

Το επίπεδο δικτύου

Μιλτιάδης Αναγνώστου

11/5/2022

Λειτουργίες του επιπέδου δικτύου

Σχεδιαστικές επιλογές

Εικονικά κυκλώματα ή δεδομενογράμματα;

Αλγόριθμοι δρομολόγησης

Ιδιότητες των αλγορίθμων δρομολόγησης

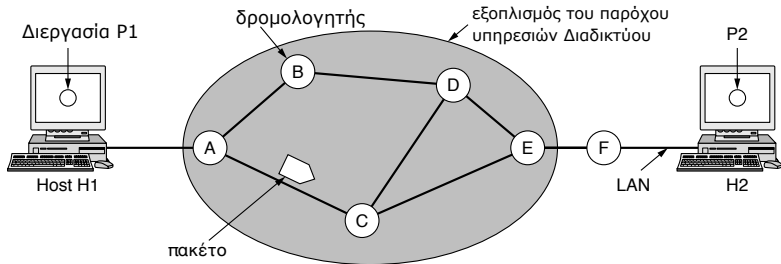
Μερικοί δημοφιλείς αλγόριθμοι δρομολόγησης

Δρομολόγηση με ειδικές απαιτήσεις

Ιδιότητες των αλγορίθμων δρομολόγησης

Μεταγωγή κυκλώματος με αποθήκευση και προώθηση

Ας δούμε πρώτα σε τι είδους περιβάλλον λειτουργούν τα πρωτόκολλα δικτύου ...



Υπηρεσίες που προσφέρει το επίπεδο δικτύου στο επίπεδο μεταφοράς

Για τις υπηρεσίες που πρέπει να προσφέρει το επίπεδο δικτύου στο επίπεδο μεταφοράς τίθενται συνήθως οι εξής στόχοι:

1. Οι υπηρεσίες πρέπει να είναι ανεξάρτητες από την τεχνολογία των δρομολογητών.
2. Το στρώμα μεταφοράς πρέπει να μην είναι υποχρεωμένο να ασχοληθεί με τον αριθμό, τον τύπο ή την τοπολογία των δρομολογητών.
3. Οι δικτυακές διευθύνσεις που βλέπει το στρώμα μεταφοράς πρέπει να χρησιμοποιούν ομοιόμορφο σχέδιο αριθμοδότησης, ακόμη κι όταν περνάμε τα σύνορα προς τοπικά δίκτυα.

Σχεδιαστικές επιλογές για το επίπεδο δικτύου

Είναι διαθέσιμες οι εξής δύο επιλογές:

- A Το επίπεδο δικτύου να διακινεί τα πακέτα με αποδοτικό τρόπο, χωρίς να παρέχει πρόσθετες εγγυήσεις αξιοπιστίας (άποψη της κοινότητας Internet).
- B Το επίπεδο δικτύου να παρέχει αξιόπιστη «συνδετιστρεφής» (connection oriented) διακίνηση (άποψη της τηλεπικοινωνιακής κοινότητας).

Σήμερα το Internet ακολουθεί την επιλογή A μέσω του Internet Protocol, αλλά ταυτόχρονα αναπτύσσει χαρακτηριστικά από τη 2 όποτε ζητηθούν (π.χ. MultiProtocol Label Switching, Virtual LANs).

A. Ασυνδειστρεφές επίπεδο δικτύου

- ▶ Το δίκτυο πρέπει απλώς να διακινεί τα bits.
- ▶ Το δίκτυο είναι ούτως ή άλλως αναξιόπιστο, οπότε οι ακραίοι κόμβοι («ξενιστές»,¹ hosts, στο σχήμα οι H1, H2) θα κάνουν αναγκαστικά έλεγχο σφαλμάτων.
- ▶ Οι κόμβοι του υποδικτύου δεν χρειάζεται να κάνουν έλεγχο ροής, ακολουθίας πακέτων κ.λπ. αφού ούτως ή άλλως θα γίνει στα άκρα.

Το αποτέλεσμα αυτής της αντίληψης είναι το Internet.

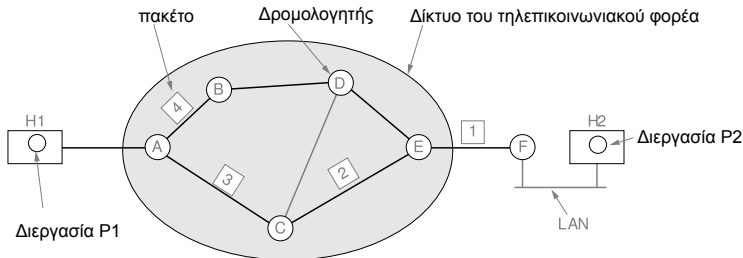
¹<http://www.moto-teleterm.gr>

Β. Η άποψη για ένα επίπεδο δικτύου που παρέχει υπηρεσίες «συνδεισιστρεφείς»

