

# **Ecuaciones de Flujos Turbulentos**

# Introducción: regímenes de flujo

- Conocemos la Ec. de Navier Stokes y sus soluciones exactas para flujos unidireccionales
- Estas soluciones son válidas en régimen laminar, donde el flujo es ordenado, en capas que no se mezclan una con otra. Este régimen puede mantenerse cuando el flujo es “lento” y/o “viscoso” y/o con long. característica “pequeña”

# Introducción: regímenes de flujo

- Conocemos la Ec. de Navier Stokes y sus soluciones exactas para flujos unidireccionales
- Estas soluciones son válidas en **régimen laminar**, donde el flujo es ordenado, en capas que no se mezclan una con otra. Este régimen puede mantenerse cuando el flujo es “lento” y/o “viscoso” y/o con long. característica “pequeña”
- A medida que estas condiciones dejan de cumplirse, el flujo pierde estabilidad y comienzan a observarse fluctuaciones intermitentes en el mismo: **régimen de transición**

# Introducción: regímenes de flujo

- Conocemos la Ec. de Navier Stokes y sus soluciones exactas para flujos unidireccionales
- Estas soluciones son válidas en **régimen laminar**, donde el flujo es ordenado, en capas que no se mezclan una con otra. Este régimen puede mantenerse cuando el flujo es “lento” y/o “viscoso” y/o con long. característica “pequeña”
- A medida que estas condiciones dejan de cumplirse, el flujo pierde estabilidad y comienzan a observarse fluctuaciones intermitentes en el mismo: **régimen de transición**
- Alejándose aún más de estas condiciones, las fluctuaciones se vuelven permanentes y más intensas, con remolinos que se mueven de una capa a otra del flujo principal promedio, generando intercambio cantidad de movimiento entre las mismas: **régimen turbulento**

# Introducción: regímenes de flujo

- Conocemos la Ec. de Navier Stokes y sus soluciones exactas para flujos unidireccionales
- Estas soluciones son válidas en **régimen laminar**, donde el flujo es ordenado, en capas que no se mezclan una con otra. Este régimen puede mantenerse cuando el flujo es “lento” y/o “viscoso” y/o con long. característica “pequeña”
- A medida que estas condiciones dejan de cumplirse, el flujo pierde estabilidad y comienzan a observarse fluctuaciones intermitentes en el mismo: **régimen de transición**
- Alejándose aún más de estas condiciones, las fluctuaciones se vuelven permanentes y más intensas, con remolinos que se mueven de una capa a otra del flujo principal promedio, generando intercambio cantidad de movimiento entre las mismas: **régimen turbulento**
- Este intercambio produce que las distintas regiones de flujos tengan una velocidad promedio más “pareja”

# Los flujos en la naturaleza son Turbulentos



# Los flujos en la naturaleza son Turbulentos

La mayoría de los flujos en la naturaleza son turbulentos, nosotros lo que debemos es aprender a reconocer cuando un flujo es turbulento o no.

Hay tres características para flujos turbulentos en la naturaleza

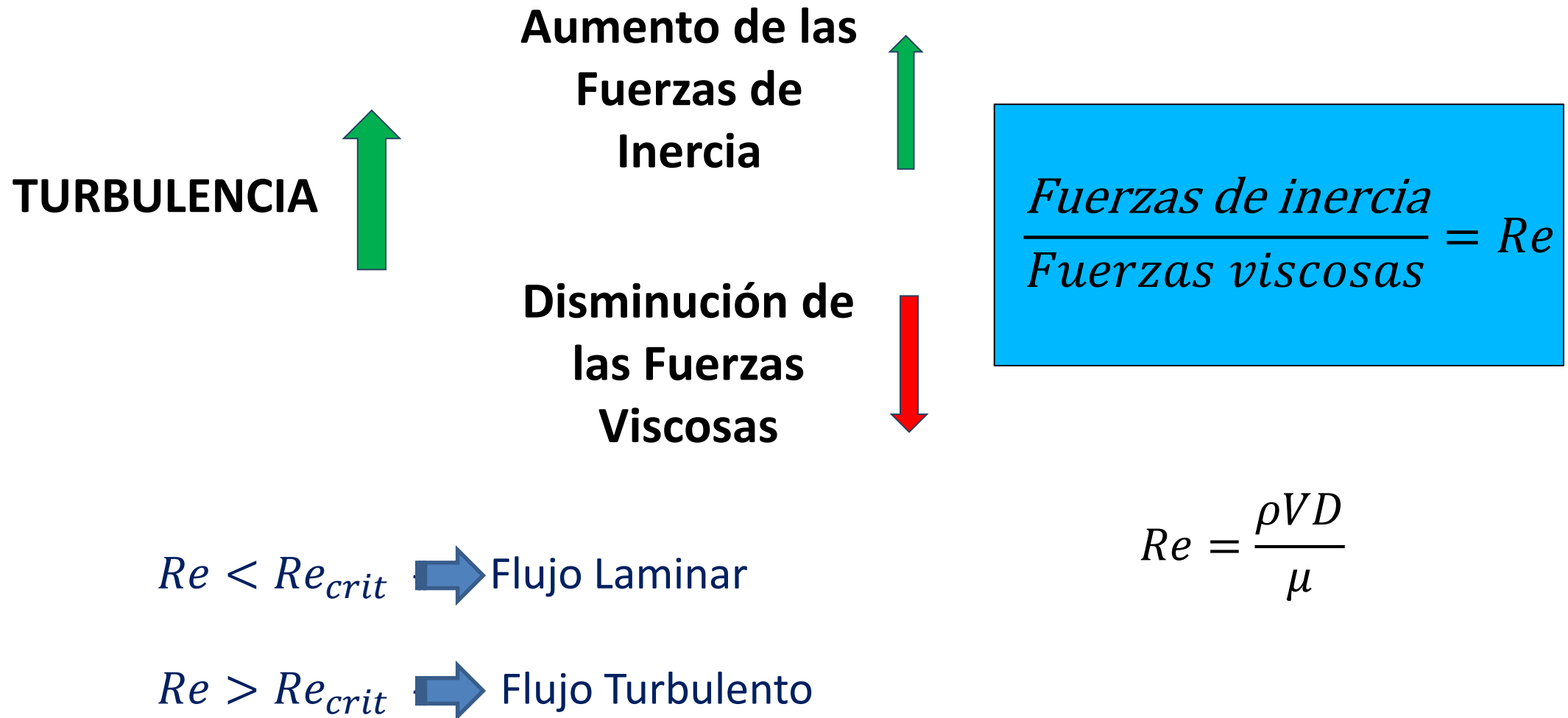
- Son siempre tridimensionales
- Fluctúan
- Caóticos

# La turbulencia desde una experiencia cotidiana





# La turbulencia desde una experiencia cotidiana



# El experimento de Reynolds

- Cada flujo tiene su  $Re_{crit}$

Para un flujo en tuberías

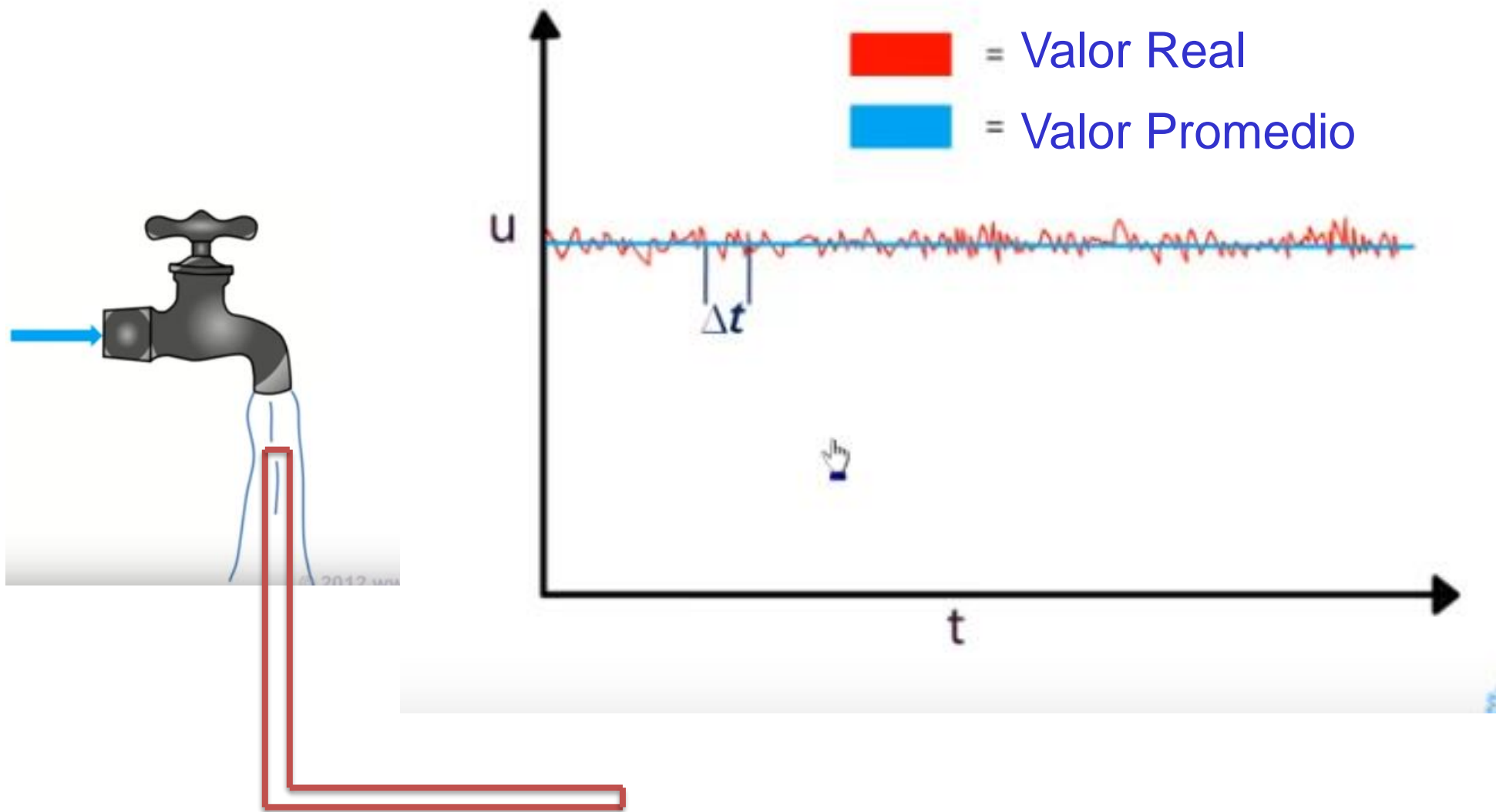
{	$0 \leq Re \lesssim 2300$ , flujo laminar
	$2300 \lesssim Re \lesssim 4000$ , flujo de transición
	$Re \gtrsim 4000$ , flujo turbulento

- La pérdida de estabilidad se produce debido al rozamiento viscoso de capas de flujo con distinta inercia. La inestabilidad es disparada por perturbaciones en el flujo
- Si las mismas son minimizadas (eliminando vibraciones, usando paredes muy lisas, etc.) puede retardarse la transición a la turbulencia

