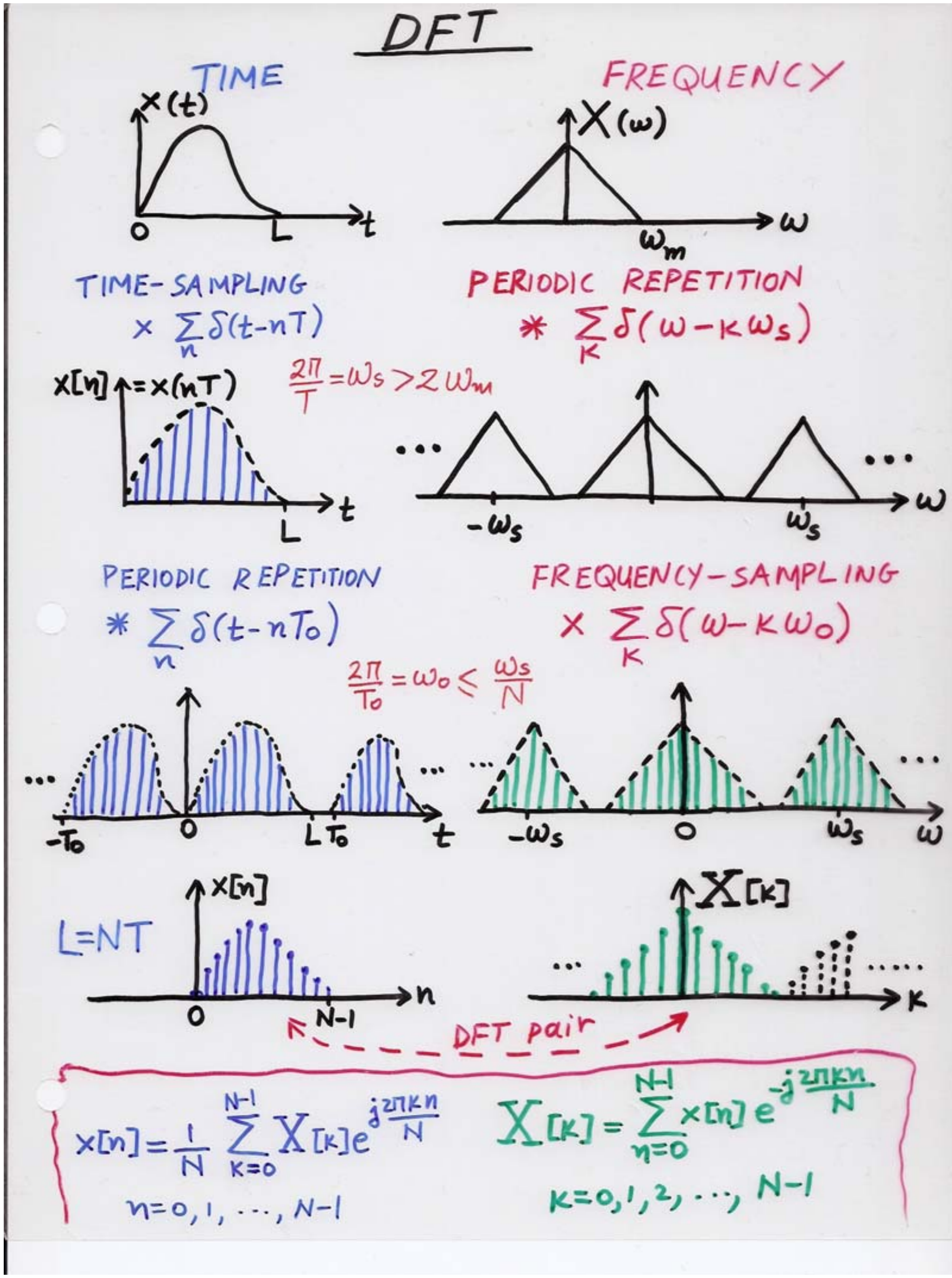
ΣΗΜΑΤΑ και ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σχολη ΗΜ&ΜΥ, ΕΜΠ
Καθηγητης Πετρος Μαραγκος

Διακριτος Μετ/σμος Fourier
DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT)



1. Fourier Transform:

Συνεχης Χρονος
Συνεχης Συχνοτητα

2. DTFT:

Διακριτος Χρονος
Συνεχης Συχνοτητα, περιοδικη

DFS (Discrete Fourier Series):

Διακριτος Χρονος, περιοδικη
Διακριτη Συχνοτητα, περιοδικη

3. DFT:

Διακριτος Χρονος, N δειγματα
Διακριτη Συχνοτητα, N δειγματα

Περιοχες Εφαμογων του DFT

- **Φασματικη αναλυση**:
  - Υπολογισμος DTFT με frequency sampling.
  - Υπολογισμος STFT: Φασματογραφημα (spectrogram)
  - Φασματικη Αναλυση με DFT παραθυρωμενου σηματος

- **Υπολογισμος Συνελιξης** (με πολ/σμο DFTs):
  - Υλοποιηση ΓΧΑ διακριτων φιλτρων στην συχνοτητα.
  - Block convolution: τμηματικο φιλτραρισμα μακρων σηματων

- **Αναπαρασταση / Προσεγγιση / Συμπίεση Σηματος με Ορθογωνιους Μετ/σμούς** (DFT, DCT)

- **Ταχεις Αλγοριθμοι** (FFT – Fast Fourier Transform):
  - Πολυπλοκοτητα DFT N-σημειων: $O(N^2)$
  - Πολυπλοκοτητα FFT N-σημειων: $O(N \log_2 N)$

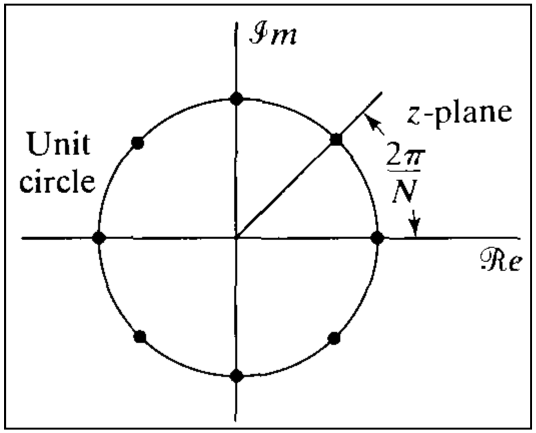
Λημμα

Συνθεση σηματος απο DFT:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

Γραμμικος Συνδυασμος Αρμονικων

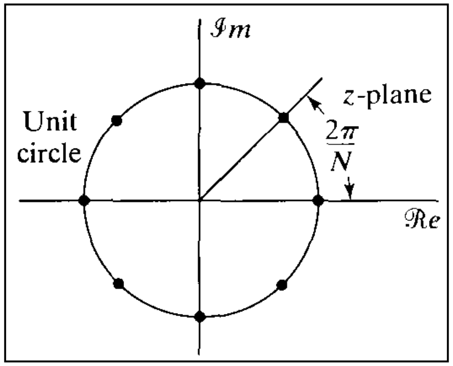
Μιγαδικων Ημιτονων Διακριτου Χρονου



$$p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right) = \begin{Bmatrix} 1, & n = rN \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{Bmatrix} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$$

Ιδιοτητες Αρμονικων Μιγαδικων Ημιτονων Διακριτου Χρονου

Περιοδικοτητα ως προς χρονικο δεικτη ***n***



$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n + rN]$$

Περιοδικοτητα ως προς φασματικο δεικτη ***k***

$$e_{k+\ell N}[n] = e^{j(2\pi/N)(k+\ell N)n} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi \ell n} = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n]$$

Ορθογωνιοτητα αρμονικης ***k*** και αρμονικης ***r***

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k - r = mN, \quad m \text{ an integer}, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Discrete Fourier Series (DFS)
για Περιοδικα Σηματα Διακριτου Χρονου

Περιοδικο Σημα: $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+N]$

$$\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$$

Analysis equation: $$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}.$$

Synthesis equation: $$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

Εξισωσεις αναλυσης & συνθεσης $\rightarrow$ ακολουθιες $N-$περιοδικες:

Αναλυση: $\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k+N]$

Συνθεση: $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+N]$

Περιοδικοτητα DFS

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

$$\tilde{X}[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}[k]$$

Παραδειγμα 1: DFS Περιοδικης Κρουστικης Παλμοσειρας

Περιοδικο Σημα

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \begin{cases} 1, & n = rN, \quad r \text{ any integer}, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

DFS $$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = W_N^0 = 1$$

Συνθεση σηματος απο DFS

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

Discrete Fourier Transform (DFT) απο DFS

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN].$$

Περιοδικη απο επαναληψη βασικης περιοδου: $\tilde{x}[n] = x[(n \text{ modulo } N)] = x[((n))_N]$

