• Παραδείγματα στην ML- ανισότητα

(i) ΝΔΟ $\left|\int_\gamma e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z}\,dz\right| \le 2\pi\sqrt{e}$, όπου $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$\forall z = x+iy \in \gamma^*$

$\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z = (x-yi)y = xy - iy^2 \Rightarrow \left|e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z}\right| = e^{\mathrm{Re}(\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z)} = e^{xy} \le e^{1/2(x^2+y^2)} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

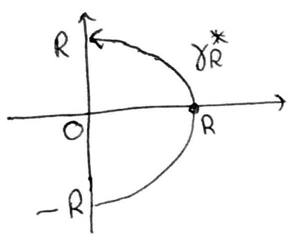
ML- ανισότητα

$\Rightarrow \left|\int_\gamma e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z}\,dz\right| \le M\|\gamma\| = \sqrt{e}\,2\pi$

(ii) ΝΔΟ $\left|\int_\gamma \frac{dz}{4+3z}\right| \le 2\pi$, όπου $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$\forall z\in\gamma^*$, $|4+3z| \ge |4|-|3z| = 4-3=1 \Rightarrow \left|\frac{1}{4+3z}\right| \le 1 = M \overset{ML}{\Longrightarrow} \left|\int_\gamma \frac{dz}{4+3z}\right| \le M\|\gamma\| = 1\cdot 2\pi = 2\pi$

(iii) ΝΔΟ $\lim_{R\to+\infty} \left|\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}\,z}{z^2}\,dz\right| = 0$, όπου $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $t\in[-\pi/2,\pi/2]$, $R>0$



Το γ_R^* δεν τέμνει τον πραγματικό άξονα $\Rightarrow$ η $z\mapsto \mathrm{Log}\,z$ είναι συνεχής στο γ_R^* $\Rightarrow$ το ολοκλήρωμα ορίζεται

Έστω $R>1$. Τότε $\forall z\in\gamma_R^*$

$|\mathrm{Log}\,z| = |\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z| \le \ln R + |\mathrm{Arg}\,z| \le \ln R + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{\mathrm{Log}\,z}{z^2}\right| \le \frac{\ln R + \frac{\pi}{2}}{R^2} \overset{ML}{\Longrightarrow} \left|\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}\,z}{z^2}\,dz\right| \le \pi R\,\frac{\ln R + \pi/2}{R^2} = \pi\,\frac{\ln R+\pi/2}{R} \to 0$

• Παράγουσα — Ολοκληρώματα ανεξάρτητο του δρόμου

Ορισμός 1: Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό και $f:U\to\mathbb{C}$. Μια ολόμορφη $F:U\to\mathbb{C}$ με $F'=f$ στο U λέγεται παράγουσα της f

π.χ.

→ Η e^{z^2} είναι παράγουσα της $2ze^{z^2}$ στο $\mathbb{C}$

→ Η $-\frac{1}{z}$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{z^2}$ στο $\mathbb{C}-\{0\}$

→ Η $\mathrm{Log}\,z$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{z}$ στο $\mathbb{C}-(-\infty,0]$

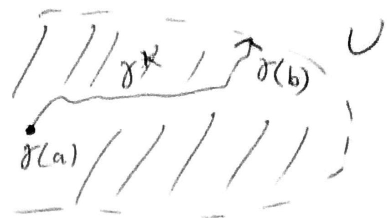
Πρόταση 1: Εάν U πεδίο και F,G παράγουσες της f στο U, τότε $G=F+c$, $c\in\mathbb{C}$

Απόδειξη (εύκολη)

Πρόταση 2: Έστω U ανοικτό και $f:U\to\mathbb{C}$ συνεχής με παράγουσα F. Τότε, $\forall$ τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma:[a,b]\to U$ ισχύει $\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Ειδικότερα, εάν γ κλειστή, ισχύει $\int_\gamma f = 0$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι γ λεία.



