Άσκηση

Έστω ότι τα σύμβολα εκπομπής σε βασική ζώνη ενός ψηφιακού συστήματος είναι:
0.707+j0.707, -0.707+j0.707,
-0.707-j0.707, 0.707- j0.707

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα αστερισμού. Επίσης εκφράστε τα σύμβολα εκπομπής σε διέλευση ζώνης και εξηγήστε για ποια διαμόρφωση πρόκειται.

2. Αν ένα σύμβολο λήψης έχει τις συντεταγμένες (-0.5, 0.7) προσδιορίστε τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει η εκτίμηση του πιθανότερου συμβόλου εκπομπής.

3. Για την παραπάνω διαμόρφωση, υπολογίστε την πιθανότητα σφάλματος του συμβόλου 0.707+j0.707 με κάθε ένα από τα άλλα τρία σύμβολα σε δίαυλο με προσθετικό λευκό Gaussian θόρυβο, με N0 = 0.1 W/Hz.

QPSK

Το σήμα που μεταδίδεται μπορεί να γραφτεί:

$$s(t) = a_I(t)V\cos(2\pi f_c t) + a_Q(t)V\sin(2\pi f_c t),$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{a_I^2(t) + a_Q^2(t)}V\cos\left(2\pi f_c t - \tan^{-1}\left(\frac{a_Q(t)}{a_I(t)}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}V\cos[2\pi f_c t - \theta(t)], \end{aligned}$$

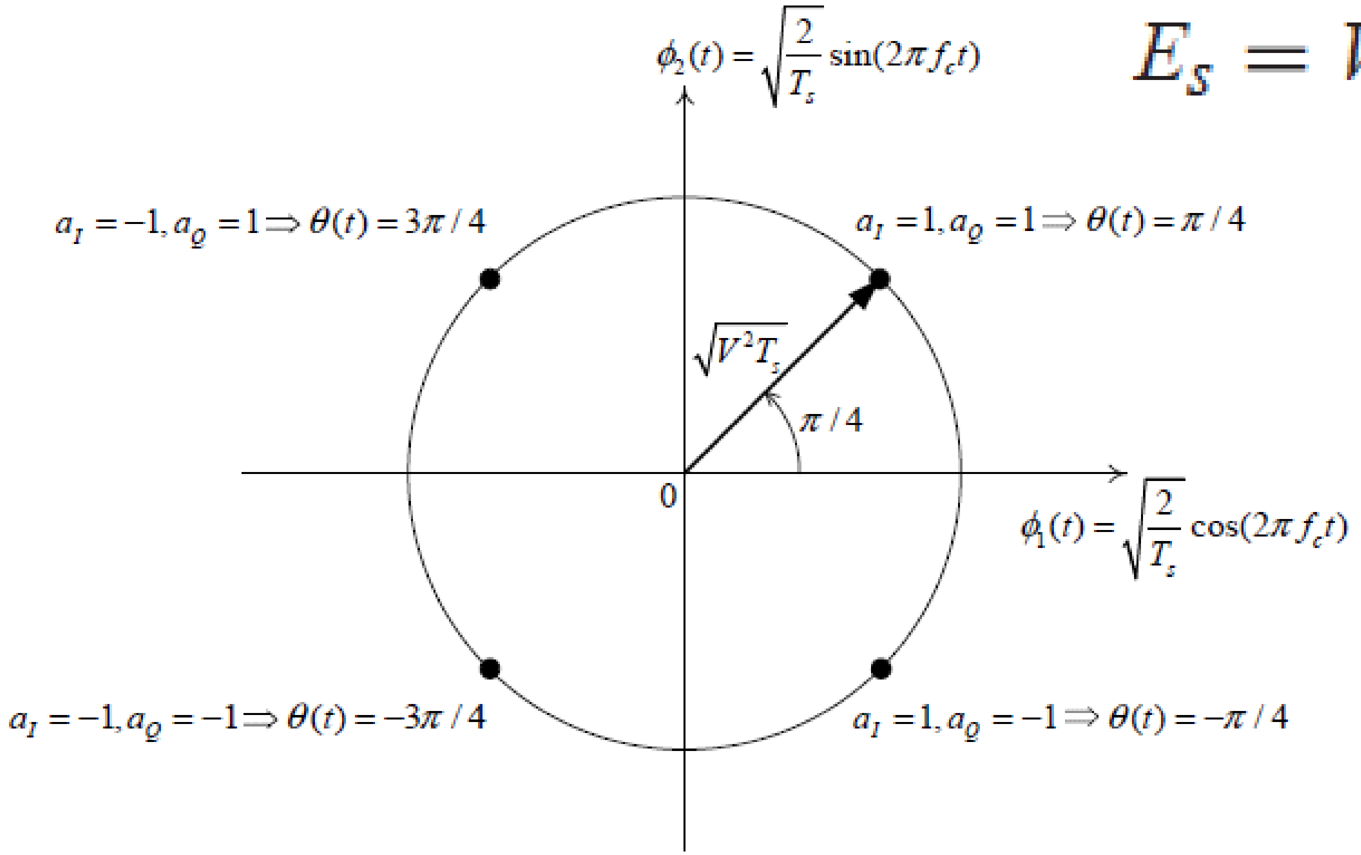
$$\theta(t) = \begin{cases} \pi/4, & a_I = +1, a_Q = +1 \text{ (bits 11)} \\ -\pi/4, & a_I = +1, a_Q = -1 \text{ (bits 10)} \\ 3\pi/4, & a_I = -1, a_Q = +1 \text{ (bits 01)} \\ -3\pi/4, & a_I = -1, a_Q = -1 \text{ (bits 00)} \end{cases}$$

