ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 11

Διάλεξη: 4 Νοεμβρίου 2020

Προηγούμενα επεισόδια: Γραμμικές ΔΕs 2ης τάξης: $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$

Γενική λύση: $y(x)=y_0(x)+y_\mu(x)=\underbrace{C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)}_{\text{λύση ομογενούς}}+\underbrace{y_\mu(x)}_{\text{μερική λύση}}$

Lagrange: $y_2(x)=u(x)y_1(x) \quad u(x)=\int U(x)\,dx \quad U(x)=\frac{1}{y_1^2(x)}\exp\left[-\int p(x)dx\right]$

Γραμμικές ΔΕs 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές: $y''+py'+qy=r(x)$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2+p\lambda+q=0$ λύσεις λ_1,λ_2

1. $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$ $\quad y_1(x)=e^{\lambda_1 x} \quad y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$

2. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda \quad y_1(x)=e^{\lambda x} \quad y_2(x)=xe^{\lambda x}$

3. $\lambda_{1,2}=\phi\pm i\omega \quad y_1(x)=e^{\phi x}\cos(\omega x) \quad y_2(x)=e^{\phi x}\sin(\omega x)$

- Εύρεση $y_\mu(x)$ από πίνακα (απροσδιόριστοι συντελεστές)

$r(x)$	$Ke^{\gamma x}$	Kx^n	$K\cos(\omega x)$ ή $K\sin(\omega x)$	$Ke^{ax}\cos(\omega x)$ ή $Ke^{ax}\sin(\omega x)$
$y_\mu(x)$	$Ce^{\gamma x}$	$a_n x^n+\dots+a_0$	$A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$	$e^{ax}(A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x))$

- Κανόνας αθροίσματος: Αν $r(x)$ άθροισμα $\rightarrow$ $y_\mu(x)$ αντίστοιχο άθροισμα
- Αν $y_\mu(x)=y_2(x)$ δοκίμασε $xy_\mu(x)$. Διπλή ρίζα δοκίμασε $x^2y_\mu(x)$

Παράδειγμα 1: Λύστε την $y''+4y=8x^2$ $\quad y(0)=-1 \quad y'(0)=2$

Βήμα 1: Λύση της ομογενούς: $y''+4y=0$ ✓

Χαρ. εξίσ: $\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda^2=-4 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$

$$\boxed{y_0(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)}$$

Ερώτηση. Να χρησιμοποιήσω τις συνθήκες. ΟΧΙ!

Βήμα 2 Εύρεση $y_\mu(x)$. Δοκιμή: $y_\mu(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ ✓

$y_\mu'(x)=2a_2x+a_1 \qquad y_\mu''(x)=2a_2$

Αντικατάσταση: $2a_2+4a_2x^2+4a_1x+4a_0=8x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4a_2-8)x^2+4a_1x+(2a_2+4a_0)=0 \quad \forall x \Rightarrow$

$4a_2-8=0 \to a_2=2$

$4a_1=0 \to a_1=0$

$2a_2+4a_0=0 \to a_0=-1$

$$\boxed{y_\mu(x)=2x^2-1}$$

Βήμα 3: $y(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+2x^2-1$

Βήμα 4: Εφαρμογή συνθηκών $y(0)=-1 \quad y'(0)=2$

$$y(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+2x^2-1$$

$y(0)=-1 \Rightarrow C_1-1=-1 \Rightarrow C_1=0 \qquad y(x)=C_2\sin(2x)+2x^2-1$

$y'(x)=2C_2\cos(2x)+4x \qquad y'(0)=2 \Rightarrow 2C_2=2 \Rightarrow C_2=1$

$$\boxed{y(x)=\sin(2x)+2x^2-1}$$

Παράδειγμα 2: Γενική λύση της $y''-3y'+2y=e^x$

Βήμα 1: Λύση ομογενούς $y''-3y'+2y=0$

Χαρ. εξίσωση: $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1=2 \quad \lambda_2=1$ ✓

$$\boxed{y_0(x)=C_1e^{2x}+C_2e^x}$$

Βήμα 2: Εύρεση $y_\mu(x)$. Δοκιμή $y_\mu(x)=Ce^x$

Πρόβλημα Το $y_\mu(x)$ είναι λύση της ομογενούς $=y_2(x)$

Κανόνας 3 $\rightarrow$ $y_\mu(x)=Cxe^x$ $\quad y_\mu'=Ce^x+Cxe^x$.

$$y_\mu''=Ce^x+Ce^x+Cxe^x=2Ce^x+Cxe^x$$

$$2Ce^x+\cancel{Cxe^x}-3Ce^x\cancel{-3Cxe^x}+\cancel{2Cxe^x}=e^x\Rightarrow -Ce^x=e^x\Rightarrow C=-1$$

$$\boxed{y_\mu(x)=-xe^x}$$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} - x e^{x}}$$

Ερώτηση: $y'' - 3y' + 2y - 4 = e^x \rightarrow y'' - 3y' + 2y = e^x + 4$

Λύση ομογενούς ίδια.

Δοκιμή: $y_\mu(x) = \underline{C x e^x} + a_0 \longrightarrow y_\mu(x) = -x e^x + 2$

4.2 Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων (για το $y_\mu(x)$)

Εφαρμόζεται σε ΟΛΕΣ τις γραμμικές 2ης τάξης (και σε σταθερούς συντελεστές). Ιδέα του Lagrange.

Σκέφτηκε: $\boxed{y_\mu(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)}$ όπου y_1, y_2 οι λύσεις της ομογενούς

Απέδειξε:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)\, r(x)}{y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)}\, dx \\ u_2(x) &= +\int \frac{y_1(x)\, r(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}\, dx \end{aligned}}$$

Ορίζουσα του Wronski: $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x) r(x)}{W(x)}\,dx \qquad u_2(x) = +\int \frac{y_1(x) r(x)}{W(x)}\,dx$$

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

Joseph Höene ~1800

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 3
4 Νοεμβρίου 2020

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(α) (8 μονάδες) Βρείτε την γενική λύση της:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = x + e^x$$

(β) (2 μονάδες) Βρείτε τις λύσεις που ικανοποιούν την συνθήκη y(0)=0.