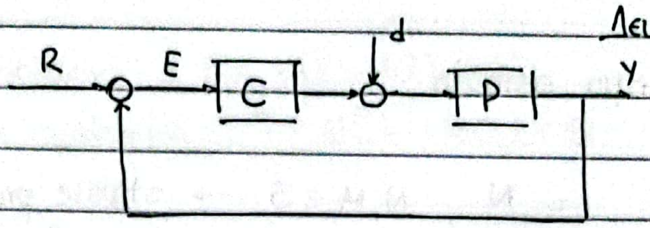
Δευτέρα, 08/05/2023

$C = \dfrac{Q}{1-PQ}$



$S(s) = \dfrac{E(s)}{R(s)} = \dfrac{1}{1+PC} = \dfrac{1}{1 + \frac{PQ}{P-Q}} = 1 - PQ$

$\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = \lim\limits_{s\to 0} sE(s) = \lim\limits_{s \to 0}\left(s\left(1 - PQ(s)\right) \cdot 1/s^2 \right) = 0$

$Q \in S$ • $Q(s) = \dfrac{\alpha}{s+1}$

$1 - PQ = 1 - \dfrac{\alpha}{(s+1)^2(s+2)} = \dfrac{(s+1)^2(s+2) - \alpha}{*}$

• $Q(s) = \dfrac{\alpha s + b}{s+1}$, $1 - PQ = 1 - \dfrac{\alpha s + b}{(s+1)^2(s+2)} = \dfrac{(s+1)^2(s+2) - (as+b)}{*}$

$(s^2+2s+1)(s+2) - (as+b) = s^3 + 4s^2 + (5-\alpha)s + (2-b) = 0$

$\Rightarrow b = 2,\ a = 5$, $C(s) = \dfrac{(5s+2)(s+1)(s+2)}{s^2(s+4)}$

Να απορρίπτω συχν. συχνότητες

$\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{P}{1+PC} = P(1-PQ)$

$1 - P(j\omega)Q(j\omega) = 0$

$Q(s) = \dfrac{\alpha s^3 + bs^2 + cs + d}{(s+1)^3}$, $1 - PQ = \dfrac{s^5 + 6s^4 + (14-\alpha)s^3 + (16-b)s^2 + (9-c)s + (2-d)}{*}$

$\Rightarrow \alpha, b, c, d = \ldots$, $C \to$ πόλος στο j αν θέλω να κόψω το $d = \sin\omega t$

Αν το σύστημα ασταθές

$P = \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{N}{M}$, $N, M \in S \rightarrow$ stable, prober, rational functions

↳ χωρίς κοινά μηδενικά για $Re\, s \geq 0$ ή $s = \infty$

$= \frac{\frac{1}{(s+2)^2}}{\frac{s-1}{s+2}}$ ασταθείς πόλοι $\rightarrow$ μηδενικά της M

$\lambda = \frac{1}{s+2}$, $n(\lambda) = \lambda^2$, $\frac{s-1}{s+2} = 1 - \frac{3}{s+2}$, $m(\lambda) = -3\lambda + 1$

$n(\lambda), m(\lambda)$ coprime

Αν N, M coprime, $\exists\, X, Y \in S$: $NX + MY = 1$

ex. $G(s) = \frac{1}{s-1}$, $N(s) = \frac{1}{(s+1)^k}$, $M(s) = \frac{s-1}{(s+1)^k}$, $k \leq 1$

Youla parametrization: $NX + MY = 1$

$$\left\{ \frac{X + MQ}{Y - NQ} : Q \in S \right\}$$

↳ internally stabilizing controller

Αν P stable, $X = 0$, $Y = 1$ $\rightarrow \left\{ \frac{Q}{1 - PQ} : Q \in S \right\}$

Έστω $C = N_c / M_c$, feedback system internally stable iff $(NN_c + MM_c)^{-1} \in S$

$$\left.\begin{aligned} N_c &= X + MQ \\ M_c &= Y - NQ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} X &= N_c - MQ \\ Y &= M_c + NQ \end{aligned}$$

