Βιομηχανική Ηλεκτρονική

Θ. Παπαδόπουλος, Υποψήφιος Διδάκτορας
Α. Αντωνόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Οκτώβριος 2019

Ηλεκτρική Ισχύς

Στόχος του παρόντος είναι η αποσαφήνιση των εννοιών της ενεργού και άεργου ισχύος. Αρχικά δίνονται οι ορισμοί κάθε μεγέθους και στη συνέχεια γίνεται προσπάθεια να ερμηνευτούν αυτές από τη φυσική και τη μαθηματική τους πλευρά.

Μορφές Ισχύος

- Στιγμιαία Ισχύς - Instantaneous Power
- Φαινόμενη Ισχύς - Apparent Power
- Ενεργός Ισχύς - Active Power
- Άεργος Ισχύς - Reactive Power

Σε κάθε υπό μελέτη σύστημα ισχύος, πρέπει να προσδιορίζεται επακριβώς το μέγεθος όλων των ισχύων, καθώς αυτές καθορίζουν τη διαστασιολόγηση των υλικών και αποτελούν απαραίτητες παραμέτρους προκειμένου το σύστημα να λάβει έγκριση και να χρησιμοποιείται με ασφάλεια.

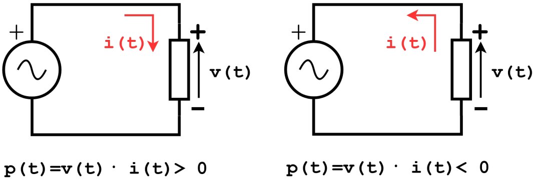
Ορισμοί

Στιγμιαία Ισχύς

Η στιγμαία ισχύς είναι το γινόμενο της τάσης και του ρεύματος, στο πεδίο του χρόνου:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \tag{1}$$

Θετική τιμή συνεπάγεται ροή ισχύος από την πηγή προς το φορτίο, ενώ αρνητική από το φορτίο προς την πηγή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Θετική και Αρνητική Στιγμιαία Ισχύς

Ορισμοί

Ενεργός Ισχύς

Η ενεργός ισχύς είναι η μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος και α-ποτελεί την καταναλωθείσα ή ωφέλιμη ισχύ.

Εφόσον αναφερόμαστε σε περιοδικά σήματα, η ενεργός ισχύς δίνεται από την Εξίσωση 2, ήτοι η μέση τιμή της p(t), σε βάθος μιας περιόδου T:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \tag{2}$$

Ορισμοί

Φαινόμενη Ισχύς

Η φαινόμενη ισχύς είναι το γινόμενο της RMS (Root-Mean-Square) τιμής της τάσης και του ρεύματος:

$$|S| = \tilde{V} \cdot \tilde{I} \tag{3}$$

και ισχύει πάντα η σχέση $|S| \geq P$.

Η φαινόμενη περιλαμβάνει και ένα άλλο μέγεθος ισχύος, εκτός της ενεργού, το οποίο δεν παράγει ωφέλιμο έργο σε βάθος μιας περιόδου.

Υπενθυμίζεται ότι η RMS τιμή ενός μεγέθους δίνεται από την Εξίσωση 4:

$$\tilde{X} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} \tag{4}$$

Ορισμοί

Μη-Ενεργός Ισχύς

Η μη-ενεργός ισχύς εκφράζει μια ποσότητα ισχύος, η οποία σε βάθος μιας περιόδου ταλαντώνεται μεταξύ της πηγής και του φορτίου. Ουσιαστικά η φαινόμενη ισχύς αποτελεί το διανυσματικό άθροισμα της ενεργού και της μη-ενεργού ισχύος και συνεπώς:

$$N = \sqrt{S^2 - P^2} \tag{5}$$

Μπορεί να διαιρεθεί σε δύο επιμέρους μορφές:

- Q_n: μη-ενεργός ισχύς, η οποία οφείλεται στη διαφορά φάσης τάσης και ρεύματος, της ίδιας συχνότητας. Καλείται, επίσης, συχνά και άεργος ισχύς.
- D: μη-ενεργός ισχύς, η οποία οφείλεται σε τάση και ρεύμα διαφορετικής συχνότητας. Καλείται, επίσης, ισχύς παραμόρφωσης.

