Σχολη ΗΜ&ΜΥ, ΕΜΠ

ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Καθ. Πετρος Μαραγκος

ΓΧΑ Συστηματα ←→ Συνελιξη

1

$x \rightarrow$ **Συναρτηση *f*** $\rightarrow y = f(x)$

Σύστημα Συνεχούς Χρόνου (Τελεστής, Απεικόνιση-Μετ/σμός χρονικών σημάτων)

$x(t) \rightarrow$ **Συστημα *S*** $\rightarrow y(t) = S[x(t)]$

Σύστημα Διακριτού Χρόνου (Τελεστής, Απεικόνιση-Μετ/σμός χρονικών ακολουθιών)

$x[n] \rightarrow$ **Συστημα *S*** $\rightarrow y[n] = S(x[n])$

2

Γραμμικα Χρονικα-Αναλλοιωτα (ΓΧΑ) Συστηματα

3

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ x → y

- ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ (Γραμμική Επαλληλία) = Δύο Ιδιότητες:
- **ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ** πλάτους (Ομογένεια ως προς πολλαπλασιαστικές σταθερές): $\boxed{a \cdot x[n] \;\rightarrow\; a \cdot y[n]}$
  - "Διπλασιασμός της εισόδου διπλασιάζει την έξοδο"
- **ΥΠΕΡΘΕΣΗ** (Αθροιστική Επαλληλία):

  $$\boxed{x_1[n] + x_2[n] \;\rightarrow\; y_1[n] + y_2[n]}$$

  - "Αθροιση δύο εισόδων δίνει ως έξοδο το άθροισμα των δύο ξεχωριστών εξόδων"
- Ιδιοι ορισμοί για Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

4

ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

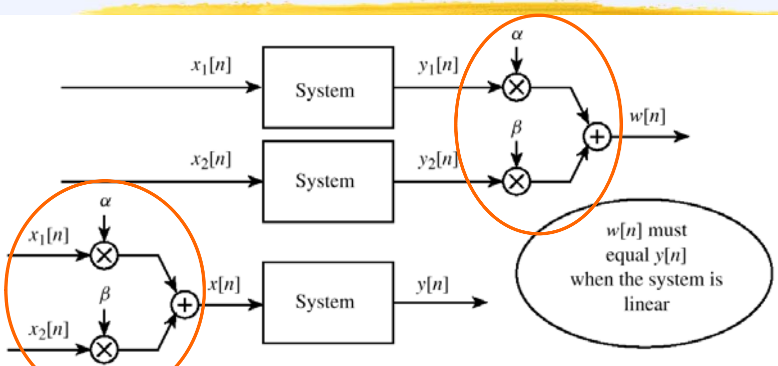


Figure 5.17 ... ns.

$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \rightarrow y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ την Time-Invariance

$$w[n] = y[n - n_0]$$

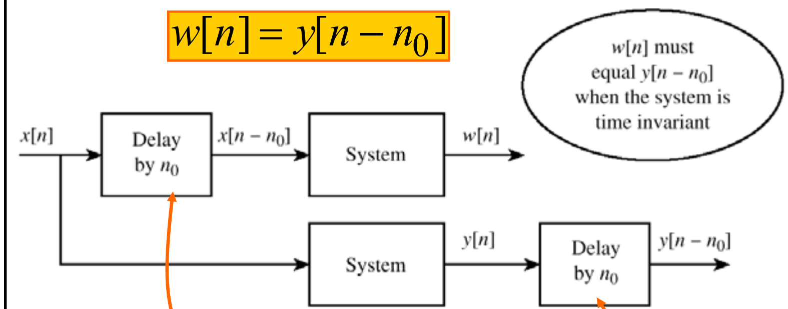


Figure 5.16 Testing time-invariance property by checking the interchange of operations.

ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ

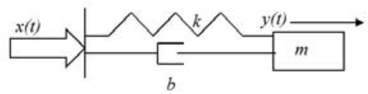
- ΙΔΕΑ:
  - "Η Χρονική Μετατόπιση της εισόδου θα προκαλέσει την ίδια χρονική μετατόπιση στην έξοδο" $\boxed{x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]}$
- ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ:
  - Ο τελεστής του συστήματος αντιμετατίθεται με τον τελεστή μετατόπισης

Παραδειγματα Συστηματων

Σύστημα	Συνεχής Χρόνος	Διακριτός Χρόνος
Διαφοριστής (Differentiator)	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$y(n) = x(n) - x(n-1)$
Ολοκληρωτής (Integrator)	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$
Καθυστέρηση (Delay)	$y(t) = x(t - t_0)$	$y(n) = x(n - n_0)$
Τρέχων Μέσος (Moving Average)	$y(t) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t-\tau)d\tau$	$y(n) = \frac{1}{2M+1}\sum_{m=-M}^{M} x(n-m)$
Τετραγωνισμός	$y(t) = \lvert x(t)\rvert^2$	$y(n) = \lvert x(n)\rvert^2$
Διαμορφωτής Πλάτους (Amplitude Modulator)	$y(t) = [A + x(t)]\cos(\omega_c t)$	$y(n) = [A + x(n)]\cos(\Omega_c n)$

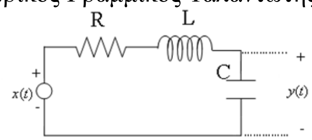
Παραδειγματα Συστηματων: Ταλαντωτες

Μηχανικός Γραμμικός Ταλαντωτής



$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = x(t)$$

Ηλεκτρικός Γραμμικός Ταλαντωτής



Γραμμικός Ταλαντωτής Διακριτού Χρόνου

$$y(t)|_{t=nT} = y(n)$$
$$y'(t)|_{t=nT} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$
$$y''(t)|_{t=nT} = \frac{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)}{T^2}$$

$$a_o y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_o x(n)$$

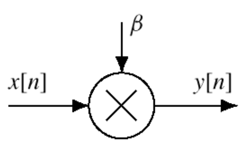
$$a_o = m + bT + kT^2, \quad a_1 = -2m - bT, \quad a_2 = m, \quad b_o = T^2$$

9

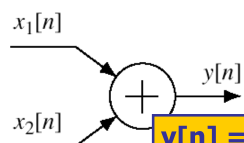
HARDWARE 'ΑΤΟΜΑ'

- Πρόσθεση, Πολλαπλασιασμός, Μετατόπιση

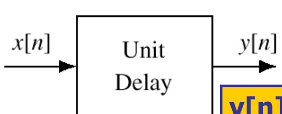
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



y[n] = βx[n]



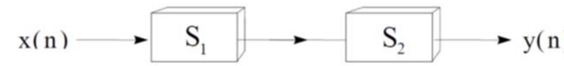
$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$



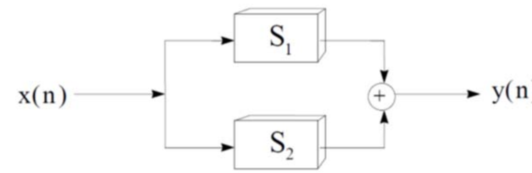
y[n] = x[n-1]

10

Σειριακή σύνδεση συστημάτων



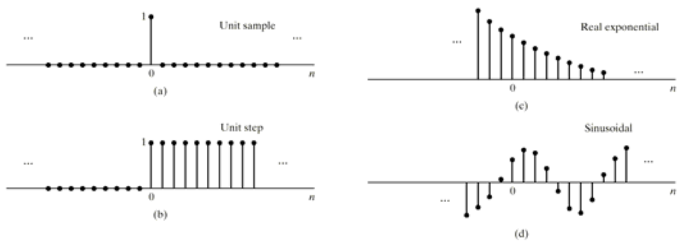
Παράλληλη σύνδεση συστημάτων



ΣΥΝΕΛΙΞΗ
Σηματων Διακριτου Χρονου

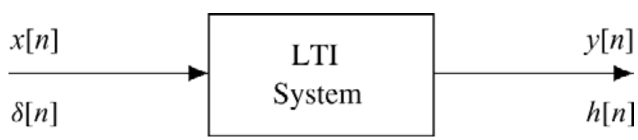
Βασικα Σηματα Διακριτου Χρονου

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \qquad x[n]=\alpha^n$$



$$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases} \qquad x[n]=A\cos(\Omega_0 n+\varphi)$$

