



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

Doctorado en Ingeniería. Mención Recursos Hídricos

Trabajo Final

Cátedra: Matemática Aplicada

Docente: Dr. Juan José Gómez Barroso

Alumno: Stürtz, Elián

2022

Contenido

Planteo del problema	2
Obtención de la ecuación de Navier-Stokes	2
La ley de conservación del momento o ecuación de movimiento.....	2
Ecuaciones RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)	4
Modelo de Boussinesq	7
Ecuaciones para representar el problema	8
Sistema de ecuaciones	8
Ecuación de momento en x :	8
Ecuación de momento en z :	8
Ecuación de Laplace para la presión:	8
Condiciones iniciales	8
Condiciones de contorno	8
Esquema de diferencias finitas	9
Ecuación de momento en x :	9
Ecuación de momento en z :	9
Ecuación de Laplace para la presión:	10
Implementación en Python.....	10
Variables del modelado:.....	10
Variables físicas:	10
Resultado en Python	10
Implementación en OpenFOAM	11
Sobre OpenFOAM	11
Geometría y malla	12
Condiciones de la implementación y resultados	13
Conclusiones	15
Bibliografía	16

Planteo del problema

En el presente trabajo se realizará el modelado bidimensional del flujo en un canal de 15 m de largo por 4 m de profundidad en el que se encuentra un escalón de fondo de 4 m de largo y 1 m de alto, como se muestra en el esquema de la Figura 1.

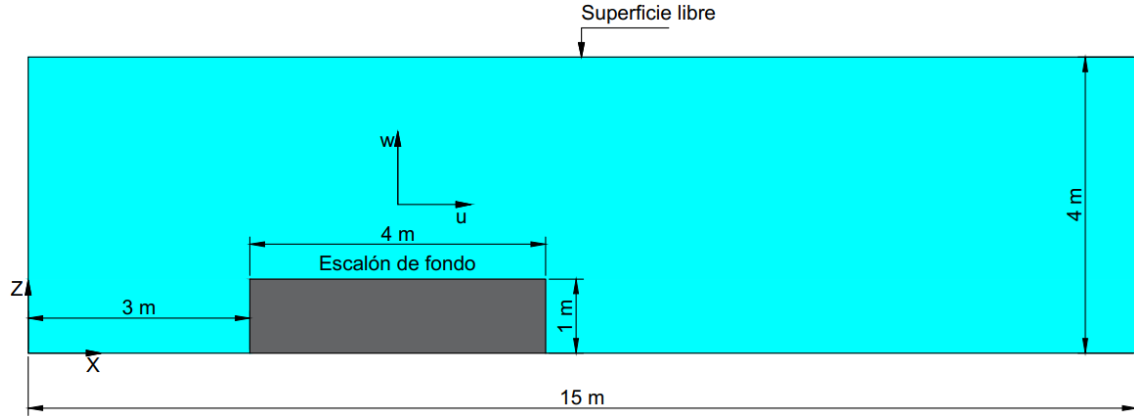


Figura 1 – Esquema del canal a modelar.

Las ecuaciones a utilizar son las ecuaciones RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), que se desarrollarán a continuación, para los ejes x y z . Dichas ecuaciones resultan de considerar una forma de promediación de las ecuaciones de Navier-Stokes. Con ellas se puede representar, a un costo computacional razonablemente bajo, el movimiento de un flujo bidimensional y con una componente de turbulencia. Como tercera ecuación se utilizará una ecuación de Poisson para resolver la presión punto a punto, la misma permite representar el campo de velocidad que satisface la ecuación de presión para un flujo incompresible.

A continuación se mostrará la obtención de las ecuaciones de Navier-Stokes y luego las RANS.

Obtención de la ecuación de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes pueden obtenerse a partir de la ley de conservación de cantidad de movimiento, o ecuación de momento, considerando que el mismo es una cantidad vectorial definida como el producto entre la masa y la velocidad que, expresada por unidad de volumen, queda como el producto entre la densidad y la velocidad ($\vec{U} = \rho \vec{u}$).

La ley de conservación del momento o ecuación de movimiento

Para obtener la ecuación de cantidad de movimiento se escribe, en primer lugar, la forma vectorial de la ley de conservación para una cantidad vectorial \vec{U} en un volumen arbitrario Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\bar{F}} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{Q}_V d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\bar{Q}}_S d\Omega$$

Donde \vec{Q}_V representa las fuerzas volumétricas, $\vec{\bar{Q}}_S$ las fuerzas de superficie y $\vec{\bar{F}}$ el flujo neto a través de la superficie.

Los flujos $\vec{\bar{F}}$ se generan a partir de dos contribuciones: una contribución debida al transporte convectivo del fluido $\vec{\bar{F}}_C$ y una contribución debida a la agitación molecular, flujo difusivo $\vec{\bar{F}}_D$, que puede estar presente incluso cuando el fluido está en reposo.

El primer componente, flujo convectivo $\vec{\bar{F}}_C$, representa la cantidad de la propiedad que es llevada o transportada por el flujo y, para la cantidad de movimiento, se define como:

$$\vec{F}_C = \rho \vec{u} \times \vec{u}$$

Por lo que, la contribución al flujo debido a las fuerzas superficiales toma la forma:

$$\vec{F}_C \cdot d\vec{S} = \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \vec{u} dm$$

Donde dm es el elemento de flujo másico atravesando $d\vec{S}$.

