**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Κυματική και Κβαντική Φυσική»
της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. του ΕΜΠ
Chapter03-3

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα
2020

**Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης ιδανικής χορδής γνωστού μήκους – Σειρές Fourier**

Ως κανονικοί τρόποι ταλάντωσης μίας χορδής με πεπερασμένο μήκος *L*, (και με γραμμική πυκνότητα μάζας και τάση, *ρ* και *T*, αντίστοιχα), ορίζονται εκείνοι οι τρόποι κίνησης, όπου (κατ' αναλογία των ΚΤΤ των συζευγμένων ταλαντωτών) όλα τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται αρμονικά, με την ίδια συχνότητα ω, αλλά με διαφορετικό πλάτος, το οποίο εξαρτάται από τη θέση-x κατά μήκος της χορδής: $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$.

Αντικαθιστώντας αυτή την παραδοχή στην κυματική εξίσωση της ιδανικής χορδής προκύπτει :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \cos(\omega t+\varphi)\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi),$$

άρα : $$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0, \quad \text{όπου} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Επομένως, η $f(x)$ είναι της μορφής $f(x) = A\sin(kx+\theta)$, και η συνολική έκφραση του Κανονικού Τρόπου Ταλάντωσης γράφεται: $y(x,t) = A\sin(kx+\theta)\cos\left(\omega t+\varphi\right)$.

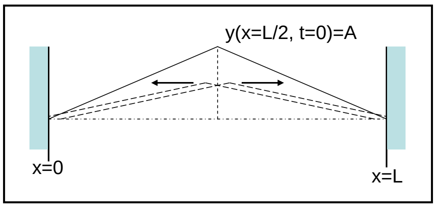
Δηλαδή, ο ΚΤΤ ενός συνεχούς μέσου (χορδή) είναι αυτό που περιγράφεται, επίσης, ως Στάσιμο Κύμα, δεδομένου ότι τα σημεία μηδενισμού (δεσμοί) και μεγίστου-ελαχίστου (κοιλίες) εξαρτώνται, μέσω του $\sin(kx+\theta)$, από τη θέση-*x*, άρα είναι στάσιμα, και δεν «οδεύουν» καθώς περνάει ο χρόνος. Οι τιμές του k και του θ πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται, για κάθε χρονική στιγμή, οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα άκρα της χορδής, *x*=0 και *x*=*L*.

Οι συνοριακές συνθήκες μπορεί να αφορούν :

(α) ακλόνητα σημεία, $x = x_0$, οπότε η ταλάντωση σε αυτά τα σημεία πρέπει να μηδενίζεται για κάθε χρονική στιγμή, $y(x_o,t) = 0$.

(β) κινούμενα σημεία, $x = x_0$, στα οποία μπορεί να είναι συνδεδεμένα σημειακά στοιχεία αδράνειας (σημειακή μάζα, $m_0$), ελαστικότητας (ελατήριο, $F = -sy\left(x_0\right)$), ιξώδους τριβής (έμβολο σε ρευστό, $F = -b\dot{y}\left(x_0\right)$), οπότε η κίνησή τους διέπεται από την αντίστοιχη εξίσωση του Νεύτωνα, $m_0\ddot{y}\left(x_0\right) = -sy\left(x_0\right) - b\dot{y}\left(x_0\right) + T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0^+} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0^-}\right]$. Η τελευταία συνοριακή συνθήκη μπορεί να αφορά και σημείο ασυνέχειας μεταξύ δύο διαφορετικών χορδών, (για αυτό το λόγο και περιλαμβάνει κλίσεις της χορδής εκατέρωθεν του σημείου $x = x_0$. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι, για ένα άκρο το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, κατά μήκος της διεύθυνσης *y*, χωρίς εξωτερικές επιδράσεις, $\left(m_0 = 0, s = 0, b = 0\right)$, οι κλίσεις της χορδής εκατέρωθεν του σημείου $x = x_0$ θα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0^+} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0^-}\right] = 0$. Αν το ελαστικό μέσο (χορδή) εκτείνεται μόνο από την μία πλευρά του σημείο $x = x_0$, τότε έχουμε ένα <u>ελεύθερο συνοριακό σημείο</u>, στο οποίο η <u>συνοριακή συνθήκη ελεύθερου άκρου</u> είναι: $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0} = 0$.

Παραδείγματα διαφορετικών συνοριακών συνθηκών θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, σε συνδυασμό με συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες για την κατανομή απομακρύνσεων και ταχυτήτων της συνολικής χορδής.




**Παράδειγμα 3.2.1.** Ιδανική χορδή γραμμικής πυκνότητας $\rho \equiv \dfrac{dm}{dx} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$ και μήκους L, είναι τεντωμένη με τάση T και τα δύο άκρα της ($x=0$ και $x=L$) κρατούνται ακλόνητα.

(α) Δείξτε ότι οποιαδήποτε κίνηση της χορδής μπορεί να γραφεί ως επαλληλία κανονικών τρόπων ταλάντωσης $y_n(x,t) = f_n(x)\cos(\omega_n t)$ και υπολογίστε τη μορφή των $f_n(x)$ και τις τιμές των $\omega_n$, με βάση τις συνοριακές συνθήκες, στα σημεία $x$=0 και $x$=$L$.

(β) Απομακρύνουμε το μέσο ($x = L/2$) της χορδής κατά απόσταση $A$ από την κατάσταση ισορροπίας (βλ. σχήμα, συνεχής γραμμή), και, κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, το αφήνουμε ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα. Περιγράψτε την κίνηση της χορδής, για $t>0$, με τη μορφή σειράς Fourier, υπολογίζοντας τους συντελεστές φάσης και πλάτους, με βάση της αρχικές συνθήκες.

