ΘΕΩΡΗΜΑ LIOUVILLE

Θεώρημα 1 (Liouville) Έστω f ακέραια συνάρτηση, δηλ. f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και φραγμένη, δηλ. $\exists M>0$ ώστε

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, f σταθερή.

Απόδειξη: Έστω $n \geq 1$, $R>0$,

$$\gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Από ολοκλ. τύπους Cauchy για παραγώγους παίρνουμε

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz.$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$, $\left| \dfrac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \dfrac{M}{R^{n+1}}$

$$\overset{(ML\text{-ανισ.})}{\Longrightarrow} \quad |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi R \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n! M}{R^n}.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall R>0$ κ' $\dfrac{n! M}{R^n} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$.

$$\Longrightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \geq 1$$

$$\overset{\text{Θ. Taylor}}{\Longrightarrow} \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$= f(0). \quad \boxtimes$$

<u>Σχόλιο:</u> Δεν υπάρχει ανάλογο του Θ. Liouville για διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Π.χ.

$$f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

αλλά f μη σταθερή.

<u>Ασκήσεις:</u>

(1) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια ώστε η $u = \operatorname{Re} f$ να είναι φραγμένη άνω. Τότε, f σταθερή.

<u>Λύση:</u> Έστω $M > 0$ ώστε

$$\operatorname{Re} f(z) \leq M,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Θέτω $g = e^f$. Τότε, g ακέραια και

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |g(z)| \leq e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^M$$

$$\xrightarrow{\text{(Θ. Liouville)}} g = \text{σταθερά}$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C},\ 0 = g'(z) = f'(z) e^{f(z)} \Rightarrow f'(z) = 0$$

$$\Rightarrow f = \text{σταθερή}.$$

(2) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια μη σταθερή και $a \in \mathbb{C}$. Τότε, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists z \in \mathbb{C} \mid |f(z) - a| < \varepsilon$.

<u>Λύση:</u> Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει. Τότε,

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C},\ |f(z) - a| \geq \varepsilon.$$

Θέτουμε

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, g ακέραια και $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow g = \text{σταθερά} \Rightarrow \dots f = \text{σταθερά}.$$

(3) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια ώστε

$$f(z) \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \text{ και } \lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \ell > 0.$$

Να δ.ο. f σταθερή.

<u>Λύση:</u> $\exists R > 0 \,|\, \forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| > R$, ισχύει

$$|f(z)| > \ell/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} < 2/\ell.$$

Θέτουμε $g = 1/f \Rightarrow g$ ακέραια.

Επειδή g <u>συνεχής</u> στο <u>κλειστό</u> κ' <u>φραγμένο</u> σύνολο $D[0,R] = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq R\}$, $\exists M > 0 \,|$

$$\forall |z| \leq R, \quad |g(z)| \leq M.$$

Τελικά, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|g(z)| \leq \max\{M, 2/\ell\}$$

$\overset{(\Theta.\ \text{Liouville})}{\Longrightarrow}$ $g = \text{σταθερή} \Rightarrow f = \text{σταθερή}.$