El segundo componente es un flujo difusivo \vec{F}_D , definido como la contribución presente en los fluidos en reposo, debido al efecto macroscópico de la agitación térmica molecular. El efecto del movimiento molecular se traduce en la tendencia de un fluido hacia el equilibrio y la uniformidad, ya que las diferencias en la intensidad de la cantidad considerada crean una transferencia en el espacio tal que reduce la no homogeneidad. Esta contribución al flujo total es proporcional al gradiente de la cantidad correspondiente, ya que tiene que desaparecer para una distribución homogénea.

Se asume que en un fluido en reposo no es posible la difusión del momento y, por lo tanto, no hay contribución de la difusión al tensor de flujo \vec{F} .

Con el objetivo de determinar todos los términos de la ecuación de conservación, es necesario definir qué fuerzas actúan sobre el momento. Se sabe, de la 2^{da} ley de Newton, que en un sistema físico las variaciones del momento se deben a las fuerzas actuantes sobre el mismo, las mismas pueden ser separadas en fuerzas internas \vec{f}_i y fuerzas externas \vec{f}_e .

El término de fuerzas volumétricas \vec{Q}_V consiste en la suma de las fuerzas volumétricas externas e internas por unidad de volumen $\rho \vec{f}_e$ y $\rho \vec{f}_i$. Mostradas en la Figura 2.

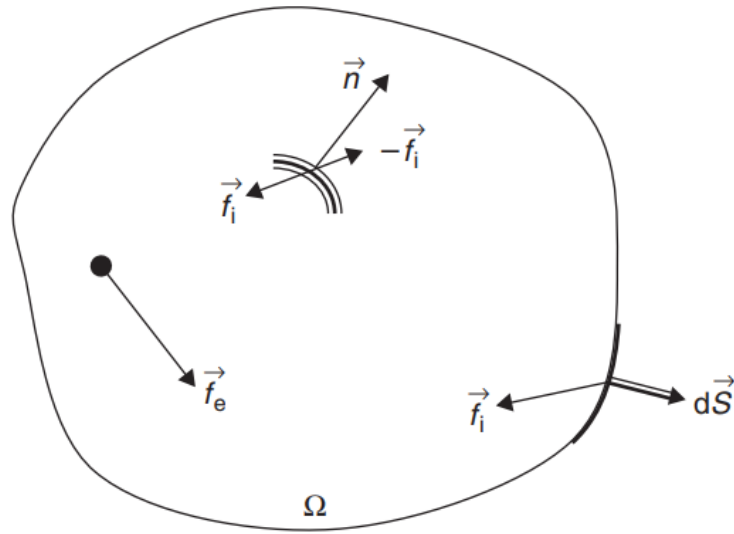


Figura 2 – Fuerzas internas y externas en el volumen Ω .

Las fuerzas internas se cancelan en todos los puntos internos debido a la tercera ley de Newton (acción y reacción) y únicamente los puntos que están actuando sobre la superficie del dominio contribuyen. Estas fuerzas internas, actuando por unidad de superficie, dependen de la posición y de la orientación, definida por un vector normal a la superficie (\vec{n}) y pueden describirse matemáticamente como un tensor de tal manera que:

$$\vec{f}_i = \vec{\sigma} \vec{n}$$

El tensor de tensiones internas $\vec{\sigma}$ es una propiedad local del fluido y las fuerzas internas dependen del signo que se dé por definición al vector normal.

Asumimos, además, que el fluido es newtoniano y que, por lo tanto, el tensor de tensiones internas totales tiene la forma:

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau}$$

Donde \bar{I} es el tensor unitario.

La componente $p\bar{I}$ es la de presiones isotrópicas y $\bar{\tau}$ el tensor de esfuerzos cortantes viscosos, que puede escribirse, para un fluido newtoniano, como:

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right]$$

Donde μ es la viscosidad dinámica.

Este tensor de esfuerzos cortantes viscosos τ_{ij} representa la fuerza de fricción interna de las capas de fluido unas con otras.

Luego de sumar en todo el volumen las fuerzas internas que quedan son únicamente las que actúan en los puntos de la superficie del volumen. Por ello, las fuerzas internas de volumen actúan como fuerzas superficiales con magnitud local $\bar{\sigma} d\vec{S}$. La ecuación de conservación del momento queda como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \oint_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) &= \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \oint_S \bar{\sigma} \cdot d\vec{S} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \oint_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) &= \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_S p \cdot d\vec{S} + \oint_S \bar{\tau} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Gauss queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \oint_S \bar{\sigma} \cdot d\vec{S}$$

Cuándo se introduce la definición del tensor de esfuerzos de corte viscosos en esta ecuación se obtienen las ecuaciones de movimiento de **Navier-Stokes**:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \mu \left[\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \right] + \rho \vec{f}_e$$

Para un fluido incompresible ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) la ecuación de **Navier-Stokes** queda reducida a:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f}_e$$

Dividiendo todo por ρ y considerando que la única fuerza de volumen actuando es la gravedad \vec{g} :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{g}$$

Ecuaciones RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)

La aproximación más aplicada para las aplicaciones industriales de CFD (Computational Fluid Dynamics) es aquella en la que las ecuaciones turbulentas se promedian, en el tiempo, sobre todo el espectro de fluctuaciones turbulentas. Esto da lugar a las llamadas "ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds", que requieren, además, información empírica o al menos semiempírica sobre la estructura de la turbulencia y su relación con el flujo promediado.

