$3^η$ Σειρά Ασκήσεων

Ιωάννης Τσαντήλας

03120883

Θέμα 1

Ερώτημα 1

Έχουμε συνδυασμό 1000 διακεκριμένων αντικειμένων (διαφορετικοί φοιτητές) σε 200 μη διακεκριμένες θέσεις (ίδια βιβλία) χωρίς επαναλήψεις, δηλαδή:

$$\boldsymbol{C(1000, 200) = \frac{1000!}{200!\,800!}}$$

Ερώτημα 2

Επιλέγουμε 200 φοιτητές από τους 1000 (Hunter), στην συνέχεια 250 από τους υπόλοιπους 800 (Rosen), 100 από τους υπόλοιπους 550 (Liu) και 50 από τους 450 (Epp), δηλαδή:

$$\boldsymbol{C(1000, 200)\ C(800, 250)\ C(550, 100)\ C(450, 50) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1000!}{200!\ 250!\ 100!\ 50!\ 400!}}$$

Ερώτημα 3

Ψάχνουμε πλήθος συμβολοσειρών μήκους 1000 από H,R,L,E:

- Ο **εκθετικός απαριθμητής** για καθένα από τα σύμβολα είναι $\boldsymbol{e^x}$.
- Η **ΕΓΣ** είναι $\boldsymbol{e^{4x}}$.
- Το πλήθος των συνδυασμών είναι ο συντελεστής του $x^{1000}/1000!$ δηλαδή, $\boldsymbol{4^{1000}}$.

Ερώτημα 4

Ψάχνουμε πλήθος συμβολοσειρών μήκους 1000 από H,R,L,E όπου κάθε ένα σύμβολο εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά:

- Ο **εκθετικός απαριθμητής** για καθένα από τα σύμβολα είναι $\boldsymbol{e^x - 1}$.
- Η **ΕΓΣ** είναι $\boldsymbol{(e^x - 1)^4}$.
- Το πλήθος των συνδυασμών είναι ο συντελεστής του $x^{1000}/1000!$ δηλαδή:

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{4} (-1)^i * \binom{4}{i} * (4-i)^{1000}}$$

Ερώτημα 5

- Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1000$$

όπου $0 <= z_i <= 350$.

- Ο απαριθμητής για κάθε z_i είναι: $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{350}$
- Η ΓΣ είναι $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{350})^4$.
- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{1000}.

Ερώτημα 6

- Διανομή k=1000 (διακεκριμένων) φοιτητών σε n=4 διακεκριμένες υποδοχές, με σημασία στην σειρά κάθε υποδοχής, χωρίς (πρακτικά) περιορισμούς.
- Ο εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή είναι 1/(1-x).
- Η ΕΓΣ είναι $1/(1-x)^4$.
- Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $x^{1000}/1000!$ δηλαδή:

$$\frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1})!}{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}=\frac{\mathbf{1003}!}{\mathbf{3}!}$$

Ερώτημα 7

- Διανομή k=1000 (διακεκριμένων) φοιτητών σε n=4 διακεκριμένες υποδοχές, με σημασία στην σειρά κάθε υποδοχής, με περιορισμούς (κάθε υποδοχή <= 350).
- Ο εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή είναι:

$$\sum_{n=0}^{350} x^n$$

- Η ΕΓΣ είναι:

$$\left(\sum_{n=0}^{350} x^n\right)^4$$

- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{1000}

Θέμα 2

Ερώτημα 1

- Αναζητούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 35$$

όπου B_i το πλήθος των θεμάτων τύπου Β στο αμφιθέατρο i.(εάν το αμφιθέατρο i έχει $Φ_i$ φοιτητές και B_i αντίτυπα τύπου Β, τότε θα έχει $A_i = Φ_i – B_i$ θέματα τύπου Α, επομένως αρκεί να βρούμε το πλήθος θεμάτων τύπου Β).

