



# Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Σχεδίαση Αναλογικών Ηλεκτρονικών Μαθημάτων

## «Ανάλυση, Σχεδίαση και Υλοποίηση ενός Phase Locked Loop»

Παπαδόπουλος Χαράλαμπος  
Χρονόπουλος Στέφανος  
Γκουγκούση Ιωάννα

Επιβλέπων  
Παναγόπουλος Γεώργιος  
Καθηγητής, ΕΜΠ

Απρίλιος 2025

# 1 Γενική Επισκόπηση των PLL και της Ανάλυσης του Κυκλώματος

Ένας βρόχος κλειδώματος φάσης ή phase-locked loop (PLL) είναι ένα σύστημα ελέγχου που παράγει ένα σήμα εξόδου του οποίου η φάση είναι σταθερή σε σχέση με τη φάση ενός σήματος εισόδου. Η διατήρηση της φάσης εισόδου και εξόδου σε συγχρονισμό συνεπάγεται επίσης και την ταύτιση των συχνοτήτων εισόδου και εξόδου, επομένως ένας βρόχος κλειδώματος φάσης μπορεί επίσης να παρακολουθεί μία συχνότητα εισόδου. Επιπλέον, με την ενσωμάτωση ενός διαιρέτη συχνότητας, ένας PLL μπορεί να παράγει μία σταθερή συχνότητα που είναι πολλαπλάσιο της συχνότητας εισόδου.

Αυτές οι ιδιότητες χρησιμοποιούνται για συγχρονισμό ρολογιών, αποδιαμόρφωση, σύνθεση συχνοτήτων, πολλαπλασιασμό συχνότητας ρολογιού και ανάκτηση σήματος από θορυβώδες κανάλι επικοινωνίας.

Οι πιο διαδεδομένες αρχιτεκτονικές PLL είναι οι εξής:

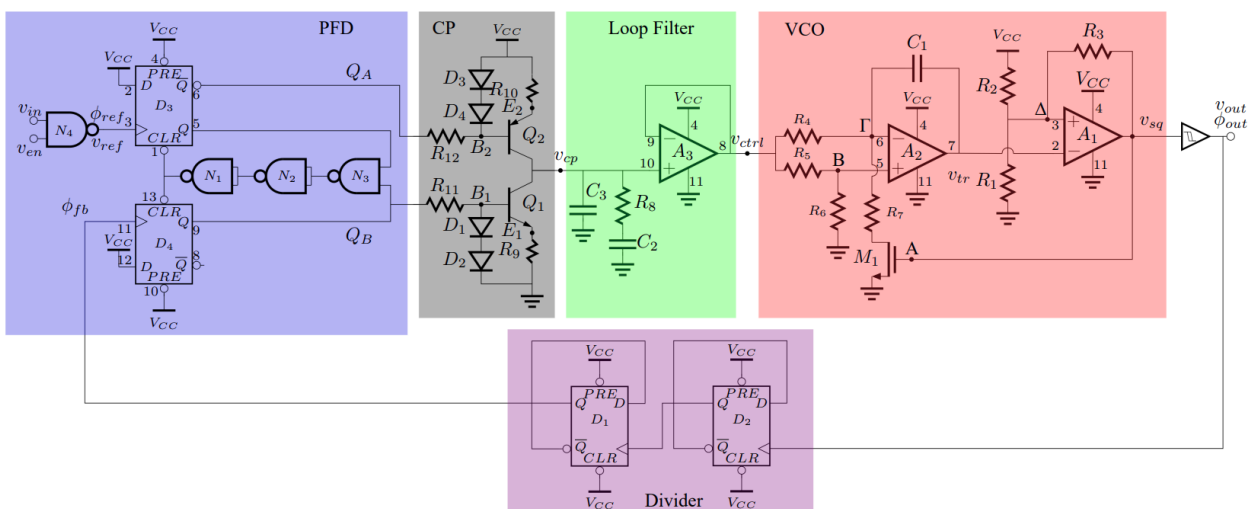
- **PLL Τύπου I:**

Ο PLL τύπου I περιλαμβάνει έναν μόνο ολοκληρωτή στον βρόχο του (συνήθως το VCO). Χρησιμοποιεί έναν απλό φίλτρο βρόχου (π.χ. φίλτρο RC). Είναι απλός στην υλοποίηση αλλά έχει περιορισμένη ακρίβεια στη μόνιμη κατάσταση — μπορεί να συγχρονιστεί μόνο στη συχνότητα και όχι στη φάση όταν η είσοδος αλλάζει.

- **PLL Τύπου II:**

Ο PLL τύπου II διαθέτει δύο ολοκληρωτές στον βρόχο — έναν από το VCO και έναν από το ενεργό φίλτρο βρόχου. Αυτό του προσδίδει καλύτερη απόδοση στη μόνιμη κατάσταση, με δυνατότητα κλειδώματος τόσο της φάσης όσο και της συχνότητας, καθιστώντας τον κατάλληλο για ψηφιακά συστήματα.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με PLL τύπου II που αξιοποιούν μία Charge-Pump, γνωστά και ως CP-PLL, και την χρήση τους ως RF synthesizers.



Σχήμα 1: CP-PLL ως RF synthesizer

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τη λειτουργία του κάθε block του κυκλώματος.

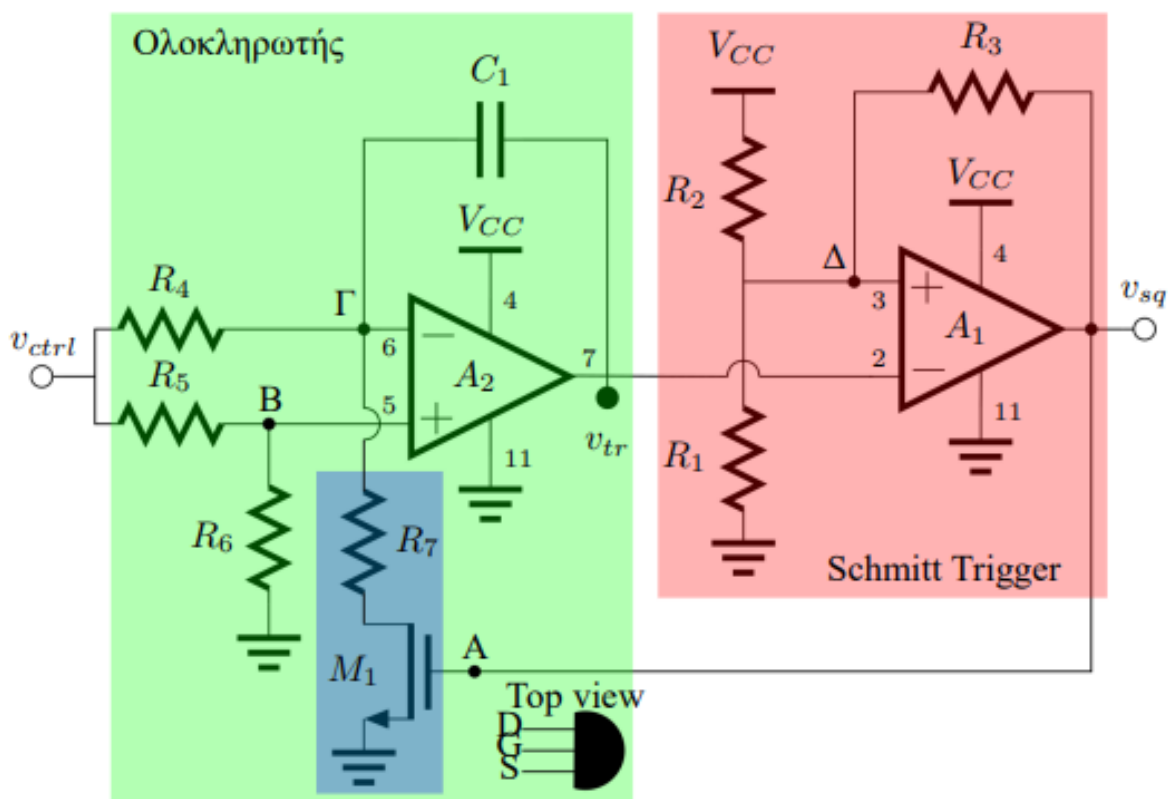
## 2 Voltage Controlled Oscillator (VCO)

### 2.1 Θεωρία

Ένας ταλαντωτής ελεγχόμενος από τάση (VCO) είναι ένας ηλεκτρονικός ταλαντωτής του οποίου η συχνότητα εξόδου είναι ανάλογη της τάσης εισόδου. Ένας ταλαντωτής παράγει ένα περιοδικό εναλλασσόμενο σήμα (AC), και στους VCO η συχνότητα ταλάντωσης καθορίζεται από την εφαρμοζόμενη τάση.

### 2.2 Δομή

Ο VCO που χρησιμοποιούμε είναι ο εξής:



Σχήμα 2: Schematic VCO

Ο ρόλος του ολοκληρωτή είναι η παραγωγή ενός τριγωνικού παλμού, ενώ το *Schmitt Trigger* (ST) μετατρέπει τον παλμό εισόδου του σε τετραγωνικό, εναλλάσσοντας κατάσταση ανάλογα με την τάση εισόδου.

Κάνοντας ανάλυση των εξισώσεων που χαρακτηρίζουν το κύκλωμα, καταλήγουμε στην εξής σχέση (δεδομένου ότι  $R_1 = R_2 = R_3 = R^*$  και  $R = 2R^*$ ):

$$\frac{du_o}{dt} - V_{ctrl} \cdot \frac{1}{4R^*C} + \frac{V_B}{CR^*} = 0$$

όπου:

$$V_B \equiv V_D = \begin{cases} 0, & \text{NMOS ON} \\ V_M = \frac{V_{ctrl}}{2}, & \text{NMOS OFF} \end{cases}$$

Καταλήγουμε έτσι στις σχέσεις:

$$\begin{cases} \frac{du_o}{dt} - V_{ctrl} \cdot \frac{1}{4R^*C} = 0 \\ \frac{du_o}{dt} + V_{ctrl} \cdot \frac{1}{4R^*C} = 0 \end{cases}$$

Φαίνεται, λοιπόν, η χρησιμότητα του MOS ως *inverter* στο κύκλωμα ανάδρασης, καθώς χωρίς αυτό δεν θα υπήρχε η εναλλαγή προσήμων (θα είχαμε μόνο αρνητική κλίση), και άρα δεν θα υπήρχε τριγωνικός παλμός στην έξοδο του ολοκληρωτή.

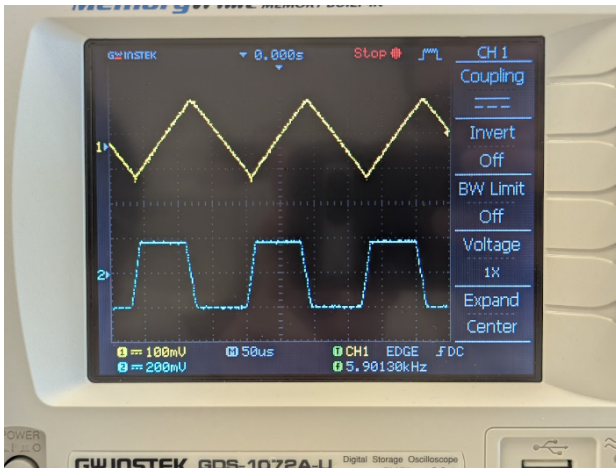
Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ο τετραγωνικός παλμός κυμαίνεται στα επίπεδα  $low=0$  και  $high=V_{DD}$ , ενώ ο τριγωνικός παλμός κυμαίνεται στο διάστημα  $[\frac{V_{DD}}{3}, \frac{2V_{DD}}{3}]$ . Το εύρος στο οποίο κινείται ο τριγωνικός παλμός καθορίζεται από το φαινόμενο της υστέρησης που μελετήθηκε σε προηγούμενη άσκηση.

Μειώνοντας την υστέρηση, αυξάνεται η συχνότητα του παλμού, καθώς η κλίση παραμένει σταθερή, αλλά μειώνεται η "απόσταση" που πρέπει να διανύσει η τάση πριν γίνει η αναστροφή. Η μείωση της υστέρησης μπορεί να επιτευχθεί ρυθμίζοντας τις τιμές των αντιστάσεων.

