ΠΡΟΣΟΧΗ ΓΙΑ ΛΑΘΗ!!!

Βασικές Ιδιότητες ολόμορφων συναρτήσεων

<u>Ορισμός 1:</u> Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $\varphi: I \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in I$

Η φ λέγεται διαφορίσιμη στο t_0 αν και μόνο αν οι $u = Re\varphi$, $V = Im\varphi$ είναι διαφορίσιμη στο t_0

Σε αυτήν την περίπτωση $\varphi'(t_0) = u'(t_0) + i\,V'(t_0)$

Σχόλιο: Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $\varphi: I \to \mathbb{C}$ έχουν σχεδόν όλες τις ιδιότητες των πραγματικών διαφορίσιμων συναρτήσεων

Προσοχή! Το Θεώρημα Rolle δεν ισχύει για διαφορίσιμες συναρτήσεις $\varphi: I \to \mathbb{C}$

π.χ. $\varphi(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$, $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = i$

Αλλά $\varphi'(t) = ie^{it} \neq 0$, $\forall t$

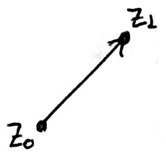
<u>Πρόταση 1:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\varphi: I \to U$ διαφορίσιμη.

Τότε, η $f \circ \varphi: I \to \mathbb{C}$ είναι διαφορίσιμη και $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$, $\forall t \in I$

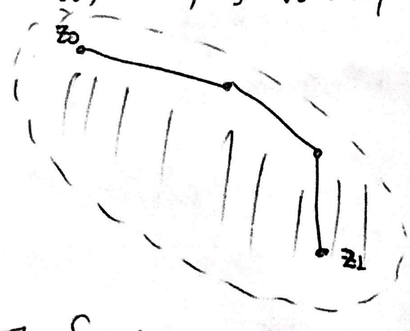
Ευθύγραμμο Τμήμα $[z_0, z_1]$

Εαν $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$

$[z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid t \in [0,1]\}$

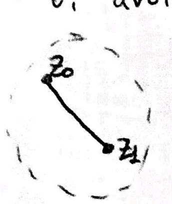


<u>Ορισμός 2:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό. Το U λέγεται συνεκτικό αν και μόνο αν $\forall z_0, z_1 \in U$, $\exists$ τεθλασμένη γραμμή $\Gamma \subset U$ που συνδέει τα z_0, z_1

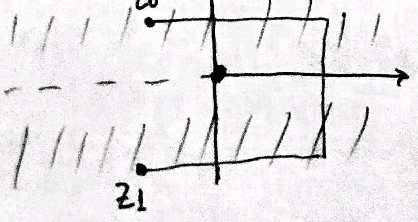


<u>Παραδείγματα:</u>

(α) Οι ανοικτοί δίσκοι είναι συνεκτικά σύνολα (ειδικότερα είναι κυρτά)



(β) $U = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ συνεκτικό



(γ) Το $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ δεν είναι συνεκτικό

Γενικά: Εάν U_1, U_2 ανοικτά, μη κενά, ξένα, τότε το $U=U_1\cup U_2$ δεν είναι συνεκτικό

Πρόταση 2: Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, συνεκτικό και $f:U\to\mathbb{C}$ ολόμορφη με $f(z)=0, \forall z\in U$ τότε f σταθερή στο U

Ισχυρισμός: Εάν $z_0,z_1\in\mathbb{C}$ με $(z_0,z_1)\subset U$ τότε f σταθερή στο $[z_0,z_1]$

$\varphi(t)=[1-t]z_0+tz_1, \quad t\in[0,1]$

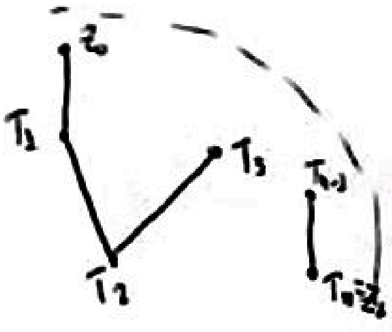
$(f(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t))\varphi'(t)=0, \ \forall t\in[0,1]$

