

# Τεχνολογία

Αντώνης Παπαβασιλείου, ΕΜΠ

Βασισμένο στον Varian [1]

# Περιεχόμενα

- Εισροές και εκροές
- Περιγραφή τεχνολογικών περιορισμών
- Παραδείγματα τεχνολογίας
- Ιδιότητες της τεχνολογίας
- Οριακό προϊόν
- Τεχνικός λόγος υποκατάστασης
- Φθίνον οριακό προϊόν
- Φθίνων τεχνικός λόγος υποκατάστασης
- Βραχυπρόθεσμος και μακροπρόθεσμος ορίζοντας
- Αποδόσεις κλίμακας

# Εισροές και εκροές

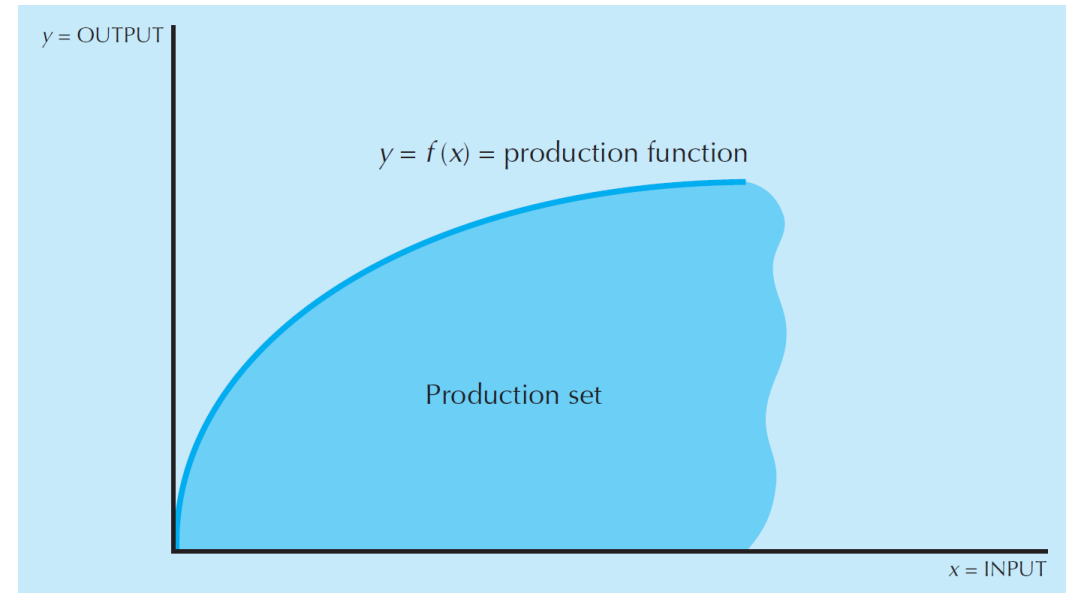
# Συντελεστές παραγωγής

- Οι **συντελεστές παραγωγής** είναι οι εισροές που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή
- Κατηγοριοποίηση: γη, εργασία, κεφάλαιο, πρώτες ύλες
- Τα **κεφαλαιουχικά αγαθά** είναι εισροές παραγωγής που είναι και αυτές παραγόμενα αγαθά: μηχανές, τρακτέρ, κτήρια, υπολογιστές, κτλ.
- Το κεφάλαιο μερικές φορές κατηγοριοποιείται σε
  - **Χρηματοοικονομικό κεφάλαιο**
  - **Φυσικό κεφάλαιο**: τα κεφαλαιουχικά αγαθά που αναφέραμε προηγουμένως
- Οι εισροές και εκροές μετριοούνται ως ροές ανά μονάδα χρόνου, πχ εργασία ανά εβδομάδα, ώρες μηχανής ανά εβδομάδα, παραγωγή αγαθού ανά εβδομάδα, κτλ