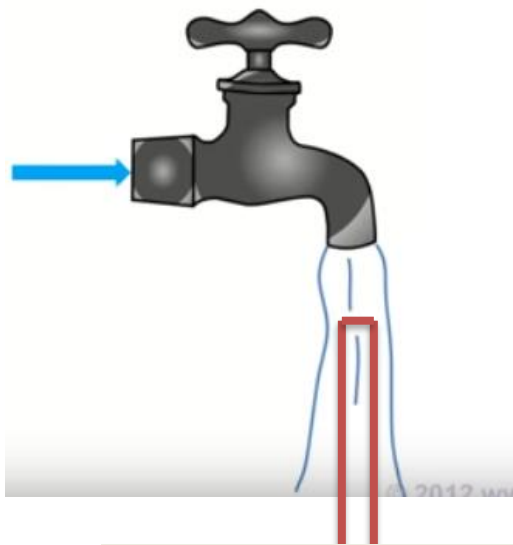
# Variables promediadas y fluctuaciones



# Variables promediadas y fluctuaciones



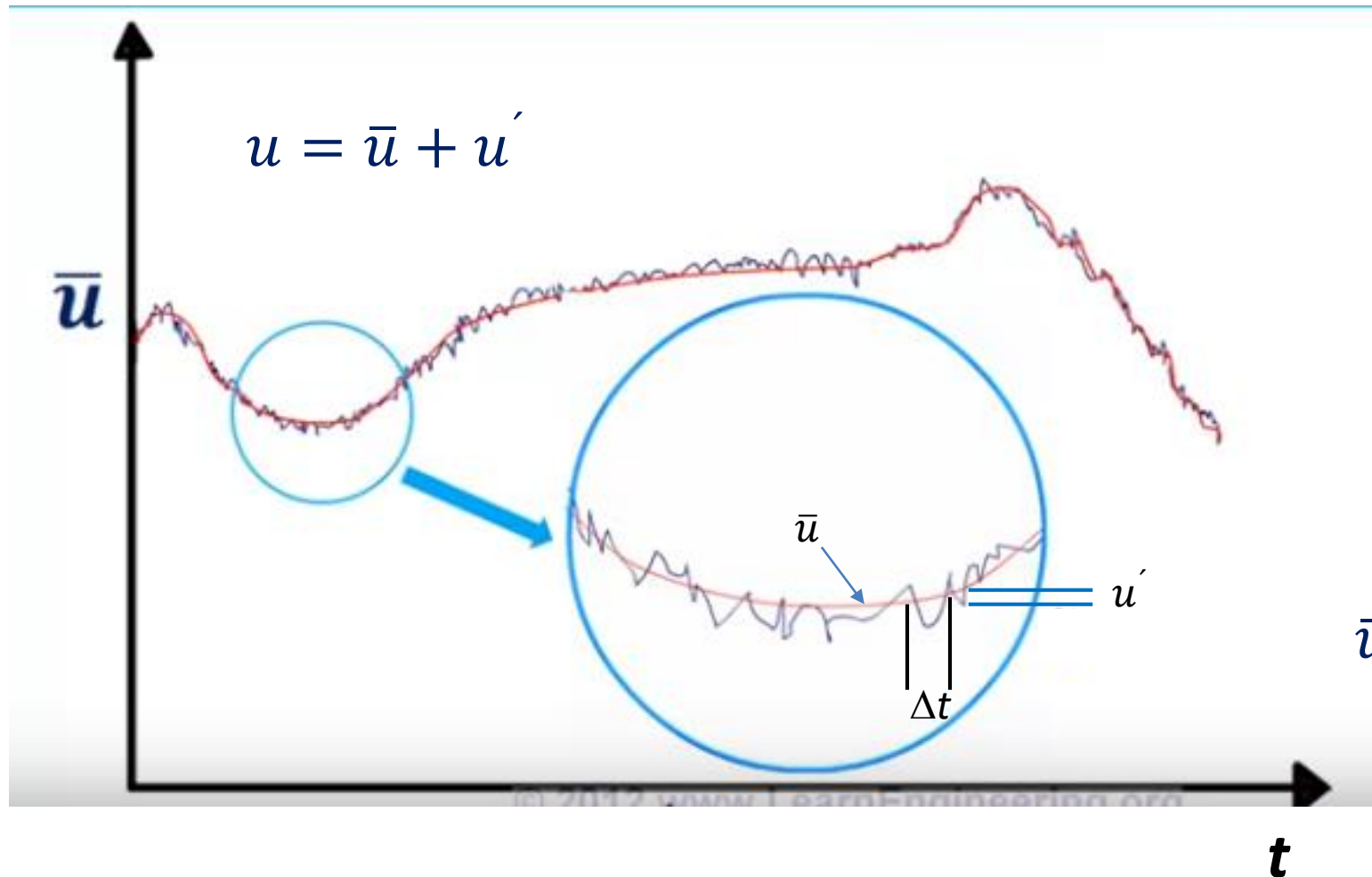
# Variables promediadas y fluctuaciones



NINGUN FLUJO TURBULENTO ES  
ESTACIONARIO

UN FLUJO TURBULENTO SE PUEDE DECIR QUE  
ESTÁ EN ESTADO ESTACIONARIO, CUANDO EL  
VALOR MEDIO DE LAS VARIABLES DEL FLUJO  
ESTAN EN ESTADO ESTACIONARIO

# Variables promediadas y fluctuaciones



$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u dt$$

El intervalo  $\Delta t$  debe ser grande como para filtrar las fluctuaciones y chico como para que la media sea independiente del tiempo

# Variables promediadas y fluctuaciones

- Luego podemos expresar la velocidad (y cualquier otra variable) en término de sus componentes media y fluctuante

$$u = \bar{u} + u'$$

# Variables promediadas y fluctuaciones

- Luego podemos expresar la velocidad (y cualquier otra variable) en término de sus componentes media y fluctuante

$$u = \bar{u} + u'$$

de manera que si aplicamos la promediación temporal a la velocidad instantánea

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u dt &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\bar{u} + u') dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\bar{u}) dt + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (u') dt \\ &= \bar{u} + 0\end{aligned}$$

pues se asume que estadísticamente, la media de las fluctuaciones es cero



# Ecuaciones promediadas

- Procedemos a promediar la ecuación de continuidad para un fluido incompresible

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) dt + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{v}') dt \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{v}} dt \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}' dt \right) \end{aligned}$$

$$0 = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad \text{ecuación de continuidad promediada}$$

# Ecuaciones promediadas

- De forma similar se puede promediar la ecuación de Navier- Stokes

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_1 + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_2 \right) = \underbrace{\rho \mathbf{g}}_3 - \underbrace{\nabla \mathbf{p}}_4 + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_5$$

5

$$\left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mu \nabla^2 \mathbf{v} dt \right) = \mu \nabla^2 \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v} dt \right) + \mu \nabla^2 \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}' dt \right)$$

$$\left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mu \nabla^2 \mathbf{v} dt \right) = \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}$$

# Ecuaciones promediadas

- De forma similar se puede promediar la ecuación de Navier- Stokes

$$\underbrace{\rho}_{1} \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)}_{2} = \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{3} - \underbrace{\nabla \mathbf{p}}_{4} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{5}$$

5

$$\left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mu \nabla^2 \mathbf{v} dt \right) = \mu \nabla^2 \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v} dt \right) + \mu \nabla^2 \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}' dt \right)$$

$$\left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mu \nabla^2 \mathbf{v} dt \right) = \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}$$

3

- Queda igual porque el promedio de una constante es otra constante

# Ecuaciones promediadas

- De forma similar se puede promediar la ecuación de Navier- Stokes

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_1 + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_2 \right) = \underbrace{\rho \mathbf{g}}_3 - \underbrace{\nabla \mathbf{p}}_4 + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_5$$

4

$$\left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \nabla \mathbf{p} dt \right) = \nabla \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{p} dt \right) + \mu \nabla^2 \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{p}' dt \right)$$

$$\left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \nabla \mathbf{p} dt \right) = \nabla \bar{\mathbf{p}}$$

# Ecuaciones promediadas

- De forma similar se puede promediar la ecuación de Navier- Stokes

$$\underbrace{\rho}_{1} \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)}_{2} = \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{3} - \underbrace{\nabla \mathbf{p}}_{4} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{5}$$

$$\boxed{2} \quad \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} dt \right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')$$

$$= \underbrace{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}}_{a} + \underbrace{\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}}_{b} + \underbrace{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}'}_{c} + \underbrace{\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}'}_{d}$$

$$\boxed{a} \quad \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} dt \right) = \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}$$

$$\boxed{c} \quad \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}' dt \right) = 0$$

$$\boxed{b} \quad \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} dt \right) = 0$$

$$\boxed{d} \quad \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' dt \right) = \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}'}$$

# Ecuaciones promediadas

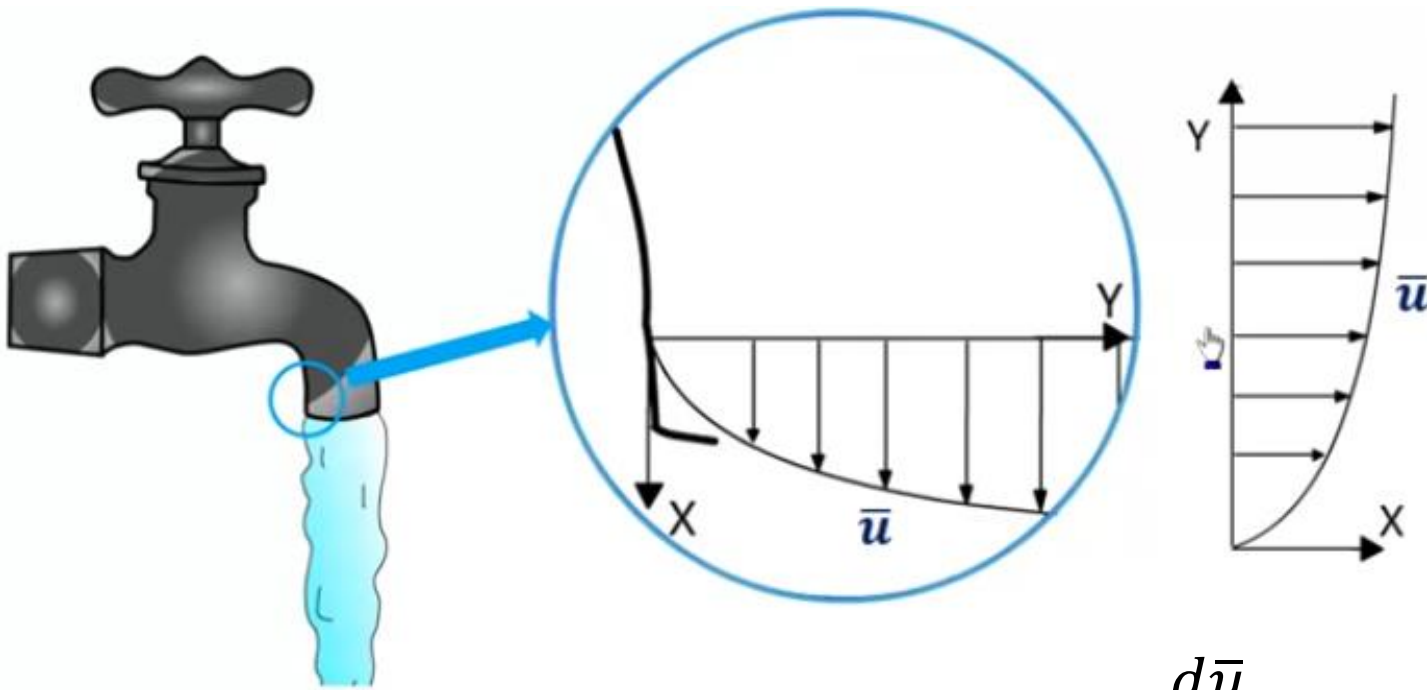
- De forma similar se puede promediar la ecuación de Navier- Stokes

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_1 + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_2 \right) = \underbrace{\rho \mathbf{g}}_3 - \underbrace{\nabla p}_4 + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_5$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} - \nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'})$$

