

1 Zahlen und Vektoren

Definition 1.1. (Eigenschaften der Norm)

Eine Norm hat folgende Eigenschaften:

1. *Definitheit:* $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. *Positive Homogenität:* $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. *Dreiecksungleichung:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Theorem 1.1. (Archimedisches Prinzip) Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$

Theorem 1.2. (Young Ungleichung) Für $x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ gilt

$$2|x \cdot y| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$$

Theorem 1.3. (Dreiecksungleichungen) Es gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\left| \prod_{i=1}^n x_i \right| = \prod_{i=1}^n |x_i|$$

$$|x \pm y| \geq ||x| - |y||$$

Theorem 1.4. (Cauchy-Schwarz)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

1.1 Komplexe Zahlen

Trick 1.1. (Kartesische Koordinaten) Zur Addition von komplexen Zahlen eignet sich vor allem die Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$z = x + i \cdot y$$

Bei der Division in kartesischen Koordinaten muss mit der konjugiert komplexen Zahl des Divisors erweitert werden.

Trick 1.2. (Polarform) Zum Multiplizieren, Dividieren, Wurzelziehen ist die Polarform geeignet:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \stackrel{(Euler)}{=} r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Trick 1.3. (Wurzeln) Die Gleichung $z^n = R \cdot e^{i \cdot \omega}$ hat folgende Lösungen:

$$\sqrt[n]{R} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\omega}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right)} \quad | \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots n-1$$

Trick 1.4. (Mengen komplexer Zahlen) Mengen komplexer Zahlen lassen sich meist am einfachsten beschreiben, wenn der Realteil und der Imaginärteil getrennt betrachtet werden. So lassen sich auch komplexe Gleichungssysteme meist einfach lösen. Eventuell kann auch die Darstellung in Polarform nützlich sein.

1.2 Nullstellenberechnung

Trick 1.5. (Horner Schema)

$$\begin{array}{cccccc}
 2 & & -4 & & -5 & & 7 & & 11 \\
 & & + & & + & & + & & + \\
 & & \alpha x & & \beta x & & \gamma x & & \delta x \\
 & & | & & | & & | & & | \\
 & & = & & = & & = & & = \\
 & \nearrow \cdot x & & \nearrow \cdot x & & \nearrow \cdot x & & \nearrow \cdot x & \\
 \downarrow & & & & & & & & \\
 2 = \alpha & & \alpha x - 4 = \beta & & \beta x - 5 = \gamma & & \gamma x + 7 = \delta & & \delta x + 11 = \epsilon
 \end{array}$$

2 Folgen

Definition 2.1. (Konvergenz)

1. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a für $n \rightarrow \infty$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon, \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Beweishilfe 2.1.

- Kein eindeutiger Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert nicht.
- (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert nicht.

Theorem 2.1. (Rechenregeln) Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten a, b . Es gilt:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
4. Falls zusätzlich $b_n \neq 0 \neq b$, so gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$
5. Falls $\forall n : a_n \leq b_n$, so auch $a \leq b$

Theorem 2.2. (Monotone Konvergenz) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend. Dann ist (a_n) konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Beweishilfe 2.2. (Sandwich-Prinzip) Um zu zeigen, dass eine Folge (a_n) konvergiert, finde 2 Folgen $(b_n), (c_n)$ mit identischem Grenzwert a , so dass $\forall n : b_n \leq a_n \leq c_n$ gilt.

Definition 2.2. (Teilfolge) Eine Teilfolge ist eine unendliche Teilmenge einer Folge.

Definition 2.3. (Häufungspunkt) $a \in \mathbb{R}$ heisst Häufungspunkt, falls die Folge eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt.

Theorem 2.3. (Bolzano Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge, also auch einen Häufungspunkt.

Sei (a_n) beschränkt, $a_- = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $a_+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. a_n konvergiert gegen a
2. Jede Teilfolge von a_n konvergiert gegen a
3. $a_- = a_+$

Definition 2.4. (Cauchy-Folge) (a_n) heisst Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \varepsilon$$

Theorem 2.4. (Cauchy-Kriterium) Für (a_n) sind folgende Aussagen äquivalent:

1. (a_n) ist konvergent.
2. (a_n) ist Cauchy-Folge.

Shortcut 2.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, q \in (0, 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Definition 2.5. (Konvergenz in \mathbb{R}^2) Eine Folge in \mathbb{R}^n konvergiert, wenn a_n komponentenweise konvergiert.

3 Reihen

Definition 3.1. Eine **Reihe** ist eine Folge der Partialsummen.

Shortcut 3.1.

- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$. $\left(\sum_{k=0}^n q^k \text{ konvergiert für } |q| \neq 1 \text{ gegen } \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$
- Die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.
- Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergiert gegen $\log 2$
- Die Zeta-Funktion $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$

Theorem 3.1. (Nullfolge)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergiert.}$$

Theorem 3.2. (Leibnitz-Kriterium)

Sei (a_n) eine monoton fallend oder wachsende, reelle Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe.

