1ο Φυλλάδιο ασκήσεων Διαφορικών Εξισώσεων

①

α)

Το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι της μορφής $y' = f(x,y)$ και $y(a)=\beta$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Piccard, αν οι $f(x,y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς σε μία περιοχή του σημείου (a,β) τότε το π.α.τ. $\{y' = f(x,y),\ y(a)=\beta\}$ έχει μοναδική λύση στην περιοχή αυτή.

Η $f(x,y) = -1 + (x+y)^{3/5}$ είναι συνεχής στο $(1,a)$ αφού:

- $f(1,a) = -1 + (1+a)^{3/5}$
- $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to a}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to a}} \left(-1 + (x+y)^{3/5}\right) = -1 + (1+a)^{3/5} = f(1,a)$

$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{5}(x+y)^{-2/5} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{(x+y)^{2/5}}$ ομοίως συνεχής.

Επομένως πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Piccard. Άρα το π.α.τ. διαθέτει εγγυημένα μια λύση σε μια γειτονιά του $(1,a)$, αν $a\neq -1$

β) Αφού πληρείται το Θ. Piccard, το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση για κάθε $a\neq -1$.

γ) Αν $a\neq -1$, θέτω $u(x) = y(x) + x \Rightarrow u'(x) = y'(x) + 1$ και η εξίσωση γίνεται: $u' = u^{3/5} \Rightarrow u^{-3/5}du = dx \Rightarrow \frac{5}{2}u^{2/5} = x + c_1$ (1)

Και αφού για $x=1$, $u(1) = y(1)+1 = a+1$: $\frac{5}{2}(a+1)^{2/5} = 1 + c_1 \Rightarrow$

$c_1 = \frac{5}{2}(a+1)^{2/5} - 1$

Άρα: $(1) \Rightarrow \frac{5}{2}u^{2/5} = x + \frac{5}{2}(a+1)^{2/5} - 1 \Rightarrow \frac{5}{2}(y+x)^{2/5} = x + \frac{5}{2}(a+1)^{2/5} - 1$

$$\Rightarrow y(x) = \left(\frac{2}{5}x + (a+1)^{2/5} - \frac{2}{5}\right)^{5/2} - x$$

Θα πρέπει $\frac{2}{5}x + (a+1)^{2/5} - \frac{2}{5} \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 - \frac{5}{2}(a+1)^{2/5}$

δ) Για $a = -1$, $c_1 = -1$ άρα: $\frac{5}{2}a^{2/5} = x - 1 \Rightarrow (y+x)^{2/5} = \frac{2}{5}x - \frac{2}{5} \Rightarrow$

$y(x) = \left(\frac{2}{5}(x-1)\right)^{5/2} - x$, με $x \geq 1$.

2) α) Θέτω $y(x) = u(x) + y_1(x) \Rightarrow y'(x) = u'y_1 + uy_1' \Rightarrow y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$
και η εξίσωση γίνεται: $\quad v = u'$

$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + pu'y_1 + puy_1' + qy_1u = 0 \Rightarrow$

$v'y_1 + [2y_1' + py_1]v + [y_1'' + py_1' + qy_1]u = 0 \quad (1)$

Αφού y_1 λύση της εξίσωσης, ισχύει: $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow v'y_1 + [2y_1' + py_1]v = 0 \quad (3)$

Η οποία είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης.

β) Λύνοντας την (3), με $y_1 \neq 0$:

$v' = \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - p\right)v \Rightarrow \frac{1}{v}dv = \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - p\right)dx$

Με απλή ολοκλήρωση (παραλείποντας τις σταθερές) και με $v > 0$:

$$\ln v = -\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)dx \Rightarrow v(x)= e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)dx} \Rightarrow$$

$$u'(x)=\frac{du}{dx} = e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)dx} \Rightarrow du = e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)dx}\,dx$$

Και πάλι με αυτή ολοκλήρωση:

$$u(x)=\int\left[e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)dx}\right]dx = \int\left[e^{-2\ln y_1}\cdot e^{-\int p\,dx}\right]dx \Rightarrow$$

$$u(x)=\int\left[\frac{1}{y_1^2(x)}\,e^{-\int p(x)dx}\right]dx$$

Ισχύει πως $y_2(x)=u(x)\,y_1(x) \Rightarrow y_2(x)=y_1(x)\int\left[\frac{1}{y_1^2(x)}\,e^{-\int p(x)dx}\right]dx$