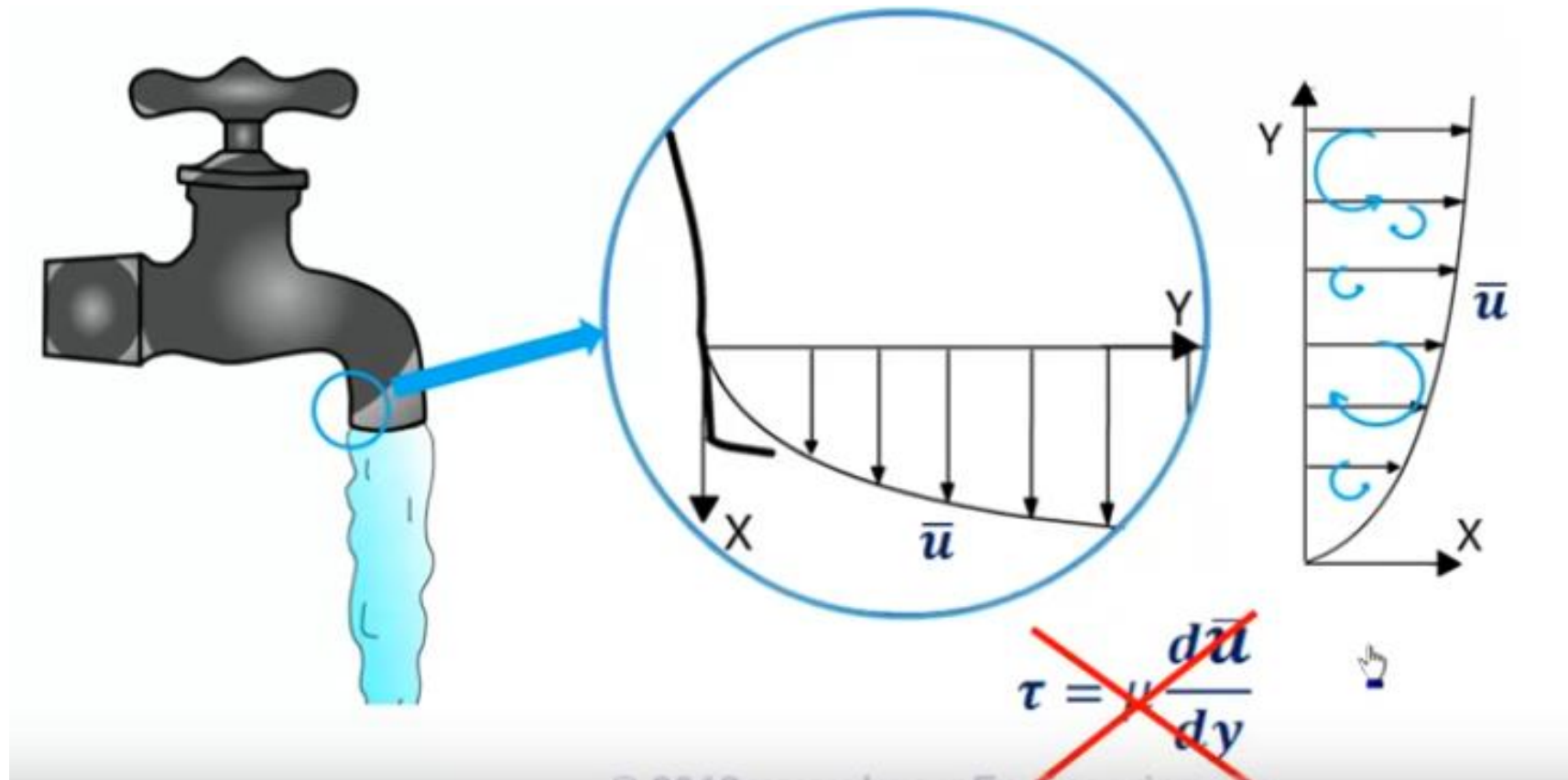
ecuación de Navier-Stokes promediada

# Viscosidad turbulenta o de remolino



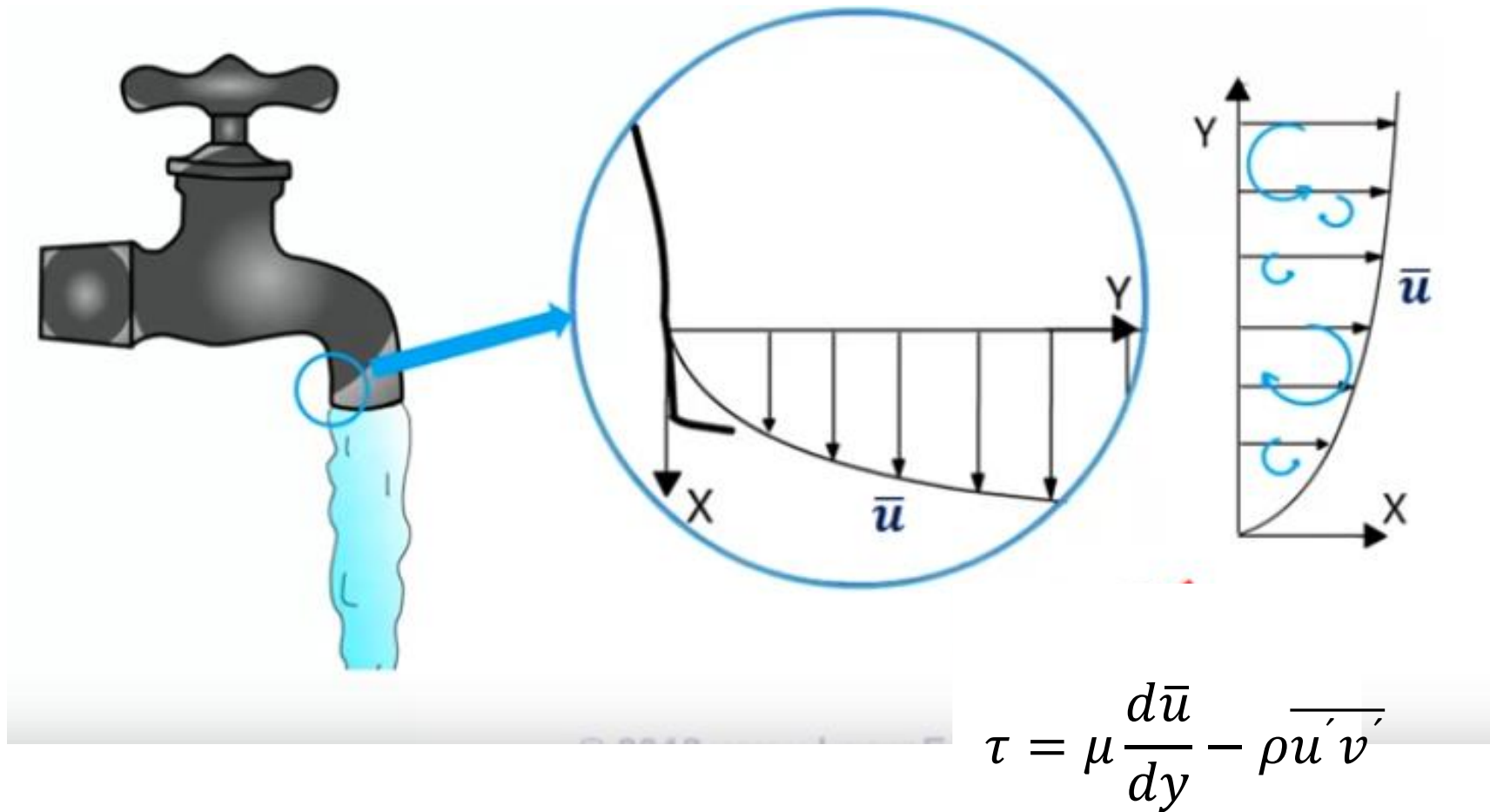
$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}$$

# Viscosidad turbulenta o de remolino





# Viscosidad turbulenta o de remolino



# Viscosidad turbulenta o de remolino

- Definimos entonces el tensor de tensiones turbulentas

$$\boldsymbol{\tau}^{(t)} = -\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}$$

Con unidades de  $\frac{\text{fuerza}}{\text{superficie}}$

# Viscosidad turbulenta o de remolino

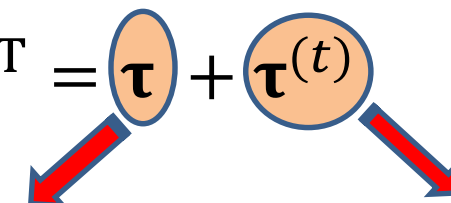
- Definimos entonces el tensor de tensiones turbulentas

$$\tau^{(t)} = -\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}$$

Con unidades de  $\frac{\text{fuerza}}{\text{superficie}}$

El término  $-\nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'})$  se puede escribir  $\nabla \cdot \tau^{(t)}$

- Unificamos las tensiones en un único término  $\nabla \cdot (\tau + \tau^{(t)})$
- Podemos entonces definir el tensor de tensiones viscosas total promedio

$$\tau^T = \tau + \tau^{(t)}$$


tensor de tensiones promedio viscosas      tensor de tensiones promedio turbulentas

*Laminar*      *Turbulento*

# Viscosidad turbulenta o de remolino

- Definimos entonces el tensor de tensiones turbulentas

$$\boldsymbol{\tau}^{(t)} = -\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}$$

Con unidades de  $\frac{\text{fuerza}}{\text{superficie}}$

El término  $-\nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'})$  se puede escribir  $\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(t)}$

- Unificamos las tensiones en un único término  $\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} + \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(t)})$
- Podemos entonces definir el tensor de tensiones viscosas total promedio

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^T = \bar{\boldsymbol{\tau}} + \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(t)}$$

de manera que podemos re-escribir la ecuación de Navier-Stokes promediada como

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^T$$

# Viscosidad turbulenta o de remolino

- Así como  $\bar{\tau}$  representa la transferencia de cantidad de movimiento entre capas aledañas, que ocurre a nivel molecular,  $\bar{\tau}^{(t)}$  representa lo mismo, pero mediante un mecanismo de transferencia que ocurre a nivel macroscópico, con remolinos que transportan cantidad de movimiento de capas lentas a rápidas y viceversa
- Luego, si la viscosidad representa un coeficiente que relaciona las tensiones viscosas con las velocidades de deformación,

$$\bar{\tau}_{rz} = \mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

resulta natural pensar en un coeficiente análogo para las tensiones turbulentas

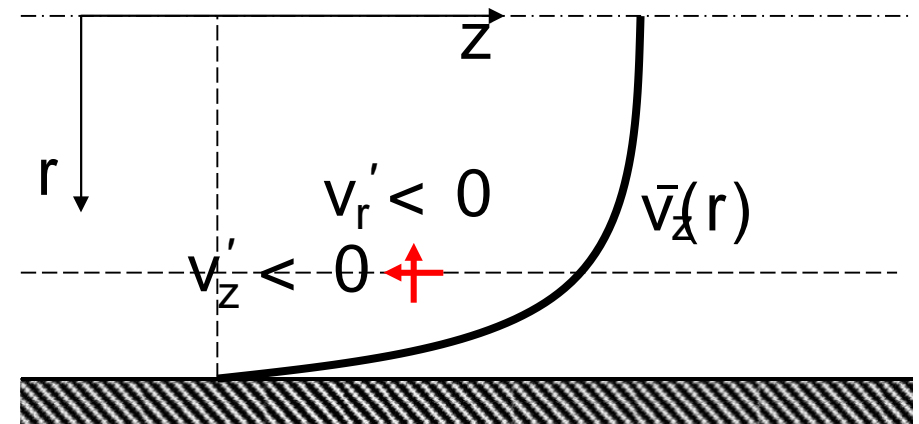
$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \eta \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

$\eta$ : viscosidad de remolino o turbulenta

Notar que  $\eta$  NO es una propiedad del fluido; su magnitud depende del flujo

# Viscosidad turbulenta o de remolino

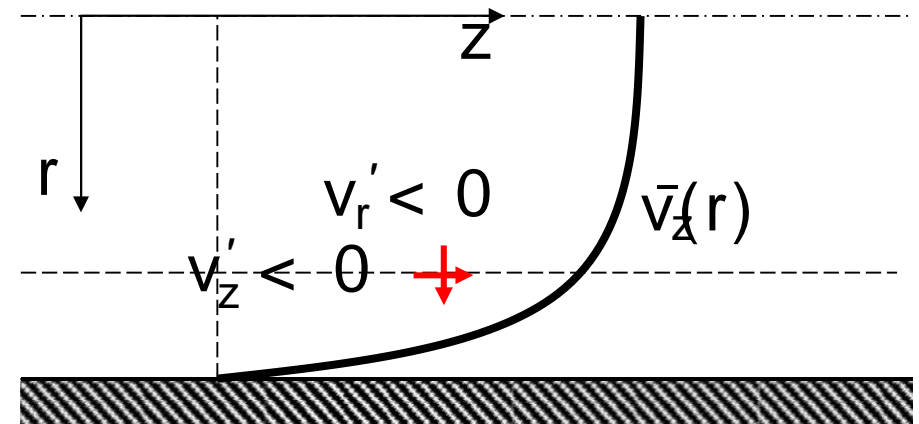
- Para el caso de un flujo en un tubo, recordamos que  $\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = -\rho \overline{v'_r v'_z}$
- Examinemos el producto de fluctuaciones  $v'_r v'_z$ , asumiendo razonable un perfil de velocidad media como el de la figura
  - Supongamos que en alguna región particular se observa una fluctuación  $v'_r < 0$ , que transporta fluido de menor velocidad media a regiones de mayor velocidad media
  - Estas regiones deberían experimentar un **enlentecimiento**, es decir, fluctuaciones  $v'_z < 0$



$$v'_r v'_z > 0$$

# Viscosidad turbulenta o de remolino

- Para el caso de un flujo en un tubo, recordamos que  $\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = -\rho \overline{v'_r v'_z}$
- Examinemos el producto de fluctuaciones  $v'_r v'_z$ , asumiendo razonable un perfil de velocidad media como el de la figura
  - Viceversa si se registra una fluctuación  $v'_r > 0$ , que transporta fluido de mayor velocidad media a regiones de menor velocidad media
  - Luego, estas regiones deberían experimentar un incremento de velocidad, es decir, fluctuaciones  $v'_z > 0$

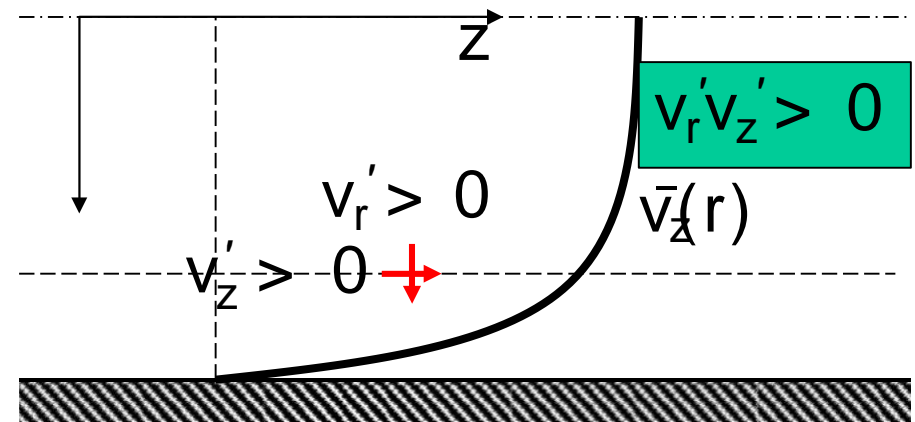


$$v'_r v'_z > 0$$

# Viscosidad turbulenta o de remolino

Estadísticamente, el promedio  $\overline{v_r'v_z'} > 0$  y consecuentemente el esfuerzo cortante turbulento que las capas de fluido más externas ejercen a las internas,  $\tau_{rz}^{(t)} = -\rho \overline{v_r'v_z'}$ , es negativo, como es de esperarse

Como  $\tau_{rz}^{(t)} = -\rho \overline{v_r'v_z'} = \eta \partial \bar{v}_z / \partial r$  y  $\partial \bar{v}_z / \partial r < 0$ , se desprende también que  $\eta > 0$





# Teoría de longitud de mezcla de Prandtl

La ecuación para el movimiento medio del flujo turbulento, no puede resolverse a menos que se tenga una expresión para las Tensiones de Reynolds, en términos del campo de velocidades medio.