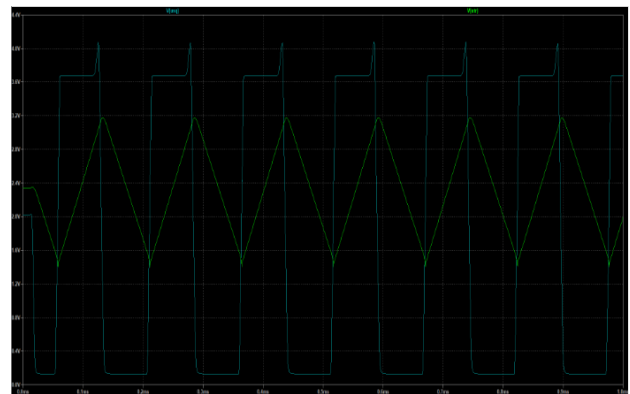
Τέλος, με παρόμοιο τρόπο επιδρά και η τιμή του  $V_{DD}$  στη συχνότητα: δηλαδή, μειώνοντας το  $V_{DD}$ , αυξάνεται η συχνότητα.

## 2.3 Πειραματική Μελέτη

Κατασκευάζοντας το κύκλωμα τόσο στο εργαστήριο, όσο και στον προσομοιωτή LTSpice, λαμβάνουμε τις εξής κυματομορφές:



(α') Έξοδος στον παλμογράφο



(β') Έξοδος στον προσομοιωτή του LTSpice

Σχήμα 3: Κυματομορφές VCO

Παρατηρούμε την παρουσία μιας τριγωνικής και μιας τετραγωνικής κυματομορφής. Η τετραγωνική κυματομορφή παράγεται από το κύκλωμα *Schmitt Trigger* (ST) που μελετήθηκε σε προηγούμενη εργαστηριακή άσκηση, με είσοδο την τριγωνική κυματομορφή. Επιβεβαιώνεται ότι το κύκλωμα βρίσκεται σε ταλάντωση, καθώς και οι δύο κυματομορφές παρουσιάζουν την ίδια συχνότητα.

Με χρήση των κέρσορων του παλμογράφου υπολογίζουμε τον χρόνο ανόδου και καθόδου του τετραγωνικού παλμού και προέκυψε ότι:

- $T_{\text{rise}} = 12 \mu s$
- $T_{\text{fall}} = 18 \mu s$

Οι αντίστοιχες τιμές από προσομοίωση σε SPICE είναι:

- $T_{\text{rise}} = 12 \mu s$
- $T_{\text{fall}} = 18 \mu s$

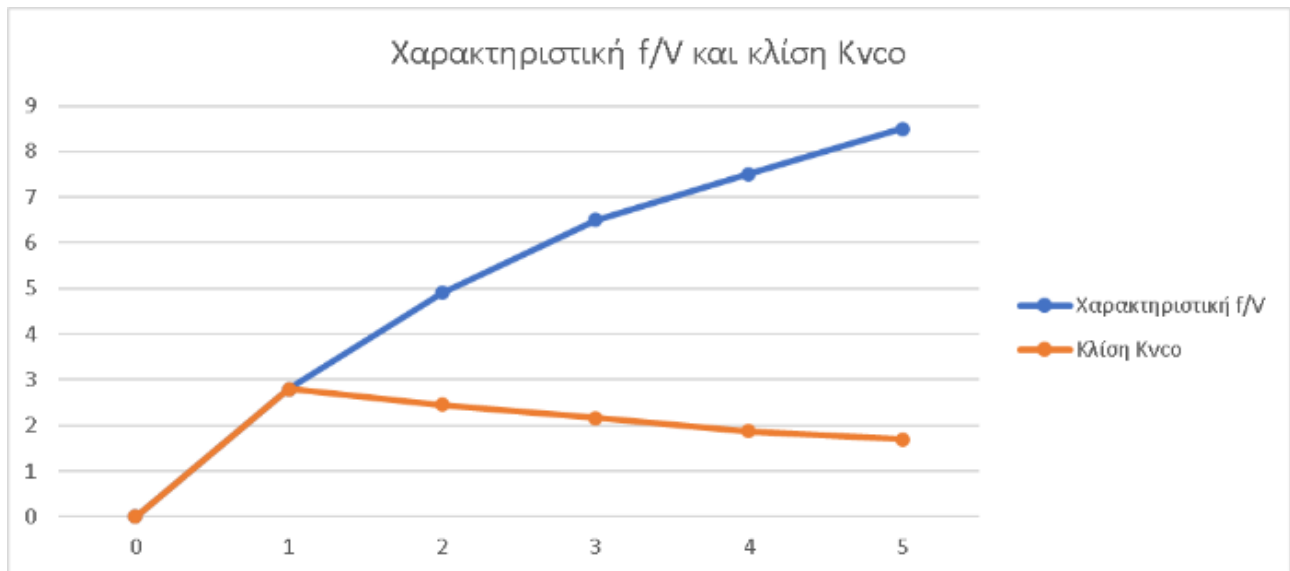
Επιπλέον, βρέθηκαν τα εξής όρια συχνότητας:

- $f_{\text{max}} \approx 20 \text{ kHz}$  για  $V_{\text{ctrl}} = 6.5 \text{ V}$
- $f_{\text{min}} \approx 0 \text{ Hz}$  για  $V_{\text{ctrl}} = 0 \text{ V}$

Μεταβάλλοντας το πλάτος  $V_{\text{ctrl}}$ , παρατηρήσαμε τις εξής μεταβολές συχνότητας:

$V_{\text{ctrl}} \text{ (V)}$	$f \text{ (kHz)}$
0	0
1	2.8
2	4.9
3	6.5
4	7.5
5	8.5

Με βάση τις παραπάνω μετρήσεις, προκύπτουν οι εξής γραφικές παραστάσεις:



Σχήμα 4: Έξοδος στον προσομοιωτή του LTSpice

Παρατηρούμε ότι η κλίση της χαρακτηριστικής του VCO είναι θετική, αλλά μειώνεται καθώς αυξάνουμε την τάση ελέγχου  $V_{\text{ctrl}}$ . Αυτό σημαίνει ότι η σχέση μεταξύ  $V_{\text{ctrl}}$  και της συχνότητας ταλάντωσης δεν είναι απολύτως γραμμική, αλλά παρουσιάζει κορεσμό για μεγαλύτερες τάσεις.

### Παρατηρήσεις:

- Ο τετραγωνικός παλμός εξόδου δεν έχει εύρος  $V_{pp} = 5\text{ V} \equiv V_{DD}$ , καθώς ο τελεστικός ενισχυτής που χρησιμοποιείται δεν είναι *rail-to-rail*. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η έξοδος να μην φτάνει πλήρως τα επίπεδα τάσης του τροφοδοτικού.

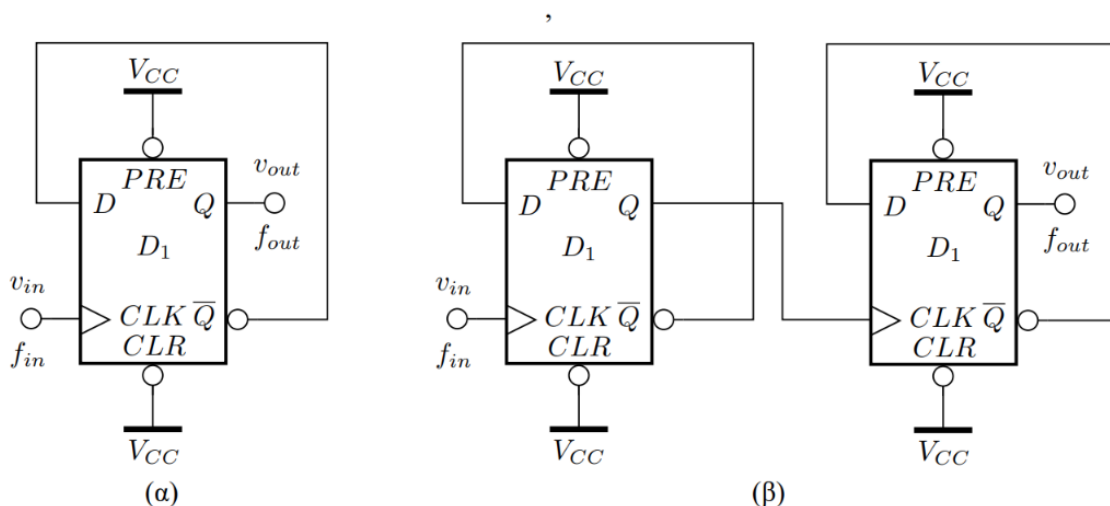
## 3 Frequency Divider

### 3.1 Θεωρία

Ο διαιρέτης συχνότητας είναι ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα που μειώνει τη συχνότητα ενός σήματος εισόδου κατά έναν καθορισμένο παράγοντα.

### 3.2 Δομή

Ο διαιρέτης που χρησιμοποιούμε είναι ο εξής:



Σχήμα 5: Διαιρέτης συχνότητας (α) δια 2 και (β) δια 4

Με τη διαμόρφωση ανατροφοδότησης από την έξοδο  $Q$  στην είσοδο  $D$ , το δικαναλικό flip-flop αλλάζει κατάσταση σε κάθε ακμή του ρολογιού. Ας αναλύσουμε τη λειτουργία του, υποθέτοντας ένα θετικά ακμοπυροδότητο flip-flop:

- **Αρχική Κατάσταση:** Υποθέτουμε ότι η έξοδος  $Q$  είναι αρχικά LOW (0). Συνεπώς, η ανεστραμμένη έξοδος  $\bar{Q}$  είναι HIGH (1). Αφού η  $\bar{Q}$  είναι συνδεδεμένη στην είσοδο  $D$ , τότε και το  $D$  είναι HIGH (1).
- **Πρώτη Θετική Ακμή Ρολογιού:** Όταν φτάσει το πρώτο θετικό μέτωπο του ρολογιού, το flip-flop δειγματοληπτεί την είσοδο  $D$ . Εφόσον  $D = 1$ , η έξοδος  $Q$  γίνεται HIGH (1). Ταυτόχρονα, η  $\bar{Q}$  γίνεται LOW (0).
- **Κατάσταση Μετά την Πρώτη Θετική Ακμή:** Τώρα,  $Q = 1$  και  $\bar{Q} = 0$ . Εφόσον το  $D$  είναι συνδεδεμένο με την  $\bar{Q}$ , το  $D$  είναι πλέον LOW (0).

- **Δεύτερη Θετική Ακμή Ρολογιού:** Στο επόμενο θετικό μέτωπο, το flip-flop δειγματοληπτεί ξανά την είσοδο  $D$ . Αυτή τη φορά,  $D = 0$ , και έτσι η έξοδος  $Q$  γίνεται LOW (0), ενώ η  $\bar{Q}$  γίνεται HIGH (1).

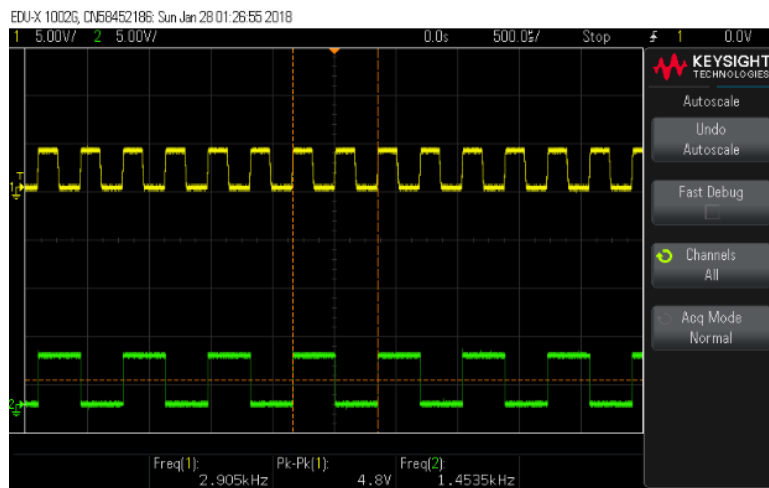
#### Αποτέλεσμα:

Παρατηρούμε ότι η έξοδος  $Q$  (και κατ' επέκταση η  $\bar{Q}$ ) ολοκληρώνει έναν πλήρη κύκλο (από LOW σε HIGH και πίσω σε LOW) κάθε δύο κύκλους του σήματος ρολογιού. Δηλαδή, η συχνότητα στην έξοδο  $Q$  είναι ίση με το μισό της συχνότητας του ρολογιού εισόδου.

Κάθε επιπλέον Flip-Flop διαιρεί τη συχνότητα κατά 2, και έτσι με 2 Flip-Flops έχουμε διαιρέτη δια 4.

