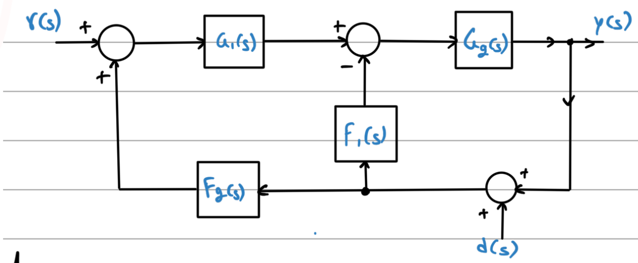
Άσκηση



- $\bar{G}_1(s)=\dfrac{y(s)}{d(s)}=-\dfrac{G_2(G_1F_2+F_1)}{1+G_2(G_1F_2+F_1)}$
- $\bar{G}_2(s)=\dfrac{y(s)}{r(s)}=\dfrac{G_1G_2}{1+G_2(G_1F_2+F_1)}$
- Θυμίζουμε: $G(s)=C\,[sI-A]^{-1}B+D \xRightarrow{x(0)=0} Y(s)\,U(s)=\left[\bar{G}_1(s)\;\bar{G}_2(s)\right]\begin{bmatrix} d(s)\\ r(s)\end{bmatrix}$

- Αν:

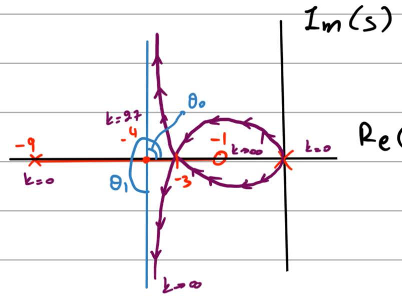
$G_1(s)=F_1(s)=\dfrac{1}{s}\;F_1(s)$, $F_2(s)=k\geq 0$, $G_2(s)=\dfrac{k\,(s+1)}{(k+1)\,s(s+9)}$, $r(s)=0$, $y(s)=\bar{G}_1(s)\,d(s)$

- $$\bar{G}_1(s)=\frac{y(s)}{d(s)}=\frac{\dfrac{k\,(s+1)}{(k+1)\,s(s+9)}\left(\dfrac{k}{s}+\dfrac{1}{s}\right)}{1+\dfrac{k\,(s+1)}{(k+1)\,s(s+9)}\left(\dfrac{k}{s}+\dfrac{1}{s}\right)}=\frac{-k\,(s+1)}{s^2(s+9)+k(s+1)},\quad \varphi(s)=s^2(s+9)+k(s+1)$$

→ Να δειχθεί ότι $\exists k\geq 0$ για το οποίο οι ρίζες του $\varphi(s)$ είναι πραγματικές και ίσες μεταξύ τους.

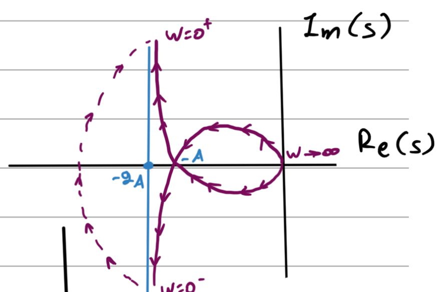
$\varphi(s)=(s-p)^3 \Rightarrow s^3+9s^2+ks+k=(s-p)^3=s^3+3ps^2+3p^2s+p^3 \Rightarrow \begin{cases}3p=9\\ 3p^3=k\\ p^3=k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=3\\ k=27\\ 3^3=27 \text{ (δεκτό)}\end{cases}$

