



# Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

## Ζωνοπερατές Ψηφιακές Διαμορφώσεις

M-ary Signalling

M-ASK, M-PSK,

M-QAM, M-FSK

Πιθανότητα Λάθους Εσφαλμένου Ψηφίου

Αστερισμοί

**Δρ. Αθανάσιος Δ. Παναγόπουλος**  
**Καθηγητής ΕΜΠ**



# Εισαγωγή

Υπάρχουν πλεονεκτήματα για την χρήση  $M$ -ary ( $M = 4$ ) διαμόρφωσης από την απλή δυαδική διαμόρφωση.

ΓΕΝΙΚΑ οι επικοινωνίες  $M$ -ary χρησιμοποιούνται όταν κάποιος θέλει να σχεδιάσει ένα σύστημα αποδοτικό ως προς το φάσμα.

Το κέρδος στο εύρος ζώνης συμψηφίζεται με την έκπτωση σε σχέση με την πιθανότητα λάθους.

Η τυπική εφαρμογή της  $M$ -ιοστής διαμόρφωσης είναι όταν μια πηγή δυαδικής πληροφορίας παράγει μια ακολουθία και αυτή τοποθετείται σε ομάδες (blocks) των  $\lambda$  bits (δυαδικών ψηφίων).

**Ο αριθμός των προτύπων blocks είναι  $M = 2^\lambda$  και αντιστοιχούν σε  $M$  κυματομορφές.**



# Εισαγωγή

Κάθε block από  $\lambda$  bits είναι ένα σύμβολο (symbol).

Αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός των δυαδικών ψηφίων είναι

$$R_b = 1/T_b \text{ (bits per second- bps)}$$

**Τότε ο ρυθμός μετάδοσης συμβόλων είναι**

$$R_s = 1/T_s = 1/(\lambda T_b) = R_b/\lambda \text{ (symbols per sec).}$$

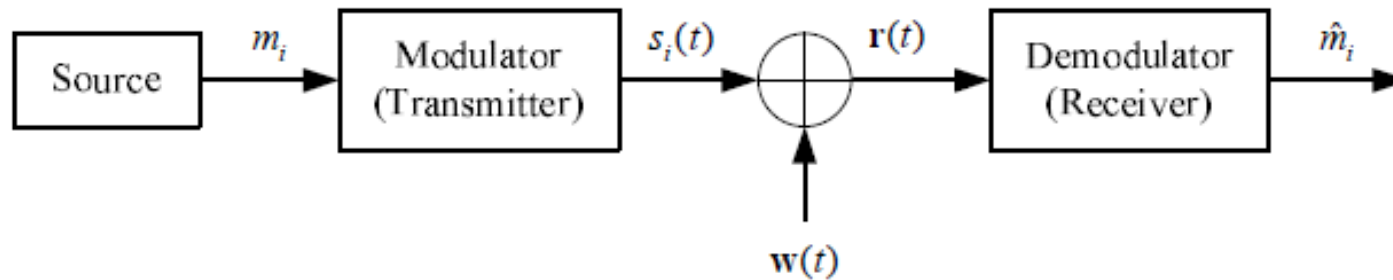
**Μια κυματομορφή από το διαμορφωτή απασχολεί τη μετάδοση για χρόνο  $T_s = \lambda T_b$  seconds και ο υπαινιγμός ότι οι απαιτήσεις σε εύρος ζώνης είναι της τάξης του  $1/T_s$ , Τότε έχουμε κέρδος σε εύρος ζώνης  $1/\lambda$  συγκρινόμενο με τη δυαδική διαμόρφωση.**



# Βέλτιστος Δέκτης

Έστω ότι μεταδίδουμε ένα από τα  $M$  μηνύματα  $m_1, m_2, \dots, m_M$ , μέσα από το κανάλι επικοινωνίας κάθε  $T_s$  seconds.

Αυτά μηνύματα αναπαριστούνται ως  $M$  signals  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ .



Ο διάυλος είναι ευρύς (φασματικά) για να μεταδίδεται το σήμα χωρίς παραμόρφωση. Η επίδραση του διαύλου είναι ο προσθετικός λευκός Gaussian θόρυβος με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση  $N_0/2$  (watts/hertz).

Το πρόβλημα έχοντας λάβει το σήμα  $\mathbf{r}(t) = s_i(t) + \mathbf{w}(t)$  συναρτήσει του χρόνου στο διάστημα  $[0, T_s]$  seconds είναι πώς να αποφασίσουμε με το ελάχιστο λάθος τι σήμα μεταδόθηκε?



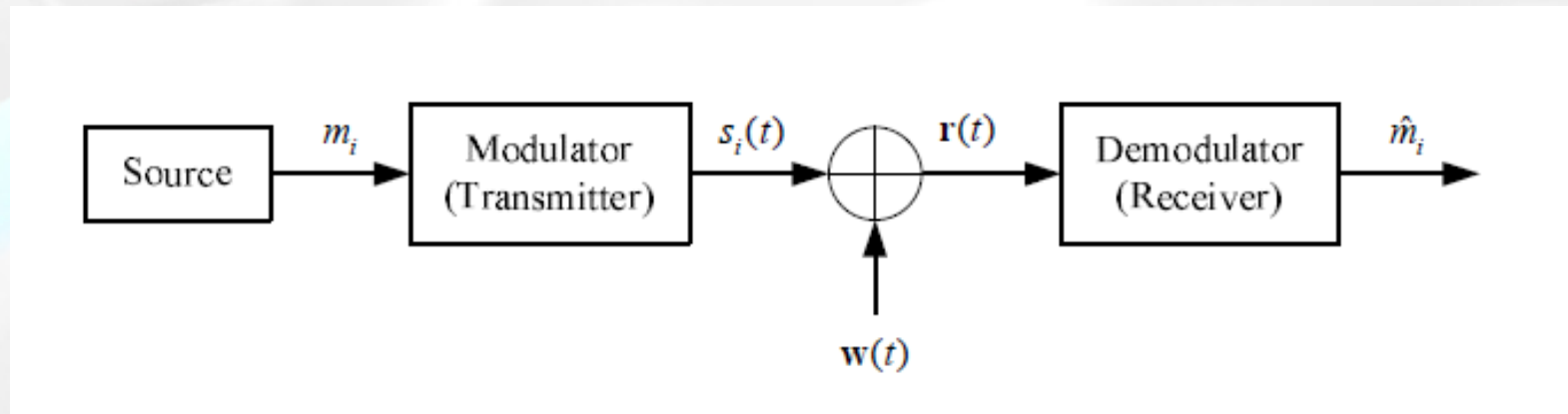
# Βέλτιστος Δέκτης

Ο καθορισμός του βέλτιστου δέκτη είναι παρόμοιος με του δέκτη στην δυαδική περίπτωση.

Τα  $M$  σήματα αρχικά αναπαριστώντα με μια ορθογώνια βάση (σύνολο)

$\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$ , όπου  $N \leq M$ .