Τότε, $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$

$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

• Έστω γ τμηματικά λεία $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k$, όπου γ_k $1 \le k \le n$ διαδοχικές λείες: $[a,b] \to \mathbb{C}$

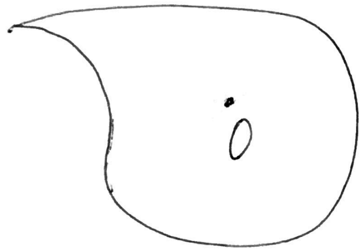
τότε, $\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f = \sum_{k=1}^{n} \left[F(\gamma_k(b)) - F(\gamma_k(a)) \right]$

$\int_\gamma f = F(\gamma_1(b)) - F(\gamma_1(a)) + \sum_{k=1}^{n} \left[F(\gamma_k(b)) - F(\gamma_k(a)) \right] = F(\gamma_1(b)) - F(\gamma_1(a)) +$

$+ \sum_{k=2}^{n} \left[F(\gamma_k(b)) - F(\gamma_k(a)) \right]$ •

Παραδείγματα:

(i) Εάν γ τμηματικά λεία κλειστή με $0 \in \text{int}\,\gamma^*$, $\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = ?$



Η $\frac{1}{z^2}$ έχει παράγουσα την $-\frac{1}{z}$ στο $\mathbb{C} - \{0\} =$ ανοικτό και $\gamma^* \subset \mathbb{C} - \{0\} \Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0$

(ii) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $0 \in U$. ΝΔΟ η $\frac{1}{z}$ δεν έχει παράγουσα στο U

$\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0 \Rightarrow$ η $\frac{1}{z}$ δεν έχει παράγουσα στο U

(iii) $\int_\gamma \frac{Log^3 z}{z} dz = ?$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in (0, \pi/2)$

$\gamma^* \subset U = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ και η $z \mapsto \frac{1}{4} Log^4 z$ είναι ολόμορφη στο U με παράγωγο $\frac{Log^3 z}{z} \Rightarrow \int_\gamma \frac{Log^3 z}{z} dz = \frac{1}{4}\left[Log^4(\gamma(\pi/2)) - Log^4(\gamma(a)) \right] = \frac{1}{4}\left(Log^4 i - \cancel{Log^4 1} \right) =$

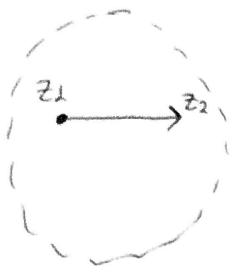
$= \frac{1}{4}\left[\ln|i| + i\,Arg(i) \right]^4 = \frac{1}{4}\left(i\frac{\pi}{2} \right)^4 = \frac{\pi^4}{64}$

(iv) Έστω f ολόμορφη στον $D = \{ z \in \mathbb{C}$

$|f'(z)| \le M, \ \forall z \in D$ ΝΔΟ $\forall z_1, z_2 \in D$

$|f(z_1) - f(z_2)| \le M |z_1 - z_2|$

Έστω $z_1, z_2 \in D \Rightarrow [z_1, z_2] \subset D$



$\Rightarrow \int_{[z_1,z_2]} f'(z)\, dz = f(z_2) - f(z_1)$

$$\Rightarrow |f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{[z_1,z_2]} f'(z) dz \right| \le M \, \| ([z_1, z_2]) \| = M |z_1 - z_2|$$

• Σχέση μιγαδικού ολοκληρώματος με επικαμπύλιο

Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ λεία καμπύλη με $\gamma(t) = x'(t) + i y'(t) = (x'(t), y'(t))$

και $f = u + iv : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_a^b [u(\gamma(t)) + i v(\gamma(t))][x'(t) + i y'(t)]\, dt =$$

$$= \int_a^b ([u(\gamma(t))\, x'(t) - v(\gamma(t))\, y'(t)]\, dt + i \int_a^b [u(\gamma(t))\, y'(t) + v(\gamma(t)) x'(t)$$

$$= \int_a^b (u(\gamma(t)) - v(\gamma(t))) \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\gamma'(t)}\, dt + i \int_a^b (v(\gamma(t)) u(\gamma(t))) \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\gamma'(t)}$$

$$= \underbrace{\int_\gamma (u\,dx - v\,dy)}_{\text{επικαμπύλιο στον } R^2} + i \underbrace{\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)}_{\text{επικαμπύλιο στον } R^2}$$