Trabajo Práctico
Mecánica de los Medios Continuos

Fecha de Entrega: 10 de Julio de 2020

Caso de Estudio: Transferencia de energía en un bloque aislante

Como ingeniero/a de producto, se le encomienda el análisis térmico de la pieza que se muestra a continuación (ver Fig. 1). La misma forma parte de la pared de una máquina que trabaja a elevada temperatura. El material utilizado para la pieza posee una conductividad variable de la forma $\kappa = Ax + B$, siendo x la dirección horizontal en la figura. Además, del lado izquierdo se transmite calor en forma de un flujo térmico precalculado (CB1) y del lado derecho se establece una convección natural con el ambiente (CB2). Las zonas superior e inferior están en contacto con el resto de la pared y se consideran aisladas (CB3 y CB4).

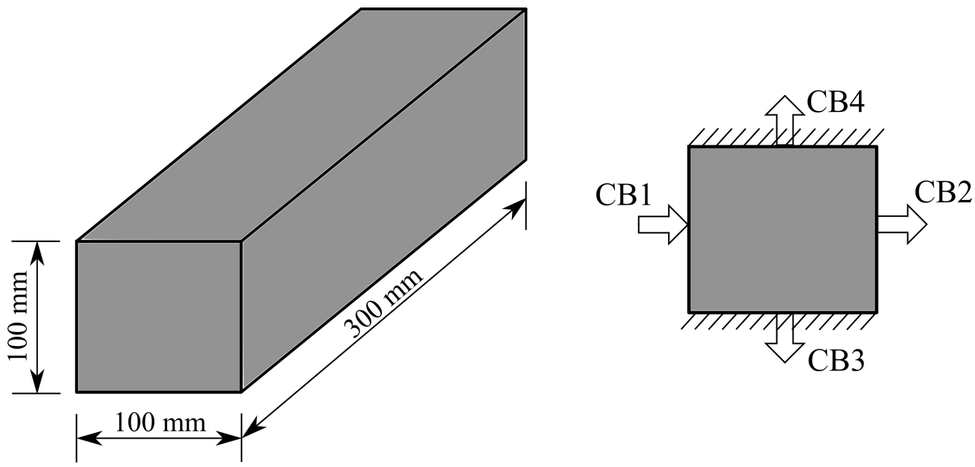

Figura 1: Geometría del caso de estudio

I. Estudio analítico preliminar

Considere la siguiente ecuación de balance de energía térmica generalizada:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_P T) + \nabla \cdot (\rho c_P T \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho\, r \tag{1}$$

(a) Sobre la misma, incorpore la ley de Fourier:

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T \tag{2}$$

Luego, introduzca un sistema de referencia cartesiano rectangular y aplique las hipótesis que considere apropiadas para un material sólido sin fuentes de calor y a parámetros constantes, para reducirla a la siguiente ecuación en dos dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0 \tag{3}$$

Justifique cada paso y simplificación realizada en el proceso.

(b) Dadas las siguientes condiciones de borde:

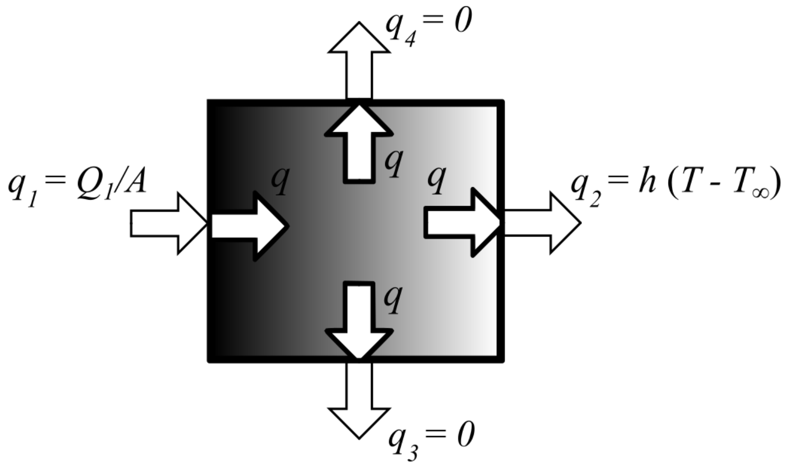

Figura 2: Condiciones de borde del caso

- CB1: $q = q_1 = \dfrac{Q_1}{A}$

  El calor aportado a través de la cara izquierda es constante y conocido: $q_1 = \dfrac{Q_1}{A}$, siendo $Q_1 = 100W$ el calor aportado y A la superficie de dicha cara. Además, $\vec{q}$ es el flujo de calor específico en el sólido y respeta la Ley de Fourier.

- CB2: $q = q_2 = h(T - T_\infty)$

  El calor extraido a través de la cara derecha está dado por la Ley de enfriamiento de Newton: $h(T - T_\infty)$, siendo $h = 30$ W/m^2 K el coeficiente de convección natural del medio exterior y $T_\infty = 300$K la temperatura lejos de la superficie. Al igual que el caso anterior, $\vec{q}$ respeta la Ley de Fourier.

- CB3 y CB4: $q = q_3 = q_4 = 0$ W/m^2

  Los bordes superior e inferior se encuentran aislados térmicamente, entonces no intercambian calor con el medio.

