Παρασκευή 13/5/2022 15η Διάλεξη: Κολέτσος 8

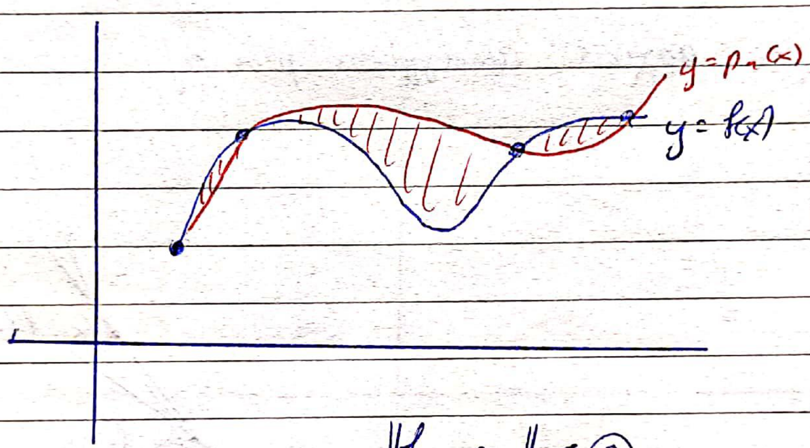
Παρεμβολή (Interpolation)

Paraphrasing, έκανε μια τέτοια εισαγωγή:

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η συνάρτηση που αντιμετωπίζω είναι πολύ δύσχρηστη.

Άλλες φορές δεν έχουμε καν τη συνάρτηση, αλλά μετρήσεις τιμών σε σημεία της.

Επιχειρώ τότε να βρω συνάρτηση που να περνάει από ορισμένα σημεία, με την ελπίδα ότι το σφάλμα σε άλλα θα είναι μικρό/αποδεκτό

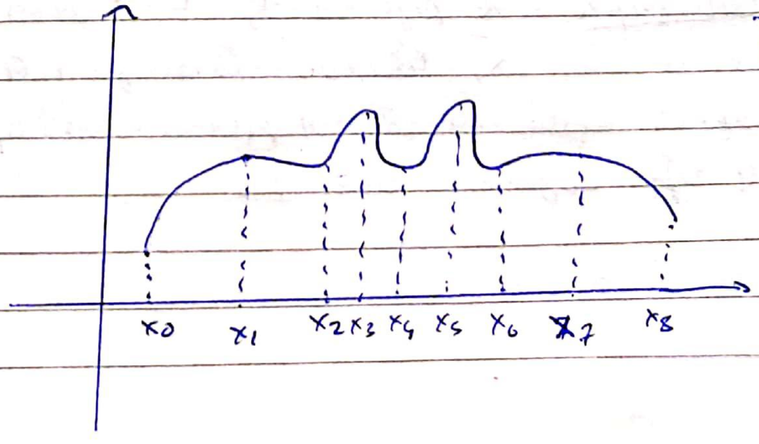


$\|f-p_n\|<\varepsilon$, p_n πολυώνυμο

Θεώρημα Παρεμβολής Lagrange:

Έστω f ορισμένη στο $[a,b]$ και $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ μια διαμέριση του $[a,b]$ τέτοια ώστε $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ (έχουμε $n+1$ σημεία που χωρίζουν το $[a,b]$ σε n διαστήματα, όχι κατ' ανάγκη ισαπέχοντα

Πχ. Στην παρακάτω συνάρτηση θα ήταν σοφό να πάρουμε:



Τότε α) Υπάρχει πολυώνυμο $p_n \in \Pi_n$ που παρεμβάλλει την f στα $n+1$ σημεία της διαμέρισης, δηλαδή $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$

β) $$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i), \text{ όπου}$$

$$l_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

γ) Το $p_n \in \Pi_n$ είναι μοναδικό

- Γιατί πολυωνυμική? Γιατί τα διαχειριζόμαστε εύκολα

- Π_n το σύνολο των πολυωνύμων <u>έως</u> n βαθμού.
  π.χ. Π_2 έχει 4 κατηγορίες πολυωνύμου,
  το μηδενικό, τα μηδενικού βαθμού (σταθερές)
  τα 1ου βαθμού και 2ου βαθμού

<u>Απόδειξη</u>

Τα $$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}, \quad i=0,\ldots,n$$

είναι πολυώνυμα n βαθμού <u>ακριβώς</u>
άρα το

$$p_n(x) = \underbrace{l_0(x)}_{n \text{ βαθμού}} \underbrace{f(x_0)}_{\in R} + \underbrace{l_1(x)}_{n \text{ βαθμού}} \underbrace{f(x_1)}_{\in R} + \ldots + \underbrace{l_n(x)}_{n \text{ βαθμού}} \underbrace{f(x_n)}_{\in R}$$

είναι πολυώνυμο <u>το πολύ</u> n βαθμού, δηλ $p_n \in \Pi_n$

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases}, \quad \cancel{i,j\in\mathbb{N}}, \quad i,j\in\{0,1,\dots,n\}$$

Επομένως $p_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x_j) f(x_i) = \underbrace{l_j(x_j)}_{=1} f(x_j) = f(x_j)$, $j=0,1,\dots,n$

(αποδείχθηκαν τα (a)(b))

