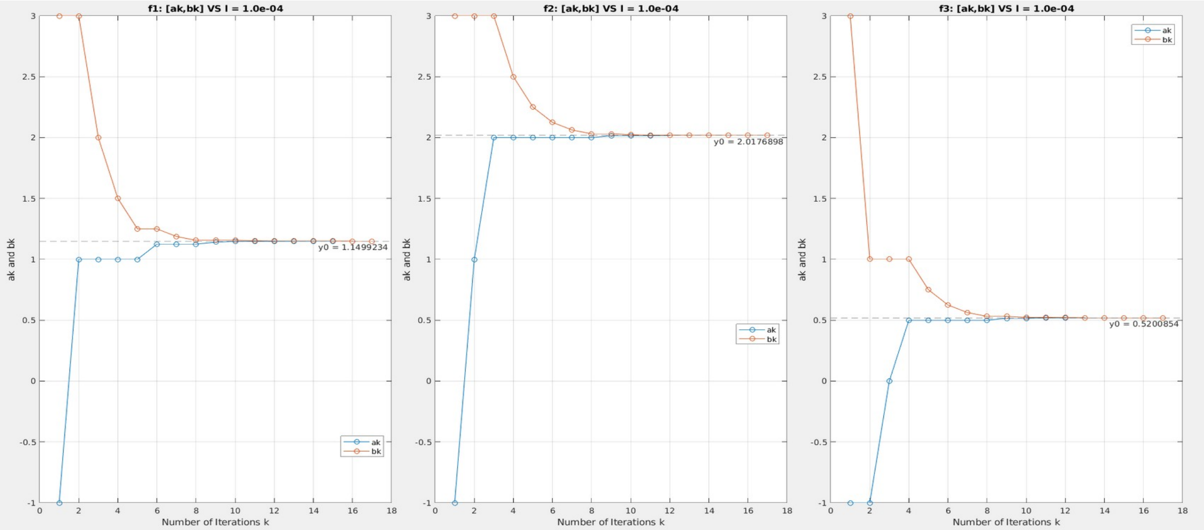


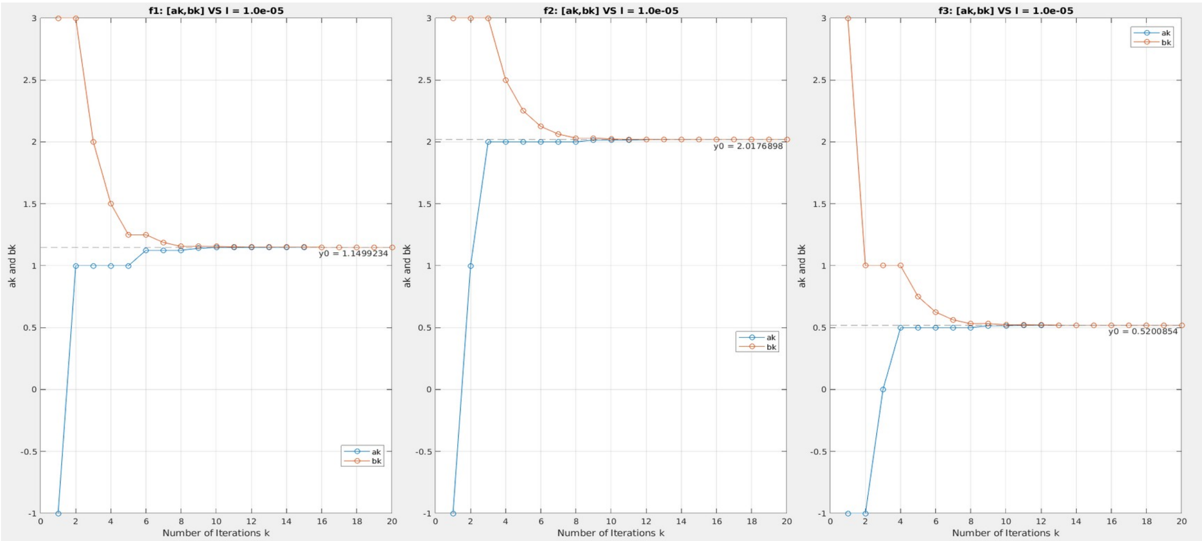


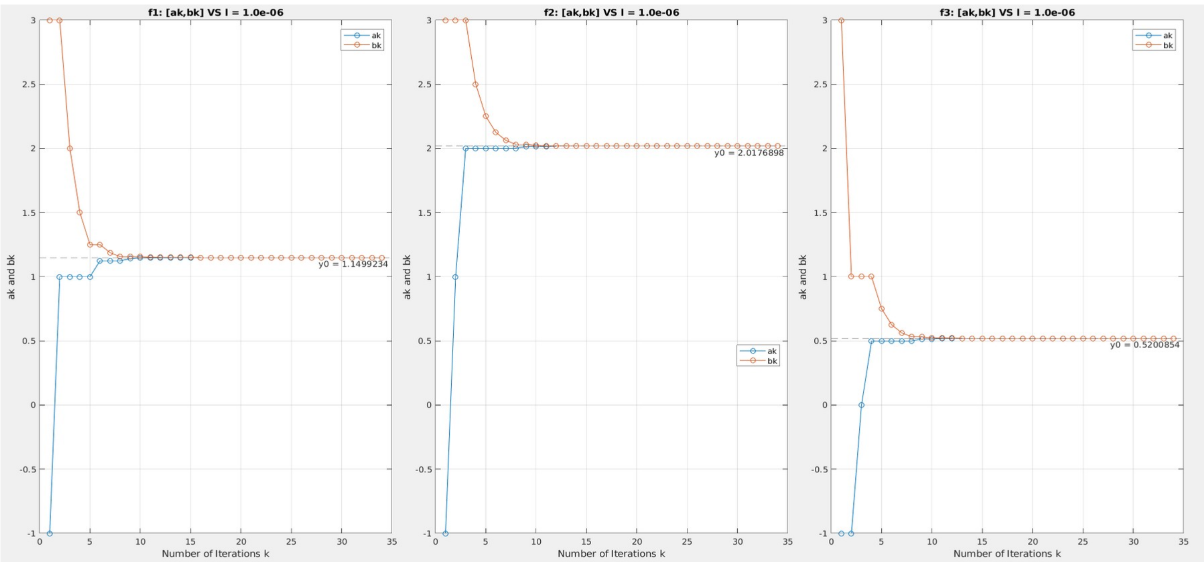
1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΙΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718







1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΙΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

ΜΈΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΧΡΥΣΟΎ ΤΟΜΈΑ

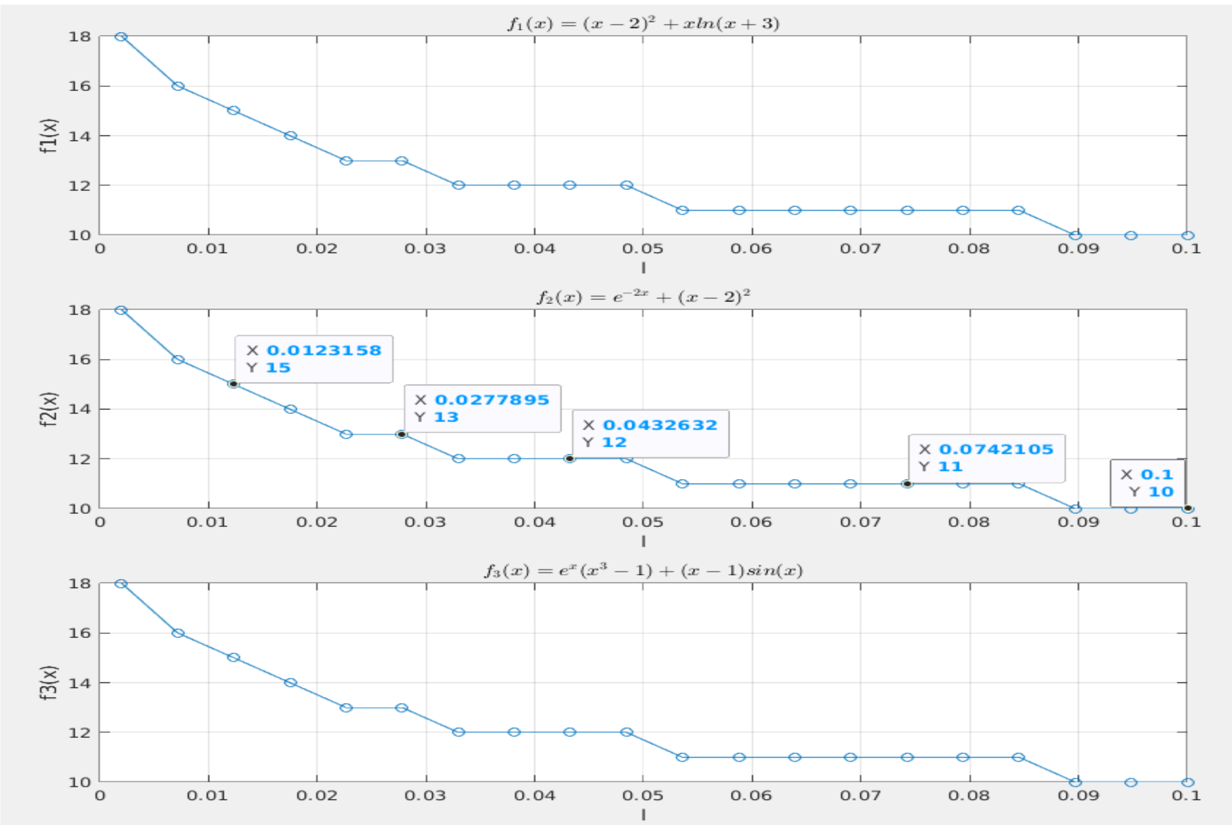
Έπειτα, έχουμε την **μέθοδο** του **χρυσού τομέα.** Διαφέρει από την προηγούμενη μέθοδο ως εξής:
→ τα ενδιάμεσα σημεία για τις συγκρίσεις, x1k, x2k (για την k επανάληψη της μεθόδου) επιλέγονται με διαφορετικό τρόπο. Το εύρος του νέου υπο-διαστήματος αναζήτησης [ακ+1, βκ+1] συνδέεται με το προηγούμενο του μέσω μια σταθερά αναλογίας γ=0.618 (φ, χρυσή τομή): βκ+1-ακ+1 = γ*(βκ-ακ).
→ Για τα <u>επόμενα</u> ενδιάμεσα σημεία ισχύει:
Επιλέγονται έτσι ώστε το χ1,κ+1 να ταυτίζεται με το χ2,κ ή το χ2,κ+1 να ταυτίζεται με το χ1,κ.
Έτσι, <u>**γλυτώνουμε έναν υπολογισμό της fi(x)**</u> για την επόμενη επανάληψη.
Εδώ, γίνεται η σύγκριση f(x1,k) >= f(x2,k):

→ αν ισχύει, το νέο υπο-διάστημα αναζήτησης είναι το [ακ+1, βκ+1] = [χ1,κ, βκ]. Θέτουμε χ1,κ+1 = χ2,κ και χ2,κ+1 = ακ+1+(1-γ)*(βκ+1-ακ+1), αυξάνουμε το κ κατά 1 και επαναλαμβάνουμε.

→ αν όχι, τότε [ακ+1, βκ+1] = [ακ, χ2,κ]. Θέτουμε χ2,κ+1 = χ1,κ και χ1,κ+1 =ακ+(1-γ)*(βκ+1-ακ+1), αυξάνουμε το κ κατά 1 και επαναλαμβάνουμε.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στο υποδιάστημα που προέκυψε.
Η μέθοδος θα τερματίσει όταν |bk-ak| < l, δηλαδή όταν το μήκος του διαστήματος αναζήτησής μας γίνει μικρότερο από την επιθυμητή ακρίβεια l.

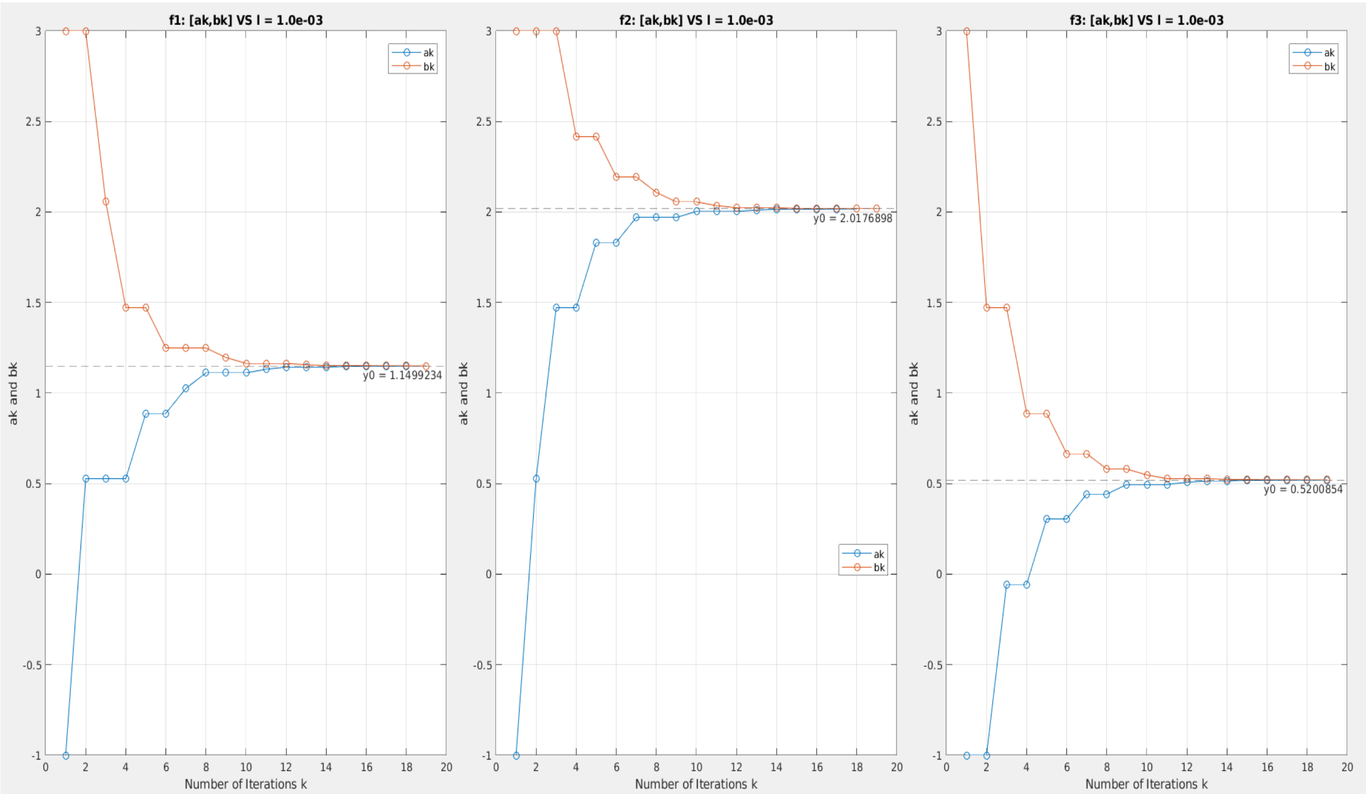
*Ο κώδικας **δεν** έχει ιδιαίτερα σημεία, είναι αρκετά straight forward υλοποίηση της μεθόδου από το βιβλίο και παρουσίαση διαγραμμάτων.*