ΜΗΚ - Μόνο Βασική Αρμονική

Στην περίπτωση της ΜΗΚ (Μόνιμη Ημιτονοειδής Κατάσταση) και για τάση και ρεύμα χωρίς ανώτερο αρμονικό περιεχόμενο (καθαρά ημίτονα), οι προηγούμενες σχέσεις απλοποιούνται στους παρακάτω γνωστούς τύπους[α΄]

$$P = \tilde{V} \cdot \tilde{I} \cdot \cos(\varphi) \tag{6}$$

$$N = Q = Q_1 = \tilde{V} \cdot \tilde{I} \cdot \sin(\varphi) \tag{7}$$

$$|S| = \tilde{V} \cdot \tilde{I} = \sqrt{P^2 + N^2} \tag{8}$$

$$D = 0 \tag{9}$$

όπου φ η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος.

Σε αυτήν την περίπτωση, η ισχύς παραμόρφωσης είναι μηδέν, αφού δεν υπάρχουν ανώτερες αρμονικές. Αυτό συνεπάγεται, όπως φαίνεται και από την Εξίσωση (7), ότι η Q_1 αποτελεί το σύνολο της άεργου ισχύος N.

[α΄] θα αποδειχθούν στο Κεφάλαιο "Μαθηματική Προσέγγιση"

Ισχύς και Ανώτερες Αρμονικές

Ωστόσο, στα ηλεκτρονικά ισχύος σπανίως υπάρχουν καθαρά ημιτονοειδή μεγέθη, καθώς οι μετατροπείς είναι μη γραμμικά συστήματα και δημιουργούν ανώτερες αρμονικές στην τάση ή/και στο ρεύμα.

Αρμονικό Περιεχόμενο

Από την ανάλυση Fourier είναι γνωστό πως κάθε περιοδικό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα ενός ημιτόνου, με συχνότητα τη βασική αρμονική και άπειρων άλλων ημιτόνων, με συχνότητα ακέραια πολλαπλάσια της βασικής, όπως φαίνεται στην Εξίσωση (10):

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot \cos\left(n\omega t + \varphi_n\right) \tag{10}$$

Ισχύς και Ανώτερες Αρμονικές

RMS Τιμή Σήματος με Αρμονικές

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της RMS τιμής, από την Εξίσωση (4), το $\tilde{X}$ είναι πλέον το διανυσματικό άθροισμα της RMS τιμής κάθε επιμέρους αρμονικής, ήτοι:

$$\tilde{X} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X_n^2}{\sqrt{2}} \right)} \tag{11}$$

Ενεργός Ισχύς

Ωφέλιμη ισχύς μπορεί να παραχθεί μόνο από τάση και ρεύμα ίδιας συχνότητας[α´], συνεπώς:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n \cdot \tilde{I}_n \cdot \cos(\varphi_n) \tag{12}$$

[α´] θα αποδειχθεί στο Κεφάλαιο "Μαθηματική Προσέγγιση"

Ισχύς και Ανώτερες Αρμονικές

Άεργος Ισχύς

Κατά παρόμοιο τρόπο, η άεργος ισχύς που οφείλεται στη διαφορά φάσης τάσης και ρεύματος ίδιας συχνότητας, δίνεται από την Εξίσωση (13):

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n \cdot \tilde{I}_n \cdot \sin(\varphi_n) \tag{13}$$

ενώ η ισχύς παραμόρφωσης, από την Εξίσωση (14):

