(LÝ NGUYÊN) NGUYỄN THANH SƠN

# LUẬN LÝ TOÁN HỌC

## (MATHEMATICAL LOGIC)

*A proof is not really undrestood untill the stage is reached at which one can grasp it as a whole and see it as a single idea.*

*G.F. Simmons*

Liên hệ với tác giả có thể theo các thông tin sau :

https://www.facebook.com/NguyenThanhSonCXDT

ntsontp@gmail.com, lynguyen.6x@gmail.com

Nội dung

## Lời tựa

Quyển sách được được biên soạn với mục đích cung cấp một tài liệu cơ bản cho việc học toán. Hai ngành toán học cơ bản là lý thuyết tập hợp và logic, hai môn này chúng có sự bổ trợ với nhau và cũng là nền tảng cho các môn toán khác. Do đó việc nắm vững chúng là điều quan trọng và cần thiết để có thể dễ dàng nắm bắt những ngành toán học khác.

Tài liệu được soạn thảo dựa trên những sách giáo khoa cơ bản như đã liệt kê trong phần tham khảo đồng thời kết hợp với kinh nghiệm giảng dạy môn học này của tác giả cho sinh viên ngành máy tính.

Một vấn đề quan trọng, nhưng không thuộc phạm vi nghiên cứu của logic đó là dịch từ ngôn ngữ tự nhiên sang ngôn ngữ logic. Đó là nhu cầu diễn tả các khái niệm ở các lãnh vực toán học khác bằng ngôn ngữ logic. Từ đây các khái niệm này mới được sử dụng chính xác và dùng để chứng minh được.

Hy vọng rằng tài liệu này đầy đủ độ sâu, rộng cần thiết cũng như tính dễ hiểu là yếu tố hàng đầu trong việc trình bày các khái niệm.

(06/2024).

(Lý Nguyên) Nguyễn Thanh Sơn

# I. TỔNG QUAN

## 1. Khái quát về logic

Mỗi thực thể toán học đều xuất phát từ *thực tế*, nó không thể ngẫu nhiên được tạo dựng nên. Các thực thể này hình thành những không gian toán học. Từ đó, chúng phát triển độc lập với mọi thực tế kể cả thực tế mà nó phát sinh. Tuy vậy sự phát triển này vẫn nương theo cội nguồn mà nó phát sinh. Logic toán học cũng là một thực thể toán học nên cũng tuân theo sự phát triển này. Do đó việc trình bày logic theo hướng từ thực tế sẽ làm cho người đọc dễ dàng "cảm thụ". Nhưng nếu tiếp cận theo hướng thuần túy là không gian toán học độc lập sẽ cho thấy tính độc lập và tính hình thức của nó. Mỗi cách tiếp cận giúp cho việc hiểu logic rõ ràng và thấu đáo hơn.

Có thể mượn định nghĩa về logic trong từ điển "Concise Oxford English" để có cái nhìn ban đầu về ngành toán học này.

> Logic là khoa học về lý luận, về chứng minh, về cách suy nghĩ hoặc suy luận.

Logic giúp phân tích một lập luận hoặc một chuỗi lập luận là "*đúng*" hoặc "*sai*" -- trong thế giới của lập luận đó.

Những thành tựu rực rỡ của logic trong giai đoạn đầu phát triển dẫn đến những điều cực đoan và nhiều ngộ nhận.

Thứ nhất, *suy luận logic không phải là qui luật tuyệt đối chi phối vũ trụ*.

Thứ hai, *logic không phải là tập hợp các quy tắc chi phối hành vi của con người.*

Con người có thể có những vấn đề mâu thuẫn với logic, một sự kiện trong đời sống thực tế có thể có "một chút" đúng, "một chút" sai. Vì vậy, đã có nhiều (hằng trăm) loại logic được sinh ra để đáp ứng với thực tế đa dạng. Do đó, logic không phải là tất cả đối với lý luận của con người.

## 2. Sơ lược về lịch sử logic

Logic là nền tảng của những lý luận "có lý". Người Hy lạp cổ đã nhận ra vai trò của logic trong toán học và triết học. Sau này logic cũng được chọn làm nền tảng cho các ngành khoa học khác. Mỗi ngành khoa học đều có riêng một logic 'thô sơ" (trước khi logic hình thức xuất hiện). Các logic "ban đầu" này ẩn chứa phần chung cơ bản nhất, từ đó hình thành nên logic hình thức hay logic toán học. Toán học đóng vai trò nhận dạng ra phần logic chung đó để phát triển thành logic hình thức.

Việc khảo sát và nghiên cứu logic có tính hệ thống làm cho việc áp dụng logic trở nên hiệu quả hơn đối với những ngành khoa học đang hiện hữu, đồng thời cho những ngành được phát sinh trong tương lai.

Về mặt lịch sử, luận đề có tính hệ thống về logic xuất hiện đầu tiên trong tác phẩm *Organon* của Aristotle. Tác phẩm này có ảnh hưởng lớn đối với triết học, khoa học, tôn giáo, tầm ảnh hưởng của nó kéo dài suốt thời kỳ trung cổ. Logic của Aristotle được diễn tả bằng ngôn ngữ thông thường nên còn mơ hồ.

Các triết gia mong muốn logic có tính *hình thức* và được diễn tả bằng *ký hiệu* như toán học. Leibniz có lẽ là người đầu tiên hình dung ra ý tưởng này và gọi là *formalism*.

Từ symbolic logic xuất hiện trong ấn bản năm 1847 có tên "The Mathematical Analysis of Logic" của G. Boole và "Formal Logic" của A. De Morgan. Logic lúc này được xem là *một phần của toán học*.

Logic cũng đánh dấu việc nhận thức rằng toán học không chỉ là *số* (số học) và *hình* (hình học) mà còn bao gồm các chủ đề được diễn tả bằng *ký hiệu* cùng các *quy luật* và các *thao tác trên ký hiệu*.

Từ thời Boole và DeMorgan, logic và toán học quyện vào nhau chặt chẽ.

Logic là *thành phần của toán học* đồng thời là *ngôn ngữ của toán học*. Cuối thế kỷ 19 và đầu thế kỷ 20 người ta tin rằng *tất cả các ngành toán học có thể được giản lược vào symbolic logic* và làm cho nó trở thành thuần tuý hình thức. Vào những năm 1930, niềm tin này bị lung lay bởi K. Gödel, ông chỉ ra rằng luôn luôn có các chân lý không thể dẫn xuất được từ bất kỳ hệ thống hình thức nào.

Về mặt tên gọi, logic xuất phát từ tiếng Hy lạp là *Logos*, đã có thời gian tiếng Việt gọi logic là *Luận lý học* hay cụ thể trong trường hợp này là *Luận lý toán học* để phân biệt với logic trong các ngành học khác.

Theo hướng tiếp cận truyền thống, logic được xem là một ngành của triết học. Nhưng từ thế kỷ 19, logic là một ngành của toán học.

Về mặt thuật ngữ, symbolic logic (luận lý ký hiệu) được dùng để đối kháng với philosophical logic (luận lý triết học). Symbolic logic còn có tên là metamathematics (siêu toán học). Sau này symbolic logic còn có tên là Mathematical logic do nhà toán học Giuseppe Peano đặt ra. Mathematical logic là logic được mô hình và nghiên cứu theo cách toán học, nhưng cơ bản nó vẫn là logic của Aristotle.

Theo quan điểm ký hiệu, mathematical logic còn được xem là một ngành của đại số trừu tượng (abstract algebra).

Luận lý toán học là một lãnh vực của logic và toán học. Nó bao gồm việc nghiên cưu về mặt toán học của logic và ứng dụng của nghiên cứu này vào các lãnh vực toán học. Luận lý toán học có sự kết nối gần gũi với khoa học máy tính (computer science) và luận lý triết học (philosophical logic).

Logic toán học thường được chia thành các lãnh vực con của lý thuyết tập hợp (set theory), lý thuyết mô hình (model theory), lý thuyết đệ quy (recursion theory), lý thuyết chứng minh (proof theory) và toán học xây dựng (constructive mathematics). Các lãnh vực này chia sẻ các kết quả cơ bản về logic, đặc biệt là luận lý vị từ.

Luận lý mệnh đề có tên là *Propositional logic*, cũng có lúc gọi là *Propositional Calculus*.

Từ calculus là thuật ngữ chung cho bất kỳ lãnh vực toán học liên quan tới việc tính toán.

## 3. Đặc điểm của logic

Trong quyển sách này, khi định nghĩa một khái niệm sẽ sử dụng cú pháp bắt đầu bằng từ khóa "Định nghĩa" sau đó là khái niệm cần được định nghĩa, kế đến là nội dung định nghĩa và chấm dứt bằng từ khóa "HếtĐn".

Định nghĩa – Ngôn ngữ hình thức.

Ngôn ngữ hình thức là ngôn ngữ có :

- cú pháp,
- ngữ nghĩa,
- hệ thống chứng minh.

HếtĐn

Cú pháp cho biết cái gì được logic chấp nhận, điều này tương tự như khái niệm văn phạm của ngôn ngữ tự nhiên. Ngữ nghĩa là ý nghĩa thực tế của các đối tượng trong logic. Cú pháp là hình thức còn ngữ nghĩa là nội dung của các đối tượng trong logic.

Điểm khác biệt giữa ngôn ngữ hình thức và ngôn ngữ thông thường hay ngôn ngữ tự nhiên là *hệ thống chứng minh*. Hệ thống này sản sinh các đối tượng mới từ các đối tượng có sẵn.

Logic được chứng minh là *ngôn ngữ hình thức*, từ đó hình thành một loại ngôn ngữ lập trình là lập trình logic. Một thực thể của lập trình logic là ngôn ngữ Prolog.

## 4. Phân loại

Logic có thể được chia làm hai loại :

- *Luận lý khái quát* là logic có quá trình suy luận từ những trường hợp *cá biệt* suy ra kết luận *tổng quát*.

- *Luận lý suy diễn (hay dẫn xuất)* có quá trình suy luận từ phát biểu *tổng quát* suy ra phát biểu kết luận *cá biệt*.

*Luận lý khái quát* được dùng trong tình huống không đầy đủ thông tin, thời gian lấy thông tin lâu, chi phí cao để có thông tin. Do đó kết luận của loại logic này chỉ có giá trị tạm thời và để thống kê. Trong các phương pháp nghiên cứu khoa học, lập luận của *luận lý khái quát* cũng có chỗ ứng dụng, nó được dùng để hình thành các giả thuyết và sau đó được đem đi kiểm chứng. Trong chứng minh toán học có phương pháp chứng minh có tính chất của *luận lý khái quát* là chứng minh truy chứng hay còn gọi là qui nạp (finite induction). Tuy nhiên phương pháp chứng minh này là chính xác và đáng tin (theo toán học).

Ngược lại với *luận lý khái quát*, *luận lý suy diễn* cho kết luận chính xác, nhưng nghèo nàn vì phát biểu sinh ra đã hàm chứa trong những phát biểu tổng quát.

Các nhóm *luận lý suy diễn* : Propositional and predicate logics, Modal logic (bàn về các khái niệm necessity và possibility), Epistemic và doxastic logics (bàn về các khái niệm knowledge, belief), Deontic logics (bàn về các khái niệm đạo đức (obligation, permission)), Erotetic logics (các logic về questions) … .

## 5. Ứng dụng của Logic

Logic được sử dụng để khảo sát lý luận trong thế giới ứng dụng. Nó chỉ ra mối tương quan giữa các phát biểu của ngôn ngữ hình thức hoặc phi hình thức, tính nhất quán, tính dẫn xuất, ... .

Logic còn được dùng để mô hình hóa những lý luận của thực tế, hình thành hệ thống chứng minh.

Ngày nay, logic được dùng phổ quát trong các ngành của khoa học máy tính.

*The meaning of things lies not in the things themselves, but in our attitude towards them.*

Antoine de Saint-Exupery

# II. LUẬN LÝ MỆNH ĐỀ

Nếu độc giả là người không ham thích toán học, tìm hiểu logic chỉ để ứng dụng trong chuyên nghành của mình có thể bỏ qua phần 1 dưới đây và hãy đọc ngay phần 2. Vì đó là tiếp cận theo hướng ngữ nghĩa sẽ cảm thấy quen thuộc. Phần trình bày luận lý mệnh đề theo hướng chứng minh nặng về hoạt động chứng minh trong toán học, tuy nhiên nó có nét đẹp mang tính sáng tạo, gây nhiều phấn khích khi tìm hiểu về nó.

## 1. Tiếp cận luận lý mệnh đề theo hướng chứng minh

Cách tiếp cận này còn có thể gọi bằng những cái tên khác là tiếp cận theo hướng cấu trúc hay hướng đại số.

### 1.1. Cấu trúc của luận lý mệnh đề

Định nghĩa – Công thức nguyên – Công thức.

*Công thức nguyên* là phần tử cơ bản, được chấp nhận (không định nghĩa) của luận lý mệnh đề.

*Công thức* là cấu trúc gồm *hữu hạn* công thức nguyên hay công thức được kết nối với nhau bằng *toán tử* logic $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\longrightarrow$, $\leftrightarrow$.

HếtĐn

Luận lý mệnh đề là tập hợp các *công thức*. Các công thức có thể được kết nối lại với nhau tạo bởi những phép tính (còn gọi là toán tử) thành những đối tượng mới cũng được gọi là công thức. Trong luận lý mệnh đề có những công thức "đơn độc" không là dạng kết hợp từ những công thức khác, ngoài tên công thức chúng còn được gọi thêm cái tên thứ hai là *công thức nguyên*. Như vậy công thức nguyên là những phần tử ban đầu được dùng để sinh ra những phần tử khác là công thức.

Các toán tử của luận lý mệnh đề có cấp 2 hoặc cấp 1, nghĩa là chúng có 2 hoặc 1 *thông số*.

Các toán tử được ký hiệu như sau :

$\vee$ (toán tử hội – cấp 2) ,

$\wedge$ (toán tử giao – cấp 2),

$\neg$ (toán tử phủ định – cấp 1),

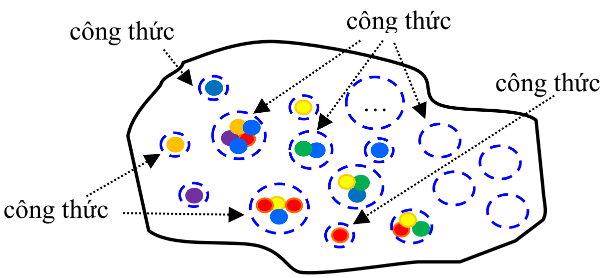
$\longrightarrow$ (toán tử dẫn ra – cấp 2),

$\leftrightarrow$ (toán tử tương đương – cấp 2).

Việc sinh ra những công thức mới nhờ vào các toán tử, để hình thành nên không gian luận lý mệnh đề. Trong không gian luận lý mệnh đề mọi phần tử đều mang tên công thức bao gồm cả công thức nguyên (do đó, phát biểu nào đề cập đến công thức cũng có nghĩa là bao gồm cả công thức nguyên).

Không gian luận lý mệnh đề đơn giản là tập hợp các công thức. Các công thức có tương quan kết nối với nhau bằng các toán tử, nên các toán tử có thể xem là các phép tính của luận lý mệnh đề.

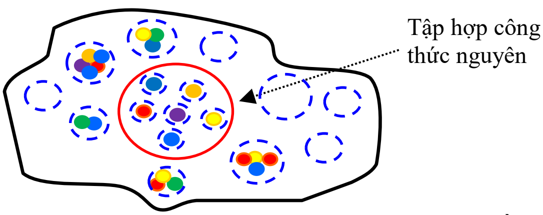
Minh họa.



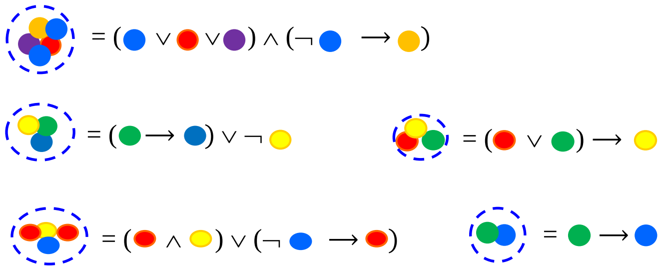

Không gian Luận Lý Mệnh Đề

Không gian luận lý mệnh đề là một tập hợp có phần tử là công thức nguyên và công thức. Hai loại phần tử này được gọi chung là công thức.

Minh họa.




Không gian luận lý mệnh đề



Không gian luận lý mệnh đề gồm một tập hợp công thức nguyên, các công thức nguyên được kết hợp với nhau nhờ các toán tử logic để sinh ra toàn bộ không gian.

### 1.2. Suy luận và chứng minh trong luận lý mệnh đề

Phần này chỉ ra cách các công thức kết hợp với nhau để sản sinh ra công thức mới. Đề làm được điều này cần chấp nhận một số qui tắc gọi là *qui tắc suy luận*.

Trước khi đề cập các qui tắc này cần xác định một số khái niệm.

Định nghĩa – Hệ thống.

*Hệ thống* là tập hợp các công thức.

Hệ thống F gồm có các công thức $F_1$, … , $F_n$ được diễn tả bằng một trong hai cách sau :

$\{F_1, \ldots, F_n\}$ – là *tập hợp* hoặc

$(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n)$ – là *một* công thức – giao các $F_i$.

HếtĐn

Nhận xét :

✶ *Một công thức* cũng được xem là hệ thống.

Ví dụ : $\{ F_1\}$ là hệ thống có một phần tử, với $F_1$ là công thức.

✶ Trong ngành khoa học máy tính, một hệ thống công thức của logic còn được gọi là cơ sở tri thức.

Chứng minh là một trong những hoạt động chủ yếu của thế giới logic. Trước khi định nghĩa khái niệm chứng minh, hãy xem việc chứng minh theo cách thông thường một bài toán hình học phẳng là như thế nào.

Thí dụ :

Tam giác ABC có các cạnh là AB = 3, BC = 4, CA = 5. Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

Chứng minh :

(1) Cạnh AB = 3 do giả thiết.

(2) Cạnh BC = 4 do giả thiết.

(3) Cạnh CA = 5 do giả thiết.

(4) Do đó $CA^2 = BC^2 + AB^2$.

(5) Vậy tam giác ABC vuông theo định lý Pythagore,.

Chuỗi 5 phát biểu : (1), (2), (3), (4), (5) được gọi là "chứng minh" theo nghĩa thông thường của toán học.

Hình thức hóa bằng bảng sau :

| Hệ thống | Mã hóa |
|---|---|
| {cạnh AB = 3,<br>cạnh BC = 4,<br>cạnh CA = 5 }. | {$F_1$ (công thức $F_1$ là phát biểu "cạnh AB = 3") ,<br>$F_2$ (công thức $F_2$ là phát biểu "cạnh BC = 4"),<br>$F_3$ (công thức $F_3$ là phát biểu "cạnh CA = 5") }. |
| Chứng mình<br>cạnh AB = 3 (giả thiết).<br>cạnh BC = 4 (giả thiết).<br>cạnh CA = 5 (giả thiết).<br>$CA^2 = BC^2+AB^2$<br>(đlý Pythagore)<br>Vậy tam giác ABC vuông. | Chứng mình<br>…<br>…<br>…<br>…<br>… |
| Kết luận : {tam giác ABC vuông}. | Kết luận : H (công thức H là phát biểu "tam giác ABC vuông") |

Định nghĩa – Chứng minh.

Chứng minh là chuỗi các công thức *được dẫn ra* từ hệ thống nhờ các *qui tắc suy luận*.

Qui tắc suy luận có hai loại : *suy luận tự nhiên* và *suy luận đã được chứng minh*.

HếtĐn

Nhận xét :

- ✶ Công thức H được gọi là "*được chứng minh*" từ hệ thống F nếu viết ra được một *chứng minh*, nghĩa là chuỗi các công thức sao cho công thức cuối cùng trong chuỗi là H.
- ✶ H được chứng minh từ F có ký hiệu là :

  $(F \vdash H)$.
- ✶ Ký hiệu "$F \vdash H$" được gọi là cấu trúc *hệ nhân quả*, với F là tiền đề và H là kết luận.
- ✶ Nếu cấu trúc hệ nhân quả không có tiền đề thì kết luận H được gọi là định lý,

ký hiệu định lý H là "$\vdash H$".

- ✶ Nếu $F \vdash G$ và $F \dashv G$ thì ký hiệu là $F \dashv\vdash G$ hay F = G.
- ✶ Thông thường ở các cấp học phổ thông hay dùng ký hiệu $\Rightarrow$ thay vì $\vdash$.
- ✶ Mỗi thế giới đều có ngôn ngữ riêng, logic cũng không ngoại lệ. Nhập gia nên tùy tục, hãy làm quen với chúng. Vì học logic cũng là làm quen với hệ thống ký hiệu riêng của logic.

Định nghĩa – Qui tắc hình thành một chứng minh.

Chứng minh là xây dựng chuỗi các công thức.

Mỗi công thức trong chuỗi được viết thành từng dòng có trật tự và được tạo ra như sau :

* lấy công thức từ hệ thống, hoặc

* áp dụng qui tắc suy luận để sinh ra công thức.

Với hai cách trên, đến khi viết ra được dòng có nội dung là công thức được yêu cầu thì dừng. Khi đó chuỗi công thức này được gọi là chứng minh.

HếtĐn

Sau đây là các qui tắc suy luận được chấp nhận – không cần phải chứng mình.

## 1.3. Các qui tắc suy luận tự nhiên trong luận lý mệnh đề

### Qui tắc giao i ($\wedge$i)

Nếu ở dòng thứ k có nội dung là công thức F và dòng thứ m có nội dung là công thức G thì viết ra được dòng mới thứ p có nội dung ($F \wedge G$). Nghĩa là có F và G thì có $F \wedge G$.

Thí dụ :

| | | |
|---|---|---|
| dòng k : | F | |
| dòng … | … | |
| dòng m : | G | |
| dòng … | … | |
| dòng p : | $F \wedge G$ | (suy ra từ dòng k và m nhờ qui tắc $\wedge$i) |

Ghi chú :

Ký hiệu i là ký tự đầu trong từ introduction.

### Qui tắc giao e ($\wedge$e)

Nếu ở dòng k có nội dung ($F \wedge G$) thì có thể viết ra dòng mới có nội dung F (và dòng khác có nội dung G).

Thí dụ :

| | | |
|---|---|---|
| dòng k : | $F \wedge G$ | |
| dòng m : | F | (suy ra từ dòng k nhờ qui tắc $\wedge$e) |
| dòng p : | G | (suy ra từ dòng k nhờ qui tắc $\wedge$e) |

Ghi chú :

Ký hiệu e là ký tự đầu trong từ elimination.

### Qui tắc điều kiện e (Modus ponens) ($\longrightarrow$e)

Nếu có dòng F và dòng (F $\longrightarrow$ G) thì viết ra được dòng có nội dung G.

Thí dụ :

dòng k : F $\longrightarrow$ G

dòng m : F

dòng p : G (suy ra từ dòng k và m nhờ qui tắc $\longrightarrow$e)

Ghi chú :

Qui tắc $\longrightarrow$e còn được gọi là qui tắc MP, viết tắt của từ Modus Ponens có nghĩa là affirming method.

Thí dụ :

Chứng minh : P, Q, (P $\wedge$ Q) $\longrightarrow$ (R $\wedge$ S) $\vdash$ S.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | P | (lấy P từ tiền đề) |
| 2 | Q | (lấy Q từ tiền đề) |
| 3 | P $\wedge$ Q | ($\wedge$i 1, 2) (dùng $\wedge$i với dòng 1, 2) |
| 4 | P $\wedge$ Q $\longrightarrow$ R $\wedge$ S | (từ tiền đề có P $\wedge$ Q $\longrightarrow$ R $\wedge$ S) |
| 5 | R $\wedge$ S | ($\longrightarrow$e 3, 4) (dùng $\longrightarrow$e với dòng 3, 4) |
| 6 | S | ($\wedge$e 5) (dùng $\wedge$e với dòng 5) |

Vậy S được sinh ra từ hệ thống công thức P, Q, ((P $\wedge$ Q) $\longrightarrow$ (R $\wedge$ S)).

### Qui tắc điều kiện i ($\longrightarrow$i)

Thêm công thức F bất kỳ vào dòng m ở sau dòng hiện hành của chuỗi công thức đang chứng minh. Nghĩa là, giả sử hệ thống được thêm F (nhưng thực sự không có, chỉ là giả sử). Công thức F được chọn tùy ý và đặt từ khóa "*if*" trước F.

Các dòng kế (m+1, …, m+k) có thể sử dụng hay không sử dụng dòng m đều được coi như phụ thuộc vào sự hiện diện của giả thiết F.

Minh họa :

| | | |
|---|---|---|
| dòng m : | *if* | F |
| … | | … |
| dòng m+k : | | G |
| dòng m+k+1 : | … | |

Để chấm dứt ảnh hưởng của giả thiết F từ dòng nào tùy thuộc vào chủ ý của người chứng minh.

Từ khóa "*nif*" được thêm trước nội dung của dòng nào để báo hiệu chấm dứt cấu trúc if.

Vì để cho đẹp về mặt hình thức nên đặt *nif* ở đầu dòng. Thật ra nó phải ở cuối dòng để nội dung dòng này nằm hoàn toàn trong cấu trúc *if–nif*.

Minh họa :

| | | |
|---|---|---|
| dòng m : | *if* | F |
| … | | … |
| dòng m+k : | *nif* | G |
| dòng m+k+1 : | … | |

Ở đoạn chứng minh này, cấu trúc *if–nif* chấm dứt ở dòng m+k, công thức G được  qui ước thuộc cấu trúc *if–nif*.

Các dòng trong cấu trúc *if–nif* có thể được xây dựng từ *cả các dòng bên trên if (trên dòng m).*

Các dòng trong cấu trúc *if–nif* không được sử dụng để xây dựng cho các dòng ngoài cấu trúc *if–nif*.

**Sau cấu trúc *if–nif* viết dòng kết hợp công thức ở dòng *if* và dòng *nif* bởi toán tử "⟶".**

Minh họa :

| | | |
|---|---|---|
| dòng m : | *if* | F |
| … | … | |
| dòng m+k : | *nif* | G |

dòng m+k+1 : F ⟶ G.

**Cấu trúc *if–nif* có thể lồng vào nhau.**

Minh họa :

| | | | |
|---|---|---|---|
| dòng m : | *if* | | … |
| | | | … |
| | | *if* | … |
| | | | … |
| | | *nif* | |
| | | | … |
| dòng m+k : | *nif* | | … |

Thí dụ :

Chứng minh : F ├─ G ⟶ F

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | *if* | G | |
| 2 | *nif* | F | (tiền đề) |
| 3 | G ⟶ F | | (⟶i 1, 2) |

**Qui tắc bản sao (id)**

dòng k : F

dòng m : F

Chép lại công thức đã xuất hiện ở dòng k để tạo nên dòng m có cùng nội dung, miễn là dòng m nằm trong phạm vi ảnh hưởng của dòng k.

Thí dụ :

Chứng minh ├─ F ⟶ F

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | *if* | F | |
| 2 | *nif* | F | (id 1) |
| 3 | F ⟶ F | | (⟶i 1-2) |

Chứng minh : ├─ (F ⟶ (G ⟶ F)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | *if* | F | |
| 2 | | *if* | G |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | | *nif* F | (bản sao 1) |
| 4 | *nif* | $G \longrightarrow F$ | ($\longrightarrow$i 2, 3) |
| 5 | $F \longrightarrow (G \longrightarrow F)$ | | ($\longrightarrow$i 1, 4) |

### Qui tắc hội i ($\vee$i)

Nếu có dòng F thì viết được dòng mới có nội dung "$F \vee G$" với G là công thức bất kỳ (G có thể chưa xuất hiện trong hệ thống).

Thí dụ :

| | | |
|---|---|---|
| dòng k : | F | |
| … | … | |
| dòng m : | $F \vee G$ | (áp dụng qui tắc $\vee$i) |

### Qui tắc hội e ($\vee$e)

Có công thức ở dạng hội và từng thành phần sinh ra được cùng một công thức thì dạng hội cũng sinh ra được công thức này.

Nếu F sinh ra H và G cũng sinh ra H thì ($F \vee G$) cũng sinh ra H.

Minh họa :

| | | | |
|---|---|---|---|
| dòng m : | $F \vee G$ | | |
| dòng n : | *if* | F | |
| … | | | |
| dòng n+p : | *nif* | H | |
| dòng t : | *if* | G | |
| … | | | |
| dòng t+q : | *nif* | H | |
| dòng t+q+1 : | | H | (áp dụng qui tắc $\vee$e) |

Thí dụ :

Chứng minh $(G \longrightarrow H) \vdash (F \vee G) \longrightarrow (F \vee H)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $G \longrightarrow H$ | (tiền đề) |
| 2 | *if* $F \vee G$ | |
| 3 | <u>if F</u> | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | | nif $F \vee H$ | ($\vee$i 3, chọn H để tạo thành hội) |
| 5 | | if G | |
| 6 | | H | ($\longrightarrow$e 1, 5) |
| 7 | | nif $F \vee H$ | ($\vee$i 6, chọn F để tạo thành hội) |
| 8 | *nif* | $F \vee H$ | ($\vee$e 2, 3, 5) |
| 9 | $(F \vee G) \longrightarrow (F \vee H)$ | | ($\longrightarrow$i 2-8) |

Định nghĩa – Công thức mâu thuẫn.

Dạng $(F \wedge \neg F)$ được gọi là công thức mâu thuẫn cụ thể với công thức F. Ký hiệu $\perp$ chỉ công thức mâu thuẫn (đại diện cho các dạng mâu thuẫn cụ thể).

HếtĐn

### Qui tắc phủ định ($\neg$e)

Qui tắc này nói rằng từ một "mâu thuẫn cụ thể" sinh ra được "mâu thuẫn tổng quát" $\perp$.

dòng k : $F \wedge \neg F$, với công thức F nào đó.

dòng m : $\perp$

Ký hiệu $\perp$ được gọi là công thức mâu thuẫn "tổng quát". Công thức $(F \wedge \neg F)$ được gọi là một dạng mâu thuẫn "cụ thể".

Nhận xét :

Chỉ cần một công thức mâu thuẫn cũng có thể dẫn ra $\perp$.

Hình minh họa

$F \wedge \neg F \qquad G \wedge \neg G \qquad \ldots \qquad K \wedge \neg K$

$\perp$

### Qui tắc phủ định ($\neg$i)

Giả sử có dòng F và dẫn ra mâu thuẫn thì viết ra dòng $\neg F$. Qui tắc này bảo đảm cho *chứng minh phản chứng*.

| | | |
|---|---|---|
| dòng m : | if | F |
| | … | |
| dòng k : | nif | $\perp$ |
| dòng k+1 : | $\neg F$ | |

### Qui tắc mâu thuẫn ($\perp$e)

Nếu dòng k có nội dung $\perp$ thì viết ra dòng m có nội dung là công thức bất kỳ.

Thí dụ :

| | | |
|---|---|---|
| dòng k : | $\perp$ | |
| dòng k+1 : | $F \wedge \neg F$ | (với F bất kỳ) |
| dòng m : | F | |

Định nghĩa – Công thức tautology.

Công thức có dạng $F \vee \neg F$ được gọi là tautology với mọi F.

Ký hiệu $\top$ chỉ công thức tautology.

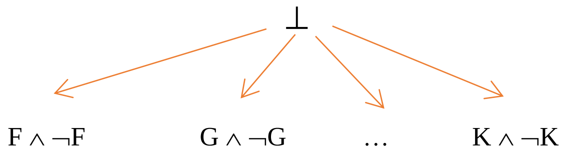
HếtĐn

Nhận xét :

- ✶ Công thức $\perp$ "mạnh" nhất, vì nó sinh ra được mọi công thức mâu thuẫn, nên $\perp$ sinh ra mọi công thức (nhờ vào qui tắc $\wedge$e).

  Mọi công thức có thể được dẫn xuất từ công thức mâu thuẫn, nghĩa là $\perp \longrightarrow (F \wedge \neg F)$.

Minh họa




- ✶ Dạng $(F \vee \neg F)$ được ký hiệu $\top$. Đây là công thức "yếu" nhất.

Thí dụ :

Chứng minh : $\neg F \vee G \vdash F \longrightarrow G$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\neg F \vee G$ | | | (tiền đề) |
| 2 | *if* | $\neg F$ | | |
| 3 | | *if* | F | |
| 4 | | | $\perp$ | ($\neg$i 2, 3) |
| 5 | | *nif* | G | ($\perp$e 4) |
| | | | | (có $G \wedge \neg G$, dùng $\wedge$e sinh ra G) |
| 6 | *nif* | $F \longrightarrow G$ | | ($\longrightarrow$i 3, 5) |
| 7 | *if* | G | | |
| 8 | | *if* | F | |
| 9 | | *nif* | G | (bản sao 7) |
| 10 | *nif* | $F \longrightarrow G$ | | ($\longrightarrow$i 8, 9) |
| 11 | $F \longrightarrow G$ | | | ($\vee$e 1, 6,10) |

Chứng minh $F \longrightarrow G, F \longrightarrow \neg G \vdash \neg F$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \longrightarrow G$ | | (tiền đề) |
| 2 | $F \longrightarrow \neg G$ | | (tiền đề) |
| 3 | *if* | F | |
| 4 | | G | ($\longrightarrow$e 1, 3) |
| 5 | | $\neg G$ | ($\longrightarrow$e 2, 3) |
| 6 | *nif* | $\perp$ | ($\neg$e 4, 5) |
| 7 | $\neg F$ | | ($\neg$i 3, 6) |

### Qui tắc phủ định kép i ($\neg\neg$i)

Nếu có dòng F thì viết được dòng $\neg\neg F$.

dòng k : F

dòng m : $\neg\neg F$

Thí dụ :

Chứng minh $F \vdash \neg\neg F$

1 F (tiền đề)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | *if* | $\neg F$ | |
| 3 | *nif* | $\perp$ | ($\neg$e 1, 2) |
| 4 | $\neg\neg F$ | | ($\neg$i 2, 3) |

Chứng minh Modus tolens $F \longrightarrow G, \neg G \vdash \neg F$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \longrightarrow G$ | | (tiền đề) |
| 2 | $\neg G$ | | (tiền đề) |
| 3 | *if* | $F$ | |
| 4 | | $G$ | ($\longrightarrow$e 1, 3) |
| 5 | *nif* | $\perp$ | ($\neg$e 2, 4) |
| 6 | $\neg F$ | | ($\neg$i 3, 5) |

**Qui tắc MT (Modus tolens có nghĩa là denying method)**

Nếu có dòng $G \longrightarrow H$ và $\neg H$ thì viết được dòng F.

| | |
|---|---|
| dòng k : | $G \longrightarrow H$ |
| dòng m : | $\neg H$ |
| dòng m+1 : | $\neg G$ |

Thí dụ :

Chứng minh $F \longrightarrow (G \longrightarrow H), F, \neg H \vdash \neg G$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$ | (tiền đề) |
| 2 | $F$ | (tiền đề) |
| 3 | $G \longrightarrow H$ | ($\longrightarrow$e 1, 2) |
| 4 | $\neg H$ | (tiền đề) |
| 5 | $\neg G$ | (MT 3, 4). |

Chứng minh $F \longrightarrow G \vdash \neg G \longrightarrow \neg F$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \longrightarrow G$ | | (tiền đề) |
| 2 | *if* | $\neg G$ | |
| 3 | *nif* | $\neg F$ | (MT 1, 2) |
| 4 | $\neg G \longrightarrow \neg F$ | | ($\longrightarrow$i) |

### Qui tắc phủ định kép e ($\neg\neg$e)

Nếu có dòng $\neg\neg F$ thì viết được dòng F.

| | |
|---|---|
| dòng k : | $\neg\neg F$ |
| dòng m : | $F$ |

Thí dụ :

**Chứng minh Reductio ad absurrdum (RAA) :** $\neg F \rightarrow \perp \vdash F$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\neg F \rightarrow \perp$ | | (tiền đề) |
| 2 | *if* | $\neg F$ | |
| 3 | *nif* | $\perp$ | ($\rightarrow$e 1, 2) |
| 4 | $\neg\neg F$ | | ($\neg$i 2, 3) |
| 5 | $F$ | | ($\neg\neg$e 4) |

Nhận xét :

RAA còn gọi là Proof by contradiction (PBC), được viết dưới dạng qui tắc như sau :

### Qui tắc PBC

| | | |
|---|---|---|
| dòng k : | *if* | $\neg F$ |
| dòng m : | *nif* | $\perp$ |
| dòng m+1 : | $F$ | |

Nếu giả sử có dòng $\neg F$ và dẫn ra mâu thuẫn thì có thể viết ra dòng F.

Qui tắc LEM (the law of the excluded middle) còn gọi là luật *bài trung* hay *triệt tam*, i.e không có trường hợp thứ ba, chỉ có A hoặc $\neg A$ :

Chứng minh LEM :

$$\vdash F \vee \neg F$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *if* | $\neg(F \vee \neg F)$ | | |
| 2 | | *if* | $F$ | |
| 3 | | | $F \vee \neg F$ | ($\vee$i 2) |
| 4 | | *nif* | $\perp$ | ($\neg$e 1, 3) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | | | $\neg F$ | $(\neg i\ 2\text{-}4)$ |
| 6 | | | $F \vee \neg F$ | $(\vee i\ 5)$ |
| 7 | | *nif* | $\perp$ | $(\neg e\ 1, 6)$ |
| 8 | | $\neg\neg(F \vee \neg F)$ | | $(\neg i\ 1\text{-}7)$ |
| 9 | | $F \vee \neg F$ | | $(\neg\neg e\ 8)$ |

Tại sao không dừng ở dòng 6 ?. Vì kết quả phụ thuộc vào cấu trúc if.

Chứng minh $F \longrightarrow G \vdash \neg F \vee G$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $F \vee \neg F$ | | (LEM) |
| 2 | | *if* | $\neg F$ | |
| 3 | | *nif* | $\neg F \vee G$ | $(\vee i\ 2)$ |
| 4 | | *if* | $F$ | |
| 5 | | | $F \longrightarrow G$ | (tiền đề) |
| 6 | | | $G$ | $(\longrightarrow e\ 4, 5)$ |
| 7 | | *nif* | $\neg F \vee G$ | $(\vee i\ 6)$ |
| 8 | | $\neg F \vee G$ | | $(\vee e\ 1, 2, 4)$ |

Chứng minh $\neg F \vee \neg G \vdash \neg(F \wedge G)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *if* | $F \wedge G$ | | |
| 2 | | $F$ | | $(\wedge e\ 1)$ |
| 3 | | $G$ | | $(\wedge e\ 1)$ |
| 4 | | $\neg F \vee \neg G$ | | (tiền đề) |
| 5 | | *if* | $\neg F$ | |
| 6 | | *nif* | $\perp$ | $(\neg e\ 2,5)$ |
| 7 | | *if* | $\neg G$ | |
| 8 | | *nif* | $\perp$ | $(\neg e\ 3,7)$ |
| 9 | *nif* | $\perp$ | | $(\vee e\ 4\text{-}8)$ |
| 10 | $\neg(F \wedge G)$ | | | $(\neg i\ 1\text{-}9)$ |

Chứng minh : $\neg G \longrightarrow \neg F \vdash F \longrightarrow \neg\neg G$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\neg G \longrightarrow \neg F$ | | | | (tiền đề) |
| 2 | if F | | | | |
| 3 | $\neg\neg F$ | | | | ($\neg\neg$i 2) |
| 4 | nif $\neg\neg G$ | | | | (MT 1, 3) |
| 5 | $F \longrightarrow \neg\neg G$ | | | | ($\longrightarrow$i 2 – 4) |

Chứng minh : $\vdash (G\longrightarrow H) \longrightarrow ((\neg G\longrightarrow \neg F) \longrightarrow (F\longrightarrow H))$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | If | $G \longrightarrow H$ | | | |
| 2 | | If | $\neg G \longrightarrow \neg F$ | | |
| 3 | | | If | F | |
| 4 | | | | $\neg\neg F$ | ($\neg\neg$i 3) |
| 5 | | | | $\neg\neg G$ | (MT 2,4) |
| 6 | | | | G | ($\neg\neg$e 5) |
| 7 | | | nif | H | ($\longrightarrow$e 1,6) |
| 8 | | nif | $F \longrightarrow H$ | | ($\longrightarrow$i 3,7) |
| 9 | nif | $(\neg G\longrightarrow\neg F)\longrightarrow(F\longrightarrow H)$ | | | ($\longrightarrow$i 2,8) |
| 10 | $(G\longrightarrow H)\longrightarrow((\neg G\longrightarrow\neg F)\longrightarrow(F\longrightarrow H))$ | | | | ($\longrightarrow$i 1,9) |

Chứng minh : $(F \wedge G) \longrightarrow H \vdash F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $(F \wedge G) \longrightarrow H$ | | | (tiền đề) |
| 2 | | if | F | | |
| 3 | | | if | G | |
| 4 | | | | $F \wedge G$ | ($\wedge$i 2, 3) |
| 5 | | | nif | H | ($\longrightarrow$e 1, 4) |
| 6 | | nif | $G \longrightarrow H$ | | ($\longrightarrow$i 3-5) |
| 7 | | $F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$ | | | ($\longrightarrow$i 2-6) |

Chứng minh : $F \longrightarrow (G \longrightarrow H) \vdash (F \wedge G) \longrightarrow H$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$ | | | (tiền đề) |
| 2 | | if | $F \wedge G$ | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | $F$ | | $(\wedge e\ 2)$ |
| 4 | | $G \longrightarrow H$ | | $(\longrightarrow e\ 1, 3)$ |
| 5 | | $G$ | | $(\wedge e\ 2)$ |
| 6 | nif | $H$ | | $(\longrightarrow e\ 4\text{-}5)$ |
| 7 | $(F \wedge G) \longrightarrow H$ | | | $(\longrightarrow i\ 2\text{-}6)$ |

Chứng minh : $F \longrightarrow G \vdash (F \wedge H) \longrightarrow (G \wedge H)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $F \longrightarrow G$ | | | (tiền đề) |
| 2 | if | $F \wedge H$ | | |
| 3 | | $F$ | | $(\wedge e\ 2)$ |
| 4 | | $G$ | | $(\longrightarrow e\ 1, 3)$ |
| 5 | | $H$ | | $(\wedge e\ 2)$ |
| 6 | nif | $G \wedge H$ | | $(\wedge i\ 4\text{-}5)$ |
| 7 | $(F \wedge H) \longrightarrow (G \wedge H)$ | | | $(\longrightarrow i\ 2\text{-}6)$ |

Chứng minh : $(F \vee G) \vee H \vdash F \vee (G \vee H)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $(F \vee G) \vee H$ | | | (tiền đề) |
| 2 | if | $F \vee G$ | | |
| 3 | | if | $F$ | |
| 4 | | nif | $F \vee (G \vee H)$ | $(\vee i\ 3)$ |
| 5 | | if | $G$ | |
| 6 | | | $G \vee H$ | $(\vee i\ 5)$ |
| 7 | | nif | $F \vee (G \vee H)$ | $(\vee i\ 6)$ |
| 8 | nif | $F \vee (G \vee H)$ | | $(\vee e\ 2, 3, 5)$ |
| 9 | if | $H$ | | |
| 10 | | $(G \vee H)$ | | $(\vee i\ 9)$ |
| 11 | nif | $F \vee (G \vee H)$ | | $(\vee i\ 10)$ |
| 12 | $F \vee (G \vee H)$ | | | $(\vee e\ 1, 2, 9)$ |

Chứng minh : $F \wedge (G \vee H) \vdash (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \wedge (G \vee H)$ | | (tiền đề) |
| 2 | $F$ | | ($\wedge$e 1) |
| 3 | $G \vee H$ | | ($\wedge$e 1) |
| 4 | if | $G$ | |
| 5 | | $F \wedge G$ | ($\wedge$i 2, 4) |
| 6 | nif | $(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ | ($\vee$i 5) |
| 7 | if | $H$ | |
| 8 | | $F \wedge H$ | ($\wedge$i 2, 7) |
| 9 | nif | $(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ | ($\vee$i 8) |
| 10 | $(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ | | ($\vee$e 3, 4, 7) |

Chứng minh : $F \longrightarrow \neg F \vdash \neg F$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \longrightarrow \neg F$ | | (tiền đề) |
| 2 | if | $F$ | |
| 3 | | $\neg F$ | ($\longrightarrow$e 1, 2) |
| 4 | nif | $\perp$ | ($\neg$e 2, 3) |
| 5 | $\neg F$ | | ($\neg$i 2, 4) |

Chứng minh : $F \longrightarrow (G \longrightarrow H), F, \neg H \vdash \neg G$ (không dùng luật MT).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$ | | (tiền đề) |
| 2 | $F$ | | (tiền đề) |
| 3 | $\neg H$ | | (tiền đề) |
| 4 | $G \longrightarrow H$ | | ($\longrightarrow$e 1, 2) |
| 5 | if | $G$ | |
| 6 | | $H$ | ($\longrightarrow$e 4, 5) |
| 7 | nif | $\perp$ | ($\neg$e 3, 6) |
| 8 | $\neg G$ | | ($\neg$i 5, 7) |

Chứng minh : $(F \wedge \neg G) \longrightarrow H, \neg H, F \vdash G$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $(F \wedge \neg G) \longrightarrow H$ | | (tiền đề) |
| 2 | $\neg H$ | | (tiền đề) |
| 3 | $F$ | | (tiền đề) |
| 4 | if | $\neg G$ | |
| 5 | | $F \wedge \neg G$ | ($\wedge$i 3, 4) |
| 6 | | $H$ | ($\longrightarrow$e 1, 5) |
| 7 | nif | $\perp$ | ($\neg$e 2, 6) |
| 8 | $\neg\neg G$ | | ($\neg$i 4, 7) |
| 9 | $G$ | | ($\neg\neg$e 8) |

Nhận xét :

Về mặt *hình thức* khái niệm *chứng minh* có thể được định nghĩa từ những khái niệm sau :

*Hệ thống tiên đề* là một tập hữu hạn các công thức gọi là *tiên đề*.

Qui tắc suy luận *Modus ponen*.

Một *chứng minh* của công thức P từ hệ tiên đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là chuỗi hữu hạn các công thức $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, với $Q_m = P$ và mọi $Q_i$ thỏa một trong ba điều kiện sau :

$Q_i$ được lấy từ tiên đề, hoặc

$Q_i$ là tautology.

$Q_i$ thỏa Modus ponen.

## 1.4. Ứng dụng các qui tắc suy luận

Thí dụ :

Tìm tập xác định của biểu thức : $\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x-2}}$.

Biểu thức trên có nghĩa khi biểu thức trong căn lớn hơn hay bằng 0 và mẫu số khác không.

Do đó $(x^2 - 5x + 6) \geq 0$ và $(x - 2) \geq 0$ và $(x - 2) \neq 0$.

Hay $(x^2 – 5x + 6) \geq 0$ và $(x – 2) > 0$.

Phương trình $(x^2 – 5x + 6)$ có hai nghiệm là 3 và 2.

Do đó $(x – 3)(x – 2) \geq 0$ và $(x – 2) > 0$ (1)

Điều kiện (1) trở thành :

( $[(x – 3) \geq 0$ và $(x – 2) \geq 0]$ hay $[(x – 3) \leq 0$ và $(x – 2) \leq 0]$ ) và $(x – 2) > 0$

( $\underline{[x \geq 3 \text{ và } x \geq 2]}$ hay $\underline{[x \leq 3 \text{ và } x \leq 2]}$ ) và $(x > 2)$

( $\underline{[x \geq 3]}$ hay $\underline{[x \leq 2]}$ ) và $(x > 2)$

Đặt A là mệnh đề "$x \geq 3$",

B là mệnh đề "$x \leq 2$", do đó $\neg B$ là mệnh đề "$x > 2$".

Điều kiện (1) ở dạng luận lý mệnh đề :

$(A \vee B) \wedge \neg B$.

$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)$.

$(A \wedge \neg B)$.

$(x \geq 3$ và $x > 2)$.

$(x \geq 3)$.

Thí dụ :

Cho các phản ứng hóa học sau :

$HCl + NaOH \longrightarrow NaCl + H_2O$

$C + O_2 \longrightarrow CO_2$

$CO_2 + H_2O \longrightarrow H_2CO_3$

Chỉ rằng có thể có $H_2CO_3$ khi có HCl, NaOH, $O_2$ và C.

Các phân tử HCl, NaOH, $O_2$ và C được hình thức hóa như là hệ thống và chứng minh rằng $H_2CO_3$ được chứng minh từ hệ thống này.

Các phản ứng hóa học được hình thức hóa như sau :

$HCl \wedge NaOH \longrightarrow NaCl \wedge H_2O$

$C \wedge O_2 \longrightarrow CO_2$

$CO_2 \wedge H_2O \longrightarrow H_2CO_3$.

Bài toán trở thành chứng minh :

$$\left.\begin{cases} HCl \wedge NaOH \longrightarrow NaCl \wedge H_2O, \\ C \wedge O_2 \longrightarrow CO_2, \\ CO_2 \wedge H_2O \longrightarrow H_2CO_3, \\ HCl, \\ NaOH, \\ O_2, \\ C \end{cases}\right\} \vdash H_2CO_3.$$

Chứng minh :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | HCl | (tiền đề) |
| 2 | NaOH | (tiền đề) |
| 3 | $HCl \wedge NaOH$ | ($\wedge$i 1, 2) |
| 4 | $HCl \wedge NaOH \longrightarrow NaCl \wedge H_2O$ | (tiền đề) |
| 5 | $NaCl \wedge H_2O$ | ($\longrightarrow$e 3, 4) |
| 6 | $H_2O$ | ($\wedge$e 5) |
| 7 | C | (tiền đề) |
| 8 | $O_2$ | (tiền đề) |
| 9 | $C \wedge O_2$ | ($\wedge$i 7, 8) |
| 10 | $C \wedge O_2 \longrightarrow CO_2$ | (tiền đề) |
| 11 | $CO_2$ | ($\longrightarrow$e 9, 10) |
| 12 | $CO_2 \wedge H_2O$ | ($\wedge$i 6, 11) |
| 13 | $CO_2 \wedge H_2O \longrightarrow H_2CO_3$ | (tiền đề) |
| 14 | $H_2CO_3$ | ($\longrightarrow$e 12, 13). |

## 1.5. Chứng minh phản chứng

Một số công thức khó chứng minh được bằng cách chứng minh trực tiếp. Logic cổ điển chấp nhận cách chứng minh gián tiếp – nghĩa là chứng minh từ $\neg$F dẫn đến mâu thuẫn để kết luận có F.

Nhưng những nhà logic trực giác (intuitionistic logic) không đồng ý hai qui tắc :

$\vdash F \vee \neg F$ (LEM) và $\vdash \neg\neg F \longrightarrow F$ ($\neg\neg$e)

## 1.6. Tổng kết các qui tắc suy luận tự nhiên

| | | | |
|---|---|---|---|
| Giao i ($\wedge$i) | : | (F, G, | kết quả : $F \wedge G$) |
| Giao e ($\wedge$e) | : | ($F \wedge G$, | kết quả : F, G) |
| Điều kiện i ($\longrightarrow$i) | : | (if F … nif G, | kết quả : $F \longrightarrow G$) |
| Điều kiện e ($\longrightarrow$e) | : | ($F \longrightarrow G$, F, | kết quả : G) |
| Bản sao (id) | : | (F, | kết quả : F) |
| Hội i ($\vee$i) | : | (F, | kết quả : $F \vee G$) |
| Hội e ($\vee$e) | : | ($F \vee G$, if [F\|G] ... nif H, | kết quả : H) |
| Phủ định ($\neg$i) | : | (if F … nif $\perp$, | kết quả : $\neg F$) |
| Phủ định ($\neg$e) | : | ($F \wedge \neg F$, | kết quả : $\perp$) |
| Mâu thuẫn ($\perp$e) | : | ($\perp$, | kết quả : $F \wedge \neg F$) |
| (không có luật $\perp$i) | | | |
| Phủ định kép ($\neg\neg$e) | : | ($\neg\neg F$, | kết quả : F) |
| Phủ định kép ($\neg\neg$i) | : | (F, | kết quả : $\neg\neg F$) |
| Phủ định kép ($\neg\neg$e) | : | ($F \longrightarrow G$, $\neg G$ | kết quả : $\neg F$) |

## 2. Tiếp cận luận lý mệnh đề theo hướng ngữ nghĩa

Về phần này, người đọc có thể quên hết những gì đã biết về luận lý mệnh đề được trình bày theo hướng cấu trúc. Hai hướng trình bày này hoàn toàn độc lập với nhau, đó là hai cách nhìn về đối tượng luận lý mệnh đề.

Tiếp cận theo hướng ngữ nghĩa chính là kết nối không gian luận lý mệnh đề với các thế giới ứng dụng mang tính *đúng sai*. Thế giới ứng dụng của luận lý mệnh đề ở đây là những thế giới *nhị nguyên*, nghĩa là mọi đánh giá đều thực hiện trên thang hai giá trị. Khi đó, mượn cách tính đúng sai của thế giới ứng dụng để chuyển thành cách tính đúng sai cho công thức luận lý mệnh đề. Chỉ có lúc này mới có thể có những phát biểu là công thức A, công thức B, … đúng hoặc sai. Tùy từng lúc nó có thể liên kết với những thế giới ứng dụng khác nhau. Các thế giới này được gọi là diễn dịch của công thức. Nói cách khác, cách tiếp cận này chính là đi theo nguồn gốc sinh ra luận lý mệnh đề, đó là những hoạt động suy luận trong thực tế hằng ngày được hình thức hóa thành đối tượng của luận lý mệnh đề.

Chú ý :

> *Nhắc lại rằng : luận lý mệnh đề theo hướng cấu trúc không quan tâm đến khái niệm đúng sai.*
>
> Nghĩa là, cách tiếp cận theo hướng cấu trúc không có khái niệm đúng sai đối với công thức.

Nguồn gốc của luận lý mệnh đề hay bất kỳ logic nào đều xuất phát từ thế giới “thực”, nhưng khi các logic đã được hình thành và phát triển, chúng trở thành độc lập và không còn liên quan đến thế giới ứng dụng mà từ đó chúng được sinh ra.

Tiếp cận theo hướng ngữ nghĩa chính là bắt nhịp cầu nối luận lý mệnh đề với các thế giới ứng dụng. Thay vì giải bài toán của thế giới ứng dụng, người ta liên kết thế giới ứng dụng này với luận lý mệnh đề và chuyển bài toán vào luận lý mệnh đề để giải. Vì vậy, việc nghiên cứu các vấn đề thuần túy trong luận lý mệnh đề, cũng như chính luận lý mệnh đề là cần thiết.

(Dĩ nhiên luận lý mệnh đề không có khả năng mô phỏng hết tất cả tình huống của thế giới ứng dụng. Vì vậy, luận lý mệnh đề hay cả những logic khác không có khả năng giải quyết "tất cả" vấn đề của thế giới thực – thế giới con người". Mỗi logic chỉ dùng được cho một số bài toán trong phạm vi giới hạn. Do đó việc xuất hiện nhiều loại logic là tất yếu. Tâm lý tôn sùng logic, coi nó là công cụ có thể áp dụng bất cứ nơi đâu là … tai họa).

## 2.1. Liên kết giữa ngôn ngữ tự nhiên và luận lý mệnh đề

*Câu* là thành phần quan trọng của mỗi ngôn ngữ, nó được định nghĩa từ *văn phạm* của ngôn ngữ. Mỗi ngôn ngữ tự nhiên có những văn phạm khác nhau nên khái niệm câu cũng khác nhau.

Câu của một số ngôn ngữ tự nhiên thông dụng được phân loại như sau : câu khai báo, câu nghi vấn, câu tán thán, câu mệnh lệnh, … . Luận lý mệnh đề không có khả năng biểu diễn tất cả các loại câu.

Định nghĩa – Mệnh đề.

Mệnh đề trong luận lý mệnh đề là khái niệm liên kết với *câu khai báo* trong thế giới ứng dụng có giá trị *đúng* hoặc *sai*.

HếtĐn

Mệnh đề của luận lý mệnh đề sẽ lấy giá trị đúng/sai của câu khai báo làm giá trị đúng/sai cho nó. Việc đánh giá đúng/sai cho câu khai báo tùy thuộc vào thế giới sử dụng ngôn ngữ chứa câu khai báo. Việc này không tùy thuộc vào thế giới luận lý mệnh đề.

Người dùng có thể dùng mệnh đề (của logic) để biểu diễn cho các loại câu khác như câu hỏi, câu nghi vấn, … sau đó việc đánh giá đúng/sai là trách nhiệm của người dùng. Về cơ bản câu khai báo là lựa chọn phổ biến.

Vấn đề đánh giá đúng/sai cho câu khai báo phụ thuộc vào môi trường ứng dụng, chỉ ở một thời điểm nhất định. Vì vậy luận lý mệnh đề là thế giới nhị nguyên.

Thí dụ :

"Đại số là một ngành toán học".

Theo kiến thức thông thường phát biểu này đúng, nhưng có thể vào một lúc nào đó vì một lý do gì đó người ta bỏ đại số ra khỏi toán học thì lúc đó phát biểu có giá trị sai.

"Mọi người cần có đức tin".

