

Actividad N04

En el siguiente informe se presenta la resolución del ejercicio entregable para el curso de “Turbulencia en Flujos” dentro del Doctorado de Ingeniería.

1. Estado del arte: Simulaciones Numéricas

Seleccione un artículo contemporáneo publicado, en su área de trabajo, donde se hable de un ejemplo del uso de la simulación numérica para solucionar una geometría particular y escribir un resumen donde mencione.

- *objetivo de la simulación*
- *que tipo de simulación de flujos turbulentos se utiliza*
- *cuales son las condiciones de contorno utilizadas*
- *cual es el dominio computacional*

1.1. Esquema de discretización numérica:

Existen una amplia variedad de métodos de discretización numérica. En el área de la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD) probablemente el más difundido es el Método de Volúmenes Finitos (FVM) ([Hirsh, 1990, Laney, 1998]), ya que es una técnica numérica que es inherentemente conservativa, es decir se mantienen los balances de las propiedades entre las celdas. FVM calcula los flujos en las caras, a partir de los valores en centro de celdas. Esta técnica de discretización permite utilizar cualquier tipo de celda tridimensional (tetraédrica, hexaédrica, piramidal, poliédrica, etc) como así también distintos tipos de estructura de malla (desestructurada, estructurada por bloques, híbrida, etc), brindando gran flexibilidad. Así mismo, dispone de distintos esquemas de acoplamiento *presión-velocidad* (SIMPLE, SIMPLEC, PISO) como de resolución de sistemas lineales (Gradientes Conjugados, Multigrilla). Además cuenta con distintos modelos de turbulencia como ser *RANS*, *LES* y $k - \Omega$ SST.

1.2. Caso de análisis

Se selecciona un artículo contemporáneo donde se utilizan simulaciones numéricas para abordar las cuestiones técnicas del mismo. El trabajo seleccionado es [Olejnik et al., 2020] cuyo objetivo es analizar el lanzamiento en vuelo de distintos objetos desde una aeronave en movimiento. Dicha situación aplica para la eyección de pilotos en maniobras de emergencia, desprendimientos de partes de la aeronave, como ser su tanque de combustible o también el lanzamiento de misiles.

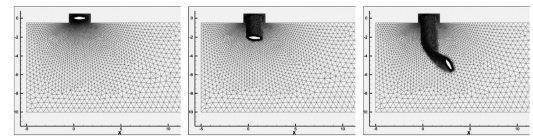


Figura 2: Movimiento de malla, técnica *overset*.

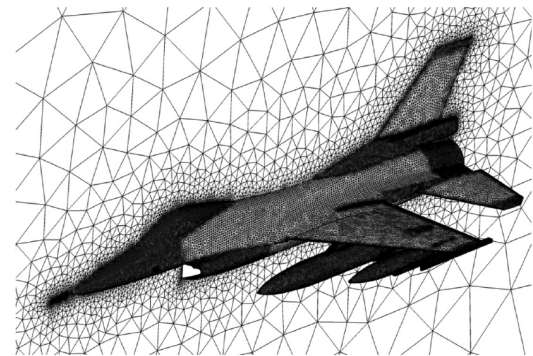


Figura 1: Dominio computacional aeronave

Esta situación además de la complejidad de una simulación numérica, es decir que sea estable, que tenga convergencia y que sea precisa; presenta el desafío del movimiento de malla, ya que el objeto en estudio tiene movimiento, por lo que el dominio computacional (malla) debe deformarse. Para esto existen varias técnicas de movimiento de malla, los autores adoptaron la técnica conocida como *overset* o *Chimera algorithms*. En este método, la geometría se descompone en un conjunto de simetrías más simples de modo que la grilla se solape con otras. La información de las condiciones de borde se intercambian entre las distintas grillas mediante una interpolación de las variables del flujo. Si bien permite resolver problemas con geometrías en movimiento, es una técnica costosa ya que requiere que se generen varias mallas con la consecuente elevación de las incógnitas.

1.3. Modelización numérica

El dominio en cuestión tiene un tamaño de 100x50x100 [m], las condiciones de salida de la turbina de la aeronave se settean como valores de entrada en el dominio computacional, lo mismo ocurre con la condición de contorno de salida, donde se impone la velocidad de ingreso de la turbina. Para las demás condiciones de contorno, se inician con la velocidad crucero de la aeronave. Al estar en régimen compresible, se impone la temperatura

La situación responde a un vuelo a velocidades $M = 0,7$ por lo que debe ser una simulación de flujo compresible. Para resolver la turbulencia se adoptó una modelización de Spalart-Allmaras. La misma es una técnica de modelización RANS (Reynolds-Averaged Navier Stokes), es decir modeliza al tensor de Reynolds con una aproximación mediante un modelo de una ecuación. Para ello, resuelve una ecuación de transporte, donde la propiedad que se transporta es la

energía cinética turbulenta.

