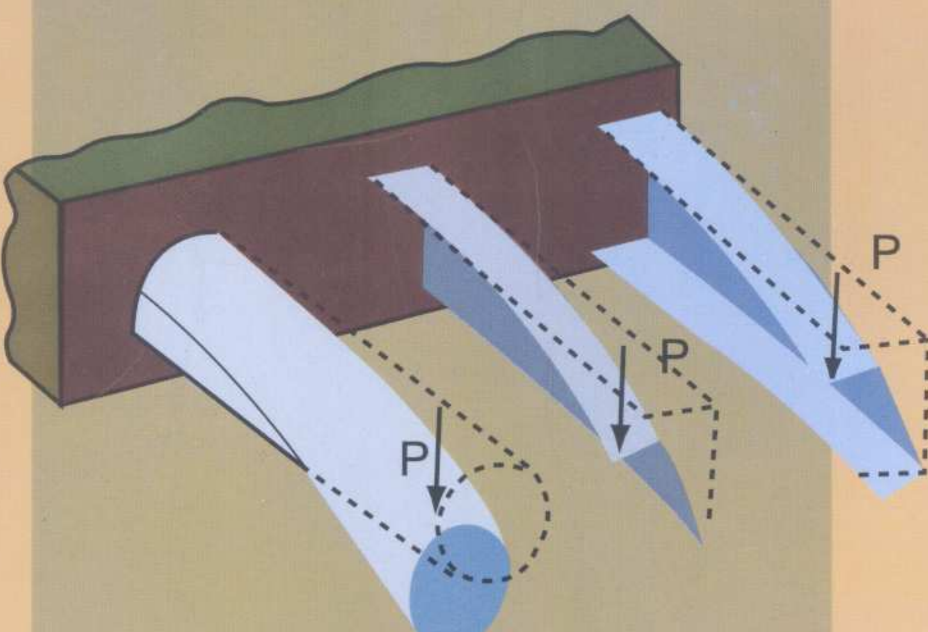
LÊ QUANG MINH - NGUYỄN VĂN VƯỢNG

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LÊ QUANG MINH - NGUYỄN VĂN VƯỢNG

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

CHƯƠNG XII

TÍNH CHUYỂN VỊ THEO PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

Trong các chương trước ta đã tính được chuyển vị mặt cắt ngang của thanh trong những trường hợp thanh chịu lực đơn giản như kéo nén đúng tâm, uốn ngang phẳng, xoắn thuần túy... Để tính chuyển vị cho hệ thanh khi chịu lực phức tạp thì ta phải sử dụng phương pháp năng lượng. Trong chương này ta sẽ đề cập đến phương pháp đó.

§ 12-1. NGUYÊN LÍ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ

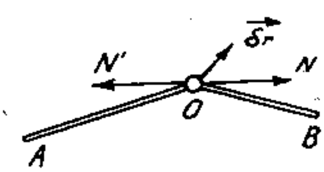
Người đầu tiên phát biểu nguyên lí này là Bécnuli, sau đó Lagơrăng đã hoàn thiện và đã trình bày trong sách giáo khoa cơ giải tích. Sách này được dịch từ tiếng Pháp sang tiếng Nga và xuất bản tại Matxcơva năm 1950.

Nguyên lí được phát biểu như sau :

Để một hệ có các liên kết lí tưởng ở trạng thái cân bằng tại một vị trí nào đó, điều kiện cần và đủ là tổng công của tất cả các lực đặt lên hệ trong các chuyển vị khả dĩ vô cùng bé là bằng không.

Chuyển vị khả dĩ là chuyển vị vô cùng bé sao cho trong các chuyển vị đó các liên kết của hệ thống không bị phá vỡ.

Một liên kết lí tưởng là một liên kết mà tổng công của các phản lực trong tất cả mọi chuyển vị khả dĩ của hệ là bằng không.



