Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εαρινό Εξάμηνο 2023-2024

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

2η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

Ιωάννης Τσαντήλας
03120883

Πίνακας Περιεχομένων

Άσκηση 1 4

Πρόταση 1: 4

Πρόταση 2: 5

Άσκηση 2 6

Ερώτημα 1 6

Ερώτημα 2 6

Ερώτημα 3 7

Ερώτημα 4 7

Σχέση Ισοδυναμίας (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική) 7

Σχέση Μερικής Διάταξης (ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική) 7

Σχέση Ολικής Διάταξης (Σχέση Μερικής Διάταξης + οποιαδήποτε 2 στοιχεία συγκρίσιμα) 7

Ερώτημα 5 7

Σχέση Ισοδυναμίας (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική) 7

Σχέση Μερικής Διάταξης (ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική) 7

Σχέση Ολικής Διάταξης (ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική, οποιαδήποτε 2 στοιχεία συγκρίσιμα) 8

Ερώτημα 6 8

Διαχωρισμός S σε 6 Κλάσεις Ισοδυναμίας 8

Διαχωρισμός S σε 5 Κλάσεις Ισοδυναμίας 8

Διαχωρισμός S σε 4 Κλάσεις Ισοδυναμίας 8

Διαχωρισμός S σε 3 Κλάσεις Ισοδυναμίας 8

Διαχωρισμός S σε Κλάσεις Ισοδυναμίας A και B 8

Αξιώματα Ισοδυναμίας στο S 8

Αξιώματα Ισοδυναμίας στα A και B 8

Ερώτημα 7 9

Μέσα στο A (αντίστοιχα για B) 9

Μέσα στο S 9

Ερώτημα 8 9

Μέσα στο A (αντίστοιχα για B) 9

Μέσα στο S 9

Ερώτημα 9 9

Ερώτηση 10 10

Ερώτηση 11 10

Ερώτηση 12 (Bonus) 10

Άσκηση 3 11

Ερώτημα 1 11
Ερώτημα 2 11
Ερώτημα 3 11
Ερώτημα 4 11
Άσκηση 4 (bonus) 12
Ερώτημα 1 12
Ερώτημα 2 12
Ερώτημα 3 12
Άσκηση 5 (bonus) 14

Άσκηση 1

Πρόταση 1:

$$[(a \to b) \leftrightarrow \neg c] \to (\{[\neg(a \leftrightarrow b) \to c] \vee \neg d\} \wedge d)$$

Σπάμε την πρόταση σε δύο μέρη, τα οποία θα αναλύσουμε ξεχωριστά.

Αρχική Μορφή	Μετατροπή
$(\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}) \leftrightarrow \neg \boldsymbol{c}$	$(\neg a \vee b) \leftrightarrow \neg c$
$(\neg \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \leftrightarrow \neg \boldsymbol{c}$	$[(\neg a \vee b) \wedge \neg c] \vee [\neg(\neg a \vee b) \wedge \neg\neg c]$
$[(\neg \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge \neg \boldsymbol{c}] \vee [\neg(\neg \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}]$	$(\neg a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$

Αρχική Μορφή	Μετατροπή
$\{[\neg(\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}) \to \boldsymbol{c}] \vee \neg \boldsymbol{d}\} \wedge \boldsymbol{d}$	$\{[(a \leftrightarrow b) \vee c] \vee \neg d\} \wedge d$
$\{[(\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{c}] \vee \neg \boldsymbol{d}\} \wedge \boldsymbol{d}$	$\{(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee c \vee \neg d\} \wedge d$
$\{(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\neg \boldsymbol{a} \wedge \neg \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{c} \vee \neg \boldsymbol{d}\} \wedge \boldsymbol{d}$	$(a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d)$

Δηλαδή η πρόταση γίνεται:

$$(\neg a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \to (a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d)$$

Όπου με την μετατροπή της συνεπαγωγής έχουμε:

$$\neg[(\neg a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)] \vee [(a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d)] \rightarrow$$

$$[(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)] \vee [(a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d)] \rightarrow$$

$$[(a \vee c) \vee (a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d)] \wedge$$

$$\wedge [(\neg b \vee c) \vee (a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d)] \wedge$$

$$\wedge [(\neg a \vee b \vee \neg c) \vee (a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d)]$$

Εδώ, έχουμε τρεις παράγοντες που χωρίζονται με $\wedge$.