- Flujo compresible
- Modelo Spalart-Allmaras
- Movimiento malla: overset

2. Cascada de energía de según Richardson

Describe la cascada de energía de según Richardson. Cúales son sus escalas características

El concepto de cascada de energía fue introducido por Richardson en 1922, donde establece que el flujo turbulento se compone por remolinos con una gran variedad de tamaños; desde los mayores que adquieren un tamaño en función de la longitud característica del flujo (altura de canal para flujos abiertos, diámetro de cañería para flujos cerrados, etc) hasta los remolinos más pequeños que luego desaparecen debido a la absorción del fluido producto de la disipación viscosa. Cabe aclarar que dicho tamaño de los pequeños remolinos no era conocido hasta que Kolmogorov (1941) estableció las escalas de Kolmogorov. Como es de esperar, el flujo en el turbulento existen un amplio rango de escalas.

La Fig. (3) esquematiza la secuencia de los vórtices dentro del flujo turbulento donde la energía turbulenta del flujo es obtenida por medio del flujo medio, a través de la acción de los vórtices de mayor tamaño presentes en el flujo. Luego esta energía es disipada, en forma de calor, a través de la acción de la viscosidad. Sin embargo, como la disipación viscosa está asociada con procesos moleculares, esta solo puede ser efectiva a escalas pequeñas. El proceso por el cual la energía es transferida desde los vórtices de mayor tamaño a los de menor escala pasando por los vórtices intermedios, se conoce como *cascada de energía*. El **mecanismo** por el cual la energía se transfiere entre las distintas escalas corresponde al **"estiramiento"** o **trabajo de deformación de los remolinos ejercido por los esfuerzos de corte del flujo**. Es importante recalcar que la de disipación de la energía turbulenta (ϵ) se encuentra dominada por la tasa de producción de la energía desde el flujo medio y no por viscosidad misma.

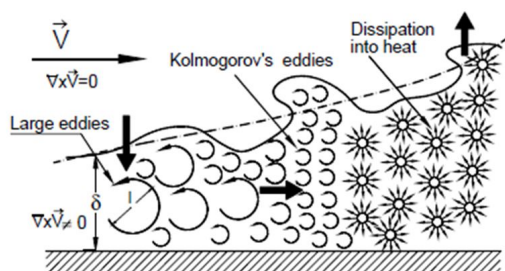


Figura 3: Secuencia de los vórtices dentro del flujo turbulento. Figura obtenida de [?].

La Fig. (6) presenta la cascada de energía turbulenta de Richardson, dicha curva presenta la distribución de energía de los remolinos con sus respectivos tamaños. Como es de esperar, remolinos con grandes tamaños, dispondrán de elevada energía. Una de las razones por la cual se plotea la densidad de energía en función de los tamaños de los remolinos, es para que al **calcular la integral** de dicha curva se obtenga la **energía cinética turbulenta, TKE** que es la cantidad que se calcula cuando se usan modelos RANS.

$$\kappa = \int E_{(\kappa)} d\kappa \quad (1)$$

Dicha densidad de energía se grafica en función del "wave number" que es la frecuencia espacial del remolino, Ec.(2). Esta es inversamente proporcional al diámetro, por lo que menores remolinos tienen mayores valores de "wave number". Cabe destacar que la notación " κ " se designa también a la energía cinética turbulenta, no se debe confundir entre ambas.

$$\kappa = \frac{2\pi}{d} \quad (2)$$

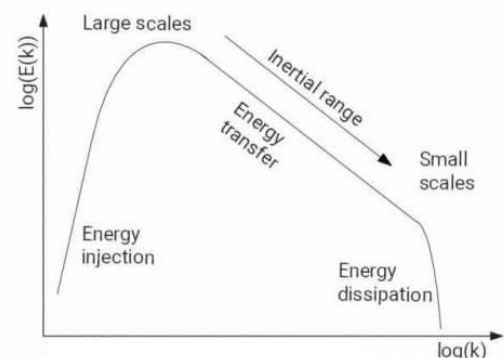


Figura 4: Modelo de espectro de energía, Figura obtenida de [Pope and Pope, 2000].

Una de las cuestiones importantes del análisis de Richardson es que plantea que la disipación se presenta en las pequeñas escalas, con lo cual a través de toda la curva no existe disipación, sino solo al final de esta; debido a esto se concluye que la cascada de energía es conservativa. Del análisis de Richardson se identifican tres zonas características sobre la Fig. (6).

1. **Producción:** Los vórtices se producen por la rotación de fluido debido al gradiente de velocidades, y su tamaño está influenciado por la longitud característica del flujo. Esto es la altura del lecho para un canal abierto o el diámetro del tubo para un flujo interno.
2. **Transferencia:** Los remolinos de mayor tamaño le transfieren su energía a los de menor tamaño. Esto se lleva a cabo mediante el procedimiento de deformación de los remolinos (estiramiento) debido a los esfuerzos de corte del flujo.

