



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ**  
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος  
«Κυματική και Κβαντική Φυσική»  
της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη  
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα  
2020

## Ανάκλαση – Διάθλαση επίπεδου κύματος σε διαχωριστική επιφάνεια

Στην περίπτωση διάδοσης κυμάτων σε 1-διάσταση, (π.χ., διάδοση εγκάρσιων κυμάτων σε χορδή, ή διάδοση διαμήκων κυμάτων σε ράβδο), και στην αντίστοιχη περίπτωση ανάκλασης-διέλευσης, όταν τα κύματα συναντούν μία ασυνέχεια, δεν τίθεται προφανώς ζήτημα διευθύνσεων πρόσπτωσης, δεδομένου ότι υπάρχει μία μόνο διεύθυνση διάδοσης (με τις δύο εναλλακτικές κατευθύνσεις να αντιστοιχούν σε δεξιά-οδεύον και σε αριστερά-οδεύον κύμα). Σε αυτή την περίπτωση, αναφερόμαστε σε προσπίπτον-ανακλώμενο-διερχόμενο κύμα, αντίστοιχα, όπως είδαμε στη σχετική ενότητα για τις χορδές (Chapter03-3).

Στην περίπτωση κύματος σε 2- ή 3-διαστάσεις, το πρόβλημα είναι περισσότερο σύνθετο. Κατά πρώτον, η ασυνέχεια ανάμεσα στα δύο διαφορετικά μέσα διάδοσης μπορεί να έχει ένα σύνθετο γεωμετρικό σχήμα. Ακόμη, όμως, και όταν η διαχωριστική επιφάνεια (ή, γραμμή, στην περίπτωση των 2-διαστάσεων, μεμβράνης) είναι η απλούστερη δυνατή (επίπεδη επιφάνεια για 3-διάστατο κυματικό μέσο, ή ευθεία γραμμή, για 2-διάστατο κυματικό μέσο), και τότε υπάρχει το ενδεχόμενο το αρχικό κύμα να προσπίπτει κάθετα, ή, υπό γωνία στη διαχωριστική γραμμή-επιφάνεια (για 2-3 διαστάσεις, αντίστοιχα). Σε αυτή την περίπτωση, αναφερόμαστε σε προσπίπτον-ανακλώμενο-διαθλώμενο κύμα, αντίστοιχα, και τα σχετικά φαινόμενα θα μελετηθούν στη συνέχεια.

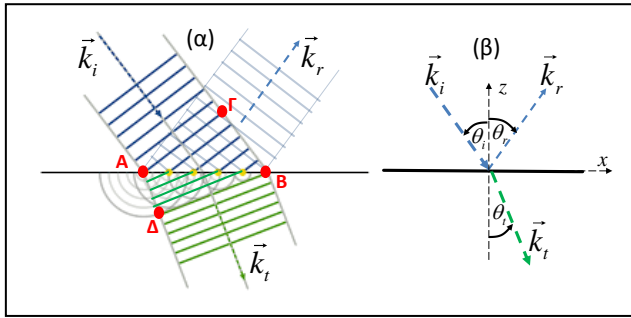
Για πρώτη επαφή με αυτά τα φαινόμενα θα θεωρήσουμε ότι έχουμε επίπεδο προσπίπτον κύμα, το οποίο συναντά στη διαδρομή του μία επίπεδη επιφάνεια, στις 3-διαστάσεις, (ευθεία γραμμή, στις 2-διαστάσεις), ως διαχωριστικό σύνορο ανάμεσα σε δύο διαφορετικά κυματικά μέσα. Κάθε ένα από τα δύο κυματικά μέσα χαρακτηρίζεται από την αντίστοιχη ταχύτητα διάδοσης κύματος  $c_{1,2}$ , και την αντίστοιχη σύνθετη κυματική αντίσταση  $z_{1,2}$ . Επειδή έχουμε κύματα σε 2- ή 3- διαστάσεις, η διεύθυνση διάδοσης του κύματος θα περιγράφεται από το κυματόνισμα  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ , και το επίπεδο οδεύον κύμα θα περιγράφεται από την έκφραση  $\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ . Κατά τα φαινόμενα πρόσπτωσης – ανάκλασης – διάθλασης, θα έχουμε ένα προσπίπτον (δείκτης:  $i = \text{incident}$ ), ένα ανακλώμενο (δείκτης:  $r = \text{reflected}$ ) και ένα διαδιδόμενο (δείκτης:  $t = \text{transmitted}$ ) κύμα.

$$\psi_i = A_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \psi_r = A_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \psi_t = A_t e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Στα φαινόμενα ανάκλασης-διάθλασης υπάρχουν κινηματικά-γεωμετρικά χαρακτηριστικά τα οποία διατυπώνονται με τη μορφή νόμων που είναι κοινά για όλων των ειδών τα κύματα (εγκάρσια κύματα μεμβράνης, διαμήκη ηχητικά κύματα στον αέρα, εγκάρσια ή διαμήκη ηχητικά κύματα σε στερεά, Η/Μ κύματα σε διαφορετικά διηλεκτρικά μέσα, οπτικά κύματα σε διαφορετικά υλικά), και περιγράφουν την πορεία των «ακτίνων», που προσπίπτουν, ανακλώνται και διαθλώνται από τη διαχωριστική επιφάνεια.