(γ) Θεωρήστε ότι η κίνηση της χορδής περιγράφεται, ισοδύναμα, από δύο αντίθετα οδεύοντες παλμούς ίδιας μορφής και μισού ύψους (βλ. σχήμα, διακεκομμένες γραμμές) που ανακλώνται στα σταθερά άκρα και σχεδιάστε τη μορφή της χορδής κατά τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{L}{4}\sqrt{\dfrac{\rho}{T}}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Η γενική κίνηση της χορδής πρέπει να ικανοποιεί την κυματική εξίσωση :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Αν αναζητήσουμε λύσεις με τη μορφή κανονικών τρόπων $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi)$, έχουμε

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \cos(\omega t+\varphi)\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi),$$

άρα :
$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0, \qquad \text{όπου} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Επομένως, η $f(x)$ είναι της μορφής $f(x) = A\sin(kx+\theta)$. Είναι φανερό ότι το πλάτος $A$ εξαρτάται από τις (αρχικές) συνθήκες διέγερσης του συστήματος. Όσον αφορά τις παραμέτρους $k$ και $\theta$, επειδή σχετίζονται με τη χωρική μεταβλητή ($x$), θα έχουν σχέση με τις συνοριακές συνθήκες του συστήματος, στα άκρα $x$=0 και $x$=$L$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτά τα συνοριακά σημεία της χορδής είναι ακλόνητα. Άρα, εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα, παίρνουμε:

(i) $f(x=0) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 0}$, και

(ii) $f(x=L) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \boxed{k_n = n\dfrac{\pi}{L}, \quad n = 1,2,3,..}$,

οπότε και $\boxed{\omega_n = ck_n = nc\dfrac{\pi}{L}}$. Υπενθυμίζουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα σχετίζονται με τις συγκεκριμένες συνορικές συνθήκες (δηλ., στάσιμα άκρα). Τα αντίστοιχα χωρικά τμήματα των λύσεων θα έχουν, επομένως, τη μορφή $f_n(x) = A_n \sin(n\frac{\pi}{L}x)$, τα οποία δεν είναι παρά οι μορφές αυτών που είναι γνωστά ως στάσιμα κύματα, με μία «κοιλία» ($n$=1), με δύο «κοιλίες» ($n$=2), ..., και ούτω καθεξής, κάθε ένα από τα οποία ταλαντώνεται με την αντίστοιχη συχνότητα $\omega_n$.

(β) Δεδομένου ότι η υπόθεση των ΚΤΤ οδήγησε σε άπειρες-το-πλήθος διακριτές συχνότητες $\omega_n$, η γενική κίνηση της χορδής θα πρέπει να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός όλων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$y(x,t) = \sum_n A_n \sin\left(k_n x\right)\cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right),$$

όπου τα $k_n = n\frac{\pi}{L}, \quad n = 1,2,3,..$, και $\omega_n = ck_n = nc\frac{\pi}{L}$ έχουν προσδιοριστεί από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της χορδής, τις συνοριακές συνθήκες, και την ταχύτητα διάδοσης $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

Όσον αφορά τα πλάτη $A_n$ και τις φάσεις $\varphi_n$, αυτά θα προσδιοριστούν με βάση τις αρχικές συνθήκες, για την κατανομή απομάκρυνσης και την κατανομή ταχυτήτων, όλων των σημείων της χορδής, κατά τη χρονική στιγμή t=0.

Εφαρμόζουμε αρχικές συνθήκες.

Κατά την $t = 0$, όλα τα σημεία της χορδής έχουν μηδενική ταχύτητα

$$\dot{y}(x,t=0) = 0 \Rightarrow -\sum_n A_n\omega_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\varphi_n\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_n = 0, \quad n = 1,2,3,...}$$

Οπότε, $y(x,t) = \sum_n A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(\omega_n t\right)$,

Κατά την $t = 0$, έχουμε: $y(x,t=0) = \sum_n A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$, όπου η αρχική απομάκρυνση είναι (βλ. σχήμα):

$$y(x,t=0) = f(x) = \begin{cases} 2A\frac{x}{L}, & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 2A\left(1-\frac{x}{L}\right), & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Από τη σχέση $y(x,t=0) = \sum_n A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = f\left(x\right)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές πλάτους $A_n$ (ως συντελεστές Fourier της $f(x)$) χρησιμοποιώντας τις συνθήκες «ορθογωνιότητας» των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$I_{nm} = \int_0^L \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{nm}, \text{ όπου } \delta_{nm} = \begin{Bmatrix} 1, & \alpha\nu \quad n = m \\ 0, & \alpha\nu \quad n \neq m \end{Bmatrix}$$

[ Αντίστοιχα ισχύει $I_{nm} = \int_0^L \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{nm}$, αλλά και $I_{nm} = \int_0^L \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right)dx = 0$ .]

Οπότε, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $f(x) = \sum_n A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$ με ένα όρο $\sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right)dx$ και ολοκληρώνοντας σε όλο το διάστημα που ορίζεται η $f(x)$, παίρνουμε:

$$\int_0^L f(x)\sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right)dx = \sum_n A_n \int_0^L \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right)dx = \sum_n A_n \frac{L}{2}\delta_{nm} = A_m\frac{L}{2}, \text{ άρα:}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} 2A\frac{x}{L}\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx + \int_{L/2}^{L} 2A\left(1-\frac{x}{L}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx\right]$$

$$A_n = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} 2A\frac{x}{L}\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx + \int_{L/2}^{L} 2A\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx - \int_{L/2}^{L} 2A\frac{x}{L}\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx\right]$$

$$A_n = \frac{4A}{n\pi L}\left[\frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2} n\frac{\pi}{L}x\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)d\left(n\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L} n\frac{\pi}{L}x\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)d\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + L\int_{L/2}^{L}\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)d\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\right]$$

$$A_n = \frac{4A}{n^2\pi^2}\left[\int_0^{L/2} n\frac{\pi}{L}x\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)d\left(n\frac{\pi}{L}x\right) - \int_{L/2}^{L} n\frac{\pi}{L}x\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)d\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + n\pi\int_{L/2}^{L}\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)d\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\right]$$

$$A_n = \frac{4A}{n^2\pi^2}\left[\int_0^{n\pi/2} \xi\sin(\xi)d\xi - \int_{n\pi/2}^{n\pi} \xi\sin(\xi)d\xi + n\pi\int_{n\pi/2}^{n\pi}\sin(\xi)d\xi\right]$$

$$A_n = \frac{4A}{n^2\pi^2}\left[(\sin x - x\cos x)\Big|_0^{n\pi/2} - (\sin x - x\cos x)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - n\pi\cos x\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}\right] =$$

$$= \frac{4A}{n^2\pi^2}\left[\sin n\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2} = [(\sin n\pi - n\pi\cos n\pi) - (\sin n\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2})] - n\pi\cos n\pi + n\pi\cos n\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{4A}{n^2\pi^2}\left[\sin n\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2} - 0 + n\pi\cos n\pi + \sin n\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2} - n\pi\cos n\pi + n\pi\cos n\frac{\pi}{2}\right]$$

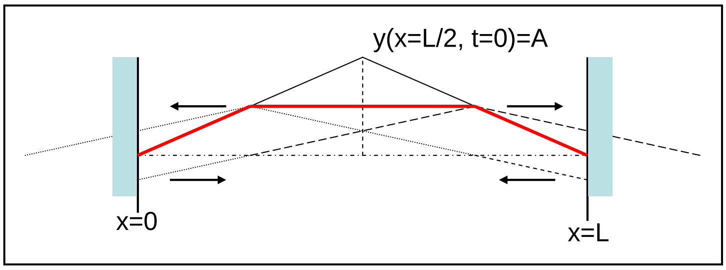
$$= \frac{4A}{n^2\pi^2}\left[2\sin n\frac{\pi}{2} - n\pi\cos n\frac{\pi}{2} + n\pi\cos n\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow A_n = \frac{4A}{n^2\pi^2}2\sin n\frac{\pi}{2}$$

και επειδή όλα τα άρτια $n = 2m$ δίνουν $\sin n\frac{\pi}{2} = \sin m\pi = 0$, τελικά παίρνουμε για τα πλάτη των ΚΤΤ (συντελεστές του αναπτύγματος Fourier) : $\boxed{A_n = \frac{8A}{n^2\pi^2}\sin n\frac{\pi}{2}, \quad n = 1,3,5,...}$

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, και την αρχική υπόθεση εργασίας (γραμμικός συνδυασμός ΚΤΤ), η γενική κίνηση της χορδής γράφεται

$$y(x,t)=\sum_{n=1,3,5,\dots}\left[\frac{8A}{n^2\pi^2}\sin n\frac{\pi}{2}\right]\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(cn\frac{\pi}{L}t\right),\quad c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Σε αυτό το άθροισμα άπειρων όρων, η σημασία του κάθε όρου μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της τάξης του, $\sim\frac{1}{n^2}$, άρα ο $6^{ος}$ όρος είναι ήδη το 1% του πρώτου και το 0.9% του αθροίσματος των 5 προηγουμένων. Άρα, ανάλογα με την απαίτηση ακρίβειας του αποτελέσματος, θα μπορούσε να τερματιστεί η άπειρη σειρά, σε ένα άθροισμα πέντε έως δέκα όρων, ώστε να είναι άμεσα υπολογίσιμη. Με αυτή την προσέγγιση, επομένως, για κάθε χρονική στιγμή t, άρα και για $t_1=\frac{L}{4}\sqrt{\frac{\rho}{T}}$, μπορεί να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο μετατόπισης της χορδής, ως συνάρτηση της θέσης-$x$, αυτή τη τη στιγμή.




(γ) Τα δύο οδεύοντα κύματα ανακλώνται στα ακλόνητα άκρα αλλάζοντας φάση κατά $\pi$, (αλλαγή προσήμου κατά: -1). Η διαταραχές ταξιδεύουν στη χορδή με ταχύτητα $c=\sqrt{T/\rho}$, οπότε, κατά τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{L}{4}\sqrt{\frac{\rho}{T}}$, έχουν διανύσει διάστημα $x_1=ct_1=\sqrt{T/\rho}\,\frac{L}{4}\sqrt{\rho/T}=\frac{L}{4}$. Δηλαδή, κάθε μία από τις κορυφές των δύο υπο-παλμών απέχει κατά $L/4$ από το άκρο προς το οποίο οδεύει. Επομένως, η εικόνα είναι όπως παραπάνω.

Και το αποτέλεσμα της συνύπαρξης των δύο οδεύοντων και των δύο ανακλώμενων διαταραχών (το άθροισμά τους) αποδίδεται από την κόκκινη (έντονη) γραμμή.

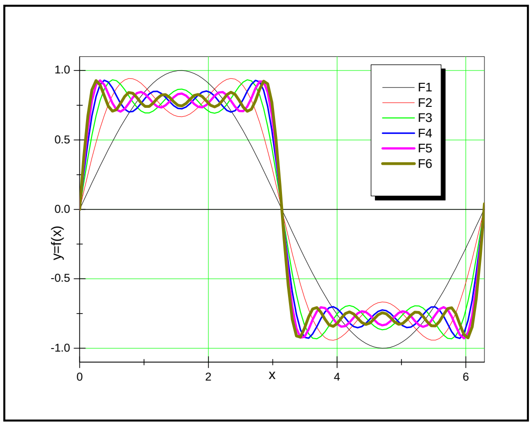
**Μαθηματικό Σχόλιο**: Το ανάπτυγμα της συνάρτηση $f(x)$ σε σειρά της μορφής $f(x)=\sum_n A_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$, είναι μία υποπερίπτωση ανάλογου αναπτύγματος με το οποίο μπορούν να παρασταθούν συναρτήσεις υπό τις εξής προϋποθέσεις, σύμφωνα με το θεώρημα του Fourier: Κάθε περιοδική συνάρτηση $f(x)=f(x+L)$, η οποία έχει: (i) πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών, (ii) πεπερασμένο αριθμό ακρότατων, (συνθήκες Dirichlet), μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά της μορφής

$$f(x)=\frac{b_0}{2}+\sum_n\left[A_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)+B_n\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\right]$$

όπου: $$A_n=\frac{2}{L}\int_c^{c+L}f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx,$$

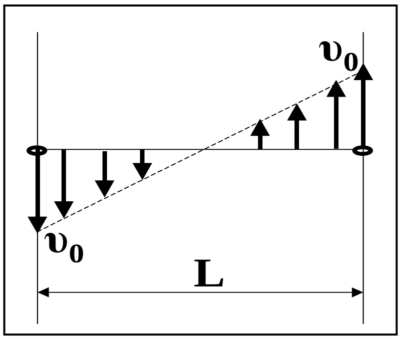
$$B_n=\frac{2}{L}\int_c^{c+L}f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

και: $\frac{b_0}{2}=\frac{1}{L}\int_c^{c+L}f(x)dx$, είναι ο μέσος όρος της $f(x)$, στο διάστημα $(c,c+L)$




Στην περίπτωση που η $f(x)$ είναι ορισμένη μόνο στο διάστημα $(c, c+L)$, το ανάπτυγμα αναπαριστά την περιοδική επέκταση της συνάρτησης σε όλες τις περιόδους.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η συνεισφορά των διαδοχικών όρων στην αναπαραγωγή ενός τετραγωνικού παλμού. Κατά τη σύνθεση των διαδοχικών όρων είναι φανερό ότι οι όροι ανώτερης τάξης συνεισφέρουν στα σημεία έντονης μεταβολής (οριακά: σημεία ασυνέχειας) του τετραγωνικού παλμού.




**Παράδειγμα 3.2.2.** Ιδανική χορδή μήκους L και μάζας m φέρει στα άκρα της δακτυλίους αμελητέας μάζας, με τη βοήθεια των οποίων τείνεται με τάση Τ. Οι δύο δακτύλιοι μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές σε δύο παράλληλες τροχιές κάθετα στη χορδή, και το σύστημα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας.

(α) Προσδιορίστε όλους τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ) με τους οποίους μπορεί να κινηθεί η χορδή, καθώς και τις συχνότητές τους, και σχεδιάστε τους τρείς πρώτους ΚΤΤ.

(β) Τη χρονική στιγμή t=0, και ενώ η χορδή βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, προσδίδουμε ίσες και αντίθετες ταχύτητες μέτρου $\upsilon_0$ στα δύο άκρα της, και υποθέτουμε ότι όλα τα ενδιάμεσα σημεία της προσλαμβάνουν ταχύτητες που κατανέμονται με γραμμικό τρόπο μεταξύ των δύο άκρων. Υπολογίστε την απομάκρυνση y=y(x,t), κάθε σημείου x της χορδής, για t>0, ως επαλληλία κινήσεων με τους ΚΤΤ, προσδιορίζοντας το βάρος συμμετοχής του κάθε ΚΤΤ.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

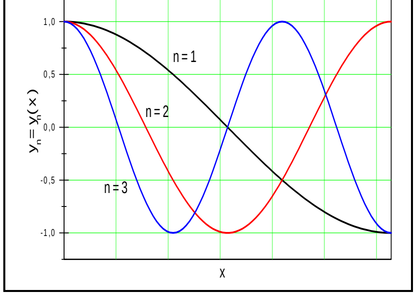
Υποθέτοντας Κανονικό Τρόπο Ταλάντωσης, έχουμε :

$$y_n = A_n \cos(k_n x + \varphi_{xn}) \sin(\omega_n t + \varphi_{tn}).$$

Εφαρμόζουμε οριακές συνθήκες στα άκρα , x=0, και x=L, όπου, λόγω του ότι είναι ελεύθερα (αμελητέες μάζες), πρέπει να είναι μηδενικές οι κλίσεις. Οπότε :

$$\left.\frac{\partial y_n}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -A_n k_n \sin(\varphi_{xn}) \sin(\omega_n t + \varphi_{tn}) = 0 \Rightarrow \varphi_{xn} = 0$$

$$\left.\frac{\partial y_n}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \Rightarrow -A_n k_n \sin(k_n L) \sin(\omega_n t + \varphi_{tn}) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi \Rightarrow k_n = n\frac{\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = c k_n = n\frac{\pi c}{L}$$




Οι τρείς πρώτοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα :

Η γενική κίνηση της χορδής περιγράφεται ως άθροισμα κινήσεων με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης :

$$y(x,t) = \sum_n A_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_{tn})$$

Για τον προσδιορισμό των σταθερών $A_n$ και $\varphi_{tn}$ εφαρμόζουμε τις <u>αρχικές συνθήκες για τις απομακρύνσεις και τις ταχύτητες</u> :

$$y(x,t=0)=0 \Rightarrow \sum_n A_n \cos(k_n x)\sin(\varphi_{tn})=0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{tn}=0}$$

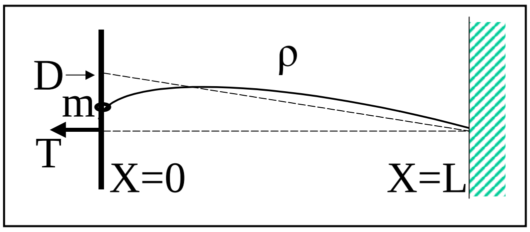
$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \upsilon_0\left(\frac{2x}{L}-1\right) \Rightarrow \sum_n A_n\omega_n \cos(k_n x)\cos(0) = \upsilon_0\left(\frac{2x}{L}-1\right) \Rightarrow \sum_n A_n\omega_n \cos(k_n x) = \upsilon_0\left(\frac{2x}{L}-1\right)$$

Οπότε, οι συντελεστές $A_n\omega_n$ προκύπτουν ως συντελεστές Fourier στο ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $\upsilon_0\left(\frac{2x}{L}-1\right)$, επομένως :

$$A_n\omega_n = \frac{2}{L}\int_0^L \upsilon_0\left(\frac{2x}{L}-1\right)\cos(k_n x)dx = \frac{4\upsilon_0}{L^2}\int_0^L x\cos(k_n x)dx - \frac{2\upsilon_0}{L}\int_0^L \cos(k_n x)dx$$

$$= \frac{4\upsilon_0}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi}\theta\cos(\theta)d\theta - \frac{2\upsilon_0}{n\pi}\int_0^{n\pi}\cos(\theta)d\theta = \frac{4\upsilon_0}{n^2\pi^2}\left[\sin\theta-\theta\cos\theta\right]_o^{n\pi} - \frac{2\upsilon_0}{n\pi}\sin(\theta)\Big|_0^{n\pi} = (-1)^n\frac{4\upsilon_0}{n\pi}$$

$$\Rightarrow A_n = (-1)^n \frac{4\upsilon_0 c}{L\pi^2 n^2}$$




**Παράδειγμα 3.2.3.** Ιδανική χορδή μήκους L, είναι συνδεδεμένη, με το άκρο της x=L, σε ακλόνητο τοίχο. Στο άκρο x=0 έχει κρίκο μάζας m, με τον οποίο συνδέεται σε οριζόντια ράβδο, στην οποία μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Η χορδή έχει γραμμική πυκνότητα ρ και είναι τεντωμένη με τάση T. α) Να προσδιορισθεί η σχέση υπολογισμού των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος. β) Αν ο κρίκος έχει αμελητέα μάζα (m=0) και, κατά τη χρονική στιγμή t=0, αφεθεί με μηδενική αρχική ταχύτητα, ενώ βρίσκεται σε απόσταση D<<L, από τη θέση ισορροπίας, να βρεθεί η κίνηση της χορδής y=y(x,t) ως επαλληλία των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

(α) Έστω $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t+\varphi)$, και από την εξίσωση κύματος : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$,

βρίσκουμε: $\frac{d^2 f}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f=0$, άρα $f(x)=A\sin(kx+\theta)$, όπου $k=\frac{\omega}{c}$.

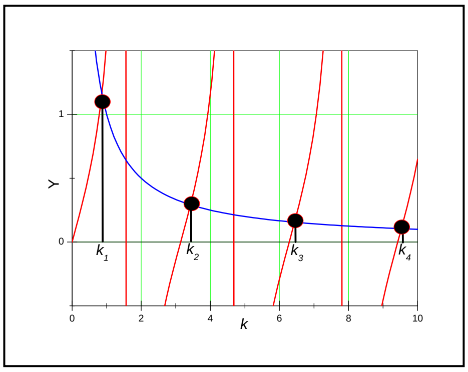
Συνοριακές συνθήκες στα άκρα:

(i) Στο άκρο $x=L$ έχουμε ακινησία, για κάθε χρονική στιγμή:
$f(x=L)=0 \Rightarrow A\sin(kL+\theta)=0 \Rightarrow \theta=-kL$. Επομένως $f(x)=A\sin(k[x-L])$

(ii) Στο άκρο $x=0$ πρέπει να εξασφαλίζεται η επιταχύνουσα δύναμη για τη μάζα m, $\forall \quad t$.

$$m\left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x=0} = T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow -\omega^2 mA\sin(-kL)\cos(\omega t) = Ak\cos(-kL)\cos(\omega t)$$

αλλά $\sin(-kL)=-\sin(kL)$ και $\cos(-kL)=\cos(kL)$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:




$$\tan(kL)=\frac{1}{c^2mk}\Rightarrow\boxed{\tan(kL)=\frac{(\rho/Tm)}{k}},$$

Οι τιμές του $k$ που ικανοποιούν την τελευταία σχέση, προσδιορίζονται με γραφικό τρόπο, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου προσδιορίζονται τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων $\tan(kL)$ και $\frac{(\rho/Tm)}{k}$.

(β) Αν ο κρίκος έχει αμελητέα μάζα, τότε η συνοριακή συνθήκη στο άκρο $x=0$ γίνεται $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=0\Rightarrow\cos(-kL)=0\Rightarrow\cos(kL)=0\Rightarrow kL=(2n-1)\frac{\pi}{2}$. Άρα τα $\boxed{k_n=(2n-1)\frac{\pi}{2L}}$

Η γενική κίνηση της χορδής, ως άθροισμα των προηγούμενων κανονικών τρόπων, γράφεται:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(k_n[x-L]\right)\cos\left(\omega_n t+\theta_n\right)$$

Θα προσδιορίσουμε τις σταθερές $A_n$ και $\theta_n$ με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.
Η μηδενική αρχική ταχύτητα μεταφράζεται

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-\omega_n A_n)\sin\left(k_n[x-L]\right)\sin\left(\theta_n\right)=0\Rightarrow\theta_n=0$$

Η αρχική απομάκρυνση εξαρτάται γραμμικά από την απόσταση και είναι της μορφής

$$y(x,t=0)=D\left(1-\frac{x}{L}\right),$$ επομένως:

$$-D\left(\frac{x-L}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(k_n[x-L]\right)\Rightarrow -D\xi/L=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(k_n\xi\right),$$ όπου $-L\le\xi\le 0$, και

επομένως οι συντελεστές $A_n$ υπολογίζονται από τη σχέση

$$A_n=\frac{2}{L}\int_{-L}^{0}(-D\xi/L)\sin\left(k_n\xi\right)d\xi=-\frac{2D}{L^2}\int_{-L}^{0}\xi\sin\left(k_n\xi\right)d\xi$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί γνωστό το $\int x\sin ax dx=\frac{\sin ax}{a^2}-\frac{x\cos ax}{a}$, και οι πράξεις αφήνονται ως μικρή εξάσκηση στους σπουδαστές.

**Παράδειγμα 3.2.4.** Χορδή, συνολικού μήκους L, αποτελείται από δύο τμήματα μήκους L/3 και 2L/3, με γραμμικές πυκνότητες $\rho_1$ και $\rho_2$, αντίστοιχα. Η χορδή τείνεται με τάση Τ μεταξύ δύο σταθερών σημείων. α) Υπολογίστε τη συνάρτηση απομάκρυνσης y=y(x,t), στην περίπτωση που η γραμμική πυκνότητα είναι ίδια για όλη τη χορδή ($\rho_1=\rho_2$) , και οι αρχικές συνθήκες απομάκρυνσης είναι *y(x,t=0)=D(1-x/L)x/L* και $\dot{y}(x,t=0)=0$. β) Στην περίπτωση που $\rho_1=4\rho_2$, να βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος των δύο χορδών.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

(α) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης: $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi_t)$y, και αντικαθιστώντας στην εξίσωση κύματος : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, βρίσκουμε : $\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f = 0$, οπότε η $f$ γράφεται : $f(x) = A\sin(kx+\theta)$, όπου $k = \omega/c$.

Από τις <u>οριακές συνθήκες στα άκρα *x*=0 και *x*=*L*</u> έχουμε:

$$f(x=0) = 0 \Rightarrow \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0, \text{ και } f(x=L) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = n\pi/L,$$

οπότε $\omega_n = ck_n = n\pi c/L$. Επομένως η *y* γράφεται: $\mathrm{y(x,t)} = \sum_{\mathrm{n}} \mathrm{A_n} \sin(\mathrm{k_n x})\cos(\omega_{\mathrm{n}} \mathrm{t} + \varphi)$.

Από <u>την αρχική συνθήκη ταχυτήτων</u> :

$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, προκύπτει: $-\sum_n A_n \omega_n \sin(k_n x)\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Άρα η τελική μορφή είναι : $y(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$.

Για τον υπολογισμό των συντελεστών $A_n$ εφαρμόζουμε την <u>αρχική συνθήκη απομακρύνσεων</u>: $y(x,t=0) = D(1-x/L)x/L \Rightarrow \sum_n A_n \sin(k_n x) = D(1-x/L)x/L$, οπότε οι συντελεστές $A_n$ υπολογίζονται ως συντελστές Fourier της αρχικής απομάκρυνσης

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L D\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L}\sin(k_n x)dx = \frac{2D}{L^2}\int_0^L x\sin(k_n x)dx - \frac{2D}{L^3}\int_0^L x^2\sin(k_n x)dx =$$

$$= \frac{2D}{(Lk_n)^2}\int_{x=0}^{x=L}(k_n x)\sin(k_n x)d(k_n x) - \frac{2D}{(k_n L)^3}\int_{x=0}^{x=L}(k_n x)^2\sin(k_n x)d(k_n x) =$$

$$= \frac{2D}{(n\pi)^2}\int_0^{n\pi}\theta\sin(\theta)d(\theta) - \frac{2D}{(n\pi)^3}\int_0^{n\pi}(\theta)^2\sin(\theta)d(\theta) \equiv \frac{2D}{(n\pi)^2}I_1 - \frac{2D}{(n\pi)^3}I_2$$

Τα δύο ολοκληρώματα υπολογίζονται ως εξής :

$$I_1 = \int_0^{n\pi}\theta\sin(\theta)d(\theta) = \sin(\theta)\Big|_o^{n\pi} - \theta\cos(\theta)\Big|_o^{n\pi} = (0-0) - (n\pi\cos n\pi - 0\cos 0) = n\pi(-1)^{n+1}$$

$$I_1 = \int_0^{n\pi}\theta^2\sin(\theta)d(\theta) = 2\theta\sin(\theta)\Big|_o^{n\pi} - \theta^2\cos(\theta)\Big|_o^{n\pi} + 2\cos(\theta)\Big|_o^{n\pi} =$$

$$= (0-0) - (n^2\pi^2\cos n\pi - 0) + 2(\cos n\pi - \cos 0) = n^2\pi^2(-1)^{n+1} + 2[(-1)^n - 1]$$

