



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Εξισώσεις Maxwell

Μαγνητική επαγωγή:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$$

κυκνότητα ρεύματος ανασκατανομής ηλεκ. φορτίων

Ένταση μαγνητικού πεδίου:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + \cancel{\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}}$$

για $f < \text{kHz} \leftrightarrow$ χωρητικότητα

κυκνότητα ρεύματος αγωγής

Διηλεκτρική μετατόπιση:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \rho$$

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

Κατασταστικές εξισώσεις υλικού

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{M}}$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{P}}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Εξισώσεις Maxwell

Μαγνητική επαγωγή: $\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$

Ένταση μαγνητικού πεδίου: $\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}$ για $f < \text{kHz}$

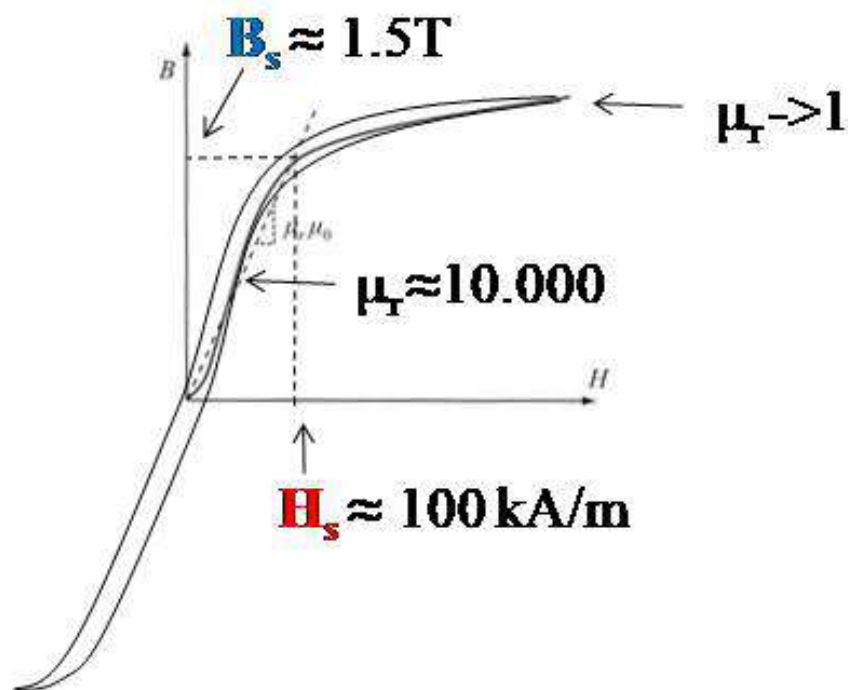
Κατασταστικές εξισώσεις υλικού

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{M}}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Σιδηρομαγνητικά Υλικά

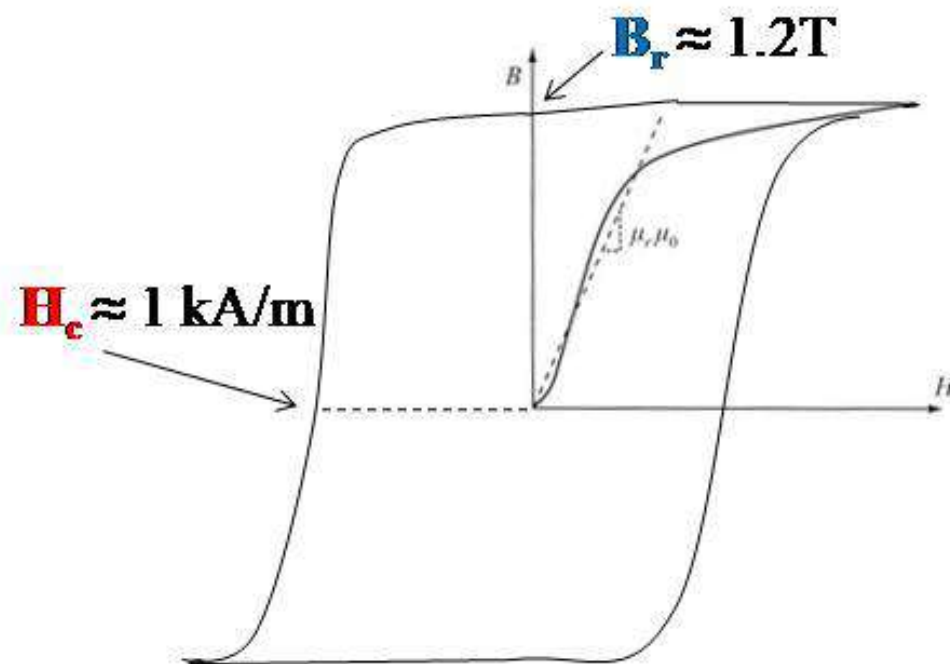


Μαλακά υλικά

(πυρήνες μαγνητικών κυκλωμάτων)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \approx \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

$\mu_r \approx 10.000$



Σκληρά υλικά

(μόνιμοι μαγνήτες)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \approx B_r$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Εξισώσεις Maxwell

Νόμος Gauss: $\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = 0$

Νόμος Ampere: $\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} \Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$

Νόμος Faraday: $\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \Rightarrow e = - \frac{d\lambda}{dt} = - N \frac{d\varphi}{dt}$



