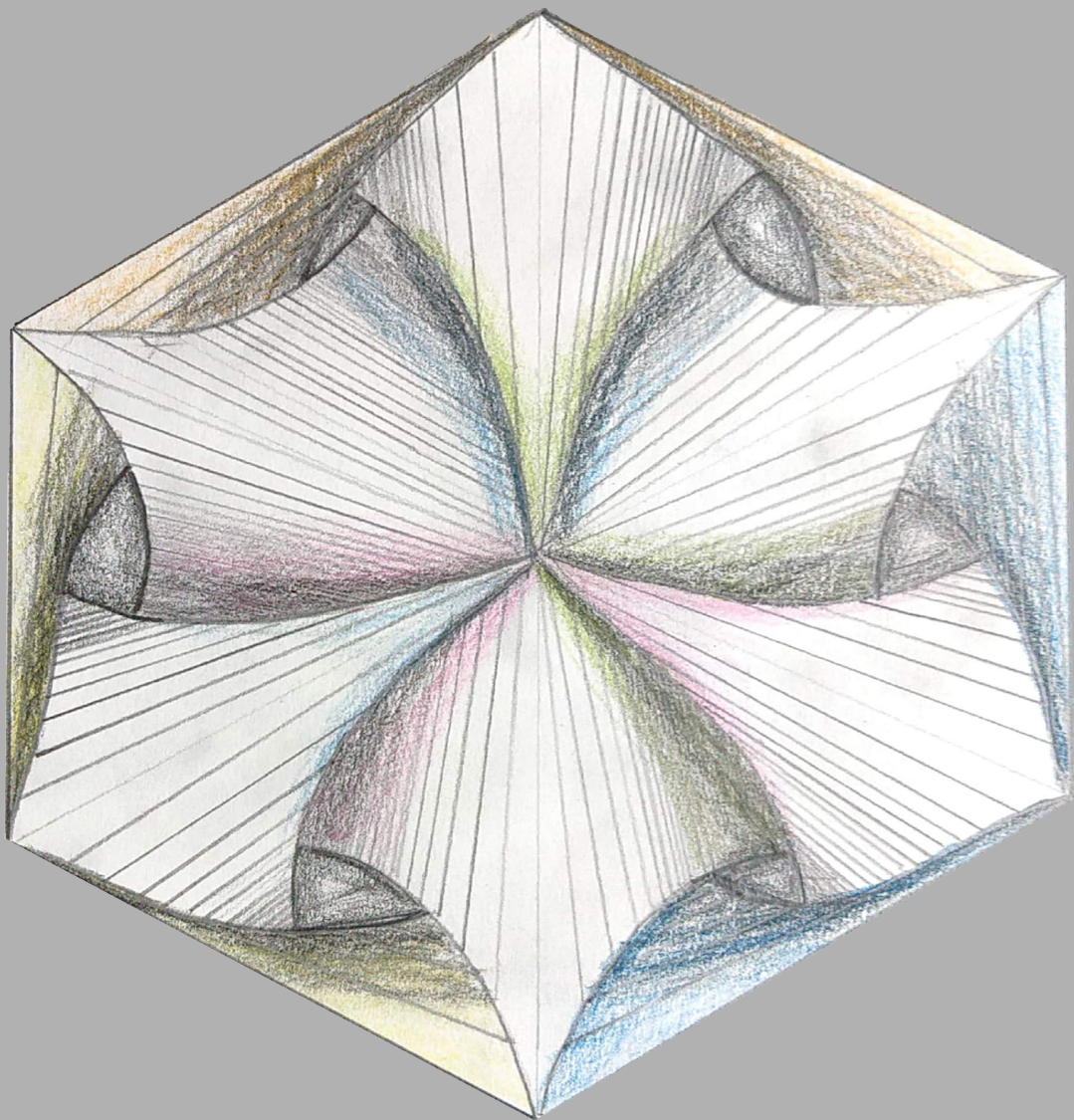


ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ Β. ΔΟΥΜΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Ολοκληρώματα, Αθροίσματα, Ειδικές Συναρτήσεις



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Στοιχεία Ασυμπτωτικής Ανάλυσης

Ολοκληρώματα, Αθροίσματα, Ειδικές Συναρτήσεις

Αριστείδης Β. Δούμας
Τμήμα Μαθηματικών ΕΜΠ
adou@math.ntua.gr

Τίτλος πρωτοτύπου: «Στοιχεία Ασυμπτωτικής Ανάλυσης»

Copyright © 2022, ΚΑΛΛΙΠΟΣ, ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ



Το παρόν έργο διατίθεται με τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού – Μη Εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 4.0. Για να δείτε τους όρους της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode.el>

Αν τυχόν κάποιο τμήμα του έργου διατίθεται με διαφορετικό καθεστώς αδειοδότησης, αυτό αναφέρεται ρητά και ειδικώς στην οικεία θέση.

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική επιμέλεια:

Δημήτριος Καλλιάρας

Δημιουργία Εξωφύλλου:

Εμμέλεια-Αναστασία Δούμα

Τεχνική επεξεργασία:

Δημήτριος Καρατζίδης

ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9 15780

Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Βιβλιογραφική αναφορά:

Δούμας Α., (2022). Στοιχεία Ασυμπτωτικής Ανάλυσης - Ολοκληρώματα, Αθροίσματα, Ειδικές Συναρτήσεις Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις

Διαθέσιμο στο:

<http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-38>

ISBN:

978-618-85850-9-6

Στις τρεις χάριτες της ζωής μου: Την πολυαγαπημένη μου Ισμήνη και τα παιδάκια μας Ρωσσάννα-Θεοδώρα και
Εμμέλεια-Αναστασία.

Στην οπισθέλκουσα της τάξεως 1992.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Συμβολισμός-Βασικές έννοιες	1
1.1.1 Ασυμπτωτικές σειρές	6
1.1.2 Σύγκλιση και ασυμπτωτικότητα	8
1.1.3 Πράξεις μεταξύ ασυμπτωτικών σειρών	8
1.1.4 Η Συνάρτηση Γάμμα	11
1.1.5 Ασκήσεις	13
Βιβλιογραφία	18
2 Ασυμπτωτικά αναπτύγματα ολοκληρωμάτων	19
2.1 Εισαγωγικά παραδείγματα & Ολοκλήρωση κατά παράγοντες	20
2.1.1 Ασκήσεις	33
2.2 Ολοκληρώματα Laplace	36
2.2.1 Η μέθοδος Laplace - Εισαγωγή	38
2.2.2 Ασκήσεις	41
2.3 Το λήμμα του Watson	42
2.3.1 Ασκήσεις	51
2.4 Η μέθοδος Laplace σε γενικής μορφής ολοκληρώματα	52
2.4.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ I	53
2.4.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II	56
2.4.3 Παραδείγματα	58
2.4.4 Ασκήσεις	70
2.5 Περισσότεροι όροι σε ασυμπτωτικά αναπτύγματα ολοκληρωμάτων με τη μέθοδο Laplace	71
2.5.1 Ασκήσεις	77
2.6 Η μέθοδος Laplace για ολοκληρώματα με κινητό μέγιστο	78
2.6.1 Ασκήσεις	82
2.7 Ολοκληρώματα Fourier	83
2.7.1 Ασκήσεις	89

2.8	Η μέθοδος της στάσιμης φάσης (Method of stationary phase)	90
2.8.1	Η περίπτωση όπου δεν έχουμε στάσιμο σημείο	91
2.8.2	Η περίπτωση όπου υπάρχει στάσιμο σημείο	91
2.8.3	Ασκήσεις	99
2.9	Η μέθοδος της επικλινέστερης κατάβασης (Method of steepest descents)	100
2.9.1	Σαγματικά σημεία (saddle points)	104
2.9.2	Ασκήσεις	111
Βιβλιογραφία		112
3	Ασυμπτωτικά αναπτύγματα αθροισμάτων	113
3.1	Η μέθοδος άθροισης του Abel (Method of partial summation)	113
3.1.1	Άθροιση κατά μέρη	118
3.1.2	Ασκήσεις	119
3.2	Αριθμοί και Πολυώνυμα Bernoulli	121
3.2.1	Πολυώνυμα Bernoulli	125
3.2.2	Ασκήσεις	126
3.3	Ο τύπος άθροισης των Euler-Maclaurin	128
3.3.1	Ασκήσεις	138
3.4	Αρμονικοί και Υπερ-αρμονικοί αριθμοί	139
3.4.1	Γενικευμένοι αρμονικοί αριθμοί	144
3.4.2	Υπερ-αρμονικοί αριθμοί	148
3.4.3	Ασκήσεις	150
3.5	Μερικές ακόμη τεχνικές για την ασυμπτωτική συμπεριφορά αθροισμάτων	151
3.5.1	Ασκήσεις	154
Βιβλιογραφία		155
Παράρτημα Α' Η συνάρτηση ζήτα στους άρτιους		157

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε προπτυχιακούς, κυρίως, φοιτητές που έχουν τις πολύ βασικές γνώσεις Απειροστικού Λογισμού, Μιγαδικής Ανάλυσης και Διαφορικών Εξισώσεων. Το βασικό του αντικείμενο είναι η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ολοκληρωμάτων και αθροισμάτων.

Για παράδειγμα, πολλοί από τους πρωτοετείς φοιτητές γνωρίζουν τη φόρμουλα του Stirling, δηλαδή, ότι καθώς $n \rightarrow \infty$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

όπου με το σύμβολο \sim εννοούμε ότι το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Μία ερώτηση που μπορεί κανείς να κάνει, εκτός από το πώς ακριβώς προκύπτει η παραπάνω σχέση, είναι σχετικά με το πώς μπορούμε να έχουμε μία καλύτερη προσέγγιση για την τιμή του $n!$.

Είναι επίσης γνωστή η συνάρτηση σφάλματος (error function):

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

και η σχέση της με τις ουρές της τυπικής κανονικής κατανομής. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος αυτού, καθώς $x \rightarrow 0$ και, κυρίως, όταν $x \rightarrow \infty$.

Για να δώσουμε ένα ακόμη παράδειγμα θυμίζουμε ότι η αρμονική σειρά τάξεως p , δηλαδή η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

συγκλίνει για $p > 1$ και απειρίζεται θετικά για $0 < p \leq 1$. Για $p = 1$ είναι, επίσης, γνωστό ότι το μερικό άθροισμα

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

συμπεριφέρεται (για τιμές του N αρκούντως μεγάλες), σαν τον λογάριθμο $\ln N$. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε πόσο μεγάλο είναι το λάθος που κάνουμε στην προσέγγιση αυτή. Θα δούμε, για παράδειγμα, ότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) = \gamma,$$

όπου γ είναι η σταθερά των *Euler-Mascheroni*.

Στην πορεία του πονήματος αυτού μελετώνται, ως προς την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά, μερικές γνωστές **ειδικές συναρτήσεις**, όπως η συνάρτηση σφάλματος (*error function*), το εκθετικό ολοκλήρωμα (*exponential integral*), η συνάρτηση Γάμμα, αλλά και η άνω και κάτω ημιτελής συνάρτηση Γάμμα (*lower-upper incomplete gamma function*), τα ολοκληρώματα *Fresnel*, οι συναρτήσεις *Bessel*, τα πολυώνυμα *Legendre*, η συνάρτηση δίγαμμα (*digamma function*), η συνάρτηση *Airy*, το ολοκλήρωμα *Stieltjes*, το λογαριθμικό ολοκλήρωμα (*logarithmic integral*) κ.α.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον κριτικό αναγνώστη Τάκη Κωνσταντόπουλο για τα σχόλιά του.

Ευχαριστώ επίσης τον γλωσσικό επιμελητή κ. Δημήτρη Καλλιάρια για τη συμβολή του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύνοψη

Το πρώτο μέρος του βιβλίου αυτού αποτελείται από ένα και μόνο κεφάλαιο. Ωστόσο, είναι αυτό που θέτει το πλαίσιο ως προς την ορολογία και τη γλώσσα που χρησιμοποιούν οι τεχνικές του κλάδου της Ασυμπτωτικής Ανάλυσης. Τα σύμβολα - έννοιες: $O(\cdot)$, $o(\cdot)$, η ασυμπτωτική ισότητα και οι ιδιότητές τους παρουσιάζονται με λεπτομέρειες. Ακολουθεί η μελέτη των ασυμπτωτικών σειρών με τις βασικές τους ιδιότητες. Μία σύντομη αναφορά στη συνάρτηση Γάμμα κρίθηκε αναγκαία, κυρίως λόγω της εκτεταμένης εμφάνισής της σε όλο, σχεδόν, το εύρος του βιβλίου.

1.1 Συμβολισμός-Βασικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε τους ορισμούς που συνθέτουν το βασικό πλαίσιο για την ορολογία της ασυμπτωτικής ανάλυσης. Τούτο θα γίνει παρουσιάζοντας αρκετά παραδείγματα που έχουν σκοπό την εξοικείωση του αναγνώστη με τις έννοιες και τα σύμβολα της περιοχής αυτής. Αναμφίβολα, το πρώτο αυτό κεφάλαιο είναι από τα πλέον σημαντικά του παρόντος πονήματος.

Ορισμός 1.1.1 Γράφουμε

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow x_0 \quad (1.1.1)$$

και διαβάζουμε: η συνάρτηση $f(x)$ είναι μεγάλο O της $g(x)$,¹ καθώς $x \rightarrow x_0$, εάν υπάρχει μία σταθερά $M > 0$ έτσι ώστε

$$|f(x)| \leq M g(x), \quad \text{για κάθε } x \text{ αρκούντως κοντά στο } x_0. \quad (1.1.2)$$

Με τον όρο αρκούντως κοντά εννοούμε ότι υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε για κάθε x με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει η (1.1.2).

¹Ο συμβολισμός αυτός συχνά αποκαλείται *Bachmann – Landau notation*.

Εάν $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq x_0$, γράφουμε με τον ίδιο συμβολισμό εννοώντας ότι η συνάρτηση πηλίκο $f(x)/g(x)$ είναι φραγμένη για $x \geq x_0$, δηλαδή ότι υπάρχει μία σταθερά $M > 0$ έτσι ώστε

$$|f(x)| \leq M g(x) \quad \text{για κάθε } x \geq x_0.$$

Εάν η συνάρτηση $g(x)$ είναι μη αρνητική ο αντίστοιχος ορισμός είναι

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty.$$

Ο ορισμός ισχύει εάν αντικαταστήσουμε το $x_0 \in \mathbb{R}$ με το ∞ . Ακολουθούν μερικά παραδείγματα σχετικά με τον παραπάνω συμβολισμό:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= O(x), \quad \text{καθώς } x \rightarrow 0 \\ 3x + x^3 &= O(x), \quad \text{καθώς } x \rightarrow 0 \\ \log x &= O(x-1), \quad \text{καθώς } x \rightarrow 1 \\ 5x^2 + x^{-3} - e^{-x} &= O(x^2), \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Μία εξίσωση της μορφής

$$f(x) = h(x) + O(g(x))$$

σημαίνει ότι

$$f(x) - h(x) = O(g(x)).$$

Σημειώνουμε ότι από την (1.1.1) δεν έπεται ότι

$$g(x) = O(f(x))$$

δηλαδή, δεν πρόκειται για μία συμμετρική ισότητα. Για παράδειγμα, ενώ ισχύει

$$\sin \frac{1}{x} = O(1), \quad \text{καθώς } x \rightarrow 0$$

δεν αληθεύει ότι

$$1 = O\left(\sin \frac{1}{x}\right), \quad \text{καθώς } x \rightarrow 0.$$

Ειδικότερα, η σχέση (1.1.1) δηλώνει ότι η συνάρτηση $f(x)$ ανήκει στο σύνολο $O(g(x))$, δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων έτσι ώστε να υπάρχει μία θετική σταθερά M και ένα x_0 , προκειμένου το πηλίκο $f(x)/g(x)$ να είναι φραγμένο, για κάθε x αρκούντως κοντά στο x_0 . Επομένως, η έκφραση

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad \text{καθώς } x \rightarrow 0,$$

δηλώνει το γεγονός ότι η διαφορά

$$e^x - 1 - x - x^2/2$$

είναι μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή από τον όρο x^3 επί κάποια σταθερά, όταν το x είναι κοντά στο 0.

Οι ακόλουθες σχέσεις αληθεύουν καθώς $n \rightarrow \infty$ ($c \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f(n) &= O(f(n)) \\ c O(f(n)) &= O(f(n)) \\ O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\ O(O(f(n))) &= O(f(n)) \\ O(f(n)) O(g(n)) &= O(f(n)g(n)) \\ O(f(n)) O(g(n)) &= O(f(n)g(n)) \end{aligned}$$

Ανάλυση αλγορίθμων

* Συχνά στην ανάλυση ενός αλγορίθμου μπορεί κανείς να βρει ότι ο χρόνος (ή ο αριθμός των βημάτων) που απαιτούνται για την ολοκλήρωση ενός προβλήματος είναι για παράδειγμα της τάξεως $O(n)$.

Ας δούμε μία λίστα με κλάσεις συναρτήσεων που απαντώνται συχνά στην ανάλυση αλγορίθμων. Οι συναρτήσεις με τη μικρότερη τάξη αναφέρονται πρώτες.

Συμβολισμός – Ονομασία τάξης

$$O(1) = \text{σταθερά}$$

$$O(\log(n)) = \text{λογαριθμική}$$

$$O((\log(n))^c) = \text{πολυλογαριθμική}$$

$$O(n) = \text{γραμμική}$$

$$O(n^2) = \text{τετραγωνική}$$

$$O(n^c) = \text{πολυωνυμική}$$

$$O(c^n) = \text{εκθετική}$$

Σημειώνουμε ότι οι τάξεις $O(n^c)$ και $O(c^n)$ είναι εντελώς διαφορετικές. Η τελευταία μεγαλώνει πολύ, πολύ ταχύτερα ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη είναι η τιμή της σταθεράς c . Επίσης, η τάξη $O(\log n)$ είναι ισοδύναμη με την $O(\log(n^c))$. Οι λογάριθμοι διαφέρουν μόνο κατά έναν συντελεστή, κάτι που το μεγάλο O αγνοεί με βάση τον ορισμό του.

Ορισμός 1.1.2 Εάν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ασυμπτωτικά ίση (asymptotic to) ως προς τη συνάρτηση $g(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$, και γράφουμε

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty. \quad (1.1.3)$$

Ο ορισμός αυτός ισχύει εάν αντικαταστήσουμε το ∞ με κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έτσι λοιπόν

$$\sin(2x) \sim 2x, \quad x \rightarrow 0$$

$$x + e^{-x} \sim x, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sqrt{n^2 + 1} - n \sim \frac{1}{2n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Επίσης από την

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty \quad \text{έπεται ότι} \quad g(x) \sim f(x) \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty.$$

Είναι φανερό ότι πέραν της συμμετρίας η σχέση \sim είναι ανακλαστική ($f \sim f$), αλλά και μεταβατική (δηλαδή, εάν $f \sim g$ και $g \sim h$, τότε και $f \sim h$). Συνεπώς, η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου (για παράδειγμα) των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε διάστημα που περιέχει το ∞ .

Παρατήρηση 1.1.3 Είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι ακόμη και εάν δύο συναρτήσεις είναι ασυμπτωτικά ίσες (καθώς $x \rightarrow \infty$) η διαφορά τους μπορεί διαρκώς να μεγαλώνει. Έτσι λοιπόν,

$$e^x + x \sim e^x \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty.$$

Ορισμός 1.1.4 Γράφουμε

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty \quad (1.1.4)$$

και διαβάζουμε: η συνάρτηση $f(x)$ είναι μικρό ο της $g(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$ δηλώνοντας ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Και ο ορισμός αυτός ισχύει εάν αντικαταστήσουμε το ∞ με κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.1.5 Μία εξίσωση της μορφής

$$f(x) = h(x) + o(g(x)), \quad x \rightarrow \infty,$$

σημαίνει ότι

$$f(x) - h(x) = o(g(x)).$$

Πιο γενικά, η ασυμπτωτική σχέση

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty,$$

σημαίνει ότι

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) = g(x)[1 + o(1)] \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.1.5)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα. Οι ακόλουθες σχέσεις αληθεύουν:

$$10x^2 - 6x^5 = o(x), \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{2}{x^2} - e^{-2x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

$$x^3 = o(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

$$x^2 = o(x^3), \quad x \rightarrow \infty$$

$$x = o(\log x), \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\log x = o(x), \quad x \rightarrow \infty$$

$$e^{-\frac{1}{x}} = o(x^n), \quad x \rightarrow 0^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παρατήρηση 1.1.6 Σημειώνουμε ότι αν και σε μία σχέση του τύπου (1.1.4) χρησιμοποιούμε το σύμβολο $=$, τούτο δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι τα πρόσθετα των δύο μελών είναι ίδια. Για παράδειγμα

$$x = o(-30) \quad \text{καθώς } x \rightarrow 0^+,$$

αν και τα πρόσθετα των δύο μελών είναι αντίθετα.

Παρατήρηση 1.1.7 Εάν

$$f(x) = O(1) \quad \text{τότε } f(x) = o(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

ενώ το αντίστροφο του ισχυρισμού **δεν ισχύει**.

Το ενθύ προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς του $O(\cdot)$ και $o(\cdot)$. Για το αντίστροφο ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για την οποία, ενώ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0, \text{ ωστόσο δεν ισχύει ότι } \sqrt{x} = O(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

* Είναι χρήσιμο να έχει γίνει ξεκάθαρη η σχέση της ασυμπτωτικής ισότητας με το σύμβολο $O(\cdot)$ και αντιστρόφως. Έχουμε την ακόλουθη

Πρόταση 1.1.8 *Ασυμπτωτικά ίσες συναρτήσεις είναι της ίδιας τάξης. Εάν δηλαδή,*

$$f(x) \sim g(x), \quad \text{καθώς } x \rightarrow x_0,$$

τότε

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{και} \quad g(x) = O(f(x)), \quad \text{καθώς } x \rightarrow x_0.$$

Πράγματι, από την ασυμπτωτική ισότητα έχουμε ισοδύναμα από την (1.1.5) ότι

$$f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε εάν $|x - x_0| < \delta$, να έχουμε $|f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)| - |g(x)| &\leq |f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)| \\ |g(x)| - |f(x)| &\leq |f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|. \end{aligned}$$

Από την πρώτη ανισότητα έχουμε

$$|f(x)| \leq (1 + \varepsilon) |g(x)|,$$

δηλαδή $f(x) = O(g(x))$ καθώς $x \rightarrow x_0$. Θέτοντας $\varepsilon = 1/2$ στη δεύτερη ανισότητα λαμβάνουμε

$$|g(x)| \leq 2 |f(x)|,$$

δηλαδή $g(x) = O(f(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Όμως, το αντίστροφο **δεν ισχύει**. Ας θεωρήσουμε, για ευκολία, τις συναρτήσεις

$$f(x) = x, \quad g(x) = \alpha x, \quad \alpha > 1.$$

Είναι προφανές ότι $f(x) = O(g(x))$, καθώς επίσης και ότι $g(x) = O(f(x))$, $x \rightarrow 0$.

Δεν ισχύει όμως ότι $f(x) \sim g(x)$, διότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\alpha} \neq 1$. ■

Η ακόλουθη είναι μία πολύ χρήσιμη

Παρατήρηση 1.1.9 *Εάν,*

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow \infty$$

ΔΕΝ μπορούμε να πούμε ότι

$$e^{f(x)} \sim e^{g(x)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

όμως **ΕΑΝ**,

$$f(x) - g(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty \tag{1.1.6}$$

ΤΟΤΕ μπορούμε να πούμε ότι

$$e^{f(x)} \sim e^{g(x)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο ισχυρισμός δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα,

$$n^2 + n \sim n^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

ενώ προφανώς

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = \infty \neq 1.$$

Εάν όμως ισχύει η (1.1.6) έχουμε άμεσα

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{o(1)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

1.1.1 Ασυμπτωτικές σειρές

Ορισμός 1.1.10 Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ περιγράφεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, καθώς $x \rightarrow x_0$, και γράφουμε

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x \rightarrow x_0),^2 \quad \text{εάν}$$

$$f(x) - \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n = o(x - x_0)^N \quad \text{για κάθε } N, \quad (x \rightarrow x_0). \quad (1.1.7)$$

Λέμε ότι η παραπάνω δυναμοσειρά είναι ασυμπτωτική ως προς τη συνάρτηση $f(x)$, $(x \rightarrow x_0)$.

Συνεπώς, μία δυναμοσειρά είναι ασυμπτωτική ως προς μία συνάρτηση, εάν το υπόλοιπο μετά από $(N + 1)$ όρους είναι πολύ μικρότερο από τον τελευταίο $(N + 1)$ -οστο όρο, καθώς $x \rightarrow x_0$.

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι

$$f(x) - \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n \sim a_M (x - x_0)^M \quad (x \rightarrow x_0),$$

όπου a_M είναι ο πρώτος μη μηδενικός συντελεστής μετά τον a_N .

Συναντούμε επίσης την περίπτωση μη ακέραιων τιμών στον εκθέτη του όρου $(x - x_0)$. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{an}$ ($a > 0$) είναι ασυμπτωτική ως προς τη συνάρτηση $f(x)$, εάν

$$f(x) - \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^{an} = o(x - x_0)^{aN} \quad (x \rightarrow x_0) \quad \text{για κάθε } N.$$

Εάν $x_0 = \infty$ ο αντίστοιχος ορισμός είναι

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-an} \quad (x \rightarrow \infty), \quad \text{εάν}$$

$$f(x) - \sum_{n=0}^N a_n x^{-an} = o(x^{-aN}) \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{για κάθε } N.$$

²Αυτός ο ορισμός είναι γνωστός ως *Poincaré expansion*.

Παρατήρηση 1.1.11 Από τον ορισμό βλέπουμε ότι μία δυναμοσειρά μπορεί να είναι ασυμπτωτική ως προς μία συνάρτηση, χωρίς αναγκαστικά να είναι συγκλίνουσα.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα (το οποίο θα μελετήσουμε αργότερα) είναι η φόρμουλα του *Stirling* για τη συνάρτηση Γάμμα καθώς $x \rightarrow \infty$

$$\Gamma(x) \sim x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left[1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \frac{163879}{209018880x^5} + \frac{5246819}{75246796800x^6} - \frac{534703531}{902961561600x^7} - \frac{4483131259}{86684309913600x^8} + \dots \right].$$

Σημειώνουμε ότι οι συντελεστές στο προηγούμενο ανάπτυγμα μπορεί να είναι μικροί αρχικά, όμως κάποια στιγμή θα αρχίσουν να αυξάνουν και μάλιστα ταχύτατα. Για παράδειγμα, ο 35^{ος} όρος για το 9! είναι 1010/1035 (αρκετά μικρός). Ωστόσο, ο 175^{ος} όρος είναι μεγαλύτερος της μονάδας και ο 199^{ος} όρος είναι περίπου 10¹².

Σημείωση 1.1.12 Δεν μπορούν όλες οι συναρτήσεις να γραφούν ως το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα μίας δυναμοσειράς.

Για παράδειγμα, και για τη συνάρτηση e^x , δεν μπορεί να βρεθεί δυναμοσειρά του τύπου $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-an}$, καθώς $x \rightarrow \infty$, λόγω του τρόπου αύξησης του όρου e^x όταν $x \rightarrow \infty$.

Παρατήρηση 1.1.13 Εάν η συνάρτηση $f(x)$ δύναται να αναπτυχθεί ασυμπτωτικά ως δυναμοσειρά, δηλαδή: $f(x) - \sum_{n=0}^N a_n x^{-aN} = o(x^{-aN})$ ($x \rightarrow x_0$), τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος είναι **μοναδικοί**.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο παραπάνω ορισμός παρέχει έναν ασφαλή τρόπο να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n κατά μοναδικό τρόπο:

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad (1.1.8)$$

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0}{(x - x_0)^a}, \quad (1.1.9)$$

και γενικότερα,

$$a_N = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n (x - x_0)^{an}}{(x - x_0)^{aN}}. \quad (1.1.10)$$

Η συνθήκη για να έχει μία συνάρτηση ασυμπτωτικό ανάπτυγμα δυναμοσειράς είναι **όλα τα παραπάνω όρια να υπάρχουν**.

Παρατήρηση 1.1.14 Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι, αν και υπάρχουν πολλές διαφορετικές συναρτήσεις ασυμπτωτικά σε μία δοθείσα δυναμοσειρά, υπάρχει **μόνο μία** ασυμπτωτική δυναμοσειρά για κάθε συνάρτηση (όπως είδαμε στις σχέσεις (1.1.8) – (1.1.10)).

Το γεγονός ότι μία ασυμπτωτική σειρά δεν προσδιορίζει κατά μοναδικό τρόπο τη συνάρτηση στην οποία είναι ασυμπτωτικά ίση μπορεί κανείς να επαληθεύσει εύκολα με τις συναρτήσεις

$$(1+x)^{-1}, \quad \frac{1+e^{-2x}}{1+x}, \quad \text{και} \quad (1+x+e^{-\sqrt{x}})^{-1} \quad (1.1.11)$$

οι οποίες έχουν το ίδιο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-n}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Τούτο δεν είναι δύσκολο να το δει κανείς. Ας το δούμε για τις δύο πρώτες συναρτήσεις της (1.1.11). Είναι άμεσο ότι

$$\frac{1}{x+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-n}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Επίσης η διαφορά

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1+e^{-2x}}{1+x} = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad \forall n, \quad (x \rightarrow \infty). \quad (1.1.12)$$

και το ζητούμενο έπεται άμεσα από την (1.1.12).

1.1.2 Σύγκλιση και ασυμπτωτικότητα

Η διαφορά μεταξύ συγκλίνουσας και ασυμπτωτικής σειράς είναι η εξής:

Εάν η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ συγκλίνει για $|x - x_0| < R$, τότε το υπόλοιπο $\varepsilon_N(x) := f(x) - \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n$ τείνει στο μηδέν, καθώς $N \rightarrow \infty$ για κάθε σταθεροποιημένο (*fixed*) x , $|x - x_0| < R$.

Από την άλλη μεριά, εάν η σειρά είναι ασυμπτωτική ως προς τη συνάρτηση $f(x)$, τότε το υπόλοιπο τείνει στο μηδέν ταχύτερα από τον όρο $(x - x_0)^N$ καθώς $x \rightarrow x_0$ για N σταθεροποιημένο, **αλλά** δεν χρειάζεται να τείνει στο μηδέν καθώς $N \rightarrow \infty$, για κάθε σταθεροποιημένο x .

Το πλεονέκτημα που μας δίνει μία ασυμπτωτική σειρά η οποία αν και μπορεί να μην συγκλίνει για μεγάλα x , είναι ότι ένας πεπερασμένος αριθμός όρων (συχνά πάρα πολύ μικρός) είναι μία πάρα πολύ καλή προσέγγιση για την αντίστοιχη συνάρτηση $f(x)$. Αντιθέτως με μία συγκλίνουσα σειρά η προσέγγιση βελτιώνεται όσο περισσότερους όρους πάρουμε.

Η σύγκλιση είναι μία *απόλυτη* έννοια, μία εγγενής ιδιότητα των συντελεστών a_n του αναπτύγματος. Μπορεί κανείς, φυσικά, να αποδείξει ότι μία σειρά συγκλίνει χωρίς να γνωρίζει τη συνάρτηση στην οποία συγκλίνει. Ωστόσο, η ασυμπτωτικότητα είναι μία *σχετική* ιδιότητα των συντελεστών του αναπτύγματος και της συνάρτησης $f(x)$, ως προς την οποία είναι ασυμπτωτική η σειρά. Για να αποδείξει κανείς ότι μία δυναμοσειρά είναι ασυμπτωτική ως προς μία συνάρτηση $f(x)$, πρέπει να θεωρήσει **από κοινού** τη συνάρτηση $f(x)$ **και** τους συντελεστές του αναπτύγματος. Είναι λοιπόν άμεσο (και εύκολο να το δει κανείς) ότι εάν η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

συγκλίνει για $|x - x_0| < R$ στη συνάρτηση $f(x)$, τότε επίσης

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \rightarrow x_0.$$

Υπό αυτήν την έννοια, οι ασυμπτωτικές σειρές είναι μία γενίκευση των σειρών *Taylor*.

1.1.3 Πράξεις μεταξύ ασυμπτωτικών σειρών

Οι περισσότερες λειτουργίες (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, ολοκλήρωση) μπορούν να εκτελεστούν στις ασυμπτωτικές σειρές όρο προς όρο, ακριβώς σαν να ήταν συγκλίνουσες σειρές. Έτσι εάν οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ έχουν ασυμπτωτικά αναπτύγματα καθώς $x \rightarrow x_0$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

αντίστοιχα, τότε για τις $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, και $\frac{f(x)}{g(x)}$ ισχύουν αντίστοιχα

$$f(x) + g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \text{όπου} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \quad \text{όπου} \quad d_n = \frac{a_n - \sum_{k=0}^{n-1} d_k b_{n-k}}{b_0}, \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\text{και} \quad b_0 \neq 0, \quad d_0 = a_0/b_0$$

Σχετικά με την ολοκλήρωση έχουμε την ακόλουθη

Πρόταση 1.1.15 Κάθε ασυμπτωτική σειρά $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $(x \rightarrow x_0)$ μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο, εάν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κοντά στο x_0 :

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}, \quad x \rightarrow x_0.$$

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό μας για κάθε $N > 0$ έχουμε

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n \right| = o(x - x_0)^N \quad (x \rightarrow x_0).$$

Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M := M(\varepsilon)$ έτσι ώστε

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n \right| \leq \varepsilon |x - x_0|^N, \quad |x - x_0| \leq M.$$

Επειδή η απόλυτη τιμή του ολοκληρώματος είναι μικρότερη ή ίση από το ολοκλήρωμα της απόλυτης τιμής έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x \left[f(t) - \sum_{n=0}^N a_n (t - x_0)^n \right] dt \right| &\leq \int_{x_0}^x \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n (t - x_0)^n \right| dt \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0}^x |t - x_0|^N dt \\ &= \frac{\varepsilon}{N+1} |x - x_0|^{N+1}, \quad |x - x_0| \leq M. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\left| \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt - \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_n}{n+1} \right) (x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{N+1}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{N+1}, \quad |x - x_0| \leq M.$$

Καθώς το ε είναι τυχαίο, λαμβάνουμε για κάθε N

$$\int_{x_0}^x f(t) dt - \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = o(x - x_0)^{N+1}, \quad x \rightarrow x_0$$

και το ζητούμενο έπεται. ■

Παρατήρηση 1.1.16 Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο μία ασυμπτωτική σειρά στο άπειρο. Έτσι εάν

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^{-n}, \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\int_x^{\infty} \left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right] dt \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n-1} x^{1-n}, \quad x \rightarrow \infty.$$

* Σημαντική εξαίρεση, για παράδειγμα, η παραγωγισιμότητα η οποία δεν ισχύει χωρίς επιπλέον περιορισμούς. Το πιο κλασικό παράδειγμα συνθέτουν οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ που ικανοποιούν την

$$g(x) = f(x) + e^{-1/(x-x_0)^2} \sin \left(e^{1/(x-x_0)^2} \right).$$

Η αξία του παραδείγματος έγκειται στη συνάρτηση κατά την οποία διαφέρουν οι $f(x)$ και $g(x)$. Αυτή όταν $x \rightarrow x_0$, τείνει στο μηδέν (πολύ) ταχύτερα από όλες τις δυνάμεις του $(x - x_0)$ (εκθετικά μικρή -subdominant function). Επομένως, οι $f(x)$ και $g(x)$ έχουν το ίδιο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα καθώς $x \rightarrow x_0$.

Όμως, δεν είναι **κατ' ανάγκην** αληθές ότι συμβαίνει το ίδιο και για τις παραγώγους τους $f'(x)$, $g'(x)$ καθώς $x \rightarrow x_0$, καθώς

$$g'(x) = f'(x) - 2(x - x_0)^{-3} \cos \left(e^{1/(x-x_0)^2} \right) + 2(x - x_0)^{-3} e^{-1/(x-x_0)^2} \sin \left(e^{1/(x-x_0)^2} \right).$$

Τούτο ισχύει διότι η συνάρτηση $(x - x_0)^{-3}$ δεν τείνει στο μηδέν ταχύτερα από όλες τις δυνάμεις του $(x - x_0)$, $x \rightarrow x_0$ (δεν είναι εκθετικά μικρή -subdominant function). **Ωστόσο, η παραγωγισιμότητα όρο προς όρο επιτρέπεται εάν η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει και είναι ολοκληρώσιμη, καθώς $x \rightarrow x_0$. Τότε εάν,**

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

θα έχουμε

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \rightarrow x_0.$$

Ειδικότερα, εάν η πραγματική συνάρτηση $f(x)$ είναι αναλυτική σε μία περιοχή του x_0 τότε μπορούμε να παραγωγίσουμε το ασυμπτωτικό της ανάπτυγμα όρο προς όρο (ας θυμηθούμε ότι μία πραγματική συνάρτηση $f(x)$ είναι αναλυτική στο $x = x_0$, εάν δύναται να αναπαρασταθεί ως δυναμοσειρά δυνάμεων του όρου $(x - x_0)$ με μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης). Για παράδειγμα από τη σχέση

$$\frac{1}{x-1} \sim \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots, \quad x \rightarrow \infty \quad (1.1.13)$$

έχουμε

$$\frac{1}{(x-1)^2} \sim \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \dots, \quad x \rightarrow \infty$$

καθώς η δυναμοσειρά που εμφανίζεται στην (1.1.13) συγκλίνει για κάθε $x > 1$ και επομένως η συνάρτηση $1/(x-1)$ είναι αναλυτική για κάθε $x > 1$.