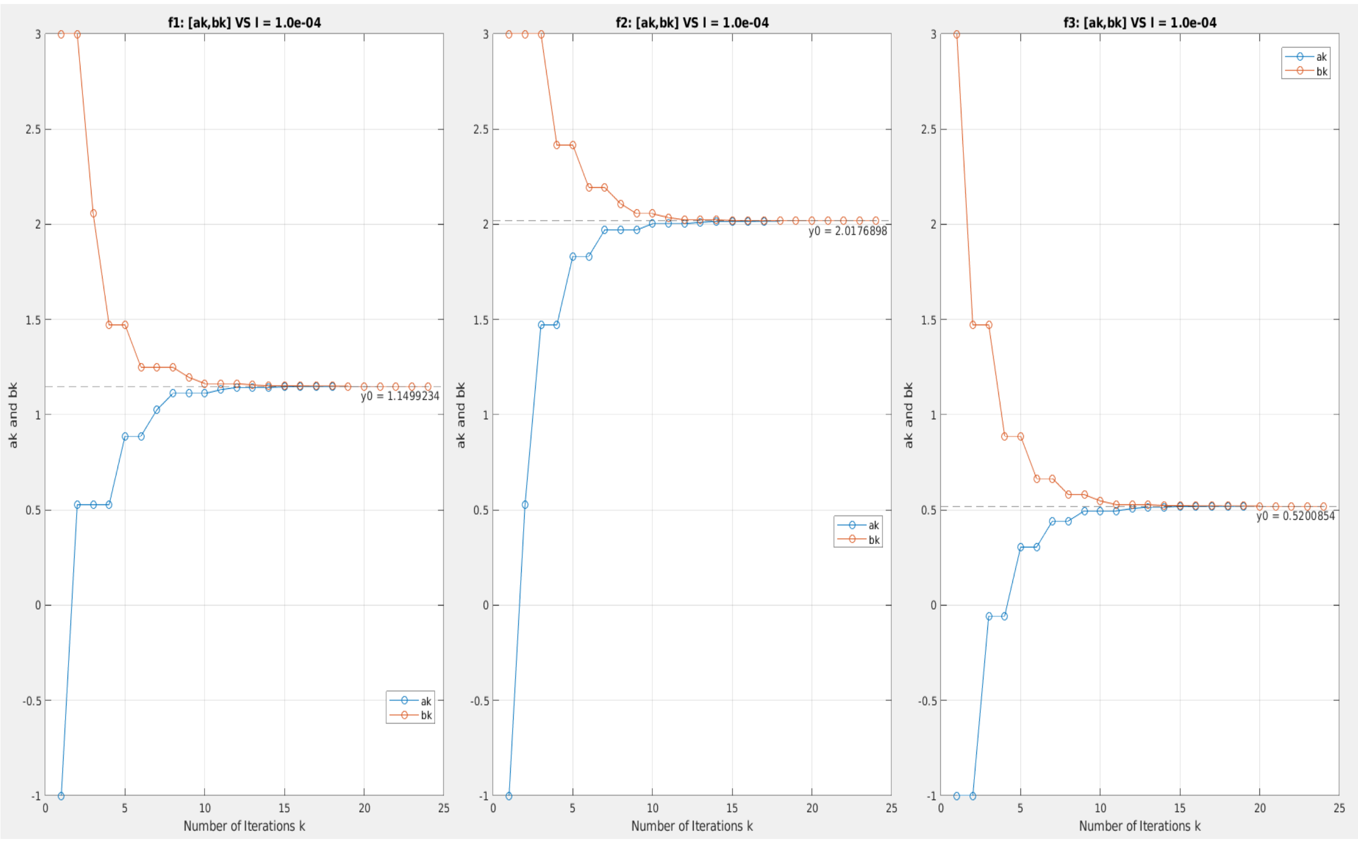


1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΙΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

