

Συνοπτική παρουσίαση επιλεγμένων τμημάτων των ενοτήτων 1-3 του ΚΑΦΑΛΑΙΟΥ 1
(σελ. 49-88) του βιβλίου:

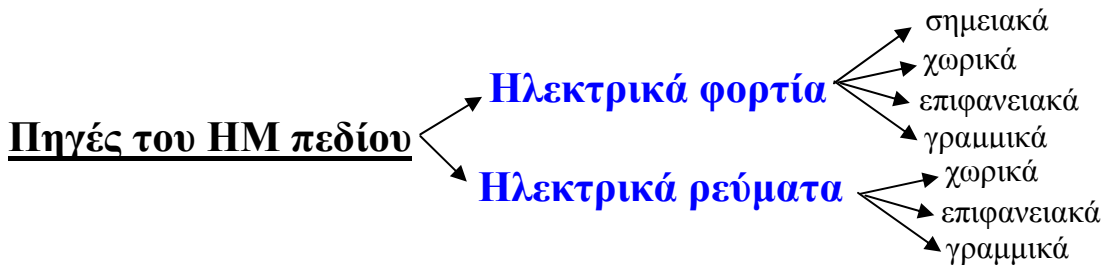
I. Τσαλαμέγκα – I. Ρουμελιώτη, “Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία – Τόμος Α”

I. Τσαλαμέγκας – I. Ρουμελιώτης

Μάρτιος 2020

ΠΗΓΕΣ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Πηγές του ΗΜ πεδίου είναι τα ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα. Ηλεκτρικά ρεύματα προκύπτουν από την διατεγμένη κίνηση ηλεκτρικού φορτίου στον χώρο, σε μία επιφάνεια, ή σε μία γραμμή.



1. Ηλεκτρικό φορτίο και πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου

1.1. Ηλεκτρικό Φορτίο (Σύμβολα q, Q . Διαστάσεις: [C])

Παραδοχές:

α. Ύπαρξη του ηλεκτρικού φορτίου

Υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικών φορτίων, τα θετικά και τα αρνητικά. Φορείς των αρνητικών φορτίων είναι τα ηλεκτρόνια, ενώ φορείς των θετικών φορτίων είναι τα πρωτόνια, καθώς και οι οπές στην περίπτωση των ημιαγωγών. Αντίθετα, τα νετρόνια είναι ηλεκτρικώς ουδέτερα (αφόρτιστα).

β. Κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου

Κάθε ηλεκτρόνιο φέρει αρνητικό φορτίο $-e$ και κάθε πρωτόνιο ή οπή φέρει φορτίο $+e$, όπου $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$. Επομένως, όλα τα φορτία που απαντώνται στη φύση είναι ακέραια πολλαπλάσια του στοιχειώδους φορτίου e .

γ. Αναλλοίωτο του ηλεκτρικού φορτίου

Το ηλεκτρικό φορτίο θεωρείται ανεξάρτητο από την θέση και την ταχύτητα των φορέων του, καθώς και από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή είναι αναλλοίωτο μέγεθος.

δ. Διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου

Σε κάθε κλειστό (απομονωμένο) σύστημα, το αλγεβρικό άθροισμα των θετικών και των αρνητικών φορτίων παραμένει σταθερό. [Κλειστό σύστημα είναι ένα σύνολο που απαρτίζεται από διάφορα μέρη, το οποίο δεν συνδέεται με πηγές με το εξωτερικό περιβάλλον]. Επομένως, το συνολικό φορτίο μιας περιοχής του χώρου, στην οποία δεν υπάρχουν πηγές, μπορεί να αυξηθεί μόνο με την εισροή θετικών φορτίων από τον περιβάλλοντα χώρο ή την εκροή αρνητικών φορτίων στον περιβάλλοντα χώρο δια μέσου του συνόρου της περιοχής. Η αρχή διατήρησης του φορτίου διατυπώνεται μαθηματικά μέσω της εξίσωσης συνεχείας (ενότητα 3).

1.2 Χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου. (Σύμβολο $\rho(\vec{r}, t)$. Διαστάσεις $[C/m^3]$)

Εδώ θεωρούμε την περίπτωση όπου το ηλεκτρικό φορτίο είναι κατανομημένο στο εσωτερικό μιας περιοχής V του χώρου. Το φορτίο αποτελείται στην πραγματικότητα από πάρα πολλά στοιχειώδη φορτία q_1, q_2, \dots, q_N , θεωρούμενα ως σημειακά, τοποθετημένα στις θέσεις $\vec{r}_1', \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_N'$ των φορέων τους (Σχ.1). Επειδή για μεγάλα N αυτό το διακριτό μοντέλο δεν είναι λειτουργικό, χρησιμοποιούμε ισοδύναμες συνεχείς μακροσκοπικές κατανομές φορτίου θεωρώντας ότι το φορτίο κατανέμεται συνεχώς σε ολόκληρο τον χώρο V . (Όπως ξέρουμε, κάτι εντελώς ανάλογο ισχύει στην μηχανική σχετικά με την μάζα και την έννοια της πυκνότητας μάζας).

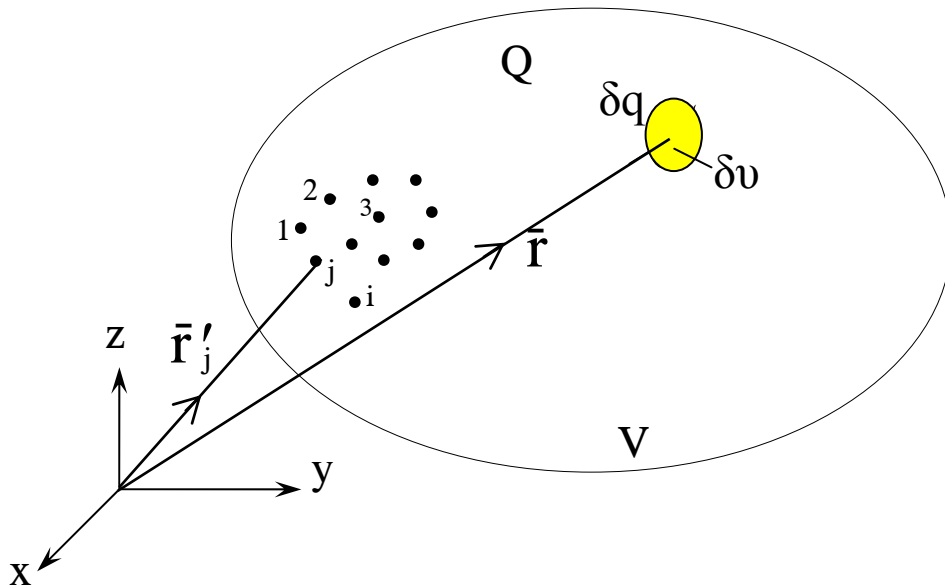
Ορισμός: Χωρική πυκνότητα φορτίου στη θέση $\vec{r} \in V$ την χρονική στιγμή t ονομάζουμε το μέγεθος

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{\delta q}{\delta v} = \frac{dq}{dV}, \quad (1)$$

όπου δq είναι το φορτίο κατά τη χρονική στιγμή t εντός “στοιχειώδους” όγκου δv , ο οποίος έχει κεντροειδές το σημείο \vec{r} (Σχ.1).

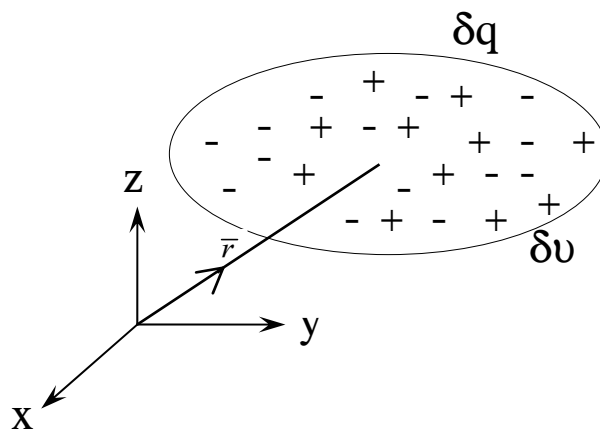
Το συνολικό φορτίο εντός του όγκου V την χρονική στιγμή t ισούται με

$$Q(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV. \quad (2)$$



Σχήμα 1

Σημείωση: Στην (1), ο όγκος δv (Σχ.2) επιλέγεται πολύ μικρός από μακροσκοπική άποψη, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχειώδης, και β) έχει γραμμικές διαστάσεις πολύ μεγάλες σε ατομική κλίμακα, ώστε να περικλείει μεγάλο αριθμό φορτισμένων σωματιδίων. Το παράδειγμα των μεταλλικών αγωγών, με πυκνότητα ελευθέρων ηλεκτρονίων της τάξεως των 10^{29} ηλεκτρόνια/ m^3 , όπου κάθε κύβος με ακμή 0.1μ εμπριέχει 10^8 ηλεκτρόνια, δείχνει ότι είναι εν γένει εφικτή η ικανοποίηση των παραπάνω δυο αλληλοαναιρουμένων συνθηκών.



Σχήμα 2

Υπόθεση: Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι σε κάθε φυσικό πρόβλημα η $\rho(\vec{r}, t)$ είναι συνεχής συνάρτηση της θέσεως σε ομαλά σημεία.

1.3 Επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου. (Σύμβολο σ . Διαστάσεις $[C/m^2]$.)

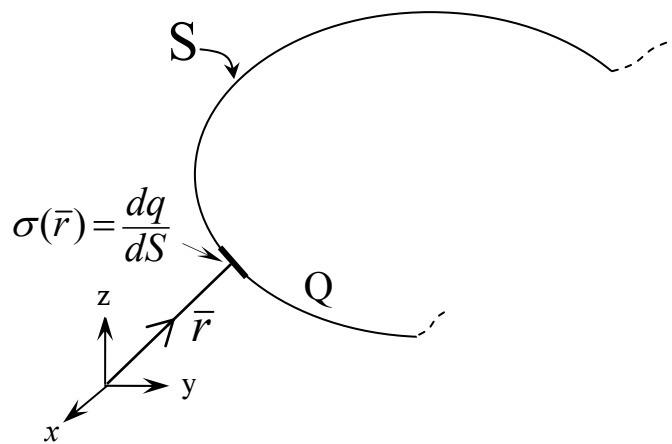
Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου το ηλεκτρικό φορτίο είναι κατανομημένο σε μια επιφάνεια S (Σχ.3).