- ▶ Το υποδίκτυο πρέπει να κάνει ό,τι μπορεί για την παροχή μιας αξιόπιστης υπηρεσίας μεταφοράς πακέτων.
- ▶ Το επίπεδο δικτύου θα δημιουργεί κάθε φορά μια «σύνδεση» ανάμεσα στα δύο άκρα με συγκεκριμένη ταυτότητα, που θα αναγράφεται σε όλα τα πακέτα της.
- ▶ Της λειτουργίας μιας σύνδεσης προηγείται μια φάση διαπραγμάτευσης ποιότητας και κόστους ανάμεσα στα δύο άκρα.
- ▶ Η επικοινωνία θα είναι αμφίδρομη και τα πακέτα θα παραδίδονται με τη σειρά αποστολής τους.
- ▶ Προκειμένου να αποφεύγεται συμφόρηση, θα γίνεται έλεγχος ροής.

Το υπόδειγμα αυτής της αντίληψης είναι ο *Ασύγχρονος Τρόπος Μεταφοράς* (Asynchronous Transfer Mode, ATM).

Δρομολόγηση με δεδομενογράμματα (datagrams)



Πίνακας του A
αρχικά αργότερα

A	-	A	-
B	B	B	B
C	C	C	C
D	B	D	B
E	C	E	B
F	C	F	B

προορισμός

επόμενος
κόμβος

Πίνακας
του C

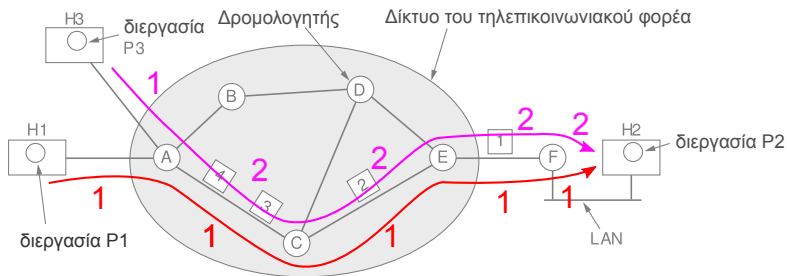
A	A
B	A
C	-
D	D
E	E
F	E

Πίνακας
του E

A	C
B	D
C	C
D	D
E	-
F	F

Όλα τα πακέτα
του σχήματος έχουν
προορισμό τον κόμβο F

Δρομολόγηση με εικονικά κυκλώματα



Πίνακας του A

H1	1	C	1
H3	1	C	2

είσοδος έξοδος

Πίνακας του C

A	1	E	1
A	2	E	2

Πίνακας του E

C	1	F	1
C	2	F	2

MultiProtocol Label Switching (MPLS)

- ▶ Τέτοιου είδους συνδεδειστροφής υπηρεσία είναι το MPLS.
- ▶ Το MPLS χρησιμοποιείται εσωτερικά στα δίκτυα των ISP για τη δημιουργία μακροπρόθεσμων ρευμάτων κίνησης και για να ρυθμιστεί η ποιότητα υπηρεσίας.
- ▶ Στα πακέτα του IP προστίθεται ένα περίβλημα (wrapper) του MPLS, που έχει μια επιγραφή 20 bit.

Σύγκριση

Ζήτημα	δεδομενογράμματα	εικονικά κυκλώματα
αποκατάσταση κυκλώματος	-	χρειάζεται
διευθυνσιοδότηση	διεύθυνση προορισμ. ανά πακέτο	αριθμός VC ανά πακέτο
πληροφορία κατάστασης	όχι	για κάθε VC στον πίνακα δρομ.
δρομολόγηση	ανεξάρτητη ανά πακέτο	επιλέγεται διαδρομή ανά VC
συνέπειες της βλάβης δρομολογητή	μερικά χαμένα πακέτα	τερματισμός των διερχομένων VC
ποιότητα υπηρεσίας	δύσκολη	προϋποθέτει πόρους
έλεγχος συμφόρησης	δύσκολος	προϋποθέτει πόρους και μηχανισμούς