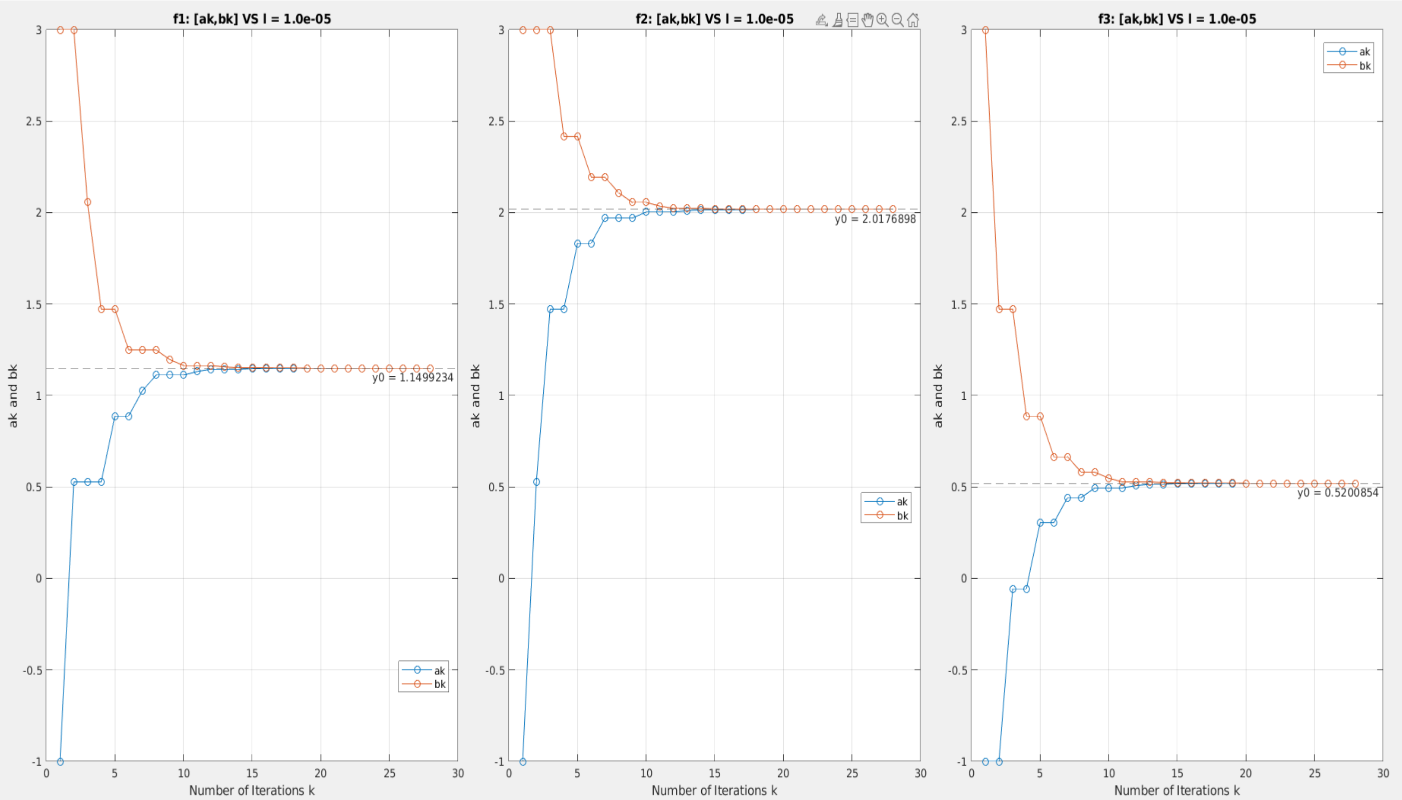


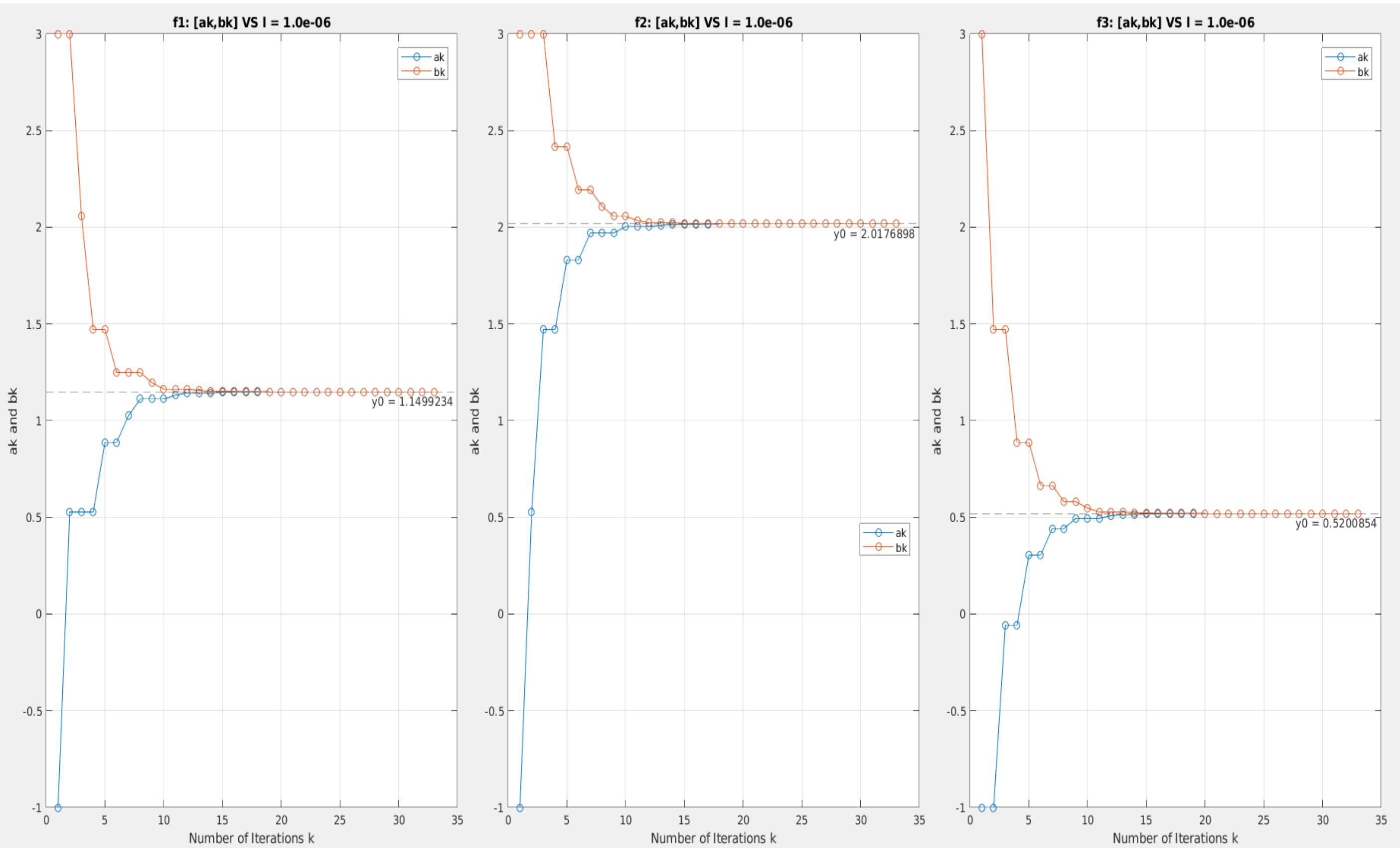


1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΊΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718





1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΊΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

ΜΈΘΟΔΟΣ Fibonacci

Είναι παρόμοια με την μέθοδο του χρυσού τομέα, απλά αντί για τη σταθερά αναλογίας γ=0.618, χρησιμοποιούμε τον λόγο 2 αριθμών Fibonacci για να επιλέξουμε τα επόμενα σημεία σύγκρισης, εντός πάντα του επόμενου υπο-διαστήματος αναζήτησης.

Ιδιαιτερότητες:
→ Χρειάζεται **προκαθορισμένο** αριθμό επαναλήψεων ο οποίος προκύπτει από την εξής ανισότητα: το ελάχιστο n που ικανοποιεί τη σχέση: Fn > (b1-a1)/l. Υπολογίζουμε όλους τους αριθμούς από τη σειρά Fibonacci (καθώς θα τους χρειαστούμε) μέχρι τον Fn και έπειτα παίρνουμε το n.
→ Ξεκινάει με τον προ-υπολογισμό των f(x1,1) και f(x2,1), άρα ξεκινάει με cnt=2.
→ Ισχύει χ1,κ = ακ + (Fn-2/Fn)*(βκ-ακ) και χ2,κ = ακ + (Fn-1/Fn)*(βκ-ακ)
→ Η μέθοδος (*όπως και αυτή του χρυσού τομέα*) **γλυτώνει έναν υπολογισμό της f()** καθώς σε κάθε επανάληψη μεταθέτει είτε το χ2,κ+1 <= χ1,κ, είτε χ1,κ+1 < χ2,κ, ανάλογα το αποτέλεσμα της σύγκρισης f(x1,κ), f(x2,k).

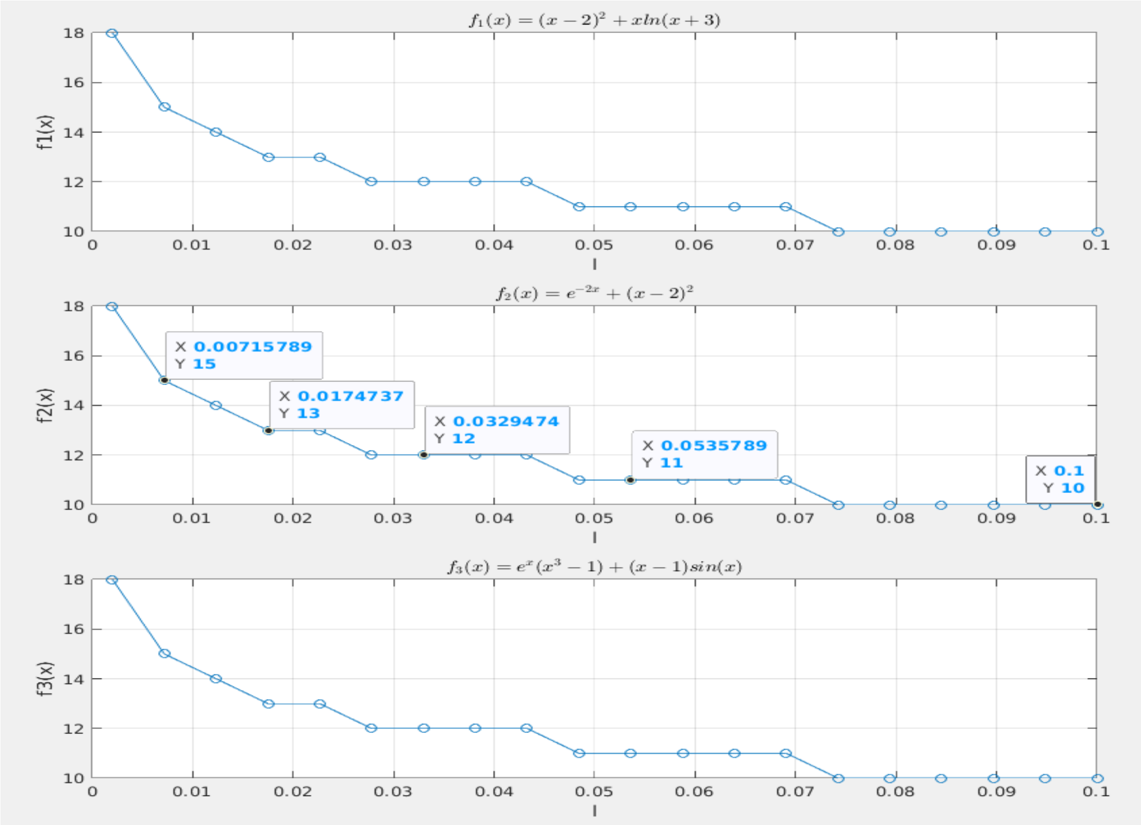
Για να επιτευχθεί αυτό, ο κώδικας έχει γραφεί ως εξής:
→ το κ != n-2, και οδηγούμαστε στο βήμα 4 του αλγορίθμου. Είμαστε στην επανάληψη κ και έχουμε υπολογισμένα τα **f1=f(x1,k)**, **f2=f(x2,k)**. Άμα απαλείψουμε το αριστερό κομμάτι [ακ, χ1,κ], τότε γίνεται η μετάθεση χ1,κ+1 = χ2,κ. Άρα το **f1_new=f(x1,k+1) = f(x2,k)=f2**, γλυτώνοντας έτσι έναν υπολογισμό της f(x). Αντίστοιχα, άμα απαλείψουμε το δεξί κομμάτι [χ2,κ, βκ], τότε λόγω της μετάθεσης χ2,κ+1 = χ1,κ, έχω **f2_new=f(x2,k+1)=f(x1,k)=f1.**
Γραμμές 56 και 89 του κώδικα υλοποιούν αυτήν ακριβώς τη διαδικασία, και γλυτώνεται έτσι ο ένας υπολογισμός f(x) ανά επανάληψη.
→ έχει υλοποιηθεί συνάρτηση fibonacci(n) που επιστρέφει μία λίστα με όλους τους αριθμούς Fibonacci μέχρι και τον n-οστό.
→ προϋπολογίζονται μέσω αυτής οι πρώτοι n=50 fibonacci αριθμοί και αποθηκεύονται στη μεταβλητή fibo. Η fibo θα περάσει ως όρισμα σε ΚΆΘΕ κλήση της fibonacci_method(), της συνάρτησης που υλοποιεί τη μέθοδο μας. Έτσι, γλυτώνουμε υπολογιστικό χρόνο, καθώς κάθε αριθμός fibonacci υπολογίζεται μία φορά και χρησιμοποιείται πολλαπλές. Το μοναδικό πρόβλημα αυτού του τρόπου είναι ότι χρειάζεται πριν τρέξει ο κώδικας, να προ-αποφασίζεται το πλήθος των fibonacci που θα χρειαστούν. Για πολύ μικρό διάστημα ακρίβειας l, θα χρειαστούμε τους πολύ μεγάλους fibonacci. Για τα δεδομένα της άσκησης, n=50 είναι υπερ-αρκετοί.
→ Λόγω της παραπάνω διαδικασίας ισχύει η εξής αντιστοιχία: F0=fibo(1)=1, F1=fibo(2)=1, κοκ οπότε η αρίθμηση των Fibonacci του βιβλίου, στον κώδικα είναι αυξημένη κατά 1.