Theorem 3.3. (Cauchy-Kriterium)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon \quad n, m > n_0$$

Theorem 3.4. (Majorantenkriterium)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen, so dass

1. $\exists k_0 \forall k \geq k_0 : |a_k| \leq b_k$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert

so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Analog funktioniert das **Minorantenkriterium** um Divergenz zu zeigen.

Theorem 3.5. (Quotientenkriterium)

Sei $\forall k : a_k \neq 0$

1. Falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.
2. Falls $\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Es handelt sich sogar um absolute Konvergenz.

Theorem 3.6. (Wurzelkriterium)

Sei (a_k) eine Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C}

1. Falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
2. Falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Es handelt sich sogar um absolute Konvergenz.

Theorem 3.7. (Integral) Sei $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x) dx$ existiert. Es gilt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

Theorem 3.8. (Konvergenzradius) Die Potenzreihe $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ hat den Konvergenzradius ρ :

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

oder einfacher (falls der Grenzwert existiert)

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

D.h. $|z| < \rho \Rightarrow p(z)$ konvergiert.

Definition 3.2. (Absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Konvergiert eine Folge absolut, so können die Terme in beliebiger Reihenfolge summiert werden.

4 Stetigkeit

Definition 4.1. (Grenzwert einer Funktion)

Eine Funktion f hat in x den Grenzwert a , falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in \Omega$ und Grenzwert x die Folge $(f(x_n))$ gegen a konvergiert.

Trick 4.1. Grenzwerte von Funktionen können mit folgenden Tricks evtl. einfacher gezeigt werden, als via ε - δ Kriterium oder der Definition:

1. Benutze eine Taylorreihenentwicklung. Für $x \rightarrow 0$ können Terme wie $x^5 - x^7 \dots$ mittels der \mathcal{O} -Notation abgeschätzt werden.
2. Benutze $\lim f(x) = \lim e^{\log f(x)} = e^{\lim \log f(x)}$
3. Benutze Bernoulli de l'Hôpital falls möglich.

Definition 4.2. (Stetigkeit)

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, falls

1. $f(x_0)$ definiert ist.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

Sind f und g an x_0 stetig, so sind auch $f+g, f \cdot g, f \circ g$ und wenn $g(x_0) \neq 0$ auch f/g an x_0 stetig.
 f ist stetig an x_0 falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Theorem 4.1. (Normale Stetigkeit)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig auf Ω falls gilt:

$$\forall x_0 \in \Omega \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Theorem 4.2. (Gleichmässige Stetigkeit)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gleichmässig stetig auf Ω falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in \Omega : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Beweishilfe 4.1. Ist f auf einer kompakten Menge $K = [a, b]$ stetig, so ist f auf K gleichmässig stetig.

Theorem 4.3. (Lipschitz Stetigkeit)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz stetig auf Ω mit Lipschitzkonstante L falls gilt:

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ \forall x, x_0 \in \Omega : \|f(x) - f(x_0)\| \leq L \|x - x_0\|$$

Beweishilfe 4.2. Ist f Lipschitz stetig, so ist f gleichmässig stetig.

Beweishilfe 4.3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig $\Rightarrow f([a, b])$ ist beschränkt und nimmt sein Infimum und Supremum an.

Theorem 4.4. (Zwischenwertsatz)

$$a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig mit } f(a) < f(b) \Rightarrow \forall y \in [f(a), f(b)] \exists c \in [a, b] : f(c) = y$$

Theorem 4.5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton $\Rightarrow \text{Im}(f) = [c, d] = [f(a), f(b)]$ oder umgekehrt, $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ist bijektiv und $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ist stetig.

Definition 4.3. (Punktweise Konvergenz) Sei (f_n) eine Folge von Funktionen und sei f eine weitere Funktion. (f_n) konvergiert punktweise gegen f falls:

$$\forall x \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Theorem 4.6. Obige Definition ist äquivalent zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in \Omega \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Definition 4.4. (Gleichmässige Konvergenz) Sei (f_n) eine Folge von Funktionen und sei f eine weitere Funktion. (f_n) konvergiert gleichmässig gegen f falls:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| = 0$$

Theorem 4.7. Obige Definition ist äquivalent zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in \Omega \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Beweishilfe 4.4. Gleichmässige Konvergenz kann gezeigt werden, indem auf kompakten Intervallen für stetige f_n sup durch max ersetzt wird. Dann kann das Maximum im Inneren mit der Ableitung gefunden werden und die Randbereiche noch separat untersucht werden.

Theorem 4.8. Wenn $(f_n) \xrightarrow{glm.} f$ und alle f_n stetig, so ist f auch stetig.

Korollar 4.9. Potenzreihen sind stetig im Inneren ihres Konvergenzkreises.

