Πέμπτη, 12/01/2023

Θεώρημα Kharitonov

$$P(s) = \underbrace{m(s)}_{\text{άρτιο}} + \underbrace{n(s)}_{\text{περιττό}} = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

$$a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$$

$$m(s) = \frac{1}{2}\left(P(s) + P(-s)\right)$$

$$n(s) = \frac{1}{2}\left(P(s) - P(-s)\right)$$

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3$$

$a_0 \in [0.25, 1.25]$

$a_1 \in [0.75, 1.25]$

$a_2 \in [2.75, 3.25]$

$a_3 \in [0.25, 1.25]$

$$P_1(s) = 0.25 + 0.75s + 2.75s^2 + 0.25s^3$$

$$P_2(s) = 0.25 + 1.25s + 3.25s^2 + 0.25s^3$$

$$P_3(s) = 1.25 + 0.75s + 2.75s^2 + 1.25s^3$$

$$P_4(s) = 1.25 + 1.25s + 2.75s^2 + 0.25s^3$$

P_1	s^3	0.25	0.75
	s^2	3.25	0.25
	s^1	0.6538	
	s^0	0.25	

s^3	a_3	a_1
s^2	a_2	a_0
s^1	$a_1 - \frac{a_3 a_0}{a_2}$	0
s^0	a_0	

Αρκεί $a_1 a_2 > a_3 a_0 \quad \forall a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$

$$\Updownarrow$$

$$\min\{a_1\}\min\{a_2\} > \max\{a_3\}\max\{a_0\}$$

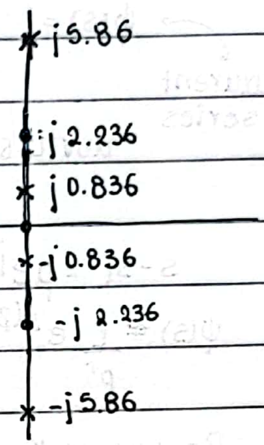
$2.75 \times 0.75 > 1.25^2$ ισχύει

Θεώρημα Hermite-Biehler

Έστω $m(s)$, $n(s)$ το άρτιο κ' περιττό κομμάτι πολυωνύμου $P(s)$

$P(s)$ stable $\Leftrightarrow$ $m(s), n(s)$ έχουν ρίζες μόνο πάνω στον φανταστικό άξονα, απλές κ' εναλλάσσονται.

$$P(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)$$
$$= s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$$
$$= \underbrace{(s^4 + 35s^2 + 24)}_{m(s)} + \underbrace{(10s^3 + 50s)}_{n(s) = 10s(s^2+5)}$$

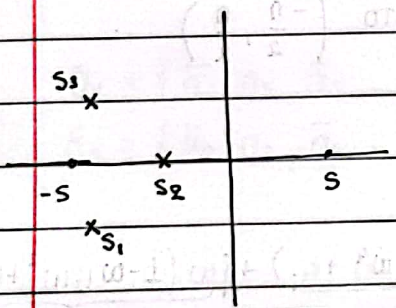


ρίζες του $m(s)$: $\pm j\,0.836$, $\pm j\,5.86$

ρίζες του $n(s)$: $0, \pm j\,2.236$

Αναγκαίο: $P(s)$ Hurwitz stable $\Rightarrow$

$$P(s) = \prod_{i=1}^{m} (s - s_i)$$



$|P(s)| > |P(-s)|$

$(s - s_i)\,(s^2 - 2Re(s_i)s + |s_i|^2)$

$s = \sigma + jr$

$s^2 - 2Re(s_i)s + |s_i|^2 = \sigma^2 - r^2 + 2j\sigma r - 2Re(s_i)\sigma - j2Re(s_i)r + |s_i|^2$

$|P(s)| > |P(-s)|$, $Re(s) > 0$

$|P(s)| = |P(-s)|$, $Re(s) = 0$

$|P(s)| < |P(-s)|$, $Re(s) < 0$

$\phi(s) = \dfrac{P(s)}{P(-s)}$, $|\phi(s)| > 1$, $Re(s) > 0$

$|\phi(s)| = 1$, $Re(s) = 0$

$|\phi(s)| < 1$, $Re(s) < 0$

$$\psi(s) = \frac{\phi(s) + 1}{\phi(s) - 1} = \frac{m(s)}{n(s)}$$

$Re(\psi(s)) > 0$, $Re(s) > 0$

$Re(\psi(s)) = 0$, $Re(s) = 0$ $\Rightarrow$ ρίζες του $m(s)$ μόνο πάνω στον φαντ. άξονα

$Re(\psi(s)) < 0$, $Re(s) < 0$

$$\psi = \sigma_\psi + j r_\psi$$

$$\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\sigma_\psi + j r_\psi} = \frac{\sigma_\psi - j r_\psi}{\sigma_\psi^2 + r_\psi^2} \rightsquigarrow Re\left(\frac{1}{\psi}\right) = \frac{\sigma_\psi}{|\psi|^2}$$

↳ ρίζες του $n(s)$ πάνω στον φαντ. άξονα

πόλο τάξης r στο s_i

$\psi(s)$

Laurent series → $$\psi(s) = \frac{b_{-r}}{(s-s_i)^r} + \dots + \frac{b_{-1}}{s-s_i} + b_0 + b_1(s-s_1) + \dots$$