Για την γραμμική ανεξαρτησία των δύο λύσεων θα πάρουμε την ορίζουσα Wronski:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & u y_1 \\ y_1' & u'y_1+uy_1' \end{vmatrix} = u'y_1^2 + uy_1'y_1 - uy_1y_1' = u'y_1^2 \neq 0$$

Άρα οι $\{y_1, y_2\}$ αποτελούν μια βάση του χώρου λύσεων της (1)

γ) Για $x\neq 0$: $y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=0$, $y_1=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Αυτή η εξίσωση είναι στην μορφή $y''+py'+qy=0$, με $y_1(x)$ μια λύση της. Η εξίσωση έχει λύση $y_2(x)$:

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}\,e^{-\int p(x)dx}\,dx \Rightarrow$$

$$y_2(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\int\frac{x}{\sin^2 x}\,e^{-\int\frac{1}{x}dx}\,dx = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\int\frac{x}{\sin^2 x}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{-\sin x\cdot\cot x}{\sqrt{x}}$$

Άρα η γενική λύση είναι:

$y(x) = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - c_2 \frac{\sin x \cot x}{\sqrt{x}}$, με c_1, c_2 σταθερές.

δ) Θέτω $y(x) = u \cdot y_1 \Rightarrow y' = u' y_1 + u y_1' \Rightarrow y'' = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$:

$u'' y_1 + 2u' y_1' + 2u y_1'' + p u' y_1 + p u y_1' + q u y_1 = g(x) \Rightarrow$

$u'' y_1 + [2y_1' + p y_1] u' + [y_1'' + p y_1' + q y_1] u = g(x)$

Αφού y_1 λύση της αντίστοιχης ομογενούς, $y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0$. Άρα:

$u'' y_1 + [2y_1' + p y_1] u' = g(x)$

Η οποία είναι γραμμική μη ομογενής $1^{ης}$ τάξης.

Αν $x > 0$: $y'' + \frac{7}{x} y' + \frac{5}{x^2} y = \frac{1}{x}$.

Θέτοντας $y = u \cdot y_1$ καταλήγουμε: $u'' \cdot y_1 + [2y_1' + p y_1] u' = g(x)$
με $p(x) = \frac{7}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Αν $v = u'$:

$v' + \frac{5}{x} v = 1 \Leftrightarrow e^{5\ln x} v' + \frac{5}{x} e^{5\ln x} v = e^{5\ln x} \Leftrightarrow x^5 v = \frac{x^6}{6} \Rightarrow$

$u' = \frac{x}{6} \Rightarrow du = \frac{x}{6} dx \Rightarrow u(x) = \frac{x^2}{12}$

Η μερική λύση είναι $y_p(x) = \frac{x^2}{12} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{12}$ και η γενική λύση:

$$y(x) = c_1 y_p(x) + c_2 y_1(x) = c_1 \frac{x^2}{12} + c_2 \cdot \frac{1}{x}$$

③ a) Η ορίζουσα της εξίσωσης είναι: $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & u \\ y_1' & u' \end{vmatrix} = y_1 u' - y_1' u$

Σύμφωνα με τον τύπο του Abel: $W = W(0) e^{-\int_0^x s\, ds} \Rightarrow$

$$y_1 u' - y_1' u = [0\, u'(0) - u(0)] e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow x u' - u = -e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} u' - \frac{1}{x^2} u = -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{x} u = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c \Rightarrow$$

$$u = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + xc$$

Για $c=1$ και θέτοντας άκρα στο ολοκλήρωμα:

$$u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + x$$

β) Θέτω $y = \kappa \cdot y_1 \Rightarrow y' = \kappa' y_1 + \kappa y_1' \Rightarrow y'' = \kappa'' y_1 + 2\kappa' y_1' + \kappa y_1''$.

$$\kappa'' y_1 + 2\kappa' y_1 + \kappa y_1'' + x\kappa' y_1 + x\kappa y_1' - \kappa y_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\kappa'' y_1 + (2y_1' + x y_1)\kappa' + \underbrace{(y_1'' + x y_1' - y_1)}_{0} \kappa = 0 \overset{v = \kappa'}{\Rightarrow}$$

$$v' + v\left(\frac{x^2+2}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{v} dv = -\frac{x^2+2}{x} dx \Rightarrow \ln v = -\frac{x^2}{2} - 2\ln x \Rightarrow$$