<u>Ανάλυση 1ου Παράγοντα</u>

$$(a \vee c) \vee (a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d) \rightarrow$$

$$a \vee (a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee c \vee (c \wedge d)$$

Εδώ, το $(a \wedge b \wedge d)$ στην έκφραση $a \vee (a \wedge b \wedge d)$ είναι περιττό, αφού:

a	$\boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{d})$
1	$1 \vee (1 \wedge b \wedge d) = 1$
0	$0 \vee (0 \wedge b \wedge d) = 0$

Ομοίως για το $(c \wedge d)$ στην έκφραση $c \vee (c \wedge d)$. Τελικά, έχουμε:

$$a \vee c \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d)$$

<u>Ανάλυση 2ου Παράγοντα</u>

$$(\neg b \vee c) \vee (a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d) \rightarrow$$

$$(a \wedge b \wedge d) \vee \neg b \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee c \vee (c \wedge d)$$

Με την ίδια λογική, το $(\neg a \wedge \neg b \wedge d)$ στην έκφραση $\neg b \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d)$ είναι περιττό, όπως επίσης και το $(c \wedge d)$ στην έκφραση $c \vee (c \wedge d)$. Τελικά:

$$\neg b \vee c \vee (a \wedge b \wedge d)$$

<u>Ανάλυση 3ου Παράγοντα</u>

$$(\neg a \vee b \vee \neg c) \vee (a \wedge b \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee (c \wedge d) \rightarrow$$

$$b \vee (a \wedge b \wedge d) \vee \neg a \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d) \vee \neg c \vee (c \wedge d)$$

Με την ίδια λογική, το $(a \wedge b \wedge d)$ στην έκφραση $b \vee (a \wedge b \wedge d)$ είναι περιττό, όπως επίσης και το $(\neg a \wedge \neg b \wedge d)$ στην έκφραση $\neg a \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d)$. Επιπλέον, όσον αφορά τον όρο $\neg c \vee (c \wedge d) \rightarrow (\neg c \vee c) \wedge (\neg c \vee d) \rightarrow (\neg c \vee d)$. Τελικά, έχουμε:

$$\neg a \vee b \vee \neg c \vee d$$

Καταλήγουμε:

$$[a \vee c \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge d)] \wedge [\neg b \vee c \vee (a \wedge b \wedge d)] \wedge [\neg a \vee b \vee \neg c \vee d] \rightarrow$$

$$(a \vee c \vee \neg a) \wedge (a \vee c \vee \neg b) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee a) \wedge (\neg b \vee c \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee d) \rightarrow$$

Οι κόκκινες παρενθέσεις ισοδυναμούν με 1, ενώ οι πράσινες είναι ίδιες. Η τελική μορφή είναι:

$$(a \vee c \vee \neg b) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee d)$$

Πρόταση 2:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (\exists w\ (P_{x,y} \rightarrow Q_z)) \rightarrow Q_w) \vee ((P_{x,y} \wedge Q_z) \rightarrow \exists w\ Q_w)$$

Σπάμε την πρόταση σε δύο μέρη, τα οποία θα αναλύσουμε ξεχωριστά:

$\exists w\ (P_{x,y} \rightarrow Q_z)) \rightarrow Q_w$ και $(P_{x,y} \wedge Q_z) \rightarrow \exists w\ Q_w$

<u>Ανάλυση 1ου Μέρους</u>

Αρχική Μορφή	**Μετατροπή**
$\exists \mathbf{w}\ (\mathbf{P}_{x,y} \rightarrow \mathbf{Q}_z)) \rightarrow \mathbf{Q}_w$	$\exists w\ (\neg P_{x,y} \vee Q_z)) \rightarrow Q_w$
$\exists \mathbf{w}\ (\neg \mathbf{P}_{x,y} \vee \mathbf{Q}_z)) \rightarrow \mathbf{Q}_w$	$\exists w\ (P_{x,y} \wedge \neg Q_z)) \vee Q_w$

<u>Ανάλυση 2ου Μέρους</u>

Αρχική Μορφή	**Μετατροπή**
$(\mathbf{P}_x \wedge \mathbf{Q}_z) \rightarrow \exists \mathbf{w}\ \mathbf{Q}_w$	$\neg P_{x,y} \vee \neg Q_z \vee \exists w\ Q_w$

Δηλαδή η πρόταση γίνεται:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ [\exists w\ (P_{x,y} \wedge \neg Q_z) \vee Q_w \vee \neg P_{x,y} \vee \neg Q_z \vee \exists w\ Q_w]$$

