Παρασκευή 20/5/22 17η Διάλεξη: Κολίτσος 9

Άσκηση Να βρεθεί το πολυώνυμο και το σφάλμα παρεμβολής Lagrange για τη συνάρτηση $f(x)=x^4$, $x\in[0,3]$ στα σημεία $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Λύση: $n=3$, $p_3\in\Pi_3$, $p_3(x)=\sum_{i=0}^{3} l_i(x)f(x_i)=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+l_2(x)f(x_2)+l_3(x)f(x_3)$

$$\Rightarrow p_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\cdot f(x_0)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$$

$$\Rightarrow p_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}\cdot \underset{f(0)}{0}+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}\cdot\underset{f(1)}{1}+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}\underset{f(2)}{16}$$

$$+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}\cdot\overset{f(3)}{81}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_3(x)=6x^3-11x^2+6x}$$

$f'(x)=4x^3$
$f''(x)=4\cdot3\cdot x^2$
$f'''(x)=4\cdot3\cdot2x$
$f^{(4)}(x)=4\cdot3\cdot2\cdot1=4!$

Σφάλμα

$$|f(x)-p_3(x)|=\left|\frac{f^{(4)}(x)(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\right|$$

$$=\left|\frac{\cancel{4!}(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{\cancel{4!}}\right|\le\max_{0\le x\le3}|Q(x)|$$

$Q'(x)=0\Rightarrow x=3/2,\ x=\frac{3}{2}+\sqrt{5}/2,\ x=\frac{3}{2}-\sqrt{5}/2$

$\max_{0\le x\le 3}\{|Q(x)|\}=Q(3/2\pm\sqrt{5}/2)=1$

Άρα $|f(x)-p_3(x)|\le 1$

Άσκηση $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x = [0,1] \\ 0, & x \in [1,2] \end{cases}$

Να βρεθεί το $p_2(x)$ στα $x_0 = 0$, ~~$x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$~~ $x_1 = 1$ $x_2 = 2$
και $\max\limits_{0 \le x \le 2} |f(x) - p_2(x)|$

$$p_2(x) = l_0(x) \underbrace{f(0)}_{=1} \cancel{+ l_1(x) f(1/3) + l_2(x) f(x_2)}$$

$$+ l_1(x) \underbrace{f(1)}_{=0} + l_2(x) \underbrace{f(2)}_{=0}$$

$$= l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot 1 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

Προσοχή εδώ στο $[0,2]$ δεν εφαρμόζεται το θεώρημα σφάλματος Lagrange που απαιτεί η f να ανήκει στο $C^{n+1}[a,b]$, δηλαδή εδώ $f \in C^3[a,b]$

$$\max_{0 \le x \le 1} |f(x) - p_2(x)| = \max_{0 \le x \le 1} \left| 1 - x - \frac{x^2-3x+2}{2} \right| = 1/8 = a$$

$$\max_{1 \le x \le 2} |f(x) - p_2(x)| = \max_{1 \le x \le 2} \left| 0 - \frac{x^2-3x+2}{2} \right| = b$$

$$\max_{0 \le x \le 2} |f(x) - p_2(x)| = \max\{a, b\}$$

Πολυώνυμο Παρεμβολής: Μορφή Newton:

$$p_n(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)} + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Πολυώνυμο παρεμβολής: Μορφή Newton

Με την προηγούμενη μέθοδο αν αυξήσω τη διαμέριση αλλάζει πλήρως το p.
Θα ήθελα μια μέθοδο στην οποία αν ήθελα να αυξήσω την ακρίβεια θα προσέθετα απλά όρους μεγαλύτερου βαθμού.

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} p_n(x_0) = f(x_0) \\ (1) \Rightarrow p_n(x_0) = a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$\left.\begin{array}{l} p_n(x_1) = f(x_1) \\ (1) \Rightarrow p_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow a_0 + a_1(x_1-x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1(x_1-x_0) = f(x_1)-f(x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}} = f[x_1, x_0]$$

$$(f[x_1,x_0] = f[x_0,x_1])$$

Με τον ίδιο τρόπο: $a_2 = f[x_2,x_1,x_0] = \dfrac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$

$$= \frac{\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} - \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

Γενικά $\quad a_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} = f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_n,\dots,x_1]-f[x_{n-1},\dots,x_0]}{x_n-x_0}$

Παράδειγμα: $f(x)=x^3$, Πολυώνυμο παρεμβολής με μορφή Newton στα σημεία $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=2$ προσθέτω $x_3=1$

x_i	$f[x_i]=f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	
-1	-1		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \dfrac{0-(-1)}{0-(-1)} = 1$	
0	0		$f[x_0,x_1,x_2]$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \dfrac{8-0}{2-0} = 4$	
2	8		$f[x_1,x_2,x_3]$
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{1-8}{1-2} = \dfrac{-7}{-1} = 7$	
1	1		

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} = \frac{1-4}{-1-2} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$p_2(x) = -1 + 1(x-(-1)) + 1(x-(-1))(x-0)$$
$$= -1 + x+1 + x^2+x = x^2+2x$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{7-4}{1-0} = 3$$

$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{3-1}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Άρα $p_3(x) = p_2(x) + 1(x-(-1))(x-0)(x-2)$

$$= x^2+2x + (x+1)x(x-2)$$
$$= x^2+2x + x^3-2x^2 + x^2 - 2x = x^3$$

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ Πολυώνυμο παρεμβολής με μορφή Newton

$x_0=0$ $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$

x_i	$f[x_i]=f(x_i)$
0	0
1/3	1/2
1	1

$$f[x_0,x_1] = \frac{1/2-0}{1/3-0} = 3/2$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{1-1/2}{1-1/3} = 3/4$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{3/4-3/2}{1-0} = -3/4$$

$$p_2(x) = 0 + \frac{3}{2}(x-0) - \frac{3}{4}(x-0)(x-1/3)$$