ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 34

Διάλεξη: 11 Ιανουαρίου 2021

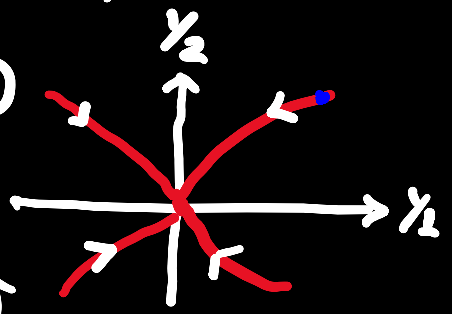
Προηγούμενα επεισόδια: Ποιοτική Λύση Συστημάτων ΔΕ

Κρίσιμα σημεία: $y_1' = f(y_1, y_2)$ $\quad y_2' = g(y_1, y_2) \longleftrightarrow \underline{f(y_1^*, y_2^*) = 0} \quad \underline{g(y_1^*, y_2^*) = 0}$

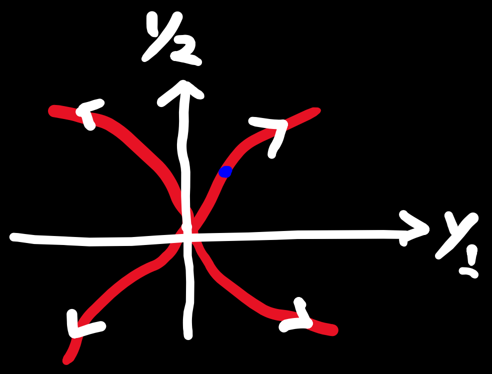
$\boxed{\bar{y}' = \underline{\underline{A}}\,\bar{y}}$ όπου $\underline{\underline{A}}$ πίνακας 2x2 με σταθερές; λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του

Κρίσιμο σημείο $(0,0)$

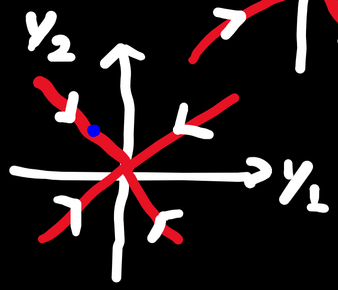
1. Κόμβος: $\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$



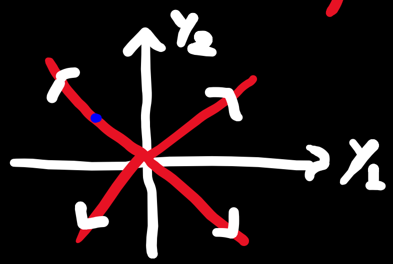
$\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$



2. Οριακός κόμβος: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

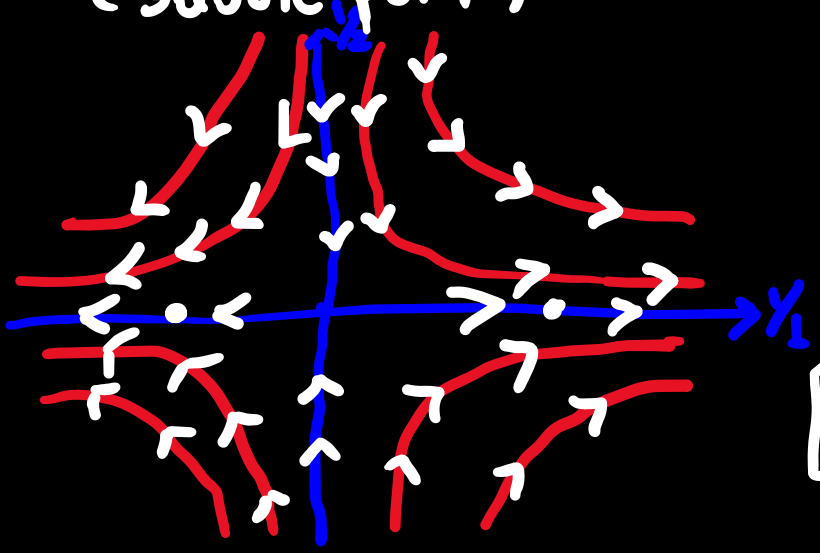


3. Σαγματικό σημείο: $\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0$

(3) Σαγματικό σημείο:
(saddle point)

$$\bar{y}' = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\bar{y} \checkmark \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