ΓΧΑ Συστηματα Διακριτου Χρονου

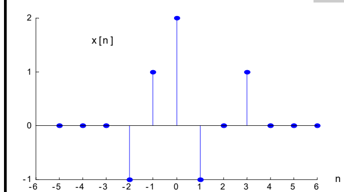


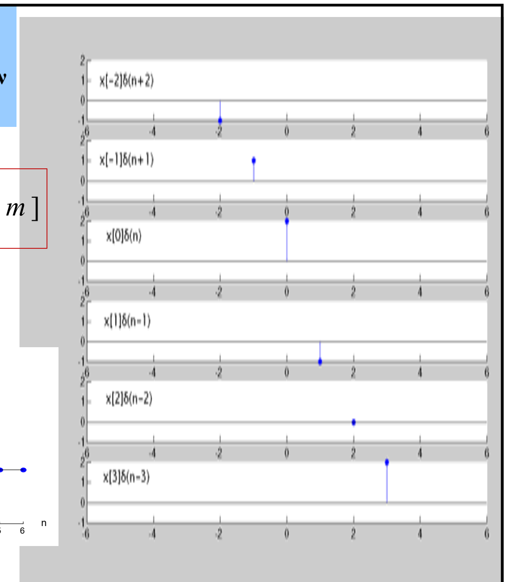
- ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΖΟΝΤΑΙ ΠΛΗΡΩΣ από την ***h[n]***: Το σημα εξοδου *y[n]* είναι η **συνελιξη** του σηματος εισοδου *x[n]* με την κρουστικη αποκριση *h[n]*:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

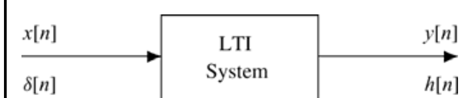
Αναπαρασταση Διακριτων Σηματων ως Γραμμικος Συνδυασμος Μετατοπισμενων Μοναδιαιων Παλμων

$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\delta[n-m]$$





Αποδειξη: Διακριτο ΓΧΑ Συστημα → Συνελιξη (∑)



$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k] \triangleq x[n]*h[n]$$

16

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ- FIR ΦΙΛΤΡΟΥ

Σύστημα-Φίλτρο Κινούμενου Μέσου 50-σημείων

Αποδειξη: η Συνελιξη ειναι Αντιμεταθετικη

$x[n]$, $\delta[n]$ → **ΓΧΑ Συστημα Imp.resp: $h[n]$** → $y[n]=x[n]*h[n]$, $h[n]$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \triangleq x[n]*h[n]$$

$h[n]$ → **ΓΧΑ Συστημα Imp.resp: $x[n]$** → $y[n]=h[n]*x[n]$

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n]*x[n]$$

18

Παραδειγμα: Συνελιξη με Δυο Ειδικα Σηματα

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ:

$$h[n]=\delta[n-n_0] \Rightarrow y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \ldots$$

ΤΡΕΧΟΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ:

$$h[n]=u[n] \Rightarrow y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \ldots$$

19

Παραδειγμα Συνελιξης σε Διακριτο Χρονο: FIR Συστημα

$x[n]$, $\delta[n]$ → LTI System → $y[n]$, $h[n]$

Γενικο ΓΧΑ συστημα: $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$

Ειδικη περιπτωση: Εστω το ΓΧΑ σύστημα:

$$\boxed{y[n]=\sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]}$$

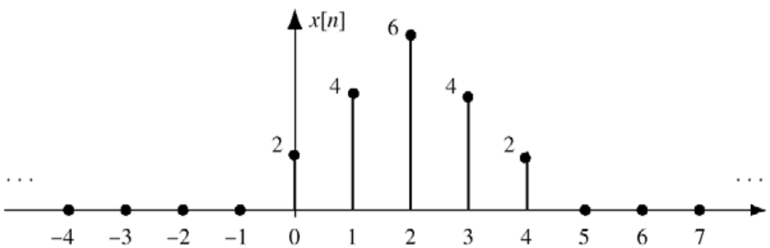
→ η $h[n]$ είναι η ίδια με την πεπερασμένη ακολουθία (b_n):

$$h[n]=\begin{cases} b_n, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{else} \end{cases} \Rightarrow \text{Finite Impulse Response (FIR)}$$

$$y[n]=\sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] = x[n]*h[n] = \sum_{m=0}^{M} h[m]x[n-m]$$

ΣΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- x[n] είναι μία ΛΙΣΤΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
  - Με ΔΕΙΚΤΗ το "n"



ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕΣΟΥ 3 ΣΗΜΕΙΩΝ

- ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ 3 ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ
  - Για κάθε "n"

the following input–output equation

Φτιάχνουμε έναν ΠΙΝΑΚΑ

$$y[n]=\frac{1}{3}(x[n]+x[n+1]+x[n+2])$$

n	$n < -2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$n > 5$
$x[n]$	0	0	0	2	4	**6**	**4**	**2**	0	0
$y[n]$	0	$\frac{2}{3}$	2	4	$\frac{14}{3}$	**4**	2	$\frac{2}{3}$	0	0

n=0 $\quad y[0] = \frac{1}{3}(x[0] + x[1] + x[2])$

n=1 $\quad y[1] = \frac{1}{3}(x[1] + x[2] + x[3])$

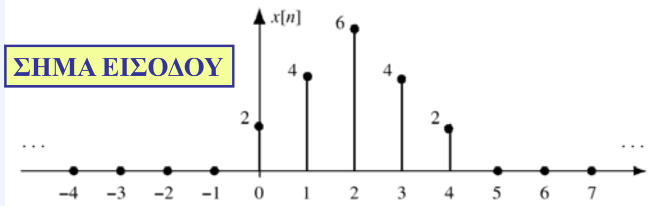


Figure 5.2 Finite-length input signal, $x[n]$.

$$y[n]=\frac{1}{3}(x[n]+x[n+1]+x[n+2])$$

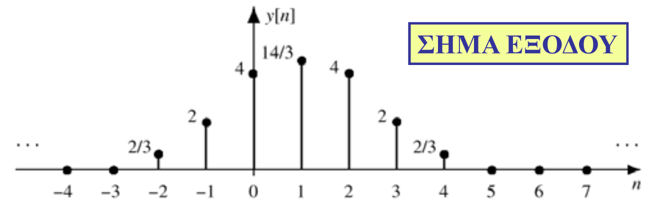


Figure 5.3 Output of running average, $y[n]$.

ΠΑΡΕΛΘΟΝ, ΠΑΡΟΝ, ΜΕΛΛΟΝ

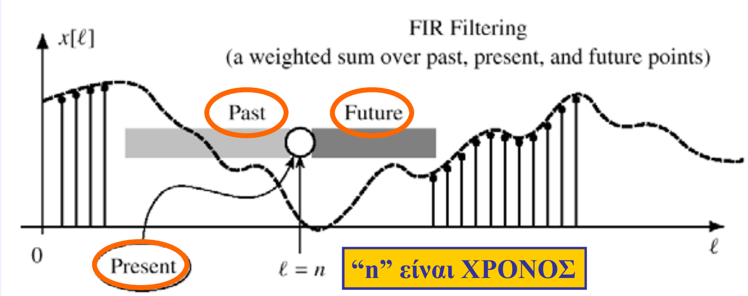


Figure 5.4 The running-average filter calculation at time index n uses values within a sliding window (shaded). Dark shading indicates the future ($\ell > n$); light shading, the past ($\ell < n$).

