

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ MAXWELL ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΧΡΟΝΟΣΤΑΘΕΡΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

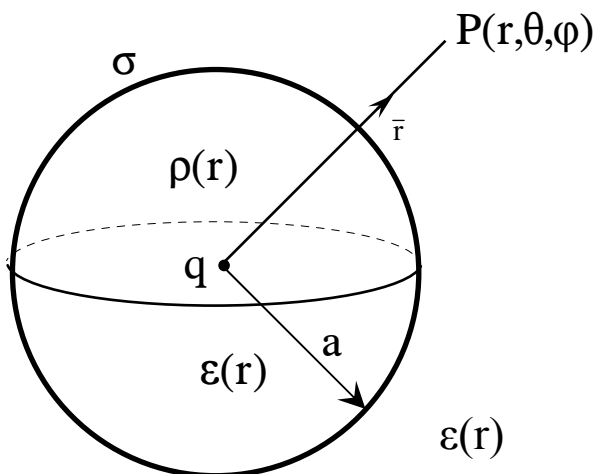
1 Γενικά

Οι εξισώσεις Maxwell υπό την ολοκληρωτική τους μορφή, η οποία αποτελεί την πιο γενική διατύπωση των νόμων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, ισχύουν για οποιαδήποτε συνδυασμένη επιλογή των εμπλεκόμενων δρόμων, επιφανειών και όγκων ολοκληρώσεως. Όμως, παρά τη γενικότητά τους, η χρησιμότητα των ολοκληρωτικών αυτών εξισώσεων στον άμεσο υπολογισμό του πεδίου είναι περιορισμένη και αφορά κυρίως περιπτώσεις χρονοσταθερών πεδίων, όπου τόσο η γεωμετρία της διατάξεως όσο και η κατανομή των πηγών είναι κατάλληλα συμμετρικές. Για τις συμμετρικές αυτές διατάξεις, οι αναφερθέντες ολοκληρωτικοί νόμοι αποτελούν τον ταχύτερο και ευκολότερο τρόπο υπολογισμού του πεδίου, όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Στη γενική περίπτωση, ο υπολογισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στηρίζεται στην επίλυση ενός προβλήματος οριακών συνθηκών, το οποίο περιγράφεται μέσω των σημειακών εξισώσεων Maxwell και των οριακών συνθηκών που διατυπώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η τεχνική επιλύσεως τέτοιων προβλημάτων οριακών συνθηκών αποτελεί το αντικείμενο επομένου κεφαλαίου. Στο παρόν κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τις σημειακές σχέσεις για τον υπολογισμό του πεδίου σε απλές συμμετρικές διατάξεις.

2 Ηλεκτροστατικό πεδίο σφαιρικά συμμετρικών χρονοσταθερών πηγών

Θεωρούμε ότι στη διάταξη του σχήματος 1 δρουν ταυτοχρόνως οι παρακάτω χρονοσταθερές πηγές: α) σημειακό φορτίο q στη θέση $r=0$, β) επιφανειακό φορτίο σταθερής πυκνότητας σ στη θέση $r=a$ και γ) χωρικό φορτίο με σφαιρικά συμμετρική πυκνότητα $\rho(r)$ στην περιοχή $0 < r < a$. Οι ηλεκτρικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με την επιτρεπτότητα ϵ . Υποθέτουμε ότι γενικά $\epsilon=\epsilon(r)$ (ειδική περίπτωση: ομογενής απεριόριστος χώρος, $\epsilon=\text{σταθ.}$). Ζητάμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.



Σχήμα 1: Οι πηγές του πεδίου βρίσκονται στο εσωτερικό και στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας a

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το διεγειρόμενο ηλεκτροστατικό πεδίο θα είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης r του σημείου παρατηρήσεως $P(r, \theta, \phi)$, δηλαδή

$$\vec{E} = \vec{E}(r) \tag{1}$$

Συνιστώσες του πεδίου

Το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα, δηλαδή

$$\vec{E} = \hat{r}E_r(r). \quad (2)$$

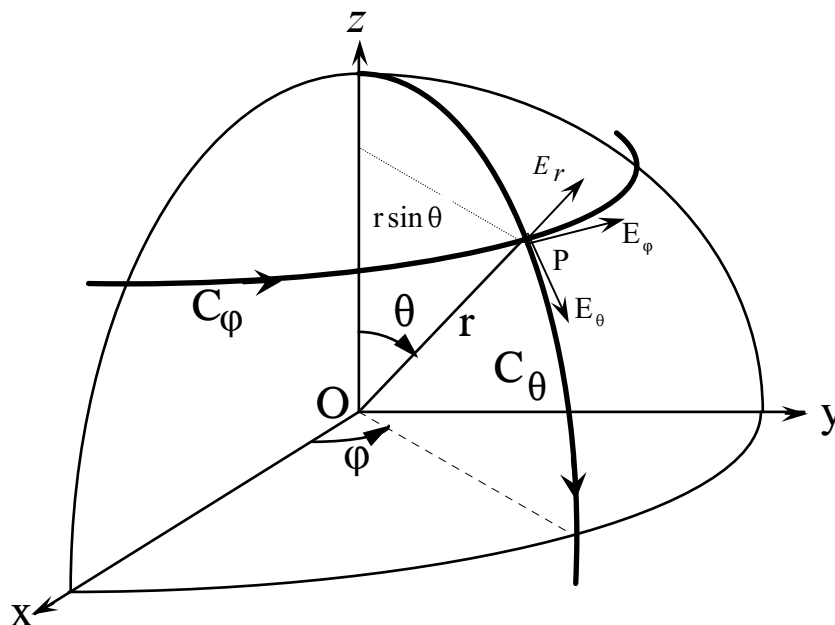
Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί με διαφόρους τρόπους. Εδώ θα εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό νόμο

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0. \quad (3)$$

Επιλέγοντας ως δρόμο ολοκληρώσεως C τον "παράλληλο" κύκλο C_ϕ που διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \theta, \phi)$ (Σχ.2), από την (3) με τη βοήθεια της (1) προκύπτει ότι

$$E_\phi(r)\ell_c = 0 \Rightarrow E_\phi(r) = 0$$

όπου $\ell_c (= 2\pi r \sin \theta) \neq 0$ είναι το μήκος του κύκλου αυτού.



Σχήμα 2

Με τον ίδιο τρόπο, επιλέγοντας ως δρόμο ολοκληρώσεως C τον "μεσημβρινό" κύκλο C_θ που διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως, παίρνουμε με τη βοήθεια των (1) και (3) τη σχέση

$$E_\theta(r)\ell_c = 0 \Rightarrow E_\theta(r) = 0$$

όπου τώρα $\ell_c (= 2\pi r) \neq 0$ είναι το μήκος του κύκλου C_θ .

Εύρεση της $E_r(r)$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου, $E_r(r)$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (4)$$

όπου ως επιφάνεια ολοκληρώσεως επιλέγουμε τη σφαίρα, ακτίνας r , η οποία διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \theta, \phi)$. Το μέγεθος Q στο δεύτερο μέρος της (4) παριστάνει, κατά τα γνωστά, το συνολικό φορτίο που περικλείεται στο εσωτερικό της S , δηλαδή

$$Q = Q(r) = \begin{cases} q + 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', & 0 < r < a \\ q + 4\pi \int_0^a \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi a^2 \sigma, & a < r < \infty \end{cases} \quad (5)$$

Με τη βοήθεια της (2), από την (4) προκύπτει ότι

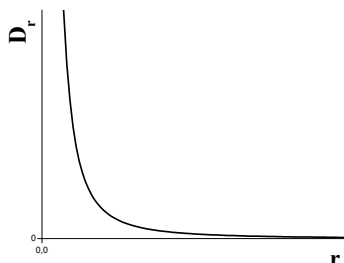
$$4\pi r^2 D_r(r) = Q(r) \Rightarrow D_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi r^2} \Rightarrow E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi r^2 \epsilon(r)} \quad (6)$$

Αξιοσημείωτες ειδικές περιπτώσεις

α. Σημειακή πηγή στη θέση $\vec{r} = 0$ στον απεριόριστο κενό χώρο ϵ_0 :

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r} \quad (0 < r < \infty). \quad (7)$$

Η γραφική παράσταση του D_r συναρτήσεως του r φαίνεται στο Σχ.3. Παρατηρούμε ότι το πεδίο τείνει στο άπειρο καθώς το σημείο παρατήρησης προσεγγίζει τη θέση του σημειακού φορτίου.



Σχήμα 3

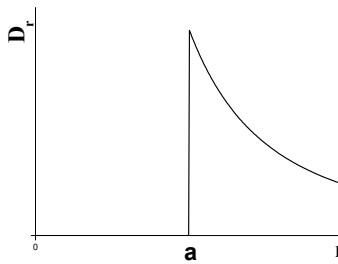
β. Ομοιόμορφη επιφανειακή πηγή πυκνότητας σ στη σφαιρική επιφάνεια $r=a$ στον απεριόριστο κενό χώρο ϵ_0 :

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} = \frac{\sigma a^2}{r^2} \hat{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}, \quad \vec{E} = \vec{D} / \epsilon_0 \quad (8)$$

όπου

$$Q = 4\pi a^2 \sigma$$

είναι το συνολικό φορτίο της σφαίρας. Η γραφική παράσταση του D_r συναρτήσει του r φαίνεται στο Σχ.4.



Σχήμα 4

Παρατηρούμε τα εξής:

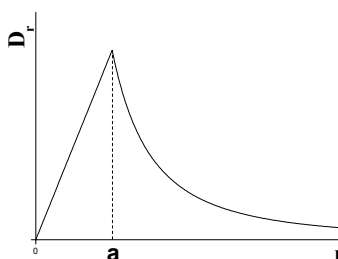
- i) Το πεδίο στο χώρο έξω από μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαιρική επιφάνεια ταυτίζεται με το πεδίο σημειακής πηγής, μεγέθους ίσου με το συνολικό φορτίο της σφαίρας, τοποθετημένης στο κέντρο της σφαίρας. Αντίθετα, το πεδίο στο εσωτερικό μιας τέτοιας σφαίρας είναι μηδενικό.
- ii) Το πεδίο είναι παντού πεπερασμένο.
- iii) Στα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας το πεδίο είναι ασυνεχές: $D_r(a-) = 0$, $D_r(a+) = \sigma$. Ικανοποιείται, προφανώς, η οριακή συνθήκη $\hat{r} \cdot [\bar{D}(a+) - \bar{D}(a-)] = \sigma$.

γ. Ομοιόμορφη χωρική κατανομή στο εσωτερικό σφαίρας

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο η σταθερή χωρική πηγή $\rho(r) = \rho_0 = \text{σταθ.}$ ($0 < r < a$), από την (6) παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$D_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3} & (0 < r < a) \\ \frac{\rho_0 a^3}{3r^2} & (r > a) \end{cases} . \quad (9)$$

Επομένως, ότι το πεδίο που οφείλεται σε χωρικό φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο στο εσωτερικό μιας σφαίρας είναι ομαλή συνάρτηση του r , τόσο στο εξωτερικό όσο και στο εσωτερικό των πηγών. Η γραφική παράσταση του D_r συναρτήσει του r φαίνεται στο Σχ.5



Σχήμα 5

Γενικές παρατηρήσεις πάνω στις (5)-(6)

1. Στα σημεία της επιφανειακής κατανομής σ το πεδίο είναι **ασυνεχές**. Με τη βοήθεια της (6) διαπιστώνουμε ότι η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}+) - \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}-)] = \sigma \quad (10)$$

όπως ακριβώς περιμέναμε να συμβεί..

2. Στη γειτονιά του σημειακού φορτίου, δηλαδή για $\mathbf{r} \rightarrow 0$, επικρατεί η συμβολή που προέρχεται από το σημειακό φορτίο:

$$D_r(r) \underset{r \ll}{=} \frac{q}{4\pi r^2} + c(r)$$

όπου η ποσότητα $c(r)$ είναι φραγμένη. (Αυτό συμβαίνει επειδή η συμβολή που προέρχεται από το επιφανειακό φορτίο είναι μηδενική, ενώ, όπως θα δείξουμε αμέσως, και η συμβολή από το χωρικό φορτίο, ίση με $c(r)$, είναι παντού πεπερασμένη). Συνεπώς,

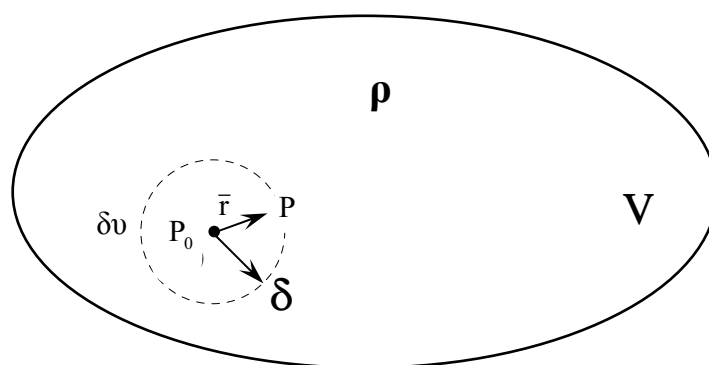
$$\lim_{r \rightarrow 0} [4\pi r^2 D_r(r)] = q \quad (11)$$

Στη θέση του σημειακού φορτίου, $r=0$, το πεδίο είναι, προφανώς, ιδιόμορφο:

$$D_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty.$$

Σημείωση: Η σχέση (11), που καθορίζει τη συμπεριφορά του πεδίου στην άμεση γειτονιά του σημειακού φορτίου q , επέχει θέση **οριακής συνθήκης** [ανάλογης προς την (10)] κατά την επίλυση προβλημάτων με χρήση των σημειακών εξισώσεων Maxwell.

3. Θεωρούμε (Σχ.6) χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(x,y,z)$, το οποίο κατανέμεται στο εσωτερικό μιας περιοχής V αυθαίρετης μορφής. Υποθέτουμε ότι η ρ είναι αρκούντως ομαλή συνάρτηση της θέσεως (x,y,z) .



Σχήμα 6: Το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ βρίσκεται στο κέντρο της (νοητής) σφαιρικής περιοχής δu ακτίνας δ . Το σημείο $P(x,y,z) \in (\delta u)$ βρίσκεται σε απόσταση r από το P_0

Το πεδίο στη θέση $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση δυο όρων:

$$\bar{\mathbf{D}}(x_0, y_0, z_0) = \bar{\mathbf{D}}^>(x_0, y_0, z_0) + \bar{\mathbf{D}}^<(x_0, y_0, z_0). \quad (12)$$

Ο όρος $\overline{D}^<(x_0, y_0, z_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα φορτία που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας μικρής σφαιρικής περιοχής δv , ακτίνας δ , με κέντρο το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Ο όρος $\overline{D}^>(x_0, y_0, z_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα υπόλοιπα φορτία, δηλαδή στα φορτία που βρίσκονται στην περιοχή $V - \delta v$. Επειδή $P(x_0, y_0, z_0) \notin (V - \delta v)$, ο όρος $\overline{D}^>(x_0, y_0, z_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0, z_0) . Από το άλλο μέρος, όταν η ακτίνα δ είναι κατάλληλα μικρή, τότε μπορεί να τεθεί $\rho(x, y, z) = \rho(x_0, y_0, z_0) = \rho_0$ για κάθε σημείο $P(x, y, z) \in \delta v$ και να χρησιμοποιηθεί η (9):

$$\overline{D}^<(x, y, z) = \frac{\rho_0 r}{3} \hat{r} \quad (0 < r < \delta), \quad (13)$$

όπου $r \equiv P_0 P$ και $\hat{r} = \overline{P_0 P} / (P_0 P)$. Επομένως και ο όρος $\overline{D}^<(x_0, y_0, z_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0, z_0) .

Συμπέρασμα: Το πεδίο οποιασδήποτε ομαλής χωρικής κατανομής φορτίου είναι ομαλή συνάρτηση της θέσεως, τόσο στο εξωτερικό όσο και στα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της κατανομής.

4 Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου έχουν τα άκρα τους στα φορτία εντός της δοθείσας κατανομής, απ' ενός, και απ' ετέρου σε ισόποσα φορτία τα οποία επάγονται και κατανέμονται ομοιόμορφα στην επιφάνεια της άπειρης σφαίρας. Η συμβολή των τελευταίων στο πεδίο είναι μηδενική σε κάθε σημείο της περιοχής $0 < r < \infty$, σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω για το πεδίο ομοιομόρφων επιφανειακών κατανομών [βλ. Εξ.(8)].

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Θα στηριχθούμε τώρα στις (ανεξάρτητες μεταξύ τους) διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \overline{E} = 0 \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho \quad (15)$$

και στις (επίσης ανεξάρτητες) οριακές συνθήκες

$$\hat{r} \times [\overline{E}(a+) - \overline{E}(a-)] = 0 \quad (16)$$

$$\hat{r} \cdot [\overline{D}(a+) - \overline{D}(a-)] = \sigma \Leftrightarrow D_r(a+) - D_r(a-) = \sigma. \quad (17)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ τη σχέση (1)

$$\overline{E} = \overline{E}(r)$$

την οποία υπαγορεύει η συμμετρία του προβλήματος.

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε πάλι -τώρα με βάση την (14)- ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, φ) , αναλύουμε την (14) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta E_{\varphi}(r)] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_{\theta}(r)}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial / \partial \varphi = 0}{r} \cot \theta E_{\varphi}(r) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r(r)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial [r E_{\varphi}(r)]}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial / \partial \varphi = 0}{r} \frac{d[r E_{\varphi}(r)]}{dr} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial [r E_{\theta}(r)]}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r(r)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial / \partial \theta = 0}{r} \frac{d[r E_{\theta}(r)]}{dr} = 0. \quad (20)$$

Από το άλλο μέρος, η (15) σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 D_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial [\sin \theta D_{\theta}(r)]}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_{\varphi}(r)}{\partial \varphi} &= \rho(r) \xrightarrow{\partial / \partial \varphi = 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 D_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial [\sin \theta D_{\theta}(r)]}{\partial \theta} = \rho(r) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 D_r(r)]}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r} D_{\theta}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial [D_{\theta}(r)]}{\partial \theta} &= \rho(r) \xrightarrow{\partial / \partial \theta = 0} \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 D_r(r)]}{dr} + \frac{\cot \theta}{r} D_{\theta}(r) &= \rho(r). \end{aligned} \quad (21)$$

Οι (18)-(21) οφείλουν να ισχύουν για κάθε σημείο (r, θ, φ) . Εφαρμόζοντας την (18) για δύο διαφορετικά σημεία (r, θ_1, φ) και (r, θ_2, φ) ($\theta_1 \neq \theta_2$) και αφαιρώντας κατά μέλη τις προκύπτουσες δύο εξισώσεις παίρνουμε:

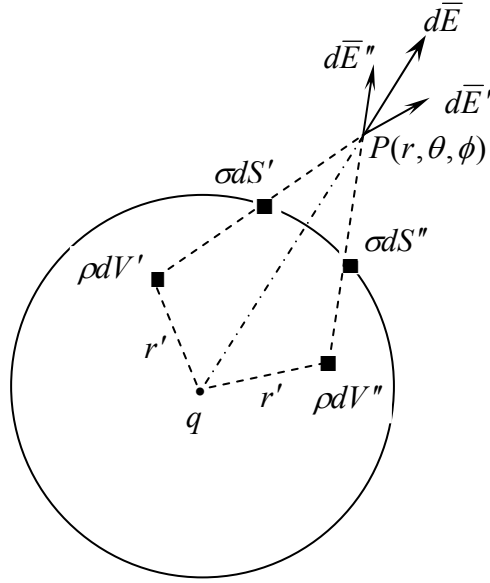
$$\frac{\cot \theta_1 - \cot \theta_2}{r} E_{\varphi}(r) = 0 \xrightarrow{\theta_1 \neq \theta_2} E_{\varphi}(r) = 0. \quad (22)$$

Εντελώς ανάλογα, εφαρμόζοντας την (21) για τα παραπάνω δύο σημεία και αφαιρώντας κατά μέλη τις προκύπτουσες δύο εξισώσεις, παίρνουμε:

$$\frac{\cot \theta_1 - \cot \theta_2}{r} D_{\theta}(r) = 0 \Rightarrow D_{\theta}(r) = 0. \quad (23)$$

Λόγω της (22), η (19) ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ ισχύει και η (20) λόγω της (23).

Εναλλακτικά, στην περίπτωση όπου $\varepsilon(r) = \varepsilon = \text{σταθ}$ θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι $\bar{E} = \hat{r} E_r(r)$ και γεωμετρικά (Σχ.7), θεωρώντας το πεδίο ως υπέρθεση των συμβολών που προέρχονται από το q και από όλα τα στοιχειώδη φορτία ρdV και σdS που συνθέτουν τις κατανομές φορτίου. Για κάθε τέτοιο στοιχειώδες φορτίο που βρίσκεται, π.χ., στη θέση (r', θ', φ') , υπάρχει πάντα ίσο φορτίο στη συμμετρική, ως προς το άξονα της σφαίρας που διέρχεται από το σημείο παρατήρησης $P(r, \theta, \phi)$. Διαπιστώνεται αμέσως ότι η συνισταμένη $d\bar{E}$ των πεδίων $d\bar{E}'$ και $d\bar{E}''$ στη θέση $P(r, \theta, \phi)$, τα οποία οφείλονται σε δυο τέτοια στοιχειώδη φορτία, έχει την ακτινική κατεύθυνση \hat{r} . Επομένως το συνολικό πεδίο σε οποιαδήποτε θέση είναι ακτινικό.



Σχήμα 7

Σημείωση: Ένας εναλλακτικός, άμεσος τρόπος να αποδείξουμε ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα μπορεί να στηριχθεί στη χρήση του συναρτήσεως δυναμικού Φ . Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το δυναμικό αυτό είναι συνάρτηση μόνο του r . Επομένως, από τη σχέση

$$\vec{E} = -\nabla\Phi(r) = -\hat{r} \frac{d\Phi(r)}{dr}. \quad (24)$$

προκύπτει ότι πράγματι το πεδίο έχει μόνο r συνιστώσα.

Εύρεση της $D_r(r)$

Η μοναδική συνιστώσα D_r του πεδίου θα βρεθεί μέσω της (21), η οποία την συνδέει με την διέγερση $\rho(r)$. Λόγω της (23), η σχέση (21) γράφεται ως εξής:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 D_r(r)]}{dr} = \rho(r). \quad (25)$$

Από την (25) με ολοκλήρωση παίρνουμε τη γενική λύση

$$r^2 D_r(r) = \int r^2 \rho(r) dr + c \Rightarrow D_r(r) = \frac{1}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{c}{r^2} \quad (26)$$

όπου c είναι σταθερά ολοκληρώσεως.

Για την περιοχή 2 ($a < r < \infty$), όπου $\rho=0$, η (26) δίνει τη σχέση

$$D_r^{(2)}(r) = \frac{c_2}{r^2} \quad (27)$$

ενώ για την περιοχή 1 ($0 < r < a$) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα υπό τη μορφή

$$D_r^{(1)}(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' + \frac{c_1}{r^2}. \quad (28)$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες, ως εξής:

$$\alpha) \quad \lim_{r \rightarrow 0} [4\pi r^2 D_r^{(1)}(r)] = q \Rightarrow 4\pi c_1 = q \Rightarrow c_1 = \frac{q}{4\pi} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \hat{r} \cdot [\bar{D}(a+) - \bar{D}(a-)] &= \sigma \Leftrightarrow D_r(a+) - D_r(a-) = \sigma \Rightarrow \frac{c_2}{a^2} - \frac{1}{a^2} \int_0^a r'^2 \rho(r') dr' - \frac{c_1}{a^2} = \sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow c_2 = \int_0^a r'^2 \rho(r') dr' + \frac{q}{4\pi} + \sigma a^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Το πεδίο προσδιορίζεται πλήρως μέσω των (27)-(30). Όπως αναμέναμε να συμβεί, βρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις με αυτές των (5)-(6).

