

## Actividad N01

En el siguiente informe se presenta la resolución de las actividades entregables para el curso de "Turbulencia en Flujos" dentro del Doctorado de Ingeniería.

### 1. Experiencia de Reynolds

Reynolds realizó un experimento en el cual inyectó una solución coloreada sobre la corriente principal de agua. Y observó que para bajas velocidades, el flujo coloreado circulaba intacto a lo largo de la corriente principal, formando capas o láminas paralelas a la corriente del flujo, sin que se produjesen mezclas en la dirección transversal, es decir estaba frente a un flujo laminar. Al aumentar la velocidad del flujo principal, aparece una situación a partir de la cual el coloreante se difunde uniformemente a través de toda la sección transversal de la corriente; siendo esta última, una característica del flujo turbulento.

El experimento realizado por Reynolds cuenta con dos tubos concéntricos, por los cuales circula dos fluidos, uno perteneciente al flujo principal, y el otro es un colorante que presenta contraste con el anterior. Dichos tubos deben ser transparentes o translúcidos para poder detectar la difusión del colorante sobre el fluido principal. Del tubo con colorante se desprende un tubo capilar de inyección que se introduce de forma concéntrica sobre el anterior. Sobre dicho conducto se encuentra una válvula que regula la cantidad de colorante inyectado.

El extremo de la aguja se encuentra sobre una tobera de aristas redondeadas para generar la menor perturbación posible sobre el flujo. Por otro lado, al otro extremo (a la salida del tubo principal) se encuentra otra válvula; que regula el caudal del canal principal hasta el depósito de medida.

Metodología:

- Nivel de agua constante en el depósito de alimentación
- Regulación del colorante inyectado
- Cálculo del caudal de llenado de la probeta

A velocidades bajas, el colorante inyectado se mantiene como un hilo nítido, recto y con pocas fluctuaciones, manifestación del flujo laminar. Al aumentar la velocidad del canal principal, el hilo se altera, dando comienzo a oscilaciones en el flujo del colorante. Esto es indicativo del régimen de transición. Luego al cabo de una distancia, debido al efecto anterior, el colorante se difunde por completo a través de la tubería.

Reynolds caracterizó este efecto con un parámetro adimensional denominado número de Reynolds, el cual depende del flujo y del fluido. Del fluido debido a que inciden las propiedades físicas del mismo (viscosidad cinemática) y a su vez del flujo debido a la velocidad del mismo ( $\bar{v}$ ). En rigor de verdad, depende solamente del flujo, ya que si bien incide el fluido, Reynolds normalizó este parámetro de forma que

sea una propiedad específica, es decir, independiente del mismo. Esto se lleva a cabo dividiendo al parámetro por la viscosidad del fluido.

Este parámetro establece la relación entre las fuerzas inerciales y con viscosas.

$$\begin{aligned} Re &= \frac{F_{inerciales}}{F_{viscosas}} \\ Re &= \frac{\text{densidad} \cdot \text{velocidad} \cdot \text{long. carac}}{\text{viscosidad dinámica}} \quad (1) \\ Re &= \frac{\rho \cdot v \cdot \phi}{\mu} = \frac{v \cdot \phi}{\nu} \end{aligned}$$

En función de dicho valor, se puede caracterizar al flujo según:

- $Re < 2000$ , flujo laminar
- $Re > 4000$ , flujo turbulento
- $2000 < Re < 4000$ , flujo inestable o de transición

### 2. Flujos turbulentos

#### 2.1. Características

Uno de los aspectos a resaltar es que la turbulencia no es una característica del fluido sino del flujo, es decir de las condiciones de circulación de fluido. La misma presenta las siguientes características:

1. Propiedad del flujo y no del fluido
2. Comportamiento Aleatorio
3. Irregular en el espacio y el tiempo
4. Tridimensional, 3D
5. Amplio rango de escalas en espacio y tiempo.
6. Vorticidad Aleatoria
7. Gran difusividad
8. Fuerte No-Linealidad
9. Anisotropía a escalas mayores
10. Isotropía a escalas menores

Propiedad del flujo y no del fluido: Para un mismo fluido se pueden tener diferentes comportamientos, ya que al variar la velocidad de circulación o la longitud característica de un objeto (diámetro de cañería, área frontal de un perfil alar, etc) se tienen distintos números de Reynolds y por ende distintas relaciones entre las fuerzas inerciales y las viscosas; produciendo comportamientos diferentes.