Μία άλλη ομάδα χαρακτηριστικών αφορά τη σχέση των πλατών του ανακλώμενου και του διαθλώμενου κύματος, σε σχέση με το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος (τηλ., τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης. Αυτά τα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από τη φύση των κυμάτων, (δυναμικά χαρακτηριστικά) και οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης είναι διαφορετικοί για τα διαφορετικά είδη κυμάτων, ακόμη και για την ίδια γωνία πρόσπτωσης.

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε τους νόμους που αφορούν τα κινηματικά χαρακτηριστικά, (Νόμος της Ανάκλασης, και Νόμος της Διάθλασης), εργαζόμενοι με την ανάλυση ενός επίπεδου κύματος που προσπίπτει υπό γωνία  $\theta_i$ , (ως προς την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια) δύο διαφορετικών μεμβρανών.



Ας θεωρήσουμε ότι η επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στα δύο διαφορετικά κυματικά μέσα συμπίπτει με το επίπεδο x-y, οπότε η κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια είναι ο άξονας-z. Η γωνία που σχηματίζουν τα κυματανύσματα πρόσπτωσης ( $\vec{k}_i$ ), ανάκλασης ( $\vec{k}_r$ ) και

διέλευσης-διάθλασης ( $\vec{k}_t$ ), με τον άξονα-z, ονομάζονται, αντίστοιχα, γωνίες πρόσπτωσης ( $\theta_i$ ), ανάκλασης ( $\theta_r$ ) και διάθλασης ( $\theta_t$ ). Η διαδικασία την ανάκλασης-διάθλασης μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια είτε των κυματο-μετώπων, είτε των κυματανυσμάτων (τα οποία είναι κάθετα στα αντίστοιχα κυματανύσματα).

Όσον αφορά τη διαδικασία ανάκλασης, μπορούμε να γράψουμε,  $\vec{k}_i = (k_{i,x}, 0, k_{i,z})$ , και αντίστοιχα,  $\vec{k}_r = (k_{r,x}, 0, k_{r,z})$ , (βλ. σχήμα (β) παραπάνω). Κατά τον άξονα-x δεν υπάρχει ασυνέχεια, οπότε  $k_{i,x} = k_{r,x}$ , λόγω της διάδοσης στο ίδιο κυματικό μέσο, κατά την ίδια φορά. Κατά τον άξονα-z, λόγω της διάδοσης στο ίδιο κυματικό μέσο, το ανακλώμενο κυματόνυσμα έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά,  $k_{r,z} = -k_{i,z}$ . Οπότε, από τη γεωμετρία των δύο κυματανυσμάτων προκύπτει ότι:

$$\theta_r = \theta_i : \text{Νόμος της Ανάκλασης.} \quad (1)$$

Όσον αφορά τη διαδικασία διάθλασης, μπορούμε να παρακολουθήσουμε τη σταδιακή είσοδο του μετώπου κύματος στο δεύτερο κυματικό μέσο, όπως φαίνεται στο σχήμα (α), παραπάνω, και τη σταδιακή δημιουργία του περιθλώμενου μετώπου κύματος στο δεύτερο κυματικό μέσο. Αν υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες διάδοσης στα δύο κυματικά μέσα είναι, π.χ.,  $c_1 < c_2$ , τότε, μέχρι να διέλθει όλο το μέτωπο ΑΓ από τη διαχωριστική επιφάνεια, το αναπτυσσόμενο μέτωπο στο δεύτερο μέσο, προχωρεί με μικρότερη ταχύτητα, από ότι το μέτωπο στο πρώτο μέσο. Σε αυτή τη διάρκεια το κοινό ίχνος των δύο μετώπων, (κίτρινα σημεία, κατά μήκος ευθείας ΑΒ), ταξιδεύει με κοινή ταχύτητα, στο ίδιο χρονικό διάστημα,  $\Delta t$ , και για τα δύο μέτωπα, οπότε  $\Delta t = \frac{\Gamma B}{c_1} = \frac{A \Delta}{c_2} \Rightarrow \frac{AB \sin \theta_i}{c_1} = \frac{AB \sin \theta_t}{c_2}$ .

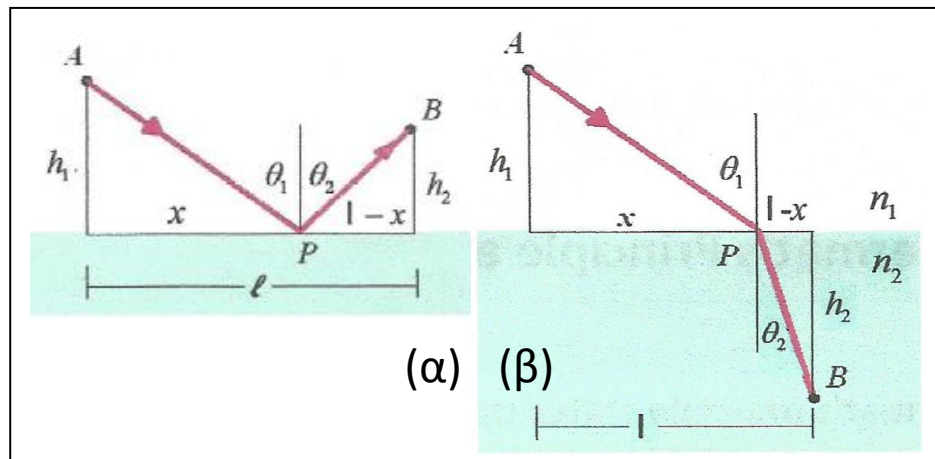
$$\text{Τελικά ισχύει: } \frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{\sin \theta_t}{c_2} : \text{Νόμος της Διάθλασης (ή, Νόμος του Snell)} \quad (2)$$