Ορισμός: Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στη θέση $\vec{r} \in S$ τη χρονική στιγμή t ονομάζουμε το μέγεθος

$$\sigma(\vec{r}, t) = \frac{dq}{dS} \quad (3)$$

όπου dq είναι το φορτίο εντός “στοιχειώδους” επιφάνειας dS με κεντροειδές το σημείο \vec{r} , κατά τη χρονική στιγμή t (Σχ.3). Το συνολικό φορτίο της επιφάνειας S τη χρονική στιγμή t ισούται με

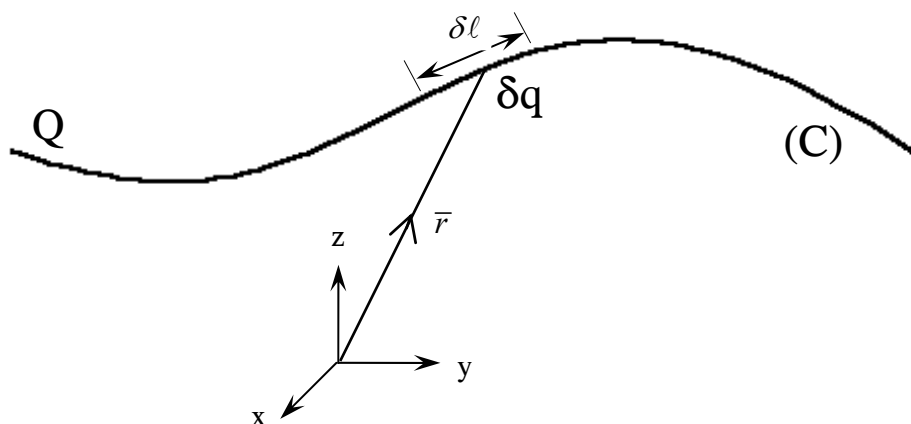
$$Q(t) = \int_S \sigma(\vec{r}, t) dS. \quad (4)$$



Σχήμα 3

1.4 Γραμμική πυκνότητα φορτίου (σύμβολο λ , διαστάσεις $[C/m]$).

Όταν το ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται κατά μήκος ενός νηματοειδούς δρόμου C (Σχ.4),



Σχήμα 4

για την περιγραφή της κατανομής του χρησιμοποιείται το μέγεθος *γραμμική πυκνότητα φορτίου* (σύμβολο λ , διαστάσεις [C/m]), που ορίζεται με τη σχέση

$$\lambda(\vec{r}, t) = \lim_{\delta \ell \rightarrow 0} \frac{\delta q}{\delta \ell} = \frac{dq}{d\ell}, \quad (5)$$

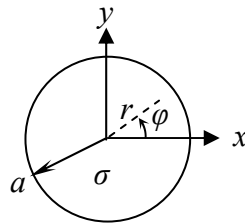
όπου δq είναι το φορτίο εντός στοιχείου μήκους $\delta \ell$ με κεντροειδές το σημείο \vec{r} , κατά τη χρονική στιγμή t .

Το συνολικό φορτίο της γραμμής ισούται με

$$Q(t) = \int_C \lambda(\vec{r}, t) d\ell. \quad (6)$$

1.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Ο κυκλικός δίσκος ακτίνας a που δείχνει το Σχ.5 φέρει επιφανειακό φορτίο με πυκνότητα $\sigma = \sigma_0 (r/a)^2 \cos^2 \varphi$ ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Να βρεθεί το ολικό φορτίο του δίσκου.

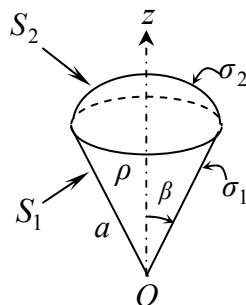


Σχήμα 5

Λύση: Το ολικό φορτίο είναι

$$Q = \int \sigma dS = \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\sigma_0 \frac{r^2}{a^2} \cos^2 \varphi \right) r dr d\varphi = \frac{\sigma_0}{a^2} \int_{r=0}^a r^3 dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \sigma_0 \frac{a^2}{4} \pi.$$

Παράδειγμα 2: Η σφαιροκωνική διάταξη που δείχνει το Σχ.6 περιλαμβάνει α) την κωνική επιφάνεια S_1 με $0 \leq r \leq a$, $\theta = \beta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, η οποία φέρει επιφανειακό φορτίο $\sigma_1 = \sigma_0 e^{-r^2/a^2} \sin^2 \varphi$, και β) το σφαιρικό τόξο S_2 με $r = a$, $0 \leq \theta \leq \beta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ το οποίο φέρει επιφανειακό φορτίο $\sigma_2 = \sigma_0 \sin \theta \cos^2 \varphi$, όπου σ_0 σταθερά. Στο εσωτερικό της διάταξης υπάρχει χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho = \rho_0 \frac{r^2}{a^2} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi$, όπου ρ_0 σταθερά. Να υπολογιστεί το ολικό φορτίο της διάταξης.



Σχήμα 6

Λύση: Το ολικό φορτίο είναι

$$\begin{aligned}
Q &= \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 + \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 + \int \rho dV = \\
&= \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_1 \underbrace{r \sin \beta d\varphi dr}_{dS_1} + \int_{\theta=0}^{\beta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_2 \underbrace{a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}_{dS_2} + \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\beta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \underbrace{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}_{dV} = \\
&= \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_0 e^{-\frac{r^2}{a^2}} r \sin^2 \varphi \sin \beta d\varphi dr + \int_{\theta=0}^{\beta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_0 a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi + \\
&+ \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\beta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 \frac{r^4}{a^2} \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi dr d\theta d\varphi = \\
&= \sigma_0 \pi \sin \beta \int_{r=0}^a e^{-\frac{r^2}{a^2}} r dr + \pi \sigma_0 a^2 \int_{\theta=0}^{\beta} \sin^2 \theta d\theta + \frac{\rho_0}{a^2} \frac{a^5}{5} \pi \int_{\theta=0}^{\beta} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \\
&= \sigma_0 \pi \frac{a^2 (e-1)}{2e} \sin \beta + \frac{\pi \sigma_0 a^2}{4} (2\beta - \sin 2\beta) + \frac{\pi \rho_0 a^3}{15} (1 - \cos^3 \beta).
\end{aligned}$$

2. Ηλεκτρικό ρεύμα: Ένταση και πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

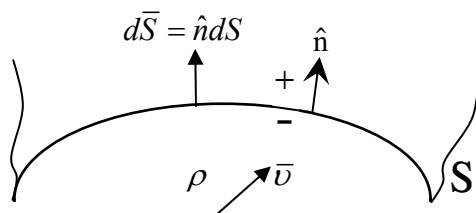
Οι ειδικές περιπτώσεις όπου το ηλεκτρικό φορτίο μπορεί να θεωρηθεί ότι ευρίσκεται σε στατιστική ηρεμία δεν έχουν πρακτικό ενδιαφέρον. (Πραγματική ηρεμία είναι αδύνατη σε κάθε περίπτωση λόγω της θερμικής κίνησης των ηλεκτρονίων, των πρωτονίων και των οπών.)

Κάθε διατεταγμένη κίνηση χωρικού ηλεκτρικού φορτίου ρ σε μια περιοχή V του χώρου, επιφανειακού ηλεκτρικού φορτίου σ σε μια επιφάνεια S , ή γραμμικού ηλεκτρικού φορτίου σε μια γραμμή C , παράγει ηλεκτρικό ρεύμα που χαρακτηρίζεται ως χωρικό, επιφανειακό ή γραμμικό, αντίστοιχα. Για την ποσοτική περιγραφή του ηλεκτρικού ρεύματος χρησιμοποιείται α) η έντασή του (βαθμωτό, ολοκληρωτικό μέγεθος) και β) η πυκνότητά του (διανυσματικό, σημειακό μέγεθος).

2.1 Χωρικό ηλεκτρικό ρεύμα

2.1.A. Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (σύμβολα: $i(t)$, I . Διαστάσεις $[A]$)

Θεωρούμε (Σχ.1) προσανατολισμένη επιφάνεια S , φυσική ή νοητή, σε χώρο όπου χωρικό ηλεκτρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(\vec{r}, t)$ κινείται με ταχύτητα $\vec{v}(\vec{r}, t)$ παράγοντας χωρικό ηλεκτρικό ρεύμα. Η επιφάνεια S μπορεί να είναι είτε ανοικτή, όπως στο Σχ.1, είτε κλειστή. Ο προσανατολισμός της γίνεται με βάση το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \hat{n} .



Σχήμα 1

Ορισμός: Ένταση χωρικού ηλεκτρικού ρεύματος που διαπερνά την επιφάνεια S ονομάζουμε το μέγεθος

$$i(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\delta t} \quad (1)$$

όπου δQ είναι το φορτίο που διέρχεται κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t)$ από την επιφάνεια αυτή κατά τη θετική φορά (δηλαδή με κατεύθυνση από την αρνητική προς τη θετική όψη της S).

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος αναφέρεται σε ολόκληρη την επιφάνεια S , δηλαδή είναι ολοκληρωτικό μέγεθος.

2.1.B. Χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος (σύμβολο $\bar{J}(\vec{r}, t)$). Διαστάσεις [A/m^2])

Ένα σημειακό μέγεθος, το οποίο επίσης περιγράφει τη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος, είναι η χωρική του πυκνότητα, η οποία συμβολίζεται με $\bar{J}(\vec{r}, t)$ και ορίζεται με τη σχέση

$$\bar{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \bar{v}(\vec{r}, t), \quad (2)$$

όπου $\bar{v}(\vec{r}, t)$ είναι η ταχύτητα του φορτίου $dq = \rho(\vec{r}, t) dV$ στη θέση \vec{r} τη χρονική στιγμή t . [Εξ ορισμού, επομένως, η χωρική πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος έχει την διεύθυνση και την φορά της ταχύτητας στην περίπτωση θετικών φορτίων. Αν το φορτίο είναι αρνητικό, τα διανύσματα της πυκνότητας \bar{J} και της ταχύτητας \bar{v} είναι αντίρροπα.]

Ο τύπος (2) ισχύει για αμιγώς θετικά ή για αμιγώς αρνητικά φορτία. Αν στο ηλεκτρικό ρεύμα συμμετέχουν συγχρόνως αρνητικά και θετικά φορτία (π.χ., θετικά και αρνητικά ιόντα σε ηλεκτρολυτικά διαλύματα, ηλεκτρόνια και οπές σε ημιαγωγούς κ.λ.π) με μακροσκοπική πυκνότητα ρ^+ και ρ^- και μέση ταχύτητα \bar{v}^+ και \bar{v}^- , αντίστοιχα, τότε η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος είναι

$$\bar{J} = \rho^+ \bar{v}^+ + \rho^- \bar{v}^-.$$

Παρατήρηση 1

Αξίζει να τονιστεί ότι, γενικά, η ρευματική πυκνότητα \bar{J} δεν ισούται με το γινόμενο της μέσης πυκνότητας $\rho = \rho^+ + \rho^-$ επί κάποια μέση ταχύτητα. Μάλιστα είναι δυνατό να έχουμε $\rho=0$ αλλά $\bar{J} \neq 0$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των αγωγών έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα που οφείλεται αποκλειστικά στην μέση κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων ($\bar{v}_e \neq 0$, η οποία γίνεται παρουσία ενός πλέγματος από ακίνητα πρωτόνια ($\bar{v}_p = 0$), όπου, λόγω της ηλεκτρικής ουδετερότητας του αγωγού, ισχύει η σχέση $\rho_e = -\rho_p$, δηλαδή έχουμε $\rho = \rho_e + \rho_p = 0$. Στην περίπτωση αυτή,

$$\bar{J} = \rho_p \bar{v}_p + \rho_e \bar{v}_e = \rho_e \bar{v}_e \neq 0$$

μολονότι $\rho = 0$.

2.1.G. Αλληλοσυσχέτιση της έντασης I και της χωρικής πυκνότητας \bar{J}

Στην ενότητα αυτή θα βρούμε τη σχέση που συνδέει την ένταση I με τη χωρική πυκνότητα \bar{J} .

