

RESULTADOS

Modelo

Ecuaciones de Navier-Stokes

Son ecuaciones para flujos con las características:

- Incompresible (densidad constante en el tiempo)
- Newtoniano (viscosidad constante en el tiempo)

$$\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} + \frac{\delta v_z}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta v_x}{\delta t} + v_x \cdot \frac{\delta v_x}{\delta x} + v_y \cdot \frac{\delta v_x}{\delta y} + v_z \cdot \frac{\delta v_x}{\delta z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta x} + \nu \cdot \left(\frac{\delta^2 v_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v_x}{\delta z^2} \right)$$

$$\frac{\delta v_y}{\delta t} + v_x \cdot \frac{\delta v_y}{\delta x} + v_y \cdot \frac{\delta v_y}{\delta y} + v_z \cdot \frac{\delta v_y}{\delta z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta y} + \nu \cdot \left(\frac{\delta^2 v_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v_y}{\delta z^2} \right) - g_y$$

$$\frac{\delta v_z}{\delta t} + v_x \cdot \frac{\delta v_z}{\delta x} + v_y \cdot \frac{\delta v_z}{\delta y} + v_z \cdot \frac{\delta v_z}{\delta z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta z} + \nu \cdot \left(\frac{\delta^2 v_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v_z}{\delta z^2} \right)$$

Flujo de Poiseuille

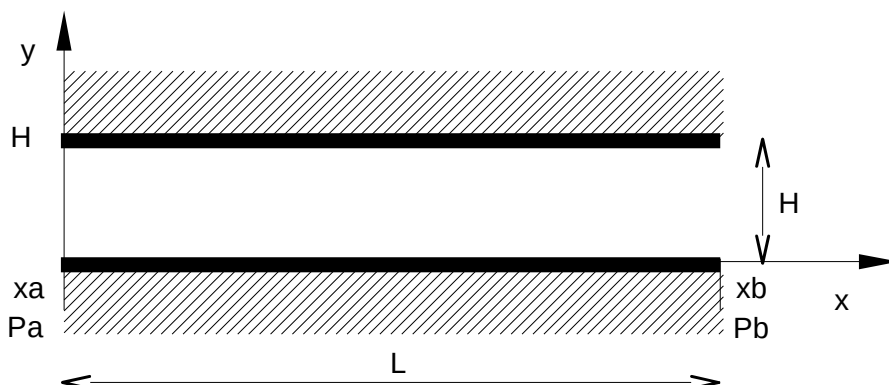
Condiciones iniciales y de contorno

El flujo de Poiseuille es un flujo contenido en una tubería, por lo que la velocidad del fluido que hace contacto con las paredes ha de ser igual a la velocidad de la pared, es decir cero.

- $V(y=0) = 0$
- $V(y=H) = 0$

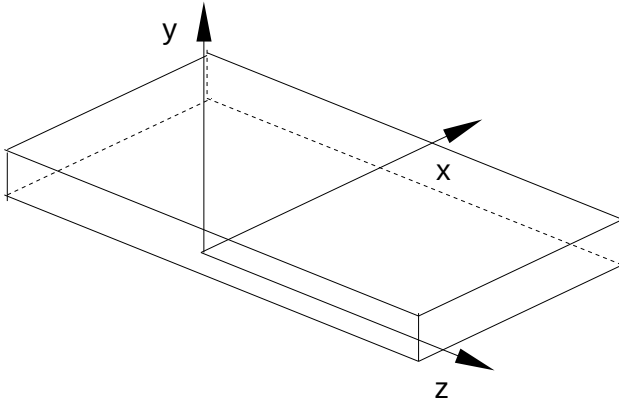
Tendrá condiciones iniciales en los extremos de la tubería, en forma de presión:

- $P(x_a) = P_a$
- $P(x_b) = P_b$



Hipótesis adicionales

- **Flujo 2D:** el tubo es de sección rectangular con paredes paralelas laterales tan distanciadas entre sí (infinito) a tal punto que no generan efectos de borde. Por el contrario las paredes superior e inferior sí influyen. Esto genera una “periodicidad” en el sentido z, cualquier corte en planos z me dará el mismo resultado, lo que implica que es un problema 2D y z no altera las variables.