5 Differentialrechnung auf \mathbb{R}

Definition 5.1. (Differenzierbarkeit) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \Omega$

1. f heisst **differenzierbar** an der Stelle x_0 falls

$$\frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

2. $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst differenzierbar an der Stelle x_0 falls jede Komponentenfunktion f_i an x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_n(x_0))$

3. f heisst auf Ω differenzierbar, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist.

Beweishilfe 5.1. Differenzierbarkeit \Rightarrow Stetigkeit.

Trick 5.1. Um Differenzierbarkeit zu zeigen, verwende die Definition und leite **nicht** einfach ab.
Um stetige Differenzierbarkeit zu zeigen, leite ab und überprüfe auf Stetigkeit.

Theorem 5.1. (Rechenregeln) Sind $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so sind auch $f + g, f \cdot g, f \circ g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch f/g an x_0 stetig.

Theorem 5.2. (Summenregel) Seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Es gilt:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Theorem 5.3. (Produktregel) Seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Es gilt:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Theorem 5.4. (Quotientenregel) Seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Es gilt:

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Theorem 5.5. (Kettenregel) Seien $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an $x_0 \in \Omega$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an $f(x_0)$ differenzierbar. Es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Trick 5.2. (Ableitung von Potenzfunktionen)

Um $f(x) = g(x)^{h(x)}$ abzuleiten, benütze folgende Umformung:

$$f(x) = \exp(h(x) \cdot \log(g(x))) \Rightarrow f'(x) = \left(h'(x) \log(g(x)) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right) g(x)^{h(x)}$$

Theorem 5.6. (Mittelwertsatz) Seien $-\infty < a < b < \infty, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Korollar 5.7. (Bernoulli de l'Hôpital) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$. Sind $f(a) = g(a) = 0$ oder beide Funktionen divergieren bestimmt (gegen ∞ oder $-\infty$) und

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, so gilt

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Theorem 5.8. (Umkehrsatz) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' > 0$ auf (a, b) und seien

$$-\infty \leq c = \inf_{a < x < b} f(x) < \sup_{a < x < b} f(x) = d \leq \infty$$

dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit

$$\forall x \in (a, b) : (f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$$

bzw.

$$\forall y \in (c, d) : (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Definition 5.2. (Taylorpolynom) Das n -te Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle a ist definiert als

$$T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Definition 5.3. (Taylor-Formel) Sei $f \in C^{m-1}([a, x])$ auf (a, x) m -mal differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, x)$ mit

$$f(x) = T_{m-1}(x; a) + f^{(m)}(\xi) \frac{(x-a)^m}{m!}$$

$$R_n f(x; a) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Beweishilfe 5.2. (Restterm) Für den Restterm gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n f(x; a)}{(x-a)^n} = 0$$

Beweishilfe 5.3. (Restterm nach Integralrechnung)

$$R_n f(x; a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Theorem 5.9. (Extremalstellen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(\Omega), x_0 \in \Omega$. Einer der folgenden Fälle tritt ein:

1. $\forall j \geq 1 : f^{(j)}(x_0) = 0$
2. $m := 1 + \max\{j : f^{(j)}(x_0) = 0, 1 \leq j \leq m\}$ d.h. $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ und $f^{(1)}(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$
 - (a) m ist ungerade, dann ist x_0 keine Extremalstelle.
 - (b) m ist gerade und $f^{(m)}(x_0) > 0$, dann ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle.
 - (c) m ist gerade und $f^{(m)}(x_0) < 0$, dann ist x_0 eine strikte lokale Maximalstelle.

6 Integralrechnung auf \mathbb{R}

6.1 Riemannintegral

Definition 6.1. (Partition)

1. Eine **Partition** eines Intervalles $[a, b]$ ist eine endliche Menge von Punkten

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}, \quad x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

2. $\mathcal{P}(I)$ bezeichnet die Menge aller Partitionen eines Intervalls I .

3. Die Feinheit ist definiert als $\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) = \text{Länge des grössten Teilintervalls } I_i := [x_{i-1}, x_i]$.

Definition 6.2. (Riemannsumme)

ξ ist eine Wahl von Zwischenpunkten einer Partition, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, 1 \leq i \leq n$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion

Jede Summe der Form $S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ nennt man **Riemansumme**.

Die Summe $U(f, P) := \sum_{i=1}^n (\inf_{I_i} f)(x_i - x_{i-1})$ heisst **Untersumme**.

Die Summe $O(f, P) := \sum_{i=1}^n (\sup_{I_i} f)(x_i - x_{i-1})$ heisst **Obersumme**.