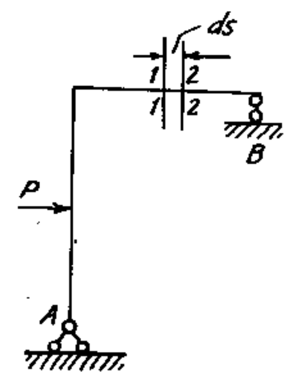
H.12-1

Các trường hợp sau đây có thể xem là những liên kết lí tưởng :

1. Một chất điểm hoặc một vật rắn luôn luôn tì lên một mặt nhẵn cố định. Vì mặt nhẵn nên không có lực ma sát, phản lực liên kết có phương theo pháp tuyến với bề mặt. Các chuyển vị khả dĩ chỉ có thể xảy ra trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt tì và như vậy công của các phản lực trong các chuyển vị đó là bằng không.

2. Các liên kết là bất động, nghĩa là phản lực liên kết không gây nên công.

3. Khớp nối giữa hai vật thể. Khớp này tạo nên các phản lực ngược chiều nên công của chúng trong các chuyển vị khả dĩ $\overrightarrow{\delta r}$ là bằng không (h. 12-1).



H.12-2

Ta hãy áp dụng nguyên lí trên cho một vật thể đàn hồi. Ví dụ có hệ đàn hồi được biểu diễn trên hình 12-2. Gọi ds là một phân tố vô cùng bé tách ra bởi hai mặt cắt (1–1) và (2–2) cách nhau một khoảng cách ds.

Hệ được xem như một tập hợp các phần tử đàn hồi ds. Dưới tác dụng của ngoại lực P và các phản lực R tại A và B, trên các mặt cắt (1–1) và (2–2) xuất hiện các thành phần nội lực. Bây giờ ta gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ. Một chuyển vị như vậy chỉ có thể có được bằng cách đặt một hệ lực mới nào đó tạo cho hệ một trạng thái biến dạng mới hay làm cho hệ biến dạng bằng nhiệt độ. Ta nhận thấy công khả dĩ ở đây không phải chỉ có công A_{ng} do ngoại lực tạo nên mà còn có công khả dĩ A_n do nội lực tạo nên. Do đó ta có :

$$A_{ng} + A_n = 0 \qquad (1)$$

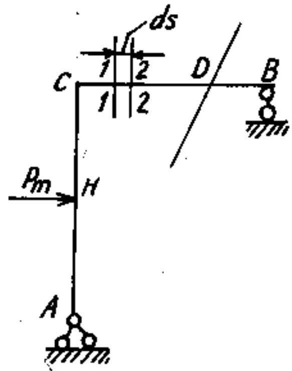
Đó là biểu thức của nguyên lí chuyển vị khả dĩ áp dụng cho một hệ đàn hồi.

§12–2. CÔNG THỨC MO ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ

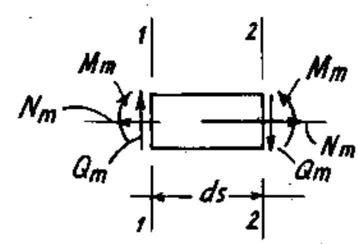
Trước hết ta hãy đề cập đến bài toán phẳng.

Bài toán đặt ra như sau : cho khung phẳng chịu lực như hình 12–3. Đòi hỏi ta phải tính chuyển vị theo phương k của trọng tâm mặt cắt qua D.

Gọi trạng thái chịu lực đã cho là trạng thái "m". Nghĩa là ngoại lực cũng như nội lực ở trạng thái này được dùng chỉ số m để đánh dấu. Chuyển vị theo phương k do lực ở trạng thái "m" gây nên được kí hiệu là Δ_{km}. Ngoại lực và phản lực – P_m và R_m – cũng gây nên các chuyển vị cho một phân tố ds bất kì nào đó của hệ. Thực vậy, gọi N_m, Q_m và M_m là các thành phần nội lực trên các mặt cắt (1–1) và (2–2) của ds (h. 12–4) do P_m và R_m gây nên, các thành phần nội lực đó tạo nên các chuyển vị tương đối giữa hai mặt cắt (1–1) và (2–2) như sau :