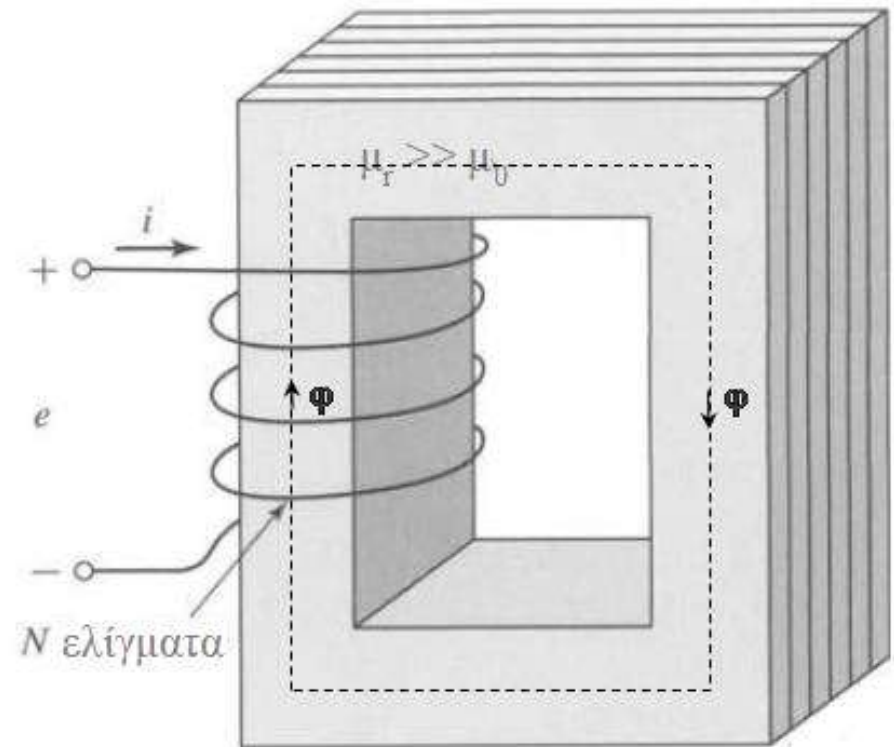
Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Εξισώσεις Maxwell

Νόμος Gauss: $\varphi = \int_S B \cdot n \cdot dS$

Νόμος Ampere: $\oint_C H \cdot dl = N i$

Νόμος Faraday: $e = - \frac{d\lambda}{dt} = - N \frac{d\varphi}{dt}$





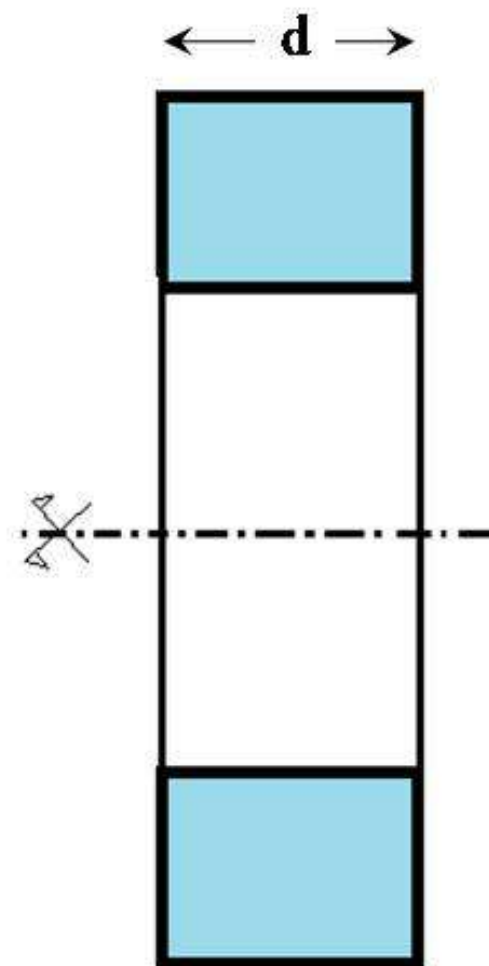
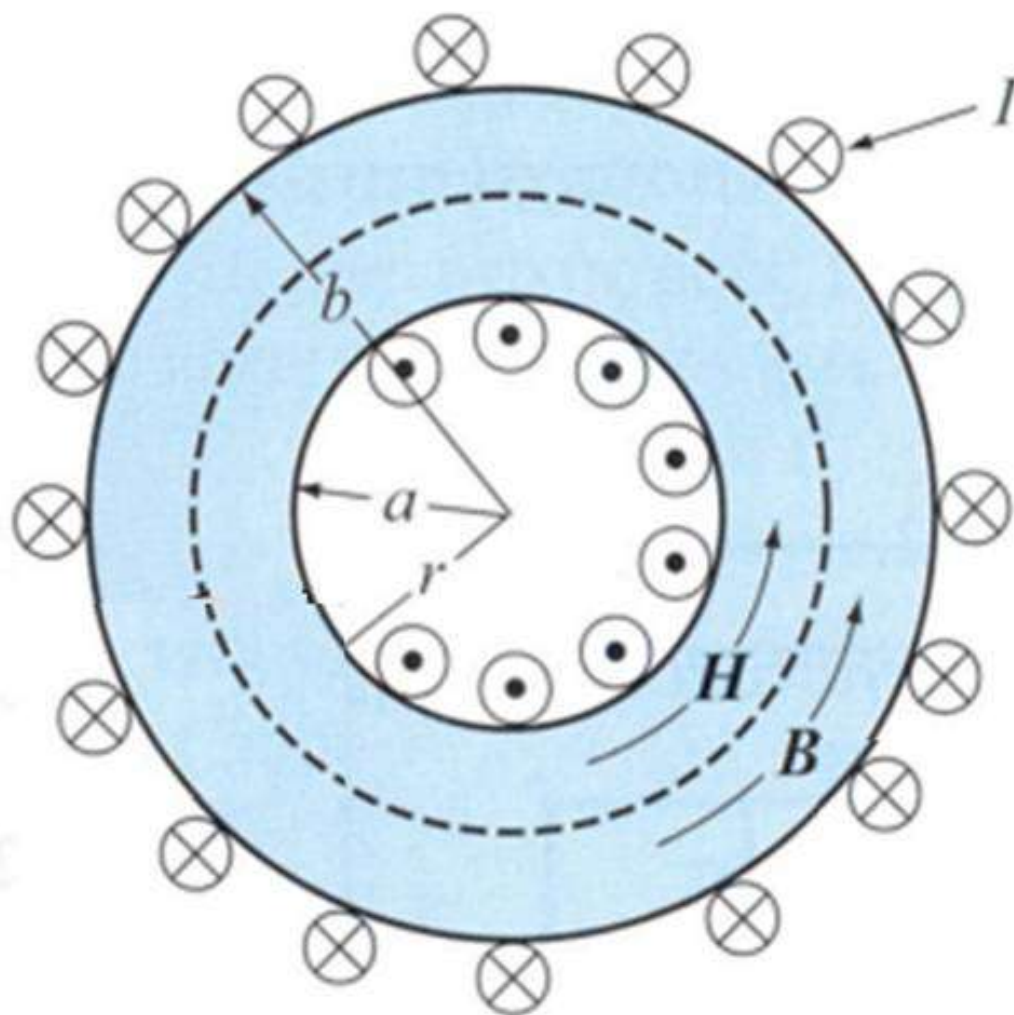
Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Εφαρμογή: Πηνίο με τοροειδή σιδηρομαγνητικό πυρήνα

