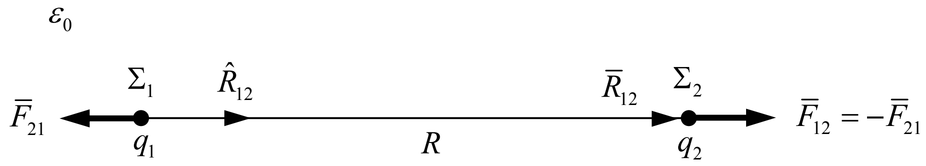
Συνοπτική παρουσίαση επιλεγμένων τμημάτων των ενοτήτων 5-9 του κεφαλαίου 1 (σελ. 89-190) του βιβλίου: Ι. Τσαλαμέγκα – Ι. Ρουμελιώτη, "Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία – Τόμος Α"

Ι. Τσαλαμέγκας – Ι. Ρουμελιώτης

Μάρτιος 2017

ΝΟΜΟΣ COULOMB (1785)



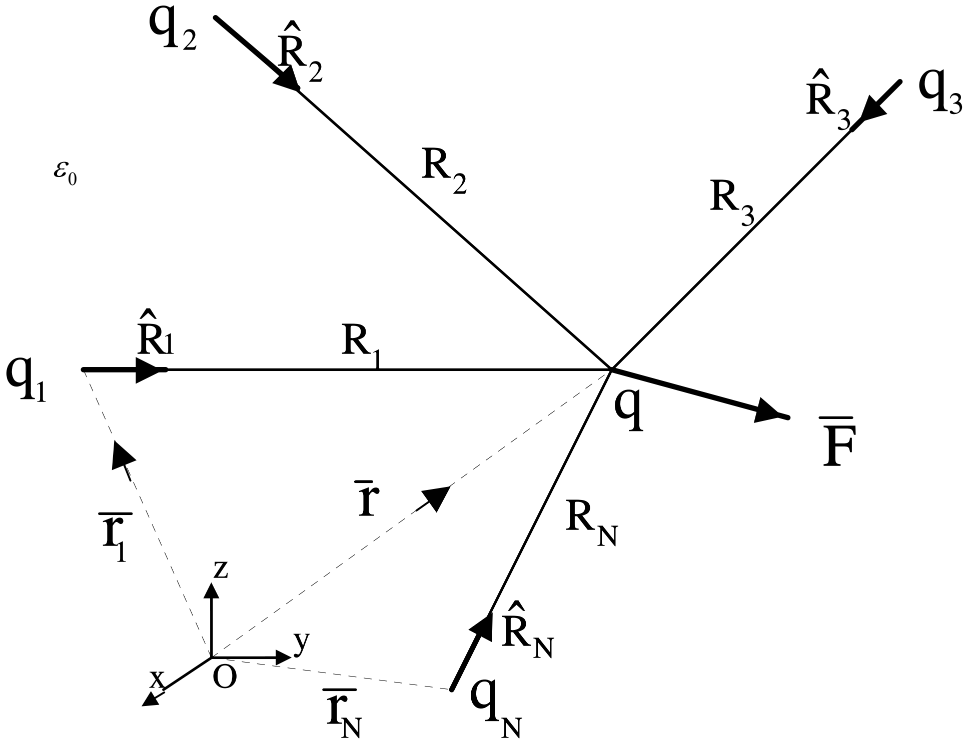
$$R = |\overline{R}_{12}|, \ \hat{R}_{12} = \frac{\overline{R}_{12}}{|\overline{R}_{12}|}$$

Σχ. 1

$$\overline{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{R}_{12} \quad \text{(βλ. Σχ.1)} \tag{1}$$

όπου τα q_1 και q_2 είναι ακίνητα και $\varepsilon_0 = 8.8542$ pF/m είναι η επιτρεπτότητα ή διηλεκτρική σταθερά του κενού (αέρα). Ισχύει από μικροσκοπικές R της τάξης 10^{-14}m έως αστρονομικές αποστάσεις. Έχει ίδια ακριβώς μορφή με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης.

<u>Επαλληλία</u> (αποδεικνύεται πειραματικά).



$$\overline{R}_n = \overline{r} - \overline{r}_n, \ R_n = |\overline{R}_n|, \ \hat{R}_n = \frac{\hat{R}_n}{R_n}$$

Σχ. 2

Ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο q (Σχ.2):

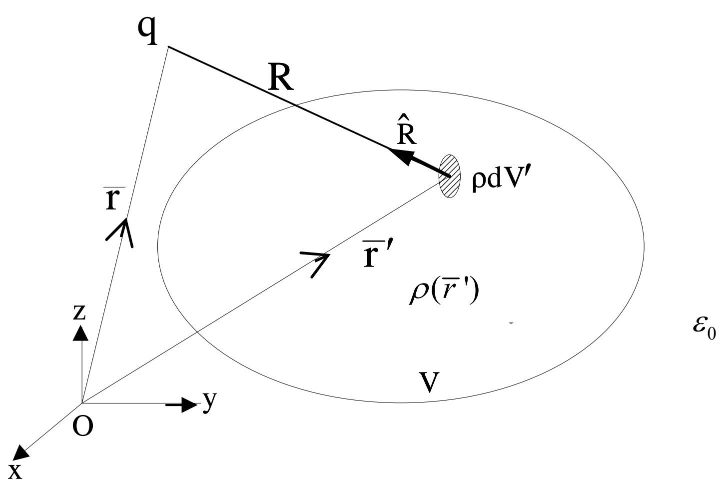
$$\bar{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n \hat{R}_n}{R_n^2} \,. \tag{2}$$

Η (2) ισχύει για q ακίνητο, έως και q κινούμενο ακόμη και με σχετικιστικές ταχύτητες (με q_n ακίνητα).

Κατανομή φορτίων

Η (2) γενικεύεται αν αντί των q_n υπάρχει μακροσκοπική κατανομή στατικών φορτίων $\rho(\bar{r}\,')$ στον όγκο V (Σχ.3):

$$\bar{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\bar{r}\,')dV'}{R^2}\hat{R} \tag{3}$$



$dV' = dx'dy'dz'$ (σε καρτεσιανές συντεταγμένες), $\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$, $\hat{R} = \bar{R}/R$.

Σχ. 3

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου

Έστω δq δοκιμαστικό φορτίο στη θέση του q, αρκούντως μικρό ($\delta q \to 0$), ώστε η παρουσία του (ή η απουσία του) να μη διαταράσσει την κατανομή ρ. Στο δq ασκείται δύναμη $\delta\bar{F}$.

$$(3) \Rightarrow \delta\bar{F} = \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\bar{r}\,')dV'}{R^2}\hat{R} \,. \tag{4}$$

Το πηλίκο

$$\bar{E}(\bar{r}) \equiv \frac{\delta\bar{F}}{\delta q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\bar{r}\,')dV'}{R^2}\hat{R} \tag{5}$$

είναι ανεξάρτητο του δq, εξαρτώμενο από το $\rho(\bar{r}\,')$ και τη θέση $\bar{r}$ του σημείου παρατήρησης, αποκλειστικά, και ονομάζεται ένταση του ηλεκτρικού πεδίου της κατανομής ρ στη θέση $\bar{r}$, με μονάδα μέτρησης στο *SI* το 1V/m.