$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \forall \text{ variable}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican notablemente.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + \cancel{v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}} \right) - g_y$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + \cancel{v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \cancel{\frac{\partial P}{\partial z}} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}} \right)$$

Dando como resultado:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

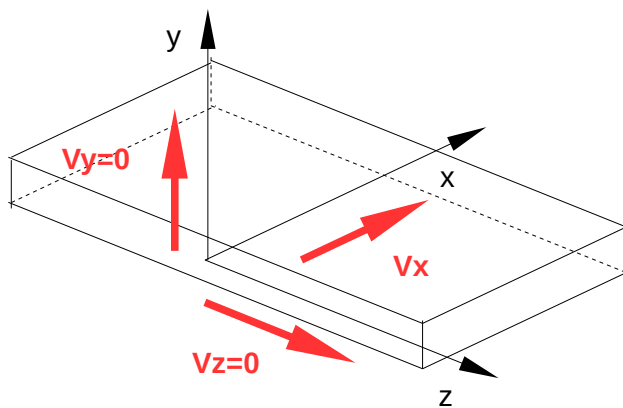
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - g_y$$

$$\frac{\delta v_z}{\delta t} + v_x \cdot \frac{\delta v_z}{\delta x} + v_y \cdot \frac{\delta v_z}{\delta y} = v \cdot \left(\frac{\delta^2 v_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_z}{\delta y^2} \right)$$

- **Flujo desarrollado:** el flujo ya paso por las entradas y posibles obstáculos en el camino, llegando a la tubería rectangular "perfecta" sin defectos en su superficie u obstáculos de ningún tipo. Esto quiere decir que no hay cambios "raros" de ningún tipo en la velocidad, que se ha desarrollado en la dirección x y no existen componentes y, z.

Esto es válido para todo punto en el espacio y para cualquier tiempo:



$$v_y = 0 \forall x, t ; v_z = 0 \forall x, t$$

Estas condiciones simplifican aún más Navier-Stokes:

$$\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta v_x}{\delta t} + v_x \cdot \frac{\delta v_x}{\delta x} + v_y \cdot \frac{\delta v_x}{\delta y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta x} + v \cdot \left(\frac{\delta^2 v_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_x}{\delta y^2} \right)$$

$$\frac{\delta v_y}{\delta t} + v_x \cdot \frac{\delta v_y}{\delta x} + v_y \cdot \frac{\delta v_y}{\delta y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta y} + v \cdot \left(\frac{\delta^2 v_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_y}{\delta y^2} \right) - g_y$$

$$\frac{\delta v_z}{\delta t} + v_x \cdot \frac{\delta v_z}{\delta x} + v_y \cdot \frac{\delta v_z}{\delta y} = v \cdot \left(\frac{\delta^2 v_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_z}{\delta y^2} \right) \text{ desaparece}$$

Dando como resultado:

$$\frac{\delta v_x}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta v_x}{\delta t} + v_x \cdot \frac{\delta v_x}{\delta x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta x} + v \cdot \left(\frac{\delta^2 v_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_x}{\delta y^2} \right)$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta y} - g_y = 0$$

Si aplico la primer ecuación en la segundo obtengo:

$$\frac{\delta v_x}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta^2 v_x}{\delta y^2}$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta y} - g_y = 0$$

- **Sin efectos por la gravedad:** la gravedad no existe o bien no juega un factor importante a causa de que las otras fuerzas son mucho más considerables. Un ducto con poco fluido (poco peso) en movimiento. La presión en y se vuelve constante y carece de interés.

$$\frac{\delta v_x}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta^2 v_x}{\delta y^2}$$

$$g_y = 0 \rightarrow -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta y} - 0 = 0 \rightarrow \frac{\delta P}{\delta y} = 0$$

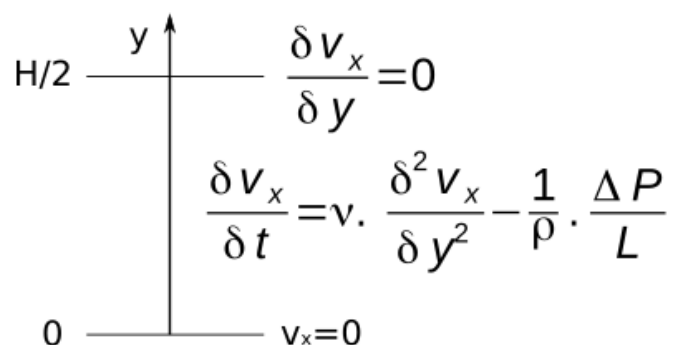
- **Pérdidas por viscosidad a tasa constante:** se asume que la razón de pérdida de carga es constante con la longitud, una manera de darle linealidad al cambio de presión en el interior del tubo. Válido para régimen bien laminar.

