1η Σειρά Ασκήσεων

Ιωάννης Τσαντήλας
03120883

Θέμα 1ο

Θέμα 1 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 2 μον.). (α) Στην Θεωρητική Πληροφορική, ένα (υπολογιστικό) *πρόβλημα απόφασης* ουσιαστικά χαρακτηρίζεται από ένα ερώτημα στο οποίο η απάντηση είναι είτε "ναι" είτε "όχι" (π.χ. "έχει το γράφημα G κύκλο Hamilton;", "είναι ο φυσικός n άρτιος;", "είναι ο φυσικός n πρώτος;", κλπ.).
Ένα πρόβλημα απόφασης Π στο $\mathbb{N}$ μπορεί να αναπαρασταθεί από το υποσύνολο των φυσικών για τους οποίους η απάντηση στο αντίστοιχο ερώτημα είναι "ναι". Π.χ. το πρόβλημα της αναγνώρισης των άρτιων αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί από το σύνολο $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, το πρόβλημα της αναγνώρισης των πρώτων αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί από το σύνολο $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, κλπ. Ουσιαστικά, κάθε πρόβλημα απόφασης Π αντιστοιχεί σε λογική συνάρτηση $f_\Pi : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.
Η λύση σε ένα τέτοιο πρόβλημα είναι ένα πρόγραμμα σε μία γλώσσα προγραμματισμού, για παράδειγμα στη C++, το οποίο λαμβάνει ως είσοδο έναν φυσικό n, και έπειτα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, τυπώνει στην έξοδο τη σωστή απάντηση στην αντίστοιχη ερώτηση. Να δείξετε ότι υπάρχουν (μη αριθμήσιμα άπειρα) προβλήματα απόφασης στους φυσικούς για τα οποία δεν υπάρχει λύση.

(β) Ο κωδικός πρόσβασης ενός υπερυπολογιστή είναι ένας φυσικός αριθμός που αλλάζει κάθε δευτερόλεπτο, για λόγους ασφαλείας. Η αλλαγή γίνεται με βάση μια πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ βαθμού d και έναν (πολυψήφιο) πρώτο αριθμό q. Αν ο κωδικός τη χρονική στιγμή t είναι x_t, ο κωδικός την επόμενη χρονική στιγμή είναι $x_{t+1} = p(x_t) \bmod q$. Ο αρχικός κωδικός x_0, οι συντελεστές $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ της πολυωνυμικής συνάρτησης p και ο πρώτος αριθμός q είναι γνωστά μόνο στον διαχειριστή του συστήματος. Γνωρίζετε όμως πόσα δευτερόλεπτα έχουν περάσει από το τελευταίο reset και έχετε εντοπίσει ένα κρίσιμο κενό ασφάλειας: αν δοκιμάζετε έναν κωδικό κάθε 30 (ή περισσότερα) δευτερόλεπτα, αυτό δεν πρόκειται πότε να προκαλέσει συναγερμό ή κλείδωμα του συστήματος (όσες φορές και αν αποτύχετε). Να διατυπώσετε μία αλγοριθμική μέθοδο που παράγει κωδικούς συστηματικά και εγγυάται ότι θα αποκτήσετε πρόσβαση στον υπερυπολογιστή σε πεπερασμένο χρόνο. Ποιος ο λόγος που μπορούμε να εγγυηθούμε την ύπαρξη μιας τέτοιας αλγοριθμικής μεθόδου;

Ερώτημα α

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των προγραμμάτων είναι αριθμήσιμο (επαγωγικά, μετράμε τα προγράμματα που αναπαριστούνται από MT με μήκος 1, μετά μήκους 2 ...), άρα το σύνολο των π.α. με λύση είναι επίσης αριθμήσιμο.