H.12–3



H.12–4

1. Chuyển vị dọc theo chiều trục :

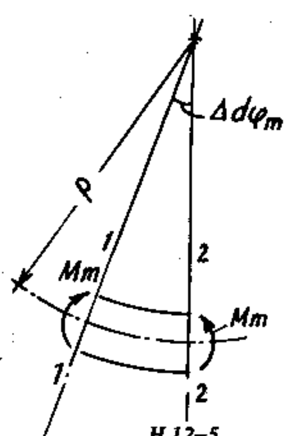
$$\Delta ds_m = \frac{N_m ds}{EF} \qquad (2)$$

2. Chuyển vị góc tương đối (h. 12–5):

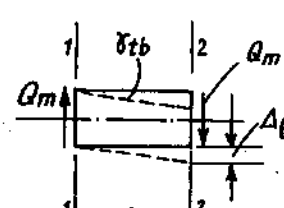
$$\Delta d\varphi_m = \frac{M_m ds}{EJ} \qquad (3)$$

3. Chuyển vị trượt tương đối giữa hai mặt cắt (h. 12–6)

$$\Delta\beta_m = \gamma_{tb} ds \qquad (4)$$



H.12–5



H.12–6

γ_{tb} là góc trượt tỉ đối trung bình. Giá trị góc trượt đó tỉ lệ với ứng suất tiếp do Q_m gây nên trên các mặt cắt. Ta có thể tính trị số ứng suất tiếp trung bình với công thức :

$$\tau_{tb} = \eta \frac{Q_m}{F}$$

trong đó η là một hệ số điều chỉnh vì ứng suất tiếp do Q_m gây nên là phân bố không đều trên mặt cắt.

Ví dụ : với mặt cắt hình chữ nhật $\eta = 1,2$

Với mặt cắt tròn $\eta = \frac{32}{27}$

Với mặt cắt hình chữ I $\eta \approx \frac{F}{F_{lòng}}$; F là diện tích toàn phần và $F_{lòng}$ – diện tích của lòng chữ I.

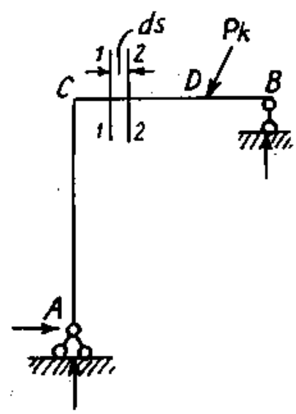
Từ đó ta có :

$$\Delta\beta_m = \frac{\tau_{tb}}{G} ds = \eta \frac{Q_m ds}{GF}$$

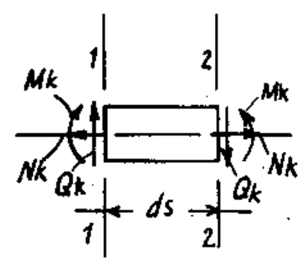
Bây giờ ta hãy tưởng tượng tạo nên một trạng thái "k" bằng cách bỏ tất cả các ngoại lực ở trạng thái "m" và đặt vào phương "k" một lực P_k (h. 12-7). P_k và các phản lực R_k gây nên các thành phần nội lực N_k, Q_k và M_k trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) (hình 12-8).

Vì hệ là một hệ cân bằng nên công của ngoại lực và nội lực của hệ trong bất kì một chuyển vị khả dĩ nào cũng phải bằng không.

Ta hãy chọn ngay trạng thái biến dạng của trạng thái "m" như là các chuyển vị khả dĩ. Công của ngoại lực khi đó là $P_k\Delta_{km}$; còn công của nội lực thì ta chưa tính được nhưng ta phải có :



H. 12-7



H. 12-8

$$P_k\Delta_{km} + A_n = 0 \tag{5}$$

Ở đây ta chú ý thấy rằng các phản lực R_k tại A và B không sinh công vì các gối tựa đó bất động.