Απεικόνιση Gray Mapping

QPSK

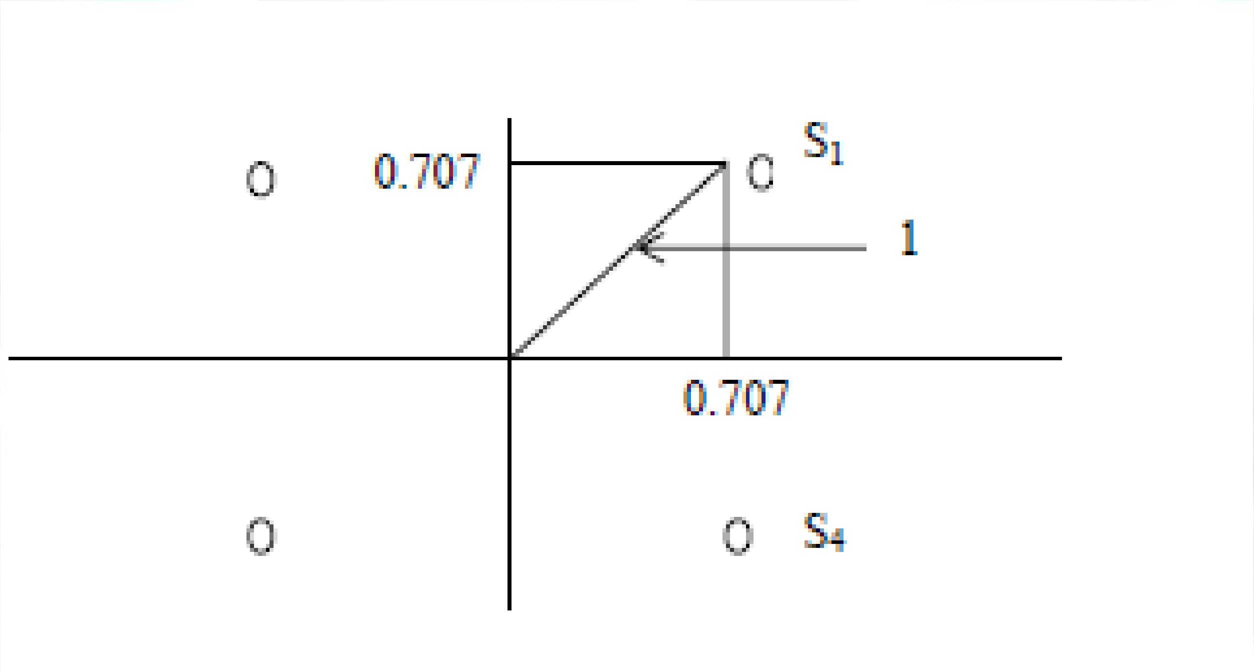
$$\begin{cases} \phi_1(t) = \dfrac{V\cos(2\pi f_c t)}{\sqrt{V^2 T_b}} \\ \phi_2(t) = \dfrac{V\sin(2\pi f_c t)}{\sqrt{V^2 T_b}} \end{cases}, \quad 0 < t < T_s = 2T_b,$$