3. **Disipación:** En esta región los remolinos son absorbidos en forma de calor por la disipación molecular. Este mecanismo ocurre en las menores escalas y fue la motivación por la que Kolmogorov realizó su estudio, ya que deseaba establecer un parámetro cuantitativo de esta situación.

3. Mencione las hipótesis de Kolmogorov. Realice un esquema de donde las incluya a todas

Mencione las hipótesis de Kolmogorov y realice un esquema donde las incluya a todas.

3.1. Definición

Escalas a partir de las cuales los vórtices/remolinos más pequeños no pueden continuar deformándose en remolinos más pequeños, sino que son absorbidos por la disipación viscosa del fluido.

3.2. Desarrollo

Kolmogorov realizó trabajos de investigación sobre los cuales estableció distintas escalas para identificar a la turbulencia. La motivación de su investigación era conocer hasta qué tamaño los remolinos iban a deformarse en remolinos más pequeños, en otras palabras deseaba conocer el tamaño a partir del cual el sistema comenzaba a disipar energía. Su aporte permitió, definir las “*Escalas de Kolmogorov*” tanto para la longitud, velocidad y tiempo.

A grandes rasgos, Kolmogorov caracterizó dos grupos de flujo, las grandes y pequeñas escalas, generadas por el flujo medio y por las fluctuaciones respectivamente.

1. MKE: “*Mean Kinetic Energy*”, Energía relacionada con el flujo medio
2. TKE: “*Turbulent Kinetic Energy*”, Energía relacionada con las fluctuaciones

Las grandes escalas (MKE) son aquellas donde la energía del flujo medio cede/transfiere energía a las escalas menores. Esta transferencia de energía es a una razón constante dentro de la región denominada “inertial range” o rango inercial. Luego esta energía que pierde el flujo medio se transpasa al flujo de menor escala, la cual en otras palabras es la energía que ganan las escalas menores en forma de TKE. Al final de este período, la TKE se disipa en forma de calor, es decir es absorbida por la viscosidad molecular del fluido.

■ Grandes escalas:

- Son contenedores de energía, es decir, extraen la energía del flujo medio y la almacenan.
- Su velocidad está en el orden del flujo medio

- El tamaño de los remolinos es en función de la longitud característica del flujo.
- Son anisótropos e inestables
- La frecuencia es mucho menor comparada con los pequeños remolinos

■ Pequeñas escalas:

- Convierten TKE en calor a través de la disipación viscosa
- El comportamiento es universal
- Elevada frecuencia

Sin embargo, si bien el mecanismo anterior está extensamente validado, se han observado algunas situaciones donde las cuales existe una transferencia de energía desde las escalas menores hacia las mayores. A este fenómeno se lo conoce como “*back-scatter*” que en inglés significa dispersión/salpicado.

Luego de realizar un análisis dimensional, y trabajando con dichos resultados, Kolmogorov llegó a definir las micro-escalas de la turbulencia para la longitud, η , la velocidad, u_η y el tiempo, τ_η .

Las “*Escalas de Kolmogorov*” son las escalas a partir de las cuales los vórtices/remolinos más pequeños no pueden continuar deformándose en remolinos más pequeños, sino que son absorbidos por la disipación viscosa del fluido.

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad u_\eta = (\nu \epsilon)^{1/4} \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Una de las virtudes que tienen el concepto de la escala de Kolmogorov, es que **establece un límite** sobre el cual se puede cuantificar las variables. Es decir, para valores menores a la escala de Kolmogorov no se puede “medir” ningún parámetro. Esto se debe a que las “*Escalas de Kolmogorov*” son las escalas a partir de las cuales los vórtices/remolinos más pequeños no pueden continuar deformándose en remolinos más pequeños, sino que son absorbidos por la disipación viscosa del fluido. Y desde el “wavenumber” referido a dicha escala, hasta la escala molecular existe una gran amplitud, sobre la cual no se puede medir los tamaños del vórtice.

Así mismo otra de las ventajas de esta teoría es que para un fenómeno tan complejo como la turbulencia, estableció el límite de la región donde se pierde todo tipo de anisotropía y comienza la isotropía local. A dicha zona de equilibrio la denominó zona de equilibrio universal, su análisis concluyó que en dicha zona es posible establecer relaciones solamente mediante dos parámetros: la tasa de disipación ϵ y la viscosidad, ν .

Una de las ideas que Kolmogorov esbozó es que tanto la escala de velocidad u_η como tiempo τ_η disminuyen a medida que la longitud característica L disminuye. Kolmogorov desarrolló una teoría basada en las siguientes hipótesis:

1. Isotropía local. *Concepto: Rango de equilibrio universal, zona isotrópica*
2. Primer hipótesis de similaridad. *Concepto: Rango universal en función de “ ν ” y “ ϵ ”*
3. Segunda hipótesis de similaridad. *Concepto: Rango inercial solamente en función de “ ϵ ”*

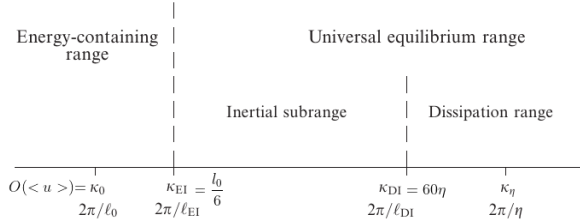


Figura 5: Presentación de los distintos escalas/rangos de Kolmogorov según diferentes *wavenumbers* en escala logarítmica [Pope and Pope, 2000].