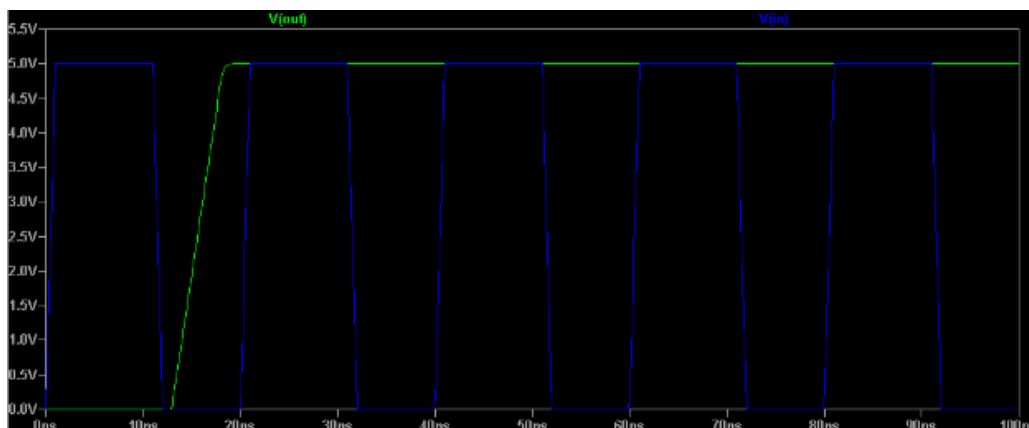
### 3.3 Πειραματική Μελέτη

Κατασκευάζοντας το κύκλωμα παρατηρούμε ότι πράγματι η έξοδος του διαιρέτη είναι το μισό της συχνότητας εισόδου, δίχως να υπάρξει μεταβολή στο πλάτος.



Σχήμα 6: Κυματομορφές διαιρέτη

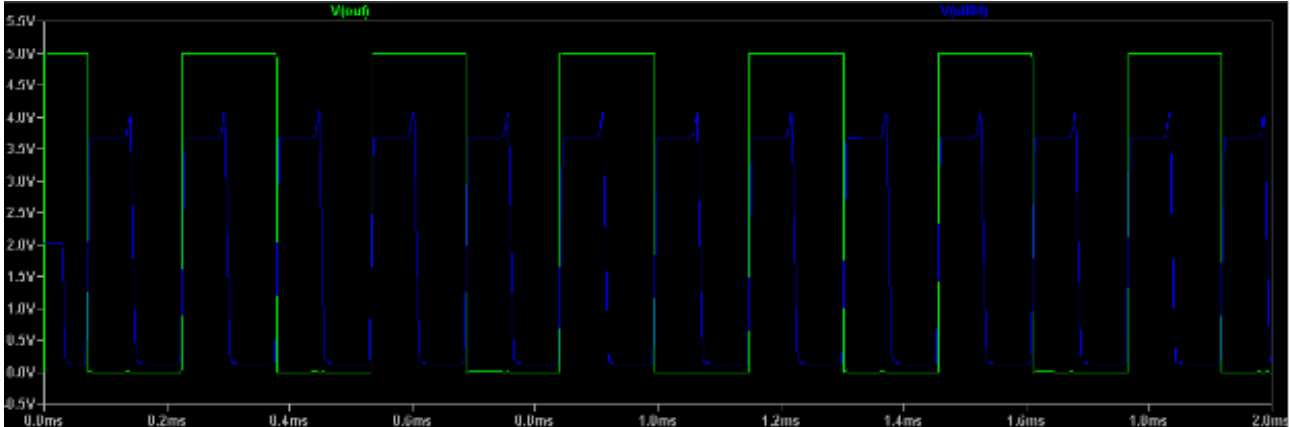
Για να προσδιορίσουμε τη μέγιστη συχνότητα με την οποία το παραπάνω κύκλωμα λειτουργεί ως διαιρέτης συχνότητας θα αυξάνουμε στο spice τη περίοδο του σήματος εισόδου. Με συνεχόμενη μείωση της περιόδου του σήματος εισόδου έχουμε το εξής γράφημα:



Σχήμα 7: Λειτουργία του διαιρέτη για  $T = 20\text{ns}$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι  $T_{min} = 20ns$  και  $f_{max} = 50MHz$ .

Στη συνέχεια, συνδέσαμε τον διαιρέτη (σε λειτουργία %4) στην έξοδο του VCO και παρατηρήσαμε ότι η έξοδος του διαιρέτη είναι το μισό της συχνότητας εισόδου, αντί για το 1/4 που περιμέναμε.



Σχήμα 8: Κυματομορφές διαιρέτη

Το D flip-flop αποτελείται ουσιαστικά από δύο latches συνδεδεμένα διαδοχικά, λειτουργώντας υπό τον έλεγχο του ρολογιού (clock). Κατά τη θετική μετάβαση της ακμής του ρολογιού, τα δεδομένα αποθηκεύονται στο flip-flop, ωστόσο, λόγω των χαρακτηριστικών των λογικών πυλών, μπορεί να προκύψουν race conditions.

Ένα σημαντικό ζήτημα που προκύπτει αφορά τον χρόνο ανόδου του σήματος ρολογιού. Υπάρχει ένας μέγιστος επιτρεπτός χρόνος ανόδου, πέρα από τον οποίο το flip-flop δεν μπορεί να λειτουργήσει αξιόπιστα. Στην περίπτωσή μας, ισχύει η συνθήκη  $t_{rise} > t_{rise,max}$ , γεγονός που οδηγεί σε μη σωστή λειτουργία του κυκλώματος.

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε το παραπάνω πρόβλημα, μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις:

- Αρχικά, μπορούμε να δημιουργήσουμε μεγαλύτερη χρονική ασυμμετρία στα δύο latches. Πιο συγκεκριμένα, αυξάνοντας σημαντικά τον χρόνο απόκρισης του ενός latch σε σχέση με το άλλο, μπορούμε να μετριάσουμε την ευαισθησία στα race conditions. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μεγαλώνοντας τον έναν εκ των δύο inverters στο εσωτερικό του flip-flop (ενδεικτικά κατά 4 φορές). Ωστόσο, αυτή η λύση δεν είναι πρακτική, καθώς αποτελεί σημαντική σπατάλη χώρου και ενέργειας, και δεν είναι εφικτή σε ολοκληρωμένα κυκλώματα.
- Η δεύτερη προσέγγιση είναι η χρήση ενός Schmitt Trigger. Η εισαγωγή ενός Schmitt Trigger στο κύκλωμα του ρολογιού βοηθά στη μείωση του χρόνου ανόδου, καθιστώντας το σήμα πιο απότομο και διασφαλίζοντας ότι παραμένει εντός των αποδεκτών χρονικών ορίων. Αυτή η λύση είναι πιο αποδοτική και εύκολη στην υλοποίηση, καθώς ένα Schmitt Trigger μπορεί να ενσωματωθεί χωρίς να απαιτούνται μεγάλες αλλαγές στην αρχιτεκτονική του flip-flop.



## 4 Phase Frequency Detector (PFD)

### 4.1 Θεωρία

Η πρώτη δομική μονάδα του PLL είναι ο ανιχνευτής φάσης και συχνότητας (PFD).

Είναι εύκολο να σκεφτεί κανείς τον PFD ως το δυαδικό ανάλογο του τελεστικού ενισχυτή, στο πεδίο της συχνότητας. Όπως ένας τελεστικός ανιχνεύει τη διαφορά δυναμικού στην είσοδό του και την ενισχύει στην έξοδο, έτσι και ο PFD ανιχνεύει τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο σημάτων εισόδου του και την μεταφέρει στην έξοδο.

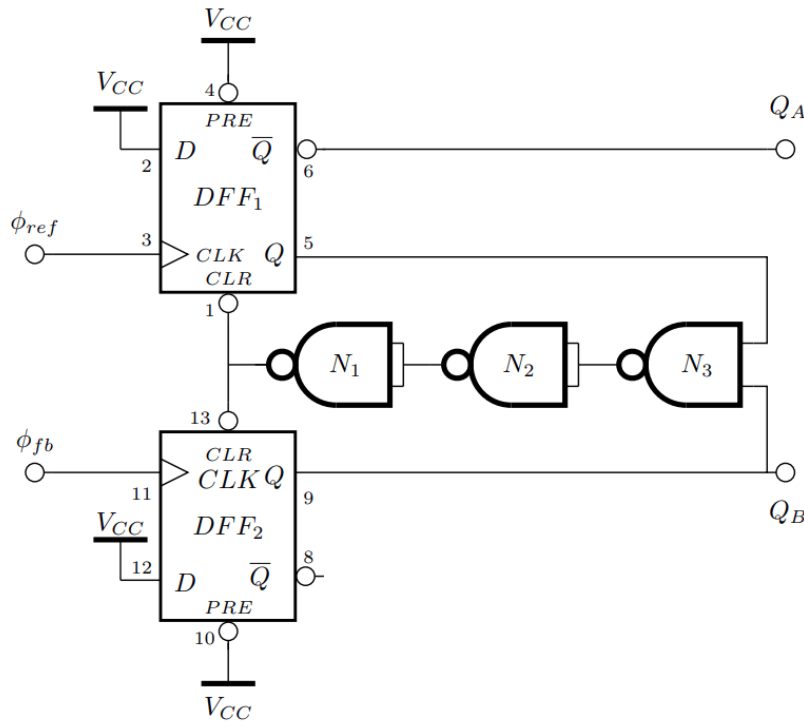
Σε γενικές γραμμές, η μορφή της εξόδου του PFD εξαρτάται από τις απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής. Στην προκειμένη περίπτωση, τον υλοποιούμε με τέτοιο τρόπο ώστε η έξοδος του να είναι τάση.

Αξίζει να σημειωθεί πως, όταν αναφερόμαστε στη φάση, εννοούμε τη σχέση:

$$\phi(t) = \omega_o t + \phi_0$$

όπου  $\omega_o$  είναι η γωνιακή συχνότητα και  $\phi_0$  η αρχική φάση.

### 4.2 Δομή

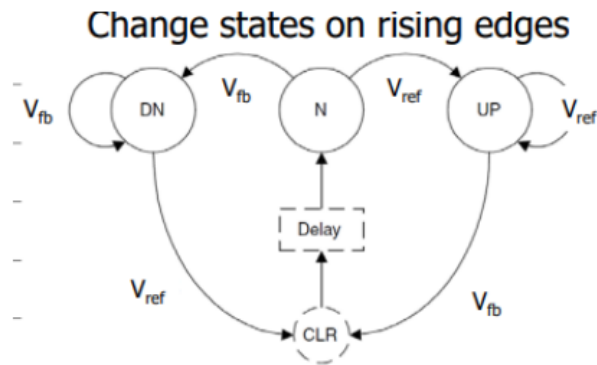


Σχήμα 9: Δομή PFD

Το κύκλωμά μας αποτελείται από δύο D flip-flops, τα οποία υλοποιούν τρεις διακριτές καταστάσεις, και τρεις πύλες NAND δύο εισόδων. Δύο από τις πύλες αυτές έχουν τις εισόδους τους βραχυκυκλωμένες, με αποτέλεσμα να λειτουργούν ως αντιστροφείς. Ο ρόλος των συγκεκριμένων δύο "επιπλέον" πυλών είναι η εισαγωγή ελεγχόμενης καθυστέρησης στην έξοδο του κυκλώματος.

Λόγω της φύσης των ψηφιακών κυκλωμάτων, είναι αναμενόμενο να εμφανίζονται παλμικές διαταραχές στην έξοδο, οι οποίες οδηγούν σε μη ντετερμινιστική χρονική συμπεριφορά. Με την προσθήκη των επιπλέον στοιχείων, μπορούμε να ελέγξουμε την καθυστέρηση του κυκλώματος και να την καταστήσουμε σταθερή και προβλέψιμη.

Η βασική λογική λειτουργίας του κυκλώματος είναι ότι, σε κάθε χρονική στιγμή, ο πρώτος παλμός που φτάνει σε λογικό '1' (high) ενεργοποιεί το αντίστοιχο τρανζίστορ. Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται σχηματικά στο παρακάτω διάγραμμα καταστάσεων.



