Ελαχιστοποίηση κόστους

Αντώνης Παπαβασιλείου, ΕΜΠ

Βασισμένο στον Varian [1]

Περιεχόμενα

Ελαχιστοποίηση κόστους ως μέρος της ανάλυσης μεγιστοποίησης κέρδους

- Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά μεγιστοποίησης κέρδους τόσο ανταγωνιστικών όσο και μη ανταγωνιστικών επιχειρήσεων
- Μπορούμε να αποσυνθέσουμε τη μεγιστοποίηση κέρδους σε δύο μέρη:
  - Ελαχιστοποίηση κόστους για ένα δεδομένο επίπεδο εκροής
  - Εύρεση της εκροής η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος

Ερώτηση 21.1

- Αποδείξτε πως μια επιχείρηση που μεγιστοποιεί το κέρδος ελαχιστοποιεί το κόστος

Απάντηση στην ερώτηση 21.1

- Εφόσον το κέρδος ισούται με έσοδα μείον συνολικό κόστος, αν η επιχείρηση δεν ελαχιστοποιεί το κόστος τότε υπάρχει τρόπος για την επιχείρηση να αυξήσει το κέρδος
- Αλλά αυτό είναι αντίφαση με την υπόθεση ότι η επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος

Ελαχιστοποίηση κόστους

Συνάρτηση κόστους

- Έστω ότι έχουμε δύο συντελεστές παραγωγής με τιμές w_1 και w_2, και θέλουμε να βρούμε το φθηνότερο τρόπο για να παράγουμε εκροή y
- Συμβολίζουμε με x_1 και x_2 την ποσότητα που χρησιμοποιείται από κάθε εισροή 1 και 2 αντίστοιχα, και με $f(x_1, x_2)$ τη συνάρτηση παραγωγής της επιχείρησης
- Τότε μας ενδιαφέρει το εξής πρόβλημα:

$$\min_{x_1,x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$\text{υποκείμενο σε } f(x_1, x_2) = y$$

- Το ελάχιστο κόστος θα εξαρτάται από τις τα w_1, w_2 και y, οπότε το συμβολίζουμε ως $c(w_1, w_2, y)$
- Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση κόστους**
- Είναι το ελάχιστο κόστος στο οποίο μπορούμε να παράγουμε y, όταν οι τιμές των εισροών είναι w_1, w_2

Καμπύλη ίσου κόστους

- Οι γραμμές ίσου κόστους είναι όλοι οι συνδυασμοί εισροών που έχουν ένα δεδομένο κόστος C:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = C$$

- Αυτό μπορεί να εκφραστεί και ως:

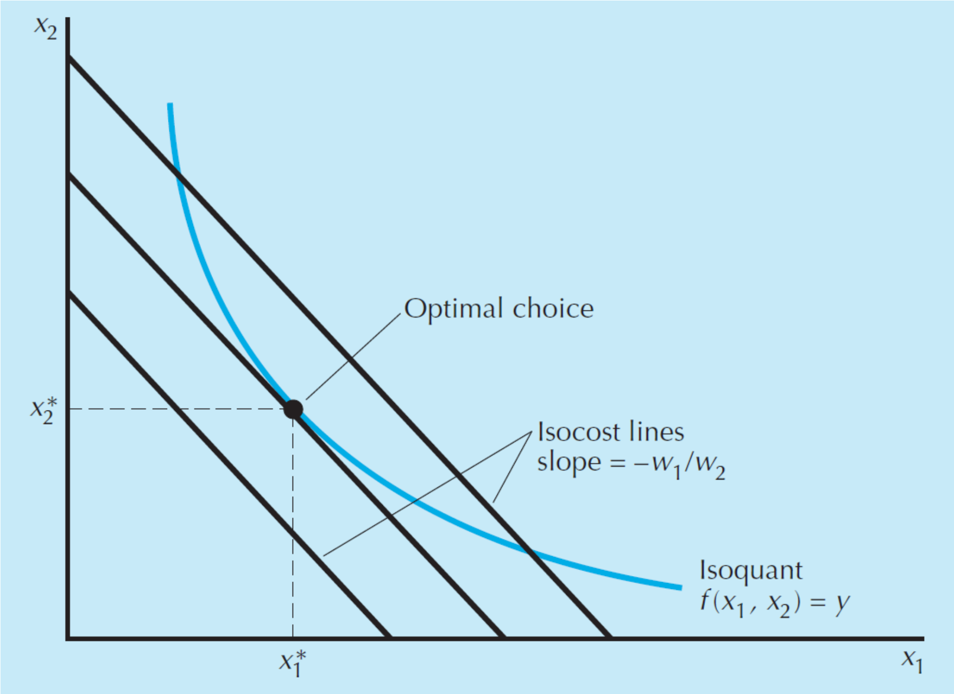
$$x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1$$