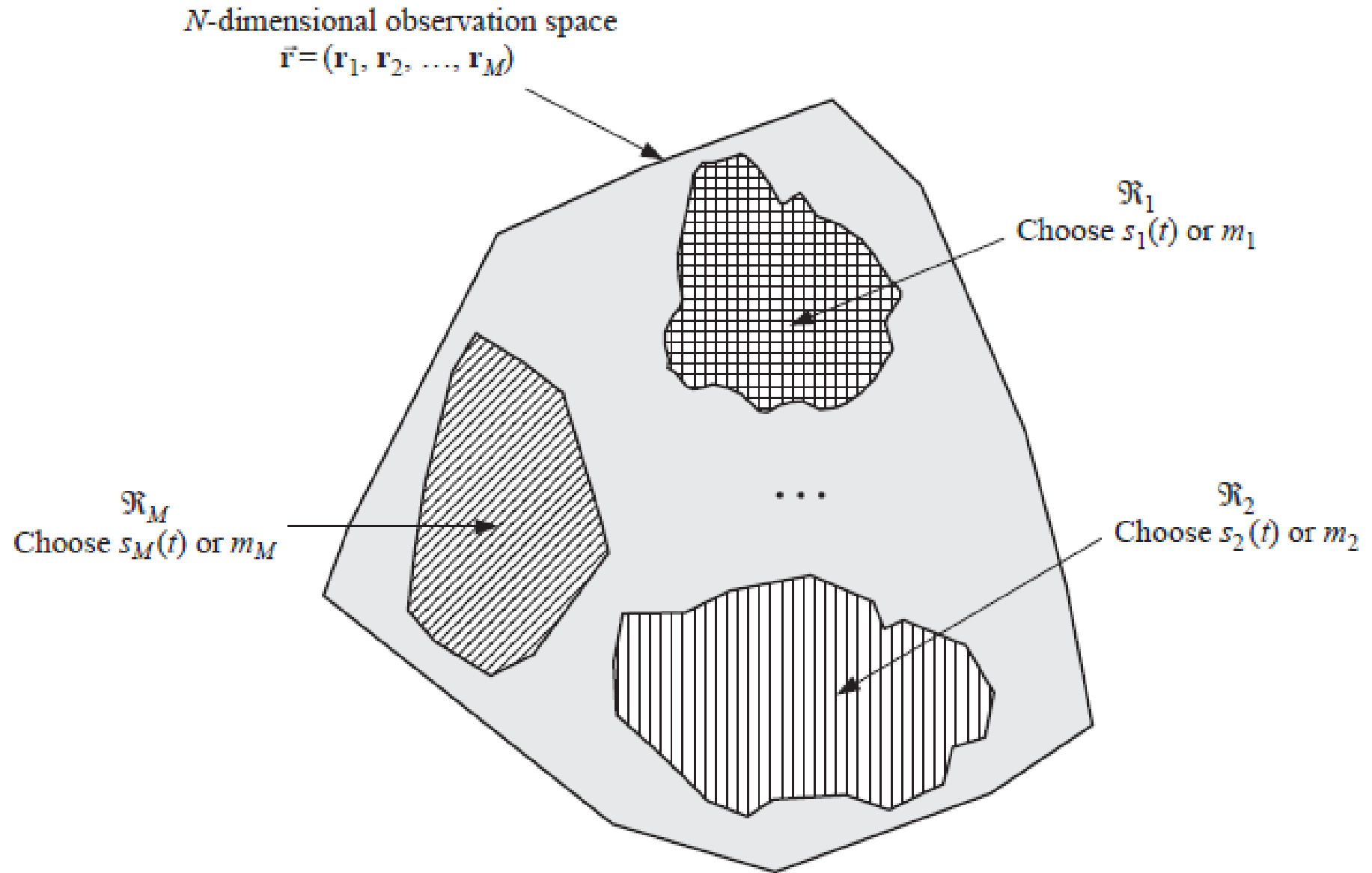
Το σύνολο των  $M$  συναρτήσεων μπορεί να βρεθεί π.χ. με τη μέθοδο Gram-Schmidt.



ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης  $N$  είναι ίσος με τον αριθμό των σημάτων  $M$ , εάν κανένα σήμα δεν είναι γραμμικός συνδυασμός



# Βέλτιστος Δέκτης



# Βέλτιστος Δέκτης

Ο Βέλτιστος Δέκτης είναι ο δέκτης ελάχιστης απόστασης.

***minimum-distance receiver***

$$\begin{aligned} &\text{choose } m_i \text{ if} \\ &\sum_{k=1}^N (r_k - s_{ik})^2 < \sum_{k=1}^N (r_k - s_{jk})^2; \\ &j = 1, 2, \dots, M; j \neq i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{choose } m_i \text{ if} \\ &\ln P_i - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (r_k - s_{ik})^2 > \ln P_j - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (r_k - s_{jk})^2; \\ &j = 1, 2, \dots, M; j \neq i, \end{aligned}$$





# Αστερισμός (Constellation)

Ένα σύνολο  $M$  διανυσμάτων (σημάτων) που ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο ονομάζεται Αστερισμός.

Ιδιότητες:

1. Κάθε σήμα αναπαρίσταται σε ένα σημείο του αστερισμού και αντιστοιχεί σε μια διαφορετική κυματομορφή/σύμβολο. Όλες οι κυματομορφές ανήκουν στην ίδια ορθοκανονική βάση.
2. Μέση ενέργεια συμβόλου:

$$E_s = \sum_{i=1}^M \|s_i\|^2 \cdot P_r(s_i), \quad \|s_i\|^2 = \sum_{j=1}^N (s_{ij})^2 \quad P_r(s_i) = \text{πιθανότητα μετάδοσης συμβόλου}, s_{ij} = \text{συνιστώσα}$$

Η Ελαχιστοποίηση της  $E_s$  με σκοπό την Εξοικονόμηση Ενέργειας Εκπομπής απαιτεί την τοποθέτηση των σημείων κοντά στο 0.

**Μικραίνουν οι Ευκλείδειες Αποστάσεις μεταξύ των Συμβόλων –**

**Αυξάνεται η Πιθανότητα Λάθους**

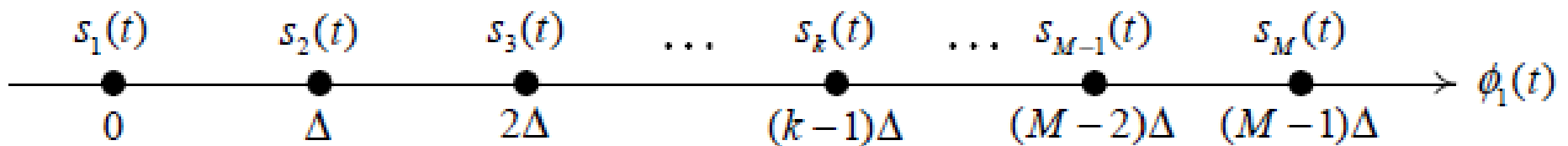




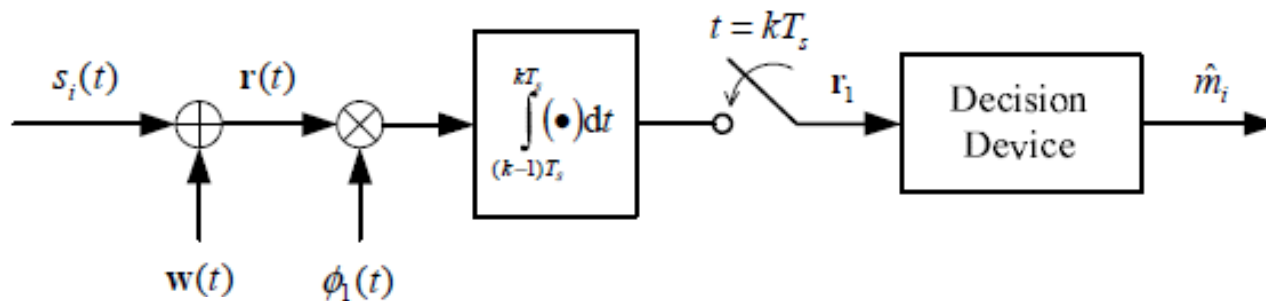
# M-ASK

Τα μεταδιδόμενα σήματα είναι της μορφής :

$$\begin{aligned}s_i(t) &= V_i \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T_s \\&= [(i-1)\Delta] \phi_1(t), \quad \phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T_s, \\&\quad i = 1, 2, \dots, M.\end{aligned}$$

