ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Κυματική και Κβαντική Φυσική»
της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

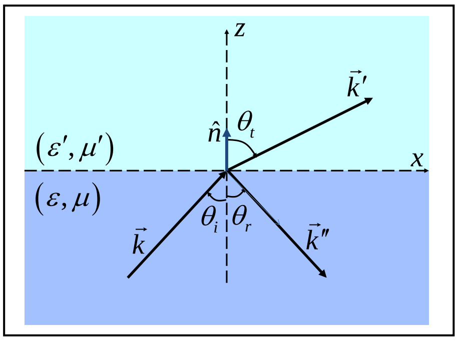
Αθήνα
2020

Ανάκλαση–Διάθλαση Η/Μ κυμάτων – Σχέσεις Fresnel

Όταν ένα οδεύον Η/Μ κύμα συναντά διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ (διηλεκτρικών, συνήθως) υλικών με διαφορετικές ηλεκτρικές (σπανιότερα, και μαγνητικές) ιδιότητες, τότε δημιουργείται ένα ανακλώμενο και ένα διερχόμενο (στην περίπτωση των 2- και 3-Διαστάσεων, αποκαλείται "διαθλώμενο") κύμα.

Σε αυτές τις διαδικασίες Ανάκλασης – Διάθλασης εκδηλώνονται δύο ομάδες ιδιοτήτων/φαινομένων. Η πρώτη ομάδα φαινομένων έχει καθαρά κινηματικά χαρακτηριστικά και ισχύει και για άλλου τύπου κύματα (μηχανικά, ηχητικά, σεισμικά, κ.λπ.), οφείλεται δε στο γεγονός ότι στη διαχωριστική επιφάνεια πρέπει να ισχύουν γενικά συνοριακές συνθήκες (ανεξάρτητα από το ποιές είναι αυτές, για κάθε ειδικό τύπο κύματος), και οδηγούν στους γενικούς (γωμετρικούς) νόμους της Ανάκλασης ("γωνία πρόσπτωσης = γωνία ανάκλασης") και της Διάθλασης ("Νόμος του Snell"). Η δεύτερη ομάδα φαινομένων έχει σχέση με τις ειδικές συνορικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί κάθε ειδικό κύμα, και μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος "μέσο διάδοσης – κύμα". Από αυτές τις ιδιότητες/φαινόμενα προκύπτουν οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης πλάτους των κυμάτων.

Δεδομένου ότι οι γεωμετρικοί νόμοι Ανάκλασης – Διάθλασης έχουν ήδη παρουσιαστεί στην περίπτωση των κυμάτων σε 2-Διαστάσεις, θα εστιάσουμε περισσότερο στον υπολογισμό των συντελεστών Ανάκλασης και Διάλευσης πλάτους για την περίπτωση που ένα Η/Μ κύμα συναντά υπό γωνία μία επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διαφορετικών διηλεκτρικών υλικών.



Ας υποθέσουμε ότι τα διηλεκτρικά-μαγνητικά χαρακτηριστικά των δύο υλικών δίνονται από τις χαρακτηριστικές τιμές (ε,μ) και (ε',μ') όπως στο σχήμα. Η διαχωριστική επιφάνεια είναι το επίπεδο (x,y) και $\hat{n}$ το κάθετο προς αυτήν μοναδιάιο διάνυσμα. Οι γωνίες πρόσπτωσης – ανάκλασης – διάθλασης, για τις οποίες ισχύουν οι νόμοι Ανάκλασης και Ν. Snell, είναι οι: $(\theta_i,\theta_r,\theta_t)$. Τα Η/Μ κύματα που συμμετέχουν στις διαδικασίες είναι

$$\text{Προσπίπτον:}\left\{\begin{aligned}\vec{E}&=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\\ \vec{B}&=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{k}\end{aligned}\right\}\quad(1),\qquad \text{Ανακλώμενο:}\left\{\begin{aligned}\vec{E}''&=\vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)}\\ \vec{B}''&=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\vec{k}''\times\vec{E}''}{k''}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\text{Διαθλώμενο:}\left\{\begin{aligned}\vec{E}'&=\vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)}\\ \vec{B}'&=\sqrt{\varepsilon'\mu'}\,\frac{\vec{k}'\times\vec{E}'}{k'}\end{aligned}\right\}\quad(3)\,.$$

Οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στη διαχωριστική επιφάνεια, όταν δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία και ρεύματα στο σύστημα, αφορούν τις κάθετες και παράλληλες προς τη διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσες των πεδίων, Συγκεκριμένα :

(i) Συνέχεια κάθετων συνιστωσών των πεδίων $\vec{D},\vec{B}$, στο z=0.

$$\left[\varepsilon\left(\vec{E}_0+\vec{E}''_0\right)-\varepsilon'\vec{E}'_0\right]\cdot\hat{n}=0 \qquad (4\alpha)$$

$$\left[\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}''_0-\vec{k}'\times\vec{E}'_0\right]\cdot\hat{n}=0 \qquad (4\beta)$$

