Στην περίπτωση που το μέσο έχει απώλειες (γ≠0), τα πεδία $\overline{\mathrm{E}}$ και $\overline{\mathrm{H}}$ ικανοποιούν γενικευμένες κυματικές εξισώσεις, των οποίων η εξαγωγή αφήνεται ως άσκηση.

Παρατήρηση

Οι κυματικές εξισώσεις (8) και (9) αποτελούν συνέπεια των εξισώσεων Maxwell, χωρίς να είναι κατ' ανάγκην ισοδύναμες προς αυτές [επειδή προέκυψαν με περαιτέρω παραγώγιση των βασικών εξισώσεων (1) και (2)]. Αυτό σημαίνει ότι, όταν οι (8) και (9) χρησιμοποιούνται για την επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, πρέπει να ελέγχεται κατά πόσο οι λύσεις τους ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell.

10. Εξισώσεις Maxwell για μονοχρωματικά πεδία [ανάλυση στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (ΗΜΚ)]

10.1 Γενικά

Θεωρούμε ***γραμμικό*** μέσο και υποθέτουμε ότι όλες οι πηγές του πεδίου είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, κυκλικής συχνότητας ω.

Λόγω της γραμμικότητας των εξισώσεων Maxwell και του μέσου, η μόνιμη απόκριση (δηλαδή το διεγειρόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, μετά την παρέλευση του μεταβατικού φαινομένου το οποίο αρχίζει τη στιγμή που επιβάλλονται οι πηγές) θα είναι επίσης ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, της ίδιας κυκλικής συχνότητας (ω).

Η παραπάνω υπόθεση για τη μορφή της χρονικής εξαρτήσεως των πηγών (και του πεδίου) γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, η λύση προβλημάτων στα οποία η χρονική εξάρτηση των πηγών είναι περισσότερο πολύπλοκη (όπως, π.χ., παλμοί) μπορεί να γίνει εύκολα αν, α) όλες οι διεγέρσεις αναπαρασταθούν μέσω σειρών (ή ολοκληρωμάτων) Fourier, β) βρεθεί η απόκριση κάθε μιας από τις αρμονικές των σειρών αυτών και γ) προστεθούν (υπερτεθούν) όλες οι επί μέρους αποκρίσεις.

Από μαθηματικής απόψεως, η εξαιρετική σπουδαιότητα των αρμονικών (ημιτονοειδών) διεγέρσεων έγκειται στο ότι οι χρονικές παράγωγοι, που υπάρχουν στις εξισώσεις Maxwell, δίνουν επίσης αρμονικές συναρτήσεις. Το γεγονός αυτό καθιστά δυνατή την απαλοιφή της χρονικής μεταβλητής t από το σύνολο των εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητικού προτύπου, στις οποίες πλέον εμπλέκονται μόνο οι χωρικές μεταβλητές. Το τίμημα για το σημαντικό αυτό πλεονέκτημα είναι ότι τα διάφορα μεγέθη που εμπλέκονται στις μετασχηματισμένες εξισώσεις είναι τώρα μιγαδικές ποσότητες.

10.2 Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί ημιτονοειδώς μεταβαλλομένων μεγεθών

Τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν κάθε ημιτονοειδές μέγεθος, της μορφής

$$\alpha(x,y,z;t) = A(x,y,z)\cos[\omega t + \varphi(x,y,z)], \tag{1}$$

είναι το πλάτος του Α, η κυκλική συχνότητα ω και η αρχική του φάση φ.

Από το άλλο μέρος, αν όλες οι πηγές ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που διεγείρεται σε γραμμικό μέσο έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω, τότε, όπως προαναφέραμε, όλα τα πεδιακά μεγέθη θα μεταβάλλονται επίσης με την κυκλική συχνότητα ω σε κάθε σημείο του πεδίου. Επειδή οι επιβαλλόμενες πηγές είναι δεδομένες, η κυκλική συχνότητα θεωρείται γνωστή.