Beweishilfe 6.1. $P, Q \in \mathcal{P}(I), P \subset Q \Rightarrow U(f, P) \leq U(f, Q) \leq O(f, Q) \leq O(f, P)$

Definition 6.3. (Riemann-integrierbar) Für eine beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen:

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} U(f, P) \quad \int_a^b f(x) dx := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} O(f, P)$$

f heisst **Riemann-integrierbar**, falls

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Theorem 6.1. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $f(x)$ ist integrierbar über I
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I) : O(f, P) - U(f, P) < \varepsilon$

Theorem 6.2.

1. Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar
2. Jede monotone Funktion ist Riemann-integrierbar

Theorem 6.3. (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$$

6.2 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Theorem 6.4. (Hauptsatz A) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Wir definieren: $\forall x \in [a, b] : F(x) := \int_a^x f(t) dt$

Dann ist $F(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\forall x \in [a, b] : F'(x) = f(x)$

Theorem 6.5. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine beliebige Stammfunktion von f . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b$$

6.3 Integrationsmethoden

Beweishilfe 6.2. (Generelle Regeln)

$$\begin{aligned} \int f(a+x) dx &= F(a+x) + c \\ \int g'(x)g(x) dx &= \frac{1}{2}g(x)^2 + c \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx &= \log |g(x)| + c \end{aligned}$$

Beweishilfe 6.3. (Partielle Integration) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Es gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Beweishilfe 6.4. (Substitution) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : [c, d] \rightarrow [a, b] \in C^1$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

6.4 Uneigentliches Integral

Definition 6.4. Sei f eine Funktion auf einem Intervall (a, b) , deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[a', b']$ integrierbar ist. Dann ist das uneigentliche Integral von f von a bis b definiert als:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{a' \downarrow a} \lim_{b' \uparrow b} \int_{a'}^{b'} f(x) dx$$

falls diese Grenzwerte existieren.

Beweishilfe 6.5. Achtung, die beiden Grenzen müssen, getrennt untersucht werden!! $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ existiert nicht.

Trick 6.1. Hier können Majorantenkriterium und Minorantenkriterium helfen zu entscheiden, ob das Integral existiert.

7 Differentialgleichungen

Definition 7.1. Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung für eine Funktion von einer oder mehreren Variablen, in der auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen.

Definition 7.2. (Lineare Differentialgleichung) Eine lineare DGL n -ter Ordnung hat die Gestalt $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = b(x)$, mit $a_i(x), b(x)$ Funktionen.

7.1 Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Definition 7.3. (Charakteristisches Polynom) Das charakteristische Polynom der Gleichung $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0y(x) = 0$ (homogene lineare DGL) ist gegeben durch

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$$

Beweishilfe 7.1. Um homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten zu lösen, suche die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und schaue unten welche Nullstellen zu welchen Lösungen führen. Die allgemeine Lösung ist die Linearkombination all dieser Lösungen. ($y_{\text{allg}}(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \dots$)

1. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine k -fache Nullstelle, so sind $e^{\lambda x}, x^1 \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ Lösungen der DGL.
2. Sind $\lambda = \alpha + i\beta$ und $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ mit $\beta \neq 0$ ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen mit Vielfachheit k , so sind

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ &x^1 \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad x^1 \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ &\vdots \\ &x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{aligned}$$

Lösungen der DGL. Beachte, dass die Koeffizienten von $x^i \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ und $x^i \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ verschieden sein dürfen.

7.2 Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Beweishilfe 7.2. Um inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten zu lösen, gehe so vor:

1. Löse die zugehörige homogene DGL und erhalte y_h .
2. Mache einen Ansatz vom Typ der rechten Seite und erhalte y_s .
3. Kombiniere die Lösung $y_{\text{allg}} = y_h + y_s$.

Trick 7.1. (Ansatz der rechten Seite) Finde in der Tabelle den Ansatz. Dieser wird nun in die DGL eingesetzt und so die noch unbekannten Koeffizienten bestimmt.

Störfunktion	Ansatz für y_p
$a \cdot e^{\mu x}$	$b \cdot e^{\mu x}$
$a \cdot \sin(\nu x)$ $b \cdot \cos(\nu x)$	$c \cdot \sin(\nu x) + d \cdot \cos(\nu x)$
$a \cdot e^{\mu x} \cdot \sin(\nu x)$ $b \cdot e^{\mu x} \cdot \cos(\nu x)$	$e^{\mu x} \cdot (c \cdot \sin(\nu x) + d \cdot \cos(\nu x))$
$P_n(x)$	$R_n(x)$
$P_n(x)e^{\mu x}$	$R_n(x)e^{\mu x}$
$P_n(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin(\nu x)$ $Q_n(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos(\nu x)$	$e^{\mu x} \cdot (R_n(x) \cdot \sin(\nu x) + S_n(x) \cdot \cos(\nu x))$

wobei $P_n(x)$, $R_n(x)$, $Q_n(x)$ und $S_n(x)$ Polynome von Grad n sind.

