Nguyễn Hữu Dư

Nguyễn Thu Hà và Trịnh Hoàng Dũng

GIÁO TRÌNH
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Mục lục

Mở đầu

Trong thế giới hiện đại, phương trình vi phân đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học, kỹ thuật và công nghệ. Nó còn là nền tảng để mô hình hóa và giải quyết các vấn đề về sự thay đổi, sự biến thiên theo thời gian của các hiện tượng tự nhiên và xã hội. Việc hiểu rõ về lý thuyết và ứng dụng của phương trình vi phân giúp các nhà nghiên cứu không chỉ làm chủ các công cụ toán học mà còn có khả năng giải quyết các bài toán thực tế trong các ngành khác nhau.

Trong vật lý, phương trình vi phân là công cụ chủ yếu mô tả các hiện tượng liên quan đến động lực học, truyền nhiệt, dòng chảy của chất lỏng, sự lan truyền sóng, sự chuyển động của vật thể. Thí dụ các phương trình chuyển động của Newton mô tả chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực, phương trình Maxwell mô tả sự lan truyền của sóng điện từ trong không gian. Trong cơ học chất lỏng và khí động học, phương trình Navier–Stokes giúp phân tích dòng chảy của chất lỏng và chất khí, từ đó tối ưu hóa các thiết kế trong công nghiệp như động cơ phản lực hay hệ thống dẫn nước.

Trong kỹ thuật điều khiển, các hệ thống tự động hóa và robot được điều khiển thông qua các mô hình phương trình vi phân để đảm bảo độ chính xác cao trong các tác vụ phức tạp. Các hệ thống như máy bay không người lái, cánh tay robot và hệ thống điều khiển công nghiệp đều dựa trên việc giải các bài toán phương trình vi phân để điều chỉnh hành vi theo thời gian thực. Trong ngành công nghiệp điện tử, phương trình vi phân được sử dụng để mô phỏng hoạt động của các linh kiện như transistor, vi mạch và mạch điện. Điều này giúp thiết kế và tối ưu hóa các thiết bị điện tử có hiệu năng cao và tiêu thụ năng lượng thấp.

Đối với khoa học môi trường, phương trình vi phân được sử dụng để mô tả và dự đoán các hiện tượng tự nhiên như sự lan truyền ô nhiễm trong không khí và nước, quá trình phát tán của chất thải trong môi trường hay sự thay đổi nhiệt độ của bầu khí quyển. Trong nghiên cứu khí hậu, các mô hình phương trình vi phân giúp dự đoán sự thay đổi nhiệt độ toàn cầu và tác động của con người đối với khí hậu.

Trong sinh học, phương trình vi phân giúp mô tả sự phát triển của quần thể, sự lây lan của dịch bệnh và tương tác giữa các loài trong hệ sinh thái. Ví dụ điển hình như mô hình Malthus, mô hình Lotka–Volterra mô tả sự phát triển dân số và sự cạnh tranh giữa các loài sinh vật. Trong y học, các phương trình vi phân được áp dụng để mô hình hóa sự phát triển của tế bào ung thư, sự truyền bệnh trong cộng đồng và phản ứng của cơ thể với các loại thuốc. Các mô hình này giúp các nhà nghiên cứu và bác sĩ đưa ra phương pháp điều trị tối ưu cho các căn bệnh phức tạp.

Trong hóa học và khoa học vật liệu, các phản ứng hóa học thường được mô hình hóa thông qua các phương trình vi phân, giúp dự đoán tốc độ phản ứng và sự biến đổi nồng độ của các chất tham gia phản ứng theo thời gian. Các mô hình này có ý nghĩa quan trọng trong ngành công nghiệp hóa chất và sản xuất vật liệu. Phương trình vi phân cũng giúp dự đoán quá trình lan truyền nhiệt và động học của các chất, giúp tối ưu hóa thiết kế và sản xuất vật liệu có tính chất mong muốn.

Trong công nghệ thông tin, đặc biệt là trong các lĩnh vực như trí tuệ nhân tạo, mạng máy tính hay khoa học dữ liệu thì các hiện tượng thay đổi theo thời gian và không gian đóng vai trò quan trọng. Các quá trình này thường được biểu diễn bởi phương trình vi phân, tạo ra nền tảng cho việc phát triển và tối ưu hóa hệ thống phần mềm và phần cứng. Trong học máy, đặc biệt là các mô hình mạng nơ-ron sâu và hệ thống học tăng cường, phương trình vi phân thường được sử dụng để mô tả quá trình cập nhật trọng số và tối ưu hóa. Trong lĩnh vực xử lý tín hiệu và truyền thông, phương trình vi phân được sử dụng để phân tích và thiết kế các bộ lọc số, cũng như trong việc mã hóa và giải mã dữ liệu.

Phương trình vi phân là môn học có phát triển từ thế kỷ thứ 18. Nó liên quan đến tên tuổi của các nhà toán học và vật lý học như Leonhard Euler và Pierre–Simon Laplace. Ở thế kỷ 21, phương trình vi phân trở thành công cụ không thể thiếu được trong nhiều ngành công nghiệp và khoa học, đặc biệt là trong các ngành công nghệ cao. Nhờ sự ra đời của máy tính, các phương pháp số để giải phương trình vi phân cũng phát triển mạnh giúp chúng ta có thể mô phỏng số các bài toán phức tạp. Từ đó đưa ra giải pháp tối ưu để giải quyết các bài toán thực tiễn.

Giáo trình này trình bày các ý tưởng chính về phương trình vi phân và phương thức áp dụng chúng để giải quyết một số bài toán đơn giản. Giáo trình được chia làm 4 chương. Trong chương 1, chúng tôi giới thiệu một số bài toán dẫn đến phương trình vi phân. Chương 2 giới thiệu về phương trình vi phân cấp một và phương pháp giải một số loại phương trình vi phân cấp một cụ thể. Trong chương 3, chúng tôi trình bày về phương trình vi phân cấp cao, phép biến đổi Laplace và ứng dụng của nó trong giải phương trình vi phân. Chương 4 trình bày về hệ phương trình vi phân cấp một và phương pháp số tìm nghiệm phương trình vi phân.

Giáo trình này có thể sử dụng cho sinh viên các ngành toán tin ứng dụng, công nghệ thông tin, các ngành thuộc lĩnh vực khoa học tự nhiên, các ngành kỹ thuật và khí tượng thủy văn, môi trường... Vì thời lượng của giáo trình có hạn, chúng tôi không thể trình bày đầy đủ các kiến thức về phương trình vi phân. Muốn có được bức tranh tổng thể và tìm hiểu sâu hơn về phương trình vi phân, độc giả có thể tìm tham khảo các tài liệu [5, 8].

Trong quá trình biên soạn, chúng tôi đã rất cố gắng để kiểm tra, tuy nhiên giáo trình vẫn có thể còn những thiếu sót. Chúng tôi mong muốn có được sự đóng góp chân thành của các bạn sinh viên và các thầy cô giáo quan tâm đến môn học này.

Chương 1

Các bài toán dẫn đến phương trình vi phân

ch1

1.1 Một số bài toán vật lý

1.1.1 Hiện tượng phóng xạ

ss1.1.1

Phóng xạ là hiện tượng một số hạt nhân nguyên tử không bền (còn được gọi là đồng vị phóng xạ) tự biến đổi và phát ra các bức xạ hạt nhân. Ví dụ ^{14}C là một đồng vị phóng xạ của nguyên tố Carbon C, nó có quá trình phân rã phóng xạ là $^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + e^- + \overline{\nu}_e$.

Để mô hình hóa toán học hiện tượng phóng xạ, chúng ta cho một mẫu vật liệu phóng xạ có số đồng vị phóng xạ ở thời điểm ban đầu $t = 0$ là N_0. Gọi $N(t)$ là số đồng vị phóng xạ chưa phân rã tại thời điểm t với $t \geqslant 0$. Bằng thực nghiệm, người ta đã chỉ ra rằng số đồng vị phóng xạ phân rã tại một thời điểm tỉ lệ với số đồng vị phóng xạ tại thời điểm đó theo một hằng số phân rã $k > 0$ nào đó. Như vậy tốc độ biến thiên $N'(t) = \dfrac{d}{dt}N(t)$ của số đồng vị phóng xạ thỏa mãn phương trình

$$N'(t) = -kN(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.1.1}$$ e1.1

Đây là phương trình chứa hàm cần tìm $N(t)$ và đạo hàm $N'(t)$ của hàm đó, nói cách khác ta có một phương trình vi phân.

Phương trình (1.1.1) có nghiệm[1]:

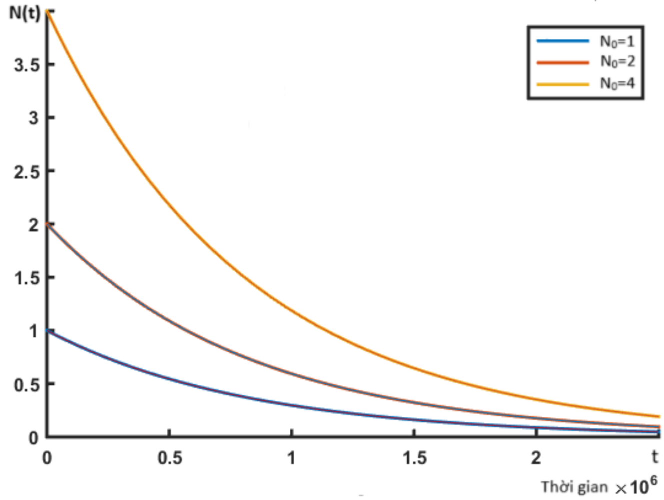
$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}, t \geqslant 0. \tag{1.1.2}$$ e1.2

[1] Cách giải những PTVP có dạng tương tự được trình bày ở phần sau.

Ta gọi *chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ* là *khoảng thời gian* T để số nguyên tử phóng xạ chưa phân rã chỉ còn một nửa so với số lượng nguyên tử ở thời điểm t, tức là $N(t+T) = \dfrac{1}{2}N(t)$. Khi đó, sử dụng công thức nghiệm (1.1.2) ta có

$$N_0 e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2} N_0 e^{-kt}.$$

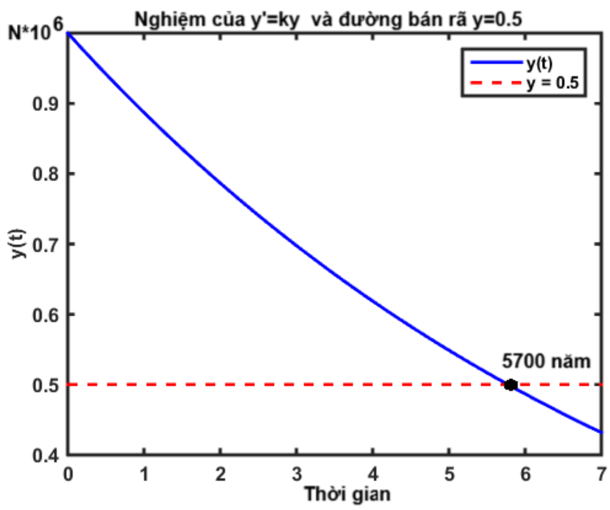
Từ đó tính được chu kỳ bán rã $T = \dfrac{\ln 2}{k}$.



Hình 1.1: Các đường cong biểu thị sự phân rã phóng xạ ứng với số đồng vị phóng xạ ban đầu N_0. fig_2conl

Chú ý rằng giá trị T không phụ thuộc vào số lượng nguyên tử phóng xạ ban đầu, nó chỉ phụ thuộc vào bản chất của nguyên tố phóng xạ.

Ví dụ 1.1.1. Trong quá trình sống của thực vật/động vật, chúng liên tục trao đổi Carbon với môi trường bên ngoài. Do đó tỉ lệ giữa đồng vị phóng xạ ^{14}C và đồng vị ổn định ^{12}C trong sinh vật là không đổi. Bằng thực nghiệm người ta tính được hằng số phân rã $k = 1.2 \times 10^{-6}$. Vì thế chu kì bán rã của ^{14}C là 5730 năm.



Hình 1.2: Thời gian bán rã của phóng xạ, $N_0 = 10^6$. fig_2conl

Với công thức tính chu kỳ bán rã ở trên ta có thể định tuổi của sinh vật bằng Carbon phóng xạ. Khi sinh vật chết, đồng vị phóng xạ ^{14}C bắt đầu phân rã và giảm số lượng, còn đồng vị ổn định ^{12}C giữ nguyên số lượng. Bằng cách so sánh tỉ số giữa số lượng ^{14}C và ^{12}C tại thời điểm hiện tại, ta có thể ước lượng được tuổi của sinh vật.

1.1.2 Quá trình làm nguội

Đặt một ấm nước mới đun (hay một khay đá) vào phòng thì nó sẽ nguội đi (hoặc ấm lên) cho tới khi chúng có nhiệt độ xấp xỉ nhiệt độ phòng. Ta có thể đưa ra mô hình toán học hiện tượng này như sau. Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của vật tại thời điểm t và quy ước thời điểm $t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu thực hiện quá trình trao đổi nhiệt với môi trường. Định luật Newton về sự làm lạnh (Newton's law of cooling) phát biểu rằng: *Tốc độ thay đổi nhiệt độ của một vật thể có tỉ lệ thuận với hiệu số giữa nhiệt độ của vật thể đó và nhiệt độ không đổi của môi trường xung quanh.* Gọi k là hệ số tỷ lệ thay đổi nhiệt và T_{const} là nhiệt độ của môi trường (không đổi) thì theo Định luật Newton ta có

$$T' = k(T - T_{\text{const}}). \qquad (1.1.3)$$ e1.3

Đây là một phương trình vi phân cấp 1 có hàm cần tìm là $T(t)$. Nghiệm tổng quát của (1.1.3) là[2]

$$T(t) = (T(0) - T_{\text{const}})e^{kt} + T_{\text{const}}. \qquad (1.1.4)$$ e1.4

Ta chú ý rằng mô hình được xây dựng như trên có độ chính xác cao khi được áp dụng trong trường hợp hai điều kiện sau thỏa mãn

i) Vật có nhiệt độ đồng nhất tại mọi điểm ở một thời điểm bất kì,

ii) Nhiệt độ không gian xung quanh vật được giữ không đổi.

Từ công thức nghiệm (1.1.4) ta thấy, nếu $T(0) < T_{\text{const}}$ thì nhiệt độ của vật tăng lên theo thời gian, hay $T'(t) > 0$, nếu $T(0) > T_{\text{const}}$ thì nhiệt độ của vật giảm đi theo thời gian, hay $T'(t) < 0$. Như vậy, trong cả hai trường hợp ta luôn có

$$k = \frac{T'}{T - T_{\text{const}}} < 0,$$

từ đó suy ra dáng điệu của nghiệm tại vô cùng,

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = T_{\text{const}}. \qquad (1.1.5)$$

Điều này giải thích hiện tượng nhiệt độ của vật sẽ xấp xỉ nhiệt độ của môi trường xung quanh sau một thời gian đủ lâu.

Một ứng dụng của phương trình (1.1.3) là quá trình *Giám định pháp y.* Nhiệt độ cơ thể người khi còn sống luôn được giữ ổn định quanh mức 37°C. Sau khi chết, cơ thể ngừng hoạt động nên nhiệt độ cơ thể bắt đầu giảm. Khi khám nghiệm tử thi, bằng cách đo nhiệt độ hiện tại của thi thể và nhiệt độ của không gian xung quanh, cảnh sát có thể ước lượng được thời điểm mà nạn nhân tử vong nhờ công thức (1.1.4).

---

[2] Cách giải những PTVP có dạng tương tự được trình bày ở phần sau.

1.2 Một số bài toán chuyển động cơ học

1.2.1 Bài toán vật thể rơi tự do

Nhà bác học G. Galilei thả một quả cầu từ độ cao h_0 xuống đất và cần xác định thời điểm chạm đất của quả cầu. Biết rằng gia tốc trọng trường là $g = -9.8m/s^2$ và lực cản không khí tỷ lệ với vận tốc rơi theo hằng số k.

Để giải quyết bài toán này, ta giả sử quả cầu có khối lượng m và có độ cao so với mặt đất ở thời điểm t là $h(t)$, khi đó $h'(t)$ và $h''(t)$ lần lượt là vận tốc và gia tốc của quả cầu tại thời điểm t. Theo Định luật thứ hai của Newton, ta có phương trình

$$mh''(t) = mg + kh'(t).$$

Ta nhận được phương trình chứa các đạo hàm của hàm cần tìm $h(t)$ với điều kiện ban đầu $h(0) = h_0$ và $h'(0) = 0$.

1.2.2 Bài toán đường đi của viên đạn

Một viên đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $500\,m/s$, hợp với phương nằm ngang một góc α°. Biết sức cản của không khí là không đáng kể, hãy tìm quỹ đạo chuyển động của viên đạn?

Giả sử $x(t)$ và $y(t)$ tương ứng là quãng đường đi được của viên đạn theo phương nằm ngang và phương thẳng đứng tính đến thời điểm t. Vì viên đạn chỉ chịu tác động của trọng lực nên theo Định luật thứ hai của Newton ta có phương trình

$$\begin{cases} my''(t) = mg, \\ mx''(t) = 0, \end{cases}$$

với điều kiệm ban đầu $y(0) = 0, y'(0) = 500\sin\alpha, x(0) = 0, x'(0) = 500\cos\alpha$.

Hai ví dụ trên là các bài toán chuyển động vật lý, sau khi phân tích đều dẫn ta đến phương trình chứa đạo hàm của các hàm cần tìm.

s11

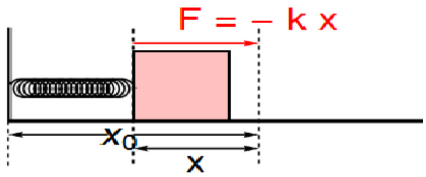
1.2.3 Chuyển động cơ học của hệ lò xo

1. Chuyển động của hệ một lò xo

Xét hệ cơ học gồm vật thể khối lượng m được gắn với một lò xo có một đầu cố định chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang theo phương Ox (Hình 1.3). Lấy gốc tọa độ là vị trí của vật thể khi lò xo ở vị trí cân bằng và chiều dương là chiều hướng từ trái sang phải. Kéo vật thể lệch ra khỏi vị trí cân bằng một khoảng có độ dài x_0 và thả cho nó dao động, gọi $x(t)$ là vị trí của vật thể ở thời điểm t. Theo Định luật Hooke, lực tác dụng của lò xo lên vật thể tỷ lệ với độ dãn của lò xo. Như vậy, lò xo tác động lên vật thể một lực $F_1 = -kx$ với k là độ cứng của lò xo.

Nếu bỏ qua lực ma sát giữa vật với mặt nằm ngang thì theo Định luật Newton thứ hai, ta có mối liên hệ giữa gia tốc của vật và lực tác động lên vật xác định bởi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$



Hình 1.3: Hệ một lò xo he1loxo

Đây là phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng thể hiện mối liên hệ giữa biến độc lập là thời gian t và đạo hàm của hàm cần tìm $x = x(t)$, thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$x(0) = x_0 \text{ và } \frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

Khi đó với cách giải được trình bày trong Chương 3, ta nhận được nghiệm của phương trình vi phân trên là

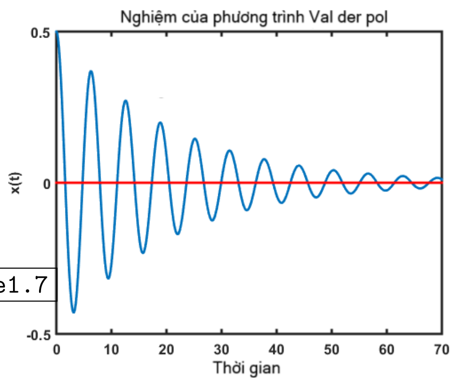
$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{k/mt}\right).$$

Kết quả này cho thấy vật thể dao động điều hòa và vì vật không chịu tác động của lực ma sát nên nó là dao động không cưỡng bức.

Trong trường hợp vật thể chuyển động trên mặt nằm ngang chịu tác động lực của lực ma sát với hệ số ma sát μ. Giả sử lực ma sát ở thời điểm t tỷ lệ với đại lượng $(1 - x^2)\dfrac{dx}{dt}$, khi đó ta nhận được phương trình

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad (1.2.1)$$ e1.7

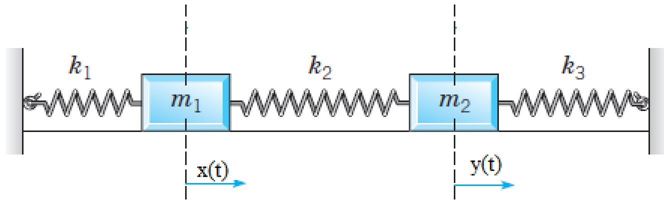
Đây là một phương trình vi phân cấp 2, được xây dựng bởi Kỹ sư người Hà Lan Val der Pol (1889-1959) vào năm 1920 khi ông làm việc cho Công ty Philips.



Hình 1.4: Nghiệm của phương trình Val der Pol có dao động tắt dần he1loxo1

2. Chuyển động của hệ nhiều vật thể và lò xo

Xét hệ cơ học gồm hai vật thể khối lượng m_1, m_2 mắc xen kẽ giữa 3 lò xo có độ cứng k_1, k_2 và k_3 như Hình vẽ 1.5. Lấy gốc tọa độ là vị trí cân bằng của lò xo thứ nhất và chiều dương là chiều hướng từ trái qua phải.



Hình 1.5: Hệ ba lò xo fig_2conl

Kéo lệch lò xo ra khỏi vị trí cân bằng $x(0) = x_0$ và $y(0) = y_0$ và thả cho nó dao động. Gọi $x(t)$, $y(t)$ là các độ dời của hai lò xo so với các vị trí trí cân bằng $x = 0$, $y = 0$ của chúng. Khi đó, độ giãn của lò xo thứ nhất là $x(t)$; độ giãn của lò xo thứ hai là $y(t) - x(t)$. Theo Định luật Hooke, lực mà các lò xo tác dụng lên vật thể thứ nhất và thứ hai lần lượt là

$$F_1 = -k_1 x + k_2(y - x), \quad \text{và} \quad F_2 = k_3 y - k_2(y - x).$$

Theo Định luật 2 Newton, ta thiết lập được hệ phương trình mô tả chuyển động cơ học của hệ lò xo trên

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x + k_2(y - x), \\ \\ m_2 \dfrac{d^2y}{dt^2} = k_3 y - k_2(y - x). \end{cases} \tag{1.2.2}$$ e1.2.3

Ở đó, $x(t)$ và $y(t)$ phải thỏa mãn các điều kiện về vị trí và vận tốc ban đầu

i) $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

ii) $\dfrac{dx(0)}{dt} = 0$, $\dfrac{dy(0)}{dt} = 0$.

Hệ (1.2.2) là hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Với giá trị cụ thể của các tham số, ta có thể tìm được $x(t), y(t)$ theo cách giải hệ được trình bày ở Mục 4.4.

1.3 Phương trình vi phân trong hệ sinh thái và dịch tễ

s1.3

1.3.1 Mô hình dịch tễ

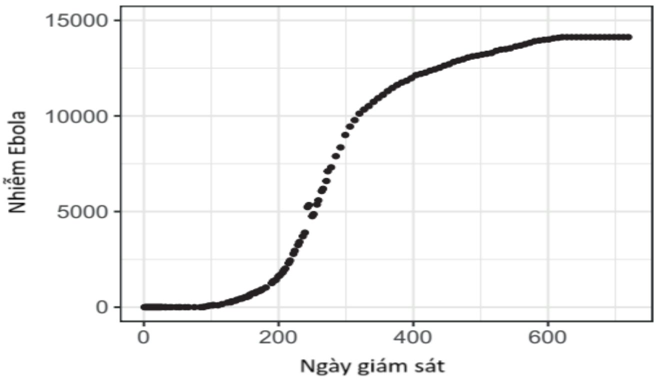
Quan sát số ca nhiễm virus Ebola ở Sierra Leone trong thời kỳ bùng phát dịch bệnh năm 2014-2015 người ta được biểu đồ như Hình vẽ 1.6.

Để xây dựng một mô hình động học từ các số liệu này, ta tập trung vào sự lây lan từ người sang người của dịch bệnh Ebola nhằm tìm cách thiết kế các phương pháp điều trị hiệu quả và làm giảm mức độ nghiêm trọng của dịch bệnh. Giả sử $I(t)$ là số người nhiễm bệnh trong cộng đồng ở thời điểm t, khi đó tốc độ lây nhiễm là $\dfrac{dI(t)}{dt}$. Các giả định hợp lý cho tốc độ lây nhiễm như sau:

1) Tốc độ lây nhiễm tỷ lệ thuận với số người mắc bệnh.

2) Tốc độ lây nhiễm tỷ lệ thuận với số người không mắc bệnh.

3) Tốc độ lây nhiễm tỷ lệ thuận với số người nhiễm bệnh đến tiếp xúc với những người không bị nhiễm bệnh.



Hình 1.6: Số liệu về ca nhiễm virus Erbola ở Sierra Leone năm 2014-2015. h1

Mô hình 1: Tốc độ lây nhiễm tỷ lệ với số người nhiễm bệnh

Khi số người nhiễm bệnh ban đầu $I(0)$ nhỏ, người ta giả định tốc độ lây nhiễm tỷ lệ thuận với số người bị nhiễm bệnh theo hệ số tỷ lệ k. Khi đó ta có phương trình

$$\frac{dI(t)}{dt} = kI(t). \tag{1.3.1}$$ 1.3.1

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một, có nghiệm $I(t) = I(0)e^{kt}$. Do đó, trong trường hợp này số người nhiễm bệnh sẽ tăng lên với tốc độ mũ so với thời điểm ban đầu.

Mô hình 2: Tốc độ lây nhiễm tỷ lệ với số chưa bị lây nhiễm

Mô hình thứ hai xem xét sự tương tác giữa những người bị bệnh $I(t)$ và những người mẫn cảm mà ta gọi là $S(t)$. Nếu giả thiết tổng số cư dân trong khu vực không đổi và bằng N, ta có $S(t) + I(t) = N$ ở mọi thời điểm t.

$$\boxed{S} \xrightarrow{\quad k \quad} \boxed{I}.$$

Khi dân cư trong khu vực có số người mắc bệnh $I(t)$ tăng lên thì số cá thể mẫn cảm $S(t)$ sẽ giảm xuống. Giả sử tốc độ lây nhiễm tỷ lệ với số chưa bị lây nhiễm theo hệ số k, khi đó tốc độ tăng số người bị bệnh cũng đồng thời là tốc độ giảm của số người mẫn cảm. Như vậy, mô hình 2 sẽ có hai tốc độ thay đổi được biểu diễn theo các phương trình

$$\frac{dI(t)}{dt} = kS(t), \qquad \frac{dS(t)}{dt} = -kS(t). \tag{1.3.2}$$

1.3.1-1

Thay $S(t) = N - I(t)$, ta nhận được

$$\frac{dI(t)}{dt} = k(N - I(t)).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một, phương trình này có nghiệm $I(t) = N - S(0)e^{-kt}$. Do đó $S(t) = S(0)e^{-kt}$, điều này thể hiện số người mẫn cảm sẽ giảm với tốc độ mũ so với thời điểm đầu.

Mô hình 3: Tốc độ lây nhiễm tỷ lệ với tiếp xúc giữa người nhiễm và người mẫn cảm

Với giả định tốc độ lây nhiễm tỷ lệ với sự tiếp xúc giữa người bị nhiễm và người mẫn cảm thì mô hình thứ ba khắc phục một số thiếu sót của hai mô hình trước. Mô hình thứ ba nói rằng tỷ lệ lây nhiễm là do những người bị bệnh lây nhiễm cho những người không bị bệnh. Giả thiết này có ý nghĩa thực tế vì nó tính đến việc truyền bệnh giữa quần thể bị nhiễm bệnh với những người mẫn cảm. Vì vậy, nếu không ai bị bệnh (I = 0) thì bệnh không lây lan. Tương tự như vậy nếu không có đối tượng mẫn cảm (S = 0) thì bệnh cũng không lây lan. Trong trường hợp này, sơ đồ phác thảo mô hình thứ ba có dạng sau

$$\boxed{S} \xrightarrow{\quad kS \quad} \boxed{I}.$$

Lưu ý rằng trong sơ đồ này có thêm một biến S liên kết với k để chỉ ra tốc độ lây nhiễm phụ thuộc như thế nào vào S. Vì thế ta có các phương trình vi phân mô tả tình huống được nêu trong sơ đồ

$$\frac{dI(t)}{dt} = kI(t)S(t), \qquad \frac{dS(t)}{dt} = -kI(t)S(t). \tag{1.3.3}$$

1.3.1-2

Với kích thước quần thể là N ta có

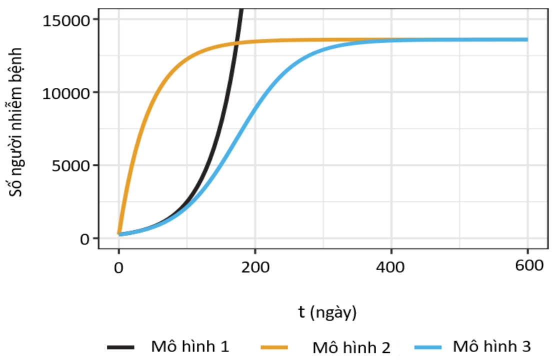
$$\frac{dI(t)}{dt} = kI(t)(N - I(t)). \tag{1.3.4}$$

1.3.1-2'

Phương trình này có nghiệm

$$I(t) = \frac{NI(0)}{I(0) + (N - I(0))e^{-kt}}.$$

Tiếp theo, ta hãy so sánh hiệu quả của 3 mô hình ở trên: Mô hình 1, cho thấy số người nhiễm bệnh $I(t)$ tăng dần do tốc độ lây nhiễm $I'(t)$ dương. Đối với mô hình 2 và 3, tốc độ lây nhiễm $I'(t)$ bằng 0 khi $I = N$. Sau thời điểm đó, $I'(t)$ chuyển sang âm nghĩa là I đang giảm. Hình 1.7 vẽ sơ đồ ba hàm $I(t)$ khi $I(0) = 250, k = 0,023$ và $N = 13600$.



h2 Hình 1.7: Số người nhiễm bệnh theo Mô hình 1,2,3 lần lượt là màu đen, màu cam, màu xanh.

Quan sát dáng điệu của đồ thị 3 mô hình, ta thấy Mô hình 3 phù hợp với các số liệu quan sát được về dich Erbola trong giai đoạn 2014-2015.

1.3.2 Mô hình thú mồi kiểu Lotka–Volterra

s1.3.5

Khi chiến tranh thế giới lần thứ nhất kết thúc, các đoàn tàu đánh cá ở cảng Fiume (thuộc Italia vào thời điểm đó, nay thuộc Croatia) lại có điều kiện ra khơi. Các ngư dân cho rằng sau một thời kỳ dài không có người đánh bắt thì những mẻ lưới đầu tiên sẽ thu được nhiều cá. Tuy nhiên thực tế lại trái ngược hẳn với dự đoán. Nhà sinh vật học người Italia tên là Umberto chỉ ra rằng sở dĩ có hiện tượng này xảy ra vì lúc đó tỷ lệ cá thuộc loại thuộc nhóm cá săn mồi tăng lên đột biến so với những năm trước dẫn đến số lượng cá sẽ giảm. D'Aconna cung cấp các số liệu quan sát cho Vito Volterra, và Volterra đã nghiên cứu đưa ra mô hình toán học nhằm giải thích hiện tượng trên. Ngay sau đó, các mô hình sinh thái được nhà toán học người Mỹ tên là Alfred James Lotka nghiên cứu, dựa trên mô hình dân số của Votlterra và của những người đi trước như là Pierre François Verhulst.

Trước hết, quan sát sự phát triển của một loài đơn lẻ trong một môi trường sinh thái. Khi kích thước của quần thể khá nhỏ so với khả năng chứa của môi trường, người ta thường giả thiết tốc độ tăng trưởng (số lượng sinh trừ số lượng chết) của loài tỷ lệ với cỡ quần thể với hằng số tỷ lệ k. Gọi $y(t)$ là số lượng của nó tại thời điểm t. Khi đó tương tự như trong Mục 1.1.1 ta có phương trình

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t). \tag{1.3.5}$$ e1.3.1

Phương trình này có nghiệm $y(t) = y(0)e^{kt}$. Nếu ta xét mốc thời gian là các số tự nhiên, tức là $t = n \in \mathbb{N}$, thì số lượng của loài $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tạo thành một cấp số nhân với công bội $q = e^k$. Căn cứ vào đó, Malthus [3] đưa ra lý thuyết *Dân số phát triển theo cấp số nhân, còn của cải phát triển theo cấp số cộng.* Như thế, đến lúc nào đó, dân số sẽ vượt trội so với số lượng của cải có thể tạo ra. Điều đó dẫn đến sự thiếu hụt của cải và sinh ra nạn đói trong xã hội.

Tuy nhiên, trên thực tế khi kích thước của quần thể lớn hơn thì các yếu tố môi trường sẽ ảnh hưởng nhiều đến tốc độ tăng trưởng. Nếu ta giả thiết khả năng của môi trường chỉ chứa tối đa K cá thể thì khi kích thước quần thể lớn hơn K, quần thể phải giảm. Nhà toán học Verhulst [4] đã mô hình hóa hiện tượng này dưới tên gọi *đường cong tăng trưởng logistic* (logistic growth curve). Ông giả thiết hệ số tăng trưởng có dạng

$$r\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

Với giải thiết này ta nhận được mô hình toán học mô tả về tăng trưởng số lượng của quần thể là

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right), \tag{1.3.6}$$

e1.3.6

trong đó r là hệ số tăng trưởng Malthus[5]. Phương trình này có nghiệm[6]

$$y(t) = \frac{Ky(0)e^{rt}}{K + y(0)\left(e^{rt} - 1\right)} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - y(0)}{y(0)}\right)e^{-rt}}.$$

Dễ thấy, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = K$. Nói cách khác, khi thời gian tăng lên, kích thước quần thể tiến đến khả năng tới hạn của môi trường.

Tiếp theo, ta xét quần thể có hai loài trong đó một loài là săn mồi (linh miêu) và một loài là con mồi (thỏ). Bảng số liệu sau đây cho số liệu về số lượng thỏ và linh miêu (đơn vị: nghìn con) quan sát ở Canada từ năm 1900 đến năm 1920 do Công ty Hudson's Bay thực hiện.

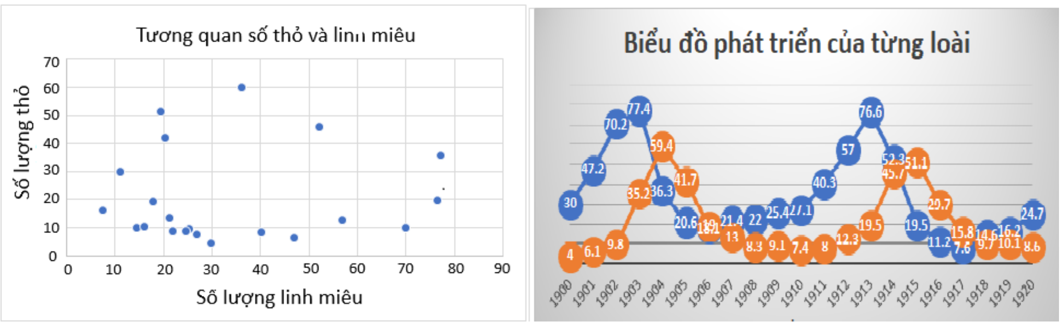
---

(3) Thomas Malthus (1766-1834), nhà kinh tế-chính trị học người Anh, cha đẻ của thuyết dân số.
(4) Pierre François Verhulst, nhà Toán học người Bỉ (1845, 1847).
(5) Phương trình này được gọi là phương trình Logistic
(6) Cách giải PTVP loại này được trình bày ở phần Phương trình Bernoulli.

Năm	Số thỏ	Số linh miêu	Năm	Số thỏ	Số linh miêu
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1919	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1920	24.7	8.6
1910	27.1	7.4			

Bảng 1. Số liệu về số lượng thỏ và linh miêu

Biểu diễn số liêu của số thỏ và số linh miêu trong Bảng 1 thành biểu đồ ở Hình 1.8, ta nhận thấy, khả năng sự phát triển của các loài là tuần hoàn theo thời gian.



Hình 1.8: Tương quan giữa loài thỏ và linh miêu. $\boxed{\texttt{h5'}}$

Chúng ta đưa ra mô hình toán mô tả sự phát triển này. Gọi $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là mật độ của thỏ và của linh miêu tại thời điểm x. Luật phát triển của quần thể tuân theo các giả thiết sau:

i) Tỷ lệ sinh sản tự nhiên của con thỏ là $ay_1(x)$. Tuy nhiên, thỏ bị linh miêu ăn thịt với tốc độ $by_1(x)y_2(x)$ nên tỷ lệ phát triển thực tế của nó là $ay_1(x) - by_1(x)y_2(x)$.

ii) Tỷ lệ chết tự nhiên của linh miêu khi không có thức ăn là $-cy_2(x)$, nếu nó săn được mồi thì tỷ lệ sinh của nó là $dy_1(x)y_2(x)$. Vậy tỷ lệ phát triển của linh miêu là $-cy_2(x) + dy_1(x)y_2(x)$.

iii) a, b, c, d là các hằng số dương.