- Οι καμπύλες αυτές ονομάζονται **καμπύλες ίσου κόστους**

Γραφική επίλυση ελαχιστοποίησης κόστους

- Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους μπορεί να αναδιατυπωθεί ως: βρες το σημείο στην καμπύλη ίσης ποσότητας που σχετίζεται με τη χαμηλότερη καμπύλη ίσου κόστους
- Αν υπάρχει μη μηδενική χρήση και των δύο συντελεστών παραγωγής, και η καμπύλη ίσου κόστους έχει “ομαλή” μορφή όπως στο σχήμα, τότε το σημείο ελαχίστου κόστους είναι το σημείο όπου μια καμπύλη ίσου κόστους είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη ίσης ποσότητας
- Ή, χρησιμοποιώντας την ορολογία του κεφαλαίου 19, ο ΤΛΥ πρέπει να εφάπτεται στο λόγο των τιμών των συντελεστών παραγωγής:

$$-\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)} = \text{ΤΛΥ}(x_1^*, x_2^*) = -\frac{w_1}{w_2} \quad (21.1)$$



Πώς φτάσαμε στη συνθήκη (21.1);

- Έστω μια αλλαγή $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ στις αποφάσεις παραγωγής η οποία κρατά την εκροή σταθερή
- Αφού η εκροή δεν αλλάζει, πρέπει να έχουμε
$$MP_1(x_1^*, x_2^*)\Delta x_1 + MP_2(x_1^*, x_2^*)\Delta x_2 = 0 \quad (21.2)$$
- Σημειώνουμε ότι τα Δx_1 και Δx_2 πρέπει να έχουν αντίθετα πρόσημα
- Αν είμαστε στο ελάχιστο κόστος, αυτή η αλλαγή δεν μπορεί να μειώσει το κόστος:
$$w_1 \Delta x_1 + w_2 \Delta x_2 \geq 0 \quad (21.3)$$
- Αλλά και η αλλαγή $(-\Delta x_1, -\Delta x_2)$ επίσης δεν αλλάζει την εκροή αλλά δεν μπορεί να μειώνει το κόστος:
$$-w_1 \Delta x_1 - w_2 \Delta x_2 \geq 0 \quad (21.4)$$
- Συνδυάζοντας τις (21.3) και (21.4), έχουμε
$$w_1 \Delta x_1 + w_2 \Delta x_2 = 0 \quad (21.5)$$
- Και λύνοντας τις (21.2) και (21.5) ως προς $\Delta x_2 / \Delta x_1$, έχουμε
$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{w_1}{w_2} = -\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2\left(x_1^*, x_2^*\right)}$$

