

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

3ο παραδοτέο

Νίκος Τουλκερίδης 10718

Θέμα Α

Διατύπωση

Για το Θέμα Α ακολουθήσα την ανάλυση που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4 των σημειώσεων, και συγκεκριμένα στη σελίδα 53, που αφορά την αναγνώριση συστημάτων μεγαλύτερης διάστασης.

Επέλεξα να χρησιμοποιήσω τις εξισώσεις 4.1.51 και 4.1.52, οι οποίες δίνονται από:

$$\dot{\hat{A}}(t) = \hat{x}(t) e(t)^\top \quad (1)$$

$$\dot{\hat{B}}(t) = u(t) e(t) \quad (2)$$

όπου $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ είναι το σφάλμα εκτίμησης κατάστασης, και $u(t)$ η είσοδος του συστήματος.

Στην εκφώνηση της άσκησης, ζητήθηκε οι παράμετροι α_{11} και β_2 να λειτουργούν εντός περιορισμένων τιμών. Συγκεκριμένα:

$$-3 \leq \alpha_{11} \leq -1 \quad \text{και} \quad \beta_2 \geq 1$$

Για την υλοποίηση αυτού του περιορισμού, εφάρμοσα κατάλληλη μέθοδο **προβολής** μετά από κάθε βήμα εκτίμησης. Για την προβολή των παραμέτρων \hat{a}_{11} και \hat{b}_2 εντός των επιθυμητών περιορισμών, υλοποιήθηκαν οι παρακάτω κανόνες μετά από κάθε βήμα ολοκλήρωσης:

$$\dot{\hat{a}}_{11} = \begin{cases} \frac{-3 - \hat{a}_{11}}{\Delta t}, & \text{αν } \hat{a}_{11} + \Delta t \cdot \dot{\hat{a}}_{11} < -3 \\ \frac{-1 - \hat{a}_{11}}{\Delta t}, & \text{αν } \hat{a}_{11} + \Delta t \cdot \dot{\hat{a}}_{11} > -1 \\ \dot{\hat{a}}_{11}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\dot{\hat{b}}_2 = \begin{cases} \frac{1 - \hat{b}_2}{\Delta t}, & \text{αν } \hat{b}_2 + \Delta t \cdot \dot{\hat{b}}_2 < 1 \\ \dot{\hat{b}}_2, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

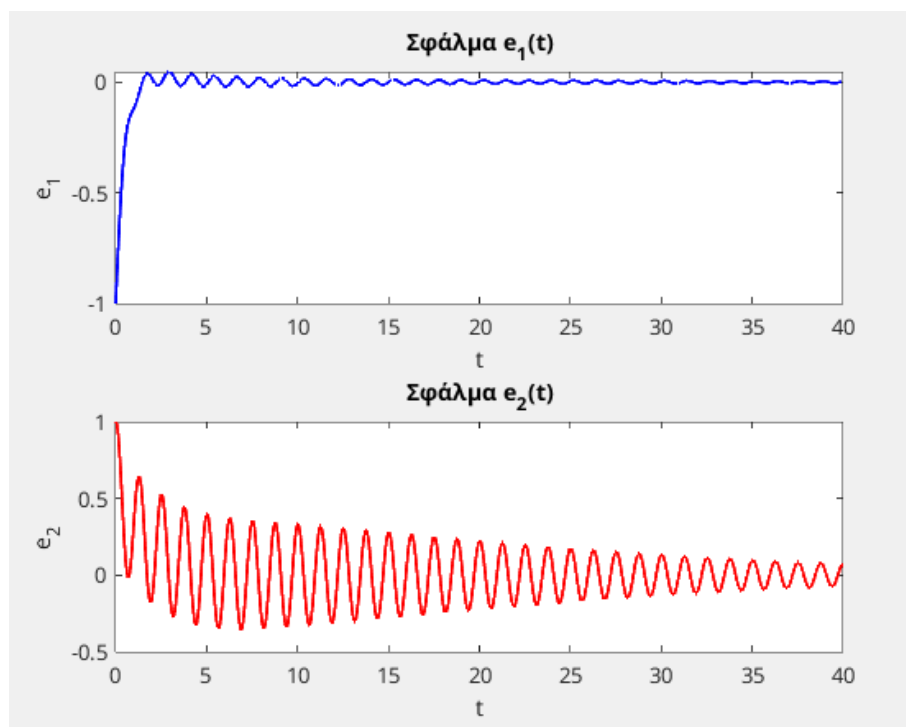
όπου Δt είναι το βήμα του ολοκληρωτή. Η προβολή διασφαλίζει ότι οι παραμετρικές εκτιμήσεις παραμένουν μέσα στα καθορισμένα σύνολα τιμών, ακόμη και όταν η δυναμική των εξισώσεων τις ωθεί εκτός. Επιπλέον, χρησιμοποίησα ως είσοδο ενεργοποίησης τη συνάρτηση:

$$u(t) = \sin(5t)$$

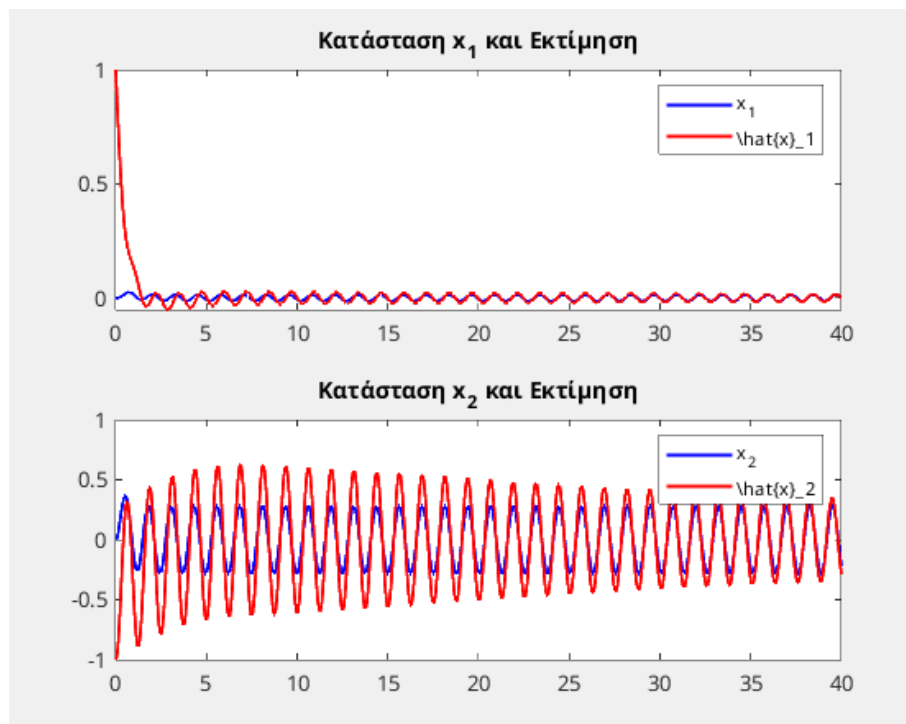
η οποία ικανοποιεί τη **Συνθήκη Επιμέρους Διέγερσης**, διασφαλίζοντας ότι το σύστημα παραμένει παρατηρήσιμο και επιτρέπει την αξιόπιστη εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων. Οι μετρήσεις έτρεξαν για 40 δευτερόλεπτα, και οι αρχικές συνθήκες για τον εκτιμητή δόθηκαν ως εξής:

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}(0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

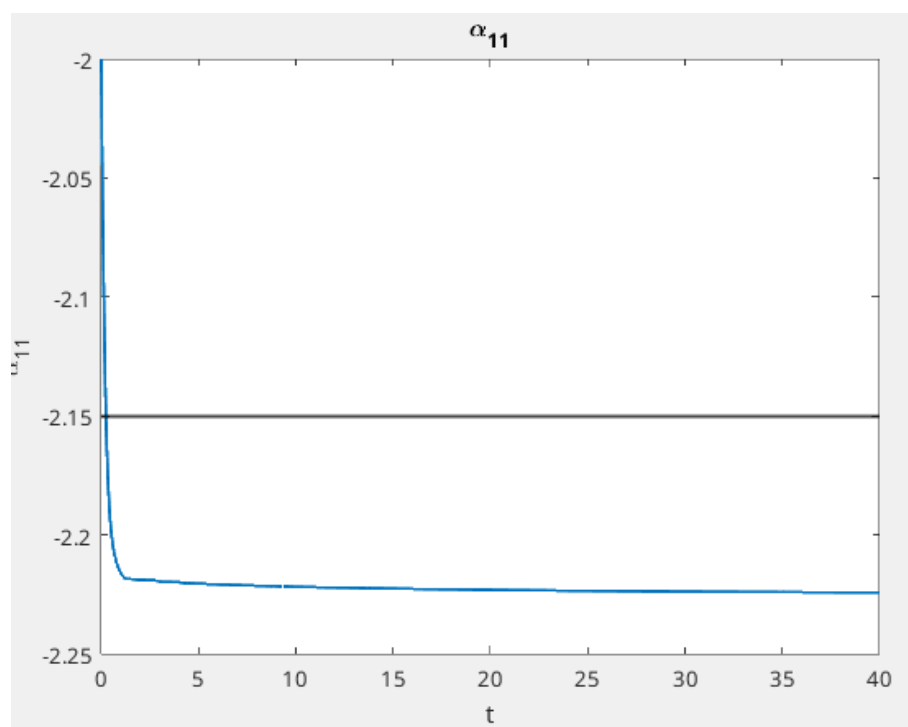
Διαγράμματα



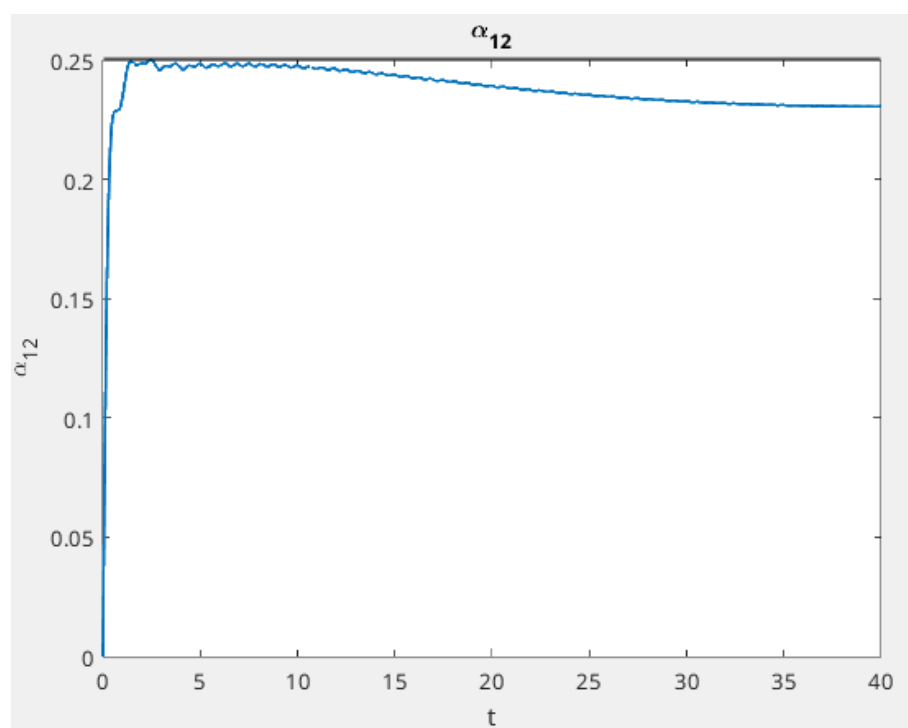
Σχήμα 1: Σφάλμα Εκτιμήσεων $e_1(t)$, $e_2(t)$



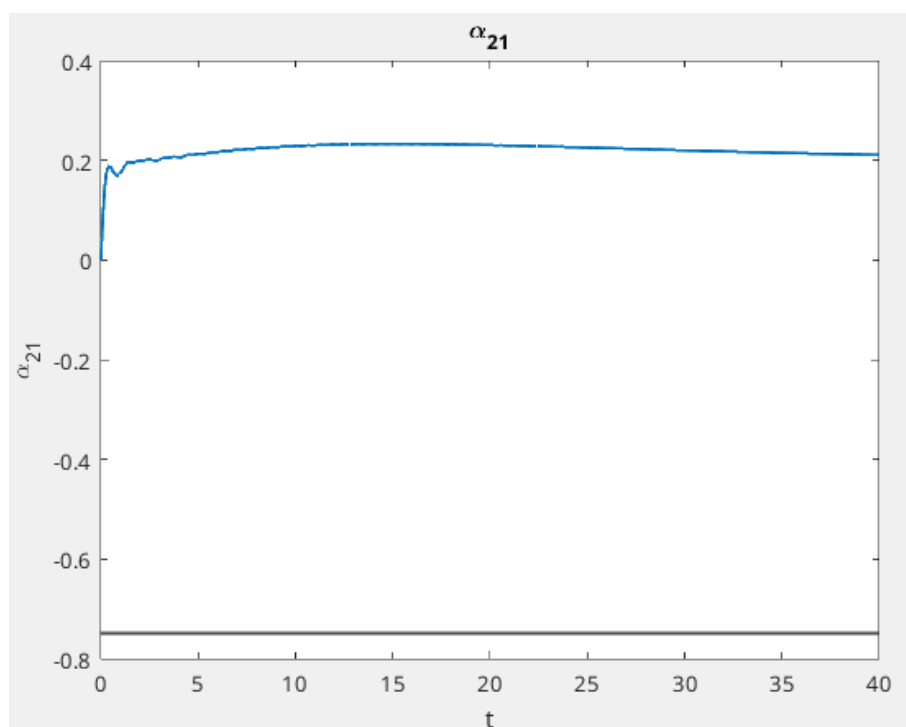
Σχήμα 2: Κατάστασεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ και Εκτιμήσεις $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$