Μάλιστα, εάν στο μιγαδικό επίπεδο θεωρήσουμε συνάρτηση f ολόμορφη στο

$$A_{z_0}(a.b) = \{z \in \mathbb{C}, a \leq \arg(z - z_0) \leq b\}, \quad |z - z_0| < R.$$

Εάν έχουμε, λοιπόν,

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \rightarrow z_0, \quad a \leq \arg(z - z_0) \leq b,$$

τότε θα έχουμε και

$$f'(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad z \rightarrow z_0, \quad a < \arg(z - z_0) < b.$$

Ολοκληρώνουμε με την ακόλουθη περίπτωση. Έστω το σύνολο

$$D = \{z \in \mathbb{C}, \theta_0 \leq \arg(z - z_0) \leq \theta_1\}, \quad |z| > R.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f'(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty, \text{ στο } D.$$

Έστω ακόμη ότι η $f(z)$ έχει συνεχή παράγωγο και η $f'(z)$ έχει ασυμπτωτικό ανάπτυγμα καθώς $z \rightarrow \infty$, στο D . Τότε (για την απόδειξη βλ. π.χ., [1])

$$f'(z) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{-n-1}, \quad z \rightarrow \infty, \text{ στο } D.$$

Ως ένα **αντιπαράδειγμα** στην παραπάνω πρόταση ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(z) := e^{-z} \cos(e^z)$$

για την οποία ισχύει

$$f(z) \sim 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - A, \quad A > 0.$$

Βλέπουμε ότι δεν ισχύει το προηγούμενο επιχείρημα, καθώς για την παράγωγο της f έχουμε

$$f'(z) = -\sin e^z - e^{-z} \cos(e^z).$$

* Είναι χρήσιμο να ανακαλέσουμε μερικές ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

1.1.4 Η Συνάρτηση Γάμμα

Ο μοντέρνος ορισμός της συνάρτησης Γάμμα (βλ. π.χ., [2])

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad (1.1.14)$$

οφείλεται στον *Legendre* (1809). Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες λαμβάνουμε

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad (1.1.15)$$

από όπου και για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (1.1.16)$$

Σημειώνουμε ότι

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (1.1.17)$$

Από την (1.1.14) λαμβάνουμε

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t \, dt,$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^2 \, dt,$$

$$\Gamma'''(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^3 \, dt.$$

Επομένως,

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt, \quad (1.1.18)$$

$$\Gamma''(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} (\ln t)^2 \, dt, \quad (1.1.19)$$

$$\Gamma'''(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} (\ln t)^3 \, dt. \quad (1.1.20)$$

Ειδικότερα,

$$\Gamma(1) = 1, \quad (1.1.21)$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma, \quad (1.1.22)$$

$$\Gamma''(1) = \zeta(2) + \gamma^2, \quad (1.1.23)$$

$$\Gamma'''(1) = -(2\zeta(3) + 3\gamma\zeta(2) + \gamma^3), \quad (1.1.24)$$

όπου $\gamma = 0.5772\dots$ είναι η σταθερά των *Euler-Mascheroni*, ενώ με $\zeta(\cdot)$ δηλώνεται η συνάρτηση ζήτα του *Riemann*. Από την (1.1.14), λαμβάνουμε άμεσα την (1.1.21). Για να δώσουμε μία περιγραφή της απόδειξης των (1.1.22)-(1.1.24) ξεκινάμε από την πολύ γνωστή αναπαράσταση γινομένου για τη συνάρτηση Γάμμα:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}.$$

Λογαριθμίζοντας έχουμε

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right\}. \quad (1.1.25)$$

Παραγωγίζοντας (διαδοχικά) δύο φορές και τα δύο μέλη της (1.1.25) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης *δίγαμμα* (*psi function*), δηλαδή της λογαριθμικής παραγώγου της συνάρτησης Γάμμα, έχουμε

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \right) \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right\}, \quad x > 0, \quad (1.1.26)$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2} \right) \frac{1}{n^2} \right\}, \quad x > 0. \quad (1.1.27)$$

Θέτοντας $x = 1$ στην (1.1.27) λαμβάνουμε

$$\psi'(1) = \zeta(2). \quad (1.1.28)$$

Ακολούθως, η σχέση (1.1.26) για $x = 1$ αποδίδει

$$\begin{aligned} \psi(1) &= -\gamma - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\gamma - 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\gamma = \Gamma'(1). \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

Για την απόδειξη της (1.1.23) χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης $\psi(\cdot)$, καθώς και τις (1.1.28), και (1.1.22). Η απόδειξη της (1.1.24) είναι ανάλογη.

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να εφαρμόσει την πολύ χρήσιμη αναδρομική σχέση (βλ. [2])

$$\Gamma^{(n+1)}(1) = -\gamma \Gamma^{(n)}(1) + n! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(n-k)!} \zeta(k+1) \Gamma^{(n-k)}(1).$$

Είναι χρήσιμο το ακόλουθο:

Λήμμα 1.1.17 Για κάθε θετικό ακέραιο p

$$\int_0^{\infty} e^{-t^p} dt = \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right). \quad (1.1.30)$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = t^p$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t^p} dt &= \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \\ &\stackrel{(1.1.15)}{=} \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right). \end{aligned}$$

■

Κλείνουμε τούτη τη σύντομη αναφορά στη συνάρτηση Γάμμα με τους ακόλουθους ορισμούς για την άνω και κάτω ημιτελή συνάρτηση Γάμμα:

$$\begin{aligned} \gamma(z, x) &:= \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt, & (\text{Lower incomplete Gamma function}), \\ \Gamma(z, x) &:= \int_x^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, & (\text{Upper incomplete Gamma function}), \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$. * Η βιβλιογραφία για τη συνάρτηση Γάμμα είναι εκτεταμένη. Συνιστούμε στον αναγνώστη τη σύντομη και περιεκτική μονογραφία του Emil Artin: The Gamma Function, Dover Publications, 2015.

1.1.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1.18 Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα

Ισχυρισμός	Είναι Αληθές ή Ψευδές;	Εάν είναι Ψευδές συμπληρώστε το σωστό
$O(f+g) = O(f) + O(g)$		
$O(f \cdot g) = O(f) \cdot O(g)$		
Εάν $g = O(f)$ και $h = O(f)$, τότε $g = O(h)$		
$20n^3 - 10n^2 + 12n = O(n^4)$		
$200n^3 - 10n^2 + 2n = O(n^2 \log n)$		

Άσκηση 1.1.19 Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα (η πρώτη γραμμή λειτουργεί ως υπόδειγμα) καθώς $n \rightarrow \infty$

Έκφραση	Κυρίαρχος όρος ($n \rightarrow \infty$)	$O(\cdot)$
$10 + 0.0001n^3 + 0.32n$	$0.0001n^3$	$O(n^3)$
$100n + 200n^{1.7} + 75n \log n$		
$0.2n + 2n^{1.4} + 4.5n^{1.8}$		
$n^2 \log_5 n + n (\log_5 n)^2$		
$n \log_5 n + n \log_4 n$		
$200n + 0.0001n^2$		
$5n + n^{0.5} + 0.05n^{5/4}$		

Άσκηση 1.1.20 Έστω συνάρτηση f διαφορίσιμη στο 0 με $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Τότε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f'(0)}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 1.1.21 Να βρεθούν δύο ακολουθίες θετικών πραγματικών όρων $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ έτσι ώστε

$$a_n \sim b_n$$

αλλά,

$$a_n^n \not\sim b_n^n, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Άσκηση 1.1.22 Με τη βοήθεια της σειράς του Stirling για το $n!$ ³:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty$$

να αποδείξετε ότι

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$C_n = \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{9}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

³Η απόδειξη αυτής της σειράς θα μας απασχολήσει σε επόμενο κεφάλαιο.

όπου C_n ⁴ είναι οι αριθμοί Catalan που δίδονται από τις σχέσεις:

$$C_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Τέλος, να αποδείξετε την ακόλουθη ασυμπτωτική ισότητα

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=2}^n \frac{k+n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 1.1.23 Θεωρούμε το πολυώνυμο βαθμού m

$$Q(n) = a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0.$$

Να αποδείξετε ότι

$$Q(n) = O(n^m), \quad n \geq n_0$$

για κατάλληλο n_0 το οποίο και να βρείτε.

Άσκηση 1.1.24 Έστω ότι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

συγκλίνει για $|x - x_0| < R$ στη συνάρτηση $f(x)$. Να αποδείξετε ότι είναι επίσης

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \rightarrow x_0.$$

Υπό αυτήν την έννοια, οι ασυμπτωτικές σειρές είναι μία γενίκευση των σειρών Taylor.

Άσκηση 1.1.25 Να βρείτε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της πραγματικής συνάρτησης

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \quad x \rightarrow 0^+.$$

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 1.1.26 Είναι Σωστός ή Λάθος ο ισχυρισμός:

$$x^2 \sim 0, \quad x \rightarrow 0;$$

Αιτιολογήστε την άποψή σας.

Άσκηση 1.1.27 Ο n -οστος αρμονικός αριθμός H_n ορίζεται ως το άθροισμα των αντιστρόφων των πρώτων n θετικών ακεραίων

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.1.31)$$

Για τους αρμονικούς αριθμούς (harmonic numbers) έχουμε

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty,^5 \quad (1.1.32)$$

⁴Οι αριθμοί Catalan συνδέονται, μεταξύ αρκετών άλλων, με τον αριθμό των bits που απαιτούνται για την αναπαράσταση δυαδικών δένδρων με n κόμβους.

⁵Η απόδειξη θα δοθεί αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο όπου και θα δώσουμε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμά τους.

όπου $\gamma = 0.5772 \dots$ η σταθερά των Euler-Mascheroni. Αποδείξτε ότι

$$(H_n)^2 = (\ln n)^2 + 2\gamma \ln n + \gamma^2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

Δώστε αντίστοιχη έκφραση για την ποσότητα $(H_n)^3$ με σφάλμα της τάξης $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Άσκηση 1.1.28 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n + O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{\gamma}{\ln n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε κάθε όρο της παράστασης με $\ln n$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 1.1.29 Χρησιμοποιώντας τις (3.1.9), (2.5.3), να αποδείξετε ότι

$$e^{H_n} = ne^{\gamma} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 1.1.30 Να αποδείξετε ότι

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Υπόδειξη: Θα σας φανεί χρήσιμο ότι:

$$e^{O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 1.1.31 Να αποδείξετε ότι

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &= 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \\ \frac{n}{n+1} &\sim 1 - \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Άσκηση 1.1.32 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Υπόδειξη:

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το το άθροισμα γεωμετρικής σειράς.

Άσκηση 1.1.33 Να απαντήσετε εάν είναι **ΣΩΣΤΟΣ** ή **ΛΑΘΟΣ** κάθε ένας από τους ακόλουθους ισχυρισμούς

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \cdots + \frac{1}{k!n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \cdots + \frac{1}{k!n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow 0,$$

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \cdots + \frac{1}{k!n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow n_0, \quad n_0 \in \mathbb{N},$$

$$\ln(n-2) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \ln n - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 1.1.34 Να ελέγξετε την ορθότητα των ακόλουθων πράξεων καθώς $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + O(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 1.1.35 Έστω

$$a(n) > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) = \infty.$$

Εάν

$$b(n) \sim a(n) \quad \text{καθώς} \quad n \rightarrow \infty.$$

Τότε, για κάθε n_0 (σταθεροποιημένο)

$$\sum_{n=n_0}^N b(n) \sim \sum_{n=n_0}^N a(n), \quad N \rightarrow \infty.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα $\delta \in (0, 1)$ και ας εκλέξουμε τον θετικό ακέραιο $n_1 := n_1(\delta) > n_0$:

$$(1 - \delta)b(n) < a(n) < (1 + \delta)b(n), \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_1.$$

Τότε

$$(1 - \delta) \sum_{n=n_1}^N b(n) < \sum_{n=n_1}^N a(n) < (1 + \delta) \sum_{n=n_1}^N b(n)$$

ή

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \left[\sum_{n=n_0}^N b(n) - \sum_{n=n_0}^{n_1-1} b(n) \right] &< \left[\sum_{n=n_0}^N a(n) - \sum_{n=n_0}^{n_1-1} a(n) \right] \\ &< (1 + \delta) \left[\sum_{n=n_0}^N b(n) - \sum_{n=n_0}^{n_1-1} b(n) \right]. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε τα μέλη της διπλής ανισότητας με $\sum_{n=n_0}^N b(n)$. Τώρα, $\sum_{n=n_0}^{\infty} b(n) = \infty$. Συνεπώς, για τιμές του N αρκούντως μεγάλες:

$$(1 - \delta)(1 - \delta) < \frac{\sum_{n=n_0}^N a(n)}{\sum_{n=n_0}^N b(n)} < 1 + 2\delta.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται καθώς το δ είναι τυχαίο.

Άσκηση 1.1.36 Θεωρούμε τις ακολουθίες a_n , και b_n με

$$a_n > 1, \quad b_n > 1, \quad n \geq 1.$$

Έστωσαν οι ισχυρισμοί:

- $a_n \sim b_n, \quad n \rightarrow \infty,$
- $\ln a_n \sim \ln b_n, \quad n \rightarrow \infty.$

Να αποδείξετε ότι εάν ισχύει ο πρώτος ισχυρισμός, δεν ισχύει κατ' ανάγκη και ο δεύτερος.

Ωστόσο, εάν ισχύει ο πρώτος ισχυρισμός υπό την ισχυρότερη συνθήκη

$$a_n > 1.001,$$

ή γενικότερα, εάν, υπάρχει $c > 0$ έτσι ώστε,

$$a_n \geq 1 + c,$$

τότε αληθεύει και ο δεύτερος.

Βιβλιογραφία

- [1] R. Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals*. New York, NY, USA: Academic Press, 1989.
- [2] G. Boros και V.H. Moll. *Irresistible Integrals: Symbolics, Analysis and Experiments in the Evaluation of Integrals*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [3] Γ. Δάσιος. *Εισαγωγή στην Ασυμπτωτική Ανάλυση*. Αθήνα: Τσότρας, 2016.
- [4] E.T. Whittaker και G.N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1927.
- [5] N.M. Temme. *Asymptotic Methods for Integrals*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2015.
- [6] F.W.J. Olver. *Asymptotics and Special Functions*. New York, NY, USA: Academic Press, 1974.
- [7] J.D. Murray. *Asymptotic Analysis*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1984.
- [8] H. Havil. *Gamma, Exploring Euler's Constant*. New Jersey, NY, USA: Princeton University Press, 2003.
- [9] G.H. Hardy. *Divergent Series*. London, UK: Oxford University Press, 1949.
- [10] P. Flajolet και R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008.
- [11] A. Erdelyi. *Asymptotic Expansions*. New York, NY, USA: Dover Publications Inc., 2010.
- [12] N.G. De Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland Publishing & Co., 1961.
- [13] C.M. Bender και S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1999.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Σύνοψη

Θα μπορούσε κανείς να ρωτήσει γιατί χρειαζόμαστε τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα ολοκληρωμάτων. Είναι αλήθεια ότι κατά τη μοντελοποίηση πολλών φυσικών φαινομένων προκύπτουν, και επομένως είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την συμπεριφορά τους, ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt, \quad x \rightarrow x_0,$$

ή πιο γενικά ένα ολοκλήρωμα μίας μιγαδικής συνάρτησης κατά μήκος μίας καμπύλης. Για παράδειγμα η συνάρτηση σφάλματος (error function), η άνω και κάτω ημιτελής συνάρτηση Γάμμα (incomplete gamma function), αλλά και άλλες ειδικές συναρτήσεις όπως οι Bessel, Airy και οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις (hypergeometric functions) έχουν ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις, καθώς είναι λύσεις διαφορών κλάσεων διαφορικών εξισώσεων. Εξάλλου, κατά την εφαρμογή των μετασχηματισμών Laplace, Fourier, Hankel στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, συχνά προκύπτει μία ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης, για την οποία μας ενδιαφέρει η ασυμπτωτική της συμπεριφορά.

Στο δεύτερο αυτό μέρος του βιβλίου ασχολούμαστε με ορισμένα εισαγωγικά παραδείγματα καθώς και με προβλήματα που αντιμετωπίζονται με την κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τη μέθοδο Laplace στην απλή και γενική της μορφή με σκοπό την εύρεση όχι μόνο του πρωτεύοντος όρου, αλλά και ακόμη περισσότερων επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος τέτοιων ολοκληρωμάτων. Επίσης, το Λήμμα Watson (στην πραγματική, αλλά, και τη μιγαδική του εκδοχή), καθώς και προβλήματα τα οποία μετατρέπονται σε ολοκληρώματα Laplace (περιπτώσεις κινητού μεγίστου). Τα ολοκληρώματα Fourier, η μέθοδος στάσιμης φάσης, και αυτή της επικλινέστερης κατάβασης ολοκληρώνουν το δεύτερο αυτό μέρος. Ένας σημαντικός αριθμός ειδικών συναρτήσεων αναφέρονται και μελετώνται στα κεφάλαια αυτά.

2.1 Εισαγωγικά παραδείγματα & Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Ξεκινάμε με ένα αρκετά χρήσιμο αποτέλεσμα (βλ. π.χ. [1]):

Λήμμα 2.1.1 *Εάν*

$$f(x, t) \sim f_0(t), \quad x \rightarrow x_0$$

ομοιόμορφα στο $\alpha \leq t \leq b$, δηλαδή, εάν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, t) - f_0(t)}{f_0(t)} = 0,$$

ομοιόμορφα ως προς $t \in [\alpha, b]$, τότε

$$\int_{\alpha}^b f(x, t) dt \sim \int_{\alpha}^b f_0(t) dt, \quad x \rightarrow x_0,$$

υπό την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της παραπάνω ασυμπτωτικής σχέσης είναι θετικό και πεπερασμένο.

Για την απόδειξη, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι από τη δοθείσα ομοιόμορφη σύγκλιση είναι άμεσο, ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι:

$$\left| \int_{\alpha}^b f(x, t) dt - \int_{\alpha}^b f_0(t) dt \right| < \varepsilon \left| \int_{\alpha}^b f_0(t) dt \right|,$$

για x αρκούντως κοντά στο x_0 , και το ζητούμενο έπεται.

Παράδειγμα 2.1.2 *Ας βρούμε τον πρωτεύοντα όρο (leading, term) του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος*

$$\int_0^{\sqrt{2}} e^{xt^3+tx^3} dt, \quad x \rightarrow 0.$$

Θέτουμε $x = 0$ και λαμβάνουμε

$$\int_0^{\sqrt{2}} e^{xt^3+tx^3} dt \sim \int_0^{\sqrt{2}} e^0 dt = \sqrt{2}, \quad x \rightarrow 0.$$

Μάλιστα, η παραπάνω πρόταση γενικεύεται ως ακολούθως:

Πρόταση 2.1.3 *Εάν*

$$f(x, t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) (x - x_0)^{\xi_n}, \quad x \rightarrow x_0,$$

για κάποιο $\xi > 0$, ομοιόμορφα στο $\alpha \leq t \leq b$, τότε

$$\int_{\alpha}^b f(t, x) dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^{\xi_n} \int_{\alpha}^b f_n(t) dt, \quad x \rightarrow x_0,$$

υπό την προϋπόθεση ότι οι όροι του δεξιού μέλους της παραπάνω ασυμπτωτικής σχέσης είναι πεπερασμένοι.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1.4 *Ας βρούμε την πλήρη ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος*

$$\int_0^1 \frac{e^{xt} - 1}{t} dt, \quad x \rightarrow 0.$$

Επειδή το ανάπτυγμα Taylor της

$$\frac{e^{xt} - 1}{t} = x + \frac{x^2 t}{2!} + \frac{x^3 t^2}{3!} + \dots$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $0 \leq t \leq 1$, $|x| \leq 1$, έπεται ότι

$$\int_0^1 \frac{e^{xt} - 1}{t} dt \sim x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \dots, \quad x \rightarrow 0.$$

Παράδειγμα 2.1.5 Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$\int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln t}} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής

$$s := \sqrt{-\ln t}$$

έχουμε

$$\int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln t}} dt = 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-s^2} ds. \quad (2.1.1)$$

Καθώς το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης

$$g(s) := e^{-s^2} = 1 - s^2 + \frac{s^4}{4} - \frac{s^6}{6} + \dots$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $s \in [0, 1]$, έχουμε

$$\int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln t}} dt \sim 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{21}x^{\frac{7}{2}} + \dots, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Παρατήρηση 2.1.6 Με την αλλαγή μεταβλητής

$$s^2 := u$$

στην (2.1.1), το ολοκλήρωμά μας λαμβάνει τη μορφή

$$\int_0^x u^{-1/2} e^{-u} du, \quad x \rightarrow 0^+,$$

που είναι η κάτω ημιτελής συνάρτηση Γάμμα (Lower incomplete gamma function), για $z = 1/2$ ¹ Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να δείξει ότι για $a > 0$ έχουμε

$$\gamma(a, x) := \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt \sim x^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(a+n)n!}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Μάλιστα, η παραπάνω σειρά συγκλίνει για κάθε x . **Ωστόσο, για μεγάλες τιμές του x η σύγκλιση είναι αργή και δεν είναι πρακτικά χρήσιμη.** Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για μεγάλα x αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμο στην περίπτωση αυτή όπως θα δούμε στη συνέχεια.

¹συμβολίζουμε: $\gamma(\frac{1}{2}, x)$ όπως είδαμε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου.

Παράδειγμα 2.1.7 Η συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων

$$J_1(x; p) := \int_x^\infty e^{-t^p} dt, \quad x \rightarrow 0^+, \quad p \in \{2, 3, \dots\},$$

$$J_2(x; p) := \int_x^\infty e^{-t^p} dt, \quad x \rightarrow \infty, \quad p \in \{2, 3, \dots\}.$$

Ξεκινάμε με το $J_1(x; p)$. Εδώ χρειάζεται προσοχή. Εάν αποπειραθούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο τη συγκλίνουσα σειρά Taylor :

$$e^{-t^p} = 1 - t^p + \frac{t^{2p}}{2!} - \frac{t^{3p}}{3!} + \dots$$

δεν παίρνουμε αποδεκτή απάντηση, λόγω του άνω άκρου του ολοκληρώματος (αποκλίνον αποτέλεσμα). Η στρατηγική μας πρέπει να τροποποιηθεί, ώστε να απαλλαγούμε από το άπειρο στο άκρο αυτό. Για τον λόγο αυτό ξαναγράφουμε το $J_1(x; p)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} J_1(x; p) &:= \int_0^\infty e^{-t^p} dt - \int_0^x e^{-t^p} dt \\ &\stackrel{(1.1.30)}{=} \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right) - \int_0^x e^{-t^p} dt \\ &= \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right) - \int_0^x \left(1 - t^p + \frac{t^{2p}}{2!} - \frac{t^{3p}}{3!} + \dots\right) dt \\ &= \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right) - \left(x - x^{p+1} + \frac{x^{2p+1}}{2!(2p+1)} - \frac{x^{3p+1}}{3!(3p+1)} + \dots\right) \\ &= \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{kp+1}}{(kp+1)k!} + R_{N+1}(x), \end{aligned}$$

όπου $R_{N+1}(x) = o(x^{kp})$, $N \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$. Σημειώνουμε ότι μετά τη δεύτερη ισότητα μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor. Συνεπώς,

$$\int_x^\infty e^{-t^p} dt = \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right) - \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{kp+1}}{(kp+1)k!}, \quad x \rightarrow 0. \quad (2.1.2)$$

Ας σημειώσουμε ότι, αν και η παραπάνω σειρά συγκλίνει για όλα τα x , ωστόσο συγκλίνει αργά για μεγάλες τιμές του x . Για αυτόν το λόγο είναι χρήσιμο-απαραίτητο να αναπτύξουμε την ασυμπτωτική σειρά για το ολοκλήρωμα $J_2(x; p)$ (δηλαδή για μεγάλες τιμές του x).²

Προφανώς,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_2(x; p) = 0.$$

Το ερώτημα είναι πόσο γρήγορα το ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν. Το εργαλείο το οποίο θα εφαρμόσουμε σε αυτήν την περίπτωση είναι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες (εργαλείο το οποίο είναι πολύ ισχυρό και είναι κτήμα των μαθητών από το Λύκειο ακόμη). Έχουμε

$$\begin{aligned} J_2(x; p) &:= \int_x^\infty e^{-t^p} dt \\ &= -\frac{1}{p} \int_x^\infty \frac{1}{t^{p-1}} (e^{-t^p})' dt \\ &= \frac{1}{p x^{p-1}} e^{-x^p} - \frac{p-1}{p} \int_x^\infty \frac{e^{-t^p}}{t^p} dt. \end{aligned}$$

²και μάλιστα σε αντίστροφες δυνάμεις του x .

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{e^{-t^p}}{t^p} dt &< \frac{1}{x^p} \int_x^\infty e^{-t^p} dt \\ &= o\left(J_2(x; p)\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν βρει τον πρωτεύοντα όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $J_2(x; p)$. Είναι:

$$J_2(x; p) \sim \frac{1}{p x^{p-1}} e^{-x^p}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να βρει το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $J_2(x; p)$, καθώς $x \rightarrow \infty$. Θέτουμε

$$J_k(x; p) := \int_x^\infty \frac{e^{-t^p}}{t^{kp}} dt.$$

Έχουμε διαδοχικά ($k \in \mathbb{N}$, $p \in \{2, 3, \dots\}$)

$$\begin{aligned} J_k(x; p) &= -\frac{1}{p} \int_x^\infty \frac{1}{t^{kp+p-1}} (e^{-t^p})' dt \\ &= \frac{1}{p x^{kp+p-1}} e^{-x^p} - \frac{kp+p-1}{p} \int_x^\infty \frac{e^{-t^p}}{t^{kp+p}} dt \\ &= \frac{1}{p x^{kp+p-1}} e^{-x^p} - \frac{kp+p-1}{p} J_{k+1}(x; p). \end{aligned}$$

Από την τελευταία αναδρομική σχέση έχουμε για κάθε $x > 0$

$$\begin{aligned} J_2(x; p) &= \frac{1}{p x^{p-1}} e^{-x^p} \left[1 - \frac{p-1}{p x^p} + \frac{(p-1)(2p-1)}{(p x^p)^2} - \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1)}{(p x^p)^3} \right. \\ &\quad \left. + \dots (-1)^{k-1} \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1) \dots [p(k-1)-1]}{(p x^p)^{k-1}} \right] \\ &\quad + (-1)^k \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1) \dots (kp-1)}{p^k} J_k(x; p). \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Καθώς, για $x > 0$ έχουμε $J_{k+1}(x; p) > 0$, έπεται ότι

$$|J_k(x; p)| < \frac{1}{p x^{kp+p-1}} e^{-x^p}$$

και

$$\frac{1}{p x^{kp+p-1}} e^{-x^p} = o\left(\frac{1}{x^{kp-1}} e^{-x^p}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεπώς, ο συνοδεύων όρος του $J_k(x; p)$ στη σχέση (2.1.3) είναι (με την ασυμπτωτική έννοια) πολύ ασθενέστερος του τελευταίου όρου που είναι εντός της αγκύλης στην ίδια σχέση. Το πλήρες, λοιπόν, ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματός μας είναι (καθώς $x \rightarrow \infty$)

$$\int_x^\infty e^{-t^p} dt \sim \frac{1}{p x^{p-1}} e^{-x^p} \left[1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1) \dots (kp-1)}{(p x^p)^k} \right].$$

Παρατήρηση 2.1.8 Συγκρίνοντας τα αποτελέσματά μας έχουμε, για $p \in \{2, 3, \dots\}$:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^p} dt &\sim \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right) - \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{kp+1}}{(kp+1)k!}, \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{Συγκλίνουσα σειρά}) \\ \int_x^\infty e^{-t^p} dt &\sim \frac{1}{p x^{p-1}} e^{-x^p} \\ &\times \left[1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\cdots(kp-1)}{(px^p)^k} \right], \quad (x \rightarrow \infty) \\ &\hspace{15em} (\text{Αποκλίνουσα σειρά}) \end{aligned}$$

Όπως ήδη σημειώθηκε, στο ανάπτυγμα για $x \rightarrow 0$ προκύπτει η σειρά Taylor για το $J_1(x; p)$. Όπως αναφέραμε, αν και η σειρά συγκλίνει για κάθε x , η σύγκλιση είναι πολύ αργή για μεγάλες τιμές του x . Αντιθέτως, οι πρώτοι μόνο όροι της αποκλίνουσας σειράς προσεγγίζουν με ακρίβεια το $J_2(x; p)$ για τιμές $x > 1$.³ Αυτό θα γίνει καταληπτό με το επόμενο πολύ ενδιαφέρον

Παράδειγμα 2.1.9 Η συνάρτηση σφάλματος (error function)

Η συνάρτηση σφάλματος (ή όπως αλλιώς καλείται: **συνάρτηση σφάλματος του Gauss**) ορίζεται ως:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Το παράδειγμα αυτό προκύπτει ως μία ειδική περίπτωση του προηγούμενου καθώς

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &:= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt - \int_x^\infty e^{-t^2} dt \right) \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 1.9 (σχέση (1.1.30) για $p = 2$) και στη συνέχεια τις σχέσεις (1.1.17) και (1.1.15). Από την τελευταία παρατήρηση, για $p = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots \right], \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{Συγκλίνουσα σειρά}) \\ \operatorname{erf}(x) &\sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(1)(3)(5)\cdots(2k-1)}{2^k x^{2k+1}}, \quad (x \rightarrow \infty) \quad (\text{Αποκλίνουσα σειρά}) \end{aligned}$$

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια έναν πίνακα που αναφέρει τον αριθμό των όρων που απαιτούνται και από τις δύο προσεγγίσεις ($x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$) για την προσέγγιση της συνάρτησης $\operatorname{erf}(x)$ με ακρίβεια 10^{-5} , για διάφορες τιμές του x . Είναι σημαντικό (και χρήσιμο) να δει κανείς ότι απαιτούνται ελάχιστοι όροι για την επίτευξη της ζητούμενης ακρίβειας, όταν $x > 1$.

	Συγκλίνουσα σειρά				Αποκλίνουσα σειρά	
Διάστημα	$x < 1$	$x < 2$	$x < 3$	$x < 5$	$x > 3$	$x > 2.5$
# όρων	8	16	31	75	2	3

Το επόμενο είναι γνωστό

ως **Εκθετικό ολοκλήρωμα**. Μάλιστα, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα που καταδεικνύει τη διαφορά συγκλίνουσας και ασυμπτωτικής σειράς.

³Η επαλήθευση αυτού του επιχειρήματος αφήνεται στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 2.1.10 (*exponential integral*).

$$Ei(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > 0.$$

Ας αναζητήσουμε τη συμπεριφορά του για $x \gg 1$. Με επαναλαμβανόμενη ολοκλήρωση κατά παράγοντες λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} Ei(x) &= \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} + \left[\frac{e^{-t}}{t^2} \right]_x^\infty + 2 \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\ &\vdots \\ &= e^{-x} \underbrace{\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right]}_{S_n(x)} + (-1)^n n! \underbrace{\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt}_{R_n(x)}, \end{aligned}$$

όπου με $S_n(x)$ έχουμε θέσει το μερικό άθροισμα των πρώτων n όρων, δηλαδή

$$S_n(x) := e^{-x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right],$$

και ως $R_n(x)$ έχουμε θέσει το υπόλοιπο μετά από n όρους

$$R_n(x) := (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt.$$

Η σειρά για την οποία το $S_n(x)$ είναι το μερικό άθροισμά της αποκλίνει για κάθε (σταθεροποιημένο) x . Μάλιστα, για τιμές του N αρκούντως μεγάλες η τάξη του n -οστού όρου μεγαλώνει καθώς το N μεγαλώνει. Φυσικά η ποσότητα $R_n(x)$ είναι επίσης μη φραγμένη για $N \rightarrow \infty$, καθώς η ποσότητα

$$S_n(x) + R_n(x)$$

οφείλει να είναι φραγμένη. Τούτο, διότι το ολοκλήρωμα $Ei(x)$ είναι φραγμένο για κάθε $x > 0$.

Παράλληλα, εάν σταθεροποιήσουμε το N και αφήσουμε το x να μεγαλώσει έχουμε

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \right| \\ &= |(-1)^n| n! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \\ &= n! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \\ &\leq \frac{n!}{x^{n+1}} \int_x^\infty e^{-t} dt \\ &= \frac{n!}{x^{n+1}} e^{-x}, \end{aligned}$$

που τείνει στο μηδέν, *ταχύτατα μάλιστα*, καθώς $x \rightarrow \infty$. Ας σημειώσουμε ακόμη ότι για το πηλίκο της ποσότητας $R_n(x)$ προς τον τελευταίο όρο του $S_n(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_n(x)}{(n-1)!e^{-x}x^{-n}} \right| &= \frac{|R_n(x)|}{(n-1)!e^{-x}x^{-n}} \\ &< \frac{n!e^{-x}x^{-(n+1)}}{(n-1)!e^{-x}x^{-n}} \\ &= \frac{n}{x}, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

που επίσης τείνει στο μηδέν καθώς $x \rightarrow \infty$. Επομένως,

$$Ei(x) = S_n(x) + o(\text{τελευταίος όρος του } S_n(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Ειδικότερα, εάν το x είναι αρκούντως μεγάλο και το n είναι σταθεροποιημένο, το μερικό άθροισμα $S_n(x)$ είναι μία καλή προσέγγιση του $Ei(x)$. Η ακρίβεια της προσέγγισης καθώς το x αυξάνει με το n σταθεροποιημένο. Έχουμε λοιπόν το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$Ei(x) \sim e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots \right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.1.5)$$

Παρατηρούμε ότι για τιμές του x αρκούντως μεγάλες οι όροι της ποσότητας $S_n(x)$ αρχικά θα φθίνουν, αλλά μόνο προσωρινά. Για παράδειγμα,

$$2!x^{-3} < x^{-2}$$

για μεγάλα x .

Ωστόσο, υπάρχει $n = n_{opt}(x)$, έτσι ώστε οι όροι του $S_n(x)$ θα αρχίσουν να αυξάνουν για $n > n_{opt}(x)$ δοθέντος του (πάντως μεγάλου) x , εξαιτίας του n -οστού όρου:

$$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n},$$

ο οποίος δεν είναι φραγμένος καθώς $n \rightarrow \infty$. Συνεπώς, δοθέντος του x υπάρχει ένα βέλτιστο $n = n_{opt}(x)$ που επιτυγχάνει μέγιστη ακρίβεια. Η εκτίμηση (2.1.4) συνιστά την εκλογή του $n = n_{opt}(x)$ ως το άνω ακέραιο μέρος του δοθέντος x .

Παρατήρηση 2.1.11 Στην πράξη ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της μορφής (2.1.5) μπορεί να αποδειχθεί **πολύ πιο χρήσιμο** από ένα ανάπτυγμα μιας συγκλίνουσας δυναμοσειράς η οποία συγκλίνει αργά. Γενικότερα, ασυμπτωτικά αναπτύγματα που εκφράζονται με σειρές που δεν συγκλίνουν μπορούν να έχουν θαυμαστή ακρίβεια. Στο παράδειγμά μας, για το εκθετικό ολοκλήρωμα, εάν

$$x = 10 \quad \text{έχουμε} \quad n_{opt} = 10.$$

Ωστόσο, το άθροισμα $S_4(10)$ προσεγγίζει το $Ei(10)$ με το λάθος να είναι περίπου 0.003.

Παράδειγμα 2.1.12 (*Lower incomplete Gamma function*, $x \rightarrow \infty$)

Εδώ μας απασχολεί η συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$\gamma(a, x) := \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$\gamma(a, x) = \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt}_{\Gamma(a)} - \underbrace{\int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt}_{\text{Ei}((1-a), x)},$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα είναι θετικός πραγματικός αριθμός από τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα, ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μία γενίκευση του Εκθετικού ολοκληρώματος που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Με διαδοχική εφαρμογή της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \text{Ei}((1-a), x) &= e^{-x} x^{a-1} + (a-1) \int_x^\infty e^{-t} t^{a-2} dt \\ &\vdots \\ &= e^{-x} \left[x^{a-1} + (a-1) x^{a-2} + \dots + (a-1) \dots (a-n+1) x^{a-n} \right] \\ &\quad + (a-1)(a-2) \dots (a-n) \int_x^\infty e^{-t} t^{a-n-1} dt. \end{aligned}$$

Για κάθε σταθεροποιημένο $n > a - 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\infty e^{-t} t^{a-n-1} dt \right| &\leq \int_x^\infty |e^{-t} t^{a-n-1}| dt \\ &= \int_x^\infty e^{-t} t^{a-n-1} dt \\ &\leq x^{a-n-1} \int_x^\infty e^{-t} dt \\ &= x^{a-n-1} e^{-x} \\ &= o(x^{a-n} e^{-x}), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Επομένως, το παραπάνω ανάπτυγμα για το $\text{Ei}((1-a), x)$ είναι ασυμπτωτικό. Δηλαδή

$$\gamma(a, x) \sim \Gamma(a) - e^{-x} x^a \left[\frac{1}{x} + \frac{a-1}{x^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^3} + \dots \right], \quad x \rightarrow \infty$$

ενώ η σειρά αποκλίνει.

Επιπλέον, εάν με $R_n(x)$ συμβολίσουμε το υπόλοιπο μετά από n όρους ($n > a - 1$) θα έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{|R_n(x)|}{|e^{-x} x^{a-n} (a-1)(a-2) \dots (a-n+1)|} \\ &\leq \frac{e^{-x} x^{a-n-1} |(a-1)(a-2) \dots (a-n)|}{e^{-x} x^{a-n} |(a-1)(a-2) \dots (a-n+1)|} \\ &= \frac{|a-n|}{x}. \end{aligned}$$

Άρα για την καλύτερη ακρίβεια στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, και δοθέντος του x , μας αρκεί ο μεγαλύτερος αριθμός n όρων, έτσι ώστε

$$x > |a - n|.$$

Παράδειγμα 2.1.13 Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^x e^{t^4} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ας δούμε κάποιες προσεγγίσεις στο πρόβλημά μας που όμως **δεν** είναι κατάλληλες:

Προσέγγιση (I):

$$\int_0^x e^{t^4} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{4n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{n! (4n+1)}.$$

Τούτο δεν είναι σωστό, διότι η παραπάνω σειρά **ΔΕΝ** είναι ασυμπτωτική σειρά, καθώς $x \rightarrow \infty$.

Προσέγγιση (II):

$$\int_0^x e^{t^4} dt = \int_0^{\infty} e^{t^4} dt - \int_x^{\infty} e^{t^4} dt.$$

Και αυτή η προσέγγιση **ΔΕΝ** είναι προς τη σωστή κατεύθυνση, διότι οδηγεί σε απροσδιοριστία: $\infty - \infty$.

Προσέγγιση (III):

$$\int_0^x (e^{t^4})' \frac{1}{4t^3} dt = \left[\frac{e^{t^4}}{4t^3} \right]_{t=0}^x + \frac{3}{4} \int_0^x \frac{e^{t^4}}{4t^4} dt.$$

Ομοίως, και εδώ οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία: $\infty - \infty$.

