ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ

6/5/22 13η Διάλεξη: Κεφάλαιο 7

Shortcut στη Επαναληπτική μέθοδο

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 17 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 - 3x_2 + 20x_3 &= -21 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = +\frac{2}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{17}{10} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{8}x_1^{(k)} - \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{9}{8} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{20}x_1^{(k)} + \frac{3}{20}x_2^{(k)} - \frac{21}{20} \end{cases}$$

Έχω όμως σύγκλιση του πίνακα?

Πόρισμα: Αν ο A έχει αυστηρή ΔΥ (Διαγώνια Υπεροχή) κατά γραμμές,

δηλαδή $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ \forall i = 1, \dots, n$

τότε $\|B\|_\infty < 1 \Rightarrow$ Επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει.

Προσοχή: Το αντίστροφο δεν ισχύει

Απόδειξη: Αφού $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \max \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^{*} < 1 \Rightarrow \|B\|_r < 1 \Rightarrow \|B\|_\infty < 1$$

Άρα ο Jacobi συγκλίνει.

$*$ Τα $\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ ' αποτελούν τα στοιχεία του B.

Άρα στο προηγούμενο παράδειγμα: $|10| > |-2| + |1|$

$|8| > |1| + |1|$

$|20| > |1| + |-3|$

άρα ο A έχει αυστηρή Δ.Υ.

άρα ο Jacobi συγκλίνει

<u>Πόρισμα 2:</u> Αν ο A έχει αυστηρή Δ.Υ. κατά στήλες

δηλαδή $\sum_{\substack{\forall i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$ τότε $\|B\|_1 < 1 \Rightarrow$ Η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \ \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \max_{1\le j\le n} \sum \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \Rightarrow \|B\|_{\Sigma} < 1$$

$\Rightarrow \|B\|_1 < 1$ άρα Jacobi συγκλίνει

Στο διαγώνισμα θα δινόταν έτσι:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 20x_3 &= -21 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 &= 9 \\ 10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 17 \end{aligned}}$$

Παρατηρώ ότι το σύστημα δεν έχει Δ.Υ $\Rightarrow$ δεν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της

Εναλλάσσοντας τη 1η με τη 3η γραμμή το φέρνω σε μορφή με Δ.Υ. και επιλύω

Αν δε μπορεί ισχύουν τα προηγούμενα, χωρίς shortcut

Αποδεικνύεται ότι αν έχουμε ~~αυστηρή~~ μη αυστηρή Δ.Υ (δηλαδή $\geq$ αντί για $>$), αλλά έχουμε ($>$) για τη πρώτη ~~μία~~ από τις γραμμές, έχουμε και πάλι σύγκλιση

Προσοχή: στην κατά στήλες δεν θα ελέγχαμε για την πρώτη στήλη με $\left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| < 1$

αλλά $\left|\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{1}{20}\right| < 1$

δηλαδή διαιρώ με το στοιχείο της διαγωνίου που βρίσκεται στην ίδια γραμμή, όχι στην ίδια στήλη.

Επαναληπτικές Μέθοδοι για την Επίλυση Γραμ. Συστημάτων

$$Ax = b$$

$$(Q-P)x = b$$

$$Qx = Px + b$$

$$x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b$$

$$\cancel{x^{(k+1)} = Q^{-1}Px^{(k)} + Q^{-1}b}$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c}$$

Κάθε σπάσιμο του A σε Q, P είναι μια διαφορετική μέθοδος

Για το Jacobi: $A = D - (-L-U)$

$Q = D, \quad P = -L-U$

Άρα $B = Q^{-1}P = D^{-1}(-L-U)$

που είναι πολύ εύκολο να φτιαχτεί

αφού:

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \longrightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}$$

Ιδέα

x	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1,7	1,195	-1,05
2	2,02	1,04375	-0,96625
3	2,005375	0,99203125	-0,994937

όταν υπολογίζω το $x_2^{(k+1)}$, γιατί να χρησιμοποιήσω το $x_1^{(k)}$ ~~απ~~ ενώ έχω έτοιμο το $x_1^{(k+1)}$?

Πράγματι βγαίνει πιο γρήγορα:

x	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1,7	0,912	-0,998125
2	1,9823125	1,001976563	-0,998819140
3	2,0002772	0,9998177	-1,00004
	(2	1	-1)

Μέθοδος Gauss - Seidel

$$Ax=b \Rightarrow (D+L+U)x=b \Rightarrow (D+L)x=-Ux+b$$

$$\Rightarrow x=-(D+L)^{-1}Ux+(D+L)^{-1}b \Rightarrow x=B_{GS}x+c$$

$$B_{GS}=-(D+L)^{-1}U$$

$$c=(D+L)^{-1}b$$

$$x^{(k+1)}=B_{GS}x^{(k)}+c \xrightarrow[\text{επαναληπτικών εξισώσεων}]{\text{μορφή}}$$

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right\}$$

Μεικτά κριτήρια σύγκλισης: $\|B_{GS}\|_\infty=\|B_{GS}\|_Γ<1$

ή $\|B_{GS}\|_1=\|B_{GS}\|_Σ<1$

ή $\rho(B_{GS})<1$

Για το shortcut:

Πόρισμα: Αν ο A έχει αυστηρή Δ.Υ. κατά γραμμές τότε $\|B_{GS}\|_\infty \le \|B_J\|_\infty$ και επειδή τότε $\|B_J\| < 1$ (πόρισμα 1), θα είναι και $\|B_{GS}\|_\infty < 1$ άρα από κριτήριο σύγκλισης η μέθοδος GS συγκλίνει. Και ισχύει η προσεγγιστική εκτίμηση σφάλματος για τις επαναλήψεις της GS:

$$\| \underset{GS}{x^{(k)}} - \bar{x} \|_\infty \le \frac{\|B_J\|_\infty}{1 - \|B_J\|_\infty} \| \underset{GS}{x^{(k)}} - \underset{GS}{x^{(k-1)}} \|_\infty$$

μόνο νόρμα ∞

Σε παράδειγμα του προηγούμενου μαθήματος:

$$\| x_J^{(3)} - \bar{x} \| \le \frac{0,3}{1-0,3} \| x_J^{(3)} - x^{(2)} \| \simeq 0,0222$$

$$\| x_{GS}^{(3)} - \bar{x} \| \le \frac{\|B_J\|_\infty}{1 - \|B_J\|_\infty} \left\| \begin{pmatrix} 2.0002772 \\ 0.9998177 \\ -1.00004 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.9823125 \\ -1.001976563 \\ -0,99881914 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\simeq 0,00770$$

Υπάρχει περίπτωση να συγκλίνει με GS και να μη συγκλίνει με Jacobi.

Με Gaus Seidel έχουμε ταχύτερη σύγκλιση

Η εκτίμηση αυτή είναι πιο χαλαρή από ότι θα μπορούσε να ήταν αν χρησιμοποιούσαμε τον ίδιο τον $\|B_{GS}\|_\infty$.

Άσκηση: δίνεται το σύστημα $Ax=b$

$$A=\begin{bmatrix}10 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 20\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}9\\ -3\\ 18\end{bmatrix}$$

i) Να ελεγχθεί πρώτα ότι οι μέθοδοι Jacobi και GS συγκλίνουν.

ii) Να εφαρμοστούν οι δύο μέθοδοι και να γίνουν 3 επαναλήψεις με μηδενικό αρχικό διάνυσμα.

iii) Να δωθούν εκτιμήσεις σφάλματος στη 3η επανάληψη αποφεύγοντας τον υπολογισμό του πίνακα επαναλήψεων της μεθόδου GS

Λύση:

i) Ο A έχει αυστηρή Δ.Υ κατά γραμμές αφού

$|10| > |2|+|1|$

$|5| > |1|+|1|$

$|20| > |3|+|1|$

Επομένως οι μέθοδοι Jacobi και GS συγκλίνουν αφού η νόρμα $\|B_{GS}\|_\infty \le \|B_J\|_\infty < 1$

ii) Μέθοδος Jacobi

$$\begin{aligned}10x+2y+z&=9\\ x+5y+z&=-3\\ x+3y+20z&=18\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}x^{(k+1)}&=-\frac{2}{10}y^{(k)}-\frac{1}{10}z^{(k)}+\frac{9}{10}\\ y^{(k+1)}&=-\frac{1}{5}x^{(k)}-\frac{1}{5}z^{(k)}-\frac{3}{5}\\ z^{(k+1)}&=-\frac{1}{20}x^{(k)}-\frac{3}{20}y^{(k)}+\frac{18}{20}\end{aligned}$$

$$\cancel{\|B_J\|}\quad B_J=\begin{bmatrix}0 & -2/10 & -1/10\\ -1/5 & 0 & -1/5\\ -1/20 & -3/20 & 0\end{bmatrix},\quad \|B_J\|_\infty=\|B_J\|_r=0,4$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	0	0	0
1	0,9	-0,6	0,9
2	0,93	-0,96	+0,945
3	0,9975	-0,975	0,9975

$\|x^{(3)}-\bar{x}\|_\infty \le \frac{0,4}{1-0,4}\max\{0,0675,\ 0,015,\ 0,052\} = 0,045$

Métodos Gauss Seidel:

$$x^{(k+1)} = -\frac{2}{10} y^{(k)} - \frac{1}{10} z^{(k)} + \frac{9}{10}$$

$$y^{(k+1)} = -\frac{1}{5} x^{(k+1)} - \frac{1}{5} z^{(k)} - \frac{3}{5}$$

$$z^{(k+1)} = -\frac{1}{20} x^{(k+1)} - \frac{3}{20} y^{(k+1)} + \frac{18}{20}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	0	0	0
1	0,9	-0,78	0,972
2	0,9588	-0,98616	0,999984
3	0,99	-0,9994432	1,00005494

$$\|x^{(3)} - \bar{x}\|_\infty = \frac{\|B_J\|_\infty}{1 - \|B_J\|_\infty} \, 0,0384336 = 0,025622$$