- Από σιδηρομαγνητικό υλικό με σταθερή μαγνητική διαπερατότητα και διατομή A
- Ομοιόμορφο σπείρωμα N ελιγμάτων
- Συνεχές ρεύμα έντασης I στο τύλιγμα
- Εσωτερική ακτίνα δακτυλίου: r_1
- Εξωτερική ακτίνα δακτυλίου: r_2
- Πάχος d



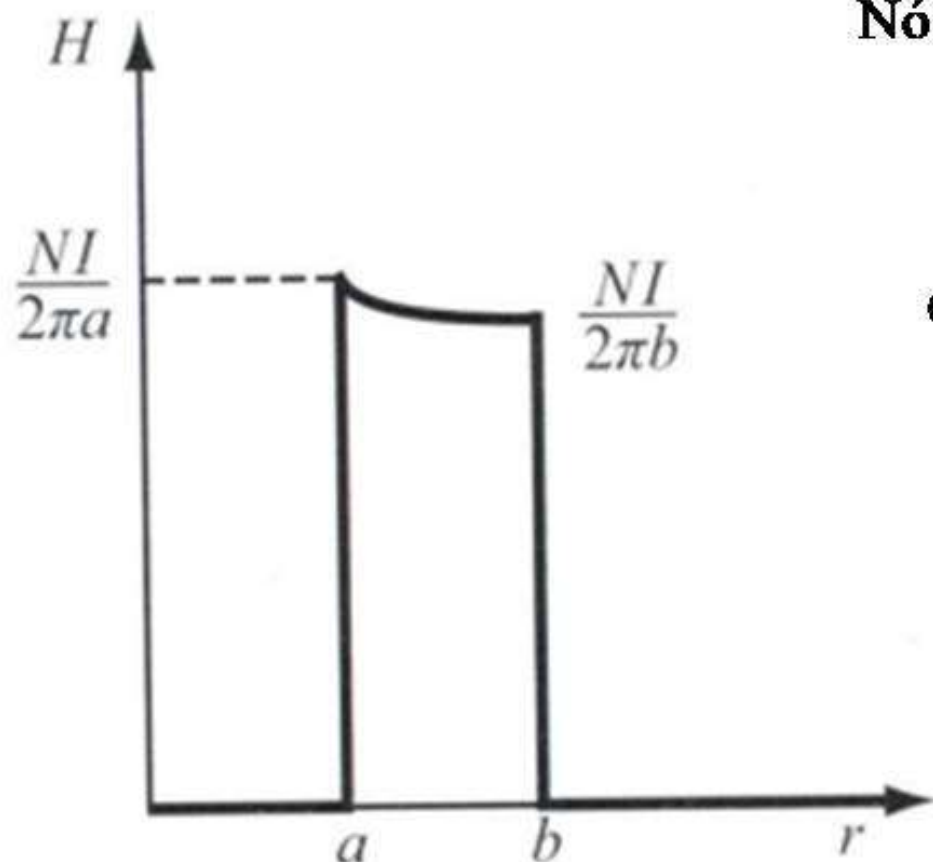
Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα





Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Υπολογισμός μαγνητικής ροής φ



Νόμος του Ampere στο εσωτερικό του δακτυλίου:

$$\oint_C H \cdot dl = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H = N \cdot I \Rightarrow H = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Ορισμός μαγνητεγερτικής δύναμης F (σε Α-ε):

$$F = N \cdot I$$

Μαγνητική επαγωγή B :

$$B = \mu \cdot H = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow B = \frac{\mu \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

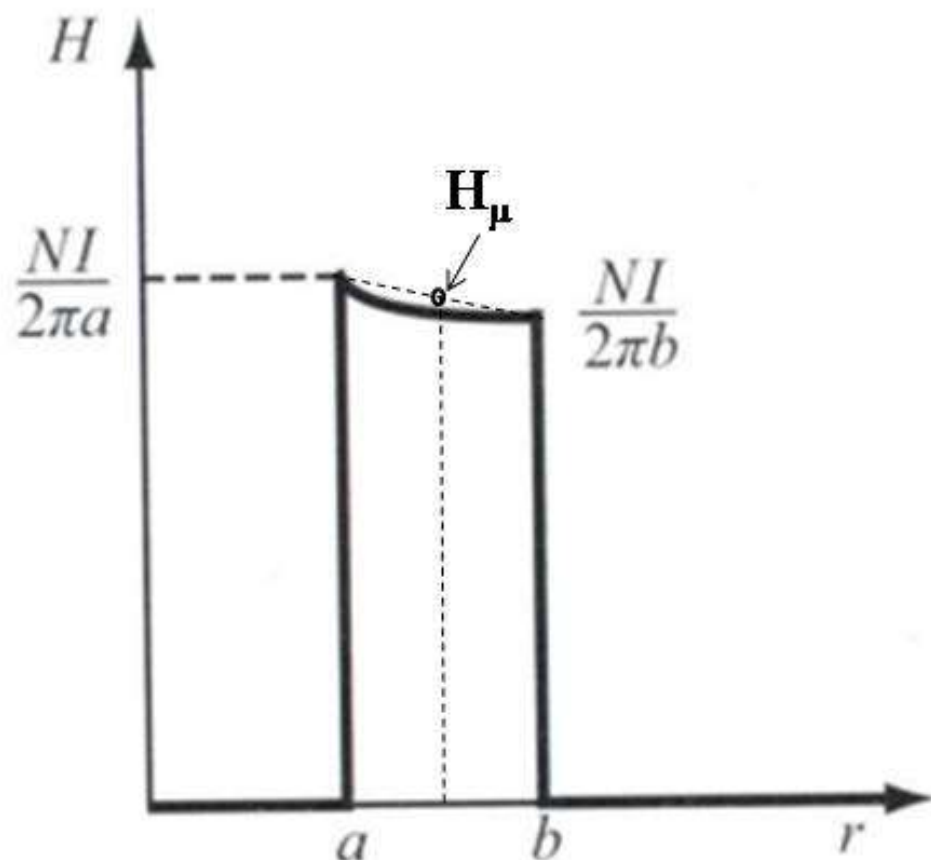
Μαγνητική ροή φ :

$$\varphi = \int_S B \cdot n \cdot dS = \mu_0 \mu_r N I \frac{d}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Προσεγγιστικός υπολογισμός μαγνητικής ροής Φ



