Chương 2: Tín hiệu và phổ

2.1 Tín hiệu.

2.2 Khai triển (chuỗi) Fourier và phổ vạch.

2.3 Biến đổi Fourier và phổ liên tục.

2.4 Nhiễu AWGN.

2.1 Tín hiệu

- Biểu thức
- Dạng sóng
- Giá trị trung bình
- Công suất/Năng lượng
- Phổ
- Mật độ phổ công suất/năng lượng
- Băng thông

Tín hiệu miền thời gian

- Biểu thức: biểu diễn tín hiệu dưới dạng hàm số toán học (theo thời gian)
- Dạng sóng: biểu diễn tín hiệu dưới dạng đồ thị (theo thời gian)
- Giá trị trung bình: trung bình cộng của giá trị tín hiệu (theo thời gian)
- Công suất/năng lượng: đo “sức khỏe” của tín hiệu

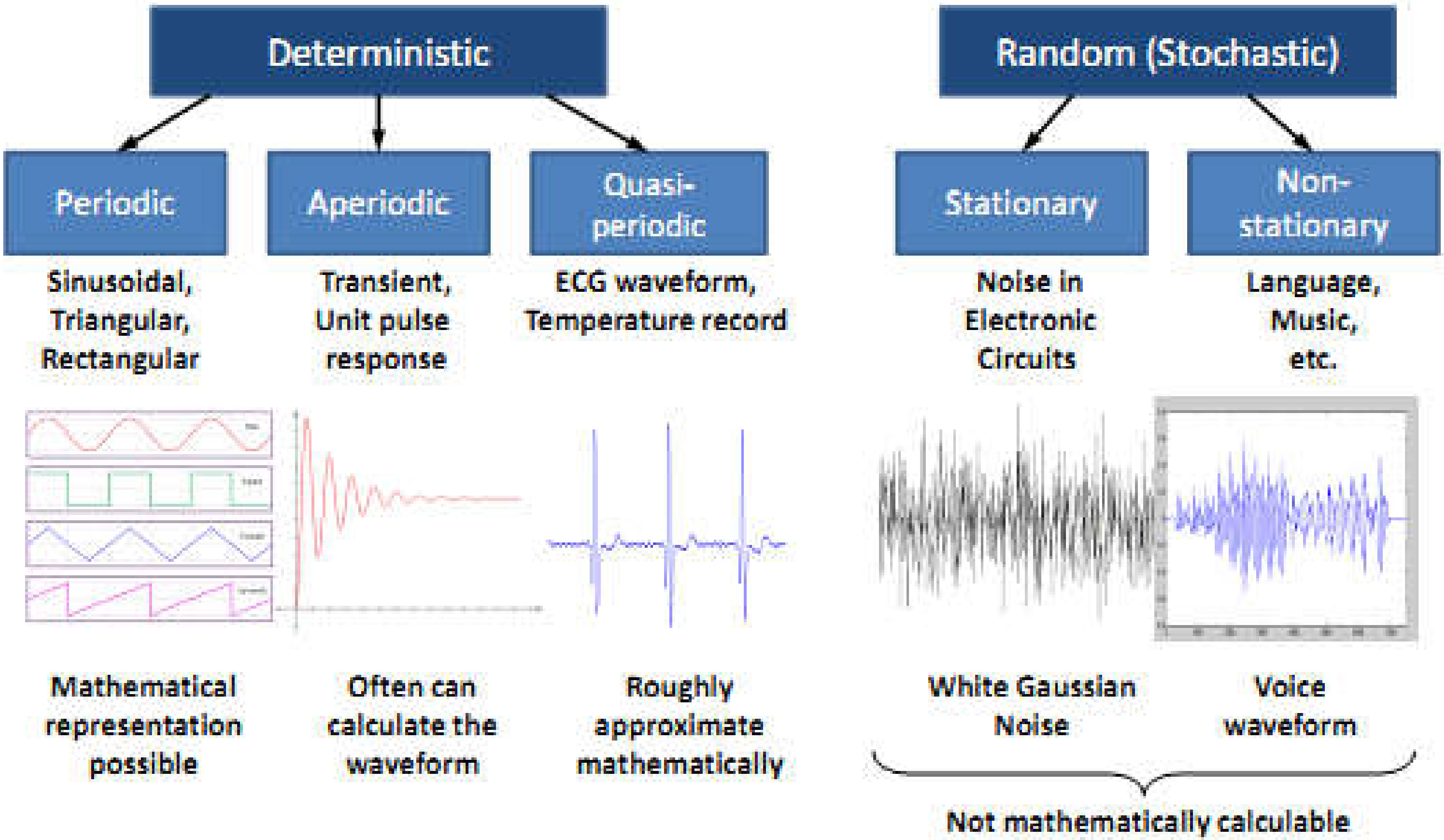
Tín hiệu miền tần số

- Phổ: biểu diễn tín hiệu (theo tần số) thông qua khai triển hoặc biến đổi Fourier
- Mật độ phổ công suất/năng lượng: biểu diễn công suất/năng lượng theo tần số
- Băng thông: phạm vi tần số (dương) từ nhỏ nhất đến lớn nhất mà phổ có giá trị khác 0

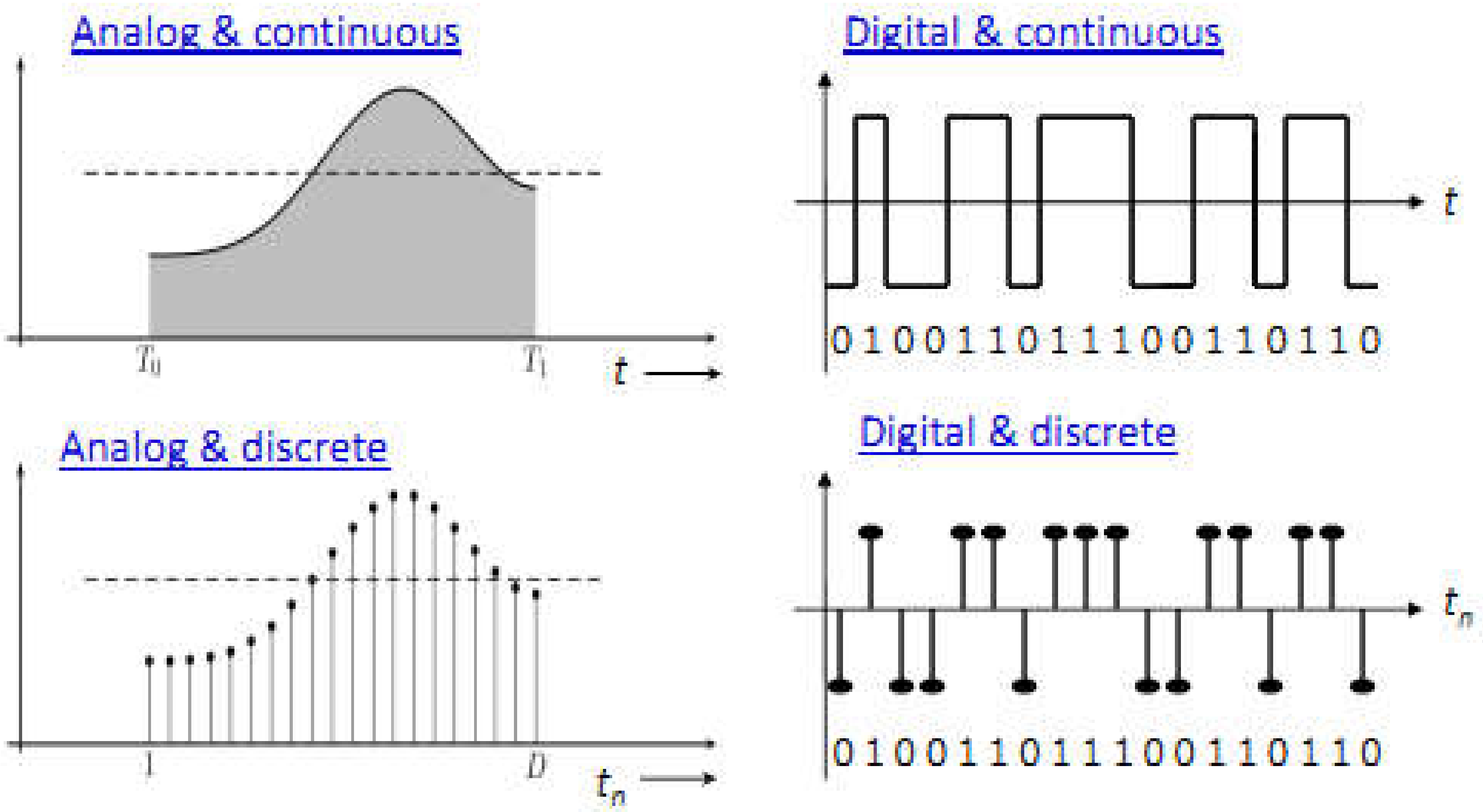
Bạn có biết?

1) Phân biệt tín hiệu lý tưởng (mô hình toán học) với thực tế?
2) Phân biệt tín hiệu xác định với ngẫu nhiên?
3) Phân biệt tín hiệu tương tự (liên tục) với số (rời rạc)?
4) Phân biệt tín hiệu thời gian hữu hạn với thời gian vô hạn?
5) Phân biệt tín hiệu tuần hoàn với không tuần hoàn?
6) Phân biệt tín hiệu đơn cực với lưỡng cực?
7) Phân biệt tín hiệu thực với phức?
8) Phân biệt tín hiệu năng lượng với công suất?

Tín hiệu xác định và ngẫu nhiên

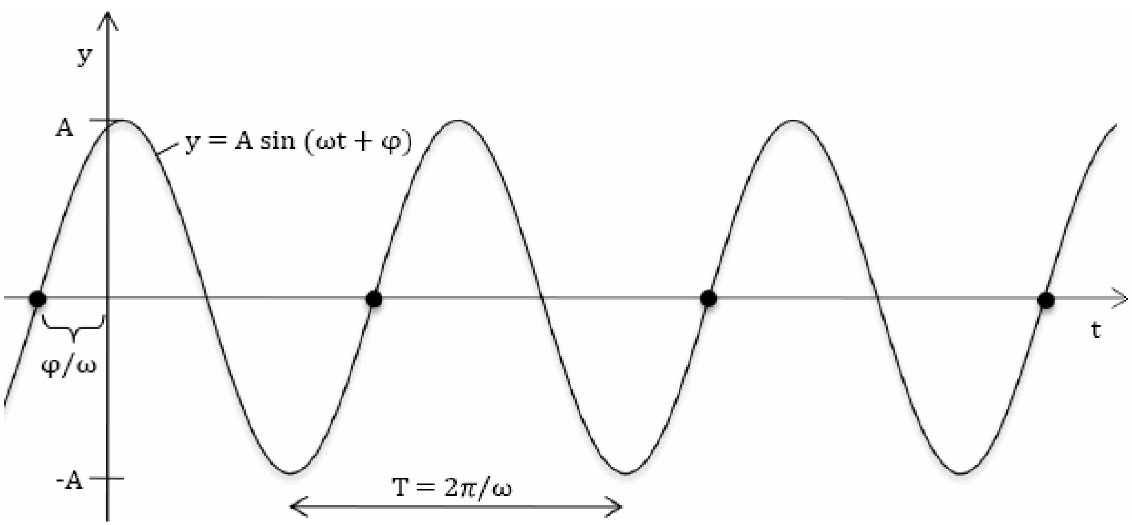


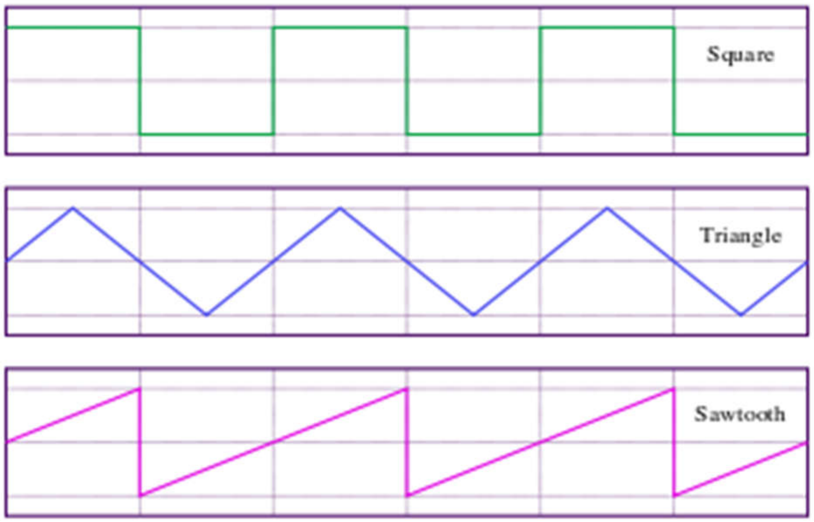
Tín hiệu liên tục (tương tự) và rời rạc (số)



Tín hiệu tuần hoàn

- Định nghĩa: tồn tại $T > 0$ sao cho $x(t) = x(t + mT)$ $\forall t$, trong đó m là số nguyên bất kì
- Chu kì tuần hoàn: T → Chu kì lặp lại: kT (k là số nguyên dương)
- Tần số tuần hoàn
  - Hz: $F = 1/T$
  - Rad/s: $\Omega = 2\pi F$ ($w = 2\pi f$)





Bạn có biết?

- Các tín hiệu sau có tuần hoàn hay không? Nếu có, hãy xác định chu kì tuần hoàn.

1) 1
2) $1 + 2\cos(10\pi t)$
3) $2\cos(10\pi t) - 2\sin(10\pi t)$
4) $2\cos(10\pi t) + 2\sin(20\pi t)$
5) $2\cos(15\pi t) + 2\sin(20\pi t)$
6) $2\cos(15t) + 2\sin(20\pi t)$

Xác định chu kì tuần hoàn?

1) $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
2) $A.\cos^2(2\pi Ft+\phi)$
3) $A.\cos(B.\cos(2\pi Ft+\phi))$
4) $A.\cos(B.\sin(2\pi Ft+\phi))$
5) $A.\cos(2\pi Ft+\phi).\ B.\sin(2\pi Ft+\phi)$
6) $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1).\ B.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
7) $A.\cos(2\pi F_1t+\phi).\ B.\cos(2\pi F_2t+\phi)$
8) $A.\cos(2\pi F_1t+\phi) + B.\cos(2\pi F_2t+\phi)$

Công thức Euler

- Thực tế: tất cả tín hiệu giá trị thực.
- Toán học: tín hiệu có thể giá trị phức.

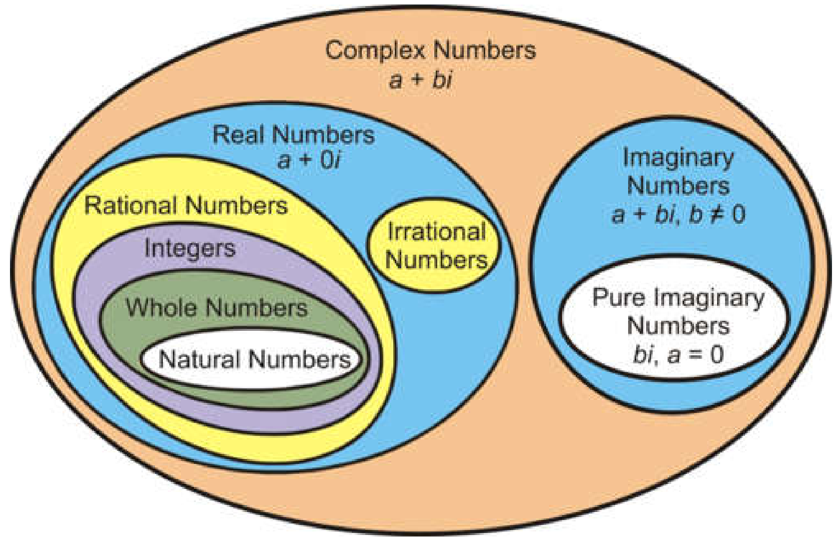
$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \mathrm{Re}\left[e^{j\theta}\right]$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \mathrm{Im}\left[e^{j\theta}\right]$$

Xác định tín hiệu thực (không ảo) hay phức (có ảo)?