Tùy theo quan điểm của từng xã hội, phát biểu này có thể đúng và cũng có thể sai.

"Mặt trời là khối vuông".

Vào thế kỷ 50, vũ trụ có một chuyển biến và mặt trời bị nén thành khối vuông, khi đó phát biểu trở thành đúng.

"2 + 5 = 2".

Đẳng thức này sai trên $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ nhưng đúng trên $\mathbb{Z}_5$.

Chú ý :

Việc xác định các câu khai báo là đúng hoặc sai *không thuộc phạm vi nghiên cứu của luận lý mệnh đề*, nó thuộc về môi trường ứng dụng qui định.

Khi câu khai báo được chọn làm đối tượng của luận lý mệnh đề, trách nhiệm của người dùng phải xác định giá trị đúng hoặc sai của câu khai báo liên kết với mệnh đề của luận lý mệnh đề.

## 2.2. Vấn đề chuyển đổi từ ngôn ngữ tự nhiên sang "ngôn ngữ" luận lý mệnh đề

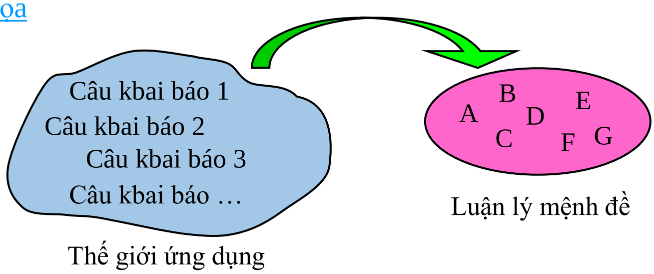
Luận lý mệnh đề cũng là "ngôn ngữ", nên việc giải bài toán của thế giới ứng dụng nhờ vào luận lý mệnh đề có bước đầu tiên là "dịch". Bài toán được diễn tả bằng ngôn ngữ tự nhiên của thế giới ứng dụng sẽ được dịch vào ngôn ngữ của luận lý mệnh đề. Như vậy để sử dụng được luận lý mệnh đề cần hiểu rõ ngôn ngữ của cả hai – ngôn ngữ tự nhiên của bài toán và ngôn ngữ của luận lý mệnh đề và mối liên kết tương quan giữa chúng.

Phần lớn các bài toán trong đời sống hằng ngày có liên quan đến logic đều dính dáng đến việc lập luận. Lập luận sử dụng các câu thuộc loại khai báo, đó là câu có thể đánh giá được đúng sai. Việc lập luận chính là hình thành một chuỗi các câu khai báo. Vì vậy việc nghiên cứu các lập luận trong đời sống hằng ngày chính là khảo sát việc sắp xếp các câu khai báo lại với nhau sao cho sự liên kết này *hợp lý*. Nhưng thế nào là hợp lý, để trả lời câu hỏi này cần xem xét thế nào là lập luận trong luận lý mệnh đề.

Việc nghiên cứu các lập luận trong luận lý mệnh đề không quan tâm đến ngữ nghĩa của từng câu khai báo. Nó chí quan tâm đến cách thức kết nối các câu khai báo lại với nhau để phù hợp với những qui luật của thế giới tự nhiên.

Các câu khai báo được sử dụng trong luận lý mệnh đề phải ở dạng mã hóa là những ký hiệu. Các ký hiệu này bỏ qua ngữ nghĩa cùng tính đúng sai của câu khai báo, chúng đơn thuần là ký hiệu vô nghĩa. Sau này tùy vào hoàn cảnh cụ thể, chúng sẽ được liên kết trở lại với thế giới ứng dụng thì mang giá trị đúng hay sai của thế giới đó.

Minh họa




Câu khai báo 1 $\longrightarrow$ A

Câu khai báo 2 $\longrightarrow$ B

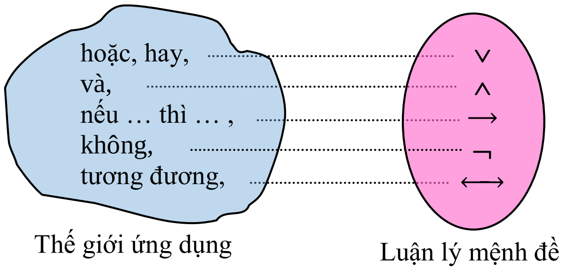
Câu khai báo 3 $\longrightarrow$ C

….

Luận lý mệnh đề cơ bản là tập hợp các phần tử "rời rạc" nghĩa là chúng không có liên hệ gì với nhau. Ngược lại, ở thế giới ứng dụng các câu khai báo có quan hệ chặt chẽ, câu này liên kết với câu kia. Sự liên kết cac câu với nhau làm tăng khả năng diễn đạt của ngôn ngữ.

Luận lý mệnh đề mô phỏng lại sự liên kết này, bằng cách kết nối các ký hiệu lại với nhau thông qua các toán tử. Các toán tử của luận lý mệnh đề chính là mô phỏng lại các hoạt động liên kết của ngôn ngữ tự nhiên.

Minh họa




Liên từ "*hoặc, hay*" được chuyển thành ký hiệu hội "$\vee$",

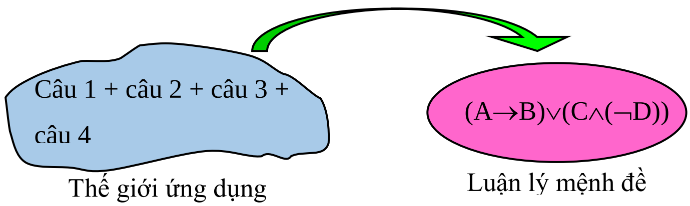
"*và*" chuyển thành ký hiệu giao "$\wedge$",

"*nếu … thì* …" chuyển thành ký hiệu điều kiện "$\longrightarrow$",

"không" chuyển thành ký hiệu phủ định "$\neg$".

Do đó toán tử của luận lý mệnh đề chính là cách liên kết của các câu khai báo được hình thức hóa thành ký hiệu.

Minh họa




Từ đây, thế giới luận lý mệnh đề trở thành một thế giới độc lập, và nó không sử dụng ngôn ngữ của thế giới ứng dụng, nó tạo ngôn ngữ riêng để dùng. Khi đó, ký hiệu của câu khai báo được gọi là *công thức nguyên*. Kết hợp các công thức nguyên thành một đối tượng mới gọi tên là *công thức*.

Tuy nhiên, vì để đạt được tính dễ hiểu nên việc trình bày luận lý mệnh đề theo hướng ngữ nghĩa cũng sẽ sử dụng cả ngôn ngữ tự nhiên cùng với ngôn ngữ luận lý mệnh đề. Nhưng sự kết hợp cả hai ngôn ngữ trong việc trình bày có thể dẫn đến nhiều ngộ nhận.

Định nghĩa – Công thức nguyên.

Công thức nguyên là câu khai báo :

- được biểu diễn bằng ký hiệu.
- đánh giá được là đúng, hoặc sai.
- việc đánh giá (đúng sai) không thay đổi theo *không gian* và *thời gian*.

Giá trị đúng sai của công thức nguyên được gọi là *thực trị*.

HếtĐn

Chú ý :

* Khi nào công thức nguyên của luận lý mệnh đề có giá trị đúng sai ?. Đó là khi nó liên kết với một thế giới ứng dụng.
* Ở đây từ thực trị thay cho từ *chân trị* như các tài liệu khác. Thực trị là giá trị của câu khai báo ở một thế giới ứng dụng thực tế, tại một không gian và thời gian xác định. Nó không phải là giá trị chân lý vĩnh cửu.

Thí dụ :

“Đoàn Thị Điểm là dịch giả của Chinh phụ ngâm” → ký hiệu là A.
“Mặt trời xoay quanh trái đất” → ký hiệu là B.
“Nếu hàm số f liên tục thì f khả vi” → ký hiệu là C.
“Phong, Vũ đi câu cá vào ngày chúa nhật” → ký hiệu là D.

Tại thời điểm “hiện tại” văn học sử nói rằng phát biểu được ký hiệu A có giá trị đúng nên công thức nguyên A mang giá trị đúng. Nhưng nếu ở một lúc nào đó, văn học sử lại nói rằng Phan Huy Chú là dịch giả của Chinh phụ ngâm, lúc đó công thức nguyên A mang giá trị sai.

Trước thời Galileo, "mọi người" tin rằng phát biểu của công thức nguyên B có gia trị đúng. Nhưng tại thời điểm hiện tại thế kỷ 21 công thức nguyên B đã mang gia trị sai. Nhưng, biết đâu, đến thế kỷ 30 một sự biến đổi lớn của vũ trụ làm cho mặt trời xoay quanh trái đất, lúc này công thức B lại mang giá trị đúng.

* Công thức nguyên là câu khai báo không chỉ được khảo sát bởi *chính nó* mà cả "*bối cảnh*" của nó.
* Nhắc lại, việc đánh giá đúng sai thuộc phạm vi của thế giới ứng dụng, *không thuộc phạm vi nghiên cứu* của luận lý mệnh đề. Như vậy luận lý mệnh đề chỉ giải quyết các bài toán ở một vị trí cụ thể trong một không gian xác định và tại một thời điểm nhất định.

Định nghĩa – Công thức hoàn hảo.

*Công thức hoàn hảo* là sự kết hợp *hữu hạn lần* sự xuất hiện các công thức nguyên với các toán tử "$\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\longrightarrow$" và các dấu ngoặc "(, )".

HếtĐn

Thí dụ :

Cho các công thức nguyên A, B, C, D.

$(A \vee B) \wedge A$, $(C \wedge \neg D) \longrightarrow (A \vee D)$, $(A \longrightarrow (B \vee C)) \wedge \neg D$

là 3 công thức hoàn hảo.

Nhận xét :

* Công thức hoàn hảo (WFF) được gọi vắn tắt là *công thức*. Công thức nguyên cũng được gọi là công thức. Do đó công thức nguyên có hai tên gọi là công thức nguyên và công thức.
* Ở góc nhìn đại số, tập hợp các công thức nguyên $\mathcal{A}$ và các toán tử $\vee, \wedge, \neg, \longrightarrow$ hình thành cấu trúc đại số $< \mathcal{A}, \vee, \wedge, \neg, \longrightarrow >$. Tuy nhiên chỉ cần hai toán tư $\vee$, $\neg$ cũng sinh ra cùng cấu trúc đại số, nghĩa là

$< \mathcal{A}, \vee, \wedge, \neg, \longrightarrow > = < \mathcal{A}, \vee, \neg >$.

* Các *liên từ* "hoặc $\vee$", "và $\wedge$", "không $\neg$", "nếu thì $\longrightarrow$" trong ngôn ngữ tự nhiên chỉ kết hợp những câu khai báo trong một số hoàn cảnh. Nhưng trong luận lý mệnh đề việc kết hợp các công thức cùng với các toán tử là tùy ý, không có ràng buộc nào.

Thí dụ :

Cho các câu khai báo : "Minh chơi bóng rỗ", "Minh khỏe mạnh", "Trời mưa".

Sự kết hợp sau :

"Nếu Minh chơi bóng rỗ thì Minh khỏe mạnh" là hợp lý.

Nhưng kết hợp sau :

"Nếu Minh chơi bóng rỗ thì Trời mưa" là không hợp lý.

"Nếu Trời mưa thì Minh khỏe mạnh" là không hợp lý.

Ký hiệu hóa các câu khai báo :

"Minh chơi bóng rỗ" là A, "Minh khỏe mạnh" là B,

"Trời mưa" là C.

Các kết hợp sau là hợp lệ trong luận lý mệnh đề :

"$(A \vee B) \wedge C$", "$\neg B \longrightarrow A$", "$A \longrightarrow C$",

"$(C \vee A \vee B) \wedge \neg(C \longrightarrow (B \wedge C))$" …

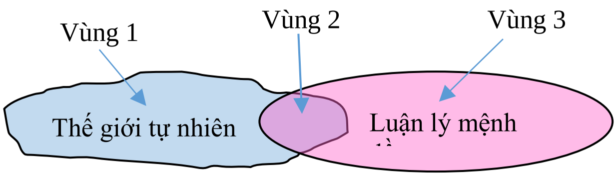
Nhưng nếu chuyển các công thức sau trở lại vào thế giới ứng dụng thực tế :

"$A \longrightarrow C$" nghĩa là "nếu Minh chơi bóng rỗ thì trời mưa",

"$\neg B \longrightarrow A$" nghĩa là "nếu Minh không khỏe mạnh thì Minh chơi bóng rỗ" là những câu không có lý trong thực tế.

Điều này cho thấy rằng luận lý mệnh đề chỉ mô phỏng được một phần rất nhỏ của thế giới ứng dụng. Luận lý mệnh đề không có khả năng mô tả hết các hoạt động của thế giới ứng dụng. Ngoài ra, không gian luận lý mệnh đề không "nằm" hoàn toàn trong thế giới tự nhiên. Tệ hại hơn nó còn có một phần khác trở nên vô nghĩa khi chuyển ngược trở lại vào thế giới ứng dụng.

Minh họa



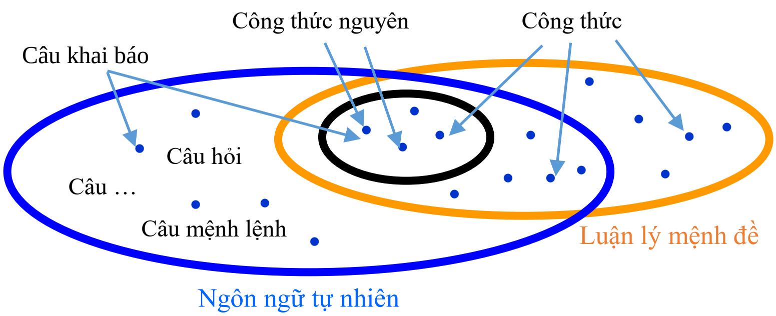

Tương quan giữa Thế giới ứng dụng và Luận lý mệnh đề

Vùng 1 : Luận lý mệnh đề không diễn tả được.

Vùng 2 : Luận lý mệnh đề diễn tả được và dịch trở lại thế giới tự nhiên có nghĩa.

Vùng 3 : Luận lý mệnh đề dịch trở lại thế giới tự nhiên trở thành vô nghĩa

Minh họa Mô tả tương quan cụ thể các yếu tố của hai thế giới.




Trong thế giới của ngôn ngữ tự nhiên có câu hỏi, câu mệnh lệnh, câu tán thán, … , cả câu khai báo không đánh giá được đúng/sai.

- Các liên từ “hoặc (or)”, “hoặc loại trừ (xor)”.

  Liên từ or là lựa chọn một trong hai yếu tố được đưa ra và có thể chọn cả hai, nhưng với xor chỉ cho phép lựa chọn một trong hai yếu tố. Tuy nhiên luận lý mệnh đề không sử dụng toán tử xor.

Thí dụ :

Tên cướp mang súng hoặc dao : $S \vee D$ (or).

Trong người tên cướp cũng có thể có cả dao và súng (có thể cả 2)

Con dao được làm bằng sắt hoặc gỗ : $S \oplus G$ (xor).

Con dao chỉ được làm từ một trong hai chất liệu (chỉ một trong hai)

### 2.3. Ngữ nghĩa trong luận lý mệnh đề

Tự thân sự vật không có "ý nghĩa", nó có ý nghĩa chỉ khi có chủ thể "nhìn" nó. Chủ thể lấy nhân sinh quan và vũ trụ quan của mình gán lên sự vật và coi là ý nghĩa của sự vật.

Luận lý mệnh đề có nguồn gốc từ thế giới ứng dụng, nhưng sẽ rời xa thế giới này để phát triển thành một thực thể độc lập. Những đối tượng trong luận lý mệnh đề không mang ý nghĩa nào hết và cũng không mang giá trị đúng sai cụ thể. Lúc này luận lý mệnh đề trở thành một thực thể toán học thuần túy trừu tượng. Nhà toán học nghiên cứu, tìm hiểu "hết" những tính chất, những qui luật có trong không gian toán học này.

Sau đó đưa luận lý mệnh đề quay lại liên kết với thực tế nào đó có sự "tương ứng". Từng đối tượng của luận lý mệnh đề liên kết với từng đối tượng của thế giới thực mà người ta muốn liên kết. Lúc này những đối tượng trong không gian luận lý mệnh đề sẽ mang ý nghĩa của thực tế mà nó liên kết. *Cách liên kết* những đối tượng của luận lý mệnh đề với những đối tượng của thực tế cùng với *thực tế* đó, cả hai được gọi là "một" *diễn dịch* của những đối tượng trong luận lý mệnh đề.

Định nghĩa – Diễn dịch.

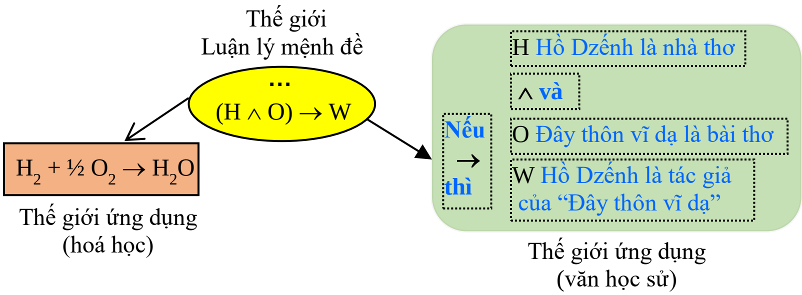
*Diễn dịch* của *công thức* trong luận lý mệnh đề là *thế giới ứng dụng* cùng với cách *gán* từng công thức nguyên, từng toán tử của công thức vào thế giới ứng dụng đó.

HếtĐn

Thí dụ :

Công thức ((H ∧ O) ⟶ W) trong luận lý mệnh đề là tổ hợp của các công thức nguyên H, O, W. Các công thức nguyên này chưa có ý nghĩa và giá trị đúng sai.

Minh họa




Khi nhúng công thức ((H ∧ O) ⟶ W) vào thế giới hóa học, công thức H liên kết với phân tử Hydrogen, nếu môi trường hóa học cụ thể này có hydrogen thì H có giá trị đúng. Tương tự, O liên kết với oxygen và nó hiện hữu nên O mang giá trị đúng và $H_2O$ liên kết với nước.

Thế giới hóa học cho biết có sự tồn tại của $H_2$ với $O_2$ và phản ứng hóa học giữa chúng nên công thức ((H ∧ O) ⟶ W) mang giá trị đúng trong thế giới hóa học.

Nhúng công thức ((H ∧ O) ⟶ W) vào thế giới văn học, H liên kết với mệnh đề “Hồ Dzếnh là nhà thơ”, văn học sử nói rằng Hồ Dzếnh đúng là nhà thơ nên H có giá trị đúng, tương tự O liên kết với mệnh đề “Đây thôn vĩ dạ là bài thơ”, văn học sử cũng cho biết có bài thơ này, nên O mang giá trị đúng và W liên kết với “Hồ Dzếnh là tác giả của “Đây thôn vĩ dạ””, văn học sử nói phát biểu này sai nên W mang giá trị sai. Và văn học sử cũng nói rằng phát biểu “Nếu Hồ Dzếnh là nhà thơ và “Đây thôn vĩ dạ” là bài thơ thì Hồ Dzếnh là tác giả của “Đây thôn vĩ dạ”” là phát biểu sai nên W mang giá trị sai.

Vì vậy công thức ((H ∧ O) ⟶ W) có giá trị sai trong thế giới văn học.

Đây là hai diễn dịch của công thức ((H ∧ O) ⟶ W).

<table>
<tr><td colspan="4">Bảng liên kết</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thế giới Luận lý mệnh đề</td><td>Thếgiới Hóahọc</td><td>Thế giới văn học</td></tr>
<tr><td>Đối tượng</td><td>Loại</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>H</td><td>Công thức</td><td>$H_2$</td><td>Hồ Dzếnh là nhà thơ</td></tr>
<tr><td>O</td><td>Công thức</td><td>$O_2$</td><td>Đây thôn vĩ dạ là bài thơ</td></tr>
<tr><td>W</td><td>Công thức</td><td>$H_2O$</td><td>Hồ Dzếnh là tác giả của Đây thôn vĩ dạ</td></tr>
<tr><td>$\wedge$</td><td>Toán tử</td><td>+ (kết hợp)</td><td>Và</td></tr>
<tr><td>$\longrightarrow$</td><td>Toán tử</td><td>$\longrightarrow$ (phản ứng)</td><td>Nếu … thì …</td></tr>
<tr><td colspan="4">Thế giới hóa học cùng bảng liên kết này được gọi là một diễn dịch của công thức $(H \wedge O) \longrightarrow W$.<br>Thế giới văn học cùng bảng liên kết này được gọi là một diễn dịch khác của công thức $(H \wedge O) \longrightarrow W$.</td></tr>
</table>

Nhận xét :

* Diễn dịch là "gán" cho công thức ý nghĩa của thế giới ứng dụng mà công thức được nhúng vào.
* Gán thực trị là gán giá trị T (đúng) hoặc F (sai) cho mỗi công thức.
* Có một định nghĩa khác về diễn dịch đó là cách đánh giá công thức bằng hàm đánh giá.
* Ở đây khái niệm diễn dịch chỉ định nghĩa cho ***một*** công thức, cũng có định nghĩa khác là trên *một lớp* các công thức.
* Công thức của luận lý mệnh đề tự thân không có giá trị đúng sai khi chưa liên hệ với thực tế nào. Do đó đừng phát biểu rằng công thức A, B, C, … đúng hoặc sai, phải nói A, B, C, … đúng hoặc sai ở thế giới ứng dụng nào.

Thí dụ :

Phát biểu "3 + 5 = 2" là đúng hay sai ?. Nó sai trong $\mathbb{Z}$, nhưng đúng trong $\mathbb{Z}_6$.

* Khi nói về khái niệm toán học người ta hay quên những yếu tố liên quan đến nó và coi như chúng là mặc định. Nhưng mỗi người lại có

một “mặc định” khác nhau dựa trên kiến thức quen thuộc. Đó là điểm gây khó khăn cho người học toán, kế cả những người học ở những ngành khoa học khác. Thậm chí có người coi việc mặc định đó là sơ đẳng, tầm thường. Đôi khi đó là hành vi kiêu ngạo của những người có “đẳng cấp”.

* Khi khảo sát công thức trong thế giới ứng dụng (thực tế), điều quan tâm hàng đầu là giá trị đúng sai của công thức. Nên ý hướng chủ đạo của luận lý mệnh đề cũng là “hoạt động” tìm giá trị đúng sai cho các công thức.
* Khi “nhúng” công thức vào thế giới ứng dụng, công thức sẽ lấy giá trị đúng sai của cái tương ứng với nó làm giá trị đúng sai của công thức.
* Môi trường.

  Thế giới hóa học và thế giới văn học ở thí dụ trên còn được gọi là những môi trường.

  Gán thực trị là gán giá trị T (đúng) hoặc F (sai) cho mỗi *biến* mệnh đề (công thức nguyên).

  Những nhà khoa học máy tính gọi việc gán giá trị cho các biến mệnh đề là môi trường.

Thí dụ :

Cho công thức $P \longrightarrow (Q \vee R)$.

Môi trường $\delta$ gán giá trị cho các biến P, Q, R :

$$\delta(P) = T,\ \delta(Q) = T,\ \delta(R) = F.$$

Môi trường $\mu$ gán giá trị cho các biến P, Q, R :

$$\mu(P) = F,\ \mu(Q) = T,\ \mu(R) = F$$

* Có thể đặc trưng diễn dịch của công thức bằng hàm đánh giá $\theta$ trên các công thức nguyên có trong công thức.

Qui ước công thức đúng có giá trị 1 và sai là 0 (tuy nhiên có những ngành ứng dụng logic có qui ước ngược lại : đúng là 0 và sai là 1).

Đôi khi trong quyển sách này dùng ký hiệu đ cho đúng và s cho sai.

Thí dụ :

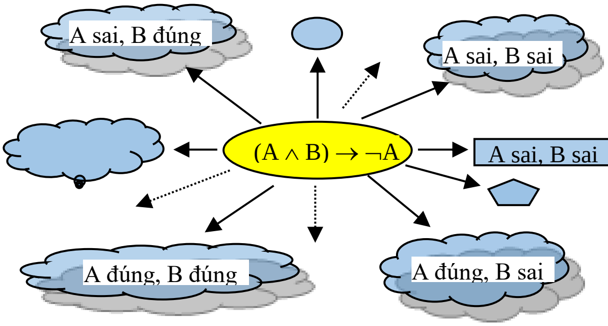
Công thức $(P \wedge Q) \longrightarrow R$ có diễn dịch J được đặc trưng bằng hàm đánh giá $\mu$ như sau :

$$\mu(P) = 1, \mu(Q) = 0, \mu(R) = 1.$$

Ký hiệu $\mu(F)$ có thể được viết ngắn gọn là $\mu F$.

* Vì số thế giới ứng dụng là vô hạn nên số diễn dịch của công thức cũng vô hạn. Nhưng mỗi công thức luận lý mệnh đề chỉ có hữu hạn các công thức nguyên, nên chỉ có hữu hạn trường hợp đánh giá đúng sai. Do đó, có thể nói *số diễn dịch của một công thức trong luận lý mệnh đề là hữu hạn*.

Thí dụ :




Công thức "$(A \wedge B) \longrightarrow \neg A$" có hai công thức nguyên, nên bất kỳ diễn dịch nào cũng chỉ rơi vào một trong 4 cách đánh giá : <A đúng, B đúng>, <A đúng, B sai>, <A sai, B đúng>, <A sai, B sai>. Vậy công thức trên *được coi như* có bốn diễn dịch.

## 2.4. Các công cụ tính thực trị

Giá trị đúng sai của công thức tùy thuộc vào môi trường thục tế nó được đánh giá. Vì vậy giá trị đúng sai của công thức thay đổi từ diễn dịch này đến diễn dịch khác. Nó không phải là giá trị vĩnh viễn, hay giá trị chân lý vĩnh hằng. Bài toán được đặt ra là : "Khi biết giá trị đúng sai của công thức nguyên trong công thức làm sao tính giá trị đúng sai của công thức ?".

Nếu $\mu A = 1$, $\mu B = 0$ và $\mu C = 0$ thì $\mu((A \longrightarrow B) \wedge (C \vee \neg A))$ là đúng hay sai ?.

Nếu $\mu A = 0$, $\mu B = 1$ và $\mu C = 0$ thì $\mu((\neg A \vee B) \longrightarrow \neg C)$ là đúng hay sai ?.

Nếu $\mu A = 0$, $\mu B = 1$, $\mu C = 0$ và $\mu D = 1$ thì $\mu(((A \vee C) \wedge B) \longrightarrow \neg D)$ là đúng hay sai.

Để trả lời đúng hoặc sai cho các câu hỏi trên cần phải xác định qui tắc đánh giá đúng sai của các toán tử : $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\longrightarrow$.

Luận lý mệnh đề đưa ra qui tắc đánh giá đúng sai cho các toán tử dựa vào sự đánh giá của thế giới thực đối với các liên từ tương ứng với các toán tử của luận lý mệnh đề. Qui tắc này được trình bày bằng bảng gọi là bảng thực trị.

### Bảng thực trị

Bảng thực trị là một bảng gồm các ô hình chữ nhật, trong đó cho biết giá trị đúng sai của các công thức nguyên và các công thức thành phần.

Cho P, Q là các công thức nguyên.

| P | Q | $\neg P$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \rightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| đ | đ | s | đ | đ | đ |
| đ | s | s | đ | s | s |
| s | đ | đ | đ | s | đ |
| s | s | đ | s | s | đ |

Theo bảng thực trị này qui định đánh giá đúng sai của các toán tử "hình như" rất tự nhiên. Chỉ có trường hợp đánh giá công thức $P \longrightarrow Q$ có giá trị đúng với P sai và Q đúng hoặc sai cần được nói rõ. Qui ước này dựa vào *nguyên* *tắc mặc nhiên thỏa* hay còn gọi là *nguyên tắc không vi phạm*. Nguyên tắc này nói rằng nguyên nhân P không xảy ra thì hậu quả Q có xảy ra hay không, phát biểu (P ⟶ Q) vẫn đúng.

Thí dụ sau lý giải cho qui định cách đánh giá công thức (P ⟶ Q).

Thí dụ :

Cho P = Trời mưa, Q = Vũ mang dù.

Tất cả các hoàn cảnh để P và Q có thể xảy ra :

Tình trạng 1 : Trời mưa và Vũ mang dù.

Tình trạng 2 : Trời mưa và Vũ không mang dù.

Tình trạng 3 : Trời không mưa và Vũ mang dù.

Tình trạng 4 : Trời không mưa và Vũ không mang dù.

Khảo sát phát biểu K : "Nếu trời mưa thì Vũ mang dù".

Phát biểu K = P ⟶ Q có P là nguyên nhân và Q là hậu quả.

Ở tình trạng 1, P xảy ra (đúng), Q xảy ra (đúng) nên K đúng.

Ở tình trạng 2, P xảy ra (đúng), Q không xảy ra (sai) nên K sai.

Ở tình trạng 3, P không xảy ra (sai), Q xảy ra (đúng) nên K đúng.

Ở tình trạng 4, P không xảy ra (sai), Q không xảy ra (sai) nên K đúng.

Trong tình trạng 3 và 4 nguyên nhân không xảy ra nên hậu quả có xảy ra hay không, phát biểu K đều được xem là đúng. Điều này dựa vào "Nguyên tắc mặc nhiên thỏa".

Tất cả diễn dịch của công thức trong luận lý mệnh đề tướng ứng với các dòng của bảng thực trị.

Một cách định nghĩa khác, bảng thực trị là một hàm trên tập hợp gồm hai phần tử đúng, sai ({đ, s}).

Các toán tử luận lý về bản chất là các hàm giữa các tập hợp {đ, s} :

$\neg : \{đ, s\} \longrightarrow \{đ, s\}$ $\quad\quad$ $\wedge : \{đ, s\} \times \{đ, s\} \longrightarrow \{đ, s\}$

$\vee : \{đ, s\} \times \{đ, s\} \longrightarrow \{đ, s\}$ $\quad$ $\longrightarrow : \{đ, s\} \times \{đ, s\} \longrightarrow \{đ, s\}$

Điều này cho biết bậc của các toán tử :

¬ có bậc 1, ∧ có bậc 2,

∨ có bậc 2, ⟶ có bậc 2.

Nhận xét :

Bảng thực trị chẳng qua cũng là một *qui ước* được "*nhiều người*" chấp nhận. Nếu người dùng ở một ứng dụng nào đó có thể chọn một *qui ước mới* phù hợp hơn cho bài toán của mình.

### Dùng bảng để tính thực trị của công thức

Đây là phương pháp đầu tiên được nghĩ đến khi có yêu cầu tính thực trị cho công thức.

Thí dụ :

Tính thực trị của công thức (X ⟶ (¬Y∨Z)) ∧ ¬X

Bảng thực trị gồm các cột chính là 3 cột chứa ba công thức nguyên và cột cuối cùng chứa công thức cần tính. Ngoài ra có thể thêm vào những cột trung gian để thuận tiện cho việc tính toán. Số cột trung gian bao nhiêu tùy thuộc vào người dùng.

| Dòng | X | Y | Z | ¬Y∨Z | X→(¬Y∨Z) | (X ⟶ (¬Y∨Z)) ∧ ¬X |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | đ | đ | đ | đ | đ | s |
| 2 | đ | đ | s | s | s | s |
| 3 | đ | s | đ | đ | đ | s |
| 4 | đ | s | s | đ | đ | s |
| 5 | s | đ | đ | đ | đ | đ |
| 6 | s | đ | s | s | đ | đ |
| 7 | s | s | đ | đ | đ | đ |
| 8 | s | s | s | đ | đ | đ |

Giải thích dòng 1 : X = đ, Y = đ, Z = đ, ¬Y∨Z = ¬đ∨đ = đ, X→(¬Y∨Z) = đ→đ = đ,

(X ⟶ (¬Y∨Z)) ∧ ¬X = (đ ∧ ¬đ) = s.

Giải thích dòng 5 : X = s, Y = đ, Z = đ, ¬Y∨Z = ¬đ∨đ = đ, X→(¬Y∨Z) = s→đ = đ,

(X ⟶ (¬Y∨Z)) ∧ ¬X = (đ ∧ ¬s) = đ.

Điều bất lợi của bảng thực trị là khi số công thức nguyên trong công thức lớn làm cho kích thước bảng thực trị cũng lớn theo.

**Dùng thủ tục số học để tính thực trị của công thức**

Một cách khác để tính giá trị của công thức là sử dụng phương pháp số học. Đó là chuyển vào không gian < $\mathbb{Z}_2$, +, •> để tính toán ($\mathbb{Z}_2$ là lớp tương đương của $\mathbb{Z}$ trên quan hệ mod 2, $\mathbb{Z}_2$ có hai phần tử là 0 và 1).

Tương ứng giữa < ∨, ∧, ¬ > của luận lý mệnh đề và < +, • > của $\mathbb{Z}_2$, với μ(đ) = 1, μ(s) = 0.

Sau đây là qui định chuyển sang tính toán số học :

| | | |
|---|---|---|
| $\mu(P \vee Q)$ | $= \mu P + \mu Q + \mu P\mu Q$ | trong $\mathbb{Z}_2$, |
| $\mu(P \wedge Q)$ | $= \mu P\mu Q$ | trong $\mathbb{Z}_2$, |
| $\mu(\neg P)$ | $= 1 + \mu P$ | trong $\mathbb{Z}_2$, |
| $\mu(P \longrightarrow Q)$ | $= 1 + \mu P + \mu P\mu Q$ | trong $\mathbb{Z}_2$. |

Hệ quả :

$\mu P + \mu P = 0$, $\mu P.\mu P = \mu P$, $\mu\neg P.\mu P = 0$.

Thí dụ :

Tính thực trị công thức (X ⟶ (¬Y ∨ Z)) ∧ ¬X bằng phương pháp số học.

$$\begin{aligned}
&\mu((X \longrightarrow (\neg Y \vee Z)) \wedge \neg X) \\
&= \mu(X \longrightarrow (\neg Y \vee Z)).\mu(\neg X) \\
&= (1 + \mu X + \mu X.\mu(\neg Y \vee Z)).\mu(\neg X) \\
&= (1 + \mu X + \mu X.(\mu(\neg Y) + \mu Z + \mu(\neg Y).\mu Z)).\mu(\neg X) \\
&= (1 + \mu X + \mu X.\mu(\neg Y) + \mu X.\mu Z + \mu X.\mu(\neg Y).\mu Z).\mu(\neg X) \\
&= \mu(\neg X) + \mu(\neg X).\mu X + \mu(\neg X).\mu X.\mu(\neg Y) + \mu(\neg X).\mu X.\mu Z + \\
&\qquad \mu(\neg X).\mu X.\mu(\neg Y).\mu Z
\end{aligned}$$

$= \mu(\neg X) + 0 + 0.\mu(\neg Y) + 0.\mu Z + 0.\mu(\neg Y).\mu Z$

$= \mu(\neg X) = 1 + \mu X.$

Nhận xét :

Một phó sản của phương pháp số học là loại bỏ khỏi những công thức nguyên không ảnh hưởng đến việc tính thực trị.

**Dùng cây phân tích để tính thực trị của công thức**

Một phương pháp khác để tính giá trị của công thức là dùng đồ thị.

Định nghĩa – Cây phân tích.

Cây phân tích là cây nhị phân có gốc, đỉnh là toán tử và lá là công thức nguyên.

HếtĐn

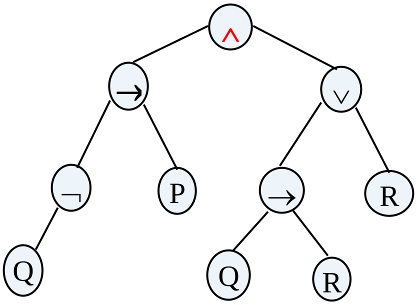
Cây phân tích là biểu diễn đồ thị của công thức. Đỉnh gốc là toán tử kết nối một hoặc hai công thức con của công thức. Việc xây dựng được thực hiện như sau : chọn toán tử được thực thi cuối cùng trong công thức làm đỉnh gốc. Hai nhánh là hai phần còn lại của công thức. Hai nhánh được thực hiện tiếp theo cách trên.

Thí dụ :

Cho công thức $(\neg Q \longrightarrow P) \wedge ((Q \longrightarrow R) \vee R)$.

Trong công thức trên toán tử "$\wedge$" được thưc thi cuối cùng nên là gốc. Nhánh bên trái là công thức con $(\neg Q \longrightarrow P)$, nhánh bên phải là công thức con $((Q \longrightarrow R) \vee R)$. Tiếp tục phát triển nhánh phải và trái theo như cách trên. Nhánh trái $(\neg Q \longrightarrow P)$ có toán tử "$\longrightarrow$" là phép tính cuối nên là đỉnh kế tiếp và hai nhánh hai bên là "$\neg$Q" và "P", nhánh trái "$\neg$Q" được phân tích tiếp có đỉnh là toán tử "$\neg$" và lá là công thức nguyên Q. Nhánh phải có công thức nguyên P nên là lá. Tiếp tục thực hiện tương tự với nhánh bên phải $((Q \longrightarrow R) \vee R)$. Cuối cùng chỉ còn lại các công thức nguyên được gọi là đỉnh lá thì dừng lại.

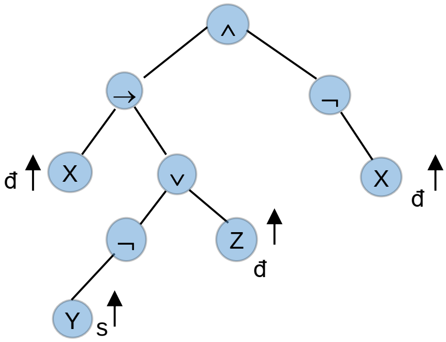
Kết quả có cây phân tích như sau :




Chiều cao cây phân tích là yếu tố quan trọng trong việc tính toán cây phân tích với chi phí tối thiểu.

Thí dụ :

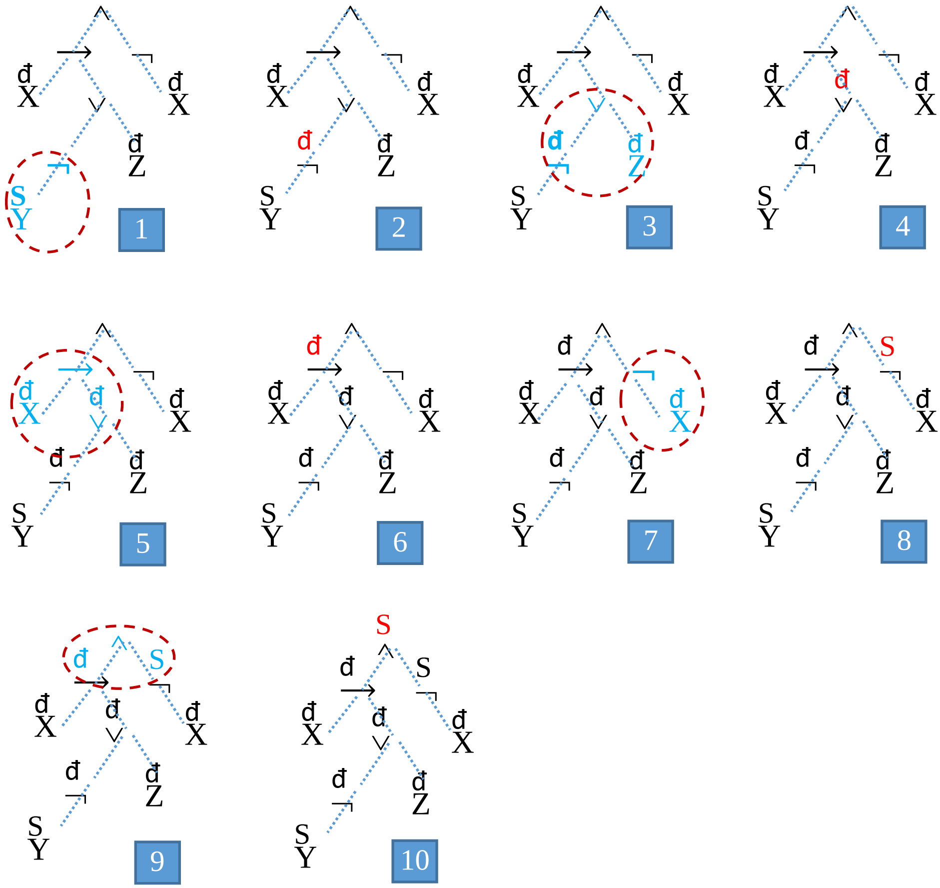
Đánh giá công thức (X ⟶ (¬Y ∨ Z)) ∧ ¬X, với X, Y, Z lần lượt có giá trị đ, s, đ.



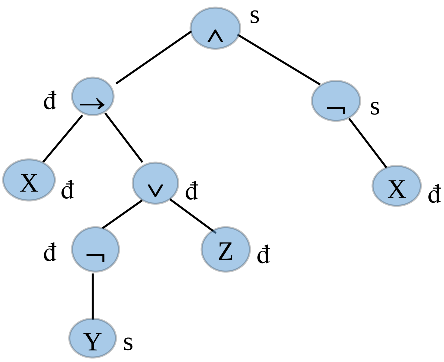

Bước 1&2, phủ định của Y có giá trị sai thành đúng, gán "đ" vào nút chứa ký hiệu phủ định (¬).

Bước 3&4, ở nút "¬" và "Z", hai giá trị đúng hội lại nên nút ở trên (∨) mang giá trị đ.

Các bước sau tương tự như hình dưới đây.




Kết quả có cây phân tích có giá trị sai ở gốc. Vậy công thức có giá trị sai.



## 2.5. Phân loại công thức trong luận lý mệnh đề

Khái niệm diễn dịch giúp phân loại tất cả công thức. Khi đó không gian luận lý mệnh đề được phân làm nhiều lớp và việc khảo sát từng lớp làm rõ cấu trúc của luận lý mệnh đề.

Định nghĩa – Công thức hằng đúng – Hằng sai – Khả đúng – Khả sai.

Công thức F *hằng đúng* nếu và chỉ nếu F đúng với mọi diễn dịch I.

Định nghĩa bằng ngôn ngữ hình thức :

F hằng đúng $\longleftrightarrow$ $(\forall I)\ \mu F = 1$.

Công thức F *hằng sai* nếu và chỉ nếu F sai với mọi diễn dịch I.

F hằng sai $\longleftrightarrow$ $(\forall I)\ \mu F = 0$.

Công thức F *khả đúng* nếu và chỉ nếu có diễn dịch I làm cho F đúng.

F khả đúng $\longleftrightarrow$ $(\exists I)\ \mu F = 1$.

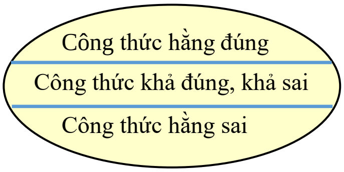
Công thức F *khả sai* nếu và chỉ nếu có diễn dịch I làm cho F sai.

F khả sai $\longleftrightarrow$ $(\exists I)\ \mu F = 0$.

HếtĐn

Nhận xét :

* Tất cả các công thức được chia làm 3 lớp.




Không gian Luận lý mệnh đề

* Lớp công thức hằng đúng và lớp công thức hằng sai có cùng số phần tử.
* Có bốn định nghĩa – hằng đúng, hằng sai, khả đúng, khả sai, nhưng chỉ cần hai trong bốn định nghĩa *đương nhiên* sẽ có được hai định nghĩa còn lại.

  Lấy phủ định hai vế :

  F hằng đúng $\longleftrightarrow$ F đúng với mọi diễn dịch I.

¬ (F hằng đúng) ⟷ ¬ (F đúng với mọi diễn dịch I).

F không hằng đúng ⟷ có diễn dịch I để F sai.

F không hằng đúng ⟷ F khả sai.

Do đó khái niệm "*không hằng đúng*" chính là khái niệm "*khả sai*".

Lấy phủ định hai vế :

F hằng sai ⟷ F sai với mọi diễn dịch I.

¬ (F hằng sai) ⟷ ¬ (F sai với mọi diễn dịch I).

F không hằng sai ⟷ có diễn dịch I để F đúng.

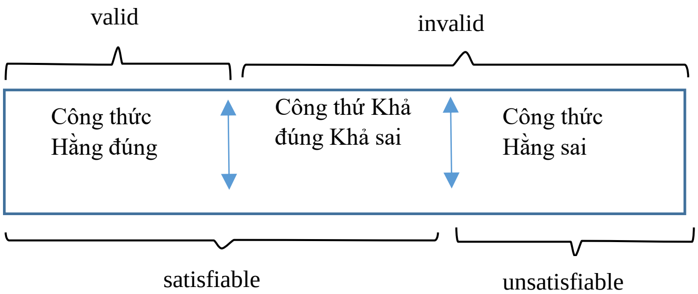
Do đó khái niệm "*không hằng sai*" chính là khái niệm "*khả đúng*".

Khi các định nghĩa này được diễn đạt trong luận lý vị từ, việc lấy "phủ định định nghĩa" và "phủ định công thức" sẽ rõ ràng hơn.

Do đó trong lập trình máy tính chỉ cần *một* thủ tục có thể kiểm tra tính hằng đúng, hằng sai, khả sai và khả đúng.

* Thuật ngữ tiếng Anh.

Bảng sau tóm tắt các thuật ngữ tiếng Anh cho các khái niệm trên.




Quan hệ giữa validity và satisfiability

Valid formula = tautology = hằng đúng (validity).

Contradiction = hằng sai.

Satisfiable = consistent = khả đúng.

Falsiable = unsatisfiable = inconsistent = khả sai.

Định nghĩa – Công thức tương đương.

Công thức F và G tương đương nếu chúng có cùng thực trị đối với mọi diễn dịch.

Ký hiệu hai công thức F, G tương đương là F = G.

HếtĐn

Chú thích :

* Giải thích định nghĩa trên.

Lấy diễn dịch I của F và G.

Nếu F đúng trong I thì G cũng đúng trong I và ngược lại.

Nếu F sai trong I thì G cũng sai trong I và ngược lại.

* Hai công thức tương đương phải có cùng số công thức nguyên ?.

Câu trả lời là không.

## 2.6. Các dạng tương đương của hằng đúng, khả đúng, hằng sai, khả sai.

Từ định nghĩa hằng đúng, hằng sai có ngay khái niệm :

"*không hằng đúng*" chính là "*khả sai*".

"*không hằng sai*" chính là "*khả đúng*".

Do đó :

| | | | |
|---|---|---|---|
| F khả sai | $\longleftrightarrow$ | F không hằng đúng | (1) |
| F khả đúng | $\longleftrightarrow$ | F không hằng sai | (2) |
| F hằng sai | $\longleftrightarrow$ | $\neg$F hằng đúng | (3) |
| F hằng đúng | $\longleftrightarrow$ | $\neg$F hằng sai | (4) |
| F không hằng sai | $\longleftrightarrow$ | $\neg$F không hằng đúng | (5) |

(phủ định hai vế của (3))

| | | | |
|---|---|---|---|
| F khả đúng | $\longleftrightarrow$ | $\neg$F không hằng đúng | (6) |

(từ (2) và (5))

Các dạng tương đương trên có thể dẫn xuất từ định nghĩa của hằng đúng, hằng sai, khả đúng, khả sai. Nhưng cũng có thể chứng minh trực tiếp, sau đây là chứng minh cho dạng (6).

F khả đúng $\longleftrightarrow$ $\neg$F không hằng đúng.

Chứng minh :

($\Longrightarrow$) Nếu F khả đúng, có diễn dịch I để F đúng.

Do đó $\neg$F sai trong I.

Vậy $\neg$F không hằng đúng.

($\Longleftarrow$) Nếu $\neg$F không hằng đúng, có diễn dịch I để $\neg$F sai.

Do đó F đúng trong I.

Vậy F khả đúng.

Định nghĩa – Mô hình của công thức.

Diễn dịch I của công thức F được gọi là mô hình của F nếu F đúng trong I.

HếtĐn

Chú thích :

Diễn dịch = interpretation, valuation.

Mô hình = model.

Có tài liệu dùng từ model cho khái niệm diễn dịch.

**Các công thức tương đương**

1. $\neg(\neg F) \quad = \quad F$
2. $F \leftrightarrow G \quad = \quad (F \longrightarrow G) \wedge (G \longrightarrow F)$
3. $F \longrightarrow G \quad = \quad \neg F \vee G$
4. $F \longrightarrow G \quad = \quad \neg G \longrightarrow \neg F$
5. $\neg(F \vee G) \quad = \quad (\neg F) \wedge (\neg G)$ (DeMorgan)
6. $\neg(F \wedge G) \quad = \quad (\neg F) \vee (\neg G)$ (DeMorgan)

Chú thích :

Dễ dàng chứng minh các dạng tương đương trên bằng cách dùng bảng thực trị.

### Một số công thức hằng đúng

Các công thức sau là hằng đúng ngoại trừ công thức 1 là hằng sai.

1. $(F \wedge \neg F)$ (hằng sai)
2. $(F \vee \neg F)$
3. $F \longrightarrow (F \vee G)$
4. $(F \wedge G) \longrightarrow F$
5. $((F \longrightarrow G) \wedge F) \longrightarrow G$
6. $((F \longrightarrow G) \wedge \neg G) \longrightarrow \neg F$
7. $((F \longrightarrow G) \wedge (G \longrightarrow H)) \longrightarrow (F \longrightarrow H)$ (tính truyền)
8. $((F \longrightarrow G) \wedge (F \longrightarrow \neg G)) \longrightarrow \neg F$ (phản chứng)
9. $(F \longrightarrow G) \longrightarrow ((F \vee H) \longrightarrow (G \vee H))$
10. $(F \longrightarrow G) \longrightarrow ((F \wedge H) \longrightarrow (G \wedge H))$
11. ...

Cách chứng minh công thức số 5 dưới đây có thể áp dụng để chứng minh cho các công thức khác.

Chứng minh $A = ((F \longrightarrow G) \wedge F) \longrightarrow G$ hằng đúng

Lấy diễn dịch I,

nếu F đúng trong I,

nếu G đúng trong I thì A đúng trong I,

nếu G sai trong I thì A đúng trong I,

nếu F sai trong I,

nếu G đúng trong I thì A đúng trong I,

nếu G sai trong I thì A đúng trong I,

Vậy công thức A hằng đúng.

Định nghĩa – Lưỡng nguyên.

F và ¬F được gọi là hai *lưỡng nguyên*, với F là công thức nguyên.

F là *lưỡng nguyên dương* và ¬F là *lưỡng nguyên âm*.

HếtĐn

Thí dụ :

Cho A, B, C là các công thức nguyên, A, B, C, ¬A, ¬B, ¬C được gọi là các lưỡng nguyên.

Chú thích :

Có người định nghĩa lưỡng nguyên bao gồm cả ký hiệu hằng đúng ⊤ và ký hiệu hằng sai ⊥.

**Biểu diễn một diễn dịch cho công thức**

Diễn dịch của công thức là không gian, là thế giới, là môi trường để công thức được *nhúng* vào. Diễn dịch của công thức được đặc trưng bằng cách chỉ ra thực trị của tất cả công thức nguyên có trong công thức. Việc xác định được thực trị của công thức nguyên giúp cho mục đích tính thực trị của công thức. Việc tính thực trị của công thức khả thi vì số công thức nguyên trong công thức hữu hạn.

Định nghĩa – Biểu diễn của diễn dịch.

Diễn dịch được biểu diễn dưới dạng tập hợp các lưỡng nguyên.

Nếu công thức nguyên A đúng thì viết là A, nếu sai thì viết là ¬A.

HếtĐn

Thí dụ :

$F = (A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \vee \neg C)$, $G = ((D \vee \neg E) \longrightarrow \neg C) \longrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$

I = {A, B, C} là diễn dịch của F, nghĩa là

$\mu A = 1, \mu B = 1, \mu C = 1$ (A đúng, B đúng, C đúng).

J = {A, ¬B, ¬C} là diễn dịch của F, nghĩa là

$\mu A = 1, \mu B = 0, \mu C = 0$ (A đúng, B sai, C sai).

K = {¬B, ¬C, D, E} là diễn dịch của G, nghĩa là

$\mu B = 0$, $\mu C = 0$, $\mu D = 1$, $\mu E = 1$ (B và C sai, D và E đúng).

L = {¬B, ¬C, D} không là diễn dịch của F và G vì thiếu A cho F và thiếu E cho G.

M = {A, ¬B, ¬C, D, ¬E} là diễn dịch của F và G.

Chú thích :

Đừng nói diễn dịch I chung chung, phải nói *diễn dịch của công thức* cụ thể.

Mọi khái niệm toán học luôn đi kèm theo đối tượng cụ thể, việc nói trống không khái niệm không kèm theo đối tượng liên quan sẽ dẫn đến nhiều ngộ nhận. Việc mặc định hiểu ngầm các không gian hay đối tượng đi theo các khái niệm toán học sẽ gây khó khăn cho người mới học.

## 2.7. Suy diễn trong ngôn ngữ tự nhiên diễn đạt bằng "ngôn ngữ" luận lý mệnh đề

### Luật bài trung.

Luật *bài trung* hay còn gọi là *triệt tam* phát biểu rằng :

Công thức F hội với phủ định của F luôn luôn đúng.

Nghĩa là hai mệnh đề là phủ định của nhau phải có một mệnh đề đúng.

(F ∨ ¬F) hằng đúng.

Thí dụ :

Đặt G = "Hôm nay là ngày chúa nhật **hoặc** hôm nay *không* là chúa nhật".

F = "Hôm nay là chúa nhật", ¬F = "Hôm nay không là chúa nhật".

Do đó G = F ∨ ¬F và G là hằng đúng.

Nhận xét :

Lấy công thức F tương ứng với phát biểu "Cái bàn màu trắng". F đúng vì trong thế giới ứng dụng có cái bàn màu trắng. Do đó, "cái bàn màu xanh", "cái bàn màu đen", "cái bàn màu vàng",… đều là ¬F. Tuy nhiên trong logic, ¬F chỉ là một đối tượng, nhưng khi chuyển trở lại thế giới ứng dụng nó tương ứng với một lớp các câu khai báo. Vấn đề chọn phát biểu "phủ định" nào tùy thuộc vào thế giới ứng dụng hay yêu cầu của bài toán.

### Các dạng tương đương của "nếu … thì …"

Mệnh đề F (nguyên nhân) dẫn ra mệnh đề G (hệ quả) tương đương với phủ định của mệnh đề G dẫn ra mệnh đề phủ định của F.

a) $F \longrightarrow G = \neg G \longrightarrow \neg F$

Đây cũng là một phương pháp chứng minh được sử dụng trong toán học. Nhiều khi không thể chứng minh được F dẫn ra G, người ta chứng minh nếu không có hệ quả G cũng không có nguyên nhân F.

Thí dụ :

Nếu anh có học logic thì anh thông minh.

$\Leftrightarrow$

Nếu anh không thông minh thì anh không có học logic.

Dạng tương đương thứ hai là hội của hệ quả và phủ định nguyên nhân.

b) $F \longrightarrow G = \neg F \vee G$

Thí dụ :

Nếu Socrates là người thì Socrates phải chết.

Tương đương với :

Socrates không là người hoặc Socrates phải chết.

Hai dạng tương đương này có thể được chứng minh bằng cách dùng bảng thực trị.

### Dạng De Morgan

Đó là phủ định của dạng hội và giao.

$\neg(F \vee G) = (\neg F) \wedge (\neg G)$

$\neg(F \wedge G) = (\neg F) \vee (\neg G)$

### Tam đoạn luận = Modus ponens

$[\,(F \wedge (F \longrightarrow G)) \longrightarrow G\,]$ là hằng đúng.

Dạng suy luận này có ba mệnh đề : F, (F ⟶ G) và G. Nghĩa là có dữ kiện F và qui luật (F ⟶ G) sẽ luôn có G.

Thí dụ :

Nếu Socrates là người thì Socrates phải chết. (qui luật)

Socrates là người. (dữ kiện)

Vậy Socrates phải chết. (dử kiện)

**Tam đoạn luận nghịch = Modus tolens**

$$[\ ((F \longrightarrow G) \wedge \neg G) \longrightarrow \neg F\ ]$$ là hằng đúng.

Dạng suy luận này có ba mệnh đề : (F ⟶ G), ¬G và ¬F. Nghĩa là có qui luật (F ⟶ G) và không có hậu quả G sẽ không có nguyên nhân F.

Nhận xét :

Modus ponens chỉ là biến đổi của modus tolens (thay F⟶ G bằng ¬G ⟶ ¬F trong modus tolens sẽ có modus ponens).

Thí dụ :

Nếu Socrates là người thì Socrates phải chết.

Socrates không chết.

Vậy Socrates không là người.

**Tách biệt**

$$[\ (F \wedge G) \longrightarrow F\ ]$$ là công thức hằng đúng.

Qui luật này nói rằng : thêm G bất kỳ vào F, hệ thống mới gồm G và F vẫn sinh ra được F.

**Kết nối**

$$[\ F \longrightarrow (F \vee G)\ ]$$ là công thức hằng đúng.

Qui tắc này nói rằng : hệ thống F có thể sinh ra hệ thống mới gồm F hội với công thức bất kỳ G.

