Actividad N02

En el siguiente informe se presenta la resolución del ejercicio entregable para el curso de "Turbulencia en Flujos" dentro del Doctorado de Ingeniería.

1. Análisis estadístico de la turbulencia

1.1. Introducción

La turbulencia es un fenómeno **estocástico** ya que se calcula el valor medio de una función. Si bien es un proceso estocástico, tiene un cierto grado de predictibilidad. Por ejemplo, para la situación de las calles de Von-Karman, se pueden predecir los tamaños de vórtices (debido a la longitud característica de estos) pero no se puede predecir el movimiento del vórtice, ya que se desconoce si estos se desplazarán sobre la parte superior o inferior del cilindro.

Fenómeno estocástico: *Es impredesible, para las mismas condiciones iniciales se obtienen distintos resultados.*
Fenómeno determinístico:*Es predesible, para las mismas condiciones iniciales se obtienen los mismos resultados*

$$\text{fenómeno}\begin{cases}\underline{\text{estocástico}}\begin{cases}\exists\ \boldsymbol{AZAR}\\ \exists\ \boldsymbol{PROBABILIDAD}\end{cases}\\[2ex] \underline{\text{determinístico}}\begin{cases}\nexists\ \boldsymbol{AZAR}\\ \nexists\ \boldsymbol{PROBABILIDAD}\end{cases}\end{cases}$$

Si bien cuando se resuelve las ecuaciones de movimiento de un fluido, se dispone de una ecuación que modeliza dicho fenómeno (ecuaciones de Navier-Stokes, NS). Este sistema es determinísitco siempre y cuando se resuelva la velocidad de forma completa DNS ('Direct Numerical Simulation, Simulación Numérica Directa'), es decir se calcula la velocidad en todas sus escalas. Debido a la gran complejidad dinámica, los flujos turbulentos hace que la descripción determinística sea muy dificultosa. Debido a ello, se modela la turbulencia. Cuando esto ocurre, NS se transforma en un proceso estocástico (existe azar o probabilidad); ya que ahora no se resuelve la velocidad en la totalidad de las escalas, sino que se calcula el valor medio de una función.

2. Marco teórico

El estudio de la turbulencia implica el cálculo de la velocidad media y sus distribuciones. Para realizar dicho estudio estadístico, se requiere de la utilización de la curva de densidad de probabilidad y la función acumulada de la distribución.

Previo al estudio estadístico se enuncian las siguiente definiciones:

- Velocidad media: Matemáticamente se representan como:

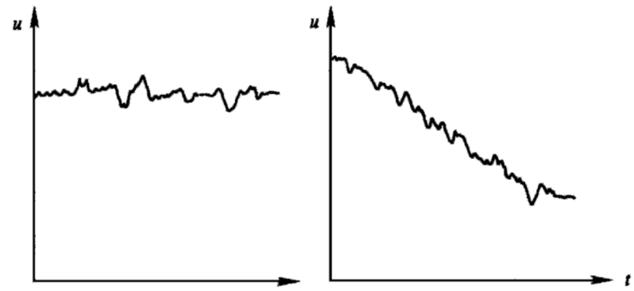
$$\begin{aligned}\overline{u} &= < u > \\ \overline{u} &= \lim_{t_0\to\infty}\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} u_{(t)}\,dt\end{aligned} \tag{1}$$

La Ec.(1) calcula la velocidad media de una medición continua; sin embargo, en la práctica las mediciones se obtienen a partir de una colección de experimentos o *set-datos* denominados *ensembles* y su valor medio se denomina *valor esperado* o *promedio ensemble*, representando el valor medio de una función discreta:

- Valor medio del *ensemble*:

$$\overline{u}_{(t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i{}_{(t)} \tag{2}$$

Si bien el valor de la velocidad varía instante a instante, es decir tenemos una velocidad transitoria, se dice que el flujo alcanza el estado estacionario cuando el valor de la velocidad media permanece constante, Fig.(1a). La Fig.(1) presenta la diferencia entre estado estacionario y transiente, donde en el primer caso la velocidad media se mantiene constante, mientras que en el segundo no.



(a) Velocidad media estacionaria, $\overline{u} \neq \overline{u}_{(t)}$ (b) Velocidad media transitoria, $\overline{u} = \overline{u}_{(t)}$

Figura 1: Velocidad media estacionaria vs transiente, [Kundu et al., 2015]

.

