Συστήματα Αναμονής Άσκηση 2^{η}

Αυγερινός Πέτρος 03115074

Contents

1 Θεωρητική Μελέτη της ουράς M/M/1 **3**
- 1.1 Ερώτημα Α 3
- 1.2 Ερώτημα Β 3
- 1.3 Ερώτημα Γ 4
- 1.4 Ερώτημα Δ 4

2 Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave **5**
- 2.1 Ερώτημα Α 5
- 2.2 Ερώτημα Β 5
- 2.3 Ερώτημα Γ 9
- 2.4 Ερώτημα Δ 9

3 Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K **10**
- 3.1 Ερώτημα Α 10
- 3.2 Ερώτημα Β 11

1 Θεωρητική Μελέτη της ουράς M/M/1

1.1 Ερώτημα Α

Η απαραίτητη συνθήκη για μία ουρά M/M/1 να είναι εργοδική είναι η ένταση κυκλοφορίας $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Η ένταση κυκλοφορίας εκφράζει την πιθανότητα να είναι απασχολημένη η μονάδα εξυπηρέτησης.

Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, k \geq 1 \tag{1}$$

και

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \tag{2}$$

Για την ουρά M/M/1 ισχύει ότι $\lambda_k = \lambda, \mu_k = \mu, \forall k \geq 1$. Επομένως οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0 \tag{3}$$

και

$$P_k = \rho P_{k-1} = \rho^k P_0, k > 0 \tag{4}$$

Όμως η άθροιση των πιθανοτήτων πρέπει να είναι 1, δηλαδή:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = 1 \Rightarrow P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \rho \tag{5}$$

Επομένως προκύπτει η πιθανότητα P_k:

$$P_k = (1-\rho)\rho^k \tag{6}$$

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1 φαίνεται στο Σχήμα:

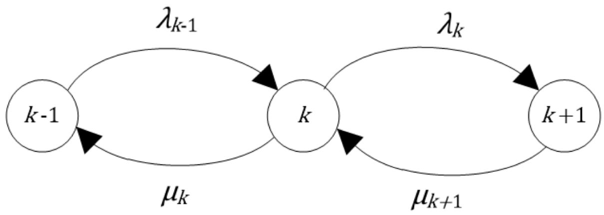


Figure 1: Διάγραμμα Ρυθμού Μεταβάσεων M/M/1

1.2 Ερώτημα Β

Για τον υπολογισμό του μέσου χρόνου καθυστέρησης στην ουρά M/M/1 χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$E(T) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} \tag{7}$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής είναι ίσος με:

$$E(W) = E(T) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \tag{8}$$

1.3 Ερώτημα Γ

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να υπάρχουν 3 τουλάχιστον πελάτες στο σύστημα θα εργαστούμε ως εξής:

$$P(N \geq 3) = \sum_{k=3}^{\infty} P_k = \sum_{k=3}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \tag{9}$$

Αυτή η πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί ως η εξής συμπληρωματική πιθανότητα:

$$P(N \geq 3) = 1 - P(N < 3) = 1 - P(N = 0) - P(N = 1) - P(N = 2) \tag{10}$$

Για ένα δεδομένο ρ όπου $\rho < 1$.

1.4 Ερώτημα Δ

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα με 107 πελάτες στην ουρά θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$P_{107} = (1-\rho)\rho^{107} \tag{11}$$

Για τιμές του ρ όπου $\rho \leq 1$ οι πιθανότητες είναι πολύ μικρές. Βέβαια όσο μεγαλώνει το ρ τόσο περισσότερο αυξάνεται και η πιθανότητα αυτή. Σαφώς για μικρά ρ η πιθανότητα είναι αμελητέα.

Για παράδειγμα:

1. Για $\rho = 0.1$ η πιθανότητα είναι $9.000000000000054e - 108$.
2. Για $\rho = 0.5$ η πιθανότητα είναι $3.0814879110195774e - 33$.
3. Για $\rho = 0.9$ η πιθανότητα είναι $1.270423474759657e - 06$.

2 Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

2.1 Ερώτημα Α

Για να είναι το σύστημα εργοδικό θα πρέπει να ισχύει ότι $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Γνωρίζουμε ότι το $\lambda =$ 10πελάτες/min ενώ το μ εκτείνεται σε εύρος τιμών από 0 έως 20 πελάτες ανά λεπτό. Επομένως αποδεκτές τιμές του μ είναι από 10 έως 20.

