Δυναμικός Προγραμματισμός:

Βασική ιδέα:

1. Υποπροβλήματα
2. Διάταξη τα υποπροβλήματα
3. Σύνδεσε τα υποπροβλήματα

Η λύση σε προηγούμενα υποπροβλήματα δίνει την λύση σε επόμενα.

Αλυσιδωτός Πολ/σμός Πινάκων :

Είσοδος: Οι διαστάσεις m_i, $i=1,\dots,n+1$ των n-πινάκων

Έξοδος: Το ελάχιστο # πολ/σμών στοιχείων

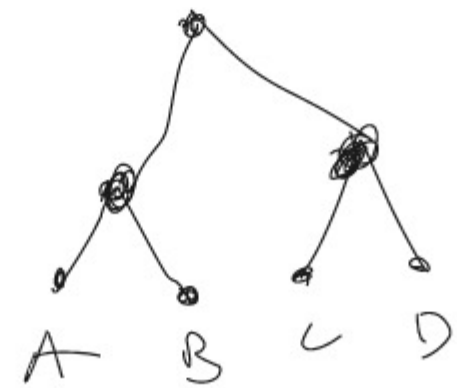
```
for i = 1 to n
    c(i,i) = 0
for s = 1 to n-1          (s το μέγεθος του υποπροβλήματος)
    for i = 1 to n-s
        j = i+s
        c(i,j) = min { c(i,k) + c(k+1,j) + m_i · m_{k+1} · m_{j+1} | i ≤ k ≤ j }
return c(1,n)
```

Χρόνος: $O(n^3)$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \cdots \times A_i \times \cdots \times A_j \times \cdots A_n$$

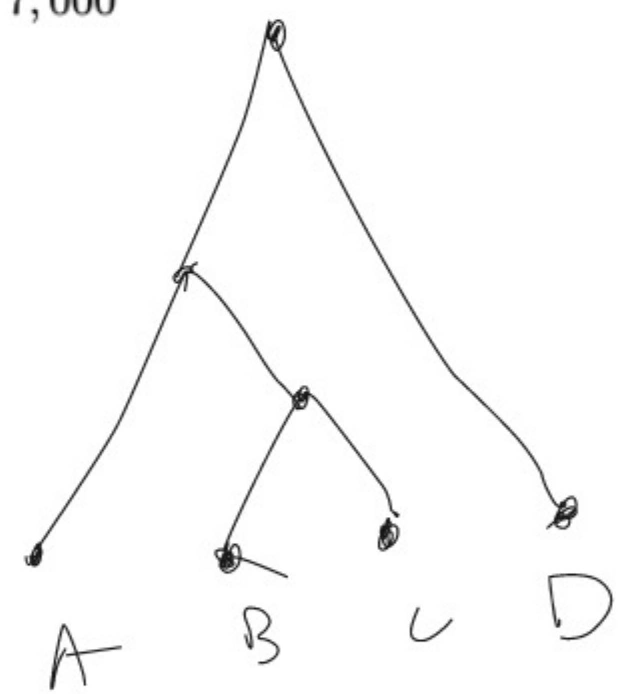
$$A \times B \times C \times D$$

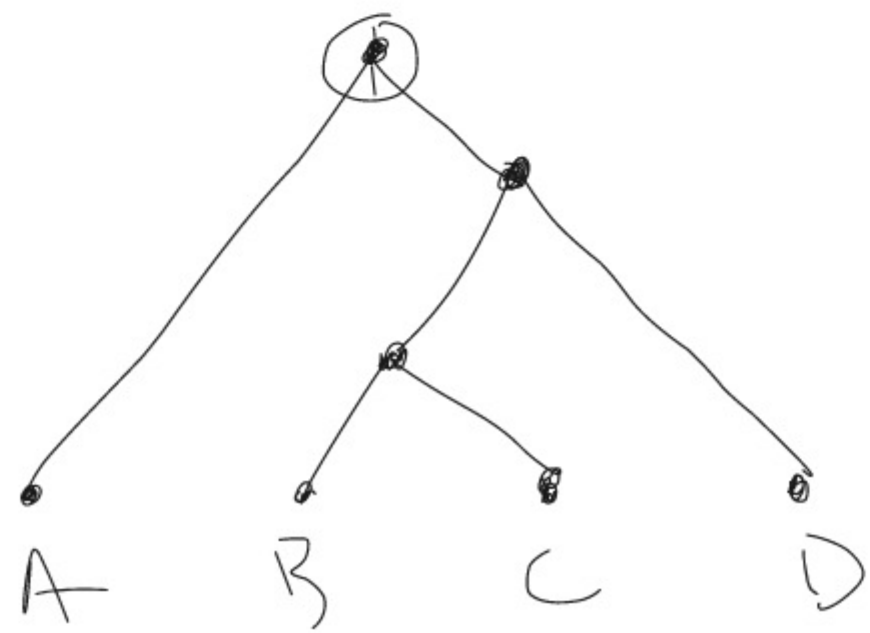
50×20 $\quad 20 \times 1$ $\quad 1 \times 20$ $\quad 10 \times 100$



