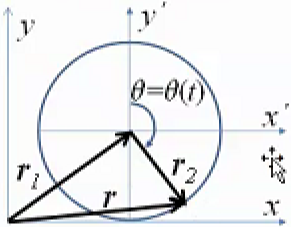
Παράδειγμα. Ας μελετήσουμε την καμπύλη την οποία διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός τροχού ακτίνας R, ο οποίος κυλάει χωρίς ολίσθηση με σταθερή ταχύτητα, παράλληλα στον άξονα-x, (η καμπύλη αυτή είναι γνωστή και ως **κυκλοειδής** τροχιά)



Χρησιμοποιούμε ένα «ακίνητο» σύστημα αναφοράς (x,y) και ένα «κινούμενο» σύστημα αναφοράς , (x′,y′) το οποίο κινείται μαζί με το άξονα του τροχού, αλλά παραμένει παράλληλο προς το (x,y).

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$$

$$\vec{r}_1(t) = \hat{x}(R\omega t) + \hat{y}(R) \qquad \vec{r}_2(t) = \hat{x}(R\sin(\omega t)) + \hat{y}(R\cos(\omega t))$$

$$\vec{r}(t) = \hat{x}R(\omega t + \sin(\omega t)) + \hat{y}R(1 + \cos(\omega t))$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{x}R\omega(1 + \cos(\omega t)) - \hat{y}R\omega(\sin(\omega t))$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\hat{x}R\omega^2(\sin(\omega t)) - \hat{y}R\omega^2(\cos(\omega t)) =$$

$$= -\omega^2\left[\hat{x}R(\sin(\omega t)) + \hat{y}R(\cos(\omega t))\right] = -\omega^2\vec{r}_2$$

Αναλυτικός υπολογισμός της τροχιάς

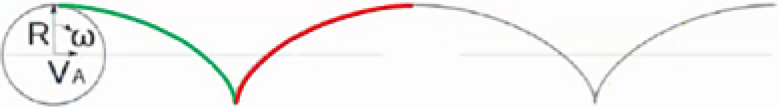
$$x(t) = R(\omega t + \sin(\omega t))$$
$$y(t) = R(1 + \cos(\omega t))$$

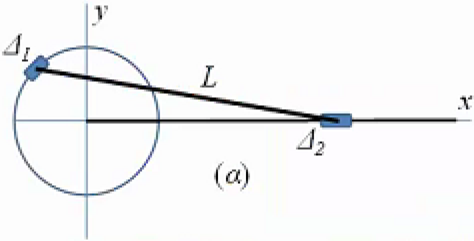
Αναλυτικός υπολογισμός της τροχιάς

$$\cos(\omega t) = (y/R) - 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t) = \sqrt{1-\cos^2(\omega t)} = \sqrt{1-((y/R)-1)^2} \\ \omega t = \arccos((y/R)-1) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(y) &= R\left(\arccos((y/R)-1) + \sqrt{1-((y/R)-1)^2}\right) \\ &= R\left(\arccos\{(y/R)-1\}\right) + \sqrt{y(2R-y)}, \quad 0 \le y \le 2R \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(y) = R\left(2\pi - \arccos((y/R)-1) - \sqrt{1-((y/R)-1)^2}\right), \\ 0 \le y \le 2R \end{aligned}}$$





Παράδειγμα: Δώστε την χρονική εξάρτηση του διανύσματος θέσης του δρομέα Δ_2 αν ο δρομέας Δ_1 εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R, , με γωνιακή ταχύτητα .

$$\vec{r}_1 = \left(x_1 = R\cos(\omega t), y_1 = R\sin(\omega t)\right)$$

$$\vec{r}_2 = \left(x_2 = x_2(t), y_2 = 0\right) \qquad \text{Σύνδεσμος:} \quad \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = L$$