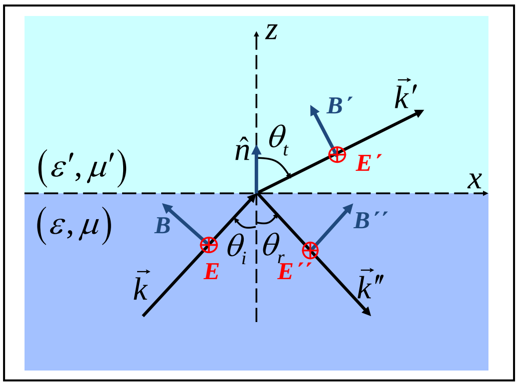
(ii) Συνέχεια εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων $\vec{E}, \vec{H}$, στο z=0.

$$\left[\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0'\right] \times \hat{n} = 0 \qquad (5\alpha)$$

$$\left[\frac{1}{\mu}\left(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0''\right) - \frac{1}{\mu'}\left(\vec{k}' \times \vec{E}'\right)_0\right] \times \hat{n} = 0 \qquad (5\beta)$$

Από το σημείο αυτό, και επειδή οι συνοριακές συνθήκες αναφέρονται σε κάθετες και εφαπτομενικές συνιστώσες των διανυσμάτων του Ηλεκτρικού και του Μαγνητικού πεδίου (ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια), θα πρέπει να μελετηθούν διαφορετικές υποπεριπτώσεις, ανάλογα με τον προσανατολισμό της Ηλεκτρικής (συνεπώς, και της Μαγνητικής) συνιστώσας ενός Η/Μ πεδίου, ως προς το επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις της προπίπτουσας, της διαθλώμενης, και της ανακλώμενης ακτίνας, (δηλ., από τα διανύσματα $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$, αντίστοιχα), και αναφέρεται συνήθως ως επίπεδο "ανάκλασης-διάθλασης". Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο (απουσία ελεύθερων φορτίων) και επομένως έχει ποικιλία προσανατολισμών πόλωσης επί ενός επιπέδου κάθετου προς το κυματάνυσμα (διεύθυνση διάδοσης). Από όλη αυτή την ποικιλία προσανατολισμών, μελετώνται δύο χαρακτηριστικοί προσανατολισμοί, κάθετα $\left(\vec{E} \perp\right)$ και παράλληλα $\left(\vec{E} \parallel\right)$ προς το επίπεδο ανάκλασης-διάθλασης, στους οποίους θα μπορούσε να αναλυθεί οποιοσδήποτε άλλος εγκάρσιος προσανατολισμός.

Ι – περίπτωση: $\vec{E} \perp$ στο επίπεδο "Ανάκλασης – Διάθλασης" (άρα, $\vec{B} \parallel$ στο επίπεδο "Ανάκλασης – Διάθλασης", όπως φαίνεται στο σχήμα). Τότε, οι συνοριακές συνθήκες οι οποίες αναφέρθηκαν προηγουμένως, οδηγούν στις σχέσεις:



$(4\alpha) \Rightarrow 0 = 0$

$(5\alpha) \Rightarrow E_0 + E_0'' = E_0' \qquad (6\alpha)$

$(5\beta) \Rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(E_0 - E_0''\right)\cos\theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E_0' \cos\theta_t \qquad (6\beta)$

(4β) & $N.\,\text{Snell} \Rightarrow (5\alpha)$

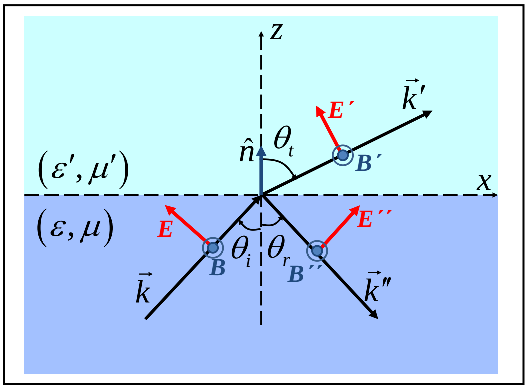
Λαμβάνοντας υπόψη ότι, σε όλα τα συνήθη διηλεκτρικά υλικά, ισχύει $\mu \simeq \mu'$, και συνδυάζοντας τις σχέσεις (6α) και (6β), προκύπτουν οι τιμές των συντελεστών ανάκλασης και διέλευσης πλάτους για το ηλεκτρικό πεδίο

$$r_\perp \equiv \left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_\perp = \frac{n\cos\theta_i - n'\cos\theta_t}{n\cos\theta_i + n'\cos\theta_t} = \frac{n\cos\theta_i - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta_i}}{n\cos\theta_i + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta_i}} \qquad (7\alpha,\beta)$$

$$t_\perp \equiv \left(\frac{E_0'}{E_0}\right)_\perp = \frac{2n\cos\theta_i}{n\cos\theta_i + n'\cos\theta_t} = \frac{2n\cos\theta_i}{n\cos\theta_i + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta_i}} \qquad (8\alpha,\beta)$$

Οι μορφές (7β) και (8β) προκύπτουν από τις (7α) και (8a) μέσω του Ν. Snell.

