Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

Ζωνοπερατές Ψηφιακές Διαμορφώσεις

B-ASK, B-FSK
B-PSK, QPSK
Πιθανότητα Λάθους Εσφαλμένου Ψηφίου
Βέλτιστοι Δέκτες
Αστερισμοί

Αθανάσιος Δ. Παναγόπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

Εισαγωγή

Η ψηφιακή πληροφορία κωδικοποιείται σαν μεταβολή

ενός ημιτονοειδούς σήματος

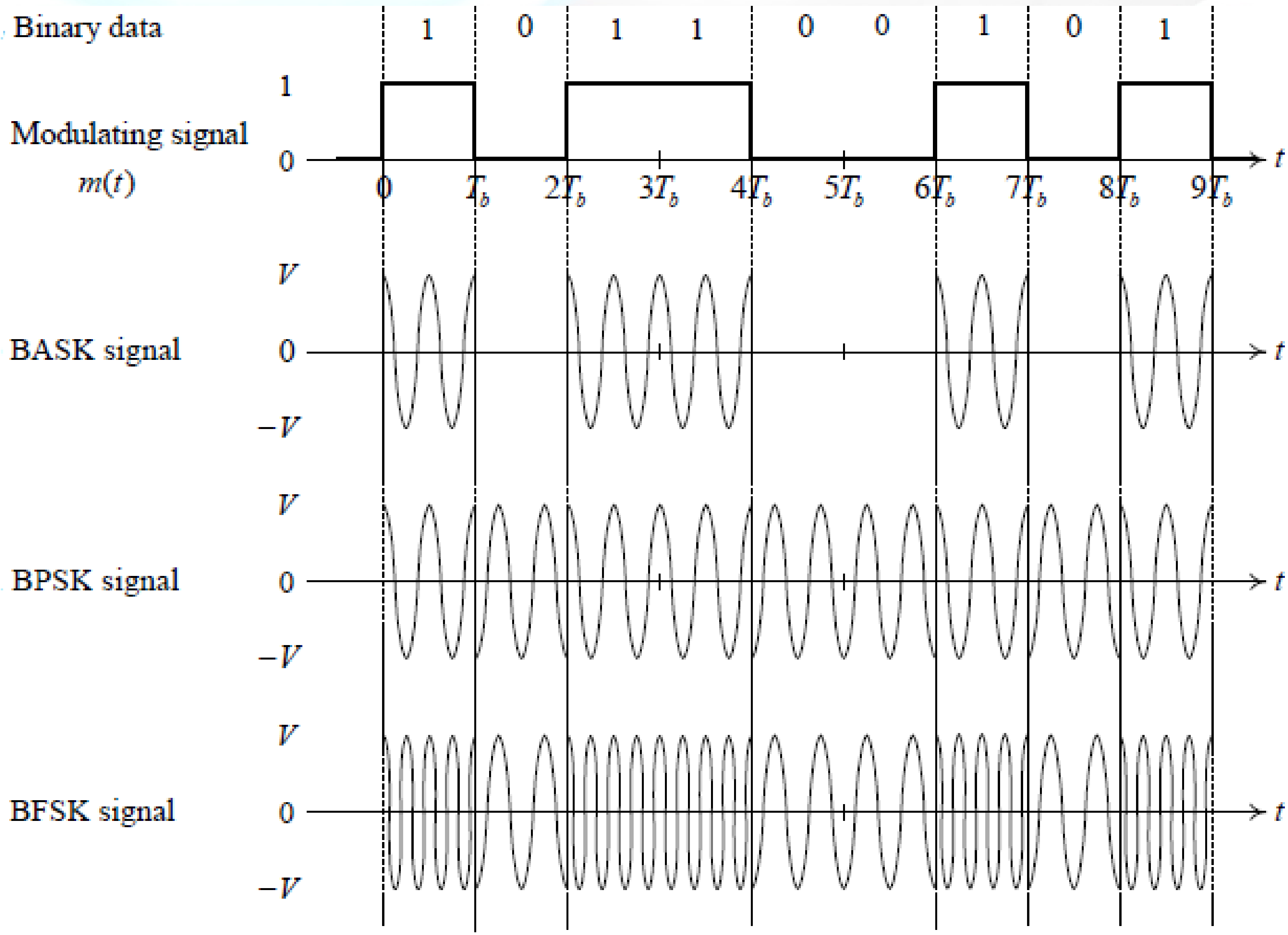
που ονομάζεται ΦΕΡΟΝ ΣΗΜΑ- *carrier* signal.

Όπως και στις αναλογικές επικοινωνίες η συχνότητα φέροντος είναι πολύ μεγαλύτερη από τα διαμορφούμενα σήματα.

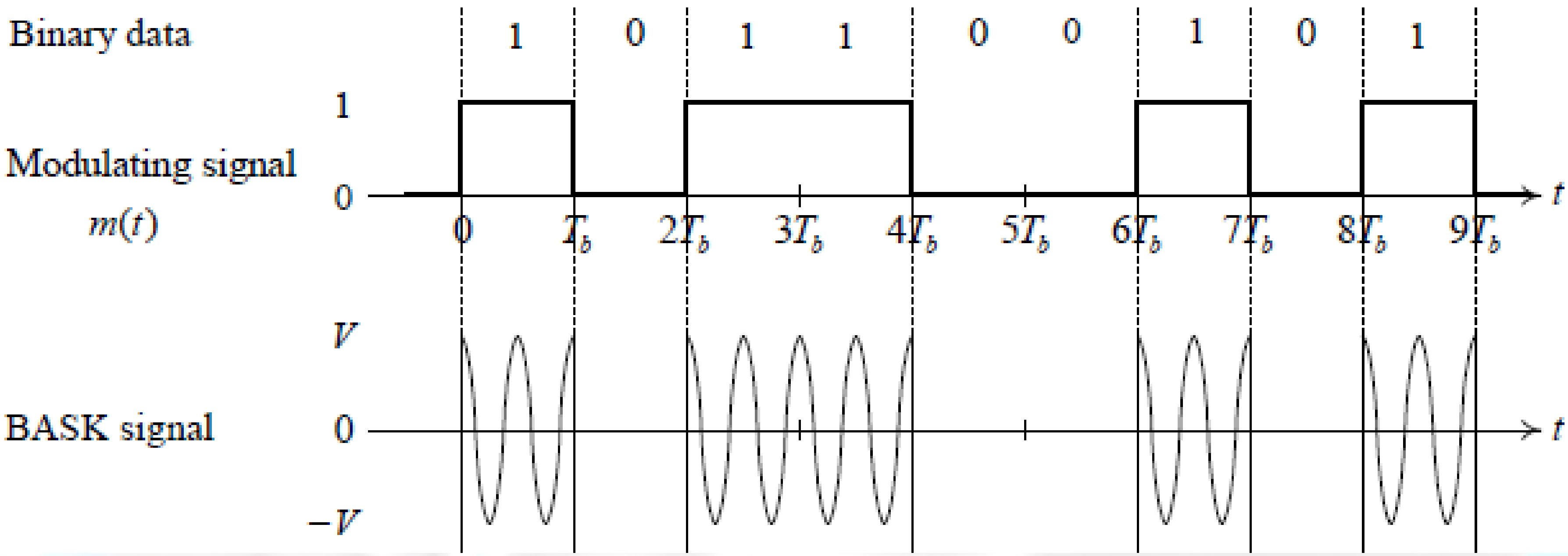
Τα bits πληροφορίας διαμορφώνουν το

Πλάτος , Συχνότητα, Φάση του Ημιτονοειδούς Φέροντος.

Binary Passband Modulated Signals



BASK

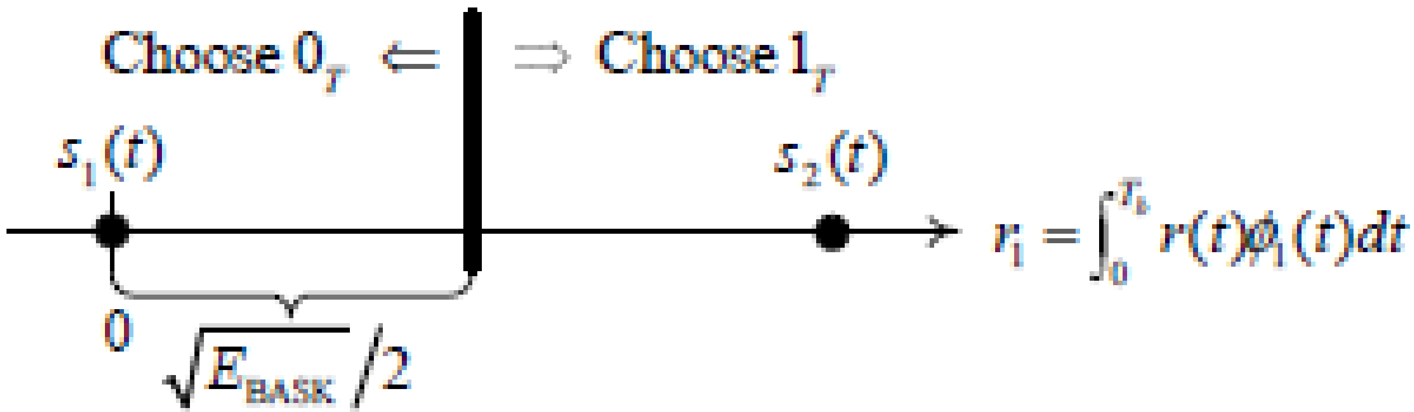


$$s(t) = m(t)c(t)$$

Όπου $m(t)$ είναι το διαμορφούμενο σήμα (σήμα βασικής ζώνης ένα NRZ σήμα)

$c(t) = V\cos(2\pi f_c t)$ το ημιτονοειδές carrier.

Binary Amplitude Schift Keying

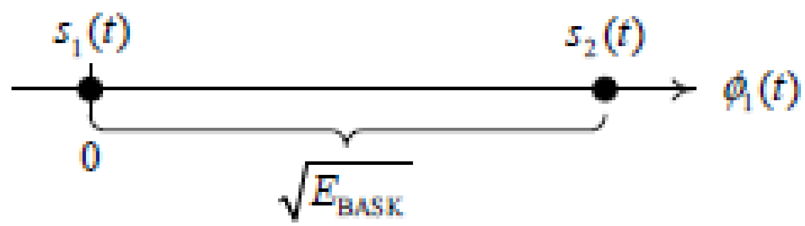


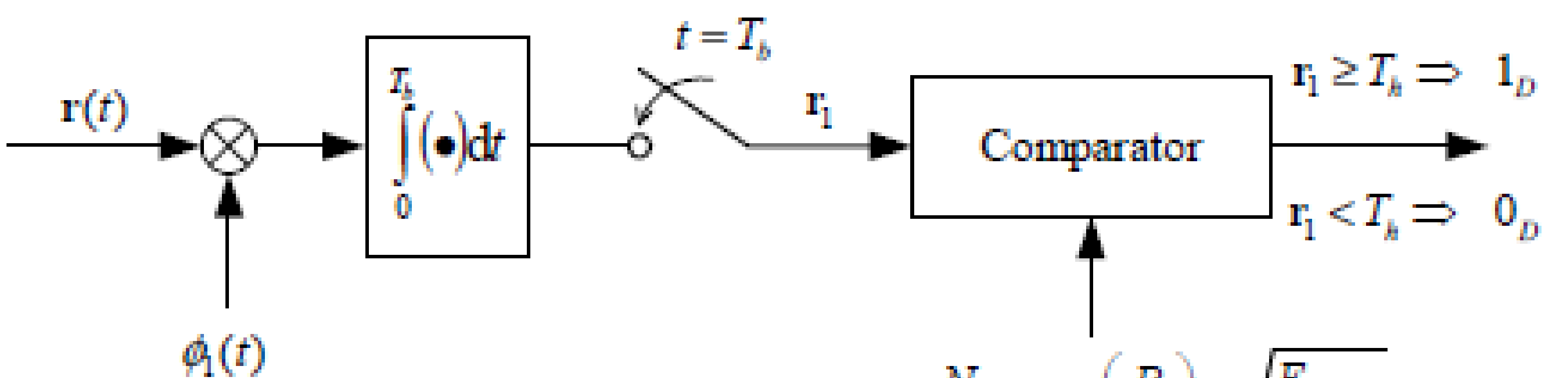
$$P[\text{error}] = Q\left(\frac{\text{απόσταση μεταξύ των σημάτων}}{2 \times \text{noise RMS value}}\right)$$

$$P[\text{error}]_{\text{BASK}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_{\text{BASK}}}{2N_0}}\right)$$

Binary Amplitude Schift Keying

$$\begin{cases} s_1(t) = 0, & \text{“}0_T\text{”} \\ s_2(t) = V\cos(2\pi f_c t), & \text{“}1_T\text{”} \end{cases}, \quad 0 < t \leq T_b,\ f_c = n/T_b$$

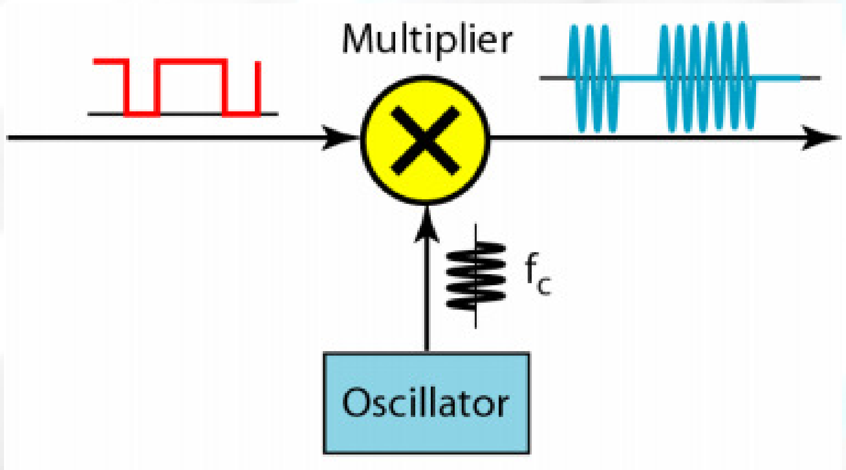




$$T_h = \frac{N_0}{2\sqrt{E_{\text{BASK}}}}\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + \frac{\sqrt{E_{\text{BASK}}}}{2}$$

Binary Amplitude Schift Keying

Αποδιαμόρφωση: μόνο η παρουσία ή η απουσία του σε ένα χρονικό διάστημα χρειάζεται να καθοριστεί.