Έχοντας το σύνολο όλων των π.α. και το σύνολο όλων των προγραμμάτων, αποδίδοντας αληθοτιμές 0 ή 1 ανάλογα το αποτέλεσμα του προγράμματος Π_{pn} στο π.α. Π_m, καταλαβαίνουμε πως το σύνολο των π.α. είναι μη αριθμήσιμο, καθώς με οποιαδήποτε αποτίμηση, μπορεί να προκύψει Π_m' με διαφορετικές αποτιμήσεις. Άρα:

Σύνολο π.α.: μη αριθμήσιμο

Σύνολο π.α. με λύση: αριθμήσιμο

$$S_{\pi\alpha} = S_{\pi\alpha}^{(\mu\lambda)} \cup S_{\pi\alpha}^{(\chi\lambda)} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{Σύνολο π.α. χωρίς λύση: μη αριθμήσιμο}}$$

Ερώτημα β

Κάθε 30 δευτερόλεπτα θα δοκιμάζουμε τους συντελεστές a_d έως a_0 και x_0, q, υπολογίζοντας τον κωδικό $x(t_0)$ για δεδομένη χρονική στιγμή t_0:

$$x_1 = p(x_0) \% q$$

$$x_2 = p(x_1) \% q$$

$$\vdots$$

$$x_{t_0} = p(x_{t_0-1}) \% q$$

Εάν δεν λειτουργήσει, θα δοκιμάσουμε με άλλο set $a_d, \ldots, a_0, x_0, q$.

Επειδή όλες οι μεταβλητές $a_d, \ldots, a_0, x_0, q$ πέρνουν τιμές στο $\mathbb{N}$, τα διαφορετικά σύνολα που θα δημιουργήσουμε στην αναζήτηση μας είναι αριθμήσιμα άπειρα.

Άρα ο κωδικός μπορεί να βρεθεί σε πεπερασμένο χρόνο από υπερυπολογιστή.

Θέμα 2ο

Θέμα 2 (Προτασιακή Λογική, 3.5 μον.). (α) Η n-οστή πρόταση σε μία λίστα με 100 μαθηματικές προτάσεις δηλώνει ότι *"Οι n από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς."*. (i) Ποιες από τις 100 προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; (ii) Ποιες από τις 100 προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς αν η n-οστή πρόταση δηλώνει ότι *"Τουλάχιστον n από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς."*; (iii) Τι συμβαίνει αν έχουμε 99 δηλώσεις όπως αυτές στο (ii);

(β) Έστω T ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων, και έστω φ αυθαίρετα επιλεγμένος προτασιακός τύπος. Να δείξετε ότι:

1. Αν $T \models \varphi$, τότε υπάρχει *πεπερασμένο* $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T_0 \models \varphi$.
2. Αν το T είναι μη ικανοποιήσιμο, τότε υπάρχει *πεπερασμένο* $T_0 \subseteq T$ που δεν είναι ικανοποιήσιμο.

(γ) Η αρχή της *ανάλυσης* (resolution) είναι ο συντακτικός αποδεικτικός κανόνας:

$$\frac{p \vee \varphi\,,\ \neg p \vee \psi}{\varphi \vee \psi}\,,$$

όπου p προτασιακή μεταβλητή και φ, ψ διαζεύξεις λεκτικών (literals – λεκτικό είναι μια προτασιακή μεταβλητή q ή η άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής $\neg q$). Προσέξτε ότι οι φ, ψ μπορούν να είναι κενοί τύποι. Για διευκόλυνση, σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε πάντα ότι οι προτασιακοί τύποι έχουν τη μορφή διαζεύξεων λεκτικών.

1. Να δείξετε ότι η αρχή της ανάλυσης αποτελεί γενίκευση του αποδεικτικού κανόνα Modus Ponens.
2. Μια *απόδειξη* $T \vdash_{res} \varphi$ με την αρχή της ανάλυσης είναι μια πεπερασμένη ακολουθία τύπων $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ όπου: (i) για κάθε βήμα i, είτε ο τύπος $\chi_i \in T$, είτε ο χ_i προκύπτει από εφαρμογή της αρχής της ανάλυσης σε προηγούμενους τύπους χ_j, χ_k, και (ii) $\chi_n = \varphi$. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των βημάτων της απόδειξης, να δείξετε ότι για κάθε ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων $T = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ και κάθε τύπο φ, αν $T \vdash_{res} \varphi$, τότε $T \models \varphi$.
3. Η εφαρμογή του κανόνα της ανάλυσης σε συμπληρωματικά λεκτικά $p, \neg p$ (με φ, ψ κενούς) οδηγεί σε αντίφαση $\perp$ (δηλ. έχουμε ότι $\frac{p,\ \neg p}{\perp}$). Να δείξετε ότι για κάθε σύνολο τύπων $T = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$, αν $T \vdash_{res} \perp$, τότε το T δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Ερώτημα α