Άρα θα πρεπει $\mu > 10$.

2.2 Ερώτημα Β

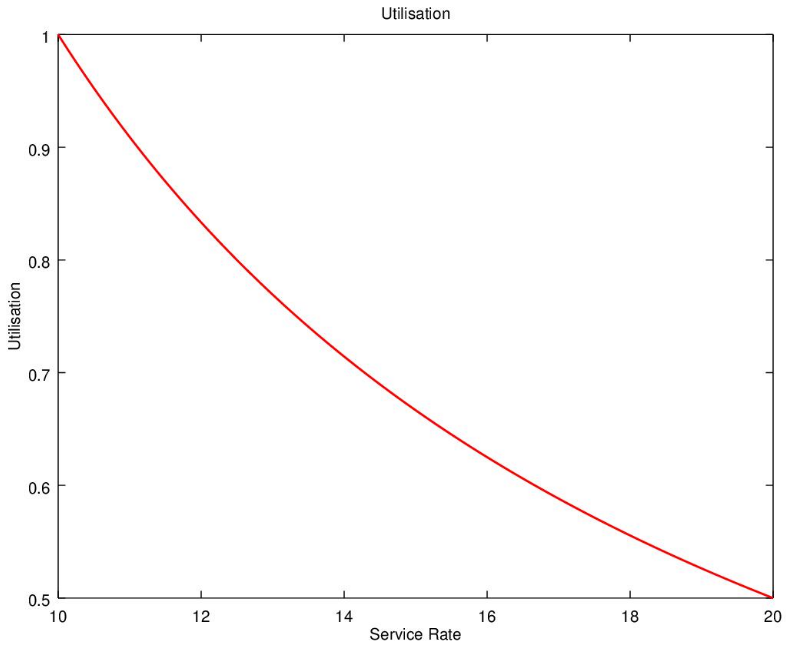
Θα κάνουμε χρήση της συνάρτησης qsmm1 του Octave για να λάβουμε όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την ουρά μας.

Ο κώδικας αρχικοποίησης της ουράς είναι ο εξής:

```
pkg load queueing;

lambda = 10;

mu = 10.0001 : 0.0001 : 20;

[U, R, Q, X, p0] = qsmm1(lambda, mu);

colors = "rgbm";
```

Για κάθε ένα από τα ζητούμενα της άσκησης έχουμε:

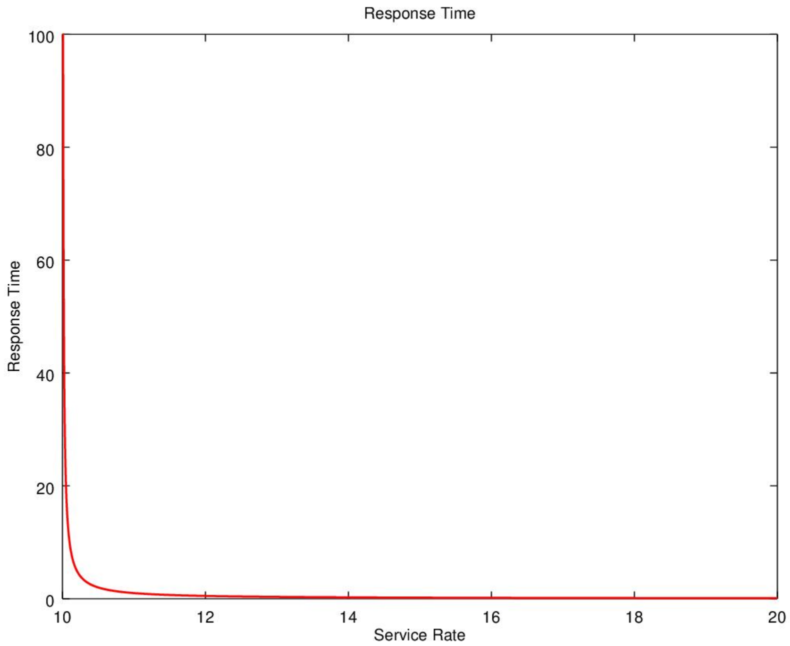
1. Σχετικά με το utilisation, το διάγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το παραπάνω διάγραμμα είναι ο εξής:

```
figure(1);
plot(mu,U, colors(1), 'linewidth',1.2);
xlabel('Service Rate');
ylabel('Utilisation');
title('Utilisation');

print('-djpg', 'utilisation.jpg');
```

