Συστήματα Αναμονής Άσκηση 2^{η}

Αυγερινός Πέτρος 03115074

Contents

1 Θεωρητική Μελέτη της ουράς M/M/1

1.1 Ερώτημα A

Η απαραίτητη συνθήκη για μία ουρά M/M/1 να είναι εργοδική είναι η ένταση κυκλοφορίας $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Η ένταση κυκλοφορίας εκφράζει την πιθανότητα να είναι απασχολημένη η μονάδα εξυπηρέτησης.

Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, k \geq 1 \tag{1}$$

και

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \tag{2}$$

Για την ουρά M/M/1 ισχύει ότι $\lambda_k = \lambda, \mu_k = \mu, \forall k \geq 1$. Επομένως οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0 \tag{3}$$

και

$$P_k = \rho P_{k-1} = \rho^k P_0, k > 0 \tag{4}$$

Όμως η άθροιση των πιθανοτήτων πρέπει να είναι 1, δηλαδή:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = 1 \Rightarrow P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \rho \tag{5}$$

Επομένως προκύπτει η πιθανότητα P_k:

$$P_k = (1-\rho)\rho^k \tag{6}$$

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1 φαίνεται στο Σχήμα:

../Images/task1ask1.png

Figure 1: Διάγραμμα Ρυθμού Μεταβάσεων M/M/1

1.2 Ερώτημα Β

Για τον υπολογισμό του μέσου χρόνου καθυστέρησης στην ουρά M/M/1 χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$E(T) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} \tag{7}$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής είναι ίσος με:

$$E(W) = E(T) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \tag{8}$$

1.3 Ερώτημα Γ

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να υπάρχουν 3 τουλάχιστον πελάτες στο σύστημα θα εργαστούμε ως εξής:

$$P(N \geq 3) = \sum_{k=3}^{\infty} P_k = \sum_{k=3}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \tag{9}$$

Αυτή η πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί ως η εξής συμπληρωματική πιθανότητα:

$$P(N \geq 3) = 1 - P(N < 3) = 1 - P(N = 0) - P(N = 1) - P(N = 2) \tag{10}$$

Για ένα δεδομένο ρ όπου $\rho < 1$.

1.4 Ερώτημα Δ

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα με 107 πελάτες στην ουρά θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$P_{107} = (1-\rho)\rho^{107} \tag{11}$$

Για τιμές του ρ όπου $\rho \leq 1$ οι πιθανότητες είναι πολύ μικρές. Βέβαια όσο μεγαλώνει το ρ τόσο περισσότερο αυξάνεται και η πιθανότητα αυτή. Σαφώς για μικρά ρ η πιθανότητα είναι αμελητέα.

Για παράδειγμα:

1. Για $\rho = 0.1$ η πιθανότητα είναι $9.000000000000054e - 108$.
2. Για $\rho = 0.5$ η πιθανότητα είναι $3.0814879110195774e - 33$.
3. Για $\rho = 0.9$ η πιθανότητα είναι $1.270423474759657e - 06$.

2 Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

2.1 Ερώτημα Α

Για να είναι το σύστημα εργοδικό θα πρέπει να ισχύει ότι $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Γνωρίζουμε ότι το $\lambda =$ 10πελάτες/min ενώ το μ εκτείνεται σε εύρος τιμών από 0 έως 20 πελάτες ανά λεπτό. Επομένως αποδεκτές τιμές του μ είναι από 10 έως 20.

Άρα θα πρεπει $\mu > 10$.

2.2 Ερώτημα Β

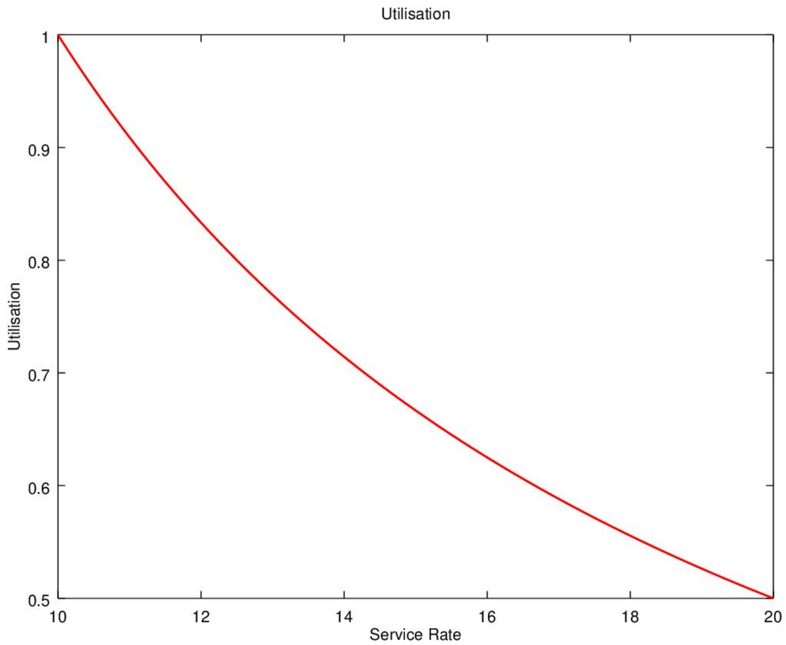
Θα κάνουμε χρήση της συνάρτησης qsmm1 του Octave για να λάβουμε όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την ουρά μας.