Γνωρίζοντας την ένταση $\overline{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{r}})$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται σε οποιοδήποτε σημειακό φορτίο q', τοποθετημένο στη θέση $\overline{\mathrm{r}}$, από τη σχέση

$$\overline{\mathrm{F}} = q'\overline{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{r}}). \tag{6}$$

Υποτίθεται ότι με την εισαγωγή του φορτίου q' δεν αλλάζει η μορφή του ρ, δηλ. δεν προκαλείται ανακατανομή των φορτίων στο χώρο.

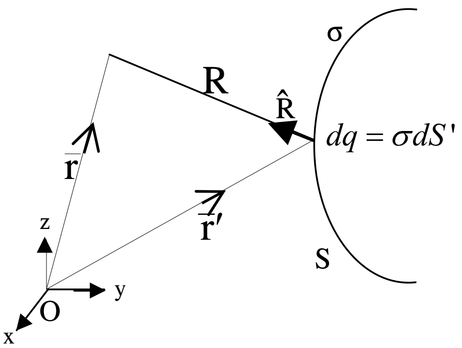
<u>Ειδικές περιπτώσεις</u> (προκύπτουν από την (5))

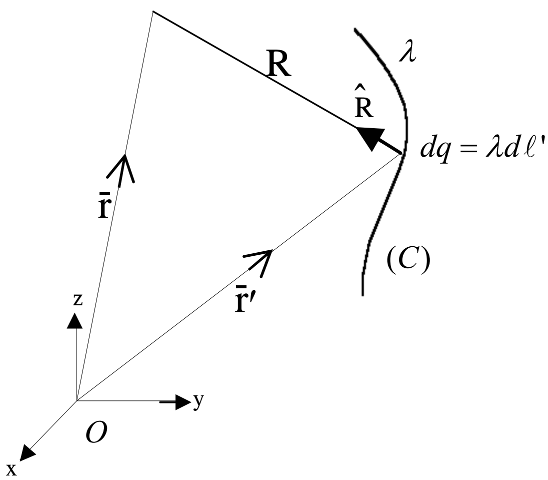
Α. <u>Επιφανειακά φορτία</u> (σ)

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\overline{r}')dS'}{R^2}\hat{R} \tag{7}$$

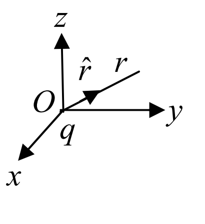
Β. <u>Γραμμικά φορτία</u> (λ)

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\overline{r}')d\ell'}{R^2}\hat{R} \tag{8}$$





Γ. <u>Σημειακό φορτίο q στην αρχή Ο.</u>



$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}. \tag{9}$$

Δ. <u>Συστοιχία σημειακών φορτίων</u>, όπως στο Σχ. 2.

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{R_n^2}\hat{R}_n \tag{10}$$

<u>Αναλυτικές ιδιότητες του πεδίου $\overline{\mathrm{E}}$ αυθαίρετης χωρικής κατανομής [εξ. (5)]</u>

Υποθέτουμε ότι η $\rho(\overline{r}')$ είναι συνεχής και αρκούντως ομαλή συνάρτηση της θέσης. Τότε με αναφορά στην εξ. (5) ισχύουν τα εξής:

1η ιδιότητα: Για σημεία παρατήρησης στο εξωτερικό της περιοχής των πηγών, $\bar{r} \notin V$, η $\bar{E}(\bar{r})$ έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης.

2η ιδιότητα: Για σημεία παρατήρησης στο εσωτερικό της περιοχής των πηγών, $\bar{r} \in V$, το ολοκλήρωμα στην (5) είναι γενικευμένο αλλά συγκλίνει. [Η ιδιομορφία που υπάρχει για $R = 0$ ($\bar{r}' \equiv \bar{r}$) αίρεται αν θεωρήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες (R,θ,φ) με αρχή το σημείο $\bar{r}$, οπότε $dV' = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi \;\Rightarrow\; dV'/R^2$ =πεπερασμένο]. Επομένως η $\bar{E}(\bar{r})$ παραμένει πεπερασμένη.

3η ιδιότητα: Αν $\bar{p}$ είναι τυχούσα κατεύθυνση στο χώρο τότε

$$\frac{\partial}{\partial p}\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial p}\int_V \frac{\rho(\bar{r}')dV'}{R^2}\hat{R} \neq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\rho(\bar{r}')}{R^2}\hat{R}\right]dV', \;\; \bar{r} \in V \tag{11}$$

δηλ. δεν επιτρέπεται η εναλλαγή των τελεστών $\partial/\partial p$ και $\int_V$ όταν $\bar{r} \in V$, διότι το 2ο ολοκλήρωμα της (11) αποκλίνει. Αντίθετα, αν $\bar{r} \notin V$ η εναλλαγή των τελεστών επιτρέπεται και οδηγεί σε συγκλίνοντα ολοκληρώματα.

Νόμοι του ηλεκτροστατικού πεδίου

Α. Νόμος του αστροβίλου

Με χρήση της σχέσης

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} \tag{12}$$

στην (5), παίρνουμε

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\bar{r}')\nabla\left(\frac{1}{R}\right)dV' = -\nabla\int_V \frac{\rho(\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0 R}dV' = -\nabla\Phi(\bar{r})\,. \tag{13}$$

όπου

$$\Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\bar{r}')}{R}dV'\,. \tag{14}$$

Η βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(\bar{r})$ ονομάζεται βαθμωτό ηλεκτρικό (ηλεκτροστατικό) δυναμικό και έχει μονάδα μέτρησης το $Volt$ (V). Μπορεί να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα στην (14) συγκλίνει για $\forall\bar{r}$ είτε στο εσωτερικό είτε στο εξωτερικό του V.

Ειδικές περιπτώσεις

$$\Phi(\bar{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\;, \quad \Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\bar{r}')}{R}dS'\,, \quad \Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\bar{r}')}{R}d\ell' \tag{15}$$

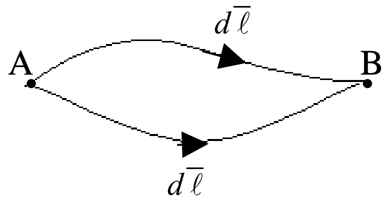
για σημειακό φορτίο q στην αρχή των αξόνων, για επιφανειακό φορτίο σ σε πεπερασμένη επιφάνεια S και για γραμμικό φορτίο λ σε πεπερασμένη γραμμή C, αντίστοιχα.

