ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 1

Διάλεξη: 7 Οκτωβρίου 2020

1. Βασικές ιδέες

Διαφορική εξίσωση (ΔΕ): Εξίσωση με παραγώγους

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 36.2 \qquad y(t) = ;$$

t: ανεξάρτητη μεταβλητή   y: εξαρτημένη μεταβλητή

Συνήθης ΔΕ (ΣΔΕ) (ordinary differential equations, ODE)

Μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή - συνήθως t ή x

Μερικές ΔΕs (ΜΔΕs) (partial dif. equns, PDEs)

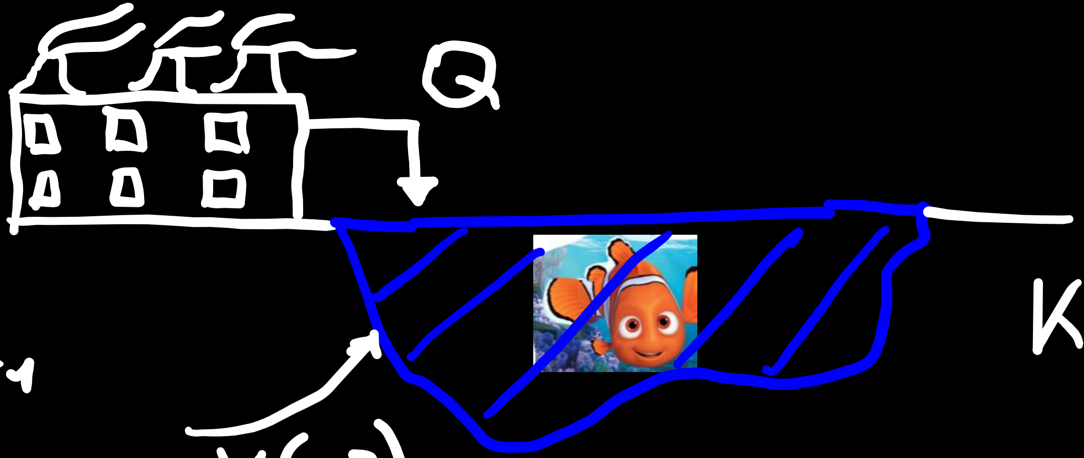
≥2 ανεξ. μεταβλητές

$c(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right)$$

ΑΝΟΙΞΗ

Παράδειγμα 1:



Cr(VI)

Q: kg/d

K: σταθερά απομάκρυνσης d^{-1}

(α) Ποιά η συγκέντρωση του Cr στην λίμνη;

(β) Αν θα πεθάνουν τα ψάρια ($C > C^*$ τα ψάρια πεθαίνουν)

Λύση: Βήμα 0. Ανάπτυξη μαθηματικού μοντέλου.

Υπόθεση: καλή ανάμιξη λίμνης – ίδια συγκέντρωση παντού $C(t)$

Έστω $M(t)$ η μάζα του Cr στη λίμνη (σε kg). Ισοζύγιο μάζας

$$\begin{pmatrix}\text{ρυθμός συσ.}\\ \text{του Cr}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{ρυθμός}\\ \text{εισόδου}\end{pmatrix} - \cancel{\begin{pmatrix}\text{ρυθμός}\\ \text{εξόδου}\end{pmatrix}} + \cancel{\begin{pmatrix}\text{ρυθμός}\\ \text{παραγ.}\end{pmatrix}} - \begin{pmatrix}\text{ρυθμός}\\ \text{καταν.}\end{pmatrix}$$

$$\underset{(kg/d)}{\frac{dM(t)}{dt}} = \underset{(kg/d)}{Q} - \underset{(\frac{1}{d}\,kg)}{K\,M(t)}$$

ΔΕ 1ης τάξης

(η μεγ. παράγωγος → 1η)

$$\frac{dM(t)}{dt} = Q - kM(t) \qquad M(0)=0$$

Πρόβλημα αρχικών τιμών.