Σε μια περίπτωση, όπως η παραπάνω, όπου διάφορες ημιτονοειδείς ποσότητες έχουν όλες την ίδια κυκλική συχνότητα ω, τα χαρακτηριστικά που τις διαστέλλουν μεταξύ τους είναι α) το πλάτος και β) η αρχική φάση καθεμιάς. Αυτό, διατυπωμένο αλλιώς, σημαίνει ότι γνώση των δυο μεγεθών Α(x,y,z) και φ(x,y,z) ισοδυναμεί με πλήρη προσδιορισμό του ημιτονοειδούς μεγέθους α(x,y,z;t).

Στην παρατήρηση αυτή θα στηριχθεί παρακάτω η εισαγωγή *του **παραστατικού μιγαδικού ή φασιθέτη (phasor)*** [σύμβολο $\dot{\alpha}(x,y,z)$], ο οποίος αναπαριστάνει το ημιτονοειδές μέγεθος α(x,y,z;t) και αποτελεί βασικό εργαλείο για την ανάλυση προβλημάτων στην ημιτονική μόνιμη κατάσταση. Η ανάγκη εισαγωγής του μιγαδικού αυτού μεγέθους προέρχεται από το γεγονός ότι η αναπαράσταση (1), παρ' ότι απλή και οικεία, δεν είναι πρόσφορη για το σκοπό αυτό.

Μέσω της σχέσεως

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{2}$$

προκύπτει ότι

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\{e^{j\theta}\}, \tag{3}$$

όπου με Re{.} συμβολίζουμε, ως συνήθως, το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού.

Με χρήση της (3), μια εναλλακτική έκφραση του μεγέθους α(x,y,z;t) στην (1) είναι η

$$\alpha(x,y,z;t) = \mathrm{Re}\{A(x,y,z)e^{j[\omega t+\varphi(x,y,z)]}\} = \mathrm{Re}\{[A(x,y,z)e^{j\varphi(x,y,z)}]e^{j\omega t}\}. \tag{4}$$

Η μιγαδική ποσότητα

$$\dot{\alpha}(x,y,z) = A(x,y,z)e^{j\varphi(x,y,z)}, \tag{5}$$

που υπάρχει στην τελευταία έκφραση της (4), εμπεριέχει και τα δυο μεγέθη (Α,φ) που χαρακτηρίζουν πλήρως το υπ' αναφορά ημιτονοειδές μέγεθος (η κυκλική συχνότητα ω θεωρείται γνωστή, όπως προαναφέραμε). Πρόκειται για χαρακτηριστική ποσότητα, που ονομάζεται ***παραστατικός μιγαδικός*** του ημιτονοειδούς μεγέθους α(x,y,z;t). Προφανώς υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των α και $\dot{\alpha}$. Έτσι, αν γνωρίζουμε το πλάτος A(x,y,z) και την φάση φ(x,y,z) του μιγαδικού $\dot{\alpha}$, προκύπτει αμέσως με αντικατάσταση στην (1) η έκφραση του ημιτονοειδούς μεγέθους α(x,y,z;t) και αντιστρόφως.

10.3 Ιδιότητες του τελεστή Re{$\dot{\alpha}e^{j\omega t}$}

Η χρησιμότητα της παραπάνω εναλλακτικής αναπαραστάσεως (4)-(5) μιας ημιτονοειδούς συναρτήσεως στηρίζεται στις εξής τρεις ιδιότητες του τελεστή Re{$\dot{\alpha}e^{j\omega t}$}:

Α. $\mathrm{Re}[c_1(\dot{\alpha}_1 e^{j\omega t}) + c_2(\dot{\alpha}_2 e^{j\omega t})] = c_1\,\mathrm{Re}(\dot{\alpha}_1 e^{j\omega t}) + c_2\,\mathrm{Re}(\dot{\alpha}_2 e^{j\omega t})$ $(c_1, c_2 \in R)$ (6)

Β. $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}(\dot{\alpha}_1 e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(j\omega\dot{\alpha}_1 e^{j\omega t})$ (7)

Γ. $\mathrm{Re}(\dot{\alpha}_1 e^{j\omega t}) \overset{\forall t}{=} \mathrm{Re}(\dot{\alpha}_2 e^{j\omega t}) \Leftrightarrow \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$ (8)

των οποίων η απόδειξη είναι απλή και αφήνεται ως άσκηση.