Ταξινόμηση των αλγορίθμων δρομολόγησης

Τυχαίος
Μη τυχαίος

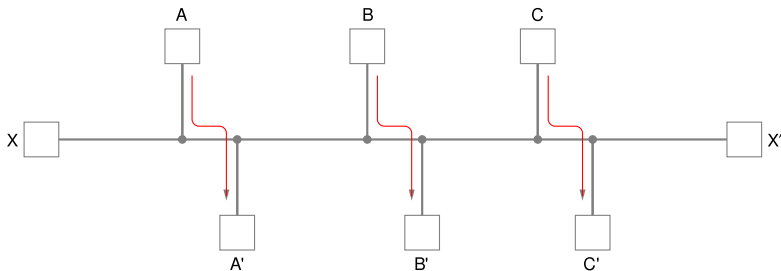
Ανθεκτικός
μη ανθεκτικός

Σταθερός
Δυναμικός

Δίκαιος
Μη δίκαιος

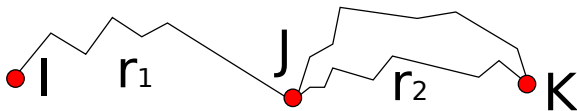
Βέλτιστος
(με διάφορα κριτήρια)
Υποβέλτιστος

Μπορεί η δρομολόγηση να είναι συγχρόνως δίκαιη και βέλτιστη;



Η αρχή του βέλτιστου

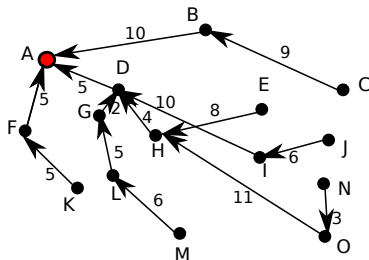
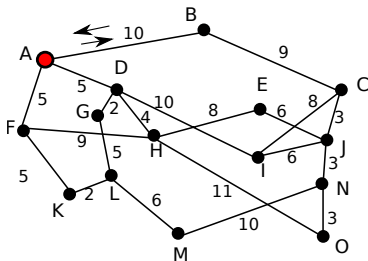
Λήμμα: Αν ο κόμβος J βρίσκεται πάνω στη βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο I στον κόμβο K , η βέλτιστη διαδρομή από τον J στον K είναι απλώς το υπόλοιπο αυτής της διαδρομής.



Απόδειξη: Έστω ότι $r_1 - J - r_2$ είναι η βέλτιστη διαδρομή από τον I στον K . Αν από τον J υπάρχει μια άλλη καλύτερη διαδρομή r_3 , η $r_1 - J - r_3$ είναι καλύτερη από την $r_1 - J - r_2$, άτοπο.

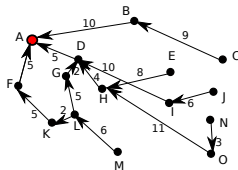
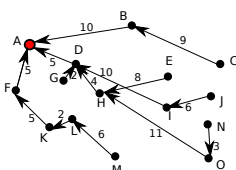
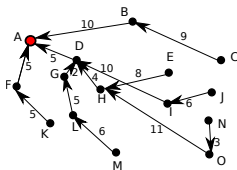
Το δέντρο προορισμού (sink tree)

- Συμπέρασμα: Το σύνολο των βέλτιστων διαδρομών (μονοπατιών) από κάθε κόμβο-πηγή προς ένα συγκεκριμένο κόμβο-προορισμό σχηματίζει ένα δέντρο με ρίζα τον προορισμό.

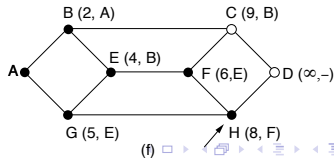
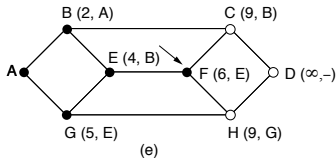
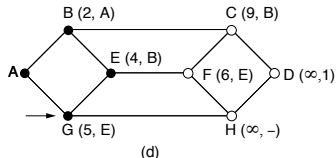
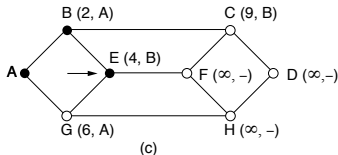
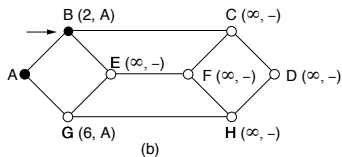
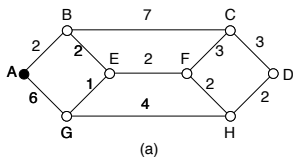


Ίσου μήκους ελάχιστες διαδρομές

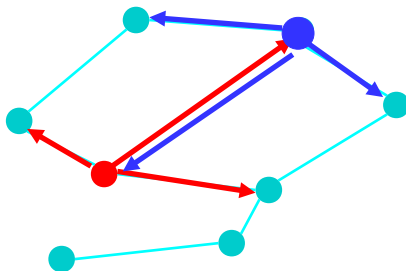
- ▶ Ωστόσο στον ίδιο γράφο μπορούν να βρεθούν δύο (ή περισσότερες) διαδρομές με το ίδιο μήκος.
- ▶ Αν επιτρέψουμε όλες τις ίσου μήκους διαδρομές σχηματίζεται ένας *προσανατολισμένος ακυκλικός γράφος* (Directed Acyclic Graph), που έχει την ιδιότητα να μην έχει βρόχους.