Comportamiento Aleatorio: La turbulencia es un fenómeno caracterizado por una gran componente estocástica debido a que se resuelve el valor medio del campo velocidad

( $\overline{U}$ ). Esto lejos de ser predecible le confiere al sistema un comportamiento caótico.

Irregular en el espacio y el tiempo: La turbulencia es un fenómeno estocástico, es decir está gobernado por el azar y es impredecible. No respeta simetrías y presenta anisotropía a escalas macroscópicas lo cual hacen variar su comportamiento en el espacio y el tiempo.

Tridimensional, 3D: Una de las diferencias entre el flujo laminar y turbulento es que en el primero, el flujo se desplaza en capas o cilindros bien definidos, mientras que en el segundo, las fluctuaciones producidas generan componentes transversales de la velocidad, donde dichas componentes varían en todo los planos. No es posible considerar turbulencia en menores dimensiones a  $R^3$ , ya que en dicho caso se estaría asumiendo hipótesis de simetría de flujo en alguna dirección, contraponiéndose a la hipótesis de que las fluctuaciones generan variaciones en todo los planos.

Amplio rango de escalas en espacio y tiempo: La turbulencia se compone por una gran cantidad de remolinos denominados vórtices, los cuales van de escalas micrométricas a longitudes del orden del metro de diámetro. Los tamaños dependen de las dimensiones del flujo principal, y generan un espectro de remolinos de gran amplitud.

Vorticidad Aleatoria: La turbulencia está caracterizada por remolinos los cuales son estructuras que se coalescen, se dividen, se deforman y por sobre todo rotan. Estos remolinos tienen el tamaño relacionado con la región donde se produce la turbulencia, capa límite, canal, etc. Dichos remolinos son las estructuras que poseen la mayor parte de la energía de la turbulencia, y a medida que se transportan pierden energía transformándose en remolinos más pequeños hasta que no pueden existir como una estructura independiente y son absorbidos por el medio en forma de calor. A este proceso se lo conoce como difusión del vórtice en forma de calor. Lo más característico de los remolinos de la turbulencia es que se puede predecir el tamaño de estos, pero no donde van a estar ubicados, lo que transforma a este fenómeno en un proceso estocástico (aleatorio).

Gran difusividad: Presencia de mezcla de partículas que se transportan. La difusividad es el flujo no material, es decir, el transporte de la materia a través de ella misma. Debido a la presencia de remolinos en todas las escalas, lo mismos favorecen la difusión tanto de momento como de calor.

Fuerte No-Linealidad: Impredecible, presenta un comportamiento caótico ya que depende sensiblemente de las condiciones de los estados previos. Así mismo, la no-linealidad produce el alargamiento de los remolinos, una de responsables de que se mantengan los vórtices en las 3 dimensiones. Anisotropía a escalas mayores: La turbulencia se caracteriza por la presencia de remolinos aleatorios que le confieren un carácter estocástico, dando lugar a comportamientos irregulares en el espacio y el tiempo. Esta particularidad hace impredecible determinar su comportamiento, por lo que a escalas macroscópicas dependiendo de la dirección de análisis se tendrán diferentes propiedades.

Isotropía a escalas menores: A medida se analizan porciones más pequeñas, es decir, que la escala de análisis aumen-

ta, se aprecia que el fenómeno aleatorio comienza a respetar ciertos patrones, adquiriendo una cierta predicibilidad de la situación. Por lo que estos patrones le confieren comportamientos similares en todas las direcciones de estudio, lo que genera la isotropía en las pequeñas escalas. Este argumento fué generado por *Kolmogorov* donde además enunció que las pequeñas escalas depende sólo de dos parámetros: viscosidad ' $\nu$ ' y tasa de disipación ' $\epsilon$ '.

## 2.2. Aplicaciones Flujos Turbulentos

En la presente sección se describen situaciones de flujos turbulentos en el área de investigación perteneciente al campo de aplicación de la tesis doctoral, la cual tiene una fuerte componente de aerodinámica externa.