Σημείωση: Η οριακή συνθήκη για $r \rightarrow 0$ [Εξ.(29)], όπως όλες οι οριακές συνθήκες, προκύπτει με εφαρμογή των εξισώσεων του πεδίου υπό ολοκληρωτική μορφή. Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss,

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q,$$

όπου S είναι η επιφάνεια σφαίρας πολύ μικρής ακτίνας r με κέντρο την αρχή O , παίρνουμε τη σχέση

$$4\pi^2 D_r^{(1)}(r) = q + \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [4\pi^2 D_r^{(1)}(r)] = q$$

[βλέπ. επίσης την παρατήρηση 2, η οποία οδηγεί στην Εξ.(11)].

Παρατήρηση: Ο πρώτος όρος στο δεύτερο μέλος της (28) αποτελεί την έκφραση του πεδίου, το οποίο οφείλεται στην κατανομή $\rho(r)$ αποκλειστικά, σε σημεία στο εσωτερικό της κατανομής αυτής. Το πεδίο αυτό στο εσωτερικό της ρ είναι ομαλή συνάρτηση του r , ακόμα και για $r=0$, για μία ευρυτάτη οικογένεια κατανομών $\rho(r)$. Αυτό γίνεται φανερό με τον παρακάτω συλλογισμό. Αν η $\rho(r)$ είναι ομαλή συνάρτηση, της μορφής

$$\rho(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

τότε

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left(a_0 \frac{r^3}{3} + a_1 \frac{r^4}{4} + a_2 \frac{r^5}{5} + \dots \right) = 0.$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι ακόμα και όταν η $\rho(r)$ εμφανίζει ιδιομορφία (απειρίζεται) στη θέση $r=0$, της μορφής

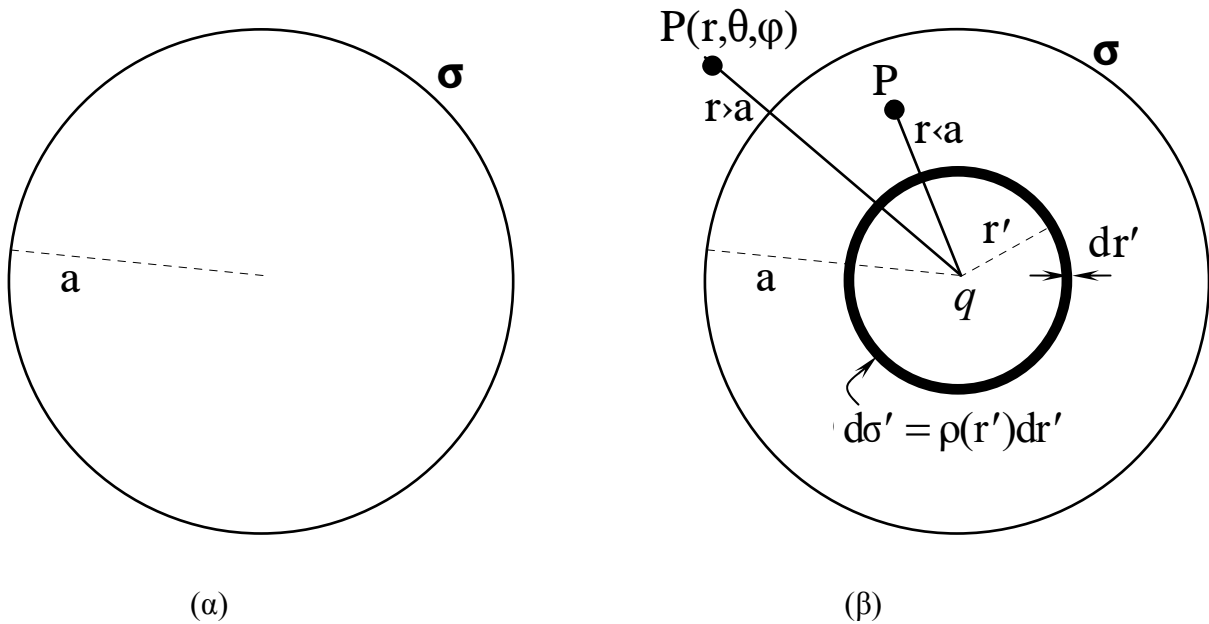
$$\rho(r) = \frac{b_0}{r} + a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

ο παραπάνω όρος εξακολουθεί να είναι ομαλός:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr = b_0 / 2 \text{ (πεπερασμένο)}.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήξαμε νωρίτερα κατά τη λύση με βάση τις ολοκληρωτικές σχέσεις.

Γ. Λύση με επαλληλία



Σχήμα 8

Με βάση το γνωστό αποτέλεσμα

$$\overline{D} = \begin{cases} \sigma \frac{a^2}{r^2} \hat{r}, & r > a \\ 0, & r < a \end{cases} \quad (31)$$

για το πεδίο επιφανειακής κατανομής σ (Σχ.8α), η οποία βρίσκεται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας a , το ζητούμενο πεδίο της διατάξεως του Σχ.1 βρίσκεται εύκολα με επαλληλία ως εξής:

Θεωρούμε την χωρική κατανομή ρ ως μια διαδοχή επαλληλών επιφανειακών κατανομών $d\sigma' = \rho(r')dr'$, τοποθετημένων σε σφαιρικές επιφάνειες ακτίνας r' , όπου $0 < r' < a$ (Σχ.8β). Το πεδίο στη θέση $P(r, \theta, \phi)$ εκφράζεται τότε ως εξής:

1. Για $r > a$ (σημείο παρατηρήσεως εκτός της σφαιρικής περιοχής ακτίνας a):

$$\overline{D}(r) = \hat{r}(A + B + \Gamma) \quad (32)$$

όπου

$$A = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (33)$$

είναι η συμβολή του σημειακού φορτίου,

$$B = \sigma \frac{a^2}{r^2} \quad (34)$$

οφείλεται στο επιφανειακό φορτίο σ , ενώ

$$\Gamma = \int_{r'=0}^a \rho(r') \frac{r'^2}{r^2} dr' \quad (35)$$

είναι η συμβολή του χωρικού φορτίου στο τελικό αποτέλεσμα.

2. Για $r < a$ (σημείο παρατηρήσεως εντός της σφαιρικής περιοχής ακτίνας a):

$$\bar{D}(r) = \hat{r}(A + B + \Gamma' + \Gamma'') \quad (36)$$

όπου $A = \frac{q}{4\pi r^2}$, όπως προηγουμένως, και $B=0$ (το σημείο παρατηρήσεως είναι στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας a και επομένως η συμβολή της σ είναι τώρα μηδενική). Στην (36), η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $r < r' < a$, συμβολίζεται με Γ' . Για τον ίδιο λόγο που οδήγησε στον μηδενισμό της ποσότητας B , έχουμε $\Gamma' = 0$. Τέλος, η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $0 < r' < r$, συμβολίζεται με Γ'' και ισούται με

$$\Gamma'' = \int_{r'=0}^r \rho(r') \frac{r'^2}{r^2} dr'. \quad (37)$$

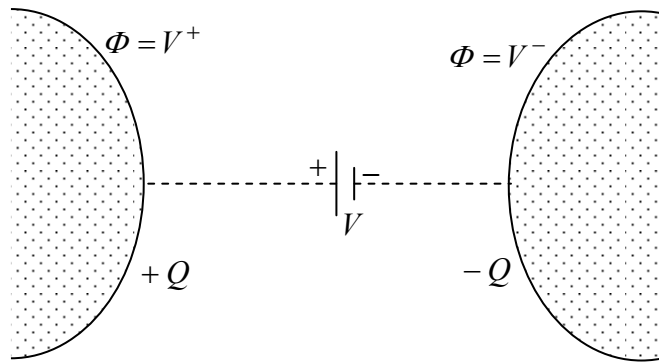
Όπως περιμέναμε να συμβεί, ξαναβρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο.

Εφαρμογή: Πεδίο και χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή

Ο πυκνωτής (Σχ.9) ορίζεται γενικά ως μια διάταξη που περιλαμβάνει δύο αγωγούς (οπλισμοί του πυκνωτή) με φορτία Q και $-Q$, αντίστοιχα. Οι δύο αγωγοί είναι ισοδυναμικοί χώροι με δυναμικά $\Phi = V^+$ και $\Phi = V^-$, αντίστοιχα. Η διαφορά των δυναμικών, $V = V^+ - V^-$, είναι η τάση του πυκνωτή. Τέλος, το μέγεθος

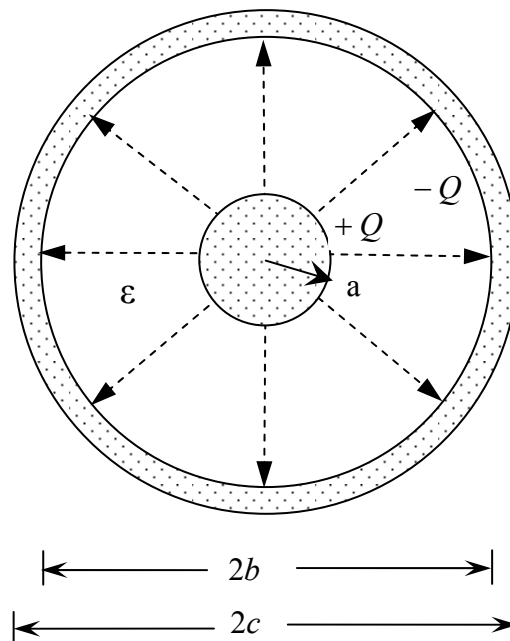
$$C = \frac{Q}{V} \quad (38)$$

ονομάζεται χωρητικότητα του πυκνωτή.



Σχήμα 9

Στην περίπτωση του σφαιρικού πυκνωτή που δείχνει το Σχ.10, οι δύο οπλισμοί είναι η αγωγίμη σφαίρα ακτίνας a και ο αγωγίμος σφαιρικός φλοιός, ο οποίος έχει εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c . Οι δύο αυτοί αγωγοί φέρουν φορτία Q και $-Q$, αντίστοιχα. Τα φορτία αυτά κατανέμονται στις σφαιρικές επιφάνειες $r=a$ και $r=b$, έτσι ώστε οι δυναμικές γραμμές του πεδίου να ξεκινούν από τα φορτία της επιφάνειας $r=a$ και να απολήγουν στα φορτία της επιφάνειας $r=b$. Με άλλα λόγια, το πεδίο εκτείνεται στην περιοχή $a < r < b$. [Επομένως, η εξωτερική ακτίνα c μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ($b < c < \infty$), χωρίς αυτό να έχει καμιά επίδραση στη λειτουργία του πυκνωτή.]



Σχήμα 10

Με αναφορά στο Σχ.10 βρίσκεται αμέσως ότι το πεδίο του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (a < r < b) \quad (39)$$

οπότε η τάση μεταξύ των οπλισμών ισούται με

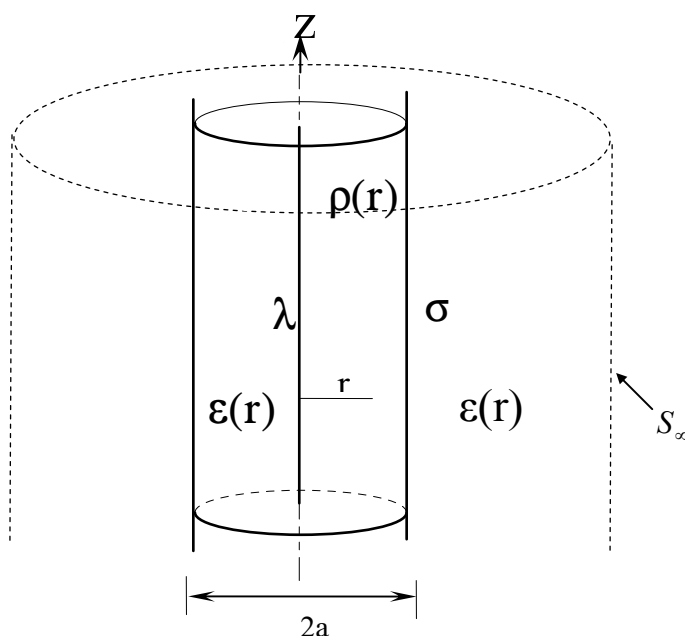
$$V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r=a}^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{b-a}{ab}. \quad (40)$$

Επομένως, η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή είναι

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a}. \quad (41)$$

3. Ηλεκτροστατικό πεδίο κυλινδρικά συμμετρικών χρονοσταθερών πηγών

Θεωρούμε (Σχ.1) ότι δρουν ταυτοχρόνως γραμμικό φορτίο σταθερής πυκνότητας λ κατά μήκος του άξονα $r=0$ του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων, επιφανειακό φορτίο σταθερής πυκνότητας σ στην



Σχήμα 1: Οι πηγές του πεδίου βρίσκονται στο εσωτερικό και στην επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας a . S_{∞} είναι η επιφάνεια του κυλίνδρου άπειρης ακτίνας. Το διεγειρόμενο πεδίο εκτείνεται στην περιοχή $0 < r < \infty$.

επιφάνεια $r=a$, και χωρικό φορτίο με κυλινδρικά συμμετρική πυκνότητα $\rho(r)$ ($0 < r < a$). Οι ηλεκτρικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με την επιτρεπτότητα του ϵ . Υποθέτουμε ότι γενικά $\epsilon=\epsilon(r)$ (ειδική περίπτωση: ομογενής απεριόριστος χώρος, $\epsilon=\text{σταθ.}$). Ζητείται να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το διεγειρόμενο ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης r του σημείου παρατηρήσεως $P(r, \varphi, z)$, δηλαδή

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

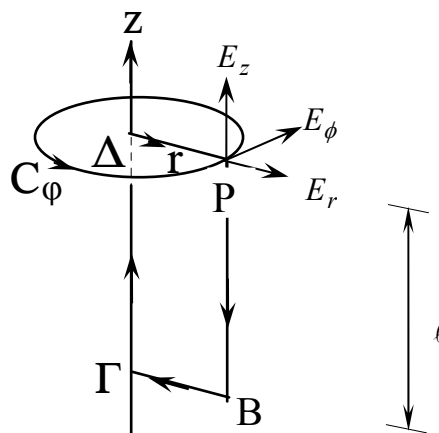
Συνιστώσες του πεδίου

Το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα, δηλαδή

$$\bar{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{r}}E_r(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί με πολλούς τρόπους. Εδώ θα εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό νόμο

$$\oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\ell} = 0. \quad (3)$$



Σχήμα 2

Επιλέγοντας ως δρόμο ολοκλήρωσεως τον κύκλο C_ϕ που διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \phi, z)$ και είναι στο επίπεδο το κάθετο στον άξονα των z (Σχ.2), από την (3) με τη βοήθεια της (2) προκύπτει ότι

$$E_\phi(r)\ell_c = 0 \Rightarrow E_\phi(r) = 0$$

όπου $\ell_c (= 2\pi r) \neq 0$ είναι το μήκος του κύκλου αυτού.

Με τον ίδιο τρόπο, επιλέγοντας ως δρόμο ολοκλήρωσεως τον ορθογωνικό βρόχο $PB\Gamma\Delta$ του σχήματος 2, παίρνουμε με τη βοήθεια των (2) και (3) τη σχέση

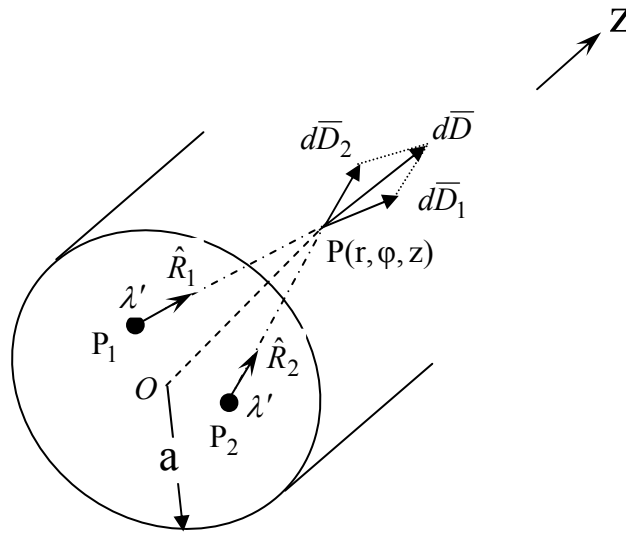
$$\int_{0(\Delta P)}^r E_r(r')dr' + \int_{r(B\Gamma)}^0 E_r(r')dr' + \ell E_z(0) - \ell E_z(r) = 0 \Rightarrow E_z(r) = E_z(0) \Rightarrow E_z(r) = c$$

όπου c σταθερά ανεξάρτητη του r . Λόγω της συνθήκης στο άπειρο,

$$E_z(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

έπεται ότι $c=0$ οπότε $E_z = 0$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε την (2) γεωμετρικά, θεωρώντας ότι οι δοθείσες χωρικές και επιφανειακές κατανομές φορτίου συντίθενται από πλήθος απέραντων γραμμικών πηγών παράλληλων στον άξονα z και υπολογίζοντας το πεδίο σε οποιαδήποτε θέση $P(r, \varphi, z)$ ως υπέρθεση των συμβολών που προέρχονται από όλες αυτές τις γραμμικές πηγές. Για κάθε τέτοιο γραμμικό φορτίο λ' , το οποίο βρίσκεται, π.χ., πάνω στην ευθεία P_1z (παράλληλη στον άξονα z), υπάρχει πάντα ίσο γραμμικό φορτίο λ' ευρισκόμενο επάνω στην ευθεία P_2z , συμμετρική της P_1z ως προς το επίπεδο που ορίζουν η OP και ο άξονας z (Σχ.3). Το O είναι η προβολή του P στον άξονα z . Διαπιστώνεται αμέσως ότι η συνισταμένη των πεδίων $d\vec{D}_1$ και $d\vec{D}_2$ στη θέση P , τα οποία οφείλονται σε δύο τέτοια γραμμικά φορτία, έχει την ακτινική κατεύθυνση \hat{r} , ως εξής:



Σχήμα 3

$$d\vec{D} \equiv d\vec{D}_1 + d\vec{D}_2 = \frac{\lambda'}{2\pi R} (\hat{R}_1 + \hat{R}_2) = \frac{\lambda'}{2\pi R} \left(\frac{\vec{P_1P}}{R} + \frac{\vec{P_2P}}{R} \right) = \frac{\lambda'}{2\pi R^2} (\vec{P_1P} + \vec{P_2P})$$

όπου $R \equiv |\vec{P_1P}| = |\vec{P_2P}|$. Όμως

$$\vec{P_1P} + \vec{P_2P} = (\vec{P_1O} + \vec{OP}) + (\vec{P_2O} + \vec{OP}) = 2\vec{OP} - (\vec{OP_1} + \vec{OP_2}).$$

Προφανώς το άθροισμα $\vec{OP_1} + \vec{OP_2}$, επομένως και το διάνυσμα $d\vec{D}$, έχει διεύθυνση την ευθεία OP . Με επαλληλία προκύπτει ότι το συνολικό πεδίο στη θέση P είναι ακτινικό.

Εύρεση της $E_r(r)$

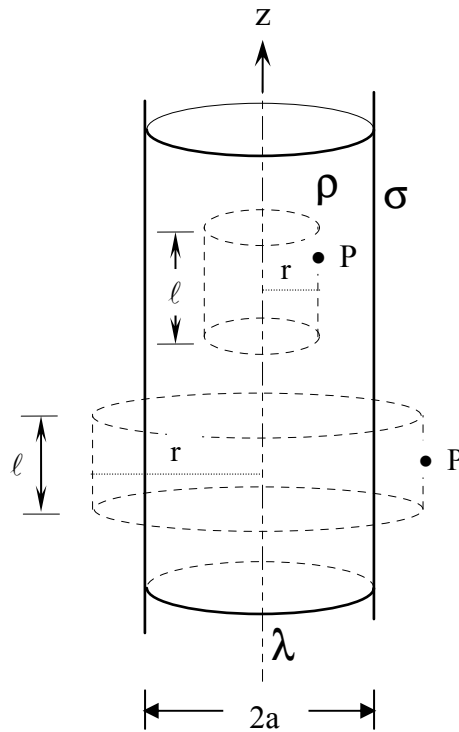
Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου, $E_r(r)$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (4)$$

όπου ως επιφάνεια ολοκλήρωσης επιλέγουμε μία κυλινδρική επιφάνεια, μήκους ℓ και ακτίνας r , η οποία διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \phi, z)$ (Σχ.4).

Το μέγεθος Q στο δεύτερο μέρος της (4) παριστάνει το συνολικό φορτίο που περικλείεται στο εσωτερικό της S , δηλαδή

$$Q = Q(r) = \begin{cases} \lambda \ell + 2\pi \ell \int_0^r r' \rho(r') dr' & (0 < r < a) \\ \lambda \ell + 2\pi \ell \int_0^a r' \rho(r') dr' + 2\pi a \ell \sigma & (a < r < \infty) \end{cases} \quad (5)$$



Σχήμα 4

Με τη βοήθεια της (2), από την (4) προκύπτει η σχέση

$$2\pi r \ell D_r(r) = \ell Q_\mu(r) \Rightarrow D_r(r) = \frac{Q_\mu(r)}{2\pi r} \Rightarrow E_r(r) = \frac{Q_\mu(r)}{2\pi r \epsilon(r)} \quad (6)$$

όπου

$$Q_\mu(r) = \frac{Q(r)}{\ell}$$

είναι το ανά μονάδα μήκους περικλειόμενο από την S φορτίο.

Αξιοσημείωτες ειδικές περιπτώσεις

α. Γραμμική πηγή στον άξονα $r=0$, στον απεριόριστο κενό χώρο:

$$\bar{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}, \quad \bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}. \quad (7)$$

β. Ομοιόμορφη επιφανειακή πηγή πυκνότητας σ στην κυλινδρική επιφάνεια $r=a$ μέσα στον απεριόριστο κενό χώρο:

$$\bar{D} = \begin{cases} \frac{\lambda'}{2\pi r} \hat{r} = \sigma \frac{a}{r} \hat{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}, \quad \bar{E} = \begin{cases} \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \hat{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (8)$$

όπου

$$\lambda' = 2\pi a \sigma$$

είναι το συνολικό φορτίο ανά μονάδα μήκους της κυλινδρικής επιφάνειας.

Παρατηρούμε ότι το πεδίο στον χώρο έξω από μία ομοιόμορφα φορτισμένη κυλινδρική επιφάνεια ταυτίζεται με το πεδίο γραμμικής πηγής, μεγέθους ίσου με το συνολικό φορτίο ανά μονάδα μήκους, τοποθετημένης στον άξονα του κυλίνδρου. Αντίθετα, το πεδίο στο εσωτερικό μίας τέτοιας φορτισμένης επιφάνειας είναι μηδενικό.