Σχήμα 10: Διάγραμμα καταστάσεων PFD

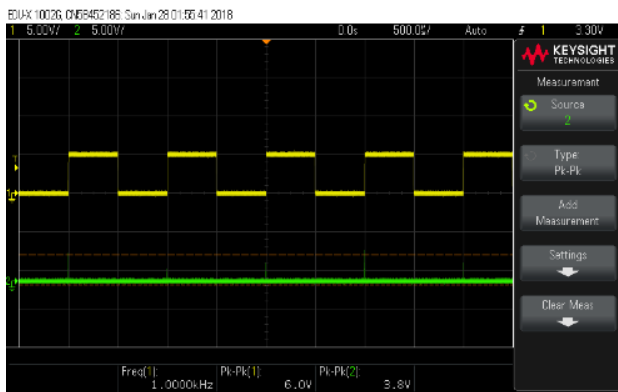
Τέλος, η συμμετρικότητα στον Phase Frequency Detector (PFD) είναι κρίσιμη για την ορθή λειτουργία του PLL. Σε υλοποιήσεις με D flip-flops, η έξοδος UP ενεργοποιείται όταν το σήμα αναφοράς ( $V_{ref}$ ) προηγείται του διαιρεμένου σήματος του ταλαντωτή ( $V_{div}$ ), ενώ η έξοδος DOWN ενεργοποιείται στην αντίθετη περίπτωση. Αν ο PFD δεν είναι συμμετρικός, μπορεί να υπάρξει ασυμμετρία στη διάρκεια των παλμών UP και DOWN, γεγονός που εισάγει στατικό σφάλμα στον έλεγχο φάσης και προκαλεί προκατάληψη στη φόρτιση ή εκφόρτιση του charge pump. Η συμμετρική συμπεριφορά διασφαλίζει ότι για ίσες αλλά αντίθετες διαφορές φάσης, οι έξοδοι έχουν ίση διάρκεια, βελτιώνοντας την ακρίβεια του συγχρονισμού και μειώνοντας το jitter στην έξοδο του PLL.

### 4.3 Πειραματική Μελέτη

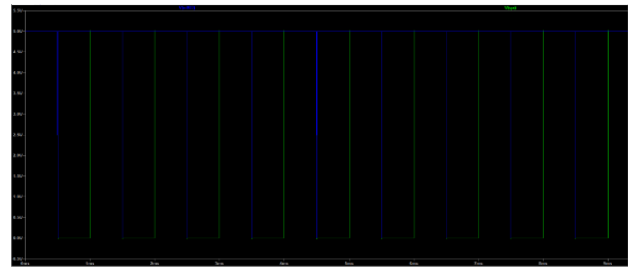
Τροφοδοτήσαμε το κύκλωμά μας με  $V_{cc} = 5V$  και δημιουργήσαμε με τη γεννήτρια ένα τετραγωνικό σήμα συχνότητας 1kHz, πλάτους  $5V_{pp}$ ,  $2.5V_{DC}$  και Duty-Cycle = 50%. Συνδέσαμε την έξοδο της γεννήτριας στις εισόδους  $V_{ref}$  και  $V_{fb}$  του PFD και ελέγξαμε όλους τους κόμβους του κυκλώματος, ρυθμίζοντας τον παλμογράφο σε λειτουργία Y-T.

#### 4.3.1 Χαρακτηρισμός του PFD σε λειτουργία Ανίχνευσης Φάσης

Παρατίθενται ενδεικτικά οι κυματομορφές των εξόδων για  $\Delta\Phi = 180^\circ$ .



Σχήμα 11: Έξοδος στον παλμογράφο



Σχήμα 12: Έξοδος στον προσομοιωτή του LTSpice

Βλέπουμε ότι στις  $180^\circ$ , η έξοδος είναι ένας τετραγωνικός παλμός με  $DC = 50\%$ .

Την στιγμή που οι παλμοί των δύο ρολογιών διασταυρώνονται (με τον έναν να είναι σε άνοδο και τον άλλον σε κάθοδο), γίνεται trigger το CLR των δύο D-FF, δηλαδή και οι δύο έξοδοι τίθενται στιγμιαία στο 0. Εφόσον μιλάμε για ακμοπυροδότητα στοιχεία, θα διατηρηθούν σε αυτήν την κατάσταση έως ότου ξαναέρθει ανερχόμενος παλμός. Δηλαδή, στην περίπτωση του  $Q_A$ , θα παραμείνει LOW για μισή περίοδο.

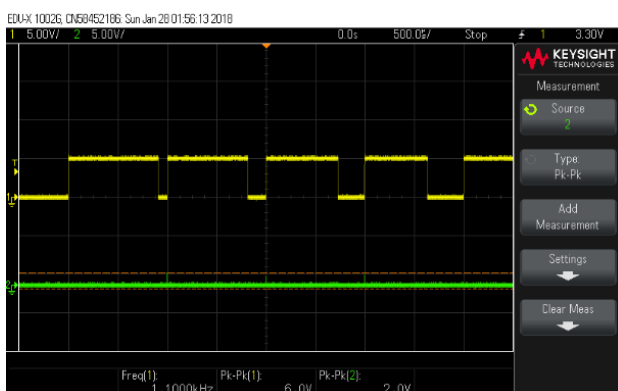
Τα προαναφερθέντα επαληθεύονται και από την προσομοίωση σε Spice, όπου φαίνεται η έξοδος των πυλών NAND (ο μπλε παλμός που μοιάζει με Dirac) και η έξοδος του  $Q_A$ .

Για αύξηση της διαφοράς φάσης, η μεταβολή είναι γραμμική και έχει κλίση περίπου  $2.781^\circ/\mu\text{sec}$  με πολύ καλή ακρίβεια. Επομένως, το  $K_{PD}$  είναι περίπου  $0.0138833\text{V}/\mu\text{όρ}$ .

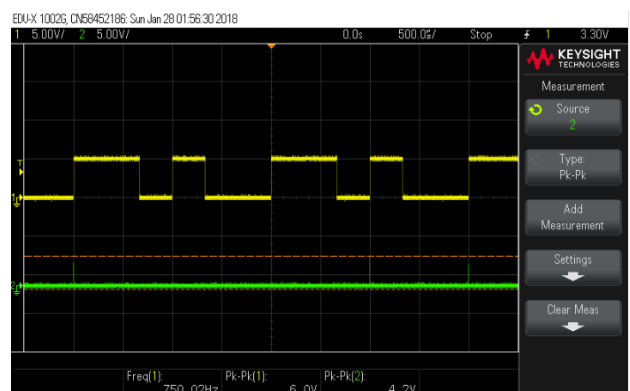
Αξίζει να σημειωθεί πως το PFD είναι ένα μη γραμμικό στοιχείο, γι' αυτό μελετάμε το  $K_{PD} \cdot \Delta\Phi$ , το οποίο είναι γραμμικό.

#### 4.3.2 Χαρακτηρισμός του PFD σε λειτουργία Ανίχνευσης Συχνότητας

Έπειτα ελέγξαμε το κύκλωμα σε λειτουργία ανίχνευσης συχνότητας και λάβαμε τις εξής κυματομορφές:



Σχήμα 13:  $\Delta f = 100\text{Hz}$



Σχήμα 14:  $\Delta f = 500\text{Hz}$

Παρατηρούμε ότι εδώ η κυματομορφή εξόδου δεν έχει σταθερό DC.

Αν το δισταθές κύκλωμα θέλουμε να το χρησιμοποιήσουμε ως ανιχνευτή συχνότητας,

τότε η μέση τιμή της εξόδου  $V_{out}$  θα πρέπει να παρουσιάζει διαφορετική πολικότητα ανάλογα με την σχέση των συχνοτήτων των σημάτων εισόδου, δηλαδή για  $\omega_A > \omega_B$  και  $\omega_A < \omega_B$ .

Πιο συγκεκριμένα, όταν η συχνότητα του σήματος εισόδου  $A$  είναι μεγαλύτερη από αυτή του σήματος εισόδου  $B$  ( $\omega_A > \omega_B$ ), η έξοδος του κυκλώματος θα πρέπει να έχει θετική μέση τιμή, και αντίστοιχα όταν  $\omega_A < \omega_B$ , η μέση τιμή της εξόδου θα πρέπει να είναι αρνητική. Αυτό συμβαδίζει με την ιδιότητα του ανιχνευτή φάσης να αντανακλά τη διαφορά συχνοτήτων.

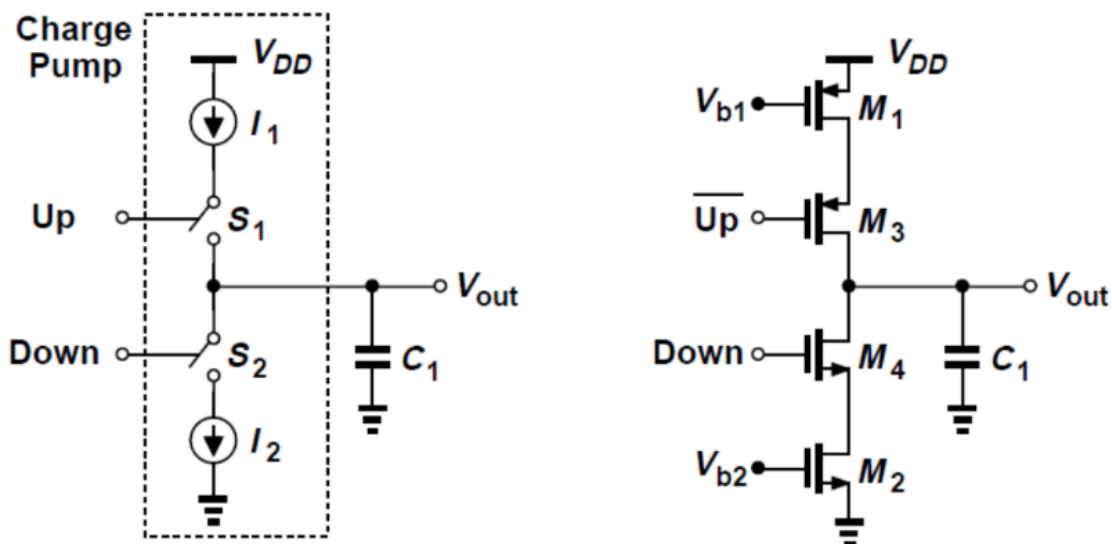
Παρ' όλα αυτά, στην πραγματικότητα, παρατηρούμε ότι η μέση τιμή της εξόδου είναι μηδέν και στις δύο περιπτώσεις. Αυτή η συμπεριφορά υποδεικνύει ότι το κύκλωμα λειτουργεί με έναν τρόπο που δεν αποδίδει καθαρή ένδειξη για τη συχνότητα του σήματος εισόδου, αλλά αντ' αυτού αποτυπώνει μόνο την διαφορά φάσης, η οποία μπορεί να μην σχετίζεται άμεσα με τη μέση τιμή της τάσης.

## 5 Charge Pump

### 5.1 Θεωρία

Η Charge Pump, όπως αναφέραμε, δεν είναι απαραίτητο στοιχείο ενός PLL. Όμως, χωρίς αυτήν, ο μόνος συντελεστής που μπορούμε να ρυθμίσουμε είναι το  $K_{VCO}$ , το οποίο καθιστά αδύνατο να ελέγξουμε ταυτόχρονα το κέρδος και το Bandwidth του κυκλώματός μας. Προσθέτοντας, λοιπόν, την Charge Pump στο κύκλωμα, μπορούμε ανεξάρτητα να ρυθμίσουμε τις δύο αυτές παραμέτρους.

### 5.2 Δομή



Σχήμα 15: Αναπαράσταση Charge Pump με πηγές ρεύματος και υλοποίηση με MOSFET

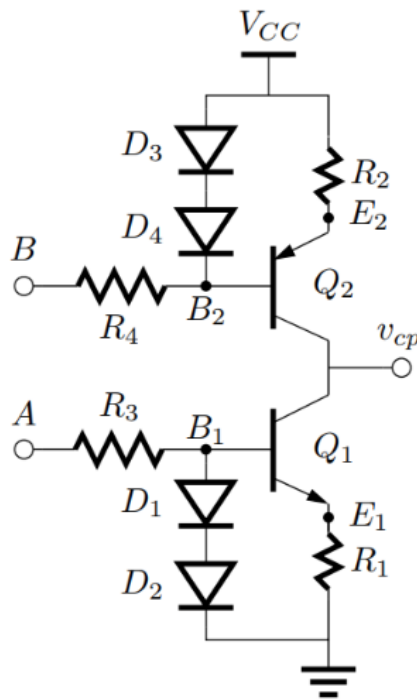
- Οι αντλίες φορτίου είναι κυκλώματα που παρέχουν ή απορροφούν φορτίο από ένα φορτίο για ελεγχόμενο χρονικό διάστημα.

- Το ρεύμα  $I_1$  φορτίζει τον πυκνωτή  $C_1$  και το ρεύμα  $I_2$  τον εκφορτίζει, εφόσον έχουν ενεργοποιηθεί οι κατάλληλοι διακόπτες.
- Τα σήματα ελέγχου καλούνται UP και DOWN καθώς καθορίζουν εάν η τάση του πυκνωτή θα αυξηθεί ή θα μειωθεί.
- $I_1 = I_2 = I_p$ ; οι διακόπτες τοποθετούνται σε σειρά με την έξοδο (drain) των πηγών ρεύματος και επομένως αυτή η τοπολογία ονομάζεται "drain-switched" αντλία φορτίου (CP).