Previo a las aplicaciones, se procede a detallar el fenómeno del flujo externo sobre un objeto. Debido a la condición de no-deslizamiento del fluido, este cuando se encuentra en contacto con la superficie de un sólido, adquiere la velocidad del mismo. Como la variable en cuestión es la velocidad relativa entre el aire y el objeto, durante el análisis de flujo externo, se inmoviliza al objeto y se impone como condición inicial del flujo a la velocidad relativa entre ambos. Como el sólido se encuentra inmóvil, la velocidad del fluido sobre la superficie de este será nula; y a medida que se aleja del mismo, dicha velocidad aumenta hasta alcanzar la velocidad de la corriente libre. A dicha región donde se genera el espectro de velocidades desde cero hasta la velocidad de corriente libre del fluido se la conoce como *capa límite*, y esta puede tener un comportamiento laminar o turbulento.

Capa límite laminar: La superficie ejerce una fuerza sobre el fluido y por ende el fluido aplica una fuerza igual y opuesta que se conoce como fricción de la superficie. Dentro de la capa límite se tiene un flujo laminar, donde las distintas capas de fluido (regiones de iso-velocidad) se desplazan paralelas entre ellas.

Si la superficie es extensa y la velocidad de corriente libre elevada, la velocidad dentro de la capa límite aumenta y esta se vuelve turbulenta.

Capa límite turbulenta: Dentro de la región comienzan a generarse componentes de la velocidad transversales, haciendo que el fluido se mezcle debido a las oscilaciones, permitiendo que el fluido que circula más rápido se acerque a la superficie y esto hace que aumente la fricción entre el fluido y la superficie.

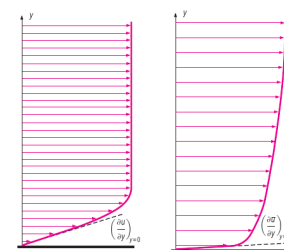


Figura 1: Capa límite laminar vs turbulenta, Figura obtenida de [Cengel and Cimbala, ].

### 2.2.1. Aplicaciones Aerodinámicas

#### 1. Flujo alrededor de un cilindro, calles de Von-Karman:

Es una inestabilidad del flujo en el cual, debido a la presencia de un objeto circular aguas arriba, produce oscilaciones periódicas sobre el flujo aguas abajo. Dichas oscilaciones inducen vibraciones en el objeto, las cuales pueden ser peligrosas si se asemejan con la frecuencia natural del mismo; ya que el objeto entra en resonancia. Esta fue la causa del colapso del puente de Tocomá, ([link-video](#)) Tacoma Bridge. Este fenómeno puede apreciarse sobre las antenas de los automóviles, barreras de peaje, etc.

2. **Generadores de vórtices sobre perfiles alares:** La finalidad es mezclar el flujo más alejado de la capa límite con el flujo más próximo a la superficie de la misma, de esta forma los flujos con mayor velocidad le transfieren energía al fluido cercano a la superficie para poder contrarrestar la fricción que genera la superficie. De este modo, se prolonga el tiempo/distancia que el flujo se encuentra en contacto con la superficie alar, permitiendo prolongar la sustentación del perfil. Este efecto es el medio para atrasar el desprendimiento de la capa límite, evitando la pérdida de sustentación, conocida como entrada en pérdida o *stall*.

3. **Disminución de la resistencia aerodinámica mediante el aumento de rugosidad de la superficie:** Este ejemplo se utiliza en las pelotas de golf, donde se induce una capa límite turbulenta con la finalidad de disminuir la resistencia aerodinámica. En principio al tener una superficie lisa, se tiene una capa límite laminar; la cual genera una menor fricción, pero esta al desprenderse genera una gran resistencia de arrastre por presión. Si se fuerza a la capa límite para que se vuelva turbulenta, esta genera una mayor fricción que la laminar, pero tiene la particularidad de que el flujo permanecerá más tiempo en contacto con la superficie y atrasa la separación/desprendimiento de la capa límite. Es una solución de compromiso que se opta para reducir la estela que genera el objeto; y de esta manera se disminuye la presión de arrastre.

## 3. Mapa Logístico

Sea la función logística:

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n) \quad (2)$$

donde  $x_n$  es el valor actual,  $x_{n+1}$  el siguiente valor y ' $a$ ' la restricción del sistema, siendo este el parámetro del sistema que domina la dinámica del mismo.