Para lo cual Boussinesq propuso la relación:

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = -\overline{\rho u'v'} = \eta \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

Donde  $\eta$  es la Viscosidad de Remolinos o Viscosidad Turbulenta, que explica el transporte de cantidad de movimiento de remolinos turbulentos. La viscosidad de remolinos es una propiedad del flujo no del fluido y puede modelarse de distintas formas.

# Teoría de longitud de mezcla de Prandtl

Fue Ludwig Prandtl quien en 1925 formuló una de las primeras expresiones para la viscosidad de remolino

Si bien es una teoría semi-empírica, contiene varios elementos útiles conceptualmente

La teoría está basada en una analogía entre el intercambio de cantidad de movimiento tanto en flujo laminar como turbulentos, de acuerdo con la teoría cinética de los gases.

La propiedad de difusividad de un gas se debe al movimiento molecular, el cual tiende a mezclar cantidad de movimiento y calor en todo el flujo. Se puede mostrar que la viscosidad de un gas es del orden de

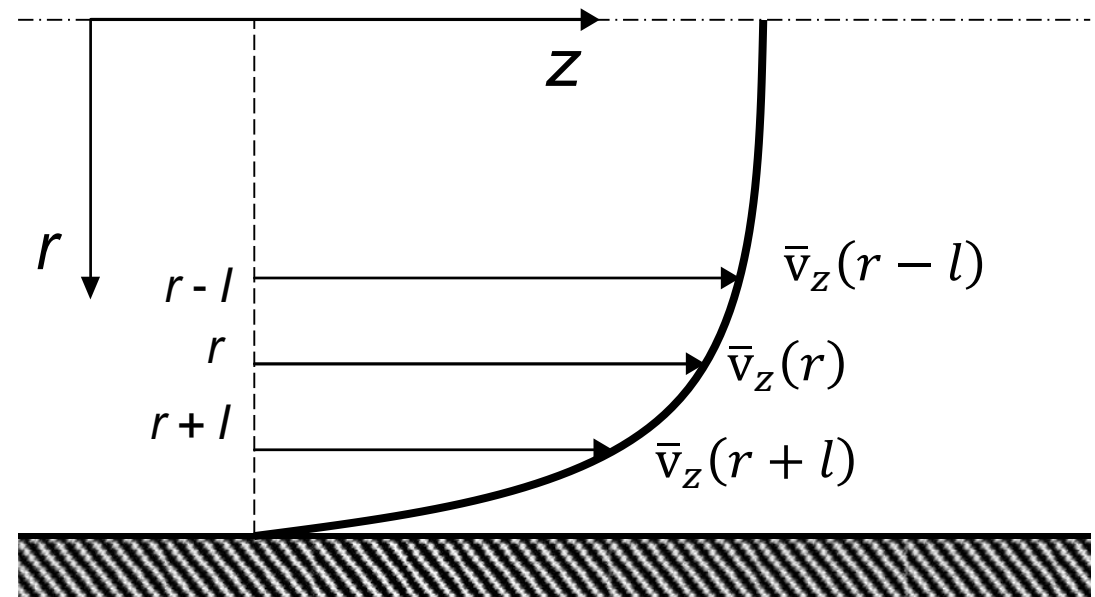
$$\nu \sim a\lambda$$

Donde  $a$  es la velocidad del movimiento molecular y  $\lambda$  el camino libre definido como el promedio de la distancia recorrida entre colisiones por una molécula.

# Teoría de longitud de mezcla de Prandtl

- En el flujo en un tubo, las fluctuaciones  $v'_r$  y  $v'_z$  surgen de los intercambios de fluido entre una capa de flujo cualquiera (desplazándose a una distancia  $r$  del centro del tubo) y las capas vecinas
- Se asume que al trasladarse de una capa a otra, un fragmento de fluido conserva su cantidad de movimiento
- Si la capa  $r$  recibe fluido de la capa  $r - l$ , el mismo llega con una velocidad que difiere de la que posee la capa  $r$ , en una cantidad

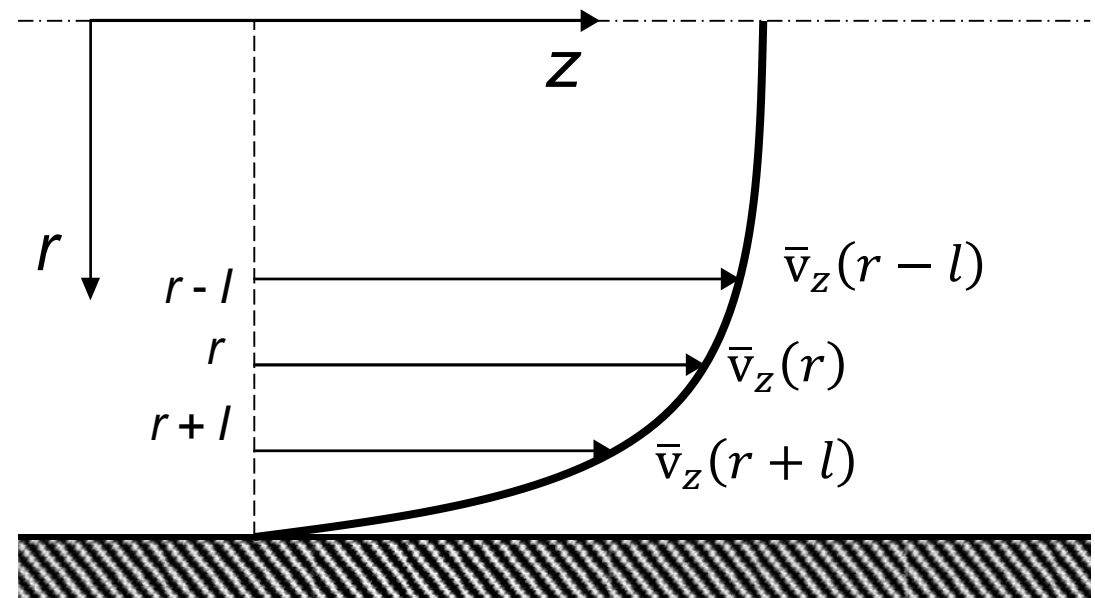
$$\bar{v}_z(r - l) - \bar{v}_z(r) = l \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$



# Teoría de longitud de mezcla de Prandtl

- En el flujo en un tubo, las fluctuaciones  $v'_r$  y  $v'_z$  surgen de los intercambios de fluido entre una capa de flujo cualquiera (desplazándose a una distancia  $r$  del centro del tubo) y las capas vecinas
- Se asume que al trasladarse de una capa a otra, un fragmento de fluido conserva su cantidad de movimiento
- Ídem, si la capa  $r$  recibe fluido de la capa  $r + l$ , el mismo llega con una velocidad que difiere de la que posee la capa  $r$ , en una cantidad

$$\bar{v}_z(r + l) - \bar{v}_z(r) = -l \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$



- En ambos casos, las parcelas de fluido que llegan a la capa  $r$  con una velocidad distinta, producen fluctuaciones  $v'_z$
- La magnitud de estas fluctuaciones depende de la distancia transversal ( $l$ ) recorrida por la parcela de fluido que llega (la diferencia de velocidad es  $\sim l \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$ )

# Teoría de longitud de mezcla de Prandtl

- Estadísticamente, una capa recibe y desprende fragmentos de fluido: el valor absoluto promedio de las fluctuaciones se puede estimar como el promedio de las fluctuaciones generadas por los aportes de las capas vecinas. Para algún valor de  $l$

$$\overline{|v'_z|} = \frac{1}{2} \left( \left| l \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right| + \left| -l \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right| \right) = l \left| \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right|$$

donde la distancia  $l$  se conoce como **Longitud de Mezcla de Prandtl**, y puede interpretarse como la distancia transversal promedio que deben desplazarse los paquetes de fluido para producir una fluctuación  $v'_z$ , teniendo gradientes de velocidad  $\frac{\partial v'_z}{\partial r}$

# Teoría de longitud de mezcla de Prandtl

- Como en la pared no hay fluctuaciones de velocidad,  $l = 0$  allí
- Por conservación de la masa, las fluctuaciones  $v'_r$  deberían ser del mismo orden que las  $v'_z$

$$\overline{|v'_r|} = c \overline{|v'_z|} = cl \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

- Como en promedio, los productos  $v'_z v'_r$  son positivos, tienen la forma

$$\overline{v'_r v'_z} \sim cl \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right)^2$$

- Recordando además que  $\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = -\overline{\rho u' v'}$  es el esfuerzo cortante turbulento que las capas más externas de flujo ejercen a las más internas (y que es negativo), proponemos la siguiente relación constitutiva

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = -\overline{\rho u' v'} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} = \eta \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

donde  $l$  absorbió a  $c$

# Teoría de longitud de mezcla de Prandtl

- Como en la pared no hay fluctuaciones de velocidad,  $l = 0$  allí
- Por conservación de la masa, las fluctuaciones  $v'_r$  deberían ser del mismo orden que las  $v'_z$

Es decir

$$\eta = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

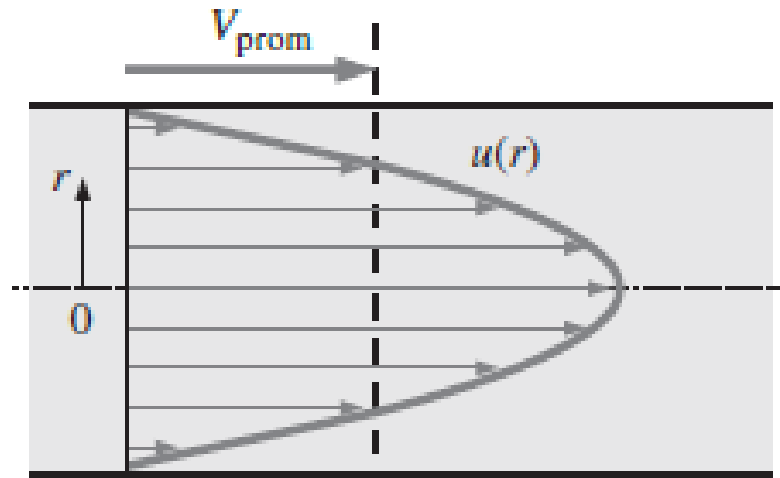
- Como en promedio los esfuerzos cortantes turbulentos, tienen la forma
- Recordando que los esfuerzos cortantes turbulentos que se ejercen a las más internas (y que es negativo), proponemos la siguiente relación constitutiva

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = -\overline{\rho u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} = \eta \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