Άσκηση 2

Ερώτημα 1

Για διευκόλυνση, ορίζω τα εξής:

- $S = s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6,\ \ A = a_1, a_2, a_3, a_4,\ \ B = b_1, b_2.$
- $El(x) \leftrightarrow x \epsilon S,\ \ InA(x) \leftrightarrow x \epsilon A,\ \ InB(x) \leftrightarrow x \epsilon B.$
- $A, B \subseteq S,\ \ A \cap B = \emptyset.$
- $P(x, y) \leftrightarrow relation\ between\ x\ and\ y.$

Ορίζω τα σύνολα S, A και B:

$$\exists s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le 6} s_i \neq s_j \right) \wedge \forall \mathrm{x}\, [El(x) \leftrightarrow x = s_1 \vee \ldots \vee x = s_6]$$

$$\exists a_1, a_2, a_3, a_4 \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le 4} a_i \neq a_j \right) \wedge \forall \mathrm{x}\, [InA(x) \leftrightarrow x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_4]$$

$$\exists b_1, b_2 (b_1 \neq b_2) \wedge \forall \mathrm{x}\, [InB(x) \leftrightarrow x = b_1 \vee x = b_2]$$

Τα A, B είναι ξένα:

$$\forall x \left(\neg \left(InA(x) \wedge \mathrm{In}B(x) \right) \right)$$

Η σχέση P:

$$\forall x, y \left(El(x) \wedge El(y) \rightarrow P(x, y) \vee \neg P(x, y) \right)$$

Ερώτημα 2

Ανακλαστική

$$\forall x \left(El(x) \rightarrow P(x, x) \right)$$

Μη ανακλαστική

$$\exists x \left(El(x) \wedge \neg P(x, x) \right)$$

Αντιανακλαστική

$$\forall x \left(El(x) \rightarrow \neg P(x, x) \right)$$

Συμμετρική

$$\forall x \forall y \left(\left(El(x) \wedge El(y) \wedge P(x, y) \right) \rightarrow P(y, x) \right)$$

Μη συμμετρική

$$\exists x \exists y \left(\left(El(x) \wedge El(y) \wedge P(x, y) \right) \wedge \neg P(y, x) \right)$$

Αντισυμμετρική

$$\forall x \forall y \left(\left(El(x) \wedge El(y) \wedge P(x, y) \wedge P(y, x) \right) \rightarrow x = y \right)$$

Ασύμμετρη

$$\forall x \forall y \left(\left(El(x) \wedge El(y) \wedge P(x, y) \right) \rightarrow \neg P(y, x) \right)$$

Μεταβατική

$$\forall x \forall y \forall z \left(\left(El(x) \wedge El(y) \wedge El(z) \wedge P(x, y) \wedge P(y, z) \right) \rightarrow P(x, z) \right)$$

Ερώτημα 3

Ανακλαστική

$$P = (s_1,s_1),(s_2,s_2),\dots,(s_6,s_6)$$

Μη ανακλαστική

$$P = (s_1,s_1),(s_2,s_2),\dots,(s_5,s_5)$$

Αντιανακλαστική

$$P = (s_1,s_2),(s_2,s_3),\dots,(s_5,s_6)$$

Συμμετρική

$$P = (s_1,s_2),(s_2,s_1),\dots,(s_5,s_6),(s_6,s_5)$$

Μη συμμετρική

$$P = (s_1,s_2),(s_3,s_4),(s_4,s_3)$$

Αντισυμμετρική

$$P = (s_1,s_2)$$

Ασύμμετρη

$$P = (s_1,s_2),(s_3,s_4),(s_5,s_6)$$

Μεταβατική

$$P = (s_1,s_2),(s_2,s_3),(s_1,s_3)$$

Ερώτημα 4

Σχέση Ισοδυναμίας (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική)

$$P = (s_1,s_1),(s_1,s_2),(s_2,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_5,s_5),(s_6,s_6)$$

Σχέση Μερικής Διάταξης (ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική)

$$P = (s_1,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_5,s_5),(s_6,s_6),(s_1,s_2),(s_2,s_3),$$

Σχέση Ολικής Διάταξης (Σχέση Μερικής Διάταξης + οποιαδήποτε 2 στοιχεία συγκρίσιμα)

$$P = (s_1,s_1),(s_1,s_2),(s_1,s_3),(s_1,s_4),(s_1,s_5),(s_1,s_6),(s_2,s_2),(s_2,s_3),(s_2,s_4),(s_2,s_5),(s_2,s_6),$$

$$,(s_3,s_3),(s_3,s_4),(s_3,s_5),(s_3,s_6),(s_4,s_4),(s_4,s_5),(s_4,s_6),(s_5,s_5),(s_5,s_6),(s_6,s_6)$$

Ερώτημα 5

Παραθέτω τις εξισώσεις στην περίπτωση του «σε όλο το S».Στην περίπτωση του «μόνο στο A» ή «μόνο στο B», αντικαθιστούμε όπου «El(x)» το InA(x) ή InB(x).

