Παρασκευή 8/4/22 10η Διάλεξη: Κεφάλαιο 5

Δείκτης Κατάστασης ενός πίνακα A

$K(A) = \mu(A) = cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
για κάποια φυσική νόρμα

προφανώς $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1$

[γιατί οποιαδήποτε φυσική νόρμα του I ισούται με 1:

$$\|I\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \vec{0}}} \frac{\|I \cdot x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \vec{0}}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \vec{0}}} 1 = 1$$
]

Επίδειξη του γιατί ο Δείκτης Κατάστασης σχετίζεται με την ευστάθεια:

$$Ax = b \quad (1)$$
$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b) \quad (2)$$

μικρή μεταβολή ΔA και μικρή μεταβολή Δb μπορεί να προκαλέσει μεγάλη μεταβολή Δx?

$$(2) \Rightarrow \cancel{Ax} + A\Delta x + \Delta A(x + \Delta x) = \cancel{b} + \Delta b$$

$$\Rightarrow A \cdot \Delta x = -\Delta A(x + \Delta x) + \Delta b$$

$$\Rightarrow \Delta x = -A^{-1} \cdot \Delta A(x + \Delta x) + A^{-1}\Delta b$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)\| + \|A^{-1}\Delta b\| \quad \text{(τριγωνική ανισότητα)}$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x + \Delta x\| + \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$ (Ιδιότητα των νορμών και ιδιότητα φυσικών νορμών)

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|x + \Delta x\|}{\|A\| \cdot \|x\|} \cdot \|\Delta A\| + \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \cdot \|x\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \left(\frac{\|x\| + \|\Delta x\|}{\|x\|} \right) + K(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$\left\{ b = Ax \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|b\|} \geq \frac{1}{\|A\| \cdot \|x\|} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \left(1 + \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \right) + K(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \left(1 - K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) \leq K(A) \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Με την προϋπόθεση ότι $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{K(A)}$,

$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)}$$

! Στις εξετάσεις θα βάλει ή μόνο ΔA ή μόνο Δb ! Να είμαστε σε θέση να επαναλάβουμε την απόδειξη και για τις δύο περιπτώσεις

Όσο μικρότερο το $K(A)$ τόσο καλύτερα για την ευστάθεια

* $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ και $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ (φυσικές νόρμες)

<u>Άσκηση</u> Να υπολογιστεί ο δείκτης κατάστασης $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ του πίνακα Hilbert H_3:

$$H_3 = (h_{ij}), \quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{matrix}, \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$[H_3 \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$|1| > |1/2|$ και $|1| > |1/3|$

$$r_2 \leftarrow r_2 - \tfrac{1}{2} r_1 \quad \& \quad r_3 \leftarrow r_3 - \tfrac{1}{3} r_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/12 & 4/45 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad |1/12| \geq |1/12|$$

$$r_3 \leftarrow r_3 - r_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/180 & 1/6 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{aligned} x_{11} + \tfrac{1}{2} x_{21} + \tfrac{1}{3} x_{31} &= 1 \\ \tfrac{1}{12} x_{21} + \tfrac{1}{12} x_{31} &= -1/2 \\ \tfrac{1}{180} x_{31} &= -1/6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_{11} &= 9 \\ x_{21} &= -36 \\ x_{31} &= 30 \end{aligned}\right.$$

όμοια $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 192 \\ -180 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -180 \\ 180 \end{pmatrix}$

Άρα $H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

$$K_\infty(H_3) = \|H_3\|_\infty \cdot \|H_3^{-1}\|_\infty = \|H_3\|_r \cdot \|H_3^{-1}\|_r = \frac{11}{6} 408 = 748 > 1$$

Ειδικά σε αυτό το παράδειγμα, λόγω συμμετρίας του H_3,

$$K_1(H_3) = \|H_3\|_1 \cdot \|H_3^{-1}\|_1 = 748,$$

Ωστόσο δεν είναι βέβαιο ότι οι διαφορετικές νόρμες να δώσουν ίδιο K.

Όμως η ποιότητα, δηλαδή η σχέση του με το 1 θα είναι παρόμοια.

Γενική Επαναληπτική Μέθοδος για την επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

$Ax = b$

$(Q-P)x = b$

$Qx = Px + b$

$x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b$

$x = Bx + c \quad (1)$

$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c \quad (2)$

$x^{(0)}$, γνωστό δοθέν

Θεώρημα: $(x^{(k)}) \longrightarrow x$ (λύση του συστήματος) $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = \vec{0}$$

Απόδειξη: Ορίζω $e^{(k)} = x^{(k)} - x, \quad k=0,1,2,\dots$

$$(2)-(1) \Rightarrow x^{(k+1)} - x = B(x^{(k)} - x)$$
$$\Rightarrow e^{(k+1)} = B e^{(k)}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Επαγωγικά: $e^{(k)} = B^k \cdot e^{(0)}$ (3)

• Έστω $\lim_{k\to\infty} B^k = \vec{0} \xRightarrow{\text{ορισ}} \lim_{k\to\infty} \|B^k\| = 0$ (4)

