ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 9

Διάλεξη: 29 Οκτωβρίου 2020

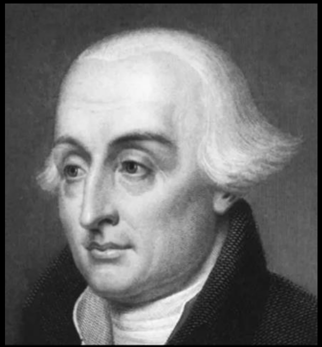
Προηγούμενο επεισόδιο

Γραμμικές ομογενείς ΔΕs 2ης τάξης: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

<u>Γενική λύση</u>: $y(x)=C_1\, y_1(x)+C_2\, y_2(x)$

όπου $y_1(x), y_2(x)$ γραμμικά ανεξάρτητες $\left(y_1(x)\neq a\, y_2(x)\right)$ λύσεις της ΔΕ.

<u>Υποβιβασμός της τάξης</u> (Μέθοδος Lagrange): $y_1(x)\longrightarrow y_2(x)$



$$\bar{U}(x)=\frac{1}{y_1^2(x)}\exp\left[-\int p(x)\,dx\right]$$

$$u(x)=\int \bar{U}(x)\,dx$$

$$y_2(x)=u(x)\,y_1(x)$$

Γραμμικές ΔΕs 2ης τάξης: $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ $\quad y(x)=;$

Παράδειγμα: Γενική λύση της $x^2y'' - xy' + y = 0$

Δίνεται ότι το $y = x$ είναι λύση της ΔΕ.

$y_1(x) = x \quad y_1'(x) = 1 \quad y_1''(x) = 0 \rightarrow x^2 0 - x + x = 0$ ✓

Διαίρεση με x^2: $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \qquad p(x) = -\frac{1}{x}$

$U = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$

$u = \int U(x)dx$

$y_2 = u y_1$

$U = \frac{1}{x^2} e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x^2} e^{\ln x} = \frac{1}{x^2} x = \frac{1}{x}$

$u = \int \frac{1}{x}dx = \ln x \qquad y_2(x) = x\ln x$

$$\boxed{y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x}$$

3. Γραμμικές ομογενείς 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad p, q \in \mathbb{R}$$ Σημαντική για μηχ.

Δοκιμή: $\boxed{y = e^{\lambda x}}$ $\quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} + p\lambda \cancel{e^{\lambda x}} + q \cancel{e^{\lambda x}} = 0 \overset{e^{\lambda x} \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση (charecteristic equ.)

Ρίζες: $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\right)$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

Τελειώσαμε; $\quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Προβλήματα: 1. Διπλή λύση $\lambda_1 = \lambda_2$ $\quad$ 2. Μιγαδικές λύσεις;

ΔΕ: $y'' + py' + qy = 0$

Χαρακτ. εξίσ.: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

<u>Περίπτωση 1</u>: $\Delta > 0$ $(p^2 - 4q > 0) \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Τότε το $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

και άρα η γενική λύση είναι: $\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$

<u>Παράδειγμα 1</u>: Γενική λύση της $y'' - y = 0$ $(p = 0 \ q = -1)$

Χαρ. εξίσωση: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

Παράδειγμα 2: $y'' + y' - 2y = 0 \; (x \geq 0) \quad y(0) = 4 \quad y'(0) = -5$

Χαρ. εξίσωση $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ → $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$

Γεν. λύση: $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

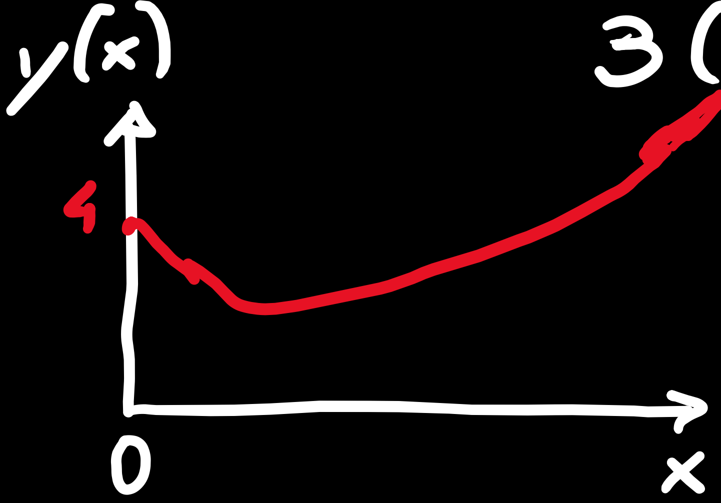
Συνθήκη 1: $y(0) = 4 \Rightarrow C_1 + C_2 = 4$

$y'(x) = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x} \qquad y'(0) = -5 \Rightarrow C_1 - 2C_2 = -5$

Αφαίρεση

$3C_2 = 9 \Rightarrow C_2 = 3 \quad C_1 = 1$

$$\boxed{y(x) = e^{x} + 3e^{-2x}}$$



Για $x \to \infty \quad e^{-2x} \to 0$

$e^{x} \to \infty$

$\to \infty$