ΕΝΑ ΑΛΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕΣΟΥ 3 ΣΗΜΕΙΩΝ

- Χρησιμοποιεί "ΠΑΛΑΙΕΣ" ΤΙΜΕΣ του x[n]
  - ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ αν το "n" αναπαριστά ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΧΡΟΝΟ
    - ΟΤΑΝ τα x[n] & y[n] είναι ΡΟΕΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

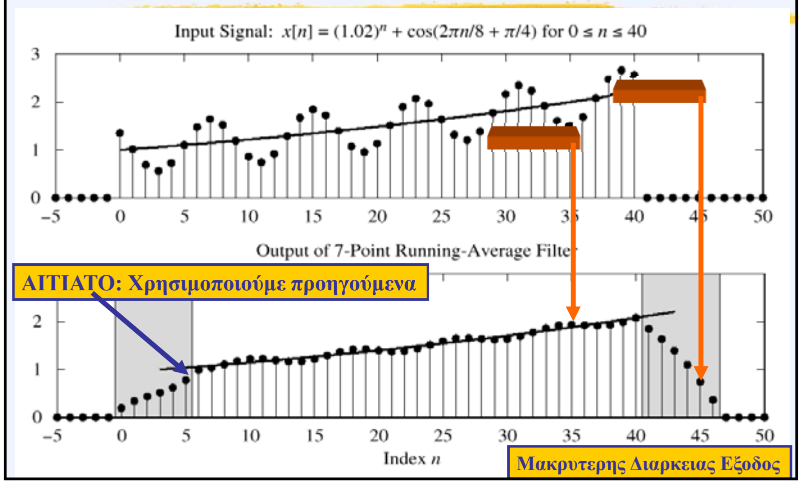
n	$n < -2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$n > 7$
$x[n]$	0	0	0	2	4	**6**	**4**	**2**	0	0	0	0
$y[n]$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	2	4	$\frac{14}{3}$	**4**	2	$\frac{2}{3}$	0	0

$$y[4] = \frac{1}{3}(x[4] + x[4-1] + x[4-2])$$

25

25

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕΣΟΥ 7 ΣΗΜΕΙΩΝ



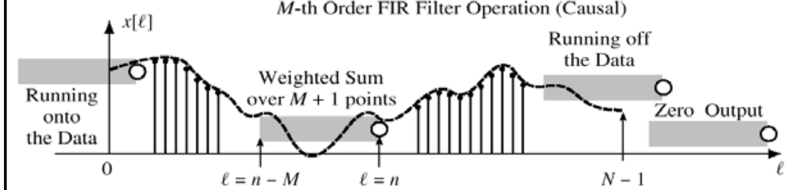
26

ΓΕΝΙΚΟ Αιτιατο FIR ΦΙΛΤΡΟ

- ΚΥΛΙΟΥΜΕ ένα ΠΑΡΑΘΥΡΟ Μήκους M πάνω στο x[n]

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_M x[n-M]$$



***h*[*M*]*x*[*n-M*]** **+...+** ***h*[0]*x*[*n*]**

27

27

FIR Παράδειγμα-1 (a)

- Το FIR Φίλτρο είναι η "ΠΡΩΤΗ ΔΙΑΦΟΡΑ"
  - y[n] = x[n] - x[n-1]
- Γράφουμε την έξοδο ως συνέλιξη
  - Χρειαζόμαστε την κρουστική απόκριση

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

  - Ενας άλλος τρόπος να υπολογιστεί η έξοδος είναι:

$$y[n] = (\delta[n] - \delta[n-1]) * x[n]$$
$$= \delta[n] * x[n] - \delta[n-1] * x[n] = x[n] - x[n-1]$$

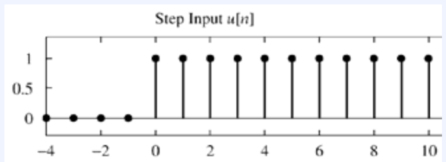
28

28

FIR Παράδειγμα-1 (b)

- Το FIR Φίλτρο είναι η ‘ΠΡΩΤΗ ΔΙΑΦΟΡΑ’
  - y[n] = x[n] - x[n-1]
- Η ΕΙΣΟΔΟΣ είναι το “ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΒΗΜΑ”

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$



- Βρείτε το y[n]

$$y[n] = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

Δυο Μορφές για FIR Συνέλιξη

- **Έξοδος =** y[n] = h[n]*x[n] = x[n]*h[n]

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} h[m]x[n-m] = \sum_{k=n}^{n-M} h[n-k]x[k]$$

- Ισοδυναμια: Αλλάζομε τον δείκτη *m=n-k* ή *k=n-m.*
- Δυο Υλοποιησεις (μηκος h[n] = M+1 < μηκος x[n]):

$$y[n] = \sum_{k=n-M}^{n} x[k]h[n-k] \ : \ \text{Σειριακη (κινουμενο παραθυρο } h\text{)}$$

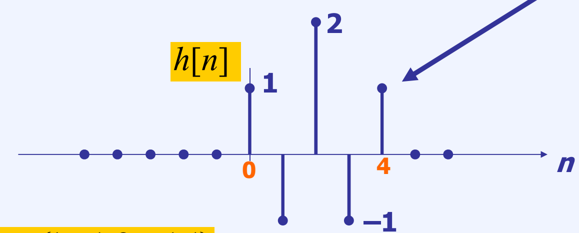
$$= \sum_{m=0}^{M} h[m]x[n-m] \ : \ \text{Παραλληλη}$$

$$y[n] = x[n]h[0] + x[n-1]h[1] + \ldots + x[n-M]h[M]$$

FIR Παράδειγμα-2: Μαθηματικός τύπος για το h[n]

- Χρησιμοποιούμε ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΟΥΣ ΠΑΛΜΟΥΣ για να γράψουμε το h[n]

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4]$$



$$\{b_k\} = \{1, -1, 2, -1, 1\}$$

FIR Παράδειγμα-2: Συνέλιξη

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4]$$

$$x[n] = u[n]$$

n	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	0	1	1	1	1	1	1	1	...
$h[n]$	0	1	−1	2	−1	1	0	0	0
$h[0]x[n]$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$h[1]x[n-1]$	0	0	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
$h[2]x[n-2]$	0	0	0	2	2	2	2	2	2
$h[3]x[n-3]$	0	0	0	0	−1	−1	−1	−1	−1
$h[4]x[n-4]$	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$y[n]$	0	1	0	2	1	2	2	2	...

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

Παραλληλη Υλοποιηση

ΣΕΙΡΙΑΚΗ ΣΥΝΔΕΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

- Έχει σημασία η σειρά των S_1 & S_2;
  - ΟΧΙ ,τα ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ μπορούν να αντιμετατεθούν!
  - ΠΟΙΟΙ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ $\{b_k\}$ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ;

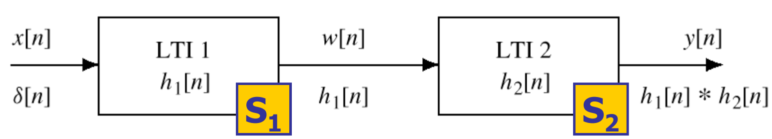


Figure 5.19 A Cascade of Two LTI Systems.

33

33

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΣΥΝΔΕΣΗΣ

- Ποιο είναι το "συνολικό" h[n] ;

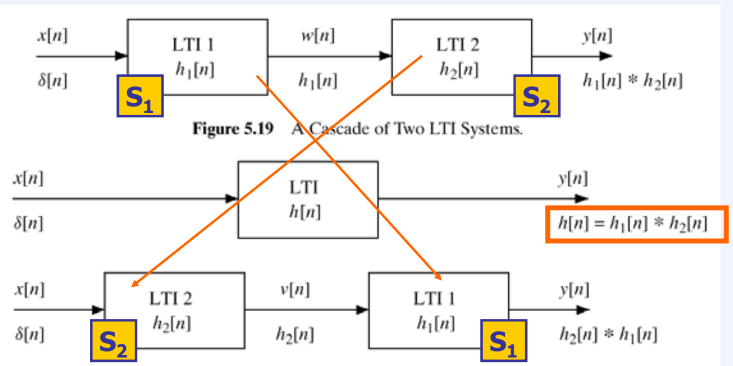


Figure 5.20 Switching the order of cascaded LTI systems.

