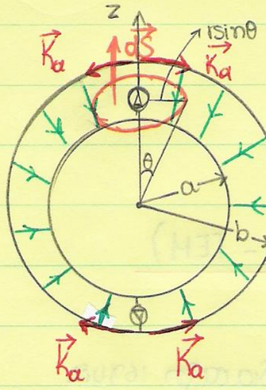
Μάθημα 13°

09/05/2011

Ασκηση 3.11 (γεωμετρια άσκησης 1.10)



$\vec{J} = -\frac{I}{2\pi r^2}\hat{r}$

Στη διπλανη διαταξη ισχυει ότι $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ και

συνεπως $J_\varphi = 0$, $K_\varphi = 0 \Rightarrow \vec{H} = H_\varphi \cdot \hat{\varphi}$.

B. Λυση με σημειακές σχεσεις

Διακρινω τις περιπτωσεις:

- Με $0 < r < a$ εχουμε ότι:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \cdot H_\varphi) = J_r \quad (1) \\ -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι $J_r = -\frac{I}{2\pi r^2}$ (3) και απο τη σχεση (2) προκύπτει ότι.

$r.H_\varphi = f(\theta) \Rightarrow H_\varphi = \frac{f(\theta)}{r}$ (4) ωστε $\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = \frac{\partial}{\partial r}(f(\theta)) = 0$

Απο τις σχεσεις (1), (4) και (3) προκυπτει ότι $\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\cdot\frac{f(\theta)}{r}\right] = -\frac{I}{2\pi r^2} \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\, f(\theta)\right] = -\frac{I}{2\pi}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta\, f(\theta) = -\frac{I}{2\pi}\int \sin\theta\, d\theta + c$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cdot f(\theta) = \frac{I}{2\pi}\cos\theta + c \Rightarrow f(\theta) = \frac{I}{2\pi}\cot\theta + \frac{c}{\sin\theta} \quad (5)$$

Απο τις σχεσεις (4) και (5) εχω $H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}\cot\theta + \frac{c}{r\sin\theta}$ (6)

Θα ισχυει ότι $\oint_c \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_s \vec{J}\cdot\vec{ds} \Rightarrow H_\varphi\cdot 2\pi r\sin\theta \cong I$ (7) καθως $\theta \to 0$

Απο τη σχεση (6) θα προκύπτει ότι $H_\varphi\cdot 2\pi r\cdot\sin\theta = I\cos\theta + 2\pi c$

$$\Rightarrow H_\varphi\cdot 2\pi r\sin\theta \cong I + 2\pi c \text{ καθως } \theta \to 0.$$

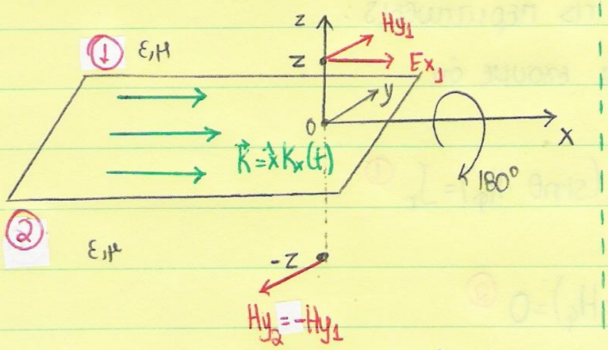
$$\Rightarrow H_\varphi \cdot 2\pi r \sin\theta = H_\varphi \cdot 2\pi r \sin\theta + 2\pi c$$ εξαιτίας της (I)

$$\Rightarrow 2\pi c = 0 \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Άρα η σχέση (6) γίνεται: $H_\varphi = \dfrac{I}{2\pi r} \cdot \cot\theta$.

