08.03.22

Monday, 28 February 2022 12:27 PM

Μετασχηματισμός Fourier

$$g(t) \rightleftharpoons G(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$g(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\, e^{+j2\pi ft}\, dt$$

Ιδιότητες

1) Γραμμικότητα: $c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \rightleftharpoons c_1 G_1(t) + c_2 G_2(t)$ (πρέπει να είναι σταθερές ($c_1(t) = c_1 \in \mathbb{R}$))

↳ Ισχύει για πεπερασμένο πλήθος σημάτων

- **Παράδειγμα**

$g(t) = e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}^+$ → άρτιο, πραγματικό

$$\Downarrow$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{at}, & t<0 \\ e^{-at}, & t>0 \\ 1, & t=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow G(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} + \frac{1}{a-j2\pi f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(f) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$ → άρτιο, πραγματικό

- **Παράδειγμα**

$g(t) = e^{-a|t|}\, sgn(t)$ → περιττό, πραγματικό

$$\Rightarrow G(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} - \frac{1}{a-j2\pi f} = \frac{-j4\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2}$$ → περιττό, φανταστικό

2) Κλιμάκωση: $\mathcal{F}\{g(at)\} = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$ (πραγματικό)

Απόδ

$$\mathcal{F}\{g(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(at)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \quad (1)$$

- $a>0$:

$$(1) \Rightarrow \mathcal{F}\{g(at)\} \overset{x=at}{=\!=} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-j2\pi f\frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

- $a<0$:

$$(1) \Rightarrow \mathcal{F}\{g(at)\} = -\frac{1}{a} G\left(\frac{f}{a}\right)$$ ∎

3) Δυαδικότητα: $G(t) \rightleftharpoons g(-f)$

↳ αρχή του δυίσματος

- **Παράδειγμα**

$$A\,\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\text{sinc}(fT) = AT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \quad (3) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{A}T\,\text{sinc}(tT) \rightleftharpoons \cancel{A}\,\text{rect}\left(-\frac{f}{T}\right) \overset{T=2W}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow 2W\,\text{sinc}(t2W) \rightleftharpoons \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

4) Ολίσθηση στο χρόνο: $g(t-t_0) \rightleftharpoons e^{-j2\pi ft_0} G(f)$

Απόδ

$$g(t-t_0) \overset{t-t_0=x}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-j2\pi f(x+t_0)}\, dx = e^{-j2\pi ft_0} G(f)$$ ∎

5) Ολίσθηση στη συχνότητα: $G(f-f_0) \rightleftharpoons e^{j2\pi f_0 t} g(t)$

- **Παράδειγμα**

$$g(t) = A\,\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\cos(2\pi f_c t) = A\,\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\frac{1}{2}\left[e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}\right]$$

$$\overset{(1)}{\underset{(4)(5)}{\Longrightarrow}} G(f) = \frac{AT}{2}\left[\text{sinc}(fT - f_c T) + \text{sinc}(fT + f_c T)\right]$$

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = G(0)$

7) $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\,df = g(0)$

8) • $\frac{d\,g(t)}{dt} \rightleftharpoons G(f)(j2\pi f)$

• $\frac{d^n}{dt^n} g(t) \rightleftharpoons G(f)(j2\pi f)^n$

Απόδ

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, e^{j2\pi ft}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(f)(j2\pi f)}_{\text{"}X(f)\text{"}} e^{j2\pi ft}\, df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df \Rightarrow x(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

Άρα $\frac{d}{dt} g(t) \rightleftharpoons G(f)(j2\pi f)$ ∎

9) • $\frac{d}{df} G(f) \rightleftharpoons (-j2\pi t)\, g(t)$

• $\frac{d^n}{df^n} G(f) \rightleftharpoons (-j2\pi t)^n\, g(t)$

10) $\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau \rightleftharpoons \frac{1}{j2\pi f} G(f) + \frac{1}{2} G(0)\,\delta(t)$ → Αν $G(0)=0$, εδώ απλά ποιείται, δεν εδράν $0\cdot(+\infty)$!

↳ γιατί $\delta(0) = +\infty$

11) $g^*(t) \rightleftharpoons G^*(-f)$

12) • $g_1(t)\cdot g_2(t) \rightleftharpoons G_1(f) * G_2(f)$

• $g_1(t) * g_2(t) \rightleftharpoons G_1(f)\cdot G_2(f)$

13) • $\text{Re}\{g(t)\} \rightleftharpoons \frac{1}{2}\left[G(f) + G^*(-f)\right]$

↳ $\frac{1}{2}\left[g(t) + g^*(t)\right]$

• $\text{Im}\{g(t)\} \rightleftharpoons \frac{1}{2j}\left[G(f) - G^*(-f)\right]$

↓

$\frac{1}{2}\left[g(t) - g^*(t)\right]$

14) $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2\, df$

Χρήσιμοι Μ/Σ

$$e^{-at}u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$e^{at}u(-t) \rightleftharpoons \frac{1}{a-j2\pi f}$$

$$g(t)\cos(2\pi f_c t) \rightleftharpoons \frac{1}{2}G(f-f_c) + \frac{1}{2}G(f+f_c)$$ (sos)