Πέμπτη, 23/03/2023

Παρατηρησιμότητα

$u \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow y$ $\qquad \dot{x} = Ax + Bu \; , \; x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y = Cx + Du$

Παρατηρήσιμο ανν μετρώντας u, y στο $[0,t]$ μπορώ να υπολογίσω το x στο $[0,t]$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \; , \; y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds + Du(t)$$

$$Ce^{At}x(0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{γνωστό}}}{z(t)} \triangleq y(t) - Du - C\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

p εξισώσεις, n άγνωστοι, $p \le n$

(Σ) ή (C, A) είναι παρατηρήσιμο:

1) $W_o(t) = \int_0^t e^{A^Ts}C^TCe^{As}ds > 0 \quad \forall t > 0$ observability Grammian

$$\int_0^t e^{A^Ts}C^TCe^{As}x(0)ds = \int_0^t e^{A^Ts}C^T z(s)ds$$

$$x(0) = W_o^{-1}(t)\int_0^t e^{A^Ts}C^T z(s)ds$$

αν δεν ισχύει, δηλ. $\exists v \neq 0 \quad v^T W_o(t) v = 0 \Leftrightarrow \int_0^t \|Ce^{As}v\|^2 ds = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Ce^{As}v = 0 \quad \forall s \in [0,t]$.

Οπότε: $\quad Ce^{At}x(0) = z(t) \qquad \begin{matrix} x(0) = 0 & z(t) = 0 \\ x(0) = v & z(t) = 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow$ δεν μπορώ να διακρίνω τις 2 αρχικές συνθήκες

2) $$\mathcal{O}_{pn \times n} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

(A,B) ελέγξιμο ανν $\int_0^t e^{As} BB^T e^{A^T s} ds \succ 0$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{(A^T)s} (C^T)(C^T)^T e^{(A^T)^T s} ds$$

Gramian ελεγξιμότητας για το (A^T, C^T)

(C, A) παρατηρήσιμο $\Leftrightarrow$ (A^T, C^T) ελέγξιμο

$$[C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

3) Hautus test $\quad [A^T - \lambda I \quad C^T] = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}^T$

$$\mathrm{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}}_{np \times n} = n$$

(A^T, C^T) ελέγξιμο $\Rightarrow \exists K : A^T + C^T K = (A + \underbrace{K^T}_{L} C)^T$

4) $\exists L : \lambda_i (A + LC) = \lambda_{d,i} \quad \forall \ i = 1, \dots, n$, όπου $\lambda_{d,i}$ επιθ. ιδιοτιμή

5) $v^T A^T = \lambda v^T$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{Av = \lambda v}$

$v^T C^T \neq 0$ $\quad \boxed{Cv \neq 0}$

Παρατηρητής

Σύστημα με είσοδο τα u,y κ' έξοδο $\hat{x}(t)$: εκτίμηση του $x(t)$

$\dot{x} = Ax + Bu$

Luenbergerobserver : $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$

$e = \hat{x} - x$

$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = \cancel{A\hat{x}} + \cancel{Bu} - \cancel{Ax} - \cancel{Bu}$

$\dot{e} = Ae \Rightarrow e(t) = e^{At} e(0) \to 0$ αν A stable

$\hat{y} = C\hat{x} + Du$

$\dot{x} = Ax + Bu + L(\hat{y} - y)$

$\dot{e} = Ae + L(\underbrace{\hat{y} - y}_{C\hat{x} + Du - Cx - Du}) = (A + LC)e \to e(t) = e^{(A+LC)t} e(0) \to 0$ αν $Re(\lambda_i(A+LC)) < 0 \ \forall i$

Ανιχνεύσιμο (Detectable)

αν οι μη παρατηρήσιμες ιδιοτιμές του A είναι στο αρ. μιγ. ημιεπίπεδο

$\text{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+$ ή $\begin{matrix} Au_i = \lambda u_i \\ Cu_i \neq 0 \end{matrix}$ $\forall i$ με $\lambda_i \in \mathbb{C}_+$

$\dot{x} = Ax + By$

$y = Cx + Du$

Αν (A,B) (σταθεροποιήσιμο) ελέγξιμο κ'

(C,A) (ανιχνεύσιμο) παρατηρήσιμο

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases}$$

$u = K\hat{x}$

$$x_{en} = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_{en} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + BK\hat{x} \\ Ax + BK\hat{x} + LC\hat{x} - LCx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+BK+LC \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{x_{en}}$$

Αλλαγή

$$\bar{x}_{en} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_{en} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BKx+BKe \\ (A+LC)e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix} \bar{x}_{en}$$

αρχή διαχωρισμού (separation principle)

$y(t) = d_1 + d_2 \sin(t+\varphi)$

Να κατασκευαστεί παρατηρητής που να εκτιμά τα d_1, d_2.

$\dot{\xi} = A_\xi \xi$

$\dot{y} = d_2 \cos(t+\phi) \rightarrow \ddot{y} = -d_2 \sin(t+\phi) \Rightarrow \dddot{y} = -d_2 \cos(t+\phi) = -\dot{y}$

$$\xi = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}, \quad \dot{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_\xi} \xi$$

$$y_{\epsilon\xi} = \underbrace{[1 \;\; 0 \;\; 0]}_{C_\xi} \xi$$

$$\mathcal{O}_{\epsilon\xi} = \begin{bmatrix} C_\xi \\ C_\xi A_\xi \\ C_\xi A_\xi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (C_\xi, A_\xi) \\ \text{παρατηρήσιμο} \end{matrix}$$

$\dot{\hat{\xi}} = A_\xi \hat{\xi} + L(C_\xi \hat{\xi} - y)$

$\hat{d}_2 = \sqrt{\hat{\xi}_2^2 + \hat{\xi}_3^2} \qquad (\dot{y}^2 + \ddot{y}^2 = d_2^2)$

$\hat{d}_1 = y + \hat{\xi}_3$

β' τρόπος: $y(t) = d_1 + d_2 \sin(t+\phi) = d_1 + d_2 \cos\phi \sin t + d_2 \sin\phi \cos t$

$$y(t) = \underbrace{[d_1 \;\; d_2\cos\phi \;\; d_2 \sin\phi]}_{(\theta^*)^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}}_{\phi(t)} \qquad \text{(Gradient Dessent)}$$

$J = \frac{1}{2}(x - \hat{\theta}^T \phi(t))^2$

$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta}$

$\dot{\hat{\theta}} = \gamma (y - \hat{\theta}^T \phi) \phi$

$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \phi(s) \phi^T(s) ds \geq a_0 I$ (persistent excitation)

$$\phi\phi^T = \begin{bmatrix} 1 & \sin t & \cos t \\ \sin t & \sin^2 t & \sin t\cos t \\ \cos t & \sin t\cos t & \cos^2 t \end{bmatrix}, \quad \int_t^{t+2\pi} \phi\phi^T = \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$