- Με $0 \leq r < b$ και $r > a$ προκύπτει ότι $H_\varphi = 0$

Οδεύοντα επίπεδα κύματα (Transverse Electromagnetic Waves - TEM)



Στη διπλανή διάταξη ισχύει $\dfrac{\partial}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial}{\partial y}$ και ζητούνται τα $\vec{E}(z,t)$ και $\vec{H}(z,t)$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι

$$H_{y_1}(z,t) = -H_{y_2}(-z,t) \quad (9)$$

αντιστρέφοντας το σύστημα κατά 180° και κάνοντας τη παραδοχή ότι οφείλει να μείνει ίδιο με πριν

Τα προβλήματα με χρονομεταβλητούς παράγοντες θα τα λύνουμε με διαφορικές εξισώσεις. Συνεπώς θα έχουμε:

Οι οριακές συνθήκες μας δίνουν:

- Για $z=0$: $\hat{z} \times (\vec{H_2} - \vec{H_1}) = K \Rightarrow \hat{z} \times [H_{x_2}\hat{x} + H_{y_2}\hat{y} + H_{z_2}\hat{z} - H_{x_1}\hat{x} - H_{x_2}\hat{y} - H_{z_1}\hat{z}] = \hat{x} \cdot K_x(t)$

$$\Rightarrow \hat{y} \cdot (H_{x_2} - H_{x_1}) - \hat{x}(H_{y_2} - H_{y_1}) = \hat{x} \cdot K_x(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{x_2} = H_{x_1} & (2a) \\ H_{y_1} - H_{y_2} = K_x(t) & (2b) \end{cases}$$

Επίσης θα ισχύει ότι:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \cdot \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (3a) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (3\beta) \\ \cancelto{0}{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancelto{0}{\frac{\partial E_x}{\partial y}} = -\mu \cdot \frac{\partial H_z}{\partial t} \Rightarrow \mu \cdot \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (3\gamma) \end{cases}$$

από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι η Hz είναι σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου

και

$$\nabla \cdot \vec{H} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4a) \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (4\beta) \\ \cancelto{0}{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancelto{0}{\frac{\partial H_x}{\partial y}} = \varepsilon \cdot \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon \cdot \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (4\gamma) \end{cases}$$

από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι η Ez είναι σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου

Οι εξισώσεις (3a), (4β), (1β) και (2a), οι οποίες περιέχουν τα E_y και H_x, αποτελούν ομογενές σύστημα εξισώσεων που δεν συνδέεται με τις πηγές (στην περίπτωσή μας το K_x). Συνεπώς $E_y = H_x = 0$

Οι εξισώσεις (3β), (4a), (1a) και (2β), οι οποίες περιέχουν τα E_x και H_y, δεν αποτελούν ομογενές σύστημα εξισώσεων, οπότε $E_x \neq 0$ και $H_y \neq 0$.

Η σχέση (4a) γίνεται $\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \cdot \partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$ λόγω της (3β)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \cdot \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

αυτή είναι μια κυματική εξίσωση

Θέτοντας $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ προκύπτει ότι $\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0$

Γενικότερα η παραπάνω εξίσωση γράφεται $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$ (6)

Η λύση της (6) είναι η $\phi = f(t - \frac{z}{c}) + g(t + \frac{z}{c})$ (7),

δηλαδή εδώ θα έχουμε: $H_z = f(t - \frac{z}{c}) + g(t + \frac{z}{c})$. (8)

Η σχέση (8) για $z=0$ μας δίνει: $H_z = f(t) + g(t)$.

λίγο πάνω από το 0

Η σχέση (2β) μας δίνει: $H_{y2}(z=0-, t) - H_{y1}(z=0+; t) = K_x(t)$ (10) $\Rightarrow$

λίγο κάτω από το 0

$$2H_{y_2}(z=0_-,t) = -2H_{y_1}(z=0_+,t) = K_x(t) \quad \text{λόγω της (9)}$$

$$\Rightarrow H_{y_1}(z=0_+,t) = -H_{y_2}(z=0_-,t) = -\frac{K_x(t)}{2} \quad (11)$$

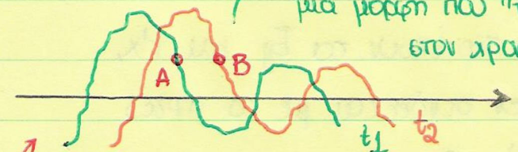
Από τις σχέσεις (8), (11) προκύπτει ότι $H_{y_1}(z,t) = -\frac{1}{2} K_x\left(t-\frac{z}{c}\right)$

και $H_{y_2}(z,t) = \frac{1}{2} K_x\left(t+\frac{z}{c}\right)$.