Στο δικό μας κύκλωμα, λοιπόν, η Charge Pump θα οδηγείται από τον PFD (περισσότερα γι' αυτό παρακάτω).

### 5.3 Πειραματική Μελέτη

Σκοπός του εργαστηρίου είναι να δούμε ότι το κύκλωμα του CP είναι δύο πηγές ρεύματος με αρκετά όμοια ρεύματα και να μετρήσουμε τις χαρακτηριστικές του. Το κύκλωμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το εξής:



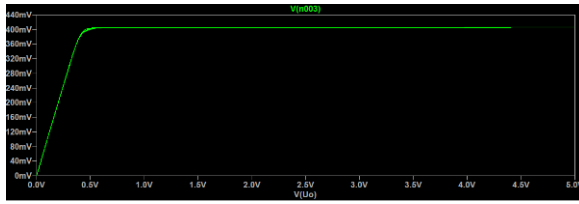
Σχήμα 16: Κύκλωμα Charge Pump

Γενικότερα, για να επιβεβαιώσουμε ότι ένα κύκλωμα λειτουργεί ως πηγή ρεύματος, αρκεί να διαπιστώσουμε ότι για διαφορετικές τάσεις στα άκρα του κυκλώματος παίρνουμε το ίδιο σταθερό ρεύμα.

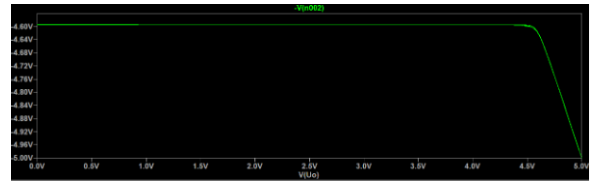
Για να το επαληθεύσουμε στην άσκηση μας, επιβάλλουμε στο  $u_{cp}$  μία τριγωνική τάση, οπότε μετράμε τιμές ρεύματος καθώς η τάση μεταβάλλεται μεταξύ 0 και 5 V.

Στην περίπτωση που αφαιρούμε το τρανζίστορ  $Q_2$ , παρατηρούμε αρχικά μία σχεδόν γραμμική αύξηση του ρεύματος, κάτι που υποδηλώνει ότι το κύκλωμα λειτουργεί ως αντίσταση. Στη συνέχεια όμως το ρεύμα σταθεροποιείται, οπότε το κύκλωμα λειτουργεί

πλέον ως πηγή ρεύματος. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρείται και όταν αφαιρείται το τρανζίστορ  $Q_1$ .



(α') Αφαίρεση  $Q_2$

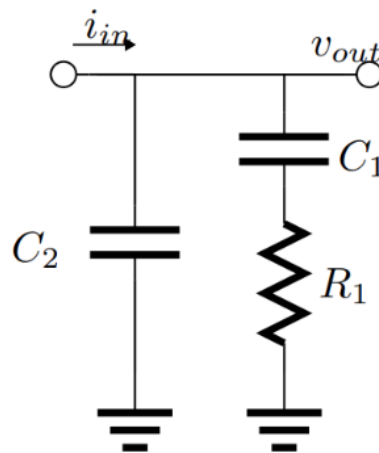


(β') Αφαίρεση  $Q_1$

Σχήμα 17: Κυματομορφές ρεύματος Charge Pump

## 6 Low Pass Filter

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν ιδανικό ολοκληρωτή προκειμένου να αποφύγουμε το πεπερασμένο σφάλμα φάσης που υπάρχει στους βρόχους κλειδώματος φάσης τύπου I. Δεδομένου ότι το φορτίο της Charge Pump είναι ένας πυκνωτής, πρακτικά έχουμε ήδη την συνάρτηση μεταφοράς του ολοκληρωτή μας  $H(s) = \frac{1}{s}$ . Όμως, όπως θα αναλύσουμε και παρακάτω, έχομε πλέον δύο μηδενικά στο μηδέν, το οποίο εγείρει σοβαρά ζητήματα σχετικά με την ευστάθεια του συστήματος. Γι' αυτό το λόγο, θα προσθέσουμε μία ανίσταση σε σειρά με τον πυκνωτή, ώστε να μας δώσει ένα μηδενικό και το σύστημα μας να γίνει και πάλι ευσταθές.



Σχήμα 18: Low Pass Filter

Επιπλέον, για να μετριάσουμε τον θόρυβο φάσης της εξόδου της Charge Pump, προσθέτουμε και έναν δεύτερο πυκνωτή  $C_2$  σε παράλληλη σύνδεση με τον  $C_1$ . Έτσι, κατασκευάσαμε ένα φίλτρο χαμηλής διέλευσης (Low Pass Filter - LPF).

### 6.1 Πειραματική Μελέτη

Στη συγκεκριμένη εργαστηριακή άσκηση υλοποιήσαμε το παραπάνω φίλτρο και μετρήσαμε τις βασικές χαρακτηριστικές του.

Το ρεύμα στην έξοδο του charge pump δίνεται από:

$$I(s) = u_{\text{out}} \cdot sC_2 + \frac{u_{\text{out}}}{\left(\frac{1}{sC_1} + R_1\right)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει ως:

$$H(s) = \frac{u_{\text{out}}}{I(s)} = \frac{1 + sR_1C_1}{sC_1 + sC_2(1 + sR_1C_1)}$$

Από αυτήν προκύπτουν τα εξής:

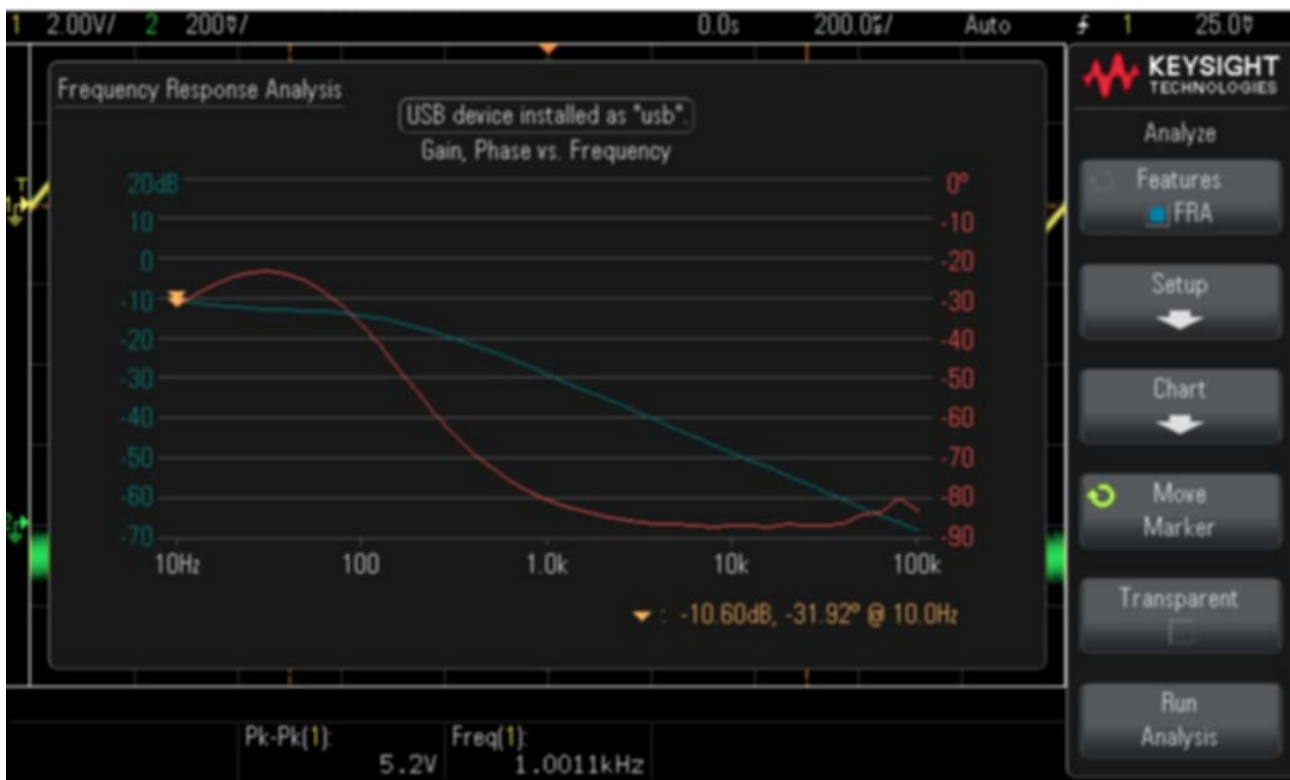
**Μηδενικά:**

$$s = -\frac{1}{R_1C_1} = -64.47$$

**Πόλοι:**

$$s = 0, \quad s = -\frac{C_1 + C_2}{C_2R_1C_1} = -709.21$$

Το αντίστοιχο Bode διάγραμμα μέσω του παλμογράφου του εργαστηρίου είναι το εξής :



Σχήμα 19: Bode Διάγραμμα

## 7 Μελέτη του PLL

Σε αυτό το σημείο πλέον θα αναλύσουμε το PLL ως σύνολο, δηλαδή θα δούμε πώς αλληλεπιδρούν τα κυκλώματα που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα. Επιπλέον, θα δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις χαρακτηριστικές του.

## 7.1 Λειτουργία

Καταρχάς, υπάρχουν δύο βασικά σενάρια λειτουργίας του PLL:

- Το  $\Phi_{out}$  να υστερεί του  $\Phi_{in}$ , στην οποία περίπτωση ενεργοποιείται το UP και το CP φορτίζει τον πυκνωτή. Ως εκ τούτου, η τάση  $V_{ctrl}$  αυξάνεται και το  $\Phi_{out}$  θα προχωρήσει σε μία αύξηση της συχνότητας.
- Το  $\Phi_{out}$  να προηγείται του  $\Phi_{in}$ , στην οποία περίπτωση ενεργοποιείται το DOWN και το CP εκφορτίζει τον πυκνωτή. Ως εκ τούτου, η τάση  $V_{ctrl}$  μειώνεται και το  $\Phi_{out}$  θα προχωρήσει σε μία μείωση της συχνότητας.

Στο τέλος του κυκλώματος μας, ακριβώς πριν την έξοδο, έχουμε προσθέσει και έναν Schmitt Trigger, ο οποίος έχει σκοπό να καθαρίσει την έξοδο του PLL και να την κάνει τετραγωνική. Έτσι, λύνουμε το πρόβλημα με τα setup και hold time του D-FF, που παρατηρήσαμε και μπορούμε πλέον να επιτύχουμε τον επιθυμητό πολλαπλασιασμό.

Σε αυτό το σημείο, να αναφέρουμε ότι λόγω της συγκεκριμένης υλοποίησης του VCO έχουμε μια συχνότητα κορεσμού στην έξοδο, το οποίο οφείλεται στον κορεσμό του  $V_{ctrl}$ . Δηλαδή, από ένα σημείο και έπειτα, το  $V_{ctrl}$  δεν μπορεί να αυξηθεί άλλο, προκειμένου να ακολουθήσει σωστά το σήμα αναφοράς και το PLL δεν μπορεί να κλειδώσει. Πειραματικά, αυτή υπολογίστηκε ίση με 4.8KHz.

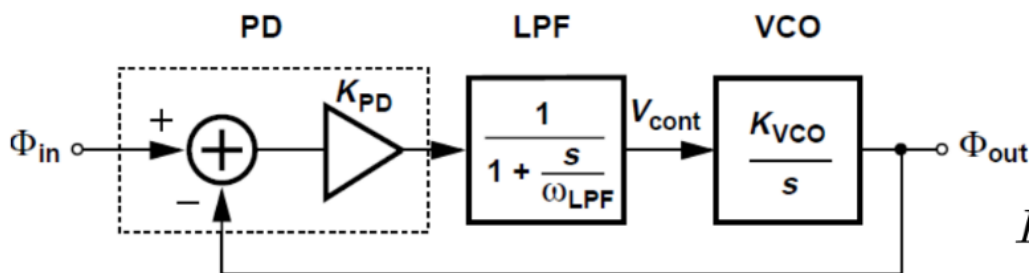
Επιπλέον, το  $V_{ctrl}$  δεν μεταβάλλεται γραμμικά, αλλά έχει μια καμπύλη που θυμίζει φόρτιση/εκφόρτιση πυκνωτή (με κάτι σαν stutter) μέχρι να φτάσει το επιθυμητό του επίπεδο.

