(LÝ NGUYÊN) NGUYỄN THANH SƠN

LÝ THUYẾT TẬP HỢP

(SET THEORY)

A proof is not really undrestood untill the stage is reached at which one can grasp it as a whole and see it as a single idea.

G.F. Simmons

Liên hệ với tác giả có thể theo các thông tin sau :

https://www.facebook.com/NguyenThanhSonCXDT

ntsontp@gmail.com, lynguyen.6x@gmail.com

Nội dung

Lời tựa

Nội dung quyển sách gồm những kiến thức cơ bản của lý thuyết tập hợp. Khởi đầu tốt cho những ai muốn mở cánh cửa vào ngôi nhà toán học nói chung và đại số nói riêng. Tập hợp là nền tảng của mọi ngành toán học. Từ giải tích, lý thuyết số, xác suất thống kê, … ngay cả đến những ngành khoa học thực nghiệm như vật lý, hóa học, sinh học … và cả những ngành kinh tế, chưa kể đến các ngành khoa học xã hội thậm chí là triết học. Nắm vững lý thuyết tập hợp chính là đi được một đoạn đường dài vững chắc chinh phục các ngành toán học cũng như khoa học thực nghiệm. Sự ảnh hưởng của lý thuyết tập hợp hầu như bao trùm, có thể coi là nền tảng của mọi nền tảng. Dù tập hợp đóng vai trò quan trọng nhưng ít được chú ý ở cấp phổ thông và các năm đầu đại học. Đôi khi có quan tâm nhưng chỉ ở mức sơ lược và thiếu tính hệ thống, nhất là ý nghĩa của các khái niệm không được làm rõ ràng.

Lý thuyết tập hợp được trình bày ổ đây theo cách nó được sinh ra và phát triển tự nhiên không uốn nắn theo khuôn khổ nào. Mọi khái niệm đều có lý do “thực tế” từ đó nó được hình thành. Khái niệm trước độc lập với khái niệm sau. Dù được trình bày theo cách thức tự thân, hạn chế sự phụ thuộc, đề cao tính độc lập của từng khai niệm (theo quan điểm trình bày của Serge Lang). Điều này không có nghĩa là trình bày tập hợp theo xu hướng ứng dụng là không tốt, tiêu chuẩn là hướng tới người học. Người học có thể tiếp cận tập hợp dễ dàng, đòi hỏi ít kiến thức bắt buộc ban đầu. Nếu không muốn nói là không cần có kiến thức bắt buộc trước khi đi vào lý thuyết tập hợp. Đây là cách trình bày tự nhiên nhất dễ dàng cho người mới bắt đầu tìm hiểu về toán học, đặc biệt là chuyên ngành đại số. Ngoài ra, cách tiếp cận hàn lâm được trình bày trong phụ chương, đấy là tiếp cận theo phương pháp tiên đề.

Dù tiếp cận theo cách nào, mỗi khái niệm được trình bày gồm hai dạng. Dạng ngôn ngữ tự nhiên giúp người đọc dễ dàng hiểu rõ khái niệm được trình bày. Vì không vướng vào những ký hiệu, qui định của logic. Nhược điểm của cách trình bày này là không chặt chẽ, khó sử dụng cho việc chứng minh. Dạng thứ hai là ngôn ngữ hình thức, dạng này có độ chính xác tuyệt đối, dù rằng khó hiểu – nếu chưa rành về ngôn ngữ hình thức logic – nhưng hữu dụng trong việc chứng minh.

Nội dung sách gồm bốn chương :

Chương I tổng quan về tập hợp, trong đó định danh các khái niệm, các tập hợp đặc biệt, mối tương quan giữa tập hợp hay còn gọi là các toán tử. Cách nói khác là phép tính giữa các tập hợp.

Chương II là chương nền tảng quan trọng, khái niệm quan hệ dẫn dắt những khái niệm mới của tập hợp. Để định nghĩa quan hệ cần tập hợp tích. Lưu ý thế giới tập hợp chỉ có một từ vựng duy nhất là tập hợp, do đó mọi khái niệm mới được định nghĩa cũng là tập hợp dù trong thế giới ứng dụng nó là một tính chất. Quan hệ, ánh xạ cũng là tập hợp. Tất cả đều là tập hợp khi thỏa điều kiện nào đó để trở thành khái niệm mới, vì vậy những phép tính trên tập hợp có thể áp dụng trên quan hệ, trên ánh xạ. Có hai loại quan hệ quan trọng là quan hệ thương đương và quan hệ thứ tự. Gốc gác tất cả khái niệm trong thế giới tập hợp đều là tập hợp.

Chương III là chương phân lớp các tập hợp, thế giới tập hợp được chia thành từng mảnh để việc khảo sát được cụ thể hơn. Như được cắt làm đôi thành hữu hạn, vô hạn. Vô hạn lại được phân chia tiếp là đếm được, không đếm được. Một cách tự nhiên, các phép tính về tập hợp cũng có thể được thực hiện trên các lớp này.

Chương IV lượng số – thứ số, nói về "độ lớn" của tập hợp và khảo sát trật tự trên các tập hợp.

Bài tập không để sau các chương như thông lệ. Với lý do, người đọc có cảm giác hoàn tất khi đọc xong ba chương, việc làm bài tập hay không tùy thuộc vào nhu cầu mỗi người.

Bài giải cho các chương được trình bày ngay sau phần bài tập. Tuy nhiên nếu độc giả muốn rèn luyện kỹ năng chứng minh nên cố gắng tự giải. Chỉ xem phần bài giải sau khi đã có thời gian nghiền ngẫm.

Hai phụ chương quan trọng được đầu tư nhiều là hệ tiên đề của lý thuyết tập hợp và thủ tục hóa tư duy đáng để người đọc chiêm nghiệm.

Phần phụ chương còn lại cũng đáng để quan tâm. Ngoài ra có hai bảng đối chiếu gồm các khái niệm xuất hiện trong quyển sách, đó là Bảng đối chiếu Việt – Anh, trong đó kèm theo chỉ mục chỉ số trang của mỗi khái niệm được định nghĩa tiện cho việc tra cứu, và bảng đối chiếu Anh – Việt cho những ai cần tra cứu ngược lại.

Một nội dung khác là lời bạt được viết từ ấn bản đầu, xét thấy vẫn còn phù hợp nên vẫn được giữa lại.

(Lý Nguyên) Nguyễn Thanh Sơn

(06/2024)

Chương I TỔNG QUAN VỀ TẬP HỢP

1. Những khái niệm cơ bản

Khởi đầu của một lý thuyết là trống không, chưa có bất kỳ thực thể nào. Thế giới lý thuyết tập hợp cũng bắt đầu như vậy. Do đó sẽ chấp nhận một số khái niệm ban đầu, chúng được coi là những viên gạch nền tảng đầu tiên để xây nên tòa lâu đài tập hợp. Từ đó Cantor đã dựng nên một thiên đường.

Trong thế giới con người mọi sự vật đều duy nhất. Các thực thể trong toán học cũng không ngoại lệ, chúng không có bản sao. Khi giới hạn lại trong phạm vi hẹp mới xuất hiện khái niệm bằng nhau.

✧. Tập hợp

Đây cũng là khái niệm được chấp nhận, không định nghĩa. Vì không định nghĩa được nên chấp nhận. Một đối tượng nào đó có thể được chỉ định là tập hợp, không điều kiện ràng buộc.

Thí dụ

Tập hợp các con số, tập hợp các quốc gia trên thế giới, tập hợp những bài thơ của thiền sư Tuệ sĩ, tập hợp những con hổ trên thế giới, … .

✧. Thuộc về

Đây cũng là khái niệm được chấp nhận, không định nghĩa. Nó là thuộc tính chỉ sự kết nối giữa các tập hợp.

Thí dụ

Số 5 thuộc về tập hợp số tự nhiên, quyển sách thuộc về tập hợp sách trong thư viện, … .

✧. Phần tử

Trước đây khái niệm này được chấp nhận, nghĩa là không định nghĩa, coi như khái niệm nguyên thủy. Bất kỳ *tập hợp* nào cũng có thể đóng vai trò phần tử. Miễn là nó có quan hệ "thuộc về" với tập hợp khác.

Thí dụ

Một học sinh, một lớp học, một trái táo, một con voi, một quốc gia, một kho hàng, một bài thơ … cũng có thể đóng vai trò phần tử.

2. Vấn đề định danh các khái niệm

Để phân biệt các khái niệm và đối tượng trong lý thuyết tập hợp, nói cách khác là chuyển chúng vào trong thế giơi tập hợp bằng cách đặt tên cho chúng. Như tập hợp các học sinh trong trường tiểu học Thanh Đa gọi là A, tập hợp các quyển sách của học sinh Nguyên Phong gọi là B. Quá trình này gọi là *mã hóa*. Hoạt động mã hóa tiện lợi trong việc diễn đạt, nhưng dần dà sẽ gây khó khăn trong việc hiểu các phát biểu trong lý thuyết tập hợp nói riêng và trong toán học nói chung. Đây là việc làm có đánh đổi. Vì vậy mã hóa tốt là làm sao cho người đọc còn có chút "manh mối" để truy nguyên về "cội nguồn". Đặc điểm của toán học là súc tích và gọn gàng nên không thể tránh khỏi việc mã hóa làm mất đi nguyên ủy của đối tượng hay khái niệm được mã hóa. Từ đây về sau thay vì phải nói đầy đủ câu văn "phần tử a thuộc về tập hợp X" lý thuyết tập hợp dùng ký hiệu "$\in$" thay cho từ thuộc về. Câu văn trên được chuyển thành "$a \in X$". Ngược lại, khi nói "phần tử a "không" thuộc về tập hợp X sẽ được ký hiệu là $a \notin X$.

Đối với người học, việc chuyển những phát biểu toán học ở dạng ký hiệu trở về câu văn của ngôn ngữ tự nhiên là bước cần thiết với người bắt đầu đi vào thế giới toán học. Sau một thời gian thuần thục thì có thể sử dụng hoàn toàn "ngôn ngữ" ký hiệu của thế giới tập hợp mà không cần phải chuyển đổi. Từ đây về sau mã hóa là một phần quan trọng trong việc trình bày các khái niệm mới. Vấn đề là để cho người học dần dần làm quen với "ngôn ngữ" này. Điều nhấn mạnh ở đây, *lý thuyết tập hợp cũng là ngôn ngữ* như bao ngôn ngữ khác. Một bài toán được diễn đạt bằng ngôn ngữ tự nhiên muốn sử dụng toán học để giải nó, bước đầu tiên là diễn tả lại bằng ngôn ngữ toán học. Quá trình này giống như dịch câu văn từ tiếng Anh sang tiếng Việt. Việc dịch sang ngôn ngữ toán học "chính xác" cở nào tùy thuộc vào trình độ người dịch và nhu cầu của bài toán.

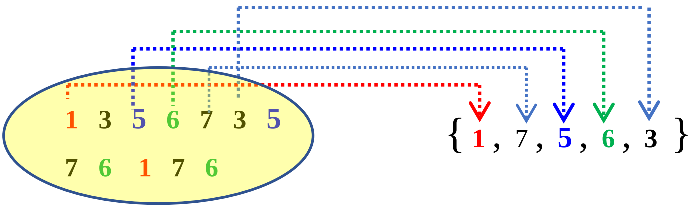
Nói thêm về ngôn ngữ tập hợp. Ngôn ngữ tập hợp nói riêng và tổng quát là ngôn ngữ toán học không "đầy đủ" và "phong phú" như ngôn ngữ tự nhiên. Ngôn ngữ toán học còn hạn chế, một số sự việc trong thế giới thực được diễn tả bằng ngôn ngữ tự nhiên dễ dàng, gọn gàng. Nhưng diễn tả trong ngôn ngữ toán học lại dài dòng hay phải chuyển qua ý tương đương để thực hiện. Đây là một trong những khó khăn cho người học toán. Vì lý do đó trong trình bày của quyển sách này khi định nghĩa khái niệm mới luôn luôn bằng hai "ngôn ngữ" – ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ toán học cụ thể là ngôn ngữ hình thức.

3. Xác định tập hợp

Từ hai khái niệm ban đầu – tập hợp, thuộc về – kết hợp cùng thế giới đối tượng đang hiện hữu tạo dựng nên một thế giới mới – thế giới tập hợp. Việc đưa ra các cách xác định tập hợp *vô hình trung* tạo ra một *định nghĩa cho tập hợp*, nhưng là định nghĩa chưa trọn vẹn. Vì vậy phát sinh những cái sau này gọi là mâu thuẫn. Có đề nghị coi mâu thuẫn trong lý thuyết tập hợp là những trường hợp đặc biệt. Sau đây là hai cách xác định tập hợp.

✧. Liệt kê

Các phần tử được biểu diễn bằng danh hiệu, được liệt kê ra trong dấu móc ({}) đặt cách nhau bởi dấu phẩy (,), không liệt kê hai phần tử trùng nhau.



Thí dụ

Các tập hợp sau được xây dựng theo cách liệt kê.

{1, 2, 5, 8, 3},

{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}

{Kinhngọc, Ngàncánhhạc, Câuchuyệndòngsông}

{Tagore, TuệSỹ, HermannHess, Kawabata, PhạmThiênThư}

{physics, chemistry, biology, astronomy}

✧. Đặc điểm của phương pháp liệt kê

* Các phần tử được chọn tùy ý.
* Tập hợp cùng lắm thuộc loại *đếm được*.
* Các phần tử không có *thứ tự* với nhau.
* Nếu hai hay nhiều phần tử trùng nhau chỉ chọn một khi biểu diễn trong tập hợp.

Thí dụ

Tập hợp {a, b, c, c, c} cũng là tập hợp {a, b, c}.

Tập hợp {∅ , ∅} cũng là tập hợp {∅}.

Nhận xét

Trong phương pháp này xuất hiện khái niệm *số phần tử của tập hợp*. Đó là số tự nhiên chỉ ra số phần tử được liệt kê trong tập hợp đó. Sau này sẽ có định nghĩa đầy đủ cho khái niệm số phần tử của tập hợp.

Thí dụ

Cho ba tập hợp sau {A, {∅}, ∅}, {A, {{∅}}} và {{{∅}}}, mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử ?.

Giải đáp

Tập hợp {A, {∅}, ∅} có 3 phần tử là A, {∅}, ∅.

Tập hợp {A, {{∅}}} có 2 phần tử là A, {{∅}}.

Tập hợp và {{{∅}}} có 1 phần tử là {{∅}}.

Tập hợp {a, 4, {{∅}}, {{{∅}}} } gồm 4 phần tử :

Phần tử “a” là tên của đối tượng, nó có ý nghĩa gì tùy thuộc vào bài toán cụ thể.

Phần tử “4” là tên của đối tượng, thường được hiểu là số 4 của tập hợp số tự nhiên.

Phần tử “{{∅}}” là tập hợp có đúng 1 phần tử là {∅}, phần tử {∅} cũng là tập hợp có đúng 1 phần tử là ∅.

Phần tử “{{{∅}}}” là tập hợp có đúng 1 phần tử {{∅}}, phần tử {{∅}} cũng là tập hợp có đúng 1 phần tử {∅}, phần tử {∅} là tập hợp có đúng 1 phần tử ∅.

<u>Nhận xét</u>

Thí dụ này cho biết cách đọc một tập hợp.

* Cách dùng kiểu liệt kê chỉ để xác định các tập hợp “hữu hạn”, không dùng cho tập hợp “vô hạn”.
* Đôi khi các phần tử có thể được liệt kê theo qui luật “mặc nhiên” được cảm nhận từ các phần tử đầu tiên.

<u>Thí dụ</u>

{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, ... },

{∅, {∅}, {{∅}}, {{{∅}}}, {{{{∅}}}}, ... }.

N = {1, 2, 3, 4, … } tập hợp số nguyên tự nhiên.

Tuy nhiên nên tránh sử dụng ký hiệu “…”, vì mỗi người có thể hiểu ký hiệu này theo những nghĩa khác nhau.

<u>Lưu ý</u>

{1, 2, 3, …} có thể hiểu là {<u>1, 2, 3</u>, <u>2, 4, 6</u>, <u>4, 8, 12</u>, <u>8, 16, 24</u>, …}

Toán học không nên bắt người học đoán dụng ý !!!. Với trẻ con sẽ là khó khăn còn với lão làng chỉ là trò đùa. Nhưng trước khi thành lão làng cũng đã từng là trẻ con.

Chú ý

Từ đây trở về sau qui ước *tập số nguyên tự nhiên* $\mathbb{N}$ là tập hợp *không có phần tử 0*. Nó bắt đầu từ 1.

✧. Trưng tính

Cách xác định này có trước tập hợp X, các phần tử của X thỏa tính chất α hình thành một tập hợp mới.

Công thức chung của tính trung tính :

{x | hội hữu hạn hoặc giao hữu hạn các "mệnh đề" có giá trị đúng sai}

Việc đánh giá đúng sai của mệnh đề phải dựa trên một không gian cụ thể. Không định rõ thế giới cho các mệnh đề hoặc tự "ngầm" hiểu có thể dẫn đến những bất định.

Thí dụ

A = {x | x là số chẵn} ,

B = {y | y là số lẻ và y nhỏ hơn 10} = {1, 3, 5, 7, 9}

Một số cách viết "dối" của những người làm toán ở trình độ "cao" :

$\{ \alpha \times n \in \sigma : n \in \mathbb{N} \}$ nên viết rõ hơn là

$\{ \alpha \times n \mid (\underline{\alpha \times n \in \sigma})$ và $(\underline{n \in \mathbb{N}}) \}$ hay chính xác hơn

$\{ x \mid (x = \alpha \times n)$ và $(\alpha \times n \in \sigma)$ và $(n \in \mathbb{N}) \}$.

Một nguyên tắc cơ bản của toán học nói riêng và những ngành khoa học nói chung : "Mọi khái niệm hay ký hiệu phải được xác định trước khi sử dụng". Tuy nhiên vẫn có ngoại lệ – định nghĩa đệ qui. Đây là loại định nghĩa sử dụng khái niệm đang định nghĩa khi chưa hoàn tất việc định nghĩa khái niệm này. Nếu mơ hồ về một ký hiệu hay khái niệm nào phải hỏi lại người viết ra nó dù khái niệm đó có quen thuộc cỡ nào. Có thể nó cùng ý nghĩa mà thông thường đã biết trước đây. Đôi khi đó là dạng bình cũ rượu mới, từ đây nhiều ngộ nhận xuất hiện.

Thí dụ

Khi gặp A = B, người đọc thường thắc mắc A, B là cái gì, ít khi nào hỏi dấu "=" có ý nghĩa gì. Vì ký hiệu "=" đã rất quen thuộc.

✧. Đặc điểm của phương pháp trưng tính

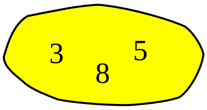
* Cần xác định một số tập hợp cho trước.
* Tập hợp kết quả có thể đạt tới mức không đếm được.

✧. Biểu diễn bằng hình ảnh của tập hợp

Tập hợp được biểu diễn bằng một vòng khép kín gọi là giản đồ Venn-Euler. Các phần tử của tập hợp nằm trong vòng khép kín.

Thí dụ

Tập hợp X = {5, 3, 8}.



Giản đồ Venn-Euler của tập hợp X

Nhận xét

Hình thức biểu diễn của giản đồ Venn-Euler đưa đến nhận thức nhị nguyên. Mọi thứ đều có thể chia đôi. Cái bên trong và cái bên ngoài phân biệt nhau.

Danh hiệu được dùng để biển diễn cho các đối tượng toán học. Danh hiệu có thể dùng là tên của đối tượng trong thực tế. Tuy nhiên để đơn giản có thể mã hóa cho ngắn gọn xúc tích.

Thí dụ

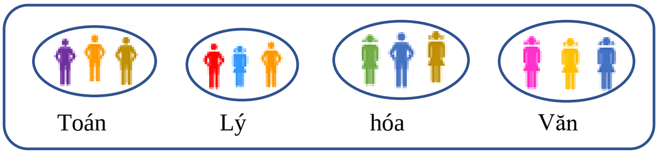
Thay vì gọi tên đầy đủ là tập hợp số tự nhiên sẽ mã hóa thành tập hợp $\mathbb{N}$, tập hợp số nguyên thành tập hợp $\mathbb{Z}$, tập hợp số hữu tỉ thành tập hợp $\mathbb{Q}$, tập hợp số thực thành tập hợp $\mathbb{R}$, tập hợp số phức thành tập hợp $\mathbb{C}$, … .

4. Ý nghĩa của tập hợp

Đây là khả năng diễn đạt của tập hợp.

Thí dụ

Trường trung học XUtopia có 4 lớp học : Toán, Lý, Hóa, Văn. Mỗi lớp học có 3 học sinh.

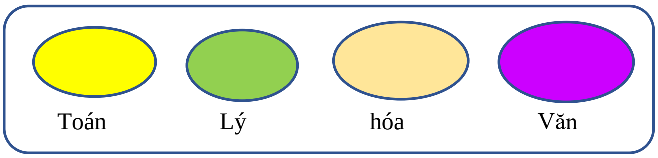


Trường XUtopia

Có 4 người mô tả ngôi trường và biểu diễn sự mô tả của mình bằng tập hợp.

Người A : chỉ quan tâm các lớp học có môn học khác nhau. Biểu diễn bằng tập hợp như sau :

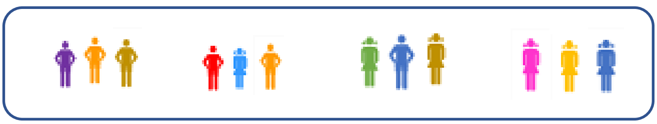
XUtopia = {Toán, Lý, Hóa, Văn}.



Góc nhìn của A về Trường XUtopia

Người B : chỉ quan tâm số học sinh toàn trường.

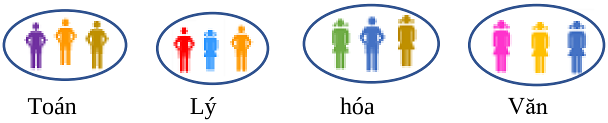
XUtopia = {hsA, hsZ, hsU, hsB, hsY, hsV, hsC, hsX, hsD, hsS, hsW, hsK}.



Góc nhìn của B về Trường XUtopia

Người C : chỉ quan tâm từng lớp học, cùng với học sinh trong đó, nghĩa là mỗi tập hợp là một lớp học có phần tử là học sinh.

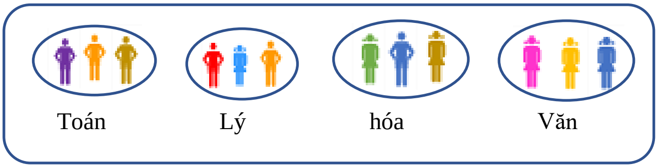
Toán = {hsA, hsZ, hsU}, Lý = {hsB, hsY, hsV}, Hóa = {hsC, hsX, hsD}, Văn = {hsS, hsW, hsK}



Góc nhìn của C về Trường XUtopia

Người D : quan tâm cả 3 đối tượng (trường, lớp học và học sinh).

XUtopia = {{hsA, hsZ, hsU}, {hsB, hsY, hsV}, {hsC, hsX, hsD}, {hsS, hsW, hsK}}.



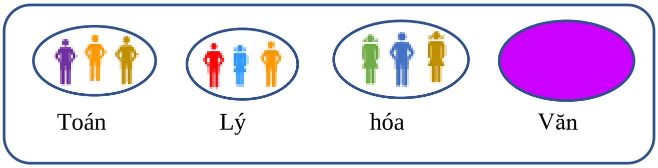
Góc nhìn của D về Trường XUtopia

Mỗi người có những quan tâm khác nhau nên trường Xutopia được biểu diễn bởi những tập hợp khác nhau. Mỗi tập hợp chỉ lưu giữ một số thông tin về ngôi trường này.

Sau đây một số tình huống xảy ra đối với ngôi trường.

Trường hợp 1 : lớp học Văn không tuyển được học sinh, ie. là Văn = ∅.

Lúc này những người quan sát sẽ thấy ngôi trường như sau :



Trường XUtopia

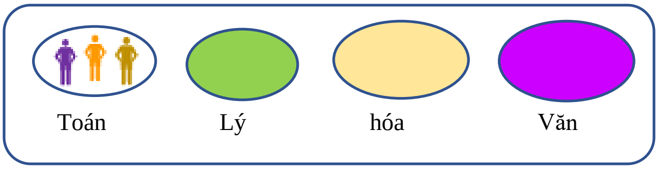
Người A : XUtopia = {Toán, Lý, Hóa, Văn}.

Người B : XUtopia = {hsA, hsZ, hsU, hsB, hsY, hsV, hsC, hsX, hsD}

Người C : Toán = {hsA, hsZ, hsU}, Lý = {hsB, hsY, hsV}, Hóa = {hsC, hsX, hsD}, Văn = ∅.

Người D : {{hsA, hsZ, hsU}, {hsB, hsY, hsV}, {hsC, hsX, hsD}, ∅}.

Trường hợp 2 : chỉ tuyển được học sinh cho lớp Toán.



Trường XUtopia

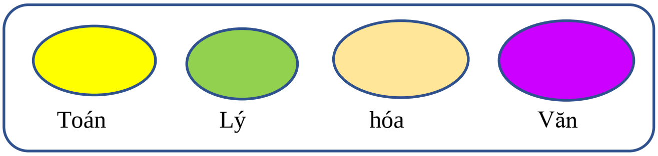
Người A : XUtopia = {Toán, Lý, Hóa, Văn}.

Người B : XUtopia = {hsA, hsZ, hsU}.

Người C : Toán = {hsA, hsZ, hsU}, Lý = ∅, Hóa = ∅, Văn = ∅.

Người D : XUtopia = {{hsA, hsZ, hsU}, ∅}.

Trường hợp 3 : các lớp đều không tuyển được học sinh.



Trường XUtopia

Quan sát A : XUtopia = {Toán, Lý, Hóa, Văn}.

Quan sát B : XUtopia = ∅.

Quan sát C : Toán = ∅, Lý = ∅, Hóa = ∅, Văn = ∅.

Quan sát D : XUtopia = {∅, ∅, ∅, ∅} = {∅}.

Nhận xét

Để biểu diễn một thực tế bằng tập hợp điều này hoàn toàn tùy thuộc vào nhu cầu của người quan sát. Nói cách khác, tùy vào từng bài toán. Tập hợp (của lý thuyết tập hợp) chỉ biểu diễn thực tế tại *một thời điểm*, nó chưa có khả năng biểu diễn thực tế thay đổi theo thời gian.

Trong vài trường hợp, tập hợp không thể biểu diễn được đầy đủ thực trạng. Đây cũng có thể xem là những yếu kém của biểu diễn bằng tập hợp.

5. Các tập hợp đặc biệt

✧. Tập hợp rỗng

Tập hợp rỗng là tập hợp không có phần tử.

Ký hiệu : $\varnothing$ hoặc {}, đôi khi là [].

Tập hợp rỗng có vai trò quan trong trong việc tính toán giữa các tập hợp, tương đồng như số 0 trong tập hợp số nguyên.

Thí dụ

{n| n là số nguyên lớn hơn 10 và nhỏ hơn 3} = $\varnothing$.

✧. Tập con

Tập con là tập hợp có phần tử cũng là phần tử của tập hợp khác.

Thí dụ

Tập hợp {2, 5, 7, 8} là tập con của tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Tập hợp {2, 8} là tập con của tập hợp {2, 5, 7, 8}.

✧. Tập con riêng

A là tập con riêng của B nếu A là tập con của B và A khác B.

Ký hiệu : $A \subset B$ hay $A \subsetneq B$.

✧. Tập hợp các tập con

Tập hợp các tập con của một tập hợp là tập hợp gồm tất cả tập con của tập hợp đó.

Ký hiệu : $\mathcal{P}$(X) hay 2^X.

$$2^X = \{Y \mid Y \text{ là tập con của } X\}$$

Thí dụ

X = {1, 2, 3}, 2^X = {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}.

✧. Tập hợp phổ dụng

Một số bài toán giả định có tập hợp phổ dụng E, nghĩa là mọi tập hợp trong lãnh vực của bài toán đều là tập con của E.

✧. Tập hợp tách biệt

Hai tập hợp tách biệt nhau là hai tập hợp không có chung phần tử.

Thí dụ

{a, b, c, d} và {e, f, g} là hai tập hợp tách biệt,

{a, x, y, d} và {x, e, y, f, g} là hai tập hợp không tách biệt, vì có phần tử chung là x, y.

✧. Hữu hạn, vô hạn, đếm được, không đếm được

(xem chương III Phân lớp các tập hợp).

6. Cách tìm tất cả tập con của một tập hợp

Đây cũng là một bài toán hữu ích trong việc "hành xử" trên tập hợp.

Tìm tập hợp tất cả tập con của X = {a, b, c} ?.

Tập con 0 phần tử : ∅.

Tập con 1 phần tử : a → {a}, b → {b}, c → {c}.

Tập con 2 phần tử : a, b → {a, b}, a, c → {a, c}, b, c → {b, c}.

Tập con 3 phần tử : a, b, c → {a, b, c}.

Vậy 2^X = {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}.

Chú ý

Phân biệt giữa *power set* (tập hợp các tập con $\mathcal{P}$(X)) và *power of set* (= cardinal number = lượng số).

Ký hiệu 2^X thay vì $\mathcal{P}(X)$ có dụng ý chỉ số phần tử của tập hợp $\mathcal{P}(X)$ là $2^{|X|}$ (với $|x|$ là số phần tử của X, kết quả này sẽ được chứng minh sau).

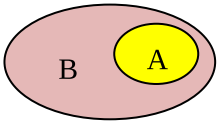
7. Quan hệ giữa các tập hợp

Định nghĩa – Tập con (chứa trong)

Ký hiệu : $A \subset B$ hay $A \subseteq B$ (A, B là tập hợp).

Bằng ngôn ngữ tự nhiên.

Tập hợp A chứa trong tập hợp B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B.



Bằng ngôn ngữ hình thức.

$A \subseteq B \longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$.

EndĐn.

$A \subset B$ có nghĩa là A là tập con của B và không bằng B. A còn được gọi là tập con riêng của B.

$A \subseteq B$ có nghĩa là A là tập con của B và có thể bằng B.

Thí dụ

Lấy $A = \{5, 6, 9\}$ và $B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 14\}$ thì $A \subset B$.

Mệnh đề

Tập hợp rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Chứng minh : (dùng khái niệm mặc nhiên thỏa để chứng minh)

Định nghĩa – Hai tập hợp bằng nhau

Ký hiệu : $A = B$ (A, B là tập hợp).

Bằng ngôn ngữ tự nhiên.

Tập hợp A bằng tập hợp B nếu và chỉ nếu A chứa trong B và B chứa trong A.

Bằng ngôn ngữ hình thức.

$(A = B) \longleftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$ hay.

$$(A = B) \longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (\forall y)(y \in B \longrightarrow y \in A)$$

EndĐn.

Thí dụ

Lấy A = {2, 4, 6, 8} và B = {x| x = 2k và $1 \leq k \leq 4$)} thì A = B.

8. Toán tử giữa các tập hợp

Các toán tử còn được gọi là các *phép tính* trên lớp các tập hợp.

Định nghĩa – Hội hai tập hợp

Ký hiệu : $A \cup B$ (A, B là tập hợp).

Bằng ngôn ngữ tự nhiên.

($A \cup B$) là hội của A và B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của A và B cũng là phần tử ($A \cup B$), và mọi phần tử của ($A \cup B$) cũng là phần tử của A hay của B.

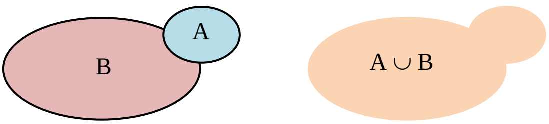
Bằng ngôn ngữ hình thức.

$A \cup B = \{x| (\forall x)((x \in A) \vee (x \in B))\}$ hay

$(\forall x)\ (x \in A \cup B) \longleftrightarrow (\forall x)(\ (x \in A) \vee (x \in B))$

EndĐn.

Minh họa.



Thí dụ

Lấy X = {1, 2, 4, 5, 6, 9, 10} và Y = {2, 3, 5, 6, 7, 8, 10} có tập hợ[hội là $X \cup Y$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Các phần tử trùng nhau của hai tập hợp chỉ xuất hiện một lần trong tập hợp hội.

Định nghĩa – Giao hai tập hợp

Ký hiệu : A $\cap$ B (A, B là tập hợp).

Bằng ngôn ngữ tự nhiên.

(A $\cap$ B) là giao của A và B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của (A $\cap$ B) đồng thời là phần tử của A và B và mọi phần tử đồng thời thuộc A và B cũng thuộc về (A $\cap$ B).

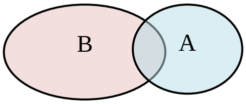
Bằng ngôn ngữ hình thức.

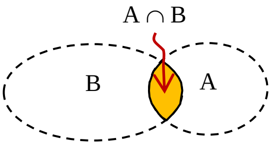
$A \cap B = \{x \mid (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B))\}$ hay

$(\forall x)\ (x \in A \cap B) \longleftrightarrow (\forall x)\ ((x \in A) \wedge (x \in B))$

EndĐn.

Minh họa.





Thí dụ

Lấy X = {2, 4, 5, 6, 8, 9} và Y = {3, 5, 6, 7, 9,11} thì X $\cap$ Y = {5, 6, 9}.

Định nghĩa – Hiệu hai tập hợp

Ký hiệu : A – B (A, B là tập hợp).

Bằng ngôn ngữ tự nhiên.

(A – B) là hiệu của A và B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của (A – B) là phần tử của A và không là phần tử của B và mọi phần tử thuộc A và không thuộc B cũng thuộc về (A – B).

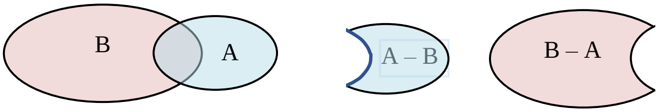
Bằng ngôn ngữ hình thức.

$A - B = \{x \mid (\forall x)((x \in A) \wedge (x \notin B))\}$ hay

$(\forall x)\ (x \in A - B) \longleftrightarrow (\forall x)\ ((x \in A) \wedge (x \notin B))$

EndĐn.

Minh họa.



Hiệu của A và B là phần còn lại của A sau khi bỏ đi phần chung của A và B. Tương tự, hiệu của B và A là phần còn lại của B sau khi bỏ đi phần chung của A và B.

Thí dụ

Lấy X = {2, 4, 5, 6, 8, 9, 10} và Y = {1, 3, 5, 6, 7, 9, 14} thì

X – Y = {2, 4, 8, 10}.

Mệnh đề

A – B = A – (A ∩ B).

Chứng minh (dùng định nghĩa giao và hiệu để chứng minh).

Định nghĩa – Tập bù

Giả định có tập hợp phổ dụng E là tập "lớn nhất", A là tập con của E.

Ký hiệu : A' = E – A hay $\overline{A}$ = E – A.

Bằng ngôn ngữ tự nhiên.

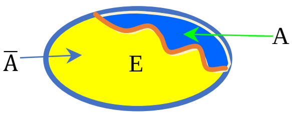
A' là bù của A nếu và chỉ nếu A' ∪ A = E và A' ∩ A = ∅.

Bằng ngôn ngữ hình thức.

$A' \longleftrightarrow (\forall x)\ (x \in E \wedge x \notin A)$.

EndĐn.

Minh họa.



A là bù của $\overline{A}$ và $\overline{A}$ cũng được gọi là bù của A, với E là tập phổ dụng.

Định nghĩa – Hai tập hợp phụ nhau

Bằng ngôn ngữ tự nhiên.

Tập hợp A và tập hợp B phụ với nhau trong tập hợp C..

Bằng ngôn ngữ hình thức.

A và B là phụ của nhau trong C $\longleftrightarrow$ $A \cup B = C$ và $A \cap B = \varnothing$.

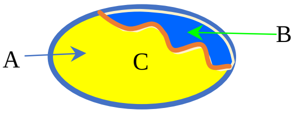
EndĐn.

Thí dụ

Lấy $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ và

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

thì A và B là phụ với nhau trong C.



Nhận xét

Nếu C là tập phổ dụng thì A và B được gọi là hai tập bù nhau. Do đó khái niệm bù là trường hợp đặc biệt của khái niệm phụ.

Định nghĩa – Tích hai tập hợp

Bằng ngôn ngữ tự nhiên.

Tích của hai tập hợp S và T là tập hợp gồm tất cả các cặp đôi (x, y) có thứ tự, với x là phần tử của S và y là phần tử của T.

Ký hiệu : $S \times T$

Bằng ngôn ngữ hình thức.

$S \times T = \{(x, y)| (\forall x, y) ((x \in S) \wedge (y \in T))\}$

EndĐn.

Thí dụ

Lấy $S = \{a, b\}$, $T = \{1, 2, 3\}$ thì

$S \times T = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.

Định nghĩa – Tập hợp Thương

Tập hợp thương của tập hợp X và Y (sẽ định nghĩa trong chương quan hệ).

Ký hiệu : X/Y.

Nhận xét

Người dùng có thể định nghĩa thêm những toán tử cần thiết cho bài toán của mình.

Các định nghĩa của các toán tử dựa trên luận lý vị từ. Do đó việc chứng minh sau này từ dạng toán tử thường chuyển về dạng mệnh đề của luận lý vị từ để tính toán.

Dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây :

$A \cup B = B \cup A$, $A \subset (A \cup B)$, $(A \cap B) \subset A$,

$(A - B) \subset A$, $(A')' = A$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$,

$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $A - B = A \cap B'$, $E' = \varnothing$, $\varnothing' = E$,

...

Chứng minh mẫu cho trường hợp.

$(A \cap B)' = A' \cup B'$.

*. Chứng minh $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$.

Lấy $x \in (A \cap B)'$,

$(x \in E) \wedge (x \notin (A \cap B))$,

$(x \in E) \wedge \neg(x \in (A \cap B))$,

$(x \in E) \wedge \neg((x \in A) \wedge (x \in B))$,

$(x \in E) \wedge ((x \notin A) \vee (x \notin B))$,

$((x \in E) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in E) \wedge (x \notin B))$,

$(x \in A') \vee (x \in B')$,

Do đó $x \in A' \cup B'$. Q.E.D.

*. Chứng minh $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$.

Lập luận tương tự như trên. Lấy $x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in (A \cap B)'$.

Vậy $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Chứng minh các tính chất còn lại được xem như bài tập (dùng cùng kỹ thuật như trên).

Định nghĩa – Ánh xạ.

Ánh xạ là sự kết nối các phần tử của hai tập hợp – một tập hợp được gọi là *miền trị* và tập hợp còn lại là *miền ảnh* – thỏa hai điều kiện :

(i) *Mọi* phần tử của miền trị phải kết nối với phần tử của miền ảnh.

(ii) *Mỗi* phần tử của miền trị chỉ kết nối với *một phần tử* của miền ảnh.

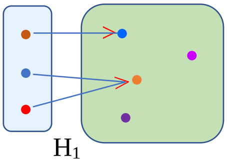
Ký hiệu :

Ánh xạ f từ miền trị A vào miền ảnh B. $f : A \longrightarrow B$

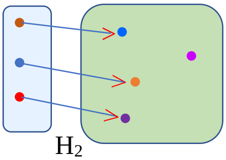
EndĐn

Thí dụ

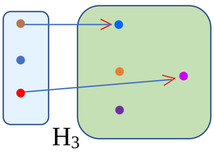
Các liên kết sau đây cái nào là ánh xạ :



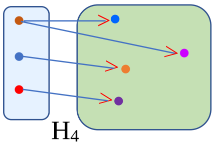
H_1



H_2



H_3



H_4

Hình H_1, H_2 : là ánh xạ vì thỏa điều kiện (i) và (ii).

Hình H_3 : không là ánh xạ có phần tử ở miền trị không có quan hệ với phần tử nào của miền ảnh, vi phạm điều kiện (i),

Hình H_4 : liên kết không là ánh xạ có phần tử ở miền trị quan hệ với 2 phần tử của miền ảnh. vi phạm điều kiện (ii).

Sông không là núi, núi không là sông

Sông là sông, núi là núi

Sông không là sông, núi không là núi

Ừ thì, sông là sông, núi là núi

Không có sông, cũng chẳng có núi

…

=====================================

Chương II QUAN HỆ

Cho tới lúc này lý thuyết tập hợp chỉ mới cung cấp những khái niệm : phần tử, tập hợp, thuộc về, và những cách để tạo những tập hợp mới từ những tập hợp đã có (tập con, tập hợp các tập con, tập hợp hội, giao, hiệu, …). Chúng chẳng qua chỉ là những đối tượng đơn độc. Thực tế rất đa dạng, phong phú có nhiều mối ràng buộc với nhau. Vì vậy cần kết dính chúng lại với nhau.

Quan hệ là cách thức biểu diễn sự liên kết giữa những tập hợp. Khi các tập hợp liên kết được với nhau thì sức mạnh được gia tăng. Bản chất của các cấu trúc đại số chính là sự liên kết giữa các tập hợp. ”Công cụ” quan hệ còn cho phép xây dựng những khái niệm mới. Trong thực tế, khái niệm quan hệ là tính chất của tập hợp. Lý thuyết tập hợp diễn tả tính chất này theo ngôn ngữ của tập hợp. Do đó về mặt *bản chất, quan hệ là tập hợp*. Ý niệm này cần được ý thức trong hoạt động chứng minh.

1. Tập hợp tích

Định nghĩa – Tập hợp tích.

Tích của hai tập hợp A và B là tập hợp $A \times B$ có phần tử là những cặp (a, b) có *thứ tự*, phần tử a thuộc về A và phần tử b thuộc về B.

Ký hiệu : $A \times B = \{\alpha \mid (\forall a \in A)(\forall b \in B)\ (\alpha = (a, b))\}$.

hoặc dạng đơn giản : $A \times B = \{\alpha \mid \alpha = (a, b)\}$.

EndĐn

Thí dụ

1. Cho tập hợp $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, $P = \{a, b\}$,

$$\mathbb{N} \times P = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b), ...\}.$$

2. Cho $\mathbb{N}$ là tập hợp các số nguyên tự nhiên và $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{\alpha \mid (\forall a \in \mathbb{N})\ (\forall b \in \mathbb{R})\ (\alpha = (a, b))\}.$$

3. Bảng cửu chương là dạng tập hợp tích.

Bảng cửu chương là tập hợp tích được phân nhỏ thành các tập hợp tích đơn giản.

Nhận xét

1. $(A \times B) \neq (B \times A)$, với A, B là hai tập hợp.

Thí dụ

Cho $S = \{a, b, c, d\}$ và $K = \{1, 2\}$ thì

$$S \times K = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (d, 1), (d, 2)\},$$

$$K \times S = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)\}.$$

2. $(A \times \varnothing) = \varnothing$ và $(\varnothing \times A) = \varnothing$

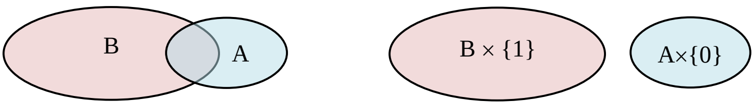
Chứng minh :

a. $(A \times \varnothing) = \varnothing$

Lấy $x \in A \times \varnothing$, x có dạng $x = (a, b)$ với $a \in A$ và $b \in \varnothing$. Nên b không có vì vậy x không thể hình thành được, do đó $A \times \varnothing$ là tập hợp rỗng.

b. $(\varnothing \times A) = \varnothing$. Tương tự như trên.

3. Để tạo hai tập hợp tách biệt "tương đương" về số phần tử của hai tập hợp bất kỳ A, B. Lấy tích $A \times \{0\}$ và $B \times \{1\}$. Khi đó $A \cap B$ có thể khác $\varnothing$, nhưng $(A \times \{0\}) \cap (B \times \{1\}) = \varnothing$.



4. Khái niệm có thứ tự nghĩa là $(a, b) \neq (b, a)$.
5. Để khỏi phải định nghĩa khái niệm *thứ tự* vào lúc này có thể dùng định nghĩa của Kuratowski để chỉ đôi thứ tự $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$$A \times B = \{ x \mid (\forall a \in A)\ (\forall b \in B)\ (x = \{\{a\}, \{a, b\}\}) \}.$$

Thí dụ

Lấy $A_1 = \{a, b, c, d\}$, $B_1 = \{a, b\}$.

$A_1 \times B_1 = \{(a , a), (\underline{a , b}), (b , a), (\underline{b , b}), (c , a), (\underline{c , b}), (d , a), (\underline{d , b})\}$ (*)

Biểu diễn dưới dạng Kuratowski.

$$A_1 \times B_1 = \{\{a\}, \{a, a\}\}, \{\underline{\{a\}, \{a, b\}}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\}, \{\underline{\{b\}, \{b, b\}}\},$$
$$\{\{c\}, \{a, c\}\}, \{\underline{\{c\}, \{b, c\}}\}, \{\{d\}, \{a, d\}\}, \{\underline{\{d\}, \{b, d\}}\}.$$

$$A_1 \times B_1 = \{\{a\}\}, \{\underline{\{a\}, \{a, b\}}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\}, \{\underline{\{b\}}\},$$
$$\{\{c\}, \{a, c\}\}, \{\underline{\{c\}, \{b, c\}}\}, \{\{d\},\{a, d\}\}, \{\underline{\{d\}, \{b, d\}}\}.$$

Thí dụ này chỉ ra biểu diễn Kuratowski có những tập hợp có một phần tử như $\{\{a\}\}$, $\{\{b\}\}$, do đó khi chuyển lại dạng cặp đôi thứ tự sẽ phải chuyển thành (a, a) và (b, b).

2. Quan hệ

Thế giới con người là thế giới có những mối quan hệ ràng buộc với nhau, không chỉ là những đối tượng rời rạc, trơ trọi một mình. Lý thuyết tập hợp được sáng tạo cũng nhằm phản ảnh thế giới của con người.

Vì vậy khái niệm quan hệ được xây dựng để diễn tả các mối quan hệ này.

Các phần tử của hai tập hợp X và Y liên kết với nhau tạo thành từng đôi. Các đôi phần tử này tạo nên một *tập hợp*, được gọi là quan hệ giữa X và Y.

Định nghĩa – Quan hệ.

Quan hệ R là *tập con* của tập tích $X \times Y$.

Ký hiệu : $R \subseteq X \times Y$.

Phần tử (x, y) của quan hệ R có thể được biểu diễn như sau :

$$(x, y) \in R \quad \text{hay} \quad (xRy) \quad \text{hay} \quad R(x, y).$$

Tập hợp X được gọi là *miền trị* của quan hệ R.

Tập hợp Y được gọi là *miền ảnh* hay miền *đối trị* của quan hệ R.

EndĐn

Thí dụ

1. Cho P = {pascal, smalltalk, lisp} là tập hợp gồm ba ngôn ngữ lập trình và S = {stru, func, logic, oop} là tập hợp các loại ngôn ngữ lập trình,

P \ S	stru	func	logic	oop
pascal	(pascal, stru)	(pascal, func)	(pascal, logic)	(pascal, oop)
Smalltalk	(smalltalk,stru)	(smalltalk, func)	(smalltalk, Logic)	(smalltalk, oop)
lisp	(lisp, stru)	(lisp, func)	(lisp, logic)	(lisp, oop)

Tập hợp tích P × S là bảng hình chữ nhật 3 × 4 từ góc phải ở dưới trở lên. Tập hợp gồm các ô {(pascal, stru), (smaltalk, oop), (lisp, func)} là quan hệ chỉ loại ngôn ngữ lập trình của ba ngôn ngữ. Quan hệ nay được diễn giải như sau : Pascal là ngôn ngữ cấu trúc, Smalltalk là ngôn ngữ hướng đối tượng, Lisp là ngôn ngữ lập trình hàm.

2. A = {a, b, c}, B = {1, 2, 3, 4} thì tập hợp {(a, 2), (c, 1)} là quan hệ, tập hợp {(a, 1), (a, 2), (a, 4), (c, 2), (c, 3)} cũng là quan hệ.

3. Cho :

   S = {PhạmThái, CaoBáNhạ, PhạmThiênThư, NguyễnDu}.

   T = {Đoạntrườngvôthanh, Tựtìnhkhúc, Sơkínhtântrang,
   Chiếntụngtâyhồphú, Chinhphụngâm},

   R = {(PhạmThái, Sơkínhtântrang), (CaoBáNhạ, Tựtìnhkhúc),
   (PhạmThái, Chiếntụngtâyhồphú),
   (PhạmThiênThư, Đoạntrườngvôthanh)}.

$R \subseteq S \times T$, nên R là một quan hệ của S và T. Theo nghĩa thông thường quan hệ R này được gọi là "là tác giả của tác phẩm".

4. Cho A = {a, b, c, d}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

   R = {(a, 1), (b, 2), (b, 3), (d, 3), (d, 5), (d, 6)} là quan hệ giữa A, B.

5. Cho tập hợp số nguyên $\mathbb{N}$, quan hệ R được định nghĩa trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $y = x^2$.

   Do đó R = {(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16),...}.

6. Thứ tự "<" trên tập hợp số nguyên $\mathbb{N}$ là quan hệ của $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Quan hệ "<" được xác định bằng tất cả các cặp (a, b) sau cho a < b.

   Ví dụ, các phần tử như sau thuộc quan hệ "<" : (1, 2), (2, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (2, 5), (3, 5), … .

Nhận xét

1. Tập rỗng $\varnothing$ và tập hợp $(A \times B)$ cũng là hai quan hệ của tập hợp A và B. Tập rỗng $\varnothing$ là quan hệ nhỏ nhất và tập hợp $(A \times B)$ là quan hệ lớn nhất của A và B.

2 R là quan hệ giữa hai tập hợp A, B.

   Mở rộng miền trị và miền ảnh của R thì hai miền mở rộng vẫn còn là miều trị và miền ảnh của R.

   Lấy $X \supseteq A$ thì X cũng là miền trị của R, và $Y \supseteq B$ thì Y cũng là miền ảnh của R.

3. *Miền trị thật sự* của quan hệ R là tập hợp R^L, co nhỏ miền ảnh cũng như miền trị đến khi nhỏ nhất vẫn còn là miển trị và miền ảnh được gọi là miền ảnh và miền trị thật sự.

$$R^L = \{x \mid (\forall x)\ (\exists y)\ ((x, y) \in R)\}$$

   miền ảnh thật sự của quan hệ R là tập hợp R^R,

$$R^R = \{y \mid (\forall y)\ (\exists x)\ ((x, y) \in R)\}.$$

   Nếu cần sử dụng miền trị và miền ảnh của quan hệ mà không được cho thêm thông tin về chúng thì có thể dùng miền trị và miền ảnh thật sự. Đôi khi các miền trị quá lớn cần chọn lại miền trị nhỏ hơn để việc tính toán đơn giản, lúc nảy có thể sử dụng miền trị thật sự.

Thí dụ

P = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, Q = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}.

Quan hệ S = {(1, a), (1, k), (2, a), (4, e), (9, d), (6, h), (7, f)}.

S^L = {1, 2, 4, 9, 6, 7}. S^R = {a, k, e, d, h, f}.

4. Miền trị thật sự của quan hệ R *giới hạn* trên tập hợp cho trước X là tập hợp R^L/X,

$$R^L/X = \{x \mid (\forall x)\ (\exists y)\ ((x \in X) \wedge ((x, y) \in R))\}.$$

Miền ảnh thật sự của quan hệ R giới hạn trên tập hợp cho trước Y là tập hợp R^R/Y,

$$R^R/Y = \{y \mid (\forall y)\ (\exists x)\ ((y \in Y) \wedge ((x, y) \in R))\}.$$

Thí dụ

P = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, Q = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}.

Quan hệ S = {(1, a), (1, k), (2, a), (4, e), (9, d), (6, h), (7, f)}.

X = {2, 3, 4, 5, 6, 8}, Y = {a, b, c, e, f, g, h}.

S^L/X= {2, 4, 6}. S^R/Y = {a, e, h, f}.

5. Ảnh của quan hệ R ($\subseteq A \times B$) trên tập hợp S ($\subseteq$ A) là tập hợp R(S),

$$R(S) = \{y \mid (\forall y)\ (\exists x \in S)\ ((x, y) \in R)\},$$

Thí dụ

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, B = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}.

Quan hệ R = {(1, a), (1, k), (2, a), (4, e), (9, d), (6, h), (7, f)}.

Ảnh của R trên A :   R(A) = {a, k, e, d, h, f}.

Ảnh của R trên S = {2, 5, 6} :   R(S) = {a, h}.

Ảnh của R trên T = {3, 7, 9} :   R(T) = {d, f}.

6. Ảnh ngược của quan hệ R ($\subseteq A \times B$) trên tập hợp H ($\subseteq$ B) là tập hợp $R^{-1}(H)$,

$$R^{-1}(H) = \{x \mid (\forall x)\ (\exists y \in H)\ ((x, y) \in R)\},$$

Thí dụ

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Quan hệ $R = \{(b, 1), (b, 5), (b, 6), (c, 2), (e, 2)\}$.

Ảnh ngược của R trên B : $R^{-1}(B) = \{b, c, e\}$.

Ảnh ngược của R trên $S = \{1, 3, 4\}$: $R^{-1}(S) = \{b\}$.

Ảnh ngược của R trên $T = \{2, 3\}$: $R^{-1}(T) = \{c, e\}$.

7. Quan hệ đường chéo - khi miền trị và miền ảnh *cùng là một tập hợp*.

Quan hệ $\Delta = \{(x, x) \mid (\forall x)\ (x \in X)\}$ được gọi là *quan hệ đường chéo* của tập hợp X.

Đơn giản gọi là đường chéo của X. Ký hiệu là Δ.

Thí dụ

$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, quan hệ đường chéo

$$\Delta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

Ghi chú

Khi gọi tên quan hệ đừng nói trống không là quan hệ R, quan hệ S hay T, nên kèm theo “đối tượng” mà quan hệ dính dáng tới. Vì vậy nên nói đầy đủ là quan hệ R của X và Y, quan hệ S của V và W, … . ***Mọi khái niệm trong toán học luôn luôn dính dáng tới một hay nhiều đối tượng nào đó***. Không có khái niệm nào đứng trơ trọi một mình. Việc ngầm hiểu các đối tượng chỉ với lý do là làm cho các phát biểu ngắn gọn, không rườm rà và trọng tâm của nội dung không bị loãng. Ở trình độ sơ đẳng nên ghi nhớ khái niệm toán học nào đi với đối tượng nào. Việc chú ý này có lợi cho người học trong việc suy nghĩ đó là tiết kiệm được thời gian. Tiết kiệm *suy nghĩ* là vấn đề có thể nghĩ đến khi học toán.

3. Phương thức xác định quan hê

✧. Quan hệ được xác định bằng tập hợp.

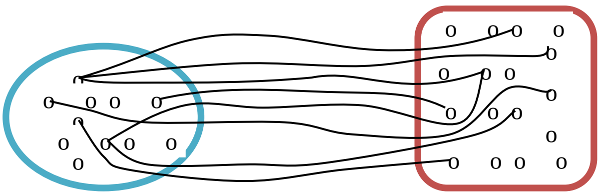
<u>Thí dụ</u>

Quan hệ R có miền trị P = {C^{++}, smalltalk, lisp} và miền ảnh

S = {stru, func, logic, oop} :

R ={(C^{++}, stru), (C^{++}, oop), (smalltalk, oop), (lisp, func)} $\subseteq$ P $\times$ S.

✧. Quan hệ được biểu diễn bằng biểu đồ.



Các cặp phần tử được kết nối bởi các đường nối giữa hai tập hợp.

✧. Quan hệ được biểu diễn bằng ma trận.

	a	b	c	d
1	1		1	
2			1	
3				
4				1
5		1		

	1	2	3	4	5	6
a	1	1	1			
b		1	1			
c			1			
d				1	1	
e					1	

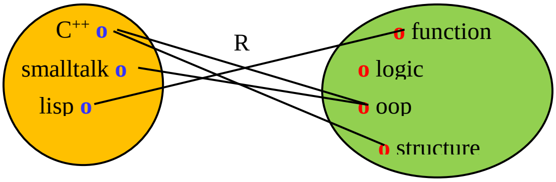
Quan hệ bên trái có các phần tử : (1, a), (5, b), (1, c), (2, c), (4, d).

Quan hệ bên phải có các phần tử : (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (c, 3), (d, 4), (d, 5), (e, 5).

<u>Thí dụ</u>

Quan hệ R của hai tập hợp P = {C^{++}, smalltalk, lisp} và

S = {structure, function, logic, oop}, được mô tả bằng hình vẽ sau :



✧. Quan hệ có thể được xác định bằng tính chất

Tính "song song" của các đường thẳng là quan hệ.

Tính "phần tử thuộc về" là quan hệ giữa phần tử và tập hợp.

Tính "chứa trong" giữa các tập hợp là quan hệ.

Chú thích

Khi quan hệ được xác định bằng tính chất thì việc tính toán cần phải xác định miền trị và miền ảnh của nó.

Thí dụ

Tính chất "chia chẵn" là quan hệ mà miền trị và miền ảnh phải được xác định khi tính toán. Thường thì các miền này đều được ngầm hiểu là $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ hay $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, … .

4. Toán tử giữa các quan hệ

Như đã định nghĩa ở trên *quan hệ là tập hợp*, vì vậy tập hợp có các toán tử gì thì quan hệ cũng sẽ có những toán tử đó. Ngoài ra, quan hệ còn có thêm một số toán tử của riêng nó.

Cho R và S là hai quan hệ (không cần ràng buộc gì trên miền trị cũng như miền ảnh của R và S) :

✧. Hội hai quan hệ R và S là quan hệ $(R \cup S)$,

$$(\forall x, y)\ ((x, y) \in (R \cup S)) \longleftrightarrow (\forall x, y)\ (((x, y) \in R) \vee ((x, y) \in S)\ ),$$

hay đơn giản là :

$$((x, y) \in (R \cup S)) \longleftrightarrow ((x, y) \in R) \vee ((x, y) \in S).$$

✧. Giao hai quan hệ R và S là quan hệ $(R \cap S)$,

$(\forall x, y)\ ((x, y) \in (R \cap S)) \longleftrightarrow (\forall x, y)\ (((x, y) \in R) \wedge ((x, y) \in S)\ )$,

đơn giản là :

$((x, y) \in (R \cap S)) \ \longleftrightarrow\ ((x, y) \in R) \wedge ((x, y) \in S)$.

✧. Hiệu hai quan hệ R và S là quan hệ $(R - S)$,

$(\forall x, y)\ ((x, y) \in (R - S)) \longleftrightarrow (\forall x, y)\ (((x, y) \in R) \wedge ((x, y) \notin S)\ )$,

đơn giản là :

$((x, y) \in (R - S)) \ \longleftrightarrow\ ((x, y) \in R) \wedge ((x, y) \notin S)$.

✧. Tích tương đối hai quan hệ R và S là quan hệ $(R : S)$,

$(\forall x,y)\ ((x, y) \in (R : S)) \longleftrightarrow (\forall x,y)\ (\exists z)\ (((x,z) \in R) \wedge ((z, y) \in S))$,

đơn giản là :

$((x, y) \in (R : S)) \ \longleftrightarrow\ (\exists z)\ (\ ((x, z) \in R) \wedge ((z, y) \in S)\ )$.

✧. Nghịch đảo của quan hệ R là quan hệ R^{-1} (R^{-1} còn được gọi là quan hệ đảo của R).

$(\forall x, y)\ [\ (\ (x, y) \in R^{-1}\ ) \ \longleftrightarrow\ (\ (y, x) \in R)\ ]$,

đơn giản là :

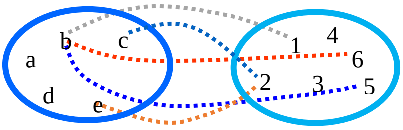
$((x, y) \in R^{-1}\ ) \ \longleftrightarrow\ ((y, x) \in R)$.

✧. Ảnh của quan hệ R trên tập hợp X là tập hợp :

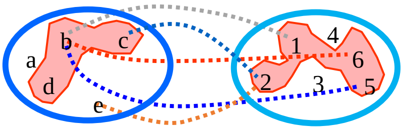
$R(X) = \{y \mid (\forall y)\ (\exists x \in X)\ ((x, y) \in R)\}$

✧. Ảnh của tập con S của miền trị X của quan hệ R là tập hợp :

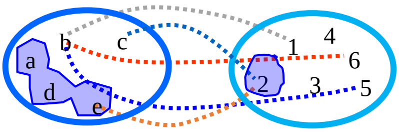
$R(S) = \{y \mid (\forall y)\ (\exists x \in S)\ ((x, y) \in R)\}$



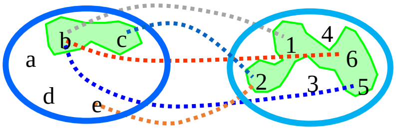
R



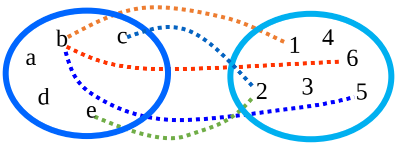
R({b, c, d}) = {1, 2, 5, 6}



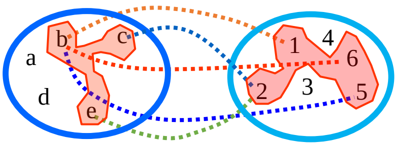
$R(\{a, d, e\}) = \{2\}$



$R(\{b, c\}) = \{1, 2, 5, 6\}$



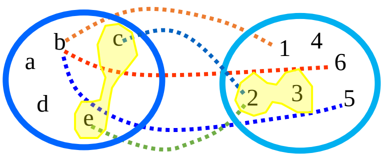
R



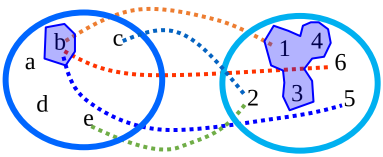
$R^{-1}(\{1, 2, 5, 6\}) = \{b, c, e\}$

✧. Ảnh ngược của tập con S của X trên quan hệ R là tập hợp :

$$R^{-1}(S) = \{y \mid (\forall y)\ (\exists x \in X)\ ((x, y) \in R)\}$$



$R^{-1}(\{2, 3\}) = \{c, e\}$



$R^{-1}(\{1, 3, 4\}) = \{b\}$

Thí dụ

Cho 4 quan hệ R, S, T và K :

$R = \{(1, k), (2, a), (9, d), (6, h), (7, f)\}$,

$S = \{(1, a), (1, k), (2, a), (4, e), (9, d), (6, h)\}$,

$K = \{(a, b), (c, d), (b, a), (c, c)\}$.

$T = \{(b, I), (k, II), (a, V), (f, X), (c, XI), (a, IV)\}$.

Do đó

$R \cup S = \{(1, a), (1, k), (2, a), (4, e), (9, d), (6, h), (7, f)\}$,

$R \cap S = \{(1, k), (2, a), (9, d), (6, h)\}$,

$R - S = \{(7, f)\}$,

$R : T = \{(1, II), (2, V), (2, IV), (7, X)\}$,

$K : K = \{(a, a), (b, b), (c, d), (c, c)\}$,

$R^{-1} = \{(k, 1), (a, 2), (d, 9), (h, 6), (f, 7)\}$,

$R(\{2, 4, 6, 9\}) = \{a, h, d\}$.

$R^{-1}(\{a, d, f\}) = \{2, 9, 7\}$.

Nhận xét

1. Nếu R là quan hệ của $H \times K$, S là quan hệ của $M \times N$ thì $R \cup S$ là quan hệ của $(H \cup M) \times (K \cup N)$. Miền trị và miền ảnh của các toán tử khác cũng được tính tương tự.
2. Dễ dàng chứng minh $(R : \varnothing) = \varnothing$ và $(\varnothing : R) = \varnothing$.
3. Phân biệt giữa R^{-1} và $R^{-1}(S)$. R^{-1} đứng một mình là quan hệ đảo của quan hệ R còn R^{-1} tác động lên tập hợp S là ảnh ngược của tập hợp S.
4. Cần phân biệt quan hệ đảo với ánh xạ đảo sau này. Mọi quan hệ đều có quan hệ đảo. Nhưng với ánh xạ thì không có gì bảo đảm có ánh xạ đảo.

5. Tương quan giữa các toán tử quan hệ

Cho R, S, T là quan hệ và X, Y là các tập hợp.

(i) $R : (S : T) = (R : S) : T$,

(ii) $(R : S)^{-1} = S^{-1} : R^{-1}$.

(iii) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$,

(iv) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

(v) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$,

(vi) $(R^{-1})^{-1} = R$.

(vii) $(R \cup S) : T = (R : T) \cup (S : T)$,

(viii) $R : (S \cup T) = (R : S) \cup (R : T)$.

(ix) $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$.

(x) $R^m : R^n = R^{m+n}$.

(xi) $(R^m)^n = R^{mn}$.

(xii) $R : S = S : R \longrightarrow (R : S)^m = R^m : S^m$.

(xiii) $(R : S)(X) = S(R(X))$.

(xiv) $R(X \cup Y) = R(X) \cup R(Y)$.

Ký hiệu R^n được định nghĩa truy chứng : $R^2 = R : R$ và $R^{n+1} = R^n : R$.

Chú thích

Xem thêm kỹ thuật chứng minh truy chứng trong phần phụ lục.

Chứng minh :

(i) Chứng minh gồm có hai bước :

$R : (S : T) \subseteq (R : S) : T$ và $(R : S) : T \subseteq R : (S : T)$.

Lấy $(x, y) \in R : (S : T)$,

$\Longrightarrow (\exists z)\ ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in (S : T))$ (định nghĩa tích tương đối),

$\Longrightarrow (\exists z)\ (\underline{(x, z) \in R} \wedge (\exists t)\ (\underline{(z, t) \in S} \wedge \underline{(t, y) \in T}))$

(định nghĩa tích tương đối),

$\Longrightarrow (\exists z)\ (\exists t)\ ((x, z) \in R \wedge (z, t) \in S \wedge (t, y) \in T)$,

(đưa lượng từ $\exists t$ ra phía trước),

$\Longrightarrow (\exists t)\ ((\exists t)\ ((x, z) \in R \wedge (z,t) \in S) \wedge (t, y) \in T)$,

(tính phối hợp của toán tử $\wedge$),

$\Longrightarrow (\exists t)\ ((x, t) \in (R : S) \wedge (t, y) \in T)$,

(định nghĩa tích tương đối),

$\Longrightarrow (x, y) \in (R : S) : T$ (định nghĩa tích tương đối).

Tương tự cho chiều ngược lại.

(ii) Chứng minh chiều $(R : S)^{-1} \subseteq S^{-1} : R^{-1}$.

Lấy $(x, y) \in (R : S)^{-1}$, ta có $(y, x) \in (R : S)$,

$\Longrightarrow (\exists z)\ ((y, z) \in R \wedge (z, x) \in S)$,

$\Longrightarrow (\exists z)\ ((z, x) \in S \wedge (y, z) \in R)$,

$\Longrightarrow (\exists z)\ ((x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1})$,

$\Longrightarrow (x, y) \in S^{-1} : R^{-1}$.

Chiều ngược lại tương tự.

(vii) Chứng minh $(R \cup S) : T = (R : T) \cup (S : T)$,

Chứng minh gồm có hai bước : $(R \cup S) : T \subseteq (R : T) \cup (S : T)$ và $(R : T) \cup (S : T) \subseteq (R \cup S) : T$.

Lấy $(x, y) \in (R \cup S) : T$,

$\Longrightarrow (\exists z) ((x, z) \in (R \cup S) \wedge (z, y) \in T)$,

$\Longrightarrow (\exists z) ([(x, z) \in R \vee (x, z) \in S] \wedge (z, y) \in T)$,

$\Longrightarrow (\exists z) ([(x, z) \in R \wedge (z, y) \in T] \vee [(x, z) \in S \wedge (z, y) \in T])$,

$\Longrightarrow ([(x, y) \in R : T] \vee [(x, y) \in S : T])$,

$\Longrightarrow (x, y) \in (R : T) \cup (S : T)$,

((Nếu lấy $(x, y) \in (R : T) \cup (S : T)$,

$\Longrightarrow ((x, y) \in R : T) \vee ((x, y) \in S : T)$,

$\Longrightarrow [(\exists z) ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in T)] \vee [(\exists t) ((x, t) \in S \wedge (t, y) \in T))$,

thì không có gì bắt buộc t và z phải bằng nhau.)) (*)

Để chứng minh chiều $(R : T) \cup (S : T) \subseteq (R \cup S) : T$, sẽ chứng minh làm hai bước

$(R : T) \subseteq (R \cup S) : T$ và $(S : T) \subseteq (R \cup S) : T$.

Chứng minh $(R : T) \subseteq (R \cup S) : T$.

Lấy $(x, y) \in (R : T)$,

$\Longrightarrow (\exists z) ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in T)$,

$\Longrightarrow (\exists z) ((x, z) \in R \cup S \wedge (z, y) \in T)$,

$\Longrightarrow (x, z) \in (R \cup S) : T$.

Phần còn lại tương tự.

(ix) Chứng minh $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$.

Truy chứng trên n.

Hiển nhiên mệnh đề đúng với n =1, vì $R^{-1} = (R^1)^{-1} = (R^{-1})^1$.

Giả thiết truy chứng, nghĩa là có $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$.

Chứng minh $(R^{n+1})^{-1} = (R^{-1})^{n+1}$.

Do (ii) ta có $(R^{n+1})^{-1} = (R^n : R)^{-1} = (R^{-1} : (R^n)^{-1})$.

Do giả thiết truy chứng ta có :

$(R^{n+1})^{-1} = (R^{-1} : (R^n)^{-1}) = (R^{-1} : (R^{-1})^n)$.

Do định nghĩa ta có : $(R^{n+1})^{-1} = (R^{-1})^{n+1}$.

Vậy (ix) được chứng minh.

(iii), (iv), ... , (xiv) Dễ dàng chứng minh các kết quả này. ✓

Nhận xét

1. (*) Khi chứng minh tập hợp $X \subseteq Y$, nếu tập hợp $X = \cup X_i$, i = 1,.., n thì chuyển thành n bài toán nhỏ. Nghĩa là chứng minh n biểu thức $X_i \subseteq Y$.
2. Khi chứng minh các bài toán về tập hợp liên quan đến toán tử $\subseteq$ thường là chuyển về dạng định nghĩa bằng ngôn ngữ luận lý vị từ. Việc tính toán sẽ được thực hiện trên luận lý vị từ sau đó chuyển lại dạng toán tử của tập hợp.

6. Tính chất của quan hệ có miền ảnh trùng với miền trị

R là quan hệ trên cùng tập hợp S, nghĩa là R là tập con của tập hợp tích $S \times S$. Đây là loại quan hệ quan trọng có nhiều ứng dụng trong thực tế.

✧. Tính phản hồi

Đôi khi còn gọi là tính *phản chiếu* hay *phản xạ*.

Quan hệ R phản hồi trên tập hợp A nếu và chỉ nếu R chứa đường chéo Δ.

Phát biểu hình thức của tính phản hồi :

R phản hồi $\longleftrightarrow \forall x\ ((x, x) \in R)$, hay

R phản hồi $\longleftrightarrow \Delta \subseteq R$.

Thí dụ

Cho tập hợp A = {a, b, c, d, e}.

R = { (a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c), (d, d), (d, e), (e, e)}.

Quan hệ R là phản hồi *trên A*, vì chứa đường chéo

Δ = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)}.

	a	b	c	d	e
a	1	1	1		
b		1	1		
c			1		
d				1	1
e					1

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1			
b		1	1			
c			1			
d				1	1	
e					1	
f						!

Nhưng R là quan hệ không phản hồi *trên B* = {a, b, c, d, e, f} vì Δ' của B × B là Δ của A × A thêm phần tử (f, f), nghĩa là

Δ' = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f)}, nhưng (f, f) $\notin$ R.

Nhận xét

Về tính không phản hồi.

Cho quan hệ R trên miền trị A. Khi mở rộng miền trị A thành B , nghĩa là A $\subseteq$ B, thì R vẫn còn là quan hệ trên B. Vì vậy *tính phản hồi phụ thuộc vào miền trị*.

Mọi khái niệm đều có dạng phủ định của nó. Phủ định của phản hồi là không phản hồi. Lấy phủ định của hai vế có được định nghĩa của khái niệm *không phản hồi* :

$\neg$ (R phản hồi) $\longleftrightarrow$ $\neg$ ($\forall$x ((x, x) $\in$ R)) hay

R không phản hồi $\longleftrightarrow$ $\exists$x ((x, x) $\notin$ R) (*)

Dùng định nghĩa (*) để chứng minh cho quan hệ không phản hồi.

Thí dụ

Quan hệ R sau đây trên tập hợp P = {a, b, c, d, e, f, g} là không phản hồi :

R = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c), (d, d), (d, f)}.

Vì $\exists e \in P$ nhưng $(e, e) \notin R$.

Quan hệ < trên tập hợp số nguyên tự nhiên là không phản hồi. Vì không thể có 5 < 5.

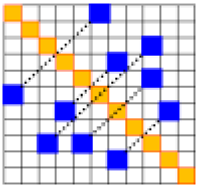
Tuy nhiên, quan hệ ≤ có tính phản hồi. Với mọi số nguyên x đều có $x \leq x$.