Por último, se evidencia que el número de Reynolds correspondiente a la escala de Kolmogorov es 1, lo cual indica que a dichas escalas los efectos viscosos son importantes.

$$R_k = \frac{u_\eta \eta}{\nu} = \frac{\nu^{1/4} \epsilon^{1/4} \nu^{3/4}}{\nu} = \frac{\nu^{4/4}}{\nu} = 1 \quad (4)$$

Es importante mencionar que, a pesar de su pequeña magnitud, la escala de longitud de Kolmogorov es, en general, mucho mayor que la escala de longitud molecular, lo cual demuestra que los flujos turbulentos pueden ser considerados como continuos.

3.3. Isotropía local

Para un dado número de Reynolds, el movimiento de las pequeñas escalas ($l \ll l_0$) son estadísticamente isotrópicas

La primer hipótesis de Kolmogorov consiste en considerar la isotropía de las pequeñas escalas, esto es que a un determinado tamaño, los remolinos presentan propiedades iguales en todas las direcciones, es decir la turbulencia pierde su característica caótica. En general, los grandes remolinos son anisotrópicos y se encuentran influenciados por las condiciones de borde del flujo. Kolmogorov estableció que las direcciones de anisotropía que presentan las grandes escalas se pierden debido al proceso caótico de la reducción del tamaño de los remolinos, donde la energía se transfiere desde los grandes remolinos hacia los más pequeños. A la región donde ocurre esto, es decir, a partir de la cual se tiene la isotropía local, la designó con el nombre de *Rango de Equilibrio universal*.

Esta hipótesis introduce la longitud de escala l_{EI} , la cual es la escala a partir de la que se genera isotropía local, donde $l_{EI} \approx \frac{1}{6} l_0$. Para esos valores, existen dos procesos

dominantes: la *transferencia de energía* a las escalas subsiguientes, τ_{EI} , y la *disipación viscosa*, ν . La tasa de disipación, ϵ , se encuentra influenciada por la transferencia de energía de las escalas mayores a las menores, τ_{EI} , y estas tasa de transferencias son similares, $\epsilon \approx \tau_{EI}$.

3.4. Primer hipótesis de similaridad

En todo flujo turbulento, a un dado número de Reynolds, los movimientos de las pequeñas escalas ($l \ll l_{EI}$) presentan una fórmula universal que se determina únicamente por ν y ϵ .

El tamaño de escala ($l \ll l_{EI}$) se denomina *rango de equilibrio universal* y establece la zona con los tamaños de remolinos a partir de los cuales existe isotropía local. Esta hipótesis establece que en dicha región la turbulencia es sólo función de ϵ y ν y, por lo tanto, estas escalas son independientes de la geometría del dominio de flujo.

Haciendo uso de ϵ y ν para adimensionalizar, y aplicando el análisis dimensional a “ k ” y “ $E(k)$ ” se tiene que la energía en función del *wave-number* es:

$$E(k) = (\epsilon \nu^5)^{1/4} \varphi(\kappa \eta) \quad (5)$$

$$E(k) = u_\eta^2 \eta \varphi(\kappa \eta)$$

donde $\varphi(\kappa \eta)$ es la función adimensional conocida como función del espectro de Kolmogorov.

Alternativamente si se usa “ ϵ ” para adimensionalizar se tiene la Ec.(5) expresada según:

$$E(k) = \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \psi(\kappa \eta) \quad (6)$$

donde $\psi(\kappa \eta)$ es la función compensada del espectro de Kolmogorov. Estas funciones, Ec.(5) y Ec.(6) se encuentran relacionadas según:

$$\psi(\kappa \eta) = (\kappa \eta)^{5/3} \varphi(\kappa \eta) \quad (7)$$

ambas Ec.(5) y Ec.(6) son válidas para κ, κ_{EI} :

$$\begin{aligned} \kappa &< \kappa_{EI} \\ \kappa &< \frac{2\pi}{L_{EI}} \\ \kappa \eta &< \frac{2\pi}{L_{EI}} \eta \end{aligned} \quad (8)$$

