

Actividad N03

En el siguiente informe se presenta la resolución del ejercicio entregable para el curso de “Turbulencia en Flujos” dentro del Doctorado de Ingeniería.

1. Tensor de Reynolds

Escriba el tensor de Reynolds de fluctuaciones turbulentas. Describa sus componentes. Explique qué características específicas tiene para procesos turbulentos isotrópicos y en flujos cercanos a una pared.

1.1. Introducción

Los flujos turbulentos se caracterizan por fluctuaciones instantáneas de la velocidad, presión y distintas cantidades que se transportan. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, no se centran en las variaciones instantáneas, sino en los valores medios de las cantidades, los cuales pueden ser constantes Fig. (1a), o variables a lo largo del tiempo, Fig. (1b). En la técnica RANS en lugar de resolver Navier-Stokes para todas las escalas se resuelve para las variables macro (velocidad media, $\overline{U(\vec{x})}$) y luego mediante un enfoque estadístico se obtienen aproximaciones de las pequeñas escalas, $u'_{(\vec{x},t)}$.

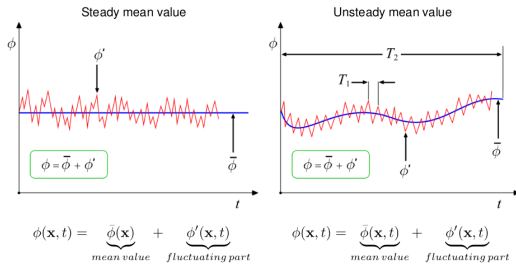


Figura 1: steady vs unsteady mean value, figura obtenida de sinopsis OF

Para remover las variaciones instantáneas existen las siguientes alternativas, como ser las siguientes técnicas:

- Filtrado
- Descomposición de Reynolds

1.2. Descomposición de Reynolds

Este procedimiento se base en descomponer los campos instantáneos en una contribución media ϕ y su fluctuación ϕ' .

$$\underbrace{u_{(\vec{x},t)}}_{\text{valor instantáneo}} = \underbrace{\overline{U(\vec{x})}}_{\text{valor medio}} + \underbrace{u'_{(\vec{x},t)}}_{\text{fluctuación}} \quad (1)$$

$$\overline{U(\vec{x})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_{(\vec{x},t)} dt$$

Se aplica el método de descomposición a las variables de Navier-Stokes (presión y velocidad) y mediante el uso de las reglas de promediación (ver Sec. (1.3)) se arriba a la Ec. (2)¹. Esta presenta la modelización URANS (Unsteady-Reynolds-Averaged Navier-Stokes) y si se omite el término temporal, se denomina RANS debido a que es estacionario.

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \overline{\rho u'_i u'_j} \right) \right] \quad (2)$$

Luego de realizar la descomposición de Reynolds, se arriba prácticamente a la misma ecuación que se tenía inicialmente con la salvedad que se aparece un nuevo término: $-\rho u'_i u'_j$, Ec. (2). Este nuevo término correspondiente al promedio de las fluctuaciones de la velocidad se lo denomina *tensor de Reynolds*. En realidad son términos de aceleración convectiva (aparece la densidad), no esfuerzos; pero tienen el mismo efecto matemático, por eso se lo denomina de ese modo. El mismo es un tensor simétrico cuya componente diagonal son los esfuerzos normales y contribuyen al transporte del flujo medio, mientras que las componentes fuera de ella, los esfuerzos de corte y cumplen un rol fundamental en el transporte de la turbulencia.

$$\tau_{ij} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u' u'} & \overline{u' v'} & \overline{u' w'} \\ \overline{v' u'} & \overline{v' v'} & \overline{v' w'} \\ \overline{w' u'} & \overline{w' v'} & \overline{w' w'} \end{bmatrix} \quad (3)$$

En caso de que las fluctuaciones turbulentas no dispongan de una dirección de preferencia las componentes fuera de la diagonal son despreciables, quedando de esta forma el tensor de Reynolds de forma diagonal. A dicha situación se la conoce como tensor isotrópico, Fig. (2a), donde no solo es diagonal, sino que además dichas componentes son idénticas. No obstante, si las componentes son distintas se dice que el tensor es asimétrico y presentan una dirección de preferencia dada por una polaridad, Fig. (2).

