Δευτέρα 28/3/22 7η Διάλεξη: Κοκκίνης 4η

$f(x)=0$ (1)

$x=g(x)$ (2)

previously...

$$\boxed{x_{k+1}=g(x_k),\quad k=0,1,2,\quad x_0 \text{ δοθέν}}$$ γ.ε.π

Θεώρημα 1 (Τοπική Σύγκλιση)

$\bar{x}$ λύση της 2, $|g'(\bar{x})|<1$ $\Big\}$ η γ.ε.μ. συγκλίνει $\forall x_0$ αρκετά κοντά στο $\bar{x}$

Ορισμός 2 Μία συνάρτηση g ορισμένη σε ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ καλείται συστολή στο S (με σταθερά L), αν υπάρχει σταθερά $L\in[0,1)$, τέτοια ώστε:

$$\forall x_1,x_2\in S,\quad |g(x_1)-g(x_2)|\le L|x_1-x_2|$$

Πρόταση 2: Αν η g είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), και υπάρχει σταθερά $L\in[0,1)$:

$$|g'(x)|\le L<1,\quad \forall x\in(a,b)$$

τότε η g είναι συστολή στο $[a,b]$

Σκιαγράφηση απόδειξης

Θ.Μ.Τ σε $x_1,x_2\in[a,b]$: $|g(x_1)-g(x_2)|=|g'(\theta)||x_1-x_2|$

$\le L|x_1-x_2|,\quad \theta\in(a,b)$

Θεώρημα 2 (περιορισμένης σύγκλισης)

- $g: [a,b] \to [a,b]$
- g συστολή στο $[a,b]$ (με σταθερά L)

Έστω (x_k): $x_k = g(x_{k-1})$, $k=1,2,3$ — ΚΑΛΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

Τότε
α) $x_k \in [a,b]$ για κάθε k, για κάθε $x_0 \in [a,b]$
β) Η g έχει στο $[a,b]$ μοναδικό σταθερό σημείο $\bar{x}$
γ) Η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο $\bar{x}$ για κάθε $x_0 \in [a,b]$
δ) Ισχύουν οι εκτιμήσεις:
  i) $|x_k - \bar{x}| \le L^k |x_0 - \bar{x}|$
  ii) $|x_k - \bar{x}| \le \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|$
  iii) $|x_k - \bar{x}| \le \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$

Απόδειξη

α) $x_0 \in [a,b]$, τότε $x_1 = g(x_0) \in [a,b]$ και επαγωγικά
$x_k \in [a,b]$, $\forall k$, $\forall x_k \in [a,b]$

β) Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$ σαν συστολή.
Από Πρόταση 1 η g έχει τουλάχιστον 1 σταθερό σημείο στο $[a,b]$.
Έστω $\bar{x}, \bar{x}'$ δύο ενδεχόμενα σταθερά σημεία της g στο $[a,b]$, με $\bar{x} \neq \bar{x}'$
$|\bar{x} - \bar{x}'| = |g(\bar{x}) - g(\bar{x}')|$ (αφού $\bar{x} = g(\bar{x})$)
$\le L|\bar{x} - \bar{x}'| \implies 1 \le L$ άτοπο

Άρα: Ύπαρξη και Μοναδικότητα Σταθερού σημείου

γ) $|x_k - \bar{x}| = |g(x_{k-1}) - g(\bar{x})| \le L|x_{k-1} - \bar{x}| = L|g(x_{k-2}) - g(\bar{x})|$
$\le L \cdot L |x_{k-2} - \bar{x}| \le \dots \le L^k |x_0 - \bar{x}|$, δηλ $|x_k - \bar{x}| \le L^k |x_0 - \bar{x}|$

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - \bar{x}| \le \lim_{k\to\infty} L^k \underbrace{|x_0 - \bar{x}|}_{\forall x_0 \text{ στο } [a,b]} = 0 \quad \text{διότι } L \in [0,1)$$

$\boxed{\text{Άρα } \lim_{k\to+\infty} x_k = \bar{x}}$ $\boxed{\text{ΣΥΓΚΛΙΣΗ}}$

δ) i) βλέπε απόδειξη του (γ)

ii)
$$|x_k - \bar{x}| = |g(x_{k-1}) - g(\bar{x})| \le L|x_{k-1} - \bar{x}|$$

$$= L|x_{k-1} - x_k + x_k - \bar{x}| \le L|x_{k-1} - x_k| + L|x_k - \bar{x}|$$

$$\Rightarrow (1-L)|x_k - \bar{x}| \le L|x_{k-1} - x_k|$$

$$\Rightarrow \boxed{|x_k - \bar{x}| \le \frac{L}{1-L}|x_{k-1} - x_k|} \quad (1-L>0)$$

iii) $|x_k - x_{k-1}| = |g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})|$

$\le L|x_{k-1} - x_{k-2}| = L|g(x_{k-2}) - g(x_{k-3})| \le$

$\ldots \le L^{k-1}|x_1 - x_0|$

δηλαδή $|x_k - x_{k-1}| \le L^{k-1}|x_1 - x_0|$

και από ii) $\boxed{|x_k - \bar{x}| \le \frac{L}{1-L}|x_{k-1} - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|}$ //

- Η ii είναι καλύτερη από τη iii (όπως φαίνεται και από την απόδειξη της iii, η οποία χρησιμοποιεί την ii)

Όμως: η ii ονομάζεται εκ των υστέρων εκτίμηση (a posteriori)
η iii εκ των προτέρων (a priori)

- η iii μπορεί να υπολογιστεί πριν βρεθεί η προσέγγιση

- Αν έχω απαίτηση $|x_k - \bar{x}| \le \varepsilon$, μπορώ από την iii, $\frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \le \varepsilon$ να βρω το αναγκαίο K

Παράδειγμα Δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in [-1,1]$ η ακολουθία (x_k): $x_k = \cos(x_{k-1})$, $k=1,2,3$ συγκλίνει

$$\boxed{g(x)=\cos x, \quad x\in[-1,1]}$$

Πρέπει να αποδείξω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.2

- $g: [-1,1] \to [-1,1]$
- g παραγωγίσιμη άρα χρησιμοποιώ πρόταση 2

$$|g'(x)| = |-\sin x| \le \underbrace{\sin 1}_{L} < 1$$

$$L = \sin 1 \cong 0.84147$$

δηλαδή g συστολή στο $[-1,1]$

Άρα από Θεώρημα 2 η $x_k = \cos(x_{k-1})$, $k=1,2,\dots$ συγκλίνει στο $\bar{x}$ που είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της $g(x)=\cos x$ στο $[-1,1]$

Έστω, για παράδειγμα, $x_0 = 3/4$,

$x_1 = \cos x_0 = 0{,}731688869$

$x_2 = \cos x_1 = 0{,}744047085$

$\vdots$

$x_9 = \cos x_8 = 0{,}738772335$

$\boxed{x_{10} = \cos x_9 = 0{,}739229580}$

Εκτίμηση: $|x_{10}-\bar{x}| \le \frac{\sin 1}{1-\sin 1}|x_{10}-x_9| = 0.00278$

Ασήμαντη σημείωση: Οι τιμές πηγαίνουν εναλλάξ επειδή $g'(\bar{x}) < 0$

<u>Παράδειγμα</u> Δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ η ακολουθία $(x_k) = \cos(x_{k-1})$, $k = 0,1,2$ συγκλίνει

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, $|x_0| > 1$

$x_1 = \cos x_0 \in [-1, 1]$, και θεωρώντας το x_1 σαν αρχική τιμή η ακολουθία (x_k) συγκλίνει λόγω του προηγούμενου παραδείγματος.