# Περιγραφή τεχνολογικών περιορισμών

# Τεχνολογικοί περιορισμοί

- Η φύση επιβάλλει **τεχνολογικούς περιορισμούς** στις επιχειρήσεις: μόνο ορισμένοι συνδυασμοί εισροών μπορούν να οδηγήσουν σε συγκεκριμένες εκροές
- Το **σύνολο παραγωγής** είναι όλοι οι συνδυασμοί εισροών και εκροών που αντιστοιχούν σε τεχνολογικά εφικτό τρόπο παραγωγής
- Αν έχουμε μία εισροή  $x$  και μία εκροή  $y$ , το να λέμε ότι το  $(x, y)$  είναι στο σύνολο παραγωγής ισοδυναμεί με το να λέμε ότι είναι τεχνολογικά εφικτό να παράγουμε  $y$  μονάδες εκροής από  $x$  μονάδες εισροής



# Συνάρτηση παραγωγής

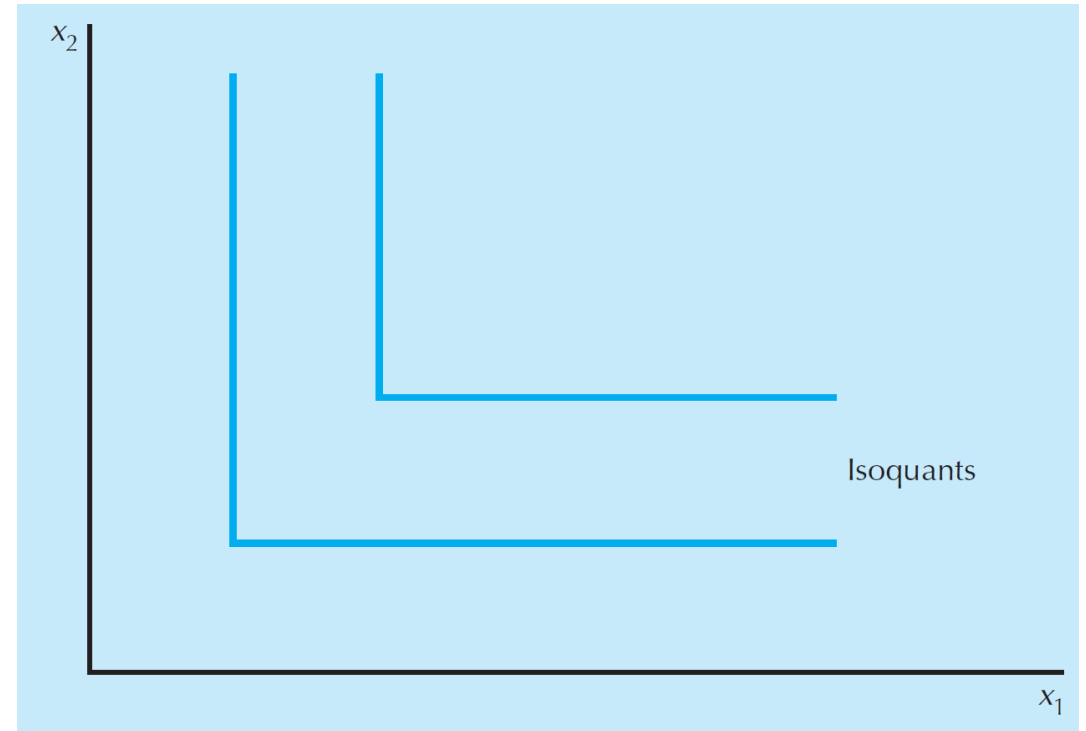
- Αν οι εισροές κοστίζουν, τότε έχει νόημα να εξετάσουμε τη *μέγιστη δυνατή* εκροή που μπορεί να επιτευχθεί από μια δεδομένη εισροή
- Αυτό αντιστοιχεί στο σύνορο του συνόλου της προηγούμενης διαφάνειας
- Αυτό το σύνορο αναπαρίσταται από τη **συνάρτηση παραγωγής**
- Η συνάρτηση παραγωγής μπορεί να οριστεί και για πολλαπλές εισροές
- Για παράδειγμα, η  $f(x_1, x_2)$  μετρά τη μέγιστη εκροή που μπορούμε να πετύχουμε με  $x_1$  και  $x_2$  μονάδες εισροών 1 και 2 αντίστοιχα
- Η **καμπύλη ισοπαραγωγής** είναι το σύνολο όλων των συνδυασμών εισροών 1 και 2 που είναι ακριβώς αρκετές για να οδηγήσουν στην παραγωγή μιας ορισμένης ποσότητας εκροής
- Αντιστοιχούν στις καμπύλες αδιαφορίας της θεωρίας καταναλωτή, με τη σημαντική διαφορά ότι δεν έχουν τις αυθαίρετες ετικέτες χρησιμότητας

