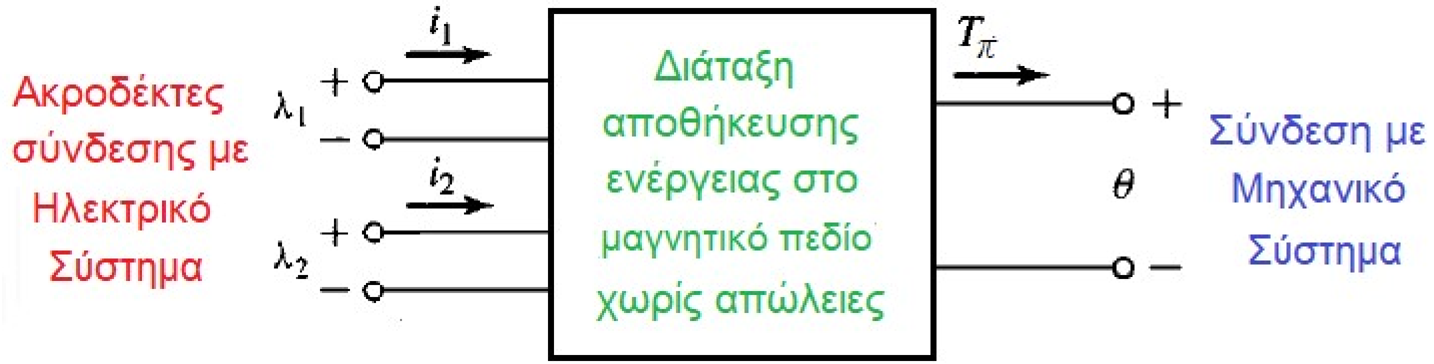
Διατάξεις Ηλεκτρομηχανικής Μετατροπής πολλών διεγέρσεων



Σχηματική αναπαράσταση διατάξεως ηλεκτρομηχανικής μετατροπής ενέργειας με δύο διεγέρσεις

Ισοζύγιο ενέργειας της διατάξεως:

$$dW_\pi\,(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = i_1\, d\lambda_1 + i_2\, d\lambda_2 - T_\pi\, d\theta$$

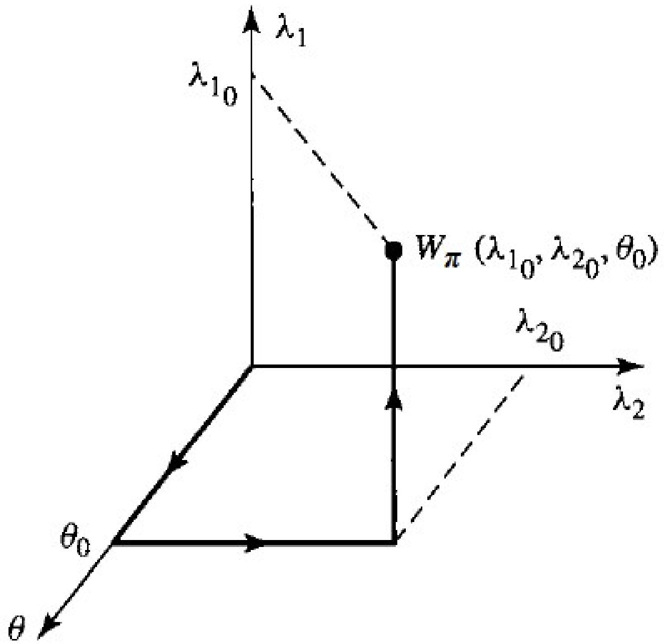
επομένως:

$$\begin{cases} i_1 = \left.\dfrac{\partial W_\pi\,(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_1}\right|_{\lambda_2,\theta} \\ i_2 = \left.\dfrac{\partial W_\pi\,(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_2}\right|_{\lambda_1,\theta} \\ T_\pi = -\left.\dfrac{\partial W_\pi\,(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta}\right|_{\lambda_1,\lambda_2} \end{cases}$$

Διατάξεις Ηλεκτρομηχανικής Μετατροπής με δύο διεγέρσεις

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση ισοζυγίου ενέργειας της διατάξεως προκύπτει:

$$W_\pi(\lambda_{1_0}, \lambda_{2_0}, \theta_0) = \int_0^{\lambda_{2_0}} i_2(\lambda_1 = 0, \lambda_2, \theta = \theta_0)\, d\lambda_2 + \int_0^{\lambda_{1_0}} i_1(\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_{2_0}, \theta = \theta_0)\, d\lambda_1$$



Διαδρομή ολοκληρώσεως για τον υπολογισμό της ενέργειας του πεδίου $W_\pi\,(\lambda_{1_0}, \lambda_{2_0}, \theta_0)$ μεταβάλλοντας μόνο μία μεταβλητή καταστάσεως κάθε φορά

Για τη συνενέργεια ισχύει:

$$W'_\pi\,(i_1, i_2, \theta) = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 - W_\pi$$

Το διαφορικό της συνενέργειας είναι:

$$dW'_\pi\,(i_1, i_2, \theta) = \lambda_1\, di_1 + \lambda_2\, di_2 + T_\pi\, d\theta$$

επομένως:

$$\begin{cases} i_1 = \left.\dfrac{\partial W'_\pi\,(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_1}\right|_{\lambda_2,\theta} \\[2ex] i_2 = \left.\dfrac{\partial W_\pi\,(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_2}\right|_{\lambda_1,\theta} \\[2ex] T_\pi = -\left.\dfrac{\partial W_\pi\,(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta}\right|_{\lambda_1,\lambda_2} \end{cases}$$

Διατάξεις Ηλεκτρομηχανικής Μετατροπής με δύο διεγέρσεις

Ολοκληρώνοντας για τη συνενέργεια της διατάξεως προκύπτει:

$$W'_\pi\ (i_{1_0}, i_{2_0}, \theta_0) = \int_0^{i_{2_0}} \lambda_2(i_1 = 0, i_2, \theta = \theta_0)\, di_2\ + \int_0^{i_{1_0}} \lambda_1(i_1, i_2 = i_{2_0}, \theta = \theta_0)\, di_1$$

Στα γραμμικά συστήματα οι πεπλεγμένες ροές μπορούν να υπολογισθούν με τη βοήθεια των αυτεπαγωγών και των αμοιβαίων επγωγών ως εξής:

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$$

$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2$$

όπου: $L_{12} = L_{21}$

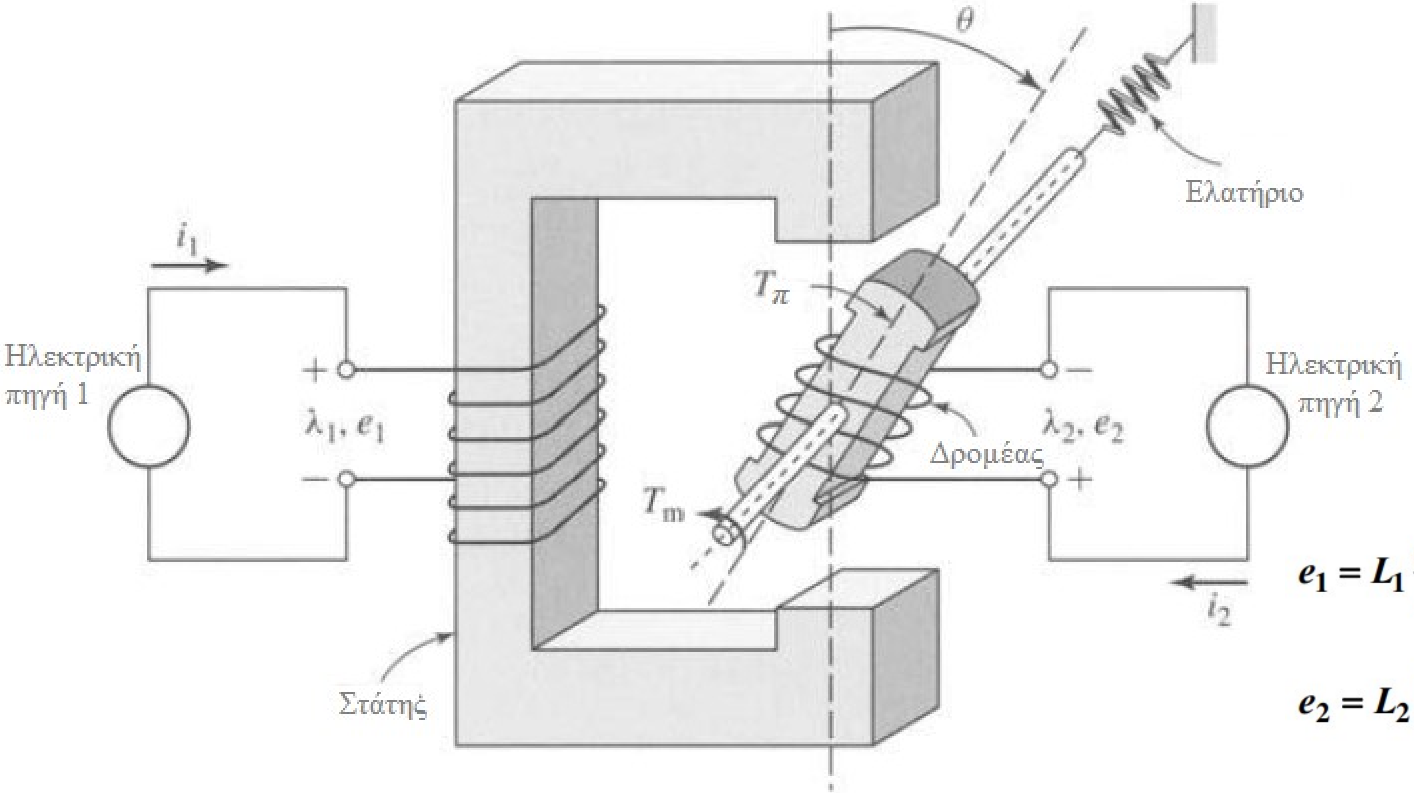
Επομένως προκύπτει:

$$W'_\pi\ (i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} L_{11}(\theta) i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}(\theta) i_2^2 + L_{12}(\theta) i_1 i_2$$

Και με βάση την αρχή των δυνατών έργων:

$$T_\pi\ = \left.\frac{\partial W'_\pi\ (i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta}\right|_{i_1, i_2} = \frac{i_1^2}{2}\frac{dL_{11}(\theta)}{d\theta} + \frac{i_2^2}{2}\frac{dL_{22}(\theta)}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}(\theta)}{d\theta}$$

Διατάξεις με δύο διεγέρσεις και μεταβλητό διάκενο



$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_1 = e_1 + r_1 i_1$$
$$v_2 = e_2 + r_2 i_2$$

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} \qquad e_2 = \frac{d\lambda_2}{dt}$$

$$\lambda_1 = L_1(\theta) i_1(t) + M(\theta) i_2(t)$$
$$\lambda_2 = L_2(\theta) i_2(t) + M(\theta) i_1(t)$$

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_1}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dM}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dL_2}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dM}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Σε μητρωϊκή μορφή οι τάσεις των δύο πηγών εκφράζονται:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\text{όροι ωμικής πτώσεως τάσεως}} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\text{όροι μετασχηματιστή}} + \underbrace{\frac{d}{d\theta}\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\text{όροι περιστροφής}}\omega_r$$

όροι ωμικής πτώσεως τάσεως < όροι μετασχηματιστή < όροι περιστροφής

Διατάξεις με δύο διεγέρσεις και μεταβλητό διάκενο

Ισχύς εισόδου: $P_{elec} = v_1 i_1 + v_2 i_2$

$$P_{elec} = \underbrace{i_1^2 r_1 + i_2^2 r_2}_{\text{όροι απωλειών χαλκού}} + \underbrace{L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}}_{\text{όροι ρυθμού μεταβολής αποθηκευμένης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο}} + \underbrace{i_1^2 \frac{dL_1}{d\theta}\omega_r + 2 i_1 i_2 \frac{dM}{d\theta}\omega_r + i_2^2 \frac{dL_2}{d\theta}\omega_r}_{\text{όροι ρυθμού μετατρεπόμενης ενέργειας σε μηχανική ενέργεια}}$$

όροι απωλειών χαλκού < όροι ρυθμού μεταβολής αποθηκευμένης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο < όροι ρυθμού μετατρεπόμενης ενέργειας σε μηχανική ενέργεια

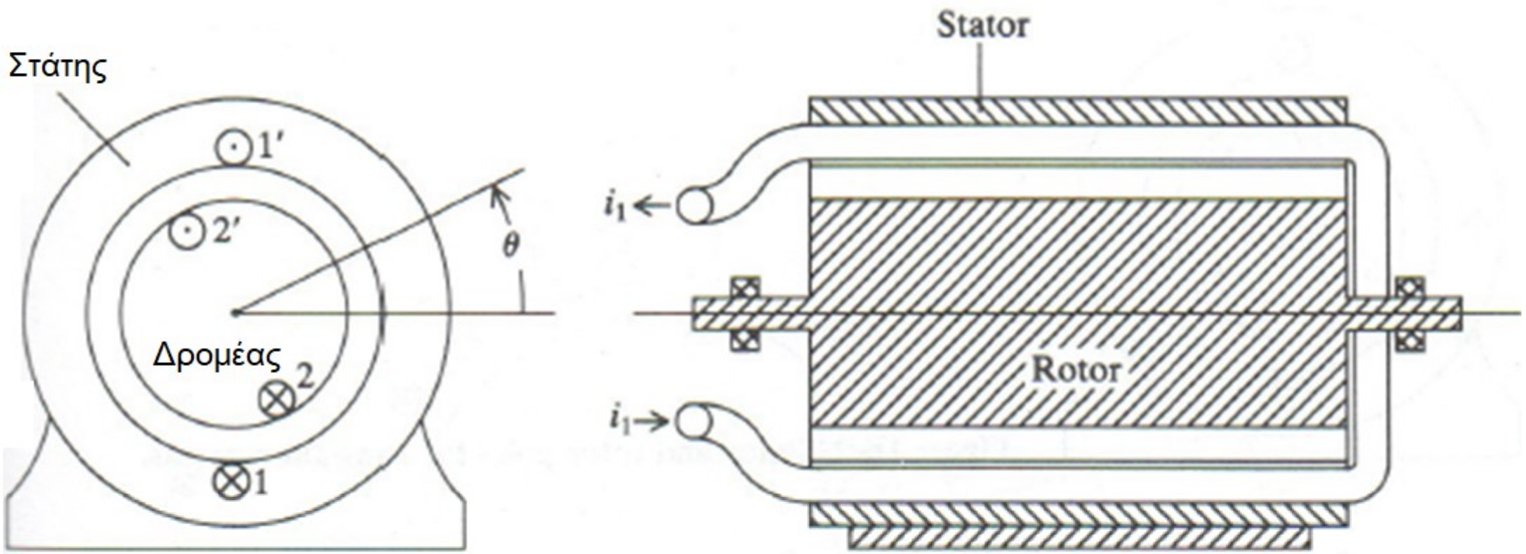
$$P_\pi = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{d\theta}\omega_r + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{d\theta}\omega_r + i_1 i_2 \frac{dM}{d\theta}\omega_r$$

$$P_{mech} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{d\theta}\omega_r + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{d\theta}\omega_r + i_1 i_2 \frac{dM}{d\theta}\omega_r$$

$$\boxed{P_{mech} = P_{elec} - P_{cu} - P_\pi}$$

$P_{mech} = T_\pi \, \omega_r$ => $\boxed{T_\pi = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM}{d\theta}}$

Διατάξεις με δύο διεγέρσεις και ομοιόμορφο διάκενο



$$L_{11} = \frac{N_1^{\,2}}{R} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$W'_\pi(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} L_{11}\, i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}\, i_2^2 + L_{max} cos(\theta) i_1 i_2$$

$$L_{22} = \frac{N_2^{\,2}}{R} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$T_\pi = -L_{\max} \sin(\theta)\, i_1\, i_2$$

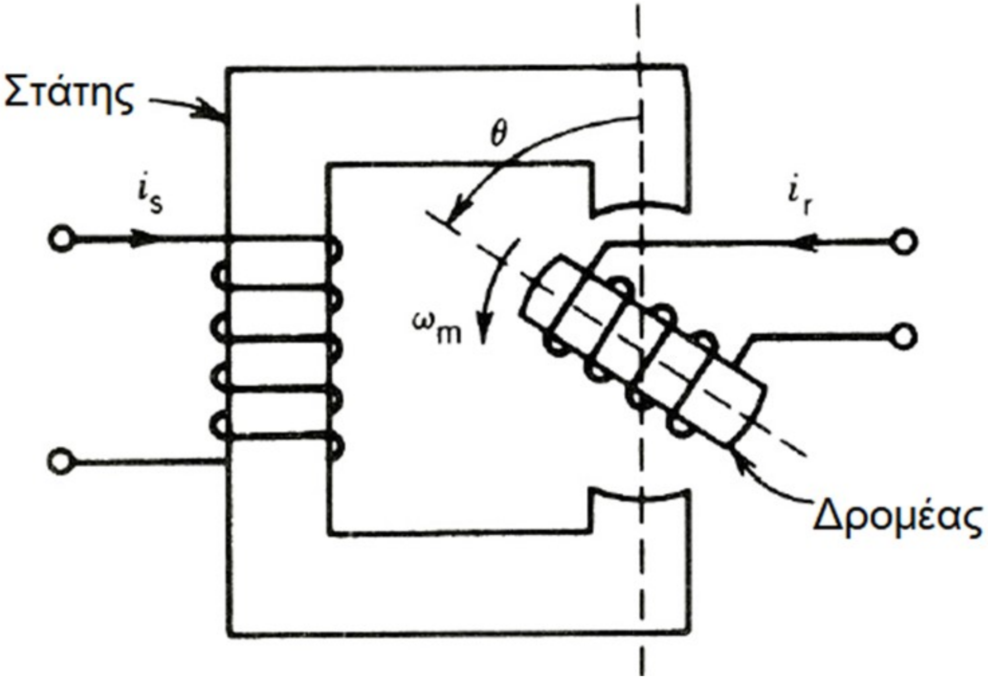
$$L_{12}(\theta) = L_{21}(\theta) = M(\theta) = \frac{N_1\, N_2}{R}\cos(\theta) = L_{\max}\cos(\theta)$$

Εφαρμογή 1

Η διάταξη του σχήματος έχει πηνίο στο σταθερό μέρος (στάτη) του οποίου η αυτεπαγωγή είναι της μορφής $L_{ss}(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta)$ και πηνίο στο στρεφόμενο μέρος (δρομέα) του οποίου η αυτεπαγωγή είναι της μορφής $L_{rr}(\theta) = L_1 + L_3 \cos(2\theta)$ ενώ η αμοιβαία επαγωγή είναι $L_{sr}(\theta) = L_4 \cos(\theta)$. Ζητούνται:

α) Εάν το πηνίο του δρομέα είναι ανοικτό κύκλωμα και το πηνίο του στάτη διαρρέεται από συνεχές ρεύμα εντάσεως Ι να υπολογισθούν οι θέσεις ισορροπίας και να χαρακτηρισθεί η ευστάθειά τους.

β) Εάν το πηνίο του δρομέα είναι ανοικτό κύκλωμα και το πηνίο του στάτη διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα εντάσεως $i_s = I_{sm} \sin(\omega t)$ να υπολογισθεί η ροπή σαν συνάρτηση της γωνίας θ και σε περίπτωση που ο δρομέας περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ($\theta = \omega_m t + \delta$) να προσδιορισθούν οι συνθήκες εμφάνισης μέσης ροπής και να υπολογισθεί η τιμή της.



γ) Εάν ο στάτης διαρρέεται από συνεχές ρεύμα $I_{ss}=0.8A$ και ο δρομέας διαρρεεται από συνεχές ρεύμα $I_{rr}=0.01A$ να υπολογισθεί η ροπή σαν συνάρτηση τη γωνίας θ για:

$L_0=3mH$, $L_1=30mH$, $L_2=1mH$, $L_3=10$ mH, $L_4=0.3mH$.

Λύση

α) $\dfrac{dL_{ss}}{d\theta} = -2L_2 \sin(2\theta) \quad => \quad T = \dfrac{1}{2} \mathrm{I}^2[-2L_2 \sin(2\theta)] = -L_2\, I^2 \sin(2\theta)$

Οι θέσεις ισορροπίας θα είναι: $T = 0 \quad => \quad \begin{cases} \theta = \kappa\pi, \quad \varepsilon\upsilon\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\acute{\iota}\varsigma \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \dfrac{\partial T}{\partial \theta} < 0 \\ \theta = \kappa\pi + \pi/2, \quad \alpha\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\acute{\iota}\varsigma \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \dfrac{\partial T}{\partial \theta} > 0 \end{cases}$

β) Καθώς i_r=0 προκύπτει για την ροπή: $T = \frac{1}{2} i_s^2 \dfrac{dL_{ss}}{d\theta}$

$$= \tfrac{1}{2} I_{sm}^2 \sin^2 \omega t \frac{d}{d\theta}(L_0 + L_2 \cos 2\theta)$$

$$= -I_{sm}^2 L_2 \sin 2\theta \sin^2 \omega t \ \mathrm{N \cdot m}$$

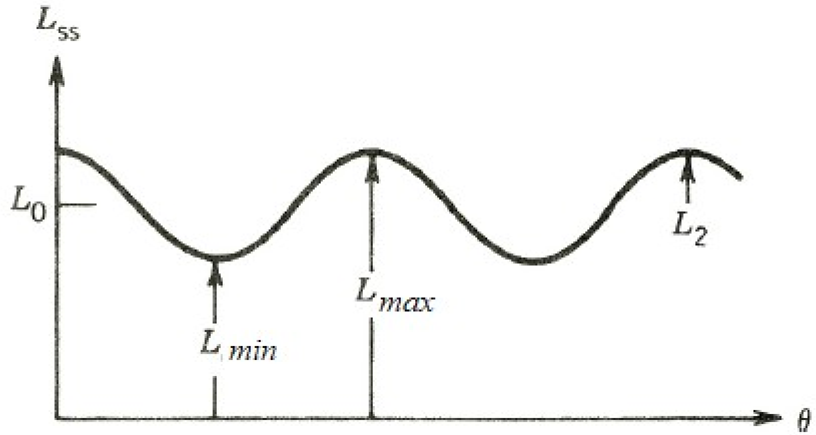
Θέτοντας $\theta=\omega_m t+\delta$ η ροπή εκφράζεται: $T = -I_{sm}^2 L_2 \sin 2(\omega_m t + \delta) \dfrac{(1 - \cos 2\omega t)}{2}$

$$= \tfrac{1}{2} I_{sm}^2 L_2 [\sin 2(\omega_m t + \delta) - \tfrac{1}{2} \sin 2\{(\omega_m + \omega)t + \delta\}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \sin 2\{(\omega_m - \omega)t + \delta\}]$$

Λύση

Οι συνθήκες για εμφάνιση μέσης ροπής είναι::



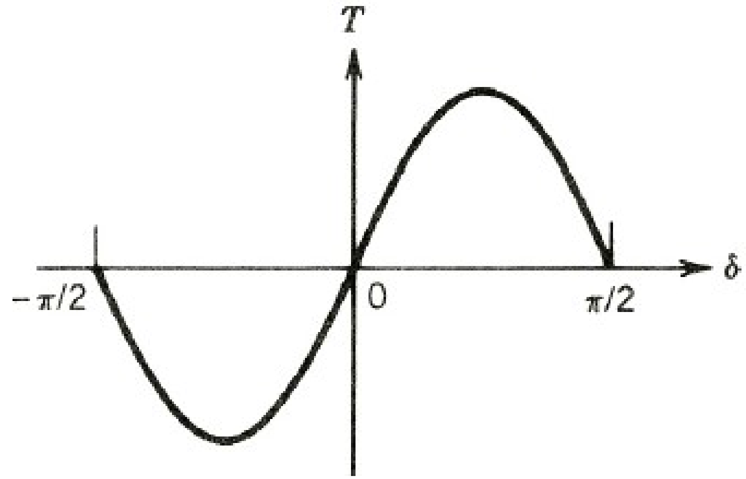
(i) $\omega_m = 0$ οπότε: $\overline{T} = -\frac{1}{2} I_{sm}^2 L_2 \sin 2\delta$

επειδή: $L_2 = \dfrac{L_{max} - L_{min}}{2}$

προκύπτει: $\overline{T} = -\frac{1}{4} I_{sm}^2 (L_{max} - L_{min}) \sin 2\delta$

(ii) $\omega_m = \pm\omega$ οπότε: $\overline{T} = \frac{1}{4} I_{sm}^2 L_2 \sin 2\delta$

$= \frac{1}{8} I_{sm}^2 (L_{max} - L_{min}) \sin 2\delta$



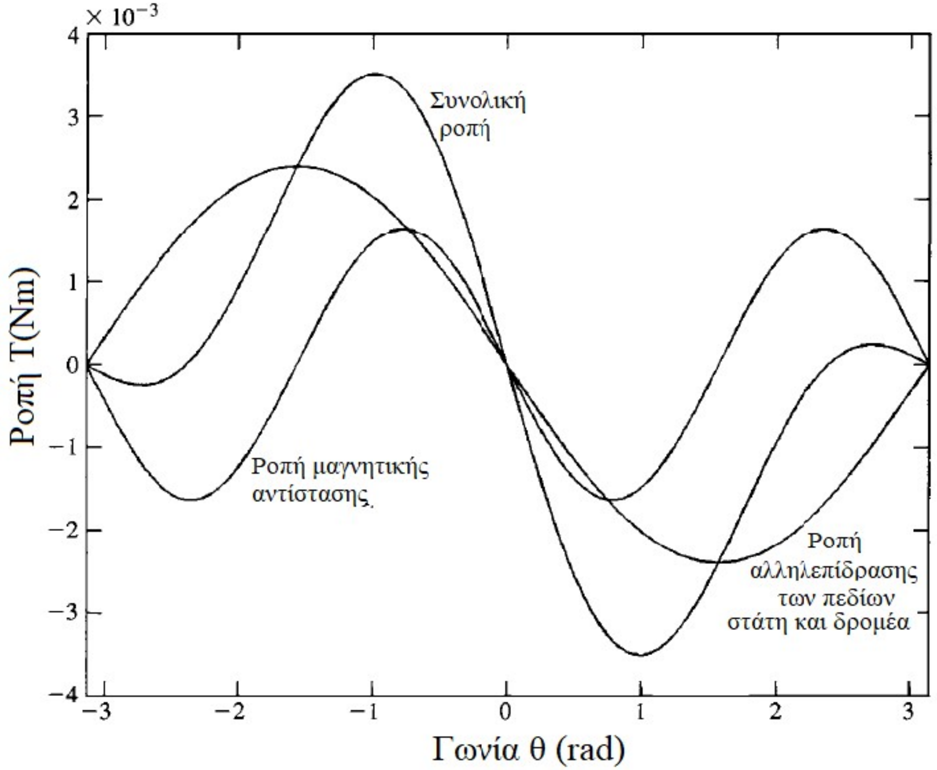
Λύση

γ) Όταν $i_r \neq 0$ η ροπή υπολογίζεται:

$$T = \frac{i_s^2}{2}\frac{dL_{ss}(\theta)}{d\theta} + \frac{i_r^2}{2}\frac{dL_{rr}(\theta)}{d\theta} + i_s i_r \frac{dL_{sr}(\theta)}{d\theta}$$

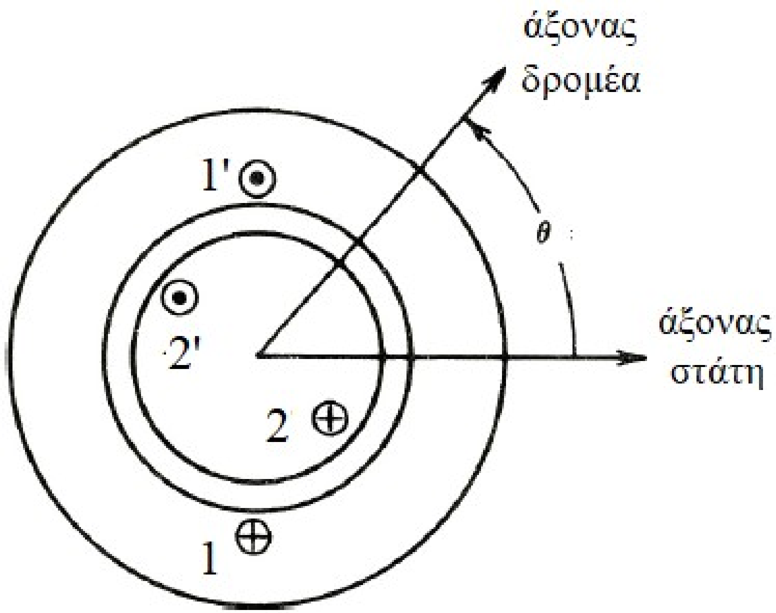
$$= \frac{i_s^2}{2}(-2 \times 10^{-3})\sin 2\theta + \frac{i_r^2}{2}(-20\sin 2\theta) - i_s i_r (0.3)\sin\theta$$

Για $i_s = 0.8$ A και $i_r = 0.01$ A, η ροπή είναι $T = -1.64 \times 10^{-3}\sin 2\theta - 2.4 \times 10^{-3}\sin\theta$



Εφαρμογή 2

Η διάταξη του σχήματος έχει πηνία στο σταθερό μέρος (στάτη) και το στρεφόμενο μέρος (δρομέα) των οποίων οι αυτεπαγωγές είναι $L_{11} = L_{22} = 2$ H και οι αμοιβαίες επαγωγές $L_{12} = L_{21} = \cos\theta$ H. Τα πηνία έχουν αμελητέες ωμικές αντιστάσεις και συνδέονται παράλληλα με ιδανική πηγή τάσεως $v(t) = V_m \sin(\omega t)$. Να υπολογισθεί η μέση ροπή συναρτήσει της γωνιακής μετατόπισης θ και να υπολογισθεί η τιμή της για V_m=100V, ω=314r/s και θ=30°.



Λύση

Η ροπή είναι:

$$T = -(\sin\theta)\, i_1 i_2$$

Εξισώσεις τάσεως πηνίων:

$$V_m \cos\omega t = 2\frac{di_1}{dt} + (\cos\theta)\frac{di_2}{dt}$$

$$V_m \cos\omega t = (\cos\theta)\frac{di_1}{dt} + 2\frac{di_2}{dt}$$

Επιλύοντας το σύστημα εξισώσεων προκύπτει

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = \frac{V_m \sin\omega t}{(2+\cos\theta)}$$

Ολοκληρώνοντας υπολογίζονται τα ρεύματα

$$i_1 = i_2 = \frac{V_m \sin\omega t}{\omega(2+\cos\theta)}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ροπής:

$$T = -\frac{V_m^2 \sin\theta}{(2+\cos\theta)^2\omega^2}\sin^2\omega t$$

Η μέση ροπή είναι:

$$\overline{T} = -\frac{V_m^2 \sin\theta}{2(2+\cos\theta)^2\omega^2}$$

$\theta = 30°$, $v = 100 \sin 314t$

Οπότε η μέση ροπή εκφράζεται:

$$\overline{T} = -\frac{(100)^2 \sin 30°}{2(2+\cos 30°)^2 \times (314)^2} = -0.069\ \mathrm{Nm}$$