Với giả thiết này, ta có hệ phương trình (gọi là phương trình Lotka–Volterra dạng thú mồi)

$$\begin{cases} y_1'(x) = ay_1(x) - by_1(x)y_2(x), \\ y_2'(x) = -cy_2(x) + dy_1(x)y_2(x). \end{cases} \tag{1.3.7}$$ initial

Đây là một hệ phương trình vi phân cấp một. Hệ phương trình này cho ta nghiệm (dạng ẩn) xác định bởi biểu thức liên hệ giữa hai hàm cần tìm y_1 và y_2 [7] như sau

$$-a\ln y_2(x) + by_2(x) - c\ln y_1(x) + dy_1(x) = C, \ C \in \mathbb{R}. \tag{1.3.8}$$ predator-

Với mỗi hằng số C cố định, hàm $x \to (y_1(x), y_2(x))$ là phương trình tham số của đường cong khép kín trên mặt phẳng. Điều đó cho thấy, sự phát triển của các loài tuần hoàn theo thời gian.

Mô hình Lotka–Volterra trở nên nổi tiếng ở lĩnh vực dân số học trong sinh vật (population biology), các mô hình khác về tương tác dân số giữa loài đi săn và loài bị săn đều có thể coi là sự mở rộng của mô hình này, trong đó có thể thay thế một loại con mồi bằng nhiều loại con mồi (mô hình trở thành hệ nhiều biến hơn), thêm điều kiện về chỗ trú ẩn cho con mồi, khả năng các con mồi bị tiêu diệt hoàn toàn... Đối với các phương trình dạng thú mồi tổng quát này, thay vì biến đổi các cá thể theo quy luật tuần hoàn thì chúng có thể biến đổi một cách hỗn loạn hơn.

ss1.4 1.4 Bài toán mạch điện

Theo định luật Kirchhoff trong lý thuyết mạch điện

i) Tại nút giao bất kỳ trong mạch, tổng các dòng điện chạy qua nút bằng tổng các dòng điện chạy ra khỏi nút.

ii) Tổng điện áp quanh mỗi vòng kín bằng 0.

Ngoài ra ta cũng có mối quan hệ giữa dòng điện I(t) qua từng phần tử trong mạch và điện áp V(t) trên mỗi phần tử đó xác định bởi

$$V = RI, \quad C\frac{dV}{dt} = I, \quad L\frac{dI}{dt} = V.$$

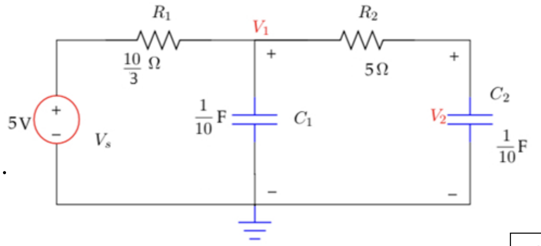
Khi đó, mối quan hệ giữa dòng điện và điện áp của mỗi phần tử mạch sẽ cho ta một hệ phương trình vi phân để có thể xác định được các đại lượng đó.

Xét mạch điện với các tụ điện C_1, C_2 và điện trở R_1, R_2 được mắc thành các nhánh song song như Hình 1.4.

---

[7] Cách giải PTVP này được trình bày ở Mục 4.6, Chương 4

Giả sử $V_i(t)$ là điện áp của tụ điện C_i tại thời điểm t và $I_i(t)$ là cường độ dòng điện qua R_i với $i = 1, 2$. Ta có



machdien2

$$V_s - V_1 = R_1 I_1, \quad V_1 - V_2 = R_2 I_2, \quad C_2 \frac{dV_2}{dt} = I_2.$$

Theo định luật Kirchhoff, ta có

$$\begin{aligned} I_2 + I_{C_1} = I_1 \ &\Leftrightarrow\ \frac{V_1 - V_2}{R_2} + C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{V_s - V_1}{R_1}, \\ I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} \ &\Leftrightarrow\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{R_2}. \end{aligned}$$

Do đó, ta có hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

$$\begin{cases} V_1' = -\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) V_1 + \dfrac{1}{R_2 C_1} V_2 + \dfrac{V_s}{R_2 C_1} \\ V_2' = \dfrac{1}{R_2 C_2} V_1 - \dfrac{1}{R_2 C_2} V_2. \end{cases}$$

Khi $R_2 = 5, R_1 = 10/3\Omega, C_1 = 2C_2 = \frac{1}{10}F, V_s = 5\sin t$ ta được hệ

$$\begin{pmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sử dụng phương pháp giải hệ phương trình vi phân trong Chương 4 [8], ta xác định được điện áp trên mỗi tụ điện ở từng thời điểm.

[8] Cách giải PTVP này được trình bày Ví dụ 4.5.3

Chương 2

ch2 Phương trình vi phân cấp một

2.1 Mở đầu về phương trình vi phân

2.1.1 Khái niệm phương trình vi phân

Phương trình vi phân là một phương trình toán học biểu diễn mối quan hệ giữa các biến độc lập, hàm phải tìm cùng các đạo hàm của chúng. Nếu trong phương trình vi phân mà hàm phải tìm phụ thuộc vào hai hay nhiều biến độc lập thì người ta gọi đó là phương trình vi phân đạo hàm riêng. Nếu phương trình vi phân mà hàm phải tìm chỉ phụ thuộc vào một biến độc lập thì người ta gọi đó là phương trình vi phân thường. Trong phạm vi cuốn sách này ta chỉ quan tâm đến phương trình vi phân thường.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của hàm phải tìm có mặt trong phương trình. Dạng tổng quát của phương trình vi phân thường cấp n là

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.1.1}$$ ptvp-dinhnghia

trong đó F là hàm số xác định trong miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ và $y = y(x)$ là hàm cần tìm.

Hàm số $y = y(x)$ xác định trên khoảng $I = (a, b) \in \mathbb{R}$, khả vi đến cấp n, được gọi là một nghiệm của phương trình vi phân (2.1.1) trên khoảng I nếu thỏa mãn

i) $\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) \in \mathcal{D}$, với mọi $x \in I$.

ii) $F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0$, với mọi $x \in I$.

Ví dụ 2.1.1. Trong bài toán mô tả vật thể chuyển động trên mặt nằm ngang chịu tác động lực của lực ma sát, phương trình (1.2.1)

$$mx''(t) - \mu(1 - x^2)x'(t) + kx = 0,$$

là phương trình vi phân cấp hai, ở đó hàm cần tìm $x(t)$ là vị trí của vật thể ở thời điểm t.

2.1.2 Nghiệm của phương trình vi phân

Nghiệm của phương trình vi phân là tập hợp tất cả những hàm số thỏa mãn phương trình vi phân đó. *Giải một phương trình vi phân* là tìm tất cả các nghiệm của phương trình vi phân đó. Nếu có thêm điều kiện bổ sung thì ta chỉ tìm các nghiệm thỏa mãn điều kiện bổ sung đó.

Cách biểu diễn nghiệm của phương trình vi phân. Nếu ta tìm được nghiệm mà biến phụ thuộc y được biểu diễn theo biến độc lập x thì $y(x)$ được gọi là nghiệm *dạng tường minh* (nghiệm hiển). Sự biểu diễn này có thể thông qua các hàm sơ cấp như các hàm lượng giác thông thường, hàm đa thức, hàm mũ..., hoặc cũng có thể là các chuỗi. Ngoài ra, nghiệm cũng có thể tìm được dưới *dạng hàm ẩn*, nghĩa là tìm được hàm hai biến $\Phi(x, y)$ nào đó mà không chứa đạo hàm của y sao cho hàm $y(x)$ là nghiệm của (2.1.1) nếu và chỉ nếu $\Phi(x, y(x)) = 0$ với mọi x thuộc khoảng I.

Nghiệm riêng và nghiệm tổng quát. Xét phương trình vi phân cấp n dạng tổng quát (2.1.1)

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Nếu phương trình trên có nghiệm mà biểu thức biểu diễn nghiệm có chứa n hằng số tự do (các nghiệm khác nhau thì ứng với các giá trị khác nhau của hằng số), thì nghiệm này được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân.

Nghiệm ứng với các giá trị xác định của hằng số được gọi là *nghiệm riêng* của phương trình. Giá trị của hằng số này thường tương ứng với những điều kiện ban đầu cụ thể hoặc điều kiện biên.

Nghiệm kỳ dị là nghiệm của phương trình nhưng không nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách gán giá trị cụ thể cho các hằng số tự do. Nó thường xuất hiện do bản chất đặc thù của phương trình.

Về mặt hình học, nghiệm tổng quát cho ta một họ các đồ thị phụ thuộc vào tham số. Ta gọi các đồ thị này là các đường cong tích phân. Mỗi đường cong tích phân là một nghiệm riêng ứng với một tham số xác định nào đó.

Ví dụ 2.1.2. a) Phương trình vi phân

$$yy' + x = 0$$

có nghiệm ẩn là hàm $y = y(x)$ được xác định bởi biểu thức $x^2 + y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$.
b) Phương trình vi phân cấp hai $y'' = x - \sin x$ có nghiệm tổng quát

$$y = \frac{x^3}{6} + \sin x + C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Cho $C_1 = 0, C_2 = 1$, ta có $y = \dfrac{x^3}{6} + \sin x + 1$ là một nghiệm riêng của phương trình.

c) Phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$ có nghiệm tổng quát là $y = \sin(x + C),\ C \in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên, $y = 1$ cũng thỏa mãn phương trình nhưng không nhận được từ nghiệm tổng quát ứng với hằng số C cụ thể nào. Do đó nó là nghiệm kỳ dị của phương trình.

2.1.3 Bài toán giá trị ban đầu

Như ta đã biết, một phương trình vi phân thường sẽ có vô số nghiệm, tập nghiệm của nó phụ thuộc vào các hằng số bất kỳ và được biểu diễn bởi họ các đường cong tích phân. Trong thực tế ta quan tâm đến phương trình vi phân thỏa mãn những điều kiện cho trước nào đó. Ở đây, ta đề cập đến một trong các bài toán dạng đó, gọi là *bài toán giá trị ban đầu* (Initial Value Problem) hay bài toán Cauchy. Cụ thể, ta xét bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp n (2.1.1) thỏa mãn các điều kiện

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

với $x_0 \in (a, b)$ và $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Sau này chúng ta sẽ thấy với những điều kiện nào thì bài toán Cauchy tồn tại và duy nhất nghiệm.

Đối với phương trình vi phân cấp 1, bài toán giá trị ban đầu yêu cầu tìm một đường cong tích phân đi qua điểm (x_0, y_0); với phương trình vi phân cấp 2 thì điều kiện đầu $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$ đòi hỏi đường cong nghiệm cần tìm đi qua điểm (x_0, y_0) và có hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại điểm này là y_1.

Ví dụ 2.1.3. Phương trình vi phân cấp một $y' = \dfrac{2y}{x}$, có nghiệm tổng quát là

$$y = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}.$$

Với điều kiện $y(0) = 1$, bài toán giá trị ban đầu có nghiệm $y = x^2$.
Với điều kiện $y(0) = -1$, bài toán giá trị ban đầu có nghiệm $y = -x^2$.

2.2 Khái niệm phương trình vi phân cấp một

s2.2

Phương trình vi phân cấp một có *dạng tổng quát* là

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.2.1}$$

e2.2.5b

Nếu đạo hàm của hàm cần tìm y' có thể giải hiện theo y và x thì phương trình (2.2.1) có dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.2.2}$$

e3.0.1

Phương trình này còn được gọi là *dạng chính tắc* của phương trình vi phân cấp 1. Giả sử hàm f có thể biễu diễn dạng thương

$$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

với M và N là các hàm hai biến xác định trên miền nào đó. Khi đó, ta có thể viết lại phương trình dạng tổng quát thành phương trình

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{2.2.3}$$ e3.0.2

Sự khác biệt giữa hai cách viết là trong (2.2.2), biến x là độc lập còn y là biến phụ thuộc, trong khi đó ở cách viết (2.2.3), vai trò của x và y là như nhau. Đôi lúc cách viết của (2.2.3) giúp cho ta tìm nghiệm ẩn dễ dàng hơn vì chúng ta có thể xem y là biến độc lập và x là biến phụ thuộc.

Trong nội dung tiếp theo ta sẽ nghiên cứu một số loại phương trình vi phân cấp một: Phương trình vi phân với biến số phân ly, Phương trình đẳng cấp, Phương trình vi phân toàn phần, Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, Phương trình Bernoulli, Phương trình Riccati, Phương trình Clairaut...

2.3 Phương trình vi phân với biến số phân ly

2.3.1 Phương trình vi phân biến số phân ly và cách giải

Phương trình vi phân cấp một (2.2.3): $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ được gọi là phương trình vi phân với biến số phân ly nếu hàm số $M(x,y)$ không phụ thuộc vào y và hàm số $N(x,y)$ không phụ thuộc vào x. Nghĩa là tồn tại các hàm $\varphi(x)$ và $\psi(t)$ sao cho $M(x,y) = \varphi(x), N(x,y) = \psi(y)$. Khi đó, ta có định nghĩa

Định nghĩa 2.3.1. Phương trình vi phân với biến số phân ly là phương trình có dạng

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0. \tag{2.3.1}$$ e3.0.3

Cách giải: Gọi $\Phi(x)$ là một nguyên hàm của φ và $\Psi(y)$ là một nguyên hàm của ψ. Tích phân hai vế (2.3.1) ta nhận được

$$\Phi(x) + \Psi(y) = C, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}. \tag{2.3.2}$$ e3.0.4

Ví dụ 2.3.2. Giải phương trình vi phân

$$(x^2 + \sin x)dx + \frac{1}{y+1}dy = 0.$$

Giải: Lấy nguyên hàm hai vế phương trình trên ta được

$$\int (x^2 + \sin x)dx + \int \frac{1}{y+1}dy = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, nghiệm của phương trình đã cho là $\frac{x^3}{3} - \cos x + \ln|y+1| = C$, với mọi $C \in \mathbb{R}$.

2.3.2 Phương trình vi phân đưa về biến số phân ly

Xét phương trình (2.2.3): $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Trong trường hợp các hàm số $M(x,y), N(x,y)$ là tích của các hàm theo từng biến x và y. Khi đó phương trình trở thành

$$m_1(x)n_1(y)dx + m_2(x)n_2(y)dy = 0. \qquad (2.3.3)$$ e3.0.5

Để giải phương trình ta xét các trường hợp sau

i) Trường hợp phương trình $n_1(y)m_2(x) = 0$ có các nghiệm $x = a$ hoặc $y = b$. Khi đó hàm $x(y) = a$ hoặc hàm $y(x) = b$ sẽ thỏa mãn (2.3.3) nên nó là nghiệm của phương trình.

ii) Trường hợp khi $n_1(y)m_2(x) \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $n_1(y)m_2(x)$, ta nhận được phương trình vi phân biến số phân ly

$$\frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx + \frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy = 0.$$

Ví dụ 2.3.3. Giải phương trình $(y-1)(x-1)dx + (1+x^2)dy = 0$.

Giải: Phương trình $n_1(y)m_2(x) = (y-1)(x^2+1) = 0$ cho ta nghiệm $y = 1$ nên $y_1(x) \equiv 1$ là nghiệm của phương trình. Khi $y - 1 \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $(y-1)(x^2+1)$ ta nhận được

$$\frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{dy}{y-1} = 0.$$

Lấy tích phân hai vế phương trình trên ta được ta đươc $(y-1)\sqrt{x^2+1} = Ce^{\arctan x}$, $C \neq 0$. Kết hợp với nghiệm $y_1 = 1$, suy ra phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$(y-1)\sqrt{x^2+1} = Ce^{\arctan x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.4 Phương trình vi phân đẳng cấp

2.4.1 Phương trình vi phân đẳng cấp và cách giải

Hàm hai biến $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là đẳng cấp bậc p nếu với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, mọi (x, y) thuộc tập xác định ta có

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^p f(x, y).$$

Nếu $p = 0$, hàm f được gọi là hàm đẳng cấp, khi đó nó thỏa mãn điều kiện

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y).$$

Ví dụ 2.4.1. a) Hàm $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$ là hàm đẳng cấp bậc 2.
b) Hàm $f(x, y) = \dfrac{5xy - y^2}{x^2 + y^2}$ là hàm đẳng cấp.

Định nghĩa 2.4.2. Nếu hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm đẳng cấp thì phương trình vi phân có dạng

$$y' = f(x, y), \tag{2.4.1}$$ ptvpdc

được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp.

Nhận xét 2.4.3. Vì $f(x, y)$ là hàm đẳng cấp nên ta có

$$f(x, y) = f\Big(x, x.\frac{y}{x}\Big) = f\Big(1, \frac{y}{x}\Big), \quad x \neq 0.$$

Do đó, tồn tại hàm một biến thực φ để $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$. Vậy phương trình có dạng

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big), \quad x \neq 0, \tag{2.4.2}$$ e2.2.7

cũng được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp.

Cách giải: Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, với u là hàm của biến x, ta suy ra

$$y = ux \text{ và } y' = xu' + u.$$

Khi đó, phương trình (2.4.2) trở thành

$$xu' + u = \varphi(u) \ \Leftrightarrow\ x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u \ \Leftrightarrow\ xdu = (\varphi(u) - u)dx. \tag{2.4.3}$$ e2.2.7'

Đây là phương trình vi phân đưa về biến số phân ly dạng (2.3.3). Bằng cách xét hai trường hợp $\varphi(u) - u = 0$ và $\varphi(u) - u \neq 0$ tương tự như cách giải phương trình (2.3.3), ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình.

- Nếu phương trình $\varphi(u) - u = 0$ có nghiệm $u = a$ thì $u(x) \equiv a$ là nghiệm của phương trình (2.4.3), tức là $y = ax$ là một nghiệm của (2.4.2).
- Khi $\varphi(u) - u \neq 0$, chia hai vế của phương trình (2.4.3) cho $x(\varphi(u) - u)$ và lấy tích phân hai vế, ta nhận được
$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + \ln C, \;\; C \in \mathbb{R}^+.$$
Từ đó, thay $u = \dfrac{y}{x}$ ta dễ dàng suy ra nghiệm dạng ẩn của phương trình (2.4.2).

Ví dụ 2.4.4. Giải phương trình
$$xy' - y = (x+y)\ln\Big(\frac{x+y}{x}\Big), \;\; (x \neq 0).$$

Giải: Chia cả hai vế của phương trình cho x, ta được phương trình đẳng cấp
$$y' - \frac{y}{x} = \Big(1 + \frac{y}{x}\Big)\ln\Big(1 + \frac{y}{x}\Big).$$
Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, ta nhận được phương trình
$$xu' = (1+u)\ln(1+u) \;\Leftrightarrow\; x\frac{du}{dx} = (1+u)\ln(1+u).$$
Nếu $(1+u)\ln(1+u) = 0$, suy ra $u = -1$ hoặc $u = 0$. Do đó $y = -x$ hoặc $y = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Nếu $(1+u)\ln(1+u) \neq 0$, phương trình trở thành
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{(1+u)\ln(1+u)}.$$
Lấy nguyên hàm hai vế ta nhận được
$$\ln|x| + \ln|C| = \ln|\ln(1+u)|, \;\; C \in \mathbb{R}^*,$$
hay phương trình đã cho có nghiệm là
$$Cx = \ln\Big|\Big(1 + \frac{y}{x}\Big)\Big|, \;\; C \in \mathbb{R}^*.$$

2.4.2 Phương trình đưa được về dạng phương trình đẳng cấp

Xét phương trình vi phân có dạng
$$\frac{dy}{dx} = F\Big(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\Big). \tag{2.4.4}$$
`eqn:8`

với $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ là các hằng số cho trước.

i) Trường hợp $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, ta được phương trình đẳng cấp

$$\frac{dy}{dx} = F\Big(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y}{\alpha_2 x + \beta_2 y}\Big). \tag{2.4.5}$$

eqn:9

ii) Trường hợp $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, ta tìm cách đưa phương trình về dạng (2.4.5) bằng cách sử dụng phép đổi biến. Đặt $x = u + \xi$ và $y = v + \eta$, ta nhận được

$$F\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right) = F\left(\frac{\alpha_1 u + \beta_1 v + \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{\alpha_2 u + \beta_2 v + \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2}\right).$$

Giả sử ξ và η là các số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2 = 0. \end{cases} \tag{2.4.6}$$

eqn:9'

- Nếu $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, phương trình (2.4.6) có nghiệm duy nhất (ξ, η). Phương trình (2.4.4) trở thành
$$\frac{dv}{du} = F\Big(\frac{\alpha_1 u + \beta_1 v}{\alpha_2 u + \beta_2 v}\Big),$$
đây là phương trình đẳng cấp với biến u và v.

- Nếu $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, tồn tại hằng số k sao cho $\alpha_1 x + \beta_1 y = k(\alpha_2 x + \beta_2 y)$.

  Khi đó, ta có
$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{k(\alpha_2 x + \beta_2 y) + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right) = \varphi(\alpha_2 x + \beta_2 yz),$$
  Đặt $z = \alpha_2 x + \beta_2 y$, ta nhận được phương trình vi phân đưa về dạng biến số phân ly
$$\frac{dz}{dx} = \alpha_2 + \beta_2\varphi(z).$$

Ví dụ 2.4.5. Giải phương trình vi phân sau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x - y - 3}.$$

Giải: Đặt $x = u + \xi$ và $y = v + \eta$, với ξ, η là nghiệm của hệ $\begin{cases} \xi + \eta + 1 = 0, \\ \xi - \eta - 3 = 0. \end{cases}$

Giải hệ ta được $\xi = 1$, $\eta = -2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v}.$$

Ta thấy $u = 0$ không là nghiệm của phương trình. Đặt $z = v/u$ ta được

$$z + uz' = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z^2}{1-z} \Leftrightarrow \frac{du}{u} = \frac{1-z}{1+z^2}dz.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\ln|u| + C = \arctan z - \ln\sqrt{1+z^2}, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$\ln|x-1| + C = \arctan\frac{y+2}{x-1} - \ln\sqrt{1+\frac{(y+2)^2}{(x-1)^2}}, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2.4.6. Giải phương trình vi phân sau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-5}{2x+4y+7}.$$

Giải: Đặt $z = x + 2y$, ta nhận được phương trình

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{2(z-5)}{2z+7} = \frac{4z-3}{2z+7}.$$

Nếu $4z - 3 = 0$, ta suy ra $4x + 8y - 3 = 0$ là một nghiệm của phương trình.
Nếu $4z - 3 \neq 0$, ta nhận được phương trình

$$\frac{2z+7}{4z-3}dz = dx,$$

có nghiệm $z + 17\ln|4z-3| = 2x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$3x + 8y + 17\ln|4x+8y-3| = C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

2.5 Phương trình vi phân toàn phần.

2.5.1 Phương trình vi phân toàn phần và cách giải

Định nghĩa 2.5.1. Giả sử biểu thức $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm $F(x,y)$ nào đó trên miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, nghĩa là

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy, \ \ (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Khi đó phương trình

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.5.1}$$ eq12

được gọi là phương trình vi phân toàn phần.

Nhận xét 2.5.2. Giả sử (2.5.1) là phương trình vi phân toàn phần. Khi đó, ta có
i) Phương trình (2.5.1) tương đương với

$$dF(x,y) = 0,$$

và có nghiệm dạng tích phân tổng quát được xác định bởi biểu thức

$$F(x,y) = C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

Vấn đề còn lại được đặt ra là hàm $F(x,y)$ sẽ được xác định bằng cách nào?

ii) Nếu hàm F có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên $\mathcal{D}$ thì

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \ \ (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Khi đó, theo Định lý Clairaut, ta có

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}, \ \ (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Vậy, **điều kiện cần** để (2.5.1) là phương trình vi phân toàn phần là

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{2.5.2}$$ 2.2.11

iii) Người ta đã đưa ra ví dụ để chỉ ra rằng điều kiện (2.5.2) chưa đủ để tìm được hàm $F(x,y)$. Tuy nhiên, với giả thiết nào đó của miền $\mathcal{D}$ thì điều kiện (2.5.2) cũng là điều kiện đủ. Chẳng hạn với giả thiết $\mathcal{D}$ là miền đơn liên, ta có định lý sau.

Định lý 2.5.1. *Điều kiện cần và đủ để phương trình vi phân* (2.5.1)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

là phương trình vi phân toàn phần trên miền đơn liên $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ *là các hàm số* $M(x,y), N(x,y)$ *liên tục cùng đạo hàm riêng của chúng trên* $\mathcal{D}$ *và*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \ \ (x,y) \in \mathcal{D}. \tag{2.5.3}$$ c-r

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình được cho dưới dạng hàm ẩn:

$$F(x,y) = C, \ \ (x,y) \in \mathcal{D},$$

ở đó

$$F(x,y) = \int_{\overset{\frown}{AB}} M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

trong đó $\overset{\frown}{AB}$ *là đường cong bất kỳ trong miền* $\mathcal{D}$ *nối điểm* $A(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ *nào đó với điểm* $B(x,y)$.

Nhận xét 2.5.3. *i)* Nếu trong $\mathcal{D}$ ta chọn được $\overset{\frown}{AB}$ là đường gấp khúc nối các điểm A với $C(x_0, y)$ và B thì hàm $F(x, y)$ được xác định bởi

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy. \tag{2.5.4}$$ 2.2.12

ii) Nếu trong $\mathcal{D}$ ta chọn được $\overset{\frown}{AB}$ là đường gấp khúc nối các điểm A với $D(x, y_0)$ và B thì hàm $F(x, y)$ được xác định bởi

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy. \tag{2.5.5}$$ 2.2.12

Ví dụ 2.5.4. Chứng minh rằng phương trình

$$(2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0,$$

là phương trình vi phân toàn phần. Tìm nghiệm của phương trình với điều kiện ban đầu $y(0) = 2$.

Giải: Ta có $M(x, y) = 2x\cos y + 3x^2y,\ N(x, y) = x^3 - x^2\sin y - y$ và

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 - 2x\sin x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Do các hàm $M(x, y)$ và $N(x, y)$ xác định trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ (là miền đơn liên) nên phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Chọn $(x_0, y_0) = (0, 2)$, theo công thức (2.5.5) suy ra

$$F(x,y) = \int_0^x (2x\cos y + 3x^2y)dx + \int_2^y (0^3 - 0^2\sin y - y)dy = x^3y + x^2\cos y - \frac{1}{2}y^2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$x^3y + x^2\cos y - \frac{1}{2}y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.5.2 Thừa số tích phân. Phương pháp nhân với thừa số tích phân

Xét phương trình (2.5.1)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Trong trường hợp phương trình này không là phương trình vi phân toàn phần, người ta tìm cách biến đổi nó để nhận được một phương trình toàn phần tương đương. Giả sử nhân hai vế của (2.2.3) với hàm hai biến $\mu(x, y) \neq 0$, ta nhận được

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0. \tag{2.5.6}$$ 2.2.13

Nếu tìm được hàm μ để (2.5.6) là phương trình vi phân toàn phần trên miền $\mathcal{D}$ thì $\mu(x, y)$ được gọi là thừa số tích phân của phương trình (2.5.1).

Theo điều kiện (2.5.3), phương trình (2.5.6) là toàn phần nếu

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y)).$$

Từ đó ta có

$$M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(x,y)\Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big). \tag{2.5.7}$$

2.2.14

Do đó, $\mu(x, y)$ là thừa số tích phân khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đạo hàm riêng (2.5.7). Tuy nhiên việc giải phương trình này trong trường hợp tổng quát sẽ còn gặp khó khăn hơn nhiều so với việc giải phương trình vi phân ban đầu. Do đó, để đơn giản hơn ta chỉ xét một số trường hợp đặc biệt sau đây.

Trường hợp 1: Thừa số tích phân μ là hàm một biến $\mu = \mu(x)$. Khi μ chỉ là hàm theo biến x, phương trình (2.5.7) trở thành

$$N(x,y)\mu'(x) = \mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Từ đó, ta suy ra điều kiện để phương trình có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc một biến x là vế phải của biểu thức trên chỉ phụ thuộc vào một biến x. Đặt

$$F(x) = \frac{1}{N(x,y)}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big), \tag{2.5.8}$$

tstp1

ta suy ra

$$\mu(x) = \exp\Big\{\int F(x)dx\Big\},$$

chính là một thừa số tích phân cần tìm.

Trường hợp 2: Thừa số tích phân μ là hàm một biến $\mu = \mu(y)$. Tương tự như trường hợp 1, ta cũng có thể tìm được thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào y có dạng

$$\mu(y) = \exp\Big\{\int G(y)dy\Big\}, \tag{2.5.9}$$

tstp2

với điều kiện biểu thức

$$G(y) = \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

chỉ phụ thuộc vào biến y.

Trường hợp 3: Thừa số tích phân là hàm hợp $\mu = \mu(h)$ với $h = h(x, y)$ là hàm hai biến đã biết. Khi đó (2.5.7) trở thành

$$\frac{d\mu(h)}{dh}\left(M\frac{\partial h}{\partial y} - N\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \mu(h)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Ta có thể tìm được hàm μ nếu

$$\Phi(h(x,y)) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) : \left(M\frac{\partial h}{\partial y} - N\frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

là một biểu thức theo $h(x, y)$ và thừa số tích phân là

$$\mu(h(x,y)) = \exp\left\{\int \Phi(h)dh\right\}. \qquad (2.5.10)$$ tstp3

Ví dụ 2.5.5. Giải phương trình vi phân

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0.$$

Giải: Ta có

$$M(x,y) = 2x^2 + y, \quad N(x,y) = x^2y - x.$$

Do $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình vi phân toàn phần. Tuy nhiên, biểu thức

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - y} = \frac{-2}{x},$$

chỉ phụ thuộc vào biến x. Do đó, theo (2.5.8) ta có thừa số tích phân

$$\mu(x) = \exp\left(-\int \frac{2}{x}\mathrm{dx}\right) = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

Nhân cả hai vế của phương trình đã cho với $\mu(x)$, ta nhận được

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0,$$

là phương trình vi phân toàn phần với

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2 + \frac{y}{x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Khi đó phương trình có nghiệm được xác định bởi công thức (2.5.5)

$$\int_1^x \left(2 + \frac{0}{x^2}\right)dx + \int_0^y \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = C \Leftrightarrow 2x + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2.5.6. Tìm thừa số tích phân dạng $\mu(x^2+y^2)$ và giải phương trình vi phân

$$(x-y)dx+(x+y)dy=0.$$

Giải: Với $h(x,y)=x^2+y^2$, ta dễ dàng tính được

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=2, \qquad M\frac{\partial h}{\partial y}-N\frac{\partial h}{\partial x}=-2x^2-2y^2.$$

Do đó

$$\Phi(h)=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right):\left(M\frac{\partial h}{\partial y}-N\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{-1}{x^2+y^2}=\frac{-1}{h}.$$

Theo (2.5.10), suy ra thừa số tích phân cần tìm xác định bởi

$$\mu(h)=\exp\Big\{\int\Phi(h)dh\Big\}=\exp\Big\{\int\frac{-dh}{h}\Big\}=\frac{1}{h}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình vi phân toàn phần

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=0.$$

Phương trình có nghiệm được xác định bởi công thức (2.5.5)

$$\int_1^x\frac{dx}{x}+\int_0^y\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=C \;\Leftrightarrow\; \ln|x|+\ln\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}=C,\;\; C\in\mathbb{R}.$$

2.6 Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

ss2.3.4

Định nghĩa 2.6.1. Phương trình vi phân cấp một $y'=f(x,y)$ được gọi là tuyến tính nếu với mỗi x cố định thì f là một hàm bậc nhất theo biến y. Khi đó, phương trình vi phân tuyến tính cấp một có dạng

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{2.6.1}$$

eqktn

với $p(x)$, $q(x)$ là các hàm liên tục cho trước xác định trên khoảng $I=(a,b)$ nào đó.

i) Khi $q(x)\equiv 0$, phương trình $y'+p(x)y=0$ được gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

ii) Khi $q(x)\not\equiv 0$, phương trình (2.6.1) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

2.6.1 Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0. \tag{2.6.2}$$ eqtn

Phương trình này có thể đưa về phương trình vi phân có biến số phân ly. Dễ thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình. Khi $y \neq 0$, (2.6.2) trở thành

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Phương trình này nghiệm có nghiệm $\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$, $C \neq 0$. Kết hợp với nghiệm $y = 0$, suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx},\ C \in \mathbb{R}. \tag{2.6.3}$$ eq-n

2.6.2 Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (2.6.1) ta sử dụng một trong hai phương pháp sau.

1. Phương pháp thừa số tích phân

Viết phương trình (2.6.1) ở dạng

$$(p(x)y - q(x))dx + dy = 0.$$

Ta kiểm tra điều kiện (2.5.8) với $M(x, y) = p(x)y - q(x)$ và $N = 1$. Ta thấy,

$$\frac{1}{N(x,y)}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) = p(x),$$

chỉ phụ thuộc vào biến x nên phương trình này có thừa số tích phân $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Nhân cả hai vế với $\mu(x)$ ta nhận được

$$e^{\int p(x)dx}(p(x)y - q(x))dx + e^{\int p(x)dx}dy = 0 \Longrightarrow d\left(e^{\int p(x)dx}y\right) - e^{\int p(x)dx}q(x))dx = 0.$$

Tích phân hai vế ta nhận được nghiệm của (2.6.1)

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right],\quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.6.4}$$ NTQ

2. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Nhận thấy hai phương trình (2.6.1) và (2.6.2) chỉ khác nhau ở vế phải, nhà toán học Lagrange đã dựa trên sự tương đồng này và tìm được nghiệm của phương trình không thuần nhất (2.6.1) bằng cách thay hằng số C trong công thức nghiệm của phương trình thuần nhất (2.6.2) bởi hàm số $C(x)$. Nghĩa là ông tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất ở dạng

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.6.5}$$
eq-n1

Phương pháp này được gọi phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Để tìm $C(x)$, trước tiên ta đạo hàm nghiệm (2.6.5),

$$y'(x) = e^{-\int p(x)dx}\Big(C'(x) - C(x)p(x)\Big) = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)y(x).$$

Sau đó, thay vào phương trình (2.6.1) ta có

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \;\text{ suy ra }\; C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (2.6.1) là

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right], \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét 2.6.2. *i)* Trong công thức trên, khi $q(x) \equiv 0$, ta được

$$Y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \; C \in \mathbb{R},$$

là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2.6.2). Mặt khác, trong công thức nghiệm (2.6.4) nếu cho $C = 0$, ta được

$$y^*(x) = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (2.6.1). Khi đó, công thức (2.6.4) có thể viết dưới dạng

$$y(x) = y^*(x) + Y(x).$$

Ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất bằng một nghiệm riêng của nó cộng với nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.
ii) Giả sử (x_0, y_0) là điều kiện đầu của bài toán Cauchy ứng với phương trình (2.6.1). Khi đó, ta có đường cong nghiệm cần tìm có phương trình là

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(\tau)d\tau}ds\right]. \tag{2.6.6}$$
sol

Ví dụ 2.6.3. Giải phương trình vi phân $xy' - \dfrac{2y}{\ln x} = 1.$

Giải: Chia hai vế phương trình cho x ta được phương trình tuyến tính cấp một

$$y' - \frac{2}{x\ln x}y = \frac{1}{x},$$

với

$$p(x) = -\frac{2}{x\ln x}, \ \ q(x) = \frac{1}{x}.$$

Do đó,

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x\ln x}dx} = (\ln x)^2.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int p(x)dx}\Big(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\Big) \\ &= (\ln x)^2\Big(C + \int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx\Big) = C(\ln x)^2 - \ln x, \ \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Theo cách xác định nghiệm tổng quát (2.6.4) hoặc bằng chứng minh trực tiếp, ta dễ dàng có được định lý sau đây

dl2.2 **Định lý 2.6.1** (Nguyên lý chồng chất nghiệm)**.** *Giả sử $y_1(x)$ là nghiệm của phương trình $y' + p(x)x = q_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm phương trình $y' + p(x)y = q_2(x)$. Khi đó, với các hằng số α_1, α_2 bất kỳ, ta luôn có $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ là nghiệm của phương trình*

$$y' + p(x)y = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x).$$

2.7 Phương trình Bernoulli

Định nghĩa 2.7.1. Phương trình Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \ \ \alpha \neq 0, \alpha \neq 1. \tag{2.7.1}$$ eqn:12

Chú ý: Ta giả thiết $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ vì khi $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$, phương trình (2.7.1) trở thành dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 mà ta đã biết cách giải.

Phương trình này lần đầu tiên được đưa ra bởi Jacob Bernoulli vào năm 1695. Tuy nhiên, Gottfried Leibniz là người đưa ra lời giải sớm nhất trong ngay năm đó và phương pháp giải của ông vẫn được sử dụng cho đến ngày nay. Phương trình Bernoulli đặc biệt quan trọng vì chúng là phương trình vi phân phi tuyến tính mà ta có thể giải được nghiệm hiển.

Phương pháp giải: Đổi biến để đưa (2.7.1) về phương trình vi phân tuyến tính.

Dễ thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình. Trường hợp $y \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho y^α ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$ suy ra $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Thay vào phương trình trên ta nhận được phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \tag{2.7.2}$$ e2.7.2b

Giả sử phương trình này có nghiệm tổng quát $z = z(x, C)$. Khi đó hệ thức

$$y^{1-\alpha} = z(x, C),$$

cho ta nghiệm dạng tích phân tổng quát của phương trình Bernoulli (2.7.1).