✧. Tính đối xứng.

Quan hệ R đối xứng trên A nếu và chỉ nếu phần tử của R đối xứng qua đường chéo của A × A.

Phát biểu hình thức của tính đối xứng :

$$R \text{ đối xứng} \longleftrightarrow (\forall x, y)\ (\ ((x, y) \in R) \ \longrightarrow\ ((y, x) \in R)\ ).$$



Thí dụ

Cho tập hợp A = {a, b, c, d, e}, quan hệ R sau đây

R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, d), (c, b), (d, c)} là đối xứng.

Vì có từng cặp đối xứng : [(a, a), (a, a)], [(a, b), (b, a)], [(b, b), (b, b)], [(b, c), (c, b)], [(c, d), (d, c)].

	a	b	c	d	e
a	(a,	(a,			
b	(b,	(b,b)	(b,		
c		(c,		(c,	
d			(d,	R	
e					

	a	b	c	d	e
a		(a,			
b	!	(b,b)	(b,		
c		(c,		!	
d			(d,	S	
e					

Quan hệ S là không đối xứng :

S = {(a, b), (b, b), (b, c), (c, b), (d, c)} vì (a, b) và (d, c) không có phần tử đối xứng (b, a) và (c, d).

Nhận xét

Về tính không đối xứng.

Tính *đối xứng không phụ thuộc vào miền trị*.

Dạng ($a \longrightarrow b$) tương đương với ($\neg a \vee b$). Nên phủ định của ($a \longrightarrow b$) cũng là phủ định của ($\neg a \vee b$), đó là ($a \wedge \neg b$).

Phủ định của đối xứng là *không đối xứng*, dùng định nghĩa sau để chứng minh cho quan hệ không đối xứng.

$$\neg \text{(R đối xứng)} \longleftrightarrow \neg (\forall x, y\ (\underline{(x, y) \in R} \longrightarrow \underline{(y, x) \in R})).$$

$$\text{R không đối xứng} \longleftrightarrow (\exists x, y)\ (\underline{(x, y) \in R} \wedge \underline{(y, x) \notin R}).$$

Thí dụ

Quan hệ R sau đây của tập hợp P = {a, b, c, d, e, f, g} là không đối xứng : R = {(a, b), (c, d), (d, c), (a, a), (b, b), (c, c)}, vì có (a, b) nhưng không có (b, a).

✧. Tính phản đối xứng.

Tính chất xếp hàng trong đời sống đòi hỏi rằng : a đã đứng trước b và b đứng trước a sẽ không cùng đồng thời xảy ra, nếu a khác b. Cho cặp (a, b) (có nghĩa là a đứng trước b) thì tính phản đối xứng nói rằng nếu quan hệ chứa cặp (a, b) thì sẽ không chứa cặp (b, a). Tính phản đối xứng là đặc trưng của tính thứ tự sau này.

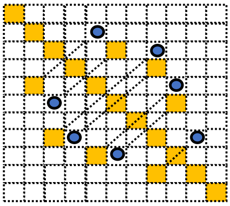
Quan hệ R có tính phản đối xứng trên S nếu đối xứng của mỗi phần tử của R không thuộc R.

Phát biểu hình thức của tính phản đối xứng :

$$(\forall x, y)\ (\underline{(((x, y) \notin \Delta) \wedge ((x, y) \in R))} \longrightarrow \underline{((y, x) \notin R)}),$$

hay

$$(\forall x, y)\ (\underline{(((x, y) \in R) \wedge ((y, x) \in R))} \longrightarrow \underline{(x = y)}).$$



Quan hệ chỉ chứa các ô tròn có tính phản đối xứng.

Thí dụ

Cho tập hợp P = {a, b, c, d, e, f, g}, quan hệ R sau đây phản đối xứng :

R = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c), (d, d), (d, f), (f, f)}.

Vì không chứa (b, a), (c, a), (c, b), (f, d).

Quan hệ S trên P là không phản đối xứng,

S = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (d, f)} vì (a, b), (b, a) $\in$ S, nhưng $a \neq b$.

Quan hệ S cũng không đối xứng vì (a, c) $\in$ S nhưng (c, a) $\notin$ S.

Nhận xét

Về tính không phản đối xứng.

Tính *phản đối xứng không phụ thuộc vào miền trị.*

Phủ định của phản đối xứng là không phản đối xứng, dùng định nghĩa sau để chứng minh cho quan hệ không phản đối xứng :

$\neg$ (R phản đối xứng) $\longleftrightarrow$

$$\neg [(\forall x, y) ((\underline{((x, y) \notin \Delta)} \wedge \underline{((x, y) \in R)}) \longrightarrow (\underline{(y, x) \notin R}))],$$

R không phản đối xứng $\longleftrightarrow$

$$(\exists x, y) ((\underline{(x, y) \notin \Delta}) \wedge (\underline{(x, y) \in R}) \wedge (\underline{(y, x) \notin R}))$$

hay

$\neg$ (R phản đối xứng) $\longleftrightarrow$

$$\neg [(\forall x, y) ((\underline{((x, y) \in R)} \wedge \underline{((y, x) \in R)}) \longrightarrow (\underline{x = y}))].$$

R không phản đối xứng $\longleftrightarrow$ $(\exists x, y) (\underline{x R y} \wedge \underline{y R x} \wedge \underline{x \neq y})$.

Thí dụ

Cho tập hợp P = {a, b, c, d, e, f, g} và quan hệ R trên P sau đây :

R = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (c, c), (d, d), (d, f), (f, d)}.

R không phản đối xứng. Vì có (d, f) ∈ R và (f, d) ∈ R.

Nhưng cũng không đối xứng. Vì (a, b) ∈ R và (b, a) ∉ R.

✧. So sánh các tính chất không đối xứng, phản đối xứng và phi đối xứng.

Phát biểu hình thức của tính phi đối xứng :

$$(\forall x, y)\ (\ \underline{((x, y) \in R)} \longrightarrow \underline{((y, x) \notin R)}\ ).$$

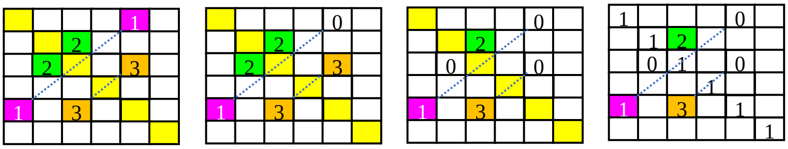
Thí dụ

Quan hệ đối xứng : "x là bạn của y" thì có "y là bạn của x"

Quan hệ phi đối xứng : "x là cha của y", nhưng không có "y là cha của x".

Hình sau biểu diễn các loại quan hệ có chứa từ "đối xứng".

Quan hệ có phần tử là các ô được tô màu.



A. Đối xứng B. Không đối xứng C. Phản đối xứng D. Phi đối xứng

Hình A là đối xứng.

Hình B là không đối xứng vì không chứa ô số 0.

Hình C là phản đối xứng vì không chứa 3 ô số 0.

Hình D là phi đối xứng vì không chứa 3 ô số 0 và cả 6 ô số 1.

✧. Tính truyền

Còn gọi là tính *bắc cầu*.

Nếu a có quan hệ với b và b có quan hệ với c thì a có quan hệ với c.

Phát biểu hình thức của tính truyền :

$$(\forall x, y, z)\ (\ ((\underline{(x, y) \in R}) \wedge \underline{((y, z) \in R)}) \longrightarrow \underline{((x, z) \in R)}\ ).$$

Thí dụ

Quan hệ R của tập hợp P = {a, b, c, d, e, f, g} có tính truyền :

R = {(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (a, c), (d, e), (d, f), (e, e), (f, e)}.

Quan hệ S = {(a, b), (b, b), (b, c), (d, e), (f, e)} trên P không truyền vì (a, b) và (b, c) $\in$ S nhưng (a, c) $\notin$ S.

Nhận xét

Về tính không truyền.

Quan hệ *không* truyền nếu và chỉ nếu

$(\exists x, y, z)\ ((\underline{(x, y) \in R} \wedge \underline{(y, z) \in R} \wedge \underline{(x, z) \notin R})$.

Thí dụ

Quan hệ R sau đây của tập hợp P = {a, b, c, d, e, f, g} là không truyền :

R = {(a, b), (b, d), (a, c), (b, b), (d, d), (d, f)}. Vì (a, b) $\in$ R và (b, d) $\in$ R nhưng (a, d) $\notin$ R.

Nhận xét

1. Tính *phản đối xứng* và *không đối xứng* không liên quan gì với nhau. Tương tự tính chất *đối xứng* và *không phản đối xứng* cũng không liên hệ gì với nhau.

   Bảng so sánh.

Đối xứng	$(\forall x, y)\ (\ ((\underline{x, y) \in R})\ \longrightarrow\ ((\underline{y, x) \in R})\ )$
Không phản đối xứng	$(\exists x, y)\ (\underline{x\ R\ y} \wedge \underline{y\ R\ x} \wedge \underline{x \neq y})$
Phản đối xứng	$(\forall x,y)\ (((\underline{(x, y) \in R)} \wedge \underline{((y, x) \in R)})) \longrightarrow (\underline{x = y}))$
Không đối xứng	$(\exists x, y)\ (\ (\underline{x, y) \in R}\ \wedge (\underline{y, x) \notin R}\ )$

2. Tập hợp $\varnothing$ là quan hệ không phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và truyền.

   Tập hợp Δ là quan hệ phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và truyền.

3. Tính truyền và đối xứng không thể sinh ra tính phản hồi.

Do đối xứng, *nếu có* (xRy) thì có (yRx), và do tính truyền có (xRy) và (yRx) nên có (xRx) và (yRy).

Nhưng R không chắc phản hồi, vì có thể có $(x, y) \notin R$ nên không bảo đảm R chứa hết đường chéo.

4. Tính chất phản đối xứng nói lên thứ tự của các phần tử trong tập hợp, nghĩa là không thể đồng thời một phần tử ở vị trí bên trái và bên phải của một phần tử khác.
5. Với quan hệ R của hai tập hợp bất kỳ S, K ta cũng có thể đề cập đến các tính chất phản hồi, đối xứng, phản đối xứng, truyền. Nếu như xem R là quan hệ có miền trị và miền ảnh là $S \cup K$ (hiển nhiên R có thể không có các tính chất phản hồi, đối xứng, phản đối xứng, truyền, nhưng việc xem xét R có các tính chất này hay không là hợp lệ).
6. Các tính chất phản hồi, đối xứng, phản đối xứng, truyền trên quan hệ R của $(S \times S)$ có thể không còn khi thay đổi (tăng hay giảm số phần tử) miền S.

Thí dụ

a. Cho tập hợp P = {a, b, c, d}, quan hệ R sau đây là phản hồi :

R = {(a, a), (a, b), (b, d), (a, c), (b, b), (d, d), (c, c)}.

Nhưng nếu xem R là quan hệ trên Q = {a, b, c, d, e} thì R không còn tính chất phản hồi.

b. Quan hệ R trên miền D được xác định như sau :

xRy = "$\exists k \in D$ sao cho k = bội số chung nhỏ nhất của x và y".

Nếu D = {3, 4, 12} thì quan hệ R là truyền.

Nếu D = {3, 4, 5, 12, 15} thì quan hệ R không truyền.

Vì $(4, 3) \in R$ và $(3, 5) \in R$ nhưng $(4, 5) \notin R$.

7. Quan hệ R của $S \times S$ còn được gọi là quan hệ cấp 2.

8. Không có gì trở ngại khi người ta đề cập đến tính chất phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và truyền trên quan hệ R bất kỳ. Nghĩa là không nhất thiết miền trị và miền ảnh của R phải là cùng một tập hợp.

Tổng kết các tính chất của quan hệ

Phản hồi	$\forall x\ ((x, x) \in R)$
Không phản hồi	$\exists x\ ((x, x) \notin R)$
Đối xứng	$(\forall x, y)\ (((x, y) \in R) \longrightarrow ((y, x) \in R))$
Không đối xứng	$(\exists x, y)\ ((x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R)$
Phản đối xứng	$(\forall x, y)\ ((((x, y) \in R) \wedge ((y, x) \in R)) \longrightarrow (x = y))$
Không phản đối xứng	$(\exists x, y)\ (x\ R\ y \wedge y\ R\ x \wedge x \neq y)$
Truyền	$(\forall x, y, z)\ (((x\ R\ y) \wedge (y\ R\ z)) \longrightarrow (x\ R\ z))$
Không truyền	$(\exists x, y, z)\ ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \wedge (x, z) \notin R)$

Các quan hệ đặc biệt trên tập hợp X				
Quan hệ	Phản hồi	Đối xứng	Phản đối xứng	Truyền
$\varnothing$	không	có	có	có
Δ	có	có	có	có
$X \times X$	có	có	không	có

✧. Bao đóng truyền.

Cho quan hệ R (trên tập hợp X) không có tính truyền, có nhiều mở rộng R thành R’ để R’ có tính truyền. Một mở rộng cực đại của R có tính truyền là tập hợp $(X \times X)$. Nhưng muốn tìm tập hợp mở rộng nhỏ nhất với tính truyền. Kết quả này gọi là *bao đóng truyền* của R.

Định nghĩa – Bao đóng truyền.

Bao đóng truyền của quan hệ R là quan hệ nhỏ nhất chứa R có tính truyền.

Ký hiệu : C(R).

EndĐn

✧. Thuật toán tìm bao đóng truyền.

Kiểm tra tính truyền, nếu có cặp phần tử nào không truyền thì bổ sung phần tử truyền vào tập hợp quan hệ.

Lặp lại cho đến khi không còn cặp phần tử nào vi phạm tính truyền.

Thí dụ

Kiểm tra tính truyền của R quan hệ R = {(a, b), (b, d), (a, c), (d, f)}.

(a, b) kết nối được với (b, d), nhưng (a, d) $\notin$ R, do đó R không truyền.

Thêm (a, d), có R $\cup$ {(a, d)}.

Kiểm tra tính truyền của R $\cup$ {(a, d)}.

(a, d) kết nối được với (d, f), nhưng (a, f) $\notin$ R.

Thêm (a, f), có R $\cup$ {(a, d), (a, f)}.

Kiểm tra tính truyền trên R $\cup$ {(a, d), (a, f)}.

(b, d) kết nối được với (d, f), nhưng (b, f) $\notin$ R.

Thêm (b, f), có R $\cup$ {(a, d), (a, f), (b, f)}.

C(R) = R $\cup$ {(a, d), (a, f), (b, f)}

= {(a, b), (b, d), (a, c), (d, f), (a, d), (a, f), (b, f)}.

Tính chất.

Bao đóng truyền C(R) là quan hệ truyền nhỏ nhất chứa R.

Ký hiệu :

$R^1 = R$, $R^2 = R : R$, $R^n = R^{n-1} : R$.

Mệnh đề

Bao đóng truyền của R là $C(R) = \bigcup_1^\infty R^i$.

Mệnh đề

R là quan hệ trên miền trị có n phần tử thì bao đóng truyền của R là :

$$C(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n.$$

7. Các biểu diễn của quan hệ

✧. Biểu diễn bằng tập hợp.

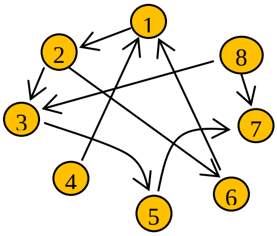
Thí dụ

R = {(1, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 5), (4, 1), (5, 7), (6, 1), (8, 3), (8, 7)}.

✧. Biểu diễn bằng đồ thị hữu hướng.

Thí dụ

R = {(1, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 5), (4, 1), (5, 7), (6, 1), (8, 3), (8, 7)}.



✧. Biểu diễn bằng ma trận nhị phân.

Thí dụ

R = {(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 1)}. $M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

✧. Tích Boolean ⊗ của 2 ma trận nhị phân.

Qui ước : $0 \wedge 1 = 0$, $0 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$, $1 \vee 1 = 1$, $0 \vee 1 = 1$, $0 \vee 0 = 0$,

với $\otimes = \wedge$ và $\oplus = \vee$.

Minh họa - Tích 2 ma trận

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ q & 1 & 0 \\ r & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & q \\ 1 & 1 & r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & \square \\ . & . & . \end{bmatrix} \end{array}$$

$\square$ = (a ⊗ p) ⊕ (b ⊗ q) ⊕ (c ⊗ r) = (a ∧ p) ∨ (b ∧ q) ∨ (c ∧ r)

Để tính giá trị tại một vị trí có tọa độ (x, y) của ma trận kết quả : lấy dòng x của ma trận thứ nhất (bên trái hình vẽ phía dưới) nhân với cột y của ma trận thứ hai (phía trên).

Thí dụ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính chất

Quan hệ R với ma trận nhị phân M(R) có tính chât sau :

M(R : R) = M(R) ⊗ M(R)

Chứng minh

Lấy ví dụ gợi ý để tìm ra cách chứng minh.

Cho quan hệ R = {(1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 4)}

⟹ R : R = {(1, 4), (2, 2), (2, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 5), (5, 4)}

$$M(R) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad M(R:R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Để chứng minh M(R : R) = M(R) ⊗ M(R) chứng minh hai ma trận bằng nhau.

Chọn phần tử khác 0 của ma trận M(R : R), ví dụ ở vị trí (2, 4)

ký hiệu $v_{(2, 4)} = 1$.

Phần tử ở vị trí (2, 4) của M(R) ⊗ M(R) là $v'_{(2, 4)}$.

$$v'_{(2, 4)} = v_{(2, 1)} \times v_{(1, 4)} + v_{(2, 2)} \times v_{(2, 4)} + v_{(2, 3)} \times v_{(3, 4)} + v_{(2, 4)} \times v_{(4, 4)} + v_{(2, 5)} \times v_{(5, 4)}.$$

Do (2, 4) là phần tử của R : R nên có k sao cho (2, k), (k, 4) ∈ R, ie $v_{(2, k)} = 1$, $v_{(k, 4)} = 1$.

Trong ví dụ này có k = 5, do đó $v_{(2, 5)} = 1$ $v_{(5, 4)} = 1$.

$$v'_{(2, 4)} = v_{(2, 1)} \times v_{(1, 4)} + v_{(2, 2)} \times v_{(2, 4)} + v_{(2, 3)} \times v_{(3, 4)} + v_{(2, 4)} \times v_{(4, 4)} + v_{(2, 5)} \times v_{(5, 4)}.$$

$$v'_{(2, 4)} = v_{(2, 1)} \times v_{(1, 4)} + v_{(2, 2)} \times v_{(2, 4)} + v_{(2, 3)} \times v_{(3, 4)} + v_{(2, 4)} \times v_{(4, 4)} + 1 \times 1.$$

Do đó $v'_{(2, 4)} = 1$ bất chấp các $v_{(i, j)}$ khác.

Vậy những vị trí khác 0 của ma trận M(R : R) cũng khác không trong ma trận M(R) ⊗ M(R) ở cùng vị trí.

Điều ngược lại, các vị trí khác 0 của ma trận M(R) ⊗ M(R) cũng khác không ở cùng vị trí trong ma trận M(R : R).

Ví dụ này gợi ý cho chứng minh trận M(R : R) và M(R) ⊗ M(R) trùng nhau.

Bao đóng truyền dưới dạng ma trận.

Cho quan hệ với miền trị có n phần tử. Ký hiệu $M(R) \otimes M(R) = M(R)^2$.

$$M(C(R)) = M(R) \oplus M(R)^2 \oplus M(R)^3 \oplus \ldots \oplus M(R)^n.$$

Thí dụ

Tìm bao đóng truyền của quan hệ R = {(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, b)}.

Do miền trị có 3 phần tử nên các ma trận quan hệ là 3 × 3.

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M(R)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M(R)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M(C(R)) = M(R) \oplus M(R)^2 \oplus M(R)^3$

$$M(C(R)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hai phần tử thêm vào là (a, b) (dòng 1, cột 2) và (c, c) (dòng 3, cột 3).

Bao đóng truyền của R là R ∪ {(a, b), (c, c)}.

Thuật toán Warshall sẽ giúp tìm bao đóng truyền.

8. Các loại quan hệ

✧.Quan hệ tương đương

Định nghĩa – Quan hệ tương đương.

Quan hệ *cấp hai* R là quan hệ tương đương nếu và chỉ nếu quan hệ R :

Phản hồi + Đối xứng + Truyền.

EndĐn

Thí dụ

Quan hệ song song giữa các đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ là quan hệ tương đương.

Quan hệ modulo trên tập hợp số nguyên là quan hệ tương đương.

Lấy X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (6, 1), (2, 6), (3, 5), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (2, 1), (1, 6), (5, 5), (6, 6), (5, 3), (6, 2), (7, 8), (7, 7), (8, 8)}.

R là quan hệ tương đương vì thỏa ba tính chất : phản hồi, đối xứng, truyền.

Định nghĩa – Quan hệ modulo.

Hai số x, y được gọi là có quan hệ modulo n với n ∈ $\mathbb{N}$ trên tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ nếu hiệu (x – y) chia chẵn (đúng) cho n.

Định nghĩa hình thức :

x mod(n) y ⟷ n | (x – y), hay

(x, y) ∈ mod(n) ⟷ x = y mod (n), hay

mod(n) = {(x, y) | x = y + kn, với mọi k ∈ $\mathbb{Z}$ }.

EndĐn

Thí dụ

Quan hệ modulo 7 trên số nguyên $\mathbb{Z}$:

3 và 17 có quan hệ modulo 7 với nhau vì $17 - 3 = 2 \times 7$

32 và 17 không quan hệ modulo 7 với nhau vì $32 - 17 \neq k \times 7$.

Chứng minh : Quan hệ modulo là quan hệ tương đương.

Tính phản hồi :

$x = x + 0 \times n \longrightarrow x \bmod(n)\, x$.

Tính đối xứng :

$x \bmod(n)\, y \longrightarrow x = y + kn \longrightarrow y = x - kn = x + (-k)n \longrightarrow y \bmod(n)\, x$.

Tính truyền :

$(x \bmod(n)\, y$ và $y \bmod(n)\, z) \longrightarrow (x = y + kn$ và $y = z + k'n)$

$\Longrightarrow x = z + k'n + kn = z + (k' + k)n \longrightarrow x \bmod(n)\, z$.

Định nghĩa – Lớp tương đương.

Lớp tương đương gồm tất cả các phần tử tương đương nhau trong quan hệ tương đương $R \subseteq M \times M$.

Ký hiệu : $a/R = \{x \mid (\forall x)\,(a, x) \in R\}, \forall a \in M$.

EndĐn

Thí dụ

1. X là tập hợp các đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$, quan hệ song song là quan hệ tương đương. Mỗi lớp tương đương được gọi là *phương*.
2. Quan hệ R được định nghĩa như sau :

   a. $x\,R\,y \longleftrightarrow x = y \pmod 5$.

   R là quan hệ tương đương trên tập hợp số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$.

   Các lớp tương đương :

   $(1/R) = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, \ldots\}$, (2/R) = {2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, ... },

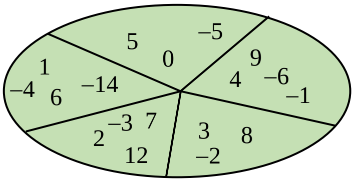
(3/R) = {3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, ... },

(4/R) = {4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, ... },

(5/R) = {5,10,15, 20, 25, 30, 35, 40, ... }.

b. x R y $\longleftrightarrow$ x = y (mod 5).

R là quan hệ tương đương trên tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$.



3. Tập hợp X = {a, b, c, d, e, f, g, h, i} với quan hệ R sau :

R = {(a, b), (a, a), (b, c), (c, d), (c, b), (h, f), (b, b), (e, f), (c, c), (b, a), (d, d), (c, i), (e, e), (f, e), (d, b), (f, f), (f, h), (i, d), (i, c), (g, g), (e, h), (a, c), (b, i), (h, h), (c, a), (i, i), (h, e), (a, d), (d, i), (d, c), (b, d), (d, a), (i, b)}.

R là quan hệ tương đương.

Các lớp tương đương : a/R = {a, b, c, d, i}, e/R = {e, f, h}, g/R = {g}.

Hiển nhiên,

a/R = b/R = c/R = d/R = i/R.

e/R = f/R = h/R.

Thí dụ

Modulo 5 có các lớp tương đương trên tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$:

{0, 5, –5, 10, –10, 15, –15, … } lấy phần tử đại diện $\overline{0}$.

{1, 6, –4, 11, –9, 16, –14, … } lấy phần tử đại diện $\overline{1}$.

{2, 7, –3, 12, –8, 17, –13, … } lấy phần tử đại diện $\overline{2}$.

{3, 8, –2, 13, –7, 18, –12, … } lấy phần tử đại diện $\overline{3}$.

$\{4, 9, -1, 14, -6, 19, -11, \dots\}$ lấy phần tử đại diện $\overline{4}$.

$Z_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ hoặc có thể chọn phần tử đại diện khác

$Z_5 = \{\overline{5}, \overline{-14}, \overline{2}, \overline{8}, \overline{4}\}$.

✧.Tính chất

Cho quan hệ R.

1. R là đối xứng $\longleftrightarrow$ $R^{-1} = R$.
2. R là phản đối xứng $\longleftrightarrow$ $(R \cap R^{-1}) \subseteq \Delta$.
3. R là truyền $\longleftrightarrow$ $(R : R) \subseteq R$.
4. R là tương đương $\longleftrightarrow$ $(R : R^{-1}) = R$ và R phản hồi.

Chứng minh :

1. R là đối xứng nếu và chỉ nếu $R^{-1} = R$.

   ($\Longrightarrow$) Lấy $(x, y) \in R^{-1} \Longrightarrow (y, x) \in R$.

   Vì R đối xứng nên $(x, y) \in R$.

   Do đó $R^{-1} \subseteq R$.

   Lấy $(x, y) \in R$, vì R đối xứng nên $(y, x) \in R \Longrightarrow (x, y) \in R^{-1}$.

   Do đó $R \subseteq R^{-1}$.

   Vậy $R^{-1} = R$.

   ($\Longleftarrow$) chiều này dễ dàng chứng minh R đối xứng.

2. R là phản đối xứng nếu và chỉ nếu $R \cap R^{-1} \subset \Delta$.

   Hiển nhiên.

3. R là truyền nếu và chỉ nếu $(R : R) \subset R$.

   ($\Longrightarrow$) Lấy $(x, y) \in (R : R) \Longrightarrow (\exists z)\ (x, z) \in R$ và $(z, y) \in R$.

   Vì R truyền nên $(x, y) \in R$.

   Do đó $(R : R) \subseteq R$.

   ($\Longleftarrow$) Lấy $(x, y) \in R$ và $(y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in (R : R)$.

   Do $(R : R) \subseteq R$ nên $(x, z) \in R$.

Vậy R truyền.

4. <u>R là tương đương nếu và chỉ nếu $(R : R^{-1}) = R$ và R phản hồi</u>.

($\Longrightarrow$) R là tương đương nên R phản hồi, đối xứng và truyền.

Do R đối xứng $R^{-1} = R$.

Do tính chất 3, $(R : R^{-1}) = (R : R) \subseteq R$.

Lấy $(x, y) \in R$, vì R phản hồi nên $(y, y) \in R$ hay $(y, y) \in R^{-1}$.

Do đó ta có $(x, y) \in R$ và $(y, y) \in R^{-1}$.

Nên $(x, y) \in (R : R^{-1})$. Do đó $R \subseteq (R : R^{-1})$.

Vậy $(R : R^{-1}) = R$.

($\Longleftarrow$) Lấy $(x, y) \in R \Longrightarrow (x, y) \in (R : R^{-1})$.

Do đó $(\exists z)$ $(x, z) \in R$ và $(z, y) \in R^{-1}$.

Hay $(z, x) \in R^{-1}$ và $(y, z) \in R$.

Do đó $(y, x) \in (R : R^{-1}) = R$.

Nên R đối xứng.

Lấy $(x, y) \in R$ và $(y, z) \in R$, do R đối xứng $(z, y) \in R$ và $(y, x) \in R^{-1}$.

đó $(z, x) \in (R : R^{-1}) = R$. Vì R đối xứng $(x, z) \in R$.

Nên R truyền.

Vậy R là quan hệ tương đương. ✓

<u>Thí dụ</u>

Quan hệ $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ với miền trị là $\{1, 2, 3, 4\}$, có $(R : R^{-1}) = R$.

Nhưng R không phản hồi. Điều này chứng tỏ điều kiện phản hồi trong định lý là cần thiết. Nghĩa là không thể giản lược tính chất phản hồi :

(~~phản hồi~~, đối xứng, truyền) $\neq$ (~~phản hồi~~, $(R : R^{-1} = R)$).

✧. Phân hoạch

Quan hệ tương đương chia tập hợp thành nhiều phần tách biệt, mỗi phần là lớp tương đương. Nói cách khác, quan hệ tương đương tạo một phân hoạch trên tập hợp.

Thí dụ

1. Lấy X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} và

   R = {(1, 2), (2, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (7, 8), (8, 7)} ∪ Δ là quan hệ trên X.

   Dễ dàng kiểm tra quan hệ R là quan hệ tương đương.

   Quan hệ này phân chia tập hợp X thành 4 tập con tách biệt

   {1, 2, 6}, {3, 5}, {4}, {7, 8}.

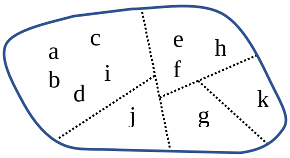
2. Quan hệ đồng dạng trên tập hợp các hình hình học là quan hệ tương đương. Các lớp tương đương là các hình tam giác đồng dạng, hình tròn, đa giác đồng dạng …

3. Cho tập hợp X = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}.

   Quan hệ tương đương R được xác định như sau :

   R = {(a, b), (b, c), (c, d), (c, b), (h, f), (e, f), (b, a), (c, i), (f, e), (d, b), (f, h), (i, d), (i, c), (e, h), (a, c), (b, i), (a, j), (c, a), (h, e), (a, d), (d, i), (d, c), (b, d), (d, a), (i, b)} ∪ Δ.

   Quan hệ R xác định một phân hoạch trên tập hợp X như hình vẽ sau đây :



✧. Phân hoạch và quan hệ tương đương

Lấy một phân chia bất kỳ trên một tập hợp có một quan hệ tương đương sao cho phân hoạch tạo bởi quan hệ tương đương này trùng với sự phân chia này.

Thí dụ

1. Cho tập hợp X = {a, b, c, d, e, f, g, h}, cắt X thành các mảnh như sau : {a, e, f}, {b, h}, {g}, {c, d}.

   Tìm quan hệ R tương đương để có các lớp tương đương trùng với các mảnh cắt trên.

   Quan hệ R phản hồi nên R phải chứa đường chéo Δ.

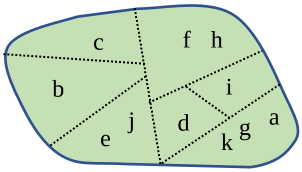
   {a, e, f} là lớp tương đương nên : (a, e), (a, f), (e, f), (e, a), (f, a), (f, e) ∈ R.

   {b, h} là lớp tương đương của R nên : (b, h), (h, b) ∈ R.

   {c, d} là lớp tương đương của R nên : (c, d), (d, c) ∈ R.

   Vậy R = Δ ∪ {(a, e), (a, f), (e, f), (e, a), (f, a), (f, e), (b, h), (h, b), (c, d), (d, c)}.

2. Cho phân hoạch trên X như hình vẽ sau :



   Phân hoạch này xác định quan hệ tương đương S như sau :

   S = {(f, h), (h, f), (e, j), (j, e), (a, g), (a, k), (g, a), (g, k), (k, a), (k, g)} ∪ Δ.

3. Đặt một lưới trên tập hợp X, lưới này phân chia X thành các tập con {1, 7, 8}, {3, 4, 5}, {2}, {6}.

   Tìm quan hệ K sao cho phân hoạch là {1, 7, 8}, {3, 4, 5}, {2}, {6}.

   Xác định K như sau : K = {(1, 7), (7, 1), (1, 8), (8, 1), (7, 8), (8, 7), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4)} ∪ Δ.

   Dễ dàng kiểm tra K là quan hệ tương đương và có phân hoạch {1, 7, 8}, {3, 4, 5}, {2}, {6}.

✧. Ứng dụng của quan hệ tương đương

Tạo khái niệm mới (đặt tên phần tử đại diện).

Quan hệ song song giữa các đường thẳng → khái niệm "phương".

Thu nhỏ kích thước tập hợp (chọn phần tử đại diện).

Tập hợp $\mathbb{N}_p$ có p phần tử của $\mathbb{Z}$ modulo p.

Xây dựng tập hợp mới.

Xây dựng tập $\mathbb{Z}$ bằng quan hệ tương đương R trên tập tích $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$R = \{((m, n), (m + 1, n + 1)) \mid (\forall m, n)\ m, n \in \mathbb{N}\}$

✧. Quan hệ thứ tự

Thứ tự trong thế giới con người là trước sau, trên dưới, trong ngoài, … . Vô hình trung nó thể hiện phương hướng. Lý thuyết tập hợp cũng thể hiện trật tự ấy bằng quan hệ thứ tự. Cho phép xắp đặt các phần tử theo một trật tự.

Quan hệ thứ tự là quan hệ cấp hai quan trọng, nó định trật tự cho các phần tử của tập hợp.

Định nghĩa – Quan hệ thứ tự.

Quan hệ *cấp hai* R là quan hệ thứ tự nếu và chỉ nếu R có các tính chất :

Phản hồi, Phản đối xứng, Truyền.

Tập hợp X có quan hệ thứ tự R thì cặp đôi (X, R) là *tập hợp thứ tự*.

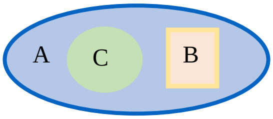
EndĐn

Thí dụ

1. Quan hệ $\leq$ trên tập hợp số là quan hệ thứ tự.

$$12 \leq 26,\ 45 \leq 90,\ 60 \leq 60,\ \ldots$$

2. Quan hệ $\subseteq$ chứa trong của tập hợp là quan hệ thứ tự.



$B \subseteq A,\ C \subseteq A$

3. Lấy X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} và quan hệ

   R = {(1, 2), (6, 1), (6, 2), (3, 5), (8, 7)} ∪ Δ.

   Dễ dàng kiểm tra R là quan hệ thứ tự.

✧. Biểu diễn của quan hệ thứ tự :

Quan hệ thứ tự có thể được biểu diễn trên mặt phẳng (tờ giấy), mỗi phần tử của tập hợp là một điểm. Nếu quan hệ thứ tự có phần tử (x, y) thì vẽ điểm x "thấp" hơn điểm y và kẻ cạnh (đoạn thẳng) nối giữa hai điểm x, y (qui định x thấp y cao hay ngược lại tùy vào người sử dụng). Nếu qua các cạnh đi được từ điểm x đến điểm y thì không cần vẽ cạnh nối x, y, do tính truyền nên biết được x, y có quan hệ.

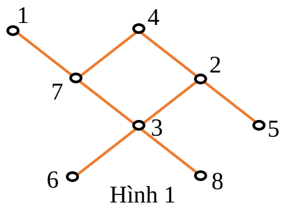
Thí dụ

1. Lấy X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} và quan hệ R như sau :

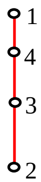
   R = {(6, 3), (6, 2), (6, 4), (6, 7), (6, 1), (8, 3), (8, 7), (8, 1), (8, 2), (8, 4), (3, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4), (2, 4), (7, 1), (7, 4)} ∪ Δ.

   Dễ dàng kiểm tra quan hệ R là quan hệ thứ tự (quan hệ này được biểu diễn bởi hình 1 ở dưới).

2. Lấy X = {1, 2, 3, 4} và P = {(2, 3), (2, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 1), (4, 1)} ∪ Δ. P là quan hệ thứ tự. Quan hệ này có thể được biểu diễn bằng hình 2.



Hình 1

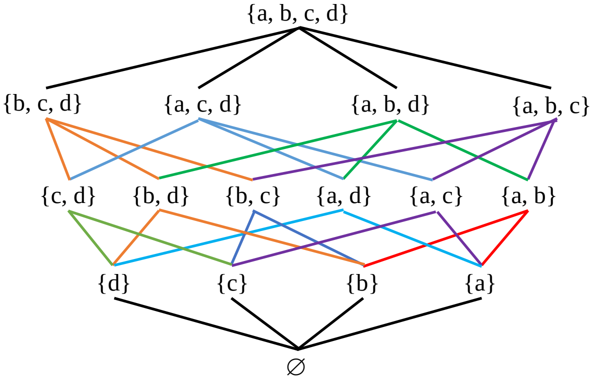


Hình 2

3.Quan hệ chứa trong (⊆) trên tập hợp các tập con của X = {a, b, c, d} là quan hệ thứ tự.

$\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

Quan hệ này được biểu diễn bằng hình sau :

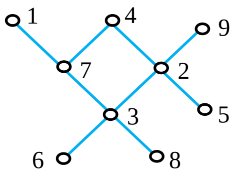


Nhận xét

Ngược lại, cho hình vẽ theo qui tắc trên sẽ xác định một quan hệ thứ tự.

Thí dụ

Cho quan hệ thứ tự theo hình vẽ sau.



Quan hệ trên được xác định như sau :

Bắt đầu từ các phần tử ở đáy so sánh với từng phần tử trên nó.

Tiếp tục với các phần tử ở cấp cao hơn cho đến khi đến cấp cuối cùng.

Phần tử 6 đi được tới 3, 2, 7, 9, 4 và 1 nên có : (6, 6), (6, 3), (6, 2), (6, 7), (6, 9), (6, 4) và (6, 1).

Phần tử 8 đi được tới 3, 2, 7, 9, 4 và 1 nên có : (8, 8), (8, 3), (8, 2), (8, 7), (8, 9), (8, 4) và (8, 1).

Phần tử 3 đi được tới 2, 7, 9, 4 và 1 nên có : (3, 3), (3, 2), (3, 7), (3, 9), (3, 4) và (3, 1).

Phần tử 5 đi được tới 2, 9 và 4 nên có : (5, 5), (5, 2), (5, 9) và (5, 4).

Phần tử 7 đi được tới 4 và 1nên có : (7, 7), (7, 4) và (7, 1).

Phần tử 2 đi được tới 9 và 4 nên có : (2, 2), (2, 9) và (2, 4).

Phần tử 1, 4, 9 chỉ đi được tới chính nó nên có : (1, 1), (4, 4), (9, 9).

Vậy R = {(6, 3), (6, 2), (6, 9), (6, 7), (6, 4), (6, 1), (8, 3), (8, 2), (8, 7), (8, 9), (8, 4), (8, 1), (3, 2), (3, 7), (3, 9), (3, 4), (3, 1), (5, 2), (5, 9), (5, 4), (7, 4), (7, 1), (2, 9), (2, 4)} $\cup$ Δ.

Định nghĩa – Quan hệ thứ tự toàn phần – riêng phần (hay bán phần).

Quan hệ thứ tự toàn phần là quan hệ có mọi phần tử đều so sánh được với nhau.

T là quan hệ thứ tự *toàn phần* $\longleftrightarrow$ $(\forall x, y)\ ((\underline{(x, y) \in T}) \vee (\underline{(y, x) \in T}))$.

Quan hệ thứ tự riêng phần là phủ định của quan hệ toàn phần, là tên khác của quan hệ thứ tự *không toàn phần*. Nghĩa là quan hệ có một số phần tử không so sánh được với nhau.

$\neg$(T là quan hệ thứ tự toàn phần) $\longleftrightarrow$ $\neg[(\forall x, y)\ ((\underline{(x, y) \in T}) \vee (\underline{(y, x) \in T}))]$,

hay

T là quan hệ thứ tự *riêng phần* $\longleftrightarrow$ $(\exists x, y)\ ((\underline{(x, y) \notin T}) \wedge (\underline{(y, x) \notin T}))$.

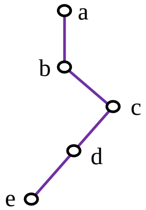
EndĐn

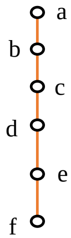
Thí dụ

1. Lấy X = {1, 2, 3, 4} và P = {(2, 3), (2, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 1), (4, 1)} $\cup$ Δ.

   Quan hệ P là quan hệ thứ tự toàn phần.

2. Hai quan hệ sau là quan hệ thứ tự toàn phần :

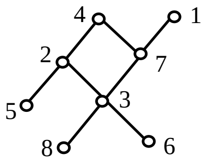




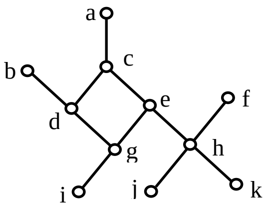
3. Lấy X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} và quan hệ thứ tự riêng phần R như sau :

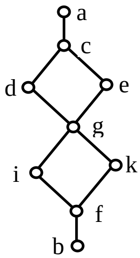
   R = {(6, 3), (6, 2), (6, 4), (6, 7), (6, 1), (8, 3), (8, 7), (8, 1), (8, 2), (8, 4), (3, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4), (2, 4), (7, 1), (7, 4)} ∪ Δ.

   vì có những phần tử không so sánh được với nhau như 1 và 4, 1 với 3, 1 với 5, …



4. Hai quan hệ sau là quan hệ thứ tự riêng phần :





Nhận xét

1. Quan hệ thứ tự riêng phần đôi khi gọi đơn giản là quan hệ thứ tự.
2. Từ đây qui định phần tử bên trái x của cặp (x, y) nhỏ hơn hay bằng phần tử bên phải y.
3. Quan hệ thứ tự toàn phần còn được gọi là quan hệ *tuyến tính* vì chúng được biểu diễn bởi những đoạn thẳng thẳng hàng.

Định nghĩa – Phần tử cực đại.

Phần tử *cực đại* của quan hệ thứ tự R là phần tử thỏa hai điều kiện : "*có quan hệ với mọi phần tử*" và luôn ở "*bên phải*" trong mối quan hệ đó, i.e. lớn hơn.

max là phần tử cực đại của quan hệ thứ tự R $\longleftrightarrow$ $(\forall x)$ $((x, \max) \in R)$.

EndĐn

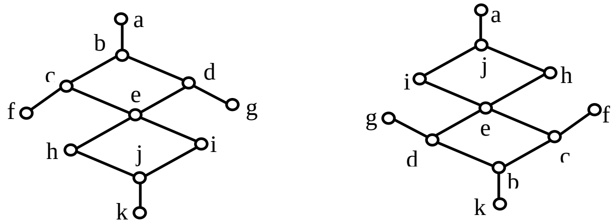
Định nghĩa – Phần tử cực tiểu.

Phần tử *cực tiểu* của quan hệ thứ tự R là phần tử thỏa hai điều kiện : "*có quan hệ với mọi phần tử*" và luôn ở "*bên trái*" trong mối quan hệ đó, i.e. nhỏ hơn.

min là phần tử cực tiểu của quan hệ thứ tự R $\longleftrightarrow$ $(\forall x)$ $((\min, x) \in R)$.

EndĐn

Thí dụ



Hình bên trái có phần tử cực đại a, không có phần tử cực tiểu (k không so sánh được với f, g).

Hình bên phải có phần tử cực tiểu k, không có phần tử cực đại (a không so sánh được với f, g).

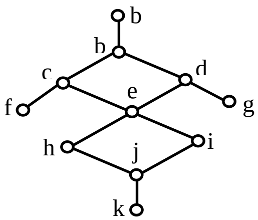
Nhận xét

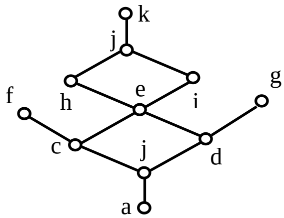
1. Tùy theo cách định nghĩa trật tự của các cặp thứ tự thì phần tử cực đại và cực tiểu (nếu có) sẽ đổi vai trò cho nhau.

Thí dụ

Trong hình sau (bên phải) nếu qui định *trên nhỏ dưới lớn* thì có phần tử *cực tiểu* là a, không có phần tử cực đại.

Ngược lại (hình bên trái) nếu chọn *trên lớn dưới nhỏ* thì có phần tử *cực đại* là b và không có phần tử cực tiểu.

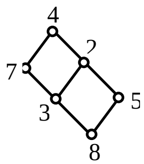




2. Khi đề cập đến phần tử cực tiểu và cực đại thông thường ở trong quan hệ thứ tự toàn phần.
3. Phần tử cực đại, cực tiểu nếu có thì duy nhất. Ký hiệu max được dùng để chỉ phần tử cực đại, và min chỉ phần tử cực tiểu.

Thí dụ

Tập hợp X = {2, 3, 4, 5, 7, 8} với quan hệ thứ tự như hình vẽ có : max(X) = 4, min(X) = 8.



✧. Tối đại - tối tiểu.

Cực đại là phần tử "kiêu ngạo" : bất kể ai nó cũng so sánh được và khi so sánh nó "trội hơn". Nhưng có một loại phần tử cũng có tính kiêu ngạo nhưng là "kiêu ngạo ngầm" : nó không hung hăng đi so sánh với mọi phần tử, nó chỉ đứng một chỗ, ai so sánh được với nó thì nó "trội hơn" còn ai không so sánh được với nó thì thôi. Đó là phần tử tối đại.

Định nghĩa – Phần tử tối đại – tối tiểu.

Phần tử *tối đại* maxℓ của quan hệ thứ tự R thỏa điều kiện : "*chỉ phần tử nào có quan hệ với nó*" thì luôn ở "*bên trái*" trong mối quan hệ đó.

maxℓ là phần tử tối đại của quan hệ thứ tự R $\longleftrightarrow$

$$(\forall x)\ ((x \neq \max\ell) \longrightarrow ((\max\ell, x) \notin R)).$$

Hay

maxℓ là phần tử tối đại của quan hệ thứ tự R $\longleftrightarrow$

$$(\forall x)\ (((x, \max\ell) \in R) \longrightarrow (x = \max\ell).$$

Đối ngẫu của tối đại là *tối tiểu*.

minℓ là phần tử tối tiểu của quan hệ thứ tự R $\longleftrightarrow$

$$(\forall x)\ ((x \neq \max\ell) \longrightarrow ((x, \min\ell) \notin R)).$$

Hay

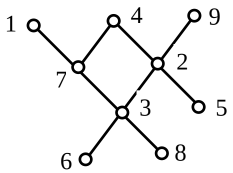
minℓ là phần tử tối tiểu của quan hệ thứ tự R $\longleftrightarrow$

$$(\forall x)\ (((\max\ell, x) \in R) \longrightarrow (x = \min\ell).$$

EndĐn

Thí dụ

Các phần tử tối tiểu là : 5, 6, 8, và các phần tử tối đại là : 1, 4, 9.



Nhận xét

1. Quan hệ thứ tự có thể có nhiều phần tử tối đại. Với quan hệ thứ tự toàn phần, phần tử tối đại chính là phần tử cực đại và phần tử tối tiểu là cực tiểu.
3. Phần tử (x, y) trong quan hệ thứ tự được đọc là x lớn hơn y hay x nhỏ hơn y. Việc chọn lựa chiều nào tùy thuộc vào qui ước của người sử dụng. Dù

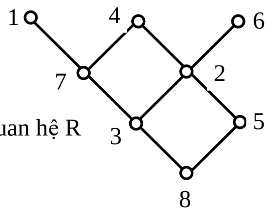
chọn cách nào thì việc chọn phải nhất quán. Do đó với một quan hệ thì một phần tử có thể là tối đại với người này nhưng lại là tối tiểu với người khác.

4. Có tài liệu dùng từ tối thiều thay cho từ tối tiểu.

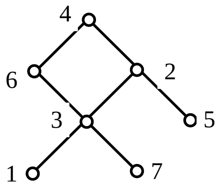
Thí dụ

1. Cho quan hệ R và S.

Quan hệ R



Quan hệ S



Quan hệ R có :

phần tử cực tiểu : 8,

phần tử cực đại : không,

phần tử tối tiểu : 8,

phần tử tối đại : 1, 4 và 6,

Quan hệ S có :

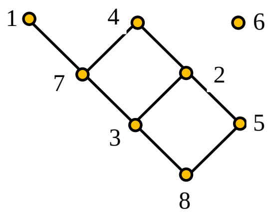
phần tử cực tiểu : không,

phần tử cực đại : 4,

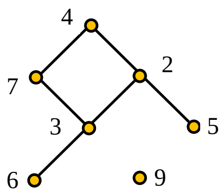
phần tử tối tiểu : 5, 1 và 7,

phần tử tối đại : 4.

2. Cho quan hệ P và K.



quan hệ P



quan hệ K

Quan hệ P có :

phần tử cực tiểu : không,

phần tử cực đại : không,

phần tử tối tiểu : 6 và 8,

phần tử tối đại : 1, 4 và 6,

Quan hệ K có :

phần tử cực tiểu : không,

phần tử cực đại : không,

phần tử tối tiểu : 5, 6 và 9,

phần tử tối đại : 4 và 9.

Tổng kết	R là quan hệ thứ tự trên X
Cực đại max	$(\forall x \in X)\ (x, max) \in R$
Cực tiểu min	$(\forall x \in X)\ (min, x) \in R$
Tối đại $max\ell$	$(\forall x \in X)\ ((\underline{max\ell \neq x}) \longrightarrow \underline{((max\ell, x) \notin R)})$
Tối tiểu $min\ell$	$(\forall x \in X)\ ((\underline{min\ell \neq x}) \longrightarrow \underline{((x, min\ell) \notin R)})$

✧. Chận trên – chận dưới – lub – glb.

Một điều nhắc nhở thêm dù nói nhiều lần nhưng không thừa. Đó là, mọi khái niệm đều có đối tượng hướng tới. Việc sử dụng khái niệm đơn độc rất dễ gây ngộ nhận và hiểu lầm, vì không phải lúc nào ai đó cũng có cùng một bối cảnh (ngầm hiểu) với người nói. Câu văn đầy đủ là : "Phần tử m của tập hợp X có quan hệ thứ tự R là *chận trên* (*dưới*) *của tập con S* của X". Nếu như bài toán đang làm việc chỉ có một tập hợp thì không cần nhắc đến X. Tương tự, nếu trên X chỉ có một quan hệ thứ tự thì cũng có thể quên đi R. Trường hợp này câu văn đơn giản sẽ là : "Phần tử m là chận trên (hoặc dưới) của tập con S", vì các yếu tố ngầm hiểu duy nhất xác định. Về mặt ý nghĩa, phần tử m sẽ chận (phía trên hay dưới) tất cả phần tử của S. "Chận" theo trật tự của quan hệ thứ tự R trên X.

Định nghĩa – Chận trên – chận dưới.

X là tập hợp có thứ tự ($\leq$) và S là tập con của X.

m là *chận trên* của S $\longleftrightarrow$ m là phần tử *của X* và $(\forall x \in S)\ (x \leq m)$.

n là *chận dưới* của S $\longleftrightarrow$ n là phần tử *của X* và $(\forall x \in S)\ (x \geq n)$.

EndĐn

Tập con S có thể có nhiều các chận trên (dưới), nhưng ở đây người ta quan tâm đến chận trên "gần" tập hợp S nhất. Chận trên (dưới) gần S nhất chính là phần tử cực tiểu (cực đại) trong đám các chận trên (dưới).

Định nghĩa – Chặn trên nhỏ nhất – chặn dưới lớn nhất.

X là tập hợp có thứ tự ($\leq$) và S là tập con của X.

p là *chận trên nhỏ nhất* của S $\longleftrightarrow$

p là chận *trên* của S và p = *min* {x | x là chận *trên* của S}.

q là *chận dưới lớn nhất* của S $\longleftrightarrow$

q là chận *dưới* của S và p = *max* {x | x là chận *dưới* của S}.

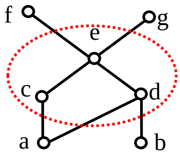
Ký hiệu :

lub(S) hay sup(S) là chận trên nhỏ nhất của S,

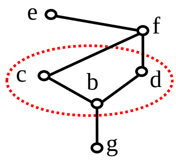
glb(S) hay inf(S) là chận dưới lớn nhất của S.

EndĐn

Thí dụ



Hình 1



Hình 2

Hình 1, tập con S = {c, d, e},

các chận trên = {e, f, g},

các chận dưới = {a},

lub (S) = e,

glb (S) = a.

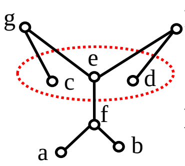
Hình 2, tập con S = {b, c, d},

các chận trên = {e, f},

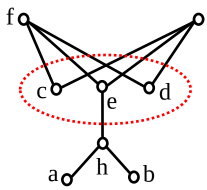
các chận dưới = {b, g},

lub (S) = f,

glb (S) = b.



Hình 3



Hình 4

Hình 3, tập con S = {c, d, e},

các chận trên : không có,

các chận dưới : không có,

Hình 4, tập con S = {c, d, e},

các chận trên = {f, g},

các chận dưới : không có,

lub (S) : không có,
glb (S) : không có.

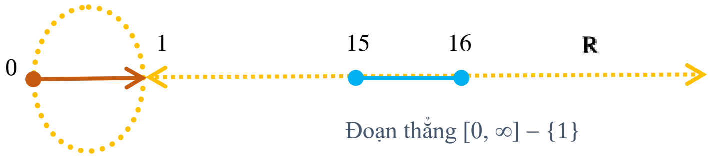
lub (S) : không có,
glb (S) : không có.

Nhận xét

1. Dù có ub, lb nhưng lub, glb không nhất thiết hiện hữu.

Thí dụ

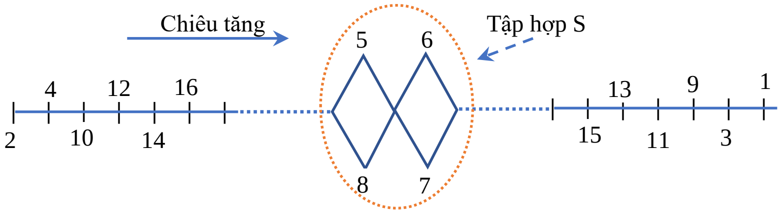
a.



Đoạn thẳng [0, ∞] – {1} là phần không âm của **R** và không lấy phần tử 1.

Lấy S = [0, 1[là đoạn từ 0 tới 1, lấy 0 không lấy 1. Tất cả các phần tử lớn hơn 1 đều là chặn trên của S. Nhưng lub(S) không hiện hữu.

b.



Các phần tử lần lượt nhảy liên tục trên trục từ phải qua trái và trái về phải.

Thứ tự các phần tử 2 < 4 < 10 < 12 < 14 < 16 < … < 8 < 6 < … 15 < 13 < 11 < 9 < 3 < 1.

Thứ tự các phần tử 2 < 4 < 10 < 12 < 14 < 16 < … < 5 < 7 < … 15 < 13 < 11 < 9 < 3 < 1.

Phần tử 5 không so sánh được với 8, 6.

Phần tử 8 không so sánh được với 5, 7.

Trong quan hệ này có phần tử cực tiểu là 2 và cực đại là 1.

Tập hợp S = {5, 6, 7, 8} có ub và lb nhưng không có lub(S) và glb(S).

2. Việc khảo sát chận trên nhỏ nhất và chận dưới lớn nhất thường trong quan hệ thứ tự riêng phần. Nhưng cũng không có gì sai khi xem xét trong quan hệ thứ tự toàn phần.

9. Ánh xạ

Khái niệm ánh xạ đã được định nghĩa trước đây (trong phần đầu của quyển sách), lần này định nghĩa lại với mục đích là *định nghĩa mới* sẽ chặt chẽ, có tính hình thức và mang tính ứng dụng nhiều hơn.

Ánh xạ là *quan hệ* đặc biệt. Khi nói ánh xạ là quan hệ, hiển nhiên mọi tính chất, toán tử của quan hệ đều có thể áp dụng trên ánh xạ miễn là thỏa thêm các điều kiện của ánh xạ. Một điểm nhấn mạnh ở đây : Vì *ánh xạ* là quan hệ nên cũng *là tập hợp*, luôn nhớ điều này. Từ đây những tính toán, chứng minh liên quan tới ánh xạ có thể qui về tập hợp.

Định nghĩa trước đây của ánh xạ *không phụ thuộc* vào khái niệm quan hệ. Còn định nghĩa sau phụ thuộc vào khái niệm quan hệ sẽ dính tới khái niệm tích hai tập hợp. Nên cũng phụ thuộc vào khái niệm *cặp đôi có thứ tự*.

Một khái niệm được định nghĩa càng độc lập càng tốt, vì vậy tính bền vững sẽ cao.

Định nghĩa – Ánh xạ

Cho tập hợp A, B.

f là ánh xạ từ A đến B $\longleftrightarrow$ f $\subseteq$ (A × B) thoả hai điều kiện :

* $(\forall a \in A)\ (\exists b \in B)\ ((a, b) \in f)$ (điều kiện 1)

* $(\forall a, b, b')\ ((\underline{(a, b) \in f}) \wedge (\underline{(a, b') \in f}) \longrightarrow (b = b'))$ (điều kiện 2)

EndĐn

Cách viết thông thường của hai điều kiện trên :

* $(\forall a \in A)\ (\exists b \in B)\ (f(a) = b)$

* $(\forall a, b, b')\ (\ (\underline{f(a) = b} \wedge \underline{f(a) = b'}) \longrightarrow (b = b')\ )$.

Nhận xét

1. Ý nghĩa của điều kiện 1 là mọi phần tử của miền trị đều có ảnh, điều kiện 2 là mỗi phần tử của miền trị chỉ có 1 ảnh. Hai phần tử của miền trị có thể có chung ảnh.

   Có người gom hai điều kiện thành một như sau :

   $$(\forall a \in A)\ (\exists! b \in B)\ (\,(a, b) \in f\,).$$

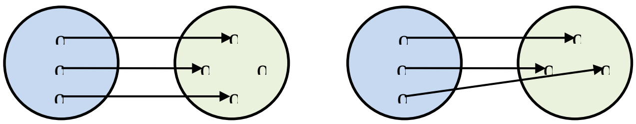
   Đây là cách dùng phi logic, thêm ký hiệu “!” chỉ để làm gọn phát biểu, nó thay cho từ “duy nhất”. Diễn dịch câu trên thành ngôn ngữ tự nhiên “Với mọi phần tử a của A có duy nhất phần tử b của B sao cho cặp (a, b) thuộc quan hệ f (viết thông thường là f(a) = b). Cách viết “gọn” này là “sáng tác” không có ý nghĩa trong logic. Đơn giản, logic không sử dụng ký hiệu “!”. Thực sự không nên dùng “!”, vì không thể áp dụng các kết quả của logic để biến đổi phát biểu có “!” về dạng thích hợp.

2. Tập hợp ảnh của ánh xạ f ký hiệu là Im(f).

✧. Ánh xạ 1-1 (đơn ánh)

Mỗi phần tử của miền ảnh quan hệ *tối đa* với *một* phần tử của miền trị.

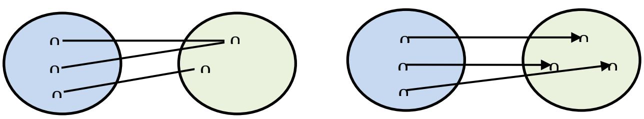
Thí dụ Hai ánh xạ 1-1.



✧. Ánh xạ trên (toàn ánh)

Mọi phần tử của miền ảnh phải có quan hệ với ít nhất một phần tử của miền trị.

Thí dụ Hai ánh xạ trên



✧. Ánh xạ 1-1trên (song ánh)

Vừa là ánh xạ 1-1 và ánh xạ trên.

Thí dụ

Hàm sin là ánh xạ 1-1trên từ $[-\pi/2, \pi/2]$ vào $[-1, 1]$,

hàm cos là ánh xạ 1-1trên từ $[0, \pi]$ vào $[-1, 1]$,

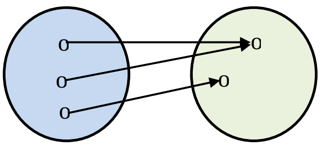
hàm tg là ánh xạ 1-1trên từ $[-\pi/2, \pi/2]$ vào tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

✧. Ánh xạ đảo.

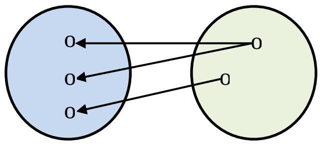
Ánh xạ f đi từ miền trị sang miền ảnh. Bây giờ đi ngược chiều lại trên cùng các con đường mà các phần tử của miền ảnh sang miền trị xem có còn là ánh xạ không. Nếu còn thì nói rằng ánh xạ f *khả đảo* và ánh xạ đi từ miền ảnh sang miền trị được gọi là ánh xạ *đảo* của ánh xạ f. Có thể định nghĩa bằng cách khác.

Ánh xạ f khả đảo nếu và chỉ nếu *quan hệ* nghịch đảo f^{-1} của *quan hệ* f là ánh xạ.

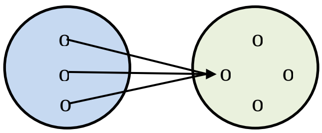
Thí dụ



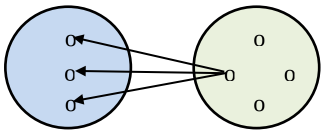
quan hệ là ánh xạ



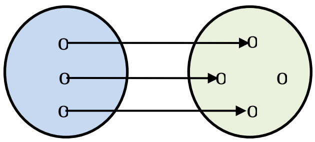
quan hệ đảo không là ánh xạ, vi phạm điều kiện (i)



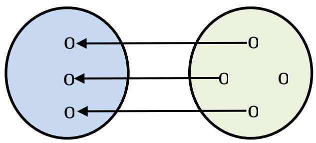
quan hệ là ánh xạ



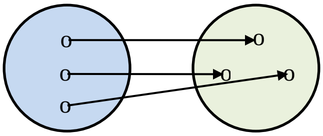
quan hệ đảo không là ánh xạ, vi phạm điều kiện (i)&(ii)



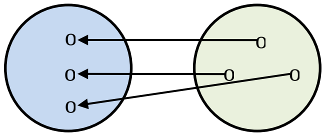
quan hệ là ánh xạ



quan hệ đảo không là ánh xạ, vi phạm điều kiện (i)



quan hệ là ánh xạ



quan hệ đảo là ánh xạ, vì còn thỏa 2 điều kiện

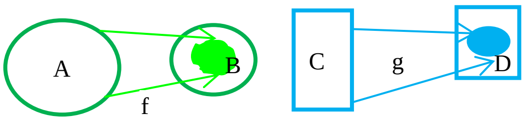
Định lý

Ánh xạ f khả đảo nếu và chỉ nếu f là ánh xạ 1-1trên.

Ký hiệu ánh xạ đảo của f là f^{-1}.

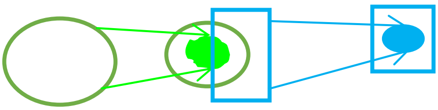
✧.Ánh xạ hợp nối.

Cho hai ánh xạ $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$.

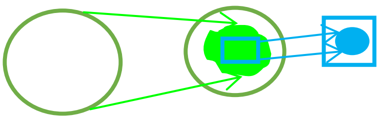


Các phần tử của A muốn đi đến D. B và C tách biệt nên phần tử của A không đến được C qua f.

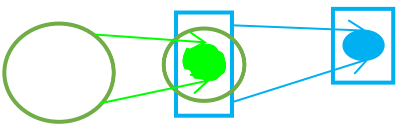
Do đó B và C phải xáp lại gần nhau.



Tình trạng này cũng chỉ có *một số* phần tử của A đi được đến D



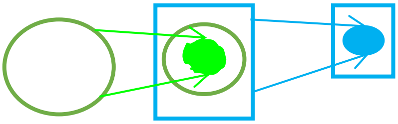
Tình trạng này cũng chỉ có *một số* phần tử của A đi được đến D



Tình trạng này thì tất cả phần tử của A đi được đến D.

Do đó điều kiện là $f(A) \subseteq C$.

Trường hợp đặc biệt là $B \subseteq C$ hay $B = C$.



Vậy điều kiện để nối 2 ánh xạ f và g là $f(A) \subseteq C$.

Ký hiệu $g \circ f$ hay gf.

Hợp nối chính là *tích tương đối* hai *quan hệ* f và g.

Nhận xét

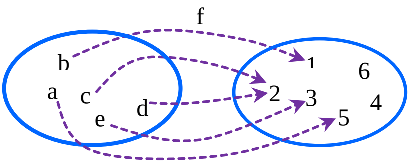
Việc kết nối hai ánh xạ f, g theo trật tự tự nhiên là fg, nhưng vì nhu cầu sử dụng nên chon cách viết gf. Lý do, khi tác động lên phần tử sẽ là $gf(x) = g(f(x))$ theo đúng trật tự di chuyển của x. Tuy nhiên trong một số trường hợp tính hợp nối sẽ được biểu diễn bình thường là fg.

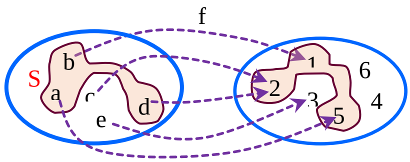
✧.Ảnh của tập con.

Ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ và $S \subseteq A$.

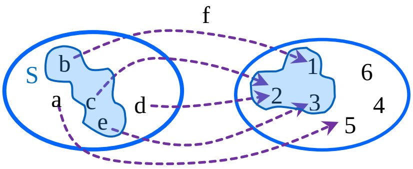
Ảnh của tập S qua f ký hiệu là f(S).

$$f(S) = \{\, y \mid (\forall y \in B)(\exists x \in S)(\, y = f(x))\,\}$$

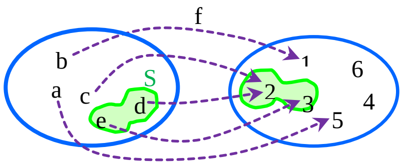




$f(\{a, b, d\}) = \{1, 2, 5\}$



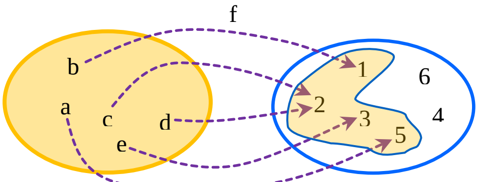
$f(\{b, c, e\}) = \{1, 2, 3\}$



$f(\{d, e\}) = \{2, 3\}$

Ảnh của tập hợp A qua f ký hiêu là Im(f) hay f(A).

$\mathrm{Im}(f) = \{\, y \mid (\forall y \in B)\ (\exists x \in A)\ (\, y = f(x))\ \}$



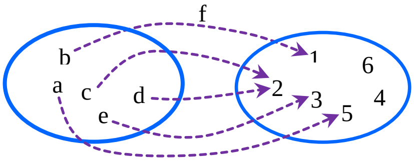
Im(f) = f(A) = {1, 2, 3, 5}

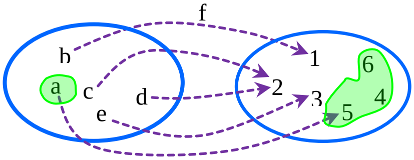
✧.Ảnh ngược của tập con.

Ánh xạ $f : A \longrightarrow B$ và $T \subseteq B$.

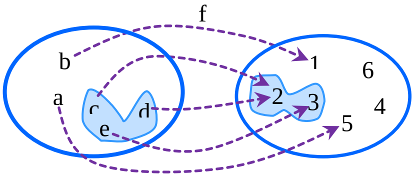
Ảnh ngược của tập T qua f ký hiệu là $f^{-1}(T)$.

$$f^{-1}(T) = \{x \mid (\forall x \in A)(f(x) \in T)\}$$

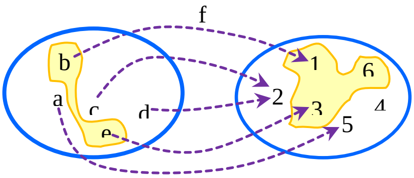




f^{-1} ({4, 5, 6}) = {a}



f^{-1} ({2, 3}) = {c, d, e}



f^{-1} ({1, 3, 6}) = {b, e}

10. Ứng dụng của ánh xạ

✧. Tập con được thay bằng ánh xạ.

Cho A là tập con của X, $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ được định nghĩa như sau :

$$f(x) = 0 \text{ nếu } x \notin A,$$

$$= 1 \text{ nếu } x \in A.$$

Tập con A và ánh xạ f duy nhất xác định lẫn nhau. Trong một số ứng dụng việc thay tập hợp A bằng ánh xạ sẽ dễ dàng hơn trong việc chứng minh.

Nhận xét

1. Tích tương đối của hai quan hệ khi quan hệ là ánh xạ chính là khái niệm hợp nối hai ánh xạ.
2. Ánh xạ f là 1-1 nếu quan hệ f^{-1} (quan hệ đảo của quan hệ f) là ánh xạ.
3. Phân biệt các ký hiệu f^{-1}, $f^{-1}(y)$, $f^{-1}(T)$: cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$,

   Ký hiệu f^{-1} có các cách sử dụng sau :

f^{-1}	là	quan hệ đảo của quan hệ f
$f^{-1}(y)$, $\forall y \in B$	là	ánh xạ đảo của ánh xạ f
$f^{-1}(T)$, $\forall T \subseteq B$	là	ảnh ngược của tập hợp con của miền ảnh

✧.Nhân của ánh xạ.

Ánh xạ $f : A \longrightarrow B$.

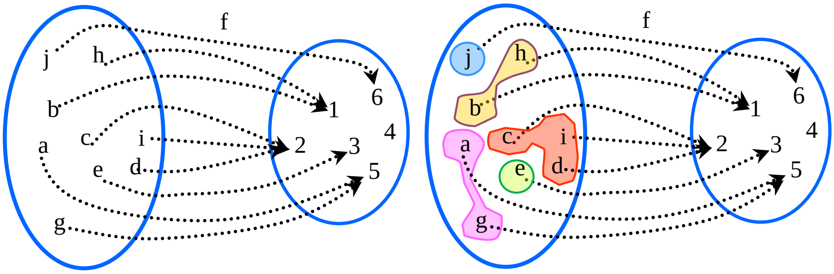
$$\mathrm{Ker}(f) = \{\, (x, y) \mid (\forall x, y \in A)(f(x) = f(y)) \,\}$$

Ker(f) là tập hợp gồm những đôi phần tử của miền trị có cùng ảnh.

Ker(f) được gọi là nhân của ánh xạ f.

Thí dụ

Cho ánh xạ f như sau :



Ker(f) = {(a, g), (g, a), (b, h), (h, b), (c, d), (c, i), (d, i), (d, c), (i, c), (i, d)} ∪ Δ.

Những phần tử của miền trị A có cùng ảnh tạo thành một phân hoạch trên tập hợp A.

Quan hệ tương ứng với phân hoạch trên là Ker(f).

Ker(f) là quan hệ tương đương.

$\forall x \in A, (x, x) \in Ker(f)$.

Nếu $(x, y) \in Ker(f)$ thì $(y, x) \in Ker(f)$.

Nếu $(x, y) \in Ker(f)$ và $(y, z) \in Ker(f)$ thì $(x, z) \in Ker(f)$.

Mệnh đề

$Ker(f) = f : f^{-1}$ (với f^{-1} là quan hệ đảo của quan hệ f).

Phân tích bài toán trước khi chứng minh :

$Ker(f) = \{ (x, y) \mid (\forall x, y \in A)(f(x) = f(y)) \}$

$f = \{ (x, y) \mid (\forall x \in A)(\exists! y \in B) (f(x) = y) \}$

$f^{-1} = \{ (y, x) \mid (\forall x \in A)(\exists! y \in B) (f(x) = y) \}$

Chỉ cần chứng minh

$Ker(f) \subseteq f : f^{-1}$ và $Ker(f) \supseteq f : f^{-1}$.

Chứng minh $\underline{Ker(f) \subset f : f^{-1}}$:

Lấy $(x, y) \in Ker(f)$,

$\Longrightarrow f(x) = f(y) = z$.

$\Longrightarrow (x, z) \in f$ và $(y, z) \in f$.

$\Longrightarrow (x, z) \in f$ và $(z, y) \in f^{-1}$.

$\Longrightarrow (x, y) \in f : f^{-1}$.

Chứng minh $\underline{Ker(f) \supset f : f^{-1}}$:

Tương tự như trên.

Nhận xét

Ánh xạ $f : A \longrightarrow B$.

Ký hiệu f^{-1} có các cách sử dụng sau :

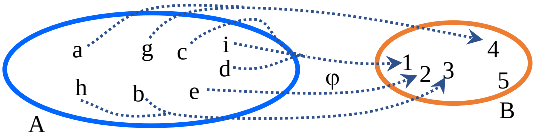
f^{-1} ⟹ quan hệ đảo của quan hệ f (xuất hiện một mình)

f^{-1} (y) ⟹ ánh xạ đảo của ánh xạ f (xuất hiện cùng phần tử đi kèm)

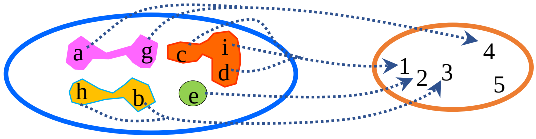
f^{-1} (T) ⟹ ảnh ngược của tập hợp (xuất hiện cùng tập hợp đi kèm)

✧. Chuyển một ánh xạ bình thường (không 1-1trên) thành ánh xạ 1-1trên.

