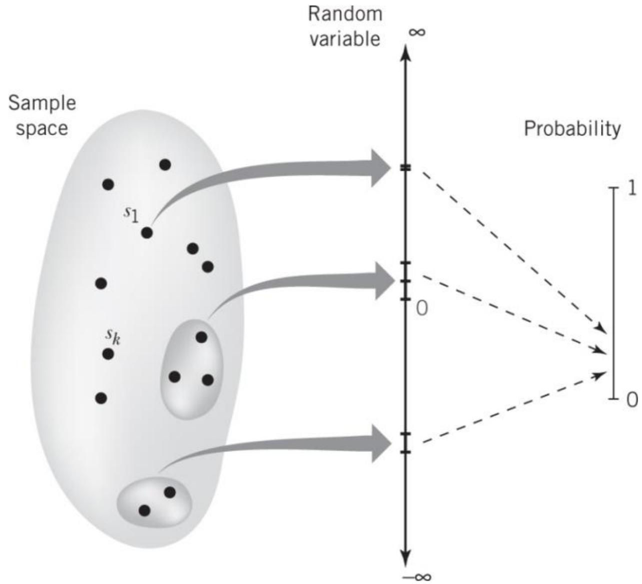
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

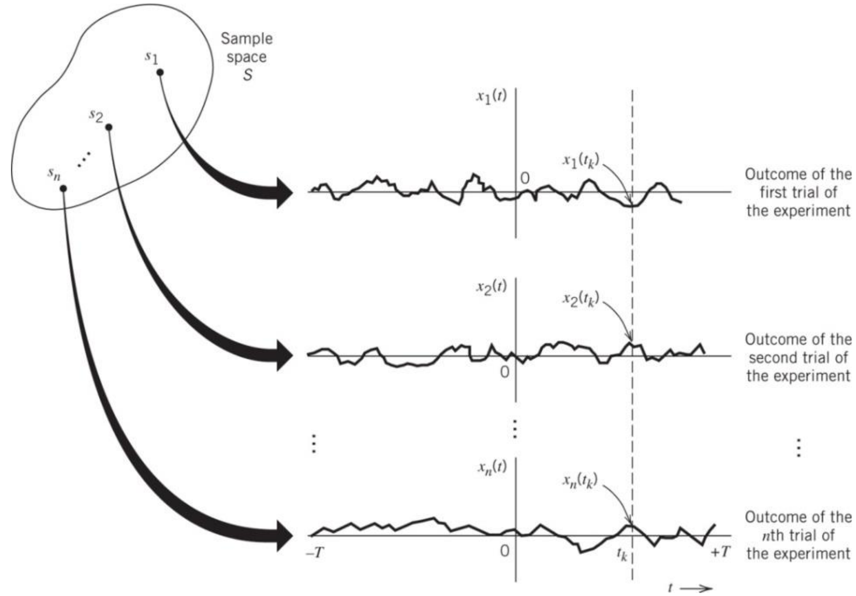
Στοχαστικές Ανελίξεις

- Εισαγωγή
- Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance)
- Στατικότητα και Εργοδικότητα
- Στοχαστική Διαδικασία Poisson

2 Μαΐου, 2022

Στοχαστικές Ανελίξεις (Stochastic Processes)





Στοχαστική ή Τυχαία Διαδικασία - Ανέλιξη *(Stochastic Process - SP ή Random Process)*
Τυχαίο πείραμα με *Υλοποιήσεις* (Δείγματα) s_j ***Χρονικές Συναρτήσεις*** ή ***Χρονοσειρές*** *(Time-Series)*, στοιχεία Δειγματικού Χώρου S

Παραδείγματα:
- Τυχαίες παρεμβολές, Θόρυβος, σε επικοινωνιακά συστήματα
- Αφίξεις πελατών/πακέτων σε συστήματα αναμονής

