Αρχή του Περιστερώνα

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συναρτήσεις

- **Συνάρτηση**: διμελής σχέση $R \subseteq A \times B$ όπου για κάθε $\alpha \in A$, υπάρχει μοναδικό $\beta \in B$ τ.ω. $(\alpha, \beta) \in R$.
  - A: πεδίο ορισμού. B: πεδίο τιμών. $R(\alpha) = \beta$: β εικόνα α (ως προς R).
- f συνάρτηση **1-1**: $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$.
  - Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία με ίδια εικόνα.
- f συνάρτηση **επί**: για κάθε $\beta \in B$, υπάρχει $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$.
  - Κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A.
- f αμφιμονοσήμαντη: 1-1 και επί.
  - f αντιστοιχία μεταξύ στοιχείων A και B.
  - Αντίστροφη f^{-1} είναι συνάρτηση ανν f αμφιμονοσήμαντη.

Αρχή Περιστερώνα

- Αν $|A| > |B|$, **δεν** υπάρχει 1-1 συνάρτηση από A στο B.
  - Για κάθε συνάρτηση f, υπάρχουν $a_1, a_2 \in A$ τ.ω. $f(a_1) = f(a_2)$.
  - Αν n περιστέρια σε m φωλιές και $n > m$, $\exists$φωλιά με ≥ 2 περιστέρια.
- Για κάθε συνάρτηση f από A στο B, υπάρχουν $\geq k = \lceil |A|/|B| \rceil$ $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ με $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_k)$.
  - Αν n περιστέρια σε m φωλιές, $\exists$ φωλιά με $\geq \lceil n/m \rceil$ περιστέρια.
- Τετριμμένα παραδείγματα:
  - Σε κάθε σύνολο 13 ανθρώπων, υπάρχουν ≥ 2 γεννημένοι ίδιο μήνα.
  - Στον κόσμο ζουν ≥ 2 άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο δευτερόλεπτο.
  - Στην Ελλάδα ζουν ≥ 2 άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο πεντάλεπτο.
  - Σε κάθε πάρτυ, υπάρχουν δύο καλεσμένοι με τον ίδιο αριθμό φίλων στο πάρτυ (υποθ: σχέση φίλος συμμετρική, όχι ανακλαστική).

Παραδείγματα

- $\forall$σύνολο 1000 διαφ. φυσικών, υπάρχουν $x \neq y$: $573 \mid (x - y)$.
  - Ποσότητες που αντιστοιχούν σε «περιστέρια» και «φωλιές»;
  - «Περιστέρια»: 1000 φυσικοί.
  - «Φωλιές»: 573 διαφορετικές τιμές για n mod 573.
- Αν επιλέξουμε n+1 διαφορετικούς φυσικούς υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το n.
  - «Περιστέρια»: n+1 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: n υπόλοιπα διαίρεσης με n ({0, 1, …, n-1}).
  - Δύο αριθμοί σε ίδια «φωλιά»: διαφορά τους διαιρείται από n.

Παραδείγματα

- Για κάθε σύνολο 10 (διαφορετικών) φυσικών < 100, υπάρχουν δύο διαφορετικά υποσύνολα με ίδιο άθροισμα.
  - «Περιστέρια»: $2^{10} - 1 = 1023$ διαφορετικά μη κενά υποσύνολα.
  - «Φωλιές»: Πιθανές τιμές για αθροίσματα υποσυνόλων (≤ 946).
- Αν θεωρήσουμε 26 διαφορετικά υποσύνολα του $\{1, ..., 9\}$ με 3 στοιχεία το πολύ, δύο από αυτά έχουν το ίδιο άθροισμα.
  - «Περιστέρια»: 26 διαφορετικά υποσύνολα.
  - «Φωλιές»: Πιθανές τιμές για αθροίσματα υποσυνόλων (≤ 25).

Παραδείγματα

- Αν 7 διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το {1, 2, ..., 11}, 2 από αυτούς αθροίζονται στο 12.
  - «Περιστέρια»: 7 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: 6 «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο 12.
    - {1, 11}, {2, 10}, {3, 9}, {4, 8}, {5, 7}, {6}.
    - {6} «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το 6).
    - Επιλέγουμε και τους δύο αριθμούς κάποιου άλλου ζευγαριού.
- Αν n+1 διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το {1, ..., 2n–1}, 2 από αυτούς αθροίζονται στο 2n.
  - «Περιστέρια»: n+1 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: n «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο 2n.
    - {n} «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το n).

Παραδείγματα

- Αν επιλέξουμε $n+1$ διαφορετικούς φυσικούς από $\{1, 2, ..., 2n\}$, υπάρχουν δύο που είναι σχετικά πρώτοι (μκδ = 1).
  - Αρκεί νδο υπάρχουν δύο αριθμοί α, β: $\beta = \alpha+1$.
  - «Περιστέρια»: $n+1$ επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: n ζεύγη «διαδοχικών» αριθμών στο $\{1, 2, ..., 2n\}$.
    - $\{1, 2\}, \{3, 4\}, ..., \{2n - 1, 2n\}$.
- Αν επιλέξουμε $n+1$ φυσικούς από $\{1, 2, ..., 2n\}$, υπάρχουν δύο που ο ένας διαιρεί τον άλλο.
  - «Περιστέρια»: $n+1$ επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: n περιττοί αριθμοί στο $\{1, 2, ..., 2n\}$.
    - Αριθμός x στη «φωλιά» m ανν m μεγαλύτερος περιττός διαιρέτης του x ($x = 2^k m$, για κάποιο $k \geq 0$).
    - Αριθμοί x και y στην ίδια «φωλιά»: $x = 2^k m$ και $y = 2^s m$, άρα είτε $x \mid y$ είτε $y \mid x$.

Παραδείγματα

- Σε κάθε ακολουθία n^2+1 διαφορετικών αριθμών, είτε αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε φθίνουσα υπακολ. μήκους $n+1$.
  - Υπακολουθία προκύπτει με διαγραφή κάποιων αριθμών.
  - **0,** 8, **4,** **12,** 2, **10,** **6,** 14, 1, **9,** **5,** 13, **3,** **11,** 7, **15, 16**
- Αντιστοιχούμε αριθμό a_k στο (i_k, d_k).
  - i_k (d_k): μήκους μεγαλύτερης αύξουσας (φθίνουσας) υπακολουθίας που τελειώνει στη θέση k.
- Αν όλα $i_k \leq n$ και όλα $d_k \leq n$, #ζευγών $\leq n^2$.
  - Αρχή περιστερώνα: υπάρχουν δύο αριθμοί a_k και a_s $(k < s)$ που αντιστοιχούνται στο ίδιο ζεύγος (x, y).
  - Άτοπο: αν $a_k < a_s$, τότε $i_k < i_s$, ενώ αν $a_k > a_s$, τότε $d_k < d_s$.
  - Για κάθε στοιχείο a_k και ζεύγος (i_k, d_k): είτε $i_{k+1} > i_k$, είτε $d_{k+1} > d_k$
- Διαφορετικά: Αύξουσα υπακολουθία αντιστοιχεί σε αλυσίδα και φθίνουσα υπακολουθία σε αντιαλυσίδα, για μερική διάταξη $\leq$ που λαμβάνει υπόψη σειρά εμφάνισης στην ακολουθία.