Δευτέρα 11/4/22 11η Διάλεξη: Κόκκινης 6

Η ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

NEWTON-RAPHSON (N-R)

(newton)

$$f(x)=0$$

Η μέθοδος N-R είναι η επαναληπτική μέθοδος που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2 \qquad x_0 \text{ αρχική προσέγγιση} \qquad f'(x_k) \neq 0, \ \forall k}$$

Είναι της μορφής $x_{k+1} = g(x_k)$, $k=0,1,2$

με

$$\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Υποθέτοντας όλες τις αναγκαίες ομαλότητες της f:

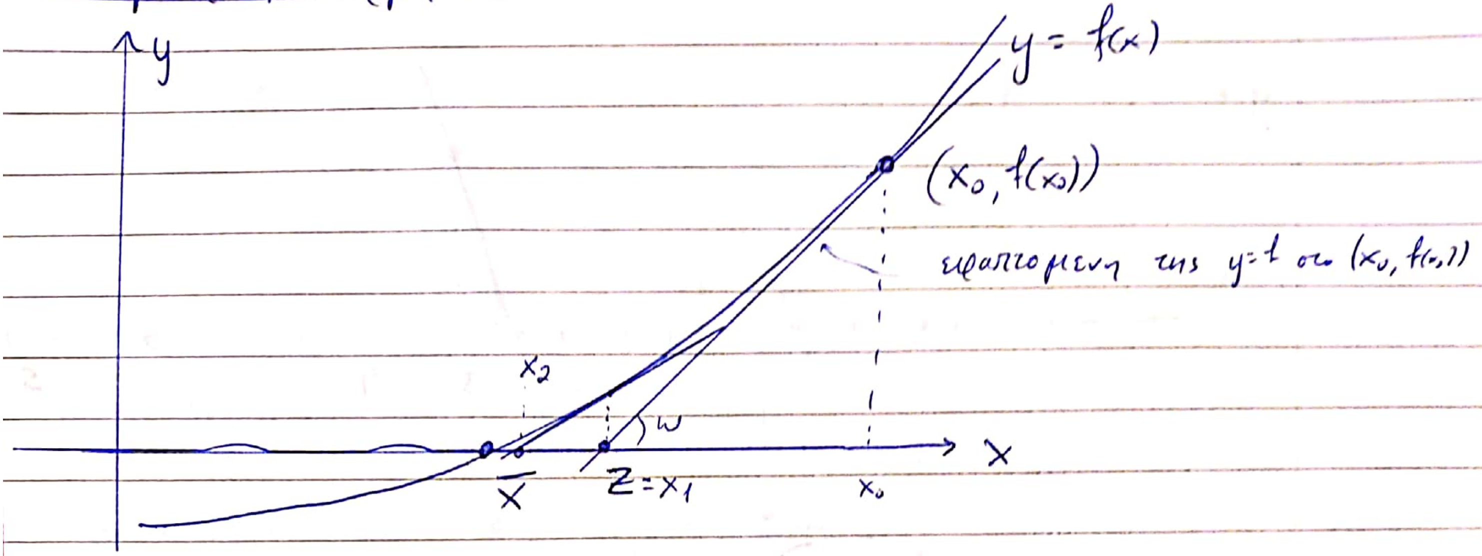
$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Άρα $g'(\bar{x}) = 0$ $\quad (f(\bar{x})=0)$

↳ Άρα έχουμε: i) Θ.1 (τοπική σύγκλιση)
ii) ΤΑΞΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ >1

Έχουμε λοιπόν ταχεία σύγκλιση

Γεωμετρική Ερμηνεία



$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{f(x_0)}{x_0 - z} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow z = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{δηλ.} \quad \boxed{z = x_1}$$

Παράδειγμα

$f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$, έχει μοναδική ρίζα $\bar{x} \in (2,3)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 5}{3x_k^2 - 3}, \quad k = 0,1,2\ldots$$

Χρειαζόμαστε x_0, (έχουμε τοπική σύγκλιση)

Παίρνουμε $\boxed{x_0 = 3}$:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 - 5}{3x_0^2 - 3} = 2.4583333$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 3x_1 - 5}{3x_1^2 - 3} = 2.294310575$$

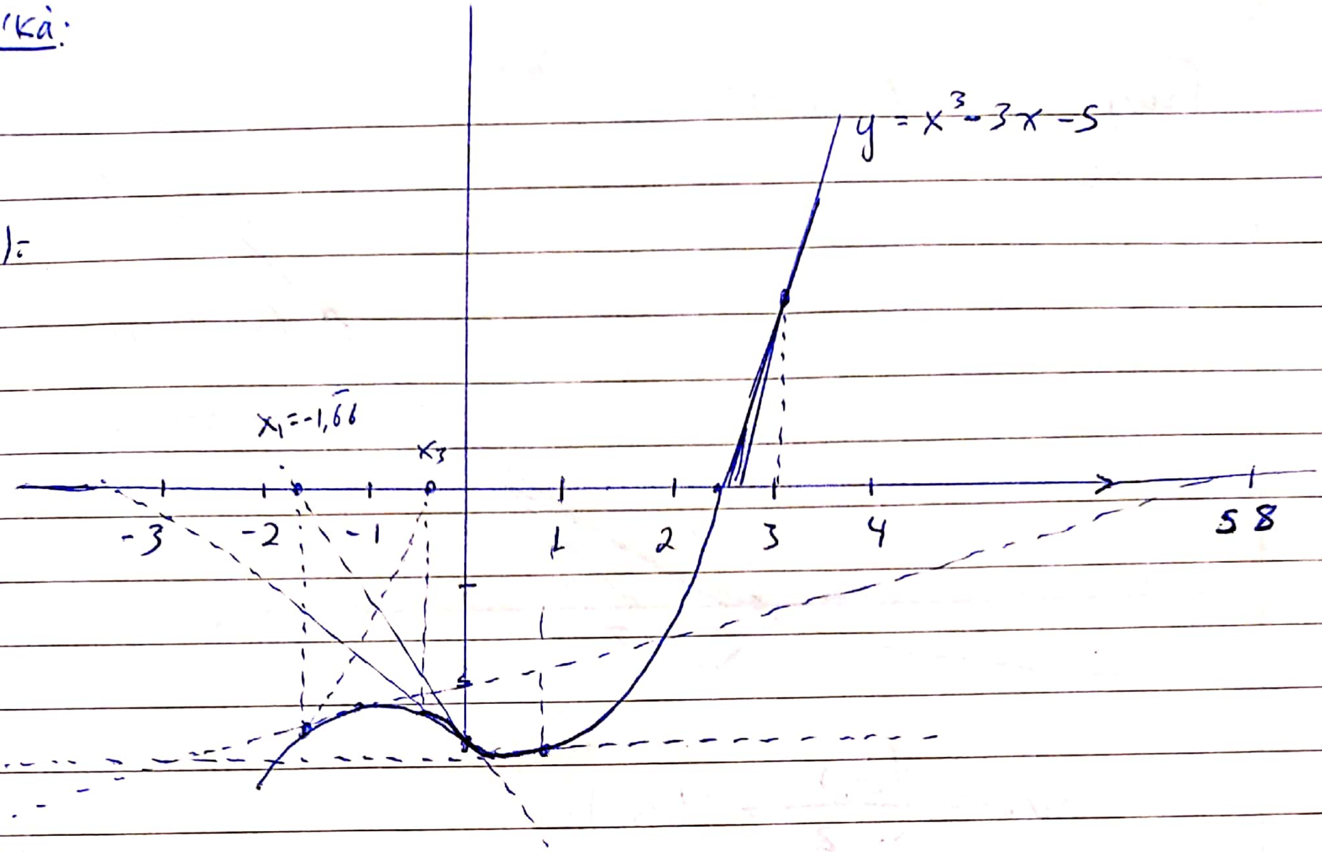
$$x_3 = 2.279144331$$

$$x_4 = 2.279018794$$

$$x_5 = 2.279018786$$

Γραφικά:

$g(x)=$



Με $x_0=0$:

$x_1=-1,666666$

στο περίπου

$x_2=-0,79$

$x_3=-3.663$

$x_4=-2.504$

$x_5=-1,67$

$\vdots$

$x_{18}=-1.008$

$x_{19}=58.22$

$\cancel{x_{20}}$ $\vdots$

$x_{33}=2.2790187$

Με $x_0=1$?

Με $x_0=-1$?

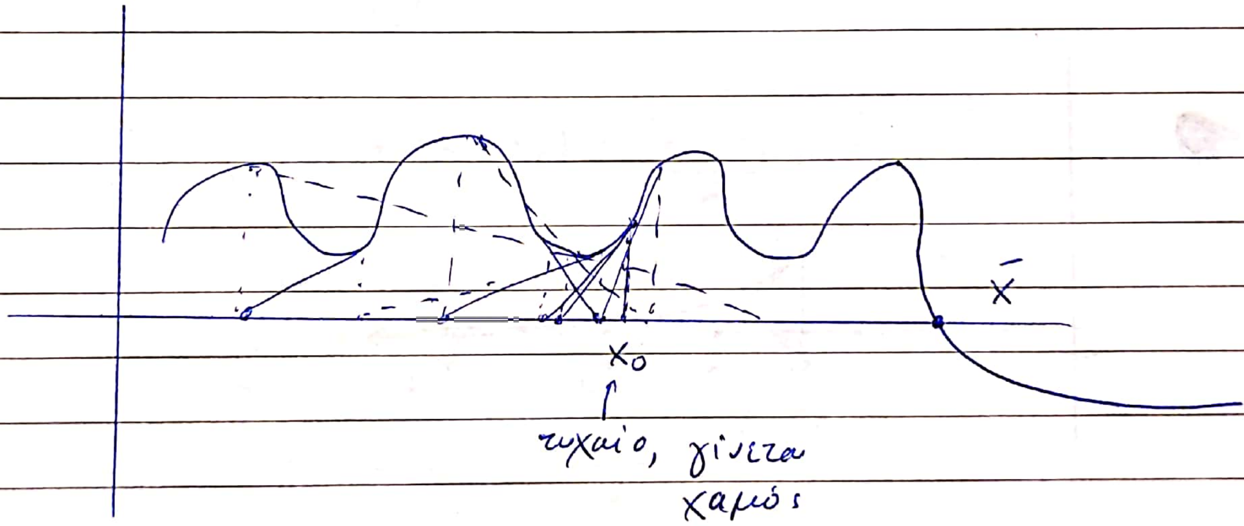
Είναι επομένως σημαντικό να διαλέγουμε καλές αρχικές τιμές

Επιλογή Αρχικής Τιμής X_0

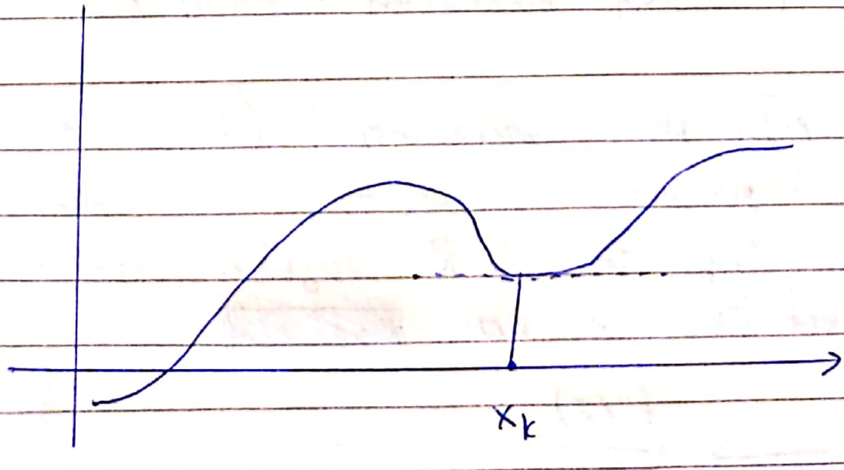
Αν το x_0 είναι αρκετά κοντά σε μια ρίζα $\bar{x}$ έχουμε ταχύτατη σύγκλιση

Αν το x_0 δεν είναι αρκετά κοντά στο $\bar{x}$ μπορεί να έχουμε πρόβλημα και η μέθοδος να συγκλίνει αργά ή και να μην συγκλίνει

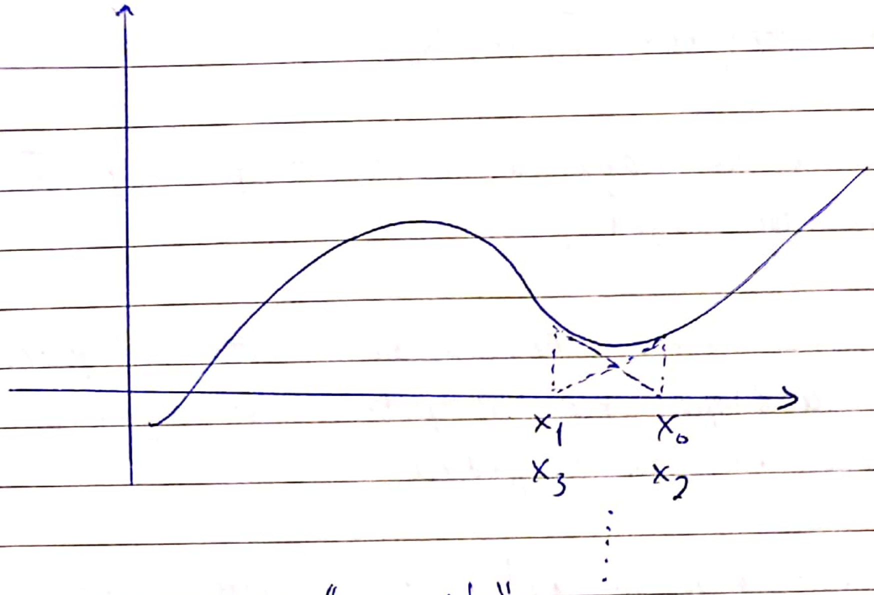
Συνήθως προσδιορίζουμε καλές αρχικές τιμές γραφικά ή με εφαρμογή μερικών βημάτων της μεθόδου διχοτόμησης



Περιπτώσεις Αποτυχίας

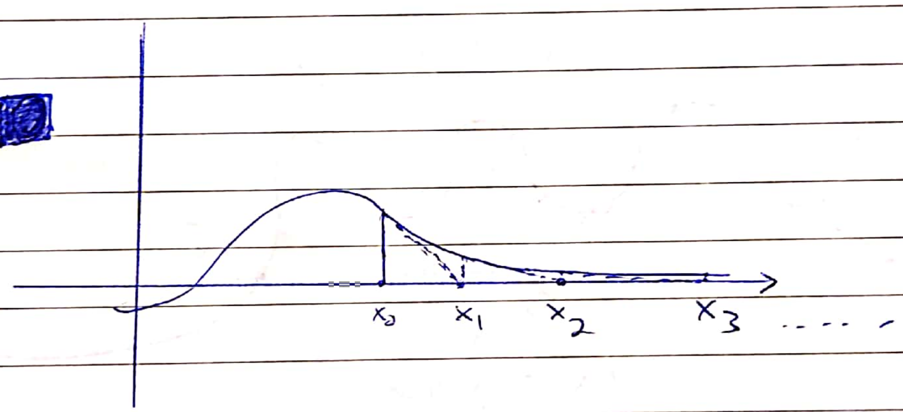


$f'(x_k)=0$



"πηγάδι"