Để tính công A_n ta để ý đến phân tố ds. Các thành phần nội lực N_k, Q_k và M_k trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) đối với phân tố lại là ngoại lực. Phân tố đó có các chuyển vị khả dĩ Δds_m, $\Delta\beta_m$ và $\Delta d\varphi_m$. Công ngoại lực lúc này là :

$$dA_{ng} = N_k\Delta ds_m + Q_k\Delta\beta_m + M_k\Delta d\varphi_m$$

Theo nguyên lí chuyển vị khả dĩ ta phải có :

$$N_k\Delta ds_m + Q_k\Delta\beta_m + M_k\Delta d\varphi_m + dA_n = 0 \tag{6}$$

Từ đó ta có :

$$dA_n \overset{x}{=} -\left(\frac{M_kM_m ds}{EJ} + \frac{N_kN_m ds}{EF} + \eta\frac{Q_kQ_m ds}{GF}\right) \quad (7)$$

Vậy : công của nội lực của toàn hệ sẽ là :

$$A_n = -\left(\sum\int\frac{M_kM_m ds}{EJ} + \sum\int\frac{N_kN_m ds}{EF} + \sum\int\eta\frac{Q_kQ_m ds}{GF}\right) \quad (8)$$

Dấu tổng $\sum$ ở đây để chỉ tổng các đoạn thanh trong hệ và dấu tích phân là để chỉ phép toán tích phân trên suốt chiều dài của mỗi đoạn thanh :

Thay (8) vào (5) ta có :

$$P_k\Delta_{km} = \sum\int\frac{M_kM_m ds}{EJ} + \sum\int\frac{N_kN_m ds}{EF} + \sum\int\frac{Q_kQ_m ds}{GF}\eta \quad (9)$$

Nếu đem chia cả hai vế cho P_k hay nói một cách khác trong trạng thái "k" lấy lực $P_k = 1$ không có thứ nguyên thì từ đó ta có công thức của chuyển vị Δ_{km}.

$$\Delta_{km} = \sum\int\frac{\overline{M}_kM_m ds}{EJ} + \sum\int\frac{\overline{N}_kN_m ds}{EF} + \sum\int\eta\frac{\overline{Q}_kQ_m ds}{GF} \quad (12\text{-}1)$$

Trong đó $\overline{M}_k$, $\overline{Q}_k$ và $\overline{N}_k$ là các thành phần nội lực trong hệ do $P_k = 1$ gây nên.

Công thức đó được gọi là công thức Mo.

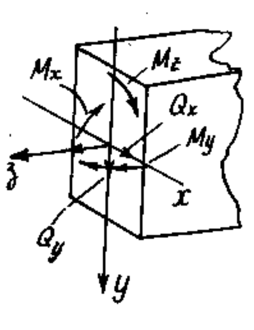
Đối với bài toán không gian, khi trên các mặt cắt ngang có đầy đủ sáu thành phần nội lực thì công thức Mo sẽ có dạng như sau :

$$\Delta_{km} = \sum\int\frac{\overline{M}_{xk}M_{xm} dz}{EJ_x} + \sum\int\frac{\overline{M}_{yk}M_{ym} dz}{EJ_y} + \sum\int\frac{\overline{M}_{zk}M_{zm} dz}{EJ_\rho} +$$

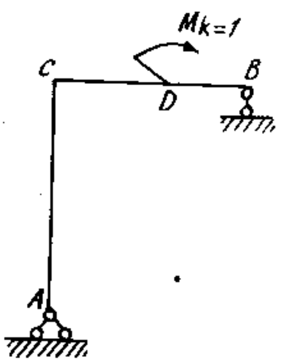
$$+ \sum\int\frac{\overline{N}_{zk}N_{zm} dz}{EF} + \sum\int\eta\frac{\overline{Q}_{yk}Q_{ym} dz}{GF} + \sum\int\eta\frac{\overline{Q}_{xk}Q_{xm} dz}{GF} \quad (12\text{-}2)$$

trong đó dz là độ dài của phân tố dz = ds và các thành phần nội lực được biểu diễn như trên hình 12-9.

Trên đây ta đã tìm chuyển vị thẳng theo phương k. Tất cả mọi điều ta vừa chứng minh cũng sẽ hoàn toàn đúng khi ta cần tìm góc xoay của mặt cắt ngang tại một nơi nào đó của hệ hay một cách rộng hơn, khi ta cần tìm chuyển vị thẳng tương đối hay góc xoay tương đối của hai mặt cắt tại hai điểm bất kì nào đó của hệ. Khi đó ta sẽ tạo nên trạng thái "k" bằng cách đặt một mômen tập trung một hệ hai lực ngược chiều hay hai mômen ngược chiều không có thứ nguyên và có trị số bằng đơn vị.



