Βέλτιστη Εκτίμηση Κατάστασης

ΙΙ. Μη γραμμικά Φίλτρα

Υποθέσεις Φίλτρου Kalman

- Σύστημα είναι γραμμικό
- Οι θόρυβοι και οι διαταραχές έχουν κανονική κατανομή
- Η αρχική κατάσταση κατανέμεται κανονικά

Αν ισχύουν όλα αυτά τότε η posterior κατανομή του x_k δοσμένων των μετρήσεων **είναι** κανονική με γνωστή μέση τιμή και συν-διακύμανση

$$x_k \mid y_{0:k} \sim N\left(\hat{x}_k, P_{x_k}\right)$$

Όταν δεν ισχύουν οι υποθέσεις .. θα δουλέψουμε προσεγγιστικά

Περιεχόμενα

Extended Kalman Filter (EKF)

Unscented Kalman Filter

Particle Filter

Extended Kalman Filter (EKF)

Extended Kalman Filter (EKF)

Ελαφρά μη-γραμμικά συστήματα

$$x_{k+1} = f\left(x_k, u_k\right) + w_k$$
$$y_k = h\left(x_k\right) + v_k$$

Στόχος: Εκτίμηση της κατάστασης δοσμένων των μετρήσεων

Υπόθεση: Στο βήμα *k* η κατανομή της κατάστασης x_k δοσμένων των μετρήσεων $y_0, \ldots, y_k$ είναι Gaussian

$$x_k \mid y_{0:k} \sim N\left(\hat{x}_k, P_{x_k}\right)$$

Extended Kalman Filter (EKF)

Ελαφρά μη-γραμμικά συστήματα

$$x_{k+1} = f\left(x_k, u_k\right) + w_k$$
$$y_k = h\left(x_k\right) + v_k$$

Στόχος: Εκτίμηση της κατάστασης δοσμένων των μετρήσεων

Υπόθεση: Στο βήμα k η κατανομή της κατάστασης x_k δοσμένων των μετρήσεων $y_0, \ldots, y_k$ είναι Gaussian

$$x_k \mid y_{0:k} \sim N\left(\hat{x}_k, P_{x_k}\right)$$

Ιδέα: Θα προσεγγίσουμε το $x_{k+1}|y_0,\ldots,y_{k+1}$ σαν να ήταν Gaussian

Extended Kalman Filter (EKF)

Prediction Step: <u>Προσεγγίζουμε</u> την $x_{k+1}|y_{0:k}$ από μια κανονική κατανομή

$$x_{k+1} \mid y_{0:k} \sim N\left(f\left(\hat{x}_k, u_k\right), P^-_{x_{k+1}} \right) \qquad x^-_{k+1} = f\left(\hat{x}_k, u_k\right)$$

Η αναμενόμενη τιμή είναι ο μη γραμμικός μετασχηματισμός του $\hat{x}_k$

Η συν-διακύμανση?

Extended Kalman Filter (EKF)

Prediction Step: Προσεγγίζουμε την $x_{k+1} | y_{0:k}$ από μια κανονική κατανομή

$$x_{k+1} \mid y_{0:k} \sim N\left(f\left(\hat{x}_k, u_k\right), P^-_{x_{k+1}} \right) \qquad x^-_{k+1} = f\left(\hat{x}_k, u_k\right)$$

Η αναμενόμενη τιμή είναι ο μη γραμμικός μετασχηματισμός του

Η συν-διακύμανση? Κοντά στο μέσο η *f* είναι προσεγγιστικά γραμμική

Jacobian

$$f\left(x,u\right) \simeq f\left(\hat{x},u\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(\hat{x},u\right)} \left(x-\hat{x}\right) = f\left(\hat{x},u\right) + A_k \left(x-\hat{x}\right)$$

Έτσι προσεγγιστικά η συν-διακύμανση γίνεται

$$P^-_{x_{k+1}} = A_k P_{x_k} A_k^T + Q$$

Extended Kalman Filter (EKF)

Correction step

$$y_{k+1}^{-} = h\left(x_{k+1}^{-}\right) = h\left(f\left(\hat{x}_k, u_k\right)\right)$$

$$C_{k+1} = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\hat{x}_{k+1}^{-}}$$

$$P_{y_{k+1}^{-}} = C_{k+1} P_{x_{k+1}^{-}} C_{k+1}^{T} + R$$

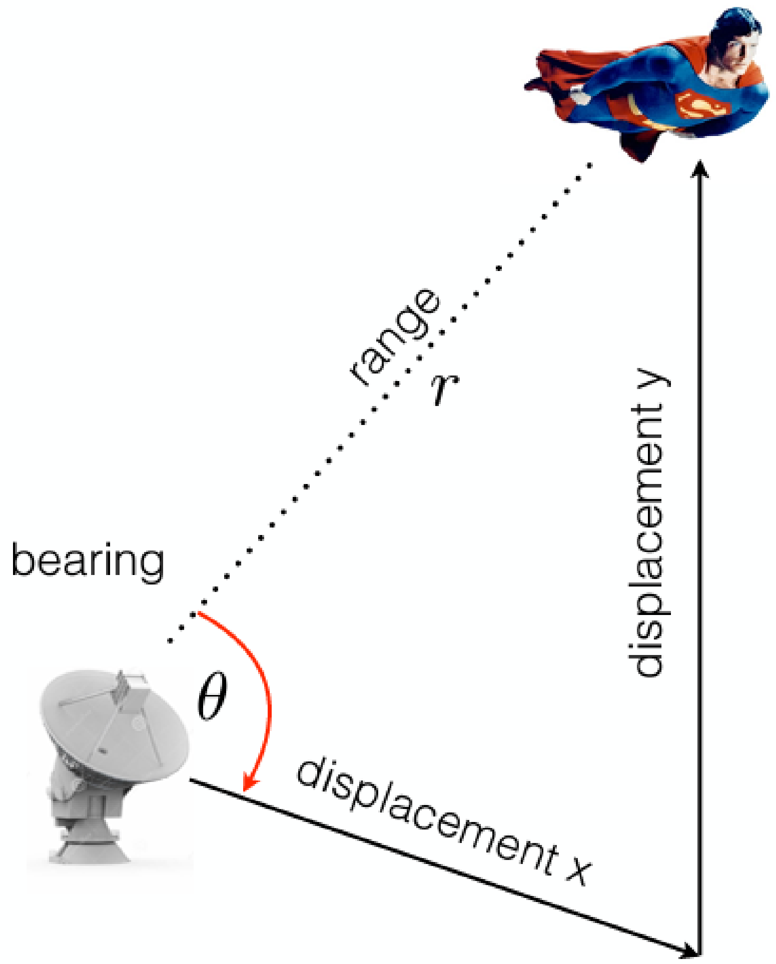
$$P_{x_{k+1}y_{k+1}}^{-} = P_{x_{k+1}}^{-} C_{k+1}^{T}.$$

$$x_{k+1}^{-} = f\left(\hat{x}_k, u_k\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_{k+1} &= P_{x_{k+1}y_{k+1}}^{-} P_{y_{k+1}}^{-1}. \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^{-} + K_{k+1}\left(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^{-}\right), \\ P_{x_{k+1}} &= P_{x_{k+1}}^{-} - K_{k+1} P_{y_{k+1}}^{-} K_{k+1}^{T}. \end{aligned}}$$

Όπως πριν !

Παράδειγμα από https://www.cs.cmu.edu/~16385/s17/



state: position-velocity

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{position} \\ \text{velocity} \\ \text{position} \\ \text{velocity} \end{array}$$

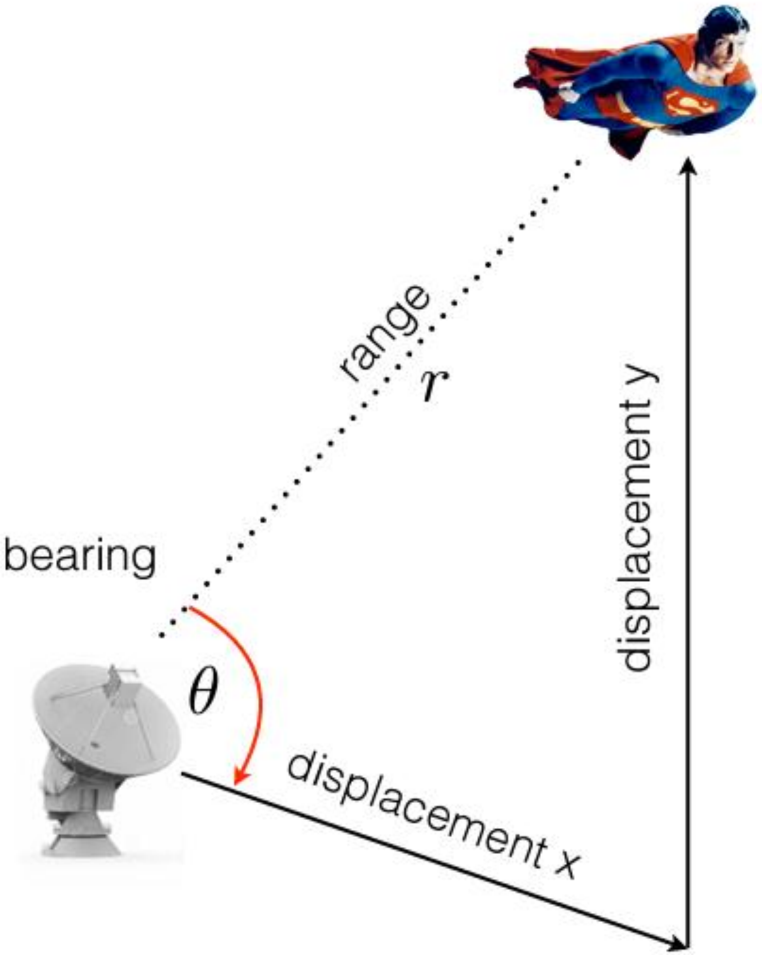
constant velocity motion model

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

with additive Gaussian noise

Slides from https://www.cs.cmu.edu/~16385/s17/

Motion model is linear but …



measurement: range-bearing

$$z = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}(y/x) \end{bmatrix}$$

measurement model

Is the measurement model linear?

$$z = h(r, \theta)$$

with additive Gaussian noise

Slides from https://www.cs.cmu.edu/~16385/s17/

linearize the observation/measurement model!

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}(y/x) \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}} = ?$$

What is the Jacobian?

