Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα
Εργασία: 3η Γραπτή

Διδάσκοντες: Παγουρτζής Α., Σούλιου Δ.,Φωτάκης Δ.

Ονοματεπώνυμο: Σεβαστού Νικολέτα
Α.Μ.: 711514 22 00015
email:nikolesev@gmail.com

ΑΛΜΑ

2023-2024

Άσκηση 1

Λύση

(α) Φτιάχνω την εξής TM που ημι-αποφασίζει τη γλώσσα της εκφώνησης:

-Μετράω το πλήθος των διαφορετικών μεταβλητών της διοφαντικής εξίσωσης P της εισόδου. Έστω αυτό d.

-Έστω μία απαρίθμηση των d-άδων από ακεραίους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

-Υπολογίζω το $P(\alpha_1)$. Αν αυτό είναι 0 αποδέχομαι, αλλιώς συνεχίζω στο $P(\alpha_2)$

-Επαγωγικά, υπολογίζω το $P(\alpha_i)$. Αν αυτό είναι 0 αποδέχομαι, αλλιώς συνεχίζω στο $P(\alpha_{i+1})$

Αν υπάρχει $a \in \mathbb{Z}^d$ τ.ω. $P(a) = 0$ τότε η TM θα σταματήσει σε κάποιο βήμα. Αλλιώς η TM θα κολλήσει. Άρα η γλώσσα ανήκει στο **RE**.

(β) Έστω τυχούσα γλώσσα B στο **RE**. Για αυτή τη γλώσσα υπάρχει TM A που την ημι-αποφασίζει. Μπορώ μάλιστα να θεωρήσω ότι κολλά αντί να απορρίπτει. Ορίζω την συνάρτηση

$\varphi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $\varphi(w) = \langle A, w \rangle$. Θδο η φ είναι αναγωγή. Είναι πλήρης και υπολογίσιμη. Θέτω ακόμη HP να είναι το σύνολο των κωδικοποιήσεων που είναι ανήκουν στο πρόβλημα του τερματισμού, δηλ. $HP = \{\langle M, w \rangle : M(w) \downarrow\}$

-$w \in B \Rightarrow A(w) \downarrow \Rightarrow \phi(w) = \langle A, w \rangle \in HP$

-$w \notin B \Rightarrow A(w) \uparrow \Rightarrow \phi(w) = \langle A, w \rangle \notin HP$

Άρα η φ είναι αναγωγή από την B στο HP. Και επειδή B τυχούσα, το HP είναι **RE**-δύσκολο.

Θδο είναι και στο **RE**. Η παρακάτω TM ημι-αποφασίζει την HP για είσοδο $\langle M, w \rangle$.

-Προσομοιώνω με καθολική TM το $M(w)$

-Αποδέχομαι αν τερματίσει.

(γ) Θέτω $UHP = \{\langle M \rangle : M(w) \downarrow \forall w \in \{0,1\}^*\}$ και $\varphi(w) = \langle A' \rangle$ αν $w = \langle A, b \rangle$ για κάποια TM A και λέξη b, ενώ $\varphi(w) = \langle B \rangle$ αλλιώς, όπου B είναι μια TM που κολλά με όλες τις εισόδους και A′ είναι η εξής TM για είσοδο $a \in \{0,1\}^*$:

-προσομοιώνει $A(b)$ αγνοώντας την είσοδο

-Αποδέχεται αν $A(b) \downarrow$

Θδο η φ είναι αναγωγή. Είναι πλήρης και υπολογίσιμη συνάρτηση και

-$w = \langle A, b \rangle \in HP \Rightarrow A(b) \downarrow \Rightarrow A'(a) \downarrow \forall a \in \{0,1\}^* \Rightarrow \varphi(w) \in UHP$

-$w = \langle A, b \rangle \notin HP \Rightarrow A(b) \uparrow \Rightarrow A'(a) \uparrow$ για κάποιο $a \in \{0,1\}^* \Rightarrow \varphi(w) \notin UHP$

-$w \neq \langle A, b \rangle \notin HP \Rightarrow \varphi(w) = \langle B \rangle \notin UHP$

Άρα $HP \leq_m UHP$ και το πρόβλημα είναι **RE**-δύσκολο.