1) $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
2) $A.\cos(B.\cos(2\pi Ft+\phi))$
3) $A.\exp(j\phi).\cos(2\pi Ft)$
4) $A.\exp\{j(2\pi Ft+\phi)\}$
5) $A.\exp\{j(2\pi Ft+\phi)\} + A.\exp\{-j(2\pi Ft + \phi)\}$
6) $A.\exp\{j(2\pi Ft+\phi)\} - A.\exp\{-j(2\pi Ft + \phi)\}$
7) $A.\exp\{j(2\pi Ft+\phi)\} + A.\exp\{j(2\pi Ft - \phi)\}$
8) $A.\exp\{j(2\pi Ft+\phi)\} - A.\exp\{j(2\pi Ft - \phi)\}$



Ví dụ 1 ($t \in R$)

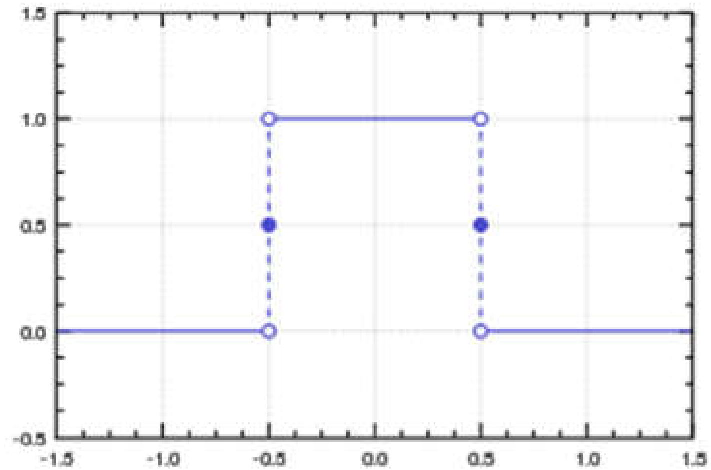
Kiểm tra tín hiệu thực và tuần hoàn hay không?

1) $\cos(\pi t/3)$
2) $\cos(t/3)$
3) $\exp(j\pi t/3)$
4) $\exp(jt/3)$
5) $\exp(-t/3)$
6) $\cos(\pi t/3) + \cos(\pi t/4)$
7) $\cos(t/3) + \cos(t/4)$
8) $\cos(t/3) + \cos(\pi t/3)$
9) $\exp(j\pi t/3) + \exp(j\pi t/4)$
10) $\exp(j\pi t/3) + \exp(-j\pi t/3)$
11) $\exp(jt/3) + \exp(jt/4)$
12) $\exp(jt/3) + \exp(-jt/3)$

Hàm xung chữ nhật và tam giác

❖ Rectangular (rect)

$$\mathrm{rect}(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } |t| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$



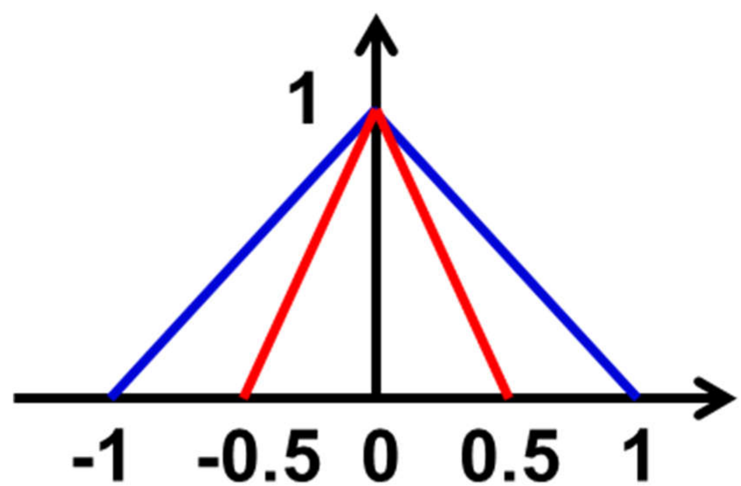
❖ **Triangular (tri)**

➢ **Phổ biến (mặc định):**

tri(t) = Λ(t) = rect(t/2).(1 - |t|)

➢ **Ngoại lệ:**

tri(t) = Λ(t) = rect(t).(1 - |t|)



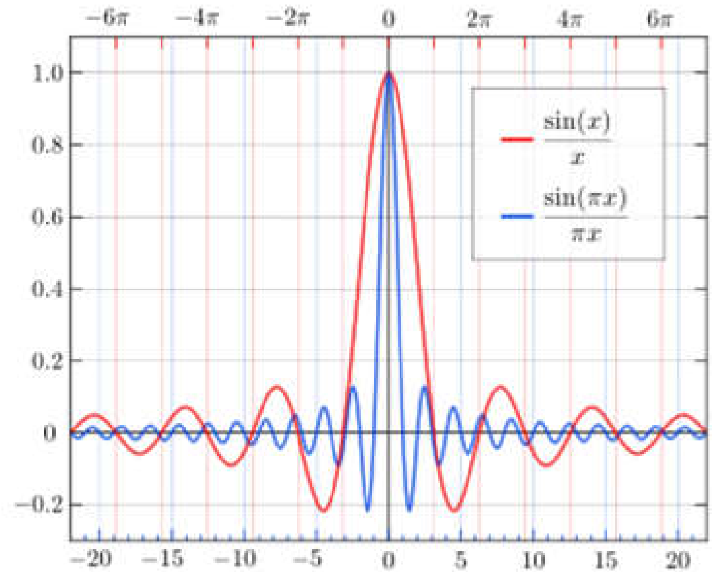
Hàm sinc

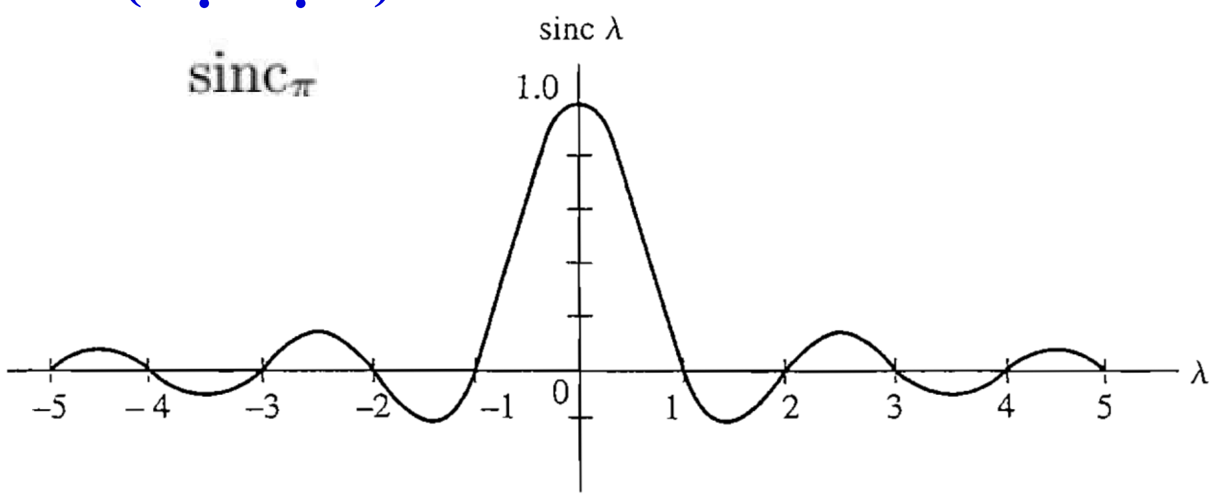
❖ **Cardinal sine (sinc)**

➢ Unnormalized: $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

➢ **Normalized:** $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

(mặc định)

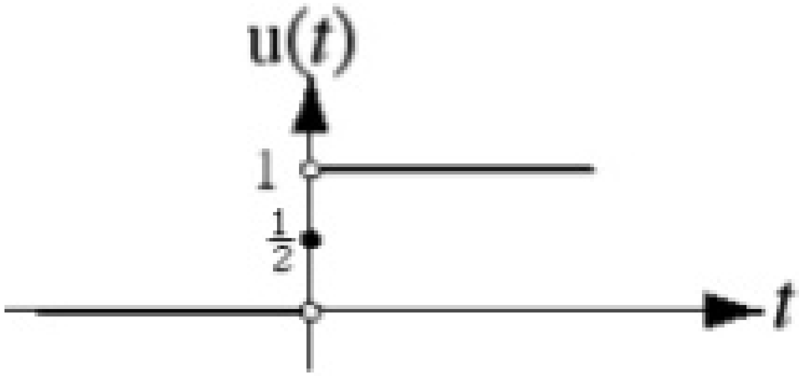




Hàm bước và hàm dấu

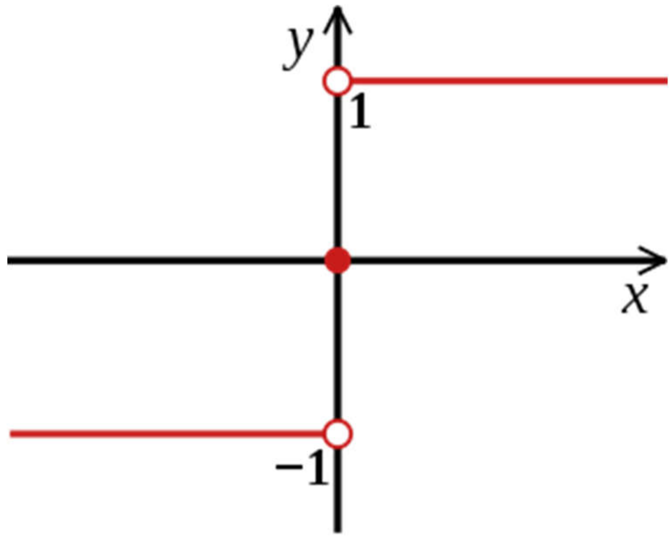
❖ Hàm bước

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , \ t > 0 \\ 1/2 & , \ t = 0 \\ 0 & , \ t < 0 \end{cases}$$



❖ Hàm dấu

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

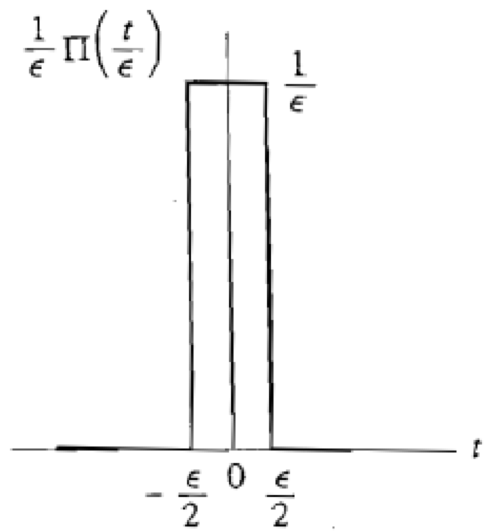


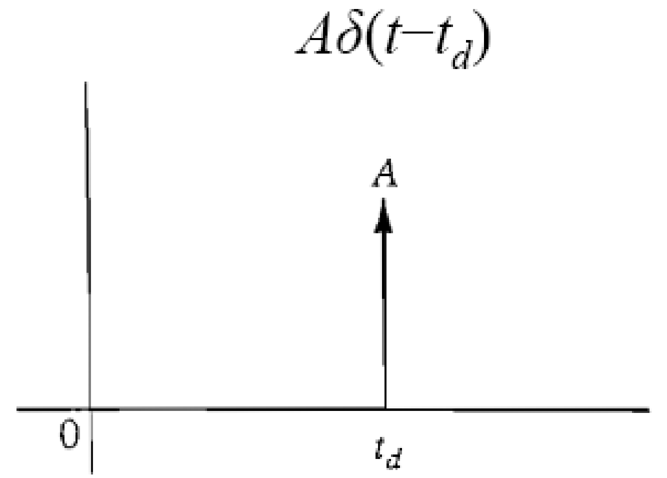
Hàm Dirac delta

- Không tồn tại trong thực tế, chỉ mang ý nghĩa toán học.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$





$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-T)\,dt = f(T).$$

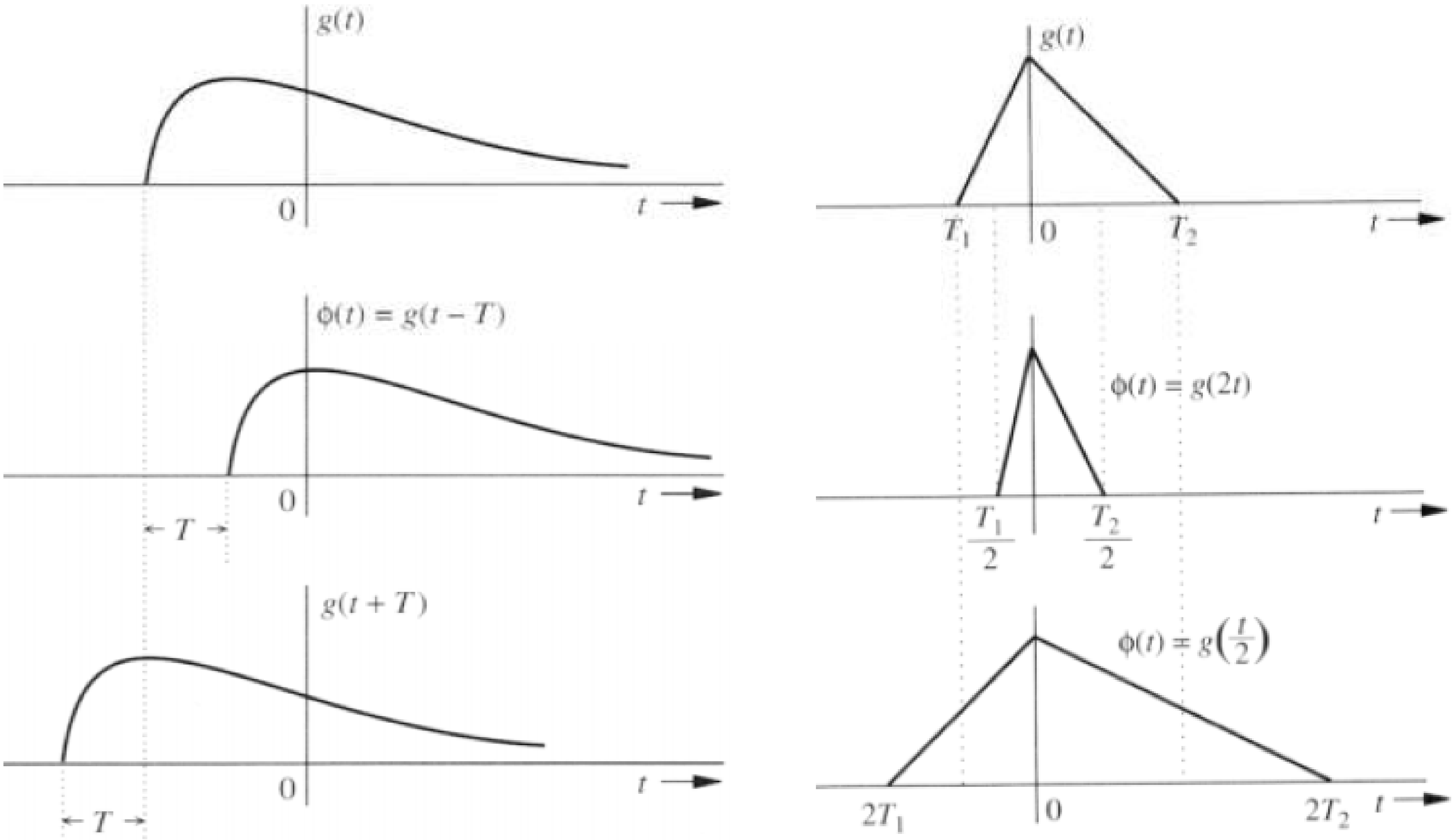
$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}.$$

$$\delta'(t) = u(t)$$

Vẽ dạng sóng cơ bản

1) $A.\cos(2\pi Ft+\phi) + B$
2) $A.\mathrm{sinc}(t/\tau)$
3) $A.\Pi\{(t - t_0)/\tau\}$
4) $A.\Sigma_k\{\Pi\{(t - kT - t_0)/\tau\}\}$
5) $A.\ \Lambda\{(t - t_0)/\tau\}$
6) $A.\Sigma_k\{\Lambda\{(t - kT - t_0)/\tau\}\}$
7) $\Sigma_k\{A_k.\delta(t - t_k)\}$

Một số phép biến đổi tín hiệu

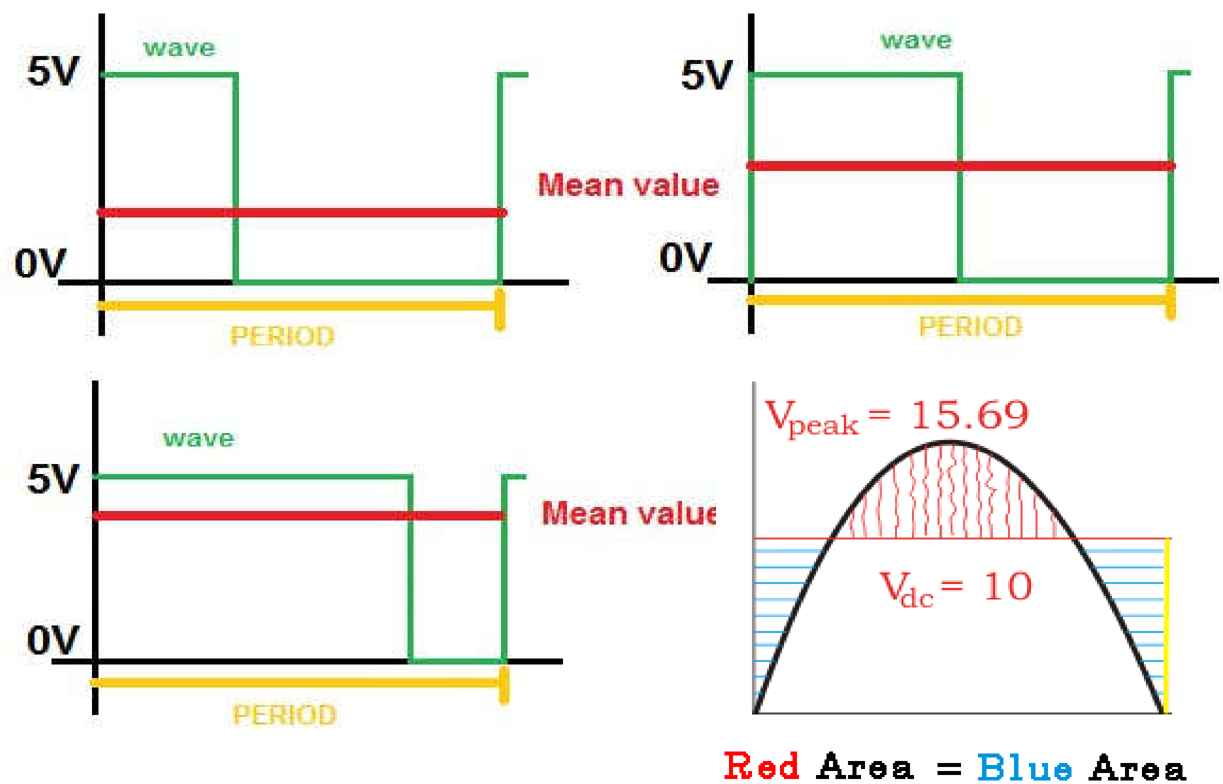


Giá trị trung bình

- Ký hiệu: <v(t)>, $\bar{v}$, m_v, v_{DC}, E{v(t)}, …
- Tín hiệu không tuần hoàn
  - Thời gian vô hạn $$\langle v(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)dt$$
  - Thời gian hữu hạn $$\frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)dt$$
- Tín hiệu tuần hoàn $$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)dt$$

Ý nghĩa của giá trị trung bình

- Còn gọi là giá trị kì vọng hay mức DC: giá trị trung tâm của tín hiệu.