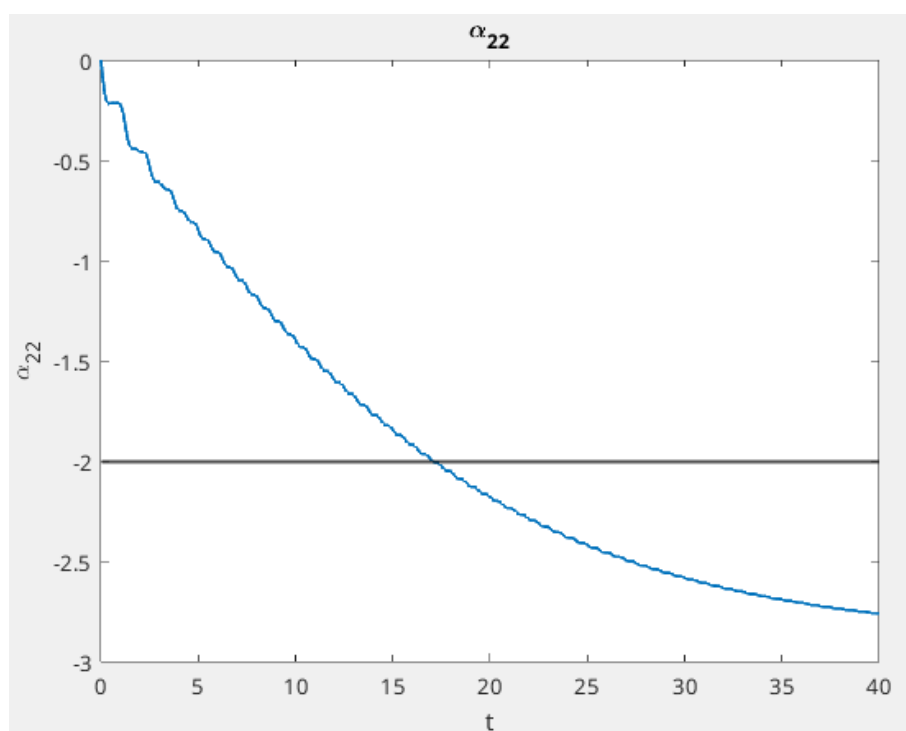
Σχήμα 3: Εκτίμηση Παραμέτρου α_{11}



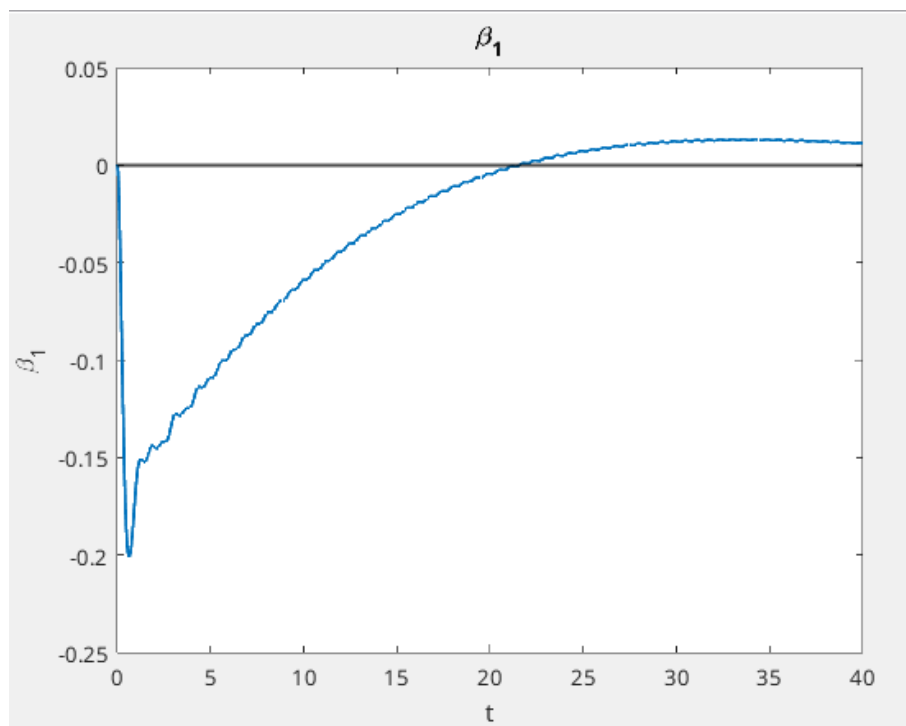
Σχήμα 4: Εκτίμηση Παραμέτρου α_{12}



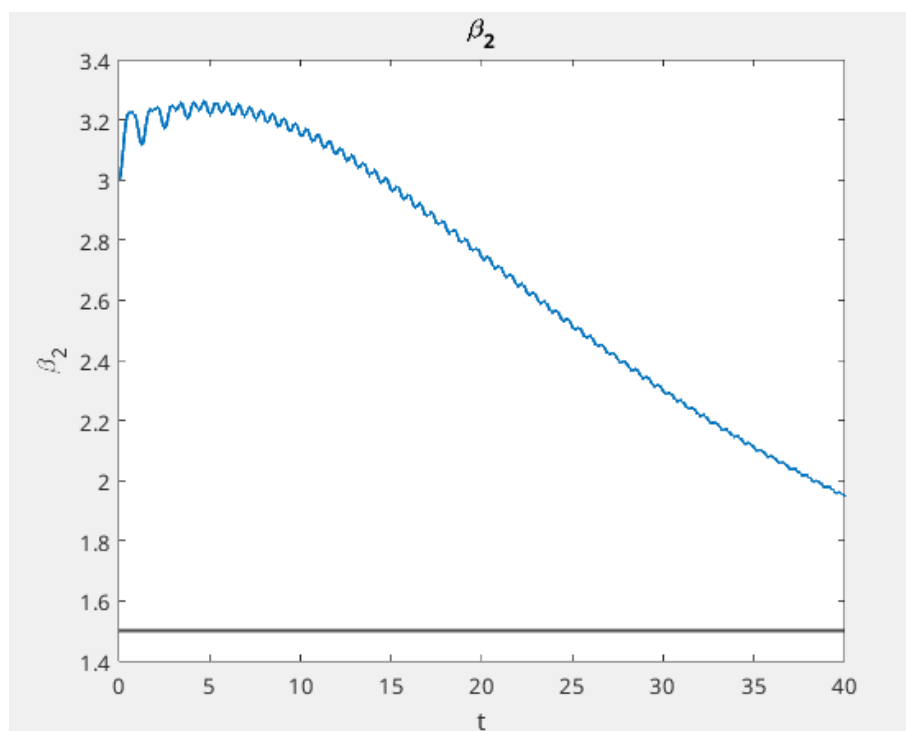
Σχήμα 5: Εκτίμηση Παραμέτρου α_{21}



Σχήμα 6: Εκτίμηση Παραμέτρου α_{22}



Σχήμα 7: Εκτίμηση Παραμέτρου β_1



Σχήμα 8: Εκτίμηση Παραμέτρου β_2

Σχολιασμός

Κρίνοντας από τα Σχήματα 1 και 2, το σύστημα εκτίμησης παρουσιάζει ιδιαίτερα ικανοποιητική συμπεριφορά ως προς την ανακατασκευή της κατάστασης του πραγματικού συστήματος. Το σφάλμα εκτίμησης $e(t)$ μειώνεται σταδιακά και τείνει προς μηδενισμό, γεγονός που υποδηλώνει ότι το δυναμικό μοντέλο εκτιμητή (με παράλληλη δομή) σε συνδυασμό με την επιλεγμένη μέθοδο προβολής οδηγεί σε καλή παρακολούθηση των πραγματικών καταστάσεων.

Επιπλέον, από τα Σχήματα 7 και 8 προκύπτει ότι οι παράμετροι β_1 και β_2 εκτιμώνται με επιτυχία. Αντίστοιχα, η παράμετρος α_{12} (Σχήμα 4) συγκλίνει σε τιμή πλησίον της πραγματικής, με ήπιες ταλαντώσεις και χαμηλό σφάλμα σταθερής κατάστασης.

Ωστόσο, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η σύγκλιση των παραμετρικών εκτιμήσεων σε σταθερές τιμές **δεν συνεπάγεται** απαραίτητα ότι αυτές είναι οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Όπως διαπιστώνεται στα Σχήματα 3, 5 και 6, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων α_{11} , α_{21} και α_{22} αποκλίνουν από τις αναμενόμενες τιμές. Το φαινόμενο αυτό πιθανώς αποδίδεται στη μη ιδανική διέγερση του συστήματος ως προς συγκεκριμένες κατευθύνσεις του χώρου κατάστασης, ή στην επίδραση των περιορισμών προβολής.

Ειδικότερα για την παράμετρο α_{11} , παρατηρείται ότι η εκτίμηση φτάνει το ανώτερο επιτρεπτό όριο -1 και παραμένει σε αυτό. Αν και το όριο αυτό είχε τεθεί τεχνητά για να διασφαλίσει σταθερότητα και φυσικότητα στην εκτίμηση, το γεγονός ότι το σύστημα συγκλίνει στο άκρο υποδεικνύει ότι η δυναμική του εκτιμητή ωθεί με συνέπεια την παράμετρο προς τιμές εκτός επιτρεπτής περιοχής. Αντίστοιχη συμπεριφορά εντοπίζεται και στις παραμέτρους α_{21} και α_{22} .

Συνολικά, **το σχήμα εκτιμητή ανταποκρίνεται θετικά στο πρόβλημα εκτίμησης**, ενώ η χρήση μεθόδου προβολής σε κρίσιμες παραμέτρους συνεισφέρει στην διατήρηση της φυσικής ερμηνείας των εκτιμήσεων και την αποτροπή της πόλωσης των παραμέτρων υπό στοχαστικές διαταραχές.

Θέμα Β

Διατύπωση

Για το Θέμα Β, εξετάζεται η περίπτωση όπου το δυναμικό σύστημα υπό μελέτη επηρεάζεται από **σφάλμα πόλωσης** $\omega(t) \in \mathbb{R}^2$. Αυτό είναι φραγμένο, με:

$$\|\omega(t)\| \leq \bar{\omega}, \quad \forall t \geq 0$$