Πρέπει να ξέρουμε την αρχική κατάσταση της λίμνης (πόσο Cr είχε).

Δίνεται ότι: $M(0)=0$ Αρχική συνθήκη

Βήμα 1: Λύση της ΔΕs

Γίνεται ένα θαύμα!

$$\boxed{M(t) = \frac{Q}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

Έλεγχος: 1. Αρχική συνθήκη $M(0) = \frac{Q}{k}(1-1) = 0$ ✓

2. Αντικατάσταση στην ΔΕ.

$$\frac{dM}{dt} = Q - kM \qquad M(t) = \frac{Q}{k} - \frac{Q}{k}e^{-kt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{k} - \frac{Q}{k}e^{-kt}\right) = Q - k\left[\frac{Q}{k} - \frac{Q}{k}e^{-kt}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{Q}{k}(-k)e^{-kt} = \cancel{Q} - \cancel{Q} + Qe^{-kt} \Rightarrow$$

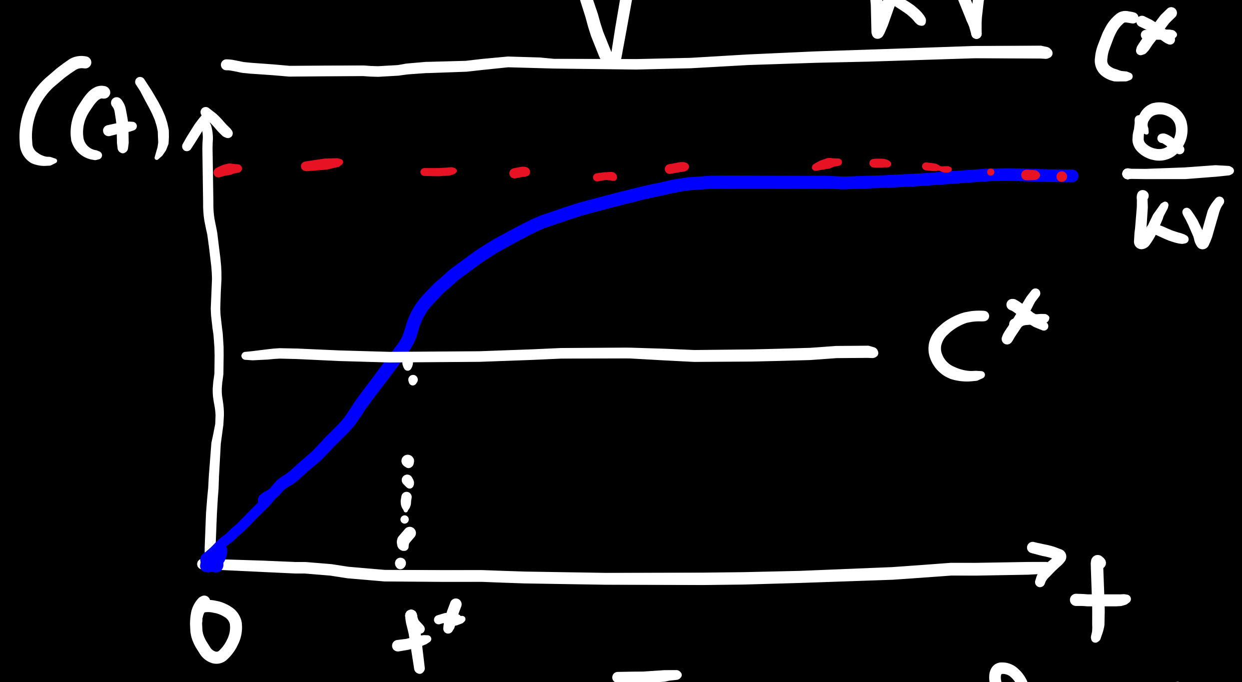
$$\Rightarrow Qe^{-kt} = Qe^{-kt} \checkmark$$

Άρα είναι η σωστή λύση.