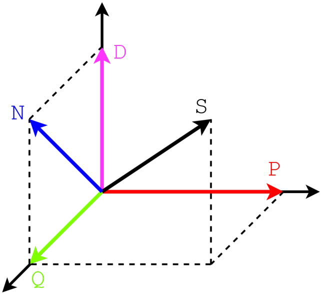
$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\sum_{k \neq j} V_k^2 I_j^2 + V_j^2 I_k^2 - 2 V_k I_k V_j I_j \cos(\varphi_k - \varphi_j)} \\ &= \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \end{aligned} \tag{14}$$

Ισχύς και Ανώτερες Αρμονικές

Φαινόμενη Ισχύς

Η φαινόμενη ισχύς δίνεται από την Εξίσωση (15):

$$|S| = \sqrt{P^2 + N^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} = \tilde{V}\tilde{I} \tag{15}$$



Σχήμα 2: Αναπαράσταση των S, P, Q, D στον Διανυσματικό Χώρο

Ισχύς και Ανώτερες Αρμονικές

Διευκρίνηση!

Επ' ουδενί ο παραπάνω ορισμός των Q και D δεν είναι μονοσήμαντος, αλλά εξαρτάται από τη στοχοθεσία της ανάλυσης, όπως θα δειχθεί στη συνέχεια.

Εξίσου ορθή θα ήταν μια ανάλυση, η οποία θεωρεί το ως μη-ενεργό (άεργο) ισχύ το N χωρίς να το διαχωρίζει σε Q και D, ή που θα τα διαχώριζε με διαφορετικό τρόπο.

Σε τελική ανάλυση, άεργος ισχύς είναι η διαφορά μεταξύ φαινόμενης $|S|$ και ενεργού P ισχύος, γνωρίζοντας πως σχηματίζει με την τελευταία ένα ορθοκανονικό σύστημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 και αναδεικνύεται από την Εξίσωση 5.

Φυσική Ερμηνεία Άεργου Ισχύος

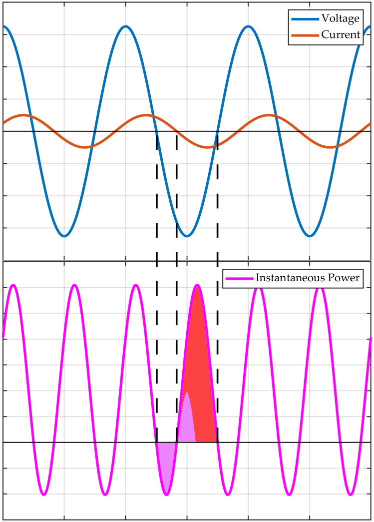
Άεργος Ισχύς Q_n

Όπως αναφέρθηκε, μία μορφή άεργου ισχύος οφείλεται στην διαφορά φάσης τάσεως και ρεύματος της ίδιας συχνότητας. Αυτή η διαφορά, συνεπάγεται πως υπάρχουν χρονικά διαστήματα στα οποία τάση και ρεύμα είναι ετερόσημα και συνεπώς η στιγμιαία ισχύς $p(t)$ λαμβάνει και αρνητικές τιμές.

Υπάρχουν, δηλαδή, χρονικά διαστήματα στα οποία το φορτίο επιστρέφει μέρος της ισχύος που έλαβε - και αποθήκευσε, στην πηγή.

Αυτό φαίνεται γραφικά στο Σχήμα 3. Η ροζ περιοχή είναι η ενέργεια που ταλαντώνεται μεταξύ του φορτίου και της πηγής (Q_n), ενώ η κόκκινη η ωφέλιμη ή ενεργός ισχύς (P).