Στο ίδιο σχήμα (α) φαίνεται (σχηματικά) και η **Αρχή των Huygens-Fresnel**, σύμφωνα με την οποία, κάθε σημείο ενός μετώπου κύματος αποτελεί πηγή δευτερογενούς εκπομπής κύματος (κυκλικού, ή σφαιρικού, ανάλογα με το αν αναφερόμαστε σε 2- ή σε 3- διαστάσεις). Και το νέο συνολικό μέτωπο κύματος, κάποια δεδομένη χρονική στιγμή, είναι η καμπύλη που περιβάλλει, όλα τα επιμέρους δευτερογενή μέτωπα κύματος (περιβάλλουσα), όπως υποδεικνύεται από τα ημικυκλικά κύματα που έχουν σχεδιαστεί στο δεύτερο κυματικό μέσο να έχουν ως πηγή το σημείο του μετώπου κύματος που συναντά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές την διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων (κίτρινα σημεία της ευθείας ΑΒ).

Η αρχή των Huygens-Fresnel είναι το βασικό εργαλείο για την ανάλυση των φαινομένων συμβολής και περίθλασης που θα αναληθούν στη συνέχεια. Αυτά τα φαινόμενα (συμβολής – περίθλασης) αποτέλεσαν τη βάση για την αλλαγή αντίληψης για τη φύση του φωτός (από τη σωματιδιακή φύση, κατά Newton, στην κυματική φύση, κατά Huygens).

Οι νόμοι Ανάκλασης-Διάθλασης παράγονται, ανεξάρτητα, και με τη βοήθεια της **αρχής του Fermat** σύμφωνα με την οποία: το φως, κατά τη διαδρομή του μεταξύ δύο σημείων, όταν συναντά διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο μέσων, ακολουθεί τη διαδρομή με της μικρότερη χρονική διάρκεια.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η διαδρομή μία οπτικής ακτίνας από το σημείο Α στο σημείο Β, περνώντας από τη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφορετικών κυματικών μέσων.



Στην περίπτωση (α), τα δύο σημεία Α και Β βρίσκονται στο ίδιο κυματικό μέσο. Ο χρόνος για τη διαδρομή APB, υπολογίζεται αθροίζοντας το χρόνο για κάθε κλάδο

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}{c_1}$$

Η θέση  $x$  για την οποία επιτυγχάνεται ακρότατο στο χρονικό διάστημα  $t$  υπολογίζεται από

τη σχέση  $\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-(l-x)}{c_1 \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(l-x)}{c_1 \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}$

Από την τελευταία σχέση  $\frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(l-x)}{c_1 \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$

Στην περίπτωση (β), τα δύο σημεία Α και Β βρίσκονται σε διαφορετικό κυματικό μέσο. Ο χρόνος για τη διαδρομή APB, υπολογίζεται αθροίζοντας το χρόνο για κάθε κλάδο

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}{c_2}$$

Η θέση  $x$  για την οποία επιτυγχάνεται ακρότατο στο χρονικό διάστημα  $t$  υπολογίζεται από

τη σχέση  $\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-(l-x)}{c_2 \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(l-x)}{c_2 \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}$

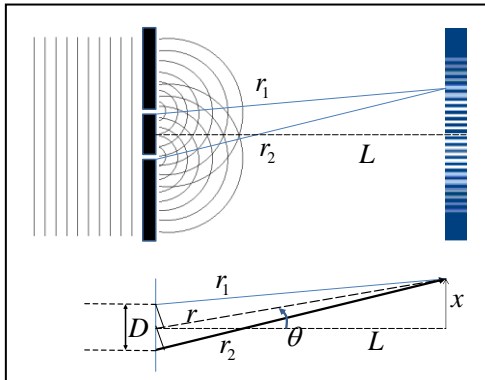
Από την τελευταία σχέση  $\frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(l-x)}{c_2 \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$

Στα οπτικά μέσα ορίζουμε το δείκτη διάθλασης των μέσων από τη σχέση  $n_{1(2)} = c_0/c_{1(2)}$ , όπου  $c_0$ , η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό. Με τη βοήθεια των δεικτών διάθλασης, ο τελευταίος νόμος της διάθλασης γράφεται  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$  (Ν του Snell).

## Συμβολή – Περίθλαση

Εφαρμόζοντας την **Αρχή των Huygens-Fresnel** μπορούμε να εξηγήσουμε επίσης τα φαινόμενα συμβολής και περίθλασης κυμάτων. Θα περιγράψουμε αυτά τα φαινόμενα ξεκινώντας από τα βασικότερα παράδειγμα συμβολής που είναι αυτό της συμβολής από δύο σύμφωνες σημειακές πηγές, γνωστό και ως πείραμα του Young (ή, των δύο οπών).

### Συμβολή από δύο σύμφωνες πηγές (πείραμα Young)



Στο πείραμα των δύο οπών, του Young, ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει σε μία αδιαφανή οθόνη, η οποία έχει δύο οπές μικρών διαστάσεων (σε σχέση με το μήκος κύματος), οι οποίες απέχουν μεταξύ τους πεπερασμένη απόσταση,  $D$ , μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του. Κάθε μία οπή εκπέμπει ένα σφαιρικό κύμα μπροστά από την οθόνη και το αποτέλεσμα της συνύπαρξης αυτών των δευτερογενών κυμάτων το παρατηρούμε σε μία οθόνη παρατήρησης που βρίσκεται σε απόσταση  $L$  από την οθόνη με τις δύο οπές ( $L \gg D$ ).