Από την (13) προκύπτει ότι

$$\overline{E}(\overline{r}) = -\nabla\Phi(\overline{r}) \Leftrightarrow \nabla\times\overline{E} = 0 \Leftrightarrow \int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{\ell} = \Phi(A)-\Phi(B)\,, \tag{16}$$

δηλαδή

1. Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι ***αστρόβιλο*** ($\nabla\times\overline{\mathrm{E}}=0$) και
2. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $V_{AB}\equiv\int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{\ell}$ είναι ανεξάρτητο της μορφής του δρόμου ολοκλήρωσης, εξαρτώμενο μόνο από την αρχή Α και το τέλος Β (Σχ.4). Η τιμή $V_{AB}=\Phi(A)-\Phi(B)$ ονομάζεται <u>διαφορά δυναμικού</u> <u>ή ηλεκτρική τάση</u> μεταξύ των σημείων Α και Β (σε Volt).



Σχ.4

Από την (16) όταν $A\equiv B$ προκύπτει ότι

$$\oint_C \overline{E}\cdot d\overline{\ell} = 0 \tag{17}$$

δηλ. <u>το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό.</u>

Β. <u>Ο νόμος του Gauss</u>

Εισάγουμε το διανυσματικό μέγεθος

$$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon_0\overline{\mathrm{E}} \tag{18}$$

το οποίο ονομάζεται <u>πυκνότητα ηλεκτρικής ροής</u> ή <u>διηλεκτρική μετατόπιση</u> (με μονάδα μέτρησης $\mathrm{C/m^2}$) στο κενό. Το ολοκληρωτικό μέγεθος

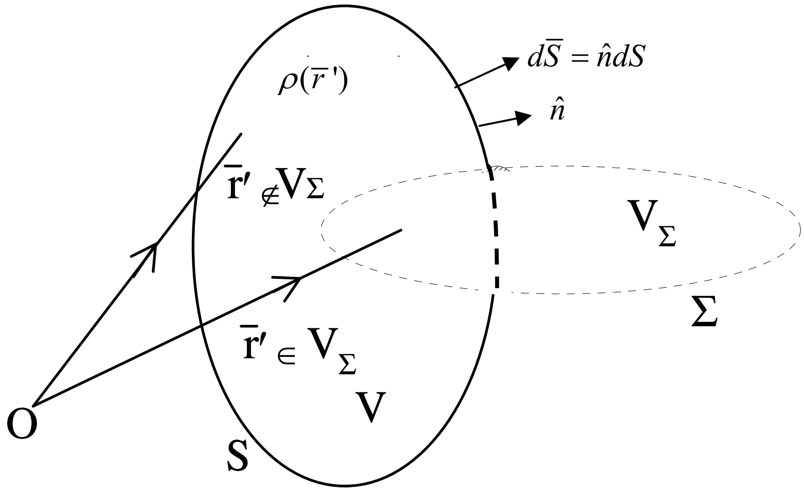
$$\Psi_e \equiv \int_S \overline{D}\cdot d\overline{S}\,, \tag{19}$$

όπου S είναι οποιαδήποτε ανοικτή ή κλειστή προσανατολισμένη επιφάνεια, ονομάζεται <u>ηλεκτρική ροή</u> δια μέσου της S και έχει μονάδα μέτρησης το C.

Έστω Σ αυθαίρετη κλειστή επιφάνεια (Σχ.5). Υποθέτουμε ότι οι πηγές του πεδίου είναι εντοπισμένες στον όγκο V, με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S. Η επιφάνεια Σ μπορεί να εμπλέκει και σημεία της περιοχής V, όπως στο Σχ.5, ή να βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εξωτερικό του όγκου V. Με χρήση της (5) παίρνουμε

$$\oint_\Sigma \overline{D}\cdot d\overline{S} = \frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma\left(\int_V \rho(\overline{r}\,')\frac{\hat{R}}{R^2}dV'\right)\cdot d\overline{S} = \frac{1}{4\pi}\int_V \rho(\overline{r}\,')\left(\oint_\Sigma \frac{\hat{R}\cdot d\overline{S}}{R^2}\right)dV' \tag{20}$$

[αποδεικνύεται ότι η εναλλαγή των τελεστών $\int_V$ και $\oint_\Sigma$ είναι πάντοτε επιτρεπτή (ακόμα και όταν η επιφάνεια Σ εμπλέκει σημεία της περιοχής V των πηγών)].



Σχ. 5

Από την (20) με τη βοήθεια της σχέσης (Παράρτημα 2, σελ. 188-190 του βιβλίου)

$$\oint_\Sigma \frac{\hat{R}\cdot d\overline{S}}{R^2} = \oint_\Sigma \frac{\overline{R}\cdot d\overline{S}}{R^3} = \oint_\Sigma \frac{(\overline{r}-\overline{r}\,')\cdot\hat{n}}{|\overline{r}-\overline{r}\,'|^3}dS = \begin{cases} 0, & \overline{r}' \notin V_\Sigma \\ 4\pi, & \overline{r}' \in V_\Sigma \end{cases}, \tag{21}$$

όπου V_Σ είναι η περιοχή του χώρου που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια Σ, προκύπτει η σχέση

$$\oint_\Sigma \overline{D}\cdot d\overline{S} = \int_{V_\Sigma} \rho(\overline{r}\,')dV' = Q_\Sigma \tag{22}$$

όπου Q_Σ είναι το συνολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια Σ. Η εξίσωση (22) αποτελεί την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss.

Από την (22) με εφαρμογή του γνωστού από τη διανυσματική ανάλυση θεωρήματος της αποκλίσεως (Gauss) $\oint_\Sigma \overline{D}\cdot d\overline{S} = \int_{V_\Sigma} (\nabla\cdot\overline{D})dV'$, παίρνουμε την εξίσωση

$$\int_{V_\Sigma} (\nabla\cdot\overline{D})dV' = \int_{V_\Sigma} \rho(\overline{r}\,')dV' \Rightarrow \int_{V_\Sigma} (\nabla\cdot\overline{D}-\rho)dV' = 0 \tag{23}$$

η οποία, επειδή πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή της Σ, οδηγεί στη σχέση

$$\nabla\cdot\overline{\mathrm{D}} = \rho \tag{24}$$

γνωστή ως <u>διαφορική μορφή του νόμου του Gauss</u> για το ηλεκτρικό πεδίο.