10.4 Μετασχηματισμός των πεδιακών εξισώσεων με χρήση φασιθετών

Υποθέτουμε ότι
α) όλες οι πηγές είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, κυκλικής συχνότητας ω.
β) Το μέσο είναι γραμμικό.

Υπό τις προυποθέσεις αυτές, όλες οι συνιστώσες του διεγειρομένου ΗΜ πεδίου θα είναι επίσης ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, κυκλικής συχνότητας ω.

Με χρήση παραστατικών μιγαδικών προκύπτουν οι αναπαραστάσεις

$$\rho(x,y,z;t) = \mathrm{Re}[\dot{\rho}(x,y,z)e^{j\omega t}],\ \bar{J}(x,y,z;t) = \mathrm{Re}[\dot{\bar{J}}(x,y,z)e^{j\omega t}], \tag{9}$$

των πηγών, και

$$\bar{G}(x,y,z;t) \equiv \hat{x}G_x + \hat{y}G_y + \hat{z}G_z = \mathrm{Re}\{[\hat{x}\dot{G}_x(x,y,z) + \hat{y}\dot{G}_y(x,y,z) + \hat{z}\dot{G}_z(x,y,z)]e^{j\omega t}\} =$$

$$= \mathrm{Re}\{\dot{\bar{G}}(x,y,z)e^{j\omega t}\} \tag{10}$$

$(\overline{\mathrm{G}} \equiv \overline{\mathrm{E}}, \overline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{H}}, \overline{\mathrm{B}})$

του πεδίου, οπου με $\dot{\overline{\mathrm{G}}}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα

$$\dot{\overline{\mathrm{G}}} = \hat{\mathrm{x}}\dot{\mathrm{G}}_{\mathrm{x}} + \hat{\mathrm{y}}\dot{\mathrm{G}}_{\mathrm{y}} + \hat{\mathrm{z}}\dot{\mathrm{G}}_{\mathrm{z}}. \tag{11}$$

Α. Εξισώσεις Maxwell

Με χρήση παραστατικών μιγαδικών ο νόμος Maxwell-Faraday γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\nabla \times \mathrm{Re}(\dot{\overline{E}} e^{j\omega t}) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}(\dot{\overline{B}} e^{j\omega t}) \overset{(7)}{\Rightarrow} \mathrm{Re}[\nabla \times \dot{\overline{E}} e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}(-j\omega \dot{\overline{B}} e^{j\omega t}) \overset{(8)}{\Rightarrow}$$

$$\nabla \times \dot{\overline{\mathrm{E}}} = -\mathrm{j}\omega\dot{\overline{\mathrm{B}}} \tag{12}$$

Ομοίως ο νόμος Maxwell-Ampere, οι νόμοι του Gauss και η εξίσωση συνεχείας παίρνουν την παρακάτω μορφή, αντίστοιχα, απαλλαγμένη από τη χρονική μεταβλητή t:

$$\nabla \times \dot{\overline{\mathrm{H}}} = \dot{\overline{\mathrm{J}}} + \mathrm{j}\omega\dot{\overline{\mathrm{D}}} \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \dot{\overline{\mathrm{D}}} = \dot{\rho} \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \dot{\overline{\mathrm{B}}} = 0 \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \dot{\overline{\mathrm{J}}} + \mathrm{j}\omega\dot{\rho} = 0. \tag{16}$$

Β. Οριακές συνθήκες

Με τον ίδιο όπως παραπάνω τρόπο προκύπτει ότι με χρήση παραστατικών μιγαδικών οι οριακές συνθήκες γράφονται υπό τη μορφή:

$$\hat{\mathrm{n}} \times (\dot{\overline{\mathrm{E}}}_2 - \dot{\overline{\mathrm{E}}}_1) = 0 \tag{17}$$

$$\hat{\mathrm{n}} \cdot (\dot{\overline{\mathrm{D}}}_2 - \dot{\overline{\mathrm{D}}}_1) = \dot{\sigma} \tag{18}$$

$$\hat{\mathrm{n}} \times (\dot{\overline{\mathrm{H}}}_2 - \dot{\overline{\mathrm{H}}}_1) = \dot{\overline{\mathrm{K}}} \tag{19}$$

$$\hat{\mathrm{n}} \cdot (\dot{\overline{\mathrm{B}}}_2 - \dot{\overline{\mathrm{B}}}_1) = 0 \tag{20}$$

$$\hat{\mathrm{n}} \cdot (\dot{\overline{\mathrm{J}}}_2 - \dot{\overline{\mathrm{J}}}_1) = -\mathrm{j}\omega\dot{\sigma} - \nabla_{\mathrm{S}} \cdot \dot{\overline{\mathrm{K}}}. \tag{21}$$