$y_1 = C_1 e^{t}$ ✓
$y_2 = C_2 e^{-t}$ ✓ $\quad y_1 y_2 = C$ (υπερβολή)



$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1 = 1$ $\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_1$

$-x_2 = x_2 \Rightarrow x_2 = 0 \quad \Rightarrow \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

Для — Για $\lambda_2 = -1$ $\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_1 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

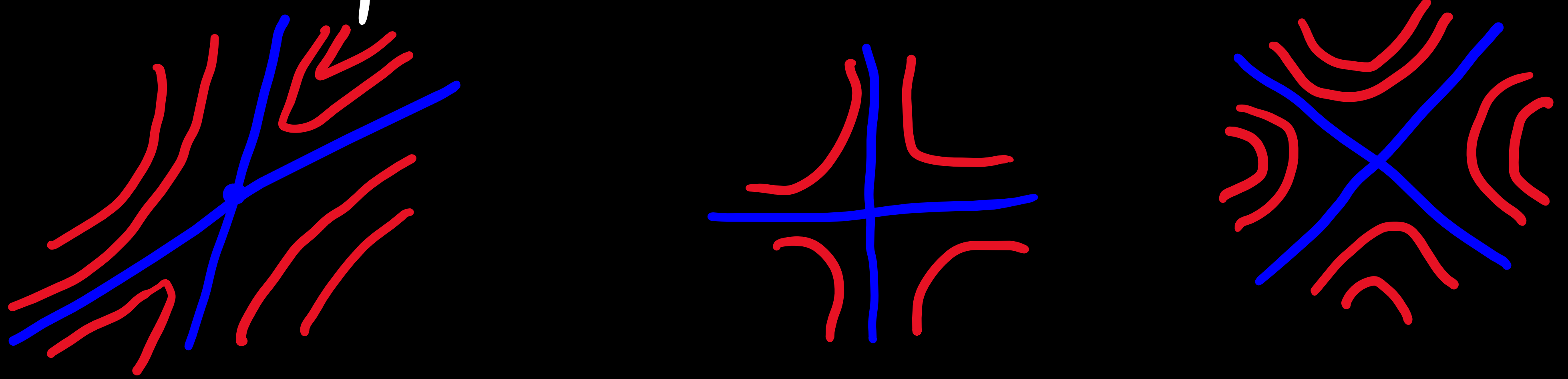
$-x_2 = -x_2$ ✓

Διαλέγω $(4,0)$: $\dfrac{dy_1}{dt} = y_1 = 4 > 0 \rightarrow y_1 \uparrow \Rightarrow$ δεξιά

$y_1' = y_1$
$y_2' = -y_2$

$\left((-4,0) \rightarrow \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 = -4 < 0 \Rightarrow y_1 \downarrow \Rightarrow \text{αριστερά}\right)$

<u>Παρατήρηση</u>: Στα σαγματικά σημεία οι υπερβολές είναι μεταξύ των ιδιοδιανυσμάτων.



Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα, τα ζωγραφίζουμε και μετά βάζουμε τις τροχιές.

(4) Κέντρο (center)

Παράδειγμα: $y_1' = y_2$, $y_2' = -4y_1$ $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

