

Προσομοίωση Και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων - 1ο παραδοτέο

Τουλκερίδης Νικόλαος

AEM:10718

Θέμα 1ο

α)

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος δίνεται από,

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t) \quad (1)$$

Ορίζουμε $x_1 = q(t)$, $x_2 = \dot{q}(t)$. Άρα:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \ddot{q}(t) = -\frac{c}{mL^2}x_2 - \frac{g}{L}x_1 + \frac{1}{mL^2}u(t) \quad (2)$$

Σε μορφή πίνακα εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix} u \quad (3)$$

Θεωρώντας έξοδο του συστήματος το $y = q(t) = x_1$, σε μορφή πίνακα γράφεται:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4)$$

$$y = Cx \quad (5)$$

, όπου $x \in \mathbb{R}^2$, με

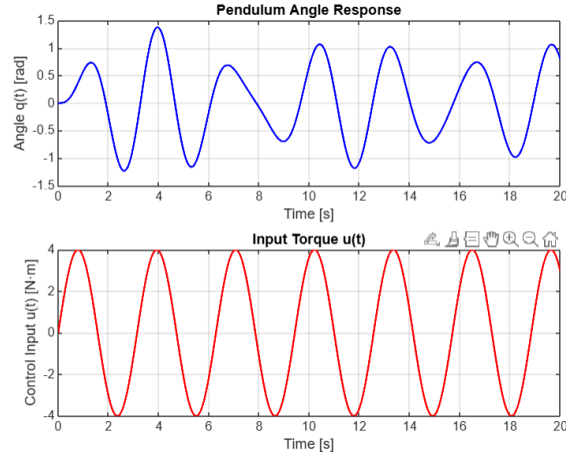
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0] \quad (6)$$

Μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος από

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (7)$$

, αντικαθιστώντας έχουμε:

$$G(s) = \frac{1}{mL^2s^2 + cs + mgL} \quad (8)$$



Σχήμα 1: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων

ode45 για την επίλυση της διαφορικής

Θέμα 2ο

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος δίνεται από

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t)$$

ή αλλιώς

$$\ddot{q}(t) + \frac{c}{mL^2}\dot{q}(t) + \frac{g}{L}q(t) = \frac{1}{mL^2}u(t)$$

θέτουμε όπου q το y αφού είναι η έξοδος και παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace.

$$s^2y + s\frac{c}{mL^2}y + \frac{g}{L}y = \frac{1}{mL^2}u$$

Οι όροι $\frac{c}{mL^2}$, $\frac{g}{L}$, $\frac{1}{mL^2}$ έχουν άγνωστες παραμέτρους οπότε μπορούμε να θέσουμε:

$$\alpha_1 = \frac{c}{mL^2}, \quad \alpha_2 = \frac{g}{L}, \quad b_1 = \frac{1}{mL^2}$$

Άρα μπορεί να γραφτεί ως

$$s^2y + \alpha_1sy + \alpha_2y = b_1u$$

Τα μετρήσιμα μεγέθη είναι τα $u(t), y(t), \dot{y}(t)$ οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ευσταθείς φραγμένους τελεστές 1ης τάξης (με έναν πόλο) αφού το μόνο μέγεθος που δεν μετριέται είναι το $\ddot{y}(t)$. Έστω

$$\Lambda(s) = s + 1.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{s+1}y + \alpha_1\frac{s}{s+1}y + \alpha_2\frac{1}{s+1}y &= b_1\frac{1}{s+1}u \\ \frac{s^2}{s+1}y &= -\alpha_1\frac{s}{s+1}y - \alpha_2\frac{1}{s+1}y + b_1\frac{1}{s+1}u. \end{aligned}$$

Ο παράγοντας $\frac{s^2}{s+1}y$ μπορεί να γραφτεί ως $sy - \frac{s}{s+1}y$, αντικαθιστώντας:

$$sy - \frac{s}{s+1}y = -\alpha_1 \frac{s}{s+1}y - \alpha_2 \frac{1}{s+1}y + b_1 \frac{1}{s+1}u.$$