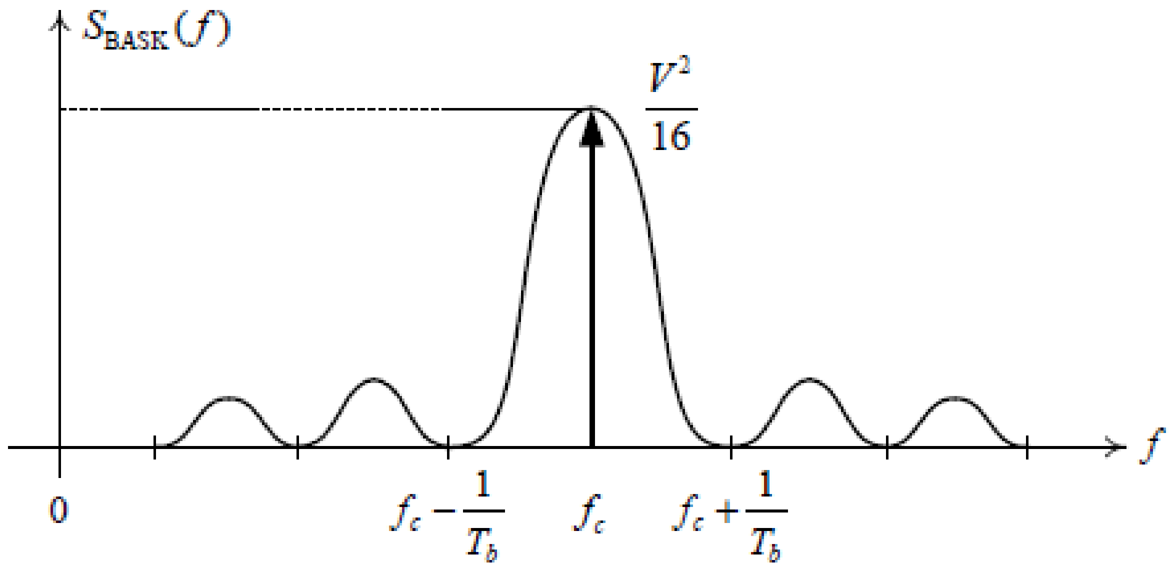
Πλεονέκτημα: απλότητα

Μειονέκτημα: Η ASK είναι πολύ ευαίσθητη στην παρεμβολή/θόρυβο που συνήθως επηρεάζει το πλάτος. Για αυτό η Διαμόρφωση ASK επηρεάζεται πολύ από το θόρυβο.

Εφαρμογή: Η ASK χρησιμοποιείται για μετάσδοση δυαδικών δεδομένων σε οπτικές ίνες.

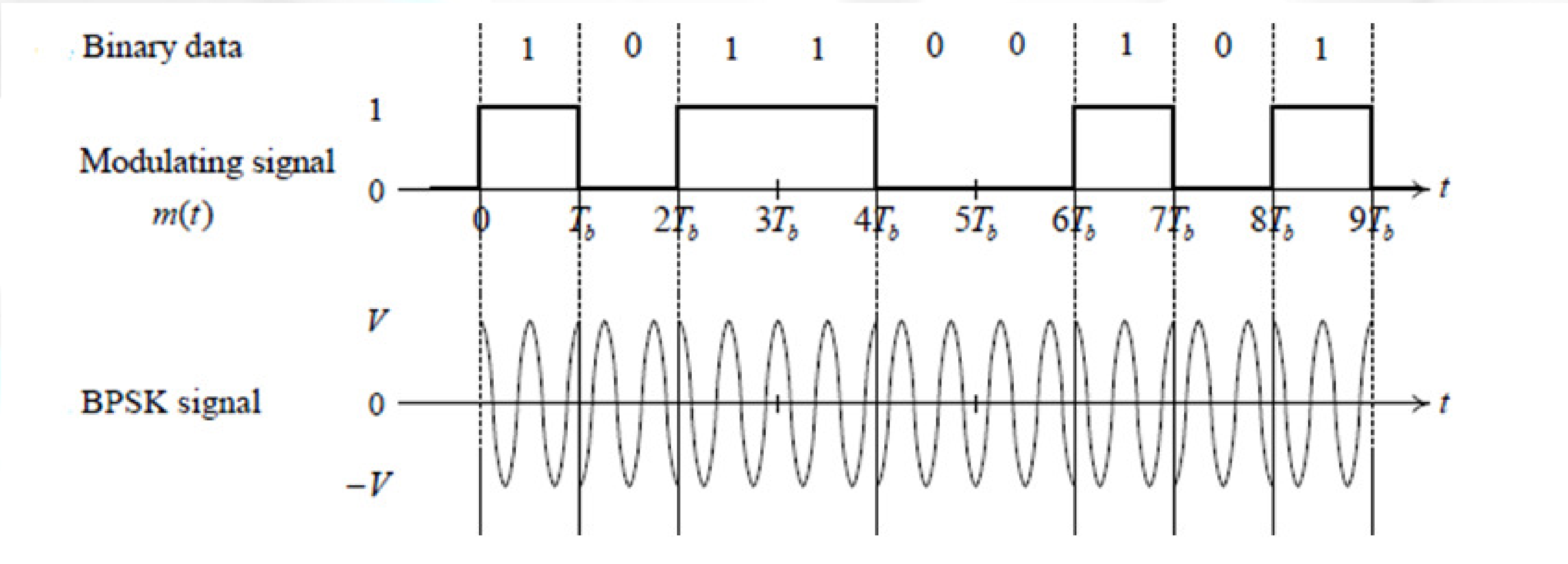
PSD BASK

$$S_{\text{BASK}}(f) = \frac{V^2}{16}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)+ \frac{\sin^2[\pi T_b(f+f_c)]}{\pi^2 T_b(f+f_c)^2}+\frac{\sin^2[\pi T_b(f-f_c)]}{\pi^2 T_b(f-f_c)^2}\right].$$



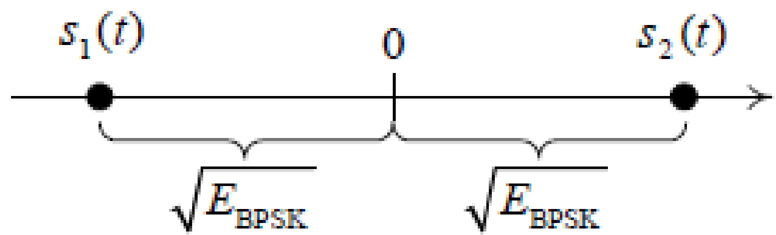
95% της συνολικής μεταδιδόμενης ισχύς βρίσκεται σε μια ζώνη γύρω από το f_c +/- 3/Tb (Hz).

Binary Phase Shift Keying



BPSK

$$\begin{cases} s_1(t) = -V\cos(2\pi f_c t), & \text{if “}0_T\text{”} \\ s_2(t) = +V\cos(2\pi f_c t), & \text{if “}1_T\text{”} \end{cases}, \quad 0 < t \le T_b,$$



$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_c t)$$

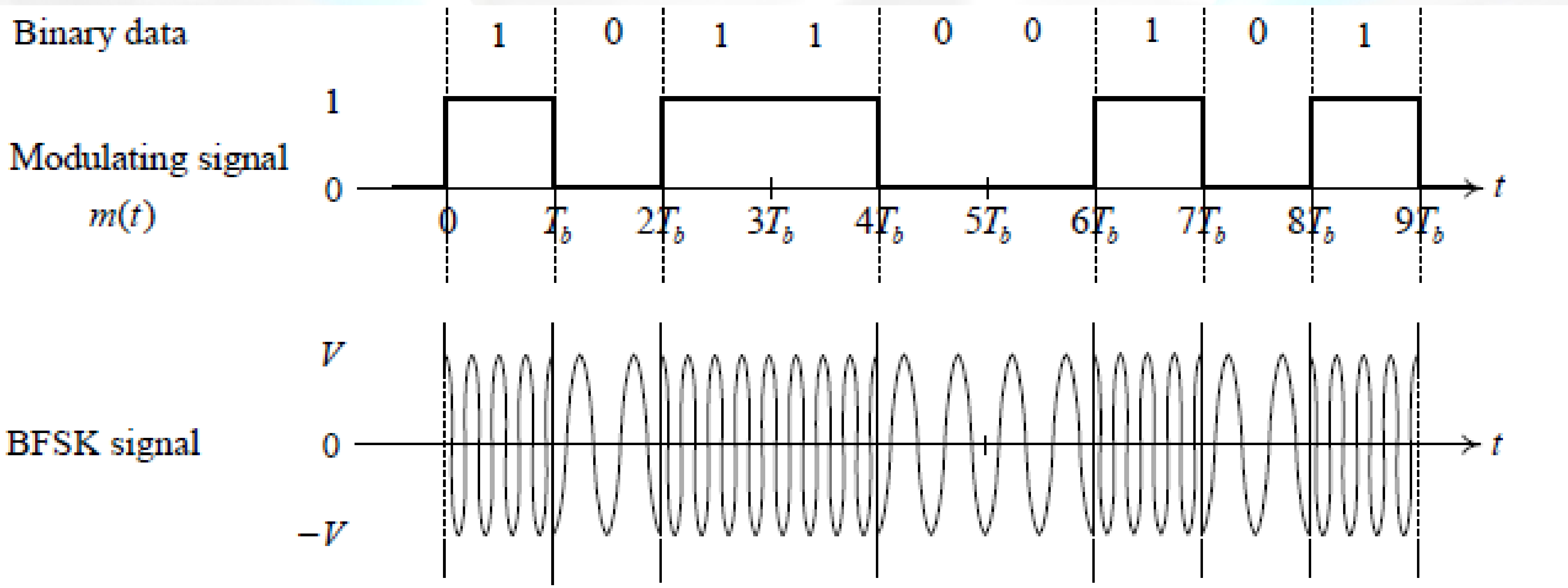
$$P[\text{error}]_{\text{BPSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{\text{BPSK}}}{N_0}}\right)$$

$$S_{\text{BPSK}}(f) = \frac{V^2}{4}\left[\frac{\sin^2[\pi(f-f_c)T_b]}{\pi^2(f-f_c)^2)T_b} + \frac{\sin^2[\pi(f+f_c)T_b]}{\pi^2(f+f_c)^2T_b}\right]$$

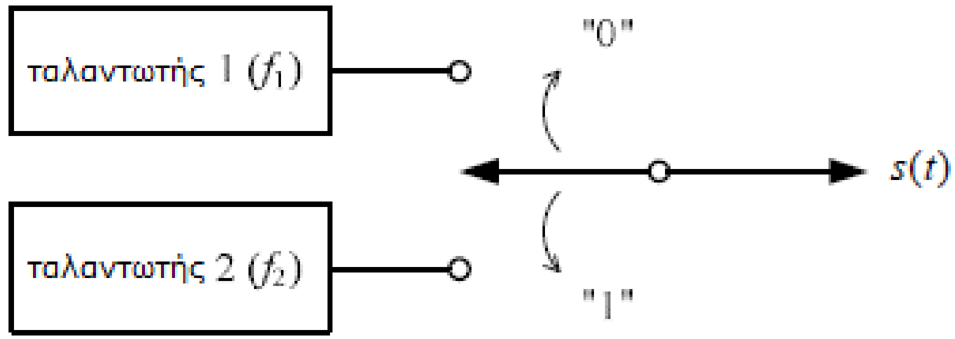
BPSK

- **Αποδιαμόρφωση**: ο αποδιαμορφωτής πρέπει να καθορίσει τη φάση του ληφθέντος ημιτόνου σε σχέση με μια φάση αναφοράς.
- **Πλεονέκτημα**: γενικά οι PSK διαμορφώσεις είναι πιο ανεκτικές στα λάθη από τις ASK, αν και χρησιμοποιούν το ίδιο εύρος ζώνης. Υψηλότερος ρυθμός μετάδοσης είναι πιθανός σε σχέση με την FSK.
- **Μειονέκτημα**: Πιο πολύπλοκη φώραση σήματος/αναπαραγωγή φάσης σε σχέση με τις ASK & FSK

Binary Frequency Shift Keying



Binary Frequency Shift Keying



(a)

$$\begin{cases} s_1(t) = V\cos(2\pi f_1 t + \theta_1), & \text{if "}0_T\text{"} \\ s_2(t) = V\cos(2\pi f_2 t + \theta_2), & \text{if "}1_T\text{"} \end{cases}, \quad 0 < t \leq T_b.$$

Ελάχιστή Συχνοτική απόσταση για σύμφωνη Ορθογωνιότητα $(\theta_1 = \theta_2)$

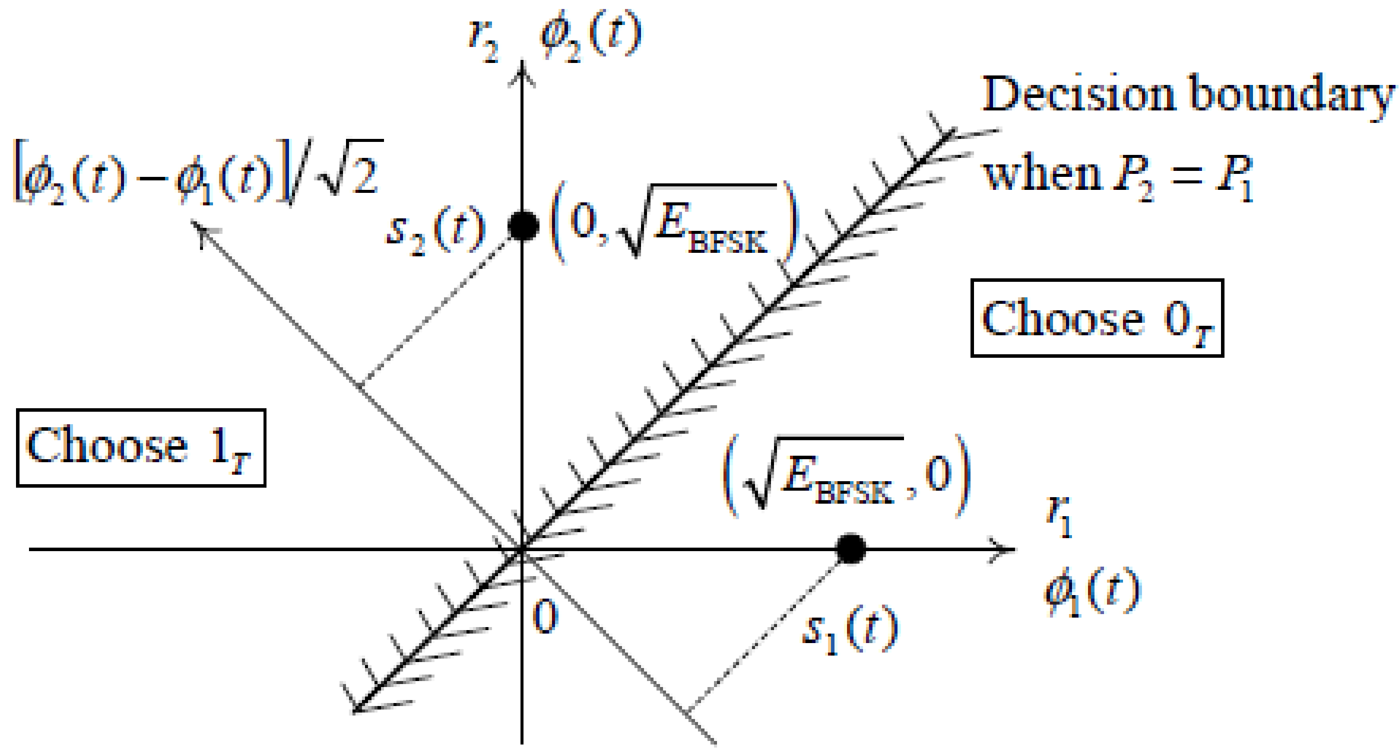
$$(\Delta f)_{\min}^{[\text{coherent}]} = \frac{1}{2T_b}.$$

Ελάχιστη Συχνοτική Απόσταση για μη σύμφωνη Ορθογωνιότητα $(\theta_1 \neq \theta_2)$

$$(\Delta f)_{\min}^{[\text{noncoherent}]} = \frac{1}{T_b}.$$

Binary Frequency Shift Keying

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{\text{BFSK}}}}, \quad \phi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_{\text{BFSK}}}}.$$



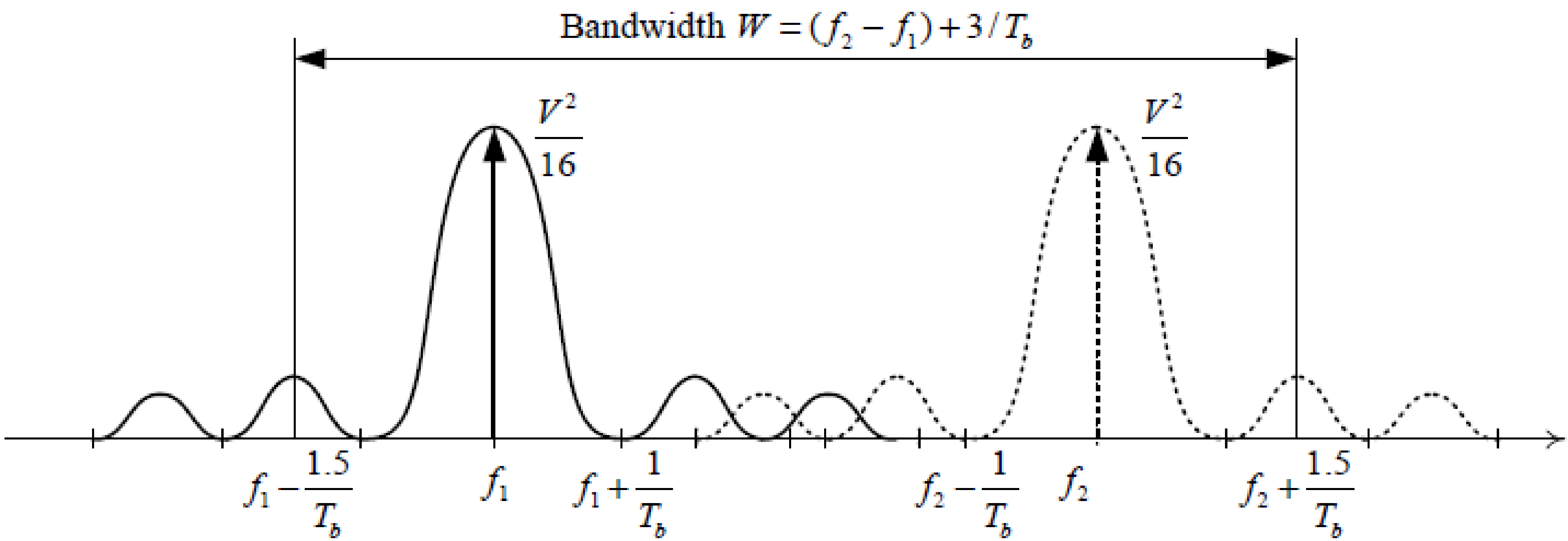
$$P[\text{error}]_{\text{BFSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_{\text{BFSK}}}{N_0}}\right)$$

BFSK

- **Αποδιαμόρφωση**: ο αποδιαμορφωτής πρέπει να είναι ικανός να καθορίσει τις ποια από τις 2 πιθανές συχνότητες μεταδόθηκε σε συγκεκριμένο χρόνο.
- **Πλεονέκτημα**: η FSK είναι πιο αναίσθητη στα λάθη σε σχέση με την ASK – Ο δέκτης ενδιαφέρεται για την αλλαγή της συχνότητας σε συγκεκριμένα διαστήματα άρα τα spikes της τάσης αγνοούνται.
- **Μειονέκτημα** : Το φάσμα της είναι 2πλάσιο του φάσματος ASK
- **Εφαρμογή**: σε γραμμές φωνής, σε point-to-point ζεύξεις υψηλών συχνοτήτων κ.α.

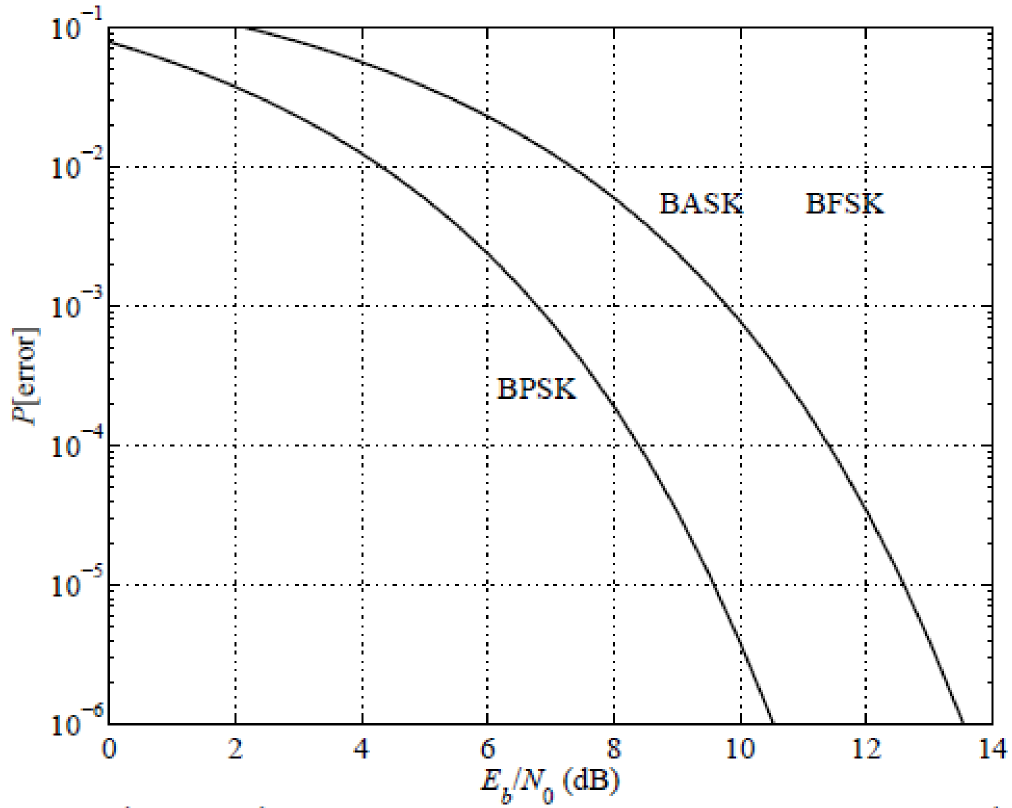
BFSK Power Spectral Density

$$S_{\text{BFSK}}(f) = \frac{V^2}{16}\left[\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)+\frac{\sin^2[\pi T_b(f+f_2)]}{\pi^2 T_b(f+f_2)^2}+\frac{\sin^2[\pi T_b(f-f_2)]}{\pi^2 T_b(f-f_2)^2}\right]$$
$$+ \frac{V^2}{16}\left[\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)+\frac{\sin^2[\pi T_b(f+f_1)]}{\pi^2 T_b(f+f_1)^2}+\frac{\sin^2[\pi T_b(f-f_1)]}{\pi^2 T_b(f-f_1)^2}\right].$$



Σύγκριση Επίδοσης BASK, BPSK, BFSK

$$E_b = E_{\mathrm{BPSK}},\ E_b = E_{\mathrm{BASK}}/2,\ \ E_b = E_{\mathrm{BFSK}}$$



$$P[\text{error}]_{\text{BPSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right),\ P[\text{error}]_{\text{BASK}} = P[\text{error}]_{\text{BFSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

Σύγκριση Επίδοσης

- BPSK είναι 3 dB πιο αποδοτική από την BFSK=BASK. Για την πιθανότητα λάθους.

- Σε όρους εύρους ζώνης BFSK καταλαμβάνεις μεγαλύτερο εύρος ζώνης από τις BPSK & BASK (εύρος ζώνης BPSK = BASK)

- Κάθε μία από τις 3 διαμορφώσεις έχει φάσμα το οποίο πέφτει με το $1/f^2$ για συχνότητες μακριά από τη φέρουσα.

Αστερισμός (Constellation)

Ένα σύνολο Μ διανυσμάτων (σημάτων) που ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο ονομάζεται Αστερισμός.

Ιδιότητες:

1. Κάθε σήμα αναπαρίσταται σε ένα σημείο του αστερισμού και αντιστοιχεί σε μια διαφορετική κυματομορφή/σύμβολο. Όλες οι κυματομορφές ανήκουν στην ίδια ορθοκανονική βάση.
2. Μέση ενέργεια συμβόλου:

$$E_s = \sum_{i=1}^{M} \left\| s_i \right\|^2 \cdot P_r\left(s_i\right), \quad \left\| s_i \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(s_{ij}\right)^2 \qquad P_r\left(s_i\right) = \text{πιθανότητα μετάδοσης συμβόλου, } s_{ij} = \sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau\acute{\omega}\sigma\alpha$$

Η Ελαχιστοποίηση της E_s με σκοπό την Εξοικονόμηση Ενέργειας Εκπομπής απαιτεί την τοποθέτηση των σημείων κοντά στο 0.

Μικραίνουν οι Ευκλείδειες Αποστάσεις μεταξύ των Συμβόλων –

Αυξάνεται η Πιθανότητα Λάθους

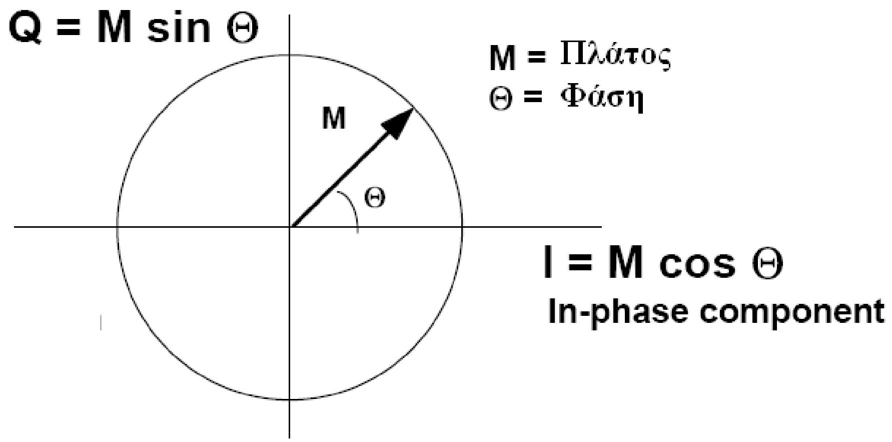
I- Q αναπαράσταση

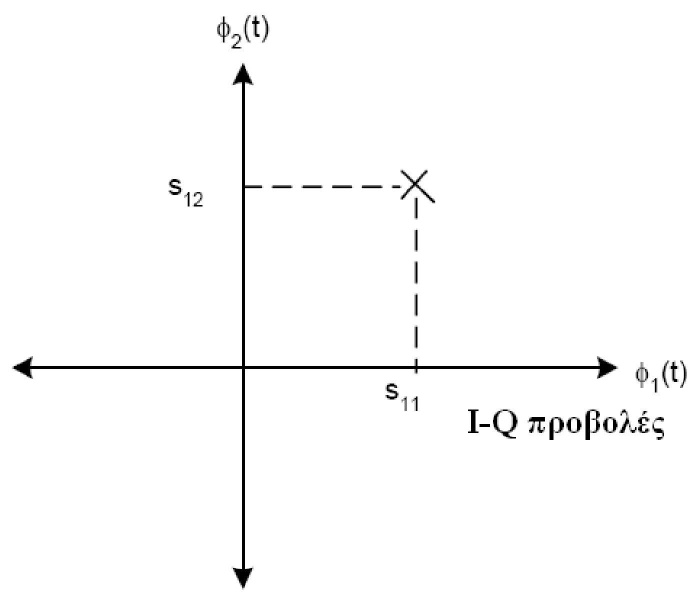
I – in phase συνιστώσα

Q- quadrature συνιστώσα
(μετατοπισμένη κατά 90deg)

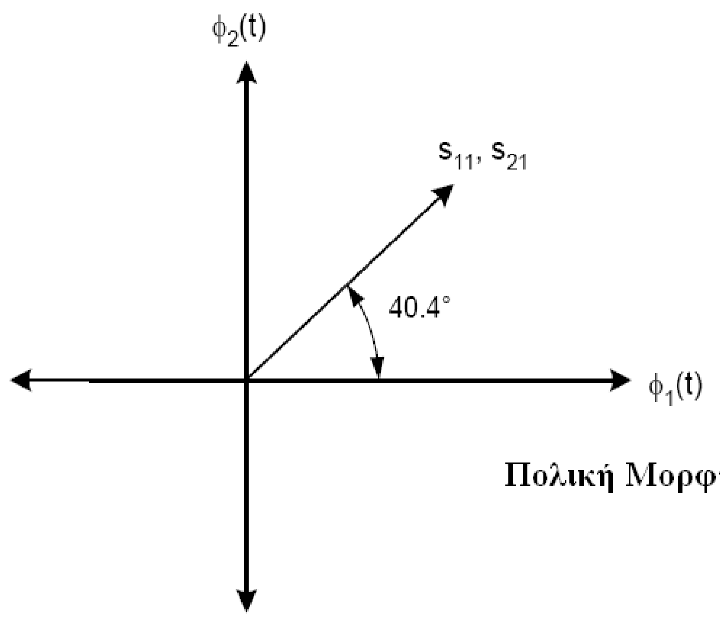
$$M = \sqrt{I^2 + Q^2} \quad πλάτος\ σήματος\ /\ διάνυσματος$$

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{I}{Q}\right) \quad φάση\ σήματος$$





I-Q προβολές



Πολική Μορφή

Quadrature Phase Shift Keying (QPSK)

Η βασική ιδέα idea πίσω από τη διαμόρφωση QPSK είναι ότι το $\cos(2\pi f_c t)$ και το $\sin(2\pi f_c t)$ είναι ορθογώνια στο διάστημα [0, Tb] όταν $f_c = k/T_b$, k ακέραιος ⇒

Τότε μπορούμε να μεταδώσουμε **Δύο Διαφορετικά** Bits στην ίδια μπάντα συχνοτήτων και στην ίδια χρονική στιγμή.

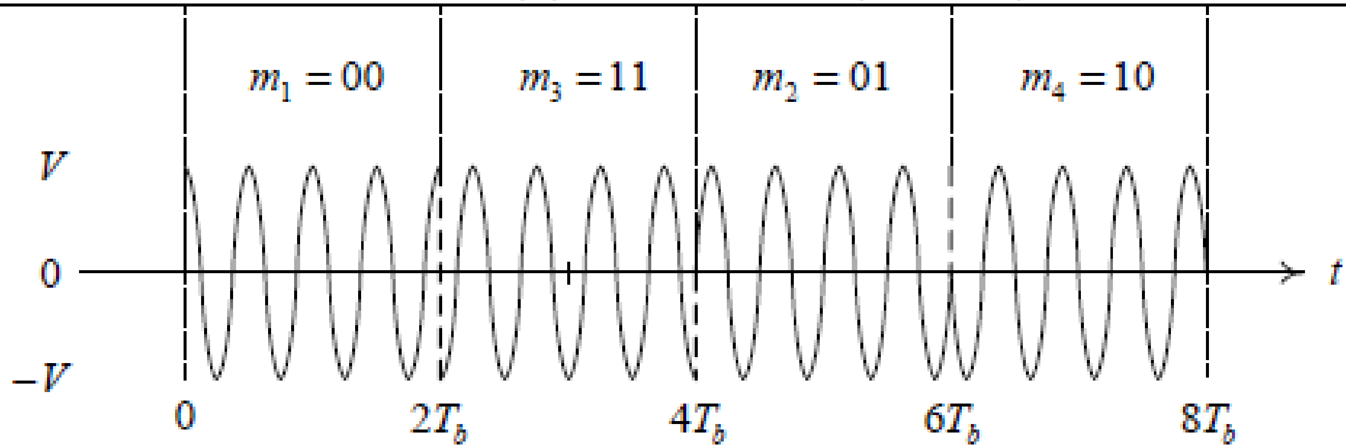
Ο ρυθμός σηματοδοσίας συμβόλων (δηλαδή ο ρυθμός συμβόλων - baud rate) είναι:

$\mathbf{R_s = 1/T_s = 1/(2T_b) = R_b/2}$ **(symbols/sec),** δηλαδή πέφτει στο μισό.

Quadrature Phase Shift Keying (QPSK)

Ένα παράδειγμα της QPSK και η αντιστοίχιση μηνυμάτων με κυματομορφές φαίνεται παρακάτω;

Bit Pattern	**Μήνυμα**	**Κυματομορφές**	
00	m_1	$s_1(t) = V\cos(2\pi f_c t),$	$0 \le t \le T_s = 2T_b$
01	m_2	$s_2(t) = V\sin(2\pi f_c t),$	$0 \le t \le T_s = 2T_b$
11	m_3	$s_3(t) = -V\cos(2\pi f_c t),$	$0 \le t \le T_s = 2T_b$
10	m_4	$s_4(t) = -V\sin(2\pi f_c t),$	$0 \le t \le T_s = 2T_b$

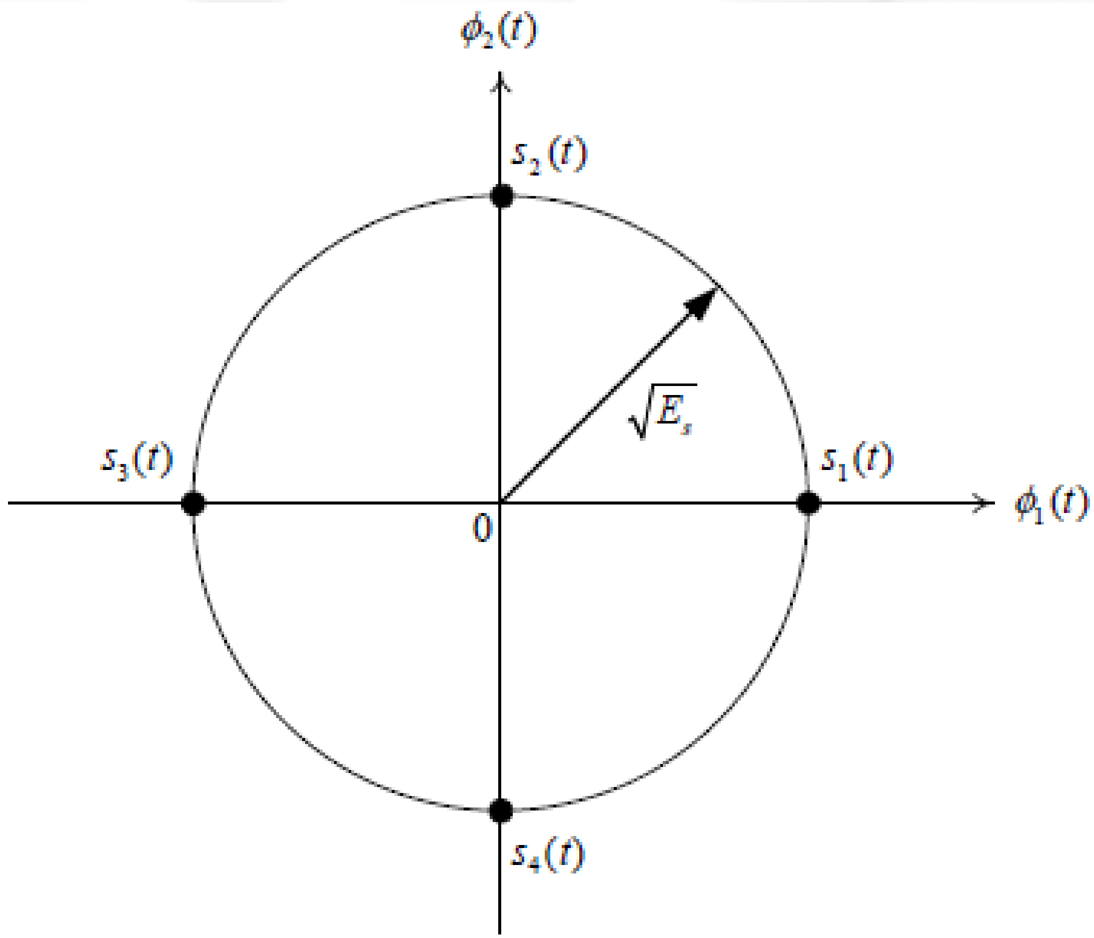


Quadrature Phase Shift Keying (QPSK)

Γεωμετρική Αναπαράσταση:

$$\int_0^{T_s} s_i^2(t)\mathrm{d}t = \frac{V^2}{2}T_s = V^2 T_b = E_s,$$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_s}}, \quad \phi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_s}}.$$



Βέλτιστος Δέκτης QPSK

Στόχος μας είναι να σχεδιάσουμε δέκτη που να μας δίνει την

ελάχιστη πιθανότητα λάθους στο δέκτη.

Εδώ δε θα έχουμε δέκτη που κάνει minimize το

Bit Error Probability

αλλά το κριτήριο θα είναι να γίνεται minimum το

Symbol* (message) *Error Probability

Βέλτιστος Δέκτης QPSK

Για να βρούμε το δέκτη που θα δίνει την ελάχιστη πιθανότητα λάθος πρέπει να αλλάξουμε τη γενική θεωρία που έχουμε ήδη δει.

Το κριτήριο τώρα είναι να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα συμβόλου.

Στην QPSK έχουμε 4 σύμβολα/μηνύματα/κυματομορφές

$s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)$

Ο Βέλτιστος Δέκτης υλοποιείται με το να αναπτύξουμε το ληφθέν σήμα

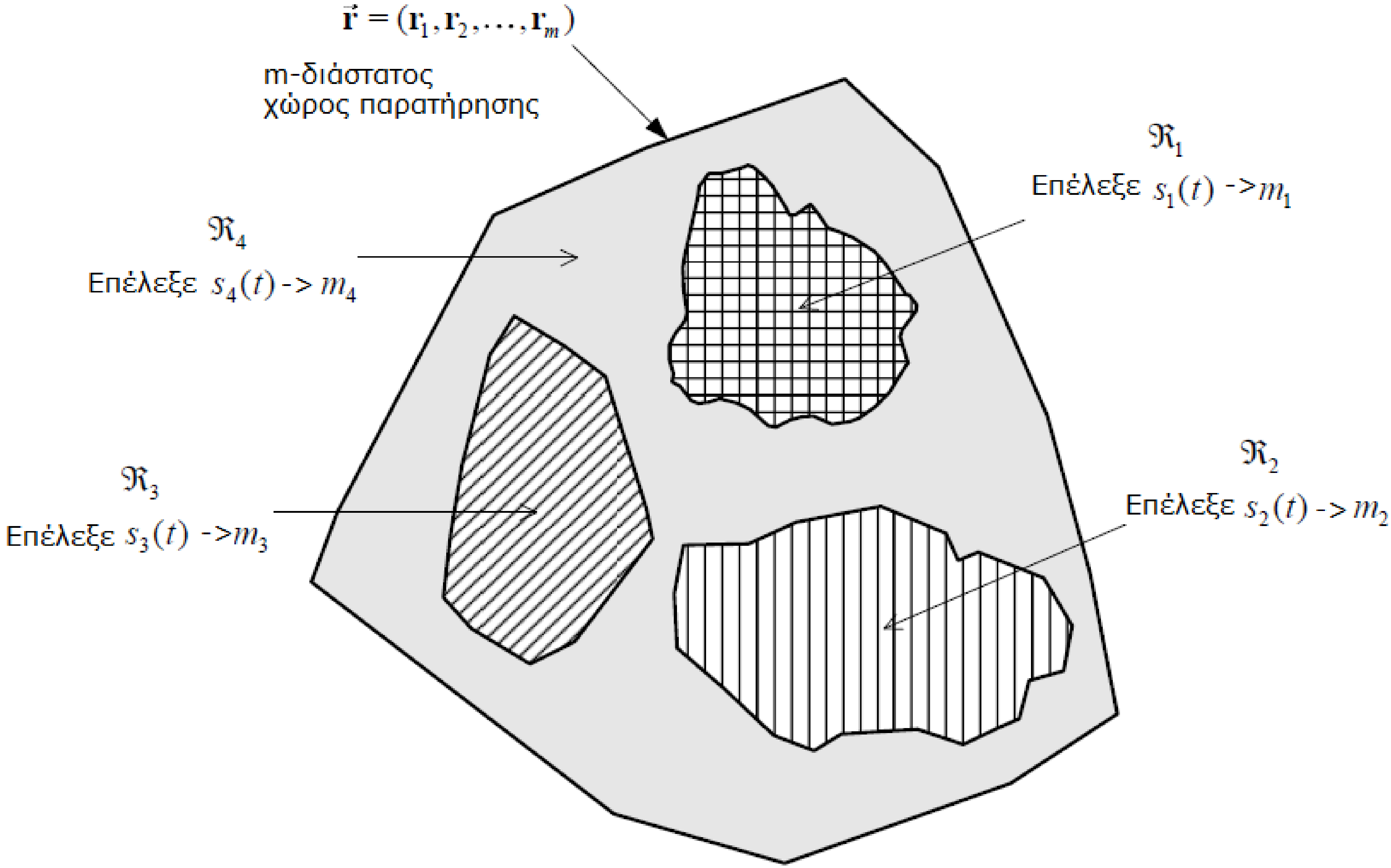
$\mathbf{r}(t) = s_i(t) + \mathbf{w}(t)$ στο χρονικό διάστημα T_s

$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1\varphi_1(t) + \mathbf{r}_2\varphi_2(t) + \mathbf{r}_3\varphi_3(t) + \cdots$

$\varphi_1(t)$ & $\varphi_2(t)$ προσδιορίζονται από το σύνολο των σημάτων

Ενώ οι $\varphi_i(t)$, $i > 2$ επιλέγονται για να συμπληρώσουμε το ορθοκανονικό σύνολο.

Βέλτιστος Δέκτης (QPSK)



Βέλτιστος Δέκτης QPSK

Από το να ελαχιστοποιήσω το λάθος είναι να μεγιστοποιήσω τη πιθανότητα να έχω σωστή απόφαση.

$$P[\text{correct}] = P[\vec{\mathbf{r}} \in \Re_1 | s_1(t)]P[s_1(t)] + P[\vec{\mathbf{r}} \in \Re_2 | s_2(t)]P[s_2(t)]$$
$$+ P[\vec{\mathbf{r}} \in \Re_3 | s_3(t)]P[s_3(t)] + P[\vec{\mathbf{r}} \in \Re_4 | s_4(t)]P[s_4(t)]$$

όπου $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, \mathbf{r}_m)$ & $P[\mathbf{r} \in R_i|s_i(t)]$ είναι η πιθανότητα ότι η παρατήρηση **r πέφτει μέσα στην** i_{th} περιοχή όταν το σήμα $s_i(t)$ (ή το μήνυμα m_i) μεταδίδεται και $P[s_i(t)] \equiv P_i$ *είναι η a priori* πιθανότητα μετάδοσης του μηνύματος m_i .

$$P[\text{correct}] = \int_{\Re_1} P_1 f(\vec{r}|s_1(t))\mathrm{d}\vec{r} + \int_{\Re_2} P_2 f(\vec{r}|s_2(t))\mathrm{d}\vec{r}$$
$$+ \int_{\Re_3} P_3 f(\vec{r}|s_3(t))\mathrm{d}\vec{r} + \int_{\Re_4} P_4 f(\vec{r}|s_4(t))\mathrm{d}\vec{r}.$$

Βέλτιστος Δέκτης QPSK

Η πιθανότητα ορθής απόφασης μεγιστοποιείται με τον ακόλουθο κανόνα απόφασης:

ανάθεση το διάνυσμα παρατήρησης $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ στον m-διάστατο χώρο σημάτων στην περιοχή που η ολοκληρωτέα ποσότητα $P_i f(\mathbf{r}|s_i(t))$ είναι η μέγιστη ή

$$\boxed{\text{Επέλεξε } s_i(t) \text{ εάν } P_i f(\vec{r}|s_i(t)) > P_j f(\vec{r}|s_j(t)) \;\; j = 1,2,3,4; \;\; j \neq i.}$$

Αν $m \to \infty$, η υπό συνθήκη pdf για το i_{th} μήνυμα που μεταδίδεται μπορεί να γραφτεί:

$$f(\vec{r}|s_i(t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{(r_1 - s_{i1})^2}{N_0}\right\} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{(r_2 - s_{i2})^2}{N_0}\right\} \times \prod_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{r_k^2}{N_0}\right\}.$$

Βέλτιστος Δέκτης QPSK

Ο κανόνας γίνεται:

επέλεξε $s_i(t)$ εάν

$$P_i f(r_1, r_2 | s_i(t)) > P_j f(r_1, r_2 | s_j(t)),$$
$$j = 1, 2, 3, 4;\ j \neq i.$$

$$P_j f(r_1, r_2 | s_j(t)) = P_j \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{(r_1 - s_{j1})^2}{N_0}\right\} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{(r_2 - s_{j2})^2}{N_0}\right\}$$

επέλεξε $s_i(t)$ εάν

$$N_0 \ln P_i - (r_1 - s_{i1})^2 - (r_2 - s_{i2})^2 >$$
$$N_0 \ln P_j - (r_1 - s_{j1})^2 - (r_2 - s_{i2})^2,$$
$$j = 1, 2, 3, 4;\ j \neq i.$$

Βέλτιστος Δέκτης QPSK

Συνεπώς:

επέλεξε $s_i(t)$ εάν

$$\frac{N_0}{2}\ln P_i + r_1 s_{i1} + r_2 s_{i2} - \frac{\left(s_{i1}^2 + s_{i2}^2\right)}{2} > \frac{N_0}{2}\ln P_j + r_1 s_{j1} + r_2 s_{j2} - \frac{\left(s_{j1}^2 + s_{j2}^2\right)}{2},$$
$$j = 1, 2, 3, 4;\ j \neq i.$$

Θεωρώντας ότι τα σύμβολα έχουν την ίδια ενέργεια τότε:

επέλεξε $s_i(t)$ εάν

$$\frac{N_0}{2}\ln P_i + r_1 s_{i1} + r_2 s_{i2} > \frac{N_0}{2}\ln P_j + r_1 s_{j1} + r_2 s_{j2},$$
$$j = 1, 2, 3, 4;\ j \neq i.$$

Όταν είναι ισοπίθανα $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0.25$, τότε ο κανόνας γίνεται:

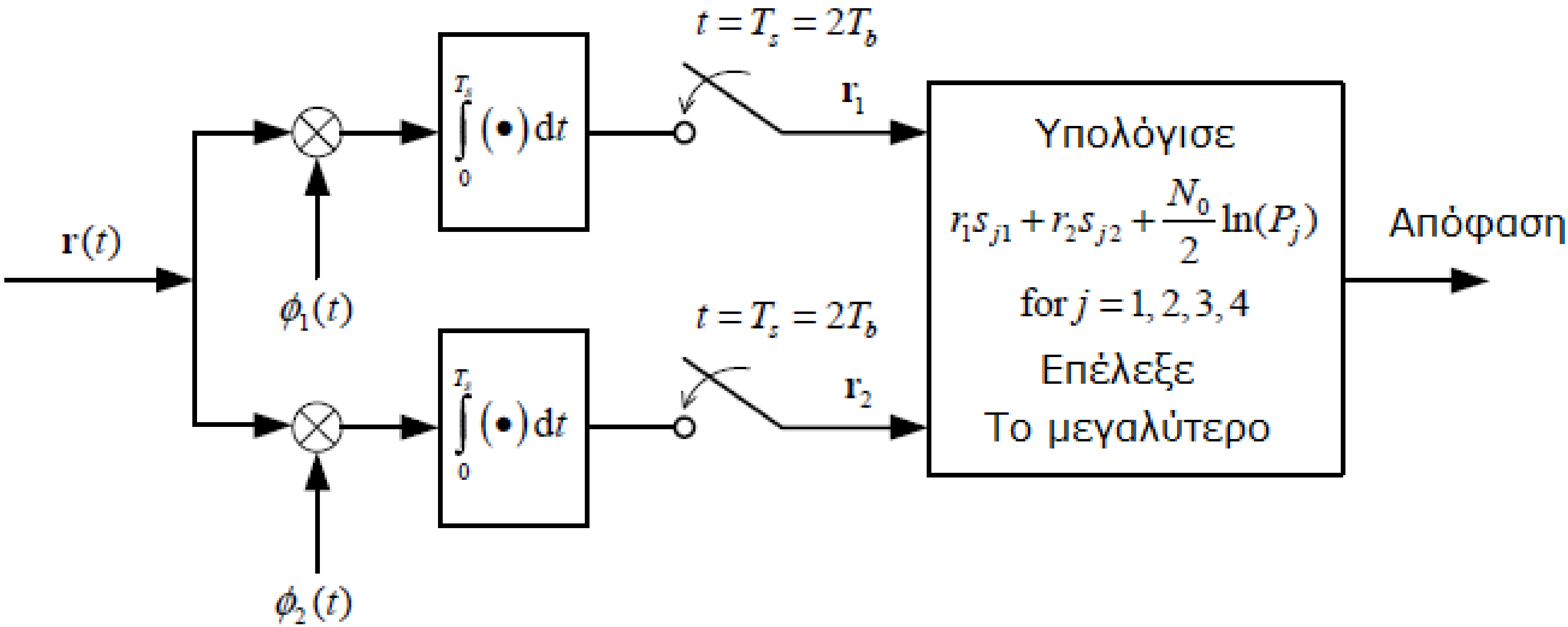
επέλεξε $s_i(t)$ εάν $(r_1 - s_{i1})^2 + (r_2 - s_{i2})^2$ είναι το μικρότερο

minimum-distance receiver

Βέλτιστος Δέκτης QPSK

επέλεξε $s_i(t)$ εάν

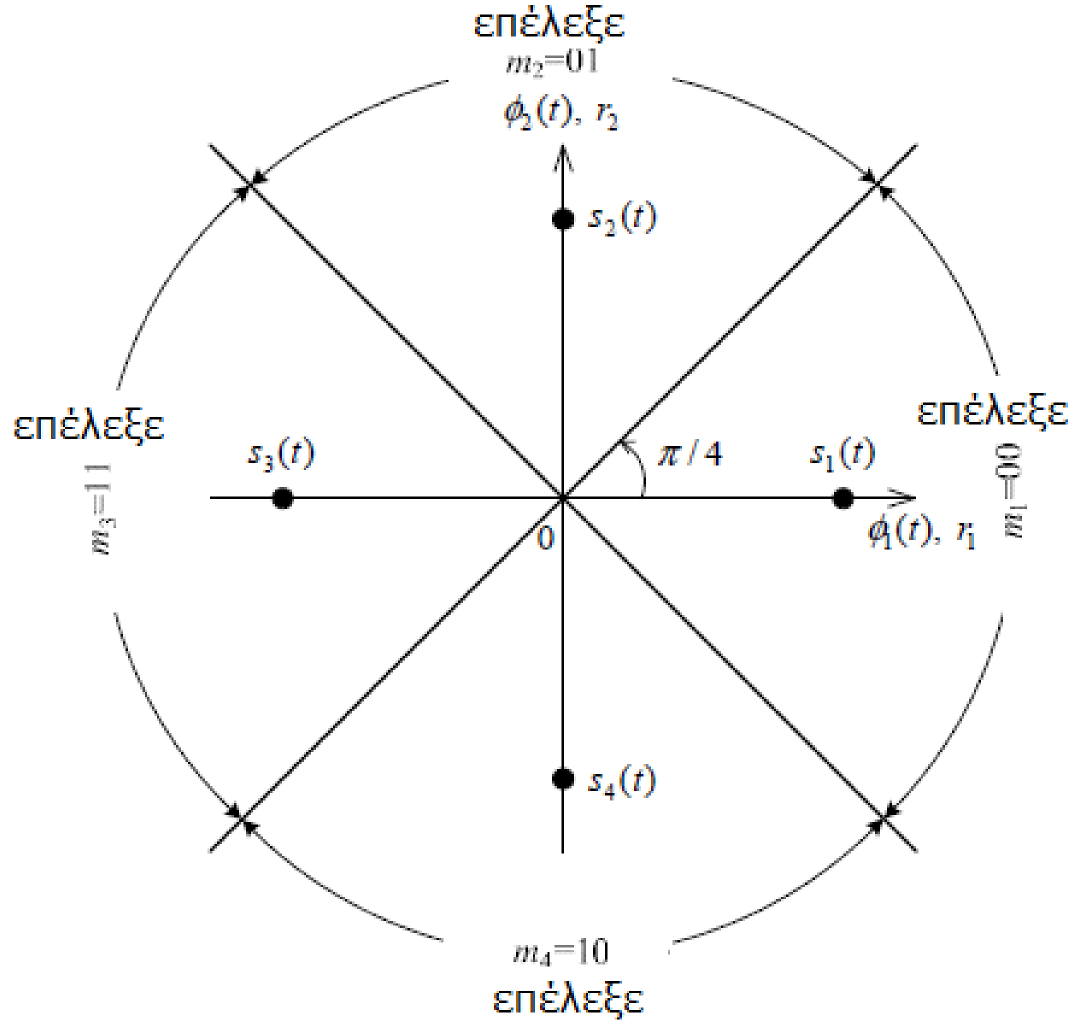
$$\frac{N_0}{2}\ln P_i + r_1 s_{i1} + r_2 s_{i2} > \frac{N_0}{2}\ln P_j + r_1 s_{j1} + r_2 s_{j2}$$
$$j = 1, 2, 3, 4; \;\; j \neq i.$$



Βέλτιστος Δέκτης QPSK

Οι περιοχές απόφασης φαίνονται παρακάτω:

επέλεξε $s_i(t)$ εάν $(r_1 - s_{i1})^2 + (r_2 - s_{i2})^2$ είναι το μικρότερο



Βέλτιστος Δέκτης QPSK

Ο υπολογισμός του Symbol Error Probability για το δέκτη της ελάχιστης απόστασης καθορίζεται, μετά από μετασχηματισμούς και στροφή συντεταγμένων:
Λόγω Συμμετρίας και επειδή οι a priori πιθανότητες είναι γνωστές:

$$P[\text{error}] = P[\text{error}|s_i(t)] = 1 - P[\text{correct}|s_i(t)].$$

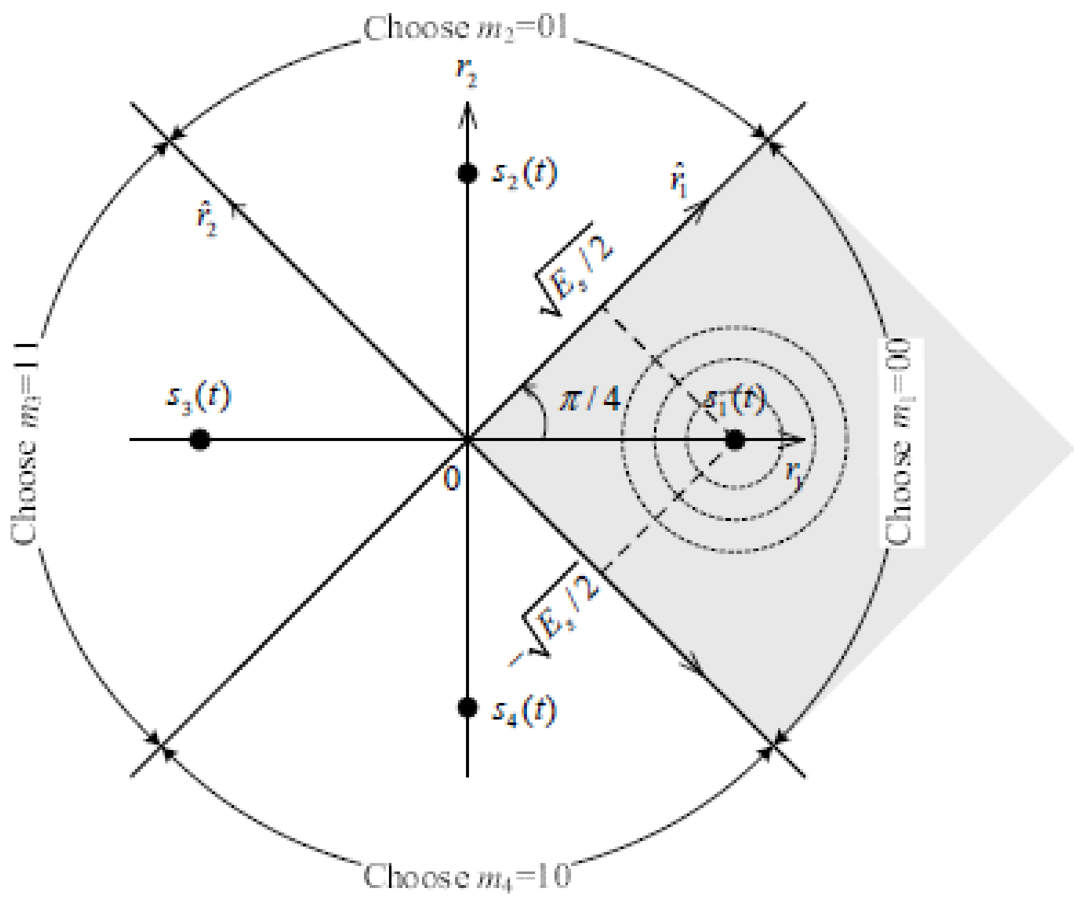
$\vartheta = \pi/4$,
$$\begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}.$$

$\hat{\mathbf{r}}_1,\ \hat{\mathbf{r}}_2$ Στατιστικά ανεξάρτητα, Gaussian τυχαίες μεταβλητές με απόκλιση $N_0/2$ και μέσες τιμές :

$$\left(\sqrt{E_s/2}, -\sqrt{E_s/2}\right)$$

$$f(\hat{r}_1, \hat{r}_2|s_1(t)) = f(\hat{r}_1|s_1(t)) \cdot f(\hat{r}_2|s_1(t))$$

Βέλτιστος Δέκτης QPSK



$$P[\text{error}] = P[\text{error}|s_i(t)] = 1 - P[\text{correct}|s_i(t)] = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right]^2.$$

SER QPSK Approximation

Βέλτιστος Δέκτης (QPSK)

$$P_{error} = P\left[error \mid s_i(t)\right] = 1 - P\left[correct \mid s_i(t)\right] =$$

$$= 1 - \left[1 - \underbrace{Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)}_{x \ll 1}\right]^2$$

$$(1-x)^2 \simeq 1-2x$$

$$P_{error} = 1 - (1-2x) \simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Βέλτιστος Δέκτης QPSK/Bit Error Probability

$$m_1(00) \Rightarrow m_2(01)$$
$$m_1(00) \Rightarrow m_3(11)$$
$$m_1(00) \Rightarrow m_4(10)$$

$$P[m_2|m_1] = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right],$$

$$P[m_3|m_1] = Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right),$$

$$P[m_4|m_1] = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right].$$

$$P[\text{bit error}] = 0.5P[m_2|m_1] + 0.5P[m_4|m_1] + 1.0P[m_3|m_1]$$
$$= Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right),$$

Τα σήματα που είναι πιο κοντά μεταξύ τους πιο κοντινοί γείτονες παριστάνονται με τέτοιο τρόπο που διαφέρουν κατά ένα bit.

Αυτό λέγεται *Gray Απεικόνιση σε Αστερισμό (Gray Mapping)*.

QPSK- Βέλτιστος Δέκτης/BEP

Υπολογισμός της πιθανότητας P(m_2|m_1): $f(\hat{r}_2, \hat{r}_1 | m_1)$

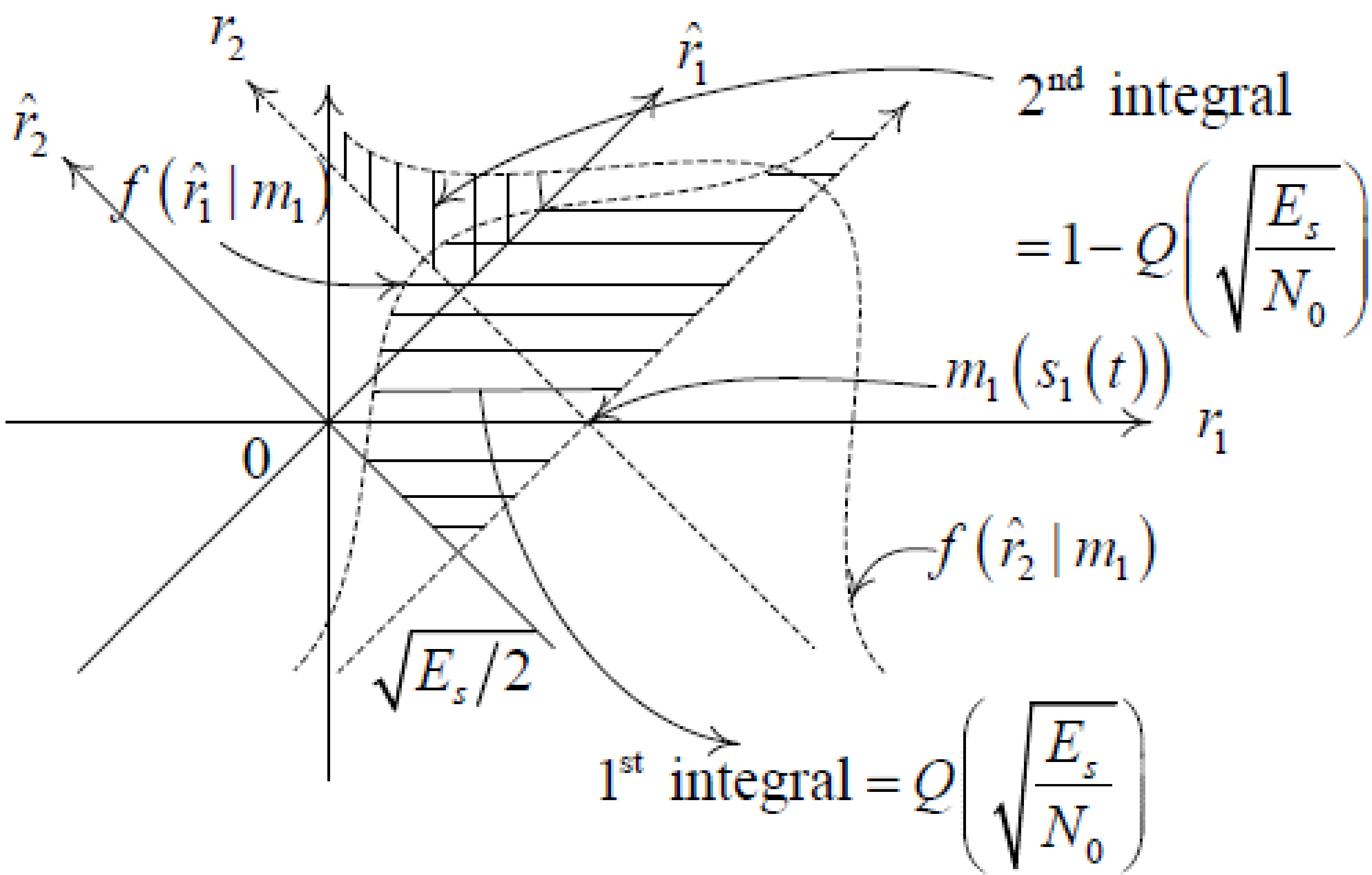
Στατιστικά ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες μεταβλητές

Τυπική απόκλιση θορύβου: $\frac{N_0}{2}$ **μέσες τιμές:** $-\sqrt{\frac{E_s}{2}},\ \sqrt{\frac{E_s}{2}}$

$$\int_{\hat{r}_2=0}^{\infty}\int_{\hat{r}_1=0}^{\infty} f(\hat{r}_2|m_1) f(\hat{r}_1|m_1) \mathrm{d}\hat{r}_2 \mathrm{d}\hat{r}_1 = \left[\int_{\hat{r}_2=0}^{\infty} f(\hat{r}_2|m_1)\mathrm{d}\hat{r}_2\right]\left[\int_{\hat{r}_1=0}^{\infty} f(\hat{r}_1|m_1)\mathrm{d}\hat{r}_1\right]$$

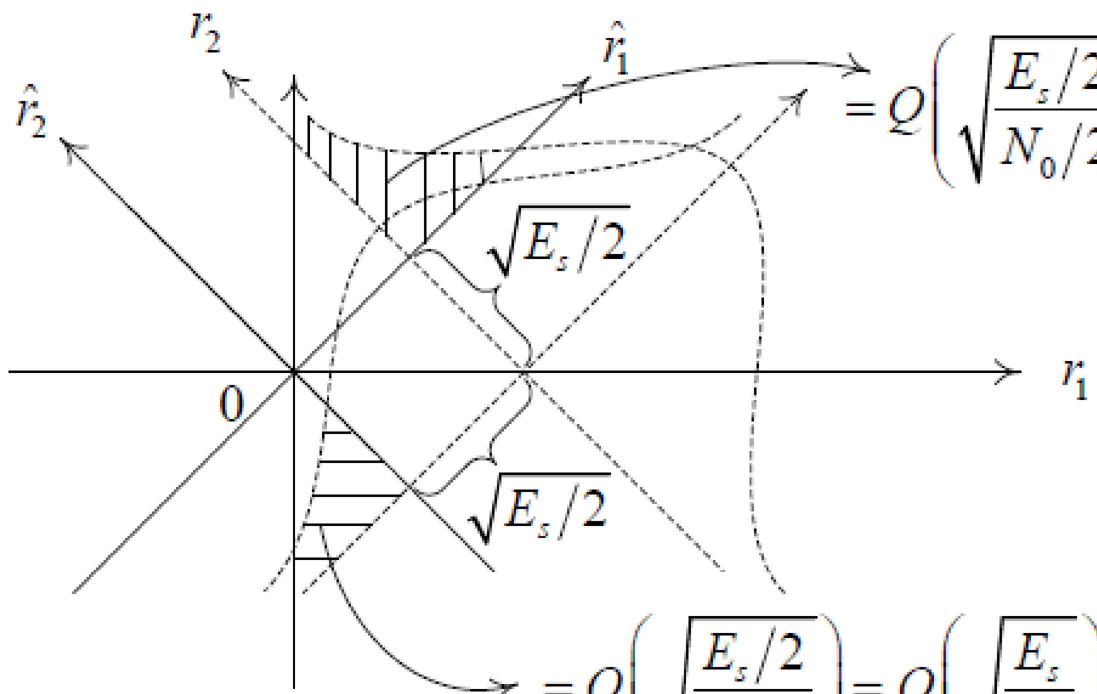
$$\begin{aligned} P[m_2|m_1] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\int_{\hat{r}_2=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\hat{r}_2+\sqrt{\frac{E_s}{2}}\right)^2}{2\left(\frac{N_0}{2}\right)}} \mathrm{d}\hat{r}_2\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\int_{\hat{r}_1=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\hat{r}_1+\sqrt{\frac{E_s}{2}}\right)^2}{2\left(\frac{N_0}{2}\right)}} \mathrm{d}\hat{r}_1\right] \\ &= \left[1 - Q\left(\frac{\sqrt{E_s/2}}{N_0/2}\right)\right] Q\left(\frac{\sqrt{E_s/2}}{N_0/2}\right) = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right] Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

QPSK/Βέλτιστος Δέκτης



QPSK/Βέλτιστος Δέκτης

$P[m_3|m_1]$ $\quad f(\hat{r}_2, \hat{r}_1|m_1)$



$$= Q\left(\sqrt{\frac{E_s/2}{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{E_s/2}{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$$P[m_3/m_1] = Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

QPSK/BPSK

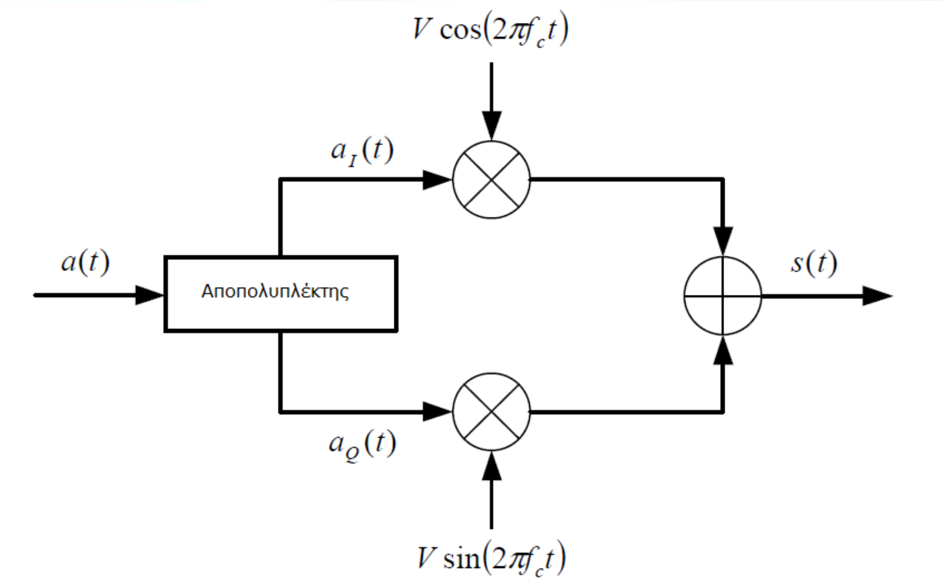
Για μια δίκαιη σύγκριση με την επίδοση μια δυαδικής διαμόρφωσης πρέπει να εκφράσουμε την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου συναρτήσει του ενέργειας ψηφίου E_b, (μέση ενέργεια ανά *bit*)
Εφόσον το σήμα QPSK μεταφέρει 2 bits και η ενέργεια ανά σήμα είναι is $E_s = V^2 T_b$, the average energy per bit is $E_b = E_s/2 = V^2 T_b/2$.
Η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου QPSK με Gray mapping είναι

$$P[\text{bit error}] = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

που είναι ακριβώς ή ίδια με την BPSK.
Αυτό καθαρά αποδεικνύει το πλεονέκτημα της QPSK έναντι της BPSK. Με την QPSK διαμόρφωση διπλασιάζεται ο ρυθμός χωρίς να απαιτούμε περισσότερο εύρος ζώνης ή να θυσιάζουμε επίδοση σε εσφαλμένα ψηφία.

Μπορούμε να το πούμε και ως εξής, για να μεταφέρουν τον ίδιο ρυθμό μετάδοσης BPSK & QPSK στην ίδια πιθανότητα λάθους, η QPSK πρέπει να μειώσει στο μισό εύρος ό αυτό που χρειάζεται η BPSK.

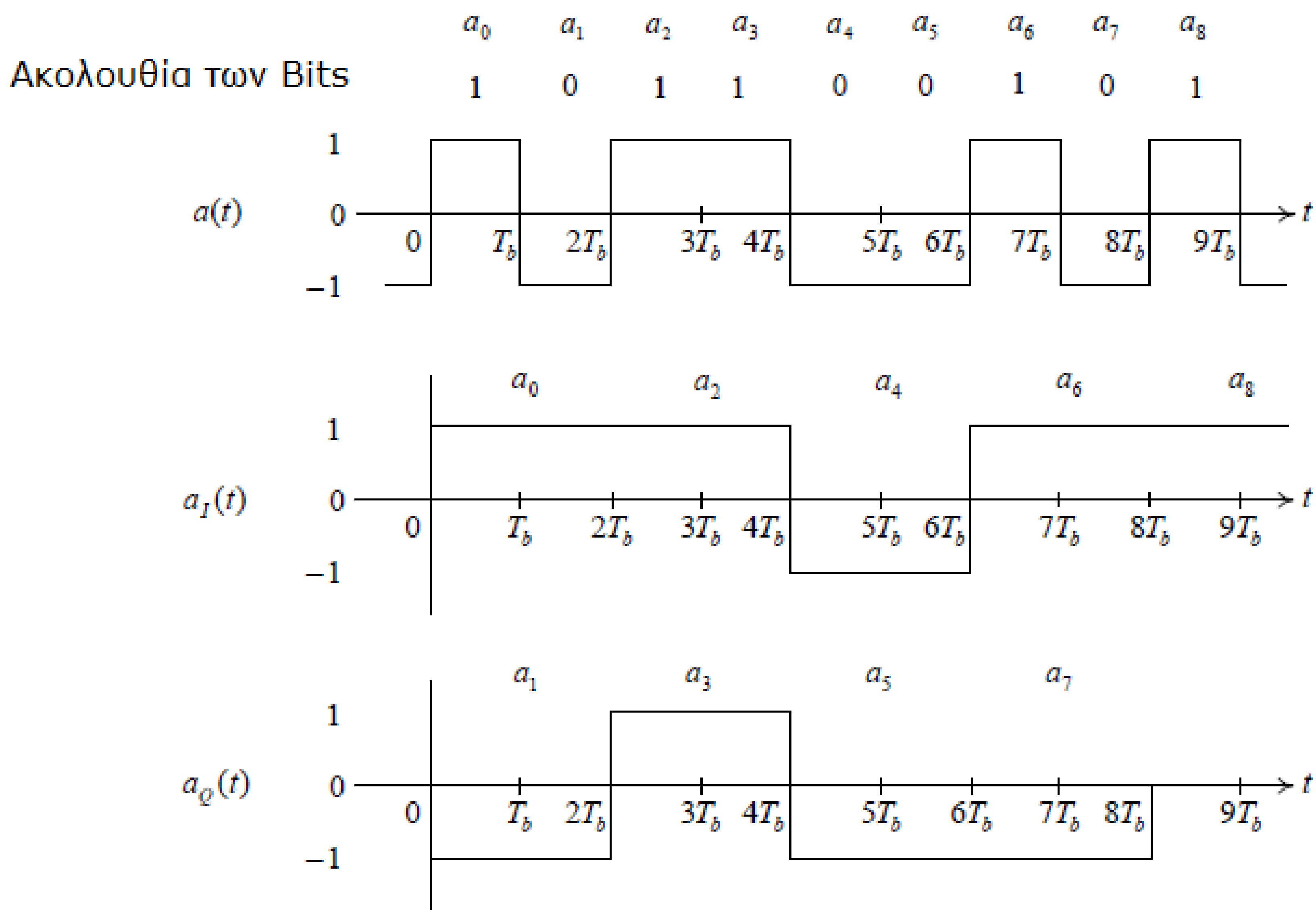
QPSK/αλλιώς



Η ακολουθία ψηφίων πληροφορίας μετατρέπονται πρώτα σε NRZ-L κυματομορφή με $a(t)$ με ±1 επίπεδα. Η κυματομορφή $a(t)$ από-πολυπλέκεται: στα άρτια $a_I(t)$,και στα περιττά $a_Q(t)$ συμβολοακολοθίες bit streams φτιάχνονται *I και Q* για in phase & quadrature αντίστοιχα.

Τα individual bits σε κάθε stream δεσμεύουν $T_s = 2T_b$ *και διαμορφώνουν το* **in-phase φέρον, $V\cos(2\pi f_c t)$,**
και στο quadrature carrier, $V\sin(2\pi f_c t)$, αντίστοιχα.

QPSK/αλλιώς



Ακολουθία των Bits
a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8
1 0 1 1 0 0 1 0 1
$a(t)$
$a_I(t)$
$a_Q(t)$
1
0
−1
0 T_b $2T_b$ $3T_b$ $4T_b$ $5T_b$ $6T_b$ $7T_b$ $8T_b$ $9T_b$
t

QPSK/αλλιώς

Το σήμα που μεταδίδεται μπορεί να γραφτεί:

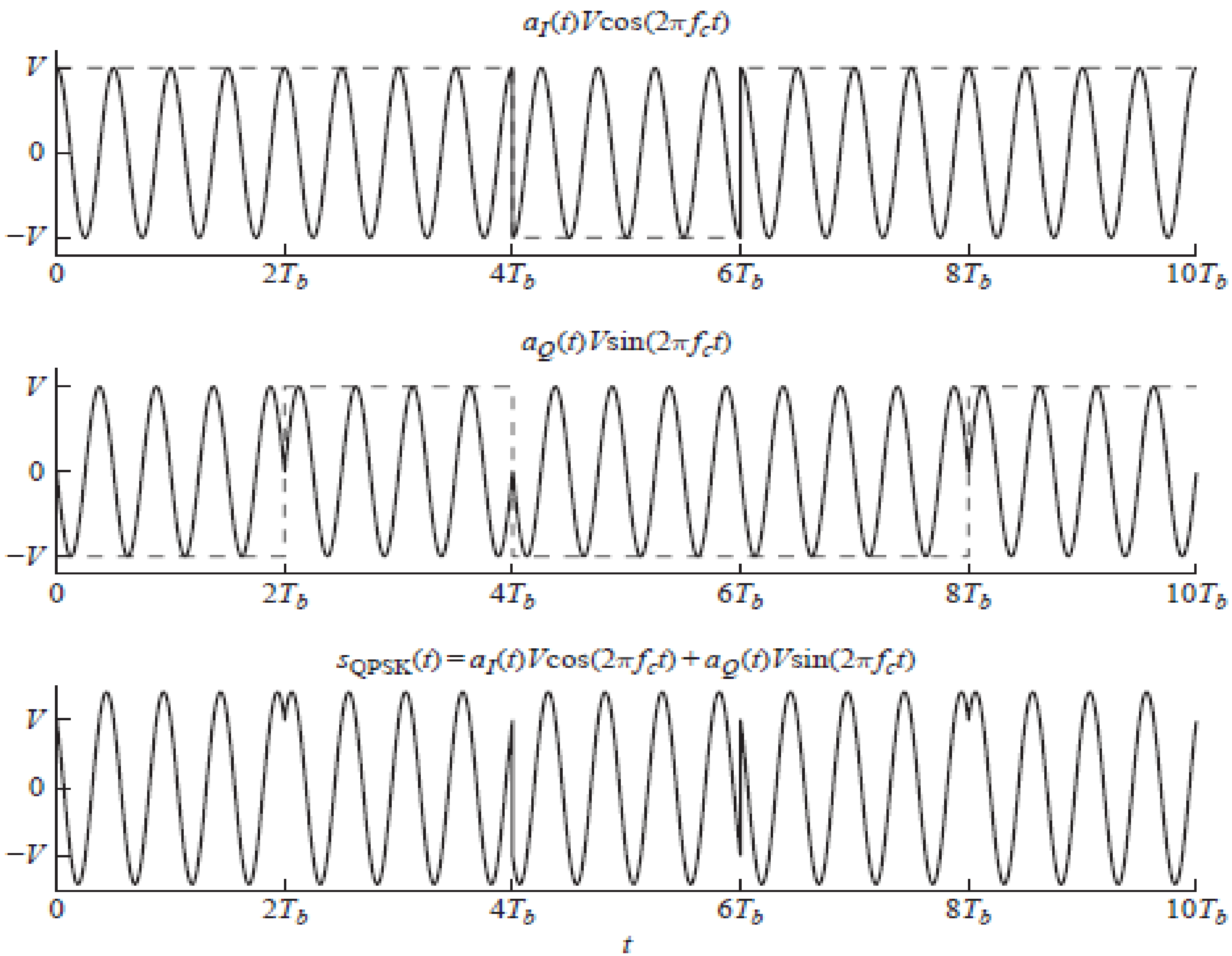
$$s(t) = a_I(t)V\cos(2\pi f_c t) + a_Q(t)V\sin(2\pi f_c t),$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{a_I^2(t) + a_Q^2(t)}V\cos\left(2\pi f_c t - \tan^{-1}\left(\frac{a_Q(t)}{a_I(t)}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}V\cos[2\pi f_c t - \theta(t)], \end{aligned}$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \pi/4, & a_I = +1, a_Q = +1 \text{ (bits 11)} \\ -\pi/4, & a_I = +1, a_Q = -1 \text{ (bits 10)} \\ 3\pi/4, & a_I = -1, a_Q = +1 \text{ (bits 01)} \\ -3\pi/4, & a_I = -1, a_Q = -1 \text{ (bits 00)} \end{cases}$$

Απεικόνιση Gray Mapping

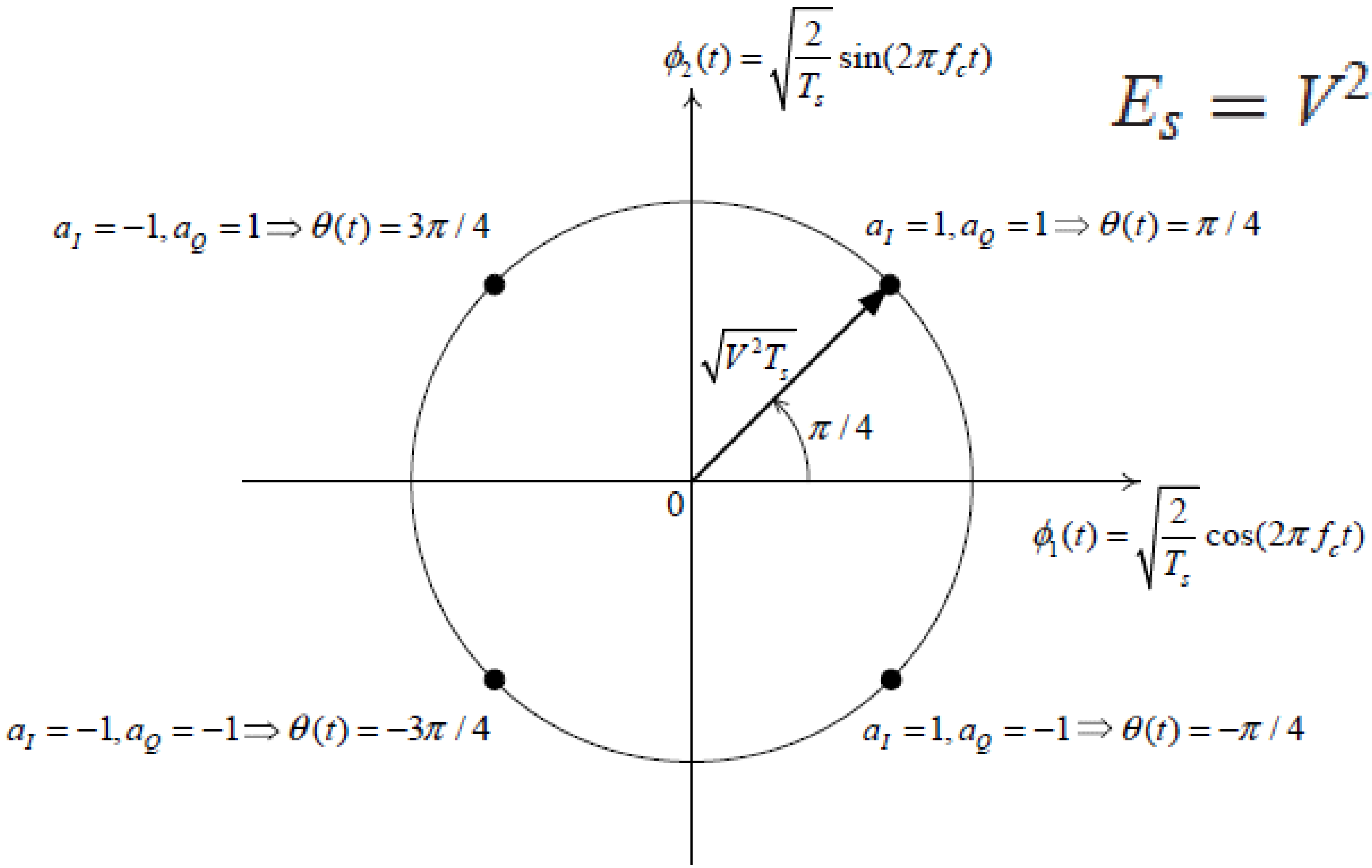
QPSK/αλλιώς


$a_I(t)V\cos(2\pi f_c t)$
$a_Q(t)V\sin(2\pi f_c t)$
$s_{QPSK}(t) = a_I(t)V\cos(2\pi f_c t) + a_Q(t)V\sin(2\pi f_c t)$
V
0
$-V$
0
$2T_b$
$4T_b$
$6T_b$
$8T_b$
$10T_b$
t

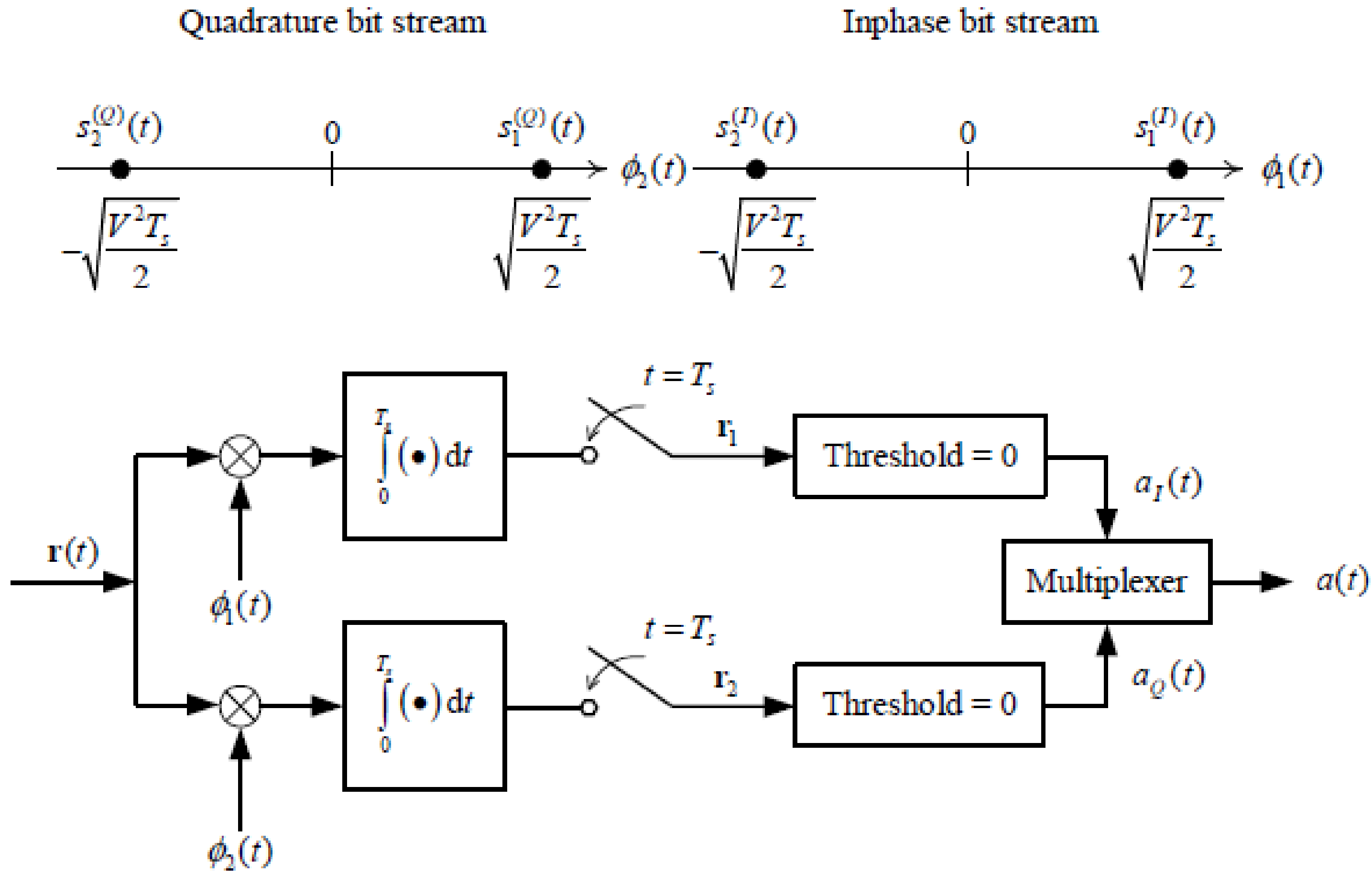
QPSK/αλλιώς

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \dfrac{V\cos(2\pi f_c t)}{\sqrt{V^2 T_b}} \\ \phi_2(t) = \dfrac{V\sin(2\pi f_c t)}{\sqrt{V^2 T_b}} \end{cases}, \quad 0 < t < T_s = 2T_b,$$