φανταστικές ιδιοτιμές

Ιδιοτιμές: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

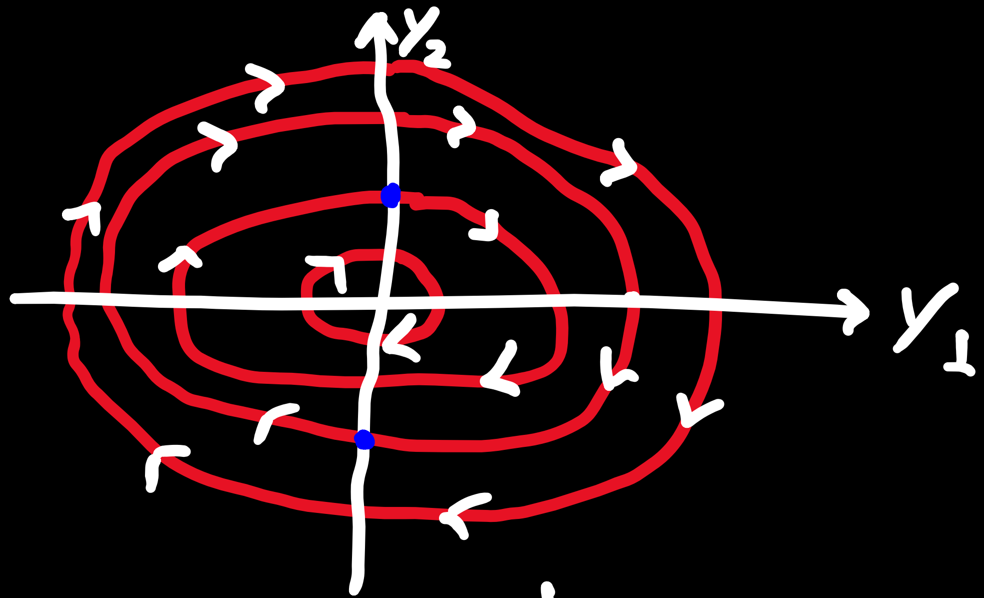
Ιδέα: Διαίρεση ΔΕ

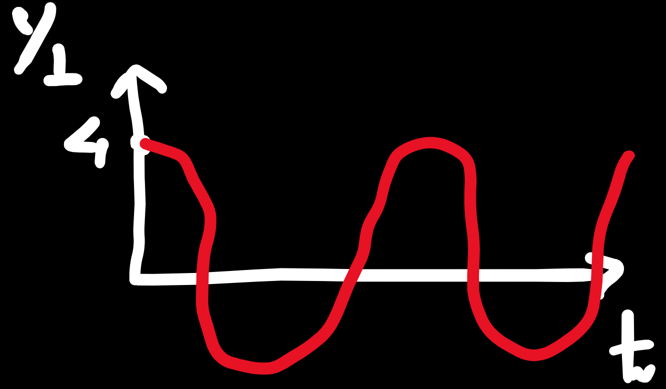
$$\frac{dy_1/\cancel{dt}}{dy_2/\cancel{dt}} = \frac{y_2}{-4y_1} \Rightarrow -4y_1\,dy_1 = y_2\,dy_2$$

$$\Rightarrow -4\int y_1\,dy_1 = \int y_2\,dy_2 + K \Rightarrow -4\frac{y_1^2}{2} = \frac{y_2^2}{2} + k \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{-k} = 2y_1^2 + \frac{y_2^2}{2}$$

ελλείψεις

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -4y_1$$





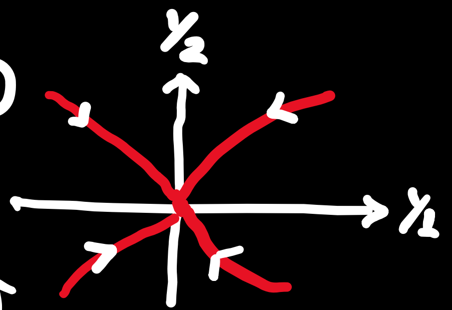
Μελετώ το $(4,0)$: ↑ ή ↓ $\quad \dfrac{dy_2}{dt} = -4\,4 = -16 < 0 \Rightarrow y_2 \downarrow$ κάτω

[$(0,-3)$ Αριστερά ή δεξιά $\quad \dfrac{dy_1}{dt} = -3$ αριστερά ✓

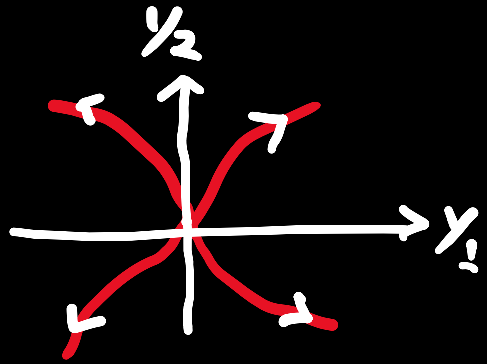
$(0,3)$ Αριστερά ή δεξια $\quad \dfrac{dy_1}{dt} = 3$ δεξιά ✓]

Προηγούμενα επεισόδια: Ποιοτική Λύση Συστημάτων ΔΕ

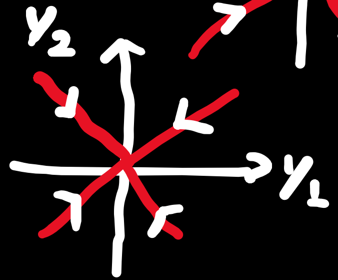
1. Κόμβος: $\lambda_1<0 \quad \lambda_2<0$
$\lambda_1\neq\lambda_2$



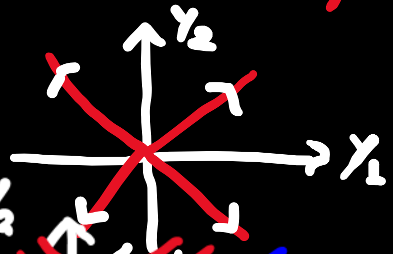
$\lambda_1>0 \quad \lambda_2>0$
$\lambda_1\neq\lambda_2$



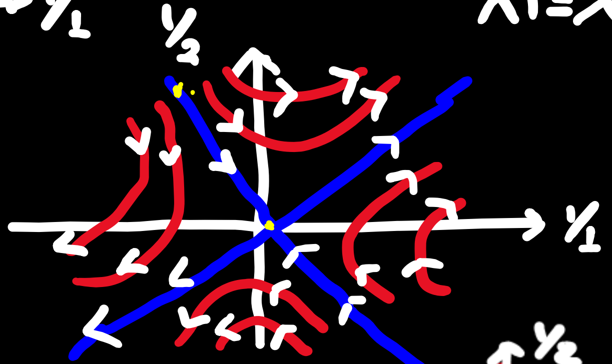
2. Οριακός κόμβος: $\lambda_1=\lambda_2<0$

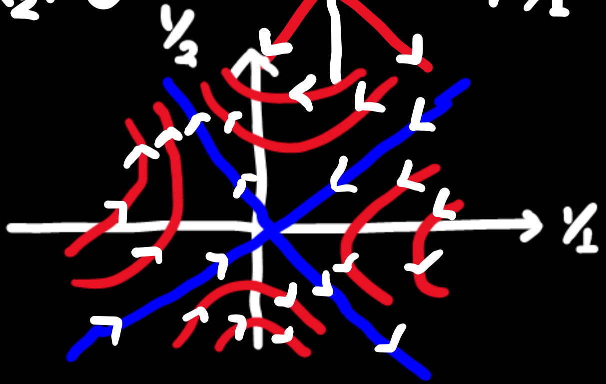


$\lambda_1=\lambda_2>0$

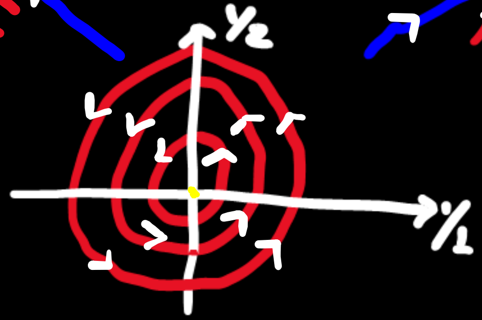


3. Σαγματικό σημείο: $\lambda_1>0 \quad \lambda_2<0$

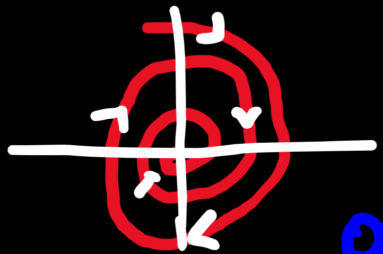


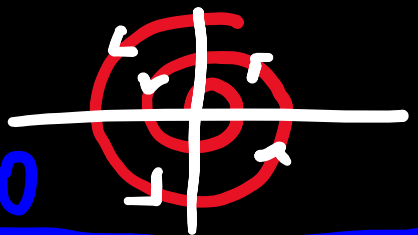


4. Κέντρο $\lambda=\pm\beta i$

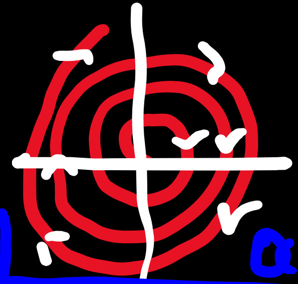


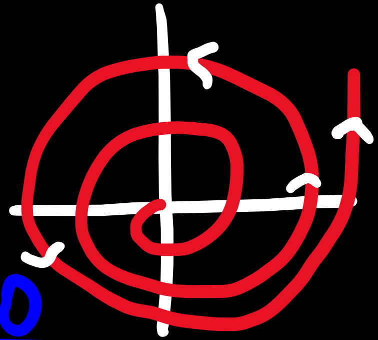
5. Σπείρα (spiral) $\lambda=\alpha\pm\beta i$