Một trường hợp đặc biệt đáng chú ý của phương trình Bernoulli là phương trình vi phân logistic được trình bày trong mục 1.3.2 mà ta sẽ trình bày cách giải trong ví dụ sau.

Ví dụ 2.7.2. Xét phương trình Logistic

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

Phương trình được viết lại dưới dạng $y' - ry = -\frac{r}{K}y^2$. Đây là phương trình Bernoulli với $p(x) = -r$, $q(x) = -\frac{r}{K}$ và $\alpha = 2$. Đặt $z = y^{-1}$, ta có phương trình

$$z' + rz = \frac{r}{K}.$$

Phương trình này có nghiệm

$$z = e^{-rt}\left(z(0) + \frac{r}{K}\int_0^t e^{rs}ds\right) = e^{-rt}\left(z(0) + \frac{1}{K}(e^{rt} - 1)\right) = \frac{Kz(0) + e^{rt} - 1}{Ke^{rt}}.$$

Thay $y = \frac{1}{z}$, ta được

$$y(t) = \frac{Ky(0)e^{rt}}{K + y(0)\left(e^{rt} - 1\right)}.$$

Ví dụ 2.7.3. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy $xy' + y = \frac{\ln x}{y}$, với $y(1) = 1$.

Giải: Chia hai vế phương trình cho x ta có

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} y^{-1}, \quad x \neq 0.$$

Đây là phương trình Bernoulli với $\alpha = -1, p(x) = \dfrac{1}{x}, q(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Đặt $z = y^{1-\alpha} = y^2$ ta được phương trình tuyến tính

$$z' + \frac{2}{x} z = \frac{2 \ln x}{x},$$

có nghiệm là

$$z = y^2 = \ln x - \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

Thay $y(1) = 1$ vào nghiệm tổng quát ở trên, ta nhận được $C = \dfrac{3}{2}$. Do đó, nghiệm riêng cần tìm của phương trình là

$$y = \sqrt{\ln x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2x^2}}.$$

2.8 Phương trình Riccati

Định nghĩa 2.8.1. Phương trình Riccati là phương trình có dạng

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{2.8.1}$$ eqn:13

trong đó $p(x)$, $q(x)$ và $r(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng $I = (a, b)$ cho trước.

Phương trình này được giới thiệu năm 1724 bởi nhà toán học Jacopo Francesco Riccati người Italia. Nó có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, đặc biệt là trong điều khiển học, kinh tế học và lý thuyết xác suất.

Phương trình Riccati nói chung không giải được bằng phép lấy tích phân. Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt của các hệ số, ta có thể đưa phương trình Riccati về các dạng phương trình quen thuộc mà ta đã biết cách giải.

i) Khi $p(x) \equiv 0$, ta nhận được phương trình vi phân tuyến tính $y' - q(x)y = r(x)$.
ii) Khi $r(x) \equiv 0$, ta có phương trình Bernoulli $y' - q(x)y = p(x)y^2$.
iii) Khi các hệ số là hằng số ta có một phương trình với biến số phân ly được

$$\frac{dy}{dx} = py^2 + qy + r. \tag{2.8.2}$$ eqn:13a

- Nếu $\Delta = q^2 - 4rp < 0$: tồn tại $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ sao cho $py^2 + qy + r = p[(y+a)^2 + b^2]$. Khi đó (2.8.2) trở thành

$$pdx = \frac{dy}{(y+a)^2 + b^2} \quad \text{suy ra} \quad px + C = \frac{1}{b} \arctan \frac{y+a}{b}, \ C \in \mathbb{R}.$$

- Nếu $\Delta = q^2 - 4rp = 0$: tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho $py^2 + qy + r = p(y-c)^2$.

  Khi đó, $y = c$ là một nghiệm của phương trình.

  Khi $y \neq c$, phương trình (2.8.2) trở thành

$$pdx = \frac{dy}{(y-c)^2} \quad \text{suy ra} \quad px + C = \frac{-1}{y-c}, \ C \in \mathbb{R}.$$

- Nếu $\Delta = q^2 - 4rp > 0$: tồn tại $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $py^2 + qy + r = p(y-y_1)(y-y_2)$.

  Khi đó $y = y_1, y = y_2$ là nghiệm của phương trình.

  Khi $y \neq y_1, y \neq y_2$, phương trình (2.8.2) trở thành

$$pdx = \frac{dy}{(y-y_1)(y-y_2)} \quad \text{suy ra} \quad px + C = \frac{1}{y_1 - y_2} \ln \left| \frac{y-y_1}{y-y_2} \right|, \ C \in \mathbb{R}.$$

Đối với các trường hợp khác, ta không có phương pháp chung để tìm nghiệm. Tuy nhiên, nếu biết được một nghiệm riêng của phương trình Riccati, thì ta có thể đưa nó về phương trình Bernoulli theo cách như sau.

Định lý 2.8.1. *Nếu biết một nghiệm nào đó của phương trình Riccati (2.8.1) thì ta có thể đưa nó về phương trình Bernoulli.*

Chứng minh. Giả sử nghiệm đã biết của phương trình (2.8.1) là $z = z(x)$, tức là

$$z' = p(x)z^2 + q(x)z + r(x).$$

Ta đặt $y = u + z$, trong đó u là ẩn mới. Thay vào phương trình (2.8.1), ta có:

$$\begin{aligned} u' + z' &= p(x)(u+z)^2 + q(x)(u+z) + r(x) \\ &= p(x)u^2 + 2p(x)uz + p(x)z^2 + q(x)z + q(x)y + r(x) \\ &= p(x)u^2 + 2p(x)zu + q(x)u + p(x)z^2 + q(x)z + r(x). \end{aligned}$$

Từ đó ta nhận được phương trình Bernoulli có dạng

$$u' - \big[2p(x)z(x) + q(x)\big]u = p(x)u^2. \qquad \square$$

Ví dụ 2.8.2. Giải phương trình $y' + 2y(y - x) = 1$.

Giải: Phương trình có thể viết lại dạng

$$y' = -2y^2 + 2xy + 1,$$

là phương trình Riccati. Dễ thấy $y = x$ là một nghiệm của phương trình. Đặt $y = u + x$, phương trình trở thành

$$u' + 2xu = -2u^2.$$

Đây là phương trình Bernoulli với $\alpha = 2$. Ta có $u = 0$ là nghiệm phương trình. Khi $u \neq 0$, đặt $v = u^{-1}$, ta được

$$v' - 2xv = 2.$$

Theo (2.6.4), phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$v = e^{x^2}\Big(C + \int 2e^{-x^2}\mathrm{d}x\Big),\ C \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + 2\int e^{-x^2}\mathrm{d}x},\ C \in \mathbb{R}.$$

.

2.9 Phương trình Clairaut (Cờ-le-rô)

Phương trình này do nhà toán học Clairaut đề xuất năm 1734 và được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 2.9.1. Phương trình Clairaut là phương trình có dạng

$$y(x) = xy'(x) + h(y'(x)), \tag{2.9.1}$$ eqn:14

trong đó h là một hàm khả vi xác định trên tập mở $S \subset \mathbb{R}$.

Phương pháp giải: Do h là hàm khả vi nên nếu $y(x)$ là nghiệm của (2.9.1) thì nó khả vi hai lần. Đạo hàm hai vế của phương trình ta được

$$y'(x) = y'(x) + xy''(x) + h'(y'(x))y''(x).$$

Phương trình này tương đương với $y''(x) = 0$ hoặc $x + h'\big(y'(x)\big) = 0$.

Trường hợp $y''(x) = 0$, ta suy ra $y(x) = cx + c_1$ với c, c_1 là các hằng số thực. Để $y(x)$ là nghiệm của (2.9.1) ta cần có $c_1 = h(c)$. Vậy phương trình (2.9.1) có nghiệm tổng quát là họ đường thẳng $\{y(x) = cx + h(c), c \in S\}$.

Xét trường hợp $x + h'(y'(x)) = 0$. Tham số hóa đường cong nghiệm bằng cách đặt $t = \dfrac{dy}{dx}$ ta nhận được từ (2.9.1)

$$\begin{cases} x(t) = -h'(t) \\ y(t) = -th'(t) + h(t), \end{cases} \qquad \text{với } t \in S. \tag{2.9.2}$$ eqn:14b

Nếu $h'(t)$ không phải là hằng số thì hệ (2.9.2) xác định một đường cong tham số trong mặt phẳng (x, y); nếu $h'(t)$=constant đường cong bị suy biến thành một điểm. Nghiệm này không được suy ra từ nghiệm tổng quát nên nó là nghiệm kỳ dị.

Ví dụ 2.9.2. Giải phương trình

$$y = xy' + (y')^3.$$

Giải: Phương trình đã cho là phương trình Clairaut, theo cách giải trình bày ở trên ta có nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = cx + c^3, c \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm kỳ dị của phương trình đã cho là đường cong có dạng tham số

$$\begin{cases} x(t) = -3t^2 \\ y(t) = -2xt + t^3 = -5t^3, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Rút $t = \pm\sqrt{-x/3}$ từ phương trình thứ nhất, thế vào phương trình thứ hai của hệ trên ta nhận được

$$y = \pm 5 \left(\frac{-x}{3}\right)^{3/2},\ x \leqslant 0.$$

2.10 Bao hình của họ đường cong

Bao hình của một họ đường cong $\mathcal{G}$ trên mặt phẳng là một đường cong tiếp xúc với bất kỳ đường cong nào của $\mathcal{G}$.

Giả sử $\mathcal{G} = \{g(x, c) : c \in \mathbb{R}\}$, với g là hàm khả vi theo hai biến (x, c). Khi đó nếu $\mathcal{G}$ có bao hình thì đường bao hình này là nghiệm của phương trình

$$y(x) = g(x, c) \quad \text{và} \quad \frac{\partial g(x, c)}{\partial c} = 0. \tag{2.10.1}$$ eqn:14b1

Trong trường hợp họ đường cong $\mathcal{G}$ là nghiệm tổng quát của phương trình Clairaut, tức là ta có $g(x, c) = cx + h(c)$, thì phương trình (2.10.1) trở thành

$$\begin{cases} y = cx + h(c), \\ x + h'(c) = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y(c) = cx + h(c), \\ x(c) = -h'(c). \end{cases}$$

Đây chính là hệ thức (2.9.2) (với $c = t$) xác định nghiệm kỳ dị. Vậy ta suy ra nghiệm kỳ dị của phương trình Clairaut là bao hình của nghiệm tổng quát.

Ví dụ 2.10.1. Giải phương trình

$$y(x) = xy'(x) - \frac{1}{2}(y'(x))^2. \qquad (2.10.2)$$

eqClau

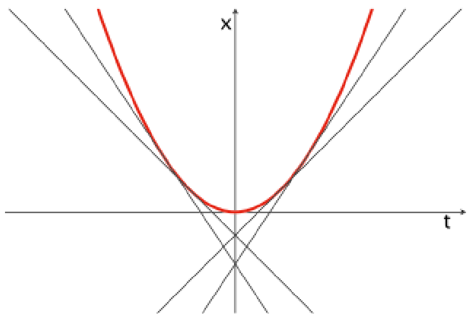
Giải: Phương trình đã cho là phương trình Clairaut nên có nghiệm tổng quát là

$$y(x) = cx - \frac{1}{2}c^2.$$

Nghiệm kỳ dị của phương trình xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} y = cx - \dfrac{c^2}{2}, \\ x(c) = c. \end{cases}$$

Suy ra bao hình của họ đường cong nghiệm chính là parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$.



Hình 2.1: Bao hình của (2.10.2)

clairaut

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 1: Giải các phương trình vi phân với biến số phân li sau

1. $(x^2 - yx^2).y' + y^2 + x.y^2 = 0.$
2. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y).$
3. $y' = (1-y)\cos x, y(\pi) = 2.$
4. $y' = 2x^2(y^2+1), y(0) = 1.$
5. $y' \cos 2y - \sin y = 0.$
6. $y' = \frac{\ln x + 1}{\ln y + 1}.$
7. $xy' = \frac{e^y - 2}{e^y - 1}.$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 + 2y}{x^3 + 3x}$, $y(0) = 1.$

Bài tập 2: Giải các bài toán Cauchy

1. $\begin{cases} x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0, \\ y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} (e^x + 1)\cos y dy + e^x(\sin y + 1)dy = 0, \\ y(0) = 3. \end{cases}$
4. $\begin{cases} (1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
5. $\begin{cases} (x^2 + 1)y' = y^2 + 4, \\ y(1) = 2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} (x + 2y)y' = 1, \\ y(0) = -2. \end{cases}$

Bài tập 3: Giải các phương trình vi phân vi phân cấp một

1. $(y - x)\, dx + (y + x)\, dy = 0.$
2. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$
3. $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0.$
4. $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0.$
5. $x^2.y' + y^2 + xy(y' - 1) = 0.$
6. $xy' + (1 + x)y = e^{-x}\sin 2x.$
7. $\dfrac{dy}{dy} - \dfrac{2x}{1 + x^2}y = x^2.$
8. $xy' = \sqrt{1 - y^2}.$
9. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$
10. $y' - y = 2x - 3.$
11. $(x + y^2)dy = ydy.$
12. $\sin 2y + x\cot y)y' = 1.$
13. $(2e^y - x)y' = 1.$
14. $y' = \dfrac{x^2}{1 + y^2}.$

Bài tập 4: Giải các phương trình vi phân vi phân tuyến tính cấp một

1. $x(x^2 + 1)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0.$
2. $(x^2 + 1)y' - 2xy = (x^2 + 1)^2.$
4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$
5. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0.$

3. $(x^3 + x)y' + 3x^2y = \sqrt{x^2 + 1}$.

6. $xy' - y = x^2\text{arctg}\, x$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng phương trình

$$x(x^2 + 1)y' - (2x^2 + 3)y = 3,$$

có nghiệm dạng tam thức bậc hai. Giải phương trình đó.

Bài tập 6: Giải các phương trình vi phân Becnouli

1. $xy^2 + x^2(x + 1)yy' + 3x - 5 = 0$.
2. $y' + xy = x^3y^3$.
3. $(y \ln x - 2)y.dx = xdy, \quad x > 0$.

Bài tập 7: Tìm thừa số tích phân và giải các phương trình

1. Tìm $\alpha(x)$ cho phương trình $(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.
2. Tìm $\alpha(y)$ cho phương trình $(1 + xy)ydx - xdy = 0$.
3. Tìm $\alpha(x + y)$ cho phương trình $x.dx + (2x + y)dy = 0$.
4. Tìm $\alpha(x^2 + y^2)$ cho phương trình $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.
5. Tìm $\alpha(y)$ cho $ydx + (y^2 - x)dy = 0$.

Bài tập 8: Tìm nghiệm các phương trình vi phân chưa giải ra đạo hàm

1. $yy'^2 + y'(x - y) = x$.
2. $y'^3 + y^3 = 3yy'$.
3. $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 = x^2y^2 + x^4$.
4. $xy'^3 = 1 + y'$.
5. $y(1 + y'^2) = 2a$.
6. $y - e^{y'}y'^2 = 0$

Bài tập 9: Giải các phương trình vi phân vi phân Lagrange và Clairaut

1. $y = 2xy' + y^2y'^3$.
2. $y = 2xy' + \frac{x^2}{2} + y'^2$.
3. $y = xy'^2 + y'^3$.
4. $y = xy' + y' - y'^2$.

Chương 3

ch3 Phương trình vi phân cấp cao

3.1 Khái niệm về phương trình vi phân cấp hai

Định nghĩa 3.1.1. Phương trình vi phân cấp hai là phương trình thể hiện mối liên hệ giữa biến độc lập x, hàm phải tìm $y = y(x)$ và các đạo hàm đến cấp 2 của hàm phải tìm. Phương trình này có dạng tổng quát là

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{3.1.1}$$ 3.1.0

trong đó F là hàm số xác định trong miền $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^4$. Nếu phương trình (3.1.1) có thể giải ra đối với đạo hàm y'' và đưa về dạng

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3.1.2}$$ 3.1.1

thì phương trình vi phân cấp hai trên được gọi là có dạng chính tắc. Ở đây, f xác định trên $I \times \mathcal{D}$, với $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ và $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Nghiệm của phương trình vi phân cấp 2. Nghiệm của phương trình vi phân cấp hai (3.1.2) là tập hợp tất cả những hàm số $y(x)$ xác định và khả vi đến cấp hai trên khoảng $I = (a, b)$ sao cho $(y(x), y'(x)) \in \mathcal{D}$ với mọi $x \in I$ và

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad x \in I. \tag{3.1.3}$$ 3.1.2

Giải phương trình (3.1.2) là tìm tất cả hàm y thỏa mãn phương trình (3.1.3).

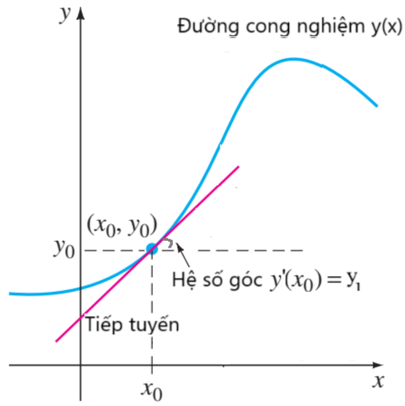
Tương tự như phương trình vi phân cấp 1, đối với phương trình vi phân cấp 2 ta cũng có các khái niệm về *nghiệm tổng quát, nghiệm riêng và nghiệm kỳ dị.*

Bài toán Cauchy. Bài toán Cauchy hay còn gọi là bài toán giá trị ban đầu của một phương trình cấp hai trên khoảng I là bài toán tìm nghiệm của phương trình (3.1.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \quad x_0 \in I. \tag{3.1.4}$$ 3.1.3

Sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình vi phân cấp hai. Điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán Cauchy đối với phương trình (3.1.2) với điều kiện ban đầu (3.1.4) sẽ được chỉ ra trong Chương 4, Mục 4.1.3.

Ý nghĩa hình học: Nghiệm của bài toán Cauchy là một đường cong tích phân của phương trình (3.1.2) đi qua điểm (x_0, y_0) cho trước và có hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm đó là $y'(x_0) = y_1$.



Hình 3.1: Đường cong nghiệm đi qua (x_0, y_0), có hệ số góc $y'(x_0) = y_1$. dcn

3.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

Định nghĩa 3.2.1. Phương trình vi phân cấp hai $y'' = f(x, y, y')$ được gọi là tuyến tính nếu với mỗi x cố định thì f là một hàm bậc nhất theo hai biến y và y'. Khi đó, phương trình được viết dưới dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{3.2.1}$$ 3.1.4

với các hệ số $p(x), q(x)$ và $r(x)$ là các hàm cho trước, xác định trên $I = (a, b)$.

i) Khi $r(x) \not\equiv 0$, phương trình (3.2.1) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất.*

ii) Khi $r(x) \equiv 0$, phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, gọi là *phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất* tương ứng với phương trình (3.2.1).

iii) Khi $p(x), q(x)$ không phụ thuộc theo biến x, phương trình (3.2.1) trở thành

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{3.2.2}$$ 3.1.8-0

với p, q là các hằng số. Phương trình được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng.*

Trong trường hợp phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có dạng

$$A(x)y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

ta có thể đưa về phương trình này về dạng (3.2.1) bằng cách đặt

$$p(x) = \frac{P(x)}{A(x)}, \quad q(x) = \frac{Q(x)}{A(x)} \quad \text{và} \quad r(x) = \frac{R(x)}{A(x)}.$$

Để tránh phức tạp về lý luận, ta giả thiết $p(x), q(x)$ và $r(x)$ là các hàm liên tục trên I. Với điều kiện này, hàm $f(x,y,z) = r(x) - p(x)y - q(x)z$ thoả mãn điều kiện Lipschitz trên mọi khoảng đóng và hữu hạn chứa trong I. Vì thế, theo Định lý 4.1.1, phương trình (3.2.1) với điều kiện ban đầu (3.1.4) có nghiệm duy nhất.

tt3 3.3 Phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (3.3.1)$$ 3.1.6

Khi đó, ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau về nghiệm của phương trình.

dl3.2 **Định lý 3.3.1** (Định lý tổ hợp nghiệm)**.** *Giả sử $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các nghiệm của phương trình thuần nhất* (3.3.1). *Khi đó, với mọi hằng số thực C_1, C_2, ta có*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

cũng là nghiệm của phương trình (3.3.1).

Từ định lý trên ta thấy, tập nghiệm của phương trình (3.3.1) tạo thành một không gian vectơ mà ở đó mỗi vectơ là một hàm số. Vậy số chiều và cơ sở của không gian vectơ đó được xác định như thế nào? Để trả lời câu hỏi đó ta nghiên cứu nội dung tiếp theo.

sub3.3.1 3.3.1 Hàm độc lập tuyến tính. Định thức Wronski

dltt **Định nghĩa 3.3.1.** Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại các hằng số C_1 và C_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0, \quad \text{với mọi } x \in I.$$

Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ không phụ thuộc tuyến tính thì chúng được gọi là *độc lập tuyến tính*.

Nhận xét 3.3.2. Từ định nghĩa trên, ta suy ra

i) Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ với nhau, tức là tồn tại hằng số k để $y_1(x) = ky_2(x)$ với mọi $x \in I$.

ii) Hai hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ là độc lập tuyến tính nếu với mọi hằng số C_1, C_2 không đồng thời bằng 0 ($C_1^2 + C_2^2 \neq 0$) thì hàm $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \not\equiv 0$ trên I.

Ví dụ 3.3.3. Hàm $y_1 = \cos x$ và $y_2 = x$ là hai hàm độc lập tuyến tính trên bất kỳ khoảng $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử có hằng số C_1, C_2 sao cho

$$C_1 \cos x + C_2 x = 0, \quad x \in I.$$

Đạo hàm đến cấp hai hai vế của đẳng thức trên theo x, ta được

$$\begin{cases} C_2 - C_1 \sin x = 0, \\ -C_1 \cos x = 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Vậy hai hàm $y_1 = \cos x$ và $y_2 = x$ là độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 3.3.4. Cho hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ khả vi trên I. Khi đó hàm số

$$W(x) = W_{[y_1,y_2]}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \tag{3.3.2}$$ 3.1.7

được gọi là định thức Wronski của hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$.

dl1 **Định lý 3.3.2.** *Nếu hai hàm khả vi $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên tập $I = (a, b)$ thì định thức Wronski của chúng đồng nhất bằng không trên I, nghĩa là*

$$W_{[y_1,y_2]}(x) = 0, \quad x \in I.$$

Chứng minh. Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên khoảng $I = (a, b)$. Khi đó tồn tại C_1, C_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad x \in I.$$

Từ biểu thức trên ta cũng có $C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = 0$. Do đó hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = 0, \end{cases} \tag{3.3.3}$$ 6.4

có nghiệm không tầm thường C_1, C_2. Suy ra, hệ phương trình trên có định thức Cramer thỏa mãn

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0, \quad x \in I,$$

hay định thức Wronski $W_{[y_1,y_2]}(x) = 0$, với mọi $x \in I$. Ta có điều cần chứng minh. □

Chú ý 3.3.5. *i) Từ định lý trên ta thấy, nếu hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính thì $W_{[y_1,y_2]}(x) \equiv 0$. Tuy nhiên, khẳng định ngược lại của định lý nói chung không đúng. Nghĩa là nếu có $W_{[y_1,y_2]}(x) \equiv 0$ thì ta không kết luận được về tính độc lập hay phụ thuộc tuyến tính của hai hàm $y_1(x), y_2(x)$.*

Ví dụ 3.3.6. Hai hàm số $y_1 = x^3,\ y_2 = |x^3|$ có định thức Wronski $W_{[y_1,y_2]}(x) = 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$W_{[y_1,y_2]}(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ khi } x \geqslant 0; W_{[y_1,y_2]}(x) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ khi } x < 0.$$

Tuy nhiên, hai hàm này là độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử C_1, C_2 là các hằng số thực thỏa mãn hệ thức

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Xét $x > 0$ ta được $C_1 + C_2 = 0$, tương tự khi $x < 0$ suy ra $C_1 - C_2 = 0$. Kết hợp lại ta có $C_1 = C_2 = 0$.
ii) Trong trường hợp đặc biệt, khi $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất (3.3.1) *thì điều kiện $W_{[y_1,y_2]} \neq 0$ chính là điều kiện cần và đủ để chúng độc lập tuyến tính như trình bày trong định lý được phát biểu dưới đây.*

3.3.2 Công thức Ostrogradsky–Liouville

Định lý 3.3.3 (Công thức Ostrogradsky–Liouville)**.** *Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai* dl.3.2 *nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất* (3.3.1)*. Khi đó định thức Wronski của hệ nghiệm này được cho bởi*

$$W_{[y_1,y_2]}(x) = W_{[y_1,y_2]}(x_0) \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds\right\}, \ x \in I, \tag{3.3.4}$$ 3.1.7a

với x_0 nào đó thuộc I.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{dW_{[y_1,y_2]}(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right) \\ &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) \\ &= -p(x)\left[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right] = -p(x)W_{[y_1,y_2]}(x). \end{aligned}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một, tích phân hai vế ta nhận được điều cần chứng minh (3.3.4). □

Nhận xét 3.3.7. Công thức (3.3.4) cho ta cách tính định thức Wronski của cặp nghiệm $\{y_1, y_2\}$ cụ thể. Tuy nhiên, khi nói đến định thức Wronski của cặp nghiệm bất kỳ nào đó của phương trình thuần nhất (3.3.1), ta viết $W(x)$ thay vì $W_{[y_1,y_2]}(x)$. Khi đó ta có

$$W(x) = C\exp\left\{-\int p(x)dx\right\},\ x \in I, \tag{3.3.5}$$ 3.1.7b

với C là hằng số nào đó phụ thuộc vào cặp nghiệm đang xét.

Ví dụ 3.3.8. Tính định thức Wronski của cặp nghiệm nào đó của phương trình

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0.$$

Giải: Phương trình đã cho có dạng chính tắc

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0.$$

Khi đó ta có

$$\int -p(x)dx = \int \frac{xdx}{x-1} = x + \ln|x-1| + \ln C.$$

Do đó

$$W(x) = C\exp\left\{-\int p(x)dx\right\} = Ce^x|x-1|, \tag{3.3.6}$$ 3.1.7c

với C là hằng số nào đó phụ thuộc vào cặp nghiệm đang xét.

Bằng cách thử trực tiếp ta thấy $y_1 = x, y_2 = e^x$, là cặp nghiệm của phương trình. Ta tính được

$$W_{[y_1,y_2]}(x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = e^x(x-1).$$

Ta thấy đối với cặp nghiệm y_1, y_2 này thì hằng số trong định thức Wronski (3.3.6) là $C = 1$ khi xét $x > 1$ và $C = -1$ khi $x < 1$.

hq.3.2 **Hệ quả 3.3.4.** *Giả sử $W_{[y_1,y_2]}(x)$ là định thức Wronski của hai nghiệm y_1 và y_2 của phương trình* (3.3.1). *Khi đó, hoặc $W_{[y_1,y_2]}(x) = 0$ với mọi $x \in I$ hoặc $W_{[y_1,y_2]}(x) \neq 0$ với mọi $x \in I$. Trong trường hợp $W_{[y_1,y_2]}(x) \equiv 0$, các hàm y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính.*

Chứng minh. Nếu tồn tại $x_0 \in I$ sao cho $W_{[y_1,y_2]}(x_0) = 0$ thì từ (3.3.4) ta suy ra $W_{[y_1,y_2]}(x) = 0$ với mọi $x \in I$ hay khi đó $W_{[y_1,y_2]}(x) \equiv 0$ trên I.

Xét trường hợp tồn tại $x_0 \in I$ sao cho $W_{[y_1,y_2]}(x_0) \neq 0$. Giả sử có $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0,\ \text{với mọi } x \in I.$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Hệ trên là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có định thức của ma trận hệ số chính là định thức $W_{[y_1,y_2]}(x_0) \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất $C_1 = C_2 = 0$. Vậy các nghiệm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các hàm độc lập tuyến tính. Hệ quả được chứng minh. □

dl3.4 **Định lý 3.3.5.** *Tập hợp các nghiệm của phương trình* (3.3.1) *là một không gian tuyến tính hai chiều. Cơ sở của không gian nghiệm có thể chọn là hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kỳ của phương trình.*

Chứng minh. Giả sử $y(x)$ là một nghiệm nào đó và $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kỳ của phương trình (3.3.1). Ta có $W_{[y_1,y_2]}(x_0) \neq 0$ với x_0 bất kỳ thuộc I. Khi đó tồn tại các hằng số C_1 và C_2 thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = \phi(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = \phi'(x_0). \end{cases}$$

Theo Định lý 3.3.1, ta có $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ cũng là một nghiệm của (3.3.1) với điều kiện ban đầu $y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0)$ và $y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0)$. Kết hợp với tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy, ta suy ra

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (3.3.1) là một không gian vector 2 chiều và $\{y_1, y_2\}$ là một cơ sở của không gian nghiệm. □

Từ Định lý trên ta xây dựng định nghĩa về hệ nghiệm cơ bản như sau

Định nghĩa 3.3.9. Hệ nghiệm cơ bản của phương trình tuyến tính thuần nhất (3.3.1) là hệ gồm hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kỳ của phương trình đó.

Nhận xét 3.3.10. Từ Định lý 3.3.5 ta suy ra, nếu biết $\{y_1, y_2\}$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất (3.3.1) thì nghiệm tổng quát của nó là

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

với C_1 và C_2 là các hằng số bất kỳ.

Tiếp theo, ta giới thiệu một ứng dụng khác của công thức Ostrogradsky–Liouville, nó cho ta cách xác định được nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 khi biết trước một nghiệm riêng khác 0 nào đó của phương trình.

Định lý 3.3.6. *Giả sử $y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất* (3.3.1)*. Khi đó, hàm $y_2(x)$ xác định bởi*

$$y_2(x) = y_1(x) \int y_1^{-2}(x) e^{-\int p(x)dx} dx, \tag{3.3.7}$$ eq3.1.6c

cũng là một nghiệm của phương trình (3.3.1) *và độc lập với $y_1(x)$.*

Chứng minh. Giả sử $y(x)$ là nghiệm khác $y_1(x)$ của phương trình (3.3.1). Theo công thức Ostrogradsky–Liouville (4.3.6)

$$W[y_1, y](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Khai triển định thức cho ta

$$y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Chia hai vế phương trình cho $y_1(x)$ ta có

$$y'(x) - \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}y(x) = \frac{C}{y_1(x)}e^{-\int p(x)dx}. \tag{3.3.8}$$

eq3.1.6b

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Sử dụng công thức nghiệm (2.6.4) nhận được

$$y(x) = e^{\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}dx} \int e^{-\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}dx} \frac{C}{y_1(x)} e^{-\int p(x)dx} dx = Cy_1(x) \int y_1^{-2}(x) e^{-\int p(x)dx} dx.$$

Chọn $C = 1$ và đặt $y_2(x) = y(x)$ ta có (3.3.7).

Giả sử có hai hằng số C_1, C_2 sao cho

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \text{ với mọi } x \in I.$$

Do $y_1(x) \neq 0$ nên ta có

$$C_1 + C_2 \int y_1^{-2}(x) e^{-\int p(x)dx} dx = 0 \text{ với mọi } x \in I.$$

Đẳng thức này kéo theo $C_1 = C_2 = 0$, tức là $y_1(x)$ độc lập với $y_2(x)$. Định lý được chứng minh. □

Từ định lý trên ta suy ra hệ quả sau về cách xác định nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất khi biết trước một nghiệm riêng của nó.

Hệ quả 3.3.7. *Nếu biết $y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất* (3.3.1) *thì nghiệm tổng quát của phương trình đó được xác định bởi công thức*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = y_1(x) \left(C_1 + C_2 \int y_1^{-2}(x) e^{-\int p(x)dx} dx \right), \tag{3.3.9}$$

3.1.6c

với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3.3.11. Biết $y_1 = \sin(x^2)$ là một nghiệm của phương trình

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0,\ x > 0.$$

Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Giải: Phương trình đã cho có dạng chính tắc là

$$y'' - \frac{1}{x}y' + 4x^2y = 0.$$

Theo (3.3.9), ta có nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x)\Big(C_1 + C_2\int y_1^{-2}(x)e^{-\int p(x)dx}dx\Big) \\ &= \sin(x^2)\Big(C_1 + C_2\int \frac{1}{\sin^2(x^2)}e^{\int \frac{dx}{x}}dx\Big) = \sin(x^2)\Big(C_1 + C_2\int \frac{x}{\sin^2(x^2)}dx\Big) \\ &= \sin(x^2)\Big(C_1 - C_2\cot(x^2)\Big) = C_1\sin(x^2) - C_2\cos(x^2), \end{aligned}$$

với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3.3.3 Nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

sec3.5.2

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.3.10}$$ 3.1.8

Để xây dựng nghiệm tổng quát của phương trình (3.3.10), trước hết ta tìm nghiệm của phương trình này dưới dạng

$$y = e^{\lambda x}.$$

Đạo hàm đến cấp hai nghiệm trên, thay vào phương trình (3.3.10), ta nhận được

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Khi đó, $\phi = e^{\lambda x}$ là nghiệm của (3.3.10) khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{3.3.11}$$ 3.1.9

Phương trình (3.3.11) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình (3.3.10). Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1. Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Khi đó, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ và $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (3.3.10). Do đó phương trình có nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_1 x}, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2. Phương trình đặc trưng có nghiệm kép : $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{-p}{2}$.
Khi đó, phương trình (3.3.10) có nghiệm không tầm thường $y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}$. Theo công thức (3.3.7), nghiệm riêng $y_2(x)$ độc lập với $y_1(x)$ được xác định

$$y_2(x) = y_1(x) \int y_1^{-2}(x) e^{-\int p(x)dx}\, dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int e^{px} e^{-px} dx = x e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{\frac{-px}{2}} (C_1 + C_2 x), \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 3. Phương trình đặc trưng có nghiệm phức liên hợp: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.
Khi đó, phương trình (3.3.10) có hai nghiệm

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \left(\cos\beta x + i \sin\beta x\right), \\ y_2 &= e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \left(\cos\beta x - i \sin\beta x\right). \end{aligned}$$

Theo nguyên lý chồng chất nghiệm, suy ra

$$\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos\beta x, \qquad \overline{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin\beta x,$$

cũng là nghiệm của (3.3.10). Dễ thấy các nghiệm này độc lập tuyến tính, suy ra nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right), \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3.3.12. Giải các phương trình

a. $y'' - 5y' - 14y = 0$. *b*. $y'' + 4y' + 7y = 0$. *c*. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Giải: *a*. Phương trình đặc trưng ứng với phương trình đã cho là

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0, \text{ có nghiệm } \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 7.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{7x}, \ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b. Phương trình đặc trưng ứng với phương trình đã cho là

$$\lambda^2 + 4\lambda + 7 = 0, \text{ có nghiệm phức } \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} i.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c. Phương trình đặc trưng ứng với phương trình đã cho là

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0, \text{ có nghiệm kép } \lambda_1 = \lambda_2 = -3.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

tt6 3.4 Phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

3.4.1 Nghiệm phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{3.4.1}$$ 3.1.4a

có phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.4.2}$$ 3.1.4b

Tương tự như đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp một, ta có nguyên lý sau về nghiệm của phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

dl2.3.7 **Định lý 3.4.1** (Nguyên lý chồng chất nghiệm)**.** *Giả sử $y_i(x)$ là các nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r_i(x),\ i = \overline{1,n}. \tag{3.4.3}$$ pt18b

Khi đó, $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$ bất kỳ) là nghiệm phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i(x). \tag{3.4.4}$$ pt18

Chứng minh. Ta chứng minh định lý bằng cách kiểm tra trực tiếp. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\Big)'' + p(x)\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\Big)' + q(x)\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i'' + p(x)y_i' + q(x)y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i(x). \end{aligned}$$

Vậy $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ là nghiệm của phương trình (3.4.4). $\square$

Ý nghĩa của nguyên lý này là khi phương trình (3.4.1) có vế phải $r(x)$ phức tạp dạng

$$r(x) = \alpha_1 r_1(x) + \alpha_2 r_2(x) + \cdots + \alpha_n r_n(x),$$

ta có thể giải riêng lẻ từng phương trình dạng (3.4.3) và sử dụng Nguyên lý chồng chất nghiệm để nhận được nghiệm của (3.4.1) nhờ tổ hợp tuyến tính (3.4.4).

Cũng từ nguyên lý trên, ta dễ dàng suy ra bổ đề sau về mối liên hệ giữa nghiệm của phương trình không thuần nhất và nghiệm phương trình thuần nhất tương ứng.

lam3.1 **Bổ đề 3.4.2.** *Nếu* $y_1^\star(x)$ *và* $y_2^\star(x)$ *là hai nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất* (3.4.1) *thì* $y_1^\star(x) - y_2^\star(x)$ *là nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất* (3.4.2).

Từ đó ta có định lý sau về nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Định lý 3.4.3. *Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng một nghiệm riêng của nó cộng với nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng. Cụ thể, nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất* (3.4.1) *có dạng*

$$y(x) = y^\star(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.4.5}$$ pt19

trong đó $y^\star(x)$ *là một nghiệm riêng của* (3.4.1) *và* $y_1(x), y_2(x)$ *là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất* (3.4.2).

Chứng minh. Cho $y^\star(x)$ là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (3.4.1) và $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (3.4.2).

Khi đó, theo nguyên lý chồng chất nghiệm ta dễ thấy hàm số xác định bởi $y^\star(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, là nghiệm của phương trình (3.4.1).