$$\frac{\delta P}{\delta x} = \frac{\Delta P}{L} \rightarrow \frac{\delta v_x}{\delta t} = v \cdot \frac{\delta^2 v_x}{\delta y^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

Simetría

Existen condiciones de simetría con respecto al eje x. La cara centrada tiene máxima velocidad ergo existe un máximo ergo su derivada es cero en ese punto.

$$\frac{\delta v_x}{\delta y}(H/2) = 0$$

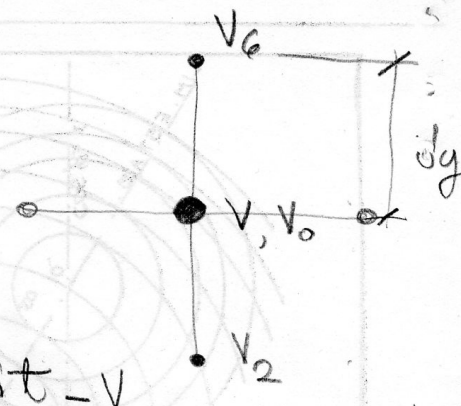


The diagram shows a vertical pipe cross-section with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The y-axis is labeled 'y' at the top and '0' at the bottom. The x-axis is labeled 'x' at the right and '0' at the left. The top of the pipe is at y = H/2 and the bottom is at y = 0. The boundary conditions are:

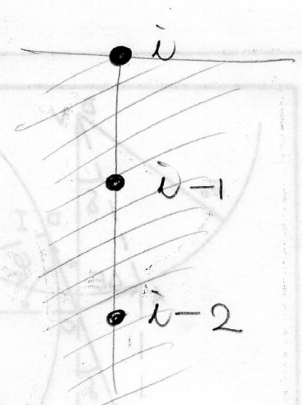
- At y = H/2: $\frac{\delta v_x}{\delta y} = 0$
- At y = 0: $v_x = 0$
- In the interior: $\frac{\delta v_x}{\delta t} = v \cdot \frac{\delta^2 v_x}{\delta y^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta P}{L}$

Diferencias finitas

Desarrollo

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{1}{9} \frac{\Delta P}{L} = B$$

$$\frac{V - V_0}{dt} = \rho \frac{V_2 - 2V + V_6}{dy^2} + B$$
$$-V_0 = \underbrace{\left(\frac{\rho}{dy^2} \cdot dt \right)}_C [V_2 - 2V + V_6] + Bdt - V$$
$$-V_0 = C \cdot V_2 + (-2C - 1)V + C \cdot V_6 + Bdt$$
$$-V_0 - Bdt = C V_2 + (-2C - 1)V + C \cdot V_6$$

$$V_0 + Bdt = (2C + 1)V + (-C)V_2 + (-C)V_6$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \approx \frac{3V_i - 4V_{i-1} - V_{i-2}}{2dy}$$


$$0 = 3V_i - 4V_{i-1} - V_{i-2}$$

Algoritmo

```
%TP 4
close all;clear;clc

L=3000/1000; %longitud m
rho=1000; %kg/m3
u=1.0020*1e-3; %Pa.s viscosidad dinamica
tf=3000; %tiempo total s
nt=50; %divisiones temporales
H=50/1000; %distancia entre placas
ny=20; %divisiones longitudinales
vm=6; %velocidad promedio m/s

%vmax_mod=5*1.5;
%deltaP=vmax_mod*16*u*L/H^2

dP=1,5*vm*8*u*L/H^2; %Pa
v=u/rho; %viscosidad cinematica
y=linspace(0,H/2,ny);
dy=H/2/(ny-1);
t=linspace(0,tf,nt);
dt=tf/(nt-1);

B=-1/rho*-dP/L; %coeficiente B
C=v*dt/dy^2; %coeficiente C

Vx=zeros(ny,nt); %matriz de velocidades
Vx(:,1)=0; %condicion inicial sobre todos los nodos
K=zeros(ny);
N=zeros(ny,1);

Vx0=Vx(:,1);
for k=2:nt

    for i=2:ny-1
        K(i,i)=1+2*C;
        K(i,i-1)=-C;
        K(i,i+1)=-C;
        N(i)=Vx0(i)+B*dt;
    end

    K(1,1)=1;
    N(1)=0;

    K(ny,ny)=3;
    K(ny,ny-1)=-4;
    K(ny,ny-2)=1;
    N(ny)=0;

Vxf=linsolve(K,N);
Vx(:,k)=Vxf;
Vx0=Vxf;
end

%veo el elemento 20 como la zona donde ya se estabiliza.
Vx_MAX=max(Vx);
T_EST=t(25);
VMAX_MDF=Vx_MAX(25)
VMAX_POI=1/u*dP/L*H^2/8
```

```
%Vmed=trapz(Vx(:,nt))*dy/(H/2)

figure(1)
set(0,'DefaultFigureColor','w')
plot(t,Vx_MAX)
title('Velocidad X [m/s]'); xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Velocidad [m/s]')
grid on

figure(2)
plotperfil(H,Vx,0)

figure(3)
plotvel(H,L,Vx,0)

clearvars -except dP VMAX_MDF VMAX_POI T_EST Vx
```