Trick 7.2. *Liegt eine Linearkombination der Störfaktoren vor, so hat man auch als Ansatz eine entsprechende Linearkombination zu wählen.*

Trick 7.3. *Falls $\lambda = \mu + i\nu$ eine m -fache Nullstelle des charakteristischen Polynomes ist, so muss man den Ansatz mit x^m multiplizieren.*

7.3 Lineare DGL erster Ordnung mit allgemeinen Koeffizienten

Die lineare DGL hat die allgemeine Form

$$y'(x) = a(x) \cdot y + b(x)$$

Beweishilfe 7.3. (Homogener Fall) *Falls $y(x) \neq 0$ gilt $y(x) = e^{A(x)} \cdot K$, $K \in \mathbb{R} - \{0\}$. $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $a(x)$.*

Beweishilfe 7.4. (Allgemeiner Fall) *Die allgemeine Lösung der DGL $y'(x) = a(x) \cdot y + b(x)$ lautet:*

$$y_{all}(x) = e^{A(x)} \cdot \int \left(b(x) e^{-A(x)} \right) dx + K \cdot e^{A(x)}$$

wobei $K \in \mathbb{R}$ und $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist.

Trick 7.4. (Variation der Konstanten) *Dies ist eine Alternative zum Lösungsschema im allgemeinen Fall.*

1. Ignoriere $b(x)$ und löse den homogenen Fall. Erhalte $y_h(x)$
2. Bestimme $y_p(x)$ so: $y_p(x) = y_h(x) \cdot \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx$ (setze y_h mit $K = C(t)$ in die DGL ein).
3. $y_{all}(x) = y_h(x) + y_p(x)$

7.4 Separierbare DGL

Trick 7.5. (Separation der Variablen) *Eine DGL der Form $y'(x) = f(x)g(y)$ löst man durch Separation der Variablen, d.h. ersetze $y'(x)$ durch $\frac{dy}{dx}$, integriere beide Seiten und löse nach y auf. Möglicherweise ist hier auch eine Substitution sehr hilfreich.*

7.5 Bernoulli DGL

Beweishilfe 7.5. (Sparation der Variablen) Eine DGL der Form $y'(x) = f(x)y + g(x)y^\alpha$ löst man durch Substitution. Wähle

$$u = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

so erhält man

$$u' = \underbrace{(1-\alpha)f(x)}_{f^*(x)} u + \underbrace{(1-\alpha)g(x)}_{g^*(x)}$$

Dies löst man mit dem Ansatz für lineare DGL erster Ordnung mit allgemeinen Koeffizienten.

8 Differentialrechnung in \mathbb{R}^n

8.1 Stetigkeit

Definition 8.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \Omega$

1. f hat den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

2. f heisst in a stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

3. f heisst in Ω stetig, wenn f in allen $a \in \Omega$ stetig ist.

Beweishilfe 8.1. f besitzt keinen Grenzwert in a , wenn sich bei Annäherungen an a auf verschiedenen Kurven verschiedene Grenzwerte oder keine Grenzwerte ergeben.

Beweishilfe 8.2. Die Summe, das Produkt und der Quotient (Nenner $\neq 0$) stetiger Funktionen sind stetig.

Beweishilfe 8.3. (Sandwich-Satz) Seien f, g, h Funktionen mit $\forall x \in B_r(a) : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Wenn $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Trick 8.1. (Polarkoordinaten) Für Grenzwertbestimmungen ist es oft nützlich, die Funktionen in Polarkoordinaten umzuschreiben.

Für 2-Dimensionale Funktionen gilt $x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta$

Für 3-Dimensionale Funktionen gilt $x = r \sin \vartheta \cos \varphi, y = r \sin \vartheta \sin \varphi, z = r \cos \vartheta$

Trick 8.2. (Substitution) Man berechnet den Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(g(x,y))$ indem man zunächst den Grenzwert $t_0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)$ bestimmt. Dann bestimmt man $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$.

8.2 Partielle Differenzierbarkeit

Definition 8.2. f heisst an der Stelle x_0 in Richtung e_i (Einheitsvektor) partiell differenzierbar, falls der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Achtung: partielle Differenzierbarkeit \nRightarrow Stetigkeit.

8.3 Differenzierbarkeit

Definition 8.3. f heisst an der Stelle x_0 differenzierbar, falls es eine Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + R(x_0, x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x_0, x)}{|x - x_0|} = 0$$

In diesem Fall heisst A Differential und wird mit $d_{x_0}f$ bezeichnet.

Theorem 8.1. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an $x_0 \in \Omega$. Dann existieren die partiellen Ableitungen und das Differential kann als

$$d_{x_0}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

dargestellt werden.

Beweishilfe 8.4. f ist differenzierbar $\Rightarrow f$ ist stetig.

Theorem 8.2. Existieren die partiellen Ableitungen und sind stetig $\Rightarrow f$ ist differenzierbar.