Giả sử $y(x)$ là nghiệm bất kỳ của phương trình không thuần nhất (3.4.1). Khi đó theo Bổ đề 3.4.2 ta thấy $y(x) - y^\star(x)$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất. Do đó tồn tại hai hằng số C_1 và C_2 để $y(x) - y^\star(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Vậy mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình (3.4.1) đều có biểu diễn dạng $y(x) = y^\star(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, với hằng số C_1, C_2 nào đó.

Vậy $y(x) = y^\star(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ là nghiệm tổng quát của (3.4.1). Hệ quả được chứng minh. □

Như vậy, để giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai (3.4.1), trước hết ta nghiên cứu cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất. Sau đó ta cố gắng tìm một nghiệm riêng $y^\star$ của nó. Cuối cùng sử dụng công thức (3.4.5) để biểu diễn nghiệm tổng quát.

ss3.4.3
3.4.2 Phương pháp biến thiên hằng số

Ở nội dung này ta giới thiệu phương pháp Lagrange, hay còn gọi là phương pháp biến thiên hằng số, để tìm ra nghiệm riêng hoặc nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (3.4.1) khi đã biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Giả sử nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (3.4.2) là

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange tương tự như đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp một, ta giả sử $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1(x)$ và $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2(x)$ là các hàm biến thiên theo x sao cho

$$y^\star = \mathbf{C}_1(x) y_1(x) + \mathbf{C}_2(x) y_2(x), \tag{3.4.6}$$ 3.6.2

là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (3.4.1). Vì có thể tìm được nhiều cặp hàm số $\mathbf{C}_1(x), \mathbf{C}_2(x)$ để biểu diễn nghiệm $\overline{y}$ nên ta chọn các hàm $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ sao cho

$$\mathbf{C}_1'(x) y_1(x) + \mathbf{C}_2'(x) y_2(x) = 0. \tag{3.4.7}$$ 3.6.3

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} y'^\star &= \mathbf{C}_1 y_1' + \mathbf{C}_2 y_2' + C_1' y_1 + \mathbf{C}_2' y_2 = \mathbf{C}_1 y_1' + \mathbf{C}_2 y_2', \\ y''^\star &= \mathbf{C}_1 y_1'' + \mathbf{C}_2 y_2'' + C_1' y_1' + \mathbf{C}_2' y_2'. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (3.4.1) ta được

$$\mathbf{C}_1(y_1'' + q y_1' + p y_1) + \mathbf{C}_2(y_2'' + q y_2' + p y_2) + \mathbf{C}_1' y_1' + \mathbf{C}_2' y_2' = r \;\Leftrightarrow\; \mathbf{C}_1' y_1' + \mathbf{C}_2' y_2' = r.$$

Kết hợp với (3.4.7), ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1' y_1 + \mathbf{C}_2' y_2 = 0, \\ \mathbf{C}_1' y_1' + \mathbf{C}_2' y_2' = r. \end{cases}$$

Vì $y_1(x), y_2(x)$ là độc lập tuyến tính nên định thức Wronsky $W_{[y_1,y_2]}(x) \neq 0$ với mọi x. Do đó, hệ phương trình trên cho ta nghiệm

$$\mathbf{C}_1'(x) = \frac{-y_2(x) r(x)}{W_{[y_1,y_2]}(x)}, \quad \mathbf{C}_2'(x) = \frac{y_1(x) r(x)}{W_{[y_1,y_2]}(x)}.$$

Khi đó, $\mathbf{C}_1(x)$ và $\mathbf{C}_2(x)$ được cho bởi

$$\mathbf{C}_1(x) = \int \frac{-y_2(x) r(x)}{W_{[y_1,y_2]}(x)} dx, \quad \mathbf{C}_2(x) = \int \frac{y_1(x) r(x)}{W_{[y_1,y_2]}(x)} dx. \tag{3.4.8}$$ 3.6.4

Do vậy, ta có định lý sau

Định lý 3.4.4. *Giả sử* $\{y_1(x), y_2(x)\}$ *là hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x),$$

trong đó p, q, r *là các hàm xác định, liên tục trên khoảng* $I = (a, b)$ *nào đó. Khi đó, ta có thể tìm được nghiệm riêng* $y^\star$ *của phương trình* (3.4.1) *dưới dạng*

$$y^\star(x) = y_1(x) \int \frac{-y_2(x)r(x)}{W_{[y_1,y_2]}(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)r(x)}{W_{[y_1,y_2]}(x)} dx,$$

và nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (3.4.1) *là*

$$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x) + y^\star(x), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3.4.1. Giải phương trình

$$y'' + 4y = 4 \tan x.$$

Giải: Phương trình đặc trưng tương ứng với phương trình đã cho là

$$\lambda^2 + 4 = 0, \text{ có nghiệm phức } \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình đã cho là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số, giả sử nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y^\star = \mathbf{C}_1(x) \cos 2x + \mathbf{C}_2(x) \sin 2x.$$

Khi đó, các hàm $\mathbf{C}_1(x)$ và $\mathbf{C}_2(x)$ có các đạo hàm thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1' \cos(2x) + \mathbf{C}_2' \sin(2x) = 0, \\ -2\mathbf{C}_1' \sin(2x) + 2\mathbf{C}_2' \cos(2x) = 8 \tan x. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta thu được:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1' = -4 \tan x \sin 2x, \\ \mathbf{C}_2' = 4 \tan x \cos 2x. \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1(x) = 2 \sin 2x - 4x \\ \mathbf{C}_2(x) = 4 \ln(\cos x) + 4 \sin^2 x. \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho là:

$$\begin{aligned} y^\star &= (2\sin 2x - 4x)\cos 2x + \left(4\ln(\cos x) + 4\sin^2 x\right)\sin 2x \\ &= -4x\cos 2x + 4\sin 2x \ln(\cos x) + 2\sin 2x. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 4x\cos(2x) + 4\sin(2x)\ln(\cos(x)),$$

với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ss2.4.2 3.4.3 Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải đặc biệt

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất hệ số hằng

$$y'' + py' + qy = r(x). \tag{3.4.9}$$ 3.1.8-1

Đối với phương trình thuần nhất hệ số hằng ta đã biết cách giải để tìm được hai nghiệm độc lập tuyến tính y_1 và y_2 như trong mục 3.3.3. Vấn đề còn lại khi giải (3.4.9) là tìm được nghiệm riêng của nó. Trong Mục 3.4.2 ta tìm nghiệm riêng này bằng phương pháp biến thiên hằng số. Tuy nhiên việc tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất bằng phương pháp biến thiên hằng số thường khá phức tạp về mặt tính toán. Trong một số trường hợp đặc biệt, nhưng cũng khá phổ biến của hàm số $r(x)$, ta có thể tìm nghiệm riêng bằng phương pháp hệ số bất định như sau.

Xét phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng của (3.4.9)

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Trường hợp 1. Hàm $r(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ và $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

- Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta tìm nghiệm riêng $y^\star$ của (3.4.9) dưới dạng
$$y^\star = e^{\alpha x}Q_n(x),$$
với $Q_n(x)$ là đa thức cần tìm, cùng bậc với $P_n(x)$.

- Nếu α là nghiệm thực của phương trình đặc trưng với bội m ($m = 1$ hoặc $m = 2$). Ta tìm nghiệm riêng $y^\star$ dưới dạng
$$y^\star = e^{\alpha x}x^m Q_n(x),$$
với $Q_n(x)$ là đa thức cần tìm, cùng bậc với $P_n(x)$.

Trường hợp 2. Hàm $r(x) = e^{\alpha x}\big[P_{n_1}(x)\cos\beta x + P_{n_2}(x)\sin\beta x\big]$ với P_{n_1} là đa thức bậc n_1, P_{n_2} là đa thức bậc n_2 theo biến x.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta tìm nghiệm riêng $y^\star$ của (3.4.9) dưới dạng
$$y^\star = e^{\alpha x}\big[L_m(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x\big],$$
với L_m và N_m là hai đa thức cần tìm, có bậc là $m = \max\{n_1, n_2\}$.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta tìm nghiệm riêng $y^\star$ của (3.4.9) dưới dạng
$$y^\star = e^{\alpha x}x\big[L_m(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x\big],$$
với L_m và N_m là hai đa thức cần tìm, có bậc là $m = \max\{n_1, n_2\}$.

Ví dụ 3.4.2. Giải phương trình

a. $y'' + 4y' + 9y = e^{2x}(3x-1)$. *b.* $y'' - 3y' - 4y = -8e^x\sin 2x$.

Giải: a. Phương trình đặc trưng tương ứng với phương trình đã cho là
$$\lambda^2 + 4\lambda + 9 = 0, \text{ có nghiệm phức } \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}i.$$
Suy ra, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là
$$y = e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
Phương trình đã cho là phương trình tuyến tính không thuần nhất có vế phải
$$r(x) = e^{2x}(3x-1),$$
với $P_n(x) = 3x-1$ là đa thức bậc 1 và $\alpha = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng $y^\star$ của phương trình có dạng
$$y^\star = e^{2x}(Ax+B),$$
với A, B là hằng số cần tìm. Khi đó ta có
$$y^{\star\prime} = e^{2x}(2Ax + 2B + A), \qquad y^{\star\prime\prime} = e^{2x}(4Ax + 4B + 4A).$$
Thay $y^\star$ vào phương trình đã cho ta được
$$e^{2x}\big[21Ax + 8A + 21B\big] = e^{2x}(3x-1),$$

thỏa mãn với mọi x khi và chỉ khi $21A = 3$ và $8A + 21B = -1$. Giải hệ điều kiện ta được $A = \frac{1}{7}, B = -\frac{5}{49}$. Suy ra nghiệm riêng của phương trình là

$$y^\star = e^{2x}\left(\frac{x}{7} - \frac{5}{49}\right).$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos\sqrt{5}x + C_2 \sin\sqrt{5}x) + e^{2x}\left(\frac{x}{7} - \frac{5}{49}\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b. Phương trình đặc trưng tương ứng với phương trình đã cho là

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \text{ có nghiệm } \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Phương trình đã cho là phương trình tuyến tính không thuần nhất có vế phải

$$r(x) = -8e^x \sin 2x.$$

Ta thấy $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta có thể tìm nghiệm riêng $y^\star$ dưới dạng

$$y^\star = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

với A, B là hằng số cần tìm. Lấy đạo hàm của hàm $y^\star$ ta có

$$\begin{aligned} y^{\star\prime} &= e^x [(A + 2B)\cos 2x + (-2A + B)\sin 2x], \\ y^{\star\prime\prime} &= e^x [(-3A + 4B)\cos 2x + (-4A - 3B)\sin 2x]. \end{aligned}$$

Thay $y^\star$ vào phương trình đã cho ta được

$$e^x [(-10 - 2B)\cos 2x + (2A - 10B)\sin 2x] = -8e^x \sin 2x.$$

Biểu thức trên thỏa mãn với mọi x khi và chỉ khi $-10A - 2B = 0$ và $2A - 10B = -8$. Giải hệ điều kiện ta được $A = -\frac{2}{13}, B = \frac{10}{13}$. Suy ra nghiệm riêng của phương trình là

$$y^\star = \frac{e^x}{13}\big(-2\cos 2x + 10 \sin 2x\big).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + \frac{e^x}{13}\big(-2\cos 2x + 10\sin 2x\big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.4.4 Hiện tượng cộng hưởng trong dao động

1. Hiện tượng cộng hưởng trong cơ học

Vào ngày 12 tháng 4 năm 1831, cây cầu treo Broughton (dài 44 m) bắc qua sông Irwell nối Broughton and Pendleton (Anh Quốc) bị sụp đổ khi một tiểu đoàn lính hành quân qua cầu, khiến nhiều binh sỹ thiệt thiệt mạng. Các chuyên gia đã loại trừ các yếu tố kỹ thuật liên quan đến thiết kế hay kết cấu cây cầu và kết luận cây cầu sụp đổ do một nguyên nhân nào đó liên quan đến bước chân của những người lính.

Một thời gian sau, người ta phát hiện ra rằng lý do chính để cây cầu sụp đổ vì nhịp dao động của cầu cùng nhịp với bước chân đi đều của đoàn quân nên xảy ra một hiệu ứng gọi là *tính cộng hưởng của dao động*. Tính cộng hưởng này đã làm cho cây cầu dao động rung lắc mạnh dẫn đến bị sụp đổ. Từ sau sự kiện này, quân đội các nước đều khuyến cáo "đoàn quân đi qua cầu không được đi đều".

Khái niệm cộng hưởng trong các dao động cơ học hoặc điện học đề cập đến hiện tượng khi sự đáp ứng của hệ thống với lực tác động từ bên ngoài tạo ra dao động ở một tần số cụ thể nào đó đạt đến biên độ cực đại. Nói một cách đơn giản hơn, sự cộng hưởng xảy ra khi một hệ dao động được điều khiển ở tần số làm khuếch đại cực đại dao động của nó.

Ta minh họa hiện tưởng cộng hưởng bằng thí dụ ở Mục 1.2.3. Giả sử vật thể chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang chịu tác động của lò xo với hệ số giãn nở k và lực ma sát của vật thể với mặt nằm ngang có hệ số ma sát μ. Ngoài ra, vật cũng chịu thêm tác động của ngoại lực có cường độ $f(t)$. Ký hiệu $y(t)$ là vị trí của vật tại thời điểm t. Bằng lý luận tương tự như trong Mục 1.2.3, ta nhận được một phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t). \tag{3.4.10}$$

e1.7b

Xét trường hợp khi ngoại lực tác động vào vật thể là hàm tuần hoàn theo thời gian. Giả sử $f(t) = F_0 \sin\omega t$, với $F_0 \geqslant 0$ và $\omega > 0$. Đặt

$$a = \mu/2m,\ \ \omega_0 = \sqrt{k/m}\ \text{ và }\ c = F_0/m.$$

Khi đó, (3.4.10) có dạng một phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng

$$y''(t) + 2ay'(t) + \omega_0^2 y(t) = c\sin\omega t. \tag{3.4.11}$$

e1.7b1

Phương trình đặc trưng của (3.4.11) là $\lambda^2 + 2a\lambda + \omega_0^2 = 0$, có hai nghiệm

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_0^2}.$$

Trường hợp $\mu > 0$, ta có $a > 0$, suy ra $\pm i\omega$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Theo mục 3.4.3 về cách tìm nghiệm của phương trình tuyến tính với vế phải đặc biệt, phương trình (3.4.11) có nghiệm tổng quát dạng

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y^\star(t),$$

ở đó $y^\star = p\cos\omega t + q\sin\omega t$, là một nghiệm riêng của (3.4.11) và y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất ứng với (3.4.11). Trong đó,

$$p = \frac{-2ac\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2} \quad \text{và} \quad q = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)c}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}.$$

Giả sử ϕ là đại lượng xác định bởi $\tan\phi = -\dfrac{2a\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$, khi đó nghiệm riêng $y^\star$ được viết lại dưới dạng

$$y^\star(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

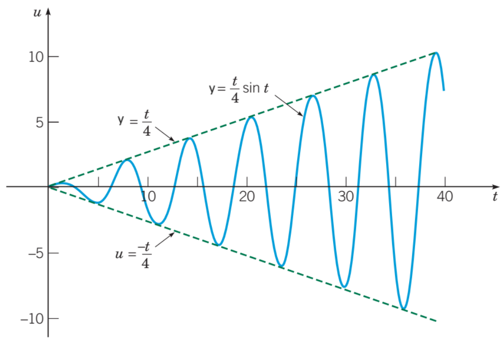
với biên độ dao động

$$A = \frac{c}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}.$$

Vì $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$ nên $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = \lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0$. Do đó, khi $t \to \infty$, biên độ dao động của nghiệm $y(t)$ phụ thuộc vào $y^\star$. Từ công thức trên của $y^\star$ ta suy ra biên độ dao động A đạt cực đại khi

$$\omega = \omega_{\max} = \begin{cases} \sqrt{\omega_0^2 - 2a^2}, & \text{nếu } \omega_0^2 > 2a^2 \\ 0, & \text{nếu } \omega_0^2 \leqslant 2a^2. \end{cases}$$

Nói cách khác, hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi ta có $\omega = \omega_{\max}$ như trên. Khi đó, biên độ cộng hưởng cực đại là h4.1.9



Hình 3.2: Biên độ dao động của nghiệm phương trình (3.4.12) tăng vô hạn

$$A_{\max} = \begin{cases} \dfrac{F_0}{\mu\omega_0\sqrt{1-\mu^2/4mk}} & \text{nếu } \omega_0^2 > 2a^2, \\ \dfrac{F_0}{m\omega_0^2} & \text{nếu } \omega_0^2 \leqslant 2a^2. \end{cases}$$

Trường hợp giữa vật thể và mặt phẳng không có lực ma sát ($\mu = 0$) và $\omega = \omega_0$, ta nhận được phương trình

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = c\cos\omega_0 t. \qquad (3.4.12)$$ e1.7b2

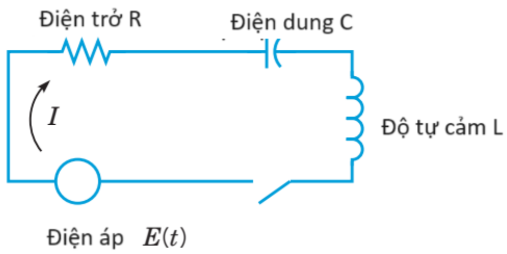
Với điều kiện ban đầu $y(0) = 0, y'(0) = 0$, ta tìm được nghiệm của (3.4.12) là

$$y(t) = \frac{ct}{2\omega_0}\sin\omega_0 t,$$

và có $\limsup_{t\to\infty} y(t) = +\infty$. Hình vẽ 3.2 minh họa độ rung lắc mạnh của vật theo thời gian khi lực ma sát bằng không và tần số ngoại lực tác động vào hệ trùng với tần số dao động riêng ω_0, hiện tượng cộng hưởng xảy ra.

2. Hiện tượng cộng hưởng trong mạch điện mắc nối tiếp

Trong ví dụ tiếp theo, ta xét mạch điện nối tiếp đơn giản như trong Hình 3.3. Ở đó, điện trở R điện dung C và độ tự cảm L là các đại lượng cố định đã biết. Cường độ dòng điện $I(t)$ trong mạch điện, điện áp $E(t)$ là các hàm số biến thiên theo thời gian t. Gọi $q(t)$ là điện tích trên tụ điện C tại thời điểm t. Theo định luật Kirchoff về tổng điện áp trong mạch kín, ta có



Hình 3.3: Mạch điện mắc nối tiếp h4.1.10

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}q(t) = E(t).$$

Do cường độ dòng điện trong mạch $I(t) = dq(t)/dt$, ta thu được phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng cho điện tích $q(t)$,

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t).$$

Giả sử điện áp $E(t) = F_0\cos\omega t$, ta đặt $a = \dfrac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \dfrac{1}{CL}$, $c = \dfrac{F_0}{L}$. Khi đó, phương trình trên có dạng

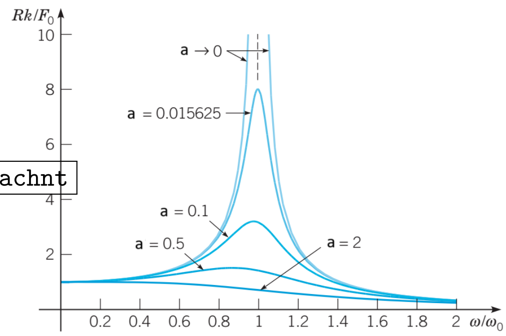
$$q''(t) + 2aq'(t) + \omega_0^2 q(t) = c\cos\omega t. \quad (3.4.13)$$

machnt

Trường hợp $c = 0$ (không có điện áp) và $a^2 < \omega_0^2$ thì tổng điện tích q trên tụ điện C là

$$q(t) = e^{-at}(C_1\cos\overline{\omega}t + C_2\sin\overline{\omega}t),$$

ở đó $\overline{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$ là tần số dao động của hệ.



Hình 3.4: Nghiệm của hệ (3.4.13) với giá trị a khác nhau h4.1.11

Xét trường hợp $c \neq 0$ và điều kiện ban đầu là $q(0) = 0, q'(0) = I(0) = 0$. Bằng cách phân tích tương tự như trên, ta có điện tích q trên tụ điện C là

$$q(t) = \frac{c}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Mạch điện sẽ xảy ra hiện tượng cộng hưởng khi $\omega^2 = \omega_0^2 - 2a^2$. Nếu đồng thời điện trở R khá nhỏ (do đó a khá nhỏ) thì điện tích q trên tụ điện C sẽ rất lớn và gây tổn hại cho mạch điện.

Vì thế, trong các mạch điện, sự cộng hưởng có thể làm tăng dòng điện hoặc điện áp và chúng ta phải cân nhắc khi thiết kế và vận hành các thiết bị như máy biến áp hoặc ăng-ten. Sự phụ thuộc của biên độ điện tích vào các trị của tham số R, L, C và tần số ω được thể hiện trong Hình 3.4 với $a = \frac{R}{2L}$.

Một trong những ứng dụng của lý thuyết cộng hưởng là *chụp cộng hưởng từ* hay còn gọi là chụp MRI (viết tắt của của cụm từ Magnetic Resonance Imaging). Đây là kỹ thuật điều chỉnh tần số sóng từ trường và sóng radio để tạo ra hình cắt lớp. Sóng từ trường và sóng radio khi được điều chỉnh ở tần số thích hợp sẽ tạo ra cộng hưởng trong các dao động của các nguyên tử hydrogen trong cơ thể con người, làm cho chúng giải phóng ra năng lượng dưới dạng tín hiệu và truyền về máy tính. Sau đó, hệ thống máy chụp sẽ thu nhận những tín hiệu này và chuyển đổi thành hình ảnh.

Hình 3.5: Máy chụp cộng hưởng từ

3.5 Phương trình Euler

tt5

Định nghĩa 3.5.1. Cho các hằng số thực α, β và khoảng $I = (a, b)$ không chứa 0. Khi đó, phương trình tuyến tính cấp hai có dạng

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \; x \in I, \tag{3.5.1}$$

3.5.1

được gọi là phương trình Euler.

Phương pháp giải: Ta tìm cách đưa (3.5.1) về phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng với hàm cần tìm $y = y(u)$. Vì $0 \notin I$ nên đặt $u = \ln|x|$ ta có $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$ với mọi $x \in I$ và

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{du}, \qquad y'' = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\Big) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{du^2}. \tag{3.5.2}$$

Ole

Thay vào phương trình (3.5.1) ta được

$$\frac{d^2y}{du^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{du} + \beta y = 0. \tag{3.5.3}$$

3.5.2

Đây là phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng có phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + (\alpha - 1)\lambda + \beta = 0.$$

i) Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt λ_1, λ_2 thì nghiệm tổng quát của (3.5.3) là

$$y(u) = C_1 e^{\lambda_1 u} + C_2 e^{\lambda_2 u} = C_1|x|^{\lambda_1} + C_2|x|^{\lambda_2},$$

với C_1, C_2 là hằng số thực bất kỳ. Vậy nghiệm tổng quát của (3.5.1) là

$$y(x) = C_1|x|^{\lambda_1} + C_2|x|^{\lambda_2}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm bội λ thì nghiệm tổng quát của (3.5.3) là

$$y(u) = e^{\lambda u}(C_1 + C_2 u),$$

hay nghiệm cần tìm của (3.5.1) là

$$y(x) = |x|^{\lambda_1}\big(C_1 + C_2 \ln|x|\big), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

iii) Phương trình đặc trưng có nghiệm phức $\lambda = \alpha \pm i\beta$ thì nghiệm của (3.5.3) là

$$y(u) = e^{\alpha u}\big[C_1\cos(\beta u) + C_2\sin(\beta u)\big],$$

nên nghiệm tổng quát của (3.5.1) là

$$y(x) = |x|^{\alpha}\big[C_1\cos(\beta\ln|x|) + C_2\sin(\beta\ln|x|)\big], \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3.5.2. a. Giải phương trình

$$(x-2)^2y'' + 7(x-2)y' + 10y = 0, \;\; x > 2.$$

b. Tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \;\; x < 0 \quad \text{biết} \;\; y(-1) = 2, y'(-1) = 3.$$

Giải: a. Đặt $u = \ln(x-2)$. Tương tự như (3.5.2), ta có

$$y' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x-2}\frac{dy}{du}, \qquad y'' = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x-2}\frac{dy}{du}\Big) = -\frac{1}{(x-2)^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{(x-2)^2}\frac{d^2y}{du^2}.$$

Thay vào phương trình đã cho ta được phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng

$$y'' + 6y' + 10y = 0.$$

Ta dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình này là

$$y = e^{-3u}(C_1 \cos u + C_2 \sin u), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (x-2)^{-3}\big[C_1 \cos \ln(x-2) + C_2 \sin \ln(x-2)\big], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b. Đặt $u = \ln|x|$. Theo (3.5.2) và (3.5.3) , ta có

$$\frac{d^2y}{du^2} - 4\frac{dy}{du} + 4y = 0.$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng có phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \text{ có nghiệm kép } k_1 = k_2 = 2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{2u}(C_1 + C_2 u) = x^2(C_1 + C_2 \ln|x|), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $y' = 2C_1 x + C_2(x + 2x\ln|x|)$. Vì $y(-1) = 2, y'(-1) = 3$ nên

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ -2C_1 - C_2 = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -7 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm cần tìm của bài toán đã cho là $y = x^2(2 - 7\ln|x|)$.

Ví dụ 3.5.3 (**Thế năng điện của một vỏ cầu tích điện).** Điện thế $V(x, y, z)$ ở một điểm (x, y, z) bên ngoài một mặt cầu đơn vị được tích điện là một hàm theo khoảng cách từ điểm này đến tâm hình cầu $(0, 0, 0)$, tức là tồn tại hàm u sao cho $V = u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Ta biết toán tử Laplace $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ mô tả cách thức điện thế V thay đổi trong không gian và so sánh giá trị V với giá trị trung bình trong một lân cận của nó. Do hệ không có nguồn cung cấp thêm cũng như không bị tiêu hao nên theo định luật bảo toàn điện tích ta có

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Khi đó,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + 2r\frac{du}{dr} = 0.$$

Phương trình trên chính là phương trình Euler.

Phương trình đặc trưng của nó $\lambda^2 + \lambda = 0$ có hai nghiệm $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = -1$. Vì vậy nghiệm tổng quát của nó là $u(r) = C_1 + \frac{C_1}{r}$. Khi $r \to \infty$ điện thế $u(r) \to 0$ nên $C_1 = 0$. Mặt khác khi $r = 1$ thì $u(1) = k$ là mật độ điện tích trên mặt cầu nên $C_1 = k$. Như vậy

$$u(r) = \frac{k}{r},$$

phù hợp với Định luật Cu-lông.

3.6 Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

Trong nội dung tiếp theo ta nghiên cứu về phương trình vi phân tuyến tính cấp n. Tất cả các kết quả liên quan đến phương trình vi phân tuyến tính cấp hai đã được trình bày trong mục trước đều có thể chuyển sang cho phương trình tuyến tính cấp cao hơn. Ở một số nội dung, vì cách chứng minh tương tự nên ta chỉ nêu kết quả mà không đưa ra chứng minh chi tiết.

3.6.1 Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n là phương trình có dạng

$$A_0(x)y^{(n)}(x) + A_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + A_{n-1}(x)y'(x) + A_n(x)y(x) = B(x),$$

ở đó các hàm $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x), B(x)$ xác định, liên tục trên tập $I = (a, b)$ và $y^{(k)}(x)$ là đạo hàm cấp k của hàm cần tìm $y = y(x)$, với $k = \overline{1, n}$.

Khi $A_0(x) \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $A_0(x)$ ta nhận được dạng chính tắc của phương trình vi phân tuyến tính cấp n

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = q(x). \tag{3.6.1}$$

3.7.1

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình này được chỉ ra trong Hệ quả 4.1.2 của Chương 4.

Trường hợp $q(x) \equiv 0$, ta có phương trình thuần nhất tương ứng với (3.6.1)

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0.$$

Khi các hàm $p_i(x), i = \overline{1, n}$ không phụ thuộc theo biến x (nghĩa là $p_i(x) \equiv p_i \in \mathbb{R}$), phương trình (3.6.1) trở thành

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}y'(x) + p_n y(x) = q(x),$$

và được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp n hệ số hằng.

3.6.2 Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0. \qquad (3.6.2)$$ $\boxed{3.7.2}$

Trước khi khảo sát các tính chất nghiệm của phương trình (3.6.2), ta đưa ra định nghĩa và tính chất của họ hàm độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính và định thức Wronski của một họ các hàm số tương tự như Mục 3.3.

Định nghĩa 3.6.1 (Họ hàm độc lập tuyến tính)**.**
i) Họ các hàm số $\{\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\}$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại các hằng số $C_1, C_2, \ldots, C_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}_n(x) = 0, \quad \text{với mọi } x \in I.$$

ii) Họ hàm $\{\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\}$ không phụ thuộc tuyến tính thì ta nói nó là *độc lập tuyến tính*. Nghĩa là, nếu có các hằng số $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sao cho

$$C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}_n(x) = 0,$$

với mọi $x \in I$ thì $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Định nghĩa 3.6.2 (Định thức Wronski)**.** Xét $\{\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\}$ là họ các hàm khả vi đến cấp $n-1$ trên I. *Định thức Wronski* của họ hàm này là hàm số $W : I \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$W(x) = W_{[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n]}(x) = \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1(x) & \mathbf{y}_2(x) & \ldots & \mathbf{y}_n(x) \\ \mathbf{y}_1'(x) & \mathbf{y}_2'(x) & \ldots & \mathbf{y}_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mathbf{y}_1^{(n-1)}(x) & \mathbf{y}_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \mathbf{y}_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Định lý 3.6.1. *Nếu $\{\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\}$ là họ các hàm số khả vi đến cấp $n-1$ và phụ thuộc tuyến tính trên $I = (a, b)$ thì*

$$W_{[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n]}(x) = 0, \text{ với mọi } x \in I.$$

Chứng minh. Tương tự như việc chứng minh Định lý 3.3.2 □

Từ định lý trên, ta có thể xét tính độc lập hay phụ thuộc tuyến tính của họ hàm $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ thông qua định thức Wronski của chúng như sau

Nhận xét 3.6.3. *i) Nếu* $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x) \not\equiv 0$ *thì họ hàm* $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ *là độc lập tuyến tính.*
ii) Nếu họ hàm $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ *phụ thuộc tuyến tính thì* $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x) \equiv 0$*, nhưng điều ngược lại có thể không đúng.*
iii) Tuy nhiên, nếu $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *là các nghiệm của phương trình* (3.6.2) *thì điều kiện cần và đủ cho tính phụ thuộc tuyến tính của họ hàm đó là* $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x) \equiv 0.$

Ví dụ 3.6.4. Xét tính độc lập tuyến tính của họ các hàm sau. Khi họ hàm là phụ thuộc tuyến tính, tìm biểu diễn tuyến tính của họ hàm đó.

a. $y_1 = 2x - 3, y_2 = x^2 + 1, y_3 = 2x^2 - x, y_4 = \dfrac{1}{x}, \ \ (x \neq 0).$

b. $y_1 = 2x - 3, y_2 = 2x^2 + 1, y_3 = 3x^2 + x.$

Giải: a. Khi $x \neq 0$, ta có

$$W(x) = \begin{vmatrix} 2x-3 & x^2+1 & 2x^2-x & 1/x \\ 2 & 2x & 4x-1 & -1/x^2 \\ 0 & 2 & 4 & 2/x^3 \\ 0 & 0 & 0 & -6/x^4 \end{vmatrix} = \frac{84}{x^4} \neq 0.$$

Vậy họ hàm đã cho là độc lập tuyến tính.

b. Ta có

$$W(x) = \begin{vmatrix} 2x-3 & 2x^2+1 & 3x^2+x \\ 2 & 4x & 6x+1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

ta chưa kết luận được tính độc lập hay phụ thuộc tuyến tính của họ hàm y_1, y_2, y_3. Ta xét tính độc lập hay tuyến tính của họ hàm theo định nghĩa. Giả sử có các hằng số C_1, C_2, C_3 thỏa mãn

$$C_1(2x-3) + C_2(2x^2+1) + C_3(3x^2+x) = 0,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Lần lượt cho x nhận các giá trị $-1, 0, 1$ ta được

$$-5C_1 + 3C_2 + 2C_3 = 0, \ \ -3C_1 + C_2 = 0, \ \ -C_1 + 3C_2 + 5C_3 = 0.$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm, tức tồn tại C_1, C_2, C_3 không đồng thời bằng 0 thỏa mãn hệ thức trên. Vậy họ hàm đã cho phụ thuộc tuyến tính. Cho $C_1 = 1$, ta được $C_2 = 3, C_3 = -2$. Ta có biểu diễn tuyến tính của họ hàm đã cho là

$$y_1 + 3y_2 - 2y_3 = 0.$$

Tiếp theo, để tìm định thức Wronski của họ các nghiệm $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ của phương trình (3.6.2), ta có định lý sau.

Định lý 3.6.2 (Công thức Ostrogradsky–Liouville)**.** *Nếu* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *là* n *nghiệm của phương trình* (3.6.2) *thì*

$$W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x) = W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(s)ds}, \qquad (3.6.3)$$ Wronski

với x_0 *bất kỳ thuộc* I*.*

Chứng minh. Để ngắn gọn trong cách trình bày ta chứng minh Định lý cho trường hợp $n = 3$, với n lớn hơn ta có thể chứng minh tương tự. Giả sử $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ là các nghiệm của phương trình vi phân cấp 3

$$y'''(x) + p_1(x)y''(x) + p_2(x)y'(x) + p_3(x)y(x) = 0.$$

Khi đó

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 \\ \mathbf{y}_1' & \mathbf{y}_2' & \mathbf{y}_3' \\ \mathbf{y}_1'' & \mathbf{y}_2'' & \mathbf{y}_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1' & \mathbf{y}_2' & \mathbf{y}_3' \\ \mathbf{y}_1' & \mathbf{y}_2' & \mathbf{y}_3' \\ \mathbf{y}_1'' & \mathbf{y}_2'' & \mathbf{y}_3'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 \\ \mathbf{y}_1'' & \mathbf{y}_2'' & \mathbf{y}_3'' \\ \mathbf{y}_1'' & \mathbf{y}_2'' & \mathbf{y}_3'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 \\ \mathbf{y}_1' & \mathbf{y}_2' & \mathbf{y}_3' \\ \mathbf{y}_1''' & \mathbf{y}_2''' & \mathbf{y}_3''' \end{vmatrix}.$$

Vì $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ là các nghiệm của phương trình (3.6.2) nên ta có

$$\mathbf{y}_i''' = -p_1\mathbf{y}_i'' - p_2\mathbf{y}_i' - p_3\mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Kết hợp kết quả trên với các tính chất của định thức ta có

$$\frac{d}{dx}W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3]}(x) = \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 \\ \mathbf{y}_1' & \mathbf{y}_2' & \mathbf{y}_3' \\ -p_1\mathbf{y}_1'' & -p_1\mathbf{y}_2'' & -p_1\mathbf{y}_3'' \end{vmatrix} = -p_1W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3]}(x).$$

Lấy tích phân hai vế biểu thức trên ta được kết quả cần chứng minh. □

hq.3.2b **Hệ quả 3.6.3.** *Giả sử* $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x)$ *là định thức Wronski của họ nghiệm* $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ *của phương trình* (3.6.2)*. Khi đó*

i) Hoặc $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x) \equiv 0$*, hoặc* $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x) \neq 0$*, với mọi* $x \in I$*.*

ii) Trong trường hợp $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x) \equiv 0$*, họ hàm* $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ *là phụ thuộc tuyến tính.*

Từ các tính chất của nghiệm của phương trình (3.6.2), ta có kết quả sau về hệ nghiệm cơ bản của phương trình.

dl3.4b **Định lý 3.6.4.** *i) Tập hợp các nghiệm của phương trình* (3.6.2) *là một không gian tuyến tính* n *chiều.*

ii) Cơ sở của không gian nghiệm (hệ nghiệm cơ bản) của phương trình (3.6.2) *có thể chọn là các nghiệm độc lập tuyến tính bất kỳ* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *của phương trình đó, nghĩa là các nghiệm có* $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x_0) \neq 0$ *tại* $x_0 \in I$ *nào đó.*

3.6.3 Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n hệ số hằng

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = 0, \qquad (3.6.4)$$ 3.7.1b

trong đó $p_1, p_2, ..., p_n$ là các hằng số. Phương trình này có phương trình đặc trưng

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \qquad (3.6.5)$$ dx

Để giải phương trình (3.6.4), ta xét các trường hợp của phương trình đặc trưng như sau'

Trường hợp 1: Phương trình đặc trưng (3.6.5) *có n nghiệm thực phân biệt.*

Giả sử phương trình đặc trưng có các nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Khi đó họ hàm $\left\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}\right\}$ tạo thành hệ nghiệm cơ bản của phương trình (3.6.4). Như vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (3.6.4) là

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}, \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: Phương trình đặc trưng có nghiệm bội

Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm thực α với bội d. Khi đó các hàm số $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, ..., x^{d-1}e^{\alpha x}$ là các nghiệm của phương trình (3.6.4), Hơn nữa các nghiệm này độc lập với nhau.