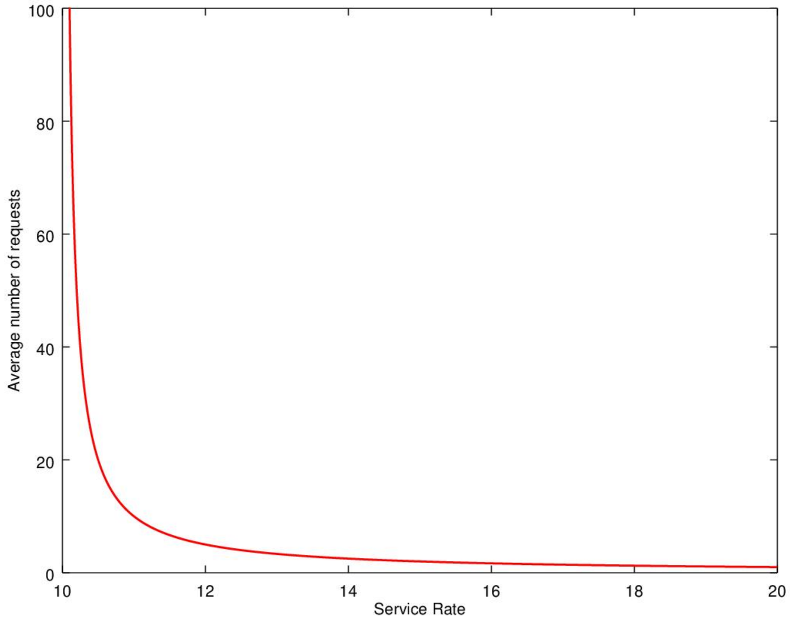
2. Σχετικά με το μέσο χρόνο καθυστέρησης, το διάγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το παραπάνω διάγραμμα είναι ο εξής:

```
figure(2);
plot(mu,R,colors(1),'linewidth',1.2);
ylim([0,100]);
xlabel('Service Rate');
ylabel('Response Time');
title('Response Time');

print('-djpg', 'responsetime.jpg');
```

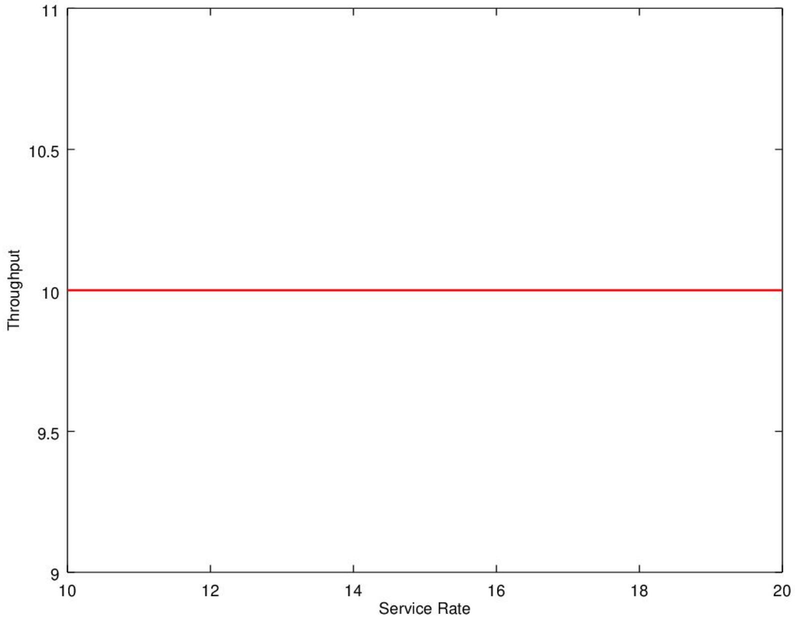
3. Σχετικά με το μέσο αριθμό των πελατών, το διάγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το παραπάνω διάγραμμα είναι ο εξής:

```
figure(3);
plot(mu,Q,colors(1),'linewidth',1.2);
ylim([0,100]);
xlabel('Service Rate');
ylabel('Average number of requests');

print('-djpg', 'average_n_requests.jpg');
```