# Παραδείγματα τεχνολογίας



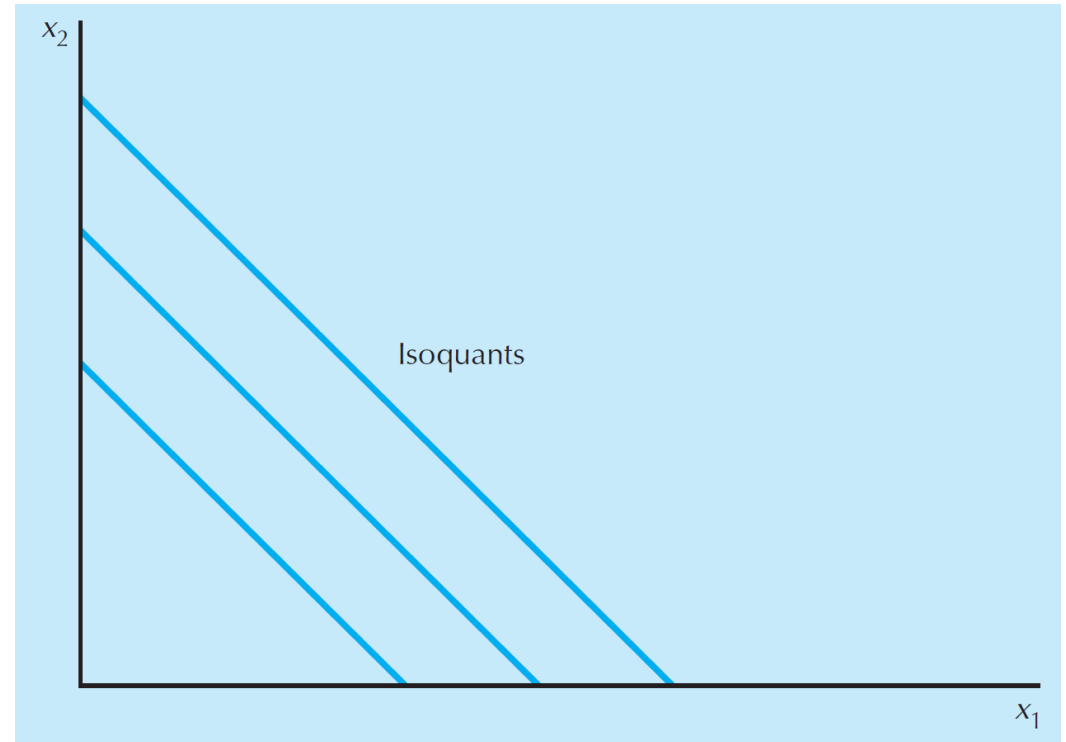
# Σταθερές αναλογίες

- Το ανάλογο των τέλειων συμπληρωμάτων στη θεωρία καταναλωτή
- Παράδειγμα: έστω ότι παράγουμε τρύπες στο έδαφος, και για την παραγωγή χρειάζεται ένας εργάτης για κάθε φτυάρι
- Πλεονάζοντες εργάτες ή φτυάρια είναι άχρηστα, άρα
$$f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$



# Τέλεια υποκατάστατα

- Ανάλογα των τέλειων υποκατάστατων στη θεωρία καταναλωτή
- Παράδειγμα: έστω ότι παράγουμε βιβλία και οι εισροές είναι μπλε ή κόκκινα μολύβια, άρα η συνάρτηση παραγωγής είναι
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$