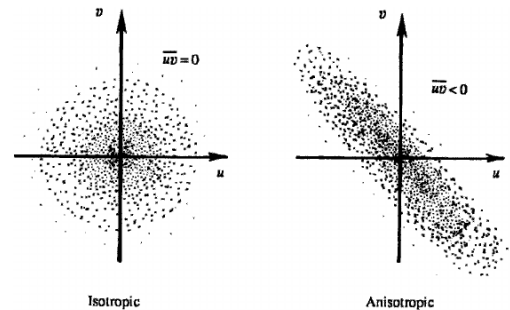


Figura 2: Comparación tensor turbulento isotrópico y anisotrópico. Figura obtenida de [Kundu et al., 2015].

Por último, si bien la descomposición de Reynolds es un procedimiento útil, esta metodología trae una complejidad extra relacionada con la nueva variable que se incorpora a

¹(Link RANS Closure Method)

la Ec.(2). Este problema se conoce como problema de cierre de la turbulencia y se detalla en la Sec.(??).

1.3. Reglas promediación RANS

Hipótesis:

1. $\overline{u'} = 0$, el promedio de las variaciones es nulo
2. $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$, el promedio de la suma es la suma de los promedios
3. $\overline{\overline{u}} = \overline{u}$, no se puede promediar el promedio
4. $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$
5. $\overline{\frac{\partial u}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial s}$, el promedio de una derivada es la derivada del promedio

De la Fig.(3a) se aprecia que el flujo cercano a la pared, el esfuerzo de corte tiene se encuentra formado en su totalidad por los esfuerzos viscosos. Luego a medida que se aleja de la pared, la contribución laminar disminuye abruptamente y aumenta los esfuerzos turbulentos.

2. Problema de Cierre de la Turbulencia

Formalice el problema de cierre de la turbulencia.

El procedimiento de promediado de las ecuaciones de Navier-Stokes (RANS, Reynolds-Averaged Navier Stokes "Ecuaciones promediadas de Navier-Stokes"), Sec.(1.2) introduce un término adicional: *el promedio de las fluctuaciones de la velocidad*; el cual tiene las unidades de esfuerzo de corte y dimensiones de tensor. Al introducir esta incógnita extra al problema, no se puede resolver el sistema original de ecuaciones. Este inconveniente es conocido como el problema de cierre de la turbulencia, el cual exige introducir modelos externos que relacionen el promedio de las fluctuaciones con las velocidades medias.

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (4)$$

Este inconveniente surge al presentar a la velocidad como un término compuesto por su valor medio más una fluctuación, y luego de realizar las sucesivas operaciones matemáticas se arriba a la Ec.(4). Si se analiza desde el enfoque de una ecuación de transporte, se aprecia que el campo que se está transportando es la cantidad de movimiento lineal, cuyas incógnitas o variables a resolver son la velocidad media (\overline{U}_i) y la presión (P). Para el estudio nos centraremos en la velocidad, ya que la cuestión de la presión es un tema conocido en Navier-Stokes, donde se utiliza la ecuación de masa para satisfacer continuidad. Debido a esto podemos decir que la incógnita es la velocidad.

Cabe aclarar que la incógnita es una sola (U_i) pero de magnitud vectorial, es decir tendrá una incógnita por componente, pero siempre será la velocidad media. La manera

de relacionar las variables es asumiendo que las fluctuaciones turbulentas del fluido son *análogas al movimiento Browniano de las partículas de un gas*, este enfoque permite conectar las velocidades medias y el promedio de las fluctuaciones mediante un parámetro denominado viscosidad turbulenta, μ_t . La teoría traza una analogía con los flujos Newtonianos, en los que supone que las tensiones viscosas son proporcionales a las tensiones de corte, por ende al gradiente de velocidad.

