



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής

Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

---

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80, Τηλ: 772.1448, Fax: 772.1452

e-mail: [queueing@netmode.ntua.gr](mailto:queueing@netmode.ntua.gr), URL: <http://www.netmode.ntua.gr>

20 Μαρτίου 2024

## Συστήματα Αναμονής

### 1η Ομάδα Ασκήσεων

#### Κατανομή Poisson

Α) *Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function) της κατανομής Poisson*: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους  $\lambda = \{7, 20, 40, 70\}$ . Οι συναρτήσεις να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι και 100. Πώς αλλάζει η μορφή τους καθώς μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ ;

Β) *Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής*: Πώς μπορεί να ληφθεί μία κατανομή Poisson παραμέτρου  $\lambda$  ως το όριο μιας διωνυμικής (binomial) κατανομής παραμέτρων  $n$  και  $p$ ; Να κατασκευάσετε, με αυτόν τον τρόπο, μία κατανομή Poisson παραμέτρου  $\lambda=40$ . Πιο συγκεκριμένα, να σχεδιάσετε, σε κοινό διάγραμμα, την εξέλιξη μιας διωνυμικής κατανομής, καθώς τείνει στην επιθυμητή κατανομή Poisson (για  $n = 40, 120, 360, 1080$  και  $4000$ ).

Γ) *Μέση τιμή και διακύμανση κατανομής Poisson*: Να επιλέξετε την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda=40$  σημεία/sec. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανσή της. Τι παρατηρείτε για τις τιμές που υπολογίσατε; Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διακύμανση της διωνυμικής κατανομής για τις αντίστοιχες τιμές του ερωτήματος Β και εξηγήστε θεωρητικά το αποτέλεσμα.

Δ) *Διάσπαση κατανομής Poisson/Υπέρθεση κατανομών Poisson*: Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο σε μία ώρα και ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda$  (κλήσεις ανά ώρα). Ακόμη, οι κλήσεις θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους, με πιθανότητα  $p$  να είναι προς εξωτερικό ενώ με πιθανότητα  $q = 1 - p$  να είναι προς εσωτερικό. Έστω  $X_1$  και  $X_2$  οι τυχαίες μεταβλητές που συμβολίζουν τον αριθμό κλήσεων σε μία

ώρα προς εξωτερικό και προς εσωτερικό αντίστοιχα. (α) Να σχεδιάσετε, σε κοινό διάγραμμα, τις συναρτήσεις μάζας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών  $X$ ,  $X_1$  και  $X_2$  και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας για  $\lambda=30$  και  $p=0.3$ . (β) Ποια είναι η πιθανότητα οι επόμενες δύο κλήσεις να είναι εξωτερικού; (γ) Δεδομένου ότι υπήρξαν ακριβώς 5 κλήσεις σε ένα δεδομένο διάστημα, ποια είναι η πιθανότητα ότι ακριβώς οι 2 ήταν προς εξωτερικό;

**Σημείωση:** Για την άσκηση αυτή, σας δίνεται έτοιμος ο κώδικας (αρχείο demo1a.m).

### **Εκθετική κατανομή**

A) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF, Probability Density Function) της εκθετικής κατανομής: Έστω τρεις ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, X_3$  που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέσους όρους  $1/\lambda = \{0.5, 1.5, 4\}$ . Να σχεδιάσετε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων αυτών μεταβλητών σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι 8 (Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την εντολή  $k = 0:0.00001:8$  σε συνδυασμό με την εντολή `plot()`). Έτσι, μπορείτε να προσεγγίσετε τη συνεχή εκθετική κατανομή ως μία διακριτή με πολύ μικρό σφάλμα).

B) Συνδυασμός εκθετικών κατανομών: Σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $X = \min(X_1, X_2, X_3)$  και των  $X_1, X_2, X_3$ , όπου  $X_1, X_2, X_3$  ορίζονται όπως στο ερώτημα A. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τη μέση τιμή της εκθετικής κατανομής;

Γ) Απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής: Έστω η συνεχής τ.μ.  $X$  που ακολουθεί την Εκθετική Κατανομή με  $1/\lambda = 2.5$  sec, να υπολογίσετε τις πιθανότητες  $\Pr(X > 20000)$  και  $\Pr(X > 45000 | X > 25000)$ . Τι παρατηρείτε για τις δύο πιθανότητες; Γιατί συμβαίνει αυτό; Πώς ερμηνεύεται η παρατήρησή σας; (Επεξήγηση: οι τιμές 20000, 45000 και 25000 δηλώνουν τη θέση του σημείου στο διάνυσμα  $k = 0:0.00001:8$  που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενα ερωτήματα).

**Σημείωση:** Στην περίπτωση που ο υπολογιστής σας δεν μπορεί να επεξεργαστεί το μέγεθος του διανύσματος  $k = 0:0.00001:8$ , μπορείτε να κάνετε την άσκηση για το διάνυσμα  $k = 0:0.0001:8$ .

### **Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson**

A) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson  $N(t)$ : Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθούν οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων διαδικασίας Poisson με ρυθμό  $\lambda$ ; Να δημιουργήσετε με την εντολή `exprnd()` 100 διαδοχικά τυχαία γεγονότα και να σχεδιάσετε (συνάρτηση stairs) μία διαδικασία καταμέτρησης Poisson. Θεωρήστε  $\lambda = 10$  γεγονότα/sec.

B) Μέσος αριθμός γεγονότων διαδικασίας Poisson με ρυθμό  $\lambda$  όπως στο ερώτημα A: Με χρήση των γεγονότων που δημιουργήσατε στο ερώτημα A, να βρείτε το μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα του χρόνου. Να επαναλάβετε τον ίδιο υπολογισμό, δημιουργώντας αυτή τη φορά (i) 200, (ii) 400, (iii) 700, (iv) 1000, (v) 5000, (vi) 50000, (vii) 100000 διαδοχικά τυχαία γεγονότα. Τι παρατηρείτε; Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθεί ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό

παράθυρο  $\Delta T = t_1 - t_2$ ; Να υπολογίσετε θεωρητικά το μέσο συνολικό αριθμό γεγονότων σε δύο μη υπέρ-καλυπτόμενα χρονικά διαστήματα διάρκειας 5 sec και 10 sec αντίστοιχα.

**Για απορίες να στέλνετε στο [queuing@netmode.ntua.gr](mailto:queuing@netmode.ntua.gr)**