Nhận xét :

Qui tắc này khi chuyển về thế giới ứng dụng thực tế có vẻ kỳ hoặc nhưng luận lý mệnh đề chấp nhận.

Thí dụ :

Nếu tam giác ABC có góc 90° thì tam giác có góc 90° hoặc có ba cạnh bằng nhau.

- **Phản chứng**

$$[((F \longrightarrow G) \wedge (F \longrightarrow \neg G)) \longrightarrow \neg F]$$ là công thức hằng đúng.

Qui tắc này nói rằng : hệ thống F sinh đồng thời hai công thức phủ định của nhau thì có phủ định của hệ thống F. Nghĩa là, nếu mệnh đề F sinh ra mâu thuẫn (F sinh ra G và ¬G) thì phủ định của F phải đúng.

[ở đây đã vi phạm điều đã nói trước đây khi nói "F phải đúng" không kèm theo không gian chứa nó – là đúng ở đâu. Vấn đề này thường xuất hiện trong thực tế, nhiều khi không gian chứa nó hoặc diễn dịch được ngầm hiểu].

Phản chứng là phương pháp chứng minh được sử dụng trong toán học.

Thí dụ :

Nếu hàm f không liên tục thì hàm g không khả vi. Hàm g là khả vi.

Chứng minh hàm f là liên tục.

Giả sử "f không liên tục", suy ra "g không khả vi".

⟹ Mâu thuẫn.

⟹ ¬"f không liên tục"

Vậy f liên tục.

- **Tam đoạn luận tách biệt**

$$[((F \vee G) \wedge \neg G) \longrightarrow F]$$ là công thức hằng đúng.

Qui tắc này nói rằng : nếu có $(F \vee G)$ đúng và G sai thì F phải đúng.

Thí dụ :

Tam giác ABC là vuông hoặc cân.

Tam giác ABC không cân, vậy tam giác ABC vuông.

- **Truyền**

$$[((F \longrightarrow G) \wedge (G \longrightarrow H)) \longrightarrow (F \longrightarrow H)]$$ là ông thức hằng đúng.

Qui tắc này còn có tên là *bắc cầu*, F dẫn ra G và G dẫn ra H thì F cũng dẫn ra H.

Đây cũng là phương pháp chứng minh của toán học.

Thí dụ :

Nếu siêng năng thì đạt kết quả tốt.

Nếu đạt kết quả tốt thì nhanh chóng có việc làm.

Vậy nếu siêng năng thì nhanh chóng có việc làm.

- **Mở rộng giả thiết và kết luận**

$[(F \longrightarrow G) \longrightarrow ((F \vee H) \longrightarrow (G \vee H))]$ là công thức hằng đúng.

Qui tắc này nói rằng : nguyên nhân F dẫn ra kết luận G có thể dẫn ra nguyên nhân F hội với H dẫn ra kết luận G hội với H, với H là bất kỳ.

Thí dụ :

Nếu tam giác vuông thì có góc 90°.

Vậy nếu tam giác vuông hay có góc 100° thì tam giác có góc 90° hay 100°.

- **Giới hạn giả thiết và kết luận.**

$[((F \longrightarrow G) \longrightarrow ((F \wedge H) \longrightarrow (G \wedge H))]$ là công thức hằng đúng.

Qui tắc này nói rằng : nguyên nhân F dẫn ra kết luận G có thể dẫn ra nguyên nhân F bị giới hạn bởi H dẫn ra kết luận G cũng bị giới hạn bởi H, với H là bất kỳ.

Thí dụ :

Nếu tam giác vuông thì có góc 90°.

Vậy nếu tam giác vuông và có hai cạnh bằng nhau thì có góc 90° và hai cạnh bằng nhau.

- **Thay điều kiện và hệ quả bằng luật "nếu … thì".**

$[(F \longrightarrow G) \longrightarrow ((F \longrightarrow H) \longrightarrow (G \longrightarrow H))]$ là công thức hằng đúng.

Qui tắc này nói rằng : nguyên nhân F dẫn ra kết luận G có thể dẫn ra nguyên nhân mới $(F \longrightarrow H)$ dẫn ra kết luận mới $(G \longrightarrow H)$, với H là bất kỳ.

Thí dụ :

Nếu tam giác đều thì có 3 góc 60°.

Vậy nếu tam giác đều dẫn đến 3 cạnh bằng nhau thì 3 góc 60° dẫn đến 3 cạnh bằng nhau.

**Các kết quả khác.**

$[F \longrightarrow (G \longrightarrow H)] \longrightarrow [G \longrightarrow (F \longrightarrow H)]$ là công thức hằng đúng.

$[(F \vee G) \wedge (F \longrightarrow H) \wedge (\neg K \longrightarrow \neg G)] \longrightarrow (G \vee H)$ là công thức hằng đúng.

$[(F \longrightarrow G) \wedge (\neg F \longrightarrow G)] \longrightarrow G$ là công thức hằng đúng (theorem introduction).

Nhận xét :

* Các luật suy diễn trên có thể được chứng minh dễ dàng bằng cách dùng bảng thực trị.
* Từ "suy luận" cũng có nghĩa như từ "dẫn xuất".

## 2.8. Tính toán trong luận lý mệnh đề

Công thức luận lý mệnh đề là những tổ hợp rất đa dạng của công thức nguyên và toán tử logic. Vì vậy việc tính toán của những bài toán cụ thể nếu đưa về một số ít dạng phù hợp sẽ dễ dàng hơn. Một số dạng này được gọi là dạng chuẩn. Theo thời gian có thể phát sinh những bài toán mới, do đó sẽ có những dạng chuẩn mới phù hợp hơn. Ngoài ra người dùng có thể tự tạo những dạng chuẩn "mới" để phù hợp với bài toán của riêng mình.

**Bài toán SAT**

Bài toán SAT là một trong những bài toán quan trọng trong lĩnh vực lý thuyết tính toán và logic. Nó được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, nhất là trong ngành máy tính. Vấn đề cơ bản của bài toán SAT là tìm một diễn dịch sao cho công thức có giá trị đúng. Nghĩa là chứng minh công thức khả đúng.

Thí dụ :

Cho tam giác ABC có AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 5cm. Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

Chuyển bài toán này thành dạng F dẫn ra H.

Đặt $F_1$ là phát biểu : “cạnh AB bằng 3cm”,

$F_2$ là phát biểu : “cạnh AC bằng 4cm”,

$F_3$ là phát biểu : “cạnh BC bằng 5cm” và

H là phát biểu : “ABC là tam giác vuông”.

Bài toán trở thành $\{F_1, F_2, F_3\}$ có dẫn ra H không ?.

Tiền đề cho bài toán ở dạng trên là chưa đủ, nó phải là

$\{F_1, F_2, F_3\} \cup$ {các định lý hình học} có dẫn ra H không ?.

Hay $F = (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge$ Các định lý hình học$) \longrightarrow H$ là khả đúng ?.

Dạng thức các bài toán trong thực tế gồm những phát biểu dữ kiện là hệ thống gồm có các công thức $F_1, F_2, \ldots, F_n$ và công thức phát biểu kết luận H. Giải bài toán là làm sao dẫn từ các $F_i$ ra được kết luận H. Với điều kiện bài toán đúng, nghĩa là các $\{F_i\}_{i\in[1, n]}$ không có mâu thuẫn tự tại, nghĩa là chúng không sinh ra hai phát biểu mâu thuẫn nhau.

Thay vì xác định công thức F khả đúng, chuyển thành kiểm tra $\neg F$ khả sai.

Đặt $Y = \neg F$, biến đổi Y về dạng $Y = Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_n$.

Để Y khả sai chỉ cần có $Y_k$ sai thì Y sai vì Y ở dạng giao các công thức $Y_i$.

Nếu mỗi $Y_i$ ở dạng hội các lưỡng nguyên, lúc đó muốn cho $Y_i$ sai chỉ cần $Y_i$ không chứa đồng thời hai công thức nguyên là phủ định của nhau.

Do đó chỉ cần tìm $Y_k$ nào không có hai lưỡng nguyên trái dấu sẽ kết luận F khả đúng.

Thí dụ :

Công thức $X = (P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge S \wedge \neg T) \vee \neg Q$ có khả đúng ?.

Theo định nghĩa để X khả đúng nếu tìm được mô hình của X. Điều này là khả thi vì chỉ cần dò trên bảng thực trị của X xem dòng nào làm cho X đúng. Nhưng trong thực tế số công thức nguyên có thể rất lớn nên khi đó kích thước của bảng thực trị cũng không hề nhỏ. Vì vậy cách thức này không hiệu quả. Đã biết rằng tính khả đúng của công thức X tương đương với tính khả sai của $\neg$X.

Câu hỏi trên tương đương với $\neg X = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q$ khả sai ?.

$\neg$X gồm ba công thức con ($\underline{\neg P \vee R}$), ($\underline{Q \vee \neg S \vee T}$), $\underline{Q}$ giao với nhau, do đó diễn dịch nào làm cho ba công thức con đúng mới làm cho $\neg$X đúng. Mỗi công thức con muốn đúng với mọi diễn dịch, chúng phải có hai lưỡng nguyên đổi dấu hội với nhau thành công thức hằng đúng. Cả ba công thức $(\neg P \vee R)$, $(Q \vee \neg S \vee T)$, Q đều không có hai lưỡng nguyên đổi dấu nên tất cả đều khả sai vì vậy $\neg$X khả sai. Thực ra chỉ cần một trong ba công thức này không chứa hai lưỡng nguyên trái dấu là đủ để nó khả sai và kết luận luôn $\neg$X khả sai.

Nhận xét :

Công thức ở dạng hội giao các công thức "con" và công thức "con" là hội các lưỡng nguyên sẽ dễ đánh giá tính không hằng đúng.

Một hệ thống F sinh ra được H thì hệ thống đã *ngầm chứa* H.

Định nghĩa – Mệnh đề.

*Mệnh đề* là hội hữu hạn các lưỡng nguyên.

$(P_1 \vee \ldots \vee P_n)$, với $P_i$ là các lưỡng nguyên, $1 \leq i \leq n$,

HếtĐn

Thí dụ :

$F = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q$

F có 3 mệnh đề : $(\neg P \vee R)$, $(Q \vee \neg S \vee T)$ và mệnh đề Q.

$H = (P \vee R \vee \neg S)$, H có 1 mệnh đề là chính nó.

Bổ đề :

Mệnh đề hằng đúng nếu và chỉ nếu mệnh đề có hai lưỡng nguyên trái dấu.

Chứng minh :

Cho mệnh đề $(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ với $L_i$ là các lưỡng nguyên.

Đặt $H_1, \ldots, H_m$ với $m \leq n$, là các công thức nguyên của mệnh đề sao cho :

Nếu $L_i$ là lưỡng nguyên dương thì có $H_k$ sao cho $H_k = L_i$.

Nếu $L_j$ là lưỡng nguyên âm thì có $H_h$ sao cho $H_h = \neg L_j$.

Nếu mệnh đề có hai lưỡng nguyên trái dấu thì $m < n$ (i.e, số công thức nguyên nhỏ hơn số lưỡng nguyên), ngược lại không có hai lưỡng nguyên trái dấu thì $m = n$ (i.e, số công thức nguyên bằng số lưỡng nguyên).

($\Leftarrow$) Nếu $(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ chứa hai lưỡng nguyên $L_i$, $L_j$ sao cho $L_i = H_k$ và $L_j = \neg H_k$ thì $(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ hằng đúng.

($\Rightarrow$) Nếu $(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ hằng đúng.

Giả sử $(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ không có 2 lưỡng nguyên trái dấu.

Vì mệnh đề không có hai lưỡng nguyên trái dấu nên $H_i \neq H_j$ với mọi i, j.

Đặt $I = \{\neg H_k \mid L_i$ là lưỡng nguyên dương, nên có k sao cho $L_i = H_k$, với $1 \leq i \leq n\}$,

và $J = \{H_h \mid L_j$ là lưỡng nguyên âm, nên có h sao cho $L_j = \neg H_h$, với $1 \leq j \leq n\}$.

Diễn dịch $(I \cup J)$ không là mô hình của $(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$, vì làm cho tất cả $L_{i \in [1,n]}$ đều sai. Mâu thuẫn với tính hằng đúng của $(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$.

Vậy $(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ phải có hai lưỡng nguyên trái dấu nhau. ✓

Minh họa cho chứng minh :

$M_1 = (Q \vee \neg S \vee T \vee \neg K \vee S)$

$L_1 = Q$, $L_2 = \neg S$, $L_3 = T$, $L_4 = \neg K$, $L_5 = S$,

$H_1 = Q$, $H_2 = S$, $H_3 = T$, $H_4 = K$.

Mệnh đề $M_1$ có chứa hai lưỡng nguyên trái dấu là S và $\neg S$.

$M_2 = (Q \vee \neg S \vee T \vee \neg K \vee L)$

L1 = Q, L2 = $\neg$S, L3 = T, L4 = $\neg$K, L5 = L,

H1 = Q,  H2 = S,  H3 = T,  H4 = K,  H5 = L.

Mệnh đề M2 không chứa hai lưỡng nguyên trái dấu.

Định nghĩa – Mệnh đề đơn vị.

Mệnh đề có *một* lưỡng nguyên là mệnh đề đơn vị.

HếtĐn

Thí dụ :

$F = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q \wedge \neg U$

Công thức F có Q, ¬U là hai mệnh đề đơn vị, ($\neg P \vee R$) và ($Q \vee \neg S \vee T$) không là mệnh đề đơn vị.

Nhận xét :

Ký hiệu công thức hằng đúng là $\top$, công thức hằng sai là $\bot$.

$X \wedge \top = X$  (1)  với mọi công thức X,

$X \vee \bot = X$  (2)  với mọi công thức X.

Định nghĩa – Dạng mệnh đề.

Dạng mệnh đề là cách biểu diễn mệnh đề.

Mệnh đề được biểu diễn thành *tập hợp* các lưỡng nguyên.

HếtĐn

Thí dụ :

Mệnh đề $(Q \vee \neg S \vee T)$ được biểu diễn là $\{Q, \neg S, T\}$

Tóm lại bài toán SAT là bài toán xét công thức X khả đúng hay không, gồm các bước :

1. Chuyển ¬X thành dạng chuẩn giao.
2. Kiểm tra mỗi mệnh đề không chứa 2 lưỡng nguyên trái dấu :
   a) Nếu có mệnh đề không chứa 2 lưỡng nguyên trái dấu X sẽ khả đúng.
   b) Ngược lại X hằng đúng.

Công thức ở dạng sau phù hợp cho việc xác định tính khả đúng.

Định nghĩa – Dạng chuẩn giao CNF.

$P_i$, $Q_i$ là các lưỡng nguyên, dạng sau đây là dạng chuẩn giao.

$(P_1 \vee \ldots \vee P_n)_1 \wedge \ldots \wedge (Q_1 \vee \ldots \vee Q_m)_p$, với n, m, p $\geq 0$.

HếtĐn

Thí dụ :

Các công thức sau ở dạng chuẩn giao :

$F = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q.$

$G = P \wedge Q \wedge (\neg R)$

$H = (P \vee R \vee \neg S)$

### Các phương pháp chuyển về dạng CNF

- Sử dụng các qui tắc suy luận để chuyển về dạng chuẩn

Thí dụ :

$F = (A \vee B) \longrightarrow (A \wedge B)$

$= \neg (A \vee B) \vee (A \wedge B)$

$= (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

$= [(\neg A \wedge \neg B) \vee A] \wedge [(\neg A \wedge \neg B) \vee B)]$

$= [(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B)] \wedge [(B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)]$

$= (A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$

(bỏ các công thức hằng đúng)

$= (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A)$

- Sử dụng bảng thực trị.

Lập bảng thực trị cho công thức, chọn những dòng sai (= 0), lấy hội các lưỡng nguyên theo qui tắc : công thức nguyên nào có giá trị sai sẽ chọn lưỡng nguyên dương (công thức nguyên), công thức nguyên nào có giá trị đúng sẽ chọn lưỡng nguyên âm (phủ định công thức nguyên).

Thí dụ :

1. $F = (A \vee B) \longrightarrow (A \wedge B)$

| A | B | F | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | $\longrightarrow (\neg A \vee B)$ |
| 0 | 1 | 0 | $\longrightarrow (A \vee \neg B)$ |
| 0 | 0 | 1 | |

F sai ở dòng 2 và 3.

Ở dòng 2, A có giá trị 1 nên chọn $\neg A$ và B có giá trị 0 nên chọn B.

Ở dòng 3, A có giá trị 0 nên chọn A, B có giá trị 1 nên chọn $\neg B$.

Vậy $F = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

2. $F = (A \vee B) \longrightarrow C$

| Cột | A | B | C | F | | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $F_1 = \neg \mathbf{A} \vee \neg B \vee C$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | **1** | **1** | 0 | **0** | | **0** | 1 | 1 | **0** |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | $F_2 = \neg \mathbf{A} \vee B \vee C$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | **1** | 0 | 0 | **0** | | 1 | **0** | 1 | **0** |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 1 | $F_3 = A \vee \neg \mathbf{B} \vee C$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | **1** | 0 | **0** | | 1 | 1 | **0** | **0** |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tại dòng 2, $F = 0 \Longrightarrow$ chọn $F_1$ để $F_1 = 0$ tại dòng 2 và $F_1 = 1$ ở tất cả các dòng còn lại.

Tương tự.

Tại dòng 4, $F = 0 \Longrightarrow$ chọn $F_2$ để $F_2 = 0$ tại dòng 4 và $F_2 = 1$ ở tất cả các dòng còn lại.

Tại dòng 6, $F = 0 \Longrightarrow$ chọn $F_3$ để $F_3 = 0$ tại dòng 6 và $F_3 = 1$ ở tất cả các dòng còn lại.

Do đó ($F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$) bằng 0 tại các dòng 2, 4, 6 và bằng 1 ở các dòng còn lại như F.

Vậy $F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 = (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$.

- Xây dựng lại công thức khi chỉ biết bảng thực trị.

Thí dụ :

Hãy xây dựng lại công thức F có bảng thực trị sau :

| A | B | C | F | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $\longrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee C)$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\longrightarrow (\neg A \vee B \vee C)$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $\longrightarrow (A \vee \neg B \vee C)$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | |

Vậy công thức $F = (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$ và ở dạng CNF.

Nhận xét :

* Mọi công thức đều có thể chuyển được về dạng CNF.

* Dạng CNF không duy nhất, nghĩa là một công thức có thể có nhiều dạng CNF.

Thí dụ :

A, B, C, ... là các công thức nguyên. Các $F_i$ tương đương với nhau :

$F_1 = A$,

$F_2 = A \wedge (A \vee B)$,

$F_3 = A \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$F_4 = A \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (A \vee D)$, ...

Vì $\mu(F_1) = \mu(F_2) = \mu(F_3) = \mu(F_4)$.

Đánh giá cho trường hợp $\mu(F_2) = \mu A\ (\mu A + \mu B + \mu A \mu B) = \mu A$.

Các đánh giá các $F_i$ còn lại cũng sẽ bằng với $\mu A$.

Nhận xét :

Dạng chuẩn CNF là giao các mệnh đề.

CNF được biểu diễn như *tập hợp* các mệnh đề.

Thí dụ :

$F = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q$ có *biểu diễn dạng mệnh đề* là

$\{\{\neg P, R\}, \{Q, \neg S, T\}, \{Q\}\}$

Định nghĩa – Dạng chuẩn hội DNF.

$P_i$, $Q_i$ là các lưỡng nguyên.

$(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n)_1 \vee \ldots \vee (Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m)_p$, với $n, m, p \geq 0$,

Đây là dạng đối ngẫu với dạng CNF.

HếtĐn

Thí dụ :

Các công thức sau đã ở dạng chuẩn DNF.

$F = (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge \neg S \wedge T) \vee Q$.

$G = (P \wedge Q \wedge (\neg R))$ và $H = P \vee R \vee \neg S$

Nhận xét :

* Công thức dạng CNF là *hằng đúng* nếu *mỗi* mệnh đề của công thức chứa $\top$ hoặc chứa một cặp lưỡng nguyên trái dấu nhau. Nếu không thỏa thì khả sai.

Thí dụ :

Công thức $X = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q$ ở dạng CNF là khả sai.

* Công thức dạng DNF là *hằng sai* nếu *mỗi* thành phần giao chứa $\perp$ hoặc chứa một cặp lưỡng nguyên trái dấu nhau. Nếu không thỏa thì khả đúng.

Thí dụ :

Công thức $X = (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge \neg S \wedge T) \vee Q$ ở dạng DNF là khả đúng.

* Trong các chương trình máy tính, việc biến đổi về dạng CNF, (hay DNF) của các bài toán thực tế tốn kém cả về thời gian và không gian nhớ.

Định nghĩa – Dạng chuẩn NNF.

Công thức ở dạng NNF khi nó không chứa toán tử $\longrightarrow$, toán tử $\neg$ chỉ đứng trước công thức nguyên..

HếtĐn

Chú ý :

Để chuyển về dạng NNF tiến hành các bước sau :

- Thay toán tử "$\longrightarrow$"

  bằng cách dùng dạng tương đương $(X \longrightarrow Y) = (\neg X \vee Y)$.

- Khai triển toán tử $\neg$

  dùng dạng $\neg\neg X = X$,

  dùng dạng $\neg(X \vee Y) = (\neg X \wedge \neg Y)$

  dùng dạng $\neg(X \wedge Y) = (\neg X \vee \neg Y)$.

Thí dụ :

$F = (A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \vee \neg A)$

$F = \neg(A \longrightarrow \neg B) \vee (B \vee \neg A)$ (thay $\longrightarrow$)

$F = \neg(\neg A \vee \neg B) \vee (B \vee \neg A)$ (thay $\longrightarrow$)

$F = (A \wedge B) \vee (B \vee \neg A)$ (khai triển $\neg$)

Nhận xét :

Tùy mỗi loại bài toán có thể chọn dạng chuẩn thích hợp. Nếu không có thể tự tạo ra dạng chuẩn mới.

Định nghĩa – Mệnh đề Horn.

Mệnh đề Horn là mệnh đề chỉ có *một* lưỡng nguyên dương.

HếtĐn

Chú thích :

Horn là tên của nhà logic học Alfred Horn lần đầu tiên chỉ ra loại mệnh đề này vào năm 1951.

Thí dụ :

Các mệnh đề sau là mệnh đề Horn.

$(A)$ (có một lưỡng nguyên dương A)

$(A \vee \neg B)$ (có một lưỡng nguyên dương A)

$(\neg C \vee D \vee \neg E)$ (có một lưỡng nguyên dương D)

Định nghĩa – Dạng Horn - Công thức Horn.

Dạng Horn hay công thức Horn là giao của các mệnh đề Horn.

HếtĐn

Thí dụ :

Công thức $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee D \vee \neg E)$ ở dạng Horn.

Công thức $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee D \vee E)$ không ở dạng Horn vì mệnh đề $(\neg C \vee D \vee E)$ có 2 lưỡng nguyên dương D và E.

Nhận xét :

- ✶ Vì mệnh đề Horn chỉ có một lưỡng nguyên dương nên có thể viết nó dưới dạng $X \longrightarrow Y$ (cấu trúc điều kiện).
- ✶ Dạng Horn là giao các cấu trúc điều kiện (có hậu quả là công thức nguyên và nguyên nhân là giao các công thức nguyên).

Thí dụ :

Công thức $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee D \vee \neg E)$ có dạng Horn là

$$(B \longrightarrow A) \wedge ((C \wedge E) \longrightarrow D)$$

- ✶ Dạng Horn chính là dạng lệnh của ngôn ngữ lập trình Prolog, một thể hiện của lập trình logic.

★ Mệnh đề Horn có dạng X $\longrightarrow$ Y với X là *giao* của $\bot$, $\top$, công thức nguyên, và Y là $\bot$, $\top$, công thức nguyên.

Thí dụ :

Các mệnh đề Horn :

$P \wedge Q \wedge R \longrightarrow \bot$, $\quad$ $P \wedge Q \wedge R \longrightarrow \top$,

$\top \longrightarrow R$, $\quad$ $P \wedge Q \longrightarrow R$.

Không là mệnh đề Horn :

$P \wedge \neg Q \wedge R \longrightarrow \bot$, $\quad$ $P \wedge Q \longrightarrow \neg R$, $\quad$ $P \wedge Q \longrightarrow R \wedge S$.

## 2.9. Hệ quả luận lý trong luận lý mệnh đề

Định nghĩa – Hệ qủa luận lý.

Công thức H được gọi là hệ quả luận lý của hệ thống F nếu mọi mô hình của F cũng là mô hình của H.

Ký hiệu F $\models$ H.

HếtĐn

Ghi chú :

Thay vì sử dụng ký hiệu (F $\models$ H) sẽ thấy ở đâu đó các ký hiệu sau được sử dụng.

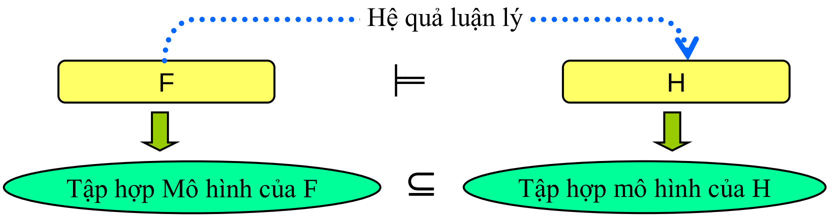
$$(F \Longrightarrow H), \quad \text{hay } \frac{F}{H}, \quad \text{hay } (F \therefore H).$$

Người dùng có thể tạo ký hiệu hệ quả luận lý khác, nếu thấy cần thiết.

Nhận xét :

* Khi H là hệ quả luận lý (HQLL) của F thì tập hợp các mô hình của F là tập con của tập hợp các mô hình của H.

Minh họa



* F được gọi là tiền đề và H là kết luận. Trong thực tế ứng dụng, F được gọi là cơ sở tri thức.
* Các bước chứng minh công thức H là hệ quả luận lý của hệ thống F :
  – Liệt kê tất cả diễn dịch của F.
  – Chọn các diễn dịch là mô hình của F.
  – Kiểm tra xem các mô hình này có còn là mô hình của H hay không.

Thí dụ :

Kiểm tra {X ⟶ Y, X} $\models$? Y.

| | | | Hệ thống | | $\models$? | Kết luận |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dòng | X | Y | X ⟶ Y | X | | Y |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 0 |

Hệ thống có 2 công thức X ⟶ Y, X và hệ quả là công thức Y.

Dòng 1, diễn dịch này làm cho X ⟶ Y và X đúng nên là mô hình của hệ thống, dòng này làm cho Y đúng nên là mô hình của Y.

Dòng 2, diễn dịch này làm cho X ⟶ Y sai (dù X đúng) nên không là mô hình của hệ thống (không quan tâm dòng này có làm cho Y đúng hay sai).

Dòng 3, diễn dịch này làm cho X sai (dù X ⟶ Y đúng) nên không là mô hình của hệ thống.

Dòng 4, diễn dịch này làm cho X sai (dù X ⟶ Y đúng) nên không là mô hình của hệ thống.

Tóm lại, hệ thống chỉ có một mô hình (dòng 1) và nó cũng là mô hình của Y nên Y là hệ quả luận lý của hệ thống {X ⟶ Y, X}.

Kiểm tra $\{A \vee B, A\} \models ?\ A \longrightarrow B$

| | | | Hệ thống | | $\models$? | Kết luận |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dòng | A | B | $A \vee B$ | A | | $A \longrightarrow B$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 |

Hệ thống có 2 công thức $\underline{A \vee B}$, $\underline{A}$ và hệ quả là công thức $\underline{A \longrightarrow B}$ ?.

Dòng 1 là mô hình của hệ thống và là mô hình của $A \longrightarrow B$.

Dòng 2 là mô hình của hệ thống và không là mô hình của $A \longrightarrow B$.

Dòng 3, diễn dịch này làm cho A sai (dù $A \vee B$ đúng) nên không là mô hình của hệ thống.

Dòng 4, diễn dịch này làm cho $A \vee B$ sai và A sai nên không là mô hình của hệ thống.

Thật ra, hết dòng 2 đã dừng và có thể kết luận $A \longrightarrow B$ không là hệ quả luận lý của hệ thống.

### Ký hiệu công thức hằng đúng

Ký hiệu công thức H là hằng đúng : $\models H$

Ký hiệu $\models H$ là cách viết ngắn gọn của dạng $\varnothing \models H$, có nghĩa là H là hệ quả luận lý của hệ thống rỗng.

Lý giải ký hiệu "$\models H$" diễn tả H là công thức hằng đúng như sau.

Nhắc lại : $F \wedge \top = F$ với F là công thức bất kỳ, $\top$ là công thức hằng đúng.

Cho hệ thống $\{ F_1, \ldots , F_n \} \models H$ (1)

$\longleftrightarrow \quad F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \top \models H$

$\longleftrightarrow \quad \{ F_1, \ldots , F_n \} \cup \{\top\} \models H$ (2)

Cho $\{ F_1, \ldots , F_n \} = \varnothing$

$$\begin{cases} \text{Từ (1) } \{ F_1, \ldots , F_n \} \models H & \longleftrightarrow \ \varnothing \models H \\ \text{Từ (2) } \{ F_1, \ldots , F_n \} \cup \{\top\} \models H & \longleftrightarrow \top \models H \end{cases}$$

Do đó $\varnothing \models H \longleftrightarrow \top \models H$

### Các công thức hằng đúng

- Nếu $F \models H$ thì công thức $(F \longrightarrow H)$ hằng đúng.

Chứng minh :

Lấy diễn dịch I bất kỳ.

Nếu I làm cho F đúng thì I cũng làm cho H đúng, nên $(F \longrightarrow H)$ cũng đúng trong I.

Nếu I làm cho F sai thì I cũng làm cho $(F \longrightarrow H)$ đúng bất chấp H đúng hay sai,

$(F \longrightarrow H)$ đúng với mọi diễn dịch nên $(F \longrightarrow H)$ là công thức hằng đúng. ✓

- Hệ quả :

$F \models H \longleftrightarrow \ \models (F \longrightarrow H)$

$F \models H \longleftrightarrow \ \models \neg( F \wedge \neg H)$

$( F_1, \ldots , F_n \models H ) \longleftrightarrow (F_2, \ldots , F_n \models F_1 \longrightarrow H)$

- Tính truyền (hay còn gọi là bắc cầu)

$( F \models H \text{ và } H \models K ) \longrightarrow (F \models K)$

Chứng minh :

Lấy diễn dịch I bất kỳ làm cho F đúng,

Vì $F \models H$ nên H cũng đúng trong I, H đúng trong I nên K cũng đúng trong I vì $H \models K$.

Vậy $F \models K$, ✓.

### Ký hiệu $\models$

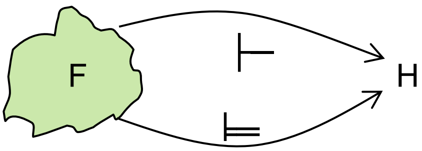
Có tài liệu sử dụng ký hiệu $\mathfrak{M} \models$ F, trong đó F là công thức và $\mathfrak{M}$ là mô hình của F thay vì ở vị trí đó là hệ thống công thức.

Nhận xét :

- * Nếu mọi mô hình của F cũng là mô hình của H thì H là hệ quả luận lý của F.
- * F là *tiền đề* và H là *kết luận*.
- * Ký hiệu $\models$ có tên là *double turnstile*.
- * Chuỗi (F $\models$ H) có tên là dạng lý luận.
- * Nếu F $\models$ H thì (F $\longrightarrow$ H) là *định lý*.
- * Định lý là công thức hằng đúng và công thức hằng đúng là định lý.
- * Định lý còn được gọi là *phát biểu chứng minh được*.

## 2.10. Tính khả đúng và tính khả chứng

Chủ đề này bàn về tương quan giữa việc hệ thống dẫn xuất ra kết quả nhờ những qui tắc suy luận thì kết quả này có ý nghĩa trong "thực tế" hay không. Ngược lại, nếu kết quả được dẫn xuất từ ngữ nghĩa thực tế có tìm được một chứng minh hình thức cho kết quả hay không. Nói cách khác đó là sự tương quan giữa hai khái niệm $\vdash$ và $\models$.




Nếu hệ thống sinh ra kết quả và kết quả có ý nghĩa trong thực tế thì tính chất này được gọi là tính *khả đúng*, còn kết quả có ý nghĩa trong thực tế và chứng minh được bằng qui tắc suy luận được gọi là tính *khả chứng*. Thuật ngữ được dùng cho tính khả đúng là soundness, có nơi dùng từ "tính đúng đắn" và tính khả chứng là completeness, còn có từ khác được dùng là "tính đầy đủ, tính toàn vẹn".

Không phải logic nào cũng có được sự ương ứng giữa tính khả đúng và tính khả chứng, nhưng luận lý mệnh đề có được hai tính chất này.
Từ khả đúng ở đây nói rằng kết quả nhờ vào suy luận hình thức có ý nghĩa nào đó trong thực tế, nói cách khác là có "*thực tế*" để nó thỏa mãn. Còn từ khả chứng để chỉ kết quả có tthể chứng minh bằng những lập luận mang tính hình thức.

Định lý (khả đúng).

Nếu F $\vdash$ H thì F $\models$ H, với F, H là công thức.

Định lý (khả chứng).

Nếu F $\models$ H thì F $\vdash$ H, với F, H là công thức.

Chú thích : Bàn về dấu "=".

* Trong phần tiếp cận theo hướng chứng minh, đã sử dụng ký hiệu "F = G" với ý nghĩa là "F $\vdash$ G" và"G $\vdash$ F".
* Trong phần tiếp cận theo hướng ngữ nghĩa, cũng sử dụng ký hiệu "F = G" với ý nghĩa là "F $\models$ G" và"G $\models$ F".
* Lẽ ra ký hiệu "="trong chứng minh phải là "F $=_p$ G", còn trong ngữ nghĩa phải là "F $=_s$ G". Nhưng vì $\vdash$ và $\models$ tương đương nhau nên có thể dùng chung ký hiệu "=".

# III. LUẬN LÝ VỊ TỪ

Nhu cầu thực tế càng ngày càng đa dạng. Có một số bài toán mà luận lý mệnh đề không giải quyết được vì vậy việc mở rộng luận lý mệnh đề hay xây dựng logic mới là cần thiết.

## 1. Những vấn đề thực tế mà luận lý mệnh đề không diễn tả được

Sau đây là hai trường hợp điển hình, từ đó gợi ý việc xây dựng luận lý vị từ.

Cho tam đoạn luận :

Nếu là người thì phải chết. (1)

Socrates là người. (2)

Vậy Socrates phải chết. (3)

Luận lý mệnh đề biểu diễn các phát biểu (1), (2), (3) bằng các công thức nguyên P, Q và R. Về mặt ngữ nghĩa ba phát biểu này có “quan hệ” với nhau, nhưng luận lý mệnh đề đã đánh rơi mối quan hệ này. Chúng được lượt giản chỉ là ba ký hiệu rời rạc P, Q, R. Quan hệ ngữ nghĩa của ba công thức trên là quan hệ nhân quả $((P \wedge Q) \longrightarrow R)$.

Phát biểu P có yếu tố *người*, yếu tố *chết*, những yếu tố này cũng xuất hiện trong Q và R. Do đó để diễn tả sự liên kết của tam đoạn luận cần thêm khái niệm *quan hệ* để duy trì được mối liên kết.

Chọn các quan hệ từ ba phát biểu trên :

* quan hệ người(x) (ie, x là người).

* quan hệ chết(x) (ie, x chết).

Khi đó các mệnh đề P, Q, R trở thành :

P = nếu người(x) thì chết(x).

Q = người(Socrates).

R = chết(Socrates).

(1) trở thành : người(x) ⟶ chết(x) (2) trở thành : người(Socrates)}

(3) trở thành : chết(Socrates).

Như vậy, luận lý mệnh đề lược giãn mối quan hệ của các phát biểu. Ngoài việc thừa hưởng các đặc điểm của luận lý mệnh đề, logic mới cần thiết có thêm yếu tố quan hệ.

Một số thực tế mà luận lý mệnh đề cũng không diễn tả được, lấy một thí dụ đó là phỏng đoán của Goldbach :

P = "Mọi số nguyên chẵn $\geq$ 4 là tổng của hai số nguyên tố".

Phỏng đoán này có thể diễn đạt lại tương đương với vô hạn các phát biểu $P_n$ như sau :

$P_n$ = "n chẵn là tổng của hai số nguyên tố".

Do đó mệnh đề P được phân rã thành vô hạn mệnh đề : $P_4$ và $P_6$ và $P_8$ và ...

$P = P_4 \wedge P_6 \wedge P_8 \wedge \ldots$

Tuy nhiên, luận lý mệnh đề không chấp nhận dạng giao vô hạn :

$P_4 \wedge P_6 \wedge P_8 \wedge \ldots$ .

Với định nghĩa hội, giao, tích vô hạn các tập hợp $X_i$ :

$\cup X_i = \{x | (x \in X_1) \vee (x \in X_2) \vee (x \in X_3) \vee \ldots \}$

$\cap X_i = \{x | (x \in X_1) \wedge (x \in X_2) \wedge (x \in X_3) \wedge \ldots \}$

Luận lý mệnh đề không có cách chấp nhận dạng hội, giao vô hạn các phát biểu $(x \in X_i)$.

Do đó, logic mới cần thiết có thêm yếu tố kết hợp vô hạn các phát biểu.

## 2. Các khái niệm cơ bản của luận lý vị từ

Thuật ngữ

Tên tiếng anh của luận lý vị từ : predicate calculus, predicate logic hay first order logic (FOL).

Định nghĩa – Bảng ký tự.

*Bảng ký tự* là tập hợp *hữu hạn* các phần tử gọi là ký tự. Việc chọn lựa phần tử nào thuộc bảng ký tự tùy thuộc vào người sử dụng. Tuy nhiên, để có sự thống nhất bảng ký tự được dùng là bảng ký tự của tiếng Anh.

HếtĐn

Thí dụ :

{a, b, c, d, …, z} hay {0, 1}, …

Định nghĩa – Ký hiệu.

*Ký hiệu* là chuỗi *hữu hạn* ký tự được kết nối lại, dùng để *đặt tên* cho các khái niệm trong luận lý vị từ.

HếtĐn

Thí dụ :

tên biến : x, y, …            tên hàm : cộng, nhân, chia, …

Định nghĩa – Miền đối tượng.

*Miền đối tượng* là tập hợp "khống" sẽ được xác định tùy vào ứng dụng. Ký hiệu miền đối tượng là D.

HếtĐn

Định nghĩa – Ký hiệu biến.

*Ký hiệu biến* là ký hiệu, gọi đơn giản là biến, nó lấy giá trị trên miền đối tượng D.

HếtĐn

Định nghĩa – Lượng từ.

*Lượng từ* là thuật ngữ định lượng gồm có lượng từ *phổ dụng* và lượng từ *hiện hữu*.

*Lượng từ phổ dụng* dùng để chỉ cụm từ "với mọi" được ký hiệu là $\forall$.

*Lượng từ hiện hữu* dùng để chỉ từ "có" được ký hiệu là $\exists$.

Hình thức sử dụng : lượng từ luôn đi kèm theo tên biến.

$(\forall x)$, $(\exists x)$ :        với x là biến.

HếtĐn

Nhận xét :

Viết đầy đủ là $(\forall x \in D)$, $(\exists x \in D)$ với D là tập hợp x lấy giá trị trên đó. Nhưng miền D được mặc định hoặc được hiểu ngầm nên có thể viết đơn giản là $(\forall x)$, $(\exists x)$. Tuy nhiên, trong thực tế sử dụng, miền đối tượng của từng biến có thể khác nhau, nên cần được kèm theo biến của lượng từ.

Thí dụ :

Trong thực tế sử dụng được viết : $(\forall a \in A)\ (\forall b \in B)\ (a + b = 5)$.

Với $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

Nhận xét :

Phủ định mệnh đề :

$(\forall a \in A)\ (\forall b \in B)\ (a + b = 5)$ (*)

là :

$(\exists a \in A)\ (\exists b \in B)\ (a + b \neq 5)$ (**)

Dạng phủ định sau đây là không đúng : $(\exists a \notin A)\ (\exists b \notin B)\ (a + b \neq 5)$,

Do đó không biến đổi $(\forall a \in A)$ và $(\forall b \in B)$, ngoại trừ $(a \in A)$ và $(b \in B)$ là những yếu tố trong mệnh đề.

Phủ định của $[\ (\forall a)\ (\forall b)\ (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (a + b = 5)\ ]$ là

$(\exists a)\ (\exists b)\ (a \notin A) \vee (b \notin B) \vee (a + b \neq 5)$ (***)

Mệnh đề (***) có ý nghĩa khác với mệnh đề (**).

Định nghĩa – Quan hệ.

*Quan hệ* là khái niệm trong lý thuyết tập hợp.

Quan hệ trong luận lý vị từ gồm hai loại là *hàm* và *vị từ*.

- Hàm là ánh xạ từ $D^n \longrightarrow D$, n là số nguyên và $n \geq 0$.

  Ảnh của hàm được gọi là *biểu thức hàm*.

- Vị từ là quan hệ trên tập hợp $D^n$ – là tập con của $D^n$. $n \geq 0$.

Cũng có thể xem vị từ là ánh xạ từ $D^n \longrightarrow \{0, 1\}$, $n \geq 0$.

Hai cách xác định vị từ này tương đương. Ảnh của vị từ được gọi là *biểu thức vị từ*.

HếtĐn

Thí dụ :

♙. nhân, cộng : D × D ⟶ D là hai hàm.

nhân(x, n), cộng(x, m), cộng(nhân(y, z), x) là các biểu thức hàm.

♙. D = {táo, đường, cam, bắpcải, chuối, mướp, ớt, tiêusọ, khổqua, muối}

p = {táo, cam, chuối} (⊆ D), p là quan hệ "trái cây tráng miệng".

q = {đường, ớt, tiêusọ, muối} (⊆ D), q là quan hệ "gia vị".

♙. D = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

r = {2, 3, 5, 7} (⊆ D), r là quan hệ "nguyên tố"

s = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6), (3, 9), (4, 8), (5, 10)} ⊆ D × D, s là quan hệ "chia chẵn".

t = {4, 9} (⊆ D), t là quan hệ chính phương.

Nhận xét :

- ✶ Phân biệt giữa vị từ và hàm.

  – Vị từ chỉ kết hợp với nhau bởi các toán tử logic : ¬, ∧, ∨, ⟶.

  – Vị từ không được đóng vai trò là thông số của hàm hay vị từ khác.

  – Hàm chỉ dùng làm thông số của vị từ hay thông số của hàm khác.

  Nhận xét này xuất hiện ở đây có một chút gì bất hợp lý, đó là khái niệm toán tử chưa được xác định, nhưng vì nó cần thiết để phân biệt vị từ và hàm.
- ✶ Quan hệ vị từ có biểu diễn tương đương với hàm. Nghĩa là p là tập con của $D^n$ thì p có biểu diễn tương đương là ánh xạ đi từ $D^n$ vào tập hợp đúng sai hay tập hợp {0, 1}.

$$P \subseteq D^n \qquad \longleftrightarrow \qquad p : D^n \longrightarrow \{1, 0\}$$

- ✶ Từ đây trở đi, qui ước 1 để chỉ giá trị đúng và 0 chỉ giá trị sai. Một số tài liệu có qui ước ngược lại.
- ✶ Có thể tối giản cấu trúc của luận lý vị từ. Chỉ có hai toán tử : ¬, ∨, và *một* lượng từ : ∀.

Toán tử $\wedge$ được biểu diễn như sau : $(P \wedge Q)$ là $\neg(\neg P \vee \neg Q)$,

Toán tử $\longrightarrow$ được biểu diễn như sau : $(P \longrightarrow Q)$ là $(\neg P \vee Q)$.

Lượng từ $\exists$ được biểu diễn như sau : $(\exists x\ P)$ là $\neg(\forall x\ \neg P)$

Thí dụ :

⅄. D = {táo, đường, cam, bắpcải, chuối, mướp, ớt, tiêusọ, khổhoa, muối}

p = {táo, cam, chuối} $\subseteq$ D

p : D $\longrightarrow$ {1, 0},

p(táo) = p(cam) = p(chuối) = 1,

p(đường) = p(bắpcải) = p(mướp) = p(ớt) = 0

p(tiêusọ) = p(khổhoa) = p(muối ) = 0.

⅄. D = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

s = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6), (3, 9), (4, 8), (5, 10)}

s $\subseteq$ D $\times$ D, s là quan hệ “chia chẵn”.

s(2, 2) = s(2, 4) = s(2, 6) = s(2, 8) = s(2, 10) = 1,

s(3, 6) = s(3, 9) = s(4, 8) = s(5, 10) = 1,

s(x, y) = 0 với (x, y) $\notin$ s. (dĩ nhiên (x, y) $\in$ D $\times$ D)

liệt kê vài phần tử có giá trị 0 :

s(2, 3) = 0, s(2, 5) = 0, s(3, 2) = 0, s(3, 5) = 0, …

✶ Ảnh của vị từ được gọi là biểu thức vị từ.

mẹ(x, y) là biểu thức vị từ của vị từ mẹ,

bạn(y, z) là biểu thức vị từ của vị từ bạn.

Cẩn thận :

cha(Minh, Vũ) *không phải là* biểu thức vị từ vì Minh, Vũ là 2 giá trị trong thế giới ứng dụng, chúng không phải là giá trị của miền D trừu tượng. Tuy nhiên nếu xem Minh, Vũ là hai ký hiệu hằng, cha(Minh, Vũ) sẽ là biểu thức vị từ.

Ghi chú :

- Nhắc lại, tập hợp “trừu tượng” nghĩa là các phần tử của nó chưa được xác định cụ thể, chỉ biết rằng có một tập hợp làm miền đối tượng.
- Miền D trừu tượng chỉ chứa ký hiệu biến và ký hiệu hằng.
- Trong ứng dụng, D sẽ tương ứng với một tập hợp cụ thể.
- Lượng từ phổ dụng $\forall$ và hiện hữu $\exists$ là phủ định của nhau.

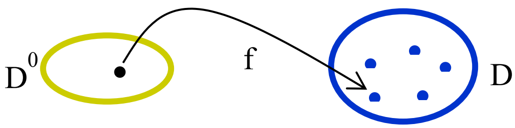
$$\exists x\ p(x) = \neg(\forall x\ \neg p(x))$$

$$\forall x\ \neg p(x) = \neg(\exists x\ p(x))$$

## 2.1. Các hàm và vị từ đặc biệt.

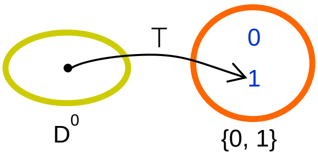
**Hàm đặc biệt : *Ký hiệu hằng* hay đơn giản là *Hằng*.**

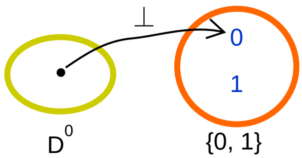
Do $card(D^0) = card(\{f \mid f : \varnothing \longrightarrow D\}) = 1$, nên có những hàm $f : D^0 \longrightarrow D$. Mỗi hàm f tương ứng với một phần tử trong D và được gọi là hằng. Như vậy *bản chất của hằng là hàm*, đó là *hàm không thông số*. Vì vậy không cần thêm định nghĩa riêng cho khái niệm hằng. Tuy nhiên có tài liệu vẫn định nghĩa hằng vì sợ người đọc khó chấp nhận kết quả $card(D^0) = 1$. Chứng minh $card(D^0) = 1$ có được trong lý thuyết tập hợp.




**Vị từ đặc biệt : $\top$ và $\perp$.**

Có đúng hai vị từ là ánh xạ từ : $D^0 \longrightarrow \{1, 0\}$. Đó là $\top$ (luôn lấy giá trị 1) và $\perp$ (luôn lấy giá trị 0). Vì vậy $\top$ và $\perp$ bản chất là hai vị từ. Khi định nghĩa vị từ, mặc nhiên chúng đã hiện hữu, vấn đề là chỉ ra và gọi tên, không cần phải định nghĩa riêng hay qui ước.



Định nghĩa – Nguyên từ.

(i) Ký hiệu hằng là nguyên từ.

(ii) Ký hiệu biến là nguyên từ.

(iii) Nếu $t_1, \ldots, t_n$ là nguyên từ thì biểu thức hàm $f(t_1,\ldots, t_n)$ là nguyên từ.

HếtĐn

Nhận xét :

* Định nghĩa nguyên từ là định nghĩa đệ qui.
* Điều kiện (i) trong định nghĩa nguyên từ là dư thừa, không cần thiết vì nó đã được bao hàm trong điều kiện (iii). Để tiện cho người học nên vẫn đưa vào. Do đó định nghĩa nguyên từ chỉ cần (ii) và (iii) là đủ.
* Trong (iii) f là hàm.

Thí dụ :

Hằng a, b, c là nguyên từ.

Biến x, y, z là nguyên từ.

Biểu thức hàm f(a, x) là nguyên từ.

Biểu thức hàm h(g(y), a, x) là nguyên từ.

Biểu thức hàm g(f(h(x, y, z), c)) là nguyên từ.

Các nguyên từ trên được thực hiện bởi các hàm f(_, _), g(_), và h(_, _, _).

Định nghĩa – Công thức nguyên.

Nếu p là vị từ và $t_1, \ldots, t_n$ là nguyên từ thì $p(t_1, \ldots, t_n)$ là công thức nguyên.

Nói cách khác : Biểu thức vị từ là công thức nguyên.

HếtĐn

Thí dụ :

- Vị từ : mẹcủa(_, _), nhỏhơn(_, _), cònsống(_).

  Có các công thức nguyên : mẹcủa(x, y), nhỏhơn(cộng(x, a), y), cònsống(z).
- Các nhà thơ *: Văn Cao, Xuân Diệu, Hoàng Cầm, Phạm Thiên Thư.*

  Sử gia *: Lê Văn Hưu.* Vua *: Quang Trung.*

Cho vị từ poet(x) = x là nhà thơ, với x ∈ D.

Biểu thức vị từ poet(x) là công thức nguyên, nhưng poet(XuânDiệu), poet(PhạmThiênThư) không phải là công thức nguyên vì thông số "XuânDiệu", "PhạmThiênThư" là các gia trị trong thế giới thực, chúng không là biến hoặc hằng trong miền D.

Lấy D = {XuânDiệu, HoàngCầm, VănCao, PhạmThiênThư, LêVănHưu, QuangTrung}.

Công thức nguyên poet(x), với x ∈ D tương đương 6 câu khai báo :

| | |
|---|---|
| poet(XuânDiệu) : | là câu khai báo "Xuân Diệu là nhà thơ", có giá trị đúng. |
| poet(HoàngCầm) : | là câu khai báo "Hoàng Cầm là nhà thơ", có giá trị đúng. |
| poet(VănCao) : | là câu khai báo "Văn Cao là nhà thơ", có giá trị đúng. |
| poet(PhạmThiênThư) : | là câu khai báo "Phạm Thiên Thư là nhà thơ", có giá trị đúng. |
| poet(LêVănHưu) : | là câu khai báo "Lê Văn Hưu là nhà thơ", có giá trị sai. |
| poet(QuangTrung) : | là câu khai báo "Vua QuangTrung là nhà thơ", có giá trị sai. |

Nhận xét :

* Một công thức nguyên của luận lý vị từ tương ứng với một tập hợp công thức nguyên của luận lý mệnh đề.
* Luận lý mệnh đề là trường hợp đặc biệt của luận lý vị từ. Khi chỉ có những vị từ không thông số.

Định nghĩa – Công thức hoàn hảo – Công thức.

(i) Công thức nguyên là công thức hoàn hảo.

(ii) $\perp$, $\top$ là công thức hoàn hảo.

(iii) Công thức kết hợp với $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$ là công thức hoàn hảo.

(vi) Công thức kết hợp với $(\forall x)$, $(\exists x)$ là công thức hoàn hảo.

Công thức hoàn hảo được gọi tắt là công thức.

HếtĐn

Nhận xét :

Định nghĩa đệ qui của công thức bảo đảm kết hợp hữu hạn các toán tử.

Định nghĩa – Phạm vi của lượng từ.

Công thức F thuộc phạm vi ảnh hưởng của lượng từ $\forall x$ trong công thức $(\forall x)$ (F),

Công thức F thuộc phạm vi ảnh hưởng của lượng từ $\exists x$ trong công thức $(\exists x)$ (F),

HếtĐn

Thí dụ :

$(\exists y)(\underline{r(y)}) \wedge (\forall x)(\underline{p(x) \longrightarrow q(f(x), a)})$.

Phạm vi của $(\exists y)$ là $r(y)$, phạm vi của $(\forall x)$ là $(p(x) \longrightarrow q(f(x), a))$.

Nói cách khác $r(y)$ và $(p(x) \longrightarrow q(f(x), a))$ lần lượt chịu ảnh hưởng của lượng từ $(\exists y)$ và $(\forall x)$.

Định nghĩa – Hiện hữu của biến.

Hiện hữu của biến là sự xuất hiện của biến trong công thức.

HếtĐn

Thí dụ :

Công thức $((\forall x)\ (p(x, y) \wedge q(t, y)) \longrightarrow (\exists y)\ r(x, y, z))$ có 4 biến t, x, y, z.

Biến x có 2 hiện hữu $(p(\boxed{x}, \_) \wedge q(\_, \_)) \longrightarrow r(\boxed{x}, \_, \_)$

Biến y có 3 hiện hữu (p(_, $\boxed{y}$) ∧ q(_, $\boxed{y}$)) ⟶ r(_, $\boxed{y}$, _)

Biến z có 1 hiện hữu (p(_, _) ∧ q(_, _)) ⟶ r(_, _, $\boxed{z}$)

Biến t có 1 hiện hữu ((p(_, _) ∧ q($\boxed{t}$, _)) ⟶ r(_, _, _)

Chú ý :

Nếu một hiện hữu chịu ảnh hưởng của nhiều lượng từ khi đó nó chỉ chịu ảnh hưởng của lượng từ ở "gần" nó nhất.

Thí dụ :

Cho công thức (∀x) (p(x, y) ⟶ (∃x) r(x, y, z)), để tiện việc trình bày đơn giản các hiện hữu của x, y sẽ gọi tên là $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ dù chúng chỉ là x và y.

Viết lại công thức : (∀x) (p($x_1$, $y_1$) ⟶ (∃x) r($x_2$, $y_2$, z)).

Hiện hữu $x_1$ chịu ảnh hưởng của lượng từ (∀x).

Hiện hữu $y_1$ không chịu ảnh hưởng của lượng từ (∀x) vì không cùng tên biến.

Hiện hữu $x_2$ chỉ chịu ảnh hưởng của lượng từ (∃x) vì gần nó hơn. Dù trên nguyên tắc $x_2$ cũng chịu ảnh hưởng của (∀x). Nhưng vì nó đã chịu ảnh hưởng trực tiếp từ (∃x) nên "từ chối" ảnh hưởng của (∀x).

Hiện hữu $y_2$, z không chịu ảnh hưởng của lượng từ nào cả vì các lượng từ có biến không trùng tên biến với chúng.

Định nghĩa – Hiện hữu ràng buộc và hiện hữu tự do.

Hiện hữu ràng buộc là hiện hữu thuộc phạm vi của lượng từ có biến cùng tên với nó.

Hiện hữu tự do là hiện hữu không ràng buộc.

HếtĐn

Thí dụ :

$$((\forall x)\ (\forall y)\ p(x,\ y,\ \boxed{z}\ ))\wedge((\forall z)\ q(\boxed{y},\ z))$$

Hiện hữu *ràng buộc* Hiện hữu *tự do*

$$(\forall z\ p(z,\ \boxed{y}))\wedge(\forall x\ q(x,\ \boxed{y},\ \boxed{z}\ ))$$

Định nghĩa – Ký hiệu thay thế F[t/x].

Ký hiệu F[t/x] có nghĩa là *tất cả* hiện hữu *tự do* của x trong công thức F được thay bởi nguyên từ t.

HếtĐn

Định nghĩa – Công thức đóng và công thức tự do.

Công thức đóng là công thức không chứa hiện hữu tự do.

Công thức tự do là công thức chứa ít nhất một hiện hữu tự do.

HếtĐn

Thí dụ :

$((\forall x)(\forall y)\ p(x,\ y))\wedge((\forall z)\ q(z))$ : công thức đóng.

$((\forall x)(\forall y)\ p(x,\ y,\ \boxed{z}\ ))\wedge((\forall z)\ q(\boxed{y},\ z))$ : công thức tự do, vì có $\boxed{z}$, $\boxed{y}$ là hiện hữu tự do.

$(\forall z\ p(z,\ \boxed{x}))\wedge(\forall x\ q(x))$ : công thức tự do vì có $\boxed{x}$ là hiện hữu tự do.

Định nghĩa – Cây phân tích.

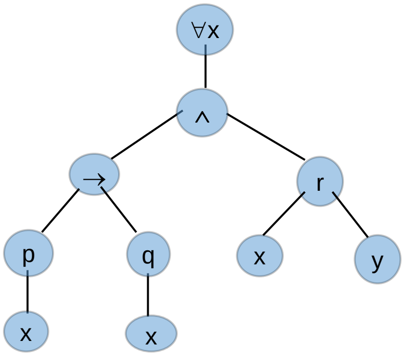
Công thức luận lý vị từ được biểu diễn bằng đồ thị gọi là cây phân tích. Vì các toán tử của luận lý vị từ là cấp 1 và 2 nên cây phân tich là cây nhị phân (toán tử "¬" cấp 1 nên chỉ có 1 nhánh). Đỉnh gốc của cây phân tích là toán tử nối hai công thức con, các công thức con lại tiếp tục được rẽ nhánh. Đỉnh lá là các biến trong công thức.