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (5)$$

La Ec.(6a) y su representación tensorial, Ec.(6b), presentan la modelización del tensor de Reynolds según el enfoque de los modelos de viscosidad. De modo que se logra relacionar las fluctuaciones de la velocidad con las velocidades medias del flujo; permitiendo de este modo poder tener un sistema de ecuaciones cerrado y de este modo superar/resolver el problema de cierre de la turbulencia.

$$\begin{aligned} -\rho \overline{u' u'} &= 2\mu_t S_{ij}^* - \frac{2}{3}\rho \kappa \delta_{ij} \\ -\rho \overline{u' u'} &= \mu_t \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] - \frac{2}{3}\rho \kappa \underline{I} \end{aligned} \quad (6)$$

Por lo que luego de aplicar la hipótesis de Boussinesq Ec.(6) sobre la Ec.(5) se obtiene una ecuación que puede ser resuelta, ya que la única incógnita es la velocidad media (\vec{U}). Se presenta a la misma de forma tensorial:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \vec{U}) = -\frac{1}{\rho} \left(\vec{\nabla} p + \frac{2}{3}\rho \vec{\nabla} \kappa \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\rho} (\mu + \mu_t) \vec{\nabla} \vec{U} \right] \quad (7)$$

donde $\frac{2}{3}\rho \vec{\nabla} \kappa$ es la contribución normal de la aproximación de Boussinesq y μ_t es la contribución a la viscosidad turbulenta producto de la modelización de Boussinesq. Así mismo, cabe destacar que la viscosidad efectiva será la suma de la viscosidad laminar más la turbulenta. Finalmente el problema se reduce a calcular la viscosidad turbulenta dentro de la ecuación de momento.

3. Comportamiento lineal del perfil de velocidad

Demuestre que en un flujo turbulento uniforme en la longitudinal, el perfil vertical de la componente que tiene en cuenta el producto de las fluctuaciones de velocidad longitudinal y vertical del tensor de Reynolds tiene un comportamiento lineal. Indiquen las regiones donde predominan los esfuerzos viscosos y turbulentos.

Sea una representación cartesiana de la velocidad $\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ donde para un modelo 2D, u y v son las velocidades longitudinales y transversales respectivamente. Se aplica la hipótesis de Boussinesq, que propone que los esfuerzos de corte están relacionados con los esfuerzos de los

remolinos turbulentos; y además asume que dicha relación es lineal. Denominando a la constante de proporcionalidad como viscosidad turbulenta, μ_t .

$$\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{du}{dy} \quad (8)$$

Para resolver la Ec.(8) se aplica el modelo de viscosidad de Prandtl, el cual aproxima a la viscosidad turbulenta con una ley proporcional a la velocidad de deformación, $\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$, siendo l la longitud de mezcla y en regiones cercanas a la pared $l = \kappa y$.

$$\begin{aligned} -\rho \overline{u'v'} &= \mu_t \frac{du}{dy} \\ \rho \overline{u'v'} &= -\overbrace{\rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|}^{\mu_t} \frac{du}{dy} = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \\ \overline{u'v'} &= \underbrace{(\kappa y)}_{l^2} \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Además usualmente $\overline{u'v'}$ son aproximadamente de igual magnitud y están correlacionados negativamente, por lo que $-\overline{u'v'} \approx u_*^2$. Reemplazando esto en la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} u_*^2 &= (\kappa y)^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \\ u_* &= \kappa y \frac{du}{dy} \end{aligned} \quad (10)$$

Debido a esto se demuestra que en ambas modelizaciones se parte de la hipótesis que el producto de las fluctuaciones tiene una relación proporcional, por lo tanto es lineal.

4. Regiones del flujo según el perfil de velocidades de flujos turbulentos en canales

Describe y esquematice las regiones de flujo según el perfil de velocidades de flujos turbulentos en canales. Tenga en cuenta las diferentes rugosidades.

