Κεφ1: Δειγματικός Χώρος και Πιθ.

miércoles, 29 de diciembre de 2021 7:06 p. m.

Τα αξιώματα των Πιθανοτήτων

1. Μη αρνητικότητα: $P(A) \geq 0$ ↗ ξένα
2. Προσθετικότητα: Εάν $AB = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
   Αν $AB \neq \emptyset \Rightarrow P(AB) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. Κανονικοποίηση: $P(\Omega) = 1$

Μερικές Ιδιότητες Νόμων Πιθανοτήτων

α) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

β) $P(A \cup B) + P(AB) \Rightarrow P(A) + P(B)$

γ) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

δ) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A'B) + P(A'B'C)$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Δεσμ. Πιθ. του A δεδομένου του B: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Ιδιότητες Δ/Π

α) Οι ΔΠ μπορούν να θεωρηθούν ως νόμος πιθ. στον καινούργιο δειγματικό χώρο B.

β) Αν τα δυνατά αποτελέσματα είναι πεπερασμένα και ισοπίθανα:

$$P(A|B) = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } AB}{\text{πλήθος στοιχείων του } B}$$

Κανόνας Πολ/σμού

Αν όλα τα υπο-δέσμευση γεγονότα έχουν $P > 0$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1A_2) \ldots P\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Θεώρημα Συνολικής Πιθανότητας

Αν $A_1 \ldots A_n$ ξένα σύνολα, με $P(A_i) > 0$, $\forall i$ τότε $\forall$ γεγονός B:

$$P(B) = P(A_1 B) + \ldots + P(A_n B) = P(A_1) P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) P(B|A_n)$$

Κανόνας του Bayes

Αν $A_i, \ldots, A_n$ ξένα σύνολα με $P(A_i) > 0$, $\forall i$, τότε $\forall$ γεγονός B με $P(B) > 0$:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(A_1) P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) P(B|A_n)}$$

Ανεξαρτησία

→ το B δεν επηρεάζει το A

A ανεξάρτητο του B αν:
- $P(A|B) = P(B)$
- $P(AB) = P(A) P(B)$

Δεδομένη Ανεξαρτησία

Δεδομένου του C, τα A, B ανεξ. αν: $P(AB|C) = P(A|C) P(B|C)$

!! Ανεξ. $\cancel{\Leftrightarrow}$ Δεσμ. Ανεξ.

Ανεξ. πολλών Γεγονότων

$A_1, \ldots, A_n$ ανεξ. αν: $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$, $\forall \subset S = \{1, \ldots, n\}$

Διωνυμικοί Συντελεστές

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ → n στο πλήθος στοιχεία και παίρνω k από αυτά. Πόσοι οι διαφορετικοί τρόποι;

Αρχή της Αρίθμησης

Έστω διαδικασία με r στάδια. Για κάθε αποτέλεσμα του i-σταδίου, υπάρχουν n_{i+1} αποτελέσματα για $i+1$ στάδιο. Τότε ολικά αποτ. $= n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$

↳ αν για το 1ο στάδιο $\exists\, n_1$ αποτ., $\forall$ ένα από αυτά $\exists\, n_2$ για το 2ο κοκ → $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$

Μετάθεση/Συνδυασμός

Έστω n στοιχεία και παίρνω k.

Αν η σειρά έχει σημασία → μετάθεση

Αλλιώς → συνδυασμός

k-Μεταθέσεις/Συνδυασμοί

n στοιχεία, κρατάω k → k≤n

Δυνατές μεταθέσεις: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Δυνατοί συνδυασμοί: $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Τύπος της διωνυμικής

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1, \quad \forall p > 0$$

Διαμερίσεις

πολ/κος συντελεστής

n στοιχεία, κρατάω $n_1, n_2, \ldots, n_r$ σε r ομάδες: $\dbinom{n}{n_1 \ldots n_r} = \dfrac{n!}{n_1! \ldots n_r!}$