Δευτέρα 16/5/22 16η Διάλεξη: Κοκκίνης 8η

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ - ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON-RAPHSON ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

Μη γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους

Μη γραμ → f συνάρτηση πχ

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - \sin x_2 = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

Άλλη γραφή: $\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Δε θα βάζουμε σύμβολο ή bold για να συμβολίζουμε το διάνυσμα, θα το καταλαβαίνουμε από το πρόβλημα.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$. Αν f_i, $i=1,\dots,n$ έχουν μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο $x \in \Omega$ ορίζεται ο πίνακας:

$$f_x(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Ιακωβιανός Πίνακας

Newton Raphson για συστήματα:

$$x_{k+1} = x_k - f_x^{-1}(x_k) \cdot f(x_k), \quad k=0,1,\ldots n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{k+1} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{k}$$

Ιακωβιανός Πίνακας στο x_k

x_0 αρχική προσέγγιση

Υπολογιστικό κόστος αρκετά μεγάλο, ειδικά λόγω του υπολογισμού του αντιστρόφου.
Μπορώ να τον αποφύγω

Αν θέσω $\boxed{y_k = f_x^{-1}(x_k) \cdot f(x_k)} \Rightarrow f_x(x_k) \cdot y_k = f_x(x_k) \cdot f_x^{-1}(x_k) f(x_k)$

$x_{k+1} = x_k - y_k$

δηλ $\boxed{f_x(x_k)\, y_k = f_x(k)}$

Γραμμικό σύστημα.

Λύνουμε το γραμμικό σύστημα και υπολογίζουμε το y_k

$$\boxed{\begin{aligned} & f_x(x_k) \cdot y_k = f(x_k) \qquad x_0 \text{ αρχ προσ} \\ & x_{k+1} = x_k - y_k, \quad k=0,1,\ldots n \end{aligned}}$$

Παράδειγμα: $f_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-9=0$

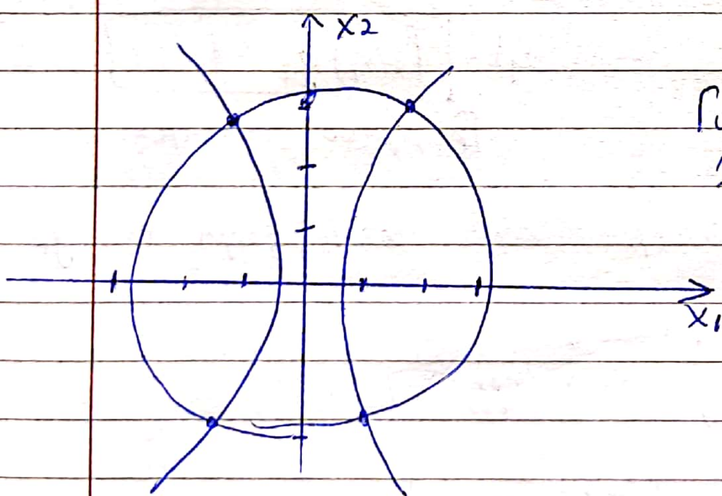
και $f_2(x_1,x_2)=4x_1^2-x_2^2-1=0$

$$\begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_k) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_k) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_k) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{1,k}^2+x_{2,k}^2-9 \\ 4x_{1,k}^2-x_{2,k}^2-1 \end{pmatrix}$$

$k=0,1,\ldots$

$$\begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2x_{1,k} & 2x_{2,k} \\ 8x_{1,k} & -2x_{2,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1,k}^2+x_{2,k}^2-9 \\ 4x_{1,k}^2-x_{2,k}^2-1 \end{pmatrix}}_{y_k} \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2x_{1,k} & 2x_{2,k} \\ 8x_{1,k} & -2x_{2,k} \end{pmatrix} \cdot y_k = \begin{pmatrix} x_{1,k}^2+x_{2,k}^2-9 \\ 4x_{1,k}^2-x_{2,k}^2-1 \end{pmatrix} \quad k=0,1,2\ldots \qquad x_{k+1}=x_k-y_k}$$



Για την προσέγγιση της λύσης με $x_1>0$, $x_2>0$:

$$X_0=\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Για $k=0$: $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow y_0=\begin{pmatrix} -1/2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$x_1=x_0-y_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ 8/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,\bar{6} \end{pmatrix}$$

Για $k=1$: ... $x_2=\begin{pmatrix} 1,41667 \\ 2,64583 \end{pmatrix}$

$x_3=\begin{pmatrix} 1,41422 \\ 2,64575 \end{pmatrix}$

Ακριβής λύση: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$

<u>Θεώρημα</u> Έστω $\bar{x}$ μια λύση του συστήματος $f(x)=0$ και $\|\cdot\|$ μια νόρμα στο $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι f είναι παραγωγίσιμη κοντά στο $\bar{x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ συνεχείς στο $\bar{x}$ και ο $f_x(\bar{x})$ αντιστρέψιμος.
Τότε για κάθε x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$, η μέθοδος N-R συγκλίνει στο $\bar{x}$.
Αν επιπλέον η $f \in C^2$ κοντά στο $\bar{x}$ τότε η σύγκλιση είναι τετραγωνική δηλ. $\|x_{k+1}-\bar{x}\| \leq c \cdot \|x_k-\bar{x}\|^2$

Με αυτή τη μέθοδο θα λυθούν οι εξισώσεις ροής φορτίου σε μεγαλύτερα εξάμηνα.

<u>Τέλος Κεφαλαίου</u>

<u>Νέο Κεφάλαιο:</u>

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, $y_0\in\mathbb{R}$

$$(\Pi.A.T)\quad \left\| \begin{array}{l} y'(x)=f(x,y(x)),\quad a\leq x\leq b \\ y(a)=y_0 \end{array}\right.$$

<u>Θεώρημα:</u> f συνεχής $[a,b]\times\mathbb{R}$ και υπάρχει σταθερά $L\geq 0$:

$$\forall x\in[a,b],\ \forall y_1,y_2\in\mathbb{R}:\ |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq |y_1-y_2|\cdot L$$

Τότε για κάθε $y_0\in\mathbb{R}$ το (Π.Α.Τ) έχει μοναδική λύση

Παράδειγμα Αν η f είναι γραμμική ως προς y, δηλ

$$f(x,y) = p(x)\cdot y + q(x),$$

όπου $p,q \in C[a,b]$

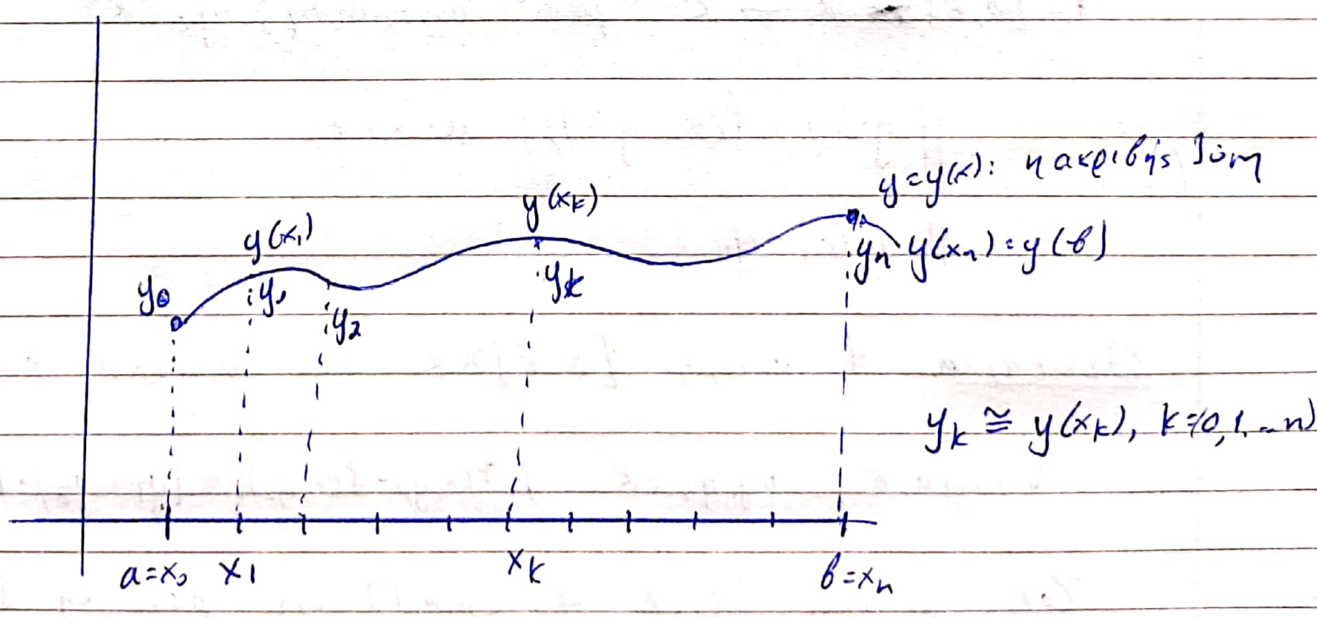
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |p(x)y_1 + q(x) - p(x)\cdot y_2 - q(x)|$$

$$= |p(x)|\cdot|y_1 - y_2| \le M|y_1 - y_2| \quad \text{όπου} \quad M = \max_{a\le x\le b}|p(x)|$$

Άρα έχει μοναδική λύση για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$

~~Έστω $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ ομοιόμορφος διαμερισμός $h=\frac{b-a}{n}$~~

Δεν περιμένουμε πολύ από αριθμητικές μεθόδους να μας δώσουν ως αποτέλεσμα συνάρτηση.



Έστω $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$

ομοιόμορφος διαμερισμός

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Θα μας δωθούν προσεγγίσεις των τιμών της λύσης στα σημεία x_k.

Αριθμητικές Μέθοδοι

Μονοβηματικές | Πολυβηματικές

$y_k \to y_{k+1}$ | $\dots y_{k-2}, y_{k-1}, y_k \to y_k$

Χρησιμοποιούμε μόνο την αμέσως προηγούμενη τιμή | Χρησιμοποιούμε και προηγούμενες τιμές.

Μονοβηματικές Μέθοδοι

$$\left\| \begin{array}{l} y' = f(x,y), \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{array} \right.$$

- Υποθέτουμε ότι δίνεται μονοσήμαντα
- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}$
- $y_k \cong y(x_k), \quad k = 0, 1, 2 \dots$

1. Μέθοδος Euler

Στη μέθοδο Euler οι προσεγγίσεις y_k δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots n-1 \\ y_0 \text{ δοσμένο} \end{array}}$$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$$

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} y' = y, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler να προσδιορίσετε προσεγγιστικές τιμές στο $[0,1]$ με $h=0,2$

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

$y_1 \cong y(0,2)$
$y_2 \cong y(0,4)$
$y_3 \cong y(0,6)$
$y_4 \cong y(0,8)$
$y_5 \cong y(1)$

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k(1+h)}$$

$y_1 = 1,2$
$y_2 = 1,44$
$y_3 = 1,728$
$y_4 = 2,0736$
$y_5 = 2,48832$