Εξαρτώμενες συναρτήσεις ζήτησης συντελεστών παραγωγής

- Οι επιλογές εισροών που οδηγούν σε ελάχιστο κόστος εξαρτώνται από τις τιμές των εισροών και το επίπεδο εκροής που θέλει να πετύχει η επιχείρηση
- Άρα μπορούμε να τις εκφράσουμε ως $x_1(w_1, w_2, y)$ και $x_2(w_1, w_2, y)$
- Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **εξαρτώμενες συναρτήσεις ζήτησης** συντελεστών παραγωγής ή **παράγωγες συναρτήσεις ζήτησης** συντελεστών παραγωγής
- Οι εξαρτώμενες συναρτήσεις ζήτησης δίνουν τη βέλτιστη ζήτηση συντελεστών παραγωγής για ένα *δεδομένο επίπεδο* εκροής, ενώ οι συναρτήσεις ζήτησης συντελεστών παραγωγής που μεγιστοποιούν το κέρδος δίνουν τη ζήτηση για μια *δεδομένη τιμή* της εκροής

Παράδειγμα: ελαχιστοποίηση κόστους για τέλεια συμπληρώματα

- Έστω μια τεχνολογία όπου οι συντελεστές παραγωγής είναι τέλεια συμπληρώματα, $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$
- Αν θέλουμε y μονάδες εκροής, χρειαζόμαστε y μονάδες του συντελεστή παραγωγής 1 και y μονάδες του συντελεστή παραγωγής 2
- Άρα το ελάχιστο κόστος παραγωγής είναι

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 y + w_2 y = (w_1 + w_2) y$$

Παράδειγμα: ελαχιστοποίηση κόστους για τέλεια υποκατάστατα

- Έστω τεχνολογία τέλειων υποκατάστατων: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
- Αφού είναι τέλεια υποκατάστατα, η επιχείρηση θα χρησιμοποιήσει το φθηνότερο από τα δύο
- Άρα η συνάρτηση κόστους είναι
$$c(w_1, w_2, y) = \min\{w_1 y, w_2 y\} = \min\{w_1, w_2\}\, y$$

Παράδειγμα: ελαχιστοποίηση κόστους για τεχνολογία Cobb-Douglas

- Έστω τεχνολογία Cobb-Douglas: $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$
- Χρησιμοποιώντας διαφορικό λογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$c(w_1, w_2, y) = K w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

όπου η σταθερά K εξαρτάται από τις παραμέτρους a και b

- Η λεπτομερής απόδειξη δίνεται στο παράρτημα

Ερώτηση 21.2

- Αν η επιχείρηση παράγει σε επίπεδο όπου $\frac{MP_1}{w_1} > \frac{MP_2}{w_2}$, τι μπορεί να κάνει για να μειώσει το κόστος αλλά να διατηρήσει το ίδιο επίπεδο εκροών;

Απάντηση στην ερώτηση 21.2

- Να αυξήσει τη χρήση του συντελεστή 1 και να ελαττώσει τη χρήση του συντελεστή 2

Ερώτηση 21.3

- Έστω ότι μια επιχείρηση η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος χρησιμοποιεί δύο εισροές που είναι τέλεια υποκατάστατα
- Αν οι δύο εισροές έχουν την ίδια τιμή, τι μορφή έχουν οι εξαρτώμενες συναρτήσεις ζήτησης των συντελεστών παραγωγής;

Απάντηση στην ερώτηση 21.3

- Εφόσον οι εισροές είναι τέλεια υποκατάστατα με πανομοιότυπες τιμές, η επιχείρηση θα είναι αδιάφορη μεταξύ των δύο εισροών
- Άρα η επιχείρηση θα χρησιμοποιήσει οποιαδήποτε ποσότητα των δύο εισροών τέτοια ώστε $x_1 + x_2 = y$

Αποκαλυφθείσα ελαχιστοποίηση κόστους

Ασθενές αξίωμα ελαχιστοποίησης κόστους

- Έστω ότι παρατηρούμε δύο σύνολα τιμών (w_1^t, w_2^t) και (w_1^s, w_2^s), και έστω ότι στις δύο αυτές περιπτώσεις η επιχείρηση επιλέγει (x_1^t, x_2^t) και (x_1^s, x_2^s) αντίστοιχα
- Και έστω ότι και στις δύο περιπτώσεις η επιχείρηση παράγει την ίδια ποσότητα εκροής y
- Αν η επιχείρηση αποφασίζει με κριτήριο την ελαχιστοποίηση κόστους, τότε ισχύει ότι

$$w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leq w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s$$
$$w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leq w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t$$