Η σωστή προσέγγιση είναι να χρησιμοποιηθεί η ολοκλήρωση κατά παράγοντες, αλλά με **έμμεσο τρόπο**. Γράφουμε το ολοκλήρωμά μας ως

$$\int_0^x e^{t^4} dt = \int_0^a e^{t^4} dt + \int_a^x e^{t^4} dt \quad (2.1.6)$$

εισάγοντας δηλαδή στο πρόβλημα μία σταθερή παράμετρο αποκοπής $a \in (0, x)$ (cutoff parameter). Η μέθοδος αυτή θα αποδειχθεί αποτελεσματική εάν το αποτέλεσμα μας (για σταθερό a) θα είναι ανεξάρτητο του πρώτου ολοκληρώματος του δεύτερου μέλους της σχέσης (2.4.4) και **επίσης ανεξάρτητο** της παραμέτρου a . Θέτουμε

$$J_n(x; a) := \int_a^x \frac{e^{t^4}}{t^{4n}} dt. \quad (2.1.7)$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} J_0(x; a) &= \int_a^x \frac{1}{4t^3} (e^{t^4})' dt \\ &= \left[\frac{e^{t^4}}{4t^3} \right]_{t=a}^x + \frac{3}{4} \int_0^x \frac{e^{t^4}}{4t^4} dt \\ &= \frac{e^{x^4}}{4x^3} - \frac{e^{a^4}}{4a^3} + \frac{3}{4} J_1(x; a). \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Δείχνουμε τώρα ότι

$$J_1(x; a) = o\left(\frac{e^{x^4}}{4x^3}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{J_1(x; a)}{\frac{e^{x^4}}{4x^3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_a^x \frac{e^{t^4}}{t^4} dt}{\frac{e^{x^4}}{4x^3}} \\ &\stackrel{\text{D'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{x^4}}{x^4} dt}{e^{x^4} \left(1 - \frac{3}{4x^4}\right)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Από την (2.1.8) έχουμε επίσης ότι η συνεισφορά του άκρου $t = a$ είναι αμελητέα σε σχέση με την αντίστοιχη του άκρου $t = x$, $a \in (0, x)$.⁴ Το ίδιο ισχύει και για το πρώτο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της (2.1.8). Άρα,

$$\int_0^x e^{t^4} dt \sim \frac{e^{x^4}}{4x^3}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με διαδοχικές εφαρμογές της ίδιας μεθόδου καταλήγουμε στο **πλήρες** ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματός μας (το οποίο οφείλει να είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου a). Βρίσκουμε ότι

$$\int_0^x e^{t^4} dt \sim \frac{e^{x^4}}{4x^3} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3)(7) \cdots (4n-1)}{(4x^4)^n} \right], \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.1.9)$$

Παράδειγμα 2.1.14 (Εκθετικό ολοκλήρωμα, συνέχεια).

$$Ei(x) := \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Στο παράδειγμα αυτό δεν μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμά μας ως διαφορά

$$\int_x^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^x,$$

αλλά ούτε και να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες (όπως και στο ακριβώς προηγούμενο παράδειγμα που εξετάσαμε). Αυτό που μπορεί να γίνει είναι να θεωρήσουμε την παράγωγο (ως προς x), η οποία έχει ανάπτυγμα καθώς $x \rightarrow 0^+$, και στη συνέχεια να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο. Από τον κανόνα του Leibniz έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dEi(x)}{dx} &= -\frac{e^{-x}}{x} \\ &= -\frac{1}{x} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \right).\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας όρο προς όρο παίρνουμε

$$Ei(x) \sim -\ln x + C + x - \frac{x^2}{4} + \cdots, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Η τιμή της σταθεράς C θα υπολογιστεί (από τον ορισμό της ασυμπτωτικής σειράς)

$$\begin{aligned}C &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x \right) \\ &= -\gamma \approx 0.57772,\end{aligned}$$

ενώ όπως έχουμε αναφέρει (στην (1.1.22)), $\gamma = -\Gamma'(1)$. Για μία απόδειξη του παραπάνω ορίου παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα [2], καθώς επίσης και στο πολύ ενδιαφέρον σύγγραμμα [3] που είναι αφιερωμένο εξ ολοκλήρου στη σταθερά αυτή.

⁴Τούτο αποτελεί μία ισχυρή ένδειξη ότι η παραγοντική ολοκλήρωση εφαρμόστηκε σωστά.

Παράδειγμα 2.1.15 Τα ολοκληρώματα Fresnel

$$C(x) := \int_x^\infty \cos(t^2) dt,$$

$$S(x) := \int_x^\infty \sin(t^2) dt.$$

Θα βρούμε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $C(x)$ στις περιπτώσεις όπου $x \rightarrow 0$ και $x \rightarrow \infty$. Σχετικά με το ολοκλήρωμα $S(x)$ παραπέμπουμε στις ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου.
Εάν $x \rightarrow 0$, τότε

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \cos(t^2) dt &= \int_0^\infty \cos(t^2) dt - \int_0^x \cos(t^2) dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \int_0^x \left(1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \dots\right) dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)} + R_{N+1}(x), \end{aligned}$$

όπου το υπόλοιπο $R_{N+1}(x)$ τείνει ταχύτατα στο μηδέν καθώς $N \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$. Δηλαδή,

$$\int_x^\infty \cos(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)} \quad x \rightarrow 0.$$

Προφανώς, χρησιμοποιήσαμε το γνωστό από τη Μιγαδική Ανάλυση αποτέλεσμα

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \quad (2.1.10)$$

Θα αποδείξουμε την (2.1.10) με μόνο δεδομένο το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.1.11)$$

Θεωρούμε την ακόλουθη διαδρομή την οποία συμβολίζουμε ως L :

- $z = x$, $0 \leq x \leq R$;
- $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$;
- $z = te^{i\frac{\pi}{4}}$, $0 \leq t \leq R$.

Από την αναλυτικότητα της συνάρτησης e^{-z^2} στην περιοχή που φράσσεται από την L έχουμε:

$$\int_L e^{-z^2} dz = 0. \quad (2.1.12)$$

Επομένως

$$\int_0^R e^{-z^2} dz + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2it}} iR e^{it} dt + \int_R^0 e^{-it^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dt = 0. \quad (2.1.13)$$

Σχετικά με το δεύτερο από τα ολοκληρώματα της (2.1.13) έχουμε

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2it}} iR e^{it} dt \right| &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} |e^{-R^2 e^{2it}}| dt \\
 &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \\
 &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \left(1 - \frac{4t}{\pi}\right)} dt \\
 &\leq R e^{-R^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{4R^2 t}{\pi}} dt \\
 &\leq R e^{-R^2} \frac{\pi}{4R^2} (e^{R^2} - 1) \\
 &\leq \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα

$$\cos(2x) \geq 1 - 4\frac{x}{\pi}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Από τη σχέση (2.1.13), εάν επιτρέψουμε στο R να πάει στο άπειρο λαμβάνουμε

$$e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx - \int_0^\infty e^{-ix^2} dx = 0.$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη στην τελευταία λαμβάνουμε

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Παρατήρηση 2.1.16 Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση (2.1.10), εάν θεωρήσουμε την ακολουθία ολοκληρωμάτων

$$I(n) := \int_0^\infty \cos(x^n) dx,$$

⁵Η συνάρτηση $g : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$g(x) = \cos(2x) + \frac{4x}{\pi} - 1,$$

είναι κοίλη, καθώς

$$g''(x) = -4 \cos(2x) < 0.$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της πρώτης παραγώγου της είναι

$$g'(x) : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \left[\frac{4-2\pi}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right].$$

Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) : g'(x_0) = 0$. Είναι εύκολο τώρα, να δει κανείς ότι

$$g(x) \geq g(0) = 0.$$

και με την αλλαγή μεταβλητών $u = x^n$ λάβουμε

$$\begin{aligned}
 I(n) &:= \int_0^\infty \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \cos u \, du \\
 &= \frac{1}{n} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{iu} u^{\frac{1}{n}-1} \, du \right) \\
 &= \frac{1}{n} \operatorname{Re} \left(\Gamma \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{i} \right)^{-\frac{1}{n}} \right) \\
 &= \frac{\Gamma \left(\frac{1}{n} \right)}{n} \operatorname{Re} \left(i^{\frac{1}{n}} \right) \\
 &= \frac{\Gamma \left(\frac{1}{n} \right)}{n} \operatorname{Re} \left(e^{\frac{i\pi}{2} \frac{1}{n}} \right) \\
 &= \frac{\Gamma \left(\frac{1}{n} \right)}{n} \cos \left(\frac{\pi}{2n} \right),
 \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos x$, ενώ στο τρίτο τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα. Το ζητούμενο τώρα προκύπτει άμεσα, εάν θέσουμε στην τελευταία $n = 2$ και χρησιμοποιήσουμε ότι $\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{\pi}$.

* Εάν θέλουμε ασυμπτωτική πληροφορία (πλήρες ανάπτυγμα) για το ίδιο ολοκλήρωμα, καθώς $x \rightarrow \infty$, θα εφαρμόσουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
 \int_x^\infty \cos(t^2) \, dt &\sim -\frac{\sin x^2}{2x} + \frac{\cos x^2}{4x^3} - \frac{(1)(3)}{8x^5} \sin x^2 \\
 &\quad + \frac{(1)(3)(5)}{16x^7} \cos x^2 + \dots, \quad x \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.17 Για το ολοκλήρωμα

$$M(x) := \int_x^\infty \ln^2 t \, e^{-t} \, dt,$$

έχουμε το ακόλουθο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα:

$$M(x) \sim \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) - x \ln^2 x + 2x \ln x - 2x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{9} x^3 \ln x - \frac{1}{27} x^3 + \dots \quad (2.1.14)$$

καθώς $x \rightarrow 0^+$.

Πράγματι, ακολουθώντας παρόμοια βήματα με το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\frac{dM(x)}{dx} = -\ln^2 x \, e^{-x} = -\ln^2 x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots \right),$$

και

$$M(x) \sim C^* - x \ln^2 x + 2x \ln x - 2x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{9} x^3 \ln x - \frac{1}{27} x^3 + \dots, \quad (2.1.15)$$

όπου C^* είναι μία σταθερά την οποία και θα υπολογίσουμε. Από την (2.1.14) προκύπτει ότι

$$M(x) \sim C^*, \quad (x \rightarrow 0^+).$$

Επομένως,

$$C^* = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^\infty \ln^2 t e^{-t} dt \right) = \int_0^\infty \ln^2 t e^{-t} dt,$$

καθώς το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Από τις (1.1.19), (1.1.23) έχουμε

$$C^* = \Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

και το ζητούμενο έπεται άμεσα.

2.1.1 Ασκήσεις

Άσκηση 2.1.18 Να βρεθεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \frac{\sinh(tx)}{t} dt, \quad x \rightarrow 0.$$

Άσκηση 2.1.19 Να βρείτε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της πραγματικής συνάρτησης

$$f(x) = \log(\sin x), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Άσκηση 2.1.20 Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει

$$\gamma(a, x) := \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt = x^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(a+n)n!}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Άσκηση 2.1.21 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^x e^{t^{2p}} dt, \quad x \rightarrow \infty, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 2.1.22 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για τα ολοκληρώματα

$$\int_x^\infty t^2 e^{-t} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

$$\int_x^\infty t^3 e^{-t} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Να γενικεύσετε τα αποτελέσματά σας για το ολοκλήρωμα

$$\int_x^\infty t^{b-1} e^{-t} dt, \quad b > 0, \quad x \rightarrow 0^+$$

που είναι η άνω ημιτελής συνάρτηση Γάμμα (Upper incomplete gamma function): $\Gamma(b, x)$, $b > 0$.

Υπόδειξη: Να γράψετε το ολοκλήρωμα ως διαφορά

$$\int_0^\infty - \int_0^x.$$

Το πρώτο υπολογίζεται άμεσα από τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα. Στο δεύτερο εφαρμόστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Άσκηση 2.1.23 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για τα ολοκληρώματα

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt, \quad x \rightarrow 0^+,$$

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Άσκηση 2.1.24 Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \ln x + C_n - \sum_{k=0, k \neq n}^\infty (-1)^k \frac{x^{k-n}}{k! (k-n)}, \quad x \rightarrow 0^+,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, και η σταθερά C_n δίδεται από τον τύπο

$$C_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(\gamma - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right), \quad C_0 = -\gamma.$$

Άσκηση 2.1.25 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{t}} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Υπόδειξη: Η αλλαγή μεταβλητής $t := x/y$ οδηγεί στο ολοκλήρωμα

$$x \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^2} dy,$$

καθώς $x \rightarrow 0^+$. Χρησιμοποιήστε στη συνέχεια το αποτέλεσμα από προηγούμενη άσκηση του τρέχοντος κεφαλαίου.

Άσκηση 2.1.26 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{\cos(xt)}{t} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Υπόδειξη: Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Άσκηση 2.1.27 Να αποδείξετε ότι για το ολοκλήρωμα

$$G(x) := \int_x^\infty \ln t \, e^{-t} dt,$$

έχουμε

$$G(x) \sim -\gamma - x \ln x + x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \ln x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \ln x - \frac{1}{24}x^4 + \dots.$$

καθώς $x \rightarrow 0^+$.

Απόδειξη. Καθώς

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\ln x \, e^{-x} = -\ln x \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right),$$

έχουμε

$$G(x) \sim C - x \ln x + x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \ln x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \ln x - \frac{1}{24}x^4 + \dots.$$

Η τιμή της σταθεράς C προκύπτει από το όριο (λόγω της ασυμπτωτικής σχέσης)

$$C = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^\infty \ln t \, e^{-t} dt \right) = \int_0^\infty \ln t \, e^{-t} dt = -\gamma,$$

μέσω των σχέσεων (1.1.18) και (1.1.22).

Άσκηση 2.1.28 Να αποδείξετε ότι για το ολοκλήρωμα

$$L(x) := \int_x^\infty \ln t \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

έχουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$L(x) \sim -\frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) + x \ln x - x - \frac{1}{4} x^2 \ln x + \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{18} x^3 \ln x - \frac{1}{54} x^3 + \dots,$$

καθώς $x \rightarrow 0^+$.

Άσκηση 2.1.29 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^4} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Υπόδειξη: Ολοκλήρωση κατά παράγοντες, αφού το ολοκλήρωμα γραφεί πρώτα ως διαφορά.

Άσκηση 2.1.30 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για τα ολοκληρώματα

$$\int_x^\infty t^{-\frac{3}{2}} e^{-t} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

$$\int_x^\infty t^{-\frac{4}{3}} e^{-t} dt, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Να γενικεύσετε τα αποτελέσματά σας για το ολοκλήρωμα

$$\int_x^\infty t^{b-1} e^{-t} dt, \quad b > 0, \quad x \rightarrow 0^+$$

που είναι η άνω ημιτελής συνάρτηση Γάμμα (Upper incomplete gamma function): $\Gamma(b, x)$, όπου b αρνητικός αριθμός, αλλά όχι ακέραιος.

Άσκηση 2.1.31 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt, \quad x \rightarrow 0.$$

Άσκηση 2.1.32 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος Fresnel

$$S(x) := \int_x^\infty \sin(t^2) dt.$$

στις περιπτώσεις όπου $x \rightarrow 0$ και $x \rightarrow \infty$.

Άσκηση 2.1.33 Το λογαριθμικό ολοκλήρωμα (Eulerian logarithmic integral)

$$Li(x) := \int_2^x (\log t)^{-1} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα, το οποίο **δεν μπορεί** να υπολογιστεί - εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις είναι η καλύτερη γνωστή προσέγγιση για τον αριθμό των πρώτων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του x . Είναι μία πιο ακριβής προσέγγιση του πηλίκου

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty$$

για τη συνάρτηση $\pi(x)$, που δίνει το Θεώρημα των πρώτων αριθμών (στην απλή μορφή του).
Το γενικευμένο λογαριθμικό ολοκλήρωμα ορίζεται για κάθε θετικό ακέραιο k ως

$$Li_n(x) := \int_2^x (\log t)^{-n} dt.$$

Να αποδείξετε ότι

$$Li(x) \sim \frac{x}{\log x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!}{(\log x)^j}, \quad x \rightarrow \infty.$$

2.2 Ολοκληρώματα Laplace

Ένα ολοκλήρωμα Laplace είναι της μορφής

$$I(x) := \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt. \quad (2.2.1)$$

Στόχος μας είναι να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος καθώς $x \rightarrow \infty$. (Παρατηρήστε ότι η παράμετρος που απειρίζεται βρίσκεται στον εκθέτη).

Φυσιολογικά, το πρώτο εργαλείο που μας έρχεται στο μυαλό είναι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Ας δοκιμάσουμε ένα παράδειγμα. Να βρούμε τον πρωτεύοντα όρο (leading term) του ολοκληρώματος

$$I(x) = \int_2^3 e^{x \sinh t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$I(x) = \frac{e^{x \sinh 3}}{x \cosh 3} - \frac{e^{x \sinh 2}}{x \cosh 2} - \frac{1}{x} \int_2^3 e^{x \sinh t} \left(\frac{1}{\cosh t} \right)' dt.$$

Παρατηρούμε ότι το νέο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους υπάρχει και είναι (προφανώς) ασυμπτωτικά μικρότερο (ασθενέστερο) από τους δύο πρώτους όρους του δευτέρου μέλους (τη συνεισφορά δηλαδή των άκρων ολοκλήρωσης) καθώς $x \rightarrow \infty$. Επίσης, η συνεισφορά των άκρων ολοκλήρωσης είναι πεπερασμένη. Συνεπώς η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες δουλεύει. Αυτό βέβαια δεν συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Είμαστε λοιπόν σε θέση να πούμε ότι

$$I(x) \sim \frac{e^{x \sinh 3}}{x \cosh 3} - \frac{e^{x \sinh 2}}{x \cosh 2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Το ερώτημα στο οποίο μένει να απαντήσουμε είναι εάν στον πρωτεύοντα όρο του ολοκληρώματος συμμετέχουν και τα δύο άκρα ή μόνο ένα. Στην περίπτωση μας θα είναι

$$I(x) \sim \frac{e^{x \sinh 3}}{x \cosh 3}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Η απάντηση εδράζεται στη μέθοδο Laplace (**Laplace method**) την οποία θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο αυτό. Μάλιστα, υπό ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε με την κατά παράγοντες ολοκλήρωση να βρούμε την **πλήρη** ασυμπτωτική συμπεριφορά ολοκληρωμάτων της μορφής (2.2.1).

Έχει σημασία να παρατηρήσει κανείς ότι σε κάθε εφαρμογή της μεθόδου αυτής θα εμφανίζεται ένας νέος όρος της μορφής $\frac{1}{x}$.

Το παράδειγμα που ακολουθεί έχει σκοπό να παρουσιάσει μία περίπτωση στην οποία η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες δεν είναι πάντα το κατάλληλο εργαλείο για βρει κανείς την ασυμπτωτική συμπεριφορά ολοκληρωμάτων του τύπου (2.2.1).

Παράδειγμα 2.2.1 Το ολοκλήρωμα

$$J(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Εάν ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες έχουμε

$$J(x) = \left[\frac{e^{-xt^2}}{-2xt} \right]_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt^2}}{2xt^2} dt.$$

Καθώς το προκύπτον ολοκλήρωμα δεν υπάρχει η μέθοδος δεν εφαρμόζεται. Σημειώνουμε ότι η πραγματική τιμή του ολοκληρώματος υπολογίζεται εύκολα με την αλλαγή μεταβλητής

$$\sqrt{x}t := y.$$

Έχουμε

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (1.1.17).

Το παράδειγμα που ακολουθεί -αν και δεν αφορά ένα ολοκλήρωμα Laplace - έχει σκοπό να καταδείξει την αποδοτικότητα της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, αλλά και την αδυναμία της σε κάποιες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 2.2.2 Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος Stieltjes:

$$J(x) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

στις περιπτώσεις όπου $x \rightarrow 0^+$ και $x \rightarrow \infty$.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια η μέθοδος αποδίδει **μόνον** όταν $x \rightarrow 0^+$ και όχι για τιμές του x αρκούντως μεγάλες.

Ξεκινάμε με την περίπτωση όπου $x \rightarrow 0^+$. Μετά από n διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες έχουμε

$$J(x) = 1 - x + 2!x^2 - \dots + (-1)^{n-1} (n-1)!x^{n-1} + (-1)^n n!x^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{n+1}} dt.$$

Θέτουμε

$$R_n(x) := (-1)^n n! x^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{n+1}} dt.$$

Είναι

$$|R_n(x)| \leq n! x^n \int_0^{\infty} e^{-t} dt = n! x^n.$$

Καθώς λοιπόν η διαφορά του μερικού αθροίσματος με το ολοκλήρωμα είναι απολύτως μικρότερη από τον πρώτο όρο που παραλήφθηκε έχουμε

$$|J(x) - (1 - x + 2!x^2 - \dots + (-1)^{n-1} (n-1)!x^{n-1})| \leq n! x^n$$

και επομένως

$$J(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Σημειώνουμε ότι η σειρά -προφανώς- αποκλίνει για κάθε $x \neq 0$. Είναι μία ασυμπτωτική σειρά !!!

Αντιθέτως, εάν αποπειραθούμε να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες για τιμές του x αρκούντως μεγάλες ($x \rightarrow \infty$) θα λάβουμε

$$J(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \int_0^\infty e^{-t} [(1+xt) - (1+xt) \ln(1+xt)] dt. \quad (2.2.2)$$

Επειδή

$$\int_0^\infty e^{-t} (1+xt) \ln(1+xt) dt > x \int_0^\infty te^{-t} \ln(xt) dt$$

ισχύει⁶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-t} [(1+xt) - (1+xt) \ln(1+xt)] dt = \infty,$$

και επομένως το προκύπτον ολοκλήρωμα της σχέσης (2.2.2) δεν είναι ασυμπτωτικά ασθενέστερο του όρου $\frac{1}{x^2}$. Κατά συνέπεια η μέθοδος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης αποτυγχάνει στην περίπτωση αυτή.

2.2.1 Η μέθοδος Laplace - Εισαγωγή

Η μέθοδος Laplace είναι ένα εργαλείο για τη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I(x) := \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

όπου $f(t)$, $\phi(t)$ είναι (για την ώρα) πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις⁷.

Η βασική ιδέα⁸ είναι ότι εάν η συνάρτηση $\phi(t)$ μεγιστοποιείται όταν $t = c$, με $c \in (a, b)$, ενώ $f(c) \neq 0$, τότε η πλήρης ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος $I(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$ καθορίζεται από την αντίστοιχη συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$I(x; \varepsilon) := \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(t) e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty$$

Εάν η $\phi(t)$ επιτυγχάνει μέγιστη τιμή όταν $c = a$, τότε η πλήρης ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος $I(x)$ καθορίζεται από την αντίστοιχη συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$I(x; \varepsilon) := \int_a^{a+\varepsilon} f(t) e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

⁶Αρκεί να αποδείξει κανείς ότι

$$\int_0^\infty e^{-t} [(1+xt) \ln(1+xt) - xt \ln(xt)] dt > 0, \quad x > 0.$$

Επειδή η συνάρτηση

$$g(y) = (1+y) \ln y - y \ln y, \quad y > 0$$

έχει παράγωγο

$$g'(y) = \frac{1}{y} > 0$$

το ζητούμενο έπεται άμεσα.

⁷Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_a^b f(t) e^{ix\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

καλούνται ολοκληρώματα Fourier και θα μελετηθούν σε επόμενο κεφάλαιο.

⁸Τούτο θα αναλυθεί εκτενώς σε επόμενα κεφάλαια όταν θα παρουσιαστούν οι μέθοδοι της στάσιμης φάσης και η μέθοδος της επικλινέστερης κατάβασης.

ενώ στην περίπτωση όπου το μέγιστο επιτυγχάνεται όταν $c = b$, τότε η πλήρης ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος $I(x)$ καθορίζεται από την αντίστοιχη συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$I(x; \varepsilon) := \int_{b-\varepsilon}^b f(t)e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με άλλα λόγια, **μόνο** η γειτονιά του $t = c$ (αντίστοιχα $t = a$, $t = b$) συμμετέχει στο **πλήρες** ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος $I(x)$, ($x \rightarrow \infty$).

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός ε είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός (οσοδήποτε μικρός), αλλά κατάλληλος ώστε π.χ. το διάστημα $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ να περιέχεται στο $[a, b]$.

Παρατήρηση 2.2.3 Προτού δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα επισημαίνουμε τα ακόλουθα:

- Η πλήρης ασυμπτωτική συμπεριφορά του $I(x; \varepsilon)$ οφείλει να είναι **ανεξάρτητη** του ε .
- Η διαφορά

$$|I(x) - I(x; \varepsilon)|$$

είναι εκθετικά μικρή ως προς το ολοκλήρωμα $I(x)$, καθώς $x \rightarrow \infty$. Δηλαδή τα ολοκλήρωμα $I(x)$ και $I(x; \varepsilon)$ έχουν **την ίδια** ασυμπτωτική συμπεριφορά. Για παράδειγμα, εάν $c \in (a, b)$

$$\begin{aligned} |I(x) - I(x; \varepsilon)| &= \left| \int_a^{c-\varepsilon} f(t)e^{x\phi(t)} dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^{c-\varepsilon} f(t)e^{x\phi(t)} dt \right| + \left| \int_{c+\varepsilon}^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \right|. \end{aligned}$$

Κάθε μία από τις δύο τελευταίες ποσότητες είναι εκθετικά μικρή ως προς το ολοκλήρωμα $I(x)$, καθώς $x \rightarrow \infty$, διότι η ποσότητα $e^{x\phi(t)}$ είναι εκθετικά μικρή σε σχέση με την $e^{x\phi(c)}$ για $a \leq t \leq c - \varepsilon$ και $c + \varepsilon \leq t \leq b$. Το κέρδος λοιπόν από την προσέγγιση του $I(x)$ από το ολοκλήρωμα $I(x; \varepsilon)$ είναι **σημαντικό**, διότι το λάθος που εισάγεται είναι **εκθετικά μικρό** (καθώς $x \rightarrow \infty$). Η (αυστηρή) απόδειξη στηρίζεται στην κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Τούτο θα φανεί καθαρά στο επόμενο παράδειγμα.

- Ο θετικός αριθμός ε συχνά είναι βολικό να επιλέγεται εις τρόπον ώστε να είμαστε σε θέση να αναπτύξουμε κατά Taylor τη συνάρτηση $f(t)$.

Το ακόλουθο είναι ένα πολύ χρήσιμο

Παράδειγμα 2.2.4 Το ολοκλήρωμα

$$A(x) := \int_0^5 \frac{1}{1 + \alpha u} e^{-xu} du, \quad \alpha \geq 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής

$$\alpha u := t$$

λαμβάνουμε

$$A(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{5\alpha} \frac{1}{1+t} e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt.$$

Η συνάρτηση $\phi(t) := -\frac{t}{\alpha}$, $t \in [0, 5\alpha]$, μεγιστοποιείται για $t = 0$. Επομένως,

$$A(x) \sim A(x; \varepsilon),$$

όπου ε θετικός αριθμός όσο κοντά στο μηδέν θέλει κανείς (σε κάθε περίπτωση όμως ο ε επιλέγεται έτσι ώστε να είναι μικρότερος της μονάδας), και

$$A(x; \varepsilon) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t} e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt. \quad (2.2.3)$$

Ισχυριζόμαστε ότι η διαφορά

$$|A(x) - A(x; \varepsilon)|$$

είναι εκθετικά μικρή ως προς το ολοκλήρωμα $A(x)$, καθώς $x \rightarrow \infty$. Για να το αποδείξουμε έχουμε

$$|A(x) - A(x; \varepsilon)| = \frac{1}{\alpha} \int_\varepsilon^{5\alpha} \frac{1}{1+t} e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt.$$

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες το τελευταίο ολοκλήρωμα και λαμβάνουμε

$$\int_\varepsilon^{5\alpha} \frac{1}{1+t} e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt \sim (-\alpha) \frac{1}{x} \left[\frac{1}{1+t} e^{-\frac{t}{\alpha}x} \right]_{t=0}^\infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

από όπου έπεται το ζητούμενο.

Συνεχίζουμε την ανάλυσή μας με επίκεντρο το ολοκλήρωμα $A(x; \varepsilon)$ της (2.2.3). Με την επιλογή του ε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $1/(1+t)$ με το ανάπτυγμα Taylor. Είναι

$$\begin{aligned} A(x; \varepsilon) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t} e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\varepsilon (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt - \int_\varepsilon^\infty (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt \right] \right). \end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα της τελευταίας ισότητας είναι εκθετικά μικρότερο του πρώτου ολοκληρώματος. Ας το αποδείξουμε. Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ακριβώς. Με την αλλαγή μεταβλητής $xt/\alpha := y$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt &= (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{x^{n+1}} \int_0^\infty y^{(n+1)-1} e^{-y} dy \\ &= (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{x^{n+1}} \Gamma(n+1) \\ &= (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{x^{n+1}} n!. \end{aligned}$$

Ως προς το δεύτερο ολοκλήρωμα με παραγοντική ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$\int_\varepsilon^\infty (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt \sim (-\varepsilon)^n \left(\frac{-\alpha}{x} \right) e^{-\frac{\varepsilon x}{\alpha}}, \quad x \rightarrow \infty$$

και ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

Έχουμε λοιπόν βρει το **πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα** του αρχικού ολοκληρώματος:⁹

$$A(x) := \int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha u} e^{-xu} du \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{x^{n+1}} n!, \quad \alpha \geq 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

⁹Παρατηρήστε ότι είναι **ανεξάρτητο** του ε .

Ως προς τον πρωτεύοντα όρο έχουμε

$$A(x) := \int_0^5 \frac{1}{1+au} e^{-xu} du \sim \frac{1}{x}, \quad \alpha \geq 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ας κάνουμε μία **περίληψη** των βημάτων που ακολουθήσαμε.

- Αφού διαπιστώσαμε ότι η συνάρτηση $\phi(t) = -t/\alpha$ μεγιστοποιείται όταν $t = 0$ αποδείξαμε ότι μόνο η γειτονιά του $t = 0$ συμμετέχει στην πλήρη ασυμπτωτική συμπεριφορά του $A(x; \varepsilon)$, καθώς η διαφορά

$$|A(x) - A(x; \varepsilon)|$$

είναι εκθετικά μικρή ως προς το ολοκλήρωμα $A(x)$, $x \rightarrow \infty$.

- Η επιλογή του ε (θυμηθείτε ότι $0 < \varepsilon < 1$) μας επέτρεψε να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $f(t) = (t+1)^{-1}$ με το αντίστοιχο ανάπτυγμα Taylor.
- Το προκύπτον άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\varepsilon} (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt$$

αντικαταστάθηκε επί της ουσίας από το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt.$$

Τούτο δεν πρέπει να προξενεί **εντύπωση**, διότι όπως αποδείξαμε το

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt$$

είναι εκθετικά μικρότερο του

$$\int_0^{\infty} (-t)^n e^{-\frac{t}{\alpha}x} dt$$

που υπολογίζεται, μάλιστα, ακριβώς.

2.2.2 Ασκήσεις

Άσκηση 2.2.5 Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$J(x) := \int_0^{\infty} e^{-xt^4} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Να δοκιμάσετε να εφαρμόσετε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Να υπολογίσετε την ακριβή τιμή του $J(x)$.

Άσκηση 2.2.6 Θεωρούμε το ολοκλήρωμα Stieltjes

$$L(x) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Να αποδείξετε ότι

$$L(x) \sim \frac{\ln x}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.2.7 Να βρεθεί ο πρωτεύων όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_x^\infty e^{-2t^3} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Γενικότερα, υπολογίστε τον πρωτεύοντα όρο επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_x^\infty e^{-\lambda t^m} dt, \quad \lambda > 0, \quad m > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.2.8 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^8 \frac{1}{(1+t)^2} e^{-xt} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.2.9 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος, καθώς $x \rightarrow \infty$:

$$\int_0^{10} \frac{1}{(1+t)^3} e^{-2xt} dt.$$

Άσκηση 2.2.10 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των ακόλουθων ολοκληρωμάτων καθώς $x \rightarrow \infty$:

$$I_1(x) = \int_0^{20} \arcsin x e^{-2xt} dt,$$

$$I_2(x) = \int_0^9 \arccos x e^{-3xt} dt$$

Άσκηση 2.2.11 Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος των παρακάτω ολοκληρωμάτων, καθώς $x \rightarrow \infty$:

$$J_1(x) = \int_0^{10} \arctan x e^{-2xt} dt,$$

$$G_2(x) = \int_0^9 \arctan hx e^{-3xt} dt.$$

2.3 Το λήμμα του Watson

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που μας επιτρέπει την εύρεση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I(x) = \int_0^b f(t) e^{-xt} dt, \quad b > 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.3.1)$$

υπό κάποιες προϋποθέσεις. Αυτές περιγράφονται στην ακόλουθη

Πρόταση 2.3.1 (Λήμμα Watson για πραγματικές συναρτήσεις)¹⁰.

Θεωρούμε ολοκληρώματα της μορφής (2.3.1). Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στο $[0, b]$ και έχει ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της μορφής

$$f(t) \sim t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n}, \quad t \rightarrow 0^+, \quad (2.3.2)$$

¹⁰Πρόκειται για τον Βρετανό Μαθηματικό G. N. Watson (1886-1965) και όχι για τον Dr. Watson στενό συνεργάτη του Sherlock Holmes! Το Λήμμα αποδείχθηκε το 1918. Η μορφή που εδώ παρουσιάζουμε αφορά πραγματικές συναρτήσεις.

όπου $\alpha > -1$ και $\beta > 0$ (ώστε το ολοκλήρωμα να συγκλίνει για $t = 0$). Τότε,

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{x^{\alpha + \beta n + 1}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Για την περίπτωση $b = \infty$ η σύγκλιση του ολοκληρώματος εξασφαλίζεται με την ύπαρξη μίας θετικής σταθεράς c , έτσι ώστε:

$$f(t) = o(e^{ct}) \quad t \rightarrow \infty.$$

Απόδειξη. Αναλύουμε το $I(x)$ ως

$$I(x) = \underbrace{\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt} dt}_{I(x; \varepsilon)} + \int_\varepsilon^b f(t)e^{-xt} dt \quad (2.3.3)$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.3.3) εισάγει εκθετικά μικρό λάθος, για κάθε $\varepsilon > 0$ καθώς:

$$\left| \int_\varepsilon^b f(t)e^{-xt} dt \right| \leq \|f\|_\infty \int_\varepsilon^b e^{-xt} dt = \|f\|_\infty \left(\frac{e^{-\varepsilon x} - e^{-bx}}{x} \right),$$

που συγκλίνει στο μηδέν εκθετικά γρήγορα για $x \rightarrow \infty$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (2.3.2) στο ολοκλήρωμα $I(x; \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} I(x; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^N \int_0^\varepsilon a_n t^{\alpha + \beta n} e^{-xt} dt \\ &\quad + \left(I(x; \varepsilon) - \sum_{n=0}^N \int_0^\varepsilon a_n t^{\alpha + \beta n} e^{-xt} dt \right). \end{aligned}$$

Μπορούμε να επιλέξουμε το ε αρκούντως μικρό ώστε

$$|f(t) - t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n}| \leq M t^\alpha t^{\beta(N+1)},$$

για κάθε $t \in [0, \varepsilon]$ και για κάποιο $M > 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \left| I(x; \varepsilon) - \sum_{n=0}^N \int_0^\varepsilon a_n t^{\alpha + \beta n} e^{-xt} dt \right| &\leq \int_0^\varepsilon |f(t) - t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n}| e^{-xt} dt \\ &\leq M \int_0^\varepsilon t^{\alpha + \beta(N+1)} e^{-xt} dt \\ &\leq \int_0^\infty t^{\alpha + \beta(N+1)} e^{-xt} dt \\ &= \frac{M}{x^{\alpha + \beta(N+1) + 1}} \int_0^\infty s^{\alpha + \beta(N+1)} e^{-s} ds \\ &= M \left(\frac{\Gamma(\alpha + \beta(N+1) + 1)}{x^{\alpha + \beta(N+1) + 1}} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{x^{\alpha + \beta(N+1) + 1}} \right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}\int_0^\varepsilon a_n t^{\alpha+\beta n} e^{-xt} dt &= \int_0^\infty a_n t^{\alpha+\beta n} e^{-xt} dt - \int_\varepsilon^\infty a_n t^{\alpha+\beta n} e^{-xt} dt \\ &= \frac{a_n}{x^{\alpha+\beta n+1}} \int_0^\infty s^{\alpha+\beta n} e^{-s} ds + O(e^{-\varepsilon x}) \\ &= \frac{a_n \Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{x^{\alpha+\beta n+1}} + O(e^{-\varepsilon x}), \quad x \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα και την αλλαγή μεταβλητής $s := xt$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}I(x) - \sum_{n=0}^N a_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{x^{\alpha+\beta n+1}} \\ = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+\beta n+1}}\right), \quad x \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται άμεσα καθώς το N ελήφθη τυχαίο. ■

Παρατήρηση 2.3.2 Για να εφαρμόσουμε το Λήμμα Watson είναι **υποχρεωτικό** το κάτω όριο του ολοκληρώματος να είναι μηδέν.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια το Λήμμα του Watson για μιγαδικές συναρτήσεις.