La conductividad del material no es uniforme sino que respeta la siguiente ley:

$$\kappa = Ax + B$$

Siendo $A = -100$ W/m^2 K y $B = 16$ W/m K, obtenga una solución analítica para el campo de temperaturas en toda la sección de estudio, haciendo uso de la Ec. (3) y las condiciones de borde enunciadas y la ley lineal para la conductividad térmica.

II. MDF con Matlab/Octave

En este apartado, se propone abordar la resolución del problema utilizando el Método de Diferencias Finitas. Para ello, se debe obtener el campo de temperaturas $T(x,y)$ en todo el dominio utilizando la ecuación de balance (3) y las condiciones de borde del item anterior. Para ello, tenga en cuenta la discretización mostrada en la siguiente figura:

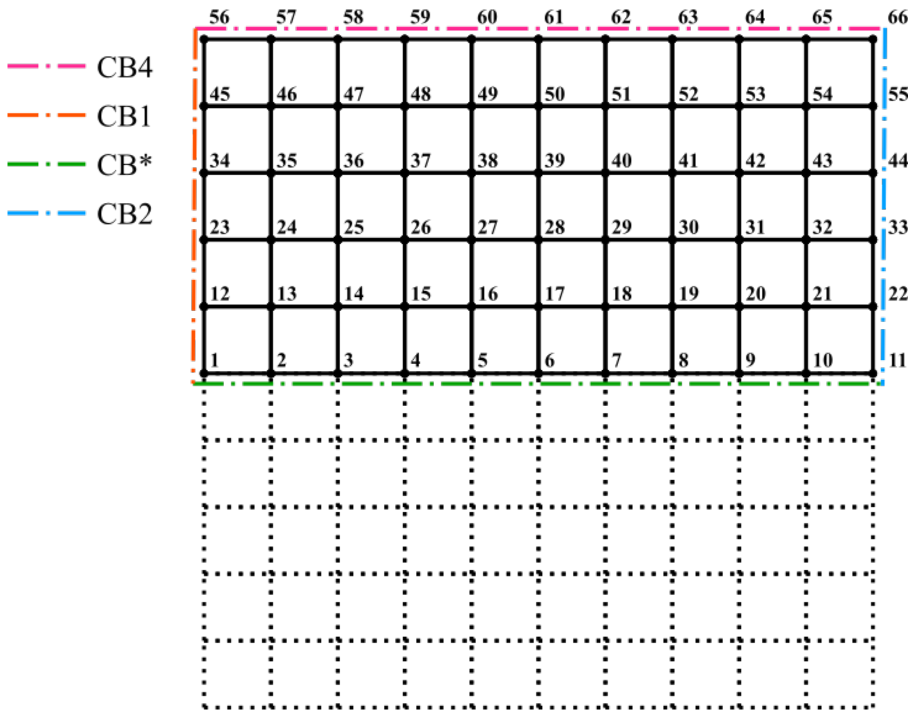

Figura 3: Discretización del dominio por MDF diferenciando las fronteras

Para reducir la complejidad del problema, se propone resolver las ecuaciones solo para la mitad de la sección tal como se describe en la Fig. 3. Se solicita:

(a) Proponer argumentos para justificar porque la decisión de realizar solo la mitad del dominio es apropiada. Al realizar este procedimiento, ¿que condición de borde pondría en CB* (color verde en la figura)? Justifique.

(b) Realice la discretización que se muestra en la Fig. 3.

(c) Aplique MDF sobre la Ec. (3) y obtenga una expresión para cualquier nodo del interior del dominio 2D.

(d) Aplique MDF sobre cada una de las CB y obtenga una expresión, para cada borde, de uno de sus nodos.

(e) Ensamble la matriz y el vector de términos independientes.

(f) Resuelva el sistema lineal resultante y grafique la solución de temperatura $T(x,y)$.

III. Simulación con SolidWorks

(a) Dibuje la pieza y aplique el material con las propiedades indicadas.

Aclaración: Para realizar una conductividad variable, debe modificar un material o generar un material personalizado. En el segundo caso, como la mayoría de las propiedades no se modificarán, se debe copiar un material con características similares y solo modificar la conductividad térmica. Para ello, se debe modificar a la opción **Temperature Dependency**, y dentro de la ventana *Tablas de Curvas*, se debe indicar dos puntos dentro de la tabla de datos. De esta forma, se establecerá una relación lineal dada por la unión de los dos puntos.

(b) En el módulo Simulation aplique las condiciones de trabajo y cree una malla de 10 mm.

(c) Grafique la solución y analice los resultados.

IV. Análisis y discusión de los resultados

(a) Grafique (en un único gráfico) la solución de temperaturas con cada uno de los tres abordajes. Para ello realice las gráficas en función de la dirección que considere más representativa.

(b) Analice los resultados y elabore conclusiones acerca de las similitudes y diferencias observadas en cada abordaje.

(c) Repita el item (a) y (b) pero luego de realizar un refinamiento con el doble de elementos/nodos respecto a las discretizaciones espaciales de los items II y III. ¿La solución mejora o empeora? ¿A que le atribuye este comportamiento?

(d) Si la temperatura dentro de la pieza es un parámetro que desea que no supere un determinado valor máximo, ¿como modificaría los valores de A y B en el modelo de conductividad en pos de ese objetivo? Grafique la solución de temperaturas con esa nueva propuesta y comparela con la ley original.