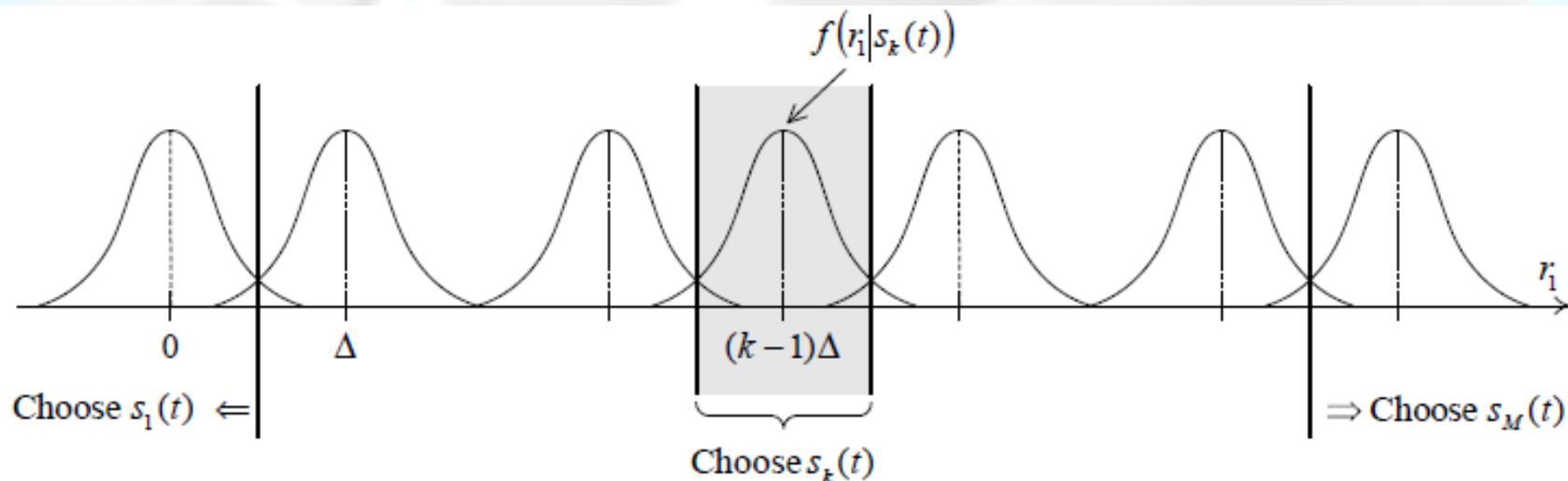


# M-ASK

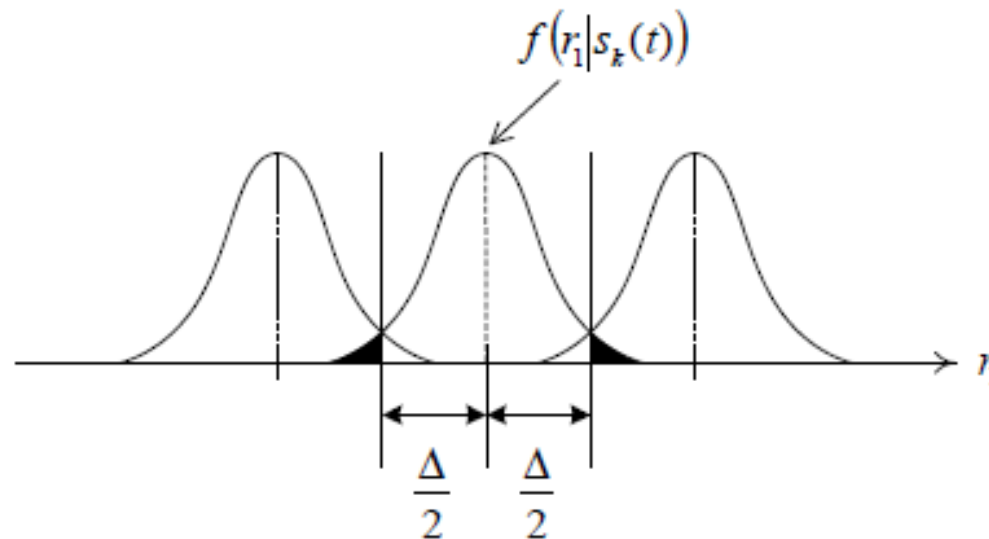


## Κανόνας Απόφασης

$$\text{Choose } \begin{cases} s_k(t), & \text{if } (k - \frac{3}{2}) \Delta < r_1 < (k - \frac{1}{2}) \Delta, \quad k = 2, 3, \dots, M - 1 \\ s_1(t), & \text{if } r_1 < \frac{\Delta}{2} \\ s_M(t), & \text{if } r_1 > (M - \frac{3}{2}) \Delta \end{cases}$$



# Error Probability M-ASK



$$P[\text{error}] = \sum_{i=1}^M P[s_i(t)] P[\text{error}|s_i(t)].$$

$$P[\text{error}|s_i(t)] = 2Q\left(\Delta/\sqrt{2N_0}\right), \quad i = 2, 3, \dots, M-1.$$

$$P[\text{error}|s_i(t)] = Q\left(\Delta/\sqrt{2N_0}\right), \quad i = 1, M.$$

$$P[\text{error}] = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\Delta/\sqrt{2N_0}\right).$$

# M-PSK

Το σύνολο των σημάτων για την M-PSK είναι:

$$s_i(t) = V \cos \left[ 2\pi f_c t - \frac{(i-1)2\pi}{M} \right], \quad 0 \leq t \leq T_s,$$

$$i = 1, 2, \dots, M; \quad f_c = k/T_s, \quad k \text{ integer}; \quad E_s = V^2 T_s / 2 \text{ joules}$$

$$s_i(t) = V \cos \left[ \frac{(i-1)2\pi}{M} \right] \cos(2\pi f_c t) + V \sin \left[ \frac{(i-1)2\pi}{M} \right] \sin(2\pi f_c t).$$

$$\phi_1(t) = \frac{V \cos(2\pi f_c t)}{\sqrt{E_s}}, \quad \phi_2(t) = \frac{V \sin(2\pi f_c t)}{\sqrt{E_s}}.$$

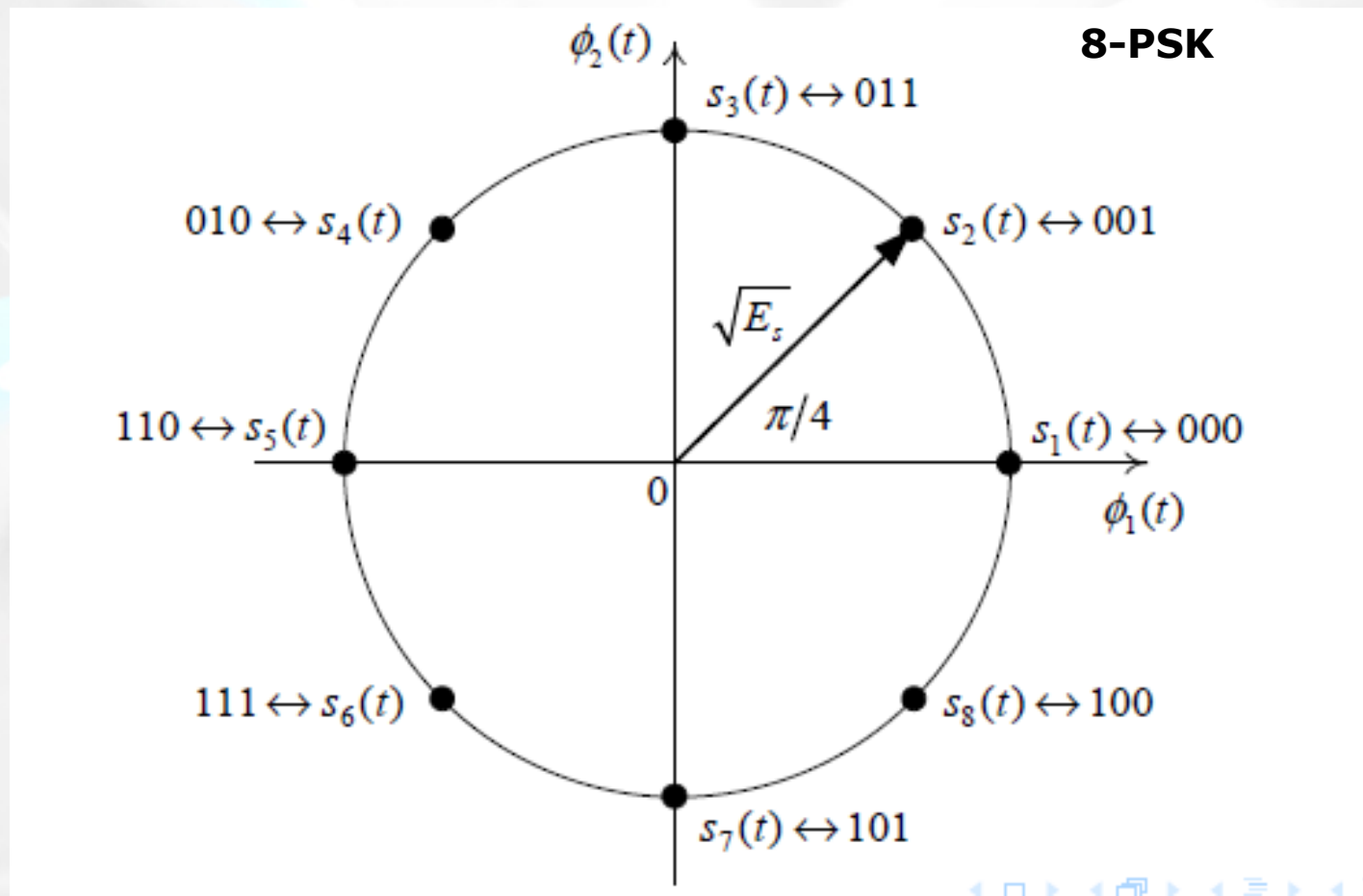
$$s_{i1} = \sqrt{E_s} \cos \left[ \frac{(i-1)2\pi}{M} \right], \quad s_{i2} = \sqrt{E_s} \sin \left[ \frac{(i-1)2\pi}{M} \right].$$