Ορισμός: Η Στοχαστική Ανέλιξη (SP) $X(t)$ ορίζεται σαν ένα σύνολο *χρονικών συναρτήσεων* (κυματομορφών) που αντιστοιχούν σε *τυχαίες υλοποιήσεις* (δείγματα) ενός τυχαίου πειράματος
- Υλοποιήσεις (δείγματα) του SP $\{X(t,s)\} \triangleq X(t)$: $s_j \rightarrow X\left(t,s_j\right) \triangleq x_j(t),\ -T \leq t \leq T$
- Τιμές δειγμάτων s_j κατά τη χρονική στιγμή t_k: Τυχαίες Μεταβλητές *(Random Variables, RV)* $X\left(t_k,s_j\right)$

$$\{x_1(t_k),x_2(t_k),\cdots,x_n(t_k)\} = \{X(t_k,s_1),X(t_k,s_2),\cdots,X(t_k,s_n)\}$$

Συνάρτηση κατανομής/πυκνότητας πιθανότητας

$$F_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_k)}(x_1,x_2,\dots,x_k)=P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\dots, X(t_k)\le x_k\}$$

$$\equiv F_{\overline{X}(t)}(\overline{x})$$

$$\overline{X}(t)=\begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \dots \\ X(t_k) \end{bmatrix} \qquad \overline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix}$$

$$f_{\overline{X}(t)}(\overline{x})=\frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} F_{\overline{X}(t)}(\overline{x})$$

Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance) (1/2)

Μέση Τιμή της $X(t)$ τη χρονική στιγμή t ***(Ensemble Average)***: $\mu_X(t) = \mathbf{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)dx$

1st Order Stationarity (*SP* στατικό 1ης τάξης): $F_{X(t_1)}(x) = F_{X(t_2)}(x)\ \forall(t_1, t_2) \Rightarrow \mu_X(t) = \mu_X\ , \forall t$ και γενικά η ροπή $\mathbf{E}[X^n(t)]$ είναι ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής t

Αυτοσυσχέτιση ***(Autocorrelation)***: $R_X(t_1, t_2) = \mathbf{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)dx_1 dx_2$

2nd Order Stationarity (*SP* στατικό 2ης τάξης): $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(t_1+\Delta t),X(t_2+\Delta t)}(x_1, x_2)$, $\forall(t_1, t_2, \Delta t) \Rightarrow R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau), \tau = (t_2 - t_1)\ , \forall(t_1, t_2)$

Αυτοδιασπορά ***(Autocovariance)***: $C_X(t_1, t_2) = \mathbf{E}[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))]$

Wide-sense Stationarity (Στατική Στοχαστική Ανέλιξη με την ***Ευρεία Έννοια***):

$$\mu_X(t) = \mu_X\ , \forall t, \quad R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau), \tau = (t_2 - t_1)\ , \forall(t_1, t_2)$$

$$C_X(t_1, t_2) = \mathbf{E}[(X(t_1) - \mu_X)(X(t_2) - \mu_X)] = R_X(t_2 - t_1) - \mu_X^2$$

Strict-sense Stationarity (Στατική Στοχαστική Ανέλιξη με τη ***Στενή Έννοια***):

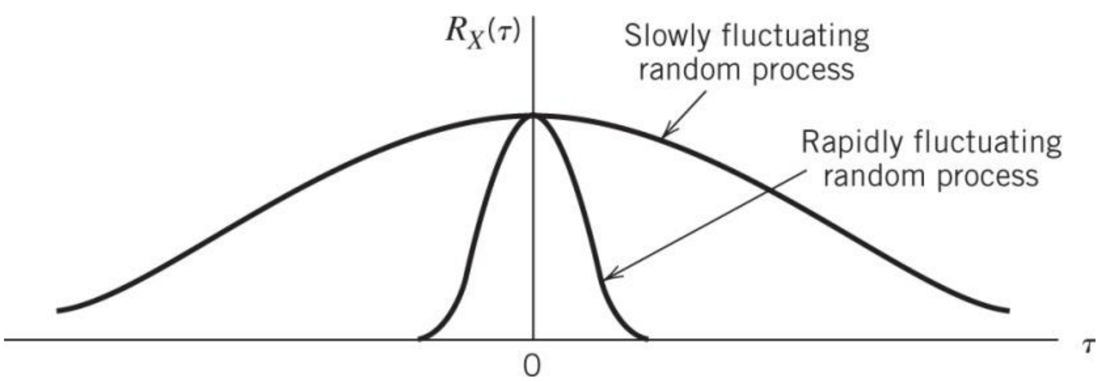
$F_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X(t_1+\Delta t),X(t_2+\Delta t),\cdots,X(t_n+\Delta t)}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \forall(n, t_1, t_2, \ldots, t_n, \Delta t)$ για κάθε χρονική μετατόπιση Δt και για κάθε πεπρασμένο σύνολο χρονικών στιγμών t_ι και τιμών x_ι