Φυσική Ερμηνεία Άεργου Ισχύος



Σχήμα 3: Αναπαράσταση της Q_n

Φυσική Ερμηνεία Άεργου Ισχύος

Ισχύς Παραμόρφωσης D

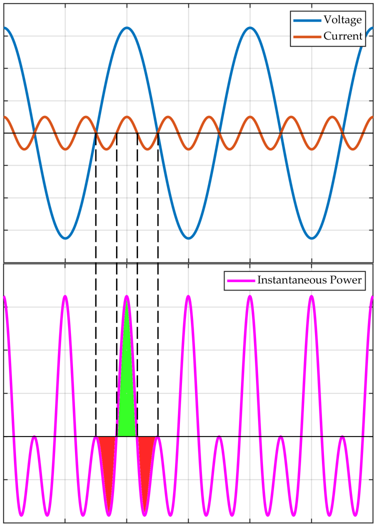
Θεωρώντας έναν μετατροπέα, ο οποίος συνδέεται στο δίκτυο και το ρεύμα εισόδου είναι παλμικό, το τελευταίο μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα άπειρων ημιτόνων. Κάθε συνιστώσα του ρεύματος πολλαπλασιάζεται με το καθαρό ημίτονο της τάσης του δικτύου. Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται η τάση του δικτύου και η τρίτη αρμονική του ρεύματος.

Όπως παρατηρείται, η στιγμιαία ισχύς λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Σε βάθος μιας περιόδου της $p(t)$, το εμβαδόν που περικλείεται στα αρνητικά (κόκκινη περιοχή), είναι ίσο με αυτό που περικλείεται στα θετικά (πράσινη περιοχή). Συνεπώς η συνολική ενεργός ισχύς είναι μηδέν[α΄].

Το ίδιο συμβαίνει και με τις υπόλοιπες ανώτερες αρμονικές του ρεύματος.

[α΄] Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί από τον ορισμό (Εξίσωση (2))

Φυσική Ερμηνεία Άεργου Ισχύος



Σχήμα 4: Αναπαράσταση της D

Μαθηματική Ερμηνεία

Μόνο Βασική Αρμονική

Έστω η τάση και το ρεύμα που δίνονται από τις Εξισώσεις (16) και (17), αντίστοιχα:

$$v(t) = V_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{V_1}) \tag{16}$$

$$i(t) = I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{I_1}) \tag{17}$$

Ορίζουμε τη γωνία του φορτίου θ_1 ως:

$$\theta_1 = \varphi_{V_1} - \varphi_{I_1} \tag{18}$$

και συνεπώς $\varphi_{V_1} + \varphi_{I_1} = 2\varphi_{V_1} - \theta_1$

Μαθηματική Ερμηνεία

Στιγμιαία Ισχύς

Η στιγμιαία ισχύς είναι

$$\begin{aligned}
p(t) &= V_1 I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{V_1}) \cos(\omega_1 t + \varphi_{I_1}) \\
&= \frac{1}{2} V_1 I_1 \left[\cos(\varphi_{V_1} - \varphi_{I_1}) + \cos(2\omega_1 t + \varphi_{V_1} + \varphi_{I_1})\right] \\
&= \frac{V_1}{\sqrt{2}} \frac{I_1}{\sqrt{2}} \left[\cos(\theta_1) + \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_{V_1} - \theta_1)\right] \\
&= \tilde{V}_1 \tilde{I}_1 [\cos(\theta_1) + \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_{V_1}) \cos(\theta_1) \\
&\quad + \sin(2\omega_1 t + 2\varphi_{V_1}) \sin(\theta_1)] \\
&= \tilde{V}_1 \tilde{I}_1 \cos(\theta_1)[1 + \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_{V_1})] \\
&\quad + \tilde{V}_1 \tilde{I}_1 \sin(\theta_1) \sin(2\omega_1 t + 2\varphi_{V_1}) \\
&= P[1 + \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_{V_1})] + Q_1 \sin(2\omega_1 t + 2\varphi_{V_1})
\end{aligned}$$

Μαθηματική Ερμηνεία

Παρατηρήσεις

Με τη χρήση των κατάλληλων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, η στιγμιαία ισχύς μπορεί να διαιρεθεί σε δύο συνιστώσες. Η μία $\tilde{V}_1 \tilde{I}_1 \cos(\theta_1)$ έχει μη-μηδενική μέση τιμή και αποτελεί την ενεργό ισχύ P, ενώ η άλλη $\tilde{V}_1 \tilde{I}_1 \sin(\theta_1)$ είναι ένα ημίτονο με μέση τιμή μηδέν και αποτελεί την άεργο ισχύ Q_1.

