ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 20

Διάλεξη: 26 Νοεμβρίου 2020

Προηγούμενα επεισόδια: ΔΕ του Bessel

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad (\nu\geq 0)$$

Λύση με Frobenius: $r_1=+\nu \qquad r_2=-\nu$

Εύρεση $y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\nu}$

$$a_0\nu(\nu-1)x^{\nu}+a_1(\nu+1)\nu x^{\nu+1}+\sum_{m=2}^{\infty} a_m(m+\nu)(m+\nu-1)x^{m+\nu}$$

$$+\,a_0\nu x^{\nu}+a_1(\nu+1)x^{\nu+1}+\sum_{m=2}^{\infty} a_m(m+\nu)x^{m+\nu}$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2}x^{m+\nu}$$

$$-\nu^2a_0x^{\nu}-\nu^2a_1x^{\nu+1}+(-\nu^2)\sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{m+\nu}=0$$

$$a_0\underbrace{[\cancel{\nu^2}-\cancel{\nu}+\cancel{\nu}-\cancel{\nu^2}]}_{0}x^{\nu}+a_1[\cancel{\nu^2}+\underbrace{\nu+\nu+1}_{2\nu+1}-\cancel{\nu^2}]x^{\nu+1}+$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\Big[a_m\big[(m+\nu)(m+\nu-1)+(m+\nu)-\nu^2\big]+a_{m-2}\Big]x^{m+\nu}=0 \qquad \forall x$$

$$a_1(2\nu+1)=0 \overset{\nu\geq 0}{\Rightarrow} \boxed{a_1=0}$$

$$[\;]=0 \Rightarrow a_m\big[(m+\nu)(m+\nu)-\nu^2\big]=-a_{m-2} \qquad m=2,3,4$$

$\underline{a_1 = 0}$ $\quad a_m = -\dfrac{1}{(m+\nu)^2 - \nu^2}\, a_{m-2} \quad m = 2, 3, 4, \ldots$

$$a_m = -\frac{1}{(m+2\nu)\, m}\, a_{m-2} \quad m = 2, 3, 4, \ldots$$

Παρατηρείστε ότι τότε: $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$ Μόνο ζυγοί όροι.

Για $m=2$ $\quad a_2 = -\dfrac{1}{(2+2\nu)\,2}\, a_0 = -\dfrac{1}{2^2(\nu+1)}\, a_0$

Για $m=4$ $\quad a_4 = -\dfrac{1}{(4+2\nu)\,4}\, a_2 = -\dfrac{1}{2^2\, 2\,(\nu+2)}\, a_2 = +\dfrac{1}{2^4\, 2\,(\nu+1)(\nu+2)}\, a_0$

Για $m=6$ $\quad \underline{a_6} = -\dfrac{1}{(6+2\nu)\,6}\, a_4 = -\dfrac{1}{(\nu+3)\,2^2\, 3}\, a_4 = -\dfrac{1}{2^6\, \underline{2\, 3}\, (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}\, a_0$

Γενικός όρος: $\quad a_{2m} = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m}\, m!\, (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}\, a_0 \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Γενικός όρος: $a_{2m} = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m}\, m!\, (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}\, a_0$ $\quad m=0,1,2,$ $(a_0=a_0)$

$a_{2m+1} = 0$ $\qquad y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\nu+m}$

6.1 Συνάρτηση Bessel για ν=n=ακέραιο ($J_n(x)$)

πχ $\nu=0$ $\quad x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

ή $\underline{\nu=1}$ $\quad x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\, m!\, \underline{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}}\, a_0 \qquad m=0,1,2$$

Επιλογή a_0; Μέχρι τώρα $a_0=1$. $\quad n!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$

Ιδέα: $a_0 = \dfrac{1}{n!}$ Ο Bessel διάλεξε $a_0 = \dfrac{1}{2^n\, n!}$ τότε

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n}\, m!\, (n+m)!}$$

$$\boxed{a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n}\, m!\, (n+m)!}}$$

Για $m = 0, 1,$

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+n}\, m!\, (n+m)!} x^{2m+n} = J_n(x)$$

Συνάρτηση Bessel
1ου είδους
βαθμού n

Παρατήρηση: Συγκλίνει για όλα τα x (καλή σειρά)