Công suất và Năng lượng

thực dương

- Công suất tức thời: $p(t) = |x(t)|^2$
- Công suất đỉnh: $P_{peak} = \max\{p(t)\}$
- Công suất tổng (năng lượng): $E = \int_{\infty} \{p(t)\}$
  - Tín hiệu hữu hạn trong khoảng thời gian τ
    - Năng lượng: $E = E_\tau = \int_\tau \{p(t)\}$
    - Năng lượng trung bình: $E_\tau^{average} = E_\tau / \tau$
  - **Tín hiệu tuần hoàn chu kì T** → $E = \infty$
    - Năng lượng 1 chu kì: $E_T = \int_T \{p(t)\}$
    - **Công suất (trung bình)**: $P = P_{average} = E_T / T$
    - Giá trị hiệu dụng: $x_{rms} = P^{1/2}$

Tín hiệu năng lượng/công suất

- Đo "sức khỏe" của tín hiệu
  - Độ lớn của giá trị
  - Thời gian tồn tại của giá trị
- Năng lượng $E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

  ➢ Tín hiệu năng lượng: $0 < E_x < \infty$
- Công suất $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$

  ➢ Tín hiệu công suất: $0 < P_x < \infty$

Ví dụ tính năng lượng

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{T_p}} & 0 \le t \le T_p \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad E_x = 1$$

$$x(t) = 2W \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t} = 2W \operatorname{sinc}(2Wt) \qquad E_x = 2W$$

Ví dụ tính công suất

- Tín hiệu cosine (AC)

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t)$$

$$P_x = \lim_{T_m \to \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} \cos^2(2\pi f_c t) dt$$

$$= \lim_{T_m \to \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t) \right) dt = \frac{1}{2}$$

➢ Tính lại công suất theo công thức $\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$

Ví dụ tính công suất

- Tín hiệu dùng trong hệ thống radar hoặc sonar đơn giản có dạng sóng:

$$P_x = \lim_{T_m \to \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} dt = \frac{\tau}{T}$$

Bạn có biết?

1) Tín hiệu công suất có năng lượng thế nào?
2) Tín hiệu năng lượng có công suất thế nào?
3) Tín hiệu không tuần hoàn là tín hiệu năng lượng hay công suất?
   a) Thời gian hữu hạn
   b) Thời gian vô hạn
4) Tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu năng lượng hay công suất?
5) Có tồn tại tín hiệu không phải là tín hiệu năng lượng cũng không phải là tín hiệu công suất ($E_x = \infty$, $P_x = \infty$) hay không? Cho ví dụ minh họa?

Lưu ý với tín hiệu tuần hoàn

- Có vô số chu kì lặp lại.
- Chu kì tuần hoàn là chu kì lặp lại nhỏ nhất.
- Chu kì lặp lại luôn bằng bội số nguyên lần chu kì tuần hoàn.
- Công thức tích phân tính giá trị trung bình hoặc công suất trung bình có thể thực hiện với chu kì lặp lại bất kì.

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,dt$$

Ví dụ 2

Tính giá trị trung bình và năng lượng/công suất:

1) 1@
2) 1@.cos(10πt)
3) 1@.cos(10πt) – 1@
4) 1@.$\cos^2$(10πt)
5) 1@.$\cos^3$(10πt)
6) 1@.cos(10πt) – 1@.sin(10πt)
7) 2@.cos(10πt) + 1@.sin(10πt)
8) 1@.cos(10πt) + 2@.sin(20πt)
9) 1@.cos(15πt) + 2@.sin(20πt)
10) 1@.cos(15t) + 2@.sin(20πt)
11) u(t) – u(t – 1@)
12) sign(t).{u(t + 1@) – u(t – 1@)}

Tính công suất ở miền thời gian?

- A
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm B$
- $A.\cos^2(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi F_1t+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi F_2t+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm A.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm A.\sin(2\pi Ft+\phi)$

Vấn đề 1

- Cho tín hiệu $x(t) = A_0$

1) Vẽ dạng sóng.
2) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
3) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
4) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?

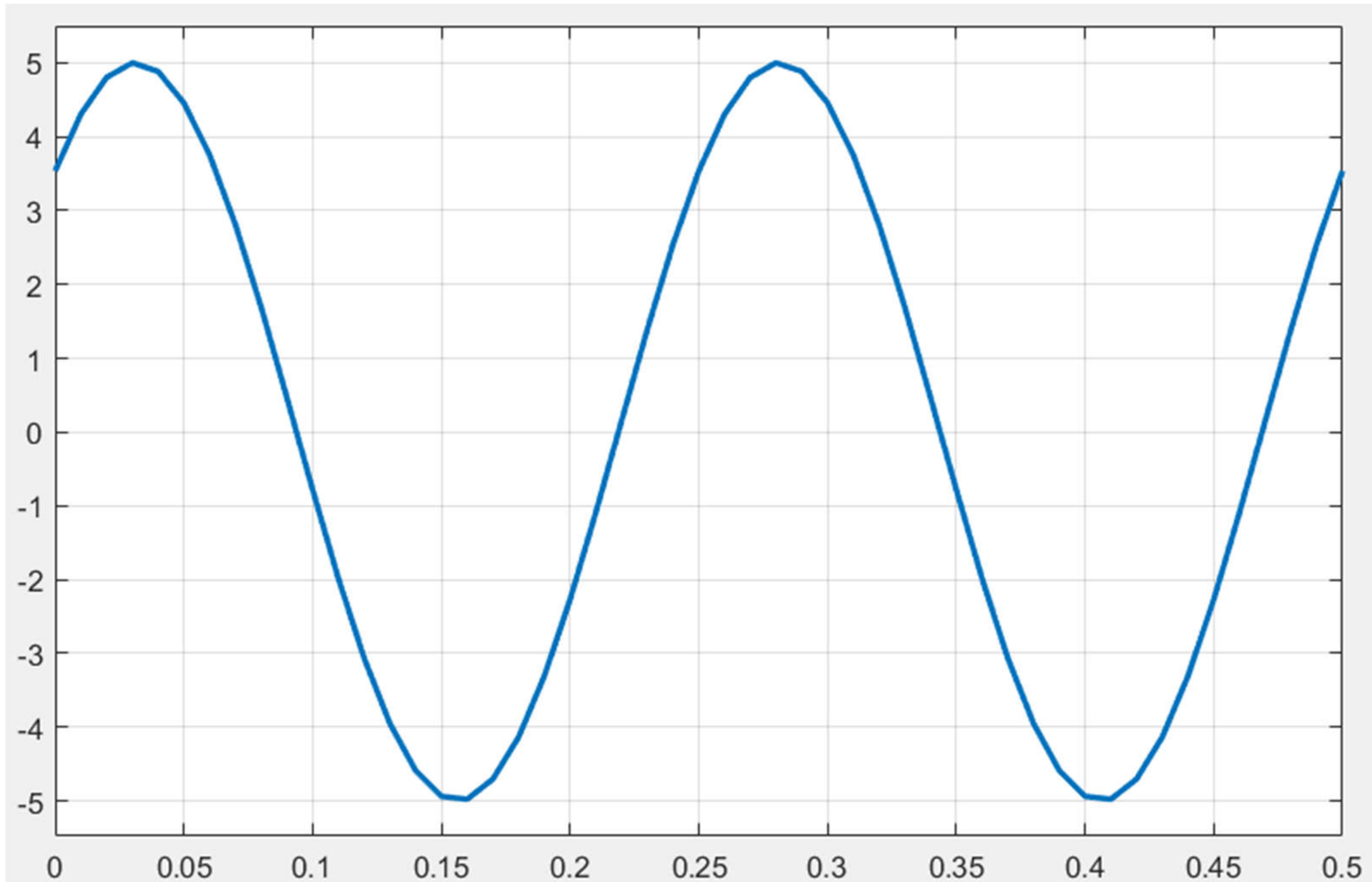
Vấn đề 2

- Cho tín hiệu $x(t) = A_1.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1)$

1) Vẽ dạng sóng.
2) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
3) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
4) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?

Ví dụ 10

1) Viết biểu thức tổng quát?
2) Xác định các thông số (biên độ, tần số, pha)?



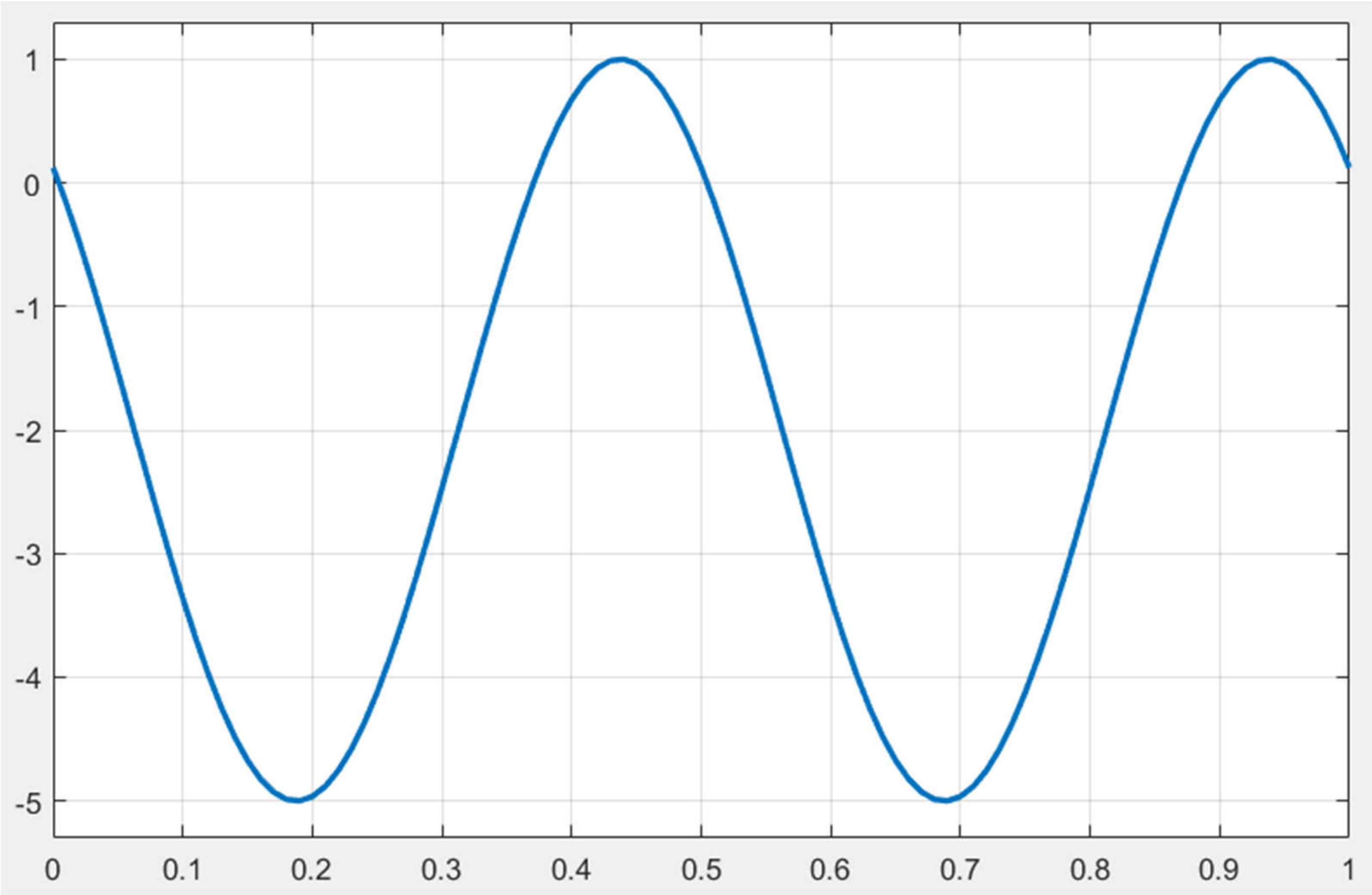
Vấn đề 3

- Cho tín hiệu $x(t) = A_0 + A_1.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1)$

1) Vẽ dạng sóng.
2) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
3) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
4) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?

Ví dụ 11

1) Viết biểu thức tổng quát?
2) Xác định các thông số (biên độ, tần số, pha, DC)?



Vấn đề 4

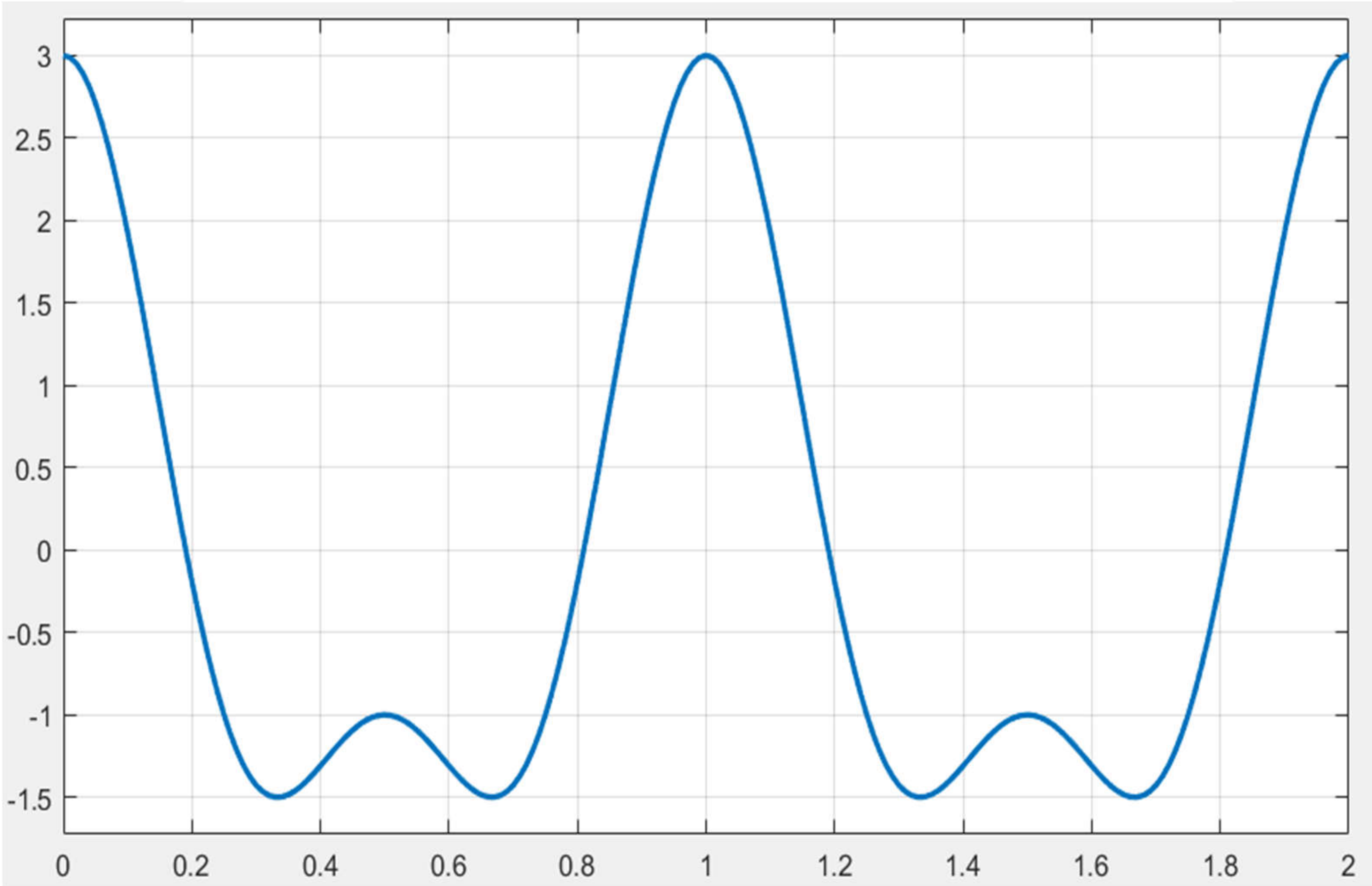
- Cho tín hiệu $x(t) = A_0 + A_1.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1) + A_2.\cos(2\pi F_2 t+\phi_2)$

1) Vẽ dạng sóng.
2) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
3) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
4) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?
5) Giả sử biết trước biểu thức tổng quát, có thể dễ dàng xác định các thông số của biểu thức hay không?