3.5. Segunda hipótesis de similaridad

La segunda hipótesis de similaridad se establece sobre la región del rango universal, donde divide a esta en una región que puede definirse mediante ϵ y ν , e identifica una nueva región dentro de esta, que solamente puede definirse mediante “ ϵ ”, es decir es independiente de la viscosidad, “ ν ”. A esta nueva región la designó con el nombre de rango inercial, Fig.(5); y se define como:

$$\begin{aligned}
 l_{DI} &< l < l_{EI} \\
 \text{siendo } l_{EI} &= \frac{2\pi}{\kappa_{EI}} \\
 \frac{2\pi}{\kappa_{DI}} &< \frac{2\pi}{\kappa} < \frac{2\pi}{\kappa_{EI}} \\
 \frac{1}{\kappa_{DI}} &< \frac{1}{\kappa} < \frac{1}{\kappa_{EI}} \\
 \kappa_{DI} &> \kappa > \kappa_{EI} \\
 \text{reagrupando} \\
 \kappa_{EI} &< \kappa < \kappa_{DI} \\
 \kappa_{EI}\eta &< \kappa\eta < \kappa_{DI}\eta
 \end{aligned}$$

Así mismo en la Ec.(6) ν ingresa a la ecuación por medio del argumento η . Debido a esto, como se tiene la hipótesis de $\kappa\eta$ tiende a cero ($\kappa\eta \ll 1$), entonces ahora la función $\psi_{(\kappa\eta)}$ se vuelve independiente de las variables y termina transformándose en un valor constante, C . Es por ello que la segunda hipótesis de similaridad enuncia que el espectro de energía en el rango inercial será:

$$\begin{aligned}
 E_{(\kappa)} &= \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/4C} \\
 E_{(\kappa)} &= C \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/4}
 \end{aligned} \quad (10)$$

La Ec.(10) es el famoso espectro de Kolmogorov $^{-5/3}$ y C es la constante universal de Kolmogorov.

Luego de varios estudios, se obtuvo la ecuación que modeliza el espectro de energía:

$$E_{(\kappa)} = C \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} f_L(\kappa L) f_\eta(\kappa\eta) \quad (11)$$

donde f_L y f_η son funciones adimensionales específicas. La función f_L determina la forma del rango de almacenamiento de energía y tiende a la unidad a medida que aumenta κL . Mientras que la función f_η determina el rango de disipación de energía y tiende a la unidad para valores pequeños de $\kappa\eta$. En el rango inercial, ambas funciones son esencialmente unitarias, de modo que no influyen en dicha región y se recupera el espectro de Kolmogorov $-5/3$ afectado por la constante C .

$$E_{(\kappa)} = C \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \underbrace{f_L(\kappa L)}_{\approx 1} \underbrace{f_\eta(\kappa\eta)}_{\approx 1} \quad \text{rango inercial} \quad (12)$$

Así misma, la función del rango de almacenamiento de energía se define según:

$$\begin{aligned}
 f_L(\kappa L) &= \left(\frac{\kappa L}{[(\kappa L)^2 + c_L]^{1/2}} \right)^{5/3 + p_0} \\
 f_L &\approx 1 \quad \kappa L \rightarrow \infty
 \end{aligned} \quad (13)$$

donde p_0 adopta el valor 2 y c_L es una constante positiva. Evidentemente la función f_L tiende a la unidad cuando aumenta el producto κL , mientras que el exponente $\frac{5}{3} + p_0$

presenta $E_{(\kappa)}$ de la forma $\kappa^{p_0} = \kappa^2$ para pequeños valores de κL .

$$E_{(\kappa)} = O(\kappa^2) \quad \text{rango de almacenamiento} \quad (14)$$

Por otro lado, la función f_η que define el rango de disipación de la energía se presenta según la forma:

$$f_\eta(\kappa\eta) = \exp\{-\beta\{(\kappa\eta)^{1/4} + c_\eta^{1/4}\} - c_\eta\} \quad (15)$$

donde β y c_η son constantes positivas. Notar que cuando $c_\eta = 0$, la Ec.(35) se reduce a

$$f_\eta(\kappa\eta) = \exp(-\beta\kappa\eta) \quad \text{rango de disipación} \quad (16)$$

La Fig.(6) manifiesta que se tiene una pendiente de orden 2 para pequeños valores de "wavenumbers", luego en el rango inercial se tiene una pendiente de $-5/3$ y por último en la región de disipación un descenso exponencial.

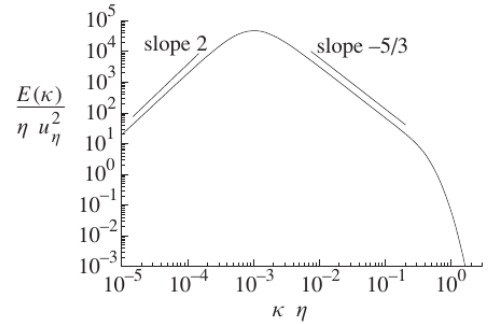


Figura 6: Modelo de espectro de energía, Ec.(31) [Pope and Pope, 2000].

A modo de resumen, la T.(1) presenta las tres zonas características con su correspondiente pendientes, Fig.(6).

Rango de Almacenamiento	Rango de transferencia	Rango de disipación
$E_{(\kappa)} = O(\kappa^2)$	$E_{(\kappa)} = C \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$	$E_{(\kappa)} = \exp(-\beta\kappa\eta)$

Cuadro 1: Cascada de energía, descripción pendientes según sus rangos.