- Όσον αφορά τους περιορισμούς: $0 <= B_i <= 35$.
- Ο απαριθμητής για κάθε B_i είναι: $1 + x + x^2 + x^3 + … + x^{35}$
- Η ΓΣ: $(1 + x + x^2 + x^3 + … + x^{35})^4$
- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{35}, ο οποίος είναι:

$$\boldsymbol{C}(\mathbf{4}+\mathbf{35}-\mathbf{1},\mathbf{35})=\boldsymbol{C}(\mathbf{38},\mathbf{35})=\mathbf{8436}$$

Ερώτημα 2

- Έχουμε μετάθεση 190 διακεκριμένων αντικειμένων (διαφορετικοί φοιτητές) σε 2 ομάδες ίδιων αντικειμένων, μεγέθους 155 (ίδια θέματα Α) και 35 (ίδια θέματα Β), επομένως:

$$\frac{190!}{155!\,35!}$$

Ερώτημα 3

- Έστω B_{02} το σύνολο των σεναρίων στα οποία μοιράζονται μηδέν θέματα τύπου Β στο αμφιθέατρο 2 και αντίστοιχα B_{03}.
- Η πιθανότητα είναι:

$$\frac{|B_{02}| + |B_{03}| - |B_{02} \cap B_{03}|}{|Ολικά\ Σενάρια|}$$

1. **|Ολικά Σενάρια|** = ο συντελεστής του x^{35} που βρέθηκε στο Ερώτημα 1.

2. Για τα **$|B_{02}|$ και $|B_{03}|$** θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$B_1 + 0 + B + B_4 = 35 => \ B_1 + B + B_4 = 35$$

- Όσον αφορά τους περιορισμούς: 0 <= B_i <= 35 (η μεταβλητή B συμβολίζει το αμφιθέατρο 2 ή 3).
- $A(x) = (1 + +x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{35})^3$
- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{35}, ο οποίος είναι:

$$\boldsymbol{C(3+35-1,35) = C(37,35) = 1408}$$

3. Για το $|\boldsymbol{B_{02}} \cap \boldsymbol{B_{03}}|$ θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$B_1 + 0 + 0 + B_4 = 35 => B_1 + B_4 = 35$$

- Όσον αφορά τους περιορισμούς: 0 <= B_i <= 35.
- $A(x) = (1 + +x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{35})^2$
- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{35}, ο οποίος είναι:

$$\boldsymbol{C(2+35-1,35) = C(36,35) = 36}$$

Ερώτημα 4

- Εάν δεν μας ενδιαφέρει η ο τύπος θέματος που θα έχει ο κάθε φοιτητής, θα αναζητούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 155$$

- Όσον αφορά τους περιορισμούς: 15 <= A_1 <= 80, 10 <= A_2,A_3 <= 35 (και άρτιοι) και 10 <= A_4 <= 40 (και άρτιος).
- $A(x) = (x^{15} + x^{16} + \ldots + x^{80}) * (x^{10} + x^{12} + \ldots + x^{34})^2 * (x^{10} + x^{12} + \ldots + x^{40})$
- Επειδή όμως μας ενδιαφέρει ο τύπος θέματος που θα πάρει κάθε φοιτητής, σε κάθε όρο κάθε αριθμητή, θα πολλαπλασιάσουμε με C(80, εκθέτης), ώστε να διασφαλίσουμε τους διαφορετικούς τρόπους που μπορούμε να επιλέξουμε κάθε φορά τους φοιτητές.
- $A(x) = (C(80,15)*x^{15} + C(80,16)*x^{16} + \ldots + x^{80}) * (C(80,10)*x^{10} + C(80,12)*x^{12} + \ldots + C(80,34)*x^{34})^2 * (C(80,10)*x^{10} + C(80,12)*x^{12} + \ldots + C(80,40)*x^{40})$.
- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{155}.