Beweishilfe 8.5. (Untersuchen der Differenzierbarkeit)

1. Ist f in x_0 stetig? Wenn nein breche ab.
2. Ist f in x_0 partiell differenzierbar? Wenn nein breche ab.
3. Sind die partiellen Ableitungen stetig? Wenn ja ist $f \in C^1$, wenn nein fahre fort.
4. Ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) (x^i - x_0^i)}{|x - x_0|} = 0$$

Wenn ja ist f differenzierbar, wenn nein nicht.

8.4 Differentiationsregeln

Beweishilfe 8.6. Die Summenregel, Produktregel und Quotientenregel gelten genau wie in \mathbb{R}

Theorem 8.3. (Kettenregel 1)

Sei $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an $g(x_0)$ differenzierbar. Es gilt:

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$

Theorem 8.4. (Kettenregel 2)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \Omega$, $t \mapsto (g_1(t), \dots, g_n(t))$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sowie g an t_0 und f an $g(t_0)$ differenzierbar. Es gilt:

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) = df(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

8.5 Anwendungen

Theorem 8.5. (Richtungsableitung) Die Ableitung von f an x_0 in die Richtung des **normierten** Richtungsvektors v ist:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Theorem 8.6. (Leibnitzregel für Parameterintegrale) Für stetig differenzierbare Funktionen χ, φ, f gilt:

$$\frac{d}{d\omega} \int_{\chi(\omega)}^{\varphi(\omega)} f(x, \omega) dx = \int_{\chi(\omega)}^{\varphi(\omega)} \frac{\partial f}{\partial \omega}(x, \omega) dx + f(\varphi(\omega), \omega) \cdot \varphi'(\omega) - f(\chi(\omega), \omega) \cdot \chi'(\omega)$$

Dies ist auch für konstante Grenzen anwendbar, dabei fallen die letzten beiden Terme der rechten Seite logischerweise weg.

8.6 Gradient

Beweishilfe 8.7. Sei $f \in C^1(\Omega), x_0 \in \Omega$. Dann ist $\nabla f(x_0)$ die Richtung und $|\nabla f(x_0)|$ der Betrag des steilsten Anstieges von f an der Stelle x_0

$\nabla f(x_0)$ steht senkrecht zur Niveaufläche von f durch x_0

8.7 Konservative Vektorfelder

Definition 8.4. Ein Vektorfeld v heisst konservativ, falls alle Wegintegrale entlang geschlossener Wege den Wert 0 haben.

Theorem 8.7. Für stetige Vektorfelder gilt:

$$V \text{ ist konservativ} \Leftrightarrow \exists f \in C^1 : V = \nabla f$$

In diesem Fall heisst V Potentialfeld und f ist das Potential von V .

Beweishilfe 8.8. So findet man heraus, ob ein Vektorfeld ein Potential besitzt:

1. Nimm die x -Komponente und integriere nach dx . Finde eine Funktion f , die noch von einer Konstanten in Abhängigkeit von y, z (falls 3D) abhängt.
2. Nimm die entstandene Funktion inklusive Konstante und leite nach y ab.
3. Setze nun die Ableitung mit der y -Komponente des Vektorfeldes gleich und bestimme so die Ableitung der Konstante aus Schritt 1 genauer.
 - (a) Falls die Ableitung der Konstante von x abhängen sollte, brich ab. Das Vektorfeld hat kein Potential.
4. Integriere die Ableitung der Konstanten nach y und bestimme so f genauer (nun bis auf eine Konstante in Abhängigkeit von z)
5. Leite wieder ab. Bestimme die Ableitung der fehlende Konstante wieder genauer. Falls die Ableitung der Konstanten 0 ist, so melde Erfolg, sonst Misserfolg.

8.8 Wegintegrale

Definition 8.5. Das Wegintegral vom Vektorfeld v längs einer Kurve in Parameterdarstellung γ , so ist das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} v(\gamma) d\gamma := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Beweishilfe 8.9. (Eigenschaften des Wegintegrals)

1. Ist γ nur stückweise C^1 und sind es nur endlich viele Teilstücke, so summieren wir einfach über die Teilstücke um das Wegintegral zu erhalten.
2. Das Wegintegral hängt nicht von der Parametrisierung des Weges ab.
3. Für den selben Weg rückwärts ändert sich nur das Vorzeichen des Integrals.
4. Ist V ein Vektorfeld mit Potential $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ der Weg, so gilt:

$$\int_{\gamma} V ds = \int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

8.9 Höhere Ableitungen

Theorem 8.8. (Satz von Schwarz) Ist $f \in C^k(\Omega)$ so sind alle partiellen Ableitungen vom Grad $\leq k$ von der Reihenfolge der Ableitungen unabhängig.