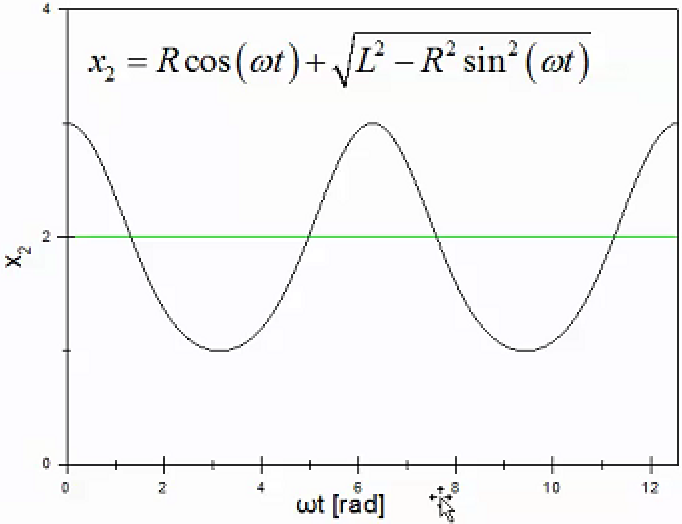
$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = L \quad \Rightarrow$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L^2$$

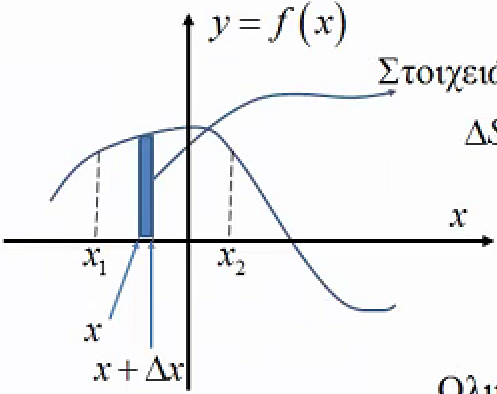
$$(x_2 - x_1) = \sqrt{L^2 - y_1^2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 + \sqrt{L^2 - y_1^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_2 = R\cos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}$$

Περιοδική αλλά Μη-Αρμονική Συμπεριφορά



Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα



Στοιχειώδες εμβαδόν:

$$\Delta S = f(x)\Delta x$$

Ολικό Εμβαδόν:

$$S(x_1, x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i \Delta S_i = \int_{x_1}^{x_2} dS = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Το Αόριστο Ολοκλήρωμα

$$\frac{dS(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow \left(\frac{dS(x)}{dx}\right)dx = f(x)\,dx \Rightarrow dS(x) = f(x)\,dx$$

$$dS(x) = f(x)\,dx \Rightarrow \int dS(x) = \int f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow S(x) = \int f(x)\,dx + C$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $S(x)$ είναι μία συνάρτηση, η παράγωγος της οποίας είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$ του ολοκληρώματος

Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης:

Έστω f μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. Αν c είναι ένας αριθμός εσωτερικός του διαστήματος αυτού, $a \leq c \leq b$, ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $A(x)$ ως εξής: $A(x) = \int_c^x f(t)dt$, αν $a \leq x \leq b$. Η παράγωγος $A'(x)$ υπάρχει τότε σε κάθε σημείο x του (a,b) όπου η $f(x)$ είναι συνεχής και για αυτά τα x είναι $A'(x) = f(x)$.

Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης:

Έστω f μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ και συνεχής στο (a,b). Έστω $P(x)$ τυχούσα παράγουσα της $f(x)$, δηλαδή $P'(x) = f(x)$, στο διάστημα (a,b). Αν $a < c < b$, θα είναι

$$\int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c).$$

Από το Ορισμένο στο Αόριστο Ολοκλήρωμα

$$\int_{x_1}^{x_2} dS = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx:$$

Θεωρούμε σταθερό το κάτω άκρο του ορισμένου ολοκληρώματος και υποθέτουμε ότι υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα για διαφορετικές τιμές του άνω άκρου του.