Για την περιοχή (2) παίρνω $H_{y_2} = g\left(t+\frac{z}{c}\right)$ και για την περιοχή (1) επιλέγω $H_{y_1} = f\left(t-\frac{z}{c}\right)$. Αυτό το κάνουμε με το εξής σκεπτικό:

Στην περιοχή (1) και την χρονική στιγμή t_1 το ηλεκτρομαγνητικό κύμα εξετάζεται στο σημείο z_1 και την χρονική στιγμή t_2 στο σημείο z_2.

Μιλάμε για κύμα γιατί έχουμε μια μορφή που "ταξιδεύει" στον χρόνο



αναφέρομαι στην μετακίνηση AB του ίδιου σημείου του κύματος κατά τη χρονική διάρκεια (t_2-t_1)

Πρέπει $t_1 - \frac{z_1}{c} = t_2 - \frac{z_2}{c}$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{z_2 - z_1}{c}$$

Αν $t_2 > t_1$ έχουμε $z_2 > z_1$

υπάρχει η συνθήκη στο άπειρο που λέει ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα πρέπει να απομακρύνονται από την πηγή τους. Για αυτό και τώρα χρησιμοποιούμε παραστάσεις της μορφής $\left(t-\frac{z}{c}\right)$

Στην περιοχή (2) αντίστοιχα έχουμε $t_1 + \frac{z_1}{c} = t_2 + \frac{z_2}{c} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{z_1 - z_2}{c}$

Όμως αν $t_2 > t_1$ ισχύει ότι $z_2 < z_1$.

Επιστρέφοντας τώρα σε όσα κάναμε πριν βρίσκαμε ότι $H_{y_1} = -\frac{1}{2} K_x\left(t-\frac{z}{c}\right)$ (12)

και $H_{y_2} = \frac{1}{2} K_x\left(t+\frac{z}{c}\right)$ (13)

Από τη σχέση (4α) έχουμε ότι $E_x = -\frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\partial H_y}{\partial z}\,dt + d$

Άρα $E_{x_1} = -\frac{1}{\varepsilon c}\int K_x'\left(t-\frac{z}{c}\right) d\left(t-\frac{z}{c}\right) + d_1$ λόγω και της (12)

$$\Rightarrow E_{x_1} = -\frac{1}{\varepsilon c} K_x\left(t-\frac{z}{c}\right) + d_1 = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon} \cdot K_x\left(t-\frac{z}{c}\right) + d_1 .$$

η σταθερα αυτη εχει διαστασεις αντιστασεις (Ω), συμβολιζεται με J και καλειται κυματική αντισταση

$$\Rightarrow E_{x_1} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} K_x\left(t-\frac{z}{c}\right) + \cancelto{0}{d_1}$$

Παρόμοια με πριν βρισκαμε ότι $E_{x_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot K_x\left(t+\frac{z}{c}\right)$

Για το κενο (ή τον αερα) η κυματικη αντισταση J βρισκεται ως:

$$J = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,\Omega \cong 377\,\Omega .$$

Μελετουμε την ειδικη περιπτωση που $\boxed{K_x(t) = K_0 \cdot \cos\omega t}$. Τοτε προκυπτουν τα εξης:

- $H_{y_1} = -\frac{K_0}{2}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]$
- $E_{x_1} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{K_0}{2} \cdot \cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]$ ηλεκτρικο πεδιο παράλληλο προς το ρεύμα
- $H_{y_2} = \frac{K_0}{2}\cos\left[\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)\right]$ και
- $E_{x_2} = \frac{K_0}{2}\left(-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right)\cos\left[\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)\right]$