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ -sin(\theta)/r & 0 & \cos(\theta)/r & 0 \end{bmatrix}$$

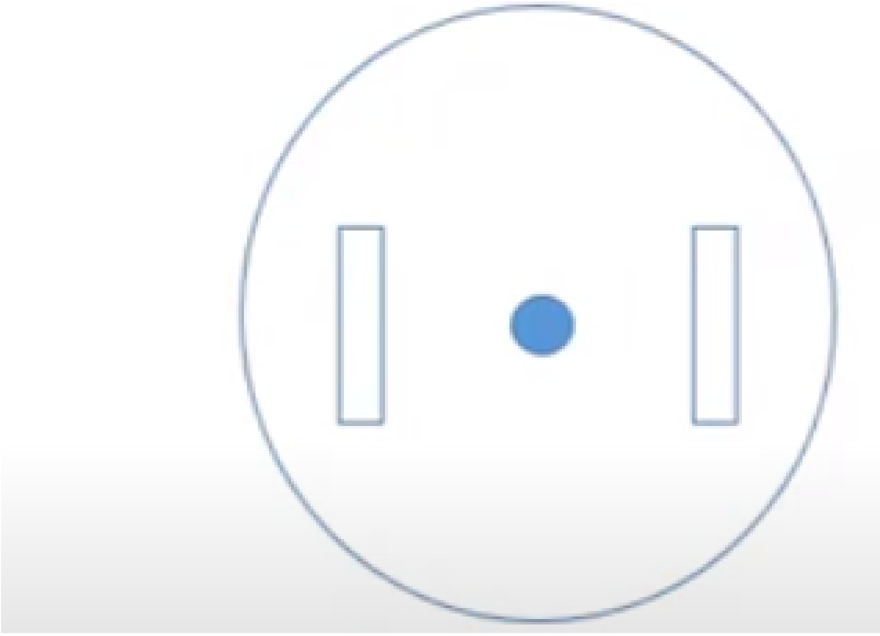
Slides from https://www.cs.cmu.edu/~16385/s17/

Παράδειγμα: Sensor Fusion

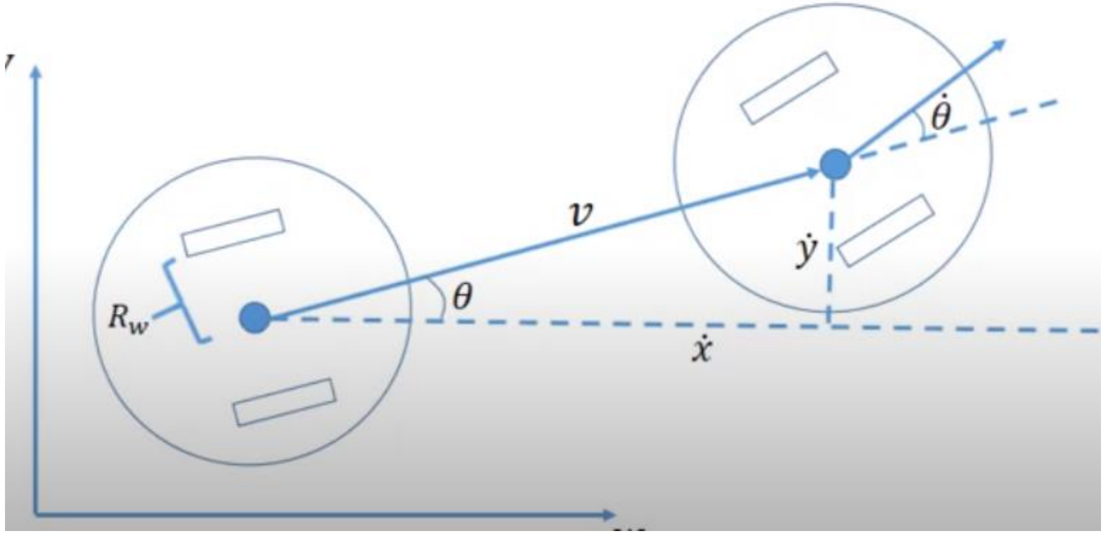
Ρομπότ με δύο ρόδες

Εξισώσεις κατάστασης

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + \delta t \cdot v_k \cos\theta_k \\ y_k + \delta t \cdot v_k \sin\theta_k \\ \theta_k + \delta t \cdot \alpha\left(v_k^r - v_k^l\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k^1 \\ w_k^2 \\ w_k^3 \end{bmatrix}, \qquad v_k = \frac{v_k^l + v_k^r}{2}$$



Γιατί μπορεί να έχω διαταραχές ;



Πιθανοί αισθητήρες

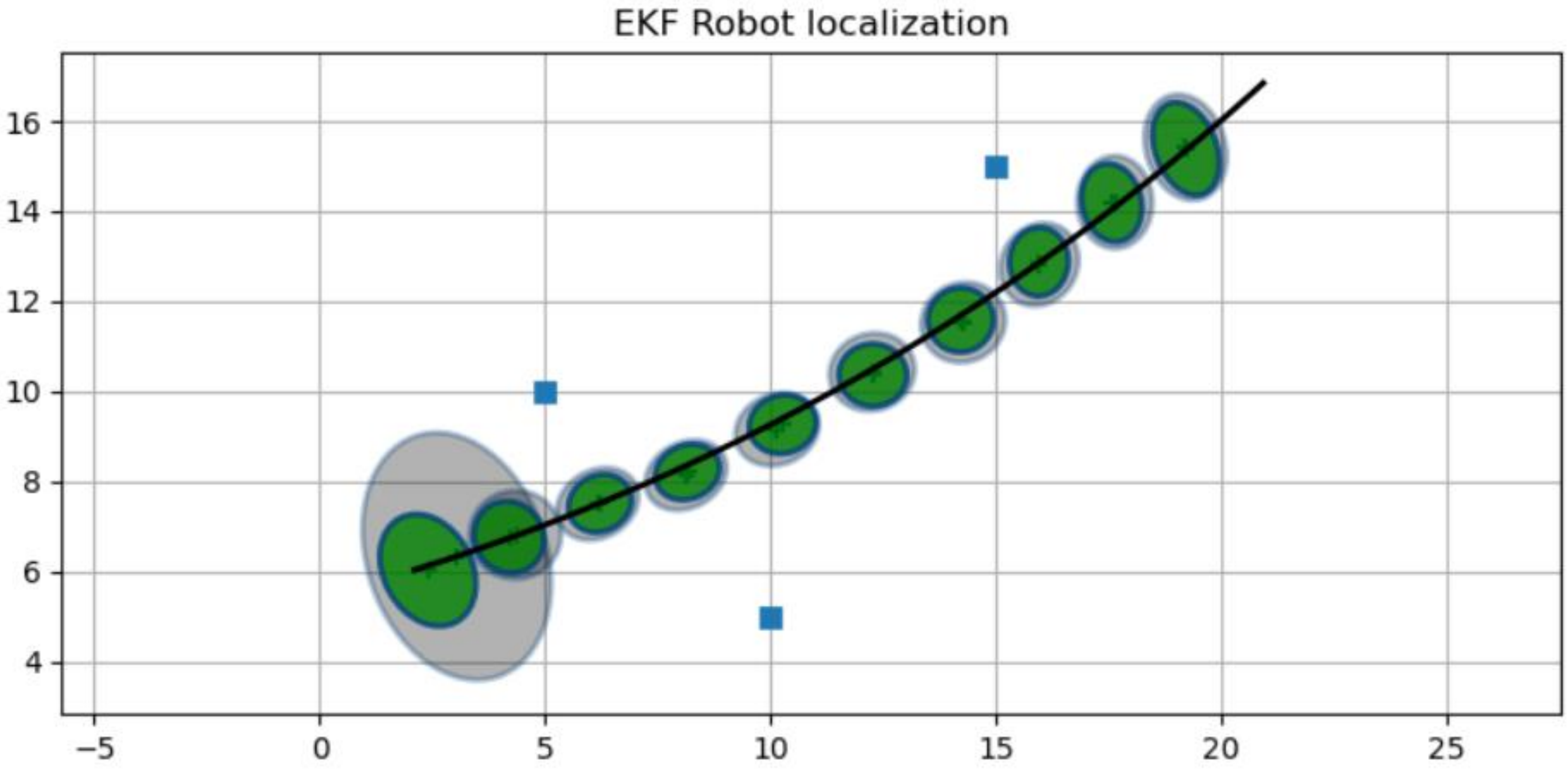
- Odometry
- Inertial measurement unit
- GPS
- Optical

Example: Sensor Fusion

Γραμμικοποίηση

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta t \cdot v_k \cos \hat{\theta}_k \\ 0 & 1 & \delta t \cdot v_k \sin \hat{\theta}_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα EKF



https://github.com/rlabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python/blob/master/11-Extended-Kalman-Filters.ipynb

Sigma Point Filters

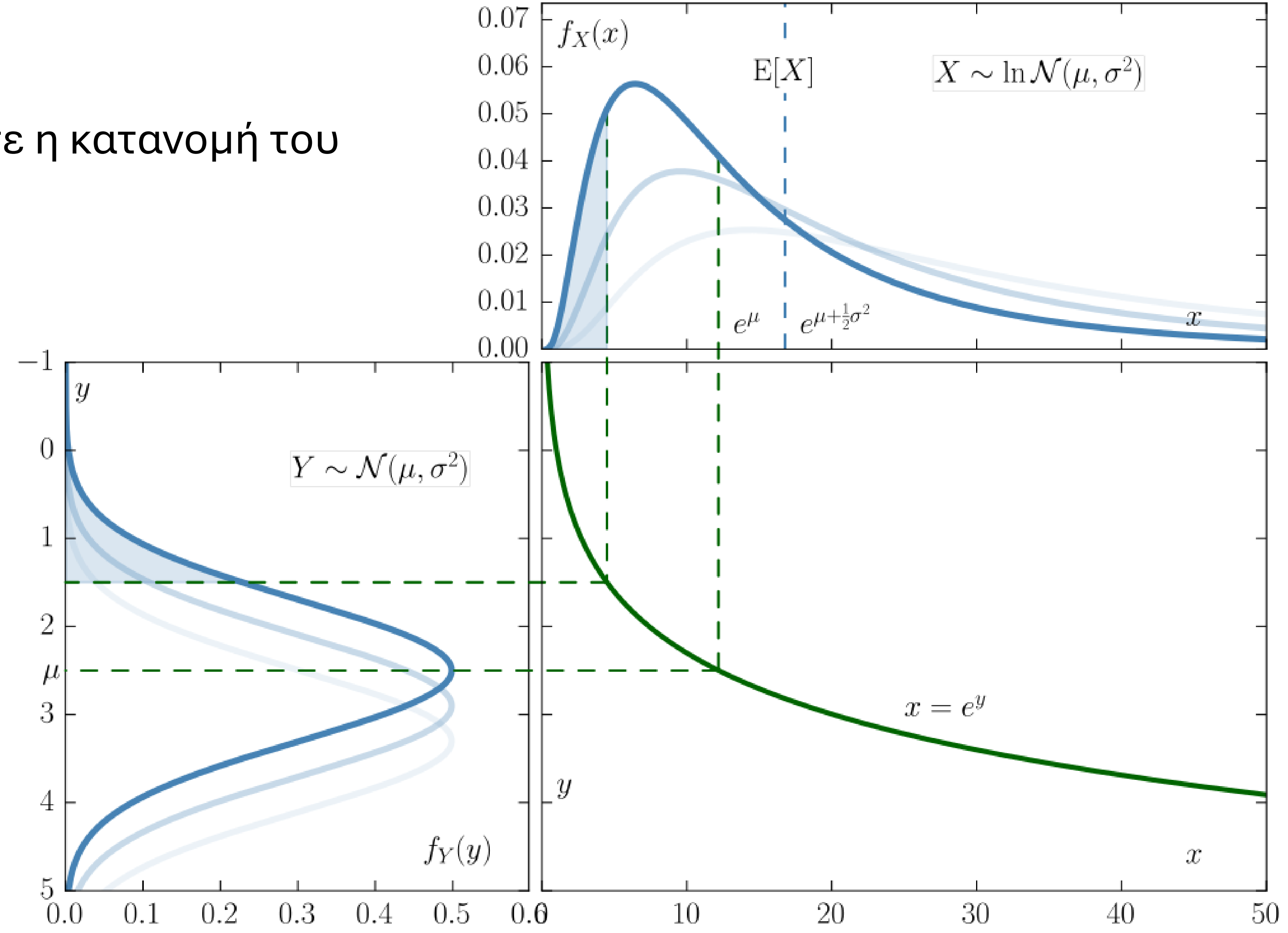
Μετασχηματισμός μιας Gaussian

Αν η *f* είναι πολύ μη γραμμική τότε η κατανομή του *f*(*x*) δεν είναι κοντά σε κανονική

Παράδειγμα *f*(*x*) = exp(*x*).