Το συνολικό πλάτος κύματος στην οθόνη παρατήρησης, σε απόσταση  $x$  από την προβολή της μεσοκαθέτου στις δύο οπές, υπολογίζεται ως εξής:

$$\psi_{o\lambda} = \frac{A_1}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{A_2}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \approx \frac{A}{r} e^{i(\omega t)} \left[ e^{i(kr_1)} + e^{i(kr_2)} \right].$$

Στην τελευταία σχέση έχει θεωρηθεί ότι  $\frac{A_1}{r_1} \approx \frac{A_2}{r_2} \approx \frac{A}{r}$ , επειδή, οι αντίστοιχες διαφορές των

$r_1, r_2, r_3$  είναι αμελητέες (στο πραγματικό πείραμα, οι τρεις τιμές διαφέρουν κατά ένα  $\pm 0.1\%$ ). Αντίθετα, έχει θεωρηθεί ότι  $kr_1 \neq kr_2$ , διότι το γινόμενο  $kr$  είναι αδιάστατο και

η τιμή του  $k$  είναι  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,5 \mu} = 4\pi \times 10^6 \text{ m}$ , επομένως, μικρές διαφοροποιήσεις στο

$r_1 \neq r_2$  προκαλούν μεγάλες διαφοροποιήσεις στον εκθέτη και τελικά στο όρισμα των δύο αρμονικών συναρτήσεων, το άθροισμα των οποίων δίνει τα φαινόμενα συμβολής.

Επίσης, για  $x \ll L$ , ισχύουν,  $r_{1,2} = r \mp \frac{D}{2} \sin \theta \approx r \mp \frac{D}{2} \frac{x}{L}$ , οπότε:

$$\psi_{o\lambda} \approx \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left[ e^{i\left(k \frac{Dx}{2L}\right)} + e^{-i\left(k \frac{Dx}{2L}\right)} \right], \text{ όπου, } k = 2\pi/\lambda.$$

Τελικά:

$$\psi_{o\lambda} \approx \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left[ e^{i\left(\pi \frac{Dx}{\lambda L}\right)} + e^{-i\left(\pi \frac{Dx}{\lambda L}\right)} \right] = \left[ \frac{2A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \right] \cos\left(\frac{\pi D}{\lambda L} x\right),$$

και η ένταση:  $I \sim |\psi_{o\lambda}|^2 = \psi^* \psi = \left[ \frac{4A^2}{r^2} \right] \cos^2\left(\frac{\pi D}{\lambda L} x\right) \quad (3)$

Στην οθόνη παρατήρησης η ένταση του παρατηρούμενου κύματος, (στην περίπτωση του οπτικού πειράματος του Yung: η ένταση της ακτινοβολίας, που παρατηρούμε με το μάτι μας, ή καταγράφουμε με τη βοήθεια ενός φωτογραφικού φιλμ, ή

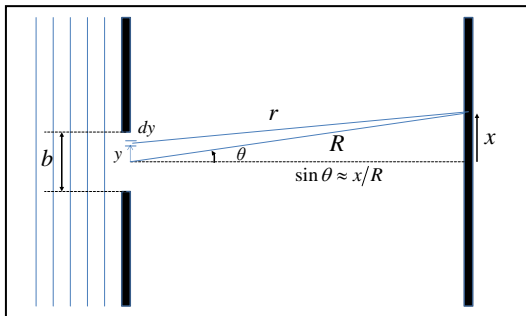
μίας κάμερας), αναμένεται να μεταβάλλεται όπως το  $\cos^2\left(\frac{\pi D}{\lambda L} x\right)$ , αποτέλεσμα που περιγράφει την εναλλαγή των πειραματικών φωτεινών-σκοτεινών κροσσών, στην οθόνη παρατήρησης, με τόσο καλύτερη ακριβεία όσο μικρότερων διαστάσεων είναι οι οπές, (με το μειονέκτημα ότι οι οπές μικρών διαστάσεων δίνουν διαγράμματα χαμηλότερης έντασης).

Τα παραπάνω αποτέλεσμα έχει προκύψει με ένα υπολογισμό στον οποίον γίνεται η παραδοχή ότι η κάθε οπή αποτελεί μία **σημειακή πηγή** (θεωρητικά, μηδενικών διαστάσεων). Επειδή, πρακτικά, κάθε οπή (οπτικό άνοιγμα) σε μία σκοτεινή οθόνη, έχει αναγκαστικά πεπερασμένες διαστάσεις (έτσι ώστε να επιστρέφεται και η διέλευση μίας μετρήσιμης έντασης ακτινοβολίας), θα πρέπει να μελετηθεί η επίπτωση του πεπερασμένου εύρους μία οπής (φαινόμενα περίθλασης) και στη συνέχεια να συνδυαστούν δύο οπές πεπερασμένου εύρους (συνδυασμός συμβολής και περίθλασης).