ΙΙ – περίπτωση: $\vec{E}\parallel$στο επίπεδο "Ανάκλασης – Διάθλασης" (άρα, $\vec{B}\perp$στο επίπεδο "Ανάκλασης – Διάθλασης", όπως φαίνεται στο σχήμα). Τότε, οι συνοριακές συνθήκες οι οποίες αναφέρθηκαν προηγουμένως, οδηγούν στις σχέσεις:



$$(5\alpha)\Rightarrow\left(E_0-E_0''\right)\cos\theta_i=E_0'\cos\theta_t \quad (9\alpha)$$

$$(5\beta)\quad\Rightarrow\quad\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(E_0+E_0''\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}E_0' \quad (9\beta)$$

$$(4\alpha)\quad \& \quad N.\mathrm{Snell}\quad\Rightarrow\quad(9\beta)$$

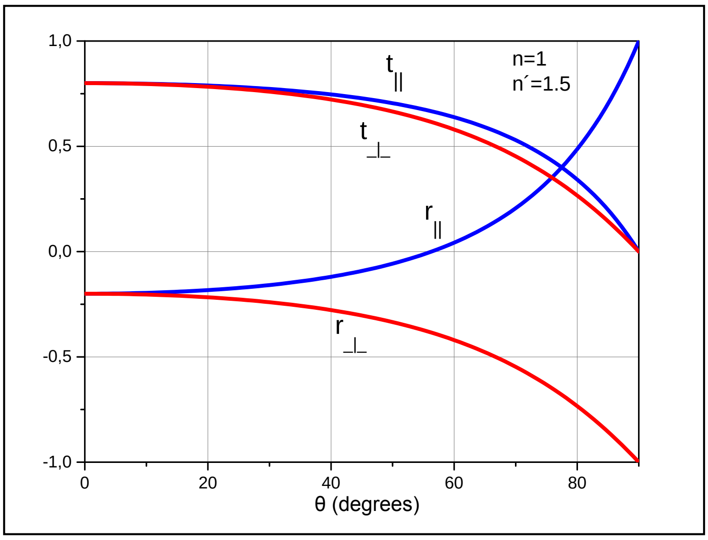
$$(4)\qquad\Rightarrow\qquad 0=0$$

Θεωρώντας, επίσης, ότι $\mu\simeq\mu'$, και συνδυάζοντας τις σχέσεις (9α) και (9β), προκύπτουν οι τιμές των αντίστοιχων συντελεστών ανάκλασης και διέλευσης πλάτους για το ηλεκτρικό πεδίο (χωρίς-, και με-χρήση του N. Snell, αντίστοιχα, όπως προηγουμένως).

$$r_\parallel\equiv\left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_\parallel=\frac{n'\cos\theta_i-n\cos\theta_t}{n\cos\theta_i+n'\cos\theta_t}=\frac{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos\theta_i-n\sqrt{n'^2-n^2\sin^2\theta_i}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos\theta_i+n\sqrt{n'^2-n^2\sin^2\theta_i}} \quad (10\alpha,\beta)$$

$$t_\parallel\equiv\left(\frac{E_0'}{E_0}\right)_\parallel=\frac{2n\cos\theta_i}{n\cos\theta_t+n'\cos\theta_i}=\frac{2nn'\cos\theta_i}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos\theta_i+n\sqrt{n'^2-n^2\sin^2\theta_i}} \quad (10\alpha,\beta)$$

Με το νόμο του Snell : $n\sin\theta_i=n'\sin\theta_t\Rightarrow\sin\theta_t=\frac{n}{n'}\sin\theta$, εκφράζονται όλα τα μεγέθη συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης, η οποία είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή του προβλήματος $\cos\theta_t=\sqrt{1-\sin^2\theta_t}=\sqrt{1-\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\theta_t}\Rightarrow\cos\theta_t=\frac{1}{n'}\sqrt{n'^2-n^2\sin^2\theta_t}$.



Η εξάρτηση των συντελεστών ανάκλασης και διέλευσης από τη γωνία πρόσπτωσης για τιμές δεικτών διάθλασης n=1 και n´=1.5 (που αντιστοιχεί, π.χ., σε διαχωριστική επιφάνεια αέρας-γυαλί).

Όπως φαίνεται, για μηδενική γωνία πρόσπτωσης, οι ομοειδείς συντελεστές δεν διαφοροποιούνται για τους δύο διαφορετικούς προσανατολισμούς, ακριβώς διότι είναι ισοδύναμοι.