<u>Εναλλακτικός τρόπος εξαγωγής του Ν. Gauss</u>

Ισχύει ότι

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{R}}{R^2}\right) = 4\pi\,\delta(\overline{R}) = 4\pi\,\delta(\overline{r}-\overline{r}\,') = 4\pi\,\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\,. \tag{25}$$

Από τις (5) και (25) προκύπτει:

$$\nabla \cdot \overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(x',y',z')4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')dx'dy'dz' = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}. \qquad (26)$$

Από την (26), ολοκληρώνοντας στον όγκο V των πηγών, παίρνουμε τη σχέση

$$\int_V (\nabla \cdot \overline{E})dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon_0} \overset{\Theta.Gauss}{\Rightarrow} \oint_S \overline{D}\cdot d\overline{S} = Q \ . \qquad (27)$$

<u>Διαφορική εξίσωση για το δυναμικό (εξίσωση Poisson)</u>

Με αντικατάσταση από τις (18) και (13) στην (24) προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \overline{E}) = -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\nabla \Phi) = -\varepsilon_0 \nabla^2 \Phi = \rho \ ,$$

δηλ. η συνάρτηση δυναμικού Φ συνδέεται με τις πηγές με τη σχέση

$$\nabla^2 \Phi(\overline{r}) = -\frac{\rho(\overline{r})}{\varepsilon_0} \qquad (28)$$

που είναι γνωστή σαν <u>εξίσωση του Poisson</u>.

<u>ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ</u>

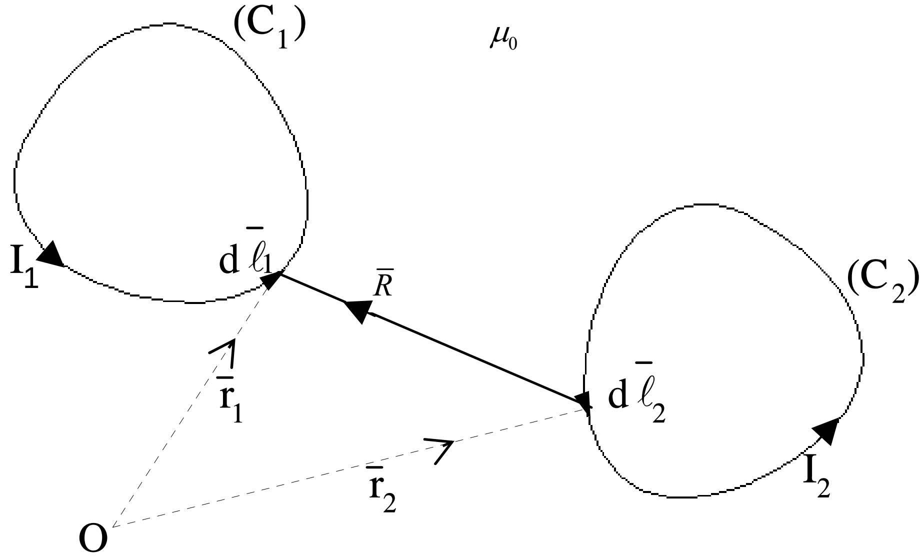
Το μαγνητοστατικό πεδίο έχει ως πηγές χρονοσταθερά ($\partial / \partial t = 0$) ηλεκτρικά ρεύματα πυκνότητας $\overline{\mathrm{J}}$. Για $\partial / \partial t = 0$ η εξίσωση συνέχειας, $\nabla \cdot \overline{\mathrm{J}} + \partial \rho / \partial \mathrm{t} = 0$, οδηγεί στη σχέση

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{J}} = 0 \qquad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πηγές ενός μαγνητοστατικού πεδίου, εκτός από χρονοσταθερές, είναι και σωληνοειδείς, δηλαδή η ροή του ρεύματος γίνεται σε κλειστούς σωλήνες ροής.

Θεωρούμε (Σχ.1) δύο κλειστούς βρόχους C_1 και C_2 στον αέρα, διαρρεόμενους από χρονοσταθερά ρεύματα I_1 και I_2, αντίστοιχα. Διαπιστώνεται πειραματικά ότι μεταξύ των δύο αυτών βρόχων ασκούνται μαγνητικές δυνάμεις. Η δύναμη $\delta\overline{F}_{12}$ που ασκεί ο βρόχος 2 στο στοιχειώδες ρεύμα $\mathrm{I}_1 \mathrm{d}\overline{\ell}_1$ του βρόχου 1 είναι πάντοτε κάθετη στο στοιχειώδες αυτό ρεύμα, σύμφωνα με τα πορίσματα των πειραμάτων των Biot-Savart. Αυτό μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά με τη σχέση

$$\delta\overline{F}_{12} = I_1 d\overline{\ell}_1 \times \overline{B}_2(\overline{r}_1) \ . \qquad (2)$$



Σχ. 1

Το διανυσματικό μέγεθος $\bar{B}_2(\bar{r}_1)$, το οποίο ορίζεται μέσω της (2), αποτελεί αυτό που σήμερα ονομάζεται διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής (ή πυκνότητα μαγνητικής ροής) του μαγνητικού πεδίου, το οποίο διεγείρεται από το ρεύμα του βρόχου 2, στη θέση $\bar{r}_1$ του στοιχείου $d\bar{\ell}_1$. Η μονάδα μέτρησής του είναι το $1T=1Wb/m^2$. Το μέγεθος αυτό καθορίζεται πλήρως από τη γεωμετρία και την ένταση του ρεύματος της πηγής του. Η έκφρασή του δόθηκε από τους Biot και Savart και μπορεί να τεθεί υπό τη μορφή

$$\bar{B}_2(\bar{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\bar{\ell}_2 \times \hat{R}}{R^2} \quad \text{(νόμος των Biot-Savart).} \tag{3}$$

όπου $\hat{R} \equiv \bar{R} / R$, $R \equiv |\bar{R}|$, $\bar{R} \equiv \bar{r}_1 - \bar{r}_2$. Η σταθερά μ_0 ονομάζεται μαγνητική διαπερατότητα του κενού (αέρα). Η ακριβής τιμή της στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) είναι $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H / m$.

Με αναφορά στις (2)-(3), το μέγεθος

$$d\bar{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\bar{\ell}_1 \times (I_2 d\bar{\ell}_2 \times \hat{R})}{R^2} \tag{4}$$

είναι εύλογο να θεωρηθεί ως η δύναμη που ασκείται από το ρευματικό στοιχείο $I_2 d\bar{\ell}_2$ στο ρευματικό στοιχείο $I_1 d\bar{\ell}_1$. Η δύναμη $d\bar{F}_{21}$ που ασκείται από το στοιχειώδες ρεύμα $I_1 d\bar{\ell}_1$ στο στοιχειώδες ρεύμα $I_2 d\bar{\ell}_2$ βρίσκεται με εναλλαγή των δεικτών 1 και 2 στην παραπάνω σχέση.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, εν γένει, οι $d\bar{F}_{12}$ και $d\bar{F}_{21}$ έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Επομένως, $d\bar{F}_{12} + d\bar{F}_{21} \neq 0$, δηλαδή δεν ισχύει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα για τις μαγνητικές δυνάμεις μεταξύ δυο στοιχειωδών ρευμάτων. Αντίθετα, ο νόμος αυτός ισχύει για τις συνολικές δυνάμεις μεταξύ δύο κλειστών βρόχων, όπως θα δούμε λίγο παρακάτω.