όπου $\bar{\omega} > 0$ είναι μία άγνωστη σταθερά. Στόχος του παρόντος ερωτήματος είναι να μελετηθεί η συμπεριφορά του εκτιμητή παραμέτρων όταν η δυναμική του συστήματος επηρεάζεται από την προσθήκη αυτού του στοχαστικού όρου.

Για τη μοντελοποίηση της διαταραχής $\omega(t)$, χρησιμοποιήθηκε στοχαστικός μηχανισμός παραγωγής διάνυσματος τυχαίας κατεύθυνσης και μεταβλητού μεγέθους. Συγκεκριμένα:

$$\omega(t) = r(t) \cdot \bar{\omega} \cdot \frac{v(t)}{\|v(t)\|}$$

όπου:

- $v(t) \in \mathbb{R}^2$ είναι διάνυσμα με κανονικά κατανομημένες ανεξάρτητες συνιστώσες, δηλαδή $v(t) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$
- $r(t) \in [0, 1]$ είναι τυχαίος αριθμός από ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή $r(t) \sim \mathcal{U}(0, 1)$

Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι κάθε διάνυσμα $\omega(t)$ έχει:

- τυχαία κατεύθυνση (μέσω του κανονικοποιημένου $v(t)$)
- μέτρο στο διάστημα $[0, \bar{\omega}]$ (μέσω του παράγοντα $r(t) \cdot \bar{\omega}$).

Κατά συνέπεια, η παραγόμενη διαταραχή ικανοποιεί ανά πάσα στιγμή τη σχέση $\|\omega(t)\| \leq \bar{\omega}$, ενώ διατηρεί στοχαστικά χαρακτηριστικά σε τόσο μέτρο όσο και κατεύθυνση.

Σχετικά με τον σχεδιασμό αλγορίθμου πραγματικού χρόνου για την εκτίμηση των παραμετρικών πινάκων $\hat{A}(t)$ και $\hat{B}(t)$, επέλεξα την υλοποίηση ενός εκτιμητή με **παράλληλη δομή**, ενισχυμένη με **σ-τροποποίηση** και **μηχανισμό προβολής** για την αντιμετώπιση των επιπτώσεων του σφάλματος πόλωσης.

Η δυναμική του εκτιμητή ορίζεται ως εξής:

- Δυναμική κατάστασης του εκτιμητή:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t) + \hat{B}(t) u(t)$$

- Ορισμός σφάλματος εκτίμησης:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

- Προσαρμοστικοί νόμοι για τα στοιχεία του $\hat{A}(t)$ με :

$$\dot{\hat{a}}_{11}(t) = g_1 e_1(t) u(t) - g_1 \sigma \hat{a}_{11}(t)$$

$$\dot{\hat{a}}_{12}(t) = g_1 e_1(t) u(t) - g_1 \sigma \hat{a}_{12}(t)$$

$$\dot{\hat{a}}_{21}(t) = g_2 e_2(t) u(t) - g_2 \sigma \hat{a}_{21}(t)$$

$$\dot{\hat{a}}_{22}(t) = g_2 e_2(t) u(t) - g_2 \sigma \hat{a}_{22}(t)$$

- Προσαρμοστικός νόμος για τα στοιχεία του $\hat{B}(t)$:

$$\dot{\hat{B}}(t) = g_B u(t) e(t) - \sigma \hat{B}(t)$$

- Επιπλέον, εφαρμόζεται **προβολή** στα κρίσιμα στοιχεία ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί:

$$\hat{a}_{11}(t) \in [-3, -1], \quad \hat{b}_2(t) \geq 1$$

Σε περίπτωση που οι εκτιμήσεις τείνουν να παραβιάσουν αυτούς τους περιορισμούς, η παράγωγος προσαρμόζεται σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράφεται στο Θέμα Α.