4. Σχετικά με τη ρυθμαπόδοση, το διάγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το παραπάνω διάγραμμα είναι ο εξής:

```
figure(4);
plot(mu,X,colors(1), 'linewidth',1.2);
xlabel('Service Rate');
ylabel('Throughput');

print('-djpg', 'throughput.jpg');
```

2.3 Ερώτημα Γ

Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι αντιστρόφος ανάλογος του ρυθμού εξυπηρέτησης, επομένως για μεγάλα μ ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι μικρός. Η αύξηση του ρυθμού εξυπηρέτησης όμως απαιτεί σημαντική ποσότητα πόρων, επομένως η αύξηση του ρυθμού θα πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να μειωθεί ο χρόνος εξυπηρέτησεις αλλά να μην αυξηθούν σημαντικά οι ανάγκες της ουράς για πόρους. Επομένως από το διάγραμα θα επέλεγα το $\mu = 12$ για το οποίο υπάρχει ένας ανεπέστατος χρόνος εξυπηρέτησης. Αλλιώς μπορούμε να επιλέξουμε και την μέση λύση του $\mu = 15$.

2.4 Ερώτημα Δ

Το throughput στην ουρα παρατηρούμε ότι μένει σταθερό για όλες τις τιμές του μ. Αυτό συμβαίνει γιατί η ρυθμαπόδοση εξαρτάται από την παράμετρο λ και την πιθανότητα απώλειας η οποία είναι 0 σε μία M/M/1 ουρά η οποία έχει άπειρη χωρητικότητα.

3 Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

3.1 Ερώτημα Α

Αρχικά έχουμε τα εξής γνωστά:

1. Γνωρίζουμε ότι $\lambda = 5$ και $\mu = 10$
2. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\lambda_i = \frac{\lambda}{(i+2)}$ και $\mu_i = \mu, i = 0, 1, 2$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας και την συνθήκη κανονικοποίησης έχουμε τις εξής εργοδικές πιθανότητες για την ουρά M/M/1/3:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu^2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu^3}} = 0.771084337 \tag{12}$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu} P_0 = 0.19275 \tag{13}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu} P_1 = 0.032125 \tag{14}$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu} P_2 = 0.004015625 \tag{15}$$

Γνωρίζουμε ότι $P_{blocking} = P_3$.

Το διάγραμμα γεννήσεων-θανάτων για μία ουρά M/M/1/3 φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

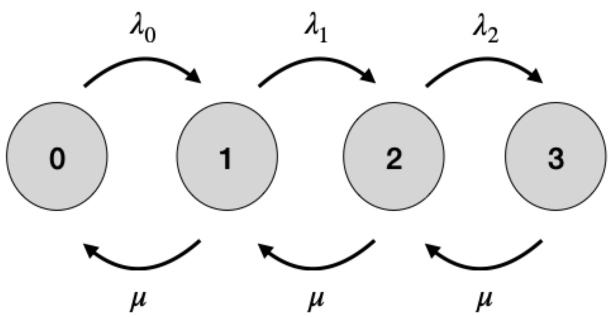


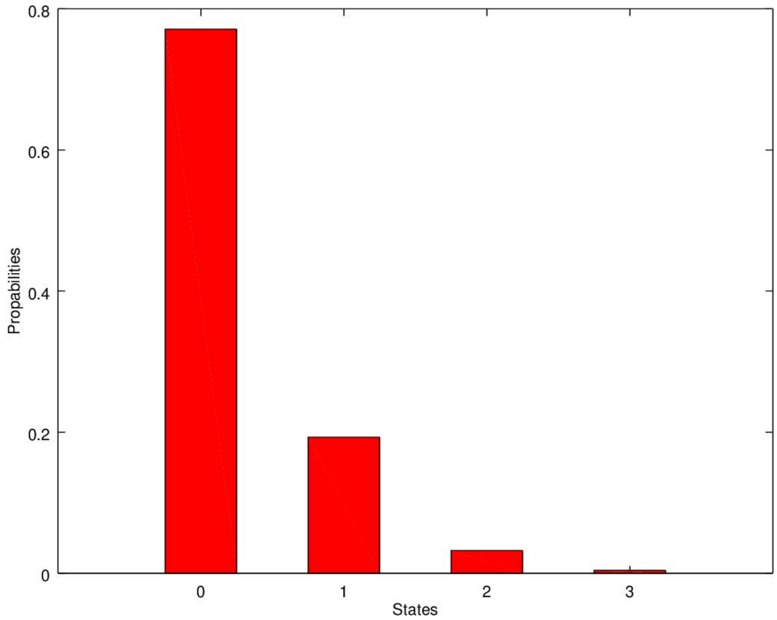
Figure 2: Διάγραμμα Γεννήσεων-Θανάτων M/M/1/3