El proceso de promediación turbulenta se introduce para obtener las leyes del movimiento de las magnitudes turbulentas promediadas en el tiempo. Este promedio debe definirse de forma que se elimine la influencia de las fluctuaciones turbulentas, sin destruir la dependencia temporal relacionada con otros fenómenos dependientes del tiempo con escalas temporales distintas a las de la turbulencia.

Para realizar esta promediación se considera que cada variable afectada por la turbulencia, por ejemplo la velocidad \vec{u} , puede interpretarse como la suma de dos componentes: una promedio y otra fluctuante:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \overline{\vec{u}}(\vec{x}) + \vec{u}'(\vec{x}, t)$$

Donde $\overline{\vec{u}}(\vec{x})$ puede definirse como:

$$\overline{\vec{u}}(\vec{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \vec{u}(\vec{x}, t) dt$$

Y $\vec{u}'(\vec{x}, t)$ será:

$$\vec{u}'(\vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{x}, t) - \overline{\vec{u}}(\vec{x})$$

Algunas propiedades de esta promediación temporal son:

- a) $\overline{a'} = 0$
- b) $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$
- c) $\overline{\overline{a}} = \overline{a}$
- d) $\overline{\overline{a} \cdot \overline{b}} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
- e) $\frac{\partial \overline{a}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial a}{\partial s}}$
- f) $\overline{a \cdot b} \neq \overline{a} \cdot \overline{b}$
- g) $\overline{a'^2} \neq 0$

Para la primera de las tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

Escribiendo con subíndices las derivadas parciales nos queda:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \nabla^2 u$$

Introduciendo la descomposición de Reynolds tenemos:

Para la derivada temporal u_t :

$$\overline{u}_t + u'_t$$

En cada uno de los tres términos de las derivadas espaciales tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{u} \overline{u_x} + \overline{uu'_x} + \overline{u' \overline{u_x}} + u' u'_x \\ \overline{v} \overline{u_y} + \overline{vu'_y} + \overline{v' \overline{u_y}} + v' u'_y \\ \overline{w} \overline{u_z} + \overline{wu'_z} + \overline{w' \overline{u_z}} + w' u'_z \end{aligned}$$

En el término de la presión:

$$-\frac{1}{\rho}(\bar{p}_x + p'_x)$$

Y el del laplaciano:

$$\nu(\nabla^2 \bar{u} + \nabla^2 u')$$

En cada uno de estos términos se realizará una promediación temporal para poder eliminar la mayor parte de ellos, es decir, promediaremos en el tiempo la ecuación completa de Navier-Stokes. Esto es lo mismo que realizar la suma de los promedios de cada uno de los términos que la componen (propiedad *b*)).

Comenzando por la componente de la derivada temporal, el primer término \bar{u}_t es igual a cero, debido a que estamos promediando respecto al tiempo, sin embargo, por tratarse de un flujo turbulento que, por definición, es no permanente, se tendrá en cuenta una variación temporal introducida en este término. El segundo componente de este término (fluctuaciones) es cero debido a la propiedades *e*) y *a*) vistas anteriormente.

Respecto a los términos de las derivadas espaciales, aplicando la descomposición en cada uno de ellos, tenemos que:

- $\overline{\bar{u} u_x} = \bar{u} \overline{u_x}$,
- $\overline{\bar{u} u'_x} = \bar{u} \overline{u'_x} = \bar{u} 0 = 0$
- $\overline{u' u_x} = \overline{u'} \overline{u_x} = 0 \overline{u_x} = 0$
- $\overline{u' u'_x} \neq 0$ (propiedad *g*))

En el término de la presión, la componente de fluctuaciones es igual a cero $\overline{p'_x} = 0$ debido a la propiedad *g*).

De igual manera, en el término del laplaciano la componente $\overline{\nabla^2 u'} = 0$.

Así, la primera componente de las ecuaciones de Navier Stokes promediadas según Reynolds queda como:

$$\bar{u}_t + \bar{u} \overline{u_x} + \overline{u' u'_x} + \bar{v} \overline{u_y} + \overline{v' u'_y} + \bar{w} \overline{u_z} + \overline{w' u'_z} = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_x + \nu \nabla^2 \bar{u}$$

Reordenando:

$$\bar{u}_t + \bar{u} \overline{u_x} + \bar{v} \overline{u_y} + \bar{w} \overline{u_z} + \overline{u' u'_x} + \overline{v' u'_y} + \overline{w' u'_z} = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_x + \nu \nabla^2 \bar{u}$$

Aplicando la regla de la cadena a los términos de fluctuaciones se obtiene, en cada uno de ellos:

$$\begin{aligned} \overline{u' u'_x} &= \overline{\frac{\partial u' u'}{\partial x}} - u' \overline{\frac{\partial u'}{\partial x}} \\ \overline{v' u'_y} &= \overline{\frac{\partial v' u'}{\partial y}} - u' \overline{\frac{\partial v'}{\partial y}} \\ \overline{w' u'_z} &= \overline{\frac{\partial w' u'}{\partial z}} - u' \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}} \end{aligned}$$

Si sumamos los segundos términos de la derecha de estas tres componentes obtenemos lo siguiente:

$$\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} = \overline{u' (\nabla \cdot \vec{u'})}$$

Y $\nabla \cdot \vec{u'} = 0$ para un fluido incompresible. Esto surge de aplicar la descomposición de Reynolds a la ecuación de continuidad.