Ο παραπάνω αλγόριθμος υλοποιείται με συνεχές χρονικό μοντέλο και ενημερώνει σε πραγματικό χρόνο τις εκτιμήσεις παραμέτρων του συστήματος. Για την παραμετροποίηση του εκτιμητή, χρησιμοποιήθηκαν σταθερές τιμές για τους συντελεστές μάθησης και τη σ-τροποποίηση ως εξής:

- Συντελεστές μάθησης:

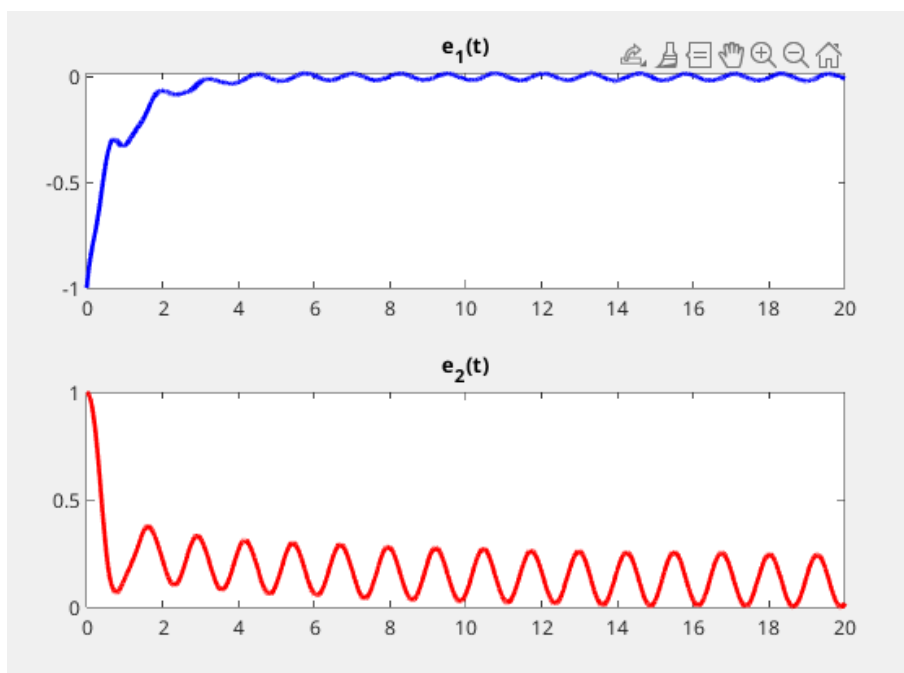
$$g_1 = 5, \quad g_2 = 5, \quad g_B = 5$$

- Συντελεστής σ-τροποποίησης:

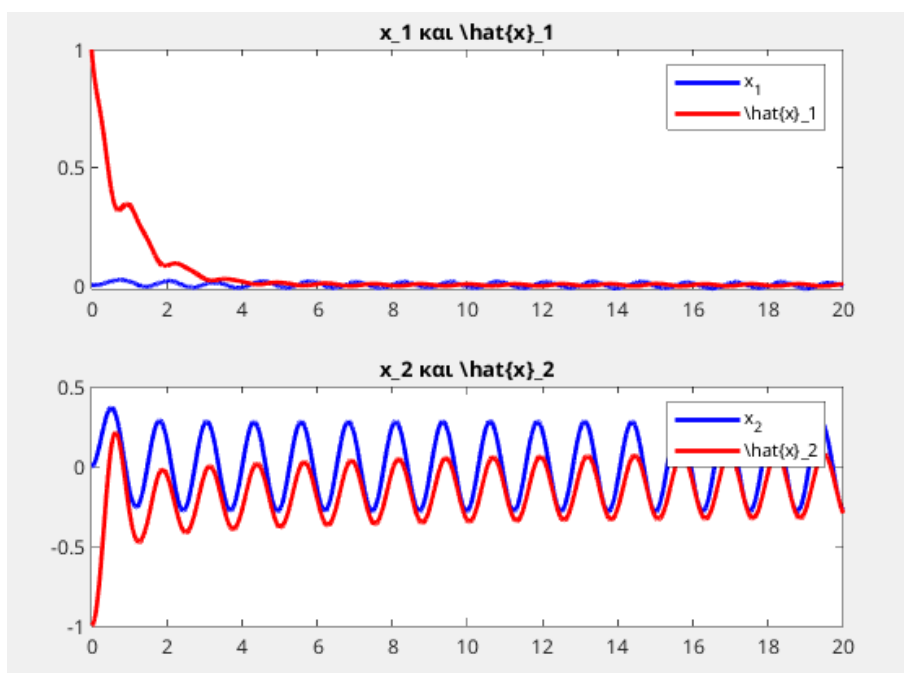
$$\sigma = 1$$

Οι τιμές αυτές επελέγησαν με στόχο να επιτρέψουν στο σύστημα εκτιμητή να συγκλίνει με επαρκή ταχύτητα, αποτρέποντας παράλληλα ταλαντώσεις ή εκτροπή των παραμέτρων. Ο ενιαίος αποσβεστικός όρος σ εφαρμόζεται τόσο στις εκτιμήσεις των στοιχείων του πίνακα $\hat{A}(t)$ όσο και του $\hat{B}(t)$, προσφέροντας σταθερότητα έναντι του σφάλματος πόλωσης $\omega(t)$. Ο εκτιμητής έτρεξε για 20 δευτερόλεπτα και χρησιμοποιήθηκαν αρχικές συνθήκες ίδιες με αυτές στο Θέμα Α.