Debido a la condición de no-deslizamiento de los sólidos respecto a los fluidos, frente a la presencia de un sólido, el fluido cercano a la pared adquiere la misma velocidad que este, por lo que su velocidad relativa será nula. A medida que el fluido se aleja del objeto esta condición pierde relevancia, y por ende el fluido bien alejado del sólido adopta la velocidad de corriente libre. Debido a esto, se observa que la presencia de un objeto sólido, genera un gradiente de velocidades sobre el flujo desde cero (o velocidad del sólido) hasta la velocidad de corriente libre. Como generalmente

en los túneles de viento o simulaciones por CFD el objeto sólido se encuentra estacionario y es al fluido sobre el cual se ajusta la velocidad para replicar la situación real, se dice que el mismo tiene velocidad nula, ya que lo importante son las velocidades relativas entre el flujo y el objeto.

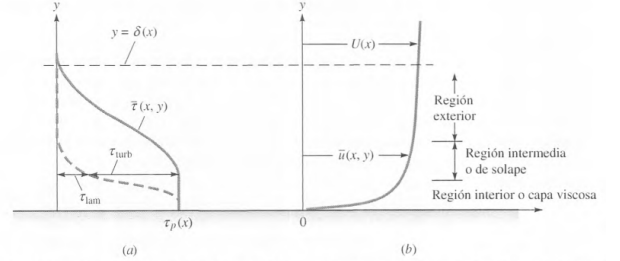


Figura 3: Distribución de esfuerzos y velocidades dentro de capa límite [?].

La Fig.(3) presenta la distribución de los esfuerzos de corte y las velocidades dentro de la capa límite. El análisis identifica a tres regiones:

1. Capa viscosa: esfuerzos viscosos dominantes. *Perfil Lineal* de velocidad.
2. Región intermedia: contribución de ambos esfuerzos. *Perfil logarítmico* de velocidad.
3. Región exterior: esfuerzos turbulentos dominantes. *Perfil logarítmico* de velocidad.

La Fig.(3a) evidencia la preponderancia de los efectos, donde la línea de trazos son los esfuerzos laminares, los cuales tendrá más incidencia en la región viscosa (cercana a la pared). Luego, sumado a los anteriores, están los esfuerzos turbulentos, los cuales comienzan siendo nulos cercanos a la pared y van tomando relevancia a medida que se alejan de ella. Finalmente se grafican la resultante de las contribuciones anteriores, los esfuerzos totales (línea continua).

4.0.1. Región viscosa

El perfil de velocidades se considera lineal, es decir gradientes de velocidades constantes. Por lo que en este caso, el flujo será:

$$\begin{aligned} \tau_w &= \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{U_2 - U_1}{y_2 - y_1} = \mu \frac{U_2 - 0}{y_2 - 0} = \mu \frac{U}{y} = \rho \nu \frac{U}{y} \\ \tau_w &= \rho \nu \frac{U}{y} \\ \underbrace{\frac{\tau_w}{\rho}}_{u_*^2} &= \nu \frac{U}{y} \end{aligned} \quad (11)$$

donde u_*^2 se denomina *velocidad de fricción* por tener unidades de $[LT^{-1}]$, pero realmente no es una velocidad de flujo. Continuando con la ecuación anterior:

$$u_*^2 = u_* u_* = \nu \frac{U}{y}$$

$$\underbrace{\frac{y u_*}{\nu}}_{y^+} = \underbrace{\frac{U}{u_*}}_{u^+} \quad (12)$$

$$\boxed{y^+ = u^+} \quad \text{Perfil lineal de la velocidad} \quad (13)$$

La Ec.(13) se denomina **ley de pared normalizada** es válida para superficies lisas dentro del siguiente rango: $0 \leq \frac{y u_*}{\nu} \leq 5$ y manifiesta el comportamiento lineal dentro de dicha región. Por último el espesor de la subcapa viscosa es: $y = \delta_{\text{subcapa}} = \frac{5\nu}{u_*} = \frac{25\nu}{u_\delta}$.