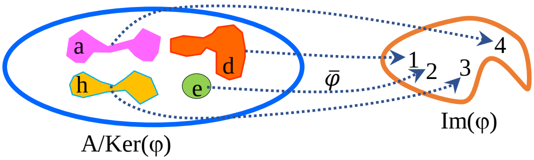
Ánh xạ sau không là ánh xạ 1-1trên.



Nhóm các phần tử có chung ảnh lại với nhau.



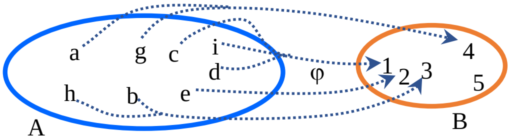
Chọn miền trị là lớp tương đương của quan hệ ker(φ) và miền ảnh là Im(φ).



✧. Phân tích một ánh xạ thành hợp nối của ánh xạ 1-1 và ánh xạ trên.

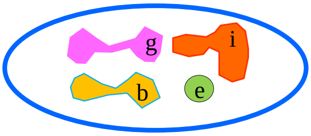
Thí dụ

Cho ánh xạ như sau φ :



φ(a) = φ(g) = 4, φ(b) = φ(h) = 3, φ(c) = φ(d) = φ(i) = 1, φ(e) = 2.

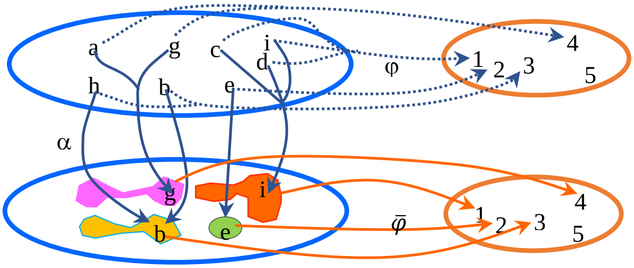
Chọn tập hợp A/Ker(φ) gồm lớp những phần tử có chung ảnh. Mỗi lớp chọn một phần tử đại diện.



Chọn g đại diện cho a, g.   Chọn b đại diện cho b, h.

Chọn i đại diện cho c, d, i.   Chọn e đại diện cho e.

Xây dựng ánh xạ α từ A vào A/Ker(φ) và $\overline{\varphi}$ từ A/Ker(φ) vào B như sau :



Ánh xạ α từ là ánh xạ trên từ A vào A/Ker(φ) và $\overline{\varphi}$ là ánh xạ 1-1 từ A/Ker(φ) vào B.

Do đó $\varphi = \overline{\varphi} \circ \alpha$.

✧.Ánh xạ theo quan điểm phạm trù :

Cho hai ánh xạ $g : T \longrightarrow S$, $f : S \longrightarrow T$. Ký hiệu 1_T là ánh xạ đồng nhất từ T vào T và 1_S là ánh xạ đồng nhất từ S vào S.

Nếu $fg = 1_T$ thì :

f là *nghịch đảo trái* của g và

g là *nghịch đảo phải* của f.

Nếu $fg = 1_T$ và $gf = 1_S$ thì f là *nghịch đảo* của g và ngược lại g là nghịch đảo của f.

Định lý

Ánh xạ f có miền trị khác rỗng :

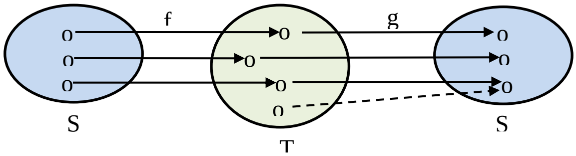
f là 1-1 $\longleftrightarrow$ f có nghịch đảo trái.

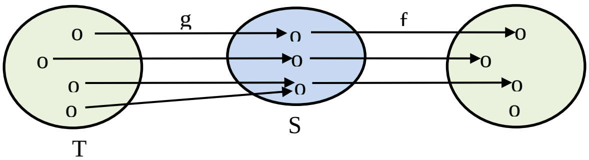
f là trên $\longleftrightarrow$ f có nghịch đảo phải.

Chứng minh

($\rightarrow$) f là 1-1.

Minh họa gợi ý cho chứng minh.





Dễ dàng xác định nghịch đảo trái của f.

($\leftarrow$) f có nghịch đảo trái.

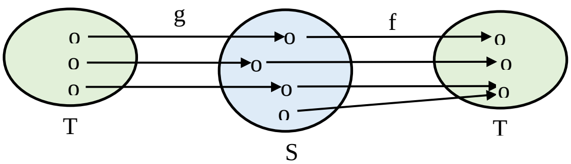
Lấy x, y $\in$ S và x $\neq$ y.

Vì f có nghịch đảo trái g nên gf = 1_S.

$1_S(x) \neq 1_S(x) \Rightarrow gf(x) \neq gf(y)$ hay $g(f(x)) \neq g(f(y))$.

Vì g là ánh xạ nên f(x) $\neq$ f(y). Vậy g là 1-1.

($\rightarrow$) f là trên.



Ánh xạ g được định nghĩa như sau : với y $\in$ T, g(y) được chọn một phần tử trong $f^{-1}(y)$.

Khi đó g là nghịch đảo phải của f.

(←) f có nghịch đảo phải.

Gọi g là nghịch đảo phải của f : $fg = 1_T$.

Lấy $y \in T$, $1_T(y) = fg(y) = f(g(y)) = y$.

Do đó f là ánh xạ trên.

✧. Tìm tất cả ánh xạ giữa hai tập hợp :

Bước 1 : Tìm tất cả tập con (quan hệ) của tích hai tập hợp.

Bước 2 : kiểm tra mỗi tập con có thỏa hai điều kiện ánh xạ hay không.

Thí dụ

Cho A = {x, y}, B = {a, b, c}.

$A \times B$ = {(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)}.

Để cách viết được đơn giản, mã hóa các phần tử của tập tich $A \times B$:

1 = (x, a), 2 = (x, b), 3 = (x, c), 4 = (y, a), 5 = (y, b), 6 = (y, c).

$A \times B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Các tập con của $A \times B$ (có $2^6 = 64$ phần tử) :

Tập con 0 phần tử (có 1 tập con) : ∅.

Tập con 1 phần tử (có 6 tập con) : {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}

Tập con 2 phần tử (có 15 tập con) :

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {2, 3}, {(2, 4}, {2, 5}, {2, 6},
{3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 6}.

Tập con 3 phần tử (có 20 tập con) :

Bỏ {1, 2, ?} (? ∈ {3, 4, 5, 6}) có :

{4, 5, 6}, {3, 5, 6}, {3, 4, 6}, {3, 4, 5} (*)

Bỏ {1, 3, ?} (? ∈ {4, 5, 6}) có : {2, 5, 6}, {2, 4, 6}, {2, 4, 5}.

Bỏ {1, 4, ?} (? ∈ {5, 6}) có : {2, 3, 6}, {2, 3, 5}.

Bỏ {1, 5, ?} (? ∈ {6}) có : {2, 3, 4}.

Bỏ {2, 3, ?} (? ∈ {4, 5, 6}) có : {1, 5, 6}, {1, 4, 6}, {1, 4, 5}.

Bỏ {2, 4, ?} (? ∈ {5, 6})	có :	{1, 3, 6}, {1, 3, 5}.
Bỏ {2, 5, ?} (? ∈ {6})	có :	{1, 3, 4}.
Bỏ {3, 4, ?} (? ∈ {5, 6})	có :	{1, 2, 6},{1, 2, 5}.
Bỏ {3, 5, ?} (? ∈ {6})	có :	{1, 2, 4}.
Bỏ {4, 5, ?} (? ∈ {6})	có :	{1, 2, 3}.

Giải thích dòng (*) (cách chọn 3 trong 6 phần tử) :

Lần lượt bỏ đi các số 1, 2 và "?" khỏi tập số từ 1 đến 6, với ký tự "?" thay bằng các só 3, 4, 5, 6.

{1, 2, 3, 4, 5, 6} – {1, 2, 3} = <u>{4, 5, 6}</u>,

{1, 2, 3, 4, 5, 6} – {1, 2, 4} = <u>{3, 5, 6}</u>

{1, 2, 3, 4, 5, 6} – {1, 2, 5} = <u>{3, 4, 6}</u>,

{1, 2, 3, 4, 5, 6} – {1, 2, 6} = <u>{3, 4, 5}</u>

Các dòng kế tiếp tương tự.

Tập con 4 phần tử (có 15 tập con) :

{3, 4, 5, 6}, {2, 4, 5, 6}, {2, 3, 5, 6}, {2, 3, 4, 6}, {2, 3, 4, 5},
{1, 4, 5, 6}, {1, 3, 5, 6},{1, 3, 4, 6}, {1, 3, 4, 5}, {1, 2, 5, 6},
{1, 2, 4, 6}, {1, 2, 4, 5}, {1, 2, 3, 6}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 3, 4}.

Tập con 5 phần tử (có 6 tập con) :

{1, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 6}, {1, 2, 3, 5, 6}, {1, 2, 4, 5, 6},
{1, 3, 4, 5, 6}, {2, 3, 4, 5, 6}.

Tập con 6 phần tử (có 1 tập con) :

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

$\mathcal{P}(A \times B) =$ {

∅, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6},

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {2, 3}, {(2, 4}, {2, 5},
{2, 6}, {3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 6},

{4, 5, 6}, {3, 5, 6}, {3, 4, 6}, {3, 4, 5}, {2, 5, 6}, {2, 4, 6},

{2, 4, 5}, {2, 3, 6}, {2, 3, 5}, {2, 3, 4}, {1, 5, 6}, {1, 4, 6},
{1, 4, 5}, {1, 3, 6}, {1, 3, 5}, {1, 3, 4}, {1, 2, 6}, {1, 2, 5},
{1, 2, 4}, {1, 2, 3},
{3, 4, 5, 6}, {2, 4, 5, 6}, {2, 3, 5, 6}, {2, 3, 4, 6}, {2, 3, 4, 5},
{1, 4, 5, 6}, {1, 3, 5, 6}, {1, 3, 4, 6}, {1, 3, 4, 5}, {1, 2, 5, 6},
{1, 2, 4, 6}, {1, 2, 4, 5}, {1, 2, 3, 6}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 3, 4},
{1, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 6}, {1, 2, 3, 5, 6}, {1, 2, 4, 5, 6},
{1, 3, 4, 5, 6}, {2, 3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}

}.

Giải mã :

$\mathcal{P}(A \times B)$ = {

∅, {(x, a)}, {(x, b)}, {(x, c)}, {(y, a)}, {(y, b)}, {(y, c)},
{(x, a), (x, b)}, {(x, a), (x, c)}, {(x, a), (y, a)}, {(x, a), (y, b)},
{(x, a), (y, c)}, {(x, b), (x, c)}, {(x, b), (y, a)}, {(x, b), (y, b)},
{(x, b), (y, c)}, {(x, c), (y, a)}, {(x, c), (y, b)}, {(x, c), (y, c)},
{(y, a), (y, b)}, {(y, a), (y, c)}, {(y, b), (y, c)},
{(y, a), (y, b), (y, c)}, {(x, c), (y, b), (y, c)}, {(x, c), (y, a), (y, c)},
{(x, c), (y, a), (y, b)}, {(x, b), (y, b), (y, c)}, {(x, b), (y, a), (y, c)},
{(x, b), (y, a), (y, b)}, {(x, b), (x, c), (y, c)}, {(x, b), (x, c), (y, b)},
{(x, b), (x, c), (y, a)}, {(x, a), (y, b), (y, c)}, {(x, a), (y, a), (y, c)},
{(x, a), (y, a), (y, b)}, {(x, a), (x, c), (y, c)}, {(x, a), (x, c), (y, b)},
{(x, a), (x, c), (y, a)}, {(x, a), (x, b), (y, c)}, {(x, a), (x, b), (y, b)},
{(x, a), (x, b), (y, a)}, {(x, a), (x, b), (x, c)},
{(x, c), (y, a), (y, b), (y, c)}, {(x, b), (y, a), (y, b), (y, c)},
{(x, b), (x, c), (y, b), (y, c)}, {(x, b), (x, c), (y, a), (y, c)},
{(x, b), (x, c), (y, a), (y, b)}, {(x, a), (y, a), (y, b), (y, c)},
{(x, a), (x, c), (y, b), (y, c)}, {(x, a), (x, c), (y, a), (y, c)},

{(x, a), (x, c), (y, a), (y, b)}, {(x, a), (x, b), (y, b), (y, c)},
{(x, a), (x, b), (y, a), (y, c)}, {(x, a), (x, b), (y, a), (y, b)},
{(x, a), (x, b), (x, c), (y, c)}, {(x, a), (x, b), (x, c), (y, b)},
{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a)},
{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b)},
{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, c)},
{(x, a), (x, b), (x, c), (y, b), (y, c)},
{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (y, c)},
{(x, a), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)},
{(x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)},
{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)}
}.

Kiểm tra mỗi phần tử của $\mathcal{P}(A \times B)$ có thỏa điều kiện ánh xạ hay không.

Quan hệ $\varnothing$ không là ánh xạ vi phạm điều kiện 1 : x, y không có ảnh.

Trong các tập con 1 phần tử :

Quan hệ {(x, a)} không là ánh xạ vi phạm điều kiện 1 : y không có ảnh.

Tương tự {(x, b)}, {(x, c)}, {(y, a)}, {(y, b)}, {(y, c)} cũng không là ánh xạ.

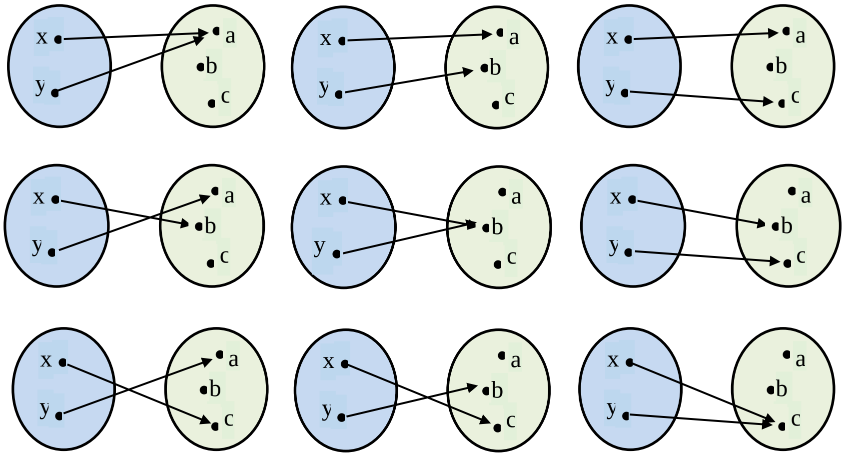
Trong các tập con 2 phần tử :

{(x, a), (x, b)}, {(x, a), (x, c)}, $\boxed{\{(x,a),(y,a)\}}$, $\boxed{\{(x,a),(y,b)\}}$, $\boxed{\{(x,a),(y,c)\}}$, {(x, b), (x, c)}, $\boxed{\{(x,b),(y,a)\}}$, $\boxed{\{(x,b),(y,b)\}}$, $\boxed{\{(x,b),(y,c)\}}$, $\boxed{\{(x,c),(y,a)\}}$, $\boxed{\{(x,c),(y,b)\}}$, $\boxed{\{(x,c),(y,c)\}}$, {(y, a), (y, b)}, {(y, a), (y, c)}, {(y, b), (y, c)}.

Chỉ 9 quan hệ trên là ánh xạ. Còn 6 quan hệ còn lại vi phạm điều kiện 2.

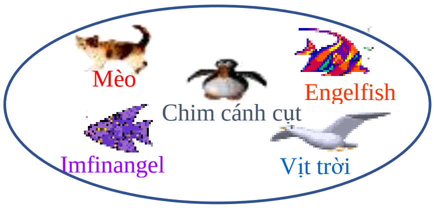
Trong các tập con 3, 4, 5, 6 phần tử : không có quan hệ nào là ánh xạ.

Tóm lại chỉ có 9 ánh xạ đi từ tập hợp A vào tập hợp B, đó là :



11. Đánh chỉ số

Cho một "thế giới" thu nhỏ như sau :



Tập hợp các con vật

Các phần tử trong thế giới tập hợp trên là mèo, chim cánh cụt, vịt trời, imfinangel, engelfish. Nếu số phần tử nhiều thì việc gọi tên từng phần tử là "phiền phức" vì vậy có nhu cầu gọi tên hằng loạt để dễ phát biểu trong các tính toán. Trong trường hợp này có thể gọi các con vật cùng tên là "sinh vật". Nhưng như vậy, các phần tử không được phân biệt, do đó có thể gán thêm cho chúng một con số để tạo sự cá biệt. Ví dụ mèo = sinh vật 1, chim cánh cụt = sinh vật 2, vịt trời = sinh vật 3, imfinangel = sinh vật 4, engelfish = sinh vật 5. Từ sinh vật có vẻ còn "dài" vì vậy gọi tên chung của chúng là x, nên có các tên x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Hành vi này chính là tạo một liên kết giữa tập hợp {1, 2, 3, 4, 5} với các phần tử của tập hợp các con vật gọi chung tên là x.

Đánh chỉ số một tập hợp có nghĩa là gán cho mỗi phần tử của tập hợp *một* hay *nhiều* phần tử của tập hợp chỉ số. Thông thường mỗi phần tử của tập hợp chỉ tương ứng với một phần tử chỉ số. Nhưng tổng quát một phần tử của tập hợp có thể mang nhiều chỉ số, thậm chí không mang chỉ số nào. Thông thường tập hợp chỉ số là tập hợp số nguyên tự nhiên hay tập con của tập hợp số nguyên và ánh xạ đánh chỉ số là 1-1trên. Nhưng tổng quát tập hợp chỉ số có thể là bất kỳ và ánh xạ đánh chỉ số không cần là 1-1 hay 1-1trên.

Việc đánh chỉ số chẳng qua là muốn "*đồng nhất tên gọi*" của các phần tử của tập hợp được đánh chỉ số.

Định nghĩa – Đánh chỉ số.

X là tập hợp được đánh chỉ số. I là tập hợp chỉ số.

Đánh chỉ số I cho tập hợp X là cho ánh xạ $\varphi : I \longrightarrow X$.

Đặt $S = \varphi(I)$.

Ký hiệu tập con S của X là :

$$S = (x_i)_{i \in I}, \quad \text{hay}$$
$$= (x_i)_i, \quad \text{hay}$$
$$= \{x_i \mid \forall i \in I\}, \text{ với các } x_i \text{ là phần tử của X.}$$

Tập hợp S là tập hợp được đánh chỉ số trên tập hợp I.

S còn được gọi là *một họ các phần tử* của X với chỉ số I.

EndĐn

Thí dụ

a. Cho P = {a, b, c, d, e, f, g}.

Lấy I = {1, 2, 3, 4, 5}, φ : $1 \longmapsto a$, $2 \longmapsto b$, $3 \longmapsto c$, $4 \longmapsto a$, $5 \longmapsto b$.

Tập hợp $S_1 = (x_i)_{i \in I} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{a, b, c\}$ được đánh chỉ số trên I.

Lấy J = $\{1, 2, 3\}$, $\phi: 1 \mapsto a,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto b$.

Tập hợp $S_2 = (x_j)_{j \in J} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{a, b, c\}$ được đánh chỉ số trên J.

Lấy K = $\{1, 2, 3\}$, $\theta: 1 \mapsto b,\ 2 \mapsto b,\ 3 \mapsto c$.

Tập hợp $S_3 = (x_k)_{k \in K} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{b, c\}$ được đánh chỉ số trên K.

b. $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x\pi$. Tập hợp $\{\pi, 2\pi, \ldots\}$ được đánh chỉ số trên $\mathbb{Z}$.

c. $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Tập hợp $\mathbb{R}^+$ được đánh chỉ số trên $\mathbb{R}$

d. $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto [x]^+$, ($[x]^+$ là phần nguyên dương của x), tập hợp $\mathbb{N}$ được đánh chỉ số trên $\mathbb{R}$.

e. Đặt $A_r = [0, r]$ với $r \in \mathbb{R}^+$.

$A_r = [r, 0]$ với $r \in \mathbb{R}^-$.

$A_0 = \{0\}$.

Họ $(A_r)_{r \in R}$ được đánh chỉ số trên $\mathbb{R}$.

f. Program XXX;

```
Type
   Thứ = (mon, tue, wed, thu, fri, sat, sun);
   Hànhvi = (shopping, swimming, fishing, cooking, eating);
   Lịch1 = array[Thứ] of Hànhvi;
   Lịch2 = array[1..7] of Hànhvi;
Var
   Luoi1 : Lịch1;          Luoi2 : Lịch2;
Begin
   Luoi1[mon] := swimming;     Luoi2[1] := eating;      …
End.
```

Trong ngôn ngữ lập trình Pascal tập hợp Hànhvi được đánh chỉ số bằng hai tập chỉ số là Thứ và $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Nhận xét

1. Đánh chỉ số một phần tập hợp X bằng tập hợp I.

   Chọn ánh xạ $\varphi : I \longrightarrow X$.

   Tập hợp $\varphi(I)$ là tập hợp được đánh chỉ số.

   φ là ánh xạ đánh chỉ số.

   Tập hợp I là tập chỉ số.

2. Ánh xạ đánh chỉ số không cần là 1-1 hay trên. Nhưng, ánh xạ 1-1 hay 1-1trên thường được dùng để đánh chỉ số và tập hợp chỉ số là tập hợp số nguyên tự nhiên hoặc tập con của nó.

12. Hội – Giao mở rộng – Tích Descartes – Quan hệ mở rộng

Nhắc lại định nghĩa hội 2 tập hợp A, B :

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Nếu có vô hạn tập hợp $(A_i)_{i = 1, \ldots, \ldots}$ thì hội được viết như sau :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \{x \mid (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \}.$$

Không may luận lý mệnh đề không chấp nhận dạng hội/giao vô hạn.

Dó đó mệnh đề $[(x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots]$ không hợp lệ trong luận lý mệnh đề.

Vậy sẽ sử dụng mệnh đề của luận lý vị từ để mở rộng các toán tử tập hợp như hội, giao, hiệu, tích ….

Thay vì nói phần tử x thuộc về hội của hai tập hợp A và B (nghĩa là x thuộc về A hay thuộc về B) sẽ nói có tập hợp A hay tập hợp B để nó thuộc về. Vì vậy khi có nhiều (≥ 2) tập hợp hội lại, cách nói trên vẫn còn giá trị. "*Có ít nhất một tập hợp trong những tập hợp đem hội lại để phần tử x thuộc về*".

Định nghĩa – Hội giao mở rộng.

$(A_i)_i$ là một họ tập hợp được đánh chỉ số trên tập hợp I.

Hội mở rộng của họ $(A_i)_i$:

ký hiệu là $\bigcup_I A_i = \{x \mid (\exists i \in I)\ (x \in A_i)\}$.

Giao mở rộng của họ $(A_i)_i$:

ký hiệu là $\bigcap_I A_i = \{x \mid (\forall i \in I)\ (x \in A_i)\}$.

EndĐn

Thí dụ

a. Cho $X = \{a, b, ..., z\}$ và $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lấy $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \varnothing$, $A_3 = \{d, g\}$, $A_4 = \{b, c, g\}$, $A_5 = \{d, g\}$, $a_6 = \{m, n, p\}$ thì $\cup A_i = \{a, b, c, d, g, m, n, p\}$.

b. Cho $X = \{a, b, ..., z\}$ và $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Lấy $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{b, c, d, e\}$, $A_3 = \{d, b, c, g\}$, $A_4 = \{b, c, g\}$, $a_5 = \{d, b, c\}$ thì $\cap A_i = \{b, c\}$.

c. Cho $X = \mathbb{R}$ (tập hợp số thực) và $I = \mathbb{N}$ (tập hợp số nguyên tự nhiên).

Lấy $A_1 =]1, 2[$, $A_2 =]2, 3[$, $A_3 =]3, 4[$, $A_4 =]4, 5[$, ... , $A_n =]n, n+1[$, ... thì $\cup A_i = \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

Tích của hai, ba, ... tập hợp có các phần tử là bộ đôi, bộ ba, …, nhưng nếu tích của vô số tập hợp thì phần tử không thể là bộ "vô số". Vì vậy cần một định nghĩa mới cho tích vô hạn các tập hợp. Trước khi định nghĩa hãy xem một số thí dụ sau.

Thí dụ

a. Cho $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{\alpha, \beta\}$, và tập hợp chỉ số $I = \{1, 2\}$.

$S_1 \times S_2 = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\}$.

Xét các ánh xạ $\varphi : I \longrightarrow (S_1 \cup S_2)$ thỏa điều kiện $\varphi(i) \in S_i$.

Tìm được 6 ánh xạ φ thỏa điều kiện trên :

$\varphi_1 : 1 \longmapsto a, \quad 2 \longmapsto \alpha,$ $\qquad \varphi_2 : 1 \longmapsto a, \quad 2 \longmapsto \beta,$

$\varphi_3 : 1 \longmapsto b, \quad 2 \longmapsto \alpha,$ $\qquad \varphi_4 : 1 \longmapsto b, \quad 2 \longmapsto \beta,$

$\varphi_5 : 1 \mapsto c, \quad 2 \mapsto \alpha, \qquad \varphi_6 : 1 \mapsto c, \quad 2 \mapsto \beta.$

Có ánh xạ 1-1trên giữa $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ và $(S_1 \times S_2)$.

$\varphi_1 \longleftrightarrow (a, \alpha), \qquad \varphi_2 \longleftrightarrow (a, \beta), \qquad \varphi_3 \longleftrightarrow (b, \alpha),$

$\varphi_4 \longleftrightarrow (b, \beta), \qquad \varphi_5 \longleftrightarrow (c, \alpha), \qquad \varphi_6 \longleftrightarrow (c, \beta).$

Do đó ta có thể xem tập tích $(S_1 \times S_2)$ là tập hợp các ánh xạ

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}.$$

b. Cho $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{\alpha, \beta\}$, $S_3 = \{\Delta, \nabla\}$ và tập hợp chỉ số $I = \{1, 2, 3\}$.

$S_1 \times S_2 \times S_3 = \{(a, \alpha, \Delta), (a, \alpha, \nabla), (a, \beta, \Delta), (a, \beta, \nabla), (b, \alpha, \Delta),$
$(b, \alpha, \nabla), (b, \beta, \Delta), (b, \beta, \nabla), (c, \alpha, \Delta), (c, \alpha, \nabla), (c, \beta, \Delta), (c, \beta, \nabla)\}.$

Xét các ánh xạ $\varphi : I \longrightarrow (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ thỏa điều kiện $\varphi(i) \in S_i$.

Ta tìm được 12 ánh xạ φ thỏa điều kiện trên :

$\varphi_1 : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto \alpha, \quad 3 \mapsto \Delta,$

$\varphi_2 : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto \alpha, \quad 3 \mapsto \nabla,$

$\varphi_3 : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto \beta, \quad 3 \mapsto \Delta,$

$\varphi_4 : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto \beta, \quad 3 \mapsto \nabla,$

$\varphi_5 : 1 \mapsto b, \quad 2 \mapsto \alpha, \quad 3 \mapsto \Delta,$

$\varphi_6 : 1 \mapsto b, \quad 2 \mapsto \alpha, \quad 3 \mapsto \nabla,$

$\varphi_7 : 1 \mapsto b, \quad 2 \mapsto \beta, \quad 3 \mapsto \Delta,$

$\varphi_8 : 1 \mapsto b, \quad 2 \mapsto \beta, \quad 3 \mapsto \nabla,$

$\varphi_9 : 1 \mapsto c, \quad 2 \mapsto \alpha, \quad 3 \mapsto \Delta,$

$\varphi_{10} : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto \alpha, \quad 3 \mapsto \nabla,$

$\varphi_{11} : 1 \mapsto c, \quad 2 \mapsto \beta, \quad 3 \mapsto \Delta,$

$\varphi_{12} : 1 \mapsto c, \quad 2 \mapsto \beta. \quad 3 \mapsto \nabla,$

Nhận xét rằng các ánh xạ φ_j xác định duy nhất các phần tử (x, y) của $(S_1 \times S_2 \times S_3)$, và ngược lại các phần tử của $(S_1 \times S_2 \times S_3)$ xác định duy nhất các ánh xạ φ_j, nghĩa là

$$\varphi_1 \longleftrightarrow (a, \alpha, \Delta), \quad \varphi_2 \longleftrightarrow (a, \alpha, \nabla), \quad \varphi_3 \longleftrightarrow (a, \beta, \Delta),$$
$$\varphi_4 \longleftrightarrow (a, \beta, \nabla), \quad \varphi_5 \longleftrightarrow (b, \alpha, \Delta), \quad \varphi_6 \longleftrightarrow (b, \alpha, \nabla),$$
$$\varphi_7 \longleftrightarrow (b, \beta, \Delta), \quad \varphi_8 \longleftrightarrow (b, \beta, \nabla), \quad \varphi_9 \longleftrightarrow (c, \alpha, \Delta),$$
$$\varphi_{10} \longleftrightarrow (a, \alpha, \nabla), \quad \varphi_{11} \longleftrightarrow (c, \beta, \Delta), \quad \varphi_{12} \longleftrightarrow (c, \beta. \nabla),$$

Do đó ta có thể xem tích $(S_1 \times S_2 \times S_3)$ là tập hợp các ánh xạ

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{12}\}.$$

Một bộ ba các phần tử của tập tích có thể được xem là một ánh xạ φ_i.

Nếu lấy tập hợp chỉ số I là $\mathbb{N}$ hay $\mathbb{R}$ thì định nghĩa tích $(S_1 \times S_2 \times S_3)$ thông thường không còn dùng được.

Tuy nhiên dạng $\{\varphi \mid \varphi : I \longrightarrow \cup A_i$, với $\varphi(i) \in A_i\}$ vẫn ổn bất chấp tập hợp chỉ số I.

Định nghĩa – Tích Descartes (Tích mở rộng).

$(A_i)_i$ là một họ tập hợp được đánh chỉ số trên tập hợp I.

Tích Descartes của họ $(A_i)_i$:

ký hiệu là $\prod_I A_i = \{f \mid f : I \longrightarrow \bigcup_I A_i$, với $f(i) \in A_i\}$,

chính xác là $\prod_I A_i = \{f \mid (\forall i \in I)\ ((f : I \longrightarrow \bigcup_I A_i) \wedge (f(i) \in A_i))\}$.

EndĐn

Thí dụ

$A_1 = \{a, b, c\}$, $\quad A_2 = \{x, y, z\}$.

Đặt $I = \{1, 2\}$ và $A_1 \cup A_2 = \{a, b, c, x, y, z\} = \cup(A_i)_{i \in I}$.

Tất cả ánh xạ từ $I \longrightarrow \cup(A_i)_{i \in I}$.

$\varphi_1 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_1 : 2 \longmapsto a$	$\varphi_2 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_2 : 2 \longmapsto b$	$\varphi_3 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_3 : 2 \longmapsto c$	$\varphi_4 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_4 : 2 \longmapsto x$	$\varphi_5 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_5 : 2 \longmapsto y$	$\varphi_6 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_6 : 2 \longmapsto z$
$\varphi_7 : 1 \longmapsto b$ $\varphi_7 : 2 \longmapsto a$	$\varphi_8 : 1 \longmapsto b$ $\varphi_8 : 2 \longmapsto b$	$\varphi_9 : 1 \longmapsto b$ $\varphi_9 : 2 \longmapsto c$	$\varphi_{10} :1 \longmapsto b$ $\varphi_{10} :2 \longmapsto x$	$\varphi_{11} :1 \longmapsto b$ $\varphi_{11} :2 \longmapsto y$	$\varphi_{12} :1 \longmapsto b$ $\varphi_{12} :2 \longmapsto z$
$\varphi_{13} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{13} :2 \longmapsto a$	$\varphi_{14} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{14} :2 \longmapsto b$	$\varphi_{15} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{15} :2 \longmapsto c$	$\varphi_{16} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{16} :2 \longmapsto x$	$\varphi_{17} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{17} :2 \longmapsto y$	$\varphi_{18} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{18} :2 \longmapsto z$
$\varphi_{19} :1 \longmapsto x$ $\varphi_{19} :2 \longmapsto a$	$\varphi_{20} :1 \longmapsto x$ $\varphi_{20} :2 \longmapsto b$	$\varphi_{21} :1 \longmapsto x$ $\varphi_{21} :2 \longmapsto c$	$\varphi_{22} :1 \longmapsto x$ $\varphi_{22} :2 \longmapsto x$	$\varphi_{23} :1 \longmapsto x$ $\varphi_{23} :2 \longmapsto y$	$\varphi_{24} :1 \longmapsto x$ $\varphi_{24} :2 \longmapsto z$
$\varphi_{25} :1 \longmapsto y$ $\varphi_{25} :2 \longmapsto a$	$\varphi_{26} :1 \longmapsto y$ $\varphi_{26} :2 \longmapsto b$	$\varphi_{27} :1 \longmapsto y$ $\varphi_{27} :2 \longmapsto c$	$\varphi_{28} :1 \longmapsto y$ $\varphi_{28} :2 \longmapsto x$	$\varphi_{29} :1 \longmapsto y$ $\varphi_{29} :2 \longmapsto y$	$\varphi_{30} :1 \longmapsto y$ $\varphi_{30} :2 \longmapsto z$
$\varphi_{31} :1 \longmapsto z$ $\varphi_{31} :2 \longmapsto a$	$\varphi_{32} :1 \longmapsto z$ $\varphi_{32} :2 \longmapsto b$	$\varphi_{33} :1 \longmapsto z$ $\varphi_{33} :2 \longmapsto c$	$\varphi_{34} :1 \longmapsto z$ $\varphi_{34} :2 \longmapsto x$	$\varphi_{35} :1 \longmapsto z$ $\varphi_{35} :2 \longmapsto y$	$\varphi_{36} :1 \longmapsto z$ $\varphi_{36} :2 \longmapsto z$

Có 9 ánh xạ thỏa mãn điều kiện : $(\forall i \in I)(f(i) \in A_i)$.

$\varphi_4 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_4 : 2 \longmapsto x$	$\varphi_5 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_5 : 2 \longmapsto y$	$\varphi_6 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_6 : 2 \longmapsto z$	$\varphi_{10} :1 \longmapsto b$ $\varphi_{10} :2 \longmapsto x$	$\varphi_{11} :1 \longmapsto b$ $\varphi_{11} :2 \longmapsto y$	$\varphi_{12} :1 \longmapsto b$ $\varphi_{12} :2 \longmapsto z$
$\varphi_{16} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{16} :2 \longmapsto x$	$\varphi_{17} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{17} :2 \longmapsto y$	$\varphi_{18} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{18} :2 \longmapsto z$			

$A_1 \times A_2 = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, y), (c, z)\}$.

Đặt $\Phi = \{\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{16}, \varphi_{17}, \varphi_{18}\}$

Có ánh xạ 1-1 trên từ $A_1 \times A_2$ vào Φ.

$(a, x) \longleftrightarrow \varphi_4$, $\quad (a, y) \longleftrightarrow \varphi_5$, $\quad (a, z) \longleftrightarrow \varphi_6$,

$(b, x) \longleftrightarrow \varphi_{10}$, $\quad (b, y) \longleftrightarrow \varphi_{11}$, $\quad (b, z) \longleftrightarrow \varphi_{12}$,

$(c, x) \longleftrightarrow \varphi_{16}$, $\quad (c, y) \longleftrightarrow \varphi_{17}$, $\quad (c, z) \longleftrightarrow \varphi_{18}$.

$$A_1 \times A_2 \longleftrightarrow \Phi.$$

$$A_1 \times A_2 \longleftrightarrow \{f \mid f : I \longrightarrow \cup(A_i)_{i\in I} \text{ và } (\forall i\in I)\ (f(i) \in A_i)\}.$$

Tổng quát tích Descartes của họ tập hợp $(A_i)_{i\in I}$:

$$\Pi(A_i)_{i\in I} = \{f \mid f : I \longrightarrow \cup(A_i)_{i\in I} \text{ và } (\forall i\in I)\ (f(i) \in A_i)\}.$$

Trường hợp tập hợp I hữu hạn $\Pi(A_i)_{i\in[1,\ldots,n]} = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Trường hợp tập hợp I đếm được $\Pi(A_i)_{i\in\mathbf{N}} = A_1 \times A_2 \times \ldots$.

Trường hợp $A_1 = A_2 = \{a, b, c\} = A$.

(thay x, y, z bằng a, b, c ở trên)

$\varphi_1 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_1 : 2 \longmapsto a$	$\varphi_2 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_2 : 2 \longmapsto b$	$\varphi_3 : 1 \longmapsto a$ $\varphi_3 : 2 \longmapsto c$	$\varphi_7 : 1 \longmapsto b$ $\varphi_7 : 2 \longmapsto a$	$\varphi_8 : 1 \longmapsto b$ $\varphi_8 : 2 \longmapsto b$	$\varphi_9 : 1 \longmapsto b$ $\varphi_9 : 2 \longmapsto c$
$\varphi_{13} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{13} :2 \longmapsto a$	$\varphi_{14} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{14} :2 \longmapsto b$	$\varphi_{15} :1 \longmapsto c$ $\varphi_{15} :2 \longmapsto c$			

Khi đó $\cup(A_i)_{i\in I} = A_1 \cup A_2 = A = \{a, b, c\}$ và điều kiện $f(i) \in A_i$ đương nhiên thỏa.

$$A_1 \times A_2 = A^2 \leftrightarrow \{f \mid f : I \longrightarrow A\}$$

Trường hợp $A_i = A, \forall i \in I$,

$$\Pi(A_i)_{i\in I} = \{f \mid f : I \longrightarrow A \text{ và } (\forall i\in I)\ (f(i) \in A)\}.$$

$$\Pi(A_i)_{i\in I} = \{f \mid f : I \longrightarrow A\}.$$

$$\Pi(A_i)_{i\in I} = \text{tập tất cả ánh xạ từ } I \longrightarrow A.$$

Ký hiệu : $\Pi(A_i)_{i\in I} = A^I$, với $A_i = A, \forall i \in I$,

Định nghĩa – Quan hệ mở rộng.

Quan hệ mở rộng R là tập con của tập hợp tích ΠA_i.

EndĐn

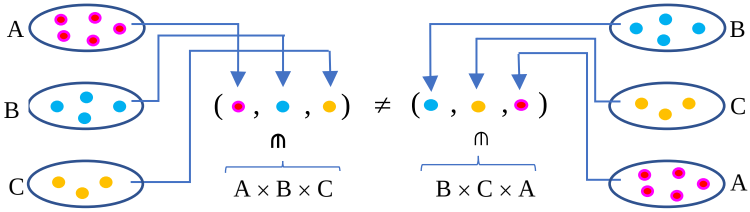
Nhận xét

1. Các phần tử của tập hợp tích $(S_1 \times S_2 \times S_3)$ là những bộ 3 có thứ tự (x, y, z). Trong định nghĩa tích này cần thiết sử dụng khái niệm thứ tự.

   Hiển nhiên $(S_1 \times S_2 \times S_3) \neq (S_1\times S_3 \times S_2) \neq (S_2 \times S_1 \times S_3)$ ... chúng là các tập hợp khác nhau từng đôi.

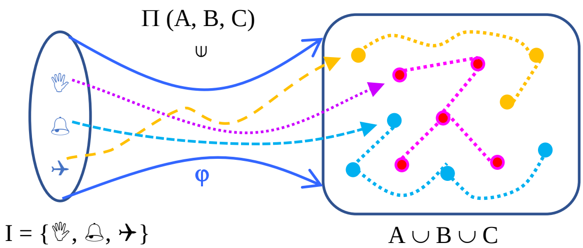
   Nhưng với định nghĩa mở rộng của tích $\Pi A_i = \{\varphi \mid \varphi : I \longrightarrow \cup A_i$, với $\varphi(i) \in A_i\}$ thì khái niệm thứ tự không cần dùng nữa.

Nên các tập hợp tích ($S_1 \times S_2 \times S_3$), ($S_1 \times S_3 \times S_2$), ($S_2 \times S_1 \times S_3$) … trong tích mở rộng chỉ là một.



Tích của 3 tập hợp A, B, C (khác nhau từng đôi) theo quan điểm cổ điển gồm những bộ 3 các phần tử từ mỗi tập hợp A, B, C.

Ví dụ là phần tử của ($A \times B \times C$), nó là bộ 3 và mỗi thành phần của nó là phần tử của A, B, C. Tương tự cũng là phần tử của ($B \times C \times A$). Hai phần tử này thuộc hai tập hợp khác nhau. Trật tự của mỗi thành phần của mỗi phần tử tuân theo trật tự tích của ba tập hợp. Mục đích của bộ ba trật tự của mỗi phần tử là để xác định được từng thành phần của nó thuộc tập hợp nào. Ví dụ thành phần thứ nhất của thuộc tập hợp A.



Ánh xạ φ từ tập hợp I vào tập hợp ($A \cup B \cup C$) thỏa điều kiện :

(*) φ(✋) ∈ A, φ(🔔) ∈ B, φ(✈) ∈ C là phần tử của Π(A, B, C).

Mỗi φ của Π(A, B, C) xác định duy nhất một phần tử của ($A \times B \times C$), và ngược lại.

Khái niệm trật tự của bộ ba phần tử được thay bằng điều kiện (*).

2. Nếu các Ai bằng nhau với mọi $i \in I$ thì ký hiệu ΠAi là A^I.

   Lúc nàyA^I là tập hợp tất cả ánh xạ đi từ I vào A.

   Và cũng ký hiệu $\mathcal{P}(X) = 2^X$ và $A \times A = A^2$.

3. Tập con của A^I được gọi là quan hệ cấp I, với A và I là các tập hợp.
4. Mọi tính chất của hội, giao, tích, quan hệ vẫn được duy trì trên khái niệm mở rộng.
5. Trường hợp I hữu hạn và khác $\varnothing$,

   Số phần tử của tập hợp 2^X là 2^n, với X có n phần tử.

   Số phần tử của tập hợp A^B là m^k, với A, B có m, k phần tử.

6. Trường hợp $I = \varnothing$,

   Vì $I = \varnothing$ nên không có i nào để $x \in A_i$. Do đó

   $$\bigcup_{\varnothing} A_i = \varnothing, \qquad \bigcap_{\varnothing} A_i = \varnothing,$$

   Và $\prod_{\varnothing} A_i = \{f \mid (f : \varnothing \longrightarrow \varnothing) \wedge (\forall i \in \varnothing)(f(i) \in A_i))\}$.

   Vì miền $I = \varnothing$ nên không xét đến điều kiện $(f(i) \in A_i))$, nói cách khác là điều kiện của tập hợp tích không cần thiết phải thóa.

   $$\prod_{\varnothing} A_i = \{f \mid f : \varnothing \longrightarrow \varnothing \}.$$

   Vậy $\prod_{\varnothing} A_i = \{1\}$.

Mệnh đề

$X^{\varnothing} = \{1\}$, với X có n phần tử.

$\varnothing^I = \varnothing$, với I có n phần tử.

$\varnothing^{\varnothing} = \{1\}$.

Như vậy có các kết quả số học tương ứng :

$n^0 = 1,\ 0^n = 0,\ 0^0 = 1$ với $n \neq 0$.

Chứng minh

Tập hợp $X^{\varnothing}$ có 1 phần tử.

X^I = tập hợp các ánh xạ từ I vào X.

$= \{f \mid \forall f, f \subseteq I \times X$ và thỏa 2 điều kiện ánh xạ$\}$.

$\Longrightarrow$ $X^{\varnothing} = \{f \mid \forall f, f \subseteq \varnothing \times X$ và thỏa 2 điều kiện ánh xạ$\}$.

vì $\varnothing \times X = \varnothing$.

$\Longrightarrow$ có duy nhất tập con $\varnothing$ của $\varnothing$.

$\Longrightarrow$ quan hệ $\varnothing$ là ánh xạ vì thỏa 2 điều kiện ánh xạ

(khái niệm mặc nhiên thỏa).

$\Longrightarrow$ $X^{\varnothing}$ có một phần tử.

$\Longrightarrow$ $n^0 = 1$.

Tập hợp $\varnothing^I$ có 0 phần tử.

$X^I = \{f \mid \forall f, f \subseteq I \times X$ và thỏa 2 điều kiện ánh xạ$\}$.

$\Longrightarrow$ $\varnothing^I = \{f \mid \forall f, f \subseteq I \times \varnothing$ và thỏa 2 điều kiện để là ánh xạ$\}$.

$\Longrightarrow$ $I \times \varnothing = \varnothing$.

$\Longrightarrow$ có duy nhất tập con của $\varnothing$ là $\varnothing$.

$\Longrightarrow$ $\varnothing$ không là ánh xạ, vì vi phạm điều kiện 1 để là ánh xạ.

$\Longrightarrow$ $X^{\varnothing}$ không có phần tử.

$\Longrightarrow$ $0^n = 0$.

Tập hợp $\varnothing^{\varnothing}$ có 1 phần tử.

$X^I = \{f \mid \forall f, f \subseteq I \times X$ và thỏa 2 điều kiện ánh xạ$\}$.

$\Longrightarrow$ $\varnothing^{\varnothing} = \{f \mid \forall f, f \subseteq \varnothing \times \varnothing$ và thỏa 2 điều kiện ánh xạ$\}$.

$\Longrightarrow$ $\varnothing$ là ánh xạ vì thỏa 2 điều kiện để là ánh xạ.

$\Longrightarrow$ $\varnothing^{\varnothing}$ có một phần tử.

$\Longrightarrow$ $0^0 = 1$.

Định nghĩa – Nội luật.

Nội luật cấp I trên tập hợp X là ánh xạ từ X^I vào X, với I là tập hợp.

EndĐn

Thí dụ

Toán tử +, * trên tập hợp số nguyên tự nhiên là các nội luật.

Toán tử giao, tổng vành, tích các không gian vector con là các nội luật trên họ các không gian vector con.

Các cấu trúc đại số nhóm, vành, trường, dàn, … có toán tử là các nội luật.

Nhận xét

1. Nội luật còn được gọi bằng những tên khác là toán tử, phép tính.
2. Nội luật ξ *cấp 0* trên tập hợp X là ánh xạ $\xi : X^{\varnothing} \longrightarrow X$. Vì tập hợp $X^{\varnothing}$ có đúng một phần tử nên ánh xạ ξ được đặt trưng bằng một phần tử trong X là $\xi(X^{\varnothing})$.

Thí dụ

Nhóm G là tập hợp G cùng với toán tử * và phần tử e và mọi phần tử x đều có phần tử đảo x^{-1} thỏa các tính chất sau :

$$x * (y * z) = (x * y) * z \qquad \text{(i)}$$

$$x * e = e * x = x \qquad \text{(ii)}$$

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e. \qquad \text{(iii)}$$

Tuy nhiên có thể nhìn nhóm theo quan điểm khác.

Nhóm G = <G, *, $^{-1}$, e > với :

G là tập hợp, * là toán tử cấp 2, $^{-1}$ là toán tử cấp 1, e là toán tử cấp 0, thỏa các tính chất (i), (ii), (iii).

3. Do đó mọi *cấu trúc đại số* được định nghĩa là tập hợp cùng với một số hữu hạn toán tử.

   Tuy nhiên các toán tử là quan hệ. Còn quan hệ lại là tập hợp. Như vậy, cấu trúc đại số thực chất là một số hữu hạn các tập hợp thỏa một số tính chất, mục đích của các tính chất này để chỉ ra sự liên kết các tập hợp với nhau. Trường hợp nhóm, có 4 tập hợp thỏa các tính chất (i), (ii), (iii).

Chương III PHÂN LỚP CÁC TẬP HỢP

Hữu hạn, vô hạn là hai ý niệm hiện hữu tự tại. Nó mang bản chất của không gian và thời gian. Các quan điểm trong triết học có ảnh hưởng không ít đến việc nghiên cứu khái niệm hữu hạn và vô hạn của toán học.

Hữu hạn và vô hạn trong toán học xuất phát từ việc nghiên cứu tập hợp số nguyên tự nhiên. Với sự hiểu biết ban đầu mơ hồ về khái niệm vô hạn đã dẫn đến các vấn đề nghịch lý như bài toán Archile. Một trong những yếu tố đóng góp vào cuộc khủng hoảng nền tảng của toán học.

Do đó, vần đề đặt ra là cần phải có một khảo sát trên khái niệm hữu hạn và vô hạn một cách tổng quát và đầy đủ hơn. Dù nguyên ủy của hữu hạn và vô hạn là tập hợp số. Điều này cũng không làm cho hai khái niệm này phụ thuộc hoàn toàn vào tập hợp số tự nhiên.

Đã chứng minh được rằng khái niệm hữu hạn, vô hạn có một đặc trưng là tính chất "1-1trên với một tập con của nó". Do đó có thể đưa khái niệm hữu hạn và vô hạn ra khỏi sự phụ thuộc vào tập hợp số tự nhiên.

Ở đây sẽ trình bày khái niệm hữu hạn và vô hạn theo hai quan điểm : Hữu hạn là khái niệm đến trước và vô hạn là dạng phủ định và chiều ngược lại, khái niệm vô hạn là tiên khởi.

Ngoài ra một tính chất của tập hợp số nguyên là đếm được cũng được khảo sát trên tất cả tập hợp. Tính đếm được của tập hợp được đo lường dựa trên tập hợp số nguyên. Cấu trúc khảo sát tính đếm được và không đếm được được trình bày tương tự như cấu trúc khảo sát tính hữu hạn và vô hạn.

Phần này là nền tảng vững chắc để khảo sát hai khái niệm quan trọng sau này trong lý thuyết tập hợp là khái niệm lượng số và thứ số. Có thể xem phần lượng số và thứ số là bước phát triển tất yếu của khái niệm hữu hạn và vô hạn. Do vậy, hữu hạn và vô hạn là hai khái niệm quan trọng của lý thuyết tập hợp.

1. Hữu hạn – Vô hạn

Bảng thuật ngữ tiếng Anh dùng để chỉ các từ hữu hạn, vô hạn :

Hữu hạn	Vô hạn
Finite	Infinite
Inductive	Non-inductive
Non-reflexive	Reflexive

Qua bảng thuật ngữ này cũng cho thấy có lúc hữu hạn là từ có trước còn vô hạn là khái niệm phủ định đến sau, nhưng vô hạn cũng có lúc xuất hiện trước hữu hạn. Điều này chỉ nói lên diễn tiến nghiên cứu hai thuật ngữ này. Chích xác hơn chúng là cặp phạn trù cùng tồn tại song hành với nhau.

Định nghĩa – Hữu hạn.

Đặt $I_n = \{i \mid i \in \mathbb{N}$ và $1 \le i \le n\}$, $n \in \mathbb{N}$ (với n là phần tử của tập số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$)

Tập hợp F hữu hạn $\longleftrightarrow$ F 1-1trên với một I_n hoặc $F = \varnothing$, với $n \in \mathbb{N}$.

Phát biểu hình thức :

Tập hợp F hữu hạn $\longleftrightarrow$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ (F 1-1trên với I_n) $\vee$ $(F = \varnothing)$.

EndĐn

Thí dụ

1. Tập hợp bảng ký tự của ngôn ngữ tiếng Anh :

   {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}

   là tập hợp hữu hạn vì nó 1-1trên với I_{26}.
2. Tập hợp các màu cơ bản {xanh, đỏ, vàng} là hữu hạn vì 1-1trên với I_3.

   Khi đã có khái niệm hữu hạn thì khái niệm vô hạn mặc nhiên hiện hữu không cần định nghĩa, chẳng qua người ta đặt từ vô hạn thay cho từ không hữu hạn. Nếu đồng thời định nghĩa cả hai khái niệm hữu hạn và vô hạn sẽ là dư thừa, đôi khi còn gây ra mâu thuẫn.

Vô hạn chỉ là phủ định của hữu hạn.

Định nghĩa – Vô hạn.

Lấy phủ định hai vế của định nghĩa hữu hạn :

$\neg$ (Tập hợp F hữu hạn) $\longleftrightarrow \neg[(F = \varnothing) \vee (\exists n \in \mathbb{N})$ (F 1-1trên với I_n)].

(Tập hợp F *không* hữu hạn) $\longleftrightarrow$

$(F \neq \varnothing) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})$ (F *không* 1-1trên với I_n).

Thay từ *không hữu hạn* bằng từ vô hạn :

(Tập hợp F vô hạn) $\longleftrightarrow (F \neq \varnothing) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})$ (F *không* 1-1trên với I_n).

Mệnh đề trên có nghĩa là F khác rỗng và không có số nguyên n nào sao cho F 1-1trên với I_n.

EndĐn

Thí dụ

1. Tập hợp các số nguyên tự nhiên là vô hạn.
2. Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

Nhận xét

1. Định nghĩa hữu hạn phụ thuộc vào tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$. Do đó nếu phát hiện tiên đề Peano có vấn đề thì khi đó khái niệm hữu hạn sụp đổ. May thay chưa ai bài bác tiên đề Peano !.
2. Với định nghĩa hữu hạn, tập hợp I_n và $\varnothing$ được "qui ước" là hữu hạn.
3. Tính chất hữu hạn, vô hạn còn duy trì đối với hội, giao, tích.
   Nhưng không chắc có đối với hiệu, hội mở rộng, giao mở rộng, tích mở rộng.

Mệnh đề

$P \subseteq I_n \Longrightarrow P$ hữu hạn, với $n \in \mathbb{N}$.

(Tập con của I_n thì hữu hạn).

Chứng minh

P có phần tử cực tiểu p_1.

$P - \{p_1\}$ có phần tử cực tiểu p_2.

$P - \{p_1, p_2\}$ có phần tử cực tiểu p_3.

Quá trình này dừng ở bước k ($\leq$ n).

$P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k\}$.

Vậy $\quad P \longleftrightarrow I_k$.

Mệnh đề

$P \subseteq$ hữu hạn $\quad \Longrightarrow \quad$ P hữu hạn.

(Tập con của tập hữu hạn cũng hữu hạn).

Mệnh đề

$Q \supseteq$ vô hạn $\quad \Longrightarrow \quad$ Q vô hạn.

(Tập hợp chứa tập vô hạn cũng vố hạn)

Phát biểu hình thức

$(\forall P, Q)\ [(P \subseteq Q) \wedge (Q \text{ hữu hạn} \Longrightarrow P \text{ hữu hạn})]$.

Do $(a \longrightarrow b) = (\neg b \longrightarrow \neg a)$

$(\forall P, Q)\ [(P \subseteq Q) \wedge (P \text{ vô hạn} \Longrightarrow Q \text{ vô hạn})]$.

Định lý

Nếu X hữu hạn thì X không 1-1trên với mọi tập con riêng của X.

Phát biểu hình thức

$X \text{ hữu hạn} \Longrightarrow (\forall S \subset X)\ (X \not\longleftrightarrow S)$

Dạng tương đương

$[(\exists S \subset X)\ (X \longleftrightarrow S)] \Longrightarrow X \text{ vô hạn}$.

Nếu X có tập con riêng 1-1 trên với X thì X vô hạn.

Chứng minh (phản chứng)

X hữu hạn và $[(\exists S \subset X) (X \longleftrightarrow S)]$.

$\Longrightarrow X \longleftrightarrow I_n$, vì X hữu hạn,

$\Longrightarrow S \longleftrightarrow I_m$ với $m < n$, vì S hữu hạn,

$\Longrightarrow I_n \longleftrightarrow I_m$, mâu thuẫn.

Định lý

I_n không 1-1trên với mọi tập con riêng S của nó.

Chứng minh (truy chứng)

P_n = "I_n không 1-1trên với mọi tập con riêng", $\forall n \in \mathbb{N}$.

P_1 đúng vì $\{1\} \not\longleftrightarrow \varnothing$.

Chứng minh (P_n đúng) $\rightarrow$ (P_{n+1} đúng).

Phản chứng, giả sử $S \subset I_{n+1}$ và có ánh xạ 1-1trên $f : I_{n+1} \longleftrightarrow S$.

$\Longrightarrow (S - \{f(n+1)\}) \longleftrightarrow I_n$, với $(S - \{f(n+1)\}) \subset I_n$.

$\Longrightarrow$ mâu thuẫn.

Mệnh đề

Tập hợp 1-1trên với tập hữu hạn thì hữu hạn.

Tập hợp 1-1trên với tập vô hạn thì vô hạn.

Bổ đề

$\mathbb{N}$ 1-1trên với $\mathbb{N}_e$, ($\mathbb{N}_e$ là tập hợp các số nguyên chẵn).

$\mathbb{N}$ 1-1trên với $\mathbb{N}_o$, ($\mathbb{N}_o$ là tập hợp các số nguyên lẻ).

Chứng minh

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_e$, $\qquad n \mapsto 2n$

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_o$, $\qquad n \mapsto 2n-1$

f và g là ánh xạ 1-1trên.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots & 2n & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 2n-1 & \dots \end{array}$$

Mệnh đề

Tập con P của I_n là hữu hạn, với $I_n = \{x \mid \forall x\ (x \in \mathbb{N}$, và $x \le n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh

P có phần tử cực tiểu p_1.

$P - \{p_1\}$ có phần tử cực tiểu p_2.

$P - \{p_1, p_2\}$ có phần tử cực tiểu p_3.

Quá trình này dừng ở bước k ($\le n$).

Do đó $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_k\}$ 1-1trên với I_k.

Vậy P hữu hạn.

Mệnh đề

$P \subseteq$ Hữu hạn $\longrightarrow$ P hữu hạn.

(P là tập con của tập hữu hạn nên P cũng hữu hạn)

Hệ quả

$Q \supseteq$ vô hạn $\longrightarrow$ Q vô hạn.

(tập hợp Q chứa tập vô hạn nên Q cũng vố hạn)

Chứng minh

Đã có $P \subseteq$ Hữu hạn $\longrightarrow$ P hữu hạn.

Viết đầy đủ : $(\forall P, Q)\ (P \subseteq Q) \wedge$ (Q hữu hạn $\longrightarrow$ P hữu hạn).

Hay $(\forall P, Q)\ (P \subseteq Q) \wedge$ (P vô hạn $\longrightarrow$ Q vô hạn)

(do $(a \longrightarrow b) = (\neg b \longrightarrow \neg a)$).

Định lý

Nếu tập hợp hữu hạn thì không 1-1trên với mọi tập con riêng của nó.

Chứng minh

Chỉ cần chứng minh trên các tập hợp I_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt P_n = "I_n không 1-1trên với mọi tập con riêng của nó".

P_1 đúng vì P_1 = "I_1 không 1-1trên với mọi tập con riêng của nó",

$\varnothing \subset I_1 = \{1\}$.

Giả thiết truy chứng : I_n không có ánh xạ 1-1trên với mọi tập con riêng của nó.

Chứng minh bằng phản chứng P_{n+1} cũng đúng.

Giả sử có ánh xạ φ 1-1trên giữa S và I_{n+1} với S là tập con riêng của I_{n+1}.

Bỏ một phần tử trong S và phần tử tương ứng của nó trong I_{n+1}, S trở thành S' và I_{n+1} tương ứng với I_n.

Ánh xạ φ vẫn còn 1-1trên giữa I_n và tập con riêng S' của nó.

Mâu thuẫn với giả thiết truy chứng.

Vậy P_{n+1} đúng.✓

Hệ quả

Tập hợp X vô hạn $\longleftrightarrow$ X có tập con riêng 1-1trên với X.

Chứng minh

X hữu hạn $\longrightarrow$ $(\forall S \subset X)$ (S không 1-1trên với X)

$(\exists S \subset X)$ (S 1-1trên với X) $\longrightarrow$ X vô hạn (do $(a \longrightarrow b) = (\neg b \longrightarrow \neg a)$).

Toán tử bao hàm có liên quan với tính hữu hạn và vô hạn theo hệ quả sau.

Hệ quả

1. Tập con của tập hợp hữu hạn cũng hữu hạn.
2. Tập hợp chứa tập hợp vô hạn cũng vô hạn.

Chứng minh

1. Chỉ cần chứng minh mọi tập con của I_n là hữu hạn.

Lấy $P \subseteq I_n$, vì P là tập con của $\mathbb{N}$ nên P có phần tử nhỏ nhất, đặt là x_1.

Tương tự, $(P - \{x_1\})$ có phần tử nhỏ nhất, đặt là x_2, quá trình này phải dừng lại tại x_k, với $k \le n$.

Do đó P hữu hạn vì 1-1trên với I_k.

2. Lấy P là tập hợp sao cho $P \supseteq K$ với K là vô hạn.

Giả sử P hữu hạn, do phần 1 vừa chứng minh K cũng hữu hạn, mâu thuẫn với giả thiết K vô hạn.

Tuy nhiên có thể chứng minh trực tiếp như sau :

Vì K vô hạn nên có tập con riêng H 1-1trên với K.

Do định nghĩa P là hội hai tập hợp tách biệt K và (P – K), nghĩa là

$$P = K \cup (P - K)$$

H và (P – K) cũng là hai tập hợp tách biệt.

$H \cup (P - K)$ là tập con riêng của P vì $(K - H) \neq \varnothing$.

Gọi f là ánh xạ 1-1trên giữa H và K, g là ánh xạ đồng nhất của (P – K).

Dễ dàng xây dựng ánh xạ 1-1trên giữa P và $H \cup (P - K)$ từ f và g.

Vậy P là vô hạn. ✓

Nhận xét

1. Hệ qủa 1 và 2 thật ra là tương đương với nhau. Phát biểu hình thức của hệ quả 1 :

”Tập con A của tập hợp X hữu hạn cũng hữu hạn”

= “(X hữu hạn) ⟶ (A hữu hạn)”

= “(A không hữu hạn) ⟶ (X không hữu hạn)”

= “(A vô hạn) ⟶ (X vô hạn)”

= “Tập hợp X chứa tập con A vô hạn cũng vô hạn”.

2. Với hai hệ quả này dễ dàng chứng minh các kết quả về các toán tử giao, hội, hiệu, tích và mở rộng đối với hữu hạn và vô hạn.

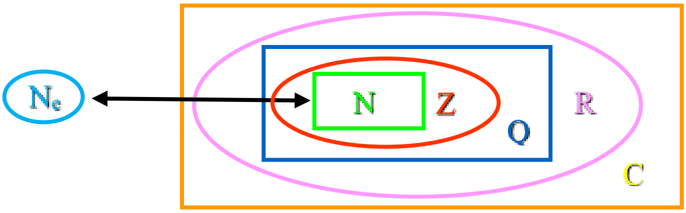
Hệ quả

Tập hợp **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C** là vô hạn.

Chứng minh

N vô hạn vì 1-1trên với tập con số nguyên chẵn của nó.

Z, **Q**, **R**, **C** cũng vô hạn vì chứa tập con **N** vô hạn. ✓



Từ định nghĩa hữu hạn chứng minh được kết quả quan trọng "tập hợp vô hạn nếu có tập con riêng 1-1 trên với nó".

Với nhận xét tập hợp **N** 1-1trên với tập con riêng của nó là $\mathbf{N}_e$, Dedekind trực giác đây là đặc trưng của tập hợp vô hạn. Dedekind chọn tính chất này để định nghĩa cho khái niệm vô hạn.

Định nghĩa – Vô hạn.

Một tập hợp vô hạn nếu có ánh xạ 1-1trên với một tập con riêng của nó.

EndĐn

Hữu hạn chỉ là phủ định của vô hạn (theo quan điểm của Dedekind).

Hệ quả

Một tập hợp hữu hạn nếu không có tập con riêng 1-1trên với nó.

Nhận xét

Điều này cho thấy ở một số trường hợp nào đó định nghĩa và định lý có thể *hoán đổi vai trò lẫn nhau*. Ngoài ra cũng thấy rằng định nghĩa giữ vai trò quan trọng, sơ sài với định nghĩa sẽ là thất thoát lớn những điều kiện ban đầu cho công việc chứng minh.

Thí dụ

Tập hợp **N** là vô hạn vì **N** 1-1trên với $\mathbf{N}_o$ (là tập con riêng của **N**).

Nhận xét

1. Các định nghĩa này còn gọi là vô hạn Dedekind và hữu hạn Dedekind.
2. Điều quan trọng là định nghĩa của Dedekind về vô hạn và hữu hạn *độc lập* với tập hợp số nguyên tự nhiên **N**.
3. Mọi kết quả có được từ khái niệm hữu hạn được định nghĩa trước cũng có được khi định nghĩa vô hạn trước.

Hệ quả

1. Tập hợp $\varnothing$ là hữu hạn vì không có tập con riêng 1-1trên với nó.
2. Tập hợp $I_n = \{1,2, \ldots , n\}$ là hữu hạn vì với $m < n$ thì I_m không 1-1trên với I_n.
3. Tập con của tập hợp hữu hạn cũng hữu hạn.
4. Tập hợp chứa tập hợp vô hạn cũng vô hạn.

Chứng minh

1. Tập hợp $\varnothing$ hữu hạn vì không có tập con riêng 1-1trên với nó.
2. Mọi tập con của I_n không thể 1-1trên với I_n.
3. Giả sử tập con S của tập hợp hữu hạn K là vô hạn thì S có tập con riêng P 1-1trên với nó.

   Do đó ta tìm được tập con riêng của K là $P \cup (K - S)$ 1-1trên với K. Điều này mâu thuẫn với K hữu hạn.
4. Hiển nhiên. ✓

Hệ quả

N, **Z**, **Q**, **R**, **C** là vô hạn.

Chứng minh

Từ định nghĩa vô hạn Dedeking. ✓

2. Toán tử giữa các tập hợp hữu hạn – vô hạn

✧. (Hữu hạn $\cup$ hữu hạn) là hữu hạn.

Thí dụ

$S = \{1, 2, 3\}$, $K = \{3, 4, 5\}$, $S \cup K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

✧. (Vô hạn $\cup$ hữu hạn) là vô hạn,.

Thí dụ

$S = \mathbb{N}$, $K = \{3, 4, 5\}$, $S \cup K = \mathbb{N}$.

Điều này có thể hiểu theo nghĩa thông thường là cái hữu hạn "chìm" trong cái vô hạn.

Trong hội chỉ cần một thành phần vô hạn là hội vô hạn.

✧. Hội trên tập chỉ số vô hạn của các tập hợp hữu hạn là hữu hạn hoặc vô hạn.

Thí dụ

$P_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < i\}, \forall i \in \mathbb{N}$, $\cup P_i = \mathbb{N}$ (vô hạn).

$Q_i = \{1\}, \forall i \in \mathbb{N}$, $\cup Q_i = \{1\}$ (hữu hạn).

✧. (Hữu hạn $\cap$ hữu hạn) là hữu hạn.

Thí dụ

$S = \{1, 2, 3, 4\}$, $K = \{3, 4, 5\}$, $S \cap K = \{3, 4\}$ (hữu hạn).

✧. (Vô hạn $\cap$ hữu hạn) là hữu hạn.

Thí dụ

$S = \mathbb{N}$, $K = \{3, 4, 5\}$, $S \cap K = \{3, 4, 5\}$ (hữu hạn).

✧. (Vô hạn $\cap$ vô hạn) là hữu hạn hoặc vô hạn.

Thí dụ

$S = \{1, 3\} \cup \{x \mid x$ là số chẵn$\}$, $K = \{4, 6\} \cup \{x \mid x$ là số lẻ$\}$,

$S \cap K = \{1, 3, 4, 6\}$ (hữu hạn).

$T = \mathbb{N}$, $H = \{x \mid x > 3\}$,

$T \cap H = \{x \mid x > 3\}$ (vô hạn).

✧. Giao trên tập chỉ số vô hạn của các tập hữu hạn là hữu hạn.

Thí dụ

$P_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < i+2\}, \forall i \in \mathbb{N}$, $\cap P_i = \{1, 2\}$ (hữu hạn).

✧. Giao trên tập chỉ số vô hạn của các tập vô hạn là tập hữu hạn hoặc vô hạn.

Thí dụ

$P_i = \{1\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{N}, i < x\}, \forall i \in \mathbb{N}$, $\cap P_i = \{1\}$ (hữu hạn).

$Q_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (i \bmod 3) < x\}, \forall i \in \mathbb{N}$, $\cap Q_i = \mathbb{N} - \{1, 2\}$, (vô hạn).

Trong thành phần giao chỉ cần có một tập hợp hữu hạn thì giao sẽ hữu hạn.

✧. (Hữu hạn × hữu hạn) là hữu hạn.

Thí dụ

$S = \{1, 2, 3\}$, $K = \{a, b\}$,

$S \times K = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ (hữu hạn).

✧. (Vô hạn × hữu hạn) là vô hạn.

Thí dụ

$S = \mathbb{N}$, $K = \{a, b\}$,

$S \times K = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), \ldots, (n, a), (n, b), \ldots \}$ (vô hạn).

Trong thành phần tích chỉ cần có một tập hợp vô hạn thì kết quả tích sẽ vô hạn, với điều kiện tập hợp hữu hạn là không rỗng.

✧. Tích trên tập chỉ số vô hạn của các tập hữu hạn là tập vô hạn hoặc hữu hạn.

Thí dụ

$P_i = \{1, 2\}, \forall i \in \mathbb{N}$, $\Pi P_i = \{(x_i)_i \mid \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in \{1, 2\}\}$, (vô hạn).

Chi tiết tập tích ΠP_i là : $\Pi P_i = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n \times \ldots$.

Hoặc ở dạng phần tử :

$\Pi P_i = \{$ (1, 1, 1, 1, … , 1, …),
(1, 2, 1, 1, … , 1, …),
(1, 1, 2, 1, … , 1, …),
(1, 1, 1, 2, … , 1, …),
…
(1, 1, 1, 1, … , 2, …),
… $\}$

$Q_i = \{1\}, \forall i \in \mathbb{N}$, $\Pi Q_i = \{(x_i)_i \mid \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in \{1\}\}$, (hữu hạn).

Trong thành phần tích chỉ cần có một tập hợp rỗng thì kết quả của tích là rỗng.

✧. (Hữu hạn – hữu hạn) là tập hữu hạn.

Thí dụ

S = {1, 2, 3, 4, 6}, K = {4, 5, 6, 7, 9, 11}, S – K = {1, 2, 3} (hữu hạn).

✧. (Vô hạn – hữu hạn) là tập vô hạn.

Thí dụ

Thí dụ

S gồm các phần tử 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10 ... , K = {4, 5, 6, 7},

S – K gồm các phần tử 1, 2, 3, 8, 10, 11, 12, ... (vô hạn).

Điều này có thể hiểu là tập hợp vô hạn có mất đi một số hữu hạn phần tử vẫn còn vô hạn.

✧. (Vô hạn – vô hạn) là tập hữu hạn hoặc vô hạn.

✧. Tập hợp 1-1trên với tập hữu hạn thì hữu hạn.

✧. Tập hợp 1-1trên với tập vô hạn thì vô hạn.

Thí dụ

$S = \mathbb{N}$, $K = \{x \mid \forall x \in \mathbb{N}, x > 5\}$, $S - K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (hữu hạn).

$S = \mathbb{N}$, $K = \{2x \mid \forall x \in \mathbb{N}\}$, $S - K = \{2x + 1 \mid \forall x \in \mathbb{N}$ hay $x = 0\}$

$(S - K)$ vô hạn.

✧. Trường hợp đặc biệt.

a. $\bigcup_{\varnothing} R_i = \varnothing$.

b. $\bigcap_{\varnothing} P_i = \varnothing$.

c. $\prod_{\varnothing} P_i = \{\varnothing\}$ (singleton),

Chứng minh

a. mệnh đề $(\exists i)\ (x \in A_i)$ không thỏa vì không có i để $x \in A_i$.

b. mệnh đề $(\forall i)\ (x \in A_i)$ không thỏa vì không có i để $x \in A_i$.

c. $(\forall i)\ ((f : \varnothing \longrightarrow \varnothing) \wedge (f(i) \in A_i))$

$= (f : \varnothing \longrightarrow \varnothing) \wedge (\forall i)\ (f(i) \in A_i)) = (f : \varnothing \longrightarrow \varnothing) = \{\varnothing\}$.

3. Đếm được – không đếm được

Đây là phần cực kỳ đẹp, trong đó có những chứng minh là những kiệt tác với đầy tính sáng tạo. Tập hợp được nói là đếm được theo nghĩa thông thường là có thề *liệt kê* các phần từ của nó. Đó là lấy ra từng phần tử và bắt đầu đếm theo tập hợp số tự nhiên một, hai, ba, bốn, … . Tất cả các phần tử của tập hợp đều được "trưng bày". Khái niệm đếm được là đem các phần tử của I_n hay chính tập $\mathbb{N}$ liên kết với phần tử của tập hợp cần đếm. Như vậy khái niệm đếm được liên quan đến tập hợp số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$.

Định nghĩa – Đếm được.

Tập hợp C đếm được $\longleftrightarrow$ C hữu hạn hoặc C 1-1trên với tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$.

EndĐn

Hiển nhiên $\mathbb{N}$ là tập hợp đếm được.

Thí dụ

Tập hợp $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$ là đếm được vì hữu hạn.

Tập hợp $\Sigma^* = \{x_1x_2 \ldots x_n \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_i \in \Sigma$ với $1 \le i \le n\}$ là vô hạn nhưng đếm được.