Escribiendo nuevamente la ecuación de Navier Stokes promediadas según Reynolds queda como:

$$\overline{u_t} + \overline{u} \overline{u_x} + \overline{v} \overline{u_y} + \overline{w} \overline{u_z} + \frac{\overline{\partial u' u'}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial v' u'}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial w' u'}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \overline{p_x} + \nu \nabla^2 \overline{u}$$

Escribiendo en notación indicial tenemos las tres componentes de RANS como sigue:

$$\overline{u_t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + g_i$$

Como se puede observar esta ecuación está casi totalmente en términos de las componentes medias de las variables a excepción por los términos de fluctuaciones $\overline{u' u'}$, que son conocidos como las tensiones de Reynolds (Reynolds stresses). Esto es porque cuando se las deriva respecto al espacio adquieren unidades de fuerza por unidad de volumen. Por ello se los suele mover al lado derecho de la ecuación y se los puede interpretar como tensiones debidas a la turbulencia del flujo. El hecho de que estas tensiones no puedan eliminarse mediante la promediación de las ecuaciones se conoce como el **problema del cierre**. Para resolver este problema se necesitan **modelos de cierre**, que intentan aproximar estos términos en función de las variables promediadas. Uno de los modelos más sencillos es el **modelo de Boussinesq** que se desarrolla a continuación.

Modelo de Boussinesq

El modelo de cierre de Boussinesq es uno de los modelos más simplificados para resolver el término de las tensiones de Reynolds. Este enfoque fue propuesto por Boussinesq en 1877 y se afirma que el tensor de esfuerzo de Reynolds es proporcional al tensor de velocidad de deformación media, multiplicado por una constante ν_T (que llamaremos viscosidad de remolino turbulento).

La hipótesis de Boussinesq es análoga a la que se adopta cuando se trata de flujos newtonianos, en los que se supone que las tensiones viscosas son proporcionales a las tensiones de cizallamiento, por tanto, al gradiente de velocidad

La aproximación de Boussinesq reduce el proceso de modelación de la turbulencia desde la búsqueda de las seis tensiones turbulentas hasta la determinación de un valor adecuado o de la viscosidad turbulenta de los remolinos ν_T .

Recordando el concepto de fluido Newtoniano:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Donde μ es la viscosidad dinámica y $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ son las derivadas de las velocidades instantáneas.

En los modelos de viscosidad de remolino, el tensor de tensiones de Reynolds puede expresarse, de manera análoga, como:

$$\tau_{ijT} = \overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Siendo ν_T la viscosidad de remolino.

Es importante notar que ν_T , a diferencia de la viscosidad dinámica ν , no es propiedad del fluido sino del flujo, y por lo tanto es una variable que depende precisamente de las velocidades del flujo.

Teniendo en cuenta esto se pueden reescribir las ecuaciones RANS como:

$$\bar{u}_t + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + g_i$$

Ecuaciones para representar el problema

Como se mencionó en la introducción el problema consiste en el modelado bidimensional de un canal con un escalón de fondo (Figura 1). A continuación se presentan las ecuaciones utilizadas para el modelado.

Sistema de ecuaciones

Ecuación de momento en x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + (\nu + \nu_T) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)$$

Ecuación de momento en z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) - g$$

Ecuación de Laplace para la presión:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

A los fines de facilitar la implementación de esta ecuación se llama b al término de la derecha, como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = b$$

$$b = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

Condiciones iniciales

Se impone que al momento inicial ($t = 0$) los valores para las velocidades y para la presión son:

$$u = 1,5 \text{ m/s}$$

$$w = 0 \text{ m/s}$$

$$p = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{ en } z = h \\ \rho g z & \rightarrow \text{ en el eje } z \end{cases}$$

Condiciones de contorno

Las condiciones que se imponen en los contornos del dominio son:

u y w periódicas en $x = 0$ y $x = 15$ (inicio y final del canal)

$u = w = 0$ en $z = 0$ (fondo del canal)

$$u = w = 0 \text{ en } 3 < x < 7 \text{ y } 0 < z < 1 \text{ (escalón de fondo)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 4 \text{ y } z = 0 \text{ (fondo del canal y superficie libre)}$$

Esquema de diferencias finitas

Para realizar la discretización de las ecuaciones en diferencias finitas utilizado el siguiente criterio:

- Hacia adelante en el tiempo: ya que de esta forma se pueden calcular las variables del tiempo siguiente en base al tiempo actual.
- Hacia atrás en el espacio: debido a que la física del problema indica que el movimiento del fluido es desde aguas arriba hacia aguas abajo.
- Centrada para la presión: debido a que la presión actúa por igual en todas las direcciones.