Στην εξίσωση (21), ο παράγων jω αντικατέστησε την παράγωγο $\partial / \partial \mathrm{t}$ που υπάρχει στην αντίστοιχη διατύπωση της οριακής συνθήκης στο πεδίο του χρόνου.

Παρατήρηση: Με βάση την εξίσωση (2) είναι προφανές ότι, κατ' αναλογία με την (3), μπορούμε, ισοδύναμα, να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή *Im(...)* −που εκφράζει το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού− αντί του τελεστή *Re(...)*, στις προηγούμενες σχέσεις.

Γ. Κυματικές εξισώσεις

Ομοίως, με χρήση παραστατικών μιγαδικών, οι κυματικές εξισώσεις (9.8) και (9.9) μετασχηματίζονται στις σχέσεις

$$\nabla^2\dot{\bar{E}} + k^2\dot{\bar{E}} = j\omega\mu\dot{\bar{J}} + \frac{\nabla\dot{\rho}}{\varepsilon} = j\omega\mu\dot{\bar{J}} - \frac{\nabla(\nabla\cdot\dot{\bar{J}})}{j\omega\varepsilon} \tag{22}$$

$$\nabla^2\dot{\bar{H}} + k^2\dot{\bar{H}} = -\nabla\times\dot{\bar{J}} \tag{23}$$

όπου

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

είναι ο κυματαριθμός του χώρου (ε,μ). Κατά το τελευταίο βήμα στην (22) χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση συνεχείας, $\nabla\cdot\dot{\bar{J}} + j\omega\dot{\rho} = 0$. Οι σχέσεις (22) και (23) είναι γνωστές ως ***διανυσματικές εξισώσεις του Helmholtz***.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Οι εξισώσεις Maxwell στην ΗΜΚ προκύπτουν από τις αντίστοιχες εκφράσεις των εξισώσεων αυτών στο πεδίο του χρόνου με την αντικατάσταση

$$\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$$

παντού, και την αντικατάσταση όλων των εμπλεκομένων μεγεθών με τους αντίστοιχους παραστατικούς μιγαδικούς.

10.5 Γενίκευση: Εξισώσεις Maxwell για αυθαίρετη χρονική μεταβολή- ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας

Όπως προαναφέρθηκε, το ιδιαίτερα σημαντικό πλεονέκτημα που μας προσπορίζει η χρήση των φασιθετών στην ανάλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων για αρμονικά πεδία είναι η δυνατότητα απαλοιφής της χρονικής μεταβλητής t από το σύνολο των εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητικού προτύπου. Τι γίνεται όμως όταν οι πηγές (άρα και τα πεδία) δεν έχουν αρμονική (δηλαδή ημιτονική) χρονική μεταβολή;

Ευτυχώς, με μια ελαφρά τροποποίηση, η παραπάνω ανάλυση γενικεύεται εύκολα ώστε να συμπεριλάβει περιπτώσεις αυθαίρετης χρονικής μεταβολής. Η βασική ιδέα είναι ιδιαίτερα απλή: Αναλύοντας τις πηγές κατά Fourier σε μια σειρά (ή ολοκλήρωμα) αρμονικών συναρτήσεων, βρίσκουμε τις αποκρίσεις (δηλαδή τα πεδία) που διεγείρονται από κάθε τέτοια αρμονική χωριστά. Τελικά με επαλληλία[9] μπορούμε να βρούμε την πλήρη απόκριση.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι το βασικό εργαλείο για την γενίκευση που επιχειρούμε είναι ο απλός - ως προς τη χρονική μεταβλητή t- μετασχηματισμός Fourier. Ο ευθύς (ως προς t) μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του ορίζονται, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

$$\dot{G}(\bar{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{r},t)e^{-j\omega t}dt \tag{24}$$

$$G(\bar{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\bar{r},\omega)e^{j\omega t}d\omega\,. \tag{25}$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα των μετασχηματισμών Fourier είναι η σχέση

