Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα - Πτυχιακή 2020 **(10/7/2020)**

ηλεκτρονικά στο MS Forms – διάρκεια 2x40′=80′ – μονάδες 2x25=50

ΟΔΗΓΙΕΣ: Στα ερωτήματα που απαιτούν διατύπωση απάντησης, σημειώστε την απάντησή σας σε τελική μορφή στο αντίστοιχο textbox. Οι μονάδες που αντιστοιχούν στις σωστές απαντήσεις για αυτά τα ερωτήματα αναφέρονται στην εκφώνηση. Μια κενή ή μία λάθος απάντηση δεν συνεισφέρει ούτε αφαιρεί μονάδες.

Στα ερωτήματα πολλαπλής επιλογής, πρέπει να επιλέξετε τη σωστή απάντηση (σε όλες τις περιπτώσεις, η σωστή απάντηση είναι μοναδική). Στα ερωτήματα τύπου Σωστό / Λάθος, πρέπει να επιλέξετε Σωστό, αν θεωρείτε ότι η δεδομένη πρόταση είναι αληθής, και Λάθος, διαφορετικά. Κάθε σωστή απάντηση δίνει 1 μονάδα. Κάθε λάθος απάντηση αφαιρεί μισή μονάδα. Αν ένα ερώτημα μείνει αναπάντητο δεν προσθέτει ούτε αφαιρεί μονάδες. Πιθανή αρνητική βαθμολογία δεν μεταφέρεται στο δεύτερο μέρος της εξέτασης.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι απαντήσεις σας υποβάλλονται μόνο με το πάτημα του "Submit / Υποβολή" στο κάτω μέρος της φόρμας. Μπορείτε να υποβάλετε τις απαντήσεις σας μόνο μία φορά, αφού τις έχετε ολοκληρώσει και ελέγξει προσεκτικά. Κάθε μέρος της εξέτασης θα σταματήσει αυτόματα να δέχεται υποβολές 40' μετά την έναρξη (πιθανά χωρίς προηγούμενη προειδοποίηση).

Μέρος Α′

1. Δεδομένου ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G(V, E), είναι NP-πλήρες να αποφανθούμε αν το G έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον 2020 κορυφές.
○ Σωστό
○ Λάθος

2. Η αναδρομική σχέση T(n) = 4 T(n/2)+Θ(n), με T(1) = Θ(1), έχει λύση:
○ T(n) = Θ(n)
○ T(n) = Θ(n log(n))
○ T(n) = Θ(n^2)

3. Η αναδρομική σχέση T(n) = T(n/2)+T(n/3)+Θ(n log(n)), με T(1) = Θ(1), έχει λύση:
○ T(n) = Θ(n (log(n))^2)
○ T(n) = Θ(n log(n))
○ T(n) = Θ(n)

4. Το DFS σε ένα γράφημα με n κορυφές χρειάζεται χρόνο Θ(n^2) αν το γράφημα αναπαρίσταται με πίνακα γειτνίασης.
○ Λάθος
○ Σωστό

5. Στην υλοποίηση της δομής δεδομένων Union-Find με βεβαρημένη ένωση, κάθε λειτουργία έχει χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης O(log(n)).
○ Σωστό
○ Λάθος

6. Ο αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή έχει ψευδοπολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης.
○ Σωστό
○ Λάθος

7. Σε ένα s-t δίκτυο, αν αυξήσουμε τη χωρητικότητα δύο ακμών της μέγιστης τομής κατά k, τότε η μέγιστη ροή αυξάνεται κατά 2k.
○ Σωστό
○ Λάθος

8. Η αναδρομική σχέση T(n) = T(n^{1/2})+Θ(1), με T(1) = Θ(1), έχει λύση:
○ T(n) = Θ(log(log(n)))
○ T(n) = Θ(n)
○ T(n) = Θ(log(n))

9. Αν οι κλάσεις P και NP είναι διαφορετικές, τότε κάθε πρόβλημα που δεν ανήκει στο P είναι NP-πλήρες.
○ Λάθος
○ Σωστό

10. Ένα κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα έχει μοναδική τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν υπάρχει μοναδική κατευθυνόμενη ακμή μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών (χωρίς να δημιουργείται κύκλος).
○ Λάθος
○ Σωστό

11. (8 μονάδες) Έχουμε έναν κορμό δέντρου μήκους L > 0 (για ευκολία, μπορείτε να θεωρήσετε ότι ο κορμός ταυτίζεται με το διάστημα [0, L] στην πραγματική ευθεία). Έχουμε σημειώσει n θέσεις x1, …, xn, με 0 < x1 < … < xn < L, όπου θα κόψουμε τον κορμό, ώστε να προκύψουν n+1 κομμάτια ξύλου που αντιστοιχούν στα διαστήματα [0, x1), [x1, x2), …, [xn, L]. Το κόψιμο ενός κομματιού μήκους M απαιτεί M μονάδες ενέργειας. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη σειρά με την οποία πρέπει να γίνουν τα n κοψίματα, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνολική ενέργεια που απαιτείται.