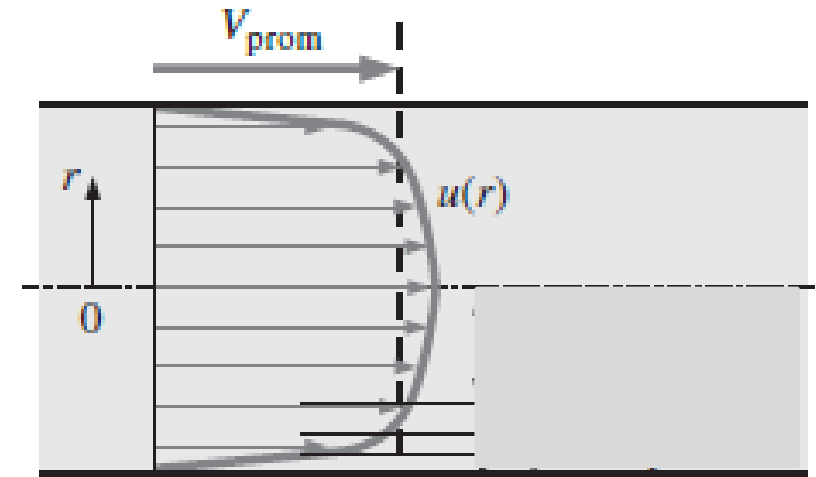
donde  $l$  absorbió a  $c$



# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



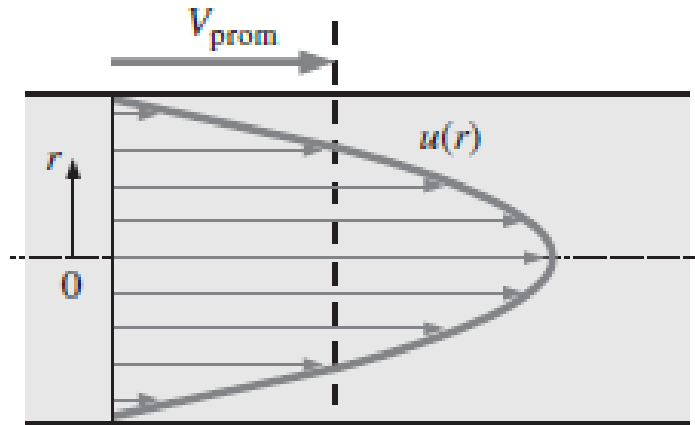
Flujo laminar



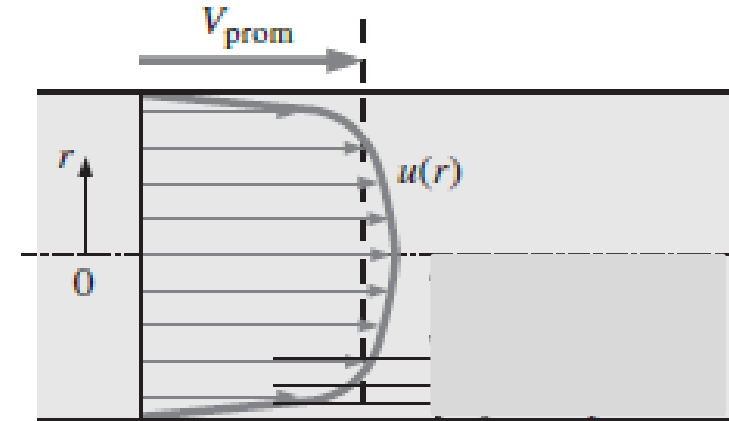
Flujo turbulento

(Tomado de Cengel pág 355)

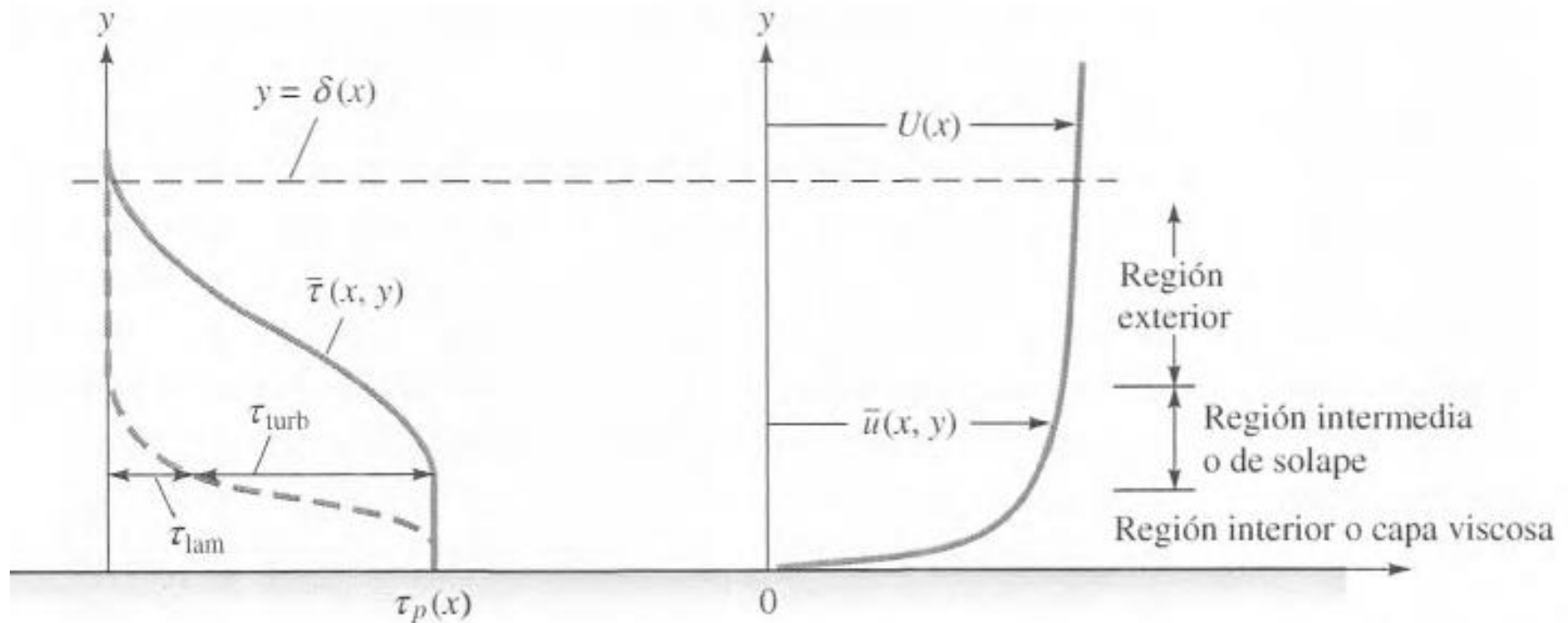
# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



Flujo laminar

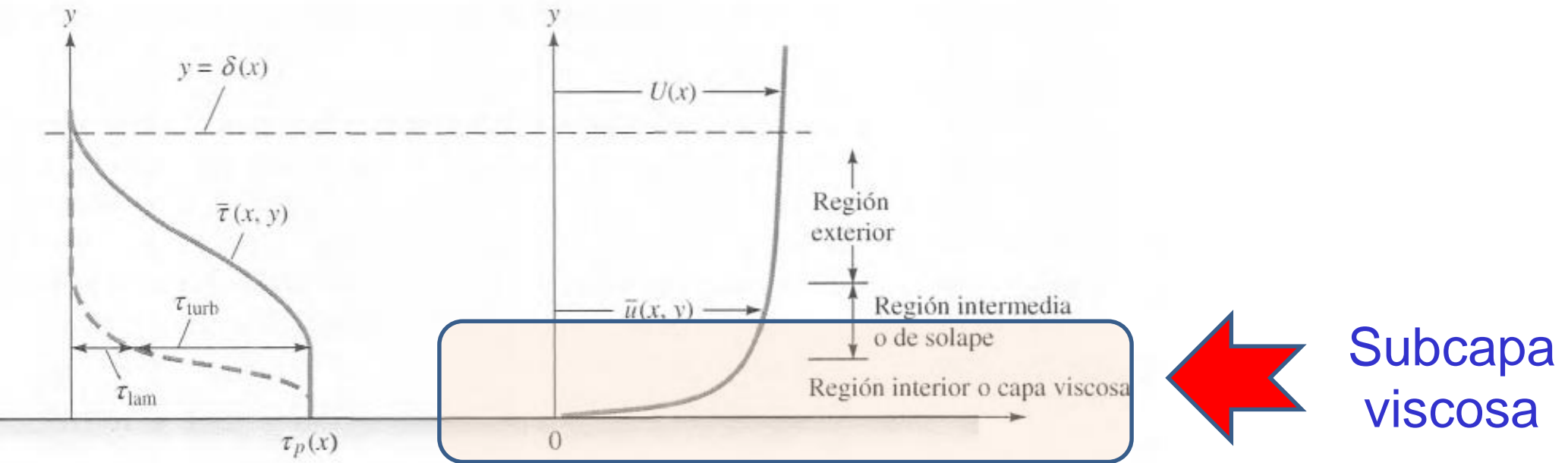


Flujo turbulento



(Tomado de White pág 356)

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



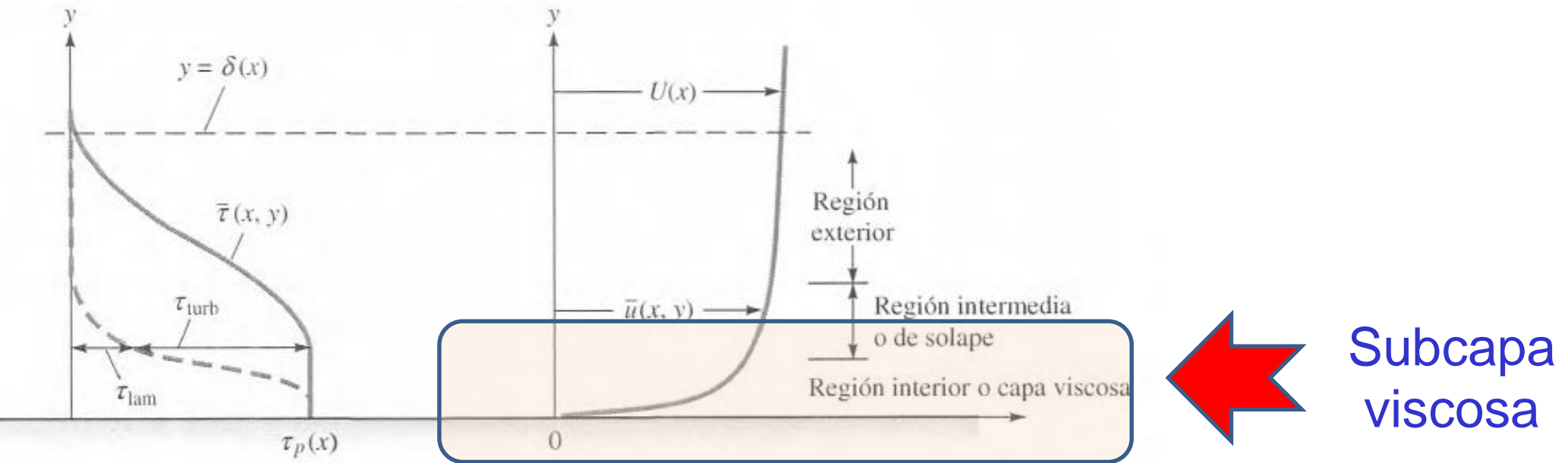
Perfil de velocidad se considera líneal, o sea, gradiente de velocidades constante

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{y}$$

Esfuerzo de corte en la pared

$$\tau_w = \mu \frac{u}{y} = \rho \nu \frac{u}{y} \quad \text{ó} \quad \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\nu u}{y}$$

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



Perfil de velocidad se considera líneal, o sea, gradiente de velocidades constante

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{y}$$

Esfuerzo de corte en la pared

$$\tau_w = \mu \frac{u}{y} = \rho \nu \frac{u}{y}$$

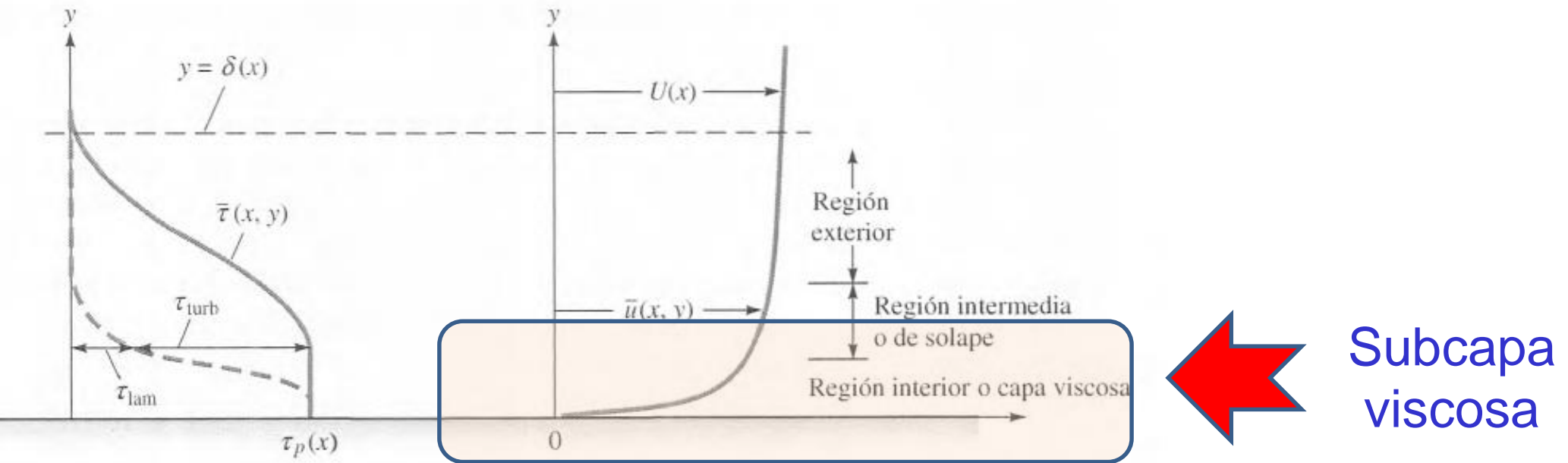
ó

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\nu u}{y}$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Velocidad de fricción