La Ec.(2) es una ecuación no lineal que se emplea en gran medida para representar crecimiento o decrecimiento de poblaciones en recintos cerrados. Si bien parece representar una ecuación simple, bajo ciertas condiciones adquiere un comportamiento caótico, de gran complejidad, gobernado particularmente por la restricción del sistema, ' $a$ '.

Se implementa en lenguaje de programación python la Ec.(2) donde para una restricción fija del sistema ' $a$ ', se varía la cantidad de muestras, ' $N$ '.

$a$	N=1000	N=1001	N=1002	N=1003
1,5	0,33333	0,33333	0,33333	0,33333
2,5	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000
3.3	0.82360	0.47942	0.82360	0.47942
3.5	0.82694	0.50088	0.87499	0.38281

Cuadro 1: Soluciones ecuación logística

La T.(?) manifiesta que el sistema, es sensible a la cantidad de muestras adoptadas, según sean las restricciones del sistema. Se aparecía que tanto para el primer ejemplo, ' $a=1.5$ ' como en el segundo, ' $a=2.5$ '; el sistema converge a un único valor, sin importar la cantidad de muestras evaluadas Fig.(2a) y Fig.(2b).

Sin embargo para el 3<sup>er</sup> ejemplo, Fig.(2c), el sistema oscila entre dos soluciones posibles, y para el último caso Fig.(2d), el sistema oscila entre cuatro soluciones. Se procede a graficar las soluciones a los cuales converge la Ec.(2) para los ejemplos citados en la T.(?).

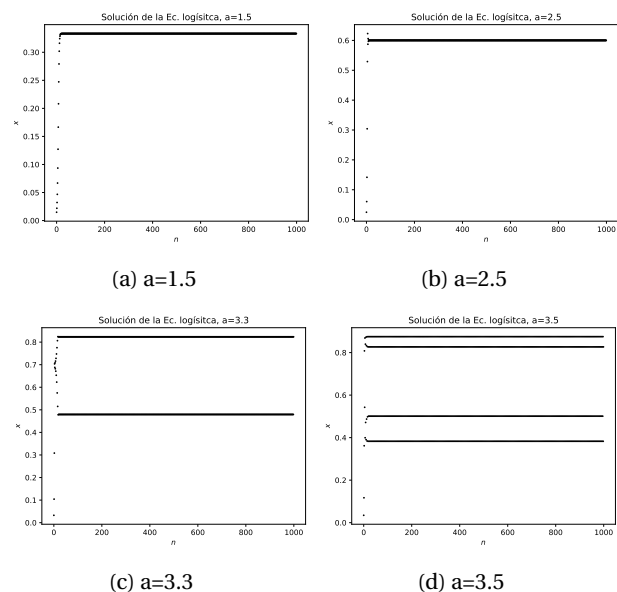


Figura 2: Solución Ec. Logística según restricciones del sistema, zona solución periódica.

Finalmente, se realiza el análisis de la solución de la Ec.(2) según las restricciones del sistema. Previamente, en la Fig.(2) se evaluaron los valores a los cuales converge la Ec.(2), ahora el análisis pretende evaluar la cantidad de soluciones que tiene el sistema para distintas restricciones, ' $a$ '. Dicho estudio evidencia que el sistema convergerá a ' $N$ ' cantidad de valores según sea dicha constante ' $a$ '. La Fig.(3) presenta los distintos ejemplos de la T.(?), donde la cantidad de soluciones de la ecuación logística es igual a la cantidad de veces que la recta interseca al diagrama de bifurcación para una dada restricción del sistema.

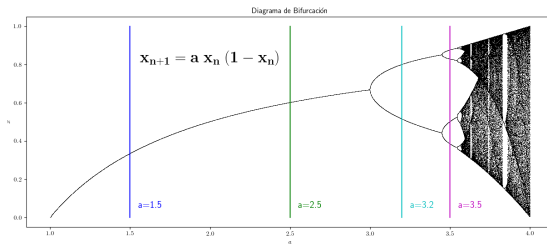


Figura 3: Diagrama de Bifurcación.

