Θεώρημα Routh – Hurwitz

i) • Αν η διάταξη Routh τερματισθεί κανονικά τότε ο αριθμός των πόλων στο δεξί ημιεπίπεδο ισούται με τον αριθμό εναλλαγών προσήμου της $1^{ης}$ στήλης της δ. Routh.

• Επιπλέον, αν η $1^η$ στήλη δεν έχει αλλαγές προσήμου τότε ασυμπτωτική ευστάθεια.

ii) • Αν ένα από τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης μηδενίζεται ενώ στην ίδια γραμμή $\exists$ μη-μηδενικά στοιχεία με παράμετρο ε ίδιου προσήμου με το $1^ο$ στοιχείο της αμέσως πιο πάνω γραμμής.

• Συνεχίζουμε τον υπολογισμό συναρτήσει του ε. Αν και άλλο στοιχείο $1^{ης}$ μηδενίζεται στη συνέχεια ενώ στην υπ' όψη γραμμή $\exists$ μη-μηδενικά στοιχεία, επαναλαμβάνουμε με παράμετρο η, κ.ο.κ.

• Εξετάζονται τα πρόσημα της $1^{ης}$ στήλης καθώς $\varepsilon \to 0, \eta \to 0$, κ.ο.κ. Ισχύει το συμπέρασμα (i)

iii) • Αν μία ολόκληρη γραμμή μηδενίζεται. Τότε θεωρούμε το βοηθητικό πολυώνυμο $B(s)$ που αντιστοιχεί στην αμέσως παραπάνω γραμμή, και αντικαθιστούμε την γραμμή που μηδενίζεται με τους συντελεστές του $\frac{dB(s)}{ds}$. Συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας αν μηδενισθεί και άλλη γραμμή.

a) αν μόνο μία γραμμή της δ. Routh μηδενίζεται και η $1^η$ στήλη δεν αλλάζει πρόσημο, τότε το σύστημα είναι οριακά ευσταθές (ευσταθές κατά Lyapunov αλλά όχι ασυμπτ. ευσταθές) και εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις σε συχνότητες ω_τ των $B(\pm j\omega_\tau)=0$.

β) αν περισσότερες γραμμές μηδενίζονται τότε ας είναι s_i οι ρίζες του $1^{ου}$ $B(s)$ και μ_i οι αντίστοιχες πολλαπλότητες. Αν ισχύουν $\operatorname{rank}\{s_i I - A_n\} = n - \mu_i$, $i=1,\dots,\rho$ τότε οριακή ευστάθεια με συχν. ταλάντωσης τα s_i. Αλλιώς, αστάθεια.

Παράδειγμα

$\varphi(s)=s^3+s^2+ks+8$

s^3	1	k	0
s^2	1	8	0
s^1	$k-\frac{1\cdot 8}{1}$	0	0
s^0	8	0	0

• $k>8$: ασυμ. ευστ. • $k<8$: ασταθ. με 2 πόλους δεξιά

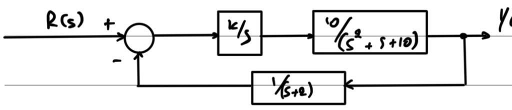
• $k=8$: $B(s)=s^2+8$, $\frac{dB(s)}{ds}=2s$

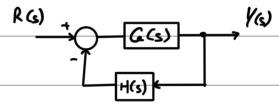
άρα ταλαντώσεις συχνότητας ω_τ των: $B(\pm j\omega_\tau)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\pm j\omega_\tau)^2+8=0 \rightarrow \boxed{\omega_\tau=\sqrt{8}}$

s^3	1	k	0
s^2	1	8	0
~~s^1~~	~~0~~	~~0~~	
$(s^1)'$	2	0	0
s^0	8	0	0

Παράδειγμα





$G_{κλ}(s)=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$

$$G_{κλ}(s)=\frac{\frac{k}{s}\cdot\frac{10}{s^2+s+10}}{1+\frac{1}{s+2}\cdot\frac{k}{s}\cdot\frac{10}{s^2+s+10}}=\frac{10k(s+2)}{s(s+2)(s^2+s+10)+10k} \Rightarrow \varphi(s)=s(s+2)(s^2+s+10)+10k=s^4+3s^3+12s^2+20s+10k$$

s^4	1	12	$10k$	0
s^3	3	20	0	0
s^2	$12-\frac{20}{3}=\frac{16}{3}$	$10k$	0	0
s^1	$20-\frac{30k}{16/3}=\frac{320-90k}{20}$	0	0	0
s^0	$10k$	0	0	0

• Ασυμπτ. ευστ: $320-90k>0$, $10k>0 \Rightarrow 0<k<32/9$

• Αν $k>32/9$: αστάθεια με 2 πόλους στο δεξί ημιεπίπεδο.

• Αν $k<0$: αστάθεια με 1 πόλο στο δ.η.

• Αν $k=32/9$: $B(s)=\frac{16}{3}s^2+\frac{320}{9} \Rightarrow \frac{dB(s)}{ds}=\frac{32}{3}s$

• 1η στήλη ομόσημη : οριακά ευστ. , ταλαντ. σε συχν. $B(s)=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{\frac{20}{3}} \Rightarrow \omega_z=\sqrt{\frac{20}{3}}$

• $k=0$: $\psi(s)=s\,(s^3+3s^2+12s+20)$

Απόκριση μηδενικής εισόδου: $X(s)=\dfrac{adj(sI-A)\,x(0)}{s(s^3+3s^2+12s+20)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2 s^2+A_3 s+A_4}{s^3+3s^2+12s+20}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{A_1}{s}\right\}+\tilde{x}(t)$, με: $\lim_{t\to\infty}\{\tilde{x}(t)\}=0$, $=A_1+\tilde{x}(t)$, $t\geq 0$

$\Rightarrow$ ευσταθές κατά Lyapunov αλλά όχι ασυμπτωτ. ευσταθές

Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου

$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \xRightarrow{u(k)=0} x(k+1)=Ax(k)$ αντίστοιχο αυτόνομο

• Σημεία ισορροπίας: $\bar{x}=A\bar{x} \Rightarrow \bar{x}=0$ αν $\det\{A-I\}\neq 0$

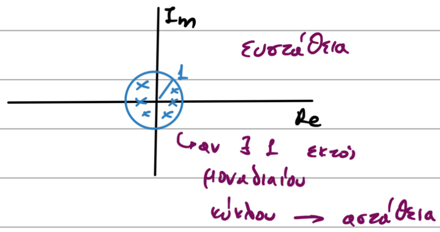
a) Ευστάθεια από την θέση πόλων: $x(k+1)=Ax(k) \Rightarrow x(k)=A^k x(0)$, $k\in N^*$

Αν $A=P\Lambda P^{-1}$ όπου $\Lambda=diag\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ και $Ap_i=\lambda_i\cdot p_i$, $i=1,\dots,n$

τότε $A^k=(P\Lambda P^{-1})^k=P\Lambda^k P^{-1}$ οπότε $x(k)=P\Lambda^k P^{-1}x(0)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^k w_i$

Θεώρημα

Αν $|\lambda_i|<1$, $i=1,\dots,n$ τότε $\lim_{k\to\infty}\{x(k)\}=0=\bar{x}$, δηλ ασυμπτωτική ευστάθεια. Αν $\exists j\in\{1,\dots,n\}$ των $|\lambda_j|>1$ τότε ευστάθεια.



Χαρακτ. πολυώνυμο: $\varphi(z)=\det\{zI-A\}$