4.0.2. Región Exterior

El tensor de esfuerzos está dado por la contribución de los esfuerzos viscosos más la contribución de los esfuerzos turbulentos:

$$\tau = \tau_{\text{vis}} + \tau_{\text{turb}}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + \rho \overline{u'v'} \quad (14)$$

haciendo uso de la hipótesis de Boussinesq, que propone que los esfuerzos de corte están relacionados con los esfuerzos de los remolinos turbulentos; y además asume que dicha relación es lineal. Denominando a la constante de proporcionalidad como viscosidad turbulenta, μ_t .

$$\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{du}{dy} \quad (15)$$

Para resolver la Ec.(23) se aplica el modelo de viscosidad de Prandtl, el cual aproxima a la viscosidad turbulenta con una ley proporcional a la velocidad de deformación, $\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$, siendo l la longitud de mezcla y en regiones cercanas a la pared $l = \kappa y$.

$$-\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{du}{dy}$$

$$\overline{u'v'} = -\overbrace{\rho l^2}^{\mu_t} \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \quad (16)$$

$$\overline{u'v'} = \underbrace{(\kappa y)}_{l^2} \left| \frac{du}{dy} \right|^2$$

Además usualmente $\overline{u'v'}$ son aproximadamente de igual magnitud y están correlacionados negativamente, por lo que $-\overline{u'v'} \approx u_*^2$. Reemplazando esto en la ecuación anterior.

$$u_*^2 = (\kappa y)^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2$$

$$u_* = \kappa y \frac{du}{dy} \quad (17)$$

La Ec.(25) es una ODE sencilla de resolver, donde el perfil de velocidad u se puede resolver mediante el método de variables separables.

$$\frac{u_*}{\kappa} \frac{dy}{y} = du$$

$$\int \frac{u_*}{\kappa} \frac{dy}{y} = \int du$$

$$\frac{u_*}{\kappa} \ln y + C = u$$

$$\frac{1}{\kappa} \ln y + C = \frac{u}{u_*} \quad (18)$$

De esta forma queda demostrado el desarrollo de la ley de pared logarítmica mediante la modelización de Prandtl:

$$\boxed{u_{(y)} = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + C}$$

$$U^+ = \frac{u_{(y)}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C \quad \text{Ley logarítmica de la velocidad} \quad (19)$$

donde $\kappa = 0,4$ y $B = 5$

4.0.3. Efectos de la Rugosidad

Si bien las Ec.(13) y Ec.(19) ajustan de manera precisa, estas ecuaciones son válidas en superficies lisas. El efecto de la rugosidad es despreciable en flujos laminares pero en flujos turbulentos, tiene una mayor incidencia. [?] realizó distintos experimentos para evaluar el efecto de la rugosidad en flujos turbulentos. En ellos, mediante granos de arena, simuló la rugosidad pegando a estos uniformemente sobre las paredes interiores de los tubos, y midiendo la caída de presión y caudal; y verificando el Re con el coeficiente de fricción. Además validó manifestó que una rugosidad con altura ϵ desplaza al perfil logarítmico de la pared en una cantidad aproximadamente igual a $\ln \epsilon^+$, donde $\epsilon^+ = \epsilon u_*^* / \nu$. La pendiente de la ley logarítmica permanece invariable, $1/\kappa$, pero el desplazamiento disminuye la constante B en $\Delta B \approx \frac{1}{\kappa} \ln \epsilon^+$.

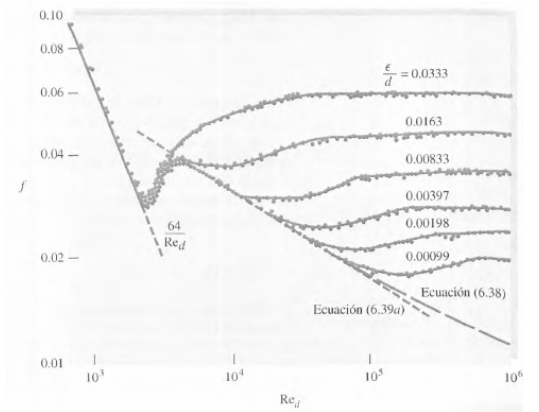


Figura 4: Ley pared efecto rugosidad ley pared experimento nikuradse. Figura obtenida de [?].