Άρα,

$$sy = \frac{s}{s+1}y - \alpha_1 \frac{s}{s+1}y - \alpha_2 \frac{1}{s+1}y + b_1 \frac{1}{s+1}u.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του sy είναι γνωστός και μπορούμε να ορίσουμε τα σήματα:

$$\phi_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s+1}y\right)$$

$$\phi_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}y\right)$$

$$\phi_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}u\right).$$

Το διάνυσμα παραμέτρων είναι:

$$\theta = [\alpha_1, -1, \alpha_2, b_1].$$

Οπότε το σύστημα γράφεται ως:

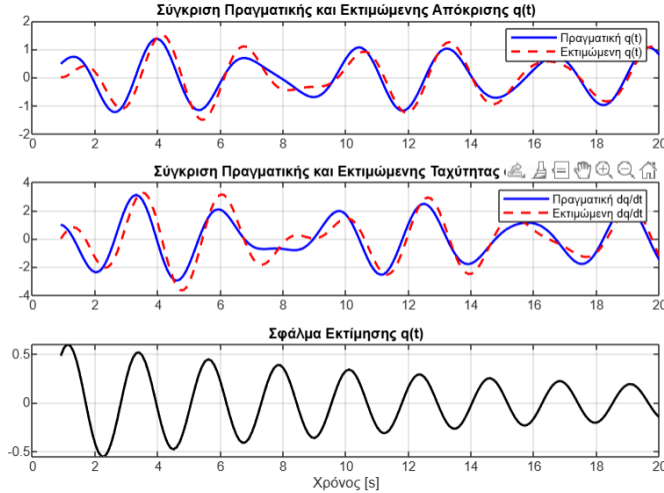
$$\dot{y} = \theta * [\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)]^T.$$

Εφόσον στην παραπάνω έκφραση μπορούμε να εφαρμόσουμε ελάχιστα τετράγωνα αφού τα \dot{y} και $\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)$ είναι γνωστά, θεωρώντας N μετρήσεις χρονικών στιγμών έχουμε:

$$Y = \Phi * \theta, \quad \text{όπου } \theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y,$$

όπου Y ανήκει στο $\mathbb{R}^{N \times 1}$ και Φ στο $\mathbb{R}^{N \times 3}$.

Για χρόνο δειγματοληψίας $T_s = 0.1s$, το παρακάτω διάγραμμα δείχνει το σφάλμα εκτίμησης εξόδου.



Κάνοντας τους αντίστοιχους υπολογισμούς μέσω MATLAB βρίσκουμε

$$[\hat{L}, \hat{m}, \hat{c}] = [1.258, 0.747, 0.158].$$

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές του.

Το σφάλμα παραμένει σε χαμηλά επίπεδα, χωρίς να παρουσιάζει σημαντική απόκλιση μεταξύ του εκτιμώμενου και του πραγματικού σήματος. Επομένως, παρόλο που οι παράμετροι δεν έχουν εκτιμηθεί με απόλυτη ακρίβεια, το συνολικό σφάλμα διατηρείται σε αποδεκτά όρια, εξασφαλίζοντας ότι οι χρονικές συναρτήσεις του εκτιμώμενου συστήματος προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις πραγματικές.

β)

Εφόσον τώρα γνωστό είναι μόνο το y θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε φίλτρο 2ης τάξης. Έστω

$$\Lambda(s) = s^2 + 3s + 2$$

Ορίζοντας την διαφορική εξίσωση του συστήματος με τις άγνωστες παραμέτρους όπως πριν έχουμε:

$$s^2 y + \alpha_1 y + \alpha_2 y = b_1 u$$

$$\frac{s^2}{s^2 + 3s + 2} y = -\alpha_1 \frac{s}{s^2 + 3s + 2} y - \alpha_2 \frac{1}{s^2 + 3s + 2} y + b_1 \frac{1}{s^2 + 3s + 2} u$$

$$\frac{s^2}{\Lambda(s)} y = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}$$