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



## Perfil de velocidad en la subcapa viscosa

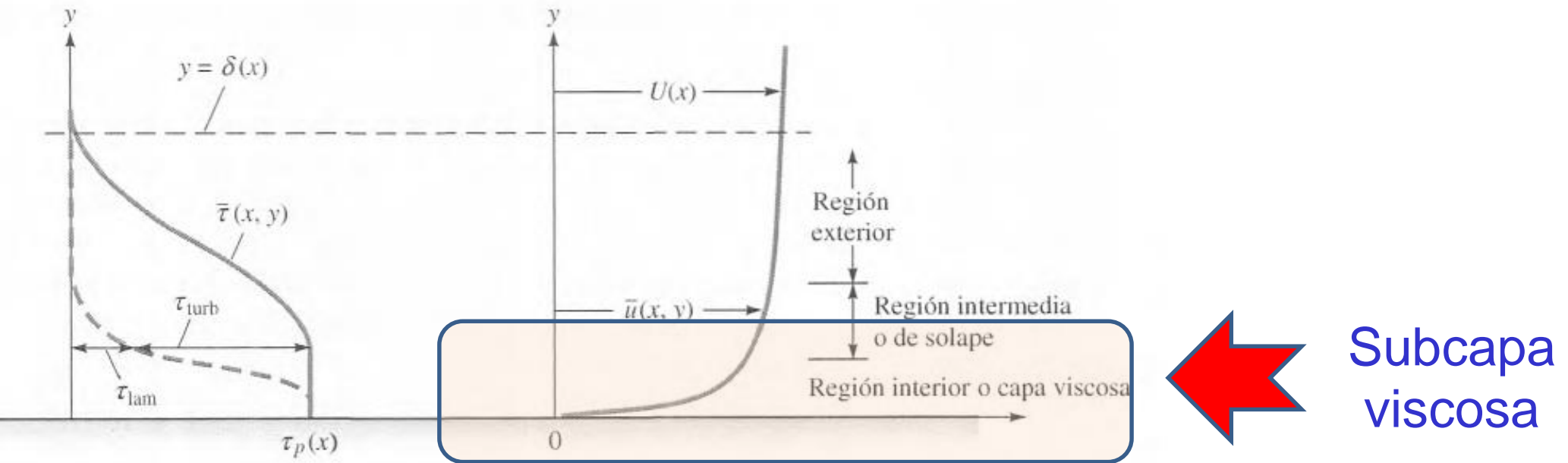
Ley de la pared 
$$\frac{u}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu}$$

para superficies lisas  
$$0 \leq \frac{yu_*}{\nu} \leq 5$$

## Espesor de la subcapa viscosa

$$y = \delta_{subcapa} = \frac{5\nu}{u_*} = \frac{25\nu}{u_\delta}$$

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



Perfil de velocidad en la subcapa viscosa

Si adimensionalizamos

$$\frac{u}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu}$$

Ley de la pared

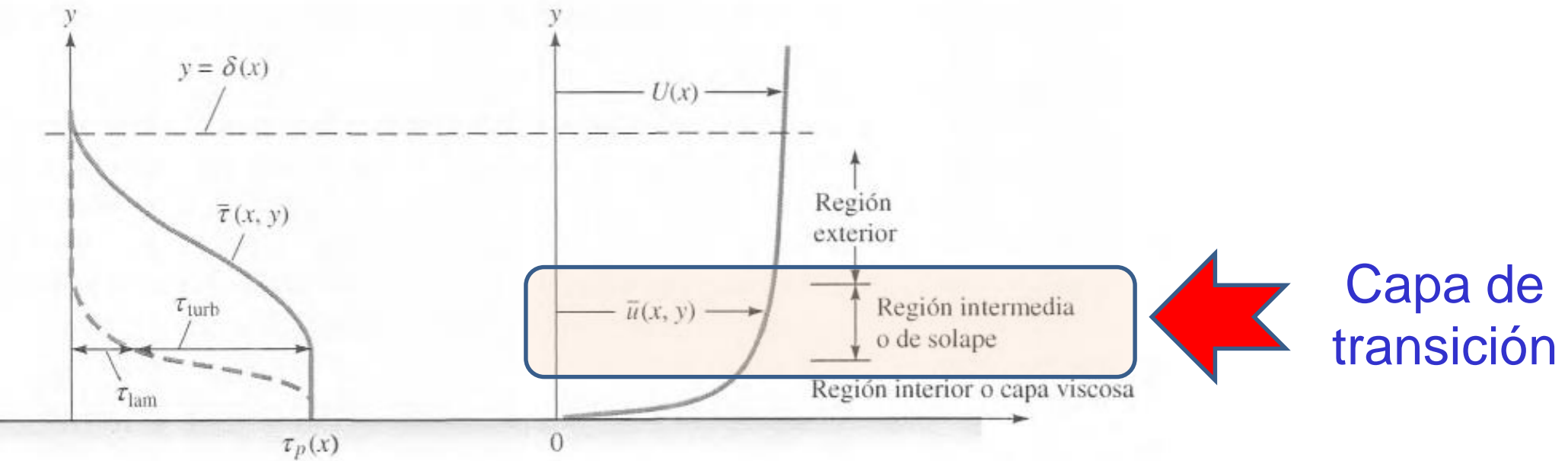
$$u^+ = \frac{u}{u_*}$$

$$y^+ = \frac{yu_*}{\nu}$$

$$u^+ = y^+$$

Ley de la pared  
normalizada

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



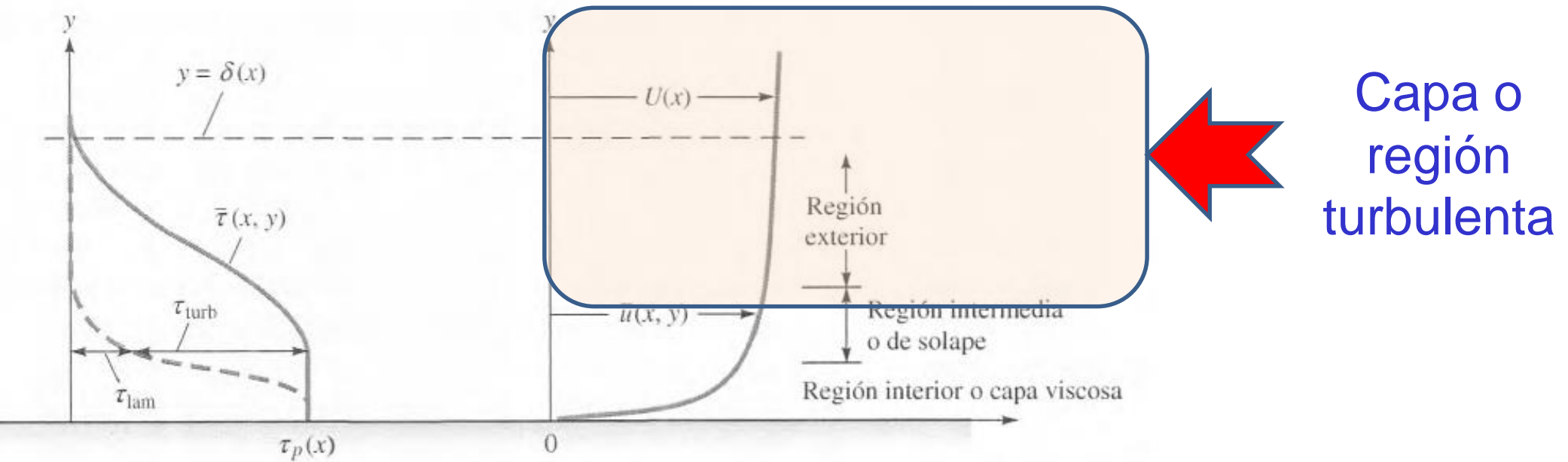
## Perfil de velocidad en la capa de transición

Ley logarítmica

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B$$

$$\kappa = 0.4 \quad y \quad B = 5$$

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



Si evaluamos la Ley logarítmica **asumiendo que la velocidad máxima en una tubería ocurre en la línea central donde  $r = 0$**

$$U = U_{m\acute{a}x}$$

$$y = R - r$$

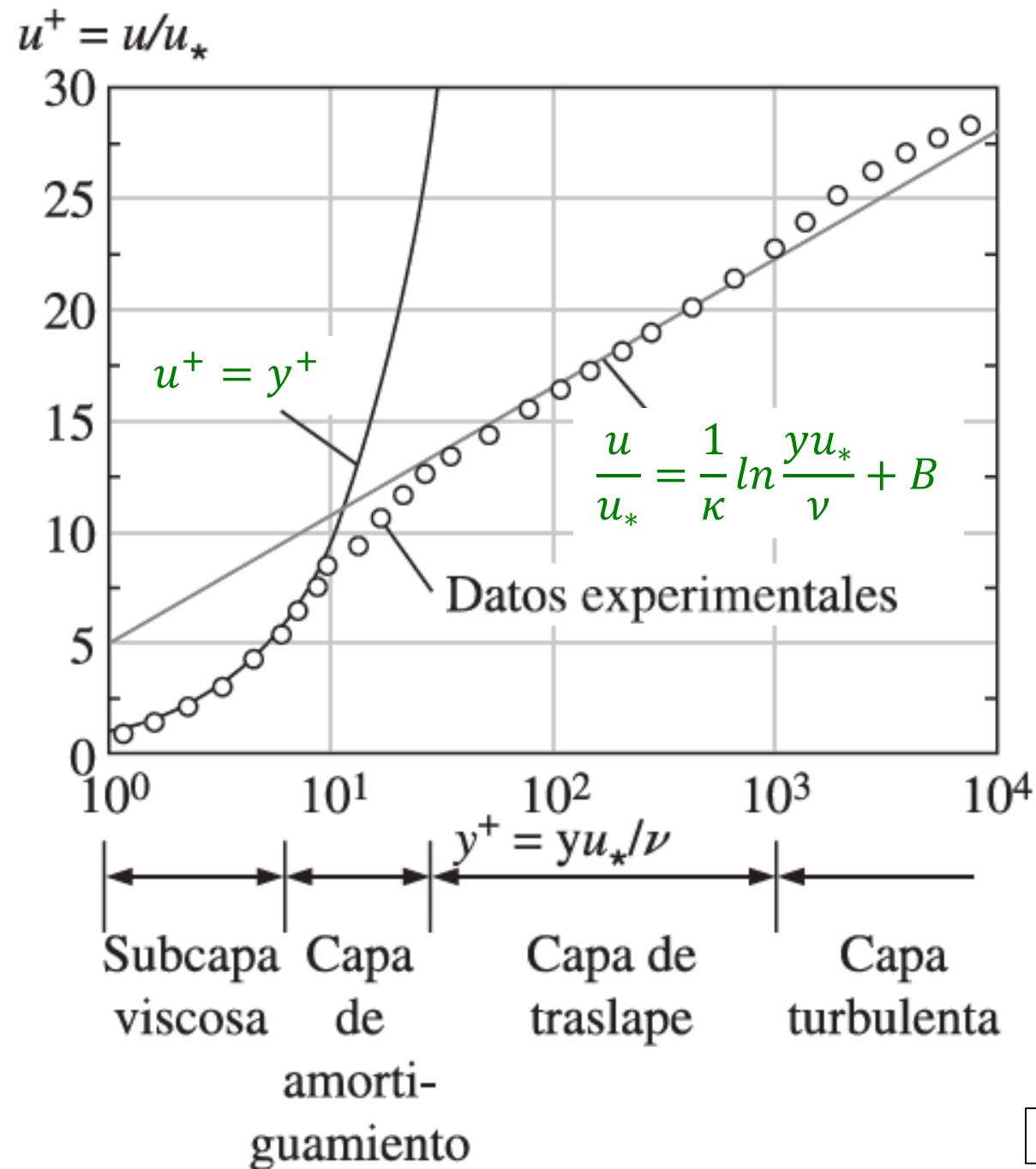
$$\kappa = 0.4$$

$$\frac{u_{m\acute{a}x} - u}{u_*} = 2.5 \ln \frac{R}{R - r}$$

Ley de defecto de la velocidad



# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (experimentales)



Cengel (2012)

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (matemáticamente)

- Es posible encontrar las relaciones mostradas para el perfil de velocidad aproximado en una tubería a partir de un análisis de las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas

*r component:*

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{S_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \rho f_r \end{aligned}$$

*$\theta$  component:*

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\theta z}}{\partial z} + \rho f_\theta \end{aligned}$$

*z component:*

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned}$$

- Es posible encontrar las relaciones mostradas para el perfil de velocidad aproximado en una tubería a partir de un análisis de las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas

$$0 = -\frac{d\bar{p}}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \bar{\tau}_{rz}^T)$$

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (matemáticamente)

- Es posible encontrar las relaciones mostradas para el perfil de velocidad aproximado en una tubería a partir de un análisis de las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas

$$0 = -\frac{d\bar{p}}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \bar{\tau}_{rz}^T)$$

- Luego de integrar y reemplazar lo obtenido antes nos queda

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta \bar{p}}{L} \frac{r}{2} &= \bar{\tau}_{rz}^T = \bar{\tau}_{rz} + \bar{\tau}_{rz}^{(t)} \\ &= \left( \mu - \rho l^2 \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right) \frac{d\bar{v}_z}{dr} \\ &= \mu \frac{d\bar{v}_z}{dr} - \rho l^2 \left( \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right)^2 \end{aligned}$$

la que constituye una EDO bastante complicada de resolver

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (matemáticamente)

- Conviene entonces definir una coordenada medida desde la pared

$$y = r_0 - r, \quad \frac{d()}{dr} = \frac{d()}{dy} \frac{dy}{dr} = - \frac{d()}{dy}$$

- Y utilizar la relación propuesta por Prandtl para  $l$

$$l = \alpha y$$

- Luego se puede resolver la EDO (sin demostrar numéricamente)

De cuyo análisis se obtienen los perfiles de velocidades que corroboran las observaciones empíricas.