Ví dụ 12

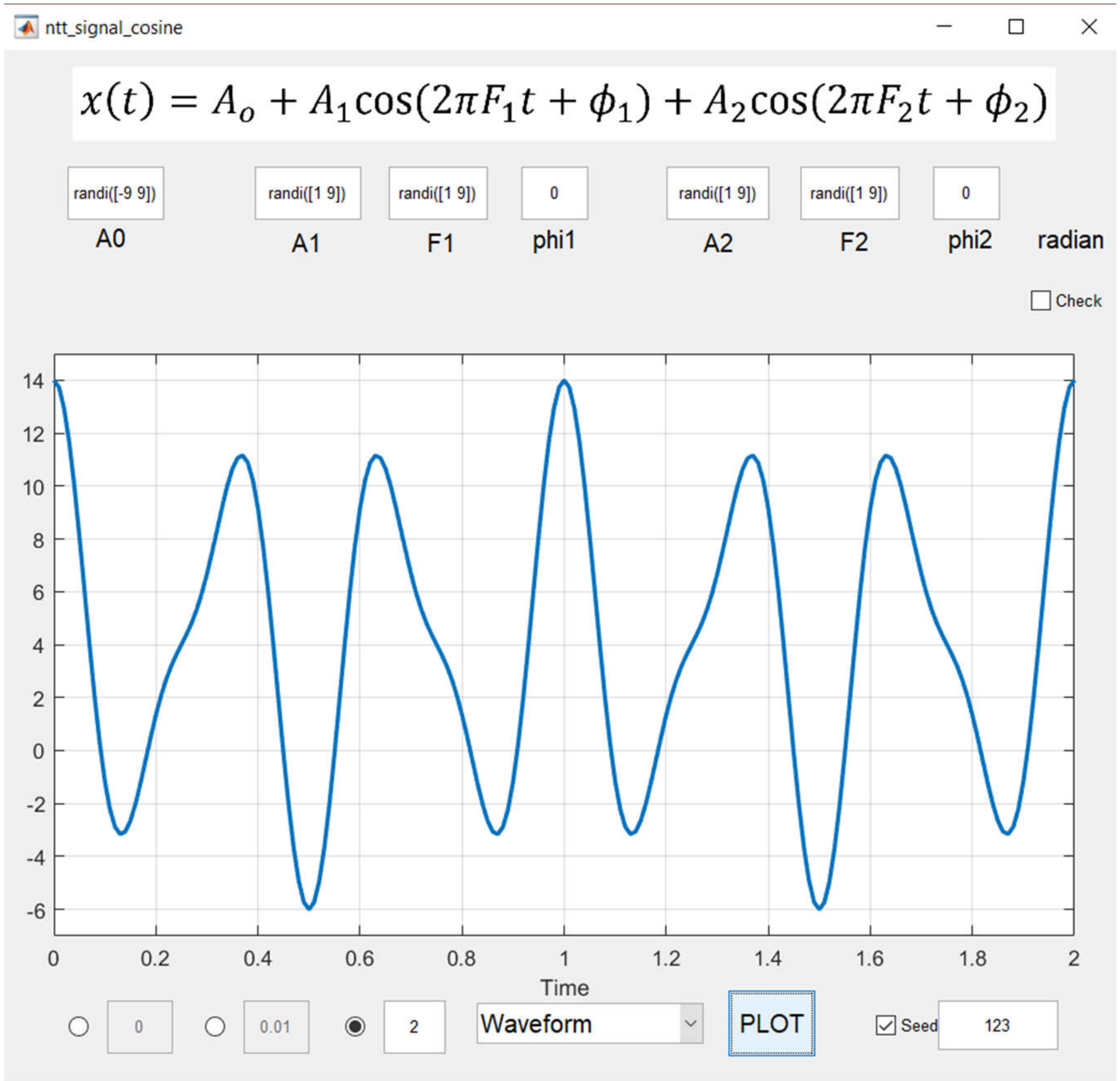
1) Có thể xác định biểu thức tổng quát?
2) Giả sử cho trước biểu thức tổng quát như hình, xác định các thông số?

$$A_1\cos(2\pi F_1 t + \phi_1) + A_2\cos(2\pi F_2 t + \phi_2)$$



Ví dụ 13

- Cho trước biểu thức tổng quát, xác định các thông số A_0 (là số nguyên từ -9 đến 9), và A_1, A_2, F_1, F_2 (là số nguyên từ 1 đến 9)



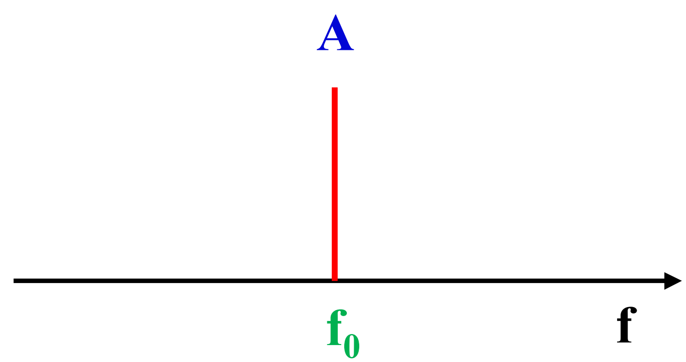
Phổ vạch 2 phía (phổ phức)

- Phổ vạch 2 phía chứa thông tin tần số thực (có thể âm/dương) và giá trị của **tín hiệu phức** x(t).

$$x(t) = A.\exp(j.\omega_0 t) = A.\exp(j.2\pi f_0 t)$$

  – **Phổ biên độ: |A|**

  – **Phổ pha: argA**

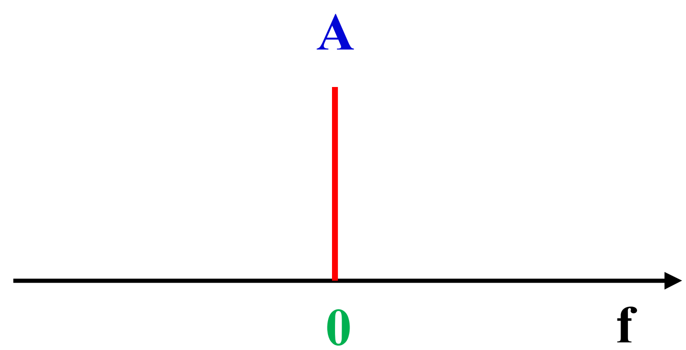


- Tuyến tính (xếp chồng)

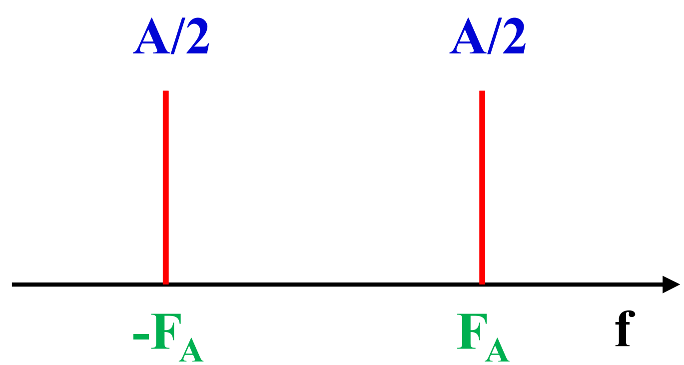
$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

Ví dụ phổ (phức)

- $x_1(t) = A = A\exp(j2\pi.0.t)$

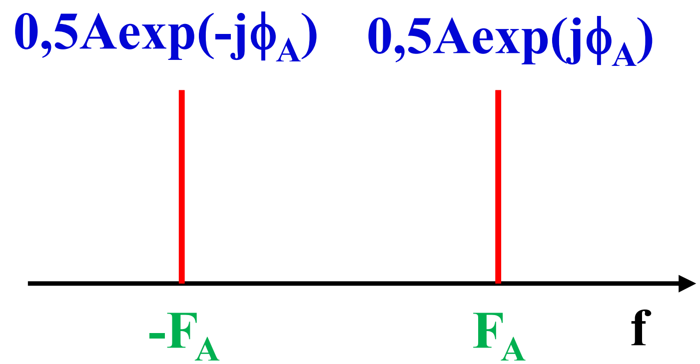


- $x_2(t) = A\cos(2\pi.F_A.t) = 0{,}5A\exp(j2\pi.F_A.t) + 0{,}5A\exp(-j2\pi.F_A.t)$

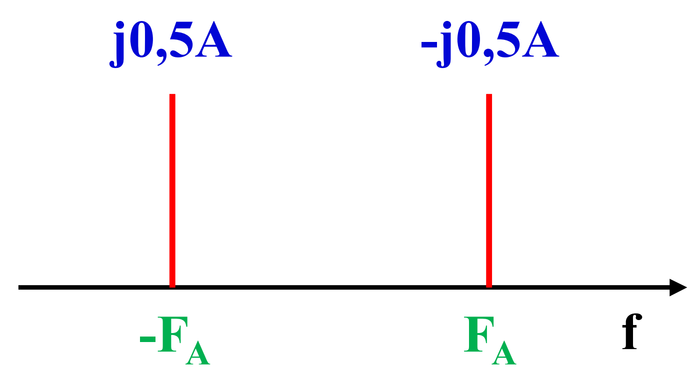


Ví dụ phổ (phức)

- $x_3(t) = A\cos(2\pi.F_A.t + \phi_A) =$
  $0{,}5A\exp(j\phi_A)\exp(j2\pi.F_A.t) +$
  $0{,}5A\exp(-j\phi_A)\exp(-j2\pi.F_A.t)$



- $x_4(t) = A\sin(2\pi.F_A.t) =$
  $A\cos(2\pi.F_A.t - \pi/2) =$
  $-j0{,}5A\exp(j2\pi.F_A.t) +$
  $j0{,}5A\exp(-j2\pi.F_A.t)$



Ghi nhớ

- Với tín hiệu thực thì
  – Phổ (phức) đối xứng Hermitian (liên hiệp phức)
  – Phổ biên độ đối xứng chẵn
  – Phổ pha đối xứng lẻ

Bạn có biết?

- Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha của các tín hiệu sau:

1) $x(t) = -3$
2) $x(t) = 5$
3) $x(t) = 4\cos(10\pi t)$
4) $x(t) = -4\cos(10\pi t)$
5) $x(t) = 4\sin(10\pi t)$
6) $x(t) = -4\sin(10\pi t)$
7) $x(t) = 4\cos(10\pi t + 30^o)$
8) $x(t) = 4\sin(10\pi t + 30^o)$
9) $x(t) = 3 + 4\cos(10\pi t)$
10) $x(t) = 2\sin(20\pi t) + 4\cos(10\pi t)$

Bạn có biết?

- Viết biểu thức của tín hiệu khi biết

1) Phổ (phức)
2) Phổ biên độ và phổ pha
3) Phổ biên độ

Bạn có biết?

- Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha của các tín hiệu sau:

1) $x(t) = (-3) + 5$
2) $x(t) = 3 + (-5)$
3) $x(t) = 3\cos(10\pi t) + 4\sin(10\pi t)$
4) $x(t) = 3\sin(10\pi t) + 4\cos(10\pi t)$
5) $x(t) = 3\cos(10\pi t) - 4\sin(10\pi t)$
6) $x(t) = 3\sin(10\pi t) - 4\cos(10\pi t)$
7) $x(t) = 3\cos(10\pi t + 30^o) + 4\sin(10\pi t + 30^o)$
8) $x(t) = 3\cos(10\pi t + 30^o) - 4\sin(10\pi t + 30^o)$
9) $x(t) = 3\cos(10\pi t + 30^o) + 4\sin(10\pi t - 30^o)$
10) $x(t) = 3\cos(10\pi t + 30^o) - 4\sin(10\pi t - 30^o)$

Vấn đề 1 (phổ)

- Cho tín hiệu $x(t) = A_0$

1) Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha (2 phía).
2) Từ phổ có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
3) Từ phổ có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
4) Từ phổ có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?

Vấn đề 2 (phổ)

- Cho tín hiệu $x(t) = A_1.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1)$

1) Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha (2 phía).
2) Từ phổ có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
3) Từ phổ có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
4) Từ phổ có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?

Vấn đề 3 (phổ)

- Cho tín hiệu $x(t) = A_0 + A_1.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1)$

1) Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha (2 phía).
2) Từ phổ có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
3) Từ phổ có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
4) Từ phổ có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?

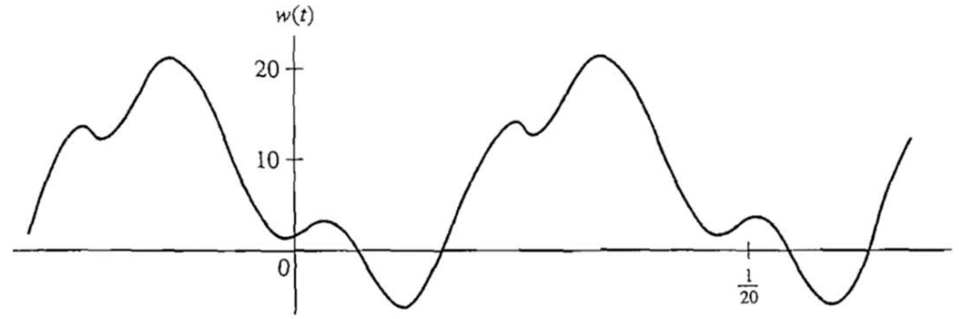
Vấn đề 4 (phổ)

- Cho tín hiệu $x(t) = A_0 + A_1.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1) + A_2.\cos(2\pi F_2 t+\phi_2)$

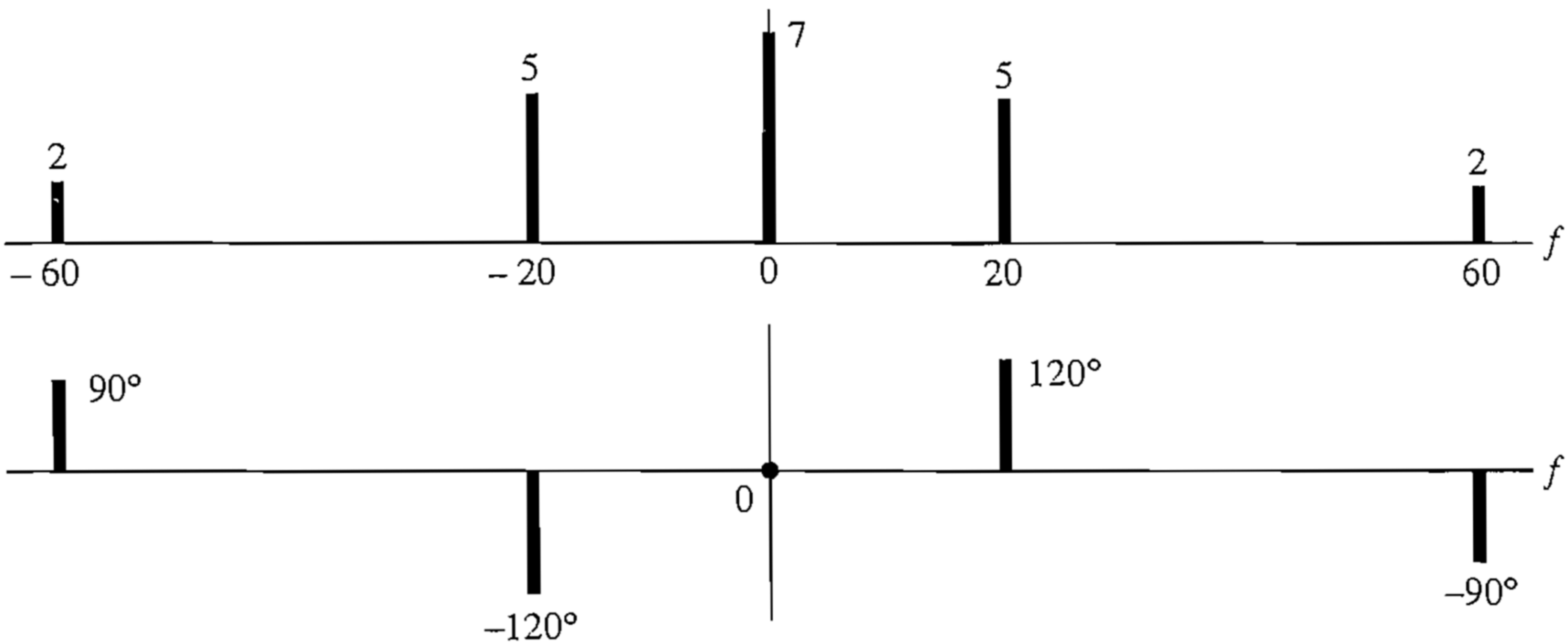
1) Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha (2 phía).
2) Từ phổ có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
3) Từ phổ có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
4) Từ phổ có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?