$$E_s = V^2 T_s$$



Λύση

Αστερισμός…



Λύση

Βασική ζώνη $s_1 = 0.707 + j0.707$

Διέλευση ζώνης $s_1 = 0.707\cos(\omega_c t) + 0.707\sin(\omega_c t)$

$= [\sqrt{(0.707)^2+(0.707)^2}]\cos(\omega_c t + \pi/4)$

$S_2 = -0.707\cos(\omega_c t) + 0.707\sin(\omega_c t)$

$= 1\cos(\omega_c t + 3\pi/4)$

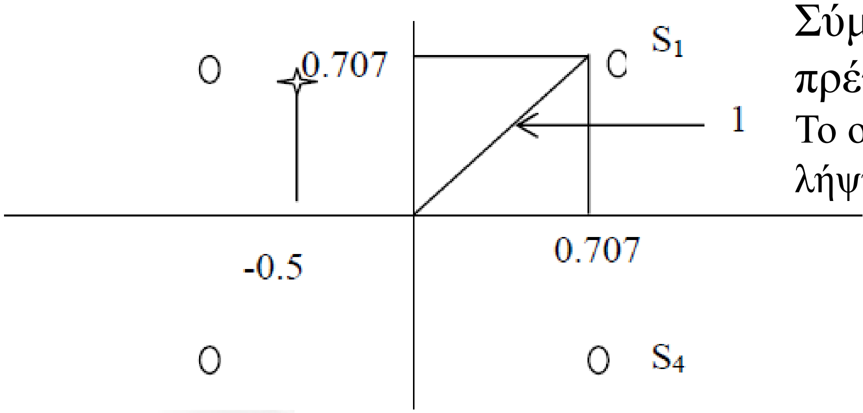
$S_3 = -0.707\cos(\omega_c t) - 0.707\sin(\omega_c t)$

$= 1\cos(\omega_c t + 5\pi/4)$

$S_4 = 0.707\cos(\omega_c t) - 0.707\sin(\omega_c t)$

$= 1\cos(\omega_c t + 7\pi/4)$

Λύση



Σύμφωνα με την maximum likelihood probability πρέπει να επιλεγεί εκείνο το σύμβολο (από τα S_1 S_2 S_3 S_4) Το οποίο έχει την μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το σύμβολο λήψης (το οποίο έχει προβολές **(r_1 , r_2) = (-0.5, 0.7)**)

$$
\begin{aligned}
d(s_1, r) &= \sqrt{(s_{11} - r_1)^2 + (s_{12} - r_2)^2} \\
&= \sqrt{(0.707 - (-0.5))^2 + (0.707 - 0.7)^2} \approx 1.2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(s_2, r) &= \sqrt{(s_{21} - r_1)^2 + (s_{22} - r_2)^2} \\
&= \sqrt{(-0.707 - (-0.5))^2 + (0.707 - 0.7)^2} \approx 0.2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(s_3, r) &= \sqrt{(s_{31} - r_1)^2 + (s_{32} - r_2)^2} \\
&= \sqrt{(-0.707 - (-0.5))^2 + (-0.707 - 0.7)^2} \approx 1.4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(s_4, r) &= \sqrt{(s_{41} - r_1)^2 + (s_{42} - r_2)^2} \\
&= \sqrt{(0.707 - (-0.5))^2 + (-0.707 - 0.7)^2} \approx 1.8
\end{aligned}
$$

Λύση

$$P[\text{error}] = Q\left(\frac{\text{απόσταση μεταξύ των σημάτων}}{2 \times \text{noise RMS value}}\right)$$

$$P_{12} = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$$

$$d_{12}^2 = d^2(s_1, s_2) = (s_{11} - s_{21})^2 + (s_{12} - s_{22})^2$$
$$= (0.707 - (-0.707))^2 + (0.707 - (0.707))^2 = 1.41$$

$$d_{13}^2 = d^2(s_1, s_3) = (s_{11} - s_{31})^2 + (s_{12} - s_{32})^2$$
$$= (0.707 - (-0.707))^2 + (0.707 - (-0.707))^2 = 2$$

