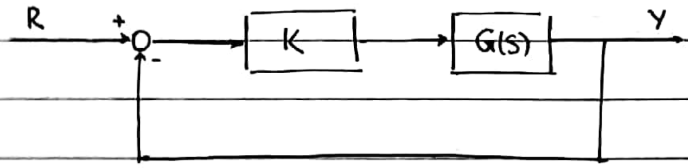
Δευτέρα, 14/11/2022

Γεωμετρικός Τόπος Ριζών



$\frac{Y}{R} = \frac{KG}{1+KG}$, πόλοι του κλάδου κλειστού βρόχου: $1+kG(s)=0$

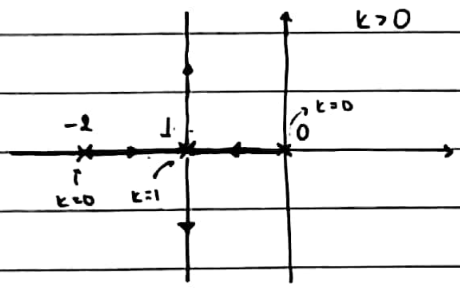
ΓΤΡ: δείχνει πώς μεταβάλλονται οι ρίζες της $1+KG(s)=0$, καθώς μεταβάλλεται το K ($k>0$, $k<0$)

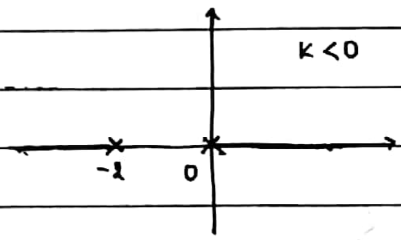
$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$: $1+kG(s)=0 \Rightarrow s^2+2s+k=0$

$\Delta = 4(1-k)$

$0<k<1$: $\Delta>0$, ρίζες: $\frac{-2 \pm 2\sqrt{1-k}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-k} = \begin{cases} -1+\sqrt{1-k} \\ -1-\sqrt{1-k} \end{cases}$

$k>1$: $\Delta<0$, ρίζες: $-1 \pm j\sqrt{k-1}$





Κανόνες σχεδίασης ΓΤΡ

1) αριθμός κλάδων = # πόλων Σ.Μ. ανοιχτού βρόχου

$1+kG(s)=0 \Rightarrow 1+k\dfrac{N(s)}{D(s)}=0 \Rightarrow \boxed{D(s)+kN(s)=0} \Rightarrow \dfrac{D(s)}{k}+N(s)=0$

↳ n πόλοι, m μηδενικά

ξεκινούν από τους πόλους της ΣΜ ανοιχτού βρόχου

κ' καταλήγουν στα μηδενικά της ΣΜ ανοιχτού βρόχου κ' στο άπειρο.

κέντρο ασυμπτώτων : $\sigma = \dfrac{\Sigma(\text{πόλων της } G(s)) - \Sigma(\text{μηδενικά της } G(s))}{n-m}$

π.χ. $\sigma = \dfrac{0+(-2)}{2} = -1$

γωνίες ασυμπτώτων: $\theta = \dfrac{(2k+1)\cdot 180^\circ}{n-m}$

$G(s) = \dfrac{s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_n}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} = -\dfrac{1}{k} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\dfrac{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_n}} = -\dfrac{1}{k}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{s^{n-m} + c_1 s^{n-m-1} + \dots + c_{n-m}} = -\dfrac{1}{k}$

$\Leftrightarrow s^{n-m} + c_1 s^{n-m-1} + \dots + c_{n-m} = -k$

$s \to \infty \qquad s^{n-m} + c_1 s^{n-m-1} \simeq -k \quad (*)$

$s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n = (s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m)(s^{n-m} + c_1 s^{n-m-1} + \dots + c_{n-m})$

$= s^n + (a_1 + c_1) s^{n-1} + \dots$

$a + c_1 = b_1 \Rightarrow c_1 = b_1 - a_1$

$(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdot \dots \cdot(s-z_m) \qquad a_1 = -\sum_{i=1}^{n} z_i$

$b_1 = -\sum_{i=1}^{n} p_i$

$(*)\ s^{n-m}\left(1 + \dfrac{b_1 - a_1}{s}\right) = -k \Rightarrow s\underbrace{\left(1 + \dfrac{b_1 - a_1}{s}\right)^{\frac{1}{n-m}}}_{\simeq 1 + \frac{b_1 - a_1}{(n-m)s}} = (-k)^{\frac{1}{n-m}}$

$\left(\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2}\right)$

$$\Rightarrow s + \frac{b_1 - a_1}{n-m} = (-K)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\sigma + j\omega + \frac{b_1 - a_1}{n-m} = (-K)^{\frac{1}{n-m}} = K^{\frac{1}{n-m}} e^{j\frac{\pi}{n-m}(2v+1)}$$

$$= K^{\frac{1}{n-m}}\left[\cos\left(\frac{(2v+1)\pi}{n-m}\right) + j\sin\left(\frac{(2v+1)\pi}{n-m}\right)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma + \frac{b_1 - a_1}{n-m} &= K^{\frac{1}{n-m}} \cos\frac{(2v+1)\pi}{n-m} \\ \omega &= K^{\frac{1}{n-m}} \sin\frac{(2v+1)\pi}{n-m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\omega}{\sigma + \frac{b_1 - a_1}{n-m}} = \tan\theta_{a\sigma}$$