[9] Υποτίθεται ότι το μέσο είναι γραμμικό ώστε να ισχύει η αρχή της επαλληλίας για τις αποκρίσεις.

$$\frac{\partial G(\bar{r},t)}{\partial t}=\int_{-\infty}^{\infty} j\omega\dot{G}(\bar{r},\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow F\{\frac{\partial G(\bar{r},t)}{\partial t}\}=j\omega\dot{G}(\bar{r},\omega) \tag{26}$$

που δίνει τον μετασχηματισμό της παραγώγου μιας συναρτήσεως.

Με χρήση μετασχηματισμών Fourier, η εξίσωση Maxwell-Faraday, $\nabla\times\overline{\mathrm{E}}=-\frac{\partial\overline{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}}$, γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\nabla\times\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\overline{\mathrm{E}}}(\bar{\mathrm{r}},\omega)e^{j\omega t}d\omega=-\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\overline{\mathrm{B}}}(\bar{\mathrm{r}},\omega)e^{j\omega t}d\omega \overset{(26)}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty}\nabla\times\dot{\overline{\mathrm{E}}}(\bar{\mathrm{r}},\omega)e^{j\omega t}d\omega=-\int_{-\infty}^{\infty}j\omega\dot{\overline{\mathrm{B}}}(\bar{\mathrm{r}},\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla\times\dot{\overline{\mathrm{E}}}(\bar{\mathrm{r}},\omega)+j\omega\dot{\overline{\mathrm{B}}}(\bar{\mathrm{r}},\omega)\right]e^{j\omega t}d\omega=0\,. \tag{27}$$

Αν ο μετασχηματισμός Fourier μιας συναρτήσεως είναι μηδενικός, τότε και η ίδια η συνάρτηση πρέπει να είναι μηδενική. Επομένως, από την (27) προκύπτει η σχέση

$$\nabla\times\dot{\overline{\mathrm{E}}}+j\omega\dot{\overline{\mathrm{B}}}=0.$$

Βλέπουμε ότι οι μετασχηματισμοί Fourier $\dot{\bar{E}}$ και $\dot{\bar{B}}$ ικανοποιούν τη σχέση (12). Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι οι μετασχηματισμοί Fourier των αντίστοιχων μεγεθών ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις (13)-(23) της προηγουμένης ενότητας 10.4.

Σημείωση: Στην περίπτωση μονοχρωματικών πεδίων, οι φασιθέτες αποτελούν στην πραγματικότητα τους μετασχηματισμούς Fourier (ως προς τον χρόνο) των πεδιακών μεγεθών. Με άλλα λόγια, η ανάλυση που παρουσιάσαμε στην ενότητα 10.4 μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση της γενικότερης ανάλυσης που παρουσιάσαμε στην παρούσα ενότητα. Οι φασιθέτες είναι και αυτοί (όπως ακριβώς οι μετασχηματισμοί Fourier) συναρτήσεις της συχνότητας, όπως διαπιστώνεται με επισκόπηση των εξισώσεων (12)-(16) στις οποίες εμπλέκεται άμεσα η συχνότητα ω. Για τούτο όταν καταστρώνουμε και λύνουμε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα χρησιμοποιώντας φασιθέτες, λέμε ότι εργαζόμαστε ***στο πεδίο της συχνότητας*** (ή, γενικότερα, στο πεδίο των μετασχηματισμών Fourier).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η ανάλυση γραμμικών ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων μπορεί να γίνει με τα ίδια ακριβώς εργαλεία στο πεδίο της συχνότητας, τόσο για αρμονικά πεδία όσο και γενικότερα για πεδία αυθαίρετης χρονικής μεταβολής.