Το **μέσο** δεν απεικονίζεται κοντά στο **μέσο** !

$$\exp\left[E\left[Y\right]\right] \neq E\left[\exp\left(Y\right)\right]$$



Sigma Point Kalman Filters

Πρόβλημα EKF

Ακόμα κι αν τα x_k και w_k είναι gaussian, η επόμενη κατάσταση $f(x_k) + w_k$ δεν είναι.
Θα την προσεγγίσουμε με gaussian
Ποια είναι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της;

Sigma Point Kalman Filters

Πρόβλημα EKF

Ακόμα κι αν τα x_k και w_k είναι gaussian, η επόμενη κατάσταση $f(x_k) + w_k$ δεν είναι.

Αν έχουμε έντονη μη γραμμικότητα τα χαρακτηριστικά που υπολογίζουμε για την $f(x_k) + w_k$ με τη γραμμικοποίηση δεν είναι σωστά!

Sigma Point Kalman Filters

Πρόβλημα EKF

Ακόμα κι αν τα x_k και w_k είναι gaussian, η επόμενη κατάσταση $f(x_k) + w_k$ δεν είναι.
Ποια είναι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της; Μέσος και Συν-δικύμανση ;

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k$$
$$y_k = h(x_k) + v_k$$

A-priori mean

$$\hat{x}_{k+1}^- = E\left[x_{k+1} \mid y_{0:k}\right] = E\left[f(x_k) \mid y_{0:k}\right]$$

A-priori covariance

$$P_{x_{k+1}}^- = E\left[\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\right)\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\right)^T \mid y_{0:k}\right]$$
$$= E\left[\left(f(x_k) + w_k - \hat{x}_{k+1}^-\right)\left(f(x_k) + w_k - \hat{x}_{k+1}^-\right)^T \mid y_{0:k}\right] = E\left[f(x_k)\, f(x_k)^T \mid y_{0:k}\right] - \hat{x}_{k+1}^-\left(\hat{x}_{k+1}^-\right)^T + Q$$

Sigma Point Kalman Filters

Πρόβλημα EKF

Ακόμα κι αν τα x_k και w_k είναι gaussian, η επόμενη κατάσταση $f\,(x_k) + w_k$ δεν είναι.
Ποια είναι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της;

A-priori mean

$$\hat{x}_{k+1}^{-} = E\left[x_{k+1} \mid y_{0:k}\right] = E\left[\,f\left(x_k\right) \mid y_{0:k}\right] \longrightarrow E\left[g\left(X\right)\right]: \quad X \text{ approximately Gaussian}$$

A-priori covariance

$$P_{x_{k+1}}^{-} = E\left[\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^{-}\right)\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^{-}\right)^{T} \mid y_{0:k}\right]$$

$$= E\left[\left(f\left(x_k\right) + w_k - \hat{x}_{k+1}^{-}\right)\left(f\left(x_k\right) + w_k - \hat{x}_{k+1}^{-}\right)^{T} \mid y_{0:k}\right] = \overbrace{E\left[\,f\left(x_k\right) f\left(x_k\right)^{T} \mid y_{0:k}\right]} - \hat{x}_{k+1}^{-}\left(\hat{x}_{k+1}^{-}\right)^{T} + Q$$

Sigma Point Kalman Filters

Παρόμοια, για τα $P_{y_{k+1}^-}, P_{x_{k+1}, y_{k+1}}$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε

$$E\left[g\left(X\right)\right]: \quad X \sim N\left(\mu, \Sigma\right)$$

Sigma Point Kalman Filters

Παρόμοια, για τα $P_{y_{k+1}^{-}}, P_{x_{k+1}, y_{k+1}}$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε

$$E\left[g\left(X\right)\right]: \quad X \sim N\left(\mu, \Sigma\right)$$

Πώς θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα στη μορφή

$$E\left[g\left(X\right)\right] = \frac{1}{C}\int g\left(x\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x-\mu\right)^{T}\Sigma^{-1}\left(x-\mu\right)\right)dx$$

Sigma Point Kalman Filters

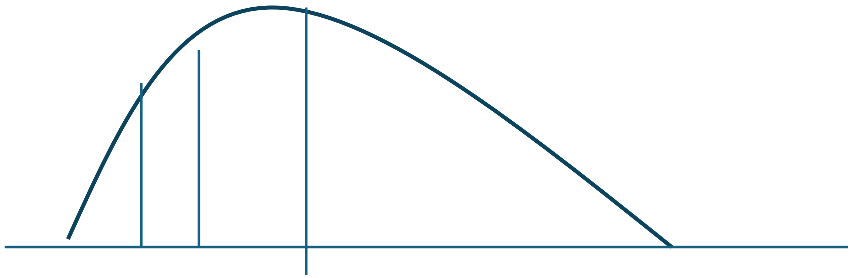
Παρόμοια, για τα $P_{y_{k+1}^-}, P_{x_{k+1},y_{k+1}}$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε

$$E\left[g\left(X\right)\right]: \quad X \sim N\left(\mu,\Sigma\right)$$

Πώς θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα στη μορφή

$$E\left[g\left(X\right)\right]=\frac{1}{C}\int g\left(x\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x-\mu\right)^{T}\Sigma^{-1}\left(x-\mu\right)\right)dx$$

Σε χαμηλή διάσταση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμητική ολοκλήρωση (π.χ. κανόνα τραπεζίου), αλλά..



Sigma Point Kalman Filters

Παρόμοια, για τα $P_{y_{k+1}^{-}}, P_{x_{k+1}, y_{k+1}}$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε

$$E\left[g\left(X\right)\right]: \quad X \sim N\left(\mu, \Sigma\right)$$

Πώς θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα στη μορφή

$$E\left[g\left(X\right)\right] = \frac{1}{C}\int g\left(x\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x-\mu\right)^{T}\Sigma^{-1}\left(x-\mu\right)\right)dx$$

Σε χαμηλή διάσταση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμητική ολοκλήρωση (π.χ. κανόνα τραπεζίου), αλλά..

Σε υψηλότερη διάσταση προσέγγιση με σ-points

$$E\left[g\left(X\right)\right] \simeq \sum_{i=1}^{l} W_l g\left(\chi_i\right): \qquad \chi_i: \text{samples} \quad W_i: \text{weights},$$

Προσεγγιστική Ολοκλήρωση με σ-Points

Cholesky Decomposition

Για το ολοκλήρωμα

$$E\left[g(X)\right]=\frac{1}{C}\int g(x)\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)dx$$

Ο Σ είναι θετικά ορισμένος. Άρα υπάρχει πίνακας S έτσι ώστε $\Sigma = SS^T$

$$\xi \sim N(0,I) \Rightarrow \mu + S\xi \sim N\left(\mu, SIS^T\right) = N(0,\Sigma)$$

συμβολίζουμε $S=\Sigma^{1/2}$

Έτσι αρκεί να υπολογίσουμε

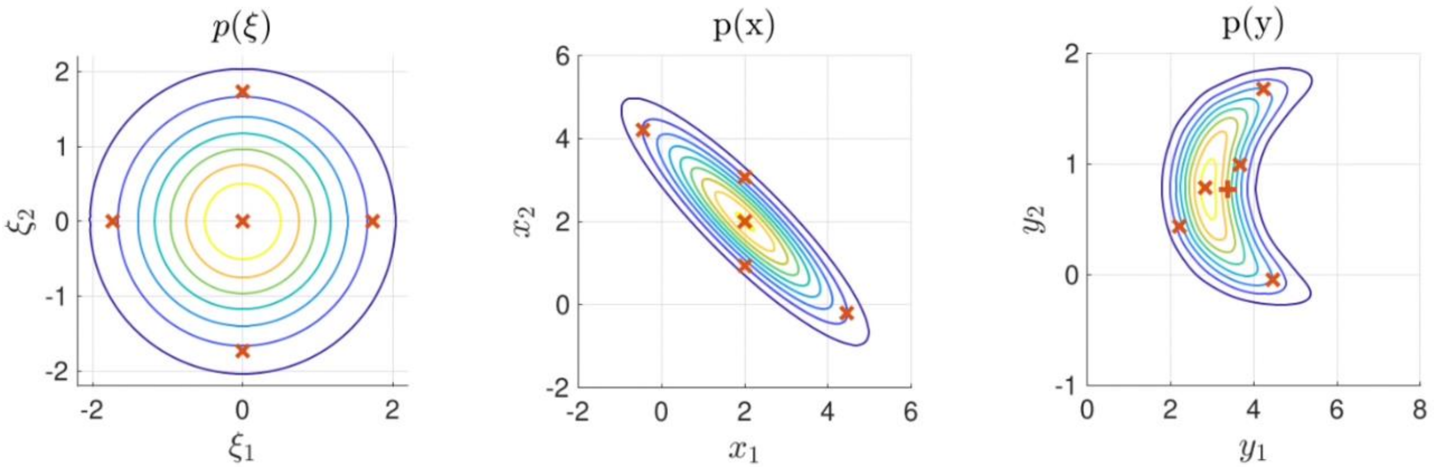
$$E\left[g(\mu+S\xi)\right]=\frac{1}{C}\int g(\mu+S\xi)\exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right)d\xi$$

Προσεγγιστική Ολοκλήρωση με σ-Points: Παράδειγμα

Θέλουμε να υπολογίσουμε

$$E[Y], \text{ where } Y = g(X)$$

Illustration from
[Hammarstrand's lectures]()



$$E[g(X)] \simeq \sum_{i=1}^{l} W_l g(\chi_i):$$

χ_i : samples W_i: weights,

$$E[g(\mu + S\xi)] = \frac{1}{C}\int g(\mu + S\xi)\exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right)d\xi$$