La Fig. (4) manifiesta que el coeficiente de fricción laminar permanece inalterado mientras que el coeficiente de fricción turbulento aumenta monótonamente con la rugosidad ϵ/d a partir de un cierto instante. Para un valor ϵ/d fijo, el coeficiente de fricción se hace constante (flujo dominado por la rugosidad) para número de Re suficientemente altos. Los cambios en los comportamientos se dan en valores fijos de $\epsilon^+ = \epsilon u^*/\nu$, lo que permite definir a los siguientes tres regímenes de rugosidad:

- $\frac{\epsilon u^*}{\nu} < 5$ paredes *hidrodinámicamente lisas*: no existe efecto de la rugosidad de fricción.
- $5 < \frac{\epsilon u^*}{\nu} < 70$ rugosidad de *transición*: moderado efecto.
- $70 < \frac{\epsilon u^*}{\nu}$ flujo *dominado por la rugosidad*: no existe la subcapa viscosa y la fricción es independiente del número de Reynolds.

Por ejemplo, para un flujo dominado por la rugosidad, $\epsilon^+ > 70$, la Fig. (4) sigue la línea

$$\Delta B \approx \frac{1}{\kappa} \ln \epsilon^+ - 3,5 \quad (20)$$

por ende la ley logarítmica queda modificada de la forma

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B - \Delta B = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\epsilon} + 8,5 \quad (21)$$

donde no aparece la viscosidad, y por ello, **el flujo dominado por la rugosidad es independiente del Re.**

5. Perfil logarítmico de velocidad utilizando la longitud de la mezcla de Prandtl

Encuentre y formalice otras expresiones para el perfil logarítmico del perfil de velocidades utilizando la longitud de Mezcla de Prandtl por ejemplo.

El tensor de esfuerzos está dado por la contribución de los esfuerzos viscosos más la contribución de los esfuerzos turbulentos:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_{\text{vis}} + \tau_{\text{turb}} \\ \tau &= \mu \frac{du}{dy} + \rho \overline{u'v'} \end{aligned} \quad (22)$$

haciendo uso de la hipótesis de Boussinesq, que propone que los esfuerzos de corte están relacionados con los esfuerzos de los remolinos turbulentos; y además asume que dicha relación es lineal. Denominando a la constante de proporcionalidad como viscosidad turbulenta, μ_t .

$$\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{du}{dy} \quad (23)$$

Para resolver la Ec.(23) se aplica el modelo de viscosidad de Prandtl, el cual aproxima a la viscosidad turbulenta

con una ley proporcional a la velocidad de deformación, $\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$, siendo l la longitud de mezcla y en regiones cercanas a la pared $l = \kappa y$.

$$\begin{aligned} -\rho \overline{u'v'} &= \mu_t \frac{du}{dy} \\ \rho \overline{u'v'} &= -\overbrace{\rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|}^{\mu_t} \frac{du}{dy} = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \\ \overline{u'v'} &= \underbrace{(\kappa y)}_{l^2} \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Además usualmente $\overline{u'v'}$ son aproximadamente de igual magnitud y están correlacionados negativamente, por lo que $-\overline{u'v'} \approx u_*^2$. Reemplazando esto en la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} u_*^2 &= (\kappa y)^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \\ u_* &= \kappa y \frac{du}{dy} \end{aligned} \quad (25)$$

La Ec.(25) es una ODE sencilla de resolver, donde el perfil de velocidad u se puede resolver mediante el método de variables separables.

$$\begin{aligned} \frac{u_*}{\kappa} \frac{dy}{y} &= du \\ \int \frac{u_*}{\kappa} \frac{dy}{y} &= \int du \\ \frac{u_*}{\kappa} \ln y + C &= u \\ \frac{1}{\kappa} \ln y + C &= \frac{u}{u_*} \end{aligned} \quad (26)$$

De esta forma queda demostrado el desarrollo de la ley de pared logarítmica mediante la modelización de Prandtl:

$$\begin{aligned} u_{(y)} &= \frac{u_*}{\kappa} \ln y + C \\ U^+ &= \frac{u_{(y)}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C \end{aligned} \quad \text{Ley logarítmica de la velocidad} \quad (27)$$

donde $\kappa = 0,4$ y $B = 5$

Referencias

[Kundu et al., 2015] Kundu, P. K., Cohen, I. M., and Dowling, D. R. (2015). *Fluid mechanics*. Academic press.