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^{-2} \Rightarrow d\kappa = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^{-2} dx \Rightarrow$$

$$k = c_1\left[-\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} - \int \frac{1}{x}\,x\,e^{-x^2/2}dx + c_2\right] \xrightarrow{c_3=-c_1}$$

$$k = \left(\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-x^2/2}dx - c_2\right)c_3.$$

Για $c_3 = 1$, $c_2 = -1$: $\quad u(x) = k\cdot y_1 = e^{-x^2/2} + x\int e^{-x^2/2}dx + x$

4 **a)** Η εξίσωση γίνεται: $y' = y^2 + ky \Rightarrow y' - ky = y^2 \xrightarrow{y=u^{-1}}$

$$\frac{1}{u^2}u' - k\cdot\frac{1}{u} = \frac{1}{u^2} \Rightarrow u' - ku = 1 \Rightarrow e^{-kx}u' - ke^{-kx}u = e^{-kx} \Rightarrow$$

$$e^{-kx}u = \frac{e^{-kx}}{-k} + c \Rightarrow u = -\frac{1}{k} + ce^{kx} = \frac{cke^{kx} - 1}{k}$$

$$y = \frac{k}{cke^{-kx} - 1}$$

Για $x = 0 \Rightarrow \quad y_0 = \frac{k}{ck - 1} \Rightarrow c = \frac{k + y_0}{ky_0}$

Άρα $\quad y(x) = \frac{k}{\left(\frac{k}{y_0}+1\right)e^{-kx} - 1}$

Αν $y_0 < 0$, τότε $\frac{k}{y_0} + 1 < 0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{k}{\left(\frac{k}{y_0}+1\right)0 - 1} = -k$

Αν $y_0 > 0$, τότε μπορεί $\left(\frac{k}{y_0}+1\right)e^{-kx} \to 1$ και η λύση να απειρίζεται:

Αυτό συμβαίνει όταν $e^{-\kappa x} \to \frac{y_0}{\kappa+y_0} \Rightarrow x = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y_0}{\kappa+y_0}\right)$

β) Η διαφορική γίνεται: $y' = y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + c \Rightarrow y = -\frac{1}{x+c}$

Για $x=0$, $y_0 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -\frac{1}{y_0}$. Άρα $y = -\frac{1}{x - 1/y_0}$

Αν $y_0 < 0$, τότε $x - 1/y_0 > 0$, $\forall x > 0$. Άρα $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$

Αν $y_0 > 0$, τότε αν $x \to 1/y_0$ η λύση εκρύγνεται, αφού $x - \frac{1}{y_0} \to 0$

5) Αφού η εξίσωση είναι πλήρης, η λύση της είναι $f(x,y) = c$, όπου $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ (1) και $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ (2)

(1) $\Rightarrow f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\, dx + c_1(y) \xRightarrow{(2)} \frac{\partial\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + c_1(y)\right)}{\partial y} = N(x,y)$

$\Rightarrow c_1(y) = F_1(y) + k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$. άρα $f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + F_1(y) + k_1$

Ομοίως, έχουμε: $f(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,y)\, dy + F_2(x) + k_2$

$\xRightarrow{(+)} 2f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\, dy + F_1(y) + F_2(x) + k_1 + k_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\, dt$

6) α) $y = x \Rightarrow y' = 1$ και αντικαθιστώντας στη διαφορική: $(x-x)\cdot 1 = x \cdot 4x \Rightarrow$ $x = 0$. Άρα η $y(x) = x$ δεν την επαληθεύει.

Για $y(x) \neq x$: $y'(x) = \dfrac{y(x) - 4x}{x - y(x)} = \dfrac{\frac{y}{x} - 4}{1 - \frac{y}{x}} \xrightarrow{u = \frac{y}{x}} \dfrac{u - 4}{1 - u} = f(u)$

β) $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}x + u$

γ)δ)(1), (β) $\Rightarrow \dfrac{du}{dx}x + u = \dfrac{u-4}{1-u} \Rightarrow \dfrac{du}{dx}x = \dfrac{u^2 - 4}{1-u} \Rightarrow \dfrac{1-u}{u^2-4}du = \dfrac{1}{x}dx \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{4}\ln(u+2) - \dfrac{1}{4}\ln(u-2) = \ln x \Rightarrow (u+2)^{-3/4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (u+2)^{-3/4} \cdot (u-2)^{-1/4} = x \Rightarrow (u+2)^3(u-2) = x^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow u^4 + 2u^3 - 8u - 16 = x^{-4}$ και αφού $y = ux + c$, μπορούμε να βρούμε τη λύση της διαφορικής