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\tilde{X}[k] = X[(k \text{ modulo } N)] = X[((k))_N]$$

Το ζευγος DFT προκυπτει απο τις βασικες περιοδους του ζευγους DFS

Analysis equation: $$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn},$$

Synthesis equation: $$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}.$$

$$x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X[k]$$

Παραδειγμα 1: DFT Μοναδιαίου Κρουστικού Παλμού

Σημα πεπερασμενης διαρκειας N δειγματων :

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & 1 \le n \le N-1 \end{cases} = \underbrace{\left(u[n] - u[n-N]\right)}_{\text{παραθυρο } N \text{ δειγματων}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$$

$$\text{DFT:} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) = 1, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

Συνθεση σηματος απο DFT :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & 1 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Παραδειγμα 2: Κρουστικη Παλμοσειρα στη Συχνοτητα (Δυϊσμος των DFS)

DFS

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} N\delta[k - rN]$$

Συνθεση περιοδικου σηματος απο DFS

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} N\delta[k] W_N^{-kn} = W_N^{-0} = 1$$

Παραδειγμα 2: Inverse DFT Μοναδιαιας Κρουστικης στη Συχνοτητα

DFT N δειγματων:

$$X[k] = \begin{Bmatrix} N, & k = 0 \\ 0, & 1 \le k \le N-1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left(u[k] - u[k-N]\right)}_{\text{παραθυρο } N \text{ δειγματων}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[k - rN]$$

Inverse DFT: Συνθεση σηματος απο DFT :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} N\delta[k] \exp\left(j \frac{2\pi kn}{N} \right) = 1, \quad n = 0, \ldots, N-1$$

Ο DFT Δειγματοληπτει τον DTFT

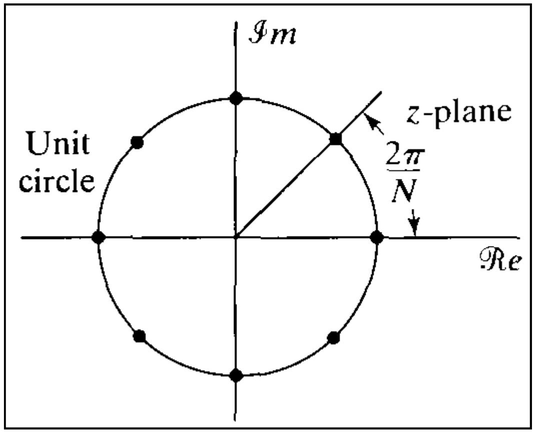
Σημα πεπερασμενης διαρκειας N δειγματων :

$x[n], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$

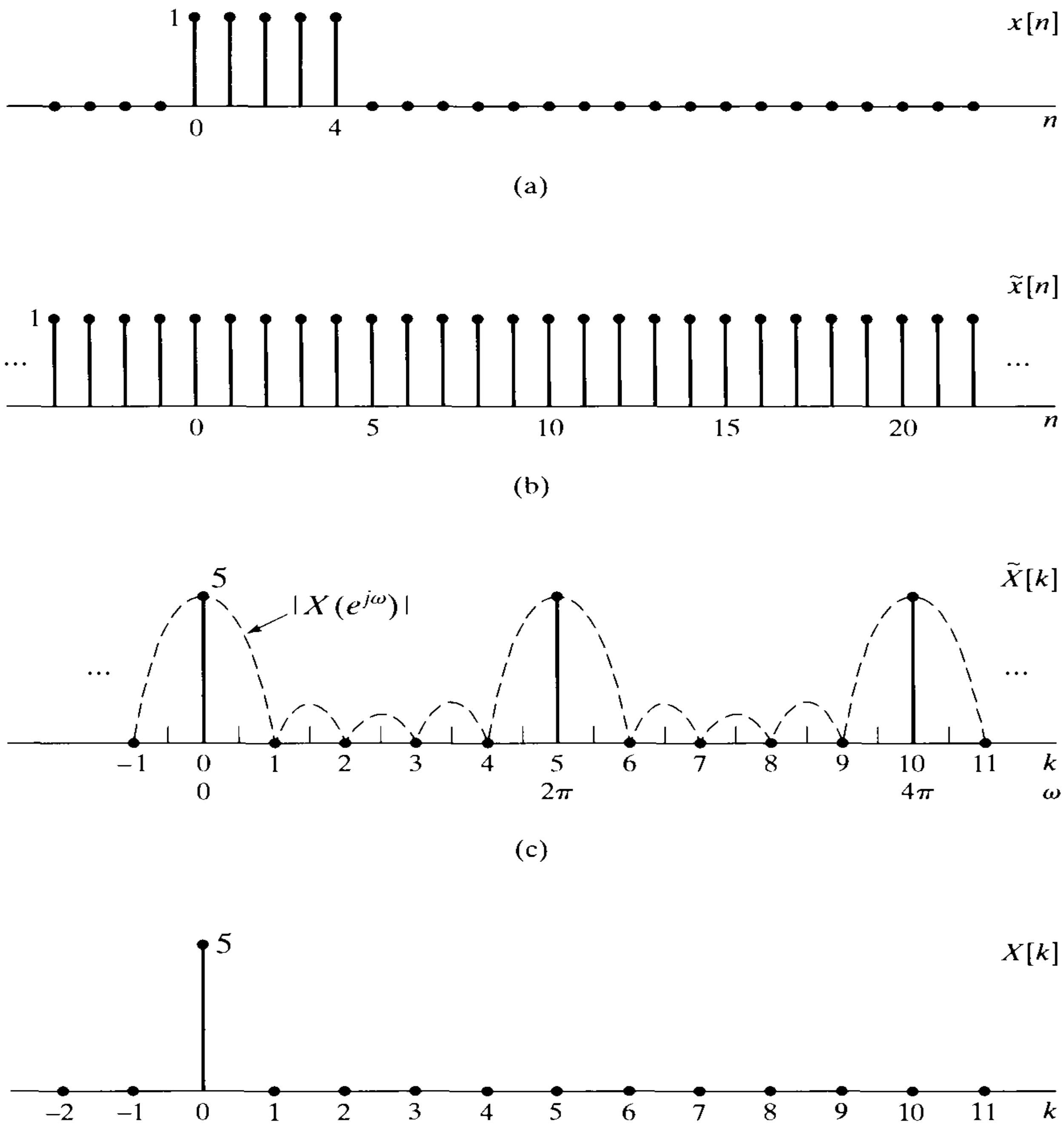
$$\text{DTFT:} \quad X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\Omega n\right), \quad -\pi \leq \Omega < \pi$$

$$\text{DFT:} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad k = 0, \ldots, N-1$$