Αμφότερες οι συνιστώσες, ταλαντώνονται με συχνότητα διπλάσια από αυτή της τάσης και του ρεύματος, ενώ είναι συμφασικές με αρχική φάση $2\varphi_{V_1}$.

Ελλείψει ανώτερων αρμονικών, η ισχύς παραμόρφωσης είναι μηδέν, κάτι μπορεί να επιβεβαιωθεί και από την Εξίσωση (14), η οποία αποδεικνύεται στη συνέχεια. Συνεπώς η φαινόμενη ισχύς είναι:

$$S = \sqrt{P^2 + Q_1^2} = \tilde{V} \cdot \tilde{I}$$

Μαθηματική Ερμηνεία

Βασική και Ανώτερες Αρμονικές

Έστω η τάση και το ρεύμα που δίνονται από τις Εξισώσεις (19) και (20) αντίστοιχα:

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_{V_n}) \tag{19}$$

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_{I_n}) \tag{20}$$

Μαθηματική Ερμηνεία

Στιγμιαία Ισχύς

Η στιγμιαία ισχύς είναι:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= [V_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{V_1}) + V_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_{V_2}) + \ldots] \\
&\quad [I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{I_1}) + I_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_{I_2}) + \ldots] \\
&= V_1 I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{V_1}) \cos(\omega_1 + \varphi_{I_1}) + \\
&\quad V_2 I_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_{V_2}) \cos(2\omega_1 + \varphi_{I_2}) + \\
&\quad \ldots + \\
&\quad V_1 I_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_{V_1}) \cos(2\omega_1 + \varphi_{I_2}) + \\
&\quad V_2 I_1 \cos(2\omega_1 t + \varphi_{V_2}) \cos(\omega_1 + \varphi_{I_1}) + \\
&\quad V_1 I_3 \cos(\omega_1 t + \varphi_{V_1}) \cos(3\omega_1 + \varphi_{I_3}) + \\
&\quad V_3 I_1 \cos(3\omega_3 t + \varphi_{V_3}) \cos(\omega_1 + \varphi_{I_1}) + \\
&\quad \ldots +
\end{aligned}
$$

Μαθηματική Ερμηνεία

Στιγμιαία Ισχύς

Η στιγμιαία ισχύς μπορεί να γραφτεί ως:

$$
\begin{aligned}
p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_{V_n}) \cos(n\omega_1 t + \varphi_{I_n}) + \\
\sum_{k \neq j} [V_k I_j \cos(k\omega_1 t + \varphi_{V_k}) \cos(j\omega_1 t + \varphi_{I_j}) + \\
V_j I_k \cos(j\omega_1 t + \varphi_{V_j}) \cos(k\omega_1 t + \varphi_{I_k})]
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Όπως αποδείχθηκε παραπάνω, το πρώτο άθροισμα της Εξίσωσης (21) μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P_n [1 + \cos(2n\omega_1 t + 2\varphi_{V_n})] + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(2n\omega_1 t + 2\varphi_{V_n})
$$

Μαθηματική Ερμηνεία

Ενεργός Ισχύς P και Άεργος Ισχύς Q

Ορίζουμε την ενεργό ισχύ P και την άεργο ισχύ Q ως το άθροισμα όλων των επιμέρους συνιστωσών, όπως φαίνεται στις Εξισώσεις (22) και (23) αντίστοιχα:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n \tilde{I}_n \cos(\theta_n) \tag{22}$$

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n \tilde{I}_n \sin(\theta_n) \tag{23}$$

Μαθηματική Ερμηνεία

Ισχύς Παραμόρφωσης D

Το δεύτερο άθροισμα της Εξίσωσης (21) μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι δεν παράγει ενεργό ισχύ, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (2) ή λαμβάνοντας υπόψιν ότι το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^T \cos(k\omega_1 t + \varphi_{V_k})\cos(j\omega_1 t + \varphi_{I_j})dt = 0, \quad \forall k \neq j$$

Αποτελεί, επομένως, ένα άλλο είδος άεργου ισχύος που ονομάζεται ισχύς παραμόρφωσης και δίνεται από την Εξίσωση (24).