Δηλ: $$\int_{x_0}^{x} dS = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \Rightarrow S(x) - S(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

Άρα: $$S(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + S(x_0)$$

Δηλ.: το ορισμένο ολοκλήρωμα, ως συνάρτηση του άνω ορίου του, είναι μία συνάρτηση, η παράγωγος της οποίας είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$ του ολοκληρώματος

Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b \left(f(x)\right) dx \pm \int_a^b \left(g(x)\right) dx$$

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx = -A\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^c f(x)\,dx + A\int_c^b f(x)\,dx$$

Χρήσιμος Κανόνας - Ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\int f dg = fg - \int g df \quad \Rightarrow$$

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx$$

Μερικά Χρήσιμα Ολοκληρώματα

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arc\cot\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-1}{x+a}\right| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πως υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης

$$\vec{f}(u) = f_1(u)\hat{i} + f_2(u)\hat{j} + f_3(u)\hat{k}$$

$$I = \int \vec{f}(u)\,du = \hat{i}\int f_1(u)\,du + \hat{j}\int f_2(u)\,du + \hat{k}\int f_3(u)\,du$$

Διαφορικές Εξισώσεις

«όταν μεταβάλλεται, κατά δA, ένα φυσικό μέγεθος A, τότε ποιά είναι η αντίστοιχη μεταβολή δB, ενός μεγέθους B;»

Φυσικός Νόμος: Σχέση μεταξύ των παραγώγων

$$\left(dA/dt, dB/dt, dA/dx, dA/dy, dA/dz, dB/dx, \ldots \right)$$

Γενικά, μία διαφορική εξίσωση (ΔΕ) είναι μία σχέση ανάμεσα σε μία συνάρτηση $f(x)$ και στις παραγώγους της, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ κ.ο.κ., ηγενική μορφή της οποίας είναι

$$G\left(f(x), f'(x), f''(x), \ldots \right) = 0$$

Η <u>επίλυση μίας συνήθους ΔΕ</u> συνίσταται στην εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης $f(x)$, η οποία, μαζί με τις παραγώγους της, ικανοποιεί την δεδομένη ΔΕ. Η επίλυση μίας ΔΕ ισοδυναμεί με μία <u>διαδικασία ολοκλήρωσης</u>, δεδομένου ότι, από μία σχέση μεταξύ παραγώγων, οδηγεί στον υπολογισμό της συνάρτησης που ικανοποιεί τη ΔΕ. Επειδή, σε κάθε διαδικασία υπολογισμού ενός αορίστου ολοκληρώματος, υπεισέρχεται μία σταθερά ολοκλήρωσης, είναι φανερό ότι, <u>ανάλογα με την τάξη της ΔΕ, θα έχουμε και αντίστοιχο αριθμό σταθερών ολοκλήρωσης</u> (1-σταθερά για ΔΕ-πρώτης-τάξης, 2-σταθερές για ΔΕ-δεύτερης-τάξης, ..., κ.ο.κ.).

Οι τιμές των σταθερών ολοκλήρωσης προσδιορίζονται με τη βοήθεια των λεγόμενων αρχικών συνθηκών

$$y_{o,o} = f\left(x = x_0\right) \qquad y_{o,1} = \left(df \,/\, dx\right)_{x=x_0}$$

$$y_{o,2} = \left(d^2 f \,/\, dx^2\right)_{x=x_0} \qquad , \cdots\cdots , \qquad y_{o,n-1} = \left(d^{n-1} f \,/\, dx^{n-1}\right)_{x=x_0}$$

1ο **Παράδειγμα**: Κίνηση με σταθερή δύναμη $\vec{F} = \text{σταθ.}$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \Rightarrow m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow d\vec{\upsilon} = \frac{\vec{F}}{m}dt \Rightarrow \int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \int_{t_o}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o + \frac{\vec{F}}{m}(t-t_0)}$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o + \frac{\vec{F}}{m}(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}\upsilon_x(t) + \hat{y}\upsilon_y(t) + \hat{z}\upsilon_z(t) =$$