Σχέση Ισοδυναμίας (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική)

$$\forall x\big(El(x) \to P(x,x)\big)$$

$$\forall x \forall y\Big(\big(El(x) \land El(y) \land P(x,y)\big) \to P(y,x)\Big)$$

$$\forall x \forall y \forall z\Big(\big(El(x) \land El(y) \land El(z) \land P(x,y) \land P(y,z)\big) \to P(x,z)\Big)$$

Σχέση Μερικής Διάταξης (ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική)

$$\forall x\big(El(x) \to P(x,x)\big)$$

$$\forall x \forall y\Big(\big(El(x) \land El(y) \land P(x,y) \land P(y,x)\big) \to x = y\Big)$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(El(x) \wedge El(y) \wedge El(z) \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \big) \rightarrow P(x,z) \Big)$$

Σχέση Ολικής Διάταξης (ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική, οποιαδήποτε 2 στοιχεία συγκρίσιμα)

$$\forall x \big(El(x) \rightarrow P(x,x) \big)$$

$$\forall x \forall y \Big(\big(El(x) \wedge El(y) \wedge P(x,y) \wedge P(y,x) \big) \rightarrow x = y \Big)$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(El(x) \wedge El(y) \wedge El(z) \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \big) \rightarrow P(x,z) \Big)$$

$$\forall x \forall y \Big(\big(El(x) \wedge El(y) \big) \rightarrow \big(P(x,y) \vee P(y,x) \big) \Big)$$

Ερώτημα 6

Διαχωρισμός S σε 6 Κλάσεις Ισοδυναμίας

$$P = (s_1,s_1),(s_2,s_2),\ldots,(s_6,s_6)$$

Διαχωρισμός S σε 5 Κλάσεις Ισοδυναμίας

$$P = (s_1,s_1),(s_2,s_2),\ldots,(s_6,s_6),(s_1,s_2),(s_2,s_1)$$

Διαχωρισμός S σε 4 Κλάσεις Ισοδυναμίας

$$P = (s_1,s_1),(s_2,s_2),\ldots,(s_6,s_6),(s_1,s_2),(s_2,s_1),(s_3,s_4),(s_4,s_3)$$

Διαχωρισμός S σε 3 Κλάσεις Ισοδυναμίας

$$P = (s_1,s_1),(s_2,s_2),\ldots,(s_6,s_6),(s_1,s_2),(s_2,s_1),(s_3,s_4),(s_4,s_3),(s_5,s_6),(s_6,s_5)$$

Διαχωρισμός S σε Κλάσεις Ισοδυναμίας A και B

Έστω χ.β.γ. πως $A = s_1, s_2, s_3, s_4$ και $B = s_5, s_6$.

$$P = (s_1,s_1),(s_1,s_2),(s_1,s_3),(s_1,s_4),(s_1,s_5),(s_1,s_6),(s_1,s_2),(s_1,s_3),(s_1,s_4),(s_2,s_1),(s_3,s_1),(s_4,s_1),$$
$$,(s_2,s_3),(s_2,s_4),(s_3,s_2),(s_4,s_2),(s_3,s_4),(s_4,s_3),(s_5,s_6),(s_6,s_5),$$

Αξιώματα Ισοδυναμίας στο S

$$\forall x \big(El(x) \rightarrow P(x,x) \big)$$

$$\forall x \forall y \Big(\big(El(x) \wedge El(y) \wedge P(x,y) \big) \rightarrow P(y,x) \Big)$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(El(x) \wedge El(y) \wedge El(z) \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \big) \rightarrow P(x,z) \Big)$$

Αξιώματα Ισοδυναμίας στα A και B

$$\forall x \forall y \Big(\big(InA(x) \wedge InA(y) \big) \rightarrow P(x,y) \Big)$$

$$\forall x \forall y \Big(\big(InB(x) \wedge InB(y) \big) \rightarrow P(x,y) \Big)$$

$$\forall x \forall y \Big(\big(InA(x) \wedge InB(y) \big) \rightarrow \neg P(x,y) \Big)$$

$$\forall x \forall y \Big(\big(InA(y) \wedge InB(x) \big) \rightarrow \neg P(x,y) \Big)$$