Η συνολική δύναμη που ασκεί ο βρόχος 2 στον βρόχο 1 είναι

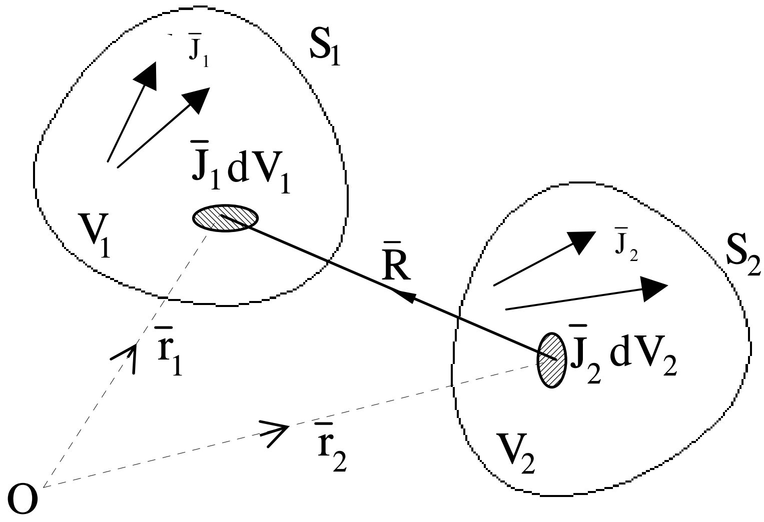
$$\bar{F}_{12} = \oint_{C_1} \delta\bar{F}_{12} == \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{I_1 d\bar{\ell}_1 \times (I_2 d\bar{\ell}_2 \times \hat{R})}{R^2} \quad \text{(νόμος του Ampere).} \tag{5}$$

Η δύναμη $\overline{F}_{21}$ που ασκεί ο βρόχος 1 στον βρόχο 2 προκύπτει από την παραπάνω σχέση με εναλλαγή των δεικτών 1 και 2.

Γενικεύσεις

1. Βρίσκεται πειραματικά ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας για τις μαγνητικές δυνάμεις, σύμφωνα με την οποία η συνολική δύναμη που ασκείται στον ρευματοφόρο βρόχο 1, όταν αυτός βρίσκεται υπό την επίδραση των ρευματοφόρων βρόχων 2,3,...,N, ισούται με το άθροισμα $\overline{F}_{12} + \overline{F}_{13} + \ldots + \overline{F}_{1N}$.

2. Αν τα ρεύματα I_1 και I_2 δεν είναι νηματοειδή, αλλά κατανέμονται στις πεπερασμένες περιοχές V_1 και V_2 (Σχ.2) με χωρικές πυκνότητες $\overline{J}_1$ και $\overline{J}_2$, οι (2)-(5) παίρνουν τη μορφή, αντίστοιχα:



Σχ. 2

- $$\delta \overline{F}_{12} = (\overline{J}_1 dV_1) \times \overline{B}_2(\overline{r}_1) \tag{6}$$

(μαγνητική δύναμη ασκούμενη στο στοιχείο $\overline{J}_1(\overline{r}_1)dV_1$ της κατανομής 1 από ολόκληρη την κατανομή 2)

- $$\overline{B}_2(\overline{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\overline{J}_2(\overline{r}_2) \times \hat{R}}{R^2} dV_2 \tag{7}$$

(μαγνητική επαγωγή η οποία διεγείρεται στη θέση $\overline{r}_1$ λόγω της κατανομής 2)

- $$d\overline{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overline{J}_1 dV_1 \times (\overline{J}_2 dV_2 \times \hat{R})}{R^2} \tag{8}$$

(μαγνητική δύναμη ασκούμενη στο στοιχείο $\overline{J}_1(\overline{r}_1)dV_1$ από το $\overline{J}_2(\overline{r}_2)dV_2$)

- $$\overline{F}_{12} = \int_{V_1} d\overline{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\int_{V_2} \frac{\overline{J}_1 \times (\overline{J}_2 \times \hat{R})}{R^2} dV_1 dV_2 \qquad (9)$$

(συνολική μαγνητική δύναμη ασκούμενη στην κατανομή 1 από την κατανομή 2. Η συνολική δύναμη $\overline{F}_{21}$ που ασκείται στην κατανομή 2 από το πεδίο της κατανομής 1 προκύπτει με εναλλαγή των δεικτών 1 και 2 στην (9)).

Αποδεικνύεται ότι για τις συνολικές δυνάμεις ισχύει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα,

$$\overline{F}_{12} + \overline{F}_{21} = 0. \qquad (10)$$

Πράγματι, με κατάλληλους μθηματικούς χειρισμούς η (9) καταλήγει στην

$$\overline{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\int_{V_2} (\overline{J}_1 \cdot \overline{J}_2)\frac{\hat{R}}{R^2} dV_1 dV_2 . \qquad (11)$$

Λόγω της συμμετρικής μορφής της (11), με εναλλαγή των δεικτών 1 και 2 σε αυτή συνάγεται ότι $\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$, δηλαδή προκύπτει η (10).

Στην ειδική περίπτωση όπου $\overline{J}_1 \equiv \overline{J}_2$ προκύπτει ότι $\overline{F}_{11} = -\overline{F}_{11} \Rightarrow \overline{F}_{11} = 0$. Επομένως η συνολική μαγνητική δύναμη που ασκεί μια ρευματική κατανομή στον εαυτό της είναι μηδενική.

Παρατηρήσεις

1. Με επισκόπηση της (11) θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η δύναμη που ασκείται μεταξύ των ρευματικών στοιχείων $\overline{J}_1(\overline{r}_1)dV_1$ και $\overline{J}_2(\overline{r}_2)dV_2$ ισούται με

$$d\overline{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\overline{J}_1 \cdot \overline{J}_2)\frac{\hat{R}}{R^2} dV_1 dV_2 . \qquad (12)$$

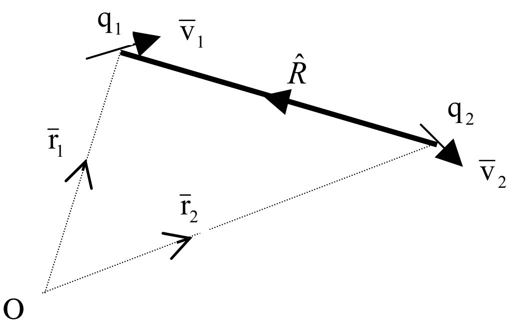
Η σχέση όμως αυτή, παρ' ότι μέσω της (11) οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα για τη συνολική δύναμη μεταξύ των ρευματικών κατανομών 1 και 2, δεν συμφωνεί με την (8), που επίσης οδηγεί, μέσω της (9), στο ίδιο αποτέλεσμα. Η ασυμφωνία είναι προφανής, αφού η $d\overline{F}_{12}$ της (12) α) έχει διεύθυνση την ευθεία που ενώνει τα δυο ρευματικά στοιχεία και β) ικανοποιεί τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα ($d\overline{F}_{12} + d\overline{F}_{21} = 0$), σε αντίθεση με την $d\overline{F}_{12}$ της (8).