Η ελάχιστη διαδρομή με τον αλγόριθμο του Dijkstra

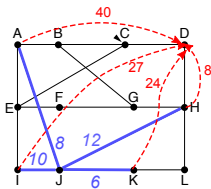


Ο αλγόριθμος πλημμύρας



- ▶ Σε πόσα βήματα φτάνει ένα πακέτο στον προορισμό του;
- ▶ Πώς αντιμετωπίζεται ο πολλαπλασιασμός των πακέτων;

Αλγόριθμοι Διανύσματος Απόστασης (Distance Vector Routing): **Bellman-Ford**



πίνακας του A

Προς A	0
B	12
C	25
D	40
E	14
F	23
G	18
H	17
I	21
J	9
K	24
L	29

JA
καθυστ. 8

πίνακας του I

A	24
B	36
C	18
D	27
E	7
F	20
G	31
H	20
I	0
J	11
K	22
L	33

JI
10

πίνακας του H

A	20
B	31
C	19
D	8
E	30
F	19
G	6
H	0
I	14
J	7
K	22
L	9

JH
12

πίνακας του K

A	21
B	28
C	36
D	24
E	22
F	40
G	31
H	19
I	22
J	10
K	0
L	9

JK
6

νέος πίνακας του J

8	A
20	A
28	I
20	H
17	I
30	I
18	H
12	H
10	I
0	-
6	K
15	K

- ▶ Ο J πληροφορείται τους πίνακες καθυστ. των γειτόνων του και μετράει τις νέες καθυστερήσεις του απ' αυτούς.
- ▶ Στη συνέχεια υπολογίζει το νέο του πίνακα καθυστέρησης με τον τύπο

$$d_{Jx} = \min\{d_{JA} + d_{Ax}, d_{JI} + d_{Ix}, d_{JH} + d_{Hx}, d_{JK} + d_{Kx}\}$$

Παράδειγμα 1: Χρόνος αποκατάστασης των πινάκων

- ▶ Ο αλγόριθμος ξεκινάει συνήθως με αποστάσεις $= \infty$.
- ▶ Αν όλες οι αποστάσεις είναι ίσες με 1, ο υπολογισμός των αποστάσεων των B, C, D, E από τον κόμβο A εξελίσσεται ως εξής:

A	B	C	D	E
•	•	•	•	•
	∞	∞	∞	∞
	1	∞	∞	∞
	1	2	∞	∞
	1	2	3	∞
	1	2	3	4

Δρομολόγηση ως προς την κατάσταση συνδέσμων

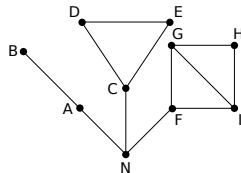
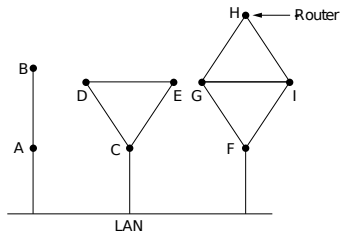
- ▶ Η δρομολόγηση με το διάνυσμα απόστασης ήταν σε χρήση στο ARPANET μέχρι το 1979, οπότε αντικαταστάθηκε με τη *δρομολόγηση ως προς την κατάσταση συνδέσμων* (Link State Routing).
- ▶ Ο βασικός λόγος ήταν η αργή σύγκλιση.
- ▶ Παραλλαγές της δρομολόγησης ως προς την κατάσταση συνδέσμων είναι οι αλγόριθμοι IS-IS (Intermediate System-Intermediate System) & OSPF (Open Shortest Path First) που χρησιμοποιούνται σε μεγάλα δίκτυα και στο Internet.

Δρομολόγηση ως προς την κατάσταση συνδέσμων (Link State Routing)

Ο αλγόριθμος περιλαμβάνει τα εξής βήματα που υλοποιούνται σε κάθε κόμβο:

1. Ανακάλυψη των γειτόνων του κόμβου και των διευθύνσεών τους.
2. Καθορισμός της απόστασης απ' τον καθένα ή του «κόστους» του συνδέσμου.
3. Κατασκευή ενός πακέτου με τις πληροφορίες που μαζεύτηκαν.
4. Αποστολή του πακέτου στους άλλους κόμβους και λήψη των ανάλογων πακέτων απ' αυτούς.
5. Υπολογισμός σε κάθε κόμβο χωριστά του ελάχιστου μονοπατιού προς κάθε άλλο κόμβο με τον αλγόριθμο του Dijkstra.