Παρατηρήσεις

1. Το πεδίο είναι **ασυνεχές** στα σημεία της επιφανειακής κατανομής σ . Εύκολα διαπιστώνουμε με τη βοήθεια της (6) ότι, όπως περιμέναμε να συμβεί, η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{r} \cdot [\bar{D}(a+) - \bar{D}(a-)] = \sigma. \quad (9)$$

2. Στη γειτονιά του γραμμικού φορτίου, δηλαδή για $r \rightarrow 0$, επικρατεί η συμβολή που προέρχεται από το γραμμικό φορτίο:

$$D_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} + c(r)$$

όπου η ποσότητα $c(r)$ είναι φραγμένη. (Αυτό συμβαίνει επειδή η συμβολή που προέρχεται από το επιφανειακό φορτίο είναι μηδενική, ενώ, όπως θα δείξουμε αμέσως, και η συμβολή από το χωρικό φορτίο, ίση με $c(r)$, είναι παντού πεπερασμένη). Συνεπώς,

$$\lim_{r \rightarrow 0} [2\pi r D_r(r)] = \lambda \quad (10)$$

Στη θέση του γραμμικού φορτίου, $r=0$, το πεδίο είναι, προφανώς, ιδιόμορφο:

$$D_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty.$$

Σημείωση: Η σχέση (10), που καθορίζει τη συμπεριφορά του πεδίου στην άμεση γειτονιά του γραμμικού φορτίου λ , επέχει θέση **οριακής συνθήκης** [ανάλογης προς την (9)] κατά την επίλυση προβλημάτων με χρήση των σημειακών εξισώσεων Maxwell.

3. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο η ομοιόμορφη κατανομή $\rho(r) = \rho_0 = \text{σταθ.}$ ($0 < r < a$), τότε από την (6) παίρνουμε τη σχέση

$$D_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{2} & (0 < r < a) \\ \frac{\rho_0 a^2}{2r} & (r > a) \end{cases} . \quad (11)$$

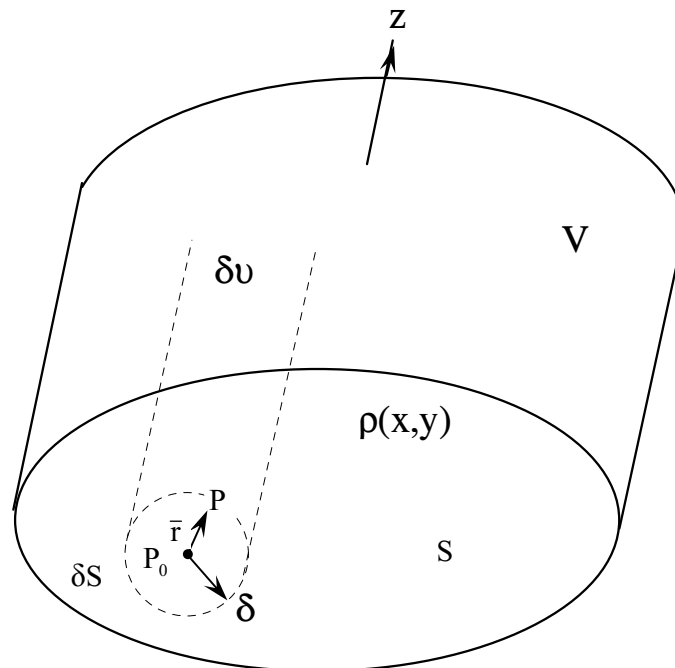
Παρατηρούμε, επομένως, ότι το πεδίο που οφείλεται σε χωρικό φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο στο εσωτερικό ενός κυλίνδρου απείρου μήκους είναι ομαλή συνάρτηση του r τόσο στο εξωτερικό όσο και στο εσωτερικό των πηγών.

4. Θεωρούμε (Σχ.5) χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(x,y)$ το οποίο κατανέμεται στο εσωτερικό της ομοιόμορφης, απείρου μήκους κατά τον άξονα των z , κυλινδρικής περιοχής V (η διατομή S της κυλινδρικής αυτής διατάξεως μπορεί να έχει αυθαίρετη μορφή). Υποθέτουμε ότι η ρ είναι αρκούντως ομαλή συνάρτηση των (x,y) και ανεξάρτητη του z .

Το πεδίο $\bar{D}(x_0, y_0)$ στη θέση $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση δυο όρων:

$$\bar{D}(x_0, y_0) = \bar{D}^>(x_0, y_0) + \bar{D}^<(x_0, y_0) .$$

Ο όρος $\bar{D}^<(x_0, y_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα φορτία που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας κυλινδρικής στήλης δv , απείρου μήκους και ακτίνας δ , με άξονα την ευθεία ($x = x_0, y = y_0$), ενώ ο όρος $\bar{D}^>(x_0, y_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα υπόλοιπα φορτία, δηλαδή στα φορτία που βρίσκονται



Σχήμα 5

στην περιοχή $V-\delta\upsilon$. Επειδή $P_0(x_0, y_0, z_0) \notin (V-\delta\upsilon)$, ο όρος $\overline{D}^>(x_0, y_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0) . Από το άλλο μέρος, όταν η ακτίνα δ είναι κατάλληλα μικρή, τότε μπορεί να τεθεί $\rho(x, y) = \rho(x_0, y_0) = \rho_0$ για κάθε σημείο $P(x, y, z) \in \delta\upsilon$ και να χρησιμοποιηθεί ο τύπος (11):

$$\overline{D}^<(x, y) = \frac{\rho_0 r}{2} \hat{r} \quad (0 < r < \delta)$$

όπου r είναι η απόσταση του $P(x, y, z)$ από τον άξονα της κυλινδρικής στήλης $\delta\upsilon$. Επομένως και ο όρος $\overline{D}^<(x_0, y_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0) .

Συμπέρασμα: Το πεδίο οποιασδήποτε ομαλής χωρικής κατανομής φορτίου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός ομοιομόρφου κυλίνδρου απείρου μήκους, είναι ομαλή συνάρτηση της θέσεως τόσο στο εξωτερικό όσο και στα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της κατανομής.

5. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου έχουν τα άκρα τους στα φορτία εντός της δοθείσης κατανομής, αφ' ενός, και σε ισόποσα φορτία τα οποία επάγονται και κατανέμονται ομοιόμορφα στην κυλινδρική επιφάνεια απείρου ακτίνας, αφ' ετέρου. Η συμβολή των τελευταίων στο πεδίο είναι, προφανώς, μηδενική σε κάθε σημείο της περιοχής $0 < r < \infty$, σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω για το πεδίο ομοιόμορφης κυλινδρικής επιφανειακής κατανομής [βλέπε εξ.(8)].

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Θα στηριχθούμε στις (ανεξάρτητες μεταξύ τους) διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \overline{E} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho \quad (13)$$

και στις οριακές συνθήκες

$$\hat{r} \times [\overline{E}(a+) - \overline{E}(a-)] = 0 \quad (14)$$

$$\hat{r} \cdot [\overline{D}(a+) - \overline{D}(a-)] = \sigma \Leftrightarrow D_r(a+) - D_r(a-) = \sigma. \quad (15)$$

Για τον υπολογισμό του πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη σχέση (1)

$$\overline{E} = \overline{E}(r)$$

την οποία υπαγορεύει η συμμετρία του προβλήματος.

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε -τώρα με βάση την (12)- ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, ϕ, z) , αναλύουμε την (12) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = 0 \quad \xRightarrow{\partial/\partial \phi = 0 = \partial/\partial z} 0 = 0 \quad (\text{ταυτότητα})$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0 \quad \xRightarrow{\partial/\partial z = 0} \frac{dE_z(r)}{dr} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial\phi=0} \frac{1}{r} \frac{d[rE_\phi(r)]}{dr} = 0. \quad (17)$$

Ολοκληρώνοντας την (16) παίρνουμε

$$E_z(r) = \begin{cases} c_1 & \text{περιοχή 1: } 0 < r < a \\ c_2 & \text{περιοχή 2: } a < r < \infty \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο¹, $E_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, δίνει $c_2 = 0$, ενώ η συνθήκη συνεχειάς $E_z(a+) = E_z(a-)$ οδηγεί στη σχέση $c_1 = c_2 = 0$. Επομένως $E_z(r) = 0$ παντού.

Ομοίως, ολοκληρώνοντας την (17) παίρνουμε

$$E_\phi(r) = \begin{cases} d_1 / r & (0 < r < a) \\ d_2 / r & (a < r < \infty) \end{cases}$$

όπου d_1 και d_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $E_\phi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ η συνθήκη συνεχειάς $E_\phi(a+) = E_\phi(a-)$ οδηγεί στη σχέση $d_1 = d_2$. Η οριακή συνθήκη στη θέση $r=0$ δίνει² $d_1 = 0$. Επομένως $E_\phi(r) = 0$ παντού.

Σημείωση: Το ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα μπορεί να αποδειχθεί ακόμα πιο εύκολα με χρήση του δυναμικού. Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το δυναμικό αυτό θα είναι συνάρτηση μόνο του r . Επομένως

$$\vec{E} = -\nabla\Phi(r) = -\hat{r} \frac{d\Phi(r)}{dr}$$

δηλαδή το πεδίο έχει πράγματι μόνο ακτινική συνιστώσα.

Εύρεση της $D_r(r)$

Η μοναδική συνιστώσα του πεδίου θα βρεθεί μέσω της (13), η οποία σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται ως εξής:

¹ Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου τερματίζονται σε φορτία που αναπτύσσονται (επάγονται) στην επιφάνεια S_∞ του κυλίνδρου άπειρης ακτίνας (βλέπ. Σχ.1). Επομένως, αφού έξω από τον κύλινδρο S_∞ είναι $E_z = 0$, θα πρέπει $E_z(r \rightarrow \infty) = 0$, διότι αλλιώς η E_z θα ήταν ασυνεχής στα σημεία της S_∞ .

² Η οριακή συνθήκη για την E_ϕ για $r \rightarrow 0$ προκύπτει από τον νόμο του αστροβίλου

$$\oint_{C_\phi} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

όπου C_ϕ είναι κύκλος πολύ μικρής ακτίνας r , κάθετος στον άξονα των z , με το κέντρο του πάνω στον άξονα των z . Προκύπτει τότε η σχέση:

$$2\pi r E_\phi(r) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [r E_\phi(r)] = 0 \Rightarrow d_1 = 0.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial [rD_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial [D_\varphi(r)]}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(r) \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d[rD_r(r)]}{dr} = \rho(r) \quad (18\alpha)$$

Από την (18α) με ολοκλήρωση προκύπτει η γενική λύση

$$rD_r(r) = \int r\rho(r)dr + c \Rightarrow D_r(r) = \frac{1}{r} \int r\rho(r)dr + \frac{c}{r}. \quad (18\beta)$$

(c είναι σταθερά ολοκληρώσεως).

Για την περιοχή 2 ($r > a$) είναι $\rho(r)=0$ και επομένως από την (18β) παίρνουμε

$$D_r^{(2)}(r) = \frac{c_2}{r}. \quad (19)$$

Για την περιοχή 1 ($0 < r < a$), η (18β) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα υπό τη μορφή

$$D_r^{(1)}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' \rho(r') dr' + \frac{c_1}{r}. \quad (20)$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες ως εξής:

$$\alpha) \quad \lim_{r \rightarrow 0} [2\pi r D_r^{(1)}(r)] = \lambda \Rightarrow 2\pi c_1 = \lambda \Rightarrow c_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \hat{r} \cdot [\bar{D}(a+) - \bar{D}(a-)] &= \sigma \Leftrightarrow D_r(a+) - D_r(a-) = \sigma \Rightarrow \frac{c_2}{a} - \frac{1}{a} \int_0^a r' \rho(r') dr' - \frac{c_1}{a} = \sigma \Rightarrow \\ \Rightarrow c_2 &= \int_0^a r' \rho(r') dr' + \frac{\lambda}{2\pi} + \sigma a. \end{aligned} \quad (22)$$

Μετά την εύρεση των σταθερών c_1 και c_2 , το πεδίο προσδιορίζεται πλήρως μέσω των (19)-(22). Όπως αναμέναμε να συμβεί, βρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις με αυτές των (5)-(6).

Παρατήρηση: Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της (20) αποτελεί το πεδίο που θα έδινε, αν ήταν μόνη της, η χωρική κατανομή $\rho(r)$ σε σημεία στο εσωτερικό της. Το πεδίο αυτό είναι ομαλή συνάρτηση του r (ακόμα και για $r=0$) για μια ευρυτάτη οικογένεια κατανομών $\rho(r)$. Αυτό γίνεται φανερό με τον παρακάτω συλλογισμό: Αν η $\rho(r)$ είναι ομαλή συνάρτηση, της μορφής

$$\rho(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

τότε

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int r \rho(r) dr = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left(a_0 \frac{r^2}{2} + a_1 \frac{r^3}{3} + a_2 \frac{r^4}{4} + \dots \right) = 0.$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι ακόμα και όταν η $\rho(r)$ εμφανίζει ιδιομορφία (απειρίζεται) στη θέση $r=0$, της μορφής

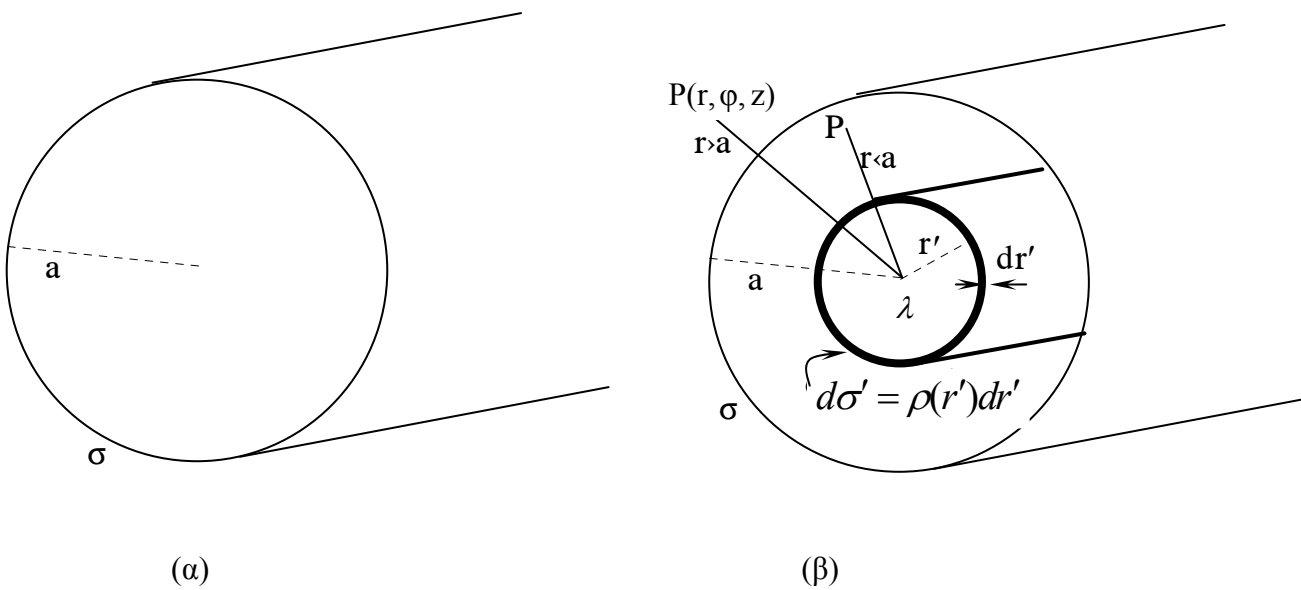
$$\rho(r) = \frac{b_0}{r} + a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

ο παραπάνω όρος εξακολουθεί να είναι ομαλός, αφού

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int r \rho(r) dr = b_0 \text{ (πεπερασμένο).}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήξαμε νωρίτερα κατά τη λύση με βάση τις ολοκληρωτικές σχέσεις

Γ. Λύση με επαλληλία



Σχήμα 6

Με βάση το αποτέλεσμα [βλέπε (8)]

$$\bar{D} = \begin{cases} \sigma \frac{a}{r} \hat{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (23)$$

για το πεδίο επιφανειακής κατανομής σ (Σχ.6), η οποία βρίσκεται στην κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας a , το ζητούμενο πεδίο της διατάξεως του σχήματος 1 βρίσκεται εύκολα με επαλληλία ως εξής:

Θεωρούμε την χωρική κατανομή ρ ως μια διαδοχή επιφανειακών κατανομών $d\sigma' = \rho(r')dr'$, τοποθετημένων σε κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνας r' , όπου $0 < r' < a$ (Σχ.6β). Το πεδίο στη θέση $P(r, \phi, z)$ εκφράζεται τότε ως εξής:

1. Για $r > a$ (σημείο παρατηρήσεως εκτός της κυλινδρικής περιοχής ακτίνας a):

$$\bar{D}(r) = \hat{r}(A + B + \Gamma) \quad (24)$$

όπου

$$A = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (25)$$

είναι η συμβολή του γραμμικού φορτίου,

$$B = \sigma \frac{a}{r} \quad (26)$$

οφείλεται στο επιφανειακό φορτίο σ , ενώ

$$\Gamma = \int_{r'=0}^a \rho(r') \frac{r'}{r} dr' \quad (27)$$

είναι η συμβολή του χωρικού φορτίου.

2. Για $r < a$ (σημείο παρατηρήσεως εντός της κυλινδρικής περιοχής ακτίνας a):

$$\overline{D}(r) = \hat{r}(A + B + \Gamma' + \Gamma'') \quad (28)$$

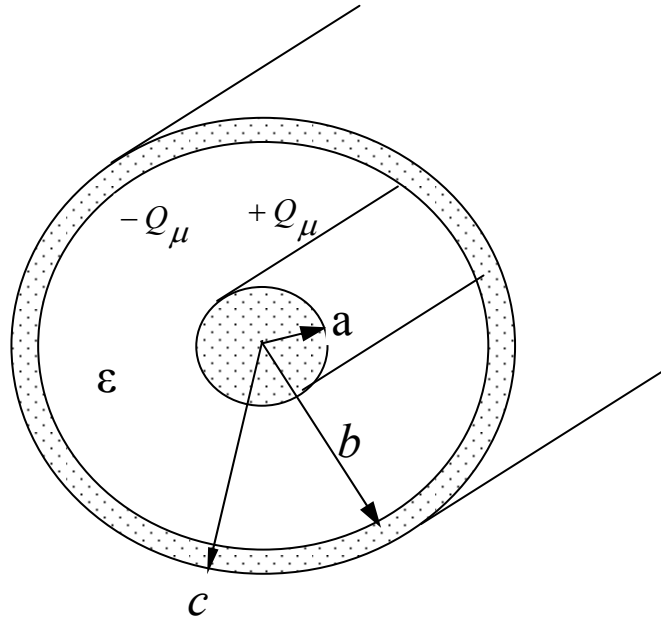
όπου $A = \lambda / (2\pi r)$, όπως προηγουμένως, και $B=0$ (το σημείο παρατηρήσεως είναι στο εσωτερικό του κυλίνδρου ακτίνας a και επομένως η συμβολή της σ είναι τώρα μηδενική). Η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $r < r' < a$, συμβολίζεται με Γ' . Για τον ίδιο λόγο που οδήγησε στον μηδενισμό της ποσότητας B , έχουμε $\Gamma' = 0$. Τέλος, η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $0 < r' < r$, συμβολίζεται με Γ'' και ισούται με

$$\Gamma'' = \int_{r'=0}^r \rho(r') \frac{r'}{r} dr'. \quad (29)$$

Όπως περιμέναμε να συμβεί, ξαναβρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο.

Εφαρμογή: Πεδίο και χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή

Ο κυλινδρικός πυκνωτής, που φαίνεται στο Σχ.7, έχει ως οπλισμούς τον αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας a και τον αγωγίμο κυλινδρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής ακτίνας c . Για απλότητα θεωρούμε ότι η διάταξη έχει άπειρο μήκος και ότι ο χώρος μεταξύ των οπλισμών πληρούται με διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς ϵ .



Σχήμα 7

Ο εσωτερικός οπλισμός φέρει ανά μονάδα μήκους θετικό φορτίο Q_μ [C/m], το οποίο κατανέμεται στην επιφάνειά του $r=a$. Ο εξωτερικός οπλισμός φέρει ισόποσο αρνητικό φορτίο $-Q_\mu$, το οποίο κατανέμεται ολόκληρο στην εσωτερική του επιφάνεια $r=b$. Το διεγειρόμενο ηλεκτρικό πεδίο έχει ακτινική κατεύθυνση, με τις δυναμικές γραμμές να ξεκινούν από τα φορτία της επιφάνειας $r=a$ και να καταλήγουν σε ισόποσα φορτία της επιφάνειας $r=b$. Με άλλα λόγια, το πεδίο αυτό είναι εντοπισμένο στην περιοχή $a < r < b$ και επομένως η τιμή της εξωτερικής ακτίνας c δεν έχει καμμία σημασία για τη λειτουργία του πυκνωτή.

Η έκφραση του πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή είναι

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{Q_\mu}{2\pi\epsilon r} \quad (a < r < b) \quad (30)$$

οπότε η τάση μεταξύ των οπλισμών ισούται με

$$V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q_\mu}{2\pi\epsilon} \int_{r=a}^b \frac{dr}{r} = \frac{Q_\mu}{2\pi\epsilon} [\ln r]_a^b = \frac{Q_\mu}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}. \quad (31)$$

Επειδή οι οπλισμοί έχουν άπειρο μήκος ℓ , το φορτίο $Q = Q_\mu \ell$ είναι άπειρο. Επομένως η χωρητικότητα, όπως ορίστηκε μέσω της σχέσεως $C=Q/V$, απειρίζεται, δηλαδή δεν είναι χρήσιμο μέγεθος. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους,

$$C_\mu = \frac{Q_\mu}{V}, \quad (32)$$

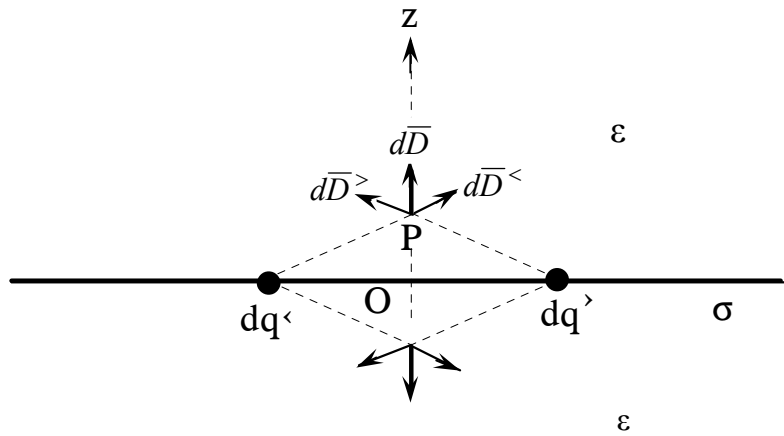
της οποίας η τιμή ισούται με

$$C_{\mu} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (33)$$

4. Ηλεκτροστατικό πεδίο απεράντων επιπέδων κατανομών

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πεδίο απέραντης επίπεδης κατανομής, σταθερής πυκνότητας σ .

Λύση: Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το επιφανειακό φορτίο βρίσκεται στο επίπεδο με $z=0$ (Σχ.1). Θεωρούμε επί πλέον ότι ο περιβάλλων χώρος έχει διηλεκτρική σταθερά ϵ . Το παρόν πρόβλημα λύθηκε στο Κεφ.1 με βάση το ολοκλήρωμα της υπερθέσεως. Εδώ θα δώσουμε μια απλή λύση, βασισμένη στην ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss, για να δείξουμε για μία ακόμα φορά την αξία του νόμου αυτού στην επίλυση προβλημάτων.