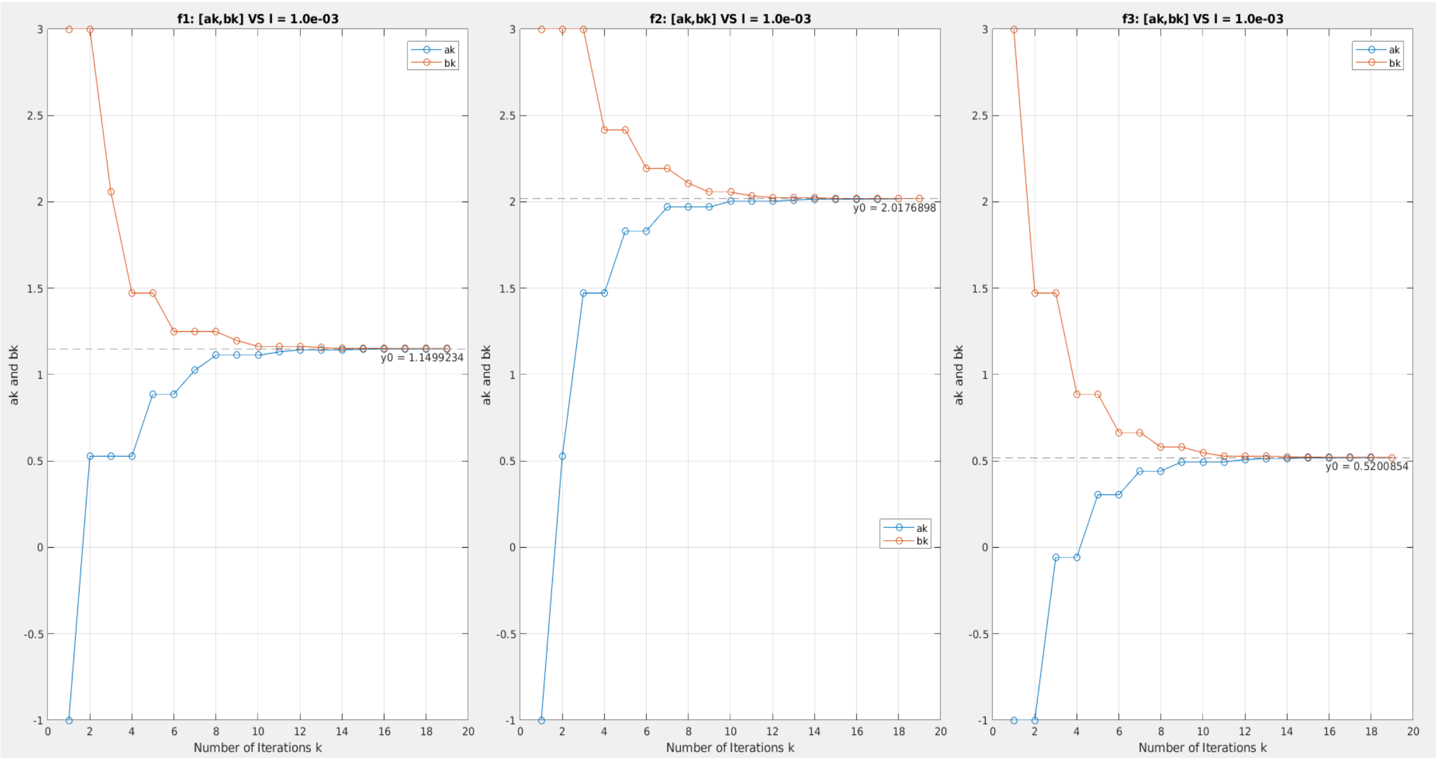
Διαφορές Μεταξύ Μεθόδου Χρυσού τομέα και Fibonacci:
Χρησιμοποιούμε μέθοδο Fibonacci όταν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τον αριθμό των επαναλήψεων. Αλλιώς, οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμοι, αν και αυτή του Χρυσού Τομέα υλοποιείται πιο εύκολα.

1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΙΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