$P = N/M \Rightarrow X, Y : NX + MY = 1$

$V = NN_c + MM_c = NX + NMQ + MY - MNQ = 1 \in S$

$Q = N_c V Y - X M_c V \Rightarrow NQ = NN_c VY - \underbrace{NX}_{(1 - MY)} M_c Y \Rightarrow$

$\Rightarrow NQ = (NN_c + MM_c) VY - M_c V = Y - M_c V$

Επίσης $N_c V = X + MQ$

Scanned with CamScanner

Συνάρτηση ευαισθησίας: $S = M(Y - NQ) \in S$

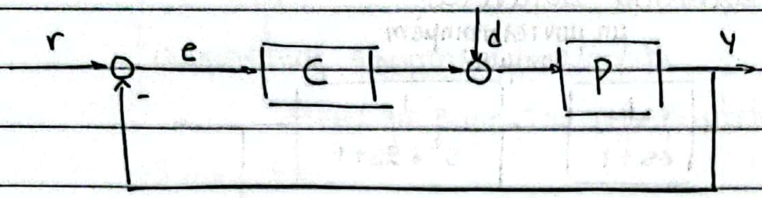
—" συμπλ. ευαισθησία: $T = N(X + MQ) \in S$

$$1 + PC = 1 + \frac{N}{M}\frac{X+MQ}{Y-NQ} = \frac{1}{M(Y-NQ)} \rightarrow S = \frac{1}{1+PC} = M(Y-NQ)$$

$T = 1 - S \Rightarrow \underline{T = N(X + MQ)}$

Πέμπτη, 11/05/2023

Απόδοση (performance)



Συνάρτηση ευαισθησίας: $(r \to e)$ $S = \dfrac{1}{1+PC}$

$(r \to y)$ $T = \dfrac{PC}{1+PC}$

$$\frac{dT}{dP} = \frac{C}{(1+PC)^2} = S \cdot \frac{T}{P} \Rightarrow S = \frac{dT/dP}{T/P}$$

$S \iff$ Απόδοση

$T \iff$ Stability

Θέλουμε $|S(j\omega)| < \epsilon \quad \forall \omega \in \Omega$, π.χ. $\Omega = [0, \omega_0]$

$\Rightarrow \|S(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega |S(j\omega)| < \epsilon$

$\downarrow$

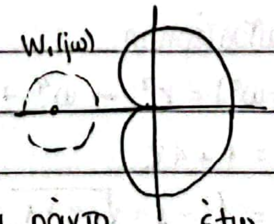
OVERKILL

Waiting function: $|W_1(j\omega)| = \begin{cases} 0, & \forall \omega > \omega_0 \\ 1/\epsilon, & \omega \in [0, \omega_0] \end{cases}$

$\|W_1 S\|_\infty < 1$

$$|W_1(j\omega) S(j\omega)| < 1 \Rightarrow \frac{|W_1(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} < 1 \Rightarrow |W_1(j\omega)| < |1+L(j\omega)|$$

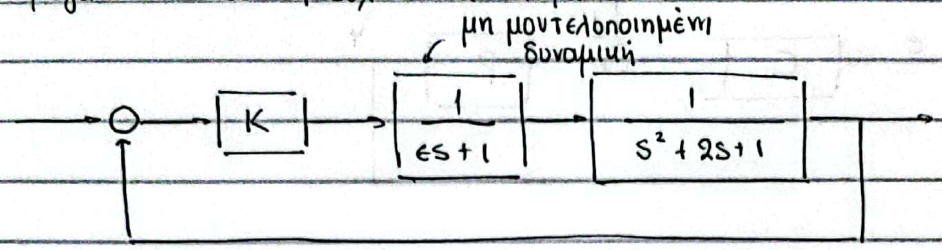
π.χ. $L = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)}$