10.6. Συντακτικές σχέσεις

Α. Μέσα χωρίς διασπορά

Έστω απλό μέσο με χρονοσταθερές συντακτικές παραμέτρους (ε,μ,γ). Οι παράμετροι αυτές είναι δυνατόν να είναι συναρτήσεις της θέσεως (x,y,z), δηλαδή το μέσο μπορεί να είναι ανομοιογενές.

Ξεκινώντας από τη συντακτική σχέση

$$\overline{\mathrm{D}}=\varepsilon\overline{\mathrm{E}},$$

με χρήση των ιδιοτήτων (6)-(8) του τελεστή Re{.} προκύπτει διαδοχικά ότι

$$\mathrm{Re}[\dot{\bar{D}}e^{j\omega t}] = \varepsilon\,\mathrm{Re}[\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}] \overset{(6)}{=} \mathrm{Re}[\varepsilon\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}] \overset{(8)}{\Rightarrow} \dot{\bar{D}} = \varepsilon\dot{\bar{E}}\ . \tag{28}$$

(***Σημείωση***: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν εργαστούμε με βάση τον μετασηματισμό Fourier σύμφωνα με τα παραπάνω).

Εντελώς ανάλογα, από τις συντακτικές σχέσεις

$$\bar{\mathrm{B}} = \mu\bar{\mathrm{H}}$$

και

$$\bar{J}_c = \gamma\bar{E}$$

προκύπτουν οι σχέσεις

$$\dot{\bar{\mathrm{B}}} = \mu\dot{\bar{\mathrm{H}}} \tag{29}$$

$$\dot{\bar{J}}_c = \gamma\dot{\bar{E}}\ . \tag{30}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντακτικές σχέσεις, διατυπωμένες με χρήση των παραστατικών μιγαδικών (ή μετασχηματισμών Fourier) των εμπλεκομένων μεγεθών, διατηρούν την αρχική τους μορφή αλλά είναι πλέον απαλλαγμένες από τη χρονική μεταβλητή t.

Τα παραπάνω επεκτείνονται αμέσως σε γενικευμένα μέσα χωρίς διασπορά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός δις-ανισοτροπικού μέσου που περιγράφεται με τις χρονοσταθερές συντακτικές παραμέτρους ($\bar{\bar{\varepsilon}}, \bar{\bar{\mu}}, \bar{\bar{\xi}}, \bar{\bar{\zeta}}$), οι αντίστοιχες προς τις (28) και (29) σχέσεις έχουν τώρα τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathrm{D}}} &= \bar{\bar{\varepsilon}}\dot{\bar{\mathrm{E}}} + \bar{\bar{\xi}}\dot{\bar{\mathrm{H}}} \\ \dot{\bar{\mathrm{B}}} &= \bar{\bar{\zeta}}\dot{\bar{\mathrm{E}}} + \bar{\bar{\mu}}\dot{\bar{\mathrm{H}}} \end{aligned}\ . \tag{31}$$

B. Μέσα με χρονική διασπορά

Όταν το μέσο εμφανίζει χρονική διασπορά, οι συντακτικές σχέσεις -γραμμένες στο πεδίο του χρόνου- είναι εξαιρετικά περίπλοκες (βλέπε εξισώσεις (49) και (50) παρακάτω). Αντίθετα, η περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας (με χρήση, δηλαδή, φασιθετών ή μετασχηματισμών Fourier) έχει -εκτός από την ευκολία που παρέχει η απαλοιφή της χρονικής μεταβλητής t- το μεγάλο πλεονέκτημα ότι οι συντακτικές σχέσεις διατηρούν την απλή αλγεβρική μορφή που βρήκαμε στην προηγουμένη ενότητα [εξισώσεις (28)-(31)]. Πιο συγκεκριμένα, για ισοτροπικά μέσα οι συντακτικές σχέσεις στο πεδίο της συχνότητας έχουν τη μορφή

$$\dot{\bar{D}}(\bar{r};\omega) = \varepsilon(\omega)\dot{\bar{\mathrm{E}}}(\bar{r};\omega) \tag{32}$$

$$B(\bar{r};\omega) = \mu(\omega)\dot{\bar{H}}(\bar{r};\omega) \tag{33}$$

$$\dot{\bar{J}}_c(\bar{r};\omega) = \gamma(\omega)\dot{\bar{E}}(\bar{r};\omega) \tag{34}$$

όπου $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\bar{r};\omega)$, $\mu(\omega) = \mu(\bar{r};\omega)$, $\gamma(\omega) = \gamma(\bar{r};\omega)$ είναι ***μιγαδικά*** μεγέθη τα οποία είναι συναρτήσεις της κυκλικής συχνότητας ω.