Πρόταση 2.3.3 (Λήμμα Watson για μιγαδικές συναρτήσεις)

Έστω συνάρτηση $f(t)$ αναλυτική στο μιγαδικό επίπεδο για $0 < |t| < R$, $|\arg(t)| < \delta < \pi$ (πιθανόν με ένα σημείο διακλάδωσης στην αρχή) και υποθέτουμε ότι

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^{\frac{n}{N}-1}, \quad |t| < R, \quad (2.3.4)$$

και

$$|f(t)| \leq K e^{bt}, \quad R \leq t \leq T, \quad (2.3.5)$$

για K, b ανεξάρτητα του t . Τότε στον τομέα $|\arg(z)| \leq \delta < \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$I(z) = \int_0^T f(t) e^{-zt} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma\left(\frac{n}{N}\right) z^{-\frac{n}{N}}, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.3.6)$$

Απόδειξη. Έστω $z = x + iy$. Αναλύουμε το $I(z)$ ως

$$I(z) = \underbrace{\int_0^R f(t) e^{-zt} dt}_{I_1(z)} + \underbrace{\int_R^T f(t) e^{-zt} dt}_{I_2(z)}. \quad (2.3.7)$$

Θα εκτιμήσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.3.7) ως εξής:

$$\begin{aligned}|I_2(z)| &\leq \int_R^T |f(t)| e^{-xt} dt \leq K \int_R^T e^{(b-x)t} dt \\ &= K \frac{e^{(b-x)T} - e^{(b-x)R}}{b-x} \\ &= O(e^{-xR}), \quad x \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Καθώς η δυναμοσειρά της $f(t)$ είναι συγκλίνουσα στην πραγματική ευθεία

$$f(t) = \sum_{n=1}^{M-1} a_n t^{\frac{n}{N}-1} + R_M(t),$$

όπου το υπόλοιπο

$$R_M(t) \leq C t^{\frac{n}{N}-1}, \quad \text{για κάθε } 0 < |t| \leq R.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_0^R \left(\sum_{n=1}^{M-1} a_n t^{\frac{n}{N}-1} \right) e^{-zt} dt + \int_0^R R_M(t) e^{-zt} dt \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{M-1} a_n \left(\int_0^\infty t^{\frac{n}{N}-1} e^{-zt} dt \right)}_{J_1(z)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{M-1} a_n \left(\int_R^\infty t^{\frac{n}{N}-1} e^{-zt} dt \right)}_{J_2(z)} \\ &\quad + \int_0^R R_M(t) e^{-zt} dt. \end{aligned}$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $s = zt$ θα υπολογίσουμε τα $J_1(z)$ και $J_2(z)$:

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \sum_{n=1}^{M-1} \int_0^{M-1} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{N}}} \int_0^\infty s^{\frac{n}{N}-1} e^{-s} ds \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{N}}} \Gamma\left(\frac{n}{N}\right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} J_2(z) &= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{N}}} \int_{zR}^\infty s^{\frac{n}{N}-1} e^{-s} ds \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{N}}} \Gamma\left(\frac{n}{N}, zR\right). \end{aligned}$$

Όμως, για την ημιτελή συνάρτηση Γάμμα έχουμε (το έχουμε ήδη δει στο δεύτερο κεφάλαιο)

$$\Gamma\left(\frac{n}{N}, zR\right) = O(e^{-xR}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R R_M(t) e^{-zt} dt \right| &\leq C \int_0^R t^{\frac{M}{N}-1} e^{-xt} dt \\ &\leq C \int_0^\infty t^{\frac{M}{N}-1} e^{-xt} dt \\ &= \frac{C}{x^{\frac{M}{N}}} \int_0^\infty s^{\frac{M}{N}-1} e^{-s} ds \\ &= \frac{C}{x^{\frac{M}{N}}} \Gamma\left(\frac{M}{N}\right) \\ &= O\left(x^{-\frac{M}{N}}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω εκτιμήσεις έχουμε

$$\begin{aligned} I(z) &= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{N}}} \Gamma\left(\frac{n}{N}\right) + O\left(e^{-xR}\right) + O\left(x^{-\frac{M}{N}}\right) + O\left(e^{-xR}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{N}}} \Gamma\left(\frac{n}{N}\right) + O\left(x^{-\frac{M}{N}}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται άμεσα καθώς το M εξελέγη τυχαίο. ■

Συνεχίζουμε με ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.3.4 Το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος¹¹

$$J(x) = \int_0^{10} \frac{1}{1+t^4} e^{-xt} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

Όλες οι προϋποθέσεις του Λήμματος Watson πληρούνται για τη συνάρτηση

$$\frac{1}{1+t^4}$$

η οποία συγκλίνει για $-1 < t < 1$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από το σημείο $t = 0$ έχουμε

$$\frac{1}{1+t^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^4)^n.$$

Σε σχέση με τον συμβολισμό που δώσαμε στο Λήμμα του Watson έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \\ \alpha &= 0 > -1, \\ \beta &= 4. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$J(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(4n+1)}{x^{4n+1}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Επειδή από τη σχέση (1.1.16)

$$\Gamma(4n+1) = (4n)!$$

λαμβάνουμε

$$J(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{4!}{x^5} + \frac{8!}{x^9} - \frac{12!}{x^{13}} + \dots, \quad x \rightarrow \infty.$$

Παράδειγμα 2.3.5 Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$A(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)} e^{-xt} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

¹¹και γενικότερα (βλ. σχετική άσκηση στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου) μπορεί κανείς να βρει το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$J(x) = \int_0^{10} \frac{1}{1+t^\lambda} e^{-xt} dt, \quad \lambda > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1}{2(1+t)}.$$

Έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad |t| < 1,$$

και προφανώς υπάρχει θετική σταθερά c , έτσι ώστε:

$$f(t) = o(e^{ct}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Είναι

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \\ \alpha &= \frac{-1}{2} > -1, \\ \beta &= 1. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Λήμμα Watson έχουμε

$$A(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{x^{n+\frac{1}{2}}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Από τις σχέσεις (1.1.17), (1.1.15) έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{4}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$A(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{x^3}} + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{x^5}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σημείωση 2.3.6 Το Λήμμα Watson εφαρμόζεται μόνον σε ολοκληρώματα Laplace της μορφής

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt,$$

όπου

$$\phi(t) = -t.$$

Εάν η συνάρτηση $\phi(t)$ έχει άλλη μορφή, τότε το πρώτο που μπορεί κανείς να δοκιμάσει είναι μία αλλαγή μεταβλητής της μορφής

$$s = -\phi(t)$$

και στη συνέχεια να φέρει το νέο ολοκλήρωμα σε μορφή που εφαρμόζεται το Λήμμα Watson. Η επόμενη κίνηση θα είναι να μετατρέψει το κάτω όριο ολοκλήρωσης στο μηδέν. Το ακόλουθο είναι ένα χαρακτηριστικό

Παράδειγμα 2.3.7 Η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel με ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$K_0(x) := \int_0^\infty e^{-x \cosh u} du, \quad x > 0.$$

Θα δείξουμε ότι

$$K_0(x) \sim x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} - \dots \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Με τη βοήθεια της αλλαγής μεταβλητής

$$s := \cosh u$$

έχουμε

$$ds = \sinh u \, du = \left(\cosh^2 u - 1 \right)^{\frac{1}{2}} du = (s^2 - 1)^{\frac{1}{2}} du.$$

Καταλήγουμε στο ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$K_0(x) = \int_1^\infty \frac{1}{(s^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} e^{-xs} ds.$$

Αλλάζουμε τη μεταβλητή θέτοντας $s - 1 := t$ και λαμβάνουμε

$$K_0(x) = e^{-x} \int_0^\infty \frac{1}{(t^2 + 2t)^{\frac{1}{2}}} e^{-xt} dt.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα είναι της μορφής

$$\int_0^\infty f(t) e^{-xt} dt,$$

όπου

$$f(t) = (2t)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Για τη συνάρτηση $f(t)$ έχουμε από το (γενικευμένο) διωνυμικό θεώρημα

$$f(t) = (2t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-t}{2} \right)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

για κάθε $|t| < 2$ (άρα και για $t \rightarrow 0^+$). Επίσης,

$$f(t) \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty.$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Λήμματος Watson με

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = 1$$

$$a_n = \left(\frac{-1}{2} \right)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Έχουμε λοιπόν το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$K_0(x) \sim e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2}{2^{n+\frac{1}{2}} n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{n+\frac{1}{2}}}, \quad x \rightarrow \infty$$

και το ζητούμενο έπεται άμεσα.¹² Είδαμε λοιπόν το Λήμμα Watson μπορεί να εφαρμοστεί αφού πρώτα δράσει μία αλλαγή μεταβλητής στο αρχικό πρόβλημα. Και το επόμενο παράδειγμα ανήκει σε αυτήν την κατηγορία.

Παράδειγμα 2.3.8 Η συμπεριφορά του

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^6} du, \quad x \rightarrow \infty.$$

Επειδή η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια ως προς u , έχουμε

$$I(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^6} du, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $u^2 = t$ λαμβάνουμε

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t^3)} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^3)}.$$

Έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-t^3)^n, \quad |t| < 1,$$

και προφανώς υπάρχει θετική σταθερά c , έτσι ώστε:

$$f(t) = o(e^{ct}), \quad t \rightarrow \infty,$$

διότι

$$f(t) \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty.$$

Επομένως, από το Λήμμα Watson έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \\ \alpha &= \frac{-1}{2} > -1, \\ \beta &= 3. \end{aligned}$$

¹²Για να γράψουμε τους τρεις πρώτους όρους από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα θα πρέπει να θυμηθείτε, ότι από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα που χρησιμοποιήσαμε ακόμη και στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύουν:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{3n} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{x^{3n + \frac{1}{2}}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ας δούμε το ανάπτυγμα αναφέροντας τους πρώτους τρεις όρους από αυτό:

$$I(x) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{x^{\frac{7}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}{x^{\frac{13}{2}}} - \dots, \quad x \rightarrow \infty.$$

Παράδειγμα 2.3.9 Η συμπεριφορά του

$$L(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \tan u} du, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t := \tan u$ λαμβάνουμε

$$L(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-xt} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t) := \frac{1}{1+t^2},$$

για την οποία

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n, \quad t \rightarrow 0^+,$$

και προφανώς υπάρχει θετική σταθερά c , έτσι ώστε:

$$g(t) = o(e^{ct}), \quad t \rightarrow \infty,$$

καθώς

$$g(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Επομένως, από το Λήμμα Watson για

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \\ \alpha &= 0, \\ \beta &= 2, \end{aligned}$$

έχουμε

$$L(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(2n+1)}{x^{2n+1}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σχετικά με τον πρωτεύοντα όρο έχουμε λοιπόν

$$L(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

2.3.1 Ασκήσεις

Άσκηση 2.3.10 Ποιο το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$I(x; \lambda) = \int_0^{20} \frac{e^{-xt}}{1+t^\lambda} dt, \quad \lambda > 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

Άσκηση 2.3.11 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_1^\infty \frac{1}{s^2 + 2s + 2} e^{-xs} ds, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.3.12 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \tan^2 \theta} d\theta, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.3.13 Να υπολογιστεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$B(x) = \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{3}}}{1+t^2} e^{-xt} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.3.14 Να υπολογιστεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^8} e^{-xt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

και στη συνέχεια να γενικεύσετε την απάντησή σας για την οικογένεια ολοκληρωμάτων

$$J(x; \lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^{2\lambda}} e^{-xt^2} dt, \quad \lambda > 0 \quad x \rightarrow \infty.$$

Ποια είναι η συμπεριφορά του $J(x; 0)$;

Άσκηση 2.3.15 Να υπολογιστεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^\infty \log(1+t^2) e^{-xt} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.3.16 Να βρεθούν οι πρώτοι τρεις όροι από το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^\infty e^{-xt^2} \sin t dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.3.17 Να υπολογιστεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 e^{-xt^3} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

2.4 Η μέθοδος Laplace σε γενικής μορφής ολοκληρώματα

Στα προηγούμενα δύο κεφάλαια μιλήσαμε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.1)$$

αναφέροντας ακροθιγώς τη βασική ιδέα της μεθόδου Laplace.¹³

Στη συνέχεια, και για την περίπτωση όπου η

$$\phi(t) = -t$$

αποδείξαμε μέσω του Λήμματος Watson, ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος (καθώς $x \rightarrow \infty$) προέρχεται από τον υπολογισμό του στην περιοχή του $t = 0$, όπου η συνάρτηση $\phi(t)$ μεγιστοποιείται. Είδαμε ακόμη περιπτώσεις όπου η συνάρτηση

$$\phi(t) \neq -t.$$

Αυτές αντιμετωπίστηκαν με αλλαγή μεταβλητής και μετατροπή τους σε νέο ολοκλήρωμα μορφής τέτοιας που να εφαρμόζεται το Λήμμα Watson.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αναλυτικότερα τη μέθοδο Laplace με την οποία θα μπορούμε να υπολογίσουμε τον πρωτεύοντα όρο σε ολοκληρώματα της μορφής (2.4.1) για τα οποία, άλλωστε, η αλλαγή μεταβλητής

$$s = -\phi(t)$$

δεν οδηγεί πάντα σε εύκολα διαχειρίσιμα ολοκληρώματα.

Αναζητούμε λοιπόν τον πρώτο όρο της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του (2.4.1), όταν $x \rightarrow \infty$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η κεντρική ιδέα της μεθόδου του Laplace είναι ότι η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα, και επομένως και επί της ασυμπτωτικής του συμπεριφοράς, καθώς $x \rightarrow \infty$, προέρχεται από την περιοχή του σημείου $a \leq t \leq b$, όπου η $\phi(t)$ μεγιστοποιείται. Εάν υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία μεγίστου τότε ενδέχεται να συμμετέχουν και αυτά στην ασυμπτωτική προσέγγιση (τούτο εξαρτάται από τις τιμές της συνάρτησης $\phi(t)$ - σε αυτό θα επανέλθουμε αργότερα).

Εάν, για παράδειγμα, $\phi'(t) < 0$ για κάθε $a \leq t \leq b$, τότε η τιμή $\phi(a)$ είναι η μέγιστη της $\phi(t)$. Το Λήμμα Watson απέδειξε ότι το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα καθώς $x \rightarrow \infty$ προέρχεται από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στην περιοχή του $t = 0$ όπου η $\phi(t) = -t$ μεγιστοποιείται.

Ας υποθέσουμε ότι η $\phi(t)$ μεγιστοποιείται στο $t = c$ εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[a, b]$. Αυτή η περίπτωση εμπίπτει αυτόματα στην αντίστοιχη κατά την οποία το μέγιστο της συνάρτησης επιτυγχάνεται σε άκρο του διαστήματος $[a, b]$. Αυτό μπορεί να γίνει αναλύοντας το αρχικό ολοκλήρωμα ως άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων παρεμβάλλοντας το c , και εν συνεχεία με μία κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, ώστε να εφαρμόζεται το Λήμμα Watson. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt &= \int_c^b f(t)e^{x\phi(t)} dt + \int_a^c f(t)e^{x\phi(t)} dt \\ &= \int_0^{c-a} f_1(u)e^{x\phi_1(u)} du + \int_0^{b-c} f_2(u)e^{x\phi_2(u)} du, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} f_1(u) &= f(c-u), & \phi_1(u) &= \phi(c-u), \\ f_2(u) &= f(c+u), & \phi_2(u) &= \phi(c+u). \end{aligned}$$

¹³P.S. de Laplace, *Theorie analytique desprobabilite's*. Paris, 1820.

Η συνάρτηση που βρίσκεται στον εκθέτη σε κάθε ένα από τα δύο τελευταία ολοκληρώματα μεγιστοποιείται όταν $t = 0$. Επομένως, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ολοκληρώματα της μορφής

$$I(x) = \int_0^T f(t)e^{x\phi(t)} dt, \quad (2.4.2)$$

όπου $\phi(0)$ είναι το μέγιστο της συνάρτησης $\phi(t)$ στο διάστημα $[0, T]$, $T > 0$. Εάν η αρχική μας συνάρτηση $\phi(t)$ έχει περισσότερα από ένα σημεία μεγίστου (ολικά ή τοπικά), τότε αναλύουμε το αρχικό ολοκλήρωμα ως άθροισμα αντίστοιχων ολοκληρωμάτων (που το κάθε ένα έχει εκθέτη που μεγιστοποιείται μόνο μία φορά), και έτσι, σε κάθε περίπτωση θεωρούμε ολοκληρώματα που ανήκουν στην κλάση της σχέσης (2.4.2). Σε κάθε περίπτωση η συμμετοχή του κάθε ενός από αυτά τα ολοκληρώματα (εάν βέβαια υπάρχουν) θα πρέπει να συ-νεκτιμηθεί. Ωστόσο, όπως θα γίνει καταληπτό από την ανάλυση που θα ακολουθήσει, αυτή η συμμετοχή θα εξαρτάται από τις τιμές της $\phi(t)$ που επιτυγχάνονται οι μέγιστες τιμές. Επανερχόμαστε στη σχέση (2.4.2). Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

• ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι: $\phi'(0) = 0$, $\phi''(0) < 0$,

• ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ: $\phi'(0) < 0$,

τις οποίες και θα μελετήσουμε.

2.4.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι

Θεωρούμε την (2.4.2) με

$$\phi(0) > \phi(t), \text{ για κάθε } 0 < t \leq T$$

με τις επιπλέον συνθήκες

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi''(0) < 0$$

$$f(t), \phi''(t) : \text{πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις στο } [0, T].$$

Σε κάποιο διάστημα αρκούντως κοντά στο $t = 0$, έστω

$$0 \leq t \leq \delta < T,$$

έχουμε $\phi''(t) < 0$ καθώς η $\phi''(t)$ είναι συνεχής και το $\phi(0)$ είναι μέγιστο. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού έχουμε

$$\phi(t) - \phi(0) = \frac{1}{2}t^2\phi''(\xi), \text{ όπου } \phi''(\xi) < 0, \text{ και } 0 < \xi < \delta. \quad (2.4.3)$$

Με αυτήν την παρατήρηση είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης:

$$\phi(t) - \phi(0) = -s^2. \quad (2.4.4)$$

Έτσι λοιπόν ο εκθέτης στην (2.4.2) γίνεται

$$e^{x\phi(t)} = e^{x\phi(0)} e^{-xs^2}. \quad (2.4.5)$$

Αντικαθιστούμε την $f(t)$ στην (2.4.2) μέσω της (2.4.3). Καθώς η κύρια συνεισφορά του ολοκληρώματος προ-έρχεται από την περιοχή του $t = 0$ η πρώτη προσέγγιση της $f(t)$, ως συνάρτηση του s , είναι $f(0)$. Γενικότερα, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(t)$ αναπτύσσεται κατά Taylor γύρω από το $t = 0$ (έτσι θα έχουμε περισσότερους όρους στην προσέγγισή μας). Δηλαδή η έκφραση

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{1}{2!}t^2f''(0) + \dots$$

θα είναι σε ισχύ για κάποια πεπερασμένη ακτίνα σύγκλισης. Επιπλέον, εάν περιοριστούμε σε μια μικρή περιοχή του $t = 0$ και αναπτύξουμε το αριστερό μέλος της (2.4.3) θα έχουμε την πρώτη προσέγγιση του t ως προς s ως εξής:

$$\frac{1}{2!}t^2\phi''(0) + \dots = -s^2,$$

οπότε

$$t = \left\{ \frac{-2}{\phi''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} s + O(s^2). \quad (2.4.6)$$

Επομένως,

$$f(t) = f(0) + \left\{ \frac{-2}{\phi''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} s + O(s^2). \quad (2.4.7)$$

Τώρα εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητής από το t στο s στην (2.4.2) μέσω της (2.4.3), και χρησιμοποιώντας τις (2.4.6) και (2.4.7) έχουμε μέσω του Λήμματος Watson

$$I(x) \sim e^{x\phi(0)} \left\{ \frac{-2}{\phi''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^A e^{-xs^2} \{f(0) + O(s)\} ds + \dots \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.4.8)$$

όπου A είναι ένας θετικός αριθμός ο οποίος εξαρτάται από το T (βλέπε τη σχέση (2.4.2)), τον οποίο μπορούμε όμως άφοβα να αντικαταστήσουμε με το άπειρο, καθώς ο ασυμπτωτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος της σχέσης (2.4.8) δεν εξαρτάται από αυτό όπως έχουμε ήδη δει. Πράγματι,

$$\int_0^A e^{-xs^2} ds = \int_0^\infty e^{-xs^2} ds - \int_A^\infty e^{-xs^2} ds.$$

Για το πρώτο από τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα με την αλλαγή μεταβλητής

$$xs^2 := t$$

λαμβάνουμε (για μεγάλα x)

$$\int_0^\infty e^{-xs^2} ds = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad (2.4.9)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_A^\infty e^{-xs^2} ds = O\left(\frac{e^{-xA^2}}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεπώς, καθώς $x \rightarrow \infty$

$$I(x) \sim e^{x\phi(0)} f(0) \left\{ \frac{-2}{\phi''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-xs^2} ds + e^{x\phi(0)} O\left(\int_0^\infty s e^{-xs^2} ds\right) + \dots, \quad (2.4.10)$$

και τελικά

$$\int_0^T f(t) e^{x\phi(t)} dt = f(0) \left\{ \frac{-\pi}{2x\phi''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{x\phi(0)} + e^{x\phi(0)} O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.11)$$

Ο υπολογισμός του δεύτερου όρου στην (2.4.11) απαιτεί ανάλυση στον όρο που περιέχει την ποσότητα s^2 στη σχέση (2.4.6), αφού από την τελευταία είναι

$$dt = \left\{ \left(\frac{-2}{\phi''(0)} \right)^{\frac{1}{2}} + O(s) \right\} ds.$$

Θα επανέλθουμε με λεπτομέρειες σχετικά με το θέμα αυτό στο επόμενο κεφάλαιο.

Εάν τώρα θεωρήσουμε αντί του προβλήματος της σχέσης (2.4.2) την ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $x \rightarrow \infty$ για το ακόλουθο πρόβλημα

$$\int_{-U}^T f(t) e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.4.12)$$

όπου

$$U, T > 0$$

$$\phi(0) : \text{ μέγιστο της συνάρτησης } \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\phi''(0) < 0.$$

Σε αυτήν την περίπτωση η διαδικασία είναι παρόμοια με τη διαφορά ότι τα όρια στα ολοκληρώματα της αντίστοιχης σχέσης (2.4.10) θα είναι από $-\infty$ έως ∞ (δηλαδή το μηδέν θα αντικατασταθεί από το $-\infty$). Έτσι, το πρώτο ολοκλήρωμα της νέας σχέσης (2.4.11) θα πρέπει να **πολλαπλασιαστεί με το 2**.

Μία ακόμη σημαντική διαφορά είναι ότι στο νέο αυτό πρόβλημα το σφάλμα που υπολογίσαμε για τον δεύτερο όρο θα διαφοροποιηθεί. Ο δεύτερος όρος δεν θα είναι πλέον της μορφής

$$e^{x\phi(0)} O\left(\frac{1}{x}\right),$$

διότι,

$$\int_{-\infty}^{\infty} s e^{-xs^2} ds = 0$$

(περιττή συνάρτηση σε συμμετρικό ως προς το μηδέν διάστημα). Έτσι, οι όροι της μορφής $O(s^2)$ και $O(s^3)$ της σχέσης (2.4.6) και $O(s^2)$ της (2.4.7) πρέπει να υπολογιστούν. Σε αυτήν την περίπτωση η πρώτη μη μηδενική συνεισφορά για τον δεύτερο όρο προκύπτει από το

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{-xs^2} ds = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4.13)$$

Ένας κομψός τρόπος για να αποδείξουμε την (2.4.13) είναι να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της (2.4.14) δηλαδή

$$\int_0^{\infty} e^{-xs^2} ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x > 0.$$

από όπου έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x > 0. \quad (2.4.14)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς x (γιατί;) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs^2} ds &= \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \\ - \int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{-xs^2} ds &= - \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \end{aligned}$$

από όπου και το ζητούμενο.¹⁴ Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω παρατηρήσεις καθώς και τους αντίστοιχους υπολογισμούς έχουμε

$$\int_{-U}^T f(t)e^{x\phi(t)} dt = f(0) \left\{ \frac{-2\pi}{x\phi''(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{x\phi(0)} + e^{x\phi(0)} O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.15)$$

Στην περίπτωση λοιπόν κατά την οποία η $\phi(t)$ μεγιστοποιείται στο $t = c$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[a, b]$, δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε στην (2.4.15) το μηδέν με το c . Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \quad (2.4.16)$$

$$= f(c) \left\{ \frac{-2\pi}{x\phi''(c)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{x\phi(c)} + e^{x\phi(c)} O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.17)$$

2.4.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II

Θεωρούμε την (2.4.2) με

$$\phi(0) : \text{ μέγιστο της συνάρτησης } \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

τέτοιο ώστε

$$\phi'(0) < 0.$$

Καθώς $x \rightarrow \infty$, η κύρια συνεισφορά του ολοκληρώματος προέρχεται από μία μικρή περιοχή, έστω δ του $t = 0$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0, \delta]$ έχουμε

$$\phi(t) - \phi(0) = \phi'(\eta)t,$$

όπου

$$\phi'(\eta) < 0, \quad 0 < \eta < \delta < T.$$

Επειδή $\phi'(0) < 0$ θα έχουμε (λόγω συνεχείας), $\phi'(t) < 0$ σε μία αρκούντως μικρή περιοχή του $t = 0$. Η αλλαγή μεταβλητής

$$\phi(t) - \phi(0) = -s,$$

αντίστοιχης της (2.4.4) αποδίδει

$$t = \left\{ \frac{-1}{\phi'(0)} \right\} + O(s^2)$$

¹⁴Εναλλακτικά, για να αποδείξει κανείς την (2.4.13) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs^2} ds &= 2 \int_0^{\infty} e^{-xs^2} ds = \\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα οφείλεται στο ότι ολοκληρώνουμε άρτια συνάρτηση σε συμμετρικό ως προς το μηδέν διάστημα, η δεύτερη στην αλλαγή μεταβλητής $xs^2 := y$, και η τρίτη στον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα. Το ζητούμενο έπεται καθώς $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

σχέση αντίστοιχη της (2.4.6).

Ακολουθώντας παρόμοια βήματα με αυτά της ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ Ι καταλήγει κανείς στην αντίστοιχη της σχέσης (2.4.8)

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \int_0^A \left\{ f(0) + O(s) \right\} e^{x\phi(0)} e^{-xs} \left\{ \frac{-1}{\phi'(0)} \right\} ds \\ &\sim \left\{ \frac{-f(0)}{\phi'(0)} \right\} e^{x\phi(0)} \int_0^\infty e^{-xs} ds + e^{x\phi(0)} O \left(\int_0^\infty s e^{-xs} ds \right). \end{aligned}$$

Στην περίπτωση λοιπόν όπου $\phi'(0) \neq 0$

$$\int_0^T f(t) e^{x\phi(t)} dt = \left\{ \frac{-f(0)}{x\phi'(0)} \right\} e^{x\phi(0)} + e^{x\phi(0)} O(x^{-2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.18)$$

Και πάλι, ο υπολογισμός του δεύτερου όρου στην παραπάνω σχέση (2.4.18) απαιτεί επιπλέον ανάλυση. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει θα επανέλθουμε με λεπτομέρειες σχετικά με το θέμα αυτό στο επόμενο κεφάλαιο.

Εάν επιστρέψουμε στο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.4.1) όπου το μέγιστο της συνάρτησης $\phi(t)$ στο διάστημα $[a, b]$ επιτυγχάνεται όταν $t = a$, με $\phi'(a) < 0$, τότε η απάντηση στο ερώτημά μας, κατ' αναλογία με την (2.4.1), είναι

$$\int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt = \left\{ \frac{-f(a)}{x\phi'(a)} \right\} e^{x\phi(a)} + e^{x\phi(a)} O(x^{-2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.19)$$

Εάν το μέγιστο της συνάρτησης $\phi(t)$ στο διάστημα $[a, b]$ επιτυγχάνεται όταν $t = b$, η απάντησή μας δεν θα αλλάξει ουσιωδώς. Εάν λοιπόν,

$$\phi(b) > \phi(t), \quad a \leq t < b \quad \text{με} \quad \phi'(b) > 0,$$

τότε

$$\int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt = \left\{ \frac{f(b)}{x\phi'(b)} \right\} e^{x\phi(b)} + e^{x\phi(b)} O(x^{-2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.20)$$

Ας δούμε τώρα την περίπτωση όπου η συνάρτησή μας $\phi(t)$ μεγιστοποιείται στο εσωτερικό σημείο c του διαστήματος $[a, b]$ με

$$\begin{aligned} \phi'(c) = \phi''(c) = \phi'''(c) = \phi^{(p-1)}(c) = 0, \\ \phi^{(p)}(c) \neq 0, \end{aligned}$$

όπου p είναι, φυσικά, θετικός ακέραιος και υποχρεωτικά άρτιος. Σε αυτήν την περίπτωση

$$\int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt \sim \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (p!)^{\frac{1}{p}}}{p \left[-x\phi^{(p)}(c)\right]^{\frac{1}{p}}} f(c) e^{x\phi(c)}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.21)$$

Σημείωση. Στον παραπάνω υπολογισμό (αφήνεται ως άσκηση) ο αναγνώστης θα χρειαστεί το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^p} ds &= 2 \int_0^{\infty} e^{-s^p} ds \\ &= 2 \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{1}{p}-1} dy \\ &= \frac{2}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την ολοκλήρωση άρτιας συνάρτησης σε συμμετρικό ως προς το μηδέν διάστημα, ενώ η δεύτερη και η τρίτη ισότητα έπονται από την αλλαγή μεταβλητής $s := y^{1/p}$ και τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα αντίστοιχα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου:

- η συνάρτηση $f(t)$ μηδενίζεται στο σημείο μεγίστου της $\phi(t)$
- η συνάρτηση $f(t)$ απειρίζεται στο σημείο μεγίστου της $\phi(t)$
- το σημείο μεγίστου της $\phi(t)$ εξαρτάται από το x .

Για την πρώτη και τη δεύτερη περίπτωση θα δούμε παραδείγματα στη συνέχεια. Για την τρίτη περίπτωση όπου θα έχουμε συναρτήσεις της μορφής $e^{\phi(x,t)}$, αντί $e^{x\phi(t)}$ στην προς ολοκλήρωση συνάρτηση, θα αφιερώσουμε το μεθεπόμενο κεφάλαιο.

Συνεχίζουμε με ορισμένα παραδείγματα στα οποία εφαρμόζουμε τη μέθοδο Laplace βρίσκοντας, όπως έχουμε δει, μόνο τον πρωτεύοντα ασυμπτωτικά όρο.¹⁵

2.4.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 2.4.1 Ο πρωτεύων όρος επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε:

$$f(t) = 1,$$

$$\phi(t) = -\sin t,$$

$$\phi'(t) = -\cos t,$$

$$\phi(t) : \text{γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\phi_{\max} = \phi(0),$$

$$\phi'(\max) = \phi'(0) = -1 \neq 0.$$

Από τη σχέση (2.4.19) έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Παράδειγμα 2.4.2 Ο πρωτεύων όρος επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \cos t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε:

$$f(t) = 1,$$

$$\phi(t) = \cos t,$$

$$\phi'(t) = -\sin t,$$

$$\phi(t) : \text{γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\phi_{\max} = \phi(0),$$

$$\phi'(\max) = \phi'(0) = 0,$$

$$\phi''(\max) = \phi''(0) = -1 < 0.$$

¹⁵Σημειώνουμε ότι το γνωστό από τη θεωρία μεγάλων αποκλίσεων Λήμμα του Varadhan (Varadhan's Integral Lemma) είναι μία επέκταση της μεθόδου Laplace σε απειροδιάστατους χώρους.

Από την σχέση (2.4.11) λαμβάνουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \cos t} dt \sim e^x \sqrt{\frac{\pi}{2x}}, \quad x \rightarrow \infty,$$

(χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

Τα επόμενο παράδειγμα αφορά μία πολύ γνωστή ειδική συνάρτηση.

Παράδειγμα 2.4.3 Θεωρούμε τη συνάρτηση Bessel: $I_\eta(x)$, ακέραιας τάξης η , της οποίας η ολοκληρωτική αναπαράσταση είναι η ακόλουθη

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} d\theta.$$

Θα βρούμε τον δεσπόζοντα όρο επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της $I(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1, \\ \phi(\theta) &= \cos \theta, \\ \phi'(\theta) &= -\sin \theta, \\ \phi(\theta) &: \text{γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } [0, \pi], \\ \phi_{\max} &= \phi(0), \\ \phi'(\max) &= \phi'(0) = 0, \\ \phi''(\max) &= \phi''(0) = -1 < 0. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2.4.11) λαμβάνουμε

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} d\theta \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Παράδειγμα 2.4.4 Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 e^{-x \sin^4 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1, \\ \phi(t) &= -\sin^4 t, \\ \phi'(t) &= -2 \sin^2 t \sin(2t), \\ \phi_{\max} &= \phi(0), \\ \phi'(0) &= \phi''(0) = \phi'''(0) = 0, \\ \phi''''(0) &= \phi''(0) = 24 \neq 0. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2.4.21), για $p = 4$, έχουμε

$$\int_{-1}^1 e^{-x \sin^4 t} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2x^{\frac{1}{4}}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Τα ακόλουθα παράδειγμα αφορά μία, επίσης, πολύ γνωστή ειδική συνάρτηση.

Παράδειγμα 2.4.5 Η συμπεριφορά (πρωτεύων όρος) των πολωνύμων Legendre, $P_n(\mu)$:

$$P_n(\mu) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \cos \theta \right)^n d\theta, \quad \mu > 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1, \\ \phi(\theta) &= \ln \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \cos \theta \right), \\ \phi'(\theta) &= \frac{-\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \cos \theta} \sin \theta, \\ \phi(\theta) &: \text{γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } [0, \pi], \\ \phi_{\max} &= \phi(0), \\ \phi'(\max) &= \phi'(0) = 0, \\ \phi''(\max) &= \phi''(0) = -\frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}} < 0. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2.4.11) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} P_n(\mu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \cos \theta \right)^n d\theta \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{\left\{ \mu + (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\}^{n+\frac{1}{2}}}{(\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.4.6 Θα υπολογίσουμε τον πρώτο όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2t + 5) e^{-x \cos t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t + 5, \\ \phi(t) &= -\cos t, \\ \phi'(t) &= \sin t, \\ \phi_{\max} &= \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \phi\left(-\frac{\pi}{2}\right), \\ \phi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -1 < 0, \\ \phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 > 0, \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -\pi + 5, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \pi + 5. \end{aligned}$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε δύο μέγιστα για τη συνάρτηση $\phi(t)$. Θα υπολογίσουμε τη συνεισφορά του κάθε ενός χωριστά.

Από τις σχέσεις (2.4.19) και (2.4.20) αντίστοιχα έχουμε

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2t+5)e^{-x \cos t} dt \sim \frac{-(-\pi+5)}{-x} e^{0x} + \frac{(\pi+5)}{x} e^{0x} \\ \sim \frac{10}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σημείωση 2.4.7 Οι όροι που προέκυψαν από τη συνεισφορά του κάθε ενός μεγίστου ($\pm \frac{\pi}{2}$) είναι της ίδιας τάξης, για αυτόν τον λόγο και προστέθηκαν. Εάν για παράδειγμα, ο ένας όρος ήταν μικρό ο του άλλου (καθώς $x \rightarrow \infty$), τότε μόνο ο ισχυρότερος όρος θα αποτελούσε τον πρωτεύοντα όρο στο ολοκλήρωμά μας καθώς, φυσικά, $x \rightarrow \infty$.

Το επόμενο είναι ένα πολύ διδακτικό

Παράδειγμα 2.4.8 Ο πρώτος όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^2 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$\phi(t) = -\sin^2 t.$$

Το μέγιστο της συνάρτησης $\phi(t)$ επιτυγχάνεται όταν $t = 0$. Επομένως,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^2 t} dt \sim \int_0^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt, \quad \varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})^{16}. \quad (2.4.23)$$

Εάν επιλέξουμε το ε να είναι μικρό (αρκούντως κοντά στο μηδέν) το κέρδος μας είναι πολύ σημαντικό. Συγκεκριμένα, μπορούμε τότε να προσεγγίσουμε το $\sin t$ από το t , $0 \leq t \leq \varepsilon$. Έχοντας αυτήν την παρατήρηση υπ' όψιν, διατυπώνουμε τον ακόλουθο

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ:

$$\int_0^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt \sim \int_0^\varepsilon e^{-x t^2} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.24)$$

Εάν ο ισχυρισμός αυτός αληθεύει, τότε έχουμε και λίγη και εύκολη δουλειά μέχρι την τελική μας απάντηση, καθώς η ασυμπτωτική συμπεριφορά (δεσπόζων όρος) του τελευταίου ολοκληρώματος είναι εύκολο να υπολογιστεί. Επικεντρωνόμαστε λοιπόν στην απόδειξη της (2.4.24).

Αναλύουμε πρώτα το διάστημα $[0, \varepsilon]$ στα δύο ακόλουθα διαστήματα

$$[0, x^{-\lambda}], \quad [x^{-\lambda}, \varepsilon], \quad (2.4.25)$$

όπου λ

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \quad (2.4.26)$$

¹⁶Η απόδειξη της σχέσης αυτής, όπως έχουμε ήδη πει, είναι άμεση εάν κανείς γράψει

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^2 t} dt = \int_0^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^2 t} dt \quad (2.4.23)$$

και στο δεύτερο ολοκλήρωμα της τελευταίας ολοκληρώσει κατά παράγοντες. Δηλαδή μόνο η γειτονιά του $t = 0$ συμμετέχει στο ζητούμενο με εκθετικά μικρά σφάλματα.

με λ_1, λ_2 κατάλληλους θετικούς αριθμούς τους οποίους και θα βρούμε.

Η κεντρική ιδέα της προσέγγισής μας είναι η εξής. Έχουμε

$$\int_0^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt = \underbrace{\int_0^{x^{-\lambda}} e^{-x \sin^2 t} dt}_{I_1(x; \lambda)} + \underbrace{\int_{x^{-\lambda}}^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt}_{I_2(x; \lambda)}.$$

* Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$I_1(x; \lambda) \sim \int_0^{x^{-\lambda}} e^{-xt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.27)$$

Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να αποδείξει κανείς ότι

$$x \sin^2 t - xt^2 = o(1), \quad 0 \leq t \leq x^{-\lambda}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.28)$$

* Η ισχύς της (2.4.28) θα δίδει¹⁷.

$$e^{-x \sin^2 t} \sim e^{-xt^2}, \quad 0 \leq t \leq x^{-\lambda}, \quad x \rightarrow \infty$$

από την οποία έπεται (θυμηθείτε ότι το ε είναι κοντά στο μηδέν) η (2.4.27).