Το παραπάνω δίλημμα, αναφορικά με την έκφραση της δύναμης μεταξύ δυο στοιχειωδών ρευμάτων, λύνεται σήμερα με προσφυγή στην πειραματική μαρτυρία. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την περίπτωση όπου σημειακό φορτίο q_1 κινείται με ταχύτητα $\overline{v}_1$ εντός μαγνητικού πεδίου $\overline{B}_2$ (Σχ.3). Στο κινούμενο αυτό φορτίο, το οποίο συνιστά στοιχειώδες ρεύμα $\overline{J}_1 dV_1 = q_1\overline{v}_1$, ασκείται η μαγνητική δύναμη

$$\overline{F}_{12} = q_1\overline{v}_1 \times \overline{B}_2, \qquad (13)$$

κατ' αναλογία προς την (6) που εξακολουθεί να ισχύει και εδώ. Στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο $\overline{B}_2$ οφείλεται στην κίνηση φορτίου q_2 με ταχύτητα $\overline{v}_2$ (δηλ. σε στοιχειώδες ρεύμα $\overline{J}_2 dV_2 = q_2\overline{v}_2$), βρίσκεται πειραματικά ότι

$$\overline{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\overline{v}_2 \times \hat{R}}{R^2} \qquad (14)$$



Σχ. 3

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι, επειδή το πεδίο ενός κινουμένου φορτίου είναι χρονομεταβλητό, η (14) –σε αντίθεση με όλες τις άλλες εξισώσεις αυτής της ενότητος– δεν είναι ακριβής, αλλά ισχύει μόνο κατά προσέγγιση και υπό την προυπόθεση ότι $v_2 / c << 1$, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός.

Με αυτή την παρατήρηση υπόψη, συνδυασμένη εφαρμογή των (13) και (14) οδηγεί στη σχέση

$$\overline{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \frac{\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \hat{R})}{R^2} \tag{15}$$

η οποία δείχνει ότι η έκφραση (8) είναι η σωστή.

2. Η συνολική δύναμη που ασκείται σε φορτίο q, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\overline{v}$ εντός ΗΜ πεδίου $(\overline{E}, \overline{B})$, ισούται με το άθροισμα της ηλεκτρικής και της μαγνητικής δύναμης, δηλαδή

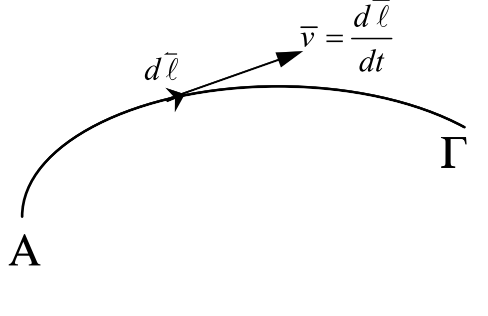
$$\overline{F} = q(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B}). \tag{16}$$

Η σημαντική αυτή σχέση ονομάζεται <u>εξίσωση του Lorentz</u> και αποτελεί έναν από τους βασικούς νόμους που συνθέτουν το ΗΜ πρότυπο. Όπως ο νόμος Coulomb, έτσι και η (16) αποτελεί αξίωμα της ΗΜ θεωρίας, του οποίου η αποδοχή στηρίζεται στην πειραματική μαρτυρία αποκλειστικά.

<u>Σημείωση:</u>

Υποθέτουμε ότι δικιμαστικό φορτίο q εισάγεται στη θέση Α εντός ΗΜ πεδίου $(\overline{E}, \overline{B})$ και αφήνεται να κινηθεί μέχρι το σημείο Γ, υπό την επίδραση των ασκούμενων ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων (Σχ.4). Το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση αυτή ισούται με

$$W = q\int_A^\Gamma (\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B}) \cdot d\overline{\ell} = q\int_A^\Gamma (\overline{E} + \frac{d\overline{\ell}}{dt} \times \overline{B}) \cdot d\overline{\ell} = q\int_A^\Gamma \overline{E} \cdot d\overline{\ell}\,, \tag{17}$$



Σχ. 4

λαμβάνοντας υπόψη κατά το τελευταίο βήμα ότι

$$\bar{v} \times \bar{B} = \frac{d\bar{\ell}}{dt} \times \bar{B}\text{, δηλ. } \bar{v} \times \bar{B} \perp d\bar{\ell}.$$

<u>Συμπέρασμα</u>: <u>Κατά τη μετακίνηση φορτίων εντός ΗΜ πεδίων, οι μαγνητικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο.</u>

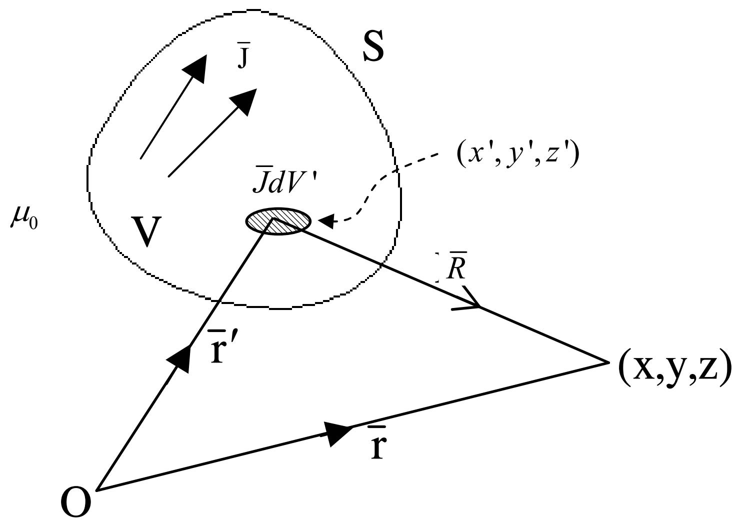
3. Το ολοκλήρωμα (7) για $\bar{r}_1 \notin V_2$ (σημείο παρατήρησης εκτός του όγκου των πηγών) παριστάνει συνάρτηση του $\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ η οποία έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης ως προς x_1, y_1, z_1. Για $\bar{r}_1 \in V_2$ το ολοκλήρωμα αυτό είναι γενικευμένο αλλά στγκλίνει. Επομένως το μαγνητικό πεδίο ορίζεται τόσο εκτός όσο και εντός του όγκου των πηγών του.