Như vậy, nếu phương trình đặc trưng (3.6.5) có các nghiệm thực

$$\lambda_1 \text{ (bội } d_1), \ \lambda_2 \text{ (bội } d_2), ..., \lambda_m \text{ (bội } d_m), \ \text{với } d_1 + d_2 + \cdots d_m = n,$$

thì họ

$$\left\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{d_1-1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, ..., x^{d_2-1}e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, ..., x^{d_m-1}e^{\lambda_m x}\right\}$$

tạo thành họ nghiệm cơ bản của phương trình (3.6.4). Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (3.6.4) là

$$\begin{aligned} y = &\left(C_{11} + C_{12}x + \cdots + C_{1d_1}x^{d_1-1}\right)e^{\lambda_1 x} + \left(C_{21} + C_{22}x + \cdots + C_{2d_2}x^{d_2-1}\right)e^{\lambda_2 x} \\ &+ \cdots + \left(C_{m1} + C_{m2}x + \cdots + C_{md_m}x^{d_m-1}\right)e^{\lambda_m x}, \end{aligned}$$

với $C_{ij} \in \mathbb{R}$ với mọi $i = 1, 2, ..., m$ và $j = 1.2...., d_i$.

Trường hợp 3: Phương trình đặc trưng có nghiệm phức

Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức $\lambda = \alpha + i\beta$ bội k thì $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ cũng là mghiệm phức của phương trình đặc trưng bội k. Khi đó các hàm số

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, \ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

tạo thành $2k$ nghiệm độc lập tuyến tính phương trình (3.6.4). Giả thiết thêm các nghiệm còn lại của phương trình đặc trưng $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\}$ là nghiệm thực với các bội tương ứng $d_1,d_2,...,d_m$ với $d_1+d_2+\cdots+d_m=n-2k$. Trong trường hợp này, nghiệm tổng quát của phương trình (3.6.4) là

$$\begin{aligned} y &= \left(C_{11}+C_{12}x+\cdots+C_{1d_1}x^{d_1-1}\right)e^{\lambda_1 x}+\cdots+\left(C_{m1}+\cdots+C_{md_m}x^{d_m-1}\right)e^{\lambda_m x}\\ &+\left(B_{11}+B_{12}x+\cdots+B_{1k}x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x+\left(A_{11}+\cdots+A_{1k}x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.6.5. Giải phương trình

$$y^{(5)}-2y^{(4)}+2y^{(3)}-4y''+y'-2y=0.$$

Giải: Phương trình đặc trưng tương ứng với phương trình đã cho là

$$\lambda^5-2\lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda-2=0.$$

Phương trình này có nghiệm

$$\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=\pm i,\ (\text{bội } 2).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất đã cho là

$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3x\cos x+C_4\sin x+C_5x\sin x,$$

với mọi hằng số $C_1,\dots,C_5\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.6.6. Tìm nghiệm của phương trình

$$y^{(4)}+y'''-7y''-y'+6y=0,$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=-2, y'''(0)=-1$.

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho

$$\lambda^4+\lambda^3-7\lambda^2-\lambda+6=0,$$

có 4 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1=-3,\lambda_2=-1,\lambda_3=1,\lambda_4=2$. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-3x},$$

với $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$. Từ các điều kiện ban đầu ta suy ra

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1, \\ C_1 - C_2 + 2C_3 - 3C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 + 4C_3 + 9C_4 = -2, \\ C_1 - C_2 + 8C_3 - 27C_4 = -1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được

$$C_1 = 11/8,\ C_2 = 5/12,\ C_3 = -2/3,\ C_4 = -1/8.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho có dạng

$$y = \frac{11}{8}e^{x} + \frac{5}{12}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-3x}.$$

3.6.4 Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

BTHS

Nguyên lý chồng chất nghiệm

thm1.5.6 **Định lý 3.6.5** (Nguyên lý chồng chất nghiệm)**.** *Giả sử $y_i(x), i = 1, 2, ..., k$ là nghiệm phương trình*

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = q_i(x).$$

Khi đó với các hằng số $C_i \in \mathbb{R}$ bất kỳ thì

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(x),$$

là nghiệm phương trình

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i q_i(x).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất

Định lý 3.6.6 (Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất)**.** *Giả sử $y^\star(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất* (3.6.1) *và*

$$C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}_n(x), \quad \text{với } C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (3.6.2) *tương ứng. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình* (3.6.1) *có dạng*

$$y(x) = y^\star(x) + C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}_n(x). \tag{3.6.6}$$ 3.6.1

Trong nội dung tiếp theo, ta trình bày phương pháp biến thiên hằng số Lagrange để tìm nghiệm riêng của phương trình (3.6.1) khi đã biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (3.6.2) tương ứng.

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange: Để tìm nghiệm riêng của phương trình (3.6.1) ta sử dụng phương pháp biến thiên hằng số tương tự như đã trình bày đối với tìm nghiệm phương trình tuyến tính cấp hai. Xuất phát từ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất ứng với (3.6.1) là

$$y(x) = C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}_n(x), \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

ta *biến thiên các hằng số* $C_1, C_2, ..., C_n$ thành các hàm $\mathbf{C}_1(x), \mathbf{C}_2(x), \ldots, \mathbf{C}_n(x)$ để

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1(x)\mathbf{y}_1(x) + \mathbf{C}_2(x)\mathbf{y}_2(x) + \cdots + \mathbf{C}_n(x)\mathbf{y}_n(x). \tag{3.6.7}$$ 3

là nghiệm của phương trình (3.6.1).

Để ngắn gọn trong trình bày ta viết $\mathbf{C}_i$ thay vì $\mathbf{C}_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Thông thường, ta sẽ tìm các hàm $\mathbf{C}_i$ bằng cách thay trực tiếp $\mathbf{y}$ vào phương trình (3.6.1) rồi đồng nhất hai vế để có được các điều kiện xác định các hàm $\mathbf{C}_i$. Tuy nhiên, để tránh phức tạp khi phải giải hệ các phương trình vi phân cấp cao đối với $\mathbf{C}_i$, ta đặt các điều kiện để loại bỏ các số hạng dẫn đến đạo hàm cấp cao hơn của $\mathbf{C}_i$ theo cách như sau.

Đạo hàm hai vế biểu thức (3.6.7) ta thu được

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1 + \mathbf{C}_2'\mathbf{y}_2 + \cdots + \mathbf{C}_n'\mathbf{y}_n + C_1\mathbf{y}_1' + C_2\mathbf{y}_2' + \cdots + C_n\mathbf{y}_n'.$$

Chọn điều kiện thứ nhất cho các hàm $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ thỏa mãn

$$\mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1 + \mathbf{C}_2'\mathbf{y}_2 + \cdots + \mathbf{C}_n'\mathbf{y}_n = 0. \tag{3.6.8}$$ 5

Khi đó ta có

$$\mathbf{y}' = C_1\mathbf{y}_1' + C_2\mathbf{y}_2' + \cdots + C_n\mathbf{y}_n'.$$

Lấy đạo hàm hai vế biểu thức trên và đặt điều kiện

$$\mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1' + C_2'\mathbf{y}_2' + \cdots + C_n'\mathbf{y}_n' = 0, \tag{3.6.9}$$ 7

ta thu được

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{C}_1\mathbf{y}_1'' + \mathbf{C}_2\mathbf{y}_2'' + \cdots + \mathbf{C}_n\mathbf{y}_n''.$$

Tiếp tục quá trình trên, đặt các điều kiện tương ứng cho đến đạo hàm cấp $n - 1$ của nghiệm $\mathbf{y}(x)$ ta được

$$\mathbf{y}^{(n-1)} = \mathbf{C}_1\mathbf{y}_1^{(n-1)} + \mathbf{C}_2\mathbf{y}_2^{(n-1)} + \cdots + \mathbf{C}_n\mathbf{y}_n^{(n-1)},$$

với điều kiện
$$\mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1^{(n-2)} + \mathbf{C}_2'\mathbf{y}_2^{(n-2)} + \cdots + \mathbf{C}_n'\mathbf{y}_n^{(n-2)} = 0.$$

Khi đó $\mathbf{y}^{(n)}$ ta được

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{C}_1\mathbf{y}_1^{(n)} + \mathbf{C}_2\mathbf{y}_2^{(n)} + \cdots + \mathbf{C}_n\mathbf{y}_n^{(n)} + \mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1^{(n-1)} + \mathbf{C}_2'\mathbf{y}_2^{(n-1)} + \cdots + \mathbf{C}_n'\mathbf{y}_n^{(n-1)}.$$

Thay $\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2'', \ldots, \mathbf{y}_n^{(n)}$ vào phương trình (3.6.1) và tổng hợp các điều kiện ta được hệ

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1 \ + \ \mathbf{C}_2'\mathbf{y}_2 \ + \ \cdots \ + \ \mathbf{C}_n'\mathbf{y}_n = 0, \\ \mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1' \ + \ \mathbf{C}_2'\mathbf{y}_2' \ + \ \cdots \ + \ \mathbf{C}_n'\mathbf{y}_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1^{(n-2)} + \mathbf{C}_2'\mathbf{y}_2^{(n-2)} + \cdots + \mathbf{C}_n'\mathbf{y}_n^{(n-2)} = 0, \\ \mathbf{C}_1'\mathbf{y}_1^{(n-1)} + \mathbf{C}_2'\mathbf{y}_2^{(n-1)} + \cdots + \mathbf{C}_n'\mathbf{y}_n^{(n-1)} = q. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\mathbf{C}_1(x) = \int \frac{q(x)W_1(x)}{W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x)}dx, \ \ldots, \ \mathbf{C}_n(x) = \int \frac{q(x)W_n(x)}{W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x)}dx,$$

ở đó $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x)$ là định thức Wronski của $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ được xác định bởi (3.6.3) và $W_i(x), i = \overline{1,n}$ là định thức thu được từ $W_{[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n]}(x)$ bằng cách thay thế cột thứ i bởi cột $(0, \ldots, 0, 1)^\top$.

Ví dụ 3.6.7. Giải phương trình $y''' - y'' - y' + y = e^{2x}$.

Giải: Phương trình đặc trưng tương ứng của phương trình đã cho là

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

có nghiệm $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = -1$. Vậy phương trình thuần nhất có hệ nghiệm cơ bản
$$\{e^x, xe^x, e^{-x}\}.$$

Khi đó định thức Wronski của hệ nghiệm trên là

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & xe^x + e^x & -e^{-x} \\ e^x & xe^x + 2e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 4e^x, \qquad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^x & e^{-x} \\ 0 & xe^x + e^x & -e^{-x} \\ 1 & xe^x + 2e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = -(2x+1).$$

Tương tự ta tính được $W_2(x) = 2, \ W_3(x) = e^{2x}$. Do đó

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}(2x+1)}{4e^x}dx = -\frac{e^x(2x-1)}{4} + K_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{2e^{2x}}{4e^x}dx = \frac{e^x}{2} + K_2,$$

$$C_3(x) = \int \frac{e^{2x}e^{2x}}{4e^x}dx = \frac{e^{3x}}{12} + K_3.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\begin{aligned} y &= \Big(-\frac{e^x(2x-1)}{4} + K_1\Big)e^x + \Big(\frac{e^x}{2} + K_2\Big)xe^x + \Big(\frac{e^{3x}}{12} + K_3\Big)e^{-x} \\ &= \Big(K_1 + K_2 x\Big)e^x + K_3 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}, \quad K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.6.5 Phương trình tuyến tính hệ số hằng có vế phải đặc biệt

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange dẫn đến việc tính $n+1$ định thức cấp n. Điều này dẫn đến lượng phép tính rất nhiều khi n khá lớn. Vì vậy trong mục này ta đưa ra phương pháp khác để tìm nghiệm riêng trong một số trường hợp đặc biệt của vế phải cho phương trình tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}y'(x) + p_n y(x) = q(x). \tag{3.6.10}$$ 3.7.1c

Phương trình đặc trưng tương ứng với phương trình trên là

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_1\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \tag{3.6.11}$$ 10

Ta xét một số trường hợp đặc biệt của hàm số vế phải $q(x)$ như sau

Trường hợp 1. Hàm $q(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, với $P_n(x)$ là một đa thức bậc n theo biến x.

i) Nếu α không phải là nghiệm của phương trình (3.6.11) thì ta tìm nghiệm riêng $y^\star$ dưới dạng

$$y^\star = e^{\alpha x}Q_n(x),$$

với $Q_n(x)$ là đa thức cần tìm, cùng bậc với $P_n(x)$.

ii) Nếu α là nghiệm thực của phương trình (3.6.11) với bội m thì ta tìm nghiệm riêng $y^\star$ dưới dạng

$$y^\star = e^{\alpha x}x^m Q_n(x),$$

với $Q_n(x)$ là đa thức cần tìm, cùng bậc với $P_n(x)$.

Các hệ số của các đa thức $P_n(x)$ và $Q_n(x)$ được xác định nhờ phương pháp *hệ số bất định*, nghĩa là ta tính các đạo hàm của $y^\star$, thay vào phương trình (3.6.10) rồi cân bằng các số hạng.

Trường hợp 2. Hàm $q(x) = e^{\alpha x}(P_{n_1}(x)\cos\beta x + Q_{n_2}(x)\sin\beta x)$, với P_{n_1} là đa thức bậc n_1, Q_{n_2} là đa thức bậc n_2 theo biến x.

i) Nếu $\alpha + i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình (3.6.11) thì ta tìm nghiệm riêng $y^\star$ dưới dạng

$$y^\star = e^{\alpha x}(L_m(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x),$$

với L_m và N_m là hai đa thức cần tìm, có bậc là $m = \max\{n_1, n_2\}$.

ii) Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội k của phương trình (3.6.11) thì ta tìm nghiệm riêng $y^\star$ dưới dạng

$$y^\star = e^{\alpha x}x^k(L_m(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x),$$

với L_m và N_m là hai đa thức cần tìm, có bậc là $m = \max\{n_1, n_2\}$.

Ví dụ 3.6.8. Giải phương trình vi phân cấp 4 không thuần nhất

$$y^{(4)} - 3y'' - 4y = e^x \sin x.$$

Giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4 = 0$ có 4 nghiệm

$$\lambda_{1,2} = \pm 2, \ \ \lambda_{3,4} = \pm i,$$

nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng có dạng

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos x + C_4\sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Xét vế phải $q(x) = e^x \sin x$ có $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng $y^\star(x)$ của phương trình có dạng

$$y^\star(x) = e^x(A\cos x + B\sin x).$$

Ta tính các đạo hàm của $y^\star(x)$

$$\begin{aligned}
{y^\star}'(x) &= e^x[(A+B)\cos x + (B-A)\sin x],\\
{y^\star}''(x) &= e^x[2B\cos x - 2A\sin x],\\
{y^\star}'''(x) &= e^x[2(B-A)\cos x - 2(A+B)\sin x],\\
y^{\star(4)}(x) &= e^x[-4A\cos x - 4B\sin x].
\end{aligned}$$

Thay $y^\star(x)$ và các đạo hàm vào phương trình đã cho ta tìm được

$$e^x[(-8A - 6B)\cos x + (6A - 8B)\sin x] = e^x \sin x.$$

Đồng nhất hai vế ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -8A - 6B = 0, \\ 8A - 8B = 1. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{50}, \ \ B = -\frac{4}{50}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho có dạng

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{e^x}{50}\left(3\cos x - 4\sin x\right).$$

3.6.6 Giảm cấp phương trình vi phân tuyến tính

1. Giảm cấp phương trình vi phân tuyến tính cấp ba khi biết một nghiệm

Xét phương trình

$$p_0(x)y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = q(x). \tag{3.6.12}$$ ptgc

Giả sử, u là một nghiệm của phương trình thuần nhất ứng với (3.6.12), tức là

$$p_0(x)u''' + p_1(x)u'' + p_2(x)u' + p_3(x)u = 0.$$

Đặt $y(x) = u(x)z(x)$, phương trình (3.6.12) trở thành

$$p_0uz''' + (3p_0u' + p_1u)z'' + (3p_0u'' + 2p_1u' + p_2u)z' = q(x).$$

Nếu đặt $v = z'$ ta nhận được phương trình

$$p_0uv'' + (3p_0u' + p_1u)v' + (3p_0u'' + 2p_1u' + p_2u)v = q(x).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai mà ta đã biết cách giải ở mục trước.

Ví dụ 3.6.9. Giải phương trình

$$(2-x)y''' + (2x-3)y'' - xy' + y = 0, \quad x < 2.$$

khi biết một nghiệm của nó là $u(x) = e^x$.

Giải: Đặt $y = z(x)e^x$. Ta có

$$y' = e^x(z' + z), \qquad y'' = e^x(z'' + 2z' + z), \qquad y''' = e^x(z''' + 3z'' + 3z' + z).$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$(2-x)z''' + (3-x)z'' = 0.$$

Đặt $v = z''$ ta có

$$(2-x)v' + (3-x)v = 0 \Longleftrightarrow v = z'' = C_1e^{-x}(2-x).$$

Lấy tích phân liên tiếp 2 lần hai vế biểu thức trên ta được

$$z = C_1e^{-x}(x+1) + C_2x + C_3.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$y = C_1(x+1) + e^x(C_2x + C_3), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Đưa phương trình đúng (cấp hai) về phương trình vi phân cấp một

Phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{3.6.13}$$ bt2

được gọi là phương trình đúng nếu nó có thể được viết dưới dạng

$$\left[P(x)y'\right]' + \left[f(x)y\right]' = 0,$$

với $f(x)$ là một hàm số nào đó được xác định theo $P(x), Q(x)$ và $R(x)$.

Ta dễ chứng minh được *điều kiện cần và đủ* để phương trình (3.6.13) trở thành phương trình đúng là

$$P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0, \tag{3.6.14}$$ bt2'

và khi đó, hàm $f(x)$ được xác định bởi

$$f(x) = Q(x) - P'(x).$$

Nếu (3.6.13) là phương trình đúng thì tích phân hai vế, nó sẽ trở thành phương trình vi phân tuyến tính cấp một

$$P(x)y' + f(x)y = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3.6.10. Giải phương trình

$$(x^2+1)y'' + xy' - y = 0,\ x > 0.$$

bằng cách đưa nó về phương trình vi phân cấp một rồi giải.

Giải: Ta có $P(x) = x^2+1, Q(x) = x$ và $R(x) = -1$, dễ thấy

$$P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0,$$

thỏa mãn điều kiện (3.6.14) do đó phương trình đã cho là phương trình chính xác và có thể đưa về dạng giảm cấp là phương trình tuyến tính cấp 1

$$\left[(x^2+1)y' - xy\right]' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1)y' - xy = C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Phương trình này có nghiệm là

$$y = \sqrt{x^2+1}\Big(C_2 + \int \frac{C_1}{\sqrt{x^2+1}}dx\Big) = \sqrt{x^2+1}\Big(C_2 + C_1 \ln(x + \sqrt{x^2+1})\Big),$$

với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Trong nội dung tiếp theo, ta trình bày một phương pháp khác để giải phương trình vi phân cấp cao với hệ số hằng. Đây là một trong những phương pháp hay được sử dụng đối với các bài toán trong nghành kỹ thuật.

3.7 Phép biến đổi Laplace

Nhiều bài toán thực tiễn trong kinh tế, kỹ thuật, xử lý dữ liệu... liên quan đến các hệ thống chịu tác động bởi các yếu tố cưỡng bức rời rạc hoặc các xung. Điều này khiến cho các hệ số của phương trình có thể bị gián đoạn nên các phương pháp giải tích được mô tả trong các mục phía trên đôi khi không sử dụng được. Để khắc phục điều đó, người ta phải biến đổi để nhận được các dữ liệu tốt hơn và sau khi xử lý xong các dữ liệu, ta tìm phép biến đổi ngược để quay lại dữ liệu ban đầu. Trong chương này, chúng tôi mô tả một phương pháp quan trọng là phép biến đổi Laplace để làm trơn hóa dữ liệu.

Trước hết, chúng ta nhắc lại về phép biến đổi Fourier. Giả sử f là một hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$. Khi đó, nếu f thỏa mãn một số điều kiện thì nó có thể khai triển thành chuỗi lượng giác (gọi là chuỗi Fourier) có dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Ở đó, các hệ số của chuỗi được tính theo công thức

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chuỗi Fourier là một công cụ toán học quan trọng để biểu diễn một tín hiệu tuần hoàn dưới dạng tổng của các tín hiệu đơn, cụ thể là hàm $\sin nx$ và $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$. Sự phân rã này đặc biệt hữu ích trong các lĩnh vực khác nhau như xử lý các tín hiệu sóng như âm học hoặc kỹ thuật điện.

Trong trường hợp hàm tín hiệu gốc f xác định trên $\mathbb{R}$ nhưng không tuần hoàn, ta không thể biểu diễn hàm f được thành tổng các tín hiệu $\sin nx$ và $\cos nx$ như trên. Khi đó, ta phải phân rã f thành các tín hiệu phức tạp hơn dạng $e^{isx} = \cos sx + i \sin sx$, (với $s \in \mathbb{R}$, i là đơn vị ảo) bằng cách sử dụng phép biến đổi Fourier

$$\widehat{f}(s) = F(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\cos sx - i \sin sx\big) f(x)dx.$$

Điều kiện để hàm $F(f)(s)$ xác định với mọi $s \in \mathbb{R}$ là f khả tích trên $\mathbb{R}$.

Nếu hàm f chỉ có điểm gián đoạn loại một (tức là tồn tại $\lim_{x\to a^+} f(x) := f(a+)$ và $\lim_{x\to a^-} f(x) := f(a-)$ với mọi $a \in \mathbb{R}$) thì ta có thể khôi phục lại hàm gốc f nhờ phép biến đổi ngược

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = F^{-1}(\widehat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{isx}\widehat{f}(s)ds.$$

Đây là phép biến đổi quan trọng trong việc xử lý dữ liệu, xử lý ảnh. Tuy nhiên, nhược điểm của phép biến đổi Fourier là đòi hỏi hàm f phải khả tích trên $\mathbb{R}$ và nói chung hàm $F(f)(s)$ không tốt lắm về phương diện giải tích như là tính khả vi, tính tiệm cận đến 0 khi $s \to \infty$.

Để khắc phục nhược điểm đó, trong các bài toán toán xử lý dữ liệu có độ thăng giáng lớn, người ta giới thiệu một công cụ khác, đó là phép biến đổi Laplace.

3.7.1 Định nghĩa phép biến đổi Laplace

def7.1 **Định nghĩa 3.7.1** (Hàm gốc)**.** Một hàm thực $f(x)$ được gọi là hàm gốc nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau

i) $f(x) = 0$, với mọi $x < 0$.

ii) f liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$.

iii) Hàm $f(x)$ tăng không nhanh hơn hàm mũ, nghĩa là tồn tại các hằng số $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$|f(x)| \leqslant Me^{\alpha x}, \quad x \geqslant 0.$$

Số $a = \inf\{\alpha : \exists M \text{ để } ;|f(x)| \leqslant Me^{\alpha x},\ \forall\ x \geqslant 0\}$, được gọi là chỉ số tăng của hàm f.

Ví dụ 3.7.2. i) Hàm đơn vị

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \geqslant 0, \\ 0 \text{ nếu } x < 0, \end{cases} \tag{3.7.1}$$ Hdv

là hàm gốc. Thật vậy, với mọi x, ta có $|\mu(x)| \leqslant 1 = e^{0x}$. Do đó, $\mu(x)$ là hàm gốc với chỉ số tăng là $a = 0$ và $M = 1$.

ii) Nếu một hàm $\varphi(x)$ nào đó mới thỏa mãn điều kiện ii), iii) mà chưa thỏa mãn điều kiện i) trong Định nghĩa 3.7.1 thì nó chưa phải là hàm gốc. Tuy nhiên, hàm số

$$\varphi(x)\mu(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ nếu } x \geqslant 0, \\ 0 \ \text{ nếu } x < 0, \end{cases}$$

sẽ là một hàm gốc. Trong trường hợp đó, để đơn giản trong trình bày, ta qui ước, vẫn ký hiệu hàm $\varphi(x)\mu(x)$ là $\varphi(x)$.

iii) Tương tự, ta dễ dàng chứng minh được các hàm $t, t^2, \ldots, t^n, \cos nx, \sin nx, e^{ax}$ cũng là những hàm gốc.

Tc1 **Định lý 3.7.1.** *Cho $f(x)$ là một hàm gốc có chỉ số tăng là α_0. Khi đó, tích phân suy rộng*

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.7.2}$$ tp

hội tụ tuyệt đối và đều trên miền $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha_1$, với mọi $\alpha_1 > \alpha_0$. Hơn nữa, hàm số biến số phức

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x))dx, \quad s \in \mathbb{C},$$

giải tích trên miền $\operatorname{Re} s > \alpha_0$ và $F(s) \to 0$ khi $s \to \infty$ theo hướng $\operatorname{Re} s \to \infty$.

Chứng minh. i) Giả sử f là hàm gốc với chỉ số tăng α_0. Ta chỉ ra trên miền $\operatorname{Re} s > \alpha_0$ hàm F có đạo hàm và

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-sx} x f(x))dx, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{3.7.3}$$ dh

Ta chọn $\epsilon > 0$ khá nhỏ sao cho $\alpha_1 > \alpha_0 + \epsilon$. Giả sử $s = a + bi \in \mathbb{C}$ với $\operatorname{Re} s = a \geqslant \alpha_1$. Do α_0 là chỉ số tăng của f nên tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho

$$|f(x)| \leqslant M e^{(\alpha_0 + \frac{\epsilon}{2})x}, \quad x \geqslant 0.$$

Điều này kéo theo

$$|xf(x)| \leqslant \overline{M} e^{(\alpha_0 + \epsilon)x}, \quad x \geqslant 0 \quad \text{với} \quad \overline{M} = \frac{2M}{\epsilon}.$$

Vì $|e^{-sx}| = |e^{-ax}(\cos bx + \sin bx)| \leqslant e^{-ax}$, nên

$$\int_0^\infty |e^{-sx} x f(x)| dx \leqslant \overline{M} \int_0^\infty e^{-(\alpha_1 - \alpha_0 - \epsilon)x} dx = \frac{\overline{M}}{\alpha_1 - \alpha_0 - \epsilon}, \tag{3.7.4}$$ bd1

suy ra tích phân (3.7.2) và tích phân ở vế phải (3.7.3) hội tụ đều trên miền $\{s : \operatorname{Re} s \geqslant \alpha_1\}$. Từ đó áp dụng tiêu chuẩn Weierstrass ta thấy tích phân (3.7.2) là hội tụ đều trên miền $\{\operatorname{Re} s \geqslant \alpha_1\}$, với mọi $\alpha_1 > \alpha_0$.

Ngoài ra ta có thể đạo hàm qua dấu tích phân để nhận được (3.7.3). Theo tính chất của hàm biến số phức, nếu F' tồn tại trên miền $\{\operatorname{Re} s > \alpha_0\}$ ta suy ra F giải tích trên miền đó.

Định lý được chứng minh. □

df1 **Định nghĩa 3.7.3.** [Phép biến đổi Laplace] Cho $f(x)$ là một hàm gốc có chỉ số tăng là α_0. Khi đó, hàm số biến số phức

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx, \tag{3.7.5}$$ 3.14.1

giải tích trên nửa mặt phẳng $\operatorname{Re} s > \alpha_0$, được gọi là phép biến đổi Laplace (hay toán tử Laplace) của hàm $f(x)$.

Hàm $F(s)$ được gọi là ảnh (hay ảnh Laplace) của hàm $f(x)$ qua phép biến đổi Laplace và ta ký hiệu

$$F(s) = L[f](s).$$

vd3.14.1 **Ví dụ 3.7.4.** 1. Nếu $f(x)$ là hàm đơn vị ($f(x) = 1$), với $\operatorname{Re} s > 0$, ta có

$$L[1](s) = \int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{-e^{-sx}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}. \tag{3.7.6}$$

2. Nếu $f(x) = e^{ax}$ $(a \in \mathbb{C})$, với $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$, ta có:

$$L[e^{ax}](s) = \int_0^\infty e^{(a-s)x} dx = \frac{e^{(a-s)x}}{a-s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

3. Nếu $f(x) = \sin x$, với $\operatorname{Re} s > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} L[\sin x](s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \sin x dx = -e^{-sx}\cos x\Big|_{x=0}^\infty - s\int_0^\infty e^{-sx}\cos x dx \\ &= 1 - s\Big(e^{-sx}\sin x\Big|_{x=0}^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx}\sin x dx\Big) \\ &1 - s^2\int_0^\infty e^{-sx}\sin x dx = 1 - s^2 L[\sin x](s). \end{aligned}$$

Suy ra,

$$L[\sin x](s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

4. Nếu $f(x) = x^n$,ta có:

$$L[x^n](s) = \int_0^\infty e^{-sx}x^n dx = \frac{-1}{s}e^{-sx}x^n\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-sx}x^{n-1}dx = \frac{n}{s}L[x^{n-1}](s).$$

Tiếp tục ta có,

$$L[x^n](s) = \frac{n}{s}.\frac{n-1}{s}\dots\frac{1}{s}.L[1](s) = \frac{n}{s}.\frac{n-1}{s}\dots\frac{1}{s}.\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

3.7.2 Các tính chất cơ bản của biến đổi Laplace

Sử dụng định nghĩa 3.7.3 và tính chất trong Định lý 3.7.1 của phép biến đổi Laplace về tính hội tụ đều của nó, ta có được một số tính chất cơ bản phép biến đổi Laplace (và không đưa ra chứng minh) như sau.

1. Tính chất đồng dạng

Định lý 3.7.2. *Cho hàm gốc f có chỉ số tăng α và $c > 0$. Khi đó:*

$$L[f(cx)](s) = \frac{1}{c}L[f(x)]\left(\frac{s}{c}\right), \text{ với mọi } \operatorname{Re} s > c\alpha. \tag{3.7.7}$$

Ví dụ 3.7.5. Vì $L[\sin x](s) = \frac{1}{s^2+1}$, nên với $a \in \mathbb{R}$, ta có

$$L[\sin ax](s) = \frac{1}{a}L[\sin x]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

2. Tính chất tuyến tính

Định lý 3.7.3. *Cho các hàm gốc f_k với chỉ số tăng α_k và có phép biến đổi Laplace là $L[f_k], k = \overline{1,m}$. Khi đó, nếu hàm f là tổ hợp tuyến tính của các hàm f_k*

$$f(x) = \sum_{1}^{m} c_k f_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R}, \tag{3.7.8}$$

thì biến đổi Laplace của hàm f là

$$L[f](s) = \sum_{k=1}^{n} c_k L[f_k](s), \tag{3.7.9}$$

với mọi s sao cho $\operatorname{Re} s > \max \alpha_k$.

Ví dụ 3.7.6. Vì $L[e^{ax}](s) = \frac{1}{s-a}$ (Ví dụ 3.7.4) và theo tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplace, ta có các kết quả sau

1. $L[\cos ax](s) = L\Big[\frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax})\Big](s) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\Big) = \frac{s}{s^2+a^2}$,

   với $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} a|$ (nếu $a \in \mathbb{R}$ thì $\operatorname{Re} s > 0$).

2. $L[\cosh ax](s) = L\Big[\frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})\Big](s) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\Big) = \frac{s}{s^2-a^2}$,

   với $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} a|$.

3. $L[\sinh ax](s) = L\Big[\frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})\Big](s) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\Big) = \frac{a}{s^2-a^2}$,

   với $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} a|$.

3. Tính chất dịch chuyển ảnh

Định lý 3.7.4. *Cho f là hàm gốc có chỉ số tăng α và số phức $\omega \in \mathbb{C}$, khi đó*

$$L[e^{\omega x}f(x)](s) = L[f](s-\omega), \text{ với mọi } \operatorname{Re} s > \alpha + \operatorname{Re}\omega. \tag{3.7.10}$$

vd7 **Ví dụ 3.7.7.** Vì $L[x^n](s) = \dfrac{n!}{s^n}$ nên

$$L[x^n e^{\omega x}](s) = \frac{n!}{(s-\omega)^{n+1}} \text{ và } L[x^n e^{-\omega x}](s) = \frac{n!}{(s+\omega)^{n+1}}.$$

Vì $L[\sin ax](s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ nên

$$L[e^{\omega x}\sin ax](s) = \frac{a}{(s-\omega)^2+a^2}.$$

Tương tự ta cũng có

$$L[e^{\omega x}\cos ax](s) = \frac{s-\omega}{(s-\omega)^2+a^2}.$$

4. Tính chất trễ

Cho $\mu(x)$ là hàm đơn vị xác định trong (3.7.1). Khi đó, ta có định lý sau.

Định lý 3.7.5. *Cho hàm gốc $f(x)$ và hàm đơn vị $\mu(x)$. Khi đó với số thực $a > 0$, ta có,*

$$L[\mu(x-a)f(x-a)](s) = e^{-as}L[f(x)](s).$$

Ví dụ 3.7.8. Tìm ảnh của phép biến đổi Lapce của hàm gốc $f(x) = \mu(x-2)(x-2)^3$.

Ta có

$$L[\mu(x-2)(x-2)^3](s) = e^{-2s}L[x^3](s) = \frac{3!}{s^4}e^{-2s} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}.$$

5. Biến đổi Laplace của đạo hàm hàm số

Định lý 3.7.6. *Giả sử hàm f khả vi và f' là hàm gốc thì*

$$L[f'(x)](s) = sL[f(x)] - f(0) = sF(s) - f(0), \quad \operatorname{Re} s > \alpha_0. \tag{3.7.11}$$

Tổng quát hơn: giả sử $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)$ là các hàm gốc thì ta có

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(s)] &= s^n L[f(x)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0) \\ &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0). \end{aligned} \tag{3.7.12}$$ 1.8.11

6. Biến đổi Laplace của tích phân hàm số

Định lý 3.7.7. *Nếu f là hàm liên tục thì*

$$L\Big[\int_0^x f(\tau)d\tau\Big](s) = \frac{L[f](s)}{s}. \tag{3.7.13}$$

Ví dụ 3.7.9. Xét hàm $f(x) = x^n e^{\omega x}$, theo Ví dụ 3.7.7, ta đã biết

$$L[x^n e^{\omega x}](s) = \frac{n!}{(s-\omega)^{n+1}}.$$

Do đó,

$$L\Big[\int_0^x \tau^n e^{\omega\tau} d\tau\Big](s) = \frac{n!}{s(s-\omega)^{n+1}}.$$

7. Đạo hàm của phép biến đổi Laplace

Định lý 3.7.8. *Nếu f là hàm gốc có chỉ số tăng α thì $L[f]$ khả vi mọi cấp và*

$$\frac{d^n}{ds^n} L[f](s) = (-1)^n L[x^n f(x)](s), \quad \operatorname{Re} s > \alpha. \tag{3.7.14}$$

Ví dụ 3.7.10. Ta đã biết, $L\,[1]\,(s) = \dfrac{1}{s}$, áp dụng định lý trên cho $f(x) = 1$, suy ra

$$L[x^n](s) = (-1)^n \Big(\frac{1}{s}\Big)^{(n)} = \frac{n!}{s^n}.$$

8. Tích phân của phép biến đổi Laplace

Định lý 3.7.9. *Nếu $\dfrac{f(x)}{x}$ là hàm gốc với chỉ số tăng α thì:*

$$L\Big[\frac{f(x)}{x}\Big](s) = \int_s^{+\infty + i\operatorname{Im} s} L[f](u)du, \tag{3.7.15}$$

ở đây $\int_s^{+\infty+i\operatorname{Im} s}$ hiểu theo nghĩa tích phân lấy trên nửa phí trên của đường thẳng song song với trục ảo xuất phát từ điểm s.

Ví dụ 3.7.11. Tìm ảnh của phép biến đổi Lapce của hàm gốc $f(x) = \dfrac{\sinh ax}{x}$.

Ta có

$$\begin{aligned} L\Big[\frac{\sinh ax}{x}\Big](s) &= \int_s^{\infty} L[\sinh ax](u)du \\ &= \int_s^{\infty} \frac{a}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{u-a}{u+a}\Big|\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{s+a}{s-a}\Big|. \end{aligned}$$

9. Biến đổi Laplace của tích chập

Cho hai hàm gốc f, g. Khi đó, tích chập của hai hàm f và g được định nghĩa bởi

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Khi đó ta có, phép biến đổi Laplace của tích chập $f * g$ được xác định như sau

3.10.7 **Định lý 3.7.10.** *Cho f, g là hàm gốc lần lượt có chỉ số tăng α_0, β_0. Khi đó*

$$L[f * g(x)] = L[f(x)]L[g(x)]. \tag{3.7.16}$$

Định lý 3.7.10 thường được sử dụng để tính phép biến đổi Laplace ngược, tức là tìm cách khôi phục hàm gốc f khi biết ảnh của nó $F(s)$ qua phép biến đổi Laplce.

3.7.3 Biến đổi Laplace ngược và các ví dụ

Phép biến đổi Laplace đã chuyển một hàm từ miền xác định thực $[0, \infty)$ thời gian sang miền xác định phức $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant \alpha_0$ (miền Laplace), nơi các phép toán có thể trở nên đơn giản hơn để giải quyết. Bây giờ ta xét quy trình ngược lại, đó là khôi phục lại hàm gốc $f(x)$ khi biết được phép biến đổi Laplace $F(s)$ của nó. Phép biến đổi Laplace ngược tồn tại vì mục đích của Tuy nhiên, sau khi giải quyết các phương trình hoặc vấn đề trong miền Laplace, ta cần quay lại miền thời gian để tìm nghiệm của bài toán gốc. Phép biến đổi Laplace ngược giúp chuyển nghiệm từ miền Laplace (hay miền tần số) trở lại miền thời gian, từ đó tìm được nghiệm trong ngữ cảnh ban đầu.