8.10 Rotation

Definition 8.6. Sei $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld. Die skalare Rotation ist

$$\text{Rot}(V) := \frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y}$$

Beweishilfe 8.10. $\text{Rot}(V) = 0$ ist notwendige Bedingung, damit ein Potential existieren kann. $\text{Rot}(V) = 0$ ist hinreichend, falls das Gebiet einfach zusammenhängend ist, d.h. keine Löcher enthält. Zudem muss V stetig sein. Exaktere Definition von einfach zusammenhängend: Weg zusammenhängend und jeder geschlossene Weg lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen.

Definition 8.7. Sei $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Es gilt

$$\text{Rot}(V) := \nabla \times V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

8.11 Divergenz

Definition 8.8. Sei $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Es gilt

$$\text{div}(V) := \nabla \cdot V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

8.12 Quadratische Näherung in \mathbb{R}^n

Beweishilfe 8.11. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, sowie $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$. Die quadratische Näherung von f lautet:

$$f(x_1) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(\nabla^2 f(x_0))(x_1 - x_0)^T + r$$

Beweishilfe 8.12. (Hessematrix) Die Hessematrix von f $\nabla^2 f$ lautet:

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix}$$

8.13 Extrema

Definition 8.9. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $df(x_0) = 0$ heisst kritischer Punkt von f .

Beweishilfe 8.13. Sei x_0 ein kritischer Punkt.

1. Falls $\nabla^2 f(x_0)$ positiv definit ist, so ist x_0 ein lokales Minimum. (Alle Eigenwerte > 0)
2. Falls $\nabla^2 f(x_0)$ negativ definit ist, so ist x_0 ein lokales Maximum. (Alle Eigenwerte < 0)
3. Falls $\nabla^2 f(x_0)$ indefinit, so ist x_0 ein Sattelpunkt. (Eigenwerte > 0 und < 0)
4. Falls $\nabla^2 f(x_0)$ singulär, ist der kritische Punkt entartet.

8.14 Vektorwertige Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, f = (f^i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, f^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Definition 8.10. f heisst differenzierbar, wenn jede Komponente differenzierbar ist.

Beweishilfe 8.14. (Jacobi-Matrix) Die Jacobi-Matrix ist eine Darstellung des Differentials von f :

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^l}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^l}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Beweishilfe 8.15. (Regeln)

1. Für Multiplikation mit Skalar und Addition zweier Funktionen verhält sich dieses Differential identisch wie das in einer Dimension.
2. Für das Skalarprodukt gilt:

$$d(\langle f, g \rangle)(x_0) = \langle f(x_0), (dg)(x_0) \rangle + \langle (df)(x_0), g(x_0) \rangle, \quad \text{wobei } \langle f(x_0), (dg)(x_0) \rangle = \sum_{i=1}^l (f^i(x_0) \cdot (dg^i)(x_0))$$

Beweishilfe 8.16. (Kettenregel) Die Kettenregel gilt wie im 1D Fall, nur dass hier Matrixmultiplikationen durchgeführt werden müssen.

9 Integralrechnung in \mathbb{R}^n

9.1 \mathbb{R}^2

In \mathbb{R}^2 leiten wir das Integral über einem Rechteck analog zum Fall in \mathbb{R} her. Wir zerlegen das Rechteck in Teilrechtecke, wählen in den Teilrechtecken je einen Zwischenpunkt und summieren auf.

Theorem 9.1. (Fubini) Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und $f \in C^0(Q)$ Dann gilt:

$$\iint_Q f d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \cdot dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \cdot dx \right) dy$$

Definition 9.1. (Normbereich) $D \subset \mathbb{R}^2$ heisst Normbereich bezgl. der x -Achse bzw. y -Achse falls es stetige Funktionen f, g bzw. \bar{f}, \bar{g} gibt mit

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x)\} \quad \text{bzw.} \quad D = \{(x, y) | \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \wedge \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

Theorem 9.2. (Integration über Normbereich) Sei f stetig auf einem Normbereich

1. $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x)\}$, so gilt:

$$\iint_D f d\mu = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \cdot dy \right) dx$$

2. $D = \{(x, y) | \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \wedge \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$, so gilt:

$$\iint_D f d\mu = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\int_{\bar{g}(y)}^{\bar{h}(y)} f(x, y) \cdot dx \right) dy$$

9.2 \mathbb{R}^3

In \mathbb{R}^3 ersetzen wir die Rechtecke von oben durch Quader.

Analog zum Satz von Fubini, können auch in \mathbb{R}^3 die Integrale vertauscht werden, wenn über einem Normbereich integriert wird.