ε) Αν η εξίσωση είναι στη μορφή $y' = f(y/x)$ αυτό σημαίνει ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες έχουν την ίδια κλίση σε όλα τα σημεία πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έστω, οι καμπύλες είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων

στ) $2xy \cdot y' = x^2 + 3y^2 \xrightarrow{y = ux} 2x \cdot ux(u'x + u) = x^2 + 3u^2x^2 \Rightarrow$

$2u(u'x + u) = 1 + 3u^2 \Rightarrow u'x + u = \dfrac{1 + 3u^2}{2u} \Rightarrow u'x = \dfrac{1 + u^2}{2u} \Rightarrow$

$\dfrac{2u}{1+u^2}du = \dfrac{1}{x}dx \Rightarrow \ln(1+u^2) = \ln x + c_1 \Rightarrow 1 + u^2 = e^{c_1}x \xrightarrow{e^{c_1} = c_2} 1 + \dfrac{y^2}{x^2} = c_2 x$

$\Rightarrow \quad y = \sqrt{(cx-1)x^2}$

7 α) $(1) \Rightarrow -2x + 2(y-a)y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{x}{a-y}$

$(1) \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ya + a^2 = a^2 \Rightarrow a = \dfrac{x^2+y^2}{2y}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{x}{\frac{x^2+y^2}{2y} - y} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$, για $y \neq x$

β) Δύο ευθείες είναι κάθετες αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης τους είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της (1) δείξαμε πως είναι $\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ άρα: $\lambda_1 \cdot \dfrac{2xy}{x^2-y^2} = -1 \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{y^2-x^2}{2xy} \Rightarrow$

$y' = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$ είναι η εξίσωση της ορθογώνιας στην (1) καμπύλης.

γ) $(2) \overset{y=ux}{\Rightarrow} u'x + u = \dfrac{u^2x^2 - u^2}{2x^2u} = \dfrac{u^2-1}{2u} \Rightarrow u'x = \dfrac{-1-u^2}{2u} \Rightarrow \dfrac{2u}{-1-u^2}du = \dfrac{1}{x}dx \Rightarrow$

$-\ln(1+u^2) = \ln x + c_1 \Rightarrow (1+u^2)^{-1} = e^{c_1}x \Rightarrow u^2 = e^{-c_1}x^{-1} - 1 \overset{e^{-c_1}=c_2}{\Longrightarrow}$

$\dfrac{y^2}{x^2} = c_2\dfrac{1}{x} - 1 \Rightarrow y = \sqrt{cx - x^2}$

8 α) Η διαφορική γίνεται: $y'' = -(py' + p'y) = -(py)' \Rightarrow y' = -py + c_1 \Rightarrow$

$y' + py_1 = c_1 \Rightarrow e^{\int p dx}y' + pe^{\int p dx}y_1 = c_1 \cdot e^{\int p dx} \Rightarrow e^{\int p dx}y = \int(e^{\int p dx}c_1)dx + c_2$

$\Rightarrow y = \dfrac{c_1\int e^{\int p dx}dx + c_2}{e^{\int p dx}}$

β) Το παz γίνεται: $y'' = -\left(\ln x\, y' + \frac{1}{x} y\right) = -(\ln x\, y)' \Rightarrow y' = -\ln x\, y + c_1$

Για $x=1$, $0 = -0 \cdot e + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$. Άρα: $\frac{1}{y} dy = -\ln x\, dx \Rightarrow$

$\ln y = -x\ln x + x + c_2$

Για $x=1$, $1 = -0 \cdot 0 + 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$. Άρα $y = e^{x - x\ln x}$

9) α) Αν $f(x,y) = y'^2 + 2y - 2xy' = 0$, με f, f_x, f_y είναι συνεχείς σε ένα διάστημα D οπότε από Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων σε μια περιοχή του (x,y) αν $f_y = 0$ τότε χάνουμε τη μοναδικότητα και η σχέση $f(x,y)=0$ δεν δίνει μοναδική συνάρτηση $g(x)$, η οποία: $f(x, g(x)) = 0$, $g(x_0) = g_0$

β) $y = xy' - \frac{1}{2} y'^2$, η οποία είναι εξίσωση Clairut με $g(y') = -\frac{1}{2} y'^2$