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \tag{24}$$

Μαθηματική Ερμηνεία

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$\begin{aligned} S^2 &= (\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_n^2)(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_n^2) \\ &= \tilde{V}_1^2 \tilde{I}_1^2 + \tilde{V}_2^2 \tilde{I}_2^2 + \dots \\ &\quad \tilde{V}_1^2 \tilde{I}_2^2 + \tilde{V}_2^2 \tilde{I}_1^2 + \dots + \tilde{V}_1^2 \tilde{I}_3^2 + \tilde{V}_3^2 \tilde{I}_1^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 + \sum_{k \neq j} (\tilde{V}_k^2 \tilde{I}_j^2 + \tilde{V}_j^2 \tilde{I}_k^2) \end{aligned}$$

Μαθηματική Ερμηνεία

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$\begin{aligned}
P^2 &= [\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n \tilde{I}_n \cos(\theta_n)]^2 \\
&= [\tilde{V}_1 \tilde{I}_1 \cos(\theta_1) + \tilde{V}_2 \tilde{I}_2 \cos(\theta_2) + \ldots] \cdot [\tilde{V}_1 \tilde{I}_1 \cos(\theta_1) + \tilde{V}_2 \tilde{I}_2 \cos(\theta_2) + \ldots] \\
&= \tilde{V}_1^2 \tilde{I}_1^2 \cos^2(\theta_1) + \tilde{V}_2^2 \tilde{I}_2^2 \cos^2(\theta_2) + \ldots + \tilde{V}_1 \tilde{I}_1 \tilde{V}_2 \tilde{I}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 \cos^2(\theta_n) + \sum_{k \neq j} \tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j \cos(\theta_k) \cos(\theta_j)
\end{aligned}$$

Ομοίως για το Q^2:

$$Q^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 \sin^2(\theta_n) + \sum_{k \neq j} \tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j \sin(\theta_k) \sin(\theta_j)$$

Μαθηματική Ερμηνεία

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 \cos^2(\theta_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 \sin^2(\theta_n) \\ &+ \sum_{k \neq j} \tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j \cos(\theta_k)\cos(\theta_j) + \sum_{k \neq j} \tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j \sin(\theta_k)\sin(\theta_j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 [\cos^2(\theta_n) + \sin^2(\theta_n)] \\ &+ \sum_{k \neq j} \tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j [\cos(\theta_k)\cos(\theta_j) + \sin(\theta_k)\sin(\theta_j)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 + \sum_{k \neq j} 2\tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j \cos(\theta_k - \theta_j) \end{aligned}$$

Μαθηματική Ερμηνεία

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$\begin{aligned} S^2 - (P^2 + Q^2) = & \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 + \sum_{k \neq j} (\tilde{V}_k^2 \tilde{I}_j^2 + \tilde{V}_j^2 \tilde{I}_k^2) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 - \sum_{k \neq j} 2 \tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j \cos(\theta_k - \theta_j) \end{aligned}$$

Τελικώς, η D δίνεται από την Εξίσωση (25):

$$D = \sqrt{\sum_{k \neq j} \tilde{V}_k^2 \tilde{I}_j^2 + \tilde{V}_j^2 \tilde{I}_k^2 - 2 \tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j \cos(\theta_k - \theta_j)} \qquad (25)$$

Μαθηματική Ερμηνεία

Διευκρίνηση!