i) Έστω ότι η πρόταση "1" είναι True. Τότε μόνο 1 πρόταση είναι False.
Έστω ότι η False πρόταση είναι οποιαδήποτε εκτός της πρότασης "100". Τότε θα πρέπει 100 προτάσεις να είναι False, άτοπο.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι καμία από τις προτάσεις "1" έως και "98" μπορεί να είναι True.

Επιπλέον, ούτε η "100" πρόταση μπορεί να είναι True, αφού έρχεται σε αντίφαση με τον εαυτό της.

Μένει η "99" πρόταση. Έστω ότι είναι True. Τότε όλες οι υπόλοιπες είναι False. Πράγματι, καμία από τις υπόλοιπες δεν αληθεύει, εάν η "99" είναι True.

Τελικά, μόνο η "99" είναι αληθής και οι "1" έως και "98" και η "100" είναι ψευδείς.

ii) Έστω ότι η πρόταση "100" είναι True.

Τότε έρχεται σε αντίφαση με τον εαυτό της, αφού πρέπει όλες να είναι False.

Έστω ότι η "99" είναι True. Τότε 99 προτάσεις είναι False. Όμως η "98":

Τουλάχιστον 98 είναι False.

αληθεύει, επομένως άτοπο.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι εάν η "x" πρόταση είναι True, τότε όλες οι προηγούμενες της, την αντιφάσκουν, αρκεί το x να είναι μεγαλύτερο του 50.

Στο x=50, όμως:

"Τουλάχιστον 50 είναι False"

δεν παρουσιάζεται πρόβλημα, αφού οι "51" έως και "100" μπορείνα είναι False. Το ίδιο ισχύει και για x<50.

Έτσι, οι αληθείς προτάσεις είναι 50 και οι ψευδείς 50.

iii) Έστω ότι η "x" πρόταση είναι True. Τότε, θα πρέπει 99-x προτάσεις να είναι False.

Όμως, εάν η "x" πρόταση είναι True, τότε και όλες οι "1", "2", ..., "x" είναι True.

Ομοίως με το (ii), θα πρέπει

$$\text{Προτ}_{\text{True}} = \text{Προτ}_{\text{False}} \Rightarrow x = 99 - x \rightarrow$$

$$x = \frac{99}{2}$$, άτοπο $(x \in N)$

Ερώτημα β

i) Γνωρίζουμε από το Θ. Πληρότητας:

$$T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$$

Η τοπική απόδειξη του φ χρησιμοποιεί ένα πεπερασμένο σύνολο

τύπων $T_0 \subseteq T \Rightarrow T_0 \vdash \varphi$ και από
Θ. Εγκυρότητας:

$$T_0 \vdash \varphi \Rightarrow T_0 \models \varphi$$

Άρα $\exists\, T_0 \subseteq T : T_0 \models \varphi$

ii) Στην περίπτωση που φ είναι αντίφαση, γνωρίζουμε πως:
μόνο μη ικανοποιήσιμο $\models$ αντίφαση

τότε T_0 μη ικανοποιήσιμο, αφού από (β(i)) $T_0 \models \varphi$.

Ερώτημα γ

1) Η αρχή:

$$\frac{p \vee \varphi \,,\, \neg p \vee \psi}{\varphi \vee \psi}$$

Για $\varphi \equiv F$ γίνεται:

$$\frac{p \,,\, \neg p \vee \psi}{\psi} \Leftrightarrow \frac{p \,,\, p \to \psi}{\psi}$$

δηλαδή το Modus Pones. Άρα η αρχή της ανάλυσης αποτελεί γενίκευση του Modus Ponens, για $\varphi \equiv F$.