Ερώτημα 7

$$P_A = (s_1,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_1,s_2),(s_2,s_1),(s_1,s_3),(s_3,s_1),(s_1,s_4),(s_4,s_1),(s_2,s_3),$$

$$,(s_3,s_2),(s_2,s_4),(s_4,s_2),(s_3,s_4),(s_4,s_3)$$

$$P_B = (s_5,s_5),(s_6,s_6),(s_5,s_6),(s_6,s_5)$$

$$P_C = (s_1,s_5)$$

Συνολικά, έχουμε πως $P = P_A \cup P_B \cup P_C$. Ας επαληθεύσουμε:

Μέσα στο A (αντίστοιχα για B)

- Ανακλαστική: $\forall s_i \in A, (s_i,s_i) \in P$
- Συμμετρική: $\forall s_i,s_j \in A, αν\ (s_i,s_j) \in P\ τότε\ (s_j,s_i) \in P$
- Μεταβατική: $\forall s_i,s_j,s_z \in A, αν (s_i,s_j) \in P\ και\ (s_j,s_z) \in P\ τότε\ (s_i,s_z) \in P$

Μέσα στο S

- Μη Ανακλαστική: $(s_5,s_1) \notin P$
- Μη Συμμετρική: $(s_1,s_5) \in P\ αλλά\ (s_5,s_1) \notin P$
- Μη Μεταβατική: $(s_1,s_5) \in P\ και\ (s_5,s_6) \in P\ αλλά\ (s_5,s_1) \notin P$

Ερώτημα 8

$$P_A = (s_1,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_1,s_2),(s_2,s_3),(s_1,s_3),(s_1,s_4)$$

$$P_B = (s_5,s_5),(s_6,s_6),(s_5,s_6)$$

$$P_C = (s_2,s_6),(s_6,s_2)$$

Συνολικά, έχουμε πως $P = P_A \cup P_B \cup P_C$. Ας επαληθεύσουμε:

Μέσα στο A (αντίστοιχα για B)

- Ανακλαστική: $\forall s_i \in A, (s_i,s_i) \in P$
- Αντι-συμμετρική: $κανένα\ ζεύγος\ (s_i,s_j),(s_j,s_i)\ για\ μοναδικά\ s_i,s_j \in A$
- Μεταβατική: $\forall s_i,s_j,s_z \in A, αν (s_i,s_j) \in P\ και\ (s_j,s_z) \in P\ τότε\ (s_i,s_z) \in P$

Μέσα στο S

- Μη Αντι-συμμετρική: $(s_2,s_6) \in P\ και\ (s_6,s_2) \in P\ αλλά\ s_2 \neq s_6$

Ερώτημα 9

$$P_A = (s_1,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_1,s_2),(s_2,s_3),(s_1,s_3)$$

$$P_B = (s_5,s_5),(s_6,s_6),(s_5,s_6)$$

Συνολικά, έχουμε πως $P = P_A \cup P_B$. Για να διασφαλίσουμε ότι η P παραμένει μια μερική διάταξη πάνω στο S, πρέπει να ορίσουμε την P έτσι ώστε να είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική πάνω σε όλο το σύνολο S. Είναι σημαντικό ότι τυχόν διασταυρούμενες σχέσεις δεν πρέπει να παραβιάζουν αυτές τις ιδιότητες. Εδώ στοχευμένα δεν έχουμε κάποιο P_C που να προκαλεί εξαίρεση σε κανόνα.

Ερώτηση 10

$$P_A = (s_1,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_1,s_2),(s_2,s_3),(s_3,s_4)$$

$$P_B = (s_5,s_5),(s_6,s_6),(s_5,s_6)$$

Συνολικά, έχουμε πως $P = P_A \cup P_B$. Επίσης, δεν υπάρχουν ζευγάρια με τα στοιχεία τους να ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα. Έτσι, η P είναι μερικής διάταξης και στο S.