Προσεγγιστική Ολοκλήρωση με σ-Points

<u>Unscented Transformation:</u>

$$E\left[g\left(X\right)\right] \simeq \sum_{i=1}^{l} W_l g\left(\chi_i\right):$$ χ_i : samples W_i: weights,

Όπου

$$\chi_0 = \mu$$

$$\chi_i = \mu + \sqrt{\frac{n}{1-W_0}} S_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\chi_i = \mu - \sqrt{\frac{n}{1-W_0}} S_i, \qquad i = n+1, \ldots, 2n$$

$$W_0$$

$$W_i = \frac{1-W_0}{2n}$$

$$S = \sqrt{\Sigma}$$

$$\left(\Sigma = SS^T\right)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} W_i \delta_{\chi_i}$$

Unscented Transformation: Illustration

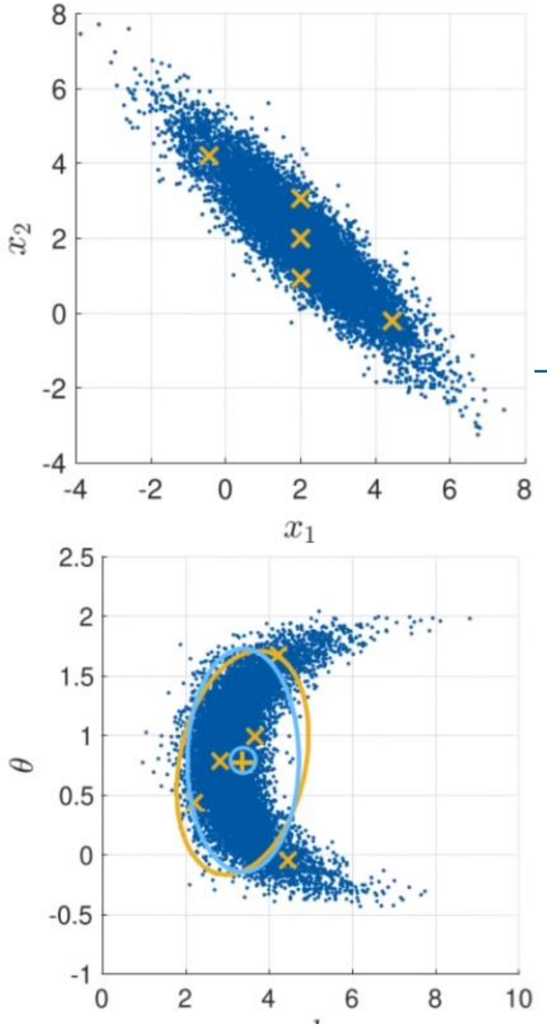
UT for polar measurements

- Consider again the example where

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1.8 \\ -1.8 & 2 \end{bmatrix}\right)$$



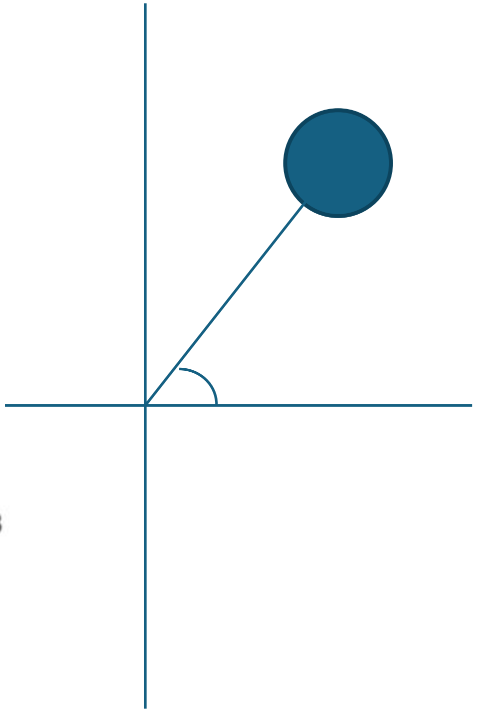


Illustration from
[Hammarstrand's lectures]

Unscented Kalman Filter

PREDICTION IN UKF

1. Form a set of $2n + 1$ σ-points

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{k-1}^{(0)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \\
\mathcal{X}_{k-1}^{(i)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \sqrt{\frac{n}{1 - W_0}} \left(\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{1/2}\right)_i, \quad && i = 1, 2, \ldots, n, \\
\mathcal{X}_{k-1}^{(i+n)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \sqrt{\frac{n}{1 - W_0}} \left(\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{1/2}\right)_i, \quad && i = 1, 2, \ldots, n, \\
W_i &= \frac{1 - W_0}{2n}, && i = 1, 2, \ldots, 2n.
\end{aligned}$$

2. Compute the predicted moments

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \approx \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) W_i$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} \approx \mathbf{Q}_{k-1} + \sum_{i=0}^{2n} (\mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\cdot)^T W_i$$

Unscented Kalman Filter

UPDATE IN UKF

1. Form a set of $2n+1$ σ-points

$$\mathcal{X}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad W_i = \frac{1-W_0}{2n}, \; i > 1,$$

$$\mathcal{X}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \sqrt{\frac{n}{1-W_0}} \left(\mathbf{P}_{k|k-1}^{1/2}\right)_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathcal{X}_k^{(i+n)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \sqrt{\frac{n}{1-W_0}} \left(\mathbf{P}_{k|k-1}^{1/2}\right)_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

2. Compute the desired moments

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \approx \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{(i)}) W_i$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{i=0}^{2n} \left(\mathcal{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}\right) \left(\mathbf{h}\left(\mathcal{X}_k^{(i)}\right) - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}\right)^T W_i$$

$$\mathbf{S}_k \approx \mathbf{R}_k + \sum_{i=0}^{2n} \left(\mathbf{h}\left(\mathcal{X}_k^{(i)}\right) - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}\right) (\cdot)^T W_i$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{S}_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{xy}\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{P}_{xy}^T. \end{cases}$$

Άλλες Τεχνικές

- Cubature:

  $W_0=0$

- Gauss Hermite: Πολλά σημεία σε κάθε διάσταση

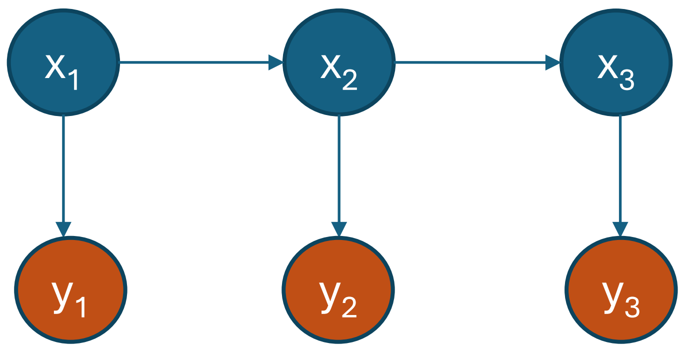
Εκτίμηση Κατάστασης σε Hidden Markov Models

The Filtering Problem for Hidden Markov Models

Σύστημα με διακριτό χώρο κατάστασης (HMM)

$$x_{k+1} = f\left(x_k, w_k\right)$$
$$y_k = h\left(x_k, v_k\right)$$

- Το x_k μπορεί να πάρει ένα πεπερασμένο σύνολο από τιμές {1,...,m}
- Ονομάζεται Αλυσίδα Markov
- Το y_k μπορεί να πάρει είτε συνεχείς η διακριτές τιμές



The Filtering Problem for Hidden Markov Models

Σύστημα με διακριτό χώρο κατάστασης (HMM)

$$x_{k+1} = f\left(x_k, w_k\right)$$
$$y_k = h\left(x_k, v_k\right)$$

- Για κάθε x_k υπάρχει μια σ.μ.π

$$P\left(x_{k+1} = j \mid y_0, \ldots, y_k\right) = \sum_{i=1}^{m} P\left(x_{k+1} = j \mid x_k = i, y_0, \ldots, y_k\right) P\left(x_k = i \mid y_0, \ldots, y_k\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} P\left(x_{k+1} = j \mid x_k = i\right) P\left(x_k = i \mid y_0, \ldots, y_k\right)$$

The Filtering Problem for Hidden Markov Models

Σύστημα με διακριτό χώρο κατάστασης (HMM)

$$x_{k+1} = f\left(x_k, w_k\right)$$
$$y_k = h\left(x_k, v_k\right)$$

- Όταν μετρήσουμε το y_{k+1} η εκ των υστέρων εκτίμηση του x_{k+1}, γίνεται

$$P\left(x_{k+1} = j \mid y_0, \ldots, y_{k+1}\right) = \frac{P\left(y_{k+1} \mid x_{k+1} = j, y_0, \ldots, y_k\right) P\left(x_{k+1} = j \mid y_0, \ldots, y_k\right)}{\sum_{i=1}^{m} P\left(y_{k+1} \mid x_{k+1} = i, y_0, \ldots, y_k\right) P\left(x_{k+1} = i \mid y_0, \ldots, y_k\right)}$$

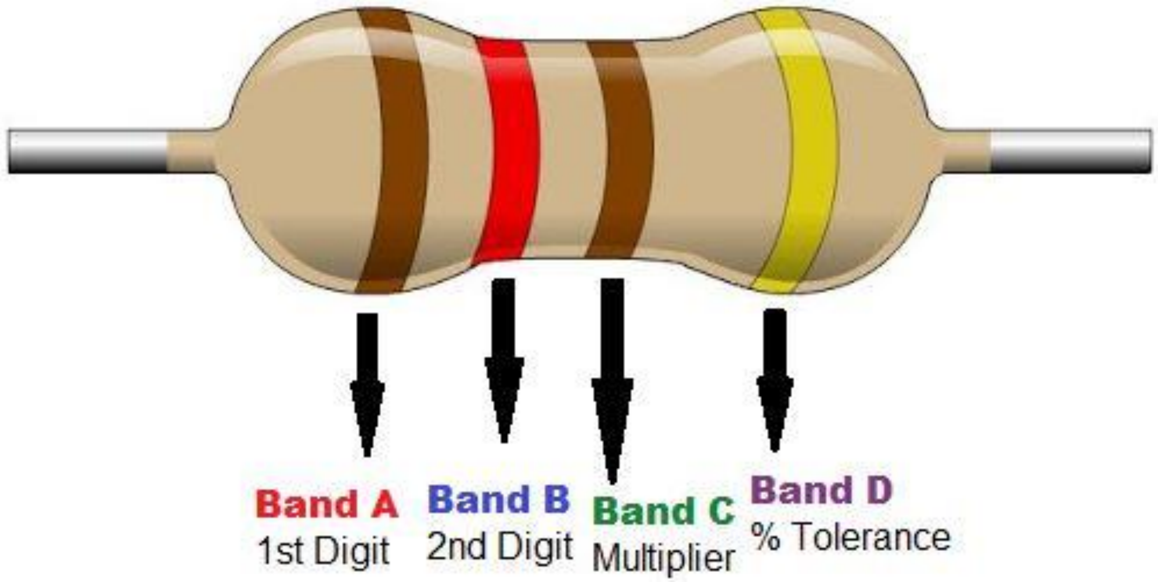
$$== \frac{P\left(y_{k+1} \mid x_{k+1} = j\right) P\left(x_{k+1} = j \mid y_0, \ldots, y_k\right)}{\sum_{i=1}^{m} P\left(y_{k+1} \mid x_{k+1} = i\right) P\left(x_{k+1} = i \mid y_0, \ldots, y_k\right)}$$

Παράδειγμα

Μια μηχανή παράγει αντιστάτες με ονομαστική αντίσταση *R*

Η μηχανή μπορεί να είναι σε μια από δύο καταστάσεις Proper (P) και non-proper (P’)

- Αν η μηχανή είναι στην κατάσταση *R* οι αντιστάτες που παράγει έχουν αντίσταση από με κατανομή $N(R,\sigma_1)$,
- Αλλιώς η κατανομή είναι $N(R,\sigma_2)$, με $\sigma_2>\sigma_1$.