Είναι

$$\begin{aligned} |x \sin^2 t - xt^2| &= x |\sin t + t| |\sin t - t| \\ &< x (2t) \frac{t^3}{6} \\ &= x \frac{t^4}{3}. \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

¹⁷Για να δούμε για ποιον λόγο η (2.4.28) μας λύνει ουσιαστικά το πρόβλημα, ας θυμηθούμε μία χρήσιμη παρατήρηση του πρώτου κεφαλαίου:

* Εάν για δύο συναρτήσεις $f(x), g(x)$ ισχύει

$$f(x) - g(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.4.29)$$

τότε

$$e^{f(x)} \sim e^{g(x)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Η παραπάνω ανισότητα προκύπτει από την ¹⁸

$$t - \frac{t^3}{6} < \sin t < t, \quad t > 0. \quad (2.4.32)$$

Επανερχόμαστε στην (2.4.30). Είδαμε ότι

$$|x \sin^2 t - xt^2| < x \frac{t^4}{3}.$$

Όταν,

$$0 \leq t \leq x^{-\lambda}$$

έχουμε

$$|x \sin^2 t - xt^2| < \frac{x^{1-4\lambda}}{3}.$$

Επομένως, για την επιλογή

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad (2.4.33)$$

(που σημαίνει ότι $\lambda > \frac{1}{4}$) έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xt^4}{3} = 0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$e^{-x \sin^2 t} \sim e^{-xt^2}, \quad t \leq x^{-\lambda}, \quad \lambda > \frac{1}{4}, \quad x \rightarrow \infty.$$

και συνεπώς καταλήγουμε στην (2.4.27), δηλαδή

$$\int_0^{x^{-\lambda}} e^{-x \sin^2 t} \sim \int_0^{x^{-\lambda}} e^{-xt^2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεχίζοντας, και για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της (2.4.24) θα δείξουμε ότι η συμμετοχή κάθε ολοκληρώματος στην (2.4.24) που προέρχεται από το διάστημα $[x^{-\lambda}, \varepsilon]$ είναι εκθετικά μικρή καθώς $x \rightarrow \infty$ της αντίστοιχης συμμετοχής από το διάστημα $[0, x^{-\lambda}]$. Πράγματι,

$$e^{-x \sin^2 t} < e^{-x \sin^2(x^{-\lambda})}, \quad t > x^{-\lambda}$$

¹⁸H (2.4.32) προκύπτει άμεσα από την πιο γενική διπλή ανισότητα

$$\sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} < \sin t < \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad t > 0, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (2.4.31)$$

Η εκκίνηση για την (2.4.14) μπορεί να είναι η

$$\cos x < 1, \quad x > 0.$$

Ολοκληρώνουμε την ανισότητα και λαμβάνουμε

$$\sin t = \int_0^t \cos x dx < \int_0^t 1 dx = t, \quad t > 0.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά στο $[0, t]$, $t > 0$ και έχουμε

$$1 - \cos t = \int_0^t \sin x dx < \int_0^t x dx = \frac{t^2}{2}.$$

Με μία ακόμη ολοκλήρωση καταλήγουμε στην (2.4.32), ενώ με διαδοχικές ολοκληρώσεις στην (2.4.31).

και επειδή για $\lambda, x > 0$

$$\sin(x^{-\lambda}) < x^{-\lambda} < t$$

είναι

$$e^{-xt^2} < e^{-x \sin^2(x^{-\lambda})}, \quad t > x^{-\lambda},$$

(δηλαδή και οι δύο όροι που μας ενδιαφέρουν είναι μικρότεροι από $e^{-x \sin^2(x^{-\lambda})}$). Επειδή όμως

$$e^{-x \sin^2(x^{-\lambda})} \sim e^{-x^{1-2\lambda}}, \quad x \rightarrow \infty$$

όρος ο οποίος είναι εκθετικά μικρός εάν

$$\lambda < \frac{1}{2}, \quad x \rightarrow \infty$$

η επιλογή μας για το λ_2 είναι:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}. \quad (2.4.34)$$

Το τελευταίο βήμα πριν την τελική μας απάντηση είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του

$$\int_0^\varepsilon e^{-xt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.35)$$

Είναι

$$\int_0^\varepsilon e^{-xt^2} dt = \int_0^\infty e^{-xt^2} dt - \int_\varepsilon^\infty e^{-xt^2} dt. \quad (2.4.36)$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα της τελευταίας με τη βοήθεια της αλλαγής μεταβλητής $s = xt^2$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-xt^2} dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ως προς το δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.4.36) με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-xt^2} dt = O\left(\frac{e^{-x\varepsilon^2}}{\varepsilon x}\right), \quad \varepsilon \in (0, 2\pi), \quad x \rightarrow \infty,$$

εκθετικά μικρότερο του αποτελέσματος του πρώτου ολοκληρώματος. Τελικώς και εμπλέκοντας και την (2.4.23) έχουμε,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^2 t} dt \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ας κάνουμε μία **σύνοψη** των βημάτων που ακολουθήσαμε στο παράδειγμα αυτό.

- Διαπιστώσαμε ότι μόνο η γειτονιά του μηδενός συμμετέχει στον πρώτο ασυμπτωτικό όρο, δηλαδή:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^2 t} dt \sim \int_0^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.4.37)$$

- Αντικαταστήσαμε την ποσότητα $\sin^2 t$ με τον πρώτο όρο της από το ανάπτυγμα Taylor, δηλαδή t^2 . Αυτή η αντικατάσταση έγινε **μόνο** για το διάστημα $(0, \varepsilon)$, δηλαδή

$$\int_0^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt \sim \int_0^\varepsilon e^{-xt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.38)$$

Αυτό το βήμα είναι η καρδιά της προσέγγισής μας.

Για να υλοποιήσουμε το δεύτερο βήμα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι εκθέτες είναι κοντά (η διαφορά τους τείνει στο μηδέν). Αυτό όμως δεν συμβαίνει σε όλο το διάστημα $(0, \varepsilon)$. Για τον λόγο αυτό αναλύουμε το ολοκλήρωμά μας ως:

$$\begin{aligned}\int_0^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt &= \int_0^{x^{-\lambda}} e^{-x \sin^2 t} dt + \int_{x^{-\lambda}}^\varepsilon e^{-x \sin^2 t} dt \\ &= I_1(x; \lambda) + I_2(x; \lambda),\end{aligned}$$

όπου $0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, και οι αριθμοί αυτοί πρέπει να προσδιοριστούν. Στη συνέχεια βρίσκουμε την τιμή του αριθμού λ_1 για την οποία

$$x \sin^2 t - xt^2 = o(1),$$

οπότε

$$e^{-x \sin^2 t} \sim e^{-xt^2}, \quad 0 \leq t \leq x^{-\lambda}, \quad \lambda > \lambda_1.$$

Το κέρδος μας είναι ότι στο ολοκλήρωμα $I_1(x; \lambda)$ ο όρος $\sin^2 t$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον πρώτο όρο του αναπτύγματος Taylor, δηλαδή την ποσότητα t^2 . Η συμμετοχή του ολοκληρώματος $I_2(x; \lambda)$ είναι εκθετικά μικρή καθώς $x \rightarrow \infty$ της αντίστοιχης συμμετοχής από το διάστημα $[0, x^{-\lambda}]$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της τιμής του αριθμού λ_2 .

Αφού λοιπόν από την (2.4.37) αντικαταστήσαμε το άνω άκρο με ε και από τη σχέση (2.4.38) αντικαταστήσαμε στον εκθέτη τον όρο $\sin^2 t$ με τον πρώτο όρο από το ανάπτυγμα Taylor υπολογίζουμε εύκολα τον πρώτο όρο του ολοκληρώματος

$$\int_0^\varepsilon e^{-xt^2} dt$$

αντικαθιστώντας το άνω άκρο ολοκλήρωσης με άπειρο, εισάγοντας εκθετικά μικρά λάθη. Το ζητούμενο έπεται.

Για το επόμενο παράδειγμα θα παρουσιάσουμε δύο λύσεις

Παράδειγμα 2.4.9

$$\int_0^\infty \ln(1+t) e^{-x \sinh^2 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

★ ★ ★ Εδώ έχουμε μία περίπτωση όπου η $\phi(t) = -\sinh^2(t)$ μεγιστοποιείται όταν $t = 0$, σημείο στο οποίο μηδενίζεται και η συνάρτηση $f(t) = \ln(1+t)$ ¹⁹.

Πρώτη προσέγγιση. Εφαρμόζουμε αρχικά παραγοντική ολοκλήρωση και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \ln(1+t) e^{-x \sinh^2 t} dt &= -\frac{1}{x} \left[\frac{\ln(t+1)}{\sinh(2t)} \right]_{t=0}^\infty \\ &\quad + \frac{1}{x} \int_0^\infty \left(\frac{\ln(t+1)}{\sinh(2t)} \right)' e^{-x \sinh^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \int_0^\infty \left(\frac{\ln(t+1)}{\sinh(2t)} \right)' e^{-x \sinh^2 t} dt.\end{aligned}$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης, δηλαδή το

$$\int_0^\infty \left(\frac{\ln(t+1)}{\sinh(2t)} \right)' e^{-x \sinh^2 t} dt \tag{2.4.39}$$

¹⁹ $(\phi(t))' = -\sinh(2t)$

δεν μπορούμε πλέον να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Laplace στην ακόλουθη

Δεύτερη προσέγγιση. Κοντά στο $t = 0$ έχουμε

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$\sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \ln(1+t) e^{-x \sinh^2 t} dt &\sim \int_0^{\varepsilon} \ln(1+t) e^{-x \sinh^2 t} dt \\ &= \int_0^{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} e^{-x \sinh^2 t} dt \\ &\sim \int_0^{\varepsilon} t e^{-xt^2} dt \\ &= \int_0^{\infty} t e^{-xt^2} dt - \int_{\varepsilon}^{\infty} t e^{-xt^2} dt \\ &\sim \int_0^{\infty} t e^{-xt^2} dt \\ &= \frac{1}{2x}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι το τρίτο βήμα των παραπάνω σχέσεων προκύπτει αυστηρά, εάν ακολουθήσει κανείς τα βήματα του αμέσως προηγούμενου παραδείγματος (που παρουσιάσαμε αναλυτικά). Συγκεκριμένα, αντικαταστήσαμε τις συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ από τον πρώτο όρο του αντίστοιχου αναπτύγματος Taylor. Στο προτελευταίο βήμα επεκτείναμε τα όρια ολοκλήρωσης στο $[0, \infty]$, καθώς είναι εύκολο να δούμε (με ολοκλήρωση κατά παράγοντες) ότι η συνεισφορά του ολοκληρώματος στο διάστημα $[\varepsilon, \infty]$ είναι εκθετικά μικρή σε σχέση με την αντίστοιχη συνεισφορά σε όλο το $[0, \infty]$. Σχετικά με το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $xt^2 := u$.

Παρατήρηση 2.4.10 Εάν θέλαμε να δούμε τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος της σχέσης (2.4.39) θα έπρεπε στη δεύτερη προσέγγισή μας να αναφέρουμε και τον δεύτερο όρο της συνάρτησης $\ln(t+1)$. Αυτό θα οδηγήσει στην εμφάνιση του ολοκληρώματος $\int_0^{\infty} t^2 e^{-xt^2} dt$ το οποίο όταν το $x \rightarrow \infty$ συμπεριφέρεται σαν τον όρο $x^{-\frac{3}{2}}$. Αυτό προκύπτει άμεσα με την αλλαγή μεταβλητής $t^2 = u$. Τέτοιες περιπτώσεις θα μας απασχολήσουν στο επόμενο κεφάλαιο.

Το ακόλουθο είναι ένα παρόμοιο

Παράδειγμα 2.4.11 Ο πρώτος όρος του

$$\int_0^1 \tan t e^{-x \sinh^3 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$\phi(t) = -\sinh^2(t)$$

η οποία μεγιστοποιείται όταν $t = 0$, σημείο στο οποίο μηδενίζεται και η συνάρτηση $f(t) = \tan t$.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\tan t = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + \dots, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tan t e^{-x \sinh^3 t} dt &\sim \int_0^\varepsilon \tan t e^{-x \sinh^3 t} dt \\ &= \int_0^\varepsilon \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \dots \right) e^{-x \sinh^3 t} dt \\ &\sim \int_0^\varepsilon t e^{-xt^3} dt \\ &= \int_0^\infty t e^{-xt^3} dt - \int_\varepsilon^\infty t e^{-xt^3} dt \\ &\sim \int_0^\infty t e^{-xt^3} dt \\ &= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \int_0^\infty u^{\frac{2}{3}-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητής $xt^3 := u$, ενώ η τελευταία από τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα. Τα υπόλοιπα βήματα αιτιολογούνται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Συνεχίζουμε με το ακόλουθο

Παράδειγμα 2.4.12 Βρείτε τον πρώτο όρο του ασυμπτωτικού ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin t} e^{-x \sinh^{2n} t} dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Η συνάρτηση:

$$\phi(t) := -\sinh^{2n}(t)$$

μεγιστοποιείται όταν $t = 0$, σημείο στο οποίο μηδενίζεται και η συνάρτηση

$$f(t) = \sqrt{\sin t}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin t} e^{-x \sinh^{2n} t} dt &\sim \int_0^{\varepsilon} \sqrt{\sin t} e^{-x \sinh^{2n} t} dt \\
 &\sim \int_0^{\varepsilon} \sqrt{t} e^{-xt^{2n}} dt \\
 &\sim \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-xt^{2n}} dt \\
 &= \frac{1}{2nx^{\frac{1}{n}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{3}{4n}-1} e^{-u} du \\
 &= \frac{1}{2nx^{\frac{1}{n}}} \Gamma\left(\frac{3}{4n}\right), \quad x \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

με τη βοήθεια και της αλλαγής μεταβλητής $xt^{2n} := u$ και του ορισμού της συνάρτησης Γάμμα.

Το ακόλουθο παράδειγμα ανήκει σε μία διαφορετική κατηγορία η οποία όμως αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Παράδειγμα 2.4.13 Ο πρωτεύων όρος επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \cos t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε το φαινόμενο η συνάρτηση

$$\phi(t) := \cos t$$

να μεγιστοποιείται όταν $t = 0$, σημείο στο οποίο η συνάρτηση

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{\tan t}}$$

απειρίζεται. Το πρώτο βήμα για τη λύση είναι, ασφαλώς:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \cos t} dt \sim \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \cos t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Η επόμενη λογική κίνηση είναι να αντικαταστήσει κανείς την εφαπτομένη $\tan t$ με t και το συνημίτονο $\cos t$ με 1 (δηλαδή τον πρώτο όρο από το ανάπτυγμα Taylor των συναρτήσεων $f(t)$ και $\phi(t)$). Σε αυτήν την περίπτωση θα είχαμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \cos t} dt \sim \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{xt} dt, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{ΛΑΘΟΣ})$$

διότι το αποτέλεσμά μας εξαρτάται από το τυχαίο $\varepsilon \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Η σωστή κίνηση (φυσικά με την ανάλογη απόδειξη) είναι να αντικαταστήσουμε το συνημίτονο $\cos t$ με $1 - \frac{t^2}{2}$ (δηλαδή τους δύο πρώτους όρους από το ανάπτυγμα Taylor. Ως προς τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\tan t}}$, είναι σωστό να την αντικαταστήσουμε με t (δηλαδή τον πρώτο όρο από το αντίστοιχο ανάπτυγμα Taylor. Η απόδειξη στηρίζεται στα ακόλουθα βήματα:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[0, \varepsilon]$ στα διαστήματα $[0, x^{-a}]$ και $[x^{-a}, \varepsilon]$, με a θετικό αριθμό, τέτοιον ώστε

$$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}.$$

- Με τη βοήθεια της ανισότητας²⁰

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}, \quad t \geq 0$$

δείχνουμε ότι

$$x \left(\cos t - \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) \right) = o(1), \quad 0 \leq t \leq x^{-a}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} x \left| \cos t - \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) \right| &\leq x \frac{t^4}{24} \\ &\leq \frac{x^{1-4a}}{24} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$e^{x \cos t} \sim e^{x \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)}, \quad 0 \leq t \leq x^{-a}, \quad x \rightarrow \infty$$

και

$$\int_0^{x^{-a}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \cos t} dt \sim \int_0^{x^{-a}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)} dt, \quad 0 \leq t \leq x^{-a}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά (πρωτεύων όρος) του τελευταίου ολοκληρώματος προκύπτει άμεσα διότι

$$\int_0^{x^{-a}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)} dt - \int_{x^{-a}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)} dt.$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)} dt &\sim \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{x \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)} dt \\ &\stackrel{t^2=2\frac{y}{x}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{(8x)^{\frac{1}{4}}} e^x, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

με εκθετικά μικρά σφάλματα.

- Η συνεισφορά του ολοκληρώματος

$$\int_{x^{-a}}^\epsilon \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)} dt$$

είναι εκθετικά μικρότερη της (2.4.40), $x \rightarrow \infty$ (άσκηση). Συνεπώς,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} e^{x \cos t} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{(8x)^{\frac{1}{4}}} e^x, \quad x \rightarrow \infty.$$

²⁰είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \quad x > 0.$$

Εάν ολοκληρώσουμε στο διάστημα $[0, t]$ λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

2.4.4 Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.14 Ποιος είναι ο πρώτος όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 t^2 e^{-x \sinh^4 t} dt, \quad x \rightarrow \infty;$$

Άσκηση 2.4.15 Να αποδείξετε ότι

$$\int_{-1}^1 e^{-x \sinh^4 t} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2x^{\frac{1}{4}}} \quad x \rightarrow \infty.$$

Υπόδειξη. Επειδή η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-x \sinh^4 t} dt &= 2 \int_0^1 e^{-x \sinh^4 t} dt \\ &= 2 \left[\int_0^\infty e^{-x \sinh^4 t} dt - \int_1^\infty e^{-x \sinh^4 t} dt \right] \\ &\sim 2 \int_0^\infty e^{-xt^4} dt \quad (\text{γιατί};) \\ &= 2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4x^{\frac{1}{4}}}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4.16 Να βρείτε τον πρώτο όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 t^2 e^{-x \sinh^4 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.4.17 Να βρείτε τον πρώτο όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \sinh t e^{-x \tan^2 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.4.18 Να βρείτε τον πρώτο όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της συνάρτησης Bessel τάξεως n :

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos(nt) dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.4.19 Ποιος είναι ο πρώτος όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} e^{-x \sinh^2 t} dt, \quad x \rightarrow \infty;$$

Άσκηση 2.4.20 Να βρείτε τον πρώτο όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan t)^{\frac{1}{4}} e^{-xt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.4.21 Να βρείτε τον πρώτο όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \sqrt{t(1-t)} e^{-x \ln(x+1)t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Να πράξετε ομοίως για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \sqrt{t(1-t)} e^{-x \ln(x+2)t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.4.22 Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\int_0^\infty e^{-nt} t^s dt = s! n^{-(s+1)}, \quad s : \text{ακέραιος}$$

να αποδείξετε ότι

$$\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} s! n^{-s} \sim \left(\frac{\pi n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} s! n^{-s} &= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} n \int_0^\infty e^{-nt} t^s dt \\ &= n \int_0^\infty e^{-nt} \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^s \right) dt \\ &\stackrel{\text{Διωνυμικό Θεώρημα}}{=} n \int_0^\infty e^{-nt} (1+t)^n dt \\ &= n \int_0^\infty e^{n[\ln(1+t)-t]} dt. \end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση

$$\phi(t) = \ln(1+t) - t$$

η οποία μεγιστοποιείται για $t = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= 0, \\ \phi''(0) &= -1. \end{aligned}$$

Επομένως, από την (2.4.21) και επειδή το $t = 0$ άκρο του διαστήματος έχουμε το ζητούμενο (εάν πολλαπλασιάσουμε με το $\frac{1}{2}$). Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε περισσότερους όρους. Αυτό, όπως θα δούμε, χρειάζεται λίγο περισσότερο κόπο.

2.5 Περισσότεροι όροι σε ασυμπτωτικά αναπτύγματα ολοκληρωμάτων με τη μέθοδο Laplace

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράψαμε αναλυτικά τρόπους για την εύρεση του πρωτεύοντος όρου επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος σε ολοκληρώματα της μορφής

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.5.1)$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε πως μπορούμε να φτάσουμε στον δεύτερο όρο ή και ακόμη πιο βαθιά στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα βρίσκοντας όρους ανώτερης τάξης, καθώς $x \rightarrow \infty$. Η κεντρική ιδέα παραμένει η ίδια.

- Μόνο η περιοχή του σημείου όπου μεγιστοποιείται η συνάρτηση $\phi(t)$ συμμετέχει στο πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος $I(x)$.
- Προσεγγίζουμε το $I(x)$ από το $I(x; \varepsilon)$ και στη συνέχεια αναπτύσσουμε κατά Taylor τις $f(x)$, $\phi(t)$ γύρω από το εν λόγω σημείο.

- Ακολουθώς, αναπτύσσουμε κάποιους από τους εκθετικούς όρους (εδώ διαφοροποιείται η προσέγγισή μας η οποία θα εξηγηθεί λίγο αργότερα).
- Τέλος, αφήνουμε τα όρια των ολοκληρωμάτων που προκύπτουν να πάνε στο άπειρο, εισάγοντας έτσι εκθετικά μικρά λάθη, καθώς $x \rightarrow \infty$.

Ξεκινάμε με ένα

Παράδειγμα 2.5.1 Θα βρούμε τους δύο πρώτους όρους του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x \sin^2 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Είναι

$$\begin{aligned} f(t) &= 1, \\ \phi(t) &= -\sin^2 t, \\ \phi'(t) &= -\sin(2t). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\phi(t)$ μεγιστοποιείται για $t = 0$. Είδαμε σε παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x \sin^2 t} dt \sim \int_0^{\epsilon} e^{-x \sin^2 t} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

και στη συνέχεια ότι

$$\int_0^{\epsilon} e^{-x \sin^2 t} dt \sim \int_0^{\epsilon} e^{-xt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

με εκθετικά μικρά σφάλματα²¹. Με παρόμοιους συλλογισμούς και επειδή κοντά στο 0 έχουμε

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + O(t^5),$$

$$\sin^2 t = t^2 - \frac{t^4}{3} + O(t^6),$$

καταλήγουμε στην ασυμπτωτική σχέση

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x \sin^2 t} dt \sim \int_0^{\epsilon} e^{-x\left(t^2 - \frac{t^4}{3}\right)} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Αν δοκιμάσουμε να αναπτύξουμε τον όρο $e^{-x\left(t^2 - \frac{t^4}{3}\right)}$ (επειδή το ϵ μπορεί να επιλεγεί αρκούντως μικρό) θα προκύψει ολοκλήρωμα που θα εξαρτάται από το ϵ το οποίο **ΔΕΝ** είναι σωστό.

Αν δοκιμάσουμε να αναπτύξουμε τον όρο e^{-xt^2} (επειδή το ϵ μπορεί να επιλεγεί αρκούντως μικρό) θα προκύψει, πάλι, ολοκλήρωμα που θα εξαρτάται από το ϵ το οποίο **ΔΕΝ** είναι σωστό.

Η σωστή προσέγγιση είναι να αναπτύξουμε τον όρο $e^{x\frac{t^4}{3}}$ διατηρώντας τον όρο e^{-xt^2} (από τον οποίο άλλωστε θα προκύψει και ο πρωτεύων όρος καθώς $x \rightarrow \infty$), και θα έχουμε

²¹Μάλιστα, για τον πρώτο όρο έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x \sin^2 t} dt \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x \sin^2 t} dt \sim \int_0^{\varepsilon} e^{-x \left(t^2 - \frac{t^4}{3}\right)} dt \quad (2.5.2)$$

$$\sim \int_0^{\varepsilon} e^{-xt^2} \left(1 + \frac{1}{3}xt^4\right) dt \quad (2.5.3)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-xt^2} \left(1 + \frac{1}{3}xt^4\right) dt - \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-xt^2} \left(1 + \frac{1}{3}xt^4\right) dt$$

$$\sim \int_0^{\infty} e^{-xt^2} \left(1 + \frac{1}{3}xt^4\right) dt. \quad (2.5.4)$$

Ας σημειώσουμε ότι εάν στη σχέση (2.5.2) είχαμε προχωρήσει κατά έναν ακόμη όρο, και κατά συνέπεια το ίδιο θα συνέβαινε και στη σχέση (2.5.3), δεν θα είχαμε κάποιο όφελος ως προς το ζητούμενο (που εδώ είναι οι δύο πρώτοι όροι). Ως προς τη σχέση (2.5.4) η ασυμπτωτική σχέση ισχύει, καθώς τα σφάλματα είναι εκθετικά μικρά, όπως μπορεί να δει κανείς εύκολα ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες. Υπολογίζουμε τώρα εύκολα το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-xt^2} \left(1 + \frac{1}{3}xt^4\right) dt &= \int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt + \frac{x}{3} \int_0^{\infty} t^4 e^{-xt^2} dt \\ &\stackrel{xt^2:=y}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \left(1 + \frac{1}{4x}\right), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

Ας επανέλθουμε στη σχέση (2.5.1) και, για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου η συνάρτηση $\phi(t)$ μεγιστοποιείται για $t = c$ έτσι ώστε

- $a < c < b$,
- $\phi'(t) = 0$,
- $\phi''(t) < 0$,
- $f(c) \neq 0$.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (εδώ παρουσιάζουμε την προσέγγισή μας με έναν διαφορετικό, αν και όχι τόσο αυστηρό, μα ωστόσο, ισοδύναμο τρόπο (καθώς παραλείπουμε κάποιες επεξηγήσεις). Είναι

$$I(x) \sim I(x; \varepsilon) = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(t) e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty$$

και καθώς $\phi'(c) = 0$

$$\begin{aligned} I(x; \varepsilon) &\sim \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(c) e^{x\left[\phi(c) + \frac{1}{2}(t-c)^2 \phi''(t)\right]} dt, \quad x \rightarrow \infty, \\ &\sim f(c) e^{x\phi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x \frac{1}{2}(t-c)^2 \phi''(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

και θέτοντας

$$s^2 = -x(t-c)^2 \phi''(c)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \frac{e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \\ &= 2 \frac{e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds \\ &= 2 \frac{e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} f(c) e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν (από τη σχέση (2.5.5)), ότι αντικαθιστούμε τη συνάρτηση $\phi(t)$ με το ανάπτυγμά της κατά Taylor, γύρω από το $t = c$, μέχρι τον τρίτο όρο (ο δεύτερος, φυσικά, μηδενίζεται) και από εκεί και πέρα η πορεία για την εύρεση του πρώτου όρου του ολοκληρώματος είναι απλή.

Για την εύρεση του δεύτερου όρου του αναπτύγματος της (2.5.1) πρέπει να ακολουθήσουμε παρόμοια βήματα, αφού χρησιμοποιήσουμε δύο επιπλέον όρους από τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $f(t)$ και $\phi(t)$.²² Έχουμε λοιπόν καθώς $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \left[f(c) + f'(c) \frac{(t-c)}{1!} + f''(c) \frac{(t-c)^2}{2!} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ x \left[\phi(c) + \phi''(c) \frac{(t-c)^2}{2!} + \phi^{(3)}(c) \frac{(t-c)^3}{3!} + \phi^{(4)}(c) \frac{(t-c)^4}{4!} dt \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Στη συνέχεια, και επειδή μπορούμε να επιλέξουμε το ε αρκούντως μικρό, αναπτύσσουμε τους δύο τελευταίους εκθετικούς όρους ως εξής:²³

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ x \left[\phi^{(3)}(c) \frac{(t-c)^3}{3!} + \phi^{(4)}(c) \frac{(t-c)^4}{4!} dt \right] \right\} \\ &= 1 + x \left[\phi^{(3)}(c) \frac{(t-c)^3}{3!} + \phi^{(4)}(c) \frac{(t-c)^4}{4!} \right] \\ &\quad + \frac{x^2}{2!} \left[\phi^{(3)}(c) \frac{(t-c)^3}{3!} + \phi^{(4)}(c) \frac{(t-c)^4}{4!} \right]^2 + \dots \\ &= 1 + x \left[\phi^{(3)}(c) \frac{(t-c)^3}{3!} + \phi^{(4)}(c) \frac{(t-c)^4}{4!} \right] \\ &\quad + \frac{x^2}{72} \left[(\phi^{(3)}(c))^2 (t-c)^6 \right] + \frac{x^2}{2!3!4!} [\phi^{(3)}(c)\phi^{(4)}(c)(t-c)^7] \\ &\quad + \frac{x^2}{2!(4!)^2} [(\phi^{(4)}(c))^2 (t-c)^8] + \dots \end{aligned}$$

²²Αφού ολοκληρωθεί η προσέγγισή μας ο αναγνώστης μπορεί να χρησιμοποιήσει ακόμη περισσότερους όρους από τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $f(t)$ και $\phi(t)$, ώστε να πειστεί ότι για το ζητούμενό μας οι δύο όροι είναι αρκετοί.

²³Όπως έχουμε ήδη αναφέρει από τους δύο πρώτους εκθετικούς όρους λαμβάνουμε τον πρώτο ασυμπτωτικό όρο. Αυτούς λοιπόν δεν τους αναπτύσσουμε, διότι τότε το αποτέλεσμα μας θα εξαρτάτο από το ε .

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στη σχέση (2.5.6) λαμβάνουμε

$$I(x) \sim \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} e^{x\phi(c)+x\frac{(t-c)^2\phi''(c)}{2}} \times \left[f(c) + \frac{(t-c)^2}{2} f''(c) + (t-c)^4 \left(\frac{1}{24} x f(c) \phi^{(4)}(c) \right) + \frac{1}{72} (t-c)^6 x^2 f(c) (\phi''(c))^2 + \dots \right] dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.5.7)$$

Ας σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι στην παραπάνω ολοκληρωτική έκφραση υπάρχουν όροι με περιττό εκθέτη στον όρο $t-c$. Αυτοί όμως δεν αναφέρονται, διότι τα ολοκληρώματα μηδενίζονται όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, εάν θέσουμε $u = t - c$. Η αλλαγή αυτή θα οδηγήσει σε περιττές συναρτήσεις του t ως προς το συμμετρικό διάστημα $[\varepsilon, \varepsilon]$.

Αφήνουμε τώρα τα όρια του ολοκληρώματος στην ασυμπτωτική σχέση (2.5.7) να πάνε από το $[\varepsilon, \varepsilon]$ στο $(-\infty, \infty)$:²⁴

$$I(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\phi(c)+x\frac{(t-c)^2\phi''(c)}{2}} \times \left[f(c) + \frac{(t-c)^2}{2} f''(c) + (t-c)^4 \left(\frac{1}{24} x f(c) \phi^{(4)}(c) \right) + \frac{1}{72} (t-c)^6 x^2 f(c) (\phi''(c))^2 + \dots \right] dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής

$$\sqrt{x}(t-c) = s$$

λαμβάνουμε

$$I(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x\phi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s^2 \frac{\phi''(c)}{2}} \times \left\{ f(c) + \frac{1}{x} \left[\frac{1}{2} s^2 f''(c) + \frac{1}{24} s^4 f(c) \phi^{(4)}(c) + \frac{1}{6} s^4 f'(c) \phi^{(3)}(c) + \frac{1}{72} s^6 f(c) (\phi^{(3)}(c))^2 \right] \right\} ds, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.5.8)$$

Παρατηρούμε ότι εάν στη σχέση (2.5.7) είχαμε αναφέρει ακόμη περισσότερους όρους, τότε θα είχαμε πληροφορία για αντίστροφες δυνάμεις του x μεγαλύτερης τάξης (π.χ. $\frac{1}{x^2}$). Επανερχόμαστε στη σχέση (2.5.8) από την οποία προκύπτουν τα επιμέρους ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{s^2 \frac{\phi''(c)}{2}}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{s^2 \frac{\phi''(c)}{2}}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} s^4 e^{s^2 \frac{\phi''(c)}{2}}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} s^6 e^{s^2 \frac{\phi''(c)}{2}}. \end{aligned}$$

²⁴Τα σφάλματα είναι εκθετικά μικρά όπως έχουμε δει και σε άλλες περιπτώσεις με τη βοήθεια της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Θα επιλύσουμε το δεύτερο κατά σειρά ολοκλήρωμα. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται και τα υπόλοιπα. Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{s^2 \frac{\phi''(c)}{2}} = 2 \int_0^{\infty} s^2 e^{s^2 \frac{\phi''(c)}{2}} \quad (\text{άρτια συνάρτηση}).$$

Θέτουμε

$$s^2 \phi''(c) = 2y$$

και καθώς $y < 0$, αφού $\phi''(c) < 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{s^2 \frac{\phi''(c)}{2}} &= \frac{4}{\phi''(c) \sqrt{-\phi''(c)}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\phi''(c)} \sqrt{\frac{\pi}{-\phi''(c)}}. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η σχέση (2.5.8) αποδίδει

$$\begin{aligned} I(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-x\phi''(c)}} e^{x\phi(c)} &\left\{ f(c) + \frac{1}{x} \left[-\frac{f''(c)}{2\phi''(c)} + \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{8(\phi''(c))^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{f'(c)\phi^{(3)}(c)}{2(\phi''(c))^2} - \frac{5f(c)(\phi^{(3)}(c))^2}{24(\phi''(c))^3} \right] \right\} ds, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό ας δούμε και ένα (κλασικό) παράδειγμα σχετικό με την αυστηρή προσέγγιση που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 2.5.2 Το ολοκλήρωμα

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \cos t} \log(\lambda + \sin t) dt, \quad \lambda > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Αναζητούμε αρχικά τον πρώτο ασυμπτωτικό όρο. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= \log(\lambda + \sin t), \\ \phi(t) &= \cos t. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\phi(t)$ μεγιστοποιείται όταν $t = 0$, το οποίο είναι άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης, ενώ ισχύουν $\phi'(0) = 0$, $\phi''(0) < 0$. Επομένως,

- **εάν** $\lambda \neq 1$,

$$J(x) \sim \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi} f(0) e^{x\phi(0)}}{2[-x\phi''(0)]^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^x \log \lambda, \quad x \rightarrow \infty,$$

- **εάν** $\lambda = 1$,

η αντίστοιχη σχέση της (2.4.7) είναι

$$f(t) = \sqrt{2}s + O(s^2)$$

και κατά συνέπεια η σχέση (2.4.8) αποδίδει

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \cos t} \log(1 + \sin t) dt \sim e^x \sqrt{2} \int_0^A s e^{-xs^2} [\sqrt{2} + O(s)] ds \quad (2.5.10)$$

$$\sim \frac{e^x}{x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.5.11)$$

Εάν τώρα θέλουμε να προχωρήσουμε στον **δεύτερο όρο** στο ασυμπτωτικό αυτό ανάπτυγμα, η αντίστοιχη σχέση της (2.4.6) είναι

$$t = \sqrt{2}s + \frac{\sqrt{2}}{12}s^3 + O(s)^4$$

και η αντίστοιχη της σχέσης (2.4.7) είναι

$$f(t) = \log \lambda + \frac{\sqrt{2}}{\lambda}s + O(s)^2.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \cos t} \log(\lambda + \sin t) dt \\ &\sim e^x \int_0^\infty e^{-xs^2} \left\{ \sqrt{2} \log \lambda + \frac{2}{\lambda}s + \dots \right\} ds \\ &= e^x \left\{ \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \log \lambda + \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \end{aligned}$$

απάντηση που καλύπτει όλες τις περιπτώσεις (βλέπε και τη σχέση (2.5.10)) για τις δυνατές τιμές της παραμέτρου λ^{25} . Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε μερικά ακόμη παραδείγματα εύρεσης του δεύτερου ασυμπτωτικού όρου σε συγκεκριμένα είδη ολοκληρωμάτων.

2.5.1 Ασκήσεις

Άσκηση 2.5.3 Να βρεθούν οι δύο πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x \tan^2 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.5.4 Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^2 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.5.5 Να βρεθούν οι δύο πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^4 t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

²⁵Χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-xs^2} ds &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \\ \int_0^\infty s e^{-xs^2} ds &= \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

2.6 Η μέθοδος Laplace για ολοκληρώματα με κινητό μέγιστο

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μέθοδος Laplace δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμη. Δίνουμε δύο τέτοιες περιπτώσεις:²⁶

- όταν η συνάρτηση $f(t)$ μηδενίζεται εκθετικά γρήγορα στο σημείο που μεγιστοποιείται η $\phi(t)$,
- όταν $\max f(t) = \infty$.

Θα δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.6.1 Ο πρωτεύων όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\infty} e^{-xt - \frac{1}{t}} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Η πρώτη μας λογική κίνηση είναι να δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα του Watson. Όμως τούτο δεν αποδίδει κάτι στην περίπτωση αυτή. Πράγματι, η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

είναι απείρως παραγωγίσιμη στο $t = 0$ με όλες τις παραγώγους στο σημείο αυτό να μηδενίζονται (εύκολη άσκηση).

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(t)$ μηδενίζεται εκθετικά γρήγορα στο σημείο $t = 0$ όπου μεγιστοποιείται η συνάρτηση

$$\phi(t) = -t.$$

Δοκιμάζουμε να βρούμε το μέγιστο όλης της προς ολοκλήρωση συνάρτησης:

$$h(t) := e^{-xt - \frac{1}{t}}, \quad t \geq 0.$$

Η συνάρτηση $h(t)$ μεγιστοποιείται όταν

$$t := \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο μεγίστου εξαρτάται από τη μεγάλη παράμετρο x . Είναι φανερό, τώρα, γιατί η περίπτωση αυτή καλείται *κινητού μεγίστου*. Με την αλλαγή μεταβλητής

$$t := \frac{s}{\sqrt{x}}$$

η δυσκολία αίρεται και η μέθοδος Laplace εφαρμόζεται άμεσα. Πράγματι,

$$\int_0^{\infty} e^{-xt - \frac{1}{t}} dt \stackrel{t = \frac{s}{\sqrt{x}}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}\left(s + \frac{1}{s}\right)} ds.$$

Το τελευταίο είναι ένα ολοκλήρωμα Laplace με τη μεγάλη παράμετρο να είναι η \sqrt{x} , και τη συνάρτηση

$$\phi(s) := -\left(s + \frac{1}{s}\right),$$

²⁶Ο όρος που χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία είναι **movable maxima**.