Βήμα 3: $M(t) = \frac{Q}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$

$$C(t) = \frac{M(t)}{V} = \frac{Q}{kV}\left(1-e^{-kt}\right)$$

(απάντηση (α))



Για $t=0$ $C=0$

$t \to \infty$ $C \to \frac{Q}{KV}$

(β) Εξαρτάται: Τα ψάρια θα ζήσουν αν $\frac{Q}{KV} < C^*$

Θα πεθάνουν αν $\frac{Q}{KV} > C^*$

Περίληψη

Πρόβλημα αρχικών τιμών: $\frac{dM(t)}{dt} = Q - k\,M(t)$ $\quad M(0)=0$ $\quad$ ΔΕ 1ης τάξης

Λύση: $M(t)=\frac{Q}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$ (Θαύμα...)

Έλεγχος: Αρχική συνθήκη ✓ Εξίσωση ✓

(α) $C(t)=\frac{Q}{kV}\left(1-e^{-kt}\right)$

(β) Τα ψαράκια πεθαίνουν αν $\boxed{\frac{Q}{kV} > C^*}$

Για να τα σώσουμε: $Q \downarrow$ (σύστημα καθαρισμού)

$K \uparrow$ (μεγάλωμα σωματιδίων)

1. Διαφορικές 1ης τάξης

1.1 Χωριζομένων μεταβλητών

Παράδειγμα 2: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ $\quad y(1)=1 \quad y(x)=;$

Μαζεύουμε τα y απο την μία και τα x από την άλλη

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x}dx + K \Rightarrow$$

σταθερά ολοκλήρωσης

$$\Rightarrow \ln y = -\ln x + k \Rightarrow e^{\ln y} = e^{-\ln x + k} \Rightarrow y = \underbrace{e^{-\ln x}}_{1/x}\ \underbrace{e^{k}}_{=Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{Q}{x}}$$

άπειρες λύσεις ικανοποιούν την ΔΕ

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ

$y(1)=1 \Rightarrow Q=1$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x}}$$

ΕΙΔΙΚΗ ΛΥΣΗ

Παράδειγμα 3 : Γενική λύση $2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

Δεν χωρίζονται (άμεσα) οι μεταβλητές λόγω του $y^2 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^{\cancel{2}}}{2x\cancel{y}} - \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{y} \Rightarrow$$

Μετασχηματισμός: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow \underline{y = ux}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = x\frac{du}{dx} + u\overbrace{\frac{dx}{dx}}^{1} = u + x\frac{du}{dx}$$

Αντικατάσταση: $\underline{u} + x\frac{du}{dx} = \underline{\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u}} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}\,\frac{u^2+1}{u} \Rightarrow \boxed{\frac{u}{u^2+1}du = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x}dx}$$ Χωριζ.

$$\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = -\int \frac{dx}{x} + K \Rightarrow$$

$$\ln(u^2+1) = -\ln x + K \Rightarrow e^{\ln(u^2+1)} = e^{-\ln x}\,\overset{Q}{\overset{\shortparallel}{e^{K}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2+1 = \frac{1}{x}Q \overset{u=\frac{y}{x}}{\Rightarrow} \frac{y^2}{x^2}+1 = \frac{Q}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2+x^2 = Qx \Rightarrow \underline{y^2 = Qx - x^2} \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{Qx-x^2}}$$

$$Qx < x^2 \Rightarrow x > Q$$

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 0

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Γράψτε καθαρά το όνομά σας σε ένα λευκό χαρτί, φωτογραφείστε το και ανεβάστε το στα επόμενα λεπτά στις Εργασίες του e-class.

Η ανταμοιβή σας θα είναι 5 μονάδες με μια προϋπόθεση. Το Σάββατο το πρωί που θα περάσω τους βαθμούς να υπάρχει στο προφίλ σας στο e-class η φωτογραφία σας.