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα σχετικά με το παραπάνω πρόβλημα.

1 (4 μονάδες). Να διατυπώσετε μια αναδρομική σχέση από την οποία προκύπτει η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για n κοψίματα, αν αυτά γίνουν με τη βέλτιστη σειρά;

2 (2 μονάδες). Με ποια αλγοριθμική τεχνική θα υπολογίσετε την ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για n κοψίματα, με βάση την αναδρομική σχέση του (1);

3. (2 μονάδες) Ποιος είναι ο χρόνος (ως συνάρτηση του n) που απαιτείται για τον υπολογισμό της ελάχιστης ενέργειας, με βάση την αναδρομική σχέση του (1) και την αλγοριθμική τεχνική του (2);

Παράδειγμα (για την κατανόηση του ορισμού του προβλήματος):

Έστω L = 10, n = 3, x1 = 3, x2 = 5, και x3 = 7. Αν κόψουμε πρώτα στο 5, μετά στο 3, και τέλος στο 7, δαπανούμε 10+5+5=20 μονάδες ενέργειας. Αν κόψουμε πρώτα στο 3, μετά στο 5, και τέλος στο 7, δαπανούμε 10+7+5=22 μονάδες ενέργειας. Αν κόψουμε πρώτα στο 3, μετά στο 7, και τέλος στο 5, δαπανούμε 10+7+4=21 μονάδες ενέργειας.

12. (4 μονάδες) Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα (ως συνάρτηση του n) του καλύτερου αλγόριθμου που γνωρίζετε (ή μπορείτε να σκεφθείτε) για τον υπολογισμό των συντομότερων μονοπατιών μεταξύ όλων των ζευγών κορυφών ενός κατευθυνόμενου γραφήματος με n κορυφές και n(log(n))^6 ακμές, όταν κάποιες ακμές μπορούν να έχουν αρνητικό μήκος.

13. Δίνεται ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G με θετικά βάρη στις ακμές. Υπάρχει αλγόριθμος γραμμικού χρόνου για τον υπολογισμό ενός Συνδετικού Δέντρου του G στο οποίο η βαρύτερη ακμή έχει το ελάχιστο δυνατό βάρος.
○ Λάθος
○ Σωστό

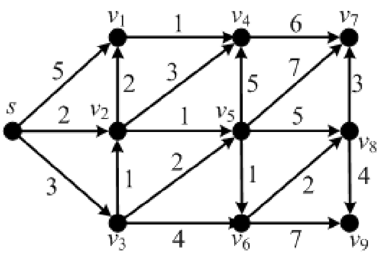
14. Δεδομένων ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G(V, E) και ενός φυσικού k >= 3, είναι NP-πλήρες να αποφανθούμε αν το G έχει (απλό) κύκλο μήκους τουλάχιστον k.
○ Σωστό
○ Λάθος

15. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου ταξινόμησης CountingSort είναι πολυωνυμικός στο μέγεθος της εισόδου.
○ Λάθος
○ Σωστό

Μέρος Β'

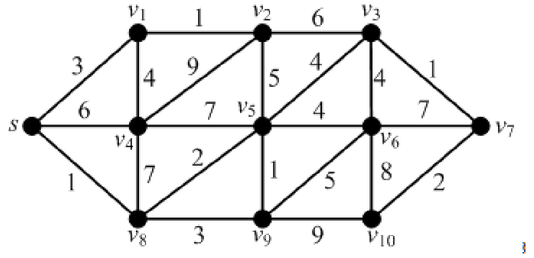
1
Έστω κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E, w) με θετικά μήκη w στις ακμές, και έστω p ένα συντομότερο u – v μονοπάτι στο G. Το p παραμένει συντομότερο u – v μονοπάτι αν υψώσουμε τα μήκη όλων των ακμών στο τετράγωνο.
○ Λάθος
○ Σωστό