3.5.1. Relación entre la pequeña y gran escala

Ahora se procede a comparar la escala de Kolmogorov (pequeñas escalas) con la gran escala., es decir con las magnitudes del flujo medio y la longitud característica del flujo. Para ello, se analizan las tres escalas de Kolmogorov, comenzando por la de longitud. A la misma η se la divide por la escala macro de longitud, donde además se usa la relación descripta con anterioridad, $P = \epsilon$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{L} &= \frac{1}{L} \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} = \frac{1}{L} \left(\frac{\nu^3 L}{u'^3} \right)^{1/4} = \frac{L^{1/4}}{L} \left(\frac{\nu^3}{u'^3} \right)^{1/4} = \frac{L^{1/4}}{L} \left(\frac{\nu}{u'} \right)^{3/4} \\ \frac{\eta}{L} &= L^{1/4-1} \left(\frac{\nu}{u'} \right)^{3/4} = L^{-3/4} \left(\frac{\nu}{u'} \right)^{3/4} = \frac{1}{L^{3/4}} \left(\frac{\nu}{u'} \right)^{3/4} = \left(\frac{\nu}{u' L} \right)^{3/4} \\ \frac{\eta}{L} &= \left(\frac{1}{Re} \right)^{3/4} \\ \frac{\eta}{L} &= Re^{-3/4}\end{aligned}\quad (17)$$

Haciendo el mismo procedimiento se alcanza la relación entre ambas escalas para la velocidad y el tiempo.

$$\frac{u_\eta}{u_0} = Re^{-1/4} \quad (18)$$

Por último se tiene la escala de tiempo de Kolmogorov que indica el período de rotación de los vórtices más pequeños presentes en el flujo.

$$\frac{T_\eta}{T_0} = Re^{-1/2} \quad (19)$$

lo que permite compara la escala de velocidad de Kolmogorov y aquella asociada a la producción de TKE. Es evidente que las escalas de Kolmogorov se hacen más pequeñas a medida que el #Re aumenta.

Como se dijo con anterioridad, es interesante remarcar que el número de Reynolds asociado a las escalas de Kolmogorov, R_K , es efectivamente pequeño, lo cual indica que a dichas escalas los efectos viscosos son importantes.

$$R_K = \frac{u_\eta \eta}{\nu} = 1 \quad (20)$$

4. Rango de equilibrio universal

Defina el Rango de Equilibrio Universal. ¿Porque es importante?

Si bien esta respuesta se desarrolló en la Sec.(3) se procede a desarrollar nuevamente a modo de resumen.

El rango de equilibrio universal es la región isotrópica de la turbulencia, es decir, donde el fenómeno pierde la condición estocástica. Se denomina *rango de equilibrio universal* ya que ya que en dicha región la turbulencia presenta una fórmula universal que puede determinarse únicamente por los parámetros ϵ y ν . Su frontera se designa con las siglas l_{EI} ya que divide la región inercial de la región de almacenamiento de energía; y tiene un tamaño del orden de $l_{EI} \approx \frac{l_0}{6}$. Para esos valores, existen dos procesos dominantes: la *transferencia de energía* a las escalas subsiguientes, τ_{EI} , y la *disipación viscosa*, ν . La tasa de disipación, ϵ , se encuentra influenciada por la transferencia de energía de las escalas mayores a las menores, τ_{EI} , y estas tasa de transferencias son similares, $\epsilon \approx \tau_{EI}$.

Una de las virtudes que tienen el concepto de la escala de Kolmogorov, es que **establece un límite** sobre el cual se

puede cuantificar las variables. Es decir, para valores menores a la escala de Kolmogorov no se puede “medir” ningún parámetro. Esto se debe a que las “*Escalas de Kolmogorov*” **son las escalas a partir de las cuales los vórtices/remolinos más pequeños no pueden continuar deformándose en remolinos más pequeños, sino que son absorbidos por la disipación viscosa del fluido.** Y desde el “wavenumber” referido a dicha escala, hasta la escala molecular existe una gran amplitud, sobre la cual no se puede medir los tamaños del vórtice.

Así mismo otra de las ventajas de esta teoría es que para un fenómeno tan complejo como la turbulencia, estableció el límite de la región donde se pierde todo tipo de anisotropía y comienza la isotropía local. A dicha zona de equilibrio la denominó zona de equilibrio universal, su análisis concluyó que en dicha zona es posible establecer relaciones solamente mediante dos parámetros: la tasa de disipación ϵ y la viscosidad, ν .

Una de las ideas que Kolmogorov esbozó es que tanto la escala de velocidad u_η como tiempo τ_η disminuyen a medida que la longitud característica L disminuye. Kolmogorov desarrolló una teoría basada en las siguientes hipótesis:

5. Micro-escala de Taylor

Defina la Microescala de Taylor. ¿Qué relación tiene con las escalas de kolmogorov? ¿Cómo se calcula?