Ví dụ phổ vạch 2 phía

$$w(t) = 7 - 10\cos(40\pi t - 60°) + 4\sin 120\pi t$$



$$w(t) = 7\cos 2\pi 0 t + 10\cos(2\pi 20 t + 120°) + 4\cos(2\pi 60 t - 90°)$$



Vẽ phổ 2 phía?
(phổ biên độ và phổ pha)

- A
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm B$
- $A.\cos^2(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi F_1t+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi F_2t+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm A.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm A.\sin(2\pi Ft+\phi)$

Đặc trưng tín hiệu miền tần số

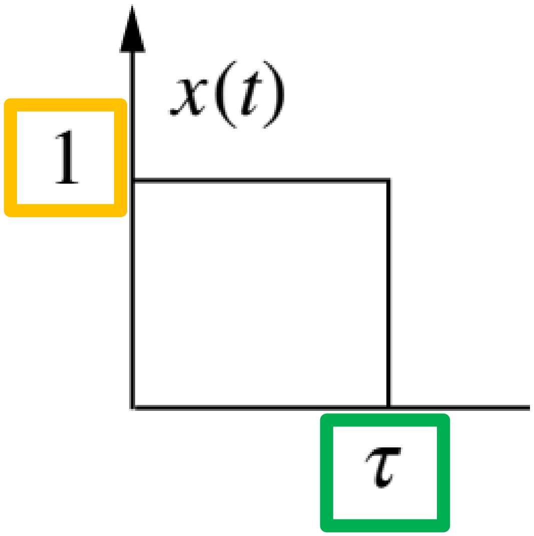
1. **Phổ:**
   - **Tần số (f)** và **tần số góc (ω=2πf)**
   - **Phổ 2 phía (-∞ ∞)**
   - **Khai triển Fourier và biến đổi Fourier**
   - **Phổ biên độ** và **phổ pha**
   - **Mật độ phổ năng lượng/công suất: bình phương phổ biên độ**
2. **Băng thông**
   - **Hữu hạn / vô hạn**
   - **Băng gốc (dải nền) / băng dải (dải thông)**
   - **Tần số DC (bằng 0)** / **AC (khác 0)**
3. **Giá trị trung bình (DC): ứng với tần số DC**
4. **Năng lượng/công suất: tổng mật độ phổ năng lượng/công suất**

2.2 Khai triển Fourier

- Dùng cho tín hiệu tuần hoàn
- Có nhiều dạng thực hiện
  - Dạng lượng giác
  - Dạng hàm mũ

$f(t)$, period $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$	Form	Coefficients
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_o t}$	Exponential	$F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_o t}dt$
$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)$	Trigonometric	$a_n = F_n + F_{-n}$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$
$\frac{c_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_o t + \theta_n)$	Compact for real $f(t)$	$c_n = 2\lvert F_n \rvert$ $\theta_n = \angle F_n$

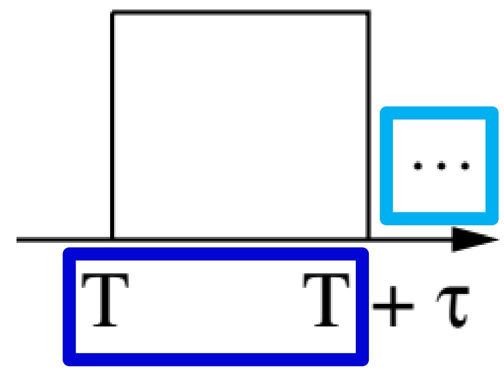
Chuỗi xung chữ nhật



$$x_n = \frac{1}{T}\int_0^{\tau} \exp\left(-j\,\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

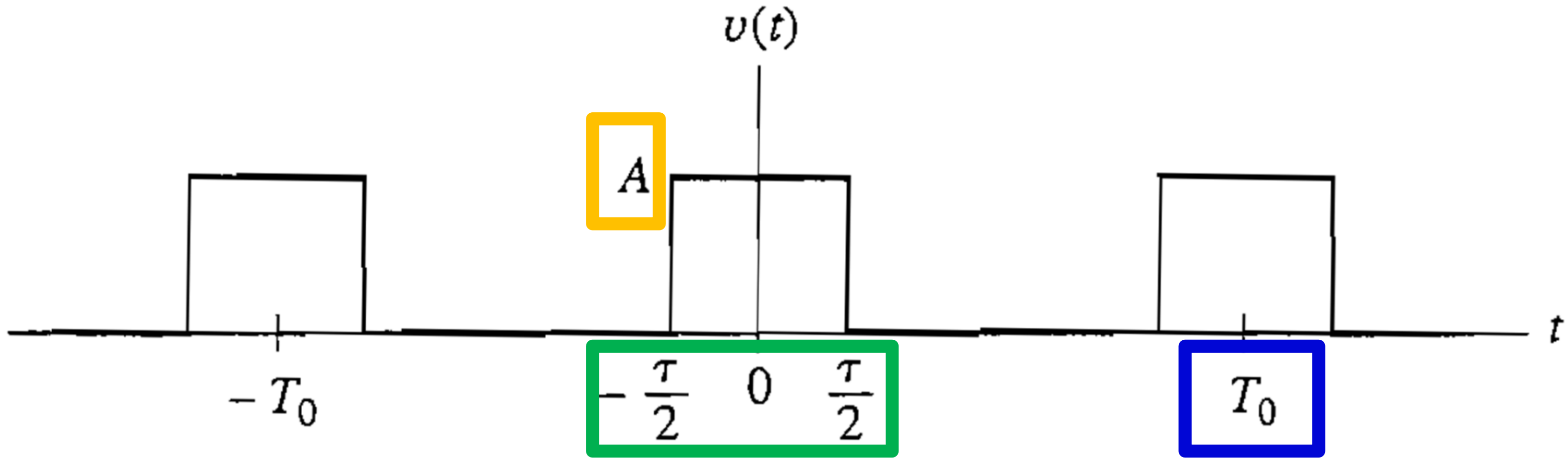
$$= \frac{1}{T}\,\frac{\exp(\frac{-j2\pi n t}{T})}{\frac{-j2\pi n}{T}}\Bigg|_0^{\tau}$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{1-\exp(\frac{-j2\pi n\tau}{T})}{\frac{j2\pi n}{T}}$$



$$x_n = \frac{\tau}{T}\exp\left[-j\,\frac{\pi n\tau}{T}\right]\frac{\sin(\frac{\pi n\tau}{T})}{\frac{\pi n\tau}{T}} = \boxed{\frac{\tau}{T}}\exp\left[-j\,\frac{\pi n\tau}{T}\right]\operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T}\right)$$

Chuỗi xung chữ nhật (2)



$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi n f_0 t}dt$$

$$= \frac{A}{-j2\pi n f_0 T_0}\left(e^{-j\pi n f_0 \tau} - e^{j\pi n f_0 \tau}\right) = \frac{A}{T_0}\frac{\sin \pi n f_0 \tau}{\pi n f_0} = \boxed{\frac{A\tau}{T_0}}\operatorname{sinc} n f_0 \tau$$

Tính chất khai triển Fourier

Condition:	Property:
Constant K	$K\,f(t) \leftrightarrow K\,F_n$
$f(t) \leftrightarrow F_n,\ g(t) \leftrightarrow G_n,\ \ldots$	$f(t)+g(t)+\ldots \leftrightarrow F_n+G_n+\ldots$
Delay t_o	$f\left(t-t_o\right) \leftrightarrow F_n e^{-jn\omega_o t_o}$
Continuous $f(t)$	$\frac{df}{dt} \leftrightarrow jn\omega_o F_n$
Real $f(t)$	$F_{-n} = F_n^*$
$f(-t) = f(t)$	$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\omega_o t\right)$
$f(-t) = -f(t)$	$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\omega_o t\right)$
	$P \equiv \frac{1}{T}\int_T \lvert f(t)\rvert^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert F_n\rvert^2$

Tín hiệu tuần hoàn chu kì tuần hoàn T_o

Phổ vạch tần số $w_n = nw_o = 2\pi n/T_o$

Tính công suất ở miền tần số?

- A
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm B$
- $A.\cos^2(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi F_1t+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi F_2t+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm A.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm A.\sin(2\pi Ft+\phi)$

2.3 Biến đổi Fourier

- Dùng cho tín hiệu không tuần hoàn

$$V(f) = \mathrm{F}\left[v(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$v(t) = \mathrm{F}^{-1}\left[V(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)e^{j2\pi ft}df$$

- Nếu v(t) giá trị thực thì $V(-f) = V^*(f)$

$$|V(-f)| = |V(f)| \qquad \arg V(-f) = -\arg V(f)$$

Ví dụ biến đổi Fourier

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T_p \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$E_x = \int_0^{T_p} |x(t)|^2 dt = T_p$$

$$X(f) = \int_0^{T_p} e^{-j2\pi f t} dt = \left. \frac{\exp[-j2\pi f t]}{-j2\pi f} \right|_0^{T_p} = T_p \exp[j\pi f T_p] \operatorname{sinc}(f T_p)$$

$$x(t) = 2W \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t} = \boxed{2W} \operatorname{sinc}(\boxed{2W} t)$$

$$X(f) = \begin{cases} 1 & |f| \le W \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$E_x = \int_{-W}^{W} |X(f)|^2 df = \boxed{2W}$$

Xung chữ nhật

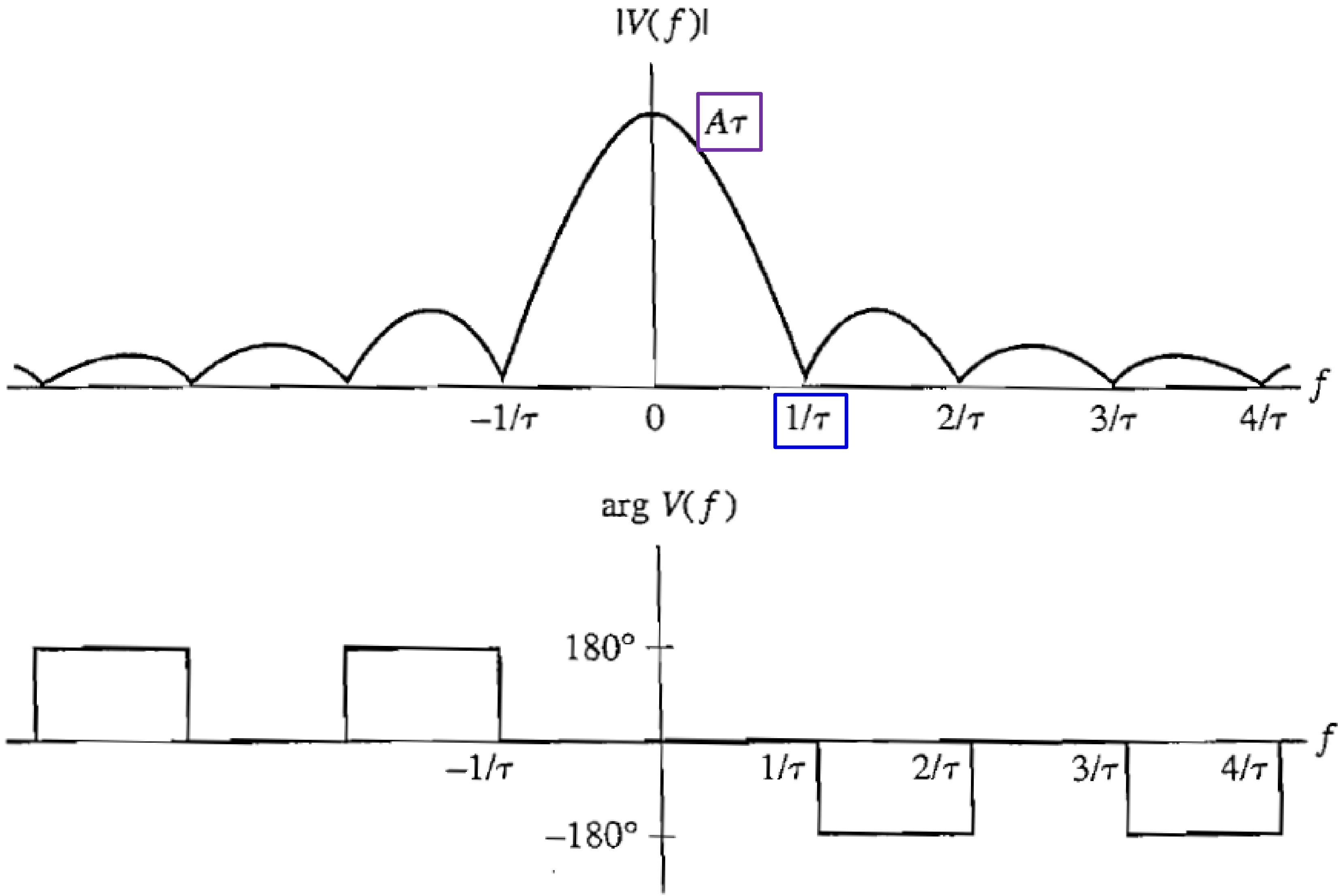
- $v(t) = A\,\Pi(t/\tau)$. $\qquad \Pi(t/\tau) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$

$$V(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi f t}\,dt = \frac{A\tau}{\pi f \tau}\sin \pi f \tau = \boxed{A\tau}\operatorname{sinc} f\tau$$

- Năng lượng $E = A^2\tau$
- Năng lượng tập trung trong dải tần $|f| < 1/\tau$

$$\int_{-1/\tau}^{1/\tau} |V(f)|^2\,df = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} (A\tau)^2 \operatorname{sinc}^2 f\tau\, df = 0.9A^2\tau$$

Xung chữ nhật (2)



Vấn đề 5

- Xác định chu kì tuần hoàn và vẽ phổ của các tín hiệu sau

1) $x_1(t) = A_1\cos(2\pi F_1 t)$
2) $x_2(t) = A_2\cos(2F_2 t)$
3) $x_3(t) = A_1\cos(2\pi F_1 t) + A_2\cos(2F_2 t)$

Biến đổi Fourier tổng quát

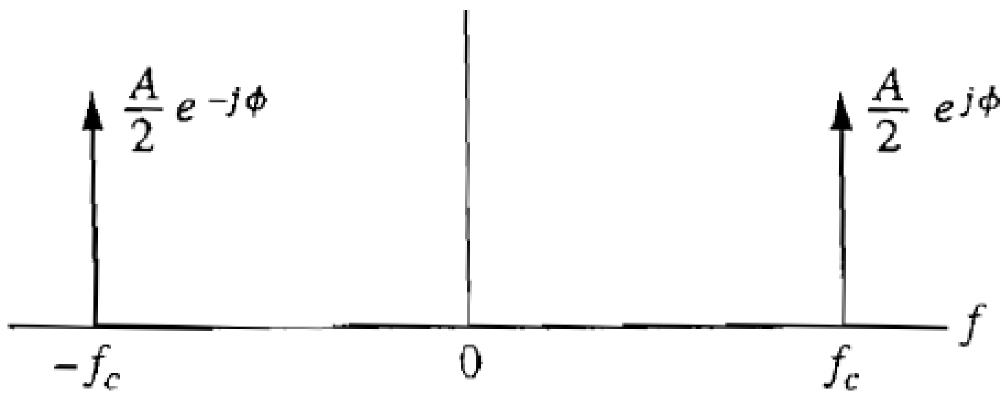
- Tín hiệu không tuần hoàn: biến đổi Fourier (phổ liên tục)
- Tín hiệu tuần hoàn: khai triển Fourier (phổ vạch rời rạc)
- Biến đổi Fourier tổng quát: thay thế phổ vạch bằng hàm Dirac delta (liên tục)

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_0)$$

Biến đổi Fourier tổng quát (2)

$$\delta(f - f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi f_1 t]\exp[-j2\pi f t]dt$$

$$A\cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{Ae^{j\phi}}{2}\delta(f - f_c) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}\delta(f + f_c)$$



$$A \leftrightarrow A\delta(f) \qquad\qquad A\delta(t) \leftrightarrow A$$

$$Ae^{j\omega_c t} \leftrightarrow A\delta(f - f_c) \qquad\qquad A\delta(t - t_d) \leftrightarrow Ae^{-j\omega t_d}$$

Tần số f (Hz) và tần số góc w (rad/s)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- Một số định nghĩa biến đổi Fourier dựa trên tần số f (Hz) hoặc w (rad/s) và có thể khác nhau hệ số tỉ lệ! Do đó cần lưu ý khi xác định biên độ hoặc công suất/năng lượng.