Ο κώδικας αρχικοποίησης της ουράς είναι ο εξής:

```
pkg load queueing;

lambda = 10;

mu = 10.0001 : 0.0001 : 20;

[U, R, Q, X, p0] = qsmm1(lambda, mu);

colors = "rgbm";
```

Για κάθε ένα από τα ζητούμενα της άσκησης έχουμε:

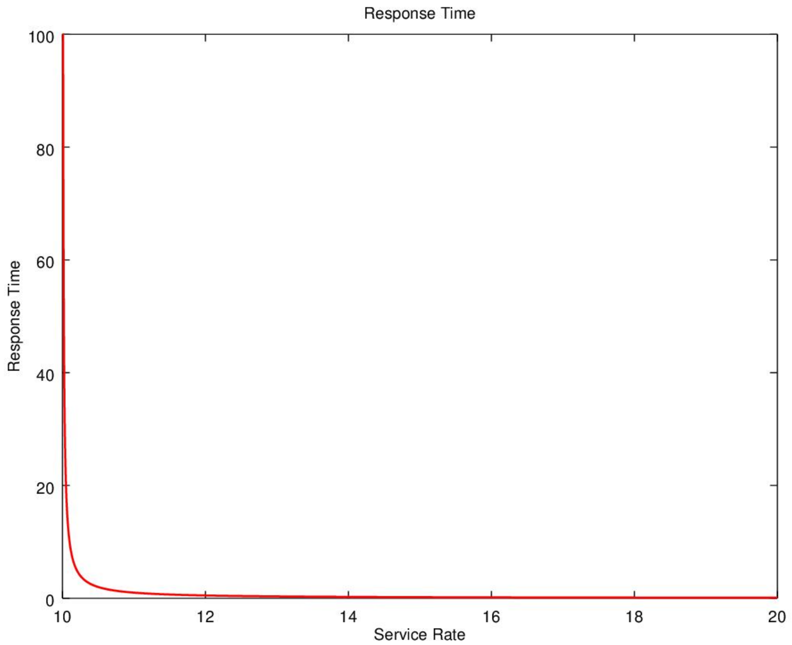
1. Σχετικά με το utilisation, το διάγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το παραπάνω διάγραμμα είναι ο εξής:

```
figure(1);
plot(mu,U,colors(1),'linewidth',1.2);
xlabel('Service Rate');
ylabel('Utilisation');
title('Utilisation');

print('-djpg', 'utilisation.jpg');
```

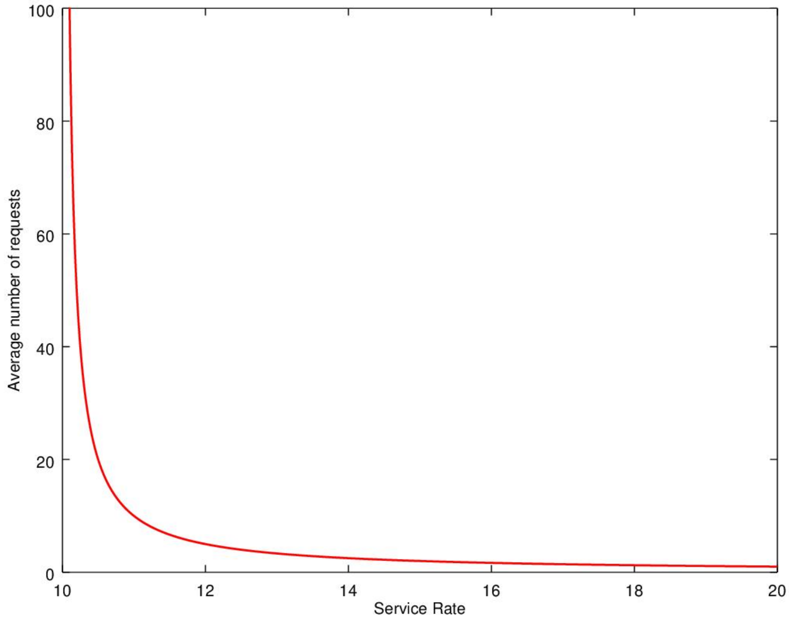
2. Σχετικά με το μέσο χρόνο καθυστέρησης, το διάγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το παραπάνω διάγραμμα είναι ο εξής:

```
figure(2);
plot(mu,R,colors(1),'linewidth',1.2);
ylim([0,100]);
xlabel('Service Rate');
ylabel('Response Time');
title('Response Time');

print('-djpg', 'responsetime.jpg');
```