## 7.2 Συναρτήσεις Μεταφοράς

Θα αναλύσουμε τόσο τα Type I όσο και τα Type II PLLs.

### 7.2.1 Type I PLL

Η δομή ενός Type I PLL είναι η εξής:



Σχήμα 20: Type I PLL



Και μέσω ανάλυσης καταλήγουμε με τις εξής σχέσεις:

$$H_{OL} = K_{PD} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_{LPP}}} \cdot \frac{K_{VCO}}{s} \quad (1)$$

$$LG(s) = -K_{PD} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_{LPP}}} \cdot \frac{K_{VCO}}{s} \quad (2)$$

$$H_{CL}(s) = \frac{\phi_{out}(s)}{\phi_{in}(s)} = \frac{H_{OL}(s)}{1 - LG(s)} \quad (3)$$

$$H_{CL}(s) = \frac{K_{PD}K_{VCO}}{\frac{s^2}{\omega_{LPP}} + s + K_{PD}K_{VCO}} \quad (4)$$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5)$$

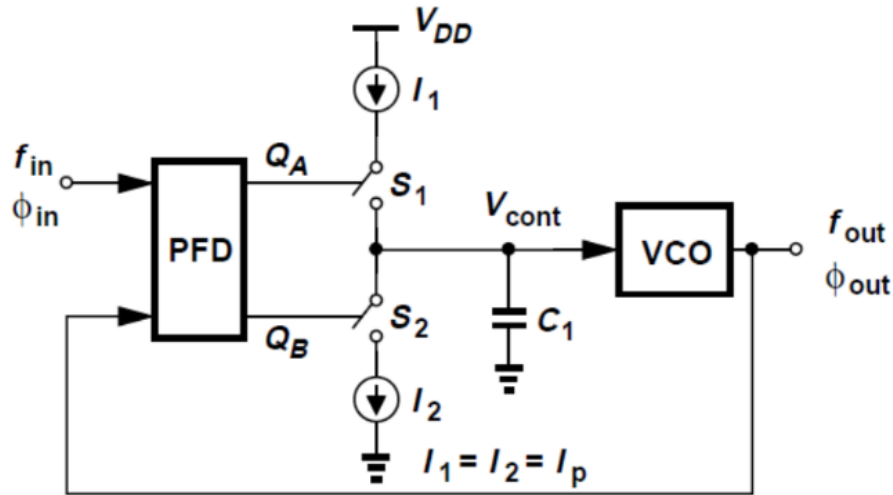
$$\omega_n = \sqrt{K_{PD}K_{VCO}\omega_{LPP}} \quad (6)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_{LPP}}{K_{PD}K_{VCO}}} \quad (7)$$

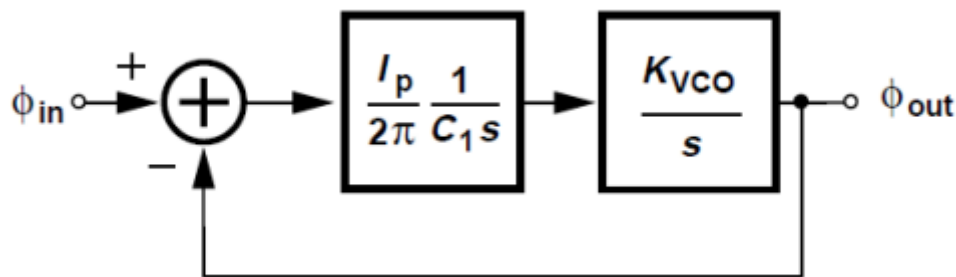
- Η  $\zeta$  παρέχει πληροφορίες για τη σταθερότητα του βρόχου. Για κρίσιμη απόσβεση, η τιμή είναι  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ · συνήθως κυμαίνεται μεταξύ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  και 1.
- Η συγκεκριμένη τοπολογία ονομάζεται «PLL τύπου-I» επειδή η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου περιέχει έναν ιδανικό ολοκληρωτή (έναν πόλο στο μηδέν).
- Το  $\omega$  εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της φάσης και όχι τη συχνότητα εισόδου του βρόχου.
- Για αργές διακυμάνσεις, η έξοδος ακολουθεί τη μεταβολή της συχνότητας εισόδου. Ωστόσο, για ταχύτερες διακυμάνσεις (μεταβολή φάσης στην είσοδο έξω από το εύρος ζώνης του βρόχου), οι διακυμάνσεις φάσης στην έξοδο είναι μικρότερες.
- Η αύξηση του  $K_{PD}K_{VCO}$  μειώνει τη  $\zeta$ , αυξάνει το κέρδος και ανεβάζει τη  $\omega_n$ · η φασική απεικόνιση παραμένει αμετάβλητη. Αυτό μειώνει το περιθώριο φάσης (PM) και κατά συνέπεια τη σταθερότητα.
- Η  $\zeta$  μειώνεται αν μειωθεί η  $\omega_{LPP}$ , επομένως η σταθερότητα μειώνεται όταν μειώνουμε τη  $\omega_{LPP}$  για να περιορίσουμε τις παρεμβολές του PD.
- Η μείωση της  $\omega_{LPP}$  για τη μείωση των διαταραχών στο  $V_{cont}$  ή η αύξηση του  $K_{PD}$  για τη μείωση του στατικού σφάλματος φάσης, και οι δύο μειώνουν τη σταθερότητα του βρόχου.
- Η  $\omega_{LPP}$  σχετίζεται με έναν συμβιβασμό ως προς το «εύρος σύλληψης», δηλαδή τη μέγιστη αρχική διαφορά μεταξύ της συχνότητας εξόδου και αναφοράς για την οποία ο βρόχος μπορεί να συγχρονιστεί.
- Ο βρόχος αποτυγχάνει εύκολα να συγχρονιστεί υπό μεταβολές PVT και άλλες ατέλειες στο κύκλωμα, ή αλλιώς επηρεάζεται η απόδοσή του.

### 7.2.2 Type II PLL

Για να αντιμετωπίσουμε πολλά από τα παραπάνω προβλήματα, χρησιμοποιούμε έναν PFD στην είσοδο, αντί για έναν απλό PD, και καταλήγουμε με το γνωστό Type II PLL.



Σχήμα 21: Type II PLL



Σχήμα 22: Type II PLL ως σύστημα

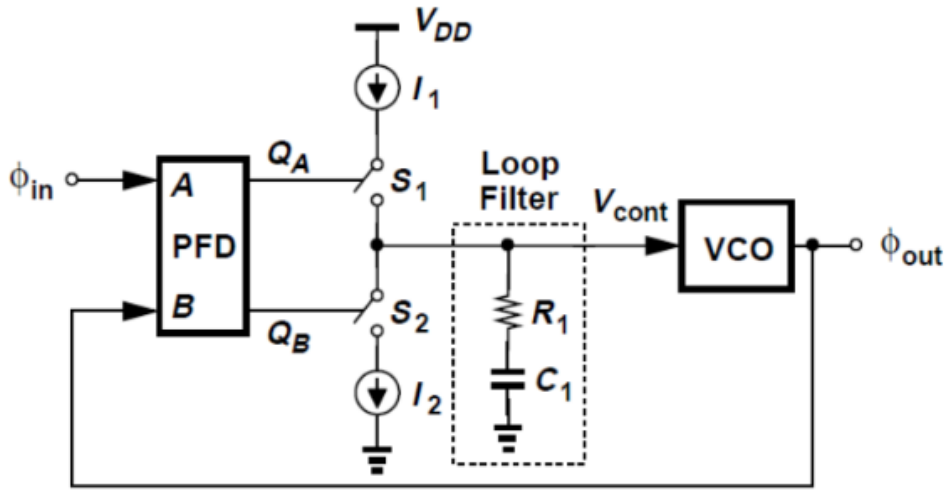
Και η συνάρτηση μεταφοράς είναι η εξής:

$$H(s) = \frac{I_p K_{VCO}}{2\pi C_1 s^2 + I_p K_{VCO}}, \quad (8)$$

- Το  $\frac{1}{s}$  στη συνάρτηση μεταφοράς υποδηλώνει έναν πόλο στο μηδέν και συνεπώς έναν ιδανικό ολοκληρωτή.
- Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου δίνεται από τη  $H(s)$  και περιέχει δύο πόλους, κάτι που καθιστά τον βρόχο ασταθή.
- Αυτή η αρχιτεκτονική ονομάζεται «PLL τύπου-II» καθώς περιέχει δύο πόλους στο μηδέν λόγω των δύο ιδανικών ολοκληρωτών.

- Για να καταστήσουμε τον βρόχο σταθερό, μπορούμε είτε να κάνουμε έναν από τους ολοκληρωτές μη ιδανικό (με απώλειες), είτε να εισάγουμε ένα μηδενικό στον βρόχο· ακολουθούμε τη δεύτερη προσέγγιση.
- Ένας αντιστάτης  $R_1$  τοποθετείται σε σειρά με τον πυκνωτή. Η τάση ελέγχου μεταβάλλεται απότομα κατά  $I_p R_1$  κάθε φορά που το CP ενεργοποιείται ή απενεργοποιείται.
- Χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση όπως προηγουμένως για τη συνάρτηση μεταφοράς του συνδυασμού PFD/CP, λαμβάνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς όπως δόθηκε παραπάνω. Αυτός ο συνδυασμός έχει ένα μηδενικό στο  $-\frac{1}{R_1 C_1}$ . Ο κλάδος  $R_1 C_1$  ονομάζεται «φίλτρο βρόχου».

### 7.3 Charge Pump PLL



Σχήμα 23: Charge Pump PLL

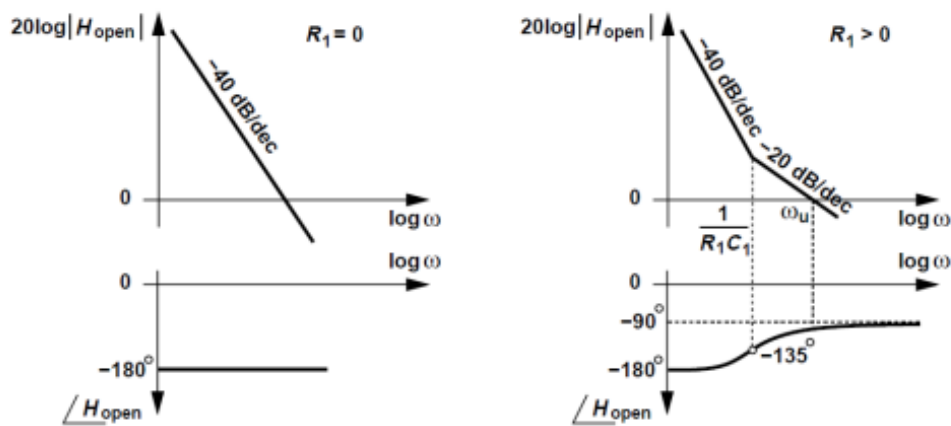
$$\omega_n = \sqrt{\frac{I_p K_{VCO}}{2\pi C_1}} \quad (9)$$

$$\zeta = \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{I_p K_{VCO} C_1}{2\pi}} \quad (10)$$

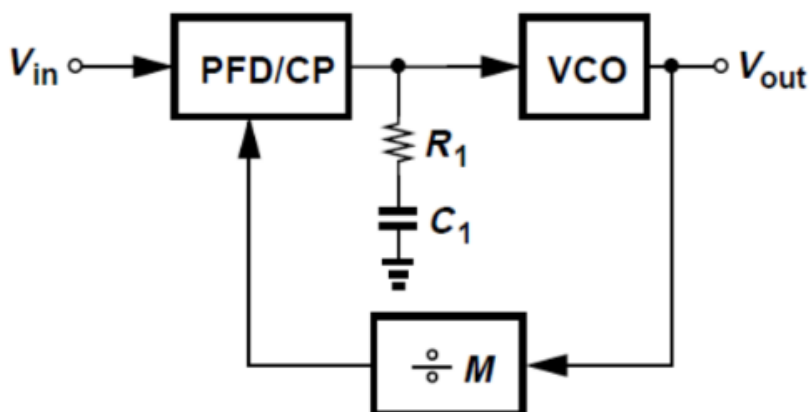
$$H(s) = \frac{\frac{I_p K_{VCO}}{2\pi C_1} (R_1 C_1 s + 1)}{s^2 + \frac{I_p K_{VCO} R_1}{2\pi} s + \frac{I_p K_{VCO}}{2\pi C_1}} \quad (11)$$

- Το σφάλμα φάσης του CPPLL παραμένει μηδενικό.
- Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου δίνεται από τη  $H(s)$ .
- Το σύστημα εμφανίζει απόκριση χαμηλοπερατού φίλτρου (αργές διακυμάνσεις φάσης μεταφέρονται στην έξοδο).
- Η  $\zeta$  αυξάνεται με το  $C_1$ .