Επομένως :

$$A_n = \frac{2D}{n^2\pi^2}n\pi(-1)^{n+1} - \frac{2D}{n^3\pi^3}\left[n^2\pi^2(-1)^{n+1} + 2[(-1)^n - 1]\right] = \frac{4D}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right]$$

Τελικά : $A_n = \frac{8D}{n^3\pi^3}, \quad n = 1,3,5,...$ $\qquad A_n = 0, \quad n = 2,4,6,...$

(β) Στην περίπτωση διαφορετικής πυκνότητας

$y_1(x,t) = f_1(x)\cos(\omega t + \varphi)$, και από την εξίσωση κύματος : $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$, βρίσκουμε : $\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 f_1 = 0$, και όμοια $\frac{d^2 f_2}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 f_2 = 0$, όπου $c_2 = \frac{c_1}{2} = 50m/s$

$f_1(x) = A\sin(k_1 x + \theta_1)$, και $f_2(x) = B\sin(k_2 x + \theta_2)$

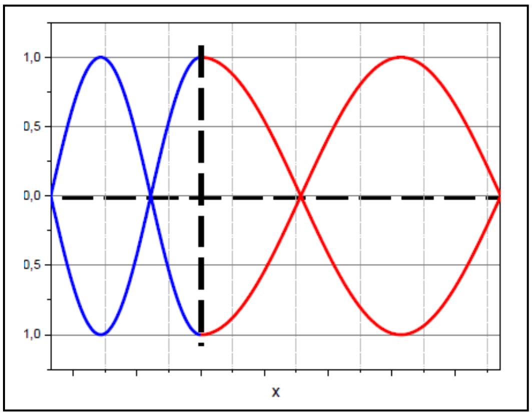
Συνοριακές συνθήκες στα άκρα:
$f_1(x=0) = 0 \Rightarrow \sin(\theta_1) = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0$, $f_2(x=L) = 0 \Rightarrow \sin(k_2 L + \theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_2 = -k_2 L$
Επομένως: $f_1(x) = A\sin(k_1 x)$, και $f_2(x) = B\sin(k_2[x-L])$
Συνοριακές συνθήκες στο σημείο σύνδεσης:
(i) $f_1(x=L/3) = f_2(x=L/3) \Rightarrow A\sin\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = B\sin\left(-k_2 \frac{2L}{3}\right)$.
Αλλά, $\frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{k_1}{2}$, οπότε, $A\sin\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = B\sin\left(-k_1 \frac{L}{3}\right) = -B\sin\left(k_1 \frac{L}{3}\right)$
Από την τελευταία σχέση προκύπτουν δύο ενδεχόμενα:
είτε $A = -B$, (1α)
είτε, $\sin\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = 0 \Rightarrow k\frac{L}{3} = n\pi \Rightarrow k_{1,n} = n\frac{3\pi}{L}$. (1β)

(ii) $\left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=L/3} = \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=L/3} \Rightarrow k_1 A\cos\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = k_2 B\cos\left(-k_2 \frac{2L}{3}\right) = \frac{k_1}{2} B\cos\left(-k_1 \frac{L}{3}\right)$, (2)
η οποία πρέπει να συναληθεύει είτε με την (1α) είτε με την (1β).

Στην περίπτωση που ισχύουν η (1α) και (2), έχουμε:
$$k_1 A\cos\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = -\frac{1}{2}k_1 A\cos\left(-k_1 \frac{L}{3}\right) = -\frac{1}{2}k_1 A\cos\left(k_1 \frac{L}{3}\right)$$
Η σχέση $k_1 A\cos\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = -\frac{1}{2}k_1 A\cos\left(k_1 \frac{L}{3}\right)$ δεν μπορεί να ισχύει παρά μόνο αν $\cos\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = 0$, δηλαδή $\cos\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = 0 \Rightarrow k_1 \frac{L}{3} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_{1,n} = (2n-1)\frac{3\pi}{2L}$

Στην περίπτωση που ισχύουν η (1β) και (2), έχουμε:
$\sin\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(k_1 \frac{L}{3}\right) = \pm 1$, οπότε, η (2) δίνει $k_1 A = \pm\frac{k_1}{2}B \Rightarrow A = \pm\frac{1}{2}B$.

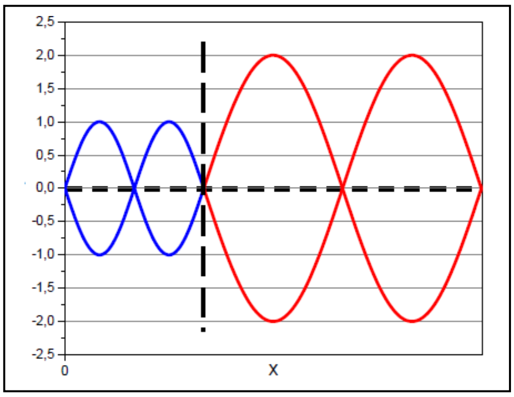
Επομένως, έχουμε δύο οικογένειες κανονικών τρόπων ταλάντωσης:




(I): $A = -B$, και $k_{1,n} = (2n-1)\frac{3\pi}{2L}$, ή, ισοδύναμα $(2n-1)\frac{\lambda_{1,n}}{4} = \frac{L}{3}$, που σημαίνει ότι το πρώτο τμήμα της χορδής (μήκους $L/3$) καλύπτεται από ακέραιο πολλαπλάσιο του ενός τετάρτου του αντίστοιχου μήκους κύματος. Επειδή, μάλιστα, $k_{1,n} = 2k_{2,n} \Rightarrow \lambda_{2,n} = 2\lambda_{1,n}$, τα άλλα 2/3 της χορδής (μήκους $2L/3$) θα καλύπτονται επίσης από ακέραιο πολλαπλάσιο του ενός τετάρτου του αντίστοιχου μήκους κύματος. Αυτή η οικογένεια των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι συνυφασμένη με την παρουσία κοιλίας (θετικής ή αρνητικής) στο σημείο σύνδεσης.