$$= \hat{x}\upsilon_{x,0} + \hat{y}\upsilon_{y,0} + \hat{z}\upsilon_{z,0} + \hat{x}\frac{F_x}{m}(t-t_0) + \hat{y}\frac{F_y}{m}(t-t_0) + \hat{z}\frac{F_z}{m}(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \upsilon_x(t) = \upsilon_{x,0} + \dfrac{F_x}{m}(t-t_0) \\ \upsilon_x(t) = \upsilon_{x,0} + \dfrac{F_x}{m}(t-t_0) \\ \upsilon_x(t) = \upsilon_{x,0} + \dfrac{F_x}{m}(t-t_0) \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}_o + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0) \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{\upsilon}_o + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0) \right] dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 (t - t_0) + \frac{\vec{F}}{2m}(t - t_0)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \upsilon_{x0}(t - t_0) + \frac{F_x}{2m}(t - t_0)^2 \\ y &= y_0 + \upsilon_{y0}(t - t_0) + \frac{F_y}{2m}(t - t_0)^2 \\ z &= z_0 + \upsilon_{z0}(t - t_0) + \frac{F_z}{2m}(t - t_0)^2 \end{aligned} \right\}$$

2ο Παράδειγμα

Επίλυση διαφορικής εξίσωσης μέσω Ολοκλήρωσης

Αλεξιπτωτιστής αφήνεται, (από ιπτάμενο ελικόπτερο εν-στάσει), με μηδενική αρχική ταχύτητα, και πέφτει μέσε σε ομογενές πεδίο βαρύτητας. Θεωρούμε ότι το αλεξίπτωτο ανοίγει ακαριαία την ίδια στιγμή και η δύναμη αντίστασης από το αλεξίπτωτο είναι $-c\upsilon_z$, Μελετήστε την κίνηση

$$m\ddot{z} = mg - c\upsilon_z \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_z}{dt} = g - \frac{c}{m}\upsilon_z \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)dt = \left(g - \frac{c}{m}\upsilon_z\right)dt \Rightarrow \underbrace{\frac{d\upsilon_z}{\left(g - \frac{c}{m}\upsilon_z\right)} = dt}_{\text{Χωρισμός μεταβλητών}}$$

$$\frac{d\upsilon_z}{\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)}=dt\Rightarrow\frac{\left(-\frac{c}{m}\right)d\upsilon_z}{\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)}=\left(-\frac{c}{m}\right)dt\Rightarrow$$

$$\frac{d\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)}{\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)}=\left(-\frac{c}{m}\right)dt\Rightarrow\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\upsilon'}\frac{d\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)}{\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)}=\left(-\frac{c}{m}\right)\int_{t=0}^{t=t'}dt$$

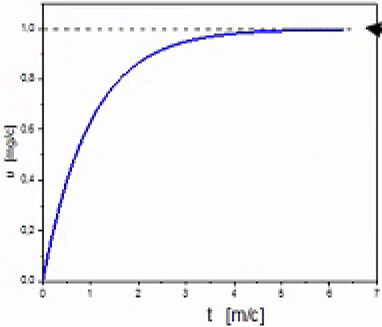
$$\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\upsilon'}\frac{d\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)}{\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)}=\left(-\frac{c}{m}\right)\int_{t=0}^{t=t'}dt\Rightarrow\ln\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)\Bigg|_{\upsilon=0}^{\upsilon=\upsilon'}=--\frac{c}{m}t'$$

$$\ln\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)\Bigg|_{\upsilon=0}^{\upsilon=\upsilon'}=-\frac{c}{m}t' \;\Rightarrow\; \ln\left(g-\frac{c}{m}\upsilon_z\right)-\ln(g)=-\frac{c}{m}t'$$

$$\ln\left(1-\frac{c}{mg}\upsilon_z\right)=-\frac{c}{m}t' \Rightarrow \left(1-\frac{c}{mg}\upsilon_z\right)=e^{-\frac{c}{m}t'}$$

$$\left(1-e^{-\frac{c}{m}t'}\right)=\frac{c}{mg}\upsilon' \Rightarrow \upsilon'=\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t'}\right)$$

Κίνηση
με οριακή ταχύτητα :



$$\upsilon'_{o\rho}=\frac{mg}{c}$$

<u>Ως Άσκηση</u>: Δοκιμάστε να λύσετε το ίδιο πρόβλημα, χρησιμοποιώντας αόριστο ολοκλήρωμα. Προσδιορίστε τη σταθερά ολοκλήρωσης με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

π.χ., βλ. Παράδειγμα 1.4.1 (Σημειώσεις)