- Το **ασθενές αξίωμα ελαχιστοποίησης κόστους** (weak axiom of cost minimization, WACM) αντιστοιχεί σε αυτές τις ανισότητες

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε από το WACM;

- Γράφουμε τη δεύτερη ανισότητα ως
$$-w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \leq -w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s$$
- Και το προσθέτουμε στην πρώτη ανισότητα:
$$\left(w_1^t - w_1^s\right)x_1^t + \left(w_2^t - w_2^s\right)x_2^t \leq \left(w_1^t - w_1^s\right)x_1^s + (w_2^t - w_2^s)\, x_2^s$$
- Αναδιαρρυθμίζοντας:
$$\left(w_1^t - w_1^s\right)\left(x_1^t - x_1^s\right) + \left(w_2^t - w_2^s\right)\left(x_2^t - x_2^s\right) \leq 0$$
- Χρησιμοποιώντας το Δ δια διαφορές:
$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0$$
- Η ανισότητα αυτή οδηγεί σε ισχυρά συμπεράσματα συγκριτικής στατικής όταν η εκροή της επιχείρησης παραμένει σταθερή

Συγκριτική στατική

- Έστω ότι αυξάνεται η τιμή του πρώτου συντελεστή παραγωγής, και η τιμή του δεύτερου συντελεστή παραγωγής παραμένει σταθερή
- Τότε $\Delta w_2 = 0$, άρα
$$\Delta w_1 \Delta x_1 \leq 0$$
- Άρα η ζήτηση για το συντελεστή παραγωγή 1 πρέπει να μειωθεί
- Άρα η εξαρτώμενη καμπύλη ζήτησης έχει αρνητική κλίση

Ερώτηση 21.4

- Η τιμή του χαρτιού που χρησιμοποιεί μια επιχείρηση η οποία ελαχιστοποιεί κόστος αυξάνεται
- Η επιχείρηση αντιδρά στην αλλαγή τιμών αλλάζοντας τη ζήτηση για ορισμένες εισροές, αλλά κρατά την εκροή της σταθερή
- Τι συμβαίνει με τη χρήση χαρτιού από την επιχείρηση;

Απάντηση στην ερώτηση 21.4

- Η ζήτηση για χαρτί ελαττώνεται ή μένει σταθερή

Ερώτηση 21.5

- Αν η επιχείρηση χρησιμοποιεί n εισροές ($n > 2$), ποια ανισότητα συνεπάγεται η θεωρία αποκαλυφθείσας ελαχιστοποίησης κόστους για αλλαγές στις τιμές των συντελεστών παραγωγής (Δw_i) και αλλαγές στη ζήτηση των συντελεστών παραγωγής (Δx_i) για δεδομένο επίπεδο εκροών;

Απάντηση στην ερώτηση 21.5

- Συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta w_i \Delta x_i \leq 0$$

όπου $\Delta w_i = w_i^t - w_i^s$ και $\Delta x_i = x_i^t - x_i^s$

Αποδόσεις κλίμακας και η συνάρτηση κόστους

Επίδραση των αποδόσεων κλίμακας στη συνάρτηση κόστους

- Έστω ότι μια επιχείρηση έχει σταθερές αποδόσεις κλίμακας
  - Και έστω ότι έχουμε λύσει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους για μοναδιαία εκροή, που μας δίνει τη **μοναδιαία συνάρτηση κόστους** $c(w_1, w_2, 1)$
  - Αν θέλουμε να παράγουμε y μονάδες εκροής, χρησιμοποιούμε y φορές περισσότερες εισροές, άρα $c(w_1, w_2, y) = c(w_1, w_2, 1) \cdot y$
- Έστω ότι η επιχείρηση έχει αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας
  - Αν η επιχείρηση θέλει να διπλασιάσει την εκροή της χρειάζεται λιγότερο από διπλάσιες εισροές
  - Άρα κοστίζει λιγότερο από δύο φορές περισσότερο
- Έστω ότι η επιχείρηση έχει φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας
  - Αν η επιχείρηση θέλει να διπλασιάσει την εκροή της, κοστίζει περισσότερο από δύο φορές περισσότερο