η οποία μεγιστοποιείται όταν $s = 1$ (εσωτερικό σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης). Έχουμε

$$\begin{aligned}\phi'(1) &= 0, \\ \phi''(1) &= -2 < 0, \\ \phi^{(3)}(1) &= 6, \\ \phi^{(4)}(1) &= -24.\end{aligned}$$

Από τη σχέση (2.5.9) βρίσκουμε τους δύο πρώτους όρους του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματός μας (αφού πολλαπλασιάσουμε με τον όρο $\frac{1}{\sqrt{x}}$). Είναι

$$\int_0^\infty e^{-xt - \frac{1}{t}} dt \sim \frac{\sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}} \left(1 + \frac{3}{16\sqrt{x}} \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεχίζουμε με ένα πολύ γνωστό

Παράδειγμα 2.6.2 Η στο άπειρο συμπεριφορά της συνάρτησης Γάμμα και η φόρμουλα του *Stirling*:

$$\Gamma(x+1) := \int_0^\infty e^{-t} t^x dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Στην περίπτωση αυτή η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει τη μορφή

$$\int_0^\infty e^{-t+x \ln t} dt, \quad x \rightarrow \infty$$

και ας εφαρμόσουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$t := xs,$$

η οποία θα μετατρέψει το ολοκλήρωμά μας σε ολοκλήρωμα Laplace. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x \int_0^\infty e^{-xs+x \ln x + x \ln s} ds, \\ &= x^{x+1} \int_0^\infty e^{x(-s+\ln s)} ds, \quad x \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$h(t) := -s + \ln s, \quad s > 0$$

μεγιστοποιείται όταν

$$s = 1.$$

Έχουμε

$$\phi''(1) = -1 < 0.$$

Καθώς το σημείο $s = 1$ είναι εσωτερικό του διαστήματος ολοκλήρωσης έχουμε

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1} e^{-x} \left(\frac{2\pi}{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σχετικά με τον δεύτερο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματός μας έχουμε

$$\begin{aligned}\phi^{(3)}(1) &= 2, \\ \phi^{(4)}(1) &= -6.\end{aligned}$$

Επομένως, από τη σχέση (2.5.9) έχουμε

$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left(1 + \frac{1}{12x} \right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.6.1)$$

Παρατήρηση 2.6.3 Εάν ο αριθμός x είναι θετικός ακέραιος, τότε

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

οπότε σε πρώτη προσέγγιση

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφεται στην (2.6.5).

Παρατήρηση 2.6.4 Εάν κανείς θέλει περισσότερους όρους και διαθέτει λίγη υπομονή και χαρτί μπορεί να βρει περισσότερους όρους του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του $n!$. Με αυτόν τον τρόπο, ή ανεξάρτητα, όπως για παράδειγμα με ανάλυση επί της εξίσωσης διαφορών

$$\alpha_{n+1} = n\alpha_n,$$

η οποία ικανοποιείται από την

$$\alpha_n = (n-1)! = \Gamma(n),$$

είναι

$$\begin{aligned} n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n & \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} \right. \\ & + \frac{163879}{209018880n^5} + \frac{5246819}{75246796800n^6} + \dots \\ & \left. - \frac{534703531}{902961561600n^7} - \frac{4483131259}{86684309913600n^8} + \dots \right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Αξίζει πραγματικά να σημειώσουμε κάτι πολύ ενδιαφέρον για τους συντελεστές A_j του ασυμπτωτικού αναπτύγματος

$$\Gamma(n) = (n-1)! \sim \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \frac{A_3}{n^3} + \frac{A_4}{n^4} + \dots\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Οι τιμές των πρώτων συντελεστών A_j είναι

$$\begin{aligned} A_1 &\approx 0.08333333, \\ A_2 &\approx 0.00347222, \\ A_3 &\approx -0.00268133, \\ A_4 &\approx -0.00022947, \\ A_5 &\approx 0.00078404, \\ A_6 &\approx 0.00006973, \\ A_7 &\approx -0.00059217, \\ A_8 &\approx -0.00005172. \end{aligned}$$

Φαίνεται ότι οι συντελεστές A_j γίνονται (απολύτως) μικρότεροι καθώς το j μεγαλώνει. Ωστόσο, αυτό δεν αληθεύει, καθώς σύντομα αρχίζουν και **αυξάνουν ταχύτητα**. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} A_{15} &\approx -2.9 \times 10^{-2}, \\ A_{25} &\approx 2.2 \times 10^3, \\ A_{35} &\approx -1.1 \times 10^{10}. \end{aligned}$$

Μάλιστα, ισχύει

$$A_{2j} \sim (-1)^{j+1} \frac{(2j-2)!}{6(2\pi)^{2j}}, \quad j \rightarrow \infty,$$

$$A_{2j+1} \sim (-1)^j \frac{2(2j)!}{(2\pi)^{2(j+1)}}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Το ακόλουθο είναι ένα πολύ ενδιαφέρον

Παράδειγμα 2.6.5 Ο πρώτος όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$I(x) = \int_0^\infty e^{xt-(t-1)\ln t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$\phi(t) = t,$$

$$\max \{\phi(t)\} = \infty, \quad t \geq 0,$$

ενώ η συνάρτηση $f(t)$ μηδενίζεται εκθετικά γρήγορα στο σημείο όπου μεγιστοποιείται η $\phi(t)$. Επομένως, δεν μπορούμε άμεσα να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Laplace. Ας βρούμε το μέγιστο ολόκληρης της ολοκληρωτέας συνάρτησης

$$g(t) := e^{xt-(t-1)\ln t}$$

για την οποία

$$g'(t) = \left(x - \ln t - 1 + \frac{1}{t}\right) \phi(t).$$

Αυτό που θα κάνουμε στη συνέχεια είναι να βρούμε τη ρίζα της $g'(t)$ παραλείποντας τον όρο $\frac{1}{t}$ που μηδενίζεται στο σημείο που μεγιστοποιείται η συνάρτηση $\phi(t)$. Αυτό συμβαίνει όταν

$$t = e^{x-1}.$$

Είμαστε λοιπόν σε περίπτωση κινητού μεγίστου. Θέτουμε

$$t := se^{x-1}$$

και το αρχικό μας ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$I(x) = e^{2(x-1)} \int_0^\infty se^{e^{x-1}(s-s\ln s)} ds, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.6.2)$$

που είναι ένα ολοκλήρωμα Laplace με τη μεγάλη παράμετρο να είναι

$$y = e^{x-1}, \quad y \rightarrow \infty, \quad \text{καθώς} \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.6.3)$$

Θεωρούμε λοιπόν το

$$I(y) = \int_0^\infty se^{y(s-s\ln s)} ds, \quad y \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$f(s) = s,$$

$$\phi(s) = s - s \ln s,$$

$$\phi'(s) = -\ln s,$$

$$\phi''(s) = -\frac{1}{s},$$

ενώ, η συνάρτηση $\phi(s)$ μεγιστοποιείται για

$$s = 1,$$

το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Επομένως,

$$I(y) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{y}} e^y, \quad y \rightarrow \infty. \quad (2.6.4)$$

Με τη βοήθεια των (2.6.3) και (2.6.4), η σχέση (2.6.2) αποδίδει

$$I(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2}(x-1)} \exp(e^{x-1}), \quad x \rightarrow \infty.$$

2.6.1 Ασκήσεις

Άσκηση 2.6.6 Να βρεθούν οι δύο πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{-t}}{t}, \\ \phi(t) &= \ln t, \\ \max\{\phi(t)\} &= \infty, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Επομένως, δεν μπορούμε άμεσα να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Laplace. Εκεί που η συνάρτηση $\phi(t)$ μεγιστοποιείται (δηλαδή στο άπειρο), η $f(t)$ είναι εκθετικά μικρή. Ας βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης

$$h(t) := e^{-t} t^x$$

αγνοώντας τον όρο $\frac{1}{t}$ ο οποίος μηδενίζεται στο σημείο που η $\phi(t)$ μεγιστοποιείται. Βλέπουμε ότι η $h(t)$ μεγιστοποιείται όταν

$$t = x.$$

Έχουμε λοιπόν μία περίπτωση κινητού μεγίστου. Θέτουμε

$$t := xs,$$

η οποία θα μετατρέψει το ολοκλήρωμά μας σε ολοκλήρωμα **Laplace**. Πράγματι,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x^x \int_0^\infty e^{-x(s-\ln s)} \frac{ds}{s}.$$

Εδώ έχουμε

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

και η συνάρτηση

$$\phi(s) := \ln s - s, \quad s > 0$$

μεγιστοποιείται όταν

$$s = 1.$$

Έχουμε

$$\phi''(1) = -1 < 0.$$

Καθώς το σημείο $s = 1$ είναι εσωτερικό του διαστήματος ολοκλήρωσης έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \sim x^x e^{-x} \left(\frac{2\pi}{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σχετικά με τον δεύτερο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματός μας έχουμε

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f'(1) &= -1, \\ f''(1) &= 2, \\ \phi^{(3)}(1) &= 2, \\ \phi^{(4)}(1) &= -6. \end{aligned}$$

Επομένως, από τη σχέση (2.5.9) έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left(1 + \frac{1}{12x} \right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.6.5)$$

Άσκηση 2.6.7 Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι όροι στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$I(x) = \int_0^\infty e^{xt - (t-1)\ln t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Υπόδειξη. Ο πρώτος όρος υπολογίστηκε στο κεφάλαιο αυτό. Ακολουθήστε παρόμοια βήματα για τη μετατροπή του ολοκληρώματος σε ένα ολοκλήρωμα Laplace και στη συνέχεια εφαρμόστε τις τεχνικές του προηγούμενου κεφαλαίου για να καταλήξετε στο ζητούμενο.

Άσκηση 2.6.8 Να βρείτε την επόμενη διόρθωση στη σχέση (2.6.5), δηλαδή να βρείτε τον τέταρτο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης $\Gamma(x)$, όταν $x \rightarrow \infty$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

2.7 Ολοκληρώματα Fourier

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά (πρωτεύων όρος) σε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int_a^b f(t) e^{ixt} dt, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.7.1)$$

τα οποία καλούνται ολοκληρώματα Fourier. Αυτά είναι μία ειδική περίπτωση των ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b f(t) e^{ix\psi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.7.2)$$

όπου

$$f(t), \psi(t), \text{πραγματικές συναρτήσεις, } a, b, x \in \mathbb{R},$$

τα γνωστά ως γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier. Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι εάν η συνάρτηση $f(t)$ είναι μιγαδική, τότε η ανάλυσή της σε πραγματικό και φανταστικό μέρος οδηγεί σε δύο ολοκληρώματα της μορφής της σχέσης (2.7.2) ²⁷.

Ας ξεκινήσουμε με το πιο γνωστό παράδειγμα της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ενός ολοκληρώματος Fourier.

²⁷Σε επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου η συνάρτηση $\psi(t)$ είναι μιγαδική.

Παράδειγμα 2.7.1

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{1+t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ελπίζουμε σε απάντηση μέσω της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Είναι

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{1+t} dt = \frac{1}{ix} \left[\frac{e^{ixt}}{1+t} \right]_0^1 + \frac{1}{ix} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^2} dt = -\frac{i}{2x} e^{ix} + \frac{i}{x} - \frac{i}{x} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^2} dt.$$

Βλέπουμε ότι

- η συνεισφορά των άκρων ολοκλήρωσης είναι πεπερασμένη, για $x \rightarrow \infty$,
- το προκύπτων ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση υπάρχει, διότι

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Επομένως η ολοκλήρωση κατά παράγοντες **έχει αποτέλεσμα**. Μένει να διαπιστώσουμε από που προέρχεται ο πρωτεύων όρος της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του ολοκληρώματός μας: από τα άκρα ολοκλήρωσης ή από το προκύπτων ολοκλήρωμα. Αυτό που αληθεύει είναι το πρώτο, καθώς όπως θα δείξουμε το ολοκλήρωμα είναι ασυμπτωτικά ασθενέστερο από τη συνεισφορά των άκρων ολοκλήρωσης. Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες για να το αποδείξουμε:

$$-\frac{i}{x} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^2} dt = -\frac{1}{x^2} \left[\frac{e^{ixt}}{(1+t)^2} \right] - \frac{2}{x^2} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^3} dt = \frac{1}{x^2} - \frac{e^{ix}}{4x^2} - \frac{2}{x^2} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^3} dt.$$

Όμως,

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^3} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^3} dt = \frac{3}{8}.$$

Επομένως,

$$-\frac{i}{x} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^2} dt \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow \infty,$$

και κατά συνέπεια

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{1+t} dt \sim -\frac{i}{2x} e^{ix} + \frac{i}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Παρατήρηση 2.7.2 Είναι αξιοσημείωτο ότι στο αποτέλεσμα μας συμμετέχουν και τα δύο άκρα ολοκλήρωσης. Θυμίζουμε ότι στα ολοκληρώματα Laplace μόνο το ένα άκρο μπορεί να συμμετείχε στον πρωτεύοντα όρο.

* Συνεχίζουμε την ανάλυσή μας για να βρούμε τους επόμενους όρους στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματός μας. Είναι

$$\begin{aligned} -\frac{i}{x} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^2} dt &= -\frac{1}{x^2} \left[\frac{e^{ixt}}{(1+t)^2} \right]_0^1 - \frac{2}{x^2} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^3} dt \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{e^{ix}}{4x^2} - \frac{2}{x^2} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^3} dt \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{e^{ix}}{4x^2} + \frac{2i}{x^3} \left[\frac{e^{ixt}}{(1+t)^3} \right]_0^1 + \frac{6i}{x^3} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^4} dt \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{e^{ix}}{4x^2} + \left(\frac{2i}{x^3} e^{ix} - \frac{2i}{x^3} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^4} dt \right| \leq \frac{7}{24}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε, λοιπόν,

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{1+t} dt \sim -\frac{i}{2x} e^{ix} + \frac{i}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε το **πλήρες** ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (full asymptotic expansion):

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{1+t} dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(ix)^k} \left(\frac{e^{ix}}{2^k} - 1 \right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.7.3)$$

Στο παράδειγμα που μόλις παρουσιάσαμε χρησιμοποιήσαμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση με βασικό εργαλείο - επιχείρημα ότι το κάθε φορά προκύπτει ολοκλήρωμα (από την εφαρμογή της) είναι ασυμπτωτικά ασθενέστερο της συνεισφοράς των άκρων ολοκλήρωσης, καθώς $x \rightarrow \infty$. Πίσω από αυτό κρύβεται κάτι πιο βαθύ που είναι γνωστό ως:

Λήμμα 2.7.3 (Λήμμα Riemann - Lebesgue²⁸)

1. Εάν η συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t) e^{ixt} dt = o(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

2. Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (a, b) εκτός, ίσως, από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, τότε

$$\int_a^b f(t) e^{ixt} dt = o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

δοθέντος ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα, για αρκούντως μεγάλες τιμές του x .

Απόδειξη.

1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$.²⁹ Έστω,

$$M = \max |f(x)|, \quad x \in [a, b].$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. Για $\varepsilon > 0$ υπάρχει μία επαρκώς λεπτή διαμέριση του $[a, b]$:

$$\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

έτσι ώστε για $j = 1, 2, \dots, n$

$$t \in [t_{j-1}, t_j] \Rightarrow |f(t) - f(t_j)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Όμως, για $x > 0$,

$$\left| \int_a^b e^{ixt} dt \right| = \left| \frac{e^{ibx} - e^{iax}}{ix} \right| \leq \frac{|e^{ibx}| + |e^{iax}|}{x} = \frac{2}{x}.$$

²⁸Εμείς θα χρειαστούμε στο κεφάλαιο αυτό την Παρατήρηση που έπεται του Λήμματος αυτού.

²⁹Διαφορετικά, χωρίζουμε το διάστημα αυτό σε πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων στα οποία η f είναι συνεχής και αθροίζουμε τα αποτελέσματά μας.

Επομένως, για $x > \frac{4nM}{\varepsilon}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f(t)e^{ixt} dt \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(t_j) + f(t) - f(t_j)] e^{ixt} dt \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n |f(t_j)| \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{ixt} dt + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |e^{ixt}| |f(t) - f(t_j)| dt \\
 &\leq \sum_{j=1}^n M \frac{2}{x} + \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_j - t_{j-1}) \\
 &= nM \frac{2}{x} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)e^{ixt} dt = 0.$$

2. Έστω c_j , $j = 1, 2, \dots, n$ τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης f στο (a, b) σε αύξουσα σειρά. Με $\varepsilon > 0$ από το κριτήριο *Cauchy* και το σκέλος (1) του Θεωρήματος αυτού ότι υπάρχει αριθμός

$$\delta \in \left(0, \frac{1}{2} \min_{1 \leq j < n} [c_{j+1} - c_j] \right),$$

έτσι ώστε για $j = 1, 2, \dots, n$, τα ολοκληρώματα

$$\int_a^{c_1-\delta} f(t)e^{ixt} dt, \quad \int_{c_j-\delta}^{c_j+\delta} f(t)e^{ixt} dt, \quad \int_{c_n+\delta}^b f(t)e^{ixt} dt$$

να είναι όλα φραγμένα από $\frac{\varepsilon}{2(n+2)}$, για τιμές του x αρκούντως μεγάλες. Καθώς η f είναι συνεχής στο $[c_j + \delta, c_{j+1} - \delta]$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n-1$, η συνεισφορά από κάθε ένα από τα $n-1$ υποδιαστήματα είναι μικρότερη από $\frac{\varepsilon}{2(n-1)}$ για τιμές του x αρκούντως μεγάλες (από το σκέλος (1) του Θεωρήματος αυτού). Αθροίζοντας τις $2n+1$ συνεισφορές καταλήγουμε ότι για τιμές του x αρκούντως μεγάλες

$$\int_a^b f(t)e^{ixt} dt < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Αυτό που χρησιμοποιούμε στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται στην ακόλουθη

Πρόταση 2.7.4 Με τη βοήθεια του Λήμματος *Riemann - Lebesgue* και εάν $f \in C^1[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t)e^{ixt} dt \sim \frac{i}{x} [e^{iax} f(a) - e^{ibx} f(b)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.7.4)$$

Εάν $f \in C^N[a, b]$, τότε έχουμε

$$\int_a^b f(t)e^{ixt} dt \sim \sum_{k=1}^N \left(\frac{i}{x} \right)^k [e^{iax} f^{(k-1)}(a) - e^{ibx} f^{(k-1)}(b)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.7.5)$$

Εάν $f \in C^\infty[a, b]$, τότε έχουμε

$$\int_a^b f(t)e^{ixt} dt \sim \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{i}{x} \right)^k [e^{iax} f^{(k-1)}(a) - e^{ibx} f^{(k-1)}(b)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.7.6)$$

Απόδειξη. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\int_a^b f(t)e^{ixt} dt = \left[\frac{f(t)}{ix} e^{ixt} \right]_a^b - \frac{1}{ix} \int_a^b f'(t)e^{ixt} dt = \frac{i}{x} [f(a)e^{iax} - f(b)e^{ibx}] + R_1(x),$$

όπου

$$R_1(x) = \frac{i}{x} \int_a^b f'(t)e^{ixt} dt = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

καθώς $f' \in C[a, b]$. Η σχέση (2.7.4) έπεται άμεσα.

Εάν $f \in C^N[a, b]$, τότε με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης έχουμε

$$\int_a^b f(t)e^{ixt} dt = \sum_{k=1}^N \left(\frac{i}{x}\right)^k [e^{iax} f^{(k-1)}(a) - e^{ibx} f^{(k-1)}(b)] + R_N(x),$$

όπου

$$R_N(x) = \left(\frac{i}{x}\right)^N \int_a^b f^{(N)}(t)e^{ixt} dt = o\left(\frac{1}{x^N}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

και η σχέση (2.7.5) έπεται άμεσα. Η σχέση (2.7.3) που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα είναι σε συμφωνία με την (2.7.6). ■

Παρατήρηση 2.7.5 Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ακόμη μία φορά ότι η δράση του Λήμματος Riemann - Lebesgue στις περιπτώσεις που είδαμε³⁰ εξαφανίζει το ολοκλήρωμα που προκύπτει από την παραγοντική ολοκλήρωση και αφήνει να επιζήσει μόνο η συνεισφορά από τα άκρα ολοκλήρωσης, εφόσον βέβαια η τελευταία είναι ισχυρότερη (ασυμπτωτικά) από τη συνεισφορά του ολοκληρώματος. Είδαμε ότι αυτό συμβαίνει πάντοτε για συναρτήσεις $f \in C^1$. **Η απάντηση δεν αλλάζει, εάν ζητήσουμε απλώς το $\int_a^b |f(t)| dt$ να υπάρχει.** Προσοχή όμως!!! Αυτό ισχύει **μόνο** για τον πρωτεύοντα όρο σε ολοκληρώματα τύπου Fourier. Για την εύρεση των επόμενων όρων απαιτείται διαφορετική τεχνική που θα παρουσιάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 2.7.6 Ο πρωτεύων όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Πόσο διαφοροποιείται η απάντησή (μας) για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt, \quad x \rightarrow \infty;$$

Η συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \in C^1[0, 1].$$

Από την (2.7.4) έχουμε

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt \sim \frac{i}{x} \left(1 - \frac{e^{ix}}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Μάλιστα, επειδή η $f \in C^\infty[0, 1]$ μπορεί κανείς να βρει την **πλήρη** ασυμπτωτική συμπεριφορά του δοθέντος ολοκληρώματος, καθώς $x \rightarrow \infty$, από την (2.7.6), εάν υπολογίσει την n -οστή παράγωγό της.

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα η απάντηση θα αλλάξει μόνο ως προς τη συνεισφορά του άνω άκρου ολοκλήρωσης (καθώς η $f \in C^1[0, 2]$ και **μόνο τα άκρα ολοκλήρωσης συμμετέχουν στον πρώτο ασυμπτωτικό όρο**). Είναι:

$$\int_0^2 \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt \sim \frac{i}{x} \left(1 - \frac{e^{2ix}}{5}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

³⁰Το Λήμμα ισχύει ακόμη και εάν η παραγοντική ολοκλήρωση δεν εφαρμόζεται!

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η παραγοντική ολοκλήρωση εφαρμόζεται μόνο μία φορά και δεν είναι δυνατή η περαιτέρω εφαρμογή της, διότι το προκύπτον ολοκλήρωμα δεν υπάρχει. Εάν όμως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Λήμματος Riemann - Lebesgue³¹ έχουμε εξασφαλισμένο τον πρώτο όρο στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)e^{ixt}dt$, $x \rightarrow \infty$. Αναφέρουμε το επόμενο χαρακτηριστικό και γνωστό

Παράδειγμα 2.7.7 Η συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \sqrt{t} e^{ixt} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Είναι

$$\int_0^1 \sqrt{t} e^{ixt} dt = -\frac{i}{x} e^{ix} + \frac{i}{2x} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt.$$

ΔΕΝ μπορούμε πλέον να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο, διότι οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι πεπερασμένες και το νέο ολοκλήρωμα προφανώς δεν υπάρχει. Καθώς όμως η συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt = 0.$$

Επομένως,

$$\int_0^1 \sqrt{t} e^{ixt} dt \sim -\frac{i}{x} e^{ix}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Μπορούμε να βρούμε τον δεύτερο ασυμπτωτικό όρο ή ακόμη και το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματός μας (καθώς $x \rightarrow \infty$) εάν γράψουμε

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt - \int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt. \quad (2.7.7)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της (2.7.8) υπολογίζεται ακριβώς. Θέτουμε

$$xt := s$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{is}}{\sqrt{s}} ds \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε (για $a = \frac{1}{2}$) την ταυτότητα³²

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{is} s^{a-1} ds &= i^a \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1} dy \\ &= e^{\frac{i\pi a}{2}} \Gamma(a), \quad 0 < \operatorname{Re}(a) < 1. \end{aligned}$$

³¹Για παράδειγμα, το $\int_a^b |f(t)|dt$ να υπάρχει.

³²Για την απόδειξη θέτουμε $s = iy$ στρέφοντας την καμπύλη ολοκλήρωσης από τον αρνητικό φανταστικό y άξονα στον θετικό πραγματικό y άξονα.

Ως προς το δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.7.8) ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες. Καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\int_0^1 \sqrt{t} e^{ixt} dt \sim -\frac{i}{x} e^{ix} + \frac{i}{2x^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεχίζοντας με διαδοχικές εφαρμογές της παραγοντικής ολοκλήρωσης βρίσκουμε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματός μας (καθώς $x \rightarrow \infty$).³³ Φυσικά, όπως αναμέναμε από την αρχή

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{t} e^{ixt} dt = 0,$$

από το Λήμμα Riemann - Lebesgue.

2.7.1 Ασκήσεις

Άσκηση 2.7.8 Να βρεθεί ο πρωτεύων όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^a \frac{e^{ixt}}{1+t^b} dt, \quad a, b > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.7.9 Να βρεθεί ο δεύτερος όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των ολοκληρωμάτων

$$\begin{aligned} \int_0^{10} e^{ixt} \cos t dt, & \quad x \rightarrow \infty, \\ \int_0^{10} e^{ixt} \sin t dt, & \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.7.10 Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι όροι στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των ολοκληρωμάτων

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{ixt} \cosh t dt, & \quad x \rightarrow \infty, \\ \int_0^1 e^{ixt} \sinh t dt, & \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.7.11 Να βρεθεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των ολοκληρωμάτων

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{ixt} \cos t dt, & \quad x \rightarrow \infty, \\ \int_0^1 e^{ixt} (\sin t + e^t) dt, & \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.7.12 Να βρεθεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^2 \sqrt{t} e^{ixt} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.7.13 Να βρεθεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των ολοκληρωμάτων

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Πόσο διαφοροποιείται η απάντησή (σας) για το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^2 \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt, \quad x \rightarrow \infty;$$

³³Αφήνεται ως άσκηση.

Άσκηση 2.7.14 Να υπολογιστεί το

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} e^{ixt} dt.$$

Άσκηση 2.7.15 Να υπολογιστεί το

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{10} \sqrt{t} e^{ixt} dt.$$

Άσκηση 2.7.16 Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt.$$

Άσκηση 2.7.17 Να βρείτε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος

$$\int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.7.8)$$

2.8 Η μέθοδος της στάσιμης φάσης (Method of stationary phase)

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά (πρωτεύων όρος) στα γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier:

$$\int_a^b f(t) e^{ix\psi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.8.1)$$

όπου

$$f(t), \psi(t), \text{ πραγματικές συναρτήσεις, } a, b, x \in \mathbb{R}.$$

Το Λήμμα Riemann - Lebesgue επεκτείνεται και σε αυτήν την περίπτωση εφόσον,

- το ολοκλήρωμα $\int_a^b |f(t)| dt$ υπάρχει,
- η συνάρτηση $\psi(t) \in C^1[a, b]$, και
- η $\psi(t)$ δεν είναι σταθερή σε υποδιάστημα του $[a, b]$.

Η προσέγγιση εδώ δεν μπορεί να είναι ίδια με αυτήν της μεθόδου Laplace διότι

$$|e^{ix\psi(t)}| = 1, \quad \text{για κάθε } x, t \in \mathbb{R}.$$

Η ιδέα πίσω από τη μέθοδο της στάσιμης φάσης³⁴ είναι ότι για μεγάλες τιμές του x η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ταλαντεύεται ταχύτατα και αυτές οι συνεισφορές αλληλοεξουδετερώνονται εκτός από

- τα άκρα a, b και
- τις ρίζες της $\psi'(t)$,

όπου η ψ αλλάζει σχετικά αργά.

Ορισμός 2.8.1 Ένα σημείο στο οποίο μηδενίζεται η συνάρτηση $\psi'(t)$ καλείται **στάσιμο σημείο**.

Παρατήρηση 2.8.2 Σε προβλήματα Φυσικής που εμπλέκεται η διάδοση κύματος η συνάρτηση $\psi(t)$ έχει την ερμηνεία της **φάσης**, απ' όπου και η ονομασία της **μεθόδου της στάσιμης φάσης**.

³⁴Η μέθοδος οφείλεται στους George Gabriel Stokes και Lord Kelvin.

2.8.1 Η περίπτωση όπου δεν έχουμε στάσιμο σημείο

Ας δούμε αρχικά την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

όπου

- η συνάρτηση $\psi(t)$ δεν έχει στάσιμα σημεία στο διάστημα $[a, b]$,
- και η $\frac{f(t)}{\psi'(t)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και δεν μηδενίζεται στα άκρα a, b .

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt = \frac{1}{ix} \left[\frac{f(t)}{\psi'(t)} e^{ix\psi(t)} \right]_a^b - \frac{1}{ix} \int_a^b \left(\frac{f(t)}{\psi'(t)} \right)' e^{ix\psi(t)} dt.$$

Από το Λήμμα Riemann - Lebesgue έχουμε ότι το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους τείνει στο μηδέν ταχύτερα από το $\frac{1}{x}$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Επομένως,

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt \sim \frac{i}{x} \left(\frac{f(a)e^{ix\psi(a)}}{\psi'(a)} - \frac{f(b)e^{ix\psi(b)}}{\psi'(b)} \right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8.2)$$

Άρα, μόνο τα άκρα συμμετέχουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά (μόνον ως προς τον πρωτεύοντα όρο) στο γενικευμένο ολοκλήρωμα Fourier για το οποίο

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

2.8.2 Η περίπτωση όπου υπάρχει στάσιμο σημείο

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση $\psi(t)$ έχει στάσιμο σημείο. Και στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμά μας θα τείνει στο μηδέν καθώς $x \rightarrow \infty$ από το Λήμμα Riemann - Lebesgue. Ωστόσο, το ολοκλήρωμα τρέχει πιο αργά από το $\frac{1}{x}$, γιατί η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ταλαντεύεται πιο αργά κοντά στο στάσιμο σημείο, από ότι σε ένα σημείο όπου η παράγωγος της $\psi(t)$ δεν μηδενίζεται.

Δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\psi(t)$ έχει στάσιμο σημείο το a , δηλαδή θεωρούμε την περίπτωση όπου³⁵

$$\begin{aligned} \psi'(a) &= 0, \\ \psi'(t) &\neq 0, \quad a < t \leq b \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

$$f(a) \neq 0. \quad (2.8.4)$$

Υπό τις παραπάνω υποθέσεις αναλύουμε το ολοκλήρωμά μας ως εξής:

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt = \int_a^{a+\varepsilon} f(t)e^{ix\psi(t)} dt + \int_{a+\varepsilon}^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt, \quad (2.8.5)$$

όπου ε θετικός αριθμός αρκούντως μικρός. Για το δεύτερο από τα ολοκληρώματα του παραπάνω δεύτερου μέλους με παραγοντική ολοκλήρωση βλέπουμε εύκολα, ότι τείνει στο μηδέν ως το $\frac{1}{x}$, καθώς $x \rightarrow \infty$. Ο λόγος είναι ότι στο διάστημα $[a + \varepsilon, b]$ η συνάρτηση $\psi(t)$ δεν έχει στάσιμα σημεία. Ακολουθώντας παρόμοια βήματα με την προσέγγισή μας στα ολοκληρώματα Laplace αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις

³⁵Ο λόγος είναι ότι μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμά μας ως άθροισμα ολοκληρωμάτων, έτσι ώστε σε κάθε ένα από αυτά η $\psi'(t)$ να μηδενίζεται μόνο σε ένα άκρο του.

- $f(t)$ με $f(a)$,
- $\psi(t)$ με $\psi(a) + \psi''(a)\frac{(t-a)^2}{2!}$,

(με βάση τις υποθέσεις 2.8.3) και έχουμε

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t)e^{ix\psi(t)} dt \sim f(a)e^{ix\psi(a)} \int_a^{a+\varepsilon} e^{ix\psi''(a)\frac{(t-a)^2}{2!}} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8.6)$$

Στη συνέχεια (όπως και στη μέθοδο Laplace) αντικαθιστούμε το ε με το ∞ εισάγοντας³⁶ στο πρόβλημά μας λάθη της τάξεως του $\frac{1}{x}$ καθώς $x \rightarrow \infty$, και τέλος με την αλλαγή μεταβλητών

$$s = t - a$$

έχουμε

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t)e^{ix\psi(t)} dt \sim f(a)e^{ix\psi(a)} \int_0^\infty e^{ix\psi''(a)\frac{s^2}{2}} ds, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8.7)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Εάν $\psi''(a) > 0$ θέτουμε

$$s = e^{\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{2!t}{x|\psi''(a)|} \right)^{\frac{1}{2}},$$

στρέφοντας έτσι την καμπύλη ολοκλήρωσης από τον πραγματικό $-s$ άξονα κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$.

- Εάν $\psi''(a) < 0$ θέτουμε

$$s = e^{-\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{2!t}{x|\psi''(a)|} \right)^{\frac{1}{2}},$$

στρέφοντας έτσι την καμπύλη ολοκλήρωσης κατά γωνία $-\frac{\pi}{4}$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε:³⁷

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t)e^{ix\psi(t)} dt \sim f(a)e^{ix\psi(a) \pm \frac{i\pi}{4}} \left(\frac{2}{x|\psi''(a)|} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.8.10)$$

³⁶Όπως θα δούμε στο παράδειγμα που θα ακολουθήσει.

³⁷Με τις παραπάνω αλλαγές μεταβλητής προκύπτουν τα ολοκληρώματα τύπου Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ibx^2} dx, \quad b \neq 0.$$

Είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο την περίπτωση $b = -1$ στο διάστημα ολοκλήρωσης $[0, \infty)$. Με όμοιο τρόπο μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ibx^2} dx = e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{|b|}}. \quad (2.8.8)$$

Ας δούμε μία άλλη απόδειξη της (2.8.8) η οποία είναι ενδιαφέρουσα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$I(t) := \left[\int_0^t e^{ibx^2} dx \right]^2, \quad b \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

για την οποία ισχύει

$$I'(t) = 2e^{ibt^2} \int_0^t e^{ibx^2} dx = 2 \int_0^t e^{ib(t^2+x^2)} dx = 2 \int_0^t e^{ibt^2 \left(1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)} dx = 2 \int_0^t t e^{ibt^2(1+u^2)} du,$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από την αλλαγή μεταβλητής $x = tu$. Από τον κανόνα του Leibniz έχουμε

$$I'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{e^{ibt^2(1+u^2)}}{ib(1+u^2)} \right] du = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{(-i)}{b} \frac{e^{ibt^2(1+u^2)}}{1+u^2} du.$$

δηλαδή το παραπάνω ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν σαν το $x^{-\frac{1}{2}}$. Επειδή, όπως είδαμε ήδη το ολοκλήρωμα

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt$$

τείνει στο μηδέν σαν το $\frac{1}{x}$, ο πρώτος όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος $\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt$ προέρχεται από τη γειτονιά του στάσιμου σημείου της συνάρτησης $\psi(t)$ (συγκεκριμένα από ένα μικρό διάστημα πλάτους ε). Επομένως, η σχέση (2.8.10) αποδίδει

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt \sim f(a)e^{ix\psi(a) \pm \frac{i\pi}{4}} \left(\frac{2}{x|\psi''(a)|} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8.11)$$

Ας δούμε τώρα τη γενική περίπτωση ξεκινώντας με έναν

Ορισμός 2.8.3 Εάν για τη συνάρτηση ψ ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \psi'(a) = \psi''(a) = \dots = \psi^{(p-1)}(a) = 0, \quad p \in \mathbb{N}, \\ \psi^{(p)}(a) \neq 0, \end{aligned}$$

λέμε ότι το στάσιμο σημείο a έχει τάξη p .

Έστω λοιπόν ότι η ψ έχει στάσιμο σημείο το a με τάξη p , και

$$f(a) \neq 0. \quad (2.8.12)$$

Υπό αυτές τις υποθέσεις αναλύουμε το ολοκλήρωμά μας όπως στην (2.8.5). Για το δεύτερο προκύπτουν ολοκλήρωμα έχουμε, πάλι, ότι τείνει στο μηδέν ως το $\frac{1}{x}$, καθώς $x \rightarrow \infty$. Αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις

Ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε

$$\int I'(t) dt = \int \left(\int_0^1 \frac{(-i)}{b} \frac{e^{ibt^2(1+u^2)}}{1+u^2} du \right) dt.$$

Συνεπώς,

$$I(t) = \int_0^1 \frac{(-i)}{b} \frac{e^{ibt^2(1+u^2)}}{1+u^2} du + c. \quad (2.8.9)$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης $I(t)$ έχουμε

$$I(0) = 0.$$

Επομένως,

$$c = \frac{i}{b} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \frac{i\pi}{4b}.$$

Για να καταλήξουμε στο ζητούμενο και από τον ορισμό, πάλι, της συνάρτησης $I(t)$ αναζητούμε το

$$2\sqrt{\lim_{t \rightarrow -\infty} I(t)}, \quad \text{εάν,} \quad b > 0,$$

ή το

$$2\sqrt{\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)}, \quad \text{εάν,} \quad b < 0.$$

Για παράδειγμα, εάν $b > 0$, από την (2.8.9) έχουμε

$$2\sqrt{\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)} = 2\sqrt{\frac{i\pi}{4b}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{\pm \frac{i\pi}{4}},$$

και το ζητούμενο έπεται με όμοιο τρόπο για $b < 0$.

- $f(t)$ με $f(a)$,
- $\psi(t)$ με $\psi(a) + \psi^{(p)}(a) \frac{(t-a)^p}{p!}$,

και έχουμε

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t) e^{ix\psi(t)} dt \sim f(a) e^{ix\psi(a)} \int_a^{a+\varepsilon} e^{ix\psi^{(p)}(a) \frac{(t-a)^p}{p!}} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8.13)$$

Στη συνέχεια (όπως και στη μέθοδο Laplace) αντικαθιστούμε το ε με το ∞ εισάγοντας στο πρόβλημά μας σφάλματα της τάξεως του $\frac{1}{x}$ καθώς $x \rightarrow \infty$, και τέλος με την αλλαγή μεταβλητών

$$s = t - a$$

έχουμε

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t) e^{ix\psi(t)} dt \sim f(a) e^{ix\psi(a)} \int_0^\infty e^{ix\psi^{(p)}(a) \frac{s^p}{p!}} ds, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8.14)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Εάν $\psi^{(p)}(a) > 0$ θέτουμε

$$s = e^{\frac{i\pi}{2p}} \left(\frac{p!t}{x\psi^{(p)}(a)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

στρέφοντας έτσι την καμπύλη ολοκλήρωσης από τον πραγματικό $-s$ άξονα κατά γωνία $\frac{\pi}{2p}$.