Ισχύει ότι $\frac{s^2 y}{\Lambda(s)} = z$ με $s^2 = \Lambda(s) - \lambda^T \Delta_1(s)$ όπου $\lambda = [3, 2]^T$. Άρα

$$z = \frac{\Lambda(s) - \lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y$$

$$y = z + \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y$$

Αντικαθιστώντας από τα παραπάνω

$$y = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}^T - \lambda^T \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}^T$$

$$y = [\alpha_1 - \lambda_1 \quad \alpha_2 - \lambda_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}^T$$

$$y = [\alpha_1 - 3 \quad \alpha_2 - 2 \quad b_1] \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}^T$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε γράψει το σύστημα σε μορφή $y = \theta^T \varphi$ όπου

$$\theta^T = [\alpha_1 - 3 \quad \alpha_2 - 2 \quad b_1]$$

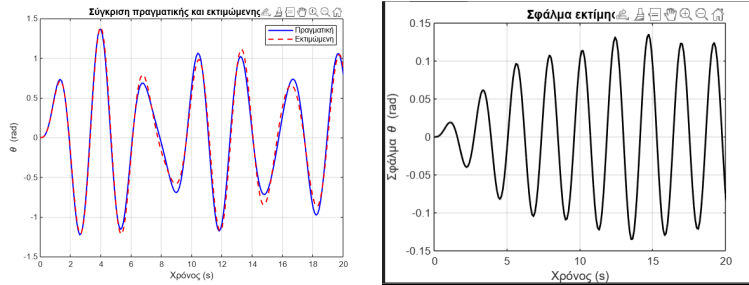
και

$$\varphi = \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}^T$$

Θέλουμε να βρούμε μια εκτίμηση των παραμέτρων θ , οπότε με Least Squares estimation θεωρώντας N μετρήσεις χρονικών για τα σήματα $y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ βρίσκουμε

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

όπου όπως και πριν $\hat{a}_1 = \frac{\hat{c}}{m\hat{L}^2}$, $\hat{a}_2 = \frac{g}{\hat{L}}$, $\hat{\beta}_1 = \frac{1}{m\hat{L}^2}$



Οι τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων έπειτα από προσομοίωση δίνονται από $[\hat{L}, \hat{m}, \hat{c}] = [1.2822 \quad 0.7456 \quad 0.1523]$. Παρατηρούμε ότι:

- Ο συντελεστής απόσβεσης c έχει εκτιμηθεί καλύτερα από πριν.
- Για το μήκος λαμβάνουμε αισθητά χειρότερη εκτίμηση
- Η εκτίμηση για την μάζα είναι ελαφρώς χειρότερη σε σχέση με πριν.

Συνολικά, το μέσο σφάλμα εκτίμησης είναι υψηλότερο σε σχέση με πριν, κάτι που είναι λογικό καθώς έχουμε λιγότερα σήματα προς μέτρηση.