$\Rightarrow f\circ\varphi =$ σταθερή στο $[0,1]$

$\Rightarrow f$ σταθερή στο $[z_0,z_1]$

Γενική Περίπτωση

Έστω $z_0,z_1\in U$ = συνεκτικός $\exists$ τεθλασμένη γραμμή $T\subset U$ με κορυφές $T_0=z_0, T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n=z_1$ που συνδέει τα z_0,z_1



Γνωρίζουμε ότι η f είναι σταθερή πάνω σε κάθε ένα απο τα $[T_0,T_1], [T_1,T_2], \dots, [T_{n-1},T_n]$

$\Rightarrow f(T_0)=f(T_1), \ f(T_1)=f(T_2), \dots, f(T_{n-1})=f(T_n)$

Τελικά $f(T_0)=f(T_n) \Rightarrow f(z_0)=f(z_1)$

Άρα f σταθερή στο U

Σχόλιο: Εάν το U δεν είναι συνεκτικό η πρόταση 2 γενικά δεν ισχύει

π.χ.: Έστω $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά, μη κενά, ξένα και $U = U_1 \cup U_2$ = μη συνεκτικά

$$f: U \to \mathbb{C} \quad f(z) = \begin{cases} 1, & z \in U_1 \\ 2, & z \in U_2 \end{cases}$$

$f'(z) = 0$, $\forall z \in U$, αλλά f όχι σταθερή!

Ορισμός 3: Ένα ανοικτό, συνεκτικό, σύνολο λέγεται πεδίο

Πρόταση 3: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f \in H(U)$ (f ολόμορφη στο U). Ισχύουν τα παρακάτω:

(α) Εάν Ref ή Imf σταθερή, τότε f = σταθερό

(β) Εάν $\bar{f} \in H(U)$ τότε f σταθερή

(γ) Εάν $|f|$ σταθερή, τότε f = σταθερή

Απόδειξη:

(α) $f = u + iv$

- Έστω ότι u = σταθερή

$$V_y = u_x = 0$$
$$V_x = -u_y = 0$$

$f'(z) = u_x + iV_x = 0 \Rightarrow f$ = σταθερή

- Όμοια, αν V = σταθερή

Υποθέτουμε ότι οι $f = u + iv$, $\bar{f} = u - iv$ είναι ολόμορφη $\overset{C-R}{\Longrightarrow}$

$u_y = V_x$ και $u_y = (-V_x) = -V_x$

$V_y = -u_x$ $\quad (-V_y) = -u_x \Rightarrow V_y = u_x$

$\Rightarrow u_x = V_x = 0 \Rightarrow f' = u_x + iV_x = 0 \Rightarrow f$ = σταθερή

(γ) Έστω $|f| = c \geq 0$, στο U

- Εαν $c = 0$, τότε $f = 0$, στο U
- Έστω ότι $c \neq 0$

Τότε $\forall z \in U$

$f(z)\bar{f}(z) = |f(z)|^2 = c^2 \neq 0 \Rightarrow f(z) \neq 0$ και $\bar{f}(z) = c^2$, $\forall z \in U$

$\overset{f \in H(U)}{\Longrightarrow} \bar{f} \in H(U) \Rightarrow f$ = σταθερή

Εφαρμογή: Εστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f \in H(U)$ με $f(z)f(z) = 0, \forall z \in U$.

Τότε $f =$ σταθερή

$(f^2)' = 2ff' = 0$, στο $U \Rightarrow f^2 =$ σταθερή $= C \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow |f|^2 = |f^2| = |C| \Rightarrow |f| = \sqrt{|C|} =$ σταθερή $\xRightarrow{\text{πρόταση 3}}$ $f =$ σταθερή