Ανακάλυψη των γειτόνων



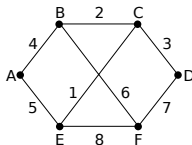
- ▶ Ο κόμβος αποστέλλει ένα πακέτο HELLO σε κάθε εξερχόμενο σύνδεσμο.
- ▶ Κάθε κόμβος που παίρνει HELLO απαντάει δίνοντας το όνομά του.
- ▶ Στην περίπτωση ενός τοπικού δικτύου το μέσο αποτελεί άλλον ένα «κόμβο», το ρόλο του οποίου παίζει ένας από τους κόμβους του τοπικού δικτύου.

Καθορισμός του κόστους κάθε συνδέσμου.

Το «κόστος» ενός συνδέσμου μπορεί να καθορισθεί με διάφορες μεθόδους:

- ▶ Βάζοντας το κόστος αντιστρόφως ανάλογο του εύρους ζώνης, π.χ.
1 Gbps Ethernet → 1, 100 Mbps Ethernet → 10.
- ▶ Μπορεί να προστεθεί μια εκτίμηση για τις καθυστερήσεις διάδοσης και αναμονής.
- ▶ Η καθυστέρηση μπορεί να μετρηθεί με πακέτα ECHO.

Δημιουργία των πακέτων κατάστασης των συνδέσμων



A	B	C	D	E	F
Seq.	Seq.	Seq.	Seq.	Seq.	Seq.
Age	Age	Age	Age	Age	Age
B 4	A 4	B 2	C 3	A 5	B 6
E 5	C 2	D 3	F 7	C 1	D 7
	F 6	E 1		F 8	E 8

Το πακέτο που κατασκευάζει κάθε κόμβος έχει την εξής δομή:

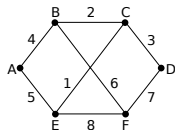
- ▶ Όνομα του κόμβου,
- ▶ αύξων αριθμός,
- ▶ ηλικία,
- ▶ κατάλογος γειτόνων με αποστάσεις.

Τα πακέτα μπορεί να δημιουργούνται περιοδικά ή όταν υπάρξουν μεταβολές στα κόστη.

Διανομή των πακέτων κατάστασης των συνδέσμων

- ▶ Η διανομή γίνεται με πλημμύρα. Κάθε φορά ο αύξων αριθμός αυξάνει κατά ένα.
- ▶ Ο αποδέκτης ενός πακέτου το στέλνει στους γειτονικούς κόμβους εκτός του κόμβου προέλευσης.
- ▶ Αν όμως φέρει ίδιο ή παλαιότερο α/α από το τελευταίο πακέτο του ίδιου κόμβου, καταστρέφεται και δεν αποστέλλεται.
- ▶ Για την αρίθμηση διατίθενται 32 bits.
- ▶ Προβλήματα θα δημιουργηθούν αν ένας κόμβος γίνει reset ή αν γίνει σφάλμα μετάδοσης στο πεδίο αρίθμησης. Για τη λύση τους συνδυάζεται η πληροφορία της ηλικίας.
- ▶ Η ηλικία μειώνεται κατά ένα σε κάθε μετάδοση και επίσης με την πάροδο του χρόνου.

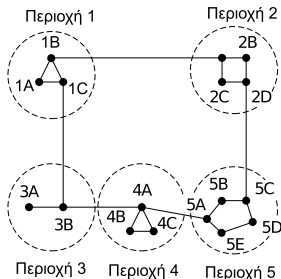
Ο πίνακας διανομής



Source	Seq.	Age	Send flags			ACK flags			Data
			A	C	F	A	C	F	
A	21	60	0	1	1	1	0	0	
F	21	60	1	1	0	0	0	1	
E	21	59	0	1	0	1	0	1	
C	20	60	1	0	1	0	1	0	
D	21	59	1	0	0	0	1	1	

- ▶ Ο πίνακας διανομής (εδώ του κόμβου *B*) δείχνει τις ενέργειες που θα κάνει ένας κόμβος για τα εισερχόμενα πακέτα.
- ▶ Το πακέτο προέλευσης *A* θα φύγει προς *C* και *F* και θα σταλεί επιβεβαίωση προς τον *A*.
- ▶ Το πακέτο προέλευσης *E* έχει έρθει δυο φορές, μέσω *EAB* και *EFB*, οπότε θα φύγει προς τον *C* και θα σταλούν επιβεβαιώσεις προς *A* και *F*.

