(α) Θεωρώντας $x_2=a$, X_1 και X_2 γραμμικά εξαρτημένες, αναδρομικά ισχύει:

$$X_1 = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(X_2-\mu_2)+\varepsilon$$, όπου ε όρος σφάλματος με $\mu_\varepsilon=0$ και $\sigma^2_{x_1|x_2}$

Άρα με $x_2=a$ εξαλείφαμε τον όρο σφάλματος

$$\mu_{x_1|x_2} = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(a-\mu_2)$$, επίσης $\sigma^2_{x_1|x_2} = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2}$

(διακύμανση όρου σφάλματος ε)

(β) $\mu = [\mu_{123}] = \begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.5\\ 0.8 & 2 & 1\\ 0.5 & 1 & 3\end{bmatrix}$

όπου Σ_{11} πίνακας διακύμανσης των (X_1, X_2)

$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T$ διακύμανσης των (X_1,X_2) με X_3

Σ_{22} διασπορά της X_3

$$\mu_{(x_1,x_2)|x_3} = \mu_{12} + \Sigma_{12,3}\Sigma_{22}^{-1}(X_3-\mu_3)$$

$$\Sigma_{(x_1,x_2)|x_3} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12,3}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

Για $x_3=1$:

$$\mu_{(x_1,x_2)|x_3=1} : \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}(1-2) = \begin{bmatrix}-\frac{7}{6}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{(x_1,x_2)|x_3=1} = \begin{bmatrix}1 & 0.8\\ 0.8 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}[0.5 \quad 1] = \begin{bmatrix}\frac{11}{12} & \frac{57}{90}\\ \frac{57}{90} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

(γ) Ομοίως:

$$\mu_{(x_1,x_3)|X_2=1} = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}(1-0) = \begin{bmatrix}-1.75\\2.5\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{(x_1,x_3)|X_2=1} = \begin{bmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}\frac{1}{2}[0.8 \quad 0.5] = \begin{bmatrix}0.8 & 0.375\\ 0.1 & 0.05\end{bmatrix}$$