- Η αρχιτεκτονική επιλύει όλα τα μειονεκτήματα του PLL τύπου-I.
- Αν αλλάξουμε το  $I_p$  και το  $K_{VCO}$  σε αντίθετες κατευθύνσεις, η σταθερότητα δεν φαίνεται να επηρεάζεται. Ωστόσο, υπερβολικά μεγάλο  $K_{VCO}$  ή μικρό  $I_p$  μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα.
- Σε αντίθεση με το PLL τύπου-I, το CPPLL γίνεται πιο σταθερό καθώς αυξάνεται το  $K_{VCO}$ .
- Το υψηλότερο  $K_{VCO}$  μετατοπίζει την καμπύλη μεγέθους προς τα πάνω χωρίς να επηρεάζει τη φασική καμπύλη, αυξάνοντας έτσι το  $\omega_u$  και το περιθώριο φάσης (PM).
- Το  $I_p$  έχει παρόμοιο αποτέλεσμα, υποδεικνύοντας ότι η σταθερότητα επιδεινώνεται όταν το γινόμενο  $I_p K_{VCO}$  μειώνεται.



Σχήμα 24: Charge Pump PLL Bode Diagram



Σχήμα 25: Charge Pump PLL

- Σε αρχιτεκτονική πολλαπλασιασμού συχνότητας, το αποτελεσματικό  $K_{VCO}$  και συνεπώς η σταθερότητα μειώνονται.

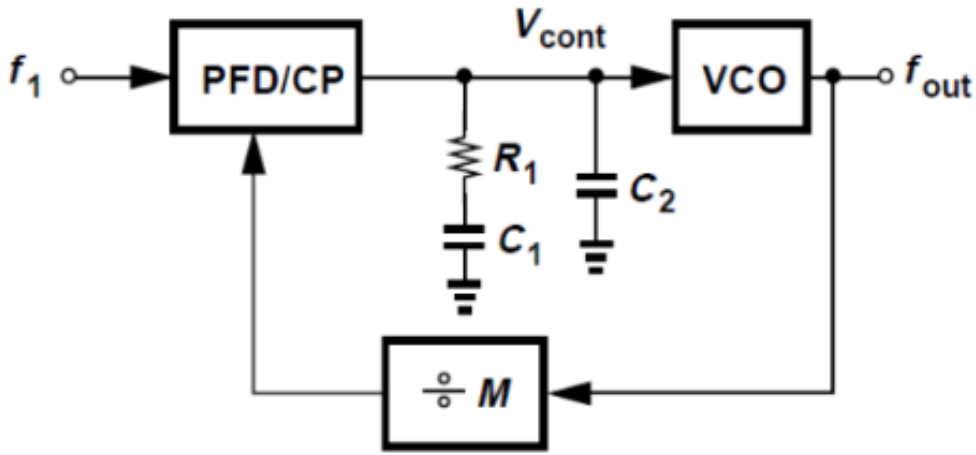
- Πρέπει να αυξηθεί η τιμή του  $R_1$ ,  $I_p$  ή  $C_1$  για να αντισταθμιστεί ο παράγοντας πολλαπλασιασμού  $M$ .
- Τα  $\omega_n$  και  $\zeta$  για το CPPLL πολλαπλασιασμού συχνότητας δίνονται επίσης.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{I_p K_{VCO}}{2\pi C_1 M}} \quad (12)$$

$$\zeta = \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{I_p K_{VCO} C_1}{2\pi M}} \quad (13)$$

## 7.4 Higher Order Loops

Λόγω ατελειών, η τάση ελέγχου παρουσιάζει σημαντικό κυμάτισμα (ripple).



Σχήμα 26: Higher Order Loop Circuit

- Μια απλή λύση στο προηγούμενο πρόβλημα είναι να συνδέσουμε έναν πυκνωτή μεταξύ της γραμμής ελέγχου ( $V_{ctrl}$ ) και της γείωσης.
- Το αρχικό ρεύμα από το charge pump περνά από αυτόν τον πυκνωτή, μειώνοντας το κυμάτισμα στην τάση ελέγχου.
- Ο πυκνωτής  $C_2$  αυξάνει τη τάξη του βρόχου σε 3 και υποβαθμίζει το περιθώριο φάσης (PM), ωστόσο,  $C_2$  τόσο μεγάλο όσο  $0.2C_1$  επηρεάζει αμελητέα τον χρόνο αποκατάστασης του βρόχου.

## 7.5 Μελέτη Ευστάθειας

Παρότι αναλύθηκε και προηγουμένως, θα κάνουμε σε αυτό το σημείο μια ανασκόπηση της συμπεριφοράς του κυκλώματος ως προς την ευστάθεια.

Καταρχάς, ξεκινώντας από ένα Type-I PLL, έχουμε μόνο έναν πόλο στο 0, τον οποίον προσθέτει το στάδιο του VCO. Προφανώς, σε αυτήν την συνδεσμολογία δεν τίθεται ζήτημα ευστάθειας.

Προσθέτοντας, όμως, το στάδιο Charge Pump, προσθέτουμε και έναν δεύτερο πόλο (μέσω του πυκνωτή που λειτουργεί ως φορτίο) στο 0. Έτσι, το κύκλωμα είναι ασταθές, αφού η φάση ξεκινάει, και διατηρείται, στις  $-180$  μοίρες. Για να το αντιμετωπίσουμε αυτό, βάζουμε μία αντίσταση σε σειρά με τον πυκνωτή, προσθέτοντας έτσι ένα μηδενικό στο σύστημα μας. Ρυθμίζοντας κατάλληλα τις τιμές των RC, φέρνουμε το μηδενικό "νωρίς" (σε χαμηλή συχνότητα) εξασφαλίζοντας έτσι την ευστάθεια.

Τέλος, προσθέτουμε και έναν πυκνωτή ακόμα ο οποίος έρχεται για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα του θορύβου, βάζοντας όμως άλλον έναν πόλο στο σύστημά μας. Γι' αυτό, χρειάζεται προσεκτική επιλογή των παραμέτρων ( $R$ ,  $C$ ) ώστε να φροντίσουμε το σύστημα μας να είναι τελικά ευσταθές.

Αυξάνοντας το  $K_{VCO}$ , βελτιώνουμε την ευστάθεια. Σε αρχιτεκτονική πολλαπλασιασμού συχνότητας, το αποτελεσματικό  $K_{VCO}$  και συνεπώς η σταθερότητα μειώνονται.

## 8 Jitter και Phase Noise

### 8.1 Εισαγωγικές έννοιες θορύβου

Ο θόρυβος είναι μια τυχαία διαδικασία. Για τους σκοπούς μας, αυτό σημαίνει ότι η στιγμιαία τιμή του θορύβου στο χρονικό πεδίο δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια.

Μία ιδιότητα του θορύβου που μπορεί να υπολογιστεί στο χρονικό πεδίο είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) ή κατανομή του πλάτους του. Για παράδειγμα, αν ο θόρυβος παράγεται από πολλούς ανθρώπους ανεξάρτητα, αναμένουμε η PDF να είναι κατανομή Gauss.

Οι περισσότερες αναλύσεις θορύβου πραγματοποιούνται στο συχνотικό πεδίο· όμως, λόγω της τυχαίας φύσης του, ο θόρυβος δεν προσαρμόζεται άμεσα στο μετασχηματισμό Fourier. Δηλαδή, αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Fourier του  $x(t)$ , δεν μπορούμε να αποκτήσουμε ένα «ομαλό» γράφημα στο συχνотικό πεδίο ανεξαρτήτως της διάρκειας του  $x(t)$ . Πρέπει, επομένως, να βασιστούμε σε ένα διαφορετικό χαρακτηριστικό στο συχνотικό πεδίο που να ισχύει για τυχαία φαινόμενα.

Η έννοια της «φασματικής πυκνότητας ισχύος» ή απλώς του «φάσματος» είναι εξαιρετικά χρήσιμη στην εργασία μας. Ορίζουμε το φάσμα ως την ποσότητα ισχύος (ή ενέργειας) που μεταφέρει ένα σήμα σε ένα εύρος ζώνης 1 Hz γύρω από κάθε συχνότητα. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η φωνή μας περιέχει συχνотικά στοιχεία από 20 Hz έως 20 kHz.

Σχεδιάζοντας σε τεχνολογία CMOS, μας ενδιαφέρει κυρίως ο θόρυβος που παράγεται από αντιστάσεις και τρανζίστορ τύπου MOSFET. Εδώ επανεξετάζουμε αυτές τις πηγές θορύβου.

## 8.2 Θόρυβος από Στοιχεία

Μία αντίσταση τιμής  $R$  μετατρέπει τη θερμική ενέργεια του περιβάλλοντος σε ένα τυχαίο δυναμικό στα άκρα της. Το φάσμα της τάσης δίνεται από:

$$S(f) = 4kTR \text{ V}^2/\text{Hz}, \quad (2.1)$$

όπου  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  είναι η σταθερά του Boltzmann και  $T$  η απόλυτη θερμοκρασία. Σημειώνεται ότι η μονάδα του  $S(f)$  είναι  $\text{V}^2/\text{Hz}$  και όχι  $\text{W}/\text{Hz}$ . Συχνά γράφουμε αυτή την εξίσωση ως:

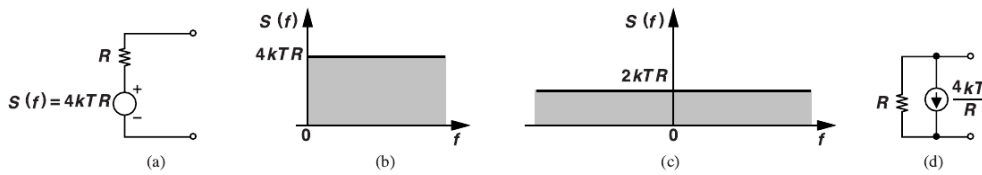
$$V_n^2 = 4kTR \text{ V}^2/\text{Hz}, \quad (2.2)$$

ώστε να τονίσουμε ότι αναφέρεται σε ποσότητα τάσης. Ο θόρυβος προσομοιώνεται ως πηγή τάσης σε σειρά με την αντίσταση [Σχ. 27(α)] και το φάσμα του ονομάζεται «λευκό», επειδή — όπως και το λευκό φως — περιέχει ίση ισχύ σε όλες τις συχνότητες [Σχ. 27(β)]<sup>1</sup>. Σε ορισμένες αναλύσεις, προτιμάται η «διπλής όψης» αναπαράσταση του Σχ. 27(γ), όπου η ισχύς του σήματος κατανέμεται τόσο σε θετικές όσο και σε αρνητικές συχνότητες.

Επίσης, σε ορισμένες περιπτώσεις η ανάλυση είναι απλούστερη αν προσομοιώσουμε τον θόρυβο της αντίστασης με πηγή ρεύματος σε παράλληλη σύνδεση [Σχ. 27(δ)] με φάσμα ίσο με:

$$S(f) = I_n^2 = \frac{4kT}{R} \text{ A}^2/\text{Hz}.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η πολικότητα της πηγής τάσης ή ρεύματος είναι αδιάφορη.



Σχήμα 27: (α) Μοντέλο θορύβου αντίστασης, (β) φάσμα θορύβου αντίστασης, (γ) διπλής όψης φάσμα θορύβου αντίστασης, (δ) μοντέλο θορύβου αντίστασης με πηγή ρεύματος.

## 8.3 Βασικές Έννοιες Jitter και Phase Noise

Ένας ιδανικός ταλαντωτής χωρίς θόρυβο παράγει περιοδική έξοδο με απόλυτη ακρίβεια, π.χ. υπό τη μορφή ημιτόνου ή τετραγωνικού παλμού [Σχ. 28(α)]. Μπορούμε να θεωρήσουμε μια τέτοια έξοδο ως

- (α) κυματομορφή της οποίας η περίοδος δεν αλλάζει με τον χρόνο,
- (β) κυματομορφή της οποίας η στιγμιαία συχνότητα δεν αλλάζει με τον χρόνο ή
- (γ) κυματομορφή της οποίας οι μηδενικές διασταυρώσεις εμφανίζονται ομοιόμορφα, σε χρόνους  $t = nT_1/2$ , όπου  $n$  είναι ακέραιος.