# Cobb-Douglas

- Οι **συναρτήσεις παραγωγής Cobb-Douglas** έχουν τη μαθηματική μορφή

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$$

- Ανάλογη της συνάρτησης χρησιμότητας Cobb-Douglas στη θεωρία καταναλωτή

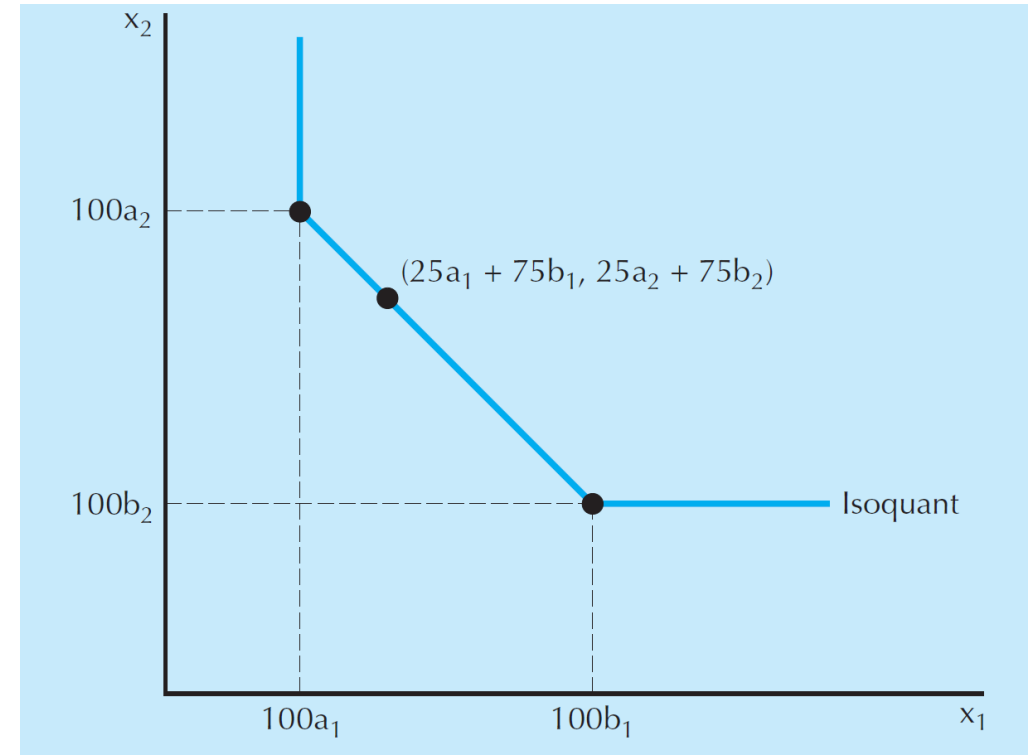
# Ιδιότητες της τεχνολογίας

# Υποθέσεις της τεχνολογίας

- Υποθέτουμε ότι οι τεχνολογίες είναι **μονοτονικές**: αν αυξήσουμε την ποσότητα τουλάχιστον μίας από τις εισροές, πρέπει να μπορούμε να παράγουμε τουλάχιστον όσο παράγαμε προηγουμένως
  - Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται και **δωρεάν απόρριψη**: αν η επιχείρηση μπορεί να ξεφορτωθεί εισροές χωρίς κόστος, τότε το να έχει επιπλέον εισροές δεν τη βλάπτει
- Η τεχνολογία είναι **κυρτή**: αν έχουμε δύο τρόπους  $(x_1, x_2)$  και  $(z_1, z_2)$  για να παράγουμε εκροή  $y$ , τότε ο σταθμισμένος μέσος όρος τους παράγει τουλάχιστον  $y$  μονάδες εκροής

# Κυρτότητα

- Έστω ότι έχουμε δύο **τεχνικές παραγωγής**:
  - Τεχνική A: παράγουμε μία μονάδα εκροής με  $a_1$  μονάδες της εισροής 1 και  $a_2$  μονάδες της εισροής 2
  - Τεχνική B: παράγουμε μία μονάδα εκροής με  $b_1$  μονάδες της εισροής 1 και  $b_2$  μονάδες της εισροής 2
- Και έστω ότι μπορούμε να κλιμακώσουμε αυθαίρετα τις τεχνικές παραγωγής, με  $(100a_1, 100a_2)$  και  $(100b_1, 100b_2)$  να οδηγούν και οι δύο σε 100 μονάδες εκροής
- Αν έχουμε ένα μείγμα 25%/75% των δύο συνδυασμών εισροών, δηλαδή  $25a_1 + 75b_1$  της εισροής 1 και  $25a_2 + 75b_2$  της εισροής 2, τότε παράγουμε 25 μονάδες εκροής με την τεχνική A και 75 μονάδες με την τεχνική B
- Άρα αν μπορούμε να κλιμακώνουμε αυθαίρετα τις τεχνικές παραγωγής, και η μία τεχνική δεν παρεμβάλλεται με την άλλη, τότε η υπόθεση της κυρτότητας είναι αρκετά λογική