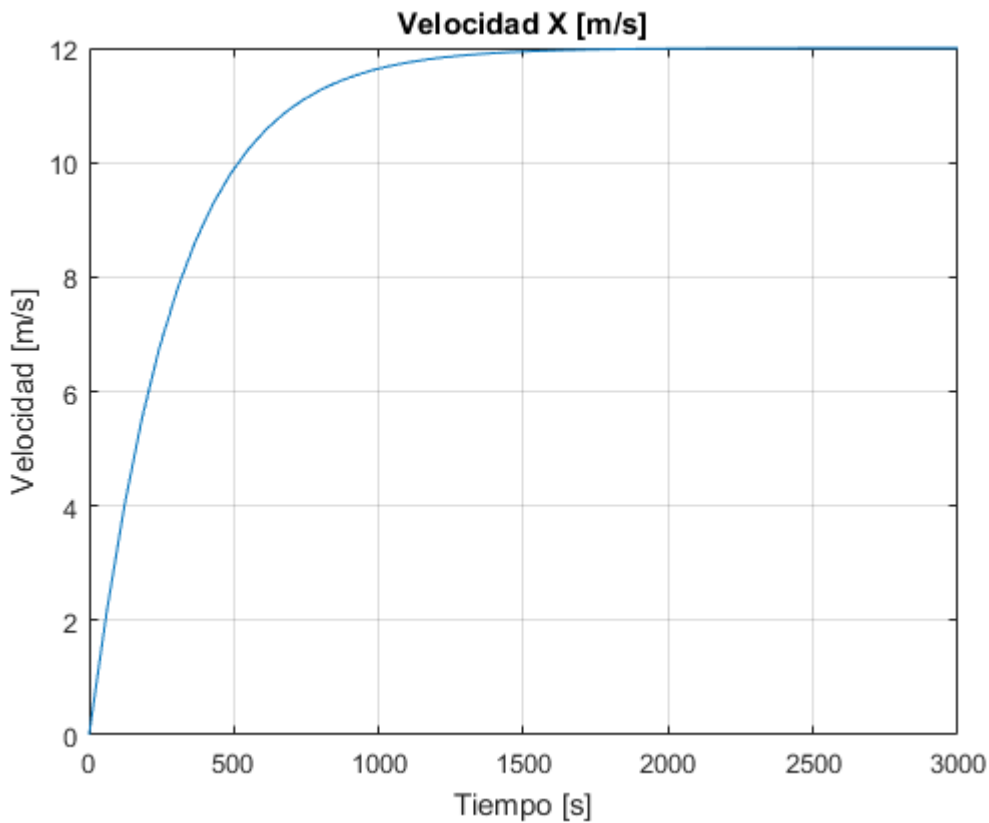
Resultados

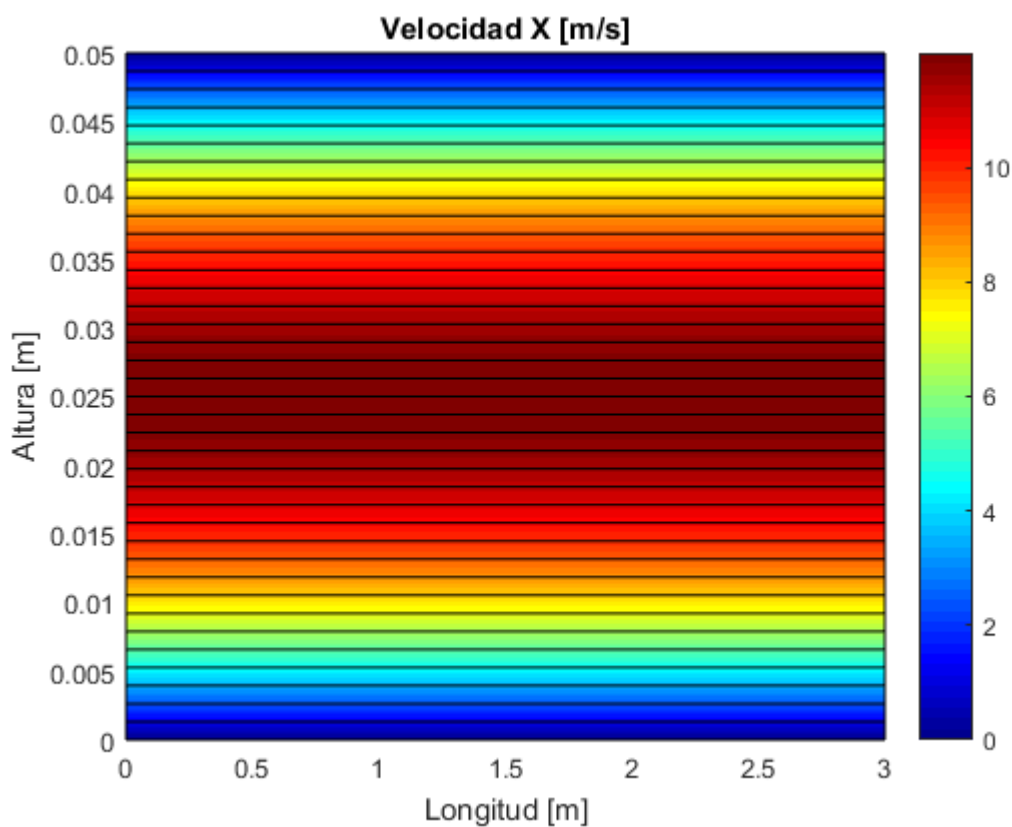