Μέση ακτίνα:

$$r_\mu = \frac{a+b}{2}$$

Μέση μαγνητική επαγωγή B_μ :

$$B_\mu = \frac{\mu \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot r_\mu}$$

Διατομή:

$$A = (b - a) d$$

Μαγνητική ροή Φ :

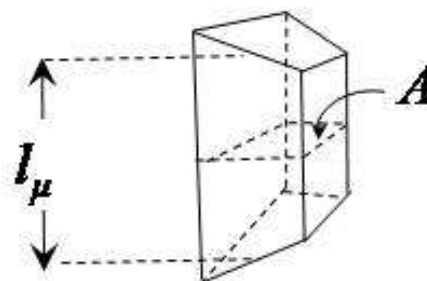
$$\Phi = \mu_0 \mu_r N I \frac{d}{\pi} \left(\frac{b-a}{b+a} \right)$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

- Μέση ακτίνα: $r_{\mu} = \frac{a+b}{2}$
- Μέση τιμή της μαγνητικής επαγωγής: $B_{\mu} = \frac{\mu \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot r_{\mu}}$
- Μέσο μήκος του μαγνητικού κυκλώματος: $l_{\mu} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\mu}$
- Μαγνητική ροή: $\varphi = B_{\mu} \cdot A = \frac{\mu \cdot F \cdot A}{2 \cdot \pi \cdot r_{\mu}} \Rightarrow \varphi = F \cdot \frac{\mu \cdot A}{l_{\mu}}$
- Ορισμός μαγνητικής αντίστασης (σε A-ε/Wb) μαγνητικού κυκλώματος:

$$R = \frac{F}{\varphi} = \frac{l_{\mu}}{\mu \cdot A}$$





Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Αντιστοιχία ηλεκτρικών – μαγνητικών κυκλωμάτων

	ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ			ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ		
1	Ηλεκτρικό ρεύμα	I	A	Μαγνητική ροή	Φ	Wb
2	Πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	J	A/m ²	Πυκνότητα μαγνητικής ροής	B	T
3	Ένταση ηλεκτρικού πεδίου	E	V/m	Ένταση μαγνητικού πεδίου	H	$\frac{A}{m}$
4	Ηλεκτρεγερτική δύναμη	V	V	Μαγνητρεγερτική δύναμη	F	$A - \epsilon$
5	Ηλεκτρική αντίσταση	R	Ω	Μαγνητική αντίσταση	\mathcal{R}	$\frac{A - \epsilon}{Wb}$

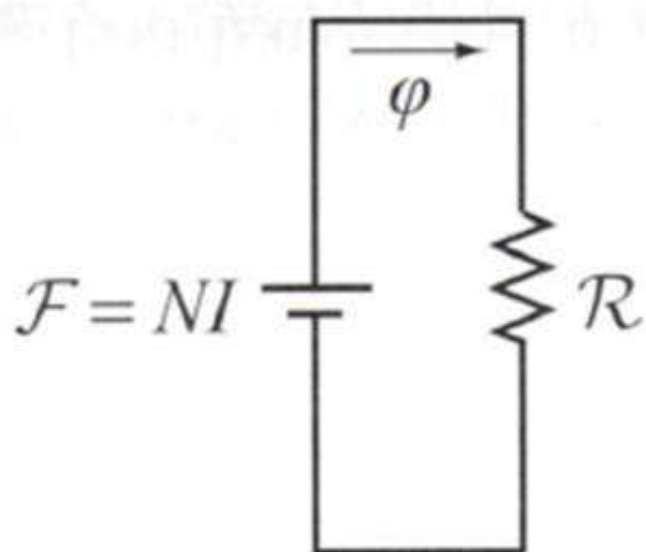
$$V = R I$$

$$NI = F = \mathcal{R} \Phi$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Γηνίο με τοροειδή σιδηρομαγνητικό πυρήνα



Ισοδύναμο μαγνητικό κύκλωμα

$$\varphi = \frac{F}{R} = \frac{N \cdot I}{\frac{l_{\mu}}{\mu \cdot A}} \Rightarrow$$

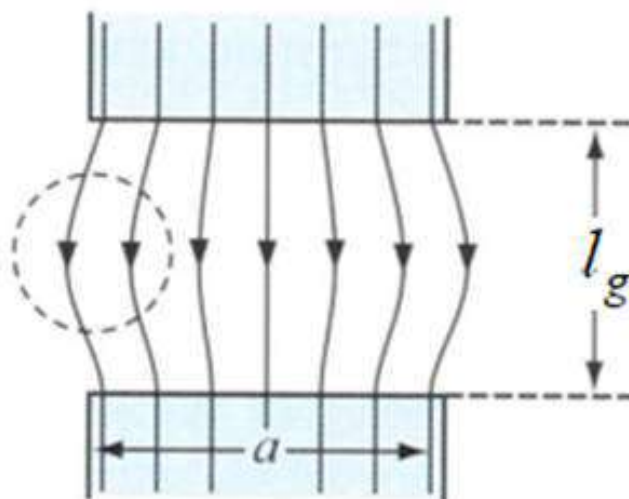
$$\varphi = \frac{F \cdot \mu \cdot A}{l_{\mu}} = \frac{N \cdot I \cdot \mu \cdot A}{l_{\mu}}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Μαγνητική Αντίσταση Διακένου (θυσάνωση μαγνητικού πεδίου)

Βάθος b
κάθετο
στη σελίδα



$$R_g = \frac{l_g}{\mu_o \cdot A_g}$$

Μαγνητική αντίσταση σιδήρου:

$$R_\sigma = \frac{l_\sigma}{\mu_o \cdot \mu_r \cdot A}$$

Καθώς: $\frac{R_g}{R_\sigma} = \frac{\mu_r}{\frac{l_\sigma}{l_g}} \gg 1 \Rightarrow R_g \gg R_\sigma$ και $A = a \cdot b$ η θεώρηση της θυσάνωσης μπορεί να προσεγγισθεί επαρκώς από:

$$A_g = (a + l_g) \cdot (b + l_g)$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Αυτεπαγωγή και Αλληλεπαγωγή συνευγμένων πηνίων

