FLUJOS TURBULENTOS

Ecuaciones que gobiernan el flujo turbulento de un fluido. – Flujo Incompresible

Conservación de momento basado en la velocidad del fluido (**u**)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \phi\,\mathbf{e}_g - \nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{u}$$

Conservación de masa basado en la velocidad del fluido (**u**)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Conservación de masa de un escalar

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\,\mathbf{u}) = \frac{1}{\mathrm{Sc}\,\mathrm{Re}}\nabla^2\phi \qquad \mathrm{Sc} = \frac{\kappa}{\nu}$$

Análisis estadístico de la Turbulencia

Discusión:

Ecuaciones que gobiernan el flujo turbulento son determinísticas. Porque es necesario realizar un análisis estadístico?

Si la ecuación de movimiento es determinística, porque las soluciones son aleatorias. La respuesta es la combinación de dos observaciones:

i) en cualquier flujo turbulento hay perturbaciones en las condiciones iniciales, condiciones de contorno y en las propiedades del material.

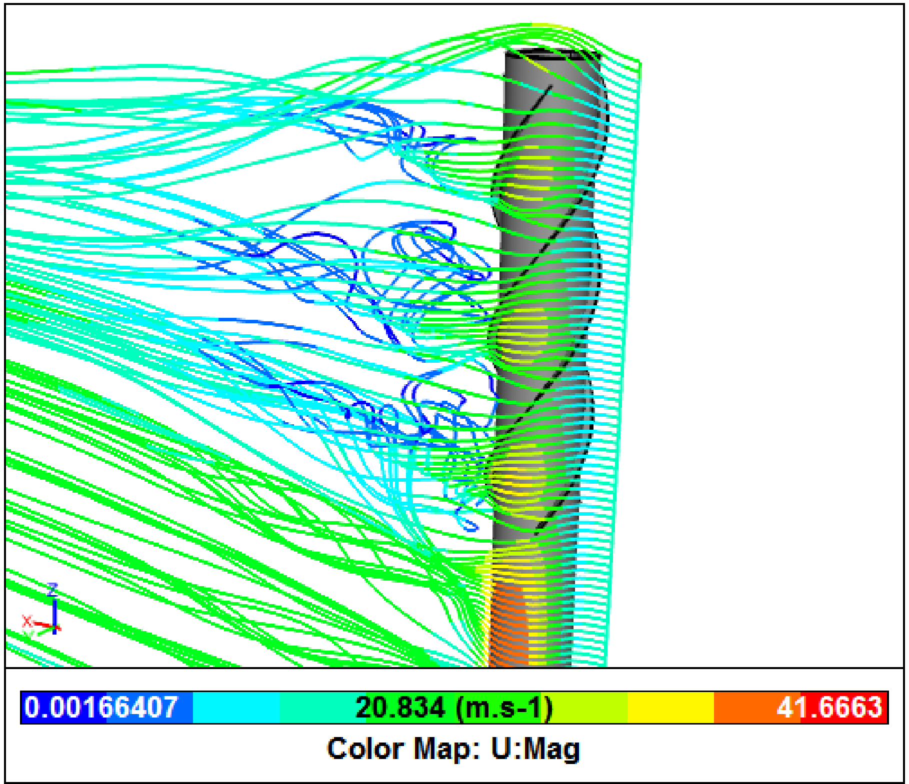
ii) el campo de velocidades muestra una sensibilidad extrema a estas perturbaciones.

Un modelo determinista es un modelo donde la misma entrada o condiciones iniciales producirán invariablemente las mismas salidas o resultados, no contemplándose la existencia del azar, o incertidumbre en el proceso.

La gran complejidad dinámica de los flujos turbulentos hace que la descripción determinista de ellos sea muy larga. Para analizarlos y modelarlos, generalmente se realiza una representación estadística de las fluctuaciones. Esto reduce la descripción a la de los diversos momentos estadísticos de la solución. lo que reduce bruscamente el volumen de información. El carácter azaroso de las fluctuaciones hacen que este enfoque sea natural.

Se puede asociar al flujo turbulento con los sistemas caóticos que presentan las siguientes propiedades:

- **son deterministas, hay algo que determina su comportamiento.**
- **son muy sensitivos a las condiciones iníciales.**
- **parecen desordenados, o hechos al azar, pero no lo son, hay reglas que determinan su comportamiento.**