Ερώτηση 11

$$P_A = (s_1,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_1,s_2),(s_2,s_3),(s_3,s_4)$$

$$P_B = (s_5,s_5),(s_6,s_6),(s_5,s_6)$$

Συνολικά, έχουμε πως $P = P_A \cup P_B$. Όσον αφορά το S:

- Ανακλαστική: $\forall s_i \in S, (s_i,s_i) \in P$
  - $(s_1,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_5,s_5),(s_6,s_6) \in P$
- Αντι-συμμετρική: $\forall s_i,s_j \in S, αν\ (s_i,s_j) \in P, και\ (s_j,s_i) \in P\ τότε\ s_i = s_j$
  - $(s_1,s_2) \in P, (s_2,s_1) \notin P,$
  - $(s_2,s_3) \in P, (s_3,s_2) \notin P,$
  - $(s_5,s_6) \in P, (s_6,s_5) \notin P$
- Μεταβατική: $\forall s_i,s_j,s_z \in A, αν (s_i,s_j) \in P\ και\ (s_j,s_z) \in P\ τότε\ (s_i,s_z) \in P$
  - $(s_1,s_2) \in P, (s_2,s_3) \in P \rightarrow (s_1,s_3) \in P,$
  - $(s_2,s_3) \in P, (s_3,s_4) \in P \rightarrow (s_2,s_4) \in P,$
  - $(s_5,s_6) \in P, αλλά\ δεν\ έχουμε\ μεταβατικότητα.$

Ερώτηση 12 (Bonus)

$$P_A = (s_1,s_1),(s_2,s_2),(s_3,s_3),(s_4,s_4),(s_1,s_2),(s_2,s_3),(s_3,s_4)$$

$$P_B = (s_5,s_5),(s_6,s_6),(s_5,s_6)$$

$$P_C = (s_2,s_6),(s_6,s_2)$$

Συνολικά, έχουμε πως $P = P_A \cup P_B \cup P_C$. Εδώ δεν ισχύει η αντι-συμμετρική για το S, αφού $(s_2,s_6) \in P, (s_6,s_2) \in P$ αλλά $s_2 \neq s_6$.

Άσκηση 3

Ερώτημα 1

$$zero = 0$$

$$succ(x) = x + 1$$

$$LessThan(x, y) \leftrightarrow x < y$$

$$Plus(x, y, z) \leftrightarrow x + y = z$$

Πρόσθεση με μηδέν (Ιδιότητα 1)

$$\forall x\big(Plus(zero, x, x) \wedge Plus(x, zero, x)\big)$$

Successor στην πρόσθεση (Ιδιότητα 2)

$$\forall x \forall y \forall z(Plus(x, y, z) \rightarrow Plus(succ(x), y, succ(z))$$

Successor στην ανισότητα (Ιδιότητα 3)

$$\forall x \forall y\big(LessThan(succ(x), y) \rightarrow LessThan(x, y)\big)$$

Ερώτημα 2

Με βάση τον αλγόριθμο ανάλυσης, θα ορίζω την φόρμουλα $p \coloneqq Plus(2,4,6)$ και τη γνώση $K' = K \cup \neg p$. Χρησιμοποιώ την Ιδιότητα 2 για $x = 3, y = 2, z = 5$:

$$Plus(3,2,5) \underset{(2)}{\rightarrow} Plus\big(succ(3), 2, succ(5)\big) = Plus(4,2,6) = q$$

Προσθέτω την q στην K', δηλαδή: $K' = K \cup (\neg p, q) = K \cup \big(\neg Plus(4,2,6), Plus(4,2,6)\big)$. Η K' περιέχει αντίφαση και ο αλγόριθμος τερματίζει με «**ναι**».

Ερώτημα 3

Εντελώς όμοια με το Ερώτημα 2, με βάση τον αλγόριθμο ανάλυσης, θα ορίζω την φόρμουλα $p \coloneqq Plus(6,3,9)$ και τη γνώση $K' = K \cup \neg p$. Χρησιμοποιώ την Ιδιότητα 2 για $x = 5, y = 3, z = 8$:

$$Plus(5,3,8) \underset{(2)}{\rightarrow} Plus\big(succ(5), 3, succ(8)\big) = Plus(6,3,9) = q$$

Προσθέτω την q στην K', δηλαδή: $K' = K \cup (\neg p, q) = K \cup \big(\neg Plus(6,3,9), Plus(6,3,9)\big)$. Η K' περιέχει αντίφαση και ο αλγόριθμος τερματίζει με «**ναι**».