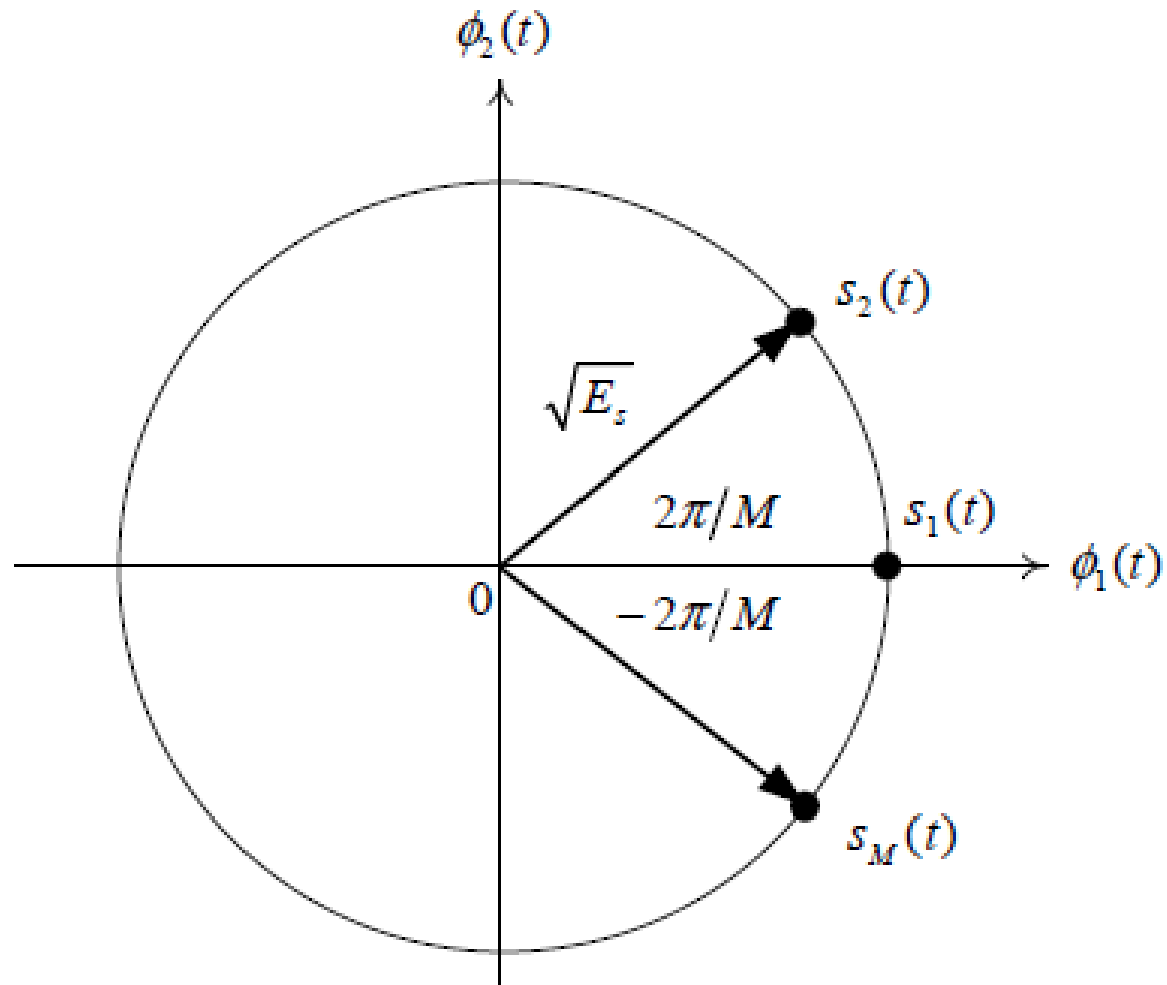
# M-PSK

Τα σήματα βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας  $\sqrt{E_s}$  απέχουν  $2\pi/M$  ακτίνια γύρω από τον κύκλο.

