Κεφ5: Μ/Ζ και Ανάλυση Διακριτών Συστημάτων

miércoles, 29 de diciembre de 2021 3:48 p. m.

5.1 Μ/Ζ. Ορισμοί, Περιοχές Σύγκλισης

- Για αιτιακά σήματα ορίζεται ο μονόπλευρος Μ/Ζ:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Η z είναι ανεξ. μιγαδ. μεταβλητή: $z = re^{j\Omega}$

- Η σύγκλιση της δυναμοσειράς είναι δυνατή για $|z| \gg 1$.
  ↳ ξέρουμε πως αν συγκλίνει για $z = z_0$, τότε συγκλίνει και για $\forall z: |z| > |z_0|$

- Ο αμφίπλευρος Μ/Ζ: $X^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$
- Σε σήματα πεπερασμένης διάρκειας, και οι δύο Μ/Ζ συγκλίνουν στο επίπεδο, εκτός ίσως στα $0, \pm\infty$.
- Για τον μονόπ. Μ/Ζ ισχύει η αντιστοιχία:

$$\{x(n)\} \rightleftarrows \{X(z)\}$$

ενώ για τον αμφ. Μ/Ζ:

$$\{x(n)\} \rightleftarrows \{X^a(z), (\Pi\Sigma)\}$$

περιοχή σύγκλισης

- Σελίδες 272, 273, 274 Ιδιότητες + ζεύγη Μ/Ζ
- Έξτρα Ζεύγη Μονόπλευρου Μ/Ζ:

Σήμα	Μ/Ζ	Σύγκλιση
$x(n) = (x(0), x(1), x(2))$	$x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2}$	παντού
$x(n) = \begin{cases} e^{j\Omega n}, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}e^{j\Omega}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \in [0, N-1] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\dfrac{1}{z^{N-1}} \cdot \dfrac{z^N - a^N}{z - a}$	παντού $-\{0\}$

- Έξτρα Ιδιότητα Μ/Ζ:

$$x(n-m) \xleftrightarrow{z} z^{-m} X(z) + \sum_{i=1}^{m} x(-i)\, z^{-m+i}$$

↳ συνήθως 0

- Έστω το σήμα $x(n) = z_0^n$, είσοδος σε ΓΧΑ. Η έξοδος είναι:

$$y(n) = x * h = H(z_0) \cdot z_0^n$$

↳ Μ/Ζ της απόκρισης

Τα σήματα z_0^n είναι ιδιοσυναρτήσεις του ΓΧΑ και η $H(z_0)$ η αντίστοιχη ιδιοτιμή τους. Η $H(z)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

5.2 Σχέση Εισόδου-Εξόδου FIR Φίλτρων

- Έστω $y(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k)$. Ο Μ/Ζ είναι

εξίσωση διαφορών

$$Y(z) = \left(\sum_{i=0}^{q} b_i z^{-i}\right) X(z)$$

Ορίζουμε την συνάρτηση μεταφοράς του FIR φίλτρου:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{q} b_i z^{-i}$$

5.3 Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών με Μ/Ζ. Συνάρτηση Μεταφοράς

- Έστω $y(n) = -\sum_{i=1}^{p} a_i\, y(n-i) + \sum_{i=0}^{q} b_i\, x(n-i)$. Ο Μ/Ζ είναι:

γενική μορφή εξίσωση διαφορών

$$Y(z) = \underbrace{\frac{B(z)}{A(z)} X(z)}_{Z\{y_{zs}(n)\}} - \underbrace{\frac{1}{A(z)} \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{k=1}^{i} y(-k) z^{-i+k}}_{Z\{y_{zi}(n)\}} + \frac{1}{A(z)} \sum_{i=0}^{q} b_i \sum_{k=1}^{i} x(-k) z^{-i+k}$$

με: $A(z) = \sum_{i=0}^{p} a_i z^{-i}$, $B(z) = \sum_{i=0}^{q} b_i z^{-i}$

Αν θεωρήσουμε $x(n) = y(n) = 0 \quad \forall n < 0$ τότε έχουμε αιτιατό ΓΧΑ σύστημα και:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X(z) = H(z) \cdot X(z)$$

↳ συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

5.4 Πόλοι και Μηδενικά της Συνάρτησης Μεταφοράς

- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται επίσης:

$$H(z) = g \frac{\prod_{i=1}^{q} (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{p} (1 - d_i z^{-1})}$$

Η οποία έχει μηδενικά ($H(z_0) = 0$) και πόλους ($H(z_0) = \infty$) → γιατί κάθε σήμα έχει μηδ./πόλους με την ίδια λογική.

5.5 Αντίστροφος Μ/Ζ

- Ο Μ/Ζ^{-1} ορίζεται ως: $x(n) = \dfrac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz$

C → κλειστή καμπύλη εντός της περιοχής σύγκλισης που έχει το (0,0)

5.6 Ευστάθεια στο επίπεδο Ζ.

- Τα αιτιατά συστήματα/σήματα θεωρούνται:
  - Ασταθή αν ένας πόλος είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου
  - Οριακά ευσταθή αν οι πόλοι είναι επάνω στην περιφέρεια του μον. κύκλου
  - Ευσταθή -//- εντός του μον. κύκλου

Για ΓΧΑ, μας ενδιαφέρει τόσο το $x(n)$, όσο και το $y(n)$.