Σχήμα 1

Λόγω της ομοιομορφίας της πηγής και του απεράντου της διατάξεως ως προς τις κατευθύνσεις x και y , το πεδίο θα είναι ανεξάρτητο των x και y , δηλαδή

$$\vec{E} = \vec{E}(z), \quad \vec{D} = \vec{D}(z). \quad (1)$$

Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σημείο παρατηρήσεως P βρίσκεται πάνω στον άξονα των z , όπως στο Σχ.1.

Θεωρώντας ότι το πεδίο στη θέση P προκύπτει από την επαλληλία των πεδίων που οφείλονται σε όλα τα στοιχειώδη φορτία $dq^< = \sigma dS$ και $dq^> = \sigma dS$ (Σχ.1), που βρίσκονται σε θέσεις συμμετρικές ως προς την αρχή O^3 , διαπιστώνουμε τα εξής:

1. Το πεδίο έχει κατεύθυνση κάθετη στην επίπεδη κατανομή, δηλαδή

$$\vec{E} = \hat{z}E_z(z), \quad \vec{D} = \hat{z}D_z(z). \quad (2)$$

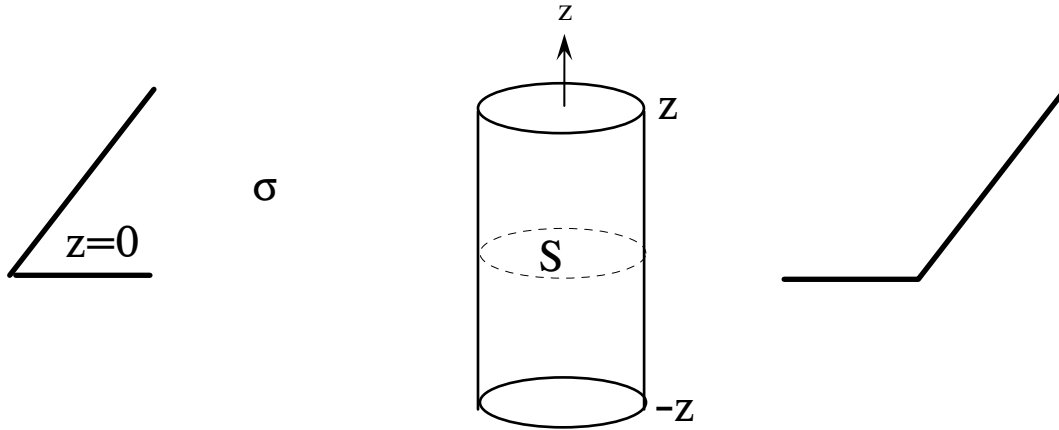
2. Ισχύει η σχέση

³Αυτό είναι πάντοτε δυνατό διότι η κατανομή σ εκτείνεται απεριόριστα στο επίπεδο $z=0$.

$$D_z(z) = -D_z(-z). \quad (3)$$

Για την εύρεση της τιμής του πεδίου θεωρούμε κυλινδρική στήλη διατομής S , με τις δυο βάσεις της στις θέσεις $z > 0$ και $-z$ αντίστοιχα (Σχ.2), και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q. \quad (4)$$



Σχήμα 2

Το μέγεθος Q στο δεύτερο μέρος της (4) παριστάνει, κατά τα γνωστά, το συνολικό φορτίο που περικλείεται από την S , δηλαδή

$$Q = \sigma S. \quad (5)$$

Με τη βοήθεια των (2),(3), από την (4) προκύπτει ότι

$$SD_z(z) - SD_z(-z) = Q \xrightarrow[(5)]{(3)} 2D_z(z) = \sigma \Rightarrow D_z(z) = \frac{\sigma}{2} \quad (z > 0) \quad (6)$$

έχοντας λάβει επί πλέον υπόψιν ότι η συμβολή της παράπλευρης επιφάνειας στο ολοκλήρωμα στην (4) είναι μηδενική.

Το πεδίο \vec{D}_z στην περιοχή $z < 0$ βρίσκεται με συνδυασμένη εφαρμογή των (3) και (6). Το τελικό αποτέλεσμα για το πεδίο σε κάθε περιοχή του χώρου μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως εξής:

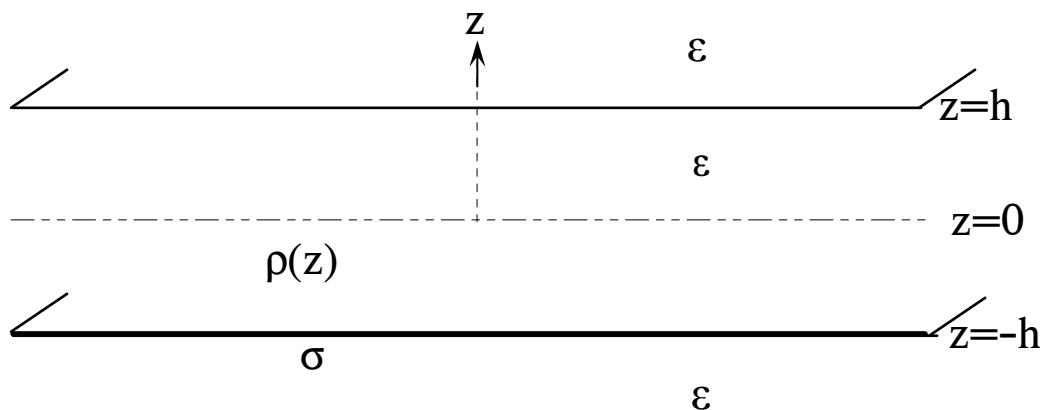
$$\vec{D} = \frac{1}{2} \hat{z} \begin{cases} \sigma, & \text{αν } z > 0 \\ -\sigma, & \text{αν } z < 0 \end{cases} = \hat{z} \frac{\sigma}{2} \text{sgn}(z), \quad \vec{E} = \vec{D} / \epsilon \quad (7)$$

όπου

$$\text{sgn}(z) = \frac{z}{|z|} = \begin{cases} 1, & \text{αν } z > 0 \\ -1, & \text{αν } z < 0 \end{cases}.$$

Γενίκευση: Ηλεκτροστατικό πεδίο απεράντων φορτισμένων επιπέδων πλακών

Θεωρούμε τώρα ότι δρουν ταυτόχρονα (Σχ.3) επιφανειακό φορτίο σταθερής πυκνότητας σ στο επίπεδο $z=-h$ και χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(z)$ στο εσωτερικό της πλάκας $-h < z < h$. Οι ηλεκτρικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με τη διηλεκτρική του επιτρεπτότητα ϵ . Ζητάμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.



Σχήμα 3

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Επειδή α) τόσο η διάταξη όσο και οι πηγές εκτείνονται απεριόριστα ως προς x και y και β) η κατανομή των πηγών είναι ανεξάρτητη από τα x και y , το διεγερόμενο ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της συντεταγμένης z του σημείου παρατηρήσεως $\vec{F}(x, y, z)$, δηλαδή

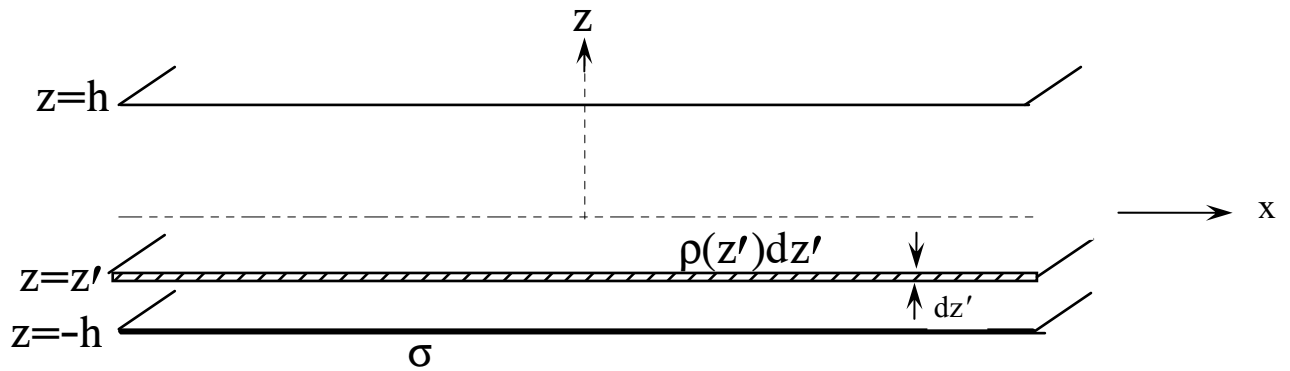
$$\vec{E} = \vec{E}(z), \quad \vec{D} = \vec{D}(z). \quad (8)$$

Συνιστώσες του πεδίου

Το πεδίο έχει μόνο z -συνιστώσα, δηλαδή

$$\vec{E} = \hat{z}E_z(z), \quad \vec{D} = \hat{z}D_z(z). \quad (9)$$

Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί εύκολα, με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, θεωρώντας το πεδίο σε οποιαδήποτε θέση ως υπέρθεση των συμβολών που προέρχονται α) από την επιφανειακή κατανομή σ και β) από επάλληλες επιφανειακές κατανομές $d\sigma(z') = \rho(z')dz'$ ($-h < z' < h$), που συνθέτουν την χωρική κατανομή ρ (Σχ.4).



Σχήμα 4

Η περιγραφείσα παραπάνω διαδικασία πιστοποιεί επίσης, με βάση το αποτέλεσμα (7), ότι σε σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό της επίπεδης πλάκας ισχύει η σχέση

$$D_z(z) = -D_z(-z) \quad (|z| > h) \quad (10)$$

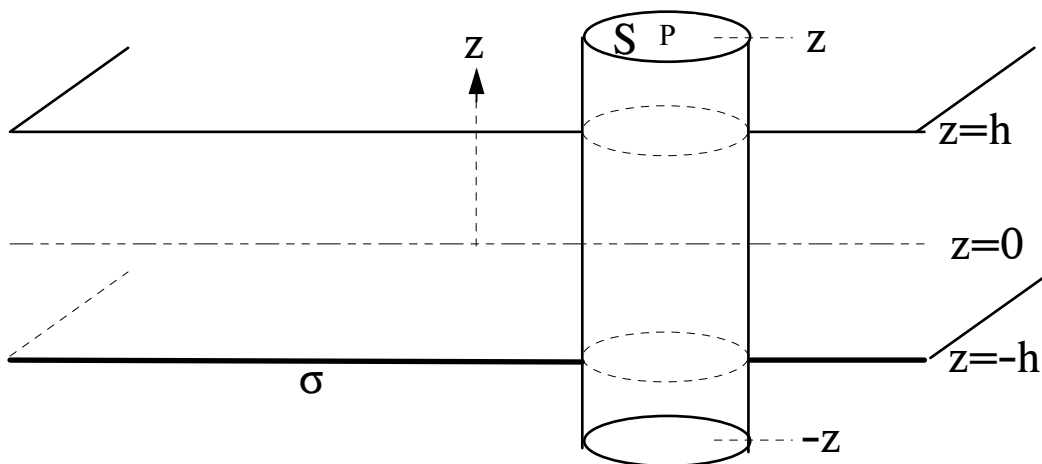
Εύρεση των $E_z(z)$, $D_z(z)$

α. περιοχές $z > h$ και $z < -h$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου $D_z(z)$ στην περιοχή $z > h$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (11)$$

όπου ως επιφάνεια ολοκλήρωσας επιλέγουμε την επιφάνεια ενός ορθού κυλίνδρου, διατομής S , με άξονα τον άξονα των z , ο οποίος έχει τη μία του βάση στη θέση $P(z)$, όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο, και την άλλη του βάση στη συμμετρική θέση $-z$ (Σχ.5).



Σχήμα 5

Το φορτίο Q στο δεύτερο μέρος της (11) ισούται με

$$Q = \sigma S + S \int_{-h}^h \rho(z') dz'$$

οπότε, με τη βοήθεια της (10), από την (11) προκύπτει η σχέση

$$SD_z(z) - SD_z(-z) = Q \stackrel{(10)}{\Rightarrow} D_z(z) = \frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right] \quad (z > h). \quad (12)$$

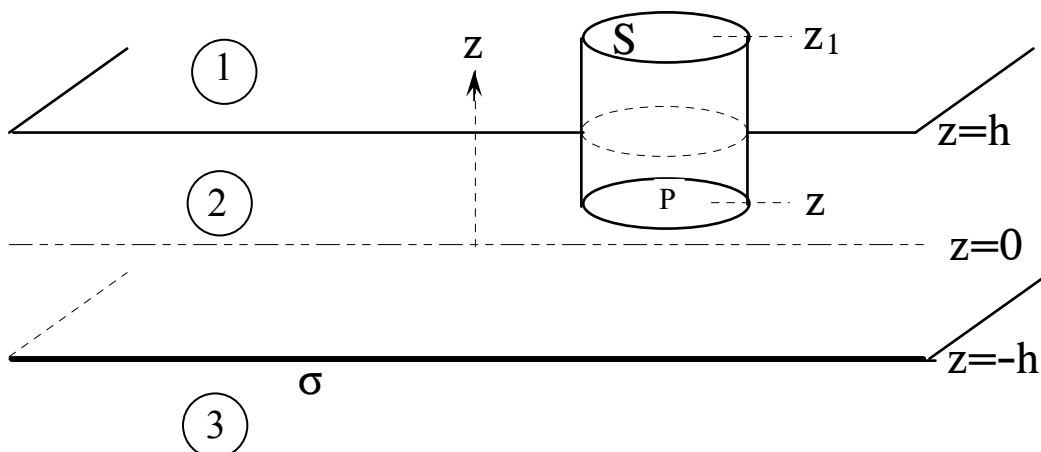
Το πεδίο D_z στην περιοχή $z < -h$ βρίσκεται με συνδυασμένη εφαρμογή των (10) και (12):

$$D_z(z) = -\frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right] \quad (z < -h) \quad (13)$$

Σημείωση: Τα αποτελέσματα (12) και (13) απλώς εκφράζουν το πεδίο στις θέσεις $z > h$ και $z < -h$ ως υπέρθεση των πεδίων που οφείλονται στην κατανομή σ και σε όλες τις επίπεδες κατανομές $\rho(z') dz'$ ($-h < z' < h$) που συνθέτουν την κατανομή ρ .

β. περιοχή $|z| < h$

Για τον υπολογισμό της $D_z(z)$ στην περιοχή $-h < z < h$ εφαρμόζουμε πάλι τον νόμο του Gauss (11). Ως επιφάνεια ολοκληρώσεως επιλέγουμε τώρα την επιφάνεια ενός ορθού κυλίνδρου, διατομής S , με άξονα τον άξονα των z , ο οποίος έχει τη μία του βάση στη θέση $P(z)$ όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο (Σχ.6). Η άλλη βάση τοποθετείται στη θέση $Z_1 > h$, όπου γνωρίζουμε ήδη το πεδίο μέσω της (12) (η επιλογή $Z_1 < -h$ είναι το ίδιο κατάλληλη).



Σχήμα 6

Το μέγεθος Q στο δεύτερο μέρος της (11) (συνολικό φορτίο που εμπερικλείεται στο εσωτερικό της S) ισούται τώρα με

$$Q = S \int_z^h \rho(z') dz'. \quad (14)$$

Με τη βοήθεια των (12) και (14) από την (11) προκύπτει ότι

$$SD_z(z_1) - SD_z(z) = Q \Rightarrow D_z(z) = \frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^z \rho(z') dz' - \int_z^h \rho(z') dz' \right] \quad (-h < z < h). \quad (15)$$

Παρατηρήσεις πάνω στις (12), (13) και (15)

1. Το πεδίο D_z παραμένει σταθερό σε ολόκληρη την περιοχή $z > h$. Το D_z είναι επίσης σταθερό σε ολόκληρη την περιοχή $z < -h$ (με τιμή αντίθετη της αντίστοιχης για την περιοχή $z > h$). Αντίθετα, στην περιοχή των πηγών, $|z| < h$, το πεδίο D_z είναι συνάρτηση της θέσεως z .

2. Το πεδίο D_z είναι **ασυνεχές** στα σημεία της επιφανειακής κατανομής σ . Η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{z} \cdot [\bar{D}(-h+0) - \bar{D}(-h-0)] = \sigma$$

όπως περιμέναμε να συμβεί.

3. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου έχουν τα άκρα τους α) στα φορτία εντός της δοθείσας κατανομής και β) σε φορτία τα οποία επάγονται και κατανέμονται ομοιόμορφα στις επίπεδες επιφάνειες $z = +\infty$ και $z = -\infty$ με την ίδια πυκνότητα

$$\sigma_{+\infty} = \sigma_{-\infty} = -\frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right].$$

Η συμβολή της κατανομής $\sigma_{+\infty}$ στο πεδίο \bar{D} (ίση με $-\hat{z}\sigma_{+\infty}/2$) εξουδετερώνεται από τη συμβολή της $\sigma_{-\infty}$ (ίση με $+\hat{z}\sigma_{-\infty}/2$) για κάθε θέση z ($-\infty < z < \infty$). Επομένως, το συνολικό πεδίο στη διάταξη ισούται με το πεδίο των πρωτογενών πηγών ρ, σ , το οποίο δίδεται από τις σχέσεις (12), (13) και (15).

4. Αν στις επιφάνειες $z = +\infty$ και $z = -\infty$, εκτός από τα επαγόμενα φορτία $\sigma_{+\infty}$ και $\sigma_{-\infty}$, είχαμε επιβάλλει πηγές με πυκνότητες $\tilde{\sigma}_{+\infty}$ και $\tilde{\sigma}_{-\infty}$, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $\tilde{\sigma}_{+\infty} \neq \tilde{\sigma}_{-\infty}$, τότε η συμβολή των δυο αυτών νέων πηγών στο πεδίο D_z στη θέση z θα ήταν ίση με

$$\hat{z} \left(-\frac{\tilde{\sigma}_{+\infty}}{2} + \frac{\tilde{\sigma}_{-\infty}}{2} \right) \neq 0.$$

Η συμβολή αυτή υπερτίθεται στο πεδίο των πηγών ρ και σ , που δίνουν οι εξισώσεις (12), (13) και (15), οπότε πλέον η συνθήκη αντισυμμετρίας (10) παύει να ισχύει για το συνολικό πεδίο. Διατυπωμένη αλλιώς, η παρατήρηση αυτή σημαίνει ότι η συνθήκη (10) μας πληροφορεί για τη μορφή των πηγών που υπάρχουν στο άπειρο (για να ισχύει πρέπει $\sigma_{+\infty}^{\text{ολικό}} = \sigma_{-\infty}^{\text{ολικό}}$) και επέχει θέση **συνοριακής συνθήκης στο άπειρο** για την παρούσα επίπεδη διάταξη.

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Θα στηριχθούμε στις διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (17)$$

και στις οριακές συνθήκες

$$\hat{z} \times [\bar{E}(z+) - \bar{E}(z-)]_{z=\pm h} = 0 \Leftrightarrow \{E_x(z+) = E_x(z-), E_y(z+) = E_y(z-)\}_{z=\pm h} \quad (18)$$

$$D_z(h+) - D_z(h-) = 0, D_z(-h+) - D_z(-h-) = \sigma. \quad (19)$$

καθώς και στην οριακή συνθήκη στο άπειρο, όπως αυτή διατυπώθηκε παραπάνω με τη συνθήκη αντισυμμετρίας (10).

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε, τώρα με βάση την (16), ότι το πεδίο έχει μόνο τη z συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) , αναλύουμε την (16) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial y=0} \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial x=0} \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial x=0=\partial/\partial y} 0 = 0 \text{ (ταυτότητα).}$$

Τέλος η (17) δίνει τη σχέση

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(z) \Rightarrow \frac{dD_z}{dz} = \rho(z). \quad (22)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (18)-(22), που περιγράφουν το πεδίο, χωρίζονται σε δυο οικογένειες εξισώσεων οι οποίες είναι ασύζευκτες μεταξύ τους:

α. Η οικογένεια εξισώσεων $\{(22),(19)\}$ αλληλοσυνδέει την πεδιακή συνιστώσα D_z με τις πηγές ρ, σ . Με βάση τις εξισώσεις αυτές υπολογίζεται η D_z όπως εξηγείται παρακάτω.

β. Οι εξισώσεις $\{(18), (20), (21)\}$ είναι όλες ομογενείς, δηλαδή δεν εμπλέκονται σε αυτές όροι πηγών. Από τις εξισώσεις αυτές συνάγεται ότι $E_x = 0$ και $E_y = 0$ παντού, με βάση τον παρακάτω συλλογισμό: Οι ομογενείς εξισώσεις $\{(18), (20), (21)\}$, στις οποίες εμπλέκονται οι συνιστώσες E_x και E_y αποκλειστικά, ικανοποιούνται όλες από τη λύση $\{E_x = 0, E_y = 0\}$. Επομένως, αν η λύση που επιζητούμε είναι μοναδική, αυτή δεν μπορεί να είναι άλλη από την $E_x = 0, E_y = 0$. Εναλλακτικά, στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με άμεση επίλυση των εξισώσεων $\{(18), (20), (21)\}$ ως εξής:

Οι λύσεις των (20) και (21) για την περιοχή i ($i=1,2,3$) είναι οι

$$E_x^{(i)} = c_i = \text{σταθ.}, \quad E_y^{(i)} = d_i = \text{σταθ.} \quad (i=1,2,3)$$

Οι εξισώσεις συνεχείας (18) συνεπάγονται τις σχέσεις

$$c_1 = c_2 = c_3, \quad d_1 = d_2 = d_3$$

ενώ από τη συνέχεια των E_x και E_y στις επιφάνειες $z=\pm\infty$ των επαγομένων φορτίων παίρνουμε

$$c_1 = 0, c_3 = 0 \text{ και } d_1 = 0, d_3 = 0.$$

Επομένως $E_x = 0$ και $E_y = 0$ παντού.

Σημείωση: Με χρήση της έννοιας του δυναμικού μπορούμε αμέσως να αποδείξουμε ότι το πεδίο έχει μόνο τη z-συνιστώσα, αν παρατηρήσουμε ότι -λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών- το δυναμικό είναι ανεξάρτητο των x και y. Επομένως, με $\Phi = \Phi(z)$, από τη σχέση

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\hat{z} \frac{d\Phi(z)}{dz}$$

προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

Υπολογισμός της $D_z(z)$

Με ολοκλήρωση της (22) προκύπτουν για τις περιοχές 1,2,3 οι σχέσεις:

$$D_z^{(1)}(z) = a_1 \quad (23)$$

$$D_z^{(3)}(z) = a_3 \quad (24)$$

$$D_z^{(2)}(z) = \int_{-h}^z \rho(z') dz' + a_2 \quad (25)$$

όπου a_1, a_2, a_3 προσδιοριστέες σταθερές ολοκληρώσεως.