H.12-9



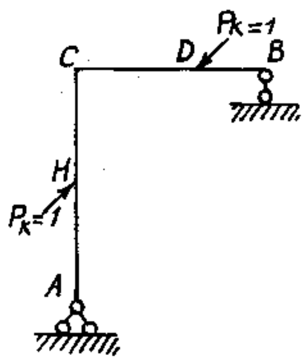
H. 12-10

Ký hiệu Δ_{km}, tùy theo trường hợp, sẽ có nghĩa là góc xoay của mặt cắt ngang, độ dịch gần hay chuyển xa của hai trọng tâm hai mặt cắt và góc xoay tương đối của hai mặt cắt.

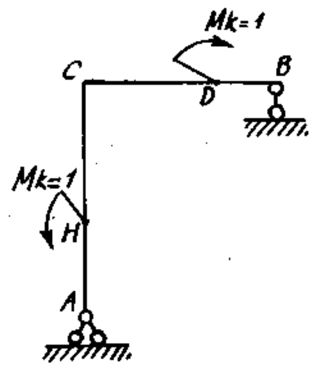
Ví dụ để tìm góc xoay của mặt cắt D ta tạo nên trạng thái "k", như trên hình 12-10.

Để tính độ dịch gần giữa hai điểm D, H ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 12-11.

Để tính góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ngang qua D và H ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 12-12.



H. 12-11



H. 12-12

§12-3. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ QUAN TRỌNG

1. Định lí về công tương hỗ (còn gọi là định lí Bét-ti)

Định lí phát biểu như sau :

Công của ngoại lực ở trạng thái "m" trên chuyển vị của trạng thái "k" là bằng công của ngoại lực ở trạng thái "k" thực hiện trên chuyển vị của trạng thái "m".

Thực vậy, từ biểu thức "9" ta luôn luôn có :

$$P_k\Delta_{km} = P_m\Delta_{mk} = \sum\int \frac{M_kM_m ds}{EJ} + \sum\int \frac{N_kN_m ds}{EF} + \sum\int \frac{\eta\ Q_kQ_m ds}{GF}$$

2. Định lí về chuyển vị đơn vị. Nếu hai trạng thái "m" và "k" đều là trạng thái do lực đơn vị tác dụng theo phương m và phương k gây nên, khi đó các chuyển vị Δ_{km} và Δ_{mk} là các chuyển vị đơn vị và được kí hiệu là δ_{km} và δ_{mk}.

Ta dễ dàng thấy

$$\delta_{km} = \delta_{mk} \tag{12-3}$$

Thật vậy vì :

$$\delta_{km} = \delta_{mk} = \sum\int \frac{\overline{M}_k\overline{M}_m ds}{EJ} + \sum\int \frac{\overline{N}_k\overline{N}_m ds}{EF} + \sum\int \frac{\eta\overline{Q}_k\overline{Q}_m ds}{GF}$$

Do đó ta có thể phát biểu định lí như sau :

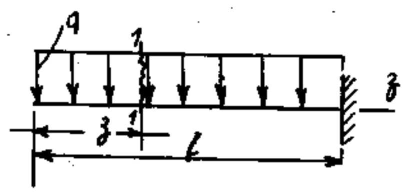
Chuyển vị đơn vị theo phương k do lực đơn vị theo phương m gây nên là bằng chuyển vị theo phương m do lực đơn vị theo phương k gây nên.

Ví dụ 1. Cho dầm chịu lực như hình 12-13. Xác định độ võng và góc xoay tại A (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt đối với chuyển vị của dầm).

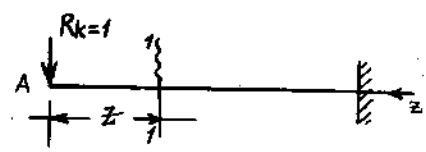
Độ cứng EJ_x của dầm là hằng số.

