Παρασκευή 10/6/22 Διάλεξη 23: Κολίτσος 12

Θεωρία Προσέγγισης -
- Ελάχιστα Τετράγωνα
(Least Square Method)

• Εκθετική Προσέγγιση:

• $y(x) = be^{ax}$

$$E = \sum_{i=0}^{m} (y_i - be^{ax_i})^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=0}^{m} 2(y_i - be^{ax_i})(-e^{ax_i}) = 0 \Rightarrow b\sum_{i=0}^{m} e^{2ax_i} - \sum_{i=0}^{m} y_i = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=0}^{m} 2(y_i - be^{ax_i})(-be^{ax_i}x_i) = 0 \Rightarrow b^2 \Sigma x_i e^{2ax_i} - b\Sigma y_i x_i e^{ax_i} = 0$$

• $y(x) = bx^a$

$$E = \sum_{i=0}^{m} (y_i - bx_i^a)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=0}^{m} (y_i - bx_i^a)(-x_i^a) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=0}^{m} (y_i - bx_i^a)(-bx_i^a \ln x_i) = 0$$

Χαμός, μη γραμμικά συστήματα

Αλλιώς: $y(x) = be^{ax}$

$\ln y(x) = \ln b + ax$

Θέτω $Y = \ln y(x)$

$B = \ln b$

$a = A$

$x = X$

$\boxed{Y = AX + B}$

Λύνεται όπως στο προηγούμενο μάθημα

και έχουμε

$\underline{a = A}$, $\ln b = B \Rightarrow \underline{b = e^{B}}$

$$y(x) = b x^{a}$$
$$\to \ln y(x) = \ln b + a \ln x$$

Θέτω $Y = \ln y(x)$

$B = \ln b$

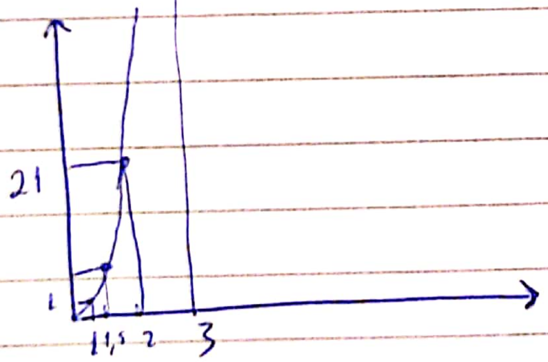
$A = a$

$X = \ln x$

$$\boxed{Y = A X + B}$$

<u>Άσκηση</u>. Δίνεται ο πίνακας τιμών της f

x_i	1	1,5	2	3
f_i	1	2	21	400



Να υπολογιστεί με ελάχιστα τετράγωνα η βέλτιστη καμπύλη της μορφής $y(x) = be^{ax}$

$$\Rightarrow \ln y(x) = \ln b e^{ax} \to \ln y(x) = \ln b + ax$$

$\Rightarrow \boxed{Y_i = B + a x_i}$ όπου $Y_i = \ln y_i(x)$, $B = \ln b$

x_i	1	1,5	2	3
y_i	1	2	21	400
$Y_i = \ln y_i$	0	0,693	3.045	5,99

$$E = \sum_{i=1}^{4} \left(Y_i - (B + a x_i)\right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial B} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} 2\left(Y_i - (B + a x_i)\right)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a \sum_{i=1}^{4} x_i + 4B = \sum_{i=1}^{4} Y_i}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} 2\left(Y_i - B - a x_i\right)(-x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + B \sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} x_i Y_i}$$

~~i~~	~~x_i~~	~~Y_i~~	~~$\sum x_i$~~	~~$\sum Y_i$~~	~~$\sum x_i Y_i$~~

i	x_i	Y_i	$x_i Y_i$	x_i^2
1	1	0	0	1
2	1,5	0,693	1,0397	2,25
3	2	3,045	6,089	4
4	3	5,99	17,9744	9
	7,5	9,73	25,103	16,25

$$(\Sigma) \begin{cases} 7{,}5 \cdot a + 4B = 9{,}73 \\ 16{,}25 \cdot a + 7{,}5 \cdot B = 25{,}103 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Elimination}]{\text{Gauss}} \begin{cases} a = 3{,}1356 \\ B = -3{,}44686 \end{cases}$$

$$B = \ln b \Rightarrow b = e^{B} = e^{-3{,}44686} \Rightarrow b = 0{,}0318$$

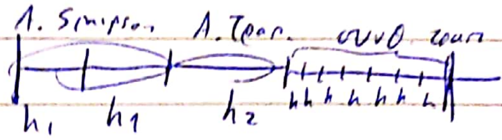
Άρα $\boxed{y = 0{,}0318 e^{3{,}1356 x}}$

Εξέταση

Να ξέρουμε ότι χρειάζεται από τύπους Δ.Ο

Να τους εφαρμόζουμε σε μη ομογενή διαμέριση;

π.χ



$x_0 = 0 \quad f[x_0] = -1 \quad f[x_0, x_1] = 5 \quad f[x_0, x_1, x_2] = -3/2$

$x_1 = 1 \quad f[x_1] = x \quad f[x_1, x_2] = z$

$x_2 = 2 \quad f[x_2] = y$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{-1-x}{0-1} = 5 \Rightarrow -1-x = -5 \Rightarrow x=4$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{x-y}{1-2} = \frac{4-y}{-1} = z \Rightarrow 4-y=-2 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{3}{2} = \frac{z-5}{2} \Rightarrow z-5=-3 \Rightarrow \boxed{z=2}$$

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\cdot(x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$= -1 + 5(x-0) - \frac{3}{2}(x-0)(x-1)$$

προσθέτω σημείο $x_3 = 1{,}5$ (παρατηρώ, ούτε ισαπέχον ούτε διατεταγμένο)

$x_0 = 0 \quad f[x_0] = -1 \quad f[x_0, x_1] = 5 \quad f[x_0, x_1, x_2] = -3/2$

$x_1 = 1 \quad f[x_1] = 4 \quad f[x_1, x_2] = 2$

$x_2 = 2 \quad f[x_2] = 6 \quad f[x_1, x_2, x_3] \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$x_3 = 1{,}5 \quad f[x_3] = \quad f[x_2, x_3]$

(Αν ήθελα να φτιάξω το πολυώνυμο με τα σημεία: x_1, x_2, x_3)

$$P_3(x) = p_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Άσχετο:
$$\boxed{\begin{array}{l} \sum l_i(x) = 1 \\ \text{Αν } f \in \Pi_n \Rightarrow p_n = f \end{array}}$$

Από μεθόδους Παραγοντοποίησης

$$A = L U$$

$$l_{ii} = 1$$

Να διαβάσετε το παράδειγμα: $\boxed{\text{Μέθοδος παραγοντοποίησης με οδήγηση}}$

Αποδείξεις και Θεωρήματα να ξέρουμε

$\left.\begin{array}{l}\text{Νόρμα}_{\infty} = \text{Νόρμα γραμμή} \\ \text{Νόρμα}_{1} = \text{Νόρμα στήλη}\end{array}\right\}$ ή ανάποδα?
δε θυμάμαι

Να ξέρετε Gauss-Seidel,
με διαγώνια υπεροχή εξασφαλίζω σύγκλιση