# Οριακό προϊόν

# Οριακό προϊόν

- Το **οριακό προϊόν της εισροής 1** ορίζεται ως

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

- Ανάλογα ορίζεται και το οριακό προϊόν της εισροής 2
- Και συμβολίζονται ως  $MP_1(x_1, x_2)$  και  $MP_2(x_1, x_2)$  αντίστοιχα
- Ανάλογο της οριακής χρησιμότητας, αλλά σε αντίθεση με τη χρησιμότητα είναι απευθείας μετρήσιμο, και άρα η συγκεκριμένη του τιμή έχει σημασία



# Τεχνικός λόγος υποκατάστασης

# Τεχνικός λόγος υποκατάστασης

- Έστω ότι λειτουργούμε σε επίπεδο  $(x_1, x_2)$  και εξετάζουμε να παραχωρήσουμε μικρή ποσότητα της εισροής 1,  $\Delta x_1$ , και να αυξήσουμε την ποσότητα εισροής 2,  $\Delta x_2$ , με σκοπό να κρατήσουμε την εκροή σταθερή και ίση με  $y$
- Ο απαιτούμενος λόγος υποκατάστασης αντιστοιχεί στον **τεχνικό λόγο υποκατάστασης** και συμβολίζεται ως  $TRS(x_1, x_2)$
- Είναι η κλίση της καμπύλης ισοπαραγωγής
- Είναι το ανάλογο του οριακού λόγου υποκατάστασης της θεωρίας καταναλωτή
- Υπολογίζεται λύνοντας την ακόλουθη εξίσωση:

$$\Delta y = MP_1(x_1, x_2)\Delta x_1 + MP_2(x_1, x_2)\Delta x_2 = 0$$

- Επιλύοντας, έχουμε

$$TRS(x_1, x_2) = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)}$$

## Ερώτηση 19.4

- Ο τεχνικός λόγος υποκατάστασης μεταξύ συντελεστών  $x_2$  και  $x_1$  είναι  $-4$
- Αν επιθυμείς να παράγεις την ίδια ποσότητα εκροής αλλά μειώσεις τη χρήση του  $x_1$  κατά 3 μονάδες, πόσες περισσότερες μονάδες του  $x_2$  θα χρειαστείς;

# Απάντηση στην ερώτηση 19.4

- $4 \times 3 = 12$  μονάδες

# Φθίνον οριακό προϊόν

# Νόμος του φθίνοντος οριακού προϊόντος

- Έστω ότι έχουμε ορισμένη ποσότητα των εισροών 1 και 2, και αυξάνουμε την εισροή 1 κρατώντας την εισροή 2 σταθερή
- Λόγω μονοτονικότητας περιμένουμε ότι η εκροή θα αυξηθεί
- Αλλά ο **νόμος του φθίνοντος οριακού προϊόντος** λέει ότι ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η εκροή ελαττώνεται
- Για παράδειγμα
  - Ένας άντρας σε ένα στρέμμα γης παράγει 100 κιλά καλαμπόκι
  - Αν προσθέσουμε άλλον έναν άντρα ενδεχομένως να πετύχουμε 200 κιλά, άρα το οριακό προϊόν του επιπλέον εργάτη είναι 100
  - Αν συνεχίσουμε να προσθέτουμε εργάτες, ο καθένας ίσως παράγει επιπλέον, αλλά η αύξηση θα αρχίσει να μειώνεται
  - Μετά τον 5<sup>ο</sup> ή 6<sup>ο</sup> εργάτη, ίσως η επιπλέον παραγωγή να αρχίσει να πέφτει σε 90, 80, 70 κιλά καλαμποκιού
  - Μπορεί αν έχουμε εκατοντάδες εργάτες στον ίδιο χώρο ακόμα και να μειωθεί η παραγωγή καλαμποκιού