Επίσης, πρέπει να θυμόμαστε ότι υπάρχει και μία εξάρτηση  $(1/r^2)$ , η οποία μπορεί να θεωρηθεί «ασθενής». Πράγματι, για μικρές μεταβολές του  $x$ , η μεταβολές του  $r$  είναι αμελητέες, συγκρινόμενες με τον «γρήγορο» όρο  $\cos^2(\pi D x / \lambda L)$ ,

### Περίθλαση από άνοιγμα πεπερασμένου εύρους

Ένα οπτικό άνοιγμα πεπερασμένου εύρους αποτελεί, σύμφωνα με την αρχή του Huygens, μία συνεχή κατανομή πηγών δευτερογενούς εκπομπής σφαιρικών κυμάτων, όταν διέρχεται από μέσα του ένα μέτωπο επίπεδου κύματος.



Το αποτέλεσμα της περίθλασης, σε μεγάλη απόσταση από το άνοιγμα, προκύπτει από την επαλληλία διαφορεικών συνεισφορών της μορφής

$$dE(x) = \frac{E_o dy}{r} e^{i(\omega t - kr)} \approx \frac{E_o dy}{R} e^{i(\omega t - kr)}.$$

Ολοκληρώνοντας σε όλο το άνοιγμα

$$E(x) \approx \frac{E_o}{R} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{i(\omega t - k[R - y \sin \theta])} dy$$

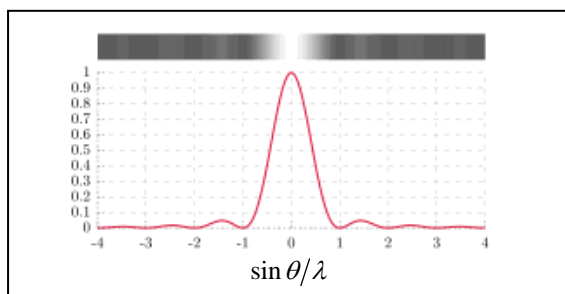
$$E(x) \approx \frac{E_o}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} dy = \frac{E_o}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{1}{ik \sin \theta} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} d(iky \sin \theta)$$

$$E(x) \approx \frac{E_o}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{1}{ik \sin \theta} \left( e^{i(kb \sin \theta)/2} - e^{-i(kb \sin \theta)/2} \right) = \frac{E_o}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{2i}{ik \sin \theta} \sin(kb \sin \theta)/2$$

$$E(x) \approx \frac{bE_o}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2}, \text{ και } I = |E|^2 = E^* E = \left( \frac{bE_o}{R} \right)^2 \frac{\sin^2[(kb \sin \theta)/2]}{[(kb \sin \theta)/2]^2}$$

Ως συνάρτηση του  $x$  η ένταση γράφεται :

$$I(x) \sim |E(x)|^2 \approx \frac{b^2 E_o^2}{R^2} \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \quad (4a)$$



$$\text{όπου: } z \equiv k \frac{b}{2} \sin \theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \frac{x}{R} \quad (4\beta)$$

Η αντίστοιχη κατανομή έντασης και η σχετική συνάρτηση φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

## Συνδυασμός Σύμβολής και περίθλασης από δύο ανοίγματα πεπερασμένου εύρους.

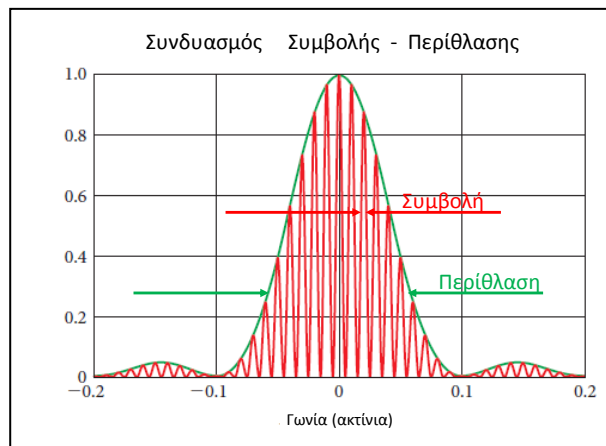
Μετά το προηγούμενο αποτέλεσμα, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πείραμα του Young με πιο ρεαλιστική προσέγγιση, λαμβάνοντας υπόψη μας το πεπερασμένο εύρος κάθε μίας από τις δύο οπές, οπότε το συνολικό αποτέλεσμα είναι ένας συνδυασμός σύμβολής και περίθλασης.

Ο ακριβής υπολογισμός παραλείπεται (παραπέμπεται στο σχετικό κεφάλαιο του μαθήματος της Οπτικής) και δίνεται το τελικό αποτέλεσμα, το οποίο είναι σε συμφωνία με την ανωτέρω ποιοτική διαπίστωση.

Επομένως, η ένταση: 
$$I(x) \sim \cos^2\left(\frac{\pi D}{\lambda L} x\right) \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \quad (5\alpha)$$

$$\text{όπου : } z \equiv k \frac{b}{2} \sin \theta \approx \frac{\pi}{\lambda} \frac{b}{R} x \quad (5\beta)$$

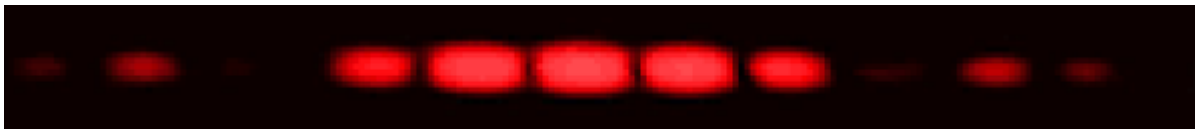
Το αποτέλεσμα απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, για ένα πηλίκο απόστασης-εύρους  $(b/D) \approx 20$



Η γρήγορη εναλλαγή των κροσσών (κόκκινη καμπύλη) είναι το αποτέλεσμα της σύμβολής από τις δύο οπές,  $\sim \cos^2\left(\frac{\pi D}{\lambda L} x\right)$

Η αργή περιβάλλουσα (πράσινη καμπύλη)  $\sim \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$ , η οποία διαμορφώνει κατά πλάτος τους κροσσούς σύμβολής, είναι αποτέλεσμα της περίθλασης από κάθε οπή, λόγω του πεπερασμένου εύρους της.