3.2 Ερώτημα Β

1. Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων φαίνεται παρακάτω:

-2.50000	2.50000	0.00000	0.00000
10.00000	-11.66667	1.66667	0.00000
0.00000	10.00000	-11.25000	1.25000
0.00000	0.00000	10.00000	-10.00000

2. Οι εργοδικές πιθανότητες φαίνονται παρακάτω στο διάγραμμα:



Και σε συγκεκριμένες τιμές εδώ:

P_0	P_1	P_2	P_3	$P_{blocking}$
0.771084	0.192771	0.0321285	0.00401606	0.00401606

3. Η πιθανότητα απόρριψης είναι $P_{blocking} = 0.00401606$.

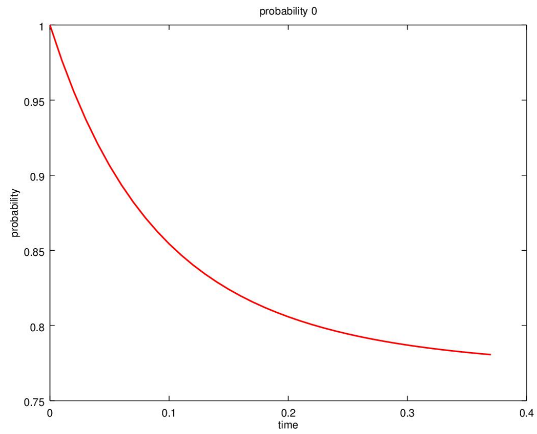
4. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι 0.26908 σύμφωνα με τον τύπο:

$$L = \sum_{i=0}^{3} i \cdot P_i \tag{16}$$

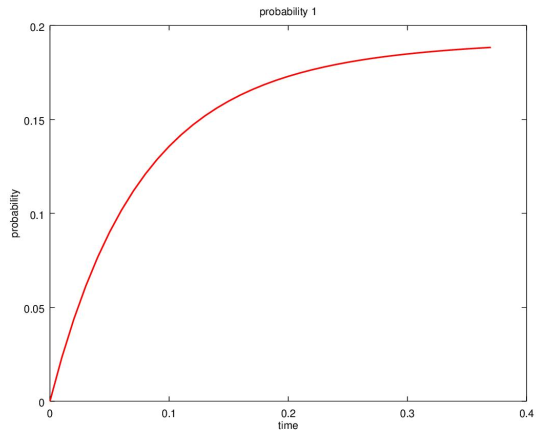
5. Ο μέσος αριθμός εξυπηρετούμενων πελατών σε ένα διάστημα χρόνου ίσο με 60 δευτερόλεπτα είναι:

$$L_s = L \cdot \mu \cdot 60 = 161.448 \tag{17}$$

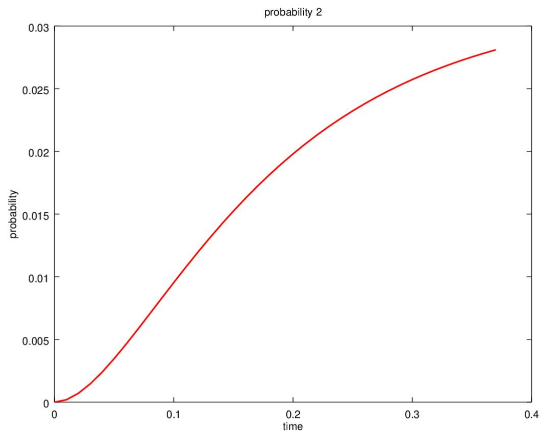
6. Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των πιθανοτήτων καταστάσεων:


probability 0
probability
time

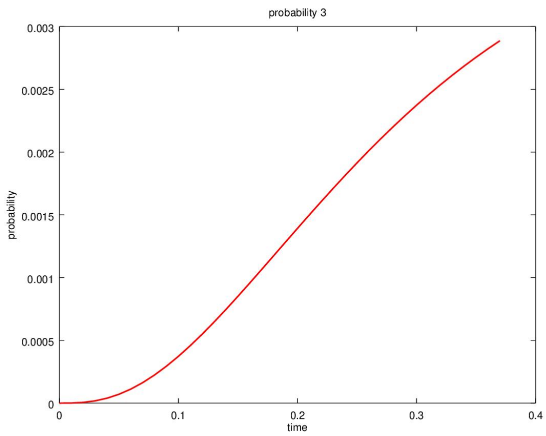
(a)


probability 1
probability
time

(b)


probability 2
probability
time

(c)


probability 3
probability
time

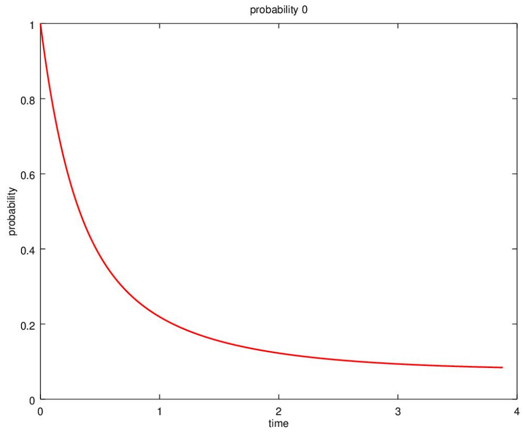
(d)

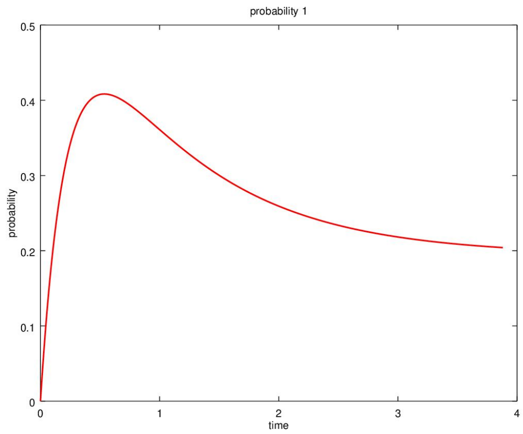
Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τα παραπάνω φαίνεται παρακάτω:

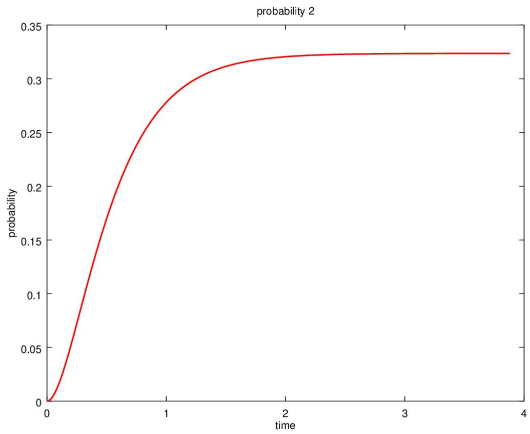
```
% system M/M/1/3

clc;
clear all;
close all;

pkg load queueing;

lambda = 5;
mu = 10;
states = [0, 1, 2, 3]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0];

% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lambda/2, lambda/3, lambda/4];
deaths_D = [mu, mu, mu];

% get the transition matrix of the birth-death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
display('transition matrix');
display(transition_matrix);
% get the ergodic probabilities of the system
P = ctmc(transition_matrix);


% plot the ergodic probabilities (bar for bar chart)
if mu = 10
        figure(1);
        bar(states, P, "r", 0.5);
        xlabel('States');
        ylabel('Propabilities');

        print('-djpg','bar_plot.jpg');
endif

display('blocking probability');
display(P(4));

mean_clients = 0;
for i=1:4
        mean_clients = mean_clients + P(i)*(i-1);
        probtext = sprintf('probability %d: %d', i-1, P(i));
        display(probtext);
endfor
display('mean');
display(mean_clients);

for j=1:4
        index = 0;
        for T = 0 : 0.01 : 50
          index = index + 1;
          P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
          Prob0(index) = P0(j);
          if P0 - P < 0.01
            break;
          endif
        endfor