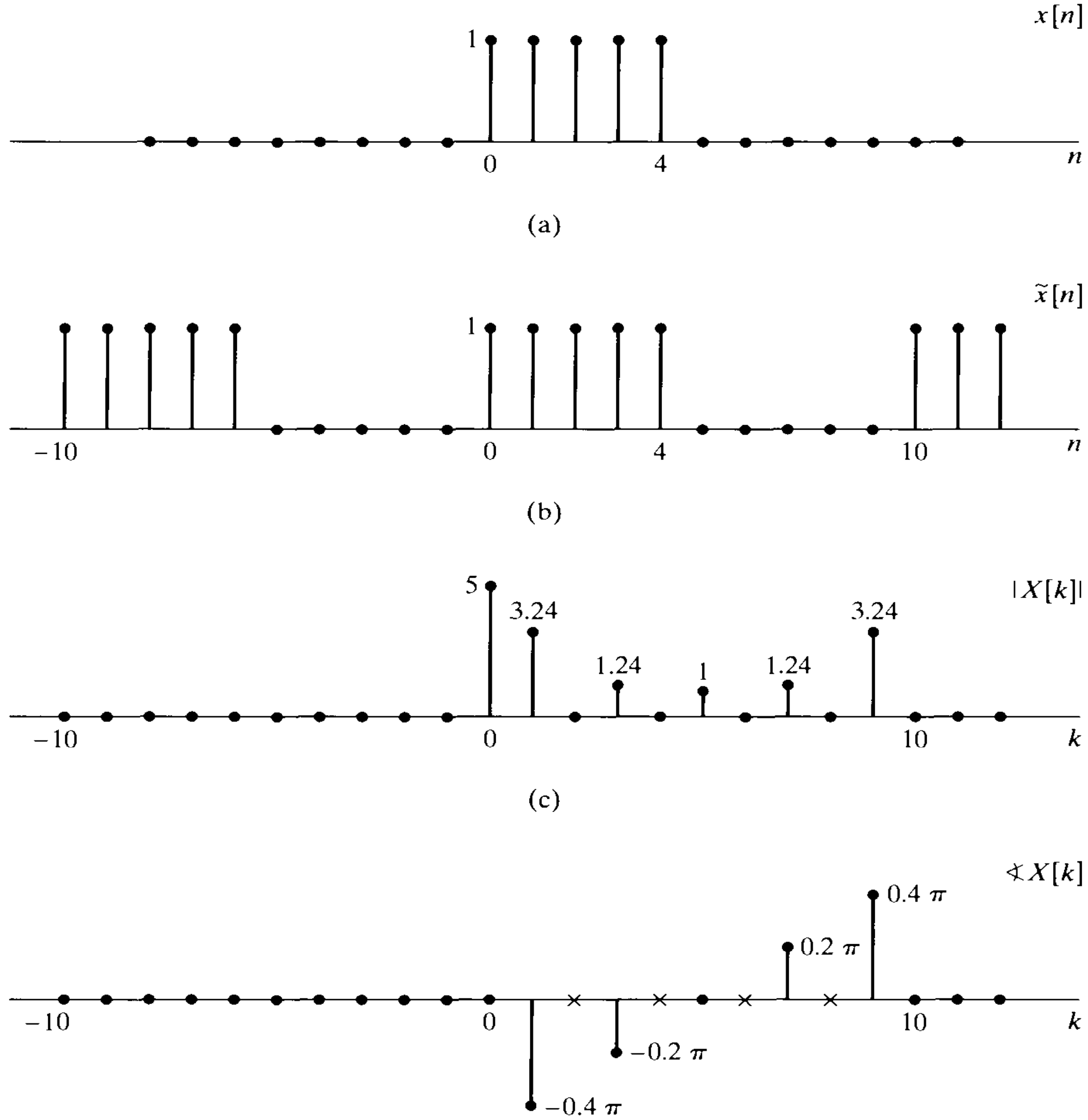
$$= X(\Omega)\Big|_{\Omega = 2\pi k/N}$$



Ορθογωνιος Παλμος 5 σημειων → DFT N= 5 σημειων

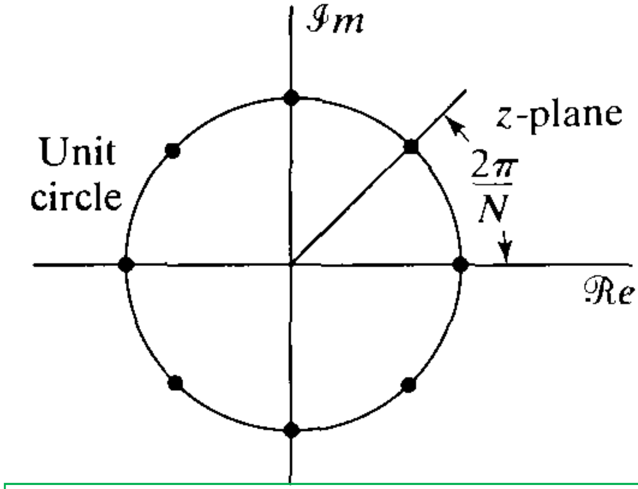


Ορθογωνιος Παλμος 5 σημειων → DFT N= 10 σημειων



Δειγματοληψια DTFT → Περιοδικη Επαναληψη σε Χρονο

DTFT Μη- περιοδικου σηματος $x[n]$: $X(\Omega) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j\Omega m}$



Δειγματα Φασματος

$$X[k] = X(\Omega)\Big|_{\Omega=2\pi k/N} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

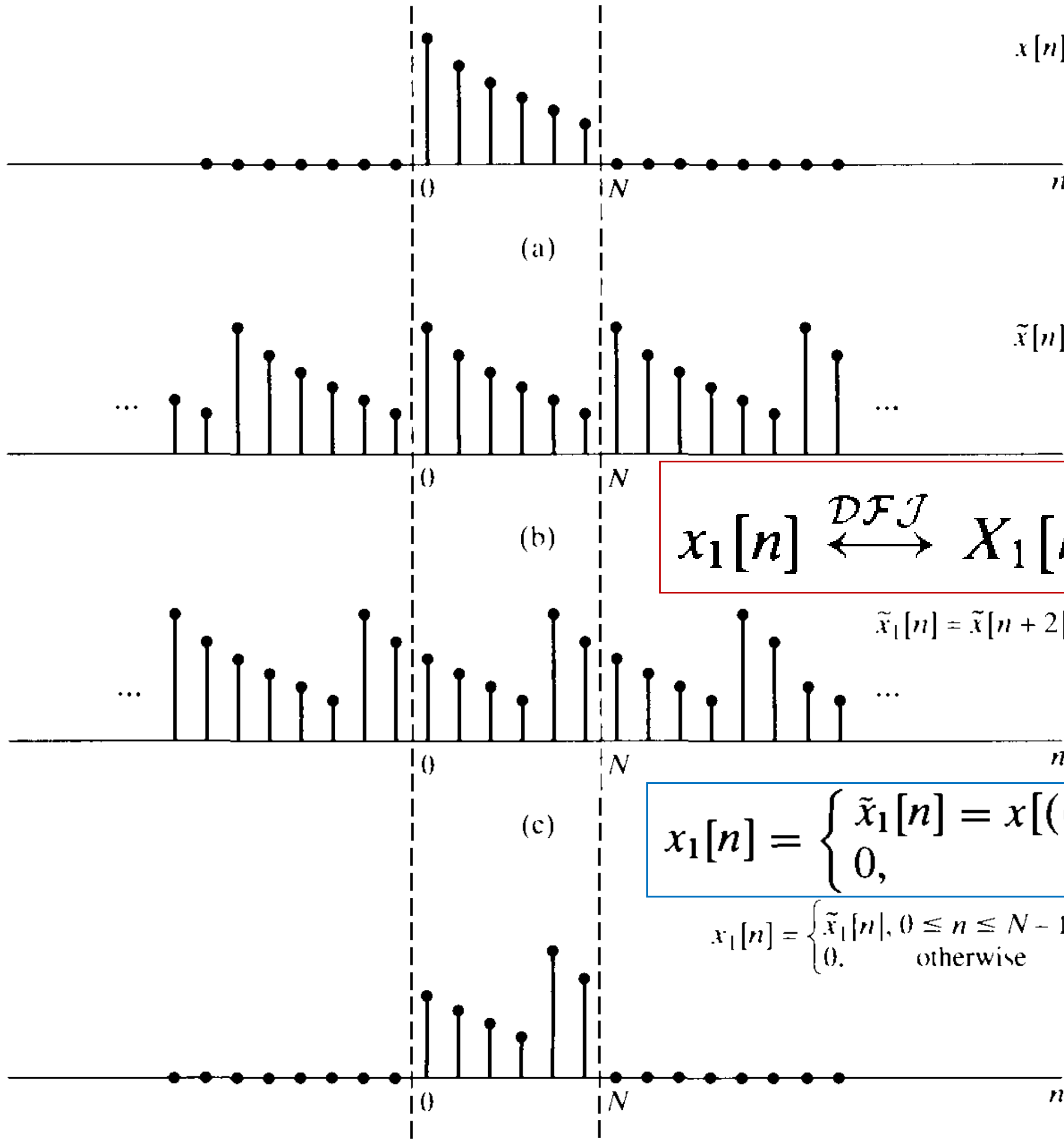
$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j2\pi km/N}\right) e^{j2\pi kn/N}$$

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN].$$

Ιδιοτητες DFT

	Finite-Length Sequence (Length N)	N-point DFT (Length N)
1.	$x[n]$	$X[k]$
2.	$x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3.	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4.	$X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5.	$x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6.	$W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7.	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k] X_2[k]$
8.	$x_1[n] x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell) X_2[((k-\ell))_N]$
9.	$x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10.	$x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11.	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{\mathrm{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12.	$j\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$X_{\mathrm{op}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13.	$x_{\mathrm{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14.	$x_{\mathrm{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{J}m\{X[k]\}$
	Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15.	Symmetry properties	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X[((-k))_N]\} \\ \mathcal{J}m\{X[k]\} = -\mathcal{J}m\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \sphericalangle\{X[k]\} = -\sphericalangle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16.	$x_{\mathrm{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17.	$x_{\mathrm{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{J}m\{X[k]\}$