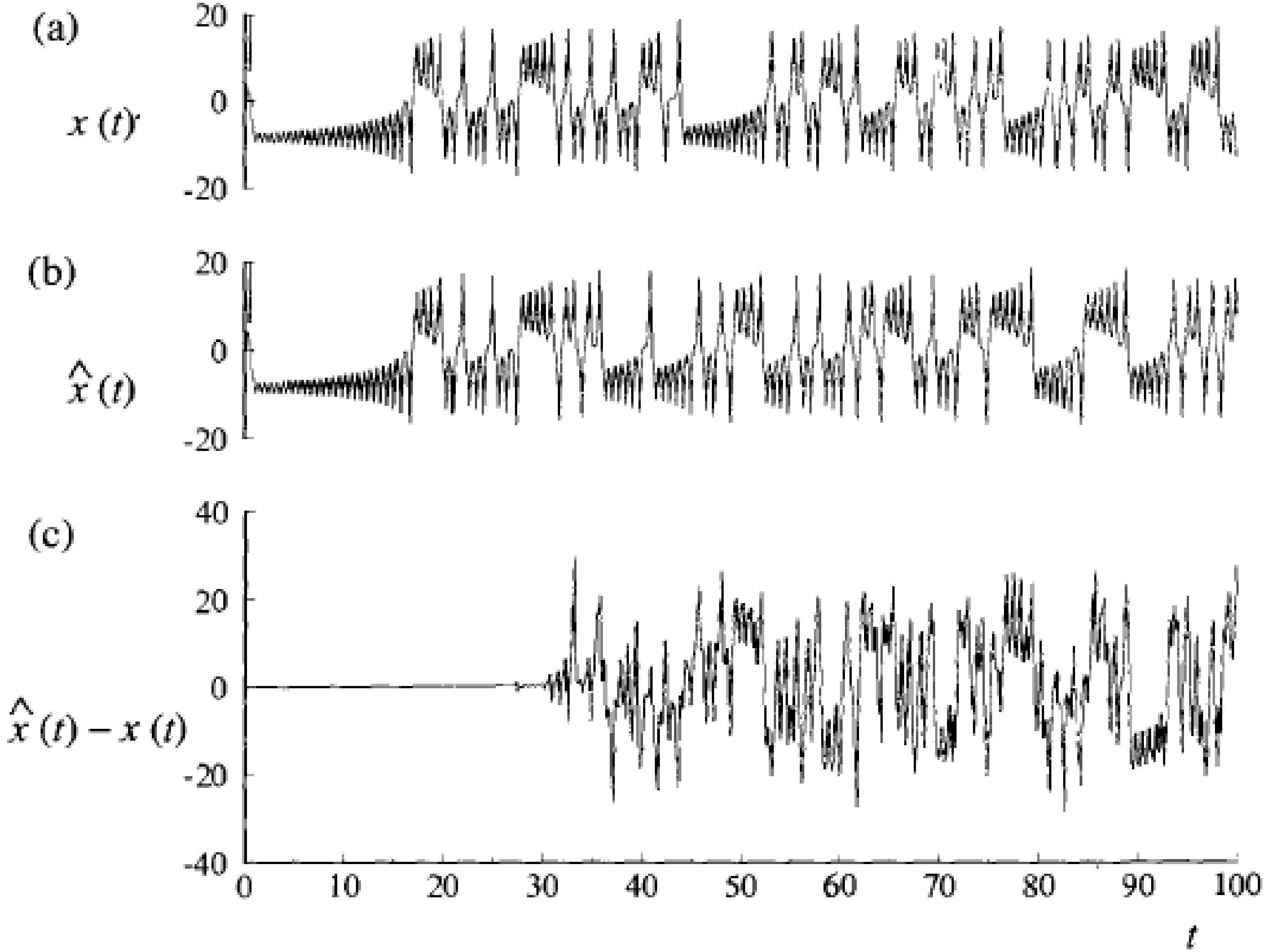


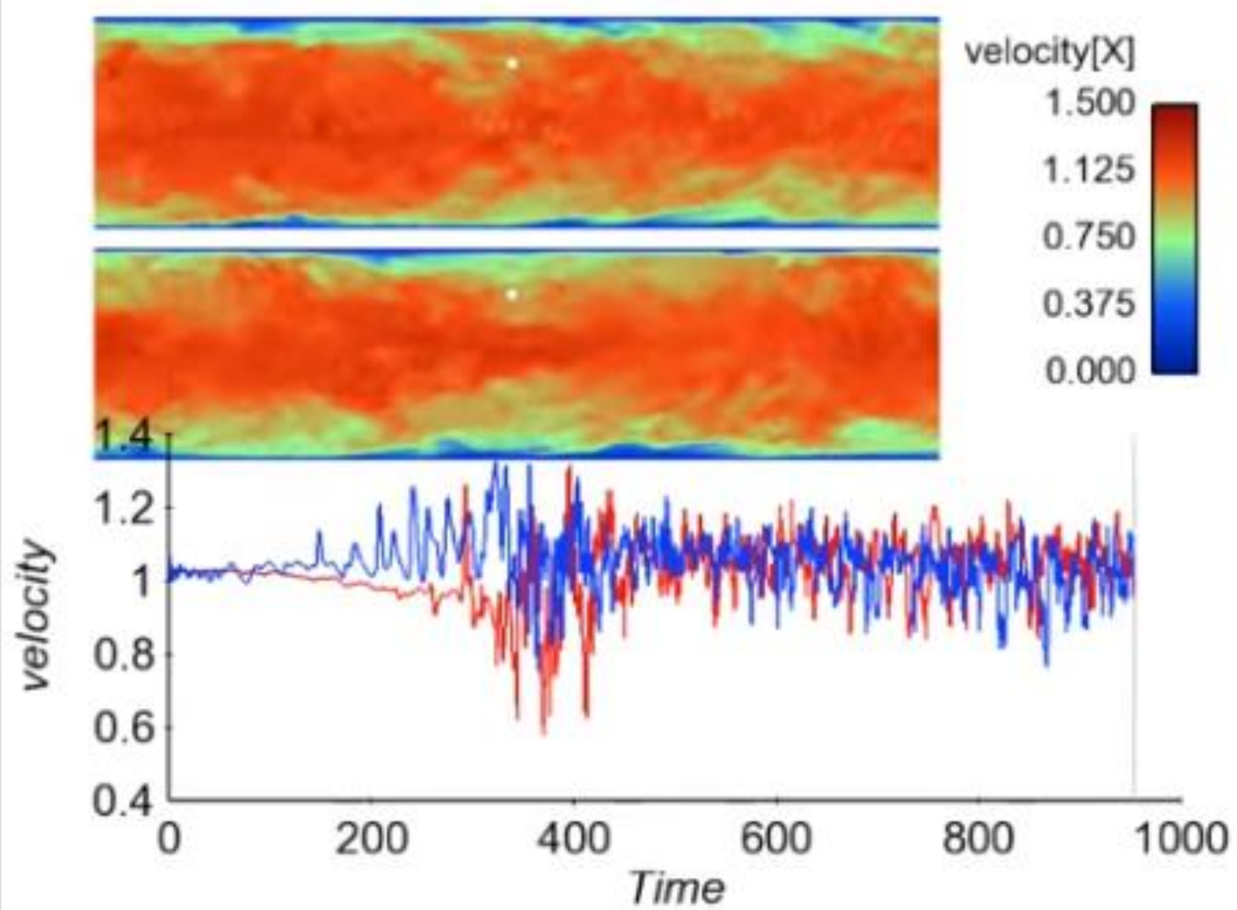
"Una pequeña causa que nos pasa desapercibida determina un considerable efecto que es imposible de ignorar, y entonces decimos que el efecto es debido al azar. Si conocemos exactamente las leyes de la Naturaleza y la situación del Universo en el momento inicial, podemos predecir exactamente la situación de este mismo Universo en un momento posterior. Pero aun si fuera el caso que las leyes de la Naturaleza no nos guardasen ningún secreto, todavía nosotros conoceríamos la situación inicial sólo aproximadamente. Si esto nos permitiera predecir la situación posterior con la misma aproximación, que es todo lo que necesitamos, podríamos afirmar que el fenómeno ha sido predicho, que es gobernado por leyes conocidas. Pero esto no es siempre así; puede pasar que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en el fenómeno final. Un pequeño error al principio produce un error enorme al final. La predicción se vuelve imposible, y tenemos un fenómeno fortuito".

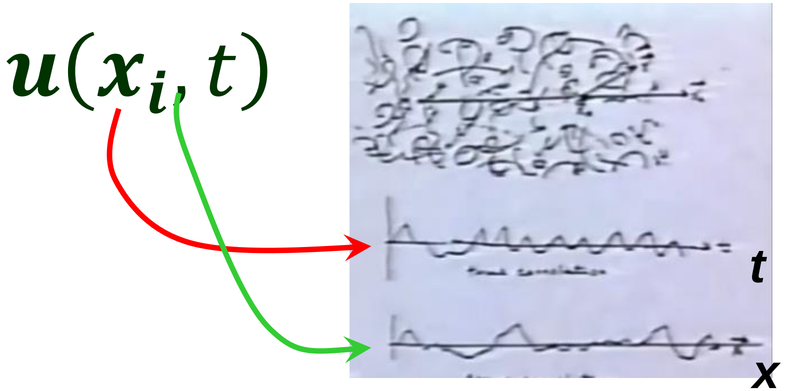
(Henri Poincaré)