Μέσω των (23)-(25) οι οριακές συνθήκες (19) δίνουν

$$D_z^{(2)}(h) = D_z^{(1)}(h) \Rightarrow \int_{-h}^h \rho(z') dz' + a_2 = a_1 \quad (26)$$

$$D_z^{(2)}(-h) - D_z^{(3)}(-h) = \sigma \Rightarrow a_2 - a_3 = \sigma. \quad (27)$$

Για τον προσδιορισμό των τριών σταθερών a_1, a_2, a_3 χρειαζόμαστε μια ακόμα συνθήκη. Η συνθήκη αυτή είναι η συνθήκη στο άπειρο, η οποία -απουσία επιβαλλομένων πηγών στις επιφάνειες $z = \pm\infty$ - παίρνει όπως είδαμε παραπάνω την μορφή:

$$D_z^{(1)}(+\infty) = -D_z^{(3)}(-\infty) \Rightarrow a_1 = -a_3. \quad (28)$$

Λύνοντας το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα των (26)-(28) παίρνουμε

$$a_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma - \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right], \quad a_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right] = -a_3. \quad (29)$$

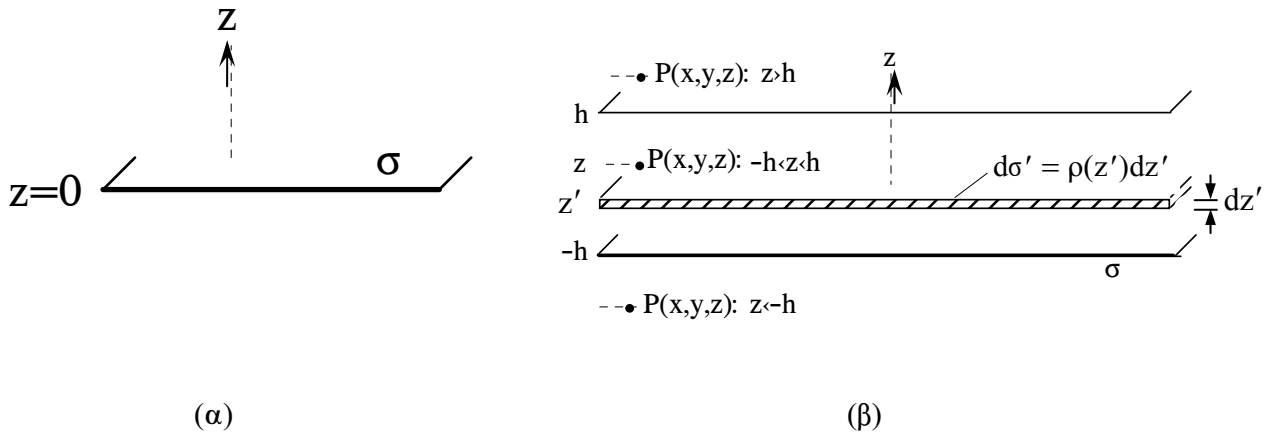
Τέλος, με αντικατάσταση στις (23)-(25) βρίσκουμε τις εκφράσεις για την D_z , οι οποίες είναι ίδιες με τις (12) και (13) όπως περιμένουμε.

Γ. Λύση με επαλληλία

Με βάση το αποτέλεσμα [βλέπε εξ.(7)]

$$\bar{D} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} \hat{z} & (z > 0) \\ -\frac{\sigma}{2} \hat{z} & (z < 0) \end{cases} \quad (30)$$

για το πεδίο επιφανειακής κατανομής σ (Σχ.7α) η οποία βρίσκεται στο επίπεδο $z=0$, το ζητούμενο πεδίο της διατάξεως του σχήματος 3 βρίσκεται εύκολα και με επαλληλία, ως εξής:



Σχήμα 7

Θεωρούμε την χωρική κατανομή ρ ως μια διαδοχή επιφανειακών κατανομών $d\sigma' = \rho(z')dz'$, τοποθετημένων στις επίπεδες επιφάνειες $z = z'$, όπου $-h < z' < h$ (Σχ.7β). Το πεδίο στο σημείο $P(x,y,z)$ εκφράζεται τότε ως εξής:

1. Για $z > h$ (σημείο παρατήρησης πάνω από την περιοχή των πηγών):

$$\bar{D}(z) = \hat{z}(A + \Gamma) \quad (31)$$

όπου

$$A = \frac{\sigma}{2} \quad (32)$$

είναι η συμβολή του επιφανειακού φορτίου σ ,

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_{z'=-h}^h \rho(z') dz' \quad (33)$$

είναι η συμβολή του χωρικού φορτίου..

2. Για $-h < z < h$ (σημείο παρατήρησης εντός της περιοχής των πηγών):

$$\bar{D}(z) = \hat{z}(A + \Gamma' + \Gamma'') \quad (34)$$

όπου $A = \sigma / 2$, όπως προηγουμένως. Η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $-h < z' < z$, συμβολίζεται με Γ' και ισούται με

$$\Gamma' = \frac{1}{2} \int_{z'=-h}^z \rho(z') dz' . \quad (35)$$

Τέλος, η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $z < z' < h$, συμβολίζεται με Γ'' και ισούται με

$$\Gamma'' = -\frac{1}{2} \int_{z'=z}^h \rho(z') dz' . \quad (36)$$

3. Για $z < -h$ (σημείο παρατήρησης κάτω από την περιοχή των πηγών):

$$\bar{D}(z) = \hat{z}(A + \Gamma) \quad (37)$$

όπου

$$A = -\frac{\sigma}{2} \quad (38)$$

είναι η συμβολή του επιφανειακού φορτίου σ και

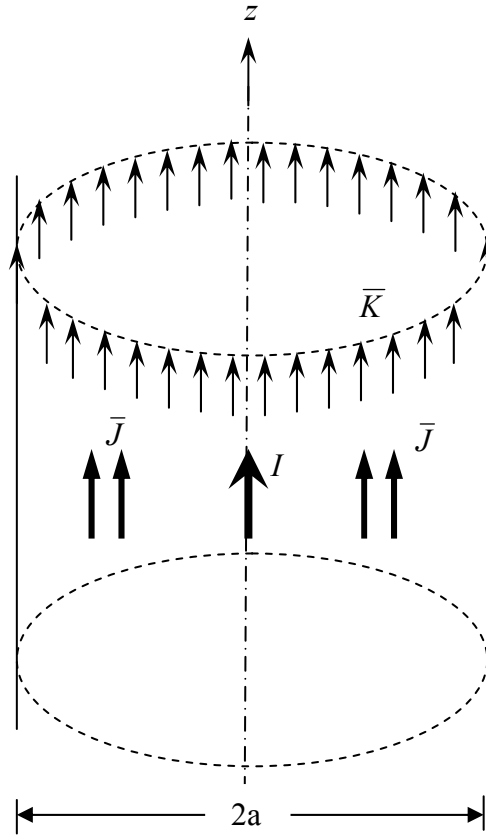
$$\Gamma = -\frac{1}{2} \int_{z'=-h}^h \rho(z') dz' \quad (39)$$

είναι η συμβολή του χωρικού φορτίου..

Όπως περιμέναμε να συμβεί, ξαναβρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο.

5. Μαγνητοστατικό πεδίο κυλινδρικά συμμετρικών χρονοσταθερών ρευμάτων

Θεωρούμε ότι δρουν ταυτοχρόνως (Σχ.1) γραμμικό ρεύμα εντάσεως I στον άξονα $r=0$ του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων, επιφανειακό ρεύμα σταθερής πυκνότητας $\hat{z}K$ στην επιφάνεια $r=a$ και κυλινδρικά συμμετρική χωρική ρευματική κατανομή με πυκνότητα $\hat{z}J_z(r)$ ($0 < r < a$). Οι μαγνητικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με τη μαγνητική του διαπερατότητα μ . Υποθέτουμε ότι γενικά $\mu=\mu(r)$ (ειδική περίπτωση: ομογενής απεριόριστος χώρος, $\mu=\text{σταθ.}$). Ζητάμε να βρούμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.



Σχήμα 1

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Λόγω της αξονικής (κυλινδρικής) συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, και της ανεξαρτησίας τους από το z , το διεγειρόμενο μαγνητοστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης r του σημείου παρατήρησης $\vec{r}(r, \phi, z)$, δηλαδή

$$\vec{H} = \vec{H}(r) \quad (1)$$

Συνιστώσες του πεδίου

Το πεδίο έχει μόνο ϕ -συνιστώσα, δηλαδή

$$\vec{H} = \hat{\phi} H_{\phi}(r). \quad (2)$$

Ο ισχυρισμός αυτός με χρήση των ολοκληρωτικών νόμων μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

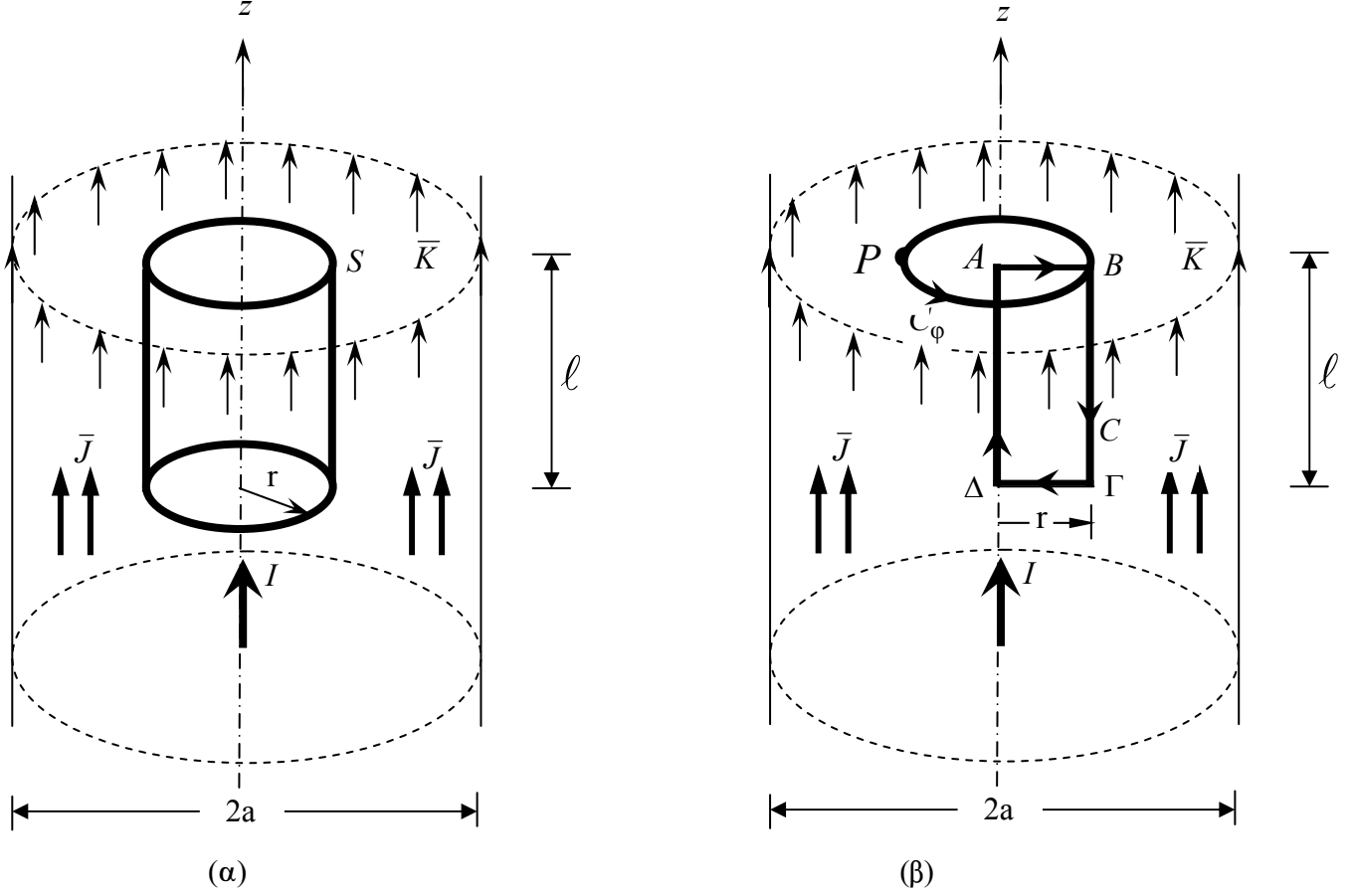
Από τον νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3)$$

επιλέγοντας ως επιφάνεια ολοκληρώσεως S την κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r και μήκους ℓ που δείχνει το Σχ.2α, προκύπτει ότι

$$B_r(r)2\pi r\ell + \int_{r'=0(S^>)}^r B_z(r')2\pi r'dr' - \int_{r'=0(S^<)}^r B_z(r')2\pi r'dr' = 0 \Rightarrow B_r(r)2\pi r\ell = 0 \Rightarrow B_r(r) = 0 \quad (4)$$

(προφανώς, τα δύο ολοκληρώματα στην (4) τα οποία εκτείνονται στην πάνω βάση $S^>$ και την κάτω βάση $S^<$ της κυλινδρικής επιφάνειας S , αντίστοιχα, είναι ίσα μεταξύ τους).



Σχήμα 2

Από τον ολοκληρωτικό νόμο του Ampere,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C, \quad (5)$$

επιλέγοντας ως δρόμο ολοκλήρωσης τον ορθογωνικό βρόχο ΑΒΓΔ που δείχνει το Σχ.2β, παίρνουμε τη σχέση

$$\int_{0(AB)}^r H_r(r')dr' + \int_{r(\Gamma\Delta)}^0 H_r(r')dr' + \ell H_z(0) - \ell H_z(r) = 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} H_z(r) = H_z(0) \Rightarrow H_z(r) = c \quad (6)$$

όπου c σταθερά ανεξάρτητη του r . Λόγω της συνθήκης στο άπειρο,

$$H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

έπεται ότι $c=0$, οπότε $\mathbf{H}_z = 0$ παντού. (**Σημείωση:** Στην εξίσωση (5), I_c συμβολίζει το ρεύμα που διαρρέει την επιφάνεια του δρόμου C. Στην προκειμένη περίπτωση η πυκνότητα του ρεύματος δεν έχει φ-συνιστώσα και επομένως $I_c=0$).

Εύρεση της $\mathbf{H}_\varphi(r)$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου, $\mathbf{H}_\varphi(r)$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere,

$$\oint_C \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\ell} = I_C, \quad (7)$$

όπου ως δρόμο ολοκλήρωσης επιλέγουμε τον κύκλο C_φ ακτίνας r , ο οποίος διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \varphi, z)$ και είναι κάθετος στον άξονα των z (Σχ.2β). Το ρεύμα I_c που εμπλέκει τον βρόχο C_φ ισούται με

$$I_C = I_C(r) = \begin{cases} I + 2\pi \int_0^r J_z(r') r' dr' & (0 < r < a) \\ I + 2\pi \int_0^a J_z(r') r' dr' + 2\pi a K & (a < r < \infty) \end{cases}. \quad (8)$$

Με τη βοήθεια της (2), από την (7) προκύπτει η σχέση

$$2\pi r H_\varphi(r) = I_C(r) \Rightarrow H_\varphi(r) = \frac{I_C(r)}{2\pi r} \Rightarrow B_\varphi(r) = \mu(r) \frac{I_C(r)}{2\pi r}. \quad (9)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

1. Στην περίπτωση γραμμικής πηγής I που ρέει στην ευθεία $r=0$ (άξονα των z) στον απεριόριστο κενό χώρο, παίρνουμε τη σχέση

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (10)$$

(την οποία ξαναβρήκαμε στο Κεφ.1 με εφαρμογή του νόμου των Biot-Savart).

2. Το πεδίο επιφανειακής κατανομής $\bar{\mathbf{K}} = \hat{z}K$, η οποία ρέει σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας a , δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}(r) = \hat{\phi} \begin{cases} K \frac{a}{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (11)$$

Παρατηρήσεις

1. Το πεδίο είναι **ασυνεχές** στα σημεία της επιφανειακής κατανομής $\bar{\mathbf{K}}$. Εύκολα διαπιστώνουμε με τη βοήθεια της (9) ότι η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{r} \times [\bar{\mathbf{H}}(a+) - \bar{\mathbf{H}}(a-)] = \bar{\mathbf{K}} \Leftrightarrow H_\varphi(a+) - H_\varphi(a-) = K \quad (12)$$

όπως περιμέναμε να συμβεί..

2. Στη γειτονιά της γραμμικής πηγής, $r \rightarrow 0$, επικρατεί η συμβολή που προέρχεται από το γραμμικό αυτό ρεύμα, δηλαδή

$$H_{\phi}(r) \underset{r \ll}{=} \frac{I}{2\pi r} + c(r),$$

όπου $c(r)$, αντιστοιχούσα στη συμβολή του χωρικού ρεύματος, είναι πεπερασμένη ποσότητα⁴. Συνεπώς, για $r \rightarrow 0$ ισχύει η σχέση

$$\lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r H_{\phi}) = I. \quad (13)$$

Στη θέση του γραμμικού ρεύματος, $r=0$, το πεδίο είναι ιδιόμορφο:

$$H_{\phi} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty.$$

Σημείωση: Η σχέση (13), που καθορίζει τη συμπεριφορά του πεδίου στην άμεση γειτονιά του γραμμικού ρεύματος I , επέχει θέση **οριακής συνθήκης** [ανάλογης προς την (12)] κατά την επίλυση προβλημάτων με χρήση των σημειακών εξισώσεων Maxwell.

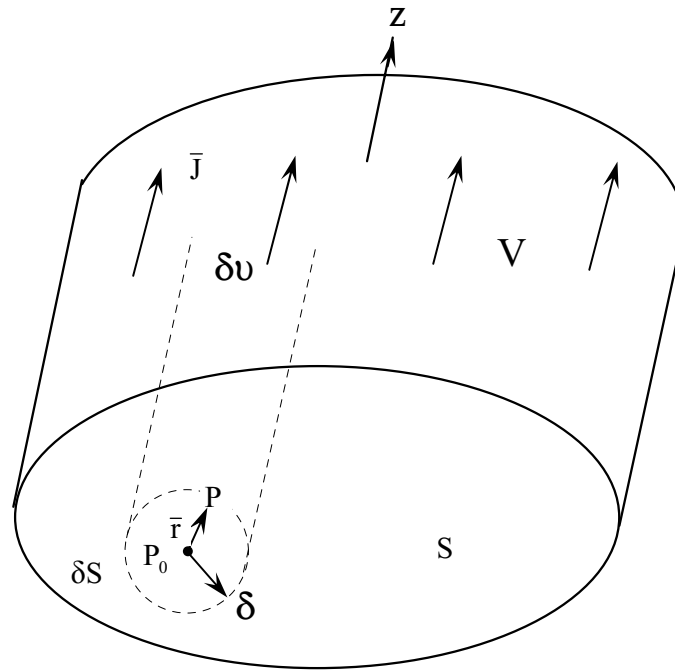
3. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο η ομοιόμορφη κατανομή $\bar{J}(r) = \hat{z}J_0$ =σταθ., από την (9) παίρνουμε τη σχέση

$$H_{\phi}(r) = \begin{cases} J_0 \frac{r}{2} & (0 < r < a) \\ J_0 \frac{a^2}{2r} & (r > a) \end{cases}. \quad (14)$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι το πεδίο που οφείλεται σε χωρικό ρεύμα ομοιόμορφα κατανεμημένο στο εσωτερικό ενός κυλίνδρου απείρου μήκους είναι ομαλή συνάρτηση του r , τόσο στο εξωτερικό όσο και στο εσωτερικό των πηγών.

4. Θεωρούμε χωρικό ρεύμα με πυκνότητα $\hat{z}J(x,y)$, το οποίο κατανέμεται στο εσωτερικό της ομοιόμορφης κυλινδρικής περιοχής V (απείρου μήκους, με διατομή S αυθαίρετης μορφής) (Σχ.3). Υποθέτουμε ότι η J είναι αρκούντως ομαλή συνάρτηση των x και y και ανεξάρτητη του z .

⁴ Βλέπε, σχετικά, παρατήρηση 3 και παρατήρηση 4 παρακάτω.



Σχήμα 3

Το πεδίο $\bar{H}(x_0, y_0)$ στη θέση $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση δύο όρων:

$$\bar{H}(x_0, y_0) = \bar{H}^>(x_0, y_0) + \bar{H}^<(x_0, y_0).$$

Ο όρος $\bar{H}^<(x_0, y_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στο ρεύμα που ρέει στο εσωτερικό μιας κυλινδρικής στήλης δu , απείρου μήκους και ακτίνας δ , με άξονα την ευθεία $(x = x_0, y = y_0)$, ενώ ο όρος $\bar{H}^>(x_0, y_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα υπόλοιπα ρεύματα, δηλαδή στα ρεύματα που ρέουν στην περιοχή $V - \delta u$. Επειδή $P_0(x_0, y_0, z_0) \notin (V - \delta u)$, ο όρος $\bar{H}^>(x_0, y_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0) . Από το άλλο μέρος, όταν η ακτίνα δ είναι κατάλληλα μικρή, τότε μπορεί να τεθεί $J(x, y) = J(x_0, y_0) = J_0$ για κάθε σημείο $P(x, y, z) \in \delta u$ και να χρησιμοποιηθεί ο τύπος (14):

$$\bar{H}^<(x, y) = \frac{J_0 r}{2} \hat{\phi} \quad (0 < r < \delta)$$

όπου r είναι η απόσταση του $P(x, y, z)$ από τον άξονα της κυλινδρικής στήλης δu και $\hat{\phi}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του κυλινδρικού συστήματος με άξονα την ευθεία $(x = x_0, y = y_0)$. Επομένως και ο όρος $\bar{H}^<(x_0, y_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0) .

Συμπέρασμα: Το πεδίο οποιασδήποτε ομαλής χωρικής ρευματικής κατανομής, που ρέει στο εσωτερικό ενός ομοιομόρφου κυλίνδρου απείρου μήκους, είναι ομαλή συνάρτηση της θέσεως τόσο στο εξωτερικό όσο και στα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της κατανομής.

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Θα στηριχθούμε στις (ανεξάρτητες μεταξύ τους) διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (16)$$

και στις (ανεξάρτητες) οριακές συνθήκες

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{a}+) - \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{a}-)] = \bar{\mathbf{K}} \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{a}+) - \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{a}-)] = 0 \Leftrightarrow B_r(\mathbf{a}+) = B_r(\mathbf{a}-) . \quad (18)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη σχέση (1)

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

την οποία υπαγορεύει η συμμετρία του προβλήματος.

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε –τόρα με βάση την (15) και (16)– ότι το πεδίο έχει μόνο φ-συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r,φ,z), αναλύουμε την (15) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = J_r \xRightarrow{\partial/\partial \phi=0=\partial/\partial z} 0 = 0 \text{ (ταυτότητα)}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\phi = 0 \xRightarrow{\partial/\partial z=0} \frac{dH_z(r)}{dr} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = J_z(r) \xRightarrow{\partial/\partial \phi=0} \frac{1}{r} \frac{d[rH_\phi(r)]}{dr} = J_z(r). \quad (20)$$

Τέλος από την (16) παίρνουμε

$$\frac{1}{r} \frac{\partial[rB_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial[B_\phi(r)]}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z(r)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d[rB_r(r)]}{dr} = 0. \quad (21)$$

Ολοκληρώνοντας την (19) έχουμε

$$H_z(r) = \begin{cases} c_1, & 0 < r < a \\ c_2, & a < r < \infty \end{cases} \quad (22)$$

όπου c_1 και c_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, δίνει $c_2 = 0$, ενώ η συνθήκη συνεχείας της H_z στα σημεία της κυλινδρικής επιφάνειας $r = a$, $H_z(a+) = H_z(a-)$, οδηγεί στη σχέση $c_1 = c_2 = 0$. Επομένως $H_z(r) = 0$ παντού.