Así mismo, se puede demostrar que la operación del promedio del *ensemble* puede conmutar con la operación del cálculo de derivada, [Kundu et al., 2015], por lo que se tiene la regla del ensemble, tanto para función temporal, Ec.(3),como espacial,Ec.(4):

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} &= \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\\ \overline{\int_a^b u\,dt} &= \int_a^b \overline{u}\,dt\end{aligned}} \tag{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}\\ \overline{\int_a^b u\,\boldsymbol{dx}} &= \int_a^b \overline{u}\,\boldsymbol{dx}\end{aligned}} \tag{4}$$

Los diferentes valores medios de una función aleatoria se conocen como estadísticos de una variable. Dependiendo de como sean estos estadísticos, la función se puede clasificar en:

- Estacionaria: el promedio temporal (promedio sobre un solo valor, Ec.(1)) es igual al promedio del *ensemble*, Ec.(2). $u \neq u_{(t)}$
- Homogenea: El promedio del *ensemble* es igual al promedio espacial de la variable. En este caso los estadísticos son independientes del espacio. $u \neq u_{(x)}$

3. Función Distribución de Probabilidad de señales

Este análisis se hace para estados estacionarios, es decir cuando la media no es variable en el tiempo: $\overline{u} \neq \overline{u}_{(t)}$. Además se utiliza la hipótesis de **ergodicidad** donde se analiza un intervalo de tiempo de la muestra, el cual es representativo del sistema completo, permitiendo de esta forma capturar dentro de dicha muestra todas las situaciones posibles.

Básicamente el análisis radica en cuantificar la cantidad de veces que la velocidad adquiere un valor determinado.

3.1. Función Acumulación Distributiva - CDF *(Cumulative Distribution Function)*

Para analizar la probabilidad de que suceda un determinado evento, se utiliza la CDF (Función Acumulación Distributiva, "*Cumulative Distribution Function*") la cual analiza la probabilidad de que un valor sea menor o igual a un determinado parámetro. La misma tiene las siguientes características: como ser que no existe ningún valor menor al mínimo, siempre existe la posibilidad de encontar un valor menor al máximo y por último, que la función es monótona creciente. Cabe destacar además que dicha función es nula en el valor medio de la variable en cuestión.

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(\infty) = 1$
3. $F_{(V_b)} < F_{(V_a)} \qquad \text{si} \quad V_b < V_a$

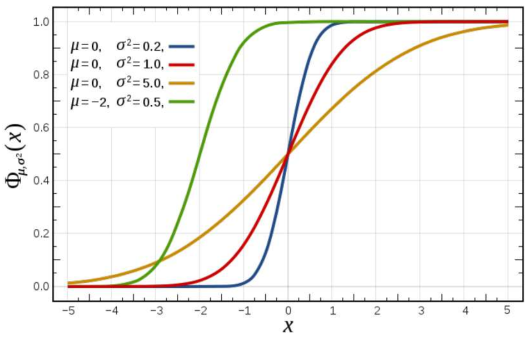


Figura 2: CDF. Notar que $F(\overline{u}) = 0$.Figura obtenida de [wikipedia].

3.2. Función Densidad de Probabilidad - PDF (*Probability Density Function*)

A partir de la función anterior, se define al función PDF (Función Densidad de Probabilidad, "*Probability Density Function*") como la derivada de la CDF, Ec.(5):

$$\begin{gathered} \underbrace{f(V)}_{\text{dens. probab}} = \underbrace{\frac{dF(V)}{dV}}_{\text{acum.}} \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{(V)}\, dV}_{\text{dens. probab}} = \underbrace{F}_{\text{acum}} \end{gathered} \tag{5}$$

La cual es una función positiva, satisface la condición de normalización y es nula en los extremos.

1. $f_{(V)} \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{(V)}\, dV = 1$
3. $f_{(-\infty)} = f_{(\infty)} = 0$

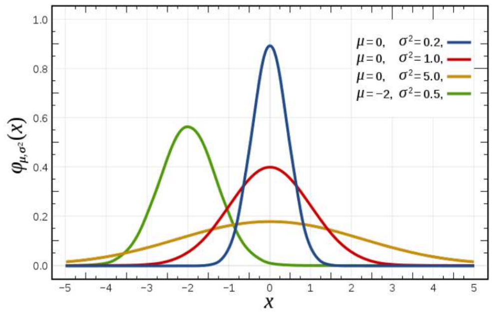


Figura 3: Distribución normal. Figura obtenida de [wikipedia].

Siempre existe un contribución estocástica lo que impide que sea 100 % determinístico. en lugar de obtener un resultado para la velocidad, se busca la probabilidad de que la velocidad adquiera un determinado valor, por eso se define a la velocidad como PDF.

La Fig.(4) presenta los parámetros característicos de la distribución normal, como ser la moda, la mediana y la media. Siendo la moda el valor que mayor frecuencia aparece en la muestra, la mediana que representa el valor de la posición central de la variable sobre de los datos ordenados y por último la media que es la medida de la tendencia central o promedio.