Bài giải :

Ta xem trạng thái đã cho của dầm là trạng thái "m". Hệ trục tọa độ được chọn như hình vẽ. Gọi z là hoành độ của mặt cắt (1-1). Mômen uốn M_m trên mặt cắt đó có trị số là :



H. 12-13



H.12-14

$$M_m = -q\frac{z^2}{2} \qquad \text{(a)}$$

Để tính độ võng tại A ta tạo nên trạng thái "k" như hình 12-14. Mômen uốn trên mặt cắt (1-1) là :

$$M_k = -z \qquad \text{(b)}$$

Ở đây ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, còn lực dọc N_z là bằng không, do đó chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ có trị số là

$$\Delta_{km} = y_A = \int_o^1 \frac{\overline{M}_k M_m dz}{EJ_x} = \int_o^1 q \cdot \frac{z^3}{2} \cdot \frac{1}{EJ_x} dz$$

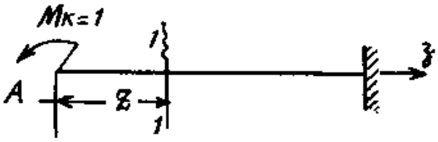
$$y_A = \frac{qz^4}{8EJ_x}$$

Để tính góc xoay tại A ta tạo nên trạng thái"k" như hình 12-15. Khi đó ta có :

$$M_k = -1$$

Vậy :

$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_o^1 \frac{\overline{M}_k M_m dz}{EJ_x}$$

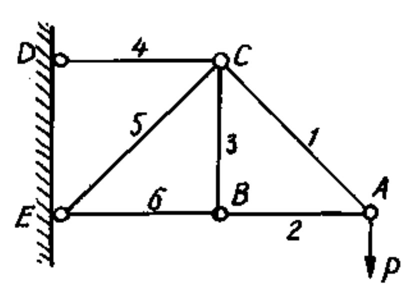


H.12-15

$$\theta_A = \int_o^1 q\frac{z^2}{2} \cdot \frac{dz}{EJ_x} = \frac{qz^3}{6EJ_x}$$

Các kết quả nhận được trên đây là những trị số dương, điều đó có nghĩa là độ võng và góc xoay cùng chiều với P_k và M_k.

Ví dụ 2. Cho giàn chịu lực như hình 12-16, tìm chuyển vị thẳng đứng tại A. Các thanh đều cùng làm bằng một loại vật liệu và cùng có mặt cắt như nhau.



H.12-16

Bài giải :

Ta xem trạng thái đã cho của hệ là trạng thái "m". Trị số lực dọc trong các thanh như sau :

$$N_m^1 = P\sqrt{2} \; ; \qquad N_m^2 = -P$$

$$N_m^3 = 0 \; ; \qquad N_m^4 = 2P$$

$$N_m^5 = -P\sqrt{2} \; ; \qquad N_m^6 = -P$$

Để tìm chuyển vị thẳng đứng tại A ta bỏ lực P đi và thay vào đó một lực $P_k = 1$. Trị số nội lực trong các thanh sẽ là :

$$\overline{N}_k^1 = \sqrt{2} \; ; \qquad \overline{N}_k^2 = -1 \; ; \quad \overline{N}_k^3 = 0$$

$$\overline{N}_k^5 = -\sqrt{2} \; ; \qquad \overline{N}_k^6 = -1.$$

Ở đây mô men uốn và lực cắt bằng không nên chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ là :

$$\Delta_{km} = y_A = \sum \int_o^l \frac{\overline{N}_k N_m ds}{EF}$$

$$y_A = \frac{P\sqrt{2}.\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P.1a}{EF} + \frac{2P\sqrt{2}.2\sqrt{2}.a}{EF} + \frac{P\sqrt{2}.\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P.1.a}{EF} = (10 + 4\sqrt{2})\frac{Pa}{EF}$$

§ 12–4. PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ CỦA VÊRÊSAGHIN

Khi mặt cắt ngang của thanh không thay đổi hay thay đổi trên từng đoạn, khi đó các tích phân trong công thức Mo (12–1) sẽ có dạng sau đây :

$$I = \int_o^l F(z).f(z)dz \qquad (10)$$

trong đó ta luôn luôn có một hàm số bậc nhất. Thực vậy vì các biểu đồ nội lực trong trạng thái "k" là do lực tập trung hay mômen tập trung gây nên. Trong trường hợp đó phép tích phân có thể thực hiện một cách đơn giản như sau :