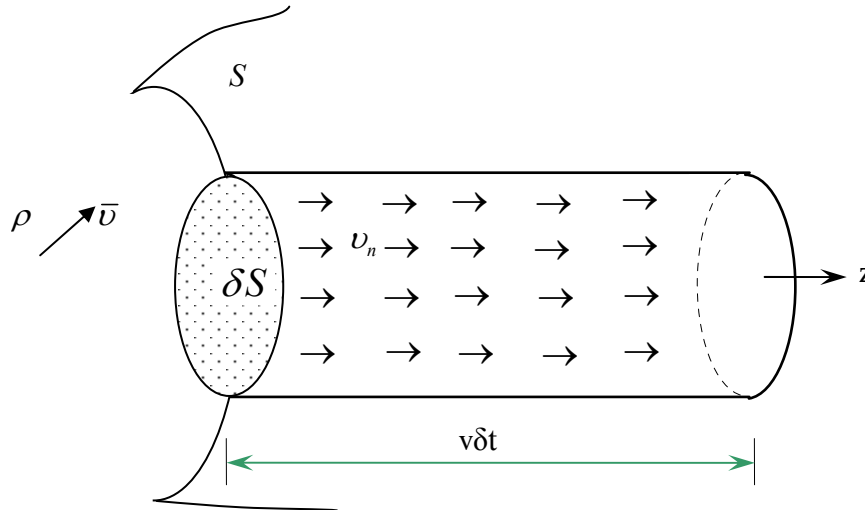
Στο Σχ.2 ξαναδείχνουμε την επιφάνεια S του Σχ.1, καθώς και ένα στοιχείο δS αυτής. Το φορτίο $[\delta Q]_{\delta S}$ που διαπερνά την δS στο χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t)$ ισούται με το φορτίο που εμπεριέχεται στον κύλινδρο βάσεως δS και μήκους $v_n \delta t$, δηλαδή

$$[\delta Q]_{\delta S} = \underbrace{\rho(\delta S) v_n \delta t}_{\text{ογκος}}, \quad (3)$$

όπου v_n είναι η κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα της ταχύτητας. Επομένως, σύμφωνα με τον

ορισμό (1), η ένταση $[dI]_{\delta S}$ του ηλεκτρικού ρεύματος που διέρχεται δια μέσου της δS από την αρνητική προς τη θετική της όψη είναι

$$[dI]_{\delta S} = \frac{[\delta Q]_{\delta S}}{\delta t} \stackrel{(3)}{=} \rho v_n dS \stackrel{(2)}{=} J_n dS = \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \vec{J} \cdot d\vec{S} . \quad (4)$$



Σχήμα 2

Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει ολόκληρη την S βρίσκεται από την (4) με ολοκλήρωση:

$$I = \int_S J_n dS = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} . \quad (5)$$

Παρατήρηση: Αν $J_n = \text{σταθ.}$ (ομοιόμορφη ροή ηλεκτρικού ρεύματος), η (5) δίνει

$$I = J_n S . \quad (6)$$

2.2. Επιφανειακό ηλεκτρικό ρεύμα

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου επιφανειακό ηλεκτρικό φορτίο, καταμετρημένο σε μια επιφάνεια S με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma(\vec{r}, t)$ (Σχ.3), κινείται στην επιφάνεια αυτή με ταχύτητα $\vec{v}(\vec{r}, t)$ παράγοντας ηλεκτρικό ρεύμα. Για την ποσοτική περιγραφή του ηλεκτρικού ρεύματος χρησιμοποιείται α) η ένταση I (βαθμωτό, ολοκληρωτικό μέγεθος) και η επιφανειακή πυκνότητα \vec{K} (διανυσματικό, σημειακό μέγεθος).

2.2.A. Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (σύμβολα: $i(t)$, I . Διαστάσεις $[A]$)

Θεωρούμε (Σχ.3) καμπύλη C , φυσική ή νοητή, επάνω στην επιφάνεια S . Το στοιχείο μήκους της καμπύλης συμβολίζεται με $d\ell$ και το κάθετο στην καμπύλη μοναδιαίο διάνυσμα με \hat{n}_\perp . (Το \hat{n}_\perp είναι εφαπτομενικό στην επιφάνεια S .)

Ορισμός: Ένταση του επιφανειακού ηλεκτρικού ρεύματος που διαπερνά την καμπύλη C ονομάζουμε το μέγεθος

$$i(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\delta t} \quad (7)$$

όπου δQ είναι το φορτίο που διέρχεται κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t)$ από την καμπύλη.

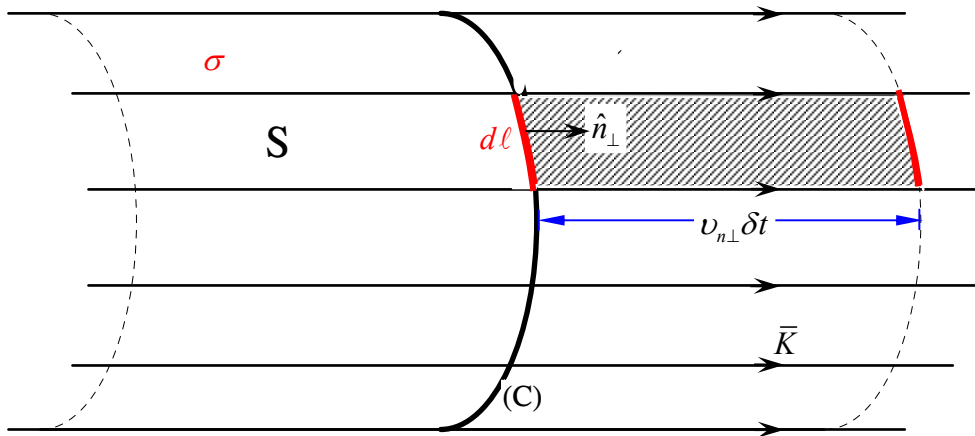
Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος αναφέρεται σε ολόκληρη την καμπύλη C , δηλαδή είναι ολοκληρωτικό μέγεθος.

2.2.B. Επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος (σύμβολο $\bar{K}(\bar{r}, t)$). Διαστάσεις $[A/m]$

Εναλλακτικά, η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος επάνω στην επιφάνεια S μπορεί να περιγραφεί με την επιφανειακή του πυκνότητα, η οποία συμβολίζεται με $\bar{K}(\bar{r}, t)$ και ορίζεται με τη σχέση

$$\bar{K}(\bar{r}, t) = \sigma(\bar{r}, t) \bar{v}(\bar{r}, t), \quad (8)$$

όπου $\bar{v}(\bar{r}, t)$ είναι η ταχύτητα του φορτίου $dq = \sigma(\bar{r}, t) dS$ στη θέση \bar{r} τη χρονική στιγμή t .



Σχήμα 3

2.2.G. Αλληλοσυσχέτιση της έντασης I και της επιφανειακής πυκνότητας \bar{K} .

Θα βρούμε τώρα τη σχέση που συνδέει την ένταση I με τη επιφανειακή πυκνότητα \bar{K} .

Το φορτίο $[\delta Q]_{d\ell}$ που διαπερνά το στοιχείο μήκους $d\ell$ της C στο χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t)$ ισούται με το φορτίο που εμπεριέχεται στην ταινία πλάτους $d\ell$ και μήκους $v_{n\perp} \delta t$ (Σχ.3), δηλαδή

$$[\delta Q]_{d\ell} = \underbrace{\sigma(d\ell) v_{n\perp} \delta t}_{\text{εμβαδο ταινίας}}, \quad (9)$$

όπου $v_{n\perp} = \hat{n}_\perp \cdot \bar{v}$ είναι η κάθετη στην C συνιστώσα της ταχύτητας. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό (7), η ένταση $[dI]_{d\ell}$ του ηλεκτρικού ρεύματος που διέρχεται δια μέσου του $d\ell$ είναι

$$[dI]_{d\ell} = \frac{[\delta Q]_{d\ell}}{\delta t} \stackrel{(9)}{=} \sigma v_{n\perp} d\ell \stackrel{(8)}{=} K_{n\perp} d\ell, \quad (10)$$

όπου $K_{n\perp} = \hat{n}_\perp \cdot \bar{K}$ είναι η κάθετη στην καμπύλη συνιστώσα της επιφανειακής πυκνότητας \bar{K} .

Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει ολόκληρη την C βρίσκεται από την (10) με ολοκλήρωση:

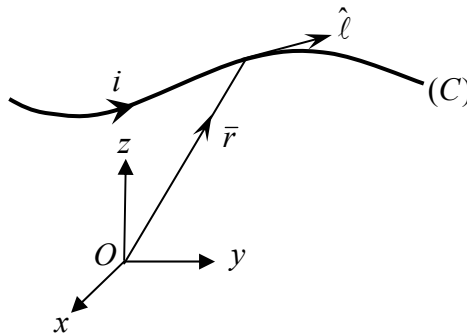
$$I = \int_C K_{n\perp} d\ell. \quad (11)$$

Παρατήρηση: Αν $K_{n\perp} = \text{σταθ.}$ (ομοιόμορφη ροή ηλεκτρικού ρεύματος), η (11) δίνει

$$I = K_{n\perp} \ell. \quad (12)$$

2.3. Γραμμικό ηλεκτρικό ρεύμα (σύμβολο i , διαστάσεις $[A]$).

Όταν η ροή του ρεύματος γίνεται κατά μήκος μίας καμπύλης C (Σχ.4), τότε η ρευματική πηγή χαρακτηρίζεται ως γραμμική. Η περιγραφή της γίνεται με το μέγεθος $i(\vec{r}, t) \hat{\ell}$, όπου $i(\vec{r}, t)$ είναι η ένταση του ρεύματος στη θέση \vec{r} την χρονική στιγμή t και $\hat{\ell}$ το εφαπτομενικό στη γραμμή, στη θέση \vec{r} , μοναδιαίο διάνυσμα.



Σχήμα 4

3. Συσχέτιση των πυκνοτήτων φορτίου και ρεύματος: Εξίσωση συνέχειας

Οι χωρικές πυκνότητες του ηλεκτρικού φορτίου και του ηλεκτρικού ρεύματος αλληλοσυνδέονται μέσω της εξίσωσης συνέχειας. Η εξίσωση συνέχειας αποτελεί την μαθηματική διατύπωση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Θεωρούμε όγκο V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S (Σχ.1), ο οποίος φέρει ηλεκτρικά φορτία και ηλεκτρικά ρεύματα (γραμμικά, επιφανειακά, χωρικά ή συνδυασμό αυτών). Έστω $Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}(t)$ το ολικό φορτίο εντός του όγκου V την χρονική στιγμή t . Το $Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$ μεταβάλλεται με τον χρόνο επειδή είναι δυνατό να έχουμε εκροή φορτίου στον περιβάλλοντα χώρο (ή εισροή φορτίου από τον περιβάλλοντα χώρο). Ο ρυθμός (ή, αλλιώς, η ταχύτητα) μεταβολής του φορτίου $Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$ ισούται με

$$\frac{d}{dt} Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}(t).$$

Έστω $Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}(0) = Q_0$ το ολικό φορτίο στον όγκο V την χρονική στιγμή $t = 0$. Σύμφωνα με την αρχή διατηρήσεως του φορτίου, η διαφορά

$$\Delta Q = Q_0 - Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}(t) = Q_{\varepsilon\xi}(t) \quad (1)$$

ισούται με το φορτίο το οποίο εξέρρευσε¹ από τον όγκο V κατά το χρονικό διάστημα $(0, t)$ διαμέσου της επιφάνειας S .

¹ Εφ' όσον $\Delta Q > 0$. Αν $\Delta Q < 0$, το φορτίο στην πραγματικότητα εισέρρευσε στον όγκο V .