# Ερώτηση 19.5

- Σωστό ή λάθος: αν ο νόμος φθίνοντος οριακού προϊόντος δεν ίσχυε, η παγκόσμια προσφορά τροφής θα μπορούσε να καλλιεργηθεί σε μια γλάστρα

# Απάντηση στην ερώτηση 19.5

- Σωστό



# Φθίνων τεχνικός λόγος υποκατάστασης

# Φθίνων τεχνικός λόγος υποκατάστασης

- Ο φθίνων τεχνικός λόγος υποκατάστασης λέει ότι όταν αυξάνουμε την εισροή 1 και προσαρμόσουμε την εισροή 2 για να μείνουμε στην ίδια καμπύλη ισοπαραγωγής, ο ΤΛΥ μειώνεται
- Γραφικά,
  - Η κλίση της καμπύλης ισοπαραγωγής ελαττώνεται όσο αυξάνουμε το  $x_1$
  - Και αυξάνεται όσο αυξάνουμε το  $x_2$

# Σχέση φθίνοντος οριακού προϊόντος και φθίνοντος τεχνικού λόγου υποκατάστασης

- Οι υποθέσεις φθίνοντος οριακού προϊόντος και φθίνοντος ΤΛΥ σχετίζονται, αλλά δεν είναι το ίδιο
- Το φθίνον οριακό προϊόν περιγράφει πώς συμπεριφέρεται το οριακό προϊόν όταν αυξάνεται μια εισροή, κρατώντας την άλλη εισροή σταθερή
- Ο φθίνων ΤΛΥ περιγράφει πώς αλλάζει η κλίση της καμπύλης ισοπαραγωγής όταν αυξάνουμε τη μία εισροή και μειώνουμε την άλλη εισροή ώστε να μείνουμε στην ίδια καμπύλη ισοπαραγωγής

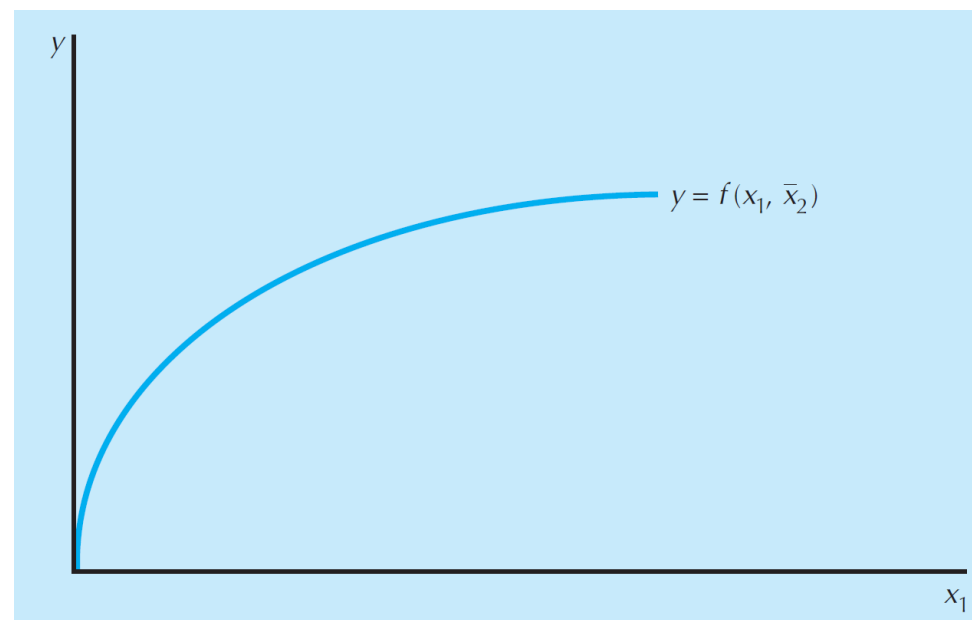
# Βραχυπρόθεσμος και μακροπρόθεσμος ορίζοντας

