Espectro de frecuencia.

Se usa para identificar que frecuencias están presentes en una señal.

Por ejemplo: tenemos sospechas de que hay una señal dominante en la señal registrada que ha sido enmascarada por la turbulencia estocástica y aleatoria.

Comúnmente no es tan obvio diferenciar que hay una frecuencia dominante ya que por lo general la señal muestra todo mezclado.

Usamos el espectro de frecuencia para dividir la señal en las frecuencias que la componen. Esto lo vamos a hacer convirtiendo la señal original en un espectro de energía en el dominio espectral.

Para ello necesitamos la representación espectral de la señal.

Si consideramos una señal periódica, o sea que cada cierto tiempo la señal se repite a sí misma.

$u(t + NT) = u(t)$ (1)

Donde N: son todos los posibles enteros y T el período de la señal

Recordemos que la promediación en el tiempo es $\langle u(t) \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt$ (2)

Las fluctuaciones $u^{'}(t) = u(t) - \langle u \rangle_T$ (3)

La frecuencia: $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, donde n son los enteros

Los n-esimos modos complejos de Fourier se pueden escribir como

$$e^{-i\omega_n t} = cos(\omega_n t) - isen(\omega_n t) \quad (4)$$

$$= cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) - isen\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \qquad (5)$$

Se define esto para cada una de las frecuencias.

Entonces $u(t)$, puede ser expresada como una serie de Fourier de la forma

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(a_n + ib_n)e^{-i\omega_n t} \qquad (6)$$

Donde $a_n = cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$ y $b_n = -sen\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$

O sea, a la señal la estamos expresando como una superposición de frecuencias.

Además, a_n y b_n son factores que nos dicen cuanto de la frecuencia está presente en la señal. Si a_n es muy grande implica que la frecuencia es muy grande dentro de la señal y que esta es dominante.

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(a_n + ib_n)e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{-i\omega_n t}$$

a_n y b_n son reales, pero c_n es complejo

Para continuar trabajando es conveniente expresar $e^{-i\omega_n t}$ como senos y cosenos según (4)

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (a_n + ib_n)\big(cos(\omega_n t) - isen(\omega_n t)\big) \qquad (7)$$

Realizamos la multiplicación de los binomios y reescribimos, pero esta vez tomamos solo los reales positivos desde 1.

$$u(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \big((a_n + a_{-n}) + i(b_n + b_{-n})\big)cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \big((a_n + a_{-n}) + i(b_n + b_{-n})\big)sen(\omega_n t) \qquad (8)$$

Donde $cos(t) = cos(-t)$ y $sen(t) = -sen(-t)$

Usamos ahora el conjugado de la simetría $a_n{=}{-}a_{-n}$; $b_n = -b_{-n}$

De esta forma todas las partes conjugadas se anulan y nos queda

$$u(t) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n cos(\omega_n t) - b_n sen(\omega_n t) \qquad (9)$$

De esta forma queda nuestra señal original expresada en términos del seno y el coseno.

a_n; b_n y c_n retienen información de cuanto una particular frecuencia está presente en la señal $u(t)$.

Escribamos ahora (9) en una forma diferente

$$u(t) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} |c_n| cos(\omega_n t + \theta_n) \qquad (9)$$

llamado $|c_n|$ a Amplitud y se define como $|c_n| = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ $\quad (10)$

y a θ_n desplazamiento de fase $\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ $\quad (11)$

La pregunta ahora es: ¿COMO CALCULAMOS LOS COEFICIENTES DE FOURIER?

Comenzamos con la señal original

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{i\omega_n t} \qquad (12)$$

Multiplicamos por $e^{-i\omega_n t}$a los mth modos o frecuencias y promediamos

$$\langle e^{-i\omega_n t}\, u(t)\rangle = \langle \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{i\omega_n t} \cdot e^{-i\omega_n t} \rangle \qquad (13)$$

Se puede demostrar que $\langle e^{i\omega_n t} \cdot e^{-i\omega_n t} \rangle = \delta_{nm}$ (14) , o sea aparece el delta de kroneker, y esto se cumple porque ambos vectores son ortogonales. $\delta_{nm} = 1$ cuando *n=m* y $\delta_{nm} = 0$ cuando *n≠m*.

Reemplazamos (14) en (13)

$$\langle e^{-i\omega_n t}\, u(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta_{nm} = c_m \qquad (15)$$

Por lo que según la definición del delta de kroneker en nuestro caso n será igual a m

Pasemos en limpio

$$\langle e^{-i\omega_n t}\, u(t)\rangle = c_n \qquad (16)$$

Es esencialmente una autocorrelación, se está correlacionando la frecuencia que se quiere analizar con la señal original a través de la premediación.

La energía asociada a una frecuencia será

$$E(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R(s)cos(\omega s)ds \qquad (17)$$

Con autocovarianza $R(s) = \langle u(t)u(t+s)\rangle$ (18)

Entonces cuando construimos el espectro de energía vamos a tener el *valor medio* de la señal y la energía asociada al valor medio, o sea $E(0) = \langle u(t)\rangle$ (19).

El espectro de energía provee la interpretación física de la energía en el sistema. O sea, cuanta energía se puede encontrar en el sistema, pero descompuesta en bandas frecuenciales.

Y así mismo nos sirve para recrear toda la señal

$$R(s) = \int_0^{\infty} E(\omega)cos(\omega s)d\omega \qquad (20)$$

En conclusiones espectro de energía y autocorrelación están uno en función del otro, se pueden utilizar en ambos sentidos y NO HAY PÉRDIDA E INFORMACIÓN EN EL PROCESO.