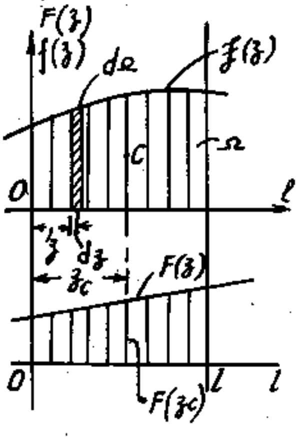
Ta giả thiết trên một đoạn dài từ 0 đến l nào đó của thanh hàm số f(z) là một đường cong bất kì còn F(z) là một đường thẳng có phương trình :

$$F(z) = az + b \qquad (11)$$

Các hàm số đó được biểu diễn như trên hình 12–7.

Đem thay (11) vào (10) ta được :

$$I = \int_\Omega (az + b).f(z)dz \qquad (12)$$



H.12–17

trong đó tích f(z)dz là vi phân diện tích dΩ của biểu đồ f(z). Ta có thể viết (12) lại dưới dạng :

$$I = \int_{\Omega}(az + b)d\Omega = a\int_{\Omega} zd\Omega + b\int_{\Omega} d\Omega \qquad (13)$$

trong đó : $\int_{\Omega} d\Omega$ là diện tích Ω của biểu đồ f(z) từ 0 đến l và $\int_{\Omega} zd\Omega$ là mômen tĩnh của Ω đối với trục tung.

Trị số này có thể tính với biểu thức :

$$\int_{\Omega} zd\Omega = z_c\Omega$$

trong đó : z_c là hoành độ trọng tâm của Ω.

Vậy biểu thức (13) có thể được viết lại dưới dạng :

$$I = az_c\,\Omega + b\Omega = \Omega\,(az_c + b) \qquad (14)$$

trong đó $az_c + b = f(z_c)$ là tung độ của biểu đồ F(z) tại hoành độ z_c của biểu đồ f(z). Vậy :

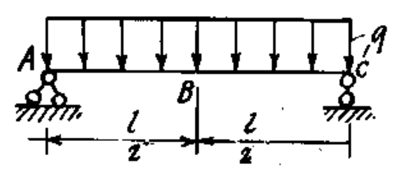
$$I = \Omega F(z_c) \qquad (12\text{–}4)$$

Ví dụ 3. Tìm độ võng tại B và góc xoay tại A của dầm chịu lực như trên hình 12–18 (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).

Bài giải :

Ta hãy tìm góc xoay tại A. Tạo nên trạng thái "k" (h. 12–19). Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt nên góc xoay tại A sẽ được tính với biểu thức :

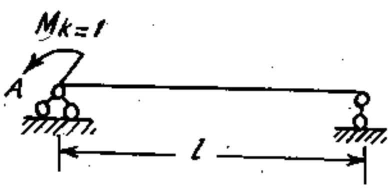
$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^l \frac{\overline{M}_k M_m ds}{EJ}$$



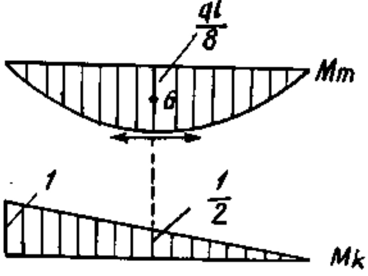
H.12–18

Các biểu đồ M_m và $\overline{M}_k$ được biểu diễn như trên hình 12–20. Theo phép nhân Vêrêsaghin ta có :

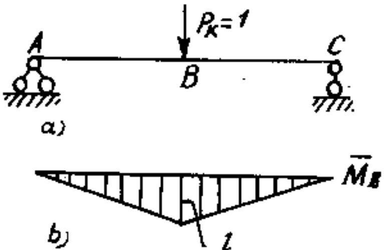
$$\theta_A = -\frac{2}{3}q\frac{l^2}{8}l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{EJ_x} = -\frac{ql^3}{24EJ_x}1$$



H.12–19



H.12–20



H.12–21