# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

- Μετασχηματισμός Hilbert
- Βαθυπερατά & Ζωνοπερατά Σήματα (Low-Pass & Band-Pass Signals)
- Ζωνοπερατά Συστήματα (Band-Pass Filters)

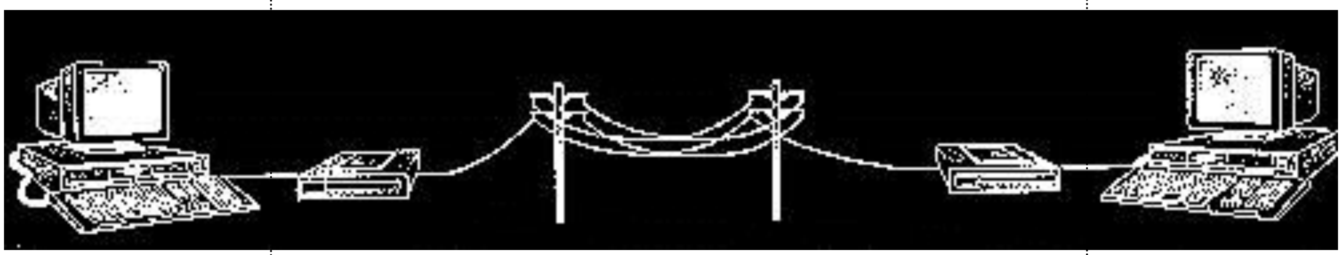
18 Μαρτίου, 2022

# Το μοντέλο του τηλεπικοινωνιακού συστήματος (Επανάληψη)

*Πηγή πληροφορίας*

*Τηλεπικοινωνιακό* σύστημα

*Προορισμός πληροφορίας*



Πομπός Κανάλι Δέκτης

Πομπός/δέκτης: Διαμόρφωση/αποδιαμόρφωση

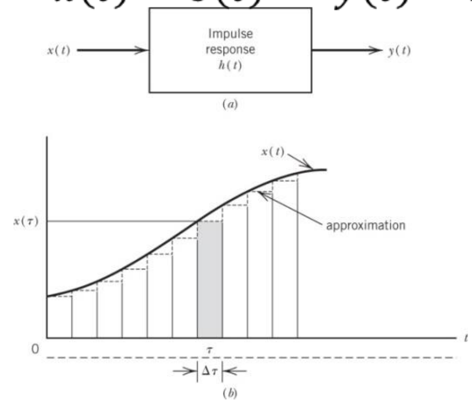
Κανάλι: Εύρος ζώνης, θόρυβος

# Μετάδοση Σημάτων μέσω Γραμμικών Συστημάτων (Επανάληψη)

Γραμμική υπέρθεση Εισόδων – Εξόδων σε Γραμμικό Φίλτρο ή Κανάλι

Κρουστική Απόκριση - *Impulse Response* Γραμμικού & Χρονικά Αμετάβλητου συστήματος $h(t)$:

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$$




**Απόκριση Χρόνου Γραμμικών Συστημάτων**: *Συνέλιξη, Convolution*

(Διέγερση, Excitation) $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ (Απόκριση, Response)

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

**Απόκριση Συχνότητας Γραμμικών Συστημάτων**

$$x(t) \leftrightarrow X(f), \qquad h(t) \leftrightarrow H(f), \qquad y(t) \leftrightarrow \boldsymbol{Y(f) = H(f)X(F)}$$

***H(f)*: Συνάρτηση Μεταφοράς (Transfer Function)**

$$H(f) = |H(f)| \exp[j\beta(f)]$$

$|H(f)|$: amplitude response, $\beta(f)$: phase

Αν $h(t)$ πραγματική *(real)*, τότε $|H(f)|$ άρτια *(even)* & $\beta(f)$ περιττή *(odd)*

# Μετασχηματισμός Hilbert

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$g(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

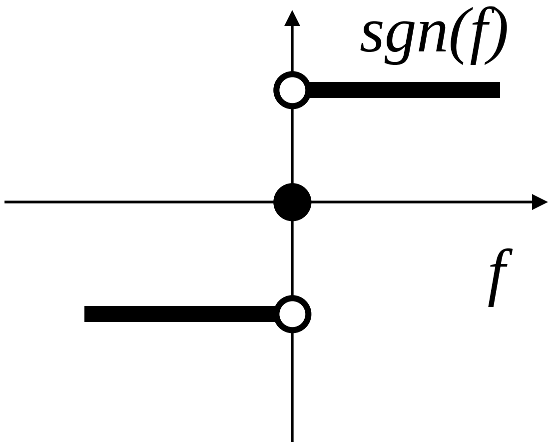
Σε τι χρησιμεύει:

- Ζωνοπερατά σήματα
- Διαμόρφωση απλής πλευρικής

Παρατήρηση:

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau} d\tau = g(t) \otimes \frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow$$

$$\hat{G}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)G(f)$$




$$\hat{\hat{g}}(t) = -g(t)$$

Τα σήματα $g(t)$ και $\hat{g}(t)$ έχουν το ίδιο φάσμα, γιατί $|G(f)|=|-j\mathrm{sgn}(f)G(f)|$

# Παράδειγμα: Ημίτονο $g(t)=\sin(2\pi f_0 t)$

$$\hat{G}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)G(f) \Rightarrow$$

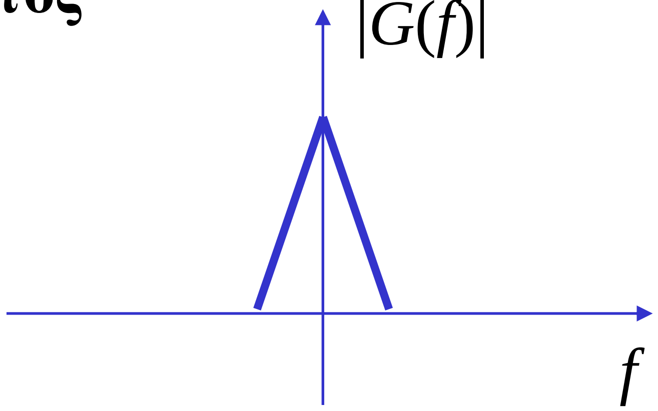
$$\hat{G}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j} \Rightarrow$$

$$\hat{G}(f) = -\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] \Rightarrow$$

$$\hat{g}(t) = -\cos(2\pi f_0 t)$$

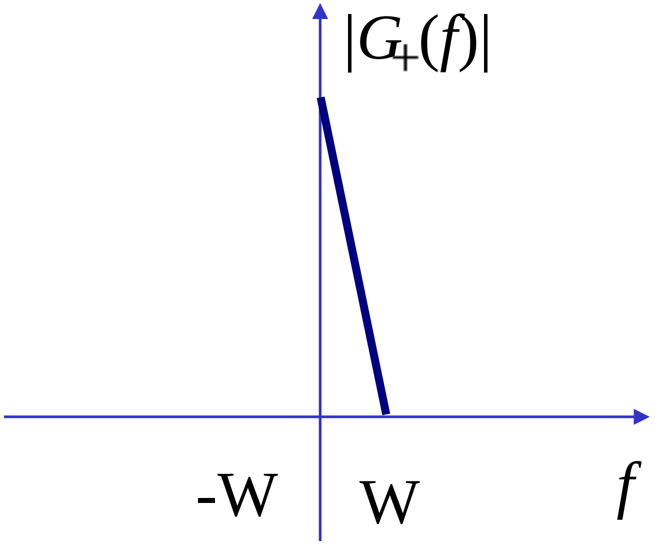
Ομοίως $g(t)=\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \hat{g}(t)=\sin(2\pi f_0 t)$

# Προπεριβάλλουσα σήματος




$$g_+(t) = g(t) + j\,\hat{g}(t) \Rightarrow$$

$$G_+(f) = G(f) + j[-j\,\mathrm{sgn}(f)G(f)] \Rightarrow$$

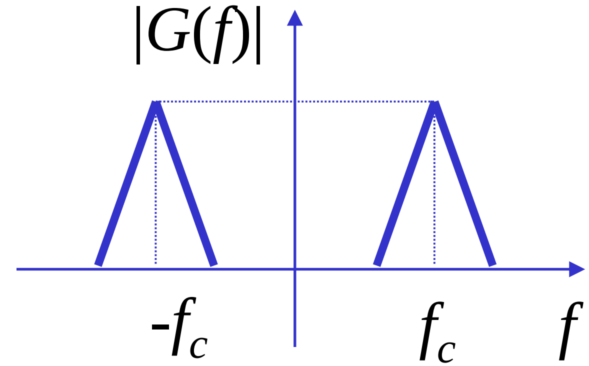



$$G_+(f) = \begin{cases} 2G(f) & f > 0 \\ G(0) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