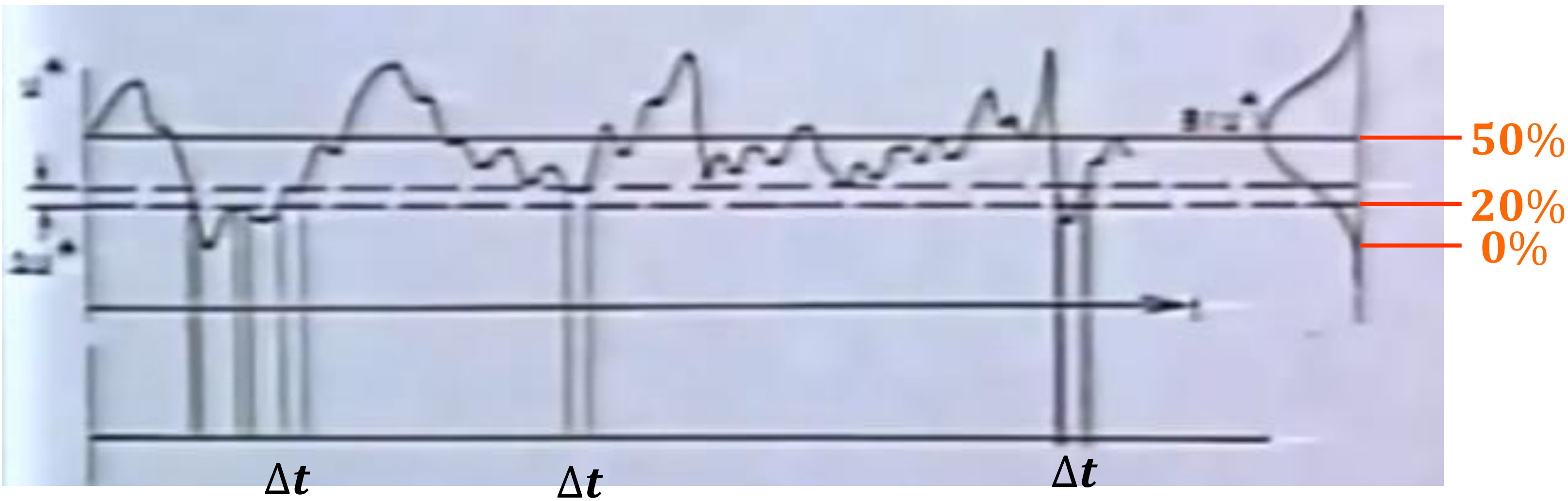
Al efecto que tienen las diferencias pequeñas e iniciales, después se le dió el nombre del 'efecto mariposa': **Lorentz (1961)**

“El aleteo de las alas de una mariposa puede crear delicados cambios en la atmósfera, los cuales durante el curso del tiempo podrían modificarse hasta hacer que ocurra algo tan dramático como un tornado. La mariposa aleteando sus alas representa un pequeño cambio en las condiciones iniciales del sistema, el cual causa una cadena de eventos que lleva a fenómenos a gran escala como tornados. Si la mariposa no hubiera agitado sus alas, la trayectoria del sistema hubiera podido ser muy distinta”.


(a)
20
0
$x(t)$
-20
(b)
20
0
$\hat{x}(t)$
-20
(c)
40
20
0
$\hat{x}(t) - x(t)$
-20
-40
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
t


velocity[X]
1.500
1.125
0.750
0.375
0.000
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
velocity
0
200
400
600
800
1000
Time



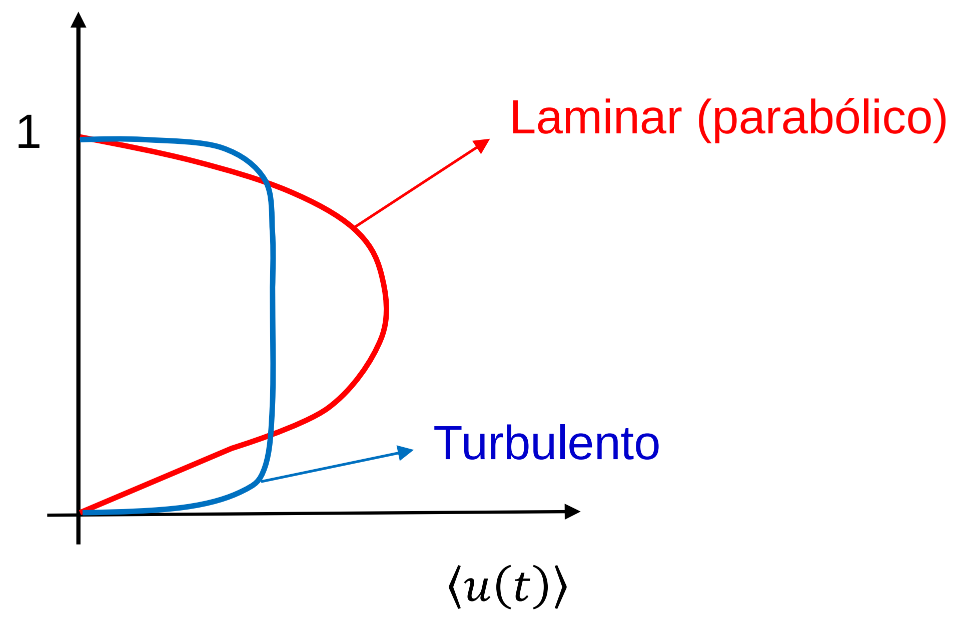


$$B(u^*)\Delta u^* = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum \Delta t \qquad \bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+\Delta t} f(u^*)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u^*)B(u^*)du^*$$