2ο

c) Έστω $q\in\Pi_n$ ένα δεύτερο πολυώνυμο παρεμβολής της f στα ίδια σημεία. Κατασκευάζω το πολυώνυμο

$$r \equiv p_n - q.$$

Τότε $r\in\Pi_n$ και $r(x_i) = p_n(x_i) - q(x_i)$

$= f(x_i) - f(x_i) = 0 \quad \forall i=0,1,\dots,n$

Δηλαδή ενώ το r είναι πολυώνυμο έως n βαθμού, έχει $n+1$ ρίζες. Άρα το r είναι το εκ ταυτότητας μηδενικό πολυώνυμο,

$$r\equiv 0 \Rightarrow p_n - q \equiv 0 \Rightarrow p_n \equiv q$$

Δηλαδή το $p_n\in\Pi_n$ είναι μοναδικό //

Παρατήρηση: Το θεώρημα δεν έχει καμία απαίτηση ομαλότητας για της f

Άσκηση 1 α) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο που παρεμβάλλει της f στα σημεία x_0, x_1,

x_i	1	2
$f(x_i)$	2	4

β) Να βρεθεί το πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού που να παρεμβάλλει την τυθεία f στα ίδια σημεία.

γ) Αντιφάσκει αυτό με τη μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange?

Λύση

α) $$p_1(x) = \sum_{i=0}^{1} l_i(x) f(x_i) = l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) =$$

$$\cancel{= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) = \frac{x-2}{x-1}\cdot 2 + \frac{x-1}{x-2}\cdot 4}$$

$$=$$

$$= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) = \frac{x-2}{1-2}\cdot 2 + \frac{x-1}{2-1}\cdot 4$$

$$= -2(x-2) + 4(x-1) = 2x$$

β) $Q(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} Q(1) = 2 \Rightarrow a+b+c = 2 \\ Q(2) = 4 \Rightarrow 4a+2b+c = 4 \end{array}\right\}$$ Θέτω αυθαίρετα $a=1$, υπολογίζω $b=-1$, $c=2$

$Q(x) = x^2 - x + 2$

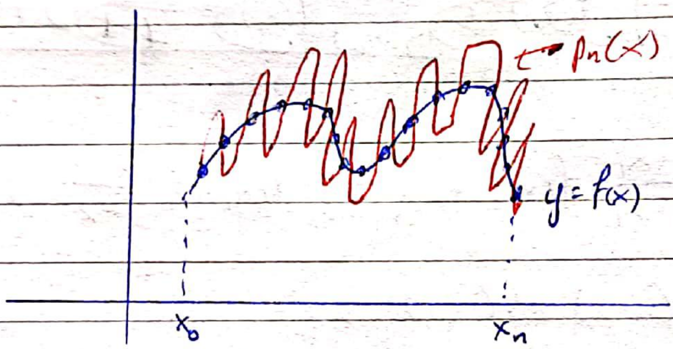
c) Δεν αντιφάσκει γιατί το θεώρημα βεβαιώνει ότι υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής $p_1 \in \Pi_1$ έως $1^{ου}$ βαθμού.

Θεώρημα Σφάλματος Lagrange

Έστω $f \in C^{n+1}[a,b]$ και $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ $n+1$ διαφορετικά σημεία μιας διαμέρισης του $[a,b]$. Τότε $\forall x \in [a,b]$, $\exists\, \xi(x) \in (a,b)$:

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}$$

Αν το σφάλμα δεν είναι ικανοποιητικό μπορούμε να αυξήσουμε τη διαμέριση, αλλά αυτό αν παραγίνει μπορεί να προκαλέσει προβλήματα, π.χ.:



Άσκηση 2 Να αποδειχθεί $l_i(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$

όπου $\varphi(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$

Λύση

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$\overset{*}{=}\frac{\dfrac{\varphi(x)}{x-x_i}}{\varphi'(x_i)} \quad \checkmark$$

$*\ \varphi'(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)+(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)+\dots+(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

$$=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j) \Rightarrow \boxed{\varphi'(x_i)=(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Άσκηση 3 Αν $f \in \Pi_n$ τότε το πολυώνυμο παρεμβολής της f $p_n \in \Pi_n$ στο $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ συμπίπτει με την f.

Λύση: α τρόπος

Έστω $p_n \in \Pi_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ δηλ. $p_n(x_i) = f(x_i)$ $\forall i=0,\dots,n$

Παρατηρώ ότι p_n, f είναι πολυώνυμα έως n βαθμού που συμπίπτουν σε $n+1$ σημεία, άρα ταυτίζονται (με την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του (c))

β' τρόπος Έστω $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$ $i=0,\dots,n$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα σφάλματος Lagrange,

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)}{(n+1)!}$$

$f \in \Pi_n \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0$ $\Longrightarrow$ 0 Δηλ. $p_n(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ άρα $p_n = f$

Άσκηση 4 Να δειχθεί ότι $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$

Λύση Έστω $f \equiv 1$ στο $[a,b]$ δηλ $f(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$ και p_n το πολυώνυμο παρεμβολής της.

Τότε $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \underbrace{f(x_i)}_{1} = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)$

Αλλά επειδή $f \in \Pi_n \xrightarrow{\text{άσκηση 3}} p_n \equiv f \Rightarrow p_n(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$

Άρα $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$