$$F_{\overline{X}(t)}(\overline{x}) = F_{\overline{X}(t+\Delta t)}(\overline{x})$$

Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance) (2/2)

Ιδιότητες Αυτοσυσχέτισης ***Wide-sense Stationary SP***: $R_X(\tau) = \mathbf{E}[X(t+\tau)X(t)] = \mathbf{E}[X(t)X(t-\tau)]$

- $R_X(0) = \mathbf{E}[X^2(t)] > 0$
- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ (αρτιότητα της Αυτοσυσχέτισης)
- $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ (η μέγιστη τιμή της Αυτοσυσχέτισης προκύπτει για $\tau = 0$) :
  $\mathbf{E}\left[\left(X(t+\tau) \pm X(t)\right)^2\right] \geq 0,\ \ \mathbf{E}[X^2(t+\tau)] \pm 2\mathbf{E}[X(t+\tau)X(t)] + \mathbf{E}[X^2(t)] = 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \geq 0$
  $\Rightarrow R_X(0) \geq \pm R_X(\tau)$
- Η Αυτοσυσχέτιση δίνει μια μετρική του βαθμού εξάρτησης των τιμών της $X(t)$ σαν συνάρτηση της χρονικής τους απόστασης ή της επιρροής της $X(t)$ στην $X(t+\tau)$, ή ισοδύναμα παρέχει εάν μέσο για την περιγραφή της αλληλοεξάρτηησης δυο τ.μ. που λαμβάνονται παρατηρώντας τη στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ σε στιγμές που απέχουν τ



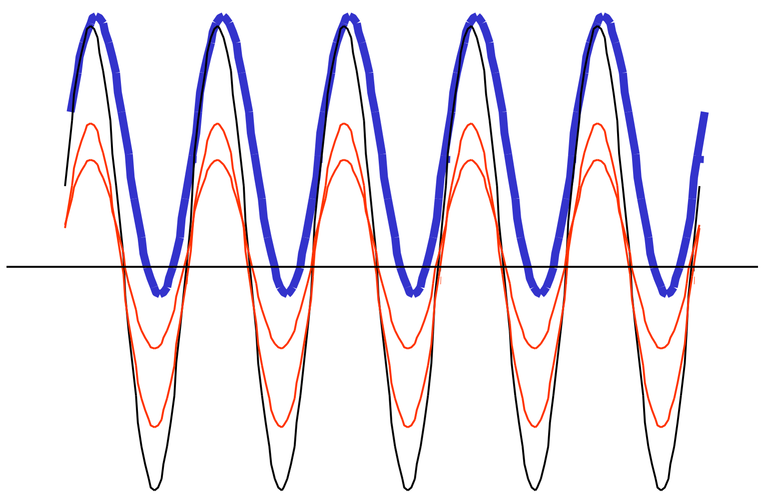
Παράδειγμα: Μέση τιμή ημιτονικής κυματομορφής

$$E\{X(t_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t_k)}(x)\,dx$$

Π.χ. $\quad x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

όπου το A είναι τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο (0,1).

$$E\{x(t)\} = E\{A\}\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)$$



Παράδειγμα: Ημιτονοειδές Σήμα Τυχαίας Φάσης

$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$ όπου A, f_c σταθερές και Θ RV ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $(-\pi, \pi)$

$$E\{X(t)\} = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(2\pi f_c t + \vartheta)\frac{1}{2\pi}d\vartheta = 0$$