Εναλλακτικά, μπορούμε να εκτελέσουμε την Ιδιότητα 2 στο base case, $x = zero, y = 3, z = 3$:

$$Plus(0,3,3) \underset{(2)}{\rightarrow} Plus\big(succ(0), 3, succ(3)\big) = Plus(1,3,4) \underset{(2)}{\rightarrow} \ldots \underset{(2)}{\rightarrow} Plus(6,3,9)$$

Ερώτημα 4

Με βάση τον αλγόριθμο ανάλυσης, θα ορίζω την φόρμουλα $p \coloneqq LessThan(0,0)$ και τη γνώση $K' = K \cup \neg p$. Χρησιμοποιώ την Ιδιότητα 3 για $x = 0, y = 0$:

$$LessThan(succ(0), 0) \underset{(3)}{\rightarrow} LessThan(0,0) \Longrightarrow LessThan(1,0) \underset{(3)}{\rightarrow} LessThan(0,0)$$

Όμως, η $LessThan(1,0)$ δεν ισχύει, επομένως, δεν μπορούμε να ορίσουμε κάποιο q που να προκαλεί αντίφαση. Επομένως, ο αλγόριθμος **δεν** τερματίζει.

Άσκηση 4 (bonus)

Ερώτημα 1

$$\exists R.B \sqcap \exists R.\neg B \sqcap \forall R.D$$

Αναλύω αρχικά την έννοια:

1. $\exists R.B$: υπάρχει τουλάχιστον ένας R-successor που ανήκει στο concept B.
2. $\exists R.\neg B$: υπάρχει τουλάχιστον ένας R-successor που **δεν** ανήκει στο concept B.
3. $\forall R.D$: όλοι οι R-successors ανήκουν στο concept D.

Ορίζω το πεδίο ορισμού Δ και τα ερμηνείες (interpretation) I των R, B, D:

$$\Delta = \{a,b,c\}, I_R = \{(a,b),(a,c)\}, I_B = \{b\}, I_D = \{b,c\}$$

Έτσι:

1. $(a,b) \in I_R$ και $b \in B$.
2. $(a,c) \in I_R$ και $c \notin B$.
3. $(a,b),(a,c) \in I_R$ και $b,c \in D$.

Αυτή η ερμηνεία ικανοποιεί όλα τα μέρη της έννοιας. Επομένως, το μοντέλο $\langle\{a, b, c\}, I\rangle$ είναι σωστό.

Ερώτημα 2

$$\forall R.B \sqcap \forall R.\neg B$$

Αναλύω αρχικά την έννοια:

1. $\forall R.B$: όλοι οι R-successors ανήκουν στο concept B.
2. $\forall R.\neg B$: όλοι οι R-successors **δεν** ανήκουν στο concept B.

Πρόκειται για **αντίφαση**.

Ερώτημα 3

$$\exists R.B \sqcap \exists R.\neg B \sqcap \exists R.C \sqcap \leq 2R$$

Αναλύω αρχικά την έννοια:

1. $\exists R.B$: υπάρχει τουλάχιστον ένας R-successor που ανήκει στο concept B.
2. $\exists R.\neg B$: υπάρχει τουλάχιστον ένας R-successor που **δεν** ανήκει στο concept B.
3. $\exists R.C$: υπάρχει τουλάχιστον ένας R-successor που ανήκει στο concept C.
4. $\leq 2R$: ένα individual έχει το πολύ 2 R-successors.

Ορίζω το πεδίο ορισμού Δ και τα ερμηνείες (interpretation) I των R, B, C:

$$\Delta = \{a,b,c\}, I_R = \{(a,b),(a,c)\}, I_B = \{b\}, I_C = \{c\}$$

Έτσι:

1. $(a,b) \in I_R$ και $b \in B$.
2. $(a,c) \in I_R$ και $c \notin B$.

3. $(a, c) \in I_R$ και $c \in C$.
4. Το a έχει ακριβώς 2 R-successors, τα b,c.

Αυτή η ερμηνεία ικανοποιεί όλα τα μέρη της έννοιας. Επομένως, το μοντέλο $\langle\{a, b, c\}, I\rangle$ είναι σωστό.

Άσκηση 5 (bonus)

Η κλάση H_n^{rec} αποτελείται από hyperparallelograms του R^n παράλληλα στους άξονες. Κάθε hyperparallelogram ορίζεται από 2 σημεία $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ και $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ με $a_i \le b_i$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση $h_{a,b}$ ορίζεται ως:

$$h_{a,b}(\hat{x}) = \begin{cases} 1, & a_i \le x_i \le b_i \\ 0, & otherwise \end{cases} \text{ με } \hat{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in R_n$$

Για να δείξουμε ότι η H_n^{rec} είναι PAC εκπαιδεύσιμη, πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος που μπορεί να μάθει οποιαδήποτε συνάρτηση στο H_n^{rec} με αυθαίρετα υψηλή πιθανότητα και ακρίβεια δεδομένου ενός επαρκούς αριθμού δειγμάτων εκπαίδευσης.

