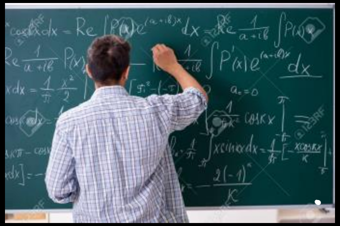
ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 25

Διάλεξη: 9 Δεκεμβρίου 2020

Προηγούμενα επεισόδια: Μετασχηματισμός Laplace και λύση ΔΕ



$$f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$f(t)$	1	t	t^n	e^{at}	$\sin(wt)$	$\cos(wt)$	$\sinh(at)$	$\cosh(at)$	$e^{at}\sin(wt)$	$e^{at}\cos(wt)$
$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$

$$a f(t) + b g(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} a F(s) + b G(s)$$

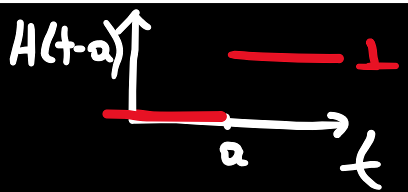
$$e^{at} f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F(s-a)$$

$$f'(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} sF(s) - f(0)$$

$$f''(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\int_0^t f(z)\, dz \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \frac{1}{s} F(s)$$

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$



$$H(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \frac{e^{-as}}{s}$$

$$f(t)\, H(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as} L[f(t+a)]$$

$$f(t-a)\, H(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as} F(s)$$

$$\delta(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as}$$

$$\delta(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} 1$$

$f(t-a)H(t-a) \rightleftarrows e^{-as}F(s)$

Παράδειγμα: $L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{1+s^2}\right] = ;$

Παρατηρείστε ότι: $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$

$$a=2 \qquad e^{-2s} \qquad \underbrace{\frac{1}{1+s^2}}_{F(s)}$$

$$\frac{1}{1+s^2} \xrightarrow{L^{-1}} \sin t \quad f(t)$$

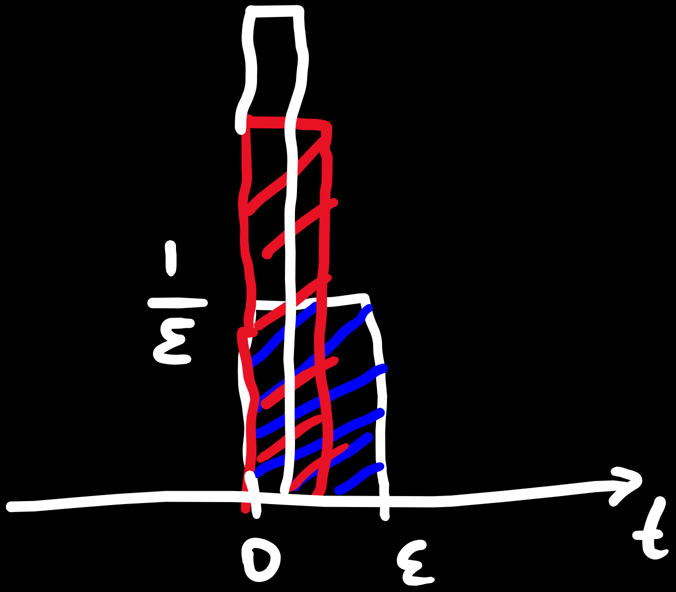
$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{1+s^2}\right] = H(t-2)\sin(t-2)$$

4.1.2 Συνάρτηση Δέλτα (ή κρουστική ή συνάρτηση Dirac)

Έστω η συνάρτηση $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0<t<\varepsilon \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ $(\varepsilon > 0)$

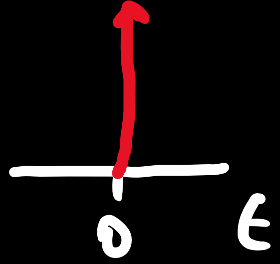
Τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon = 1$. Έστω ότι το $\varepsilon \downarrow$

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)}$$



Παρατηρήσεις:

1. Η $\delta(t)$ είναι "παντού" μηδέν, εκτός από το $t=0$ όπου είναι "άπειρη"



2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$

3. $L[\delta(t)] = ;$

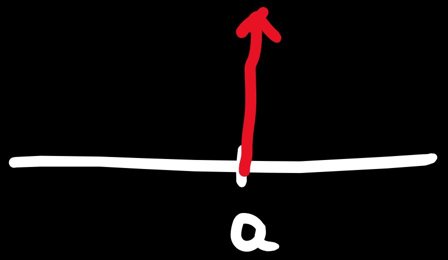
$$L[f_\varepsilon(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f_\varepsilon(t)\,dt = \int_0^\varepsilon e^{-st} \overset{1/\varepsilon}{\overset{\parallel}{f_\varepsilon}}(t)\,dt + \int_\varepsilon^\infty e^{-st} \cancelto{0}{f_\varepsilon}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-st}\,dt = \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

$$L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon\to 0} L[f_\varepsilon(t)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{s e^{-\varepsilon s}}{s} = 1$$

$$\boxed{L[\delta(t)] = 1}$$

4. $\delta(t-a)$



$$\boxed{\delta(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as}}$$

5. Άλλες ιδιότητες

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

6. Ροή ρύπων σε έκρηξη (πχ 100 kg) για $t=a$.