2) Η απόδειξη βασίζεται στις σημειώσεις του Καθηγητή Λ. Κυρούση, ΕΚΠΑ.

Υποθέτουμε ότι $\forall r$ με $r < i$:

$T \models \chi_r$

1. Αν το φ_i είναι λογικό αξίωμα τότε αφού σύμφωνα με το λήμμα:

"Κάθε λογικό αξίωμα είναι έγκυρο"

Το χ_i είναι έγκυρο

2. Αν το $\chi_i \in T$ τότε το χ_i είναι λογική συνέπεια του T.

3. Αν το χ_i προκύπτει με MP (και άρα με αρχή της ανάλυσης που αποτελεί γενίκευση του MP) από δύο προηγούμενα στοιχεία:

$\exists j, \exists k < i : \quad X_j = X_k \to X_i$

Γνωρίζουμε (επαγωγικά) ότι $T \models X_j$, $T \models X_k$.
Δηλαδή για δομή $\mathcal{U}$ και αποτίμηση

s έχουμε:

$$\mathcal{U} \models X_k [s]$$
$$\mathcal{U} \models (X_k \to X_i) [s]$$

Από τον ορισμό της αλήθειας κατά Tarski προκύπτει:

$$\mathcal{U} \models X_i [s] \Longrightarrow T \models X_i$$

3) Αφού η αντίφαση $\perp$ αποδεικνύεται μέσω του κανόνα ανάλυσης στο T, γνωρίζουμε ότι $\dfrac{\varphi, \neg\varphi}{\perp}$. Άρα,

υπάρχουν κάποια i, j τω: $i \neq j$ και:

$$\varphi_i = \neg \varphi_j$$

Επομένως, υπάρχει αποτίμηση s τω:

$$\varphi_i[s] = T$$

τότε: $\varphi_j[s] = \neg \varphi_i[s] = F$

Άρα: $\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i[s] = F$

Επομένως, το T δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Θέμα 3ο

Θέμα 3 (Κατηγορηματική Λογική, 2.5 μον.). (α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P και M και διμελή κατηγορηματικά σύμβολα T και L. Ερμηνεύουμε αυτή τη γλώσσα στο σύμπαν που αποτελείται από την ένωση του συνόλου των καθηγητών και των μαθημάτων της Σχολής, με το $P(x)$ να δηλώνει ότι *"ο x είναι καθηγητής"*, το $M(x)$ να δηλώνει ότι *"το x είναι μάθημα"*, το $T(x, y)$ να δηλώνει ότι *"ο x διδάσκει το y"*, και το $L(x, y)$ να δηλώνει ότι *"ο x συμπαθεί τον y"*. Σε αυτή την ερμηνεία, να γράψετε τύπους που να δηλώνουν ότι:

1. Το ελάχιστο πλήθος μαθημάτων που διδάσκει κάποιος καθηγητής είναι δύο.
2. Ένας καθηγητής συμπαθεί έναν άλλο μόνον αν υπάρχει μάθημα που το διδάσκουν και οι δύο.
3. Αν δυο καθηγητές διδάσκουν τα ίδια ακριβώς μαθήματα, τότε συμπαθούν τους ίδιους ακριβώς καθηγητές.
4. Αν ένας καθηγητής διδάσκει περισσότερα του ενός μαθήματα, τότε τουλάχιστον ένα από αυτά το συνδιδάσκει με όλους τους άλλους καθηγητές που τον συμπαθούν.

