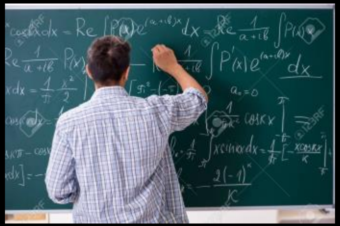
ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 23

Διάλεξη: 3 Δεκεμβρίου 2020

Προηγούμενο επεισόδιο: Μετασχηματισμός Laplace και λύση ΔΕ



ΓΗ

$$f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

LAPLACE

Pierre Simon Laplace

$f(t)$	1	t	t^n	t^a	e^{at}	$\sin(wt)$	$\cos(wt)$	
$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	

2. Βασικές ιδιότητες του μετασχ. Laplace

1. Γραμμικότητα: $\alpha f(t) + b g(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \alpha F(s) + b\, G(s)$

$a, b \in R$

Παρατηρήσεις: 1. Για $b=0$ $\quad \alpha f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \alpha F(s)$

2. Για $a=1$ $b=1$ $\quad f(t) + g(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F(s) + G(s)$

Απόδειξη: $L\left[\alpha f(t) + b g(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left[\alpha f(t) + b g(t)\right] dt =$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \alpha f(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-st} b\, g(t)\, dt =$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + b \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \alpha F(s) + b\, G(s)$$

Παράδειγμα 1: $L[3t+2] = ;$

$$L[3t+2] = L[3t] + L[2] = 3L[t] + L[2] = \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s}$$

Παράδειγμα 2: $L[\cosh(at)] = ;$

$$L\left[\frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right)\right] = \frac{1}{2} L\left[e^{at} + e^{-at}\right] = \frac{1}{2}\left[L(e^{at}) + L(e^{-at})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{s+\cancel{a}+s-\cancel{a}}{(s-a)(s+a)} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\left(\sinh(at) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \frac{a}{s^2-a^2}\right)$$

2. Μετατόπιση (shifting)

$$e^{at} f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F(s-a)$$

Μετατόπιση κατά α.

Παράδειγμα 3: $L\left[e^{at}\cos(\omega t)\right] = ;$

$$L\left[e^{at}\cos(\omega t)\right] = \frac{\boxed{s-a}}{(\boxed{s-a})^2 + \omega^2}$$

Εδώ $f(t) = \cos(\omega t)$ $\quad F(s) = \dfrac{\boxed{s}}{\boxed{s}^2 + \omega^2}$ $\quad s \to s-a$

$$e^{at}\cos(\omega t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

Παράδειγμα 4: $L[t^n e^{at}] = ;$

$$t^n \rightleftarrows \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad s \to s-a \qquad L[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

3. Μετασχηματισμός παραγώγων

Μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$f'(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} sF(s) - f(0)$$

$$f''(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$f^n(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$

Παράδειγμα 5: (α) Μετασχ. κατά Laplace το:

$$\rightarrow y'' - y = t \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=1$$

Λύση: $L[y''-y] = L[t] \Rightarrow L[y''] - L[y] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - s - 1 - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(s^2-1)Y(s) = \frac{1}{s^2} + s + 1}$$

(β) Λύση για Y(s)

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1}}$$

Παρατηρήσεις:

1. Λύσαμε το πρόβλημα στο χώρο του Laplace λύνοντας μια απλή αλγεβρική εξίσωση!!!
2. Χρειαστήκαμε αμέσως το $y(0)$ και το $y'(0)$.
   Μετασχ. Laplace $\longrightarrow$ απ' ευθείας την ειδική λύση
3. Χρειάζεται τώρα να βρούμε το $y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y(s))$
   Πονάει...