Parenthesization	Cost computation	Cost
$A \times ((B \times C) \times D)$	$20 \cdot 1 \cdot 10 + 20 \cdot 10 \cdot 100 + 50 \cdot 20 \cdot 100$	$120,200$
$(A \times (B \times C)) \times D$	$20 \cdot 1 \cdot 10 + 50 \cdot 20 \cdot 10 + 50 \cdot 10 \cdot 100$	$60,200$
$(A \times B) \times (C \times D)$	$50 \cdot 20 \cdot 1 + 1 \cdot 10 \cdot 100 + 50 \cdot 1 \cdot 100$	$7,000$

$$m \times n \cdot n \times p \rightsquigarrow O(m \cdot n \cdot p)$$





$C(i,j) =$ מינימום # הכפלות של $A_i \times \cdots \times A_j$

נמצא ערך של $C(1,n)$

$$\begin{cases} C(i,i) = 0 \\ C(i,j) = \min\limits_{i \le k \le j} \left\{ C(i,k) + C(k+1,j) + m_i \cdot m_{k+1} \cdot m_{j+1} \right\} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} A_1 \times \cdots\cdots - & \times A_i \times & --- \times A_k & \times A_{k+1} \times & \cdots \times A_j \times - \times A_n \\ m_1 \times m_2 & m_i \times m_{i+1} & m_k \times m_{k+1} & m_{k+1} \times m_{k+2} & \\ & & & & m_j \times m_{j+1} \\ & m_i \times m_{k+1} & & m_{k+1} \times m_{j+1} & \end{array} \right)$$

Συντομότερες αξιόπιστες διαδρομές

Είσοδος: $G=(V,E)$, $\ell : E \to \mathbb{N}$, $s \in V$, $k \in \mathbb{N}$

Έξοδος: Μήκος συντομότερης διαδρομής από την s προς κάθε κορυφή $v \in V$, με $\leq k$ ακμές

for every $v \in V$

  $dist(v,0) = \infty$

$dist(s,0) = 0$

for $i=1$ to k

  for every $v \in V$

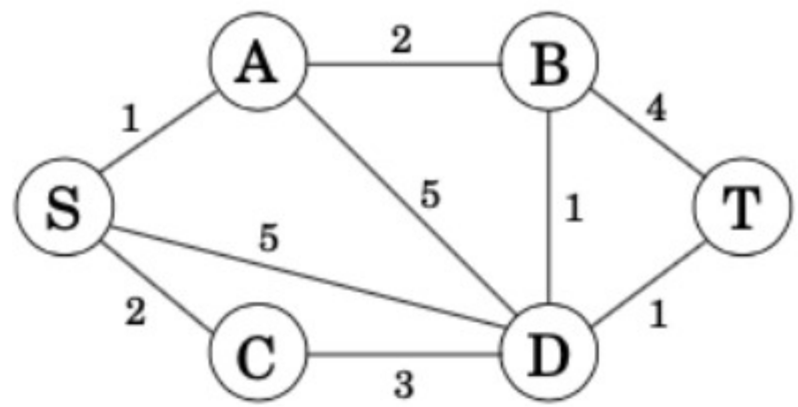
    $dist(v,i) = \min\left(\{dist(u,i-1) + \ell(u,v) \mid (u,v) \in E\} \cup \{dist(v,i-1)\}\right)$

return $dist(v,k)$ for every $v \in V$.

Χρόνος $O(k \cdot n \cdot m)$

$n = |V|$

$m = |E|$



S A B D T ~> 5

S C D T ~> 6

i - ακμές

$(i-1)$ - ακμές

dist$(u, i-1)$

dist(v, i) = απόσταση της $v \in V$ από την S χρησιμοποιώντας i-ακμές

$$\mathrm{dist}(T, i) = \min \left\{ \mathrm{dist}(u, i-1) + \ell(u, T) \;\middle|\; (u, T) \in E \right\} \cup \left\{ \mathrm{dist}(T, i-1) \right\}$$

$$\mathrm{dist}(v, 0) = \begin{cases} \infty , & v \neq s \\ 0 , & \text{altrim.} \end{cases}$$

Παγκόσμιες συντομότερες διαδρομές:

Floyd - Warshall:

Είσοδος: $G=(V,E)$, $\ell: E \to \mathbb{N}$ (έστω $V=\{1,2,\dots,n\}$)