1. Định nghĩa

Nếu $F(s)$ là ảnh của hàm gốc $f(x)$ qua phép biến đổi Laplace ($F(s) = L[f(x)](s)$) thì ta ký hiệu

$$f(x) = L^{-1}[F](x),$$

và gọi L^{-1} là phép biến đổi Laplace ngược.

Theo nội dung của mục trên, khi cho trước hàm gốc $f(x)$, qua phép biến đổi Laplace, ta có thể xác định được hàm ảnh qua công thức

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x))dx,$$

và các tính chất của phép biến đổi Laplace. Câu hỏi đặt ra là, nếu biết trước hàm ảnh $F(s)$, ta có thể tìm được hàm gốc $f(x)$ hay không và tìm bằng cách nào? Định lý sau sẽ làm rõ câu hỏi trên.

Định lý 3.7.11. *Cho f là hàm gốc liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$ với chỉ số tăng α. Khi đó, với mọi $x > 0$ và $c > \alpha$, ta có*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx} L[f](s)ds. \qquad (3.7.17)$$ 3.14.16

Công thức trên được gọi là công thức Merlin. Ta chú ý tích phân ở vế phải không phụ thuộc vào việc chọn hằng số $c > \alpha$. Như thế nếu biết phép biến đổi Laplace của hàm liên tục f thì ta có thể khôi phục lại hàm f nhờ công thức (3.7.17). Theo đó, để tính tích phân phức trong (3.7.17) , ta có thể dựa vào tính chất các cực điểm của hàm dưới dấu tích phân dựa vào định lý thặng dư Cauchy. Tuy nhiên, ta cũng có thể tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm ảnh $F(s)$ cho trước bằng cách sử dụng các phương pháp khác như khai triển phân thức hay dùng tích chập,...

Trước hết, từ các kết quả của các ví dụ đã tính toán ở trên, ta có được phép biến đổi Laplace của một số hàm số như sau

1. $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)(x) \equiv 1,$
2. $L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)(x) = e^{ax},$
3. $L^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right)(x) = \frac{x^n}{n!},$
4. $L^{-1}\left(\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right)(x) = x^n e^{ax},$
5. $L^{-1}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right)(x) = \sin\alpha x,$
6. $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)(x) = \cos\alpha x,$
7. $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right)(x) = \cosh\alpha x,$
8. $L^{-1}\left(\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\right)(x) = \sinh\alpha x.$
9. $L^{-1}\left(\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right)(x) = e^{ax}\cos bx.$
10. $L^{-1}\left(\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right)(x) = e^{-ax}\sin bx.$
11. $L^{-1}\left(\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right)(x) = e^{ax}\sin bx.$
12. $L^{-1}\left(\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right)(x) = e^{-ax}\sin bx.$
13. $L^{-1}\left(\frac{s-a}{(s-a)^2-\alpha^2}\right)(x) = e^{ax}\cosh\alpha x.$
14. $L^{-1}\left(\frac{s+a}{(s+a)^2-\alpha^2}\right)(x) = e^{-ax}\cosh\alpha x.$

2. Một số phương pháp tìm phép biến đổi Laplace ngược

i) Dùng thặng dư : Ta đã biết công thức xác định hàm gốc

$$f(x) = L^{-1}[F](x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx}F(s)ds.$$

Khi đó, sử dụng định lý thặng dư Cauchy và tính chất các cực điểm để tính tích phân phức trong công thức trên, ta được

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx}F(s)ds = \sum_{k=1}^{n} Res[g, s_k],$$

ở đó $Res[g, s_k]$ là thặng dư của hàm $g(s) = e^{sx}F(s)$ tại cực điểm $s = s_k$.

Ta chú ý rằng, nếu s_k là cực điểm cấp n_k của hàm g, ta có

$$Res[g, s_k] = \lim_{s\to s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds}\Big[(s-s_k)^{n_k} g(s)\Big].$$

Ví dụ 3.7.12. Biết hàm ảnh $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$. Tìm hàm gốc của phép biến đổi Laplace.

Giải: Theo công thức (3.7.17), ta có hàm gốc $f(x)$ được xác định bởi

$$f(x) = L^{-1}[F](x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx}F(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{se^{sx}}{(s^2+a^2)^2}ds.$$

Hàm dưới tích phân $g(s) = \dfrac{se^{sx}}{(s^2+a^2)^2}$ có 2 cực điểm cấp 2 là $s = \pm ia$. Ta có,

$$Res[g(s), s = ia] = \lim_{s\to ia} \frac{d}{ds}\Big[(s-ia)^2 \frac{se^{sx}}{(s^2+a^2)^2}\Big] = \frac{xe^{iax}}{4ia}.$$

Tương tự, ta tính được $Res[g(s), s = ia] = \dfrac{-xe^{-iax}}{4ia}$. Vậy hàm gốc cần tìm là

$$f(x) = \frac{xe^{iax}}{4ia} + \frac{-xe^{-iax}}{4ia} = \frac{x\sinh iax}{2ia} = \frac{ix\sin ax}{2ia} = \frac{x\sin ax}{2a}.$$

ii) Dùng khai triển phân thức : Giả sử, ta cần tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm ảnh có dạng phân thức

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \tag{3.7.18}$$

trong đó $P(s)$ và $Q(s)$ là các đa thức, bậc của P nhỏ hơn bậc của Q. Ta có thể dùng khai triển phân thức $F(s)$ thành các phân thức đơn giản và sử dụng bảng biến đổi Laplace cùng tính chất tuyến tính của phép biến đổi.

Ví dụ 3.7.13. Tìm hàm gốc của hàm ảnh $F(s) = \dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}$.

Giải: Ta có

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right] &= L^{-1}\left[\frac{1}{a}\Big(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+a^2}\Big)\right] \\ &= \frac{1}{a}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - \frac{1}{a^2}L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{a^2}(ax^2 - \sin ax). \end{aligned}$$

iii) Dùng tích chập : Theo định lý về Phép biến đổi Laplace của tích chập,

$$L[(f*g)(x)] = L[f(x)]L[g(x)],$$

ta suy ra, $(f*g)(x)$ là ảnh của phép biến đổi Laplace ngược của $L[f(x)](s)L[g(x)](s)$.

Ví dụ 3.7.14. Tìm hàm gốc của hàm ảnh $F(s) = \dfrac{1}{s^2(1+s)^2}$.

Ví dụ 3.7.15. Tìm hàm gốc của hàm ảnh $F(s) = \dfrac{1}{s^2(1+s)^2}$.

Chọn $f(x) = x, g(x) = xe^{-x}$ ta có $L[g](s) = \dfrac{1}{s^2}$, $L[f](s) = \dfrac{1}{(1+s)^2}$. Do đó,

$$f*g(x) = \int_0^x (x-\tau)\tau e^{-\tau} d\tau = (x+2)e^x + x - 2.$$

Vậy $L^{-1}[\dfrac{1}{s^2(1+s)^2}] = (x+2)e^x + x - 2$. **Giải**: Vì $L[1](s) = \dfrac{1}{s}$, $L[e^{ax}](s) = \dfrac{1}{x-a}$. Do đó,

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(x-a)}\right] = 1*e^{ax} = \int_0^x e^{a\tau} d\tau = \frac{e^{ax}-1}{a}. \tag{3.7.19}$$

iv) Dùng Định lý khai triển của Heaviside : Nếu phép biến đổi Laplace của hàm f là một phân thức

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

trong đó P và Q là các đa thức biến s và bậc của P nhỏ hơn bậc của Q và Q có đúng n nghiệm thực đơn $s_1, s_2, \dots, s_n$. Khi đó

$$f(x) = L^{-1}[F(s)](x) = L^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right](x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k x}. \tag{3.7.20}$$ 1.8.20

Ví dụ 3.7.16. Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm số

$$F(s) = \frac{2s^2+3s-4}{s^3+s^2-2s}.$$

Giải: Đa thức $Q(s) = s^3 + s^2 - 2s$ có ba nghiệm phân biệt $s_1 = 0, s_2 = 1$ và $s_3 = -2$. Theo (3.7.20), suy ra

$$L^{-1}[F(s)](x) = 2 + e^x - e^{-2x}.$$

3.7.4 Ứng dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

Dựa vào các tính chất của phép biến đổi Laplace, ta thấy rằng phép tính đạo hàm, phép tính tích phân đối với hàm gốc được chuyển thành phép tính đại số thông thường đối với hàm ảnh tương ứng. Do đó, phép biến đổi Laplace được ứng dụng hiệu quả trong giải phương trình vi phân.

Phương pháp: i) Từ phương trình vi phân đã cho, tác động phép biến đổi Laplace vào 2 về của phương trình, ta được phương trình ảnh theo $Y(s) = L[y(x)]$.
ii) Giải phương trình ảnh, tìm ra nghiệm $Y(s)$.
iii) Dùng phép biến đổi ngược, tìm được nghiệm gốc $y(x)$ của phương trình đã cho.

Sau đây, ta trình bày cách dùng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân thường bậc cao với hệ số hằng. Xét phương trình vi phân cấp n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n)} + a_2 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = \phi(x), \quad x > 0, \tag{3.7.21}$$ 3.14.21

với điều kiện đầu

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{3.7.22}$$ 3.14.21b

Ký hiệu $D = \dfrac{d}{dx}$. Khi đó phương trình (3.7.21) được viết lại dưới dạng

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \cdots + a_n y = \phi(x), x > 0. \tag{3.7.23}$$ 3.14.22

Tác động phép biến đổi Laplace lên hai vế của phương trình trên, ta có

$$L[D^n y(x)](s) + a_1 L[D^{n-1} y(x)](s) + \cdots + L[a_n y(x)](s) = L[\phi(x)](s).$$

Kết hợp với công thức (3.7.12) và điều kiện đầu (3.7.22), ta nhận được phương trình với hàm cần tìm là hàm ảnh $Y(s) = L[y(x)](s)$ và $\Phi(s) = L[\phi(x)](s)$,

$$\begin{aligned} &s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y_1 - \cdots - s y_{n-2} - y_{n-1} + a_1 \big[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y_0 - \cdots - y_{n-2}\big] \\ &+ \cdots + a_{n-1} \big[s Y(s) - y_0\big] + a_n Y(s) = \Phi(s). \end{aligned}$$

Phương trình tương đương với

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s),$$

trong đó $\Psi(s)$ là đa thức bậc $n-1$ của s, được xác định bởi

$$\begin{aligned} \Psi(s) = {} & (s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) y_0 + (s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \cdots + a_{n-2}) y_1 \\ & + \cdots + (s + a_1) y_{n-2} + y_{n-1}. \end{aligned}$$

Đặt $f(s)=s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$, suy ra

$$Y(s) = \frac{\Phi(s) + \Psi(s)}{f(s)}.$$

Lấy biến đổi Laplace ngược vào hai vế của phương trình trên ta nhận được nghiệm riêng $y(x)$ của phương trình (3.7.21) với điều kiện đầu (3.7.22) là

$$y(x) = L^{-1}\left[\frac{\Phi(s)}{f(s)}\right] + L^{-1}\left[\frac{\Psi(s)}{f(s)}\right]. \tag{3.7.24}$$

Ví dụ 3.7.17. Dùng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai dạng tổng quát

$$y''(x) + 2py'(x) + qy = r(x), x > 0, \tag{3.7.25}$$ 1.8.25

với điều kiện đầu là $y(0) = a, y'(0) = b$, trong đó p, q, a và b là các hằng số cho trước.

Giải: Tác động phép biến đổi Laplace hai vế của phương trình (3.7.25), kết hợp với công thức (3.7.12), ta được

$$\begin{aligned} & s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2p[sY(s) - y(0)] + qY(s) = R(s), \\ \Leftrightarrow\ & s^2Y(s) - sa - b + 2p[sY(s) - a] + qY(s) = R(s), \\ \Leftrightarrow\ & [(s+p)^2 + (q - p^2)]Y(s) = (s+p)a + (b + pa) + R(s). \end{aligned}$$

Suy ra

$$Y(s) = \frac{(s+p)a + (b+pa) + R(s)}{(s+p)^2 + (q-p^2)}. \tag{3.7.26}$$

i) Trường hợp 1: $q - p^2 = n^2 > 0$. Lấy biến đổi Laplace ngược 2 vế của biểu thức trên và áp dụng tích chất của phép biến đổi Laplace ngược của một số hàm cơ bản, của tích chập, ta được

$$\begin{aligned} y(x) &= aL^{-1}\left[\frac{s+p}{(s+p)^2+n^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{b+pa}{(s+p)^2+n^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{R(s)}{(s+p)^2+n^2}\right] \\ &= aL^{-1}\left[\frac{s+p}{(s+p)^2+n^2}\right] + \frac{b+pa}{n}L^{-1}\left[\frac{n}{(s+p)^2+n^2}\right] + L^{-1}\left[R(s)\frac{n}{(s+p)^2+n^2}\right] \\ &= ae^{-px}\cos nx + \frac{1}{n}(b+pa)e^{px}\sin nx + \frac{1}{n}\int_0^x r(x-\tau)e^{-px}\sin n\tau d\tau. \end{aligned}$$

ii) Trường hợp 2: $q - p^2 = 0$. Ta có

$$Y(s) = a.\frac{1}{s+p} + (ab+p).\frac{1}{(s+p)^2} + R(s).\frac{1}{(s+p)^2}$$

Tương tự như trường hợp 1, lấy biến đổi Laplace ngược của biểu thức trên ta được

$$y(x) = ae^{-px} + (b + pa)xe^{-px} + \int_0^x r(x-\tau)\tau e^{-p\tau} d\tau.$$

iii) Trường hợp 3: $q - p^2 = -m^2 < 0$. Khi đó ta có

$$Y(s) = a.\frac{(s+p)}{(s+p)^2 - m^2} + \frac{b+pa}{m}.\frac{m}{(s+p)^2 - m^2} + \frac{1}{m}.R(s).\frac{1}{(s+p)^2 - m^2}.$$

Tương tự, lấy biến đổi Laplace ngược biểu thức trên ta được:

$$y(x) = ae^{-px}\cosh(mx) + \frac{1}{m}(b+pa)e^{-px}\sinh(mx) + \frac{1}{m}\int_0^x r(x-\tau)e^{-px}\sinh(m\tau)d\tau.$$

Ví dụ 3.7.18. Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0, y(0) = 3, y'(0) = 1.$$

Giải: Lấy biến đổi Laplace hai vế phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{aligned}
&L[y''(x)] + 4L[y'(x)] + 3Ly(x)] = 0\\
\Leftrightarrow\ &(s^2 + 4s + 3)Y(s) - (s+4)y(0) - y'(0) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(s^2 + 4s + 3)Y(s) = 3(s+4) + 1 = 3s + 13.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$Y(s) = \frac{3s+13}{s^2+4s+3} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+3}.$$

Áp dụng công thức (3.7.20), ta suy ra nghiệm cần tìm của phương trình đã cho là

$$y(x) = 5e^{-x} - 2e^{-3x}.$$

Ví dụ 3.7.19. Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$y'' + xy' - 2y = 2, y(0) = y'(0) = 0.$$

Giải: Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình trên ta được

$$\begin{aligned}
&L[y''(x)] + L[xy'(x)] - 2L[y(x)] = L[2],\\
\Leftrightarrow\ &s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - \frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = \frac{2}{s},\\
\Leftrightarrow\ &s^2Y(s) - Y(s) - sY'(s) - 2Y(s) = \frac{2}{s^2},\\
\Leftrightarrow\ &Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - s\right)Y(s) = -\frac{2}{s}.
\end{aligned}$$

Giải phương trình tuyến tính cấp 1 trên ta được

$$Y(s) = \frac{2e^{x^2/2}}{s^3}\left(K + 2e^{-s^2/2}\right) = \frac{2}{s^3} + \frac{K}{s^3}e^{s^2/2}.$$

Vì $Y(s) \to 0$ khi $s \to \infty$ suy ra $K = 0$. Do đó, $Y(s) = \frac{2}{s^3}$. Vậy nghiệm của phương trình ban đầu

$$y(x) = L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = x^2.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 1: Tìm định thức Wronski của các hệ hàm sau đây

1. $\{e^{2x}, e^{-3x/2}\}$
2. $\{\cos x, \sin x\}$
3. $\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$
4. $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$
5. $\{\cos 2x, 1 + \cos 2x\}$
6. $\{\cos(\ln x), \sin(\ln x)\}$

Bài tập 2: Giả sử y_1, y_2 là hệ nghiệm cơ bản của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Đặt $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ và $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$, với $a_i, b_i, i = 1, 2$ là các hằng số bất kỳ.

1. Chứng minh rằng $W[y_3, y_4] = (a_1b_2 - a_2b_1)W[y_1, y_2]$.
2. Họ hàm y_3, y_4 có là một hệ nghiệm cơ bản của phương trình đã cho không?

Bài tập 3: Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có định thức Wronski

$$W[u, v] = x\cos x - \sin x$$

Tìm định thức Wronski $W[f, g]$ của hai hàm $f(x), g(x)$ biết $f = u + 3v, g = u - v$.

Bài tập 4: Xét phương trình $y'' - y' - 2y = 0$.

1. Chứng minh $y_1(x) = e^{-x}$ và $y_2(x) = e^{2x}$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình.
2. Các hàm số $y_3(x) = -2e^{2x}$, $y_4(x) = y_1(x)+2y_2(x)$ và $y_5(x) = 2y_1(x)-2y_3(x)$, có là nghiệm của phương trình đã cho hay không?
3. Mỗi cặp hàm số sau đây có tạo thành một hệ nghiệm cơ bản của phương trình đã cho hay không:$\{y_1(x), y_3(x)\}$; $\{y_2(x), y_3(x)\}$; $\{y_1(x), y_4(x)\}$; $\{y_4(x), y_5(x)\}$.

Bài tập 5: Sử dụng phương pháp giảm cấp để giải các phương trình sau

1. $y'' + xy' + y = 0$.
2. $x^2y'' + xy - y' = 0, x > 0$.
3. $xy'' - (\cos x)y' + (\sin x)y = 0, x > 0$.

Bài tập 6: Không cần giải phương trình, hãy tìm định thức Wronski của hệ nghiệm cơ bản của các phương trình sau

1. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$.
2. $\cos xy'' + \sin xy' - xy = 0$.
3. $(1-x^2)y - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ (phương trình Legendre).

Bài tập 7: Giải các phương trình vi phân sau

1. $x(x-1)^2.y'' + x(x-1).y' - y = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = \alpha + \frac{\beta}{1-x}$.
2. $y'' + y'tgx - y\cos^2 x = 0$ biết một nghiệm riêng $y = e^{\alpha.\sin x}$.
3. $(x^2-1)y'' + 2xy' = 0$.
4. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ biết một nghiệm riêng: $y = x^\alpha$.
5. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ biết một nghiệm riêng $y = e^{\alpha x}$.

Bài tập 8: Giải các phương trình vi phân sau biết các phương trình đó có nghiệm riêng dạng đa thức

1. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.
2. $(x^2-1)y'' + 2xy' = 0$.
3. $(x^2+3x+4)y'' + (x^2+x+1)y' - (2x+3)y = 0$.
4. $x^2(x-1)y'' - x(5x-4)y' + (9x-6)y = 0$.

Bài tập 9: Giải các phương trình vi phân sau:

1. $(2x-x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$,

   biết phương trình có hai nghiệm riêng $y = x$ và $y = 1$.
2. $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$

   biết phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm riêng $y = x + 2$.
3. $x(x^2+3)y'' - 2(x^2+3)y' + 6xy = e^{-x}(x^4 + x^3 + x^2 - 9x - 12)$,

   biết phương trình có nghiệm riêng $y = (ax+b)e^{-x}$ và phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm riêng $y = x^3$.
4. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$,

   biết phương trình có một nghiệm riêng dạng đa thức $y = e^{\alpha x}$.

5. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x$

   biết phương trình có hai nghiệm riêng $y_1^\star=x,\ y_2^\star=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Bài tập 10: Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y''+9y=6e^{3x}$,
2. $y''-3y=2-6x$,
3. $y''-y=\frac{e^x}{e^x+1}$,
4. $y''+4y=2\sin 2x$,
5. $y''+4y'-5y=2e^x$,
6. $y''-y'=e^{2x}+e^x+x$,
7. $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$,
8. $y''+y=tgx$.
9. $y''+y=x^2\cos^2 x$.
10. $y''-3y'=e^{3x}-18x$.
11. $y''+y=\cos^3 x$.
12. $y''+5y'+6y=\frac{1}{1+e^{2x}}$.
13. $y''+2y'+5y=2xe^{-x}\cos 2x$.
14. $y''-2y'+(1+\alpha^2)y=(1+4\alpha^2)\cos(\alpha x)$.

Bài tập 11: Tìm ảnh của các hàm gốc sau:

1. $f(x)=x\sin^2 x$,
2. $f(x)=\cos^3 x$,
3. $f(x)=x^2e^x\sin^x$,
4. $f(x)=e^{-2x}\int_0^x \tau\sin\tau d\tau$.
5. $f(x)=xe^{-2x}\int_0^x \cos 4\tau d\tau$.
6. $f(x)=\int_0^x \tau e^{-\tau}\sin\tau d\tau$.

Bài tập 12: Tìm hàm gốc của các hàm ảnh sau:

1. $F(s)=\dfrac{6s-3}{s^2-4}$,
2. $F(s)=\dfrac{s^2}{(s-1)^3}$,
3. $F(s)=\dfrac{1-2s}{s^2+4s+5}$,
4. $F(s)=\dfrac{3s+2}{(s^2-4)(s+1)}$.
5. $F(s)=\dfrac{3+s^2}{(s^2+2s+2)^2}$.
6. $F(s)=\dfrac{2s+2}{s^2-2s+2}$.

Bài tập 12: Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y''+4y'+29y=e^{-2x}sin5x$, biết $\quad y(0)=5,\ y'(0)=2$.
2. $y''+2y'+y=18e^{-x}$, biết $\quad y(0)=7,\ y'(0)=-2$.
3. $y^{(4)}-9y=0$, biết $\quad y'''(0)=0,\ y''(0)=-3,\ \ y'(0)=0,\ y(0)=1$.
4. $y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=e^{-x}\cos 5x$ biết $\ y'''(0)=y'(0)=1,\ y''(0)=y(0)=0$.

Chương 4

Hệ phương trình vi phân cấp một

ch4

4.1 Hệ phương trình vi phân cấp một

s4.1

4.1.1 Định nghĩa

Hệ phương trình vi phân cấp một là hệ các phương trình có dạng

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{4.1.1}$$

he_ptvp

trong đó $x \in I = (a, b)$ là biến độc lập, $f_i : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm cho trước và $y_i = y_i(x)$ là các hàm cần tìm $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Nghiệm của hệ phương trình vi phân (4.1.1) là bộ n hàm số $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, xác định và khả vi trên I sao cho (4.1.1) thỏa mãn với mọi $x \in I$. Giải hệ phương trình vi phân trên là đi tìm tất cả các nghiệm của hệ đó.

Cho trước $x_0 \in I$ và các giá trị $y_1^0, \dots, y_n^0$. Bài toán tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân (4.1.1) thỏa mãn điều kiện

$$y_i(x_0) = y_i^0,\ i = 1, \dots, n, \tag{4.1.2}$$

ivp1

được gọi là *bài toán Cauchy* hay *bài toán giá trị ban đầu*. Giải bài toán Cauchy là đi tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình (4.1.1) thỏa mãn điều kiện (4.1.2).

Nếu xem $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ là tọa độ của một điểm M trong không gian pha $\mathbb{R}^n$ ở thời điểm x thì hệ phương trình vi phân (4.1.1) mô tả chuyển động của M trong không gian pha $\mathbb{R}^n$ với

$$(y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)),$$

là vectơ vận tốc của điểm đó tại thời điểm x. Tại mỗi điểm của không gia pha vectơ vận tốc có thể thay đổi theo thời gian nên ta nói hệ (4.1.1) xác định một trường vận tốc không dừng. Trong trường hợp các hàm $f_1, f_2, ..., f_n$ không phụ thuộc theo x, hệ (4.1.1) trở thành

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{4.1.3}$$ he_ptvpot

Khi đó, ta nói rằng hệ trên xác định một trường vận tốc dừng và gọi nó là hệ ô-tô-nôm hay hệ dừng.

Ví dụ 4.1.1. Xét hệ phương trình $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$

Dễ kiểm tra hệ phương trình đang xét có nghiệm

$$y_1 = C_1\cos(x - C_2), y_2 = -C_1\sin(x - C_2),$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Vì $y_1^2 + y_2^2 = C_1^2$ nên trong không gian pha mỗi chuyển động đang xét được thực hiện trên đường tròn tâm $O(0,0)$ bán kính $|C_1|$ mà ta gọi là quỹ đạo chuyển động. Nếu cố định C_1 và cho C_2 tùy ý thì ta có vô số chuyển động thực hiện trên cùng một quỹ đạo.

4.1.2 Quan hệ giữa hệ phương trình vi phân và phương trình vi phân cấp cao

Một phương trình vi phân cấp cao có thể đưa được về hệ phương trình vi phân cấp một và ngược lại hệ n phương trình vi phân cấp một dạng chuẩn tắc với một số điều kiện nào đó có thể đưa về một phương trình vi phân cấp n. Thật vậy, ta xét phương trình vi phân cấp n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.1.4}$$ 4.1.4b

Khi đó, nếu đặt

$$y_1(x) = y(x), \ \ y_2(x) = y'(x), \ldots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

ta có hệ phương trình vi phân cấp một

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{4.1.5}$$ 4.1.4b1

Ví dụ 4.1.2. Xét phương trình vi phân cấp ba

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}.$$

Nếu đặt $y_1 = y$ và $y_2 = y', y_3 = y''$ thì phương trình tương đương với hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = 4y_2 + x + 3\cos x + e^{-2x}. \end{cases}$$

vd1.2 **Ví dụ 4.1.3.** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 + y_2. \end{cases}$$

Đạo hàm hai vế phương trình đầu, kết hợp với phương trình còn lại của hệ ta được

$$y_1'' = y_1' - 2y_2' = y_1' - 2(2y_1 + y_2) = y_1' - 4y_1 - 2y_2 = y_1' - 4y_1 + y_1' - y_1 = 2y_1' - 5y_1.$$

Vậy ta có phương trình vi phân cấp hai

$$y_1'' - 2y_1' + 5y_1 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được nghiệm $y_1 = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. Do đó,

$$y_2(x) = \frac{1}{2}(y_1(x) - y_1'(x)) = e^x\big(- C_2 \cos 2x + C_1 \sin 2x\big),$$

với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ss4.1.3 4.1.3 Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy

Trong mục này, ta chỉ phát biểu Định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy cho của hệ phương trình vi phân (4.1.1) với điều kiện ban đầu (4.1.2).

Với mỗi vector $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ta đặt

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2},$$

và gọi nó là chuẩn (Euclid) của y.

Định nghĩa 4.1.4. Hàm $f : I \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, với $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, được gọi là thỏa mãn điều kiện Lipschitz với hàng số Lipschitz k nếu

$$\|f(x, \mathbf{y_1}) - f(x, \mathbf{y_2})\| \leqslant k \|\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2}\|, \tag{4.1.6}$$ 4.1.3

với mọi $x \in I, \mathbf{y_1} \in \mathcal{D}$ và $\mathbf{y_2} \in \mathcal{D}$.

dl3.1 **Định lý 4.1.1.** *Giả sử hàm số $f = (f_1, f_2, \dots f_n)$ liên tục và thoả mãn điều kiện Lipschitz với hằng số Lipschitz k và $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. Khi đó, hệ phương trình vi phân* (4.1.1) *với điều kiện ban đầu* (4.1.2) *sẽ tồn tại duy nhất nghiệm xác định trên I.*

Chứng minh Định lý 4.1.1. Ký hiệu $\mathbf{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_n(\cdot))^\top$ là nghiệm của (4.1.1) với điều kiện ban đầu (4.1.2) $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0 := (y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)^\top$. Tích phân hai vế (4.1.1) ta nhận được

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^0 + \int_0^x f(s, \mathbf{y}(s))ds. \tag{4.1.7}$$ he_pttp3

Ngược lại, nếu $\mathbf{y}(\cdot)$ là nghiệm của phương trình (4.1.7) thì $\mathbf{y}(\cdot)$ phải là hàm liên tục. Do đó hàm $f(\cdot, \mathbf{y}(\cdot))$ là một hàm liên tục. Điều này kéo theo $\mathbf{y}(\cdot)$ là hàm khả vi. Vi phân hai vế (4.1.7) ta thấy $\mathbf{y}(\cdot)$ *là nghiệm của* (4.1.1) *khi và chỉ khi nó là nghiệm của* (4.1.7).

i) Trước hết ta chứng minh sự tồn tại nghiệm. Xây dựng dãy hàm xấp xỉ $\{\mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ như sau

$$\mathbf{y}_{(0)}(x) = \mathbf{y}^0, \quad \mathbf{y}_{(n+1)}(x) = \mathbf{y}^0 + \int_0^x s(s, \mathbf{y}_{(n)}(s))ds, x \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ta có

$$\left\|\mathbf{y}_{(n+1)}(x) - \mathbf{y}_{(n)}(x)\right\| \leqslant \int_0^x \left\|f(s, \mathbf{y}_{(n)}(s)) - f(s, \mathbf{y}_{(n-1)}(s))\right\| ds.$$

Theo (4.1.6), ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}_{(n+1)}(x) - \mathbf{y}_{(n)}(x)\| &\leqslant k \int_0^x \left\|\mathbf{y}_{(n)}(s) - \mathbf{y}_{(n-1)}(s)\right\| ds \\
&\leqslant \dots \leqslant k^n \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \dots dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} \left\|\mathbf{y}_{(1)}(s) - \mathbf{y}_{(0)}(s)\right\| ds \\
&= \frac{k^n}{n!} \int_0^x (x-s)^n \left\|\mathbf{y}_{(1)}(s) - \mathbf{y}_{(0)}(s)\right\| ds \leqslant \frac{x^n k^n}{n!} \int_0^x \left\|\mathbf{y}_{(1)}(s) - \mathbf{y}_{(0)}(s)\right\| ds \\
&\leqslant M \frac{T^{n+1} k^n}{n!},
\end{aligned}$$

với $M = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant T} \left\|\mathbf{y}_{(1)}(s) - \mathbf{y}_{(0)}(s)\right\|$. Do chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{T^{n+1}k^i}{i!}$ hội tụ nên chuỗi

$$\mathbf{y}_{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \{\mathbf{y}_{(i)}(x) - \mathbf{y}_{(i-1)}(x)\},$$

hội tụ đều đến hàm liên tục $\mathbf{y}(x)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass. Mặt khác dãy tổng riêng của chuỗi này là

$$\mathbf{y}_{(0)} + \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{y}_{(i)}(x) - \mathbf{y}_{(i-1)}(x)\} = \mathbf{y}_{(n)}(x).$$

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_{(n)}(x) = \mathbf{y}(x)$. Cho $n \to \infty$ trong đẳng thức

$$\mathbf{y}_{(n+1)}(x) = \mathbf{y}^0 + \int_0^x f(s, \mathbf{y}_{(n)}(s))ds, x \in I,$$

ta nhận được (4.1.7)

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^0 + \int_0^x f(s, \mathbf{y}(s))ds, x \in I,$$

suy ra điều cần chứng minh.

ii) Tiếp theo, ta chứng minh tính duy nhất nghiệm của hệ. Giả sử $\mathbf{y}(x)$ và $\overline{\mathbf{y}}(x)$ là hai nghiệm của hệ (4.1.7) với điều kiện ban đầu $\mathbf{y}(0) = \overline{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}^0$, tức là

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^0 + \int_0^x f(s, \mathbf{y}(s))ds, \quad \overline{\mathbf{y}}(x) = \mathbf{y}^0 + \int_0^x f(s, \overline{\mathbf{y}}(s))ds.$$

Trừ hai vế các hệ thức trên, ta được

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}(x) - \overline{\mathbf{y}}(x)\| &= \left\| \int_0^x \left(f(s, \mathbf{y}(s)) - f(s, \overline{\mathbf{y}}(s))\right) ds \right\| \\ &\leqslant \int_0^x \|f(s, \mathbf{y}(s)) - f(s, \overline{\mathbf{y}}(s))\|\, ds \leqslant k \int_0^x \|\mathbf{y}(s) - \overline{\mathbf{y}}(s)\|\, ds.\end{aligned}$$

Lặp lại bất đẳng thức này n lần ta nhận được

$$\begin{aligned}\int_0^x \|\mathbf{y}(s) - \overline{\mathbf{y}}(s)\|\, ds &\leqslant k^n \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \dots dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} \|\mathbf{y}(s) - \overline{\mathbf{y}}(s)\|\, ds \\ &= \frac{k^n}{n!} \int_0^x (x-s)^n \|\mathbf{y}(s) - \overline{\mathbf{y}}(s)\|\, ds \leqslant \frac{k^n x^n}{n!} \int_0^x \|\mathbf{y}(s) - \overline{\mathbf{y}}(s)\|\, ds.\end{aligned}$$

Ta biết $\dfrac{k^n x^n}{n!} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên ta có

$$\int_0^x \|\mathbf{y}(s) - \overline{\mathbf{y}}(s)\|\, ds = 0.$$

Do vậy, $\mathbf{y}(x) = \overline{\mathbf{y}}(x)$ với mọi $x \in I$. Định lý được chứng minh. □

dnn **Hệ quả 4.1.2.** *Giả sử hàm* $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ *trong phương trình vi phân cấp cao* (4.1.4) *thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo các biến* $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *và* $x \in I$. *Khi đó, với điều kiện ban đầu*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (4.1.8)$$ 4.1.8b

phương trình (4.1.4) *luôn tồn tại duy nhất nghiệm với điều kiện ban đầu* (4.1.8).

Nói riêng, nếu các hàm số $p_1, p_2, \dots, p_n$ *liên tục thì phương trình vi phân tuyến tính* (3.6.1) *luôn tồn tại duy nhất nghiệm.*

Chứng minh. Phương trình vi phân cấp cao (4.1.4) có thể chuyển về hệ phương trình vi phân cấp 1 (4.1.5) nên ta có thể áp dụng Định lý tồn tại duy nhất nghiệm 4.1.1 để kết luận rằng phương trình (4.1.4) luôn tồn tại duy nhất nghiệm.

Trong trường hợp các hàm $p_1, p_2, \dots, p_n$ liên tục thì các hàm số này sẽ bị chặn trên mỗi khoảng đóng $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Từ đó dễ dàng suy ra hàm số

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = -p_1(x)y_n - \dots - p_n(x)y_1 + q(x)$$

thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo các biến $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ với $x \in [\alpha, \beta]$. Áp dụng điều vừa chứng minh ở trên ta thấy (3.6.1) luôn tồn tại duy nhất nghiệm với điều kiện ban đầu (4.1.8) trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Do α, β tùy ý nên ta có kết luận của Hệ quả. $\square$

Chú ý 4.1.3. *Định lý tồn tại duy nhất nghiệm có thể được chứng minh với những giải thiết rộng hơn tính Lipschitz của các hệ số. Chẳng hạn, người ta chứng minh được rằng*

1. *Nếu hàm* f *liên tục và tồn tại hằng số* k *sao cho*

   $$\|f(x, \mathbf{y})\| \leqslant k(1 + \|\mathbf{y}\|),$$

   với mọi $x \in I$ *và* $y \in \mathbb{R}^n$ *thì phương trình* (4.1.1) *có nghiệm xác định trên* I.

2. *Nếu tồn tại hàm* $V : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *sao cho* $\inf_{x \in I} V(x, \mathbf{y}) \to \infty$ *khi* $\mathbf{y} \to \infty$ *và*

   $$V_{\mathbf{y}}(x, \mathbf{y}).f(x, \mathbf{y}) \leqslant kV(x, \mathbf{y}),$$

   với mọi $x \in I$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *thì phương trình* (4.1.1) *có nghiệm xác định trên* I.

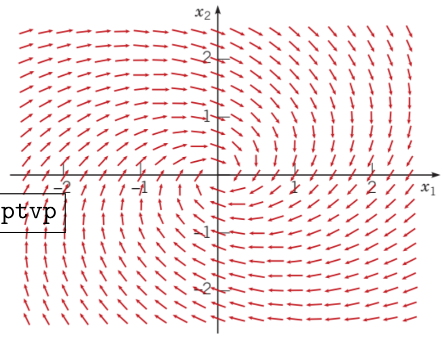
3. *Nếu chúng ta thay điều kiện Lipschitz bởi điều kiện Lipschitz địa phương, tức là Bất đẳng thức* (4.1.6) *chỉ cần xảy ra với* $\|\mathbf{y_1}\|, \|\mathbf{y_2}\| \leqslant M$, *ở đây hằng số* k *có thể phụ thuộc theo* M, *thì phương trình* (4.1.1) *có tính duy nhất nghiệm.*

Trong các nội dung tiếp theo, để ngắn gọn trong trình bày, ta chỉ đề cập đến hệ gồm hai phương trình vi phân cấp một hai ẩn có dạng

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \tag{4.1.9}$$

he_2ptvp

với các hàm cho trước $f_1, f_2 : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Việc mở rộng các kết quả trình bày với trường hợp $n = 2$ lên hệ phương trình vi phân cấp một với n ẩn dạng (4.1.1) không gặp khó khăn gì.