για κάποια φυσική νόρμα.

$$\|e^{(k)}\| = \|B^k e^{(0)}\| \leq \|B^k\| \cdot \|e^{(0)}\|$$

Οπότε $(4) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|e^{(k)}\| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|_\infty = 0 \xRightarrow{\text{ορισ}} \boxed{\lim_{k\to\infty} (x^k - x) = 0}$

Αντίστροφο:

Έστω $\lim_{k\to\infty} (x^{(k)} - x) = \vec{0}$

τότε $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|_1 = 0, \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Έστω $\boxed{x^{(0)} = x + \varepsilon_i}$, $i=1,2,3,\dots n$ όπου $\varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ γραμμή

$$x^{(k)} - x = e^{(k)} = B^k \cdot e^{(0)} = B^k (x^{(0)} - x)$$

$$\Rightarrow x^{(k)} - x = B^k \cdot \varepsilon_i = i\text{-στήλη του } B$$

(Υπόθεση) $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|_1 = 0 \Rightarrow \lim \|B^k \cdot \varepsilon_i\| = 0$

Ισχύει $\forall i = 1,2,3,\dots n$, Άρα $\forall$ στήλη του B, οπότε

$\lim_{k\to\infty} \|B^k\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = \vec{0}$, αφού $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_\Sigma$, βλέπε προηγούμενο μάθημα.

Πόρισμα: Αν για μια φυσική νόρμα πίνακα $\|B\| < 1$ τότε $(x^{(k)}) \to x \quad \forall x^{(0)} \in R^n$

Απόδειξη: $\|B^k\| \leq \|B\|^k$

Αν $\|B\| < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|B\|^k = 0 \to \lim_{k\to\infty} \|B^k\| = 0$

$\overset{\text{όριο}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} B^k = \vec{0} \overset{\text{Θεωρ}}{\Longrightarrow} (x^{(k)}) \to x$ (λύση)

!Προσοχή! : το Αντίστροφο δεν ισχύει, σε αντίθεση με το Θεώρημα.
(Αφού μπορεί να υπάρχει άλλη νόρμα τ.ω $\|B\| < 1$)

Πόρισμα 2: $\rho(B) < 1 \Leftrightarrow (x^{(k)}) \to \bar{x}$

Δύσκολη εφαρμογή, λόγω μεγάλου φόρτου υπολογισμού της ρ

Εκτιμήσεις Σφάλματος

$x = Bx + c \quad (1)$
$x^{(k)} = B x^{(k-1)} + c \quad (2)$

$(2)-(1) \Rightarrow x^{(k)} - x = B(x^{(k-1)} - x) = B^2(x^{(k-2)} - x) = \ldots = B^k(x^{(0)} - x)$

$x^{(k)} - x = B^k(x^{(0)} - x)$

$\Rightarrow \|x^{(k)} - x\| \leq \|B^k\| \|x^{(0)} - x\| \quad (3)$

$\Rightarrow \boxed{\|x^{(k)} - x\| \leq \|B\|^k \|x^{(0)} - x\| \quad (4)}$

- $\|x - x^{(k-1)}\| = \|x - x^{(k)} + x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$

$\|x - x^{(k-1)}\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$

$$\|x - x^{(k-1)}\| \le \|B\| \cdot \|x - x^{(k-1)}\| + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$(1 - \|B\|)\, \|x - x^{(k-1)}\| \le \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$\|B\| < 1 \longrightarrow \|x - x^{(k-1)}\| \le \frac{1}{1 - \|B\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad (5)$$

$\cancel{\|x - x^{(k-1)}\| \le}$ Προκύπτει αν στο άμεσο αποτέλεσμα του (2) - (1) βαρέσουμε νόρμες

$$\|x - x^{(k)}\| \le \|B\| \cdot \|x - x^{(k-1)}\|$$

$$\overset{(5)}{\Longrightarrow} \boxed{\|x - x^{(k)}\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad (6)}$$

$$\underset{(4)}{\longrightarrow} \boxed{\|x - x^{(k)}\| \le \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x_1^{(1)} - x^{(0)}\| \quad (7)}$$

περίπου

$\|x^{(k)} - x\| \le \|B\|^{k-1} \|x^{(1)} - x\|$

Για κάθε φυσική νόρμα.

Μόνο για νόρμα $\|\cdot\|_2$:

$$\boxed{\|x^{(k)} - x\|_2 \le (\rho(B))^k \|x^{(0)} - x\|_2} \quad (8)$$

Τα κόκκινα είναι εκτιμήσεις σφάλματος.
Η (4) δεν είναι εφαρμόσιμη (αφού x άγνωστο)
Η (6) είναι πιο ακριβής από την (7)

Με βάση τον Κολέτσο δε πειράζει να μη καταλάβατε τίποτα, στο επόμενο μάθημα θα τα δούμε σε ασκήσεις (όλα παλιά θέματα)

Η (7) μας επιτρέπει να βρούμε k για επιθυμητή ακρίβεια

Κριτήριο Διακοπής:
- $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le \varepsilon$
- $\dfrac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} \le \varepsilon$