



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής

Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80, Τηλ: 772.1448, Fax: 772.1452

e-mail: queueing@netmode.ntua.gr, URL: <http://www.netmode.ntua.gr>

15/4/2024

Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

4η Ομάδα Ασκήσεων

Ανάλυση και Σχεδιασμός τηλεφωνικού κέντρου

Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθείτε με την ανάλυση και το σχεδιασμό ενός τηλεφωνικού κέντρου με c εξωτερικές γραμμές (trunks), που μοντελοποιείται ως μία ουρά $M/M/c/c$, δηλαδή ουρά που διαθέτει c εξυπηρετητές ίδιων δυνατοτήτων, που αντιστοιχούν σε c εξωτερικές γραμμές τηλεφωνικού κέντρου, και μέγιστη χωρητικότητα c πελάτες, που αντιστοιχούν σε c τηλεφωνήματα / εξωτερικές κλήσεις. Οι αφίξεις στο σύστημα ακολουθούν την κατανομή Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό λ και οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό μ .

(1) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων του συστήματος $M/M/c/c$ και να αποδείξετε ότι η πιθανότητα απόρριψης (blocking probability) ενός πελάτη από το σύστημα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (τύπος Erlang-B):

$$P_{\text{blocking}} = B(\rho, c) = \frac{\rho^c / c!}{\sum_{k=0}^c \rho^k / k!}, \quad \text{όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός απωλειών πελατών από την ουρά; Στη συνέχεια, να υλοποιήσετε τη συνάρτηση `erlangb_factorial`, η οποία θα δέχεται ως ορίσματα την ένταση του φορτίου ρ και τον αριθμό των εξυπηρετητών c και θα υπολογίζει με τη βοήθεια του παραπάνω επαναληπτικού τύπου την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα $B(\rho, c)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της συνάρτησής σας με τη συνάρτηση `erlangb` του πακέτου `queueing` του Octave.

(2) Να αποδείξετε ότι για τον τύπο Erlang-B ισχύει ο ακόλουθος επαναληπτικός τύπος:

$$B(\rho, 0) = 1$$

$$B(\rho, n) = \frac{\rho B(\rho, n-1)}{\rho B(\rho, n-1) + n}, n = 1, 2, \dots, c$$

Να υλοποιήσετε με επαναληπτικό τρόπο τη συνάρτηση `erlangb_iterative`, η οποία θα δέχεται ως ορίσματα την ένταση του φορτίου ρ και τον αριθμό των εξυπηρετητών c και θα υπολογίζει με τη βοήθεια του παραπάνω επαναληπτικού τύπου την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα $B(\rho, c)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της συνάρτησής σας με τη συνάρτηση `erlangb` του πακέτου `queueing` του Octave.

(3) Να συγκρίνετε τις εξόδους των συναρτήσεων `erlangb_factorial(1024,1024)` και `erlangb_iterative(1024,1024)`. Τι παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό;

(4) Να υποθέσετε ότι καλείστε να σχεδιάσετε από την αρχή το τηλεφωνικό δίκτυο μίας εταιρείας στην οποία απασχολούνται 500 εργαζόμενοι. Κάθε εργαζόμενος διαθέτει και μία εξωτερική γραμμή, δηλαδή η εταιρεία πληρώνει για 500 γραμμές. Στην προσπάθειά σας να σχεδιάσετε ένα πιο οικονομικό δίκτυο, κάνετε μετρήσεις στην ώρα αιχμής και βρίσκετε ότι ο πιο απαιτητικός χρήστης χρησιμοποιεί συνολικά το τηλέφωνό του για εξωτερικές κλήσεις κατά μέσο όρο 23 λεπτά σε μία ώρα.

(α) Χρησιμοποιώντας ως πρότυπο τον πιο απαιτητικό χρήστη, να προσδιορίσετε τη συνολική ένταση του φορτίου που καλείται να εξυπηρετήσει το τηλεφωνικό δίκτυο της εταιρείας.

(β) Να κάνετε το διάγραμμα της πιθανότητας απόρριψης πελάτη από το σύστημα ως προς τον αριθμό των τηλεφωνικών γραμμών, επιλέγοντας από 1 έως 500 τηλεφωνικές γραμμές. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας αυτής να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `erlangb_iterative`.