- Ορισμός αυτεπαγωγής πηνίου:

$$L = \frac{\lambda}{i}$$

- Η αυτεπαγωγή πηνίου μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μεγεθών του μαγνητικού κυκλώματος ως ακολούθως:

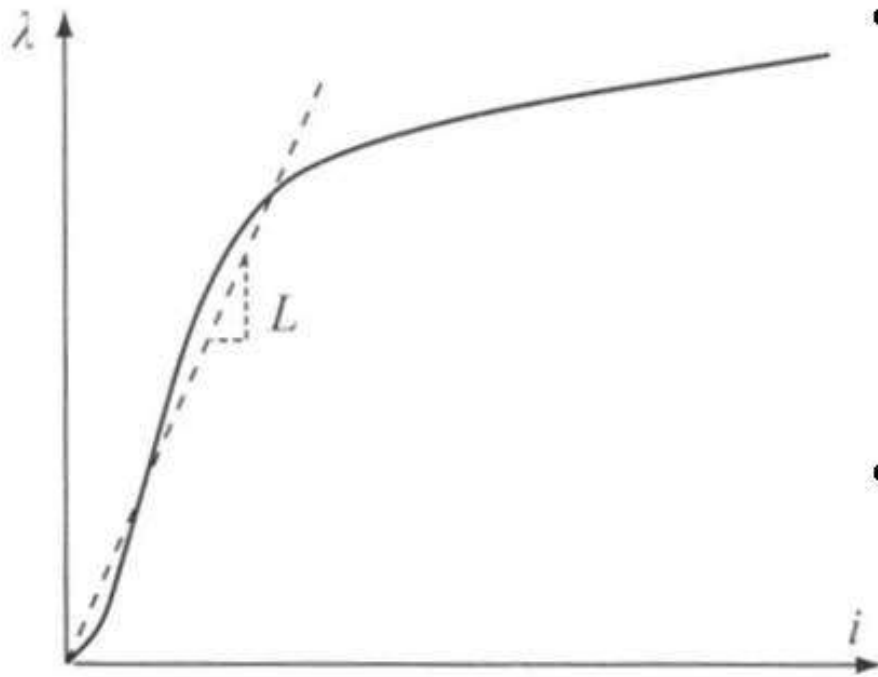
$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{(N \cdot \phi)}{i} = \frac{N}{i} \cdot \left(\frac{F}{R} \right) = \frac{N \cdot (N \cdot i)}{i \cdot R} \Rightarrow$$

$$L = \frac{N^2}{R}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Αυτεπαγωγή πηνίου με σιδηρομαγνητικό πυρήνα



- Η καμπύλη $\lambda-i$ ενός πηνίου περιελγμένου σε πυρήνα από σιδηρομαγνητικό υλικό έχει μη γραμμική συμπεριφορά και όμοια μορφή με την καμπύλη μαγνήτισης $B-H$ του υλικού, επειδή το λ είναι ανάλογο του B και το i είναι ανάλογο του H .
- Στα πηνία με πυρήνα από σιδηρομαγνητικά υλικά η αυτεπαγωγή δεν έχει σταθερή τιμή και μία καλή προσέγγιση στη γραμμική περιοχή μπορεί να προκύψει από την κλίση της διακεκομμένης γραμμής στην καμπύλη $\lambda-i$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Αλληλεπαγωγή συνεξευγμένων πηνίων

- Η αλληλεπαγωγή (M) μεταξύ δύο συνεξευγμένων πηνίων είναι ίση με την επαγωγή L_{12} που προκύπτει από τον λόγο της πεπλεγμένης ροής στο πρώτο πηνίο (λ_1) προς το ρεύμα του δεύτερου πηνίου (i_2), όταν το ρεύμα του πρώτου πηνίου είναι ίσο με μηδέν ($i_1 = 0$), δηλαδή:

$$L_{12} = \left. \frac{\lambda_1}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

- Όταν R είναι η μαγνητική αντίσταση του μαγνητικού κυκλώματος του πυρήνα που συνδέει τα δύο πηνία, τότε:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1 \cdot N_2}{R}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Μαγνητικό Κύκλωμα με Δύο Διεγέρσεις

Στην περίπτωση γραμμικού μαγνητικού κυκλώματος με δύο ηλεκτρικές διεγέρσεις ισχύει:

$$\lambda_1 = L_{11} \cdot i_1 + L_{12} \cdot i_2$$

$$\lambda_2 = L_{21} \cdot i_1 + L_{22} \cdot i_2$$



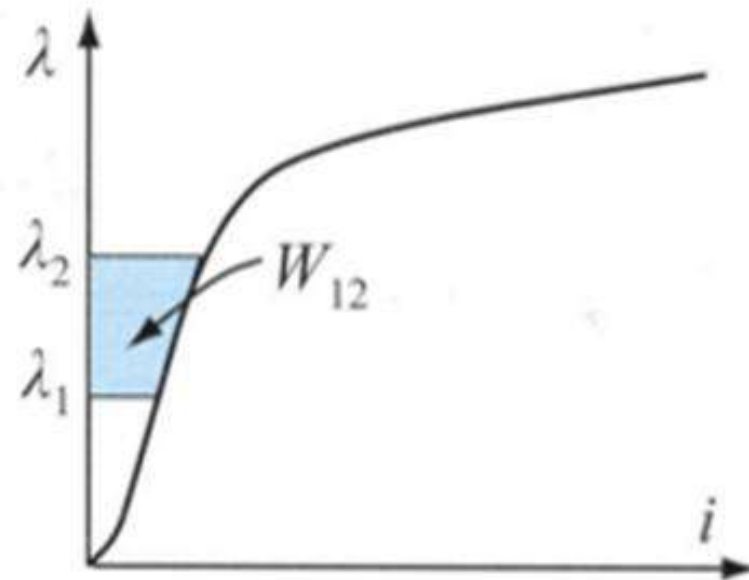
Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Ισχύς και Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου

Σε ένα πηνίο ισχύει:

$$p = \frac{dW}{dt} \Rightarrow dW = p \cdot dt \Rightarrow dW = (e \cdot i) \cdot dt \Rightarrow dW = \left(\frac{d\lambda}{dt} \right) \cdot i \cdot dt \Rightarrow$$

$$dW = i \cdot d\lambda$$





Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

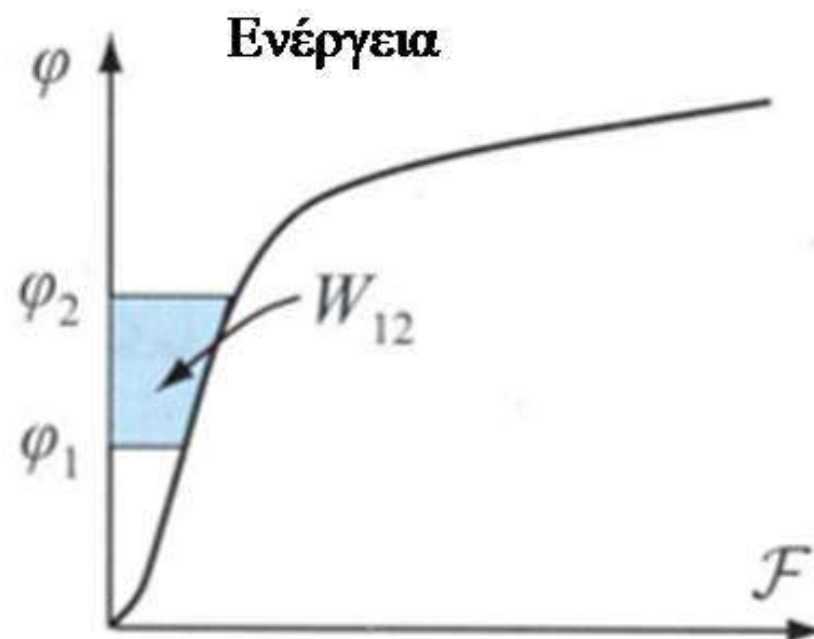
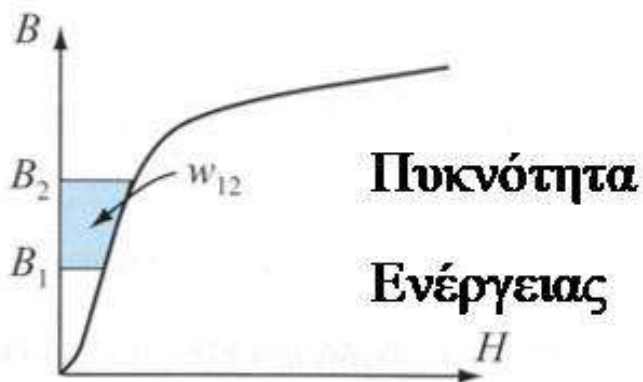
Ισχύς και Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου

Για τον πυρήνα του πηνίου ισχύει:

$$\lambda = N \cdot \phi \Rightarrow d\lambda = N \cdot d\phi$$

$$dW = i \cdot d\lambda \Rightarrow dW = i \cdot N \cdot d\phi \Rightarrow$$

$$dW = \mathcal{F} \cdot d\phi$$





Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Ισχύς και Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου

$$\varphi = A \cdot B \Rightarrow d\varphi = A \cdot dB$$

$$dW = F \cdot d\varphi \Rightarrow dW = F \cdot A \cdot dB \Rightarrow dW = H \cdot l \cdot A \cdot dB \Rightarrow$$

$$dW = A \cdot l \cdot H \cdot dB$$

- Η ενέργεια που απαιτείται για να πάει το μαγνητικό πεδίο από την κατάσταση 1 (χαρακτηρίζεται από λ_1 , φ_1 , B_1) στην κατάσταση 2 (χαρακτηρίζεται από λ_2 , φ_2 , B_2) είναι:

$$W_{12} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i(\lambda) \cdot d\lambda = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) \cdot d\varphi = A \cdot l \cdot \int_{B_1}^{B_2} H(B) \cdot dB$$

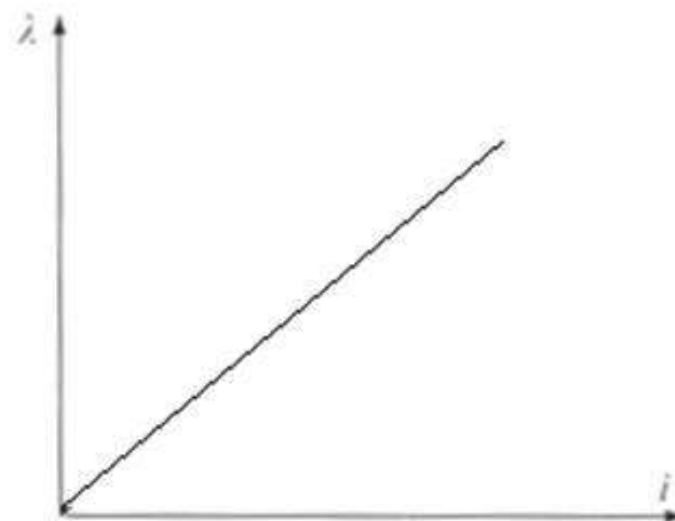


Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Ισχύς και Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου

Για γραμμικά μαγνητικά υλικά, δηλαδή για υλικά για τα οποία η αυτεπαγωγή L , η μαγνητική αντίσταση R και η μαγνητική διαπερατότητα μ είναι σταθερές και ανεξάρτητες των μεταβλητών ολοκλήρωσης, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \varphi^2 = \frac{1}{2} \cdot A \cdot l \cdot \mu \cdot H^2$$

