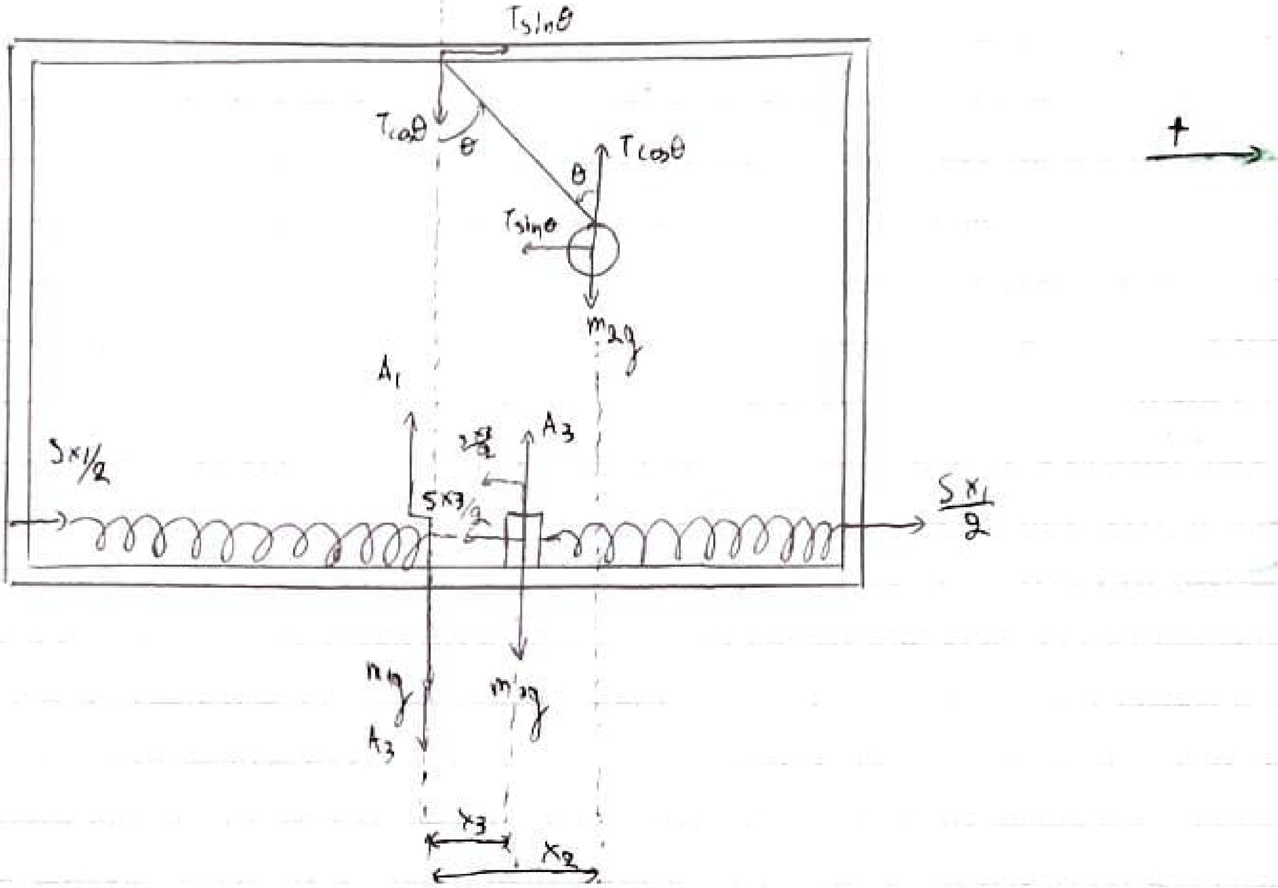
Εξέταση Φυσικής 8/2/2021

Ονοματεπώνυμο: Ιωάννης Τσαντήλας
Όνομα Πατρός: Βασίλειος
Α.Μ.: 03120883

③




α) Για το σώμα 3: $\Sigma F_{x_3} = -\frac{S x_3}{2} - \frac{S x_3}{2} = m_3 \ddot{x}_3 \Rightarrow$

$-S x_3 = m_3 \ddot{x}_3 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_3 + \frac{S}{m_3} x_3 = 0}$ (1)

Για το σώμα 2: $\Sigma F_{y_2} = 0$ (Θεωρούμε ότι $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$) $\Rightarrow$