Στο προηγούμενο σχήμα, φαίνεται ο n=2 κανονικός τρόπος ταλάντωσης της χορδής, για τον οποίο ισχύει η μπλέ-χοντρή καμπύλη για το διάστημα $0 \le x \le 0.3$ και η κόκκινη-λεπτή καμπύλη για το διάστημα $0.3 \le x \le 1$, όπου το $x$ μετρείται σε μονάδες του $L$.

(II): $A = \pm B/2$, και $k_{1,n} = n\dfrac{3\pi}{L}$, ή, ισοδύναμα $\dfrac{2\pi}{\lambda_{1,m}} = m\dfrac{3\pi}{L} \Rightarrow m\dfrac{\lambda_{1,m}}{2} = \dfrac{L}{3}\ (2n-1)\dfrac{\lambda_{1,n}}{4} = \dfrac{L}{3}$,




που σημαίνει ότι το πρώτο τμήμα της χορδής (μήκους $L/3$) καλύπτεται από ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού του αντίστοιχου μήκους κύματος. Επειδή, μάλιστα, $k_{1,n} = 2k_{2,n} \Rightarrow \lambda_{2,n} = 2\lambda_{1,n}$, τα άλλα 2/3 της χορδής (μήκους $2L/3$) θα καλύπτονται επίσης από ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού του αντίστοιχου μήκους κύματος. Αυτή η οικογένεια των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι συνυφασμένη με την παρουσία δεσμού στο σημείο σύνδεσης. (Βλ. διπλανό σχήμα, όπως και ανωτέρω)

Και για τις δύο ομάδες κανονικών τρόπων ταλάντωσης, οι συχνότητες υπολογίζονται από την σχέση $\omega_n = c_{(1,2)}k_{n,(1,2)}$, όπου οι δείκτες (1,2) αναφέρονται σε μεγέθη των τμημάτων 1 ($0 \le x \le L/3$) και 2 ($L/3 \le x \le 2L/3$), αντίστοιχα, για τα οποία βέβαια η συχνότητα του $n$-τρόπου είναι κοινή, όπως θα περίμενε κανείς από την βασική ιδιότητα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

**Πρόβλημα.** Ιδανική ελαστική χορδή, με γραμμική πυκνότητα dm/dx=ρ, εκτείνεται από x=0 μέχρι x=+∞ με τάση T. Το άκρο της χορδής που βρίσκεται στο x=0 είναι συνδεδεμένο σε μία διάταξη από την οποία υφίσταται εγκάρσια δύναμη $F_y=-b\upsilon_y$, όπου b μία θετική σταθερά και $\upsilon_y$ η εγκάρσια ταχύτητα της χορδής στο x=0. Στην χορδή διαδίδεται, από το x=+∞ προς το x=0, ένα αριστερά οδεύον αρμονικό κύμα $y_1=A\cos(\omega t + kx)$. (α) Δείξτε ότι η οριακή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση απομάκρυνσης της χορδής από την κατάσταση ισορροπίας y=y(x, t), στο σημείο x=0, είναι : $T\left(\partial y/\partial x\right) = b\left(\partial y/\partial t\right)$. (β) Αν το ανακλώμενο, στο x=0, κύμα έχει τη μορφή $y_2=B\cos(\omega t-kx)$, να υπολογιστεί ο συντελεστής ανάκλασης B/A. (γ) υπολογίστε ένα κατάλληλο b (συναρτήσει των T και ρ) ώστε να μην υπάρχει καθόλου ανακλώμενο κύμα. $c^2=T/\rho=(\omega/k)^2$.

**Πρόβλημα.** Ιδανική χορδή μήκους $L$, που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα $x$, έχει μεταβλητή πυκνότητα, $\rho(x) = \rho_0\left(1 + x^2/L^2\right)$ και τείνεται με τάση $T$.

**(α)** Να παραχθεί η διαφορική εξίσωση κύματος που ικανοποιεί μία διαταραχή, $y = y(x,t)$, της χορδής, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, $\left(\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta\right)$.

**(β)** Στην περίπτωση που διεγείρουμε, στο άκρο $x=0$, αρμονική ταλάντωση, $y(x=0,t) = A\cos(\omega t)$, σε μόνιμη κατάσταση, να υπολογίσετε το μήκος κύματος της διαταραχής που διαδίδεται στη χορδή, ως συνάρτηση της θέσης $x$, $\lambda = \lambda(x)$, και να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο αυτής της κίνησης.

**(γ)** Στην περίπτωση που η γραμμική πυκνότητα είναι ίδια σε όλο το μήκος της χορδής, και στο ένα άκρο της συνδέεται με μία χορδή αμελητέας γραμμικής πυκνότητας, να υπολογισθεί το συνολικό πλάτος απομάκρυνσης του σημείου σύνδεσης, όταν σε αυτό φτάνει παλμός ύψους A.