La media ⇨ $\langle \quad \rangle$

$$\boldsymbol{u} = u(t)$$

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} u(t)dt$$



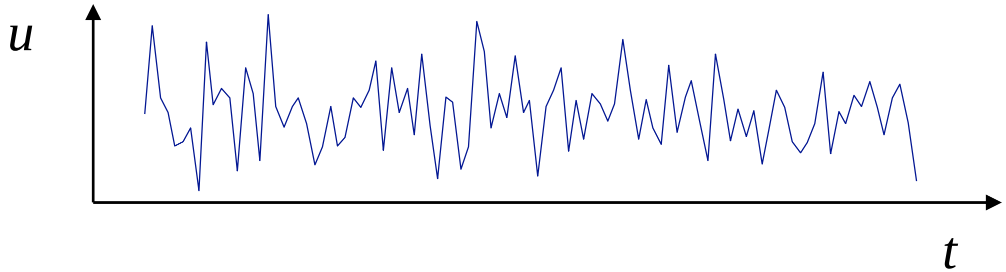
Media del conjunto

Sea **u**(t) una variable aleatoria resultante de un proceso estocástico

Consideremos *N* realizaciones del proceso estocástico

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_i}, t)$$

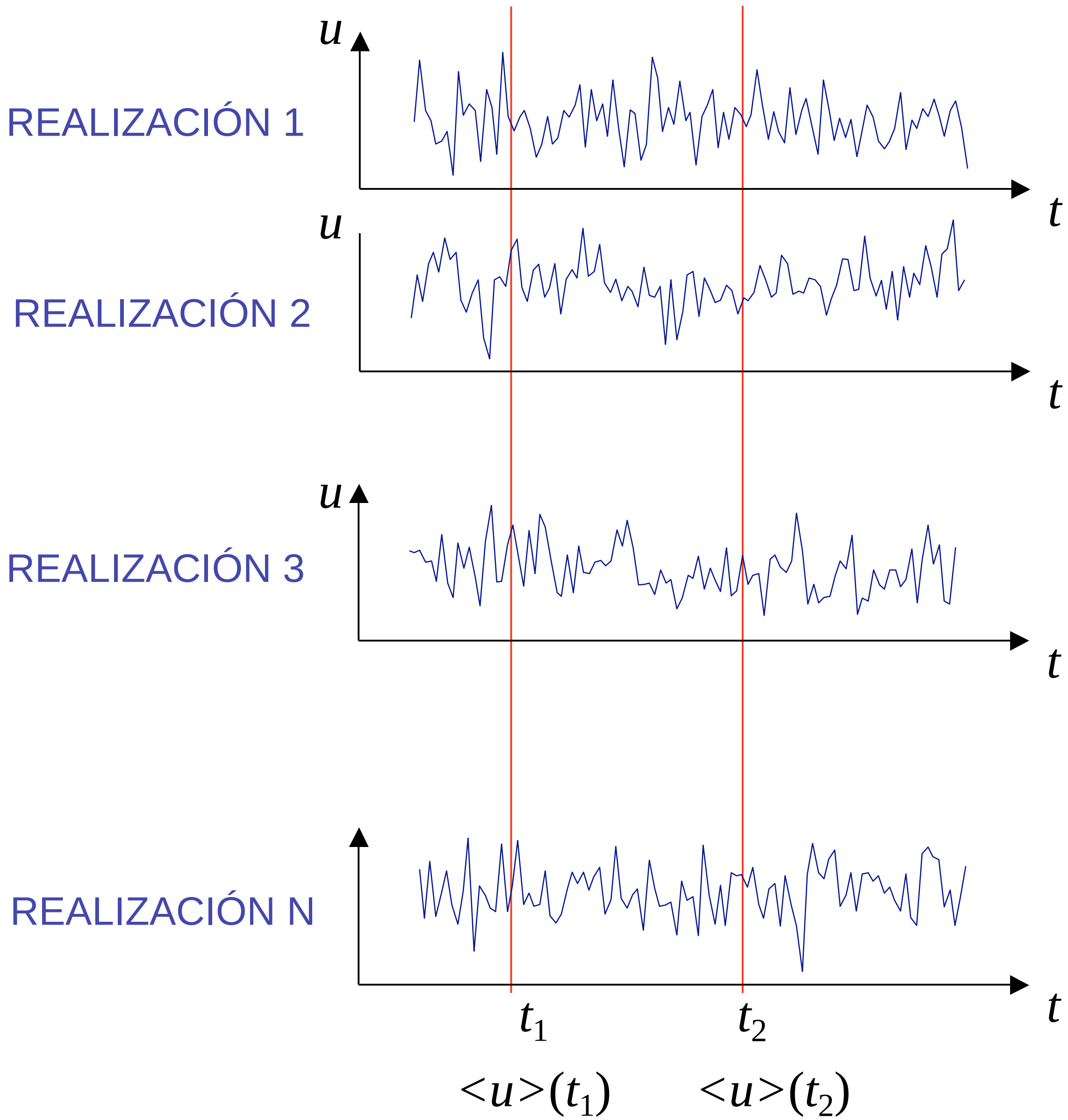
Proceso Estacionario



Media en el tiempo

$$\boxed{\langle u \rangle = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} u(t)dt}$$

Proceso Estacionario

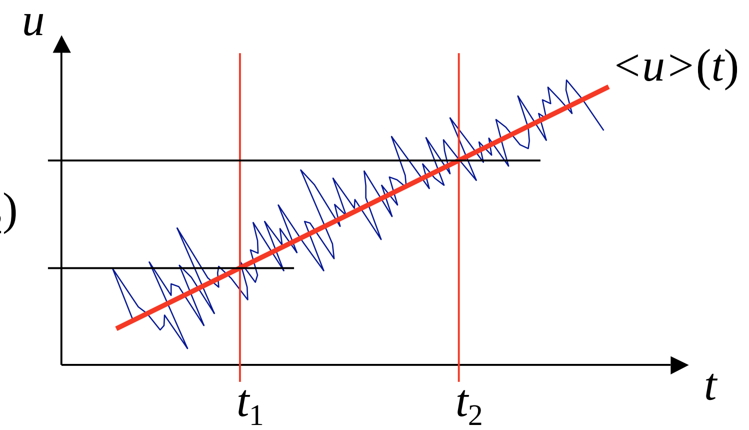


Media en el tiempo

$$\langle u \rangle = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} u(t)dt$$

Proceso NO Estacionario

$$\langle u\rangle(t_1) \neq \langle u\rangle(t_2)$$



ENSEMBLE: cada una de las realizaciones de una colección de experimentos

MEDIA DEL ENSEMBLE.

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i\,(t) \qquad ; \qquad \langle u(t)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i\,(t)$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial u_1(t)}{\partial t} + \frac{\partial u_2(t)}{\partial t} + \frac{\partial u_3(t)}{\partial t} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{N}\big(u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)\big) + \cdots\right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

$$\boxed{\bar{u}\,(t_1) = \bar{u}\,(t_2) = \ (t) = \bar{u}}$$

Reglas:

check de donde sale

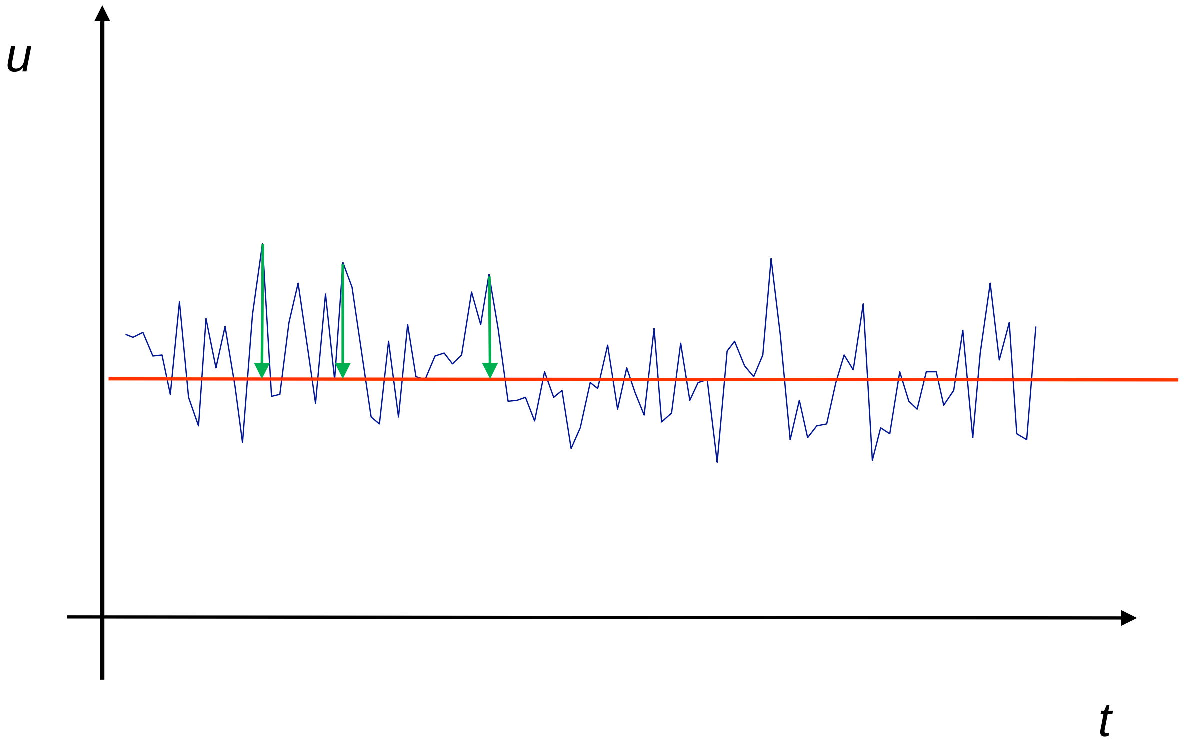
$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \ ; \ \overline{\int_a^b u dt} = \int_a^b \bar{u} dt$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \ ; \ \overline{\int u dx} = \int \bar{u} dx$$