<u>Νόμοι του μαγνητοστατικού πεδίου.</u>

Θεωρούμε το μαγνητικό πεδίο

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\bar{J}(\bar{r}') \times \hat{R}}{R^2} dV' \tag{18}$$

($R = |\bar{R}|$, $\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$, $\hat{R} = \bar{R}/R$), το οποίο έχει ως πηγή την χρονοσταθερή, σωληνοειδή ρευματική κατανομή $\bar{J}(\bar{r}')$, $\bar{r}' \in V$ (Σχ.5). Θα βρούμε την απόκλιση $\nabla \cdot \bar{B}$ και την περιστροφή $\nabla \times \bar{B}$ του πεδίου συναρτήσει των πηγών του.



Σχ. 5

<u>Α. Απόκλιση του μαγνητικού πεδίου-νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο-διανυσματικό δυναμικό</u>

Με χρήση των ταυτοτήτων

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} \tag{19}$$

$$\nabla \times \left[\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R}\right] = \frac{1}{R}\nabla \times \bar{J}(\bar{r}') - \bar{J}(\bar{r}') \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\bar{J}(\bar{r}') \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{20}$$

[είναι $\nabla\times\overline{\mathrm{J}}(\overline{\mathrm{r}}')=0$, διότι ο τελεστής $\nabla\equiv(\partial_{x},\partial_{y},\partial_{z})$ εφαρμόζεται στις συντεταγμένες του σημείου παρατήρησης $\overline{\mathrm{r}}(x,y,z)$, ενώ η $\overline{\mathrm{J}}(\overline{\mathrm{r}}')=\overline{\mathrm{J}}(x',y',z')$ –συνάρτηση των συντεταγμένων (x',y',z') του σημείου ολοκλήρωσης εντός της περιοχής των πηγών– είναι ανεξάρτητη των x,y,z], ο νόμος των Biot-Savart (18) γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\overline{B}(\overline{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \overline{J}(\overline{r}')\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\left[\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}\right]dV'=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}dV'\right]=\nabla\times\overline{A}(\overline{r}) \qquad (21)$$

όπου $\overline{\mathrm{A}}$ είναι το διανυσματικό μέγεθος

$$\overline{A}(\overline{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}dV' \qquad (22)$$

που ονομάζεται διανυσματικό δυναμικό.

Από την (21), με τη βοήθεια της διανυσματικής ταυτότητος $\nabla\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}})=0$, προκύπτει αμέσως ότι

$$\nabla\cdot\overline{\mathrm{B}}=0 \quad \text{(νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο).} \qquad (23)$$

Επομένως, το μαγνητικό πεδίο είναι σωληνοειδές.

Η σχέση (23) –όπου το δεξιό μέλος είναι μηδέν, σε αντιπαραβολή με τον νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο, $\nabla\cdot\overline{E}=\rho/\varepsilon_0$ – υποδηλώνει την ανυπαρξία ελευθέρων μαγνητικών φορτίων στη φύση.

Με εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss από τη διανυσματική ανάλυση,

$$\int_V(\nabla.\overline{B})dV=\oint_S\overline{B}\cdot d\overline{S},$$

σε όγκο V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S προκύπτει ότι

$$\oint_S\overline{B}\cdot d\overline{S}=0 \qquad \text{(ολοκληρωτική μορφή του Ν. Gauss για το μαγνητικό πεδίο).} \qquad (24)$$

Δύο ιδιότητες του διανυσματικού δυναμικού

1η ιδιότητα

$$\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}}=0 \qquad (25)$$

Απόδειξη

Με $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ και τους τελεστές $\nabla=(\partial_x,\partial_y,\partial_z)$ και $\nabla'=(\partial_{x'},\partial_{y'},\partial_{z'})$ να εφαρμόζονται, αντίστοιχα, στις συντεταγμένες (x,y,z) και (x',y',z'), βρίσκουμε ότι

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right). \qquad (26)$$

Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\nabla\cdot\left[\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}\right]=\frac{1}{R}\nabla\cdot\overline{J}(\overline{r}')+\overline{J}(\overline{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{27α}$$

όπου $\nabla\cdot\overline{J}(\overline{r}')=0$, παίρνουμε

$$\nabla\cdot\left[\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}\right]=\overline{J}(\overline{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\overset{(26)}{=}-\overline{J}(\overline{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R}\nabla'\cdot\overline{J}(\overline{r}')-\overline{J}(\overline{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla'\cdot\left[\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}\right]. \tag{27β}$$

Κατά το προτελευταίο βήμα στην (27β) προσθέσαμε τον μηδενικό όρο $-\frac{1}{R}\nabla'\cdot\overline{J}(\overline{r}')$ ($\nabla'\cdot\overline{J}(\overline{r}')=0$, σωληνοειδές ρεύμα), ενώ κατά το τελευταίο βήμα ξαναχρησιμοποιήσαμε την (27α) . Από τις (22) και (27β) προκύπτει ότι

$$\nabla\cdot\overline{A}(\overline{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left(\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}\right)dV'\overset{(27\beta)}{=}-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla'\cdot\left[\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}\right]dV'\overset{\Theta.Gauss}{=}\oint_S\frac{\overline{J}(\overline{r}')\cdot d\overline{S}'}{R}=0. \tag{28}$$

Το αποτέλεσμα στην (28) είναι μηδενικό, διότι το $\overline{J}(\overline{r}')$ είναι εντοπισμένο στον όγκο V και επομένως δεν έχει συνιστώσα κάθετη στην S.

<u>2η ιδιότητα</u>

$$\nabla^2\overline{\mathrm{A}}\equiv\hat{x}\nabla^2\mathrm{A}_x+\hat{y}\nabla^2\mathrm{A}_y+\hat{z}\nabla^2\mathrm{A}_z=-\mu_0\overline{\mathrm{J}} \tag{29}$$

<u>Απόδειξη</u>

Σύμφωνα με την (22) η συνιστώσα A_p $(p\equiv x,y,z)$ του $\overline{A}$ ισούται με

$$A_p(\overline{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J_p(\overline{r}')}{R}dV'. \tag{30}$$

Η σχέση αυτή έχει ακριβώς την ίδια μορφή με τη σχέση (14) της σελίδας 5:

$$\Phi(\overline{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\overline{r}')}{R}dV' \tag{31}$$

για το ΗΣ δυναμικό Φ. Επειδή $\nabla^2\Phi=-\rho/\varepsilon_0$ [Εξ. (28), σελ. 8], για το A_p ισχύει κατ' αναλογία η σχέση

$$\nabla^2\mathrm{A}_p=-\mu_0\mathrm{J}_p, \tag{32}$$

με χρήη της οποίας προκύπτει αμέσως η (29).