Θέμα 3

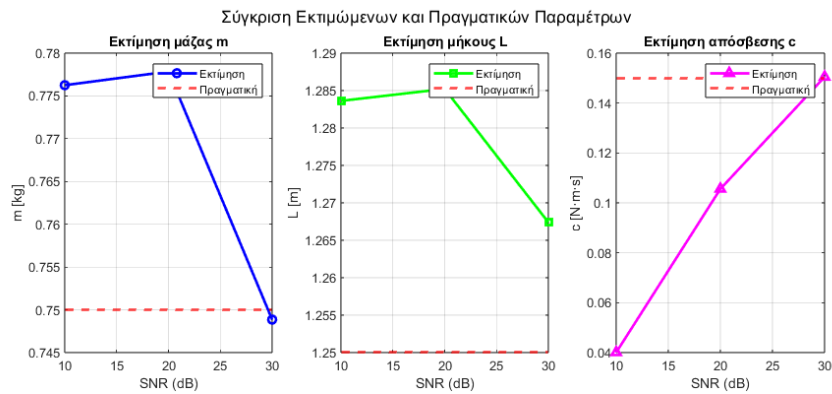
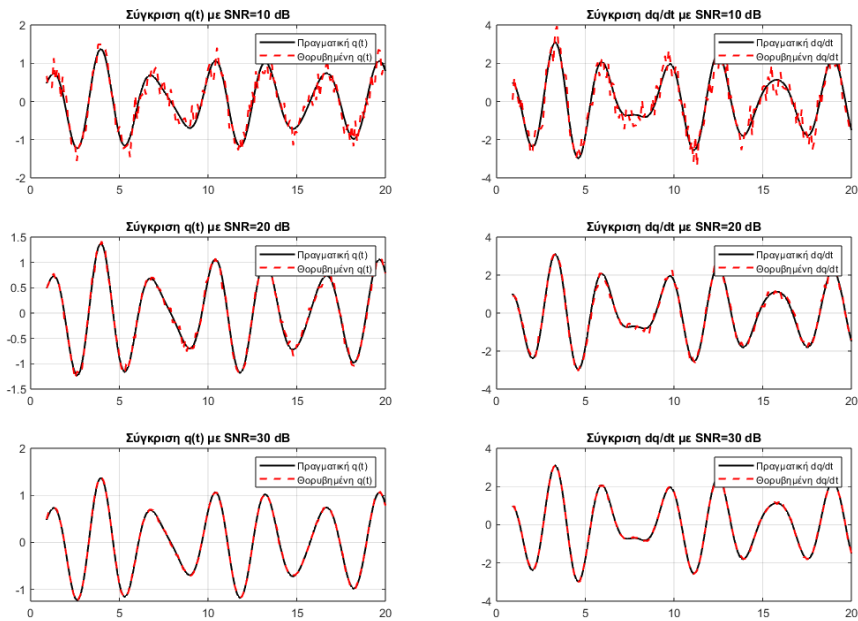
3α - Επίδραση θορύβου

Σε αυτή τη φάση της εργασίας προσθέτουμε λευκό Γκαουσιανό θόρυβο στα δείγματα για διαφορετικά επίπεδα SNR. Θεωρήσαμε τις περιπτώσεις των ερωτημάτων 2α) και 2β), όπου έχουμε τρία και δύο μετρήσιμα σήματα αντίστοιχα και δοκιμάσαμε διάφορες τιμές των SNR.

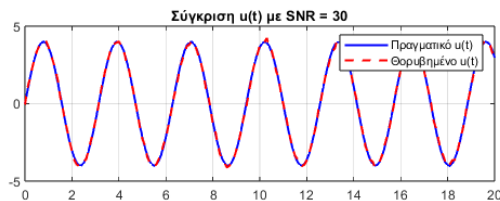
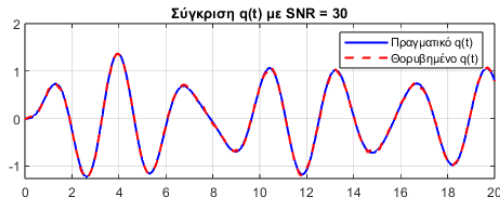
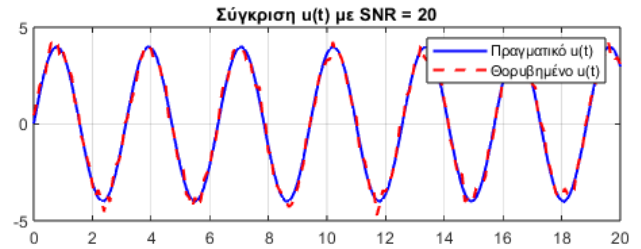
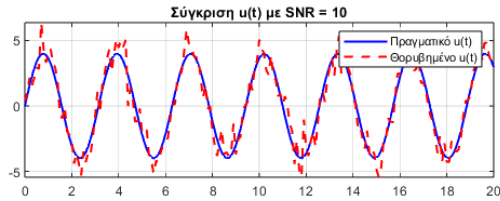
```
--- SNR = 10 dB ---
m εκτιμ.: 0.7863 (σφάλμα 4.84%)
L εκτιμ.: 1.2626 (σφάλμα 1.01%)
c εκτιμ.: 0.2237 (σφάλμα 49.14%)
```

```
--- SNR = 20 dB ---
m εκτιμ.: 0.7543 (σφάλμα 0.57%)
L εκτιμ.: 1.2649 (σφάλμα 1.19%)
c εκτιμ.: 0.1876 (σφάλμα 25.08%)
```

```
--- SNR = 30 dB ---
m εκτιμ.: 0.7493 (σφάλμα 0.10%)
L εκτιμ.: 1.2653 (σφάλμα 1.23%)
c εκτιμ.: 0.1481 (σφάλμα 1.27%)
```



Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το SNR, δηλαδή όσο μικραίνει ο θόρυβος, οι εκτιμήσεις είναι καλύτερες.