Παράδειγμα

Η κατάσταση εξελίσσεται σύμφωνα με τη στοχαστική δυναμική

$$P(x_{k+1} = P \mid x_k = P) = 0.999, \qquad P(x_{k+1} = P' \mid x_k = P) = 0.001$$

$$P\left(x_{k+1} = P' \mid x_k = P'\right) = 1$$

$$y_k \sim N\left(R, \sigma\left(x_k\right)\right)$$

Θα εκτιμήσουμε την κατάσταση δοσμένων των μετρήσεων y_1 , … , y_k.

Παράδειγμα

Η κατάσταση εξελίσσεται σύμφωνα με τη στοχαστική δυναμική

$$P(x_{k+1} = P \mid x_k = P) = 0.999, \qquad P(x_{k+1} = P' \mid x_k = P) = 0.001$$

$$P\left(x_{k+1} = P' \mid x_k = P'\right) = 1$$

$$y_k \sim N\left(R, \sigma\left(x_k\right)\right)$$

Θα εκτιμήσουμε την κατάσταση δοσμένων των μετρήσεων $y_1, \ldots, y_k$. Αρχικά είναι σε κατάσταση P

$$P\left(x_{k+1} = P \mid y_0, \ldots, y_k\right) = 0.999 P\left(x_k = P \mid y_0, \ldots, y_k\right)$$

$$P\left(x_{k+1} = P' \mid y_0, \ldots, y_k\right) = 0.001 P\left(x_k = P \mid y_0, \ldots, y_k\right) + P\left(x_k = P' \mid y_0, \ldots, y_k\right)$$

An Example

Κανόνας Bayes

$$P\left(x_{k+1}=P \mid y_0,\ldots,y_{k+1}\right)=\frac{P\left(y_{k+1} \mid x_{k+1}=P\right)P\left(x_{k+1}=j \mid y_0,\ldots,y_k\right)}{P\left(y_{k+1} \mid x_{k+1}=P\right)P\left(x_{k+1}=P \mid y_0,\ldots,y_k\right)+P\left(y_{k+1} \mid x_{k+1}=P'\right)P\left(x_{k+1}=P' \mid y_0,\ldots,y_k\right)}$$

Ισοδύναμα

$$P\left(x_{k+1}=P \mid y_0,\ldots,y_{k+1}\right)=\frac{\exp\left(-\frac{\left(y_k-R\right)^2}{2\sigma_1^2}\right)P\left(x_{k+1}=j \mid y_0,\ldots,y_k\right)}{\exp\left(-\frac{\left(y_k-R\right)^2}{2\sigma_1^2}\right)P\left(x_{k+1}=P \mid y_0,\ldots,y_k\right)+\exp\left(-\frac{\left(y_k-R\right)^2}{2\sigma_2^2}\right)P\left(x_{k+1}=P' \mid y_0,\ldots,y_k\right)}$$

Φίλτρα Σωματιδίων

Εισαγωγή για τα Φίλτρα Σωματιδίων

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι η

$$p\left(x_k \mid y_{0:k}\right)$$

είναι κατά προσέγγιση κανονική.

Είναι πάντα καλή υπόθεση;

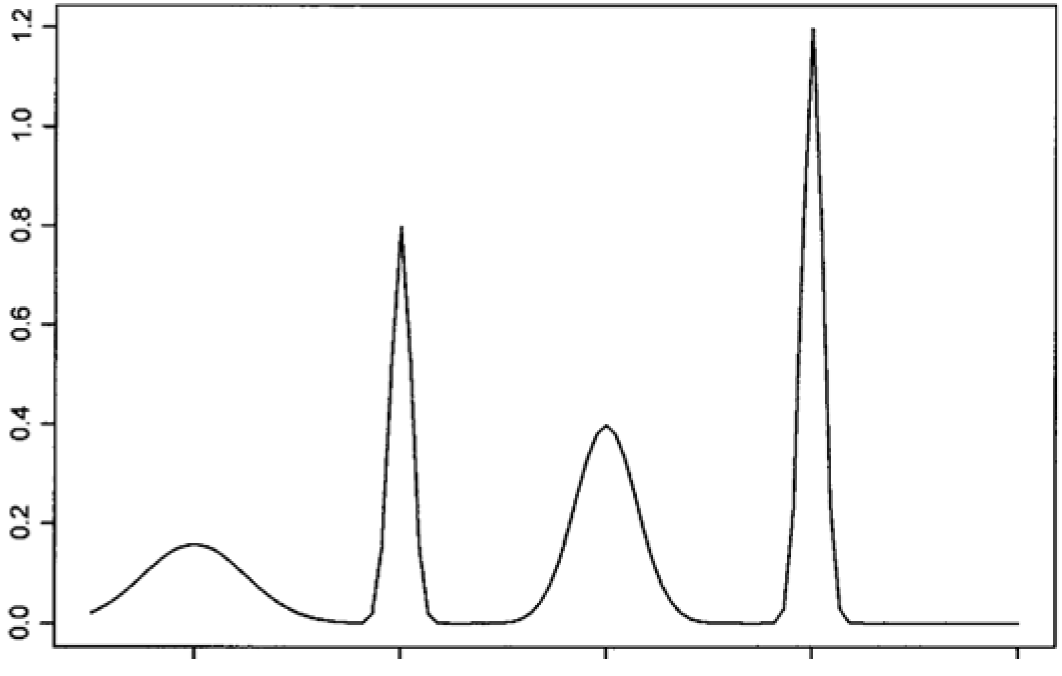
Εισαγωγή για τα Φίλτρα Σωματιδίων

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι η

$p\left(x_k \mid y_{0:k}\right)$

είναι κατά προσέγγιση κανονική.

Είναι πάντα καλή υπόθεση;

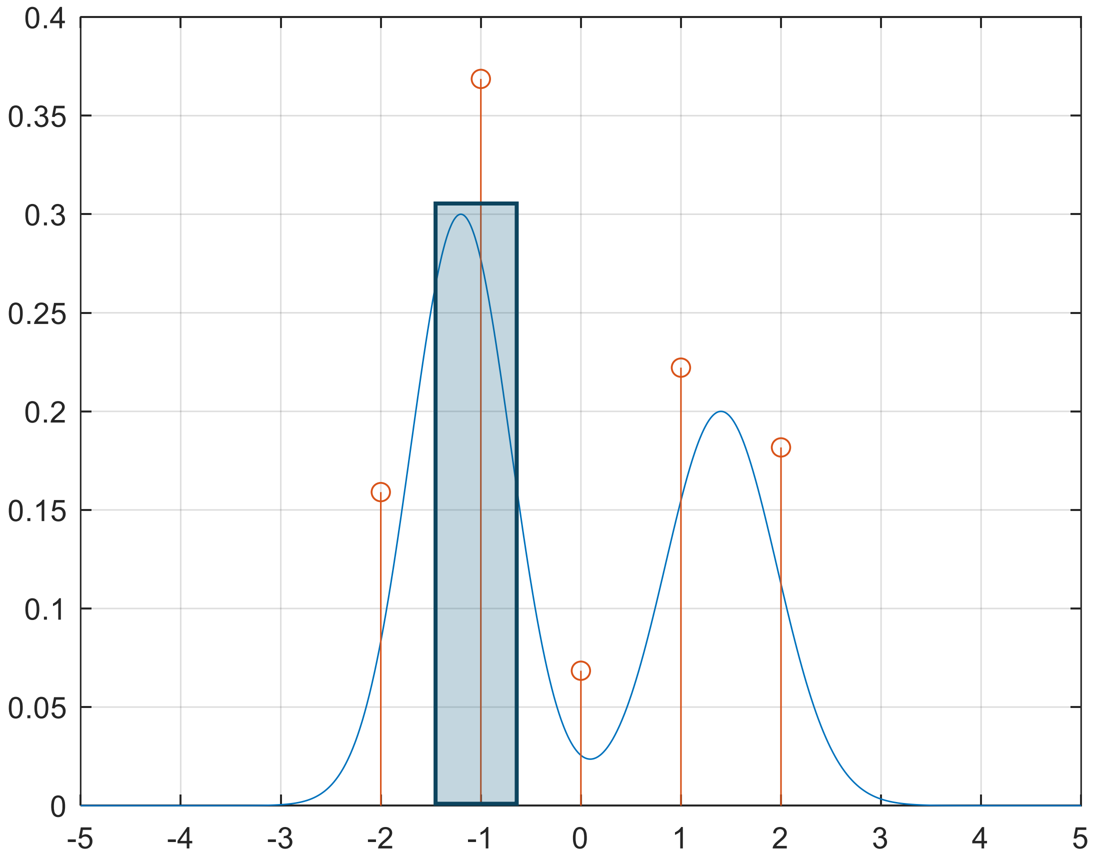


Εισαγωγή για τα Φίλτρα Σωματιδίων

Προσέγγιση με άθροισμα Dirac

$$p\left(x_k \mid y_{0:k}\right) \simeq \sum_{i=1}^{N} W_k^i \delta_{x_k^i}\left(x_k\right)$$

Είναι λογική αυτή η προσέγγιση;