2



Στο παραπάνω γράφημα, υπολογίζουμε τις αποστάσεις και τα συντομότερα μονοπάτια όλων των κορυφών από την s χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra. Ποια (μία μόνο) από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:
○ Υπάρχουν δύο συντομότερα μονοπάτια από την κορυφή s στην κορυφή v5.
○ Η κορυφή v4 αποκτά μόνιμη ετικέτα μετά την κορυφή v6.
○ Η κορυφή v7 είναι η τελευταία που αποκτά μόνιμη ετικέτα.
○ Η κορυφή v1 μπορεί να είναι η 4η κορυφή που αποκτά μόνιμη ετικέτα (η 1η κορυφή που αποκτά μόνιμη ετικέτα είναι η κορυφή s και η 2η είναι η κορυφή v2).

3
Στο παρακάτω γράφημα, υπολογίζουμε ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal με αρχική κορυφή την s. Ποια (μία μόνο) από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:



○ Η ακμή (v7, v10) μπορεί να είναι η τελευταία ακμή που προστίθεται στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο από τον αλγόριθμο.
○ Όλες οι ακμές βάρους 4 ανήκουν στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο.
○ Η ακμή (s, v1) μπορεί να είναι η 7η ακμή που προστίθεται στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο από τον αλγόριθμο.
○ Όλες οι ακμές βάρους 3 ανήκουν στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο.

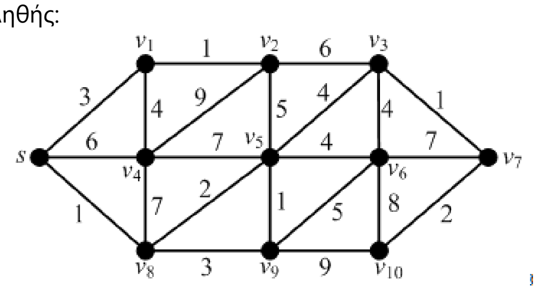
4
(4 μονάδες) Θεωρούμε απλό συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E, w), με n κορυφές, m ακμές και θετικό βάρος w(e) σε κάθε ακμή e. Αξιολογούμε τα μονοπάτια μεταξύ δύο κορυφών u και v με βάση το μήκος της βαρύτερης ακμής τους. Το λεγόμενο bottleneck κόστος c(p) ενός u - v μονοπατιού p είναι c(p) = max_{e ανήκει στο p} { w(e) }. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα (όσο το δυνατόν πιο αραιό) συνδετικό (spanning) υπογράφημα H του G το οποίο για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών u και v, περιέχει κάποιο u - v μονοπάτι ελάχιστου bottleneck κόστους (ως προς όλα τα u - v μονοπάτια στο G).

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα σχετικά με το παραπάνω πρόβλημα.

1 (2 μονάδες). Πόσες είναι οι ακμές που απαιτείται να έχει ένα τέτοιο γράφημα H (ως συνάρτηση των n και m); Αν το πλήθος των ακμών του H μπορεί να ποικίλει, να δώσετε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα στο πλήθος των ακμών του H (ως συνάρτηση των n και m).

2 (2 μονάδες). Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα (ως συνάρτηση των n και m) του καλύτερου αλγόριθμου που γνωρίζετε (ή μπορείτε να σκεφθείτε) για τον υπολογισμό ενός τέτοιου υπογραφήματος H που περιέχει τα συντομότερα bottleneck μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών του G;

5
Στο παρακάτω γράφημα, υπολογίζουμε ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Prim με αρχική κορυφή την s. Ποια (μία μόνο) από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:



○ Η ακμή (v8, v9) μπορεί να είναι η 4η ακμή που προστίθεται στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο από τον αλγόριθμο.
○ Η ακμή (s, v1) μπορεί να είναι η 2η ακμή που προστίθεται στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο από τον αλγόριθμο.
○ Η ακμή (v1, v4) μπορεί να είναι η 4η ακμή που προστίθεται στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο από τον αλγόριθμο.
○ Η ακμή (v3, v7) μπορεί να είναι η 7η ακμή που προστίθεται στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο από τον αλγόριθμο.