Por último, se menciona que existe una relación entre el diagrama de bifurcación y los fractales de Mandelbrot, Fig.(4). Este tipo de estructura denominadas fractales de Mandelbrot, se obtiene al resolver la serie, Ec.(3), y presenta cualidades características como ser una figura de superficie finita con perímetro infinito, se encuentra completamente interconectado y por último, pero una de las más importantes, es que presenta la propiedad de **autosimilitud**, la cual se caracteriza por la **existencia de semejanzas a diferentes escalas**.

$$\begin{cases} z_0 = 0, & z_0 \in \mathbb{C} \\ z_{n+1} = z_n^2 + c, & c \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (3)$$

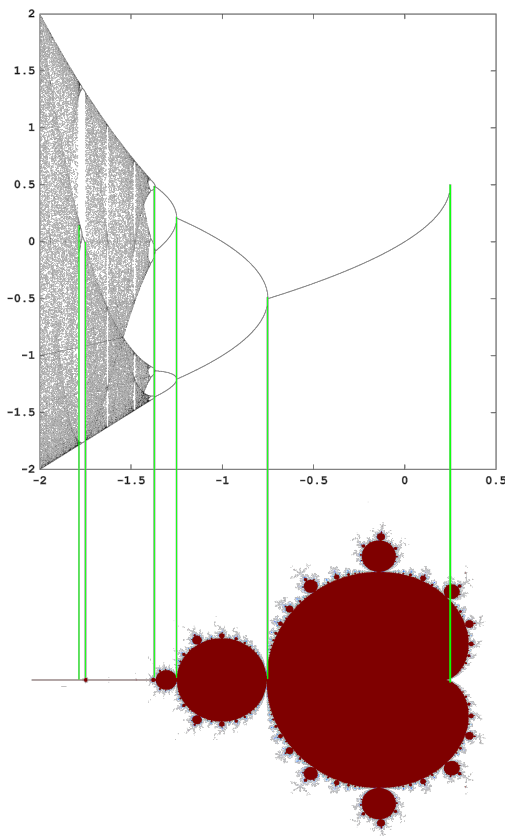


Figura 4: Diagrama de Bifurcación y Fractal de Mandelbrot.

## 4. Caos

### 4.1. Caos

*El caos es un concepto matemático que significa que el sistema es altamente sensible a las condiciones iniciales.*

Siguiendo con el análisis de la Fig.(3), Sec.(3), se estudian las soluciones de la Ec.(2) para restricciones del sistema cuyos valores sean mayores a 3.5, es decir  $a > 3.5$ , Fig.(5).

Se evidencia que para restricciones mayores a ' $a > 3.5$ ' se pierde el comportamiento periódico. La Fig.(5a) mantiene la solución periódica convergiendo a 8 valores dependiendo de las condiciones de iteración. Ya para restricciones mayores, Fig.(5b) se pierde esa estabilidad y la solución deja de ser predecible y comienza a ser aleatoria hasta alcanzar soluciones muy diferentes entre sí: Fig.(5c) y Fig.(5d).

Este fenómeno que es completamente aleatorio y se encuentra altamente influenciado por las condiciones iniciales se denomina con el nombre de *caos*.

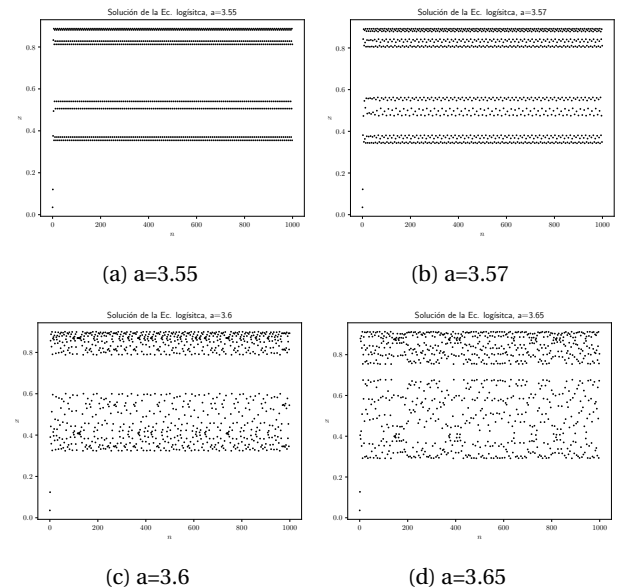


Figura 5: Solución Ec. Logística según restricciones del sistema, zona solución caótica.