$$E_s = V^2 T_s$$

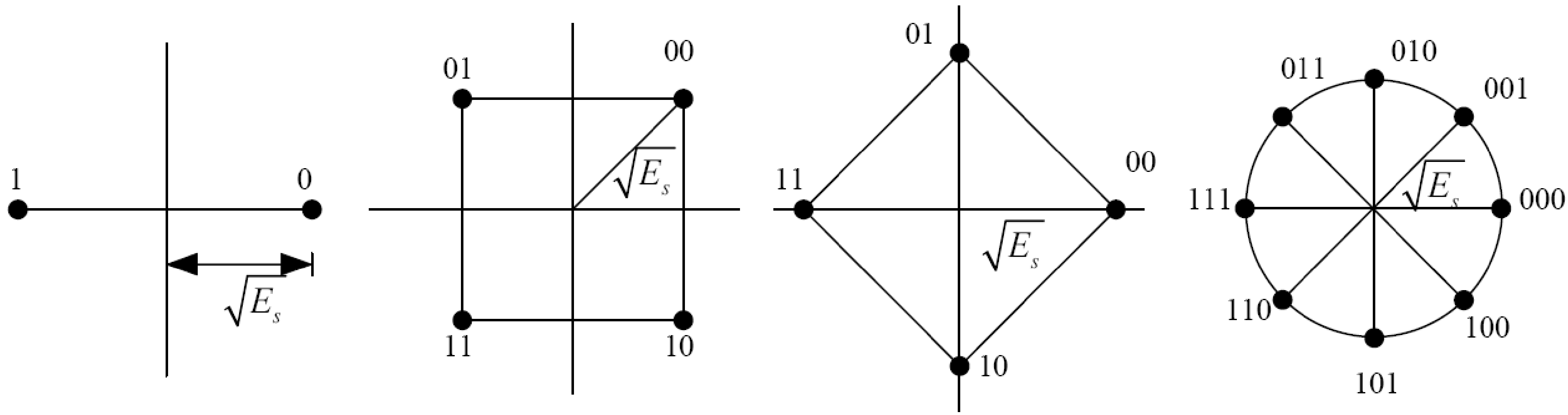


QPSK/αλλιώς



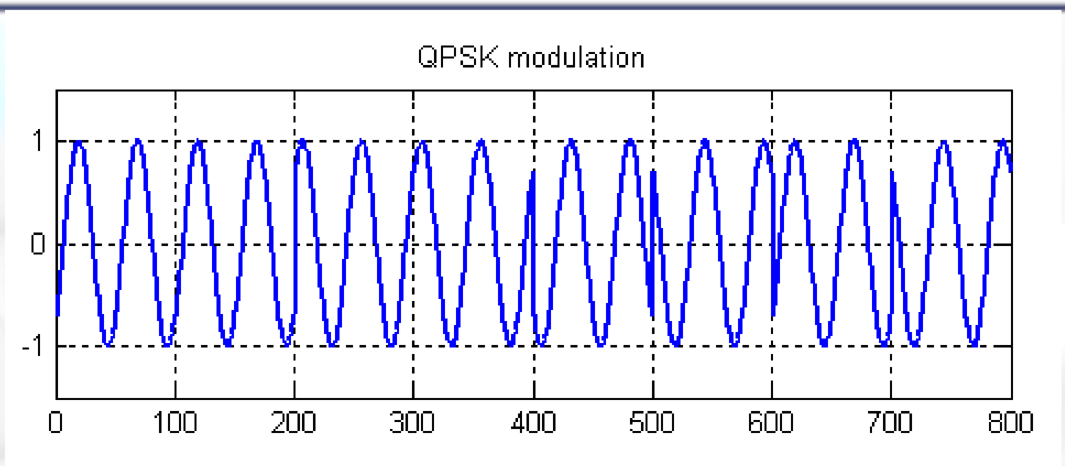
$$P[\text{bit error}] = Q\left(\sqrt{\frac{V^2T_s}{N_0}}\right) = \cdots = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

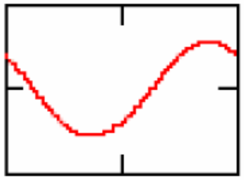
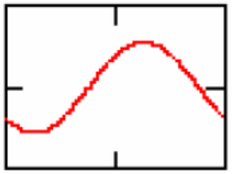
QPSK/8-PSK



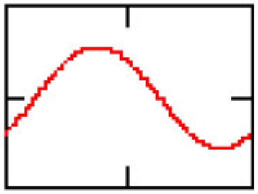
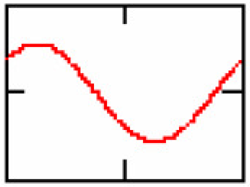
1
0
$\sqrt{E_s}$
01
00
$\sqrt{E_s}$
11
10
01
11
00
$\sqrt{E_s}$
10
011
010
001
111
$\sqrt{E_s}$
000
110
100
101

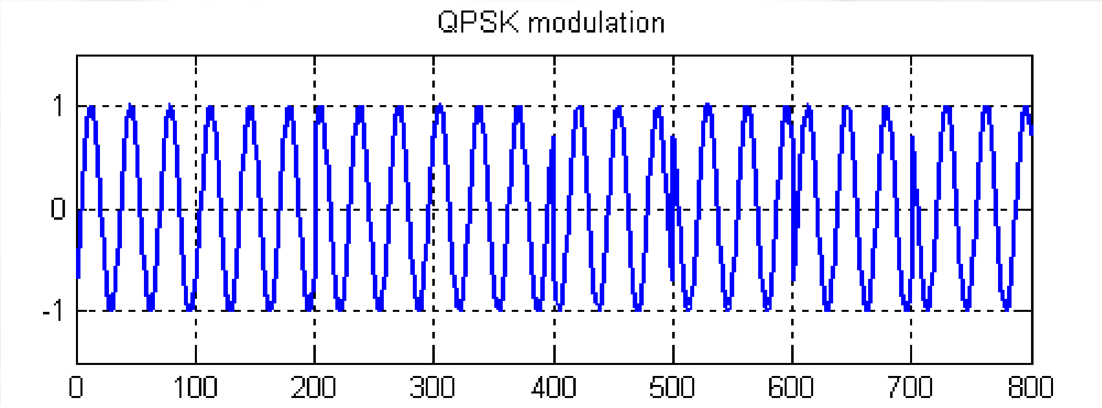
QPSK



Σύμβολα	Bits	S(t)	Φάση	Κυματομορφή	I	Q
s_1	**00**	$\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos(2\pi f_c t + \pi/4)$	**45°**		1	1
s_2	**01**	$\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos(2\pi f_c t + 3\pi/4)$	**135°**		**-1**	1

QPSK/M-PSK

Σύμβολα	Bits	S(t)	Φάση	Κυματομορφή	I	Q
s_3	**11**	$\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos(2\pi f_c t + 5\pi/4)$	**225°**		**-1**	**-1**
s_4	**10**	$\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos(2\pi f_c t + 7\pi/4)$	**315°**		**1**	**-1**



MPSK/8-PSK

$$s_i(t) = V \cos\left[2\pi f_c t - \frac{(i-1)2\pi}{M}\right], \quad 0 \le t \le T_s,$$

$$i = 1, 2, \ldots, M;\ f_c = k/T_s,\ k \text{ integer};\ E_s = V^2 T_s/2 \text{ joules}$$

$$s_i(t) = V \cos\left[\frac{(i-1)2\pi}{M}\right] \cos(2\pi f_c t) + V \sin\left[\frac{(i-1)2\pi}{M}\right] \sin(2\pi f_c t).$$

$$\phi_1(t) = \frac{V \cos(2\pi f_c t)}{\sqrt{E_s}},\ \phi_2(t) = \frac{V \sin(2\pi f_c t)}{\sqrt{E_s}}.$$

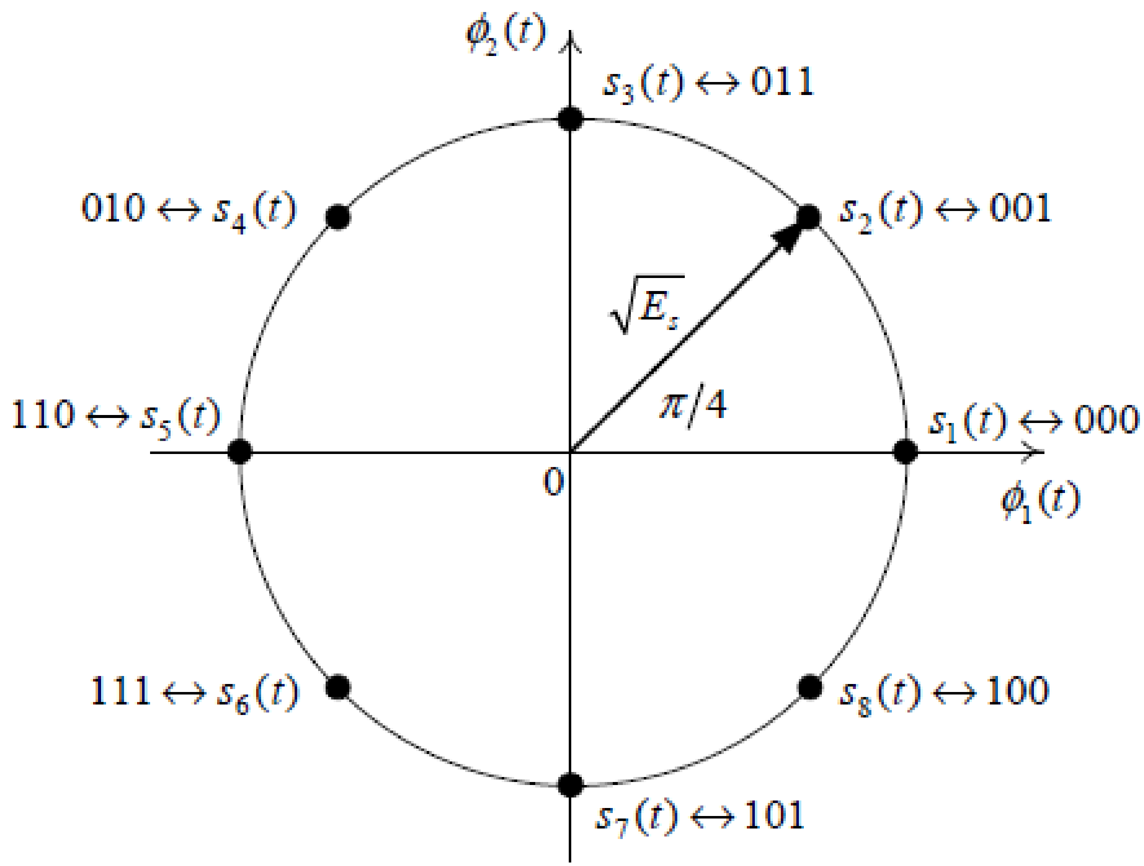
$$s_{i1} = \sqrt{E_s} \cos\left[\frac{(i-1)2\pi}{M}\right],\ s_{i2} = \sqrt{E_s} \sin\left[\frac{(i-1)2\pi}{M}\right].$$

Τα σήματα βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας $\sqrt{E_s}$ ι απέχουν 2π/M ακτίνια γύρω από τον κύκλο.

MPSK/8-PSK

$$s_i(t) = V\cos\left[2\pi f_c t - \frac{(i-1)2\pi}{M}\right], \quad 0 \le t \le T_s,$$

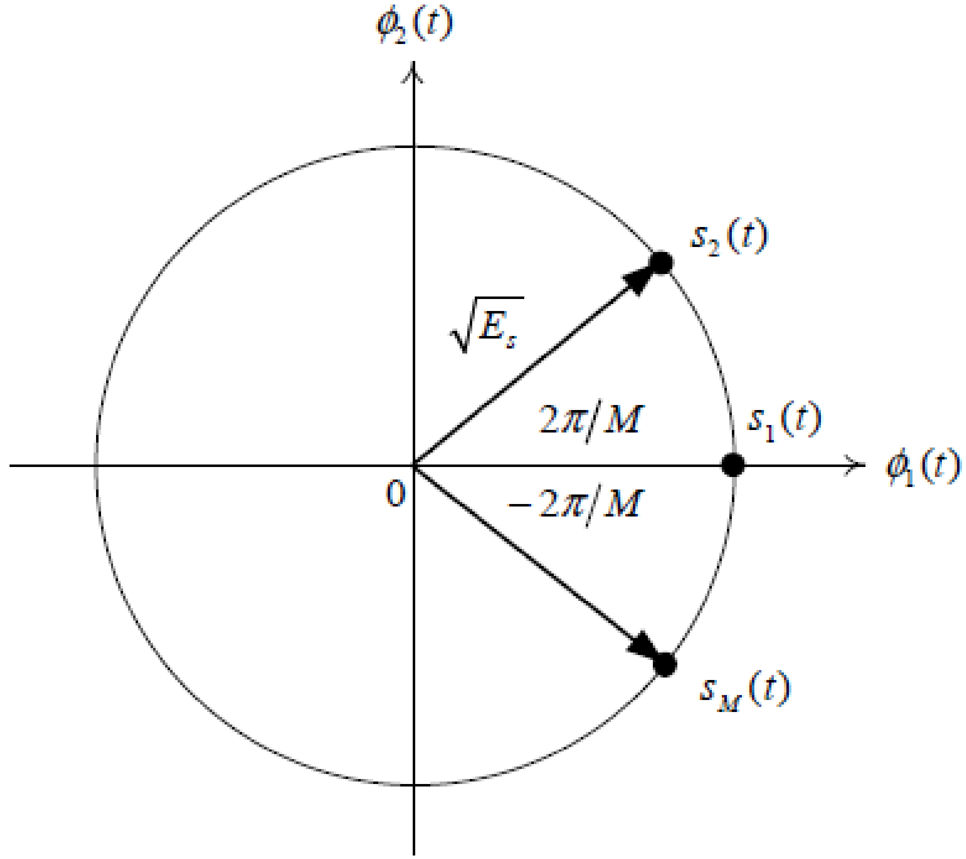
$i = 1, 2, \ldots, M;\ f_c = k/T_s,\ k$ integer; $E_s = V^2 T_s/2$ joules



MPSK/8-PSK

$$s_i(t) = V \cos\left[2\pi f_c t - \frac{(i-1)2\pi}{M}\right], \quad 0 \le t \le T_s,$$

$i = 1, 2, \ldots, M;\ f_c = k/T_s,\ k$ integer; $E_s = V^2 T_s/2$ joules



Q&A

E-mail: thpanag@ece.ntua.gr
Παλ. Κτίρια Ηλ/γων Γρ. 3.2.9
Τηλ.: 2107723842