(β) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q. Να διερευνήσετε την λογική εγκυρότητα της παρακάτω πρότασης:

$$\forall x \forall y \Big(Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x) \Big) \to \exists x Q(x, x)$$

Ερώτημα α

1)

$$\forall x\, \exists y\, \exists z \Big\{ P(x) \land M(y) \land M(z) \land y \neq z \land T(x,y) \land T(x,z) \Big\}$$

2)

$$\forall x\, \forall y \Big\{ \big\{ P(x) \land P(y) \land x \neq y \land L(x,y) \big\} \to \exists z \big\{ M(z) \land T(x,z) \land T(y,z) \big\} \Big\}$$

3)

$$\forall x \forall y \forall z \{ \{ P(x) \land P(y) \land x \neq y \land M(z) \land \{ T(x,z) \leftrightarrow$$
$$T(y,z) \} \} \rightarrow$$
$$\rightarrow \forall w \{ P(w) \land \{ L(x,w) \leftrightarrow L(y,w) \} \} \}$$

4)

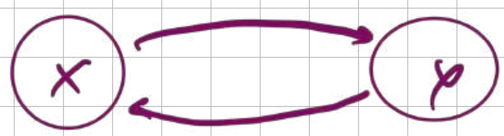
$$\forall x \exists y \exists z \{ \{ P(x) \land M(y) \land M(z) \land y \neq z \land$$
$$\land T(x,y) \land T(x,z) \} \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists w \forall a \{ M(w) \land T(x,w) \land P(a) \land$$
$$\land \{ L(a,x) \Leftrightarrow T(a,w) \} \} \}$$

Ερώτημα β

Η σχέση ουσιαστικά υποθέτει
πως εάν υπάρχει μια σχέση

ισοδυναμίας ανάμεσα σε δύο στοιχεία, τότε θα υπάρχει ένα στοιχείο για το οποίο ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα

Δεν είναι λογικά έγκυρη, διότι για το γράφημα:



δεν ισχύει, αφού:

$Q = \{(x,y), (y,x)\}$

αλλά δεν υπάρχει κάποιο από αυτά:

(x,x), (y,y)

Θέμα 4°

Θέμα 4 (Κατηγορηματική Λογική, 2.0 μον.). (α) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την πρόταση:

$$\varphi = \forall x \forall y \Big(x \neq y \to P(x,y) \vee P(y,x) \Big) \to \exists x \forall y \Big(x \neq y \to P(y,x) \vee \exists z \big(P(y,z) \wedge P(z,x) \big) \Big)$$

1. Να διατυπώσετε (σε φυσική γλώσσα, απλά και κατανοητά) το νόημα του τύπου φ. Αν βοηθάει να θεωρήσετε συγκεκριμένο πλαίσιο ερμηνείας, σκεφτείτε απλά κατευθυνόμενα γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το $P(x,y)$ δηλώνει την ύπαρξη ακμής από την κορυφή x προς την κορυφή y.
2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι ο φ αληθεύει σε κάθε ερμηνεία με πεπερασμένο σύμπαν.

(β) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q. Θεωρούμε την πρόταση:

$$\xi = \forall x \Big(Q(x,x) \to \forall y \big(Q(x,y) \vee Q(y,x) \big) \Big) \to \forall x \forall y \Big(Q(x,y) \vee Q(y,x) \Big)$$

Να διερευνήσετε σε ποιες από τις παρακάτω ερμηνείες αληθεύει η ξ:

1. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το Q ερμηνεύεται με τη σχέση $Q^A = \{(a,b),(b,c)\}$.
2. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το Q ερμηνεύεται με τη σχέση $Q^A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$.
3. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το Q ερμηνεύεται με τη σχέση $Q^A = \{(a,a),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}$.
4. Οποιαδήποτε ερμηνεία όπου το σύμπαν είναι μονοσύνολο.

Ερώτημα (α)

1) Ο τύπος ισχυρίζεται πως εάν σε ένα γράφημα κάθε ζευγάρι κορυφών ενώνεται με μονοπάτι μήκους 1, τότε υπάρχει μια κορυφή στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από οποιονδήποτε κόμβο, με μονοπάτι μήκος το πολύ 2.

2) Έστω Σ ο κόμβος "στόχος", στον οποίο μπορούμε να φτάσουμε από οποιαδή-

ποτέ κορυφή με μονοπάτι μήκους το πολύ 2.