- $\varphi(s)=s^2(s+9)+k(s+1)=\pi(s)-k\,a(s)$ όπου $\pi(s)=s^2(s+9)$, $a(s)=s+1$, δηλ. $G_0(s)=\dfrac{d(s)}{\pi(s)}=\dfrac{s+1}{s^2(s+9)}$
- $n=$ βαθμός $\pi(s)=3$
- $m=$ βαθμός $a(s)=1$
- # κλάδων ΓΤΡ $=\max\{n,m\}=3$
- # ασυμπτώτων ΓΤΡ $=n-m=2$
- σημείο τομής ασυμπτώτων $(\sigma,0)$ με πραγμ. άξονα: $\sigma=\dfrac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j\right)\Rightarrow \sigma=\dfrac{1}{2}\left(-9-(-1)\right)=-4$
- Γωνίες ασυμπτώτων με πραγμ. άξονα: $\theta=\dfrac{180^\circ(1-2\lambda)}{n-m}$, $\lambda=0,1,\dots,n-m-1=0,1 \Rightarrow \begin{cases}\theta_0=90^\circ\\ \theta_1=270^\circ\end{cases}$



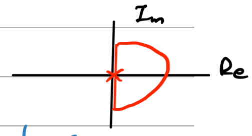
Άσκηση

Ας είναι $G(s)=\dfrac{s+z}{s^m(s+p)}$ όπου $m\in\mathbb{N}$ και $z,p\neq 0$. Διάγραμμα Nyquist:



→ Βρείτε τις τιμές των m,p,z.

- $m=1$ διότι το διαγ. Nyquist έχει μόνο 1 επ' άπειρο ημικύκλιο



↳ διαδρομή Nyquist

άρα: $G(s)=\dfrac{s+z}{s(s+p)} \Rightarrow G(j\omega)=\dfrac{z+j\omega}{j\omega(p+j\omega)}=\dfrac{-j\,(p-j\omega)(z+j\omega)}{\omega\,(p^2+\omega^2)}=R(\omega)+j\,X(\omega)\Rightarrow$

$\Rightarrow R(\omega) = \dfrac{(\rho - z)}{\rho^2+\omega^2}$, $X(\omega) = \dfrac{-\omega^2 - z\rho}{\omega(\rho^2+\omega^2)}$ $\Rightarrow R(\pm\infty)=0$, $X(\pm\infty)=0$

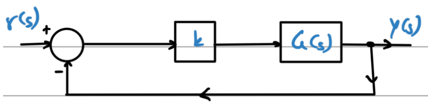
- Σημείο τομής με πραγμ. άξονα $\Rightarrow X(\bar\omega)=0 \Rightarrow -\bar\omega^2 + z\rho = 0 \Rightarrow \bar\omega = \pm\sqrt{-z\rho}$, $z\rho \le 0$
  - $R(\bar\omega) = R(\pm\sqrt{-z\rho}) = \dfrac{\rho - z}{\rho^2+\bar\omega^2} = \dfrac{\rho - z}{\rho^2 - z\rho} = \dfrac{\rho - z}{\rho(\rho - z)} = \dfrac{1}{\rho}$
  - $R(\bar\omega) = -A$

  $\Rightarrow \rho = -1/A$

  - $X(0^\pm) = \lim_{w\to 0^\pm}\left(\dfrac{-z\rho}{w\rho^2}\right) = \pm\infty$, • $R(0^\pm) = \dfrac{\rho - z}{\rho^2} = -2A$

  $\Rightarrow z = 1/A$

- Άρα: $G(s) = \dfrac{s + 1/A}{s(s - 1/A)}$

- 

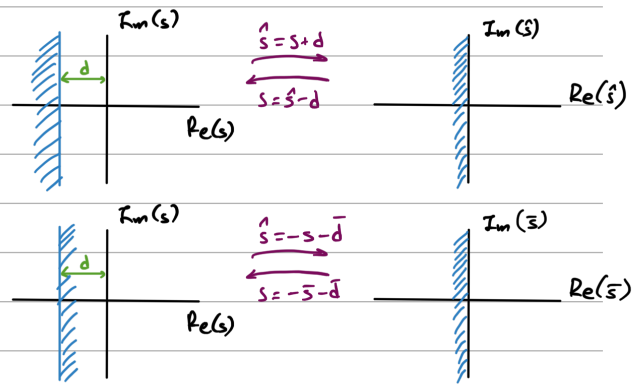
Κριτήριο Nyquist: $Z = P + N$

Z: # πόλων κλ. βρόχου στο δεξί ημιεπ.
P: # πόλων $G(s)$ στο δεξί ημιεπ.
N: # δεξιόστροφων περιστροφών του $(-1/k, 0)$