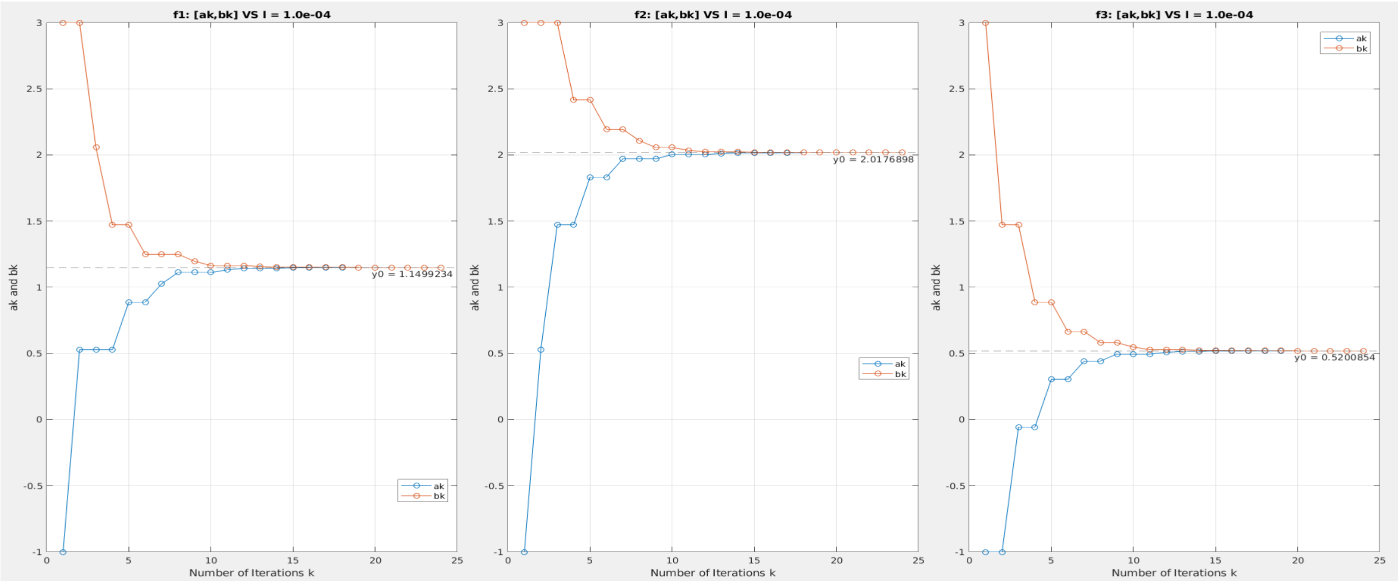


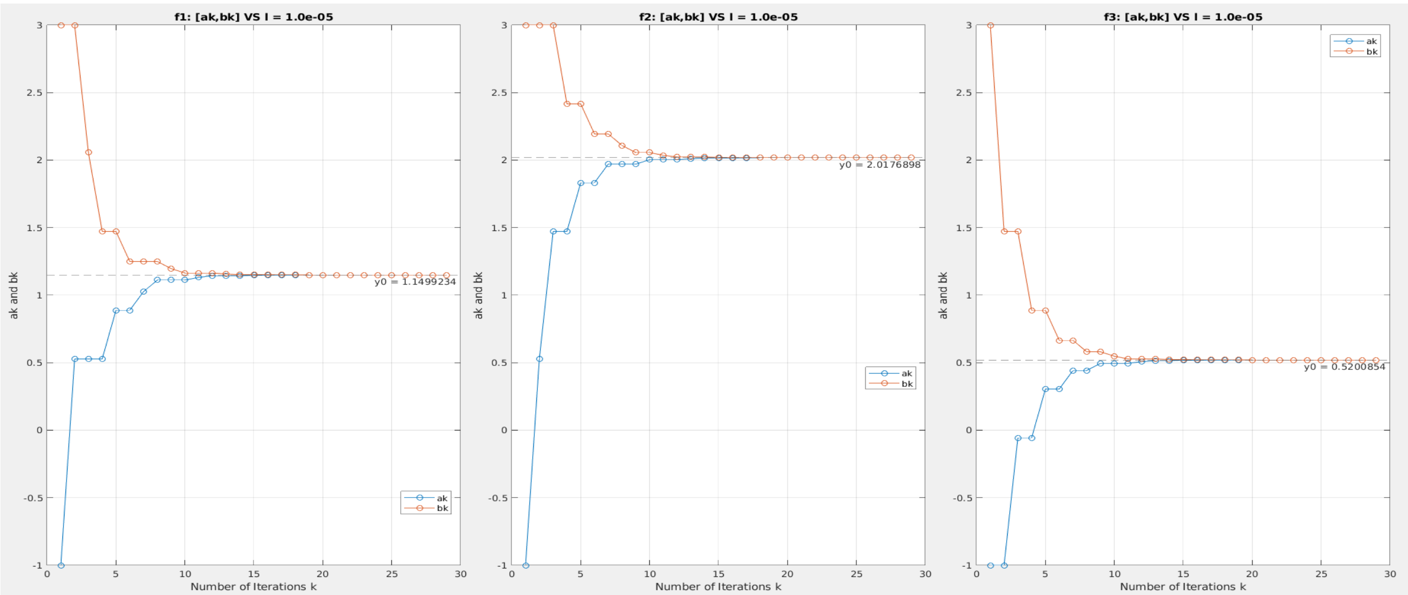


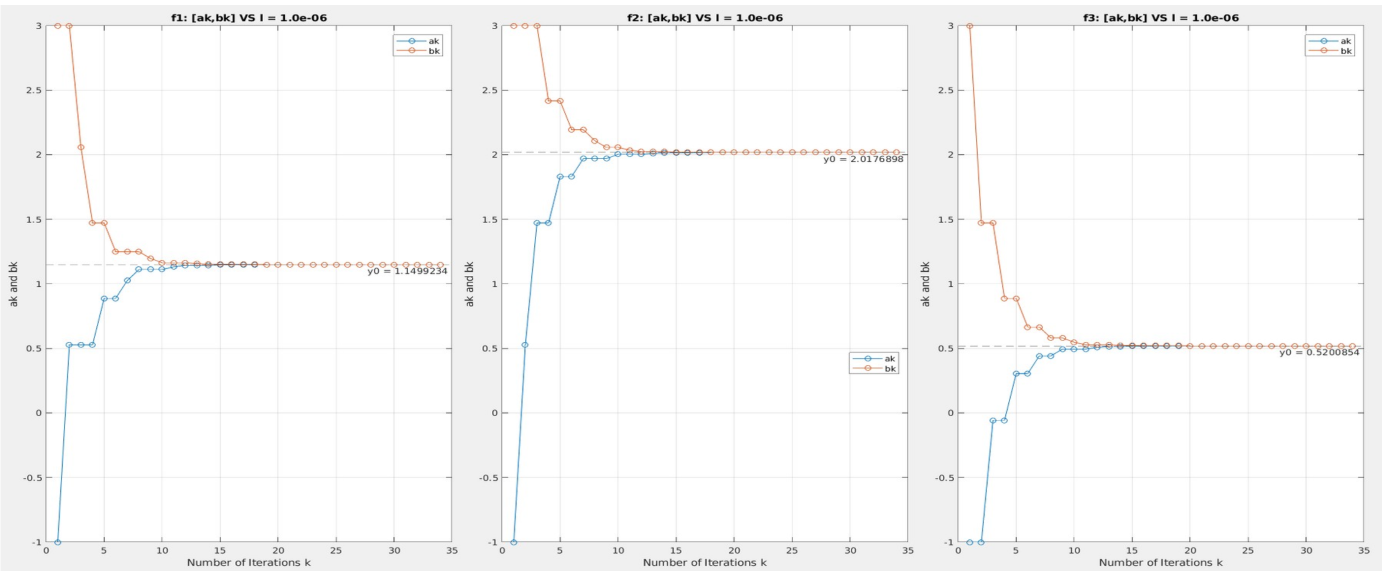
1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΊΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718







1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

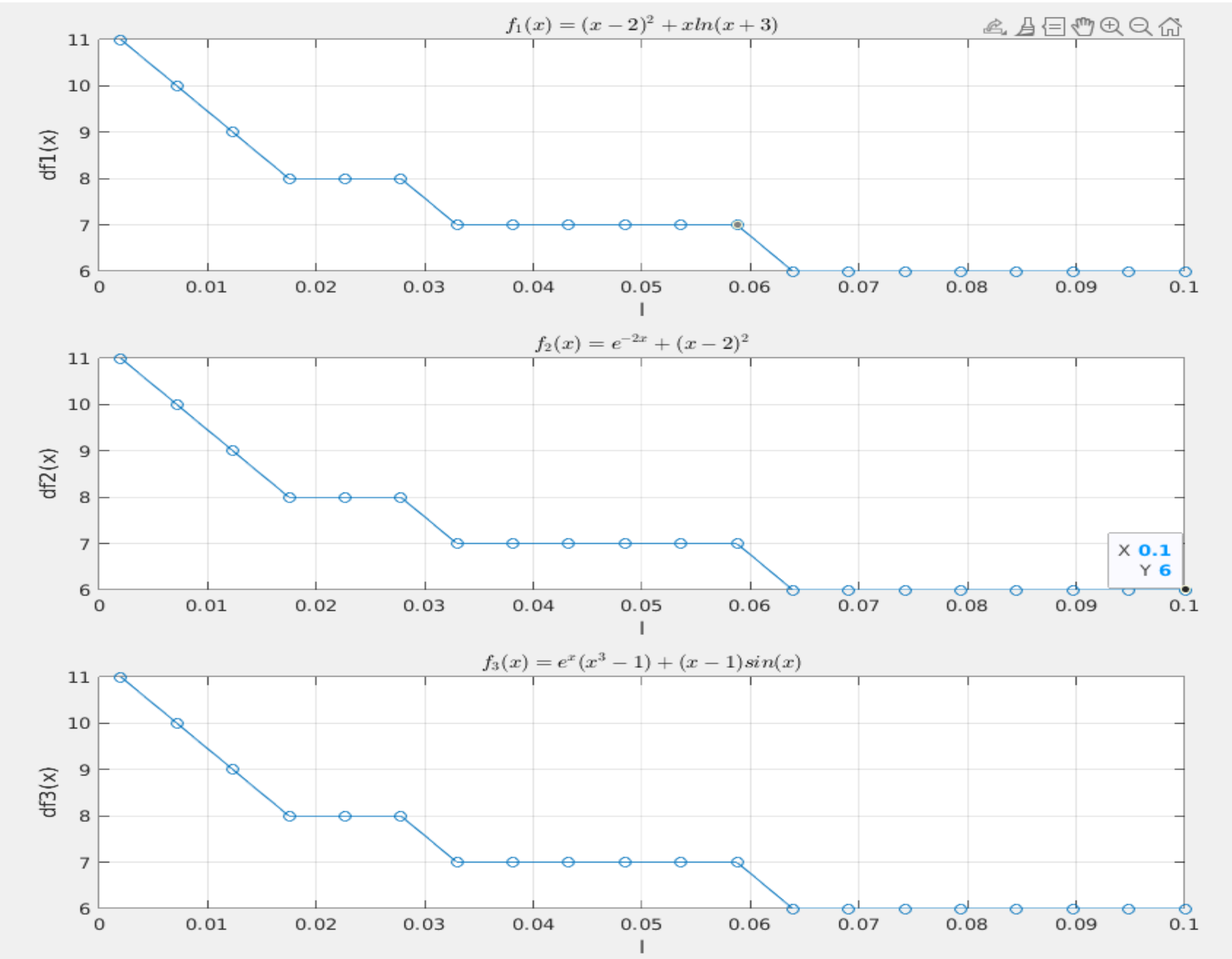
ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΊΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

ΜΈΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΌΜΟΥ **ΜΕ ΧΡΉΣΗ ΠΑΡΑΓΏΓΩΝ**

Η φιλοσοφία αυτής της μεθόδου είναι η ίδια με αυτή χωρίς τη χρήση παραγώγων που αναλύθηκε προηγουμένως.
Η ειδοποιός διαφορά είναι ο υπολογισμός της παραγώγου df(x)/dx στο σημείο xk=(ak+bk)/2, το μέσο του εκάστοτε διαστήματος αναζήτησης. Γλυτώνεται έτσι ένας υπολογισμός συνάρτησης ανά επανάληψη.