En función de este comportamiento se estudia el valor a partir del cual el sistema deja de tener un comportamiento periódico con solución predecible y adquiere un comportamiento caótico. Dicho valor se conoce como constante de Feigenbaum, Fig.(6).

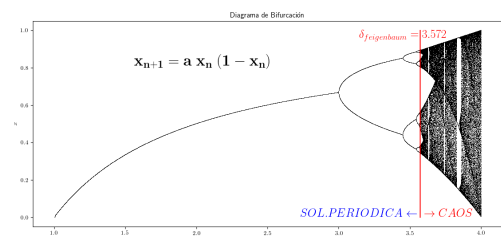


Figura 6: Diagrama de Bifurcación y cte de Feigenbaum.

## 4.2. Constante de Feigenbaum

Sea  $r_i$  los puntos de bifurcación, Feigenbaum descubrió que el cociente entre las distancias consecutivas de dichos puntos disminuye a medida que el sistema se acerca al caos.

$$d_1 > d_2 > d_3 > \dots > d_n$$

$$\frac{d_1}{d_2}, \frac{d_2}{d_3}, \frac{d_3}{d_4} \dots \frac{d_n}{d_{n+1}} \quad (4)$$

Además, Feigenbaum demostró que dichos valores tienen a un valor definido, [Feigenbaum, 1978], denominado constante de Feigenbaum en su honor, siendo este valor:

$$\delta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} \approx 4,6692016091029906... \quad (5)$$

Existe además otra constante de Feigenbaum, referida a las distancias verticales sobre los puntos de bifurcación, esto sugiere que existe otra ley de escala análoga:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l_n}{l_{n+1}} \approx 2,502908... \quad (6)$$

Cada sistema dinámico tendrá distintos valores de parámetros donde ocurre la bifurcación, pero los valores de  $\delta$  y  $\alpha$  serán los mismos.

Se procede a calcular el parámetro  $r_\infty$  a partir del cual se produce la transición al caos, Fig.(6). Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_\infty - r_1 &= (r_\infty - r_2) + (r_2 - r_1) \\ r_\infty - r_2 &= (r_\infty - r_3) + (r_3 - r_2) \\ r_\infty - r_3 &= (r_\infty - r_4) + (r_4 - r_3) \\ &\vdots \\ r_\infty - r_n &= (r_\infty - r_{n+1}) + (r_{n+1} - r_n) \end{aligned} \quad (7)$$

Se procede a sumar término a término la Ec.(7) obteniéndose el siguiente resultado, Ec.(9):

$$\begin{aligned} r_\infty - r_1 &= (r_\infty - r_2) + (r_2 - r_1) \\ r_\infty - r_2 &= (r_\infty - r_3) + (r_3 - r_2) \\ r_\infty - r_3 &= (r_\infty - r_4) + (r_4 - r_3) \\ &\vdots \\ r_\infty - r_n &= (r_\infty - r_{n+1}) + (r_{n+1} - r_n) \\ r_\infty - r_1 &= (r_2 - r_1) + (r_3 - r_2) + (r_4 - r_3) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$r_\infty - r_1 = (r_2 - r_1) + (r_3 - r_2) + (r_4 - r_3) + \dots \quad (9)$$

Haciendo uso de la definición de la constante de Feigenbaum, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{(r_2 - r_1)}{(r_3 - r_2)} \Rightarrow (r_3 - r_2) = \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1} \\ \delta_2 &= \frac{(r_3 - r_2)}{(r_4 - r_3)} \Rightarrow (r_4 - r_3) = \frac{(r_3 - r_2)}{\delta_2} \\ \delta_3 &= \frac{(r_4 - r_3)}{(r_5 - r_4)} \Rightarrow (r_5 - r_4) = \frac{(r_4 - r_3)}{\delta_3} \end{aligned} \quad (10)$$