Las ecuaciones finales se muestran a continuación:

Ecuación de momento en x :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,k}^{n+1} - u_{i,k}^n}{\Delta t} + u_{i,k}^n \frac{u_{i,k}^n - u_{i-1,k}^n}{\Delta x} + w_{i,k}^n \frac{u_{i,k}^n - u_{i,k-1}^n}{\Delta z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,k}^n - p_{i-1,k}^n}{2\Delta x} \\ + (v + v_T) \left(2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{\Delta z^2} \right. \\ \left. + \frac{w_{i,k} - w_{i-1,k} - w_{i,k-1} + w_{i-1,k-1}}{\Delta x \Delta z} \right) \end{aligned}$$

Despejando $u_{i,k}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} u_{i,k}^{n+1} = u_{i,k}^n + \Delta t \left[-u_{i,k}^n \frac{u_{i,k}^n - u_{i-1,k}^n}{\Delta x} - w_{i,k}^n \frac{u_{i,k}^n - u_{i,k-1}^n}{\Delta z} - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,k}^n - p_{i-1,k}^n}{2\Delta x} \right. \\ \left. + (v + v_T) \left(2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{\Delta z^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{w_{i,k} - w_{i-1,k} - w_{i,k-1} + w_{i-1,k-1}}{\Delta x \Delta z} \right] \end{aligned}$$

Ecuación de momento en z :

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,k}^{n+1} - w_{i,k}^n}{\Delta t} + u_{i,k}^n \frac{w_{i,k}^n - w_{i-1,k}^n}{\Delta x} + w_{i,k}^n \frac{w_{i,k}^n - w_{i,k-1}^n}{\Delta z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,k+1}^n - p_{i,k-1}^n}{2\Delta z} \\ + (v + v_T) \left(\frac{w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}}{\Delta x^2} + 2 \frac{w_{i,k+1} - 2w_{i,k} + w_{i,k-1}}{\Delta z^2} \right. \\ \left. + \frac{u_{i,k} - u_{i-1,k} - u_{i,k-1} + u_{i-1,k-1}}{\Delta x \Delta z} \right) - g \end{aligned}$$

Despejando $w_{i,k}^{n+1}$:

$$w_{i,k}^{n+1} = w_{i,k}^n + \Delta t \left[-u_{i,k}^n \frac{w_{i,k}^n - w_{i-1,k}^n}{\Delta x} - w_{i,k}^n \frac{w_{i,k}^n - w_{i,k-1}^n}{\Delta z} - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,k+1}^n - p_{i,k-1}^n}{2\Delta z} \right. \\ \left. + (v + v_T) \left(\frac{w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}}{\Delta x^2} + 2 \frac{w_{i,k+1} - 2w_{i,k} + w_{i,k-1}}{\Delta z^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{u_{i,k} - u_{i-1,k} - u_{i,k-1} + u_{i-1,k-1}}{\Delta x \Delta z} \right) - g \Big]$$

Ecuación de Laplace para la presión:

$$\frac{p_{i-1,k} - 2p_{i,k} + p_{i+1,k}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,k-1} - 2p_{i,k} + p_{i,k+1}}{\Delta z^2} = b$$

Siendo b :

$$b = \rho \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2\Delta x} + \frac{w_{i,k+1} - w_{i,k-1}}{2\Delta z} \right) \\ - \rho \left(\frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2\Delta x} \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2\Delta x} + 2 \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2\Delta z} \frac{w_{i+1,k} - w_{i-1,k}}{2\Delta x} \right. \\ \left. + \frac{w_{i,k+1} - w_{i,k-1}}{2\Delta z} \frac{w_{i,k+1} - w_{i,k-1}}{2\Delta z} \right)$$

Despejando $p_{i,k}$:

$$\Delta z^2 (p_{i-1,k} - 2p_{i,k} + p_{i+1,k}) + \Delta x^2 (p_{i,k-1} - 2p_{i,k} + p_{i,k+1}) = b \Delta z^2 \Delta x^2 \\ - 2p_{i,k} (\Delta z^2 + \Delta x^2) = -\Delta z^2 (p_{i-1,k} + p_{i+1,k}) - \Delta x^2 (p_{i,k-1} + p_{i,k+1}) + b \Delta z^2 \Delta x^2 \\ p_{i,k} = \frac{\Delta y^2 (p_{i-1,k} + p_{i+1,k}) + \Delta x^2 (p_{i,k-1} + p_{i,k+1}) - b \Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$$

Implementación en Python

La implementación del esquema para resolver el problema planteado se realiza mediante un código desarrollado en el lenguaje de programación Python en el que se definen las variables del modelado, las variables físicas, se imponen las condiciones iniciales y de contorno y se resuelven para una cantidad de iteraciones determinada las ecuaciones mencionadas y discretizadas anteriormente.

Variables del modelado:

- Cantidad de puntos para cada eje $nx = nz = 81$,
- Número de iteraciones para el cálculo de las presiones $nt = 50$,
- Número de iteraciones para el cálculo de las velocidades $it = 1000$ y
- Paso de tiempo $dt = 0,005$.

Variables físicas:

- Peso específico del agua $\rho = 1000 [kg/m^3]$,
- Viscosidad $\nu = 1 \times 10^{-5} [m^2/s]$,
- Viscosidad de remolino $\nu_T = 1 \times 10^{-6} [m^2/s]$ y
- Gravedad $g = 9,81 [m/s^2]$.

Resultado en Python

A continuación, en las Figuras 3 a 5, se muestran los resultados obtenidos.