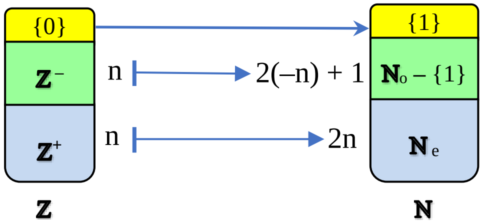
Mệnh đề

Tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ là đếm được.

Chứng minh :

Chia tập hợp $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{N}$ thành 3 phần tách biệt : $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+$ và $\mathbb{N} = \{1\} \cup (\mathbb{N}_o - \{1\}) \cup \mathbb{N}_e$.

Xây dựng ánh xạ 1-1trên như hình vẽ sau.



$0 \longmapsto 1, (-1) \longmapsto 3, (-2) \longmapsto 5, (-3) \longmapsto 7, (-4) \longmapsto 9, \ldots, 1 \longmapsto 2, 2 \longmapsto 4, 3 \longmapsto 6, 4 \longmapsto 8, \ldots$.

Vậy $\mathbb{Z}$ đếm được. ✓

Cách chứng minh khác.

Ánh xạ 1-1trên từ $\mathbb{Z}$ vào $\mathbb{N}$ được xây dựng như sau :

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \ldots & n & -n & & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & 2n & 2n+1 & & \ldots
\end{array}
$$

Vậy $\mathbb{Z}$ đếm được. ✓

Nhận xét

1. Một số quan điểm định nghĩa tính đếm được chỉ dành cho các tập hợp vô hạn, nghĩa là tập hợp rỗng và hữu hạn không được xem là đếm được.
2. Khi tập hợp X đếm được thì các phần tử của X thường được biểu diễn là tập hợp được đánh chỉ số trên tập hợp số nguyên,

   Các phần tử của X sẽ là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots$.

Hệ quả

$\neg$(Tập hợp đếm được) $\longleftrightarrow$ $\neg$(Hữu hạn hoặc 1-1trên với tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$).

Tập hợp không đếm được $\longleftrightarrow$ Vô hạn và không 1-1trên với tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Hệ quả

Tập hợp X 1-1trên với tập đếm được thì X đếm được.

Tập hợp X 1-1trên với tập không đếm được thì X không đếm được.

Tiên đề Chọn

Mọi tập hợp $S \neq \varnothing$ đều có ánh xạ $\gamma : 2^S - \{\varnothing\} \longrightarrow S$ sao cho $\gamma(T) \in T$, với mọi $T \neq \varnothing$ và $T \subseteq S$.

Anh xạ γ được gọi là ánh xạ chọn.

Định lý

Mọi tập hợp vô hạn đều có một tập con vô hạn đếm được.

Chứng minh

Lấy X vô hạn, do tiên đề chọn, X $\neq \varnothing$ nên có ánh xạ chọn :

$$\gamma_1 : 2^X \longrightarrow X.$$

Đặt $x_1 = \gamma_1(X)$.

$X - \{x_1\} \neq \varnothing$ nên có ánh xạ chọn :

$$\gamma_2 : 2^{X-\{x_1\}} \longrightarrow X - \{x_1\}.$$

Đặt $x_2 = \gamma_1(X - \{x_1\})$.

Quá trình này không dừng vì X vô hạn.

Do đó chuỗi $(x_i)_{i \in N}$ là đếm được. ✓

Thí dụ

Tập hợp $\mathbb{R}$ có tập con $\mathbb{N}$ là vô hạn đếm được.

Định lý

Mọi tập con của tập đếm được thì đếm được.

Chứng minh

Lấy D = $\{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots\}$, S là tập con của D.

Nếu S = $\varnothing$ thì S hữu hạn, do đó S đếm được.

Nếu S $\neq \varnothing$, có số nguyên nhỏ nhất n_1 sao cho $d_{n_1} \in S$.

Tiếp tục nếu $(S - \{d_{n_1}\}) \neq \varnothing, \ldots, S - \{d_{n_1}, d_{n_2}, \ldots, d_{n_k}\}$.

Nếu quá trình này dừng tại n_k nghĩa là $(S - \{d_{n_1}, d_{n_2}, \ldots, d_{n_k}\}) = \varnothing$.

Do đó S hữu hạn.

Nếu quá trình này không dừng thì S vô hạn đếm được.

(Phải chứng minh mọi phần tử của S đều được chọn. Nếu không, chỉ tập con của S là đếm được, còn S thì chưa biết).

Mỗi phần tử x của S là phần tử của D do đó có số nguyên k so cho $x = d_k$.

Nên mọi phần tử của S đều được chọn. ✓

Viết lại mệnh đề trên

$(\forall X, Y)[(Y \subseteq X) \wedge (X \text{ đếm được} \longrightarrow Y \text{ đếm được})]$.

Định lý

Tập hợp có tập con không đếm được thì cũng không đếm được.

Chứng minh

$S \subseteq X$ và (X đếm được $\longrightarrow$ S đếm được) (đã chứng minh ở trên).

$S \subseteq X$ và (S không đếm được $\longrightarrow$ X không đếm được). ✓

Viết lại mệnh đề trên

$(\forall X, Y)[(Y \subseteq X) \wedge (Y \text{ không đếm được} \longrightarrow X \text{ không đếm được})]$.

4. Toán tử giữa các tập hợp đếm được – không đếm được

Mệnh đề

1. Hội hai tập hợp đếm được cũng đếm được

Chứng minh

Lấy S và K là hai tập hợp đếm được.

Nếu $S \cap K = \varnothing$, S đếm được nên S 1-1trên với $\mathbb{N}_e$.

K đếm được nên K 1-1trên với $\mathbb{N}_o$.

Do đó $\mathbb{N}$ 1-1trên với $S \cup K$.

Nếu $S \cap K \neq \varnothing$,

$S \cup K = (S - K) \cup (K - S) \cup (S \cap K)$.

$(S - K)$, $(K - S)$ và $(S \cap K)$ là các tập con của các tập hợp đếm được nên cũng đếm được.

Hội các tập hợp đếm được tách biệt cũng đếm được. ✓

Mệnh đề

2. Giao hai tập hợp đếm được cũng đếm được.

(đđ $\cap$ đđ = đđ).

3. Hiệu hai tập hợp đếm được cũng đếm được.

   (đđ – đđ = đđ).

4. Hiệu của tập hợp đếm được và không đếm được là đếm được.

   (đđ – kđđ = đđ).

5. Hiệu của tập hợp không đếm được và đếm được là không đếm được.

   (kđđ – đđ = kđđ).

6. Hiệu của tập hợp không đếm được và không đếm được là đếm được hoặc không đếm được.

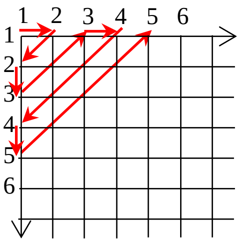
Mệnh đề

7. Tích hai tập hợp đếm được cũng đếm được.

Chứng minh

Lấy S, K là hai tập hợp đếm được. Tập hợp tích $(S \times K)$ 1-1trên với $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 1-1trên với $\mathbb{N}$ bởi ánh xạ được xác định bằng bảng sau :



$1 \longmapsto (1, 1)$, $2 \longmapsto (1, 2)$, $3 \longmapsto (2, 1)$, $4 \longmapsto (3, 1)$,
$5 \longmapsto (2, 2)$, $6 \longmapsto (1, 3)$, $7 \longmapsto (1, 4)$, $8 \longmapsto (2, 3)$,
$9 \longmapsto (3, 2)$, $10 \longmapsto (4, 1)$, $11 \longmapsto (5, 1)$, $12 \longmapsto (4, 2)$,
$13 \longmapsto (3, 3)$, $14 \longmapsto (2, 4)$, $15 \longmapsto (1, 5)$, …

Vậy $(S \times K)$ 1-1trên với $\mathbb{N}$. ✓

Mệnh đề

8. Hội mở rộng các tập đếm được trên tập chỉ số đếm được cũng đếm được.

   Cho họ $(A_i)_{\mathbb{N}}$, A_i là các tập đếm được và $A_i \cap A_j = \varnothing$ với mọi $i \neq j$ thì $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ cũng đếm được.

Chứng minh

$\forall x \in \cup A_i, \exists\ n \in \mathbb{N} : x \in A_n$.

Vì A_n đếm được nên có ánh xạ 1-1trên $f_n : A_n \longrightarrow \mathbb{N}$.

Đặt $\varphi : x \longmapsto (n, f_n(x))$, kiểm tra dễ dàng φ là 1-1trên.

Do đó $\cup A_i$ 1-1trên với $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nhưng $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ đếm được.

Vậy $\cup A_i$ cũng đếm được. ✓

Mệnh đề

9. Hội mở rộng các tập hợp đếm được trên tập hợp chỉ số không đếm được thì đếm được hoặc không đếm được.

Thí dụ

$\mathbb{R}$ là tập hợp số thực, $\mathbb{N}$ là số tự nhiên.

$A_i = \{i\}$, $B_i = \{1\}$, $C_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < i\}$, $\forall i \in \mathbb{R}$ thì

$\cup A_i = \mathbb{R}$ là tập hợp vô hạn không đếm được.

$\cup B_i = \{1\}$ là tập hợp hữu hạn nên đếm được.

$\cup C_i = \mathbb{N}$ là tập hợp vô hạn đếm được.

10. Hội mở rộng các tập hợp có ít nhất một tập hợp không đếm được thì không đếm được.
11. Giao mở rộng các tập hợp đếm được trên tập hợp chỉ số không đếm được thì đếm được.
12. Tích mở rộng các tập hợp đếm được trên tập hợp chỉ số hữu hạn là đếm được.

Thí dụ

$\mathbb{N}$ là tập hợp số nguyên tự nhiên, $A_i = \mathbb{N}$, $\forall i \in I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, thì

$\prod A_i$ là tập hợp vô hạn đếm được.

13. Tích mở rộng các tập hợp đếm được trên tập hợp chỉ số đếm được là đếm được hoặc không đếm được.

Thí dụ

$\mathbb{N}$ là tập hợp số nguyên tự nhiên, $A_i = \{1, 2\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, thì

$$\prod A_i = \{f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow \cup A_i = \{1, 2\}\} = 2^{\mathbb{N}}$$

là tập hợp vô hạn không đếm được.

$B_i = \mathbb{N}$, $\forall i \in I_n$, thì

$$\prod B_i = \{g \mid g : I_n \longrightarrow \cup B_i = \mathbb{N}\}$$ là tập hợp vô hạn đếm được.

14. Tích mở rộng các tập hợp đếm được trên tập hợp chỉ số không đếm được là đếm được hoặc không đếm được.

Thí dụ

$\mathbb{R}$ là tập hợp số thực, $A_i = \{1,2\}$, $\forall i \in \mathbb{R}$, thì

$$\prod A_i = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \cup A_i = \{1,2\}\} = 2^{\mathbb{R}}$$

là tập hợp vô hạn không đếm được.

Lấy $B_i = \{1\}$, $\forall i \in \mathbb{R}$, thì

$$\prod B_i = \{g \mid g : \mathbb{R} \longrightarrow \cup B_i = \{1\}\}$$ là tập hợp đếm được.

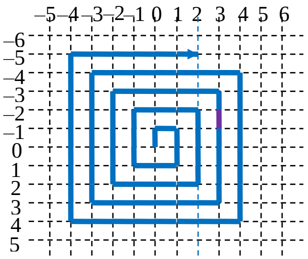
Bảng tổng kết

I	$\exists A_i$	$\forall A_i$	$\cup A_i$	$\cap A_i$	$\prod A_i$	Chú thích
đđ		đđ	đđ	đđ	đđ $\vee$ kđđ	đđ = đếm được kđđ = không đếm được hh = hữu hạn đđvh = đếm được vô hạn I là tập chỉ số A_i là các tập hợp
đđ	đđ			đđ		
đđ	kđđ		kđđ		kđđ	
đđ		kđđ	kđđ	đđ $\vee$ kđđ	kđđ	
hh		đđ			đđ	
đđvh		đđ			đđ $\vee$ kđđ	
kđđ	kđđ		kđđ		kđđ	
kđđ	đđ			đđ		
kđđ		kđđ		đđ $\vee$ kđđ		
kđđ		đđ	đđ $\vee$ kđđ		đđ $\vee$ kđđ	

Nhận xét

Do nhận xét 4, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ là đếm được. Tuy nhiên có thể chứng minh trực tiếp như sau :

Chứng minh



$1 \mapsto (0, 0)$, $2 \mapsto (-1, 0)$, $3 \mapsto (-1, 1)$,

$4 \mapsto (0, 1)$, $5 \mapsto (1, 1)$, $6 \mapsto (1, 0)$,

$7 \mapsto (1,-1)$, $8 \mapsto (0,-1)$, $9 \mapsto (-1,-1)$,

$10 \mapsto (-2,-1)$, $11 \mapsto (-2, 0)$,

$12 \mapsto (-2, 1)$, $13 \mapsto (-2, 2)$, …

Ánh xạ 1-1trên giữa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ và $\mathbb{N}$ được xác định nhờ hình vẽ trên.

Định lý

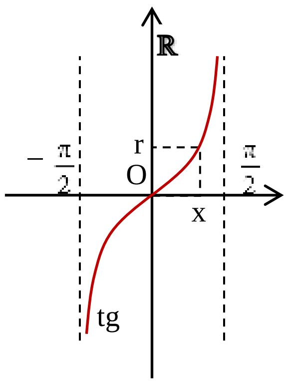
Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là vô hạn đếm được.

Chứng minh

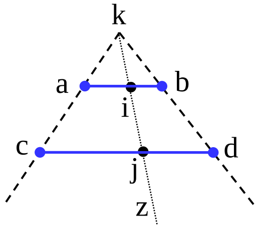
$\mathbb{Q}$ được xây dựng từ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nên vô hạn đếm được. ✓

Nhận xét

1. Tập hợp số thực $\mathbb{R}$ 1-1trên với khoảng mở $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qua hàm lượng giác tang.



2. Có ánh xạ 1-1trên giữa hai khoảng I = [a,b] và J = [c,d], với các số thực a $\leq$ b, c $\leq$ d.



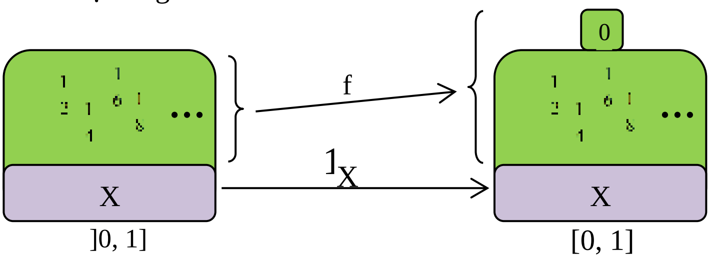
Kẻ đường thẳng nối hai đầu a, c và hai đầu b, d, hai đường này cắt nhau tại k. Với mỗi phần tử i của ab kẻ đường ki cắt cd tại j. Ánh xạ i $\longmapsto$ j là 1-1trên giữa I và J.

3. Có ánh xạ 1-1trên giữa hai khoảng I =]0, 1] và J = [0, 1].

Đặt K = { $\frac{1}{n}$ | n $\in \mathbb{N}_e$}, do đó I = (I – K) $\cup$ K và J = (I – K) $\cup$ K $\cup$ {0}.

$f : K \longrightarrow K \cup \{0\},\ \frac{1}{2} \longmapsto 0,\ \frac{1}{4} \longmapsto \frac{1}{2},\ \frac{1}{6} \longmapsto \frac{1}{4},\ \frac{1}{8} \longmapsto \frac{1}{6}$.

1_X là ánh xạ đồng nhất trên X.



4. Có thể sử dụng tính chất của số hữu tỉ là "có vô hạn số hữu tỉ trong một khoảng của số thực". Do đó trong nhận xét 3 có thể thay tập hợp K bằng tập hợp $\mathbb{Q}$.

Định lý

Tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là vô hạn không đếm được.

Chứng minh

Phương pháp 1 (còn gọi là *phương pháp đường chéo*).

Mọi số thực đều có biểu diễn thập phân vô hạn [(*)].

Để chứng minh $\mathbb{R}$ vô hạn không đếm được, chỉ cần chứng minh $I =]0,1]$ [(**)] là vô hạn không đếm được.

Chứng minh bằng phản chứng.

I vô hạn là hiển nhiên. Chỉ còn chứng minh I không đếm được.

Giả sử I là đếm được, nghĩa là $I = [0,1] = (x_i)_i,\ i \in \mathbb{N}$.

Do đó

$x_1 =$	0.	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…		x_{1n}
$x_2 =$	0.	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…		x_{2n}
$x_3 =$	0.	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…		x_{3n}
…							
$x_n =$	0.	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…		x_{nn}
…							

Chọn $y_i \in \mathbb{N}$ sao cho khác với từng phần tử tương ứng của đường chéo :

$$y_1 \neq x_{11},\ y_2 \neq x_{22},\ y_3 \neq x_{33},\ \dots,\ y_n \neq x_{nn} \dots$$

Lấy $y = 0.\,y_1\,y_2\,y_3 \dots y_n \dots$

Do đó $y \notin [0,1]$ vì $y \neq x_i,\ \forall i$, mâu thuẫn. Vậy I đếm được. ✓

Nhận xét

1. [(*)] Định lý sau trong lý thuyết số thập phân :

Mọi số thực dương r có duy nhất một mở rộng thành số thập phân vô hạn.

$$r = m.c_1c_2c_3 \dots c_n \dots$$

với m là số nguyên không âm và $c_i \in \{0, 1, \dots, 9\},\ \forall i$.

Điều kiện biểu diễn mở rộng là sau mỗi c_i đều có $c_j \neq 0$.

Do đó hai số thập phân vô hạn biểu diễn hai số thực khác nhau.

Một số thực có biểu diễn *thập phân chấm dứt* thì bằng với số thập phân vô hạn.

$$r = m.c_1c_2c_3 \ldots c_n.$$

do đó $\quad r = m.c_1c_2c_3 \ldots (c_n - 1)999 \ldots$

2. (**) Do số 0 không có mở rộng vô hạn nên trong định lý chứng minh $\mathbb{R}$ là không đếm được (cách 1) lấy khoảng]0,1] không chứa 0. Số 1 có biểu diễn thập phân vô hạn là 0.999...
3. Phương pháp đường chéo là công cụ quan trọng trong việc chứng minh có liên quan đến các tập hợp vô hạn.

   Phương pháp 2.

   Giả sử $I = [0,1]$ là đếm được, nghĩa là $I = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

   Chia khoảng I làm 3 đoạn bằng nhau : $I = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, chọn một trong 3 khoảng gọi là I_1 sao cho $x_1 \notin I_1$.

   Chia khoảng I_1 làm 3 đoạn bằng nhau, chọn một trong 3 khoảng gọi là I_2 sao cho $x_2 \notin I_2$.

   ...

   Chia khoảng I_{n-1} làm 3 đoạn bằng nhau, chọn một trong 3 khoảng gọi là I_n sao cho $x_n \notin I_n$.

   ...

   Do đó $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ và $x_i \notin I_i, \forall i$.

   Do tính chất của số thực $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i = \{\alpha\}$.

   Và $\alpha \in [0,1]$, có $t \in \mathbb{N}$ sao cho $\alpha = x_t$, do đó $\alpha \notin I_t$, và $\alpha \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$, mâu thuẫn. ✓

Thí dụ

Tập hợp $2^{\mathbb{N}}$ là không đếm được.

Định lý

Tập hợp các số thực đại số là đếm được.

Chứng minh

Số đại số là nghiệm của phương trình đại số.

Phương trình đại số có dạng $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, với $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Gọi Q là tập hợp các phương trình đại số.

Đặt $P_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \mid \text{với } n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}\}$ là tập hợp các phương trình đại số có bậc $\leq$ n.

Biểu diễn phương rình đại số $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ được biểu diễn dưới dạng vetor $(a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0)$.

Có ánh xạ 1-1trên giữa P_n và $\mathbb{Z}^{n+1}$.

$\mathbb{Z}^{n+1}$ đếm được nên P_n đếm được.

$\Rightarrow Q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ đếm được.

Gọi R_q là tập nghiệm của phương trình đại số q và R là tập hợp các số đại số.

$\Rightarrow R = \bigcup_{q\in Q} R_q$ đếm được do Q đếm được và R_q hữu hạn.

Vậy tập các số đại số là đếm được.

Chứng minh (cách khác)

Gọi P_n là tập hợp các đa thức bậc n với các hệ số nguyên không âm. T là tập hợp các số nguyên tố trong $\mathbb{N}$. Tập hợp T là vô hạn.

Cho ánh xạ 1-1 $p : \mathbb{N} \longrightarrow T$ như sau : p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 5, p(4) = 7, … . Khi đó, có ánh xạ $f : P_n \longrightarrow \mathbb{N}$ được xác định bởi :

$$f(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = p(1)^{a_0} p(2)^{a_1} p(3)^{a_2} \ldots p(n+1)^{a_n}, \text{ hay}$$

$$f(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = 2^{a_0} 3^{a_1} 5^{a_2} \ \ldots\ p(n+1)^{a_n}$$

Vì phân tích thành thừa số là duy nhất, ánh xạ này là 1-1, P_n tương đương với $\mathbb{N}^{n+1}$ đếm được.

Do đó P_n đếm được.

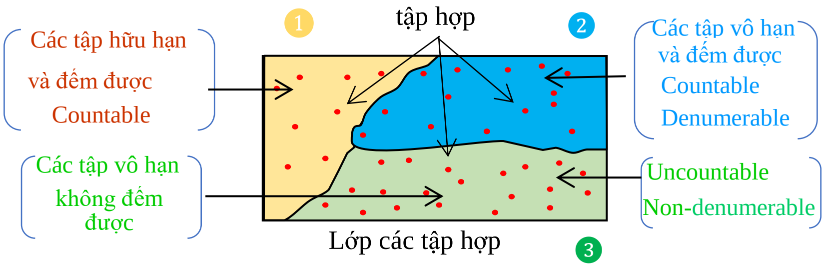
Cuối cùng, tập hợp các đa thức P có thể được biểu diễn dưới dạng :

$$P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

hội của các tập hợp đếm được nên đếm được.

Đa thức bậc n có tối đa n nghiệm vì vậy tập hợp các nghiệm của các đa thức là đếm được.

Hình minh họa Lớp các tập hợp với tên gọi



Chú thích

Mỗi miền có thể được gọi bằng nhiều tên khác nhau. Miền 1 có tên countable để chỉ tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được, không phân biệt giữa hữu hạn và vô hạn đếm được. Miền 2 có tên denumerable để chỉ tập vô hạn đếm được, từ này không "thèm" quan tâm tới tập hữu hạn. Miền 3 có tên uncountable hoặc non-denumerable để chỉ tập không đếm được.

Các tập hợp số

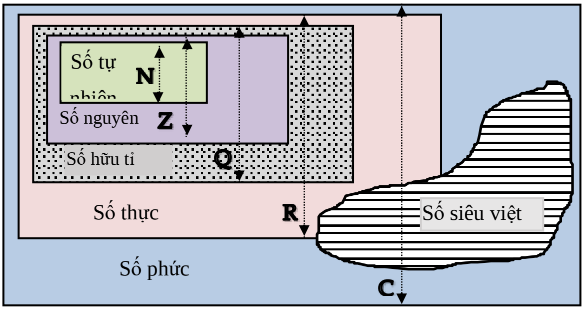
Số nguyên tự nhiên = ℕ, Số nguyên = ℤ. Số hữu tỉ = ℚ.

Số thực = ℝ. Số phức= ℂ, Số vô tỉ thực = (ℝ – ℚ),

Số vô tỉ ảo = (ℂ – ℚ), Số siêu việt.

Số đại số thực = (ℝ – số siêu việt), Số đại số ảo = (ℂ – số siêu việt).

Minh họa các tập hợp số



Tương quan giữa các tập hợp số

Chú thích

Diện tích trong hình minh họa này không tương ứng với "độ lớn" thật sự các tập hợp, nó chỉ có tính minh họa. Thí dụ số siêu việt có độ "lớn" hơn các loại số khác rất nhiều.

Chương IV LƯỢNG SỐ – THỨ SỐ

Kronecker nói rằng “Các con số được Thượng đế tạo dựng, mọi việc còn lại thuộc về con người” (The whole number were made by the good Lord; everything else is the work of man).

Hayden và Finan cho rằng số tự nhiên là *ý tưởng*, nó chỉ hiện hữu trong tâm trí. Frege phê phán quan điểm này. Nếu bản chất là ý tưởng thì con số sẽ trở thành vấn đề riêng tư, chủ quan, có thể thay đổi từ người này đến người khác. Vì ý tưởng có ý nghĩa khác nhau đối với mỗi người. Frege cho rằng con số là khách quan, nó có ý nghĩa chung đối với mọi người. Một quan điểm khác cho rằng con số là sự trừu tượng hoá những đối tượng thực nghiệm.

Leibniz quan niệm số 1 là số của đấng sáng tạo và số 0 là số của hư vô. Từ hư vô NGƯỜI tạo ra số 0. Số 1 và 0 phát sinh ra toàn bộ các số. ...

Vấn đề bản chất là vô cùng. Dù không hiểu hết bản chất của con số người ta vẫn đã và đang dùng chúng. Đó là điều quan trọng.

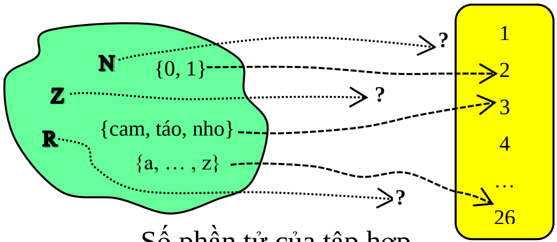
Khái niệm *lượng số* là bước mở rộng khái niệm “số lượng phần tử “ của tập hợp, khi bàn về các tập hợp vô hạn.

Nói rằng tập hợp X có 3 phần tử, tập hợp Y có 6 phần tử, tập hợp W có 100 phần tử … thì X, Y, W chỉ là những tập hữu hạn. Nhưng với câu hỏi “số phần tử của tập hợp là bao nhiêu” được áp dụng vào các tập hợp $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ thì không có câu trả lời cho vấn đề này. Do vậy khái niệm ‘số phần tử của tập hợp” cần được mở rộng hay định nghĩa lại là cần thiết. Nhưng trước hết cần tìm hiểu xem khái niệm số phần tử của tập hợp trước đây được xác định như thế nào về mặt toán học.

Ví dụ, A = {1, 2, 5}, B = {tamgiác, tứgiác, ngũgiác}, I_3 = {1, 2, 3}, cả ba tập hợp này đều lấy con số 3 để chỉ số phần tử của chúng. Chúng có cùng số phần tử và chọn số 3 của tập hợp số tự nhiên để làm đại diện cho số phần tử.

Khi nói tập hợp A, B, I_3 có 3 phần tử nghĩa là liên kết chúng với số 3 của **N**. Tuy nhiên đối với các tập hợp như **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**, … thì không có con số nào của **N** để liên kết.

Từ đây có thể nhận xét chính khái niệm trung gian như số 3 của **N** làm cản trở việc xác định số phần tử của những tập hợp *không hữu hạn*. Như vậy, tại sao không chọn một phần tử trong *lớp* các tập hợp *có cùng số phần tử* với nhau làm "con số" đại diện cho số phần tử của chúng. Khi đó "con số" này không còn phụ thuộc vào tập hợp **N**. Điều này chính là điểm trọng yếu trong việc xây dựng khái niệm lượng số.



Số phần tử của tập hợp

Tóm lại khái niệm "số phần tử" theo quan điểm thông thường :

Bản chất : là một số nguyên.

Mục đích : để đo lường độ lớn của tập hợp.

Phương thức phát sinh : tạo một ánh xạ 1-1 vào **N**.

Hạn chế : cách xác định số phần tử chỉ áp dụng được cho tập hữu hạn.

Vấn đề thứ hai là khái niệm so sánh số phần tử của hai tập hợp.

Việc so sánh hai số nguyên tự nhiên (chỉ số phần tử của hai tập hợp) nhờ vào khái niệm thứ tự trên tập hợp $\mathbb{N}$.

Để mở rộng khái niệm "số phần tử của tập hợp" cho tất cả tập hợp, có thể thực hiện như sau :

* Phân lớp các tập hợp bằng quan hệ 1-1trên và chọn một tập hợp trong lớp làm đại diện.
* So sánh hai "số phần tử" của hai tập hợp bằng ánh xạ 1-1.

Sau đây là quá trình mô phỏng lại toàn bộ tính chất của tập hợp số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$. Đây là tập hợp vô hạn, phát tiển chỉ một hướng, hướng còn lại bị chặn bởi phần tử đầu tiên là 1 (hoặc 0, tùy chọn). Tập hợp được xắp thứ tự toàn phần, mỗi phần tử có duy nhất phần tử liền kề trước và liền kề sau. Một tính chất quan trọng là mọi tập hợp con của $\mathbb{N}$ đều có phần tử cực tiểu.

1. Lượng số

Lượng số là mở rộng của khái niệm "số phần tử " của tập hợp. Mở rộng bằng cách phân "thế giới" tập hợp thành nhiều lớp tách biệt bởi ánh xạ 1-1trên. Khi đó mỗi lớp lấy một tập hợp làm đại diện hay đặt một tên mới cho lớp đó và gọi những đại diện đó là lượng số của mỗi tập hợp trong lớp đó. Khi đó lượng số của tập hữu hạn chính là "số phần tử".

Các phép tính cộng, trừ, nhân, lũy thừa trên các con số cũng được "nâng cấp" để có thể tính toán được với lượng số vô hạn. Quan hệ ≤ được định nghĩa bởi ánh xạ 1-1 với mục đích so sánh các lượng số. Quan hệ ≤ trở thành quan hệ thứ tự vì tính phản đối xứng được chứng minh bởi định lý Berstein-Schroeder. Việc so sánh các lượng số dẫn đến kết quả là định lý Cantor và giả thuyết liên tục.

Định nghĩa – Lượng số.

Lượng số của tập hợp S là *tất cả* tập hợp có ánh xạ 1-1trên với S.

Ký hiệu lượng số của tập hợp S là Card(S).

EndĐn

Về thuật ngữ :

Lượng số là thuật ngữ tương ứng với từ *cardinal number* hoặc *power of set*. Một số tài liệu dùng từ "*chính số*", "*bản số*", "*lực lượng*". Ở đây dùng từ *lượng số* để chỉ cho hai từ tiếng Anh trên, với dụng ý là "con số" chỉ số lượng phần tử của tập hợp. Tương tự với thuật ngữ *ordinal number*, tài liệu này sẽ dùng từ *thứ số* thay vì "*số thứ tự*".

Cần chú ý phân biệt từ *power of set* và từ *power set*, power set là *tập các tập con* của một tập hợp.

Thí dụ

1. Các tập hợp sau 1-1trên với nhau : A = {a, b, c, d}, B = {táo, cam, quít, nhãn}, C = {xanh, đỏ, vàng, tím}, D = {14, 23, 25, 30}, … Chọn một khái niệm đại diện cho lớp này được gọi là lượng số. Trong trường hợp các tập hợp A, B, C, D … lượng số được chọn là *ký hiệu* 4 (của I_4), tuy nhiên người khác có thể chọn đại điện cho lớp này là card(A) hay card(B), … .

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = \text{Card}(C) = \text{Card}(D) = \ldots = 4.$$

Chú ý

Ký hiệu 4 (trong thí dụ 1) là ký hiệu đại diện cho lớp các tập hợp A, B, C, D, … và của bất cứ tập hợp nào 1-1trên với A. "Số 4" ở đây không phải là số 4 của tập số nguyên tự nhiên, nó chỉ là ký hiệu trùng tên với số 4 của $\mathbb{N}$. Sự trùng tên này là cố ý.

2. Tập hợp $\mathbb{N}$ 1-1trên với $\mathbb{N}_o$, do đó $\mathbb{N}$ và $\mathbb{N}_o$ có cùng lượng số.

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}_o).$$

3. Đã có $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}_e \longleftrightarrow \mathbb{N}_o \longleftrightarrow \mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$ ...

Ký hiệu $\aleph_0$ được chọn làm phần tử đại diện cho lớp này.

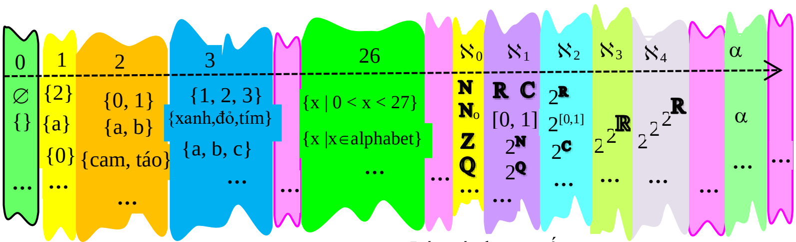
Card($\mathbb{N}$) = Card($\mathbb{N}_e$) = Card($\mathbb{N}_o$). = Card($\mathbb{Z}$) = Card($\mathbb{Q}$) = … = $\aleph_0$.

4. Tập hợp S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} và K = {m, n, p, q, r, s} có cùng lượng số, vì có ánh xạ 1-1trên giữa chúng. Card(S) = Card(K) = 6.

Nhận xét

Quan hệ "có ánh xạ 1-1trên" là quan hệ tương đương, nó chia "không gian" tập hợp hành từng lớp. Có thể có những đối tượng không có ánh xạ 1-1trên giữa chúng với nhau, hoặc giữa chúng với tập hợp. Những đối tượng này không được xem là tập hợp. Vì vậy không thuộc phạm vi khảo sát của lý thuyết tập hợp. Một vấn đề tiếp theo là trật tự hóa các lớp tương đương này, nghĩa là định trên chúng một thứ tự. Lúc này ánh xạ cũng phải bảo đảm trật tự vẫn được duy trì từ miền trị đến miền ảnh.

Minh họa.



Lớp các lượng số

Lớp tập hợp 0 phần tử : {}, ∅, [], … .

Lớp tập hợp 1 phần tử : {2}, {a}, {0}, … .

Lớp tập hợp 2 phần tử : {0, 1}, {a, b}, {cam, táo}, … .

Lớp tập hợp 3 phần tử : {1, 2, 3}, {xanh, đỏ, tím}, {a, b, c}, … .

…

Lớp tập hợp 26 phần tử : {x| 0 < x < 27}, {x| x ∈ alphabet}, … .

…

Lớp tập hợp $\aleph_0$ phần tử : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_o$, $\mathbb{N}_e$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, … .

Lớp tập hợp $\aleph_1$ phần tử : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, [0, 1], $2^{\mathbf{N}}$, $2^{\mathbf{Z}}$, $2^{\mathbf{Q}}$, … .

Lớp tập hợp $\aleph_2$ phần tử : $2^{\mathbf{R}}$, $2^{[0,\,1]}$, $2^{\mathbf{C}}$, … .

…

Một số lớp lượng số "đặc biệt" :

$\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$, $\aleph_1 = \text{card}(\mathbb{R})$, $\aleph_2 = \text{card}(2^{\mathbf{R}})$, $\aleph_3 = \text{card}(2^{2^{\mathbf{R}}})$, … .

Nhận xét

1. Lượng số là lớp tương đương của quan hệ "có ánh xạ 1-1trên giữa hai tập hợp". Do đó khi nói lượng số của tập hợp S là lớp tương đương chứa tập hợp S, hoặc có thể là một tập hợp cụ thể nào đó trong lớp tương đương.
2. Lượng số của tập hợp hữu hạn được gọi là lượng số hữu hạn, của tập hợp vô hạn được gọi là lượng số vô hạn hay siêu hạn. Việc chọn các ký hiệu 0, 1, 2, 3, … cho các lượng số hữu hạn trùng với ký hiệu biểu diễn của tập hợp số nguyên là cố ý. Do đó khái niệm lượng số chính là mở rộng của khái niệm số phần tử đối với tập hữu hạn.
3. Frege và Russell là hai nhà toán học đồng thời đưa ra định nghĩa của khái niệm lượng số.

2. Toán tử giữa các lượng sô

Cho u, v là hai lượng số và lấy hai tập hợp S, T sao cho :

$\text{Card}(T) = u$, $\text{Card}(S) = v$ và $S \cap T = \varnothing$.

1. Cộng (+) : $u + v = \text{Card}(S \cup T)$,
2. Nhân ("." hoặc "×") : $u.v = \text{Card}(S \times T)$,
3. Lũy thừa : $u^v = \text{Card}(T^S)$.

Thí dụ

1. P = {1, 2, 3} và K = {a, b} do đó card(P) = 3, card(K) = 2.

$\text{card}(P) + \text{card}(K) = 3 + 2 = \text{card}(P \cup K) = 5$,

$\text{card}(P) \times \text{card}(K) = 3 \times 2 = \text{card}(P \times K) = 6$,

$card(P)^{card(K)} = 3^2 = Card(P^K) = 9$.

2. $P = \mathbb{N}$ và $K = \mathbb{Z} \times \{a\}$, do đó $card(P) = \aleph_0$, $card(K) = \aleph_0$.

   $card(P) + card(K) = \aleph_0 + \aleph_0 = card(P \cup K) = \aleph_0$.

   $card(P) . card(K) = \aleph_0 \times \aleph_0 = card(P \times K) = \aleph_0$.

Định nghĩa – Quan hệ $\leq$ giữa các lượng số.

Card(S) $\leq$ Card(T) nếu có ánh xạ 1-1 từ S vào T, với S, T là hai tập hợp.

EndĐn

Nhận xét

1. Dễ dàng kiểm tra được tính phản hồi và tính truyền của quan hệ "$\leq$". Tính phản đối xứng được chứng minh nhờ định lý Berstein-Schroeder dưới đây. Do đó quan hệ "$\leq$" là quan hệ thứ tự trên lượng số.
2. Cách viết "(Card(S), Card(T)) $\in \leq$" tương đương với cách viết "Card(S) $\leq$ Card(T)". Nhưng cách viết này dễ gây khó chịu, tuy nhiên cũng nên làm quen với nó để có nhiều góc nhìn hơn.

Thí dụ

1. Cho $P = \{1, 2, 3\}$ và $K = \{a, b\}$ do đó card(P) = 3, card(K) = 2.

   (card(K), card(P)) $\in \leq$ vì có ánh xạ 1-1 từ K vào P.

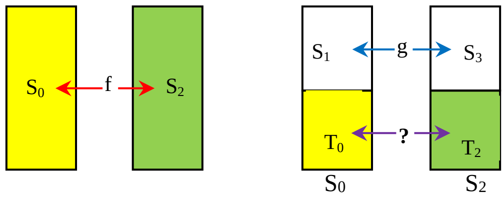
2. Cho $S = \mathbb{N}$ và $T = \mathbb{R}$, (card(S), card(T)) $\in \leq$, vì có ánh xạ 1-1 từ S vào T.

Bổ đề

Cho sự tương quan giữa các tập hợp như sau $S_1 \subseteq S_0$ và $S_3 \subseteq S_2$ và f là ánh xạ 1-1trên giữa S_0 và S_2 và g là ánh xạ 1-1trên giữa S_1 và S_3.

Chứng minh có ánh xạ 1-1trên giữa $T_0 = (S_0 - S_1)$ và $T_2 = (S_2 - S_3)$.

Chứng minh

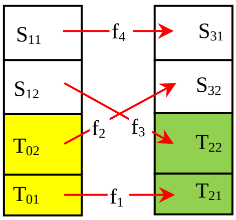


Một số phần tử của S_1 qua f đi vào S_3, phần còn lại của S_1 đi vào T_2.

Tương tự, một số phần tử của T_0 qua ánh xạ f đi vào T_2, phần còn lại của T_0 đi vào S_3.

Có thể chia nhỏ ánh xạ f thành các f_i và các f_i này cũng là 1-1trên giữa các phần tương ứng.

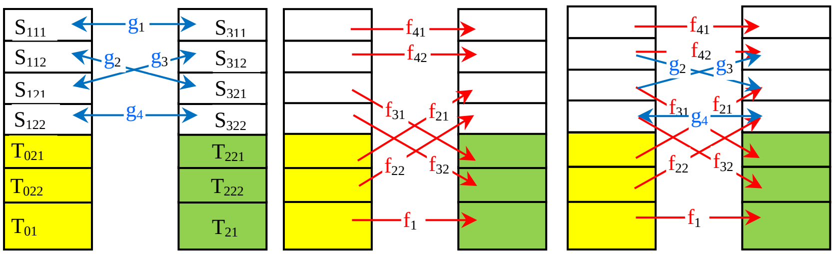
$f_1(T_{01}) = T_{21}$, $f_2(T_{02}) = S_{32}$, $f_3(S_{12}) = T_{22}$, $f_4(S_{11}) = S_{31}$.



Tương tự ánh xạ g cũng được chia nhỏ thành các phần tương ứng.

$g_1(S_{111}) = S_{311}$, $g_2(S_{112}) = S_{312}$, $g_3(S_{121}) = S_{312}$, $g_4(S_{122}) = S_{322}$.

Sau đó tách các ánh xạ f_i thành các ánh xạ con f_{ij} tương ứng.

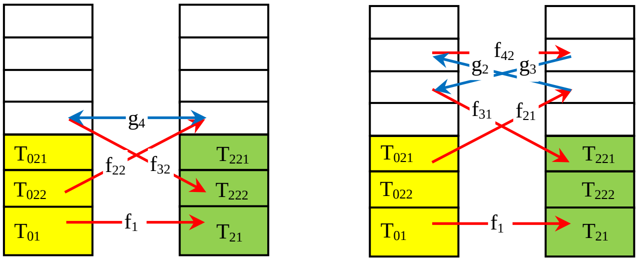


T_0 được tách thành các tập con T_{021}, T_{022}, T_{01} tách biệt. Tương tự, T_2 cũng được tách thành các tập con T_{221}, T_{222}, T_{21} tách biệt.

T_{01} 1-1 trên với T_{21} qua ánh xạ f_1.

T_{022} 1-1 trên với T_{222} qua hợp nối $(f_{32})\circ(g_4)\circ(f_{22})$.

T_{021} 1-1 trên với T_{221} qua hợp nối $(f_{31})\circ(g_3)\circ(f_{42})\circ(g_2)\circ(f_{21})$.



3. Định lý Berstein-Schroeder

Định lý Berstein-Schroeder sau đây có nhiều cách chứng minh "độc đáo", gây thích thú cho người đọc. Mỗi chứng minh có sự sáng tạo bất ngờ và có những nét đẹp riêng. Tất cả góp phần nên tính thẩm mỹ của toán học.

Định lý

Nếu $Card(S) \le Card(T)$ và $Card(T) \le Card(S)$ thì $Card(S) = Card(T)$, với S, T là tập hợp.

Diễn đạt bằng ngôn ngữ thông thường :

Nếu lượng số của tập hợp S nhỏ hơn hay bằng lượng số của tập hợp T và lượng số của tập hợp T nhỏ hơn hay bằng lượng số của tập hợp S thì lượng số của S và T bằng nhau.

Chứng minh

Lấy hai ánh xạ 1-1 là $\varphi : S \longrightarrow T$ và $\lambda : T \longrightarrow S$.

Đặt

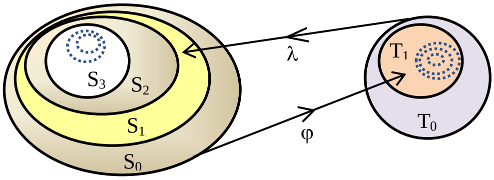
$S_0 = S$, $T_0 = T$,

$S_1 = \lambda(T_0)$, $T_1 = \varphi(S_0)$

$S_2 = \lambda(T_1)$, $T_2 = \varphi(S_1)$

$S_3 = \lambda(T_2)$, $T_3 = \varphi(S_2)$

...



Bằng truy chứng, có kết quả sau :

$S_{i+2} = \lambda\varphi(S_i)$, với i = 0, 1, …

$T_{i+2} = \varphi\lambda(T_i)$. với i = 0, 1, …

Do đó

$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq$ ....

Xây dựng ánh xạ 1-1trên giữa S_0 và S_1.

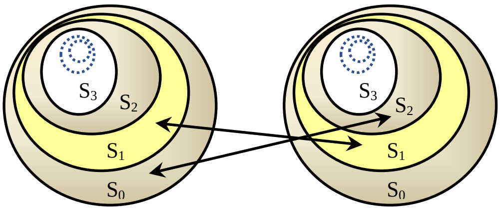
Từ định nghĩa có :

$S_2 = \lambda\varphi(S_0)$, do đó $S_0 \xleftrightarrow{\lambda\varphi} S_2$,

$S_3 = \lambda\varphi(S_1)$, do đó $S_1 \xleftrightarrow{\lambda\varphi} S_3$,

trừ 2 vế và theo bổ đề trên :

$(S_0 - S_1) \longleftrightarrow (S_2 - S_3)$



Tương tự có :

$(S_0 - S_1) \longleftrightarrow (S_2 - S_3)$

$(S_1 - S_2) \xleftrightarrow{1_{id}} (S_1 - S_2)$

$(S_2 - S_3) \longleftrightarrow (S_4 - S_5)$

$(S_3 - S_4) \xleftrightarrow{1_{id}} (S_3 - S_4)$

.... (1_{id} ánh xạ đồng nhất)

$$\Big(\bigcap_{\mathbb{N}} S_i\Big) \xleftrightarrow{\;1_{id}\;} \Big(\bigcap_{\mathbb{N}} S_i\Big)$$

$$S_0 = (S_0 - S_1) \cup (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_3) \cup (S_3 - S_4) \cup \ldots \cup \Big(\bigcap_{\mathbb{N}} S_i\Big)$$

$$S_1 = (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_3) \cup (S_3 - S_4) \cup (S_4 - S_5) \cup \ldots \cup \Big(\bigcap_{\mathbb{N}} S_i\Big)$$

Vậy Card(S) = Card(T). ✓

Nhận xét

Kỹ thuật chứng minh này là làm rời rạc hóa các tập hợp S, T. Tập hợp S, T trở thành chuỗi các tập hợp đếm được (S_1, S_2, S_3, … và T_1, T_2, T_3, …) dù các tập hợp S, T có thể không đếm được.

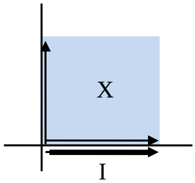
Thí dụ

Áp dụng của định lý Schroeder-Berstein.

Chứng minh card(X) = Card(I), với

$X = \{(x, y) \mid 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\}$.

$I = \{(x, y) \mid 0 \le x < 1, y = 0\}$.



Hiển nhiên có thể nhúng I vào X.

Do đó chỉ cần xây dựng ánh xạ 1-1 từ X vào I.

$\forall \alpha \in X$, $\alpha = (x, y)$, với x, y được biểu diễn dưới dạng thập phân vô hạn :

$$x = (0.\, x_1\, x_2 \ldots x_n) \text{ và } y = (0.\, y_1\, y_2 \ldots y_m).$$

Đặt $z \in I$, $z = (0\,.\, x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3 \ldots)$

$(x, y) \mapsto z = (0\,.\, x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3 \ldots) \in I$. ✓

Nhận xét

1. Card(S), Card(T)) $\in \le$ thường được viết là (Card(S) $\le$ Card(T)).
2. Dễ dàng kiểm tra quan hệ $\le$ thỏa các tính chất phản hồi, truyền. Tính phản đối xứng được chứng minh nhờ định lý Berstein-Schroeder. Vậy quan hệ $\le$ là quan hệ thứ tự trên các lượng số.

3. Biểu diễn số thực r ở dạng nhị phân.

$r = ... + \delta_{2n}(2^n) + ...+ \delta_4(2^2) + \delta_2(2^1) + \delta_0(2^0) + \delta_1(2^{-1}) + \delta_3(2^{-2}) + ... + \delta_n(2^{-n}) + ...$ với $\delta_i \in \{0, 1\}$.

$100101_2 = [1 \times 2^5] + [0 \times 2^4] + [0 \times 2^3] + [1 \times 2^2] + [0 \times 2^1] + [1 \times 2^0]$.

$100101_2 = [1 \times 32] + [0 \times 16] + [0 \times 8] + [1 \times 4] + [0 \times 2] + [1 \times 1]$.

$100101_2 = 37_{10}$.

Tính chất

Đặt $\text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$, $\text{Card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$.

1. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$,
2. $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$,
3. $\aleph_0 + n = \aleph_0$, với $n \in \mathbb{N}$.
4. u.(v + w) = u.v + u.w, với u, v, w là các lượng số.
5. $u + \aleph_0 = u$, với u là lượng số vô hạn. $\aleph_0$ là lượng số vô hạn đầu tiên, vì mọi tập hợp vô hạn đều có một tập con đếm được.
6. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Đặt A = Tập hợp tất cả tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$, và B = Tập hợp tất cả tập con vô hạn của $\mathbb{N}$.

Do đó $2^{\aleph_0} = A \cup B$.

Tập hợp A là vô hạn đếm được (xem bài tập).

Vậy chỉ cần chứng minh $B = \aleph_1$.

Biểu diễn số thực ở dạng nhị phân :

$$r = ... + \delta_{2n}(2^n) + ...+ \delta_4(2^2) + \delta_2(2^1) + \delta_0(2^0) + \delta_1(2^{-1}) + \delta_3(2^{-2}) + ... + \delta_n(2^{-n}) + ... \quad \text{với } \delta_i \in \{0, 1\}.$$

Chỉ cần chứng minh có ánh xạ 1-1trên giữa B với]0, 1].

Mỗi số thực tương ứng với một tập hợp các số mũ là lũy thừa của 2 tại các hệ số $\delta_i \neq 0$.

Ví dụ số $r = 1(2^{-1}) + 0(2^{-2}) + 1(2^{-3}) + 0(2^{-4}) + 1(2^{-5}) + 0(2^{-6}) + \ldots 0(2^{-n})$

tương ứng với tập hợp $X = \{1, 3, 5\}$

Quan hệ trên là ánh xạ 1-1trên từ]0, 1] vào tập hợp các tập con vô hạn của $\mathbb{N}$.

Nhận xét

1. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ có nghĩa thông thường là vô cực cộng với vô cực là vô cực $\infty + \infty = \infty$. Tương tự,
2. $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$ có nghĩa là $\infty.\infty = \infty$.

Định lý (Cantor)

Cho lượng số u thì $u < 2^u$.

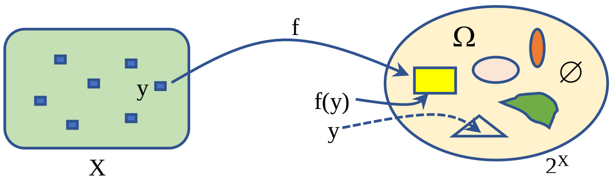
Chứng minh

Lấy $x \mapsto \{x\}$, do đó $u \leq 2^u$. Chỉ còn phải chứng minh $u \neq 2^u$.

Nếu $u = \varnothing$: hiển nhiên.

Nếu $u \neq \varnothing$, giả sử $u = 2^u$, nghỉa là có tập hợp X với card(X) = u, và có ánh xạ 1-1trên $f : X \longrightarrow 2^X$.

Đặt $\Omega = \{y \in X \mid y \notin f(y)\}$



$\Longrightarrow \Omega \neq \varnothing$ vì $\exists y \in X : f(y) = \varnothing$.

Do $\Omega \in 2^X$ nên $\exists a \in X : f(a) = \Omega$.

Nếu $a \in \Omega$ thì $a \notin f(a)$ (định nghĩa của Ω) do đó $a \notin \Omega = f(a)$, mâu thuẫn.

Nếu $a \notin \Omega$ thì $a \in f(a)$ (định nghĩa của Ω) do đó $a \in \Omega = f(a)$, mâu thuẫn.

Vậy $u < 2^u$. ✓

Hệ quả

Tất cả tập hợp không là tập hợp.

Chứng minh

Giả sử Z = tập hợp tất cả tập hợp.

$\Longrightarrow 2^Z$ là tập hợp tất cả tập con của Z.

$\Longrightarrow$ Phần tử của 2^Z là tập hợp nên cũng là phần tử của Z.

$\Longrightarrow 2^Z \subseteq Z$.

Do đó $\text{card}(2^Z) \leq \text{card}(Z)$.

Mâu thuẫn với định lý Cantor $\alpha < 2^\alpha$.

Nhận xét

Từ nghịch lý trên người ta đưa ra khái niệm **lớp**, lớp tất cả lượng số, lớp tất cả tập hợp. Lớp không phải là tập hợp, nó chỉ có một số tính chất của tập hợp.

Giả thuyết liên tục

Mọi lượng số vô hạn α không có lượng số nào ở giữa α và 2^α.

Thí dụ

Ký hiệu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, $2^{\aleph_2} = \aleph_3$, ... $\Longrightarrow \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3$, ...

4. Thứ số

Trong cách xây dựng tập hợp số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$, dù không có chủ đích đặt một trật tự cho các phần tử, nhưng tiên đề Peano vô hình trung đã xắp xếp thứ tự các phần tử. Mỗi phần tử trong tập hợp $\mathbb{N}$ có một vị trí đứng so với những phần tử khác. Vị trí của mỗi phần tử được gọi là *số thứ tự* của nó so với phần tử đầu tiên. Vấn đề là muốn mở rộng khái niệm số thứ tự của $\mathbb{N}$ cho mọi tập hợp, khái niệm mới này sẽ được gọi là *thứ số*. Sau đây là hành trình xây dựng khái niệm thứ số.

Trên mỗi tập hợp có thể đặt nhiều thứ tự, tạo thành chuỗi cấu trúc. Mỗi cấu trúc bao gồm một tập hợp và một thứ tự, xem như là một tập hợp mới. Không gian tập hợp có đặt thứ tự rất lớn so với không gian chỉ có tập hợp đơn thuần. Bước kế tiếp là phân lớp không gian tập hợp "mới" bởi quan hệ tương đương là ánh xạ 1-1trên duy trì thứ tự. Khi đó xuất hiện lớp tập hợp đầu tiên "nhỏ nhất" là tập hợp có một phần tử – singleton – sau đó các lớp nối tiếp nhau. Mỗi lớp chọn phần tử đại diện gọi là thứ số của các tập hợp trong lớp đó. Và đặt quan hệ thứ tự trên các thứ số.

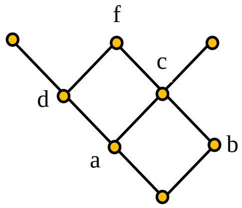
Định nghĩa – Phần tử liền kề dưới – Phần tử liền kề trên.

(S, $\leq$) là tập hợp có quan hệ thứ tự và a, b, x $\in$ S.

Phần tử a là *liền kề dưới* của b và b là *liền kề trên* của a $\longleftrightarrow$ (a $\leq$ b) và (nếu a $\leq$ x $\leq$ b thì x $\notin$ S).

EndĐn

Thí dụ



a và b là liền kề dưới của c.

a và b không là liền kề dưới của f.

c là liền kề trên của a và b.

f không là liền kề trên của a và b.

Tên gọi khác :

Phần tử cực tiểu = phần tử đầu tiên. Phần tử cực đại = phần tử cuối cùng.

Định nghĩa – Ánh xạ duy trì thứ tự.

Ánh xạ f là duy trì thứ tự giữa (S, $\leq$) và (T, $\preccurlyeq$) iff [$\alpha \leq \beta \longleftrightarrow f(\alpha) \preccurlyeq f(\beta)$], $\forall$ a, $\beta \in$ S.

EndĐn

Định nghĩa – Ánh xạ tương đương.

(S, ≤) và (T, ≼) là hai tập hợp có quan hệ thứ tự.

Ánh xạ f từ S vào T được gọi là ánh xạ *tương đương* nếu f là 1-1trên và duy trì thứ tự,

Ký hiệu (S, ≤) ≈ (T, ≼).

EndĐn

Định nghĩa – Tập hợp tương đương.

Hai tập hợp có thứ tự *tương đương* nếu có ánh xạ tương đương giữa chúng.

EndĐn

Định nghĩa – Quan hệ thứ tự hoàn hảo.

(S, ≤) là tập hợp với quan hệ thứ tự. Nếu mọi *tập con* khác rỗng của (S, ≤) có phần tử *cực tiểu* thì (S, ≤) là tập hợp có quan hệ *thứ tự hoàn hảo*.

Ký hiệu là < S, ≤ >.

EndĐn

Nhận xét

*. S với quan hệ *thứ tự hoàn hảo* ≤ được gọi là *tập hợp thứ tự hoàn hảo*.

*. Tập hợp với thứ tự hoàn hảo chính là sự mô phỏng tập hợp số tự nhiên **N** với tính chất – mọi tập hợp con có phần tử cực tiểu.

*. Từ đây khi nói S là tập hợp thứ tự hoàn hảo, nghĩa là có uan hệ thứ tự được hiểu ngầm.

Hệ quả 4.1

Nếu quan hệ *thứ tự là hoàn hảo* thì cũng là quan hệ *thứ tự toàn phần*.

Hệ quả 4.2

Mọi *tập con* của tập hợp *thứ tự hoàn hảo* thì cũng là tập hợp *thứ tự hoàn hảo*.

Nhận xét

(S, ≤) với thứ tự hoàn hảo thì có phần tử cực tiểu.

Định nghĩa – Khoảng đầu – khoảng cuối

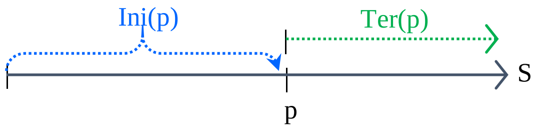
Cho tập hợp thứ tự hoàn hảo < S, ≤ >, khoảng đầu Ini(p) và khoảng cuối Ter(p) của phần tử $p \in S$ là :

$$Ini(p) = \{x \mid x \in S \text{ sao cho } x \le p \text{ và } x \neq p\},$$

$$Ter(p) = \{x \mid x \in S \text{ sao cho } p \le x\}.$$

EndĐn

Hình minh họa



Định lý 4.1

Tập hợp $<S, \le>$ có thứ tự hoàn hảo. $\Im(S)$ là họ các Ini(p), với mọi $p \in S$ thì $<\Im(S), \subseteq> \approx <S, \le>$.

Chứng minh

Dễ dàng chứng minh ánh xạ $f : p \mapsto Ini(p)$ giữa $<S, \le>$ và $<\Im(S), \subseteq>$ là tương đương.

Định lý 4.2

Tập hợp $<S, \le>$ có thứ tự hoàn hảo.

Nếu $T \subseteq S$ và f là ánh xạ tương đương từ S vào T thì $x \le f(x), \forall x \in S$.

Chứng minh

Phản chứng.

Đặt $K = \{x \mid x > f(x)\}$.

Giả sử $K \neq \emptyset$, vì $K \subset S$ nên K có phần tử cực tiểu k_0.

Theo định nghĩa của K : $k_0 > f(k_0)$ (1)

Nếu $f(k_0) \in K \Longrightarrow f(k_0) \geq k_0$, vì k_0 là phần tử cực tiểu. Mâu thuẫn với (1).

Nếu $f(k_0) \notin K \Longrightarrow f(k_0) \leq f(f(k_0))$ (2)

Từ (1) $\Longrightarrow f(k_0) > f(f(k_0))$, do f duy trì thứ tự. Mâu thuẫn với (2).

$\Longrightarrow K = \varnothing$. Vậy $x \leq f(x), \forall x \in S$.

Nhận xét

Ánh xạ tương đương giữa tập con của tập thứ tự hoàn hảo S vào S thì mọi phần tử đều có ảnh ở phía trước nó. Ảnh của các phần tử không thể ở phía sau vì tập thứ tự hoàn hảo có phần tử cực tiểu.

Hệ quả 4.3

Nếu $<S, \leq>$ là tập hợp thứ tự hoàn hảo thì S không thể tương đương với Ini(x), $\forall x \in S$.

Chứng minh

Lấy $s \in S$, giả sử có ánh xạ f để S tương đương với Ini(s).

$\Longrightarrow s \notin$ Ini(s) do định nghĩa của Ini(s).

$\Longrightarrow f(s) \in$ Ini(s) vì f là ánh xạ từ S vào Ini(s).

$\Longrightarrow f(s) < s$. Mâu thuẫn với định lý 4.2.

Vậy không có sự tương đương giữa S và mọi khoảng đầu Ini(s) của nó.

Hệ quả 4.4

Nếu Ini(s), Ini(t) là hai khoảng đầu khác nhau của tập hợp thứ tự hoàn hảo $<S, \leq>$ thì không thể có ánh xạ tương đương giữa Ini(s) và Ini(t), với mọi s, t của S.

Định lý 4.3

Nếu S, T là hai tập hợp thứ tự hoàn hảo tương đương nhau thì *chỉ có một* ánh xạ tương đương giữa chúng.

Chứng minh

Lấy f và g là hai ánh xạ tương đương từ S vào T.

Giả sử $f \neq g$, nghĩa là có $s \in S$ sao cho $f(s) \neq g(s)$.

Vì T là tập hợp hoàn hảo nên có $f(s) > g(s)$ hay $f(s) < g(s)$.

Trường hợp $f(s) > g(s)$.

Vì f là 1-1trên và duy trì thứ tự nên f^{-1} cũng là 1-1trên và duy trì thứ tự.

$\Longrightarrow f^{-1}(f(s)) > f^{-1}(g(s))$

$\Longrightarrow s > f^{-1}(g(s))$

$\Longrightarrow s > (f^{-1}g)(s)$

$\Longrightarrow (f^{-1}g)$ cũng là ánh xạ tương đương

$\Longrightarrow$ mâu thuẫn với định lý 4.2.

Trường hợp $f(s) < g(s)$.

Vì g là 1-1trên và duy trì thứ tự nên g^{-1} cũng là 1-1trên.

$\Longrightarrow g^{-1}(f(s)) < g^{-1}(g(s))$

$\Longrightarrow g^{-1}(f(s)) < s$

$\Longrightarrow (g^{-1}f)(s) < s$

$\Longrightarrow (g^{-1}f)$ cũng là ánh xạ tương đương

$\Longrightarrow$ mâu thuẫn với định lý 4.2.

Bổ đề 4.1

Nếu $(S, \leq)$ là tập hợp thứ tự hoàn hảo và K là tập con của S có tính chất

$(x \leq y$ và $y \in K) \Longrightarrow (x \in K)^{(*)}$ thì K = S hoặc K là khoảng đầu của S.

Chứng minh :

Giả sử $K \neq S$, $(S - K)$ có phần tử cực tiểu k_0.

Chứng minh $Ini(k_0) = K$.

Lấy $x \in Ini(k_0) \Longrightarrow x < k_0 \Longrightarrow x \notin (S - K) \Longrightarrow x \in K$.

Lấy $y \in K$,

giả sử $y \notin Ini(k_0) \Longrightarrow k_0 \leq y$.

Do $y \in K$ nên thỏa tính chất (*) : $k_0 \leq y$ và $y \in K \Longrightarrow k_0 \in K$.

Mâu thuẫn với $k_0 \notin K$.

Do đó $y \in Ini(k_0)$.

Vậy K = S hoặc K là khoảng đầu của S.

Bổ đề 4.2

$(S, \leq)$ và $(T, \preccurlyeq)$ là hai tập hợp thứ tự hoàn hảo.

Nếu Ini(x) tương đương với Ini(y) với $x \in S$ và $y \in T$ thì mỗi khoảng đầu của Ini(x) tương đương với một khoảng đầu của Ini(y).

Lấy $f : Ini(x) \longrightarrow Ini(y)$ là ánh xạ tương đương và $u \in Ini(x)$, gọi $f/_{Ini(u)}$ là ánh xạ giới hạn của f trên Ini(u) của Ini(x) thì

$f/_{Ini(u)} : Ini(u) \longrightarrow f(Ini(u))$ cũng là ánh xạ tương đương và có $v \in T$ sao cho f(Ini(u)) = Ini(v).

Chứng minh :

Lấy f là ánh xạ tương đương giữa Ini(x) và Ini(y).

Lấy $s \in Ini(x)$, Ini(s) tương đương với f(Ini(s)) vì f là ánh xạ tương đương.

Chứng minh f(Ini(s)) = Ini(f(s)).

Lấy $b \in f(Ini(s))$, do đó có $a \in Ini(s)$ sao cho f(a) = b.

Vì $a \in Ini(s)$ nên $a < s$, do đó $f(a) \prec f(s)$

Suy ra $f(a) = b \in Ini(f(s))$

Lấy $b \in Ini(f(s))$, do đó $b \prec f(s)$

Có $a \in Ini(x)$ sao cho f(a) = b và $a < s$, vì f là tương đương.

Do đó $a \in Ini(s)$

Suy ra $b \in f(Ini(s))$

Do đó khoảng đầu của Ini(x) tương đương với khoảng đầu của Ini(y).

Dễ dàng chứng minh $f/_{Ini(u)}$ là ánh xạ tương đương giữa Ini(u) và f(Ini(u)).

Chứng minh có v để f(Ini(u)) = Init(v).

Đặt v = f(u).

Lấy $t \in f(Ini(u)) \Longrightarrow \exists s \in Ini(u) : f(s) = t.$ (f là ánh xạ)

$\Longrightarrow s < u.$ $(s \in Ini(u))$

$\Longrightarrow f(s) \prec f(u)$ (f duy trì thứ tự)

$\Longrightarrow t \prec f(u)$

$\Longrightarrow t \in Ini(f(u)) = Ini(v)$ (định nghĩa khoảng đầu)

$\Longrightarrow f(Ini(u)) \subseteq Init(v).$

Lấy $t \in Ini(v) \Longrightarrow t < v = f(u)$

$\Longrightarrow \exists s \in Ini(u) : f(s) = t$ và $s < u$ (f là ánh xạ và duy trì thứ tự)

$\Longrightarrow s \in Ini(u)$ (định nghĩa khoảng đầu)

$\Longrightarrow f(s) \in f(Ini(u))$ (f duy trì thứ tự)

$\Longrightarrow t \in f(Ini(u)).$

$\Longrightarrow Ini(v) \subseteq Ini(f(u))$

Vậy $f(Ini(u)) = Init(v).$

Bổ đề 4.3

$(S, \leq)$ và $(T, \preccurlyeq)$ là hai tập hợp thứ tự hoàn hảo.

Nếu $K = \{ s \mid (\forall s \in S) (\exists t \in T) : Ini(s) \approx Ini(t) \}$

thì K = S hoặc K là khoảng đầu của S.

Chứng minh

Lấy $k \in K.$

$\Longrightarrow \exists t \in T : Ini(k) \approx Ini(t).$ (định nghĩa của K)

$\Longrightarrow \forall k'$: nếu $k' < k$ thì $Ini(k')$ tương đương với một khoảng đầu của $Ini(t).$

Nói cách khác $k' < k$ và $k \in K \Longrightarrow k' \in K$

Từ bổ đề 4.1 có K = S hoặc là khoảng đầu của S.

Ý nghĩa

Với hai tập hợp thứ tự hoàn hảo bất kỳ $(S, \leq)$, $(T, \preccurlyeq)$, mọi khoảng đầu của S tương đương với một khoảng đầu của T.

Định nghĩa – Quan hệ $\leq$ trên các tập hợp có thứ tự hoàn hảo.

Quan hệ $\leq$ giữa hai tập hợp thứ tự hoàn hảo S và T thỏa tính chất :

$(S \leq T) \longleftrightarrow$ (S *tương đương* với một khoảng đầu của T).

S được gọi là *ngắn hơn* T.

EndĐn

Bổ đề 4.4

Nếu S, T là hai tập hợp thứ tự hoàn hảo và

$H = \{\, s \mid (\forall s \in S)\ (\exists t \in T) : Ini(s) \approx Ini(t)\}$

$K = \{\, t \mid (\forall t \in T)\ (\exists s \in S) : Ini(s) \approx Ini(t)\}$

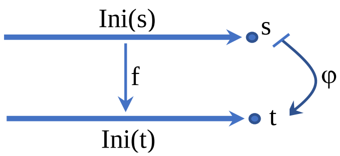
thì $H \approx K$.

Chứng minh

Định nghĩa quan hệ $\varphi \subseteq H \times K$ như sau :

$\forall s \in H$, $(s, t) \in \varphi$, với t là phần tử duy nhất tương ứng với s từ định nghĩa của H.

$\Longrightarrow$ quan hệ φ là ánh xạ và 1-1trên.



Chứng minh φ duy trì thứ tự.

Lấy $s', s \in H$ và $s' < s$.

Gọi f là ánh xạ tương đương giữa Ini(s) và Ini(t).

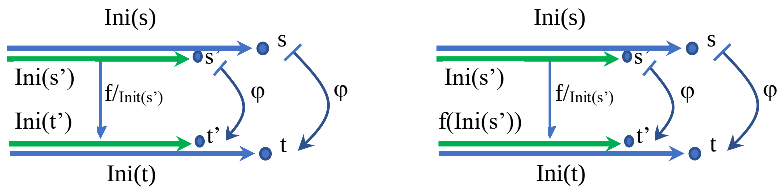
Gọi g là ánh xạ tương đương giữa Ini(s') và Ini(t').

$\Longrightarrow \varphi(s) = t$ và $\varphi(s') = t'$.

Do tập hợp ảnh của f là tập con của Ini(t) và s' < s :

⟹ f(s') < t.

Anh xạ f là tương đương giữa Ini(s) và Ini(t) thì $f/_{Ini(s')}$ cũng là tương đương giữa Ini(s') với f(Ini(s')).



Nhưng f(Ini(s')) = Ini(f(s')) (theo bổ đề 4.2 ở trên).

Ánh xạ $f/_{Ini(s')}$ là tương đương giữa Ini(s') và Ini(f(s')).

⟹ Ini(t') phải tương đương với nhau Ini(f(s'))

⟹ Ini(t'), Ini(f(s')) là hai khoảng đầu tương đương của T nên trùng nhau.

⟹ t' = f(s').

⟹ t' < t.

⟹ φ(s') < φ(s).

Do đó s' < s ⟹ φ(s') < φ(s).

Vậy φ duy trì thứ tự.

Bổ đề 4.5

Nếu S, T là hai tập hợp thứ tự hoàn hảo và mọi khoảng đầu của S tương đương với một khoảng đầu của T và ngược lại mọi khoảng đầu của T tương đương với một khoảng đầu của S thì S ≈ T.

Chứng minh

Đặt f là ánh xạ từ S vào T : ∀s ∈ S, f(s) = t với Ini(s) ≈ Init(t), t ∈ T.

Ánh xạ f là 1-1 trên và duy trì thứ tự.

Vậy S ≈ T.

Định lý 4.4

Nếu S, T là hai tập hợp thứ tự hoàn hảo thì $S \approx T$ hoặc $S < T$ hoặc $T < S$.

Chứng minh

Đặt :

$$K = \{ s \mid (\forall s \in S)(\exists t \in T) : Ini(s) \approx Ini(t)\}$$

$$H = \{ t \mid (\forall t \in T)(\exists s \in S) : Ini(s) \approx Ini(t)\}$$

Đã chứng minh :

$$\left.\begin{array}{lcl} (K = S) & \text{hoặc} & (K = Uni(s)) \text{ với } s \in S \\ \Updownarrow\wr & & \Updownarrow\wr \\ (H = T) & \text{hoặc} & (H = Uni(t)) \text{ với } t \in T \end{array}\right\} \text{ và}$$

$[(K = S) \text{ or } (K = Ini(s))] \text{ and } [(H = T) \text{ or } (H = Ini(t))]$

Dòng trên có dạng logic sau :

(X or Y) and (V or W) =

(<u>X and V</u>) or (<u>X and W</u>) or (<u>Y and V</u>) or (<u>Y and W</u>)

$\Longrightarrow$ $\underline{[(K = S) \text{ and } (H = T)]}$ or $\underline{[(K = S) \text{ and } (H = Ini(t))]}$ or

$\underline{[(K = Ini(s)) \text{ and } (H = T)]}$ or $\underline{[(K \approx Ini(s)) \text{ and } (H \approx Ini(t))]}$

$\Longrightarrow [(K = S) \text{ and } (H = T)] \quad = \quad [S \approx T] \quad$ (vì $H \approx K$).

$\Longrightarrow [(K = S) \text{ and } (H \approx Ini(t))] \quad = \quad [S \approx Ini(t))] \quad$ (vì $H \approx K$).

$\Longrightarrow [(K = Ini(s)) \text{ and } (H = T)] \quad = \quad [T \approx Ini(s))] \quad$ (vì $H \approx K$).

$\Longrightarrow [(K = Ini(s)) \text{ and } (H = Ini(t))] \quad = \quad [S \approx T]$

(bổ đề 4.5, vì $Ini(s) \approx Ini(t), \forall s, t$).

$\Longrightarrow [S \approx T] \text{ or } [S \approx Ini(t)] \text{ or } [Ini(s)) \approx T] \text{ or } [S \approx T]$.

Vậy $S \approx T$ hoặc $S \leq T$ hoặc $T \leq S$.

Định lý 4.5

Lấy $\mathfrak{I}$ là một họ các khoảng đầu của tập hợp thứ tự hoàn hảo S. Khi đó có Ini(s) $\in \mathfrak{I}$ sao cho Ini(s) $\subset$ Ini(t), $\forall$Ini(t) $\in \mathfrak{I}$.