6
Δίνονται 4 πίνακες, ο καθένας από τους οποίους έχει n στοιχεία και είναι ταξινομημένος σε αύξουσα σειρά. Θέλουμε να ταξινομήσουμε τα 4n στοιχείων που προκύπτουν από την ένωση των 4 πινάκων. Ο καλύτερος συγκριτικός αλγόριθμος για αυτό το πρόβλημα χρειάζεται χρόνο Θ(n log(n)).
○ Σωστό
○ Λάθος

7
(3 μονάδες) Έστω δύο πίνακες A[1..n] και B[1..n]. Ο καθένας τους περιέχει n ακέραιους αριθμούς ταξινομημένους σε αύξουσα σειρά. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα (ως συνάρτηση του n) του καλύτερου αλγόριθμου που γνωρίζετε (ή μπορείτε να σκεφθείτε) για τον υπολογισμό του ενδιάμεσου (median) στοιχείου της ένωσης των δύο πινάκων (δηλ. το ενδιάμεσο στοιχείο είναι το στοιχείο που θα καταλάμβανε τη θέση n στον ταξινομημένο πίνακα που περιέχει όλα τα στοιχεία των A και B);

8
Μπορούμε να υπολογίσουμε τα n/100 μεγαλύτερα στοιχεία ενός (μη ταξινομημένου) πίνακα με n στοιχεία σε χρόνο O(n) στη χειρότερη περίπτωση.
○ Σωστό
○ Λάθος

9
(2 μονάδες) Δίνεται συνεκτικό απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E, w), με n κορυφές, m ακμές και θετικό βάρος w(e) σε κάθε ακμή e. Θεωρούμε ότι όλα τα βάρη των ακμών είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα (ως συνάρτηση των n και m) του καλύτερου αλγόριθμου που γνωρίζετε (ή μπορείτε να σκεφθείτε) για τον υπολογισμό του συνδετικού δέντρου του G με το δεύτερο μικρότερο συνολικό βάρος;

10
Δίνονται μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E) και θετικός φυσικός k. Είναι NP-πλήρες να αποφανθούμε αν το G έχει συνδετικό δέντρο με μέγιστο βαθμό κορυφής μεγαλύτερο ή ίσο του k.
○ Λάθος
○ Σωστό

11
Αν στον αλγόριθμο του Dijkstra, επιλέγουμε τη διαθέσιμη κορυφή με τη μέγιστη πεπερασμένη ετικέτα σε κάθε επανάληψη, τότε υπολογίζουμε τα μονοπάτια μέγιστου μήκους από την αρχική κορυφή s προς κάθε άλλη κορυφή.
○ Σωστό
○ Λάθος

12
Ο αλγόριθμος του Dijkstra και ο αλγόριθμος του Prim έχουν (ασυμπτωτικά) τον ίδιο χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης.
○ Σωστό
○ Λάθος

13
Δίνονται συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E, w), με θετικό βάρος w(e) σε κάθε ακμή e, αύξουσα συνάρτηση f : N -> N και θετικός φυσικός B. Είναι NP-πλήρες να αποφανθούμε αν υπάρχει συνδετικό δέντρο T του G για το οποίο το άθροισμα των τιμών f(w(e)), για τις ακμές e που ανήκουν στο T, είναι μικρότερο ή ίσο του B.
○ Λάθος
○ Σωστό

14
Η βέλτιστη λύση στη διακριτή εκδοχή του προβλήματος του Σακιδίου (Knapsack) περιέχει πάντα το αντικείμενο με τον μέγιστο λόγο αξίας προς μέγεθος.
○ Σωστό
○ Λάθος

15
(2 μονάδες) Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα (ως συνάρτηση των n και m) του καλύτερου αλγόριθμου που γνωρίζετε (ή μπορείτε να σκεφθείτε) για τον υπολογισμό των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών ενός απλού κατευθυνόμενου γραφήματος με n κορυφές και m ακμές;

16
Σε ένα s-t δίκτυο, η ροή που διέρχεται από μία συγκεκριμένη ακμή μπορεί να μειωθεί κατά την εξέλιξη του αλγόριθμου των Ford-Fulkerson.
○ Σωστό
○ Λάθος

17
(2 μονάδες) Θεωρούμε ένα σύνολο S με n σημεία στο Ευκλείδειο επίπεδο (κάθε σημείο i δίνεται ως το διατεταγμένο ζεύγος (xi, yi) των συντεταγμένων του). Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα (ως συνάρτηση του n) του καλύτερου αλγόριθμου που γνωρίζετε (ή μπορείτε να σκεφθείτε) για τον υπολογισμό των δύο πλησιέστερων σημείων του S;