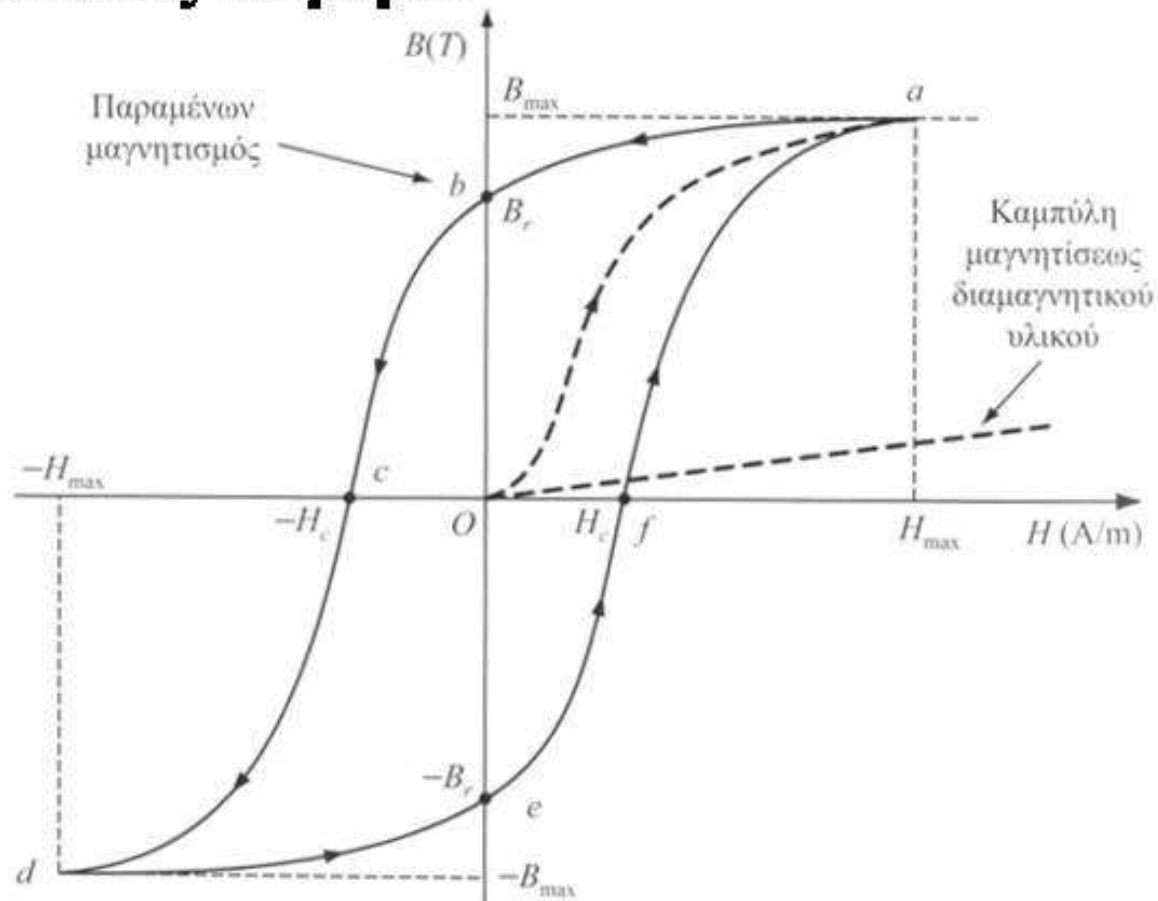




Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Απώλειες πυρήνα

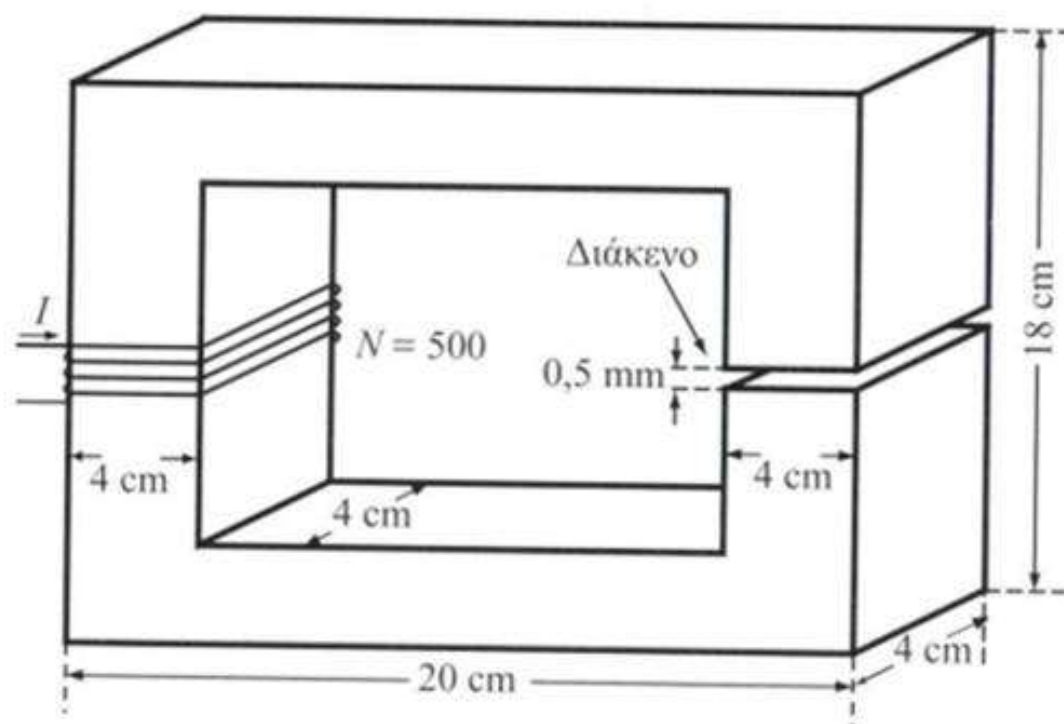
- Στα μαγνητικά κυκλώματα που διεγείρονται από εναλλασσόμενα ρεύματα εμφανίζονται και οι απώλειες δινορευμάτων P_δ .
- Για τον περιορισμό των απωλειών δινορευμάτων οι πυρήνες κατασκευάζονται από ηλεκτρικά μονωμένα ελάσματα μικρού πάχους.
- Οι απώλειες σιδήρου ή απώλειες πυρήνα του μαγνητικού κυκλώματος είναι:
- Στους μετασχηματιστές διανομής, οι απώλειες υστέρησης είναι περίπου διπλάσιες των απωλειών δινορευμάτων.



$$P_\pi = P_u + P_\delta$$

Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Εφαρμογή



- Στο μαγνητικό κύκλωμα του Σχήματος, η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του σιδήρου είναι $\mu_r = 3980$. Επίσης, $I = 5$ A, μήκος διακένου 0,5 cm