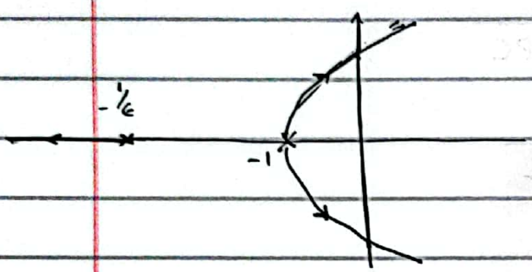
Το $L(j\omega)$ θα βρίσκεται πάντα έξω από δίσκο με ακτίνα $W_1(j\omega)$

Αβεβαιότητα

- μεγαλώνει όσο η συχνότητα αυξάνεται

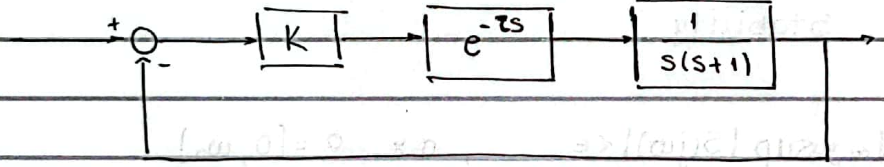


χαρ. εξίσωση $s^2+2s+1=0$ πάντα stable για $k>0$

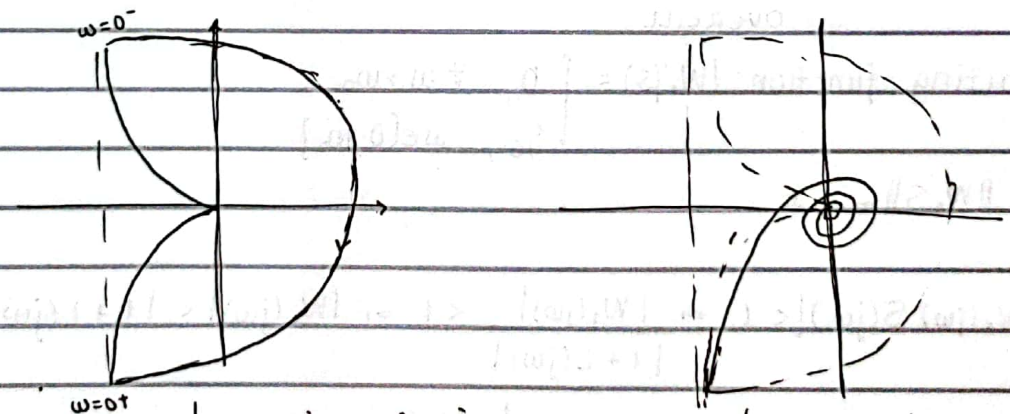


Για πολύ μεγάλα K μπορεί να διεγείρουμε μη μοντελοποιημένη δυναμική

χρονική καθυστέρηση, τ μικρό → αφαιρεί φάση ωτ



$$\frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{-j(1-j\omega)}{\omega(1+\omega^2)} = -\frac{1}{1+\omega^2} - \frac{j}{\omega(1+\omega^2)}$$



↳ χωρίς καθυστέρηση ↳ με καθυστέρηση

$$\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{K} \Rightarrow \omega^2(1+\omega^2) = K^2 \Rightarrow \omega^4 + \omega^2 - K = 0$$

$$\Delta = 1 + 4K$$

$$\omega^2 = \frac{-1+\sqrt{4K+1}}{2} \Rightarrow \omega = \left(\frac{-1+\sqrt{4K+1}}{2}\right)^{1/2}$$

Θέλουμε $\omega' \tau < \varphi_{περ} = \pi + \arg G(j\omega') = \pi - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega')$

$\Rightarrow \tau < \frac{1}{\omega'}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega')\right) = g(K)$ → φθίνουσα ως προς K που τείνει στο 0

Πολλαπλασιαστική διαταραχή.