Ομοίως, με ολοκλήρωση της (21) παίρνουμε

$$B_r(r) = \begin{cases} d_1 / r, & 0 < r < a \\ d_2 / r, & a < r < \infty \end{cases} \quad (23)$$

όπου d_1 και d_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $B_r(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ η συνθήκη συνεχείας της B_r στα σημεία της κυλινδρικής επιφάνειας $r = a$, $B_r(a+) = B_r(a-)$, οδηγεί στη σχέση $d_1 = d_2$. Τέλος, η οριακή συνθήκη στη θέση $r=0$ δίνει⁵ $d_1 = 0$. Επομένως $B_r(r) = 0$ παντού.

Εύρεση της $H_\phi(r)$

Η μοναδική συνιστώσα του πεδίου, $H_\phi(r)$, θα βρεθεί μέσω της (20), η οποία με ολοκλήρωση δίνει τη γενική λύση

$$H_\phi(r) = \frac{1}{r} \int r J_z(r) dr + \frac{c}{r}. \quad (24)$$

Στην περιοχή 2 ($r > a$) $\bar{J} = 0$ και επομένως η (24) δίνει το αποτέλεσμα

$$H_\phi^{(2)}(r) = \frac{c_2}{r}. \quad (25\alpha)$$

Για την περιοχή 1 ($r < a$) η (24) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα υπό τη μορφή

$$H_\phi^{(1)}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' J_z(r') dr' + \frac{c_1}{r}. \quad (25\beta)$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες, ως εξής.

$$\alpha) \quad \lim_{r \rightarrow 0} [2\pi r H_\phi^{(1)}(r)] = I \Rightarrow 2\pi c_1 \Rightarrow I \Rightarrow c_1 = \frac{I}{2\pi} \quad (26)$$

[Σημείωση: Η οριακή συνθήκη για την H_ϕ , για $r \rightarrow 0$, εξάγεται με εφαρμογή του νόμου του Ampere

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$, όταν ως δρόμο C επιλέξουμε κύκλο πολύ μικρής ακτίνας r , ο οποίος έχει το κέντρο του στον άξονα των z

και είναι κάθετος στον άξονα αυτόν. Προκύπτει τότε ότι

$$2\pi H_\phi^{(1)}(r) = I + J_z(0)\pi r^2 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [2\pi H_\phi^{(1)}(r)] = I,$$

δηλαδή προκύπτει η εξίσωση (26). Προφανώς, στην τελευταία σχέση ο όρος $J_z(0)\pi r^2$ εκφράζει την συμβολή του χωρικού ρεύματος στο συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον δρόμο C :

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S J_z dS = (\text{θεώρημα μέσης τιμής}) = J_z(0)\pi r^2.$$

⁵ Η οριακή συνθήκη για την B_r , για $r \rightarrow 0$, μπορεί να βρεθεί από την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, όπου S είναι κύλινδρος, μήκους ℓ και πολύ μικρής ακτίνας r , με άξονα τον άξονα των z . Προκύπτει τότε

ότι $2\pi r \ell B_r(r) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [r B_r(r)] = 0 \Rightarrow d_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \beta) \quad \hat{r} \times [\bar{H}(a+) - \bar{H}(a-)] &= \bar{K} \Rightarrow H_{\varphi}(a+) - H_{\varphi}(a-) = K \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{c_2}{a} - \frac{1}{a} \int_0^a r' J_z(r') dr' - \frac{c_1}{a} &= K \Rightarrow c_2 = \int_0^a r' J_z(r') dr' + \frac{I}{2\pi} + Ka. \end{aligned} \quad (27)$$

Έχοντας βρεί τις σταθερές c_1 και c_2 μέσω των (26) και (27), το πεδίο προσδιορίζεται πλήρως μέσω των (25α)-(25β). Όπως αναμέναμε να συμβεί, βρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις με αυτές των (8),(9).

Παρατήρηση: Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της (25β) παριστάνει το πεδίο, που οφείλεται αποκλειστικά στη χωρική κατανομή $\bar{J}(r)$, σε σημεία στο εσωτερικό της κατανομής αυτής. Το πεδίο αυτό είναι ομαλή συνάρτηση του r (ακόμα και για $r=0$) για μια ευρυτάτη οικογένεια κατανομών $J_z(r)$. Αυτό γίνεται φανερό με τον παρακάτω συλλογισμό. Αν η $J_z(r)$ είναι ομαλή συνάρτηση, της μορφής

$$J_z(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

Τότε, προφανώς,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int r J_z(r) dr = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} [a_0 \frac{r^2}{2} + a_1 \frac{r^3}{3} + a_2 \frac{r^4}{4} + \dots] = 0.$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι ακόμα και όταν η $J_z(r)$ εμφανίζει ιδιομορφία (απειρίζεται) στη θέση $r=0$, της μορφής

$$J_z(r) = \frac{b_0}{r} + a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

ο παραπάνω όρος εξακολουθεί να είναι ομαλός, αφού

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int r J_z(r) dr = b_0 \text{ (πεπερασμένο).}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήξαμε νωρίτερα κατά τη λύση με βάση τις ολοκληρωτικές σχέσεις.

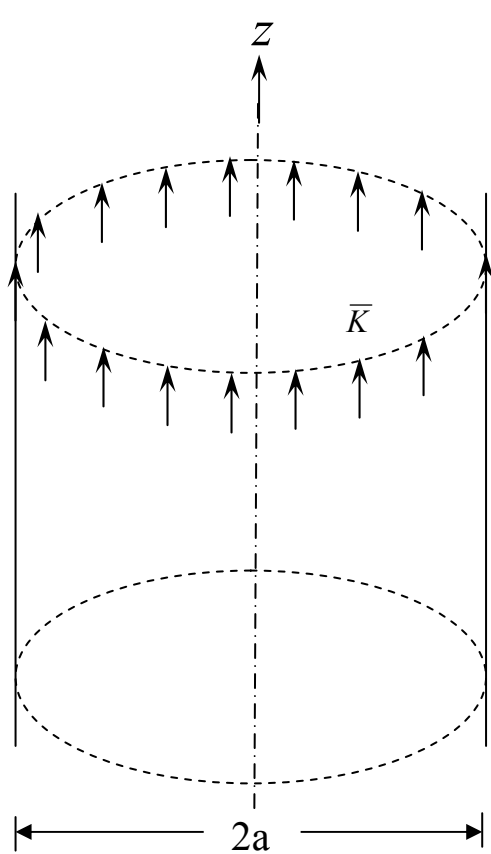
Γ. Λύση με επαλληλία

Με βάση το αποτέλεσμα (11)

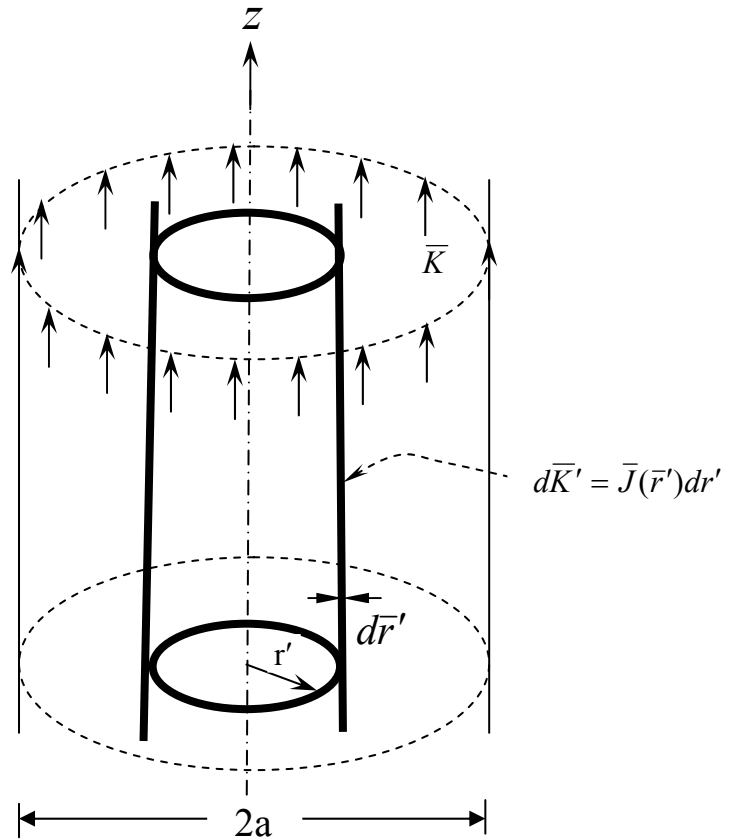
$$\bar{H} = \bar{H}(r) = \hat{\phi} \begin{cases} K \frac{a}{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (11)$$

για το πεδίο της κυλινδρικής επιφανειακής κατανομής του σχήματος 4(α), το ζητούμενο πεδίο της διατάξεως του σχήματος 1 μπορεί να βρεθεί με επαλληλία ως εξής:

Θεωρούμε την χωρική κατανομή \bar{J} ως μια διαδοχή επιφανειακών ρευματικών κατανομών $d\bar{K}' = \bar{J}(\bar{r}') d\bar{r}'$, τοποθετημένων σε κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνας r' , όπου $0 < r' < a$ (Σχ.4β). Το πεδίο στο σημείο $P(r, \varphi, z)$ εκφράζεται τότε ως εξής:



(α)



(β)

Σχήμα 4

1. Για $r > a$ (σημείο παρατηρήσεως εκτός της περιοχής των πηγών):

$$\bar{H} = \bar{H}(r) = \hat{\phi}(A + \Delta + \Gamma) \quad (28)$$

όπου

$$A = \frac{I}{2\pi r} \quad (29)$$

είναι η συμβολή του γραμμικού ρεύματος I ,

$$\Delta = K \frac{a}{r} \quad (30)$$

είναι η συμβολή του επιφανειακού ρεύματος \bar{K} , και

$$\Gamma = \frac{1}{r} \int_{r'=0}^a r' J_z(r') dr' \quad (31)$$

είναι η συμβολή της χωρικής πυκνότητας \bar{J} .

2. Για $0 < r < a$ (σημείο παρατηρήσεως εντός της περιοχής των πηγών):

$$\bar{H} = \bar{H}(r) = \hat{\phi}(A + \Delta + \Gamma' + \Gamma'') \quad (32)$$

όπου $A = I / (2\pi r)$, όπως προηγουμένως. Η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής \bar{J} , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $0 < r' < r$, συμβολίζεται με Γ' και ισούται με

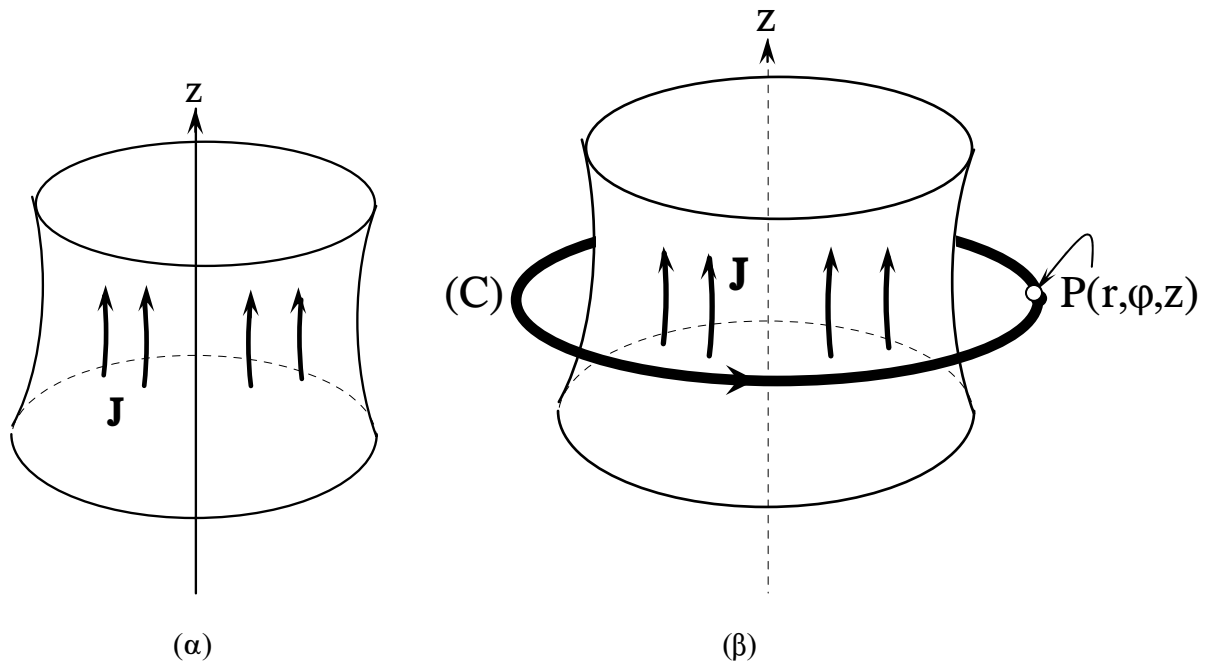
$$\Gamma' = \frac{1}{r} \int_{r'=0}^r r' J_z(r') dr' \quad (33)$$

ενώ η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής \bar{J} , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $r < r' < a$, συμβολίζεται με Γ'' και ισούται με μηδέν [σύμφωνα με την (11)]. Τέλος, για τον ίδιο λόγο η συμβολή της \bar{K} στο πεδίο είναι τώρα $\Delta=0$. Όπως περιμέναμε, βρίσκουμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

Γενίκευση:

Έστω κυλινδρικά συμμετρική ρευματική κατανομή \bar{J} (Σχ.5α) [όχι κατ' ανάγκην ομοιόμορφη κατά μήκος του άξονα των z], τέτοια ώστε

$$\bar{J} = \hat{r}J_r(r, z) + \hat{z}J_z(r, z). \quad (34)$$



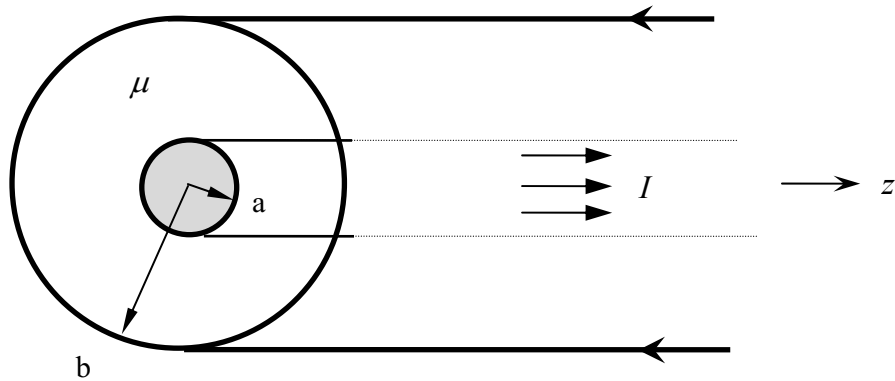
Σχήμα 5

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο έχει μοναδική συνιστώσα την $H_\phi(r, z)$, όπως αποδείξαμε στο Κεφ.1 (ενότητα 6). Η έκφραση της συνιστώσας αυτής βρίσκεται εύκολα με εφαρμογή του νόμου του Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C \Rightarrow 2\pi r H_\phi(r, z) = \int_0^r J_z(r', z) 2\pi r' dr' \Rightarrow H_\phi(r, z) = \frac{1}{r} \int_0^r J_z(r', z) r' dr'. \quad (35)$$

Στην (35), ο δρόμος ολοκλήρωσης C είναι κύκλος κάθετος στον άξονα των z , ο οποίος έχει το κέντρο του πάνω στον άξονα αυτό και διέρχεται από το σημείο παρατήρησης (r, ϕ, z) (Σχ.5β). Παρατηρούμε ότι στη διαμόρφωση του πεδίου συμμετέχει μόνο η z -συνιστώσα του ρεύματος.

Εφαρμογή: Πεδίο και συντελεστής εξωτερικής αυτεπαγωγής κυλινδρικού επαγωγέα



Σχήμα 6

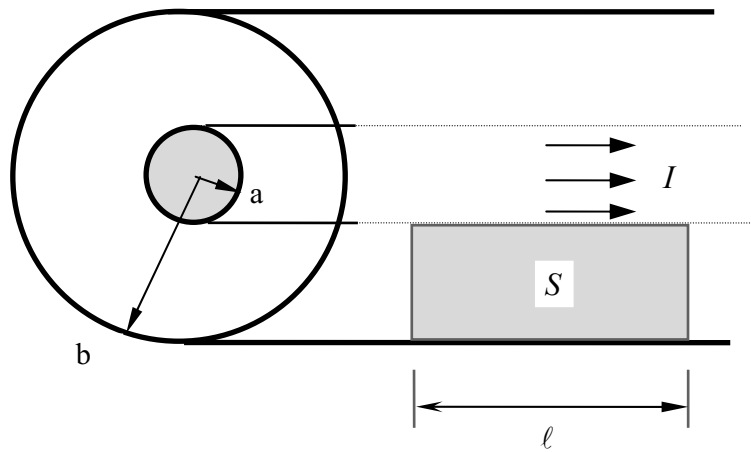
Ο επαγωγέας που δείχνει το Σχ.6 έχει άπειρο μήκος. Ο εσωτερικός αγωγός, ακτίνας a , διαρρέεται από χωρικό ρεύμα εντάσεως I . Η επιστροφή του ρεύματος γίνεται κατά μήκος της επιφάνειας $r=b$ του εξωτερικού αγωγού.

Η πυκνότητα του χωρικού ρεύματος στον εσωτερικό αγωγό ισούται με

$$\vec{J} = \hat{z} \frac{I}{\pi a^2} = \hat{z} J_0 \quad (36)$$

αν υποθέσουμε ότι η ροή του ρεύματος αυτού γίνεται ομοιόμορφα. Επομένως το διεγειρόμενο μαγνητικό πεδίο θα έχει μόνο τη συνιστώσα H_ϕ , η οποία υπολογίζεται ύστερα από εφαρμογή του νόμου του Ampere- από τη σχέση:

$$2\pi r H_\phi(r) = \begin{cases} J_0(\pi r^2), & \text{αν } 0 < r < a \\ I, & \text{αν } a < r < b \end{cases} \Rightarrow H_\phi(r) = \begin{cases} I \frac{r}{2\pi a^2}, & \text{αν } 0 < r < a \\ \frac{I}{2\pi r}, & \text{αν } a < r < b \end{cases} \quad (37)$$



Σχήμα 7

Η μαγνητική ροή που περνάει από την διαγραμμισμένη επιφάνεια S , διαστάσεων $(b-a) \times \ell$, που δείχνει το Σχ.7, ισούται με

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_\varphi dS = \int_{r=a}^b B_\varphi (\ell dr) = I \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = I L_{\varepsilon\xi}^\mu \quad (38)$$

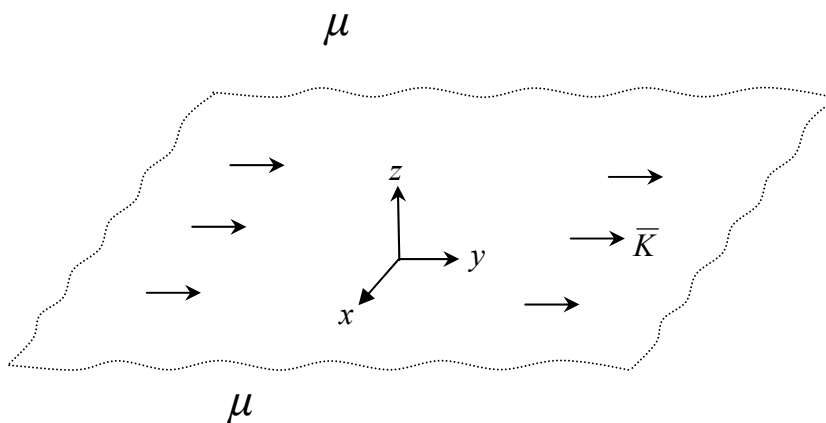
όπου

$$L_{\varepsilon\xi}^\mu = \frac{\psi}{I\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (39)$$

είναι ο ανά μονάδα μήκους συντελεστής εξωτερικής αυτεπαγωγής της διατάξεως.

6. Μαγνητοστατικό πεδίο απείραντων ρευματικών κατανομών

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πεδίο απείραντης επίπεδης ρευματικής κατανομής σταθερής πυκνότητας \vec{K} .



Σχήμα 1

Λύση: Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το επιφανειακό ρεύμα ρέει κατά την κατεύθυνση \hat{y} επάνω στο επίπεδο $z=0$ (Σχ.1), δηλαδή

$$\vec{K} = \hat{y}K. \quad (1)$$

Θεωρούμε επί πλέον ότι ο περιβάλλων χώρος έχει μαγνητική διαπερατότητα μ . Το παρόν πρόβλημα λύθηκε στο Κεφ.1 (ενότητα 6) με βάση τον νόμο των Biot-Savart. Εδώ θα δώσουμε μια λύση βασισμένη στην ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss για τον μαγνητισμό.

Λόγω της ομοιομορφίας της πηγής και του απεράντου της διατάξεως ως προς τις κατευθύνσεις x και y , το πεδίο θα είναι ανεξάρτητο των x και y , δηλαδή

$$\vec{H} = \vec{H}(z). \quad (2)$$

Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σημείο παρατηρήσεως P βρίσκεται πάνω στον άξονα των z όπως στο Σχ.2.