Κυκλικη Μετατοπιση Πεπερασμενου Σηματος



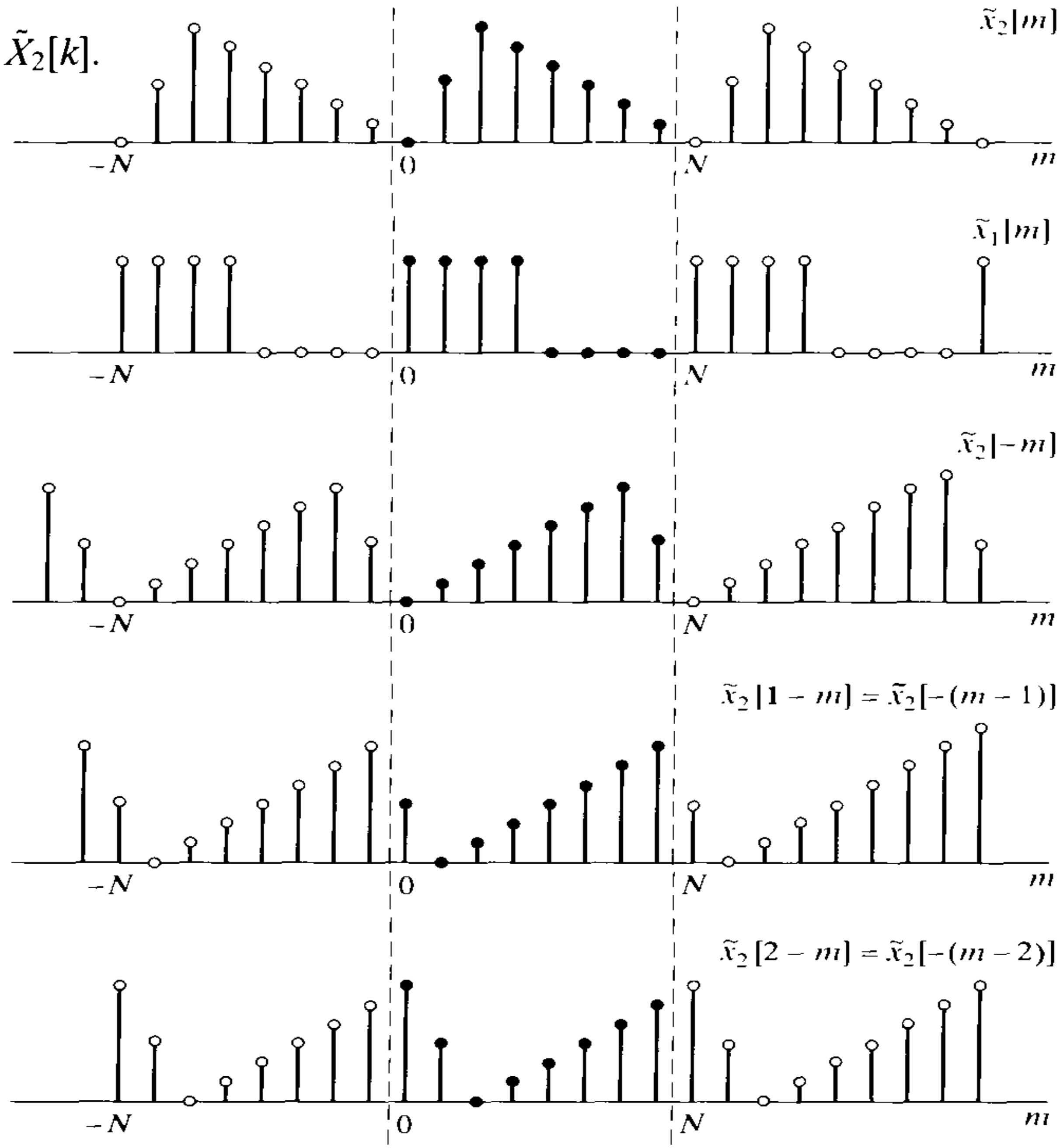
$$x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X[k]$$

$$x_1[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m} X[k].$$

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[((n-m))_N], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Διαδικασια για Περιοδικη-Κυκλικη Συνελιξη

$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k].$$



Πολλαπλασιασμος DFS ←→ Κυκλικη Συνελιξη

$$\boxed{\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2[m]\tilde{x}_1[n-m].}$$

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \right) W_N^{kn}$$

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} \right)$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} = W_N^{km} \tilde{X}_2[k]}$$

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \tilde{X}_2[k] = \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \right) \tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]}$$

Πολλαπλασιασμος DFT ←→ Κυκλικη Συνελιξη

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$$

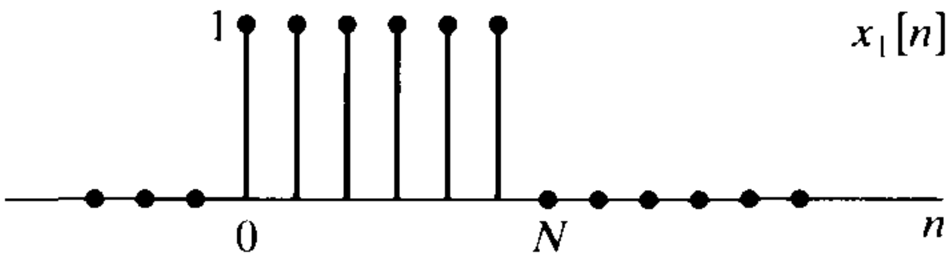
$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m], \qquad 0 \le n \le N-1,$$

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N]x_2[((n-m))_N], \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], \qquad 0 \le n \le N-1$$

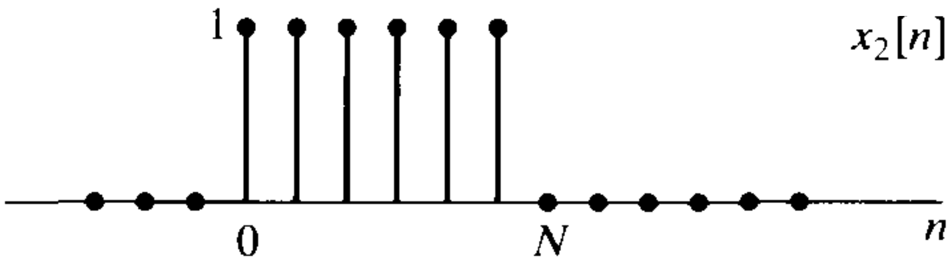
$$x_3[n] = x_1[n] \; Ⓝ \; x_2[n]$$

Κυκλικη Συνελιξη Περιοδου N= L Δυο Παλμων μηκους L σημειων



(a)

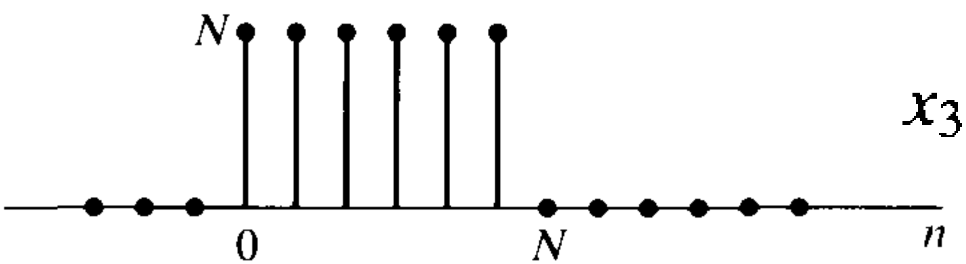
$$X_1[k] = X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



(b)

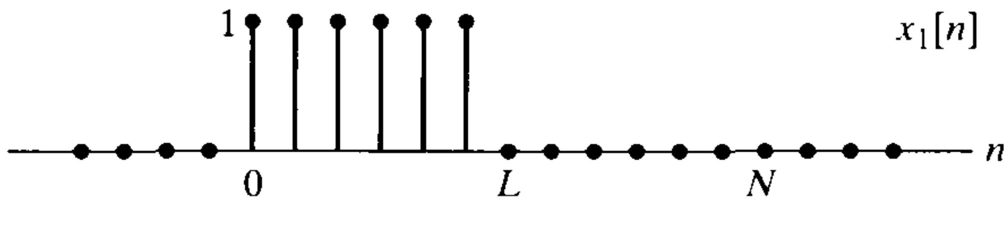
$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] = \begin{cases} N^2, & k = 0, \\ 0. & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$x_3[n] = x_1[n]$ Ⓝ $x_2[n]$