$$F(t) = 100\,\delta(t-a)$$

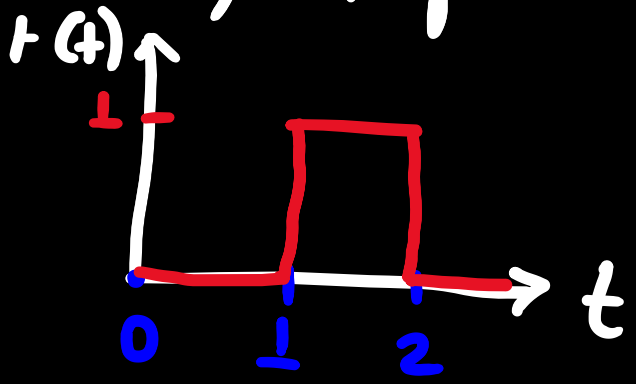
Παράδειγμα: Ελατήριο με τριβή $\quad y'' + 3y' + 2y = r(t)$

τριβή $\qquad$ δύναμη

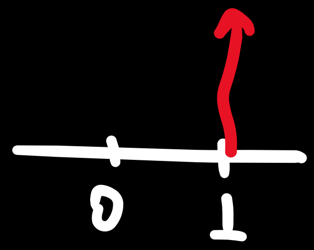
$$y(0)=0 \qquad y'(0)=0$$

Βρείτε το $y(t)$ για:

(α)



(β) $r(t) = \delta(t-1)$



Λύση: Laplace

$$L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] = L[r(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 3s Y(s) - 3y(0) + 2Y(s) = L[r(t)] \Rightarrow$$

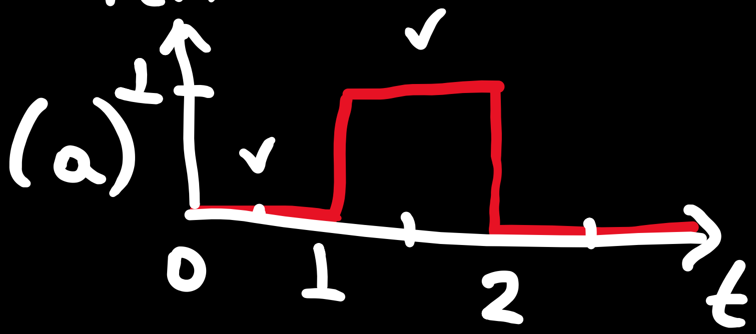
$$\Rightarrow Y(s)[s^2+3s+2] = L[r(t)] \Rightarrow Y(s) = L[r(t)] / s^2+3s+2$$

Πρόβλημα: $y''+3y'+2y=r(t)$ $\quad y(0)=0 \quad y'(0)=0$

$H(t-a) \rightleftarrows \frac{e^{-as}}{s}$

$f(t-a)H(t-a) \rightleftarrows e^{-as}F(s)$

Laplace: $Y(s)=\dfrac{R(s)}{s^2+3s+2}$ ✓



για $0<t<1$ $\quad r(t)=0$

$1<t<2$ $\quad r(t)=1$

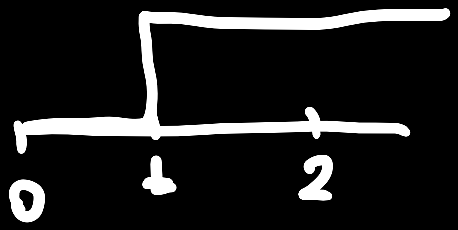
$t>2$ $\quad r(t)=0$

$$\boxed{r(t)=H(t-1)-H(t-2)}$$

Πχ για $t=0.5$ $\quad r(t)=0-0=0$

για $t=1.5$ $\quad r(t)=1-0=1$ ✓

$t=2.5$ $\quad r(t)=1-1=0$ ✓



$$R(s)=L[H(t-1)]-L[H(t-2)]=$$

$$=\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$Y(s) = e^{-s}\underbrace{\frac{1}{(s^2+3s+2)s}}_{\downarrow\, L^{-1}\, ;} - e^{-2s}\underbrace{\frac{1}{(s^2+3s+2)s}}_{\downarrow\, L^{-1}}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+2}\right] = ;$$

Λύσεις $s^2+3s+2=0 \rightarrow \begin{matrix} s_1=-2 \\ s_2=-1 \end{matrix}$

$$s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

$$(s-s_1)(s-s_2)$$

$$Y(s) = e^{-s}\frac{1}{s(s+1)(s+2)} - e^{-2s}\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\left\{ \begin{matrix} f(t-a)H(t-a) \\ \downarrow\uparrow \\ e^{-as}F(s) \end{matrix} \right.$$

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+2} = \cdots = \left.\frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}\right] F(s)$$

$$\left(e^{at} \rightleftarrows \frac{1}{s-a}\right)$$

$$\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \quad f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad Y(s) = e^{-s}[F(s)] - e^{-2s}[F(s)]$$

$$H(t-a)\,f(t-a) \rightleftarrows e^{-as}F(s)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & H(t-1)\left[\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right] - \\ & - H(t-2)\left[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right] \end{aligned}}$$

(B) $r(t) = \delta(t-1)$ $\qquad R(s) = e^{-s}$

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+3s+2} = \frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)} = \dots = \frac{e^{-s}}{s+1} - \frac{e^{-s}}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = H(t-1)\,e^{-(t-1)} - H(t-1)\,e^{-2(t-1)}}$$

$\frac{1}{s+1} \to e^{-t}$ $\qquad \frac{1}{s+2} \to e^{-2t}$

$$H(t-a)\,f(t-a) \rightleftarrows e^{-as}F(s)$$

$$\delta(t-a) \rightleftarrows e^{-as}$$

ΤΕΣΤ 6 (15 λεπτά + 5 για το ανέβασμα)

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 6
8 Δεκεμβρίου 2020

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(1) (6 μονάδες) Λύστε το παρακάτω πρόβλημα στον χώρο του Laplace:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-7) \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$$

(2) (4 μονάδες) Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$G(s) = \frac{e^{-4s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}$$

και κάνετε το διάγραμμα της $g(t)$.

$$H(t-a)f(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as}F(s) \qquad \delta(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as}$$