

# ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 29

Διάλεξη: 17 Δεκεμβρίου 2020

## Προηγούμενα επεισόδια: Προβλήματα Sturm-Liouville

$$\Delta E: \quad t(x)y'' + t'(x)y' + q(x)y + \lambda p(x)y = 0 \quad a \leq x \leq b$$

$$\text{Συνθήκες:} \quad k_1 y(a) + k_2 y'(a) = \cancel{0}$$

$$\ell_1 y(b) + \ell_2 y'(b) = \cancel{0}$$

Μη μηδενικές λύσεις μόνο για  $\lambda = \lambda_n$  :  $y_n(x)$   
ιδιοτιμές ιδιοσυναρτήσεις

Ορθογωνιότητα ιδιοσυναρτήσεων:  $\int_a^b p(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \text{ if } n \neq m$

- Μετατροπή:  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + \lambda d(x)y = 0$  σε S-L  $\mu(x) = \frac{1}{a(x)} \exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right]$
- Αν  $t(\underline{a^*}) = 0$  και  $t(\underline{b^*}) = 0$  τότε πάντα  $\int_{\underline{a^*}}^{\underline{b^*}} p(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$

(α) (10 μονάδες) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + ky = 0 \text{ για } 0 \leq x \leq L \quad \text{με } y'(0)=0 \text{ και } y(L)=0.$$

(β) (5 μονάδες) Βρείτε την σχέση ορθογωνιότητας για τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος.

ΤΕΣΤ 7

$$(α) \lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -k \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-k}$$

Θέλω  $\sin/\cos$  για λύση  $\rightarrow$  μιγαδικές  $\rightarrow$   $k > 0$   $k = q^2$   $\lambda = \pm iq$

$$\rightarrow y(x) = A \cos(qx) + B \sin(qx)$$

$$y'(x) = -Aq \sin(qx) + Bq \cos(qx)$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow Bq = 0 \rightarrow \begin{matrix} B=0 \\ q \neq 0 \end{matrix} \rightarrow y(x) = A \underline{\cos(qx)}$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow A \underline{\cos(qL)} = 0 \rightarrow \begin{matrix} A \neq 0 \\ q \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow q = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \quad K_n = \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2L} \right]^2 \quad \cos(qL) = 0 \rightarrow qL = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n=0,1,2,\dots$$

$$y_n(x) = \cos\left[ \frac{(2n+1)\pi}{2L} x \right] \quad n=0,1,2,\dots$$

Ιδιοτιμές:  $\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2, \left(\frac{3\pi}{2L}\right)^2, \left(\frac{5\pi}{2L}\right)^2,$

Ιδιοσυναρτήσεις:  $\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right), \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right), \dots$

(b)  $\int_0^L \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] \cos\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right] dx = 0 \quad \forall n \neq m$

$\pi x \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{17\pi x}{2L}\right) dx = 0$

$p(x)=1$

$y'(0)=0 \quad y(L)=0$

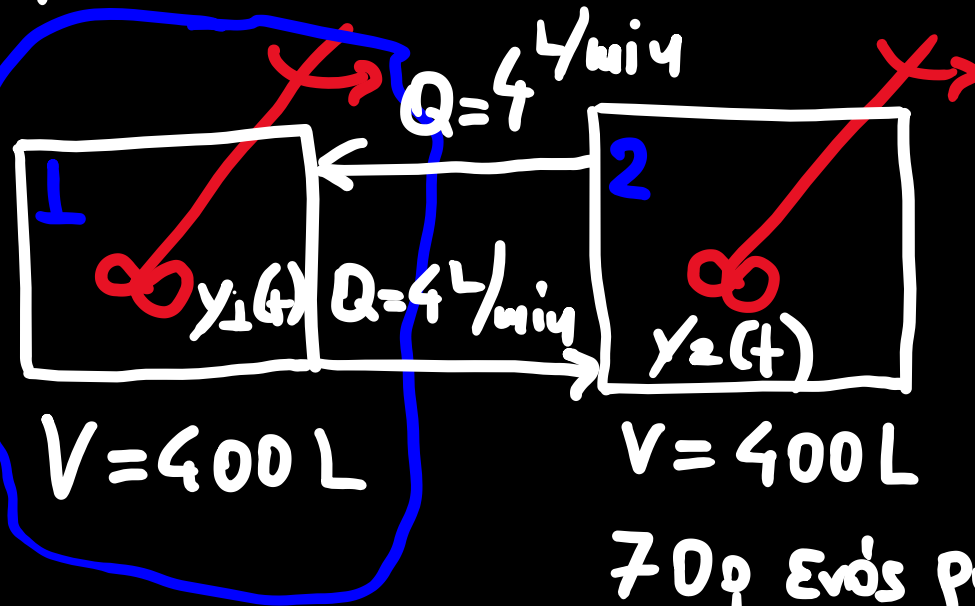
# 9. Συστήματα Γραμμικών ΔΕ

Γραμμική Άλγεβρα. Ιδιοδιανύσματα-Ιδιοτιμές.

Παράδειγμα

$$\frac{g}{min} \quad \frac{g}{L}$$

Βρείτε την μάζα του Α  
στα δύο δοχεία:  $y_1(t), y_2(t)$



70g ενός ρυτίου Α. (g/min) θ

Βήμα 0: Μοντελοποίηση: Στο 1

(ρυθμός ουσ. στο 1) = (ρυθμός εισόδου) - (ρυθμός εξ) + (ρυθμός παραγ) - (ρυθμός κατ.)

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = Q \frac{y_2(t)}{V} - Q \frac{y_1(t)}{V} \quad \text{Στο 2} \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{Q}{V} y_1(t) - \frac{Q}{V} y_2(t)$$

$$\frac{Q}{V} = \frac{44 \text{ min}^{-1}}{400 \text{ L}} = 0.01 \text{ min}^{-1}$$

$$y_1' = -0.01 y_1 + 0.01 y_2$$

$$y_2' = 0.01 y_1 - 0.01 y_2$$

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = 70$$

Preview

$$\left( \overline{y}'(t) = \underline{\underline{A}} \overline{y}(t) \right) \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{bmatrix} \quad \overline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$