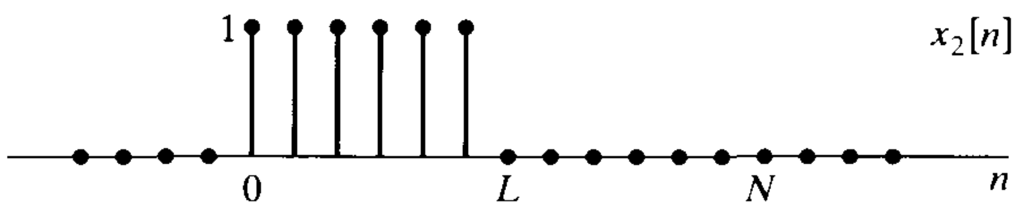


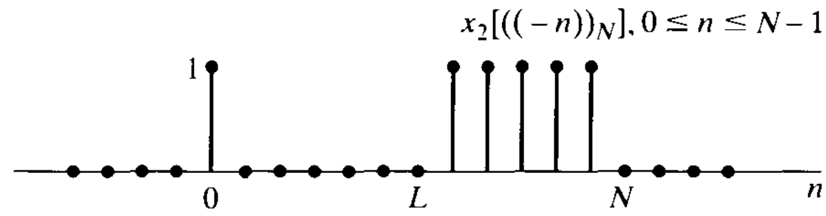
$$x_3[n] = N, \qquad 0 \le n \le N-1$$

Κυκλικη Συνελιξη Περιοδου N= 2L Δυο Παλμων μηκους L σημειων

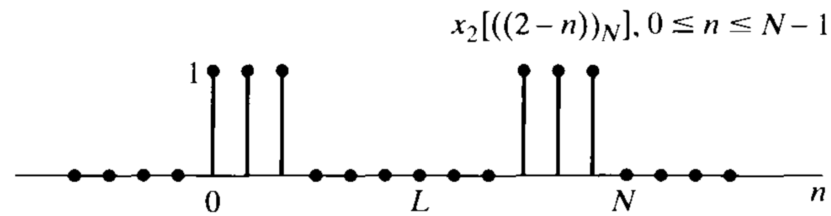


(a)

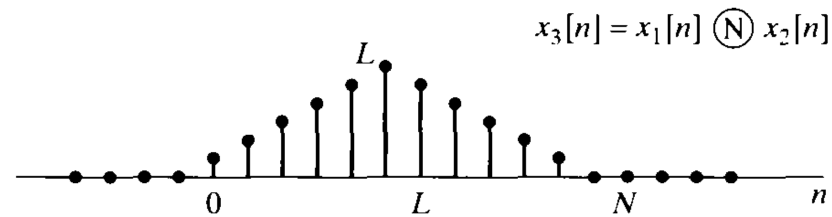




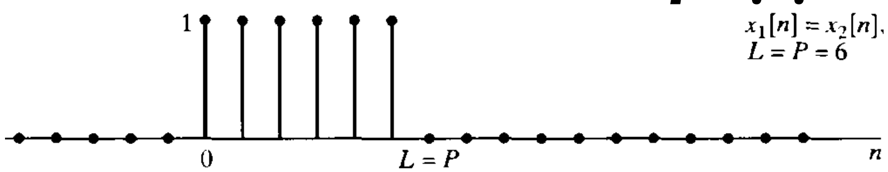
(c)



(d)

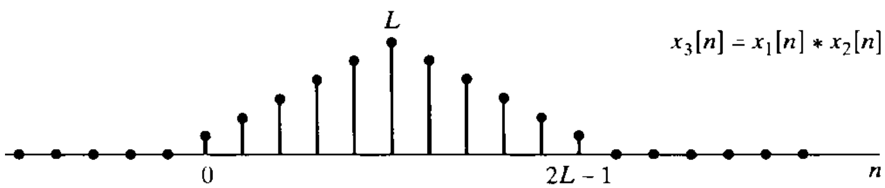


Παραδειγμα: Κυκλικη Συνελιξη απο Αναδιπλωση Γραμμικης Συνελιξης



(a)

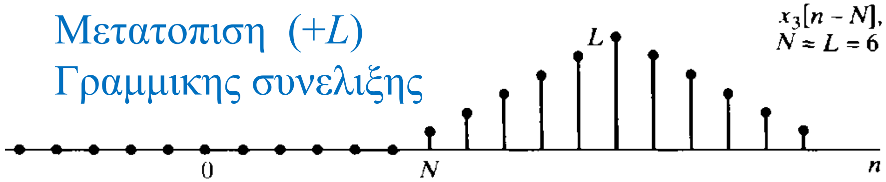
Δυο σηματα ισα μηκους L



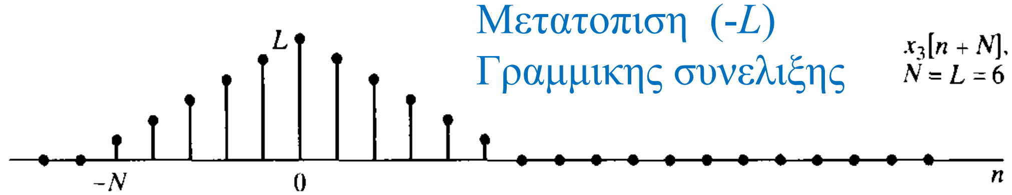
(b)

Γραμμικη συνελιξη

Μετατοπιση (+L)
Γραμμικης συνελιξης

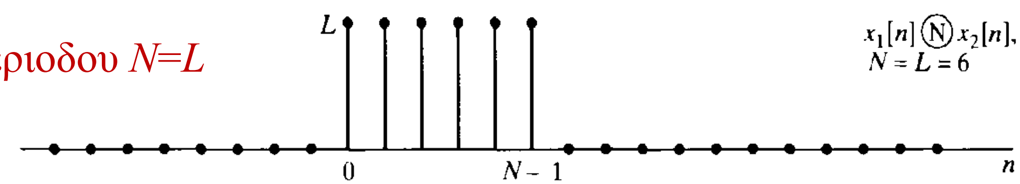


Μετατοπιση (-L)
Γραμμικης συνελιξης



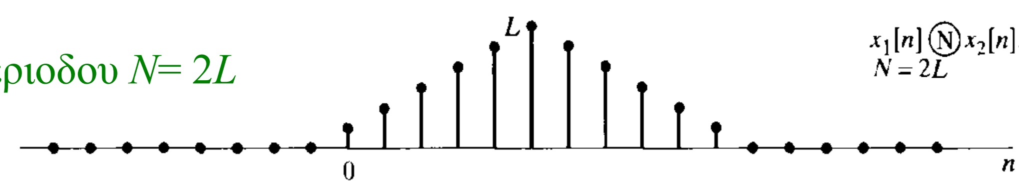
(d)

Κυκλικη συνελιξη περιοδου N=L



(e)

Κυκλικη συνελιξη περιοδου N= 2L



Μερικες Εφαρμογες του DFT

DFT Αλγοριθμος Συνελιξης Δυο Πεπερασμενων Σηματων

0. **Σημα *x[n]* μηκους *L* σημειων, Σημα *h[n]* μηκους *P* σημειων.**
1. **Zero-pad τα δυο σηματα ωστε να εχουν μηκος $N > L+P-2$.**
2. **Υπολογισμος των δυο DFT μηκους *N* σημειων: $X[k]$, $H[k]$**
3. **Πολλαπλασιασμος των DFT: $Y[k]=X[k]H[k]$, $k=0,1,\ldots,N-1$.**
4. **Αντιστροφος DFT (*N* σημειων) του γινομενου:**

   IDFT$\{Y[k]\}$ → $y[n]=x[n]*h[n]$, $n=0,1,\ldots,L+P-2$.

Πολυπλοκοτητα Συνελιξης στον Χρονο:

Πολυπλοκοτητα Συνελιξης μεσω DFT / FFT:

(stationary) Spectrum Analysis by DFT

Συμβολισμος Συχνοτητων
ΨΕΣ: ΣΧ: Ω, ΔΧ: ω

Fourier transform of continuous time signal

Not band-limited

Frequency response of antialiasing filter

Not ideal

Fourier transform of output of antialiasing filter

Fourier transform of sampled signal

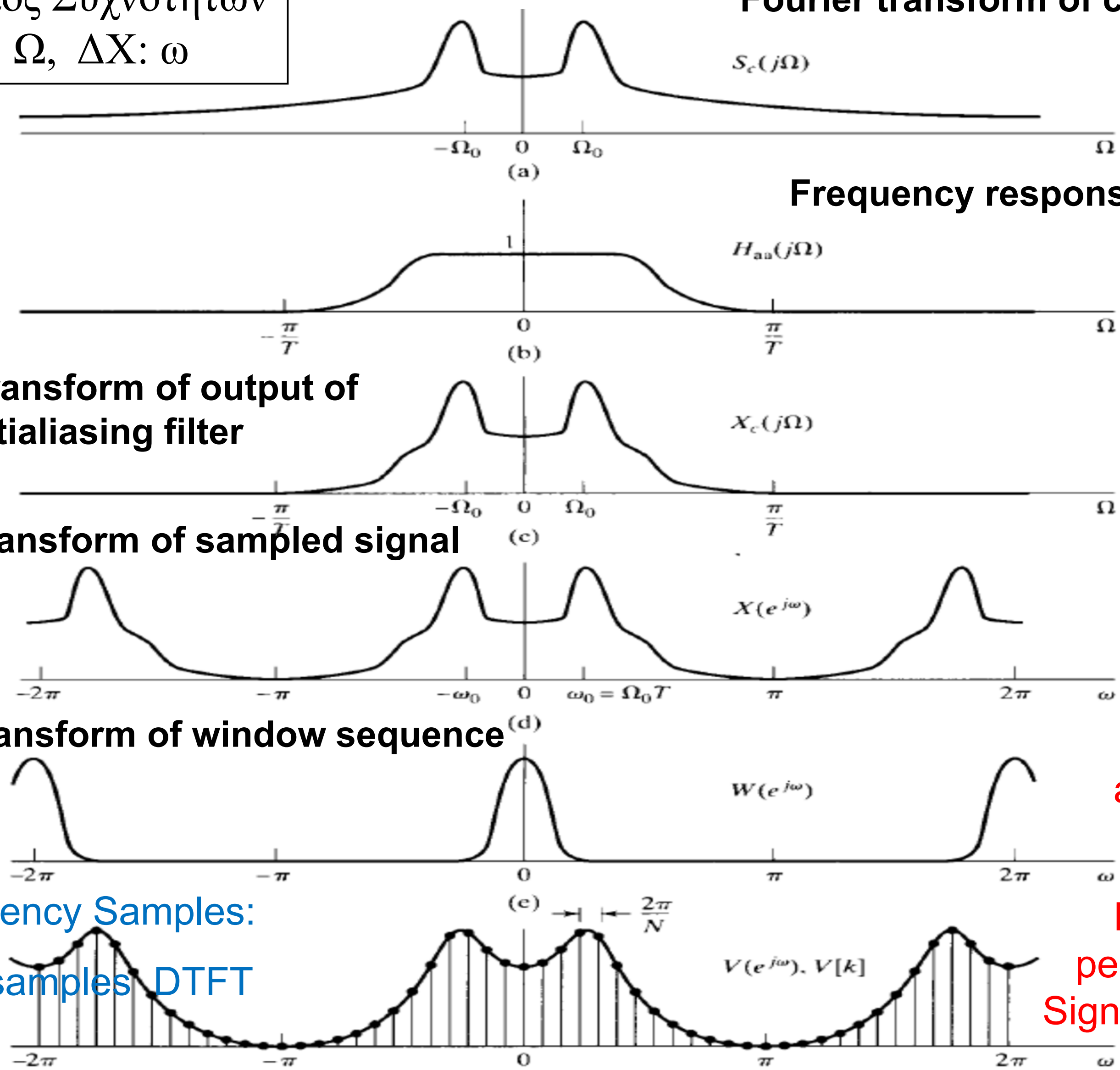
Fourier transform of window sequence

Window DTFT may also have side lobes

Frequency Samples:

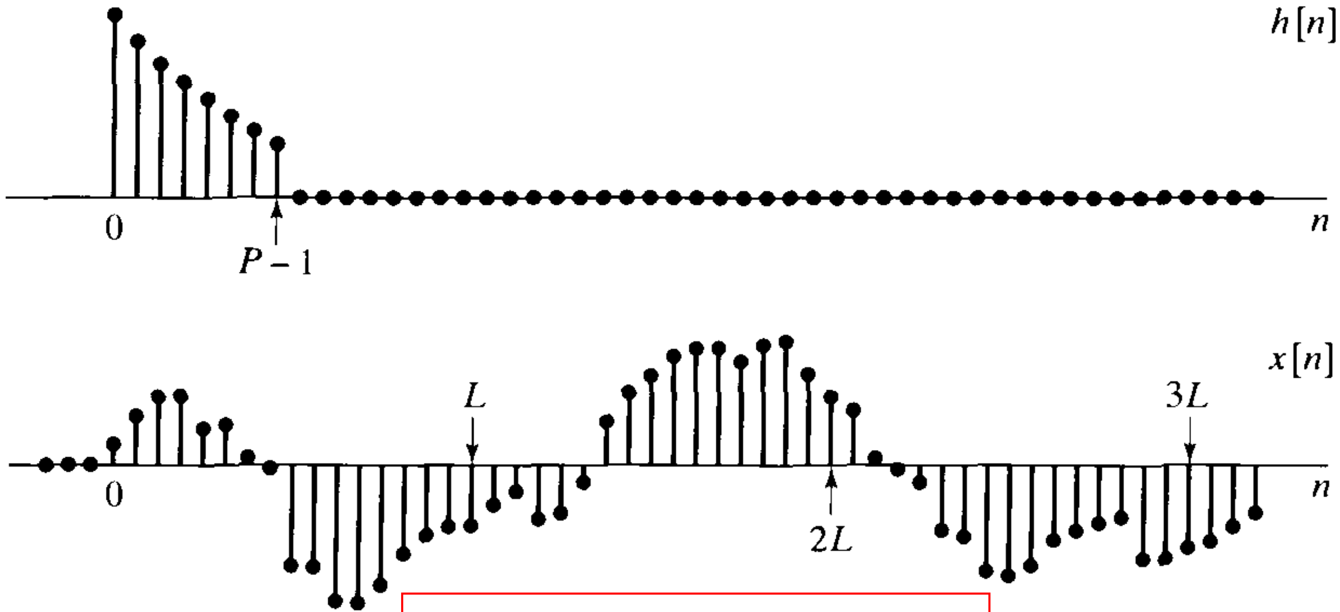
DFT samples DTFT

DTFT Envelope is periodic convolution of Signal FT with Window FT



Fourier transform of windowed signal segment and frequency samples by DFT

DFT Υλοποιηση ΓΧΑ Συστηματος ως Τμηματικη Συνελιξη



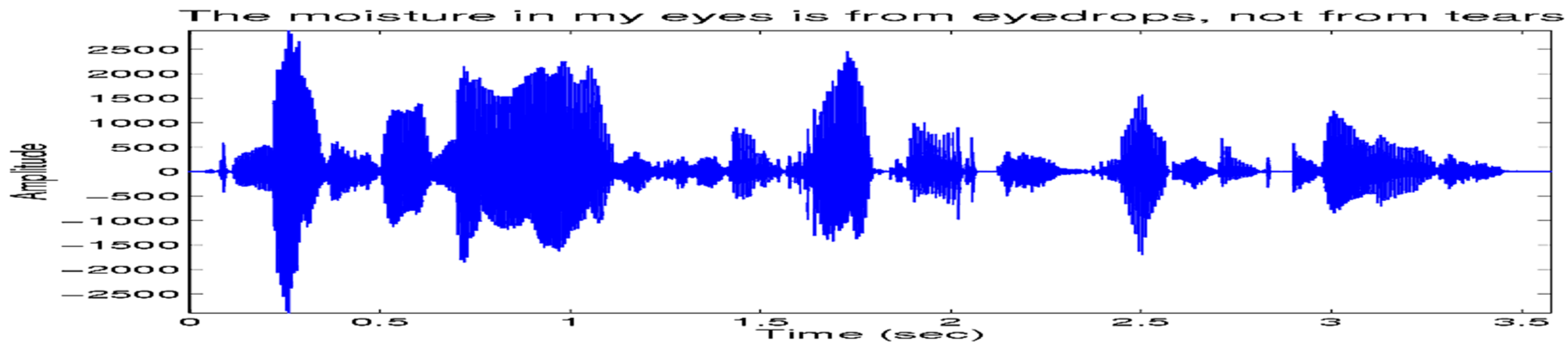
$$\boxed{x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL]}$$

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \le n \le L - 1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