Ιεραρχική δρομολόγηση



Πλήρης πίνακας του 1A
Προορ. γραμμή βήματα

1A	—	—
1B	1B	1
1C	1C	1
2A	1B	2
2B	1B	3
2C	1B	3
2D	1B	4
3A	1C	3
3B	1C	2
4A	1C	3
4B	1C	4
4C	1C	4
5A	1C	4
5B	1C	5
5C	1B	5
5D	1C	6
5E	1C	5

Ιεραρχικός πίνακας του 1A
Προορ. γραμμή βήματα

1A	—	—
1B	1B	1
1C	1C	1
2	1B	2
3	1C	2
4	1C	3
5	1C	4

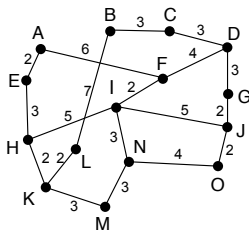
Δρομολόγηση εκπομπής

Η πληροφορία πρέπει να διαδοθεί **σε όλους τους κόμβους**.

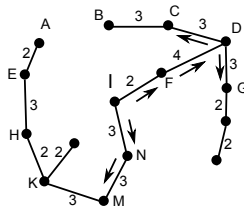
Εναλλακτικές μέθοδοι υλοποίησης της εκπομπής:

1. Αποστολή χωριστού πακέτου σε κάθε κόμβο (point-to-point).
2. Πλημμύρα.
3. Χρήση του διατρέχοντος δέντρου (spanning tree).
4. Δρομολόγηση με πακέτα πολλών προορισμών (multidestination routing): Το πακέτο περιέχει τις διευθύνσεις ενός συνόλου προορισμών. Κάθε κόμβος εξετάζει ποιες γραμμές εξόδου χρειάζονται. Για κάθε μια γεννάει ένα πακέτο με τις διευθύνσεις που της αντιστοιχούν.
5. Προώθηση αντίστροφης διαδρομής.

Χρήση του διατρέχοντος δέντρου (spanning tree)



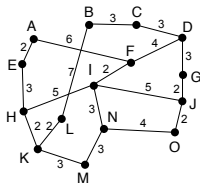
δίκτυο



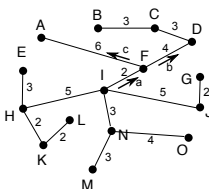
διατρέχον δέντρο (37)

- ▶ Θεωρητικά για δρομολόγηση εκπομπής η πιο οικονομική λύση από πλευράς κόστους επικοινωνίας είναι η χρήση του διατρέχοντος δέντρου (spanning tree).
- ▶ Σε κόμβους όπου υπάρχει διασταύρωση πρέπει να δημιουργούνται επί πλέον αντίγραφα.
- ▶ Ωστόσο πρέπει να γίνει ειδική δρομολόγηση.

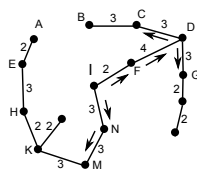
Πακέτα πολλών προορισμών



δίκτυο



δέντρο προορισμού του I (47)

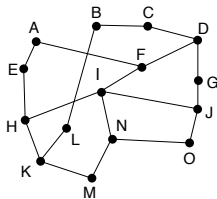


διατρέχον δέντρο (37)

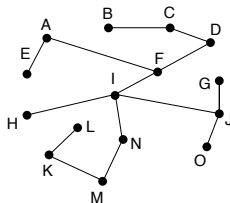
- ▶ Ας υποτεθεί ότι χρησιμοποιείται δρομολόγηση Dijkstra, αλλά τα πακέτα που περνούν από την ίδια διαδρομή συγχωνεύονται σε ένα με πολλούς προορισμούς.
- ▶ Κατά την είσοδο ενός τέτοιου πακέτου σε ένα κόμβο, αν όλοι οι προορισμοί αντιστοιχούν στην ίδια έξοδο, επιλέγεται αυτή η έξοδος. Αλλιώς δημιουργούνται τα σωστά αντίγραφα για κάθε έξοδο.
- ▶ Κατά συνέπεια ακολουθείται το sink tree, το οποίο είναι εν γένει μεγαλύτερο από το spanning tree.
- ▶ Στο παράδ. του σχήματος το πακέτο (a) έχει προορισμούς (A, B, C, D, F) ενώ το πακέτο (b) έχει (B, C, D) και το (c) μόνο A.

Πρώθηση αντίστροφης διαδρομής (reverse path forwarding)

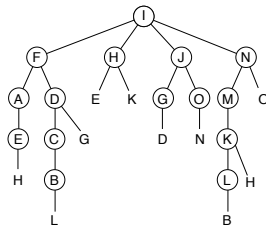
- ▶ Όταν φτάνει ένα πακέτο εκπομπής σε ένα κόμβο, αυτός εξετάζει αν έφτασε μέσα από τη ζεύξη, που θα είχε χρησιμοποιήσει ο κόμβος για να στείλει πακέτα στον αρχικό αποστολέα του πακέτου.
- ▶ Αν ναι, το πακέτο προωθείται προς όλες τις άλλες ζεύξεις, που βγαίνουν από τον κόμβο. Αλλιώς καταστρέφεται.



