Τύπος De Moivre

Εάν $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{z^k = |z|^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))}$

Απόδ

$$z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow z^k = (|z|e^{i\varphi})^k = |z|^k e^{ik\varphi} = |z|^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))$$

Παράδειγμα: $(\sqrt{3}+i)^{2022} = ?$

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$m = 2022$

$$(\sqrt{3}+i)^m = 2^m\left[\cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{m\pi}{6}\right)\right] = 2^m(-1+0) = -2^{2022}$$

n-οστές ρίζες του 1

$z^n = 1$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Έστω z ρίζα της $|z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow \boxed{|z| = 1}$

$z = e^{i\varphi}$, όπου φ όρισμα του z

$$(e^{i\varphi})^n = 1 \Rightarrow e^{in\varphi} = e^0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid in\varphi = 2k\pi i \Rightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = \lambda n + \upsilon, \quad \varphi = \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\lambda n\pi + 2\upsilon\pi}{n} = 2\lambda\pi + \frac{2\upsilon\pi}{n}$$

$$z = e^{i\varphi} = e^{2\lambda\pi i + \frac{2\upsilon\pi}{n}i} = e^{\frac{2\upsilon\pi}{n}i}, \quad \upsilon = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Τελικά, οι ρίζες της εξίσωσης $z^n = 1$ είναι οι παρακάτω (n στο πλήθος): $\boxed{z_\upsilon = e^{\frac{2\upsilon\pi}{n}i}, \ \upsilon = 0, 1, \ldots, n-1}$

Παραδείγματα:

α) $z^5 = 1$

Ρίζες: $z_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{5}}, \nu = 0,1,2,3,4$

β) $z^8 = 1$

Εάν $\rho \in \mathbb{C}$ ρίζα, τότε $\bar{\rho}, -\rho, -\bar{\rho}$ ρίζες

$\pm i$ ρίζες

$$e^{2\pi i} = 1 \Rightarrow \left(e^{2\pi i/8}\right)^8 = 1 \Rightarrow e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \rho$$

ρ ρίζα $\in \mathbb{C} \Rightarrow \underline{\pm\rho, \pm\bar{\rho}}$ ρίζες

n-οστή ρίζα μιγαδικού

Έστω $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ με $a = |a| e^{i\vartheta}$, ϑ όρισμα του a

Θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $\underline{z^n = a}$ $(n \geq 2)$

Εάν z n-οστή ρίζα του a, τότε

$$z^n = |a| e^{i\vartheta} = \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n \left(e^{i\vartheta/n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{|a|}\, e^{i\vartheta/n}\right)^n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|a|}\, e^{i\vartheta/n}}\right)^n = 1 \Longrightarrow \frac{z}{\sqrt[n]{|a|}\, e^{i\vartheta/n}} = e^{\frac{2\nu\pi}{n} i}, \quad 0 \leq \nu \leq n-1$$

$$\boxed{z = \sqrt[n]{|a|}\, e^{\frac{2\nu\pi + \vartheta}{n} i}}$$

Παραδείγματα

α) $z^3 = i$ [Προσοχή! Το $z^3 - i$ δεν έχει πραγματικούς συντελεστές άρα οι μιγαδικές δεν είναι αλληλοσυζυγείς]

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $(\theta = \frac{\pi}{2})$

Ρίζες: $z_v = \sqrt[3]{|i|} \cdot e^{\frac{2v\pi + \frac{\pi}{2}}{3} i}$, $v = 0,1,2$

$= e^{\left(\frac{2v\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) i}$, $v = 0,1,2$,

- $z_0 = e^{\frac{\pi}{6} i} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$
- $z_1 = e^{\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) i} = e^{\frac{5\pi}{6} i} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$
- $z_2 = e^{\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) i} = e^{\frac{3\pi}{2} i} = -i$

Ρίζες: $\frac{\sqrt{3} + i}{2}$, $\frac{-\sqrt{3} + i}{2}$, $-i$

β) $z^6 = -1$

Εάν ρ ρίζα, τότε $\pm\rho, \pm\bar{\rho}$ είναι ρίζες

$-1 = e^{\pi i} = \left(e^{\frac{\pi i}{6}}\right)^6$, $\rho = e^{\frac{\pi i}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

$i^2 = -1 \Rightarrow i^6 = (i^2)^3 = -1 \Rightarrow \pm i$ ρίζες

Τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις

Ορισμός 1: $\forall z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

Σχόλια: α) Όλες οι τριγωνομετρικές ταυτότητες εξακολουθούν να ισχύουν,

πχ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$

$\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ κλπ

β) Τριγωνομ. εξισώσεις

(κάποιες κλασσικές έχουν τις ίδιες ρίζες με τις πραγματικές)

πχ $\sin z = 1 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 2i$

γ) Βασική Διαφορά!

Οι $|\sin z|, |\cos z|$ δεν είναι φραγμένες σε όλο το $\mathbb{C}$

$$|\sin(iy)| = \left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right| = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \xrightarrow{y \to +\infty} +\infty$$

$$|\cos(iy)| = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \xrightarrow{y \to +\infty} +\infty$$