ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Προχωρημένες Τεχνικές Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Άσκηση: Εκτίμηση Κατάστασης

1. Εκτίμηση Κατάστασης σε Ένα Μονοδιάστατο Σύστημα

Στο πρώτο μέρος της άσκησης αυτής θα εξετάσουμε την εκτίμηση κατάστασης ενός μονοδιάστατου συστήματος με χρήση των τεχνικών του φίλτρου Kalman και του φίλτρου σωματιδίων, καθώς και με μια πιο ακριβή Μπεϊζιανή τεχνική που είναι αριθμητικά διαχειρίσιμη μόνο για συστήματα χαμηλής τάξης.

1.1 Αναδρομική Μπεϊζιανή Εκτίμηση

Έστω ένα στοχαστικό σύστημα στη μορφή

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= f_k\left(x_k, w_k\right) \\
y_k &= h_k\left(x_k, v_k\right)
\end{aligned}
$$

για το οποίο υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τις κατανομές των διαταραχών και θορύβων w_k, v_k και ότι η κατανομή του x_0 είναι γνωστή και συμβολίζεται με $p(x_0)$. Μπορούμε να περιγράψουμε ισοδύναμα τη δυναμική και τις μετρήσεις ως εξής

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &\sim p\left(x_{k+1} \mid x_k\right) \\
y_k &\sim p\left(y_k \mid x_k\right)
\end{aligned}
$$

Εδώ το σύμβολο *p* έχει χρησιμοποιηθεί για να συμβολίσει την πυκνότητα πιθανότητας της πρώτης μεταβλητής δοσμένης της δεύτερης.

Θα υπολογίσουμε την κατανομή της πιθανότητας του x_k δοσμένων των μετρήσεων $y_0, \ldots, y_k$. Ας σημειώσουμε ότι το EKF καθώς και τα φίλτρα σωματιδίων προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα αυτό προσεγγιστικά. Οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν αναδρομικά ως εξής

$$
\begin{aligned}
& p\left(x_0\right): && \text{Γνωστό} \\
& p\left(x_{k+1} \mid y_{0:k}\right) = \int p\left(x_{k+1} \mid x_k\right) p\left(x_k \mid y_{0:k}\right) dx_k && \text{Ολική Πιθανότητα} \\
& p\left(x_{k+1} \mid y_{0:k+1}\right) = \frac{p\left(y_{k+1} \mid x_{k+1}\right) p\left(x_{k+1} \mid y_{0:k}\right)}{\int p\left(y_{k+1} \mid x_{k+1}\right) p\left(x_{k+1} \mid y_{0:k}\right) dx_{k+1}} && \text{Κανόνας Bayes}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Όπου η δεύτερη σχέση είναι ο κανόνας της συνολικής πιθανότητας και η τρίτη σχέση ο κανόνας του Bayes. Εναλλακτικά η δεύτερη σχέση λέγεται βήμα πρόβλεψης και η τρίτη βήμα διόρθωσης. Οι σχέσεις αυτές, αν και μαθηματικά ακριβείς, δεν μπορούν να υλοποιηθούν υπολογιστικά στη γενική περίπτωση. Δύο ειδικές περιπτώσεις που μπορούν να γίνουν οι υπολογισμοί αναλυτικά είναι τα γραμμικά συστήματα με Γκαουσιανό θόρυβο, κάτι που οδηγεί στο φίλτρο Kalman, και τα συστήματα με πεπερασμένο χώρο κατάστασης (κρυφά μαρκοβιανά μοντέλα, HMMs). Έτσι για μη γραμμικά συστήματα καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές τεχνικές των EKFs, UKFs και Particle Filters.

Στην επόμενη υπο-ενότητα θα εξετάσουμε την εφαρμογή των σχέσεων (1) με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης, και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τις προσεγγιστικές τεχνικές EKF και PF.

1.2 Σύστημα Διάστασης 1

Θεωρήστε το σύστημα με εξισώσεις κατάστασης

$$x_{k+1} = 0.5x_k + \beta \frac{x_k}{1+x_k^2} + 8\cos(1.2k) + w_k$$

$$y_k = \alpha x_k + \frac{x_k^2}{20} + v_k$$

όπου x_0, w_k, v_k Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και διακυμάνσεις $E\left[x_0^2\right] = E\left[v_0^2\right] = 1, E\left[w_0^2\right] = 10$.

Παρατηρήστε ότι για μεγάλες τιμές του *α* και μικρές τιμές του *β* το σύστημα και η μέτρηση πλησιάζουν σε γραμμικά.

Ερώτηση 1. Υλοποιήστε ένα Μπεϊζιανό αναδρομικό φίλτρο με αριθμητική ολοκλήρωση. Πειραματιστείτε με διάφορα ζευγάρια τιμών (περιλαμβανομένων και των $\alpha = 3, \beta = 5,$ και $\alpha = 0, \beta = 25$). Μπορείτε να επεξεργαστείτε τα αρχεία *data_generation.m* και *Bayesian_Filter1d_TO_Complete.m*. Σε ποιο βαθμό μοιάζουν η posterior κατανομές με Gaussian?

Ερώτηση 2. Υλοποιήστε ένα EFK για το ίδιο σύστημα. Τι παρατηρείτε.