Chứng minh

Từ định lý 4.1 có <S, ≤> tương đương với < $\mathfrak{I}$, $\subset$> và f là ánh xạ tưng đương giữa chúng.

Do S là tập hợp có thứ tự hoàn hảo nên S có phần tử cực tiểu s_0. Khi đó $f(s_0)$ cũng là phần tử cự tiểu trong $\mathfrak{I}$ do f duy trì thứ tự.

Định lý 4.6

Lấy Ψ là một họ các tập hợp thứ tự hoàn hảo, khi đó có phần tử của Ψ ngắn hơn mọi phần tử trong Ψ.

Chứng minh

Lấy S $\in \Psi$, đặt $\mathscr{H}$ = { X | X $\in \Psi$ và X ngắn hơn S}.

Nếu $\mathscr{H} = \varnothing$ thì S là phần tử ngắn nhất.

Nếu $\mathscr{H} \neq \varnothing$, mỗi phần tử của $\mathscr{H}$ tương đương với khoảng đầu của S.

Đặt $\mathfrak{I}^*$ = {Ini(s) | Ini(s) là các khoảng đầu của S}.

Mỗi phần tử trong $\mathscr{H}$ tương đương với một phần tử trong $\mathfrak{I}^*$.

Vì S có phần tử cực tiểu nên $\mathfrak{I}^*$ chứa khoảng đầu Ini(s_0) ngắn hơn mọi khoảng đầu khác trong $\mathfrak{I}^*$.

Tập K_0 ($\in \mathscr{H}$) tương đương với Ini(s_0), ngắn hơn mọi tập hợp trong $\mathscr{H}$.

Do đó, K_0 là phần tử ngắn nhất của $\mathscr{H}$ nên K_0 cũng là ngắn nhất của Ψ.

Vậy K_0 là phần tử ngắn nhất trong Ψ.

Định nghĩa – Quan hệ "Cùng thứ số".

Hai tập hợp thứ tự hoàn hảo < S, ≤ >, và < T, ≼ > có *cùng thứ số* nếu có ánh xạ 1-1trên duy trì thứ tự giữa chúng.

EndĐn

Thí dụ

Cho hai tập hợp thứ tự hoàn hảo : A = {1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6} và B = {2 < 4 < 6 < 1 < 3 < 5}.

Anh xạ f : A $\longrightarrow$ B, 1$\mapsto$2, 2$\mapsto$4, 3$\mapsto$6, 4$\mapsto$1, 5$\mapsto$3, 6$\mapsto$5.

f là ánh xạ 1-1trên duy trì thứ tự giữa A và B.

Do đó A, B có cùng thứ số.

Nhận xét

1. Thứ tự $\leq$ trong < S, ≤ > và thứ tự $\preccurlyeq$ trong < T, $\preccurlyeq$ > của định nghĩa trên không nhất thiết giống nhau.
2. Quan hệ *cùng thứ số* chỉ định nghĩa trên một tập hợp các thứ số. Không định nghĩa trên tất cả thứ số (vì tất cả thứ số không phải là tập hợp). Ở đây sẽ không đề cặp các khái niệm phải được định nghĩa trên tập hợp hay cả trên lớp. Do đó một loại định nghĩa cho từng đôi phần tử sẽ phù hợp hơn là một định nghĩa ngay từ đầu cần xác định không gian phạm vi của định nghĩa. Đây là việc né tránh khảo sát trên các lớp.
3. Quan hệ *cùng thứ số* là quan hệ tương đương.

   Thứ số có nguồn gốc từ tập hợp số nguyên tự nhiên – là tập hợp đầu tiên được sử dụng trong toán học và đời thường. Nó được xem là chuẩn mực, là tập hợp lý tưởng mà các tập hợp khác cần vươn tới. Một nét đẹp tuyệt vời của tập hợp số nguyên tự nhiên là tính chất “mọi tập con đều có phần tử cực tiểu”. Đây cũng chính là điểm mà người ta mong muốn có đối với các tập hợp khác. Nó đã trở thành động lực và mục tiêu để xây dựng khái niệm thứ số. Biến các tập hợp khác có dáng dấp của tập hợp số nguyên tự nhiên. Khái niệm thứ số là một trong những cố gắng đó. Ngoài ra, kỹ thuật truy chứng hữu hạn là một nét đẹp trong việc tiếp cận với những bài toán dính dáng tới vô hạn. Nhưng chỉ là vô hạn đếm được. Do đó người ta mong muốn kỹ thuật này cũng mở rộng đối với tập hợp bất kỳ. Nên việc thứ tự hóa mọi tập hợp chính là một phần trong việc mở rộng khái niệm chứng minh truy chứng trên các tập hợp vô hạn *không đếm được*. Kỹ thuật chứng minh này còn được gọi là chứng minh truy chứng siêu hạn. Đây là công cụ hữu hiệu cho các nhà toán học nghiên cứu về lý thuyết tập hợp.

Định nghĩa – Thứ số.

Cho tập hợp thứ tự hoàn hảo S, lớp tương đương của *quan hệ cùng thứ số* với S được gọi là thứ số.

Ký hiệu thứ số của S là Ord(S).

EndĐn

Nhận xét

1. Thứ số hữu hạn.

   Ord(∅) được ký hiệu là 0, Ord({1}) được ký hiệu là 1,

   Ord({1, 2}) được ký hiệu là 2, Ord({1, 2, 3}) được ký hiệu là 3,

   Ord({1, 2, 3, 4}) được ký hiệu là 4, … ,

   Thứ số siêu hạn hay vô hạn.

   Ord($\mathbb{N}$, ≤) được ký hiệu là ω, …

2. Một tập hợp vô hạn S có thể có nhiều thứ số khác nhau. Do có thể định nhiều thứ tự hoàn hảo khác nhau trên S.

Thí dụ

Cho thứ tự hoàn hảo < trên tập hợp số nguyên $\mathbb{N}$: $1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$.

Đặt thứ tự hoàn hảo ⋉ trên $\mathbb{N}$ như sau :

$1 \ltimes 5 \ltimes 9 \ltimes 13 \ltimes \ldots \ltimes$

$2 \ltimes 6 \ltimes 10 \ltimes 14 \ltimes \ldots \ltimes$

$3 \ltimes 7 \ltimes 11 \ltimes 15 \ltimes \ldots \ltimes$

$4 \ltimes 8 \ltimes 12 \ltimes 16 \ltimes \ldots$.

Hiển nhiên Ord($\mathbb{N}$, ⋉) ≠ Ord($\mathbb{N}$, <).

3. Một tập hợp thứ tự hoàn hảo không thể cùng thứ số với mọi khoảng đầu của nó.
4. Hai khoảng đầu khác nhau của cùng một tập hợp thứ tự hoàn hảo không thể có cùng thứ số.

5. Quan hệ thứ tự trên thứ số

Qui ước

Cho tập hợp $<S, \leq>$ và $<T, \ltimes>$ có thứ tự hoàn hảo và $S \cap T = \varnothing$. Tập hợp $S \cup T$ có thứ tự hoàn hảo nếu được ghi ở dạng liệt kê bởi ký hiệu {…} gồm các phần tử của S thêm ký tự "**;**" sau đó viết tiếp các phần tử của T.

Thí dụ

$S = \{5, 6, 7\}$ và $T = \{1, 2, 3, 4\}$ thì $S \cup T = \{5, 6, 7\ ;\ 1, 2, 3, 4\}$ có thứ tự như sau $5 < 6 < 7 < 1 < 2 < 3 < 4$.

Định nghĩa – Quan hệ ≤ giữa hai thứ số

Hai thứ số $(\alpha, \beta) \in \leq$ nếu

α có cùng thứ số với một khoảng đầu của β, hoặc $\alpha = \beta$.

EndĐn

Nhận xét

So sánh hai thứ số là so sánh hai tập hợp tương ứng với hai thứ số.

Cho α, β là hai thứ số, lấy tập hợp S, T sao cho $Ord(S) = \alpha$, $Ord(T) = \beta$.

$$\alpha \leq \beta \longleftrightarrow S \leq T.$$

Bổ đề

Quan hệ $\leq$ là quan hệ thứ tự giữa các thứ số.

Chứng minh

Do định nghĩa $\alpha \leq \beta$ nếu α cùng thứ số với khoảng đầu của β. Nên quan hệ phản hồi. Do tập hợp thứ tự hoàn hảo không cùng thứ số với khoảng đầu của nó nên phản đối xứng. Tính truyền là hiển nhiên.

Định lý 5.1

Lấy $\alpha = \mathrm{Ord}(S)$, đặt $\mathcal{L}(\alpha) = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ và $\Im(S) = \{\mathrm{Ini}(s) | \forall s \in S\}$.

Có ánh xạ tương đương f giữa $\mathcal{L}(\alpha)$ và $\Im(S)$.

Chứng minh

$\mathcal{L}(\alpha)$ và $\Im(S)$ là hai tập hợp thứ tự hoàn hảo.

Đặt quan hệ f : $\mathcal{L}(\alpha) \longrightarrow \Im(S)$ như sau, $\forall \beta \in \mathcal{L}(\alpha)$, có T với $\beta = \mathrm{Ord}(T)$, vì $\beta < \alpha$ nên T tương đương với một khoảng đầu Ini(s) của S, $f(\beta) = \mathrm{Ini}(s)$.

$\Rightarrow \beta = \mathrm{Ord}(\mathrm{Ini}(s))$

$\Rightarrow \forall \beta \in \mathcal{L}(\alpha)$ đều có ảnh và mỗi β chỉ có một Ini(s) vì hai khoảng đầu tương đương phải bằng nhau nên quan hệ f là ánh xạ.

$\Rightarrow \forall \mathrm{Ini}(s) \in \Im(S)$, $\mathrm{Ord}(\mathrm{Ini}(s)) < \mathrm{Ord}(S) = \alpha$.

$\Rightarrow \mathrm{Ord}(\mathrm{Ini}(s)) \in \mathcal{L}(\alpha)$.

$\Rightarrow \forall \beta < \beta'$, có T, T' sao cho $\beta = \mathrm{Ord}(T)$, $\beta' = \mathrm{Ord}(T'))$ và có ánh xạ 1-1 từ T vào T'.

$\Rightarrow \mathrm{Ini}(s) < \mathrm{Ini}(s')$.

$\Rightarrow$ f duy trì thứ tự.

Vậy có tương đương giữa $\mathcal{L}(\alpha)$ và $\Im(S)$.

Định lý 5.2

Cho α là thứ số, đặt $\mathcal{L}(\alpha) = \{\beta \,|\, \beta$ là thứ số sao cho $\beta \le \alpha\}$ thì

$\mathrm{Ord}(\mathcal{L}(\alpha)) = \alpha$.

Chứng minh

Từ mệnh đề trên có $\mathcal{L}(\alpha)$ tương đương với $\Im(S)$.

$\Im(S)$ tương đương với S.

$\Rightarrow \mathcal{L}(\alpha) \approx \Im(S) \approx S$.

$\Rightarrow \mathrm{Ord}(\mathcal{L}(\alpha)) = \mathrm{Ord}(\Im(S)) = \mathrm{Ord}(S) = \alpha$.

Nhận xét

1. Thứ số là ký hiệu chỉ một *con số* những cũng là *một tập hợp*. Do đó có thể dùng thứ số ở cả hai dạng.
2. Có tác giả dùng tính chất Ord(Ini(α)) = α để định nghĩa thứ số α.

Định nghĩa – Thứ số giới hạn

Thứ số α được gọi là *thứ số giới hạn* nếu có β < α thì cũng có γ sao cho β < γ < α.

Nói cách khác thứ số giới hạn *không có liền kề dưới* hoặc *không là liền kề trên* của một thứ số khác.

Thứ số giới hạn được gọi đơn giản là *số giới hạn*.

EndĐn

Thí dụ

ω là thứ số giới hạn vì không có số liền kề của ω : 0, 1, 2, 3, … , ω.

ω là thứ số vô hạn nhỏ nhất.

Nhận xét

Các thứ số cũng có thứ tự hoàn hảo. Mọi thứ số có liền kề trên.

Các ký hiệu được dùng chung sẽ được xác định nhờ vào bối cảnh nó xuất hiện. Thí dụ các ký hiệu 0, 1, 2, 3, … có thể là số tự nhiên, cũng có thể là lượng số hoặc thứ số. Do đó không cần thiết tạo ra những hệ thống ký hiệu khác nhau cho từng loại.

Tương tự như vậy ký hiệu "≤" chỉ quan hệ thứ tự đối với mỗi tập hợp là khác nhau. Chỉ những trường hợp nào cần nhấn mạnh sự khác biệt sẽ sử dụng thêm ký hiệu khác với "≤".

Định lý 5.3

Tập hợp những thứ số là tập hợp thứ tự hoàn hảo.

Định lý 5.4

Tập hợp những lượng số là tập hợp thứ tự hoàn hảo.

Chứng minh

Lấy A là tập hợp những lượng số.

Đặt g(u) là thứ số nhỏ nhất trên tập hợp có lượng số u.

Nếu $u \neq v$ thì $g(u) \neq g(v)$.

Nếu $u < v$ thì $g(u) < g(v)$.

Do đó $g : A \longrightarrow g(A)$ là 1-1trên.

Nhưng g(A) có thứ tự hoàn hảo nên A cũng có thứ tự hoàn hảo.

6. Toán tử giữa các thứ số

Định nghĩa – Cộng – Nhân.

Cho α, β là hai thứ số và lấy hai tập hợp S, T sao cho

$\mathrm{Ord}(S) = \alpha$, $\mathrm{Ord}(T) = \beta$ và $S \cap T = \varnothing$.

1. Cộng (+) : $\alpha + \beta = \mathrm{Ord}(S \cup T)$.
2. Nhân (.) : $\alpha.\beta = \mathrm{Ord}(S \times T)$.

Thứ tự trên $(S \cup T)$ được xác định như sau :

Lấy x, y là phần tử của $(S \cup T)$.

Nếu x, y cùng thuộc S thì lấy thứ tự của S.

Nếu x, y cùng thuộc T thì lấy thứ tự của T.

Mọi phần tử của T lớn hơn mọi phân tủ của S.

Thứ tự trên $(S \times T)$ như sau :

$(a, b) < (a', b')$ nếu $b < b'$ hoặc $b = b'$ và $a < a'$.

EndĐn

Tính chất

Cho α, β, γ là các thứ số, $0 = \mathrm{Ord}(\varnothing)$.

1. $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$,

2. $\alpha.\beta \neq \beta.\alpha$,

3. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

4. $\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma$,

5. $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$,

6. $\beta + \alpha = \gamma \cancel{+} \alpha \Longrightarrow \beta$

7. $\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$,

8. $(\beta + \gamma).\alpha \neq \beta.\alpha + \gamma.\alpha$.

9. $\alpha + 0 = 0 + \alpha$.

10. $\alpha.1 = 1.\alpha = \alpha$.

11. $\alpha.0 = 0.\alpha = 0$.

Nhận xét

Phép tính cộng trên thứ số (vô hạn) không có tính giao hoán.

Thí dụ

$1 + \omega = \omega$.

$1 + \omega \neq \omega + 1$.

Với $1 + \omega$: "$a < 1 < 2 < 3 < \ldots$" tương đương với ω.

Với $\omega + 1$: "$1 < 2 < 3 < \ldots < a$", a là chặn trên.

Định lý

Thứ số $\alpha + 1$ là *liền kề trên* của thứ số α.

Chứng minh

Gọi β là liền kề trên của α.

$\Longrightarrow \mathrm{Ini}(\beta) = \mathrm{Ini}(\alpha) \cup \alpha$.

$\Longrightarrow \mathrm{Ord}(\mathrm{Ini}(\beta)) = \mathrm{Ord}(\mathrm{Ini}(\alpha)) + \mathrm{Ord}(\alpha)$.

$\Longrightarrow \beta = \alpha + 1$.

7. Các thứ số thông dụng

Thứ số hữu hạn : 0, 1, 2, 3, … .

Ord(∅) = 0, Ord({1}) = 1, Ord({1, 2}) = 2,

Ord({1, 2, 3}) = 3, …

Thứ số giới hạn đầu tiên và các liền kề trên :

ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, … , $\omega + \omega = \omega2$,

$\omega2 + 1$, $\omega2 + 2$, … , $\omega2 + \omega = \omega3$,

$\omega3 + 1$, $\omega3 + 2$, … , $\omega\omega$, …

Cụ thể như sau :

$\omega =$ Ord($\mathbb{N}$, ≤),

$\omega + 1$ = Ord({1 < 2 < … < 1'}) = Ord({1, 2, … , ω}),

$\omega + 2$ = Ord({1 < 2 < … < 1'< 2'}) = Ord({1, 2, … , ω, $\omega + 1$}),

$\omega + 3$ = Ord({1 < 2 < … < 1'< 2' < 3'}) = Ord({1, 2, … , ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$}),

…

$\omega + \omega = \omega2$ = Ord({1 < 2 < … < 1'< 2' < … }),

$\omega2 + 1$ = Ord({1 < 2 < … < 1'< 2' < … < 1''}),

$\omega2 + 2$ = Ord({1 < 2 < … < 1'< 2' < … < 1'', 2''}),

$\omega2 + 3$ = Ord({1 < 2 < … < 1'< 2' < … < 1'', 2'', 3''}),

…

$\omega2 + \omega = \omega3$, = Ord({1 < 2 < …< 1'< 2' <…< 1'', 2'', 3'' < … }),

$\omega3 + 1$, $\omega3 + 2$, $\omega3 + 3$,

…

$\omega\omega = \omega^2$,

…

ω^{ω} là số giới hạn của ω^n, với $n \in \mathbb{N}$.

ω^{ω} … $(\omega^{\omega})^{\omega}$, … , $((\omega^{\omega})^{\omega})^{\omega}$, …

Sau các thứ số dạng ω là thứ số ε_0 và tiếp tục với $\varepsilon_0 + 1$, $\varepsilon_0 + 2$, ...

Tất cả những thứ số đã liệt kê là *thứ số đếm được*.

8. Tổng vô hạn các thứ số

Tổng chính là toán tử cộng, mà cộng thông thường là toán tử cấp 2 trên tập hợp số nguyên cũng như số thực.

Xét các tổng $n = 1 + 2 + 3 + \ldots$ cũng như $r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$, n và r không là số có nghĩa. Do đó muốn *tổng vô hạn* các số thông thường có nghĩa cần thêm khái niệm *số giới hạn*.

Định nghĩa – Tổng vô hạn thứ số.

Cho $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ là tập hợp các thứ số có chỉ số trên tập hợp I, với $\alpha_i = \mathrm{Ord}(S_i)$.

$$\Sigma_{i\in I}\, \alpha_i = \mathrm{Ord}(\cup_{i\in I}\, S_i)$$

EndĐn

Chú thích

Các tập hợp S_i trong định nghĩa trên là tách biệt. Nếu chúng không tách biệt thì sử dụng $(S_i \times \{i\})$ thay cho S_i trong công thức trên, i.e.

$\Sigma_{i\in I}\, \alpha_i = \mathrm{Ord}(\cup_{i\in I}\, (S_i \times \{i\}))$.

Thí dụ

Lấy I là tập hợp số nguyên $\mathbb{N}$, như sau : $\alpha_i = 1$, $\forall i \in I$.

$1+1+1+ \ldots = \Sigma_{i\in I}\, \alpha_i = \mathrm{Ord}(\cup_{i\in I}\, S_i) = \mathrm{Ord}(\mathbb{N}) = \omega$.

9. Truy chứng hữu hạn và vô hạn

Nhắc lại truy chứng hữu hạn.

Định lý (truy chứng hữu hạn)

Cho họ $(P_i)_i$ là các mệnh đề luận lý có giá trị đúng hoặc sai, $\forall i \in \mathbb{N}$.

P_i đúng với mọi $i \in \mathbb{N}$ nếu

✧ P_1 đúng, và

✧ Nếu các mệnh đề $P_2, \ldots, P_n$ đúng thì P_{n+1} đúng, với $n \geq 1$.

Định lý (truy chứng siêu hạn hay vô hạn)

Cho họ $(P_i)_i$ là các mệnh đề luận lý có giá trị đúng hoặc sai, $\forall i \in S$, S là tập hợp có thứ tự hoàn hảo.

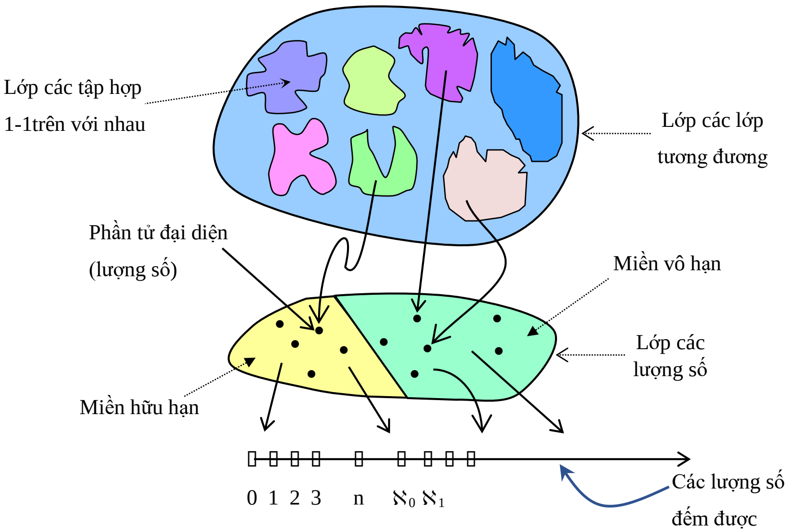
P_i đúng với mọi $i \in S$ nếu

✧ P_a đúng với a là thứ số nhỏ nhất trong S, và

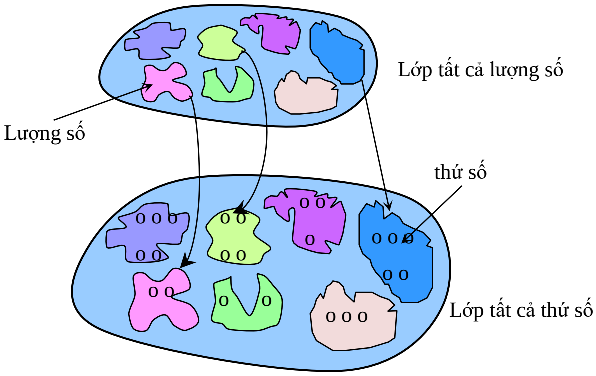
✧ Nếu các mệnh đề P_x đúng với mọi $x \in \text{Init}(a)$ với $a \in S$ thì P_a đúng.

Minh họa khái niệm lượng số, thứ số

Lượng số



Thứ số



BÀI TẬP

Sau khi đọc bài tập ở các chương đọc giả nên dành “chút ít” thời gian để suy nghĩ về bài tập trưới khi giải. Nên cố gắng giải, cách thức suy nghĩ có thể xem phụ chương thủ tục hóa tư duy. Cuối cùng nếu không giải được hãy xem bài giải. Điều quan trọng của việc làm bài tập không phải làm nhiều hay làm ít, giải đúng hay sai. Mục tiêu là quá trình giải, và sau khi giải xong bài tập người giải đã thu lượm được những gì. Kết quả đúng hay sai chỉ là yếu tố thời gian đối với người học. Làm bài tập là phương pháp luyện tập tính kiên trì. Đo lường mức độ kiên nhẫn của người học. Sự nghiền ngẫm và chiêm nghiệm bao giờ cũng mang lại nguồn cảm hứng về mỹ tính. Về vấn đề này G. F. Simmons đã cho chúng ta một ý tưởng để đánh giá việc học tập và cả việc làm bài tập. Độc giả có thể thỏa mãn khi đã nắm nó như một toàn thể và cuối cùng chỉ còn lại một ý tưởng trong đầu. Đó chẳng phải là mỹ tính. Chân, dụng, hội, thiện, mỹ, mỗi thứ có giá trị nhất định. Nhưng vào mỗi lúc thì sẽ có cái vượt trội hơn. Mỗi người có cách đánh giá cho riêng mình : lúc nào, nơi nào và cái nào vượt trội. Đừng biến việc giải bài tập thành cực hình, hãy ngắm nhìn để thấy cái đẹp và giá trị của nó. Không phải cứ kiên trì là tốt, đừng hút đầu vào đá để mong bật ra được lời giải. Nhiều khi cũng phải biết đầu hàng. Hồi đầu thị ngạn. Dừng lại, một khoảng lặng cũng rất có giá trị, cầu thủ cũng còn có thời gian nghỉ giữa hai hiệp. Hãy đánh giá lại quỹ kiến thức, quỹ hời gian, sau đó quyết định tiếp tục hay từ bỏ vĩnh viễn.

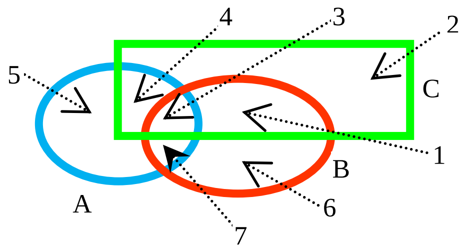
Bài tập chương I TỔNG QUAN VỀ TẬP HỢP

I.1. Một trường Đại Học có 1000 nhân viên, trong đó có 400 giảng viên. Số lượng sinh viên của 10 Khoa lần lượt là 5000, 5000, 3000, 2000, 1000, 500, 500, 200, 150, 100. Trường có 500 phòng học. Hãy mô tả tất cả trường hợp có thể của trường bằng ngôn ngữ tập hợp theo các cách nhìn sau :

- chỉ quan tâm đến số người có trong trường
- chỉ quan tâm đến số Khoa và SV trong khoa
- chỉ quan tâm đến số phòng học.

I.2. Cho các tập hợp A, B, C như hình sau.

Dùng các toán tử hội, giao, hiệu, bù, phụ xác định các tập hợp mang số : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, (1+7), (4+7), (2+4), (5+7).



I.3. Liệt kê phần tử của các tập hợp sau :

$K = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 12\}$, $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chẵn và } x < 15\}$,

$T = \{x \in \mathbb{N} \mid 4+x = 3\}$, $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ lẻ và } -3 < x < 10\}$.

I.4. Tính $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))))$.

I.5. Tính $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))))))))$.

I.6. Chứng minh $(A \cap B) \subseteq B$.

I.7. Chứng minh $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$.

I.8. Chứng minh $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

I.9. Chứng minh $A - B = A \cap (B)'$.

I.10. Cho các tập hợp R, S, T chứng minh các đồng nhất thức :

(ký hiệu S’ là phần bù của S)

a. $R \cap S = S \cap R$,   b. $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$

c. $R \cup S = S \cup R$,   d. $R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$

e. $S \cap (S \cup T) = S$,   f. $S \cup (S \cap T) = S$

g. $(R \cap S)' = R' \cup S'$,   h. $(R \cup S)' = R' \cap S'$.

I.11. Chứng minh $T = S \leftrightarrow (T \cap S') \cup (T' \cap S) = \varnothing$.

I.12. Tìm tất cả ánh xạ từ tập 3 phần tử vào tập 3 phần tử.

I.13. Tìm tất cả ánh xạ từ X = {a, b, c} vào Y = {0,1} và tất cả ánh xạ từ Y vào X. Sau đó phân loại các ánh xạ theo 3 nhóm : 1-1, trên, khả đảo.

I.14. Chứng minh số tập con của một tập hợp có n phần tử là 2^n.

Bài tập chương II   QUAN HỆ

II.1. Chứng minh $(R \cup S) : T = (R : T) \cup (S : T)$.

II.2. Tính $(R : S)^{-1}$ với các quan hệ :

R = {(a, b), (c, a), (b, d), (b, c)},   S = {(d, a), (c, a), (b, a), (c, d)}.

II.3. Xác định các tính chất phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và truyền của các quan hệ :

a. “$m^2+m = n^2+n$”, trên $\mathbb{Z}$.   b. ”$|x| \le |y|$“, trên $\mathbb{R}$.

c. “x–y là bội của 2π“, trên $\mathbb{R}$.   d. “$x^2+y^2 =1$”, trên $\mathbb{R}$..

II.4. Cho quan hệ R kiểm tra tính phản hồi, đối xứng, phản đối xứng, truyền :

R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (7, 8), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}.

Vẽ hình kiểm tra tính truyền. Bổ sung để R truyền.

II.5. Xây dựng các quan hệ trên X = {a, b, c, d} như sau :

R1 phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và không truyền,

R2 không phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và truyền,

R3 phản hồi, đối xứng, không phản đối xứng và không truyền,

R4 không phản hồi, đối xứng, không phản đối xứng và truyền,

R5 không phản hồi, đối xứng, không phản đối xứng và không truyền,

II.6. Một quan hệ R trên tập hợp X vào chính nó được gọi là xoay vòng (circular) :

$$(xRy \text{ và } yRz) \longrightarrow zRx.$$

Chứng minh : R phản hồi và circular $\longleftrightarrow$ R phản hồi, đối xứng và truyền.

II.7. R là quan hệ trên X. Chứng minh rằng :

a. R đối xứng $\longleftrightarrow R^{-1} \subset R$ b. R truyền $\longleftrightarrow R : R \subset R$.

II.8. Cho R là quan hệ trên X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (7, 8), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}.

Chứng minh quan hệ R là quan hệ tương đương. Tìm các lớp tương đương.

II.9. Cho phân hoạch trên tập X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} như sau : {1, 2, 5}, {3, 6}, {4, 7, 9}, {8}.

Tìm quan hệ tương đương tương ứng với phân hoạch này.

II.10. Khảo sát các tính phản hồi, đối xứng, phản đối xứng, truyền của quan hệ R trên X = {a, b, c, d, g}.

R = {(g, g), (a, c), (b, d), (b, c), (a, a), (g, a), (b, a)}.

Bổ sung (ít nhất) để quan hệ trở thành tương đương.

II.11. Cho quan hệ R = {(a, b), (c, d), (b, d), (a, a)}, của A × A với

A = {a, b, c, d}.

Tìm quan hệ R : R : R. Tìm quan hệ truyền nhỏ nhất chứa R.

II.12. Cho quan hệ R = {(a, b), (c, d), (b, d), (a, a)} của A×A với

A = {a, b, c, d}.

Bổ sung vào quan hệ R để R phản hồi, đối xứng nhưng không truyền.

II.13. Chứng minh R là quan hệ thứ tự trên V = {a, b, c, d, f, g} :

R = {(a, b), (a, g), (b, g), (g, d), (a, d), (a, f), (b, d), (c, b), (f, g), (c, g), (c, d), (c, f), (f, d)} + Δ.

Tìm phần tử cực đại, cực tiểu, tối đại, tối tiểu của R.

II.14. Chứng minh R là quan hệ thứ tự trên X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (6, 1), (6, 2), (3, 5), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}

R là quan hệ toàn phần hay riêng phần ?.

R còn là quan hệ thứ tự trên X' = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ?

II.15. Lấy quan hệ thứ tự R trên X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

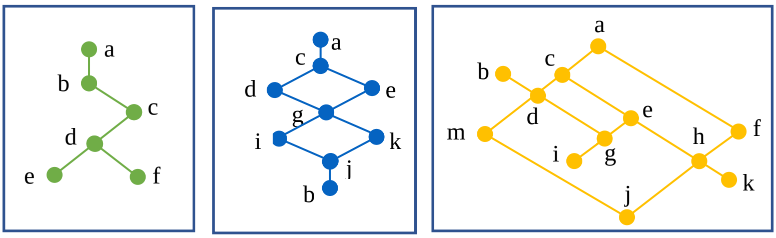
R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (6, 1), (6, 2), (3, 5), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}.

Tìm phần tử tối đại, tối tiểu, cực đại, cực tiểu.

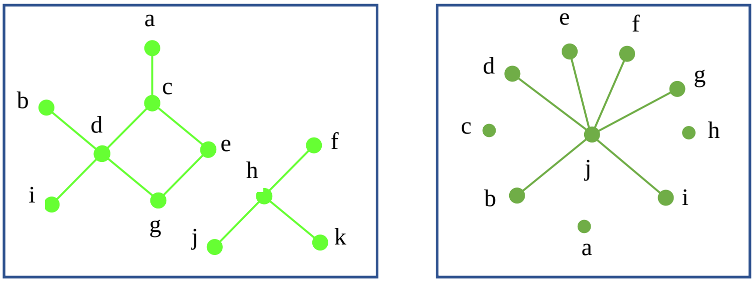
II.16. R = {(a, c), (a, d), (a, e), (a, g), (a, h), (a, i), (a, j), (a, k), (b, d), (b, g), (b, i), (c, d), (c, e), (c, g), (c, h), (c, i), (c, j), (c, k), (d, g), (d, i), (e, g), (e, h), (e, i), (e, j), (e, k), (f, h), (f, j), (f, k), (g, i), (h, j), (h, k)} ∪ Δ.

Tìm phần tử cực đại, cực tiểu, tối đại, tối tiểu (nếu có).

II.17. Tìm các phần tử đặc biệt của quan hệ :



II.18. Tìm các phần tử đặc biệt của quan hệ :

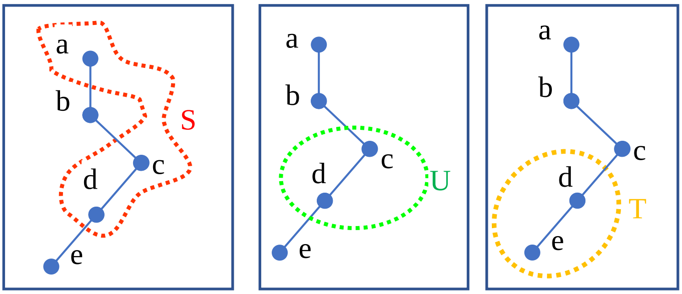


II.19. Lấy quan hệ thứ tự R trên X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

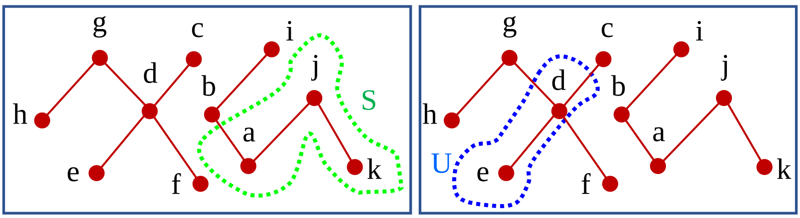
R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (6, 1), (6, 2), (3, 5), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}.

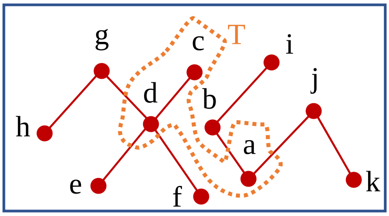
Tìm glb, lub của {1, 2, 3}, {7, 8}, {4, 7, 3}, {2, 4, 5, 6}.

II.20. Tìm lub, glb của các tập hợp S.

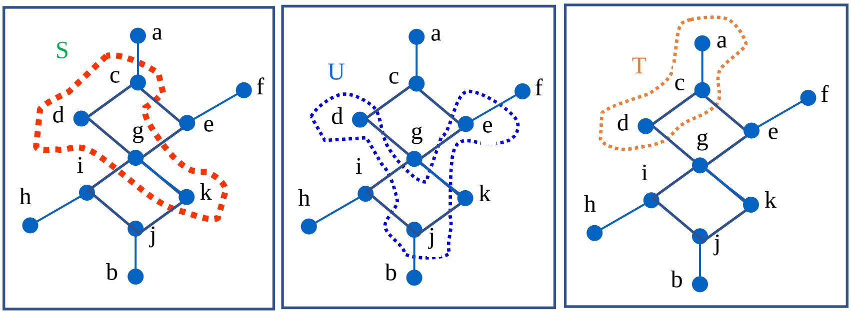


II.21. Tìm lub, glb của các tập hợp S.



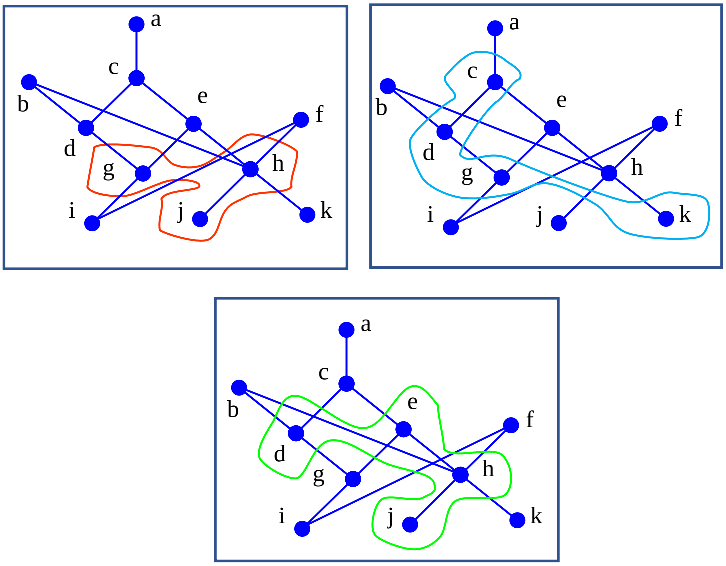


II.22. Tìm lub, glb của các tập hợp {a, c, d}, {c, d, g, k}, {d, e, j}.



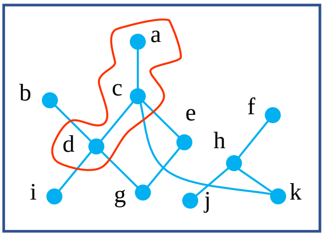
II.23. Tìm lub, glb của các tập hợp S = {g, h, j}, U = {c, d, g, k},

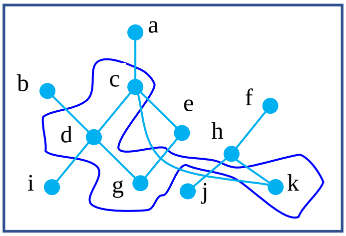
T = {d, e, h, j}.

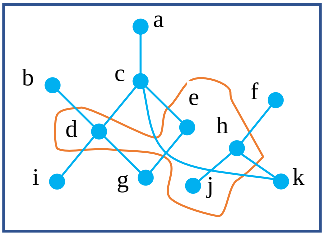


II.24. Tìm lub, glb của các tập hợp S = {a, c, d}, U = {c, d, g, k},

T = {d, e, h, j}.







II.25. Lấy quan hệ thứ tự R trên X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (6, 1), (6, 2), (3, 5), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}.

Tìm glb, lub của S = {1, 2, 3}, U = {7, 8}, T = {4, 7, 3}, V = {2, 4, 5, 6}.

II.26. Hãy xây dựng một quan hệ thứ tự R trên tập các số nguyên tự $\mathbb{Z}$ sao cho tập {–5, – 6, 10, 12} có chặn trên nhưng không có lub, có chặn dưới nhưng không có glb.

II.27. Cho A = {2, 3, 4, … , 25} được xắp thứ tự theo quan hệ "x chia đúng cho y".

Hãy vẽ ra quan hệ thứ tự. Tìm các phần tử cực đại, cực tiểu, tối đại, tối tiểu.

II.28. Cho biết quan hệ nào từ A = {a, b, c, d, e} vào B = {x, y, z, u, v, w} là ánh xạ :

R = {(a, x), (b, u), (a, w), (c, y), (d, z), (e, v)}

$S = \{(b, x), (a, y), (c, w), (d, z)\}$

$T = \{(c, x), (d, z), (e, v), (c, y), (d, w), (b, u), (d, y)\}$

$U = \{(a, x), (b, x), (c, x), (d, z), (e, v)\}$

II.29. Cho h, k là hai ánh xạ từ $X = [-1, 1] - Q$ vào $Y = R$.

$h(x) = x^2+2, \qquad k(x) = x - 3.$

a. Khảo sát tính 1-1 và trên của 2 ánh xạ h, k.

b. Hãy giới hạn miền trị và miền ảnh để h, k là 1-1trên.

II.30. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ánh xạ $f : A \times A \longrightarrow Z$ được định nghĩa là $f(x, y) = (x + y)$.

Đặt $R = \{(\alpha, \beta) \mid f(\alpha) = f(\beta)\} \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$.

Chứng minh R là quan hệ tương đương. Có bao nhiêu lớp tương đương của quan hệ R.

Hãy chọn một phần tử đại diện của mỗi lớp tương đương.

II.31. Cho f là ánh xạ từ A vào B, và $S, T \subseteq B$. Chứng minh

$f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \qquad$ và $\qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

II.32. Ánh xạ $f : S \longrightarrow T$ với $S \neq \emptyset$. Xây dựng ánh xạ $h : T \longrightarrow S$ sao cho $fhf = f$.

II.33. Nếu f là 1-1, fg và fg' xác định chứng minh rằng fg = fg' thì g = g'.

Tìm một phát biểu tương đồng với f là ánh xạ trên.

II.34. Nếu f là trên, gf và g'f xác định chứng minh rằng gf = g'f thì g = g'.

II.35. Cho 3 ánh xạ

$f_1 : X \longrightarrow A_1, \qquad f_2 : X \longrightarrow A_2, \qquad f_3 : X \longrightarrow A_3$

chứng minh rằng có đúng một ánh xạ

$h : X \longrightarrow (A_1 \times A_2 \times A_3)$ sao cho $p_i h = f_i$, với $i = 1, 2, 3$,

và mỗi p_i là phép chiếu từ $A_1 \times A_2 \times A_3 \longrightarrow A_i$.

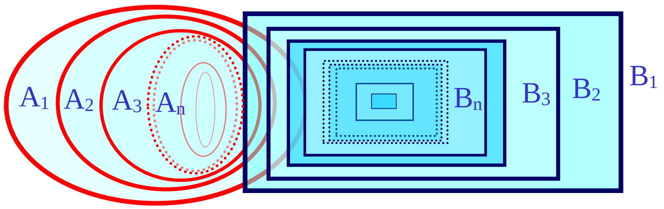
II.36. Cho $f : A \longrightarrow B$ là ánh xạ 1-1. Chứng minh rằng có ánh xạ 1-1 từ 2^A vào 2^B.

II.37. Cho ánh xạ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ với $n \mapsto n^3$ chứng minh f không là ánh xạ trên.

Có thể thay đổi domain và codomain để có ánh xạ mở rộng f' của f là 1-1trên.

II.38. Nếu $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ Và $B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset ...$ thì

$\cap(A_i \cup B_i) = (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$.



II.39. Cho $(A_i)_{i\in \mathbb{N}}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, A_i là các tập hợp.

II.40. Chứng minh $\cap(A_i \cup B_i) \subset (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$, với $I = \mathbb{N}$.

II.41. Chứng minh $\cap (A_i \cup B_i) = (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$, với $I = [1, n]$.

II.42. Cho $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, A_i là các tập hợp.

Đặt $C_1 = A_1$, $C_n = A_n - A_{n-1}$, $n = 2,3,..$.

Chứng minh : a. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall\ n \neq m$, b. $A_n = \cup_{[1, n]}C_i$,

c. $\cup_{\mathbb{N}} A_i = \cup_{\mathbb{N}} C_i$.

II.43. Cho $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ là họ tập hợp bất kỳ. Đặt $B_n = \cup_{[1, n]}A_i$.

Chứng minh : a. $B_n \subset B_{n+1}$, b. $\cup_{\mathbb{N}} A_i = \cup_{\mathbb{N}} B_i$.

Đặt $C_1 = A_1$ va $C_n = A_n - \cup_{[1, n-1]}A_i$, $n = 2,3, ...$

Chứng minh : c. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall\ n \neq m$, d. $A_n = \cup_{[1, n]}C_i$,

e. $\cup_{\mathbb{N}} A_i = \cup_{\mathbb{N}} C_i$.

II.44. Chứng minh $\cup(A_t - B_t) \not\subset \cup A_t - \cup B_t$.

Lấy thí dụ minh họa với tập chỉ số $T = \{1, 2\}$.

$(A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2) \not\subset (A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2)$.

II.45. Chứng minh $\cap (A_i \cup B_i) \not\subset (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$. Lấy tập chỉ số I = {1, 2}.

$$(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \quad \not\subset \quad (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2).$$

II.46. Cho biết tương quan giữa 3 tập hợp sau :

$$\bigcap_{1}^{n} A_i \;\; ? \;\; \bigcap_{1}^{\infty} A_i \;\; ? \;\; \bigcup_{\mathbb{N}} A_i$$

Bài tập chương III PHÂN LỚP CÁC TẬP HỢP

III.1. Tập $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$.

Tập $\Sigma^* = \{ x_1x_2 \ldots x_n \mid (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall i \in [1, n]) (x_i \in \Sigma) \}$.

Minh họa : aaa, abcbbd, nguyen $\in \Sigma^*$.

Chứng minh Σ^* là vô hạn.

III.2. Tập các tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$ là đếm được.

III.3. Tập hợp $2^{\mathbb{N}}$ không đếm được.

III.4. Cho $f \subseteq \mathbb{N} \times I$, với $I = [0, 1] \subseteq R$.

Nếu f là ánh xạ chứng minh rằng tập f đếm được.

Chỉ ra một tập f không đếm được với f chỉ là một quan hệ của $\mathbb{N}$ và I, nhưng f không là ánh xạ.

III.5. Gọi X = tập các tập con của tập số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$. (1)

Đặt X_1 = tập các tập con có 1 phần tử của $\mathbb{N}$, (2)

X_2 = tập các tập con có 2 phần tử của $\mathbb{N}$, (3)

…

Do đó $X = \bigcup_{\mathbb{N}} X_i$ (4)

Các X_i đếm được, tập chỉ số $\mathbb{N}$ là đếm được. (5)

$\Rightarrow$ X đếm được (hội mở rộng). (6)

Cho biết lập luận trên có dòng nào sai.

III.6. Xây dựng các tập P_i hữu hạn và từng đôi khác nhau (i.e. $P_i \neq P_j$ với $i \neq j$) trên tập chỉ số $\mathbb{N}$ sao cho ΠP_i vô hạn đếm được.

III.7. Chứng minh tập $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ là không đếm được.

III.8. Cho một thí dụ giao trên tập chỉ số đếm được của các lượng số vô hạn không đếm được có lượng số là $\aleph_2$.

III.9. Tìm tập con vô hạn không đếm được của tập các số vô tỉ trong khoảng [19, 37].

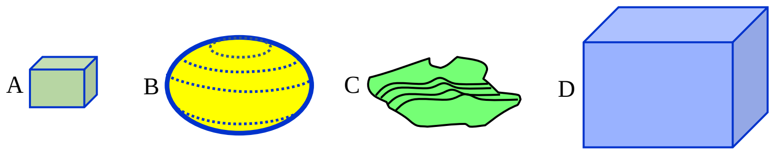
Bài tập chương IV LƯỢNG SỐ – THỨ SỐ

IV.1. Chuyển số thực từ dạng thập phân sang dạng nhị phân.

IV.2. Chứng minh : $\mathcal{P}(X)$ 1-1trên với 2^X.

IV.3. Tìm lượng số của $A = \{X |\ X$ là tập con hữu hạn của $S\}$, với $S = \{x \mid x \in \mathbb{N}_e$ và $x > 2\}$.

IV.4. Chứng minh khối vuông A, khối cầu B, cố thể C và khối vuông D 1-1trên với nhau.



IV.5. Xét khối hình nón V trong $\mathbb{R}^3$ có trục trùng với trục Oz, đỉnh hình nón trùng với đỉnh O. Miệng nón hướng theo chiều âm của truc Oz.

Lấy mặt cầu U tâm O bán kính r = 1.

Gọi M là giao giữa V và mặt cầu U.

Chứng minh M có cùng lượng số với [0,1].

Cho biết góc hợp bởi trục Oz và đường sinh (giao của mặt nón và mặt phẳng XOZ) là $\pi/5$.

IV.6. Chứng minh tập tích ΠP_i trên tập chỉ số $\mathbb{N}$ là vô hạn với

$$P_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}_e \text{ và } x \leq i+1\}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

IV.7. Chứng minh tập các điểm có tọa độ hữu tỉ trên mặt cầu có bán kính r = 4 trong $\mathbb{R}^6$ là đếm được. Cho biết lượng số của tập hợp này.

BÀI GIẢI

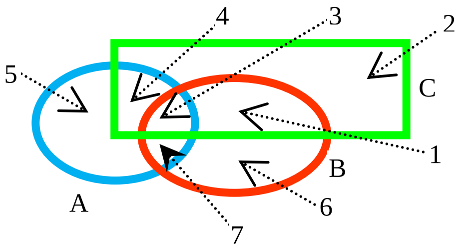
Bài tập chương I TỔNG QUAN VỀ TẬP HỢP

I.1. Dễ dàng.

I.2. Cho các tập hợp A, B, C như hình sau.

Dùng các toán tử hội, giao, hiệu, bù, phụ xác định các tập hợp mang số :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, (1+7), (4+7), (2+4), (5+7).



<u>Bài giải</u> :

$1 = (B \cap C) - A$. $2 = C - (A \cup B)$. $3 = A \cap B \cap C$.

$4 = (A \cap C) - B$. $5 = A - (B \cup C)$. $6 = B - (A \cup C)$.

$7 = (B \cap A) - C$.

I.3. Dê dàng.

I.4. Tính $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))))$.

<u>Bài giải</u> :

Tính $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))))$.

<u>Cách giải thông thường theo định nghĩa</u>

$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{1\}\}\}, \{\{\varnothing, \{1\}\}\},$

$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{1\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing, \{1\}\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\{1\}\}\},$

$\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}, \{\{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\},$

$\{\{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}, \{\varnothing, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\},$

$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}\},$

$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}\ \}$

Nhận xét

Cách giải này dễ sai sót vì các dấu móc "{" gây rối.

Cách giải thông thường theo định nghĩa

$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}$

Mã hóa $\varnothing = a$, $\{\varnothing\} = b$, $\{\{1\}\} = c$, $\{\varnothing, \{1\}\} = d$.

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{a, b, c, d\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))) = \{\ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$

$\{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\ \}$

I.5. Tính $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))))))))$.

Bài giải :

Bài này nếu không mã hóa trong các bước giải sẽ rất tốn thời gian và dễ sai sót.

I.6. Chứng minh $(A \cap B) \subseteq B$.

Bài giải :

Bài tập thuộc dạng $X \subseteq Y$.

Lấy $x \in X$, ……, $\Rightarrow x \in Y$.

Lấy $x \in (A \cap B)$,

Do định nghĩa của toán tử giao :

$\Rightarrow (x \in A)$ và $(x \in B)$.

Do đó $x \in B$.

Vậy $(A \cap B) \subseteq B$

I.7. Chứng minh $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$.

Bài giải :

Lấy $x \in (C \cap (A \cup B))$.

$\Leftrightarrow (x \in C)$ và $(x \in (A \cup B))$ (định nghĩa giao).

$\Leftrightarrow (x \in C)$ và $(\underline{(x \in A)}$ hay $\underline{(x \in B)})$ (định nghĩa hội).

$\Leftrightarrow \underline{(x \in C \text{ và } x \in A)}$ hay $\underline{(x \in C \text{ và } x \in B)}$ (phân bố).

$\Leftrightarrow \underline{x \in (C \cap A)}$ hay $\underline{x \in (C \cap B)}$ (định nghĩa giao).

$\Leftrightarrow x \in ((C \cap A) \cup (C \cap B))$ (định nghĩa hội).

Cách chứng minh dễ sai và mất sức, vì dòng suy nghĩ không đi một mạch từ trên xuống mà phải đi lên, đi xuống ở tại mỗi dòng.

Có thể chọn cách giải sau :

Chia thành hai bài toán nhỏ :

Bài 1 : $C \cap (A \cup B) \subseteq (C \cap A) \cup (C \cap B)$.

Bài 2 : $C \cap (A \cup B) \supseteq (C \cap A) \cup (C \cap B)$.

Chứng minh bài 1.

Lấy $x \in C \cap (A \cup B)$, ……, $\Rightarrow x \in (C \cap A) \cup (C \cap B)$.

Chứng minh bài 2. Có thể tuyên bố "tương tự", nếu "làm biếng", còn nếu siêng thì cũng thực hiện như bài 1.

I.8. Chứng minh $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

Bài giải :

Đặt $U = B \cup B'$.

Chứng minh $(A \cap B) \cup (A \cap B') \subseteq A$.

Lấy $x \in (A \cap B) \cup (A \cap B')$.

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ hay $x \in (A \cap B')$.

$\Rightarrow (x \in A$ và $x \in B)$ hay $(x \in A$ và $x \in B')$.

$\Rightarrow (x \in A)$ và $(x \in B$ hay $x \in B')$.

$\Longrightarrow x \in A$.

$\Longrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap B') \subseteq A$.

Chứng minh $A \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap B')$.

Lấy $x \in A$.

$\Longrightarrow U = B \cup B'$.

$\Longrightarrow x \in A$ và $x \in (B \cup B')$.

$\Longrightarrow (x \in A)$ và $(x \in B$ hay $x \in B')$.

$\Longrightarrow (x \in A$ và $x \in B)$ hay $(x \in A$ và $x \in B')$.

$\Longrightarrow x \in (A \cap B)$ hay $x \in (A \cap B')$.

$\Longrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap B')$.

I.9. Chứng minh $A - B = A \cap (B)'$.

Bài giải :

Lấy $x \in A - B$.

$\Longrightarrow x \in A$ và $x \notin B$.

$\Longrightarrow x \in A$ và $x \in B'$.

$\Longrightarrow A \cap (B)'$.

Chiều ngược lại tương tự.

I.10. Dễ dàng.

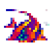
I.11. Dễ dàng.

I.12. Tìm tất cả ánh xạ từ tập 3 phần tử vào tập 3 phần tử.

A B

Bài giải :

Mã hóa :

Lới giải :  = 1,  = 2,  = 3

Cả 3 phần tử của A $\rightarrow$ một phần tử của B :

$[(1, 2, 3) \mapsto a]$,	$[(1, 2, 3) \mapsto b]$,	$[(1, 2, 3) \mapsto c]$

Cả 2 phần tử của A $\rightarrow$ một phần tử của B + một phần tử của A $\rightarrow$ một phần tử của B :

$[(1, 2) \mapsto a, (3) \mapsto b]$,	$[(1, 2) \mapsto a, (3) \mapsto c]$
$[(1, 2) \mapsto b, (3) \mapsto a]$,	$[(1, 2) \mapsto b, (3) \mapsto c]$
$[(1, 2) \mapsto c, (3) \mapsto a]$,	$[(1, 2) \mapsto c, (3) \mapsto b]$

$[(1, 3) \mapsto a, (2) \mapsto b]$,	$[(1, 3) \mapsto a, (2) \mapsto c]$
$[(1, 3) \mapsto b, (2) \mapsto a]$,	$[(1, 3) \mapsto b, (2) \mapsto c]$
$[(1, 3) \mapsto c, (2) \mapsto a]$,	$[(1, 3) \mapsto c, (2) \mapsto b]$

$[(2, 3) \mapsto a, (1) \mapsto b]$,	$[(2, 3) \mapsto a, (1) \mapsto c]$
$[(2, 3) \mapsto b, (1) \mapsto a]$,	$[(2, 3) \mapsto b, (1) \mapsto c]$
$[(2, 3) \mapsto c, (1) \mapsto a]$,	$[(2, 3) \mapsto c, (1) \mapsto b]$

Mỗi phần tử của A $\rightarrow$ mỗi phần tử của B :

$[1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c]$,	$[1 \mapsto a, 2 \mapsto c, 3 \mapsto b]$
$[1 \mapsto b, 2 \mapsto a, 3 \mapsto c]$,	$[1 \mapsto b, 2 \mapsto c, 3 \mapsto a]$
$[1 \mapsto c, 2 \mapsto a, 3 \mapsto b]$,	$[1 \mapsto c, 2 \mapsto b, 3 \mapsto a]$

Tổng cộng có 27 ánh xạ.

I.13. Dễ dàng.

I.14. Chứng minh số tập con của một tập hợp có n phần tử là 2^n.

Bài giải :

Chứng minh bằng tuy chứng.

Phát biểu đúng với n = 0.

Số tập con của tập rỗng là $2^0 = 1$.

Giả thiết truy chứng : phát biểu đúng với $i < n+1$.

Chứng minh phát biểu đúng với n+1.

Đặt A là tập hợp có n+1 phần tử.

Chọn phần tử a $\in$ A.

$\Longrightarrow$ (A – {a}) là tập hợp có n phần tử.

$\Longrightarrow$ Số tập con của (A – {a}) là 2^n.

Thêm phần tử a vào tất cả 2^n tập con.

$\Longrightarrow$ Số tập con của A là 2^{n+1}.

Minh họa :

A = {1, 2, 3}, A* = {1, 2}, 2^{A*} = {{}, {1}, {2}, {1, 2}},

Thêm 3 vào các tập con của 2^{A*} : {{3}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

2^A = {{}, {1}, {2}, {1, 2}, {3}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

Bài tập chương II QUAN HỆ

II.1. Chứng minh $(R \cup S) : T = (R : T) \cup (S : T)$.

<u>Bài giải</u> :

Chia lam hài bài toán nhỏ :

a. Chứng minh $(R \cup S) : T \subseteq (R : T) \cup (S : T)$ và

b. Chứng minh $(R : T) \cup (S : T) \subseteq (R \cup S) : T$.

Chứng minh a : $(R \cup S) : T \subseteq (R : T) \cup (S : T)$

Lấy $(x, y) \in (R \cup S) : T$

Ký hiệu (x, y) là xy.

$\Longrightarrow (\exists z)\ [(xz \in (R \cup S)) \wedge (zy \in T)]$

$\Longrightarrow (\exists z)\ [((xz \in R) \vee (xz \in S)) \wedge (zy \in T)]$

$\Longrightarrow (\exists z)\ [((xz \in R) \wedge (zy \in T)) \vee ((xz \in S) \wedge (zy \in T))]$

$\Longrightarrow (xy \in R : T) \vee (xy \in S : T)$

$\Longrightarrow xy \in (R : T) \cup (S : T)$

Chứng minh b : $(R : T) \cup (S : T) \subseteq (R \cup S) : T$.

Lấy $xy \in (R : T) \cup (S : T)$

$\Longrightarrow (xy \in R : T) \vee (xy \in S : T)$

$\Longrightarrow (\exists z)[(xz \in R) \wedge (zy \in T)] \vee (\exists z')[(xz' \in S) \wedge (z'y \in T)]$

$\Longrightarrow$ không thể rút gọn vì $z \neq z'$.

$\Longrightarrow$ Chuyển thành 2 bài toán

b1. $(R : T) \subseteq (R \cup S) : T$ và

b2. $(S : T) \subseteq (R \cup S) : T$.

Chứng minh b1 : $(R : T) \subseteq (R \cup S) : T$.

Lấy $(x, y) \in (R : T)$.

$\Longrightarrow (\exists z)\ (\ (xz \in R) \wedge (zy \in T)\ )$

$\Longrightarrow (\exists z)\ (\ (xz \in R \cup S) \wedge (zy \in T)\ )$

$\Longrightarrow xy \in (R \cup S) : T$

Chứng minh b2 : $(S : T) \subseteq (R \cup S) : T$. Tương tự như trên,

II.2. Tính $(R : S)^{-1}$ với các quan hệ :

$R = \{(a, b), (c, a), (b, d), (b, c)\}$, $S = \{(d, a), (c, a), (b, a), (c, d)\}$.

Bài giải :

$(R : S)^{-1} = \{(a, a), (b, a), (b, d)\}^{-1}$

$= \{(a, a), (a, b), (d, b)\}$

II.3. Xác định các tính chất phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và truyền của các quan hệ :

a. "$m^2 + m = n^2 + n$", trên $\mathbb{Z}$.

b. "$|x| \leq |y|$", trên $\mathbb{R}$.

c. "$x - y$ là bội của 2π", trên $\mathbb{R}$.

d. "$x^2 + y^2 = 1$", trên $\mathbb{R}$..

Bài giải :

a. Quan hệ R được xác định như sau : $(m, n) \in R \Leftrightarrow$ "$m^2 + m = n^2 + n$".

$\Longrightarrow m^2 + m = m^2 + m \Longrightarrow (m, m) \in R$.

$\Longrightarrow$ R phản hồi.

$\Longrightarrow$ (m, n) $\in$ R $\Leftrightarrow$ "$m^2 + m = n^2 + n$" $\Leftrightarrow$ "$n^2 + n = m^2 + m$"

$\Leftrightarrow$ (n, m) $\in$ R.

$\Longrightarrow$ R đối xứng.

$\Longrightarrow$ có (m, n) $\in$ R và (n, m) $\in$ R.

$\Longrightarrow$ không phản đối xứng.

$\Longrightarrow$ (m, n) $\in$ R và (n, p) $\in$ R

$\Longrightarrow$ $m^2 + m = n^2 + n$" = "$p^2 + p$.

$\Longrightarrow$ truyền.

R = {(0, –1), (1, –2), (2, –3), (3, –4), (4, –5), (5, –6), … } $\cup$ Δ.

b. Quan hệ R được xác định như sau : (x, y) $\in$ R $\Leftrightarrow$ $|x| \leq |y|$.

$\Longrightarrow$ phản hồi, không đối xứng, phản đối xứng, truyền.

c. Quan hệ R được xác định như sau : (x, y) $\in$ R $\Leftrightarrow$ $x - y = k2\pi$.

$\Longrightarrow$ phản hồi, đối xứng, không phản đối xứng, truyền.

d. Quan hệ R được xác định như sau : (x, y) $\in$ R $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 1$.

$\Longrightarrow$ không phản hồi, có đối xứng, không phản đối xứng, không truyền.

II.4. Cho quan hệ R kiểm tra tính phản hồi, đối xứng, phản đối xứng, truyền :

R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 5),

(5, 3), (7, 8), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}

Vẽ hình kiểm tra tính truyền. Bổ sung để R truyền.

Bài giải :

D = {1, 2, 6, 3, 5, 7, 8, 4}

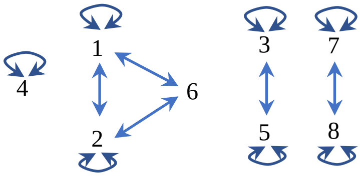
R phản hồi : {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)} $\subseteq$ R.

R đối xứng : (1, 2) có (2, 1), (1, 6) có (6, 1), (2, 6) có (6, 2),

(3, 5) có (5, 3), (7, 8) có (8, 7)

R không phản đối xứng vì có (1, 2) lại có (2, 1).

R đã truyền, không cần bổ sung.



II.5. Xây dựng các quan hệ trên X = {a, b, c, d} như sau :

R1 phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và không truyền,

R2 không phản hồi, đối xứng, phản đối xứng và truyền,

R3 phản hồi, đối xứng, không phản đối xứng và không truyền,

R4 không phản hồi, đối xứng, không phản đối xứng và truyền,

R5 không phản hồi, đối xứng, không phản đối xứng và không truyền,

<u>Bài giải</u> : Dễ dàng.

II.6. Một quan hệ R trên tập hợp X vào chính nó được gọi là xoay vòng :

$(xRy$ và $yRz) \longrightarrow zRx$. (xoay vòng = circular)

Chứng minh : R phản hồi và circular $\longleftrightarrow$ R phản hồi, đối xứng và truyền.

<u>Bài giải</u> :

Chứng minh : R phản hồi và circular $\rightarrow$ R phản hồi, đối xứng và truyền.

Lấy $(x, y), (y, z) \in R$.

$\Longrightarrow (x, x)$ và $(x, y) \in R$

$\Longrightarrow (y, x) \in R$, do R xoay vòng

$\Longrightarrow$ đối xứng.

$(x, y), (y, z) \in R$.

$\Longrightarrow (z, x) \in R$ do R xoay vòng

$\Longrightarrow (x, z) \in R$ do R đối xứng

$\Longrightarrow$ R truyền.

Chứng minh : R phản hồi, đối xứng và truyền $\rightarrow$ R phản hồi và circular.

Lấy $(x, y), (y, z) \in R$.

$\Longrightarrow (x, z) \in R$ do R truyền

$\Rightarrow (z, x) \in R$ do R đối xứng

$\Rightarrow$ R circular.

II.7. R là quan hệ trên X.

Chứng minh rằng : a. R đối xứng $\longleftrightarrow R^{-1} \subset R$

b. R truyền $\longleftrightarrow R : R \subset R$.

<u>Bài giải</u> :

a. Chứng minh R đối xứng $\rightarrow R^{-1} \subset R$

Lấy $(x, y) \in R^{-1}$.

$\Rightarrow (y, x) \in R$

$\Rightarrow (x, y) \in R$, do R đối xứng.

$\Rightarrow R^{-1} \subset R$.

Chứng minh $(R^{-1} \subset R) \rightarrow$ R đối xứng

Lấy $(x, y) \in R$.

$\Rightarrow (y, x) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \in R$.

$\Rightarrow$ R đối xứng.

b. Chứng minh R truyền $\rightarrow R : R \subset R$

Lấy $(x, y) \in R : R$.

$\Rightarrow \exists z : (x, z) \in R$ và $(z, y) \in R$

$\Rightarrow (x, y) \in R$, do R truyền

$\Rightarrow R : R \subset R$

Chứng minh $R : R \subset R \rightarrow$ R truyền

Lấy $(x, y), (y, z) \in R$.

$\Rightarrow (x, z) \in R : R$.

$\Rightarrow (x, z) \in R$,

$\Rightarrow$ R truyền.

II.8. Cho R là quan hệ trên X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (7, 8), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}.

Chứng minh quan hệ R là quan hệ tương đương. Tìm các lớp tương đương.

Bài giải :

Dễ dàng kiểm tra các tính chất của tính tương đương.

Lớp tương đương {1, 2, 6}, {3, 5}, {7, 8}, {4}, {6}.

II.9. Cho phân hoạch trên tập X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} như sau :

{1, 2, 5}, {3, 6}, {4, 7, 9}, {8}.

Tìm quan hệ tương đương tương ứng với phân hoạch này.

Bài giải : Dễ dàng.

II.10. Khảo sát các tính phản hồi, đối xứng, phản đối xứng, truyền của quan hệ R trên X = {a, b, c, d, g}.

R = {(g, g), (a, c), (b, d), (b, c), (a, a), (g, a), (b, a)}.

Bổ sung (ít nhất) để quan hệ trở thành tương đương.

Bài giải :

R không phản hồi vì thiếu : (b, b), (c, c), (d, d).

R không đối xứng vì thiếu : (c, a), (d, b), (c, b), (a, g), (a, b).

R không truyền vì thiếu : (a, d), (d, a), (c, d), (d, c), (g, d), (d, g), (b, g), (g, b), (c, g), (g, c).

Bổ sung : tất cả phần tử ở trên.

II.11. Cho quan hệ R = {(a, b), (c, d), (b, d), (a, a)}, của A × A với A = {a, b, c, d}.

Tìm quan hệ R : R : R. Tìm quan hệ truyền nhỏ nhất chứa R.

Bài giải :

R : R = {(a, d), (a, b), (a, a)}.

R : R : R = {(a, d), (a, b), (a, a)}.

$C(R) = \{(a, b), (c, d), (b, d), (a, a), (a, d)\}$.

II.12. Cho quan hệ $R = \{(a, b), (c, d), (b, d), (a, a)\}$ của $A\times A$ với

$A = \{a, b, c, d\}$.

Bổ sung vào quan hệ R để R phản hồi, đối xứng nhưng không truyền.

Bài giải :

Thêm Δ, (b, a), (d, c), (d, b).

Không truyền vì có (a, b) và (b, d) nhưng không có (a, d).

II.13. Chứng minh R là quan hệ thứ tự trên $V = \{a, b, c, d, f, g\}$:

$R = \{(a, b), (a, g), (b, g), (g, d), (a, d), (a, f), (b, d), (c, b), (f, g),$
$(c, g), (c, d), (c, f), (f, d)\} + \Delta$.

Tìm cực đại, cực tiểu, tối đại, tối tiểu của R.

Bài giải :

Dễ dàng kiểm tra các tính chất phản hồi, phản đối xứng và truyền.

Cực đại không có, cực tiểu : d.

Tối đại : a, c, tối tiểu : d.

II.14. Chứng minh R là quan hệ thứ tự trên $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (6, 1), (6, 2), (3, 5), (8, 7), (3, 3), (4, 4),$
$(5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)\}$

R là quan hệ toàn phần hay riêng phần ?.

R còn là quan hệ thứ tự trên $X' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Bài giải :

R là quan hệ riêng phần vì không có (1, 3) hay (3, 1).

R vẫn là quan hệ thứ tự trên X’ vì $R \subseteq X' \times X'$.

II.15. Lấy quan hệ thứ tự R trên $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

$R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (6, 1), (6, 2), (3, 5), (8, 7), (3, 3), (4, 4),$
$(5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)\}$.

Tìm tối đại, tối tiểu, cực đại, cực tiểu.

Bài giải :

Các phần tử tối đại = 6, 3, 8, 4. Các phần tử tối tiểu = 2, 5, 7, 4.

Cực đại không có, cực tiểu không có.

II.16. R = {(a, c), (a, d), (a, e), (a, g), (a, h), (a, i), (a, j), (a, k), (b, d), (b, g), (b, i), (c, d), (c, e), (c, g), (c, h), (c, i), (c, j), (c, k), (d, g), (d, i), (e, g), (e, h), (e, i), (e, j), (e, k), (f, h), (f, j), (f, k), (g, i), (h, j), (h, k)} $\cup$ Δ.

Tìm cực đại, cực tiểu, tối đại, tối tiểu (nếu có).

Bài giải :

Gọi R^{L*}, R^{R*} là R^L, R^R lấy trên $(R - \Delta)$.

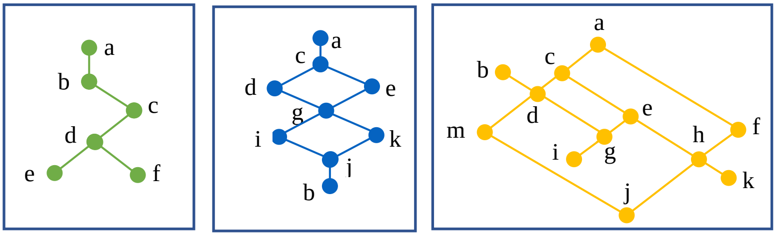
R^{L*} = {a, b, c, d, e, f, g, h}, R^{R*} = {c, d, e, g, h, i, j, k}

Các phần tử tối đại $(R^{L*} - R^{R*})$ = {a, b, f}

Các phần tử tối tiểu $(R^{R*} - R^{L*})$ = {i, j, k}

Không có cực đại, cực tiểu.

II.17. Tìm các phần tử đặc biệt của quan hệ :



Bài giải :

Hình trái.

R^{L*} = {a, b, c, d}, R^{R*} = {b, c, d, e, f}

Các phần tử tối đại $(R^{L*} - R^{R*})$ = {a}

Các phần tử tối tiểu $(R^{R*} - R^{L*})$ = {e, f}

Cực đại a, cực tiểu e, f.

Hình giữa.

R^{L*} = {a, c, d, e, g, i, k, j}, R^{R*} = {c, d, e, g, i, k, j, b}

Các phần tử tối đại ($R^{L*} – R^{R*}$) = {a}

Các phần tử tối tiểu ($R^{R*} – R^{L*}$) = {b}

Cực đại a, cực tiểu b.

<u>Hình giữa</u>.

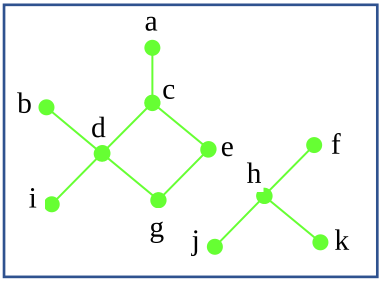
R^{L*} = {a, b, c, d, e, f, g, h, m}, R^{R*} = {c, d, e, f, g, h, i, j, k, m}

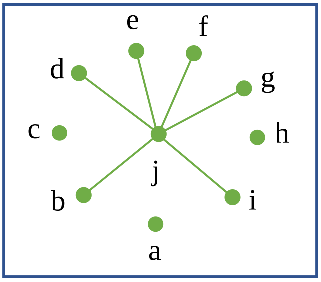
Các phần tử tối đại ($R^{L*} – R^{R*}$) = {a, b}

Các phần tử tối tiểu ($R^{R*} – R^{L*}$) = {i, j, k}

Cực đại không có, cực tiểu không có.

II.18. Tìm các phần tử đặc biệt của quan hệ :





<u>Bài giải</u> :

<u>Hình trái</u>.

Các phần tử tối đại = {a, b, f}. Các phần tử tối tiểu = {g, i, j, k}

Cực đại không có, cực tiểu không có.

<u>Hình phải</u>.

Các phần tử tối đại = {a, c, d, e, f, g, h}.

Các phần tử tối tiểu = {a, b, c, h, i}

Cực đại không có, cực tiểu không có.

II.19. Lấy quan hệ thứ tự R trên X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (6, 1), (6, 2), (3, 5), (8, 7), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)}.