Άσκηση 2

Λύση

(α) Θεωρώ το πρόβλημα ΚΛΙΚΑ=$\{\langle G,k\rangle : \exists S \subseteq V(G)$ με $|S| > k$ και S : κλίκα$\}$. Τότε το NoLargeClique είναι το συμπλήρωμα του ΚΛΙΚΑ. Το πρόβλημα SAT είναι NP-πλήρες από τη θεωρία. Αρκεί νδο SAT$\leq_p$ ΚΛΙΚΑ, γιατί τότε υπάρχει συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ τ.ω. $x \in$ SAT $\Leftrightarrow f(x) \in$ ΚΛΙΚΑ Ισοδύναμα $x \notin$ SAT $\Leftrightarrow f(x) \notin$ ΚΛΙΚΑ. Άρα η ίδια αναγωγή μας δίνει και UNSAT $\leq_p$ NoLargeClique.

Από τη θεωρία ξέρουμε ότι η $\leq_p$ είναι μεταβατική και τις εξής αναγωγές: SAT $\underbrace{\leq_p}_{(1)}$ **3 SAT** $\underbrace{\leq_p}_{(2)}$ MIS $\leq_p$ MaxClique. Το MaxClique είναι μικρή παραλλαγή του ΚΛΙΚΑ και με παρόμοια αναγωγή αποδεικνύεται ότι το ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες.

Αν οι συναρτήσεις των αναγωγών είναι αντίστοιχα f για (1), g για (2) και h για MIS $\leq_p$ ΚΛΙΚΑ $H = h \circ g \circ f$ είναι πολυωνυμική αναγωγή για UNSAT$\leq_p$NoLargeClique.

(β) Έστω τυχούσα γλώσσα $L \in C$. Ξέρω ότι ισχύει $L \leq_R \Pi$ άρα υπάρχει συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ τ.ω. $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in \Pi$ Ισοδύναμα $x \notin L \Leftrightarrow f(x) \notin \Pi$. Άρα η ίδια αναγωγή μας δίνει και $L' \leq_R \Pi'$ όπου L', Π' είναι τα συμπληρώματα των γλωσσών. Όμως $L', \Pi' \in co-C$ άρα το Π' είναι $co-C$-πλήρες αφού όλες οι γλώσσες του $co-C$ είναι συμπληρώματα κάποιας γλώσσας $L \in C$.

Επειδή το ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες με παρόμοια επιχειρήματα προκύπτει ότι το NoLargeClique είναι **coNP**-πλήρες χωρίς τη χρήση του (α).

(γ) Ξέρουμε ότι $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{coNP} \cap \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{NP}$. Έστω A **NP**-πλήρης γλώσσα. Θεωρώ μια $L \in \mathbf{NP}$ και έχω ότι $L \leq_p A$. Επειδή υποθέσαμε ότι $A \in \mathbf{coNP} \cap \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{coNP}$, υπάρχει MNTM M και πολυώνυμο p τ.ω. για κάθε $u \in \{0,1\}^{p(|f(x)|)}$ $M(f(x), u) = 0$.

Άρα έχουμε ότι για f την αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου από την L στην A, η TM B παρακάτω αποφασίζει τη L σε όσο το πολύ χρόνο θα αποφάσιζε την A συν ένα παράγοντα πολυωνυμικού μεγέθους:
Για είσοδο $w \in \{0,1\}^*$
1.Υπολόγισε $f(w)$ (πολυωνυμικό)
2.Προσομοίωσε $M(f(w))$ και βγάλε την ίδια έξοδο (πολυωνυμική είσοδος και χρόνος όσο αυτός της M για αυτή την είσοδο, άρα δεν βγαίνω έξω από την κλάση). Η αναγωγή έχει την ιδιότητα ότι $x \in L$ ανν $f(x) \in A$ ανν για κάθε $u \in \{0,1\}^{p(|f(x)|)}$ με $M(f(x), u) = 0$ (το u είναι «όχι» πιστοποιητικό). Άρα η TM

αυτή αποφασίζει σωστά την L και $L \in \mathbf{coNP}$.