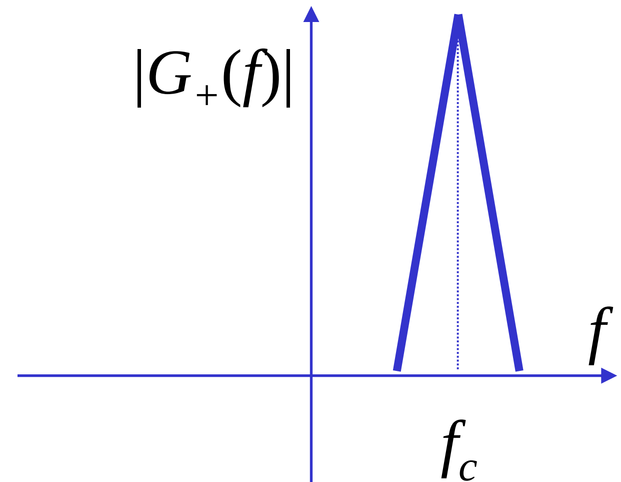
# Μιγαδική Περιβάλλουσα σήματος

Ζωνοπερατό σήμα:

$G(f) \neq 0$ για $|f \pm f_c| < W$



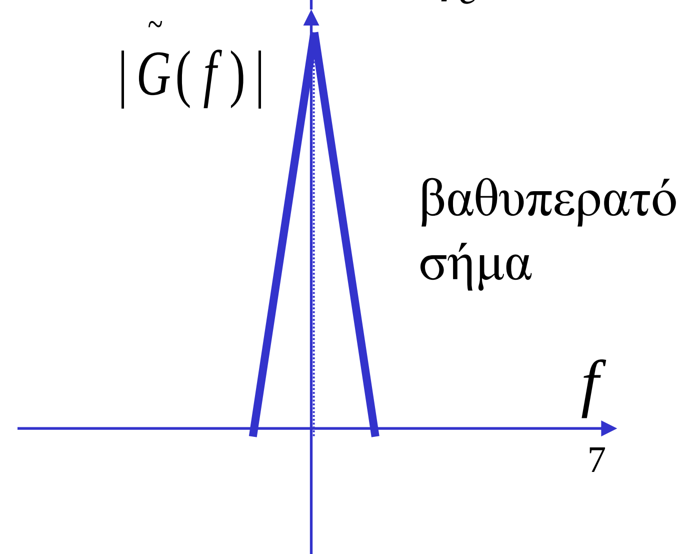

$$G_+(f) = \begin{cases} 2G(f) & f > 0 \\ G(0) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$




$$g_+(t) \equiv \tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t) \Rightarrow$$

$$G_+(f) = \tilde{G}(f - f_c)$$

Το $\tilde{g}(t)$ λέγεται μιγαδική περιβάλλουσα του $g(t)$.



**Εναλλακτικές παραστάσεις της μιγαδικής περιβάλλουσας (Ι):**

Με πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$\tilde{g}(t) = g_c(t) + jg_s(t)$$

