


ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Μάρτιος 2004

Μέρος Α' (1 ώρα 30') 

1. a. (3) Κατασκευάστε διαγράμματα Venn ώστε να φαίνονται οι εξής περιοχές: $O(n)$, $O(n^2)$, $\Omega(n^2)$, $\Theta(n^2)$, $\omega(n^2)$.

- b. (6) Τοποθετήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σε έναν νέο πίνακα έτσι ώστε: δύο συναρτήσεις $f(n)$, $g(n)$ να βρίσκονται στην ίδια γραμμή αν και μόνο αν $f(n)=\Theta(g(n))$, και μια συνάρτηση $f(n)$ να είναι κάτω από μια συνάρτηση $g(n)$ στον πίνακα αν και μόνο αν $f(n)=o(g(n))$.

| | | | | | | | |
|------------------|-----------------|------------------|---------------------|----------------|-------------------|-------|------------------|
| $\sqrt{n^3}$ | $3^n + n^n + n$ | $\log n$ | $\log \log n + n^3$ | $\log \log n$ | $\log^2 n$ | 3^n | $n^{1.5} \log n$ |
| $n^{1.5} \log n$ | $(n+3)!$ | $n^3 + \log^3 n$ | $n^{0.5}$ | $3n + (n+1)^3$ | $\log^2 n + 0.5n$ | 0.5 | 3^{n+1} |

2. a. (3) Ορίστε: **αναγωγή κατά Karp** (Karp reduction).

- b. (2) Αναφέρατε και ορίστε ένα πρόβλημα το οποίο δεν είναι γνωστό αν είναι NP-πλήρες, ούτε αν ανήκει στο P.

- c. (3) Σωστό ή λάθος; (με εξήγηση).

i) **NPSPACE** \subseteq **PSPACE**

ii) **P** = **NP**

iii) **PSPACE** \subseteq **P**

3. (8) Ορίστε: **Partition, DKP** (decision problem). Δείξτε $\text{Partition} \leq_m^P \text{DKP}$.
4. (6) Δίνεται η γλώσσα $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{το } w \text{ περιέχει άρτιο αριθμό από } b \text{ ή τελειώνει με } ba\}$. Κατασκευάστε ελάχιστο DFA (ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο) που αναγνωρίζει την L .
5. (10) Σχεδιάστε μηχανή Turing (σε υψηλό επίπεδο και σε υλοποίηση) που να υπολογίζει τη συνάρτηση 2^*x+3 (unary notation).
6. (8) Αποδείξτε: ένα γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με 2 χρώματα αν και μόνο αν δεν έχει κύκλο περιττού μήκους.
7. (6) Δίνεται η λίστα αριθμών 7, 12, 11, 3, 4, 20, 3, 21, 8, 13, 22. Εκτελέστε αναλυτικά όλα τα βήματα κατασκευής σωρού από τη δοσμένη λίστα, χρησιμοποιώντας την heap-insert ή την heap-combine. Ποια από τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήσατε;
8. (5) Έστω μονοδιάστατος πίνακας A μεγέθους $n \geq 5$ που περιέχει διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς (πιθανώς μεγαλύτερους από το n). Περιγράψτε αποδοτικούς αλγόριθμους για κάθε ένα από τα παρακάτω προβλήματα που χρησιμοποιούν όσο το δυνατό λιγότερες συγκρίσεις (στη χειρότερη περίπτωση). Δώστε τον ακριβή αριθμό συγκρίσεων που απαιτεί κάθε αλγόριθμος (στη χειρότερη περίπτωση). Δικαιολογήστε.
 - a) Βρείτε ένα στοιχείο του A , που δεν είναι ο μεγαλύτερος ούτε ο μικρότερος αριθμός του πίνακα.
 - b) Για $1 \leq k < n/2$, βρείτε έναν αριθμό στον πίνακα A που δεν είναι μεταξύ των k μεγαλύτερων ούτε των k μικρότερων αριθμών του πίνακα.
9. (2) a) $\overline{A} \leq_m^P A$ για κάθε A . Σωστό ή λάθος;
 b) $\overline{A} \leq_T^P A$ για κάθε A . Σωστό ή λάθος;