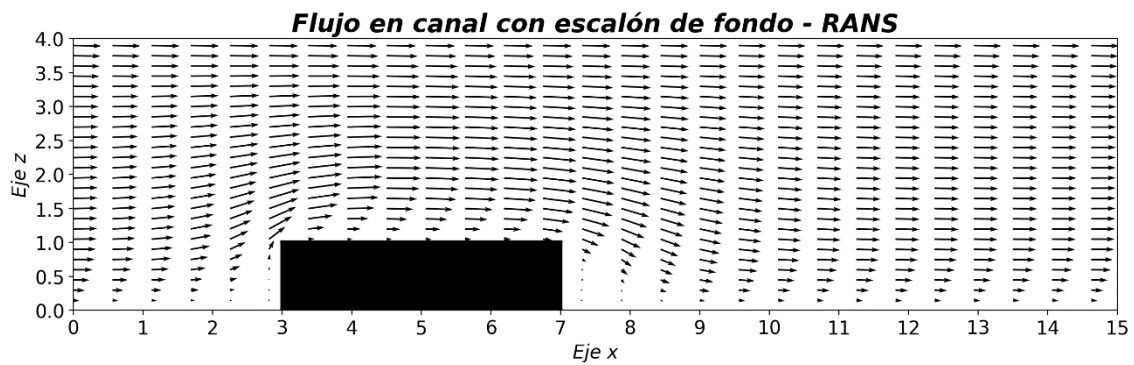


Figura 3 – Flujo en canal con escalón de fondo, modelado con RANS.

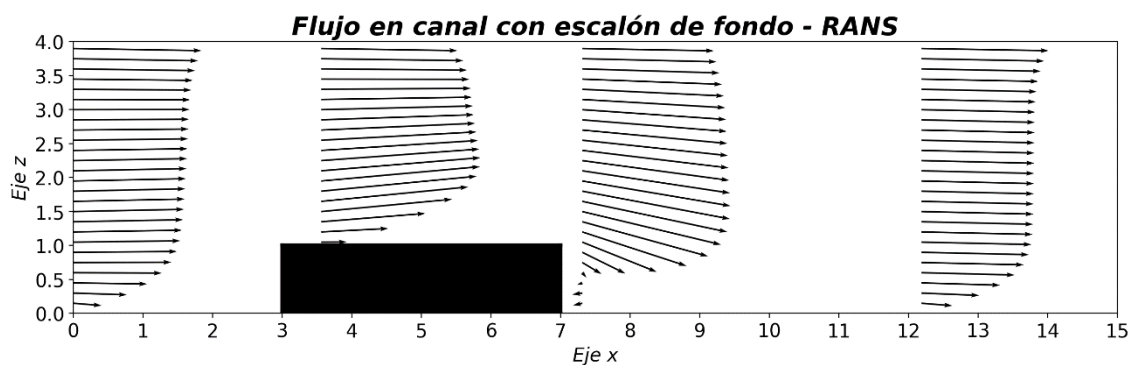


Figura 4 – Flujo en canal con escalón de fondo, perfiles de velocidad.

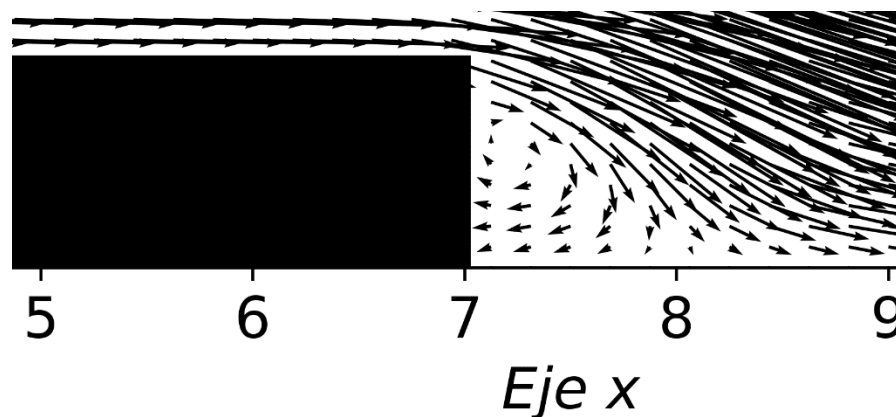


Figura 5 – Acercamiento al flujo aguas abajo del escalón de fondo.

Implementación en OpenFOAM

Sobre OpenFOAM

OpenFOAM¹ (Open Source Field Operation and Manipulation) fue publicado por primera vez como código abierto por OpenCFD Ltd. en 2004. Desde entonces ha madurado hasta convertirse en el principal software de código abierto para la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). Hoy en día OpenCFD continúa siendo la entidad principal que promueve su desarrollo y mantenimiento abierto, colaborativo y progresivo, con el apoyo declarado a largo plazo de socios de la industria, el mundo académico y personas clave.

¹ <https://www.openfoam.com/>

OpenFOAM es ante todo, una librería C++ que se utiliza principalmente para crear aplicaciones. Las aplicaciones se clasifican en dos categorías: “solucionadores”, que son cada uno diseñado para resolver un problema específico en la mecánica de medios continuos, y “utilitarios” que están diseñados para realizar tareas que implican la manipulación de datos. El programa cuenta con numerosos solucionadores y utilitarios que cubren una amplia gama de problemas.