34

Γραμμικη Συνελιξη και Πινακας Toeplitz

- Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με απόκριση $h(n)=n,\ -1\le n\le 1$ και είσοδο $x(n)$ που είναι μηδενική εκτός του $0\le n\le 4$ δίνεται από:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-1}^{1}h[m]x[n-m]=\sum_{k=0}^{4}x[k]h[n-k]$$

- Η συνέλιξη αυτή μπορεί να γραφεί ως γινόμενο Toeplitz πίνακα επί διάνυσμα (τα σηματα x[n] και h[n] ειναι πεπερασμενης διαρκειας):

$$\begin{bmatrix} y(-1)\\ y(0)\\ y(1)\\ y(2)\\ y(3)\\ y(4)\\ y(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ x(3)\\ x(4)\end{bmatrix}$$

35

35

ΓΧΑ Συστημα ←→ Συνελιξη

Γραμμικό & Χρονικά Αναλλοίωτο (ΓΧΑ) σύστημα $S[\ ]$

Γραμμικότητα: $S\left(\sum_k c_k x_k[n]\right)=\sum_k c_k S\left(x_k[n]\right)$

Χρονικά Αναλλοίωτο: $S\left(x[n-k]\right)=S\left(x\right)[n-k]$

Κρουστική απόκριση: $h[n]=S\left(\delta[n]\right)$

Απόκριση ΓΧΑ συστήματος σε σήμα $x[n]=\sum_k x[k]\delta[n-k]$

$$S(x[n])=S\left(\sum_k x[k]\delta[n-k]\right)=\sum_k x[k]h[n-k]\triangleq(x*h)[n]$$

$$\boxed{S[\ ]\ \text{είναι ΓΧΑ}\ \Leftrightarrow\ S[x]=x*h,\quad h=S[\delta]}$$

36

37

Convolutional Nets (Συνελικτικα Νευρωνικα Δικτυα)

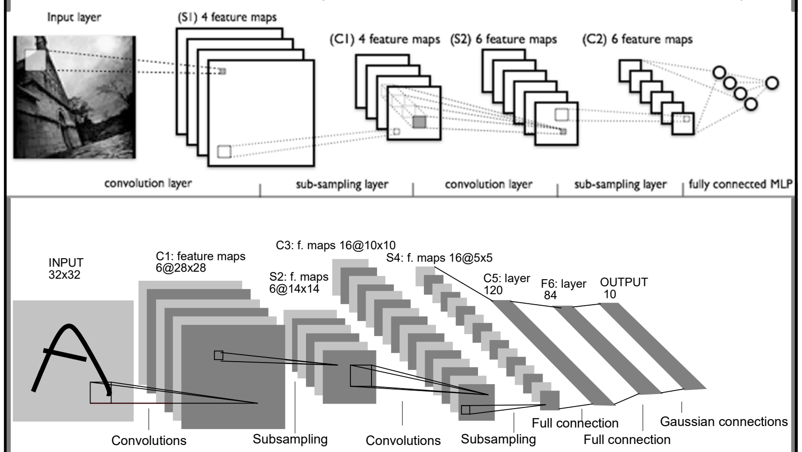
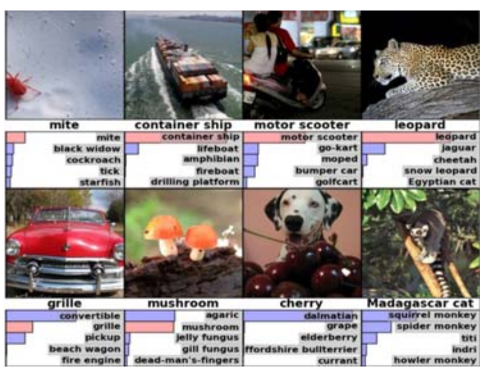


Image Credit: Yann LeCun, Kevin Murphy

37

38

ImageNet Object Classification: top-5 error rates



Humans:5.4%

A. Krizhevsky, I. Sutskever, and G. Hinton. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. *NIPS*13 [18%] (best shallow competitor: 36%)

K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun, Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human-Level Performance on ImageNet Classification, http://arxiv.org/abs/1502.01852, 2015. [4.5%]

S. Ioffe, C. Szegedy, Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training by Reducing Internal Covariate Shift, http://arxiv.org/abs/1502.03167, 2015. [4.5%]

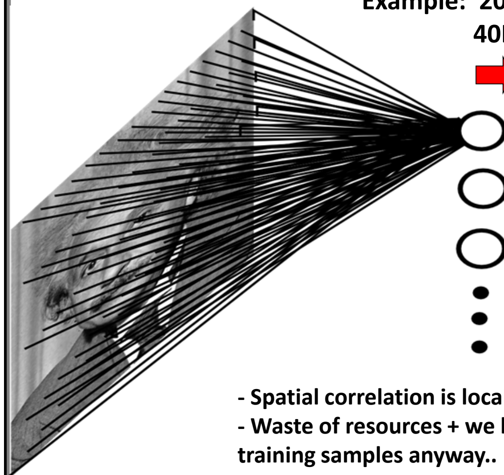
K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun, Deep Residual Learning for Image Recognition, Arxiv, 2015 [3.6%]

38

39

Fully Connected Layer

Example: 200x200 image
40K hidden units
~2B parameters!!!

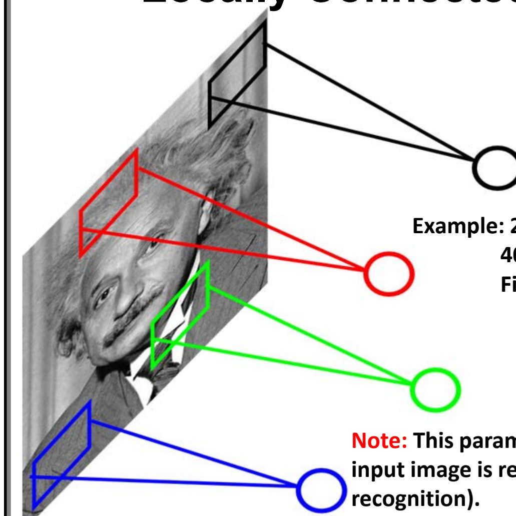


- Spatial correlation is local
- Waste of resources + we have not enough training samples anyway..

39

40

Locally Connected Layer



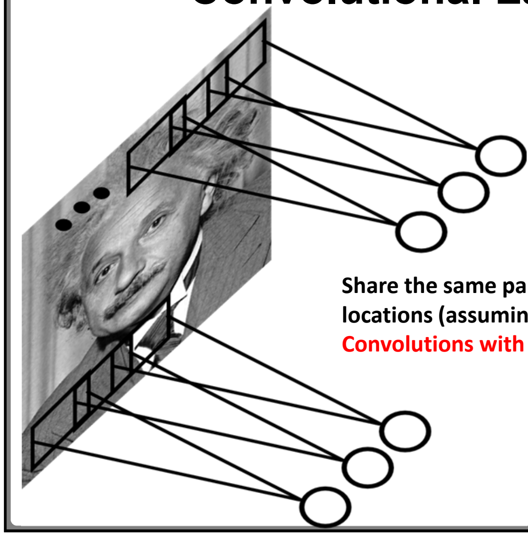
Example: 200x200 image
40K hidden units
Filter size: 10x10
4M parameters

Note: This parameterization is good when input image is registered (e.g., face recognition).

40

Convolutional Layer

41

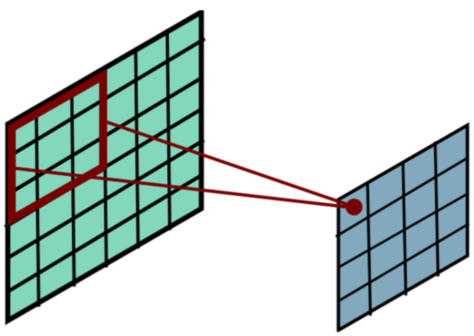


Share the same parameters across different locations (assuming input is stationary):
Convolutions with learned kernels