Las funciones PDF o su equivalente CDF pueden caracterizar perfectamente el comportamiento de una variable. Si dos variables estocásticas tienen la misma función PDF o CDF, se dice que dichos valores son *idénticamente distribuidos* o *estadísticamente iguales.*

- Mean: `Media , el valor promedio.`
- Median: `Mediana, el valor del punto medio.`
- Mode: `Moda , el valor más común.`

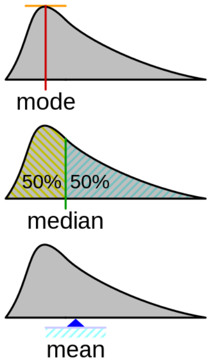


Figura 4: Visualizacípn geométrica de la moda, mediana y media de una PDF. Figura obtenida de [wikipedia].

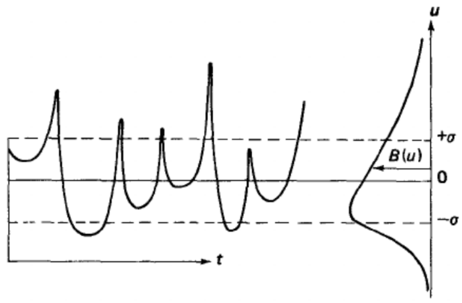


Figura 5: Kurtosis o Momento de 3^{er} orden. Figura obtenida de [Tennekes et al., 1972].

3.2.1. Parámetros estadísticos característicos

Las funciones estadísticas se definen a partir de valores característicos los cuales se denominan *estadísticos de una función*. La mayoría de los estadísticos son potencias del valor medio de la función y se los denominan *momentos*, cuyos ordenes dependerán del exponente al cual se encuentre elevada el valor medio. Los más característicos son:

- **Media:** Momento de 1^{er} orden

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} u \, B_{(u)} \, du \tag{6}$$

- **Varianza:** Momento de 2^{do} orden centrado. Se denomina centrado ya que se le resta el valor medio. Siendo σ el desvío standard, se dice que el desvío al cuadrado es la varianza. Básicamente la desviación standard es el ancho de la función de probabilidad.

$$\sigma^2 = \overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u - \overline{u}\right)^2 \, B_{(u)} \, du \tag{7}$$

- **Skewness/Asimetría:** Momento de 3^{er} orden centrado. La varianza no registra ninguna pérdida de simetría sobre la distribución de probabilidad. Para ello, se introduce el término *skewness*[1] para cuantificar la asimetría de la función de probabilidad. A dicha asimetría se la normaliza usando la función desvió, por lo que queda:

$$S = \frac{\overline{u^3}}{\sigma^3} \qquad \overline{u^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u - \overline{u}\right)^3 \, B_{(u)} \, du \tag{8}$$

La Fig.(5) manifiesta un *skewness* negativo ya que grandes valores positivos de $\overline{u^3}$ no son tan frecuentes como los valores negativos de $\overline{u^3}$.

[1]Skewness significa oblicuo y hace referencia a la asimetría de la función de probabilidad.

- **Kurtosis:** Momento de 4^{to} orden. Es un parámetro de relación de aspecto el cual se normaliza respecto el desvío.

$$K = \frac{\overline{u^4}}{\sigma^4} \qquad \overline{u^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u - \overline{u}\right)^4 \, B_{(u)} \, du \tag{9}$$

La Fig.(6) presenta dos funciones: una con pequeña y la sigueinte con elevada *Kurtosis*. El valor elevado de *Kurtosis* corresponde si la función $B_{(u)}$ tiene picos considerables.

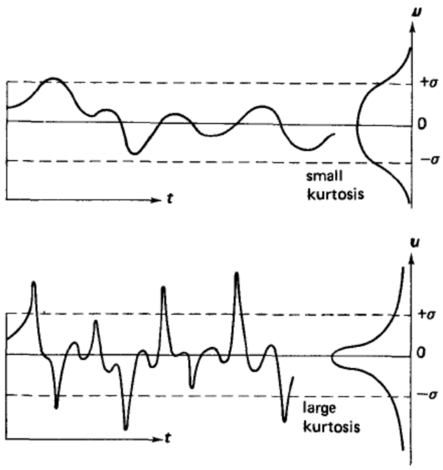


Figura 6: Kurtosis o Momento de 3^{er} orden. Figura obtenida de [Tennekes et al., 1972].

- **Momento de orden "n":** Momento de $n^{\text{ésimo}}$ orden.

$$\overline{u}^n = \int_{\infty}^{\infty} \left(u - \overline{u}\right)^n \, B_{(u)} \, du \tag{10}$$

Referencias

[Kundu et al., 2015] Kundu, P. K., Cohen, I. M., and Dowling, D. R. (2015). *Fluid mechanics*. Academic press.

[Tennekes et al., 1972] Tennekes, H., Lumley, J. L., Lumley, J. L., et al. (1972). *A first course in turbulence*. MIT press.