$\tilde{P} = P(1+\Delta \cdot W_2)$

ονομαστική συνάρτηση μεταφοράς

fixed με βάση την αβεβαιότητα που θέλουμε να καλύψουμε

$\|\Delta\|_\infty \leq 1$

στο προηγούμενο παράδειγμα

$P' = e^{-TS} P(s) = [1 + \underbrace{(e^{-TS} - 1)}_{\Delta W}] P$

$|1 - e^{-TS}|^2 = (1 - \cos(\omega T))^2 + \sin^2(\omega T) = 2 - 2\cos(\omega T) = 2(1-\cos(\omega T))$

$= 4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

$\tilde{P} = \frac{1}{\epsilon s+1} P = \left(1 - \frac{\epsilon s}{\epsilon s+1}\right) P$

$W_2(s) = \frac{\epsilon_{max} s}{\epsilon_{max} s + 1}$

Robust Stability

$\mathcal{P} = \{(1+\Delta W_2)P \mid \|\Delta\|_\infty < 1\}$

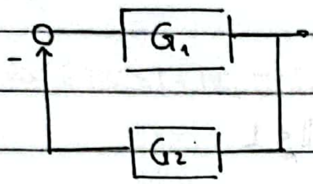
Thm: robust stability iff $\|W_2 T\|_\infty < 1$

Δευτέρα, 15/05/2023

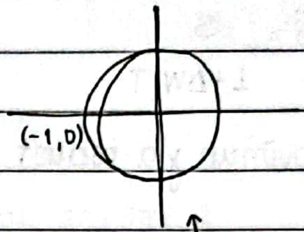
$\tilde{P} = P(1+\Delta W_2)$, $\|\Delta\|_\infty < 1$

Robust stability: $\|W_2 T\| < 1$

Small-gain theorem



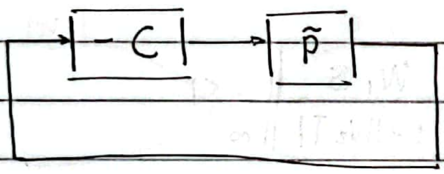
$\|G_1 G_2\|_\infty < 1$

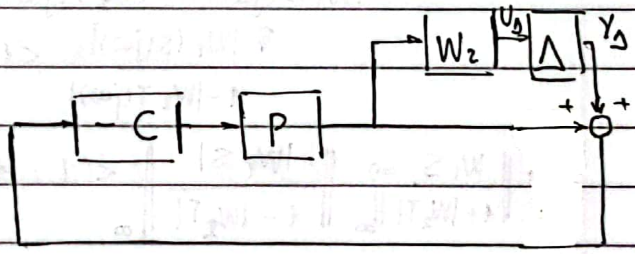


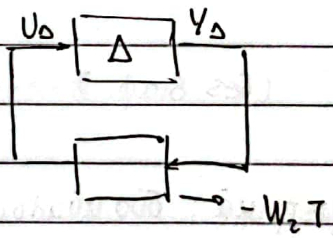
Έστω G_1, G_2 stable ΣΜ. Αν $\|G_1 G_2\|_\infty < 1$, τότε το κλ. βρόχου είναι stable.

το διάγραμμα Nyquist δεν βγαίνει έξω από το μον. κύκλο.

Από το small-gain theorem







$U_\Delta = W_2 Y_P \rightarrow U_\Delta = -W_2 T Y_\Delta$

$Y_P = -PC(Y_P + Y_\Delta) \rightarrow Y_P = -TY_\Delta$

$\|W_2 T \Delta\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \|W_2 T\|_\infty < 1$

Το αποτέλεσμα για το rob. stability μπορεί να προκύψει από το small gain theorem.

Scanned with CamScanner

Robust performance

$\|W_1 S\|_\infty < 1$, $\tilde{S} = \dfrac{1}{1 + \underbrace{PC}_{L}(1+\Delta W_c)} = \dfrac{1}{1 + L + \Delta W_2 L} = \dfrac{\overbrace{\left(\frac{1}{1+L}\right)}^{S}}{1 + \Delta W_2 \underbrace{\left(\frac{L}{1+L}\right)}_{T}}$

$\tilde{S} = \dfrac{S}{1 + \Delta W_2 T}$

συνθήκη για robust performance: $\|W_1 \tilde{S}\|_\infty < 1$

Robust Performance Theorem: $\| |W_1 S| + |W_2 T| \|_\infty < 1$.