Όπως αναφέραμε και στο αντίστοιχο κομμάτι "Φυσική Προσέγγιση", ο διαχωρισμός της μη-ενεργού ισχύος δεν είναι μονοσήμαντος. Το νέο πρότυπο της IEEE 1459 (rev. 2010), θεωρεί ως άεργο ισχύ Q το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους Q_n, όπως φαίνεται στην Εξίσωση 26.

$$Q = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n^2 \tilde{I}_n^2 \sin^2(\theta_n)} \qquad (26)$$

Συνεπώς, αλλάζει και η εξίσωση της ισχύος παραμόρφωσης, η οποία δίνεται πλέον από την Εξίσωση 27.

$$D = \sqrt{\sum_{j \neq k} \left(\tilde{V}_k^2 \tilde{I}_k^2 + \tilde{V}_j^2 \tilde{I}_j^2 - \tilde{V}_k \tilde{I}_k \tilde{V}_j \tilde{I}_j \cos(\theta_k) \cos(\theta_j) \right)} \qquad (27)$$

Συμπεράσματα

Στη γενική περίπτωση, στην οποία τόσο η τάση όσο και το ρεύμα έχουν ανώτερες αρμονικές:

Ενεργός Ισχύς P

Η ισχύς που παράγει έργο, σε βάθος μιας περιόδου. Είναι αποτέλεσμα τάσεων και ρευμάτων της ίδιας αρμονικής.

Άεργος Q_n, Q, D

- Q_n: άεργος ισχύς που οφείλεται στη διαφορά φάσης της n αρμονικής της τάσης και της n αρμονικής του ρεύματος
- Q: το άθροισμα (αλγεβρικό ή διανυσματικό) των Q_n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- D: άεργος ισχύς που οφείλεται στην αλληλεπίδραση των αρμονικών τάσεως και ρεύματος, διαφορετικών συχνοτήτων

Φαινόμενη Ισχύς S

Μια επινόηση που αποτελεί το διανυσματικό άθροισμα όλων των παραπάνω και ταυτίζεται με το γινόμενο της ενεργού τιμής τάσης επί την ενεργό τιμή ρεύματος.

Παρατηρήσεις

Τόσο η άεργος ισχύς Q, όσο και όρος "Ισχύς Παραμόρφωσης" D, προέρχεται από τον Ρουμάνο ηλεκτρολόγο μηχανικό Constantin Budeanu και διατυπώθηκαν πρώτη φορά στο κείμενό του "Puissances reactives et fictives", το 1927.

Αποτέλεσε IEEE Standard, αλλά εγκαταλείφθηκε το 2010, λόγω της κριτικής που ασκείται εδώ και αρκετά χρόνια. Αυτή τη στιγμή διεξάγεται μια συζήτηση, για το κατά πόσο οι όροι του Budeanu είναι δόκιμοι και μέρος αυτής της συζήτησης παρατίθεται στις "Πηγές".

Σε κάθε περίπτωση, η ανάλυση του Budeanu συνεχίζει να θεωρείται έγκυρη και ακολουθείται από σχεδόν όλα τα συγγράμματα.

Πηγές

1. I. Κιοσκερίδης, Ηλεκτρονικά Ισχύος, εκδ. Τζιόλα
2. Ν. Παπαμάρκος, Ηλεκτρικά Κυκλώματα, Τόμος Β, Αυτοέκδοση
3. C.I. Budeanu, Puissances Reactives et Fictives, Institut Romain de l' Energie, Bucharest, 1927
4. L.S. Czarnecki, What is Wrong with the Budeanu Concept of Reactive and Distortion Power, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1987
5. J.L. Willems, Budeanu's Reactive Power and Related Concepts Revisited, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2011
6. D. Jeltsema, Budeanu's Concept of Reactive and Distortion Power Revisited, `doi:10.15199/48.2016.04.17`
7. E. Králiková, O. Čičáková, Distortion Power Measurements in Education, 2013
8. IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions, IEEE Power & Energy Society, Std 1459-2010