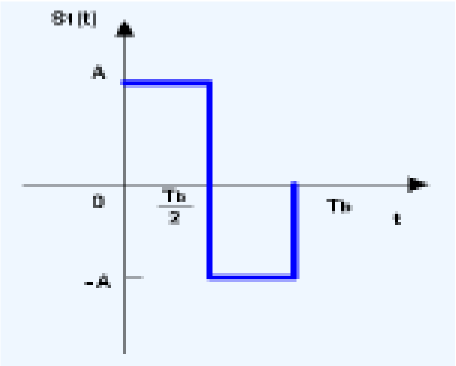
$$d_{14}^2 = d^2(s_1, s_4) = (s_{11} - s_{41})^2 + (s_{12} - s_{42})^2$$
$$= (0.707 - 0.707)^2 + (0.707 - (-0.707))^2 = 1.41$$

$$P_1 = P_{12} + P_{13} + P_{14}$$
$$= Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{d_{13}^2}{2N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{d_{14}^2}{2N_0}}\right)$$

$$P_1 = P_{12} + P_{13} + P_{14} = 2Q\left(\sqrt{\frac{1.41}{2}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2}{2}}\right)$$

Άσκηση

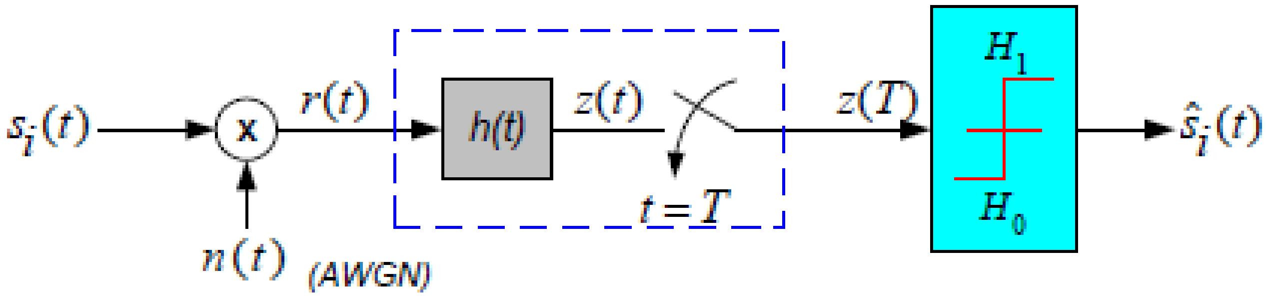
Έστω ένα σύστημα μετάδοσης σε βασική ζώνη το οποίο στέλνει ως bit 1 το σύμβολο $s_1(t)$ και ως bit 0 **το σύμβολο $s_2(t) = 0$** για διάρκεια T_b



1. σχεδιάστε το δέκτη προσαρμοσμένου φίλτρου (matched filter), καθορίστε την κρουστική απόκριση του φίλτρου, και τις τιμές εισόδου στον φωρατή που αναμένονται για κάθε σύμβολο
2. ποιό θα πρέπει να είναι το κατώφλι απόφασης του φωρατή και γιατί
3. αν θεωρήσουμε ότι το λαμβανόμενο σήμα έχει προσθετικό λευκό Gaussian θόρυβο με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση $\sigma_\eta^2 = N_0/2$ δώστε τις υποσυθήκη PDF $f(r|s_1)$ και $f(r|s_2)$
4. για ισοπίθανα σύμβολα, υπολογίστε τη μέση πιθανότητα σφάλματος για αυτή τη διαμόρφωση.

Λύση

1. (ON-OFF signaling)



Ο παραπάνω δέκτης με ένα προσαρμοσμένο φίλτρο $h(t) = s_1(T_b - t)$ αρκεί διότι όταν το εισερχόμενο σύμβολο θα είναι το s_1 τότε θα έχουμε z(T$_b$)=E$_s$=$\int_0^{T_b} s_1^2(t)dt$ ΕΝΩ όταν το εισερχόμενο σύμβολο θα είναι το s_0 τότε θα έχουμε z(T$_b$)= $\int_0^{T_b} h(t)\cdot 0 \cdot dt = 0$