Θέτω $u = y' \Rightarrow$ $y = xu + g(u) \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du + g'(u)\,du$ $\underline{\underline{dy = u\,dx}}$

$x\,du + g'(u)\,du = 0 \Rightarrow (x + g'(u))\,du = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow y' = c$

Άρα $y = cx + g(c)$, αφού $y = xy' - \frac{1}{2} y'^2$. Η γενική είναι: $y = cx - \frac{1}{2} c^2$

Επιπλέον, αφού $(x + g'(u))\,du = 0 \Rightarrow x + g'(u) = 0 \Rightarrow$
$x - y' = 0 \Rightarrow y' = x \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2}$, η οποία είναι ιδιάζουσα.

γ) Αν $y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, αν $y(2) = 1 \Rightarrow c = 2 \pm \sqrt{3}$ και αν $y(-2) = 1 \Rightarrow c = 2 \pm \sqrt{3}$
Άρα οι δυνατές λύσεις είναι: $y(x) = (2+\sqrt{3})x - \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2}$

$y(x) = (2-\sqrt{3})x - \frac{(2-\sqrt{3})^2}{2}$

10 α) Αντικαθιστώντας στη διαφορική $y=e^{\lambda x}$: $\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$
$\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ με λ_1, λ_2 οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου
άρα $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ λύσεις τις δε.

β) Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ έχουμε δύο γραμμ. ανεξ. λύσεις, με αποτέλεσμα η γενική λύση να είναι $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$. Αντικαθιστώντας στην διαφορική επαληθεύεται ο ισχυρισμός μας:

$$(c_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + c_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}) + a c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} + b c_1 e^{\lambda_1 x} + b c_2 e^{\lambda_1 x} = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) c_1 e^{\lambda_1 x} + (\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b) c_2 e^{\lambda_2 x} \xrightarrow{\lambda_1, \lambda_2 \text{ ρίζες}}$$

$$0 \cdot c_1 e^{\lambda_1 x} + 0 \cdot c_2 e^{\lambda_2 x} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad (\text{ισχύει})$$

γ) Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ έχουμε τη μία λύση $y_1 = e^{\lambda x}$ και για τη $2^η$ θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Lagrange: Θέτω $u = \frac{1}{y_1^2} e^{\int p\,dx} \Rightarrow u = e^{ax} \cdot e^{-ax} = 1$

Άρα $v(x) = \int u(x)\,dx = x$, $y_2 = v \cdot y_1 = x e^{\lambda x}$
Η γεν. λύση επομένως είναι: $y(x) = x e^{\lambda x} + e^{\lambda x}$. Αντικαθιστώντας στη δε:

$$\lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + x\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x} + a e^{\lambda x} + a x e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b x e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow x(\lambda^2 + a\lambda + b) + (\lambda^2 + a\lambda + b) + 2\lambda + a = 0 \Rightarrow x \cdot 0 + 0 + 2\lambda + a = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-a}{2}$$, που ισχύει αφού λ ρίζα του πολυωνύμου: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

δ) Η "γενική y" είναι: $y = y_1 + y_2 = e^{kx} i \cos(\mu x) + e^{kx} \sin(\mu x) + e^{kx} \cos(\mu x) - e^{kx} i \sin(\mu x)$

$\Rightarrow y(x) = 2 e^{kx} \cos(\mu x)$. Επιπλέον, $\tilde{y}(x) = y_1 \cdot y_2 = 2 e^{kx} i \sin(\mu x)$ και
θέτουμε λύσεις: $y_1 = e^{kx} \cos(\mu x)$ και $y_2 = e^{kx} \sin(\mu x)$
(φανταστικό και πραγματικό μέρος). Η γενική λύση είναι:
$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{kx} \cos(\mu x) + c_2 e^{kx} \sin(\mu x)$. Για την γραμμ. ανεξαρτησία των y_1, y_2 έχουμε:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{kx}\cos(\mu x)\left(ke^{kx}\sin(\mu x) + e^{kx}\cos(\mu x)\right) - \left(ke^{kx}\cos(\mu x) - e^{kx}\sin(\mu x)\right)e^{kx}\sin(\mu x)$$

$$= e^{2kx}\left[k\cos\mu x \cdot \sin\mu x + \cos^2\mu x - k\cos(\mu x)\sin(\mu x) + \sin^2\mu x\right) = e^{2kx} \neq 0$$

Άρα y_1, y_2 γραμμ. ανεξάρτητες.