Έξοδος: Μήκος συντομότερων διαδρομών μεταξύ κάθε ζεύγους $(u,v) \in V^2$

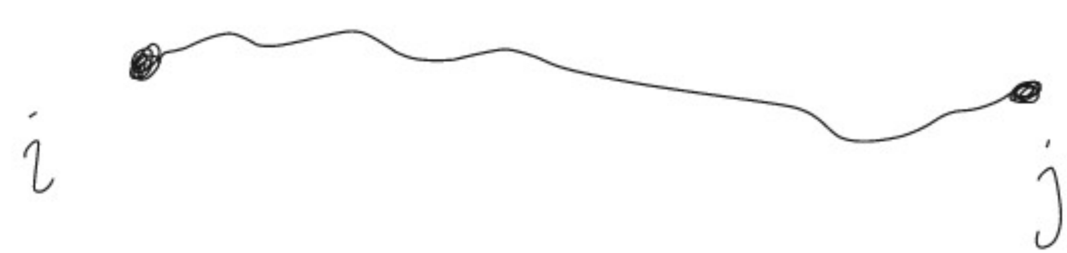
```
for i=1 to n
    for j=1 to n
        dist(i,j,0) = ∞

for every (i,j) ∈ E
    dist(i,j,0) = ℓ(i,j)

for k=1 to n
    for i=1 to n
        for j=1 to n
            dist(i,j,k) = min{ dist(i,k,k-1) + dist(k,j,k-1), dist(i,j,k-1) }

return dist(i,j,n) for every (i,j) ∈ V²
```

Χρόνος $O(n^3)$

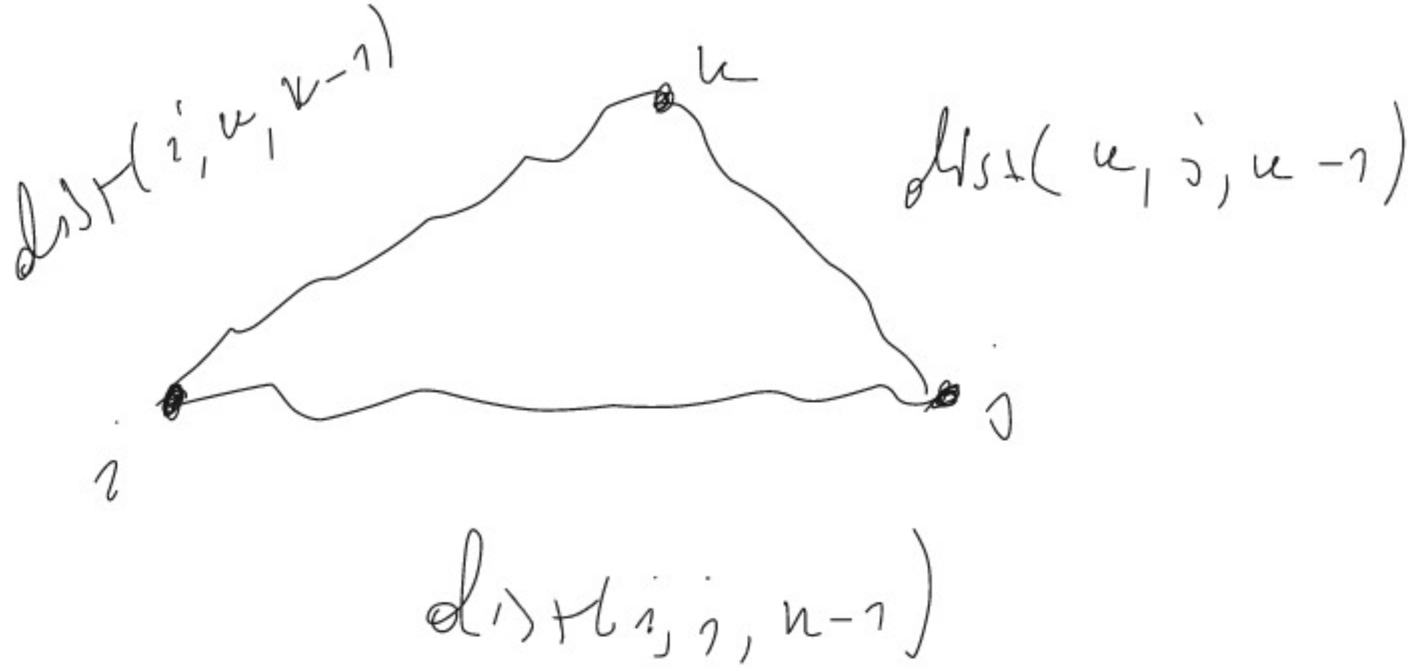
$O(n^2 \cdot m)$ $\quad (m = O(n^2))$

$O(n^4)$

$G = (V, E)$, $\quad V = \{1, 2, \dots, n\}$



$dist(i,j,k)$ = μήκος συντομότερης διαδρομής από την i στην j με κορυφές εκ των $1, 2, \dots, k$



$$dist(i,j,k) = \min \left\{ dist(i,j,k-1),\ dist(i,k,k-1) + dist(k,j,k-1) \right\}$$

$$dist(i,j,0) = \infty$$