συμβαίνει πιο συχνά αν οι πράξεις γίνονται ακριβώς



Σύγκλιση Μεθόδου N-R

Θεώρημα 1 (Τοπική σύγκλιση - απλή ρίζα)

Έστω $\bar{x}$ απλή ρίζα μιας συνάρτησης f ($f(\bar{x})=0$, $f'(\bar{x})\neq 0$) και f 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κοντά στο $\bar{x}$. Τότε η ακολουθία (x_k) της N-R συγκλίνει στο $\bar{x}$ $\forall x_0$ αρκετά κοντά στο $\bar{x}$ και:

$$\frac{x_{k+1}-\bar{x}}{(x_k-\bar{x})^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}$$

δηλ τάξη σύγκλισης (τουλάχιστον) τετραγωνική και αν $f''(\bar{x})\neq 0$ ακριβώς τετραγωνική

Απόδειξη $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $g'(\bar{x}) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$

$g'(\bar{x}) = 0$

Άρα από Θ.1. της Γ.Ε.Π, η ακολουθία (x_k) της N-R συγκλίνει στο $\bar{x}$ για κάθε x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$.

Από τύπο Taylor:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k) + (\bar{x} - x_k) f'(x_k) + (\bar{x} - x_k)^2 \cdot \frac{f''(\theta_k)}{2!}$$

όπου θ_k μεταξύ του $\bar{x}, x_k$

Διαιρώ με $f'(x_k)$:

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (\bar{x} - x_k) + \frac{(\bar{x} - x_k)^2}{2} \frac{f''(\theta_k)}{f'(x_k)}$$

($f(\bar{x}) \neq 0$ άρα αφού $f'(x_k) \to f'(\bar{x})$ (f συνεχής), από ένα σημείο (πχ. N_0) και μετά, $f'(x_k) \neq 0$ $\forall k > N_0$)

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \bar{x} = \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2!} \frac{f''(\theta_k)}{f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} - \bar{x} = (x_k - \bar{x})^2 \frac{f''(\theta_k)}{2f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{(x_k - \bar{x})^2} = \frac{f''(\theta_k)}{2f'(x_k)}}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_{k+1} - \bar{x}}{(x_k - \bar{x})^2} = \lim_{k \to \infty} \frac{f''(\theta_k)}{2f'(x_k)} \Rightarrow *$$

{ Αφού • $x_k \to \bar{x}$ και ~~[illegible]~~ θ_k μεταξύ $x_k, \bar{x}$, $\theta_k \to \bar{x}$

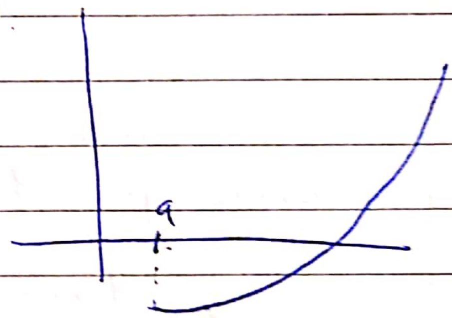
• Και f'', f' συνεχής : }

$$* = \boxed{\frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}}$$

Παρατήρηση: Υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις όπου η μονοτονία και η κυρτότητα της f εγγυώνται τη σύγκλιση της N-R σε ένα ευρύτερο διάστημα οπότε μπορεί το x_0 να μην είναι αρκετά κοντά στο x_0.

Πρόταση: Έστω $a \in \mathbb{R}$, $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$

2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, $f(a)<0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ για $x \geq a$. Τότε η f έχει μοναδική ρίζα στο $[a,+\infty)$ και η μέθοδος N-R συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [a,+\infty)$



Στο επόμενο μάθημα: τι γίνεται με ρίζες άρτιας πολλαπλότητας?