```

```
        T = 0 : 0.01 : T;
        figure(2);
        plot(T, Prob0, "r", "linewidth", 1.3);
        plotname = sprintf('probability %d',j-1);
        title(plotname);
        xlabel('time');
        ylabel('probability');
        filename = sprintf('probability_%d_%d_%d.jpg',j-1, lambda, mu);

        print('-djpg', filename);
endfor

result = mean_clients * mu * 60;
text = sprintf('mean_clients(%d): %d', mu, result);
display(text);
```

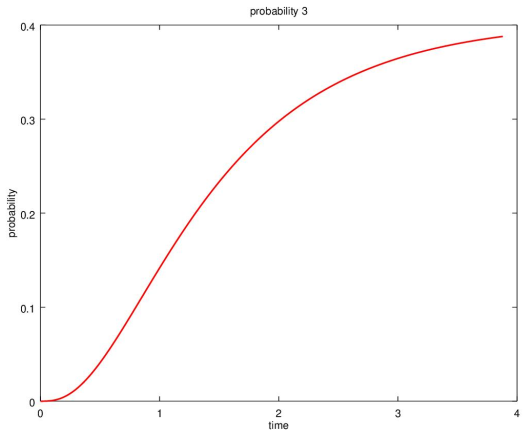
7. (a) Για $mu = 1$, ο συνολικός αριθμός είναι 123.301 και έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:

i. 

ii. 

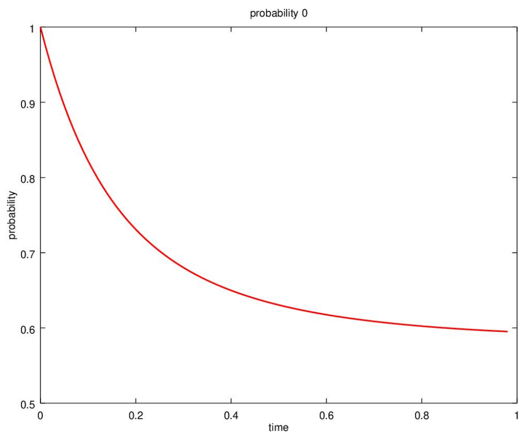


iii.

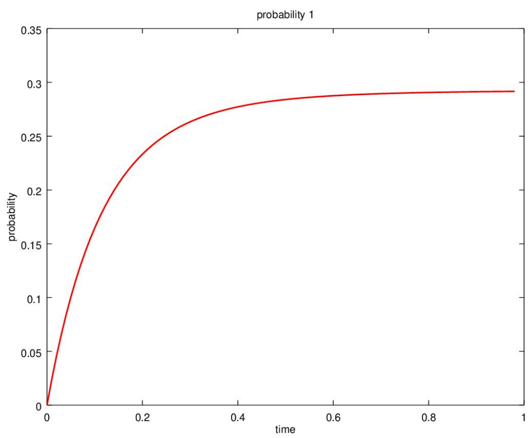


iv.

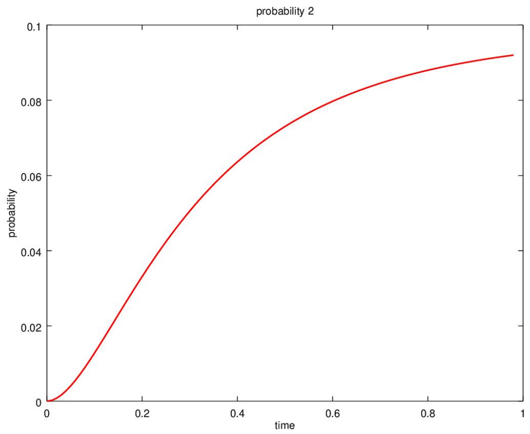
(b) Για $mu = 5$ ο συνολικός αριθμός είναι 168.293 και έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



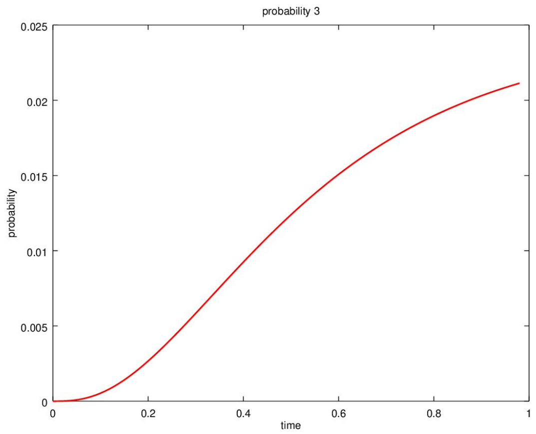
i.



ii.