- Εάν $\psi^{(p)}(a) < 0$ θέτουμε

$$s = e^{-\frac{i\pi}{2p}} \left(\frac{p!t}{x|\psi^{(p)}(a)|} \right)^{\frac{1}{p}},$$

στρέφοντας έτσι την καμπύλη ολοκλήρωσης κατά γωνία $-\frac{\pi}{2p}$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε:

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t) e^{ix\psi(t)} dt \sim f(a) e^{ix\psi(a) \pm \frac{i\pi}{2p}} \left(\frac{p!}{x|\psi^{(p)}(a)|} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{p}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.8.15)$$

δηλαδή το παραπάνω ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν σαν το $x^{-\frac{1}{p}}$. Επειδή, όπως είδαμε ήδη το ολοκλήρωμα

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(t) e^{ix\psi(t)} dt$$

τείνει στο μηδέν σαν το $\frac{1}{x}$, ο πρωτεύων όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος $\int_a^b f(t) e^{ix\psi(t)} dt$ προέρχεται από τη γειτονιά του στάσιμου σημείου της συνάρτησης $\psi(t)$ (συγκεκριμένα από ένα μικρό διάστημα πλάτους ε). Επομένως,

$$\int_a^b f(t) e^{ix\psi(t)} dt \sim f(a) e^{ix\psi(a) \pm \frac{i\pi}{2p}} \left(\frac{p!}{x|\psi^{(p)}(a)|} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{p}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8.16)$$

Παρατήρηση 2.8.4 Και στις δύο περιπτώσεις που μελετήσαμε, τα αποτελέσματα δίνουν **μόνο** τον πρωτεύοντα όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier, (στην πρώτη συμμετέχουν μόνο τα δύο άκρα, ενώ στη δεύτερη η γειτονιά του στάσιμου σημείου). Για να βρει κανείς περισσότερους όρους θα πρέπει να λάβει υπόψην του τις συνεισφορές τάξεως $O\left(\frac{1}{x}\right)$ που αγνοήθηκαν (εδώ περιλαμβάνονται και τα άκρα ολοκλήρωσης). Τα σφάλματα που υπεισέρχονται είναι αλγεβρικά μικρά και όχι εκθετικά μικρά όπως στη μέθοδο Laplace. Παρατηρεί κανείς τη διαφορά με τη μέθοδο Laplace, όπου η **πλήρης** ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος καθορίζεται **μόνο** από τη γειτονιά του σημείου όπου η συνάρτηση του εκθέτη μεγιστοποιείται. Στην περίπτωση όπου το στάσιμο σημείο της συνάρτησης $\psi(t)$ είναι, έστω, $c \in (a, b)$ δεν έχουμε παρά να αθροίσουμε τις συνεισφορές από τα διαστήματα $[a, c]$ και $[c, b]$. Για παράδειγμα, εάν c εσωτερικό σημείο του διαστήματος, και στάσιμο σημείο τάξεως 2 θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (2.8.11) (ή την (2.8.16) με το 2 λαμβάνοντας

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt \sim f(c)e^{ix\psi(c) \pm \frac{i\pi}{4}} \left(\frac{2\pi}{x|\psi''(c)|} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8.17)$$

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση f μηδενίζεται στο στάσιμο σημείο απαιτείται επιπλέον ανάλυση, για να διαπιστωθεί εάν η συνεισφορά του στάσιμου σημείου προσδιορίζει τον πρωτεύοντα όρο του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier.³⁸

Όπως έχουμε δει, εάν c στάσιμο σημείο τάξης 2, με $f(c) \neq 0$, το γενικευμένο ολοκληρώμα Fourier τείνει στο μηδέν ως το $x^{-\frac{1}{2}}$, (καθώς $x \rightarrow \infty$). Γενικότερα, εάν c στάσιμο σημείο τάξης p , με $f(c) \neq 0$, το γενικευμένο ολοκληρώμα Fourier τείνει στο μηδέν ως το $x^{-\frac{1}{p}}$. Συνεπώς, εάν έχουμε περισσότερα του ενός στάσιμα σημεία ο πρωτεύων -και μόνον- όρος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier προσδιορίζεται από τη συμμετοχή του στάσιμου σημείου με τη μεγαλύτερη τάξη.³⁹

³⁸ Αυτή η περίπτωση είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα. Παραπέμπουμε στις ασκήσεις του τρέχοντος κεφαλαίου.

³⁹ Η προσέγγιση για την απόδειξη της σχέσης (2.8.17) είναι παρόμοια. Αναλύουμε το αρχικό ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt = \int_a^{c-\varepsilon} f(t)e^{ix\psi(t)} dt + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(t)e^{ix\psi(t)} dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt.$$

Το πρώτο και το τρίτο ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους τείνουν στο μηδέν σαν τον όρο $\frac{1}{x}$, $x \rightarrow \infty$, διότι η συνάρτηση $\psi(t)$ δεν έχει στάσιμα σημεία στα διαστήματα $[a, c - \varepsilon]$, $[c + \varepsilon, b]$. Τούτο είναι φανερό, εάν ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες και εφαρμόσουμε το Λήμμα Riemann - Lebesgue. Ακολουθώντας τα γνωστά πλέον βήματα χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις

- $f(t) = f(c)$
- $\psi(t) = \psi(c) + \frac{\psi''(c)}{2} (t - c)^2$

και έχουμε

$$\int_a^b f(t)e^{ix\psi(t)} dt \sim \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(c)e^{ix\left(\psi(c) + \frac{\psi''(c)}{2} (t-c)^2\right)} dt.$$

Ακολουθώντας, αφήνουμε τα όρια του τελευταίου ολοκληρώματος να τρέξουν στο $\pm\infty$ εισάγοντας σφάλματα της τάξεως του $\frac{1}{x}$, $x \rightarrow \infty$, τα οποία όπως θα φανεί από την απάντησή μας μπορούμε να παραλείψουμε. Τέλος με την αλλαγή μεταβλητής

$$s = \sqrt{x \frac{|\psi''(c)|}{2}} (t - c)$$

καταλήγουμε στο ζητούμενο με τη βοήθεια του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm is^2} ds = \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}.$$

Παράδειγμα 2.8.5 Ο πρωτεύων όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{ix \sin t} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Για το ολοκλήρωμα αυτό έχουμε

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sin t, \\ \psi'(t) &= -\cos t, \\ \psi'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, \\ \psi''(t) &= -\sin t, \\ \psi''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -1 < 0, \\ f(t) &= 1.\end{aligned}$$

Επομένως, το μοναδικό στάσιμο σημείο $t = \frac{\pi}{2}$ είναι τάξεως: $p = 2$ και είναι το **κάτω άκρο** ολοκλήρωσης. Από τη σχέση (2.8.16) λαμβάνουμε

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{ix \sin t} dt \sim e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Παράδειγμα 2.8.6 Ο πρωτεύων όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix(t^3+t)} \cos t dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Για το ολοκλήρωμα αυτό έχουμε

$$\begin{aligned}f(t) &= \cos t, \\ \psi(t) &= t^3 + t, \\ \psi'(t) &= 3t^2 + 1, \\ \psi'(t) &\neq 0, \text{ για κάθε } t, \\ f(0) &= 1, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, \\ \psi(0) &= 0, \\ \psi'(0) &= 1.\end{aligned}$$

Καθώς στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $\psi(t)$ δεν έχει στάσιμο σημείο έχουμε άμεσα από τη σχέση (2.8.2):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix(t^3+t)} \cos t dt \sim \frac{i}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σημείωση 2.8.7 Επειδή η τιμή της συνάρτησης $f(t)$ μηδενίζεται στο άνω άκρο ολοκλήρωσης (δηλαδή το $\frac{\pi}{2}$) αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το δοθέν, αλλά, και τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix(t^3+t)} (\cos t)^\beta dt, \quad \beta > 0$$

μοιράζονται τον ίδιο πρωτεύοντα όρο στα ασυμπτωτικά τους αναπτύγματα, καθώς $x \rightarrow \infty$.

Παράδειγμα 2.8.8 Ο πρωτεύων όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^2 t \cos x \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με τη βοήθεια της ταυτότητας του Euler γράφουμε το ολοκλήρωμά μας στη μορφή

$$\int_0^2 t \cos x \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) dt = \int_0^2 t \operatorname{Re} \left\{ e^{ix \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right)} \right\} dt = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^2 t e^{ix \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right)} dt \right\}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= t, \\ \psi(t) &= \frac{1}{3}t^3 - t, \\ \psi'(t) &= t^2 - 1, \\ \psi'(t) &= 0 \Rightarrow t = 1, \quad t \in [0, 2], \\ \psi(1) &= -\frac{2}{3}, \\ \psi''(t) &= 2t, \\ \psi''(1) &= 2 > 0, \\ f(1) &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή το $t = 1$ είναι στάσιμο σημείο τάξεως δύο, και είναι **εσωτερικό σημείο** του $[0, 2]$, ενώ η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται σε αυτό. Επομένως, από την (2.8.16), αφού πολλαπλασιάσουμε με 2 έχουμε

$$\int_0^2 t \cos x \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) dt = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^2 t e^{ix \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right)} dt \right\} \sim \operatorname{Re} \left(\sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}x \right)} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{x}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}x \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Παρόμοιο είναι και το παράδειγμα που ακολουθεί και αφορά μία πολύ γνωστή ειδική συνάρτηση αναζητώντας τον πρώτο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της ολοκληρωτικής της αναπαράστασης:

Παράδειγμα 2.8.9 Η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και τάξεως n :

$$J_n(x) = \int_0^1 \cos(n\pi t - x \sin(\pi t)) dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Είναι

$$J_n(x) = \operatorname{Re} \left[\int_0^1 e^{in\pi t} e^{-ix \sin(\pi t)} dt \right].$$

Είναι

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{in\pi t}, \\ \psi(t) &= -\sin(\pi t), \\ \psi'(t) &= -\pi \cos(\pi t), \\ \psi'(t) &= 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1], \\ \psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2}, \\ \psi''(t) &= (\pi)^2 \sin(\pi t), \\ \psi''\left(\frac{1}{2}\right) &= (\pi)^2 > 0, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= e^{in\frac{\pi}{2}} \neq 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή το $t = \frac{1}{2}$ είναι στάσιμο σημείο τάξεως δύο, και είναι **εσωτερικό σημείο** του $[0, 1]$, ενώ η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται σε αυτό. Επομένως, από την (2.8.16), αφού πολλαπλασιάσουμε με 2 έχουμε

$$J_n(x) = \operatorname{Re} \left[\int_0^1 e^{in\pi t} e^{-ix \sin(\pi t)} dt \right] \sim \operatorname{Re} \left[e^{in\frac{\pi}{2}} e^{i(\frac{\pi}{4}-x)} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Παράδειγμα 2.8.10 Ο πρωτεύων όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^2 e^{ix \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} \right)} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο στάσιμα σημεία διαφορετικής τάξεως το κάθε ένα. Συγκεκριμένα,

- το στάσιμο σημείο $t = 0$ είναι τάξεως $p = 3$ και είναι άκρο ολοκλήρωσης, ενώ,
- το στάσιμο σημείο $t = 1$ είναι τάξεως $p = 2$ και είναι εσωτερικό σημείο.

Μόνο το στάσιμο σημείο ανώτερης τάξης συμμετέχει στον πρώτο ασυμπτωτικό όρο του ολοκληρώματός μας. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \neq 0, \quad t \in [0, 2], \\ \psi(t) &= \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3}, \\ \psi'(t) &= t^2(t-1), \\ \psi'(t) &= 0 \Rightarrow t = 0, 1, \quad \text{για } t \in [0, 2], \\ \psi(0) &= 0, \\ \psi(1) &= -\frac{1}{12}, \\ \psi''(t) &= t(3t-2) = 3t^2 - 2t, \\ \psi''(0) &= 0, \\ \psi''(1) &= 1 > 0, \\ \psi^{(3)}(t) &= 6t - 2, \\ \psi^{(3)}(0) &= -2 < 0. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2.8.16) έχουμε λοιπόν

$$\int_0^2 e^{ix \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} \right)} dt \sim \frac{1}{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3}{x} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

* Ας δούμε και ένα παράδειγμα με δύο στάσιμα σημεία της αυτής τάξεως.

Παράδειγμα 2.8.11 Ο πρωτεύων όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^3 e^{ix \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right)} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \neq 0, \quad t \in [0, 3], \\ \psi(t) &= \frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t, \\ \psi'(t) &= (t-1)(t-2), \\ \psi'(t) &= 0 \Rightarrow t = 1, 2, \quad \text{για } t \in [0, 3], \\ \psi(1) &= -\frac{5}{6}, \\ \psi(2) &= \frac{2}{3}, \\ \psi''(t) &= 2t - 3, \\ \psi''(1) &= -1 < 0, \\ \psi''(2) &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο στάσιμα σημεία της αυτής τάξεως. Συγκεκριμένα,

- τα στάσιμα σημεία $t = 1$ και $t = 2$ είναι τάξεως $p = 2$ και,
- είναι εσωτερικά σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης.
- Επιπλέον, η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται σε αυτά.

Επομένως, συμμετέχουν εξίσου και τα δύο στον πρώτο (και μόνο) ασυμπτωτικό όρο του ολοκληρώματός μας. Από τη σχέση (2.8.17) έχουμε άμεσα

$$\int_0^3 e^{ix\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right)} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{ix\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{\frac{3}{2}ix}, \quad x \rightarrow \infty.$$

2.8.3 Ασκήσεις

Άσκηση 2.8.12 Να αιτιολογήσετε ως **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** κάθε έναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς αιτιολογώντας την απάντησή σας.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} e^{3ix} dt = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} e^{-2ix} dt \neq 0,$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} e^{ix \sin^4 t} dt = 0.$

Άσκηση 2.8.13 Να βρείτε τον πρωτεύοντα όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^1 e^{ix\left(\frac{t^5}{5} - \frac{1}{2}t^4 + \frac{t^3}{3}\right)} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.8.14 Να βρείτε τον πρωτεύοντα όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^1 (t-1)^2 \cos[x(t^3-1)] dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ποια είναι η απάντησή σας για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 (t-1)^2 \sin[x(t^3-1)] dt, \quad x \rightarrow \infty;$$

Άσκηση 2.8.15 Να βρείτε τον πρωτεύοντα όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_1^{\infty} \ln t \, e^{ixt^3} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.8.16 Αφού βρείτε τον πρωτεύοντα όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^{\infty} \cosh t \, e^{ixt^4} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

να γενικεύσετε την απάντησή σας για το ολοκλήρωμα

$$J(x; n) = \int_0^{\infty} \cosh t \, e^{ixt^{2n}} dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.8.17 Να βρείτε τον πρωτεύοντα όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^1 e^{ix(t^2 - \sin^2 t)} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ποια είναι η απάντησή σας για το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 e^{ix(t^2 - \sin^2 t)} dt, \quad x \rightarrow \infty;$$

Άσκηση 2.8.18 Να βρείτε τον πρωτεύοντα όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier

$$\int_0^1 \cos^3 t \cos \left[x \left(t + \frac{t^3}{6} - \sinh t \right) \right] dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.8.19 Να βρείτε τον πρωτεύοντα όρο των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων των γενικευμένων ολοκληρωμάτων Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt^2}}{1+t^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.8.20 Να βρείτε τον πρωτεύοντα όρο των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων των γενικευμένων ολοκληρωμάτων Fourier

$$\int_0^1 \sin t \, e^{ixt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\int_0^1 \ln(1-t) \, e^{ixt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σχόλιο. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση f μηδενίζεται στο στάσιμο σημείο $t = 0$.

Άσκηση 2.8.21 Να δείξετε ότι

$$\int_0^{\pi} e^{ix(t - \sin t)} dt \sim \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

2.9 Η μέθοδος της επικλινέστερης κατάβασης (Method of steepest descents)

Η μέθοδος της επικλινέστερης κατάβασης (*method of steepest descents*) γενικεύει ταυτόχρονα τη μέθοδο Laplace και αυτήν της στάσιμης φάσης. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι τελευταίες αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μεθόδου επικλινέστερης κατάβασης.⁴⁰

⁴⁰Η μέθοδος αναπτύχθηκε τον εικοστό αιώνα και προέρχεται από προβλήματα της υδροδυναμικής και της κυματικής επιστήμης.

Θυμίζουμε ότι η μέθοδος Laplace αφορά ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_a^b h(t)e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty$$

και αποδίδει το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμά τους (με εκθετικά μικρά σφάλματα), απαιτώντας όμως η συνάρτηση ϕ να είναι **πραγματική**.

Η μέθοδος της στάσιμης φάσης αφορά ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_a^b h(t)e^{ix\psi(t)} dt, \quad x \rightarrow \infty$$

και αποδίδει τον πρωτεύοντα όρο επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματός τους (με σφάλματα της τάξης $O\left(\frac{1}{x}\right)$), απαιτώντας όμως **αυστηρά φανταστικό εκθέτη**.

Η μέθοδος της επικλινέστερης κατάβασης **βελτιώνει και γενικεύει** τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους.

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ και μιγαδικές συναρτήσεις h και f ολόμορφες στο D . Δοθέντος ενός δρόμου C στο D , θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I(x) = \int_C f(z)e^{xh(z)} dz, \quad x \rightarrow \infty,$$

Στη μέθοδο της επικλινέστερης κατάβασης

- παραμορφώνουμε τον δρόμο ολοκλήρωσης σε έναν νέο δρόμο \tilde{C} στον οποίο

$$\operatorname{Im}(h(z)) = u \quad \text{είναι σταθερή.}$$

Αυτή είναι και η κεντρική ιδέα της μεθόδου.

- παραμετροποιούμε τον \tilde{C} ως $z = \zeta(t)$, με $t \in [a, b]$,
- εφαρμόζουμε τη μέθοδο Laplace στο προκύπτον ολοκλήρωμα ως $h(\zeta(t)) = u(\zeta(t)) + iv$, όπου $u(z)$ και v πραγματικές συναρτήσεις.

Καταλήγουμε επομένως, στο ολοκλήρωμα

$$I(x) = e^{ixv} \int_{\tilde{C}} f(z)e^{xu(z)} dz, \quad x \rightarrow \infty.$$

Θα μπορούσε κανείς να αποκαλέσει τη μέθοδο αυτή **μέθοδο του σταθερού φανταστικού μέρους**, αντί για **μέθοδο της επικλινέστερης κατάβασης** και δεν θα είχε άδικο, διότι και οι δύο σημαίνουν το ίδιο πράγμα: η συνάρτηση u αλλάζει με μεγάλη ταχύτητα στις καμπύλες όπου η συνάρτηση v είναι σταθερή.

* Θα μπορούσαμε φυσικά να παραμορφώσουμε τον δρόμο ολοκλήρωσης σε έναν νέο δρόμο στον οποίο το πραγματικό μέρος της συνάρτησης h είναι σταθερό, και στη συνέχεια να εφαρμοστεί η μέθοδος στάσιμης φάσης, αντί της μεθόδου Laplace. Τούτο όμως δεν είναι ευκολότερο. Και τούτο διότι, όπως έχουμε δει, η μέθοδος Laplace δίνει το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ολοκληρώματος στο οποίο συμμετέχει μόνο μία μικρή γειτονιά του σημείου όπου το πραγματικό μέρος της συνάρτησης h μεγιστοποιείται, ενώ στο πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ενός γενικευμένου ολοκληρώματος Fourier συμμετέχει η ολοκληρωτέα συνάρτηση με τη συμπεριφορά της σε όλο το πλάτος του ολοκληρώματος.

Το ακόλουθο λήμμα μας δείχνει ότι το μονοπάτι σταθερής φάσης είναι τυπικά ο δρόμος επικλινέστερης κατάβασης (ή ανάβασης), από όπου και η ονομασία της μεθόδου της επικλινέστερης κατάβασης. Σημειώνουμε ότι για μία επιφάνεια με εξίσωση $u = u(x, y)$ το διάνυσμα

$$\nabla u = (u_x, u_y)$$

είναι η κατεύθυνση στην οποία η συνάρτηση αυξάνει με τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

Λήμμα 2.9.1 *Εάν,*

1. $h(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι ολόμορφη στο $z_0 = x_0 + iy_0$,
2. $h'(z_0) \neq 0$,
3. C : είναι δρόμος γύρω από το z_0 με $v(x, y) = v_0$,

τότε, το διάνυσμα ∇u εφάπτεται του C στο z_0 .

Απόδειξη. Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έχουμε

$$\begin{aligned}u_x &= v_y, \\u_y &= -v_x.\end{aligned}$$

Επομένως, από την $f'(z_0) \neq 0$ συνεπάγεται ότι

$$0 \neq u_x + iv_x = u_x - iv_y = v_y + iv_x,$$

δηλαδή, τα διανύσματα ∇u και ∇v είναι από κοινού μη μηδενικά στο z_0 . Παραμετροποιούμε τον C ως $(\xi(t), \eta(t))$ με εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\mathbf{T} = (\xi'(0), \eta'(0))$$

και κάθετο διάνυσμα

$$\mathbf{N} = (\eta'(0), -\xi'(0))$$

στο $z_0 = (\xi(0), \eta(0))$. Στο σημείο z_0 έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla u \cdot \mathbf{N} &= (u_x, u_y) \cdot (\eta'(0), -\xi'(0)) \\&= (v_x, v_y) \cdot (\xi'(0), \eta'(0)) = 0,\end{aligned}$$

καθώς $v(\xi(t), \eta(t)) = v_0$. Συνεπώς, το ∇u είναι κάθετο στο \mathbf{N} και επομένως, παράλληλο στο \mathbf{T} στο z_0 .

Σημειώνουμε ότι εάν $f'(z_0) \neq 0$, το παραπάνω Λήμμα εγγυάται την ύπαρξη μοναδικού μονοπατιού $z = (\xi(t), \eta(t))$ σταθερής φάσης μέσω του

$$z_0 = (x_0, y_0) = (\xi(0), \eta(0))$$

στην κατεύθυνση του ανάδελτα της συνάρτησης u . Εάν

$$V(t) = u(\xi(t), \eta(t))$$

έχουμε

$$U'(0) = u_x(x_0, y_0) \xi'(0) + u_y(x_0, y_0) \eta'(0) = \nabla u \cdot \mathbf{T} \neq 0,$$

αφού ∇u είναι μηδενικό στο z_0 και παράλληλο στο \mathbf{T} . ■

Ας δούμε όμως τώρα ένα

Παράδειγμα 2.9.2 Το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το ολοκλήρωμα

$$I(x) = \int_0^1 e^{ixt} \log t \, dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Επειδή $\log 0 = -\infty$, $\log 1 = 0$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Επίσης, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της στάσιμης φάσης, διότι στο πρόβλημα αυτό δεν έχουμε κάποιο στάσιμο σημείο.

Παραμορφώνουμε λοιπόν τον δρόμο ολοκλήρωσης (που τώρα είναι το ευθύγραμμο τμήμα της πραγματικής ευθείας από το 0 έως το 1) σε έναν νέο δρόμο που αποτελείται από τρία διαδοχικά τμήματα:

- δρόμος C_1 : το ευθύγραμμο τμήμα του φανταστικού άξονα που αρχίζει από το 0 έως το iT (αργότερα, θα αφήσουμε το T να πάει στο άπειρο),
- δρόμος C_2 : το ευθύγραμμο τμήμα που είναι παράλληλο με τον πραγματικό άξονα και αρχίζει από το iT έως το $1 + iT$,
- δρόμος C_3 : το ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο του φανταστικού άξονα που αρχίζει από το $1 + iT$ έως το 1.

Εκτελούμε στη συνέχεια τους υπολογισμούς μας σε τρία βήματα ως ακολούθως:

Βήμα 1.

$$\begin{aligned}\int_{C_2} e^{ixt} \log t \, dt &= \int_0^1 e^{ix(u+iT)} \log(u+iT) \, du \\ &= e^{-xT} \int_0^1 e^{ixu} \log(u+iT) \, du \\ &= o(1).\end{aligned}$$

Βήμα 2.

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C_1} e^{ixt} \log t \, dt &= \int_0^\infty e^{-xu} \log(iu) \, i du \\ &= i \int_0^\infty e^{-xu} \left(\log u + \frac{i\pi}{2} \right) du \\ &= i \int_0^\infty e^{-xu} \log u \, du - \frac{\pi}{2x} \\ &= \frac{i}{x} \int_0^\infty e^{-s} (\log s - \log x) \, ds - \frac{\pi}{2x} \\ &= -i \frac{\log x}{x} - \left(i\gamma + \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{x},\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\log i = i\frac{\pi}{2}$, στην τέταρτη χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $s := xu$, και στην τελευταία ότι,

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-s} \log s \, ds = -\gamma.$$

Σημειώνουμε ακόμη ότι στην πρώτη ισότητα προκύπτει ολοκλήρωμα Laplace το οποίο στην περίπτωση αυτή υπολογίστηκε ακριβώς.

Βήμα 3.

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C_3} e^{ixt} \log t \, dt &= - \int_0^\infty e^{ix(1+iu)} \log(1+iu) \, i du \\ &= ie^{ix} \int_0^\infty e^{-xu} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-iu)^n}{n} du \\ &\sim ie^{ix} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-i)^n (n-1)!}{x^{n+1}}, \quad x \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα εφαρμόσαμε το Λήμμα Watson για το ολοκλήρωμα Laplace της πρώτης ισότητας. Από το θεώρημα Cauchy–Goursat έχουμε

$$I(x) = \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} e^{ixt} \log t \, dt$$

και συνδυάζοντας τα αποτελέσματά μας από τα Βήματα 1–3 έχουμε

$$I(x) \sim -\frac{i \log x}{x} - \frac{i\gamma' + \frac{\pi}{2}}{x} + ie^{ix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n (n-1)!}{x^{n+1}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σημειώνουμε ότι η κύρια συνεισφορά του ολοκληρώματος προέρχεται από τα άκρα ολοκλήρωσης, καθώς στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία. Τελικώς, εδώ είχαμε δύο ολοκληρώματα Laplace και οι δύο πρώτοι όροι οφείλονται, όπως είδαμε στο κάτω άκρο (που ήταν το $t = 0$).

2.9.1 Σαγματικά σημεία (saddle points)

Ορισμός 2.9.3 Το σημείο z_0 ονομάζεται σαγματικό σημείο (saddle point) τάξεως N , εάν

- h συνάρτηση h είναι ολόμορφη στο z_0 ,
- $h^{(n)}(a) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$ και $h^{(N)}(a) = \rho e^{ia}, \quad \rho > 0$.

Λήμμα 2.9.4 Εάν το z_0 είναι σαγματικό σημείο τάξεως N , τότε υπάρχουν N μονοπάτια επικλινέστερης κατάβασης (ανάβασης) γύρω από αυτό, με κατευθύνσεις

- μέγιστης κατωφέρειας: $\theta = \frac{(2n+1)\pi-a}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ και
- μέγιστης ανωφέρειας: $\theta = \frac{2n\pi-a}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Απόδειξη. Έστω,

$$z - z_0 = re^{i\theta}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} h(z) - h(z_0) &\sim \frac{h^{(N)}(z_0)}{N!} (z - z_0)^N \\ &= \frac{\rho e^{ia}}{N!} r^N e^{iN\theta} \\ &= \frac{\rho r^N}{N!} [\cos(a + N\theta) + i \sin(a + N\theta)]. \end{aligned}$$

Η κατεύθυνση μέγιστης κατωφέρειας της ποσότητας

$$\operatorname{Re} [(h(z) - h(z_0))]$$

δίδεται από την τιμή του θ για την οποία το $\operatorname{Re} [(h(z) - h(z_0))]$ γίνεται όσο πιο αρνητικό γίνεται, δηλαδή, όταν

$$a + N\theta = \cos^{-1}(1) = (2n+1)\pi.$$

Ομοίως, για την κατεύθυνση μέγιστης ανωφέρειας πρέπει

$$\sin(a + N\theta) = 0,$$

και έτσι έχουμε όλες τις κατευθύνσεις σταθερής φάσης. ■

Συνεχίζουμε με ένα κλασικό και πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα, όπου με τη μέθοδο της επικλινέστερης κατάβασης θα βρούμε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμά του.

Παράδειγμα 2.9.5

$$J(x) = \int_0^1 e^{ixt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Είναι εύκολο να βρούμε τον πρωτεύοντα όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του παραπάνω ολοκληρώματος με τη μέθοδο της στάσιμης φάσης.

Πράγματι, για τη συνάρτηση

$$\psi(t) = t^2 \quad \text{έχουμε: } \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) = 2,$$

και από τη σχέση (2.8.16) λαμβάνουμε άμεσα:

$$J(x) \sim \frac{1}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Για να προχωρήσουμε βαθύτερα στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος θα χρειαστούμε την τεχνική της μεθόδου της επικλινέστερης κατάβασης. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 \\ h(z) &= iz^2 = i(u + iv)^2 = -2uv + i(u^2 - v^2). \end{aligned}$$

Επειδή,

$$\begin{aligned} h'(0) &= 0 \\ h''(0) &= 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

η αρχή των αξόνων είναι σαγματικό σημείο τάξεως $N = 2$ με $a = \frac{\pi}{2}$. Οι κατευθύνσεις μέγιστης κατωφέρειας είναι

- $n = 0, \quad \theta = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$
- $n = 1, \quad \theta = \frac{3\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{5\pi}{4},$

ενώ οι κατευθύνσεις μέγιστης ανωφέρειας είναι

- $n = 0, \quad \theta = \frac{3\pi}{4},$
- $n = 1, \quad \theta = \frac{7\pi}{4}.$

Καλούμε

- C_1 την καμπύλη: $u^2 - v^2 = 0$ ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων σε γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$ έως το σημείο (T, T) ,
- C_2 το ευθύγραμμο τμήμα που είναι παράλληλο του οριζοντίου άξονα και ενώνει τα σημεία (T, T) και $(\sqrt{1+T^2}, T)$, και,
- C_3 την καμπύλη: $u^2 - v^2 = 1$ ξεκινώντας από το σημείο $(\sqrt{1+T^2}, T)$ έως το σημείο $(1, 0)$.

Αργότερα, όπως και πριν, θα αφήσουμε το T να πάει στο άπειρο. Η παραμόρφωση του αρχικού δρόμου ολοκλήρωσης C είναι:

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

Έχουμε:

$$\left| \int_{C_2} e^{xh(z)} dz \right| \leq \int_T^{\sqrt{1+T^2}} |e^{ix(t+iT)^2}| dt = \int_T^{\sqrt{1+T^2}} e^{-2xtT} dt = \frac{e^{-2xT\sqrt{1+T^2}} - e^{-2xT^2}}{2xT} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.9.1)$$

Ως προς το ολοκλήρωμα επί της C_1 έχουμε

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C_1} e^{xh(z)} dz = (1+i) \int_0^\infty e^{-2xt^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} (1+i), \quad (2.9.2)$$

Παρατηρούμε ότι και στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα υπολογίστηκε **ακριβώς**.

Στρέφουμε τέλος, την προσοχή μας στο ολοκλήρωμα επί της καμπύλης C_3 την οποία και παραμετρικοποιούμε ως: $t = v \in [0, T]$, έτσι ώστε να είναι: $\operatorname{Re} h(\zeta(t)) = -2t\sqrt{1+t^2}$. Θέτουμε

$$s := 2t\sqrt{1+t^2}.$$

Έχουμε

$$iz^2 = -s + i,$$

δηλαδή,

$$z = (1 + is)^{\frac{1}{2}},$$

$$dz = \frac{1}{2} i (1 + is)^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Συνεπώς, για το ολοκλήρωμα επί της C_3 έχουμε

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C_3} e^{xh(z)} dz = \frac{i}{2} e^{ix} \int_0^\infty e^{-xs} (1 + is)^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Επειδή

$$(1 + is)^{-\frac{1}{2}} ds = \sum_{n=0}^{\infty} (-is)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

και

$$\int_0^\infty e^{-xs} s^n ds = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \frac{n!}{x^{n+1}},$$

έχουμε από το Λήμμα Watson

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C_3} e^{xh(z)} dz \sim \frac{i}{2} e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{n+1}}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.9.3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.9.1), (2.9.2), και (2.9.3) καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$J(x) = \int_0^\infty e^{ixt^2} dt \sim \frac{1}{2} e^{ix\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{i}{2} e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{n+1}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Παρατήρηση 2.9.6 Μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση (2.9.3) με έναν εναλλακτικό τρόπο. Η έμπνευσή μας για αυτόν εδράζεται στη φιλοσοφία της μεθόδου Laplace. Θυμηθείτε ότι σε αυτήν μόνο η απειροελάχιστη γειτονιά του(ων) κρίσιμου σημείου συμμετέχει στην πλήρη ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος. Ομοίως, δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε όλη την υπερβολή (αναφερόμαστε στην καμπύλη C_3), παρά μόνο την εφαπτομένη στο σημείο αυτό, διότι το απειροελάχιστο τμήμα της εφαπτομένης είναι ό,τι βλέπει η προς ολοκλήρωση συνάρτηση. Προσεγγίζουμε την καμπύλη C_3 από την εφαπτομένη της στο $t = 1$. Η μέγιστη τιμή της ϕ επιτυγχάνεται όταν $t = 1$. Η ακριβής μορφή της C_3 δεν έχει καμία σχέση-μόνον η απειροελάχιστη περιοχή του $t = 1$ έχει αξία. Η υπόλοιπη περιοχή συμμετέχει με εκθετικά μικρά σφάλματα (τα υπόλοιπα ολοκληρώματα είναι εκθετικά μικρά). Κατά μία έννοια εδώ έχουμε το ανάλογο επιχείρημα της μεθόδου Laplace στις δύο διαστάσεις.

Θεωρούμε μία νέα διαδρομή, έστω C_4 ως ακολούθως: ξεκινάμε από το σημείο $t = 1$ (η κάθετη στην υπερβολή) και συνεχίζουμε κάθετα προς τα πάνω (δηλαδή παράλληλα με τον φανταστικό άξονα στο άνω ημιεπίπεδο). Δεν έχει σημασία πόσο θα προχωρήσουμε, αρκεί να ξανασυναντήσουμε την C_3 σε κάποιο σημείο του άνω ημιεπιπέδου. Παραμετροποιούμε την καμπύλη μας ως εξής:

$$t = 1 + iv, \quad 0 \leq v \leq \varepsilon,$$

όπου ε αρκούντως (οσοδήποτε) μικρός πραγματικός αριθμός. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{C_3} e^{ixt^2} dt &= - \int_{C_4} e^{ixt^2} dt \\ &\sim - \int_0^\varepsilon e^{ix(1+iv)^2} i dv \\ &\sim -ie^{ix} \int_0^\infty e^{-2xv} e^{-ixv^2} dv \\ &= -ie^{ix} \int_0^\infty e^{-2xv} (1 - ixv^2 + \dots) \\ &= -i \frac{e^{ix}}{2x} \left[1 - \frac{i}{2x} + \dots \right], \end{aligned}$$

το μείον στην πρώτη ισότητα οφείλεται στο ότι τρέχουμε από το ε στο 0, η τρίτη ισότητα οφείλεται στην εφαρμογή της μεθόδου Laplace, η τέταρτη στο γεγονός ότι το v είναι αρκούντως μικρό, και, η τελευταία στον υπολογισμό και του ολοκληρώματος

$$\int_0^\infty v^2 e^{-2xv} dv,$$

όπου με την αλλαγή μεταβλητής $2xv = t$, και, από τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα έχουμε

$$\int_0^\infty v^2 e^{-2xv} dv = -\frac{i}{4x^2}.$$

Εάν στο τέταρτο βήμα χρησιμοποιήσουμε περισσότερους όρους από το ανάπτυγμα Taylor λαμβάνουμε τη σχέση (2.9.3).

Παράδειγμα 2.9.7 Η συμπεριφορά του ολοκληρώματος (συνάρτηση Bessel)

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \theta) d\theta, \quad x \rightarrow \infty.$$

Έχουμε

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_C e^{ix \cos z} dz,$$

όπου η πρώτη ισότητα οφείλεται στο ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Έχουμε

$$f(z) = 1$$

$$h(z) = i \cos z = i \cos(u + iv) = \sin u \sinh v + i \cos u \cosh v.$$

Επειδή,

$$\cos x \cosh v = 0,$$

ενώ

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \neq 0,$$

και,

$$h'(0) = 0$$

$$h''(0) = -i,$$

η αρχή των αξόνων είναι σαγματικό σημείο τάξεως $N = 2$ με $a = -\frac{\pi}{2}$.

Οι κατευθύνσεις μέγιστης κατωφέρειας είναι

$$\bullet \quad n = 0, \quad \theta = \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4},$$

$$\bullet \quad n = 1, \quad \theta = \frac{3\pi + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{7\pi}{4}.$$

Οι κατευθύνσεις μέγιστης ανωφέρειας είναι

$$\bullet \quad n = 0, \quad \theta = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\bullet \quad n = 1, \quad \theta = \frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{5\pi}{4}.$$

Σημειώνουμε ότι και οι τέσσερις καμπύλες ικανοποιούν την εξίσωση

$$\cos u \cosh v - 1.$$

Καλούμε

- C_1 την καμπύλη: $u^2 - v^2 = 0$ ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων σε γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$ έως το σημείο (T, T) ,
- C_2 το ευθύγραμμο τμήμα που είναι παράλληλο στον οριζοντίου άξονα και ενώνει τα σημεία (T, T) και $(\sqrt{1 + T^2}, T)$, και,
- C_3 την καμπύλη: $u^2 - v^2 = 1$ ξεκινώντας από το σημείο $(\sqrt{1 + T^2}, T)$ έως το σημείο $(1, 0)$.

Αργότερα, όπως και πριν, θα αφήσουμε το T να πάει στο άπειρο. Η παραμόρφωση του αρχικού δρόμου ολοκλήρωσης C είναι: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις ξεκινάμε με το ολοκλήρωμα επί της C_2 (το οποίο συχνά καλείται **ολοκλήρωμα γέφυρα**). Για $T > 0$ έχουμε

$$|\operatorname{Re} \int_{C_2} e^{ix \cos z} dz| \leq \int_{\arccos(\sec hT)}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t \sinh T} dt \leq \int_{\arccos(\sec hT)}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} - \arccos(\sec hT) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

όπου,

$$\sec hx =: \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}.$$

Σχετικά με το ολοκλήρωμα επί της C_3 έχουμε

$$\operatorname{Re} \int_{C_3} e^{ix \cos z} dz = \operatorname{Re} \int_{-T}^0 i e^{x \sinh t} dt = 0.$$

Τέλος, στρέφουμε την προσοχή μας στο ολοκλήρωμα επί της C_3 την οποία επιλέξαμε (παραμετριοποιήσαμε) εις τρόπον ώστε:

$$h(\zeta(t)) = U(t) + i.$$

Θέτουμε,

$$s := -U(t) \text{ και επομένως, } s = i - i \cos z, \text{ από όπου και, } \cos z = 1 + is.$$

Διαφορίζοντας λαμβάνουμε

$$ds = i \sin z dz = i (1 - \cos^2 z)^{\frac{1}{2}} dz = i [1 - (1 + is)^2]^{\frac{1}{2}} dz = i (s^2 - 2is)^{\frac{1}{2}} dz,$$

όπου για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιήθηκε ο κλάδος $\arg z \in [-\pi, \pi]$. Για τα άκρα ολοκλήρωσης παρατηρούμε ότι $U = 0$ στην αρχή, και

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, -\infty)} (-\sin u \sinh v) = \infty.$$

Έτσι λοιπόν η πλήρης ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματός μας καθορίζεται από το αντίστοιχο ολοκλήρωμα επί της C_1 . Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C_1} e^{ix \cos z} dz \\ &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} i \int_0^\infty e^{-xs+xi} (s^2 - 2is)^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} i e^{ix} (-2i)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-xs} s^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{s}{2i}\right)^{-\frac{1}{2}} ds \\ &\sim -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} i e^{ix} (-2i)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-xs} s^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)} \left(\frac{is}{2}\right)^n ds \\ &\sim \operatorname{Re} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) i^n}{2^n n! \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) x^n}, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

όπου στο τέταρτο βήμα εφαρμόσαμε το Λήμμα Watson, καθώς $x \rightarrow \infty$.