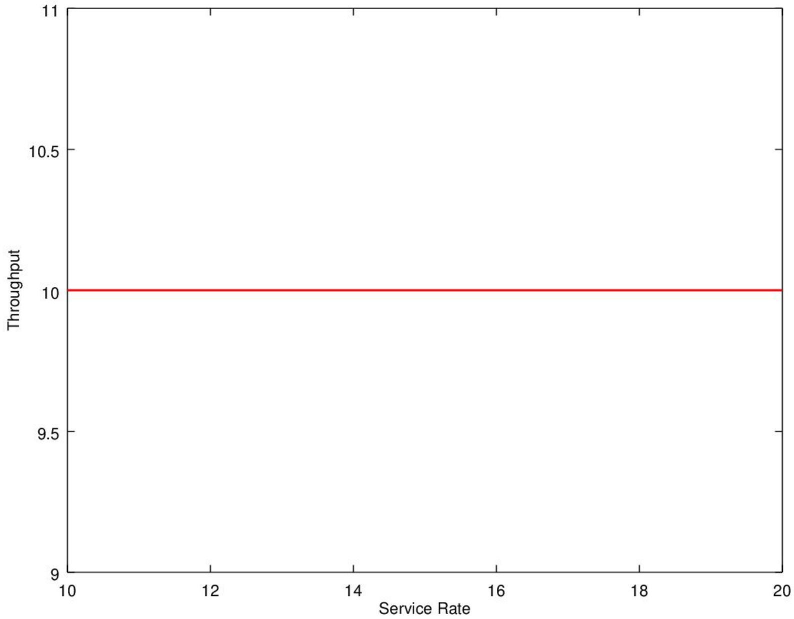
3. Σχετικά με το μέσο αριθμό των πελατών, το διάγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το παραπάνω διάγραμμα είναι ο εξής:

```
figure(3);
plot(mu,Q, colors(1),'linewidth',1.2);
ylim([0,100]);
xlabel('Service Rate');
ylabel('Average number of requests');

print('-djpg', 'average_n_requests.jpg');
```

4. Σχετικά με τη ρυθμαπόδοση, το διάγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το παραπάνω διάγραμμα είναι ο εξής:

```
figure(4);
plot(mu,X,colors(1), 'linewidth',1.2);
xlabel('Service Rate');
ylabel('Throughput');

print('-djpg', 'throughput.jpg');
```

2.3 Ερώτημα Γ

Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι αντιστρόφος ανάλογος του ρυθμού εξυπηρέτησης, επομένως για μεγάλα μ ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι μικρός. Η αύξηση του ρυθμού εξυπηρέτησης όμως απαιτεί σημαντική ποσότητα πόρων, επομένως η αύξηση του ρυθμού θα πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να μειωθεί ο χρόνος εξυπηρέτησεις αλλά να μην αυξηθούν σημαντικά οι ανάγκες της ουράς για πόρους. Επομένως από το διάγραμα θα επέλεγα το $\mu = 12$ για το οποίο υπάρχει ένας ανεπέστατος χρόνος εξυπηρέτησης. Αλλιώς μπορούμε να επιλέξουμε και την μέση λύση του $\mu = 15$.

2.4 Ερώτημα Δ

Το throughput στην ουρα παρατηρούμε ότι μένει σταθερό για όλες τις τιμές του μ. Αυτό συμβαίνει γιατί η ρυθμαπόδοση εξαρτάται από την παράμετρο λ και την πιθανότητα απώλειας η οποία είναι 0 σε μία M/M/1 ουρά η οποία έχει άπειρη χωρητικότητα.

3 Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K