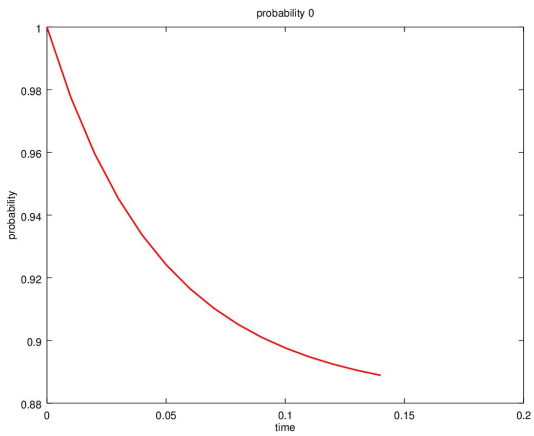


iii.

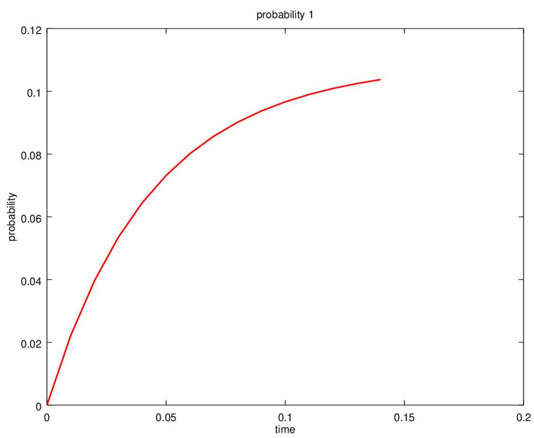


iv.

(c) Για mu = 20 ο συνολικός αριθμός είναι 156.103 και έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:

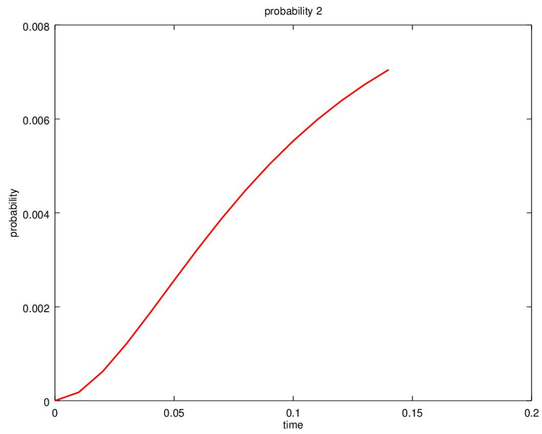


i.

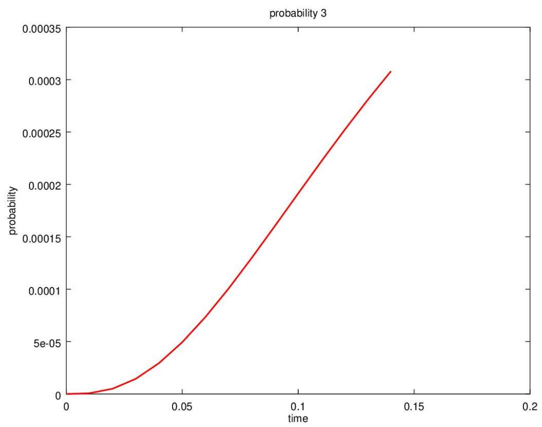


ii.

iii.



iv.



Δημιουργήθηκαν από το κώδικα του προηγούμενου ερωτήματος παραμετροποιώντας το μ. Διατηρώντας σταθερό το λ και αυξάνοντας το μ παρατηρούμε ότι συγκλίνουμε στις εργοδικές πιθανότητε πιο γρήγορα. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο αυξάνεται το μ μειώνονται οι εργοδικές πιθανότητες.