Geometría y malla

Para utilizar el OpenFOAM se necesita realizar un archivo con la geometría a solucionar y una malla del mismo, en este caso para ello se utilizó SALOME². SMESH - Salome MESH - es el módulo de malla de SALOME que proporciona una amplia gama de algoritmos de mallado especialmente adecuados para los métodos de elementos finitos y de volumen finito. Las operaciones de mallado pueden ser gestionadas en su totalidad por códigos de Python para garantizar la completa reproducibilidad y parametrización del proceso de simulación. El módulo SMESH incluye varias funciones de control de calidad de la malla. Además, la edición de una malla para eliminar, añadir o transformar algunos o varios de sus elementos de malla también es posible a través de la sencilla interfaz gráfica de SALOME.

La geometría realizada para la situación a simular se presenta en la Figura 6.

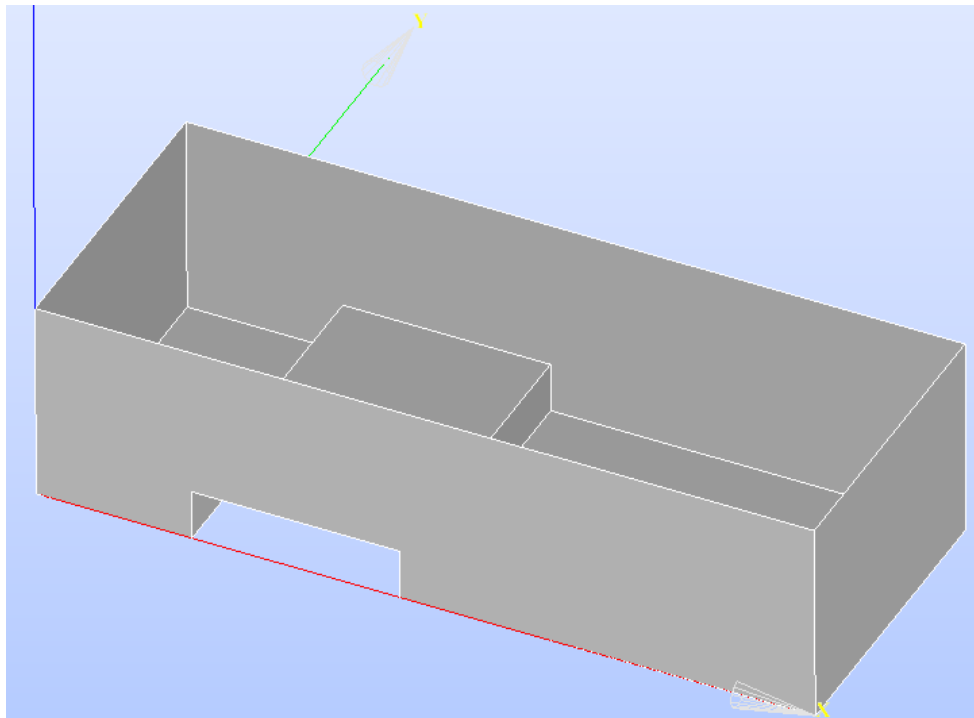


Figura 6 – Geometría del problema en SALOME.

Para realizar la malla se utilizó el método de elementos finitos (MEF) que permite obtener una solución numérica aproximada sobre un medio continuo (cuerpo, estructura o dominio) sobre el que están definidas ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento físico del problema. El método consiste en dividir al dominio en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados “elementos finitos”. El conjunto de estos elementos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados “nodos”. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito

² <https://www.salome-platform.org/>

puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama “malla”. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas).

Típicamente el análisis de los elementos finitos se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas, las deformaciones y tensiones respectivamente.

En la Figura 7 se muestra la malla realizada en el mismo programa.

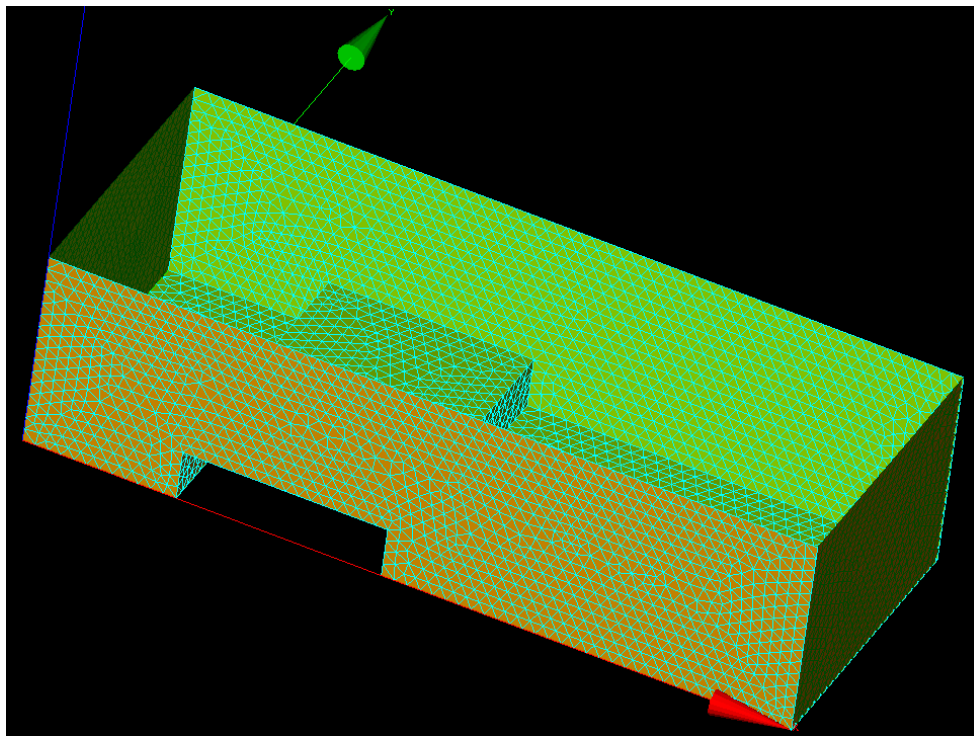


Figura 7 – Malla del problema a simular en SALOME.