# Βραχυπρόθεσμος και μακροπρόθεσμος ορίζοντας

- Στο **βραχυπρόθεσμο ορίζοντα** ορισμένοι συντελεστές παραγωγής είναι σταθεροί
  - Στο παράδειγμα του αγρότη, ίσως η έκταση της γης είναι δεδομένη, ενώ το εργατικό δυναμικό μπορεί να μεταβληθεί
  - Άλλα παραδείγματα αμετάβλητων συντελεστών παραγωγής: μέγεθος εργοστασίου, αριθμός μηχανών, ...
- Στο **μακροπρόθεσμο ορίζοντα** όλοι οι συντελεστές παραγωγής μπορούν να μεταβληθούν με στόχο τη μεγιστοποίηση κέρδους

# Βραχυπρόθεσμη συνάρτηση παραγωγής

- Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ο συντελεστής παραγωγής 2 είναι σταθερός και ίσος με  $\bar{x}_2$  βραχυπρόθεσμα
- Η βραχυπρόθεσμη συνάρτηση παραγωγής είναι  $f(x_1, \bar{x}_2)$
- Το ότι η συνάρτηση γίνεται πιο επίπεδη όσο αυξάνεται το  $x_1$  αντιστοιχεί στην υπόθεση φθίνοντος οριακού προϊόντος



# Αποδόσεις κλίμακας

# Αποδόσεις κλίμακας

- Έχουμε **σταθερές αποδόσεις κλίμακας** όταν η αύξηση των εισροών κατά συντελεστή  $t$  οδηγεί σε αύξηση της εκροής κατά συντελεστή  $t$ :

$$tf(x_1, x_2) = f(tx_1, tx_2)$$

- Η πιο κοινή έκβαση: αν η επιχείρηση κάνει κάτι, διπλασιάζοντας όλες τις εισροές μπορεί να το κάνει πανομοιότυπα δύο φορές
- Παράδειγμα: παραγωγή επεξεργαστών από την Intel
- Έχουμε **αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας** όταν
$$f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2)$$

για όλα τα  $t > 1$

- Παράδειγμα: αγωγός πετρελαίου
  - Αν διπλασιάσουμε τη διάμετρο, χρησιμοποιούμε διπλάσια ποσότητα υλικών, αλλά η διατομή του αγωγού αυξάνεται κατά 4
- Έχουμε **φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας** όταν
$$f(tx_1, tx_2) < tf(x_1, x_2)$$

για όλα τα  $t > 1$



## Ερώτηση 19.3

- Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas δίνεται ως
$$f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$$
- Το είδος αποδόσεων κλίμακας αυτής της συνάρτησης εξαρτάται από το μέγεθος του  $a + b$
- Ποιες τιμές του  $a + b$  αντιστοιχούν σε διαφορετικών ειδών αποδόσεις κλίμακας;

# Απάντηση στην ερώτηση 19.3

- Αν  $a + b = 1$ , έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακας
- Αν  $a + b < 1$  έχουμε φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας
- Αν  $a + b > 1$  έχουμε αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας

# Ερώτηση 19.1

- Έστω η συνάρτηση παραγωγής  $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$
- Αντιστοιχεί σε σταθερές, αυξανόμενες, ή φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας;

# Απάντηση στην ερώτηση 19.1

- Αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας

## Ερώτηση 19.2

- Έστω η συνάρτηση παραγωγής  $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{3}}$
- Αντιστοιχεί σε σταθερές, αυξανόμενες, ή φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας;

# Απάντηση στην ερώτηση 19.2

- Φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας

## Ερώτηση 19.6

- Σε μια διαδικασία παραγωγής, είναι εφικτό να έχουμε φθίνον οριακό προϊόν ως προς ένα συντελεστή παραγωγής και αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας;

# Απάντηση στην ερώτηση 19.6

- Ναι
- Π.χ.:  $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$  έχει αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας και φθίνον οριακό προϊόν ως προς την εισροή 1



# Βιβλιογραφία

[1] Hal Varian, Μικροοικονομική: μια σύγχρονη προσέγγιση, 3<sup>η</sup> έκδοση, εκδόσεις Κριτική, 2015