Cặp biến đổi Fourier

Time Function, $x(t)$	Transform, $X(f)$	Transform, $X(\omega)$
$x(t) = \begin{cases} 1 & -T_p/2 \le t \le T_p/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$	$T_p \frac{\sin(\pi f T_p)}{\pi f T_p}$	$T \frac{\sin(\omega T_p/2)}{\omega T_p/2}$
$x(t) = \begin{cases} \exp(-at) & 0 \le t \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$	$\frac{1}{j2\pi f + a}$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$x(t) = A$	$A\delta(f)$	$2\pi A\delta(\omega)$
$x(t) = Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j2\pi f_0 t}$	$A\delta(f - f_0)$	$2\pi A\delta(\omega - \omega_0)$

$$x(t) = 2W \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t} = 2W \operatorname{sinc}(2Wt)$$

$$X(f) = \begin{cases} 1 & |f| \le W \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad E_x = \int_{-W}^{W} |X(f)|^2 df = 2W$$

Tính chất biến đổi Fourier

Operation	Time Function, $x(t)$	Transform, $X(f)$	Transform, $X(\omega)$
Reversal	$x(-t)$	$X(-f)$	$X(-\omega)$
Symmetry	$X(t)$	$x(-f)$	$2\pi x(-\omega)$
Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time Delay	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Time Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$	$(j\omega)^n X(\omega)$
Energy Power	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt$	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \|X(f)\|^2 df$	$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|X(\omega)\|^2 d\omega$
Frequency Translation	$x(t)e^{j2\pi f_c t} = x(t)e^{j\omega_c t}$	$X(f-f_c)$	$X(\omega-\omega_c)$
Convolution	$x(t)*h(t)$	$X(f)H(f)$	$X(\omega)H(\omega)$
Multiplication	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$

- Tín hiệu tuần hoàn → công suất → biến đổi Fourier tổng quát

Ví dụ 3

Vẽ phổ biên độ và phổ pha, từ đó tính giá trị trung bình và năng lượng/công suất:

1) 1@
2) 1@.cos(10πt)
3) 1@.cos(10πt) – 1@
4) 1@.cos²(10πt)
5) 1@.cos³(10πt)
6) 1@.cos(10πt) – 1@.sin(10πt)
7) 2@.cos(10πt) + 1@.sin(10πt)
8) 1@.cos(10πt) + 2@.sin(20πt)
9) 1@.cos(15πt) + 2@.sin(20πt)
10) 1@.cos(15t) + 2@.sin(20πt)
11) u(t) – u(t – 1@)
12) sign(t).{u(t + 1@) – u(t – 1@)}

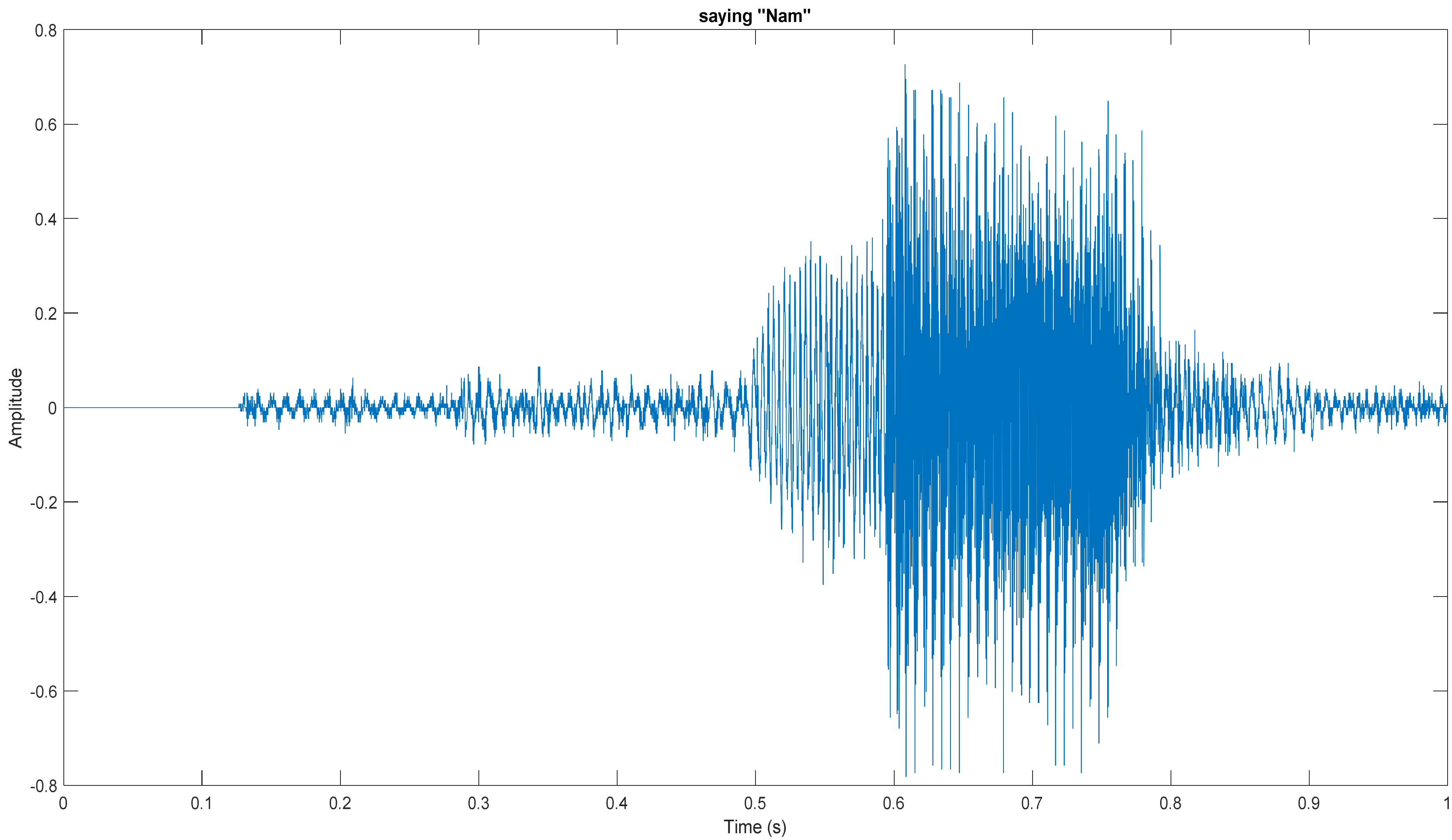
Tín hiệu âm thanh (dùng Matlab)

- recObj = audiorecorder % help for more information
- recordblocking(recObj, 1); % speak into microphone in 1 second
- play(recObj);
- y = getaudiodata(recObj);
- plot(y)
- save voice_Nam.mat recObj y % then load
- audiowrite('voice_Nam.wav',y, recObj. SampleRate) % then audio read

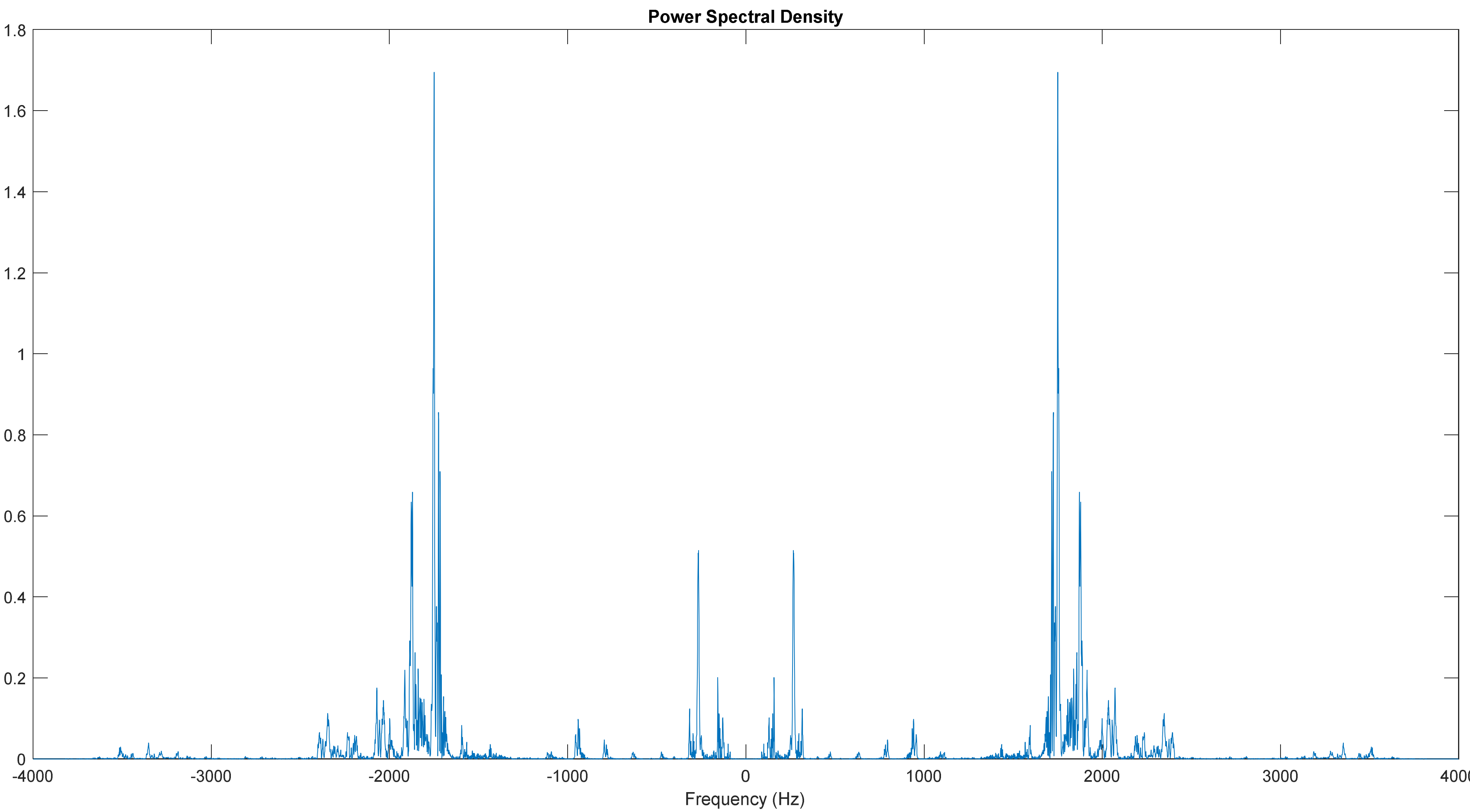
Tín hiệu âm thanh (dùng Matlab)

- Fs=recObj.SampleRate
- Ts=1/Fs;
- t=0:Ts:length(y)-1;
- Y=fftshift(fft(y))/sqrt(L);
- N=length(Y);
- Ymag=abs(Y);
- Ypow=Ymag.^2;
- YpowdB=10*log10(Ypow);
- fshift = (-N/2:N/2-1)*(Fs/N);

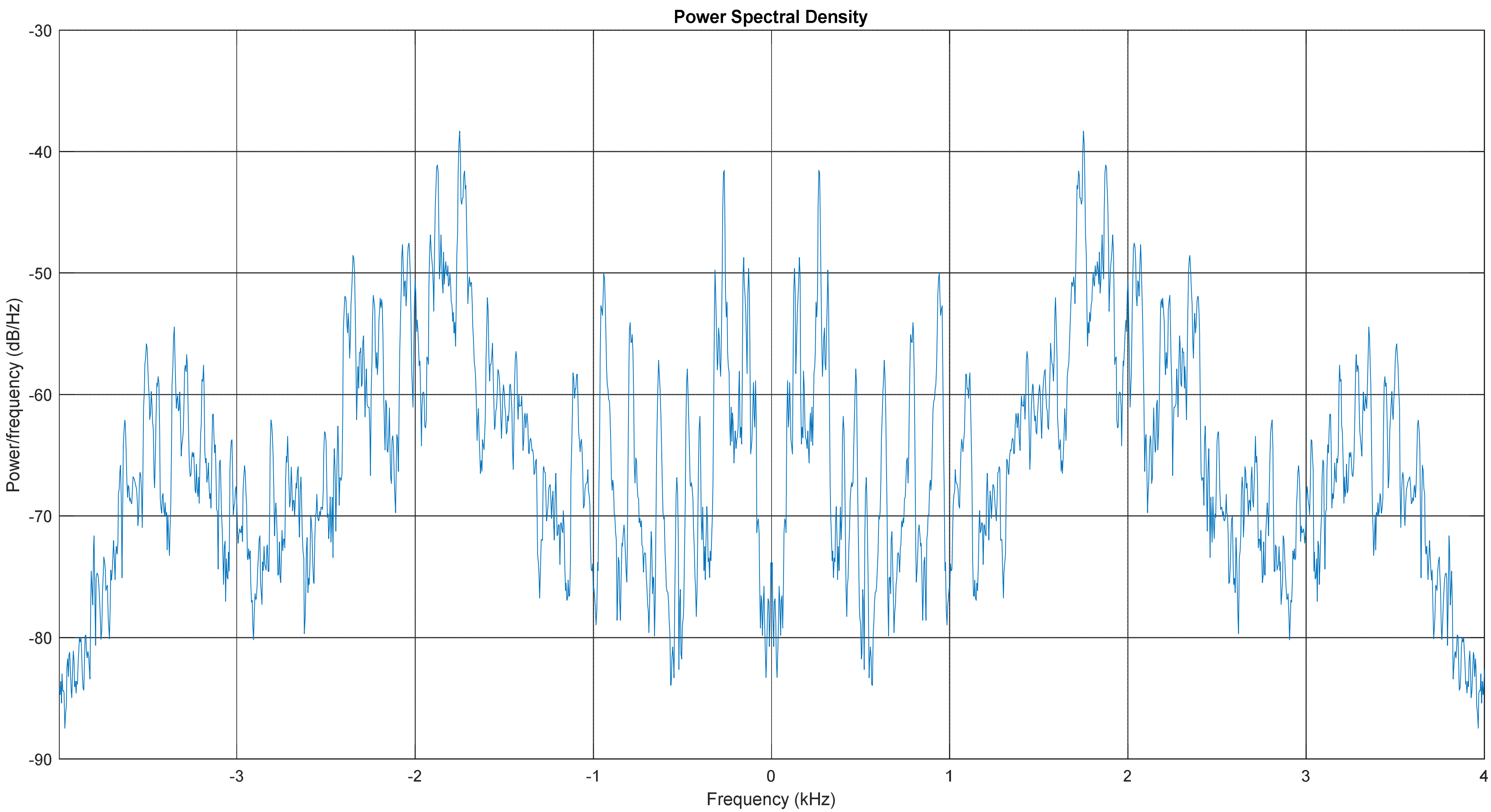
Ví dụ tín hiệu âm thanh (miền thời gian)



Ví dụ tín hiệu âm thanh (miền tần số)



Ví dụ tín hiệu âm thanh (miền tần số)



Băng thông

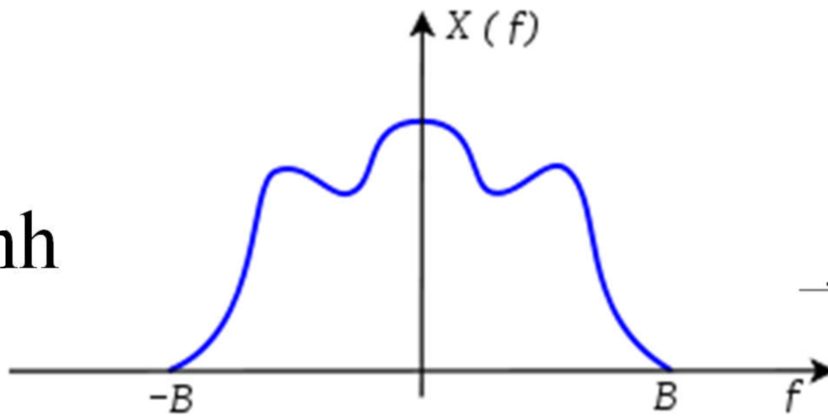
- Trong trường hợp tín hiệu thực, do phổ đối xứng nên chỉ đề cập tần số dương.
- Băng thông (tần số dương) là phạm vi từ tần số nhỏ nhất đến tần số lớn nhất mà phổ có giá trị khác 0, <u>có giá trị độ lớn được tính toán bằng hiệu số</u>.
- Băng gốc và băng dải
- Băng thông hữu hạn và vô hạn
  - Băng thông tuyệt đối
  - Băng thông null-to-null (qua điểm 0)
  - Băng thông -3dB (nửa công suất)
- Băng thông 2 phía (tính cả tần số âm) luôn bằng 2 lần băng thông 1 phía (chỉ tần số dương)