HếtĐn

Thí dụ :

Công thức ∀x ((p(x) ⟶ q(x)) ∧ r(x, y)) có cây phân tích như sau :

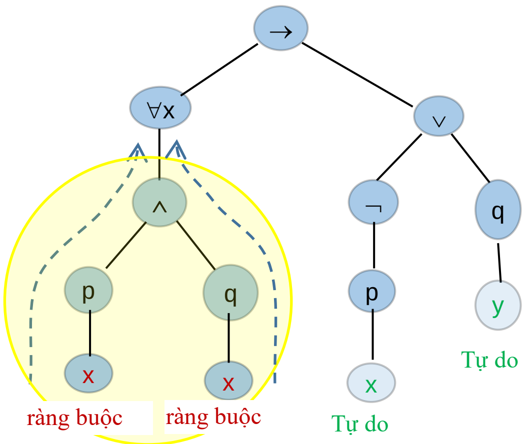
Lượng từ ∀x chi phối toàn bộ công thức nên là đỉnh gốc. Toán tử ∧ kết nối hai thành phần là (p(x) ⟶ q(x)) và r(x, y) nên là đỉnh kề gốc, nó kết nối nhánh bên trái là (p(x) ⟶ q(x)) và bên phải là r(x, y).




### 2.2. Xác định hiện hữu tự do hay ràng buộc nhờ cây phân tích

Hiện hữu là ràng buộc nếu có lượng từ cùng biến trên đường từ nó hướng về gốc. Ngược lại, nếu từ hiện hữu đi ngược về gốc không có lượng từ có cùng tên biến thì hiện hữu là tự do.

Thí dụ : (∀x (p(x) ∧ q(x))) ⟶ (¬p(x) ∨ q(y))



### 2.3. Điều kiện thay thế của biến trong công thức

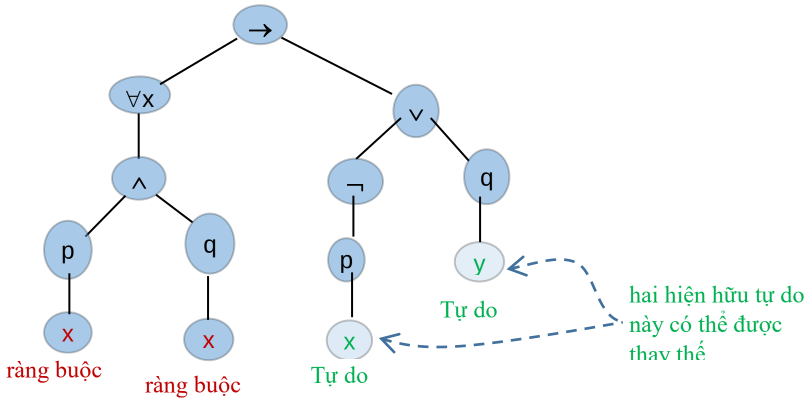
✶ Chỉ những hiện hữu tự do của biến mới được thay thế.

✶ Vì biến là nguyên từ nên phải được thay bởi nguyên từ.

✶ Ký hiệu F[t/x] nghĩa là *tất cả* hiện hữu tự do của x trong F thay bởi t.

✶ Các biến trong nguyên từ (sau khi thay thế) vẫn tự do khi được xem xét trong công thức.

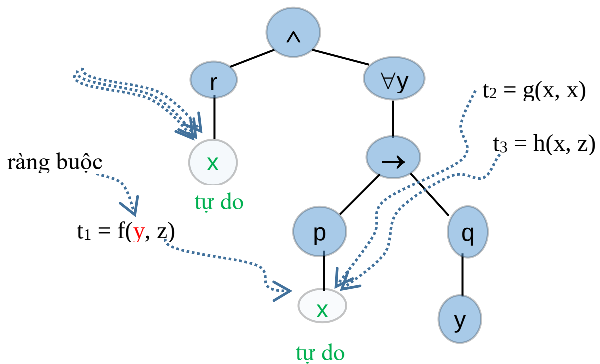
Thí dụ : $(\forall x\,(p(x) \wedge q(x))) \longrightarrow (\neg p(x) \vee q(y))$




Thí dụ :

Cho công thức được biểu diễn bởi cây phân tích sau :

Lần lượt thay hiện hữu tự do của biến x bởi các nguyên từ $t_1$, $t_2$, $t_3$.



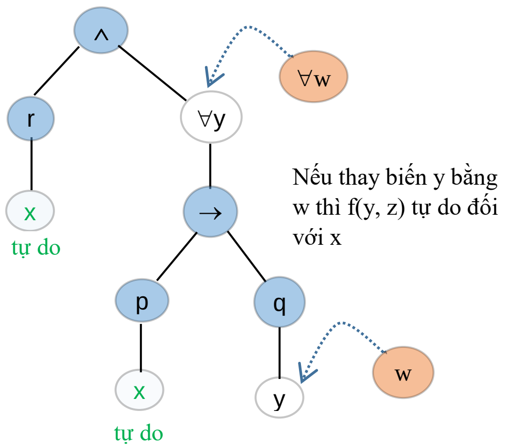

$t_1$ có biến y trở thành ràng buộc, nên không thay $t_1$ vào x được.

$t_2$, $t_3$ thay được vì các hiện hữu của chúng vẫn còn tự do đối với x.

✶ Khắc phục việc mất tính tự do của hiện hữu bằng cách *đổi tên biến*, để có thể thay thế được.

Thí dụ :

Để F[t/x] thực hiện được, đổi tên tất cả các biến có hiện hữu ràng buộc trong F xuất hiện trong t. Lúc này t tự do đối với x.




## 3. Tiếp cận luận lý vị từ theo hướng chứng minh

Tương tự như luận lý mệnh đề, luận lý vị từ cũng có phần xây dựng độc lập với phần xây dựng theo ngữ nghĩa, đó là lý thuyết chứng minh.

Các qui tắc suy luận tự nhiên trong luận lý vị từ cũng sử dụng lại tất cả các qui tắc suy luận của luận lý mệnh đề, ngoài ra có thêm các qui tắc liên quan đến lượng từ.

Ký hiệu thông thường chỉ sự bằng nhau của các nguyên từ là “=”.

Dùng vị từ eq(_, _) để diễn tả dấu “=”, ví dụ để chỉ t = s là eq(t, s) với t và s là nguyên từ.

eq(t, s) có giá trị đúng khi :

- t và s cùng là ký hiệu hằng
- t và s là biểu thức hàm cùng giá trị trên miền đối tượng.

## 3.1. Các qui tắc suy luận

- **Qui tắc bằng nhau i (ký hiệu =i)**

dòng m : eq(t, t), với t là nguyên từ.

Qui tắc này đương nhiên được sử dụng không cần điều kiện gì.

- **Qui tắc bằng nhau e (ký hiệu =e)**

dòng k : eq($t_1$, $t_2$), với $t_1$, $t_2$ là nguyên từ

dòng m : F[$t_1$/x]

dòng m+1 : F[$t_2$/x], với $t_1$, $t_2$ tự do đối với x trong F.

Nếu có dòng k và m thì viết được dòng m+1.

Nhận xét :

✶ Công thức ở dòng m rất khó truy tìm lại được công thức ban đầu F[x], i.e công thức trước khi thay x bằng $t_1$.

Thí dụ :

Ở dòng m có công thức p(f(y)), khi đó có thể đoán công thức "gốc" F[x] trước khi thay bằng $t_1$ là p(x) hay p(f(x)).

Tổng quát, ở dòng m không biết được công thức F (chưa thay thế $t_1$), chỉ biết F dưới dạng đã thay thế $t_1$ rồi, do đó có thể có nhiều F[x] khác nhau cho ra cùng kết quả khi thay bằng $t_1$. Qui tắc này cũng được hiểu một cách "máy móc" là thông số thứ nhất $t_1$ của eq($t_1$, $t_2$) (dòng m) được thay thế chớ không phải thông số thứ hai $t_2$ được thay.

✶ Ý nghĩa của "=" thường không được xác định rõ ràng, thông thường khi viết t = s thì "tự nhiên" có ngay s = t. Nhưng với eq(s, t), nhìn ở góc độ hàm thì không tự nhiên có eq(t, s). Do đó, qui tắc eq(_, _) ở trên không có nghĩa là có eq($t_1$, $t_2$) sẽ có eq($t_2$, $t_1$).

Qui tắc (=e) trong sử dụng sau này thường sử dụng dấu "=" là t = s thay cho eq(t, s).

Tóm lại.

Qui tắc bằng nhau e (=e) : $eq(t_1, t_2), F[t_1/x] \vdash F[t_2/x]$.

Được phép dùng ở dạng : $eq(t_1, t_2), F[t_2/x] \vdash F[t_1/x]$.

Chỉ khi chứng minh được : $eq(t_1, t_2) \vdash eq(t_2, t_1)$.

✶ Chứng minh : $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

(được viết chính thức là : $eq(t_1, t_2) \vdash eq(t_2, t_1)$).

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $eq(t_1, t_2)$ | (tiền đề) |
| 2 | $eq(t_1, t_1)$ | (=i) |
| 3 | $eq(t_2, t_1)$ | (=e) 1, 2 |

Ở dòng 2, nôi dung $eq(t_1, t_1)$ có thể hiểu công thức gốc F theo hai cách là $eq(x, t_1)$ hay

$eq(t_1, x)$. Nếu chọn công thức gốc $F = eq(x, t_1)$, dòng 2 mặc nhiên có và được hiểu là đã áp dụng $F[t_1/x]$ nên cũng áp dụng được $F[t_2/x]$ để có dòng 3. Nhưng nếu chọn công thức gốc $F = eq(t_1, x)$ thì không thể có dòng 3. Có một chút tinh tế ở đây.

✶ Chứng minh : $t_1 = t_2$ , $t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $t_2 = t_3$ | (tiền đề) | (chọn $F = eq(x, t_3)$) |
| 2 | $t_1 = t_2$ | (tiền đề) | |
| 3 | $t_1 = t_3$ | (=e 1, 2) | |

Ở dòng 1 *có thể hiểu* là thế $t_2$ vào $eq(x, t_3)$ cho kết quả là $F[t_2/x]) = eq(t_2, t_3)$. Do $t_1 = t_2$ và $t_2$ thế được vào $eq(x, t_3)$ nên $t_1$ cũng thế được vào $eq(x, t_3)$ cho kết quả là $F[t_1/x]) = eq(t_1, t_3)$ ở dòng 3.

**Qui tắc lượng từ phổ dụng e (ký hiệu ∀e)**

dòng m : $\forall x\, F$

dòng k : $F[t/x]$,

thay tất cả hiện hữu tự do của x có trong F bởi t, với điều kiện nguyên từ t tự do đối với biến x trong F.

Nếu có dòng m thì viết được dòng k.

Nhận xét :

- ✶ F có những hiện hữu tự do của x vì F không đặt dưới thuộc phạm vi ảnh hưởng của ∀x.

Thí dụ :

p(t), ∀x (p(x)⟶¬q(x)) ├─ ¬q(t) với mọi t (tự do đối với x)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | ∀x (p(x)⟶¬q(x)) | (tiền đề) |
| 2 | p(t)⟶¬q(t) | (∀e 1) |
| 3 | p(t) | (tiền đề) |
| 4 | ¬q(t) | (⟶e 2, 3) |

- ✶ Khi thay x bằng nguyên từ t (F[t/x]) sẽ không thể thiếu điều kiện "tự do đối với biến x".

Thí dụ :

∀x F = ∀x (∃y less(x, y)) với x, y là số nguyên và quan hệ less(x, y) là quan hệ x nhỏ hơn hẳn y (<).

∀x F có nghĩa là mọi số nguyên x có số nguyên y lớn hơn x.

Nhưng, F[y/x] là (∃y less(y, y)), nghĩa là có số y lớn hơn hẳn chính nó.

Kết quả sai này là do vi phạm điều kiện "tự do" của các biến có trong nguyên từ t sau khi thay thế.

Trong thí dụ này t = y, biến y không còn tự do sau khi thay thế (∃y less(x, y)) vì $\boxed{y}$ trong (∃y less($\boxed{y}$, y)) bị ràng buộc bởi ∃y. Trước khi thay thế x bởi y, x tự do ở vị trí đó.

### Qui tắc lượng từ phổ dụng i (ký hiệu ∀i)

| | | |
|---|---|---|
| dòng m : | If | $x_0$ … |
| dòng … : | | … |
| dòng k : | nif | $F[x_0/x]$ |

dòng k+1 : $\forall x\ F$

với *biến* $x_0$ là bất kỳ và *không xuất hiện bên ngoài* cấu trúc if … nif (nghĩa là trước cấu trúc if … nif $x_0$ chưa xuất hiện và sau cấu trúc if … nif $x_0$ cũng không xuất hiện), khi đó viết được dòng k+1. Cấu trúc if … nif qui định phạm vi của $x_0$.

Thí dụ : $\forall x\ (p(x) \longrightarrow q(x)), \forall x\ p(x) \vdash \forall x\ q(x)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\forall x\ (p(x) \longrightarrow q(x))$ | (tiền đề) |
| 2 | | $\forall x\ p(x)$ | (tiền đề) |
| 3 | if | $x_0$ | ($x_0$ không xuất hiện ở 1, 2) |
| | | $p(x_0) \longrightarrow q(x_0)$ | ($\forall$e 1) |
| 4 | | $p(x_0)$ | ($\forall$e 2) |
| 5 | nif | $q(x_0)$ | ($\longrightarrow$e 3, 4) |
| 6 | | $\forall x\ q(x)$ | ($\forall$i 3-5) |

Qui tắc $\forall$i dẫn từ $F[x_0/x]$ đến $\forall x\ F$ "có vẻ" như từ một trường hợp đặc biệt khái quát hóa lên trường hợp tổng quát.

Điều kiện biến $x_0$ *không xuất hiện bên ngoài* cấu trúc if … nif cho phép khái quát hóa được thành trường hợp tổng quát. Vì $x_0$ là "bất kỳ", không phải là phần tử "đã xuất hiện".

Nhắc lại :

Tất cả các dòng - từ dòng có từ khóa if đến dòng có từ khóa nif - đều thuộc cấu trúc if … nif.

**Qui tắc lượng từ hiện hữu i (ký hiệu $\exists$i)**

dòng m : $F[t/x]$, với t là nguyên từ,

dòng k : $\exists x\ F$

Nếu có dòng m thì viết được dòng k.

Nhận xét :

Qui tắc $\exists$i là đối ngẫu của $\forall$e.

Thí dụ :

$\forall x\ F \vdash \exists x\ F$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x\ F$ | (tiền đề) |
| 2 | $F[x/x]$ | ($\forall$e 1) |
| 3 | $\exists x\ F$ | ($\exists$i 2) |

**Qui tắc lượng từ hiện hữu e (ký hiệu ∃e)**

| | | |
|---|---|---|
| dòng m : | $\exists x\ F$ | |
| dòng m+1 : | if $x_0$ | $F[x_0/x]$ (thế $x_0$ vào dòng m) |
| … | | |
| dòng k : | nif | G |
| dòng k+1 : | G | |

với $x_0$ là biến bất kỳ và *không xuất hiện bên ngoài* cấu trúc if … nif.
Nếu có dòng m và cấu trúc if … nif thì viết được dòng k+1.
Các công thức trong cấu trúc if … nif đều coi như phụ thuộc vào $x_0$ dù các công thức này có chứa $x_0$ hay không, do đó G phải là kết qủa của việc "cởi bỏ" $x_0$ từ một công thức trước đó trong cấu trúc if … nif vì $x_0$ không được phép ra ngoài cấu trúc if … nif.
Khi có ∃xF sẽ "có ít nhất một" giá trị của x để bảo đảm sự hiện hữu của ∃xF, $x_0$ là đại diện cho tất cả các giá trị này của x.

Thí dụ :

✧. $\forall x\ (p(x) \longrightarrow q(x)), \exists x\ p(x) \vdash \exists x\ q(x)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\forall x\ (p(x) \longrightarrow q(x))$ | (tiền đề) |
| 2 | | $\exists x\ p(x)$ | (tiền đề) |
| 3 | if $x_0$ | $p(x_0)$ | (2 $[x_0/x]$) |
| 4 | | $p(x_0) \longrightarrow q(x_0)$ | ($\forall$e 1) |
| 5 | | $q(x_0)$ | ($\longrightarrow$e 3,4) |
| 6 | nif | $\exists x\ q(x)$ | ($\exists$i 5) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | | $\exists x\, q(x)$ | $(\exists e\ 2, 3\text{-}6)$ |

✧. $\forall x\, (p(x) \longrightarrow q(x)), \exists x\, p(x) \vdash \exists x\, q(x)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\forall x\, (p(x) \longrightarrow q(x))$ | (tiền đề) |
| 2 | | $\exists x\, p(x)$ | (tiền đề) |
| 3 | if $x_0$ | $p(x_0)$ | $(2\ [x_0/x])$ |
| 4 | | $p(x_0) \longrightarrow q(x_0)$ | $(\forall e\ 1)$ |
| 5 | nif | $q(x_0)$ | $(\longrightarrow e\ 3{,}4)$ |
| 6 | | $q(x_0)$ | $(\exists e\ 2, 3\text{-}5)$ |
| 7 | | $\exists x\, q(x)$ | $(\exists i\ 6)$ |

* Dòng 6 không hợp lệ vì $x_0$ thoát ra ngoài cấu trúc if … nif.

✧. $\forall x\, (q(x) \longrightarrow r(x)), \exists x\, (p(x) \wedge q(x)) \vdash \exists x\, (p(x) \wedge r(x))$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\forall x\, (q(x) \longrightarrow r(x))$ | (tiền đề) |
| 2 | | $\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$ | (tiền đề) |
| 3 | if $x_0$ | $p(x_0) \wedge q(x_0)$ | $(2[x_0/x])$ |
| 4 | | $p(x_0)$ | $(\wedge e\ 3)$ |
| 5 | | $q(x_0)$ | $(\wedge e\ 3)$ |
| 6 | | $q(x_0) \longrightarrow r(x_0)$ | $(\forall e\ 1)$ |
| 7 | | $r(x_0)$ | $(\longrightarrow e\ 5{,}6)$ |
| 8 | | $p(x_0) \wedge r(x_0)$ | $(\wedge i\ 4{,}7)$ |
| 9 | nif | $\exists x\, (p(x) \wedge r(x))$ | $(\exists i\ 8)$ |
| 10 | | $\exists x\, (p(x) \wedge r(x))$ | $(\exists e\ 2, 3\text{-}9)$ |

✧. $\exists x\, p(x), \forall x \forall y\, (p(x) \longrightarrow q(y)) \vdash \forall y\, q(y)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\forall x \forall y\, (p(x) \longrightarrow q(y))$ | | (tiền đề) |
| 2 | | $\exists x\, p(x)$ | | (tiền đề) |
| 3 | if $y_0$ | | | |
| 4 | | if $x_0$ | $p(x_0)$ | $(2\ [x_0/x])$ |
| 5 | | | $p(x_0) \longrightarrow q(y_0)$ | $(\forall x\ \forall y\ e\ 1)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | | nif $q(y_0)$ | $(\longrightarrow e\ 4,5)$ |
| 7 | nif | $q(y_0)$ | $(\exists x\ e\ 2,4\text{-}6)$ |
| 8 | | $\forall y\ q(y)$ | $(\forall y\ i\ 3\text{-}7)$ |

Định lý :

(a) $\neg\forall x\ F = \exists x\ \neg F$

(b) $\neg\exists x\ F = \forall x\ \neg F$

Chú thích :

- ✶ Ký hiệu "A = B" (như ở định lý trên) có nghĩa là $A \vdash B$ và $B \vdash A$.
- ✶ Ký hiệu "$\neg\forall x\ F$" có nghĩa là "$\neg(\forall x\ F)$", phủ định của lượng từ và cả công thức, không chỉ lấy phủ định riêng cho lượng từ.
- ✶ Hiện hữu tự do (của một biến) đối với một công thức.

Thí dụ :

$G = p(x) \wedge (\exists x)\ q(x)$, x (trong p(x)) là hiện hữu tự do của biến x (đối với G).

$F = (\forall x)\ (r(x) \vee G)$, không có hiện hữu tự do (đối với F) của biến x.

Định lý :

G không chứa hiện hữu tự do của x (trong G).

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $\forall x\ F \wedge G$ | = | $\forall x\ (F \wedge G)$ |
| (b) | $\forall x\ F \vee G$ | = | $\forall x\ (F \vee G)$ |
| (c) | $\exists x\ F \wedge G$ | = | $\exists x\ (F \wedge G)$ |
| (d) | $\exists x\ F \vee G$ | = | $\exists x\ (F \vee G)$ |
| (e) | $\forall x\ (G \longrightarrow F)$ | = | $G \longrightarrow \forall x\ F$ |
| (f) | $\exists x\ (F \longrightarrow G)$ | = | $\forall x\ F \longrightarrow G$ |
| (g) | $\forall x\ (F \longrightarrow G)$ | = | $\exists x\ F \longrightarrow G$ |
| (h) | $\exists x\ (G \longrightarrow F)$ | = | $G \longrightarrow \exists x\ F$ |

Định lý :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $\forall x\ F \wedge \forall x\ G$ | = | $\forall x\ (F \wedge G)$ |
| (b) | $\exists x\ F \vee \exists x\ G$ | = | $\exists x\ (F \vee G)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (c) | $\forall x \forall y\ F$ | = | $\forall y \forall x\ F$ |
| (d) | $\exists x \exists y\ F$ | = | $\exists y \exists x\ F$ |

Chú thích :

✶ Câu b của định lý trên nói rằng có giá trị của x để F đúng và có giá trị để G đúng (hai giá trị này không nhất thiết trùng nhau. Nhưng ở vế phải hai giá trị này phải là một.

✶ Tuy nhiên nếu câu b thay toán tử $\vee$ bằng $\wedge$, hai vế không còn tương đương.

### 3.2. Áp dụng qui tắc suy luận tự nhiên

Chứng minh :

$$(x + 1) = (1 + x), (x + 1 > 1) \longrightarrow (x + 1 > 0) \vdash (1 + x > 1) \longrightarrow (1 + x > 0)$$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(x + 1) = (1 + x)$ | (tiền đề) |
| 2 | $(x + 1 > 1) \longrightarrow (x + 1 > 0)$ | (tiền đề) |
| 3 | $(1 + x > 1) \longrightarrow (1 + x > 0)$ | (=e 1, 2) |

Giải thích :

Dòng 1 được xem là $t_1 = t_2$ với $t_1 = x + 1$ và $t_2 = 1 + x$.

Dòng 2 được xem là công thức $F = ((x > 1) \longrightarrow (x > 0))$ trong đó x được thay bởi nguyên từ $t_1 = x + 1$, ie. $F[t_1/x] = (x + 1 > 1) \longrightarrow (x + 1 > 0)$.

## 4. Tiếp cận luận lý vị từ theo hướng ngữ nghĩa

Đây là hướng tiếp cận luận lý vị từ cùng với thế giới ứng dụng gọi chung là thế giới thực. Chính là liên kết giữa hai không gian, không gian toán học là luận lý vị từ và thế giới ứng dụng. Lúc này các công thức sẽ có giá trị đúng sai, do tính đúng sai trong thế giới ứng dụng được liên kết với các công thức của luận lý vị từ. Bản thân công thức của "thế giới" luận lý vị từ không có tính đúng sai.

## 4.1. Diễn dịch của một công thức

Định nghĩa – Diễn dịch.

Diễn dịch của một công thức là thế giới ứng dụng liên kết với công thức. Nói cách khác diễn dịch của một công thức chính là thế giới mà công thức được "nhúng" vào và lúc này công thức mang ý nghĩa do thế giới này qui định. Xác định diễn dịch chính là xác định cái thế giới đó.

Xác định diễn dịch I cho công thức F là xác định các yếu tố sau :

1. Chọn miền đối tượng D, nghĩa là chọn tập hợp cho D.
2. Định nghĩa các hàm (với hằng là gán giá trị cho nó).
3. Định nghĩa các vị từ.

Miền đối tượng là tập hợp các đối tượng mà thế giới này lấy giá trị trong đó để hoạt động.

HếtĐn

Thí dụ :

F = $\forall$x (p(x) $\longrightarrow$ q(f(x), a)).

F có : hằng a, hàm f(_) một thông số, vị từ p(_) một thông số, vị từ q(_,_) hai thông số.

Diễn dịch I của F :

Chọn D = {1, 2, 3}.

Chọn hằng a = 2.

Chọn f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3.

Chọn {p(1), ¬p(2), ¬ p(3)}. (*)

Chọn {q(1,1), ¬q(1,2), q(1,3), ¬q(2,1), ¬q(2,2), ¬q(2,3), q(3,1), ¬q(3,2), q(3,3)}.

((*) các vị từ biểu diễn dưới dạng tập hợp có nghĩa là p(1) đúng, p(2) và p(3) sai)

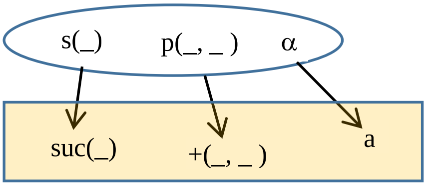
### 4.2. Diễn dịch của một Σ

Có thể biểu diễn diễn dịch cho một *lớp* các công thức (chưa có công thức cụ thể) bởi cấu trúc Σ = <R, F, C>. R là tập hợp các vị từ, F là tập hợp các hàm và C là tập hợp các hằng.

Thí dụ :

Cho Σ = <R, F, C> với R = {}(tập rỗng, ie. không có vị từ nào),

F = {s(_), p(_,_)}, C = {α}.




Diễn dịch I :

D = $\mathbb{Z}^+$,

I(α) = 0.

I(s) là hàm suc (phần tử kế) trong $\mathbb{Z}$,

I(p) là hàm + trong $\mathbb{Z}$.

Nếu x được gán 3 thì suc(suc(α) + suc(x)) = 6.

Diễn dịch J :

D = {word | word là từ trên tập ký tự {a, b}},

J(α) = a.

J(s) là hàm suc kết nối ký tự a vào cuối từ,

J(p) là hàm + kết nối 2 từ.

Nếu x được gán “aba” thì suc(suc(α) + suc(x)) = aaabaaa.

Cách xác định diễn dịch này không thực hiện trên một công thức cụ thể mà xác định những yếu tố : hằng, hàm, vị từ mà sau này các công thức sẽ sử dụng.

### 4.3. Đánh giá công thức có lượng từ

Tính đúng, sai của *công thức đóng* trong diễn dịch I nhờ lượng từ xác định.

$\forall$x F là đúng, nếu F đúng với mọi phần tử của miền D.

$\exists$x F là đúng, nếu có một phần tử a của miền D để F[a/x] đúng.

Chú ý :

- ✶ Tổng quát, không xác định được tính đúng, sai của *công thức tự do* trong một diễn dịch.
- ✶ Khi nói công thức F đúng hay sai nghĩa là đúng hay sai *trong một diễn dịch*.
- * Khi nói công thức đúng hay sai một cách trống không (không nhắc đến diễn dịch thì coi như nó được ngầm hiểu).

Thí dụ :

✧. $F = \forall x\ \forall y\ (\ (p(x) \vee q(y)) \longrightarrow (\exists t\ q(t) \wedge \forall z\ q(z))\ )$

Cho diễn dịch I : $D = \{\alpha, \beta\}, \{p(\alpha), \neg p(\beta), q(\alpha), q(\beta)\}$.

- Lấy $x = \alpha$,

  * lấy $y = \alpha$ : $p(\alpha) \vee q(\alpha) \longrightarrow (\exists t)\ q(t) \wedge (\forall z)\ q(z)$.

  $p(\alpha) = 1$, $q(\alpha) = 1$, $(\exists t)\ q(t) = 1$ vì có $t = \alpha$ để $q(\alpha) = 1$.

  $(\forall z)\ q(z) = 1$ vì $q(\alpha) = 1$, $q(\beta) = 1$.

  Hai dòng trên giải thích cho kết qủa sau :

  $$(1 \vee 1) \longrightarrow (1 \wedge 1) = 1.$$

  * lấy $y = \beta$ : $p(\alpha) \vee q(\beta) \longrightarrow (\exists t)q(t) \wedge (\forall z)q(z)$.

  $$(1 \vee 1) \longrightarrow (1 \wedge 1) = 1.$$

- Lấy $x = \beta$,

  * lấy $y = \alpha$ : $(p(\beta) \vee q(\alpha)) \longrightarrow (\exists t\ q(t) \wedge \forall z\ q(z))$.

  $$(0 \vee 1) \longrightarrow (1 \wedge 1) = 1.$$

  * lấy $y = \beta$ : $(p(\beta) \vee q(\beta)) \longrightarrow (\exists t\ q(t) \wedge \forall z\ q(z))$.

  $$(0 \vee 1) \longrightarrow (1 \wedge 1) = 1.$$

  Vậy công thức F đúng trong diễn dịch I.

✧. $F = \forall x\ \forall y\ (\ (p(x) \vee q(y)) \longrightarrow (\exists t\ q(t) \wedge \forall z\ q(z))\ )$

Cho diễn dịch J : $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{p(\alpha), \neg p(\beta), \neg p(\gamma), q(\alpha), q(\beta), \neg q(\gamma)\}$.

Lấy $x = \alpha$,

lấy y = α : $(p(\alpha) \vee q(\alpha)) \longrightarrow (\exists t\, q(t) \wedge \forall z\, q(z))$.

$$(1 \quad \vee \quad 1) \longrightarrow \quad (1 \quad \wedge \quad 0) \quad = \quad 0.$$

Vậy công thức F sai trong diễn dịch J.

### 4.4. Ngữ nghĩa

Các khái niệm :

| | | |
|---|---|---|
| Hằng đúng, | Hằng sai, | Khả đúng-Khả sai |
| Mô hình | Tương đương | Hệ quả luận lý |

được định nghĩa tương tự như trong luận lý mệnh đề.

Nhận xét :

- ✶ Phủ định của *định nghĩa hằng đúng* là *định nghĩa khả sai* :

  ¬ (định nghĩa hằng đúng) = định nghĩa khả sai.

  Phủ định của *định nghĩa hằng sai* là *định nghĩa khả đúng* :

  ¬ (định nghĩa hằng sai) = định nghĩa khả đúng.

- ✶ Phủ định của *công thức hằng đúng* là *công thức hằng sai* :

  ¬ (công thức hằng đúng) = công thức hằng sai.

  Phủ định của *công thức hằng sai* là *công thức hằng đúng* :

  ¬ (công thức hằng sai) = công thức hằng đúng.

Thí dụ :

Công thức A là hằng đúng, công thức "¬A" sẽ hằng sai.

Công thức B là hằng sai, công thức "¬A" sẽ hằng đúng.

- ✶ Các định nghĩa hằng sai, hằng đúng, khả đúng, khả sai, mô hình, tương đương, hệ quả luận lý là *thực thi được* trong luận lý mệnh đề nhưng *không thực thi được* trong luận lý vị từ. Do "số diễn dịch" của luận lý mệnh đề hữu hạn, còn số diễn dịch của luận lý vị từ là vô hạn.

### 4.5. Công thức tương đương

F, P là công thức và P không chứa *hiện hữu tự do* của x (đối với P).

1. $(\forall x\, F) \vee P \qquad = \qquad \forall x\, (F \vee P)$

1'. $(\exists x\ F) \vee P \quad = \quad \exists x\ (F \vee P)$

2. $(\forall x\ F) \wedge P \quad = \quad \forall x\ (F \wedge P)$

2'. $(\exists x\ F) \wedge P \quad = \quad \exists x\ (F \wedge P)$

3. $\neg(\forall x\ F) \quad = \quad \exists x\ \neg F$

3'. $\neg(\exists x\ F) \quad = \quad \forall x\ \neg F$

4. $\forall x\ (F \wedge H) \quad = \quad (\forall x\ F) \wedge (\forall x\ H)$

4'. $\exists x\ (F \vee H) \quad = \quad (\exists x\ F) \vee (\exists x\ H)$

5. $\forall x\ (\forall y\ H) \quad = \quad \forall y\ (\forall x\ H)$

5'. $\exists x\ (\exists y\ H) \quad = \quad \exists y\ (\exists x\ H)$

6. $\models (\forall x\ F \vee \forall x\ H) \longrightarrow \forall x\ (F \vee H)$

6'. $\models \exists x\ (F \wedge H) \longrightarrow (\exists x\ F \wedge \exists x\ H)$

7. $\models \forall x\ H \longrightarrow \exists x\ H$

Chứng minh $(\forall x\ F) \vee P \quad = \quad \forall x\ (F \vee P)$

Tương đương với việc chứng minh :

1. $(\forall x\ F) \vee P \models \forall x\ (F \vee P)$
2. $\forall x\ (F \vee P) \models (\forall x\ F) \vee P$

Chứng minh : $(\forall x\ F) \vee P \models \forall x\ (F \vee P)$

Lấy I là mô hình của $((\forall x\ F) \vee P)$.

Nếu $(\forall x\ F)$ đúng thì $(F[\alpha/x] \vee P)$ đúng $\forall \alpha \in D_I$

$(D_I$ là miền đối tượng của I).

Do đó $\forall x\ (F \vee P)$ đúng.

Nếu $(\forall x\ F)$ sai thì P phải đúng.

Do đó $F[\alpha/x] \vee P$ đúng $\forall \alpha \in D_I$,

hay $\forall x\ (F \vee P)$ đúng.

Vậy $(\forall x\ F) \vee P \models \forall x\ (F \vee P)$

Các công thức tương đương khác được chứng minh tương tự.

Chú ý :

Điều kiện P không chứa hiện hữu tự do của x là bắt buộc

Thí dụ :

$(\forall x\ p(x)) \wedge q(\boxed{x}, y) \neq \forall x\ (p(x) \wedge q(x, y))$, vì q chứa hiện hữu tự do của x.

✧. Minh họa dạng 1, 1'. $(\forall x\ F) \vee P = \forall x\ (F \vee P)$.

$(\forall x\ p(x)) \vee q(y) \quad = \quad \forall x\ (p(x) \vee q(y))$

$\exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \vee r(y) \quad = \quad \exists x\ ((p(x) \wedge q(x)) \vee r(y))$

$q(y, z) \wedge \exists x\ p(x, y) \quad = \quad \exists x\ (q(y, z) \wedge p(x, y))$

**Vấn đề hội giao các tập hợp :**

$A_i$ là các tập hợp trên tập chỉ số hữu hạn I = {1, 2, 3} :

Giao các $A_i$ : $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, Hội các $A_i$ : $A_1 \cup A_2 \cup A_3$,

Ký hiệu giao các $A_i$ : $\cap A_{i\in I}$, Ký hiệu hội các $A_i$ : $\cup A_{i\in I}$,

$A_i$ là các tập hợp trên tập chỉ số vô hạn I :

Định nghĩa giao mở rộng : $x \in \cap A_{i\in I} \longleftrightarrow \forall i\ (x \in A_i)$.

Định nghĩa hội mở rộng : $x \in \cup A_{i\in I} \longleftrightarrow \exists i\ (x \in A_i)$.

Thí dụ :

Cho $A_i$, B là các tập hợp và tập chỉ số I. Đặt $B_i = (A_i \cup B)$.

Chứng minh $(\cap A_i) \cup B \subseteq \cap B_i$.

Lấy $x \in (\cap A_i) \cup B$.

$\Longrightarrow (x \in \cap A_i) \vee (x \in B)$

$\Longrightarrow \forall i\ (x \in A_i) \vee (x \in B)$

Mã hóa : p(i) là phát biểu "$x \in A_i$".

q(a) là phát biểu "$x \in B$" (với a là hằng).

$\Longrightarrow \forall i\ p(i) \vee q(a)$

$\Longrightarrow \forall i\ (p(i) \vee q(a))$ vì $((\forall i\ F) \vee Q = \forall i\ (F \vee Q))$

$\Longrightarrow \forall i\ ((x \in A_i) \vee (x \in B))$

$\Longrightarrow \forall i\ (x \in (A_i \vee B))$

$\Longrightarrow \forall i\ (x \in B_i)$

$\Longrightarrow x \in \cap B_i$.

Vậy $(\cap A_i) \cup B \subseteq \cap B_i$.

Nhận xét :

✶ Cho công thức $\forall i\ (x \in A_i) \vee (x \in B)$.

Câu hỏi : i và x có phải là biến hay không ?.

Trả lời :

i là *ký hiệu biến* của luận lý vị từ (logic nói chung),

x không là *ký hiệu biến* của luận lý vị từ, nhưng x là *ký hiệu biến* của bài toán (của lý thuyết tập hợp), vì vậy x không dính dáng với những biến đổi logic.

✶ Khái niệm ở thế giới này sẽ không còn có cùng ý nghĩa ở thế giới khác. Điều này quan trọng khi chuyển bài toán từ ngôn ngữ tự nhiên sang logic. Không phải biến nào của bài toán cũng trở thành biến của logic.

✶ Thế giới luận lý vị từ nói riêng và logic nói chung có ngôn ngữ riêng của nó. Các từ biến, hằng, hàm, vị từ là ngôn ngữ riêng của logic chưa chắc có cùng ý nghĩa là biến, hằng, hàm của thế giới ứng dụng. Như vậy hằng của logic khác với hằng của thế giới ứng dụng, hai thực thể của hai thế giới khác nhau, việc gán sự tương quan giữa hằng của logic và hằng của thế giới ứng dụng là việc của người dùng. Trong thế giới logic, hằng chọn một đối tượng trong miền đối tượng, còn biến duyệt qua tất cả đối tượng của miền đối tượng.

✶ Minh họa dạng 3, 3'. $\neg(\forall x\ F) = \exists x\ \neg F$

$\neg(\forall x\ p(x, y)) = \exists x\ \neg p(x, y)$

$\neg(\exists x\ p(x)) = \forall x\ \neg p(x)$

✶ Luật Morgan trong luận lý vị từ giống như trong luận lý mệnh đề

$$\neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G$$

$$\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$$

Thí dụ :

$$\neg(\forall x\, p(x) \vee \exists y\, q(y)) = (\exists x\, \neg p(x) \wedge \forall y\, \neg q(y))$$

$$\neg(\forall x\, p(x) \longrightarrow \exists y\, q(y)) = (\forall x\, p(x) \wedge \forall y\, \neg q(y))$$

✶ Minh họa dạng 4, 4’. $\forall x\,(F \wedge H) = (\forall x\, F) \wedge (\forall x\, H)$

$$\forall x\,(\boxed{x} \in A \wedge \boxed{x} \in B) = \forall x\,(x \in A) \wedge \forall x\,(x \in B)$$

$$\exists x\,(\boxed{x} \in A \vee \boxed{x} \in B) = \exists x\,(x \in A) \vee \exists x\,(x \in B)$$

Các hiện hữu $\boxed{x}$ ở vế trái lấy cùng một giá trị ở cùng một thời điểm, nhưng các hiện hữu của x ở vế phải không cần phải lấy cùng một giá trị ở cùng một thời điểm.

Thí dụ :

Với A = {1, 2, 3} B = {1, 2, 3}

$$\forall x\,(\boxed{x} \in A \wedge \boxed{x} \in B) = \forall x\,(x \in A) \wedge \forall x\,(x \in B)$$

Lượng từ $\forall$ được thực hiện như sau :

Tại thời điểm $t_1$ : vế trái có thể là $(1 \in A \wedge 1 \in B)$ – vế phải có thể là $(1 \in A) \wedge (2 \in B)$

Tại thời điểm $t_2$ : vế trái có thể là $(2 \in A \wedge 2 \in B)$ – vế phải có thể là $(3 \in A) \wedge (1 \in B)$

Tại thời điểm $t_1$ : vế trái có thể là $(3 \in A \wedge 3 \in B)$ – vế phải có thể là $(2 \in A) \wedge (3 \in B)$

✧. Minh họa dạng 5, 5’. $\forall x\,(\forall y\, H) = \forall y\,(\forall x\, H)$

$$\forall x\, \forall y\, p(x, y) = \forall y\, \forall x\, p(x, y)$$

$$\exists x\, \exists y\,(p(x) \wedge q(y)) = \exists y\, \exists x\,(p(x) \wedge q(y))$$

✧. Minh họa dạng 6.

$\models (\forall x\, F \vee \forall x\, H) \longrightarrow \forall x\,(F \vee H)$ nhưng

$$\not\models \forall x\,(F \vee H) \longrightarrow (\forall x\, F \vee \forall x\, H)$$

Thí dụ :

Lấy $A_i$, $B_i$ là các tập hợp lấy chỉ số trên I.

$\forall i\ (x \in A_i) \vee \forall i\ (x \in B_i) \models \forall i\ (x \in A_i \vee x \in B_i)$.

$\forall i\ (x \in A_i \vee x \in B_i) \not\models \forall i\ (x \in A_i) \vee \forall i(x \in B_i)$.

Chứng minh $(\cap A_i) \cup (\cap B_i) = \cap(A_i \cup B_i)$, với $A_i$, $B_i$, là các tập hợp trên tập chỉ số I.

Lấy $x \in \underline{(\cap Ai) \cup (\cap Bi)}$ (1)

$\Leftrightarrow \underline{x \in (\cap A_i)} \vee \underline{x \in (\cap B_i)}$ (2)

$\Leftrightarrow \underline{(\forall i)\ (x \in A_i)} \vee \underline{(\forall i)(x \in B_i)}$ (3)

$\Rightarrow (\forall i)\ (\underline{x \in A_i} \vee \underline{x \in B_i})$ (4)

$\Rightarrow (\forall i)\ (x \in A_i \cup B_i)$ (5)

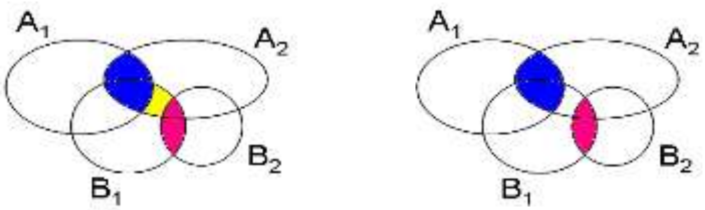
$\Rightarrow x \in \cap(A_i \cup B_i)$ (6)

Dòng (4) chuyển lên (3) sai, sử dụng sai công thức hằng đúng dạng 6.

Vậy chỉ có : $(\cap A_i) \cup (\cap B_i) \subset \cap(A_i \cup B_i)$ và $(\cap A_i) \cup (\cap B_i) \not\supset \cap(A_i \cup B_i)$

Minh họa với I = {1, 2}như sau :

$(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \not\subset (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$.




✧. Minh họa dạng 6'.

$\models \exists x\ (F \wedge H) \longrightarrow (\exists x\ F \wedge \exists x\ H)$ nhưng

$\not\models (\exists x\ F \wedge \exists x\ H) \longrightarrow \exists x\ (F \wedge H)$

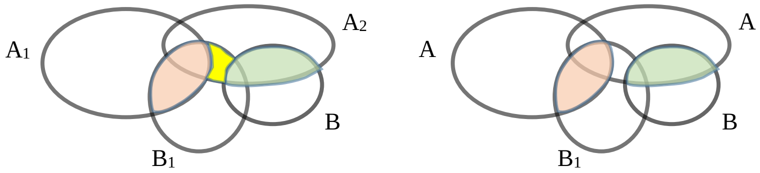
Thí dụ :

$\exists i\ (x \in A_i \wedge x \in B_i) \models (\exists i, x \in A_i) \wedge (\exists i, x \in B_i)$.

$\exists i\ (x \in A_i) \wedge \exists i\ (x \in B_i) \not\models \exists i\ (x \in A_i \wedge x \in B_i)$.

Minh họa với $I = \{1, 2\}$như sau :

$(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) \not\subset (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2)$.




Nhận xét :

- ✶ Có thể viết $\forall x \forall y$ H thay vì $\forall x(\forall y H)$ hay $\forall x, y$ H, nhưng cách viết "tốt nhất" là $\forall x\ (\forall y\ H)$.
- ✶ Tổng quát không thể hoán vị giữa lượng từ $\forall$ và $\exists$.

Thí dụ :

Vị từ p(x, y) có nghĩa là "số nguyên x bằng số nguyên y".

$\forall y\ \exists x\ p(x, y)$ hằng đúng, vì có x = y.

$\exists x\ \forall y\ p(x, y)$ không hằng đúng, vì không có số nguyên x nào bằng với mọi số nguyên.

- ✶ Cá biệt có trường hợp hoán vị được giữa lượng từ $\forall$ và $\exists$.

Thí dụ :

$F = \forall x\ p(x) \vee \exists y\ q(y)$

Cách 1.

Đặt $Q = \exists y\ q(y)$,

$F = \forall x\ p(x) \vee Q$

$F = \forall x\ (p(x) \vee Q)$

$F = \forall x\ (p(x) \vee \exists y\ q(y))$

Đặt $R = p(y)$,

$F = \forall x\ (R \vee \exists y\ q(y))$

$F = \forall x\ (\exists y\ (R \vee q(y)))$

Cách 2.

Đặt $P = \forall x\ p(x)$.

$F = P \vee \exists y\ q(y)$

$F = \exists y\ (P \vee q(y))$

$F = \exists y\ (\forall x\ p(x) \vee q(y))$.

Đặt $S = q(y)$.

$F = \exists y\ (\forall x\ p(x) \vee S)$.

$F = \exists y\ (\forall x\ (p(x) \vee S))$.

$F = \forall x\ \exists y\ (p(x) \vee q(y))$ $\qquad$ $F = \exists y\ \forall x\ (p(x) \vee q(y))$.

✶ Khái quát hóa việc hoán vị giữa lượng từ ∀ và ∃.

$\models \exists x\ \forall y\ K \longrightarrow\ \forall y\ \exists x\ K$

(tương đương với $\exists x\ \forall y\ K \models \forall y\ \exists x\ K$)

$\not\models \forall y\ \exists x\ K \longrightarrow \exists x\ \forall y\ K$

(tương đương với $\forall y\ \exists x\ K \not\models \exists x\ \forall y\ K$)

Chứng minh : $\models \exists x\ \forall y\ K \longrightarrow\ \forall y\ \exists x\ K$

Lấy diễn dịch I.

Nếu $(\exists x\ \forall y\ K)$ đúng trong I,

giả sử $(\forall y\ \exists x\ K)$ sai thì

$(\exists y_0\ \exists x\ K)$ sai hay $(\exists x\ \exists y_0\ K)$ sai, mâu thuẫn với $(\exists x\ \forall y\ K)$ đúng.

Do đó $\forall y\ \exists x\ K$ đúng, nên $(\exists x\ \forall y\ K \longrightarrow\ \forall y\ \exists x\ K)$ đúng.

Nếu $(\exists x\ \forall y\ K)$ sai trong I thì $(\exists x\ \forall y\ K \longrightarrow \forall y\ \exists x\ K)$ đúng bất chấp $(\forall y \exists x\ K)$.

Vậy $(\exists x\ \forall y\ K \longrightarrow\ \forall y\ \exists x\ K)$ đúng với mọi diễn dịch.

✶ Việc hoán vị lượng từ ∀ và ∃ có thể thay đổi ngữ nghĩa của công thức.

Thí dụ :

Chuyển câu "Mọi đội bóng đá có một tiền vệ".

$f(x)$ : x là đội bóng đá, $\qquad$ $q(x, y)$ : y là tiền vệ của x.

Câu trên có thể dịch : 1. $\forall x \exists y\ (f(x) \rightarrow q(y, x))$ hoặc

2. $\exists y \forall x\ (f(x) \rightarrow q(y, x))$.

Trong trương hợp cụ thể này việc hoán vị 2 lượng từ là hợp lệ.

Cách dịch 1 : Mọi đội bóng đá có tiền vệ.

Cách dịch 2 : có tiền vệ cho mọi đội bóng đá (anh này làm tiền vệ cho mọi đội bóng).

Cách dịch 1 bao gồm cả ý nghĩa của cách dịch 2.

Hai cách dịch này khác nhau về mặt ngữ nghĩa, nhưng vẫn tương đương về mặt logic.

- ✶ Trong thực tế bài toán có thể có nhiều miền xác định cho các biến của lượng từ, nên khi dùng các lượng từ thường được viết kèm theo miền xác định của biến.

Thí dụ :

Định nghĩa giao mở rộng : $\cap A_{i \in I} = \{ x \mid (\forall i \in I)(x \in A_i)\}$

Do đó khi lấy phủ định : $\neg((\forall i \in I)(x \in A_i)) = (\exists i \in I)(x \notin A_i)$

**Không được viết :** $\neg((\forall i \in I)(x \in A_i)) = (\exists i \notin I)(x \notin A_i)$

### 4.6. Cục bộ "mạnh hơn" Toàn bộ (local > global)

✧. Lượng từ toàn bộ không ảnh hưởng đến phạm vi của lượng từ cục bộ. Điều này gọi là "phép vua thua lệ làng".

Thí dụ :

$F = \forall x\,(p(x) \longrightarrow \exists x\, q(x))$

Lượng từ $\forall x$ có phạm vi ảnh hưởng là toàn bộ công thức $(p(x) \longrightarrow \exists x\, q(x))$, còn phạm vi ảnh hưởng của lượng từ $\exists x$ là $q(x)$.

Tuy nhiên lượng từ $\forall x$ không ảnh hưởng đến $\exists x\, q(x)$.

✧. Để thoát ra khỏi phạm vi ảnh hưởng của lượng từ toàn bộ bằng cách đổi tên biến của lượng từ cục bộ và các hiện hữu nằm trong phạm vi ảnh hưởng của nó.

Thí dụ :

$F = \forall x\,(p(x) \longrightarrow \exists x\, q(\boxed{x}, f(\boxed{x})))$ thay các hiện hữu của x bằng y.

$= \forall x\,(p(x) \longrightarrow \exists \boxed{y}\, q(\boxed{y}, f(\boxed{y})))$.

### 4.7. Dạng chuẩn Prenex

Công thức của luận lý vị từ là là sự tổ hợp của công thức nguyên, các toán tử cùng với lượng từ, do đó rất đa dạng. Một số bài toán sẽ được tính toán tiện lợi hơn nếu công thức ở một dạng nào đó. Có một lớp bài toán sẽ thuận tiện hơn khi tính toán nếu công thức ở dạng chuẩn Prenex. Như vậy người dùng có thể tạo ra những dạng chuẩn của riêng mình để việc tính toán thuận tiện.

Định nghĩa – Dạng chuẩn Prenex.

Dạng chuẩn Prenex có dạng :

$F = (Q_1\ x_1) \ldots (Q_n\ x_n)\ M$

M là công thức không chứa lượng từ. $Q_i$ là lượng từ $\forall$ hoặc $\exists$.

HếtĐn

Thí dụ :

$F = \exists x\ \exists y\ (\neg p(x) \vee q(y))$

$G = \forall x\ \exists y\ (p(x) \longrightarrow q(y))$

$H = \exists x\ \exists y\ (\neg p(x) \vee q(y))$

F, G, H đang ở dạng chuẩn Prenex.

Tính chất

- Dạng chuẩn Prenex không duy nhất. Nghĩa là một công thức có thể có nhiều dạng chuẩn Prenex.
- Dạng chuẩn Prenex vẫn còn tương đương với công thức ban đầu.

**Thủ tục chuyển về dạng chuẩn Prenex :**

1. Thay thế toán tử $\longrightarrow$ bằng toán tử $\vee$ bằng cách sử dụng công thức tương đương $X \longrightarrow Y = \neg X \vee Y$.
2. Đẩy tất cả lượng từ ra phía trái (nếu cần sẽ đổi tên biến cục bộ).

Thí dụ :

Chuyển về dạng chuẩn Prenex :

$F = \forall x\ (p(x) \longrightarrow \exists x\ \forall y\ (q(y) \vee r(x)))$

$F = \forall x\ (\neg p(x) \vee \exists x\ \forall y\ (q(y) \vee r(x)))$ (thay thế toán tử $\longrightarrow$ bằng $\vee$)

$F = \forall x\ (\neg p(x) \vee \exists z\ \forall y\ (q(y) \vee r(z)))$ (đổi tên biến cục bộ x thành z)

$F = \forall x\ \exists z\ \forall y\ (\neg p(x) \vee (q(y) \vee r(z)))$ (đẩy lượng từ ra đầu).

### 4.8. Đánh giá công thức trong một diễn dịch

Miền đối tượng D là không gian trừu tượng mà luận lý vị từ làm việc trên đó. Vị từ và hàm cũng như hằng lấy giá trị trên D. Khi áp vào thế giới ứng dụng, miền đối tượng mới có nội dung thật sự.

Thí dụ :

Cho Σ = <R, F, C>. với miền đối tượng D.

Tập hợp vị từ R = {*ptrên*(_,_), *ptròn*(_), *pvuông*(_), *pthoi*(_)}.

Tập hợp các hàm F = {*fnón*(_)}.

Tập hợp hằng C = {cMinh}.

Cho diễn dịch I :

D = {▲, ●, ■, ♦}, cMinh = ▲, *ptrên* = {(■, ▲), (●, ♦)}.

*ptròn* = {●}. *pthoi* = {■, ♦}. *pvuông* = {■}.

*fnón* = {(▲, ●), (♦, ■), (●, ●), (■, ■)}.

Giải thích ý nghĩa của diễn dịch I.

Miền đối tượng D là tập hợp gồm bốn phần tử.

Ký hiệu hằng cMinh lấy giá trị là ▲.

Vị từ có 2 thông số : *ptrên* (_, _).

Vị từ có 1 thông số : *ptròn* (_), *pthoi* (_), *pvuông* (_).

Hàm có 1 thông số : *fnón* (_).

Vị từ *ptrên* có hai giá trị đúng là ptrên(■, ▲), ptrên(●, ♦), những giá trị khác có giá trị sai.

Vị từ *ptròn* có giá trị đúng là *ptròn*(●), những giá trị khác có giá trị sai.

Vị từ *pthoi* có hai giá trị đúng là *pthoi*(■), *pthoi*(♦), những giá trị khác có giá trị sai.

Vị từ *pvuông* có giá trị đúng là *ptròn*(■), những giá trị khác có giá trị sai.

Hàm *fnón*(▲) = ●, *fnón*(♦) = ■, *fnón*(●) = ●, *fnón*(■) = ■.

Đánh giá công thức ∀x ∃y (*ptrên*(x, y) ⟶ *ptrên*(y, x)) trong diễn dịch I :

**Lấy x** = ▲, ∃y (*ptrên*(▲, y) ⟶ *ptrên*(y, ▲))

Lấy y = ▲, (*ptrên*(▲, ▲) ⟶ *ptrên*(▲, ▲)) (s ⟶ s = đ) (1)

Lấy y = ●, (*ptrên*(▲, ●) ⟶ *ptrên*(●, ▲)) (s ⟶ s = đ) (2)

Lấy y = ■, (*ptrên*(▲, ■) ⟶ *ptrên*(■, ▲)) (s ⟶ s = đ) (3)

Lấy y = ♦, (*ptrên*(▲, ♦) ⟶ *ptrên*(♦, ▲)) (s ⟶ s = đ) (4)

**Lấy x** = ●, ∃y (*ptrên*(●, y) ⟶ *ptrên*(y, ●))

Lấy y = ▲, (*ptrên*(●, ▲) ⟶ *ptrên*(▲, ●)) (s ⟶ s = đ) (5)

Lấy y = ●, (*ptrên*(●, ●) ⟶ *ptrên*(●, ●)) (s ⟶ s = đ) (6)

Lấy y = ■, (*ptrên*(●, ■) ⟶ *ptrên*(■, ●)) (s ⟶ s = đ) (7)

Lấy y = ♦, (*ptrên*(●, ♦) ⟶ *ptrên*(♦, ●)) (đ ⟶ s = s) (8)

**Lấy x** = ■, ∃y (*ptrên*(■, y) ⟶ *ptrên*(y, ■))

Lấy y = ▲, (*ptrên*(■, ▲) ⟶ *ptrên*(▲, ■)) (đ ⟶ s = s) (9)

Lấy y = ●, (*ptrên*(■, ●) ⟶ *ptrên*(●, ■)) (s ⟶ s = đ) (10)

Lấy y = ■, (*ptrên*(■, ■) ⟶ *ptrên*(■, ■)) (s ⟶ s = đ) (11)

Lấy y = ♦, (*ptrên*(■, ♦) ⟶ *ptrên*(♦, ■)) (s ⟶ s = đ) (12)

**Lấy x** = ♦, ∃y (*ptrên*(♦, y) ⟶ *ptrên*(y, ♦))

Lấy y = ▲, (*ptrên*(♦, ▲) ⟶ *ptrên*(▲, ♦)) (s ⟶ s = đ) (13)

Lấy y = ●, (*ptrên*(♦, ●) ⟶ *ptrên*(●, ♦)) (s ⟶ đ = đ) (14)

Lấy y = ■, (*ptrên*(♦, ■) ⟶ *ptrên*(■, ♦)) (s ⟶ s = đ) (15)

Lấy y = ♦, (*ptrên*(♦, ♦) ⟶ *ptrên*(♦, ♦)) (s ⟶ s = đ) (16)

Với x = ▲ chọn y = ▲ (1) để (*ptrên*(x, y) ⟶ *ptrên*(y, x)) đúng

Với x = ● chọn y = ● (6) để (*ptrên*(x, y) ⟶ *ptrên*(y, x)) đúng

Với x = ■ chọn y = ■ (11) để (*ptrên*(x, y) ⟶ *ptrên*(y, x)) đúng

Với x = ♦ chọn y = ♦ (16) để (*ptrên*(x, y) ⟶ *ptrên*(y, x)) đúng

Vậy ∀x ∃y (*ptrên*(x, y) ⟶ *ptrên*(y, x)) đúng trong diễn dịch I.