$$\boxed{\omega = \tan\theta_{a\sigma}\,(\sigma - \sigma_{a\sigma})}$$

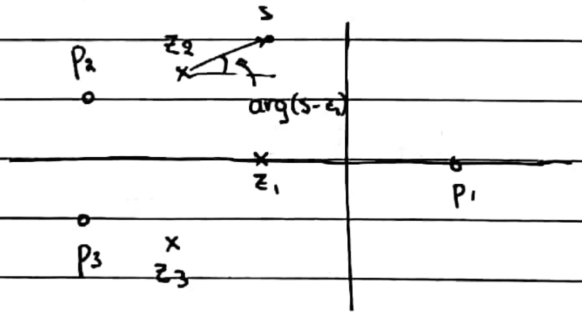
(Για $K<0$: $\theta_{a\sigma} = \frac{2v \cdot 180^\circ}{n-m}$

3) ΓΤΡ συμμετρικός ως προς τον πραγματικό άξονα

4) $G(s) = -\frac{1}{K} \Rightarrow |G(s)| = \frac{1}{K}$, $\arg G(s) = 180^\circ(2v+1)$ ← συνθήκη φάσης

$$G(s) = \frac{A\,\Pi(s - z_i)}{\Pi(s - p_i)}$$

$$\Sigma \arg(s - z_i) - \Sigma \arg(s - p_i) = (2v+1)\cdot 180^\circ$$



Τα σημεία του πραγματικού άξονα που ανήκουν στον ΓΤΡ έχουν στα δεξιά τους περιττό πλήθος πόλων + μηδενικών της G.

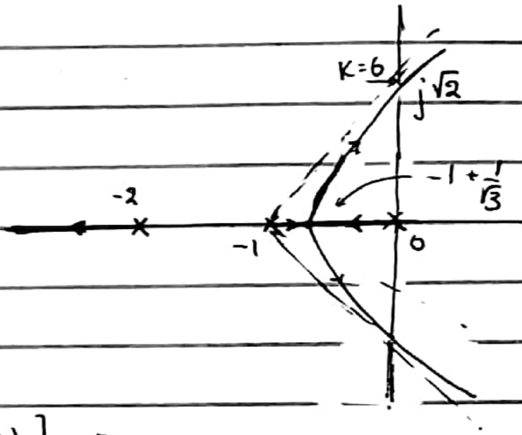
5) $-k = \frac{1}{G(s)}$

Πιθανά σημεία για ακρότατο → σημείο θλάσης

$\rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{G(s)}\right) = 0$

Παράδειγμα

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



1) # κλάδων = 3

2) $\sigma_{\alpha\sigma} = \frac{0+(-1)+(-2)}{3} = -1$

3) $\theta_{\alpha\sigma} = \frac{(2v+1)\cdot 180^\circ}{3} = \begin{cases} 60^\circ \\ 180^\circ \\ -60^\circ \end{cases}$

$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{G(s)}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left[\underbrace{s(s+1)(s+2)}_{s^3+3s^2+2s}\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3s^2+6s+2$

$\Delta = 36-24 = 12, \quad -1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Σημείο τομής με φανταστικό άξονα:

1ος τρόπος: $1+kG(j\omega)=0$

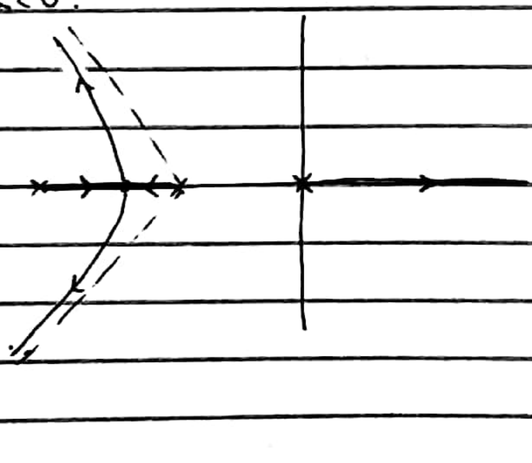
2ος τρόπος: Routh

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	6-K	0
s^0	K	

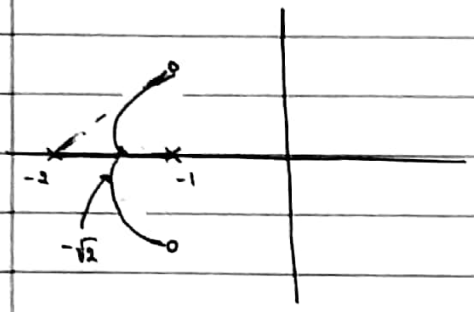
$3s^2+6=0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$

K<0:

$\theta_{\alpha\sigma} = \frac{2v\cdot 180}{3} = \begin{cases} 0^\circ \\ 120^\circ \\ -120^\circ \end{cases}$



$$G(s) = \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}$$



$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{G(s)}\right] = 0 \Rightarrow (2s+3)(s^2+2s+2) - (2s+2)(s^2+3s+2) = 0$$

$$\Rightarrow 2s^3+7s^2+10s-6-(2s^3+8s^2+10s+4)=0$$

$$\Rightarrow 2-s^2=0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{2}$$

Πιθανά σημεία θλάσης: $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

$$\phi_{\pi\rho o\sigma} + \cancel{90^\circ} - \cancel{90^\circ} - 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \phi_{\pi\rho o\sigma} = 225^\circ$$

$$\arg(s_0-(-1)) \simeq \arg(-1+j-(-1)) = 90^\circ$$