# Perfiles de velocidad en flujo turbulento

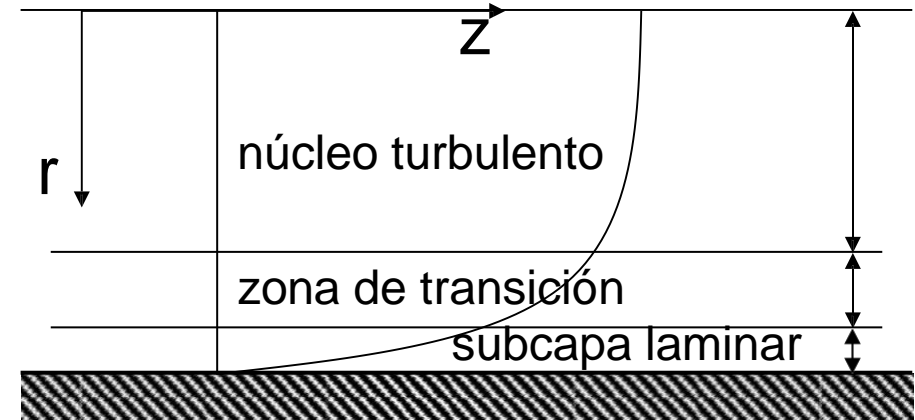
- Para obtener una solución aproximada, notamos que cerca de la pared (hasta una distancia máxima  $\varepsilon$ ) los efectos viscosos dominan la turbulencia; es lo que se denomina **subcapa laminar**, donde

$$\mu \gg \rho l^2 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

- Luego existe una **zona de transición**, y para capas más internas aún (**núcleo turbulento**), los esfuerzos turbulentos dominan a los viscosos y

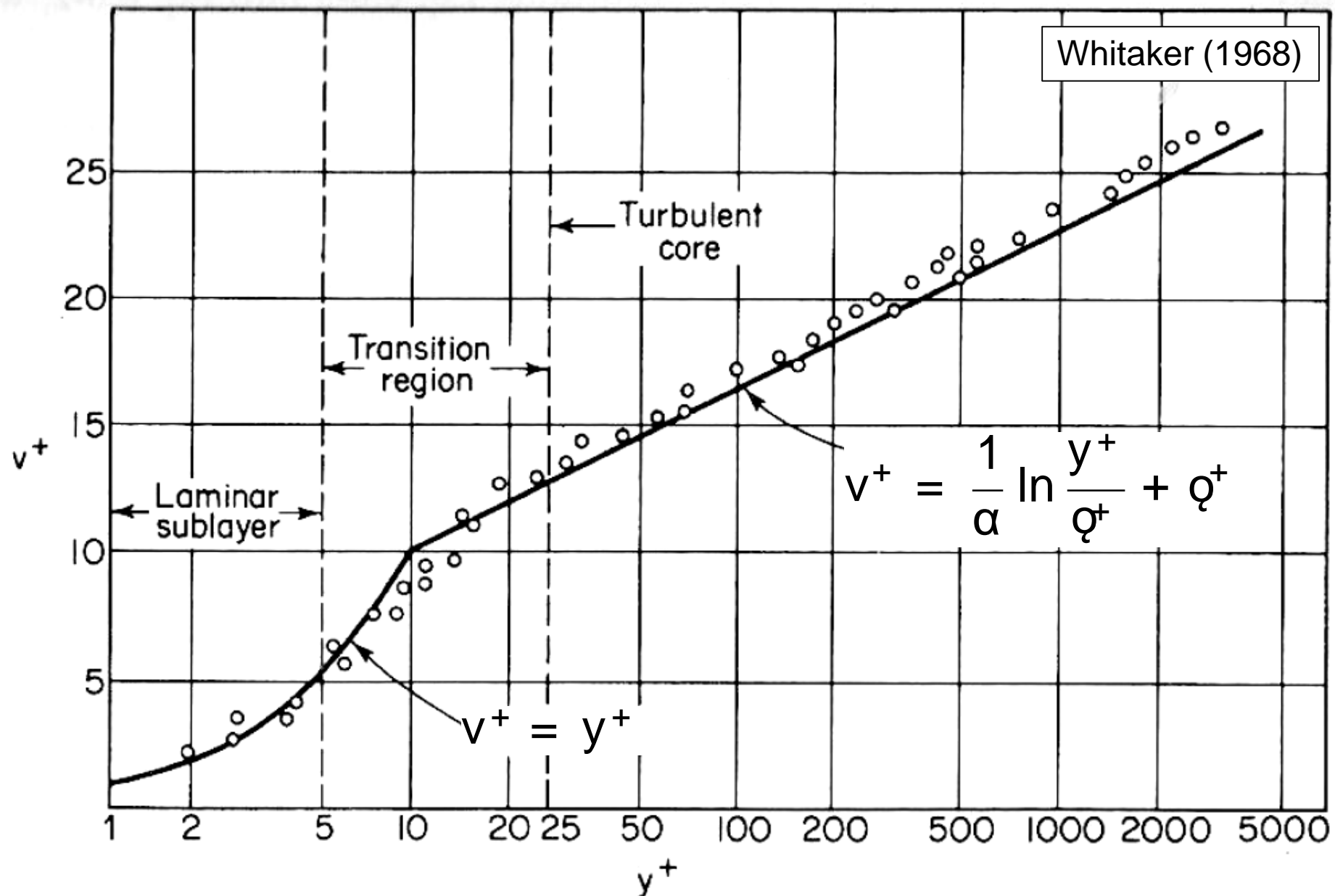
$$\mu \ll \rho l^2 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$$

- El parámetro  $l$  varía con la posición, es cero en la pared y aumenta hacia el interior
- Prandtl propuso como primera aproximación que  $l$  dependiera linealmente de la distancia a la pared



# Perfiles de velocidad en flujo turbulento (matemáticamente)

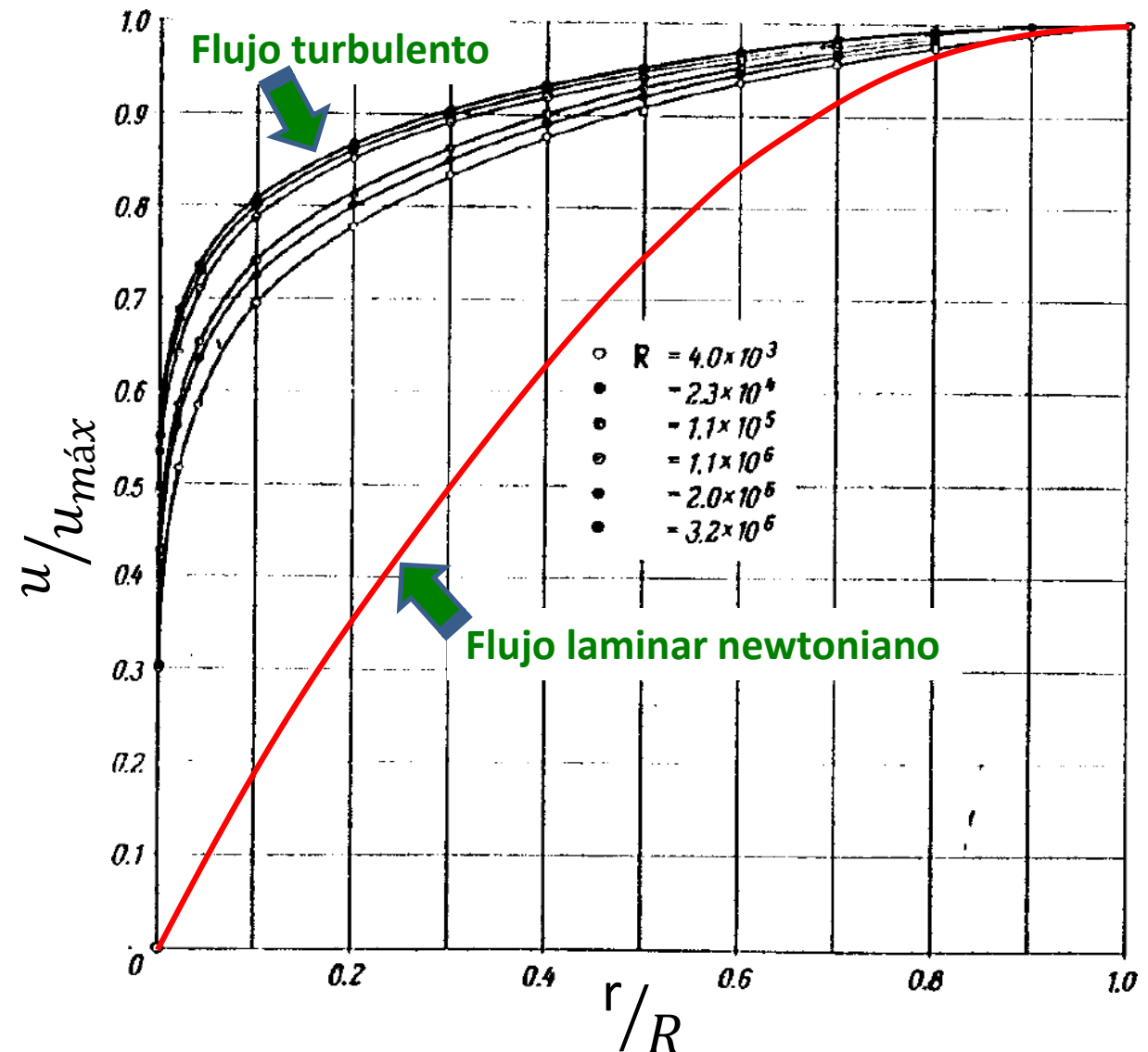
- Resultados comparados con Deissler (1953) y Laufer (1953)