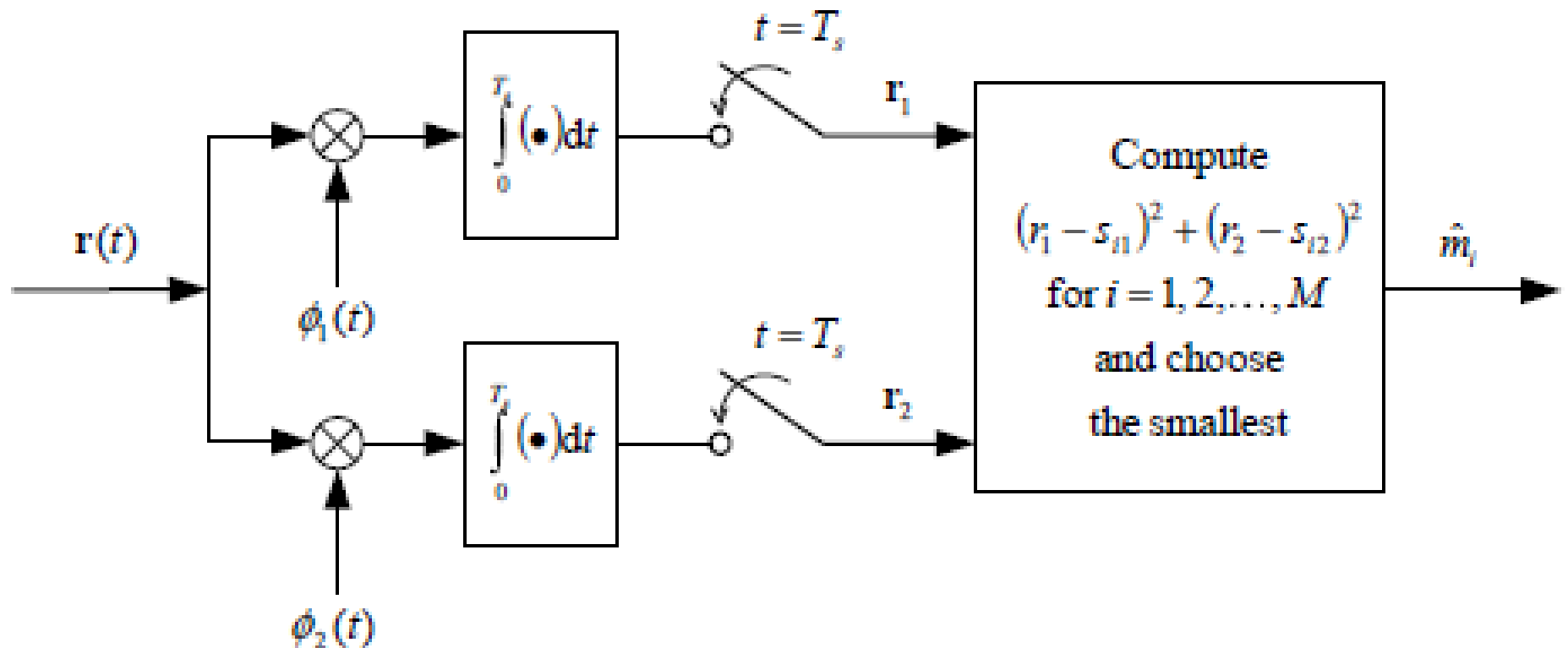
$\sqrt{E_s}$  απέχουν  $2\pi/M$



# M-PSK

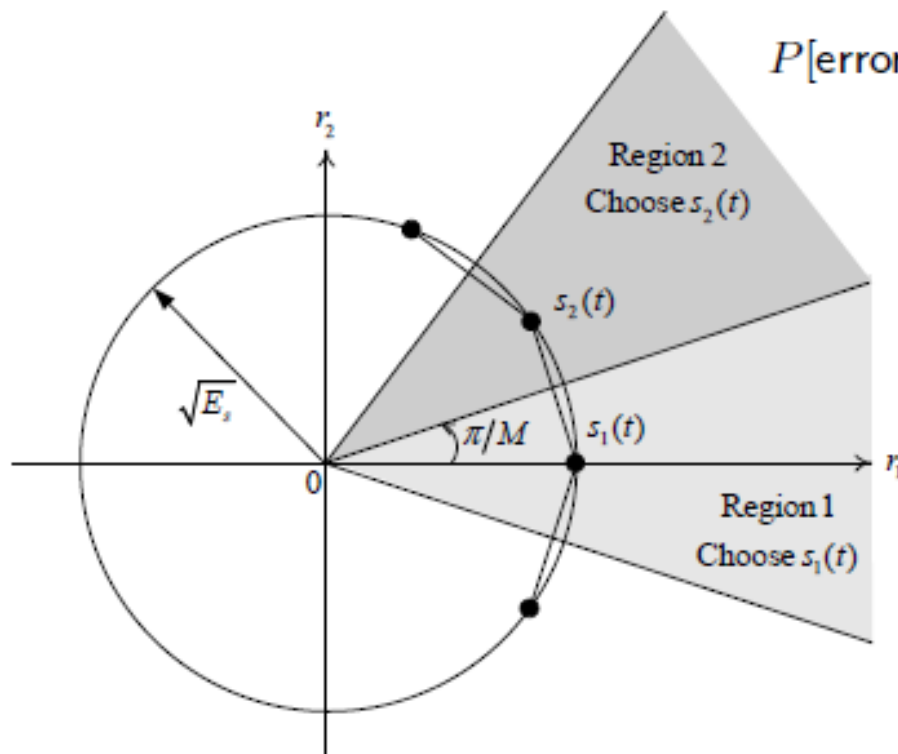


# Βέλτιστος Δέκτης M-PSK





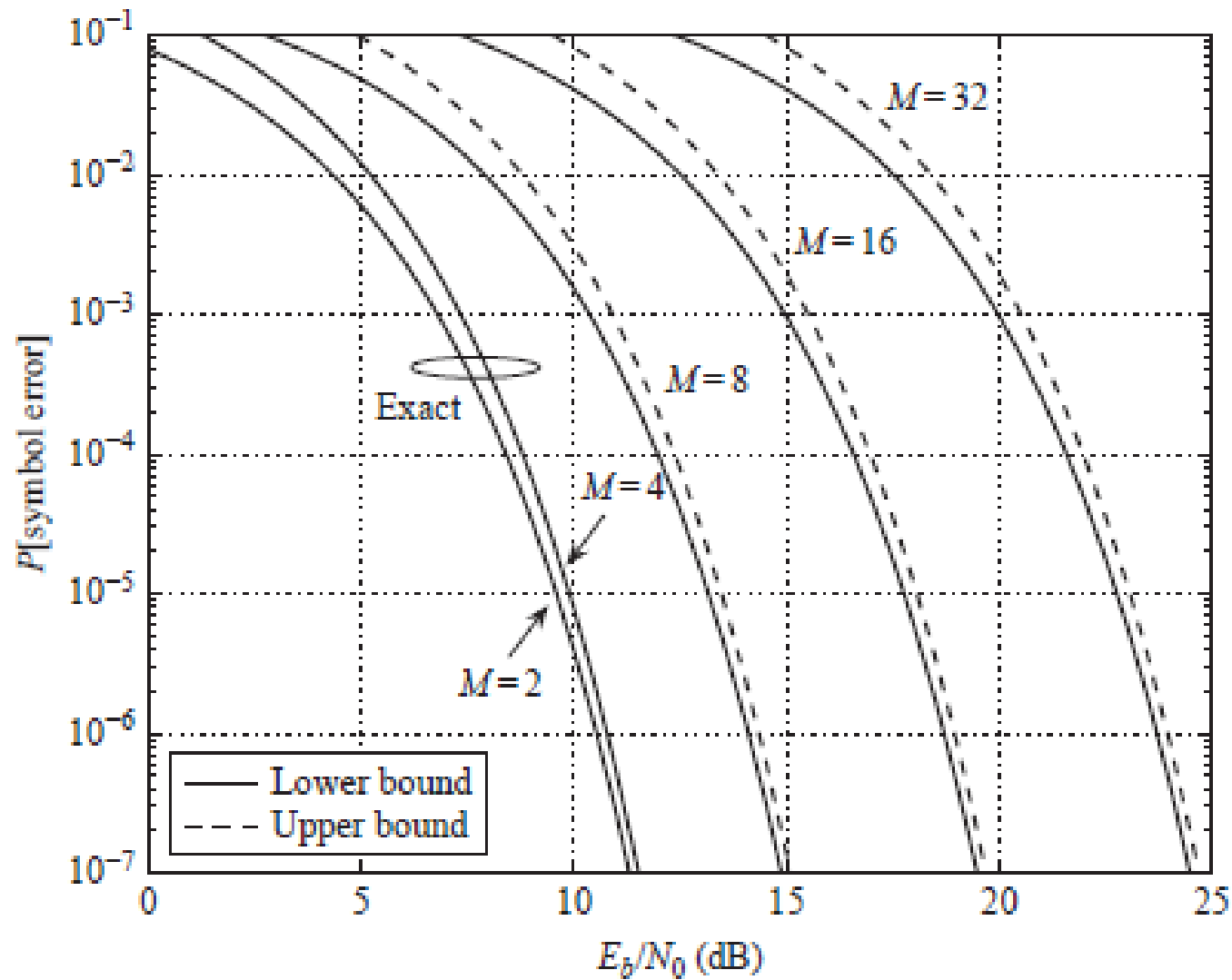
# Πιθανότητα Λάθους M-PSK



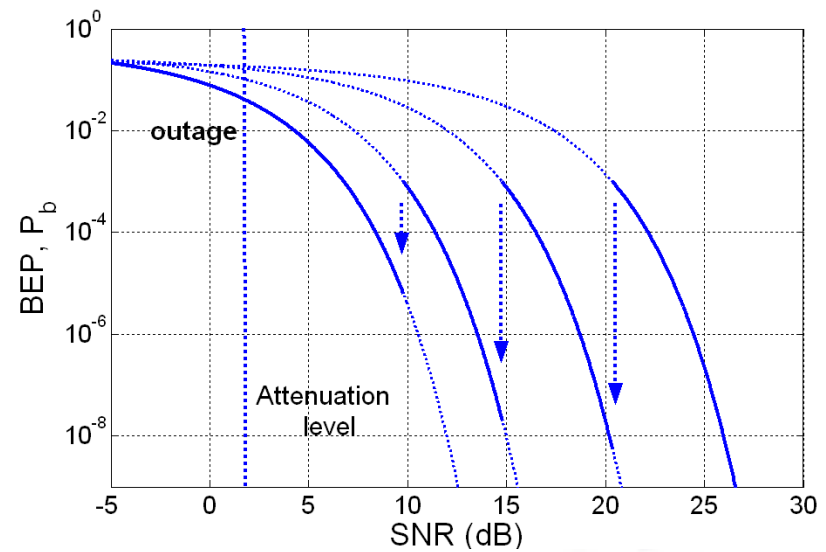
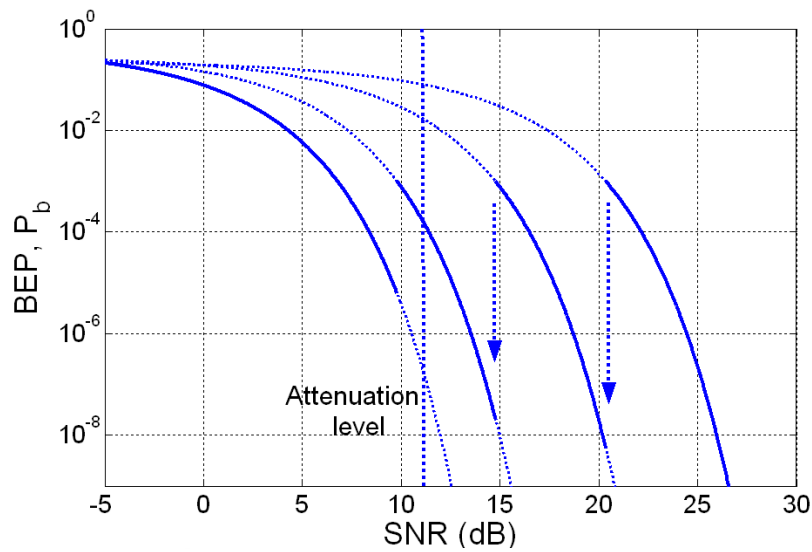
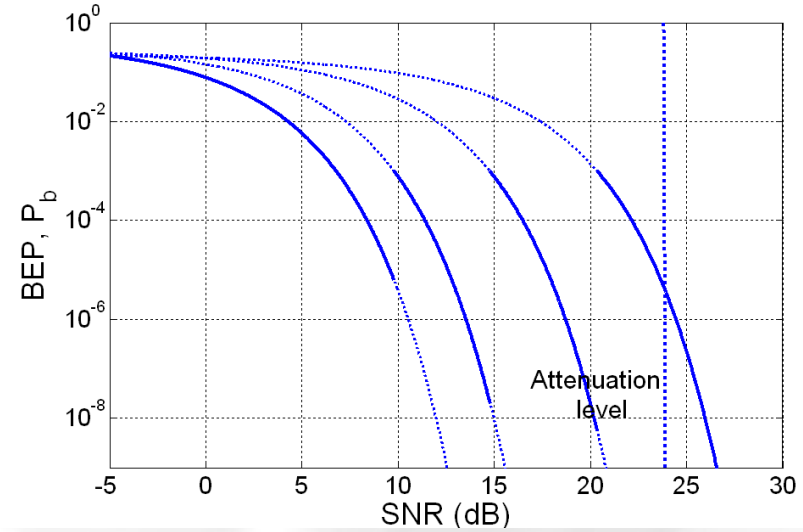
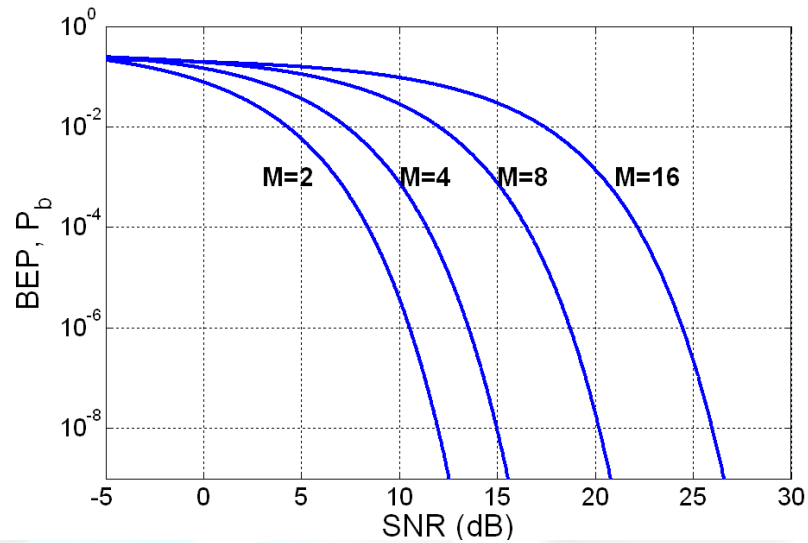
$$\begin{aligned}
 P[\text{error}] &= P[\text{error}|s_1(t)] \\
 &= 1 - \iint_{r_1, r_2 \in \text{Region 1}} f(r_1, r_2 | s_1(t)) dr_1 dr_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P[\text{error}] &= P[\text{error}|s_1(t)] \\
 &= P[r_1, r_2 \text{ fall outside Region 1} | s_1(t) \text{ transmitted}] \\
 &= 1 - P[r_1, r_2 \text{ fall in Region 1} | s_1(t) \text{ transmitted}] \\
 &= 1 - \iint_{r_1, r_2 \in \text{Region 1}} f(r_1, r_2 | s_1(t)) dr_1 dr_2,
 \end{aligned}$$