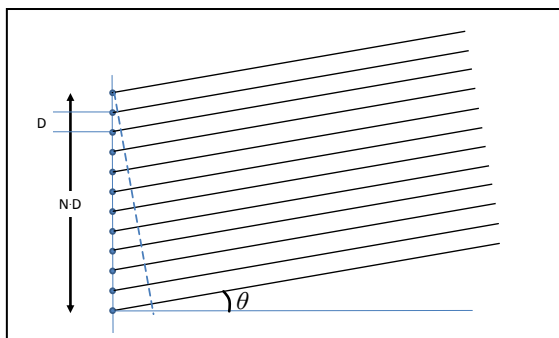
Σε ένα πραγματικό πείραμα σύμβολής – περίθλασης από δύο οπές, με ένα πηλίκο απόστασης-εύρους  $(b/D) \approx 7$ , η κατανομή έντασης φαίνεται στην επόμενη εικόνα





## Συμβολή από γραμμική διάταξη N όμοιων πηγών σε φάση

Η συμβολή από N-όμοιες πηγές οι οποίες εκπέμπουν εν φάσει είναι ισοδύναμη με την περιθλάση από φράγμα με N-γραμμές, και η υλοποίησή της φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές πηγές είναι D και ο αριθμός των πηγών είναι N, ενώ οι πηγές είναι διατεταγμένες σε μία ευθεία. Η παρατήρηση γίνεται υπό γωνία  $\theta$  ως προς την ευθεία την κάθετο στην ευθεία διάταξη των πηγών, (στην πράξη, η παράλληλη δέσμη του σχήματος εστιάζεται με κατάλληλο φακό σε ένα σημείο, όπου παρατηρείται η συμβολή).

Αν οι πηγές είναι σύμφωνες, τότε για να υπολογίσουμε τη συνολική ένταση, πρέπει να υπολογίσουμε το συνολικό πλάτος, που προκύπτει από την άθροιση των επί μέρους πλατών, που συνεισφέρει η κάθε πηγή κατά την διεύθυνση εκπομπής που χαρακτηρίζεται από τη γωνία  $\theta$ , κατά τα ανωτέρω. Η κάθε πηγή έχει μία διαφορά δρόμου  $D \sin \theta$ , ως προς την προηγούμενη, που μεταφράζεται σε διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών πηγών ίση με  $\delta = kD \sin \theta = (2\pi/\lambda) D \sin \theta$  σε σχέση με την προηγούμενη. Αν  $y_0$  είναι το πλάτος που συνεισφέρει η κάθε πηγή, στο μακρινό σημείο παρατήρησης P (στο οποίο θεωρούμε ότι συγκλίνει όλο το μέτωπο κύματος, με τη βοήθεια, π.χ., ενός κατάλληλου φακού), τότε το συνολικό πλάτος είναι ίσο με:

$$y = \sum_{i=1}^N y_i = y_1 + y_1 e^{-i\delta} + y_1 e^{-2i\delta} + \dots + y_1 e^{-(N-1)i\delta} = y_1 (1 + e^{-i\delta} + e^{-2i\delta} + \dots + e^{-(N-1)i\delta})$$

Ισοδύναμα:  $y = y_1 \left[ 1 + (e^{-i\delta}) + (e^{-i\delta})^2 + \dots + (e^{-i\delta})^{(N-1)} \right]:$

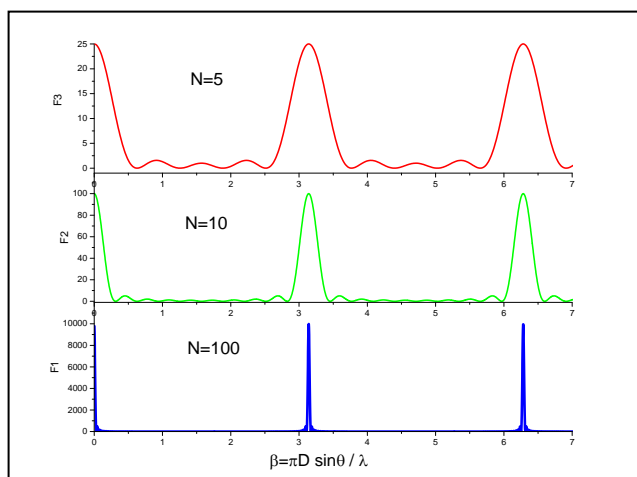
Πρόκειται για άθροισμα N όρων γεωμετρικής προόδου, με τιμή:

$$y = y_1 \frac{(e^{-i\delta})^N - 1}{(e^{-i\delta}) - 1} = y_1 \frac{e^{-i\frac{N\delta}{2}} \frac{e^{-i\frac{N\delta}{2}} - e^{+i\frac{N\delta}{2}}}{-2i}}{e^{-i\frac{\delta}{2}} \frac{e^{-i\frac{\delta}{2}} - e^{+i\frac{\delta}{2}}}{-2i}} = y_1 e^{-i\frac{(N-1)\delta}{2}} \frac{(e^{-i\frac{N\delta}{2}} - e^{+i\frac{N\delta}{2}})/2i}{(e^{-i\frac{\delta}{2}} - e^{+i\frac{\delta}{2}})/2i} = y_1 e^{-i(N-1)\beta} \frac{\sin(N\beta)}{\sin(\beta)}$$