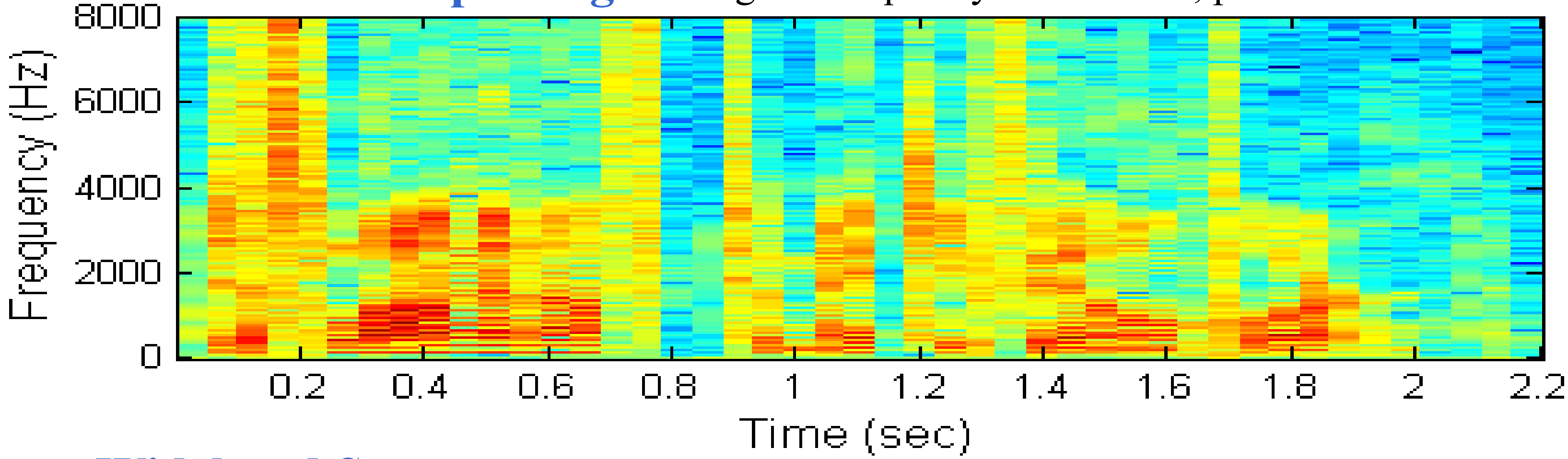
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL]$$

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]$$

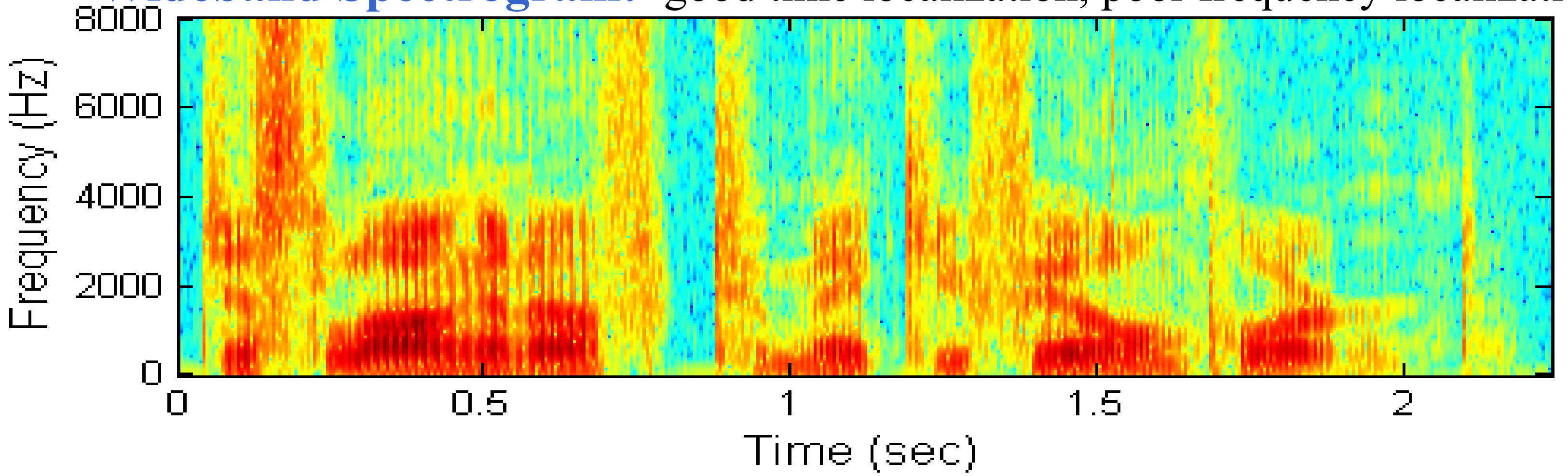
Speech Signal



Narrowband Spectrogram: good frequency localization, poor time localization



Wideband Spectrogram: good time localization, poor frequency localization



Υπολογιστικη Πολυπλοκοτητα του DFT

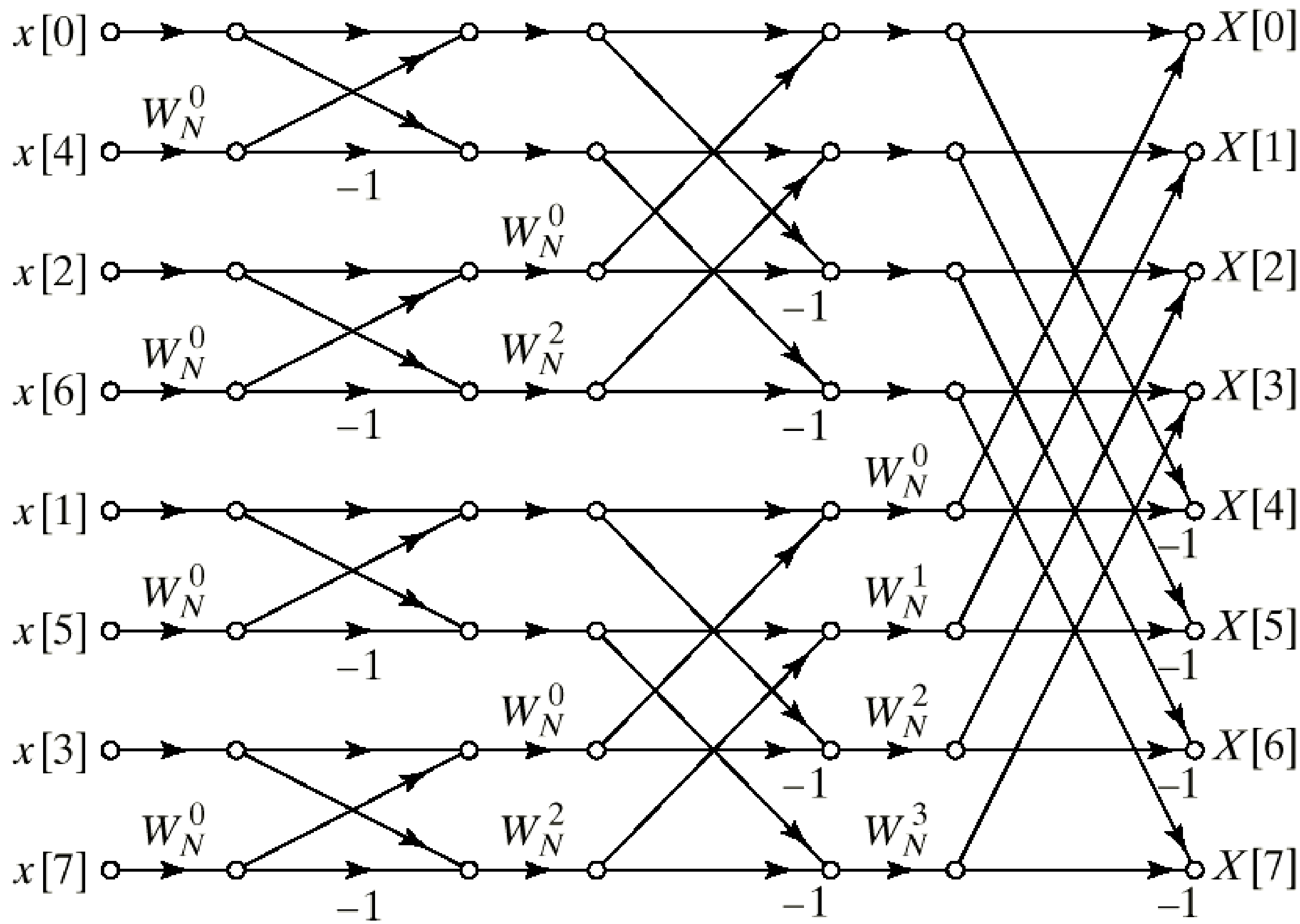
- DFT N σημειων:

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1}$$

- Αμεσος Υπολογισμος: N complex multiplications and N-1 complex additions for each of the N DFT values $\Rightarrow \mu(N) = N^2$ complex multiplications.

$$N = 1024 \Rightarrow \mu(N) \approx 10^6$$

FFT: Decimation in Time (Restructured)



$\mu(N) = (N/2)\log_2 N$ complex multiplications

Ιδιοτητες του DFT

- **Διακριτος και Περιοδικος στο Χρονο και Συχνοτητα**

- **Frequency sampling**: (για υπολογισμο DTFT Φασματος) ←→ περιοδικη επαναληψη σηματος στο χρονο

- **Πολ/σμος DFTs** (για υπολογισμο συνελιξης) ←→ κυκλικη συνελιξη

- **Ορθογωνιος Αλγοριθμος**

- **Χρονο-συχνοτικη κατανομη** (υπολογισμος STFT)