# Επίδοση M-PSK



# Προσαρμοστική Διαμόρφωση (Adaptive Modulation-AM)



# M-ary Quadrature Amplitude Modulation (M-QAM)

Στις διαμορφώσεις  $M$ -ASK and  $M$ -PSK, τα μηνύματα (πρότυπα μοτίβα από  $\Lambda = \log_2 M$  δυαδικά ψηφία) κωδικοποιούνται είτε στα πλάτος είτε στη φάση των ημιτονικών φερόντων.

Η  $M$ -QAM είναι η πιο γενική περίπτωση που συμπεριλαμβάνει την  $M$ -ASK και την  $M$ -PSK σαν ειδικές περιπτώσεις.

**Στην QAM τα μηνύματα κωδικοποιούνται και τα δύο και στη φάση και στο πλάτος του ημιτονικού φέροντος.**

**$M$ -QAM αστερισμοί είναι δι-διάστατοι και συμπεριλαμβάνουν τα inphase (I) & τα quadrature (Q) φέροντα.**

$$\begin{aligned}\phi_I(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T_s, \\ \phi_Q(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T_s,\end{aligned}$$



# M-QAM

Το  $i$ -οστό μεταδιδόμενο M-QAM σήμα είναι:

$$\begin{aligned}s_i(t) &= V_{I,i} \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t) + V_{Q,i} \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_c t), & 0 \leq t \leq T_s \\ & & i = 1, 2, \dots, M \\ &= \sqrt{E_i} \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t - \theta_i)\end{aligned}$$

Όπου  $V_{I,i}$  &  $V_{Q,i}$  είναι τα διακριτά πλάτη που μεταφέρουν πληροφορία των δύο quadrature (τετραγωνικών) φερόντων.

Το σήμα  $s_i(t)$  αποτελείται από δύο - phase-quadrature φέροντα που διαμορφώνονται από ένα σύνολο διακριτών πλατών – και από εδώ προέρχεται και το όνομα **quadrature amplitude modulation**.



# M-QAM

$$\begin{aligned}s_i(t) &= V_{I,i} \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t) + V_{Q,i} \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T_s \\ &\quad i = 1, 2, \dots, M \\ &= \sqrt{E_i} \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t - \theta_i)\end{aligned}$$

$V_{I,i}$ ,  $V_{Q,i}$  είναι ακριβώς οι συντελεστές  $s_{i1}$ ,  $s_{i2}$  στη συνήθη αναπαράσταση

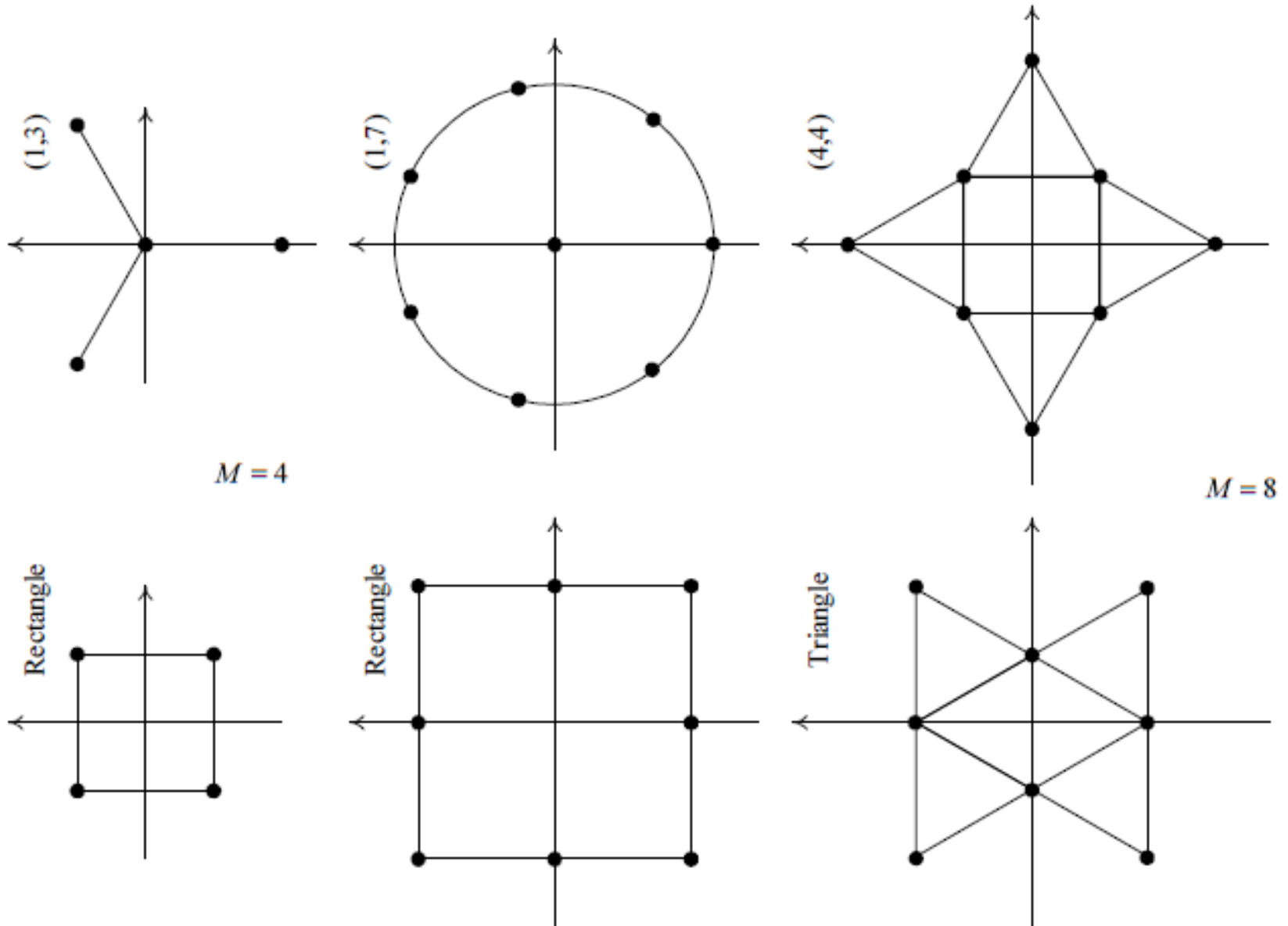
$$s_i(t) = s_{i1}\varphi_1(t) + s_{i2}\varphi_2(t).$$