Η ένταση υπολογίζεται (στη μιγαδική αναπαράσταση) από τη σχέση  $I = y^* y$ , επομένως:

$$I = y_1^2 \frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2(\beta)} \quad (6a)$$

$$\text{με } \beta = \delta/2 = (\pi/\lambda) D \sin \theta \quad (6b)$$



Παραδείγματα γωνιακής μεταβολής της έντασης, για διαφορετικό αριθμό πηγών ( $N=5$ ,  $N=10$ ,  $N=100$ ), φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Με την αύξηση του αριθμού των πηγών, αυξάνεται ο αριθμός και μειώνεται η ένταση των δευτερευόντων μεγίστων, ενώ τα κύρια μέγιστα παραμένουν στις ίδιες γωνιακές θέσεις, έχουν μειούμενο γωνιακό εύρος και αυξανόμενη ένταση, ανάλογη του  $N^2$ .



## Συνδυασμός Συμβολής-Περίθλασης από N-σχισμές πεπερασμένου εύρους-b και απόστασης-D μεταξύ τους

Στην περίπτωση μεγάλου πλήθους σχισμών (N-το-πλήθος) που έχουν πεπερασμένη απόσταση-D μεταξύ τους και η κάθε σχισμή έχει επίσης πεπερασμένο εύρος-b, τότε το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως συνδυασμός των αποτελεσμάτων (4α,β) και (6α,β) των προηγούμενων ενοτήτων

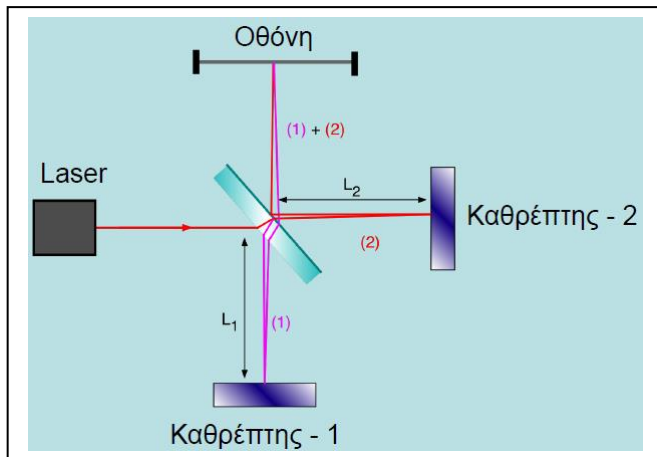
$$I = y_1^2 \frac{b^2 E_0^2}{R^2} \underbrace{\left( \frac{\sin z}{z} \right)^2}_{\Pi} \underbrace{\frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2(\beta)}}_{\Sigma} \quad (7\alpha)$$

$$\text{όπου: } z \equiv k \frac{b}{2} \sin \theta \approx \frac{\pi b}{\lambda} \frac{x}{R} \quad (7\beta) \quad \text{και} \quad \beta = \delta/2 = \frac{\pi}{\lambda} D \sin \theta \approx \frac{\pi D}{\lambda} \frac{x}{R} \quad (7\gamma)$$

και οι όροι  $\Pi$  και  $\Sigma$  περιγράφουν την περίθλαση και τη συμβολή αντίστοιχα.

### Συμβολή με διαίρεση πλάτους – Συμβολόμετρο Michelson

Στο συμβολόμετρο Michelson, η παράλληλη δέσμη από μία σύμφωνη πηγή φωτός (Laser), οδηγείται σε ένα διαχωριστή δέσμης (γυάλινο πλακίδιο, υπό γωνία πρόσπτωσης  $45^\circ$ ), με κατάλληλη επίστρωση, ώστε ένα μέρος του πλάτους να ανακλάται και να οδηγείται στον



Καθρέπτη-1 (κατά μήκος της διαδρομής (1), με μήκος  $L_1$ ), και το υπόλοιπο μέρος του πλάτους να διέρχεται και να οδηγείται στον Καθρέπτη-2 (κατά μήκος της διαδρομής (2), με μήκος  $L_2$ ). Οι δύο κλάδοι, αφού ανακλασθούν στους Καθρέπτες, επιστρέφουν στον διαχωριστή δέσμης και αντιστρέφοντας ρόλους (ο κλάδος-1 διέρχεται ενώ ο κλάδος-2 ανακλάται) οδηγούνται στο ίδιο σημείο μία επιφάνειος παρατήρησης (Οθόνη).