Με παραγωγή ως προς τον χρόνο, από την (1) προκύπτει

$$\frac{dQ_{\varepsilon_s}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[Q(0) - Q_{\varepsilon\omega\tau}(t)] = -\frac{dQ_{\varepsilon\omega\tau}(t)}{dt}. \quad (2)$$

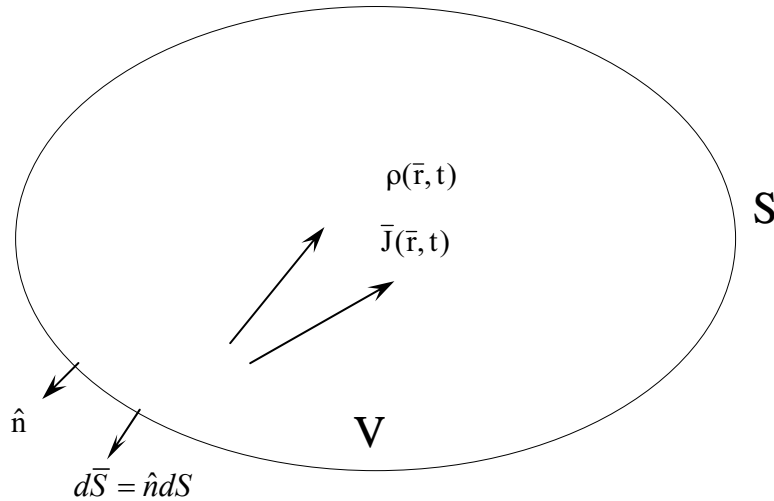
Η ποσότητα $dQ_{\varepsilon_s}(t)/dt$ στο αριστερό μέλος της (2) ισούται, εξ ορισμού, με την ένταση $I(t)$ του ρεύματος δια μέσου της S κατά τη χρονική στιγμή t , δηλαδή

$$\frac{dQ_{\varepsilon_s}(t)}{dt} = I(t). \quad (3)$$

Με αντικατάσταση από την (2) στην (3), παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$I = -\frac{dQ_{\varepsilon\omega\tau}(t)}{dt}. \quad (4)$$

Η σχέση (4) αποτελεί την πιο γενική διατύπωση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου. Τα εμπλεκόμενα σε αυτή φορτία και ρεύματα μπορεί να είναι οποιασδήποτε μορφής (χωρικά επιφανειακά κ.λ.π.).



Σχήμα 1

3.1. Εξίσωση συνέχειας σε ολοκληρωτική μορφή

Αν τα ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα στον όγκο V είναι χωρικά με πυκνότητες $\rho(\vec{r}, t)$ και $\vec{J}(\vec{r}, t)$, αντίστοιχα, τότε

$$Q_{\varepsilon\omega\tau}(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV, \quad I = \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}. \quad (5)$$

Επομένως,

$$\frac{dQ_{\varepsilon\omega\tau}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV. \quad (6)$$

[Η εναλλαγή των τελεστών $\frac{d}{dt}$ και \int_V κατά το τελευταίο βήμα στην (6) επιτρέπεται λόγω της υποθεθείσης συνεχείας της ρ .] Με αντικατάσταση από τις (5) και (6) στην (4) προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\oint_S \bar{J}(\bar{r}, t) \cdot d\bar{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\bar{r}, t) dV \quad (\text{ολοκληρωτική μορφή εξίσωσης συνεχείας}), \quad (7)$$

το οποίο αποτελεί την υπό ολοκληρωτική μορφή διατύπωση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου. Η (7) ισχύει για οποιαδήποτε εκλογή του όγκου V .

3.2. Εξίσωση συνεχείας σε διαφορική (σημειακή) μορφή

Με χρήση του θεωρήματος της αποκλίσεως (Gauss) της διανυσματικής ανάλυσης,

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = \int_V (\nabla \cdot \bar{J}) dV, \quad (8)$$

η (7) γράφεται διαδοχικά ως εξής;

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{J}) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\bar{r}, t) dV = -\int_V \frac{\partial \rho(\bar{r}, t)}{\partial t} dV \Rightarrow \int_V \left(\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (9)$$

Επειδή ο όγκος V είναι αυθαίρετος, η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (9) -**υπό την προϋπόθεση ότι είναι συνεχής**- πρέπει να μηδενίζεται παντού. [**Απόδειξη:** Αν, αντιθέτως, θεωρηθεί ότι, π.χ.,

$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ σε κάποιο σημείο P , τότε, λόγω της υποθεθείσης συνεχείας της ολοκληρωτέας συναρτήσεως, υπάρχει περιοχή V_P του σημείου P τέτοια ώστε $\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ σε κάθε σημείο της. Για την περιοχή αυτή, επομένως, ισχύει η σχέση

$$\int_{V_P} \left(\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV > 0,$$

η οποία αντίκειται στην (9)]. Συνεπώς,

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\text{διαφορική μορφή εξίσωσης συνεχείας}). \quad (10)$$

Το αποτέλεσμα (10) αποτελεί την σημειακή μορφή της αρχής διατηρήσεως του φορτίου. Η (10) (καθώς και η ολοκληρωτική της εκδοχή, εξ.(7)) ονομάζεται **εξίσωση συνεχείας** όπως είδαμε, η εξαγωγή της στηρίχθηκε στην αρχή διατηρήσεως του φορτίου.

Σημείωση: Η απόκλιση, $\nabla \cdot \bar{J}$, του διανύσματος

$$\bar{J} = J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z} = J_r \hat{r} + J_\phi \hat{\phi} + J_z \hat{z} = J_r \hat{r} + J_\theta \hat{\theta} + J_\phi \hat{\phi}$$

δίνεται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{J} &= \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r J_r)}{\partial r} + \frac{\partial J_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 J_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (J_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial J_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (11)$$

στο καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Ένας ισοδύναμος ορισμός,

ανεξάρτητος από σύστημα συντεταγμένων, είναι ο εξής:

$$\nabla \cdot \bar{J}(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{J} \cdot d\vec{S}}{V}, \quad (12)$$

όπου ο όγκος V , με σύνορο την επιφάνεια S , τείνει στο μηδέν έχοντας συνεχώς στο εσωτερικό του το σημείο $\vec{r}(x, y, z)$ στο οποίο υπολογίζουμε την απόκλιση.

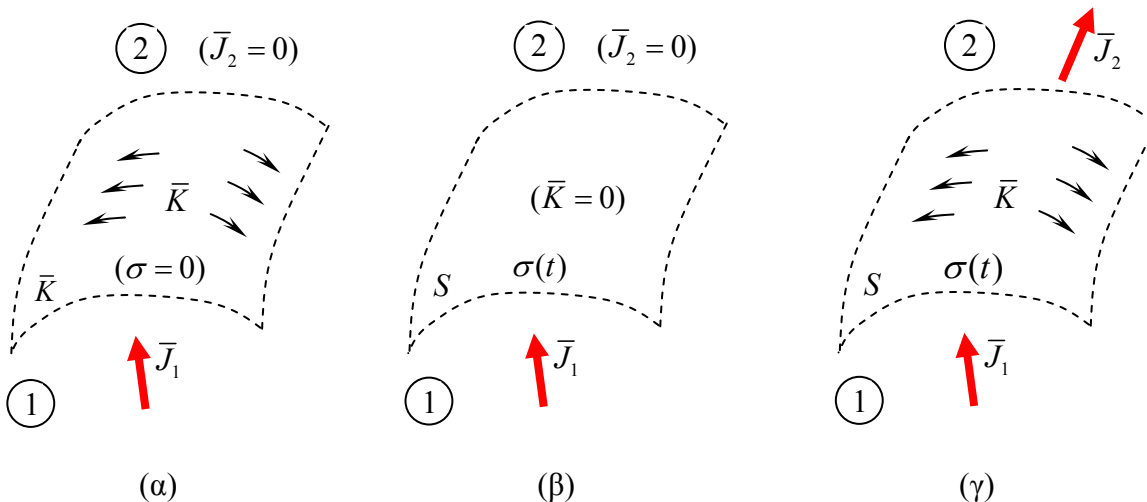
Σχόλια-παρατηρήσεις

Η διαφορική μορφή, εξ. (10), της εξίσωσης συνεχείας ισχύει μόνο σε σημεία όπου η χωρική συνάρτηση \bar{J} είναι συνεχής. Αντίθετα, σε σημεία ασυνέχειας της \bar{J} , κάποιες από τις παραγώγους που απαντώνται στις (11) δεν υπάρχουν, οπότε η απόκλιση $\nabla \cdot \bar{J}$ δεν ορίζεται σε αυτά τα σημεία. Παραδείγματα ασυνέχειας στην \bar{J} δείχνουμε στις διατάξεις του Σχ.2.

Στην περίπτωση του Σχ.2(α), στην περιοχή 1 ρέει χωρικό ρεύμα \bar{J}_1 . Όταν φθάσει στην επιφάνεια S που διαχωρίζει την περιοχή 1 από την περιοχή 2, το ρεύμα αυτό μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε επιφανειακό ρεύμα \bar{K} . Επομένως, η χωρική πυκνότητα του ρεύματος είναι \bar{J}_1 στα σημεία της κάτω όψεως της S και μηδενική ($\bar{J}_2 = 0$) στα σημεία της επάνω όψεως, δηλαδή ασυνεχής (μη παραγωγίσιμη).

Στην περίπτωση του Σχ.2(β), το χωρικό ρεύμα \bar{J}_1 της περιοχής 1, αντί να μετατραπεί σε επιφανειακό, αποθέτει στην διαχωριστική επιφάνεια S το φορτίο που μεταφέρει, το οποίο τώρα γίνεται επιφανειακό $\sigma(t)$, συνεχώς αυξανόμενο με την πάροδο του χρόνου. Επομένως, και πάλι η χωρική πυκνότητα του ρεύματος είναι \bar{J}_1 στα σημεία της κάτω όψεως της S και μηδενική ($\bar{J}_2 = 0$) στα σημεία της επάνω όψεως, δηλαδή ασυνεχής (μη παραγωγίσιμη).

Στο Σχ.2(γ) έχουμε συνδυασμό των περιπτώσεων (α) και (β). Τώρα ένα μέρος του χωρικού ρεύματος \bar{J}_1 μετατρέπεται σε επιφανειακό ρεύμα \bar{K} , ένα άλλο μέρος αποθέτει στην επιφάνεια S συνεχώς αυξανόμενο επιφανειακό φορτίο $\sigma(t)$, ενώ το υπόλοιπο μέρος του ρεύματος συνεχίζει την πορεία του ως χωρικό, \bar{J}_2 , στην περιοχή 2. Είναι φανερό ότι $\bar{J}_1 \neq \bar{J}_2$ στα σημεία των δύο όψεων της S , δηλαδή η χωρική πυκνότητα του ρεύματος είναι και τώρα ασυνεχής (μη παραγωγίσιμη).



Σχήμα 2. (α) Το χωρικό ρεύμα \bar{J}_1 μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε επιφανειακό ρεύμα \bar{K} στην επιφάνεια S . Στην S δεν έχουμε συσσώρευση φορτίου ($\sigma = 0$). Στην περιοχή 2 είναι $\bar{J}_2 = 0$. (β) Το \bar{J}_1 αποθέτει το φορτίο του στην S , οπότε $\sigma = \sigma(t)$. Στην S δεν έχουμε επιφανειακό ρεύμα ($\bar{K} = 0$). Στην περιοχή 2 είναι $\bar{J}_2 = 0$. (γ) Το \bar{J}_1 διαιρείται στο επιφανειακό ρεύμα \bar{K} και στο χωρικό ρεύμα \bar{J}_2 , ενώ μέρος του φορτίου του συσσωρεύεται στην S ($\sigma = \sigma(t)$).