$T\cos\theta = m_2 g \Rightarrow T = \frac{m_2 g}{\cos\theta}$

$\Sigma F_{x_2} = -T\sin\theta = m_2 \ddot{x}_2$

$\Rightarrow -m_2 g \tan\theta = m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow$

$-g\sin\theta = \ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 + g\frac{x_2 - x_3}{L} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_2 + \frac{g}{L}x_2 - \frac{g}{L}x_3 = 0}$ (2)

Έστω $x_2 = B\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \dot{x}_2 = -B\omega\sin(\omega t+\varphi) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -B\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$

Όμοια, $x_3 = \Gamma\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \ddot{x}_3 = -\Gamma\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$.

$$(1) \Rightarrow -\Gamma\omega^2\cos(\omega t+\varphi) + \frac{s}{m_3}\Gamma\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(-\omega^2 + \frac{s}{m_3}\right)\Gamma = 0 \quad (3)}$$

$$(2) \Rightarrow -B\omega^2\cos(\omega t+\varphi) + \frac{g}{l}B\cos(\omega t+\varphi) - \frac{g}{l}\Gamma\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(-\omega^2 + \frac{g}{l}\right)B - \frac{g}{l}\Gamma = 0 \quad (4)}$$

Άρα, με $\frac{s}{m_3} = 2\omega_0^2$, $\frac{g}{l} = 2\omega_0^2$:

$$(3),(4) \Rightarrow \left.\begin{aligned} (-\omega^2 + 2\omega_0^2)\Gamma + 0\cdot B = 0 \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)B - 2\omega_0^2\Gamma = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \\ -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(-\omega^2 + 2\omega_0^2)^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{2}\,\omega_0}$$

Για το $\Sigma_1$: $\Sigma F_{x1} = m_1\ddot{x}_1 \Rightarrow T\sin\theta + sx_1 = m_1\ddot{x}_1 \Rightarrow m_2 g\tan\theta - sx_1 = m_1\ddot{x}_1 \Rightarrow$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2}{m_1}g\frac{x_2 - x_1}{l} - \frac{s}{m_1}x_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{s}{m_1}x_1 - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l}x_2 + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l}x_1 = 0$$

$$\xrightarrow[\ddot{x}_1 = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)]{x_1 = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$\Rightarrow -A\omega^2 + \frac{>}{m_1} A_* - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l} B + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l} A = 0 \Rightarrow$$

$$-A\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} A - \frac{\omega_0^2}{2} B + \frac{\omega_0^2}{2} A = 0 \Rightarrow$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) A - \frac{\omega_0^2}{2} B = 0$$

2

α) Το σώμα ισορροπεί όταν $\frac{dU}{dx}=0$

$$\dot{U}(x)=\frac{-5Ax^4(B+x^6)+Ax^5 6x^5}{(B+x^6)^2}\Rightarrow$$

$$\dot{U}(x)=\frac{-5ABx^4-5Ax^{10}+6Ax^{10}}{(B+x^6)^2}=\frac{Ax^{10}-5ABx^4}{(B+x^6)^2}$$

$$\dot{U}(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{Ax_0^4(x_0^6-5B)}{(B+x_0^6)^2}=0\xrightarrow[A>0]{x_0>0}x_0^6=5B\Leftrightarrow\boxed{x_0=\sqrt[6]{5B}}$$

Το είδος της ισορροπίας προκύπτει από το $\ddot{U}(x_0)$.

$$\ddot{U}(x)=\frac{(10Ax^9-20ABx^3)(B+x^6)^2-(Ax^{10}-5ABx^4)2(B+x^6)\cdot 6x^5}{(B+x^6)^{4\,3}}\Rightarrow$$

$$\ddot{U}(x)=\frac{10ABx^9+10Ax^{15}-20AB^2x^3-20ABx^9-12Ax^{15}+60ABx^9}{(B+x^6)^3}$$