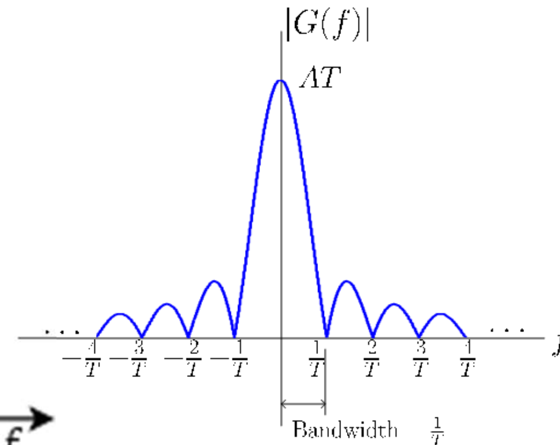
Một số quy ước băng thông

- Nếu phổ tín hiệu (phía dương) chỉ có 1 vạch tần số W
  - Fmax = W
  - Fmin = 0
  - Băng thông 1 phía $BW_1=[0 \div W] = W$
  - Băng thông 2 phía $BW_2=[-W \div W] = 2W$
- Nếu phổ tín hiệu (phía dương) có nhiều hơn 1 vạch tần số
  - Băng thông 1 phía $BW_1=[Fmin \div Fmax] = Fmax – Fmin$
  - Băng thông 2 phía $BW_2=[-Fmax \div -Fmin]$ và $[Fmin \div Fmax] = 2(Fmax – Fmin)$

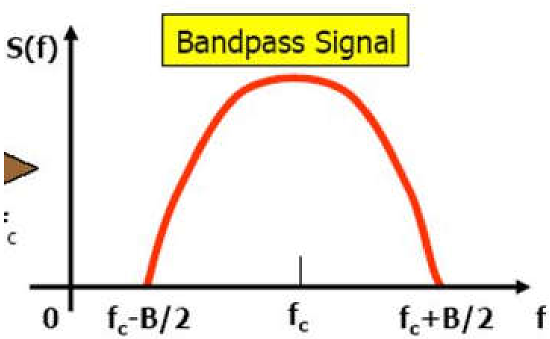
Băng thông tín hiệu

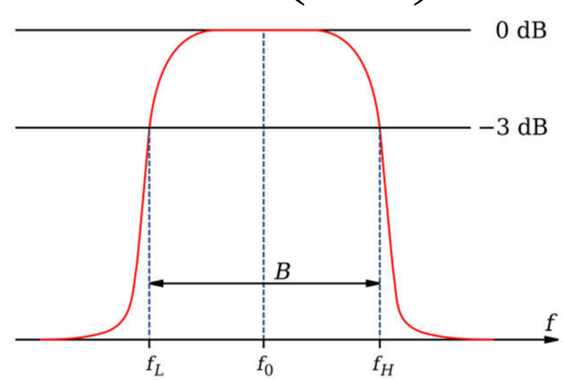
- Tín hiệu băng gốc (baseband): Fmin = 0 (≈)
  - Thoại
  - Âm thanh
  - Truyền hình
  - Y sinh





- Tín hiệu băng dải (bandpass): Fmin ≠ 0 (>>)

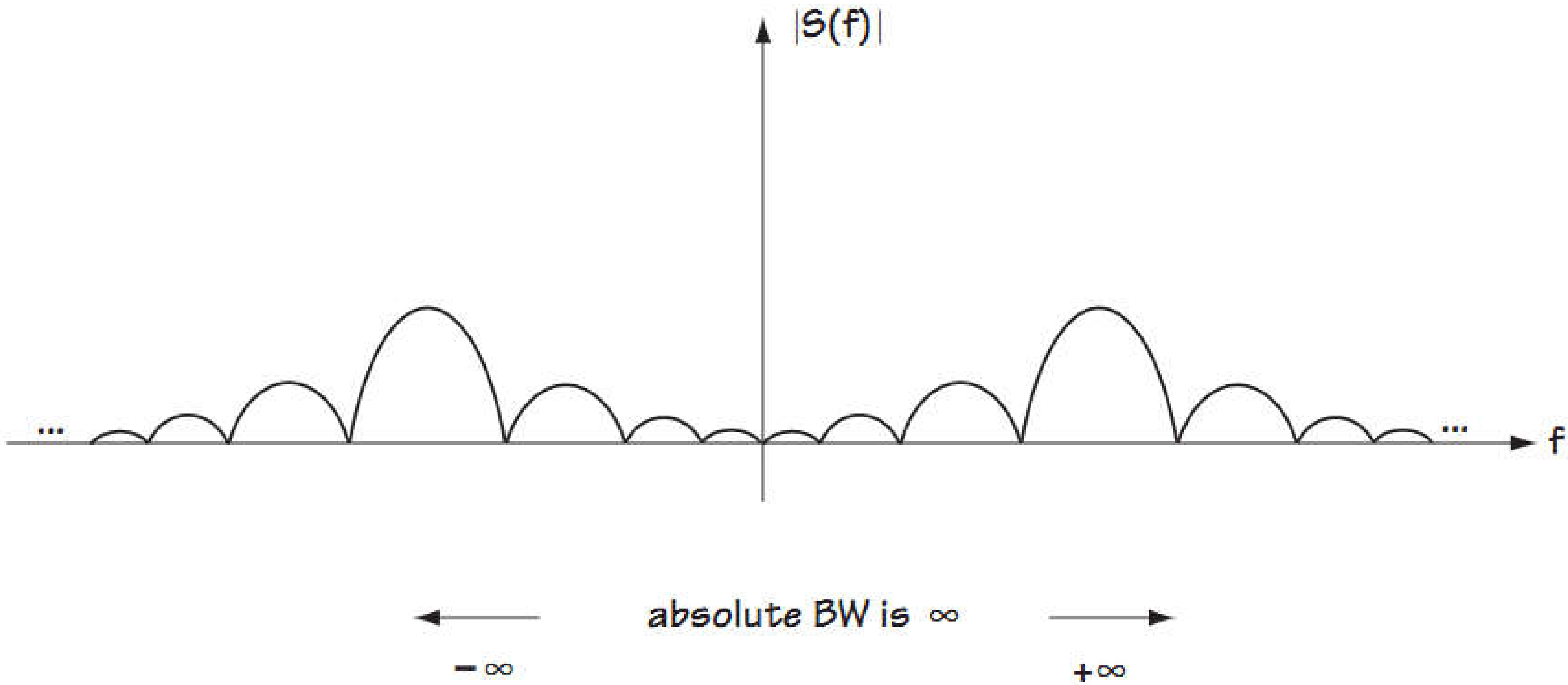




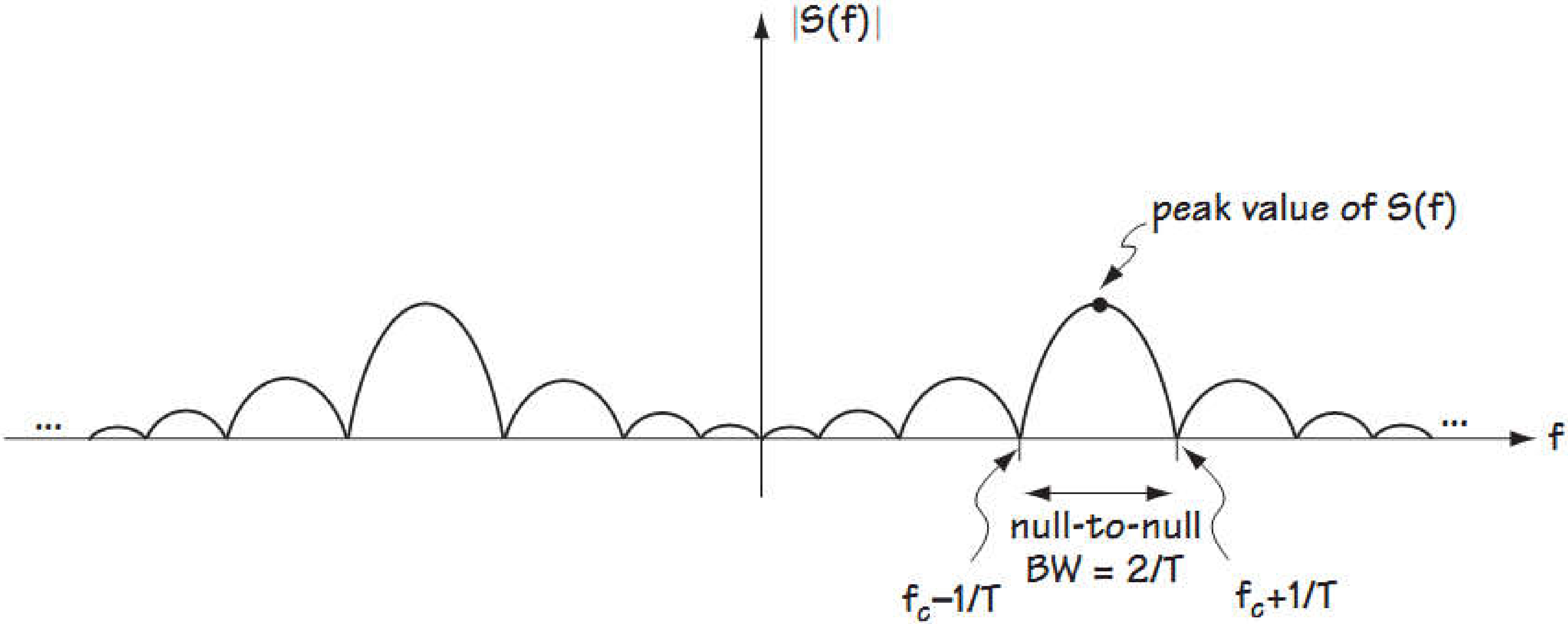
Bạn có biết?

1) Tín hiệu tương tự có phổ thế nào?
   a) Tuần hoàn
   b) Không tuần hoàn
2) Tín hiệu thời gian hữu hạn có băng thông thế nào?
3) Tín hiệu băng thông hữu hạn có thời gian thế nào?
4) Tín hiệu âm thanh (thoại, nhạc), truyền hình (đen/trắng, màu), … có phổ thế nào?

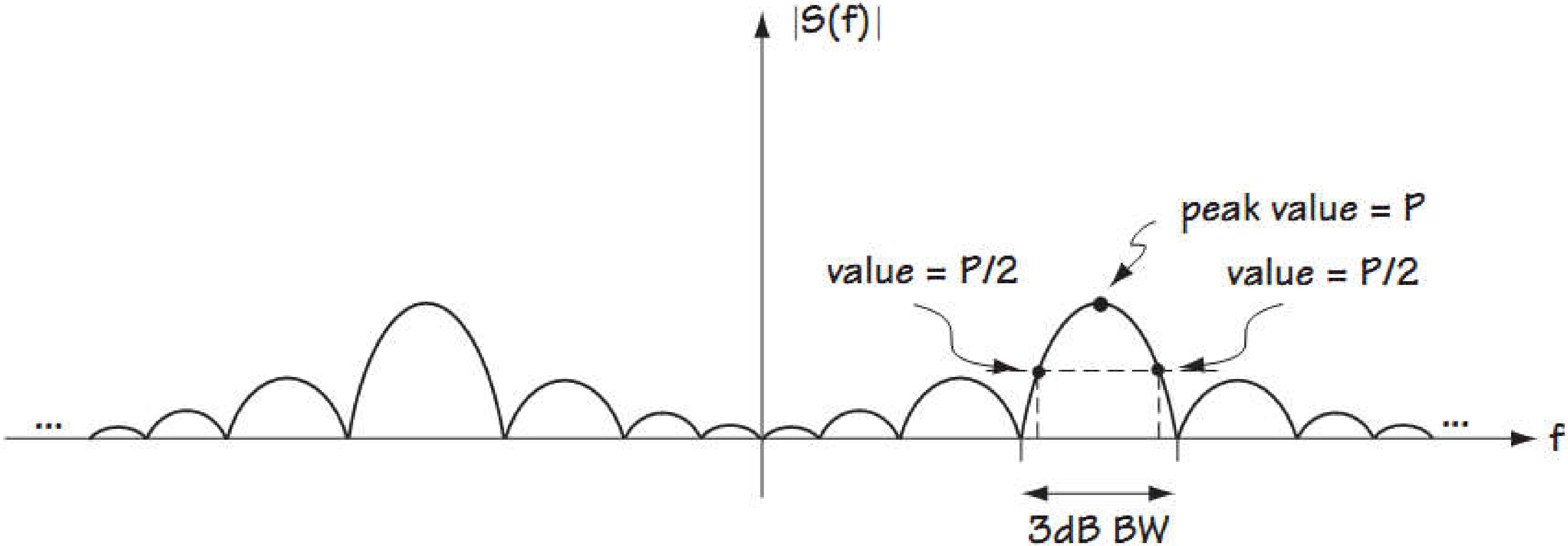
Băng thông tuyệt đối



Băng thông null-to-null



Băng thông nửa công suất (-3dB)



2.4 Nhiễu AWGN

- Xem xét phổ biến trong hệ thống truyền thông, thường có giá trị trung bình 0.

- Tên thuật ngữ tiếng Anh?
- Cách tính công suất nhiễu này?

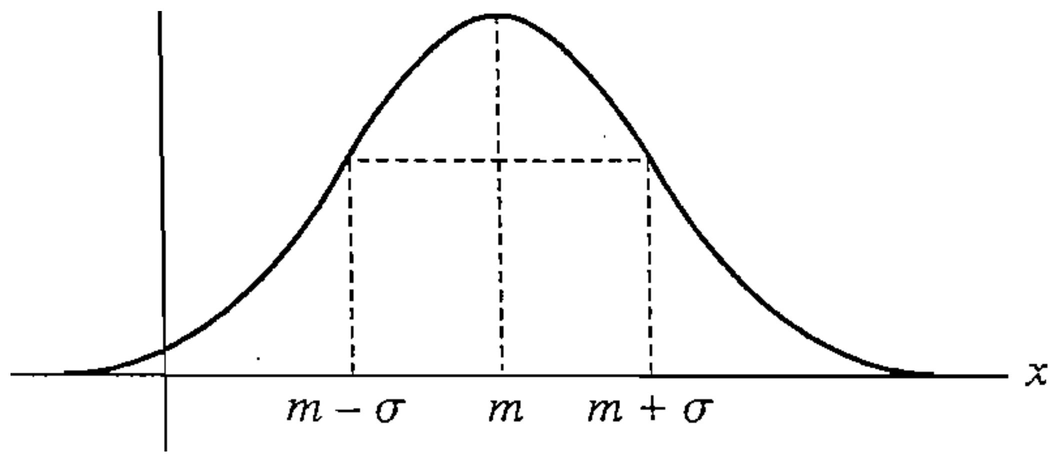
Nhiễu Gaussian

- Phân bố chuẩn (Normal) hay Gaussian có hàm mật độ

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

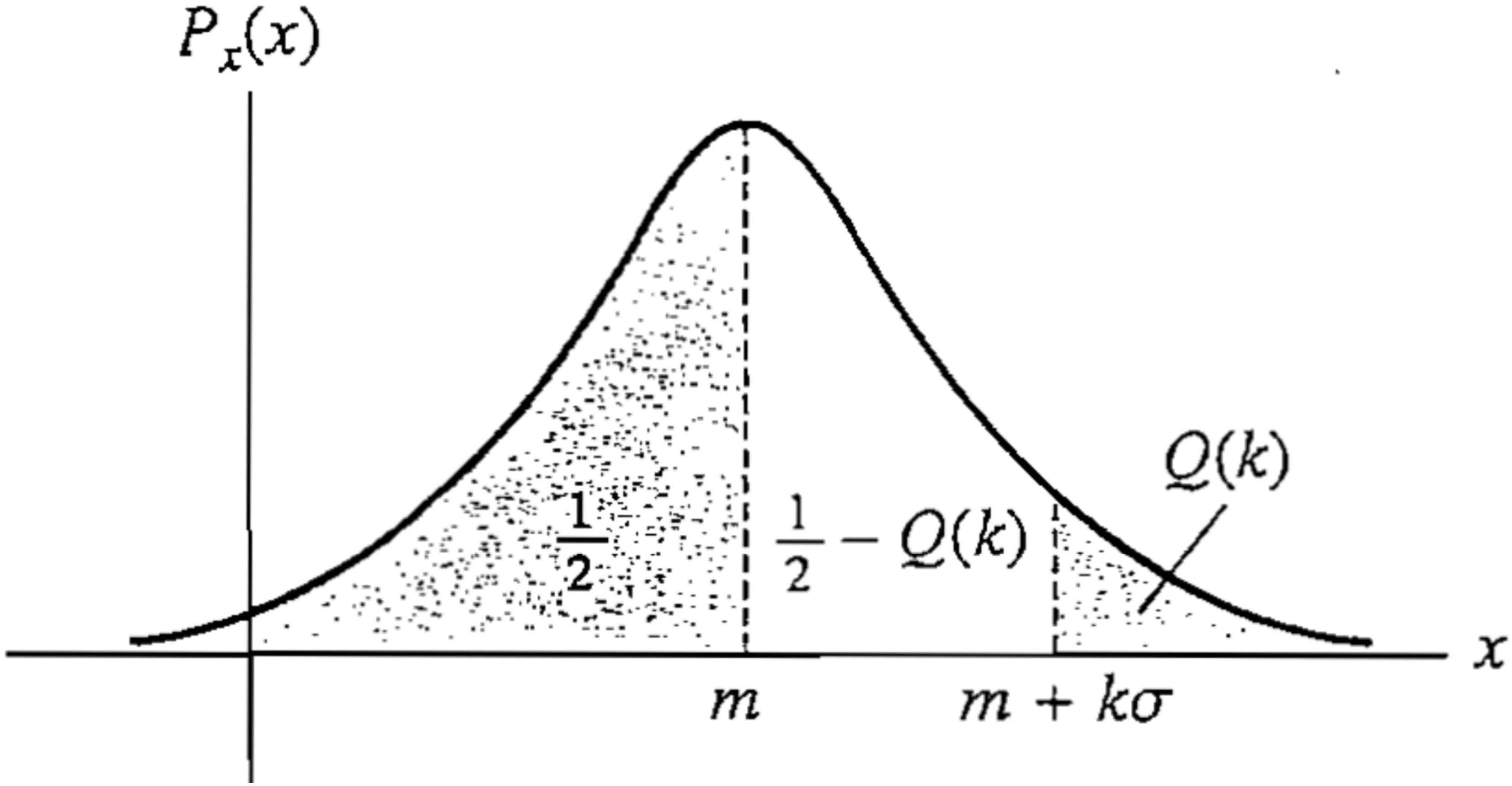
  - m là giá trị trung bình
  - σ^2 là phương sai
  - $\sigma > 0$ là độ lệch chuẩn