Como puede observarse las escalas de Kolmogorov no están relacionadas con la ecuación de Navier-Stokes. Con el fin de extraer información útil de la ecuación de Navier-Stokes acerca de la cascada de energía, [?] propuso unas escalas basadas en las funciones de autocorrelación. Según estos trabajos puede encontrarse una escala espacial la cual puede calcularse por medio de las derivadas de la velocidad y que nos dan una medida del diámetro del torbellino más pequeño responsable de la disipación de energía. Dicha escala es llamada la micro escala longitudinal de Taylor λ_f y está dada por:

$$\lambda_f = \sqrt{\frac{2u'^2}{\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \rangle}} \quad (21)$$

donde $u' = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, u_1 es la velocidad en la dirección x , $\langle \dots \rangle$ denotan promedio. Aunque esta escala no tiene una interpretación física clara, ya que a altos números de Reynolds tiene un valor intermedio entre η y L , es una cantidad bien definida que se usa usualmente para caracterizar la turbulencia. Particularmente se usa en el cálculo del número de Reynolds de la escala de Taylor, que se usa tradicionalmente para caracterizar la turbulencia de malla. Su definición es la siguiente:

$$Re_\lambda = \frac{u' \lambda_f}{\nu} \quad (22)$$

Hasta el momento hemos visto como la turbulencia es un fenómeno de múltiples escalas que se transfieren la energía entre estas, para el caso tridimensional este flujo de energía va de escalas mayores a menores, es decir, los torbellinos más grandes ceden su energía a torbellinos más pequeños y estos a su vez pasan la energía a torbellinos cada vez más pequeños y así hasta que el número de Reynolds característico $Re = \eta u_\eta / \nu$, sea tan pequeño que los efectos viscosos comiencen a ser significantes y se disipe la energía en forma de calor u otras formas de energía.

Además la escala de Taylor puede determinarse a partir de la siguiente relación válida para la turbulencia isotrópica:

$$\frac{u'^2}{\lambda^2} = \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} \quad (23)$$

de donde se puede deducir la siguiente relación, válida también para turbulencias isotrópicas:

$$\epsilon = 15\nu \frac{u'^2}{\lambda^2} \quad (24)$$

De acuerdo a estas relaciones, la microescala de Taylor, λ , con la escala de Kolmogorov, η y la macro escala L , se tiene:

$$\epsilon \approx \frac{u'^3}{L} \approx \nu \frac{u'^2}{\lambda^2} \quad (25)$$

por lo tanto:

$$\frac{\lambda}{L} = Re^{-1/2} \quad (26)$$

por otro lado, como ya se demostró que:

$$\frac{\eta}{L} = Re^{-3/4} \quad (27)$$

entonces se tiene que

$$\frac{\lambda}{L} = Re^{-1/2} \quad (28)$$

$$\frac{\lambda}{L} = Re^{-1/2} Re^{3/4}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{\eta} = Re^{1/4}} \quad (29)$$

Se concluye, de este modo, que para elevados números de Reynolds, la macroescala de la turbulencia es mucho mayor que la microescala de Taylor, esta a su vez es mucho mayor que la escala de Kolmogorov.

$$L \gg \lambda \gg \eta \quad (30)$$

6. Definiciones conceptuales

Defina y formalice matemáticamente los siguientes términos:

- Disipación de energía
- Producción de energía
- Energía cinética turbulenta

6.1. Disipación de energía

La disipación de la energía en la turbulencia se produce por la difusión viscosa en el orden de la escala molecular. En este procedimiento los remolinos adquieren un tamaño muy pequeño y son absorbidos por el fluido y disipados en forma de calor.

En el análisis dimensional de Kolmogorov, luego de varios estudios, se obtuvo la ecuación que modeliza el espectro de energía:

$$E_{(\kappa)} = C \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} f_L(\kappa L) f_\eta(\kappa \eta) \quad (31)$$

donde f_L y f_η son funciones adimensionales específicas. La función f_L determina la forma del rango de almacenamiento de energía y tiende a la unidad a medida que aumenta κL . Mientras que la función f_η determina el rango de disipación de energía y tiende a la unidad para valores pequeños de $\kappa \eta$. En el rango inercial, ambas funciones son esencialmente unitarias, de modo que no influyen en dicha región y se recupera el espectro de Kolmogorov $-5/3$ afectado por la constante C .

$$E_{(\kappa)} = C \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \underbrace{f_L(\kappa L)}_{\approx 1} \underbrace{f_\eta(\kappa \eta)}_{\approx 1} \quad \text{rango inercial} \quad (32)$$

Así misma, la función del rango de almacenamiento de energía se define según:

$$f_L(\kappa L) = \left(\frac{\kappa L}{[(\kappa L)^2 + c_L]^{1/2}} \right)^{5/3 + p_0} \quad (33)$$

$$f_L \approx 1 \quad \kappa L \rightarrow \infty$$

donde p_0 adopta el valor 2 y c_L es una constante positiva. Evidentemente la función f_L tiende a la unidad cuando aumenta el producto κL , mientras que el exponente $\frac{5}{3} + p_0$ presenta $E_{(\kappa)}$ de la forma $\kappa^{p_0} = \kappa^2$ para pequeños valores de κL .