Προκύπτει δηλ. ότι $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{coNP}$. Με παρόμοια επιχειρήματα αλλά για το συμπλήρωμα της Α (που είναι **coNP**-πλήρες από 2β) και Μ ΜΝΤΜ τ.ω. $x \in A'$ ανν υπάρχει $u \in \{0,1\}^{p(|f(x)|)}$ με $M(x,u) = 1$ προκύπτει ότι $\mathbf{coNP} \subseteq \mathbf{NP}$ και έχω ότι $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.

(δ) Θδο **3 SAT** $\leq_p$ **NAE4SAT** $\leq_p$ **NAE3SAT** όπου **NAEκSAT** είναι το ίδιο πρόβλημα με το **NAE3SAT** μόνο που κάθε όρος του προτασιακού τύπου έχει κ λεξιγράμματα.

Πρακτικά το **NAEκSAT** έχει τους προτασιακούς τύπους για τους οποίους υπάρχει αποτίμηση που δεν δίνει την ίδια τιμή αλήθειας σε όλα τα λεξιγράμματα ενός όρου (για κάθε όρο c_i του τύπου).

Για την 1η αναγωγή για έναν τύπο $\varphi = \wedge_{i=1}^{m} c_i$ σε 3-ΚΣΜ(κανονική συζευκτική μορφή) φτιάχνω $f(\varphi) = \varphi' = \wedge_{i=1}^{m} c_i'$ όπου $c_i' = c_i \vee w_i$ και w_i είναι μια φρέσκια μεταβλητή.

Ισχυρισμός: $\varphi \in$ **3 SAT** $\Leftrightarrow \varphi' \in$ **NAE4SAT**

Ευθύ: Έστω $\varphi \in$ **3 SAT** . Υπάρχει λοιπόν αποτίμηση α που τον ικανοποιεί. Φτιάχνω αποτίμηση $\overline{a}$ που επεκτείνει την α για τις μεταβλητές w_i δίνοντάς τους τιμή 0. Ακόμη και αν όλα τα άλλα λεξιγράμματα ενός όρου παίρνουν τιμή 1 θα έχω ένα διαφορετικό. Αν έχω ήδη διαφορετικές τιμές τότε δεν κάνει διαφορά γιατί ούτως ή άλλως $\varphi' \in$ **NAE4SAT**

Αντίστροφο: Αν $\varphi' \in$ **NAE4SAT** τότε υπάρχει μια αποτίμηση α η οποία ικανοποιεί τον φ′ με NAE τρόπο. Έστω ένας όρος c_i και οι περιπτώσεις (Π1) $a(w_i) = 1$ και (Π2) $a(w_i) = 0$.

Στην (Π2) έχω ότι αναγκαστικά υπάρχει ένα λεξίγραμμα του c_i που ικανοποιείται, άρα $\varphi \in$ **3 SAT** .

Στην (Π1) θέτω αποτίμηση $v(x) = 1 - a(x)$ για όλες τις μεταβλητές x. Επειδή στο φ′ (για κάθε όρο) έχω λεξίγραμμα του c_i που γίνεται ψευδές με την α, με την v θα γίνεται αληθές, άρα ο c_i θα ικανοποιείται. Αυτό θα συμβαίνει για κάθε όρο και άρα η v ικανοποιεί τον φ.

Η αναγωγή είναι και πολυωνυμικού χρόνου γιατί προσθέτω μόνο μία φρέσκια μεταβλητή σε κάθε όρο (αφού δηλ. ελέγξω τις προηγούμενες μεταβλητές που υπάρχουν).

Για την 2η αναγωγή (χρήση [1]) για έναν τύπο $\varphi = \wedge_{i=1}^{m} c_i$ σε 4-ΚΣΜ φτιάχνω $g(\varphi) = \varphi' = \wedge_{i=1}^{m} c_i'$ όπου αν $c_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3} \vee l_{i4}$, $c_i' = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee w_i) \wedge (\neg w_i \vee l_{i3} \vee l_{i4})$ και w_i είναι μια φρέσκια μεταβλητή.