βαθυπερατές συναρτήσεις

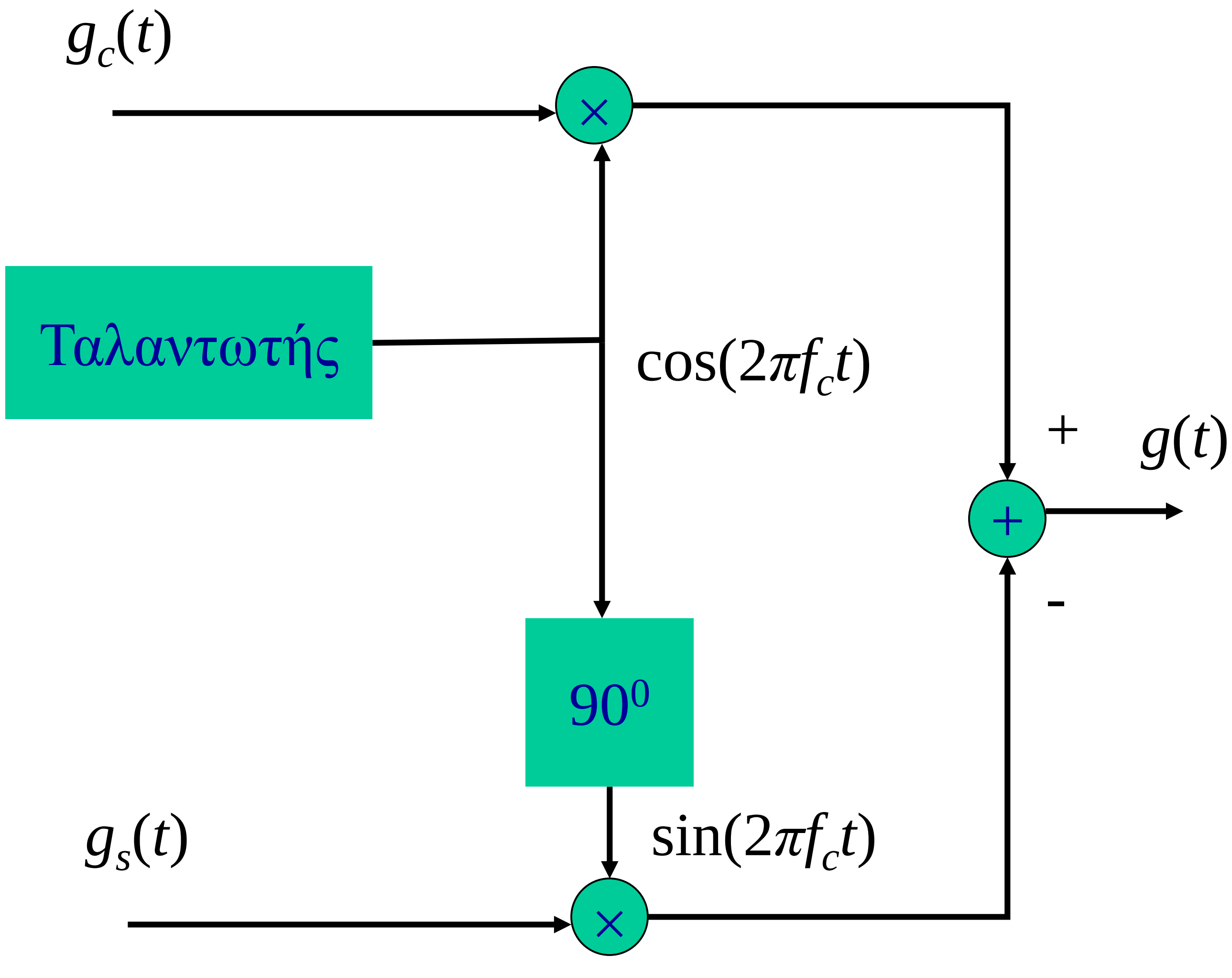
$$g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t) \Rightarrow$$

$$g(t) = \mathrm{Re}\{g_+(t)\} = \mathrm{Re}\{\tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t)\} \Rightarrow$$

$$g(t) = \mathrm{Re}\{[g_c(t) + jg_s(t)][\cos(2\pi f_c t) + j\sin(2\pi f_c t)]\} \Rightarrow$$