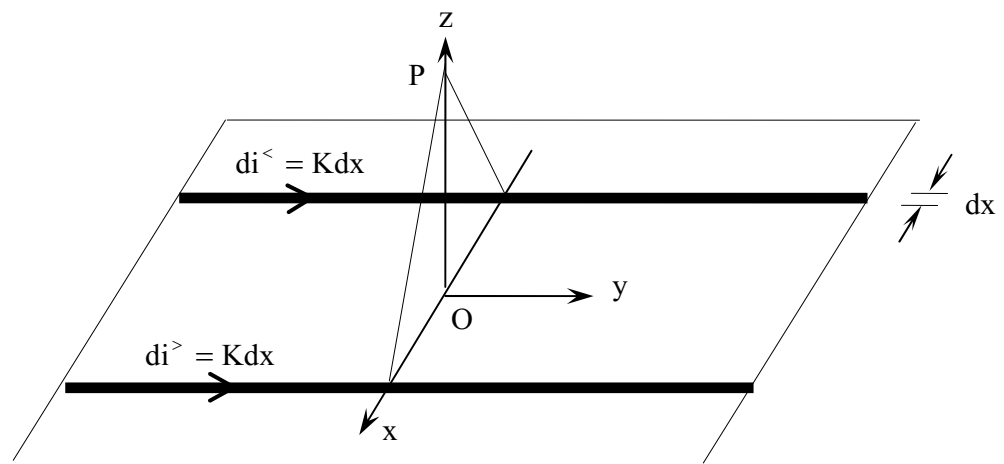
Θεωρώντας ότι το πεδίο στη θέση P προκύπτει από την επαλληλία των πεδίων που οφείλονται σε όλα τα απέραντα ευθύγραμμα νηματοειδή ρεύματα $di^< = Kdx$ και στα ρεύματα $di^> = Kdx$, που ρέουν παράλληλα στον άξονα των y σε ευθείες που είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα Oy ⁶, διαπιστώνουμε τα εξής:

1. Όπως αποδεικνύουμε παρακάτω, το πεδίο έχει κατεύθυνση \hat{x} , δηλαδή

$$\vec{H} = \hat{x}H_x(z). \quad (3)$$

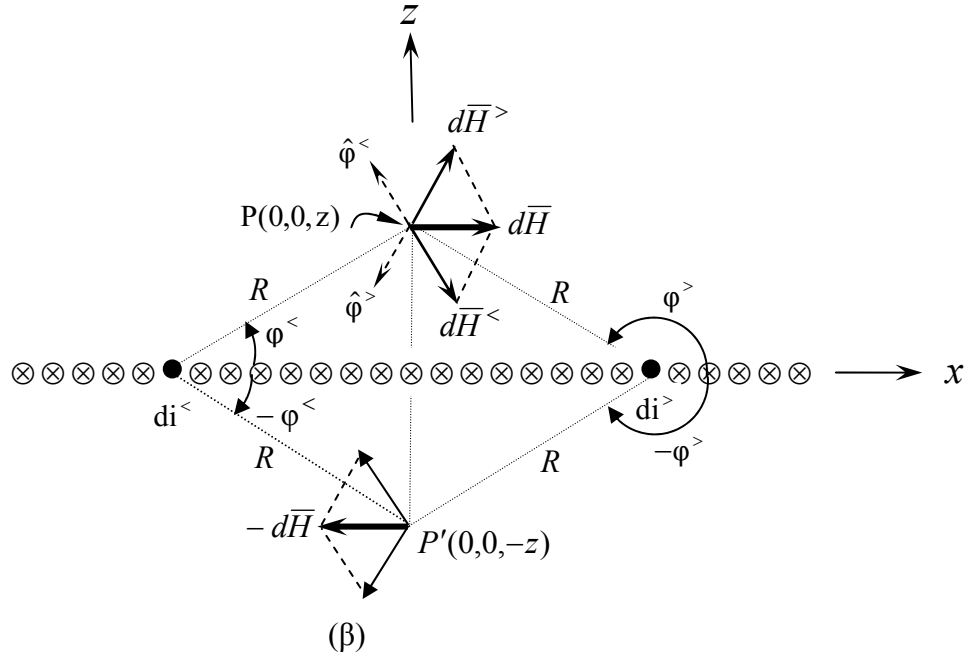
2. Ισχύει η σχέση

$$H_x(z) = -H_x(-z). \quad (4)$$



(α)

⁶Αυτό είναι δυνατό διότι η κατανομή \vec{K} εκτείνεται απερίοριστα στο επίπεδο $z=0$.



Σχήμα 2: (α) Τα στοιχειώδη ρεύματα $di^>$ και $di^<$ ρέουν σε θέσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα των y .
(β) Η διάταξη του Σχ. 2(α) σε τομή στο επίπεδο xz .

Απόδειξη των (3)-(4)

Η συμβολή των νηματοειδών ρευμάτων $di^>$ και $di^<$ στο συνολικό πεδίο στη θέση $P(0,0,z)$ είναι σύμφωνα με την (5.10) ίση με

$$d\bar{H} = -\frac{di}{2\pi R} \varphi^> - \frac{di}{2\pi R} \varphi^< \quad (di \equiv Kdx) \quad (5)$$

όπου

$$\hat{\varphi}^> = -\sin \varphi^> \hat{x} + \cos \varphi^> \hat{z}, \quad \hat{\varphi}^< = -\sin \varphi^< \hat{x} + \cos \varphi^< \hat{z} \quad (6)$$

είναι μοναδιαία διανύσματα στα κυλινδρικά συστήματα με άξονες τα δυο νηματοειδή ρεύματα $di^>$ και $di^<$, αντίστοιχα. Ισχύουν οι σχέσεις $\varphi^> + \varphi^< = \pi \Rightarrow \sin \varphi^> = \sin \varphi^<, \cos \varphi^> = -\cos \varphi^<$, οπότε

$$d\bar{H}(P) = \hat{x} \frac{di}{\pi R} \sin \varphi^> = \hat{x}(dH). \quad (7)$$

Από την (7) με επαλληλία προκύπτει ότι πράγματι το συνολικό πεδίο σε οποιαδήποτε θέση έχει μόνο x - συνιστώσα.

Παρατηρούμε επί πλέον ότι για το σημείο $P'(0,0,-z)$, συμμετρικό του σημείου παρατηρήσεως $P(0,0,z)$ ως προς το επίπεδο xy , οι πολικές γωνίες είναι $-\varphi^>$ και $-\varphi^<$, αντίστοιχα, οπότε κατ' αναλογία προς την (7) προκύπτει η σχέση

$$d\bar{H}(P') = -\hat{x} \frac{di}{\pi R} \sin\phi^> = -d\bar{H}(P). \quad (8)$$

Από την (8) με επαλληλία προκύπτει η (4).

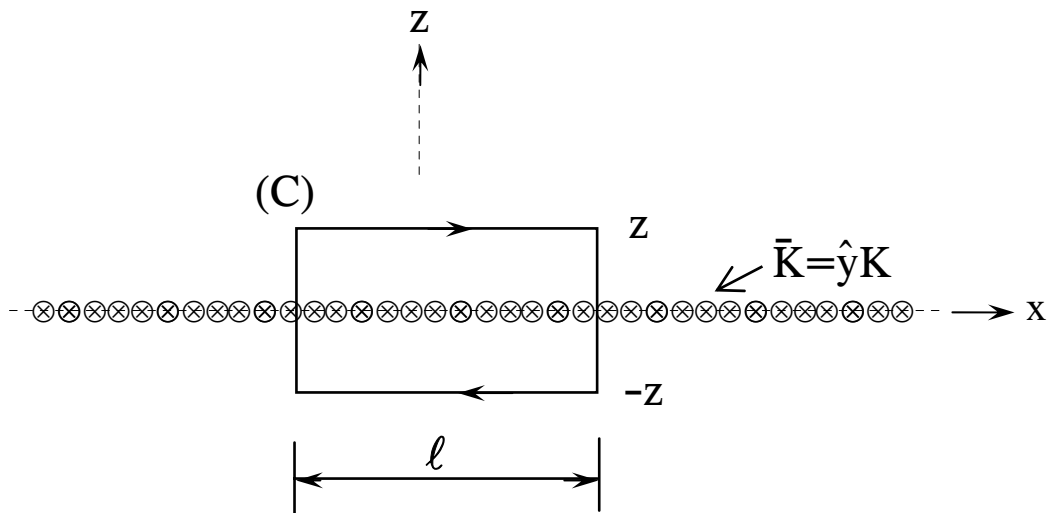
Υπολογισμός της $H_x(z)$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου $H_x(z)$ στη θέση $z > 0$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere

$$\oint_c \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = I_c. \quad (9)$$

Ως δρόμο ολοκληρώσεως επιλέγουμε έναν ορθογωνικό βρόχο στο επίπεδο xz (Σχ.3), με τις δύο οριζόντιες πλευρές του, μήκους ℓ , στις θέσεις z και $-z$ αντίστοιχα, οπότε

$$I_c = K\ell. \quad (10)$$



Σχήμα 3

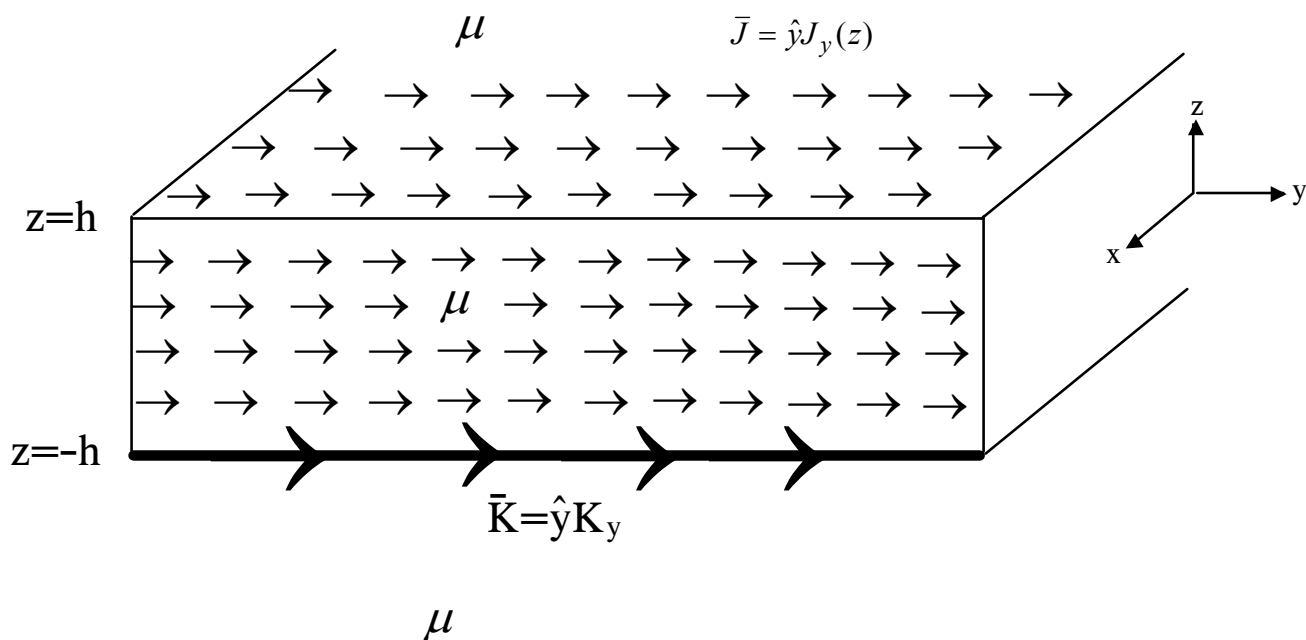
Από την (9) με τη βοήθεια της (10) προκύπτει ότι

$$\ell H_x(z) - \ell H_x(-z) = I_c \stackrel{(4)}{\Rightarrow} H_x(z) = \frac{1}{2} \begin{cases} K & (z > 0) \\ -K & (z < 0) \end{cases} = \frac{K}{2} \text{sgn}(z). \quad (11)$$

Το τελικό αποτέλεσμα για το πεδίο μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$\bar{H} = \frac{\bar{K} \times \hat{z}}{2} \text{sgn}(z) \quad (12)$$

η οποία τελικά ισχύει για οποιαδήποτε σταθερή κατεύθυνση ροής του \bar{K} πάνω στο επίπεδο xy .



Σχήμα 4

Θεωρούμε τώρα ότι δρουν ταυτοχρόνως επιφανειακό ρεύμα σταθερής πυκνότητας $\bar{K} = \hat{y}K_y$ στο επίπεδο $z=-h$ και χωρικό ρεύμα με πυκνότητα $\hat{y}J_y(z)$ στο εσωτερικό της πλάκας $-h < z < h$ (Σχ.4). Οι μαγνητικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με τη μαγνητική του διαπερατότητα μ . Ζητάμε να βρούμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.

Α. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το διεγειρόμενο μαγνητοστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της συντεταγμένης z του σημείου παρατηρήσεως $\bar{r}(x, y, z)$, δηλαδή

$$\bar{H} = \bar{H}(z). \quad (13)$$

Συνιστώσες του πεδίου

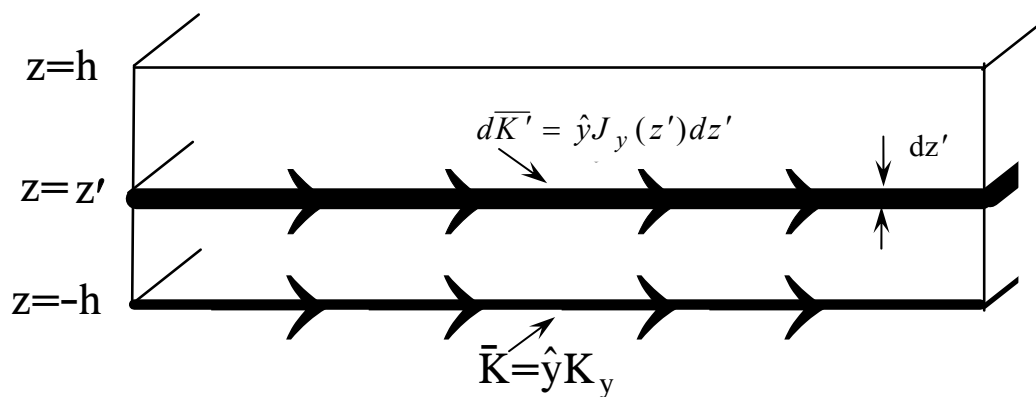
Το πεδίο έχει μόνο \hat{x} συνιστώσα, δηλαδή

$$\bar{H} = \hat{x}H_x(z). \quad (14)$$

Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί εύκολα, με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, θεωρώντας το πεδίο σε οποιαδήποτε θέση ως υπέρθεση των συμβολών που προέρχονται α) από την επιφανειακή κατανομή \bar{K} και β) από επάλληλες επιφανειακές κατανομές $d\bar{K}' = \hat{y}J_y(z')dz'$ ($-h < z' < h$), που συνθέτουν την κατανομή \bar{J} (Σχ.5).

Η περιγραφείσα παραπάνω διαδικασία πιστοποιεί επίσης, με βάση το αποτέλεσμα (11), ότι για τα σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό της επίπεδης πλάκας ισχύει η σχέση

$$H_x(z) = -H_x(-z) \quad (|z| > h). \quad (15)$$



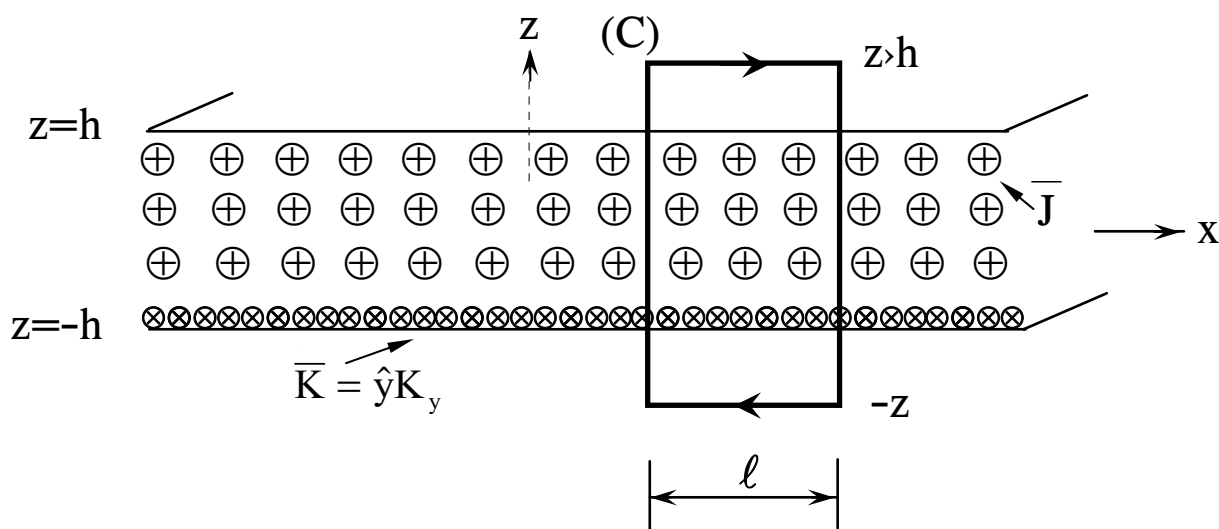
Σχήμα 5

Εύρεση της $H_x(z)$

α. περιοχές $z > h$ και $z < -h$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου $H_x(z)$ στην περιοχή $z > h$ εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C. \quad (16)$$



Σχήμα 6

Ως δρόμο ολοκλήρωσης στην (16) επιλέγουμε τον ορθογωνικό βρόχο (C) στο επίπεδο xz όπως δείχνει το Σχ.6. Η μία οριζόντια πλευρά του βρόχου αυτού βρίσκεται στη θέση $z > h$, όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο, και η δεύτερη στη θέση $-z$. Επομένως το ρεύμα που διαρρέει τον δρόμο C είναι

$$I_C = K_y \ell + \ell \int_{-h}^h J_y(z') dz' . \quad (17)$$

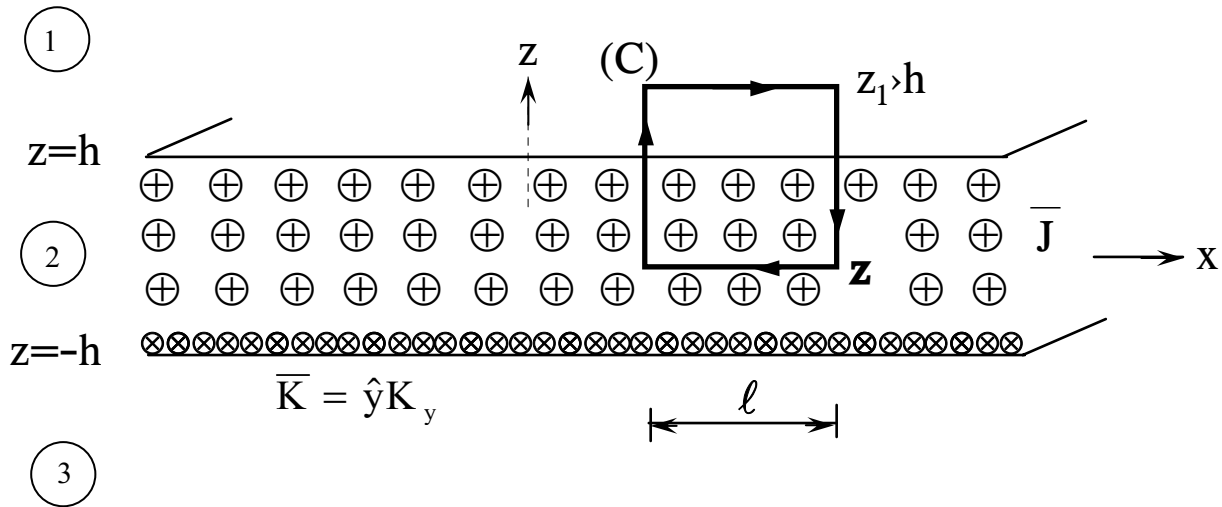
Με τη βοήθεια των (14)-(15) και (17), από την (16) προκύπτει ότι

$$\ell H_x(z) - \ell H_x(-z) = I_C \stackrel{(15)}{\Rightarrow} H_x(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} [K_y + \int_{-h}^h J_y(z') dz'] & (z > h) \\ -\frac{1}{2} [K_y + \int_{-h}^h J_y(z') dz'] & (z < -h) \end{cases} . \quad (18)$$

Σημείωση: Έχοντας υπόψιν το αποτέλεσμα (11), η σχέση (18) απλώς εκφράζει το πεδίο στις θέσεις $z > h$ και $z < -h$ ως υπέρθεση των πεδίων που οφείλονται στην κατανομή \bar{K} και σε όλες τις επίπεδες κατανομές $J_y(z') dz'$ ($-h < z' < h$) που συνθέτουν την κατανομή \bar{J} .

β. περιοχή $|z| < h$

Για τον υπολογισμό της $H_x(z)$ στην περιοχή $-h < z < h$ εφαρμόζουμε πάλι τον νόμο του Ampere (16). Ο ορθογωνικός δρόμος ολοκληρώσεως C (Σχ.7) επιλέγεται τώρα έτσι ώστε η μια οριζόντια πλευρά του να βρίσκεται στη θέση z ($|z| < h$), όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο, ενώ η παράλληλή της τοποθετείται στη θέση $z_1 > h$ όπου γνωρίζουμε ήδη το πεδίο μέσω της (18) (η επιλογή $z_1 < -h$ είναι το ίδιο κατάλληλη).



Σχήμα 7

Το μέγεθος I_C στο δεύτερο μέρος της (16) (συνολικό ρεύμα που εμπλέκει τον βρόχο C) ισούται τώρα με

$$I_C = \ell \int_z^h J_y(z') dz' \quad (19)$$

οπότε από την (16) προκύπτει η σχέση

$$\ell H_x(z_1) - \ell H_x(z) = I_C \stackrel{(18)}{\Rightarrow} H_x(z) = \frac{1}{2} [K_y + \int_{-h}^z J_y(z') dz' - \int_z^h J_y(z') dz'] \quad (-h < z < h). \quad (20)$$

Παρατηρήσεις πάνω στις (18) και (20)

1. Το πεδίο H_x παραμένει σταθερό σε ολόκληρη την περιοχή $z > h$. Το H_x είναι επίσης σταθερό σε ολόκληρη την περιοχή $z < -h$ (με τιμή αντίθετη της αντίστοιχης για την περιοχή $z > h$). Αντίθετα, στην περιοχή των πηγών, $|z| < h$, το πεδίο H_x είναι συνάρτηση της θέσεως z .

2. Το πεδίο H_x είναι **ασυνεχές** στα σημεία της επιφανειακής κατανομής \bar{K} . Όπως εύκολα διαπιστώνουμε με τη βοήθεια των (18) και (20), η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{z} \times [\bar{H}(-h+0) - \bar{H}(-h-0)] = \bar{K}. \quad (21)$$

3. Η επιστροφή των ρευμάτων \bar{J} και \bar{K} γίνεται μέσω επιφανειακών ρευμάτων τα οποία ρέουν στις επίπεδες επιφάνειες $z = +\infty$ και $z = -\infty$ με την ίδια πυκνότητα

$$-\hat{y}K_y^{+\infty} = -\hat{y}K_y^{-\infty} = -\hat{y}\frac{1}{2}[K_y + \int_{-h}^h J_y(z') dz'].$$

Η συμβολή της $-\hat{y}K_y^{+\infty}$ (ίση με $\hat{x}K_y^{+\infty}/2$) εξουδετερώνεται από τη συμβολή της $-\hat{y}K_y^{-\infty}$ (ίση με $-\hat{x}K_y^{-\infty}/2$) για κάθε θέση z ($-\infty < z < \infty$). Επομένως, το συνολικό πεδίο στη διάταξη ισούται με το πεδίο των πρωτογενών πηγών \bar{J} , \bar{K} , το οποίο δίνεται από τις εξισώσεις (18) και (20).

4. Αν στις επιφάνειες $z = +\infty$ και $z = -\infty$ εκτός από τα ρεύματα επιστροφής $-\hat{y}K_y^{+\infty}$ και $-\hat{y}K_y^{-\infty}$ είχαμε επιβάλλει πηγές με πυκνότητες $\hat{y}\tilde{K}_y^{+\infty}$ και $\hat{y}\tilde{K}_y^{-\infty}$, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $\tilde{K}_y^{+\infty} \neq \tilde{K}_y^{-\infty}$, τότε η συμβολή των δύο αυτών νέων πηγών στο πεδίο H_x θα ήταν σε κάθε θέση ίση με

$$\frac{\tilde{K}_y^{-\infty}}{2} - \frac{\tilde{K}_y^{+\infty}}{2} \neq 0$$

Η συμβολή αυτή υπερτίθεται στο πεδίο των πηγών \bar{K} και \bar{J} , που δίνουν οι εξισώσεις (18) και (20), οπότε πλέον η συνθήκη αντισυμμετρίας (15) για το συνολικό πεδίο παύει να ισχύει. Διατυπωμένη αλλιώς, η παρατήρηση αυτή σημαίνει ότι η συνθήκη (15) μας πληροφορεί για τη μορφή των πηγών που υπάρχουν στο άπειρο (για να ισχύει πρέπει $K_y^{+\infty, \text{ολικό}} = K_y^{-\infty, \text{ολικό}}$) και επέχει θέση **συνοριακής συνθήκης στο άπειρο** για την παρούσα απεριόριστη επίπεδη διάταξη.