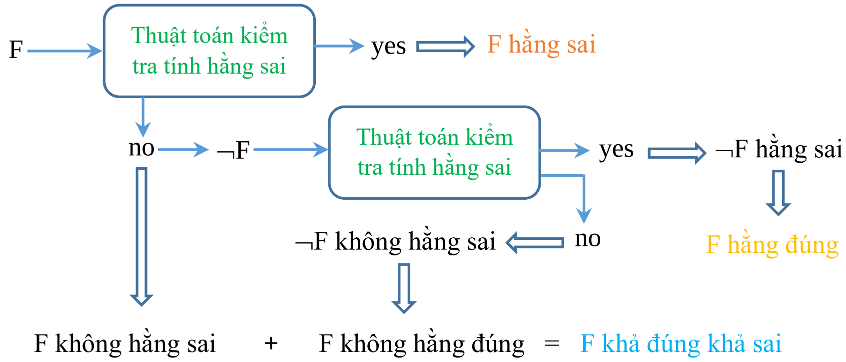
### 4.9.Tính hằng sai

Kiểm tra tính hằng đúng, hằng sai, khả đúng, khả sai của công thức dựa vào định nghĩa của chúng là không khả thi vì không thể duyệt qua hết tất cả diễn dịch. Lý do là số diễn dịch của công thức luận lý vị từ là vô hạn (không đếm đươc).

Mỗi tính chất hằng đúng, hằng sai, khả đúng, khả sai cần một thuật toán để kiểm tra, do đó cần bốn thuật toán. Tuy nhiên, thực tế chỉ một thuật toán đủ để kiểm tra bốn tính chất này.

Giả sử có thuật toán kiểm tra được tính hằng sai của công thức.

Minh họa




Đưa công thức F đưa vào thuật toán.

Nếu thuật toán cho trả lời Yes thì F hằng sai.

Nếu thuật toán cho trả lời No thì lấy công thức ¬F đưa vào thuật toán.

Nếu câu trả lời yes thì ¬F hằng sai nghĩa là F hằng đúng.

Nếu câu trả lời là No thì ¬F không hằng sai và F không hằng sai thì F khả đúng khả sai.

Chú thích.

Công thức ¬F không hằng sai, nghĩa là ¬F hằng đúng hoặc ¬F khả đúng khả sai, hay F hằng sai hoặc F khả sai khả đúng.

## 4.10. Lý do chọn thuật toán kiểm tra tính hằng sai

Thông thường các bài toán có dạng chứng minh là hệ thống S có sản sinh ra công thức F hay không.

Áp dụng nguyên tắc phản chứng, thêm ¬F vào hệ thống S và chỉ cần kiểm tra hệ thống mới {S, ¬F} có hằng sai hay không.

Nếu hệ thống S sinh ra được F nghĩa là S đã "ngầm" chứa F, do đó hệ thống mới {S, ¬F} sinh ra mâu thuẫn vì đồng thời có F và ¬F. Trường hợp S không ngầm chứa F, hệ thống {S, ¬F} sẽ không hằng sai.

$$\boxed{\text{Hệ thống S} \overset{?}{\models} F} \Longleftrightarrow \boxed{\underbrace{(\text{Hệ thống S}) \wedge \neg F}_{\text{Hằng sai ?}}}$$

Nhận xét :

Điều kiện hệ thống S lúc đầu phải nhất quán, nghĩa là không mâu thuẫn. Vấn đề còn lại là tìm thuật toán kiểm tra tính hằng sai.

## 4.11. Dạng chuẩn Skolem

Định nghĩa – Dạng chuẩn Skolem.

Các bước để chuyển công thức F về dạng chuẩn Skolem :

1. Chuyển F về dạng chuẩn Prenex.
2. Chuyển F (đang ở dạng Prenex) về dạng chuẩn giao.
3. Lần lượt xóa các lượng từ "∃biến".

   Với mỗi "biến", thay tất cả các hiện hữu của biến bằng hàm $f_i$. Hàm $f_i$ có thông số là các biến của các lương từ ∀, với chỉ những lượng từ ∀ đứng trước "∃biến".
4. Chuyển thành dạng tập hợp $S_F$ có phần tử là các thành phần giao của dạng chuẩn giao.

HếtĐn

Thí dụ :

✧. F = $\forall x\ \forall y\ \exists \boxed{z}\ \forall t\ \exists s\ \forall v\ (p(x, y, \boxed{z}, t) \wedge q(s, v))$

Công thức đã ở dạng chuẩn Prenex và dạng chuẩn giao.

Xóa lượng từ $\exists z$, thay z bằng hàm $f_z(x, y)$ vì có hai lượng từ phổ dụng đứng trước $\exists z$.

$$\forall x\ \forall y\ \forall t\ \exists \boxed{s}\ \forall v\ (p(x, y, \underline{\mathbf{f_z(x, y)}}, t) \wedge q(\boxed{s}, v))$$

Xóa lượng từ $\exists s$, thay s bằng hàm $f_s(x, y, t)$ vì có ba lượng từ phổ dụng đứng trước $\exists s$.

$$\forall x\ \forall y\ \forall t\ \forall v\ (p(x, y, f_z(x, y), t) \wedge q(\underline{\mathbf{f_s(x, y, t)}}, v))$$

Chuyển thành dạng tập hợp.

$S_F = \{p(x, y, f_z(x, y), t), q(f_s(x, y, t), v)\}$ dạng chuẩn Skolem

✧. F = $\exists \boxed{x}\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ p(a, \boxed{x}, y, z, f(t))$

Xóa lượng từ $\exists x$, thay x bằng hằng b, lý do chọn b vì b chưa xuất hiện trong công thức

$$\forall y\ \exists \boxed{z}\ \forall t\ p(a, b, y, \boxed{z}, f(t))$$

Xóa lượng từ $\exists z$, thay z bằng hàm $f_z(y)$

$$\forall y\ \forall t\ p(a, b, y, f_z(y), f(t))$$

Chuyển thành dạng tập hợp

$S_F = \{p(a, b, y, f_z(y), f(t))\}$ dạng chuẩn Skolem

✧. F = $\exists x\ \forall y\ (p(a, x, f(y)) \longrightarrow \exists y\ \forall z\ \exists u\ q(y, z, u))$

$F = \exists x\ \forall y\ (\neg p(a, x, f(y)) \vee \exists \boxed{y}\ \forall z\ \exists u\ q(\boxed{y}, z, u))$

$F = \exists x\ \forall y\ (\neg p(a, x, f(y)) \vee \exists t\ \forall z\ \exists u\ q(t, z, u))$

(đổi tên biến cục bộ y thành t)

$F = \exists x\ \forall y\ \exists t\ \forall z\ \exists u\ (\neg p(a, x, f(y)) \vee q(t, z, u))$ (dạng prenex)

$\forall y\ \forall z\ (\neg p(a, b, f(y)) \vee q(g(y), z, h(y, z)))$

$S_F = \{\neg p(a, b, f(y)) \vee q(g(y), z, h(y, z))\}$.

Nhận xét :

- ✶ Các hàm được đặt tên $f_x$ để không trùng tên với các hàm đã có của công thức.
- ✶ Nếu trước ∃x không có lượng từ phổ dụng sẽ thay bằng hàm không thông số. Hàm không thông số là hằng.
- ✶ Từ kết quả của bước 4 có thể tạo lại kết quả của bước 3 bằng cách thêm lượng từ phổ dụng cho tất cả các biến có trong công thức..
- ✶ Công thức ở dạng chuẩn Prenex và kết quả của bước chuyển về dạng chuẩn giao vẫn còn tương đương với công thức ban đầu.
- ✶ Kết quả của bước xóa lượng từ dĩ nhiên là không tương đương với công thức ban đầu.
- ✶ Ý nghĩa của việc thay biến x của lượng từ ∃x bằng hằng khi không có lượng từ phổ dụng đứng trước nó đó là :

  Công thức ∃x p(x) có nghĩa là "có giá trị của biến x có tính chất p". Thay x bằng hằng a nghĩa là "lấy hằng a có tính chất p", kết quả là công thức p(a). Mục đích của việc thay bằng hằng là làm đơn giản công thức.
- ✶ Ý nghĩa của việc thay biến x của lượng từ ∃x bằng hàm khi có lượng từ phổ dụng đứng trước nó.

  Ví dụ câu "Mỗi người đều có mẹ" là công thức ∀x ∃y mẹ(x, y). Không thể thay y bằng hằng a vì công thức ∀x mẹ(x, a) mang ý nghĩa là mọi người đều có chung mẹ là a. Biến y của lượng từ ∃y đứng sau ∀x nên biến y phụ thuộc hàm vào x, vì vậy phải thay y bằng hàm theo x.
- ✶ Dạng chuẩn Skolem không duy nhất.

Minh họa.

| Cách 1 | Cách 2 |
|---|---|
| $F = (\forall x)p(x) \vee (\exists y)q(y)$ | $F = (\forall x)p(x) \vee (\exists y)q(y)$ |
| $F = (\forall x)\,(p(x) \vee (\exists y)q(y))$ | $F = (\exists y)\,((\forall x)p(x) \vee q(y))$ |
| $F = (\forall x)(\exists y)\,(p(x) \vee q(y))$ | $F = (\exists y)(\forall x)\,(p(x) \vee q(y))$ |
| $F = (\forall x)\,(p(x) \vee q(f(x)))$ | $F = (\forall x)\,(p(x) \vee q(a))$ |
| $S = \{\ p(x) \vee q(f(x))\ \}$ | $S = \{\ p(x) \vee q(a)\ \}$ |

## 4.12. Mệnh đề

Định nghĩa – Mệnh đề.

Mệnh đề là hội hữu hạn các lưỡng nguyên.

Mệnh đề *đơn vị* là mệnh đề có 1 lưỡng nguyên.

Mệnh đề *rỗng* là mệnh đề không có lưỡng nguyên, được ký hiệu □.

HếtĐn

Nhận xét :

- ✶ Mỗi phần tử của dạng chuẩn Skolem là mệnh đề.
- ✶ Thật ra *không cần* khái niệm "mệnh đề rỗng" rồi qui định nó hằng sai. Khái niệm này chỉ sử dụng ở phần phân giải, □ là giao của hai lưỡng nguyên trái dấu (ví dụ $p(x) \wedge \neg p(x)$) nên là hằng sai.

  Nhắc lại : với mọi công thức F

  $F \vee \perp = F.$

  $F \vee □ = F.$

  $F \wedge \top = F.$

  ($\perp$ là ký hiệu hằng sai trong phần chứng minh và □ là ký hiệu hằng sai trong phần ngữ nghĩa, $\top$ là công thức hằng đúng)

Định lý :

Công thức F hằng sai nếu và chỉ nếu dạng chuẩn Skolem $S_F$ hằng sai.

Nhận xét :

- ✶ Từ định lý trên có thể nói : công thức F và dạng chuẩn Skolem $S_F$ là tương đương theo nghĩa hằng sai, nghĩa là dạng chuẩn Skolem *duy trì* được tính hằng sai. Dạng chuẩn Skolem không làm mất đi tính hằng sai của công thức và cũng không thêm tính hằng sai nếu công thức không có.
- ✶ Tính hằng sai chỉ được định nghĩa cho khái niệm công thức, không định nghĩa cho dạng chuẩn Skolem. Tuy nhiên, dạng chuẩn Skolem được gọi là hằng sai dựa vào công thức ở cuối bước 3 trong quá trình biến đổi về dạng chuẩn Skolem.
- ✶ Từ đây việc xem công thức có hằng sai hay không chỉ cần xét dạng chuẩn Skolem của nó.

## 5. Nguyên tắc phân giải

Hệ thống hằng sai nếu "sinh ra" được mệnh đề hằng sai. Đó là sinh ra mệnh đề rỗng □.

Nguyên tắc phân giải dựa trên *qui tắc truyền*.

Lấy P, Q, R là các lưỡng nguyên, do qui tắc truyền có :

$$(P \longrightarrow Q), (Q \longrightarrow R) \models (P \longrightarrow R), \text{ hay}$$

$$(\neg P \vee Q), (\neg Q \vee R) \models (\neg P \vee R),$$

Đăt $\neg P = T$ :

$$(T \vee Q), (\neg Q \vee R) \models (T \vee R).$$

Dạng suy luận $(T \vee Q), (\neg Q \vee R) \models (T \vee R)$ có thể được hiểu là :

* Mệnh đề $(T \vee R)$ được sinh ra từ hai mệnh đề $(T \vee Q)$ và $(\neg Q \vee R)$.
* Phương thức sinh ra là bỏ đi hai lưỡng nguyên đối dấu của mỗi mệnh đề, hội những phần còn lại của hai mệnh đề.
* Mệnh đề được sinh ra là hệ quả luận lý của hai mệnh đề sinh ra nó.

Thí dụ :

$$p(x) \vee q(\boxed{y}), \neg q(\boxed{y}) \vee r(x) \quad \models ? \quad p(x) \vee r(x).$$

Áp dụng được phân giải giữa p(x) ∨ q(y) và ¬q(y) ∨ r(x), vì mỗi mệnh đề có chứa lưỡng nguyên trái dấu q(y) và ¬q(y) nên sinh ra được p(x) ∨ r(x).

Nhưng, với các lưỡng nguyên trái dấu và không đồng nhất, có phân giải được không ?.

$$p(x) \vee q(\boxed{y}), \neg q(\boxed{z}) \vee r(x) \quad \models ? \quad p(x) \vee r(x). \qquad (a)$$

$$p(x) \vee q(\boxed{y}), \neg q(\boxed{a}) \vee r(x) \quad \models ? \quad p(x) \vee r(x). \qquad (b)$$

$$p(x) \vee q(\boxed{y}), \neg q(\boxed{f(x)}) \vee r(x) \quad \models ? \quad p(x) \vee r(x). \qquad (c)$$

(a) : để q(y) trùng với ¬q(z) (không kể dấu), thay thế y = z.

(b) : để q(y) trùng với ¬q(a) (không kể dấu), thay thế y = a.

(c) : để q(y) trùng với ¬q(f(x)) (không kể dấu), thay thế y = f(x).

Do đó, cần có qui tắc để thay các biến mà các mệnh đề vẫn còn giữ được tính hằng sai.

## 5.1. Thay thế (substitution)

Định nghĩa – Thay thế.

Thay thế là tập hợp $\theta = \{s_1/x_1, ..., s_n/x_n\}$, với $x_1, ..., x_n$ là các biến và $s_1, ..., s_n$ là các nguyên từ thỏa điều kiện : $s_i \neq x_i$, $\forall i$ và $x_i \neq x_j$, $\forall i, j$.

Mỗi cặp $s_i/x_i$ nói rằng biến $x_i$ được thay bằng $s_i$.

Tác động của thay thế θ lên mệnh đề S được ký hiệu là Sθ.

HếtĐn

Nhận xét :

Điều kiện $s_i \neq x_i$ ràng buộc không có việc thay thế biến nào bằng chính nó.

Điều kiện $x_i \neq x_j$ loại trừ một biến có nhiều cách thay thế.

Thí dụ :

✧. $S = \{p(x), p(y) \vee q(h(x)), p(t), p(f(x)) \vee q(z)\}$

Thay t bằng x, y bằng f(x) và z bằng h(x). (*)

Phát biểu (*) có thể được mô tả ngắn gọn là tập hợp

$\theta = \{x/t, f(x)/y, h(x)/z\}$.

$S\theta = \{p(x), p(y) \vee q(h(x)), p(t), p(f(x)) \vee q(z)\}\theta$

$S\theta = \{p(x), p(f(x)) \vee q(h(x))\}$.

Nhận xét là số mệnh đề của tập S giảm sau khi thay thế.

✧. Cho biểu thức C, D :

$C = p(x) \vee q(x)$ và thay thế $\theta = \{f(y)/x\}$.

$C\theta = p(f(y)) \vee q(f(y))$ được gọi là biểu thức thế.

$D = p(f(x)) \vee q(y)$ và $\lambda = \{g(y)/x, f(h(x))/y, f(y)/z, z/t\}$.

$D\lambda = p(f(g(y))) \vee q(f(h(x)))$.

$(D\lambda)\theta = p(f(g(y))) \vee q(f(h(f(y))))$.

$(C\theta)\lambda = p(f(f(h(x)))) \vee q(f(f(h(x))))$.

Nhận xét :

Khi tác động thay thế θ lên tập S hay nguyên từ t, các biến trong S hay t *đồng thời* được thay bằng các nguyên từ tương ứng có trong θ. Các biến *chỉ được thay thế 1 lần*.

Thí dụ :

✧. $\theta = \{y/x, f(x)/y, a/z\}$. $S = \{p(x) \vee q(y), p(z) \vee q(x)\}$

$S\theta = \{p(y) \vee q(f(x)), p(a) \vee q(y)\}$

Sẽ không có việc thay thế lần nữa, như là $\{p(f(x)) \vee q(f(y))$, $p(a) \vee q(f(x))\}$, nếu điều này xảy ra, có nghĩa là

$(S\theta)\theta = \{p(f(x)) \vee q(f(y)), p(a) \vee q(f(x))\}$.

✧. $S = \{p(x), p(y) \vee q(h(t)), p(f(x)) \vee q(z)\}$, $\theta = \{a/x, f(x)/y, h(x)/z\}$

$S\theta = \{p(a), p(f(x)) \vee q(h(t)), p(f(a)) \vee q(h(x))\}$

$(S\theta)\theta = \{p(a), p(f(a)) \vee q(h(t)), p(f(a)) \vee q(h(a))\}$

Việc tác động nhiều thay thế vào dạng chuẩn Skolem sẽ tốn thời gian nếu như số phần tử của dạng Skolem quá lớn, trong khi số phần tử của thay thế nhỏ hơn rất nhiều cùng lắm là bằng với số biến có trong dạng chuẩn. Vì vậy, vấn đề được đặt ra là sẽ kết hợp những thay thế lại với nhau thành một thay thế mới.

Định nghĩa – Hợp nối hai thay thế.

Hợp nối 2 thay thế :

$\theta = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ và $\lambda = \{t_1/y_1, \dots, t_m/y_m\}$

là thay thế.

$$\theta \circ \lambda = \theta\lambda = \{\frac{s_1\lambda}{x_1}, \dots, \frac{s_n\lambda}{x_n}, \underbrace{\frac{t_1}{y_1}, \frac{t_2}{y_2}, \dots \dots \dots \frac{t_{m-1}}{y_{m-1}}, \frac{t_m}{y_m}}_{\substack{\text{chỉ lấy các phân số không có} \\ \text{mẫu xuất hiện trong các biến } x_1, \dots, x_n}}\}$$

1. Xóa phần tử $s_i\lambda/x_i$ có $s_i\lambda = x_i$,
2. Xóa phần tử $t_j/y_j$ có $y_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$

HếtĐn

Thí dụ :

$\theta = \{f(y)/x, z/y\}$ và $\lambda = \{a/x, b/y, y/z\}$.

$\theta\lambda = \{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}$ (bỏ các phân số bị khoanh tròn).

$\theta\lambda = \{f(b)/x, y/z\}$.

$\lambda\theta = \{a/x, b/y\}$, $\theta\lambda\theta = \{f(b)/x, z/y\}$.

Số mệnh đề có thể nhiều. Do đó, nếu thu gọn số mệnh đề sao cho tính hằng sai vẫn không bị mất, việc tính toán sẽ giảm đi rất nhiều. Điều lý tưởng là giảm số mệnh đề xuống chỉ còn một mệnh đề. Vấn đề này cần đến khái niệm đồng nhất thế.

Nhận xét :

- ✶ Thay thế đơn vị $\varepsilon = \varnothing$ : $\theta\varepsilon = \varepsilon\theta = \theta, \forall\theta$.
- ✶ Toán tử hợp nối có tính phối hợp : $\theta(\lambda\gamma) = (\theta\lambda)\gamma = \theta\lambda\gamma$.

✶. Toán tử hợp nối không giao hoán : $\theta\lambda \neq \lambda\theta$.

Định nghĩa – Đồng nhất thế.

Cho $S = \{E_1, \ldots, E_k\}$ với $E_i$ là các mệnh đề.

Thay thế $\theta$ là đồng nhất thế của S nếu $E_1\theta = \ldots = E_k\theta$, nghĩa là

$S\theta = \{E_1\theta\}$.

$\theta$ được gọi là đồng nhất thế và S là *khả đồng nhất thế*.

HếtĐn

Thí dụ :

$S = \{p(a, y), p(x, f(b))\}$ và $\theta = \{a/x, f(b)/y\}$

$S\theta = \{p(a, f(b))\}$,

khi đó $\theta$ là đồng nhất thế của S và S được gọi là khả đồng nhất thế.

Vấn đề tiếp theo là làm sao biết tập hợp S có khả đồng nhất thế hay không, và nếu có thì đồng nhất thế của nó là gì ?. Trong thực tế, nếu tập hợp S khả đồng nhất thế, nó có thể có nhiều đồng nhất thế. Sau đây là tìm xem trong những đồng nhất thế của S cái nào là "tốt nhất".

Định nghĩa – mgu (most general unifier).

Đồng nhất thế $\theta$ là mgu của $\{E_1, \ldots, E_k\}$ nếu

$$(\forall \text{ đồng nhất thế } \sigma)\ (\exists \text{ thay thế } \lambda)\ (\sigma = \theta\lambda).$$

$$\begin{tikzcd}
\{E_1, \ldots, E_k\} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & \{E_1, \ldots, E_k\}\theta \arrow[dll, "\lambda"] \\
\{E_1, \ldots, E_k\}\sigma = \{E_1, \ldots, E_k\}\theta\lambda & &
\end{tikzcd}$$

Biểu đồ giao hoán nghĩa là đi theo hướng mũi tên sẽ bằng nhau.

HếtĐn

Thí dụ :

$S = \{p(f(x), z), p(y, a)\}$

$\theta = \{f(x)/y, a/z\}$ là đồng nhất thế.

$\theta' = \{f(z)/y, a/z, z/x\}$ là đồng nhất thế.

$\sigma = \{f(a)/y, a/x, a/z\}$ là đồng nhất thế.

Kiểm tra biểu đồ giao hoán :

$\sigma = \theta\{a/x\}$. $\sigma = \theta'\{a/z\}$. $\theta = \theta'\{x/z\}$.

$\theta' = \theta\{x/z\}$.

Kết quả : $\theta$ và $\theta'$ là hai mgu của S.

Chú thích :

- ✶ Ý nghĩa của định nghĩa trên là với mọi đồng nhất thế của tập S, chúng đều có thể phân tích thành hợp nối của một thay thế với mgu $\theta$ của S.
- ✶ Mgu là không duy nhất.

Định nghĩa – Tập bất đồng.

Để đồng nhất từng cặp mệnh đề của tập hợp bằng cách so sánh từng đôi ký tự của hai mệnh đề, nếu có khác biệt lấy 2 thành phần có nghĩa hình thành nên tập hợp gọi là tập bất đồng.

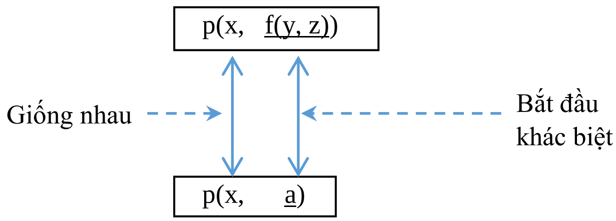
HếtĐn

Thí dụ :

Tìm tập bất đồng.

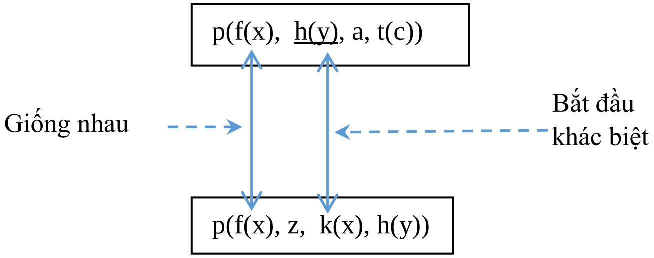
S = {p(x, f(y, z)), p(x, a), p(x, g(h(k(x))))}

có thể bắt đầu so sánh giữa hai phần tử bất kỳ của S, ví dụ so sánh giữa p(x, f(y, z)) và p(x, a), hay giữa p(x, f(y, z)) và p(x, g(h(k(x))), … . Việc chọn cặp nào trước hay sau tùy thuộc vào người thực hiện. Ở đây chọn trường hợp so sánh giữa p(x, f(y, z)) và p(x, a) để minh họa.



So sánh hai chuỗi ký tự “p(x, f(y, z))” và “p(x, a)”. Các ký tự giống nhau là “p”, “(“, “,”, “x”. Bắt đầu có sự khác nhau, ký tự a khác với ký tự f. Ký tự a có nghĩa, nó là nguyên từ, trong khi ký tự f chưa có nghĩa vì vậy phải lấy thêm các ký tự để nó cũng có nghĩa là nguyên từ, do đó chọn f(y, z). Vậy tập bất đồng là {f(y, z), a}.

T = {p(f(x), h(y), a, t(c)), p(f(x), z, k(x), h(y)), p(f(x), h(x), b, g(h(x)))}




Tập bất đồng là {h(y), z}.

Thuật toán đồng nhất

1. Tìm tập bất đồng
2. Chọn thay thế, để được thay thế, tập bất đồng cần hai điều kiện :
    a. Tập bất đồng phải có ít nhất một biến.
    b. Phần tử biến của tập bất đồng không xuất hiện trong phần tử còn lại.

   Nếu không thỏa hai điều kiện a, b không thể đồng nhất.
3. Quay lại bước 1 nếu còn sự khác biệt.
4. Nếu không còn sự khác biệt sẽ *hợp nối* tất cả thay thế để có được thay thế cuối cùng. Kết quả của thuật toán đồng nhất là đồng nhất thế mgu.

Thí dụ :

Đây là những thí dụ không có được sự thay thế :

✧. S = {p(a, x, h(g(z))), p(b, h(y), h(y))}, Tập bất đồng {a, b} không có phần tử nào là biến nên không có thay thế, do đó $\theta_0 = \varnothing$.

✧. T = {p(a, f(x), h(g(a)), p(a, h(y), h(y)},

Tập bất đồng {f(x), h(y)} có hai phần tử là biểu thức, không có phần tử nào là biến nên không có thay thế, do đó $\theta_0 = \varnothing$.

✧. H = {p(a, x, h(g(a)), p(a, h(x), h(y)},

Tập bất đồng {x, h(x)} có phần tử x là biến, nhưng phần tử thứ hai h(x) lại chứa x nên không thể có thay thế. Nếu miễn cưỡng chọn thay thế $\theta_0$ = {h(x)/x}, khi đó

$H\theta_0$ = {p(a, <u>h(x)</u>, h(g(a)), p(a, <u>h(h(x))</u>, h(y)} cũng không đồng nhất được hai phần tử cần đồng nhất.

Đây là thí dụ tìm được mgu :

✧. S = {p($\boxed{x}$, y, z), p($\boxed{f(y)}$, z, g(w)), p(f(g(a)), z, t)} :

{x, f(y)} ⟶ $\theta_0$ = {f(y)/x}

$S\theta_0$ = {p(f(y), $\boxed{y}$, z), p(f(y), $\boxed{z}$, g(w)), p(f(g(a)), z, t)} :

{y, z} ⟶ $\theta_1 = \theta_0$.{z/y} = {f(z)/x, z/y} (1*)

$S\theta_1$ = {p(f(z), z, $\boxed{z}$), p(f(z), z, $\boxed{g(w)}$), p(f(g(a)), z, t)} (2*)

{z, g(w)} ⟶ $\theta_2 = \theta_1$.{g(w)/z} = {f(g(w))/x, g(w)/y, g(w)/z}

$S\theta_2$ = {p(f(g($\boxed{w}$)), g(w), g(w)), p(f(g($\boxed{a}$)), g(w), t)} (3*)

{w, a} ⟶ $\theta_3 = \theta_2$.{a/w} = {f(g(a))/x, g(a)/y, g(a)/z, a/w}

$S\theta_3$ = {p(f(g(a)), g(a), $\boxed{g(a)}$), p(f(g(a)), g(a), $\boxed{t}$)}

{g(a), t}⟶ $\theta_4 = \theta_3$.{g(a)/t} = {f(g(a))/x, g(a)/y, g(a)/z, a/w, g(a)/t}

$S\theta_4$ = {p(f(g(a)), g(a), g(a))}

mgu(S) ={f(g(a))/x, g(a)/y, g(a)/z, a/w, g(a)/t}.

Nhận xét :

Tại dòng (1*) có thể chọn y/z hay z/y đều được và $\theta_0.\{z/y\}$ là hợp nối của $\theta_0$ và z/y.

Tại dòng (2*) có thể lấy {y, z}) tác động lên ($S\theta_0$) thay vì lấy $\theta_1$ tác dụng lên S. Những dòng sau cũng vậy.

Tại dòng (3*) có hai p(f(g($\boxed{w}$)), g(w), g(w)) nên nhập làm một (tập hợp không có hai phần tử trùng nhau).

Định nghĩa – Thừa số.

Thừa số của mệnh đề C là mệnh đề được rút ngắn bằng cách tác động lên C một thay thế.

HếtĐn

Thí dụ :

$D = p(x) \vee p(f(y)) \vee \neg q(x) \vee p(z)$ (có 4 lưỡng nguyên)

p(x) và p(f(y)) có mgu $\theta = \{f(y)/x\}$.

$D\theta = p(f(y) \vee \neg q(f(y)) \vee p(z)$ là thừa số của D.

p(z) và p(f(y)) có mgu $\phi = \{f(y)/z\}$.

$D\phi = p(x) \vee p(f(y) \vee \neg q(x)$ là thừa số khác của D.

p(x) và p(z) có mgu $\gamma = \{x/z\}$.

$D\gamma = p(x) \vee p(f(y) \vee \neg q(x)$ là thừa số của D.

## 5.2. Phân giải

Định nghĩa – Phân giải nhị phân.

Phân giải nhị phân của 2 mệnh đề bằng cách kết hợp hai phần còn lại của hai mệnh đề sau khi loại trừ hai lưỡng nguyên trái dấu ở mỗi mệnh đề. Để có được hai lưỡng nguyên trái dấu có thể tác động một thay thế lên hai mệnh đề.

Ký hiệu phân giải nhị phân của mệnh đề C và D là $pg_b(C, D)$.

HếtĐn

Thí dụ :

$C = p(x) \lor q(x) \qquad D = \neg p(a) \lor r(x).$

Hai lưỡng nguyên trái dấu là $L_C = p(x)$ và $L_D = \neg p(a)$.

$L_C$ và $\neg L_D$ có mgu $\theta = \{a/x\}$.

$(C\theta - L_C\theta) \lor (D\theta - L_D\theta) =$

$$(\boxed{\cancel{p(a)}} \lor q(a) - \boxed{\cancel{p(a)}}) \lor (\boxed{\cancel{\neg p(a)}} \lor r(x) - \boxed{\cancel{\neg p(a)}}) = q(a) \lor r(a).$$

$pg_b(C, D) = (q(a) \lor r(a))$ là phân giải nhị phân của C và D.

Thí dụ

$C = p(x) \lor \neg r(a) \qquad D = \neg p(b) \lor \neg p(f(y)) \lor r(x).$

$pg_b(C, D) = \neg r(a) \lor \neg p(f(y)) \lor r(b)$, với $\theta = \{b/x\}$.

$pg_b(C, D) = \neg r(a) \lor \neg p(b) \lor r(f(y))$, với $\theta = \{f(y)/x\}$.

$pg_b(C, D) = p(a) \lor \neg p(b) \lor \neg p(f(y))$, với $\theta = \{a/x\}$.

Có 4 phân giải nhị phân của C và D.

Định nghĩa – Phân giải.

Phân giải của hai mệnh đề C, D :

1. Phân giải nhị phân của C và D.
2. Phân giải nhị phân của C và một thừa số của D.
3. Phân giải nhị phân của một thừa số của C và D.
4. Phân giải nhị phân của một thừa số của C và một thừa số của D.

Ký hiệu pg(C, D)

HếtĐn

Thí dụ

Cho hai mệnh đề $C = p(x) \lor q(a)$ và $D = \neg p(z) \lor \neg p(f(y)) \lor r(x)$.

Chọn lưỡng nguyên trái dấu là $p(x)$ và $\neg p(z)$ với $\theta = \{x/z\}$

$pg(C, D) = q(a) \lor \neg p(f(y)) \lor r(x)$, hoặc

chọn lưỡng nguyên trái dấu là $p(x)$ và $\neg p(f(y))$ với $\theta = \{f(y)/x\}$

$pg(C, D) = q(a) \lor \neg p(z) \lor r(f(y))$, hoặc chọn lưỡng nguyên trái dấu là $p(x)$ và nhóm $\{\neg p(z), \neg p(f(y))\}$ với

$\theta = \{f(y)/x, f(y)/z\}$

$pg(C, D) = q(a) \vee r(f(y))$.

Vậy có ba phân giải của C và D.

Định lý

Phân giải là hệ quả luận lý của hai mệnh đề được phân giải.

$C, D \models pg(C, D)$, với C, D là hai mệnh đề.

Hệ quả

Hệ thống hằng sai nếu phân giải ra được mệnh đề hằng sai ($\perp$).

Quá trình phân giải sẽ dừng nếu không sinh ra được mệnh đề mới.

Thí dụ :

Chứng minh $H = \exists x\,(q(x) \wedge r(x))$ là hệ quả luận lý của F và G.

$F = \forall x\,(p(x) \longrightarrow (w(x) \wedge r(x)))$, $G = \exists x\,(p(x) \wedge q(x))$.

Chuyển F, G và $\neg H$ thành dạng chuẩn Skolem.

$F = \forall x\,((\underline{\neg p(x) \vee w(x)}) \wedge (\underline{\neg p(x) \vee r(x)}))$

$G = \exists x\,(p(x) \wedge q(x))$

$\neg H = \forall x\,(\neg q(x) \vee \neg r\,(x))$

Hệ thống mới là : với a là hằng

$$\begin{cases} \neg p(x) \vee w(x) & (1) \\ \neg p(x) \vee r(x) & (2) \\ p(a) & (3) \\ q(a) & (4) \\ \neg q(x) \vee \neg r(x) & (5) \end{cases}$$

$pg(2, 3) = r(a)$ (6)

$pg(4, 5) = \neg r(a)$ (7)

$pg(6, 7) = \perp$.

### 5.3. Tính khả đúng và tính khả chứng

Tương tự như trong luận lý mệnh đề, luận lý vị từ cũng có sự tương quan giữa xác thực bằng suy luận (chứng minh) và xác thực bằng ngữ nghĩa. Nghĩa là, chứng minh được bằng suy luận hình thức dẫn đến có ý nghĩa trong thực tế. Ngược lại, có ý nghĩa trong thực tế thì cũng chứng minh được bằng suy luận.

Định lý (Tính khả đúng).

Nếu F $\vdash$ H thì F $\models$ H.

Định lý (Tính khả chứng).

Nếu F $\models$ H thì F $\vdash$ H.

## 6. Giải bài toán

- Some students attend logic lectures diligently. No student attends boring logic lectures diligently. San's lectures on logic are attended diligently by all students. Therefore none of San's logic lectures are boring.

  (Một số học sinh chăm chỉ tham dự các bài giảng logic. Không có sinh viên nào chăm chỉ tham gia các bài giảng logic nhàm chán. Các bài giảng của San về logic được tất cả sinh viên chăm chỉ tham gia. Do đó, không có bài giảng logic nào của San là nhàm chán).
- Chọn các vị từ :

  lec(x) : x là bài giảng về logic, st(x) : x là sinh viên, s : San,

  at(x, y) : x tham dự y chăm chỉ, bor(x) : x tẻ nhạt,

  gv(x, y) : x được cho bởi y.
- Chuyển về luận lý vị từ

  Some students attend logic lectures diligently.

  Diễn giải câu trên lại như sau :

  There is an x who is a student and, for every y, if y is a logic lecture, then x attends y diligently.

  Có thể có nhiều cách dịch như sau :

$\exists x\ (st(x) \wedge \forall y\ (\underline{lec(y) \longrightarrow at(x, y)})),$ hay

$\exists x\ \forall y\ (\underline{st(x) \wedge lec(y)} \longrightarrow at(x, y))),$ hay

$\forall y\ \exists x\ (\underline{st(x) \wedge lec(y)} \longrightarrow at(x, y))).$

No student attends boring logic lectures diligently.

Diễn giải câu trên lại như sau :

For every x, if x is a student, then, for every y, if y is a lecture which is boring, then x does not attend y.

$\forall x\ (st(x) \longrightarrow \forall y\ (\underline{lec(y) \wedge bor(y)} \longrightarrow \neg at(x, y)))$

San's lectures on logic are attended diligently by all students.

Diễn giải câu trên lại như sau :

If x is a lecture given by s then every student z attends it.

$\forall x\ (\underline{lec(x) \wedge gv(x, s)}) \longrightarrow \forall z\ (\underline{st(z) \longrightarrow at(z, x)}))$

Therefore none of San's logic lectures are boring.

Diễn giải câu trên lại như sau :

Every lecture given by s is not boring.

$\forall x\ ((\underline{lec(x) \wedge gv(x, s)}) \longrightarrow \neg bor(x))$

- Tổng kết

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \exists x\ \big(st(x) \wedge \forall y\ (lec(y) \longrightarrow at(x, y))\big) \\ \forall x\ \big(st(x) \longrightarrow \forall y\ (lec(y) \wedge bor(y) \longrightarrow \neg at(x, y))\big) \\ \forall x\ (lec(x) \wedge gv(x, s) \longrightarrow \forall z\ (st(z) \longrightarrow at(z, x))) \end{array} \right\}$$

$F \models \forall x\ (\underline{lec(x) \wedge gv(x, s)}) \longrightarrow \neg bor(x))$

- Biến đổi

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists x\ \big(st(x) \wedge \forall y\ (lec(y) \longrightarrow at(x, y))\big) \\ \forall x\ \big(st(x) \longrightarrow \forall y\ (lec(y) \wedge bor(y) \longrightarrow \neg at(x, y))\big) \\ \forall x\ \big(lec(x) \wedge gv(x, s) \longrightarrow \forall z\ (st(z) \longrightarrow at(z, x))\big) \\ \neg \forall x\ (lec(x) \wedge gv(x, s) \longrightarrow \neg bor(x)) \end{array} \right\}$$

chứng minh hệ thống hằng sai.

- Biến đổi

  $\exists x\ \forall y\ (st(x) \wedge (\neg lec(y) \vee at(x, y)))$

  $\forall x\ \forall y\ (\neg st(x) \vee \neg lec(y) \vee \neg bor(y) \vee \neg at(x, y))$

  $\forall x\ \forall z\ (\neg lec(x) \vee \neg gv(x, s) \vee \neg st(z) \vee at(z, x))$

  $\exists x\ (lec(x) \wedge gv(x, s) \wedge bor(x))$

- Biến đổi

  $st(a) \wedge (\neg lec(y) \vee at(a, y))$

  $\neg st(x) \vee \neg lec(y) \vee \neg bor(y) \vee \neg at(x, y)$

  $\neg lec(x) \vee \neg gv(x, s) \vee \neg st(z) \vee at(z, x)$

  $lec(b) \wedge gv(x, s) \wedge bor(b)$

- Biến đổi

  $st(a)$ (1)

  $\neg lec(y) \vee at(a, y)$ (2)

  $\neg st(x) \vee \neg lec(y) \vee \neg bor(y) \vee \neg at(x, y)$ (3)

  $\neg lec(x) \vee \neg gv(x, s) \vee \neg st(z) \vee at(z, x)$ (4)

  $lec(b)$ (5)

  $gv(x, s)$ (6)

  $bor(b)$ (7)

- Phân giải

  $st(a)$ (1)

  $\neg lec(y) \vee at(a, y)$ (2)

  $\neg st(x) \vee \neg lec(y) \vee \neg bor(y) \vee \neg at(x, y)$ (3)

  $\neg lec(x) \vee \neg gv(x, s) \vee \neg st(z) \vee at(z, x)$ (4)

  $lec(b)$ (5)

  $gv(x, s)$ (6)

  $bor(b)$ (7)

<u>Nhận xét</u> : dư (4) và (6) !!!.

# IV. BÀI TẬP

## A. Luận lý mệnh đề

### A.1. Nhận dạng câu khai báo

1. Phát biểu nào là câu khai báo và chỉ ra thực trị :

a. Không được mở máy tính. b. Thành phố Cần Thơ ở đâu ?

c. Sông Sài Gòn không có cá sấu. d. Việc lập trình rất hứng thú.

e. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, với A, B, C là tập hợp.

f. Hôm nay là ngày thứ 3. g. $2 + 5 = 3$.

h. Tokyo là thủ đô của nước Nhật.

i. Thiết kế cơ sở dữ liệu là bắt buộc khi lập trình.

2. Tìm phủ định của các câu khai báo sau :

a. Sông Sài Gòn không có cá sấu.

b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c. Hôm nay là ngày thứ 3

d. $2 + 5 = 3$

e. Tokyo là thủ đô của nước Nhật.

f. Nếu có tiền tôi sẽ mua xe phân khối lớn.

g. Thiết kế ơ sở dữ liệu là bắt buộc khi lập trình.

h. Tôi tới lớp mỗi khi gần có kỳ thi.

i. Số x là nguyên tố nếu nó không có ước số khác 1, x.

Hướng dẫn : Phương pháp giải là chuyển câu khai báo sang luận lý mệnh đề, lấy phủ rồi chuyển ngược lại thành câu khai báo.

### A.2. Dịch giữa ngôn ngữ tự nhiên và luận lý mệnh đề

3. Biểu diễn đoạn văn sau bằng luận lý mệnh đề :

Nếu anh ta mua xe thì anh ta trúng số hoặc thừa hưởng gia tài.

Anh ta không thừa hưởng gia tài.

Vậy nếu anh ta không trúng số thì anh ta không mua xe.

4. Chuyển các công thức luận lý mệnh đề thành các câu khai báo của ngôn ngữ tự nhiên :

M = Hôm nay thứ 5, N = Đi dã ngoại, P = Câu cá.

a. $M \rightarrow (N \vee P)$, b. $M \wedge N$, c. $\neg P \wedge \neg M$

d. $\neg N \rightarrow \neg M$, e. $\neg M \vee (P \wedge N)$

### A.3. Suy luận tự nhiên trong luận lý mệnh đề

1. Chứng minh các suy luận sau :

a. $\neg G \rightarrow \neg F \vdash F \rightarrow \neg\neg G$

b. $\vdash (G \rightarrow H) \rightarrow ((\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow H))$

c. $(F \wedge G) \rightarrow H \vdash F \rightarrow (G \rightarrow H)$

d. $F \rightarrow (G \rightarrow H) \vdash (F \wedge G) \rightarrow H$

e. $F \rightarrow G \vdash (F \wedge H) \rightarrow (G \wedge H)$

f. $(F \vee G) \vee H \vdash F \vee (G \vee H)$

g. $F \wedge (G \vee H) \vdash (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

h. $F \rightarrow \neg F \vdash \neg F$

i. $F \rightarrow (G \rightarrow H), F, \neg H \vdash \neg G$ (không dùng luật MT)

j. $(F \wedge \neg G) \rightarrow H, \neg H, F \vdash G$.

2. Cho phát biểu sau : Phương và Quang xem bóng đá. Nếu Quang xem bóng đá thì Rạng xem ca nhạc. Vì vậy Rạng xem ca nhạc.

a. Dịch đoạn văn trên vào luận lý mệnh đề.

b. Chứng minh : $P, Q, R \vdash (P \wedge (Q \wedge R))$

### A.4. Bảng thực trị

1. Lập bảng thực trị các công thức sau :

a. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$ b. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

c. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$ d. $P \vee (P \rightarrow Q)$

e. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow P$ f. $P \vee (Q \rightarrow \neg P)$

g. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$

2. So sánh các công thức sau :

2.1. $\neg(P \to (\neg Q))$ và $(P \wedge Q)$ 2.2. $(\neg P \to Q)$ và $(P \vee Q)$

Nhận xét gì về sự liên hệ của các toán tử ?

## A.5. Biến đổi và đánh giá công thức

1. Viết ra các công thức sau chỉ dùng $\to$ và $\neg$ :

a. $(P \vee Q) \wedge (Q \to P)$ b. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$

c. $P \vee (P \to Q)$ d. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$

e. $P \vee (Q \to \neg P)$ f. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg(P \to Q)$

2. Dùng thủ tục số học tính các công thức :

a. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$ b. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$

c. $(P \to Q) \to (Q \to P)$ d. $P \vee (P \to Q)$

e. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$ f. $P \vee (Q \to \neg P)$

g. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \to Q))$

3. Chứng minh sự tương đương của các công thức :

a. $(P \to Q) \to (P \wedge Q) = (\neg P \to Q) \wedge (Q \to P)$

b. $P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg Q) = \neg P \wedge \neg Q \wedge (P \vee Q)$

c. $(P \to Q) \wedge (P \to R) = (P \to (Q \wedge R))$

d. $P \wedge (P \to (P \wedge Q)) = \neg P \vee \neg Q \vee (P \wedge Q)$

4. Xác định tính hằng đúng, hằng sai của các công thức :

a. $\neg(\neg S) \to S$ b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$

c. $(S \to T) \to (\neg T \to \neg S)$ d. $P \vee (P \to Q)$

e. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$ f. $\neg P \wedge (\neg(P \to Q))$

g. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \to (B \vee C)$.

## A.6. Diễn dịch - mô hình của công thức

1. Tìm một mô hình cho mỗi công thức :

a. $\neg(\neg S) \to S$, b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$, c. $(S \to T) \to (\neg T \to \neg S)$,

d. $P \vee (P \to Q)$, e. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$, f. $\neg P \wedge (\neg(P \to Q))$,

g. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C)$.

2. Diễn dịch nào :

$I_1 = \{S\}$, $I_2 = \{S, \neg T\}$, $I_3 = \{A, \neg B, C\}$,

$I_4 = \{S, \neg T, A, \neg B, C, P, \neg Q\}$

là mô hình của các công thức sau :

a. $\neg(\neg S) \rightarrow S$ b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$ c. $P \vee (P \rightarrow Q)$

d. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ e. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C)$.

3. Tìm mô hình I cho công thức $F = ((A \vee B) \wedge \neg B) \rightarrow A$

Mở rộng I để nó cũng là mô hình của $G = ((A \wedge C) \vee \neg C) \rightarrow A$.

## A.7. Hằng đúng - hằng sai - khả đúng khả sai

1. Chứng minh các công thức sau đây là hằng đúng, hằng sai, hay khả đúng khả sai :

a. $\neg(\neg S) \rightarrow S$ b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$ c. $(S \rightarrow T) \rightarrow (\neg T \rightarrow \neg S)$

2. Công thức nào sau đây là hằng đúng :

a. $(P \rightarrow P)$ b. $\neg(P \leftrightarrow P)$ c. $(((P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q)) \rightarrow Q)$

d. $(\neg P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ e. $((P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P))$ f. $((\neg P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow P))$

g. $(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow Q)$.

## A.8. Hệ quả luận lý

1. Chứng minh $\neg K$ là hệ quả luận lý của hệ thống $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ :

$F_1 = J \rightarrow (P \vee T)$, $F_2 = (K \vee Q) \rightarrow J$,

$F_3 = T \rightarrow A$, $F_4 = \neg P \wedge \neg A$.

2. Công thức nào là hệ quả luận lý của hệ thống $\{A, B, A \rightarrow C\}$ :

a. $A \vee B$. b. $A \wedge B$. c. $B \rightarrow C$. d. $(A \wedge B) \vee C$.

3. Kiểm tra tương quan hệ quả luận lý của các sequence.

$\{A, B\} \models ? \quad A \vee B$

$\{A, B\} \models ? \quad A \wedge B$

$\{A, B\} \models ? \quad A \rightarrow B$

$\{A \vee B, A \wedge B\} \models? \quad A$

$\{A \vee B, A \wedge B\} \models? \quad B$

$\{A \vee B, A \wedge B\} \models? \quad A \longrightarrow B$

$\{B, A \longrightarrow B\} \quad \models? \quad A \vee B$

### A.9. Các dạng chuẩn của công thức

1. Chuyển thành dạng CNF

a. $\neg(P \rightarrow Q)$ b. $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

c. $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$ d. $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$

e. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ f. $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S)$

g. $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$ h. $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$

i. $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$.

## B. Luận lý vị từ

### B.1. Dịch sang luận lý vị từ

1. Dùng các vị từ :

tp(x, y) : x thán phục y, td(x, y) : x tham dự y, tg(x) : x là thầy giáo,

sv(x) : x là sinh viên, bg(x) : x là bài giảng.

Dịch các câu sau sang luận lý vị từ :

a. Minh thán phục mọi thầy giáo. (Minh admires every professor)

b. Một số thầy thán phục Minh. (some professor admires Minh)

c. Minh thán phục chính mình. (Minh admires himself)

d. Không SV nào tham dự mọi bài giảng.

(no student attended every lecture)

e. Không bài giảng nào được tham dự bởi mọi sinh viên

(no lecture was attended by every student)

f. Không bài giảng nào được tham dự bởi bất kỳ 1 sinh viên

(no lecture was attended by any student)

2. Câu "Minh thán phục mọi thầy giáo" ở trên được dịch thành $\forall x$ tp(minh, tg(x)) sai vì lý do gì ? (về phương diện cú pháp và ngữ nghĩa). Có thể sửa lại để câu trên trở thành đúng ?.

3. Dịch các câu vị từ sau thành câu tự nhiên :

 3.1 $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge sv(x) \wedge bg(y))$

 3.2. $\forall x \forall y\ (\neg td(x, y) \wedge sv(x) \wedge bg(y))$

 3.3. $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge \neg sv(x) \wedge bg(y))$

 3.4. $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge sv(x) \wedge \neg bg(y))$

 3.5. $\forall x \forall y\ (\neg td(x, y) \wedge \neg sv(x) \wedge bg(y))$

 3.6. $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge \neg sv(x) \wedge \neg bg(y))$

 3.7. $\forall x \forall y\ (\neg td(x, y) \wedge \neg sv(x) \wedge \neg bg(y))$

 Làm lại bài trên bằng cách thay $\forall\forall$ bằng $\forall\exists$ hay $\exists\forall$ hay $\exists\exists$.

4. Dịch các câu vị từ sau thành câu tự nhiên :

 a. $\forall x \forall y\ td(x, y) \wedge \forall x\ sv(x) \wedge \forall y\ bg(y)$

 b. $\forall x \forall y\ td(x, y) \wedge \forall x\ \neg sv(x) \wedge \forall y\ bg(y)$

 c. $\forall x \forall y\ \neg td(x, y) \wedge \forall x\ \neg sv(x) \wedge \forall y\ bg(y)$

 d. $\forall x \forall y\ \neg td(x, y) \wedge \forall x\ sv(x) \wedge \forall y\ \neg bg(y)$

 e. $\forall x \forall y\ \neg td(x,y) \wedge \forall x\ \neg sv(x) \wedge \forall y\ \neg bg(y)$

 f. $\neg\ (\forall x \forall y\ td(x, y) \wedge \forall x\ sv(x) \wedge \forall y\ bg(y))$

 g. $\exists x\ \exists y\ (\neg(x = y) \wedge \forall z\ ((z = x) \vee (z = y))))$.

5. Dịch các câu sau thành luận lý vị từ :

 a. Tất cả vật màu đỏ ở trong hộp.

 b. Chỉ những vật màu đỏ ở trong hộp.

 c. Không có con vật nào vừa là mèo và vừa là chó.

 d. Một đứa con trai giật mọi giải thưởng.

6. Dùng các vị từ sau để dịch các câu.

 b(x, y) : x đánh bại y,                f(x) : x là một đội bóng đá.

$q(x, y)$ : x là tiền vệ của y, $l(x, y)$ : x thua y.

a. Mọi đội bóng có tiền vệ.

b. Nếu MU đánh bại Chelsea thì MU không thua mọi đội bóng (khác).

c. Chelsea đánh bại một số đội bóng mà nó đánh bại MU.

7. Chỉ dùng các vị từ cha(x, y), me(x, y), chồng(x, y), anh(x, y), chị(x, y) để dịch các câu sau :

a. Mọi người có một mẹ. b. Bất cứ ai có một mẹ thì có một cha.

c. Minh đã là ông nội. d. Câu không phải là dì.

8. Dịch sang luận lý vị từ :

a. Có đúng 3 phần tử phân biệt.

b. Có nhiều nhất 3 phần tử phân biệt.

c. Chỉ một số hữu hạn các phần tử phân biệt.

## B.2. Suy luận tự nhiên trong luận lý vị từ

0. Chứng minh các định lý trong phần giáo khoa.

1. Chứng minh :

a. $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

b. $t_1 = t_2 \vdash (t + t_2) = (t + t_1)$

c. $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \rightarrow ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

2. Chứng minh :

a. $F \rightarrow (q_1 \wedge q_2) \vdash (F \rightarrow q_1) \wedge (F \rightarrow q_2)$ (trong LLMĐ)

b. $F \rightarrow \forall x\, q(x) \vdash \forall x\, (F \rightarrow q(x))$ (với x không tự do trong F).

c. $\forall x\, (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash \forall x\, p(x) \rightarrow \forall x\, q(x)$.

3. Chứng minh :

a. $\forall x\, p(x) \vdash \forall y\, p(y)$

b. $\forall x\, (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash (\forall x\, \neg q(x)) \rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

c. $\forall x\, (p(x) \rightarrow \neg q(x)) \vdash \neg(\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$

## B.3. Ngữ nghĩa của luận lý vị từ

1. Thế giới thật có các đối tương sau :

D = { ▲, ●, ■, ♦ }, hằng : cMinh, hàm : fnón(_).

Vị từ : ptrên(_,_), ptròn(_), pvuông(_), pthoi(_).

Cho 1 diễn dịch I :

D = { ▲, ●, ■, ♦ }, cMinh = ▲.

ptrên = {(■, ▲), (●, ♦)}. ptròn = {●}.

pthoi = {■, ♦}. pvuông = {■}.

fnón = {(▲, ●), (♦, ■), (●, ●), (■, ■)}

a. Hãy đánh giá các công thức sau trong diễn dịch I :

pvuông(cMinh),

ptrên(cMinh, fnón(cMinh)),

∃x pvuông(x),

∀x ∃y (ptrên(x, y) → ptrên(y, x)).

b. Chứng minh Knowledge Base (KB) dẫn xuất H :

KB : ∀x ( pvuông(x) → pthoi(x)) ∧ (∀x)( ptròn(x) → ¬ pthoi(x)).

H = ∀x ( ptròn(x) → ¬ pthoi(x)).

## B.4. Đánh giá công thức luận lý vị từ

1. Cho diễn dịch I có : D = {a, b}, {p(a, a), ¬p(a, b), ¬p(b, a), p(b, b)}.

Đánh giá các công thức sau :

a. ∀x ∃y p(x, y) b. ∀x ∀y p(x, y) c. ∃x ∀y p(x, y)

d. ∃y ¬p(a, y) e. ∀x ∀y (p(x, y) → p(y, x)) f. ∀x p(x, x)

2. Tìm diễn dịch trên D = {a, b} để công thức F = ∀x ∀y (p(x, y) → p(y, x)) có giá trị sai.

3. Cho diễn dịch I có : D = {1, 2}, a = 1, b = 2, f(1) = 2, f(2) = 1,

{p(1, 1), p(1, 2), ¬p(2, 1), ¬p(2, 2)}.

Đánh giá công thức sau trong diễn dịch I :

a. p(a, f(a)) ∧ p(b, f(b)) b. ∀x ∃y p(y, x)

c. ∀x ∀y (p(x, y) → p(f(x), f(y))).

4. Cho biết $F = \exists x\, H \rightarrow H[a/x]$ có hằng đúng hay không với a là hằng.

## B.5. Dạng chuẩn của công thức luận lý vị từ

1. Tìm dạng chuẩn Prenex của các công thức :

   a. $\neg(\forall x\, p(x)) \rightarrow \exists y\, \forall z\, q(y, z)$    b. $\neg(\forall x\, p(x) \rightarrow \exists y\, p(y))$.

   c. $\forall x\, \forall y\, (\exists z\, p(x, y, z) \wedge (\exists u\, q(x, u) \rightarrow \exists v\, q(y, v)))$.