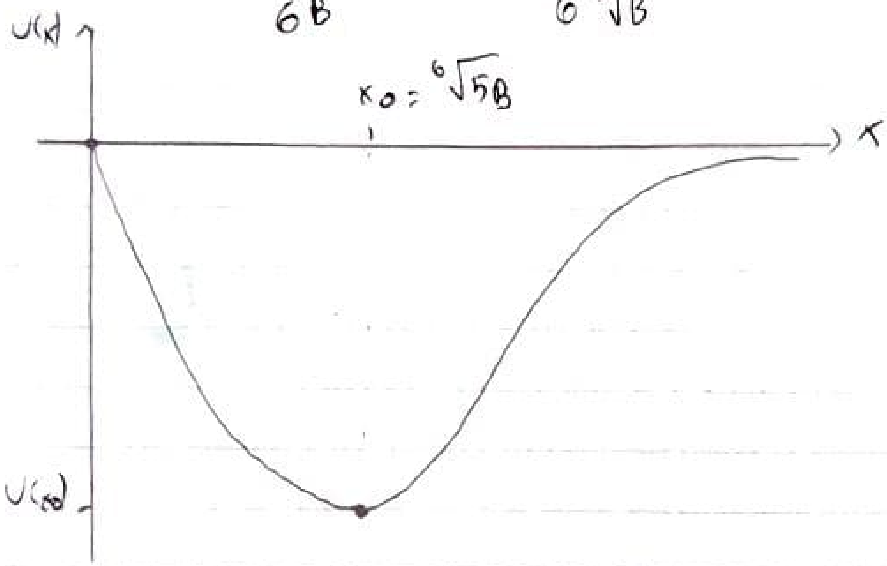
$$\Rightarrow\ddot{U}(x)=\frac{50ABx^9-2Ax^{15}-20AB^2x^3}{(B+x^6)^3}$$

$$\ddot{U}(\sqrt[6]{5B})=\frac{250AB^2\sqrt{5B}-50AB^2\sqrt{5B}-20AB^2\sqrt{5B}}{(6B)^3}$$

$$\ddot{U}(\sqrt[6]{5B})=\frac{180AB^2\sqrt{5B}}{6^3B^3}=\frac{30A\sqrt{5B}}{36B}>0\Rightarrow$$ $\boxed{\text{η ισορροπία είναι ευσταθής}}$

Για την $C_{U(x)}$: Παρουσιάζει στο $x_0 = \sqrt[6]{5B}$ ελάχιστο με

$$U(x_0) = \frac{-A\,(5B)^{5/6}}{6B} = \frac{-A\,5^{5/6}}{6\sqrt[6]{B}}$$




β) $\boxed{U_{min} = U(x_0) = \frac{-A\,5^{5/6}}{6\sqrt[6]{B}}}$, όπως φαίνεται και από το σκαρίφημα του ερωτήματος (α).

γ) ΑΔΕ από το $x_0$ στο $+\infty$:

$$K(x_0) + U(x_0) = \cancel{K_{+\infty}}^{0} + \cancel{U_{+\infty}}^{0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{A \cdot 5^{5/6}}{6\sqrt[6]{B}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{A \cdot 5^{5/6}}{6\sqrt[6]{B}} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{A\,5^{5/6}}{3m\sqrt[6]{B}}}}$$

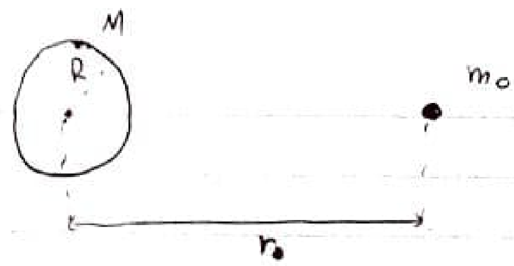
δ) ΑΔΕ από το $x_0$ στο $+\infty$:

$$K'(x_0) + U(x_0) = K_{+\infty} + \cancel{U_{+\infty}}^{0} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot (2v_0)^2 + \frac{A\,5^{5/6}}{6\sqrt[6]{B}} = \frac{1}{2} m v_{+\infty}^2 \Rightarrow$$

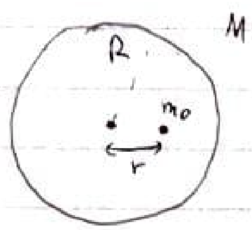
$$2 m v_0^2 + \frac{A\,5^{5/6}}{6\sqrt[6]{B}} = \frac{1}{2} m v_{+\infty}^2 \Rightarrow 2m \frac{A \cdot 5^{5/6}}{3m\sqrt[6]{B}} + \frac{A\,5^{5/6}}{6\sqrt[6]{B}} = \frac{1}{2} m v_{+\infty}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{5A\,5^{5/6}}{6\sqrt[6]{B}} = \frac{1}{2} m\, v_{+\infty}^{2} \Rightarrow \boxed{v_{+\infty} = \frac{A\,5^{11/6}}{3m\sqrt[6]{B}}}$$

① α)




$$F_1(r) = -\frac{G M \cdot m_o}{r^2} \quad , \quad r \geq R$$




$F_2(r) = 0$ (γιατί είναι στο εσωτερικό της σφαίρας, από υπόθεση) , $r \in [0, R)$