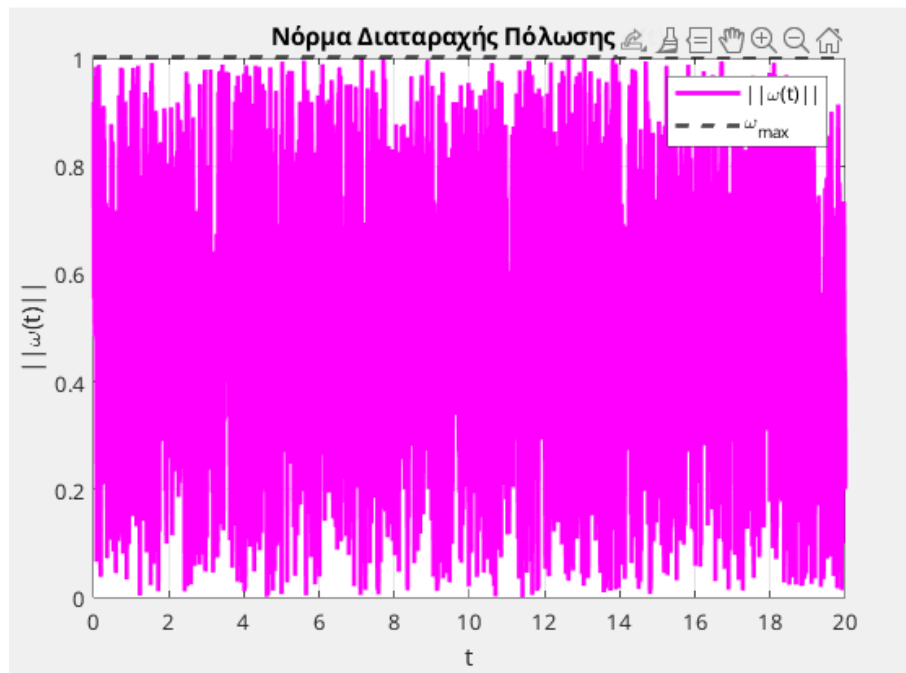
Διαγράμματα



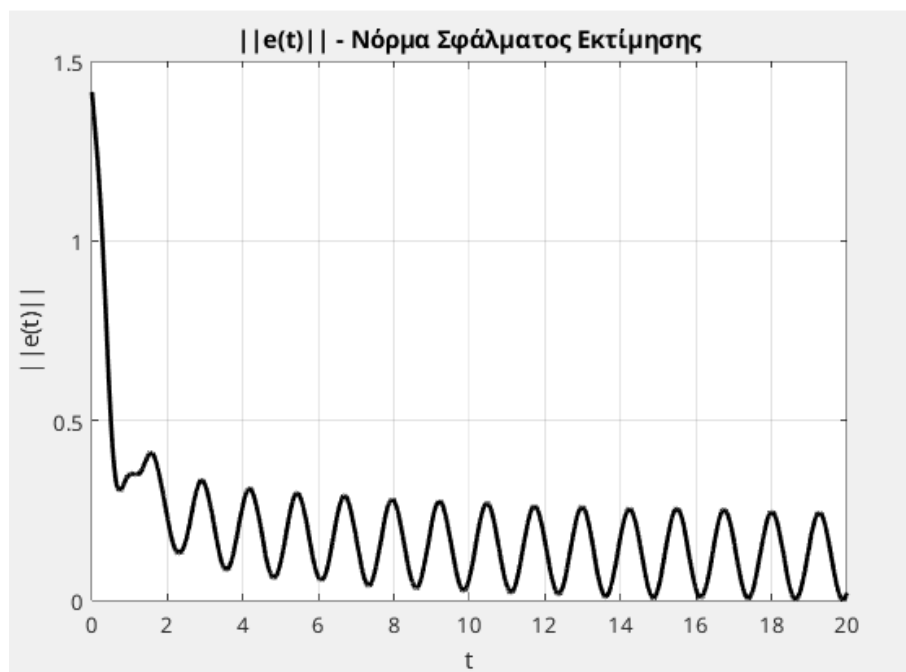
Σχήμα 9: Σφάλμα Εκτίμησεων $e_1(t)$, $e_2(t)$



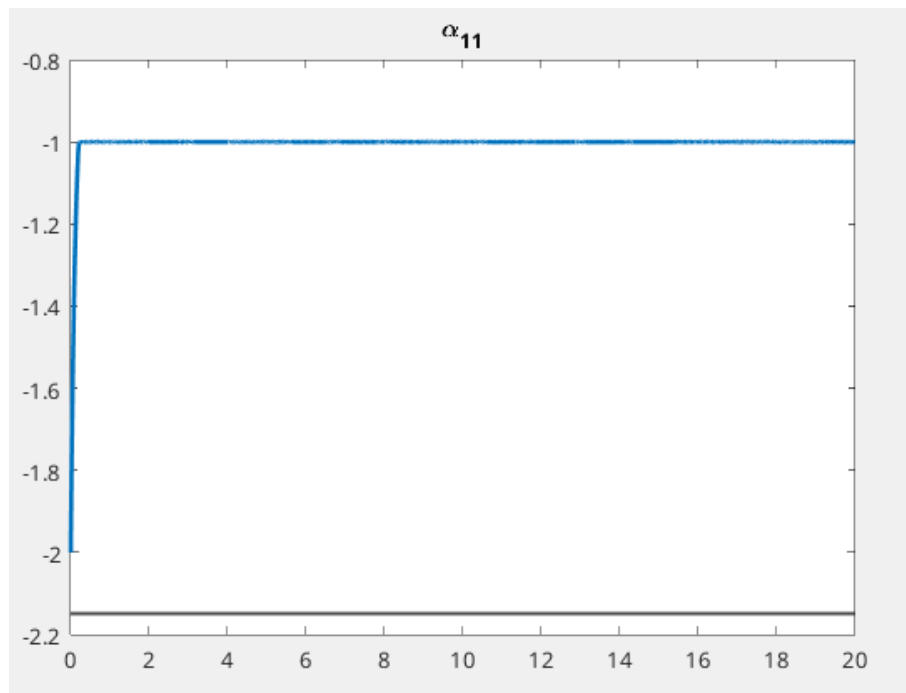
Σχήμα 10: Κατάστασεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ και Εκτιμήσεις $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$



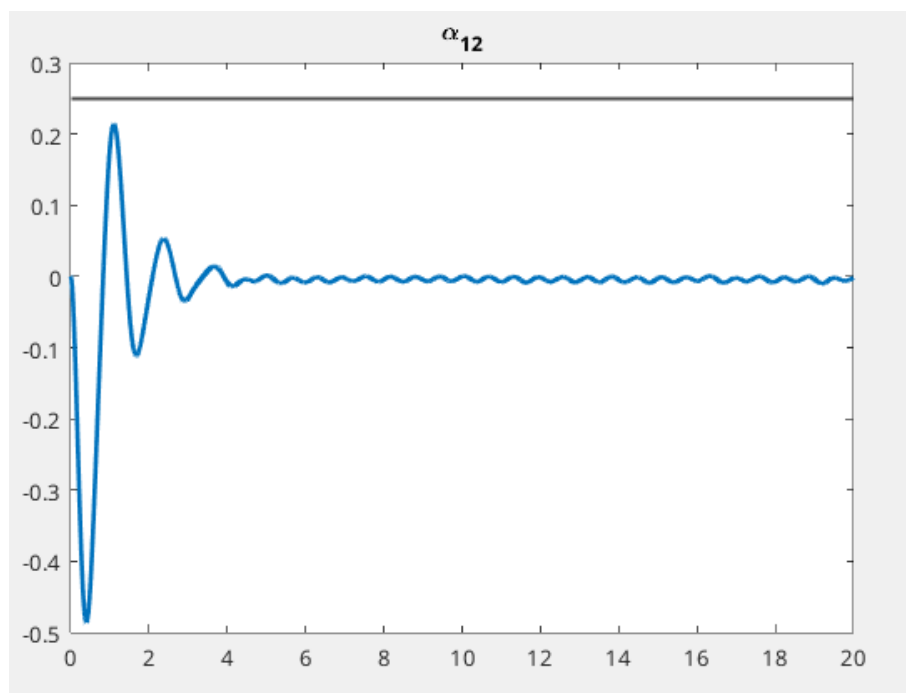
Σχήμα 11: Νόρμα Διαταραχής Πόλωσης $||\omega(t)||$ και φράγμα $\bar{\omega}$