2. Chuyển về dạng chuẩn Skolem :

   a. $F = \forall x \forall y\, ((M(x, y) \wedge N(x, y)) \rightarrow \exists x\, N(x, y))$

   b. $H = \neg(\forall x\, (p(x) \rightarrow \exists y \forall z\, q(y, z)))$

   c. $G = \forall x \forall y\, (\exists z\, K(x, y, z) \wedge \exists v\, (H(y, v) \rightarrow \exists u\, H(u, v)))$

   d. $K = \forall x\, (\neg\, e(x, 0) \rightarrow (\underline{\exists y\, (\, e(y, g(x)) \wedge \forall z\, (e(z, g(x)) \rightarrow e(y, z))\,}))$

## B.6. Thay thế

1. Cho 3 thay thế :

   $\alpha = \{f(y)/x,\ z/y,\ g(x)/z\}$,   $\beta = \{a/x, b/y, x/t\}$,   $\chi = \{y/z, h(x)/y, f(x)/t\}$.

   Tìm hợp nối $\alpha\beta\alpha$ và $\alpha\chi\alpha$ .

2. Dùng thuật toán đồng nhất tìm mgu của công thức

   $P = \{q(f(x), y, u),\ q(u, v, h(x)),\ q(t, y, z)\}$.

3. Cho thay thế $\theta = \{a/x, b/y, g(x, y)/z\}$ và $E = p(h(x), z)$.    Tính $E\theta$.

4. Tìm các thừa số của công thức :

   $T = p(h(x)) \vee \neg p(f(y)) \vee q(x) \vee \neg r(g(a)) \vee \neg r(y) \vee p(a)$.

5. Dùng phân giải để khảo sát tính hằng sai, khả đúng của công thức :

   $(r(x, y, z) \vee v(f(y), w)) \wedge \neg v(x, y) \wedge \neg t(x, z) \wedge (t(x, y) \vee v(x, y))$

## B.7. Phân giải

1. Bằng phân giải chứng minh tập S là hằng sai

   $S = \{p(x) \vee q(y), p(a) \vee \neg r(x), \neg p(a) \vee r(x), \neg p(x) \vee \neg q(b),$

   $r(a) \vee \neg q(y), \neg r(x) \vee q(b)\}$.

2. Dùng phân giải cho biết công thức F là hằng sai hay khả đúng :

$F = \{(q(c) \vee p(b)) \wedge (q(c) \vee \neg r(c)) \wedge (\neg q(c) \vee r(c)) \wedge (\neg q(c) \vee \neg p(b)) \wedge (r(c) \vee \neg p(b)) \wedge (\neg r(c) \vee p(b))\}$.

3. Phân giải hệ thống sau :

$\{\underline{\neg p(x) \vee w(x)}$ (1), $\underline{\neg p(x) \vee r(x)}$ (2), $\underline{p(a)}$ (3), $\underline{q(a)}$ (4), $\underline{\neg q(x) \vee \neg r(x)}$ (5)$\}$

# V. PHỤ CHƯƠNG

## 1. Định nghĩa

### 1.1. Bức tranh về định nghĩa

Định nghĩa là vấn đề quan trọng của trường phái triết học Platon. Theo Aristotle, định nghĩa đối tượng X là liệt kê biểu thị "cái gì là" của X. "cái gì là" ở đây không đơn giản là xác định ý nghĩa của X, mà là liệt kê bản chất của X. Định nghĩa là xác định bản chất nên cái gì có bản chất mới định nghĩa được. Ý niệm xác nhận bản chất liên hệ tới khái niệm phạm trù. Đây là vấn đề nhiều tranh cãi.

Trong tác phẩm *Sophist*, Platon giới thiệu thủ tục "Phân chia" như là phương pháp khám phá định nghĩa. Để tìm ra định nghĩa của X, trước hết định vị loại rộng nhất X thuộc về, kế đó chia thành 2 phần và chọn xem X thuộc phần nào. Lặp lại phương pháp này cho tới khi thế giới chứa X không còn phân chia được nữa. Aristotle phê phán mạnh mẽ việc sử dụng phương pháp phân chia để thiết lập định nghĩa. Ông lập luận rằng Phân chia thực sự không thể chứng minh bất kỳ cái gì ngoài việc thừa nhận chính vật phải được chứng minh. Ông cũng công kích những người ủng hộ Phân chia, cho rằng họ không thể hiểu phương pháp của mình có khả năng xác định cái gì.
Dù Aristotle phê phán mạnh mẽ việc "Phân chia" như là phương pháp để thiết lập định nghĩa, cách định nghĩa của ông cũng chẳng qua là một cách Phân chia khác mà thôi.

Trong định nghĩa của Aristotle, "Cái" cần định nghĩa *đã được đặt tên* và cần phải xác định một cách duy nhất, bằng cách chia thế giới thành nhiều lớp. Các lớp nhỏ lại được chia thành nhiều lớp con nhỏ hơn, và cứ thế tiếp tục cho đến khi xác định được "Cái" cần định nghĩa.

Hiểu biết của con người đối với thế giới chung quanh chưa đầy đủ, nên việc xác định các lớp cũng chưa được đầy đủ và chính xác. Do đó, một số “Cái” không thể định nghĩa được bằng cách định nghĩa của Aristotle.

Cách định nghĩa của Aristotle không phân biệt “Cái” được định nghĩa (danh từ, động từ, tính từ, …) và mặc nhiên chấp nhận “Cái” cần được định nghĩa (tên của nó), nói cách khác là không cần quan tâm cái tên này. Định nghĩa chẳng qua là xác định các vòng giao nhau để xiết lại “Cái” cần được định nghĩa. Cách chọn những vòng này sẽ có được định nghĩa cho những “Cái” cần được định nghĩa khác nhau.

Khi thực hiện hành vi định nghĩa là mặc nhiên trong tâm thức đã xác định được “Cái” cần định nghĩa, công việc còn lại chẳng qua là chỉ cho người khác cách “thấy” được nó.

Khi dùng các lớp để xác định là vô hình trung chấp nhận sự tồn tại của các lớp này trước khi thực hiện hành vi định nghĩa, nói cách khác là thế giới đã được phân chia thành nhiều lớp trước khi đi định nghĩa.

Hành vi định nghĩa buộc phải xắp xếp lại mọi “Cái” có trong thế giới này một cách có “trật tự” trước khi đi định nghĩa, đồng nghĩa với việc tạo một cái lưới có thể phân biệt và xác định được tất cả “Cái” trong thế giới này.

Một hành vi có liên quan là minh họa, câu hỏi được đặt ra là : định nghĩa và minh họa là cùng một thứ chăng ?. Có nghĩa là cả hai có cùng đạt được những tri thức với những cách khác nhau không ?.

Định nghĩa là “Đặt tên” cho tập hợp các đối tượng (phần tử), tập hợp này chưa được xác định. Tập hợp này được xác định theo phương thức của lý thuyết tập hợp. Vậy, hành vi định nghĩa là hành vi “Đặt tên”.

Ở đây “Cái” cần được định nghĩa là một đối tượng (một phần tử) hay tập hợp các đối tượng, việc gán tên cho nó tùy theo ý muốn của người định nghĩa (đối tượng hoàn toàn đã được xác định). Trường hợp "Cái" cần được định nghĩa là đối tượng chưa được xác định (biến đổi theo không thời gian) hay chưa xuất hiện hay xuất hiện từng phần chưa trọn vẹn thì việc xác định chỉ là tương đối. Định nghĩa là hành vi dành cho con người – dựa trên ngũ quan.

Tóm lại, định nghĩa khái niệm X chính là hành vi chia thế giới chứa X thành hai phần. Nửa thế giới chứa X, nữa còn lại chứa những cái không X. Nói đơn giản, định nghĩa là con dao, nó cắt mọi thứ làm đôi, đó là thế giới nhị nguyên.

### 1.2. Định nghĩa khái niệm “Định nghĩa”

Việc xác định khái niệm định nghĩa trong phần này là một góc nhìn chỉ áp dụng cho lãnh vực toán học. Hành vi định nghĩa thực sự có nhiều khó khăn, vì “định nghĩa” chính là thực hiện hoạt động định nghĩa trong khi khái niệm định nghĩa chưa tồn tại. Nói cách khác là sử dụng “công cụ” chưa hiện hữu hay chỉ hiện hữu từng phần để tạo dựng nên chính công cụ đó.

Ở đây không có tham vọng xác định “Định nghĩa” là cái gì về mặt triết học, chỉ đưa ra những cách thức tạo ra định nghĩa “tốt”, phân loại định nghĩa trong toán học, cách thức sử dụng định nghĩa. Hầu giúp ích cho người học toán có công cụ tốt trong môi trường toán học. Quan trọng hơn là nhận thức được vai trò quan trọng của định nghĩa trong hoạt động toán học.
Sau đây là những yếu tính của định nghĩa.

✧. Các hoạt động cơ bản của định nghĩa trong toán học.

- *Nhận dạng* hoặc *kiến tạo* đối tượng từ các đối tượng hiện hữu.
- *Nhận dạng* hoặc *kiến tạo* tính chất của đối tượng.

Thông thường, toán học chỉ sử dụng các đối tượng *hoàn toàn* hiện hữu, nghĩa là chúng đã bị “đông cứng” theo thời gian. Ngoại trừ, trường hợp đối tượng *đang hình thành* và chưa được xác định hoàn toàn.

✧. Cấu trúc của định nghĩa.

Khái niệm được định nghĩa $\longleftrightarrow$ Các điều kiện.

Mũi tên hai chiều chỉ ra rằng vế trái tương đương với vế phải. Để có được vế trái – khái niệm cần được xác định – chỉ khi thỏa mãn tất cả điều kiện. Ngược lại, khi có vế trái thì các điều kiện được thỏa mãn.

Mũi tên hai chiều biểu diễn cho thuật ngữ "Nếu và chỉ nếu (if and only if viết tắt là iff)" hoặc "Khi và chỉ khi". Nhưng đôi lúc một số định nghĩa chỉ ở dạng một chiều, đó là dạng điều kiện "Nếu … thì …", khi đó người dùng vẫn phải hiểu đầy đủ là "Nếu và chỉ nếu", vì đó là định nghĩa. Dụng ý sử dụng mũi tên một chiều (nếu … thì …) vì (người tạo định nghĩa) không quan tâm đến chiều ngược lại, nói cách khác là muốn nhấn mạnh một chiều.

Thí dụ :

Định nghĩa khái niệm "tam giác cân".

*Nếu* tam giác có hai cạnh bằng nhau *thì* tam giác cân.

Dù định nghĩa ở dạng "Nếu … thì …" nhưng vẫn phải hiểu là :

Tam giác cân *nếu và chỉ nếu* tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Định nghĩa khái niệm "tam giác vuông cân".

Tam giác vuông cân iff tam giác có góc vuông và có hai cạnh bằng nhau.

✧. Ngôn ngữ được dùng trong định nghĩa.

Đó là "ngôn ngữ tự nhiên", "ngôn ngữ lý thuyết tập hợp", "ngôn ngữ luận lý toán học", ... bất cứ ngôn ngữ nào tùy vào người thực hiện định nghĩa. Dựa vào trình độ và nhu cầu của người sử dụng, sẽ chọn ngôn ngữ thích hợp để diễn tả định nghĩa. Sử dụng ngôn ngữ tự nhiên giúp người đọc dễ dàng tiếp thu khái niệm được định nghĩa vì là ngôn ngữ quen thuộc. Tuy nhiên, dùng ngôn ngữ hình thức sẽ tiện cho việc sử dụng định nghĩa trong các hoạt động hình thức như việc chứng minh. Điều bất lợi ở những dạng hình thức là gây khó hiểu cho người sử dụng khi chưa quen thuộc.

Đối với người học nếu tài liệu dùng ngôn ngữ tự nhiên để diễn tả nên tự mình diễn tả lại bằng ngôn ngữ hình thức. Ngược lại nếu tài liệu sử dụng ngôn ngữ hình thức thì chuyển qua ngôn ngữ tự nhiên để hiểu rõ hơn.

Thí dụ :

Đây là định nghĩa dùng ngôn ngữ tự nhiên.

Tập hợp S hữu hạn nếu và chỉ nếu có khoảng đầu của tập số nguyên tự nhiên 1-1trên với S.

Định nghĩa dùng ngôn ngữ hình thức.

Tập hợp S hữu hạn $\longleftrightarrow$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(\exists f)$ $(f : S \longrightarrow [1, n]$ và f là ánh xạ 1-1trên).

Đôi khi có sự pha trộn ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ hình thức trong một số định nghĩa.

✧. Vai trò của định nghĩa.

Định nghĩa thực chất là một dạng tiên đề trong một phạm vi hẹp của thế giới do tiên đề tạo dựng. Do đó định nghĩa cũng có một số các tính chất của tiên đề, như mặc nhiên được chấp nhận không cần chứng minh. Định nghĩa tạo ra những đối tượng mới mà tiên đề "chưa kịp" sản sinh. Định nghĩa có thể hiểu là cụ thể hóa những đối tượng mà tiên đề chỉ mới "hình dung" còn tiềm ẩn trong hệ tiên đề.

Hệ tiên đề sản sinh ra các định lý. Định lý được sử dụng như thế nào thì định nghĩa được sử dụng y như vậy. Điểm khác biệt giữa định lý và định nghĩa là định lý phải được "*chứng minh*" là đúng, trong khi định nghĩa được "*chấp nhận*" đúng. Nói thêm về định lý, có định lý ở dạng "nếu và chỉ nếu", nhưng cũng có những định lý chỉ có dạng "nếu … thì …".

Trong chứng minh toán học, định nghĩa và định lý có giá trị tương đương. Một số trường hợp, định lý và định nghĩa có thể hoán vị vai trò cho nhau.

Thí dụ :

Lý thuyết tập hợp có khái niệm "hữu hạn" được định nghĩa như sau :

Tập hợp S hữu hạn $\longleftrightarrow$ có ánh xạ 1-1trên giữa S với khoảng

$[1, n], \exists n \in \mathbb{N}$. (*)

Từ định nghĩa này dẫn ra một số tính chất của hữu hạn đồng thời có khái niệm vô hạn và những tính chất của nó. Hãy xem định lý sau :

"Tập hợp S vô hạn $\longleftrightarrow$ S không 1-1 trên với mọi tập con riêng của S".

(**)

Nhà toán học R. Dedekind dùng định lý (**) làm định nghĩa cho khái niệm "vô hạn". Từ đó chứng minh lại được tất cả các tính chất như bắt đầu bằng định nghĩa hữu hạn, đồng thời chứng minh được "định nghĩa hữu hạn (*)" là định lý.

✧. Phủ định của định nghĩa,

Một khái niệm khi đã được định nghĩa sẽ có ngay khái niệm phủ định của nó. Khái niệm phủ định hiện hữu đồng thời với khái niệm ban đầu.

Khi định nghĩa khái niệm A đồng thời có ngay khái niệm không A ($\neg$A).

Định nghĩa A.

Khái niệm A $\longleftrightarrow$ Các điều kiện.

Các điều kiện có thể viết dưới dạng nguyên nhân $C_i$ dẫn đến kết quả $B_i$ như sau.

Khái niệm A $\longleftrightarrow$ $(C_1 \longrightarrow B_1) \wedge \ldots \wedge (C_n \longrightarrow B_n)$ (❈).

Khi đó định nghĩa của khái niệm "không A" là :

$\neg$(Khái niệm A) $\longleftrightarrow$ $\neg((C_1 \longrightarrow B_1) \wedge \ldots \wedge (C_n \longrightarrow B_n))$ (❈❈).

Dòng (❈) và (❈❈) đồng thời hiện hữu.

Biến đổi (❈❈) :

Khái niệm $\neg$A $\longleftrightarrow$ $\neg(C_1 \longrightarrow B_1) \vee \ldots \vee \neg(C_n \longrightarrow B_n)$.

Khái niệm $\neg$A $\longleftrightarrow$ $\neg(\neg C_1 \vee B_1) \vee \ldots \vee \neg(\neg C_n \vee B_n)$.

Khái niệm $\neg A \longleftrightarrow (C_1 \wedge \neg B_1) \vee \ldots \vee (C_n \wedge \neg B_n)$.

Khái niệm được định nghĩa có tên là "A" thì khái niệm phủ định của nó có tên là "không A". Đôi khi người ta không gọi là "không A" mà gọi bằng cái tên khác không có liên hệ gì với tên A. Thậm chí lại nghĩ rằng nó là khái niệm mới cần định nghĩa, điều này có thể dẫn tới định nghĩa này không tương thích với định nghĩa "không A".

Thí dụ :

Phủ định của khái niệm hữu hạn là "không hữu hạn" nhưng lại dùng từ vô hạn.

Phủ định của khái niệm hằng đúng là "không hằng đúng" nhưng lại dùng từ hằng sai.

Đôi khi người ta định nghĩa cả hằng đúng và hằng sai, coi như hai khái niệm không liên quan với nhau. Điều này là dư thừa và dễ dẫn đến xung đột với những khái niệm tiếp theo có sử dụng hai khái niệm này.

✧. Phân loại định nghĩa.

*a. Phân loại theo hoạt động.*

Định nghĩa bất khả thi.

Loại định nghĩa này không chỉ ra cách thức xác định đối tượng thỏa định nghĩa, việc đó phó mặc cho người sử dụng. Nói theo ngôn ngữ máy tính là không có thuật toán nào ẩn chứa trong định nghĩa để tìm ra khái niệm này.

Thí dụ :

Định nghĩa số siêu việt.

Một số là siêu việt iff nó không là nghiệm của phương trình đại số.

Số phương trình đại số là vô hạn vì vậy dựa vào định nghĩa không có cách nào để kiểm tra một số có phải là siêu việt hay không. Với những định nghĩa bất khả thi cần phải tìm ra những đặc điểm của khái niệm để xác định được nó, nói cách khác là tìm ra định lý để "thực thi" khái niệm này.

- Định nghĩa khả thi.

Trong cấu trúc của định nghĩa khả thi có chứa thuật toán để tìm ra đối tượng hoặc khái niệm được định nghĩa. Có một loại định nghĩa khả thi rất quan trọng trong toán học, đặc biệt trong lãnh vực máy tính là định nghĩa đệ qui, có nơi gọi là qui nạp.

Định nghĩa *đệ qui* có cấu trúc như sau :

– Tập hợp các đối tượng : các đối tượng mặc nhiên thỏa định nghĩa.

– Tập hợp luật : sản sinh đối tượng mới từ các đối tượng đang có.

Thí dụ :

Định nghĩa khái niệm "nguyên tử" trong logic.

(i) Ký hiệu hằng là nguyên tử. (đối tượng ban đầu)

(ii) Ký hiệu biến là nguyên tử. (đối tượng ban đầu)

(iii) Nếu $t_1, \ldots, t_n$ là nguyên tử thì biểu thức hàm $f(t_1, \ldots, t_n)$ là nguyên tử. (qui tắc sản sinh).

Định nghĩa này có hai đối tượng ban đầu và một qui tắc suy luận. Qui tắc suy luận này áp dụng cho bất kỳ nguyên tử nào không bắt buộc phải là hai đối tượng ban đầu (hằng và biến) nhưng có ít nhất hai đối tượng để qui tắc sản sinh thực thi được.

Điều này cho thấy định nghĩa đệ qui áp dụng lại chính nó trong khi nó chưa hoàn tất định nghĩa. Khái niệm đệ qui sử dụng nhiều trong lãnh vực máy tính : cấu trúc đệ qui, chương trình con đệ qui, … .

*b. Phân loại theo sự hiện hữu.*

- Định nghĩa nhận dạng.

Đó là *đặt tên* cho một *đối tượng* hoặc một số đối tượng đã hiện hữu bằng cách đưa ra những tiêu chuẩn để lọc ra được các đối tượng mong muốn.

- Định nghĩa kiến tạo.

  Loại định nghĩa kiến tạo đặc biệt là định nghĩa *đệ qui* hay còn gọi là *truy chứng* hay *qui nạp*.

*c. Phân loại theo tính chất.*

- Định nghĩa toàn phần.

  Khái niệm hoặc đối tượng được định nghĩa trên một tổng thể vô hạn.

Thí dụ :

a. n là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho n không thể viết dưới dạng tổng của nhiều nhất bốn số lập phương.
b. Một người được coi là giống như một anh hùng nếu và chỉ nếu, với mọi tính chất P mà tất cả các anh hùng đều có, thì người này cũng có tính chất P.

   Hai định nghĩa này là toàn phần vì nó "hoạt động" trên tất cả số nguyên và tất cả anh hùng.

- Định nghĩa bán phần.

  Khái niệm hoặc đối tượng được định nghĩa trên một phần của tổng thể vô hạn.

Thí dụ :

a. π là tỉ số giữa chu vi và đường kính của hình tròn.
b. Số tự nhiên n là nguyên tố nếu và chỉ nếu n > 1 và ước số của n là 1 và n.

   Hai định nghĩa này là bán phần vì nó chỉ "hoạt động" trên hai số (chu vi và đường kính) với câu a, còn câu b là trên những số nhỏ hơn n, không phải trên tất cả số nguyên.

## 2. Hệ tiên đề

Toán học cũng như nhiều ngành khoa học khác cùng được phát sinh theo dòng lịch sử của nhân loại. Kiến thức của chúng đan xen lẫn nhau, đôi khi phát sinh ra những mâu thuẫn. Do đó, cần phải hệ tổng lại các ngành toán học để có được sự nhất quán. Việc có thể thực hiện là trừu tượng hóa hoặc hình thức hóa. Điều này dẫn tới tiên đề hóa các ngành toán học vì nó là ngành cơ bản nhất. Kết quả là kiến thức toán học trở nên nhất quán và tổng quát hơn. Alessandro Padoa, Mario Pieri và Giuseppe Peano là những người tiên phong của phong trào này.

### 2.1. Cấu trúc của hệ tiên đề

Hệ tiên đề gồm các thành phần sau :

| | |
|---|---|
| 1. Thuật ngữ nguyên thủy | (undefined term) |
| 2. Thuật ngữ phổ dụng | (universal term) |
| 3. Hệ thống tiên đề | (axiom system) |
| 4. Hệ thống suy luận | (reasons) |
| 5. Định lý | (theorems) |

✧. Thuật ngữ nguyên thủy.

Thuật ngữ nguyên thủy là *khái niệm ban đầu được chấp nhận* trong hệ thống, không cần định nghĩa. Thuật ngữ nguyên thủy gồm có hai loại :

+ Thuật ngữ nguyên thủy chỉ *Đối tượng*.

+ Thuật ngữ nguyên thủy chỉ *Quan hệ* (mối tương quan giữa các đối tượng).

✧. Thuật ngữ phổ dụng.

Thuật ngữ phổ dụng là những từ ngữ để hình thành những phát biểu.

✧. Tiên đề.

Tiên đề là *phát biểu được chấp nhận* – không cần phải chứng minh.

Thí dụ :

Tiên đề hình học Euclide (do Hilbert đề ra) :

1. *Điểm, đường, thuộc về.* (thuật ngữ nguyên thủy)

2. *Họ, có, một, mọi, không*. (thuật ngữ phổ dụng)

3. Hệ tiên đề (hệ tiên đề)

Γ1. Đường là tập hợp các điểm.

Γ2. Có ít nhất 2 điểm.

Γ3. Chỉ có một đường qua hai điểm khác nhau.

Γ4. Có một điểm nằm ngoài một đường.

Γ5. Điểm X nằm ngoài đường (d) thì có *một* đường (h) song song với (d) và chứa X.

4. Hệ thống luận lý vị từ. (hệ thống suy luận)

5. Tập hợp các định lý hình học. (các định lý)

## 2.2. Tính chất của hệ tiên đề

Hệ tiên đề có những tính chất : Nhất quán, Hoàn bị hay đầy đủ, Độc lập, Đơn giản.

✧. Tính Nhất quán.

Hệ thống không sản sinh hay chứa hai phát biểu mâu thuẫn. Tính nhất quán là bắt buộc đối với các hê tiên đề toán học.

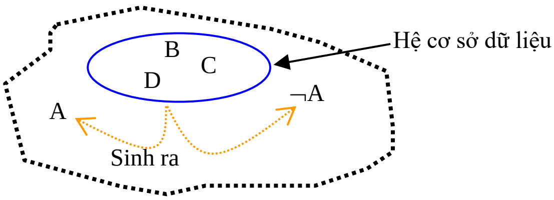
Trong các ứng dụng thực tế ở một thời điểm hệ thống nhất quán, nhưng sau một thời gian có thể trở thành mâu thuẫn. Ví dụ trong các cơ sở dữ liệu về nhân sự, nhân vật A có năm sinh 2000, tại thời điểm 2022 A 22 tuổi. Vì để tiện lợi cho việc tính toán cơ sở dữ liệu lưu trữ cả năm sinh 2000 và tuổi 22 của A. Hệ thống lúc này nhất quán, tuy nhiên đến năm 2023 các dữ liệu vẫn như cũ, nhưng lúc này hệ thống không còn nhất quán vì tuổi của anh ta được tính là 2023 – 2000 = 23, mâu thuẫn với thông tin được lưu trữ là 22.

Khi tìm kiếm một thông tin, trình duyệt có thể mât thời gian rất lâu để có được kêt quả. Vì vậy kết quả này có thể được lưu lại cho câu hỏi tương tự lần sau. Nhưng thời gian sau nếu trả lời cùng câu hỏi này với cùng kết quả đã lưu thì có thể không còn chính xác vì hệ thống có thể có thêm hoặc bớt đi thông tin.

Trong ứng dụng thực tế, việc kiểm tra tính nhất quán là không đơn giản.

Thí dụ :

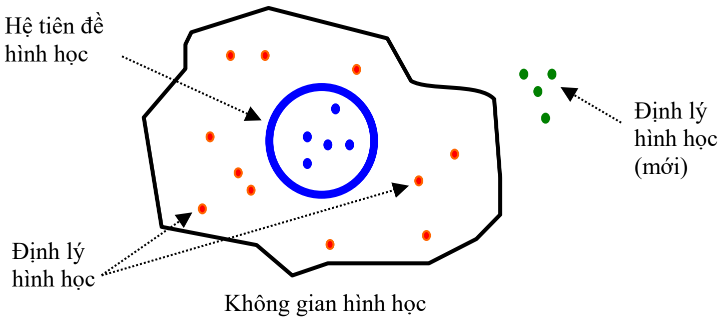
Hệ cơ sở dữ liệu nhất quán nếu không sản sinh hai phát biểu mâu thuẫn. Hình sau minh họa hệ cơ sở dữ liệu sinh ra hai phần tử A và ¬A, nên có sự mâu thuẫn.




✧. Tính Hoàn bị.

Tính hoàn bị hay còn gọi là tính đầy đủ, nghĩa là hệ tiên đề sinh ra được toàn bộ hệ thống. Ví dụ tiên đề hình học sinh ra được "tất cả" các định lý hình học hiện có. Nếu có một số định lý nằm ngoài không gian sinh của hệ tiên đề, hệ tiên đề không hoàn bị. Cơ sở của không gian vector có tính hoàn bị khi sinh ra được không gian vector. Tuong tự như tính nhất quán, theo thời gian tính hoàn bị có thể không còn được duy trì. Tại thời điểm hiện tại, tiên đề hình học sinh ra được "tất cả" định lý hình học hiện có. Nhưng vào một lúc nào đó, một định lý hình học mới được khám phá, khi đó hệ tiên đề hình học có thể không sinh ra được định lý này. Lúc đó nói rằng các tiên đề hình học là không đầy đủ hay còn gọi là không hoàn bị.

Thí dụ :

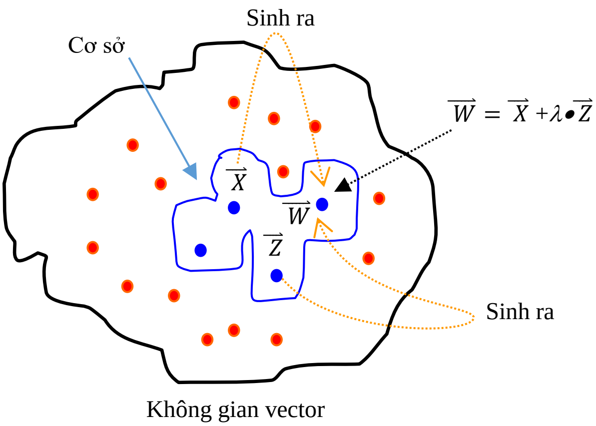


### ✧. Tính độc lập.

Tính độc lập là nói về số lượng các tiên đề. Hệ thống A được sinh ra bởi n tiên đề, nều bỏ đi một số tiên đề thì số tiên đề này vẫn sinh ra được hệ thống A. Lúc này nói rằng hệ thống A có n tiên đề không có tính độc lập. Vậy hệ tiên đề có tính độc lập là hệ có số tiên đề nhỏ nhất vẫn sinh ra được hệ thống. Ví dụ trong không gian vector cơ sở nhỏ nhất sinh ra không gian vector khi chúng *độc lập tuyến tính*. Tính độc lập tuyến tính bảo đảm số vector nhỏ nhất vẫn sinh ra được không gian vector.

Thí dụ :

Trong một không gian vecror, nếu cơ sở chứa các vector ó $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{W}$ và có $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{X} + \lambda \bullet \overrightarrow{Z}$ thì cơ sở này không độc lập.




### ✧. Tính Đơn giản.

Có hai yếu tố nói lên tính đơn giản đó là sự "*dễ hiểu*" và "*số lượng*" của tiên đề. Tính dễ hiểu sẽ được xét trước tiên. Thông thường, tiên đề là những phát biểu dễ hiểu đối với "mọi người", đó là lý do ưu tiên của nó. Về số lượng có thể được giảm thiểu bằng cách gom hai hay ba tiên đề thành một tiên đề. Khi đó, tiên đề "hỗn hợp" này có thể trở thành khó hiểu.

Nhận xét :

Thông thường, hệ tiên đề là khái niệm xuất hiện sau sự hiện hữu của hệ thống trong thế giới ứng dụng. Hình học có trước các tiên đề hình học, các tiên đề tập hợp xuất hiện sau lý thuyết tập hợp … Nói cách khác là các hệ thống được tiên đề hóa. Do đó, các tiên đề có thể thay đổi theo sự thay đổi của hệ thống.

## 3. Dịch giữa các ngôn ngữ

### 3.1. Dịch ngôn ngữ tự nhiên sang luận lý mệnh đề

Người dịch giữa hai ngôn ngữ phải thông thạo cả hai. Luận lý mệnh đề, luận lý vị từ cũng là ngôn ngữ, nên việc chuyển đổi từ ngôn ngữ tự nhiên sang ngôn ngữ logic cũng thuộc vấn đề dịch giữa hai ngôn ngữ. Vì vậy, việc dịch giữa hai ngôn ngữ không thuộc phạm vi nghiên cứu của luận lý mệnh đề cũng như luận lý vị từ, việc đó thuộc trách nhiệm của người sử dụng. Có rất nhiều ngôn ngữ tự nhiên, dĩ nhiên các ngôn ngữ này phức tạp nhiều so với ngôn ngữ logic. Ngôn ngữ mệnh đề cũng như vị từ đơn giản hơn. Thành phần cơ bản của ngôn ngữ luận lý mệnh đề gồm có công thức nguyên, các toán tử logic : $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\longrightarrow$. Với ngôn ngữ vị từ thêm vị từ, hàm, lượng từ. Do đó, dịch chính là chuyển những gì bên ngôn ngữ tự nhiên thành những yếu tố của ngôn ngữ logic. Những gì của ngôn ngữ tự nhiên chuyển thành vị từ, hàm, toán tử, … một lần nữa nhấn mạnh là trách nhiệm của người sử dụng logic. Thông thường, luận lý mệnh đề "khuyến cáo" câu khai báo được chuyển thành công thức nguyên. Nhưng luận lý mệnh đề không từ chối việc người dùng chuyển câu hỏi hay bất cứ loại câu gì thành công thức nguyên. Luận lý mệnh đề sẽ thực hiện các tính toán theo yêu cầu người dùng sau đó cho kết quả là một hay nhiều công thức và dịch ngược lại qua ngôn ngữ nhiên, lúc này kết quả có ý nghĩa hay không là trách nhiệm của người dịch. Thật sự điều này cũng là khả năng mở của luận lý mệnh đề nói riêng và logic nói chung. Logic có thể được hình thành từ vài bài toán cụ thể nhưng sau này nó có thể ứng dụng vào những lĩnh vực khác miễn là phù hợp.

Mỗi ngôn ngữ có những nét đặc thù riêng. Ngôn ngữ A có đặc điểm x, trong khi đó các ngôn ngữ khác không nhất thiết phải có x. Một ý niệm trong ngôn ngữ A có thể có nhiều cách diễn đạt khác nhau. Do đó, việc dịch từ ngôn ngữ này xang ngôn ngữ khác là điều không đơn giản. Ở góc độ nào đó, có thể coi luận lý vị từ, luận lý mệnh đề, lý thuyết tập hợp, … là những ngôn ngữ.

Để dịch giữa ngôn ngữ tự nhiên vào ngôn ngữ toán học, người dịch phải thông thạo cả hai.

Nhắc lại, phụ chương này thật sự *không dính dáng* với việc tìm hiểu logic toán hoc. Nhưng để trợ giúp cho người học phải làm các bài tập nên nó xuất hiện.

Trong ứng dụng thực tế, trước khi sử dụng các kiến thức logic, nhu cầu dịch giữa ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ logic là rất lớn.

Ở đây, ngôn ngữ tự nhiên là tiếng Anh được chọn để dịch sang logic.

✧. Toán tử ⟶.

Toán tử ⟶ có thể diễn tả bằng các thuật ngữ :

1. if P then Q.

   Eg : If f is differentiable then f is continuous

   (nếu f khả vi thì f liên tục).

2. P implies Q.

   Eg : Differentiable implies continuous (khả vi dẫn đến liên tục).

3. P only if Q.

   Eg : f is continuous only if f is differentiable

   (f liên tục nếu và chỉ nếu f khả vi).

4. P is a sufficient condition for Q.

   Eg : Being differential is a sufficient condition for being continuous. (khả vi là điều kiện đủ để liên tục)

5. Q, provided that P.

   Eg : I go to Hanoi, provided that I have money

   (tôi đi Hà nội miên là tôi có tiền).

6. Q if P.

   Eg : I go to Hanoi if I have money

   (tôi đi Hà Nội miễn là tôi có tiên).

7. Q is a necessary condition for P.

   Eg : Labor is a necessary condition for success

   (lao động là điều kiện cần để thành công).

8. Unless = if not.

   "H unless M" sẽ được chuyển thành $M \longrightarrow \neg H$.

   "H unless M and N" sẽ được chuyển thành $(M \vee N) \longrightarrow \neg H$.

   Eg : Mặt đường sẽ khô ráo trừ phi trời mưa

   ≈ Nếu trời mưa thì mặt đường sẽ không khô ráo.

   Eg : Mặt đường sẽ khô ráo trừ phi trời mưa "và" cư dân đổ nước ra đường.

   ≈ Nếu trời mưa "hoặc" cư dân đổ nước ra đường thì mặt đường sẽ không khô ráo.

   Eg : Tom is not successful unless he is hardworking.

   ≈ if Tom is hardworking then he is not not successful.

   ≈ if Tom is hardworking then he is successful.

Thi dụ :

F = Tom cannot be a good student *unless* he is smart *and* his father supports him.

G = Tom is a good student only if his father supports him.

Show that G is a logical consequence of F.

Chuyển về dạng nếu thì :

F = If Tom is smart or his father supports him then he can be a good student.

G = if Tom's father supports him then he is a good student.

Mã hóa :

A = Tom is a good student, B = Tom is smart,

C = Tom's father supports.

Do đó

$F = (B \vee C) \longrightarrow A$, $G = C \longrightarrow A$.

$$
\begin{aligned}
F &= (B \vee C) \longrightarrow A \\
&= \neg(B \vee C) \vee A \\
&= (\neg B \wedge \neg C) \vee A \\
&= (B \longrightarrow A) \wedge (C \longrightarrow A).
\end{aligned}
$$

Trong F có chứa $(C \longrightarrow A) = G$.

Vậy $F \models G$.

✧. Toán tử $\vee$.

Toán tử $\vee$ có thể diễn tả bằng các thuật ngữ :

1. P or Q.

   Eg : He must go to school or go to the library.

2. Either P or Q.

   Eg : He can either come in or go out.

✧. Toán tử $\wedge$.

Toán tử $\wedge$ có thể diễn tả bằng các thuật ngữ :

1. P and Q : $(P \wedge Q)$.

   Eg : programming language and sofware engineering are two important subjects in CS.

   (ngôn ngữ lập trình và công nghệ phần mềm là hai môn học quan trọng trong CS)

2. Both P and Q : $(P \wedge Q)$.

   Eg : Both programming language and sofware engineering are important.

   (cả ngôn ngữ lập trình và công nghệ phần mềm là quan trọng)

3. Neither P nor Q : $(\neg P \wedge \neg Q)$.

   Eg : He can neither come in nor go out. P = come in, Q = go out,.

4. Nor : $(\neg P \wedge \neg Q)$.

   Eg : He can't do it, nor can I.

5. Not only P but also Q : $(P \wedge Q)$.

   Eg : She is not only beautiful but also intelligent.

6. As well as : $(P \wedge Q)$.

   Eg : He needs books as well as food.

7. But = yet = however : $(P \wedge (\neg)Q)$.

   Eg : I stay in class but I don't learn anything.

8. (not) Or : $((\neg)P \wedge (\neg)Q)$.

   Eg : I do not drink or smoke

   (= I do not drink and I don't smoke)

✧. Toán tử ¬.

Toán tử ¬ có thể diễn tả bằng các thuật ngữ :

1. not P.
2. Prefix (un, im, …) or suffix (less) or negative adverb.

✧. Toán tử ↔.

Toán tử ↔ có thể diễn tả bằng các thuật ngữ :

1. P if and only if Q.
2. Equivalence.

✧. Toán tử có thể được nhận dạng từ *ngữ nghĩa* của câu văn.

Nhận xét :

✶ Vấn đề "và".

Cho hai mệnh đề P : "Con người sẽ sống trên sao hỏa vào năm 3000" và Q : "2 + 3 = 4".

Vậy $(P \wedge Q)$ và $(P \wedge (\neg Q))$ có ý nghĩa gì ?.

Lời giải :

$(P \wedge Q)$ : "Con người sẽ sống trên sao hỏa vào năm 3000 và 2 + 3 = 4".

- Cách diễn đạt "not only … but" làm ngạc nhiên : "Không những con người không chỉ sống trên sao hỏa vào năm 3000" mà còn có 2 + 3 = 4".

$(P \wedge (\neg Q))$ : "Con người sẽ sống trên sao hỏa vào năm 3000 và $2 + 3 \neq 4$".

- Cách diễn đạt "moreover" : "Con người sẽ sống trên sao hỏa vào năm 3000, hơn thế nữa $2 + 3 \neq 4$".

✶ Toán tử or và if trong luận lý mệnh đề và trong thực tế.

Dạng $(P \longrightarrow Q = \neg P \vee Q)$ hay $(\neg P \longrightarrow Q = P \vee Q)$ được dịch ngược lại vào thực tế.

Thí dụ :

Mệnh đề X = Con dao được làm bằng sắt hoặc bằng gỗ.

Mệnh đề P = Con dao được làm bằng sắt, Q = Con dao được làm bằng gỗ.

Chuyển sang luận lý mệnh đề $X = P \vee Q$.

$\Longrightarrow X^{(1)} = \neg P \longrightarrow Q$ hay $X^{(2)} = \neg Q \longrightarrow P$.

Dịch $X^{(1)}$ trở lại ngôn ngữ tự nhiên.

Nếu con dao không bằng sắt thì nó bằng gỗ.

Dịch $X^{(2)}$ trở lại ngôn ngữ tự nhiên.

Nếu con dao không bằng gỗ thì nó bằng sắt.

Thế giới luận lý mệnh đề là nhị nguyên nên thế giới thực tế nó chuyển đổi cũng phải bị giới hạn vào nhị nguyên. Vì vậy con dao không thể được làm bằng nhôm, đồng, kẽm hay chất liệu nào khác, phải là sắt hoặc gỗ.

Tóm lại vấn đề dịch ngược từ luận lý mệnh đề sẽ có nhiều cách dịch khác nhau, tùy thuộc vào ngữ cảnh và người dịch. Đây là vấn đề của người sử dụng luận lý mệnh đề, không phải của luận lý mệnh đề.

### 3.2. Dịch ngôn ngữ tự nhiên sang luận lý vị từ

✧. Xác định các thuật ngữ tiếng Anh cho lượng từ :

Ký hiệu ∀ có thể diễn tả bằng các từ : every | all | for all, ...

Ký hiệu ∃ có thể diễn tả bằng các từ : some | for some | there is some | there exists |, …

✧. Nhận dạng :

Các mối quan hệ (relationships) giữa các đối tượng.

Sự phụ thuộc (dependences) tương ứng với các toán tử ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$).

✧. Chọn các vị từ :

Chọn các 'từ khoá" trong các câu.

Từ khoá có thể là danh từ, động từ, tính từ.

✧. Chuyển các phát biểu về các dạng and, or hoặc if.

Thí dụ :

Trẻ con nói chuyện không biết lý luận.

Không ai làm việc chăm chỉ lại bị chế nhạo.

Ai nói chuyện không biết lý luận thì bị chế nhạo.

Vì vậy trẻ con không thể làm việc chăm chỉ.

Bài giải :

Các đối tượng là các danh từ : trẻ con, ai.

Các quan hệ là các động từ : nói chuyện biết lý luận, bị chế nhạo, chăm chỉ

Chọn biến và hằng (danh từ) :

Biến là danh từ chỉ những đối tượng có chung tên : ai đặt là biến x.

Hằng là đối tượng có tên cụ thể = trẻ con đặt là hằng a.

Chọn vị từ là các hành vi (động từ) :

Lýluận(x) = x biết lý luận.

Bịchếnhạo(x) = x bị chế nhạo.

Chămchỉ(x) = x làm việc chăm chỉ.

Chuyển câu văn về dạng nếu thì :

Trẻ con nói chuyện không biết lý luận = sự kiện (không chuyển đổi).

Không ai làm việc chăm chỉ lại bị chế nhạo = Nếu ai làm việc chăm chỉ thì không bị chế nhạo.

Những người không biết lý luận thì bị chế nhạo = Nếu không biết lý luận thì bị chế nhạo.

Trẻ con không thể làm việc chăm chỉ = sự kiện (không chuyển đổi).

Dịch từng câu :

*. Trẻ con nói chuyện không biết lý luận

$$\neg\text{Lýluận}(a) \qquad (1)$$

*. Nếu ai làm việc chăm chỉ thì không bị chế nhạo.

$$\forall x\,(\text{Chămchỉ}(x) \longrightarrow \neg\text{Bịchếnhạo}(x)) \qquad (2)$$

$$\forall x\,(\text{Bịchếnhạo}(x) \longrightarrow \neg\text{Chămchỉ}(x)) \qquad (2')$$

*. Nếu không biết lý luận thì bị chế nhạo.

$$\forall x\,(\neg\text{Lýluận}(x) \longrightarrow \text{Bịchếnhạo}\ (x)) \qquad (3)$$

*. Vì vậy trẻ con không thể làm việc chăm chỉ.

$$\neg\text{Chămchỉ}(a) \qquad (4)$$

Hệ thống được phân tích thành :

$$\left\{\begin{array}{l} F = \neg\text{Lýluận}(a) \\ G = \forall x\,(\text{Bịchếnhạo}(x) \rightarrow \neg\text{Chămchỉ}(x)) \\ H = \forall x\,(\neg\text{Lýluận}(x) \rightarrow \text{Bịchếnhạo}(x)) \end{array}\right\} \vdash \neg\text{Chămchỉ}(a)$$

## 3.3.Sự mơ hồ của ngôn ngữ tự nhiên

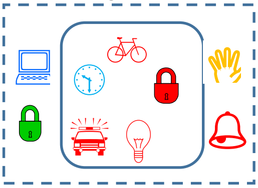
Có thể có nhiều cách dịch khác nhau cho câu của ngôn ngữ tự nhiên tùy thuộc vào hoàn cảnh, nói cách khác là tùy thuộc vào miền đối tượng và dụng ý của bài toán.

Thí dụ :

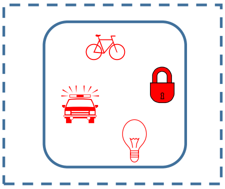
Cho phát biểu P = "Tất cả vật màu đỏ ở trong hộp".

Vị từ red(x) = "x là vật màu đỏ", inbox(x) = "x ở trong hộp".

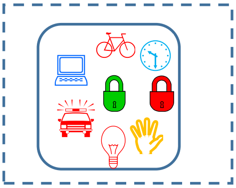
Trạng thái 1



Trạng thái 2



Trạng thái 3

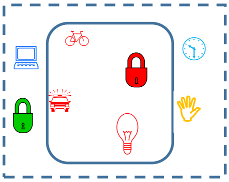


Trạng thái 1 : Vật màu đỏ có trong hộp và cả bên ngoài.

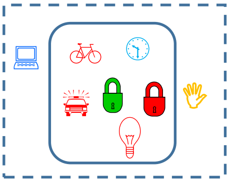
Trạng thái 2 : Chỉ có vật màu đỏ trong hộp.

Trạng thái 3 : Mọi vật đều ở trong hộp bao gồm màu đỏ và không đỏ.

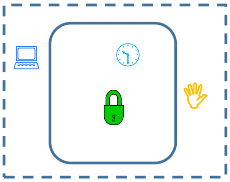
Trạng thái 4



Trạng thái 5



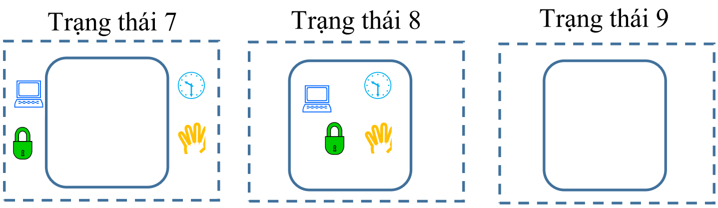
Trạng thái 6



Trạng thái 4 : Chỉ có vật màu đỏ trong hộp và màu không đỏ ở bên ngoài.

Trạng thái 5 : Vật màu đỏ trong hộp, bên trong và bên ngoài đều có vật màu không đỏ.

Trạng thái 6 : Không có vật màu đỏ, chỉ có vật màu không đỏ ở trong và ngoài hộp.




Trạng thái 7 : Không có vật màu đỏ, chỉ có vật màu không đỏ ở ngoài hộp

Trạng thái 8 : Không có vật màu đỏ, chỉ có vật màu không đỏ ở trong hộp

Trạng thái 9 : Không có vật nào ở trong và ngoài hộp

Phát biểu "Tất cả vật màu đỏ ở trong hộp" có thể biểu diễn trong luận lý vị từ :

(để dễ đọc mã hóa lại red(x) là $red_x$, box(x) là $box_x$)

$P_1 = \quad \forall x\ (red_x \longrightarrow box_x)$

$P_2 = \quad \forall x\ (red_x \wedge box_x)$

$P_3 = \quad \forall x\ ((red_x \longrightarrow box_x) \wedge (box_x \longrightarrow red_x))$

Mỗi $P_i$ thỏa các trạng thái nào ?

$P_1$ *sai* ở trạng thái 1, *đúng* ở trạng thái 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

$P_2$ *sai* 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *đúng* ở trạng thái 2.

$P_3$ *sai* ở trạng thái 1, 3, 5, 6, 8, *đúng* ở trạng thái 2, 4, 7.

Do đó $P_1$ là câu dịch "tốt" vì đúng được ở nhiều trạng thái. Tuy nhiên, chữ "tốt" còn tùy thuộc vào yêu cầu của bài toán.

### 3.4.Làm sao biết một cách dịch vào luận lý vị từ là "đúng"

Để biết một cách dịch nào là "đúng", cần tìm ít nhất một thực tế để cách dịch này đúng trong đó. Ngược lại, nếu chọn được một thực tế (thỏa bài toán) và nội dung cần dịch sai trong đó thì khó có hy vọng cách dịch này đúng.

## 4. Tạp luận

### 4.1. Diễn dịch

Ngôn ngữ, chữ viết là những hệ thống âm thanh, ký hiệu được dùng để mô tả thực tế và trao đổi giữa con người với nhau. Các hệ thống này không là thực tế vì chúng đi qua hai lớp diễn dịch. Con người nhìn nhận thực tế thông qua diễn dịch của chính mình chuyển đổi thành âm thanh hay ký hiệu. Các kết quả này được truyền đạt đến người nhận thông qua một lớp diễn dịch của người nhận để tái tạo lại thực tế mà người truyền đạt mong muốn. Do đó nếu không gian diễn dịch của người truyền đạt và người nhận có sự tương đồng cao thì hiệu quả càng cao. Ngược lại, chẳng hiểu gì nhau. Do đó, để đạt được sự nhất quán giữa diễn dịch của người đưa ra thông điệp và người nhận phụ thuộc vào sự tương đồng của hai diễn dịch.

Trong lãnh vực nghệ thuật, việc hiểu một bức tranh, cảm một bản nhạc, nhìn ra dung ý của một quyển tiểu thuyết, hay thấu cảm một bài thơ là việc "không tưởng", ngoại trừ được chính tác giả bộc lộ ý định sáng tác. Tuy nhiên, mặt trái của sự việc chính là sự sáng tạo. Nếu tác giả muốn nói A và người tiếp nhận đúng là A thì không có gì mới. Chính do sự khác biệt về không gian diễn dịch, tác giả nói A nhưng người nghe có thể hiểu rộng hơn A hoặc hẹp hơn A, thậm chí khác A. Điều này có thể dẫn đến sự sáng tạo hay tối tạo.

Ví dụ như chuyện "Tây du ký", hình tượng bốn thầy trò có thể hiểu theo nhiều cách, hay việc Ca Diếp đòi hối  lộ cũng có nhiều lý giải.

Hai câu thơ :

"Văn như  Siêu Quát **vô** tiền Hán.

Thi đáo Tùng Tuy **thất** thịnh Đường".

Chữ vô và chữ thất ở đây thường được hiểu theo nghĩa là khen hai nhà thơ Nguyễn Văn Siêu và Cao Bá Quát, nhưng cũng có ý kiến cho rằng đây là sự mỉa mai ?. Ai biết được dụng ý của tác giả ngoại trừ tác giả. Câu chuyện

“Thiền sư chột mắt” trong quyển “Góp nhặt các đá” của thiền sư Muji minh họa rõ nét ý tưởng này.

### 4.2.Vấn đề phủ định

Ngữ nghĩa trong luận lý mệnh đề thuộc quan điểm nhị nguyên, nghĩa là mọi thứ đánh giá chỉ có đúng hoặc sai không có trường hợp thứ ba. Nhưng thực tế cuộc sống đa dạng hơn, vì vậy luận lý mệnh đề cũng chỉ mô phỏng được *một phần nhỏ* của thế giới ứng dụng.

Đối với ngôn ngữ tự nhiên, phủ định của một phát biểu có thể có rất nhiều nghĩa.

Thí dụ :

Phát biểu “Hắn chết”, lấy phủ định là “Hắn *không* chết”.

Dạng phủ định này có thể hiểu theo hai cách khác nhau : “Hắn bất tử” nghĩa là không bao giờ chết và “Hắn vẫn còn sống” nghĩa là hắn chưa chết.

Tuy nhiên, phủ định trong logic chỉ chấp nhận có một nghĩa.

Trong triết học biện chứng Không (Không (A)) ≠ A, với logic mệnh đề thì Không (Không (A)) = A.

Trong ngôn ngữ tự nhiên, có nhiều cách lấy phủ định một phát biểu :

- Phủ định ý nghĩa của phát biểu.
- Phủ định hình thức biểu diễn của phát biểu.
- Phủ định danh từ, động từ, tính từ hay trạng từ … trong phát biểu.

Vấn đề này thuộc phạm vi của ngôn ngữ tự nhiên, không thuộc phạm vi nghiên cứu của luận lý mệnh đề.

Ngôn ngữ tự nhiên *không định nghĩa* phủ định các dạng “nếu x thì y”, “x và y”, “x hoặc y”.

Các dạng này được diễn tả hình thức trong logic như sau :

not (x and y), not (x or y). not (if x then y),

Tuy nhiên luận lý mệnh đề có dạng phủ định của các cấu trúc trên :

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y,$$

$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y.$

$\neg(x \longrightarrow y) = \neg(\neg x \vee y) = x \wedge \neg y,$

Thí dụ :

Minh sẽ tốt nghiệp và đi du học.

Mã hóa : x = Minh tốt nghiệp, y = Minh đi du học,

Mệnh đề được biểu diễn bằng công thức $(x \wedge y)$,

Lấy phủ định $\neg(x \wedge y)$ là $(\neg x \vee \neg y)$.

Dịch ngược trở lại là :

Minh sẽ không tốt nghiệp hoặc không đi du học.

### 4.3. Khái niệm "Mặc nhiên thỏa"

Phát biểu A có dạng "***Nếu*** điều kiện ***thì*** kết luận" đúng khi điều kiện được thỏa mãn và kết luận xảy ra.

Trường hợp đặc biệt, môi trường không đánh giá được điều kiện đúng hay sai, hay đối tượng trong điều kiện không hiện hữu. Vì không có đối tượng nên không đánh giá được điều kiện, nghĩa là tình trạng này *không vi phạm* điều kiện nên được gọi là thỏa định nghĩa.

Điều kiện không xảy ra nên không ràng buộc kết luận phải xảy ra.

Đây được gọi là nguyên tắc *không vi phạm* hoặc *mặc nhiên thỏa* (vacuously satisfied) hoặc đúng mặc nhiên (vacuous truth).

Thí dụ :

1. Phát biệu "Mọi người trong giảng đường A là sinh viên năm cuối". Tại thời điểm t, giảng đường A trống rỗng, phát biểu này được đánh giá là đúng theo nguyên tắc mặc nhiên thoả.
2. Một tập con X của $\mathbb{N}$ có tính chất :

"Mọi số chính phương trong X đều là bình phương của số nguyên tố" (*).

(chú thích : số chính phương là số bình phương của một số)

Tập hợp X = {2, 4, 6, 9, 25} thỏa tính chất (*) vì các số chính phương trong X : 4, 9, 25 là bình phương của các số nguyên tố 2, 3, 5 ($4 = 2^2$, $9 = 3^3$, $25 = 5^5$).

Tập hợp Y = {4, 5, 9, 16, 17} không có tính chất (*) vì số chính phương 16 không là bình phương của số nguyên tố.

Tập hợp Z = {2, 3, 6, 15, 17} mặc nhiên có tính chất (*). Vì Z không có số chính phương nên Z *không vi phạm định nghĩa*.

3. Số ánh xạ đi từ tập hợp ∅ vào tập hợp X là 1 (với X có thể là ∅).

Khái niệm mặc nhiên thỏa rất quan trọng trong vấn đề chứng minh. Nhất là đối với các bài toán liên quan đến tập hợp khi phát biểu tổng quát. Nói đến tập hợp, thường sẽ phân ra làm hai trường hợp là tập hợp rỗng và tập hợp khác rỗng. Đối với tập hợp rỗng, những chứng minh liên quan thường sử dụng khái niệm mặc nhiên thỏa.

### 4.4.Về ký hiệu "="

Sự "bằng nhau" giữa hai đối tượng được ký hiệu bởi ký tự "=". Đây là một trong những ký hiệu cực kỳ "nguy hiểm" đối với người học, nó rất quen thuộc và tự nhiên tới mức ít ai thắc mắc về nó. Sở dĩ nó nguy hiểm vì "mọi người" đều biết về nó từ lúc mới cắp sách đến trường. Dần dà nó như người thân quen không cần phải đề phòng. Theo thời gian, ở nhiều cấp học khác nhau dấu "=" biến đổi, nhưng người ta vẫn nghĩ rằng nó vẫn như xưa.

Trong tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$, dấu bằng trong biểu thức "$6 = 3 \times 2$" chỉ ánh xạ từ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, vào $\mathbb{Z}$.

Trong lý thuyết tập hợp, dấu bằng trong "A = B" chỉ quan hệ chứa trong giữa hai tập hợp A, B.

Trong luận lý mệnh đề, luận lý vị từ, dấu bằng trong "A = B" chỉ sự tương đương giữa hai công thức.

Và còn nhiều không gian toán học khác có dấu bằng được định nghĩa khác. Do đó khi đi vào một không gian toán học, cần nhận rõ ý nghĩa của mọi ý niệm, mọi ký hiệu, dù chúng có quen thuộc đến đâu. Ngoài ký hiệu “=”, còn nhiều ký hiệu quen thuộc khác, chúng có ý nghĩa khác nhau trong từng không gian toán học.

Chú ý :

Luận lý vị từ được nhìn từ góc độ ngữ nghĩa và góc độ chứng minh, mỗi góc nhìn có sự khác nhau về khái niệm tương đương”.

### 4.5.Vấn đề mâu thuẫn và phủ định

✧ Phủ định một thực thể là tạo ra một thực thể mới. Về mặt thời tính, hai thực thể này không đồng thời xuất hiện, chúng cách nhau một “sát na”. Ngoài ra, cái phủ định xuất phát từ cái được phủ định. Khi thời gian hiện hữu của các đối tượng không xác định hoặc chúng đã tồn tại quá lâu, người ta không còn nhận ra cái nào là phủ định, cái nào được phủ định.