Ισχυρισμός: $\varphi \in$ **NAE4SAT** $\Leftrightarrow \varphi' \in$ **NAE3SAT**

Ευθύ: Έστω $\varphi \in$ **NAE4SAT**. Υπάρχει λοιπόν αποτίμηση α που τον ικανοποιεί με NAE τρόπο. Δηλαδή σε κάθε όρο υπάρχει λεξίγραμμα που αληθεύει. Άρα είτε $(l_{i1} \vee l_{i2} \vee w_i)$ έχει τουλάχιστον ένα λεξίγραμμα του c_i που αληθεύει (Π1), είτε $(\neg w_i \vee l_{i3} \vee l_{i4})$ έχει τουλάχιστον ένα λεξίγραμμα που αληθεύει (Π2). Μπορεί να έχει κάποιος όρος 2 αληθή λεξιγράμματα, αλλά όχι και οι δύο όροι από 2 αληθή λεξιγράμματα.

Στην (Π1) διαλέγω να δώσω τιμή 0 στην w_i ενώ στην (Π2) τιμή 1.

Αντίστροφο: Αν $\varphi' \in$ **NAE3SAT** τότε υπάρχει μια αποτίμηση α η οποία ικανοποιεί τον φ′ με NAE τρόπο. Δεν γίνεται να αληθεύουν και το $(l_{i1} \vee l_{i2} \vee w_i)$ και το $(\neg w_i \vee l_{i3} \vee l_{i4})$ μόνο λόγω του w_i γιατί στο ένα έχω την άρνησή του w_i, ενώ στο άλλο όχι.

(Π1) Αν $\alpha(w_i) = 1$ τότε κάποιο από τα l_{i3}, l_{i4} αληθεύει με την α

(Π2)Αν $\alpha(w_i) = 0$ τότε κάποιο από τα l_{i1}, l_{i2} αληθεύει με την α

Γίνεται να είναι και τα 4 l_{ij} ταυτόχρονα αληθή με την α; Όχι γιατί τότε αν $\alpha(w_i) = 1$ έχω ότι l_{i1}, l_{i2}, w_i και άρα η α δεν ικανοποιεί τον φ′ με NAE τρόπο (άτοπο), ενώ αν $\alpha(w_i) = 0$ έχω ότι $l_{i3}, l_{i4}, \neg w_i$ και άρα η α δεν ικανοποιεί τον φ′ με NAE τρόπο (άτοπο). Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον λεξίγραμμα του c_i που η α κάνει ψευδές.

Η αναγωγή είναι και πολυωνυμικού χρόνου γιατί προσθέτω μόνο μία φρέσκια μεταβλητή σε κάθε όρο (αφού δηλ. ελέγξω τις προηγούμενες μεταβλητές που υπάρχουν).

Η σύνθεση $f \circ g$ είναι αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου από το **3 SAT** στο **NAE3SAT**.

Ένα πιστοποιητικό είναι μια αποτίμηση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές του τύπου που τον ικανοποιεί, το οποίο είναι πολυωνυμικού μεγέθους ως προς την είσοδο.

(ε) Θέτω $VC = \{\langle G, k\rangle : \exists S \subseteq V(G)$ με $|S| \leq k$ και $G\backslash S$: χωρίς ακμές$\}$. Ορίζω συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ τ.ω. $f(\langle G, k\rangle) = \langle V(G), \mathcal{T}, k\rangle$, όπου $\mathcal{T} = \{N_G(v_i) \cup \{v_i\} : 1 \leq i \leq n\}$[1] και $v_1, \ldots, v_n$ είναι οι κορυφές του γραφήματος.

Η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου, γιατί μπορώ να κατασκευάσω τη γειτονιά μιας κορυφής σε γραμμικό χρόνο και να φτιάξω την οικογένεια συνόλων $\mathcal{T}$.

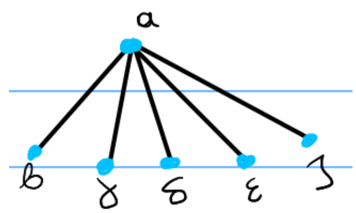
Ευθύ: Έστω $\langle G, k\rangle \in VC$. Τότε υπάρχει κάλυμμα S για το γράφημα μεγέθους το πολύ κ. Δηλαδή $\exists S \subseteq V(G)$ με $|S| \leq k$ και $G\backslash S$ να μην έχει ακμές.