Λύση

2. Επομένως το κατώφλι απόφασης πρέπει να είναι στο μέσο των δύο τιμών, δηλαδή

$$threshold = \gamma_0 = \frac{E_s + 0}{2} = \frac{E_s}{2}$$

$$\textbf{Threshold} = \frac{\hat{s}_{12} + \hat{s}_{22}}{2} + \frac{N_0}{2(\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12})} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

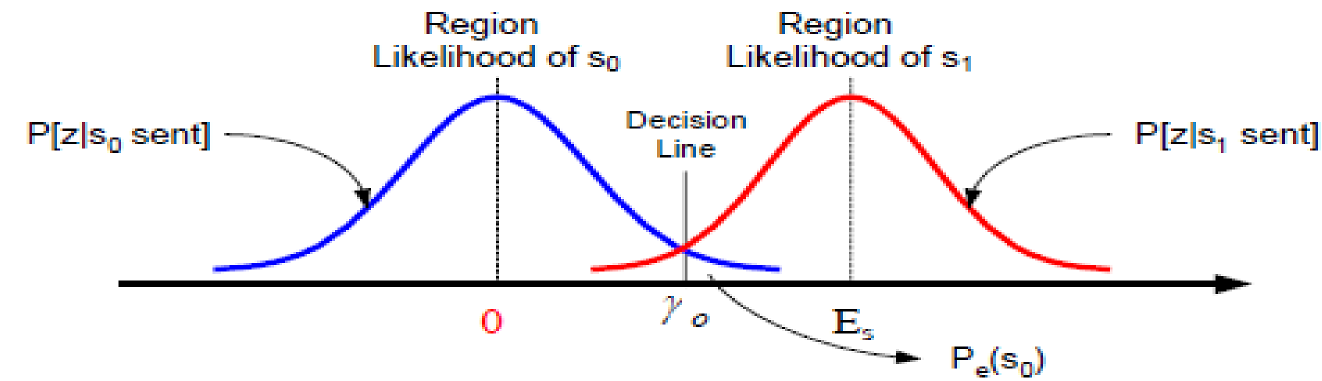
Λύση

3.

Λόγω του θορύβου που προστίθεται στην είσοδο του δέκτη δεν θα έχουμε τις παραπάνω δύο τιμές $z(T_b)$ (για κάθε ένα από τα δύο σύμβολα). Οι τιμές που θα εισέρχονται στο detector (φωρατής) θα είναι τυχαίες μεταβλητές με κατανομή (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας)

$$p(z \mid s_0 \text{ transmitted}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-0)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$p(z \mid s_1 \text{ transmitted}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-E_s)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$



Λύση

$$P_{12} = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)$$

$$P_{21} = Q\left(\sqrt{\frac{d_{21}^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)$$

$$\begin{aligned} P_e &= \Pr(s_1 \text{ sent}) \cdot P_{12} + \Pr(s_2 \text{ sent}) \cdot P_{21} \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση

(α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις βάσης $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Λύση

$$\int \phi_1(t)\phi_2^*(t)dt = \int_0^1 2\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)dt = \int_0^1 \sin(4\pi t)dt =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\cos(4\pi t)\Big|_0^1 = 0.$$

$$\int \phi_1(t)\phi_1^*(t)dt = \int_0^1 2\cos^2(2\pi t)dt = \int_0^1 (1+\cos(4\pi t))dt = 1$$

$$\int \phi_2(t)\phi_2^*(t)dt = \int_0^1 2\sin^2(2\pi t)dt = \int_0^1 (1-\cos(4\pi t))dt = 1.$$

Άσκηση

(β) Θεωρήστε τις παρακάτω διαμορφωμένες κυματομορφές

$$x_0(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(3\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(3\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_5(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_6(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(3\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_7(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(3\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