δίκτυο



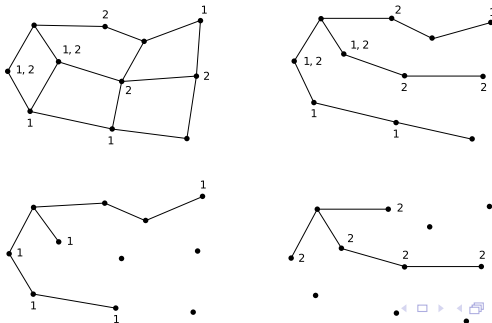
δέντρο προορισμού του I



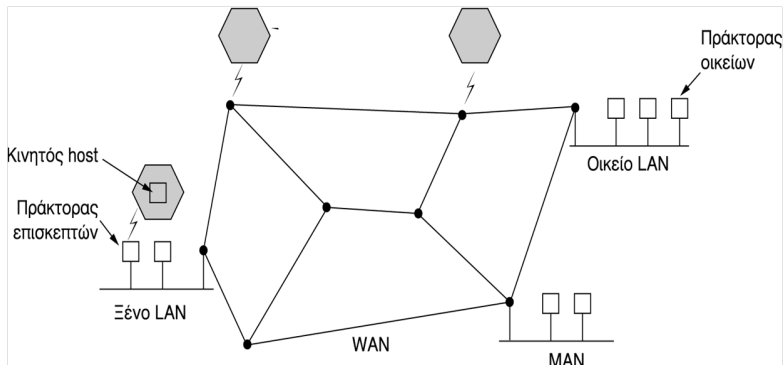
εξέλιξη του αλγόριθμου για εκπομπή από τον I

Δρομολόγηση διανομής

- ▶ Τα πακέτα πρέπει να φτάσουν σε ομάδες επιλεγμένων («τερματικούς») κόμβων.
- ▶ Το ελάχιστου μήκους δέντρο που περιλαμβάνει τους τερματικούς κόμβους είναι το δέντρο *Steiner* (πρόβλημα NP-complete).
- ▶ Μια προσέγγιση είναι να δημιουργηθεί ένα *spanning tree* και να αποκοπούν οι περιττοί κόμβοι (με επανειλημμένη αποκοπή των περιττών φύλλων).

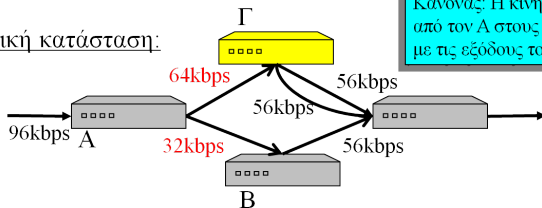


Δρομολόγηση σε κινητά δίκτυα



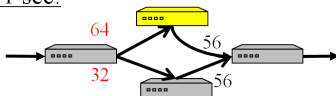
Αντοχή του αλγορίθμου δρομολόγησης

Αρχική κατάσταση:

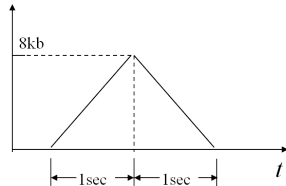
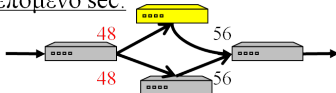


Κανόνας: Η κίνηση μοιράζεται από τον A στους B, Γ ανάλογα με τις εξόδους τους.

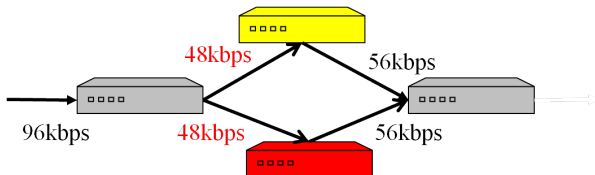
Για 1 sec:



Το επόμενο sec:

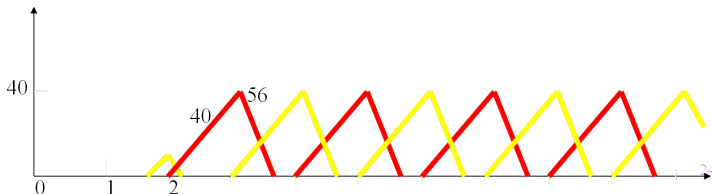


Σταθερότητα του αλγορίθμου δρομολόγησης

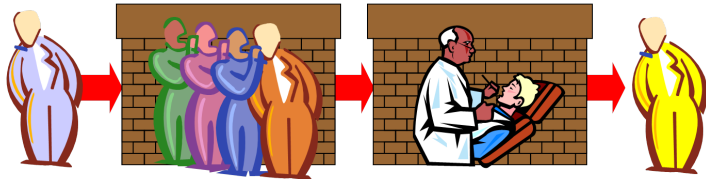


Κανόνας I: Ουρές ίσες \Rightarrow ίση κατανομή

Κανόνας II: Ουρές άνισες \Rightarrow όλο το φορτίο στην πιο μικρή



Υπόβαθρο: Σύστημα αναμονής $A/B/n$



A : Στατιστική περιγραφή αρίξεων

B : Στατιστική περιγραφή χρόνου εξυπηρέτησης
 n : Αριθμός εξυπηρετούντων



Υπόβαθρο: Σύστημα αναμονής $M/M/1$

- ▶ $A = M$ = αφίξεις Poisson: Η πιθανότητα να εμφανισθούν N αφίξεις σε διάστημα t είναι

$$\Pr\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

όπου λ είναι ο ρυθμός αφίξεων (δηλ. $E\{N(t)\} = \lambda t$).

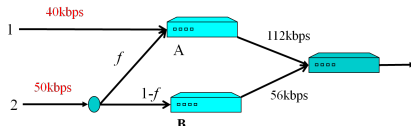
- ▶ $A = M$ = ο χρόνος εξυπηρέτησης T του πελάτη είναι εκθετικά κατανεμημένος, ήτοι

$$\Pr\{T \leq \tau\} = 1 - e^{-\mu\tau}$$

- ▶ Τότε η μέση καθυστέρηση είναι

$$E\{D\} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Δικαιοσύνη



Για πακέτα μήκους 1000 bits.

$$E\{D_A\} = \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} = \frac{1}{112 - (40 + f \times 50)}$$

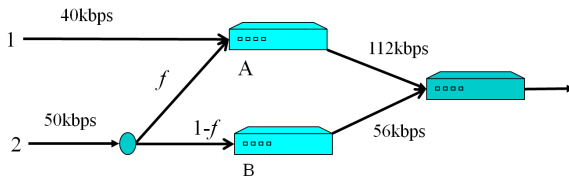
$$E\{D_B\} = \frac{1}{\mu_B - \lambda_B} = \frac{1}{56 - (1 - f)50}$$

$$E\{D_1\} = E\{D_A\}$$

$$E\{D_2\} = fE\{D_A\} + (1 - f)E\{D_B\}$$

$$E\{D_1\} = E\{D_2\} \Leftrightarrow f = 0,66$$

Ελαχιστοποίηση της καθυστέρησης



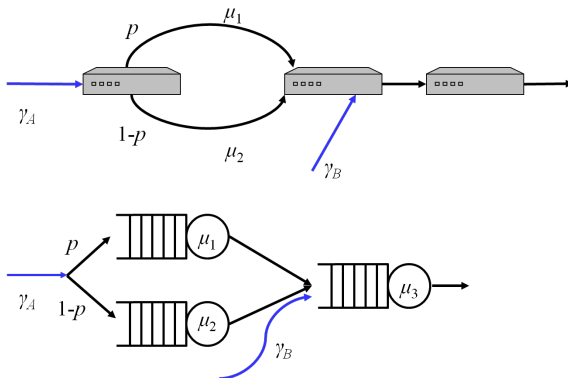
$$E\{D_A\} = \frac{1}{112 - (40 + f \times 50)}$$

$$E\{D_B\} = \frac{1}{56 - (1 - f)50}$$

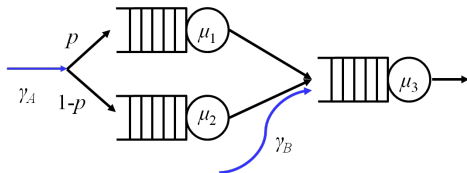
$$E\{D\} = \frac{40}{90}E\{D_1\} + \frac{50}{90}E\{D_2\}$$

$$\min E\{D\} \Leftrightarrow f = 0,46$$

Πιθανοτική στατική δρομολόγηση



Ποια είναι η πιθανότητα p που διανέμει την κίνηση έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η μέση καθυστέρηση;



$$d_1 = \frac{1}{\mu_1 - p\gamma_A} \quad d_2 = \frac{1}{\mu_2 - (1-p)\gamma_A} \quad d_3 = \frac{1}{\mu_3 - (\gamma_A + \gamma_B)}$$

$$d = \frac{p\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B}(d_1 + d_3) + \frac{(1-p)\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B}(d_2 + d_3) + \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B}d_3$$

$$d = \min \Leftrightarrow p = \min \left\{ \frac{\mu_1\sqrt{\mu_2} - \mu_2\sqrt{\mu_1} + \gamma_A\sqrt{\mu_1}}{\gamma_A(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})}, 1 \right\} \quad (\mu_1 > \mu_2)$$