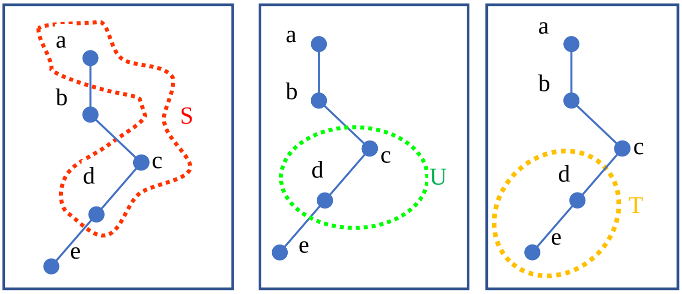
Tìm glb, lub của {1, 2, 3}, {7, 8}, {4, 7, 3}, {2, 4, 5, 6}.

Bài giải :

glb({1,2,3}), glb({4,7,3}), glb({2,4,5,6}) : tất cả không có, glb({7,8}) = 8,

lub({1,2,3}), lub({4,7,3}), lub({2,4,5,6}) : tất cả không có, lub({7,8}) = 7,

II.20. Tìm lub, glb của các tập hợp S.

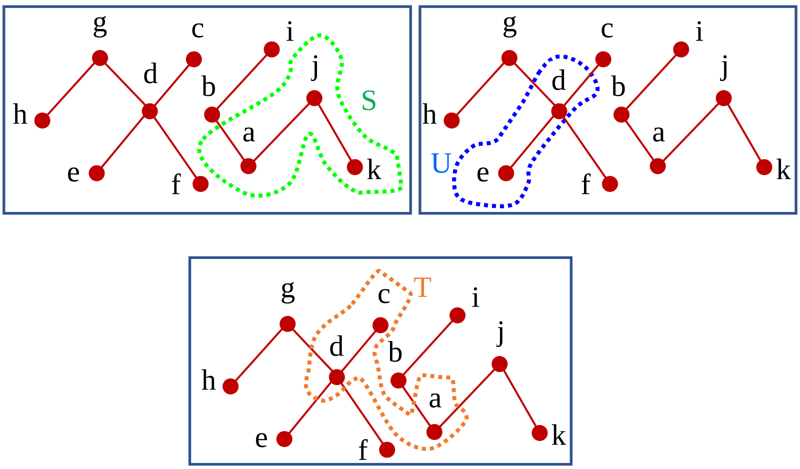


Bài giải :

lub(S) = a, lub(U) = c, lub(T) = d,

glb(S) = d, glb(U) = d, glb(T) = e,

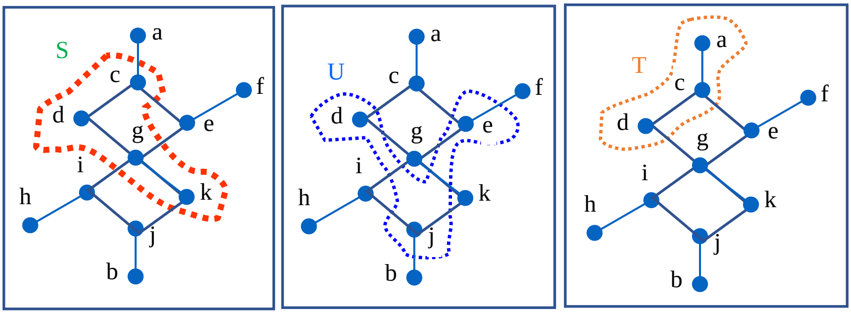
II.21. Tìm lub, glb của các tập hợp S.



Bài giải :

lub(S) = j, lub(U) = d, lub(T) = không có, glb(S) = không có, glb(U) = e, glb(T) = không có,

II.22. Tìm lub, glb của các tập hợp {a, c, d}, {c, d, g, k}, {d, e, j}.

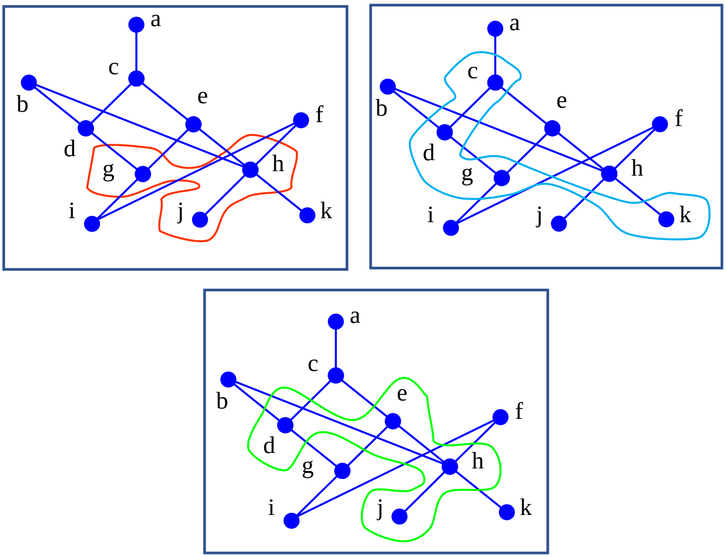


Bài giải :

lub(S) = c, lub(U) = c, lub(T) = a,

glb(S) = k, glb(U) = j, glb(T) = d,

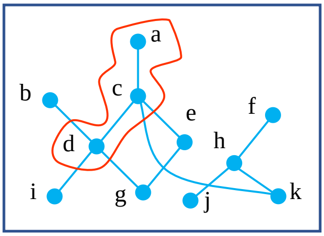
II.23. Tìm lub, glb của các tập hợp S = {g,h,j}, U = {c,d,g,k}, T = {d,e,h,j}.

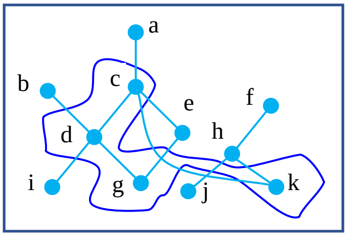


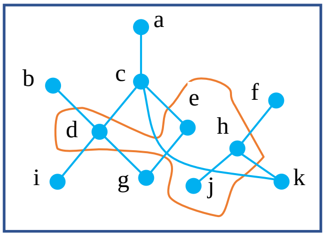
Bài giải :

lub(S) = e, lub(U) = c, lub(T) = c,

glb(S) = không có, glb(U) = không có, glb(T) = không có, II.24. Tìm lub, glb của các tập hợp S = {a,c,d}, U = {c,d,g,k}, T = {d,e,h,j}.







Bài giải :

lub(S) = a, lub(U) = c, lub(T) = không có,

glb(S) = d, glb(U) = không có, glb(T) = không có,

II.25. Dễ dàng.

II.26. Hãy xây dựng quan hệ thứ tự R trên tập các số nguyên tự $\mathbb{Z}$ sao cho tập

{–5, – 6, 10, 12} có chặn trên nhưng không có lub, có chặn dưới nhưng không có glb.

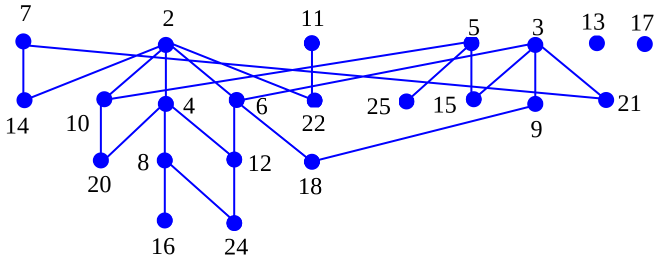
Bài giải :

$0 < -1 < -2 < -3 < -4 < -7 < -8 < \ldots < -5 < -6 < 10 < 12 < \ldots < 13 < 11 < 9 < \ldots < 3 < 2 < 1.$

II.27. Cho A = {2, 3, 4, … , 25} được xắp thứ tự theo quan hệ "x chia đúng cho y".

Hãy vẽ ra quan hệ thứ tự. Tìm phần tử cực đại, cực tiểu, tối đại, tối tiểu.

Bài giải :



II.28. Cho biết quan hệ nào từ A = {a, b, c, d, e} vào B = {x, y, z, u, v, w} là ánh xạ :

R = {(a, x), (b, u), (a, w), (c, y), (d, z), (e, v)}

S = {(b, x), (a, y), (c, w), (d, z)}

T = {(c, x), (d, z), (e, v), (c, y), (d, w), (b, u), (d, y)}

U = {(a, x), (b, x), (c, x), (d, z), (e, v)}

Bài giải :

Quan hệ R vi phạm điều kiện phần tử trị có 2 ảnh : (a, x) và (a, w).

Quan hệ S vi phạm điều kiện phần tử trị e không có ảnh.

Quan hệ T vi phạm điều kiện phần tử trị a khôngcó ảnh.

Quan hệ U là ảnh.

II.29. Cho h, k là hai ánh xạ từ X = [–1, 1]– Q vào Y = R.

$h(x) = x^2+2$, $k(x) = x - 3$.

a. Khảo sát tính 1-1 và trên của 2 ánh xạ h, k.

b. Hãy giới hạn miền trị và miền ảnh để h, k là 1-1trên.

Bài giải :

$h(x) = x^2 + 2$ không là 1-1 vì $h(\frac{1}{\sqrt{2}}) = h(-\frac{1}{\sqrt{2}})$,

không trên vì $x^2 + 2 - r = 0$ không luôn luôn có nghiệm.

$k(x) = x - 3$ là ánh xạ 1-1, không trên vì $x - 3 - r = 0$ không luôn luôn có nghiệm.

$h : ([0, 1] - Q) \longrightarrow ([2, 3] - Q)$ là 1-1trên.

$k : ([-1, 1] - Q) \longrightarrow ([-4, -2] - Q)$ là 1-1trên.

II.30. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ánh xạ $f : A \times A \longrightarrow Z$ được định nghĩa là $f(x, y) = (x + y)$.

Đặt $R = \{(\alpha, \beta) \mid f(\alpha) = f(\beta)\} \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$.

Chứng minh R là quan hệ tương đương. Có bao nhiêu lớp tương đương của quan hệ R.

Hãy chọn một phần tử đại diện của mỗi lớp tương đương.

Bài giải :

R là quan hệ của $(A \times A) \times (A \times A)$.

Phản hồi :

$\forall \alpha \in A \times A, \alpha = (x, y), f(\alpha) = f(\alpha) \Longrightarrow (\alpha, \alpha) \in R$.

Đối xứng : $\forall (\alpha, \beta) \in R, f(\alpha) = f(\beta) \Longrightarrow (\beta, \alpha) \in R$.

Truyền :

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in R, f(\alpha) = f(\beta)$ và $f(\beta) = f(\gamma) \Longrightarrow (\alpha, \gamma) \in R$.

Lớp tương đương : $1+1 = 2$, $1+2 = 3$, $1+3 = 4$, $1+4 = 5$.

$2+1 = 3$, $2+2 = 4$, $2+3 = 5$, $2+4 = 6$.

$3+1 = 4$, $3+2 = 5$, $3+3 = 6$, $3+4 = 7$.

$4+1 = 5$, $4+2 = 6$, $4+3 = 7$, $4+4 = 8$.

II.31. Cho f là ánh xạ từ A vào B, và $S, T \subseteq B$. Chứng minh

$f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ và $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Bài giải :

Chứng minh $f^{-1}(S \cup T) \subseteq f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

Lấy $x \in f^{-1}(S \cup T)$

$\Longrightarrow f(x) \in (S \cup T)$

$\Longrightarrow f(x) \in S \vee f(x) \in T$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(S) \vee x \in f^{-1}(T)$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

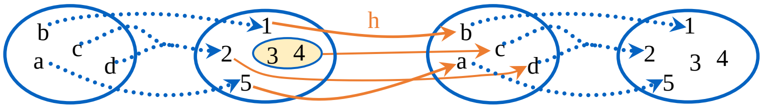
II.32. Ánh xạ $f : S \longrightarrow T$ với $S \neq \varnothing$.

Xây dựng ánh xạ $h : T \longrightarrow S$ sao cho $fhf = f$.

<u>Bài giải</u> :

$h(1) \in f^{-1}(\{1\})$, $h(2) \in f^{-1}(\{2\})$, $h(5) \in f^{-1}(\{5\})$,

$h(3), h(4) \in f^{-1}(\{1\})$ (có thể tùy ý chọn).



II.33. Nếu f là 1-1, fg và fg' xác định chứng minh rằng fg = fg' thì g = g'.

Tìm một phát biểu tương đồng với f là ánh xạ trên.

<u>Bài giải</u> :

$(\forall x)$, $fg(x) = fg'(x)$ vì $fg = fg'$.

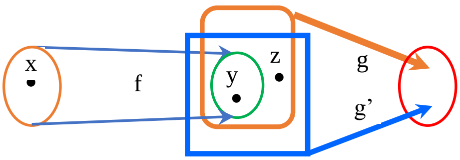
$\Longrightarrow (\forall x)$, $f(g(x)) = f(g'(x))$ hợp nối của 2 ánh xạ.

$\Longrightarrow (\forall x)$, $g(x) = g'(x)$ vì f là ánh xạ 1-1.

$\Longrightarrow g = g'$.

II.34. Nếu f là trên, gf và g'f xác định chứng minh rằng gf = g'f thì g = g'.

<u>Bài giải</u> :



Im(f) = Codom(f), do f là ánh xạ trên.

Codom (f) $\subseteq$ Dom(g), do gf xác định.

Codom (f) $\subseteq$ Dom(g'), do g'f xác định.

$\Longrightarrow$ Im(f) $\subseteq$ (Dom(g) $\cap$ Dom(g'))

$\forall y, z \in$ (Dom(g) $\cap$ Dom(g')), có $y \in$ Im(f) và $z \notin$ Im(f)

$\forall y \in$ Im(f), $\exists x \in$ Dom(f) : f(x) = y, vì f là ánh xạ trên

$\Longrightarrow gf(x) = g'f(x)$

$\Longrightarrow \forall y \in Im(f) : g(y) = g'(y)$

$\Longrightarrow g/_{Im(f)} = g'/_{Im(f)}$.

II.35. Cho 3 ánh xạ

$f_1 : X \longrightarrow A_1, \qquad f_2 : X \longrightarrow A_2, \qquad f_3 : X \longrightarrow A_3$

chứng minh rằng có đúng một ánh xạ

$h : X \longrightarrow (A_1 \times A_2 \times A_3)$ sao cho $p_i h = f_i$, với i = 1, 2, 3,

và mỗi p_i là phép chiếu từ $A_1 \times A_2 \times A_3 \longrightarrow A_i$.

Bài giải :

Ánh xạ $f_1 : X \longrightarrow A_1$, $f_2 : X \longrightarrow A_2$, $f_3 : X \longrightarrow A_3$

$h : X \longrightarrow (A_1 \times A_2 \times A_3)$

$h(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$

$\Longrightarrow p_i h = f_i$, với i = 1, 2, 3,

$p_i : A_1 \times A_2 \times A_3 \longrightarrow A_i$.

II.36. Cho $f : A \longrightarrow B$ là ánh xạ 1-1. Chứng minh rằng có ánh xạ 1-1 từ 2^A vào 2^B.

Bài giải :

Đặt $g : 2^A \longrightarrow 2^B$, $g(X) = f(X)$, $\forall X \subseteq A$.

1. g là ánh xạ.

$\forall X \subseteq A$, có $g(X) = f(X) \subseteq B$.

$\forall X \subseteq A$, $\exists!\ g(X)$.

2. g là 1-1.

Lấy $X \neq Y$, nghĩa là có $x \in X$ và $x \notin Y$.

Vì f là 1-1 nên $f(x) \notin f(Y)$.

Do đó $f(X) \neq f(Y)$.

II.37. Cho ánh xạ f : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ với $n \mapsto n^3$ chứng minh f không là ánh xạ trên.

Có thể thay đổi domain và codomain để có ánh xạ mở rộng f' của f là 1-1trên.

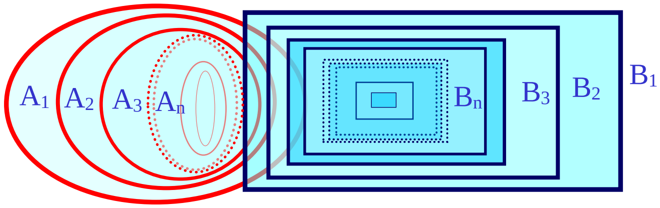
<u>Bài giải</u> :

Phần tử 4 không có n sao cho $n^3 = 4 \Longrightarrow$ f không trên.

Anh xạ f là 1-1.

Anh xạ f' : $N \longrightarrow f(\mathbb{N})$ là 1-1trên.

II.38. Nếu $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ Và $B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset ...$ thì $\cap(A_i \cup B_i) = (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$.



<u>Bài giải</u> :

Dùng định nghĩa của hội giao mở rộng.

II.39. Cho $(A_i)_{i\in \mathbb{N}}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, A_i là các tập hợp.

<u>Bài giải</u> :

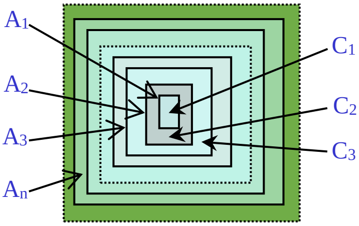
Đặt $C_1 = A_1$, $C_n = A_n - A_{n-1}$, n = 2, 3, ...

Chứng minh

a. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall$ $n \neq m$,

b. $A_n = \cup_{[1, n]} C_i$,

c. $\cup_{\mathbb{N}} A_i = \cup_{\mathbb{N}} C_i$.



<u>Phân tích ý nghĩa.</u>

a. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall$ $n \neq m$.

$\Longrightarrow$ Họ $(C_i)_{i\in N}$ cách biệt nhau trong khi họ $(A_i)_{i\in N}$ giao nhau.

b. $A_n = \cup_{[1, n]}C_i$.

$\Longrightarrow$ Tương quan giưa tập hợp cũ và mới.

c. $\cup_{\mathbb{N}} A_i = \cup_{\mathbb{N}} C_i$.

$\Longrightarrow$ Việc xây dựng họ mới vẫn không thay đổi vì có cùng hội.

Dự kiến kỹ thuật chứng minh.

a. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall$ $n \neq m$.

$\Longrightarrow$ Chứng minh hai tập hợp bằng nhau. Có thể dùng truy chứng.

b. $A_n = \cup_{[1, n]}C_i$.

$\Longrightarrow$ Chứng minh hai tập hợp bằng nhau. Có thể dùng truy chứng.

c. $\cup_{\mathbb{N}} A_i = \cup_N C_i$.

$\Longrightarrow$ Chứng minh hai tập hợp bằng nhau.

II.40. Chứng minh $\cap(A_i \cup B_i) \subset (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$, với $I = \mathbb{N}$.

Bài giải :

Lấy $x \in \cap(A_i \cup B_i)$,

$\Longrightarrow (\forall i)\ (x \in (A_i \cup B_i))$

$\Longrightarrow (\forall i)\ (x \in (A_i \cup B_1))$ vì $B_i \subset B_1$

$\Longrightarrow (\forall i)\ ((x \in A_i) \vee (x \in B_1))$

$\Longrightarrow (\forall i)\ (x \in A_i) \vee (x \in B_1)$

$\Longrightarrow (x \in \cap A_i) \vee (x \in B_1)$

tương tự, có được :

$\Longrightarrow (x \in A_1) \vee (x \in \cap B_i)$

$Z = [(x \in \cap A_i) \vee (x \in B_1)] \wedge [(x \in A_1) \vee (x \in \cap B_i)]$

$Z = [(x \in \cap A_i) \wedge (x \in A_1)] \vee [(x \in \cap A_i) \wedge (x \in \cap B_i)] \vee$

$[(x \in B_1) \wedge (x \in A_1)] \vee [(x \in B_1) \wedge (x \in \cap B_i)]$

$Z = [(x \in \cap A_i)] \qquad \vee [(x \in \cap A_i) \wedge (x \in \cap B_i)] \vee$

$[(x \in B_1) \wedge (x \in A_1)] \vee [(x \in \cap B_i)]$

Đặt $B'_i = B_i - A_i$ thì $A_i \cap B'_i = \varnothing$.

$Z = (x \in (\cap A_i)) \vee (x \in (\cap B'_i))$

$Z = [(x \in \cap A_i)] \vee [(x \in \cap A_i) \wedge (x \in \cap B_i)] \vee [(x \in B_1) \wedge (x \in A_1)]$

$\vee [(x \in \cap B_i)]$

Đặt $B'_i = B_i - A_i$ thì $A_i \cap B'_i = \varnothing$.

$Z = (x \in (\cap A_i)) \vee (x \in (\cap B'_i))$

$\Longrightarrow \cap(A_i \cup B'_i) \subset (\cap A_i) \cup (\cap B'_i)$

$\Longrightarrow \cap(A_i \cup (B_i - A_i)) \subset (\cap A_i) \cup (\cap(B_i - A_i))$

Vì $(B_i - A_i) \subset B_i$ nên $\cap(B_i - A_i) \subset (\cap B_i)$

$\Longrightarrow \cap(A_i \cup B_i) \subset (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$

II.41. Chứng minh $\cap (A_i \cup B_i) = (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$, với $I = [1, n]$.

Bài giải :

Bằng truy chứng.

Trường hợp n = 2.

$(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$

$X = (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2)$

$X = (\underline{A_1 \cap A_2}) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2) \cup (\underline{B_1 \cap B_2})$

$X = (A_2) \cup (\underline{A_1 \cap B_2}) \cup (\underline{B_1 \cap A_2}) \cup (B_2)$

vì $(A_1 \cap B_2) \subset (B_2)$ và $(B_1 \cap A_2) \subset (A_2)$.

$X = (A_2 \cup B_2)$

vì $A_2 \subset A_1$ và $B_2 \subset B_1$.

$X = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$

Giả thiết truy chứng :

$\cap (A_i \cup B_i) = (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$, với $I = [1, n]$.

Chứng minh :

$\cap (A_j \cup B_j) = (\cap A_j) \cup (\cap B_j)$, với $J = [1, n+1]$.

Đặt $X = \cap(A_j \cup B_j)$ với $j \in J$.

$X = [\underline{\cap (A_i \cup B_i)}] \cap (A_{n+1} \cup B_{n+1})$ với $i \in I$.

$X = [\underline{(\cap A_i)} \cup \underline{(\cap B_i)}] \cap (\underline{A}_{n+1} \cup \underline{B}_{n+1})$ với $i \in I$.

Vì $(\underline{S}_1 \cup \underline{T}_1) \cap (\underline{S}_2 \cup \underline{T}_2) = (S_1 \cap S_2) \cup (T_1 \cap T_2)$.

$X = [(\cap A_i) \cap A_{n+1}] \cup [(\cap B_i) \cup B_{n+1}]$ với $i \in I$.

$X = (\cap A_j) \cup (\cap B_j)$, với $j \in J$.

II.42. Cho $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, A_i là các tập hợp.

Đặt $C_1 = A_1$, $C_n = A_n - A_{n-1}$, $n = 2,3,\ldots$.

Chứng minh : a. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall$ $n \neq m$, b. $A_n = \cup_{[1,\, n]} C_i$,

c. $\cup_{\mathbb{N}} A_i = \cup_{\mathbb{N}} C_i$.

Bài giải :

Phân tích y nghĩa.

a. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall$ $n \neq m$.

$\Longrightarrow$ Họ $(C_i)_{i\in N}$ cách biệt nhau trong khi họ $(A_i)_{i\in N}$ giao nhau.

b. $A_n = \cup_{[1,\, n]} C_i$.

$\Longrightarrow$ Tương quan giưa tap cũ va mơi.

c. $\cup_{\mathbb{N}} A_i = \cup_{\mathbb{N}} C_i$.

$\Longrightarrow$ Việc xây dựng họ mới vẫn không thay đổi vì có cùng hội.

Dự kiến kỹ thuật chứng minh.

a. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall$ $n \neq m$.

$\Longrightarrow$ Chứng minh hai tập hợp bằng nhau.

Có thể chứng minh truy chứng.

b. $A_n = \cup_{[1,\, n]} C_i$.

$\Longrightarrow$ Chứng minh hai tap hợp bang nhau.

Có thể chứng minh truy chứng.

c. $\cup_{\mathbf{N}} A_i = \cup_{\mathbf{N}} C_i$.

$\Longrightarrow$ Chứng minh hai tap hợp bang nhau.

II.43. Cho $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ là họ tập hợp bất kỳ. Đặt $B_n = \cup_{[1,\, n]}A_i$.

Chứng minh : a. $B_n \subset B_{n+1}$, b. $\cup_{\mathbf{N}} A_i = \cup_{\mathbf{N}} B_i$.

Đặt $C_1 = A_1$ va $C_n = A_n - \cup_{[1,\, n-1]}A_i$, $n = 2,3, \ldots$

Chứng minh : c. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall\ n \neq m$, d. $A_n = \cup_{[1,\, n]}C_i$,

e. $\cup_{\mathbf{N}} A_i = \cup_{\mathbf{N}} C_i$.

Bài giải :

Phân tích y nghĩa.

Cho $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ là họ tập hợp bất kỳ.

Đặt $B_n = \cup_{[1,\, n]}A_i$.

$\Longrightarrow$ Chuyển về bài tập trươc đó.

a. $B_n \subset B_{n+1}$, b. $\cup_{\mathbf{N}} A_i = \cup_{\mathbf{N}} B_i$.

Đặt $C_1 = A_1$ va $C_n = A_n - \cup_{[1,\, n-1]}A_i$, $n = 2,3, \ldots$

c. $C_n \cap C_m = \varnothing$, $\forall\ n \neq m$,

d. $\cup_{\mathbf{N}} A_i = \cup_{\mathbf{N}} C_i$.

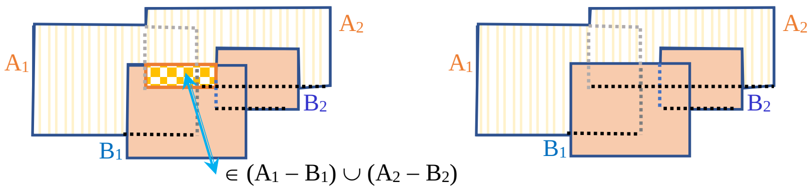
$\Longrightarrow$ Biến đổi một họ tập hợp tùy ý thành họ tách biệt và có hội không đổi.

II.44. Chứng minh $\cup(A_t - B_t) \not\subset \cup A_t - \cup B_t$.

Lấy thí dụ minh họa với tập chỉ số $T = \{1, 2\}$.

$(A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2) \not\subset (A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2)$.

Bài giải :

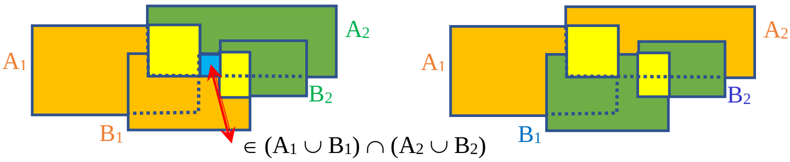


II.45. Chứng minh $\cap\,(A_i \cup B_i) \not\subset (\cap A_i) \cup (\cap B_i)$.

Lấy tập chỉ số I = {1, 2}.

$(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \quad \not\subset \quad (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$.

<u>Bài giải</u> :



II.46. Cho biết tương quan giữa 3 tập hợp sau :

$$\bigcap_{1}^{n} A_i \quad ? \quad \bigcap_{1}^{\infty} A_i \quad ? \quad \bigcup_{\mathbb{N}} A_i$$

<u>Bài giải</u> :

$$\bigcap_{1}^{n} A_i \quad \subseteq \quad \bigcap_{1}^{\infty} A_i \quad = \quad \bigcup_{\mathbb{N}} A_i$$

Bài tập chương III PHÂN LỚP CÁC TẬP HỢP

III.1. Tập $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$.

Tập $\Sigma^* = \{ x_1x_2 \ldots x_n \mid (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall i \in [1, n]) (x_i \in \Sigma) \}$.

<u>Thí dụ</u>

aaa, abcbbd, nguyen $\in \Sigma^*$.

Chứng minh Σ^* là vô hạn.

<u>Bài giải</u> :

Lấy $P = \{a, aa, aaa, aaaa, \ldots \} \subseteq \Sigma^*$.

$\Longrightarrow P \leftrightarrow \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ P vô hạn.

Sử dụng 2 cách là chứa tập con vô hạn và 1-1trên.

III.2. Tập các tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$ là đếm được.

<u>Bài giải</u> :

Đặt $H_n = \{X \subset \mathbb{N} \mid X$ có n phần tử$\}$

$f : H_n \longrightarrow \mathbb{N}^n$.

Lấy $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in H_n$,

$X \mapsto f(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, với $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Ánh xạ f là 1-1.

$\mathbb{N}^n$ đếm được $\Longrightarrow H_n$ đếm được.

Tập hợp tất cả tập con của $\mathbb{N}$ là : $F = \bigcup_{\mathbb{N}} H_n$

Hội đếm được các tập đếm được là đếm được.

III.3. Tập hợp $2^{\mathbb{N}}$ không đếm được.

Bài giải :

F = Tập tất cả tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$.

G = Tập tất cả tập con vô hạn của $\mathbb{N}$.

$F \cup G = 2^{\mathbb{N}}$.

Tập F là vô hạn tập đếm.

Số thực $r \in \,]0, 1]$ có biểu diễn nhị phân vô hạn :

$r = \delta_1 (2^{-1}) + \delta_2 (2^{-2}) + \ldots + \delta_n (2^{-n}) + \ldots$ với $\delta_i \in \{0, 1\}$.

Đặt $f : \,]0, 1] \longrightarrow G$.

$r \mapsto f(r) = \{i \mid \delta_i \neq 0\}$.

Ánh xạ f là 1-1trên.

III.4. Cho $f \subseteq \mathbb{N} \times I$, với $I = [0, 1] \subseteq R$.

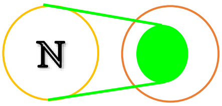
Nếu f là ánh xạ chứng minh rằng tập f đếm được.

Chỉ ra một tập f không đếm được với f chỉ là quan hệ của $\mathbb{N}$ và I, nhưng f không là ánh xạ.

Bài giải :

f($\mathbb{N}$) 1-1trên với tập con của $\mathbb{N}$.

Do đó $f \subseteq \mathbb{N} \times f(\mathbb{N})$.



$f = \{(2, x) \mid x \in I\}$ là không đếm được.

III.5. Gọi X = tập các tập con của tập số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$. (1)

Đặt X_1 = tập các tập con có 1 phần tử của $\mathbb{N}$, (2)

X_2 = tập các tập con có 2 phần tử của $\mathbb{N}$, (3)

…

Do đó $X = \bigcup_{\mathbb{N}} X_i$ (4)

Các X_i đếm được, tập chỉ số $\mathbb{N}$ là đếm được. (5)

$\Longrightarrow$ X đếm được (hội mở rộng). (6)

Cho biết lập luận trên có dòng nào sai.

Bài giải :

$X \neq \bigcup_{\mathbb{N}} X_i$ (thiếu các tập con vô hạn của $\mathbb{N}$).

III.6. Xây dựng các tập P_i hữu hạn và từng đôi khác nhau (nghĩa là $P_i \neq P_j$ với $i \neq j$) trên tập chỉ số $\mathbb{N}$ sao cho ΠP_i vô hạn đếm được.

Bài giải :

$P_i = \{i, i+1\}$.

III.7. Chứng minh tập $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ là không đếm được.

Bài giải :

$\mathbb{R} \leftrightarrow \{\{r\} \mid r \in \mathbb{R}\} \subset 2^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

III.8. Cho một thí dụ giao trên tập chỉ số đếm được của các lượng số vô hạn không đếm được có lượng số là $\aleph_2$.

Bài giải :

$I = \{1, 2\}$, $A_i = \aleph_2$.

III.9. Tìm tập con vô hạn không đếm được của tập các số vô tỉ trong khoảng [19, 37].

Bài giải :

$[20, 21] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Bài tập chương IV LƯỢNG SỐ – THỨ SỐ

*IV.1. Chuyển số thực từ dạng thập phân sang dạng nhị phân.

Bài giải :

Cách chuyển phần nguyên của số thực thành dạng nhị phân.

Lần lượt chia số thực cho 2 với r = 17.

17 : 2 = 8 : số dư là 1 $\Longrightarrow$ hàng đơn vị ở dạng nhị phân 1.2^0.

8 : 2 = 4 : số dư là 0 $\Longrightarrow$ hàng chục ở dạng nhị phân 0.2^1.

4 : 2 = 2 : số dư là 0 $\Longrightarrow$ hàng trăm ở dạng nhị phân 0.2^2.

2 : 2 = 2 : số dư là 0 $\Longrightarrow$ hàng trăm ở dạng nhị phân 0.2^3.

1 : 2 = 0 : số dư là 1 $\Longrightarrow$ hàng trăm ở dạng nhị phân 1.2^4.

$\Longrightarrow (17)_{10} = 1.2^0 + 0.2^1 + 0.2^2 + 0.2^3 + 0.2^4 = (10001)_2$.

Cách chuyển phần thập phân của số thực thành dạng nhị phân.

Lần lượt chia số thực cho 2 với r = 17.

Lần lượt nhân số thập phân r = 0. 75 cho 2.

$0.\ 75 \times 2 = 1.\ 50$: phần nguyên là 1 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 1.2^{-1}.

$0.\ 50 \times 2 = 1.\ 00$: phần nguyên là 1 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 1.2^{-2}.

$\Longrightarrow (0.\ 75)_{10} = 1.2^{-1} + 1.2^{-2} = (0.\ 11)_2$.

Lần lượt nhân số thập phân r = 0. 14 cho 2.

$0.\ 14 \times 2 = 0.\ 28$: phần nguyên là 0 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 0.2^{-1}.

$0.\ 28 \times 2 = 0.\ 56$: phần nguyên là 0 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 0.2^{-2}.

$0.56 \times 2 = 1.12$: phần nguyên là 1 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 1.2^{-3}.

$0.12 \times 2 = 0.24$: phần nguyên là 0 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 0.2^{-4}.

$0.48 \times 2 = 0.96$: phần nguyên là 0 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 0.2^{-5}.

$0.96 \times 2 = 1.92$: phần nguyên là 1 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 1.2^{-6}.

$0.92 \times 2 = 1.84$: phần nguyên là 1 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 1.2^{-7}.

$0.84 \times 2 = 0.28$: phần nguyên là 0 $\Longrightarrow$ số lẻ dạng nhị phân 0.2^{-8}.

…

$\Longrightarrow (0.14)_{10} = 0.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3} + 0.2^{-4} + 0.2^{-5} + 1.2^{-6} + 1.2^{-7} + \ldots$

$= (0.0010011\ldots)_2.$

$\Longrightarrow (17.75)_{10} = (10001.11)_2.$

$\Longrightarrow (17.14)_{10} = (10001.0010011\ldots)_2.$

Nhận xét :

Số thập phân hữu hạn chuyển thành dạng nhị phân có thể trở thành nhị phân vô hạn.

IV.2. Chứng minh : $\mathcal{P}(X)$ 1-1trên với 2^X.

Bài giải :

Đặt $\gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow 2^X$,

$A \mapsto \gamma(A) = \gamma_A$.

$\gamma_A(A) \quad = 1,$

$\gamma_A(X - A) = 0.$

γ là ánh xạ vì γ thỏa 2 điều kiện ánh xạ.

Chứng minh $\mathcal{P}(X)$ 1-1trên với 2^X :

γ là 1-1 : $\quad A \neq B \Longrightarrow \gamma(A) \neq \gamma(A).$

Lấy $A \neq B$,

$\Longrightarrow$ có $x \in A$ và $x \notin B$,

$\Longrightarrow \gamma_A(x) = 1$ và $\gamma_B(x) = 0$.

$\Longrightarrow \gamma_A \neq \gamma_B$.

γ là trên : Lấy $h \in 2^X$, tìm C để $\gamma(C) = \gamma_C = h$.

$\Longrightarrow \gamma_C(C) = h(C) = \{1\}$.

$\Longrightarrow C = h^{-1}(\{1\})$.

Chứng minh : 2^X 1-1trên với $\mathcal{P}(X)$

Đặt $\varphi : 2^X \longrightarrow \mathcal{P}(X), f \mapsto f^{-1}(\{1\})$.

φ là 1-1 : Lấy $f \neq g$.

$\Longrightarrow$ có $a \in X$ sao cho $f(a) \neq g(a)$,

$\Longrightarrow$ nếu $f(a) = 0$ thì $g(a) = 1$ và ngược lại.

$\Longrightarrow a \notin f^{-1}(\{1\})$ và $a \in g^{-1}(\{1\})$

$\Longrightarrow f^{-1}(\{1\}) \neq g^{-1}(\{1\})$ hay $\varphi(f) \neq \varphi(g)$.

φ là trên : Lấy $A \subset X$.

Đặt $h(A) = 1$, $h(X - A) = 0$.

$\Longrightarrow h^{-1}(\{1\}) = A$.

$\Longrightarrow \varphi(h) = A$.

IV.3. Tìm lượng số của A = {X| X là tập con hữu hạn của S},

với $S = \{x \mid x \in \mathbb{N}_e$ và $x > 2\}$.

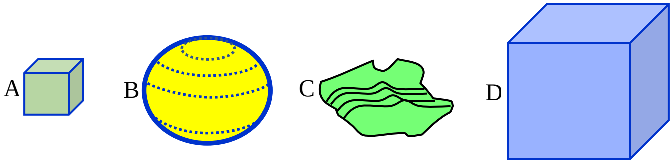
Bài giải :

Tập F gồm các tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$ là đếm được.

Vì $S \leftrightarrow \mathbb{N}$ nên $F \leftrightarrow A$.

Vậy card(A) = $\aleph_0$.

IV.4. Chứng minh khối vuông A, khối cầu B, cố thể C và khối vuông D 1-1trên với nhau.



Bài giải :

Khối vuông A chứa trong khối cầu B, cố thể C và khối vuông D :

$A \subseteq B$, $A \subseteq C$, $A \subseteq D$.

Khối vuông D bao hàm khối vuông A, khối cầu B và cố thể C :

$A \subseteq D$, $B \subseteq D$, $C \subseteq D$.

Nhưng có ánh xạ 1-1trên giữa hai khối vuông nên có ánh xạ 1-1trên giữa A, B, C, D.

IV.5. Xét khối hình nón V trong $\mathbb{R}^3$ có trục trùng với trục Oz, đỉnh hình nón trùng với đỉnh O.

Miệng nón hướng theo chiều âm của truc Oz.

Lấy mặt cầu U tâm O bán kính r = 1.

Gọi M là giao giữa V và mặt cầu U.

Chứng minh M có cùng lượng số với [0,1].

Cho biết góc hợp bởi trục Oz và đường sinh (giao của mặt nón và mặt phẳng XOZ) là $\pi/5$.

Bài giải : Dễ dàng.

IV.6. Chứng minh tập tích ΠP_i trên tập chỉ số $\mathbb{N}$ là vô hạn với

$$P_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}_e \text{ và } x \leq i+1\},\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Bài giải :

Chứng minh tập tích có một tập con vô hạn.

Đặt $P_1 = P_2 = \{2\}$,

$P_3 = P_4 = P_5 = \ldots = \{2, 4\}$.

IV.7. Chứng minh tập các điểm có tọa độ hữu tỉ trên mặt cầu có bán kính r = 4 trong $\mathbb{R}^6$ là đếm được. Cho biết lượng số của tập hợp này.

<u>Bài giải</u> :

$\mathbb{Q}$ đếm được nên $\mathbb{Q}^6$ đếm được.

Tập hợp các điểm hữu tỉ trên mặt cầu là tập con của $\mathbb{Q}^6$ nên đếm được.

PHỤ CHƯƠNG

Phụ chương 1 Khái niệm định nghĩa

1.1. Bức tranh về định nghĩa

Định nghĩa là vấn đề quan trọng của trường phái triết học Platon. Theo Aristotle, định nghĩa đối tượng X là liệt kê biểu thị “cái gì là” của X. “cái gì là” ở đây không đơn giản là xác định ý nghĩa của X, mà là liệt kê bản chất của X. Định nghĩa là xác định bản chất nên cái gì có bản chất mới định nghĩa được. Ý niệm xác nhận bản chất liên hệ tới khái niệm phạm trù. Đây là vấn đề nhiều tranh cãi.

Trong tác phẩm *Sophist*, Platon giới thiệu thủ tục “Phân chia” như là phương pháp khám phá định nghĩa. Để tìm ra định nghĩa của X, trước hết định vị lọai rộng nhất X thuộc về, kế đó chia thành 2 phần và chọn xem X thuộc phần nào. Lặp lại phương pháp này cho tới khi thế giới chứa X không còn phân chia được nữa. Aristotle phê phán mạnh mẽ việc sử dụng phương pháp phân chia để thiết lập định nghĩa. Ông lập luận rằng Phân chia thực sự không thể chứng minh bất kỳ cái gì ngoài việc thừa nhận chính vật phải được chứng minh. Ông cũng công kích những người ủng hộ Phân chia, cho rằng họ không thể hiểu phương pháp của mình có khả năng xác định cái gì.

Dù Aristotle phê phán mạnh mẽ việc “Phân chia” như là phương pháp để thiết lập định nghĩa, cách định nghĩa của ông cũng chẳng qua là một cách Phân chia khác mà thôi.

Trong định nghĩa của Aristotle, “Cái” cần định nghĩa *đã được đặt tên* và cần phải xác định một cách duy nhất, bằng cách chia thế giới thành nhiều lớp. Các lớp nhỏ lại được chia thành nhiều lớp con nhỏ hơn, và cứ thế tiếp tục cho đến khi xác định được “Cái” cần định nghĩa.

Hiểu biết của con người đối với thế giới chung quanh chưa đầy đủ, nên việc xác định các lớp cũng chưa được đầy đủ và chính xác. Do đó, một số “Cái” không thể định nghĩa được bằng cách định nghĩa của Aristotle.

Cách định nghĩa của Aristotle không phân biệt “Cái” được định nghĩa (danh từ, động từ, tính từ, …) và mặc nhiên chấp nhận “Cái” cần được định nghĩa (tên của nó), nói cách khác là không cần quan tâm cái tên này. Định nghĩa chẳng qua là xác định các vòng giao nhau để xiết lại “Cái” cần được định nghĩa. Cách chọn những vòng này sẽ có được định nghĩa cho những “Cái” cần được định nghĩa khác nhau.

Khi thực hiện hành vi định nghĩa là mặc nhiên trong tâm thức đã xác định được “Cái” cần định nghĩa, công việc còn lại chẳng qua là chỉ cho người khác cách “thấy” được nó.

Khi dùng các lớp để xác định là vô hình trung chấp nhận sự tồn tại của các lớp này trước khi thực hiện hành vi định nghĩa, nói cách khác là thế giới đã được phân chia thành nhiều lớp trước khi đi định nghĩa.

Hành vi định nghĩa buộc phải xắp xếp lại mọi “Cái” có trong thế giới này một cách có “trật tự” trước khi đi định nghĩa, đồng nghĩa với việc tạo một cái lưới có thể phân biệt và xác định được tất cả “Cái” trong thế giới này.

Một hành vi có liên quan là minh họa, câu hỏi được đặt ra là : định nghĩa và minh họa là cùng một thứ chăng ?. Có nghĩa là cả hai có cùng đạt được những tri thức với những cách khác nhau không ?.

Định nghĩa là “Đặt tên” cho tập hợp các đối tượng (phần tử), tập hợp này chưa được xác định. Tập hợp này được xác định theo phương thức của lý thuyết tập hợp. Vậy, hành vi định nghĩa là hành vi “Đặt tên”.

Ở đây “Cái” cần được định nghĩa là một đối tượng (một phần tử) hay tập hợp các đối tượng, việc gán tên cho nó tùy theo ý muốn của người định nghĩa (đối tượng hoàn toàn đã được xác định). Trường hợp "Cái" cần được định nghĩa là đối tượng chưa được xác định (biến đổi theo không thời gian) hay chưa xuất hiện hay xuất hiện từng phần chưa trọn vẹn thì việc xác định chỉ là tương đối. Định nghĩa là hành vi dành cho con người – dựa trên ngũ quan.

Tóm lại, định nghĩa khái niệm X chính là hành vi chia thế giới chứa X thành hai phần. Nửa thế giới chứa X, nữa còn lại chứa những cái không X. Nói đơn giản, định nghĩa là con dao, nó cắt mọi thứ làm đôi, đó là thế giới nhị nguyên.

1.2. Định nghĩa khái niệm "Định nghĩa"

Việc xác định khái niệm định nghĩa trong phần này là một góc nhìn chỉ áp dụng cho lãnh vực toán học. Hành vi định nghĩa thực sự có nhiều khó khăn, vì "định nghĩa" chính là thực hiện hoạt động định nghĩa trong khi khái niệm định nghĩa chưa tồn tại. Nói cách khác là sử dụng "công cụ" chưa hiện hữu hay chỉ hiện hữu từng phần để tạo dựng nên chính công cụ đó.

Ở đây không có tham vọng xác định "Định nghĩa" là cái gì về mặt triết học, chỉ đưa ra những cách thức tạo ra định nghĩa "tốt", phân loại định nghĩa trong toán học, cách thức sử dụng định nghĩa. Hầu giúp ích cho người học toán có công cụ tốt trong môi trường toán học. Quan trọng hơn là nhận thức được vai trò quan trọng của định nghĩa trong hoạt động toán học.
Sau đây là những yếu tính của định nghĩa.

✧. Các hoạt động cơ bản của định nghĩa trong toán học.

- *Nhận dạng* hoặc *kiến tạo* đối tượng từ các đối tượng hiện hữu.
- *Nhận dạng* hoặc *kiến tạo* tính chất của đối tượng.

Thông thường, toán học chỉ sử dụng các đối tượng *hoàn toàn* hiện hữu, nghĩa là chúng đã bị "đông cứng" theo thời gian. Ngoại trừ, trường hợp đối tượng *đang hình thành* và chưa được xác định hoàn toàn.

✧. Cấu trúc của định nghĩa.

Khái niệm được định nghĩa $\longleftrightarrow$ Các điều kiện.

Mũi tên hai chiều chỉ ra rằng vế trái tương đương với vế phải. Để có được vế trái – khái niệm cần được xác định – chỉ khi thỏa mãn tất cả điều kiện. Ngược lại, khi có vế trái thì các điều kiện được thỏa mãn.

Mũi tên hai chiều biểu diễn cho thuật ngữ "Nếu và chỉ nếu (if and only if viết tắt là iff)" hoặc "Khi và chỉ khi". Nhưng đôi lúc một số định nghĩa chỉ ở dạng một chiều, đó là dạng điều kiện "Nếu … thì …", khi đó người dùng vẫn phải hiểu đầy đủ là "Nếu và chỉ nếu", vì đó là định nghĩa. Dụng ý sử dụng mũi tên một chiều (nếu … thì …) vì (người tạo định nghĩa) không quan tâm đến chiều ngược lại, nói cách khác là muốn nhấn mạnh một chiều.

Thí dụ :

Định nghĩa khái niệm "tam giác cân".

Nếu tam giác có hai cạnh bằng nhau *thì* tam giác cân.

Dù định nghĩa ở dạng "Nếu … thì …" nhưng vẫn phải hiểu là :

Tam giác cân *nếu và chỉ nếu* tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Định nghĩa khái niệm "tam giác vuông cân".

Tam giác vuông cân iff tam giác có góc vuông và có hai cạnh bằng nhau.

✧. Ngôn ngữ được dùng trong định nghĩa.

Đó là "ngôn ngữ tự nhiên", "ngôn ngữ lý thuyết tập hợp", "ngôn ngữ luận lý toán học", ... bất cứ ngôn ngữ nào tùy vào người thực hiện định nghĩa. Dựa vào trình độ và nhu cầu của người sử dụng, sẽ chọn ngôn ngữ thích hợp để diễn tả định nghĩa. Sử dụng ngôn ngữ tự nhiên giúp người đọc dễ dàng tiếp thu khái niệm được định nghĩa vì là ngôn ngữ quen thuộc. Tuy nhiên, dùng ngôn ngữ hình thức sẽ tiện cho việc sử dụng định nghĩa trong các hoạt động hình thức như việc chứng minh. Điều bất lợi ở những dạng hình thức là gây khó hiểu cho người sử dụng khi chưa quen thuộc.

Đối với người học nếu tài liệu dùng ngôn ngữ tự nhiên để diễn tả nên tự mình diễn tả lại bằng ngôn ngữ hình thức. Ngược lại nếu tài liệu sử dụng ngôn ngữ hình thức thì chuyển qua ngôn ngữ tự nhiên để hiểu rõ hơn.

Thí dụ :

Đây là định nghĩa dùng ngôn ngữ tự nhiên.

Tập hợp S hữu hạn nếu và chỉ nếu có khoảng đầu của tập số nguyên tự nhiên 1-1trên với S.

Định nghĩa dùng ngôn ngữ hình thức.

Tập hợp S hữu hạn $\longleftrightarrow$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(\exists f)$ $(f : S \longrightarrow [1, n]$ và f là ánh xạ 1-1trên$)$.

Đôi khi có sự pha trộn ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ hình thức trong một số định nghĩa.

✧. Vai trò của định nghĩa.

Định nghĩa thực chất là một dạng tiên đề trong một phạm vi hẹp của thế giới do tiên đề tạo dựng. Do đó định nghĩa cũng có một số các tính chất của tiên đề, như mặc nhiên được chấp nhận không cần chứng minh. Định nghĩa tạo ra những đối tượng mới mà tiên đề "chưa kịp" sản sinh. Định nghĩa có thể hiểu là cụ thể hóa những đối tượng mà tiên đề chỉ mới "hình dung" còn tiềm ẩn trong hệ tiên đề.

Hệ tiên đề sản sinh ra các định lý. Định lý được sử dụng như thế nào thì định nghĩa được sử dụng y như vậy. Điểm khác biệt giữa định lý và định nghĩa là định lý phải được "*chứng minh*" là đúng, trong khi định nghĩa được "*chấp nhân*" đúng. Nói thêm về định lý, có định lý ở dạng "nếu và chỉ nếu", nhưng cũng có những định lý chỉ có dạng "nếu … thì …".

Trong chứng minh toán học, định nghĩa và định lý có giá trị tương đương. Một số trường hợp, định lý và định nghĩa có thể hoán vị vai trò cho nhau.

Thí dụ :

Lý thuyết tập hợp có khái niệm "hữu hạn" được định nghĩa như sau :

Tập hợp S hữu hạn $\longleftrightarrow$ có ánh xạ 1-1trên giữa S với khoảng

$[1, n], \exists n \in \mathbb{N}$. (*)

Từ định nghĩa này dẫn ra một số tính chất của hữu hạn đồng thời có khái niệm vô hạn và những tính chất của nó. Hãy xem định lý sau :

"Tập hợp S vô hạn $\longleftrightarrow$ S không 1-1 trên với mọi tập con riêng của S".

(**)

Nhà toán học R. Dedekind dùng định lý (**) làm định nghĩa cho khái niệm "vô hạn". Từ đó chứng minh lại được tất cả các tính chất như bắt đầu bằng định nghĩa hữu hạn, đồng thời chứng minh được "định nghĩa hữu hạn (*)" là định lý.

✧. Phủ định của định nghĩa,

Một khái niệm khi đã được định nghĩa sẽ có ngay khái niệm phủ định của nó. Khái niệm phủ định hiện hữu đồng thời với khái niệm ban đầu.

Khi định nghĩa khái niệm A đồng thời có ngay khái niệm không A ($\neg$A).

Định nghĩa A.

Khái niệm A $\longleftrightarrow$ Các điều kiện.

Các điều kiện có thể viết dưới dạng nguyên nhân C_i dẫn đến kết quả B_i như sau.

Khái niệm A $\longleftrightarrow$ $(C_1 \longrightarrow B_1) \wedge \ldots \wedge (C_n \longrightarrow B_n)$ (❄).

Khi đó định nghĩa của khái niệm "không A" là :

$\neg$(Khái niệm A) $\longleftrightarrow \neg((C_1 \longrightarrow B_1) \wedge \ldots \wedge (C_n \longrightarrow B_n))$ (❄❄).

Dòng (❉) và (❉❉) đồng thời hiện hữu.

Biến đổi (❉❉) :

Khái niệm $\neg A \longleftrightarrow \neg(C_1 \longrightarrow B_1) \vee \ldots \vee \neg(C_n \longrightarrow B_n)$.

Khái niệm $\neg A \longleftrightarrow \neg(\neg C_1 \vee B_1) \vee \ldots \vee \neg(\neg C_n \vee B_n)$.

Khái niệm $\neg A \longleftrightarrow (C_1 \wedge \neg B_1) \vee \ldots \vee (C_n \wedge \neg B_n)$.

Khái niệm được định nghĩa có tên là "A" thì khái niệm phủ định của nó có tên là "không A". Đôi khi người ta không gọi là "không A" mà gọi bằng cái tên khác không có liên hệ gì với tên A. Thậm chí lại nghĩ rằng nó là khái niệm mới cần định nghĩa, điều này có thể dẫn tới định nghĩa này không tương thích với định nghĩa "không A".

Thí dụ :

Phủ định của khái niệm hữu hạn là "không hữu hạn" nhưng lại dùng tứ vô hạn.

Phủ định của khái niệm hằng đúng là "không hằng đúng" nhưng lại dùng tứ hằng sai.

Đôi khi người ta định nghĩa cả hằng đúng và hằng sai, coi như hai khái niệm không liên quan với nhau. Điều này là dư thừa và dễ dẫn đến xung đột với những khái niệm tiếp theo có sử dụng hai khái niệm này.

✧. Phân loại định nghĩa.

a. Phân loại theo hoạt động.

Định nghĩa bất khả thi.

Loại định nghĩa này không chỉ ra cách thức xác định đối tượng thỏa định nghĩa, việc đó phó mặc cho người sử dụng. Nói theo ngôn ngữ máy tính là không có thuật toán nào ẩn chứa trong định nghĩa để tìm ra khái niệm này.

Thí dụ :

Định nghĩa số siêu việt.

Một số là siêu việt iff nó không là nghiệm của phương trình đại số. Số phương trình đại số là vô hạn vì vậy dựa vào định nghĩa không có cách nào để kiểm tra một số có phải là siêu việt hay không. Với những định nghĩa bất khả thi cần phải tìm ra những đặc điểm của khái niệm để xác định được nó, nói cách khác là tìm ra định lý để "thực thi" khái niệm này.

- Định nghĩa khả thi.

Trong cấu trúc của định nghĩa khả thi có chứa thuật toán để tìm ra đối tượng hoặc khái niệm được định nghĩa. Có một loại định nghĩa khả thi rất quan trọng trong toán học, đặc biệt trong lãnh vực máy tính là định nghĩa đệ qui, có nơi gọi là qui nạp.

Định nghĩa đệ qui có cấu trúc như sau :

– Tập hợp các đối tượng : các đối tượng mặc nhiên thỏa định nghĩa.

– Tập hợp luật : sản sinh đối tượng mới từ các đối tượng đang có.

Thí dụ :

Định nghĩa khái niệm "nguyên từ" trong logic.

(i) Ký hiệu hằng là nguyên từ. (đối tượng ban đầu)

(ii) Ký hiệu biến là nguyên từ. (đối tượng ban đầu)

(iii) Nếu $t_1, \ldots, t_n$ là nguyên từ thì biểu thức hàm $f(t_1, \ldots, t_n)$ là nguyên từ. (qui tắc sản sinh).

Định nghĩa này có hai đối tượng ban đầu và một qui tắc suy luận. Qui tắc suy luận này áp dụng cho bất kỳ nguyên từ nào không bắt buộc phải là hai đối tượng ban đầu (hằng và biến) nhưng có ít nhất hai đối tượng để qui tắc sản sinh thực thi được.

Điều này cho thấy định nghĩa đệ qui áp dụng lại chính nó trong khi nó chưa hoàn tất định nghĩa. Khái niệm đệ qui sử dụng nhiều trong lãnh vực máy tính : cấu trúc đệ qui, chương trình con đệ qui, … .

b. Phân loại theo sự hiện hữu.

- Định nghĩa nhận dạng.

  Đó là *đặt tên* cho một *đối tượng* hoặc một số đối tượng đã hiện hữu bằng cách đưa ra những tiêu chuẩn để lọc ra được các đối tượng mong muốn.

- Định nghĩa kiến tạo.

  Loại định nghĩa kiến tạo đặc biệt là định nghĩa *đệ qui* hay còn gọi là *truy chứng* hay *qui nạp*.

c. Phân loại theo tính chất.

- Định nghĩa toàn phần.

  Khái niệm hoặc đối tượng được định nghĩa trên một tổng thể vô hạn.

Thí dụ :

a. n là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho n không thể viết dưới dạng tổng của nhiều nhất bốn số lập phương.
b. Một người được coi là giống như một anh hùng nếu và chỉ nếu, với mọi tính chất P mà tất cả các anh hùng đều có, thì người này cũng có tính chất P.

   Hai định nghĩa này là toàn phần vì nó "hoạt động" trên tất cả số nguyên và tất cả anh hùng.

- Định nghĩa bán phần.

  Khái niệm hoặc đối tượng được định nghĩa trên một phần của tổng thể vô hạn.

Thí dụ :

a. π là tỉ số giữa chu vi và đường kính của hình tròn.

b. Số tự nhiên n là nguyên tố nếu và chỉ nếu n > 1 và ước số của n là 1 và n.

   Hai định nghĩa này là bán phần vì nó chỉ "hoạt động" trên hai số (chu vi và đường kính) với câu a, còn câu b là trên những số nhỏ hơn n, không phải trên tất cả số nguyên.

Phụ chương 2 Hệ tiên đề

Toán học cũng như nhiều ngành khoa học khác cùng được phát sinh theo dòng lịch sử của nhân loại. Kiến thức của chúng đan xen lẫn nhau, đôi khi phát sinh ra những mâu thuẫn. Do đó, cần phải hệ tổng lại các ngành toán học để có được sự nhất quán. Việc có thể thực hiện là trừu tượng hóa hoặc hình thức hóa. Điều này dẫn tới tiên đề hóa các ngành toán học vì nó là ngành cơ bản nhất. Kết quả là kiến thức toán học trở nên nhất quán và tổng quát hơn. Alessandro Padoa, Mario Pieri và Giuseppe Peano là những người tiên phong của phong trào này.

2.1. Cấu trúc của hệ tiên đề

Hệ tiên đề gồm các thành phần sau :

1. Thuật ngữ nguyên thủy
2. Thuật ngữ phổ dụng
3. Hệ thống tiên đề
4. Hệ thống suy luận
5. Định lý

✧. Thuật ngữ nguyên thủy.

Thuật ngữ nguyên thủy là *khái niệm ban đầu được chấp nhận* trong hệ thống, không cần định nghĩa. Thuật ngữ nguyên thủy gồm có hai loại :

+ Thuật ngữ nguyên thủy chỉ *Đối tượng*.

+ Thuật ngữ nguyên thủy chỉ *Quan hệ* (mối tương quan giữa các đối tượng).

✧. Thuật ngữ phổ dụng.

Thuật ngữ phổ dụng là những từ ngữ để hình thành những phát biểu.

✧. Tiên đề.

Tiên đề là *phát biểu được chấp nhận* – không cần phải chứng minh.

Thí dụ :

Tiên đề hình học Euclide (do Hilbert đề ra) :

1. *Điểm, đường, thuộc về.* (thuật ngữ nguyên thủy)
2. *Họ, có, một, mọi, không.* (thuật ngữ phổ dụng)
3. Hệ tiên đề (hệ tiên đề)

   Γ1. Đường là tập hợp các điểm.

   Γ2. Có ít nhất 2 điểm.

   Γ3. Chỉ có một đường qua hai điểm khác nhau.

   Γ4. Có một điểm nằm ngoài một đường.

   Γ5. Điểm X nằm ngoài đường (d) thì có *một* đường (h) song song với (d) và chứa X.
4. Hệ thống luận lý vị từ. (hệ thống suy luận)
5. Tập hợp các định lý hình học. (các định lý)

2.2. Tính chất của hệ tiên đề

Hệ tiên đề có những tính chất : Nhất quán, Hoàn bị hay đầy đủ, Độc lập, Đơn giản.

✧. Tính Nhất quán.

Hệ thống không sản sinh hay chứa hai phát biểu mâu thuẫn. Tính nhất quán là bắt buộc đối với các hê tiên đề toán học.

Trong các ứng dụng thực tế ở một thời điểm hệ thống nhất quán, nhưng sau một thời gian có thể trở thành mâu thuẫn. Ví dụ trong các cơ sở dữ liệu về nhân sự, nhân vật A có năm sinh 2000, tại thời điểm 2022 A 22 tuổi. Vì để tiện lợi cho việc tính toán cơ sở dữ liệu lưu trữ cả năm sinh 2000 và tuổi 22 của A. Hệ thống lúc này nhất quán, tuy nhiên đến năm 2023 các dữ liệu vẫn như cũ, nhưng lúc này hệ thống không còn nhất quán vì tuổi của anh ta được tính là 2023 – 2000 = 23, mâu thuẫn với thông tin được lưu trữ là 22.

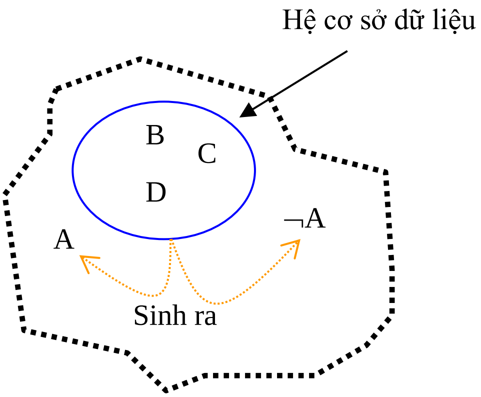
Khi tìm kiếm một thông tin, trình duyệt có thể mât thời gian rất lâu để có được kêt quả. Vì vậy kết quả này có thể được lưu lại cho câu hỏi tương tự lần sau. Nhưng thời gian sau nếu trả lời cùng câu hỏi này với cùng kết quả đã lưu thì có thể không còn chính xác vì hệ thống có thể có thêm hoặc bớt đi thông tin.

Trong ứng dụng thực tế, việc kiểm tra tính nhất quán là không đơn giản.

Thí dụ :

Hệ cơ sở dữ liệu có tính nhất quán nếu không sản sinh hai phát biểu mâu thuẫn.

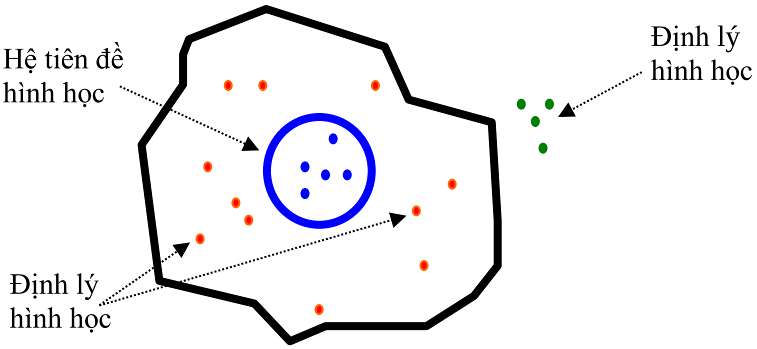
Hình sau minh họa hệ cơ sở dữ liệu sinh ra hai phần tử A và ¬A, nên có sự mâu thuẫn.



✧. Tính Hoàn bị.

Tính hoàn bị hay còn gọi là tính đầy đủ, nghĩa là hệ tiên đề sinh ra được toàn bộ hệ thống. Ví dụ tiên đề hình học sinh ra được "tất cả" các định lý hình học hiện có. Nếu có một số định lý nằm ngoài không gian sinh của hệ tiên đề, hệ tiên đề không hoàn bị. Cơ sở của không gian vector có tính hoàn bị khi sinh ra được không gian vector. Tuong tự như tính nhất quán, theo thời gian tính hoàn bị có thể không còn được duy trì. Tại thời điểm hiện tại, tiên đề hình học sinh ra được “tất cả” định lý hình học hiện có. Nhưng vào một lúc nào đó, một định lý hình học mới được khám phá, khi đó hệ tiên đề hình học có thể không sinh ra được định lý này. Lúc đó nói rằng các tiên đề hình học là không đầy đủ hay còn gọi là không hoàn bị.

Thí dụ :



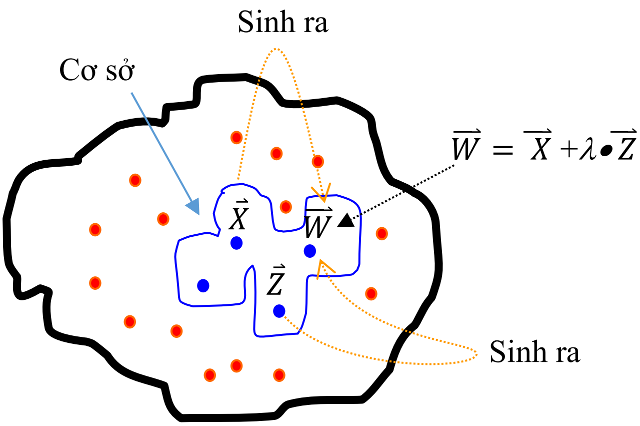
Không gian hình học

✧. Tính độc lập.

Tính độc lập là nói về số lượng các tiên đề. Hệ thống A được sinh ra bởi n tiên đề, nều bỏ đi một số tiên đề thì số tiên đề này vẫn sinh ra được hệ thống A. Lúc này nói rằng hệ thống A có n tiên đề không có tính độc lập. Vậy hệ tiên đề có tính độc lập là hệ có số tiên đề nhỏ nhất vẫn sinh ra được hệ thống. Ví dụ trong không gian vector cơ sở nhỏ nhất sinh ra không gian vector khi chúng *độc lập tuyến tính*. Tính độc lập tuyến tính bảo đảm số vector nhỏ nhất vẫn sinh ra được không gian vector.

Thí dụ :

Trong một không gian vecror, nếu cơ sở chứa các vector ó $\vec{X}, \vec{Z}, \vec{W}$ và có $\vec{W} = \vec{X} + \lambda \bullet \vec{Z}$ thì cơ sở này không độc lập.



Không gian vector

✧. Tính Đơn giản.

Có hai yếu tố nói lên tính đơn giản đó là sự "*dễ hiểu*" và "*số lượng*" của tiên đề. Tính dễ hiểu sẽ được xét trước tiên. Thông thường, tiên đề là những phát biểu dễ hiểu đối với "mọi người", đó là lý do ưu tiên của nó. Về số lượng có thể được giảm thiểu bằng cách gom hai hay ba tiên đề thành một tiên đề. Khi đó, tiên đề "hỗn hợp" này có thể trở thành khó hiểu.

Nhận xét :

Thông thường, hệ tiên đề là khái niệm xuất hiện sau sự hiện hữu của hệ thống trong thế giới ứng dụng. Hình học có trước các tiên đề hình học, các tiên đề tập hợp xuất hiện sau lý thuyết tập hợp … Nói cách khác là các hệ thống được tiên đề hóa. Do đó, các tiên đề có thể thay đổi theo sự thay đổi của hệ thống.

Phụ chương 3 Các công thức luận lý cơ bản

Trong quá trình trình bày các khái niệm của tập hợp, ngôn ngữ logic được sử dụng mô tả các khái niệm, cũng như các chứng minh. Sau đây là một số công thức luận lý vị từ thường được sử dụng trong lý thuyết tập hợp.

a. Công thức luận lý mệnh đề

F, G, H là công thức.

1. $\neg(\neg F) \;=\; F$
2. $F \leftrightarrow G \;=\; (F \longrightarrow G) \wedge (G \longrightarrow F)$
3. $F \longrightarrow G \;=\; \neg F \vee G$
4. $F \longrightarrow G \;=\; \neg G \longrightarrow \neg F$
5. $\neg(F \vee G) \;=\; (\neg F) \wedge (\neg G)$ (DeMorgan)
6. $\neg(F \wedge G) \;=\; (\neg F) \vee (\neg G)$ (DeMorgan)
7. $((F \longrightarrow G) \wedge (G \longrightarrow H)) \longrightarrow (F \longrightarrow H)$ (tính truyền)
8. $((F \longrightarrow G) \wedge (F \longrightarrow \neg G)) \longrightarrow \neg F$ (phản chứng)

b. Công thức luận lý vị từ

Qui ước :

F[x]) là công thức của luận lý vị từ có chứa biến x.

P là công thức của luận lý vị từ không có chứa biến x.

1. $((\forall x)\, F[x]) \vee P \;=\; (\forall x)\, (F[x] \vee P)$
2. $((\exists x)\, F[x]) \vee P \;=\; (\exists x)\, (F[x] \vee P)$

Đối ngẫu

1’. $((\exists x)\, F[x]) \wedge P \;=\; (\exists x)\, (F[x] \wedge P)$

2’. $((\forall x)\, F[x]) \wedge P \;=\; (\forall x)\, (F[x] \wedge P)$

Nhận xét :

Công thức P không chứa biến x nên có thể đem vào hoặc đem ra khỏi tầm ảnh hưởng của lượng từ của biến x.

Với toán tử $\rightarrow$ không thể tùy tiện đem vào hoặc đem ra khỏi tầm ảnh hưởng của lượng từ.

Thí dụ :

$((\forall x)\ F[x]) \rightarrow P = (\exists x\ \neg F[x]) \vee P = (\exists x)\ (\neg F[x]) \vee P)$

$= (\exists x)\ (F[x] \rightarrow P).$

3. $\neg((\forall x)\ F[x]) \quad = \quad (\exists x)\ (\neg F[x])$

3'. $\neg((\exists x)\ F[x]) \quad = \quad (\forall x)\ (\neg F[x])$

Thí dụ :

Đặt $T = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10}$

và $S = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_{10}$

Mệnh đề $(x \in T \cap S) \leftrightarrow (\forall i)\ (x \in A_i) \wedge (\forall i)\ (x \in B_i)$

Vì

$\underline{\forall i(x \in A_i)} \wedge \underline{\forall i(x \in B_i)} \quad = (\forall i)(\underline{x \in A_i \wedge x \in B_i})$

$\rightarrow (x \in T \cap S) \leftrightarrow (\forall i)\ (x \in A_i \wedge (x \in B_i)$

4. $(\forall x\ F[x]) \wedge (\forall x\ H[x]) \quad = \quad (\forall x)(F[x] \wedge H[x])$

4'. $(\exists x\ F[x]) \vee (\exists x\ H[x]) \quad = \quad (\exists x)\ (F[x] \vee H[x])$

Thí dụ :

Đặt $T = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10}$

và $S = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_{10}$

Mệnh đề $(x \in T \cup S) \leftrightarrow (\forall i)\ (x \in A_i) \vee (\forall i)\ (x \in B_i)$

Vì

$(\underline{\forall i, x \in A_i}) \vee (\underline{\forall i, x \in B_i}) \quad \rightarrow \quad (\forall i)(\underline{x \in A_i \vee x \in B_i}).$

$\rightarrow (x \in T \cup S) \leftrightarrow (\forall i)\ (x \in A_i) \vee (\forall i)\ (x \in B_i)$

$\rightarrow (\forall i)\ (x \in A_i \vee x \in B_i)$

$\rightarrow (\forall i)\ (x \in (A_i \cup B_i))$

$\rightarrow x \in \cap(A_i \cup B_i)$

5. $(\forall x)F[x] \vee (\forall x)H[x] \quad \rightarrow \quad (\forall x)(F[x] \vee H[x])$

5’. $(\exists x)F[x] \wedge (\exists x)H[x] \quad \leftarrow \quad (\exists x)(F[x] \wedge H[x])$

Chú ý :

Chiều ngược lại không luôn luôn đúng.

c. Khái niệm biến

Không phải lúc nào biến cũng là biến. Ở thế giới này đối tượng A là biến nhưng ở thế giới khác nó không còn là biến nữa. Vấn đề là chủ thể đang đứng ở thế giới nào để xác định đối tượng có là biến hay không.

Thí dụ :

Cho họ tập hợp A_i (i = 1, … , 10) và tập hợp B.

Đặt $T = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10}$

Hay $T = \{x \mid (\forall x)\ ((\forall i)\ (x \in A_i))\}$

$T \cup B = \{x \mid (\forall x)\ (\ ((\forall i)\ (x \in A_i) \vee (x \in B))\}$

Phát biểu “$(\forall x)\ (\ ((\forall i)\ (x \in A_i) \vee (x \in B))$” được nhìn dưới góc độ logic thì x, i là biến logic (dấu hiệu nhận dạng là biến đi theo lượng từ).

Phát biểu “$((\forall i)(x \in A_i)) \vee (x \in B)$” được nhìn dưới góc độ logic thì chỉ i là biến logic (dấu hiệu nhận dạng là biến đi theo lượng từ), còn x là biến của tập hợp. Do đó nếu thao tác về mặt logic thì chỉ có i là biến.

Phụ chương 4 Khái niệm mặc nhiên thỏa

Phát biểu có dạng "***Nếu*** điều kiện ***thì*** kết quả" đúng khi điều kiện được thỏa mãn và kết quả xảy ra.

Trường hợp đặc biệt, môi trường không đánh giá được điều kiện đúng hay sai, hay đối tượng trong điều kiện không hiện hữu. Vì không có đối tượng nên không đánh giá được điều kiện, nghĩa là tình trạng này *không vi phạm* điều kiện nên được gọi là thỏa định nghĩa.

Điều kiện không xảy ra nên không ràng buộc kết quả phải xảy ra.