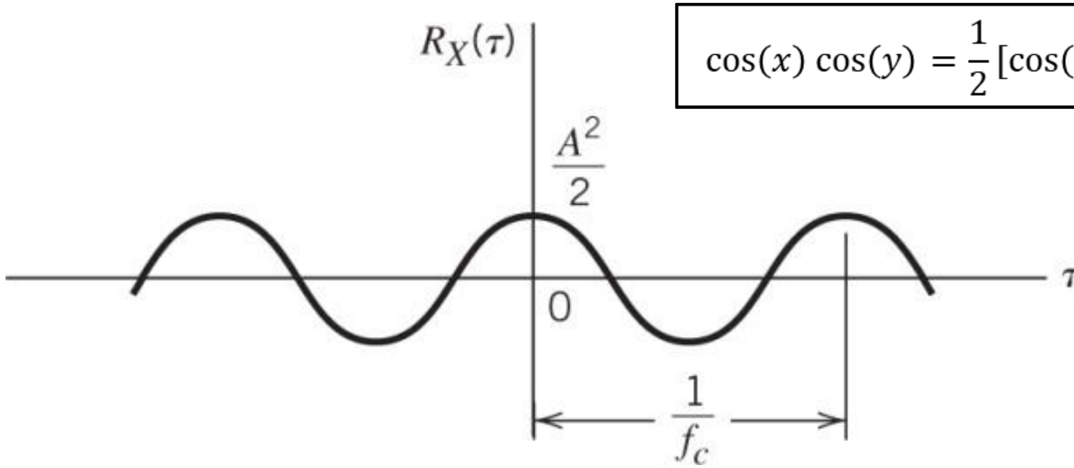
$$R_X(\tau) = \mathbf{E}[X(t+\tau)X(t)] = \mathbf{E}[A^2\cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + \Theta)\cos(2\pi f_c t + \Theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}\mathbf{E}[A^2\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\Theta)] + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$$

$$= \frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\theta)d\theta + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) = 0 + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) \Rightarrow$$

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$$

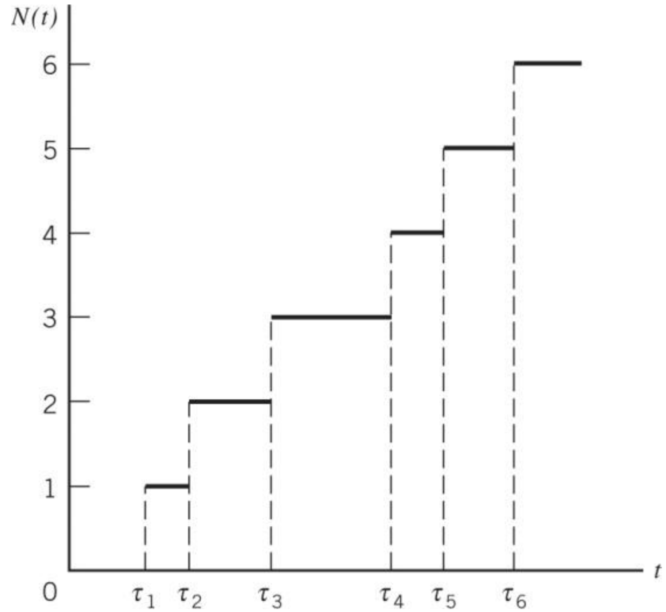
$$\boxed{\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$



Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ POISSON

Η τυχαία εμφάνιση παλμών περιγράφεται σαν μια Στοχαστική Ανέλιξη Καταμέτρησης *(Counting Process)* $N(t)$ που καταμετρά τυχαία γεγονότα (αφίξεις πελατών) στο διάστημα $(0, t)$.