3.3. Οριακή συνθήκη της εξίσωσης συνεχείας

Σε περιπτώσεις όπως αυτές του Σχ. 2, η διαφορική μορφή της εξίσωσης συνεχείας δεν ισχύει στα σημεία της επιφάνειας S , λόγω της παρουσίας επιφανειακών φορτίων και ρευμάτων και της επακόλουθης ασυνέχειας της \bar{J} στα σημεία της. Στα σημεία μιας τέτοιας επιφάνειας, η εξίσωση συνεχείας ισοδυναμεί με την οριακή συνθήκη

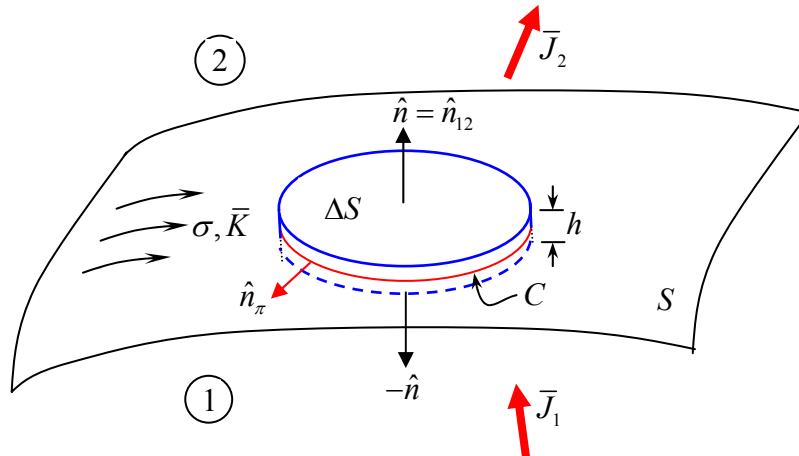
$$\hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\nabla \cdot \bar{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (13)$$

η οποία δείχνει πως σχετίζεται η ασυνέχεια που εμφανίζει η \bar{J} στα σημεία της S με τις επιφανειακές πηγές \bar{K} και $\sigma(t)$ που υπάρχουν εκεί. Στην (13), \hat{n} είναι το κάθετο στην S μοναδιαίο διάνυσμα με φορά από την όψη 1 προς την όψη 2, \bar{J}_1 και \bar{J}_2 είναι οι χωρικές πυκνότητες ρεύματος στα σημεία των δύο όψεων της S και $\nabla \cdot \bar{K}$ είναι η επιφανειακή απόκλιση του \bar{K} .

Για την απόδειξη της (13), εφαρμόζουμε τη γενική εξίσωση (4),

$$I = -\frac{dQ_{\text{εσωτ}}(t)}{dt}, \quad (4)$$

επιλέγοντας ως όγκο V μια κυλινδρική περιοχή σε μορφή νομίσματος με βάσεις, εμβαδού ΔS , τη μία βάση στην περιοχή 1 κάτω από την επιφάνεια S και την άλλη στην περιοχή 2 επάνω από την S , σε πολύ μικρή απόσταση h μεταξύ τους ($h \rightarrow 0$) (Σχ.3).



Σχήμα 3

Στην (4), I είναι το συνολικό ρεύμα που διαπερνά την κλειστή επιφάνεια του κυλίνδρου, το οποίο ισούται με

$$I = I_{\text{χωρ}} + I_{\text{επιφ}} \quad (14)$$

όπου

$$\begin{aligned} I_{\text{χωρ}} &= \oint_{S_{\text{κυλ}}} \bar{J} \cdot d\bar{S} = \int_{\text{επάνω βση}} \bar{J}_2 \cdot d\bar{S} + \int_{\text{κάτω βση}} \bar{J}_1 \cdot d\bar{S} + \int_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} \bar{J} \cdot d\bar{S} \\ &= \int_{\text{επάνω βση}} \bar{J}_2 \cdot \hat{n} dS + \int_{\text{κάτω βση}} \bar{J}_1 \cdot (-\hat{n}) dS + \int_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} \bar{J} \cdot d\bar{S} \\ &= \hat{n} \cdot \bar{J}_2(\bar{r}_2, t) \Delta S + (-\hat{n}) \cdot \bar{J}_1(\bar{r}_1, t) \Delta S + \int_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} \bar{J} \cdot d\bar{S}. \end{aligned} \quad (15)$$

Στο τελευταίο βήμα στην (15) εφαρμόσαμε το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα στην επάνω βάση και την κάτω βάση, όπου \bar{r}_1 και \bar{r}_2 είναι κατάλληλα σημεία των βάσεων αυτών, αντίστοιχα. (Τα \bar{r}_1 και \bar{r}_2 δεν παίζουν κανένα ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα και δεν χρειάζεται να τα προσδιορίσουμε). Το ολοκλήρωμα στην παράπλευρη επιφάνεια, με εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού, προκύπτει ότι είναι ανάλογο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας, η οποία με τη σειρά της είναι ανάλογη του h . Επομένως, για $h \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα αυτό μηδενίζεται. Συνεπώς,

$$I_{\chi\omega\rho} = \hat{n} \cdot \bar{J}_2(\bar{r}_2, t) \Delta S + (-\hat{n}) \cdot \bar{J}_1(\bar{r}_1, t) \Delta S \quad (16)$$

Για το επιφανειακό ρεύμα $I_{\epsilon\pi\iota\phi}$ που διαπερνά την επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε

$$I_{\epsilon\pi\iota\phi} = \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell = \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell, \quad (17)$$

όπου C είναι η περίμετρος της κυκλικής τομής του κυλίνδρου με την S και όπου \hat{n}_π είναι το κάθετο στην C , εφαπτομενικό στην S , μοναδιαίο διάνυσμα. Με αντικατάσταση από τις (16) και (17) στην (14) παίρνουμε

$$I = \hat{n} \cdot \bar{J}_2(\bar{r}_2, t) \Delta S + (-\hat{n}) \cdot \bar{J}_1(\bar{r}_1, t) \Delta S + \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell \quad (18)$$

Από το άλλο μέρος, το ολικό φορτίο $Q_{\epsilon\sigma\omega\tau}$ που εμπεριέχεται στον κύλινδρο ισούται με

$$Q_{\epsilon\sigma\omega\tau} = Q_{\chi\omega\rho} + Q_{\epsilon\pi\iota\phi} \quad (19)$$

όπου

$$Q_{\chi\omega\rho} = \int_{V_{\kappa\upsilon\lambda}} \rho(\bar{r}, t) dV = \rho(\bar{r}_\kappa, t) V_{\kappa\upsilon\lambda} = \rho(\bar{r}_\kappa, t) h \Delta S \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (20)$$

Κατά το δεύτερο βήμα στην (20), έγινε εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για το χωρικό ολοκλήρωμα, με \bar{r}_κ κατάλληλο σημείο στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Τέλος, το εμπεριεχόμενο επιφανειακό φορτίο $Q_{\epsilon\pi\iota\phi}$ ισούται με

$$Q_{\epsilon\pi\iota\phi} = \int_{\Delta S} \sigma(\bar{r}, t) dS = \sigma(\bar{r}_0, t) \Delta S \quad (21)$$

όπου $\sigma(\bar{r}_0, t)$ είναι η τιμή της σ σε κατάλληλα επιλεγμένο σημείο \bar{r}_0 της ΔS (θεώρημα μέσης τιμής).

Αντικαθιστώντας πρώτα από τις (20) και (21) στην (19), ύστερα από την (19) και την (18) στην (4) και, τέλος, διαιρώντας και τα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης με ΔS παίρνουμε τη σχέση

$$\hat{n} \cdot [\bar{J}_2(\bar{r}_2, t) - \bar{J}_1(\bar{r}_1, t)] + \frac{1}{\Delta S} \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell = - \frac{\partial \sigma(\bar{r}_0, t)}{\partial t} \quad (22)$$

Στο όριο όπου $\Delta S \rightarrow 0$, τα σημεία \bar{r}_1 , \bar{r}_2 και \bar{r}_0 ταυτίζονται. Επιπλέον, κατ' αναλογία προς τον γενικό ορισμό (12) της χωρικής απόκλισης $\nabla \cdot \bar{J}$, ισχύει η σχέση

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell}{\Delta S} \equiv \nabla_S \cdot \bar{K}, \quad (23)$$

όπου το βαθμωτό μέγεθος $\nabla_S \cdot \bar{K}$ ονομάζεται επιφανειακή απόκλιση της \bar{K} .

Αντικαθιστώντας την (23) στην (22) προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση (13).

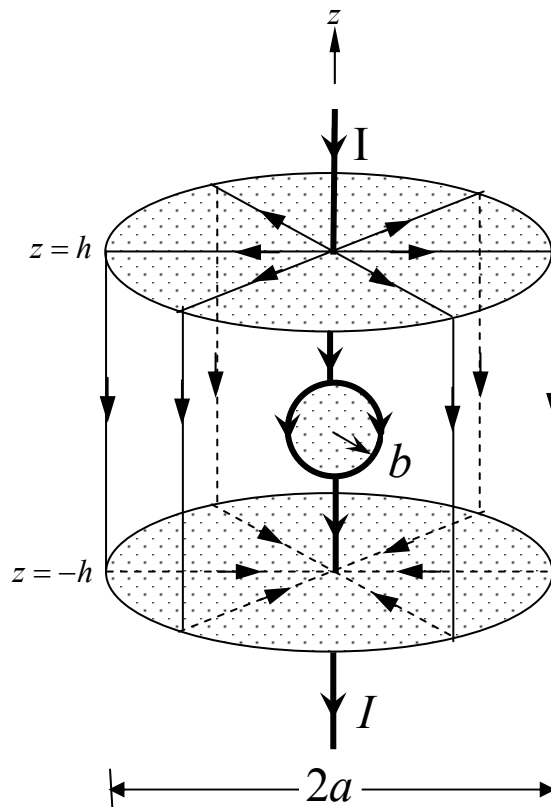
Σημείωση: Για μία επίπεδη επιφάνεια στο επίπεδο xy με $\bar{K} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y}$, ισχύει η σχέση

$$\nabla_s \cdot \bar{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y}.$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για την $\nabla_s \cdot \bar{K}$ πάνω σε κυλινδρικές, σφαιρικές, κωνικές ή άλλες επιφάνειες.

4. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Στη διάταξη του Σχ.1, κατά μήκος του ημιάξονα $h < z < +\infty$ ρέει ρεύμα εντάσεως I κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$. Μετά την προσαγωγή του στη θέση $z=h$, το ρεύμα αυτό διακλαδίζεται. Έτσι, ένα μέρος του ρεύματος, εντάσεως I_1 , διαρρέει διαδοχικά και συμμετρικά την βάση $z=h$ της κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας a κατά την κατεύθυνση \hat{r} (αναφορά: το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με άξονα τον άξονα του κυλίνδρου), την παράπλευρη επιφάνεια κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$ και την κάτω βάση κατά την κατεύθυνση $-\hat{r}$. Το υπόλοιπο του ρεύματος, εντάσεως $I_2 = I - I_1$, ρέει κατά μήκος του άξονα των z κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$, αφού ενδιάμεσως διατρέξει συμμετρικά όλη την επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας b κατά την κατεύθυνση $\hat{\theta}$ (αναφορά: το σφαιρικό σύστημα με αρχή το κέντρο της σφαίρας). Ο ημιάξονας $z < -h$ διαρρέεται από το συνολικό ρεύμα I . Ζητείται να βρεθεί η έκφραση της επιφανειακής πυκνότητας του ρεύματος σε κάθε επιφάνεια της διατάξεως.