Για $n=1$, εάν προσθέσουμε έναν κόμβο (t') είτε ο νέος θα είναι ο στόχος:

$$\overset{\Sigma}{\circ} \longrightarrow \overset{\Sigma'}{\circ}_{t'}$$

είτε θα παραμείνει:

$$\overset{\Sigma}{\circ} \longleftarrow \circ_{t'}$$

Έστω ότι ισχύει για n. Θ.δ.ο ισχύει για $n+1$:

Εάν υπάρχει η ακμή $k_{n+1} \to \Sigma$, δηλαδή:

$$P(k_{n+1}, \Sigma)$$

ο Σ παραμένει ο στόχος.

Εάν όμως: $\neg P(k_{n+1}, \Sigma)$ τότε θα πρέπει:

$$P(\Sigma, k_{n+1})$$

και λόγω του φ, για κάθε άλλο κόμβο x_i θα πρέπει:

$\exists x = \Sigma, \forall x_i (P(x_i, \Sigma) \vee \exists z = k_{n+2} (P(x_i, k_{n+2}) \wedge$
$\wedge P(k_{n+2}, \Sigma)$

Ο όρος: $P(x_i, k_{n+2}) \wedge P(k_{n+2}, \Sigma)$ ισούται με F, άρα θα πρέπει $\forall x_i, P(x_i, \Sigma)$, δηλαδή παραμένει ο Σ ως στόχος.

Ερώτημα β

$$\xi = \forall x (Q(x,x) \rightarrow \forall y (Q(x,y) \vee Q(y,x))) \rightarrow \forall x' \forall y' (Q(x',y') \vee Q(y',x'))$$

1) $A = \{a, b, c\}$ και $Q^A = \{(a, b), (b, c)\}$

- Για κάθε x, $Q(x,x) \equiv F$ άρα το αριστερό μέλος της $\rightarrow$:

$$F \rightarrow \forall y (Q(x,y) \vee Q(y,x)) \equiv T$$

Άρα: $T \rightarrow \forall x' \forall y' (Q(x',y') \vee Q(y',x')) \equiv$
$\equiv \forall x' \forall y' (Q(x',y') \vee Q(y',x'))$

- Για $x'=a$, $y'=c$, το δεξί μέλος της $\rightarrow$ είναι F, και άρα $T \rightarrow F$ δηλαδή F.

Άρα δεν επαληθεύεται ο ποσοδείκτης $\forall$ στις μεταβλητές x', y'.

Άρα ο ξ <u>δεν επαληθεύεται.</u>

2) $A=\{a,b,c\}$ και $Q^A=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

- Για κάθε x, $Q(x,x)\equiv T$, άρα το αριστερό μέλος της $\rightarrow$:

$$T \rightarrow \forall y\,(Q(x,y) \vee Q(y,x))$$

Για $y \neq x$, προκύπτει $T \rightarrow F$, δηλαδή ο ποσοδείκτης $\forall$ της μεταβλητής y δεν επαληθεύεται.

Άρα για κάθε συνδυασμό των x,y το αριστερό μέλος της $\rightarrow$ είναι F.

Άρα:

$$\xi = F \rightarrow \forall x' \forall y' (Q(x',y') \vee Q(y',x')) \equiv T$$

Άρα ο τύπος <u>ερμηνεύεται.</u>

3) $A = \{a, b, c\}$ και $Q^A = \{(a,a), (c,c), (a,b), (a,c), (b,c)\}$

Το αριστερό μέλος της → για κάθε x προκύπτει T, άρα:

$$T \rightarrow \forall x' \forall y' (Q(x',y') \vee Q(y',x'))$$

Όμως το δεξί μέλος για $x'=b$ προκύπτει F.

Άρα ο τύπος <u>δεν επαληθεύεται.</u>

4) Οποιαδήποτε ερμηνεία όπου το σύμπαν είναι μονοσύνολο.

Αν $A = \{a\}$, τότε $Q^A = \{(a,a)\}$ ή $\emptyset$.

Εύκολα, αν $Q^A = \{(a,a)\}$, προκύπτει ότι

$$\xi \equiv T.$$

Αν όμως $Q^A = \emptyset$, $\xi \equiv F$.

Άρα ο τύπος <u>δεν επαληθεύεται.</u>