Μιγαδικές συναρτήσεις: ①

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών:

Στο $\mathbb{R}$ η $x^2=-1$ δεν έχει ρίζα. Κατασκευάζω $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$: η $x^2=-1$ να έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Θεωρώ $\mathbb{R}^2 = \{(a,\beta) \mid a,\beta \in \mathbb{R}\}$

Ορίζουμε:

→ Πρόσθεση: $(a,\beta)+(\gamma,\delta)=(a+\gamma,\beta+\delta)$

→ Πολλαπλασιασμός: $(a,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(a\gamma-\beta\delta, a\delta+\beta\gamma)$

Μονάδα πολλαπλασιασμού $=(1,0)\equiv \mathbf{1}$

Θέτουμε $i=(0,1)$

$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-(1,0)=-\mathbf{1}$

i: ρίζα της $x^2=-1$

$\forall a\in\mathbb{R}$ δεχόμαστε $(a,0)\equiv a$

Τότε $\forall (a,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $(a,\beta)=a(1,0)+\beta(0,1)=a\cdot\mathbf{1}+\beta\cdot i\equiv a+\beta i$

$\mathbb{C}=\{a+\beta i \mid a,\beta\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}$ "$\subseteq$" $\mathbb{C}$ $\quad \forall a\in\mathbb{R}, a\equiv(a,0)\equiv a+0\cdot i\in\mathbb{C}$

Το $\mathbb{C}$ λέγεται σύνολο των <u>μιγαδικών αριθμών</u>

Το $(\mathbb{C},+,\cdot)$ είναι σώμα.

πχ ύπαρξη αντιστρόφου

Έστω $a+\beta i\neq 0$ ($\Leftrightarrow$ κάποιο από τα a,β είναι $\neq 0$)

$\frac{1}{a+\beta i} \in \mathbb{C}$?

$$\frac{1}{a+\beta i} = \frac{a-\beta i}{(a+\beta i)(a-\beta i)} = \frac{a-\beta i}{a^2+\beta^2} = \frac{a}{a^2+\beta^2} + \left(-\frac{\beta}{a^2+\beta^2}\right)i$$

Σχόλιο:

i) Οι πράξεις μεταξύ μιγαδικών γίνονται εύκολα, αρκεί να θυμόμαστε ότι $i^2=-1$ και ότι το $\mathbb{C}$ είναι σώμα.

πχ $(1+i)(2+3i) = 2+3i+2i+3i^2 = 2+5i-3 = -1+5i$

ii) Όλες οι ταυτότητες επεκτείνονται από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$.

πχ αν $z,w\in\mathbb{C}$ τότε $(z\pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2$

$(z\pm w)^3 = \dots$

$$z^n - w^n = (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1})$$

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

iii) Αν $z^2+w^2=0 \not\Rightarrow z=w=0$

πχ $z=i,\ w=1$

$i^2+1=0,\ i\neq 0,\ 1\neq 0$

Αν $z=a+\beta i\in\mathbb{C}$ $(a,\beta\in\mathbb{R})$

$a=Re(z)$ = πραγματικό μέρος z

$\beta=Im(z)$ = φανταστικό μέρος z

Εάν $z,w\in\mathbb{C}$: $z=w \Longleftrightarrow \begin{cases} Re(z)=Re(w) \\ Im(z)=Im(w) \end{cases}$

$\forall z\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z)=0$

Αν $Re(z)=0$ δηλ. $z=\beta i$ $(\beta\in\mathbb{R})$

z φανταστικός ανν $Re(z)=0$

$I=\{\beta i \mid \beta\in\mathbb{R}\}$

Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Ορισμός 1: Αν $z=a+\beta i\in\mathbb{C}$, ο συζυγής του z είναι ο $\bar{z}=a-\beta i$

πχ $\bar{i}=-i$, $\overline{5+7i}=5-7i$

Ιδιότητες: Έστω $z,w\in\mathbb{C}$

i) $\bar{\bar{z}}=z$

ii) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$

z φανταστικός $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$

iii) $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$

iv) $\overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}$ Απόδειξη: $z=a+\beta i$, $w=\gamma+\delta i$

$$z\cdot w=a\gamma-\beta\delta+(a\delta+\beta\gamma)i$$
$$\overline{zw}=a\gamma-\delta\beta-(a\delta+\beta\gamma)i$$
$$=a\gamma-\delta\beta-a\delta i-\beta\gamma i$$
$$=a(\gamma-\delta i)-\beta(\delta+\gamma i)$$
$$=a(\gamma-\delta i)-\beta i(\gamma-\delta i)=(\gamma-\delta i)(a-\beta i)$$
$$=\bar{z}\cdot\bar{w}$$

v) Εάν $w\neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

$w=\gamma+\delta i$

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{\gamma+\delta i}=\frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2}+\left(-\frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right)i$$

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}=\frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

$$\frac{1}{\bar{w}}=\frac{1}{\gamma-\delta i}=\frac{\gamma+\delta i}{\gamma^2+\delta^2}=\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}$$

vi) $z+\bar{z}=2Re(z)$

$z-\bar{z}=2Im(z)$

Μέτρο μιγαδικού

Ορισμός: Αν $z = a + \beta i \in \mathbb{C}$ το μέτρο του z είναι το

$$|z| = \sqrt{a^2 + \beta^2} \in [0, +\infty)$$

μέτρο διανύσματος

πχ $|2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Ιδιότητες: (i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

ii) $|zw| = |z| \cdot |w|$

iii) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Αποδ ii): $|zw|^2 \overset{(i)}{=} (zw)(\overline{zw})$

$= zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$

$= (|z||w|)^2$

iv) $|\bar{z}| = |z|$

v) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\bar{w})$

vi) $|z+w| \leq |z| + |w|$ $\qquad |Re(z)| \leq |z|$

$|z+w| \geq \big||z| - |w|\big|$

Άσκηση: Έστω $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Τότε $|z+w| = |z| + |w|$ ανν $\exists\, t > 0 \mid w = tz$