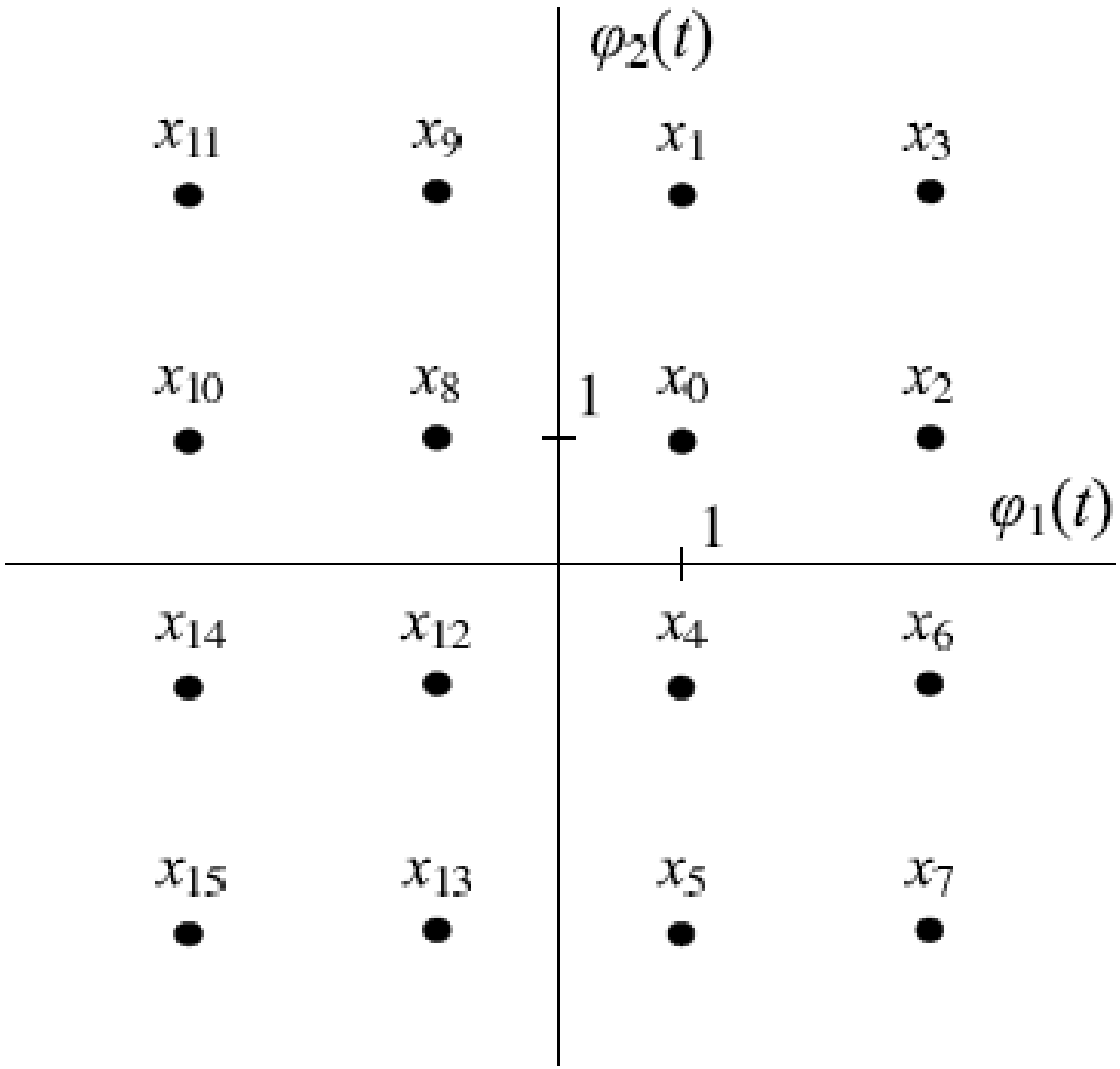
$$x_{i+8}(t) = -x_i(t), \;\; i = 0, \ldots, 7.$$

Σχεδιάστε τον αστερισμό χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις βάσης του ερωτήματος (α).

Λύση

$$x_0(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t) = [1\ 1][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T,$$
$$x_1(t) = \phi_1(t) + 3\phi_2(t) = [1\ 3][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T,$$
$$x_2(t) = 3\phi_1(t) + \phi_2(t) = [3\ 1][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T,$$
$$x_3(t) = 3\phi_1(t) + 3\phi_2(t) = [3\ 3][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T,$$
$$x_4(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = [1\ \ -1][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T,$$
$$x_5(t) = \phi_1(t) - 3\phi_2(t) = [1\ \ -3][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T,$$
$$x_6(t) = 3\phi_1(t) - \phi_2(t) = [3\ \ -1][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T,$$
$$x_7(t) = 3\phi_1(t) - 3\phi_2(t) = [3\ \ -3][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T \text{ και}$$
$$x_{i+8}(t) = -x_i(t),\ \ i = 0, \ldots, 7.$$