Theorem 9.3. (Integration über Normalbereich) Sei f stetig auf einem Normalbereich D ,

$$D = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x) \wedge \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

dann gilt:

$$\iiint_D f d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f dz dy dx$$

Theorem 9.4. (Substitution) Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \rightarrow V$ eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion mit $\forall \vec{y} \in U : \det(\Phi(\vec{y})) \neq 0$, sowie $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_{V=\Phi(U)} f(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) = \int_U f(\Phi(\vec{y})) |\det d\Phi(y)| d\mu(y)$$

Shortcut 9.1. (Substitution durch Kugelkoordinaten)

Beispiel: $\int_V 1 d\mu$ mit $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \wedge x, y, z \geq 0\}$

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \det(d\Phi) = r^2 \cos \varphi$$

$$\int_V 1 d\mu = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \varphi d\varphi d\vartheta dr = \pi/6$$

Shortcut 9.2. (Substitution durch Polarkoordinaten)

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \det(d\Phi) = r$$

9.3 Satz von Green

Theorem 9.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet dessen Rand $\partial\Omega$ eine stückweise C^1 Parameterdarstellung hat. Sei U eine offene Menge mit $\Omega \subset U$ und $f = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, wobei $P, Q \in C^1(U)$. Dann gilt

$$\iint_{\Omega} f d\mu = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) d\mu(x, y) = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy$$

wobei $\partial\Omega$ so parametrisiert wird, dass Ω zur Linken des Randes liegt.

Trick 9.1. (Ein Beispiel)

$F(x, y) = (y + 3x, y - 2x)$, $\Omega = \text{Ellipse mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und den Halbachsen } a = 2, b = 1$
Gesucht ist das Wegintegral um die Ellipse von F . Mittels dem Satz von Green folgt:

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{\partial\Omega} F ds = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f^2}{\partial x} - \frac{\partial f^1}{\partial y} \right) d\mu = \iint_{\Omega} (-3) d\mu = -3 \cdot \overbrace{(\pi \cdot 2 \cdot 1)}^{\text{Fläche der Ellipse}} = -6\pi$$

10 Shortcuts, Abschätzungen, Tricks

Theorem 10.1. (Bernoulli) Für $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx$$

Theorem 10.2. (Stirling)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$$

Beweishilfe 10.1. (Partialbruchzerlegung)

1. Falls nötig mache Polynomdivision.
2. Bestimme die Nullstellen des Nenners.
3. Teile den Bruch in die Summen von einzelnen Brüchen mit unbekannten Zählern und den Nullstellen in den Nennern. Folgende Regeln sind zu beachten:
 - (a) Eine Nullstelle mit Vielfachheit n erzeugt n Summanden, der Nenner des i -ten Bruches ist die i -te Potenz der einfachen Nullstelle.
 - (b) Unabhängig von ihrer Vielfachheit hat eine Nullstelle mit Grad 1 eine Konstante im Zähler, eine Nullstelle mit Grad 2 einen Term der Form $ax + b$.
4. Löse das Gleichungssystem (Summe der Partialbrüche = Ursprünglicher Bruch) durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen der Nullstellen für x .

Shortcut 10.1. (Werte von Quadraturzeln)
 $\sqrt{2} \approx 1.41421, \sqrt{3} \approx 1.73205, \sqrt{5} \approx 2.23607, \sqrt{6} \approx 2.44949, \sqrt{7} \approx 2.64575, \sqrt{10} \approx 3.16228$

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$\frac{1}{x}$	$\log(x)$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
nx^{n-1}	x^n
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\log \cos x $
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$1 - \tanh^2 x$	$\tanh x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{1}{1-x^2}, x < 1$	$\operatorname{artanh} x$
$\frac{1}{1-x^2}, x > 1$	$\operatorname{arcoth} x$

11 Trigonometrie

Beweishilfe 11.1. (Potenzreihenentwicklungen diverser Funktionen)

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
 \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots \\
 \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots \\
 \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\
 \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots
 \end{aligned}$$

Definition 11.1. (Hyperbelfunktionen)

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) && : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) && : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty) \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} && : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)\end{aligned}$$

11.1 Werte

α	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	$\pm\infty$

11.2 Umformungen**Beweishilfe 11.2. (Symmetrien)**

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(-x) &= \cos(x) \\ \tan(-x) &= -\tan(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(\pi - x) \\ \cos(x) &= -\cos(\pi - x) \\ \tan(x) &= -\tan(\pi - x)\end{aligned}$$

Beweishilfe 11.3. (Summen)

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Beweishilfe 11.4. (Produkte)

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))\end{aligned}$$

Beweishilfe 11.5. (Additionstheoreme)

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) &= \cos^2 y - \cos^2 x \\ &= \sin^2 x - \sin^2 y \\ \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) &= \cos^2 y - \sin^2 x\end{aligned}$$

Beweishilfe 11.6. (Potenzen)

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \\ \sin^3 x &= \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin(3x)) \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) \\ \cos^3 x &= \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos(3x)) \\ \tan^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}\end{aligned}$$

12 Diverses**Beweishilfe 12.1. (Grenzwerte von Folgen)**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} a^x &= 0 \quad (|a| < 1) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x!} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x &= e^a \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(ax)}{x} &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x} &= \log a \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n x}{x} &= 0\end{aligned}$$