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Για την εύρεση του πεδίου θα στηριχθούμε τώρα στις διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (23)$$

και στις οριακές συνθήκες

$$\hat{z} \cdot [\bar{\mathbf{B}}(z+) - \bar{\mathbf{B}}(z-)]_{z=\pm h} = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{B}_z(z+) = \mathbf{B}_z(z-)]_{z=\pm h} \quad (24)$$

$$\{\hat{z} \times [\bar{\mathbf{H}}(h+) - \bar{\mathbf{H}}(h-)] = 0, \hat{z} \times [\bar{\mathbf{H}}(-h+0) - \bar{\mathbf{H}}(-h-0)] = \bar{\mathbf{K}}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_y(h+) - H_y(h-) = 0, H_y(-h+0) - H_y(-h-0) = 0 \\ H_x(h+0) - H_x(h-0) = 0, H_x(-h+0) - H_x(-h-0) = K_y \end{cases} \quad (25\alpha)$$

$$(25\beta)$$

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε –τώρα με βάση την (22) και (23)– ότι το πεδίο έχει μόνο x-συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z), αναλύουμε την (22) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial y=0} \frac{dH_y}{dz} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \xRightarrow{\partial/\partial x=0} \frac{dH_x(z)}{dz} = J_y(z) \quad (27)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial x=0=\partial/\partial y} 0=0 \text{ (ταυτότητα).}$$

Τέλος η (23) δίνει τη σχέση

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{dB_z(z)}{dz} = 0. \quad (28)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (24)-(28), που περιγράφουν το πεδίο, διαχωρίζονται σε δυο οικογένειες εξισώσεων οι οποίες είναι ασύζευκτες μεταξύ τους:

α. Η ομάδα εξισώσεων {(25β),(27)} αλληλοσυνδέει τις πηγές με την πεδιακή συνιστώσα H_x . Με βάση τις εξισώσεις αυτές υπολογίζεται η H_x όπως εξηγείται παρακάτω.

β. Οι εξισώσεις της οικογένειας {(24),(25α),(26),(28)} είναι όλες ομογενείς (δηλαδή δεν εμπλέκονται σε αυτές όροι πηγών). Από τις εξισώσεις αυτές συνάγεται ότι $H_y = 0$ και $H_z = 0$ παντού, με βάση τον παρακάτω συλλογισμό: Οι παραπάνω ομογενείς εξισώσεις, στις οποίες εμπλέκονται οι συνιστώσες H_y και H_z αποκλειστικά, ικανοποιούνται όλες από τη λύση $\{H_y = 0, H_z = 0\}$. Επομένως, αν η λύση που επιζητούμε είναι μοναδική, αυτή δεν μπορεί να είναι άλλη από την $H_y = 0, H_z = 0$. Εναλλακτικά, στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με άμεση επίλυση των εξισώσεων ως εξής:

Οι λύσεις των (26) και (28) για την περιοχή i (i=1,2,3) είναι οι

$$H_y^{(i)} = c_i = \text{σταθ.}, \quad B_z^{(i)} = d_i = \text{σταθ.} \quad (i=1,2,3).$$

Οι συνθήκες συνεχείας (24) και (25α) συνεπάγονται τις σχέσεις

$$c_1 = c_2 = c_3, \quad d_1 = d_2 = d_3$$

ενώ από τη συνέχεια των H_y και B_z στις τερματικές επιφάνειες $z=\pm\infty$ παίρνουμε

$$c_1 = 0 = c_3, \quad d_1 = 0 = d_3.$$

Επομένως $H_y = 0$ και $B_z = 0 \Rightarrow H_z = 0$ παντού.

Υπολογισμός του $H_x(z)$

Από την (27) με ολοκλήρωση προκύπτει η σχέση

$$H_x = \int J_y(z) dz + a \quad (29)$$

όπου a είναι σταθερά ολοκλήρωσεως. Στις περιοχές 1 και 3 είναι $J_y = 0$, οπότε

$$H_x^{(1)}(z) = a_1 \quad (30\alpha)$$

$$H_x^{(3)}(z) = a_3. \quad (30\beta)$$

Για την περιοχή 2 η (29) γράφεται ισοδύναμα υπό τη μορφή

$$H_x^{(2)}(z) = \int_{-h}^z J_y(z') dz' + a_2 \quad (31)$$

Στις (30), (31) a_1, a_2, a_3 είναι προσδιοριστέες σταθερές ολοκλήρωσεως.

Μέσω των (30), (31) οι οριακές συνθήκες (25β) δίνουν

$$H_x^{(2)}(h) = H_x^{(1)}(h) \Rightarrow \int_{-h}^h J_y(z') dz' + a_2 = a_1 \quad (32)$$

$$H_x^{(2)}(-h) - H_x^{(3)}(-h) = K_y \Rightarrow a_2 - a_3 = K_y. \quad (33)$$

Για τον προσδιορισμό των τριών σταθερών a_1, a_2, a_3 χρειαζόμαστε μία ακόμα συνθήκη. Η συνθήκη αυτή είναι η συνθήκη στο άπειρο (βλέπε σχετική παρατήρηση παραπάνω) η οποία παίρνει τη μορφή της εξίσωσης (15):

$$H_x^{(1)}(+\infty) = -H_x^{(3)}(-\infty) \Rightarrow a_1 = -a_3. \quad (34)$$

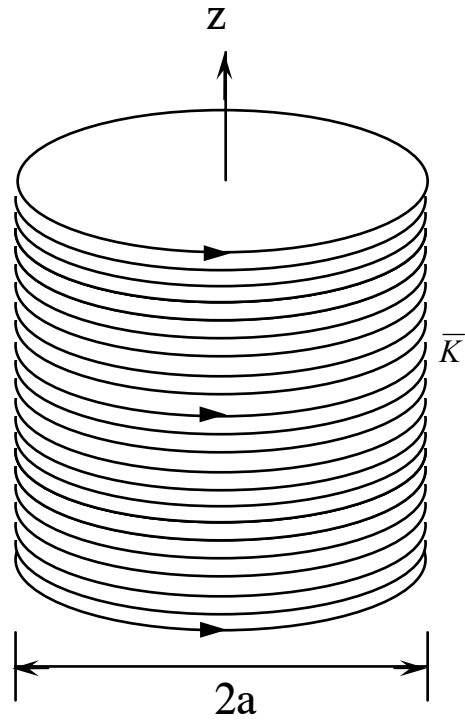
Λύνοντας το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα των (32)-(34) παίρνουμε

$$a_1 = \frac{1}{2} [K_y + \int_{-h}^h J_y(z') dz'] = -a_3, \quad a_2 = \frac{1}{2} [K_y - \int_{-h}^h J_y(z') dz']. \quad (35)$$

Τέλος, με αντικατάσταση από τις (35) στις (30), (31) βρίσκουμε τις τελικές εκφράσεις για την H_x , οι οποίες είναι ίδιες με αυτές των (18) και (20) όπως περιμέναμε.

7. Σωληνοειδές απείρου μήκους

Ομοιόμορφο χρονοσταθερό επιφανειακό ρεύμα $\bar{K} = \hat{\phi} K_0$ ρέει στην επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας a , ο οποίος έχει άπειρο μήκος (Σχ.1). Ζητάμε να βρούμε το διεγερόμενο μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο.



Σχήμα 1

A. Λύση με ολοκληρωτικές σχέσεις

Επειδή τόσο η διάταξη όσο και η πηγή έχουν κυλινδρική συμμετρία και είναι απεριόριστες κατά τον άξονα των z , το πεδίο θα είναι ανεξάρτητο των μεταβλητών ϕ και z , δηλαδή

$$\vec{H} = \vec{H}(r) \quad (1)$$

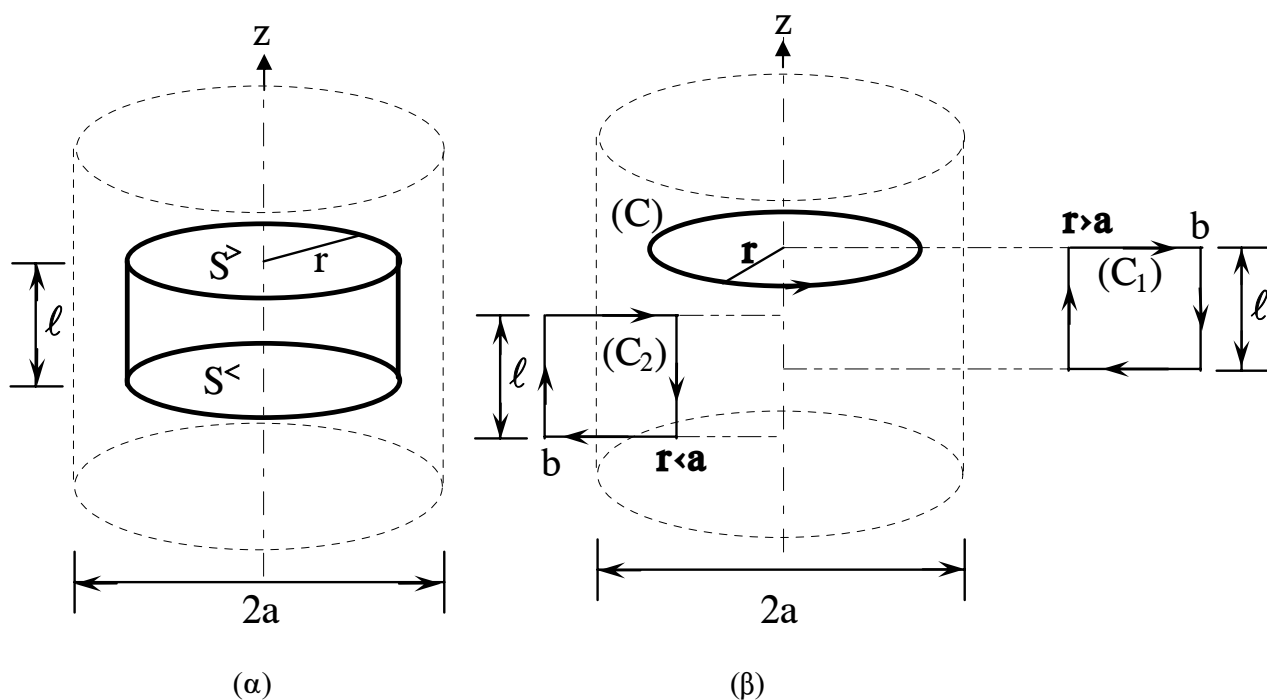
Θα αποδείξουμε τώρα ότι το πεδίο έχει μόνο z -συνιστώσα, ως εξής:

Ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

με επιφάνεια ολοκληρώσεως την κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r και μήκους ℓ που δείχνει το Σχ.2α, δίνει με τη βοήθεια της (1) τη σχέση:

$$B_r(r)2\pi r\ell + \int_{0(S^+)}^r B_z(r')2\pi r'dr' - \int_{0(S^-)}^r B_z(r')2\pi r'dr' = 0 \Rightarrow B_r(r)2\pi r\ell = 0 \Rightarrow B_r(r) = 0. \quad (2)$$



Σχήμα 2

Ο νόμος του Ampere,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C,$$

με δρόμο ολοκληρώσεως τον κυκλικό βρόχο (C) ακτίνας r που δείχνει το Σχ.2β δίνει τη σχέση:

$$H_\varphi(r)2\pi r = 0 \Rightarrow H_\varphi(r) = 0. \quad (3)$$

Για να βρούμε την τιμή της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου, H_z , εφαρμόζουμε πρώτα το νόμο του Ampere για τον ορθογωνικό βρόχο (C_1) που δείχνει το Σχ.2β. Ο βρόχος αυτός, που έχει τις κατακόρυφες πλευρές του σε αποστάσεις $r(>a)$ και $b(>a)$ από τον άξονα του κυλίνδρου, βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τον άξονα και εξ ολοκλήρου εκτός του σωληνοειδούς. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η σχέση

$$H_z(r)\ell = H_z(b)\ell \Rightarrow H_z(r) = H_z(b) \Rightarrow H_z(r) = c \quad (r>a) \quad (4)$$

όπου c σταθερά. Λόγω της συνθήκης στο άπειρο, $H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, η τιμή της σταθεράς c είναι μηδενική και επομένως

$$H_z(r) = 0 \quad (r>a). \quad (5)$$

Τέλος, με εφαρμογή του νόμου του Ampere για τον ορθογωνικό βρόχο (C_2) (Σχ.2β), ο οποίος έχει τις κατακόρυφες πλευρές του σε αποστάσεις $r(<a)$ και $b(>a)$ από τον άξονα του κυλίνδρου, με τον οποίο είναι συνεπίπεδος, παίρνουμε τη σχέση

$$-H_z(r)\ell + H_z(b>a)\ell = -K_0\ell \Rightarrow H_z(r) = K_0 \quad (r<a). \quad (6)$$

Επομένως

$$H_z(r) = \begin{cases} K_0 & (0 < r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}. \quad (7)$$

B. Λύση με σημειακές σχέσεις

Το πεδίο περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (9)$$

και τις οριακές συνθήκες

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{H}}(a+) - \bar{\mathbf{H}}(a-)] = \bar{\mathbf{K}} \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{B}}(a+) - \bar{\mathbf{B}}(a-)] = 0 \Leftrightarrow B_r(a+) = B_r(a-). \quad (11)$$

Λόγω της συμμετρίας της πηγής και της διατάξεως, ισχύει ότι

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}(r). \quad (12)$$

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε -τώρα με χρήση των σημειακών σχέσεων- ότι το πεδίο έχει μόνο z-συνιστώσα. Προς τούτο αναλύουμε την (8) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = J_r = 0 \quad \xRightarrow{\partial/\partial \phi=0=\partial/\partial z} 0=0 \quad (\text{ταυτότητα})$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\phi = 0 \quad \xRightarrow{\partial/\partial z=0} \frac{dH_z(r)}{dr} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = J_z = 0 \quad \xRightarrow{\partial/\partial \phi=0} \frac{d[rH_\phi(r)]}{dr} = 0. \quad (14)$$

Τέλος από την (9) παροκύπτει ότι

$$\frac{1}{r} \frac{\partial[rB_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial[B_\phi(r)]}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z(r)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d[rB_r(r)]}{dr} = 0. \quad (15)$$

Ολοκληρώνοντας την (14) παίρνουμε

$$H_\phi(r) = \begin{cases} b_1 / r & (0 < r < a) \\ b_2 / r & (a < r < \infty) \end{cases} \quad (16)$$

όπου b_1 και b_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $H_\phi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ η συνθήκη συνέχειας στα σημεία της κυλινδρικής επιφάνειας $r = a$, $H_\phi(a+) = H_\phi(a-)$, οδηγεί στη σχέση $b_1 = b_2$. Η οριακή συνθήκη στη θέση $r=0$ δίνει $b_1 = 0$ (αλλιώς το πεδίο απειρίζεται στα σημεία του άξονα του σωληνοειδούς, κάτι το οποίο είναι αφύσικο αφού δεν υπάρχουν εκεί γραμμικές πηγές). Επομένως $H_\phi(r) = 0$ παντού.

Ομοίως, με ολοκλήρωση της (15) παίρνουμε

$$B_r(r) = \begin{cases} d_1 / r & (0 < r < a) \\ d_2 / r & (a < r < \infty) \end{cases} \quad (17)$$

όπου d_1 και d_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $B_r(r) \rightarrow 0$, ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ η συνθήκη συνέχειας $B_r(a+) = B_r(a-)$ οδηγεί στη σχέση $d_1 = d_2$. Η οριακή συνθήκη⁷ στη θέση $r=0$, $\lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r B_r) = 0$, δίνει $d_1 = 0$ (αλλιώς το πεδίο θα απειρίζετο στα σημεία του άξονα του σωληνοειδούς). Επομένως $B_r(r) = 0$ παντού.

Η μοναδική συνιστώσα του πεδίου θα βρεθεί μέσω της (13), η οποία με ολοκλήρωση δίνει για τις περιοχές 1 ($r < a$) και 2 ($r > a$) τη γενική λύση

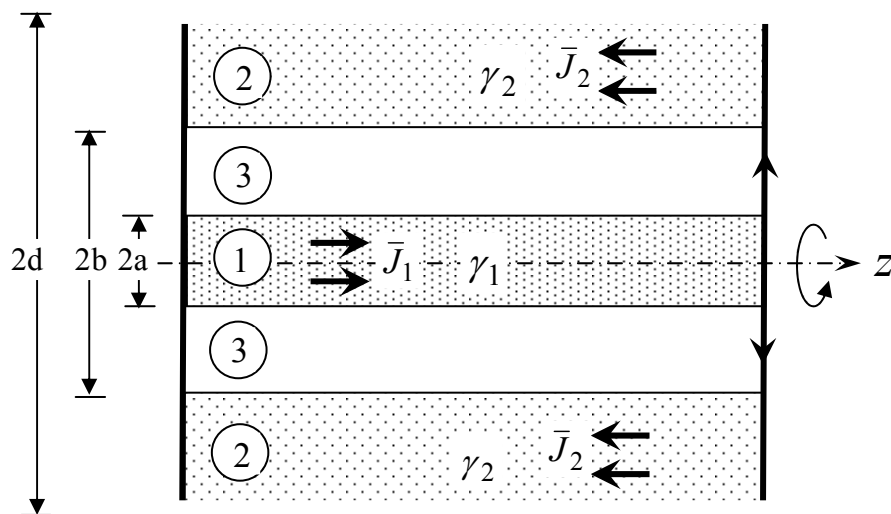
$$H_z(r) = \begin{cases} c_1 & (0 < r < a) \\ c_2 & (a < r < \infty) \end{cases} \quad (18)$$

όπου c_1 και c_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $H_z(r) \rightarrow 0$, δίνει $c_2 = 0$, ενώ η οριακή συνθήκη (10): $H_z(a+) - H_z(a-) = -K_0$ οδηγεί στη σχέση $c_1 = K_0$. Επομένως

$$H_z(r) = \begin{cases} K_0 & (0 < r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}. \quad (19)$$

~~8. Ηλεκτρομαγνητοστατικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού~~

~~Θεωρούμε (Σχ.1) κυλινδρικό αγωγό απείρου μήκους, ακτίνας a και σταθερής ειδικής αγωγιμότητας γ_1 , ο οποίος διαρρέεται από χρονοσταθερό ρεύμα έντασης I . Η επιστροφή του ρεύματος γίνεται μέσω ομοαξονικού κυλινδρικού αγωγού απείρου μήκους και ειδικής αγωγιμότητας γ_2 , ο οποίος έχει εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα d , όπου $d \rightarrow \infty$. Να βρεθούν τα διεγερόμενα στη διάταξη πεδία καθώς και οι πυκνότητες των φορτίων και των ρευμάτων παντού όπου αυτά υπάρχουν. (Η διηλεκτρική σταθερά είναι παντού ϵ).~~



~~Σχήμα 1~~

⁷ Βλέπε υποσημείωση 5.

~~Από την (18) διαπιστώνεται αμέσως ότι το πεδίο \vec{E} είναι αστρόβιλο ($\nabla \times \vec{E} = 0$), οπότε από τον νόμο των Maxwell Faraday,~~

~~$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (19)$$~~

~~συνάγεται ότι $\partial \vec{B} / \partial t = 0$, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο είναι χρονοσταθερό. Το χρονοσταθερό αυτό μαγνητικό πεδίο περιγράφεται με τον νόμο Maxwell Ampere~~

~~$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (20)$$~~

~~για όλα τα σημεία εκτός του θετικού ημιάξονα των z. Ο όρος διεγέρσεως,~~

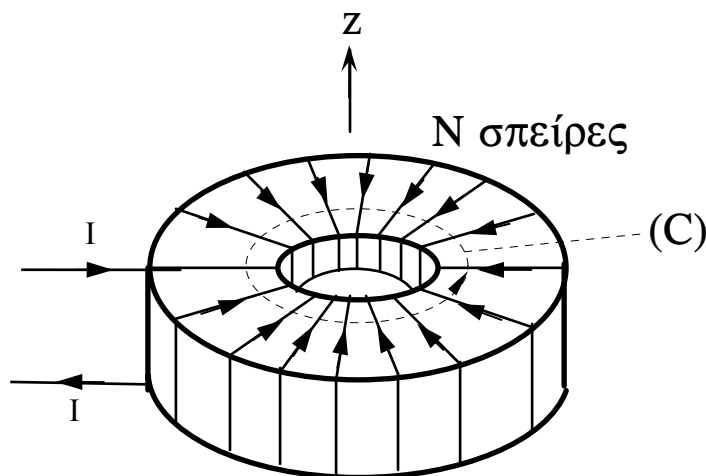
~~$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (21)$$~~

~~(ρεύμα μετατοπίσεως) έχει την ίδια μορφή με τον όρο \vec{J} της (1). Η λύση της (20), που λόγω της (21) παίρνει τη μορφή $\nabla \times \vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}$, δόθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα με κατάληξη τη σχέση (16):~~

~~$$\vec{H}_\varphi = \frac{-I(1 + \cos\theta)}{4\pi r \sin\theta}.$$~~

Παράδειγμα 3. Δακτυλειοδές πηνίο με διατομή αυθαίρετης μορφής

Στο Σχ.4 δείχνουμε ένα δακτύλιο (τοροειδές εκ περιστροφής). Η διατομή του δακτυλίου αυτού μπορεί να είναι οποιασδήποτε μορφής (ορθογωνική, όπως στο σχήμα, κυκλική ή άλλη). Νηματοειδής μονωμένος ρευματοφόρος αγωγός τυλίγεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια του δακτυλίου έτσι ώστε οι διαδοχικές σπείρες να ευρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους. Με αυτές τις προϋποθέσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ρεύμα κυκλοφορεί ως επιφανειακό σε κλειστούς βρόχους και, συνεπώς, μπορούμε να αμελήσουμε τη ρευματική συνιστώσα κατά την κατεύθυνση $\hat{\varphi}$. Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο.



Σχήμα 4

Λύση

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε ότι

$$\bar{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{r}}K_r(r, z) + \hat{\mathbf{z}}K_z(r, z) \quad (22)$$

οπότε το διεγειρόμενο στη διάταξη μαγνητικό πεδίο θα έχει μόνο $\hat{\phi}$ συνιστώσα. Το μαγνητικό αυτό πεδίο θα βρεθεί με εφαρμογή του νόμου του Ampere

$$\oint_C \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\ell} = I_C,$$

όπου C είναι ο κύκλος ο οποίος: α) διέρχεται από το σημείο παρατήρησης (r, ϕ, z) , β) έχει το κέντρο του στον άξονα των z και γ) το επίπεδό του είναι κάθετο στον άξονα αυτόν. Το ρεύμα I_C στο δεύτερο μέλος είναι το συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα που εμπλέκει τον κύκλο C. Το τελικό αποτέλεσμα για το πεδίο είναι

$$\bar{\mathbf{H}}(r, \phi, z) = \hat{\phi} H_\phi(r) = \begin{cases} -\frac{NI}{2\pi r} \hat{\phi}, & (r, \phi, z) \in V \\ 0, & (r, \phi, z) \notin V \end{cases} \quad (23)$$

όταν το σημείο παρατήρησης (r, ϕ, z) βρίσκεται στο εσωτερικό (V) του δακτυλίου ή εκτός αυτού, αντίστοιχα. Στην (23), N είναι ο αριθμός των σπειρών του πηνίου.