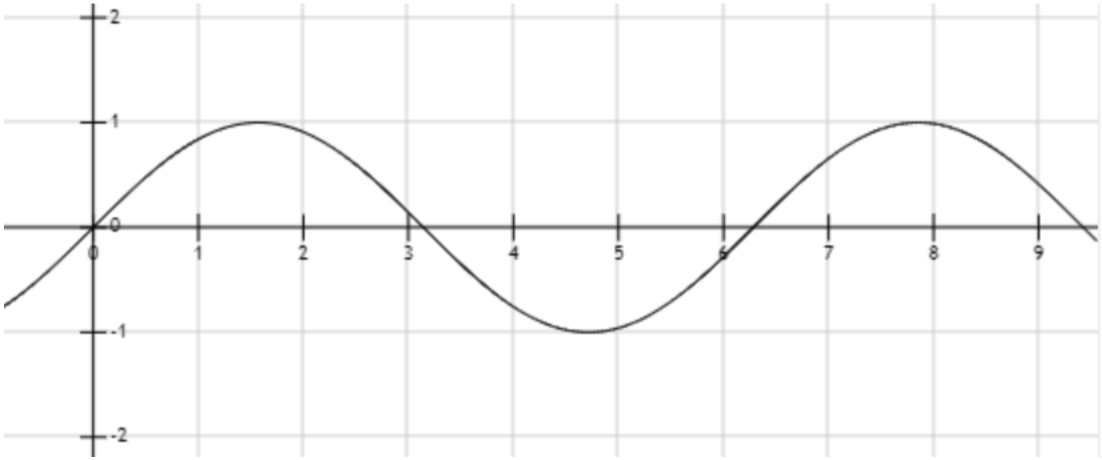
ERGODICIDAD

concretamente que es? la ergodicidad

Un experimento infinitamente largo ⟺ ES REPRESENTATIVO ⟺ De todos los posibles escenarios



$$U(t) = \langle u(t) \rangle + u^{\prime}(t)$$



$\boldsymbol{u} = sin(t)$

$\langle \boldsymbol{u} \rangle = 0$

Root mean square value (rms) $\sqrt{(\quad)^2}$

$$\boldsymbol{rms} = \sqrt{\langle (\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{t}))^2 \rangle}$$

la media en una funci'on arm'onica es nula, mientras

Probabilidad es la posibilidad de encontrar un valor de velocidad en un lugar específico, o cuantas veces es posible encontrar un valor de velocidad en una serie.

Se construye a partir de:

- Función de distribución acumulativa (CDF)
  (*Culmulative distribution funtion*)

- Función de distribución de probabilidad (PDF)
  (Probability distribution funtion)

seguir

EJEMPLO:
Probabilidad de que una velocidad este por debajo de los 10m/s

Llamamos *A* al evento $A = \{u < 10\, {}^{m}/_{s}\}$ **Espacio de muestreo**

Generalizamos llamando *B* al evento

B es el evento $B = \{u < V_b\}$

Generalizamos aún más llamando *C* al evento

$C = \{V_a < u < V_b\}$; para $V_a < V_b$

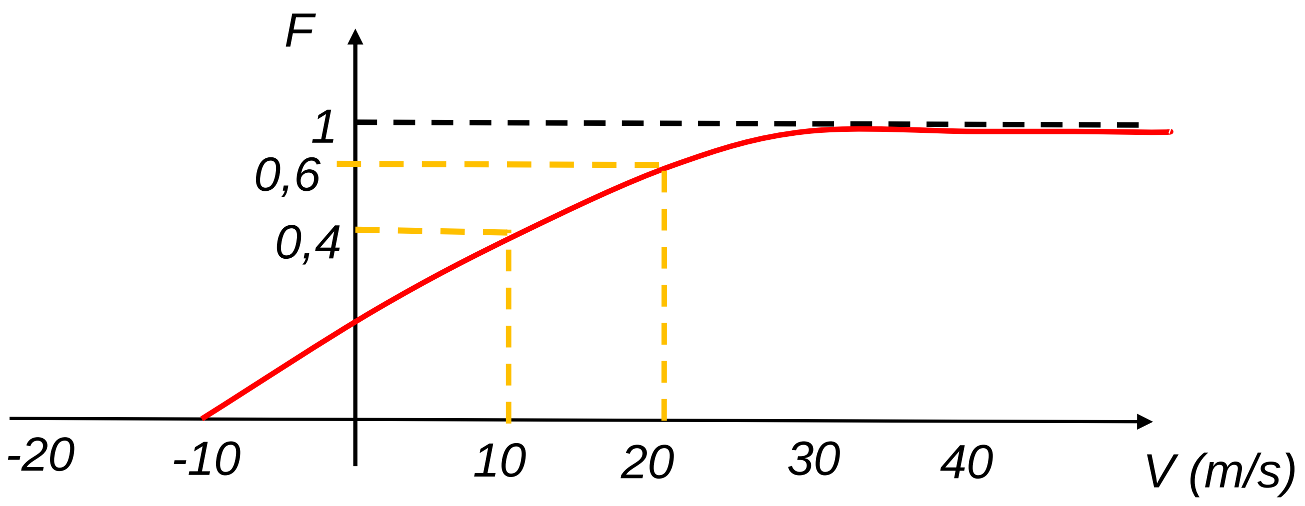
La probabilidad de un evento *B*

$$p = P(B) = p\,\{u < V_b\} \Rightarrow 0 \leq p \leq 1 \begin{cases} p = 0 & \text{Evento imposible} \\ p = 1 & \text{Evento certero} \end{cases}$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA

$$F(V) = p\,\{u < V\}$$

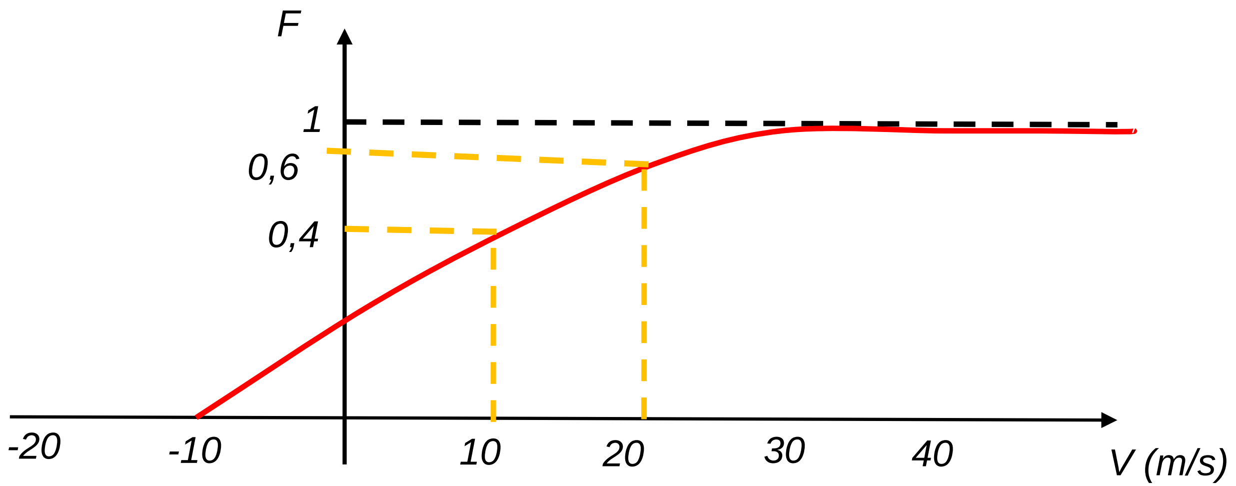
$$F(V_b) = p\,\{u < V_b\} = P(B) \;; \qquad -\infty < V - \infty$$