$$P(X > a) = \int_a^\infty p_X(x)dx$$

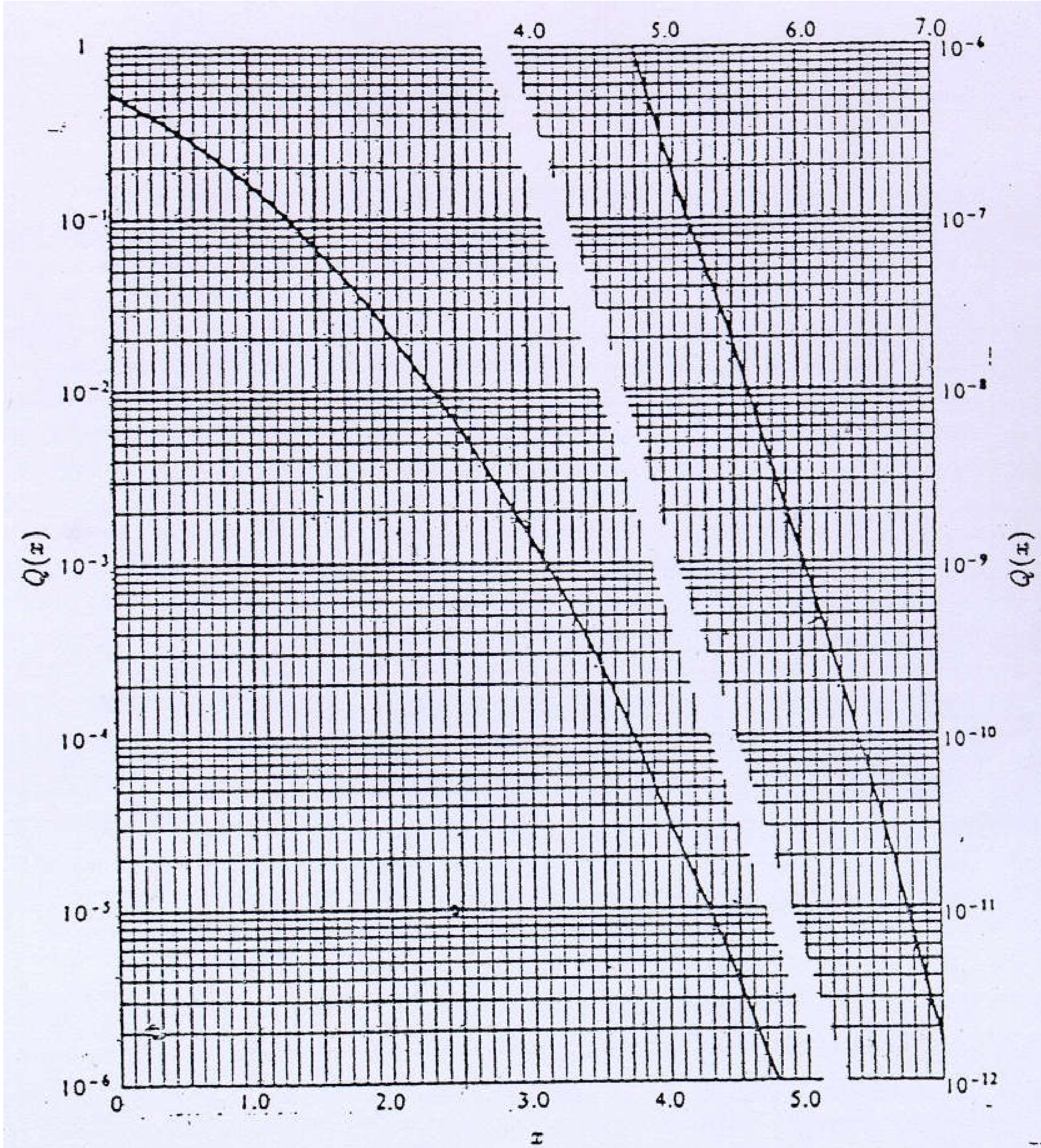


- Lưu ý ký hiệu
  - **N(m, σ^2): phổ biến**
  - N(m, σ)

N(m, σ²) và Q(k)



$$P(X > m + k\sigma) = P(X \le m - k\sigma) = Q(k)$$

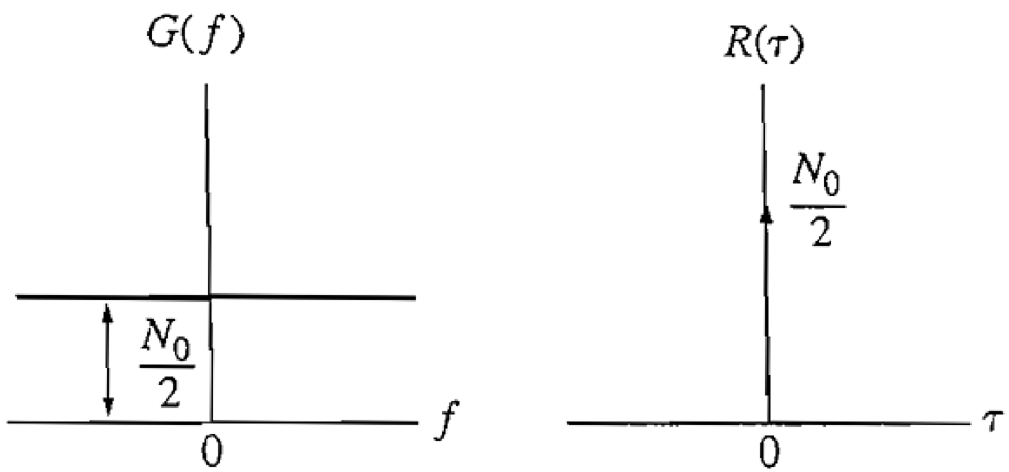


$$Q(k) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}} e^{-k^2/2} \qquad k > 3$$

Nhiễu trắng

- Hàm mật độ phổ của nhiễu trắng (white) có dạng hằng số $N_0/2$ (W/Hz).
- Ví dụ: nhiễu nhiệt

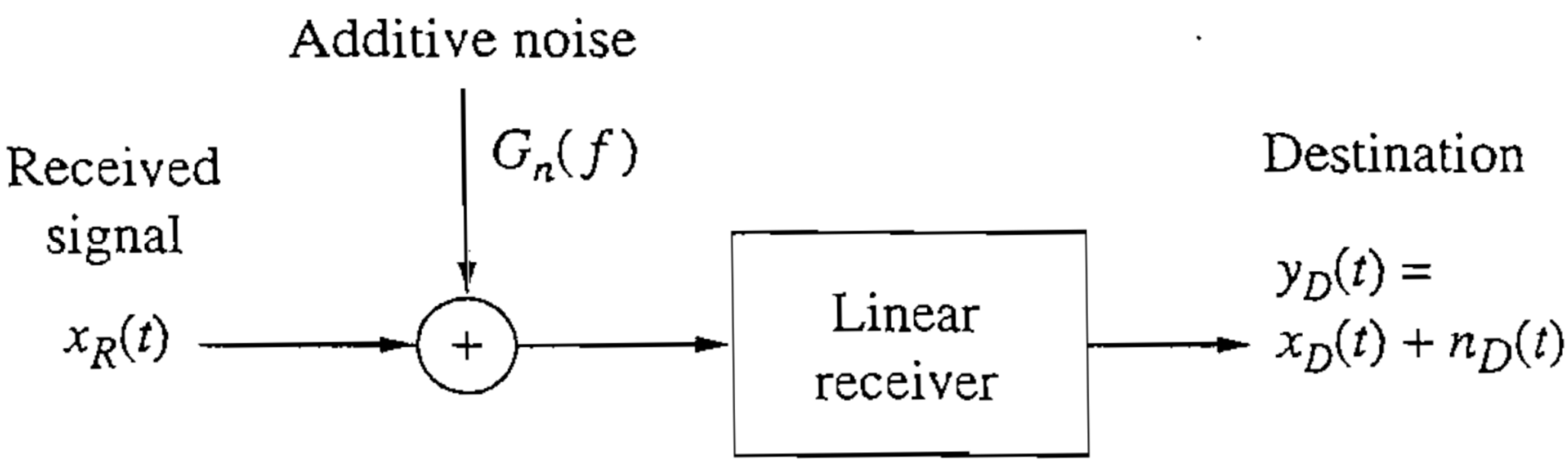
$$2G_N(f) = \eta = k\mathrm{T}_N .$$



k = Boltzmann constant = $1.37\text{x}10^{-23}$ (J/deg)

T = Temperature is Kelvins (K)

Nhiễu cộng



$$\overline{y_D^2} = \overline{x_D^2} + \overline{n_D^2} = S_D + N_D$$

Công suất nhiễu AWGN

- Dựa trên xác suất: P_N = phương sai
- Dựa trên mật độ phổ công suất 2 phía ($N_0/2$): $P_N = (N_0/2)$ x băng thông nhiễu 2 phía
- Dựa trên mật độ phổ công suất quy về 1 phía (N_0): $P_N = N_0$ x băng thông nhiễu 1 phía

Tóm tắt

- Phân loại tín hiệu miền thời gian?
- Vẽ dạng sóng?
- Khai triển và biến đổi Fourier thuận ngược?
- Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha tín hiệu?
- Các tính chất cơ bản của phổ tín hiệu?
- Tính đối ngẫu thời gian-tần số?
- Phân loại tín hiệu miền tần số?
- Cách tính băng thông?
- Cách tính giá trị trung bình ở miền thời gian và miền tần số?
- Cách tính công suất/năng lượng ở miền thời gian và miền tần số?
- Đặc tính và cách tính công suất nhiễu AWGN?

Bài tập 1

❖ Vẽ dạng sóng, tính giá trị trung bình, năng lượng/công suất của tín hiệu trong các trường hợp sau:

1) $x(t) = 1@\sin(t)$ (t:s)
2) $x(t) = 1@\sin(\pi t)$ (t:s)
3) $x(t) = 4\sin(1@\pi t)$ (t:s)
4) $x(t) = 4\cos(1@\pi t)$ (t:s)
5) $x(t) = 1 + 1@\cos(4\pi t)$ (t:s)
6) $x(t) = 1 + 4\cos(1@\pi t)$ (t:s)
7) $x(t) = 4\cos(2\pi t) + 1@\cos(4\pi t)$ (t:s)
8) $x(t) = 4\sin^2(1@\pi t)$ (t:s)
9) $x(t) = 4\mathrm{sinc}(1@t)$ (t:s)
10) $x(t) = 4\Pi\{(t - 3)/1@\}$
11) $x(t) = \Sigma_k\{4\Pi\{(t - 20k - 3)/1@\}\}$
12) $x(t) = 4\mathrm{sinc}^2(1@t)$ (t:s)

Câu	Chu kì tuần hoàn	Giá trị trung bình	Năng lượng	Công suất
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Bài tập 2

- Tìm và vẽ phổ biên độ, tính giá trị trung bình và năng lượng/công suất của các tín hiệu sau:

1) -1@
2) 10cos(1@πt)
3) 10sin(1@πt)
4) 10cos(1@πt) – 10
5) 10 – 10sin(1@πt)
6) 10cos(1@πt) – 10sin(1@πt)
7) 10cos(1@πt) – 20sin(1@πt)
8) 10cos(1@πt) – 10sin(2@πt)
9) 10cos(1@πt) – 20sin(2@πt)
10) 10cos(1@πt) + 20cos(1@πt + π/3)
11) 10cos(1@πt) + 20cos(1@πt – π/3)
12) 10cos(1@πt) + 20sin(1@πt – π/3)

Câu	Chu kì tuần hoàn	Giá trị trung bình	Năng lượng	Công suất
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Bài tập 3

- Tìm và vẽ phổ biên độ, tính giá trị trung bình và năng lượng/công suất của các tín hiệu sau:

1) $10\cos(1@\pi t).\cos(100\pi t)$
2) $10\cos(1@\pi t).\sin(100\pi t)$
3) $10\sin(1@\pi t).\cos(100\pi t)$
4) $10\sin(1@\pi t).\sin(100\pi t)$
5) $10\cos(1@\pi t).\cos(100\pi t) + 10\sin(1@\pi t).\sin(100\pi t)$
6) $10\cos(1@\pi t).\cos(100\pi t) - 10\sin(1@\pi t).\sin(100\pi t)$
7) $\{2\cos(1@\pi t) + 4\cos(20\pi t)\}.\cos(100\pi t)$
8) $\{1 - \cos^2(1@\pi t)\}.\cos(100\pi t)$
9) $\cos(1@\pi t).\cos(20\pi t).\cos(100\pi t)$
10) $\{1 + 2\cos(1@\pi t)\}.\cos(100\pi t)$
11) $\{10 + 2\cos(1@\pi t)\}.\cos(100\pi t)$
12) $\{10 + 2\cos(1@\pi t) - 4\cos(20\pi t)\}.\cos(100\pi t)$

Câu	Giá trị trung bình	Năng lượng	Công suất
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Bài tập 4

- Tìm, vẽ phổ biên độ và xác định băng thông của các tín hiệu sau:

1) $\Pi(t) - 1@$
2) $\Pi(t - 1@)$
3) $\Pi(1@t)$
4) $\Pi(t/1@)$
5) $\Pi(3t - 1@)$
6) $\Pi(t/1@ - 2)$
7) $\Pi((t - 2)/1@)$
8) $\Pi((t - 1@)/2)$
9) $\Pi((3t - 2)/1@)$
10) $\Pi(t).10.\cos(1@\pi t)$
11) $\{1 + \Pi(t)\}.10.\cos(1@\pi t)$
12) $\{1 + \Pi(t - 2)\}.10.\cos(1@\pi t)$

Câu	Băng thông
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Bài tập 5

- Vẽ dạng sóng, tìm chu kì tuần hoàn và khai triển Fourier

(a) $x(t) = 2\cos(200\pi t) + 5\sin(400\pi t)$

(b) $x(t) = 2\cos(200\pi t) + 5\sin(300\pi t)$

(c) $x(t) = 2\cos(150\pi t) + 5\sin(250\pi t)$

Bài tập 6

$x_1(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t)$ $x_2(t) = m(t)\sin(2\pi f_c t)$

1) Rút gọn

(a) $y_1(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_c t)$

(b) $y_2(t) = x_1(t)\sin(2\pi f_c t)$

(c) $y_3(t) = x_2(t)\cos(2\pi f_c t)$

(d) $y_4(t) = x_2(t)\sin(2\pi f_c t)$

2) Chỉ ra cách khôi phục tín hiệu m(t) có băng thông rất nhỏ hơn f_c từ tín hiệu $x_1(t)$ hoặc $x_2(t)$.