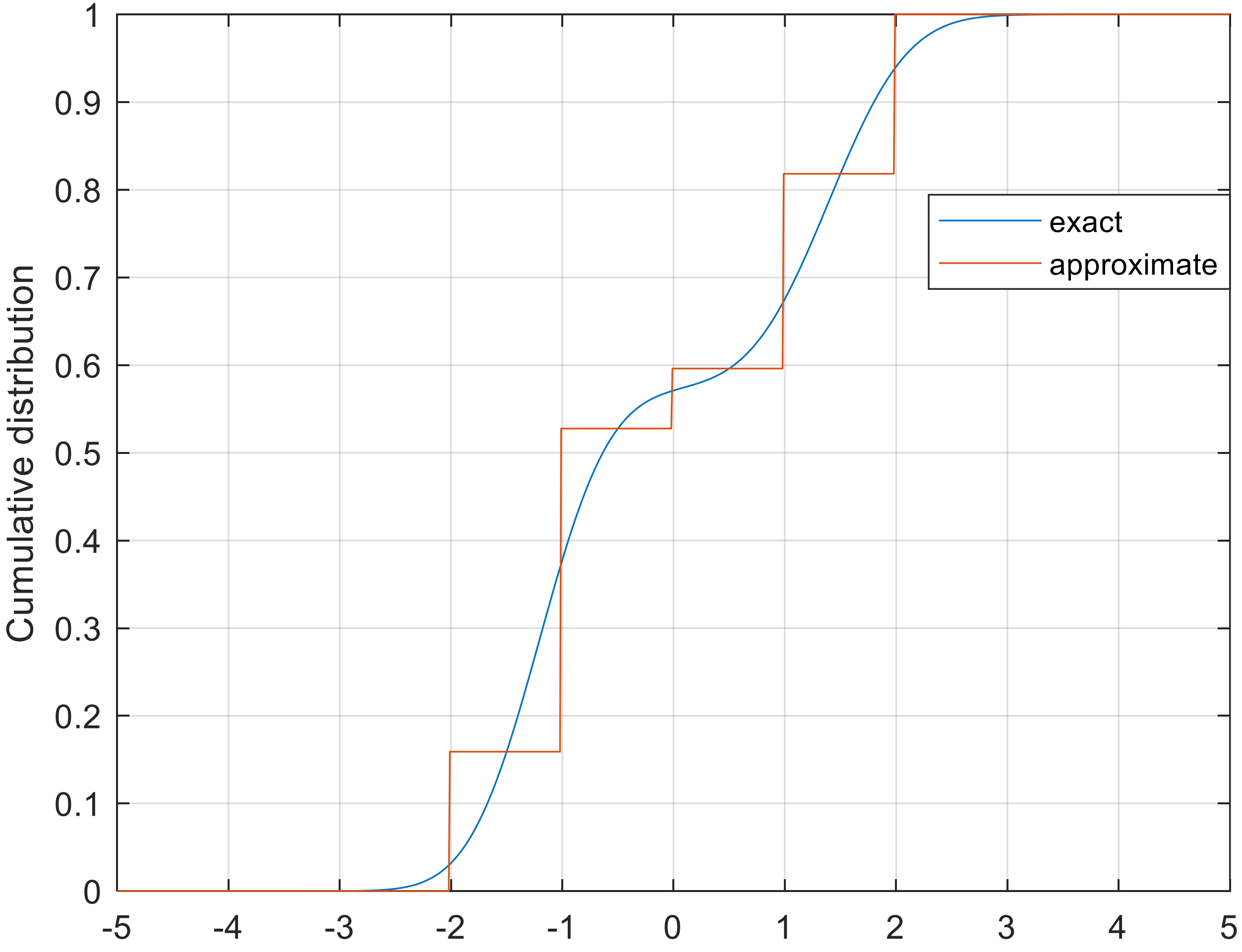


$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\,dz$$

Εισαγωγή

$$E_{p(x)}\left[g(X)\right] \simeq E_{q(x)}\left[g(X)\right] = \sum_{i=1}^{N} W^{i} g\left(x^{i}\right.$$

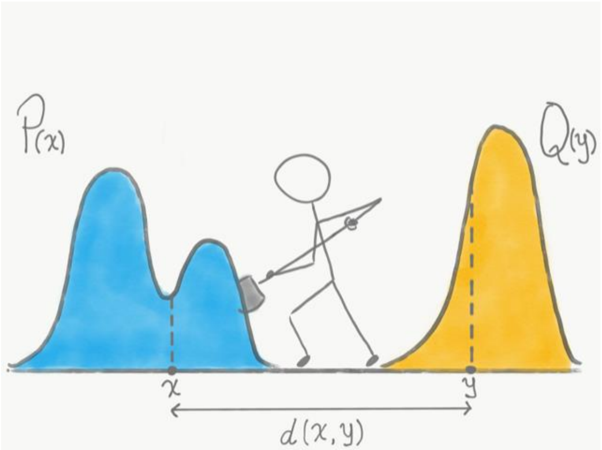
Προσέγγιση στις σωρευτικές κατανομές



Πόσο καλή είναι η προσέγγιση;

Απόσταση κατανομών

- Kullback-Leibler divergence
- **Wasserstein …**



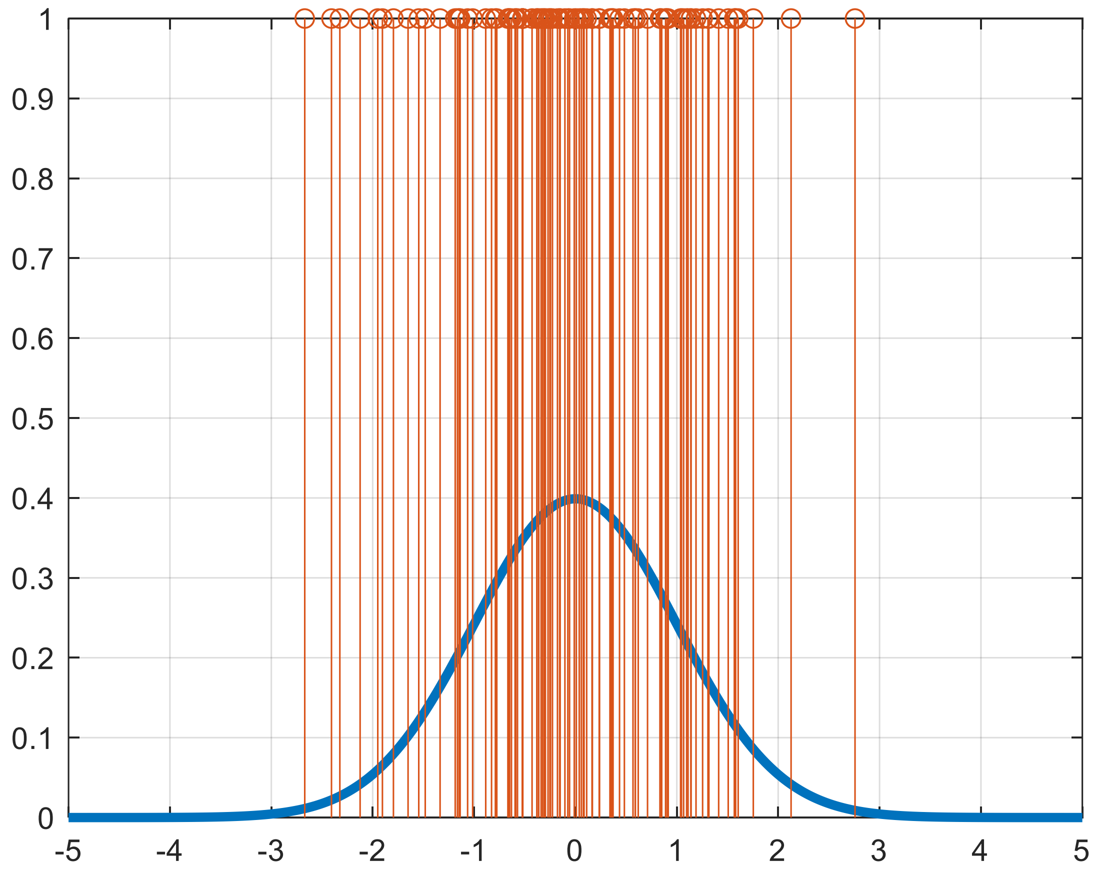
Προσέγγιση Κατανομής με Δειγματοληψία

Για την κατανομή p(x)

$$p(x) \simeq \sum_{i=1}^{N} \delta_{x^i}(x)$$

με x^i δείγματα μιας τ.μ. με κατανομή $p(x)$

$$E_{p(x)}\left[g(X)\right] \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(x^i\right)$$



Διατύπωση

Σύστημα

$$x_{k+1} = f\left(x_k, w_k\right)$$
$$y_k = h\left(x_k, v_k\right)$$

- Δεν υποθέτουμε τίποτα για τις κατανομές ή τις συναρτήσεις εκτός από ότι
- Ξέρουμε τις κατανομές

Βήμα Πρόβλεψης

Ξεκινάμε με

$$p\left(x_k \mid y_{0:k}\right) \simeq \sum_{i=1}^{N} W_k^i \delta_{x_k^i}\left(x_k\right)$$

Κάθε όρος θα λέγεται σωματίδιο (**particle**)

Βήμα Πρόβλεψης

Ξεκινάμε με

$$p\left(x_k \mid y_{0:k}\right) \simeq \sum_{i=1}^{N} W_k^i \delta_{x_k^i}\left(x_k\right)$$

Κάθε όρος θα λέγεται σωματίδιο (**particle**)

Βήμα πρόβλεψης

Για κάθε particle δειγματοληπτούμε το w_k με μια τιμή $w_k{}^i$ και παράγουμε ένα νέο particle

$$x_{k+1}^{i,-} = f\left(x_k^i, w_k^i\right)$$

Η κατανομή του x_{k+1} με πληροφορία μέχρι τη στιγμή k, δίνεται προσεγγιστικά από

$$p\left(x_{k+1} \mid y_{0:k}\right) \simeq \sum_{i=1}^{N} W_k^i \delta_{x_{k+1}^{i-}}\left(x_{k+1}\right)$$

Βήμα Διόρθωσης

Εκ των προτέρων

$$p\left(x_{k+1} \mid y_{0:k}\right) \simeq \sum_{i=1}^{N} W_k^i \delta_{x_{k+1}^i}\left(x_{k+1}\right) \qquad P\left(x_{k+1} = x_{k+1}^{i,-}\right) = W_k^i$$

- Εκ των υστέρων πριν την κανονικοποίηση

$$\tilde{W}_{k+1}^i = W_k^i P\left(y_{k+1} \mid x_{k+1}^{i-}\right)$$

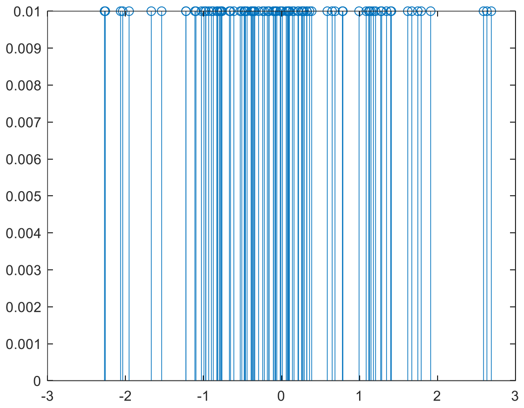
- Κανονικοποίηση

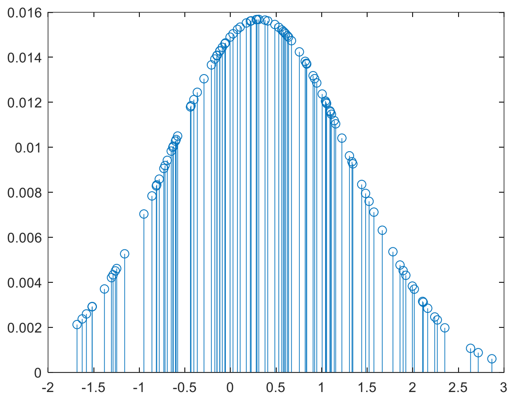
$$W_{k+1}^i = \frac{\tilde{W}_{k+1}^i}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{W}_{k+1}^i}$$