Σχήμα 1

Λύση: Για τον υπολογισμό της πυκνότητας \bar{K} επιλέγουμε κατάλληλες γραμμές C κάθετες στη ροή του ρεύματος, όπως στο Σχ.2, και εφαρμόζουμε τη σχέση (2.12). Έτσι βρίσκουμε:

α. Πάνω βάση ($z=h$): Η γραμμή C είναι κύκλος ακτίνας r και

$$\bar{K} = \bar{K}(r) = \hat{r} \frac{I_1}{2\pi r} \quad (1)$$

β. Παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια: Εδώ η C είναι κύκλος ακτίνας a , οπότε

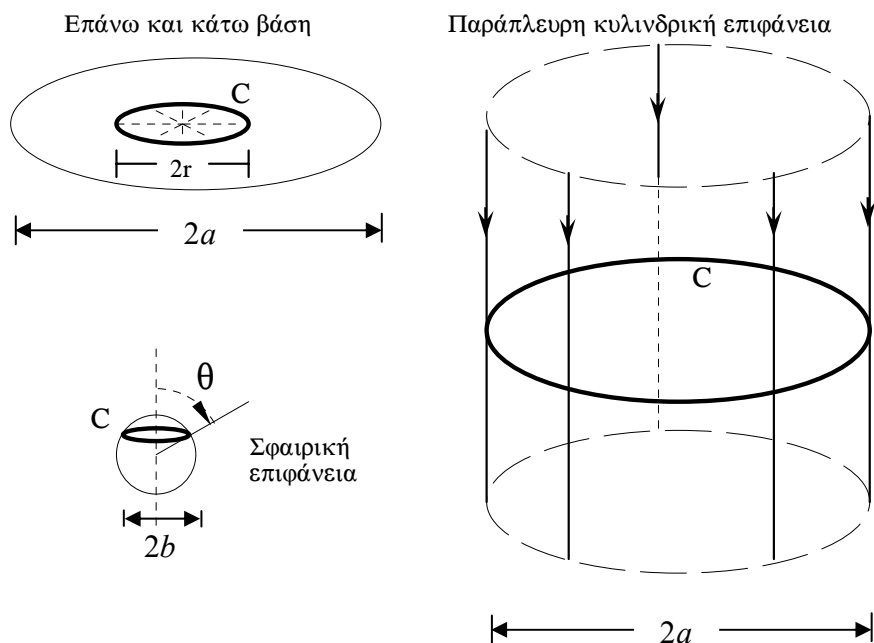
$$\bar{K} = -\frac{I_1}{2\pi a} \hat{z} \quad (2)$$

γ. Κάτω βάση ($z=-h$): Κατ' αναλογία προς την (1),

$$\bar{K} = \bar{K}(r) = -\hat{r} \frac{I_1}{2\pi r} \quad (3)$$

δ. Επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας b : C είναι τώρα ο παράλληλος κύκλος, ακτίνας $b \sin \theta$, ο οποίος διέρχεται από το σημείο της επιφάνειας της σφαίρας όπου θέλουμε να βρούμε την \bar{K} . Είναι

$$\bar{K} = \bar{K}(\theta) = \hat{\theta} \frac{I_2}{2\pi(b \sin \theta)} \quad (4)$$

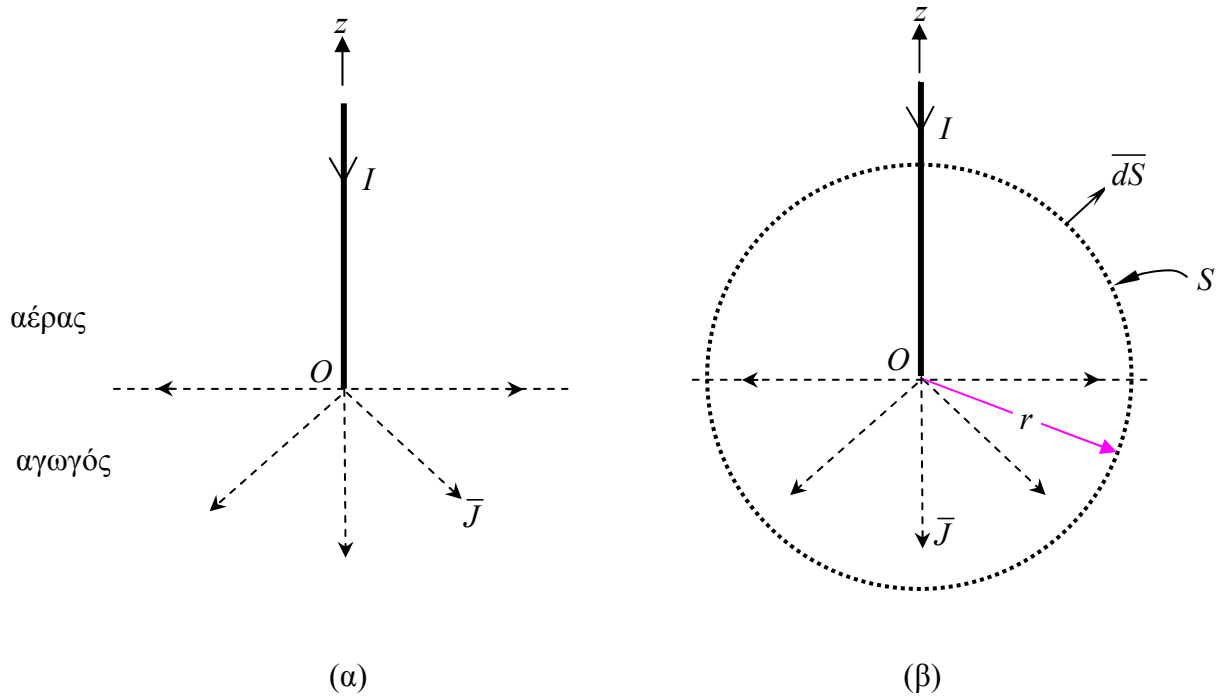


Σχήμα 2

Παράδειγμα 2: Στη διάταξη του Σχ.3(α), ο ημιχώρος $z > 0$ πληρούται με αέρα ενώ ο ημιχώρος $z < 0$ είναι αγωγός. Χρονοσταθερό ηλεκτρικό ρεύμα εντάσεως I προσάγεται στην αρχή O του συστήματος συντεταγμένων μέσω ημιαπείρου νηματοειδούς αγωγού, ο οποίος εκτείνεται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα των z . Ακολουθώντας, το ρεύμα διαχέεται ακτινικά και ομοιόμορφα στον αγωγίμο ημιχώρο $z < 0$. (Η επιστροφή του ρεύματος γίνεται μέσω της επιφάνειας της σφαίρας άπειρης ακτίνας). Να βρεθεί η χωρική πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στον αγωγό.

Λύση: Επειδή το ρεύμα διαχέεται ακτινικά και ομοιόμορφα, η χωρική του πυκνότητα σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\bar{J} = \hat{r} J(r). \quad (1)$$



Σχήμα 3

Για τη σφαίρα ακτίνας r , που δείχνει το Σχ.3(β), εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας

$$I_{ολ} = -\frac{dQ_{εσωτ}}{dt} = 0 \quad (2)$$

(η παράγωγος $dQ_{εσωτ}/dt$ είναι μηδενική επειδή, λόγω χρονοσταθερότητας των μεγεθών στη διάταξη, δεν έχουμε πουθενά συσσώρευση φορτίου). Στην (2),

$$I_{ολ} = -I + \oint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \quad (3)$$

είναι η ένταση του ρεύματος (γραμμικού και χωρικού, συνολικά) που διαπερνά την επιφάνεια S της σφαίρας και $Q_{εσωτ}$ είναι το συνολικό φορτίο στο εσωτερικό της σφαίρας. Επομένως,

$$-I + \oint_S \hat{r} J(r) \cdot \hat{r} dS = 0 \Rightarrow -I + \oint_S J(r) dS = 0 \Rightarrow -I + J(r) \frac{4\pi r^2}{2} = 0 \Rightarrow J(r) = \frac{I}{2\pi r^2}. \quad (4)$$

Παράδειγμα 3: Να επαναληφθεί το παράδειγμα 2 στην περίπτωση όπου η χωρική πυκνότητα, αντί να είναι ομοιόμορφη, έχει τη μορφή

$$\vec{J} = \hat{r} J_0(r) \sin \theta \quad (1)$$

Λύση: Ισχύει πάλι η σχέση

$$-I + \oint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = 0, \quad (2)$$

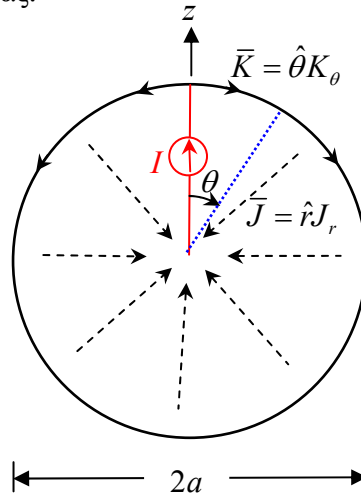
η οποία γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
-I + \oint_S \hat{r} J \cdot \hat{r} dS &= 0 \Rightarrow \\
-I + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} J_0(r) \sin \theta \hat{r} \cdot \underbrace{\hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}_{dS} &= 0 \Rightarrow \\
-I + r^2 J_0(r) 2\pi \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta &= 0 \Rightarrow \\
-I + r^2 J_0(r) 2\pi \frac{\pi}{4} = 0 &\Rightarrow J_0(r) = \frac{2I}{\pi^2 r^2}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\bar{J} = \hat{r} \frac{2I \sin \theta}{\pi^2 r^2}. \quad (3)$$

Παράδειγμα 4: Χρονοσταθερή πηγή ηλεκτρικού ρεύματος εντάσεως I προσάγει ηλεκτρικό ρεύμα στον βόρειο πόλο τέλεια αγωγίμης σφαιρικής επιφάνειας, ακτίνας a , το εσωτερικό της οποίας πληρούται με αγωγίμο υλικό (Σχ.4). Ακολουθώντας, το ρεύμα αυτό διατρέχει την επιφάνεια της σφαίρας ακολουθώντας όλους τους μεσημβρινούς κύκλους, συγχρόνως όμως διαρρέει στο εσωτερικό της σφαίρας κατά την ακτινική κατεύθυνση και συλλέγεται στο κέντρο της, για να επαναλάβει την πορεία του προς τον βόρειο πόλο μέσω της πηγής. Αν το χωρικό ρεύμα έχει τη μορφή $\bar{J} = \hat{r} J_0(r) \sin \theta$, να βρεθεί η $J_0(r)$. Να βρεθεί, επίσης, η επιφανειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στην επιφάνεια της σφαίρας.