$$E_i = V_{I,i}^2 + V_{Q,i}^2$$

$$\theta_i = \tan^{-1}(V_{Q,i}/V_{I,i})$$

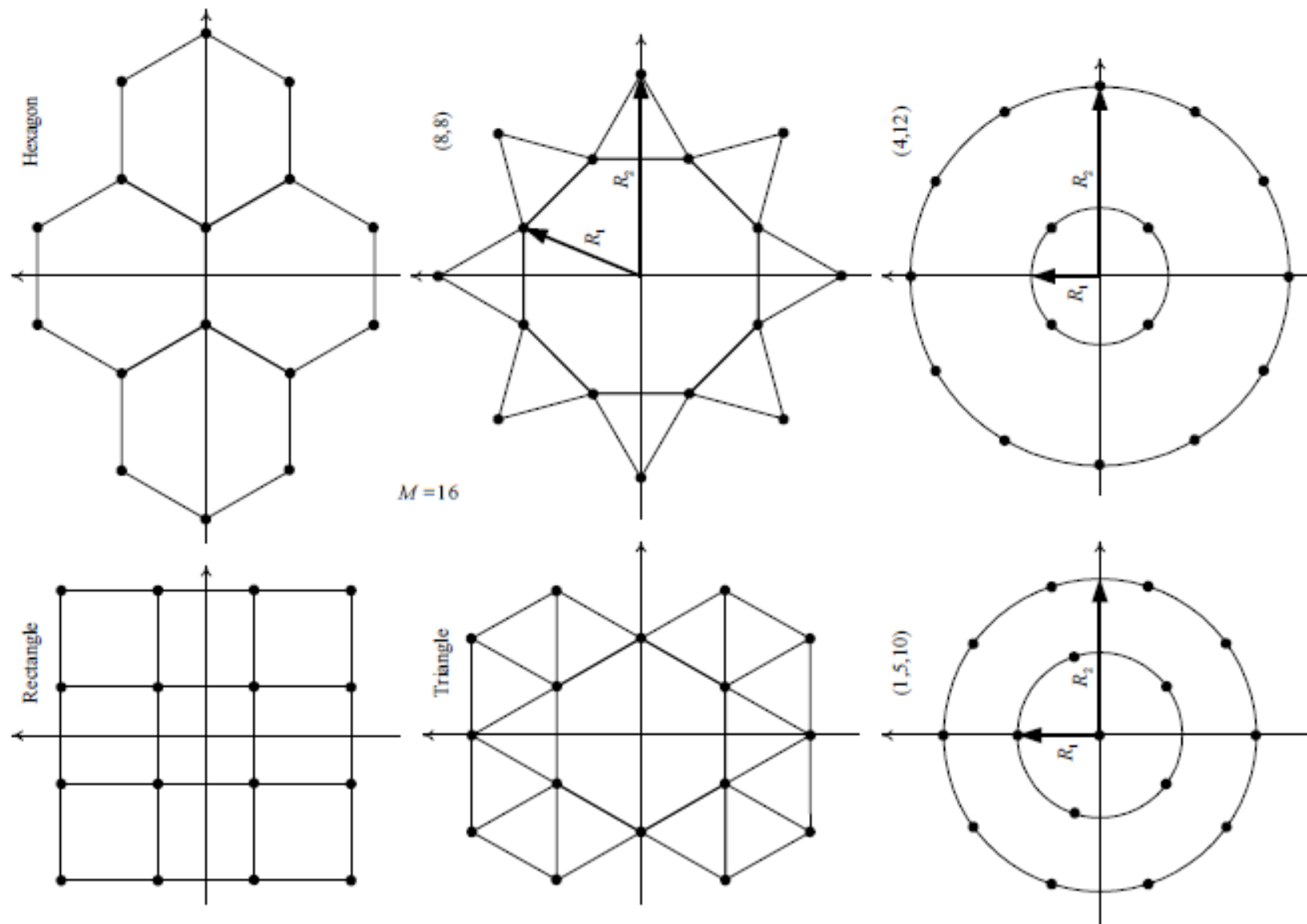


# Παραδείγματα Αστερισμών M-QAM





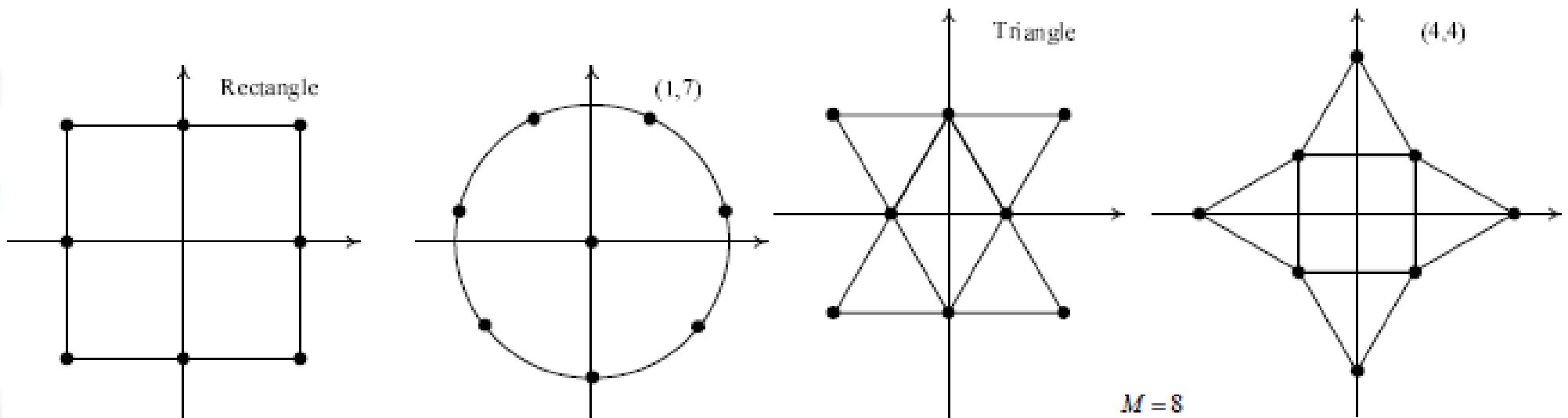
# Παραδείγματα Αστερισμών M-QAM



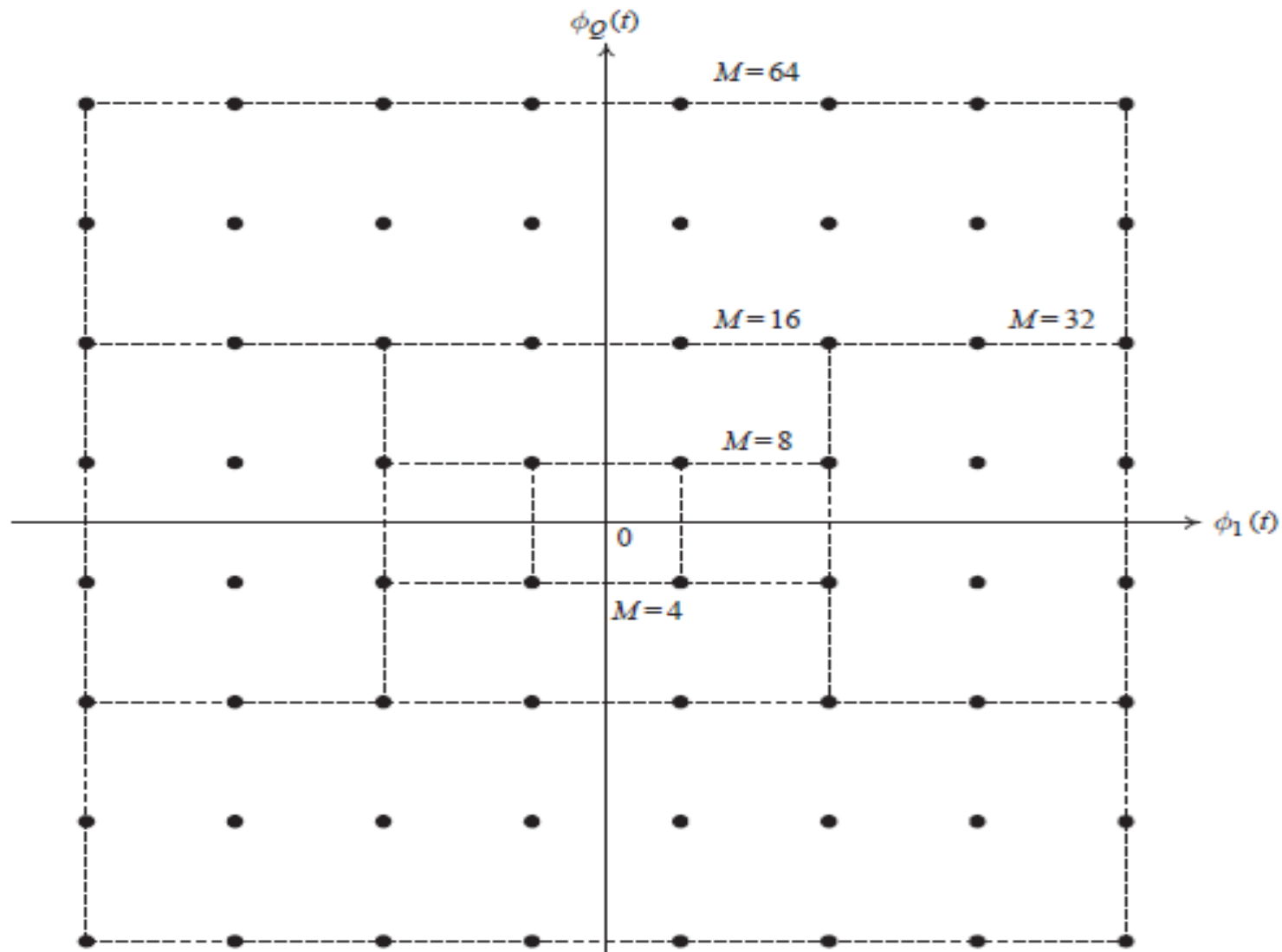
# Παραδείγματα Αστερισμών M-QAM

Από τους αστερισμούς με ίδια την μικρότερη απόσταση ο πιο αποδοτικός αστερισμός είναι αυτός με τη μικρότερη μέση μεταδιδόμενη ενέργεια.

