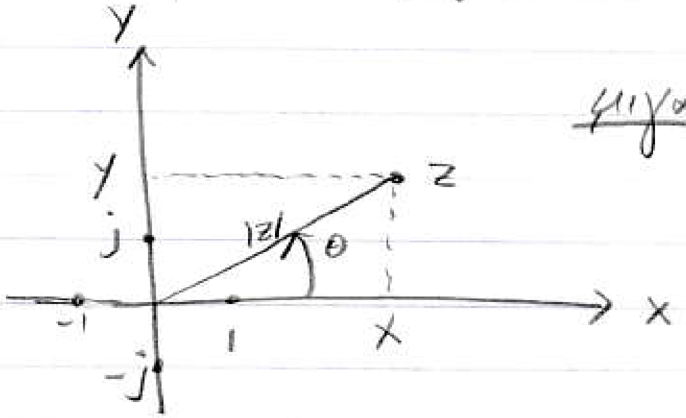
Επανάληψη μιγαδικών αριθμών

$j=\sqrt{-1}$. Πολλές φορές γράφουμε i αντί j

μιγαδικός αριθμός $z = x + jy$, (x, y πραγματικοί)

$x = Re\{z\}$ πραγματικό μέρος του z

$y = Im\{z\}$ φανταστικό μέρος του z



μιγαδικό-επίπεδο z

μέτρο του z: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

φάση του z: το θ του σχήματος

Έχουμε $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$, $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$

οπότε $z = |z|(\cos\theta + j\sin\theta)$ (*)

Πρόσθεση: Προσθέτουμε πραγματικά και φανταστικά μέρη ξεχωριστά.

Γραφικά, κανόνας παραλληλογράμμου

<u>Μιγαδική εκθετική συνάρτηση</u> $e^{z} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

Έχει τις γνωστές ιδιότητες της e^x. π.χ.

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$(e^z)' = e^z$$

<u>Επιπλέον</u> $e^{jz} = \cos z + j \sin z$

Αυτή είναι η εξίσωση Euler. Προκύπτει συγκρίνοντας σειρές Taylor

Επομένως η $(*)$ γράφεται

$$\boxed{z = |z| e^{j\theta}}$$

οπότε είναι λογικό ότι

<u>Πολλαπλασιασμός</u> $z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$z^2 = |z|^2 e^{j2\theta}$, $z^n = |z|^n e^{jn\theta}$ $(n=0,1,2,\dots)$

<u>Διαίρεση</u> $\frac{1}{z} = |z|^{-1} e^{-j\theta}$

Επίσης,

<u>Πολλαπλασιασμός</u> $(x_1+jy_1)(x_2+jy_2) =$

$$= x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 - y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

<u>Διαίρεση</u> $\dfrac{1}{x+jy} = \dfrac{x-jy}{(x+jy)(x-jy)} = \dfrac{x-jy}{x^2+y^2}$ ίδια με πριν (?) ('Ασκηση)

<u>Εφαρμογή για απόδειξη τριγωνομετρικής ταυτότητας</u>

$$e^{j2\theta} = \cos 2\theta + j\sin 2\theta = (e^{j\theta})^2 = (\cos\theta + j\sin\theta)^2$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + j\,2\sin\theta\cos\theta \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

<u>Άλλα συμπεράσματα</u> $e^{j0} = 1$, $e^{j\pi} = -1$,

$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$, $\cos z = \dfrac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

Το $\bar{z} = z^* = x - jy = |z|e^{-j\theta}$ ονομάζεται <u>συζυγής</u> του $z = x + jy = |z|e^{j\theta}$ και ισχύει

$$|z|^2 = zz^*$$

Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (ΗΜΚ)

σε κυκλώματα ή Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία

Όταν

(α) Όλες οι πηγές έχουν τη χρονική εξάρτηση $\cos[\omega t + \varphi(\vec{r})]$ (ή $\cos(\omega t + \varphi)$ για κυκλώματα), τότε τα ΗΜ πεδία (ή οι τάσεις και τα ρεύματα στα κυκλώματα) επίσης έχουν τέτοια εξάρτηση — ΗΜΚ

Εισάγουμε φασιθέτες (ή phasors, ή φάσορες)

Φασιθέτης του βαθμωτού μεγέθους

$\alpha(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos[\omega t + \varphi(\vec{r})]$

είναι το $\dot{\alpha}(\vec{r}) = A(\vec{r})\, e^{j\varphi(\vec{r})}$

οπότε $\alpha(\vec{r}, t) = Re\{\dot{\alpha}(\vec{r})\, e^{j\omega t}\}$

<u>Απόδειξη</u>

Δεξί μέλος $= Re\{A(\vec{r})\, e^{j\varphi(\vec{r})}\, e^{j\omega t}\}$

$= Re\{A(\vec{r})\, e^{j(\varphi(\vec{r})+\omega t)}\}$

$= A(\vec{r}) \cos[\omega t + \varphi(\vec{r})]$

Οπότε αντιστοιχούμε

$\alpha(\vec{r}, t) \Leftrightarrow \dot{\alpha}(\vec{r})$

Και παρόμοια με τα διανύσματα.

Η χρονική παράγωγος του $\vec{\alpha}(\vec{r}, t) =$

$= A(\vec{r}) \cos[\omega t + \varphi(\vec{r})]$ είναι

$\omega A(\vec{r}) \sin[\omega t + \varphi(\vec{r})]$, που έχει

φάσορα $j\omega \dot{\alpha}(\vec{r})$, οπότε

$$\boxed{\frac{\partial \alpha(\vec{r}, t)}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \dot{\alpha}(r)}$$

- Παραγώγιση στο "πεδίο του χρόνου" αντιστοιχεί σε πολ/σμό με $j\omega$ στο "πεδίο συχνοτήτων"
- Οι <u>διαφορικές</u> εξισώσεις γίνονται <u>αλγεβρικές</u>