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Εφαρμογή

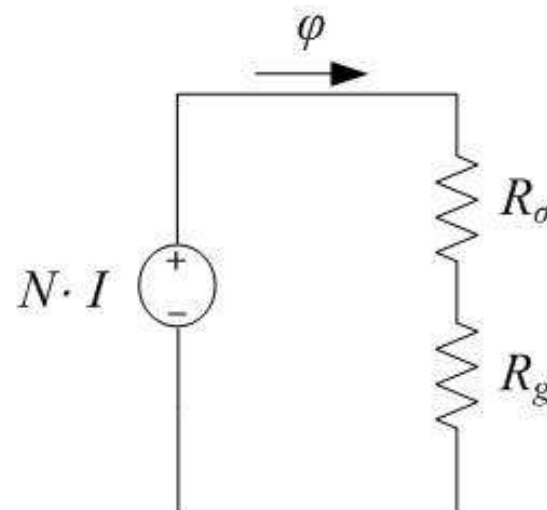
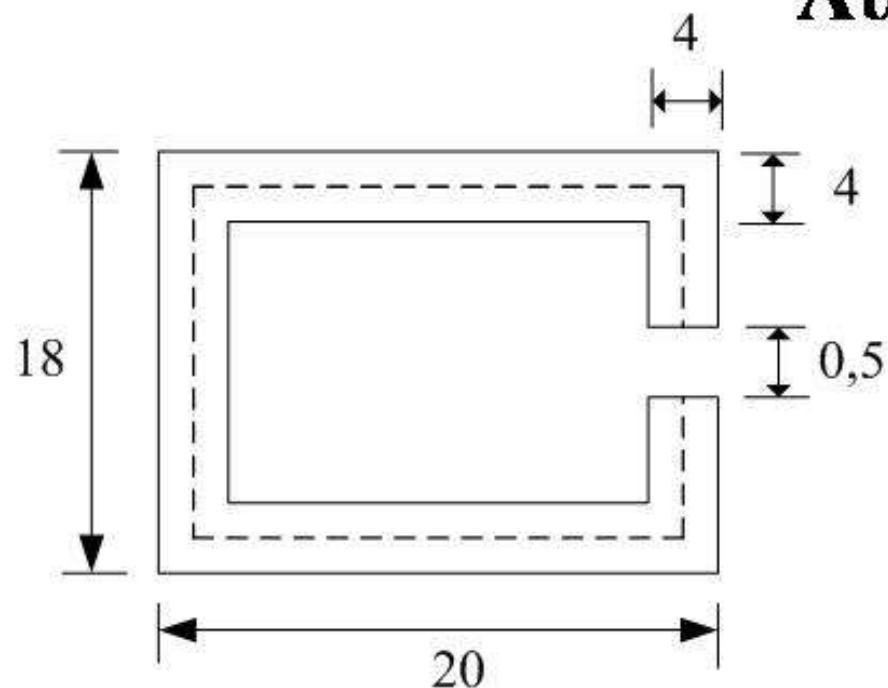
Να υπολογιστεί η πυκνότητα μαγνητικής ροής στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Λαμβάνοντας υπόψη τη θυσάνωση και τη μαγνητική αντίσταση του πυρήνα
2. Λαμβάνοντας υπόψη τη θυσάνωση και αγνοώντας τη μαγνητική αντίσταση του πυρήνα
3. Αγνοώντας τη θυσάνωση και λαμβάνοντας υπόψη τη μαγνητική αντίσταση του πυρήνα
4. Αγνοώντας τη θυσάνωση και τη μαγνητική αντίσταση του πυρήνα



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Λύση



- Το μήκος της διαδρομής του σιδήρου είναι:

$$l_{\sigma} = 16 + 14 + 16 + 14 - 0,5 \Rightarrow l_{\sigma} = 59,5 \text{ cm} \Rightarrow l_{\sigma} = 0,595 \text{ m}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Λύση

- Η μαγνητική αντίσταση του σιδήρου είναι:

$$R_{\sigma} = \frac{l_{\sigma}}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} = \frac{0,595}{3980 \cdot (4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 10^{-4})} \Rightarrow R_{\sigma} = 74\,354 \frac{\text{A} \cdot \varepsilon}{\text{Wb}}$$

- Αγνοώντας τη θυσάνωση, η μαγνητική αντίσταση του διακένου είναι:

$$R_{g0} = \frac{l_g}{\mu_0 \cdot A} = \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{(4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 10^{-4})} \Rightarrow R_{g0} = 2\,486\,796 \frac{\text{A} \cdot \varepsilon}{\text{Wb}}$$

- Θεωρώντας τη θυσάνωση, η μαγνητική αντίσταση του διακένου είναι:

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 \cdot A_g} = \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{(4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}) \cdot (4,5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4})} \Rightarrow R_g = 1\,964\,876 \frac{\text{A} \cdot \varepsilon}{\text{Wb}}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Λύση

- Αν ληφθεί υπόψη η θυσάνωση και η μαγνητική αντίσταση του πυρήνα, η μαγνητική επαγωγή είναι:

$$B_1 = \frac{N \cdot I}{A \cdot (R_o + R_g)} = \frac{500 \cdot 5}{(4 \cdot 4 \cdot 10^{-4}) \cdot (74\,354 + 1\,964\,876)} \Rightarrow$$

$$B_1 = 0,766 \text{ T}$$

- Αυτή είναι η σωστή τιμή του B (η ακριβής τιμή).



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Λύση

- Αν ληφθεί υπόψη η θυσάνωση και αγνοηθεί η μαγνητική αντίσταση του πυρήνα, η μαγνητική επαγωγή είναι:

$$B_2 = \frac{N \cdot I}{A \cdot R_g} = \frac{500 \cdot 5}{(4 \cdot 4 \cdot 10^{-4}) \cdot 1964876} \Rightarrow$$

$$B_2 = 0,795 \text{ T}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα

Λύση

- Αν αγνοηθεί η θυσάνωση και ληφθεί υπόψη η μαγνητική αντίσταση του πυρήνα, η μαγνητική επαγωγή είναι:

$$B_3 = \frac{N \cdot I}{A \cdot (R_\sigma + R_{g0})} = \frac{500 \cdot 5}{(4 \cdot 4 \cdot 10^{-4}) \cdot (74\,354 + 2\,486\,796)} \Rightarrow$$

$$B_3 = 0,610 \text{ T}$$



Εισαγωγή στα μαγνητικά πεδία και κυκλώματα Λύση

- Αν αγνοηθεί η θυσάνωση και η μαγνητική αντίσταση του πυρήνα, η μαγνητική επαγωγή είναι:

$$B_4 = \frac{N \cdot I}{A \cdot R_{g0}} = \frac{500 \cdot 5}{(4 \cdot 4 \cdot 10^{-4}) \cdot 2\,486\,796} \Rightarrow$$

$$B_4 = 0,628 \text{ T}$$