ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 4

Διάλεξη: 14 Οκτωβρίου 2020

Περίληψη προηγουμένου επεισοδίου

Προγράμματα σάρωσης από κινητό (πχ CamScanner)

ΣΔΕς 1ης τάξης : $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ $\quad y(x) = ;$

1. Χωριζομένων μεταβλητών $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow \int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx + K$

2. Ακριβείς $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ με $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Λύση: $u(x,y) = K$ όπου $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$

3. Γραμμικές $1\,\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = q(t)$

Λύση: ολοκ. παράγων $\exp\left[\int p(t)\,dt\right]$

Παράδειγμα 1: Γενική λύση της $\frac{dy}{dt}+\underbrace{2}_{p(t)=2}y=e^{t}$

Ο ολοκ. παράγων: $\exp\left[\int 2\,dt\right]=e^{2t}$

Πολλ/ζω επί e^{2t}: $e^{2t}\frac{dy}{dt}+2e^{2t}y=e^{3t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\cdot y\right)=e^{3t} \Rightarrow e^{2t}y=\int e^{3t}\,dt+K \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{2t}y=\frac{1}{3}e^{3t}+K \Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{1}{3}e^{t}+Ke^{-2t}}$

$\left(e^{\int 2dt+k}=e^{2t}e^{k}=Qe^{2t}\right.$ Βάζουμε $\left.Q=1 \text{ ή } k=0\right)$

Παράδειγμα 2. ΔΕ του Verhulst

για την αύξηση του πληθυσμού

$$\frac{dy}{dt} = Ay \underline{- By^2} \qquad \begin{pmatrix} A>0 \\ B>0 \end{pmatrix}$$

logistic equation

λογιστική εξίσωση

Pierre Francois Verhulst
(1804-1849)

(Μέχρι $\frac{dy}{dt} = Ay \longrightarrow y(t) = y(0)e^{At}$ $\quad y \to \infty$)

Γραμμική; Δεν είναι γραμμική λόγω του y^2

Χωριζομένων μεταβλητών. Ναι, πονάνε τα ολοκληρώματα.

Ιδέα: Αλλαγή μεταβλητής $\quad u = \frac{1}{y} \longrightarrow \underline{y = \frac{1}{u}} \quad y^2 = \frac{1}{u^2}$

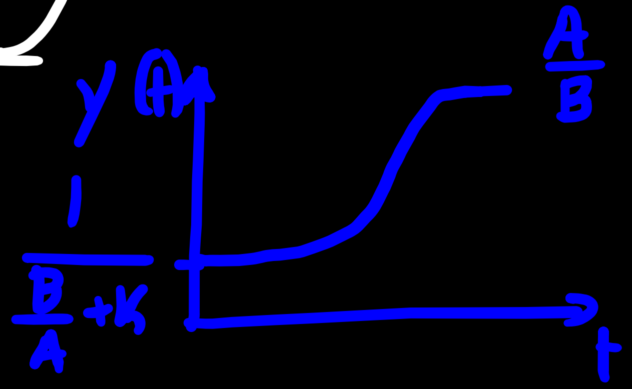
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

Αντικατάσταση

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = A\frac{1}{u} - B\frac{1}{u^2} \xRightarrow{\text{επι } u^2} -\frac{du}{dt} = Au - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + Au = B$$

(γραμμική!)



Ολοκ. παράγων $\exp\left[\int A\,dt\right] = e^{At}$

$$e^{At}\frac{du}{dt} + Ae^{At}u = Be^{At} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(u e^{At}\right) = Be^{At} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u e^{At} = \int B e^{At}dt + K \Rightarrow u e^{At} = \frac{B}{A}e^{At} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{B}{A} + Ke^{-At}$$

$$y(t) = \frac{1}{u} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{\frac{B}{A} + Ke^{-At}}}$$

λογιστική συνάρτηση

Παράδειγμα 3: ΔΕ του Bernoulli

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)y^{\alpha} \quad \left(\begin{array}{c}\alpha \\ \text{οποιοσδήποτε} \\ \text{αριθμός}\end{array}\right)$$

(Jacob – Johann)

Jacob $\downarrow$ Niklaus, Johann $\downarrow$ Daniel (ρευστομηχανική)

Είναι γραμμική; Για $\alpha=0$ ή $\alpha=1$ είναι γραμμική.
Για κάθε άλλο α δεν είναι γραμμική.

Την έλυσε ο Leibniz το 1696.

Jacob Bernoulli (1655-1705)

Προηγούμενο επεισόδιο

Γραμμική ΔΕ: $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$ Ολοκ. παράγ. $e^{\int p(t)dt}$

ΔΕ του Verhulst (λογιστική εξίσωση): $\frac{dy}{dt} = Ay - By^2$ $y(t) = \frac{1}{\frac{B}{A} + Ke^{-At}}$ $\begin{pmatrix} A>0 \\ B>0 \end{pmatrix}$

ΔΕ του Bernoulli: $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)y^a$ $(a \in \mathbb{R})$

ΔΕ Bernoulli: $\frac{dy}{dt}+p(t)y=g(t)y^{a} \quad (a\in\mathbb{R})$

$$\frac{dy}{dt}=g(t)y^{a}-p(t)y \quad \text{— (1)}$$

Μετασχ. $u=y^{1-a}$ — (2)

$$\frac{du}{dt}=(1-a)\,y^{-a}\,\frac{dy}{dt}\xrightarrow[(1)]{\text{απο την}}\frac{du}{dt}=(1-a)y^{-a}\left[g(t)y^{a}-p(t)y\right]$$

$$\Rightarrow\frac{du}{dt}=(1-a)g(t)-(1-a)p(t)\underbrace{y^{1-a}}_{u}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{du}{dt}+(1-a)p(t)u=(1-a)g(t)} \quad \text{— (3)}$$

Γραμμική

Gottfried Leibniz
(1646-1716)

ΔΕ : $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)y^a \quad u = y^{1-a} \quad \frac{du}{dt} + (1-a)p(t)u = (1-a)g(t)$

<u>Παράδειγμα 4</u> Γεν. λύση της $\frac{dy}{dt} + 2y = e^t y^3$

ΔΕ του Bernoulli $p(t) = 2 \quad g(t) = e^t \quad a = 3 \qquad u = y^{1-3} = y^{-2} \Rightarrow u = \frac{1}{y^2}$

$y^2 = \frac{1}{u}$

$\frac{du}{dt} + (1-3)2u = (1-3)e^t \Rightarrow \frac{du}{dt} - 4u = -2e^t$ Γραμμική

Ολοκ. παραγ. $e^{\int(-4)dt} = e^{-4t} \qquad e^{-4t}\frac{du}{dt} - 4e^{-4t}u = -2e^{-3t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-4t}u\right) = -2e^{-3t} \Rightarrow e^{-4t}u = -2\int e^{-3t}dt + k \Rightarrow e^{-4t}u = \frac{2}{3}e^{-3t} + k$

$\Rightarrow u(t) = \frac{2}{3}e^t + ke^{4t} \quad \Rightarrow y^2(t) = \left(\frac{2}{3}e^t + ke^{4t}\right)^{-1} \Rightarrow y(t) = \pm\left(\frac{2}{3}e^t + ke^{4t}\right)^{-\frac{1}{2}}$

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 1
14 Οκτωβρίου 2020

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(1) (6 μονάδες) Λύστε την παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$2\frac{dy}{dt} + 4y = e^{-t}$$

(2) (4 μονάδες) Μετατρέψτε την παρακάτω εξίσωση σε γραμμική:

$$\frac{dy}{dt} + 4y = e^{-t}y^{1/2}$$