$$E_{(\kappa)} = O(\kappa^2) \quad \text{rango de almacenamiento} \quad (34)$$

Por otro lado, la función f_η que define el rango de disipación de la energía se presenta según la forma:

$$f_\eta(\kappa \eta) = \exp\{-\beta\{[(\kappa \eta)^{1/4} + c_\eta^{1/4}] - c_\eta\}\} \quad (35)$$

donde β y c_η son constantes positivas. Notar que cuando $c_\eta = 0$, la Ec.(35) se reduce a

$$f_\eta(\kappa\eta) = \exp(-\beta\kappa\eta) \quad \text{rango de disipación} \quad (36)$$

De esta forma se demuestra que la región de disipación tiene un comportamiento de una exponencial con potencia negativa. De aquí se afirma el decaimiento abrupto de la energía dentro de la curva *cascada de energía*.

6.2. Producción de energía

La teoría de turbulencia **homogénea e isotrópica** indica que los vórtices de pequeñas escalas se encuentran **localmente en equilibrio**. En dichos flujos, en la zona cercana a la pared denominada “capa de pared”; es donde ocurre la mayor parte de la producción de energía turbulenta, y como ya se indicó también es la zona de disipación; equilibrando dicha producción. El rol de la zona externa de la capa de la pared (*núcleo del flujo*) caracterizada por la presencia de vórtices de mayor tamaño, *no es el de producir turbulencia sino de transportar la energía del flujo medio hacia la capa de la pared, donde dicha energía es transformada en energía turbulenta a través del trabajo de deformación de los vórtices producto del esfuerzos de corte*. Mediante el procedimiento de cascada, la producción de energía es transferida hacia los vórtices de pequeñas escalas donde es disipada por los efectos viscosos.

La producción de energía cinética turbulenta se estima como:

$$P = \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (37)$$

anteriormente se expresó que los esfuerzos del tensor de Reynolds pueden estimarse como

$$-\overline{u'v'} = u'^2 \quad (38)$$

donde u' representa la desviación estándar de la velocidad, en otras palabras; son las fluctuaciones de la velocidad respecto al flujo medio.

Por otro lado, en flujos cercanos a la pared, donde es válida la ley logarítmica de la velocidad, se tiene:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx \frac{u^*}{y} \quad (39)$$

con lo cual se puede estimar que una medida de la producción de energía cinética esté dada por:

$$P \approx \frac{u'^2 u^*}{y} \approx \frac{u'^3}{y} \quad (40)$$

Por último asumiendo que las distancias “ y ” corresponden a una dimensión característica del flujo, L , asociada al tamaño de los mayores vórtices, entonces la Ec.(40) puede definirse como:

$$P \approx \frac{u'^2 u^*}{y} \approx \frac{u'^3}{l_0} \quad (41)$$

6.3. Energía Cinética Turbulenta, TKE

Los flujos turbulentos se caracterizan por fluctuaciones instantáneas de la velocidad, que le confieren a la turbulencia su característica aleatoria e impredecible. Un parámetro para cuantificar este fenómeno es la TKE (Turbulent Kinetic Energy, “Energía Cinética Turbulenta”) que es la energía asociada al flujo producto de las fluctuaciones de la velocidad, en otras palabras es la **energía cinética media asociada con los vórtices de los flujos turbulentos**.

Este término correspondiente al promedio de las fluctuaciones cuyas unidades responden a $[L^2 T^{-2}]$; se materializa a través del llamado tensor de esfuerzos de Reynolds. Como se vió en otras oportunidades, el tensor de Reynolds es la entidad matemática que reúne el promedio de las fluctuaciones de todas las direcciones. Si bien se denomina tensor es una aceleración convectiva.

Si se calcula la traza del tensor, es decir su contribución normal a la cantidad de movimiento y se lo divide a la mitad, se obtiene lo que se denomina energía cinética turbulenta, κ . En rigor de verdad es el tensor de Reynolds específico, ya que se divide al tensor de Reynolds por la densidad del fluido.

$$R_{ij} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{res} &= \frac{1}{2} (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) \\ \kappa_{res} &= \left[\frac{m^2}{s^2} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

Referencias

- [Hirsh, 1990] Hirsh, C. (1990). *Numerical Computation of internal and external Flows*, volume 2 of *Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*. John Wiley and Sons, Chichester.
- [Laney, 1998] Laney, C. (1998). *Computational Gasdynamics*. Cambridge University Press.
- [Olejnik et al., 2020] Olejnik, A., Dziubiński, A., and Kiszko-wiak, Ł. (2020). Separation safety analysis using cfd simulation and remeshing. *Aerospace Science and Technology*, 106:106190.
- [Pope and Pope, 2000] Pope, S. B. and Pope, S. B. (2000). *Turbulent flows*. Cambridge university press.