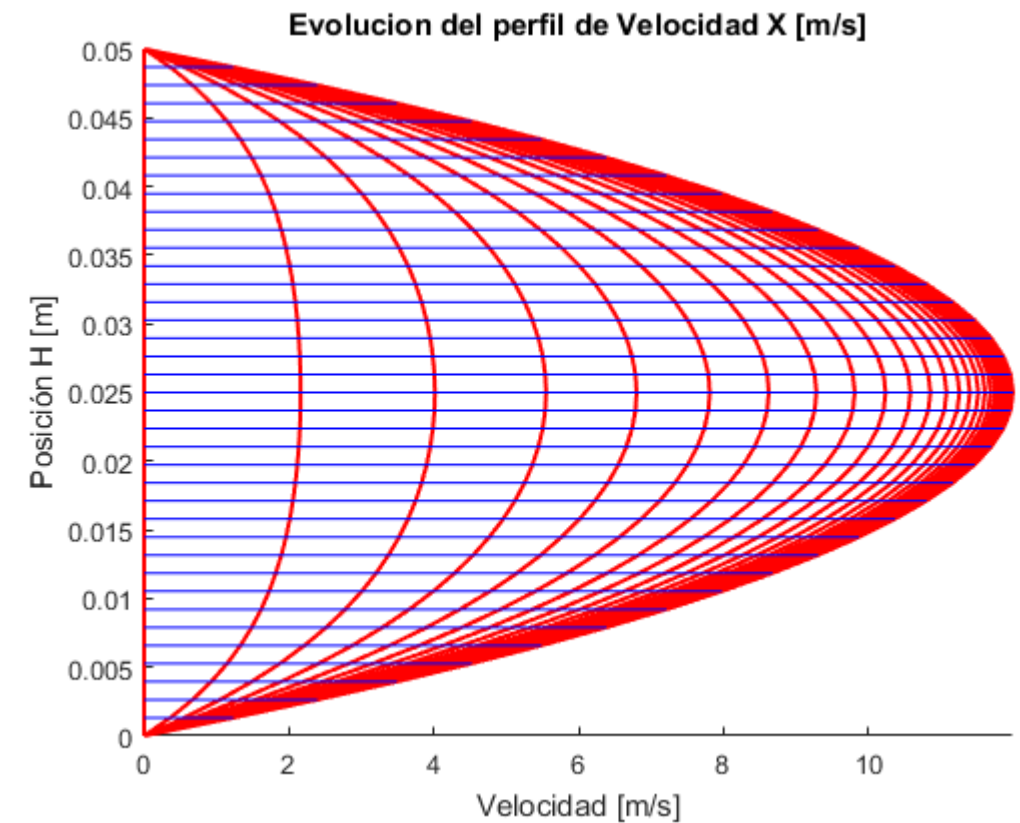
dP =
115,4304