(γ) Να προσδιορίσετε τον κατάλληλο αριθμό τηλεφωνικών γραμμών που θα χρησιμοποιήσετε ώστε η πιθανότητα απόρριψης τηλεφωνικής κλήσης να είναι μικρότερη από 1%. Να επαναλάβετε για τις περιπτώσεις που ο τελικός χρήστης μιλάει (i) 34 λεπτά και (ii) 46 λεπτά σε μία ώρα.

(5) Έστω ότι έχουμε ένα αστικό τηλεφωνικό κέντρο που εξυπηρετεί 20000 συνδρομητές. Η μέση προσφερόμενη κίνηση ανά συνδρομητή που καλεί είναι 0.06 erl (offered traffic), από την οποία το 5% δρομολογείται σε υπεραστικό τηλ. κέντρο.

i) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της συνολικής προσφερόμενης κίνησης.

ii) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα σε trunks της ζεύξης αυτού του αστικού κέντρου προς το υπεραστικό κέντρο για βαθμό ποιότητας/ εξυπηρέτησης GoS (grade of service) 1%. Υπόδειξη: Ορισμός για τον βαθμό εξυπηρέτησης στην διαφ. 8 του σετ 2 των διαφανειών της θεωρίας, και παράδειγμα στην διαφ. 15 του σετ 5 των διαφανειών. Μπορείτε να αξιοποιήσετε έναν Erlangb calculator, π.χ. <https://www.erlang.com/calculator/erlb/>

iii) Έκτακτες συνθήκες προκαλούν τριπλασιασμό της κίνησης. Να υπολογίσετε τον βαθμό ποιότητας / εξυπηρέτησης (GoS) της ζεύξης του αστικού τηλ. κέντρου προς το υπεραστικό.

Υπόδειξη: Μπορείτε να αξιοποιήσετε την συνάρτηση που φτιάξατε ή την erlangb του πακέτου queueing του Octave.

Σύστημα εξυπηρέτησης με δύο ανόμοιους εξυπηρετητές

Να θεωρήσετε ένα σύστημα εξυπηρέτησης που αποτελείται από δύο εξυπηρετητές 1 και 2 χωρίς δυνατότητα αναμονής πελατών. Όταν και οι δύο εξυπηρετητές είναι διαθέσιμοι, ένας πελάτης δρομολογείται πάντα στον εξυπηρετητή 1. Σε περίπτωση που ο εξυπηρετητής 1 δεν είναι διαθέσιμος, ένας νέος πελάτης δρομολογείται στον εξυπηρετητή 2. Σε περίπτωση που και οι δύο εξυπηρετητές δεν είναι διαθέσιμοι, ένας νέος πελάτης απορρίπτεται χωρίς επανάληψη προσπάθειας εξυπηρέτησης. Οι αφίξεις πελατών στο σύστημα ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ πελάτες/sec. Οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέσους χρόνους εξυπηρέτησης $1/\mu_1 = 0.8$ sec και $1/\mu_2 = 2.5$ sec αντίστοιχα, δηλαδή ο εξυπηρετητής 2 είναι χαμηλότερων δυνατοτήτων από τον εξυπηρετητή 1.

(1) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων του συστήματος στην κατάσταση ισορροπίας και να βρείτε:

(α) Τις εργοδικές πιθανότητες του συστήματος.

(β) Την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα.

(γ) Το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.

(2) Να βρείτε τα ζητούμενα του προηγούμενου ερωτήματος με τη μέθοδο της προσομοίωσης συστημάτων αναμονής. Για το σκοπό αυτής της άσκησης, σας δίνεται το αρχείο **demo4.m**, δηλαδή ένα πρόγραμμα σε Octave, που δε χρησιμοποιεί έτοιμα πακέτα προσομοίωσης. Το αρχείο αυτό περιλαμβάνει κενά στα thresholds που αφορούν το πώς αποφασίζουμε να μεταβούμε από τη μία κατάσταση του συστήματος στην άλλη.

(α) Να συμπληρώσετε τα κενά του προγράμματος.

(β) Ποια είναι τα κριτήρια σύγκλισης της προσομοίωσής σας;

(γ) Να επιβεβαιώσετε ότι οι πιθανότητες που υπολογίζονται από το πρόγραμμα συμφωνούν με τις πιθανότητες που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, λαμβάνοντας υπόψη και το κριτήριο σύγκλισης της προσομοίωσης.