Μέσο κόστος

- Η **συνάρτηση μέσου κόστους** είναι το κόστος *ανά μονάδα* που απαιτείται για την παραγωγή y μονάδων εκροής
$$AC(y) = \frac{c(w_1, w_2, y)}{y}$$
- Αν η τεχνολογία έχει σταθερές αποδόσεις κλίμακας, τότε
$$AC(w_1, w_2, y) = \frac{c(w_1, w_2, 1)y}{y} = c(w_1, w_2, 1)$$
- Άρα η συνάρτηση μέσου κόστους είναι σταθερή για όλα τα επίπεδα εκροής
- Αν η τεχνολογία έχει αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας, τότε η συνάρτηση μέσου κόστους θα είναι φθίνουσα
- Αν η τεχνολογία έχει φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας, τότε η συνάρτηση μέσου κόστους θα είναι αύξουσα
- Οι αποδόσεις κλίμακας μπορούν να μεταβάλλονται ανάλογα με το επίπεδο εκροής της επιχείρησης, άρα η συνάρτηση μέσου κόστους μπορεί να είναι σταθερή, αύξουσα, ή φθίνουσα σε διαφορετικά επίπεδα εκροής
- Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε τις τιμές των εισροών δεδομένες, οπότε αντί για $c(w_1, w_2, y)$ θα γράφουμε $c(y)$

Μακροπρόθεσμο και βραχυπρόθεσμο κόστος

Βραχυπρόθεσμη και μακροπρόθεσμη συνάρτηση κόστους

- Η **βραχυπρόθεσμη συνάρτηση κόστους** είναι το ελάχιστο κόστος στο οποίο μπορεί να παραχθεί ορισμένη εκροή αν κάποιοι συντελεστές παραγωγής δεν είναι μεταβλητοί
- Η **μακροπρόθεσμη συνάρτηση κόστους** είναι το ελάχιστο κόστος στο οποίο μπορεί να παραχθεί ορισμένη εκροή αν *όλοι* οι συντελεστές παραγωγής είναι μεταβλητοί

Μαθηματικός ορισμός βραχυπρόθεσμης συνάρτησης κόστους

- Έστω ότι ο συντελεστής παραγωγής 2 είναι σταθερός στο επίπεδο $\bar{x}_2$
- Τότε η βραχυπρόθεσμη συνάρτηση κόστους είναι εξορισμού

$$c_s(y, \bar{x}_2) = \min_{x_1} w_1 x_1 + w_2 \bar{x}_2$$
$$\text{υποκειμενο σε } f(x_1, \bar{x}_2) = y$$

- Στην περίπτωση δύο συντελεστών παραγωγής η λύση είναι απλά η ελάχιστη ποσότητα του συντελεστή 1 που δίνει $f(x_1, \bar{x}_2) = y$, με πολλαπλούς συντελεστές παραγωγής η λύση είναι πιο σύνθετη
- Η βραχυπρόθεσμη συνάρτηση ζήτησης για το συντελεστή παραγωγής 1 είναι η ποσότητα του συντελεστή παραγωγής 1 που ελαχιστοποιεί το κόστος
- Κατά κανόνα θα εξαρτάται από τις τιμές των συντελεστών παραγωγής και τα επίπεδα των σταθερών συντελεστών, άρα οι συναρτήσεις ζήτησης εκφράζονται ως

$$x_1 = x_1^s(w_1, w_2, \bar{x}_2, y)$$
$$x_2 = \bar{x}_2$$

- Εξορισμού της συνάρτησης βραχυπρόθεσμου κόστους:

$$c_s(y, \bar{x}_2) = w_1 x_1^s(w_1, w_2, \bar{x}_2, y) + w_2 \bar{x}_2$$

Μαθηματικός ορισμός μακροπρόθεσμης συνάρτησης κόστους

- Η μακροπρόθεσμη συνάρτηση κόστους ορίζεται ως

$$c(y) = \min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$\text{υποκειμενο σε } f(x_1, x_2) = y$$