$\alpha<0$



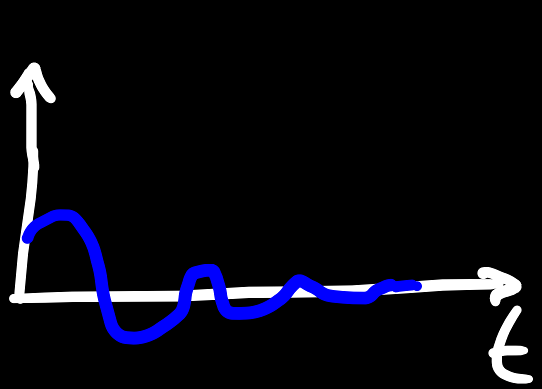


$\alpha>0$

Παράδειγμα: Φασικό διάγραμμα του

$$y_1' = -y_1 + y_2$$
$$y_2' = -y_1 - y_2$$

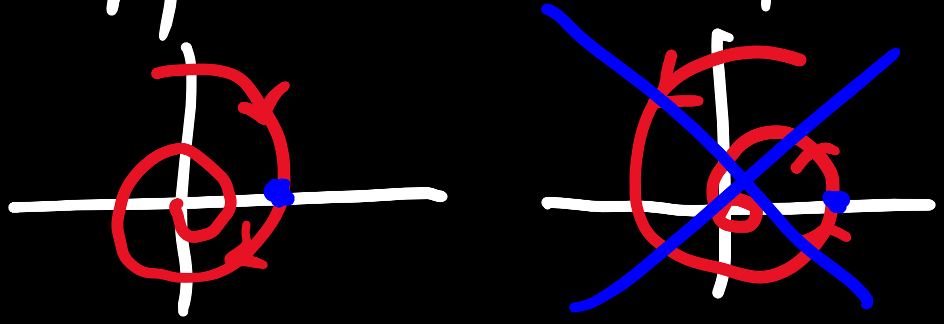
$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$



Ιδιοτιμές: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1+\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = -1 \Rightarrow \lambda + 1 = \pm i$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -1 \pm i}$$

Μιγαδικά λ, με $a<0$ → σπείρα → Ø



ωρολογιακή σπείρα.

Πάνω ή κάτω $(4,0)$

$$\frac{dy_2}{dt} = -4-0 < 0 \Rightarrow y_2 \downarrow$$

⇒ κάτω

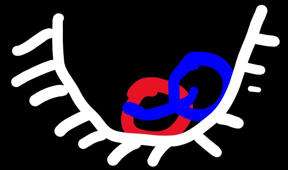
10.4 Ευστάθεια κρίσιμων σημείων

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημά σας έφτασε σε κατάσταση ισορροπίας (κρίσιμο σημείο) $\rightarrow$ $\dfrac{dy_1}{dt}=0 \quad \dfrac{dy_2}{dt}=0$

Τι θα συμβεί αν μετακινηθεί ελάχιστα από αυτό το σημείο;

Υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

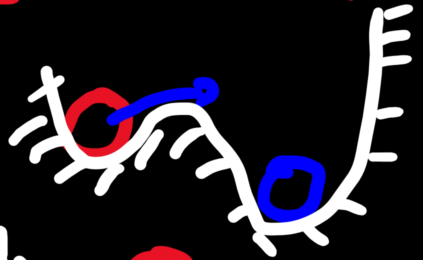
1 Θα ξαναγυρίσει

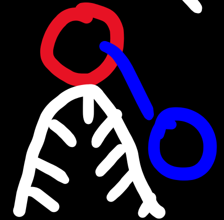


ΕΥΣΤΑΘΕΣ

2. Θα πάει κάπου αλλού

2α Σε άλλη κατάσταση ισορροπ.





2β Στο άπειρο

2γ Ταλάντωση

ΑΣΤΑΘΕΣ

Για ποιές τιμές των ιδιοτιμών του ένα σύστημα ευσταθές; Πρέπει:

$\boxed{Re(\lambda) < 0}$ για <u>όλες</u> τις ιδιοτιμές.

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 9

11 Ιανουαρίου 2021

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(1) (5 μονάδες) Φτιάξτε το φασικό διάγραμμα του συστήματος:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 - y_1 \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1$$

(2) (5 μονάδες) Φτιάξτε το φασικό διάγραμμα του συστήματος:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \qquad \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 + 2y_2$$