Για κάθε ακμή e ένα άκρο της τουλάχιστον ανήκει στο S. Άρα για κάθε κορυφή ισχύει ότι είτε αυτή, είτε κάποιος γείτονάς της ανήκει στο S. Άρα από κάθε $N_G(v_i) \cup \{v_i\}$ έχει επιλεγεί ένας τουλάχιστον αντιπρόσωπος στο S και σύνολο οι αντιπρόσωποι είναι το πολύ κ. Άρα $\langle V(G), \mathcal{T}, k\rangle$ ανήκει στο πρόβλημα επιλογής αντιπροσώπων.

Αντίστροφο: Αν $\langle V(G), \mathcal{T}, k\rangle$ ανήκει στο πρόβλημα επιλογής αντιπροσώπων, υπάρχει σύνολο $R \subseteq V(G)$ με πληθάριθμο το πολύ κ και από κάθε

[1] $N_G(v)$ είναι η γειτονιά της κορυφής v

$N_G(v_i) \cup \{v_i\}$ έχει επιλεγεί ένας αντιπρόσωπος, δηλ. για κάθε κορυφή είτε η ίδια, είτε κάποιος γείτονάς της ανήκει στο R. Τα σύνολα $N_G(v_i) \cup \{v_i\}$ είναι υπογραφήματα του G με μορφή άστρου.



Αν στο R έχω επιλέξει για το $N_G(v_i) \cup \{v_i\}$ την v_i τότε είμαι εντάξει γιατί έτσι καλύπτονται όλες οι ακμές που πρόσκεινται σε αυτή την κορυφή. Αν όχι (και έχω επιλέξει κάποιο φύλλο του άστρου) τότε μπορώ να αφαιρέσω από το R το φύλλο και να βάλω την v_i στη θέση του. Έτσι δημιουργείται ένα κάλυμμα κορυφών που δεν μπορεί να έχει πάνω από κ κορυφές αφού δεν πρόσθεσα κάτι στο R.

Ένα πιστοποιητικό είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων το οποίο είναι πολυωνυμικού μεγέθους ως προς την είσοδο.

Άσκηση 3

Λύση

(α) Το **πρώτο** που θέλουμε να δείξουμε είναι εύκολο. Αν στο τέλος του αλγορίθμου υπήρχε ακάλυπτη ακμή θα είχαμε άτοπο γιατί αυτό θα σήμαινε πως για κάποια ακμή κανένα άκρο της δεν ανήκει στο C και άρα ο βρόχος του «όσο» δεν θα τερμάτιζε.

Για το **δεύτερο** θεωρώ $H = \{e \in E(G) : c(e) = 0\}$ στο τέλος του αλγορίθμου. Παρατηρώ ότι κάθε ακμή «πληρώνει» για να καλυφθεί όσο το ελάχιστο βάρος κάποιου από τα 2 άκρα της. Επίσης, παρατηρώ ότι κάθε φορά που πετυχαίνω ακμή προσκείμενη σε κάποια κορυφή «αφαιρώ» λίγο από το βάρος της, άρα στο τέλος του αλγορίθμου (αφού προσθέτω στο C μόνο όταν έχω «αφαιρέσει» όλο το βάρος της κορυφής) για κάθε κορυφή α του C $\sum_{e=\{\alpha,v\}:\{v,\alpha\}\in E(G)} c(e) = w(\alpha)$, όπου κάποιες προσκείμενες στην α ακμές θα έχουν $c(\cdot) = 0$.

Άρα έχω το εξής:

$$\sum_{v\in C} w(v) = \sum_{v\in C} \sum_{e=\{\alpha,v\}:\{v,\alpha\}\in E(G)\setminus H} c(e) + \sum_{v\in C} \sum_{e=\{\alpha,v\}:\{v,\alpha\}\in H} 0$$

Επειδή για κάθε ακμή του $E(G)\backslash H$ (αντίστοιχα για το H αλλά είναι μηδενικά τα $c(\cdot)$) μετράω δύο φορές το $c(\cdot)$ (μία για κάθε άκρο) έχω από την ότι

$$\sum_{v\in C} w(v) \leq 2 \sum_{e=\{\alpha,v\}:\{v,\alpha\}\in E(G)\backslash H} c(e) + 2 \sum_{e=\{\alpha,v\}:\{v,\alpha\}\in H} 0 = 2 \sum_{e=\{\alpha,v\}:\{v,\alpha\}\in E(G)} c(e)$$

