

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ (μεταπτυχιακό)

Διδάσκοντες: Ευστάθιος Ζάχος, Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου, Θανάσης Λιανέας
Κανονική Εξέταση, Φεβρουάριος 2021
Σύνολο μονάδων: 80

Θέμα 3^ο (4+8+8 μονάδες)

Θεωρούμε έναν επιστημονικό σύμβουλο με δραστηριότητες στην Αθήνα και στη Θεσσαλονίκη για τους επόμενους n μήνες. Για κάθε μήνα k , ο σύμβουλος μπορεί να επιλέξει ως έδρα του είτε την Αθήνα, οπότε έχει λειτουργικό κόστος α_k , είτε τη Θεσσαλονίκη, οπότε έχει λειτουργικό κόστος θ_k . Επιπλέον, για κάθε μεταβολή της έδρας του, ο επιστημονικός σύμβουλος έχει σταθερό κόστος μετακίνησης M . Με αυτά ως δεδομένα, ο σύμβουλος θέλει να καταρτίσει ένα πλάνο ελάχιστου συνολικού κόστους για την έδρα του στους επόμενους n μήνες.

Παράδειγμα: Θεωρούμε $n = 4$ μήνες, κόστος μετακίνησης $M = 10$, και τα παρακάτω μηνιαία λειτουργικά κόστη. Το βέλτιστο πλάνο είναι ο σύμβουλος να χρησιμοποιήσει ως έδρα την Αθήνα για τους δύο πρώτους μήνες, και ως έδρα τη Θεσσαλονίκη για τους δύο επόμενους μήνες. Το συνολικό κόστος είναι $1+3+10+2+4=20$.

	Μήνας 1	Μήνας 2	Μήνας 3	Μήνας 4
Αθήνα	1	3	20	30
Θεσσαλονίκη	50	20	2	4

α) Να βρείτε παράδειγμα όπου ο άπληστος αλγόριθμος, που επιλέγει ως έδρα την πόλη με το ελάχιστο λειτουργικό κόστος για κάθε μήνα, δεν καταλήγει σε πλάνο ελάχιστου συνολικού κόστους.

β) Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός πλάνου με ελάχιστο συνολικό κόστος. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

γ) Να γενικεύσετε τον αλγόριθμό σας για την περίπτωση που οι πόλεις είναι $m \geq 2$, το λειτουργικό κόστος για κάθε πόλη i και κάθε μήνα k είναι $c_k(i)$, και το κόστος μετακίνησης $M(i, j)$ εξαρτάται από τις πόλεις i και j μεταξύ των οποίων γίνεται η μετακίνηση. Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα του γενικευμένου αλγορίθμου;