Αστερισμός Άσκησης



Άσκηση/Λύση

(γ) Υπολογίστε τη μέση ενέργεια $\mathcal{E}_x$ και τη μέση ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x$

(i) για την περίπτωση που όλα τα σήματα είναι ισοπίθανα.

$$\mathcal{E}_{inner} = 2,\ \mathcal{E}_{side} = 10 \text{ και } \mathcal{E}_{corner} = 18.$$

$$E_{inner} = 1^2 + 1^2 = 2 \qquad E_{side} = 1^2 + 3^2 = 10$$

$$E_{corner} = 3^2 + 3^2 = 18$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{16}(4 \times 2 + 8 \times 10 + 4 \times 18) = 10$$

$\bar{\mathcal{E}}_x = 5$, επειδή ο αστερισμός έχει $N = 2$ διαστάσεις

Άσκηση/Λύση

(ii) για την περίπτωση που $p(x_0) = p(x_4) = p(x_8) = p(x_{12}) = \frac{1}{8}$ και $p(x_i) = \frac{1}{24}$ για τα υπόλοιπα i.

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{8}(4 \times 2) + \frac{1}{24}(8 \times 10 + 4 \times 18) = 1 + 19/3 = 22/3$$

$$\bar{\mathcal{E}}_x = 22/6$$

Η μέση ενέργεια είναι μικρότερη στη δεύτερη περίπτωση επειδή τα εσωτερικά σημεία του αστερισμού (τα οποία έχουν και τη μικρότερη ενέργεια) χρησιμοποιούνται με μεγαλύτερη πιθανότητα από τα υπόλοιπα.

Αστερισμός (Constellation)

Ένα σύνολο M διανυσμάτων (σημάτων) που ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο ονομάζεται Αστερισμός.

Ιδιότητες:

1. Κάθε σήμα αναπαρίσταται σε ένα σημείο του αστερισμού και αντιστοιχεί σε μια διαφορετική κυματομορφή/σύμβολο. Όλες οι κυματομορφές ανήκουν στην ίδια ορθοκανονική βάση.
2. Μέση ενέργεια συμβόλου:

$$E_s = \sum_{i=1}^{M} \left\| s_i \right\|^2 \cdot P_r\left(s_i\right), \quad \left\| s_i \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(s_{ij}\right)^2 \qquad P_r\left(s_i\right) = \text{πιθανότητα μετάδοσης συμβόλου},\ \mathrm{s}_{ij} = \sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau\acute{\omega}\sigma\alpha$$

Η Ελαχιστοποίηση της E_s με σκοπό την Εξοικονόμηση Ενέργειας Εκπομπής απαιτεί την τοποθέτηση των σημείων κοντά στο 0.

Μικραίνουν οι Ευκλείδειες Αποστάσεις μεταξύ των Συμβόλων –

Αυξάνεται η Πιθανότητα Λάθους

Άσκηση

(δ) Έστω

$$y_i(t) = x_i(t) + 4\phi_3(t), \text{ όπου}$$

$$\phi_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Υπολογίστε τη μέση ενέργεια, $\mathcal{E}_y$, του $y(t)$ όταν όλα τα σήματα εισόδου είναι ισοπίθανα.

Λύση

Πρέπει, κατ' αρχήν, να δούμε αν οι $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ και $\phi_3(t)$ αποτελούν σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων.

$$\int \phi_1(t)\phi_3^*(t)dt = \int_0^1 \sqrt{2}\cos(2\pi t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sin(2\pi t)\Big|_0^1 = 0.$$

Ομοίως, $\int \phi_2(t)\phi_3^*(t)dt = 0$. Επίσης, $\int |\phi_3(t)|^2 dt = 1$. Επομένως, οι $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ και $\phi_3(t)$ είναι ορθοκανονικές.

Η ενέργεια κάθε συμβόλου είναι αυξημένη κατά 16 σε σχέση με τα προηγούμενα ερωτήματα. Επομένως, $\mathcal{E}_x = 10 + 16 = 26$ και $\bar{\mathcal{E}}_x = 26/3$.

Παρατηρήστε ότι νέος αστερισμός προκύπτει από τον προηγούμενο με προσθήκη μιας συνεχούς συνιστώσας (DC) πλάτους 4.