# Perfiles de velocidad en flujo turbulento – LEY DE POTENCIA

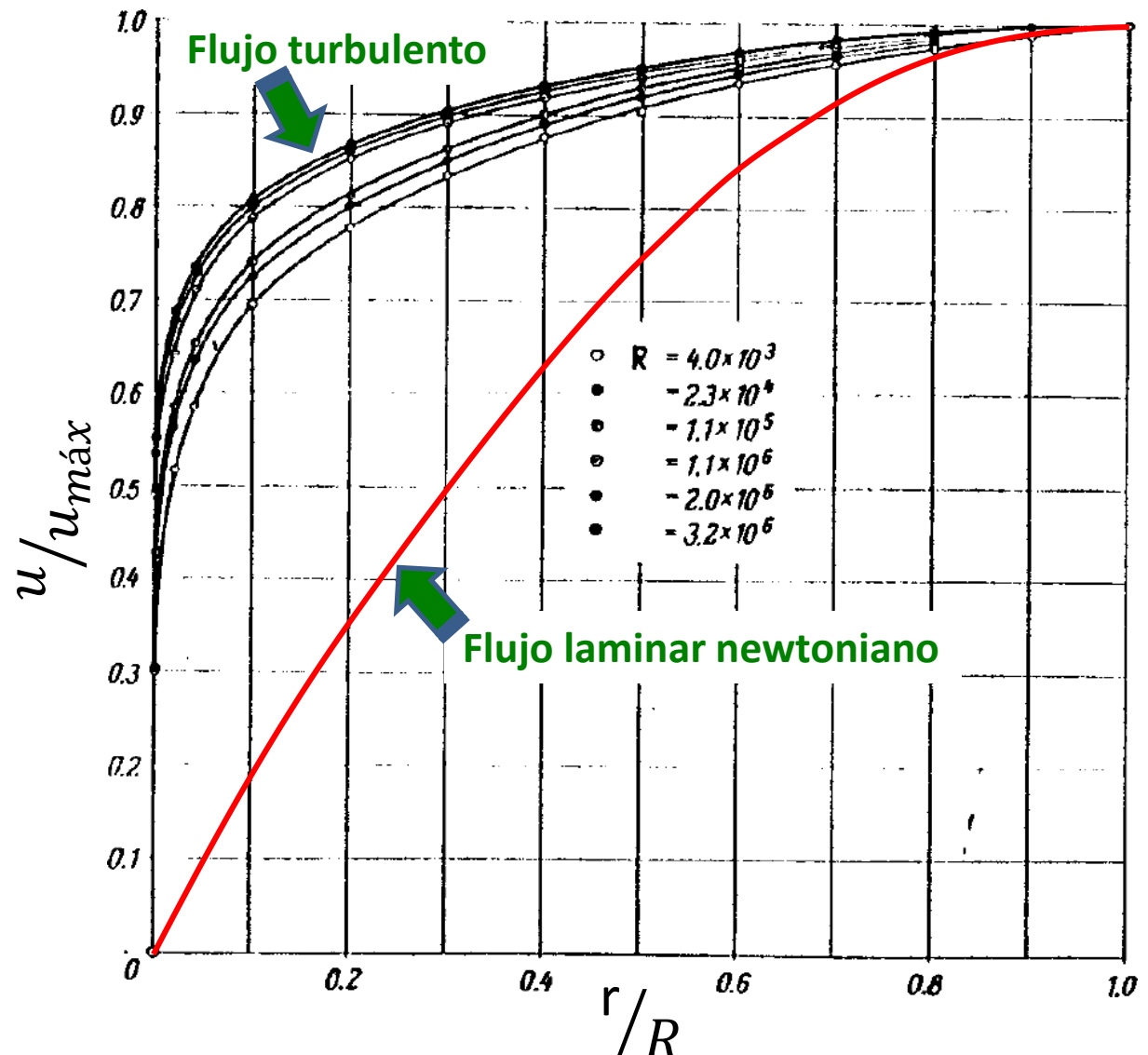
- En flujo laminar, el perfil de velocidades es parabólico
- A medida que aumenta el número de Reynolds y el flujo se vuelve turbulento, el perfil de velocidades se va “aplanando” y asemejando cada vez más al de flujo pistón (o “perfil plano”)



# Perfiles de velocidad en flujo turbulento – LEY DE POTENCIA

- En flujo laminar, el perfil de velocidades es parabólico
- A medida que aumenta el número de Reynolds y el flujo se vuelve turbulento, el perfil de velocidades se va “aplanando” y asemejando cada vez más al de flujo pistón (o “perfil plano”)
- Los perfiles tienen la siguiente forma aproximada

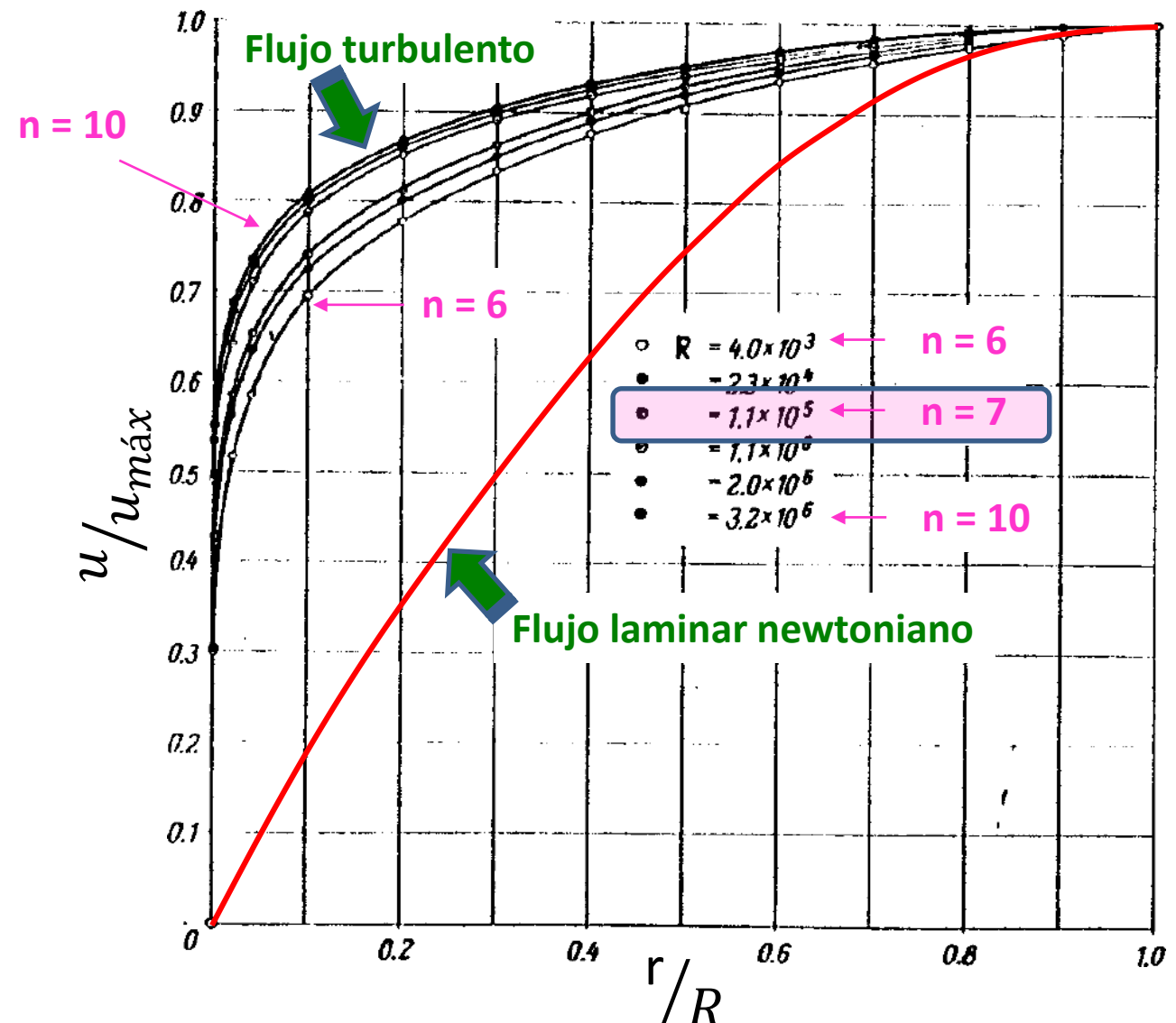
$$\frac{u}{u_{m\acute{a}x}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}$$
$$\frac{u}{u_{m\acute{a}x}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$



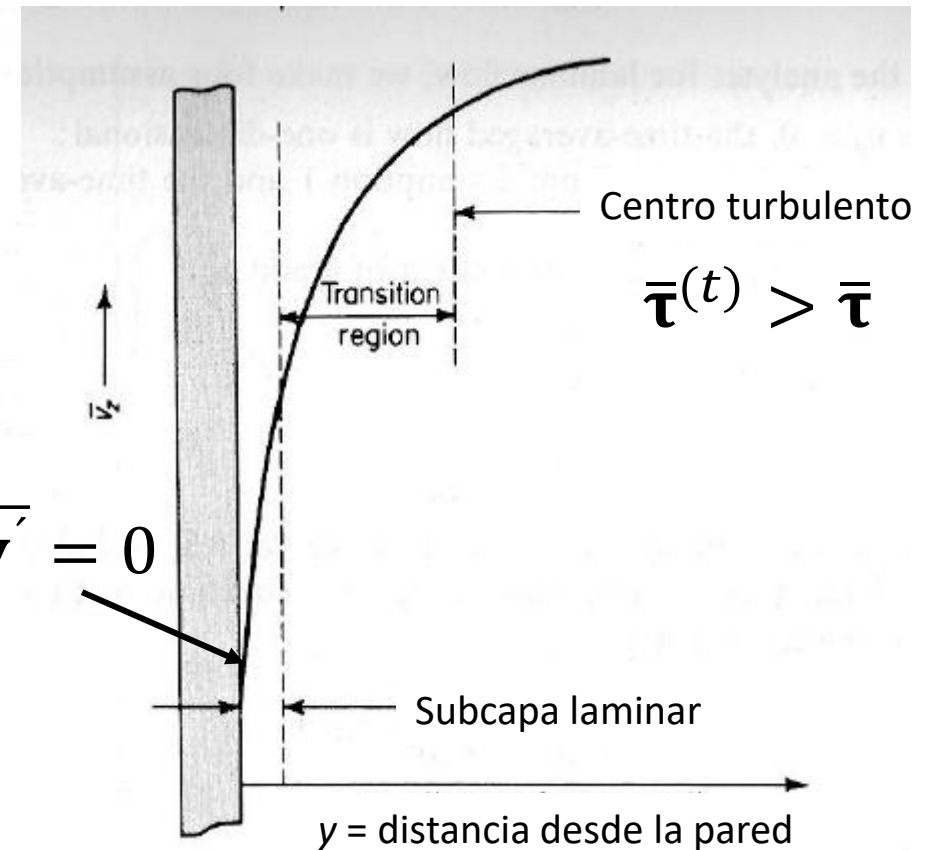
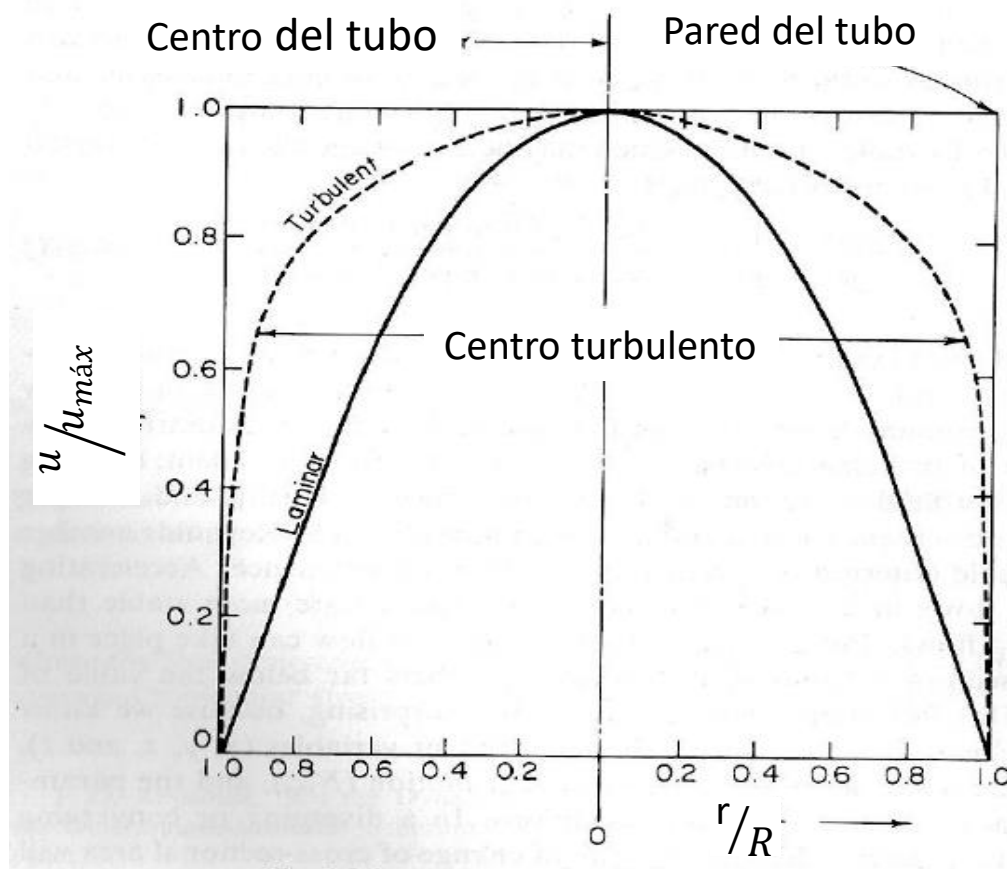
# Perfiles de velocidad en flujo turbulento – LEY DE POTENCIA

- En flujo laminar, el perfil de velocidades es parabólico
- A medida que aumenta el número de Reynolds y el flujo se vuelve turbulento, el perfil de velocidades se va “aplanando” y asemejando cada vez más al de flujo pistón (o “perfil plano”)
- Los perfiles tienen la siguiente forma aproximada

$$\frac{u}{u_{m\acute{a}x}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}$$
$$\frac{u}{u_{m\acute{a}x}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$



# Perfiles de velocidad en flujo turbulento – LEY DE POTENCIA



$$\tau^{(t)} = -\rho \overline{v'v'} = 0$$

Whitaker (1968)