41

Convolutional Layer

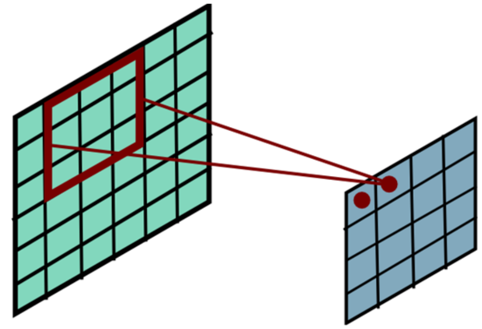
42



42

Convolutional Layer

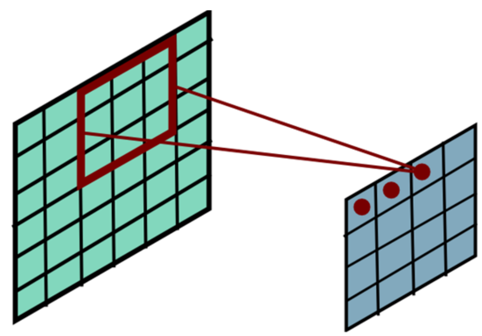
43



43

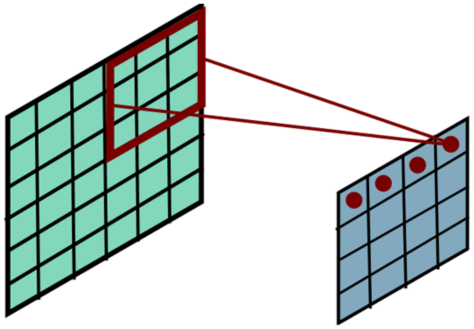
Convolutional Layer

44

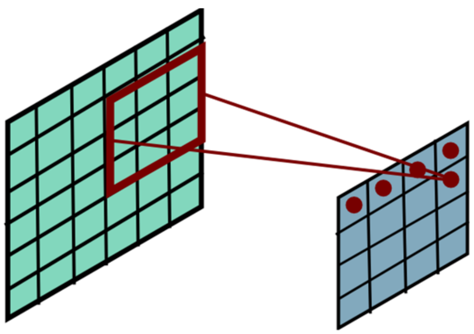


44

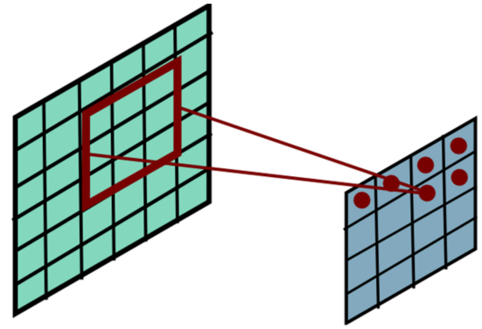
Convolutional Layer



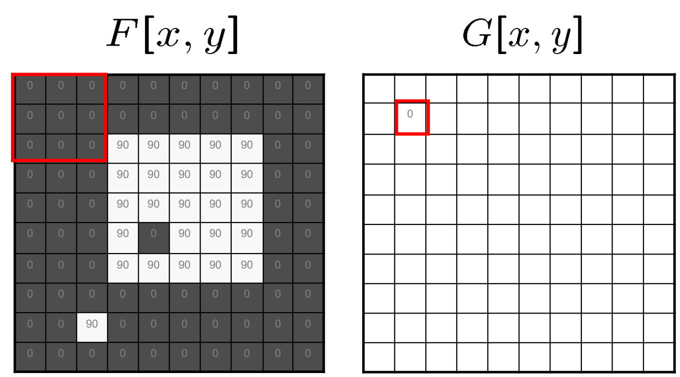
Convolutional Layer



Convolutional Layer



Moving Average in 2D



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Moving Average in 2D

$F[x, y]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$G[x, y]$

	0	10							

Moving Average in 2D

$F[x, y]$

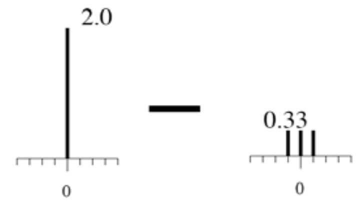
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$G[x, y]$

	0	10	20						

Sharpening Filter

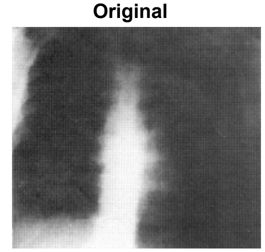
Original

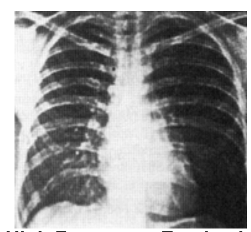


Sharpening filter

Image processing application

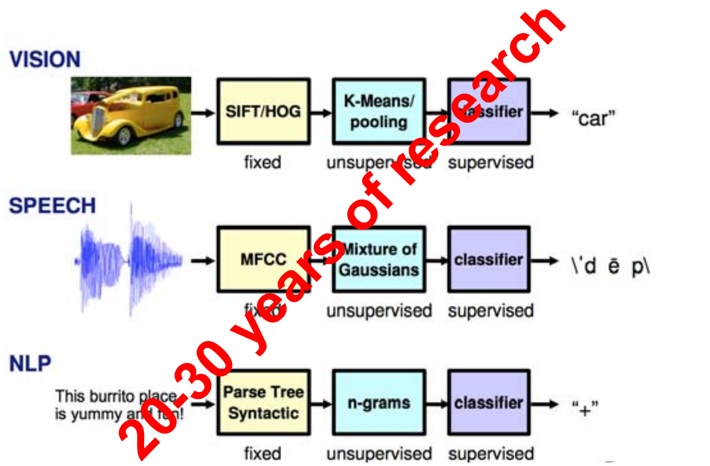
Original





High Frequency Emphasis
+
Histogram Equalization

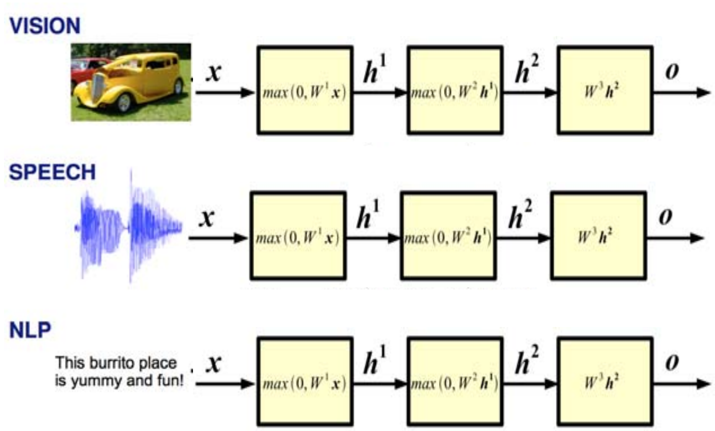
Signal Processing and Machine Learning for AI



slide: I. Kokkinos

53

Deep Learning: learn the features (2013 ---)

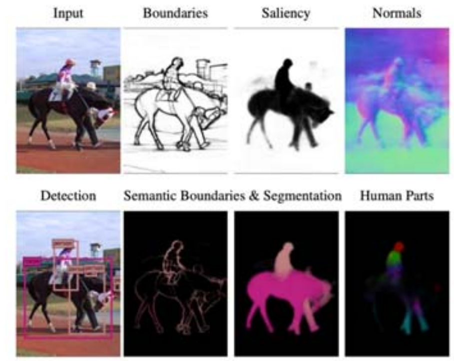


slide: I. Kokkinos

54

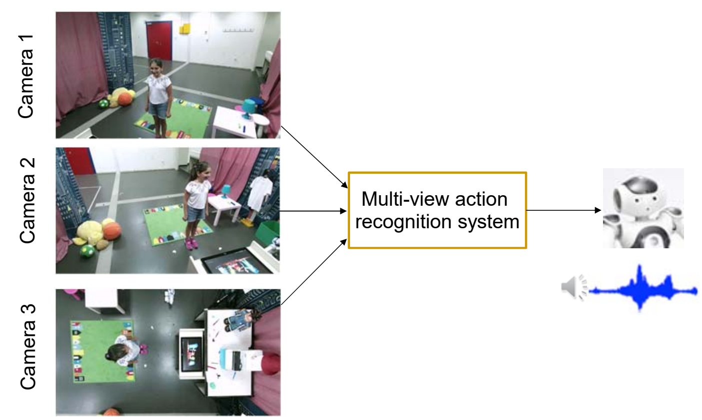
Ubernet: Spatial Multi-task Convolutional Network

- Συνελικτικα Νευρωνικα Δικτυα για επιλυση πολλαπλων χωρικων προβληματων Ορασης Υπολογιστων



[I. Kokkinos. Ubernet: Training a universal convolutional neural network for low-, mid-, and high-level vision using diverse datasets and limited memory. In *Proc. CVPR* 2017.]