Reglas

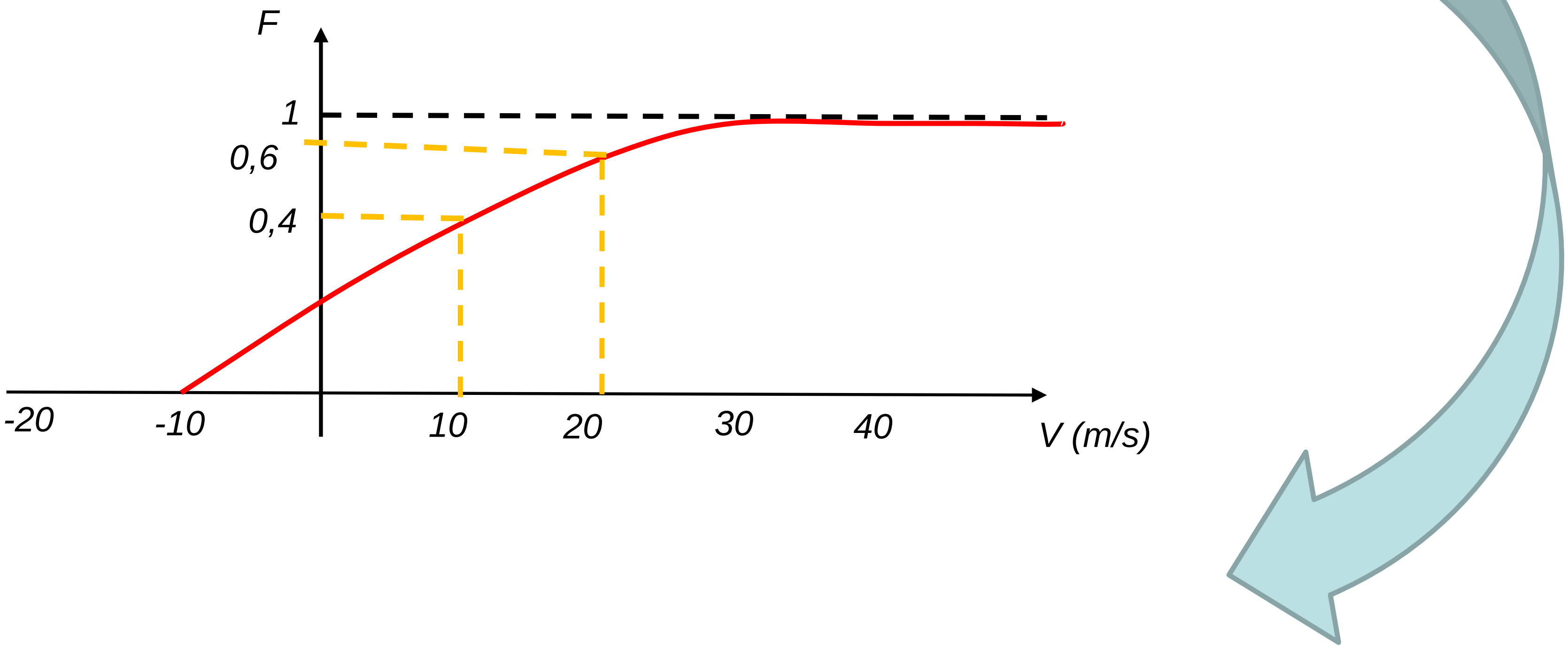
$$F(-\infty) = 0; F(-\infty) = 1$$

$$F(V_b) \geq F(V_a) \qquad si \quad V_a < V_b$$



Reglas

$$F(V_b) - F(V_a) = p\{V_a \leq u \leq V_b\} \geq 0$$



F no decrece, SIEMPRE CRECE O PERMANECE CONSTANTE

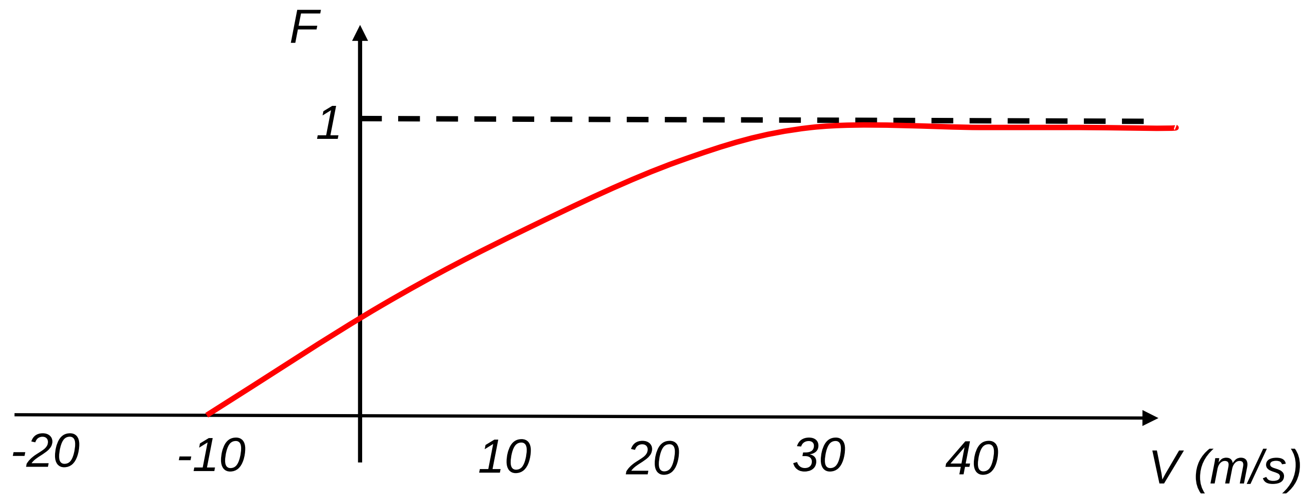
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

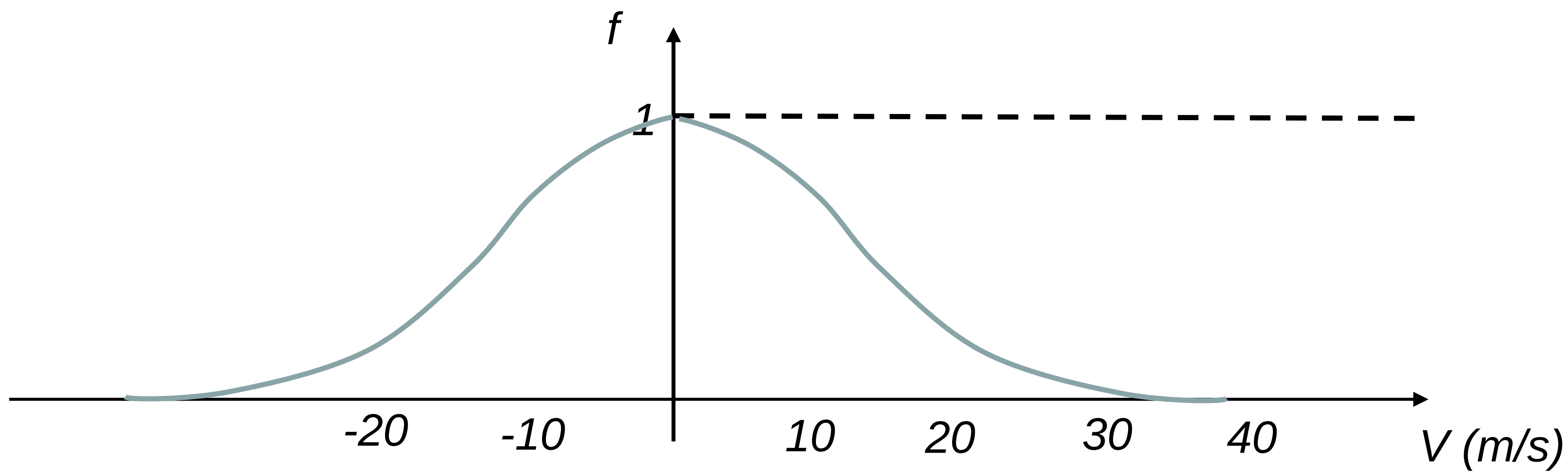
$$f = \frac{dF(V)}{dV}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(V)dV = 1$$