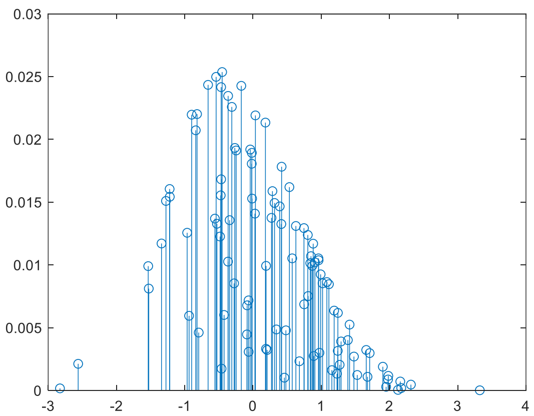
Importance Sampling

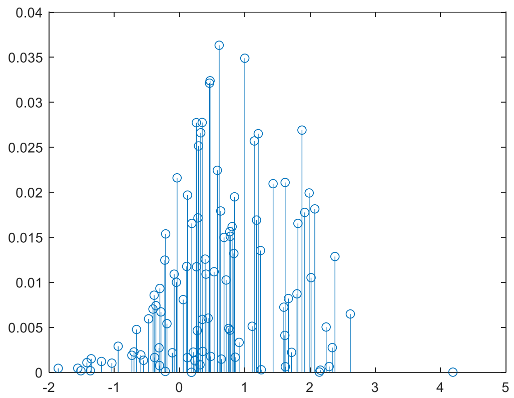
Ένας άλλος τρόπος να δούμε τις ίδιες εξισώσεις είναι η προσπάθεια δειγματοληψίας από την $p\left(x_{k+1} \mid y_{0:k+1}\right)$

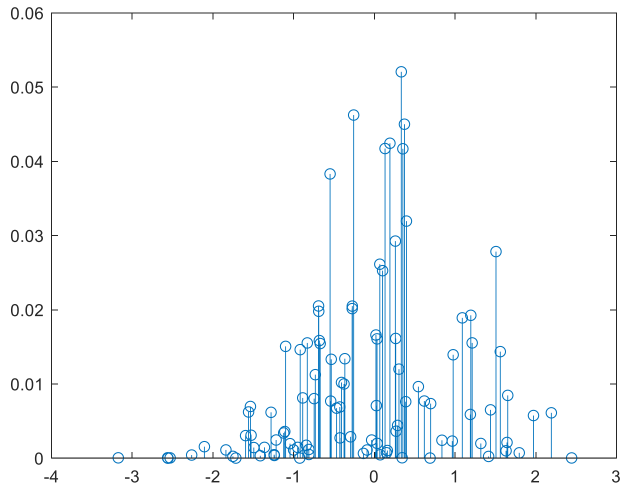
Degeneration Problem

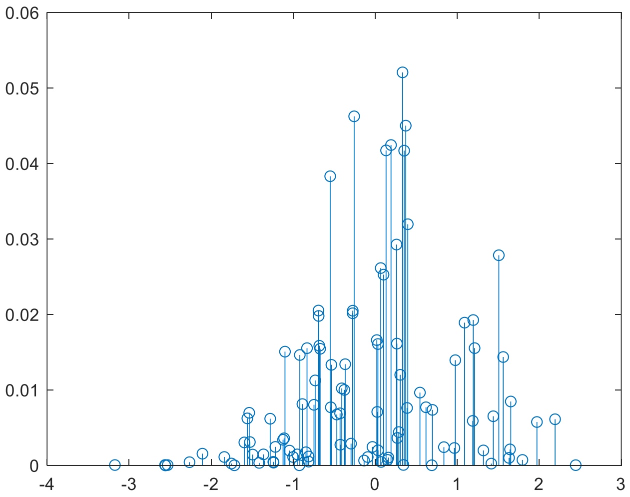


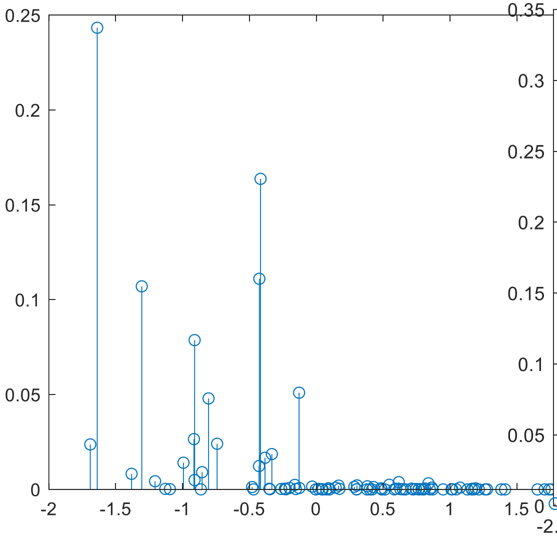


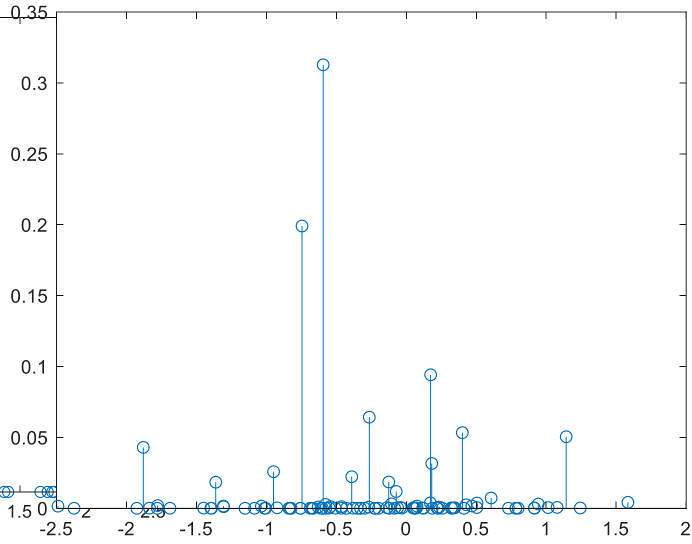




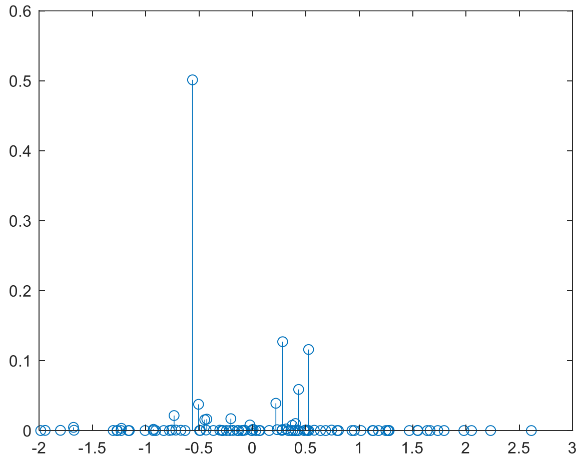


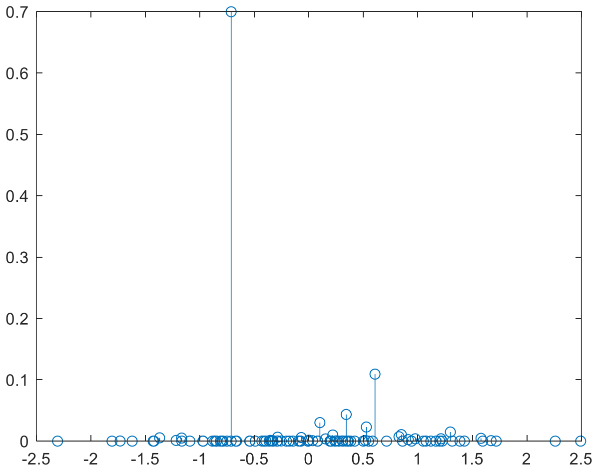




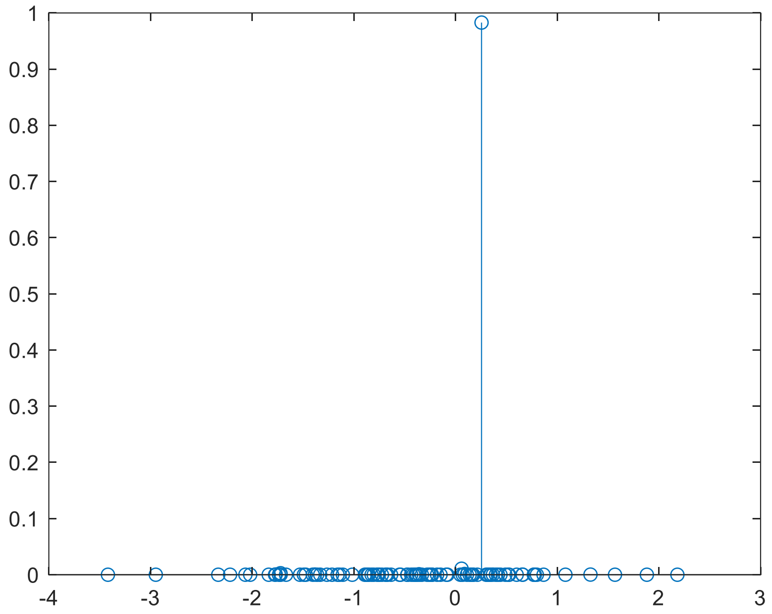


Degeneration Problem





....