<u>Βήμα 1ο: Διάσταση VC</u>

Το πρώτο βήμα είναι ο προσδιορισμός της διάστασης VC (Vapnik-Chervonenkis) της H_n^{rec}. Η διάσταση VC είναι ένα μέτρο της χωρητικότητας ή της πολυπλοκότητας της κλάσης υποθέσεων.

Υπόθεση: Η διάσταση VC της H_n^{rec} είναι $2n$.

Απόδειξη:

Έστω οποιοδήποτε σύνολο $2n$ σημείων στο R^n. Πρέπει να δείξω ότι υπάρχει ένα υποσύνολο αυτών των σημείων που μπορεί να κατατμιστεί από την H_n^{rec}, δηλαδή κάθε πιθανό δυαδικό labelling των σημείων μπορεί να υλοποιηθεί από κάποιο hyperparallelogram.

Για οποιοδήποτε υποσύνολο των $2n$ σημείων, επιλέγω n ζεύγη σημείων έτσι ώστε κάθε ζεύγος να ορίζει τα όρια σε μία από τις n διαστάσεις. Κάθε ζεύγος (a_i,b_i) καθορίζει το κατώτερο και το ανώτερο όριο στη διάσταση i.

Για κάθε πιθανό δυαδικό labelling των σημείων $2n$, μπορώ να κατασκευάσω ένα hyperparallelogram επιλέγοντας κατάλληλα όρια a_i και b_i έτσι ώστε τα σημεία με labelling 1 να βρίσκονται εντός του hyperparallelogram και τα σημεία με labelling 0 να βρίσκονται εκτός. Έτσι, κάθε δυαδικό labelling των σημείων $2n$ μπορεί να πραγματοποιηθεί, δείχνοντας ότι η διάσταση VC της H_n^{rec} είναι τουλάχιστον $2n$.

Τώρα, έστω οποιοδήποτε σύνολο με περισσότερα από $2n$ σημεία. Δεν είναι δυνατόν να θρυμματιστούν περισσότερα από $2n$ σημεία, επειδή έχουμε μόνο $2n$ παραμέτρους (τα όρια σε κάθε διάσταση) για να ρυθμίσουμε, γεγονός που περιορίζει τον αριθμό των διαφορετικών δυαδικών επισημάνσεων που μπορούμε να επιτύχουμε.

Επομένως, η διάσταση VC του H_n^{rec} είναι ακριβώς $2n$.

<u>Βήμα 2ο: PAC Εκπαιδεύσιμη</u>

Με τη διάσταση VC καθορισμένη, μπορώ να χρησιμοποιήσω τα τυπικά αποτελέσματα από τη θεωρία μάθησης PAC. Μια κλάση υποθέσεων με πεπερασμένη διάσταση VC είναι PAC εκπαιδεύσιμη.

Συγκεκριμένα, αν η διάσταση VC της H_n^{rec} είναι $2n$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$, υπάρχει ένα μέγεθος δείγματος m τέτοιο ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\delta$, ένας αλγόριθμος μάθησης μπορεί να βρει μια υπόθεση h στην H_n^{rec} που έχει σφάλμα το πολύ ε. Το μέγεθος του δείγματος m δίνεται από τον τύπο:

$$m = O\left(\frac{2n + log\frac{1}{\delta}}{\varepsilon}\right)$$

Βήμα 3ο: Αλγόριθμος μάθησης

Ένας απλός αλγόριθμος εκμάθησης για την H_n^{rec} μπορεί να σχεδιαστεί ως εξής:

- Δεδομένου ενός συνόλου εκπαίδευσης $S = \{(x_i, y_i)\}i = 1^m$, όπου $x_i \in R^m$ και $y_i \in \{0,1\}$,
- Έστω $a_i = min\{x_{i,j} : y_j = 1\}$ και $b_i = max\{x_{i,j} : y_j = 1\}$ για κάθε διάσταση i.
- Το hyperparallelogram που προκύπτει ορίζεται από τα όρια $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ και $\hat{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Αυτός ο αλγόριθμος κατασκευάζει ένα hyperparallelogram που περιλαμβάνει όλα τα θετικά παραδείγματα (με ετικέτα 1) και αποκλείει όσο το δυνατόν περισσότερα αρνητικά παραδείγματα (με ετικέτα 0).