ε) i) Αν θέσουμε $v_c'' \to \lambda^2$, $v_c' \to \lambda$, $v_c = 1$ έχουμε: $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$

που είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής. $\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}$

Αν $\Delta < 0 \Rightarrow R^2 - \frac{4L}{C} < 0 \Rightarrow R = 0$ τότε έχουμε δύο μιγαδικές λύσεις
$\Rightarrow 0 < R^2 < \frac{4L}{C}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm i\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}$$

Αν $R=0$, $\lambda_{1,2} = \frac{\pm i\sqrt{\frac{4L}{C}}}{2L}$ και η λύση είναι:

$$v_c(t) = e^{-R/2L}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C}}}{2L}t\right)\right)$$

Άρα $v_c(t) = c_1\cos\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C}}}{2L}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C}}}{2L}t\right)$

$v_c(0) = V_0 \Rightarrow c_1 = V_0$

$v_c'(0) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_2 = 0$. Άρα η λύση είναι: $v_c(t) = V_0\cos\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C}}}{2L}t\right)$

ii) Αν $0 < R^2 < \frac{4L}{C}$ έχουμε: $v_c(t) = e^{-\frac{R}{2L}}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}t\right)\right)$

Αν $V_c(0) = V_0 \Rightarrow c_1 = V_0$

Αν $V_c'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}$. Άρα $V_c(t) = e^{-\frac{R}{2L}}\left(V_0\cos\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}t\right) + \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}\sin\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}\right.\right.$

(11) i) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$

Για $\lambda_1 = 0$: $[\underset{\sim}{A} - \lambda_1 \underset{\sim}{I_2}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{r_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Για $\lambda_2 = 1$: $[\underset{\sim}{A} - \lambda_2 \underset{\sim}{I_2}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{r_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Η λύση είναι: $\underset{\sim}{x}(t) = c_1 \underset{\sim}{r_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \underset{\sim}{r_2} e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) Αν $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1+i \end{bmatrix}$: $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (i-1)\lambda - i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι: $\underset{\sim}{r_1} = \begin{bmatrix} -2-i \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\underset{\sim}{r_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, άρα

η γενική λύση είναι: $\underset{\sim}{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2-i \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-it}$

iii) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_3}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = -1$ (πολ/τας 2) και $\lambda_2 = 8$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι:

$\underset{\sim}{r_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{r_1'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{r_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Άρα η γενική λύση:

$\underset{\sim}{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{8t}$

iv) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_3}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 8 & 1-\lambda & 1 \\ -8 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 2$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι: $\underset{\sim}{r_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{r_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{r_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Άρα η γενική λύση είναι: $\underset{\sim}{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

12) α) Θέτουμε $t = e^v$ και : $e^v x'(e^v) = \underset{\sim}{A}\, x(e^v) \xrightarrow[u'(v) = e^v x'(e^v)]{u(v) = x(e^v)} u'(v) = \underset{\sim}{A} u(v)$

όπου είναι η κλασσική μορφή που έχει λύση: $u(v) = e^{\lambda v} \cdot \xi$, με λ ιδιοτιμή του $\underset{\sim}{A}$ και ξ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Επιπλέον, αφού:

$v = \ln t \Rightarrow u(\ln t) = t^{\lambda} \xi \Rightarrow x(e^{\ln t}) = t^{\lambda} \xi \Rightarrow x(t) = t^{\lambda} \xi$

β) Οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ είναι: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα: $\underset{\sim}{x_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ και $\underset{\sim}{r_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Άρα η λύση είναι:

$$\underset{\sim}{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t^{-2}$$

13) α) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ a^2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm a$

Για $\lambda_1 = -1+a$, $\underset{\sim}{r_1} = \begin{bmatrix} -1/a \\ 1 \end{bmatrix}$ και για $\lambda_2 = 1-a$, $\underset{\sim}{r_2} = \begin{bmatrix} 1/a \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα η λύση είναι: $x(t) = c_1 \underset{\sim}{r_1} e^{(-1+a)t} + c_2 \underset{\sim}{r_2} e^{(-1-a)t}$

Για τη συμπεριφορά της λύσης για $t \to +\infty$ έχουμε:

· Αν $a = 1$: $x(t) = c_2 \underset{\sim}{r_2} e^{-2t}$, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$

· Αν $a = -1$: $x(t) = c_1 \underset{\sim}{r_1} e^{-2t}$, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$