SNR = 10
m: Πραγματικό = 0.750 kg, Εκτιμώμενο = 0.816 kg
L: Πραγματικό = 1.250 m, Εκτιμώμενο = 1.512 m
c: Πραγματικό = 0.150 N·m·s, Εκτιμώμενο = -1.657 N·m·s
SNR = 20
m: Πραγματικό = 0.750 kg, Εκτιμώμενο = 0.742 kg
L: Πραγματικό = 1.250 m, Εκτιμώμενο = 1.244 m
c: Πραγματικό = 0.150 N·m·s, Εκτιμώμενο = -0.960 N·m·s
SNR = 30
m: Πραγματικό = 0.750 kg, Εκτιμώμενο = 0.750 kg
L: Πραγματικό = 1.250 m, Εκτιμώμενο = 1.265 m
c: Πραγματικό = 0.150 N·m·s, Εκτιμώμενο = -1.043 N·m·s

Και πάλι φαίνεται η βελτίωση των εκτιμήσεων όσο μικραίνει ο θόρυβος. Επίσης, είναι αξιοσημείωτο ότι ο παράγοντας απόσβεσης λαμβάνει αρνητικές τιμές. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί, καθώς η δύναμη απόσβεσης εξαρτάται από την παράγωγο της γωνίας η οποία δεν είναι μετρήσιμο μέγεθος στο θέμα 2β). Έτσι, η πληροφορία χάνεται εν μέρη όταν δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε άμεσα την παράγωγο.

Συνολικά, φαίνεται να λαμβάνουμε τα καλύτερα αποτελέσματα στην περίπτωση του 2α), όπου έχουμε τρία μετρήσιμα σήματα και υψηλό SNR.

3β) - Επίδραση του χρόνου δειγματοληψίας

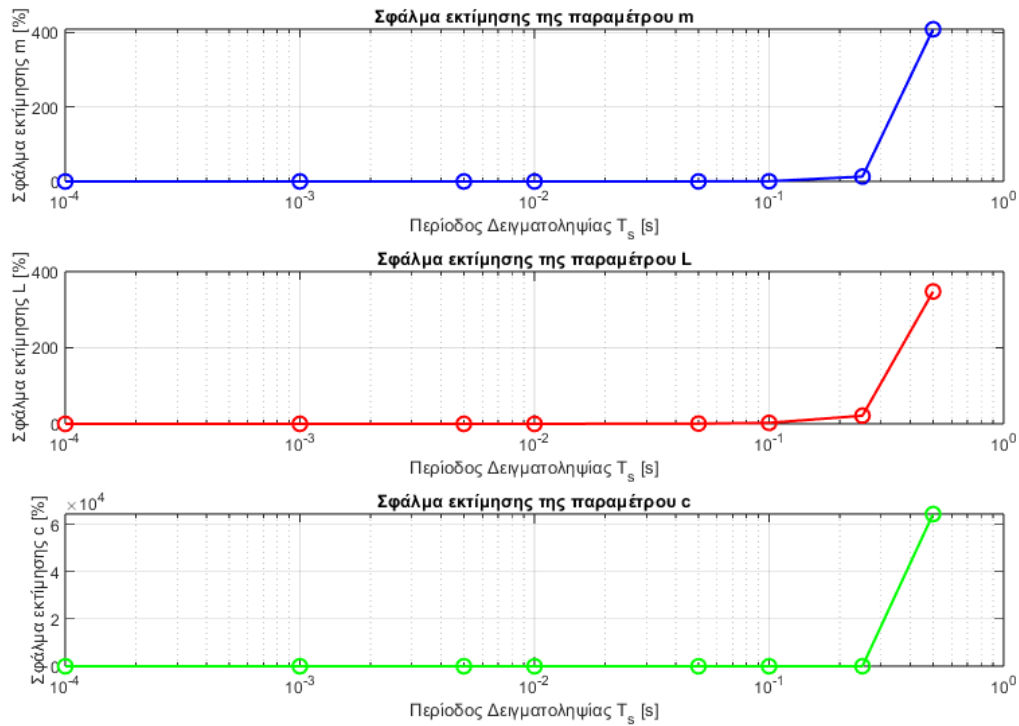
Καθώς ο χρόνος δειγματοληψίας μειώνεται, αναμένεται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων να προσεγγίζουν περισσότερο τις πραγματικές τιμές τους. Τα παρακάτω γραφήματα προκύπτουν για τους εξής χρόνους δειγματοληψίας:

$$T_s = [0.0001, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5]$$

Περίπτωση γνωστών y και u

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται τα σφάλματα των παραμέτρων L , m , και c . Θεωρούμε ότι:

$$e = (L(t) - \hat{L}(t))/q(t)$$



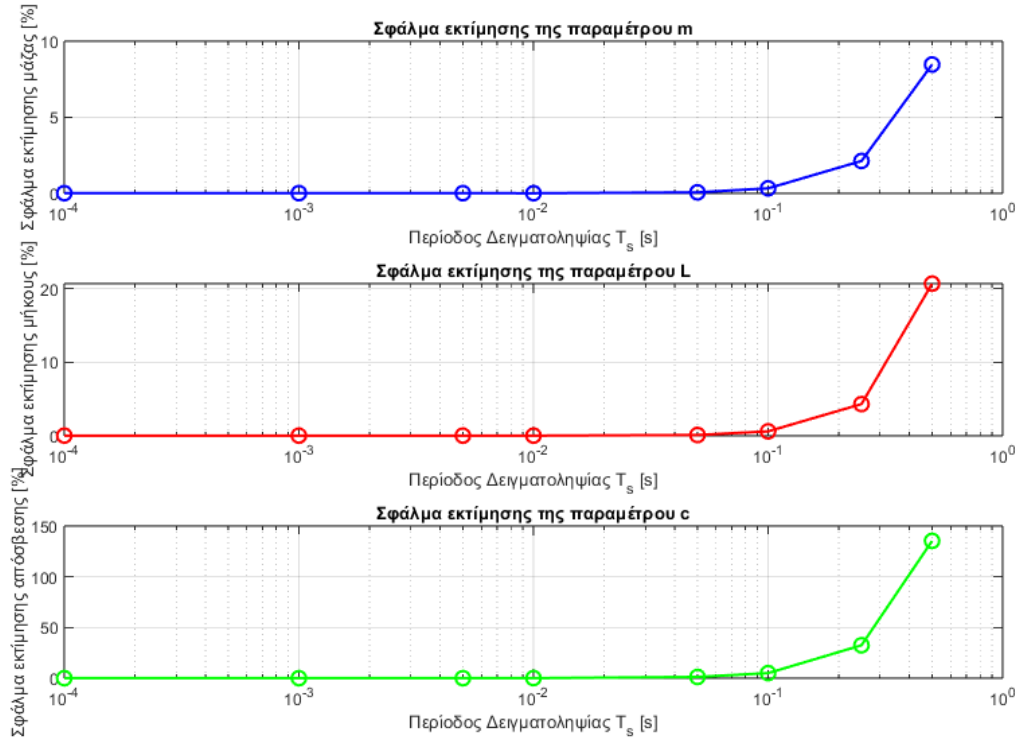
Όπως φαίνεται, όταν ο χρόνος δειγματοληψίας είναι μικρότερος, το σφάλμα εκτίμησης μειώνεται και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι πιο ακριβείς. Όταν ο χρόνος δειγματοληψίας ξεπερνά το 0.1, το σφάλμα αρχίζει να αυξάνεται.