55



Αυτοματη Αναγνωριση Δρασεων με Συνελικτικα Νευρωνικα Δικτυα

56

ΣΥΝΕΛΙΞΗ
Σηματων Συνεχους Χρονου

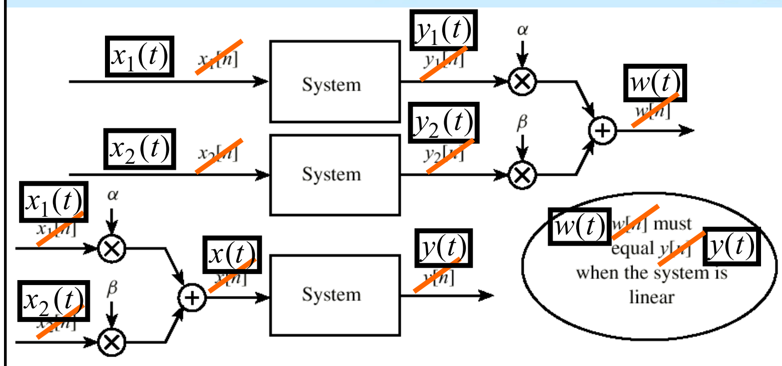
ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ x → y

- ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ (Γραμμική Επαλληλία) = Δύο Ιδιότητες:
- **ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ** πλάτους (Ομογένεια ως προς πολλαπλασιαστικές σταθερές): $\boxed{a \cdot x(t) \;\rightarrow\; a \cdot y(t)}$
  - "Διπλασιασμός της εισόδου διπλασιάζει την έξοδο"
- **ΥΠΕΡΘΕΣΗ** (Αθροιστική Επαλληλία):

$$\boxed{x_1(t) + x_2(t) \;\rightarrow\; y_1(t) + y_2(t)}$$

  - "Άθροιση δύο εισόδων δίνει ως έξοδο το άθροισμα των δύο ξεχωριστών εξόδων"
- Ιδιοι ορισμοί για Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Εξετάζοντας την Γραμμικότητα

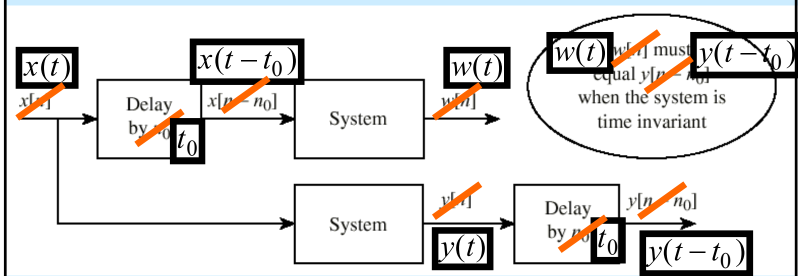


59

ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ

- ΙΔΕΑ:
  - "Η Χρονική Μετατόπιση της εισόδου θα προκαλέσει την ίδια χρονική μετατόπιση στην έξοδο" $\boxed{x(t-t_0) \;\rightarrow\; y(t-t_0)}$
- ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ:
  - Ο τελεστής του συστήματος αντιμετατίθεται με τον τελεστή μετατόπισης

Εξετάζοντας την Time-Invariance



61

61

Παραδειγματα Συστηματων

Σύστημα	Συνεχής Χρόνος	Διακριτός Χρόνος
Διαφοριστής (Differentiator)	$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$	$y(n)=x(n)-x(n-1)$
Ολοκληρωτής (Integrator)	$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$
Καθυστέρηση (Delay)	$y(t)=x(t-t_0)$	$y(n)=x(n-n_0)$
Τρέχων Μέσος (Moving Average)	$y(t)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t-\tau)d\tau$	$y(n)=\frac{1}{2M+1}\sum_{m=-M}^{M}x(n-m)$
Τετραγωνισμός	$y(t)=\lvert x(t)\rvert^2$	$y(n)=\lvert x(n)\rvert^2$
Διαμορφωτής Πλάτους (Amplitude Modulator)	$y(t)=[A+x(t)]\cos(\omega_c t)$	$y(n)=[A+x(n)]\cos(\Omega_c n)$

62

62

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ x(t)

- ΑΠΕΙΡΟ ΜΗΚΟΣ
  - ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ: (t = χρόνος σε secs)
  - ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ
  - ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΑ, π.χ. , για t>0
    - ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΒΗΜΑ : u(t)
- ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΜΗΚΟΥΣ
  - ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΣ ΠΑΛΜΟΣ
- ΣΗΜΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΟΥ ΠΑΛΜΟΥ: δ(t)

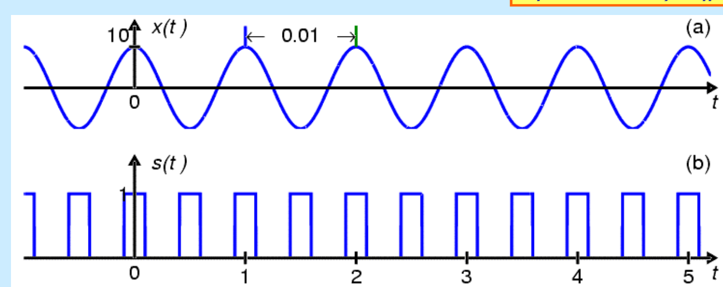
63

63

Σήματα Συνεχούς Χρόνου: ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

$x(t)=10\cos(200\pi t)$

Ημιτονοειδές Σήμα



ΑΠΕΙΡΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Τετραγωνικό Κύμα

64

64

Σήματα Συνεχούς Χρόνου: Μονόπλευρα

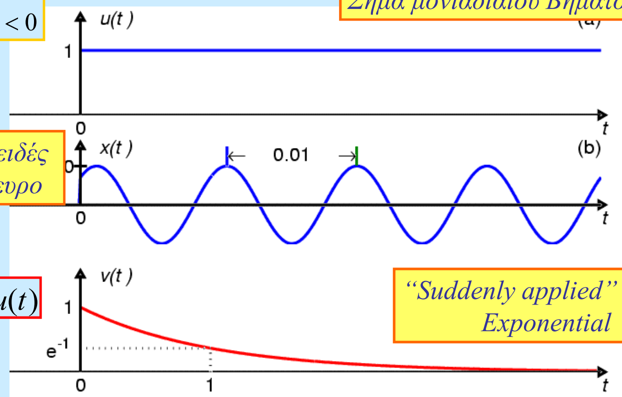
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Σήμα μοναδιαίου Βήματος

Ημιτονοειδές Μονόπλευρο

$$v(t) = e^{-t}u(t)$$

"Suddenly applied" Exponential

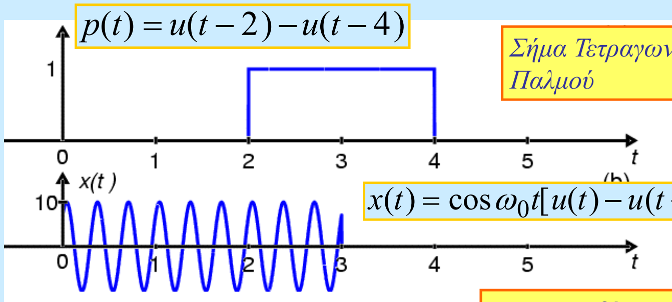


Σήματα Συνεχούς Χρόνου: ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΜΗΚΟΣ

$$p(t) = u(t-2) - u(t-4)$$

Σήμα Τετραγωνικού Παλμού

$$x(t) = \cos\omega_0 t[u(t) - u(t-3)]$$



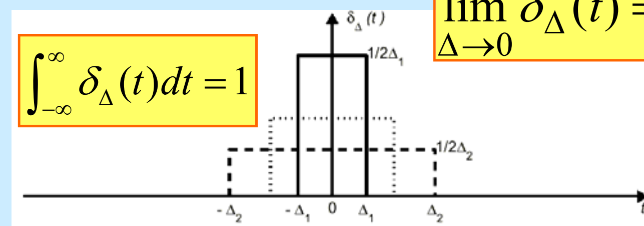
Ημιτονοειδές πολλαπλασιασμένο με τετραγωνικό παλμό

Τι είναι ένας κρουστικός παλμός; (η συνάρτηση Dirac)