· Αν $a > 1$: $-1+a > 0$, $-1-a < 0$, άρα: $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty + 0 = +\infty$

· Αν $-1 < a < 1 \Rightarrow -1+a < 0$, $-1-a < 0$, άρα: $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 + 0 = 0$

· Αν $a < -1$: $-1+a < 0$, $-1-a > 0$, άρα: $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 + +\infty = +\infty$

14 a) Τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ είναι:

$\lambda_1 = 0$, $\underset{\sim}{r_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Χρειαζόμαστε άλλο ένα ιδιοδιάνυσμα, επομένως:

Η 2η λύση θα είναι της μορφής: $x_2(t) = e^{at}(t\underset{\sim}{r_2} + \underset{\sim}{r_3})$ με:

$\cdot (\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I})^2 \underset{\sim}{r_3} = 0 \Rightarrow A^2 \cdot \underset{\sim}{r_3} = 0 \xrightarrow{A^2=0} \underset{\sim}{r_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (τυχαίο)

$\cdot (\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) \underset{\sim}{r_3} = \underset{\sim}{r_2} \Rightarrow \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{r_3} = \underset{\sim}{r_2} \Rightarrow \underset{\sim}{r_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

Άρα $x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \left(t \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

Αφού $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ μετά από πράξεις έχουμε πως $c_1 = 1$, $c_2 = 1/8$.

Άρα η γενική λύση είναι: $x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4t+1 \\ 8t \end{bmatrix}$

β) Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ είναι: $\lambda_1 = -2+i$ με $\underset{\sim}{r_1} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\lambda_2 = -2-i$ με $\underset{\sim}{r_2} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Άρα: $\underset{\sim}{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \pm i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή: $\underset{\sim}{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Άρα η λύση είναι: $x(t) = c_1 e^{-2t}\left(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t\right) + c_2 e^{-2t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

Αφού όμως $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c_1 - c_2 = 1 \\ c_1 + 0 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -2 \\ c_2 = -3 \end{matrix}$

Άρα η γενική λύση είναι: $x(t) = -2e^{t}\left(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - 3e^{2t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

15) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_3}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & -2 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ -4 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Λύνοντας την εξίσωση $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ καταλήγουμε στα ιδιο-διανύσματα $\underset{\sim}{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Άρα η γενική λύση είναι: $x(t) = \left(c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) e^{t}$

* Η άσκηση 16 είναι στο τέλος της παρούσας εργασίας *

17) i) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda^2) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

Επομένως $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, άρα το σημείο είναι σαγματικό ασταθές.

ii) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda^2) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -4$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{\pm 2i}{2} = \pm i$, οπότε $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ άρα το σημείο είναι ευσταθές κέντρο

iii) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)(1+\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow -3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 4 = 0$
$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow$
$(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ διπλή. Άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, γνήσιος κόμβος, ασυμπτωτικά ευσταθές

iv) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ διπλή, άρα γνήσιος κόμβος, ασυμπτωτικά ευσταθές.

18 a) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 4\lambda - 4 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm i$

Οι λύσεις είναι στη μορφή $\lambda = a \pm i\beta$, με $a<0$. Άρα το σημείο είναι ασυμπτωτικά ασταθές

β) $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 2\lambda - 1 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{2}$.

Άρα $\lambda_1 = -1-\sqrt{2} < 0$ και $\lambda_2 = -1+\sqrt{2} > 0$. Επομένως το σημείο είναι ασταθές.

19 $\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x,y) = x(3-x-2y) \\ y' = g(x,y) = y(2-y-x) \end{array} \right\}$ Για να βρούμε τα στάσιμα σημεία:
$x(3-x-2y) = 0 \Rightarrow x=0,\ y = 3/2 \Rightarrow A(0, 3/2)$
$y(2-y-x) = 0 \Rightarrow y=0,\ x=2 \Rightarrow B(2,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2x - 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x$, $\frac{\partial g}{\partial x} = -y$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2 - 2y - x$.