T_EST =
1.4694e3

VMAX_MDF =
11,9319

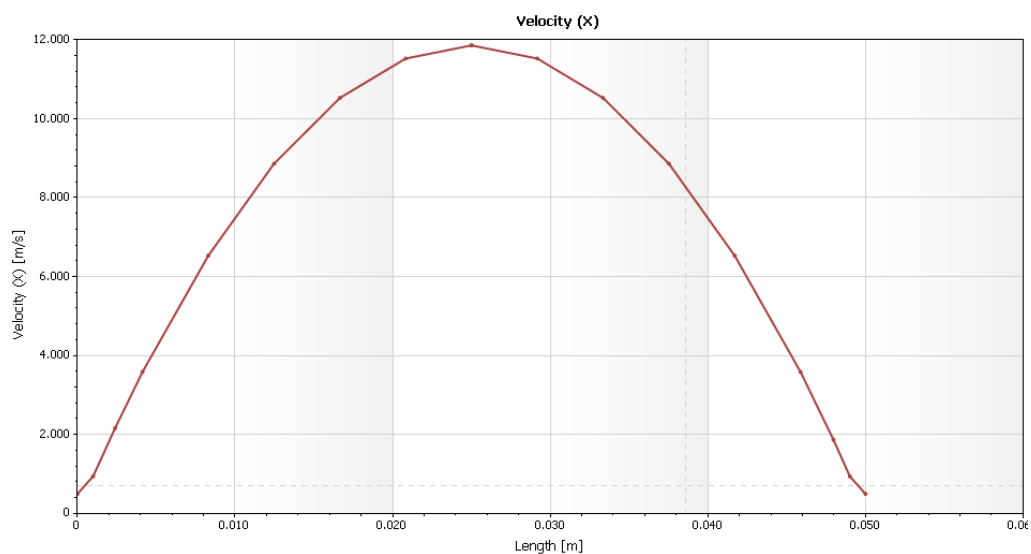
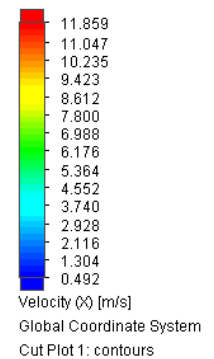
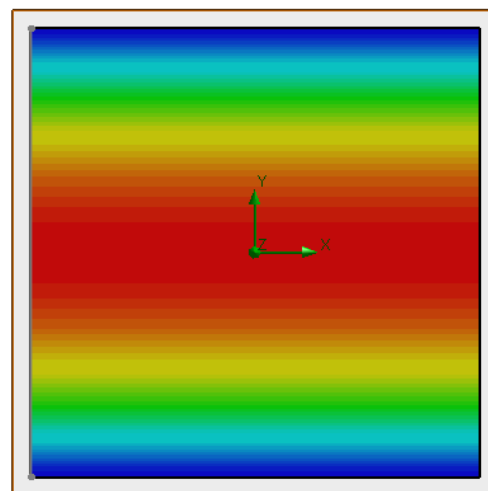
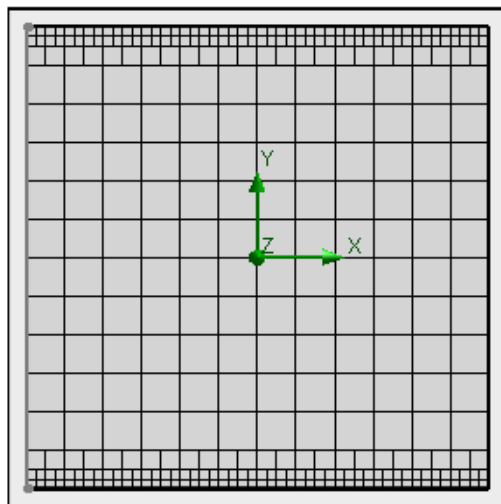
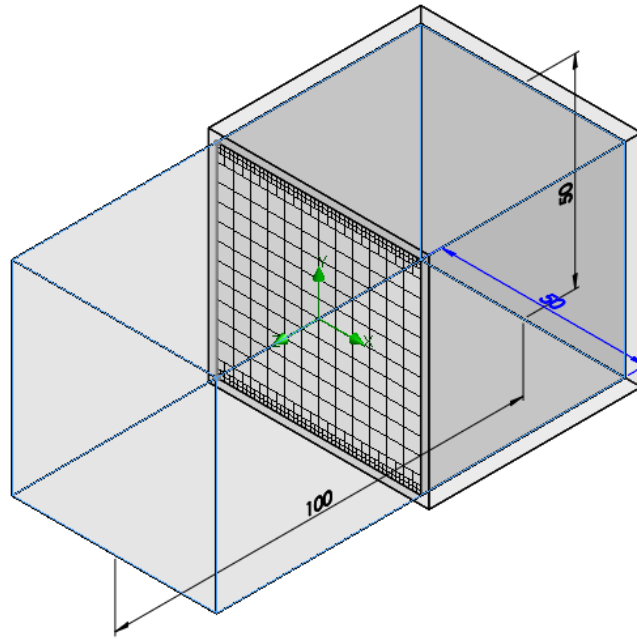
VMAX_POI =
12