- Η μακροπρόθεσμη ζήτηση για τους συντελεστές παραγωγής εξαρτάται από τις τιμές των συντελεστών παραγωγής και την επιθυμητή εκροή

$$x_1 = x_1(w_1, w_2, y)$$
$$x_2 = x_2(w_1, w_2, y)$$

- Η μακροπρόθεσμη συνάρτηση κόστους γράφεται

$$c(y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y)$$

Σχέση μεταξύ της βραχυπρόθεσμης και της μακροπρόθεσμης συνάρτησης κόστους

- Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές των συντελεστών παραγωγής είναι δεδομένες, και ας γράψουμε τη μακροπρόθεσμη ζήτηση για συντελεστές παραγωγής ως
$$x_1 = x_1(y)$$
$$x_2 = x_2(y)$$
- Τότε έχουμε
$$c(y) = c_s(y, x_2(y))$$
- Γιατί ισχύει αυτό;
  - Η εξίσωση λέει ότι το ελάχιστο κόστος όταν όλοι οι συντελεστές είναι μεταβλητοί είναι το βραχυπρόθεσμο κόστος όταν ο συντελεστής 2 είναι ίσος με το *επίπεδο στο οποίο ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο κόστος*
- Άρα ισχύει ότι η μακροπρόθεσμη ζήτηση για το μεταβλητό συντελεστή παραγωγής είναι
$$x_1(w_1, w_2, y) = x_1^s(w_1, w_2, x_2(y), y)$$
- Με άλλα λόγια: η επιλογή μεταβλητού συντελεστή που ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο κόστος είναι αυτό που θα διάλεγε η επιχείρηση και σε βραχυπρόθεσμη κλίμακα, αν τύγχανε ο σταθερός συντελεστής παραγωγής να ήταν στο βέλτιστό του επίπεδο

Σταθερό και σχεδόν σταθερό κόστος

Σταθερό και σχεδόν σταθερό κόστος

- Το **σταθερό κόστος** είναι το κόστος που σχετίζεται με σταθερούς συντελεστές παραγωγής, δηλαδή που πρέπει να πληρωθεί ανεξαρτήτως του αν η επιχείρηση παράγει εκροή ή όχι
- Το **σχεδόν σταθερό κόστος** είναι το κόστος που σχετίζεται με σχεδόν σταθερούς συντελεστές παραγωγής, δηλαδή που πρέπει να πληρωθεί αν η επιχείρηση παράγει θετική ποσότητα εκροής
- Μακροπρόθεσμα δεν υπάρχει σταθερό κόστος εξορισμού
- Αλλά μακροπρόθεσμα μπορεί να υπάρχει σχεδόν σταθερό κόστος

Μη ανακτήσιμο κόστος

Μη ανακτήσιμο κόστος

- Το μη ανακτήσιμο κόστος είναι σταθερό κόστος το οποίο είναι μια πληρωμή που δεν μπορεί να ανακτηθεί
- Για παράδειγμα, έστω ότι δανειζόμαστε 20000 € για ένα έτος με επιτόκιο 10%
- Και έστω ότι ενοικιάζουμε ένα χώρο γραφείων και πληρώνουμε 12000 € μπροστά στην αρχή του χρόνου για το ενοίκιο
- Ξοδεύουμε 6000 € σε έπιπλα γραφείου, και άλλα 2000 € για να βάψουμε το χώρο
- Στο τέλος του χρόνου ξεπληρώνουμε το δάνειο 20000 €, τα 2000 € τόκο, και πουλάμε (ή ξέρουμε ότι μπορούμε να πουλήσουμε) τα έπιπλα για 5000 €
- Το μη ανακτήσιμο κόστος είναι το ενοίκιο 12000 €, τα 2000 € τόκου, τα 2000 € βαψίματος, αλλά μόνο τα 1000 € επίπλων: τα υπόλοιπα 5000 € των επίπλων είναι ανακτήσιμα