Θέμα 3

Ερώτημα 1

- Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots + \Phi_{100} = 100$$

- Όπου Φ_I είναι το πλήθος των φοιτητών στην αίθουσα ι, με τον περιορισμό ότι $\Phi_i <= \Phi_{i+1}$, για κάθε i>=2, με $\Phi_1 >= 0$.
- Το πρόβλημα μετασχηματίζεται εάν θέσουμε $\Phi_i = \Phi_{i-1} + \alpha_{i-1}$, με i>=2 και $\alpha_I >= 0$, οπότε, τελικά:

$$\Phi_1 + (\Phi_1 + \alpha_1) + (\Phi_2 + \alpha_2) + (\Phi_3 + \alpha_3) + \ldots + (\Phi_{99} + \alpha_{99}) = 100$$

$$\Phi_1 + (\Phi_1 + \alpha_1) + (\Phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2) + (\Phi_2 + \alpha_2 + \alpha_3) + \ldots + (\Phi_{98} + \alpha_{98} + \alpha_{99}) = 100$$

$$100\Phi_1 + 99\alpha_1 + 98\alpha_2 + 97\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_{98} + \alpha_{99} = 100$$

- Ο απαριθμητής για Φ_1 είναι: $1 + x^{100}$.
- Εάν i >= 2, ο απαριθμητής για κάθε ένα από τα α_i είναι: $(1+x^i + x^{2i} + x^{3i} + \ldots + x^{100 | i})$, όπου 100|i δηλώνει την ακέραια διαίρεση του 100 με το i.
- Η ΓΣ είναι:

$$(1+x^{100})(1+x^{99})(1+x^{98}) \ldots (1+x^{51})(1+x^{50}+x^{100})(1+x^{49}+x^{98}) \ldots (1+x+x^2+\cdots+x^{100})$$

- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{100}.

Ερώτημα 2

- Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\Phi_1 + 2\Phi_2 + 3\Phi_3 + \ldots + 100\Phi_{100} = 100$$

όπου, Φ_i = 0 ή 1, αφού δεν θέλουμε ίδιο πλήθος φοιτητών σε 2 μη κενές αίθουσες.

- Ο απαριθμητής για Φ_i είναι: $1 + x^i$.
- Η ΓΣ είναι:

$$(1+x)(1+\ x^2)(1+x^3) \ldots (1+x^{100})$$

- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{100}.

Θέμα 4

Ερώτημα α

Υποερώτημα 1

- Διανομή 500 διακεκριμένων βιβλίων σε 8 διακεκριμένες βιβλιοθήκες χωρίς να έχει σημασία η σειρά στις βιβλιοθήκες και με $20 <= B_i <= 100$.
- Εκθετικός απαριθμητής:

$$\sum_{n=20}^{100} \frac{x^n}{n!}$$

- Η ΕΓΣ:

$$\left(\sum_{n=20}^{100} \frac{x^n}{n!}\right)^8$$

- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του $x^{500}/500!$

Υποερώτημα 2

- Μετά από τον σχηματισμό του απαριθμητή στο προηγούμενο ερώτημα, πολλαπλασιάζουμε το $x^{500}/500!$ Με 500!
- Εκθετικός απαριθμητής:

$$\sum_{n=20}^{100} n! \frac{x^n}{n!}$$

- Η ΕΓΣ:

$$\left(\sum_{n=20}^{100} n! \frac{x^n}{n!}\right)^8$$

- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του $x^{500}/500!$

Ερώτημα β

Αρχικά, δεν γίνεται να έχουμε συμβολοσειρά μικρότερου μήκους από ότι 3, διότι τα 0,1 πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά, όπως και τα 7,9.

- Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 3,5,6,8: e^x.
- Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 2,4 (άρτιο πλήθος εμφανίσεων): $(e^x + e^{-x})/2$.
- Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 7,9 (περιττό πλήθος εμφανίσεων): $(e^x - e^{-x})/2$.
- Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 0,1 (τουλάχιστον 1 φορά): $e^x – 1$.
- Η ΕΓΣ:

$$\frac{e^{4x} * (e^x + e^{-x})^2 * (e^x - e^{-x})^2 * (e^x - 1)^2}{16} =$$

$$= \frac{e^{10x} - 2e^{9x} + e^{8x} - 2e^{6x} + 4e^{5x} - 2e^{4x} + e^{2x} - 2e^x - 1}{16}$$

- Το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του $x^n/n!$ ο οποίος ισούται με:

$$\frac{10^n - 2 * 9^n + 8^n - 2 * 6^n + 4 * 5^n - 2^{2n+1} + 2^n - 2}{16}$$