- Ένα σήμα (μια κατανομή) συγκεντρωμένο(η) σε ένα σημείο

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\Delta(t)dt = 1$$

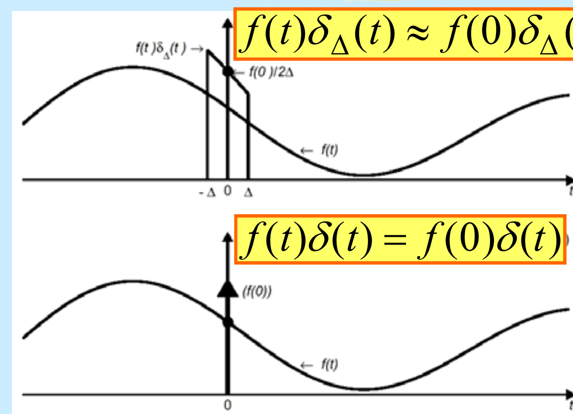


67

Ιδιότητα Δειγματοληψίας

$$f(t)\delta_\Delta(t) \approx f(0)\delta_\Delta(t)$$

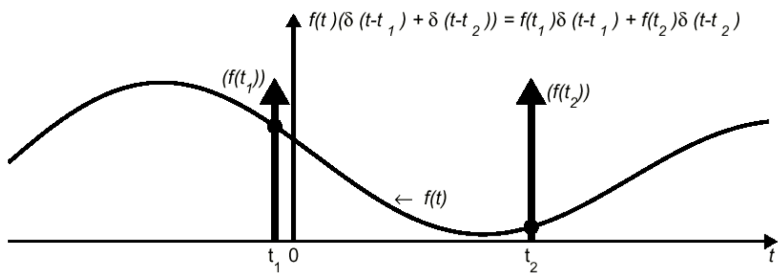
$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$



68

Γενική Ιδιότητα Δειγματοληψίας

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$



69

Ιδιότητες του Κρουστικού Παλμού

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

Συγκεντρωμένος στο t=0

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

Ιδιότητα Δειγματοληψίας

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1$$

Μοναδιαία Επιφάνεια

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση είναι το ολοκλήρωμά του

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

Παράγωγος της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

70

ΓΧΑ Συστηματα Συνεχους Χρονου

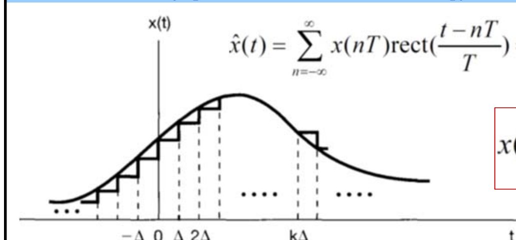
- Αν ένα συνεχούς-χρόνου σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο τότε η έξοδος *y(t)* σχετίζεται με την είσοδο *x(t)* μέσω ενός ***ολοκληρώματος συνέλιξης***

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

όπου *h(t)* είναι η ***κρουστική απόκριση*** του συστήματος.

Αποδειξη: ΣΧ ΓΧΑ Συστημα → Συνελιξη (∫)

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta_T(t-nT)T$$



$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_T(t-nT)T$$

$$\lim_{T\to 0} h_T(t) = h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \triangleq x(t) * h(t)$$

72

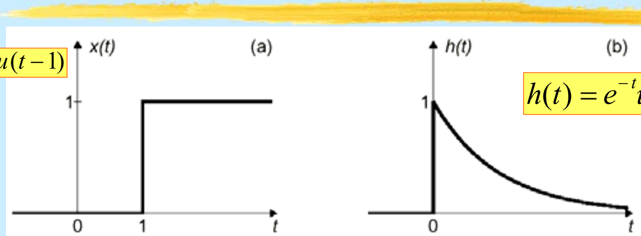
Αναπαρασταση και Συνελιξη Σηματος με Dirac-Κρουστικη

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

- Ολοκληρωση γινομενου σηματος με κρουστικη = τιμη σηματος στο κεντρο της κρουστικης
- Αναπαρασταση σηματος ως γραμμικος συνδυασμος από σταθμισμενες & μετατοπισμενες κρουστικες.
- Συνελιξη σηματος με κρουστικη = σημα: $x(t) * \delta(t) = x(t)$

73

Υπολογισμός μίας Συνέλιξης

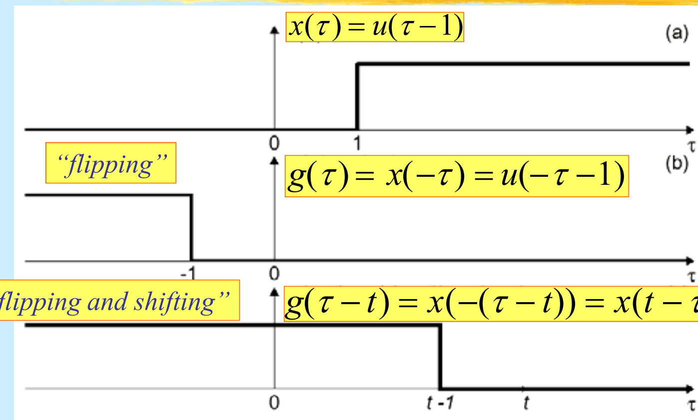


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

74

74

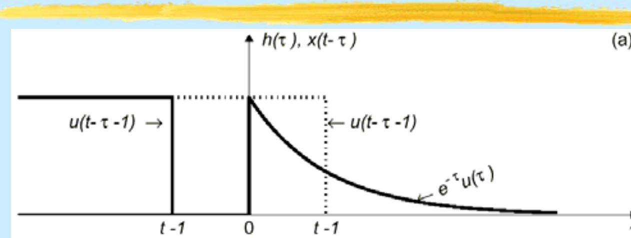
"Flipping and Shifting"



75

75

Υπολογισμός του Ολοκληρώματος



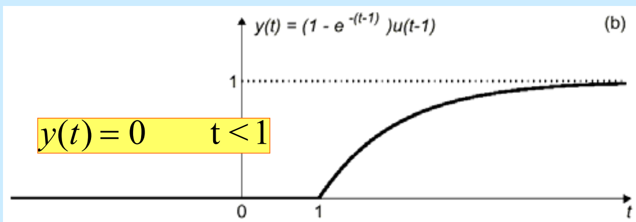
$$
\begin{aligned}
y(t) &= 0 && t-1<0 \\
&= \int_{0}^{t-1} e^{-\tau}d\tau && t-1 \geq 0
\end{aligned}
$$

76

76

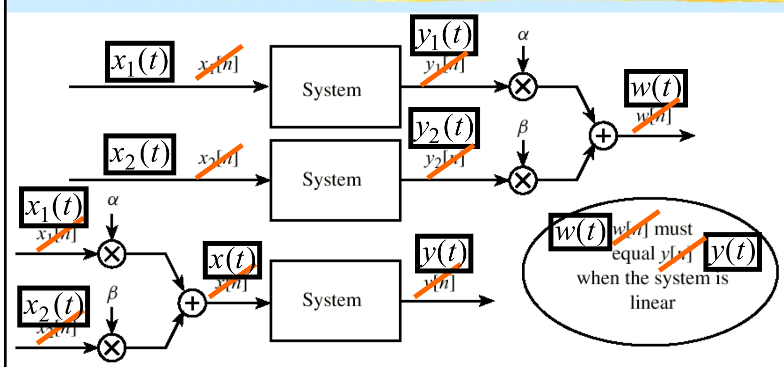
Λύση

$$y(t) = \int_0^{t-1} e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^{t-1}$$
$$= 1 - e^{-(t-1)} \qquad t \geq 1$$



$y(t) = 0 \qquad t < 1$

Εξετάζοντας την Γραμμικότητα

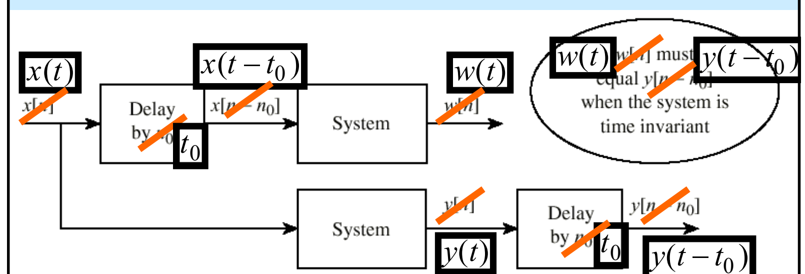


Η Συνέλιξη είναι Γραμμική

Αντικαθιστούμε $x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [ax_1(\tau)+bx_2(\tau)]h(t-\tau)d\tau$$
$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + b\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$= ay_1(t)+by_2(t)$$