Διακριτοι Ορθογωνιοι Μετασχηματισμοι

Εισοδος: Αρχικο σημα-διανυσμα: $\mathbf{x} = \left[x[0], x[1], \ldots, x[N-1]\right]^T$

Εξοδος: Μετ/σμενο σημα-διανυσμα: $\mathbf{y} = \left[y[0], y[1], \ldots, y[N-1]\right]^T$

Ο NxN Πινακας Μετασχηματισμου $\mathbf{A} = \left[a[n,k]\right]$ ειναι Unitary

(**A** ειναι Ορθογωνιος για Πραγματικους πινακες):

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{I}$$

Γραμμικος Μετασχηματισμος (Πινακας x Διανυσμα εισοδου):

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^H \mathbf{x} \;, \qquad \left(\begin{array}{c} y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a^*[k,n] x[n] \\ k = 0, 1, \ldots, N-1 \end{array} \right)$$

Αντιστροφος Μετασχηματισμος (Αντιστροφος Πινακας x Διανυσμα Εξοδου):

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} \;, \qquad \left(\begin{array}{c} x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a[n,k] y[k] \\ n = 0, 1, \ldots, N-1 \end{array} \right)$$

Unitary Discrete Fourier Transform (DFT)

Αναλυση: $X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0,1,\ldots,N\text{-}1$

Συνθεση: $x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad n = 0,1,\ldots,N\text{-}1$

Διανυσμα χρονικων δειγματων: $\mathbf{x} = \left[x[0],\ldots,x[N\text{-}1]\right]^T$

Διανυσμα συχνοτικων δειγματων: $\mathbf{y} = \left[X[0],\ldots,X[N\text{-}1]\right]^T$

DFT Πινακας: $\mathbf{F} = [\frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{-kn}], \quad k,n = 0,1,\ldots,N\text{-}1$

$\mathbf{F}$ ειναι Unitary ($\mathbf{F}\mathbf{F}^H = \mathbf{I}$) και Συμμετρικος ($\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$)

Ευθυς: $\mathbf{y} = \mathbf{F}^H \mathbf{x}$, Αντιστροφος: $\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{y}$

Discrete Cosine Transform (DCT)

$$\mathbf{C}=\left[c[k,n]\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{N}}, & k=0,\ 0\le n\le N-1\\ \sqrt{2/N}\cos\left[\dfrac{\pi k(2n+1)}{2N}\right], & 1\le k\le N-1,\ 0\le n\le N-1\end{cases}$$

DCT διανυσματος $\mathbf{x}=\left[x[0],x[1],\ldots,x[N-1]\right]^T$:

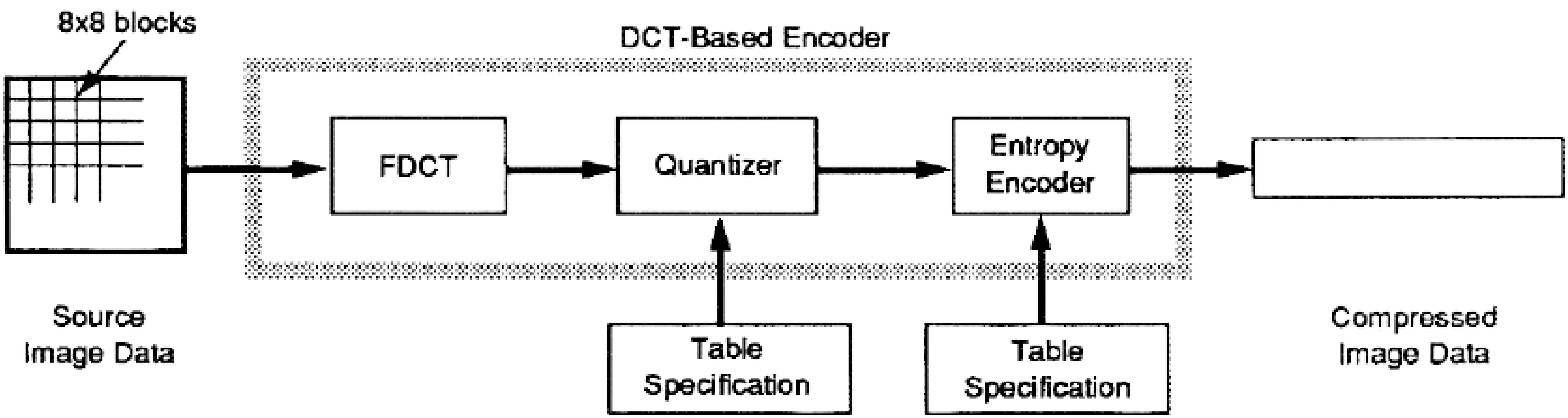
$$y[k]=\beta[k]\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left[\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right],\quad 0\le k\le N-1$$

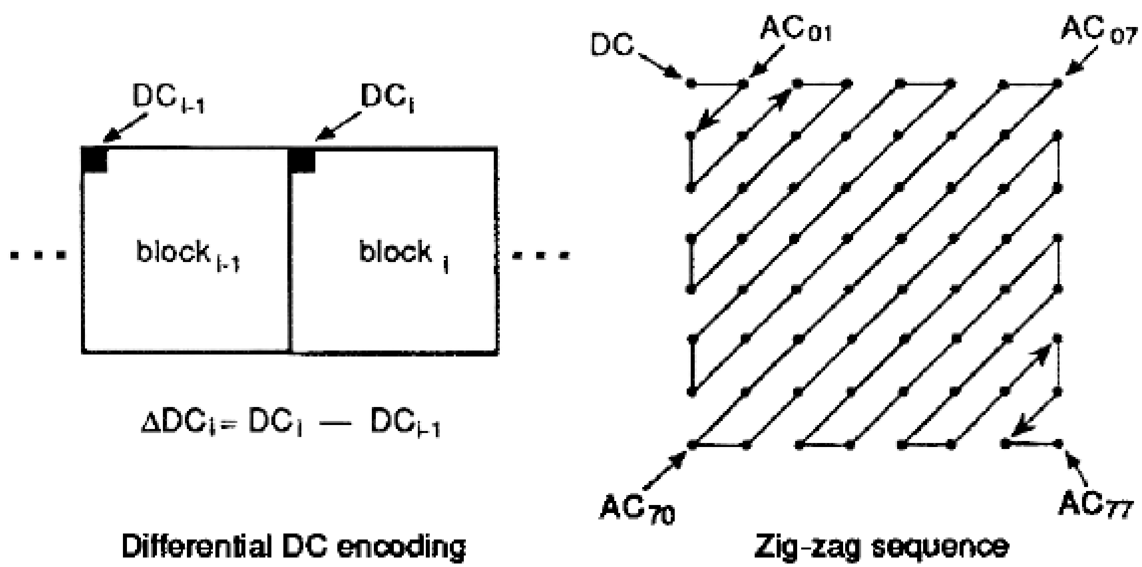
$$\beta[0]=\sqrt{1/N},\qquad \beta[k]=\sqrt{2/N}\qquad 1\le k\le N-1$$

Αντιστροφος DCT:

$$x[n]=\sum_{\kappa=0}^{N-1}\beta[k]y[k]\cos\left[\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right],\quad 0\le n\le N-1$$

Εφαρμογη DCT: Συμπιεση Στατικών Εικόνων με προτυπο JPEG



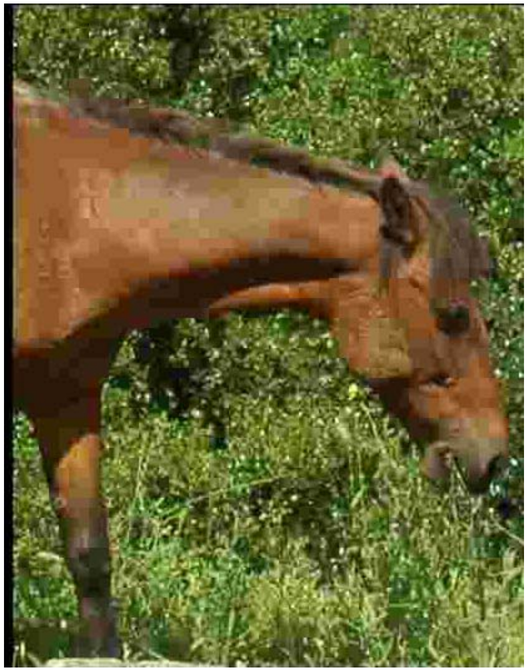


Wallace, Commun. ACM 1991

RAW
(→tiff)

JPEG
(Q=100)

JPEG
(Q=25)



JPEG
(Q=10)