$$E_s = (1/M) \sum_{i=1}^M (V_{I,i}^2 + V_{Q,i}^2).$$

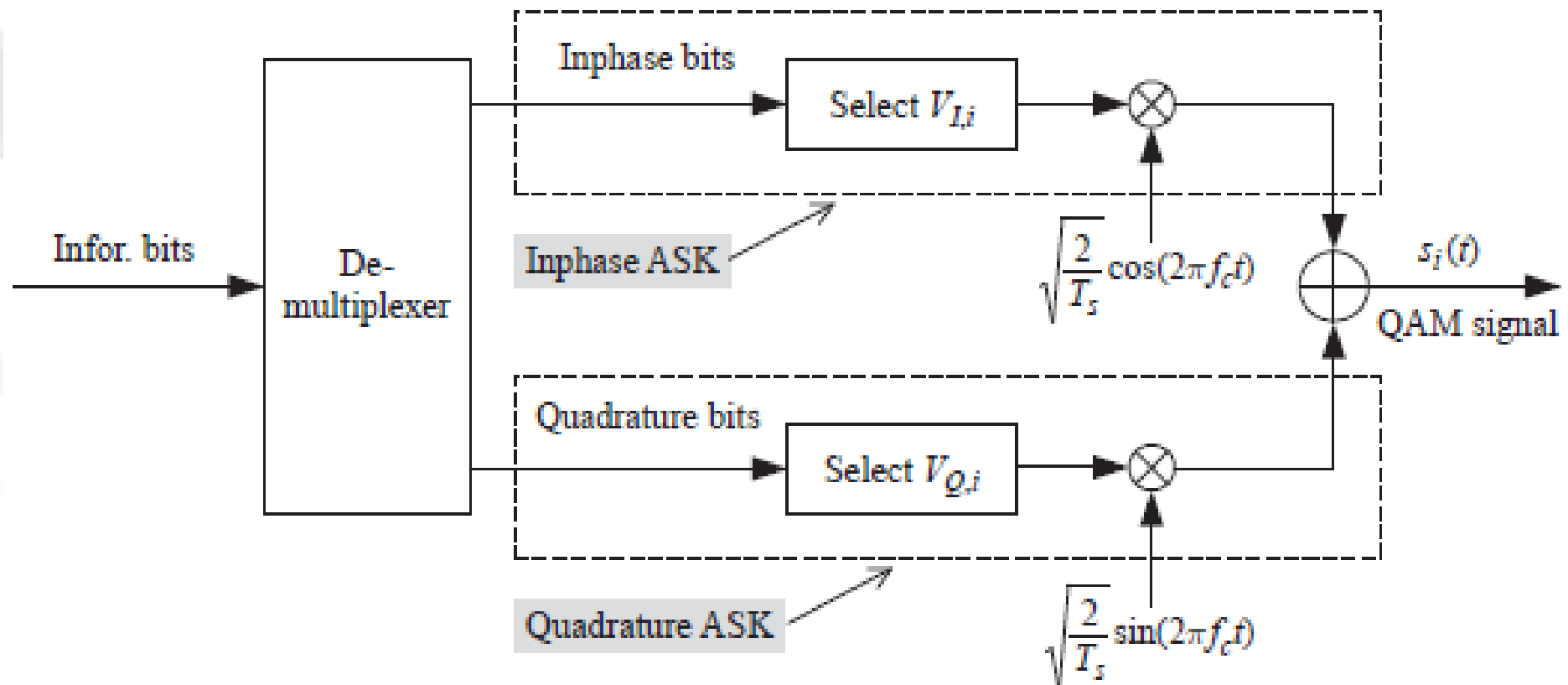


# Rectangular QAM

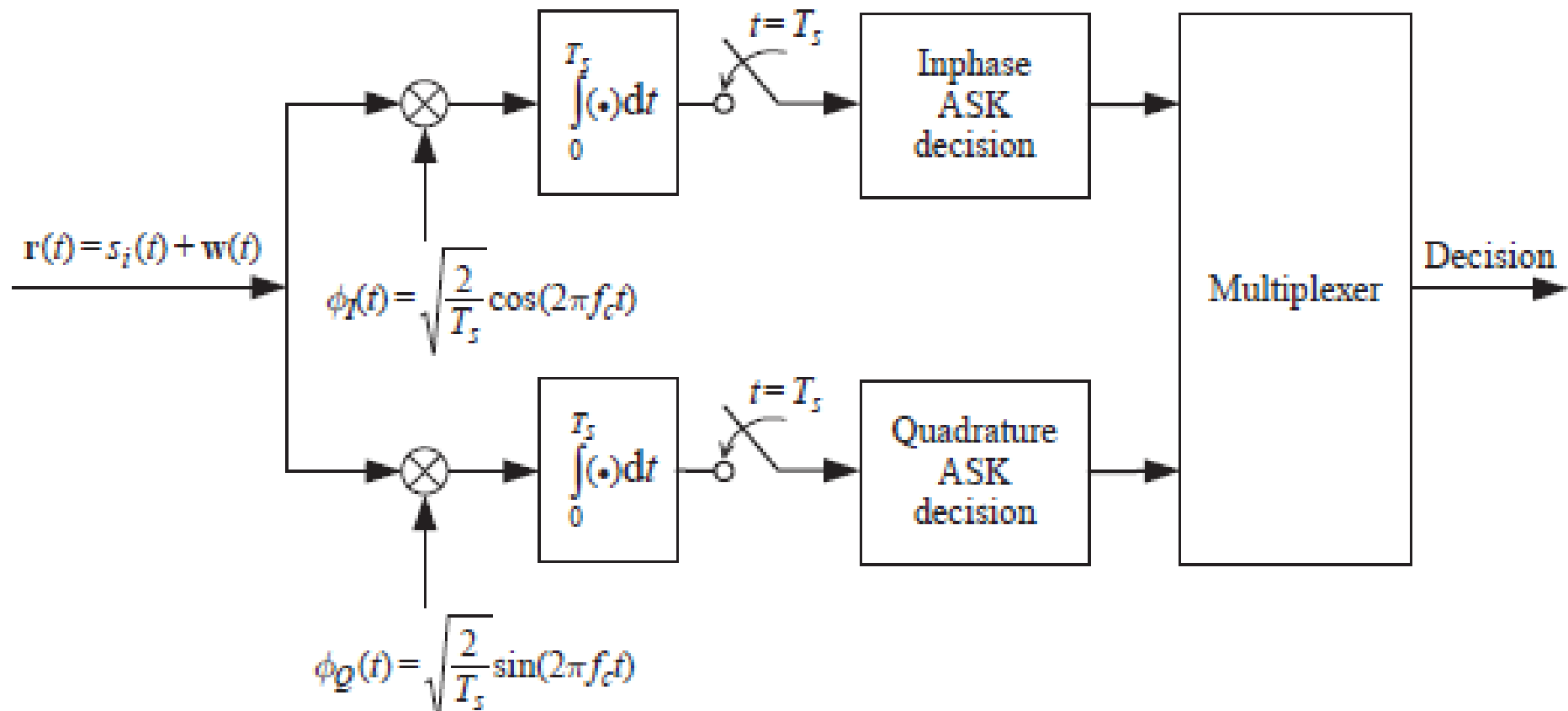


Τα σήματα παίρνουν τιμές από το σύνολο των διακριτών τιμών  $\{(2i - 1 - M)\Delta/2\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M/2$ .

# Transmitter QAM



# Receiver QAM



# M-PSK vs. M-QAM

M-PSK

$$P[\text{error}] \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2\lambda E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right).$$

M-QAM

$$\begin{aligned} P[\text{error}] &\leq 1 - \left[ 1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{3E_s}{(M-1)N_0}}\right) \right]^2 \\ &\leq 4Q\left(\sqrt{\frac{3\lambda E_b}{(M-1)N_0}}\right) \end{aligned}$$



# M-PSK vs. M-QAM

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το πλεονέκτημα σε επίπεδο SNR της QAM σε σχέση με την PSK για διάφορες τιμές του  $M$ .

SNR advantage of  $M$ -QAM over  $M$ -PSK

| $M$  | $10 \log_{10} \kappa_M$ |
|------|-------------------------|
| 8    | 1.65 dB                 |
| 16   | 4.20 dB                 |
| 32   | 7.02 dB                 |
| 64   | 9.95 dB                 |
| 256  | 15.92 dB                |
| 1024 | 21.93 dB                |





# Q&A



E-mail: [thpanag@ece.ntua.gr](mailto:thpanag@ece.ntua.gr)  
Παλ. Κτίρια Ηλ/γων Γρ. 3.2.9  
Τηλ.: 2107723842