Εξετάζοντας την Time-Invariance



Η Συνέλιξη είναι Χρονικά Αναλλοίωτη

Αντικαθιστούμε *$x(t-t_0)$*

$$w(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x((t-\tau)-t_o)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x((t-t_o)-\tau)d\tau$$

$$=y(t-t_o)$$

Η Συνέλιξη είναι Αντιμεταθετική

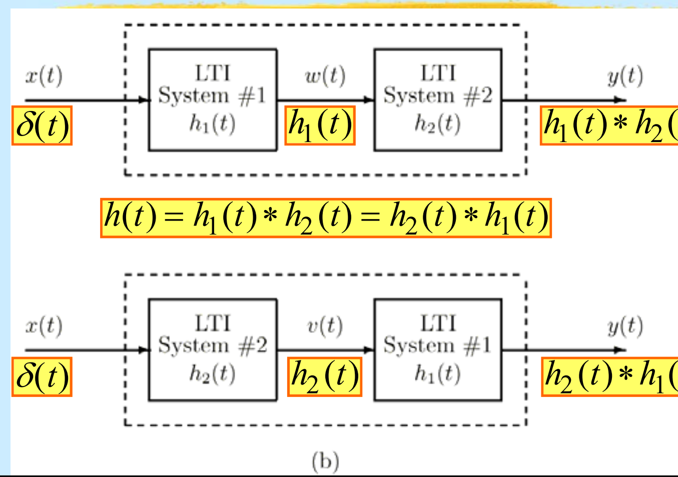
$$h(t)*x(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$\text{let } \sigma=t-\tau \text{ and } d\sigma=-d\tau$$

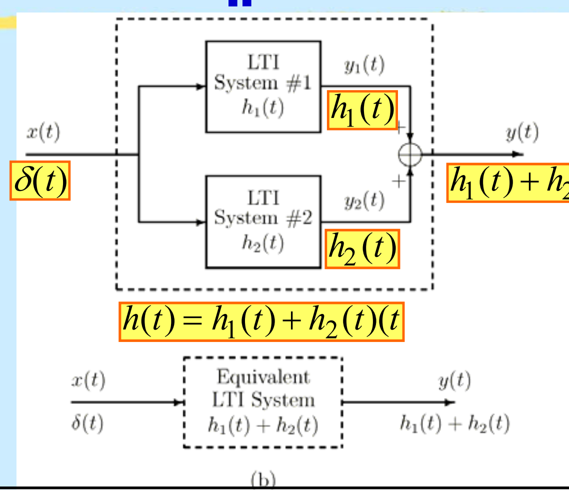
$$\boxed{h(t)*x(t)} \quad = \quad -\int_{+\infty}^{-\infty} h(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

$$= \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma = \boxed{x(t)*h(t)}$$

Σειριακή Σύνδεση LTI Συστημάτων



Παράλληλη Σύνδεση LTI Συστημάτων



Αιτιατά Συστήματα

- Ένα σύστημα είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν η $y(t_0)$ εξαρτάται μόνο από τα $x(\tau)$ *για* $\tau \leq t_0$.
- Ένα ***ΓΧΑ σύστημα*** είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν $\boxed{h(t) = 0 \quad \text{for} \quad t < 0}$

85

85

Αποδειξη Συνθηκης BIBO Ευστάθειας ΓΧΑ Συστηματος

$$\boxed{\text{ΓΧΑ} \;\Rightarrow\; y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau}$$

87

87

Ευστάθεια

BIBO: Bounded Input → Bounded Output

- Ένα σύστημα είναι ευσταθές αν κάθε φραγμένη είσοδος παράγει μία φραγμένη έξοδο.
- Ένα ***ΓΧΑ σύστημα*** συνεχούς χρόνου είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right| dt < \infty}$$

86

86

Ιδιοτητες ΓΧΑ Συστηματος μεσω Κρουστικης Αποκρισης

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ (Causality)	$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ (Stability)	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert h(t) \rvert \, dt < \infty$
ΕΛΛΕΙΨΗ ΜΝΗΜΗΣ (Memoryless)	$h(t) = K \cdot \delta(\tau)$

88

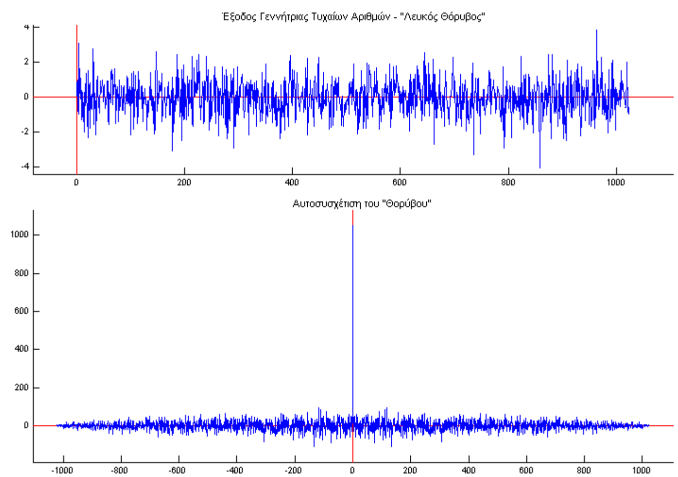
88

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

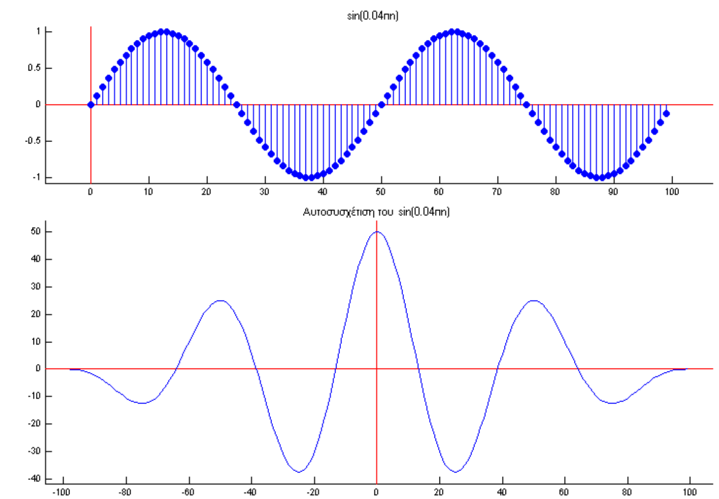
(πραγματικων σηματων)

Ετερο-συσχετιση: $r_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-k] = x[k] * y[-k]$

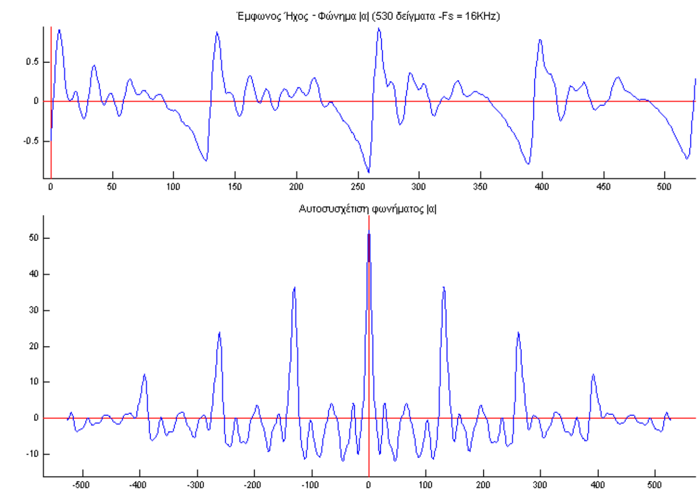
Αυτο-συσχετιση: $r_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-k]$



Σήμα και Αυτοσυσχέτιση Θορύβου από γεννήτρια τυχαίων αριθμών Η/Υ διάρκειας 1024 δειγμάτων.



Ημιτονοειδής συνάρτηση διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας και αυτοσυσχέτιση



Σήμα και αυτοσυσχέτιση έμφωνου ήχου |α| διάρκειας 256 δειγμάτων.

Βιβλιογραφια

- Γ. Καραγιάννης και Π. Μαραγκός, *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2010.
- J. H. McClellan, R. W. Schafer and M. A. Yoder, *Signal Processing First*, Prentice-Hall, 2003.
- I. Kokkinos, *Introduction to Machine Learning*, Lecture Slides, UCL, 2017.

93

93

Demo Συνέλιξης

https://phiresky.github.io/convolution-demo/

94