Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων

- $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t)$ (αντίστοιχο αυτόνομο σύστημα)
- Σημείο ισορροπίας x_0: $A\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$ και αν $\det\{A\} = 0$ τότε $\exists\, \bar{x}' \neq 0$ τω $A\bar{x}' = 0$
- Αρκεί να εξεταστεί η ευστάθεια του $\bar{x} = 0$:

  π.χ. με συνάρτηση Lyapunov $V(x) = x^T P x$.

(a) Ευστάθεια από τη θέση πόλων:

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad \mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}\}x(0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{adj[sI-A]x(0)}{\det[sI-A]}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\overbrace{e_k^T\, adj[sI-A]x(0)}^{=\pi_k(s)}}{\psi(s)}\right\}, \quad e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \to k \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

- Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι πόλοι του συστήματος (δηλ. $\psi(\lambda_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$), τότε:

$$\psi(s) = \prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n_r}(s-r_i)\prod_{i=1}^{n_c}(s-r_i-j\omega_i)\cdot(s-r_i+j\omega_i) \Rightarrow \psi(s) = \prod_{i=1}^{n_r}(s-r_i)\prod_{i=1}^{n_c}\left[(s-r_i)^2+\omega_i^2\right] \text{ άρα:}$$

$$x_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n_r}\frac{a_{k,i}}{s-r_i} + \sum_{i=1}^{n_c}\frac{b_{k,i}\cdot s + c_{k,i}}{(s-r_i)^2+\omega_i^2}\right\} = \sum_{i=1}^{n_r} a_{k,i}\cdot e^{r_i t} + \sum_{i=1}^{n_c} b_{k,i}\cdot e^{r_i t}\sin(\omega_i t + \theta_i) \quad \text{όπου } \lambda_i = r_i \pm j\omega_i$$

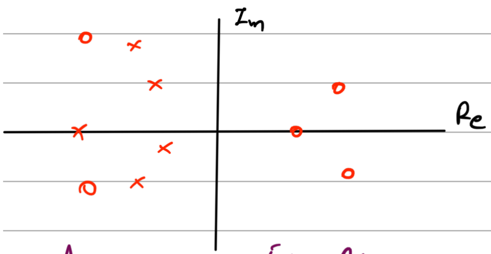
Θεώρημα:

i) αν όλοι οι πόλοι έχουν $r_i < 0$, τότε το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

ii) αν $\exists$ τουλ. 1 πόλος με $r_i > 0$, τότε το σύστημα είναι ευσταθές

iii) αν όλοι οι πόλοι έχουν $r_i \leq 0$ και όλοι οι πόλοι με $r_i = 0$, $\pm j\omega_i \neq 0$ (πάνω στον φανταστικό άξονα) με πολλαπλότητα 1, τότε το σύστημα είναι ευσταθές κατά Lyapunov αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές (δηλαδή εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις συχνοτήτων ω_i)

iv) αν $\exists$ πόλοι με $r_i = 0$, $\pm j\omega_i \neq 0$ πολλαπλότητας > 1, τότε το σύστημα είναι είτε οριακά ευσταθές, είτε ασταθές.

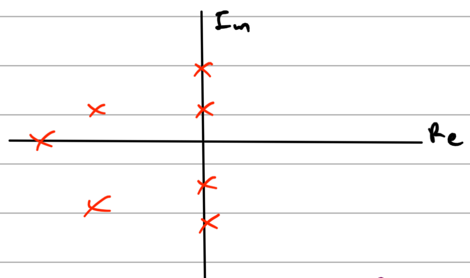


Ασυμπτωματικά Ευσταθές

Ευσταθές

x: πόλοι
o: μηδενικά

Οριακά ευσταθές ή ασταθές



Οριακά ευσταθές (ταλαντώσεις)

(β) Αλγεβρικά κριτήρια ευστάθειας

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\varphi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = a_n \det[sI - A]$

Θεωρ. Stodole: Αν όλοι οι πόλοι έχουν $r_i < 0$, τότε όλοι οι συντελεστές $a_i \neq 0$ και ομόσημοι

↳ Αναγκαία, όχι ικανή συνθήκη.

Παράδειγμα: $\varphi(s) = s^3 + s^2 + 2s + 8 = (s+2)(s^2 - s + 4) \Rightarrow$ πόλοι: $p_1 = -2$, $p_{2,3} = \frac{1}{2}[1 \pm j\sqrt{15}]$ → ασταθές

Διάταξη Routh

για το: $\varphi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots (a_0 \text{ ή } a_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots (a_0 \text{ ή } a_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\
s^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
s^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
s^1 & A_{n,1} & A_{n,2} & 0 & 0 \dots & 0 & & \dots & 0 \\
s^0 & A & 0 & 0 & \dots & 0 & & \dots & 0
\end{array}$$

$\leftrightarrow A_{11}\ A_{12}\ A_{13} \dots$

$\leftrightarrow A_{21}\ A_{22}\ A_{23} \dots$

όσα μηδενικά θέλουμε

όπου:

$$A_{k+1,i} = -\frac{1}{A_{k,1}} \det\begin{bmatrix} A_{k-1,1} & A_{k-1,i+1} \\ A_{k,1} & A_{k,i+1} \end{bmatrix} = \frac{A_{k,1} \cdot A_{k-1,i+1} - A_{k-1,1} \cdot A_{k,i+1}}{A_{k,1}} = A_{k-1,i+1} - \frac{A_{k-1,1} \cdot A_{k,i+1}}{A_{k,1}}$$

- Η k γραμμή αντιστοιχεί στο πολυώνυμο: $f_k(s) = A_{k,1} \cdot s^{n-k+1} + A_{k,2} \cdot s^{n-k+1} + \dots$

- Το πολυώνυμο $f_k(s)$ είναι το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του $f_{k-2}(s)$ με το $f_{k-1}(s)$, δηλ: $f_{k-2}(s) = f_{k-1}(s)\, \pi_{k-2}(s) - f_k(s)$

* Σε C++: $f_k(s) = f_{k-2}(s)\ \%\ f_{k-1}(s)$

Θεωρ. Routh:

i) Αν η διάταξη Routh τερματίσει κανονικά (όλα τα στοιχεία της 1ης στήλης $\neq 0$), τότε:

(α) αν τα στοιχεία της 1ης στήλης είναι ομόσημα τότε οι ρίζες έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος $\Rightarrow$ ασυμπτωτική ευστάθεια

(β) αν η 1η στήλη έχει m αλλαγές προσήμου τότε το $\varphi(s)$ έχει m ρίζες στο δεξί ημιεπίπεδο $\Rightarrow$ αστάθεια

Παράδειγμα: $\varphi(s) = s^3 + s^2 + 2s + 8 = (s+2)(s^2 - s + 4) \Rightarrow$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
s^2 & 1 & 8 & 0 & 0 \\
s^1 & -6 & 0 & 0 & 0 \\
s^0 & 8 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

↳ $m = 2$ αλλαγές προσήμου $\Rightarrow$ 2 πόλοι στο δεξί ημιεπίπεδο