Για το **τρίτο** θδο ισχύει με τη βοήθεια της επαγωγής

Βάση: Πριν το βρόχο «όσο» το C είναι κενό και τα $c(e)$ είναι όλα μηδέν. Στην πρώτη επανάληψη, αν ο βρόχος εκτελείται για την $e = \{a, b\} \in E(G)$ έχω ότι $\delta = \min\{t(a), t(b)\} = c(e)$. Ταυτόχρονα $t(a) = w(a), t(b) = w(b)$. Άρα το $c(e)$ είναι μικρότερο από $w(a), w(b), w(a) + w(b)$. Συνεπώς σε όλες τις περιπτώσεις, είτε $a \in C$ (και η b έχει μεγαλύτερο βάρος), είτε $b \in C$ (και η a έχει μεγαλύτερο βάρος), είτε $a, b \in C$ (και έχουν ίσο βάρος) ισχύει η ανισότητα.

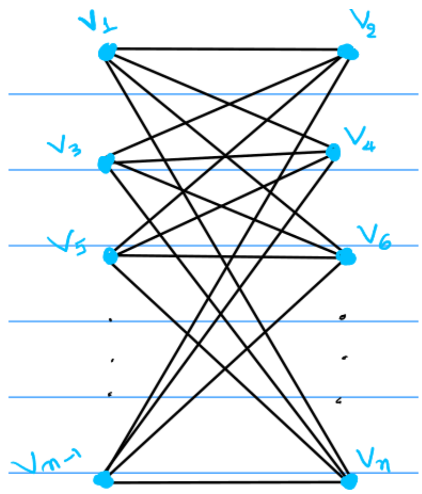
Επαγωγικό βήμα: Αν συνολικά ο βρόχος τρέχει μέχρι να τερματίσει για λ βήματα και έχω την Ε.Υ. ότι το ζητούμενο ισχύει για $\kappa < \lambda$ θδο ισχύει για $\kappa + 1$. Έστω $e' = \{a, b\}$ η προς εξέταση ακμή (δηλ είναι ακάλυπτη σε αυτό το γύρο). $\delta = \min\{t(a), t(b)\} = c(e)$. Ταυτόχρονα $t(a) = w(a)$, $t(b) = w(b)$. Άρα το $c(e)$ είναι μικρότερο ή ίσο από $w(a)$, $w(b)$, $w(a) + w(b)$ (*). Αν C είναι το «κάλυμμα» έως τώρα και $H = \{e \in E(G) : c(e) = 0\}$ (έως τώρα) τότε από Ε.Υ. έχω ότι $\sum_{e\in E(G)\backslash H} c(e) \leq \sum_{v\in C} w(v)$ και σε κάθε περίπτωση[2] από πρόσθεση κατά μέλη λόγω της (*) προκύπτει ότι $\sum_{e\in(E(G)\backslash H)\cup\{e'\}} c(e) \leq \sum_{v\in C'} w(v)$ με C' να είναι το σύνολο που θα προκύψει στο τέλος του $(\kappa + 1)$-οστου βήματος.

Αν τελειώνοντας ο αλγόριθμος το σύνολο $E(G)\backslash H$ είναι μη-κενό υποσύνολο του συνόλου των ακμών τότε $\sum_{e\in E(G)} c(e) = \sum_{e\in E(G)\backslash H} c(e) + \sum_{e\in H} c(e) = \sum_{e\in E(G)\backslash H} c(e) + 0 \leq \sum_{v\in C} w(v)$ όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την επαγωγή παραπάνω.

Αν $E(G)\backslash H = E(G)$ στο τέλος του αλγορίθμου τότε έχω πάλι το ζητούμενο από την επαγωγή.

Για το γράφημα της εικόνας με βάρη κορυφών $w(v_i) = i$ για κορυφές περιττού δείκτου και $w(v_i) = i - 1$ για κορυφές άρτιου δείκτου έχουμε ότι έχει βέλτιστη λύση την επιλογή των κορυφών $\{v_1, v_3, .., v_{n-1}\}$ με βάρος $1 + 3 + 5 + ... + n - 1 = \frac{n^2}{4}$ ενώ το κάλυμμα που υπολογίζεται είναι το $V(G)$ με συνολικό βάρος $2\frac{n^2}{4}$.