✧ Mâu thuẫn là so sánh hai thực thể với nhau. Về mặt thời tính, người nhận thức coi chúng đồng thời xuất hiện và chúng là hai thực thể độc lập với nhau.

Nói thêm về “Vấn đề phủ định”, qua câu hỏi dưới đây.

Câu nào sau đây là câu phủ định của phát biểu "There is life on Mars“.

a. There is some life on Mars. b. There may be life on Mars.

c. There may be no life on Mars. d. There is no life on Mars.

e. There is probably no life on Mars.

Hãy chọn *một* câu đúng.

Vấn đề đặt ra của câu hỏi này không thuộc luận lý mệnh đề cũng như luận lý vị từ. Người đặt câu hỏi nhìn nó trong bối cảnh của luận lý toán học là thế giới nhị nguyên. Đem ý niệm phủ định trong toán học vào lại thực tế. Quan sát cho thấy có rất nhiều ý niệm không phải của thực tế, chúng được vay mượn từ thế giới toán học. Sau đó, người ta ngộ nhận chúng “có” trong thực tế. Việc ngộ nhận này xuất phát từ việc lẫn lộn giữa thế giới thực và thế giới toán học.

### 4.6.Câu tự tham chiếu

✧ Nghịch lý người nói láo

Thí dụ :

Đặt P = " Tôi đang nói láo”.

Nếu P đúng thì P sai vì P là câu nói láo.

Nếu P sai thì việc tự tuyên bố nói láo là đúng vì vậy P đúng.

✧ Trường hợp tương tự :

“Phát biểu này sai“.

Luận lý mệnh đề, luận lý vị từ hay logic nói chung *không khảo sát* loại câu tự tham chiếu.

# VI. BÀI GIẢI

## A. Luận lý mệnh đề

### A.1. Nhận dạng câu khai báo

1. Phát biểu nào là câu khai báo và chỉ ra thực trị :

a. Không được mở máy tính. b. Thành phố Cần Thơ ở đâu ?

c. Sông Sài Gòn không có cá sấu. d. Việc lập trình rất hứng thú.

e. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, với A, B, C là tập hợp.

f. Hôm nay là ngày thứ 3. g. $2 + 5 = 3$.

h. Tokyo là thủ đô của nước Nhật.

i. Thiết kế cơ sở dữ liệu là bắt buộc khi lập trình.

Bài giải.

a. Không được mở máy tính. – là câu mệnh lệnh.

b. Thành phố Cần Thơ ở đâu ?. – là câu hỏi.

c. Sông Sài Gòn không có cá sấu. – là câu khai báo, có thể đ hoặc s.

d. Việc lập trình rất hứng thú. – là câu khai báo, có thể đ hoặc s.

e. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. – là câu khai báo : thực trị : đ

f. Hôm nay là ngày thứ 3. – là câu khai báo, có thể đ hoặc s.

g. $2 + 5 = 3$. – là câu khai báo, có thể đ hoặc s.

h. Tokyo là thủ đô của nước Nhật. – là câu khai báo : thực trị : đ

i. Thiết kế CSDL là bắt buộc khi lập trình. – là câu khai báo,có thể đ hoặc s.

Nhận xét :

Đây là loại bài tập "không liên quan" đến việc nghiên cứu luận lý mệnh đề vì nó phụ thuộc vào hai yếu tố. Thứ nhất, người giải phải hiểu rõ văn phạm của ngôn ngữ tự nhiên, tùy từng ngôn ngữ xác định thế nào là câu khai báo. Thứ hai không gian của bài toán không được xác định, nói khác là mơ hồ, ví dụ $2 + 5 = 3$ sẽ đúng trong $\mathbb{Z}_4$ , nhưng sai trong $\mathbb{Z}$. Hiện tại sông Sài Gòn không có cá sấu, nhưng vài ngày sau đó người ta đem cá sấu đến nuôi thì câu trả lời tùy vào thời điểm nào sẽ là đúng hoặc sai.

Việc chọn lựa loại câu nào để biểu diễn trong luận lý mệnh đề hay vị từ còn tùy thuộc vào người dùng. Họ có thể chọn loại "câu hỏi" thay vì câu khai báo và cho nó giá trị đúng sai để chuyển vào luận lý mệnh đề để tính toán. Sao đó kết quả trả về lại ngôn ngữ ban đầu có ý nghĩa gì hay không là trách nhiệm của người dùng.

Trong một số trường hợp, trước khi dịch từ ngôn ngữ tự nhiên nên chuyển câu cần phải dịch ở dạng "nếu … thì …".

Tuy nhiên trong thực tế việc dịch sang luận lý mệnh đề cũng như luận lý vị từ là việc cực kỳ quan trọng.

2. Tìm phủ định của các câu khai báo sau :

a. Sông Sài Gòn không có cá sấu.

b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c. Hôm nay là ngày thứ 3

d. $2 + 5 = 3$

e. Tokyo là thủ đô của nước Nhật.

f. Nếu có tiền tôi sẽ mua xe phân khối lớn.

g. Thiết kế ơ sở dữ liệu là bắt buộc khi lập trình.

h. Tôi tới lớp mỗi khi gần có kỳ thi.

i. Số x là nguyên tố nếu nó không có ước số khác 1, x.

<u>Hướng dẫn</u> : Phương pháp giải là chuyển câu khai báo sang luận lý mệnh đề, lấy phủ rồi chuyển ngược lại thành câu khai báo.

<u>Bài giải.</u>

a. Sông Sài Gòn không có cá sấu. Sông Sài Gòn có cá sấu

b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c. Hôm nay là ngày thứ 3. Hôm nay không phải là ngày thứ 3

d. 2 + 5 = 3 $\quad\quad\quad\quad$ $2 + 5 \neq 3$

e. Tokyo là thủ đô của nước Nhật.

Tokyo không là thủ đô của nước Nhật

f. Nếu có tiền tôi sẽ mua xe phân khối lớn.

Tôi có tiền và tôi sẽ không mua xe phân khối lớn.

g. Thiết kế CSDL là bắt buộc khi lập trình.

Thiết kế CSDL là không bắt buộc khi lập trình

h. Tôi tới lớp mỗi khi gần có kỳ thi.

Tôi không tới lớp mỗi khi gần có kỳ thi.

i. Số x là nguyên tố nếu nó không có ước số khác 1, x.

Số x không là nguyên tố nếu nó có ước số khác 1, x.

Nhận xét :

Việc lấy phủ định trong ngôn ngữ tự nhiên khác với phủ định trong luận lý mệnh đề hay vị từ.

Ngôn ngữ tự nhiên "không" có dạng phủ định của câu điều kiện, nó mượn dạng phủ định của câu điều kiện trong logic

$$\neg(a \rightarrow b) = \neg(\neg a \vee b) = a \wedge \neg b.$$

Các câu f, g, h, i có dạng nếu thì.

## A.2. Dịch giữa ngôn ngữ tự nhiên và luận lý mệnh đề

3. Biểu diễn đoạn văn sau bằng luận lý mệnh đề :

Nếu anh ta mua xe thì anh ta trúng số hoặc thừa hưởng gia tài.

Anh ta không thừa hưởng gia tài.

Vậy nếu anh ta không trúng số thì anh ta không mua xe.

Bài giải.

Nếu anh ta mua xe thì anh ta trúng số hoặc thừa hưởng gia tài.

Anh ta không thừa hưởng gia tài.

Vậy nếu anh ta không trúng số thì anh ta không mua xe.

P : anh ta mua xe, Q: anh ta trúng số, R: anh ta thừa hưởng gia tài

Nếu anh ta mua xe thì anh ta trúng số hoặc thừa hưởng gia tài.

$P \to Q \vee R$

Anh ta không thừa hưởng gia tài.

$\neg R$

Vậy nếu anh ta không trúng số thì anh ta không mua xe.

$\neg Q \to \neg P$

$((P \to (Q \vee R)) \wedge \neg R) \to (\neg Q \to \neg P)$

4. Chuyển các công thức luận lý mệnh đề thành các câu khai báo của ngôn ngữ tự nhiên :

M = Hôm nay thứ 5, N = Đi dã ngoại, P = Câu cá.

a. $M \to (N \vee P)$, b. $M \wedge N$, c. $\neg P \wedge \neg M$

d. $\neg N \to \neg M$, e. $\neg M \vee (P \wedge N)$

Bài giải.

M = Hôm nay thứ 5, N = Đi dã ngoại, P = Câu cá.

a. $M \to (N \vee P)$ : Nếu Nếu hôm nay là thứ 5 thì đi dã ngoại hoặc câu cá.

b. $M \wedge N$ : Hôm nay là thứ 5 và đi dã ngoại.

c. $\neg P \wedge \neg M$ : Hôn nay không phải là thứ 5 và không đi câu cá.

d. $\neg N \to \neg M$ : Nếu không đi dã ngoại thì hôm nay không phải là thứ 5.

e. $\neg M \vee (P \wedge N)$ : Hôm nay không là thứ 5 hoặc là đi dã ngoại và câu cá.

### A.3. Suy luận tự nhiên trong luận lý mệnh đề

1. Chứng minh các suy luận sau :

a. $\neg G \to \neg F \vdash F \to \neg\neg G$

b. $\vdash (G \to H) \to ((\neg G \to \neg F) \to (F \to H))$

c. $(F \wedge G) \to H \vdash F \to (G \to H)$

d. $F \to (G \to H) \vdash (F \wedge G) \to H$

e. $F \to G \vdash (F \wedge H) \to (G \wedge H)$

f. $(F \vee G) \vee H \vdash F \vee (G \vee H)$

g. $F \wedge (G \vee H) \vdash (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

h. $F \rightarrow \neg F \vdash \neg F$

i. $F \rightarrow (G \rightarrow H), F, \neg H \vdash \neg G$ (không dùng luật MT)

j. $(F \wedge \neg G) \rightarrow H, \neg H, F \vdash G$.

Bài giải.

a. $\neg G \rightarrow \neg F \vdash F \rightarrow \neg\neg G$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\neg G \rightarrow \neg F$ | | tiền đề |
| 2 | if | $F$ | |
| 2'. | | $\neg\neg F$ | đã cm |
| 3 | nif | $\neg\neg G$ | (MT 1, 2') |
| 4 | $F \rightarrow \neg\neg G$ | | ($\rightarrow$i 2, 3) |

b. $\vdash (G \rightarrow H) \rightarrow ((\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow H))$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | if $G \rightarrow H$ | |
| 2 | if $\neg G \rightarrow \neg F$ | |
| 3 | if $F$ | |
| 4 | if $\neg G$ | |
| 5 | $\neg F$ | ($\rightarrow$e 2, 4) |
| 6 | $F$ | (bản sao 3) |
| 7 | $F \wedge \neg F$ | ($\wedge$i 5, 6) |
| 8 | nif $\perp$ | ($\neg$e 7) |
| 9 | $G$ | (PBC 4, 8) |
| 10 | nif $H$ | ($\rightarrow$e 1, 9) |
| 11 | nif $F \rightarrow H$ | ($\rightarrow$i 3, 10) |
| 12 | nif $(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow H)$ | ($\rightarrow$i 2, 11) |
| 13 | $(G \rightarrow H) \rightarrow ((\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow H))$ | ($\rightarrow$i 1, 12) |

c. $(F \wedge G) \rightarrow H \vdash F \rightarrow (G \rightarrow H)$

1 if $F$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | if | $G$ | |
| 3 | | $F \wedge G$ | ($\wedge$i 1, 2) |
| 4 | | $(F \wedge G) \to H$ | tiền đề |
| 5 | nif | $H$ | ($\to$e 3, 4) |
| 6 | nif | $G \to H$ | ($\to$i 2, 5) |
| 7 | $F \to (G \to H)$ | | ($\to$i 1, 6) |

d. $F \to (G \to H) \vdash (F \wedge G) \to H$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | if | $F \wedge G$ | |
| 2 | | $F$ | ($\wedge$e 1) |
| 3 | | $F \to (G \to H)$ | tiền đề |
| 4 | | $G \to H$ | ($\to$e 2, 3) |
| 5 | | $G$ | ($\wedge$e 1) |
| 6 | nif | $H$ | ($\to$e 4, 5) |
| 7 | $(F \wedge G) \to H$ | | ($\to$i 1, 6) |

e. $F \to G \vdash (F \wedge H) \to (G \wedge H)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \to G$ | | (tiền đề) |
| 2 | if | $F \wedge H$ | |
| 3 | | $F$ | ($\wedge$e 2) |
| 4 | | $H$ | ($\wedge$e 2) |
| 5 | | $G$ | ($\to$e 1, 3) |
| 6 | nif | $G \wedge H$ | ($\wedge$i 4, 5) |
| 7 | $(F \wedge H) \to (G \wedge H)$ | | ($\to$i 2, 6) |

f. $(F \vee G) \vee H \vdash F \vee (G \vee H)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $(F \vee G) \vee H$ | | (tiền đề) |
| 2 | if | $H$ | |
| 3 | | $G \vee H$ | ($\vee$i 2) |
| 4 | nif | $F \vee (G \vee H)$ | ($\vee$i 3) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | if | $F \vee G$ | | |
| 6 | | if | $G$ | |
| 7 | | | $G \vee H$ | ($\vee$i 6) |
| 8 | | nif | $F \vee (G \vee H)$ | ($\vee$i 7) |
| 9 | | if | $F$ | |
| 10 | | nif | $F \vee (G \vee H)$ | ($\vee$i 9) |
| 11 | nif | $F \vee (G \vee H)$ | | ($\vee$e 5, 6, 7, 8, 9, 10) |
| 12 | $F \vee (G \vee H)$ | | | ($\vee$e) |

g. $F \wedge (G \vee H) \vdash (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \wedge (G \vee H)$ | | tiền đề |
| 2 | $F$ | | ($\wedge$e 1) |
| 3 | $G \vee H$ | | ($\wedge$e 1) |
| 4 | if | $G$ | |
| 5 | | $F \wedge G$ | ($\wedge$i 2, 4) |
| 6 | nif | $(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ | ($\vee$i 5) |
| 7 | if | $H$ | |
| 8 | | $F \wedge H$ | ($\wedge$i 2, 7) |
| 9 | nif | $(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ | ($\vee$i 8) |
| 10 | $(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ | | |

h. $F \rightarrow \neg F \vdash \neg F$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \rightarrow \neg F$ | | (tiền đề) |
| 2 | if | $F$ | |
| 3 | | $\neg F$ | ($\rightarrow$e 1, 2) |
| 4 | | $F \wedge \neg F$ | ($\wedge$i 2, 3) |
| 5 | nif | $\perp$ | ($\neg$e 4) |
| 6 | $\neg F$ | | ($\neg$i 2, 5) |

i. $F \rightarrow (G \rightarrow H), F, \neg H \vdash \neg G$ (không dùng luật MT)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F \rightarrow (G \rightarrow H)$ | | (tiền đề) |
| 2 | $F$ | | (tiền đề) |
| 3 | $G \rightarrow H$ | | ($\rightarrow$e 1, 2) |
| 4 | if | $G$ | |
| 5 | | $H$ | ($\rightarrow$e 3, 4) |
| 6 | | $\neg H$ | (tiền đề) |
| 7 | | $\neg H \wedge H$ | ($\wedge$i 5, 6) |
| 8 | nif | $\perp$ | ($\neg$e 7) |
| 9 | $\neg G$ | | ($\neg$i 4, 5) |

j. $(F \wedge \neg G) \rightarrow H, \neg H, F \vdash G$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | if | $\neg G$ | |
| 2 | | $F$ | (tiền đề) |
| 3 | | $F \wedge \neg G$ | ($\wedge$i 1, 2) |
| 4 | | $(F \wedge \neg G) \rightarrow H$ | (tiền đề) |
| 5 | | $H$ | ($\rightarrow$e 3, 4) |
| 6 | | $\neg H$ | (tiền đề) |
| 7 | | $\neg H \wedge H$ | ($\wedge$i 5, 6) |
| 8 | nif | $\perp$ | ($\neg$e 7) |
| 9 | $\neg\neg G$ | | ($\neg$i 1, 8) |
| 10 | $G$ | | ($\neg\neg$e 9) |

2. Cho phát biểu sau : Phương và Quang xem bóng đá. Nếu Quang xem bóng đá thì Rạng xem ca nhạc. Vì vậy Rạng xem ca nhạc.

a. Dịch đoạn văn trên vào luận lý mệnh đề.

b. Chứng minh : $P, Q, R \vdash (P \wedge (Q \wedge R))$

Bài giải

P = Phương xem bóng đá, Q = Quang xem bóng đá. R= Rạng xem ca nhạc.

$$P \wedge Q, Q \rightarrow R \vdash R$$

a. $P \wedge Q, Q \rightarrow R \vdash R$

Chứng minh $P \wedge Q, Q \rightarrow R \vdash R$.

1. $P \wedge Q$ (tiền đề)
2. $Q$ ($\wedge$e 1)
3. $Q \rightarrow R$ (tiền đề)
4. $R$ (MP 1,3)

b. Chứng minh $P, Q, R \vdash (P \wedge Q) \wedge R$

1. $P$ (tiền đề)
2. $Q$ (tiền đề)
3. $R$ (tiền đề)
4. $P \wedge Q$ ($\wedge$i 1, 2)
5. $(P \wedge Q) \wedge R$ ($\wedge$i 1, 2, 3)

## A.4. Bảng thực trị

2. So sánh các công thức sau :

2.1. $\neg(P \rightarrow (\neg Q))$ và $(P \wedge Q)$ 2.2. $(\neg P \rightarrow Q)$ và $(P \vee Q)$

Nhận xét gì về sự liên hệ của các toán tử ?

Bài giải

2.1

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $P \rightarrow (\neg Q)$ | $\neg(P \rightarrow (\neg Q))$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Hai công thức có cùng diễn dịch nên chúng tương đương.

2.2

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \to Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Hai công thức có cùng diễn dịch nên chúng tương đương.

Nhận xét : Toán tử giao và hội có thể được thay thế bằng phủ định và suy ra.

## A.5. Biến đổi và đánh giá công thức

1. Viết ra các công thức sau chỉ dùng $\to$ và $\neg$ :

a. $(P \vee Q) \wedge (Q \to P)$ b. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$

c. $P \vee (P \to Q)$ d. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$

e. $P \vee (Q \to \neg P)$ f. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg(P \to Q)$

Bài giải

a. $(P \vee Q) \wedge (Q \to P)$ $= \neg\neg((P \vee Q) \wedge (Q \to P))$

$= \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(Q \to P))$ $= \neg((P \vee Q) \to \neg(Q \to P))$

$= \neg((\neg P \to Q) \to \neg(Q \to P))$

b. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$ $= \neg\neg(\underline{(\neg P \vee Q)} \wedge \underline{(\neg P \wedge \neg Q)})$

$= \neg(\underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee \underline{\neg(\neg P \wedge \neg Q)}))$ $= \neg((\neg P \vee Q) \to (P \vee Q))$

$= \neg((P \to Q) \to (\neg P \to Q))$

c. $P \vee (P \to Q)$ $= \neg P \to (P \to Q)$

d. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$ $= \neg(P \to (\neg(Q \to P))) \to P$

e. $P \vee (Q \to \neg P)$ $= \neg P \to (Q \to \neg P)$

f. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg(P \to Q)$

$= (\neg P \to \neg Q) \wedge \underline{(P \to Q) \wedge \neg(P \to Q)}$

$= (\neg P \to \neg Q) \wedge 0$ $= 0$ (có thể dừng tại đây)

Hoặc

$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg(P \to Q)$

$= \neg\neg(\neg P \to \neg Q) \wedge (P \to Q) \wedge \neg(P \to Q)$

$= \neg(\underline{\neg(\neg P \to \neg Q)} \vee \underline{\neg(P \to Q)} \vee \underline{(P \to Q)})$

$= \neg(\underline{((\neg P \to \neg Q) \to \neg(P \to Q))} \vee \underline{(P \to Q)})$

$= \neg(\underline{\neg((\neg P \to \neg Q) \to \neg(P \to Q))} \to \underline{(P \to Q)})$

2. Dùng thủ tục số học tính các công thức :

a. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$

b. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$

c. $(P \to Q) \to (Q \to P)$

d. $P \vee (P \to Q)$

e. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$

f. $P \vee (Q \to \neg P)$

g. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \to Q))$

Bài giải

a. $\mu((\neg P \vee Q) \wedge (\neg( P \wedge \neg Q)))$

$= \mu(\neg P \vee Q) \times \mu(\neg(P \vee \neg Q))$

$= [\mu(\neg P) + \mu Q + (\mu(\neg P) \times \mu(Q))] \times [1 + \mu(P \wedge \neg Q)]$

$= [1 + \mu P + \mu Q + ((1+ \mu P) \times \mu Q)] \times [1 + \mu P\,(1 + \mu Q)]$

$= [1 + \mu P + (\mu Q + \mu Q) + \mu P\mu Q] \times [1 + \mu P + \mu P\mu Q)]$

$= [1 + \mu P + 0 + \mu P\mu Q] \times [1 + \mu P + \mu P\mu Q)]$

$= [1 + \mu P + \mu P\mu Q] \times [1 + \mu P + \mu P\mu Q)]$

$= (1 + \mu P + \mu P\mu Q) + (\mu P + \mu P\mu P + \mu P\mu P\mu Q) + (\mu P\mu Q + \mu P\mu P\mu Q + \mu P\mu Q\,\mu P\mu Q)$

$= 1 + \mu P + \mu P\mu Q + (\mu P + \mu P) + (\mu P\mu Q + \mu P\mu Q) + (\mu P\mu Q + \mu P\mu Q)$

$= 1 + \mu P + \mu P\mu Q.$

b. $\mu(( P \to Q) \to ( \neg Q \to \neg P )) = 1.$

c. $\mu((P \to Q) \to (Q \to P)) = 1 + \mu Q + \mu P\mu Q.$

d. $\mu( P \vee ( P \to Q )) = 1.$

e. $\mu( P \wedge ( Q \rightarrow P )) \rightarrow P ) = 1 + \mu P$

f. $\mu( P \vee ( Q \rightarrow \neg P )) = 1$.

g. $\mu(( P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q ) \wedge (\neg( p \rightarrow Q ))) = 0$.

3. Chứng minh sự tương đương của các công thức :

a. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q) = (\neg P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

b. $P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg Q) = \neg P \wedge \neg Q \wedge (P \vee Q)$

c. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) = (P \rightarrow (Q \wedge R))$

d. $P \wedge (P \rightarrow (P \wedge Q)) = \neg P \vee \neg Q \vee (P \wedge Q)$

Bài giải

a. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q) = (\neg P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Vế trái $= \neg(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge Q) = (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

$= P \wedge (\neg Q \vee Q) = P$.

Vế phải $= (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) = (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

$= P \wedge (\neg Q \vee Q) = P$.

b. $P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg Q) = \neg P \wedge \neg Q \wedge (P \vee Q)$

Vế trái $= (P \wedge Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q \wedge \neg Q) = 0$.

Vế phải $= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge Q) = 0$.

c. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) = (P \rightarrow (Q \wedge R))$

Vế trái $= (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) = \neg P \vee (Q \wedge R)$.

Vế phải $= \neg P \vee (Q \vee R)$.

d. $P \wedge (P \rightarrow (P \wedge Q)) = \neg P \vee \neg Q \vee (P \wedge Q)$

Vế trái $= P \wedge (\neg P \vee (P \wedge Q) = (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge (P \wedge Q)) = P \wedge Q$.

Vế phải $= \neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) = 1$.

Không tường đương.

Nhận xét :

Loại bài toán này có thể giải bằng cách lập bảng thực trị hoặc tính bằng phương pháp số học hoặc áp dụng các công thức tương đương biến đổi cho hai vế trùng nhau.

Tuy nhiên, việc biến đổi vế trái thành vế phải (hoặc ngược lại) đôi khi không thực hiện được,

Ví dụ : $(A \vee B) \wedge A = A$.

4. Xác định tính hằng đúng, hằng sai của các công thức :

a. $\neg(\neg S) \rightarrow S$

b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$

c. $(S \rightarrow T) \rightarrow (\neg T \rightarrow \neg S)$

d. $P \vee (P \rightarrow Q)$

e. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow P$

f. $\neg P \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$

g. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C)$.

Bài giải

a. $\neg(\neg S) \rightarrow S = \neg S \vee S$ = hằng đúng.

b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$ = khả đúng , khả sai (kiểm tra bằng bảng thực trị hay phương pháp số học)

Đặt $F = \neg(S \vee T) \vee \neg T$, lấy $\mu S$ = đúng, $\mu T$ = đúng thì $\mu F$ = sai, lấy $\mu S$ = sai, $\mu T$ = sai thì $\mu F$ = đúng.

c. $(S \rightarrow T) \rightarrow (\neg T \rightarrow \neg S) = \neg(S \rightarrow T) \vee (\neg T \rightarrow \neg S)$

$= \neg(\neg S \vee T) \vee (T \vee \neg S)$ = hằng đúng

d. $P \vee (P \rightarrow Q) = P \vee (\neg P \vee Q) = (P \vee \neg P) \vee Q$ = hằng đúng

e. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow P = \neg(P \wedge (\neg Q \vee P)) \vee P = (\neg P \vee (Q \wedge \neg P)) \vee P$

$= \neg P \vee P \vee (Q \wedge \neg P)$ = hằng đúng

f. $\neg P \wedge (\neg(P \rightarrow Q)) = \neg P \wedge (\neg(\neg P \vee Q)) = \neg P \wedge P \wedge \neg Q$ = hằng sai

g. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C)$

$= \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \vee (B \vee C)$

$= \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee C) \vee (B \vee C)$

$= (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee B \vee C$

$= [(\neg A \wedge \neg B) \vee B] \vee [(A \wedge \neg C) \vee C]$

$= [(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)] \vee [(A \vee C) \wedge (\neg C \vee C)]$

$= (\neg A \vee B) \vee (A \vee C)$

$= \neg A \vee B \vee A \vee C = (\neg A \vee A) \vee B \vee C =$ hằng đúng.

## A.6. Diễn dịch - mô hình của công thức

1. Tìm một mô hình cho mỗi công thức :

a. $\neg(\neg S) \to S$, b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$, c. $(S\to T)\to (\neg T\to \neg S)$,

d. $P \vee (P \to Q)$, e. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$, f. $\neg P \wedge (\neg(P \to Q))$,

g. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \to (B \vee C)$.

Bài giải

a. $\neg(\neg S) \to S$, có mô hình I = {S}

b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$, có mô hình I = {S , T}

c. $(S\to T)\to (\neg T\to \neg S)$ , có mô hình I = {S , T}

d. $P \vee (P \to Q)$ , có mô hình I = {P , Q}

e. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$, có mô hình I = {¬P , Q}

f. $\neg P \wedge (\neg(P \to Q))$ Không có mô hình.

g. $((S \vee T) \wedge (\neg S \vee U)) \to (T \vee U)$, có mô hình I = {S , T , U}

Cách giải khác : I = {S, ¬T, A, ¬B, C, P, ¬Q} là mô hình cho các công thức trên từ 1 đến 7.

2. Diễn dịch nào :

$I_1$ = {S}, $I_2$ = {S, ¬T}, $I_3$ = {A, ¬B, C},

$I_4$ = {S, ¬T, A, ¬B, C, P, ¬Q}

là mô hình của các công thức sau :

a. $\neg(\neg S) \to S$ b. $\neg(S\vee T) \vee \neg T$ c. $P \vee (P \to Q)$

d. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ e. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \to (B \vee C)$.

Bài giải

a. $\neg(\neg S) \to S$ — có $I_1$, $I_2$, $I_4$ là mô hình.

b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$ — có $I_2$, $I_4$ là mô hình.

c. $P \vee (P \to Q)$ — có $I_4$ là mô hình.

d. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ — có $I_4$ là mô hình.

e. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \to (B \vee C)$ — có $I_3$, $I_4$ là mô hình.

Chú thích :

Mô hình của công thức phải xác định tất cả công thức nguyên có trong công thức, dù việc xác định giá trị của công thức không cần giá trị của 1 công thức nguyên nào đó. Ví dụ diễn dịch $\{\neg T\}$ cũng làm cho $\neg(S \vee T) \vee \neg T$ đúng, nhưng không phải là mô hình vì thiếu xác định giá trị của S.

3. Tìm mô hình I cho công thức $F = ((A \vee B) \wedge \neg B) \to A$

Mở rộng I để nó cũng là mô hình của $G = ((A \wedge C) \vee \neg C) \to A$.

Bài giải

$I = \{A , \neg B\}$ là mô hình của F.

Mở rộng I thành $I' = \{A , \neg B , \neg C\}$ cũng là mô hình của G .

## A.7. Hằng đúng - hằng sai - khả đúng khả sai

1. Chứng minh các công thức sau là hằng đúng, hằng sai, hay khả đúng khả sai :

a. $\neg(\neg S) \to S$ b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$ c. $(S \to T) \to (\neg T \to \neg S)$

Bài giải

a. $\neg(\neg S) \to S = \neg S \vee S$ : công thưc hằng đúng

Cách khác. Lấy diễn dịch I :

Nếu S đúng trong I thì $\mu(\neg(\neg S) \to S) = \neg(\neg đ) \to đ$ = đúng trong I.

Nếu S sai trong I thì $\mu(\neg(\neg S) \to S) = \neg(\neg s) \to s$ = đúng trong I.

Vậy công thức là hằng đúng.

b. $\neg(S \vee T) \vee \neg T = (\neg S \wedge \neg T) \vee \neg T = (\neg S \vee \neg T) \wedge \neg T$

= khả đúng khả sai.

Cách khác. Lấy diễn dịch I :

Nếu S đúng trong I

Nếu T đúng trong I thì công thức sai trong I.

Nếu T sai trong I thì công thức đúng trong I.

Nếu S sai trong I

Nếu T đúng trong I thì công thức sai trong I

Nếu T sai trong I thì công thức đúng trong I

Vậy CT khả đúng khả sai.

c. $(S \to T) \to (\neg T \to \neg S) = (S \to T) \to (S \to T)$ = hằng đúng.

2. Công thức nào sau đây là hằng đúng :

a. $(P \to P)$

b. $\neg(P \leftrightarrow P)$

c. $(((P \to Q) \wedge (\neg P \to Q)) \to Q)$

d. $(\neg P \to (Q \to P))$

e. $((P \vee Q) \to (\neg Q \to P))$

f. $((\neg P \wedge Q) \wedge (Q \to P))$

g. $(((P \to Q) \to P) \to Q)$.

Bài giải

Công thức a, e là hằng đúng còn lại là khả sai.

## A.8. Hệ quả luận lý

1. Chứng minh $\neg K$ là hệ quả luận lý của hệ thống $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ :

$F_1 = J \to (P \vee T)$,

$F_2 = (K \vee Q) \to J$,

$F_3 = T \to A$,

$F_4 = \neg P \wedge \neg A$.

Bài giải

Cách giải 1 : lập bảng thực trị đánh giá công thức $\{F_1, F_2, F_3, F_4\} \to \neg K$ là hằng đúng.

Cách giải 2 : chuyển thành số học $\{F_1, F_2, F_3, F_4\} \to \neg K$ đánh giá là hằng đúng.

Cách giải 3 : Chứng minh từ các qui tắc suy luận.

Cách giải 4 : chứng minh mô hình của $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ cũng là mô hình của $\neg K$.

2. Công thức nào là hệ quả luận lý của hệ thống $\{A, B, A \to C\}$ :

a. $A \vee B$. b. $A \wedge B$. c. $B \to C$. d. $(A \wedge B) \vee C$.

Bài giải

Hệ thống chỉ có mô hình là $\{A, B, C\}$ nên tất cả công thức 1, 2, 3, 4 đều là hệ quả luận lý của hệ thống.

3. Kiểm tra tương quan hệ quả luận lý của các sequence.

$$\{A, B\} \models ?\ A \vee B$$
$$\{A, B\} \models ?\ A \wedge B$$
$$\{A, B\} \models ?\ A \longrightarrow B$$
$$\{A \vee B, A \wedge B\} \models ?\ A$$
$$\{A \vee B, A \wedge B\} \models ?\ B$$
$$\{A \vee B, A \wedge B\} \models ?\ A \longrightarrow B$$
$$\{B, A \longrightarrow B\} \models ?\ A \vee B$$

Bài giải

Dùng bảng thực trị để kiểm tra.

## A.9. Các dạng chuẩn của công thức

1. Chuyển thành dạng CNF

a. $\neg(P \to Q)$ b. $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

c. $(\neg P \wedge Q) \to R$ d. $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$

e. $(P \to Q) \to R$ f. $P \to ((Q \wedge R) \to S)$

g. $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$ h. $\neg(P \to Q) \vee (P \vee Q)$

i. $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$.

Bài giải

a. $\neg(P \to Q) = \neg(\neg P \vee Q) = P \wedge \neg Q$.

b. $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) = \neg P \wedge Q \wedge (P \vee Q)$

c. $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R = \neg (\neg P \wedge Q) \vee R = (P \vee \neg Q \vee R)$

d. $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q) = (\neg P \vee \neg Q ) \wedge (P \vee Q)$

e. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R = \neg(P \rightarrow Q) \vee R = (P \wedge \neg Q) \vee R = (P \vee R) \wedge (R \vee \neg Q)$

f. $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S) = \neg P \vee (\neg(Q \wedge R) \vee S ) = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S$

g. $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) = ( P \vee Q ) \wedge ( P \vee R )$

h. $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q) = (P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q) = (P \vee Q)$

i. $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) = (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge ( Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q)$

$= ( \neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P)$

Cách làm khác :

$F = \neg(P \rightarrow Q)$

| P | Q | $\neg(P \rightarrow Q)$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | --- | $\neg P \vee \neg Q$ |
| 1 | 0 | 1 | | |
| 0 | 1 | 0 | --- | $P \vee \neg Q$ |
| 0 | 0 | 0 | --- | $P \vee Q$ |

$F = P \wedge \neg Q = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

Chú thích :

Đề b có những kết qủa : $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

$= \neg P \wedge Q \wedge (P \vee Q)$ (dạng CNF)

$= \neg P \wedge (P \vee Q)$ (dạng CNF)

$= (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q)$ (dạng CNF)

## B. Luận lý vị từ

### B.1. Dịch sang luận lý vị từ

1. Dùng các vị từ :

tp(x, y) : x thán phục y, td(x, y) : x tham dự y, tg(x) : x là thầy giáo,

sv(x) : x là sinh viên, bg(x) : x là bài giảng.

Dịch các câu sau sang luận lý vị từ :

a. Minh thán phục mọi thầy giáo. (Minh admires every professor)

b. Một số thầy thán phục Minh. (some professor admires Minh)

c. Minh thán phục chính mình. (Minh admires himself)

d. Không SV nào tham dự mọi bài giảng.

(no student attended every lecture)

e. Không bài giảng nào được tham dự bởi mọi sinh viên

(no lecture was attended by every student)

f. Không bài giảng nào được tham dự bởi bất kỳ 1 sinh viên

(no lecture was attended by any student)

Bài giải

Loại bài tập này phải xác định miền đối tượng D.

a. Minh thán phục mọi thầy giáo :

$$\forall x(\ tg(x) \rightarrow tp(Minh, x)\ ).$$

Cách dịch này đúng nếu hiểu Minh là *ký hiệu hằng*, không còn là phần tử của ngôn ngữ tự nhiên.

$$\forall x(\ tg(x) \rightarrow tp(a, x)\ )$$

Cách dịch này phân biệt được "không gian" logic và thế giới thực.

$$\forall x(tp(M, x) \wedge tg(x))$$

Cách dịch này sai nếu chọn miền D = {x | x là thầy giáo hoặc không là thầy giáo}.

Cách dịch này đúng nếu chọn miền D = {x | x là thầy giáo}.

b. Một số thầy thán phục Minh

$\exists x(\ tg(x) \rightarrow tp(x, M)\ )$ hoặc $\exists x(\ tg(x) \wedge tp(x, M)\ )$

cách dịch này sai nếu miền D = {x | x không là thầy giáo}.

c. Minh thán phục chính mình

tp(Minh, Minh) hoặc tp(a, a)

d. Không sinh viên nào tham dự mọi bài giảng

Thí dụ :

Câu văn trên có thể có nhiều cách hiểu :

$F_1 = \forall x \forall y(\ \underline{sv(x) \wedge bg(y)} \rightarrow \neg td(x, y)\ )$, với $x \in D_1$, $y \in D_2$.

$F_2 = \forall x \forall y(\ \underline{bg(y) \wedge td(x, y)} \rightarrow \neg sv(x)\ )$

$F_3 = \forall x \forall y(\ \underline{sv(x) \wedge td(x, y)} \rightarrow \neg bg(y)\ )$

$F_4 = \forall x \forall y(\ td(x, y) \rightarrow \neg\underline{(sv(x) \wedge bg(y))}\ )$

$F_5 = \forall x \forall y(\ \neg sv(x) \wedge bg(y) \wedge td(x, y)\ )$

$F_6 = \forall x \forall y(\ sv(x) \wedge bg(y) \wedge \neg td(x, y)\ )$

$F_7 = \forall x \forall y(\ sv(x) \wedge \neg bg(y) \wedge td(x, y)\ )$

Các sinh viên : Minh, Trí, chỉ KSV không phải là sinh viên.

Các bài giảng : bh, … , kbh không phải là bài giảng

Trường hợp 1 : $D_1 = \{Minh\}$, $D_2 = \{bh\}$.

Tình trạng 1 : Minh có tham dự bài giảng.

$F_1 = (\ sv(minh) \wedge bg(bh) \rightarrow \neg td(minh, bh)\ ) = (đ \wedge đ) \rightarrow \neg đ = s. \Longrightarrow F_1$ sai.

$F_2 = (\ bg(bh) \wedge td(minh, bh) \rightarrow \neg sv(minh)\ ) = (đ \wedge đ) \rightarrow \neg đ = s. \Longrightarrow F_2$ sai.

$F_3 = (\ sv(minh) \wedge td(minh, bh) \rightarrow \neg bg(bh)\ ) = (đ \wedge đ) \rightarrow \neg đ = s. \Longrightarrow F_3$ sai.

$F_4 = (td(minh, bh) \rightarrow \neg(sv(minh) \wedge bg(bh))) = đ \rightarrow \neg(đ \wedge đ) = s. \Longrightarrow F_4$ sai.

$F_5 = (\ \neg sv(minh) \wedge bg(bh) \wedge td(minh, bh)\ ) = \neg đ \wedge đ \wedge đ = s. \Longrightarrow F_5$ sai.

$F_6 = (\ sv(minh) \wedge bg(bh) \wedge \neg td(minh, bh)\ ) = đ \wedge đ \wedge \neg đ = s. \Longrightarrow F_6$ sai.

$F_7 = (\ sv(minh) \wedge \neg bg(bh) \wedge td(minh, bh)\ ) = đ \wedge \neg đ \wedge đ = s. \Longrightarrow F_4$ sai.

$\Longrightarrow$ Không có $F_i$ nào đúng trong $D_1$ và $D_2$.

Tình trạng 2 : Minh không tham dự bài giảng nào.

$F_1 = (sv(minh) \wedge bg(bh) \rightarrow \neg td(minh, bh)) = (đ \wedge đ) \rightarrow \neg s = đ. \Longrightarrow F_1$ đúng.

$F_2 = (\ bg(bh) \wedge td(minh, bh) \rightarrow \neg sv(minh)\ ) = (đ \wedge s) \rightarrow \neg đ = đ. \Longrightarrow F_2$ đúng.

$F_3 = (sv(minh) \wedge td(minh, bh) \rightarrow \neg bg(bh)) = (đ \wedge s) \rightarrow \neg đ = đ. \Longrightarrow F_3$ đúng.

$F_4 = (td(minh, bh) \rightarrow \neg(sv(minh) \wedge bg(bh))) = s \rightarrow \neg(đ \wedge đ) = đ. \Longrightarrow F_4$ đúng.

$F_5 = (\ \neg sv(minh) \wedge bg(bh) \wedge td(minh, bh)\ ) = \neg đ \wedge đ \wedge s = s$. Do đo $F_5$ sai.

$F_6$ = (sv(minh) ∧ bg(bh) ∧ ¬td(minh, bh) ) = đ ∧ đ ∧ ¬s = đ. Do đo $F_6$ đúng.

$F_7$ = ( sv(minh) ∧ ¬bg(bh) ∧ td(minh, bh) ) = đ ∧ ¬đ ∧ s = s. Do đo $F_7$ sai.

⟹ Chỉ $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_6$ đúng trong $D_1$ và $D_2$.

Trường hợp 2 : $D_1$ = {Minh, KSV}, $D_2$ = {bg, kbg}

Tình trạng 1 : Minh tham dự bài giảng và KSV có tham gia hay không không ảnh hưởng.

$F_1$ = ( sv(minh) ∧ bg(bh) → ¬td(minh, bh) ) = (đ ∧ đ) → ¬đ = s. ⟹ $F_1$ sai.

$F_2$ = ( bg(bh) ∧ td(minh, bh) → ¬sv(minh) ) = (đ ∧ đ) → ¬đ = s. ⟹ $F_2$ sai.

$F_3$ = ( sv(minh) ∧ td(minh, bh) → ¬bg(bh) ) = (đ ∧ đ) → ¬đ = s. ⟹ $F_3$ sai.

$F_4$ = (td(minh, bh) → ¬(sv(minh) ∧ bg(bh)) ) = đ → ¬(đ ∧ đ) = s. ⟹ $F_4$ sai.

$F_5$ = ( ¬sv(minh) ∧ bg(bh) ∧ td(minh, bh) ) = ¬đ ∧ đ ∧ đ = s. ⟹ $F_5$ sai.

$F_6$ = ( sv(minh) ∧ bg(bh) ∧ ¬td(minh, bh) ) = đ ∧ đ ∧ ¬đ = s. ⟹ $F_6$ sai.

$F_7$ = ( sv(minh) ∧ ¬bg(bh) ∧ td(minh, bh) ) = đ ∧ ¬đ ∧ đ = s. ⟹ $F_7$ sai.

⟹ Không có $F_i$ nào đúng trong $D_1$ và $D_2$.

Tình trạng 2 : Minh và KSV không tham dự cả bài giảng và không phải bài giảng.

$F_1$ = ( sv(minh) ∧ bg(bh) → ¬td(minh, bh) ) = (đ ∧ đ) → ¬s = đ.

$F_1$ = ( sv(minh) ∧ bg(kbh) → ¬td(minh, kbh) ) = (đ ∧ s) → ¬s = đ.

$F_1$ = ( sv(KSV) ∧ bg(bh) → ¬td(KSV, bh) ) = (s ∧ đ) → ¬s = đ.

$F_1$ = ( sv(KSV) ∧ bg(kbh) → ¬td(KSV, kbh) ) = (s ∧ s) → ¬s = đ.

Do đo $F_1$ đúng.

$F_2$ = ( bg(bh) ∧ td(minh, bh) → ¬sv(minh) ) = (đ ∧ s) → ¬đ = đ.

$F_2$ = ( bg(kbh) ∧ td(minh, kbh) → ¬sv(minh) ) = (s ∧ s) → ¬đ = đ.

$F_2$ = ( bg(bh) ∧ td(KSV, bh) → ¬sv(KSV) ) = (đ ∧ s) → ¬s = đ.

$F_2$ = ( bg(kbh) ∧ td(KSV, kbh) → ¬sv(KSV) ) = (s ∧ s) → ¬s = đ.

Do đo $F_2$ đúng.

$F_3$ = ( sv(minh) ∧ td(minh, bh) → ¬bg(bh) ) = (đ ∧ s) → ¬đ = đ.

$F_3$ = ( sv(minh) ∧ td(minh, kbh) → ¬bg(kbh) ) = (đ ∧ s) → ¬s = đ.

$F_3$ = ( sv(KSV) ∧ td(KSV, bh) → ¬bg(bh) ) = (s ∧ s) → ¬đ = đ.

$F_3$ = ( sv(KSV) ∧ td(KSV, kbh) → ¬bg(kbh) ) = (s ∧ s) → ¬s = đ.

Do đo $F_3$ đúng.

$F_4$ = ( td(minh, bh) → ¬(sv(minh) ∧ bg(bh)) ) = s → ¬(đ ∧ đ) = đ.

$F_4$ = ( td(minh, kbh) → ¬(sv(minh) ∧ bg(kbh)) ) = s → ¬(đ ∧ s) = đ.

$F_4$ = ( td(KSV, bh) → ¬(sv(KSV) ∧ bg(bh)) ) = s → ¬(s ∧ đ) = đ.

$F_4$ = ( td(KSV, kbh) → ¬(sv(KSV) ∧ bg(kbh)) ) = s → ¬(s ∧ s) = đ.

Do đo $F_4$ đúng.

$F_5$ = ( ¬sv(minh) ∧ bg(bh) ∧ td(minh, bh) ) = ¬đ ∧ đ ∧ s = s.

Do đo $F_5$ sai.

$F_6$ = ( sv(minh) ∧ bg(bh) ∧ ¬td(minh, bh) ) = đ ∧ đ ∧ ¬s = đ.

$F_6$ = ( sv(minh) ∧ bg(kbh) ∧ ¬td(minh, kbh) ) = đ ∧ s ∧ ¬s = s.

Do đo $F_6$ sai.

$F_7$ = ( sv(minh) ∧ ¬bg(bh) ∧ td(minh, bh) ) = đ ∧ ¬đ ∧ đ = s.

Do đo $F_7$ sai.

⟹ Chỉ $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ đúng trong $D_1$ và $D_2$.

Tổng kết : Chọn cách dịch $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, vì đúng ở nhiều miền trị hơn.

Nhận xét :

Phát biểu trên có thể hiểu theo cách khác :

$F_{1'}$ = ∀x∃y( sv(x) ∧ bg(y) → ¬td(x,y)), tương tự với $F_{2'}$, $F_{3'}$, … .

e. Không bài giảng nào được tham dự bởi mọi sinh viên.

∀y∃x(bg(y) ∧ sv(x) → ¬td(y, x))

f. Không bài giảng nào được tham dự bởi bất kỳ 1 sinh viên.

∀x∀y(bg(y) ∧ sv(x) → ¬td(y, x))

Nhận xét :

Bài "f. Không bài giảng nào được tham dự bởi bất kì 1 sinh viên", được dịch theo cách sau

$\forall x\ (\ bg(x) \rightarrow \forall y\ (sv(y) \rightarrow \neg td(y, x))\ )$.

Xem lại các bài a. đến e. dịch theo các hai điều kiện lồng ghép và kiểm tra lại trên các miền đối tượng.

2. Câu "Minh thán phục mọi thầy giáo" ở trên được dịch thành "$\forall x\ tp(minh, tg(x))$" sai vì lý do gì ? (về phương diện cú pháp và ngữ nghĩa). Có thể sửa lại để câu trên trở thành đúng ?.

Bài giải

Công thức $\forall x\ tp(minh, tg(x))$ có hai ý sai : thứ nhất, vị Từ không được làm tham số của hàm vị từ khác - vị từ tg(_) là tham số của vị từ tp(_,_), thứ hai hằng "minh" là từ ngữ trong thế giới ứng dụng phải chuyển thành hằng trong thế giới logic. Câu đúng là $\forall x(tg(x) \rightarrow tp(a, x))$.

3. Dịch các câu vị từ sau thành câu tự nhiên :

3.1 $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge sv(x) \wedge bg(y))$

3.2. $\forall x \forall y\ (\neg td(x, y) \wedge sv(x) \wedge bg(y))$

3.3. $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge \neg sv(x) \wedge bg(y))$

3.4. $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge sv(x) \wedge \neg bg(y))$

3.5. $\forall x \forall y\ (\neg td(x, y) \wedge \neg sv(x) \wedge bg(y))$

3.6. $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge \neg sv(x) \wedge \neg bg(y))$

3.7. $\forall x \forall y\ (\neg td(x, y) \wedge \neg sv(x) \wedge \neg bg(y))$

Làm lại bài trên bằng cách thay $\forall\forall$ bằng $\forall\exists$ hay $\exists\forall$ hay $\exists\exists$.

Bài giải

3.1 $\forall x \forall y\ (td(x, y) \wedge sv(x) \wedge bg(y))$

Bước 1 dịch thô (dịch bình thường theo trật tự của công thức) : với mọi x, với mọi y, x tham dự y, x là sinh viên, y là bài giảng.

Bước 2 chỉnh lại thành câu tự nhiên (tùy vào trình độ “văn chương” của người dịch, hoặc giữ ở dạng câu “thô” cũng không sai): Mọi sinh viên tham dự mọi bài giảng. Mọi bài giảng được tham dự bởi mọi sinh viên. …

Như vậy có thể viết chương trình tự động dịch các công thức thành câu “tự nhiên” rồi sau đó làm cho nó trở thành thật sự “tự nhiên”. !!!

Các câu còn lại giải tương tự.

4. Dịch các câu vị từ sau thành câu tự nhiên :

a. $\forall x \forall y\ td(x, y) \land \forall x\ sv(x) \land \forall y\ bg(y)$

b. $\forall x \forall y\ td(x, y) \land \forall x\ \neg sv(x) \land \forall y\ bg(y)$

c. $\forall x \forall y\ \neg td(x, y) \land \forall x\ \neg sv(x) \land \forall y\ bg(y)$

d. $\forall x \forall y\ \neg td(x, y) \land \forall x\ sv(x) \land \forall y\ \neg bg(y)$

e. $\forall x \forall y\ \neg td(x,y) \land \forall x\ \neg sv(x) \land \forall y\ \neg bg(y)$

f. $\neg\ (\forall x \forall y\ td(x, y) \land \forall x\ sv(x) \land \forall y\ bg(y))$

g. $\exists x\ \exists y\ (\neg(x = y) \land \forall z\ ((z = x) \lor (z = y))))$.

5. Dịch các câu sau thành luận lý vị từ :

a. Tất cả vật màu đỏ ở trong hộp.

b. Chỉ những vật màu đỏ ở trong hộp.

c. Không có con vật nào vừa là mèo và vừa là chó.

d. Một đứa con trai giật mọi giải thưởng.

Bài giải

a. Tất cả vật màu đỏ ở trong hộp.

$\forall x\ (Đỏ(x) \rightarrow Hộp(x))$

b. Chỉ những vật màu đỏ ở trong hộp.

$\forall x\ (Hộp(x)) \rightarrow Đỏ(x))$

c. Không có con vật nào vừa là mèo và vừa là chó.

$\forall x\ (\ (Mèo(x) \rightarrow \neg\ Chó(x)) \lor (Chó(x) \rightarrow \neg\ Mèo(x))$

d. Một đứa con trai giật mọi giải thưởng.

$\forall x(\text{giải\_thưởng}(x) \rightarrow \text{giật\_giải}(a, x))$

6. Dùng các vị từ sau để dịch các câu.

b(x, y) : x đánh bại y, f(x) : x là một đội bóng đá.

q(x, y) : x là tiền vệ của y, l(x, y) : x thua y.

a. Mọi đội bóng có tiền vệ.

b. Nếu MU đánh bại Chelsea thì MU không thua mọi đội bóng (khác).

c. Chelsea đánh bại một số đội bóng mà nó đánh bại MU.

Bài giải

a. Mọi đội bóng có tiền vệ.

$\forall x(f(x) \rightarrow \exists y(q(y, x)))$

tình trạng 1 : đội bóng + có tiền vệ

tình trạng 2 : đội bóng + không có tiền vệ

tình trạng 3 : không là đội bóng + có tiền vệ

tình trạng 4 : không là đội bóng + không có tiền vệ

tình trạng 5 : miền đối tượng bằng rỗng.

Có nhiều cách dịch khác, để chọn cách dịch nào "tốt" bằng cách xem công thức thỏa những tình trạng nào.

b. Nếu MU đánh bại Chelsea thì MU không thua mọi đội bóng (khác).

b(MU, Chelsea $\rightarrow \forall x$ l(x, MU) cách dịch này sai (vì không thua là thắng hoặc hòa)

b(MU, Chelsea) $\rightarrow \forall x(\neg$b(x, MU)) (ok)

l(Chelsea, MU) $\rightarrow \forall x \neg$l(MU, x) (ok)

để chính xác hơn cần thêm vị từ is(x, y) (nghĩa là x là y)

$[f(MU) \wedge f(Chelsea) \wedge l(Chelsea, MU)] \rightarrow$

$$[\forall x\ (f(x) \wedge \neg is(x, MU)) \rightarrow l(x, MU)]$$

chính xác hơn nữa gọi các hằng m là MU, c là Chelsea.

$f(m) \wedge f(c) \wedge l(c, m) \rightarrow [\forall x\ (f(x) \wedge \neg is(x, m)) \rightarrow l(x, m)]$

đơn giản hơn nếu gọi các hằng m là đội bóng MU, c là đội bóng Chelsea thì dịch là

$l(c, m) \to [\forall x\, (f(x) \wedge \neg is(x, m)) \to l(x, m)]$

c. Chelsea đánh bại một số đội bóng mà nó đánh bại MU.

$\exists x\, (f(x) \wedge b(Chelsea, x) \wedge b(x, MU))$, hoặc

$\exists x\, ((f(x) \wedge l(MU, x)) \to b(chelsea, x))$, hoặc

$f(MU) \wedge f(Chelsea) \wedge \exists x\, [\, f(x) \wedge (\, b(x, MU) \to b(Chelsea,x)\,)\,]$

(trường hợp đội bóng x đánh bại cả MU và Chelsea cũng làm cho công thức đúng, vì chỉ cần có một số đội bóng đánh bại MU thì Chelsea phải đánh bại nó, không cần tất cả đội bóng đánh bại MU thì Chelsea phải đánh bại)

7. Chỉ dùng các vị từ cha(x, y), me(x, y), chồng(x, y), anh(x, y), chị(x, y) để dịch các câu sau :

a. Mọi người có một mẹ. b. Bất cứ ai có một mẹ thì có một cha.

c. Minh đã là ông nội. d. Cậu không phải là dì.

Bài giải

a. Mọi người có một mẹ. $\forall y \exists x\, [me(x, y) \wedge \forall z\, (me(z, y) \to z = x\,)]$

hoặc

$\forall y\, [\exists x\, mẹ(x, y) \wedge \forall z\, \neg mẹ(z, y)]$

b. Bất cứ ai có một mẹ thì có một cha.

$\forall x\, (\exists m\, (me(m, x)) \to \exists c\, (cha(c, x)))$ (chỉ là có cha, chưa có ý "có một cha")

$\forall x \exists m \exists c \forall m' \forall c'\, [(me(m, x) \wedge \neg me(m', x)) \to (cha(c, x) \wedge \neg\, cha(c', x))]$

c. Minh đã là ông nội.

$\exists x \exists y\, (cha(Minh, x) \wedge cha(x, y))$

d. Cậu không phải là dì.

Cậu có thể là anh hay em của mẹ, Dì có thể là chị hay em của mẹ.

Cậu là anh của mẹ : $F = \forall x \exists y \exists z(me(y, x) \wedge anh(z, y))$

Cậu là em trai của mẹ : $G = \forall x \exists y \exists z(me(y, x) \wedge chi(y, z) \wedge nam(z))$

Dì là chị của mẹ : $H = \forall x \exists y \exists w(me(y, x) \wedge chị(w, y))$

Dì là em gái của mẹ : $K = \forall x \exists y \exists w(me(y, x) \wedge chi(y, w) \wedge nữ(w))$

$(F \wedge H \rightarrow y \neq w) \vee (F \wedge K \rightarrow y \neq w) \vee (G \wedge H \rightarrow y \neq w) \vee$
$(G \wedge K \rightarrow y \neq w)$

8. Dịch sang luận lý vị từ :

a. Có đúng 3 phần tử phân biệt.

b. Có nhiều nhất 3 phần tử phân biệt.

c. Chỉ một số hữu hạn các phần tử phân biệt.

Bài giải

a. Có đúng 3 phần tử phân biệt.

Đặt eq(x, y) = ‘x trùng với y’

$\exists x\ \exists y\ \exists z\ (\neg eq(x, y) \wedge \neg eq(x, z) \wedge \neg eq(y, z))$,

(có thể có phần tử thứ 4)

$\exists x\ \exists y\ \exists z\ [(\neg eq(x, y) \wedge \neg eq(x, z) \wedge \neg eq(y, z))] \wedge$
$[\forall t\ (eq(t, x) \vee eq(t, y) \vee eq(t, z)]$

Đặt eq(x, y) = ‘x trùng với y’

b. Có nhiều nhất 3 phần tử phân biệt.

$E = \exists x \exists y \exists y \forall t\ [(\neg eq(x, y) \wedge \neg eq(x, z) \wedge \neg eq(y, z))] \wedge$
$[(eq(t, x) \vee eq(t, y) \vee eq(t, z)]$

$F = \exists x \exists y \forall t\ [\neg eq(x, y) \wedge (eq(t, x) \vee eq(t, y))]$

$G = \exists x \forall t\ eq(t, x)$

$E \vee F \vee G$.

Diễn đạt khác :

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)\ [eq(x, y) \vee eq(x, z) \vee eq(x, w) \vee eq(y, z) \vee eq(y, w)$
$\vee eq(z, w)] \wedge [(\forall t)(eq(t, x) \vee eq(t, y) \vee eq(t, z) \vee eq(t, w))]$

c. Chỉ một số hữu hạn các phần tử phân biệt.

