ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
Επεισόδιο 2

Διάλεξη: 8 Οκτωβρίου 2020

ΣΔΕs 1ης τάξης : $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ $y(x) = ;$

Υπάρχουν άπειρες λύσεις (γενική λύση) π.χ. $y(x) = \frac{Q}{x}$

Το Q προσδιορίζεται με την βοήθεια συνθήκης π.χ. $y(1)=1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x}$

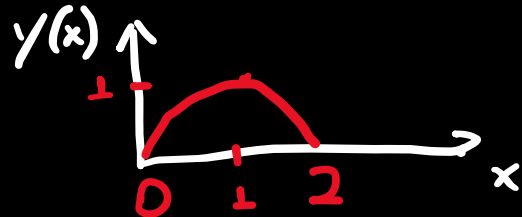Μοντέλο - Λύση ΔΕ - Έλεγχος λύσης - Ανάλυση λύσης

① Χωριζομένων μεταβλητών $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow \int Q(y)\, dy = \int P(x)\, dx + K$

Αλλαγή μεταβλητής π.χ. $u = \frac{y}{x} \longrightarrow$ μετατροπή σε χωριζομένων

Παράδειγμα 3 : $2xy\, \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow y(x) = \pm\sqrt{Qx - x^2}$

Για $y(1)=1$ $1 = \pm\sqrt{Q-1} \Rightarrow 1 = \sqrt{Q-1} \Rightarrow 1 = Q-1 \Rightarrow Q = 2$

$y(x) = +\sqrt{2x - x^2}$

Δεν ορίζεται στο $\mathbb{R}$

Εκτός $0 \le x \le 2$

Κρύα νύχτα του χειμώνα, έξω $0°C$ (σταθερή). Στις 10 το βράδυ κλείνετε την θέρμανση. Το θερμόμετρο δείχνει $20°C$. Τα μεσάνυχτα πάτε για ύπνο, το θερμόμετρο δείχνει $18°C$.

(α) Τι θερμοκρασία θα έχει στις 8 το πρωί που θα ξυπνήσετε (το σπίτι);

(β) " " " " Το σπίτι μετά απο πολύ χρόνο.

Λύση Βήμα 0. Μοντελοποίηση. Υποθέτουμε ότι όλο το σπίτι έχει την ίδια θερμοκρασία.

$$\frac{d\Theta}{dt} = K (\Theta_\pi - \Theta)$$

συντελεστής μεταφοράς θερμότητας (άγνωστο)

θερμοκρασία περιβάλλοντος

θερμοκρασία σπιτιού

$\left(\text{Αν } \Theta > \Theta_\pi \Rightarrow \Theta_\pi - \Theta < 0 \Rightarrow \frac{d\Theta}{dt} < 0 \Rightarrow \Theta \searrow\right)$

Εδώ $\Theta_\pi = 0$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -K\Theta$$

Βήμα 1: $\dfrac{d\Theta}{dt} = -k\Theta \Rightarrow \dfrac{d\Theta}{\Theta} = -k\,dt \Rightarrow \int \dfrac{d\Theta}{\Theta} = -\int k\,dt + C \Rightarrow$

Γενική λύση

$\Rightarrow \ln\Theta = -kt + C \Rightarrow e^{\ln\Theta} = e^{-kt}\,\underset{\underset{Q}{\parallel}}{e^{C}} \Rightarrow \boxed{\Theta(t) = Q e^{-kt}}$

γενική λύση

Βήμα 2 (ειδική λύση)

Ορίζω σαν $t = \varnothing$ τις 10 το βράδυ $\Rightarrow \Theta(\varnothing) = 20$

(t σε ώρες)

Αντικατάσταση: $20 = Q e^{-k\varnothing} \Rightarrow Q = 20 \Rightarrow \boxed{\Theta(t) = 20 e^{-kt}}$

Ειδική λύση

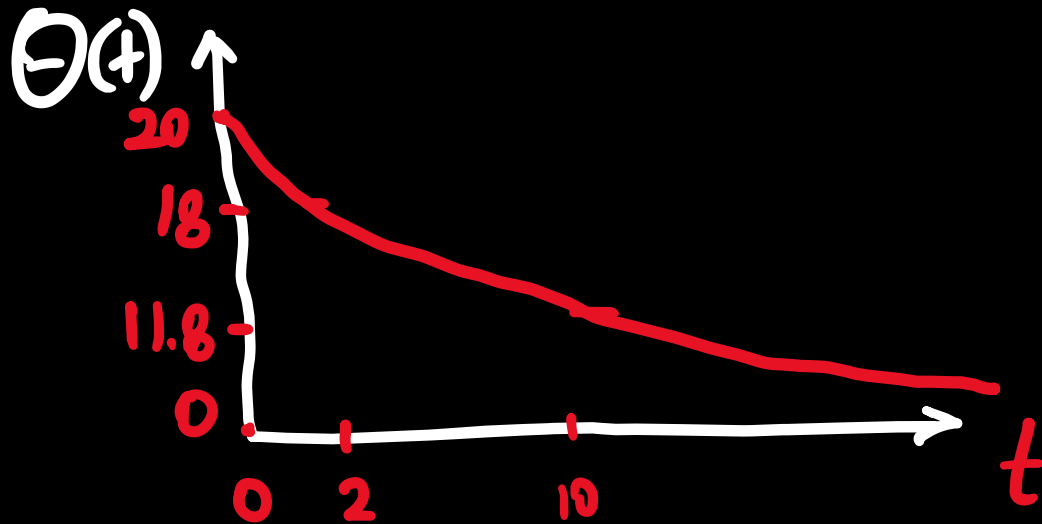**Βήμα 3** (εύρεση k) $\Theta(2) = 18$

Αντικ. στην ειδική λύση: $18 = 20 e^{-k2} \Rightarrow 0.9 = e^{-2k} \Rightarrow \ln 0.9 = -2k$

$\Rightarrow -0.105 = -2k \Rightarrow \boxed{k = 0.053\ h^{-1}}$

Βήμα 4: $\Theta(t) = 20 e^{-0.053t}$ $(t=0, 10 \text{ τα βράδυ})$

(a) 8 το πρωί $\to t=10$

$\Theta(10) = 20 e^{-0.053 \cdot 10} = 20 e^{-0.53} = 11.8 \, ^\circ C$

(b) Μετα απο πολύ ώρα $\to t\to\infty \to \Theta(t) = 20 e^{-\infty} = 0$

Για $t\to\infty$ $\Theta_\Pi = \Theta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d\Theta}{dt} = 0 \Rightarrow$ ισορροπία