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο δέσμες (1 και 2) φθάνουν στο σημείο παρατήρησης με το ίδιο πλάτος  $y_0$  και με μία διαφορά φάσης  $\delta$ , που εξαρτάται από τη διαφορά δρόμων των δύο κλάδων (αλλά και από τον αριθμό των ανακλάσεων σε οπτικά πυκνότερο μέσο, σε κάθε μία από τις οποίες το κύμα μεταβάλλει φάση κατά  $\pi$ ). Επομένως.

$$y_{oi} = y_0 [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx - \omega t + \delta)]$$

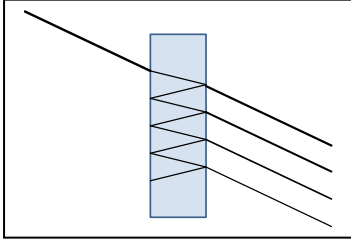
$$I(t) = y_{oi}^2 = y_0^2 [\cos^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t + \delta) + 2 \cos(kx - \omega t) \cos(kx - \omega t + \delta)]$$

$$\langle I(t) \rangle_t = y_{oi}^2 = y_0^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \langle \cos(2kx - 2\omega t + \delta) \rangle_t + \cos(-\delta) \right]$$

$$\langle I(t) \rangle_t = y_{oi}^2 = y_0^2 [1 + 0 + \cos(\delta)] \Rightarrow \langle I(t) \rangle_t = y_0^2 [1 + \cos(\delta)]$$

## Συμβολή με διαίρεση πλάτους – Συμβολόμετρο Fabry-Perot

Το συμβολόμετρο Fabry-Perot αποτελείται από δύο επιφάνειες υψηλής επιπεδότητας και παραλληλίας μεταξύ τους. Αυτές μπορεί να είναι οι επιφάνειες ενός πλακιδίου, όπως στο διπλανό σχήμα (το πάχος και ο δείκτης διάθλασης του οποίου μπορεί να μεταβάλλεται μέσω της θερμοκρασίας του). Οι επιφάνειες αυτές μπορεί, εναλλακτικά, να είναι οι απέναντι επιφάνειες δύο παράλληλων πλακιδίων, των οποίων η απόσταση (δηλ., το πάχος του μεταξύ τους διάκενου) μεταβάλλεται μέσω πιεζοηλεκτρικού μηχανισμού ακριβείας.



Ας αναλύσουμε την περίπτωση του πλακιδίου που φαίνεται στο σχήμα. Υποθέτουμε ότι ο συντελεστής διαπερατότητας πλάτους είναι  $t$  και  $t'$ , για τις διαβάσεις out-in και in-out, αντίστοιχα, και έστω  $T=tt'$ . Επίσης, υποθέτουμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης πλάτους, στο εσωτερικό του πλακιδίου είναι  $r$  και  $r^2=R$ .

Το συνολικό πλάτος των διαδοχικών ανακλώμενων-διερχόμενων, όπως στο σχήμα, είναι:

$$y_{o\lambda} = y_0 \left( T e^{i\omega t} + T R e^{i(\omega t - \delta)} + T R^2 e^{i(\omega t - 2\delta)} + T R^3 e^{i(\omega t - 3\delta)} + \dots \right)$$

$$y_{o\lambda} = y_0 T e^{i\omega t} \left( 1 + R e^{-i\delta} + R^2 e^{-2i\delta} + R^3 e^{-3i\delta} + \dots \right)$$

όπου:  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2 \frac{D}{\cos \theta}$ ,  $D$  η απόσταση των παράλληλων επιφανειών και  $\theta$  η εσωτερική

γωνία διέλευσης (για την οποία θα ίσχυε:  $n \sin \theta = \sin \varphi$ , όπου  $\varphi$  η εξωτερική γωνία πρόσπτωσης). Στην πράξη ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot λειτουργεί σε κάθετη πρόσπτωση, οπότε  $\varphi = \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$  (και το σχήμα σχεδιάζεται υπό γωνία, για να είναι κατανοητή η πορεία των πολλαπλών ανακλάσεων-διελεύσεων).

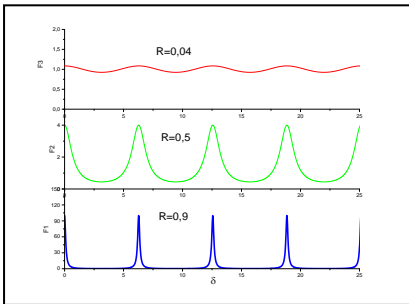
Η παρένθεση είναι άπειρη γεωμετρική σειρά, με άθροισμα:  $\sum = \frac{1}{1 - R e^{-i\delta}}$ , οπότε:

$$y_{o\lambda} = y_0 T e^{i\omega t} \frac{1}{1 - R e^{-i\delta}} \text{ και η ένταση: } I = y_{o\lambda}^* y_{o\lambda} = \frac{y_0^2 T^2}{1 + R^2 - 2 R \cos \delta}$$

Όπου:  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2 D \cos \theta$ ,  $D$  η απόσταση των παράλληλων επιφανειών και  $\theta$  η γωνία πρόσπτωσης. Επειδή  $\cos \delta = 1 - \sin^2(\delta/2)$ , τελικά παίρνουμε:

$$I = \frac{y_0^2 T^2}{(1 - R)^2 + 4 R \sin^2(\delta/2)} = \frac{I_0 T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)},$$

όπου :  $F \equiv \frac{4R}{(1 - R)^2}$ : ο λεγόμενος παράγοντας λεπτότητας του Fabry-Perot



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τρία συμβολογράμματα που αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές τιμές ανακλαστικότητας  $R$  του Fabry-Perot.

Όπως βλέπουμε, μεταβάλλοντας τον παράγοντα λεπτότητας, λαμβάνουμε συμβολογράμματα καλύτερης διακριτικής ικανότητας και με μεγαλύτερη ελεύθερη φασματική περιοχή (Free Spectral Range) μεταξύ διαδοχικών μεγίστων, για την ανάλυση μηκών κύματος με μικρή διαφορά μεταξύ τους.