Se reemplaza la Ec.(9) sobre Ec.(10) y se obtiene:

$$\begin{aligned} r_\infty - r_1 &= (r_2 - r_1) + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1} + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1 \delta_2} + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1 \delta_2 \delta_3} + \dots \\ r_\infty - r_1 &= (r_2 - r_1) \left[ 1 + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1} + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1 \delta_2} + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1 \delta_2 \delta_3} + \dots \right] \\ \delta_1 &\approx \delta_2 \approx \delta_3 \approx \dots \\ r_\infty - r_1 &= (r_2 - r_1) \underbrace{\left[ 1 + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1} + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1 \delta_2} + \frac{(r_2 - r_1)}{\delta_1 \delta_2 \delta_3} + \dots \right]}_{\frac{\delta_1}{\delta_1 - 1}} \\ r_\infty - r_1 &= (r_2 - r_1) \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} \\ r_\infty &= r_1 + (r_2 - r_1) \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} \end{aligned} \quad (11)$$

Reemplazando los valores  $r_1, r_2, \delta_1$  se obtiene:

$$r_\infty = r_1 + (r_2 - r_1) \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} \quad (12)$$

$r_\infty = 3,572$

## 4.3. Turbulencia

La turbulencia es un fenómeno **estocástico** ya que se calcula el valor medio de una función. Si bien es un proceso estocástico, tiene un cierto grado de predictibilidad. Por ejemplo, para la situación de las calles de Von-Karman, se pueden predecir los tamaños de vórtices (debido a la longitud característica de estos) pero no se puede predecir el movimiento del vórtice, ya que se desconoce si estos se desplazarán sobre la parte superior o inferior del cilindro.

Debido a esto se enuncia que la **turbulencia** es un fenómeno **estocástico** ya que para las mismas condiciones iniciales el resultado del sistema converge a valores distintos.

$$\text{fenómeno} \begin{cases} \text{estocástico} \begin{cases} \exists \text{ AZAR} \\ \exists \text{ PROBABILIDAD} \end{cases} \\ \text{determinístico} \begin{cases} \nexists \text{ AZAR} \\ \nexists \text{ PROBABILIDAD} \end{cases} \end{cases}$$

**Fenómeno estocástico:** Es impredecible, para las mismas condiciones iniciales se obtienen distintos resultados.



Fenómeno determinístico: Es predecible, para las mismas condiciones iniciales se obtienen los mismos resultados

Si bien cuando se resuelve las ecuaciones de movimiento de un fluido, se dispone de una ecuación que modeliza dicho fenómeno (ecuaciones de Navier-Stokes, NS). Este sistema es determinístico siempre y cuando se resuelva la velocidad de forma completa DNS ('Direct Numerical Simulation, Simulación Numérica Directa'), es decir se calcula la velocidad en todas sus escalas. Debido a la gran complejidad dinámica, los flujos turbulentos hacen que la descripción determinística sea muy difícil. Debido a ello, se opta por modelar la turbulencia. Cuando esto ocurre, NS se transforma en un proceso estocástico (existe azar o probabilidad); ya que ahora no se resuelve la velocidad en la totalidad de las escalas, sino que se calcula el valor medio de una función.

#### 4.4. Similitud entre Caos y Turbulencia

Como se enuncia en la Sec.(4.3), la turbulencia es un fenómeno **estocástico** ya que se calcula el valor medio de una función. Si bien es un proceso estocástico, tiene un cierto grado de predictibilidad. Por ejemplo, para la situación de las calles de Von-Karman, se pueden predecir los tamaños de vórtices (debido a la longitud característica de estos) pero no se puede predecir el movimiento del vórtice, ya que se desconoce si estos se desplazarán sobre la parte superior o inferior del cilindro.

Es debido a esto que se define a la turbulencia como un *orden-desordenado* o mejor dicho como un **desorden-ordenado**, ya que si bien hay una gran componente de aleatoriedad, esta sigue un cierto patrón. Y a medida que se analizan porciones más pequeñas, es decir, que la escala de análisis aumenta, se comienza a observar que el fenómeno aleatorio adquiere cierta predictibilidad, presentando comportamientos similares en las distintas direcciones.

Debido a ello, la turbulencia presenta las siguientes características:

- **Anisotropía** a grandes escalas
- **Isotropía** a pequeñas escalas

## Referencias

- [Cengel and Cimbala, ] Cengel, Y. and Cimbala, J. Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones, 2006, ch. flujo en tuberías.
- [Feigenbaum, 1978] Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of statistical physics*, 19(1):25–52.