El área bajo la curva es de PDF es igual a 1

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD





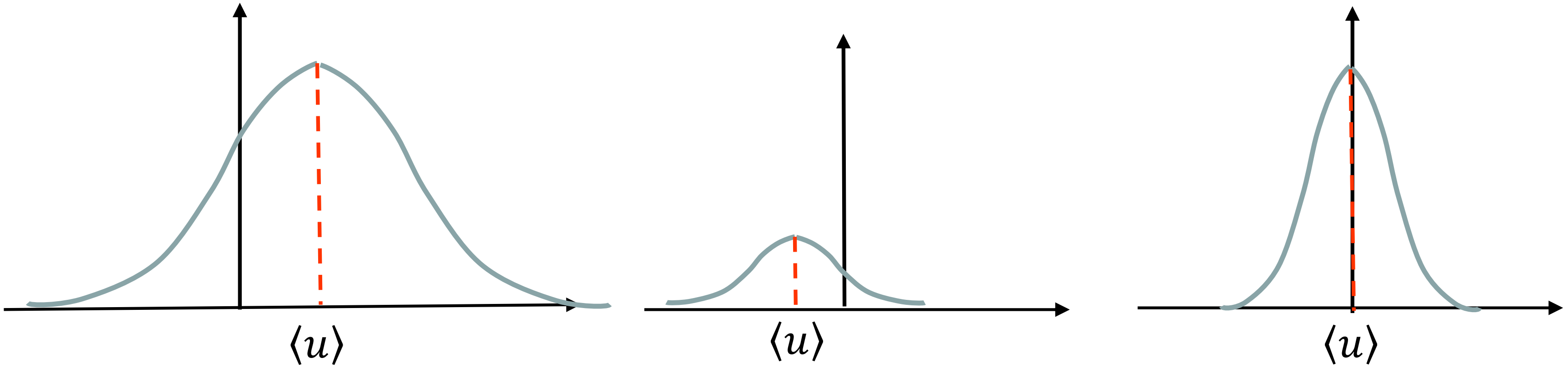
$f(-\infty) = 0$

$f(-\infty) = 0$

MEDIAS Y MOMENTOS A PARTIR DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Media ponderada de probabilidad

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} V f(V) dV$$



Media
(probabilidad media ponderada)
Momento de 1er orden

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} V f(V) dV$$

Varianza
Momento de 2do orden

$$var(u) = \langle u'^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (V - \langle u' \rangle)^2 f(V) dV$$

RMS
(desviación)
Momento de 3er orden

$$\sigma_n = s_{dev}(u') = \sqrt{var(u')} = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$$

Momento de ***n*** orden

$$\mu = \langle u'^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (V - \langle u' \rangle)^n f(V) dV$$

Crece la incertidumbre

Decrece la longitud del registro

Media
(probabilidad media ponderada)

Momento de 1er orden

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} V f(V) dV$$

Varianza
Momento de 2do orden

$$var(u) = \langle u'^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (V - \langle u' \rangle)^2 f(V) dV$$

RMS
(desviación)

Momento de 3er orden

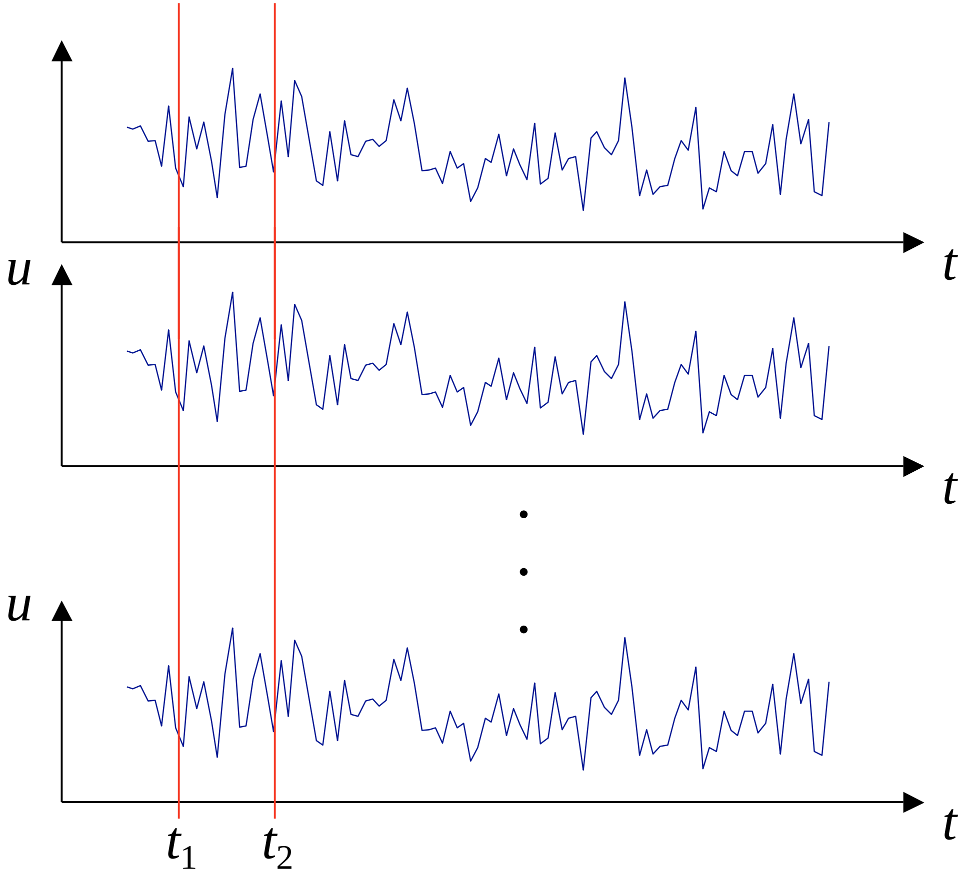
$$\sigma_n = s_{dev}(u') = \sqrt{var(u')} = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$$

Momento de ***n*** orden

$$\mu = \langle u'^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (V - \langle u' \rangle)^n f(V) dV$$