El frente pasa de ser plano $v=0$ a un frente parabólico totalmente desarrollado con $v_{max}=12$ m/s. La evolución es muy lenta, tarda 1469 s (24,5 min) en lograrlo.

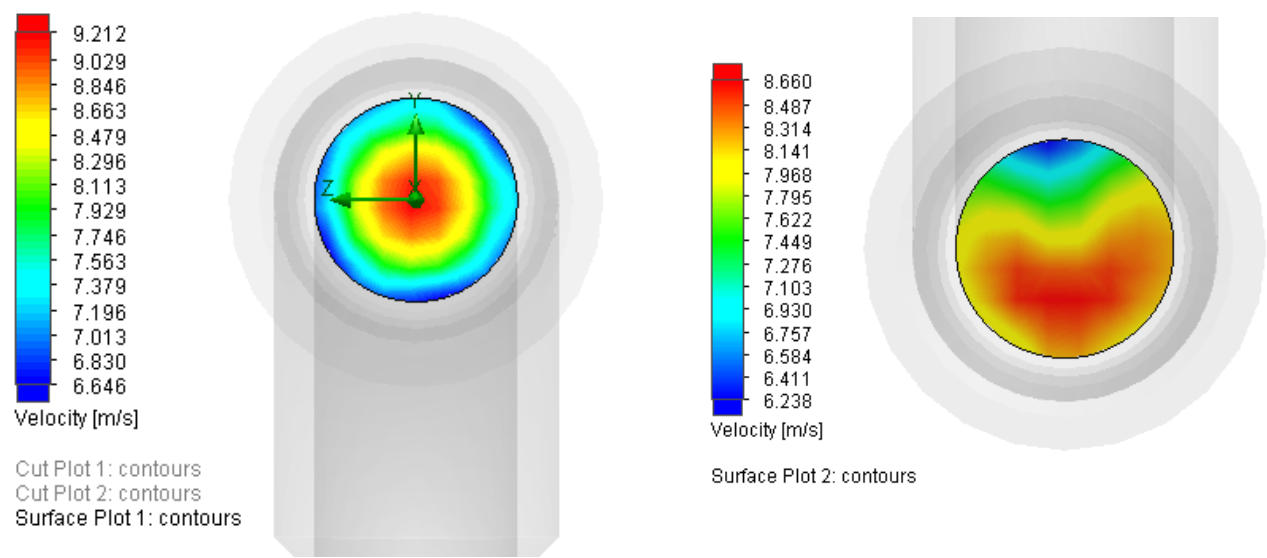
CFD Flow Simulation



Los valores de velocidad son bastante comparables a los resueltos con DF. Al valor máximo parece costarle llegar a 12 mientras que los extremos con $v=0$ tienen un valor próximo a cero pero no del todo.