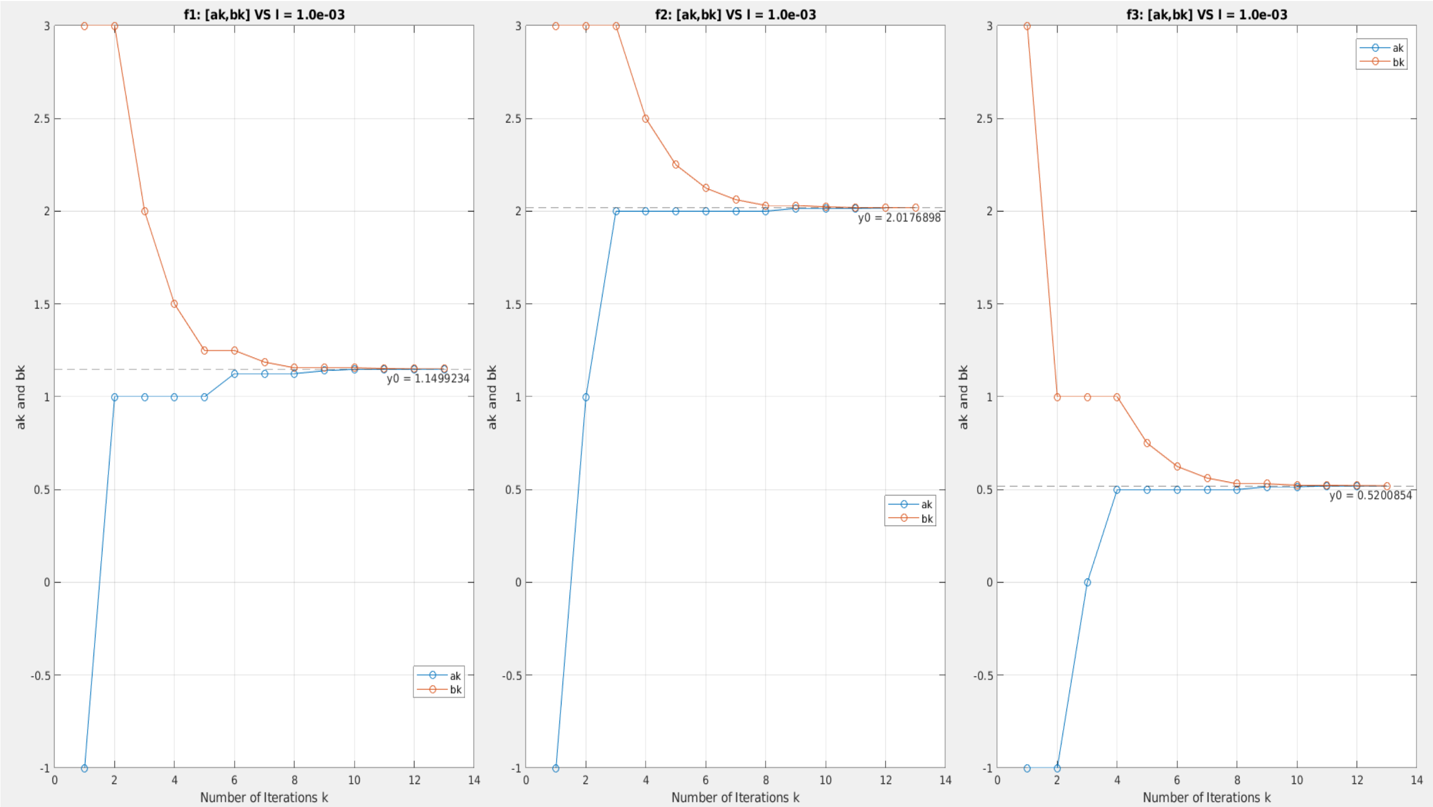
Ιδιαίτερα σημεία κώδικα:
→ στη συνάρτηση που υλοποιεί τη μέθοδο, προϋπολογίζουμε την παράγωγο της f(x), και προκύπτει μία νέα συμβολική συνάρτηση df(x), της οποίας τις τιμές χρειαζόμαστε στη μέθοδο.
→ προϋπολογίζεται ο αριθμός των επαναλήψεων ως εξής: θέλουμε το ελάχιστο n που ικανοποιεί την (1/2)^n <= l/(b1-a1) όπου l η επιθυμητή ακρίβεια του τελικού διαστήματος [an, bn]. Αυτό υλοποιείται στη γραμμή 8: n=άνω_στρογγυλοποίηση(ln[(B-A)/l]/ln(2)).

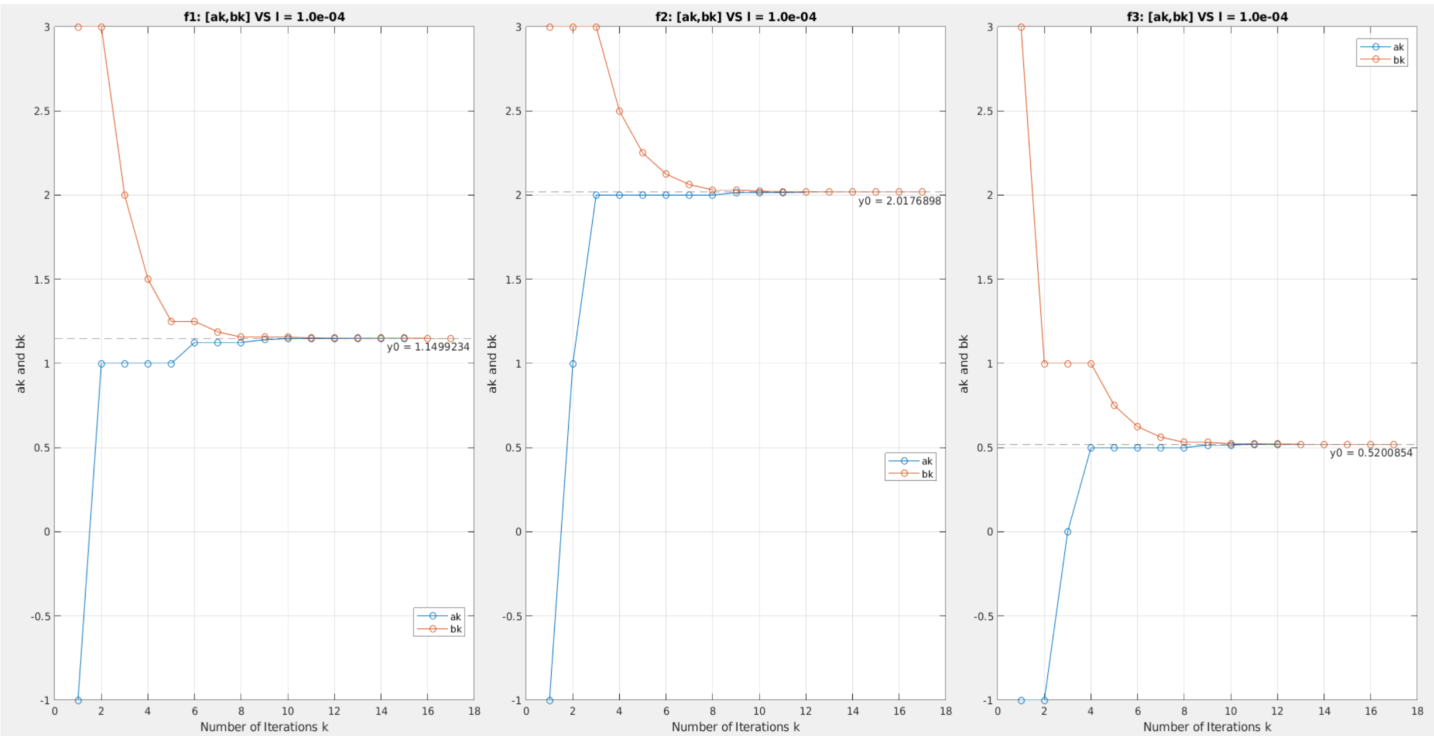


1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΙΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