$\forall n\ \forall i\ \forall j\ [\ (less(i, n) \wedge less(j, n) \wedge \neg eq(i, j)) \rightarrow \neg eq(x_i, x_j)\ ]$

$\exists n\ \forall i\ \forall j\ ((i < n) \wedge (j < n) \wedge \neg(i = j) \wedge \neg(x_i = x_j) \wedge (\forall x)(\exists k)\ ((k < n) \wedge$
$eq(x, x_k))$

## B.2. Suy luận tự nhiên trong luận lý vị từ

0. Chứng minh các định lý trong phần giáo khoa.

1. Chứng minh :

a. $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

b. $t_1 = t_2 \vdash (t + t_2) = (t + t_1)$

c. $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \rightarrow ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

Bài giải

1. Chứng minh :

a. $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

Đặt $(x = y)$ là $eq(x, y)$

Viết lại đề bài : $eq(y, 0) \wedge eq(y, x) \vdash eq(0, x)$

1. $eq(y, 0)$ (tiền đề)
2. $eq(0, y)$ (eq giao hoán (đã cm))
(coi F là $eq(0, z))$ với biến z thay bằng y)
3. $eq(y, x)$ (tiền đề)
4. $eq(0, x)$ (thay biến z bằng x)

b. $t_1 = t_2 \vdash (t + t_2) = (t + t_1)$

Đặt $F = eq(t + x, t + t_1)$

1. $eq(t_1, t_2)$ (tiền đề)
2. $eq(t + t_1, t + t_1)$ $(=i)\ (=F[t_1/x])$
3. $eq(t + t_2, t + t_1)$ $(=i)\ (=F[t_2/x])$

c. $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \rightarrow ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

1. $(x = 0) \vee ((x + x) > 0$ (tiền đề)

Đặt $F = eq(t + x, y)$, $G = greater(t, 0)$

2. if (x = 0) /* eq(x, 0) */

3. if (y = (x + x)) /* eq(y, x+x) */

4. eq(x, 0) (id 2)

5. eq(x + x, y) (id 3 (=F[x/t]))

6. eq(0 + x, y) ((=e) (=F[0/t]))

7. eq(0 + x, y) $\vee$ (y > 0) ($\vee$i 6)

7. nif (y = (x + x)) $\to$ (y = (0 + x)) $\vee$ (y > 0) ($\to$i 3-6)

8. nif (y = (x + x)) $\to$ ((y > 0) $\vee$ (y = (0 +x)))

9. if ((x + x) > 0)

10. if (y = (x + x))

11. nif y > 0 (id 10 (=G[(x + x)/t))

12. (y = (x + x) $\to$ (y > 0)) ($\to$i 11, 12)

13. nif (y = (x + x)) $\to$ ((y > 0) $\vee$ (y = (0 +x)) ($\vee$i 13)

15. (y = (x + x)) $\to$ ((y > 0) $\vee$ (y = (0 +x)))

2. Chứng minh :

a. $F \to (q_1 \wedge q_2) \vdash (F \to q_1) \wedge (F \to q_2)$ (trong LLMĐ)

b. $F \to \forall x\, q(x) \vdash \forall x\, (F \to q(x))$ (với x không tự do trong F).

c. $\forall x\, (p(x) \to q(x)) \vdash \forall x\, p(x) \to \forall x\, q(x)$.

Bài giải

a. $F \to (q_1 \wedge q_2) \vdash (F \to q_1) \wedge (F \to q_2)$ (trong LLMĐ)

1. $F \to (q_1 \wedge q_2)$ (tiền đề)
2. If F
3. $(q_1 \wedge q_2)$ ($\to$e 1, 2)
4. nif $q_1$ ($\wedge$e)
5. $F \to q_1$ ($\to$i 2, 4)
6. if F
7. $(q_1 \wedge q_2)$ ($\to$e 1, 6)

8. nif $q_2$ ($\wedge$e)

9. $F \rightarrow q_2$ ($\rightarrow$ I 6, 8)

10. $(F \rightarrow q_1) \wedge (F \rightarrow q_2)$ ($\wedge$i 5, 9)

b. $F \rightarrow \forall x\, q(x) \vdash \forall x\, (F \rightarrow q(x))$ (với x không tự do trong F).

1. if $x_0$
2. $F \rightarrow \forall x\, q(x)$ (tiền đề)
3. if $F$
4. $\forall x\, q(x)$ ($\rightarrow$e 2,3)
5. nif $q(x_0)$ ($\forall$e 4)
6. nif $F \rightarrow q(x_0)$
7. $\forall x\, (F \rightarrow q(x))$ ($\forall$i 1,6)

c. $\forall x\, (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash \forall x\, p(x) \rightarrow \forall x\, q(x)$.

1. if $\forall x\, p(x)$
2. if $x_0$
3. $\forall x\, (p(x) \rightarrow q(x))$ (tiền đề)
4. $p(x_0) \rightarrow q(x_0)$ ($\forall$e 3)
5. $p(x_0)$ ($\forall$e 1)
6. nif $q(x_0)$ ($\rightarrow$e 4, 5)
7. nif $\forall x\, q(x)$ ($\forall$i 2, 6)
8. $\forall x\, p(x) \rightarrow \forall x\, q(x)$

3. Chứng minh :

a. $\forall x\, p(x) \vdash \forall y\, p(y)$

b. $\forall x\, (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash (\forall x\, \neg q(x)) \rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

c. $\forall x\, (p(x) \rightarrow \neg q(x)) \vdash \neg(\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$

Bài giải

a. $\forall x\, p(x) \vdash \forall y\, p(y)$

1. $\forall x\, p(x)$ (tiền đề)

2. if $y_0$

3. nif $p(y_0)$ ($\forall$e1)

4. $\forall y\, p(y)$

b. $\forall x\, (p(x) \to q(x)) \vdash (\forall x\, \neg q(x)) \to (\forall x\, \neg p(x))$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\forall x\, (p(x) \to q(x))$ | | | (tiền đề) |
| 2. | if | $(\forall x\, \neg q(x))$ | | |
| 3. | | if | $x_0$ | |
| 4. | | | $p(x_0) \to q(x_0)$ | ($\forall$e 1) |
| 5. | | | $\neg q(x_0)$ | ($\forall$e 2) |
| 6. | | nif | $\neg p(x_0)$ | (Modus Tolens 4,5) |
| 7. | nif | $\forall x\, \neg p(x)$ | | ($\forall$i 3-6) |
| 8. | $(\forall x\, \neg q(x)) \to (\forall x\, \neg p(x))$ | | | |

c. $\forall x\, (p(x) \to \neg q(x)) \vdash \neg(\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\forall x\, (p(x) \to \neg q(x))$ | | | | (tiền đề) |
| 2. | if | $(\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$ | | | |
| 3. | | if | $x_0$ | $p(x_0) \wedge q(x_0)$ | |
| 4. | | | $p(x_0) \to \neg q(x_0)$ | | ($\forall$e 1) |
| 5. | | | $p(x_0)$ | | ($\wedge$e 3) |
| 6. | | | $q(x_0)$ | | ($\wedge$e 3) |
| 7. | | | $\neg q(x_0)$ | | ($\to$e 4,5) |
| 8. | | nif | $\perp$ | | ($\neg$e 6,7) |
| 9. | nif | $\perp$ | | | ($\exists$e 2, 3-8) |
| 10. | $\neg(\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$ | | | | ($\neg$i 2,9) |

## B.3. Ngữ nghĩa của luận lý vị từ

1. Thế giới thật có các đối tượng sau :

D = { ▲, ●, ■, ♦ }, hằng : cMinh, hàm : fnón(_).

Vị từ : ptrên(_,_), ptròn(_), pvuông(_), pthoi(_).

Cho 1 diễn dịch I :

D = {▲, ●, ■, ♦}, cMinh = ▲.

ptrên = {(■, ▲), (●, ♦)}. ptròn = {●}.

pthoi = {■, ♦}. pvuông = {■}.

fnón = {(▲, ●), (♦, ■), (●, ●), (■, ■)}

a. Hãy đánh giá các công thức sau trong diễn dịch I :

pvuông(cMinh),

ptrên(cMinh, fnón(cMinh)),

$\exists x$ pvuông(x),

$\forall x\, \exists y$ (ptrên(x, y) $\rightarrow$ ptrên(y, x)).

b. Chứng minh Knowledge Base (KB) dẫn xuất H :

KB : $\forall x$ ( pvuông(x) $\rightarrow$ pthoi(x)) $\wedge$ ($\forall x$)( ptròn(x) $\rightarrow \neg$ pthoi(x)).

H = $\forall x$ ( ptròn(x) $\rightarrow \neg$ pthoi(x)).

Bài giải

a. Đánh giá các công thức sau trong diễn dịch I :

| | |
|---|---|
| pvuông(cMinh) | sai trong diễn dịch I. |
| ptrên(cMinh, fnón(cMinh)) | sai trong diễn dịch I. |
| $\exists x$ pvuông(x) | đúng trong diễn dịch I. |
| $\forall x\, \exists y$ (ptrên(x, y) $\rightarrow$ ptrên(y, x)) | đúng trong diễn dịch I. |

b. Chứng minh Knowledge Base (KB) dẫn xuất H :

Viết lại KB :

$\forall x$( pvuông(x) $\rightarrow$ pthoi(x)) $\wedge$ $\forall x$( ptròn(x) $\rightarrow \neg$ pthoi(x)) $\models$

$\forall x$( ptròn(x) $\rightarrow \neg$ pthoi(x))

Cách 1:

Xét 1 mô hình I của KB.

Khi đó $\forall x$( pvuông(x) $\rightarrow$ pthoi(x)) đúng và $\forall x$( ptròn(x) $\rightarrow$ $\neg$ pthoi(x)) đúng.

Do đó H là đúng.

Vậy KB $\models$ H.

Cách 2:

1. $\forall x(\text{ pvuông}(x) \rightarrow \text{pthoi}(x)) \wedge \forall x(\text{ ptròn}(x) \rightarrow \neg \text{ pthoi}(x))$ (tiền đề)

2. $\forall x\ (\text{ ptron}(x) \rightarrow \neg\text{pthoi}(x)\ )$ $\wedge$e 1

3. Vậy KB $\models$ H.

## B.4. Đánh giá công thức luận lý vị từ

1. Cho diễn dịch I có : D = {a, b}, {p(a, a), ¬p(a, b), ¬p(b, a), p(b, b)}.

Đánh giá các công thức sau :

a. $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$ b. $\forall x\ \forall y\ p(x, y)$ c. $\exists x\ \forall y\ p(x, y)$

d. $\exists y\ \neg p(a, y)$ e. $\forall x\ \forall y\ (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$ f. $\forall x\ p(x, x)$

Bài giải

a. $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$

Lấy x = a, có y = a : p(a, a) đúng. Lấy x = b, có y = b : p(b, b) đúng.

Vậy $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$ đúng trong diễn dịch I.

b. $\forall x\ \forall y\ p(x, y)$

Lấy x = a và y = a : p(a, a) sai. Vậy $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$ sai trong diễn dịch I.

c. $\exists x\ \forall y\ p(x, y)$ sai trong diễn dịch I.

d. $\exists y\ \neg p(a, y)$ đúng trong diễn dịch I.

e. $\forall x\ \forall y\ (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$ đúng trong diễn dịch I.

f. $\forall x\ p(x, x)$ đúng trong diễn dịch I.

2. Tìm diễn dịch trên D = {a, b} để công thức F = $\forall x\ \forall y\ (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$ có giá trị sai.

Bài giải

Cho diễn dịch trên D :

I = {p(a, a), p(a, b), ¬p(b, a), p(b, b)}.

Lấy x = a, y = b : $p(a, b) \rightarrow p(b, a)$

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

Vậy F sai trong I.

3. Cho diễn dịch I có : D = {1, 2}, a = 1, b = 2, f(1) = 2, f(2) = 1,

{p(1, 1), p(1, 2), ¬p(2, 1), ¬p(2, 2)}.

Đánh giá công thức sau trong diễn dịch I :

a. $p(a, f(a)) \wedge p(b, f(b))$ b. $\forall x\ \exists y\ p(y, x)$

c. $\forall x\ \forall y\ (p(x, y) \rightarrow p(f(x), f(y)))$.

Bài giải

Đánh giá công thức sau trong diễn dịch I :

a. $p(a, f(a)) \wedge p(b, f(b))$

$$p(1, 2) \wedge p(2, 1)$$

$$1 \wedge 0 = 0$$

Vậy công thức sai trong diễn dịch I.

b. $\forall x\ \exists y\ p(y, x)$

Lấy x = 1 :

Lấy y = 1 : p(1, 1) = 1

Lấy y = 2 : Không cần xét

Lấy x = 2 :

Lấy y = 1 : p(1, 2) = 1

Lấy y = 2 : Không cần xét

Vậy công thức đúng trong diễn dịch I.

c. $\forall x\ \forall y\ (p(x, y) \rightarrow p(f(x), f(y)))$.

Lấy x = 1 :

Lấy y = 1 : $p(1, 1) \rightarrow p(2, 2)$

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

Các trường hợp còn lại không cần xét.

Vậy công thức sai trong diễn dịch I.

4. Cho biết F = ∃x H → H[a/x] có hằng đúng hay không với a là hằng.

Bài giải

Để chứng minh không hằng đúng chỉ cần tìm một diễn dịch để nó sai.

Lấy H = p(x), chọn D = {1, 2}, a = 2, {p(1), ¬p(2)}.

Với x = 1, p(1) đúng nên ∃x p(x) đúng, nhưng p(2) sai.

Vậy F sai trong dd này.

## B.5. Dạng chuẩn của công thức luận lý vị từ

1. Tìm dạng chuẩn Prenex của các công thức :

a. ¬(∀x p(x)) → ∃y ∀z q(y, z) b. ¬(∀x p(x) → ∃y p(y)).

c. ∀x ∀y (∃z p(x, y, z) ∧ (∃u q(x, u) → ∃v q(y, v))).

Bài giải

a. ¬(∀x p(x)) → ∃y∀z q(y, z)

(∀x p(x)) ∨ ∃y∀z q(y, z)

∀x∃y∀z (p(x) ∨ q(y, z)) hoặc ∃y∀z∀x (p(x) ∨ q(y, z))

b. ¬(∀x p(x) → ∃y p(y))

∀x p(x) ∧ ∀y¬p(y)

∀x∀y (p(x) ∧ ¬p(y))

c. ∀x ∀y (∃z p(x, y, z) ∧ (∃u q(x, u) → ∃v q(y, v))).

∀x ∀y (∃z p(x, y, z) ∧ (∀u ¬q(x, u) ∨ ∃v q(y, v))).

∀x∀y∃z∀u∃v (p(x, y, z) ∧ (¬q(x, u) ∨ q(y, v))).

2. Chuyển về dạng chuẩn Skolem :

a. F = ∀x∀y ((M(x, y) ∧ N(x, y)) → ∃x N(x, y))

b. H = ¬(∀x (p(x) → ∃y∀z q(y, z)))

c. G = ∀x∀y (∃z K(x, y, z) ∧ ∃v (H(y, v)→∃u H(u, v)))

d. K = ∀x (¬ e(x, 0) → (∃y ( e(y, g(x)) ∧ ∀z (e(z, g(x)) → e(y, z)) )))

Bài giải

a. F = ∀x∀y ((M(x, y) ∧ N(x, y)) → ∃x N(x, y))

$= \forall x \forall y\ (\neg(M(x, y) \wedge N(x, y)) \vee \exists x\ N(x, y))$

$= \forall x \forall y\ (\neg M(x, y) \vee \neg N(x, y) \vee \exists z\ N(z, y))$

(đổi biến x cục bộ thành z)

$= \forall x \forall y \exists z\ (\neg M(x, y) \vee \neg N(x, y) \vee N(z, y))$

Xóa lượng từ $\exists z$, thay z bằng biểu thức hàm f(x, y)

$F = \forall x \forall y\ (\neg M(x, y) \vee \neg N(x, y) \vee N(f(x, y), y))$

Dạng chuẩn Skolem

$S = \{\neg M(x, y) \vee \neg N(x, y) \vee N(f(x, y), y)\}$

b. $H = \neg(\forall x\ (p(x) \rightarrow \exists y \forall z\ q(y, z)))$

$= \exists x\ (\neg(p(x) \rightarrow \exists y \forall z\ q(y, z)))$

$= \exists x\ (\neg(\neg p(x) \vee \exists y \forall z\ q(y, z)))$

$= \exists x\ (p(x) \wedge \neg(\exists y \forall z\ q(y, z)))$

$= \exists x\ (p(x) \wedge \forall y \exists z\ \neg q(y, z))$

$= \exists x \forall y \exists z\ (p(x) \wedge \neg q(y, z))$

Xóa lượng từ $\exists x$, $\exists z$, thay x bằng a, z bằng f(y)

$H = \forall y\ (p(a) \wedge \neg q(y, f(y)))$

Dạng chuẩn Skolem

$S = \{\ p(a), \neg q(y, f(y))\}$

c. $G = \forall x \forall y\ (\exists z\ K(x, y, z) \wedge \exists v\ (H(y, v) \rightarrow \exists u\ H(u, v)))$

$= \forall x \forall y\ (\exists z\ K(x, y, z) \wedge \exists v\ (\neg H(y, v) \vee \exists u\ H(u, v)))$

$= \forall x \forall y \exists z \exists v \exists u\ (K(x, y, z) \wedge (\neg H(y, v) \vee H(u, v)))$

Xóa lượng tử $\exists z$, $\exists v$, $\exists u$. Thay z bằng biểu thức hàm $f_1(x, y)$, thay v bằng $f_2(x, y)$, thay u bằng $f_3(x, y)$.

$G = \forall x \forall y\ (K(x, y, f_1(x, y)) \wedge (\neg H(y, f_2(x, y)) \vee H(f_3(x, y), f_2(x, y))))$

Dạng chuẩn Skolem

$S = \{\ K(x, y, f_1(x, y)), \neg H(y, f_2(x, y)) \vee H(f_3(x, y), f_2(x, y))\}$

d. $K = \forall x\ (\neg\ e(x, 0) \rightarrow (\underline{\exists y\ (\ e(y, g(x)) \wedge \forall z\ (e(z, g(x)) \rightarrow e(y, z))\ }))$

$= \forall x\ (e(x, 0) \lor (\exists y\ (e(y, g(x)) \land \forall z\ (e(z, g(x)) \rightarrow e(y, z))\ )))$

$= \forall x\ (e(x, 0) \lor (\exists y\ (e(y, g(x)) \land \forall z\ (\neg e(z, g(x) \lor e(y, z))\ )))$

$= \forall x \exists y \forall z\ (e(x, 0) \lor (e(y, g(x)) \land (\neg e(z, g(x) \lor e(y, z))\ )))$

$= \forall x \exists y \forall z\ (\underline{(e(x, 0) \lor e(y, g(x)))} \land \underline{(e(x, 0) \lor \neg e(z, g(x)) \lor e(y, z)\ )})$

$= \forall x \forall z\ (\underline{(e(x, 0) \lor e(f(x), g(x)))} \land \underline{(e(x, 0) \lor \neg e(z, g(x)) \lor e(f(x), z)\ )})$

Dạng chuẩn Skolem

$S = \{(e(x, 0) \lor e(f(x), g(x))), (e(x, 0) \lor \neg e(z, g(x)) \lor e(f(x), z))\}$

## B.6. Thay thế

1. Cho 3 thay thế :

$\alpha = \{f(y)/x,\ z/y,\ g(x)/z\}$, $\beta = \{a/x, b/y, x/t\}$, $\chi = \{y/z, h(x)/y, f(x)/t\ \}$.

Tìm hợp nối $\alpha\beta\alpha$ và $\alpha\chi\alpha$ .

Bài giải

$\alpha\beta = \{\ f(b)/x, z/y, g(a)/z, x/t\ \}$, $\alpha\beta\alpha = \{\ f(b)/x, g(x)/y, g(a)/z, f(y)/t\ \}$

$\alpha\chi = \{\ f(h(x))/x, g(x)/z, f(x)/t\ \}$,

$\alpha\chi\alpha = \{\ f(h(f(y)))/x, g(f(y))/z, f(f(y))/t, z/y\ \}$

2. Dùng thuật toán đồng nhất tìm mgu của công thức

$P = \{q(f(x), y, u),\ q(u, v, h(x)),\ q(t, y, z)\}$.

Bài giải

$P = \{q(f(x), y, u),\ q(u, v, h(x)),\ q(t, y, z)\}$

$\{f(x), u\} \longrightarrow$ thay thế $\theta_0 = \{\ f(x)/u\ \}$

$P\theta_0 = \{\ q(f(x), y, f(x)), q(f(x), v, h(x)), q(t, y, z)\ \}$

$\{f(x), h(x)\} \longrightarrow$ thay the $\theta_1 = \varnothing$

Vậy không tìm được mgu cho công thức P.

3. Cho thay thế $\theta = \{a/x, b/y, g(x, y)/z\}$ và $E = p(h(x), z)$. Tính $E\theta$.

Bài giải

$E\theta = p(h(a), g(x, y))$.

4. Tìm các thừa số của công thức :

$T = p(h(x)) \lor \neg p(f(y)) \lor q(x) \lor \neg r(g(a)) \lor \neg r(y) \lor p(a)$.

Bài giải

Chọn thay thế $\theta = \{g(a)/y\}$.

Thừa số $T\theta = p(h(x)) \lor \neg p(f(g(a))) \lor q(x) \lor \neg r(g(a)) \lor p(a)$.

5. Dùng phân giải để khảo sát tính hằng sai, khả đúng của công thức :

$(r(x, y, z) \lor v(f(y), w)) \land \neg v(x, y) \land \neg t(x, z) \land (t(x, y) \lor v(x, y))$

Bài giải

Từ công thức có hệ thống sau :

(1) $r(x, y, z) \lor v(f(y), w)$

(2) $\neg v(x, y)$

(3) $\neg t(x, z)$

(4) $t(x, y) \lor v(x, y)$

(5) $pg(3, 4) = v(x, y)$ với thay thế $\{y/z\}$

(6) $pg(2, 5) = ?$.

Vậy công thức cho bên trên có tính hằng sai.

## B.6. Phân giải

1. Bằng phân giải chứng minh tập S là hằng sai

$S = \{p(x) \lor q(y), p(a) \lor \neg r(x), \neg p(a) \lor r(x), \neg p(x) \lor \neg q(b),$
$r(a) \lor \neg q(y), \neg r(x) \lor q(b)\}$.

Bài giải

(1) $p(x) \lor q(y)$

(2) $p(a) \lor \neg r(x)$

(3) $\neg p(a) \lor r(x)$

(4) $\neg p(x) \lor \neg q(b)$

(5) $r(a) \lor \neg q(y)$

(6) $\neg r(x) \lor q(b)$

(7) $pg(1, 3) = q(y) \lor r(a)$

(8) $pg(5, 7) = r(a)$

(9) $pg(2, 4) = \neg q(b) \lor \neg r(a)$

(10) $pg(6, 9) = \neg r(a)$

(11) $pg(8, 10) = \square$.

2. Dùng phân giải cho biết công thức F là hằng sai hay khả đúng :

F ={(q(c) ∨ p(b)) ∧ (q(c) ∨ ¬r(c)) ∧ (¬q(c) ∨ r(c)) ∧ (¬q(c) ∨ ¬p(b)) ∧ (r(c) ∨ ¬p(b)) ∧ (¬r(c) ∨ p(b))}.

Bài giải

(1) q(c) ∨ p(b) (2) q(c) ∨ ¬r(c)

(3) ¬q(c) ∨ r(c) (4) ¬q(c) ∨ ¬p(b)

(5) (r(c) ∨ ¬p(b) (6) ¬r(c) ∨ p(b)

(7) pg(1, 3) = p(b) ∨ r(c) (8) pg(5, 7) = r(c)

(9) pg(4, 6) = ¬q(c) ∨ ¬r(c) (10) pg(2, 9) = ¬r(c)

(11) pg(8, 10) = □.

3. Phân giải hệ thống sau :

{¬p(x) ∨ w(x) (1), ¬p(x) ∨ r(x) (2), p(a) (3), q(a) (4), ¬q(x) ∨ ¬r(x) (5)}

Bài giải

Thực hiện phân tích theo các bước sau :

⅄. Loại trừ các mệnh đề không tham gia phân giải

Mệnh đề (1) có w(x) không có dạng phủ định : loại (1) ra khỏi danh sách đi phân giải.

Mệnh đề (2), (3), (4), (5) mỗi thành phần đều có dạng phủ định (xét trong danh sách còn lại).

Hệ thống còn lại để phân giải :

{¬p(x) ∨ r(x) (2), p(a) (3), q(a) (4), ¬q(x) ∨ ¬r(x) (5)}

⅄. Phối hợp tất cả khả năng :

.Pg(2, 3), Pg(2, 4), Pg(2, 5), Pg(3, 4), Pg(3, 5), Pg(4, 5).

Pg(2, 3) = r(a), (6) Pg(2, 4) = không phân giai được (kpgđ),

Pg(2, 5) = ¬p(x) ∨ ¬q(x), Pg(3, 4) = kpgđ, Pg(3, 5) = kpgđ, Pg(4, 5) = ¬r(a), (7)

Hệ thống mới :

{¬p(x) ∨ r(x) (2), p(a) (3), q(a) (4), ¬q(x) ∨ ¬r(x) (5), r(a) (6), ¬r(a) (7)}

⅄. Phối hợp với các mệnh đề mới phát sinh :

Pg(2, 6), Pg(2, 7), Pg(3, 6), Pg(3, 7), Pg(4, 6), Pg(4, 7), Pg(5, 6), Pg(5, 7), Pg(6, 7).

Pg(2, 6) = kpgđ, Pg(2, 7) = ¬p(x) (8),

Pg(3, 6) = kpgđ, Pg(3, 7) = kpgđ,

Pg(4, 6) = kpgđ, Pg(4, 7) = kpgđ,

Pg(5, 6) = ¬q(a) (9), Pg(5, 7) = kpgđ,

Pg(6, 7) = □. Tới đây chuỗi phân giải dừng vì tìm được □. Nếu chưa tìm được □ thì tiếp tục Pg(2, 8), Pg(2, 9), … và chỉ dừng khi các bước phân giải không sản sinh ra các mệnh đề mới.

# V. BẢNG ĐỐI CHIẾU
# ANH - VIỆT & VIỆT - ANH

## Thuật ngữ Việt – Anh

| Việt | Trang | Anh |
|---|---|---|
| A | | |
| Ánh xạ | . | Mapping, Function |
| B | | |
| Bài toán SAT | 62 | SATisfiability problem |
| Bài trung | 21, 57 | Excluded middle |
| Bảng ký tự | 80 | Alphabet |
| Bảng thực trị | 44 | Truth table |
| Bất khả thi | 152 | Non-working |
| Biểu thức | . | Expression |
| Biểu thức hàm | 82 | Function expression |
| Biểu thức vị từ | 82 | Predicate expression |
| C | | |
| Câu khai báo | . | Declarative sentence |
| Câu tự tham chiếu | . | Self-referential sentence |
| Cây ngữ nghĩa | . | Semantic tree |
| Cây ngữ nghĩa đóng, bị chặn | . | Closed semantic tree |
| Cây ngữ nghĩa hoàn bị, đầy đủ | . | Complete semantic tree |
| Cây phân tích | 48, 90 | Parse tree |
| Chứng minh | 11 | Proof |
| Chứng minh phản chứng | 17, 28 | Proof by contradiction |
| Công thức | 7, 88 | Formula |
| Công thức đóng | 90 | Closed formula |
| Công thức hoàn hảo | 36, 88 | Well-formed formula |
| Công thức Horn | 72 | Horn formula |

| | | |
|---|---|---|
| Công thức mâu thuẫn | 17 | Contradiction formula |
| Công thức nguyên | 7, 35, 86 | Atomic formula, atom |
| Công thức nguyên trị | . | Ground atom |
| Công thức tautology | 18 | Tautology |
| Công thức tự do | 90 | Free formula |
| Công thức tương đương | 53 | Equivalent formula |
| Cơ sở | . | Atom set, Base |
| Cú pháp | 4 | Syntax |
| Cục bộ | 113 | Local |
| D | | |
| Dẫn xuất, Dẫn ra | . | Entailment, Implication |
| Dạng chuẩn giao | 67 | Conjunctive normal form |
| Dạng chuẩn hội | 70 | Disjunctive normal form |
| Dạng chuẩn NNF | 71 | Negative normal form |
| Dạng chuẩn Prenex | 114 | Prenex form |
| Dạng chuẩn Skolem | 118 | Skolem form |
| Dạng mệnh đề | 66 | Clausal form |
| Dạng Horn | 72 | Horn form |
| Diễn dịch | 39, 102 | Interpretation, valuation |
| Diễn dịch từng phần | . | Partial interpretation |
| Đ | | |
| Đại số | . | Algebra |
| Đẳng cấu | . | Isomorphism |
| Đầy đủ | 157 | Completeness |
| Đếm được | . | Countable |
| Đỉnh cha | . | Ancestor node |
| Đỉnh sai | . | Failure node |
| Đỉnh lá | . | Tip node, leaf |
| Đỉnh suy diễn | . | Inference node |
| Định đề | . | Postulate |

| | | |
|---|---|---|
| Định lý | 11 | Theorem, Provable statement |
| Định lý đồng nhất | . | Unification theorem |
| Định nghĩa bán phần | 154 | . |
| Định nghĩa bất khả thi | 152 | Non-working definition |
| Định nghĩa khả thi | 153 | Working definition |
| Định nghĩa kiến tạo | 153 | . |
| Định nghĩa nhận dạng | 153 | . |
| Định nghĩa toàn phần | 154 | . |
| Đệ qui | 153 | Recursive |
| Đơn giản | 158 | Simplicity |
| Đơn nguyên | . | Atom |
| Đơn tử | . | Singleton |
| Đồ thị | . | Graph |
| Đồng nhất thể | 126 | Unifier, Unification |
| Đồng nhất thể mgu | 126 | Most general unifier |
| G | | |
| Giao | . | Intersection |
| H | | |
| Hàm | . | Function, mapping |
| Hằng | 85 | Constant |
| Hằng đúng | 51 | Tautology, Valid |
| Hằng sai | 51 | Inconsistent, Contract,Unsatisfable |
| Hệ nhân quả | 11 | Sequent |
| Hệ quả luận lý | 73 | Logical consequence, entailment |
| Hệ thống | 9 | System |
| Hệ thống chứng minh | 4 | Proof system |
| Hệ tiên đề | 155, 156 | Axiom system |
| Hiện hữu | 88 | Occurrence |

| | | |
|---|---|---|
| Hiện hữu ràng buộc | 89 | Bound occurrence |
| Hiện hữu tự do | 89 | Free occurrence |
| Hoàn bị, Đầy đủ | 157 | Completeness |
| Hợp nối | 125 | Composition |
| Họ | . | Collection |
| Hội | . | Union |
| Hữu hạn | . | Finite |
| K | | |
| Kéo theo | . | Entailment, Implication |
| Khả đồng nhất thế | 126 | Unifiable |
| Khả chứng | 77 | Completeness |
| Khả đúng | 51, 77 | Consistent, Satisfiable |
| Khả sai | 51 | Invalid, Falsifiable, Unsatisfiable, Inconsistent |
| Khả thi | . | Working |
| Khoa học khả chứng | . | Demonstrative science |
| Không có lý | . | Unreasonable |
| Không đếm được | . | Uncountable |
| Không nhất quán | . | Inconsistent |
| Ký hiệu | 81 | Symbol |
| Ký hiệu biến | 81 | Variable |
| Ký hiệu hằng | 85 | Constant |
| Ký hiệu thay thế | 90 | . |
| Ký tự | 80 | Character |
| L | | |
| Lập luận | . | Argument |
| LEM | 21 | Law of the excluded middle |
| Liên từ | 37 | Connectives |
| Luận lý cấp 1 | . | First order logic |
| Luận lý học | . | Logic |

| | | |
|---|---|---|
| Luận lý dẫn xuất | 5 | Deductive logic |
| Luận lý khái quát | 4 | Inductive logic |
| Luận lý ký hiệu | . | Symbolic logic |
| Luận lý mệnh đề | . | Propositional logic |
| Luận lý suy diễn | 5 | Deductive logic |
| Luận lý toán học | . | Mathematical logic |
| Luận lý vị từ | . | Predicate logic |
| Luận lý vị từ | . | Predicate calculus |
| Luận lý vị từ | . | First order logic |
| Luật bài trung | 57 | Law of excluded middle |
| Luật triệt tam | 57 | Law of the excluded third |
| Luật eg (khái quát hiện hữu) | . | Existential generalization |
| Luật es (đặc tả hiện hữu) | . | Existential specification |
| Luật mâu thuẫn | 18 | Law of contraction |
| Luật thay thế | . | Substitution rule |
| Luật ug (khái quát phổ dụng) | . | Universal generalization |
| Luật us (đặc tả phổ dụng) | . | Universal specification |
| Lưỡng nguyên | 56 | Literal |
| Lưỡng nguyên âm | 56 | Negative literal |
| Lưỡng nguyên dương | 56 | Pure-literal |
| Lượng từ | 81 | Quantifier |
| Lượng từ hiện hữu | 81 | Existential quantifier |
| Lượng từ phổ dụng | 81 | Universal quantifier |
| Lý thuyết chứng minh | . | Proof theory |
| Lý thuyết phi hình thức | . | Informal theory |
| Lý thuyết suy diễn | . | Theory of inference |
| M | | |
| Mặc nhiên thoả | . | Vacuously satisfied, vacuous truth |
| Mệnh đề 31 | 64, 121 | Clause,Statement, Proposition |

| | | |
|---|---|---|
| Mệnh đề đơn vị | 66, 121 | Unit clause |
| Mệnh đề Horn | 72 | Horn clause |
| Mệnh đề trị | . | Ground clause |
| Mệnh đề rỗng, trống | 121 | Null clause |
| Miền đối tượng | 81 | Universe of discourse, Domain |
| Miền trị | . | Domain |
| Miền ảnh | . | Codomain |
| Mô hình | 54 | Model |
| N | | |
| Nghịch lý | . | Paradox |
| Nghịch lý người nói láo | . | Liar's paradox |
| Ngôn ngữ hình thức | 4 | Formal language |
| Nguyên từ | 86 | Term |
| Nguyên từ trị | . | Ground term |
| Ngữ nghĩa | . | Semantics |
| Nhất quán | 156 | Consistency, Consistent |
| P | | |
| PBC | 21 | Proof by contradiction |
| Phạm vi của lượng từ | 88 | Scope |
| Phân giải | 122, 131 | Resolution, Resolvent |
| Phân giải nhị phân | 130 | Binary resolution |
| Phản chứng | 60 | Refutation, Reduction to absurdity |
| Phủ định | . | Negation |
| Q | | |
| Quan hệ | 82 | Relation |
| Qui tắc bản sao (id) | 15 | Rule of identification |
| Qui tắc bằng nhau i (=i), e (=e) | 94 | Introduction rule for equality |
| Qui tắc điều kiện | 13 | Modus ponens |

| | | |
|---|---|---|
| Qui tắc giao i ($\wedge$i), e ($\wedge$e) | 12 | Rule for conjunction (introduction, elimination) |
| Qui tắc hội i ($\vee$i), e ($\vee$e) | 16 | Rule of disjunction |
| Qui tắc LEM | | Law of the excluded middle |
| Qui tắc lượng từ phổ dụng e ($\forall$e) | 95 | Rule for eliminating $\forall$ |
| Qui tắc lượng từ phổ dụng i ($\forall$i) | 96 | Rule for introducting $\forall$ |
| Qui tắc lượng từ hiện hữu i ($\exists$i) | 97 | Rule for existential quantification |
| Qui tắc lượng từ hiện hữu e ($\exists$e) | 98 | Rule for existential quantification |
| Qui tắc MT | 20 | Modus tolens |
| Qui tắc mâu thuẫn | 18 | Law of contraction |
| Qui tắc phủ định ($\neg$e), ($\neg$i) | 17 | Rule for negation |
| Qui tắc phủ định kép e ($\neg\neg$e) | 20 | Rule of double negation |
| Qui tắc phủ định kép i ($\neg\neg$i) | 19 | Introduction rule of double negation |
| Qui tắc suy luận | 11 | Inference Rule |
| Qui tắc truyền | 122 | Chain rule |
| R | | |
| RAA | 21 | Reductio ad absurrdum |
| S | | |
| Siêu lý thuyết | . | Metatheory |
| Siêu toán học | . | Metamathematics |
| Suy diễn | | Deduction, Argument, Inference |
| T | | |
| Tách biệt | 59 | Separation |
| Tam đoạn luận | 58 | Modus ponens |
| Tam đoạn luận nghịch | 59 | Modus tolens |
| Tam đoạn luận tách biệt | 60 | Separation |

| | | |
|---|---|---|
| Tập bất đồng | 127 | Disagreement |
| Thay thế | 123 | Substitution |
| Thủ tục số học | 47 | Arithmetic procedure |
| Thừa số | 130 | Factor |
| Thuật ngữ nguyên thuỷ | 155 | Undefined technical term |
| Thuật ngữ nguyên thuỷ | 155 | Undefined term |
| Thuật ngữ phổ dụng | 155 | Universal term |
| Thuật toán đồng nhất | 128 | Unification algorithm |
| Thực trị | 35 | Truth value |
| Tiên đề | . | Axiom |
| Tiền đề | . | Premise |
| Tiếp đầu ngữ | . | Prefix |
| Tính độc lập | 158 | Independence |
| Tính đơn giản | 158 | Simplicity |
| Tính truyền | 76 | Transitivity |
| Tính khả đúng 77 | 78, 133 | Soundness |
| Tính khả chứng 77 | 78, 133 | Completeness |
| Toán tử | 7 | Operator |
| Toàn bộ | 113 | Global |
| Truyền | 60 | Transitive |
| Tương đương | . | Equivalence |
| Tương thích | . | Compatibility |
| V | | |
| Vị từ | 82 | Predicate |
| W | | |

## Thuật ngữ Anh – Việt

| Anh | Việt |
|---|---|
| A | |
| Alphabet | Bảng ký tự |
| Argument | Lý luận |
| Arithmetic procedure | Thủ tục số học |
| Axiom | Tiên đề |
| Axiom system | Hệ tiên đề |
| Atom | Đơn nguyên |
| Atomic formula, atom | Công thức nguyên |
| Atom set, Base | Cơ sở |
| B | |
| Binary resolution | Phân giải nhị phân |
| Bound occurrence | Hiện hữu ràng buộc |
| C | |
| Chain rule | Qui tắc truyền |
| Character | Ký tự |
| Clausal form | Dạng mệnh đề |
| Clause | Mệnh đề |
| Closed formula | Công thức đóng |
| Closed semantic tree | Cây ngữ nghĩa đóng, bị chặn |
| Compatibility | Tương thích |
| Complete semantic tree | Cây ngữ nghĩa hoàn bị, đầy đủ |
| Completeness | Tính đầy đủ, tính khả chứng |
| Composition | Hợp nối |
| Conjunctive normal form | Dạng chuẩn giao |
| Consistency | Nhất quán, khả đúng |
| Constant | Ký hiệu hằng |
| Connectives | Liên từ |
| Contradiction | Mâu thuẫn |

| | |
|---|---|
| Countable | Đếm được |
| D | |
| Declarative sentence | Câu khai báo |
| Deduction | Suy diễn |
| Deductive logic | Luận lý dẫn xuất, suy diên |
| Disagreement | Tập bất đồng |
| Disjunctive normal form | Dạng chuẩn hội |
| Domain | Miền trị, Miền đối tượng |
| Double negative | Phủ định kép |
| E | |
| Entailment | Dẫn xuất, Dẫn ra, Kéo theo, Hệ qủa luận lý |
| Equivalence | Tương đương |
| Excluded middle | Bài trung |
| Existential generalization | Luật eg (khái quát hiện hữu) |
| Existential quantifier | Lượng từ hiện hữu |
| Existential specification | Luật es (đặc tả hiện hữu) |
| Expression | Biểu thức |
| F | |
| Factor | Thừa số |
| Failure node | Đỉnh sai |
| Falsifiable | Khả sai |
| Finite | Hữu hạn |
| Finite induction | Truy chứng hữu hạn |
| First order logic | Luận lý vị từ |
| Formal language | Ngôn ngữ hình thức |
| Formula | Công thức |
| Free occurrence | Hiện hữu tự do |
| Function | Hàm, ánh xạ |
| Function expression | Biểu thức hàm |

| | |
|---|---|
| G | |
| Global | Toàn bộ |
| Goldbach conjecture | Phỏng đoán Goldbach |
| Graph | Đồ thị |
| Ground atom | Công thức nguyên trị |
| Ground clause | Mệnh đề trị |
| Ground literal | Lưỡng nguyên trị |
| Ground term | Nguyên từ trị |
| H | |
| Horn form | Dạng Horn |
| I | |
| Implication | Dẫn xuất, Dẫn ra, Kéo theo |
| Inconsistent | Không nhất quán |
| Inductive logic | Luận lý khái quát |
| Inference | Suy luận |
| Inference node | Đỉnh suy luận |
| Inference rule | Qui tắc suy luận |
| Infinite | Vô hạn |
| Informal theory | Lý thuyết phi hình thức |
| Interpretation, valuation | Diễn dịch |
| Intersection | Giao |
| Introduction rule of double negation | Qui tắc phủ định kép i ($\neg\neg$i) |
| Invalid | Khả sai |
| Irrational | Vô tỉ |
| Isomorphism | Đẳng cấu |
| L | |
| Law of contraction | Luật mâu thuẫn, qui tắc mâu thuẫn |
| Law of excluded middle | Luật bài trung |
| Law of the excluded middle | Qui tắc LEM |

| | |
|---|---|
| Law of the excluded third | Luật triệt tam |
| Liar's paradox | Nghịch lý người nói láo |
| Literal | Lưỡng nguyên |
| Local | Cục bộ |
| Logic | Luân lý học |
| Logical consequence | Hệ qủa luận lý |
| Logical rule of inference | Luật suy diễn |
| M | |
| Mapping | Ánh xạ, hàm |
| Mathematical logic | Luận lý toán học |
| Metamathematics | Siêu toán học |
| Metatheory | Siêu lý thuyết |
| Model | Mô hình |
| Modus ponens | Tam đoạn luận |
| Modus tolens | Tam đoạn luận nghịch |
| Most general unifier | Đồng nhất thế mgu |
| N | |
| Negation | Phủ định |
| Non-working | Bất khả thi |
| Null clause | Mệnh đề rỗng, trống |
| O | |
| Occurrence | Hiện hữu |
| Operator | Toán tử |
| P | |
| Paradox | Nghịch lý |
| Parse tree | Cây phân tích |
| Partial interpretation | Diễn dịch từng phần |
| Postulate | Định đề |
| Prefix | Tiếp đầu ngữ |
| Predicate | Vị từ |

| | |
|---|---|
| Predicate calculus | Luận lý vị từ |
| Predicate expression | Biểu thức vị từ |
| Predicate logic | Luận lý vị từ |
| Premise | Tiền đề |
| Proof | Chứng minh |
| Proof by contradiction | Chứng minh phản chứng |
| Proof system | Hệ thống chứng minh |
| Proof theory | Lý thuyết chứng minh |
| Propositional logic | Luận lý mệnh đề |
| Provable statement | Định lý |
| Pure-literal rule | Lưỡng nguyên dương |
| Q | |
| Quantifier | Lượng từ |
| Qquantifier-free | Không chứa lượng từ |
| R | |
| Refutation, Reduction to absurdity | Phản chứng |
| Resolution | Phân giải |
| Refutation | Phủ nhận |
| Relation | Quan hệ |
| Rule for conjunction | Qui tắc giao i |
| Rule of identification | Qui tắc bản sao (id) |
| Rule of disjunction | Qui tắc hội i ($\vee$i), e ($\vee$e) |
| Rule for negation | Qui tắc phủ định ($\neg$e), ($\neg$i) |
| Rule of double negation | Qui tắc phủ định kép e ($\neg\neg$e) |
| Rule for equality | Qui tắc bằng nhau i (=i), e (=e) |
| Rule for eliminating ∀ | Qui tắc lượng từ phổ dụng e ($\forall$e) |
| Rule for introducting ∀ | Qui tắc lượng từ phổ dụng i ($\forall$i) |
| Rule for existential quantification | Qui tắc lượng từ hiện hữu i ($\exists$i) |
| Rule for existential quantification | Qui tắc lượng từ hiện hữu e ($\exists$e) |

| | |
|---|---|
| Recursive | Đệ qui |
| S | |
| Satisfiable | Khả đúng |
| SATisfiability problem | Bài toán SAT |
| Scope | Phạm vi của lượng từ |
| Simplicity | Đơn giản |
| Singleton | Đơn tử |
| Self-referential sentence | Câu tự tham chiếu |
| Semantic tree | Cây ngữ nghĩa |
| Semantics | Ngữ nghĩa |
| Separation | Tách biệt |
| Sequent | Hệ nhân quả |
| Soundness | Tính khả đúng |
| Statement, Proposition | Mệnh đề |
| Substitution | Thay thế |
| Substitution rule | Luật thay thế |
| Symbol | Ký hiệu |
| Symbolic logic | Luận lý ký hiệu |
| Syntax | Cú pháp |
| T | |
| Term | Nguyên từ |
| Theorem | Định lý |
| Theory of inference | Lý thuyết suy diễn |
| Tip node, leaf | Đỉnh lá |
| Transitivity | Tính truyền |
| Transitive | Truyền |
| Truth table | Bảng thực trị |
| Truth value | Thực trị |
| U | |
| Uncountable | Không đếm được |

| | |
|---|---|
| Undefined technical term | Thuật ngữ nguyên thuỷ |
| Undefined term | Thuật ngữ nguyên thuỷ |
| Unifiable | Khả đồng nhất thế |
| Unification | Đồng nhất thế |
| Unification algorithm | Thuật toán đồng nhất |
| Unification theorem | Định lý đồng nhất |
| Union | Hội |
| Unit clause | Mệnh đề đơn vị |
| Unit factor | Thừa số đơn vị |
| Universal quantifier | Lượng từ phổ dụng |
| Universal generalization | Luật ug (khái quát phổ dụng) |
| Universal specification | Luật us (đặc tả phổ dụng) |
| Universe of discourse | Miền đối tượng |
| Universal term | Thuật ngữ phổ dụng |
| Unreasonable | Không có lý |
| V | |
| Vacuous truth | Mặc nhiên thoả |
| Vacuously satisfied | Mặc nhiên thoả |
| Variable | Ký hiệu biến |
| W | |
| Well-formed formula | Công thức hoàn hảo |
| Working | Khả thi |
| Working definition | Định nghĩa khả thi |
| X | |

# Lời bạt.

Lý luận là một đặc điểm của con người. Từ Aristotle đến nay, nhiều nghiên cứu logic mang tính hệ thống nhằm làm sáng tỏ những lý luận trong đời thường. Việc nghiên cứu này còn được tác động mạnh mẽ từ cuộc khủng hoảng về nền tảng của toán học. Rất nhiều thành quả đã đạt được, luận lý ký hiệu chính là một minh chứng. Mô hình này đã đáp ứng được yêu cầu thực tế của thời đại nó phát sinh. Dù không hoàn toàn khít khao với thực tế yêu cầu. Nhưng với tính chặt chẽ và hệ thống, nó đã đạt được sự thuyết phục to lớn. Đôi khi người ta còn ngộ nhận rằng nó là cái "đích thực" hơn thực tế.

Tuy nhiên, thực sự luận lý toán học còn có khoảng cách rất xa với thế giới thực. Dù luận lý toán học là một cấu trúc hoàn thiện nhưng nó vẫn còn một số phần phi lý khi áp đặt lên thực tế. Hậu quả này phát sinh do tính hoàn bị của cấu trúc. Điều này không ít gây trở ngại và ngộ nhận trong khi sử dụng.

Ngày nay có rất nhiều ngành luận lý toán học mới phát sinh để giải quyết những vấn đề mà thời đại của luận lý học cổ điển chưa biết đến. Những vấn đề này có độ phức tạp cao hơn, có tầm vóc, có không gian rộng hơn. Nhưng, cấu trúc của các mô hình luận lý mới cũng còn dựa trên nền tảng cấu trúc của luận lý học cổ điển.

Do đó để hiểu rõ các mô hình mới, việc nghiên cứu luận lý học cổ điển là cần thiết. Ngoài ra, luận lý học cổ điển vẫn là hệ thống suy diễn nền tảng của nhiều ngành khoa học quan trọng.

Thế giới thực là thế giới mà càng khám phá càng thấy nó rộng lớn hơn. Mọi cố gắng đều nhắm đến việc giải quyết những bài toán của thực tế. Toán học cũng không ngoại lệ. Nhưng vẫn có những quan điểm cho rằng những ngành toán học lý thuyết là không có thực tế áp dụng. Tuy rằng toán học đã có những bước tiến khá xa nhưng những quan điểm nghiên cứu và ứng dụng vẫn còn là của những thế kỷ trước. Điều người ta hiểu về ứng dụng đơn thuần chỉ là làm sao sử dụng được các công thức toán học. Do đó việc trình bày cũng chỉ là đưa ra các công cụ của những vần đề đã được giải quyết. Đây là giai đoạn sơ khai của mọi ngành khoa học.

Điều thực sự quan trọng là quá trình xác định bài toán. Việc này có nghĩa là nhìn vấn đề dưới các không gian của nó hơn là chỉ khảo sát các đối tương như những thành phần đơn lẻ. Sức mạnh của toán học là cung cấp những mô hình để có những khái quát trên toàn thể.

Ở không gian này không tìm thấy lời giải thì chuyển đến không gian khác, nếu không lại đến không gian khác nữa. Thời đại của những thủ thuật, những tiểu xảo đã không còn phù hợp.

Khi giải một bài toán là tìm xem nó thuộc lớp không gian nào. Mô hình này đã được nghiên cứu đầy đủ chưa, đã đạt được những kết quả gì. Công việc của người giải bài toán chỉ là việc chuyển đổi ngôn ngữ của bài toán, từ ngôn ngữ tự nhiên sang ngôn ngữ của mô hình toán học tương ứng. Lời giải chính là sự thừa hưởng những tính chất của không gian chứa bài toán. Cho đến ngày nay phương pháp tiên đề vẫn là phương pháp mang tính thống trị.

Điều rất tự nhiên khi đặt ra câu hỏi : lãnh vực toán học sử dụng công cụ gì, sử dụng phương pháp gì trong vấn đề nghiên cứu. Các công cụ, các phương pháp đó có còn phù hợp với thời đại ngày nay không. Nếu công cụ thay đổi, quan điểm nghiên cứu thay đổi thì cần phải làm gì cho phù hợp với yêu cầu mới.

Quan điểm ứng dụng của toán học có cần phải thay đổi hay không. Ranh giới giữa lý thuyết và ứng dụng có thực sự là vực thẳm để không thể bắt được nhịp cầu hay không. Người ta đã thực sự hiểu hết sự trừu tượng toán học hay chưa. Các mô hình trừu tượng có thực tế của nó hay không. Đi tìm câu trả lời tức là đã giải quyết vấn đề.

Con người hiện hữu đồng nghĩa với sự sáng tạo và duy trì sự sáng tạo. Sáng tạo là điều tự nhiên như ăn, uống, ngũ, nghĩ. Hiện hữu đồng nghĩa với khám phá. Đó là nhận dạng, nhận thức chân trị. Một hoạt động gắn liền với không tính và thời tính.

Chân, dụng, hội, thiện, mỹ là thước đo để thẩm định mọi kết quả sáng tạo. Tuy nhiên vấn đề ít được đề cập đến là thiện tính và mỹ tính. Đây là vấn đề mang tính chất nhân văn.

Cái đẹp là khuôn mẫu chung, là bóng dáng của thực tế kinh nghiệm được chồng chất lên nhau. Nếu nói theo ngôn ngữ của hiện hữu, nó là hiện hữu trong những hiện hữu. Toán học cung cấp nguồn cảm hứng về mỹ tính nhận thức, về cái đẹp toàn thể.

Mọi vật đều có thể nhìn dưới góc độ chân thiện mỹ. Chân nghĩa là cái sự thật, cái con người "nhìn thấy" về đối tượng. Mỗi khi thay đối góc nhìn lại có những chân lý khác nhau. Chân của toán học là phần không có thật. Nó chỉ là hình ảnh trừu tượng được nhận thức từ những thực tế kinh nghiệm. Vì vậy nó cũng là mẫu mực để các hiện hữu vươn tới. Hình thành nên cái gọi là mỹ tính, cái hoàn thiện, cái khuôn mẫu lý tưởng. Khi nhận thức được đầy đủ đối tượng, hiệu quả sẽ đạt được cao hơn.

Con đường phía trước vẫn còn mênh mông vô tận. Người sau tiếp nối người trước. Nhưng không cần phải nếm lại chông gai của những người đã đi qua. Làm thế nào để người sau tiếp nối đoạn đường mà không phải bắt đầu lại từ đầu. Điều này chính là thiện tính.

Không kết quả nào được xem là hoàn hảo với diễn tiến của thời gian. Quan điểm biện chứng sẽ cho chúng ta thấy được những mặt đối lập. Điều này càng làm cho đối tượng được nhận thức rõ ràng và đầy đủ hơn. Nhận thức được sự toàn vẹn tại một thời điểm và sự bất toàn vẹn đối với thời gian chính là thấy được sự phát triển.

Vì vậy mọi thành quả đều cần phải được vượt qua.

Dù biết rằng sự đóng góp này chỉ là những bước bắt đầu. Nhưng với khao khát truy tìm chân lý để cuộc sống được hoàn thiện hơn là điều mong mỏi cao nhất.

(1997)

(Lý Nguyên) Nguyễn Thanh Sơn

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

## Sách

[01B] Symbolic logic and mechanical theorem proving. Chin-Liang Chang & Richard Char-Tung Lee 1973. Academic Press, Inc.

[02B] The handbook of AI. Vol III. P. R. Cohen & E. A. Feigenbaum 1982. William Kaufman. Inc.

[03B] Encyclopedia of AI. Vol 2. 1987 John Wiley & Sons. Inc.

[04B] Foundations of logic programming. J. W. Lloyd 1984. Springer-Verlag.

[05B] Sets, Logic and axiomatic theories. R. R. Stoll 1961. W. H. Freeman and company.

[06B] Logical foundations of mathematics for behavioural scientists. A. S. Luchins & E.H. Luchins 1965. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

[07B] Introduction to the foundations of mathematics. R.L. Wilder. 1965. John Wiley & Sons. Inc.

[08B] Logic. Wilfrid Hodges 1977. Penguin Books.

[09B] Helena Rasiowa (Trần Tất Thắng dịch). Cơ sở của toán học hiện đại. NXB khoa học và kỹ thuật HàNội 1978.

[10B] Encyclopia of AI. Vol 2. 1987 John Wiley & Sons. Inc

[11B] 4proplogichandout.pdf (MIT courses)

[12B] Logic in Computer Science : Modelling and Reasoning about Systems Michael Huth & Mark Ryan (reprinted 2006). (chương Propositional Logic, chương Predicates Logic, chương Binary decision diagrams)

[13B] DeductionI.pdf

[14B] 7ruleshandout.pdf (MIT courses)

[15B] chapter09.pdf

[16B] Logic and proof (notes.pdf, slides.pdf)

[17B] The essence of logic John Kelly @Prentice Hall 1997

[18B] Alwen Tiu. Introduction to Logic. The Australian National University. Summer Schools in Logic and Learning 26 January - 6 February 2009, Canberra.

[19B] Description Logics Deduction in Propositional Logic - *Enrico Franconi*.

[20B] Meaning and Argument An Introduction to Logic Through Language SECOND EDITION Ernest Lepore with Sam Cumming © 2009 Ernest Lepore.

[21B] Harrie de Swart Philosophical and Mathematical Logic. © Springer Nature Switzerland AG 2018.

[22B] Wolfgang Rautenberg A Concise Introduction to Mathematical Logic. ©2006 Springer Science+Business Media, Inc.

### Các trang web

[01W] http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_logic

[02W] http://plato.stanford.edu/entries/aristotle-logic/

[03W]http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Waner/RealWorld/index.html

[04W]http://www.zweigmedia.com/RealWorld/logic/logicintro.html

[05W] Mike Feeley : www.ugrad.cs.ubc.ca/cs218 (file 218-1.pdf)

[06W] http://www.infidels.org/ : Logic & Fallacies. Constructing a Logical Argument (1997) mathew

[07W] https://en.wikipedia.org/wiki/Clause_(logic)

===========================

Xin cảm ơn các tác giả của những tài liệu được sử dụng trong quyển sách này.

=====================*====================

**LUẬN**

**LÝ**

**TOÁN**

**HỌC**

**(MATHEMATICAL LOGIC)**

**SUY NGHĨ = LIÊN TƯỞNG + NHẬN DẠNG QUAN HỆ**

*(...) Toán học có thể được xây dựng và phát triển*

*từ các thiên tài.*

*Nhưng thành quả của nó không nhất thiết*

*chỉ những tài năng mới hiểu được (...)*

*nghĩ ra các học thuyết cao siêu,*

*có thể là việc làm không đơn giản.*

*Nhưng khi đã tìm được, đã nghĩ ra*

*thì hiểu và sử dụng nó*

*là một việc bình thường (...)*