Ο αριθμός εμφανίσεων στο διάστημα $(t, t+T)$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$. Κάτω από συνθήκες απρόβλεπτης εξέλιξης της ανέλιξης *(τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα από το παρελθόν και χωρίς να επηρεάζουν το μέλλον)*, η ν ακολουθεί την **κατανομή *Poisson* με μέσο αριθμό εμφανίσεων ανάλογο του διαστήματος** T: $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$. Η σταθερά λ ορίζει τον μέσο ρυθμό *(rate)* εμφανίσεων (γεγονότα ανά μονάδα χρόνου)



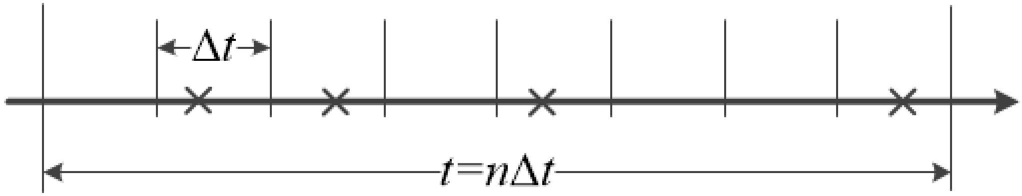
Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Η Κατανομή Poisson σαν Όριο Διωνυμικής Κατανομής

Ανεξάρτητες εμφανίσεις $\{N(t) = k\}$ γεγονότων (*σημείων*) ***Poisson*** στο διάστημα $(0, t)$ με ρυθμό λ σημεία/sec ορίζουν Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή *(Discrete Random Variable)* $\{\nu = k\}$ με Κατανομή Μάζας Πιθανότητας

$$P_t[\nu = k] \triangleq P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

Απόδειξη



- Διαιρώ το διάστημα t σε n υποδιαστήματα, $t = n\Delta t$
- Πραγματοποιώ n ανεξάρτητες δοκιμές Bernouilli, μια σε κάθε υποδιάστημα, με δύο εναλλακτικές: Εμφάνιση (***επιτυχία***) με πιθανότητα $p = \lambda\Delta\mathrm{t}$, μη εμφάνιση (***αποτυχία***) με $1 - p$
- Η πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές δίνεται από την Διωνυμική Κατανομή:

$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} (\lambda\Delta t)^k (1-\lambda\Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

- Στο όριο $\Delta t \to 0,\ n \to \infty, t = n\Delta t$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \to n^k$, $\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda t}$ και

$$P[N(t) = k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Χρονικοί μέσοι και Εργοδικότητα

Για μια στατική στοχ. ανέλιξη η μέση τιμή και η αυτο-συσχέτιση λαμβάνονται πάνω στα δείγματα:

$$E\{X(t_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t_k)}(x)dx \qquad R_x(\tau) = E\{X(t+\tau)X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t+\tau),X(t)}(x,y)dxdy$$

Ωστόσο συχνά μόνο ένα δείγμα είναι γνωστό, οπότε μπορούμε μόνο να υπολογίσουμε τους χρονικούς μέσους:

$$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \qquad < x(t+\tau)x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)dt$$

Μια ανέλιξη λέγεται ***εργοδική*** αν όλες οι στατιστικές της ιδιότητες μπορούν να καθορισθούν μόνο από ένα δείγμα.

Η $x(t)$ είναι εργοδική ως προς τη ***μέση τιμή*** αν: $E\{x(t)\}=< x(t) >$. *.

Η $x(t)$ είναι εργοδική ως προς την ***αυτοσυσχέτιση*** αν:

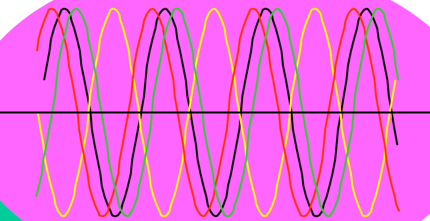
$E\{x(\tau+t)\, x(t)\}=< x(t)\, x(t+\tau) >$. **.

* Άρα απαιτείται $E\{x(t)\}$ = σταθ.

** Άρα απαιτείται $E\{x(\tau+t)\, x(t)\}=R_X(\tau)$.

Γενικά εργοδική ⇒ στατική

Ημιτονικό κύμα με τυχαία φάση



$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta) \qquad f_\Theta(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & 0 \le \vartheta \le 2\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E\{X(t)\} = 0 \qquad E\{X(t+\tau)X(t)\} = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(2\pi f_0 t + \theta)dt = 0$$

$$< x(t+\tau)x(t) >=$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos[2\pi f_0 (t+\tau) + \theta]A\cos(2\pi f_0 t + \theta)dt =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$