[2] Προσθέτω μία μόνο κορυφή ή και τις 2 στο C.



Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\sum_{e\in E(G)} c(e) \leq \sum_{v\in C^*} w(v) \leq \sum_{v\in C} w(v) \leq 2\sum_{e\in E(G)} c(e)$ όπου C^* είναι το κάλυμμα της βέλτιστης λύσης. Συνεπώς πετυχαίνω λόγο προσέγγισης 2. (β) Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος A με λόγο προσέγγισης $\kappa \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ για το TSP[3]. Ορίζω την εξής συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ τ.ω.

-αν $\{0,1\}^* \ni w = \langle G\rangle$ για κάποιο γράφημα G με $|V(G)| = n$ τότε $f(w) = \langle G', c, kn\rangle$ όπου G' είναι το πλήρες γράφημα n κορυφών,

$$c(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ αν } (u,v)\in E(G) \\ n\cdot k, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

-αν $\{0,1\}^* \ni w \neq \langle G\rangle$ για κάθε γράφημα G τότε $f(w) = \langle G'', c, kn\rangle$ όπου G'' είναι ένα (οποιοδήποτε) δέντρο n κορυφών,

$$c(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ αν } (u,v)\in E(G) \\ n\cdot k, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Θδο η f είναι αναγωγή. Ισχυρισμός $w \in HC$ ανν $f(w) \in TSP$

Ευθύ: Αν $\langle G\rangle \in HC$ υπάρχει απλός κύκλος $(a_1, ..., a_n, a_1)$ που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του G. Οι ακμές (a_i, a_{i+1}) για $1 \leq i \leq n-1$ και (a_n, a_1) είναι ακμές του G, άρα στο G' έχουν βάρος 1. Συνολικά δηλ. οι ακμές του κύκλου αυτού έχουν βάρος $n \leq kn$

Αντίστροφο: Αν $\langle G', c, l\rangle \in TSP$ υπάρχει απλός κύκλος $(a_1, ..., a_n, a_1)$ που περιλαμβάνει όλες τις ακμές του G' και οι κορυφές του κύκλου αυτού έχουν συνολικό βάρος $\leq kn$. Αν υπήρχε σε αυτό τον κύκλο ακμή που δεν ανήκει

[3] TSP $= \{\langle G, c, l\rangle : G = (V, E)$: πλήρες μη-κατευθυνόμενο γράφημα, $c : V \times V \to \mathbb{N}$: συν/ση, $k \in \mathbb{N}, G$ έχει περιοδεία με κόστος το πολύ $l\}$ και HC $= \{\langle G\rangle : G = (V, E)$: μη-κατευθυνόμενο γράφημα G έχει χαμιλτονιανό κύκλο$\}$

στο G τότε το συνολικό βάρος των ακμών θα ήταν $\geq kn + 2$. Άρα όλες οι ακμές του κύκλου θα ανήκουν στο G και συνεπώς έχω απλό κύκλο στο G μήκους n.

Η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου γιατί συμπληρώνω ακμές και βάρη μόνο. Άρα υπάρχει αλγόριθμος Δ πολυωνυμικού χρόνου που την υπολογίζει.

Ισχυρισμός: ο παρακάτω αλγόριθμος Β αποφασίζει σε πολυωνυμικό χρόνο το HC.

Για είσοδο $w \in \{0,1\}^*$

-αν $w\langle G\rangle$ (ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο) υπολογίζω το $f(w)$ με τον Δ.

-Τρέχω για είσοδο $f(w)$ τον Α.

-Αν αποδεχθεί αποδέχομαι. Αν απορρίψει, απορρίπτω.

Λόγω της αναγωγής ο Β αποδέχεται ανν η είσοδος ανήκει στο HC. Πράγμα που είναι άτοπο εκτός και αν $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Πηγές

1. How do I reduce 3-SAT to a 3-SAT NAE problem?
2. Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα, πρόχειρες σημειώσεις, Ζάχος
3. CLRS
4. Tardos, Kleinberg παράγραφος 11.4
5. θεωρία αναδρομής, πρόχειρες σημειώσεις, Ζώρος
6. Williamson, Shmoys, The Design of approximation algorithms
7. V. Vazirari, Shmoys, Approximation algorithms