↳ Robust stability & performance

Απόδ: ($\Leftarrow$) $\| |W_1 S| + |W_2 T| \|_\infty < 1$

$\Rightarrow |W_1 S(j\omega)| + |W_2 T(j\omega)| < 1$

$\Updownarrow \dfrac{|W_1 S(j\omega)|}{1 - |W_2 T(j\omega)|} < 1$

$\Rightarrow \left\| \dfrac{W_1 S}{1 + |W_2 T|} \right\|_\infty \leq \left\| \dfrac{W_1 S}{1 - |W_2 T|} \right\|_\infty < 1 \Rightarrow \left\| \dfrac{W_1 S}{1 + |W_2 T|} \right\|_\infty < 1$

($\Rightarrow$) (δες διαφ.)

Γεωμετρικά: δύο κύκλοι: ένας με κέντρο το $(-1, 0)$, $\rho_1 = |W_1|$

" $|L(j\omega)|$, $\rho_2 = |W_2 L|$

θα είναι disjoint.

Συμπεράσματα

nominal perform. cond. : $\|W_1 S\|_\infty < 1$
robust stability : $\|W_2 T\|_\infty < 1$

$\| \max\{|W_1 S|, |W_2 T|\} \|_\infty < 1$

Robust performance cond. : $\|W_2 T\|_\infty < 1$ & $\left\| \dfrac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_\infty < 1$

$\Rightarrow \| \, |W_1 S| + |W_2 T| \, \|_\infty < 1$

If nom. perf. + robust stab. with safety factor 2

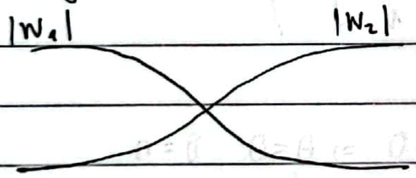
$\Rightarrow$ robust perf.

Περιορισμοί

- $S + T = 1$

  $|S(j\omega)|, |T(j\omega)|$ δεν μπορούν $< 1/2$ ταυτόχρονα

- αναγκαία συνθήκη $\min\{|W_1(j\omega)|, |W_2(j\omega)|\} < 1$



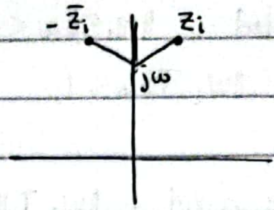
$|W_1(j\omega)| \downarrow$, $|W_2(j\omega)| \uparrow$

- If p pole in $Re\, s \geq 0$, z zero in $Re\, s \geq 0$

  $S(p) = 0$, $S(z) = 1$

  $T(p) = 1$, $T(z) = 0$

All pass & minimum-phase transfer functions



$$\frac{s-1}{s+2} = \frac{s-1}{s+1} \cdot \frac{s+1}{s+2}$$

$$\left| \frac{j\omega - z_i}{j\omega - (-\bar{z}_i)} \right| = 1$$

$|W_1(z)|$ πολύ μικρή } αν z κοντά στο p
$|W_2(p)|$ ——.

Cart-pendulum

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\vartheta \\ m\cos\vartheta & ml \end{bmatrix}}_{H(\theta)} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -ml\dot{\theta}^2\sin\vartheta \\ -mg\sin\vartheta \end{bmatrix}}_{-G(\theta,\dot{\theta})} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + d \begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = H^{-1}(\theta) \left(G(\theta,\dot{\theta}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ 1 \end{bmatrix} d \right)$$

σημ. ισορροπίας $\vartheta = 0$, $\dot{\theta} = 0$

$G(0,0) = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \ \theta = \pi$

$\theta = 0$: unstable, $\theta = \pi$: stable

Γραμμικοποίηση: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u + d$

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} = \frac{1}{m} d$$

$$D(s) = s^2 \left[Mls^2 - (M+m)g \right]$$