<sup>1</sup>Στην πράξη, το φάσμα είναι λευκό μόνο σε συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων.

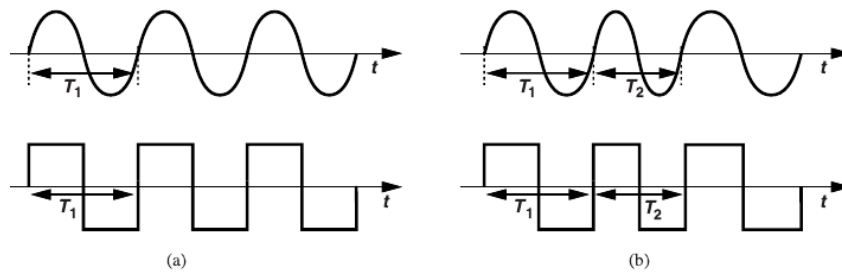
Αυτές οι τρεις απόψεις είναι ισοδύναμες.

Στην πραγματικότητα, οι πηγές θορύβου στο κύκλωμα του ταλαντωτή διαταράσσουν τόσο το πλάτος όσο και τη φάση αυτών των κυματομορφών. Ας αγνοήσουμε τις μεταβολές πλάτους και ας παρατηρήσουμε ότι ο θόρυβος: (α) κάνει τις περιόδους άνισες, (β) προκαλεί τυχαίες μεταβολές στη στιγμιαία συχνότητα και (γ) οδηγεί σε μηδενικές διασταυρώσεις που δεν εμφανίζονται στις στιγμές  $nT_1/2$  [Σχ. 28(β)]. Μπορούμε να πούμε ότι ο θόρυβος διαμορφώνει τυχαία τη συχνότητα και τη φάση της εξόδου.

Γνωρίζουμε από τη βασική θεωρία επικοινωνιών ότι η διαμόρφωση φάσης μπορεί να εκφραστεί ως:

$$V_{\text{out}}(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \phi_n(t)],$$

όπου  $\omega_0$  είναι η «φορέας» συχνότητα, η οποία στην περίπτωση μας είναι η συχνότητα ταλάντωσης απουσία θορύβου. Φυσικά, η  $\phi_n(t)$  αντιπροσωπεύει οποιαδήποτε από τις τρεις απόψεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Για παράδειγμα, η στιγμιαία συχνότητα  $\omega_0 + \frac{d\phi_n}{dt}$  διαμορφώνεται εφόσον  $\frac{d\phi_n}{dt} \neq 0$ .



Σχήμα 28: (α) Ιδανικός ταλαντωτής, (β) πραγματικός ταλαντωτής με θόρυβο.

### 8.3.1 Ταλάντωση Χρόνου (Jitter)

Η απόκλιση των μηδενικών διασταυρώσεων μιας κατά τα άλλα περιοδικής κυματομορφής από τα ιδανικά χρονικά σημεία ονομάζεται *ταλάντωση χρόνου (jitter)*. Το βασικό σημείο που πρέπει να συγκρατήσουμε είναι ότι το jitter γενικά αναφέρεται σε φαινόμενο του χρονικού πεδίου.

#### Παράδειγμα

Ένας VCO αισθάνεται στην τάση ελέγχου του μια μικρή, ντετερμινιστική διαταραχή της μορφής  $V_{\text{cont}}(t) = V_m \cos(\omega_m t)$ . Εμφανίζει ο VCO jitter στην έξοδό του;

**Λύση:** Ναι, εμφανίζει. Η έξοδος μπορεί να εκφραστεί ως:

$$V_{\text{out}}(t) = V_0 \cos (\omega_0 t + K_{\text{VCO}} V_m \cos(\omega_m t)) \quad (2.11)$$

ή, χρησιμοποιώντας ανάλυση ημιτονοειδούς διαμόρφωσης:

$$V_{\text{out}}(t) = V_0 \cos \left( \omega_0 t + \frac{K_{\text{VCO}} V_m}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right) \quad (2.12)$$

Παρατηρούμε ότι ορισμένες μηδενικές διασταυρώσεις δεν συμβαίνουν ομοιόμορφα στον χρόνο. Το Σχ. 29 απεικονίζει τη συνολική φάση  $\phi_{\text{tot}}$  και την υπερβολική φάση  $\phi_{\text{ex}}$ .



Η μέγιστη απόκλιση των μηδενικών διασταυρώσεων από τα ιδανικά χρονικά σημεία εμφανίζεται όταν η υπερβολική φάση φτάνει σε μέγιστο ή ελάχιστο.

Αρα, το jitter από κορυφή σε κορυφή (peak-to-peak) είναι ίσο με:

$$\frac{2K_{\text{VCO}}V_m}{\omega_m} \text{ (σε ακτίνια)}$$

ή:

$$\left[ \frac{2K_{\text{VCO}}V_m}{\omega_m \cdot 2\pi} \right] \cdot \left( \frac{2\pi}{\omega_0} \right) = \frac{2K_{\text{VCO}}V_m}{\omega_m \omega_0} \text{ δευτερόλεπτα.}$$

Μπορούμε επίσης να ομαλοποιήσουμε το jitter ως προς την (μέση) περίοδο του VCO και να γράψουμε:

$$\frac{2K_{\text{VCO}}V_m}{\omega_m \omega_0} \bigg/ \left( \frac{2\pi}{\omega_0} \right) = \frac{K_{\text{VCO}}V_m}{\pi \omega_m}.$$

Αυτό το φαινόμενο, γνωστό ως ντετερμινιστικό jitter (Deterministic Jitter, DJ), προκύπτει όταν η συχνότητα ενός ταλαντωτή διαταράσσεται περιοδικά. Τέτοια διαταραχή μπορεί να προέρχεται από την άμεση τάση ελέγχου ή από τις ακροδέκτες τροφοδοσίας ή υποστρώματος.

Η θεώρηση της διαμόρφωσης φάσης ενός ταλαντωτή στο χρονικό πεδίο δεν αποκκλύπτει εύκολα αν η διαταραχή είναι τυχαία ή ντετερμινιστική. Για αυτόν τον λόγο, συχνά στρεφόμαστε στο συχνотικό πεδίο για να διακρίνουμε μεταξύ διαφορετικών τύπων διαταραχών.

## Παράδειγμα 2

Ένας VCO αισθάνεται στην τάση ελέγχου του μια μικρή διαταραχή της μορφής  $V_{\text{cont}}(t) = V_m \cos(\omega_m t)$ . Να προσδιοριστεί το φάσμα εξόδου.

**Λύση:** Στην Εξ. (2.12), υποθέτουμε ότι  $\frac{K_{\text{VCO}}V_m}{\omega_m} \ll 1$  ακτίνια και, χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις  $\sin \theta \approx \theta$  και  $\cos \theta \approx 1$  για  $\theta \ll 1$ , γράφουμε:

$$V_{\text{out}}(t) \approx V_0 \cos(\omega_0 t) - V_0 \cdot \frac{K_{\text{VCO}}V_m}{\omega_m} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_m t) \quad (2.13)$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα  $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ , έχουμε:

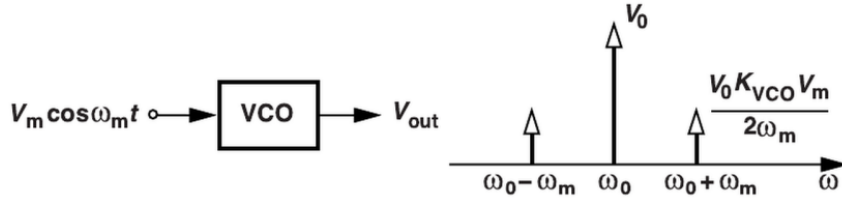
$$V_{\text{out}}(t) \approx V_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{V_0 K_{\text{VCO}}V_m}{2\omega_m} [\cos((\omega_0 - \omega_m)t) - \cos((\omega_0 + \omega_m)t)] \quad (2.14)$$

Αυτή η απλοποίηση ονομάζεται «προσέγγιση στενής ζώνης FM» (narrowband FM approximation).

Όπως φαίνεται στο Σχ. 2.15, το φάσμα εξόδου αποτελείται από μια κύρια συνιστώσα στη συχνότητα  $\omega_0$  (που ονομάζεται «φορέας») και δύο πλευρικές ζώνες (sidebands ή spurs), συμμετρικά κατανεμημένες γύρω από αυτή.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο λόγος του πλάτους των πλευρικών ζωνών προς το πλάτος του φορέα, ο οποίος δίνεται από:

$$\frac{K_{\text{VCO}}V_m}{2\omega_m}$$



Σχήμα 29: Προσέγγιση στενής ζώνης για ένα VCO διαμορφωμένο από ένα ημιτονοειδές.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η συχνότητα διαμόρφωσης  $\omega_m$ , ο λόγος αυτός μειώνεται—και κατά συνέπεια μειώνεται και το jitter.

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι το φάσμα του σήματος μπορεί να αποκαλύψει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τη φύση του jitter. Πράγματι, από το σχετικό πλάτος των πλευρικών ζωνών μπορούμε να προβλέψουμε το peak-to-peak jitter.

Όπως προκύπτει από το Παράδειγμα 1, η μέγιστη απόκλιση των μηδενικών διαβάσεων από τα ιδανικά χρονικά σημεία είναι ίση με:

$$\frac{2K_{VCO}V_m}{\omega_m} \text{ (σε ακτίνια).}$$

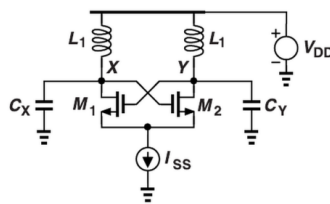
Συνεπώς, αν πολλαπλασιάσουμε το κανονικοποιημένο πλάτος των πλευρικών ζωνών επί 4, λαμβάνουμε το peak-to-peak jitter σε ακτίνια.

### Παράδειγμα 3

Ο ταλαντωτής LC που φαίνεται στο Σχήμα υπόκειται σε θόρυβο τροφοδοσίας της μορφής:

$$V_{DD} = V_{DD0} + V_m \cos(\omega_m t).$$

Να προσδιοριστεί το πλάτος των πλευρικών ζωνών (sidebands) στην έξοδο.



Σχήμα 30: LC VCO με θόρυβο τροφοδοσίας.

**Λύση:** Σε αυτό το κύκλωμα, οι μεταβολές του  $V_{DD}$  διαμορφώνουν τη συχνότητα ταλάντωσης. Αυτό συμβαίνει επειδή το κοινό επίπεδο τάσης εξόδου είναι περίπου ίσο με  $V_{DD}$ , και οι μεταβολές του επηρεάζουν την χωρητικότητα διόδου αποστράγγισης-υποστρώματος ( $C_{DB}$ ) των τρανζίστορ  $M_1$  και  $M_2$ .

Υπολογίζουμε επομένως ένα κέρδος  $K_{VCO}$  από το  $V_{DD}$  προς τη συχνότητα εξόδου—σαν το  $V_{DD}$  να ήταν η τάση ελέγχου.

Η συνολική χωρητικότητα στο σημείο  $X$  (ή  $Y$ ) αποτελείται από μια σταθερή συνιστώσα  $C_1$  και μια εξαρτώμενη από την τάση συνιστώσα που οφείλεται στο  $C_{DB}$ . Η τελευταία δίνεται από:

$$C_{DB} = \frac{C_{DB0}}{(1 + \frac{V_{DD}}{\phi_B})^m} \quad (2.18)$$

όπου  $m \approx 0.3$  και  $\phi_B$  είναι το δυναμικό επαφής της ένωσης (junction built-in potential), περίπου ίσο με 0.8 V.

Εφόσον η συχνότητα ταλάντωσης είναι:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1(C_1 + C_{DB})}},$$

υπολογίζουμε το  $K_{VCO}$  ως:

$$K_{VCO} = \frac{\partial \omega_1}{\partial V_{DD}} = \frac{\partial \omega_1}{\partial C_{DB}} \cdot \frac{\partial C_{DB}}{\partial V_{DD}}.$$

Παίρνοντας τις παραγώγους έχουμε:

$$K_{VCO} = \frac{1}{2\sqrt{L_1(C_1 + C_{DB})(C_1 + C_{DB})}} \cdot \frac{mC_{DB0}}{\phi_B \left(1 + \frac{V_{DD}}{\phi_B}\right)^{m+1}}.$$

Το κανονικοποιημένο πλάτος κάθε πλευρικής ζώνης δίνεται από:

$$\frac{K_{VCO}V_m}{2\omega_m}.$$