Παράρτημα

Ελαχιστοποίηση κόστους με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange

- Επανερχόμαστε στην ελαχιστοποίηση κόστους με συναρτήσεις παραγωγής Cobb-Douglas, χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του κεφαλαίου 5
- Έχουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπό περιορισμούς:

$$\min_{x_1,x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$\text{υποκειμενο σε } f(x_1, x_2) = y$$

- Επιλύουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

- Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(f(x_1, x_2) - y)$$

- Οι συνθήκες πρώτου βαθμού είναι:

$$w_1 - \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$$

$$w_2 - \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$f(x_1, x_2) - y = 0$$

- Αναδιαρρυθμίζοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις και διαιρώντας την πρώτη με τη δεύτερη:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

- Αυτή είναι ακριβώς η συνθήκη που είδαμε προηγουμένως: ο ΤΛΥ πρέπει να ισούται με το λόγο των τιμών

Ελαχιστοποίηση κόστους για συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

- Έστω η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas: $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$
- Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους είναι:

$$\min_{x_1,x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$\text{υποκειμενο σε } x_1^a x_2^b = y$$

- Αντικαθιστώντας το x_2 ως συνάρτηση του x_1:

$$x_2 = (y x_1^{-a})^{1/b}$$

- Αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min_{x_1} w_1 x_1 + w_2 (y x_1^{-a})^{1/b}$$

- Μπορούμε να θέσουμε την παράγωγο ίση με μηδέν, και από εκεί να λύσουμε ως προς x_1 για να υπολογίσουμε την εξαρτώμενη συνάρτηση ζήτησης, αλλά η άλγεβρα γίνεται λίγο κουραστική
- Απεναντίας, θα λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange

Ελαχιστοποίηση κόστους για συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas με συνάρτηση Lagrange

- Οι συνθήκες πρώτου βαθμού είναι

$$w_1 = \lambda a x_1^{a-1} x_2^b$$
$$w_2 = \lambda b x_1^a x_2^{b-1}$$
$$y = x_1^a x_2^b$$

- Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με x_1 και τη δεύτερη με x_2:

$$w_1 x_1 = \lambda a x_1^a x_2^b = \lambda a y$$
$$w_2 x_2 = \lambda b x_1^a x_2^b = \lambda b y$$

- Άρα έχουμε

$$x_1 = \lambda \frac{ay}{w_1} \quad (21.6)$$
$$x_2 = \lambda \frac{by}{w_2} \quad (21.7)$$

Ελαχιστοποίηση κόστους για συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas με συνάρτηση Lagrange

- Χρησιμοποιούμε την τρίτη εξίσωση για να επιλύσουμε ως προς λ:
$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^a \left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^b = y$$
- Λύνοντας ως προς λ, φτάνουμε στην έκφραση
$$\lambda = \left(a^{-a} b^{-b} w_1^a w_2^b y^{1-a-b}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$
- Μαζί με τις (21.6) και (21.7), φτάνουμε στις τελικές λύσεις για τα x_1 και x_2
- Οι συναρτήσεις ζήτησης για τους συντελεστές παραγωγής έχουν την τελική μορφή:
$$x_1(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{\frac{-b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$
$$x_2(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{-a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

Συνάρτηση κόστους

- Αντικαθιστώντας, υπολογίζουμε τη συνάρτηση κόστους:
$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y)$$
- Κουραστική άλγεβρα οδηγεί στην εξής έκφραση:
$$c(w_1, w_2, y) = [\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + (\frac{a}{b})^{-\frac{a}{a+b}}] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

Βιβλιογραφία

[1] Hal Varian, Μικροοικονομική: μια σύγχρονη προσέγγιση, 3η έκδοση, εκδόσεις Κριτική, 2015