Το βάρος συγκεντρώνεται όλο και περισσότερο σε ένα particle

- Πώς θα προσεγγίσουμε κατανομές;

Resampling (Επανα-δειγματοληψία)

Πρόβλημα: Degeneracy

- Όλα τα βάρη προσεγγίζουν το 0 εκτός από ένα
- Δεν προσεγγίζουμε καλά την κατανομή
- Σπαταλάμε πόρους

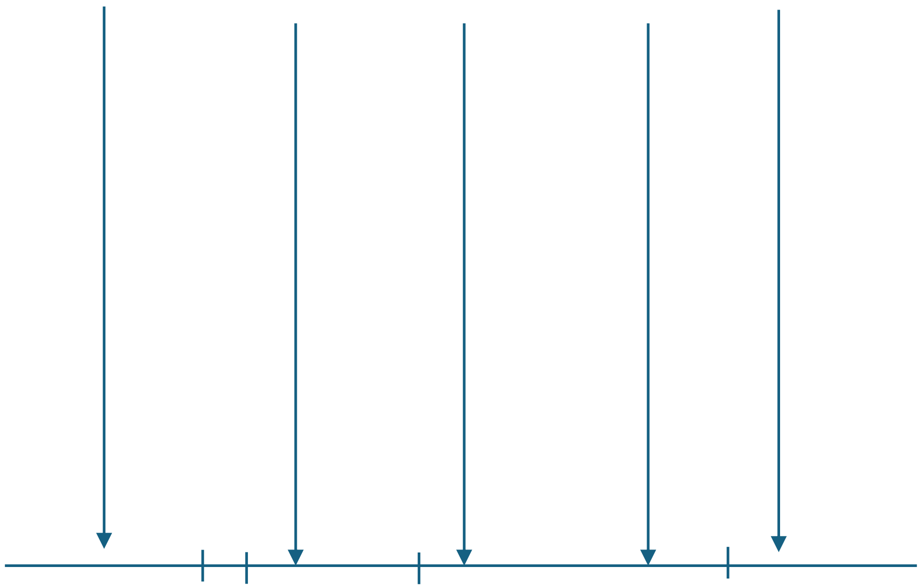
Resampling (Επανα-δειγματοληψία)

Πρόβλημα: Degeneracy

- Όλα τα βάρη προσεγγίζουν το 0 εκτός από ένα
- Δεν προσεγγίζουμε καλά την κατανομή
- Σπαταλάμε πόρους

Resampling

- Ξεκινάμε με τα δείγματα
  $\left(x_{k+1}^{i}, W_{k+1}^{i}\right)_{i=1}^{N}$
  και παράγουμε ομοιόμορφα N particles
  με ίσα βάρη



W_{k+1}^{1} W_{k+1}^{2} W_{k+1}^{3} W_{k+1}^{4} W_{k+1}^{5}

$$W_{k+1}^{1} + W_{k+1}^{2} + W_{k+1}^{3} + W_{k+1}^{4} + W_{k+1}^{5} = 1$$

Particle Filter Αλγόριθμος

- Αρχικοποιούμε ένα σύνολο Particles

$$\left(x_{-1}^{i}, W_{-1}^{i}\right),\ i = 1, \ldots, N$$

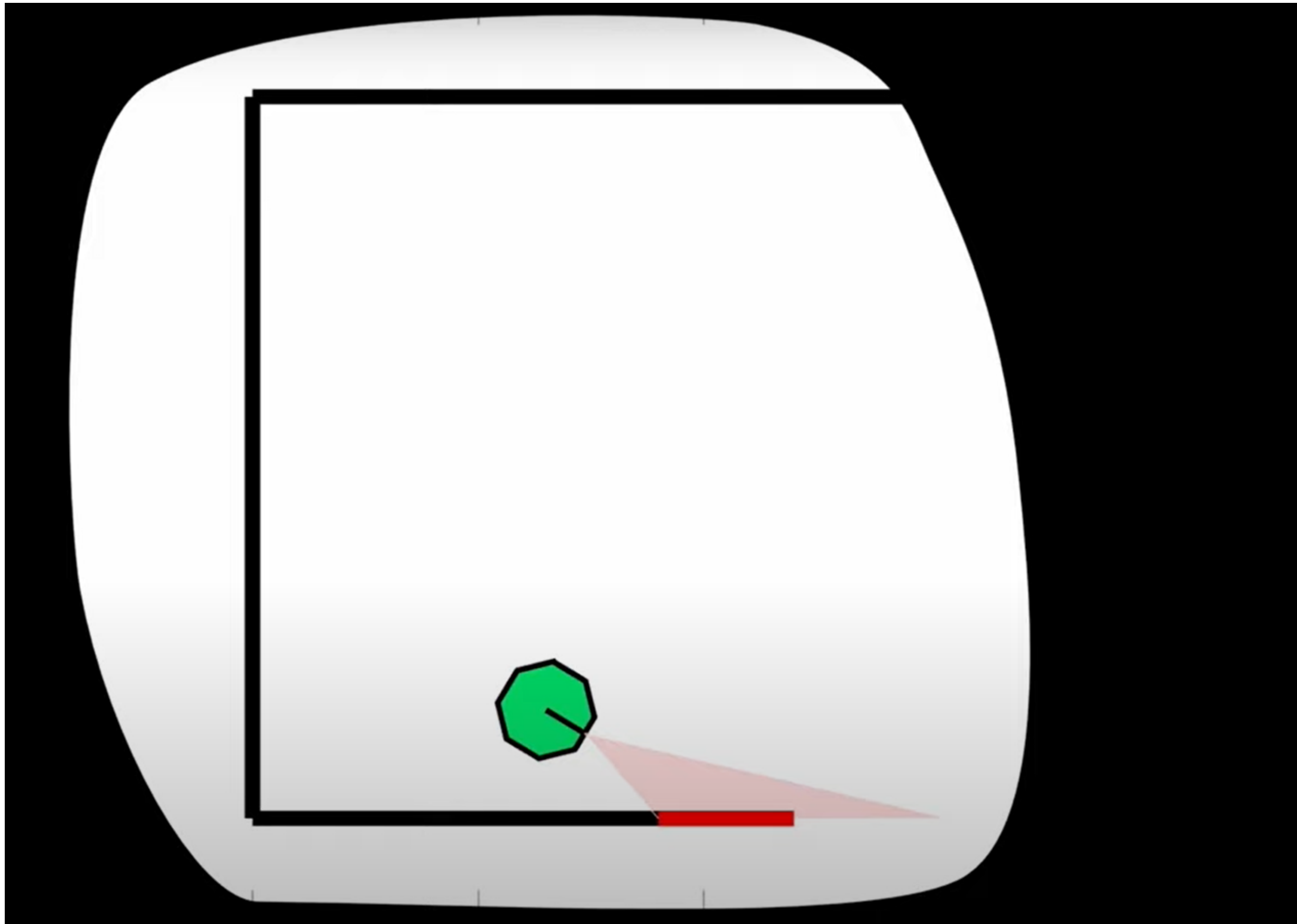
- Βήμα Πρόβλεψης
- Βήμα διόρθωσης
- Resampling

Example from MATLAB

Pose estimation for a robot with lidar sensor

See video

https://www.youtube.com/watch?v=NrzmH_yerBU



Importance Sampling

Αρχική ιδέα για Particle Filters: Importance Sampling

Αν δεν μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε από την κατανομή $p(x)$?

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να δειγματοληπτούμε από την q(x)

$$E_p\left[g(x)\right]=\int g(x)p(x)dx=\int g(x)\frac{p(x)}{q(x)}q(x)dx=\int \tilde{g}(x)q(x)dx=E_q\left[\tilde{g}(x)\right]$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{N} g\left(x^i\right)\boxed{\frac{p\left(x^i\right)}{q\left(x^i\right)}}=\sum_{i=1}^{N} w^i g\left(x^i\right)$$

x^i ακολουθεί την $q(x)$

Importance Sampling

p(x) προσεγγίζεται από

$$\sum_{k=1}^{N} w^i x^i$$

$$x^i \sim q(x), \qquad w^i = \frac{p(x^i)}{q(x^i)}$$

Η μέση τιμή είναι η ίδια, αλλά, η διακύμανση εξαρτάται από την *q*. Βέλτιστο για *q* = *p*

Παράδειγμα

Example – Importance sampling

- Approximate $p(x)$ using N independent samples from $q(x) = \mathcal{N}(x; 4, 1.5^2)$.

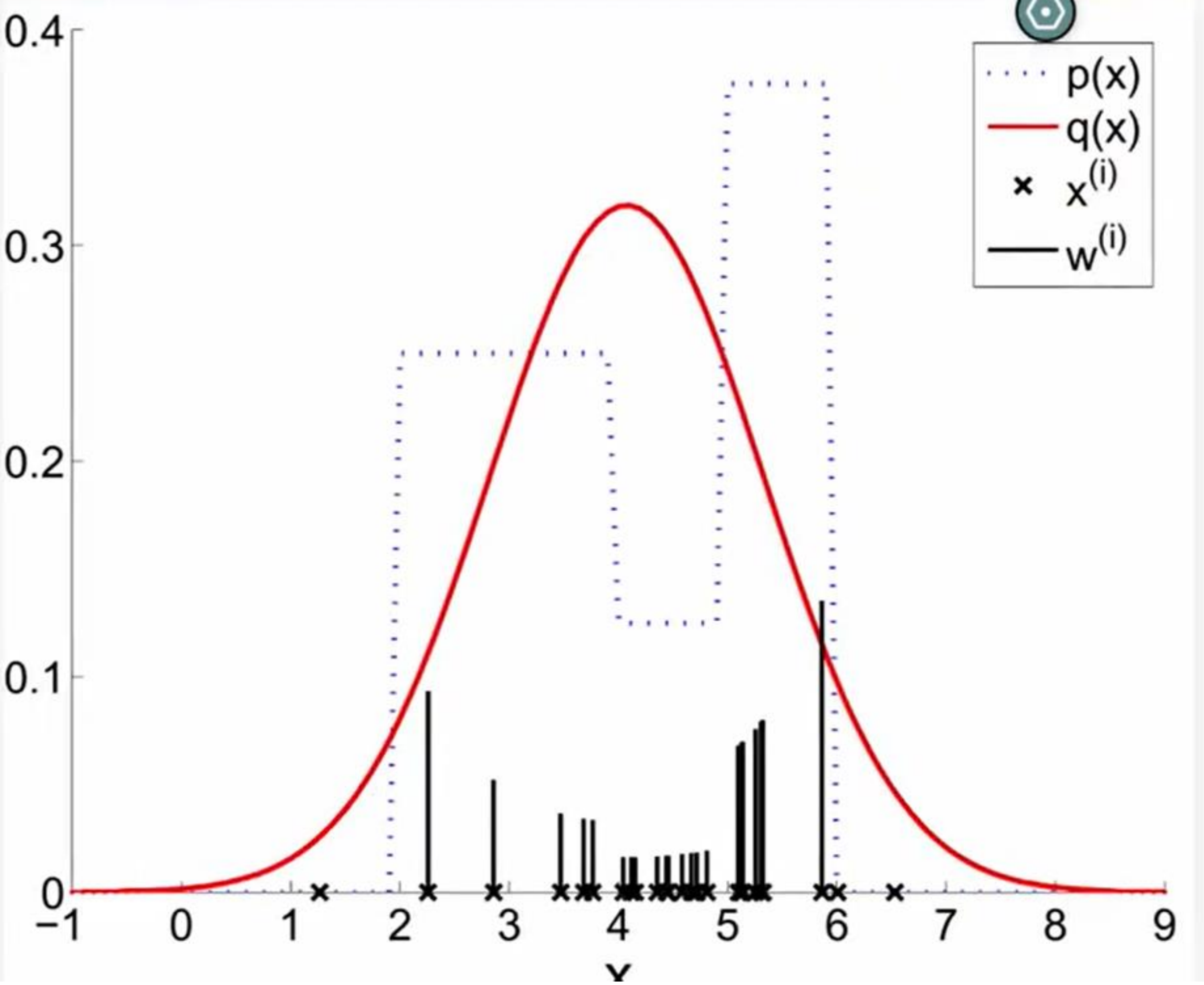


Figure from
[7.2 Monte Carlo approximations and Importance sampling - YouTube]

Επεκτάσεις

- Πότε και πώς γίνεται η δειγματοληψία πιθανόν με χρήση Importance Sampling
- Πότε και πώς γίνεται η επανάδειγματοληψία
- Χρήση μιας proposal distribution
- Rao-Blackwellized PF