Hình 4.1: Trường vector hệ phương trình vi phân (4.1.10) thumoi

4.1.4 Trường vector và bức tranh pha

Khi các hàm số f_1 và f_2 trong (4.1.9) không phụ thuộc theo x ta đưa ra hai khái niệm: *trường vector* và *biểu đồ pha (hay còn gọi là bức tranh pha).*

Các khái niệm này giúp chúng ta hình dung được dáng điệu của các đồ thị của nghiệm phương trình vi phân.

Trường vector của hệ phương trình vi phân (4.1.9): Là tập hợp tất cả vector có tọa độ $(f_1(y_1, y_2), f_1(y_1, y_2))$ với điểm đặt là (y_1, y_2) trên mặt phẳng y_1Oy_2. Như vậy,

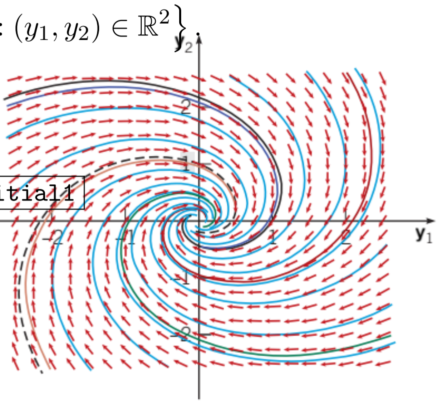
$$\text{Trường vector } = \left\{(y_1, y_2, f_1(y_1, y_2), f_1(y_1, y_2)) : (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Ví dụ 4.1.5. Xét phương trình

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{2}y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + \frac{1}{2}y_2. \end{cases} \tag{4.1.10}$$

initial1

Trường vector của hệ phương trình vi phân tuyến tính (4.1.10) được minh họa trên Hình 4.1. Quan sát trường vector này ta thấy nghiệm của phương trình (4.1.10) có xu hướng hội tụ về gốc tọa độ $(0, 0)$.



Hình 4.2: Bức tranh pha của nghiệm hệ phương trình vi phân (4.1.10) thumoi1

Biểu đồ pha (hay còn gọi là bức tranh pha): Là đồ thị hiển thị một mẫu đại diện của các quỹ đạo của nghiệm phương trình vi phân (4.1.9). Một biểu đồ pha được xây dựng tốt cung cấp thông tin dễ hiểu về tất cả các nghiệm của một hệ thống hai chiều trong một biểu diễn đồ họa duy nhất.

Thí dụ về bức tranh pha được đưa ra ở Hình 4.2.

Do $(y_1', y_2') = (f_1(y_1, y_2), f_1(y_1, y_2))$ nên trên bức tranh pha tại điểm $(y_1.y_2)$ ta thấy quỹ đạo nghiệm nhận $(f_1(y_1, y_2), f_1(y_1, y_2))$ làm vector tiếp tuyến.

4.2 Hệ hai phương trình vi phân tuyến tính

tt

Xét hệ phương trình vi phân (4.1.9). Nếu f_1 và f_2 là các hàm tuyến tính theo y_1 và y_2, ta có hệ phương trình vi phân tuyến tính hai ẩn

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + f_1(x), \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + f_2(x), \end{cases} \tag{4.2.1}$$

hett

trong đó $a_{ij}(x), f_i(x), i, j = 1, 2$, là các hàm số cho trước, liên tục trên I. Ký hiệu

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ phương trình (4.2.1) được viết lại dưới dạng ma trận

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{q}(x), x \in I. \tag{4.2.2}$$

hemt

Khi $\mathbf{q}(x) \not\equiv 0$, hệ (4.2.2) được gọi là hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất. Khi $\mathbf{q}(x) \equiv 0$, ta có hệ phương trình tuyến tính thuần nhất,

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x).$$

Định lý 4.2.1. *Cho $x_0 \in I$. Khi đó bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = A(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{q}(x), x \in I, \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{\mathbf{0}}, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

hett-1

có duy nhất nghiệm xác định trên I.

Chứng minh. Để chứng minh (4.2.3) tồn tại duy nhất nghiện trên I, ta chỉ cần chứng minh rằng với mọi $a < \alpha < x_0 < \beta < b$, bài toán Cauchy (4.2.3) có duy nhất nghiệm trên $[\alpha, \beta]$. Do hàm trận $A(x)$ liên tục trên trên I nên $k = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|A(x)\| < \infty$. Từ đó

$$\|A(x)\mathbf{y}_1 + \mathbf{q}(x) - (A(x)\mathbf{y}_2 + \mathbf{q}(x))\| = \|A(x)(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\| \leqslant k \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|,$$

với mọi $x \in [\alpha, \beta]$. Vậy hàm $f(x, \mathbf{y}) = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x)$ thỏa mãn điều kiện của Định lý 4.1.1 nên hệ (4.2.1) có nghiệm duy nhất trên $[\alpha, \beta]$. Định lý được chứng minh. $\square$

4.3 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

ch6

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x), x \in I. \quad (4.3.1)$$ hemt-tn

Trong hệ phương trình trên, vì ma trận $A(x)$ không là ma trận hằng nên nói chung ta không tích phân được phương trình (4.3.1). Vì thế ta đặt ra vấn đề tìm hiểu cấu trúc của không gian các nghiệm của nó. Trước hết ta có định lý sau

Định lý 4.3.1 (Nguyên lý tổ hợp nghiệm)**.** *Nếu* $\mathbf{g_1}$ *và* $\boldsymbol{g}_2$ *là hai nghiệm của hệ* (4.3.1) *với điều kiện ban đầu tương ứng* $\boldsymbol{g}_1(x_0) = \mathbf{y}_1^0, \boldsymbol{g}_2(x_0) = \mathbf{y}_2^0$ *và* c_1, c_2 *là hai hằng số bất kỳ thì*

$$\boldsymbol{g}(x) = c_1\boldsymbol{g}_1(x) + c_2\boldsymbol{g}_2(x), \quad x \in I,$$

cũng là một nghiệm của (4.3.1) *với điều kiện ban đầu* $\boldsymbol{g}(x_0) = c_1\mathbf{y}_1^0 + c_2\mathbf{y}_2^0$.

Từ định lý này ta có hệ quả sau.

Hệ quả 4.3.2. *Không gian các nghiệm của phương trình* (4.3.1)*, ký hiệu là* $\mathcal{L}(I)$*, là một không gian tuyến tính.*

4.3.1 Hệ nghiệm độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Để tìm hiểu về số chiều và cơ sở của không gian nghiệm $\mathcal{L}(I)$, ta cần đưa ra các khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính của một hệ vector hàm.

Định nghĩa 4.3.1. Ta nói rằng hệ hai vector hàm

$$\mathbf{g}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{pmatrix}, \ \ \mathbf{g}_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{pmatrix},$$

là phụ thuộc tuyến tính trên khoảng $I = (a, b)$ nếu tồn tại các hằng số c_1, c_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$c_1\mathbf{g}_1(x) + c_2\mathbf{g}_2(x) = 0, \quad \text{với mọi } \ x \in I. \quad (4.3.2)$$ dn3.11.1

Điều này tương đương với mọi $x \in I$, ta có

$$\begin{cases} c_1 y_{11}(x) + c_2 y_{11}(x) = 0, \\ c_1 y_{21}(x) + c_2 y_{22}(x) = 0. \end{cases} \quad (4.3.3)$$ dn3.11.1b

Hệ hai vector hàm $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$ không thoả mãn điều kiện của Định nghĩa 4.3.2 thì được gọi là độc lập tuyến tính trên khoảng $I = (a, b)$. Tương tự như phần 3.3.1, để nghiên cứu tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ vector hàm $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$ xác định trên khoảng I, ta đưa ra khái niệm Định thức Wronski.

Định nghĩa 4.3.2. Hàm số $W : I \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$W[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix},$$

được gọi là định thức Wronski của hệ vector hàm $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$.

dl1b **Định lý 4.3.3.** *Nếu hệ vector hàm $\boldsymbol{g}_1(x), \boldsymbol{g}_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên khoảng I thì Định thức Wronski $W(x)$ của chúng đồng nhất bằng không trên I.*

Chứng minh. Theo giả thiết, với mọi x thuộc I hệ (4.3.3) có nghiệm không tầm thường c_1, c_2. Do đó theo Quy tắc Cramer, định thức của hệ số phải bằng 0 trên đoạn (a, b). Dễ thấy định thức Cramer của hệ này chính là định thức Wronski $W(x)$. □

Chú ý 4.3.3. Khẳng định ngược lại của định lý 4.3.3 nói chung không đúng.
Xét hệ vector hàm

$$\mathbf{g}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$W[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} \equiv 0$$

nhưng $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, hệ thức $c_1\mathbf{g}_1(x) + c_2\mathbf{g}_2(x) \equiv 0$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} c_1 + c_2 x = 0, \\ c_1 + c_2 x = 0. \end{cases}$$

Điều này chỉ có thể xảy ra khi $c_1 = c_2 = 0$.

4.3.2 Công thức Ostrogradsky–Liouville

Như đã nhận xét ở trên, hai vector hàm độc lập tuyến tính thì định thức Wronski của vẫn có thể bằng không. Tuy nhiên, nếu $\mathbf{g}_1(x)$ và $\mathbf{g}_2(x)$ là hai nghiệm của hệ phương trình (4.3.1) thì tính độc lập tuyến tính của chúng tương đương với định thức Wronski của nó khác không. Để nhận được kết quả này, trước hết ta có định lý sau

Định lý 4.3.4 (Công thức Ostrogradsky–Liouville)**.** *Nếu $\boldsymbol{g}_1(x)$, $\boldsymbol{g}_2(x)$ là các nghiệm của hệ phương trình* (4.3.1) *thì Định thức Wronski của hệ nghiệm này được cho bởi*

$$W[\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2](x) = W(x_0) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} [a_{11}(s) + a_{22}(s))] ds \right\}, \quad x \in I. \tag{4.3.4}$$ 3.10.3

Chứng minh. Lấy đạo hàm hai vế của (4.3.4), ta được

$$\frac{d}{dx}W[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2](x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y'_{21} & y'_{22} \end{vmatrix}. \qquad (4.3.5)$$ 6.7

Vì $\mathbf{g}_1(x)$, $\mathbf{g}_2(x)$ là các nghiệm của hệ phương trình (4.3.1) nên

$$\begin{aligned} y'_{11} &= a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21}, \quad y'_{21} = a_{21}y_{11} + a_{22}y_{21}, \\ y'_{12} &= a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22}, \quad y'_{22} = a_{21}y_{12} + a_{22}y_{22}, \end{aligned}$$

Thay kết quả trên vào (4.3.5) và sử dụng tính đa tuyến tính của định thức, ta có

$$\frac{d}{dx}W[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2](x) = (a_{11}+a_{22})\begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+a_{22})W[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2].$$

Vậy ta có

$$\frac{d}{dx}W[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2] = (a_{11}(x)+a_{22}(x))W(x).$$

Tích phân phương trình này ta được

$$W[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2](x) = W(x_0)\exp\int_{x_0}^{x}[a_{11}(s)+a_{22}(s)]ds.$$

□

Nhận xét 4.3.4.

i) Công thức (4.3.4) được gọi là công thức Ostrogradsky–Liouville, nó cho ta cách tính định thức Wronski của hệ hai nghiệm $\mathbf{g}_1(x)$, $\mathbf{g}_2(x)$ cụ thể của hệ phương trình (4.3.1) mà không cần giải hệ phương trình đó.

ii) Để cho gọn ký hiệu, khi nói đến định thức Wronski của cặp nghiệm bất kỳ nào đó của hệ phương trình (4.3.1), ta viết $W(x)$ thay vì $W[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](x)$. Khi đó ta có

$$W(x) = C\exp\int[a_{11}(x)+a_{22}(x)]dx, \; x \in I, \qquad (4.3.6)$$ 3.1.7b

với C là hằng số nào đó phụ thuộc vào cặp nghiệm đang xét.

iii) Từ công thức (4.3.4), ta suy ra nếu $\mathbf{g}_1(x)$, $\mathbf{g}_2(x)$ là hệ hai nghiệm của hệ phương trình (4.3.1) thì hoặc $W[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2](x) = 0$ hoặc $W[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2](x) \neq 0$ với mọi $x \in I$. Trong trường hợp $W[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](x) \neq 0$, hệ nghiệm $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ là độc lập tuyến tính.

4.3.3 Cơ sở không gian nghiệm - Hệ nghiệm cơ bản

Định lý 4.3.5. *Không gian $\mathcal{L}(I)$ của các nghiệm của hệ (4.3.1) có số chiều bằng hai. Mọi hệ gồm hai nghiệm độc lập tuyến tính đều là một cơ sở (đại số) của $\mathcal{L}(I)$.*

Chứng minh. Cho $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của hệ (4.3.1). Giả sử $\mathbf{y}(x)$ là một nghiệm bất kỳ nào đó của (4.3.1). Ta sẽ chứng minh rằng $\mathbf{y}(x)$ có thể biểu diễn tuyến tính theo $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$. Lấy $x_0 \in I$ và giả sử $\mathbf{y}(x_0) = (y_1^0, y_2^0)^\top \in \mathbb{R}^2$. Xét hệ phương trình với ẩn c_1, c_2

$$\begin{cases} y_1^0 = c_1 y_{11}(x_0) + c_2 y_{12}(x_0), \\ y_2^0 = c_1 y_{21}(x_0) + c_2 y_{22}(x_0). \end{cases} \tag{4.3.7}$$

e3.11.12

Do định thức của ma trận hệ số là $W(x_0) \neq 0$ nên tồn tại các hằng số c_1, c_2 thỏa mãn hệ phương trình (4.3.7). Ngoài ra, hệ phương trình (4.3.7) cũng được viết dưới dạng ma trận

$$\mathbf{y}(x_0) = c_1 \mathbf{g}_1(x_0) + c_2 \mathbf{g}_2(x_0).$$

Mặt khác, theo định lý về tổ hợp nghiệm ta có

$$\overline{\mathbf{y}}(x) = c_1 \mathbf{g}_1(x) + c_2 \mathbf{g}_2(x),$$

cũng là một nghiệm của (4.3.1). Hơn nữa, $\overline{\mathbf{y}}(x_0) = \mathbf{y}(x_0)$. Do đó, theo định lý tồn tại duy nhất nghiệm ta có $\mathbf{y}(x) \equiv \overline{\mathbf{y}}(x)$ trên I. Vậy $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{g}_1(x) + c_2 \mathbf{g}_2(x)$. Hay $\mathbf{y}(x)$ được biểu diễn tuyến tính qua $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$.

Ta chọn hai nghiệm $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$ của hệ phương trình vi phân (4.3.1) có điều kiện ban đầu $\mathbf{g}_1(x_0) = (1,0)^\top, \mathbf{g}_2(x_0) = (0,1)^\top$. Khi đó do $W[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](x_0) = 1 \neq 0$ nên $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$ độc lập tuyến tính. Vì vậy, $\mathcal{L}(I)$ có số chiều bằng hai. Ta có điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 4.3.5. Hệ gồm hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (4.3.1) được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.

4.4 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

c.htttn

Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x), \\ y_2'(x) = a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x), \end{cases} \tag{4.4.1}$$

hett-h

ở đó a_{ij} là các hằng số thực cho trước. Dạng ma trận của hệ phương trình trên là

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x), \tag{4.4.2}$$

hemt-tn-h

với $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ là ma trận hằng, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ là cột vectơ hàm cần tìm.

4.4.1 Giá trị riêng của ma trận và nghiệm của hệ phương trình

Trên thực tế ta có thể chuyển hệ (4.4.2) về phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng như trong Ví dụ 4.1.3. Tuy nhiên trong mục này ta tìm cách tiếp cận hệ phương trình theo một hướng khác.

Giả sử λ là một giá trị riêng thực của ma trận A, tức nó là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{4.4.3}$$

ptdt

Nếu $\mathbf{v}$ là một vector riêng ứng với giá trị riêng λ, nghĩa là $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, ta dễ thấy $\mathbf{g}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ là nghiệm của (4.4.2).

Tiếp theo ta xét các trường hợp về nghiệm của phương trình đặc trưng để xây dựng hệ nghiệm cơ bản của hệ (4.4.2).

Trường hợp 1. Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Giả sử $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ là hai vector riêng tương ứng với hai giá trị riêng λ_1, λ_2. Ta có v_1, v_2 là độc lập tuyến tính. Khi đó, sử dụng định thức Wronski ta dễ dàng suy ra hai nghiệm

$$\mathbf{g}_1(x) = e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1, \ \ \mathbf{g}_2(x) = e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2,$$

là một hệ nghiệm cơ bản của (4.4.2).

Trường hợp 2. Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.

Giả sử $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^2$ là một vector riêng ứng với giá trị riêng λ. Gọi $\mathbf{v}_2$ là vector riêng suy rộng ứng với giá trị riêng bội λ, nghĩa là $\mathbf{v}_2$ thỏa mãn phương trình

$$(A - \lambda I)^2\mathbf{v} = 0. \tag{4.4.4}$$

vtrsr

Đặt $\mathbf{g}_2(x) = e^{\lambda x}[\mathbf{v}_2 + x(A - \lambda I)\mathbf{v}_2]$, ta có

$$\begin{aligned} A\mathbf{g}_2(x) &= e^{\lambda x}[A\mathbf{v}_2 + x(A^2 - \lambda A)\mathbf{v}_2]) = e^{\lambda x}[x(A - \lambda I)^2 + x\lambda(A\mathbf{v}_2 - \lambda I) + A]\mathbf{v}_2 \\ &= e^{\lambda x}\left[x\lambda(A - \lambda I) + A\right]\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\mathbf{g}_2'(x) = e^{\lambda x}\left[\lambda I + \lambda x(A - \lambda I) + (A - \lambda I)\right]\mathbf{v}_2 = A\mathbf{g}_2(x).$$

Vậy $\mathbf{g}_2(x)$ là một nghiệm của (4.4.2). Mặt khác, dễ thấy

$$\mathbf{g}_1(x) = e^{\lambda x}\mathbf{v}_1, \ \ \mathbf{g}_2(x) = e^{\lambda x}[\mathbf{v}_2 + x(A - \lambda I)\mathbf{v}_2], \tag{4.4.5}$$

Hncb2

là độc lập tuyến tính, nên nó là một hệ nghiệm cơ bản của (4.4.2).

Trường hợp 3. Ma trận A có giá trị riêng phức $\lambda_{1,2} = a \pm ib$.

Giả sử $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ là vector riêng phức ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = a + bi$, ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ là các vector thực thuộc $\mathbb{R}^2$). Khi đó, ta dễ thấy $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$ là vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = a - bi$. Do đó, ta có

$$\mathbf{y} = e^{(a+bi)x}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = e^{ax}(\mathbf{v}_1 \cos bx - \mathbf{v}_2 \sin bx) + ie^{ax}(\mathbf{v}_1 \sin bx + \mathbf{v}_2 \cos bx),$$

và $\mathbf{y} = e^{(a-bi)x}(\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2) = e^{ax}(\mathbf{v}_1 \cos bx - \mathbf{v}_2 \sin bx) - ie^{ax}(\mathbf{v}_1 \sin bx + \mathbf{v}_2 \cos bx)$ là các nghiệm phức của hệ phương trình (4.4.2). Sử dụng tính chất tuyến tính của nghiệm của hệ phương trình tuyến tính, ta suy ra

$$\mathbf{g}_1(x) = e^{ax}(\mathbf{v}_1 \cos bx - \mathbf{v}_2 \sin bx), \quad \mathbf{g}_2(x) = e^{ax}(\mathbf{v}_1 \sin bx + \mathbf{v}_2 \cos bx), \tag{4.4.6}$$ Hncb3

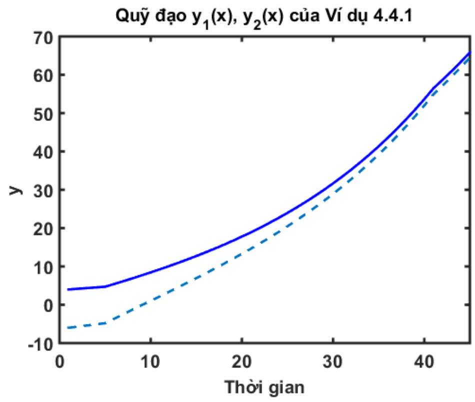
là hai nghiệm độc lập tuyến tính. Hay $\mathbf{g}_1(x)$, $\mathbf{g}_2(x)$ là một hệ nghiệm cơ bản của (4.4.2).

ex3.2.1 **Ví dụ 4.4.1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

Giải: Ma trận hệ số của hệ phương trình $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Xét phương trình đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1.$$



Hình 4.3: Đường cong nghiệm Ví dụ 4.4.1 fig43

Giả sử $v = (v_1, v_2)^\top$ là vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$. Ta có,

$$(A - I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 - v_2 = 0.$$

Chọn vector riêng là $v = (1, 1)^\top$. Ta có một nghiệm của hệ là

$$\mathbf{g}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tương tự, ta tìm được $v = (1, 3)^\top$ là vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$. Ta có một nghiệm của hệ là

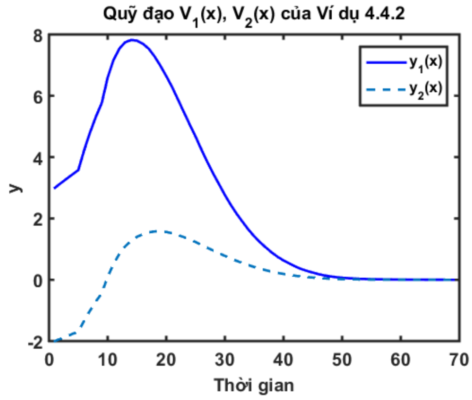
$$\mathbf{g}_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Do đó, ta có nghiệm tổng quát của hệ phương trình là

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{g}_1(x) + c_2\mathbf{g}_2(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ex3.2.3 **Ví dụ 4.4.2.** Giải phương trình

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 18y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 9y_2. \end{cases}$$



Hình 4.4: Đường cong nghiệm Ví dụ 4.4.2 `fig43`

Giải: Xét phương trình đặc trưng

$$\begin{aligned} &\det(A - \lambda I) = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &\ \lambda = -3 \text{ (bội 2)}. \end{aligned}$$

Với $\lambda_1 = -3$. Vector riêng tương ứng $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)^\top$ là nghiệm phương trình

$$(A+3I)\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 - 3v_2 = 0.$$

Chọn vector riêng là $\mathbf{v}_1 = (3,1)^\top$. Ta có $\mathbf{g}_1(x) = e^{-3x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ là một nghiệm của hệ phương trình. Mặt khác, vì

$$(A+3I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nên chọn $\mathbf{v}_2 = (0,1)^\top$, ta có $(A+3I)^2\mathbf{v}_2 = 0$, suy ra $\mathbf{v_2}$ là vector riêng suy rộng ứng với giá trị riêng bội $\lambda = -3$. Khi đó, theo (4.4.5), ta có

$$\mathbf{g}_1(x) = e^{-3x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(x) = e^{-3x}\left[\mathbf{v}_2 + x(A+3I)\mathbf{v}_2\right] = e^{-3x}\begin{pmatrix} -18x \\ 1-6x \end{pmatrix},$$

là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình. Vậy nghiệm tổng quát của hệ là

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{-3x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3x}\begin{pmatrix} -18x \\ 1-6x \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

`ex3.2.2` **Ví dụ 4.4.3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = -0.1y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 - 0.1y_2. \end{cases}$$

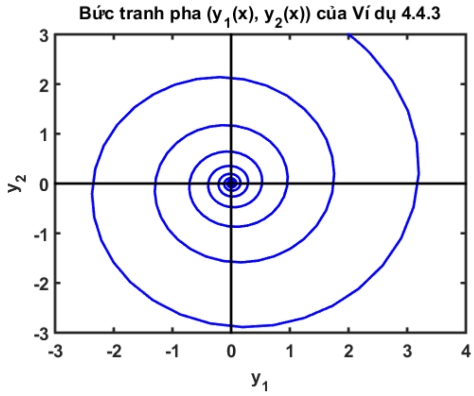
Giải: Xét phương trình đặc trưng của ma trận hệ số của hệ phương trình

$$\begin{aligned}
&\det(A-\lambda I)=0\\
\Leftrightarrow\ &\begin{vmatrix}-0.1-\lambda & 1\\ -1 & -0.1-\lambda\end{vmatrix}=0\\
\Leftrightarrow\ &\lambda^2+0.2\lambda+1.01=0\\
\Leftrightarrow\ &\lambda_{1,2}=-0.1\pm i.
\end{aligned}$$

Với $\lambda_1 = -0.1 + i$, vector riêng phức tương ứng $\mathbf{v}$ là nghiệm phương trình

$$[A-(-0.1+i)I]\mathbf{v}=0.$$

Suy ra $\mathbf{v} = (1, i)^\top = (1, 0)^\top + i(0, 1)^\top$, theo (4.4.6) ta có



Hình 4.5: Bức tranh pha của nghiệm phương trình vi phân trong Ví dụ 4.4.3 fig44

$$\mathbf{g}_1(x)=e^{-0.1x}\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix},\quad \mathbf{g}_2(x)=e^{-0.1x}\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix},$$

là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình. Do đó, hệ có nghiệm tổng quát là

$$\mathbf{y}(x)=c_1e^{-0.1x}\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+c_2e^{-0.1x}\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Bức tranh pha $\{(y_1(x), y_2(x) : x \geqslant 0\}$ của đường cong nghiệm được minh họa trong Hình 4.5.

4.4.2 Hàm mũ của ma trận và nghiệm của hệ phương trình

Trong nội dung tiếp theo, ta sẽ trình bày một cách tiếp cận khác về nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng (4.4.2). Trước hết ta nhận xét rằng nghiệm $\mathbf{y}(x)$ của phương trình nếu tồn tại sẽ liên tục nên phương trình (4.4.2) tương đương với phương trình tích phân

$$\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}^0+\int_0^x A\mathbf{y}(s)ds. \tag{4.4.7}$$

hemt-tn-t

Ta sử dụng phương pháp xấp xỉ Picard để xác định nghiệm của phương trình bằng cách xây dựng dãy xấp xỉ nghiệm, là dãy hàm liên tục $\{\mathbf{y}_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$ như sau

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}_0(x)=\mathbf{y}^0,\\
&\mathbf{y}_1(x)=\mathbf{y}^0+\int_0^x A\mathbf{y}^0(s)ds=\mathbf{y}^0+xA\mathbf{y}^0,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_2(x) = \mathbf{y}^0 + \int_0^x A\mathbf{y}_1(s)ds = \mathbf{y}^0 + xA\mathbf{y}^0 + \frac{x^2}{2}A^2\mathbf{y}^0,$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}^0 + A\int_0^x \mathbf{y}_{n-1}(s)ds = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}A^k\mathbf{y}^0.$$

Ta thấy, $\mathbf{y}_n(x)$ là tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}A^k\mathbf{y}^0$. Vì

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left\|A^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \|A\|^k,$$

mà chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} \|A\|^k$ hội tụ đều theo x trên mỗi đoạn hữu hạn, nên chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}A^k$ hội tụ trong không gian các ma trận vuông cấp 2 đến một hàm liên tục.

Đặt $\mathbf{y}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}A^k\mathbf{y}^0$, ta thấy dãy $\mathbf{y}_n(x)$ sẽ hội tụ đến hàm $\mathbf{y}(x)$. Qua giới hạn hai vế của đẳng thức

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}^0 + A\int_0^x \mathbf{y}_{n-1}(s)ds,$$

ta thu được được (4.4.7). Do đó, $\mathbf{y}(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân (4.4.2).

Định nghĩa 4.4.4. Cho M là một ma trận vuông bất kỳ, ta định nghĩa hàm mũ của ma trận M là

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

Với định nghĩa trên, nghiệm của phương trình (4.4.2) được biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}^0.$$

Tổng hợp các kết quả trên, ta thu được định lý sau

Định lý 4.4.1. *Cho A là ma trận vuông cấp hai. Khi đó với mọi $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^2$, bài toán điều kiện ban đầu:*

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0,$$

có duy nhất nghiệm cho bởi

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{A(x-x_0)}\boldsymbol{y}^0.$$

Để tính hàm mũ ma trận e^A ta sử dụng tính chất sau: nếu ma trận B đồng dạng với ma trận A thì tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Khi đó ta có,

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}(PBP^{-1})^k = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} B^k\right) P^{-1} = Pe^{Bx}P^{-1}.$$

Vậy nếu tính được e^{Bx} ta sẽ tính được e^{Ax}. Như vậy, nếu $\mathbf{z}(x)$ là nghiệm của phương trình $\mathbf{z}'(x) = B\mathbf{z}(x)$ thì $\mathbf{y}(x) = P^{-1}\mathbf{z}(x)$ là nghiệm của phương trình $\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x)$.

Hơn nữa, người ta đã chứng minh rằng, nếu A là một ma trận vuông cấp hai bất kỳ thì A luôn đồng dạng với ma trận B có dạng như một trong ba trường hợp sau đây.

Trường hợp 1. Ma trận A có 2 giá trị riêng thực λ_1, λ_2 và có thể tìm được 2 véc tơ riêng tương ứng $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ độc lập tuyến tính.

Khi đó, A đồng dạng với ma trận $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Do $B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$, nên

$$e^{Bx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}.$$

Nghiệm của phương trình (4.4.2) là

$$\mathbf{y}(x) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{y}(x_0), \tag{4.4.8}$$ ctndon

với P là ma trận chuyển $A = PBP^{-1}$.

Trường hợp 2. Ma trận A có giá trị riêng thực kép $\lambda_1 = \lambda_2 = a \in \mathbb{R}$ nhưng không tìm được hai vector riêng độc lập tuyến tính.

Khi đó, A đồng dạng với $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Phân tích $B = aI + B_1$, với $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vì ma trận I giao hoán với ma trận B_1 nên

$$e^{Bx} = e^{aIx}e^{B_1x}.$$

Do $B_1^2 = 0$ nên $e^{B_1x} = I + B_1x$. Vì thế

$$e^{Bx} = e^{ax}\begin{pmatrix} 1 & bx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nghiệm của phương trình (4.4.2) là

$$\mathbf{y}(x) = P \begin{pmatrix} 1 & bx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{y}(x_0), \tag{4.4.9}$$ ctndon

Trường hợp 3. Ma trận A có giá trị riêng phức liên hợp $\lambda = a \pm ib$.

Khi đó, ma trận A đồng dạng với ma trận $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Ta viết lại ma trận B ở dạng

$$B = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda & -\operatorname{Im}\lambda \\ \operatorname{Im}\lambda & \operatorname{Re}\lambda \end{pmatrix}.$$

Ta thấy,

$$B^2 = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re}\lambda)^2 - (\operatorname{Im}\lambda)^2 & -2\operatorname{Re}\lambda\operatorname{Im}\lambda \\ 2\operatorname{Re}\lambda\operatorname{Im}\lambda & (\operatorname{Re}\lambda)^2 - (\operatorname{Im}\lambda)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda^2 & -\operatorname{Im}\lambda^2 \\ \operatorname{Im}\lambda^2 & \operatorname{Re}\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Bằng quy nạp ta nhận được

$$B^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda^k & -\operatorname{Im}\lambda^k \\ \operatorname{Im}\lambda^k & \operatorname{Re}\lambda^k \end{pmatrix}.$$

Do đó,

$$e^{Bx} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}e^{\lambda x} & -\operatorname{Im}e^{\lambda} \\ \operatorname{Im}e^{\lambda x} & \operatorname{Re}e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{ax}\begin{pmatrix} \cos bx & -\sin bx \\ \sin bx & \cos bx \end{pmatrix}.$$

Nghiệm của phương trình (4.4.2) là

$$\mathbf{y}(x) = P\begin{pmatrix} \cos bx & -\sin bx \\ \sin bx & \cos bx \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{y}(x_0). \tag{4.4.10}$$ ctndon

Dựa vào các phân tích trên, ta có thể đưa ra **phương pháp Fulmer như sau để tìm hàm mũ ma trận** e^{Ax} mà không cần tính cụ thể ma trận đồng dạng B của ma trận A:

Bước 1. Xác định hệ hàm cơ sở ứng với mọi giá trị riêng của ma trận A. Cụ thể, giả sử, λ là nghiệm của đa thức đặc trưng, ta định nghĩa *hàm cơ sở*

- Nếu λ là giá trị riêng thực đơn của A thì hàm $e^{\lambda x}$ gọi là hàm cơ sở.
- Nếu λ là giá trị riêng thực kép của A thì các hàm $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$ gọi là các hàm cơ sở.
- Nếu $\lambda = a \pm \mathbf{i}b$ là giá trị riêng phức của A thì $e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$ gọi là hai hàm cơ sở.

Do đó, khi A là ma trận vuông cấp hai, hệ hàm cơ sở gồm có đúng 2 hàm cơ sở, ta ký hiệu chúng là $\phi_1(x)$ và $\phi_2(x)$.

Bước 2. Đặt

$$e^{Ax} = M_1\phi_1(x) + M_2\phi_2(x). \tag{4.4.11}$$ fulmer

trong đó M_1, M_2 là các ma trận cấp hai cần tìm.

Bước 3. Giải hệ (4.4.11) để tìm M_1, M_2.

Có thể giải M_1, M_2 bằng nhiều cách, chẳng hạn cho $x = 0$ ta nhận được

$$I = M_1\phi_1(0) + M_2\phi_2(0).$$

Tiếp đến lấy đạo hàm hệ thức (4.4.11) rồi cho cho $x = 0$ ta có

$$A = M_1\phi_1'(0) + M_2\phi_2'(0).$$

Ta minh họa thuật toán Fulmer bằng một số ví dụ:

Ví dụ 4.4.5. Tính e^{Ax} với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải: Phương trình đặc trưng của ma trận A,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 1)^2 + 4 = 0,$$

có nghiệm phức $\lambda = 1 \pm 2i$. Suy ra hệ hàm cơ sở tương ứng là $\{e^x \cos 2x, e^x \sin 2x\}$. Giả sử, M_1, M_2 là các ma trận cấp hai sao cho

$$e^{Ax} = e^x \left(M_1 \cos 2x + M_2 \sin 2x\right).$$

Đạo hàm hai vế đẳng thức trên, ta được

$$Ae^{Ax} = e^x \left(M_1 \cos 2x + M_2 \sin 2x\right) + e^x \left(-2M_1 \sin 2x + M_2 2 \cos 2x\right).$$

Thay $x = 0$ lần lượt vào hai đẳng thức trên, ta nhận được

$$M_1 = I, \quad M_1 + 2M_2 = A.$$

Suy ra $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Vậy

$$e^{Ax} = e^x \begin{pmatrix} \cos 2x & \dfrac{1}{2}\sin 2x \\ -2\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 4.4.6. Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

với điều kiện đầu $y_1(0) = 6V, y_2(0) = 1V$.

Giải: Ma trận hệ số của hệ phương trình $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 3)(\lambda - 1),$$

có các giá trị riêng là $\lambda_1 = -3$ và $\lambda_2 = 1$.

<u>*Cách 1:*</u> Với các giá trị riêng $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$, ta tìm được các vecto riêng tương ứng là

$$v_1 = (2 \quad -1)^\top, \ \ v_1 = (2 \quad 1)^\top.$$

Do đó, ta có nghiệm tổng quát của hệ phương trình là

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 e^{-3x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Với điều kiện đầu $y_1(0) = 6V, y_2(0) = 1V$, ta thu được

$$y_1(x) = 2e^{-3x} + 4e^x, \ y_2(x) = -e^{-3x} + 2e^x.$$

<u>*Cách 2:*</u> Sử dụng phương pháp Fulmer để tính ma trận mũ e^{Ax}.

Do đa thức đặc trưng có các giá trị riêng là $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$, nên hệ hàm cơ sở tương ứng là $\{e^{-3x}, e^x\}$. Giả sử, M_1, M_2 là các ma trận cấp hai nào đó và

$$e^{Ax} = M_1 e^{-3x} + M_2 e^x,$$

Đạo hàm hai vế đẳng thức trên, ta được

$$Ae^{Ax} = -3M_1 e^{-3x} + M_2 e^x.$$

Thay $x = 0$ vào hai đẳng thức trên, ta có $M_1 + M_2 = I, \ -3M_1 + M_2 = A$. Giải hệ phương trình ma trận, ta được

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Suy ra,

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{-3x} + e^x) & -e^{-3x} + e^x \\ \frac{1}{4}(-e^{-3x} + e^x) & \frac{1}{2}(e^{-3x} + e^x) \end{pmatrix}.$$

Do đó,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^{Ax} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{-3x} + e^x) & -e^{-3x} + e^x \\ \frac{1}{4}(-e^{-3x} + e^x) & \frac{1}{2}(e^{-3x} + e^x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$y_1(x) = 2e^{-3x} + 4e^x, \ y_2(x) = -e^{-3x} + 2e^x.$$

4.5 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính (4.2.2). Khi ma trận A không phụ thuộc vào x, ta được hệ phương trình tuyến tính hệ số hằng

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x) + \mathbf{q}(x), \tag{4.5.1}$$ hektt

với

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Do tính chất nghiệm của hệ phương trình tuyến tính nên để giải hệ (4.5.1), ta tiến hành theo 3 bước sau

Bước 1. Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng $\{\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)\}$.

Bước 2. Tìm nghiệm riêng của $\mathbf{y}^*(x)$ của hệ phương trình (4.5.1).