CFD Flow Simulation Tubería

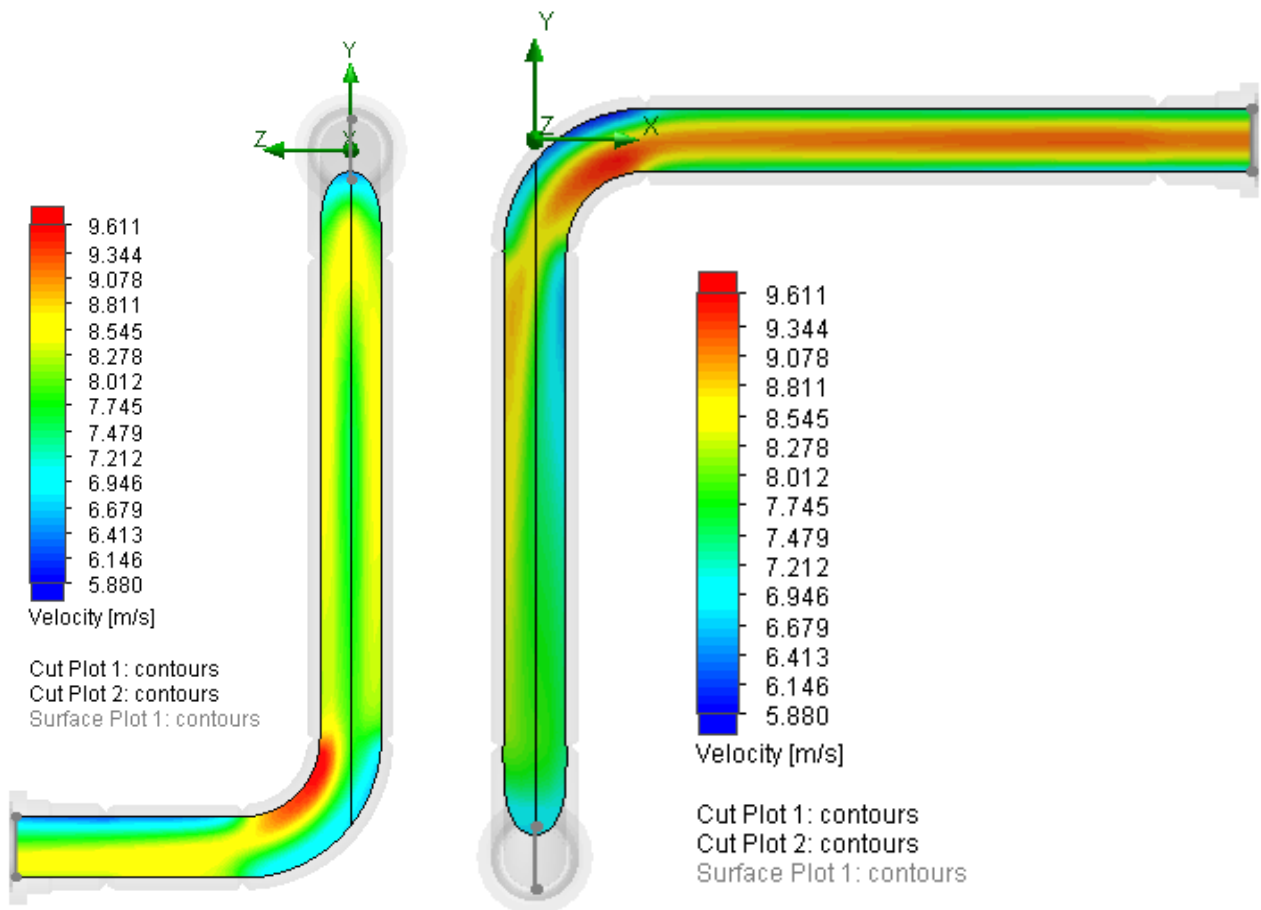
Superficies de contorno



El flujo arranca bien desarrollado pero se deforma a medida que atraviesa el tubo. Los codos son los causantes de esto y al final de la tubería el perfil ya no es igual; la zona superior tiene poca velocidad y la mayoría del caudal se mueve por abajo. Esto es debido principalmente al último codo.

Cortes de contorno





Cada corte evidencia el cambio de sentido a causa de los codos, donde aparecen zonas de baja velocidad y zonas de alta velocidad a pesar de que la sección transversal no cambia.

Trayectorias de flujo (se puede crear una animación)