Στη γενικότερη περίπτωση δις-ανιστροπικών μέσων με χρονική διασπορά (τα οποία περιλαμβάνουν ως ειδικές περιπτώσεις τα ανισοτροπικά και τα δις-ισοτροπικά μέσα) οι συντακτικές σχέσεις μεταξύ των φασιθετών των πεδιακών μεγεθών έχουν τη μορφή:

$$\dot{\bar{D}}(\bar{r};\omega)=\bar{\bar{\varepsilon}}(\omega)\dot{\bar{\mathrm{E}}}(\bar{r};\omega)+\bar{\bar{\xi}}(\omega)\dot{\bar{H}}(\bar{r};\omega)\,. \qquad (35\alpha)$$

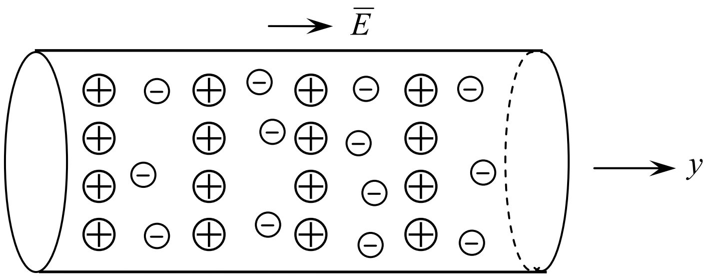
$$B(\bar{r};\omega)=\bar{\bar{\zeta}}(\omega)\dot{\bar{\mathrm{E}}}(\bar{r};\omega)+\bar{\bar{\mu}}(\omega)\dot{\bar{H}}(\bar{r};\omega)\,. \qquad (35\beta)$$

Στο σημείο αυτό παρεκλίνουμε της πορείας μας για να δόσουμε ένα παράδειγμα εξαγωγής της συντακτικής σχέσεως (34) στην περίπτωση ενός απλού (ισοτροπικού, ομοιογενούς) αγωγού.

Παράδειγμα: Εξαγωγή της συντακτικής σχέσεως (34) για απλούς αγωγούς.

Θεωρούμε ότι ο κυλινδρικός αγωγός που δείχνει το Σχ.1 βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο $\bar{\mathrm{E}}$, το οποίο έχει κατεύθυνση $\hat{y}$ και μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο με κυκλική συχνότητα ω, δηλαδή

$$\bar{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{y}}\mathrm{E}_0\cos(\omega\mathrm{t}). \qquad (36)$$



Σχήμα 1

Η εξίσωση κινήσεως των ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι -όπως και στη στατική περίπτωση- η

$$-\mathrm{e}\bar{\mathrm{E}}-\nu\mathrm{m}\bar{\mathrm{v}}=\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} \qquad (37)$$

με τη διαφορά ότι τώρα η μέση ταχύτητα $\bar{v}$ δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο. Με την αντικατάσταση

$$\bar{\mathrm{v}}=\hat{\mathrm{y}}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}, \qquad (38)$$

όπου y(t) είναι η μετατόπιση, από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2}+\nu\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}=-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{m}}\mathrm{E}_0\cos(\omega\mathrm{t}). \qquad (39)$$

Η δευτέρας τάξεως διαφορική αυτή εξίσωση είναι μη ομογενής και γραμμική, με όρο διεγέρσεως ημιτονοειδή συνάρτηση κυκλικής συχνότητας ω. Άρα η απόκριση y(t) θα είναι και αυτή ημιτονοειδής συνάρτηση της ίδιας κυκλικής συχνότητας (ω). Επομένως, αν αναπαραστήσουμε όλα τα μεγέθη με τους αντίστοιχους παραστατικούς μιγαδικούς,