Đây được gọi là nguyên tắc *không vi phạm* hoặc *mặc nhiên thỏa* hoặc đúng mặc nhiên.

Thí dụ

1. Phát biệu "Mọi người trong giảng đường A là sinh viên năm cuối". Tại thời điểm t, giảng đường A trống rỗng, phát biểu này được đánh giá là đúng theo nguyên tắc mặc nhiên thoả.
2. Một tập con X của $\mathbb{N}$ có tính chất :

   "Số chính phương trong X đều là bình phương của số nguyên tố" (*).

   (chú thích : số chính phương là số bình phương của một số)

   Tập hợp P = {2, 4, 6, 9, 25} thỏa tính chất (*) vì các số chính phương trong P : 4, 9, 25 là bình phương của các số nguyên tố 2, 3, 5 ($4 = 2^2$, $9 = 3^3$, $25 = 5^5$).

   Tập hợp Q = {4, 5, 9, 16, 17} không có tính chất (*) vì số chính phương 16 không là bình phương của số nguyên tố.

   Tập hợp T = {2, 3, 6, 15, 17} mặc nhiên có tính chất (*). Vì T không có số chính phương nên T *không vi phạm định nghĩa*.
3. Số ánh xạ đi từ tập hợp $\varnothing$ vào tập hợp X là 1 (với X có thể là $\varnothing$).

Khái niệm mặc nhiên thỏa rất quan trọng trong vấn đề chứng minh. Nhất là đối với các bài toán liên quan đến tập hợp khi phát biểu tổng quát. Nói đến tập hợp, thường sẽ phân ra làm hai trường hợp là tập hợp rỗng và tập hợp khác rỗng. Đối với tập hợp rỗng, những chứng minh liên quan thường sử dụng khái niệm mặc nhiên thỏa.

Nguyên lý “ex falso quodibet” trong logic, có nghĩa là “Từ sai có thể suy ra bất cứ điều gì”. Nguyên lý này chấp nhận một điều không đúng (một giả định sai), có thể suy luận ra bất kỳ điều gì. Đây là một dạng khác của mặc nhiên thỏa. Nói cách khác nó là hai dòng cuối trong bảng thực trị của toán tử “ ⟶”.

Phụ chương 5 Các phương pháp chứng minh toán học

Chứng minh toán học là một hoạt động có tính thủ tục, việc chứng minh có thể theo từng bước cho đến khi đạt được kết qủa. Những bước đó là áp dụng các phương pháp sau :

1. Chứng minh trực tiếp.

Từ những dữ liệu của đề bài thế vào các tiền đề, định nghĩa, định lý cho "trực tiếp" ra kết quả. Vấn đề của người đi chứng minh là tìm ra *một số* định lý thích hợp có thể áp dụng vào bài toán.

Thí dụ

Cho tam giác có độ dài ba cạnh là 3, 4, 5, chứng minh tam giác này vuông. Để chứng minh, dò trong các định lý hình học có định lý Pythagore thế các giá trị thỏa mãn định lý, kết luận tam giác vuông.

2. Chứng minh bằng dạng tương đương

Yêu cầu chứng minh của bài toán là một phát biểu A, thay vì di chứng minh A có thể chứng minh dạng tương đương của A. Để tim dạng tương đương có thể áp dụng các công thức logic để biến đổi A thành B "dễ" chứng minh hơn.

Thí dụ

Đề bài có dang $F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$, nhờ kết quả logic có thể đi chứng minh $(F \wedge G) \longrightarrow H$.

Dạng

Thay cho chứng minh $F \longrightarrow G$, đi chứng minh $\neg G \longrightarrow \neg F$.

3. Chứng minh phản chứng.

Giả sử điều ngược lại với kết luận, từ đó dẫn ra mâu thuẫn.

Diên tả bằng hình thức là : chứng minh $(F \longrightarrow G)$ đồng thời cũng chứng minh được $(F \longrightarrow \neg G)$ điều này dẫn đến mâu thuẫn do đó có $\neg F$.

Thí dụ

Chứng minh $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ.

Giả sử là số hữu tỉ : $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

4. Chứng minh truy chứng.

Xem phụ chương nói về truy chứng.

5. Chứng minh bằng phản thí dụ.

Kiểu chứng minh này là đi xây dựng một trường hợp cụ thể không đúng với phát biểu nào đó, thường là những phát biểu có tính tổng quát. Kỹ thuật chứng minh này đòi hỏi cao tính sáng tạo.

Thí dụ

Cho phỏng đoán như sau : “Tổng của số âm với một số dương luôn là số âm”.

Phản thí dụ : $-5 + 15 = + 10$.

6. Chứng minh qua các bước trung gian

Để chứng minh phát biểu F sinh ra phát biểu H có thể đi bằng một con đường vòng là chứng minh F sinh ra phát biểu G và G sinh ra H.

Nghĩa là trước khi sinh ra H có thể sinh ra những bước trung gian.

Nguyên tắc này dựa trên công thức logic sau :

$$(((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \Rightarrow (F \rightarrow H))$$

7. Tổng kết

Các phương pháp chứng minh này có thể thực hiện ngẫu nhiên, không cần theo mọt thứ tự nào. Mỗi

Các phương pháp chứng minh này có thể thực hiện ngẫu nhiên, không cần theo mọt thứ tự nào. Mỗi phuong pháp được thực hiện nhiều lần là tùy ý, ví du bước chuyển về dạng tương dương có thể thực hiện bao nhiêu lần miễn là chúng còn tương đương với nhau và dạng sau cùng “dễ dàng” chứng minh được. Tương tự, truy chứng hữu hạn cũng có thể thực hiện trên những yếu tố (số nguyên) khác nhau. Tóm lại các phương pháp chứng minh có thể thực hiện xoay vòng và vòng lặp có thể “vô hạn”. Vấn đề dừng lúc nào tùy thuộc vào sức chịu đựng và sự kiên trì của người đi chứng minh.

Phụ chương 6 Truy chứng hữu hạn

Understanding how to read and construct proofs by mathematical induction is a key goal of learning discrete mathematics –

Kenneth Rosen.

1. Chứng minh truy chứng hữu hạn (finite induction)

Truy chứng hữu hạn là một kỹ thuật chứng minh áp dụng khá phổ biến trong các không gian đếm được. Đây có thể xem là giải pháp được lựa chọn đầu tiên khi chứng minh bài toán thuộc lớp các bài toán rời rạc (lý thuyết đồ thị, lý thuyết automata, toán tổ hợp, …)

Một số bài toán có mô tả rõ ràng ở dạng mà người giải nhận thức được ngay là có thể áp dụng phương pháp truy chứng. Nhưng cũng có những bài toán mà phát biểu của nó không dễ nhận ra có thể áp dụng truy chứng, Điều này làm mất đi một khả năng lựa chọn để giải bài toán.

Chứng minh truy chứng chỉ là một kỹ thuật chứng minh, nó không có khả năng giúp khám phá lý do tại sao phát biểu là đúng, vì vậy không giúp tạo ra những định lý mới. Đơn giản nó chỉ là công cụ để khẳng định phát biểu đã có là đúng, nhất là giúp khẳng định những phỏng đoán.

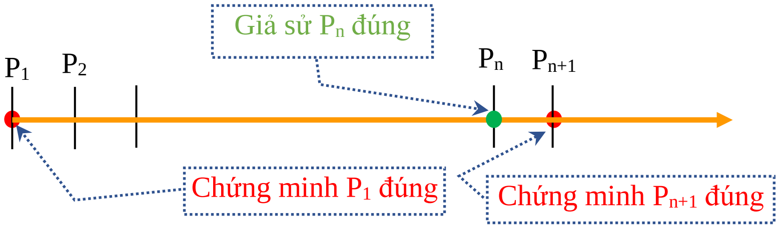
Phương pháp chứng minh truy chứng hữu hạn hay đơn giản là truy chứng dựa trên định lý sau :

Định lý (dạng 1)

Cho họ $(P_i)_i$ với mỗi P_i là mệnh đề chỉ có giá trị đúng hoặc sai, $\forall i \in \mathbb{N}$.

P_i đúng với mọi $i \in \mathbb{N}$ nếu

- ✧ P_1 đúng, và
- ✧ Nếu P_n đúng thì P_{n+1} đúng, với $n \geq 1$.



<u>Chứng minh định lý</u>.

Chuyển thành dạng tương đương

Đặt $S = \{\ i \mid i \in \mathbb{N}$ và P_i sai $\}$.

Để chứng minh P đúng trở thành chứng minh $S = \varnothing$.

Chứng minh bằng phản chứng

Giả sử $S \neq \varnothing$ để dẫn ra điều mâu thuẫn.

Tóm lại, công việc là chứng minh hệ thống sau sinh ra mâu thuẫn :

$$\begin{cases} S \neq \varnothing \\ P_1 \text{ đúng} \\ P_n \text{ đúng} \rightarrow P_{n+1} \text{ đúng} \end{cases}$$

$S = \{\ i \mid i \in \mathbb{N}$ và P_i sai $\}$.

$\Longrightarrow \min(S) = \eta$, vì ($S \neq \varnothing$ và $S \subseteq \mathbb{N}$)

$\Longrightarrow (\eta \in S)$ $\Longrightarrow$ (P_η sai).

$\Longrightarrow$ (P_1 đúng) $\Longrightarrow (1 \notin S)$.

$\Longrightarrow (1 < \eta)$ $\Longrightarrow 1 \leq (\eta - 1) < \eta$.

$\Longrightarrow [(\eta - 1) \notin S]$ $\Longrightarrow$ ($P_{\eta-1}$ đúng).

$\Longrightarrow$ ($P_{\eta-1}$ đúng) $\Longrightarrow$ (P_η đúng).

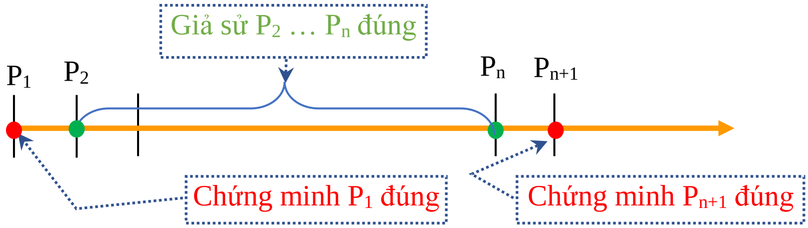
Mâu thuẫn vì cùng có (P_η sai) và (P_η đúng). ✓

Định lý (dạng 2)

Cho họ $(P_i)_i$ với mỗi P_i là mệnh đề chỉ có giá trị đúng hoặc sai, $\forall i \in \mathbb{N}$.

P_i đúng với mọi $i \in \mathbb{N}$ nếu

- ✧ P_1 đúng, và
- ✧ Nếu các mệnh đề $P_2, \ldots, P_n$ đúng thì P_{n+1} đúng, với $n \geq 1$.



Định lý

Dạng 1 và dạng 2 tương đương nhau.

Với một bài toán, khi nào sử dụng được kỹ thuật chứng minh truy chứng ?.

Không phải bài toán nào cũng áp dụng được kỹ thuật chứng minh truy chứng.

Một bài toán của toán học là một mệnh đề của luận lý mệnh đề. Nghĩa là mệnh đề chỉ có hai khả năng là đúng hoặc sai. Thông thường việc chứng minh là tiến hành những bước để khẳng định mệnh đề là đúng.

Định lý truy chứng cung cấp một phương pháp để chứng minh một họ mệnh đề cùng có giá trị đúng. Trong trường hợp họ mệnh đề cần chứng minh là hữu hạn thì công việc trở nên đơn giản. Vì chỉ cần tiến hành chứng minh từng mệnh đề cho đến hết. Nhưng nếu họ mệnh đề là vô hạn thì không thể chứng minh từng mệnh đề. Định lý truy chứng trình bày một kỹ thuật chỉ cần chứng minh hai trường hợp, nhưng có thể kết luận tất cả (vô hạn) mệnh đề của họ mệnh đề đều có giá trị đúng.

Nếu bài toán có sẵn dạng ở dạng vô hạn các mệnh đề thì áp dụng ngay chứng minh truy chứng. Nhưng nếu bài toán chỉ là một mệnh đề thì biến đổi để nó tương đương với vô hạn mệnh đề để áp dụng chứng minh truy chứng.

2. Trình tự sử dụng kỹ thuật chứng minh truy chứng

Bước 1 : **Biến đổi bài toán thành một họ vô hạn (đếm được) các mệnh đề $(P_i)_i$.**

Việc này được thực hiện bằng cách nhận dạng những yếu tố của đề bài có dính dáng đến số nguyên tự nhiên. Chọn một yếu tố dính dáng tới số nguyên làm chỉ số của họ mệnh đề tương đương với mệnh đề ban đầu. Trong trường hợp có nhiều yếu tố dính dáng tới số nguyên thì có thể có nhiều họ mệnh đề tương đương với mệnh đề ban đầu. Khi đó hãy chọn dạng tương đương thích hợp. Đôi khi số nguyên được chọn không phải là những số nguyên xuất hiện trong bài toán. Nó có thể là số được kết hợp từ các số nguyên trong bài toán.

Đây là bước thường không được nhận thức rõ ràng hoặc bị xem nhẹ.

Thí dụ

Cho một tập hợp hữu hạn điểm và một số cạnh nối giữa những điểm này. Đối tượng này được gọi là đồ thị. Số cạnh tụ vào một đỉnh được gọi là bậc của đỉnh đó.

Chứng minh tổng các bậc bằng 2 lần số cạnh.

Bài tập này có thể chứng minh theo cách thông thường. Tuy nhiên có thể áp dụng phương pháp truy chứng để chứng minh. Trước hết biến đổi mệnh đề cần chứng minh P = “Tổng các bậc bằng 2 lần số cạnh” thành vô hạn mệnh đề.

Nhận xét rằng mệnh đề P có chứa một yếu tố tiềm ẩn là đồ thị bất kỳ nghĩa là với số cạnh và số đỉnh tùy ý.

Trong mệnh đề P có hai yếu tố dính dáng tới số nguyên là số cạnh và số đỉnh của đồ thị. Nếu chọn số đỉnh làm chỉ số cho họ mệnh đề ta được họ tương đương $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ với P_i = “Trong đồ thị i đỉnh, tổng các bậc bằng 2 lần số cạnh”. Nếu chọn số cạnh làm chỉ số thì P sẽ tương đương với họ $(P_j)_{j\in\mathbf{N}}$ với P_j = “Trong đồ thị j cạnh, tổng các bậc bằng 2 lần số cạnh”.

Bước 2 : **Trong thực tế mệnh đề** P_1 **được thay bằng mệnh đề** P_{n_0} **với số nguyên** $n_0 > 1$**.**

Một số bài toán có phát biểu đúng đầu tiên không phải là P_1. Để tìm số đúng đầu tiên n_0 chỉ có cách duy nhất là lần lượt thử từ giá trị n = 1. Nếu số 1 không làm cho P_1 đúng thì tiếp tục với 2, 3, … và cứ thế tiến hành cho đến khi nào có được P_{n_0} đúng.

Trong một số trường hợp đã tìm được n = 1 để mệnh đề đúng (thường là rất dễ dàng) nhưng trong quá trình chứng minh truy chứng lại cần kết quả của n = 2. Khi đó đi chứng minh cho trường hợp n = 2 sẽ thuận tiện hơn việc chọn n = 1.

Bước 3 : **Phát biểu giả thiết truy chứng** dạng 1 hoặc 2.

Nếu truy chứng dạng 1 thì có :

P_{n_0} và P_n đúng (2 mệnh đề),

Nếu truy chứng dạng 2 thì có :

$P_{n_0}, P_{n_0+1}, \dots,$ P_n đúng ($n-n_0+1$ mệnh đề).

Bước 4 : **Chứng minh mệnh đề** P_{n+1} **đúng**.

Đây là bước quan trọng nhất và cũng là bước dễ mắc sai lầm nhất trong quá trình chứng minh. Để chứng minh mệnh đề P_{n+1} đúng thì điều kiện của bài toán phải lấy tương ứng với số nguyên n+1. Sau đó biến đối bài toán để áp dụng giả thiết truy chứng. Việc sai lầm thường mắc phải là lấy điều kiện ban đầu tương ứng với số nguyên n rồi "nâng cấp" lên thành điều kiện tương ứng với số nguyên n+1.

Thí dụ

Đồ thị liên thông là đồ thị mà có thể đi từ đỉnh này tới được đỉnh khác (xuyên qua các cạnh). Chu trình là đường đi khép kín. Cây là đồ thị liên thông không có chu trình.

Chứng minh mệnh đề P = "Cây có ít nhất 2 đỉnh bậc 1".

Ap dụng truy chứng để chứng minh mệnh đề P, truy chứng trên số đỉnh.

Đặt P_i = "Cây i đỉnh có ít nhất 2 đỉnh bậc 1".

Chứng minh xem P_1 đúng hay không ?.

Giả thiết truy chứng, P_n đúng, nghĩa là mọi cây có n đỉnh thì có ít nhất 2 đỉnh bậc 1.

Khi đó phải chứng minh P_{n+1} đúng nghĩa là lấy cây T có n+1 đỉnh chứng minh nó có ít nhất 2 đỉnh bậc 1. Để áp dụng được giả thiết truy chứng thì bỏ đi một đỉnh khỏi T để nó trở thành đồ thị có n đỉnh.

Điều dễ mắc sai lầm ở đây khi đi chứng minh mệnh đề P_{n+1} đúng là lấy cây có n đỉnh sau đó thêm vào một đỉnh để nó trở thành cây n+1 đỉnh rồi đi chứng minh nó có ít nhất 2 đỉnh bậc 1. Điều này hiển nhiên không là một chứng minh cho P_{n+1} đúng.

3. Một số thí dụ minh họa

Thí dụ 1

Chứng minh 1 + 2 + 3 + … + n = n (n + 1)/2.

Đề bài đòi hỏi chứng minh mệnh đề :

P = "1 + 2 + 3 + … + n = n(n + 1)/2, với mọi n" là đúng.

1. Biến đổi mệnh đề P thành vô hạn mệnh đề tương đương với P. Đặt mệnh đề P_i = "1 + 2 + 3 + … + i = i(i + 1)/2".

   Do đó P đúng $\longleftrightarrow$ P_i đúng với mọi i.
2. Thử i = 1, P_i = 1 = 1(1+1)/2. Do đó P_1 đúng.
3. Giả sử có P_n đúng. Như vậy có P_1 và P_n đúng
4. Chỉ còn chứng minh mệnh đề P_{n+1} đúng.

   Xét mệnh đề P_{n+1} = "1 + 2 + … + n + (n + 1) = (n + 1)(n + 1 + 1)/2".

   Do giả thiết có : 1 + 2 + 3 + … + n = n(n + 1)/2, do đó

   1 + 2 + … + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1),

   = n(n + 1)/2 + 2(n + 1)/2 = (n + 1)(n + 2)/2.

Nên mệnh đề P_{n+1} đúng.

Vậy mệnh đề P là đúng.

Thí dụ 2

Chứng minh định lý : "Nếu cây có v đỉnh thì có v–1 cạnh" (trong lý thuyết đồ thị).

1. Biến đổi mệnh đề thành vô hạn mệnh đề tương đương. P = "Nếu cây có v đỉnh thì có v–1 cạnh". Trong phát biểu trên có hai yếu tố có liên quan đến số nguyên đó là số đỉnh và số cạnh. Chọn yếu tố đỉnh làm chỉ số cho họ mệnh đề.

   Đặt mệnh đề P_i = "Nếu cây có i đỉnh thì có i – 1 cạnh".

   Do đó P đúng $\longleftrightarrow$ Pi đúng với mọi i.

2. Thử i = 1, P_i = "Nếu cây có 1 đỉnh thì có 0 cạnh".

   Hiển nhiên P_1 đúng.

3. Nếu chứng minh bằng dạng thứ 1 thì giả thiết truy chứng chỉ có P_n đúng. Như vậy có P_1 và P_n đúng.

4. Đi chứng minh mệnh đề P_{n+1} đúng.

   Xét mệnh đề P_{n+1} = "Nếu cây có n + 1 đỉnh thì có n + 1 – 1 cạnh". Hay "Nếu cây có n + 1 đỉnh thì có n cạnh". Sẽ chứng minh mệnh đề này đúng.

   Lấy đồ thị <G> là cây có n+1 đỉnh. Sau đó chứng minh <G> có n cạnh. Nếu lấy đồ thị <G> là cây có n đỉnh sau đó bổ sung thêm 1 đỉnh (phải bổ sung thêm các yếu tố để nó trở thành cây) rồi đi chứng minh đồ thị mới có n cạnh thì cách tiến hành này không tổng quát. Phải lấy đồ thị ban đầu là cây có n+1 đỉnh. Bây giờ chứng minh mệnh đề P_{n+1} đúng. Cần phải giảm cây <G> để nó có n đỉnh hoặc có 1 đỉnh để áp dụng được giả thiết truy chứng.

Bỏ một đỉnh bất kỳ ra khỏi đồ thị <G>. Các trường hợp sau có thể xảy ra. <G> trở thành cây có n đỉnh, nếu đỉnh bỏ đi là đỉnh lá. Nhưng nếu đỉnh bỏ đi không là đỉnh lá thì <G> trở thành 2 đồ thị. Mỗi đồ thị là cây với số đỉnh nhỏ hơn hẳn n. Do đó không thể áp dụng giả thiết truy chứng. Vây truy chứng dạng 1 không thể áp dụng. Nhưng nếu sử dụng dạng 2 thì mọi sự trở nên dễ dàng hơn vì giả thiết truy chứng khi đó trở thành mọi cây có số đỉnh từ 1 tới n đều thỏa phát biểu của định lý.

Vậy mệnh đề P là đúng.

Thí dụ 3

Chứng minh rằng :

Nếu $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ và $B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset ...$

thì $\bigcap_N (A_i \cup B_i) \subset (\bigcap_N A_i) \cup (\bigcap_N B_i)$.

1. Biến đổi thành mệnh đề tương đương …
2. Trường hợp n = 2,

   $(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2)$

   $\subset (A_i \cap A_2) \cup (A_i \cap B_2) \cup (B_i \cap A_2) \cup (B_i \cap B_2)$

   $\subset (A_2) \quad \cup (A_i \cap B_2) \cup (B_i \cap A_2) \cup \quad (B_2)$

   $\subset (A_2 \cup B_2)$, vì $(A_i \cap B_2) \subset (B_2)$ và $(B_i \cap A_2) \subset (A_2)$.
3. Giả sử có P_n đúng,

   $\bigcap_{n+1} (A_i \cup B_i) = (\bigcap_n (A_i \cup B_i)) \cap (A_{n+1} \cup B_{n+1})$,

   $= (\bigcap_n A_i) \cup (\bigcap_n B_i) \cap (A_{n+1} \cup B_{n+1})$, do n = 2.

   $= (A_{n+1} \cup B_{n+1})$, hay

   $= (\bigcap_{n+1} A_i) \cup (\bigcap_{n+1} B_i)$
4. …

4. Ý nghĩa của định lý truy chứng hữu hạn

Định lý truy chứng bao gồm 2 thành phần :

- Một mệnh đề có giá trị đúng.
- Một qui tắc suy luận : nếu có một mệnh đề đúng thì mệnh đề kế tiếp của nó cũng đúng.

Do đó với hai yếu tố trên có thể truy tới vô hạn. Từ mệnh đề thứ n_0 đúng, do qui tắc suy luận có mệnh đề thứ n_0+1 cũng đúng. Rồi từ n_0+1 đúng, do qui tắc suy luận có n_0+2 cũng đúng. Tiến trình này được truy đuổi mãi mãi. Vì vậy được gọi tên là truy chứng. Tuy nhiên trong các kỹ thuật tính toán thì theo trật tự ngược lại. Nghĩa là để tính P_n người ta cần tính P_{n-1}. Để tính P_{n-1} cần phải tính P_{n-2} cho đến cuối cùng tính P_1. Đây là một trình tự quay ngược trở lại, nên còn được gọi là tính toán hồi qui. Thủ thuật này thường được sử dụng trong các kỹ thuật lập trình với tên gọi đệ qui.

Trong thực tế, khi đã quen thuộc thì không nhất thiết phải thực hiện việc chứng minh theo từng bước như trên. Người ta có thể bỏ qua bất kỳ bước nào. Nhất là việc phân biệt làm hai dạng truy chứng. Trong bước thứ 3 khi trình bày giả thiết truy chứng thường không trình bày cụ thể phát biểu của giả thiết mà chỉ nói đơn giản là giả thiết truy chứng. Thậm chí có thể bỏ qua bước 3. Trong bước 4 khi sử dụng giả thiết truy chứng cũng chỉ đơn giản nói “Do giả thiết truy chứng có …”. Giả thiết truy chứng không hề được nhắc đến. Nó đã được hiểu ngầm (một cách rất minh bạch).

Tuy nhiên mọi thứ khi còn nằm trong đầu (chưa được viết ra giấy) rất dễ dàng tự lừa gạt mình. Nhiều lúc “nghĩ” đã hiểu được bài toán, hoặc sẽ giải ra. Nhưng khi cần trình bày minh bạch và rõ ràng thì phát hiện ra những vấn đề không ổn.

5. Chứng minh truy chứng vô hạn hay siêu hạn hay hoàn hảo

Truy chứng hữu hạn không thực hiện được trên tập chỉ số không đếm được, có những bài toán có tập chỉ số không đếm được, do đó cần một truy chứng khác là siêu truy chứng. Truy chứng siêu hạn đòi hỏi tập chỉ số là tập hợp có thứ tự hoàn hảo. Nên cần *thứ tự hóa* các tập hợp không đếm được.

Nguyên tắc Tối thứ tự

Mọi tập hợp đều có thể có một thứ tự hoàn hảo.

Nguyên tắc Tối thứ tự tương đương với bổ đề Zorn, tương đương với cả tiên đề Chọn.

Định lý

Cho $<S, \leq>$ là tập hợp có thứ tự hoàn hảo, nếu P(x) đúng với mọi $x \leq y$ thì P(y) đúng.

Chứng minh.

Nếu P(x) không đúng với mọi $x \in S$ thì có $y \in S$ sao cho P(y) sai.

Đặt $A = \{ x \mid x \in S$ và P(x) sai$\}$, $A \neq \varnothing$ vì $y \in S$.

S có thứ tự hoàn hảo nên A có phần tử cực tiểu a.

Vì a là cực tiểu trong A nên P(x) đúng với mọi $x \leq a$.

Do giả thiết truy chứng P(x) đúng mọi $x \leq a$ nên P(a) đúng mâu thuẫn với P(a) sai vì $a \in A$.

Vậy P(x) đúng với mọi $x \in S$.

Để áp dụng được truy chứng siêu hạn thì cần phải đặt một quan hệ thứ tự hoàn hảo lên tập hợp được chọn làm chỉ số.

Phụ chương 7 Những cấu trúc đại số thông dụng

Định nghĩa – Cấu trúc đại số.

Một tập hợp và một số *hữu hạn* các *toán tử* được gọi là *cấu trúc đại số*.

Một cầu trúc đại số còn được gọi là một *đại số* hay một *cấu trúc*.

EndĐn

Các cấu trúc đại số thông dụng : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Thí dụ

Tập hợp $\mathbb{N}$ đứng một mình chỉ là tập hợp các số nguyên tự nhiên. ($\mathbb{N}$, +) là tập hợp các số nguyên tự nhiên cùng với một quan hệ (phép tính cộng) có tên là cấu trúc đại số. Và cấu trúc đai số này thỏa một số tính chất được gọi là nhóm.

($\mathbb{N}$, +) là nhóm, ($\mathbb{Z}$, +, *) là vành, ($\mathbb{R}$, +, *) là trường, ($\mathbb{R}$, +, *, K) là không gian vector (K là trường).

1. Tập hợp số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$

Nhắc lại, tính chất cực kỳ quan trọng của $\mathbb{N}$ là "*Mọi tập con của* $\boldsymbol{\mathbb{N}}$ *có phần tử cực tiểu*" (ngoại trừ tập rỗng). Đây là ước mơ "bất thành" của các tập hợp $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ và nhiều tập hợp khác.

Định nghĩa

Tập hợp số tự nhiên là cấu trúc ($\mathbb{N}$, 1, σ) với tập hợp $\mathbb{N}$ có 1 là phần tử và σ là ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$ thỏa tiên đề Piano.

Tiên đề Piano

P_1. $1 \in \mathbb{N}$.

P_2. Nếu $n \in \mathbb{N}$ thì $\sigma n \in \mathbb{N}$ (σn được gọi là phần tử kế của n).

P_3. Nếu $\sigma n = \sigma m$ thì $n = m$.

P_4. $\sigma n \neq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

P_5. Lấy $S \subseteq \mathbb{N}$, (nếu $1 \in S$) và (nếu $n \in S \Rightarrow \sigma n \in S$) thì $S = \mathbb{N}$.

Nhận xét

1. Tiên đề P_1 nói rằng 1 là phần tử đầu tiên. P_2 có nghĩa là phần tử kế tiếp của một số tự nhiên là một số tự nhiên. P_3 có nghĩa là hai số tự nhiên khác nhau không cùng phần tử kế tiếp. P_4 nghĩa là số 1 không là phần tử kế tiếp của bất kỳ số nguyên nào. Tiên đề P_5 là truy chứng toán học.
2. Một số hệ thống tiên đề khác chọn phần tử 0 thay vì phần tử 1 là số đầu tiên, do đó sẽ có một số thay đổi nhỏ ở các tiên đề còn lại.
3. Định nghĩa khác cho phép tính cộng (+)

   Đặt $\mathbb{N}$ có dạng : $\mathbb{N} = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

   Ánh xạ $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, với $\sigma(n) = \sigma n = \{n\}$ (phần tử kế trước n).

   Ánh xạ $\lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\varnothing\}$ với $\lambda(n) = \lambda n \in n$ (phần tử kế sau n).

   Ánh xạ $\sigma^p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, với $\sigma^1 = \sigma$ và $\sigma^p = \sigma \circ \sigma^{\lambda p}$ với $p \in (\mathbb{N} - \{\{\varnothing\}\})$.

   Phép tính cộng

   Ánh xạ $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\varnothing\}$ với $+(m, n) = \sigma^n(m)$.

Định lý (Đệ qui)

X là tập hợp, $a \in X$ và $\rho : X \longrightarrow X$ là ánh xạ thì có đúng một ánh xạ $\xi : \mathbb{N} \longrightarrow X$ thỏa :

$\xi(1) = a$,

$\xi(\sigma n) = \rho(\xi(n))$, $n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét

$\xi(1) = a$,

$\xi(\sigma 1) = \xi(2) = \rho(\xi(1)) = \rho(a) = \rho^1(a)$.

$\xi(\sigma 2) = \xi(3) = \rho(\xi(2)) = \rho\rho(a) = \rho^2(a)$.

$\xi(\sigma 3) = \xi(4) = \rho(\xi(3)) = \rho\rho\rho(a) = \rho^3(a)$.

…

$\xi(\sigma n) = \xi(n+1) = \rho(\xi(n)) = \rho^n(a)$.

Ghi chú

1. Thuật ngữ đệ qui và truy chứng thường được dùng đồng nghĩa với nhau.
2. Cần phân biệt giữa "định nghĩa đệ qui" và "chứng minh truy chứng".

Định lý (nguyên tắc Pigeonhole)

Hai tập hợp hữu hạn X, Y và số phần tử của Y nhỏ hơn hẳn số phần tử của X thì không thể có ánh xạ 1-1 từ X vào Y.

Thí dụ

Cho S = {bồcâuA, bồcâuB, bồcâuC, bồcâuD},

T = {chuồng1, chuồng2, chuồng3}

thì phải có một chuồng chứa 2 con bồ câu.

Các toán tử sau được định nghĩa bằng đệ qui.

Phép tính Cộng

$n + 1 = n^*$	(n^* là phần tử kế tiếp của n)
$n + m^* = (n + m)^*$,	với $(n + m)$ đã xác định.

Tính chất phép tính cộng

$(n + m) \in \mathbb{N}$	(đóng)
$n + m = m + n$	(giao hoán)
$m + (n + p) = (m + n) + p$	(phối hợp)
Nếu $m + p = n + p$ thì $m = n$	(khả giản).

Phép tính Nhân

$n \times 1 = n$

$n \times m^* = (n \times m) + n$, với $(n \times m)$ xác định.

Tính chất phép tính nhân

$(n \times m) \in \mathbb{N}$	(đóng)
$m \times n = n \times m$	(giao hoán)

$m \times (n \times p) = (m \times n) \times p$ (phối hợp)

Nếu $m \times p = n \times p$ thì $m = n$ (khả giản).

Các tính chất phối hợp giữa + và ×

$m \times (n + p) = (m \times n) + (m \times p)$

$(n + p) \times m = (n \times m) + (p \times m)$

Quan hệ thứ tự

$m < n$ nếu có p sao cho $m + p = n$.

Tính chất

a. $\forall m, n$ một và chỉ một điều sau đây xảy ra :

$m = n$ hay $m < n$ hay $n < m$.

b. $\forall m, n, p$:

$(m < n) \leftrightarrow (m + p < n + p)$.

$(m < n) \leftrightarrow (m.p < n.p)$.

Định lý

Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ có phần tử cực tiểu.

Phép tính Lũy thừa

$1.a = a$, $a^1 = a$

$(k + 1)a = ka + a$, $a^{k+1} = a^k.a$.

Nhận xét

1. Phép tính cộng (+) và nhân (.) được định nghĩa từ khái niệm phần tử kế tiếp. Phép tính nhân được định nghĩa là ánh xạ từ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$ thỏa tính chất sau :

   a. $n \times m \in \mathbb{N}$.

   b. $n \times 1 = n$.

   c. $n \times k^* = n \times k + n$, với mọi $n, m, k \in \mathbb{N}$.

2. Số tự nhiên được gọi là số dương. Phương trình m + x = n không phải lúc nào cũng có lời giải trong $\mathbb{N}$. Số tự nhiên được mở rộng thêm phần số âm vào thế kỷ 15.

2. Tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$

Phương trình x + 3 = 2 không có nghiệm trong $\mathbb{N}$. Do đó, cần mở rộng số tự nhiên.

Việc mở rộng bằng quan hệ tương đương trên ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

Định nghĩa hình thức của $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_R \cup \{0\}$, với quan hệ tương đương R được định nghĩa là

$((m, n), (m + 1, n + 1)) \in R$.

Nhận xét

1. $\mathbb{Z}$ là lớp tương đương của quan hệ R trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Đặt

   $\mathbb{N}^+ = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}$ và $m > n\}$ và

   $\mathbb{N}^- = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}$ và $m < n\}$.

   Số dương $\mathbb{N}^+$ được kết hợp cùng số âm $\mathbb{N}^-$ và phần tử 0 để tạo thành tập hợp số nguyên :

   $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^+ \cup \mathbb{N}^- \cup \{0\}$.
3. Dễ dàng mở rộng các phép tính của $\mathbb{N}$ trên $\mathbb{Z}$.
4. Có thể xem $\mathbb{N}$ như tập con của $\mathbb{Z}$, vì $\mathbb{N}$ tương ứng với $\mathbb{Z}^+$.
5. Đôi khi lấy $\mathbb{N}$ bao gồm phần tử 0 khi định nghĩa $\mathbb{Z}$.
6. Ký hiệu $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.
7. Xây dựng số nguyên bằng phương pháp khác.

   Xét quan hệ S trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $((m, n), (p, q)) \in S$ nếu và chỉ nếu $m + q = p + n$.

Thí dụ

$((1, 1), (2, 2)), ((3, 5), (7, 9)), ((8, 3), (6, 1)) \in S$.

Lấy $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_S$ là tập hợp số nguyên.

Tính chất của số nguyên

①. Thuật chia Euclide

Định lý

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \exists q, r \in \mathbb{Z} : m = nq + r \text{ với } 0 \leq r < |n|.$$

($|n|$ là trị số tuyệt đối của n).

Thuật chia Euclide nói rằng với mọi số nguyên m, n với b khác 0 có thể tìm được số nguyên q, r để có được quan hệ $m = nq + r$ với $0 \leq r < |n|$. n được gọi là *số chia* của *số bị chia* m với $n \neq 0$, nếu có $r = 0$ thì n được gọi là *ước số* của m.

Thí dụ

$a = 25, b = 3$ thì $q = 8, r = 1$ để có $25 = 3 \times 8 + 1$.

$a = 19, b = 5$ thì $q = 3, r = 4$ để có $19 = 5 \times 3 + 4$.

②. Chia đúng hay chia chẵn

m chia đúng cho n nếu $m = kn$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ký hiệu $n \mid m$.

Thí dụ

$2 \mid 8$, $5 \mid 12$, $15 \mid 45$ $7 \mid 66$.

③. Số nguyên tố

Số nguyên tố là số nguyên chỉ có hai ước số là 1 và chính nó.

Nói cách khác :

Số nguyên p là nguyên tố nếu $p \notin \{0, 1, -1\}$ và

có ước số $\in \{1, -1, p, -p\}$.

Thí dụ

13 là số nguyên tố vì chỉ có 1 và 13 là ước số của 13.

15 không là số nguyên tố vì ngoài 1, 15 còn 3 và 5 cùng là ước số của 15.

Số nguyên tố :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … .

$2^{127} - 1 =$ 170141183460469231731687303715884105727.

$2^{44497} - 1$ có 13395 chữ số.

④. Ước số chung lớn nhất :

Mọi đôi phần tử của $\mathbb{Z}$ đều có một ước số chung lớn nhất.

Ký hiệu ước số chung lớn nhất của a, b là gcd(a, b).

⑤. Quan hệ Modulo :

Quan hệ modulo n trên số nguyên $\mathbb{Z}$ được định nghĩa như sau :

$$x \equiv y \pmod{n} \longleftrightarrow n \mid (x - y).$$

hay $x = y + kn$, với $k \in \mathbb{Z}$.

⑥. Định lý căn bản của số học

Mọi số nguyên $n \geq 2$ đều được phân tích thành tích các số nguyên tố.

Sự phân tích này duy nhất.

$n = p_1.p_2 \ldots p_k$, với p_i là các số nguyên tố > 0.

Thí dụ

$1008 = 2^4 3^2 7$.

⑦. Không thể rút gọn

Một phần tử n được gọi là không rút gọn được nếu :

1. $n \neq \pm 1$, và
2. Nếu $n = x.y$ thì $x|1$ hay $y|1$.

⑧. Nguyên tố ⟷ không rút gọn được.

Mệnh đề

1. Nếu b | a và c | b thì c | a, với bc ≠ 0.
2. Nếu b | a thì bc | ac, với bc ≠ 0.
3. Nếu c | d và c | e thì c | (d + e), với bc ≠ 0.

Chứng minh

1. b | a và c | b → a = kb và b = hc → a = (kh)c → c | a.
2. b | a → a = kb → ac = kbc → bc | ac.
3. c | d và c | e → d = mc và e = nc → c | (d + e).

Mệnh đề

* Nếu p là thừa số nguyên tố nhỏ nhất của n thì $p \leq \sqrt{n}$ hoặc p = n.

* n là nguyên tố ↔ n không chia đúng cho các số nguyên tố $\leq \sqrt{n}$.

Định lý (Dirichlet)

Có vô hạn số nguyên k để (ak + b) là nguyên tố, với a, b nguyên tố cùng nhau và a ≥ 1.

3. Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$

Phương trình 2x = 3 không có nghiệm trong $\mathbb{Z}$. Do đó, cần mở rộng số nguyên.

Xét tập hợp ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$) và quan hệ T như sau :

$$((m, n), (p, q)) \in T \text{ nếu và chỉ nếu } mq = pn.$$

Lấy $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/_T$.

Nhận xét

1. Không thể xem phân số là số hữu tỉ vì $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}$, ... là tương ứng với 1.
2. Các phép tính của $\mathbb{Z}$ vẫn mở rộng được trên $\mathbb{Q}$.

Tính chất của số hữu tỉ

①. Tính dầy đặc

Nếu x, y là hai số hữu tỉ sao cho x < y thì có số hữu tỉ z : x < z < y.

②. Tính archimedian

Nếu x, y là hai số hữu tỉ dương thì có số nguyên dương p : p.x > y.

③Biểu diễn thập phân

Mọi số hữu tỉ đều có một biểu diễn thập phân $\frac{a}{b} = q_1.q_2q_3q_4q_5\ldots$ với a, b, q_i là các số nguyên.

4. Tập hợp số vô tỉ

Dường như số hữu tỉ lấp đầy hết đường thẳng, nghĩa là mọi điểm trên đường thẳng đều có một số hữu tỉ tương ứng.

Pythagoras và các đồ đệ tìm được một số độ dài mà không thể biểu diễn là tỉ số của hai độ dài.

Quan điểm triết học của nhóm Pythagoras cho rằng các con số điều khiển vũ trụ (whole number ruled the universe). Do đó họ cố gắng ngăn chận khám phá này, nhưng thất bại !.

Một bằng chứng là hình vuông cạnh có chiều dài là 1 nhưng đường chéo không là số hữu tỉ. Đường chéo $\sqrt{2}$ không biểu diễn được bằng phân số.

Chứng minh phản chứng, giả sử $\sqrt{2}$ biểu diễn bằng phân số tối giản, thì tử và mẫu không thể cùng chẵn, bình phương ta có được sự mâu thuẫn.

Số $\sqrt{2}$ được gọi là số vô tỉ. Tương tự $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, ... là các số vô tỉ.

Tới thế kỷ 16 khái niệm số mới được mở rộng để bao hàm số vô tỉ.

Số hữu tỉ nhân với số vô tỉ là số vô tỉ.

5. Tập hợp số thực $\mathbb{R}$

Đến nửa thế kỷ 19 lý thuyết số mới được phát triển trên một nền tảng vững chắc.

Số thực = số hữu tỉ + số vô tỉ.

Tập hợp Dedekind

Một tập con D của số hữu tỉ là tập hợp Dedekind nếu :

1. D chứa ít nhất một số hữu tỉ.
2. Nếu $p \in D$ và q là số hữu tỉ sao cho $q < p$ thì $q \in D$.
3. D không có số hữu tỉ lớn nhất, nghĩa là mọi $p \in D$ có $q \in D : q > p$.

Trọng điểm của tập hợp Dedekind là không có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

Đặt $D(r) = \{ q \mid q \in \mathbb{Q}, q < r \}$ với r là số hữu tỉ thì D(r) là tập hợp Dedekind.

Lấy $\mathbb{R} = \{ D \mid D \text{ là tập hợp Dedekind} \}$ và $\mathbb{R}^* = \{ D(r) \mid r \in \mathbb{Q} \}$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{Q}$.

Nhận xét

1. Có phương pháp khác xây dựng tập hợp số thực theo quan điểm giải tích đó là chuỗi thỏa điều kiện Cauchy.
2. Số thực $\mathbb{R}$ được mở rộng bằng cách bổ sung thêm hai phần tử là $+\infty$ và $-\infty$ để trở thành một không gian hoàn bị (nghĩa là mọi chuỗi đều hội tụ).
3. Mọi số thực r đều có một chuỗi vô hạn số hữu tỉ hội tụ đến r.
4. Mọi số thực đều có một biểu diễn thập phân vô hạn.

6. Tập hợp số thực $\mathbb{C}$

Phương trình $x^2 + 1 = 0$ không có lời giải trong $\mathbb{R}$. Khái niệm i được thêm vào và mở rộng tập hợp $\mathbb{R}$ thành tập hợp số phức. Khái niệm số ảo i được một số nhà toán học chào đón nhưng một số khác lại chống đối. Cho đến giữa thế kỷ 19 sự hoài nghi và chống đối vẫn còn.

7. Tập hợp số siêu việt

Số phức hoặc số thực được gọi là số *đại số* nếu nó là nghiệm của một phương trình đại số

$q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + ... + q_1 x + q_0 = 0$, với n là số tự nhiên, q_i là số nguyên.

Thí dụ

Số ảo i là số đại số vì thoả phương trình $x^2 + 1 = 0$.

Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là đại số vì thoả phương trình $bx - a = 0$.

Số vô tỉ có số là đại số nhưng cũng có số là không đại số.

Số vô tỉ $\sqrt{2}$ là đại số vì thoả phương trình $x^2 - 2 = 0$.

Nhận xét

Vì số thực không đếm được và các số đại số là đếm được nên có một tập con của số thực là không đại số dược gọi là số *siêu việt*.

Euler sử dụng từ transcend để chỉ số siêu việt có nghĩa là vượt quá khả năng của phương pháp đại số.

Số siêu việt e và π được Euler giới thiệu vào giữa thế kỷ 18. Mãi đến thế kỷ 19 Hermite chứng minh được chúng là số siêu việt.

Phụ chương 8 Các tiên đề của lý thuyết tập hợp

A. Thuật ngữ.

- Quan hệ.

Quan hệ giữa hai đối tượng trong toán học là sự liên kết giữa chúng, được xác định bằng một tính chất.

Thí dụ :

Số 12 có quan hệ "chia đúng" với số 3.

Đối tượng x (số 12) và y (số 3) có quan hệ R (chia đúng) với nhau

- Tính chất bằng nhau.

Hai đối tượng bằng nhau trong toán học được phân làm hai loại : bằng nhau nội diện và ngoại diện.

Nội diện quan tâm đến tính chất bên trong, đó là sự mô tả hoặc ý nghĩa của hai đối tượng.

Ngoại diện chỉ bàn về nội dung của đối tượng, không nói đến các khái niệm được sử dụng để hình thành đối tượng, điều quan tâm là tính chất bên ngoài, nghĩa là chúng phát sinh cùng kết quả.

Thông thường, khi bằng nhau về nội diện thì cũng bằng nhau ngoại diện. Bằng nhau về nội diện mà không bằng nhau về ngoại diện thường sẽ gọi bằng tên khác như đẳng cấu. Lúc này điều quan tâm có thể là sự bằng nhau về tính cấu trúc của hai đối tượng hơn là bằng nhau về các phần tử của chúng.

Thí dụ :

Ánh xạ f và g từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$ như sau :

$f(n) = ((n + 3) * 2)$, (cộng 3 vào n, kế đó nhân kết quả cho 2).

$g(n) = ((n * 2) + 6)$,(nhân n cho 2, kế đó kết quả cộng thêm 6).

Hai ánh xạ này bằng nhau (theo ngoại diện) vì phát sinh cùng kết quả.

Nhưng định nghĩa của hai ánh xạ là khác nhau (khác nhau về nội diện).

$s = \{x \mid x$ là số nguyên tố nhỏ hơn $10\}$,

$t = \{2, 3, 5, 7\}$.

Hai tập hợp s và t bằng nhau (theo nội diện) vì có cùng tính chất bên trong là số nguyên tố <10, đó là dựa trên mô tả và ý nghĩa. Chúng cũng bằng nhau theo ngoại diện vì có cùng kết quả.

- Lược đồ tiên đề.

Siêu ngôn ngữ là ngôn ngữ được sử dụng như là một công cụ để diễn đạt, phân tích cấu trúc, tính chất của một ngôn ngữ khác.

Lược đồ tiên đề là một công thức trong siêu ngôn ngữ, nó bao hàm một số tiên đề, nói khác đi một nhóm các tiên đề là những hiện hữu của lược đồ. Lược đồ được coi như là biến đại diện cho một nhóm nguyên từ hoặc công thức của hệ thống.

Một lược đồ tiên đề là một công thức đại diện cho vô hạn các tiên đề. Các tiên đề này có được bằng cách thay thế các biến trong lược đồ bằng bất kỳ công thức nào.

Thí dụ :

Lược đồ tiên đề

$F \Longrightarrow F \vee G$

biểu diễn cho các tiên đề :

$A \longrightarrow A \vee B$, (thay F là A và G là B)

$A \longrightarrow A \vee A$, (thay F và G bằng A)

$\neg A \longrightarrow \neg A \vee B$ (thay F là $\neg A$ và G là B)

$(A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow B) \vee (D \wedge E)$

(thay F là $(A \longrightarrow B)$ và G là $(D \wedge E)$)

….

- Hệ tiên đề.

Hệ tiên đề là một chuỗi hữu hạn các mệnh đề được chấp nhận ban đầu.

- Thế giới nhị nguyên.

Khi một ý niệm trở thành khái niệm, nghĩa là được xác định, được định nghĩa thì khái niệm phủ định của nó xuất hiện đồng thời. Vì khi xác định một ý niệm, đó là quá trình biến nó thành hiện thực bằng cách trưng ra những yếu tố để trói chặt ý niệm này lại, việc làm này vô hình trung đã tạo một lằn ranh phân biệt giữa ý niệm A và cái bên ngoài (lằn ranh). Cái bên ngoài A đó là ý niệm "không A". Theo thời gian sẽ có những yếu tố mới làm cho ý niệm được rõ ràng hơn nghĩa là phạm vi chiếm dụng của nó co nhỏ lại. Nhưng cũng có trường hợp ngược lại, những ràng buộc được mở rộng ra.

Do đó, khi đưa ra khái niệm tập hợp, tất yếu khái niệm "không tập hợp" cũng hiện hữu. Vì vậy những cái "không là tập hợp" xuất hiện không tạo ra mâu thuẫn, bản thân việc "định nghĩa" đã chấp nhận thế giới nhị nguyên.

B. Luận lý mệnh đề và vị từ.

Các toán tử logic

Cho p, q là mệnh đề, còn gọi là công thức.

a) Có 4 toán tử 1 thông số : $\neg$(p) (phủ định), Id(p) (đồng nhất), $\top$(p) (tautology), $\bot$(p) (hằng sai).

b) Có 4 toán tử 2 thông số : p $\wedge$ q (và), p $\vee$ q (hoặc), p $\veebar$ q (hoặc loại trừ), p $\longrightarrow$ q (dẫn ra).

Nhận xét

Ở bảng thực trị của toán tử "$\longrightarrow$", vô hình trung đã chấp nhận nguyên lý "ex falso quodibet" trong logic, nghĩa của tiếng La tinh là "Từ phát biểu sai có thể suy luận ra bất cứ điều gì". Nguyên lý này chỉ ra rằng nếu chấp nhận một điều không đúng (một giả định sai), có thể suy luận ra bất kỳ điều gì, bao gồm những điều hợp lý hoặc vô lý. Với p lấy giá trị sai thì bất kể q có đúng hay sai thì “p ⟶ q” đều đúng.

Hệ tiên đề của luận lý mệnh đề

Hệ tiên đề của luận lý mệnh đề là rỗng – hệ tiên đề không có tiên đề nào.

Khái niệm Chứng minh.

Mệnh đề p được gọi là *chứng minh* được từ các mệnh đề $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bằng cách áp dụng các mệnh đề a_i và tiên đề dẫn ra được p.

Ký hiệu p được chứng minh từ các mệnh đề $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \vdash p.$$

Nhất quán.

Hệ tiên đề là *nhất quán* nếu có mệnh đề q không thể chứng minh được từ các tiên đề $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\neg (a_1, a_2, \ldots, a_n \vdash q)$$

C. Hệ tiên đề của lý thuyết tập hợp.

Hệ tiên đề của lý thuyết tập hợp nhằm xác định cái gì là tập hợp, cái gì không là tập hợp và cách thức tạo ra tập hợp mới.

Tiên đề là các phát biểu được “chấp nhận” không cần chứng minh. Tiên đề tương tự như định nghĩa, nhưng nó có tầm ảnh hưởng bao quát cả hệ thống.

Để diễn đạt các ý niệm trong lý thuyết tập hợp, ngôn ngữ logic được chọn là luận lý vị từ.

Bản chất của luận lý vị từ được xây dựng trên nguyên tắc đúng sai, vô hình trung đã xác lập một thế giới nhị nguyên vì vậy lý thuyết tập hợp cũng dựa trên nền tảng nhị nguyên luận. Thực tế bản chất của lý thuyết tập hợp cũng ở trong thế giới nhị nguyên vì khi xác lập lý thuyết tập hợp đã chấp nhận thế giới ngoài tập hợp.

Các tiên đề

Hệ tiên đề Zermelo-Fraenkel của lý thuyết tập hợp chỉ có khái niệm tập hợp, ngoài ra không có khái niệm nào khác là nguyên thủy. Phần tử chẳng qua chỉ là tên gọi khác của tập hợp khi nó có tương quan với tập hợp khác. Do đó thế giới tập hợp chỉ có một loại đối tượng là tập hợp. Các tập hợp khi *tương tác* với nhau sẽ sinh ra tập hợp với tên gọi mới, nhưng bản chất vẫn là tập hợp. Điều này khác với quan niệm cũ, thế giới tập hợp có hai khái niệm nguyên thủy là tập hợp và phần tử.

Khi tạo dựng một đối tượng vô hình trung đã chia thế giới thành hai phần. Phần thứ nhất chứa đối tượng được "xác định", phần thứ hai chứa đối tượng không thỏa điều kiện xác định. Như vậy khi có cái gọi là *tập hợp* thì đã song hành cái *không tập hợp*.

Lý thuyết tập hợp được xây dựng bởi các đối tượng gọi là tập hợp. Các tập hợp liên kết với nhau bởi một quan hệ nền tảng gọi là *quan hệ phần tử* hay còn gọi là *quan hệ thuộc về*, được ký hiệu là $\in$.

1. Tiên đề Phần tử (quan hệ $\in$)

Phát biểu hình thức

Quan hệ phần tử $\in$ giữa các tập hợp x, y, z, thỏa các tính chất sau :

$\neg(x \in x)$ (không phản hồi)

$\neg((x \in y) \wedge (y \in x))$ (không đối xứng)

$\neg((x \in y) \wedge (y \in z) \wedge (x \in z))$ (không truyền)

Ý nghĩa :

Quan hệ phủ định của quan hệ thuộc về là quan hệ "không thuộc về" được ký hiệu là "$\notin$".

Do đó, $\neg(x \in x)$ được viết lại là $(x \notin x)$.

Các tính chất của quan hệ $\in$ còn được diễn tả lại như sau :

$(x \notin x)$,

$(x \in y) \longrightarrow \neg(y \in x)$,

$[(x \in y) \wedge (y \in z)] \longrightarrow \neg(x \in z)$.

Nhận xét

- Tiên đề Phần tử thuôc loại tiên đề nền tảng, nó xác định đặc tính của tập hợp.
- Từ quan hệ ∈ có thể định nghĩa quan hệ chứa trong "$\subseteq$" và bằng nhau "=" giữa hai tập hợp x, y :

  $x \subseteq y \leftrightarrow \forall a\ (a \in x \longrightarrow a \in y)$

  $x = y \leftrightarrow (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$
- Khi có quan hệ "thuộc về" thì quan hệ "không thuộc về" đồng thời xuất hiện.
- Việc chọn mệnh đề và sử dụng tính đúng sai trong việc xác dịnh quan hệ "thuộc về" giữa hai tập hợp sẽ không cần thiết vì tính đúng sai được thay bằng tính "thuộc về" hay "không thuộc về". Nếu dựa vào tính đúng sai của mệnh đề sẽ phụ thuôc vào cách đánh giá đúng sai của mệnh đề trong một thực tế nào đó. Thế giới tập hợp mất đi tính độc lập.
- Hiển nhiên với mọi tập hợp x, y có : $\forall x\ \forall y\ (x \in y) \veebar (x \notin y)$.

Giải quyết nghịch lý Russell

Nghịch lý Russell phát biểu rằng "Giả sử có $\mathfrak{U}$ chứa tất cả tập hợp mà không chứa chính nó như một phần tử" (hay diễn tả bằng ngôn ngữ hình thức $(\exists\mathfrak{U})(\forall z)\ (z \in \mathfrak{U} \leftrightarrow z \notin z)$), được loại trừ, vì quan hệ $z \notin z$ không xảy ra do qui định của tiên đề Phần tử.

Siêu tập hợp

Lấy $\mathfrak{U}$ chứa tất cả tập hợp.

Chứng minh $\mathfrak{U}$ không là tập hợp

Các phần tử của $\mathfrak{U}$ không chứa chính nó như một phần tử, theo tiên đề Phần tử.

Nếu $\mathfrak{U}$ là tập hợp thì $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}$, nhưng $\mathfrak{U} \notin \mathfrak{U}$, do tính không phản hồi của tập hợp.

Vậy $\mathfrak{U}$ không là tập hợp.

"Không gian" $\mathfrak{U}$ là một loại "không tập hợp" và $\mathfrak{U}$ được gọi là *siêu tập hợp*. Có những "không tập hợp" khác $\mathfrak{U}$, nhưng $\mathfrak{U}$ là duy nhất với tính chất chứa tất cả tập hợp.

Từ đây xác định lại quan hệ $\in$ trên siêu tập hợp $\mathfrak{U}$.

Quan hệ $\in$ trên $\mathfrak{U}$ thỏa các tính chất : không phản hồi, không đối xứng và không truyền.

Khái niệm "không tập hợp" không giống với khái niệm "lớp". Khi xác định khái niệm tập hợp tức khắc có khái niệm "không tập hợp", siêu tập hợp chỉ là một "không tập hợp" đặc biệt. Ví dụ khi xác định khái niệm "màu trắng" sẽ có ngay "màu không trắng". Trong những "màu không trắng" có màu đen, màu xanh, màu đỏ, … . Siêu tập hợp cũng tương đồng với một "màu không trắng".

2. Tiên đề Tập rỗng

Phát biểu hình thức

$$\exists e \forall x\ (e \subseteq x)$$

Ý nghĩa :

Tiên đề này nói về sự hiện hữu của tập rỗng, đó là tập con của mọi tập hợp. Vì tập rỗng cũng là tập con của những tập hợp có một phần tử nên tập rỗng không thể có phần tử.

Nói theo ngôn ngữ thông thường : Có một tập hợp không có phần tử.

Tập rỗng được ký hiệu là $\varnothing$.

Nhận xét :

- Tiên đề Tập rỗng thuôc loại xây dựng, nó tạo ra một tập hợp từ quan hệ phần tử.
- Ký hiệu $\varnothing$ là ký tự tiếng Na uy, tương đồng với ký tự φ của Hy lạp.
- Tiên đề này được biết như tiên đề Hiện hữu.

Định lý

Tập hợp rỗng $\varnothing$ là duy nhất.

3. Tiên đề Ghép đôi

Phát biểu hình thức

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ ((w \in z) \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y))).$$

Ý nghĩa :

Với mọi tập hợp x, y có tập hợp chứa đúng hai phần tử x và y và được ký hiệu là $\{x, y\}$.

Mệnh đề.

$\{x, y\} = \{y, x\}$.

Nhận xét :

- Tiên đề Ghép đôi thuôc loại xây dựng, nó tạo ra một tập hợp mới từ hai tập hợp cho trước.
- Tiên đề này còn có tên "axiom of the unordered pair" (tiên đề của những đôi không có thứ tự).
- $\{x, x\} = \{x\}$
- Nếu Tiên đề Ghép đôi được phát biểu là $\forall x\ \forall y\ \exists z\ ((x \in z)\ (y \in z))$ thì tập hợp z có thể $\{x, y\} \subsetneqq z$. Nghĩa là z không phải là tập hợp nhỏ nhất chứa x, y.

4. Tiên đề hội

Phát biểu hình thức

$$\forall x\ \exists y\ \forall w\ ((w \in y) \leftrightarrow \exists z\ ((z \in x) \wedge (w \in z))) \qquad \text{(dạng 1)}$$

$$\forall x\ \exists y\ \forall w\ \forall z\ (((z \in x) \wedge (w \in z)) \longrightarrow (w \in y)) \qquad \text{(dạng 2)}$$

Ký hiệu

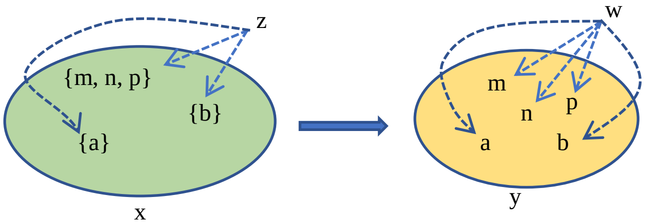
$y = \cup_x$

Ý nghĩa :

Lấy x là tập hợp. Có tập hợp y, sao cho phần tử của y là phần tử của phần tử của x.

Thí dụ :

Hình minh họa.



Nhận xét :

- Tiên đề này thuôc loại nền tảng, nó tạo ra một tập hợp mới từ tập hợp cho trước.
- Do Ernst Zermelo đề xuất năm 1908. Còn có một tên khác là *Axiom of the Sum Set*.
- Tiên đề Hội là tiên đề không gây tranh cãi.

5. Tiên đề thay thế

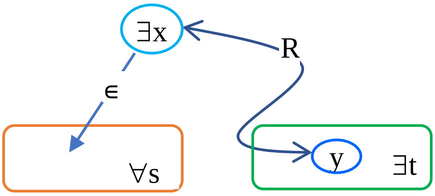
Phát biểu hình thức

Lấy R là quan hệ trên $\mathfrak{U}$.

Tồn tại tập hợp t đối với tập hợp s sao cho mọi y ∈ t và có x sao cho R(x, y) thì x ∈ s,

$$\forall s\ \exists t\ \forall y\ \exists x\ [((y \in t) \wedge R(x, y)) \longrightarrow (x \in s)]$$

Hình minh họa :



Ý nghĩa :

Tiên đề Thay thế nói rằng ảnh của tập hợp qua một quan hệ cũng là *tập hợp*.

$\text{ImR}(s) = \{y \mid \exists x\ (x \in s) \wedge R(x, y)\}$ là ảnh của s qua R.

Nhận xét :

- Tiên đề Thay thế thuôc loại nên tảng, một tập hợp mới được tạo ra từ một quan hệ và tập hợp cho trước.
- Tiên đề này do nhà toán học Fraenkel giới thiệu.
- Tiên đề Thay thế dẫn ra được "Nguyên tắc nhận thức giới hạn", nhưng chiều ngược lại là không.
- Tiên đề Đặc tả hầu như có thể dẫn xuất được từ tiên đề Thay thế.

6. Tiên đề Lũy thừa

Phát biểu hình thức

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y) \longleftrightarrow \forall w\ ((w \in z) \longrightarrow (w \in x))$$

Viết đơn giản là :

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x)$$

Ý nghĩa :

Tập lũy thừa của tập hợp x là tập hợp y sao cho mọi tập con của x là phần tử của y.

Tập hợp y được ký hiệu $\mathcal{P}(x)$ hay 2^x.

Thí dụ :

$x = \{a, b\}$. $\mathcal{P}(x) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$x = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(x) = \{\varnothing, \{1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Nhận xét :

- Tiên đề Lũy thừa thuôc loại nên tảng, nó tạo ra một tập hợp mới từ tập hợp cho trước.
- Điều cơ bản của tiên đề này là sự hiện hữu của tập lũy thừa đối với mọi tập hợp.
- Tiên đề Lũy thừa là tiên đề không gây ra tranh cãi.
- Tiên đề Lũy thừa cho phép định nghĩa tích Descartes của hai tập hợp x, y.

  Định nghĩa tích Descartes $x \times y$ có thể dùng biểu diễn Kuratowski :

  $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$ là phần tử của tập tích $x \times y$.

  Do $x \times y \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$ nên tích Descartes $x \times y$ là tập hợp.

  Biểu diên phần tử tích của Hausdorff : $(x, y) = \{\{x, \varnothing\}, \{y, \{\varnothing\}\}\}$.
- Tiên đề Lũy thừa phụ thuộc vào khái niệm “mặc nhiên thỏa” do toán tử “$\longrightarrow$” xuất hiện trong định nghĩa và áp dụng vào tập hợp $\varnothing$.
- Lý do gọi tiên đề này là Tiên đề Lũy thừa vì số phần tử của tập hợp $\mathcal{P}(x)$ là 2^x.

7. Tiên đề Vô hạn

Phát biểu hình thức

$$\exists s\ [\ (\varnothing \in s) \wedge (\forall x \in s)\ ((x \cup \{x\}) \in s)\ ]$$

Ý nghĩa :

Tiên đề Vô hạn nói rằng có tập hợp vô hạn. Cụ thể là tập hợp s có tập rỗng là phần tử và các phần tử x của s thì {x} cũng là phần tử của s.

Đó là tập hợp

{ ∅, {∅}, {{∅}}, {{{∅}}}, … } biểu diễn cho các số tự nhiên

0   1   2   3

Hệ luận :

ℕ là tập hợp. Tương tự **ℝ** = $\mathcal{P}$(**ℕ**) (số thực) cũng là tập hợp.

Nhận xét :

- Phần tử (x ∪ {x}) được gọi là phần tử kế tiếp của x.
- Để hiểu tiên đề này trước hết chứng minh sự hiện hữu của (x ∪ {x}). Tiên đề Ghép đôi cho phép hình thành {x}, và tiên đề Hội thực hiện phép hội giữa x và {x}.
- Một tập hợp x được gọi là truy chứng nếu ∅ ∈ x và với mỗi y ∈ x thì tập nối tiếp của x là (y ∪ {y}) cũng là một phần tử của x.
- Tập hợp s gồm các phần tử :

  ∅ = 0,

  ∅∪{∅} = {0} = 1,

  1∪{1} = {0, 1} = 2,

  2∪{2} = {0, 1}∪{2} = {0, 1, 2} = 3,

  …

  Nếu phát biểu tiên đề đơn giản là ∃s ((∅ ∈ s) ∧ (∀x ∈ s) ({x} ∈ s)) thì kết quả là :

  ∅ = 0,

  {∅} = {0} = 1,

  {{∅}} = {1} = 2,

  {{{∅}}} = {2} = 3,

  …
- Tập hợp s gồm các phần tử : ∅, {∅}, {{∅}}, … .

- Tiên đề Vô hạng có dạng $\exists s\ ((\varnothing \in s) \wedge (\forall x \in s)\ (\{x\} \in s))$ do Zermelo đề nghị.

  Sau này dạng $\exists s\ ((\varnothing \in s) \wedge (\forall x \in s)\ (x \cup \{x\} \in s))$ do Von Neumann đề nghị xuất hiện trong ZF.
- Tiên đề vô hạn được phát biểu ở dạng điều kiện :

$$\exists s\ ((\varnothing \in s) \wedge (\forall x\ (x \in s) \longrightarrow (x \cup \{x\} \in s))).$$

8. Tiên đề Chọn

Mọi tiếng nói thế giới tập hợp đều là tập hợp, tập hợp, tập hợp, … không một ngôn từ nào khác. Cái mà tiên đề Chọn đề cập đến cũng là tập hợp. Tiên đề Chọn chọn những phần tử để hình thành nên một đối tượng gọi là tập hợp. Nhưng dạng tương đương của tiên đề Chọn là những cách thức chọn khác nhau để kết quả là tập hợp và tập hợp này có “thứ tự”. Ngoài ra cũng có một ẩn ý là *kết qủa của việc chọn* là tập hợp, đây cũng là một đặc trưng cũa một “loại” tập hợp. Không có đặc trưng này liệu tập hợp có còn là tập hợp không ?. Câu trả lời là vẫn còn, tiên đề Chọn chẳng qua làm cho các tập hợp có thể được *thứ tự hóa toàn phần*.

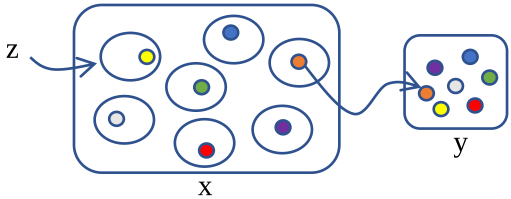
Đối với tập hữu hạn việc đặt trên nó một thứ tự là dễ dàng, nhưng với những tập vô hạn thì khó “hình dung”. Do đó tiên đề Chọn “phán” rằng mọi tập hợp đều có thể “chọn” ra được các phần tử.

Tiên đề là phát biểu đôi khi rất *tự nhiên* đối với nhiều người, nhưng nó không tự nhiên trong một hệ thống lý thuyết đang xây dựng. Tập hợp là khái niệm không định nghĩa, được mặc định chấp nhận. Tiên đề chọn cho biết rằng khi một *cái gì đó* được gọi là tập hợp thì có thể chọn ra phần tử của nó. Trong thực tế điều này rất hiển nhiên. Dĩ nhiên sẽ có câu hỏi là có cái gì đó có phần tử mà không chọn phần tử của nó ra được để khảo sát. Tiên đề chọn được diễn tả bằng ánh xạ gọi là ánh xạ chọn.

Phát biểu hình thức

Các dạng phát biểu của tiên đề Chọn.

$$\forall x \neq \varnothing\ \exists y\ \forall z \in x, ((z \cap y) \neq \varnothing) \wedge (\forall s, t \in z \cap y)\ (s = t)$$



Trong hình minh họa này các phần tử của y là những tập hợp, các tập hợp này có thể có nhiều phần tử, hình vẽ chỉ minh họa một phần tử được chọn của mỗi tập hợp.

Dạng đầy đủ :

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (x \neq \varnothing) \wedge (z \in x) \wedge ((z \cap y) \neq \varnothing) \wedge (\forall s, t \in (z \cap y))\ (s = t)$$

Ý nghĩa :

Với mọi tập hợp x khác rỗng có tập hợp y, mỗi phần tử của x chỉ lấy ra đúng một phần tử làm thành phần tử của y.

Có hai ý chính của tiên đề chọn : một là *chọn ra được phần tử* từ mỗi phần tử của tập hợp bất kỳ, hai là các phần tử được chọn ra *hình thành tập hợp*. Và một ý tiềm ẩn là các phần tử được chọn ra *được xắp thứ tự toàn phần*.

Thí dụ

Cho x = {{a, b, c}, {d, e, f, g}, {h, i}, {j, k}}.

Có thể xây dựng một ánh xạ γ như sau :

$\{a\} \longmapsto a$, $\{b\} \longmapsto b$, $\{c\} \longmapsto c$, $\{a, b\} \longmapsto a$, $\{a, c\} \longmapsto a$, $\{b, c\} \longmapsto b$, $\{a, b, c\} \longmapsto b$.

Cũng có thể chọn nhiều γ' khác thỏa tính chất $\gamma(A) \in A$, $\forall A \subseteq X$.

Nhận xét :

- Áp dụng tiên đề chọn tạo được tập hợp mới từ tập hợp cho trước.

- Do tính chọn được phần tử của tập hợp ngầm chứa ý niệm trật tự.
- Những cách diễn đạt khác của tiên đề chọn :

Nếu x là tập hợp không rỗng thì có ánh xạ φ với miền trị x sao cho với phần tử $y \in x$, $\varphi(y) \in y$.

Mọi họ không rỗng có ánh xạ Chọn φ.

$$\forall x \in a\ \exists \varphi(x, y) \longrightarrow \exists y\ \forall x \in a\ \varphi(x, y(x))$$

Nếu tập hợp $X \neq \varnothing$ thì có ánh xạ $\gamma : (2^X - \{\varnothing\}) \longrightarrow X$ thoả tính chất

$$(\forall A \in (2^X - \{\varnothing\}))\ (\gamma(A) \in A).$$

Ánh xạ γ được gọi là ánh xạ chọn.

Ánh xạ chọn không duy nhất.

Thí dụ

Cho $X = \{a, b, c\}$, và tập hợp :

$$(2^X - \{\varnothing\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Có thể xây dựng một ánh xạ γ như sau :

$$\{a\} \longmapsto a,\ \{b\} \longmapsto b,\ \{c\} \longmapsto c,\ \{a, b\} \longmapsto a,\ \{a, c\} \longmapsto a,\ \{b, c\} \longmapsto b,$$
$$\{a, b, c\} \longmapsto b.$$

Dễ dàng thấy γ thoả tính chất $\gamma(A) \in A$, $\forall A \subseteq X$.

Trong trường hợp này chọn được phần tử $\gamma(\{a, b, c\}) = b$ trong X.

- Trong thực tế, khi thực hiện hành vi chứng minh đã *vô tình* sử dụng tiên đề chọn. Các chứng minh có câu văn "Lấy một phần tử $x \in A$ …" thì đã ngầm sử dụng tiên đề chọn. Nhờ có tiên đề chọn, khi A là tập hợp khác rỗng thì có ánh xạ chọn γ, lúc đó lấy x chính là $\gamma(A) \in A$.
- Tiên đề Chọn còn gây nhiều tranh cãi.

9. Tiên đề Hiện hữu

Phát biểu hình thức :

$\exists x$ (x là tập hợp).

Ý nghĩa :

Tiên đề này nói rằng có sự hiện hữu của đối tượng tập hợp.

Nhận xét :

- Tiên đề này thuôc loại nền tảng, xác định sự hiện hữu của tập hợp.
- Nếu phát biểu tiên đề này bằng công thức $\exists x\ (x = x)$ thì trước đó phải định nghĩa ký hiệu “=” giữa hai tập hợp (tiên đề Bằng nhau).

Phụ chương 9 Thủ tục hóa tư duy

*. *Suy nghĩ*

Suy nghĩ là làm gì ?. Phụ chương này không đề nghị câu trả lời tổng quát mà chỉ đưa ra lời đáp trong phạm vi hẹp. Đó là lý thuyết tập hợp, rộng hơn là lãnh vực toán học. Bàn về hành vi suy nghĩ chỉ với mục đích làm cho người học cảm thấy dễ dàng hơn khi tiếp xúc với các hoạt động trong toán học. Ở đây không nói đến bản chất của suy nghĩ. Từ ngữ suy nghĩ hay tư duy được trình bày gói gọn trong hoạt động tinh thần để tìm lời giải cho vấn đề.