Bước 3. Nghiệm tổng quát của hệ phương trình (4.5.1) có dạng

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{g}_1(x) + c_2\mathbf{g}_2(x) + \mathbf{y}^*(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Trong mục 4.4 đã trình bày phương pháp tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng tương ứng. Do đó, trong mục này ta sẽ đưa ra phương pháp tìm nghiệm riêng của hệ phương trình (4.5.1).

1. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Giả sử hệ thuần nhất tương ứng của hệ (4.5.1) có hệ nghiệm cơ bản là $\{\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)\}$. Khi đó ta tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$\mathbf{y}^*(x) = c_1(x)\mathbf{g}_1(x) + c_2(x)\mathbf{g}_2(x),$$

trong đó $\mathbf{c}(x) = (c_1(x), c_2(x))^\top$ là các hàm cần xác định sao cho $\mathbf{y}^*(x)$ thỏa mãn hệ (4.5.1). Đạo hàm $\mathbf{y}^*(x)$, thay vào (4.5.1), ta được

$$c_1'(x)\mathbf{g}_1(x)+c_2'(x)\mathbf{g}_2(x)+c_1(x)\mathbf{g}_1'(x)+c_2(x)\mathbf{g}_2'(x) \equiv A\left[c_1(x)\mathbf{g}_1(x) + c_2(x)\mathbf{g}_2(x)\right]+\mathbf{q}(x).$$

Do $\mathbf{g}_1(x), \mathbf{g}_2(x)$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với hệ (4.5.1) nên biểu thức trên trở thành

$$c_1'(x)\mathbf{g}_1(x) + c_2'(x)\mathbf{g}_2(x) = \mathbf{q}(x). \tag{4.5.2}$$ helg

Vì định thức Wronski $W[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](x)$ cũng chính là ma trận hệ số của hệ phương trình (4.5.2) luôn khác không với mọi $x \in I$ nên hệ trên có duy nhất nghiệm $(c_1'(x), c_2'(x))$. Khi đó, $c_1(x)$ và $c_2(x)$ được xác định bởi

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx + K_1, \quad c_2(x) = \int c_2'(x)dx + K_2, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Trong biểu thức trên, chọn $K_1 = K_2 = 0$, ta suy ra một nghiệm riêng của hệ (4.5.1)

$$\mathbf{y}^*(x) = \mathbf{g}_1(x) \int c_1'(x)dx + \mathbf{g}_2(x) \int c_2'(x)dx.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình không thuần nhất (4.5.1) là

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{g}_1(x) + c_2\mathbf{g}_2(x) + \mathbf{y}^*(x), \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 4.5.1. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Giải: Xét hệ thuần nhất

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Bằng cách đưa về phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai dễ dàng tìm được hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất là

$$\mathbf{g}_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số, ta tìm nghiệm riêng của hệ tuyến tính không thuần nhất dưới dạng

$$\mathbf{y}^* = c_1(x)\mathbf{g}_1(x) + c_2(x)\mathbf{g}_2(x),$$

trong đó $c_1(x), c_2(x)$ được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x.} \end{cases} \qquad (4.5.3) \quad \boxed{\texttt{vd4.1}}$$

Giải hệ này ta được,

$$c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_2'(x) = 1.$$

Lấy $c_1(x) = \ln|\cos x|, c_2(x) = x$, suy ra nghiệm riêng cần tìm là

$$\begin{cases} y_1^*(x) = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x, \\ y_2^*(x) = -\sin x \ln|\cos x| + x\cos x. \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho có dạng

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x, \\ y_2(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\ln|\cos x| + x\cos x, \end{cases}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

2. Phương pháp hệ số bất định

Về hình thức phương pháp này giống trường hợp hệ số bất định được trình bày khi tìm nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng cấp cao với vế phải có dạng đặc biệt. Tuy nhiên, các hệ số của đa thức là 2 chiều.

Ví dụ 4.5.2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 + y_2 + 6x, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 + 10x - 4. \end{cases}$$

Bước 1. Tìm hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất tương ứng. Xét đa thức đặc trưng

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda-2)(\lambda-7).$$

Ma trận A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7$ và các vecto riêng tương ứng là $\mathbf{v}_1 = (1,-4)^\top, \mathbf{v}_2 = (1,1)^\top$. Do đó, hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất là

$$\left\{ \mathbf{g}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2x},\ \ \mathbf{g}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7x} \right\}.$$

Bước 2. Tìm nghiệm riêng $\mathbf{y}^*$ của phương trình ban đầu. Do hàm $\mathbf{q}(x)$ có dạng

$$\mathbf{q}(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

nên ta tìm nghiệm của phương trình dưới dạng

$$\mathbf{y}^*(x) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Thay $\mathbf{y}^*(x)$ vào phương trình ban đầu ta có biểu thức

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 6x \\ -10x + 4 \end{pmatrix}$$

thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đồng nhất hệ số hai vế của biểu thức trên, ta thu được

$$a_1 = -\frac{4}{7},\ b_1 = \frac{10}{7},\ a_2 = -2,\ b_2 = 6.$$

Do đó, ta có nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất ban đầu là

$$\mathbf{y}^*(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}.$$

Bước 3. Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}.$$

Ex_machdien **Ví dụ 4.5.3.** Xét mạch điện mắc song song trong ví dụ cho ở Mục 1.4, Chương 1, ta có hệ phương trình vi phân xác định điện áp trên các tụ điện là

$$\begin{pmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\sin t \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.5.4)$$ 4.5.4

Ta có phương trình đặc trưng

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0,$$

có các giá trị riêng là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -6$. Dễ dàng tìm được các vecto riêng tương ứng với các giá trị riêng đó là $v_1 = (1,1)^\top, v_1 = (-2,1)^\top$. Vậy, hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng với (4.5.4) là

$$\mathbf{g}_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{g}_2(x) = e^{-6t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vì vế phải phương trình (4.5.4) là vector hằng (đa thức bậc 0) nhân với $\sin t$ nên ta có thể tìm nghiệm riêng $\mathbf{V}^*(t)$ của phương trình ở dạng

$$\mathbf{V}^*(t) = \begin{pmatrix} V_1^\star(t) \\ V_2^\star(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \sin t + b_1 \cos t \\ a_2 \sin t + b_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Đạo hàm hàm $\mathbf{V}^*(t)$ và thay vào phương trình ta có

$$\begin{pmatrix} a_1\cos t - b_1\sin t \\ a_2\cos t - b_2\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\sin t + b_1\cos t \\ a_2\sin t + b_2\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hay là,

$$\begin{pmatrix} a_1\cos t - b_1\sin t \\ a_2\cos t - b_2\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5a_1 + 2a_2)\sin t + (-5b_1 + 2b_2)\cos t \\ (2a_1 - 2a_2)\sin t + (2b_1 - 2b_2)\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cân bằng hệ số của $\sin t$ và $\cos t$ cho ta hệ phương trình

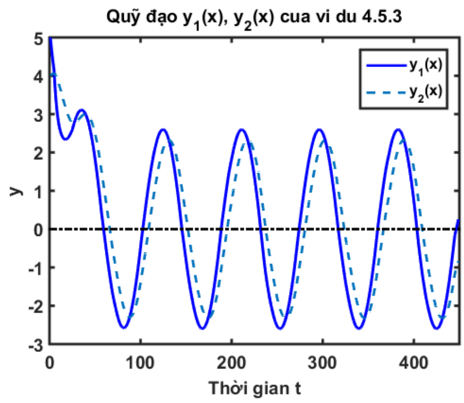
$$\begin{aligned} b_1 &= 5a_1 - 2a_2 - 10, \\ b_2 &= -2a_1 + 2a_2, \\ a_1 &= -5b_1 + 2b_2, \\ a_2 &= 2b_1 - 2b_2. \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình này ta được

$$a_1 = \frac{85}{37}, a_2 = \frac{50}{37}, b_1 = \frac{-45}{37}, b_2 = \frac{-70}{37}.$$

Do đó, nghiệm riêng của hệ phương trình là:

$$\mathbf{V}^*(t) = \frac{5}{37}\begin{pmatrix} 17\sin t - 9\cos t \\ 10\sin t - 14\cos t \end{pmatrix} \boxed{\texttt{h4.6}}$$



Hình 4.6: Điện áp trên mỗi tụ tiến tới dao động tuần hoàn

Vậy nghiệm tổng quát của (4.5.4) là

$$\begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2e^{-6t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{37}\begin{pmatrix} 17\sin t - 9\cos t \\ 10\sin t - 14\cos t \end{pmatrix},$$

với $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Hay là,

$$\begin{aligned} V_1(t) &= c_1e^{-t} + 2c_2e^{-6t} + \frac{5}{37}(17\sin t - 9\cos t); \\ V_2(t) &= 2c_1e^{-t} - c_2e^{-6t} + \frac{5}{37}(10\sin t - 14\cos t). \end{aligned}$$

Với giá trị ban đầu $V_1(0) = 5$ và $V_2(0) = 4$ ta tính được $c_1 = 3.6; c_2 = -1.308$. Vậy

$$\begin{aligned} V_1(t) &= 3.6e^{-t} - 2.616e^{-6t} + \frac{5}{37}(17\sin t - 9\cos t); \\ V_2(t) &= 7.2e^{-t} + 1.308e^{-6t} + \frac{5}{37}(10\sin t - 14\cos t). \end{aligned}$$

Quỹ đạo của $V_1(t)$ và $V_2(t))$, $t \geqslant 0$ được phác họa trên Hình 4.6.

s4.6
4.6 Hệ hai phương trình vi phân phi tuyến cấp một

Xét hệ hai phương trình vi phân cấp một (4.1.9),

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \tag{4.6.1}$$ he_2ptvp1

Trong mục trước, ta đã đưa ra cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính và chỉ rõ các bước để tìm nghiệm của phương trình tuyến tính hệ số hằng. Khi các hàm f_1, f_2 không tuyến tính theo các biến y_1, y_2, vấn đề trở nên phức tạp hơn rất nhiều và không có phương pháp chung để giải. Trong phần này, ta nêu ra một phương pháp, gọi là *phương pháp tổ hợp tích phân*, mà nếu may mắn thì trong một số trường hợp đặc biệt, ta có thể tìm được nghiệm của hệ phi tuyến.

def:tfd **Định nghĩa 4.6.1.** *Tích phân đầu* của hệ phương trình vi phân (4.6.1) là hàm $\varphi : I \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi nghiệm $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^\top$ của hệ ta có tham số C để

$$\varphi(x, y_1(x), y_2(x)) = C, \tag{4.6.2}$$ he_ptvp1b

với mọi $x \in I$.

Như vậy, tích phân đầu của hệ là hàm số mà dọc theo nghiệm của hệ, nó sẽ là hàm hằng. Ngoài ra, bằng cách lấy vi phân hai vế (4.6.2) theo x ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\varphi(x, y_1, y_2) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} f(x, y_1, y_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} g(x, y_1, y_2) = 0. \end{aligned}$$

he_ptvp1b Tiếp theo, ta xét một số trường hợp cho phép tính tích phân đầu của hệ (4.6.1).
Trường hợp 1. *Hàm* $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2})$ *và* $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2})$ *không phụ thuộc theo biến* x
he_ptvp1b Khi đó, hệ (4.6.1) được viết lại dưới dạng Hay là,

$$\frac{dy_1}{f(y_1, y_2)} = \frac{dy_2}{g(y_1, y_2)},$$

suy ra

$$f(y_1, y_2)dy_2 - g(y_1, y_2)dy_1 = 0. \tag{4.6.3}$$ 4.6.4

Đây là dạng phương trình vi phân cấp một đã xét trong Chương 2. Ta có thể sử dụng các phương pháp đã trình bày ở Chương 2 để giải phương trình này.

Ví dụ 4.6.2. Xét phương trình thú mồi (1.3.7) được trình bày trong mục 1.3.2

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 - by_1y_2, \\ y_2' &= -cy_2 + dy_1y_2. \end{aligned}$$

Để tìm tích phân đầu của hệ trên ta xét phương trình dạng (4.6.3)

$$(ay_1 - by_1y_2)dy_2 - (-cy_2 + dy_1y_2)dy_2 = 0.$$

Đây là phương trình vi phân với biến số phân ly. Giải phương trình này ta tìm được tích phân đầu

$$\phi(y_1, y_2) = -a\ln y_2 + by_2 - c\ln y_1 + dy_1.$$

Như thế nếu ta biết được các hệ số a, b, c, d thì số lượng loài mồi y_1 và loài thú y_2 tuân theo phương trình

$$-a\ln y_2 + by_2 - c\ln y_1 + dy_1 = C,$$

với

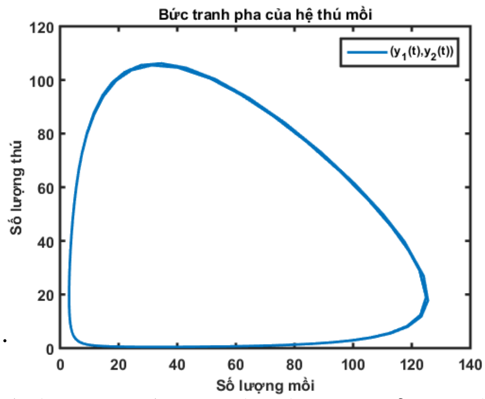
$$C = -a\ln y_2(x_0) + by_2(x_0) - c\ln y_1(x_0) + dy_1(x_0).$$

Đây là các đường cong khép kín nằm trong mặt phẳng. Sự phát triển tuân theo quy luật tuần hoàn của các loài được minh họa trong Hình 4.7.

Các hệ số a, b, c, d sẽ được ước lượng từ các dữ liệu quan sát thực tế. Ví dụ, từ số liệu Bảng 1, ta sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu để ước lượng được các tham số

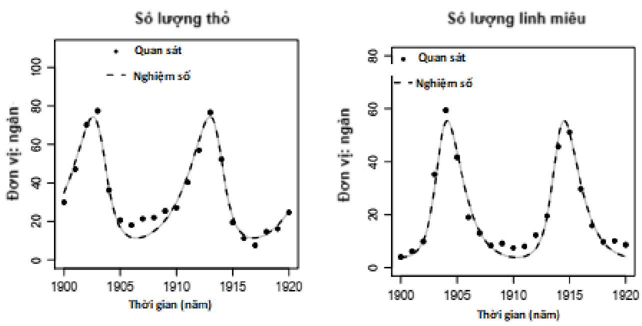
$$a \approx 0.481, \; b \approx 0.025, \; c \approx 0.927, \; d \approx 0.028.$$

Bức tranh pha về sự phát triển của quần thể và sai số của mô hình so với số liệu quan sát được được mô phỏng bằng phần mềm Matlab và được biểu diễn trong các hình 4.7 và 4.8.



Hình 4.7: Bức tranh pha mô tả sự phát triển tuần hoàn của linh miêu và thỏ từ số liệu Bảng 1

prey-pred



Hình 4.8: So sánh ước lượng từ mô hình và quan sát thực

prey-pred

Ví dụ 4.6.3. Tìm hai tích phân đầu của hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_2}{(y_2 - y_1)^2}, \\ y_2' = \dfrac{y_1}{(y_2 - y_1)^2}. \end{cases}$$

Giải: Trước hết, ta viết lại hệ đã cho dưới dạng đối xứng

$$\frac{dy_1}{y_2} = \frac{dy_2}{y_1} = \frac{dx}{(y_2 - y_1)^2}.$$

Lấy tích phân hai vế đẳng thức đầu của hệ thức trên, ta tìm được

$$y_1^2 - y_2^2 = c_1.$$

Ngoài ra, theo tính chất của tỉ lệ thức, ta cũng có

$$\frac{dy_1 - dy_2}{y_2 - y_1} = \frac{dx}{(y_2 - y_1)^2}.$$

Lấy tích phân hệ thức này ta được

$$2x + (y_1 - y_2)^2 = c_2.$$

Như vậy, ta có hai tích phân đầu độc lập của hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1^2 - y_2^2 = c_1, \\ 2x + (y_1 - y_2)^2 = c_2. \end{cases}$$

2. Hàm $\mathbf{f = f(x, y_1, y_2)}$ và $\mathbf{g = g(x, y_1, y_2)}$ có thể biểu diễn dạng đối xứng

Ta tìm tích phân đầu của hệ với giả thiết có biểu diễn

$$f(x, y_1, y_2) = \frac{\phi_1(x, y_1, y_2)}{\phi_0(x, y_1, y_2)}, \quad g(x, y_1, y_2) = \frac{\phi_2(x, y_1, y_2)}{\phi_0(x, y_1, y_2)}.$$

Để tìm các tích phân đầu, ta viết phương trình (**??**) dưới dạng đối xứng

$$\frac{dy_1}{\phi_1(x, y_1, y_2)} = \frac{dy_2}{\phi_2(x, y_1, y_2)} = \frac{dx}{\phi_0(x, y_1, y_2)}.$$

Ta chú ý rằng, trong hệ đối xứng trên, vai trò của biến độc lập x và các hàm phụ thuộc y_1, y_2 là như nhau. Tùy vào mỗi hệ cụ thể, ta sẽ biến đổi để tìm được tích phân đầu.

Ví dụ 4.6.4. Tìm 2 tích phân đầu của hệ

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{2xy_1}{x^2 - y_1^2 - y_2^2}, \\ y_2' = \dfrac{2xy_2}{x^2 - y_1^2 - y_2^2}. \end{cases}$$

Dạng đối xứng của hệ là

$$\frac{dx}{x^2 - y_1^2 - y_2^2} = \frac{dy_1}{2xy_1} = \frac{dy_2}{2xy_2}.$$

Tích phân phương trình

$$\frac{dy_1}{2xy_1} = \frac{dy_2}{2xy_2},$$

ta được

$$\frac{y_1}{y_2} = c_1.$$

Tiếp theo, phương trình đối xứng tương đương với

$$\frac{xdx}{x(x^2 - y_1^2 - y_2^2)} = \frac{y_1dy_1}{2xy_1^2} = \frac{y_2dy_2}{2xy_2^2}.$$

Sử dụng tính chất của tỉ lệ thức ta có

$$\frac{xdx + y_1dy_1 + y_2dy_2}{x(x^2 + y_1^2 + y_2^2)} = \frac{y_1dy_1}{2xy_1^2}.$$

Do đó

$$\ln(x^2 + y_1^2 + y_2^2) = \ln|y_1| + \ln c_2,$$

hay

$$\frac{x^2 + y_1^2 + y_2^2}{y_1^2} = c_2.$$

Các tích phân đầu này là độc lập. Vì thế chúng cho ta xác định hàm phải tìm y_1, y_2 qua x, c_1, c_2.

4.7 Phương pháp số giải nghiệm phương trình vi phân

Trong các nội dung trước, ta đã trình bày một số phương pháp để tích phân một phương trình vi phân, tức là tìm nghiệm giải tích của phương trình đó. Nhưng trên thực tế hầu hết các phương trình vi phân không tích phân được, ngay cả khi đó là phương trình tuyến tính. Do các mục đích thực tiễn trong kỹ thuật, kinh tế...

chúng ta phải chấp nhận tìm một xấp xỉ số cho nghiệm của phương trình vi phân. Một xấp xỉ số như vậy sẽ biểu diễn một tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ, "gần với" đường cong nghiệm nghiệm cần tìm.

Nhu cầu tìm xấp xỉ số cho nghiệm đã sinh ra một ngành vừa có tính chất lý thuyết, lại vừa có tính chất thực tiễn, đó là *phương pháp số cho phương trình vi phân* hay còn gọi là *tích phân số*. Có rất nhiều phương pháp khác nhau có thể được sử dụng để xấp xỉ nghiệm của một phương trình vi phân. Trong khuôn khổ của giáo trình, ta chỉ trình bày một trong những phương pháp cổ điển và dễ sử dụng nhất gọi là phương pháp Euler.

4.7.1 Phương pháp Euler hiển

Giả sử chúng ta cần giải nghiệm cho bài toán giá trị ban đầu (IVP) tổng quát:

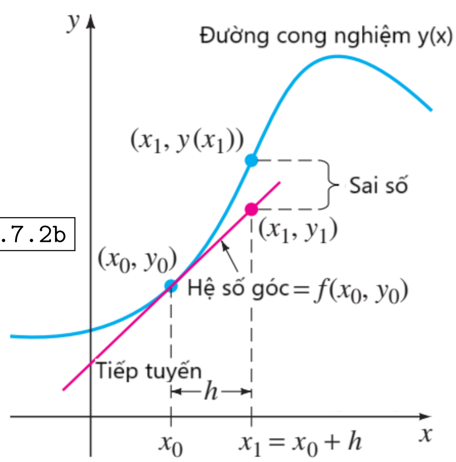
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{4.7.1}$$ 4.7.1

trong đó $f(x,y)$ là một hàm cho trước.

Nếu f và đạo hàm riêng f_y của nó là hàm liên tục theo cả hai biến (x,y) thì hàm f sẽ thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương. Vì thế, theo định lý về tồn tại duy nhất nghiệm, phương trình (4.7.1) có duy nhất nghiệm. Ta viết (4.7.1) dưới dạng tích phân

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{4.7.2}$$ 4.7.2b

Ý tưởng của việc xấp xỉ nghiệm của phương trình (4.7.1) là bắt đầu với việc biết giá trị của nghiệm tại x_0 là y_0, ta xấp xỉ tích phân (4.7.2) bằng cách lấy một đại diện của hàm $f(s,y(s))$ trên đoạn $[x_0,x]$. Chẳng hạn trên đoạn này ta xem $f(s,y(s)) \approx f(x_0,y(x_0))$ thì ta có



Hình 4.9: Xấp xỉ $y(x_1)$ bằng điểm y_1 trên tiếp tuyến Euler

$$y(x) \approx y_0 + f(x_0,y_0)(x-x_0),$$

Biểu thức

$$\overline{y}(x) = y_0 + f(x_0,y_0)(x-x_0),$$

chính là phương trình của tiếp tuyến với đường cong nghiệm tại x_0. Từ đó ta sẽ chọn $y_1 = f(x_0,y_0)(x_1-x_0)$ làm giá trị xấp xỉ $y(x_1)$ tại x_1.

Trên hình 4.9 ta vẽ đường cong nghiệm $y(x)$ cần được xấp xỉ. Điểm ngoài cùng bên trái (x_0, y_0) là vị trí ban đầu của đường cong nghiệm. Một điểm khác trên đường cong nghiệm là $(x_1, y(x_1))$ chính là giá trị của nghiêm tại x_1 ta muốn xấp xỉ. Phía dưới điểm $(x_1, y(x_1))$ là điểm (x_1, y_1) trên tiếp tuyến. Nếu x_1 đủ gần với x_0, thì điểm y_1 trên tiếp tuyến khá gần với giá trị thực của nghiệm $y(x_1)$ tại x_1. Tiến hành tương tự bằng các sử dụng điểm (x_1, y_1) thay cho điểm (x_0, y_0) ta hi vọng điểm

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

sẽ là điểm xấp xỉ đủ tốt cho $y(x_2)$ tại x_2. Như vậy, nếu ta muốn xấp xỉ nghiệm tại các thời điểm $x_1, x_2, \ldots, x_N$ thì tiến trình này cho chúng ta dãy $y_1, y_2, \ldots, y_N$ có thể dùng để xấp xỉ giá trị các nghiệm $y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_N)$ như sau

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1. \tag{4.7.3}$$ 4.7.2

Trên thực tế, để đơn giản hóa việc lập trình máy tính, người ta thường chọn các thời điểm $x_0, x_1, x_2, \ldots x_N$ cách đều nhau một bước h. Tức là chúng ta giả thiết:

$$x_{n+1} - x_n = h.$$

Khi đó (4.7.3) có thể viết lại

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_0 + nh, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1.$$

Trong hầu hết các trường hợp, hàm $f(x, y)$ sẽ quá phức tạp để tính toán trực tiếp, và trong khi sử dụng phương pháp Euler, ta sẽ phải tính hàng trăm ngàn bước do h phải chọn rất nhỏ để đảm bảo độ chính xác của xấp xỉ. Vì vậy ta phải lập trình cho phương pháp Euler. Để tránh phức tạp thuật toán, ta sử dãy $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$ cách đều nhau một bước h. Sau đây là lược đồ để lập trình máy tính cho phương pháp Euler hiển:

define the function $f(x, y)$.
input thời điểm và giá trị ban đầu x_0 and y_0.
input h (kích thước bước tính), N (số bước).
for j from 0 to $N - 1$ do
$m = f(x_j, y_j)$;
$y_{j+1} = y_j + hm$;
$x_{j+1} = x_j + h$;
print x_j and y_j;
end.

Phân tích sai số

Theo công thức Taylor,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + y''(c)\frac{h^2}{2},$$

với c là giá trị nào đấy nằm giữa x_n và x_{n+1}. Vì vậy tại thời điểm x_n nếu ta biết được giá trị của $y(x_n)$ và sử dụng xấp xỉ $y(x_{n+1})$ bởi giá trị $y_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$ thì ta sẽ chịu sai số $y''(c)\frac{h^2}{2}$. Sai số này khá nhỏ khi đạo hàm cấp hai bị chặn và h khá nhỏ. Tuy nhiên, trong quá trình tính toán, ta không dùng $y(x_n)$ mà lại dùng giá trị y_n được xấp xỉ từ bước trước nên nó tạo thành *một sai số tích lũy*. Điều này khiến cho giá trị của những bước cuối y_k có thể khác nhiều với $y(x_k)$ nếu k gần N. Để khắc phục điều đó, người ta sử dụng phương pháp Euler ẩn.

4.7.2 Phương pháp Euler ẩn

Trong tích phân (4.7.2) ta lấy $f(s, y(s)) \approx f(x_1, y(x_1))$ thì ta có

$$y(x_1) \approx y_0 + hf(x_1, y(x_1)) \text{ với } h = x_1 - x_0.$$

Tổng quát hơn, ở bước n ta có

$$y(x_{n+1}) \approx y_n + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})), n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Vì thế, phương trình để tính xấp xỉ y_{n+1} là

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Với mọi n, đây là phương trình đại số thông thường

$$z = y_n + hf(x_{n+1}, z). \tag{4.7.4}$$ 4.7.2bb

với ẩn là z còn tham số y_n đã biết. Để giải được phương trình (4.7.4) ta lại dùng phương pháp xấp xỉ Newton

define $f(x, y)$.
define $g(z) = z - y_n + hf(x_{n+1}, z)$.
define $g'(z) = 1 - hf_y(x_{n+1}, z)$.
  input ε %(độ chính xác).
  input $u := z_0, v = u - \frac{g(u)}{g'(u)}$ %(khởi tạo vòng lặp tính z).
while $abs(u - v) \geqslant \varepsilon$ do $u = v, v = u - \frac{g(u)}{g'(u)}$
else
$y_{n+1} := v$
end

4.7.3 So sánh phương pháp Euler hiển và ẩn

Phương pháp Euler hiển dễ lập trình hơn và thời gian để tính toán ngắn hơn. Tuy nhiên, độ ổn định của nó rất thấp và có sai số tích lũy. Do đó ta cần sử dụng kích thước bước h đủ nhỏ để tránh sự phân kỳ của tính toán.

Ngược lại, phương pháp ẩn có độ ổn định cao và hội tụ. Nhưng quy tình tính toán phức tạp hơn vì ở mỗi bước ta cần giải phương trình nên nó tốn nhiều thời gian để tính toán.

Vì phương pháp ẩn có thể sử dụng kích thước bước h đủ lớn, nó phù hợp để giải các phương trình liên quan đến thời gian dài. Vì vậy, trong những trường hợp này, nên sử dụng phương pháp ẩn thay vì phương pháp hiển.

Sau đây là đoạn Chương trình Matlab để xấp xỉ bằng phương pháp Euler ẩn:

% Định nghĩa hàm: Phương pháp Euler ẩn
  function [x, y] = implicit_euler(f, y0, xspan, h)
% Input dữ liệu:
% f -hàm ở vế phải của phương trình $f(x, y)$
% y0 - Điều kiện ban đầu
% xspan - Thời gian cần tính toán [x0, xf]
% h - Bước lưới tính toán
% % Output kết quả xấp xỉ:
% x - thời gian
% y - Nghiệm xấp xỉ ở mỗi bước thời gian
  x =xspan(1):h:xspan(2);   % tạo vector thời gian (chia đoạn [x0, xf] ra các điểm tính toán)
  N = length(x);   % Số các bước tính
  y = zeros(size(y0, 1), N);   % Tạo vector nghiệm xấp xỉ
  y(:, 1) = y0;   % Gán điều kiện ban đầu
  for n = 1:N-1   % Tạo vòng lặp tính toán
  g = @$(y_{n+1})y_{n+1} - y(:, n) - h * f(t_{n+1}, y_{n+1})$;
% xác định phương trình ẩn tìm y_{n+1}
  y(:, n+1) = fsolve(g, y(:, n));   % Initial guess is y(:, n)
% Solve the equation using fsolve (numerical solver for nonlinear systems) end
end

Áp dụng: giải xấp xỉ phương trình

$$y'(x) = -y^2(x), x \in [0, 10].$$

f = @(t, y) $-y^2$;   % Định nghĩa phương trình
y0 = 1;   % Điều kiện đầu

xspan = [0, 5]; % Thời gian cần tính toán [x0, xf]

h = 0.1; % Bước lưới

[x, y] = implicit_euler(f, y0, xspan, h); % Giải phương trình bằng phương pháp Euler ẩn

% Biểu diễn kết quả bằng hình vẽ

figure;

plot(t, y, '-o');

hold on;

plot(x, $\dfrac{1}{x+1}$); % Nghiệm đúng để so sánh

xlabel('x');

ylabel('y');

legend('Implicit Euler', 'Nghiệm đúng ');

title('Solution of $dy/dt = -y^2$ Giải phương trình bằng phương pháp Euler ẩn');

grid on;

Giải thích:

- fsolve: Giải phương trình $g(y_{n+1}) = 0$ ở mỗi bước.
- g: Phương trình ẩn $g(y_{n+1}) = y_{n+1} - y_n - hg(x_{n+1}, y_{n+1})$.

4.7.4 Phương pháp Euler giải hệ phương trình vi phân phi tuyến

Về cơ bản phương pháp Euler ẩn và hiển giải hệ phương trình vi phân không có gì khác với việc giải phương trình vô hướng. Ta chỉ trình bày phần khác biệt trong phương pháp Euler ẩn.

Giả sử ta muốn xấp xỉ số hệ phương trình bằng phương pháp Euler ẩn

$$y'(x) = f(x, y(x)), x \in I,$$

với $y = (y_1, y_2)^\top$ và $f = (f_1, f_2)^\top$. Đặt

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{df_1(x,y)}{dy_1} & \dfrac{df_1(x,y)}{dy_2} \\ \dfrac{df_2(x,y)}{dy_1} & \dfrac{df_2(x,y)}{dy_2} \end{pmatrix}.$$

Ta xấp xỉ $y(x_{n+1})$ bởi y_{n+1} khi đã biết y_n bằng cách gán $y_{n+1} = z$ với z là nghiệm phương trình (4.7.4).

Để tìm z ta dùng phép lặp Newton

+ Khởi tạo $z_0 = y_n$.

+ Xây dựng dãy lặp

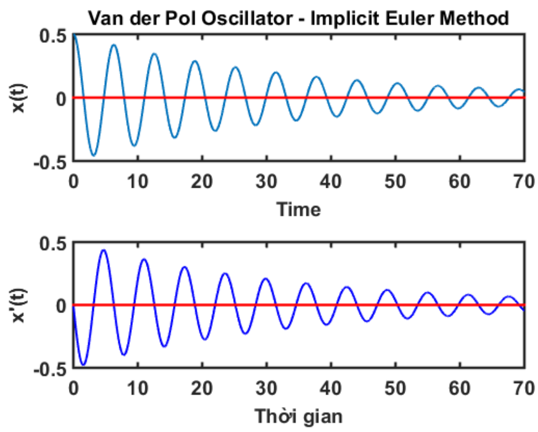
$$z_{n+1} = y_n - J^{-1}(x_{n+1}, z_{n+1}) f(x_{n+1}, z_n).$$

+ Chu trình lặp kết thúc khi $z_{n+1} - z_n$ nhỏ đến mức yêu cầu.

Trong phần mềm Matlab, người ta đã xây dựng các phương pháp Euler hiển và ẩn thành hàm mẫu và chúng ta chỉ việc áp dụng nó trong khi lập chương trình. Sau đây là thí dụ về code trong Matlab để giải phương trình Van der Pol (1.2.1) bằng phương pháp Euler ẩn. Bạn đọc có thể biến đổi đoạn code này cho những bài toán phức tạp hơn.

```
% Phương trình Van der Pol Equation sử dụng phương pháp Euler ẩn
% tham số mu = 1; % Gán giá trị cho tham số μ

%x(t) nghiệm cần tìm, y(t)=x'(t)

T = 70; % Thời gian tính toán
dt = 0.01; % Bước thời gian
N = T / dt; % Số bước thời gian

% Điều kiện ban đầu
x = 0.5; % Điều kiện ban đầu x
y = 0; % Điều kiện ban đầu y

% Tạo mảng để lưu trữ nghiệm
x_vals = zeros(1, N);
y_vals = zeros(1, N);
t_vals = linspace(0, T, N);

% Lưu giá trị ban đầu
x_vals(1) = x;
y_vals(1) = y;

% Chu trình lặp phương pháp Euler ẩn
for i = 1:N-1
% Set up hệ phương trình cho phương pháp Euler ẩn
% x_next = x + dt * y_next
% y_next = y + dt * (mu * (1 - x_next^2) * y_next - x_next)

% Định nghĩa hệ phi tuyến để giải [x_next, y_next]
```

```
f = (z) [z(1) - x - dt * z(2);
z(2) - y - dt * (mu * (1 - z(1)^2) * z(2) - z(1))];

% Gợi ý giá trị đầu cho [x_next, y_next]
z_guess = [x + dt * y; y + dt * (mu * (1 - x^2) * y - x)];

% Giải hệ phi tuyến bằng cách sử dụng hàm fsolve
z_next = fsolve(f, z_guess);

% Cập nhật x và y cho bước tiếp theo
x_vals(i+1) = z_next(1);
y_vals(i+1) = z_next(2);
x = z_next(1);
y = z_next(2);
end

% Vẽ đề thị nghiệm
figure;
subplot(2, 1, 1);
plot(t_vals, x_vals);
title('Dao động Van der Pol - Phương pháp Euler ẩn');
xlabel('Time');
ylabel('x(t)');

subplot(2, 1, 2);
plot(t_vals, y_vals);
xlabel('Time');
ylabel('y(t)');
```



Hình 4.10: Dao động được mô tả bởi Phương trình Val der Pol (1.2.1) val

Khi $\mu = 0.01$ và điều kiện đầu $x(0) = 0.5, x'(0) = 0$ thì của nghiệm $x(t)$ và đạo hàm $x'(t)$ của phương trình Val der Pol được minh họa ở Hình 4.10.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài tập 1: Giải hệ phương trình vi phân sau (ma trận hệ số có 2 giá trị riêng phân biệt)

1. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = -\dfrac{5}{2}y_1 + 2y_2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = 10y_1 - 5y_2, \\ y_2' = 8y_1 - 12y_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = -\dfrac{5}{2}y_1 + 2y_2, \\ y_2' = \dfrac{3}{4}y_1 - 2y_2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2. \end{cases}$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình vi phân sau (ma trận hệ số có giá trị riêng bội)

1. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = 9y_1 - 3y_2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 3y_2, \\ y_2' = -3y_1 + 5y_2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = -6y_1 + 5y_2, \\ y_2' = -5y_1 + 4y_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = 12y_1 - 9y_2, \\ y_2' = 4y_1. \end{cases}$

Bài tập 3: Giải hệ phương trình vi phân sau (ma trận hệ số có giá trị riêng phức)

1. $\begin{cases} y_1' = 6y_1 - y_2, \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 5y_2, \\ y_2' = -2y_1 + 6y_2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 4y_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 - y_2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 + 3y_2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 8y_2, \\ y_2' = y_1 - 3y_2. \end{cases}$

Bài tập 4: Giải bài toán Cauchy sau

1. $\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{2}y_1, \\ y_2' = y_1 - \dfrac{1}{2}y_2, \end{cases}$ biết $y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 5.$

2. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2, \\ y_2' = -y_1 + 6y_2, \end{cases}$ biết $y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 6.$

3. $\begin{cases} y_1' = 6y_1 - y_2, \\ y_2' = 5y_1 + 4y_2, \end{cases}$ biết $y_1(0) = -2,\ \ y_2(0) = 8.$

Bài tập 5: Tính e^{Ax} với A trong các trường hợp sau

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Tài liệu tham khảo

NTH [1] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu, *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*

Ah [2] Ahmad S. and Ambrosetti A. *Differential Equations.* De Gruyter academic publishing 2019.

Den [3] Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.* Richard Stratton 2013.

R [4] James C. Robinsonan, *Introduction to Ordinary Differential Equations.* Cambridge University Press 2004.

Perko [5] Lawrence Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer-Verlag, New York. Inc. 2001.

Meiss [6] Meiss J. D., *Differential Dynamical Systems.* SIAM, the Society for Industrial and Applied Mathematics 2007.

S [7] Stephen A. Wirkus and Randall J. Swift, *A Course in Ordinary Differential Equations.* Taylor & Francis Group 2015.

Boy [8] William E. Boyce, Richard C. DiPrima and Douglas B. Meade, Elementary Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc. 2017. Tenth Edition