Condiciones de la implementación y resultados

Para realizar la implementación del modelo se impusieron las siguientes condiciones iniciales y de borde:

- en el ingreso se planteó un caudal uniforme de $10 \text{ m}^3/\text{s}$,
- en las paredes se planteó velocidad nula en las paredes laterales, así como en el escalón,
- en la parte superior se impuso presión atmosférica uniforme igual a cero,
- y en la salida flujo uniforme.

La simulación se realizó para un tiempo final de 50 segundos con el volumen de control inicialmente vacío y grabando los datos de la corrida cada 0,5 s.

De esta manera, se obtuvo el resultado mostrado en la Figura 8. Allí se muestran las líneas de corriente que pasan por distintos puntos para el tiempo final de simulación. En la misma se puede observar, cómo es esperable, el aumento de la velocidad hacia la superficie libre y la recirculación producida inmediatamente aguas abajo del escalón.

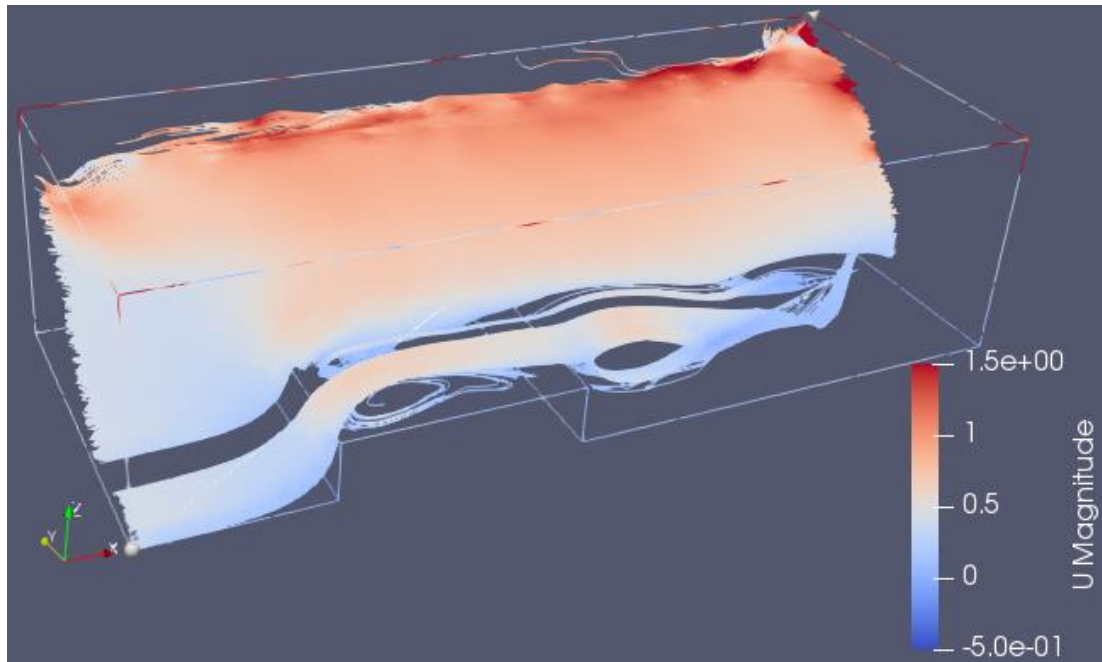


Figura 8 – Resultado de la implementación en OpenFOAM.

Conclusiones

Se logró representar, mediante un esquema de diferencias finitas programado en lenguaje Python, un problema de geometría sencilla (escalón de fondo) para una situación bidimensional con las ecuaciones RANS, obtenidas a partir de la ley de conservación para una cantidad vectorial.

Así mismo, se realizó una simulación en el programa OpenFOAM para la misma geometría y con el mismo sistema de ecuaciones. Los resultados obtenidos por ambos modelos tienen diferencias principalmente en la representación de la variabilidad debida a la turbulencia del flujo que es más detallada en el modelo OpenFOAM; sin embargo, representan de forma similar la recirculación que se produce aguas abajo del escalón de fondo y la variación vertical de la velocidad.

Bibliografía

- Apuntes de Hidrodinámica de Cuerpos de agua – curso de posgrado, dictado por el Dr. Lucas Domínguez Ruben, para el Doctorado en Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. Disponibles en: <https://ldominguezruben.gitlab.io/hidrodinamica-de-cuerpos-de-agua-fich-unl/index.html>.
- Apuntes del Dinámica de Fluidos Geofísica – curso de posgrado, dictado por el Dr. Fabián A. Bombardelli, del Departamento de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata.
- Hirsch, C. (2007), Numerical Computation of Internal and External flows: The fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Elsevier.
- J. J. Benito Muñoz, R. Álvarez Cabal, F. Ureña Prieto, E. Salete Casino, E. Aranda Ortega (2014): Introducción al Método de los Elementos Finitos, UNED, Madrid, 2014.