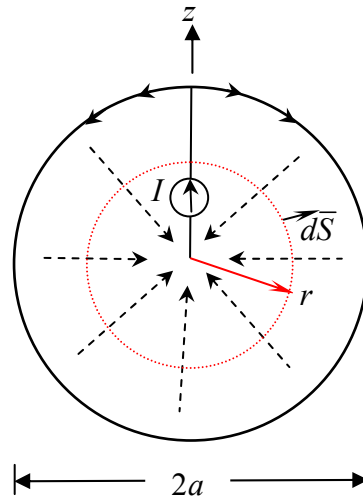
Σχήμα 4

Λύση: Για την εύρεση της χωρικής πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος στο εσωτερικό της αγωγίμης σφαίρας, θεωρούμε σφαίρα ακτίνας r με $0 < r < a$ (Σχ.5) και εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας, όπως ακριβώς στο παράδειγμα 4. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I + \oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} &= 0 \Rightarrow I + \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \hat{r} J_0(r) \sin \theta \cdot \underbrace{\hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}_{dS} = 0 \Rightarrow I + r^2 J_0(r) 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow I + r^2 J_0(r) 2\pi \frac{\pi}{2} &= 0 \Rightarrow J_0(r) = -\frac{I}{\pi^2 r^2}.
\end{aligned} \quad (1)$$

Επομένως,

$$\bar{J} = \hat{r} J_0(r) \sin \theta = -\hat{r} \frac{I \sin \theta}{\pi^2 r^2} \quad (0 < r < a). \quad (2)$$



Σχήμα 5

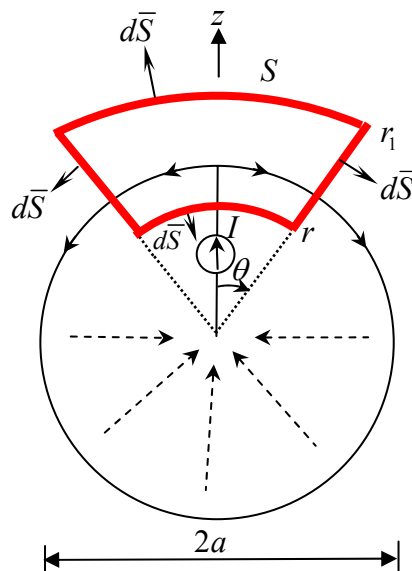
Για την εύρεση της επιφανειακής πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος

$$\bar{K} = \hat{\theta} K_{\theta}(\theta) \quad (3)$$

στο σημείο (a, θ, ϕ) της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας a , εφαρμόζουμε και πάλι την γενική εξίσωση

$$I_{ol} = -\frac{dQ_{εσωτ}}{dt} = 0,$$

τόρα στην σφαιροκωνική περιοχή που δείχνει σε τομή το Σχ.13 (με κόκκινο χρώμα). Η περιοχή αυτή έχει ως σύνορο τα σφαιρικά τόξα ακτίνων r (με $r < a$) και r_1 (με $r_1 > a$), αντίστοιχα, καθώς και την κωνική επιφάνεια με ημιγωνία κορυφής θ . Προκύπτει έτσι η σχέση



Σχήμα 6

$$-I + \oint_S \bar{J} \cdot \bar{dS} + K_{\theta}(\theta)(2\pi a \sin \theta) = 0. \quad (4)$$

Στο επιφανειακό ολοκλήρωμα στην (4) συμβάλλει μόνο το σφαιρικό τόξο ακτίνας r . [Στο σφαιρικό

τόξο ακτίνας r_1 είναι $\bar{J}=0$, ενώ στην κωνική επιφάνεια είναι $d\bar{S}=\hat{\theta}dS$, δηλαδή $d\bar{S}\perp\bar{J}$. Επομένως,

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = \int_{\theta'=0}^{\theta} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \hat{r} J_0(r) \sin \theta' \cdot \underbrace{(-\hat{r}) r^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'}_{d\bar{S}} = -r^2 J_0(r) 2\pi \int_{\theta'=0}^{\theta} \sin^2 \theta' d\theta' =$$

$$= -r^2 J_0(r) \pi \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) = \frac{I}{\pi} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right). \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$K_{\theta}(\theta) = \frac{I}{4\pi^2 a} \frac{2(\pi - \theta) + \sin 2\theta}{\sin \theta}. \quad (6)$$

2^{ος} τρόπος εύρεσης της $K_{\theta}(\theta)$.

Εναλλακτικά, για την εύρεση της $K_{\theta}(\theta)$ μπορούμε να εργαστούμε με βάση την οριακή συνθήκη (3.13):

$$\hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\nabla \cdot \bar{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας με $r=a$, όπου

$$\hat{n} \equiv \hat{r},$$

$$\bar{J}_2 \equiv \bar{J}(r=a+) = 0,$$

$$\bar{J}_1 \equiv \bar{J}(r=a-) = -\hat{r} \frac{I \sin \theta}{(\pi a)^2},$$

$\partial \sigma / \partial t = 0$ (χρονική ανεξαρτησία, άρα δεν έχουμε συσσώρευση φορτίου)

και

$$\nabla \cdot \bar{K} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (K_{\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_{\phi}}{\partial \phi} \right)_{r=a} = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{d(K_{\theta} \sin \theta)}{d\theta}.$$

Προκύπτει έτσι η διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{a \sin \theta} \frac{d(K_{\theta} \sin \theta)}{d\theta} = -\frac{I \sin \theta}{(\pi a)^2} \Rightarrow \frac{d(K_{\theta} \sin \theta)}{d\theta} = -\frac{I \sin^2 \theta}{\pi^2 a}, \quad (7)$$

από την οποία με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$K_{\theta}(\theta) \sin \theta = -\frac{I}{\pi^2 a} \int \sin^2 \theta d\theta = -\frac{I}{\pi^2 a} \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + c, \quad (8)$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσεως ανεξάρτητη του θ . Για την εύρεση της σταθεράς c , παρατηρούμε πρώτα ότι ο παράλληλος κύκλος της σφαιρικής επιφάνειας $r=a$, ο οποίος διέρχεται από το σημείο όπου θέλουμε να υπολογίσουμε την K_{θ} (η ακτίνα του κύκλου αυτού ισούται με $a \sin \theta$), διαρρέεται από επιφανειακό ρεύμα με ένταση (βλέπ. εξ. (2.12))

$$K_{\theta}(\theta) \times \text{μήκος του κύκλου} = K_{\theta}(\theta) 2\pi a \sin \theta.$$

Για $\theta \rightarrow 0$, οπότε ο παράλληλος κύκλος συρρικνώνεται στον βόρειο πόλο της σφαίρας, από το Σχ.4 γίνεται φανερό ότι η παραπάνω ένταση ισούται με I (όση είναι η ένταση του ρεύματος που προσάγει

η πηγή), δηλαδή

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} [K_\theta(\theta) 2\pi a \sin \theta] = I \stackrel{(8)}{\Rightarrow} 2\pi a c = I \Rightarrow c = \frac{I}{2\pi a}. \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας την (9) στην (8) παίρνουμε πάλι την (6).

Παράδειγμα 5 (Άσκηση 1.12 ελαφρώς παραλλαγμένη).

Στο εσωτερικό αγωγίμης σφαίρας ακτίνας a , η οποία περιβάλλεται από αέρα, τοποθετούμε την χρονική στιγμή $t=0$ χωρικό φορτίο πυκνότητας $\rho(r, t=0) = \rho_0 \frac{r}{a}$ ($0 \leq r \leq a$) (Σχ.7(α)). Άλλα φορτία δεν υπάρχουν πια για $t=0$. Για $t>0$, το διεγειρόμενο στη διάταξη ηλεκτρικό πεδίο ασκεί ηλεκτρικές δυνάμεις στο φορτίο, το οποίο κινείται πλέον ακτινικά και ομοιόμορφα, προκαλώντας χωρικό ηλεκτρικό ρεύμα με (άγνωστη) χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{r} J_r(r, t)$ (Σχ.7(β)). Με τα ρεύματα αυτά το χωρικό φορτίο μεταφέρεται και αποτίθεται στην επιφάνεια του αγωγού και, έτσι, το χωρικό φορτίο μειώνεται βαθμιαία με την πάροδο του χρόνου. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μάθουμε ότι την χρονική στιγμή $t>0$ η χωρική πυκνότητα στο εσωτερικό της σφαίρας ισούται με

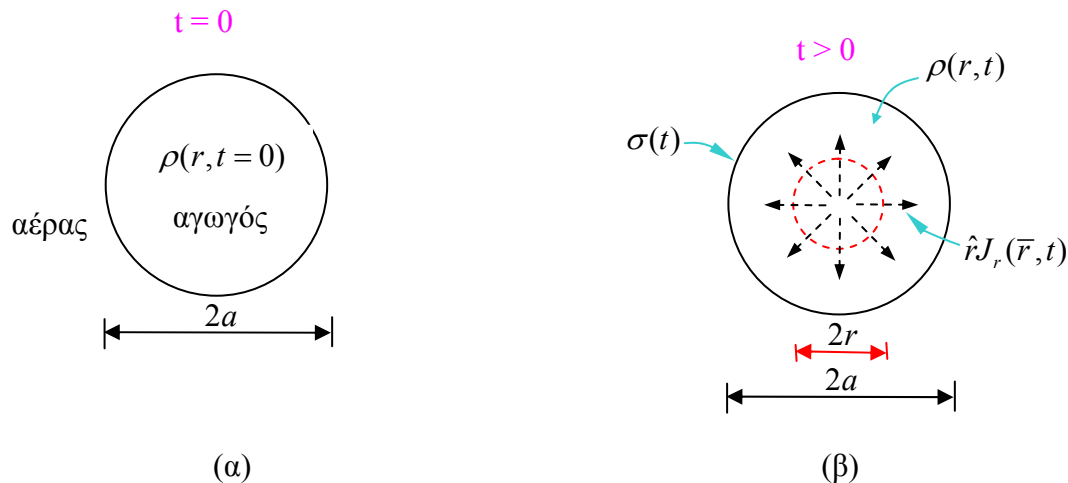
$\rho(r, t) = \rho(r, t=0)e^{-t/\tau}$ (μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο), δηλαδή στην περίπτωση μας έχουμε

$$\rho(r, t) = \rho_0 \frac{r}{a} e^{-t/\tau} \quad (0 \leq r \leq a, t \geq 0),$$

όπου τ γνωστή χρονική σταθερά (ίση, όπως θα μάθουμε, με το πηλίκο ε/γ , όπου ε είναι η διηλεκτρική σταθερά και γ η ειδική αγωγιμότητα του αγωγού). Ζητούνται:

- Η ένταση i και η πυκνότητα $J_r(r, t)$ του ηλεκτρικού ρεύματος την χρονική στιγμή t .
- Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια της σφαίρας την χρονική στιγμή t .