<u>Β. Περιστροφή του μαγνητικού πεδίου-Νόμος του Ampere.</u>

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\mathrm{A}}=\nabla(\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}})-\nabla^2\overline{\mathrm{A}} \tag{33}$$

και τις παραπάνω δύο ιδιότητες του $\overline{A}$, παίρνουμε τη σχέση

$$\nabla \times \overline{B} = \nabla \times \nabla \times \overline{A} = -\nabla^2 \overline{A} = \mu_0 \overline{J}. \tag{34}$$

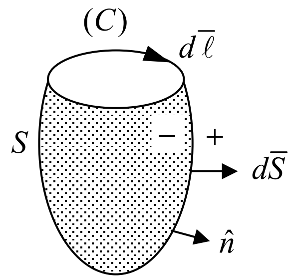
Με τον ορισμό της έντασης $\overline{H}$ του μαγνητικού πεδίου (μονάδα μέτρησης A/m) στο κενό:

$$\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu_0}, \tag{35}$$

από την (34) προκύπτει η σχέση

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} \quad \text{(διαφορική μορφή του νόμου του Ampere).} \tag{36}$$

Με αναφορά σε οποιαδήποτε ανοικτή προσανατολισμένη επιφάνεια S, η οποία έχει σύνορο την κλειστή καμπύλη C (Σχ.6) [η C είναι έτσι προσανατολισμένη ώστε, σε συνδυασμό με τον προσανατολισμό της S, να προκύπτει ο θετικός προσανατολισμός του χώρου (κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία)], εφαρμογή του θεωρήματος Stokes $\oint_C \overline{H} \cdot d\overline{\ell} = \int_S (\nabla \times \overline{H}) \cdot d\overline{S}$ οδηγεί στο αποτέλεσμα:



Σχ. 6

$$\oint_C \overline{H} \cdot d\overline{\ell} = \int_S \overline{J} \cdot d\overline{S} \equiv I \quad \text{(ολοκληρωτική μορφή του νόμου Ampere)} \tag{37}$$

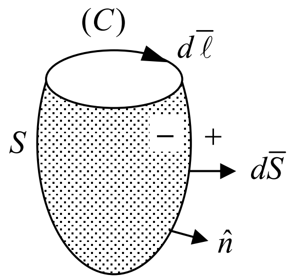
όπου I είναι το συνολικό ρεύμα που διαπερνά την επιφάνεια S κατά τη θετική της φορά.

ΝΟΜΟΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥ FARADAY

Τα πειράματα του Faraday τον οδήγησαν το 1831 στην ανακάλυψη του νόμου ο οποίος φέρει το όνομά του και διατυπώθηκε μαθηματικά από τον Maxwell με την εξίσωση

$$V_e = -\frac{d\psi_m}{dt} \Leftrightarrow \oint_C \overline{E} \cdot d\overline{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B} \cdot d\overline{S} \quad \text{(Νόμος Faraday- Maxwell).} \tag{1α}$$

Στην (1α), $V_e = \oint_C \overline{E} \cdot d\overline{\ell}$ σε Volt είναι η ηλεκτργερτική δύναμη (ΗΕΔ) κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C, ενώ $\psi_m = \int_S \overline{B} \cdot d\overline{S}$ σε Wb είναι η μαγνητική ροή που διαπερνά οποιαδήποτε ανοκτή επιφάνεια S η οποία καταλήγει στην καμπύλη C (Σχ. 1). Αν η καμπύλη C είναι ένα λεπτό αγώγιμο σύρμα, η V_e αποτελεί την πηγή του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος.



Σχ. 1

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν, η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος του κλειστού συνόρου C μιας ανοικτής επιφάνειας S ισούται με την ταχύτητα ελάττωσης της μαγνητικής ροής η οποία διαπερνά την επιφάνεια αυτή.

Παρατήρηση: Η καμπύλη C μπορεί να είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία κλειστή καμπύλη, αυθαίρετα εκτεινόμενη στον χώρο, με φορά διαγραφής αυθαίρετα επιλεγόμενη. Ο προσανατολισμός της επιφάνειας S, η οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία ανοικτή επιφάνεια με σύνορο την C, γίνεται έτσι ώστε, σε συνδυασμό με την επιλεγείσα φορά της C, να οδηγεί σε θετικό προσανατολισμό του χώρου (κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία), σύμφωνα με το Σχ.1.

Η (1α) έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (37) της σελ. 16. Επομένως, με συλλογισμούς αντίστροφους αυτών που μας οδήγησαν από την (36) στην (37) της σελ. 16, από την (1α) προκύπτει η διαφορική μορφή του νόμου Faraday –Maxwell:

$$\nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}} \tag{1β}$$

Από την (1β) συνάγεται ότι ένα χρονομεταβλητό μαγνητικό πεδίο επάγει πάντοτε ένα ηλεκτρικό πεδίο.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΝΟΜΟΥ AMPERE. ΝΟΜΟΣ AMPERE -MAXWELL

Ο νόμος του Ampere της μαγνητοστατικής [Εξ. (36) και (37), σελ. 16]

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \qquad \text{(διαφορική μορφή)} \tag{2a}$$

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \qquad \text{(ολοκληρωτική μορφή)} \tag{2β}$$

δεν ισχύει για χρονικά μεταβαλλόμενες πηγές $\bar{\mathrm{J}}(\bar{\mathrm{r}},\mathrm{t})$, διότι παραβιάζει τον νόμο διατήρησης του φορτίου (εξίσωση συνέχειας) [$\nabla \cdot \bar{\mathrm{J}} = -\partial \rho / \partial \mathrm{t}$ και $\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = -\dfrac{d}{dt}\int_V \rho dV$]. Πράγματι, από την (2α) έχουμε

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} = 0 \tag{3α}$$

και από την (2β), συρρικνώνοντας την C ώστε να καταλήγει σε σημείο, έχουμε

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = 0\,, \tag{3β}$$

διότι στην περίπτωση αυτή η S γίνεται κλειστή επιφάνεια. Ο Maxwell, δεχόμενος ότι ο νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο, $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$, εξακολουθεί να ισχύει και για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία, συμπλήρωσε την (2α) ως εξής:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad \text{(διαφορική μορφή νόμου Ampere-Maxwell)} \tag{4a}$$

[Η (4α) δίνει $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = 0 = \nabla \cdot \bar{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ (εξ. συνέχειας)]

και

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} + \frac{d}{dt}\int_S \bar{D} \cdot d\bar{S} \quad \text{(ολοκληρωτική μορφή νόμουAmpere-Maxwell).} \tag{4β}$$

Με συρρίκνωση της C σε σημείο, έχουμε από την (4β):

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = -\frac{d}{dt}\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} \overset{\Theta.\ Gauss}{=} -\frac{d}{dt}\int_V (\nabla \cdot \bar{D}) dV = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \,.$$

Για $d/dt = 0$ οι (4α) και (4β) ανάγονται στις (2α) και (2β), αντίστοιχα.