Hoạt động suy nghĩ thường được thực hiện theo cảm tính, nghĩa là dựa vào thói quen, tập quán. Khi đó kết quả "tốt" hay "xấu" tùy thuộc vào hành vi của người suy nghĩ. Khi gặp những vấn đề "quen thuộc" thì cảm thấy dễ dàng. Nhưng khi đụng đến những vấn đề mới có thể lại bối rối, bế tắc. Lúc đó không biết phải làm gì.

Bài viết này đề nghị những "hoạt động" để làm khi rơi vào trong tình trạng khó khăn như vậy. Nhưng tốt hơn, giúp cho chủ thể suy nghĩ tránh rơi vào hoàn cảnh khó xử.

Một học sinh đang giải bài tập. Suy nghĩ mãi không tìm ra được lời giải. Người hướng dẫn khuyến khích và bảo hãy tiếp tục suy nghĩ đi. Nhung bạn học sinh vẫn chưa nghĩ ra, người hướng dẫn lại bảo hãy cố gắng tiếp tục suy nghĩ đi. Hai ba lần như vậy, một chút do dự, bạn học sinh hỏi lại người hướng dẫn "suy nghĩ là làm những việc gì ?".

*. *Sáng tạo - nghệ thuật*

Sáng tạo và nghệ thuật là gì ?. Để có được định nghĩa mà nhiều người chấp nhận được không đơn giản. Một lần nữa bài viết này cũng né tránh việc xác định hai khái niệm này. Vì đây là vần đề mang nhiều cảm tính, và nó cũng không thực sự quá quan trọng đối với toán học.

Dù được định nghĩa như thế nào, kết quả được đánh giá có sáng tạo hay có nghệ thuật thường bao gồm hai yếu tố :

- Chủ thể ý thức được hành vi có tính sáng tạo, tính nghệ thuật.
- Chủ thể hiểu rõ lãnh vực có sự sáng tạo, có tính nghệ thuật.

Ở đây chỉ đề cập đến yếu tố cơ bản là kỹ thuật, không nói đến việc nghiên cứu những hoạt động nào có sáng tạo, nghệ thuật.

Giống như họa sĩ, bắt đầu bằng những nét vẽ cơ bản. Đến khi thuần thục, mới có thể nói đến việc tạo ra những đường nét mang tính sáng tạo và nghệ thuật. Nhà thơ phải biết qua luật bằng trắc trước khi bàn đến tính nghệ thuật, tính sáng tạo trong ý thơ, tứ thơ.

Người chưa vượt qua kỹ thuật cơ bản, thậm chí không biết chút gì về nền tảng khó có thể nói đến sáng tạo và nghệ thuật. Vì vậy khi nói đến sáng tạo và nghệ thuật phải xác định lãnh vực cụ thể. Không phải bất cứ ai cũng có thể có được sự sáng tạo và nghệ thuật.

Sự sáng tạo cũng như nghệ thuật không thể phổ cập. Nếu phổ cập được thì không còn là sáng tạo, không còn là nghệ thuật. Lúc đó nó đã trở thành kỹ thuật.

Phụ chương này đề nghị một trình tự cho hoạt động suy nghĩ. Chỉ với mục đích tìm ra lời giải "tầm thường" cho vấn đề cần phải giải quyết. Việc mở rộng và nâng cao để tiếp cận với sự sáng tạo và nghệ thuật được dành cho người đọc.

****. Trình tự suy nghĩ***

Bước 1 : **Niềm tin**

Nếu người giải bài toán không tin mình giải được sẽ không thể có lời giải. Niềm tin xuất phát từ việc chủ thể ý thức được khả năng của mình. Chỉ khi nào tin vào khả năng có thể tìm được lời giải mới nên bắt tay vào giải bài toán.

Việc mất niềm tin sẽ gây trở ngại cho quá trình phát triển nhận thức. Nó hình thành mặc cảm yếu kém tự ti. Nguồn gốc có thể xuất phát từ chủ quan, nhưng phần lớn vẫn từ các yếu tố khách quan. Chủ thể đã thất bại nhiều lần. Chủ thể bị bao vây trong các công trình to lớn. Do đó cảm thấy nhỏ bé, không tin mình có thể làm được, thậm chí đôi lúc còn không dám nghĩ đến.

Khi dám nghĩ mới thúc đẩy hành động. Trong trận chiến, người chỉ huy và binh lính không tin vào khả năng chiến thắng thì khó có thể thắng trận được.

Có lẽ cũng không quá đáng khi tin rằng "mọi người bình thường đều có thể học toán". Các lãnh vực khoa học không là những khu đất cấm, chỉ dành riêng cho người này, không dành cho người khác. Đừng tạo rào cản tâm lý bằng những lời lẻ có cánh cho toán học. Con người sinh ra bình đẳng trước mọi ngưỡng cửa. Hãy để cho mọi người có sự tự do chọn lựa cánh cửa họ muốn bước vào.

Niềm tin nào cũng cần phải gắn liền với thực lực ở mức nhất định nào đó. Nếu không, đó chỉ là điều mơ ước viễn vông. Thực lực cũng không cần phải so sánh. Những tranh đua chỉ gây động lực kích thích ban đầu đối với trẻ con.

Người ta làm việc không nhất thiết để so sánh với người này hay người khác mà nên hướng vào sự đam mê và ích lợi của cộng đồng.

Hãy tự tìm lời giải để có được niềm tin. Để rồi phải tìm cách vượt qua và chối bỏ nó.

Bước 2 : **Ý thức**

Chủ thể phải luôn ý thức được hoạt động của mình. Những hoạt động quan trọng trong toán học là học lý thuyết và thực hiện chứng minh. Vì vậy cần phải hiểu rõ việc học lý thuyết và việc thực hiện chứng minh cần làm những gì.

Về việc học lý thuyết, người học phải biết đến lúc nào và khối lượng kiến thức bao nhiêu là đủ. Điều này hoàn toàn tùy thuộc vào mục tiêu học tập của mỗi người. Một đề nghị cho vấn đề này đó là lúc chủ thể "thấy" được không gian của bài toán, và bắt đầu “cảm thấy” quen thuộc với nó. Với việc làm bài tập cũng vậy, người học cũng phải biết các bài tập có ích lợi gì, làm bao nhiều mới được xem là tốt nhất.

Những vấn đề trên có thể được tóm lược bằng những câu hỏi sau:

“Học lý thuyết trong sách giáo khoa cần thực hiện những gì ? và làm sao biết đã đạt yêu cầu ?“.

“Mục đích của việc làm bài tập ?, làm bài tập cần thực hiện các hoạt động nào ?”.

“Các hoạt động trên có thể được thủ tục hóa hay không”

Câu trả lời cho những vấn đề này tùy thuộc vào mỗi người, vì mỗi người có những điều kiện, những hoàn cảnh khác nhau. Không có đáp án chung cho tất cả.

Bước 3 : **Bài toán**

Bài toán phải được xác định rõ ràng và đầy đủ. Những bước sau giúp đạt được điều này.

. Nhận dạng

1. Bài toán

Bài toán thường được sử dụng ở dạng tự nhiên, nghĩa là nó được phát biểu theo ngôn ngữ của thế giới mà nó phát sinh. Do thói quen, người giải bài toán đi tìm kiếm lời giải ngay dạng ban đầu được hình thành. Do đó phần lớn thời gian dành cho việc tìm giải pháp để đi đến lới giải. Như vậy có rất ít thời gian, thậm chí quên đi bước quan trọng là xác lập đầy đủ các yếu tố của bài toán. Nhiều khi tưởng rằng đã hiểu rõ bài toán, nhưng thật sự còn rất nhiều ngộ nhận và mơ hồ.

Hãy chuyển về dạng ngôn ngữ chính xác như ngôn ngữ tập hợp, ngôn ngữ logic, ngôn ngữ sơ đồ, ngôn ngữ hình ảnh, … .

2. Môi trường của bài toán

Ngoài việc nhận thức về bài toán, việc ý thức sự hiện hữu của môi trường chung quanh nó cũng không kém phần quan trọng. Người ta có quán tính coi môi trường của bài toán mặc nhiên là những gì quen thuộc. Không quan tâm đến nó, vì ở trước mắt, trong tầm tay, nên dễ bỏ lở những yếu tố cần cho chứng minh sau này.

Môi trường của bài toán đôi khi là không gian toán học – nhóm, vành, trường, vector, … cũng có khi là thực tế ứng dụng. Dù như thế nào thì việc nhận thức đầy đủ môi trường cũng là việc làm quan trọng. Điều đó có nghĩa là phải ý thức và hiểu rõ nó.

3. Chủ thể của bài toán

Chủ thể của bài toán có thể gồm những ai. Người được chọn để giải bài toán có thực sự thích hợp không. Do đó, cần đặt vấn đề như thế nào là thích hợp. Giống như trong thiền học, công án của ai người đó giải. Người khác không cần can dự vào. Đánh giá tính thích hợp căn cứ vào kiến thức của người giải có được trong lãnh vực của bài toán, mức độ hiểu biết bài toán đã đầy đủ chưa, thời gian nào dự trù để đạt được kết quả. Có nhà toán học đã tuyên bố "chỉ giải những bài toán cần thời gian giải từ 10 năm trở lên, còn dưới 10 năm để cho học trò".

4. Nguồn gốc phát sinh bài toán

Việc xác định bài toán xuất phát từ lãnh vực nào này cũng sẽ giúp ích cho việc nhận dạng bài toán chính xác hơn. Giúp cho việc xác định mô hình toán học nào, những kiến thức, những công cụ nào, … thích hợp để giải bài toán.

***. Mô tả**

1. Môi trường của bài toán

Số thành phần và tính chất của môi trường chứa bài toán thường có số lượng rất lớn. Trong một số trường hợp không thể xác định được rõ ràng và đầy đủ. Tuy nhiên chỉ có số ít yếu tố liên hệ với bài toán. Dù việc tìm tập con rất nhỏ trong tập hợp lớn không đơn giản. Nhưng vẫn có con đường để đi, hơn là mò mẫm. Như trên đã nói, nếu môi trường của bài toán là không gian toán học thì điều này thật đơn giản. Vì các không gian này đã được xác định. Điều khó khăn khi môi trường này không là không gian toán học. Khi đó việc xác định những yếu tố của môi trường sao cho nó trở thành không gian và sao cho không gian này tương đồng với một không gian toán học là điều quan trọng. Đây là "nghệ thuật", cần sự nhạy cảm và đòi hỏi kiến thức về nhiều không gian toán học.

Khi mô tả không gian của bài toán cần có tính chất khách quan, nghĩa là mô tả nó như tự thân nó có. Không mô tả theo định hướng của bài toán đang giải. Khi mô tả không gian này nếu quên đi bài toán đang giải là điều tốt nhất. Như vậy không gian của bài toán sẽ có tính chất "khách quan" đối với bài toán.

Sau đó chọn không gian toán học phù hợp với không gian của bài toán vừa mô tả. Công việc này thường mang tính chủ quan. Khi người giải bài toán là chuyên gia về lãnh vực nào thường có xu thế nghiên về không gian toán học của lãnh vực đó.

Tuy nhiên cũng cần phải để ý đến trường hợp có những vấn đề "mới". Nghĩa là chưa có khuôn mẫu, chưa có không gian nào để bài toán là thành tố. Trong các trường hợp như vậy vấn đề trở nên phức tạp. Cần hình thành không gian toán học mới. Đây cũng là nguồn cảm hứng để một ngành toán học mới phát sinh. Tuy nhiên việc này chỉ thực hiện khi nào đã khảo sát hết mọi không gian toán học đã có.

2. Bài toán

Bài toán bây giờ sẽ được mô tả trong không gian toán học tương ứng. Thông thường bài toán có thể chuyển vào nhiều mô hình toán học khác nhau.

Nếu người giải là nhà đại số thì sẽ cố tìm cách đưa bài toán vào mô hình của lý thuyết nhóm, vành, trường, … . Nếu không ổn, có thể chuyển qua không gian khác. Công việc này được thực hiện cho đến khi tìm được không gian thích hợp cho bài toán.

Thí dụ như bài toán " Cần bao nhiên màu để tô một bản đồ sao cho hai nước có cùng biên giới không trùng màu nhau?".

Nếu người giải có kiến thức về Topo thì mô tả lại bài toán theo ngôn ngữ Topo rồi dùng kiến thức Topo để giải. Nhưng nếu người giải là nhà nghiên cứu lý thuyết đồ thị thì lại mô tả bài toán theo ngôn ngữ của lý thuyết đồ thị. Quá trình đi tìm không gian toán học thích hợp có thể diễn tiến mãi mãi.

Quá trình này chính là "công việc" của hành vi suy nghĩ. Nói cách khác suy nghĩ chính là thực hiện các bước trên.

Khi mô tả bài toán cũng cần chú ý đến việc sử dụng ngôn ngữ. Chỉ nên sử dụng ngôn ngữ của không gian bài toán. Sự pha tạp các ngôn ngữ rất dễ làm bài toán trở thành mơ hồ.

Như vậy người càng biết nhiều không gian toán học thì càng có nhiều "cái" để suy nghĩ. Còn việc có tìm ra lời giải hay không lại là vấn đề khác. Nhưng cơ bản, người giải có "việc" để làm. Nói khác đi, có cái để suy nghĩ. Đầu óc không trống rỗng hoặc rối mù.

. *Đánh giá

1. Tính đúng đắn của bài toán

Khi bài toán đã được phát biểu việc cần làm xem nó có đúng đắn hay không. Tính đúng đắn của bài toán có nghĩa là đúng đắn trong không gian của nó. Tính đúng đắn được cụ thể hóa bằng việc kiểm tra xem nó có gây mâu thuẫn trong hệ thống hay không. Việc này được thực hiện bằng cách giả định bài toán đã được chứng minh, nghĩa là được xem là đúng trong không gian của nó. Kế đó, xem xét hậu quả do nó tạo ra, có dẫn đến mâu thuẫn nào không.

Khi kết quả của bài toán không gây ra mâu thuẫn thì xét xem có ảnh hưởng hoặc gây ảnh hưởng tới các yếu tố nào của không gian chứa nó. Đây có thể là những nhân tố tốt cho hoạt động chứng minh bài toán.

Khi kết qủa của bài toán gây ra mâu thuẫn cần phải xem xét lại cách đặt bài toán. Đôi khi cũng cần xem xét lại không gian chứa nó có thích hợp hay không. Nhiều khi người ta lao vào giải các bài toán không có giá trị. Thí dụ chứng minh tổng số góc trong của tam giác lớn hơn 90°. Nếu chọn không gian của bài toán là không gian Euclide thì đây là bài toán sai. Nhưng nếu chọn không gian phi Euclide nào đó thì đây là vấn đề có thể quan tâm.

Tóm lại, trong trường hợp có mâu thuẫn cần xem xét lại bài toán và cả không gian chứa nó. Có thể cần tổng duyệt lại tất cả yếu tố cấu thành nên bài toán. Thông thường yếu tố không gian ít phải xem xét để xây dựng lại bài toán.

Trong quá trình học từ phổ thông đến cả đại học, các bài toán thường đạt được tất cả yêu cầu trên. Đó là những bài toán "hoàn hảo", học sinh/sinh viên chỉ cần chú tâm vào việc tìm lời giải vì biết chắc rằng bài toán là đúng đắn, đầy đủ, có lời giải, dữ liệu không thừa không thiếu.

2. Tính đầy đủ của bài toán

Tính đúng đắn và tính đầy đủ là hai tính chất cần thiết của bài toán. Hai tính chất này không có cái trước cái sau. Tùy vào từng bài toán có thể xem xét tính đúng đắn trước, kế đó xét tính đầy đủ. Nhưng một số khác có thể có chiều ngược lại.

Đôi lúc bài toán được phát biểu không đầy đủ, có thể có nhiều lý do. Người xây dựng bài toán chưa hiểu rõ vấn đề, thông tin cần thiết cho bài toán chưa hiện hữu, chưa lấy được. Không đủ để chứng minh bài toán là đúng nhưng cũng không đủ làm mâu thuẫn hệ thống. Bài toán khi được phát biểu có thể rơi vào hai trường hợp. Một là thiếu các yếu tố nhưng cũng có khi dư thừa.

Việc xác định tính đầy đủ là vấn đề khó khăn. Tính thiếu sẽ đơn giản hơn vì trong quá trình chứng minh có thể bổ sung. Khi bổ sung cũng nên kể đến các yếu tố ngầm chứa, mặc nhiên. Nhưng tính thừa sẽ làm rối rắm và làm mất thời gian trong quá trình chứng minh. Điều này cho thấy cần phân loại hay sắp hạng các yếu tố của bài toán.

. Các bước giải bài toán

1. Biến đổi bài toán

* Chia nhỏ bài toán

Chia bài toán ra những bài toán nhỏ để giải. Tuy nhiên cũng phải để ý đến mức độ chia nhỏ. Khi chia, các bài toán nhỏ dễ trở thành khiếm khuyết, không đầy đủ. Đôi khi trở nên rườm rà, vụn vặt.

Căn cứ vào đâu để chia nhỏ bài toán. Câu trả lời cần có thời gian tích lũy kinh nghiệm của người giải.

Thí dụ

Nhân hai ma trận có kích thước $(n \times n) = (10^{20} \times 10^{20})$. Bài toán này dễ dàng thực hiện với phương tiện máy tính. Tuy nhiên vào những thế kỷ trước đó việc tính toán chỉ thực hiện được trên giấy. Vì vậy việc chia nhỏ bài toán là điều được suy nghĩ đến. Từ đó xuất hiện khái niệm ma trận khối. Chia ma trận trên thành các ma trận con có kích thước $(10^2 \times 10^2)$.

Tích hai ma trận $(10^{20} \times 10^{20})$ trở thành tích hai ma trận khối (10×10). Mỗi ma trận khối có thể chia nhỏ hơn để tính.

* Biến đổi thành dạng tương đương

Trong một số trường hợp dạng tương đương lại dễ chứng minh hơn dạng ban đầu. Biến đổi thành dạng tương đương có thể thực hiện trong cùng không gian toán học, thường nhờ vào luận lý toán học và các định lý của không gian tương ứng. Tuy nhiên có thể chuyển từ không gian toán học này đến không gian toán học khác, như bài toán của hình học có thể chuyển vào giải tích, hoặc chuyển vào lý thuyết đồ thị, … để giải.

* Thay đổi hình thức biểu diễn

Cùng một sự vật nhưng nếu thay đổi hình thức biểu diễn sẽ mở ra những cách nhìn mới. Một số hình thức biểu diễn trói buộc đối tượng, nhưng cũng có những biểu diên làm phong phú không gian suy nghĩ.

Thí dụ : Cho $S = \{a, b, c\}$, $T = \{\alpha, \beta\}$.

Tập tích $S \times T$ có thể biểu diễn gồm 6 cặp phần tử.

Nhưng cũng có thể biểu diễn bằng các ánh xạ :

$\varphi : I \longrightarrow S \cup T$ thỏa điều kiện $\varphi(1) \in S$.

Dễ dàng tìm được 6 ánh xạ φ thỏa điều kiện trên.

Thí dụ : $\varphi_1(1) = a$, $\varphi_1(2) = \alpha$, $\varphi_2(1) = a$, $\varphi_2(2) = \beta$.

Do đó có hai dạng biểu diễn cho tập tích.

$S \times T = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\}$ (dạng 1).

$S \times T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ (dạng 2).

Nếu số tập hợp lấy tích tăng lên vô hạn đếm được thì biểu diễn tích ở dạng 1 gặp khó khăn. Nếu tăng lên vô hạn không đếm được, dạng 1 thực sự không còn khả năng biểu diễn tích các tập hợp. Nhưng dạng biểu diễn 2 vẫn an toàn với các thay đổi trên.

* Ký hiệu hóa hay mã hóa

Một số bài toán được phát biểu ở dạng ngôn ngữ tự nhiên ít có rõ ràng vì ngôn ngữ tự nhiên đa nghĩa nên mơ hồ. Nên rất cần dạng biểu diễn hình thức để bài toán được xác định. Đôi khi dạng biểu diễn hình thức cũng giúp gợi ý cho việc tìm lời giải.

Ngoài ra, một số các ký hiệu trở thành phức tạp khi được sử dụng nhiều lần. Khi đó việc mã hóa thêm một số lần nữa sẽ làm bài toán trở nên sáng sủa và đơn giản hơn.

Thí dụ :

Tính $P(P(P(\{a\})))$.

$P(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$,

đặt $\varnothing = 1$, $\{a\} = 2$, $\Longrightarrow P(\{a\}) = \{1, 2\}$.

$P(P(\{a\})) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,

đặt $\{1\} = 3$, $\{2\} = 4$, $\{1, 2\} = 5$, $\Longrightarrow P(P(\{a\})) = \{1, 3, 4, 5\}$

$P(P(P(\{a\}))) = \{ \ldots\}, \ldots$

Các tập hợp sẽ rườm rà vì số dấu móc {} gia tăng càng lúc càng nhiều dễ gây ra sai sót. Vì vậy mã hóa làm cho biểu diễn đơn giản hơn.

* Giải mã các ký hiệu

Ngược lại với việc "ký hiệu hóa" là việc chuyển bài toán về dạng ngôn ngữ tự nhiên. Bai toán ban đầu ở dạng ký hiệu đôi khi rất khó hiểu, dù rằng nó có ưu điểm chính xác. Nên chuyển về dạng ngôn ngữ tự nhiên giúp cho việc hiểu bài toán được tốt hơn.

* Trừu tượng hóa

Trừu tượng hóa bài toán là nâng cấp bài toán. Bài toán thuộc về lớp không gian này được chuyển thành bài toán khác tương ứng ở không gian khác "cao" hơn. Bài toán cũ và mới không còn ở cùng một không gian.

Trừu tượng hóa đôi khi còn có nghĩa là lược bỏ chi tiết. Khi đó bài toán trở nên đơn giản và sáng sủa.

Đại số phổ dụng có thể được xem là trừu tượng hóa việc khảo sát các cấu trúc đại số.

* Cụ thể hóa

Đây là hoạt động ngược lại với hoạt động trừu tượng hóa. Còn có nghĩa là bài toán được áp dụng vào một không gian cụ thể.

Lý thuyết modul có thể xem là cụ thể hóa của lý thuyết đồng điều. Lý thuyết đồng điều lại là cụ thể hóa lý thuyết phạm trù.

* Tổng quát hóa

Các đối tượng của bài toán được nâng lên thành một lớp các đối tượng. Lúc đó bài toán ban đầu chỉ là trường hợp cá biệt của bài toán mới. Bài toán mới vẫn còn cùng không gian với bài toán cũ nhưng có tầm vóc lớn hơn. Hoạt động này thường thấy trong các hoạt động lập trình của các chương trình máy tính.

Để thực hiện sự tổng quát hóa bằng cách thay các phần tử trong phát biểu của bài toán bằng các lớp chứa nó.

Thí dụ :

1. Bài toán yêu cầu tính 2 + 3, tổng quát hóa thành bài toán cộng hai số số học n + m.
2. Việc khảo sát hàm f(x) = ax + b được tổng quát hóa thành việc khảo sát các hàm liên tục.

* Cá biệt hóa

Xác định bài toán ở các dạng đặc biệt. Đối với lý thuyết tập hợp trường hợp đặc biệt là tập trống và tập phổ dụng. Với các bài toán thông thường có thể chọn một giá trị nào đó, nếu nó là đặc biệt với bài toán càng tốt. Thật ra đây là các bài toán cụ thể của bài toán (tổng quát). Tuy nhiên khi xem xét chúng thường dễ dẫn dắt suy nghĩ hướng đến lời giải.

* Minh họa bằng hình vẽ

Hãy vẽ hình để mô tả bài toán khi có thể. Hình vẽ tạo nhiều cảm hứng hơn chữ viết. Quá trình vẽ hình làm cho việc hiểu bài toán kỹ lưỡng hơn. Còn cho cái nhìn tổng thể về bài toán. Cũng tránh cho việc phải tưởng tượng và nhớ nhiều chi tiết. Khi không vẽ được thì viết ra những yếu tố của bài toán tạo thành sơ đồ, có trật tự hay không tùy vào thói quen mỗi người. Tuy nhiên cũng cần chú ý, nhiều khi hình vẽ làm suy nghĩ “sai lệch” về sự vật. Ví dụ giản đồ

Venn dùng để biểu diễn tập hợp là vòng khép kín. Vòng khép kín làm liên tưởng đến thế giới nhị nguyên.

2. Đánh giá bài toán

* Nhận dạng khó khăn

Đâu là khó khăn của bài toán. Khó khăn có thể phân ra làm các loại : khó khăn từ hình thức, khó khăn ở nội dung, khó khăn do tính toán.

Khó khăn hình thức chủ yếu do ký hiệu toán học. Đôi khi một hệ thống toán học có quá nhiều ký hiệu làm rối rắm bài toán. Khi đó phải bình tĩnh sắp xếp, chọn lọc tìm hiểu các ký hiệu có liên quan. Đôi khi có nhiều khái niệm mới. Khái niệm này dẫn dắt khái niệm khác rồi lại tiếp tục dẫn dắt khái niệm khác nữa. Sự dẫn dắt liên tục như vậy cũng gây ra khó khăn. Do đó cần phải dần dần quen thuộc với chúng. Sự quen thuộc đòi hỏi phải tiếp xúc nhiều lần và nghiên cứu kỹ về nó. Một khi đã quen thuộc thì sẽ không cảm thấy mất bình tĩnh.

Khó khăn còn do ở nội dung. Khi nội dung của đề bài không bộc lộ hết các yếu tố, chúng buộc người giải phải hiểu ngầm. Khi đó việc xác định các yếu tố hiểu ngầm cũng phần nào làm sáng tỏ bài toán. Khi không thấy được các yếu tố hiểu ngầm nghĩa là chưa hiểu đầy đủ về không gian của bài toán. Do đó phải dừng lại, chuyển công việc qua việc tìm hiểu không gian bài toán. Đến khi nào hiểu rõ không gian này mới trở lại việc giải bài toán.

* Xác định lại ngữ nghĩa

Định kiến thường làm lu mờ chân tướng của vấn đề. Khi có hiểu biết về một sự vật, về một hiện tượng, một khái niệm là đã mang lấy định kiến. Mỗi đối tượng có không gian để nó thuộc về. Những hiểu biết về nó cũng bị ràng buộc vào không gian chứa nó. Nếu không nhận thức được điều đó thì định kiến là điều không tránh khỏi. Ngoài ra, sự vật không đứng yên, cái ta biết về nó chỉ ở tại một thời điểm, cùng lắm là một khoảng thời gian nhất định. Đó chính là yếu tố thời gian của kiến thức. Nội dung kiến thức của đối tượng thay đổi theo thời gian. Điều may mắn của toán học là các không gian toán học bất biến theo thời gian và không gian. Điều may mắn này lại trở thành điểm yếu kém, nó không đủ phong phú để diễn tả đầy đủ bài toán của thế giới thực, thế giới của không tính và thời tính. Điều đáng nói ở đây là nhiều lúc sự hiểu biết về một khái niệm toán học không được nhận dạng cùng với không gian hiện hữu của nó, mà coi như một khái niệm độc lập. Một lần khác khi gặp nó, ngỡ rằng đã biết nó, nhưng có thể chưa hiểu gì về nó. Vì cái hiểu biết về nó đang thuộc về không gian khác. Nó không phải là nó như dã từng biết. Ngộ nhận tưởng rằng biết nó chẳng qua là hình ảnh tương tự. Đây là cách tiếp cận hồn nhiên. Quan điểm về hệ tiên đề giúp tránh sự ngộ nhận này. Với thái độ chưa biết gì hết về nó, tiếp nhận với với đầu óc trống rỗng, không phê phán, không nhận xét hay đánh giá, sẵn sàng đón nhận như điều mới lạ. Sau đó ngắm nhìn lại toàn bộ bằng con mắt phê phán, so sánh với những gì đã biết. Vì vậy để tránh ngộ nhận chỉ cần xét lại ngữ nghĩa của mọi đối tượng (các danh từ, các động từ, các tính từ …). Xác định miền hoạt động của từng khái niệm, chúng lấy giá trị từ đâu. Thí dụ học sinh khi gặp ký hiệu 0^0 thường nghĩ ngay đến khái niệm giới hạn bất định. Nó là tập hợp chỉ tập các ánh xạ từ tập trống vào tập trống. Vì vậy nhiều khi cũng cần phải làm bộ như ngu dốt, thắc mắc hết mọi thứ. Cái này là cái gì, cái kia là cái gì, … lúc đấy có thể vượt qua được định kiến. Nhưng quan điểm chính thống là cần phải có cái nhìn không gian cho mọi khái niệm, nghĩa là chúng thuộc không gian nào. Vì vậy khái niệm ở không gian này sẽ thay đổi ý nghĩa khi ở trong không gian khác. Đây chính là lý do tại sao cần trình bày các mô hình toán học như là những không gian với hình ảnh tổng thể. Việc trình bày toán học biến dạng theo các ứng dụng cực kỳ nguy hiểm, đi ngược lại với xu thế phát triển. Đó là quay trở về thời kỳ đồ đá trong hoạt động học tập, nghiên cứu toán học.

Ở đây cũng cần quan tâm đến vấn đề khác nhau giữa ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ toán học. Cụ thể là sự khác nhau giữa khái niệm của toán học và khái niệm của ngôn ngữ tự nhiên. Khái niệm toán học cần định nghĩa chính xác đầy đủ trong khi khái niệm của ngôn ngữ tự nhiên chỉ cần vài trường hợp cụ thể để minh họa. Càng nhiều minh họa càng làm rõ ràng khái niệm được "định nghĩa" trong ngôn ngữ tự nhiên. Thông thường, ngôn ngữ sử dụng trong toán học là pha trộn giữa ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ luận logic.

* <u>Phân tích input- output</u>

Việc xác định input, output của bài toán tương tự như việc lập trình trong lãnh vực máy tính.

Phân loại input, có những input thực sự cần cho bài toán nhưng cũng có các input là nhiễu. Nó gây rối cho việc định hướng cách tìm lời giải.

Phân tích input là đi tìm các quan hệ giữa chúng. Điều này sẽ giúp ích cho việc xác định bài toán và không gian của nó.

* <u>Chọn kỹ thuật chứng minh</u>

Tiên đoán các kiến thức cần để giải bài toán. Việc này mang chút dự đoán cảm tính. Các hoạt động tiếp cận bài toán ở trên chỉ có tính cách gợi ý. Không cần theo trật tự nào. Không nhất thiết phải sử dụng đầy đủ mọi hoạt động tiếp cận. Việc chọn lựa một số hoạt động để áp dụng cũng như trật tự áp dụng chúng là một "nghệ thuật". Mỗi người tự tạo cho mình thói quen "tốt" (nhưng khi đã trở thành thói quen thì bao giờ cũng không tốt !).

Ngoài ra có thể nhớ lại những bài toán tương tự.

Liệt kê các định lý, các tính chất có liên quan đến bài toán.

Chọn các phương pháp chứng minh : trực tiếp, phản chứng, truy chứng, phản thí dụ, chuyển dạng tương đương… Hoặc phối hợp các phương pháp này.

3. Giải bài toán

Khi giải bài toán chỉ cần nhắm tới *một* lời giải tầm thường. Hãy gác lại những ý tưởng hứa hẹn những lời giải độc đáo. Hiệu quả và tốc độ được đặt lên hàng đầu. Luôn nghĩ rằng người bình thường đi tìm lời giải tầm thường.

Khi đã có một lời giải trong tay rồi thì mới nghĩ đến việc tìm các lời giải mới tối ưu hơn. Hiệu quả trước nghệ thuật sau. Không tạo ra quá nhiều cách giải để rồi lạc lối, mất thời gian cho việc chọn lựa.

4. Hậu sự

Hậu sự của quá trình giải bài toán cũng quan trọng. Người học tiến bộ hay không là ở giai đoạn này. Thười khi giải xong bài toán coi như đã xong việc. Tuy nhiên nếu đi thêm bước nữa coi như là gặt hái thêm những điều quí giá. Điều này có thể thực hiện bằng những câu hỏi sau :

Lời giải này có thể cải thiện để tốt hơn hay không ?.

Bài giải của bài toán có thể có những ứng dụng gì hay không ?.

Có ích lợi nào về mặt lý thuyết không ?.

Học được gì qua bài toán này ?.

Những lỗi lầm nào trong giai đoạn dự kiến và thực hiện

Về mặt cảm giác, khi giải xong phải có được cảm giác khám phá, càng hăng hái muốn hiểu biết thêm về những gì liên quan hoặc rộng hơn.

Kết luận

SUY NGHĨ = LIÊN TƯỞNG + NHẬN DẠNG QUAN HỆ.

Liên tưởng bằng ngũ quán “chân-dụng-hội-thiện-mỹ”.

Nhận dạng quan hệ bằng mô hình.

Lời bạt

Toán học – Một thế giới nhị nguyên

Con người ‘nhìn’ thế giới qua năm giác quan : thị giác, thính giác, khứu giác, xúc giác, vị giác. Thế giới phản ảnh trong con người cũng thông qua những giác quan này. Nếu ngũ quan thay đổi thì thế giới có lẽ sẽ khác đi. Sự thay đổi có thể ở chất hoặc lượng, nghĩa là khả năng tiếp nhận sẽ tăng hoặc giảm. Con người có thể nhìn xa hơn chỉ với đôi mắt bình thường của mình, có thể đọc được quá khứ, tương lai …. Hoặc viễn tưởng hơn, con người phát hiện ra những giác quan khác. Khi đó, hình ảnh về thế giới sẽ khác đi, vì không còn được nhìn từ năm yếu tố cũ, mà có thể từ sáu, bảy, tám. Nhưng điều quan trọng là sự khác biệt này thuộc về bản chất hay hiện tượng. Tất nhiên sự thay đổi của ngũ quan sẽ làm con người thay đổi. Nhưng có làm đối tượng được quan sát thay đổi về bản chất hay không.

Thế giới là một tổng thể hoà quyện lẫn nhau.

Cái ‘nhìn’ có thể được xem như là tổng hợp tất cả yếu tố tiếp nhận của ngũ quan từ đối tượng được ‘quan sát’. Sự ‘thay đổi’ của thế giới sẽ được quan tâm nhiều đối với thị giác. Vì trong các cửa ngõ thông giữa con người và vũ trụ, cửa ngõ quan trọng là thị giác.

Nhìn cây thông trên đồi cao người ta thấy nó là một đoạn thẳng. Ý niệm thẳng có được từ cái nhìn viễn cảnh. Sự thực thì cây thông không hề thẳng, cũng như đêm trung thu nhìn lên bầu trời, thấy mặt trăng tròn. Ngày nay các bức hình cận cảnh cho thấy đó là một khối cầu có bề mặt lồi lõm, không tròn.

Đường thẳng hay đường tròn có được từ cái nhìn. Nếu đôi mắt chúng ta là một viễn vọng kính chính xác có lẽ sẽ không có đường thẳng, cũng không có đường tròn.

Toán học xuất phát từ cái nhìn vào thế giới. Cái 'nhìn' lại thuộc về phạm trù nhị nguyên. Nên khởi điểm từ nền tảng nhị nguyên là không thể tránh khỏi. Người ta biết thế giới nhị nguyên là đối xứng.

Vì vậy, *toán học luôn có mặt phủ định của mọi ý niệm của nó*.

Thế giới thực không thuộc phạm vi của nhị nguyên luận. Nhưng con người thường soi rọi mọi thứ đều từ lăng kính nhị nguyên.

Việc xác lập thái độ phân biệt giữa thế giới toán học trừu tượng và thế giới hiện thực đa dạng có lẽ là vấn đề.

Càng ngày, người ta càng khám phá thêm những sự vật mà trước đây hiện hữu ngoài tầm kiểm soát của ngũ quan. Điều đó càng khẳng định sự hiện hữu của những sự vật nằm ngoài tầm kiểm soát của con người. Khoa học phát triển đã làm tăng phạm vi hoạt động của ngũ quan.

Do đó sự hiểu biết về sự vật chỉ là cục bộ, từng phần và không đầy đủ.

Phương pháp luận – Một kiến thức tiềm ẩn

Mỗi ngành khoa học có thể được phân chia làm hai thành phần. Phần hiển hiện là kiến thức diễn tả cấu trúc không gian cùng với thế giới ứng dụng. Phần thứ hai khá quan trọng nói lên cái chung và cái đặc thù của mỗi ngành. Đó là phương pháp luận, nó được hình thành tự nhiên theo sự phát triển của mỗi ngành khoa học.

Phương pháp luận tiềm ẩn trong kiến thức. Vì vậy người ta thường ít lưu tâm. Nó không được hiển hiện bằng chân tướng đầy đủ. Nói cách khác, người ta chưa coi nó là bộ phận quan trọng, tệ hơn là chưa nhận thức được sự hiện hữu của nó.

Ngoài ra, phương pháp cũng còn là cái chưa hoàn tất và đang cùng phát triển theo sự trưởng thành của ngành khoa học nương tựa trên nó. Phương pháp luận là cách thức mà các nhà nghiên cứu đối phó và giải quyết các bài toán của họ, có thể xem là xương sống, là động lực phát triển của mỗi ngành khoa học. Đây là loại kiến thức của kiến thức, có thể gọi là siêu kiến thức.

Vì sự hấp dẫn của ứng dụng, người ta xem trọng kiến thức hơn phương pháp luận. Vấn đề này không có gì đáng nói. Nhưng để cho chính ngành khoa học được phát triển thì sự đánh giá cần phải được tiếp cận theo quan điểm mới. Nói cách khác là không thể đặt vấn đề 'quan trọng' giữa kiến thức và phương pháp luận.

Một giá trị của phương pháp luận là làm sáng tỏ phần kiến thức hiển hiện. Đó là mối liên kết mạch lạc xây nên toà nhà kiến thức. Và cũng phải nhận thấy rằng phương pháp luận không thể hiện hữu độc lập, nó chỉ có thể tồn tại cùng với kiến thức thực tế.

Tùy thuộc vào các yếu tố của vấn đề và hoàn cảnh hiện thực, phương pháp luận hay kiến thức sẽ được chọn làm thành phần then chốt.

Phương tiện – Cứu cánh

Phương pháp luận đóng vai trò quan trọng trong quá trình học tập. Một trong những mục tiêu hàng đầu của mỗi môn học chính là làm cho người học thấy được phương pháp luận của môn học đó. Toán học là một trong những ngành cung cấp phương pháp luận tốt nhất. Giá trị của phương pháp luận không chỉ trong chính bản thân ngành khoa học mà còn hữu hiệu trong quá trình phát triển nhận thức. Nhưng điều kiện để hiểu phương pháp luận của một ngành toán học là phải biết kiến thức toán học của chính ngành đó. Vấn đề đặt ra là với khối lượng kiến thức nào thì bộc lộ cho người đọc cũng như người học thấy được phương pháp luận. Đây là việc làm không dễ dàng. Phương pháp luận và kiến thức thường hòa lẫn vào nhau, rất khó tách bạch cái gì là kiến thức, cái gì là phương pháp. Chính người học sẽ là người nhận dạng. Để thực hiện được việc này thì cần phân biệt được cái gì là phương tiện, cái gì là cứu cánh. "Đừng nắm ngón tay ta mà bảo rằng đó là trăng". Đôi lúc, do một số yếu tố khách quan, người ta quan tâm phương tiện hơn cứu cánh. Một họa sĩ dùng máu để vẽ tranh thì người xem có thể chú ý đến phương tiện để vẽ, hơn là nội dung bức tranh. Họ càng không chú ý đến cái gì được họa sĩ vẽ ra.

Tuy nhiên, nếu quá chú tâm đến cứu cánh thì lại nhảy từ cực đoan này sang cực đoan khác. Mức độ nhận thức chỉ được đầy đủ, khi cứu cánh và phương tiện trở thành một thể thống nhất. Nghĩa là không thể tách rời hoặc phân biệt được. Mọi sự phân biệt đều lạc vào cái vòng lẩn quẩn. Đó là tiến trình, phân biệt để nhận thức, và chối bỏ để vượt lên - thoát khỏi định kiến phân biệt. Sự phân biệt cũng để chỉ nhận dạng và hiểu thấu hiện hữu. Phân biệt để không còn phân biệt. Từ đó ngắm nhìn được cái đẹp của toán học nói riêng và hiện thực nói chung.

Hiện thực – Huyền ảo

Đỉnh cao của sự huyền ảo chính là hiện thực. Cuối con đường là khởi điểm. Nhìn thân cây thấy được đường thẳng. Nhìn mặt trời thấy được đường tròn. Trong hình hài đã ẩn chứa chân tướng. Chân tướng được nhìn thấy từ hình hài. Trừu tượng hóa số thực để nhìn thấy một cấu trúc đại số, một cấu trúc có thứ tự, một không gian vị tướng (topo), một không gian hữu lượng (metric). Và sẽ còn nhiều không gian nữa mà người ta có thể nhìn thấy từ tập hợp số thực. Nhưng đừng vì sự huyền ảo mà quên đi hiện thực.

Toán học có thể bắt đầu bằng những phần tử đơn lẻ, nhưng cuối cùng thì các cá thể đơn lẻ đều là phần tử của một lớp. Khi đó, vai trò của cá thể đơn lẻ không còn quan trọng nữa. Nó nhường chỗ cho lớp. Đây cũng chính là giá trị của khoa học – tính tổng quát. Vì vậy khi giải các bài toán thì định hướng của người giải là lớp chớ không phải phần tử. Điều này nói lên đặc điểm của toán học, cũng chính là sự khác biệt với thế giới thực. Mỗi cá nhân là một thực thể quan trọng. Nhưng với khoa học, cá nhân chỉ là phần tử minh họa. Do đó cái gọi là lời giải độc đáo chỉ là trò đùa, là con đường hẹp, là ngõ cụt. Nó biểu hiện sự bế tắc trong suy nghĩ và chỉ có giá trị trong giai đoạn khai phá. Hãy chọn đại lộ để tầm nhìn được rộng mở và mọi người cùng dấn bước.

Thiên tài – Rũ áo

Người ta quyết định dễ dàng khi chọn đọc một quyển tiểu thuyết hơn là đọc một quyển sách toán. Sự chọn lựa này có thể nhận thấy từ hai góc độ. Đối với người đọc, để đọc được một quyển tiểu thuyết, họ không cần phải được trang bị gì. Nếu càng nhiều kinh nghiệm trong cuộc sống thì sự cảm thụ càng cao. Nếu có kiến thức về tiểu thuyết, về văn chương, càng tốt. Nếu không, có thể hiểu thêm một hoàn cảnh thực tế được minh họa qua tiểu thuyết – người đọc có thái độ thoải mái khi đọc. Nhưng người đọc sách toán thường có cảm giác – họ cần phải được trang bị một số kiến thức nhất định.

Điều muốn nói ở đây chính là đối với người trình bày – người truyền đạt toán học. Một số thường có tâm lý đòi hỏi cao nơi người học. Để hiểu được toán học anh/chị phải là người có năng khiếu, có đầu óc thông minh ….

Toán học có thể được xây dựng và phát triển từ các thiên tài. Nhưng thành quả của nó không nhất thiết chỉ những tài năng mới hiểu được. Để sáng chế các vật dụng tinh xảo, các phương tiện tối tân hay nghĩ ra các học thuyết cao siêu, có thể là việc làm không đơn giản. Nhưng khi đã tìm được, đã nghĩ ra thì hiểu và sử dụng nó là một việc bình thường. Đừng biến việc hiểu cũng như ứng dụng các thành quả này là một hoạt động quá khó khăn.

Một số khác có tham vọng là người học phải trở thành những tài năng vượt trội lên cả. Ý tưởng này dẫn đến nhiều lệch lạc. Rất khó để họ chấp nhận một ý tưởng tự nhiên, là việc học và dạy chỉ với mục đích để người học trở thành một người “bình thường”.

Nhiều khi người ta coi nhẹ sức mạnh của sự bình thường. Vì sự bình thường không có tính hấp dẫn. Xuất phát từ cách nghĩ như vậy, nên mọi đào tạo đều hướng tới những tài năng (nhưng có thực sự là tài năng hay không lại là vấn đề khác !).

Tuyển chọn được 5% "tài năng" từ một lớp đào tạo là con số tốt đẹp. Nhưng 95% còn lại sẽ như thế nào – họ trở thành những người mất niềm tin. Tệ hại hơn, qua cuộc tuyển chọn, họ cảm thấy có một khẳng định họ "không phải là tài năng".

Học tập trước hết là vì bản thân người học. Không nhất thiết phải tạo ra những định lý mới, những học thuyết to lớn, chỉ để tự hào cùng với thế giới. Điều này chỉ là sự hãnh tiến vô bổ. Một biến dạng của học thuyết siêu nhân.

Học tập là một phần của cuộc sống. Nó không phải là sự chuẩn bị để sống. Trong suốt cuộc đời con người, không có thời gian nào là chuẩn bị sống.

Toán học là hành trình không phải là điểm đi và điểm đến.

Một hành trình vô thức mang dáng dấp định mệnh. Một hiện hữu xuất hiện trong khoảng khắc của không thời gian mênh mông. Ôm lấy toàn thể vô tận chỉ bằng những chuỗi ngắn ngũi nối tiếp. Tham vọng có thể phi lý, nhưng đầy lãng mạn, để mặc lấy ý nghĩa cho hiện hữu phù du.

Mọi thành quả đều nằm trong một tiến trình biện chứng. Phủ định để vượt lên là hoạt động tự nhiên. Thành quả này cũng không đứng ngoài qui luật. Dù biết rằng mọi sự đóng góp đều không nói lên được tất cả. Nhưng vẫn mong muốn góp phần vào việc làm tăng giá trị nhân bản của con người.

Lý Nguyên Nguyễn Thanh Sơn

Ấn bản lần thứ nhất 1997

DANH MỤC KÝ HIỆU

Chương I	**Tổng quan**
$\in$	thuộc về
$\notin$	không thuộc về
$\varnothing$	tập rỗng
$\mathbb{N}$	tập hợp số nguyên tự nhiên
$\mathbb{Z}$	tập hợp số nguyên
$\mathbb{Q}$	tập hợp số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$\mathbb{C}$	tập hợp số phức
$P(X)$	tập các tập con của tập X
2^X	tập các ánh xạ từ tập 2 phần tử vào tập X
$\subset$	thuộc về
$\subseteq$	thuộc về và có thể bằng
$\leftrightarrow$	nếu và chỉ nếu
$\vee$	hội (luận lý)
$\cup$	hội (tập hợp)
$\wedge$	giao (luận lý)
$\cap$	giao (tập hợp)
$-$	hiệu
A’	tập bù của tập A
$\overline{A}$	tập bù của tập A
$S \times T$	tích của tập S và tập T
X/Y	tập thương của tập X và Y
$\neg$	không (phủ định trong luận lý)

$f : X \to Y$	ánh xạ f từ X vào Y
$\neq$	khác (không bằng)
$a \mid b$	a được gọi là số chia của b
Chương II	**Quan hệ**
S^L	miền trị thật sự của quan hệ S
S^R	miền ảnh thật sự của quan hệ S
Δ	quan hệ đường chéo
R:S	tích tương đối của hai quan hệ R và S
R^{-1}	quan hệ nghịch đảo của quan hệ R
$\forall$	lượng từ phổ dụng
$\exists$	lượng từ hiện hữu
a/R	lớp tương đương của phần tử a trong quan hệ R
min	phần tử cực tiểu
max	phần tử cực đại
lub	chận trên nhỏ nhất
glb	chận dưới lớn nhất
sup	chận trên nhỏ nhất
inf	chận dưới lớn nhất
Kerf	nhân của ánh xạ f
Imf	ảnh của ánh xạ f
Π	tích
X^I	tập tất cả ánh xạ từ I vào X
R^{-1}	quan hệ đảo của quan hệ R
$f \circ g$, fg	hợp nối của ánh xạ f và g
f^{-1}	ánh xạ đảo của f
f^{-1}	ảnh đảo của ánh xạ f

Chương III Đo lường tập hợp

$\mathbb{N}_o$	tập các số nguyên lẻ
$\mathbb{N}_e$	tập các số nguyên chẵn

Chương IV Lượng số thứ số

Card(S)	lượng số của tập S
$\aleph_0$	(aleph null) lượng số của tập số nguyên tự nhiên
Iseg(s)	khoảng đầu của phần tử s
Tseg(s)	khoảng cuối của phần tử s
Ord(S)	thứ số của tập S
ω	(omega) thứ số của tập số nguyên tự nhiên

Phụ chương

1_S	ánh xạ đồng nhất trên tập S
$\rightarrowtail$	ánh xạ 1-1
$\twoheadrightarrow$	ánh xạ trên
$\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$	ánh xạ 1-1trên
$\cong$	đẳng cấu giữa 2 tập hợp

Bảng đối chiếu Việt – Anh

Việt	Trang	Anh
A		
Ánh xạ	19,67	Mapping, function
Ánh xạ 1-1	68	One-to-one, injective
Ánh xạ 1-1trên	69	One-to-one … onto … , bijective
Ánh xạ bao hàm		Insertion
Ánh xạ chọn	110	Choice mapping
Ánh xạ đảo	69	Inversion
Ánh xạ duy trì thứ tự	137	Ordered mapping
Ánh xạ đảo	69	Inverse mapping
Ánh xạ đồng nhất	79	Identity mapping
Ánh xạ hợp nối	70	Composition
Ánh xạ trên	68	Onto, surjective
Ánh xạ tương đương	138	Similarity mapping
Ảnh	.	Image
Ảnh ngược	.	Counter image, pre-image, inverse image
B		
Bằng nhau	13	Equality
Bổ đề Zorn	.	Zorn lemma
Biểu đồ giao hoán	.	Commutative diagram
Bù	16	Complement
C		
Cận thứ tự	.	Quasi order
Cấu trúc đại số	239	Algebra structure

Chận dưới	64	Lower bound
Chận dưới lớn nhất	65	Greatest lower bound, Infimum
Chận trên	64	Upper bound
Chận trên nhỏ nhất	65	Least upper bound, Supremum
Chia chẵn	48	Integral multiple
Chứa trong	13	Include
Chứng minh truy chứng	229	Inductive proof
Công thức	.	formula
Cực đại	60	Maximum
Cực tiểu	60	Minimum
D		
Dàn	.	Lattice
Danh hiệu	7	Identifiers
Đ		
Đại số Boole	.	Boolean algrbra
Đánh chỉ số	303	Indexing
Đệ qui	213	Recursive
Đếm được		Countable, denumerable
Điều kiện Cauchy		Cauchy condition
Định lý		Theorem
Định nghĩa đệ qui	213	Recursive definition, Inductive definition
Định nghĩa bán phần	214	Predicative definition
Định nghĩa bất khả thi	212	Non-working definition
Định nghĩa khả thi	213	Working definition
Định nghĩa toàn phần	214	Impredicative definition

Đơn ánh	68	One-to-one, injective
Đơn tử	.	Singleton
Đối xứng	37	Symmetric
Đóng	.	Closure
E		
G		
Giả thuyết liên tục	136	Continuum hypothesis
Giả thuyết liên tục tổng quát	.	Generalized continuum hypothesis
Giản đồ Venn-Euler	7	Venn-Euler diagram
Giao	.	Intersection
Giao hoán	.	Commutative
Giao quan hệ	.	Intersection
Giới hạn	.	Restriction
H		
Hấp thụ	.	Absorption
Hiệu	.	Difference
Hiệu quan hệ	.	Difference
Hợp nối	71	Composite
Hội	14	Union
Hội quan hệ	.	Union
Hữu hạn	96	Finite, inductive, non-reflexive
Hữu hạn Dedekind	104	Dedekind finite
I		
K		
Khả giản	241	Cancellative

Khai báo	.	Declaration, signuture
Khoảng đầu	139	Initial segment
Khoảng cuối	139	Terminal segment
Không đếm được	81	Uncountable, non-denumerable
Không đối xứng	38	Non-symmetric
Không phản đối xứng	39	Non-antisymmetric
Không phản hồi	36	Non-reflexive
Không quyết định được	.	Undecidable
Không rút gọn được	245	Irreducible
Không truyền	41	Non-transitive
Không đối xứng	38	Antisymmetric
Ký hiệu biến	.	Variable
Ký hiệu hằng	.	Constant
L		
Lớp tương đương	49	Equivalence class
Luận lý toán học	.	Mathematical logic
Luật suy diễn	.	Deduction rule
Lược đồ tiên đề	.	Axiom scheme
Lượng số	126	Cardinal number, power of set
Lượng số hữu hạn	128	Finite cardinal
Lượng số vô hạn	128	Infinite cardinal
Lượng số siêu hạn	.	Transfinite cardinal
Lưỡng tử	.	Doubleton
Lý thuyết số thập phân	.	Theory of decimals
M		
Mặc nhiên thoả	.	Vacuously satisfied

Miền ảnh	19	Codomain, range
Miền trị	19	Domain
Modulo	48	Congruent modulo
Mở rộng	.	Extension
Mở rộng vô hạn	.	Infinite expansion
N		
Ngoại diện	250	Extensional
Nguyên từ	.	Term
Nghịch đảo	30	Converse, inverse
Nghịch đảo phải	76	Right inverse
Nghịch đảo trái	76	Left inverse
Nghịch lý Russel	255	Russell’s paradox
Nguyên tắc nhận thức giới hạn	259	Restricted comprehension principle
Nguyên tắc nhận thức tổng quát	.	General comprehension principle
Nguyên tắc pigeonhole	241	Pigeonhole principle
Nguyên tắc siêu truy chứng	157	Transfinite induction
Nguyên tắc tối thứ tự	238	Well-ordering principle
Nguyên tắc truy chứng	157,229	Induction principle
Nguyên tố	244	Prime
Nhân tương đương	.	Equivalence kernel
Nhóm	.	Group
Nội diện	250	Intensional
Nội luật	93	Operator

O		
P		
Phạm trù	.	Category
Phản chứng	226	Refutation
Phản đối xứng	38	Antisymmetric
Phân hoạch	53	Partition
Phản hồi	35	Reflexive
Phần tử bù	.	Complemented element
Phần tử cực tiểu	60	Least element
Phần tử cực tiểu	60	Minimal element
Phần tử cuối cùng	137	Last element
Phần tử đầu tiên	137	First element
Phần tử kế tiếp	261	Successor
Phần tử liền kề dưới	137	Predecessor
Phần tử trước	.	Ancestor member
Phi đối xứng	40	Asymmetric
Phối hợp	.	Associative
Phụ	17	Supplement
Q		
Quan hệ	23	Relation
Quan hệ cùng thứ số	147	Ordinal number
Quan hệ đường chéo	27	Diagonal relation
Quan hệ mở rộng	85,90	Extended relation
Quan hệ thứ tự	55	Odering relation
Quan hệ thứ tự hoàn hảo	138	Well-ordered relation
Quan hệ tương đương	48	Equivalence relation

R		
S		
Siêu ngôn ngữ	251	Metalanguage
Siêu tập hợp	256	Transset
Số chia	244	Divisor, factor
Số đại số	120	Algebraic number
Số giới hạn	152	Limit number
Số hữu tỉ	246	Rational number
Số nguyên	243	Integer number
Số nguyên tự nhiên	239	Integer, natural number
Số siêu việt	213.248	Transcendental number
Số thập phân vô hạn	.	Infinite decimals
Số vô tỉ	247	Irrational number
Song ánh	297	Bijection, one-to-one … onto
T		
Tách biệt	12	Disjoint
Tập các tập con	126	Power set
Tập con	11	Subset
Tập con riêng	11	Proper set
Tập Dedekind	.	Dedekind cut
Tập hợp số phức C	.	Complex number
Tập hợp thương	18	Quotient set
Tập hợp thứ tự	138	Odering set
Tập phổ dụng	16	Universal set, universe of discourse
Tập hợp rỗng	11	Empty set

Tập số thực	.	Real number
Thập phân chấm dứt	119	Terminating decimals
Thứ số	147	Ordinal number
Thứ số giới hạn	152	Limit ordinal number
Thứ tự riêng phần	58	Partial oder
Thứ tự toàn phần	58	Total oder
Thứ tự hoàn hảo	138	Well–ordered
Thứ tự nghiêm cách	.	Strict order
Thuật ngữ	.	Terminology
Thuật ngữ nguyên thủy	216	Undefined term
Thuật ngữ phổ dụng	216	Universal term
Thủ tục đường chéo	.	Diagonal procedure
Thương	18	Quotient
Tích	17	Product
Tích Descartes	88	Cardinal product, cartesian product
Tích tương đối	30	Relative product
Tiên đề	.	Axiom
Tiên đề Chọn	110,263	Axiom of choice
Tiên đề Ghép đôi	257	Axiom of Pairing
Tiên đề Hiện hữu	264	Axiom of Existence
Tiên đề Hội	257	Axiom of Union
Tiên đề Lũy thừa	259	Axiom of power
Tiên đề mở rộng	.	Axiom of extensionality
Tiên đề Phần tử	254	Axiom of Member
Tiên đề tách biệt	.	Axiom of Separation

Tiên đề tập các tập con	11	Axiom of Powerset
Tiên đề tập con	.	Axiom of subsets
Tiên đề tập đôi	.	Axiom of Pair set
Tiên đề Tập rỗng	256	Axiom of Empty set
Tiên đề thế	.	Axiom of Replacement
Tiên đề Vô hạn	260	Axiom of infinity
Tính dầy đặc	247	Density property
Tính archimede	.	Archimedian property
Tính so sánh được của lượng số	.	Cardinal comparability
Toàn ánh	68	Surjection, onto
Tối đại	62	Maximal
Tối tiểu	62	Minimal
Truy chứng hoàn hảo	.	Well ordered induction
Truy chứng hữu hạn	157,229	Finite induction
Truy chứng siêu hạn	157,229	Transfinite induction
Truy chứng vô hạn	157,229	Infinite induction
Truyền	40	Transitive
Từng mảnh	.	Piecemeal
U		
Ước số chung lớn nhất	245	Greatest common divisor
V		
Vô hạn	97	Infinite, non-inductive, reflexive
Vô hạn Dedekind	103	Dedekind infinite

Bảng đối chiếu Anh – Việt

Anh	Việt
A	
Absorption	Hấp thụ
Algebra structure	Cấu trúc đại số
Algebraic number	Số đại số
Ancestor member	Phần tử trước
Antisymmetric	Phản đối xứng
Antisymmetric	Không đối xứng
Archimedian property	Tính archimede
Asymmetric	Phi đối xứng
Associative	Phối hợp
Axiom	Tiên đề
Axiom of choice	Tiên đề Chọn
Axiom of Pairing	Tiên đề Ghép đôi
Axiom of Existence	Tiên đề Hiện hữu
Axiom of Union	Tiên đề Hội
Axiom of power	Tiên đề Lũy thừa
Axiom of extensionality	Tiên đề mở rộng
Axiom of Member	Tiên đề Phần tử
Axiom of Separation	Tiên đề tách biệt
Axiom of Powerset	Tiên đề tập các tập con
Axiom of subsets	Tiên đề tập con
Axiom of Pair set	Tiên đề tập đôi
Axiom of Empty set	Tiên đề Tập rỗng
Axiom of Replacement	Tiên đề thế

Axiom of infinity	Tiên đề Vô hạn
Axiom scheme	Lược đồ tiên đề
B	
Bijection	Song ánh
Boolean algrbra	Đại số Boole
C	
Cancellative	Khả giản
Cardinal comparability	Tính so sánh được của lượng số
Cardinal number, power of set	Lượng số
Cardinal product, cartesian product	Tích Descartes
Category	Phạm trù
Cauchy condition	Điều kiện Cauchy
Choice mapping	Ánh xạ chọn
Closure	Đóng
Codomain, range	Miền ảnh
Commutative diagram	Biểu đồ giao hoán
Complement	Bù
Complemented element	Phần tử bù
Complex number	Tập hợp số phức C
Commutative	Giao hoán
Composite	Hợp nối
Composition	Ánh xạ hợp nối
Congruent modulo	Modulo
Constant	Ký hiệu hằng
Continuum hypothesis	Giả thuyết liên tục
Countable, denumerable	Đếm được

Counter image, pre-image, inverse image	Ảnh ngược
Converse, inverse	Nghịch đảo
D	
Declaration, signuture	Khai báo
Dedekind cut	Tập Dedekind
Dedekind finite	Hữu hạn Dedekind
Dedekind infinite	Vô hạn Dedekind
Deduction rule	Luật suy diễn
Density property	Tính dầy đặc
Diagonal procedure	Thủ tục đường chéo
Diagonal relation	Quan hệ đường chéo
Difference	Hiệu
Disjoint	Tách biệt
Divisor, factor	Số chia
Domain	Miền trị
Doubleton	Lưỡng tử
E	
Empty set	Tập hợp rỗng
Equality	Bằng nhau
Equivalence class	Lớp tương đương
Equivalence kernel	Nhân tương đương
Equivalence relation	Quan hệ tương đương
Extended relation	Quan hệ mở rộng
Extensional	Ngoại diện
Extension	Mở rộng

F	
Finite	Hữu hạn
Finite cardinal	Lượng số hữu hạn
Finite induction	Truy chứng hữu hạn
First element	Phần tử đầu tiên
Formula	Công thức
Function	Ánh xạ, hàm
G	
General comprehension principle	Nguyên tắc nhận thức tổng quát
Generalized continuum hypothesis	Giả thuyết liên tục tổng quát
Greatest common divisor	Ước số chung lớn nhất
Group	Nhóm
H	
I	
Identifiers	Danh hiệu
Identity mapping	Ánh xạ đồng nhất
Image	Ảnh
Impredicative definition	Định nghĩa toàn phần
Include	Chứa trong
Indexing	Đánh chỉ số
Induction principle	Nguyên tắc truy chứng
Inductive	Hữu hạn
Inductive definition	Định nghĩa đệ qui
Inductive proof	Chứng minh truy chứng
Infimum	Chận dưới nhỏ nhất
Infinite	Vô hạn

Infinite cardinal	Lượng số vô hạn
Infinite decimals	Số thập phân vô hạn
Infinite expansion	Mở rộng vô hạn
Infinite induction	Truy chứng vô hạn
Initial segment	Khoảng đầu
Injective	Đơn ánh
Insertion	Ánh xạ bao hàm
Integer number	Số nguyên
Integer, natural number	Số nguyên tự nhiên
Integral multiple	Chia chẵn
Intensional	Nội diện
Intersection	Giao
Inverse mapping	Ánh xạ đảo
Inversion	Ánh xạ đảo
Irrational number	Số vô tỉ
Irreducible	Không rút gọn được
J	
K	
L	
Lower bound	Chặn dưới
Least upper bound	Chặn trên nhỏ nhất
Lattice	Dàn
Left inverse	Nghịch đảo trái
Least element	Phần tử cực tiểu
Last element	Phần tử cuối cùng
Limit number	Số giới hạn

Limit ordinal number	Thứ số giới hạn
M	
Maximum	Cực đại
Minimum	Cực tiểu
Mathematical logic	Luận lý toán học
Mapping	Ánh xạ
Minimal element	Phần tử cực tiểu
Metalanguage	Siêu ngôn ngữ
Maximal	Tối đại
Minimal	Tối tiểu
N	
Non-antisymmetric	Không phản đối xứng
Non-inductive	Vô hạn
Non-reflexive	Hữu hạn
Non-reflexive	Không phản hồi
Non-symmetric	Không đối xứng
Non-transitive	Không truyền
Non-working definition	Định nghĩa bất khả thi
O	
One-to-one	Ánh xạ 1-1, Đơn ánh
One-to-one … onto …	Ánh xạ 1-1trên
Ordered mapping	Ánh xạ duy trì thứ tự
Odering relation	Quan hệ thứ tự
Odering set	Tập hợp thứ tự
Operator	Nội luật
Ordinal number	Thứ số

P	
Partial oder	Thứ tự riêng phần
Partition	Phân hoạch
Piecemeal	Từng mảnh
Pigeonhole principle	Nguyên tắc pigeonhole
Predicative definition	Định nghĩa bán phần
Predecessor	Phần tử liền kề dưới
Prime	Nguyên tố
Product	Tích
Power set	Tập các tập con
Proper set	Tập con riêng
Q	
Quotient	Thương
Quotient set	Tập hợp thương
R	
Rational number	Số hữu tỉ
Real number	Tập số thực
Recursive	Đệ qui
Recursive definition	Định nghĩa đệ qui
Reflexive	Phản hồi, Vô hạn
Refutation	Phản chứng
Relation	Quan hệ
Relative product	Tích tương đối
Restricted comprehension principle	Nguyên tắc nhận thức giới hạn
Restriction	Giới hạn
Right inverse	Nghịch đảo phải

Russell's paradox	Nghịch lý Russel
S	
Singleton	Đơn tử
Subset	Tập con
Strict order	Thứ tự nghiêm cách
Successor	Phần tử kế tiếp
Supplement	Phụ
Supremum	Chận trên nhỏ nhất
Surjection	Toàn ánh. Ánh xạ trên
Symmetric	Đối xứng
T	
Term	Nguyên từ
Terminal segment	Khoảng cuối
Terminating decimals	Thập phân chấm dứt
Terminology	Thuật ngữ
Theorem	Định lý
Theory of decimals	Lý thuyết số thập phân
Total oder	Thứ tự toàn phần
Transfinite cardinal	Lượng số siêu hạn
Transfinite induction	Truy chứng siêu hạn, siêu truy chứng
Transcendental number	Số siêu việt
Transitive	Truyền
Transset	Siêu tập hợp
U	
Uncountable, non-denumerable	Không đếm được

Undecidable	Không quyết định được
Undefined term	Thuật ngữ nguyên thủy
Universal term	Thuật ngữ phổ dụng
Universe of discourse	Tập phổ dụng
Universal set	Tập phổ dụng
V	
Variable	Ký hiệu biến
Venn-Euler diagram	Giản đồ Venn-Euler
W	
Well–ordered	Thứ tự hoàn hảo
Well-ordered relation	Quan hệ thứ tự hoàn hảo
Well ordered induction	Truy chứng hoàn hảo
Well-ordering principle	Nguyên tắc tối thứ tự
Working definition	Định nghĩa khả thi

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Sách

[01B]. Đặng Xuân Hồng. *Đại số học* (tập I, II) 1973. Viện Đại học Sài Gòn. Khoa học Đại học đường.

[02B]. Võ Bá Lộc. *Giáo trình đại số đồng điều*. ĐH Khoa Học Sài Gòn. 1973.

[03B]. *Bài tập chứng chỉ MGP*. ĐH Khoa Học Sài Gòn . 1973-1974.

[04B]. Helena Rasiowa (Trần Tất Thắng dịch). *Cơ sở của toán học hiện đại*. NXB khoa học và kỹ thuật HàNội 1978. Bản tiếng anh "Introduction to modern mathematics" 1973. Nguyên bản tiếng Ba Lan 1971.

[05B]. Serge Lang. *Đại số* (phần I, II, III) (bản dịch của Trần văn Hạo - Hoàng Kỳ NXB ĐH&THCN 1978)

[06B]. Saunders MacLane, Garrett Birkhoff. Algrbra + J. Weil, J. Hocquemiller. *Algèbre Solutions développees des exercises*.

[07B]. N. Bourbaki. *Théory des ensambles*. Chapiter 3 Ensembles ordonnés cardinaux, nombres entiers. 1967. Hermann.

[08B]. Moshé Flato. *The power of mathematics*. (translated by Maurice Robine). 1990. McGraw-Hill, Inc.

[09B]. Bjarni Jónsson. *Lecture notes in mathematics. Topics in Universal Algebra*. 1972. Springer - Verlag.

[10B]. Saunders MacLane, *Categorical Algebra*. 1965.

[11B]. D. C. Ince. *An introduction to discrete mathematics and formal system specification*. 1988 Oxford University Press.

[12B]. A. A. Fraenkel. *Set theory and logic*. 1966 Addison-Wesley Publishing Company,Inc.

[13B]. Seymour Lipschutz. *Set theory and related topics*. 1964 McGraw-Hill, Inc.

[14B]. Seymour Lipschutz. *Set theory and related topics*. Second Edition1998 McGraw-Hill, Inc.

[15B]. Seymour Lipschutz and M. Lars Lipson. *2000 Solved problems in discrete mathematics*. 1992 McGraw-Hill, Inc.

[16B]. R. L. Graham and D. E. Knuth and O. Patashnik. *1989 Concrete mathematics a foundation for computer science*. Addison-Wesley Publishing Company,Inc.

[17B]. Y. N. Moschovakis. *Notes on set theory*. 1994 Springer.

[18B]. Chin-Liang Chang & Richard Char-Tung Lee. *Symbolic logic and mechanical theorem proving*. 1973. Academic Press, Inc.

[19B]. R. R. Stoll. Sets, *Logic and axiomatic theories*. 1961. W. H. Freeman and Company.

[20B]. A. S. Luchins & E.H. Luchins. *Logical foundations of mathematics for behavioural scientists*. 1965. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

[21B]. R.L. Wilder. *Introduction to the foundations of mathematics*. 1965. John Wiley & Sons. Inc.

[22B]. Robert André. Axioms and Set Theory. Robert André@2014 ISBN 978-0-9938485-0-6 Revised 21/07/2006.

[23B]. Charles C. Pinter. A Book of set theory. Copyright © 1971, 2014

[24B]. Horst Herrlich. Axiom of Choice. © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

[25B]. Thomas Jech. Set Theory**.** The Third Millennium Edition, revised and expanded. © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997, 2003.

[26B]. Per Martin-Löf. 100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it?.

[27B]. Robert André. Axioms and Set Theory. A first course in Set Theory. 2014.

[28B]. Herbert B. Enderton. Elements of Set Theory. © 1977, by Academic press , INC

[29B]. Karel Hrbacek - Thomas Jech. Introduction to set theory. © 1977, by Maecel Dekker, Inc. All Rights Reversed.

[30B]. A Quick introduction to basic set theory – Anush Tserunyan.

Các trang web

[01W].https://www.math.arizona.edu/~glickenstein/math323s13/hw10sol.pdf.

[02W].https://www.whitman.edu/mathematics/higher_math_online/section04.09.html.

[03W]. https://www.youtube.com/watch?v=IkoKttTDuxE.

…

Tài liệu tham khảo cho phần tiên đề.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_union

[3] http://encyclopedia.kids.net.au/page/ax/Axiom_of_union

[4] https://www.youtube.com/watch?v=zcvsyL7GtH4

[5]https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo%E2%80%93Fraenkel_set_theory

[6]https://math.stackexchange.com/questions/851728/what-does-extension-mean-in-the-axiom-of-extension

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Extensionality

[8] http://encyclopedia.kids.net.au/page/ax/Axiom_of_extension

[9] http://us.metamath.org/mpegif/axnul.html

[10]https://www.youtube.com/watch?v=AAJB9l-HAZs (Dr. Freeric Schuller)

[11]http://encyclopedia.kids.net.au/page/ax/Axiom_of_power_set
[12] https://proofwiki.org/wiki/Axiom:Axiom_of_Empty_Set
[13] https://math.stackexchange.com/questions/278863/the-existence-of-the-empty-set-is-an-axiom-of-zfc-or-not
[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_empty_set
[15] http://encyclopedia.kids.net.au/page/em/Empty_set
[16]http://encyclopedia.kids.net.au/page/ax/Axiom_schema_of_comprehension
[17] https://www.youtube.com/watch?v=zcvsyL7GtH4
[18] http://mathworld.wolfram.com/AxiomofSubsets.html
[19]https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_schema_of_specification
[20]https://www.britannica.com/topic/Russells-paradox#ref875437
[21http://encyclopedia.kids.net.au/page/ax/Axiom_schema_of_replacement
[22] http://mathworld.wolfram.com/AxiomofReplacement.html
[23] https://proofwiki.org/wiki/Axiom:Axiom_of_Replacement
[24]ReportsonMathematicalLogicSubmission-G.OmanREVISED.pdf
[25] More studies on the axiom of comprehension - Thierry Libert (libertthesis_3.pdf)
[26] https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_empty_set
[27] https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_power_set
[28] https://ncatlab.org/nlab/show/axiom+of+infinity
[29] http://encyclopedia.kids.net.au/page/ax/Axiom_of_infinity
[30] A quick introduction to basic set theory - Anush Tserunyans(Anush_basic-st_lectures.pdf)

[31] https://en.wikipedia.org/wiki/Metalanguage

[32] https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_schema

[33] https://mathworld.wolfram.com/AxiomSchema.html

* Các tài liệu khác.

Xin chân thành biết ơn các tác giả của những tài liệu được sử dụng trong quyển sách này.

LUẬN

LÝ

TOÁN

HỌC

(MATHEMATICAL LOGIC)

SUY NGHĨ = LIÊN TƯỞNG + NHẬN DẠNG QUAN HỆ

(...) Toán học có thể được xây dựng và phát triển

từ các thiên tài.

Nhưng thành quả của nó không nhất thiết

chỉ những tài năng mới hiểu được (...)

nghĩ ra các học thuyết cao siêu,

có thể là việc làm không đơn giản.

Nhưng khi đã tìm được, đã nghĩ ra

thì hiểu và sử dụng nó

là một việc bình thường (...)