Λύση



Σχήμα 7

1^{ος} τρόπος: Χρήση της εξίσωσης συνεχείας σε ολοκληρωτική μορφή

α) Εφαρμόζουμε την εξίσωση συνεχείας σε ολοκληρωτική μορφή (εξ. (3.7)) σε σφαίρα ακτίνας r με $r < a$ (Σχ.7 (β)). Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{J}(r,t) \cdot d\vec{S} &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho(r,t) dV \Rightarrow \int_S \hat{r} J_r(r,t) \cdot \hat{r} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_0 \frac{r}{a} e^{-t/\tau} dV \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_S J_r(r,t) dS &= -\left(\frac{d}{dt} e^{-t/\tau} \right) \int_V \rho_0 \frac{r}{a} dV \Rightarrow \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} J_r(r,t) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\left(\frac{d}{dt} e^{-t/\tau} \right) \int_V \rho_0 \frac{r}{a} dV \Rightarrow \\
\left(\text{με τη χρήση και της } V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr \right) \\
\Rightarrow J_r(r,t) r^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi &= -\left(\frac{d}{dt} e^{-t/\tau} \right) \int_{r'=0}^r \rho_0 \frac{r'}{a} 4\pi r'^2 dr' \Rightarrow \\
\Rightarrow 4\pi r^2 J_r(r,t) &= -\left(-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right) \frac{\rho_0}{a} 4\pi \left(\frac{r'^4}{4} \right)_{r'=0}^r = e^{-t/\tau} \frac{\rho_0}{a\tau} \pi r^4 \Rightarrow J_r(r,t) = \frac{\rho_0}{4a\tau} r^2 e^{-t/\tau}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ένταση του ρεύματος: Λόγω της ομοιομορφίας της ροής ρεύματος ισχύει η σχέση (2.6):

$$i(r,t) = J_r(r,t) S = J_r(r,t) 4\pi r^2 = \frac{\pi \rho_0}{a\tau} r^4 e^{-t/\tau}. \tag{2}$$

β) Το ολικό χωρικό φορτίο της σφαίρας την χρονική στιγμή t είναι

$$Q(t) = \int_V \rho(r,t) dV = \int_V \rho_0 \frac{r}{a} e^{-t/\tau} dV = e^{-t/\tau} \int_0^a \rho_0 \frac{r}{a} 4\pi r^2 dr = e^{-t/\tau} \pi a^3 \rho_0,$$

ενώ το ολικό χωρικό φορτίο της σφαίρας την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

$$Q(0) = \pi a^3 \rho_0.$$

Ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned}
\underbrace{Q(0)}_{\text{ολικό φορτίο για } t=0} &= \underbrace{Q(t)}_{\text{ολικό χωρικό φορτίο τη στιγμή } t} + \underbrace{\sigma(t) 4\pi a^2}_{\text{ολικό επιφανειακό φορτίο τη στιγμή } t} \Rightarrow \pi a^3 \rho_0 = e^{-t/\tau} \pi a^3 \rho_0 + \sigma(t) 4\pi a^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow \sigma(t) &= \frac{\rho_0 a}{4} (1 - e^{-t/\tau}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Παρατήρηση: Για $t \rightarrow \infty$, $Q(t \rightarrow \infty) = 0$ και $Q^{\text{επιφ}}(t \rightarrow \infty) = \pi a^3 \rho_0 = Q(t=0)$. Δηλαδή, στο τέλος του μεταβατικού φαινομένου (για $t \rightarrow \infty$), το χωρικό φορτίο της σφαίρας μηδενίζεται έχοντας εν τω μεταξύ μεταφερθεί ολόκληρο στην επιφάνεια της σφαίρας. Για $t \rightarrow \infty$, δηλαδή με το τέλος του μεταβατικού φαινομένου, μηδενίζεται και το χωρικό ρεύμα ($J_r(r, t \rightarrow \infty) = 0$), όπως είναι αναμενόμενο.

2^{ος} τρόπος: Χρήση της εξίσωσης συνεχείας σε σημειακή μορφή

α) Στο εσωτερικό της σφαίρας έχουμε:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \xRightarrow{(3.11)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 J_r(r,t))}{\partial r} = -\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} = \rho_0 \frac{r}{a\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{\partial (r^2 J_r(r,t))}{\partial r} = \rho_0 \frac{r^3}{a\tau} e^{-t/\tau}.$$

Με ολοκλήρωση ως προς r , παίρνουμε:

$$r^2 J_r(r,t) = \rho_0 \frac{r^4}{4a\tau} e^{-t/\tau} + c, \tag{4}$$

όπου c “σταθερά” ολοκληρώσεως (ανεξάρτητη του r). Για να βρούμε την c , θεωρούμε μια πολύ μικρή σφαίρα ακτίνας r ($r \rightarrow 0$). Επειδή το φορτίο μιας τέτοιας σφαίρας τείνει στο μηδέν, περιμένουμε η ένταση $4\pi r^2 J_r(r, t)$ του ρεύματος που περνάει από την επιφάνειά της να τείνει και αυτή στο μηδέν (βλ. ορισμό της εντάσεως χωρικού ρεύματος). Δηλαδή,

$$\lim_{r \rightarrow 0} [4\pi r^2 J_r(r, t)] = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [4\pi \rho_0 \frac{r^4}{4a\tau} e^{-t/\tau} + 4\pi c] = 0 \Rightarrow 0 + 4\pi c = 0 \Rightarrow c = 0. \quad (5)$$

Με αντικατάσταση του c στην (4) και διαίρεση με r^2 προκύπτει πάλι η (1).

β) Στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας με $r = a$ ισχύει η οριακή συνθήκη (3.13):

$$\hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\nabla \cdot \bar{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (6)$$

όπου

$$\hat{n} \equiv \hat{r},$$

$$\bar{J}_2 \equiv \bar{J}(r = a+) = 0,$$

$$\bar{J}_1 \equiv \bar{J}(r = a-, t) = \hat{r} \frac{\rho_0}{4\tau} a e^{-t/\tau}, \text{ και}$$

$\bar{K} = 0$ (το φορτίο απλά αποτίθεται στην επιφάνεια της σφαίρας και συσσωρεύεται, δηλαδή δεν μετακινείται και επομένως δεν προκύπτει επιφανειακό ρεύμα). Με αντικατάσταση στην (6) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{\rho_0}{4\tau} a e^{-t/\tau}. \quad (7)$$

Από την (7) με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\sigma(t) = -\frac{\rho_0}{4} a e^{-t/\tau} + d, \quad (8)$$

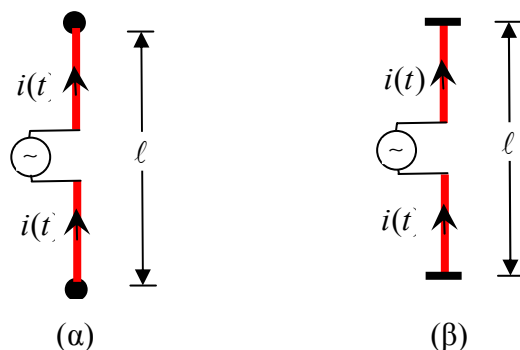
όπου d σταθερά ολοκληρώσεως. Για $t = 0$, είναι $\sigma = 0$, οπότε

$$0 = -\frac{\rho_0}{4} a + d \Rightarrow d = \frac{\rho_0}{4} a.$$

Αντικαθιστώντας την d στην (7), προκύπτει πάλι η (3).

Άσκηση 1.13.

Διπολική κεραία², με μήκος $\ell \ll \lambda$ (βραχύ δίπολο ή δίπολο του Hertz) όπου λ είναι το μήκος κύματος του ακτινοβολούμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, τροφοδοτείται με ρεύμα $i(t) = I_{\max} \cos(\omega t)$, όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα της πηγής. Στα άκρα της κεραίας υπάρχουν μικρές αγώγιμες σφαίρες (Σχ.8(α)) ή αγώγιμοι δίσκοι (Σχ.8(β)) για την εναπόθεση ηλεκτρικών φορτίων, έτσι ώστε το ρεύμα της κεραίας να είναι ομοιόμορφο. Να υπολογιστούν αυτά τα φορτία.



Σχήμα 8

² Βλέπετε Σημείωση παρακάτω.

Λύση

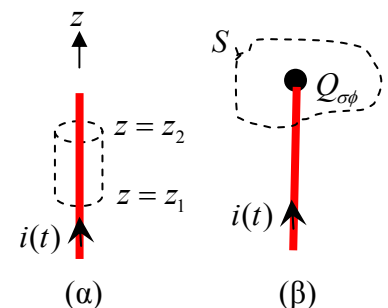
Παρατήρηση: Αν υπάρχει φορτίο στα ευθύγραμμα τμήματα της κεραίας, αυτό είναι χρονοσταθερό. Για την απόδειξη, εφαρμόζουμε την εξίσωση συνεχείας στη γενικότερη μορφή,

$$I_{ολ} = -\frac{dQ_{εσωτ}}{dt}, \quad (1)$$

για τον κύλινδρο του Σχ.9(α), ο οποίος εκτείνεται από $z = z_1$ μέχρι $z = z_2$. Στην εξίσωση αυτή, $I_{ολ}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων που διαπερνούν τον κύλινδρο και $Q_{εσωτ}$ το εμπεριεχόμενο φορτίο. Προκύπτει ότι

$$\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \text{εισερχόμενο} \quad \text{εξερχόμενο} \\ \text{ρεύμα} \quad \text{ρεύμα} \end{array} \quad -i(t) + i(t) = -\frac{dQ_{εσωτ}}{dt} \Rightarrow \frac{dQ_{εσωτ}}{dt} = 0 \Rightarrow Q_{εσωτ} = \text{σταθ}.$$

Για την εύρεση του φορτίου του επάνω σφαιριδίου, εφαρμόζουμε πάλι την (1), τώρα για την διάταξη του Σχ. 9(β), θεωρώντας κλειστή επιφάνεια S περιβάλλουσα το σφαιρίδιο. Παίρνοντας υπόψη και το αποτέλεσμα (2), προκύπτει ότι



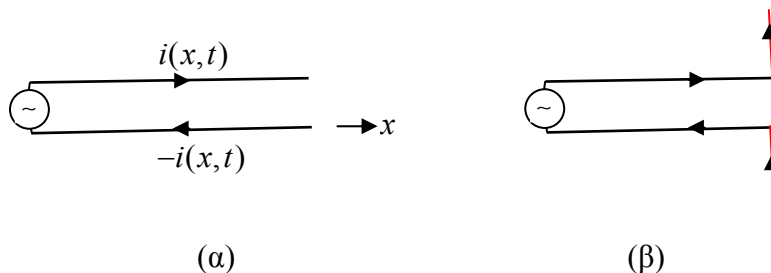
Σχήμα 9

$$-i(t) = -\frac{dQ_{σφ}}{dt} \Rightarrow \frac{dQ_{σφ}}{dt} = I_{\max} \cos(\omega t) \Rightarrow Q_{σφ}(t) = \frac{I_{\max}}{\omega} \sin(\omega t) + c, \quad (3)$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσεως ανεξάρτητη του t . Για την εύρεση της c αρκεί να γνωρίζουμε το φορτίο κάποια χρονική στιγμή. Π.χ., αν υποθέσουμε ότι αρχικά η σφαίρα ήταν αφόρτιστη οπότε $Q_{σφ}(0) = 0$, προκύπτει $c = 0$.

Το φορτίο στο κάτω σφαιρίδιο βρίσκεται με τον ίδιο τρόπο.

Σημείωση: (Πως υλοποιείται η διπολική κεραία.) Στο Σχ.10(α) δείχνουμε μία δυσύρματη γραμμή μεταφοράς. Στην αρχή της γραμμής βρίσκεται η πηγή, ενώ το τέρμα της είναι ανοικτοκυκλωμένο. Τα ρεύματα στους δύο αγωγούς της γραμμής (συναρτήσεις της θέσεως και του χρόνου) είναι $i(x, t)$ και $-i(x, t)$, αντίστοιχα. Αν παραμορφώσουμε (λυγίσουμε) τους αγωγούς της γραμμής, όπως στο Σχ.10(β), προκύπτει η διπολική κεραία του Σχ. 8. Δύο αγωγή σφαιρίδια (ή πλακίδια) στα άκρα βοηθούν ώστε το ρεύμα στην κεραία (κατακόρυφα τμήματα με κόκκινο χρώμα) να έχει σταθερό πλάτος.



Σχήμα 10