Ερώτηση 3. Υλοποιήστε ένα Particle Filter και σχολιάστε τη συμπεριφορά του για διαφορετικό αριθμό σωματιδίων. Πόσο μοιάζει η κατανομή που υπολογίζει το Particle Filter με αυτή του Μπεϊζιανού φίλτρου;

Ερώτηση 4. Υλοποιήστε το ίδιο φίλτρο χωρίς Resampling. Τι παρατηρείτε;

Ερώτηση 5. Το Μπεϊζιανό φίλτρο και το φίλτρο σωματιδίων υπολογίζουν κατανομές. Με ποιο τρόπο θα κατασκευάζατε μια σημειακή εκτίμηση;

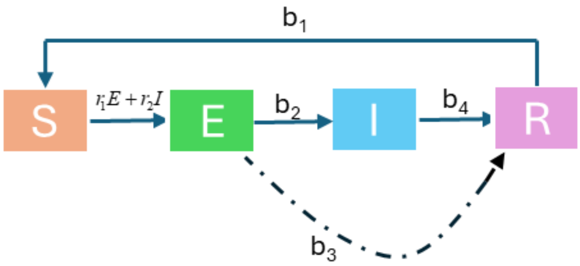
Ερώτηση 6. Εκτιμήστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των τριών εκτιμητών. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα δίνεται από

$$\mathrm{MSE} = \sum_{k=1}^{N} \left\| x_k - \hat{x}_k \right\|^2$$

2. Εκτίμηση Εξέλιξης Μιας Επιδημίας

Στο μέρος αυτό της άσκησης θεωρούμε ένα μοντέλο εξέλιξης μιας επιδημίας σε ένα πληθυσμό. Το μοντέλο που θα περιγράψουμε ανήκει στην κατηγορία των Compartmental Models [1] και έχουν γίνει πολλές απλουστευτικές υποθέσεις.

Ο συνολικός πληθυσμός χωρίζεται σε επίνοσους (S), εκτεθειμένους (E) που έχουν έρθει σε επαφή αλλά δεν έχουν εμφανίσει συμπτώματα, αυτούς που εμφανίζουν συμπτώματα (I), και τέλος αυτούς που έχουν ανοσία (R). Σχηματικά η δυναμική δίνεται στην ακόλουθη εικόνα.



Οι εξισώσεις δίνονται από

$$S_{k+1} = S_k - \delta t\left(r_1 S_k E_k - r_2 S_k I_k\right) w_k^1 + \delta t b_1\left(1 - S_k - E_k - I_k\right) w_k^2$$
$$E_{k+1} = E_k + \delta t\left(r_1 S_k E_k - r_2 S_k I_k\right) w_k^1 - \left(b_2 + b_3\right) E_k w_k^2$$
$$I_{k+1} = I_k + \delta t\left(b_2 E_k - b_4 I_k\right) w_k^3$$
$$y_k = \left(0.2 E_k + I_w\right) w_k^4$$

Εδώ υποθέσαμε ότι ο συνολικός πληθυσμός έχει μάζα *1.* Οι επίνοσοι *S* προσβάλλονται ανάλογα με το ρυθμό που συναντούν εκτεθειμένους *E* και συμπτωματικούς *I*. Ο τρίτος όρος της πρώτης εξίσωσης παριστάνει το σύνολο όσων είχαν ανοσία αλλά λόγω της παρέλευσης μεγάλου χρονικού διαστήματος τη χάνουν. Η δεύτερη εξίσωση ασχολείται με την εξέλιξη του πληθυσμού *E*. Υποθέτουμε ότι όλοι όσοι προσβάλλονται μπαίνουν στην κατηγορία *E* και στη συνέχεια είτε θα αποκτήσουν συμπτώματα (*I*) ή θα αποκτήσουν απευθείας ανοσία (*R*). Όσοι έχουν συμπτώματα αποκτούν ανοσία με ρυθμό b_4.

Η μέτρησή μας κάθε χρονική στιγμή είναι y_k.

Τα $w_k^1,\ldots,w_k^4$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες υποθέτουμε ότι ακολουθούν την log-normal κατανομή [2]. Δηλαδή για το w_k^l υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή n_k^l με κανονική κατανομή και $w_k^l = \exp\left(n_k^i\right)$. Δίνεται ότι όταν η n_k^l έχει κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $w_k^l = \exp\left(n_k^i\right)$ είναι

$$f_{w_k^i}\left(z\right) = \frac{1}{z\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\ln z - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right),$$

και ο μέσος της είναι $\exp\left(\mu + \sigma^2/2\right)$.

Θεωρήστε τις παραμέτρους $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.3$, $b_1 = 0.005$, $b_2 = 0.1$, $b_3 = 0.05$, $b_4 = 0.2$, $\delta t=1$. Οι κατανομές των τυχαίων μεταβλητών είναι $n_k^1 \sim N\left(0, 0.5\right)$, και $n_k^2, n_k^3, n_k^4 \sim N\left(0, 0.3\right)$.

Ερώτηση 7. Σχεδιάστε ένα Particle φίλτρο για την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος.

Ερώτηση 8 (Προαιρετική). Πώς μπορείτε να προβλέψετε την εξέλιξη της επιδημίας 10 βήματα στο μέλλον;

Αναφορές

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution