11.03.22

Friday, 11 March 2022 4:58 PM

Credits: Γιώργος Κλεμπετσάνης

Γραμμικό Σύστημα

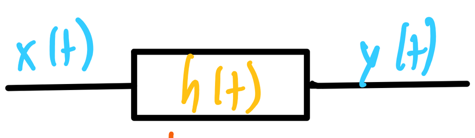
Υπέρθεση $\begin{cases} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{cases}$ $a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$

Χρονική Σταθερότητα

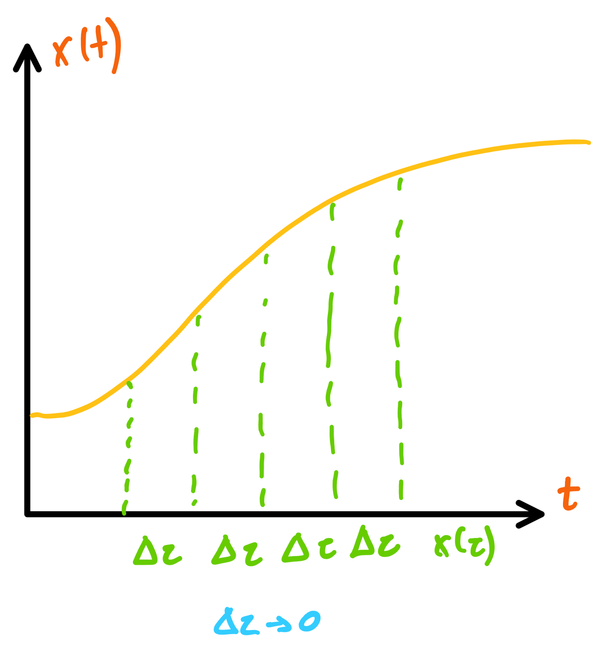
$x(t) \longrightarrow y(t)$

$x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

Απόκριση στο πεδίο του χρόνου



↳ κρουστική απόκριση (από την απόκριση σε είσοδο $\delta(t)$)



$x(\tau)\, h(t-\tau)\, \Delta t$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Απόκριση στο πεδίο της συχνότητας

Έστω είσοδος μιγαδική εκθετική μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας f.

$x(t) = e^{j2\pi f t}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau = e^{j2\pi f t} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}$$ → συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$

$\Rightarrow y(t) = e^{j2\pi f t} H(f)$

- Έστω τυχαία είσοδος $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$

$x(t) = \lim_{\Delta f \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, \Delta f$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, H(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \Rightarrow \boxed{Y(f) = X(f) \cdot H(f)}$

$H(f) = \underbrace{|H(f)|}_{\text{απόκριση πλάτους}}\, e^{j\beta(f)}$ ↳ γωνία φάσης

Μετάδοση χωρίς παραμόρφωση

$y(t) = k\,x(t-t_0)$

$Y(f) = k\,X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$

$\left(\begin{array}{l} g(t) \longleftrightarrow G(f) \\ g(t-t_0) \longleftrightarrow G(f)\, e^{-j2\pi f t_0} \end{array} \right)$

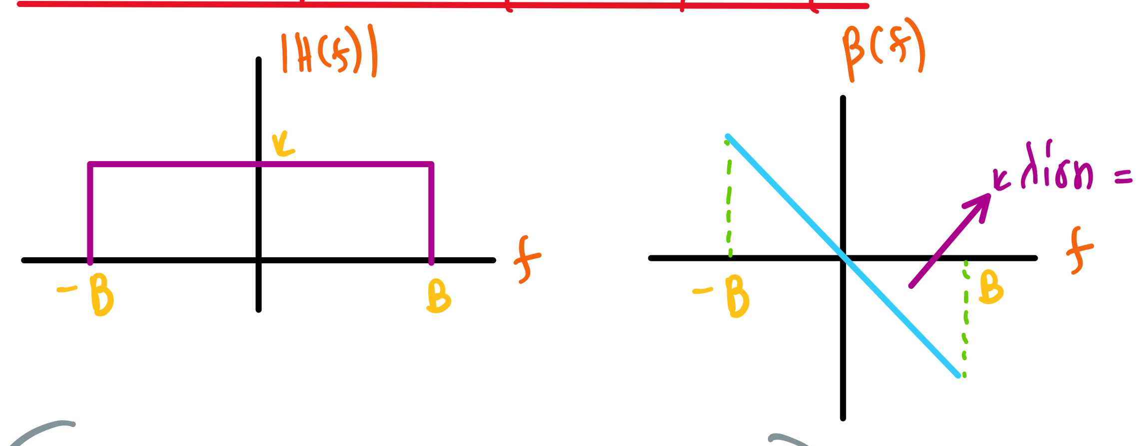
$H(f) = \dfrac{Y(f)}{X(f)} = k e^{-j2\pi f t_0}$

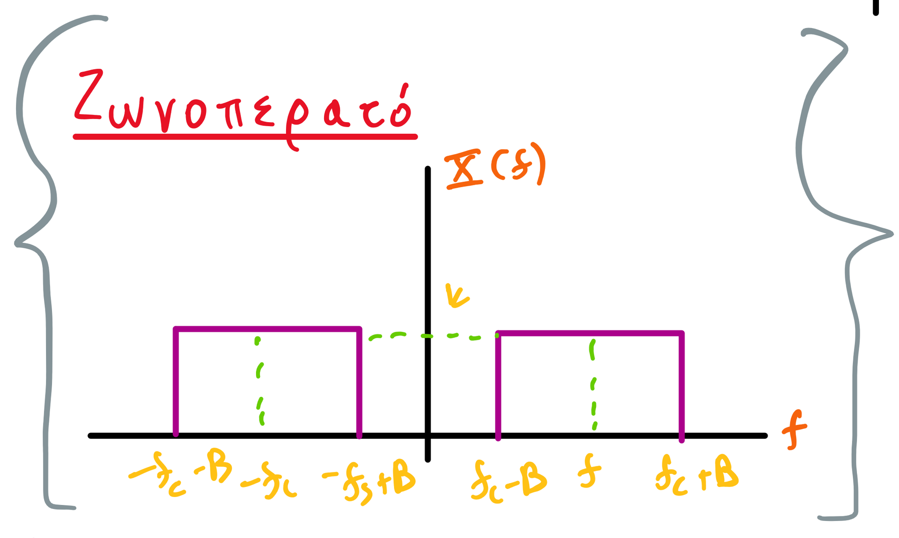
$H(f) = k e^{j(-2\pi f t_0 \pm n\pi)}$

α) $|H(f)| = k$ (σταθερή)

β) $\beta(f) = -2\pi f t_0 \pm n\pi$

Ιδανικό Βαθυπερατό φίλτρο



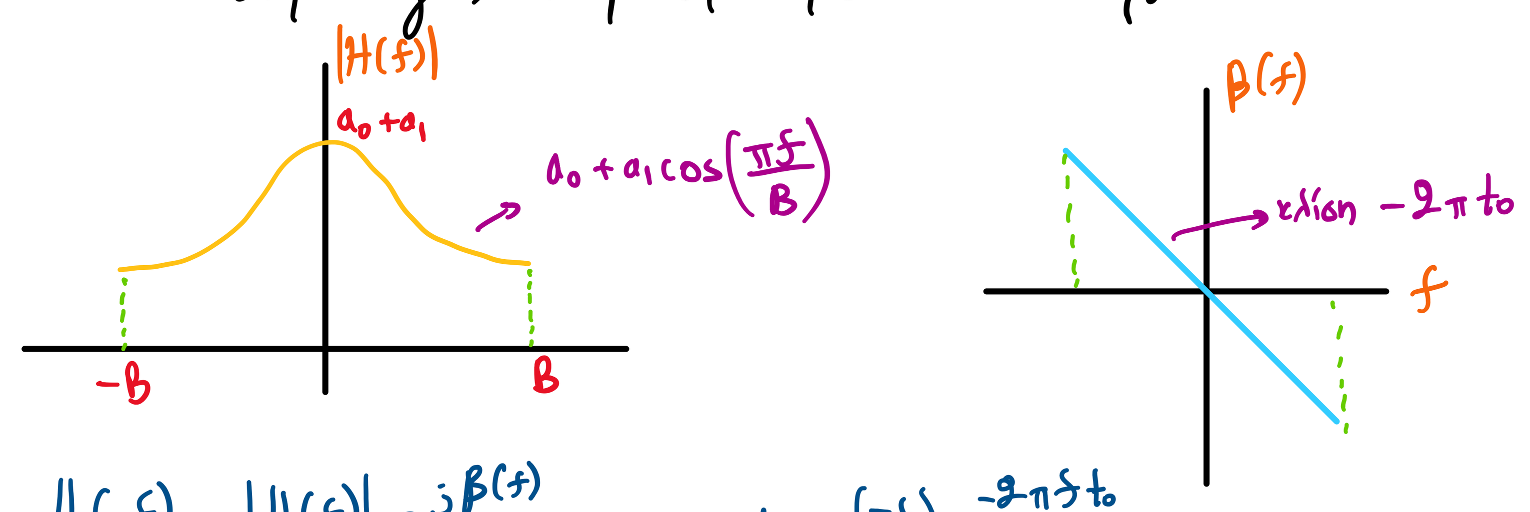


Έστω $k=1$:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-B}^{+B} e^{j2\pi f(t-t_0)}\, df =$$

$$= \frac{\sin(2\pi B(t-t_0))}{\pi(t-t_0)} = 2B\,\mathrm{sinc}[2B(t-t_0)]$$ → $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

Έστω σήμα $g(t)$ περιορισμένο στη ζώνη $-B \le f \le B$. Έστω βαθυπερατό φίλτρο.



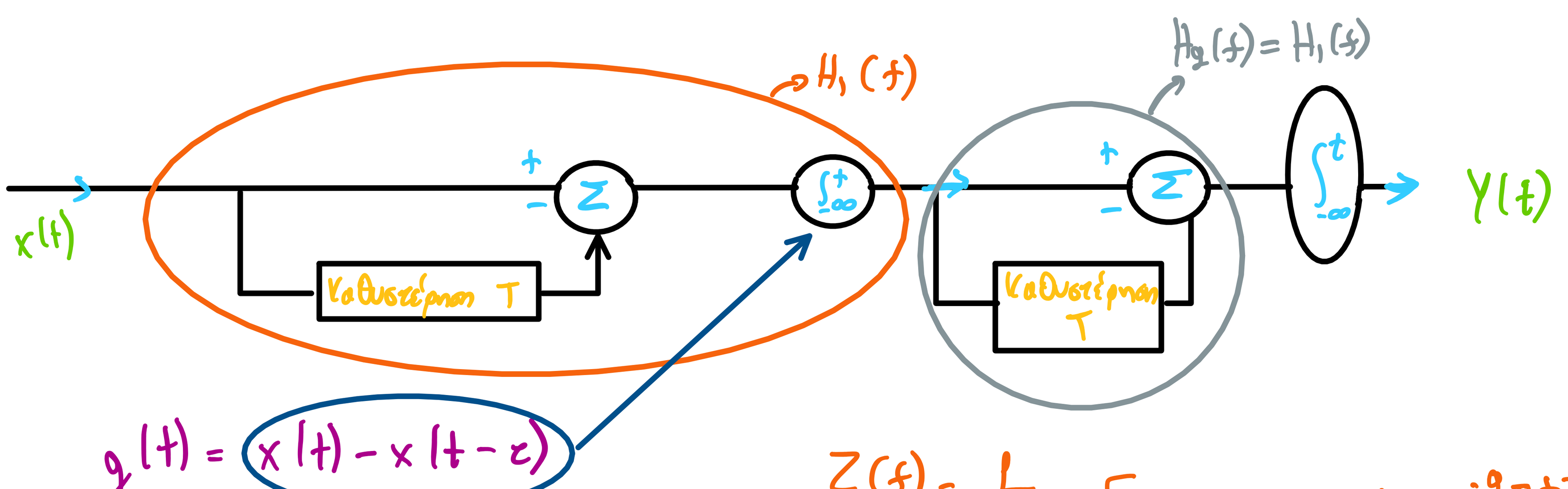
$H(f) = |H(f)|\, e^{j\beta(f)} = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi f}{B}\right) e^{-2\pi f t_0}$

$H(f) = \left[a_0 + \frac{a_1}{2} e^{\frac{j\pi f}{B}} + \frac{a_1}{2} e^{-j\pi f/B}\right] e^{-j2\pi f t_0}$

$H(f) = a_0 e^{-j2\pi f t_0} + \frac{a_1}{2} e^{-2\pi f j(t_0 - 1/2B)} + \frac{a_1}{2} e^{-j2\pi f(t_0 + 1/2B)}$

↳ $Y(f) = H(f) X(f)$

$$\boxed{y(t) = a_0\, x(t-t_0) + \frac{a_1}{2} x(t - t_0 + 1/2B) + \frac{a_1}{2} x(t - t_0 - 1/2B)}$$



$g(t) = x(t) - x(t-\tau)$

$G(f) = X(f) - X(f)\, e^{-j2\pi f T}$

$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} G(f)$

$G(0) = 0$

$Z(f) = \frac{1}{j2\pi f}\left[X(f) - X(f)\, e^{-j2\pi f T}\right] =$

$= \frac{1}{j2\pi f}\left[1 - e^{-j2\pi f T}\right] X(f)$

↳ $H(f)$

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f) = \frac{1}{(j2\pi f)^2}\left[1 - e^{-j2\pi f T}\right]^2 = \frac{1}{(j2\pi f)^2} e^{-j2\pi T}\left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right)^2 =$$

$= \ldots = T^2 \mathrm{sinc}^2(fT)$