  - $-\dfrac{1}{k} < -A$: $N=1 \Rightarrow Z = P+N = 1+1 = 2$ ασταθείς πόλοι κλ. βρ.
  - $-A < -\dfrac{1}{k} < 0$: $N=-1 \Rightarrow Z = P+N = 1-1 = 0$ σύστημα κλ. βρ. ευσταθές
  - $-\dfrac{1}{k} > 0$: $N = 0 \Rightarrow Z = 1$ ασταθείς πόλοι κλ. βρ.

Σχετική ευστάθεια

$\varphi(s) = s^n + a_{n-1}\cdot s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$



a) Επιθυμούμε: $Re\{p_i\} \le -d < 0$

Μετ/μός επιπέδου s: $\hat s = s + d$

Μετ/μός $\varphi(s)$: $\hat\varphi(\hat s) = \varphi(\hat s - d)$

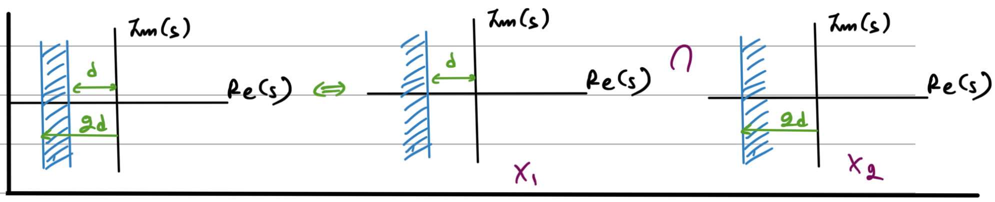
β) Επιθυμούμε: $Re\{p_i\} \ge -\bar d$, $\bar d > 0$, $i = 1, \dots, n$

Μετ/μός επιπέδου s: $\bar s = -s - \bar d \Leftrightarrow s = -\bar s - \bar d$

Μετ/μός $\varphi(s)$: $\bar\varphi(\bar s) = \varphi(-\bar s - \bar d)$

Άσκηση

Χαρακτ. πολ/μο: $\varphi(s) = s^2 + as + \beta$. Να σχεδιαστεί η περιοχή τιμών των a, β που εξασφαλίζει ότι οι ρίζες του $\varphi(s)$ ανήκουν στο χωρίο:



- Μ/σ: $\hat\varphi(s) = \varphi(\hat s - d) = (\hat s - d)^2 + a(\hat s - d) + \beta$
  $= \hat s^2 + (a - 2d)\hat s + d^2 - ad + \beta$

- Ρίζες $\varphi(s) \in X_1 \Rightarrow$ ρίζες $\hat\varphi(\hat s) \in$ αριστερό ημιεπίπεδο δηλ.

$\hat s^2$	1	$d^2 - ad + \beta$
$\hat s^1$	$a - 2d$	0
$\hat s^0$	$d^2 - ad + \beta$	0

• Ρίζες $\varphi(s) \in X_2 \Rightarrow$ ρίζες δηλ. $a > 2d$ (1) $\quad d^2 - ad + \beta > 0$ (2)

• $\bar{\varphi}(\bar{s}) = \varphi(-\bar{s} - 2d) \in$ αρ. ημιεπ.

• $\bar{\varphi}(s) = (-\bar{s} - 2d)^2 + a(-\bar{s} - 2d) + \beta = \bar{s}^2 + \bar{s}(4d - a) + 4d^2 - 2ad + \beta$

$\hat{s}^2$	1	$4d^2 - 2ad + \beta$
$\hat{s}^1$	$4d - a$	0
$\hat{s}^0$	$4d^2 - 2ad + \beta$	0

$$\Rightarrow \begin{cases} 4d - a > 0 & (3) \\ 4d^2 - ad + \beta > 0 & (4) \end{cases}$$