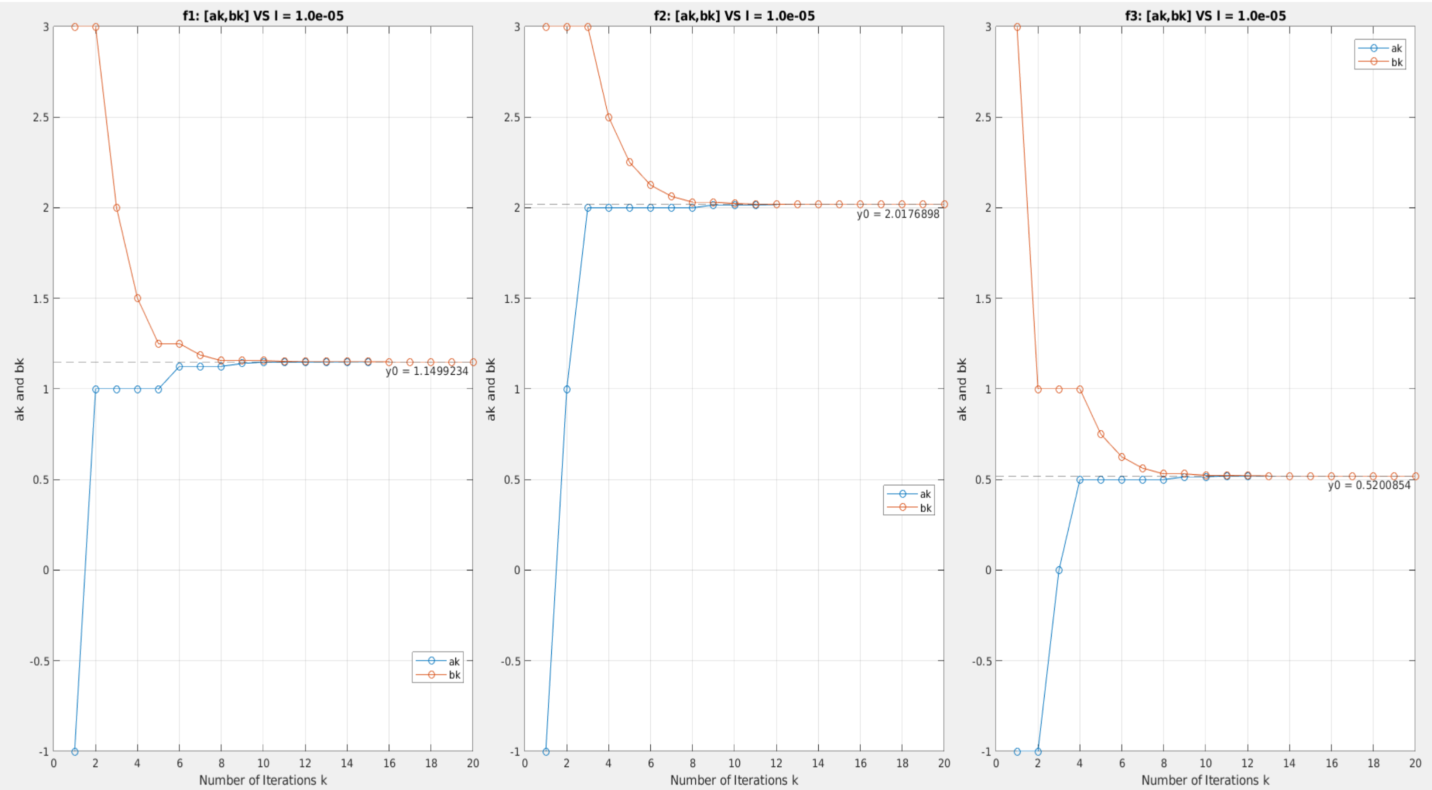


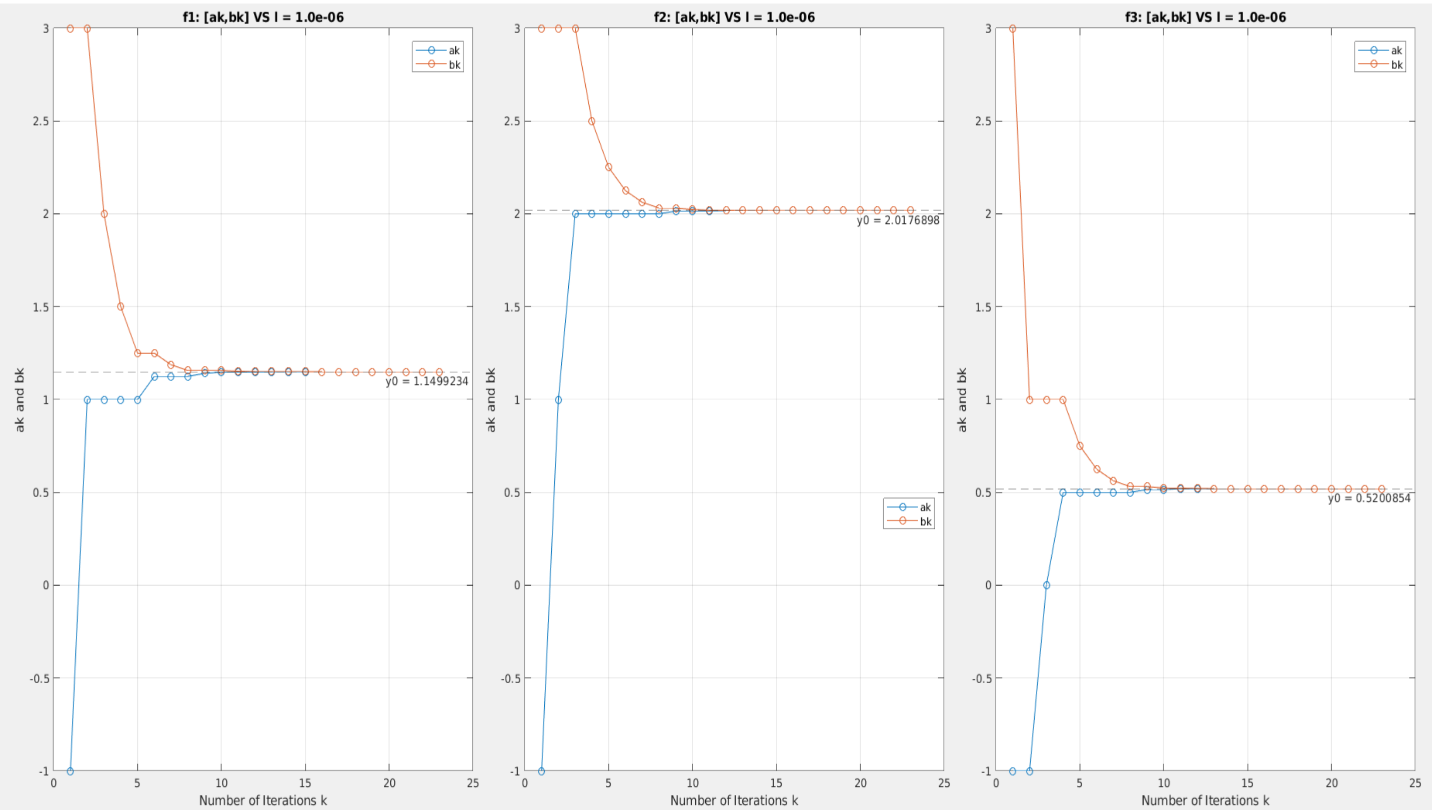


1o ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ

ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

ΤΟΥΛΚΕΡΙΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718





1ο ΠΑΡΑΔΟΤΈΟ
ΤΕΧΝΙΚΈΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ
ΤΟΥΛΚΕΡΊΔΗΣ ΝΙΚΌΛΑΟΣ 10718

ΣΥΜΠΕΡΆΣΜΑΤΑ από τα ΓΡΑΦΉΜΑΤΑ

→ Συγκρίνοντας τα γραφήματα από τα ερωτήματα 2 των θεμάτων (counter_of_f(x)-l) για κοινά l, προκύπτει ότι οι μέθοδοι του χρυσού τομέα και Fibonacci (.2, .3), **υπολογίζουν λιγότερες φορές τιμές της f(x)**, συγκριτικά με την μέθοδο .1, μειώνοντας έτσι το υπολογιστικό κόστος της λύσης του προβλήματος

→ Συγκρίνοντας τα γραφήματα από τα ερωτήματα 3 των θεμάτων ([ak,bk] – k) για κοινά l, προκύπτει ότι οι μέθοδοι της διχοτόμου με και χωρίς τη χρήση παραγώγων (.1, .4), **χρειάζονται λιγότερες επαναλήψεις για να φτάσουν στο επιθυμητό διάστημα ακρίβειας l,** μειώνοντας έτσι τον υπολογιστικό χρόνο της λύσης του προβλήματος.

→ Οι μέθοδοι .2 και .3 είναι σχεδόν ισοδύναμοι. Ωστόσο, αυτή του Fibonacci, γλυτώνει λίγο περισσότερους υπολογισμούς της f(x) συγκριτικά με αυτή του χρυσού τομέα.

→ η μέθοδος της διχοτόμου **με τη χρήση παραγώγων** είναι η **καλύτερη μέθοδος** για χαμηλό πλήθος υπολογισμών της f(x), έχοντας λίγο πάνω από τους μισούς υπολογισμούς σε σχέση με τις ήδη καλές μεθόδους .2 και .3. Απλά χρειάζεται να υπολογιστεί η παράγωγος εκ των προτέρων.