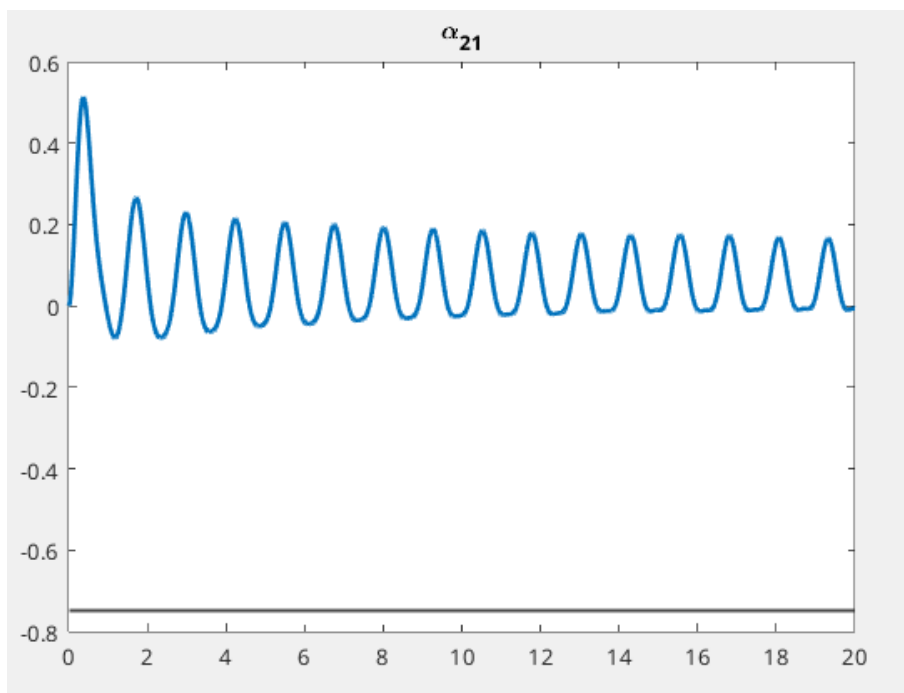
Σχήμα 12: Νόρμα Σφάλματος Εκτίμησης $||e(t)||$