Περίπτωση γνωστών \dot{y} , y και u

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου είναι γνωστά περισσότερα μετρούμενα μεγέθη. Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται τα σφάλματα των παραμέτρων L , m , και c . Θεωρούμε ότι:

Όταν είναι διαθέσιμα περισσότερα σήματα, η εκτίμηση των παραμέτρων βελτιώνεται και το σφάλμα εκτίμησης για τις ίδιες τιμές T_s εμφανίζει χαμηλότερες τιμές.

Συνολικά, η παρουσία περισσότερων μετρούμενων σημάτων οδηγεί σε ακριβέστερες εκτιμήσεις, ειδικά για $T_s \leq 0.1$. Συγκρίνοντας με την προηγούμενη περίπτωση, η εκτίμηση των παραμέτρων είναι σαφώς βελτιωμένη.



3γ) - Επίδραση πλάτους σήματος εισόδους

Στα παρακάτω διαγράμματα θα μελετήσουμε την επίδραση του πλάτους του σήματος εισόδου στις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Γενικώς, το πλάτος του σήματος εισόδου αποτελεί γνωστή παράμετρο αφού το u είναι μετρήσιμο μέγεθος. Από τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γνωρίζουμε ότι:

$$G(s) = \frac{1}{mL^2s^2} + \frac{c}{mL^2s} + \frac{g}{L} \quad (9)$$

ή

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1}{s^2 + a_1s + a_2} \quad (10)$$

Αφού κάνουμε την εκτίμηση των παραμέτρων έχουμε:

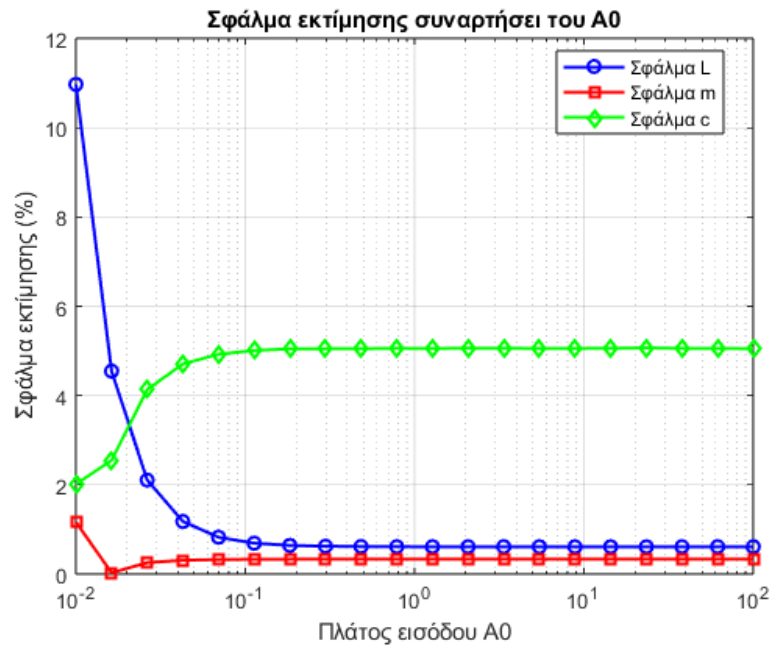
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\hat{b}_1}{s^2 + \hat{a}_1s + \hat{a}_2} \quad (11)$$

Το σφάλμα εκτίμησης δίνεται από:

$$e(s) = (H(s) - \hat{H}(s))U(s) \quad (12)$$

Καθώς οι τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων δεν επηρεάζονται από το u , αφού το u είναι γνωστό, από τη σχέση του σφάλματος στον χώρο της συχνότητας καταλαβαίνουμε ότι το πλάτος A δρα πολλαπλασιαστικά. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η τιμή του σφάλματος. Αυτό δεν σημαίνει ότι χειροτερεύει η εκτίμηση, απλά οι διαφορές στις τιμές των παραμέτρων γίνονται πιο έντονες.

Περίπτωση γνωστών $\dot{\gamma}$, γ και u



Γνωστά μόνο γ και u