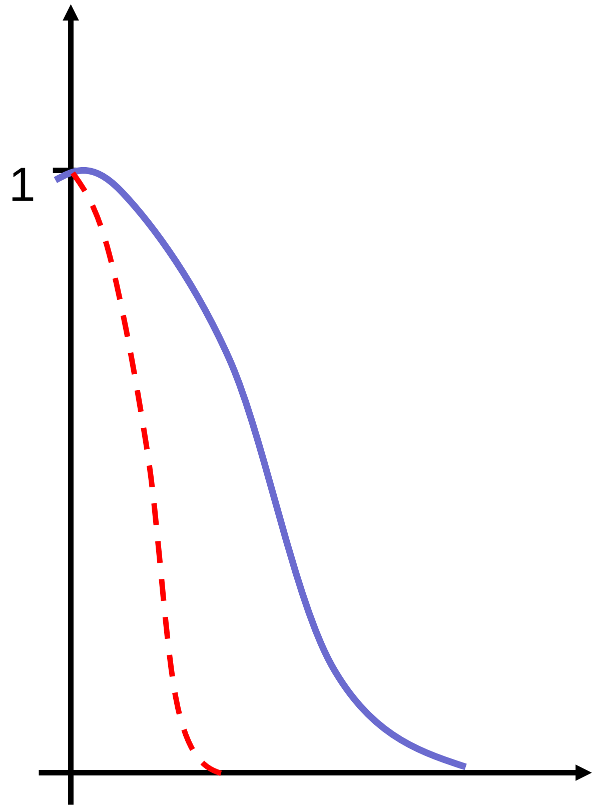
FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

$$\rho(s) \equiv \langle u(t) \cdot u(t+s) \rangle$$

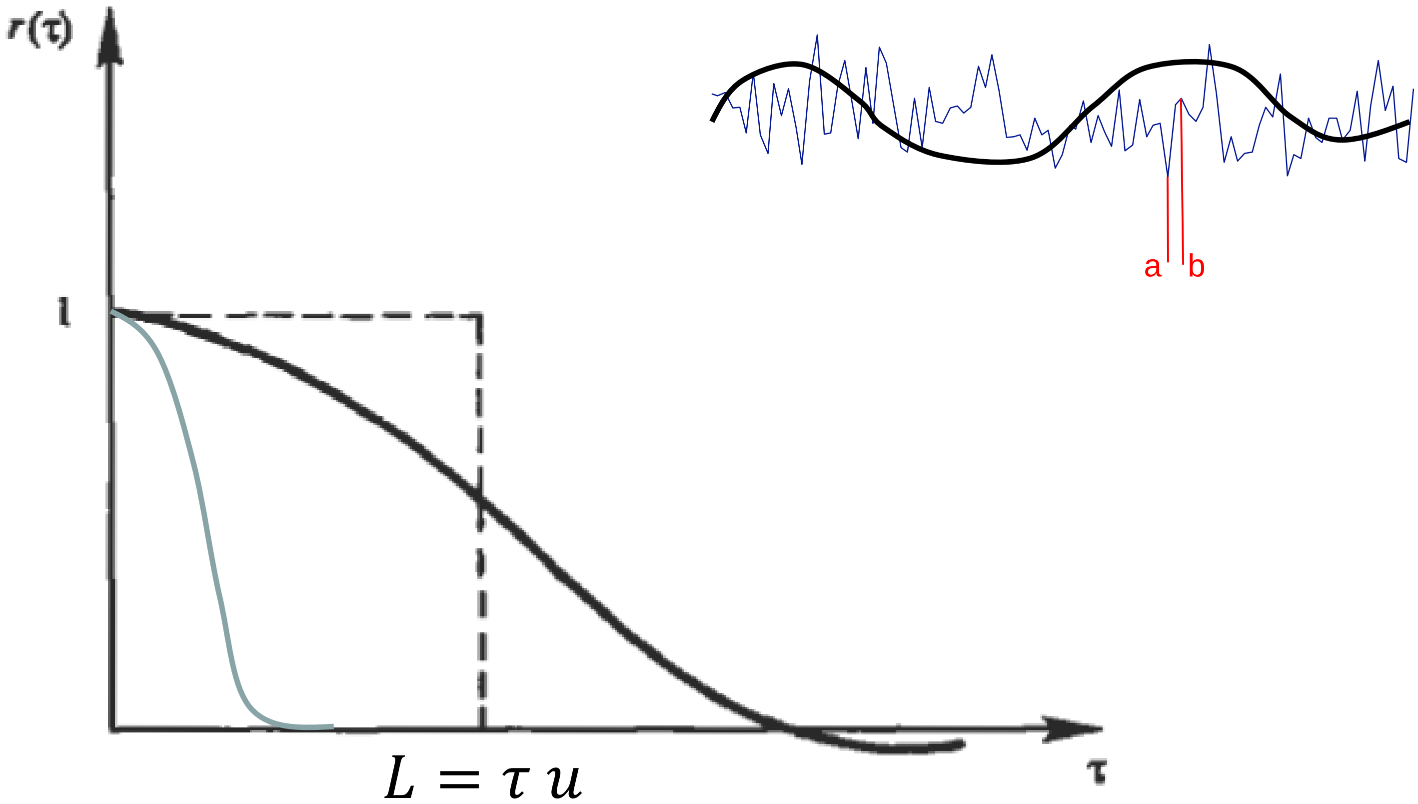


$$\rho(s) \equiv \frac{\langle u(t) \cdot u(t+s) \rangle}{\langle u \rangle^2}$$

Normalizada


1

FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN



De la Autocorrelación se obtiene la Escala Integral de Tiempo, o sea nos informa la longitud de escala característica del flujo.

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} r(\tau)\,d\tau$$

La transformada de Fourier de la autocorrelación

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} S(\omega) d\omega$$

Para $\tau = 0$ $\Rightarrow$ $\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$

$$S(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = \frac{\overline{u^2}}{\pi} \int_{0}^{\infty} r(\tau) d\tau = \boxed{\frac{\overline{u^2} L}{\pi}}$$

VELOCIDAD Y ESPECTRO DE ENERGÍA

El espectro de frecuencia se utiliza para identificar que frecuencias están presentes en la señal.

¿Que queremos? Convertir nuestra señal original en un espectro de energía en el dominio espectral.

¿Como lo hacemos? Necesitamos una representación espectral de la señal

$$u(t + NT) = u(t)$$

Fluctuación

$$u'(t) = u(t) - \langle u \rangle_T$$

$$u(t + NT) = u(t)$$ Señal periódica

Premediación temporal $$\langle u(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, dt$$

Fluctuación

$$u'(t) = u(t) - \langle u \rangle_T$$

Frecuencia

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Se define para cada modo complejo de Fourier

$$e^{i\omega_n T} = \cos(\omega_n T) + i\,\mathrm{sen}(\omega_n T)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi n}{T} T\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} T\right)$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + b_n i)e^{i\omega_n T}$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n}{T} T\right)}_{a} + i\,\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} T\right)}_{b}$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + b_n i) e^{i\omega_n T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n) e^{i\omega_n T}$$

a_n, b_n Son reales c_n Es complejo

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + a_{-n}) + i(b_n + b_{-n})] \cos(\omega t)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [i(a_n + a_{-n}) + i^2(b_n + b_{-n})] \sin(\omega t)$$

$$\boxed{u(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega t) - b_n \sin(\omega t)]}$$

$$u(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cos(\omega_n t) + \theta_n$$

$$|c_n| = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \quad ; \quad \theta_n = tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Como calculamos los coeficientes de Fourier

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n) e^{i\omega_n T}$$

$$e^{-i\omega_n T}$$

$$\left\langle e^{-i\omega_n T} u(t) \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n) e^{i\omega_n T}\, e^{-i\omega_n T} \right\rangle$$

$$\left\langle e^{i\omega_n T} e^{-i\omega_n T} \right\rangle = \delta_{nm}$$

$$\left\langle e^{-i\omega_n T} u(t) \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n)\delta_{nm} = c_m$$

$$\left\langle e^{-i\omega_n T} u(t) \right\rangle = c_m$$

$$C_n = \langle u(t) e^{-i\omega_n T} \rangle$$

Correlación entre la señal original con la frecuencia que se quiere analizar

Energía asociada a una frecuencia

$$E(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(s) \cos(\omega s)\, ds$$