ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Θ. ΟΛΟΚΛ. ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

I. Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt, \qquad (1)$$

όπου $R(u,v)$ ρητή συνάρτηση 2 μεταβλητών u, v.

Το ολοκλ. (1) μετασχηματίζεται σε μιγαδικό ολοκλ. πάνω στον κύκλο
$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$
ως εξής:
Θέτουμε $z = e^{it}$, οπότε $\bar{z} = 1/z$ κ'

$$\cos t = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin t = \frac{1}{i}\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$dz = i e^{it}\,dt = iz\,dt$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos t = \dfrac{z^2+1}{2z} \\[2ex] \sin t = \dfrac{z^2-1}{2iz} \\[2ex] dt = \dfrac{dz}{iz} \end{array} \right\} \qquad (2)$$

$$(1) \xRightarrow{(2)}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \int_\gamma R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Παραδείγματα:

(i) $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\sin t} = ?$

$$I = \int_\gamma \frac{dz/iz}{5+4\,\frac{z^2-1}{2iz}} = \int_\gamma \frac{dz}{2z^2+5iz-2}$$

$$2z^2+5iz-2 = 2z^2+4iz+iz-2$$

$$= 2z(z+2i)+i(z+2i) = (z+2i)(2z+i)$$

ρίζες: $-2i$, $-i/2$

Μόνο η $-i/2 \in \operatorname{int}\gamma$ *

$\Longrightarrow \quad I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -i/2)$,

όπου $\quad f(z) = \frac{1}{2z^2+5iz-2}$.

Το $-i/2$ είναι απλός πόλος της f

$$\Longrightarrow \quad I = 2\pi i \left.\frac{1}{4z+5i}\right|_{z=-i/2} = \underline{\underline{2\pi/3}}.$$

(ii) $I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} = ?$

Είναι $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} \overset{\xi = 2\pi - t}{=} \int_{\pi}^{0} \frac{(-d\xi)}{(3+\cos\xi)^2} = I$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = 2I$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(3+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{z}{(z^2+6z+1)^2}\,dz$$

$z^2+6z+1=0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

Μόνο η $z_1 = -3+2\sqrt{2} \in \operatorname{int}\gamma^*$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{i}\, 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_1]$$

$$= 4\pi \operatorname{Res}[f(z), z_1],$$

όπου $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+6z+1)^2} = \dfrac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$.

Το z_1 είναι διπλός πόλος της f, οπότε

$$\mathrm{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right]'$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left[\frac{z}{(z-z_2)^2}\right]'$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left[\frac{1}{z-z_2} + z_2\frac{1}{(z-z_2)^2}\right]'$$

$$= -\frac{1}{(z-z_2)^2} - \frac{2z_2}{(z-z_2)^3}\Bigg|_{z=z_1}$$

$$= -\frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3} = -\frac{-6}{(4\sqrt{2})^3}$$

$$= \frac{6}{4^3\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3}{64\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\ I = 4\pi\frac{3}{64\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.$$

ΙΙ. Γενικευμένα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt,$$

όπου P, Q πολυώνυμα τέτοια ώστε

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ Q(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \\ \bullet\ \deg Q - \deg P \geq 2. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Θεώρημα ΙΙ.1: Εάν ισχύουν οι (3), τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right],$$

όπου $z_1, z_2, \ldots, z_\nu \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του Q με θετικό Im.

Παράδειγμα:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, dt = ?$$

$P(z) = z^2$, $Q(z) = 1+z^4$, $Q(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\deg Q - \deg P = 4 - 2 = 2$$

Ρίζες του Q: $\pm a$, $\pm \bar{a}$, $a = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Μόνο οι $a, -\bar{a}$ έχουν $\operatorname{Im} > 0$

$$\xRightarrow{\text{Θ.ΙΙ.1}} \quad I = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, a\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, -\bar{a}\right)\right].$$

$\forall \rho \in \{a, -\bar{a}\}$, $P(\rho) \neq 0$, $Q(\rho) = 0$, $Q'(\rho) \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, \rho\right) = \frac{P(\rho)}{Q'(\rho)} = \frac{\rho^2}{4\rho^3}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{4}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left(\bar{a} + \overline{-\bar{a}}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\bar{a} - a\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{2}\left(a - \bar{a}\right) = -\frac{\pi i}{2} 2i \operatorname{Im}(a)$$

$$= \pi/\sqrt{2}.$$

III. Γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\lambda t} dt, \quad \lambda > 0$$

όπου P, Q πολυώνυμα με

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ Q(t) \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}. \\ \cdot\ \deg Q - \deg P \geq 1 \end{array}\right\} (4)$$

Θεώρημα III.1. Εάν ισχύουν οι (4), τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\lambda t} dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}(f, z_k), \text{ όπου}$$

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$, z_k, $1 \leq k \leq \nu$, οι ρίζες του Q με $\operatorname{Im} > 0$.

Παραδείγματα:

(i) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^2-2t+2}\, dt = ?$$

Είναι $I = \mathrm{Re}(J)$, όπου

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-2t+2} e^{i\pi t} dt.$$

$P(z)=1$, $Q(z) = z^2-2z+2$, $Q(t)\neq 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$

$Q(z)=0 \Leftrightarrow z = a$ ή $\overline{a}$, $a = 1+i$.

Επειδή $\mathrm{Im}(a)>0$, έχουμε

$$J \overset{\Theta.\mathrm{III}.1}{=\!=} 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^2-2z+2}, a\right)$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{i\pi z}}{2z-2}\right|_{z=a}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i\pi a}}{2(a-1)} = \pi i \frac{e^{\pi(-1+i)}}{i}$$

$$= \pi \cdot e^{-\pi} \cdot e^{i\pi} = -\pi e^{-\pi}.$$

$$\Longrightarrow \quad I = -\pi e^{-\pi}.$$

(ii) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 \sin t}{(1+t^2)^2}\, dt = ?$$

$$I = \mathrm{Im}(J), \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^2)^2} e^{it}\, dt.$$

$P(z) = z^3$, $Q(z) = (1+z^2)^2$, $\deg Q - \deg P = 1$.

Ρίζες του Q: $\pm i$, $\mathrm{Im}(i) > 0$

$\Longrightarrow J = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), i)$, όπου

$f(z) = \dfrac{z^3 e^{iz}}{(1+z^2)^2}$. Το i είναι διπλός πόλος της f, οπότε

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \left[(z-i)^2 \frac{z^3 e^{iz}}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right]'$$

$$= \lim_{z \to i} \left[\frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2} \right]'$$

$$= \left. \frac{(3z^2 e^{iz} + iz^3 e^{iz})(z+i) - 2z^3 e^{iz}}{(z+i)^3} \right|_{z=i}$$

$$= \left. \frac{z^2 e^{iz} \left[(3+iz)(z+i) - 2z \right]}{(z+i)^3} \right|_{z=i}$$

$= \cdots = 1/4e$ κλπ