κοντά στο s_i $\psi(s) \simeq \dfrac{b_{-r}}{(s-s_i)^r}$, $b_{-r} = \kappa e^{j\beta}$

$$s - s_i = \rho e^{j\alpha}$$

$$\psi(s) \simeq \frac{\kappa}{\rho^r} e^{j(\beta - r\alpha)}$$

$$Re\,\psi(s) \simeq \frac{\kappa}{\rho^r}\cos(r\alpha - \beta)$$

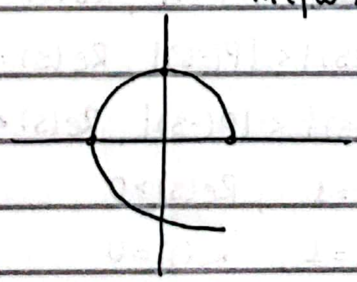
αν $r > 1$ τότε $\cos(r\alpha-\beta) < 0$ για κάποια α στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow r = 1$, s_i απλός

$$P(j\omega) = a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots = \underbrace{(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots)}_{m(j\omega)} + \underbrace{j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 \dots)}_{n(j\omega)}$$

$$Re(P(j\omega)) = m(j\omega)$$

$$Im(P(j\omega)) = \frac{1}{j} n(j\omega)$$



Ικανό

Αν οι ρίζες του $m(s)$, $n(s)$ είναι πάνω στον φανταστ. άξονα απλές κ' εναλλάσσονται | $\Rightarrow P(s)$ stable

$\psi(s) = \dfrac{m(s)}{n(s)}$, $Re(\psi(s)) > 0$ για $Re(s) > 0$

αφού $Re(\psi(s)) > 0$, δεν μπορεί

το $\dfrac{m(s)}{n(s)} + 1 = 0$ να έχει ρίζα με $Re(s) > 0 \Leftrightarrow$ δεν μπορεί το $P(s)$

$Re(\psi(s)) = 0$

$$\underset{m(j\omega)}{\underset{\shortparallel}{Re(P(j\omega))}} \leq \bar{a}_0 - \underline{a}_2\omega^2 + \bar{a}_4\omega^4 - \dots$$

$$Re(P(j\omega)) \geq \underline{a}_0 - \bar{a}_2\omega^2 + \underline{a}_4\omega^4 - \dots$$

$$\underline{a}_1\omega - \bar{a}_3\omega^3 + \underline{a}_5\omega^5 - \dots \leq \underset{\frac{1}{j}n(j\omega)}{\underset{\shortparallel}{Im(P(j\omega))}} \leq \bar{a}_1\omega - \underline{a}_3\omega^3 + \bar{a}_5\omega^5 - \dots$$

$O_1 = \{\bar{a}_1, \underline{a}_3, \bar{a}_5, \dots\}$, $O_2 = \{\underline{a}_1, \bar{a}_3, \underline{a}_5, \dots\}$

$\mathcal{E}_1 = \{\bar{a}_0, \underline{a}_2, \bar{a}_4, \dots\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\underline{a}_0, \bar{a}_2, \underline{a}_4, \dots\}$

$P(s; a_0, a_2 \dots; a_1, a_3, \dots) = a_0 + a_1 s + \dots$

$P(s; \mathcal{E}_1; O_1)$

$P(s; \mathcal{E}_1; O_2)$

$P(s; \mathcal{E}_2; O_1)$

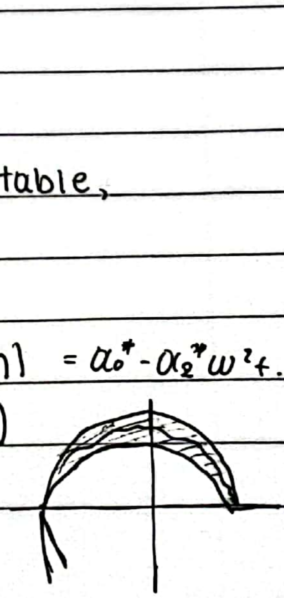
$P(s; \mathcal{E}_2; O_2)$

ΛΗΜΜΑ 1: $E^* = \{a_0^*, a_2^*, \dots\}$, αν $P(s; E^*; O_1)$, $P(s; E^*; O_2)$ stable,

$\Rightarrow P(s; E^*; O)$ stable $\forall O$

$Re(P(j\omega, E^*, O)) = Re(P(j\omega; E^*; O_1)) = Re(P(j\omega; E^*, O_2)) = a_0^* - a_2^*\omega^2 + \dots$

$Im(P(j\omega, E^*, O_2)) \leq Im(P(j\omega, E^*, O)) \leq Im(P(j\omega; E^*, O_1))$



$P(j\omega; E^*, 0)$ τέμνει τους άξονες τουλ. n φορές / $\rightarrow$ ακριβώς
n βαθμού n φορές

ΛΗΜΜΑ 2: Αν $P(s, E_1, 0^*)$, $P(s, E_2, 0^*)$ stable, τότε
$P(s, E, 0^*)$ stable

$$\left.\begin{array}{l} E^* = E_1 \overset{\text{Λήμμα 1}}{\Rightarrow} P(s; E_1, 0) \text{ stable} \\ E^* = E_2 \rightarrow P(s; E_2, 0) \text{ stable} \end{array}\right\} \overset{\text{Λήμμα 2}}{\longrightarrow} P(s; E, 0) \text{ stable}$$