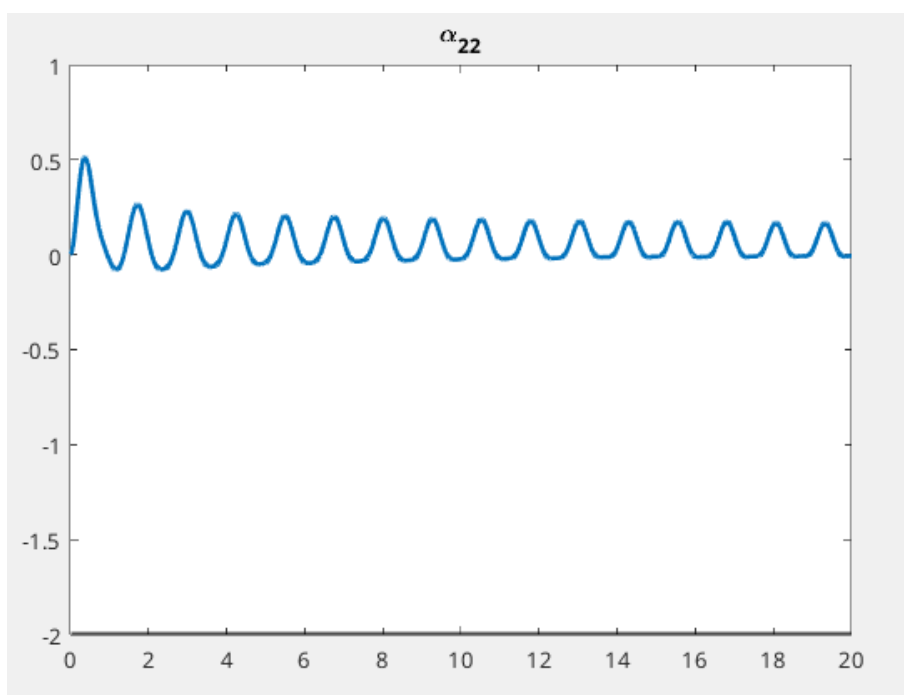
Σχήμα 13: Εκτίμηση Παραμέτρου α_{11}



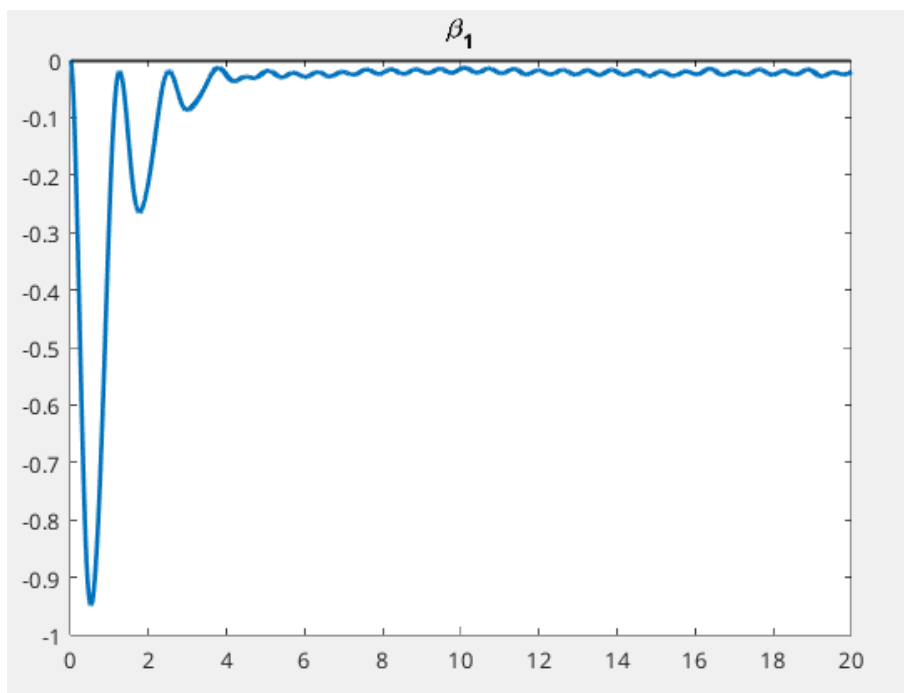
Σχήμα 14: Εκτίμηση Παραμέτρου α_{12}



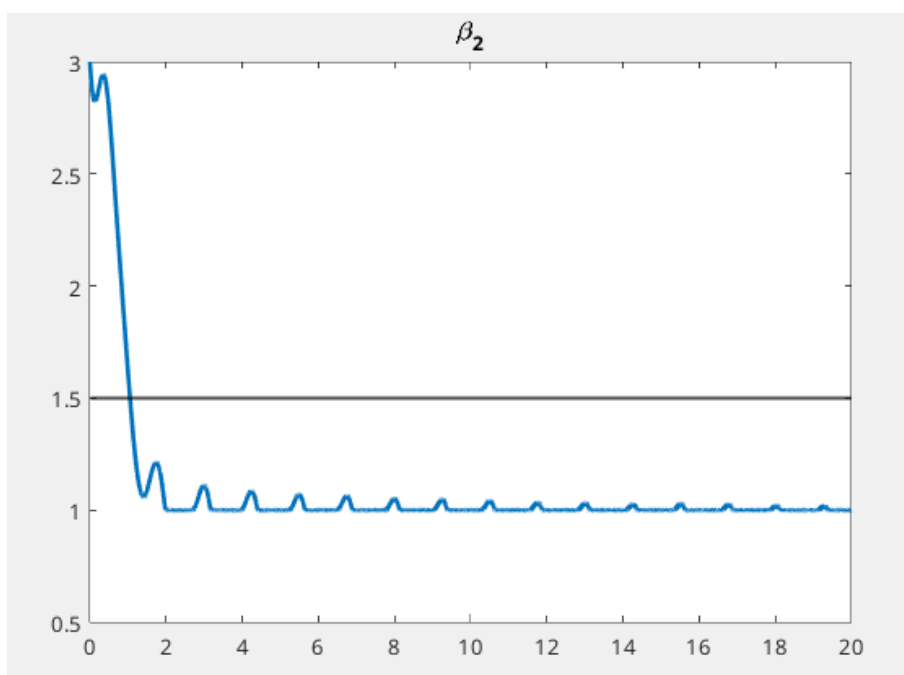
Σχήμα 15: Εκτίμηση Παραμέτρου α_{21}



Σχήμα 16: Εκτίμηση Παραμέτρου α_{22}



Σχήμα 17: Εκτίμηση Παραμέτρου β_1



Σχήμα 18: Εκτίμηση Παραμέτρου β_2

Σχολιασμός

Κρίνοντας από τα Σχήματα 9, 10 και 12, παρατηρούμε ότι το σχήμα εκτιμητή που εφαρμόστηκε καταφέρνει να ανασυνθέσει με ικανοποιητική ακρίβεια (ανάλογα το πραγματικό πρόβλημα και τις απαιτήσεις/προδιαγραφές αυτού) τις πραγματικές καταστάσεις του συστήματος, παρά την ύπαρξη διαταραχής πόλωσης $\omega(t)$. Συγκεκριμένα, το σφάλμα εκτίμησης $e(t)$ στα Σχήματα 9 και 10 εμφανίζει απόσβεση με την πάροδο του χρόνου και περιορίζεται σε σχετικά μικρές ταλαντώσεις. Αυτό επαληθεύεται και από το γράφημα της νόρμας $\|e(t)\|$, όπου παρατηρείται ταχεία αρχική πτώση και τελική σταθεροποίηση σε μικρή τιμή.

Από το Σχήμα 10, που απεικονίζει τις πραγματικές καταστάσεις $x_1(t), x_2(t)$ μαζί με τις εκτιμήσεις $\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)$, φαίνεται ότι το σύστημα εκτιμητή ακολουθεί σχεδόν επιτυχώς τη συμπεριφορά του πραγματικού συστήματος, με σχετική καθυστέρηση μόνο κατά τα αρχικά στάδια σύγκλισης. Το παραπάνω επιβεβαιώνει την αποτελεσματικότητα της επιλεγμένης παράλληλης δομής με σ-τροποποίηση ως προς την παρακολούθηση των καταστάσεων.

Στο Σχήμα 11 απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη του μέτρου της διαταραχής πόλωσης $\|\omega(t)\|$. Διαπιστώνεται ότι, όπως είχε σχεδιαστεί, το μέτρο δεν υπερβαίνει ποτέ το καθορισμένο φράγμα $\bar{\omega} = 1$, ικανοποιώντας τον περιορισμό $\|\omega(t)\| \leq \bar{\omega}$. Παρά τη διαρκή στοχαστικότητα και την τυχαία κατεύθυνση της διαταραχής, ο εκτιμητής εμφανίζεται ικανός να ανταποκριθεί στην ύπαρξή της χωρίς σοβαρή υποβάθμιση της ακρίβειας.

Σχετικά με τις παραμετρικές εκτιμήσεις (Σχήματα 13 έως 18), προκύπτουν τα εξής:

- Όλες οι παράμετροι του συστήματος συγκλίνουν σε μια σταθερή τιμή
- Η παράμετρος α_{11} (Σχήμα 13) συγκλίνει πολύ γρήγορα στο άνω επιτρεπτό όριο -1 , το οποίο επιβλήθηκε από τον μηχανισμό προβολής. Αυτή η συμπεριφορά υποδηλώνει ότι, χωρίς την προβολή, η παράμετρος ενδεχομένως θα ξεπερνούσε τα επιτρεπτά φυσικά όρια, επηρεαζόμενη από την επιμονή της διαταραχής.
- Οι παράμετροι α_{12} , α_{21} , α_{22} και β_2 (Σχήματα 14, 15, 16, 18) εμφανίζουν συγκλίσεις με διαφορετικούς ρυθμούς και τελικά διαμορφώνουν σταθερές τιμές. Ωστόσο, δεν ταυτίζονται απόλυτα με τις πραγματικές τους, στοιχείο που αποδίδεται είτε στη στοχαστικότητα του $\omega(t)$ είτε στην περιορισμένη διέγερση του συστήματος ως προς ορισμένες διευθύνσεις.
- Η παράμετρος β_1 (Σχήμα 17) εκτιμάται με επιτυχία.

Συμπερασματικά, ο εκτιμητής παραμένει λειτουργικός και αποδοτικός ακόμα και υπό την παρουσία στοχαστικής πόλωσης, με μικρές αποκλίσεις στις παραμέτρους και εξαιρετική συμπεριφορά στις εκτιμήσεις καταστάσεων. Η χρήση σ-τροποποίησης και προβολής αποδείχτηκε κρίσιμη για την ορθότητα και τη σταθερότητα των εκτιμήσεων.