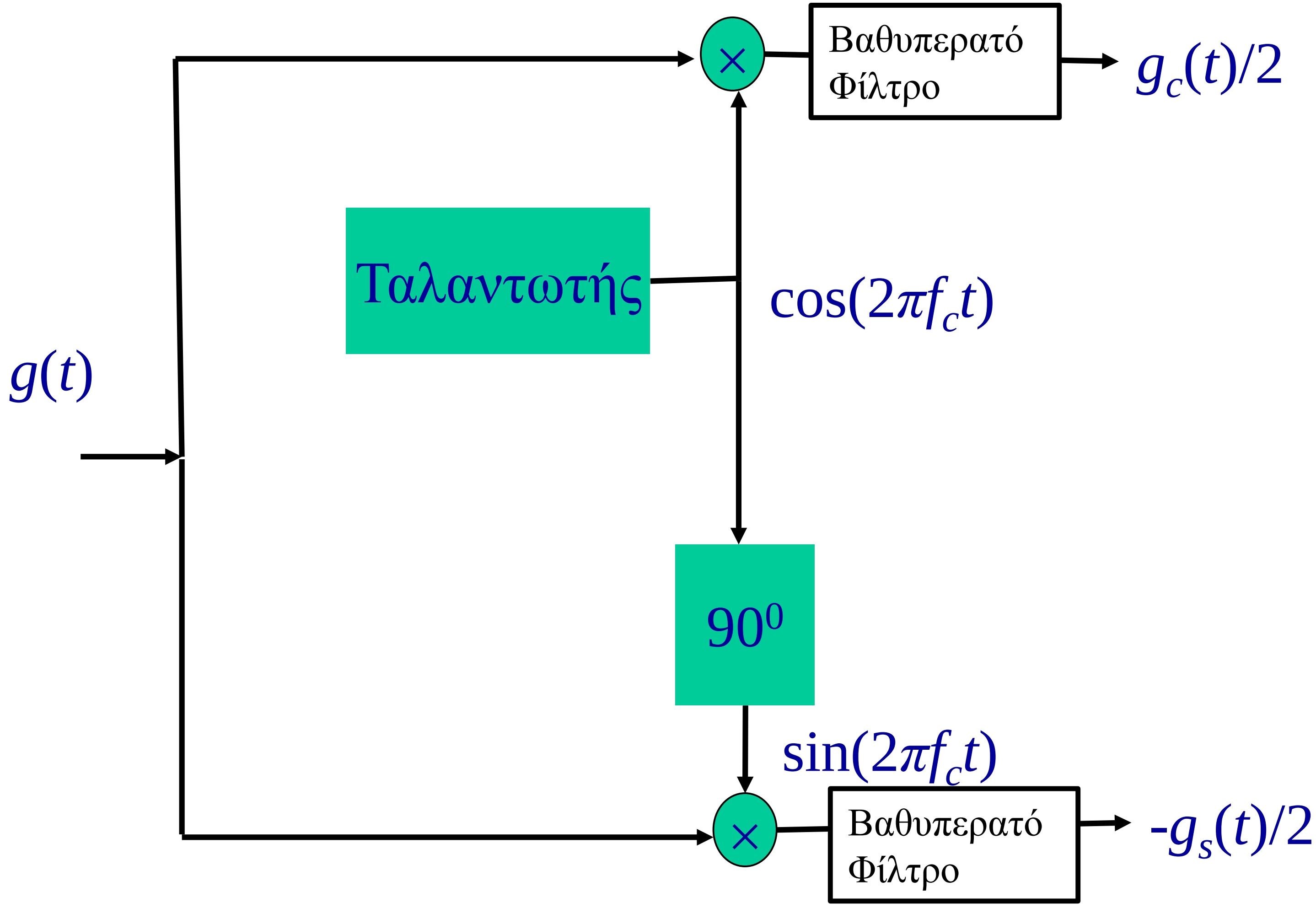
$$g(t) = g_c(t)\cos(2\pi f_c t) - g_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

# Παραγωγή $g(t)$ από $g_c(t)$, $g_c(t)$



# Παραγωγή $g_c(t)$, $g_s(t)$ από $g(t)$

$$g(t)\cos(2\pi f_c t) = [g_c(t)\cos(2\pi f_c t) - g_s(t)\sin(2\pi f_c t)]\cos(2\pi f_c t) =$$
$$(1/2)g_c(t) + (1/2)g_c(t)\cos(4\pi f_c t) - (1/2)g_s(t)\sin(4\pi f_c t)$$



## Εναλλακτικές παραστάσεις της μιγαδικής περιβάλλουσας (ΙΙ): Με «περιβάλλουσα» (μέτρο) και φάση.

$$\tilde{g}(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$$

$$\tilde{g}(t) = g_{+}(t)\exp(-j2\pi f_c t) = [g(t) + j\hat{g}(t)]\exp(-j2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow a(t)e^{j\varphi(t)} = [g(t) + j\hat{g}(t)]\exp(-j2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow g(t) + j\hat{g}(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}\exp(j2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathrm{Re}\{a(t)\exp[j2\pi f_c t + j\varphi(t)]\}$$

$$\Rightarrow g(t) = a(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$$