· Για το $A(0, 3/2)$: $\begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{vmatrix} = 0$

όπου οι μερικές παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο A. Έχουμε:

$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ -3/2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι: $\underset{\sim}{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Η γενική λύση είναι: $x(t) = c_1 \underset{\sim}{v_1} e^{0t} + c_2 \underset{\sim}{v_2} e^{-t} = c_1 \underset{\sim}{v_1} + c_2 \underset{\sim}{v_2} e^{-t}$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$ αλλά $\lim_{t \to -\infty} x(t) = +\infty$, επομένως το σημείο

είναι ασταθές (η λύση εκρήγνυται για $t \to -\infty$)

· Ομοίως, για το $B(2,0)$: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι: $\underset{\sim}{v_1} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

και η γενική λύση: $x(t) = c_1 \underset{\sim}{v_1} + c_2 \underset{\sim}{v_2} e^{-t}$

όπου είδαμε προηγουμένως πως εκρήγνυται για $t \to -\infty$. Άρα το B είναι ασταθές.

20 i) Αναζητούμε συνάρτηση Lyapunov της μορφής $V(x,y) = ax^2 + by^2$ με

$V'(x,y) = 2ax(-x^3 + xy^2) + 2by(-2x^2y - y^3) =$
$= -2ax^4 + 2ax^2y^2 - 4bx^2y^2 - 2by^4$

Για $a=2$, $b=1$: $V'(x,y) = -4x^4 - 2y^4 < 0$ και αφού $V(x,y) > 0$ για $x,y \neq 0$, με $V(0,0)=0$ η V είναι αυστηρή συνάρτηση Lyapunov και άρα το $(0,0)$ είναι ασυμπτωματικά ευσταθές.

ii) Ομοίως, $V'(x,y) = 2ax(-x^3+2y^3) + 2by(-2x^2y^2) =$
$$= -2ax^4 + 2axy^3 - 4bxy^3$$

Για $a=2$, $b=1$: $V'(x,y) = -4x^4 < 0$ και αφού $V(x,y) > 0$ για $x,y \neq 0$ με $V(0,0)=0$ η V είναι αυστηρή συνάρτηση Lyapunov και άρα το $(0,0)$ είναι ασυμπτωματικά ευσταθές

16) i) Έστω $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς $x'(t) = A(t)x(t)$ (1). Η γενική λύση της (1) είναι:
$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2(t) x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$
Αναζητούμε λύση της μη ομογενούς της μορφής:
$$x(t) = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t) + \dots + c_n(t) \cdot x_n(t) \quad (2)$$

$$x_j(t) = [x_{j1}(t) \quad x_{j2}(t) \dots x_{jn}(t)]^T$$

Αν $\Psi(t)$ είναι ο Θεμελιώδης πίνακας που αντιστοιχεί στις λύσεις $x_1(t), \dots, x_n(t)$ της (1) τότε η (2) γράφεται: $x(t) = \Psi(t) \cdot V(t)$ (3)
όπου $V(t) = [c_1(t) \quad c_2(t) \dots c_n(t)]^T$

Αντικαθιστούμε στην μη ομογενή το $x(t)$ από την (3) και έχουμε:
$$\Psi'(t)V(t) + \Psi(t)V'(t) = A \cdot \Psi(t) V(t) + g(t) \quad (4)$$

Γνωρίζουμε ότι $\Psi'(A) = A \cdot \Psi(t)$ οπότε από την (4) έχουμε ότι: $\Psi(t)c'(t) = g(t)$ και επειδή ο πίνακας $\Psi(t)$ αντιστρέφεται, από την τελευταία σχέση έχουμε: $V'(t) = \Psi^{-1}(t) g(t)$. Με ολοκλήρωση προκύπτει: $V(t) = \int \Psi^{-1}(t) g(t)\, dt + C$, $C \in \mathbb{R}$

ii) Η $v(t)=\int \varphi^{-1}(t)g(t)\,dt + c$ χάρη στην (3) γράφεται:

$$v(t) = \varphi^{-1}(t)\,x(t) + \int \varphi^{-1}(t)\,g(t)\,dt + c$$

Μετατρέποντας το αόριστο ολοκλήρωμα σε ορισμένο ("απαλείφοντας και την σταθερά c) έχουμε πως η γενική λύση είναι:

$$x(t) = \varphi(t)c + \varphi(t)\int_{t_0}^{t} \varphi^{-1}(s)\,g(s)\,ds \quad , t_0\in I$$

iii) Από την αρχική συνθήκη $x(t_0)=x^0$ μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερά c στον πρώτο όρο της προηγούμενης σχέσης και να καταδείξουμε πως: $x(t) = \varphi(t)\,\varphi^{-1}(t_0)\,x^0 + \varphi(t)\int_{t_0}^{t}\varphi^{-1}(s)\,g(s)\,ds$