Παράδειγμα 2.9.8 (Η συνάρτηση Airy).⁴¹

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' = xy$$

και η ασυμπτωτική της συμπεριφορά είναι το αντικείμενο του παραδείγματος αυτού. Η εξίσωση καλείται **εξίσωση Airy** και οι λύσεις της **συναρτήσεις Airy**.

⁴¹Προς τιμήν του Βρετανού αστρονόμου George Biddell Airy (1801–1892).

Η λύση περιγράφεται από το μιγαδικό ολοκλήρωμα ⁴²

$$\int_C e^{\frac{1}{3}t^3+xt} dt,$$

όπου C καμπύλη που αρχίζει και τελειώνει στο ∞ στον τομέα όπου το πραγματικό μέρος του t^3 αποκλίνει από το $-\infty$. Μάλιστα, μπορούμε να διαλέξουμε τον δρόμο ολοκλήρωσης, έτσι ώστε μία λύση να είναι η γνωστή ως **συνάρτηση Airy του πρώτου είδους**

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{1}{3}t^3+ixt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt, \end{aligned}$$

η οποία μάλιστα συγκλίνει από το κριτήριο του Dirichlet, εάν $x \in \mathbb{R}$. Σημειώνουμε ότι η τελευταία ισότητα προέκυψε καθώς στο πρώτο ολοκλήρωμα της δεύτερης ισότητας η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι άρτια, ενώ στο δεύτερο περιττή (ως προς t). Θέτουμε

$$s := x^{-\frac{1}{2}}t,$$

και έχουμε

$$\text{Ai}(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}s^3+s\right)} ds.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} h(s) &:= \frac{1}{3}i(s^3 + s), \\ h(p + iq) &= \underbrace{\left(\frac{1}{3}q^3 - p^2q - q\right)}_{\phi} + i \underbrace{\left(\frac{1}{3}p^3 - pq^2 + p\right)}_{\psi}. \end{aligned}$$

Επομένως, οι διαδρομές επικλινέστερης κατάβασης δίδονται από την

$$\frac{1}{3}q^3 - p^2q - q = C,$$

όπου, φυσικά, C είναι μία σταθερά. Επιπλέον,

$$h'(s) = i(s^2 + 1),$$

και έτσι τα σαγματικά σημεία είναι $s = \pm i$. Για $p = 0$, $q = 1$ έχουμε

$$h(i) = -\frac{2}{3}$$

επομένως $C = 0$. Η μέθοδος της επικλινέστερης κατάβασης μας οδηγεί να παραμορφώσουμε τη διαδρομή, ώστε να διέρχεται από το σαγματικό σημείο i και να ακολουθεί τις κατευθύνσεις μέγιστης κατωφέρειας στο άνω ημιεπίπεδο όπου η ποσότητα $\frac{1}{3}q^3 - p^2q - q$ φθίνει (στο σχήμα είναι ο δρόμος D_+). Παραμετρικοποιούμε το ολοκλήρωμα στο D_+ ως:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{3} \sinh t, \\ q &= \cosh t. \end{aligned}$$

⁴²Για παράδειγμα, με εφαρμογή του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Fourier.

Επομένως,

$$\phi = \frac{2}{3} \left(3 \cosh t - 4 \cosh^3 t \right) = -\frac{2}{3} \cosh(3t),$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{3} \cosh t + i \sinh t.$$

Συνεπώς, έχουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση για τη συνάρτηση Airy

$$\text{Ai}(x) = \frac{\sqrt{3x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh t e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cosh(3t)} dt.$$

Είναι τώρα εύκολο να λάβουμε τον πρωτεύοντα όρο για το τελευταίο ολοκλήρωμα καθώς $x \rightarrow \infty$ με εφαρμογή της μεθόδου Laplace. Έχουμε

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{e^{-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}}}{2\sqrt{\pi x^{\frac{1}{4}}}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσε κανείς να έχει την πλήρη ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Airy χρησιμοποιώντας το μονοπάτι που είναι κάθετο στο μονοπάτι επικλινέστερης κατάβασης $s = i$ (όπως ακριβώς και στο προηγούμενο παράδειγμα), δηλαδή

$$s = i + p$$

επί του οποίου

$$h = -\frac{2}{3} - p^2 + i\frac{p^3}{3}.$$

Τούτο δεν είναι μονοπάτι σταθερής φάσης (λόγω του όρου $i\frac{p^3}{3}$), αλλά αυτό δεν μας επηρεάζει. Έχουμε

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{2\pi} e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{\frac{3}{2}}p^2} e^{x^{\frac{3}{2}}i\frac{p^3}{3}} dp.$$

Τώρα, από το Λήμμα Watson λαμβάνουμε

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{e^{-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}}}{2\sqrt{\pi x^{\frac{1}{4}}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(-\frac{1}{9x^{\frac{2}{3}}}\right)^n, \quad x \rightarrow \infty.$$

2.9.2 Ασκήσεις

Άσκηση 2.9.9 Να υπολογιστεί το

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-ix} \left(\int_0^1 e^{ixt} \log t dt + \frac{i \left(\log x + \gamma \right) + \frac{\pi}{2}}{x} \right).$$

Άσκηση 2.9.10 Για τη συνάρτηση Airy του πρώτου είδους να αποδείξετε ότι

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},$$

$$\text{Ai}'(0) = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Άσκηση 2.9.11 Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 e^{ixt^3} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.9.12 Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 t^2 e^{ixt^3} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 2.9.13 Να βρείτε τους δύο πρώτους όρους επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t e^{ixt^2} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Βιβλιογραφία

- [1] R. Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals*. New York, NY, USA: Academic Press, 1989.
- [2] G. Boros και V.H. Moll. *Irresistible Integrals: Symbolics, Analysis and Experiments in the Evaluation of Integrals*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [3] H. Havil. *Gamma, Exploring Euler's Constant*. New Jersey, NY, USA: Princeton University Press, 2003.
- [4] Γ. Δάσιος. *Εισαγωγή στην Ασυμπτωτική Ανάλυση*. Αθήνα: Τσότρας, 2016.
- [5] E.T. Whittaker και G.N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1927.
- [6] N.M. Temme. *Asymptotic Methods for Integrals*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2015.
- [7] F.W.J. Olver. *Asymptotics and Special Functions*. New York, NY, USA: Academic Press, 1974.
- [8] J.D. Murray. *Asymptotic Analysis*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1984.
- [9] G.H. Hardy. *Divergent Series*. London, UK: Oxford University Press, 1949.
- [10] P. Flajolet και R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008.
- [11] A. Erdelyi. *Asymptotic Expansions*. New York, NY, USA: Dover Publications Inc., 2010.
- [12] N.G. De Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland Publishing & Co., 1961.
- [13] C.M. Bender και S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1999.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

Σύνοψη

Στο μέρος αυτό θα παρουσιάσουμε εργαλεία με τα οποία μπορεί κανείς να διαχειριστεί ένα άθροισμα καθώς το άνω του άκρο είναι αρκούντως μεγάλο. Αυτές οι τεχνικές άθροισης περιλαμβάνουν τη μέθοδο μερικής άθροισης του Abel (Abel's summation formula), τη φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin (Euler-Maclaurin summation formula) κ.ά. Κεντρικό ρόλο παίζουν οι αριθμοί και τα πολυώνυμα Bernoulli στους οποίους γίνεται εκτενής αναφορά. Ειδική μνεία γίνεται επίσης, στους αρμονικούς και υπεραρμονικούς αριθμούς.

3.1 Η μέθοδος άθροισης του Abel (Method of partial summation)

Η ακόλουθη απόδειξη οφείλεται στον Νορβηγό μαθηματικό Niels Henrik Abel, (5 Αυγούστου 1802-6 Απριλίου 1829).¹

Πρόταση 3.1.1 Έστω $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $f(t)$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο $[1, x]$. Θέτουμε

$$A(t) := \sum_{n \leq t} \alpha_n. \quad (3.1.1)$$

Τότε

$$\sum_{n \leq x} \alpha_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt. \quad (3.1.2)$$

¹Είναι γνωστή η ρήση του Charles Hermite: "Abel has left mathematicians enough to keep them busy for five hundred years".

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε την πρόταση όταν $x \in \mathbb{N}$. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \alpha_n f(n) &= \sum_{n \leq x} [A(n) - A(n-1)] f(n) \\ &= \sum_{n \leq x} A(n) f(n) - \sum_{n \leq x-1} A(n) f(n+1) \\ &= A(x) f(x) - \sum_{n \leq x-1} A(n) \int_n^{n+1} f'(t) dt \\ &= A(x) f(x) - \sum_{n \leq x-1} \int_n^{n+1} A(t) f'(t) dt,\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει καθώς από την (3.1.1)

$$\alpha_n = A(n) - A(n-1)$$

η δεύτερη από την αλλαγή μεταβλητής $n-1 = j$, η τρίτη από την ενοποίηση των δύο αθροισμάτων και ότι

$$f(n) - f(n+1) = - \int_n^{n+1} f'(t) dt,$$

ενώ η τελευταία, από το γεγονός ότι η $A(t)$ είναι απλή συνάρτηση και το ότι

$$\sum_{n \leq x-1} \int_n^{n+1} A(t) f'(t) dt = \int_1^x A(t) f'(t) dt.$$

Όταν ο αριθμός x δεν είναι θετικός ακέραιος έχουμε

$$A(x) [f(x) - f([x])] - \int_{[x]}^x A(t) f'(t) dt = 0,$$

όπου $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν ξεπερνά τον x . Το ζητούμενο έπεται άμεσα. ■

* Η γενικότερη μορφή της ανωτέρω πρότασης κελεύει

Πρόταση 3.1.2 Έστω $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $f(t)$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο $[y, x]$. Θέτουμε

$$A(t) = \sum_{n \leq t} \alpha_n.$$

Τότε

$$\sum_{y < n \leq x} \alpha_n f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) dt. \quad (3.1.3)$$

Εάν η συνάρτηση $f(\cdot)$ είναι (απλά) συνεχής η πρόταση διαμορφώνεται με τη χρήση του ολοκληρώματος Riemann–Stieltjes

$$\sum_{y < n \leq x} \alpha_n f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) df(t).$$

Παράδειγμα 3.1.3 Να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + O(1).^2 \quad (3.1.4)$$

²Εάν x είναι θετικός ακέραιος, τότε προκύπτουν οι Αρμονικοί αριθμοί τους οποίους θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Θα εφαρμόσουμε την (3.1.2) για

$$\alpha_n = 1 \text{ και } f(n) = \frac{1}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$A(x) = \sum_{n \leq x} 1 = [x]. \quad (3.1.5)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \sum_{n \leq x} 1 \cdot \frac{1}{n} \\ &\stackrel{(3.1.5)}{=} [x] \frac{1}{x} + \int_1^x [t] \frac{1}{t^2} dt, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

όπου στη δεύτερη ισότητα εφαρμόσαμε την (3.1.2). Όμως

$$[x] = x + O(1). \quad (3.1.7)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \log x + \underbrace{\int_1^x \frac{1}{t^2} \cdot O(1) dt}_{\text{το ολοκλήρωμα συγκλίνει}} \\ &= \log x + O(1). \end{aligned}$$

Ερώτηση: Μπορούμε να βελτιώσουμε την απάντησή μας;

Η απάντηση είναι καταφατική. Συγκεκριμένα μπορούμε να υπολογίσουμε έναν ακόμη όρο. Τούτο θα γίνει δυνατόν με τη βοήθεια της σχέσης - ιδιότητας

$$[x] = x - \{x\}, \quad (3.1.8)$$

όπου με $\{x\}$ συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του αριθμού x . Για παράδειγμα, $\{2.3\} = 0.3$, και $\{-1.3\} = 0.7$. Χρησιμοποιούμε την (3.1.8) και όπως στην (3.1.6) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \sum_{n \leq x} 1 \cdot \frac{1}{n} \\ &\stackrel{(3.1.5)}{=} [x] \frac{1}{x} + \int_1^x [t] \frac{1}{t^2} dt \\ &\stackrel{(3.1.8)}{=} \frac{x - \{x\}}{x} + \int_1^x \frac{t - \{t\}}{t^2} dt \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \log x - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει καθώς,

$$\frac{\{x\}}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{διότι } 0 \leq \{x\} < 1.$$

Όμως,

$$\int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt = \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt - \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της τελευταίας ισότητας είναι ένας αριθμός ο οποίος πλέον δεν εξαρτάται από το x και θα τον συμβολίσουμε με C . Ως προς το δεύτερο ολοκλήρωμα και επειδή

$$\{t\} = O(1)$$

έχουμε

$$\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Επομένως,

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + 1 - C + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

όπου

$$1 - C = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt = \gamma$$

η σταθερά των *Euler-Mascheroni*. Είναι λοιπόν προφανές ότι

Ερώτηση: Μπορούμε να βελτιώσουμε ακόμη περισσότερο την απάντησή μας;

Η απάντηση είναι καταφατική και τούτο επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της φόρμουλας άθροισης των Euler-Maclaurin (Euler Maclaurin summation formula) την οποία θα παρουσιάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 3.1.4 Να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x). \quad (3.1.9)$$

Θα εφαρμόσουμε την (3.1.2) για

$$\alpha_n = 1 \quad \text{και} \quad f(n) = \log n.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$A(x) = \sum_{n \leq x} 1 = [x].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \log n &= [x] \log x - \int_1^x [t] \frac{1}{t} dt \\ &= x \log x + O(1) \log x - (x-1) + \int_1^x O\left(\frac{1}{t}\right) dt \\ &= x \log x - x + 1 + O(\log x) \\ &= x \log x - x + O(\log x). \end{aligned}$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να βελτιώσουμε ακόμη περισσότερο την απάντησή μας με την βοήθεια της φόρμουλας άθροισης των Euler-Maclaurin.

Συνεχίζουμε με ένα παράδειγμα από την αναλυτική θεωρία αριθμών

Παράδειγμα 3.1.5 Για $x \geq 2$ έχουμε

$$\vartheta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \quad (3.1.10)$$

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt, \quad (3.1.11)$$

όπου, ως πάντα, $\pi(x)$: είναι ο αριθμός των πρώτων αριθμών p που ικανοποιούν την $2 \leq p \leq x$, και $\vartheta(x)$ είναι η συνάρτηση Chebyshev:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad x > 0,$$

όπου ο αριθμός p τρέχει πάνω στο σύνολο των πρώτων που είναι μικρότεροι ή ίσοι από τον x .

Για την απόδειξη θέτουμε ³

$$\alpha(n) := \begin{cases} 1, & \text{εάν ο } n \text{ είναι πρώτος} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{1 < n \leq x} \alpha(n), \\ \vartheta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p = \sum_{1 < n \leq x} \alpha(n) \log(n). \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τώρα την (3.1.3) για

$$y = 1 \quad \text{και} \quad f(n) = \log n$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \pi(x) \log x - \pi(1) \log 1 - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt \\ &= \pi(x) \log x - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας, έστω

$$b(n) = \alpha(n) \log n$$

και γράφουμε τις ποσότητες $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ ως

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{8/5 < n \leq x} b(n) \frac{1}{\log n}, \\ \vartheta(x) &= \sum_{n \leq x} b(n). \end{aligned}$$

Η (3.1.3) τώρα για $y = \frac{8}{5}$ και $f(n) = \frac{1}{\log n}$ αποδίδει

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} - \frac{\vartheta(\frac{8}{5})}{\log \frac{8}{5}} + \int_{\frac{8}{5}}^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt,$$

και το ζητούμενο έπεται άμεσα καθώς $\vartheta(\frac{8}{5}) = 0$.

Παράδειγμα 3.1.6 Ας εξετάσουμε το άθροισμα

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\log n}{n}.$$

³Η ακολουθία αυτή στη Θεωρία Αριθμών αποκαλείται *χαρακτηριστική συνάρτηση των πρώτων*, ενώ με την ορολογία της Ανάλυσης είναι μία *δείκτρια* συνάρτηση από τους φυσικούς στο $\{0, 1\}$ η οποία επιστρέφει μονάδα στους πρώτους και μηδέν σε διαφορετική περίπτωση.

Με παρόμοιο τρόπο η (3.1.3) για

$$\alpha_n = 1 \quad \text{για} \quad f(n) = \frac{\log n}{n}$$

αποδίδει

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\log n}{n} &= [x] \frac{\log x}{x} - \int_1^x [t] \frac{1 - \log t}{t^2} dt \\ &= (x - \{x\}) \frac{\log x}{x} - \int_1^x (t - \{t\}) \frac{1 - \log t}{t^2} dt \\ &= \log x + O\left(\frac{\log x}{x}\right) - \int_1^x \frac{1 - \log t}{t} dt + \int_1^x \{t\} \frac{1 - \log t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1 - \log t}{t} dt &= \log x - \frac{1}{2} (\log x)^2, \\ \int_1^x \frac{1 - \log t}{t^2} dt &= \frac{\log x}{x} \\ \int_1^x \{t\} \frac{1 - \log t}{t^2} dt &= \int_1^\infty \{t\} \frac{1 - \log t}{t^2} dt + O\left(\frac{\log x}{x}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

όπου

$$C = \int_1^\infty \{t\} \frac{1 - \log t}{t^2} dt.$$

3.1.1 Άθροιση κατά μέρη

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με την περίπτωση της (3.1.3) κατά την οποία η $f(n)$ έχει ειδική μορφή. Συγκεκριμένα

Πρόταση 3.1.7 Έστω $\{g_n\}_{n=1}^\infty, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ δύο ακολουθίες. Τότε

$$\sum_{k=m}^n g_k (f_{k+1} - f_k) = g_n f_{n+1} - g_m f_m - \sum_{k=m+1}^n f_k (g_k - g_{k-1}). \quad (3.1.12)$$

Πρόκειται, φυσικά, για την διακριτή περίπτωση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Μάλιστα, τούτη η ταυτότητα χρησιμοποιείται για την απόδειξη θεωρημάτων και κριτηρίων στη σύγκλιση σειρών, ανάμεσα στα οποία ξεχωρίζει το γνωστό κριτήριο του *Abel* για εναλλάσσουσες σειρές. Ας δώσουμε το ακόλουθο

Παράδειγμα 3.1.8 Θα υπολογίσουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n k 2^k.$$

Παρατηρούμε ότι

$$2^k = 2^{k+1} - 2^k.$$

Εφαρμόζουμε τώρα την (3.1.12) για τις ακολουθίες

$$g_n = n \quad \text{και} \quad f_n = 2^n$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k 2^k &= \sum_{k=1}^n k (2^{k+1} - 2^k) \\
 &= n 2^{n+1} - 1 \cdot 2 - \sum_{k=2}^n 2^k [k - (k-1)] \\
 &= n 2^{n+1} - 2 - 2^{n+1} + 4 \\
 &= (n-1) 2^{n+1} + 2.
 \end{aligned}$$

* Ολοκληρώνουμε με μία εφαρμογή από την περιοχή της βασικής θεωρίας Πιθανοτήτων.

Παράδειγμα 3.1.9 Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Εάν $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε η μέση τιμή $E[g(X)]$ να υπάρχει (δηλαδή $E[|g(X)|] < \infty$) τότε

$$E[g(X)] = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k] [g(k) - g(k-1)].$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση κατά την οποία $g(k) = k$ προκύπτει ότι

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k].$$

Για την απόδειξη, και από τον ορισμό της μέσης τιμής συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής έχουμε

$$\begin{aligned}
 E[g(X)] &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) P\{X = k\} \\
 &= g(0)P\{X = 0\} + g(1)P\{X = 1\} + g(2)P\{X = 2\} + g(3)P\{X = 3\} + \dots
 \end{aligned}$$

Αθροίζοντας κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned}
 &g(0)[P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + \dots] \\
 &+ [g(1) - g(0)][P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + \dots] \\
 &+ [g(2) - g(1)][P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + \dots] \\
 &+ [g(3) - g(2)][P\{X = 3\} + \dots] \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

που είναι το δεύτερο μέλος της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε.

3.1.2 Ασκήσεις

Άσκηση 3.1.10 Να αποδειχθεί ότι

$$\gamma = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \right].$$

Άσκηση 3.1.11 Να αποδειχθεί ότι το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right)$$

υπάρχει.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του *Abel* για $a_n = 1$ και $f(t) = \frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n} - \log x &= \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n} - \int_1^x \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{2 \leq n \leq x} \left(\frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \right) \\ &= \sum_{2 \leq n \leq x} \left(\frac{1}{n} + \log \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

Επειδή

$$\log \left(1 - \frac{1}{n} \right) = - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \dots \right) = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει.

Άσκηση 3.1.12 Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n k^2 2^k.$$

Υπόδειξη: Επειδή

$$2^{k+1} - 2^k = 2$$

η ταυτότητα του *Abel* για τις ακολουθίες

$$g_n = n^2 \quad \text{και} \quad f_n = 2^n$$

αποδίδει:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 2^k &= \sum_{k=1}^n k^2 (2^{k+1} - 2^k) \\ &= n2^{n+1} - 1^2 \cdot 2 - \sum_{k=2}^n 2^k [k^2 - (k-1)^2] \\ &= n2^{n+1} - 2 - 2 \sum_{k=2}^n k2^k + \sum_{k=2}^n 2^k. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήστε τώρα το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 1.11.8 (ή εναλλακτικά εφαρμόστε ακόμη μία φορά την ταυτότητα του *Abel* για τις ακολουθίες $g_n = n$ και $f_n = 2^n$) για το τελικό αποτέλεσμα.

Άσκηση 3.1.13 Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n k^3 3^k.$$

Δοκιμάστε να γενικεύσετε το αποτέλεσμα σας δίνοντας αναδρομικό τύπο για τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^n k^j 3^k, \quad j \in \mathbb{N},$$

και γενικότερα για αθροίσματα τύπου

$$\sum_{k=1}^n k^j \alpha^k, \quad \alpha > 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 3.1.14 Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^n k^2 \sin(k\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 \cos(k\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες του Lagrange

$$\sum_{j=1}^n \sin(j\theta) = \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2} - \frac{\cos\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$\sum_{j=1}^n \cos(j\theta) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3.2 Αριθμοί και Πολυώνυμα Bernoulli

Το παρόν κεφάλαιο ασχολείται με τα πολυώνυμα και τους αριθμούς Bernoulli και τις ιδιότητες τους. Οι αριθμοί αυτοί εμφανίζονται στη μελέτη αρκετών ειδικών συναρτήσεων (special functions) και ειδικότερα στη συνάρτηση ζήτα του Riemann καθώς και τη συνάρτηση ζήτα του Hurwitz. Μία πολύ σημαντική εφαρμογή τους είναι ότι εμφανίζονται στη φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ένας τρόπος να ορίσει κανείς τους αριθμούς Bernoulli είναι με τον ακόλουθο αναδρομικό τρόπο

$$B_0 = 1$$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad n \geq 1.$$

Παρατήρηση 3.2.1 Παρατηρήστε ότι ισοδύναμα μπορεί κανείς να πει ότι

$$B_0 = 1 \tag{3.2.1}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0, \quad n \geq 1. \tag{3.2.2}$$

Έτσι, $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, κ.ο.κ.

Ένας διασκεδαστικός τρόπος να βρίσκει κανείς τους αριθμούς Bernoulli δόθηκε από τους Conway και Guy, στο βιβλίο τους: *The Book of Numbers*. Πιο συγκεκριμένα έγραψαν τη σχέση

$$(B+1)^{n+1} = B^{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (3.2.3)$$

όπου B^k είναι ο k -οστός αριθμός Bernoulli, δηλαδή ο B_k , αφού πρώτα αναπτύξουμε το πρώτο μέλος της τελευταίας μέσω του διωνυμικού θεωρήματος, (καθώς ο όρος B^{n+1} απλοποιείται). Για παράδειγμα, με $B_0 = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} B_2 + 2B_1 + 1 &= B_2, & \text{από όπου λαμβάνουμε} & \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \\ B_3 + 3B_2 + 3B_1 + 1 &= B_3, & \text{από όπου λαμβάνουμε} & \quad B_2 = \frac{1}{6}, \\ & & \text{κ.ο.κ.} & \end{aligned}$$

Ο πλέον μοντέρνος ορισμός των αριθμών Bernoulli δόθηκε από τον Euler το 1755 και είναι ο ακόλουθος

Ορισμός 3.2.2 Οι αριθμοί Bernoulli είναι οι συντελεστές της εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!}.$$

Υπόμνηση. Θυμηθείτε ότι η γεννήτρια συνάρτηση είναι μία μέθοδος κωδικοποίησης μίας ακολουθίας. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, εάν

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j.$$

Ομοίως, η συνάρτηση f είναι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, εάν

$$f(x) = b_0 + b_1 \frac{x}{1!} + b_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!}.$$

Έτσι λοιπόν εάν θέσουμε

$$f(x) := x/(e^x - 1)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x - 1}, & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}, & \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= -\frac{1}{2} \\ f''(x) &= \frac{xe^{2x} - xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}, & \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) &= \frac{1}{6} \\ &\dots\dots & &\dots \end{aligned}$$

Ας δούμε τους πρώτους αριθμούς Bernoulli

$$\begin{array}{ll}
 B_0 = 1 & B_{11} = 0 \\
 B_1 = -1/2 & B_{12} = -691/2730 \\
 B_2 = 1/6 & B_{13} = 0 \\
 B_3 = 0 & B_{14} = 7/6 \\
 B_4 = -1/30 & B_{15} = 0 \\
 B_5 = 0 & B_{16} = -3617/510 \\
 B_6 = 1/42 & B_{17} = 0 \\
 B_7 = 0 & B_{18} = 43867/798 \\
 B_8 = -1/30 & \dots \\
 B_9 = 0 & B_{49} = 0 \\
 B_{10} = 5/66 & B_{50} = 4950572052410796482122477525/66.
 \end{array}$$

Μέσω του ορισμού του Euler θα αποδείξουμε ότι η προηγούμενη παρατήρηση (δηλαδή η σχέση (3.2.4)) αληθεύει. Έχουμε σχετικώς την ακόλουθη

Πρόταση 3.2.3 Οι αριθμοί Bernoulli ικανοποιούν την

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 1 \\
 \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k &= 0, \quad n \geq 1.
 \end{aligned}$$

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{e^x - 1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!} \\
 x &= (x-1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n+1-k}}{(n+1-k)!} \frac{B_k x^k}{k!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)! B_k}{(n+1-k)! k!} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
 x &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \frac{x^n}{n!},
 \end{aligned}$$

όπου για την πέμπτη ισότητα εφαρμόσαμε το γινόμενο δύο σειρών κατά Cauchy, ενώ η τέταρτη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από αλλαγή μεταβλητής. Το ζητούμενο τώρα προκύπτει εξισώνοντας τους συντελεστές του x στα δύο μέλη. ■

Παρατήρηση 3.2.4 Από την παραπάνω πρόταση και την () προκύπτει ότι οι αριθμοί Bernoulli είναι ρητοί.

Μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα των αριθμών Bernoulli (διαισθητικά φανερή από την παρουσίαση των πρώτων 18 αριθμών που είδαμε νωρίτερα) περιγράφεται στην ακόλουθη

Πρόταση 3.2.5

$$B_{2n+1} = 0, \quad n \geq 1.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) := \left(B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) - B_1 x = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}.$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι πρόκειται για μία άρτια συνάρτηση. Το ζητούμενο έπεται άμεσα.

■

Ερώτηση. Παρατηρούμε με απλή επιθεώρηση, ότι οι αριθμοί Bernoulli διαρκώς μεγαλώνουν. Φυσικά, δεν αναφερόμαστε στους αριθμούς με περιττό δείκτη μεγαλύτερο της μονάδας, οι οποίοι είναι ίσοι με το μηδέν με βάση την προηγούμενη πρόταση.

Πώς όμως μεγαλώνουν οι άρτιοι αριθμοί αυτοί B_{2m} ; Ποια είναι ασυμπτωτικά η συμπεριφορά τους καθώς $m \rightarrow \infty$;

Θα απαντήσουμε με τη βοήθεια της ακόλουθης φόρμουλας του Euler (η απόδειξή της παρατίθεται στο Παράρτημα):

$$2 \zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m}, \quad (3.2.4)$$

από όπου

$$B_{2m} = (-1)^{m-1} \frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \zeta(2m). \quad (3.2.5)$$

Από τη φόρμουλα του Stirling (που έχουμε παρουσιάσει αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο) έχουμε

$$(2m)! \sim \left(\frac{2m}{e} \right)^{2m} \sqrt{4\pi m}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.2.6)$$

Εξάλλου,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta(2m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \quad (3.2.7)$$

$$= 1 + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \quad (3.2.8)$$

$$= 1. \quad (3.2.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.2.6), (3.2.9) στην (3.2.5) λαμβάνουμε

$$B_{2m} \sim 4(-1)^{m-1} \left(\frac{m}{\pi e} \right)^{2m} \sqrt{\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Φυσικά, μπορεί κανείς να πει ότι

$$|B_{2m}| \sim 4 \left(\frac{m}{\pi e} \right)^{2m} \sqrt{\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

⁴Παρατηρήστε ότι καθώς αναγκαστικά $\zeta(2m) > 0$, οι ζυγοί αριθμοί Bernoulli οφείλουν να έχουν εναλλασσόμενο πρόσημο, δηλαδή πρέπει: $B_{4m} < 0$ και $B_{4m+2} > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

3.2.1 Πολυώνυμα Bernoulli

Τα πολυώνυμα Bernoulli ορίζονται μέσω της σχέσης

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{x^n}{n!}.$$

Τα πολυώνυμα Bernoulli έχουν τις ιδιότητες που περιγράφονται στην ακόλουθη

Πρόταση 3.2.6

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n, \quad n \neq 1, \quad (3.2.10)$$

$$B_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad B_1(1) = \frac{1}{2}$$

$$B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1} \quad (3.2.11)$$

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} t^k. \quad (3.2.12)$$

$$B'_n(t) = nB_{n-1}(t) \quad (3.2.13)$$

Η (3.2.11) προκύπτει άμεσα. Ωστόσο, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, διότι εάν κανείς γνωρίζει τα πολυώνυμα, τότε γνωρίζει και τους αριθμούς Bernoulli.

Ας αποδείξουμε την (3.2.11). Είναι

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} [B_j(t+1) - B_j(t)] \frac{x^j}{j!} &= xe^{xt} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} x \frac{(xt)^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} xt^j \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

και η αποδείξη ολοκληρώνεται με τη σύγκριση των συντελεστών του x από τα δύο μέλη. Σχετικά με την απόδειξη της αναδρομικής σχέσης (3.2.12) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{x^n}{n!} &= \frac{x}{e^x - 1} e^{xt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(xt)^{n-k}}{(n-k)!} B_k \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} B_k \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

από όπου συγκρίνοντας τους συντελεστές του x στα δύο μέλη λαμβάνουμε

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k t^{n-k}$$

το οποίο με αλλαγή μεταβλητής είναι το ζητούμενο.

Από την αναδρομική αυτή σχέση τα πρώτα πολυώνυμα Bernoulli είναι

$$\begin{aligned} B_0(t) &= 1 \\ B_1(t) &= t - \frac{1}{2} \\ B_2(t) &= t^2 - t + \frac{1}{6} \\ B_3(t) &= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \\ B_4(t) &= t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30} \\ B_5(t) &= t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{6}t \\ B_6(t) &= t^6 - 3t^5 + \frac{5}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Όπως είναι φανερό ο σταθερός όρος σε κάθε πολυώνυμο είναι ο αντίστοιχος αριθμός *Bernoulli*. Αυτό άλλωστε προκύπτει και από την (3.2.10). Για την απόδειξη της (3.2.13) παραγωγίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Bernoulli και έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{xe^{xt}}{e^x - 1} &= \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{x^n}{n!} \\ \frac{x^2 e^{xt}}{e^x - 1} &= \sum_{n=1}^{\infty} B'_n(t) \frac{x^n}{n!} \\ \frac{xe^{xt}}{e^x - 1} &= \sum_{n=1}^{\infty} B'_n(t) \frac{x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B'_{n+1}(t) \frac{x^n}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

και εξισώνοντας τους όρους για τις εκφράσεις της συνάρτησης $\frac{xe^{xt}}{e^x - 1}$ έχουμε

$$\frac{B'_{n+1}(t)}{(n+1)!} = \frac{B'_n(t)}{n!}$$

και το ζητούμενο έπεται. ■

3.2.2 Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.7 Μία εφαρμογή των αριθμών Bernoulli είναι ότι εμφανίζονται στην ταυτότητα του Faulhaber σχετικά με τον τύπο που δίνει το άθροισμα των k δυνάμεων των πρώτων n θετικών ακεραίων. Για παράδειγμα ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

* Να αποδείξετε ότι

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j (n+1)^{k+1-j}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$(n+1+B)^{k+1} - (n+B)^{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} n^{k+1-j} [(B+1)^j - B^j].$$

Όπως είδαμε στη σχέση (3.2.3)

$$(B+1)^{n+1} = B^{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Συνεπώς θα μας μείνει μόνον ο όρος που προκύπτει για $j=1$, δηλαδή

$$\begin{aligned} (n+1+B)^{k+1} - (n+B)^{k+1} &= \binom{k+1}{1} n^k [(B+1)^1 - B^1] \\ &= (k+1) n^k. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{k+1} [(n+1+B)^{k+1} - (n+B)^{k+1}] = n^k,$$

από όπου με επαγωγή εύκολα παίρνουμε

$$\frac{1}{k+1} [(n+1+B)^{k+1} - (n+B)^{k+1}] = \sum_{i=1}^n i^k$$

και συνεπώς το ζητούμενο.

Άσκηση 3.2.8 Να αποδειχθούν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} B_k(1-t) &= (-1)^k B_k(t), \\ B_k\left(\frac{1}{2}\right) &= (2^{1-k} - 1) B_k, \\ B_k(1) &= (-1)^k B_k, \\ B_{2k}\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{2} (1 - 2^{1-k}) (1 - 3^{1-2k}) B_{2k}. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.2.9 Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 B_n(t) dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_n(t) dt &\stackrel{(3.2.12)}{=} \left[\frac{B_{n+1}(t)}{n+1} \right]_{t=0}^1 \\ &= \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)] \\ &\stackrel{(3.2.11)}{=} 0. \end{aligned}$$

3.3 Ο τύπος άθροισης των Euler-Maclaurin

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τη φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin την οποία απέδειξε το 1736 ο Leonard Euler για να υπολογίσει σειρές που συνέκλιναν αργά, ενώ ο Colin Maclaurin την απέδειξε ανεξάρτητα το 1742, για να υπολογίσει ολοκληρώματα. Οι δύο σχετικές εργασίες του Euler, αλλά και η πραγματεία του Maclaurin είναι οι ακόλουθες:

- L. Euler, *Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi*, *Commentarii academie scientiarum Petropolitanae*, Vol. 8(1736), pp. 3 – 9, *Opera Omnia*, Vol. XIV, pp. 101 – 107.
- L. Euler, *Methodus universalis series summamdi ulterius promota*, *Commentarii academie scientiarum Petropolitanae*, Vol. 8(1736), pp. 147 – 158, *Opera Omnia*, Vol. XIV, pp. 124 – 137.
- C. Maclaurin, *A Treatise of Fluxions*, Edinburgh, 1742.

Ας δούμε αυτό το χρήσιμο εργαλείο σε διάφορες μορφές του⁵ ξεκινώντας από την ακόλουθη

Πρόταση 3.3.1 (Euler-Maclaurin summation formula).

Έστω $a < b$ θετικοί ακέραιοι και συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ με συνεχή παράγωγο σε αυτό. Τότε

$$\sum_{n=a+1}^b f(n) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b \{t\} f'(t)dt, \quad (3.3.1)$$

όπου $\{t\}$ δηλώνει το κλασματικό μέρος του αριθμού t , δηλαδή:

$$\{t\} := t - [t].$$

Εάν, επιπλέον, η συνάρτηση $f(t)$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[a, b]$, τότε:

$$\sum_{n=a+1}^b f(n) = \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{2}f(b) - \frac{1}{2}f(a) + \int_a^b \psi(t)f''(t)dt, \quad (3.3.2)$$

όπου

$$\psi(t) = \frac{1}{2}(\{t\} - \{t\}^2).$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \{t\} f'(t)dt$$

στο διάστημα $[n-1, n]$, όπου $a < n \leq b$. Έχουμε:

$$\{t\} = t - n + 1.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n \{t\} f'(t)dt &= \int_{n-1}^n (t - n + 1) f'(t)dt \\ &= \left[(t - n + 1) f(t) \right]_{t=n-1}^n - \int_{n-1}^n f(t)dt \\ &= -f(n) - \int_{n-1}^n f(t)dt. \end{aligned}$$

⁵Η πιο χρήσιμη μορφή παρουσιάζεται στο τέλος του κεφαλαίου.

Αθροίζοντας αυτές τις εξισώσεις για $n = a + 1, a + 2, \dots, b$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b \{t\} f'(t) dt &= \sum_{n=a+1}^b \int_{n-1}^n \{t\} f'(t) dt \\ &= \sum_{n=a+1}^b f(n) - \int_a^b f(t) dt,\end{aligned}$$

και η απόδειξη της (3.3.1) ολοκληρώθηκε.

Για την απόδειξη της (3.3.2) θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \psi(t) f''(t) dt$$

περιορισμένο σε ένα διάστημα της μορφής $[n-1, n)$, όπου $a < n \leq b$. Θέτουμε

$$t := n - 1 + s.$$

Είναι $\{t\} = s$ και συνεπώς,

$$\psi(t) = \frac{1}{2} (s - s^2).$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε δύο φορές διαδοχικά την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^n \psi(t) f''(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 (s - s^2) f''(n - 1 + s) ds \\ &= \frac{1}{2} \left[(s - s^2) f'(n - 1 + s) \right]_{s=0}^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2s) f'(n - 1 + s) ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2s) f'(n - 1 + s) ds \\ &= -\frac{1}{2} \left[(1 - 2s) f(n - 1 + s) \right]_0^1 - \int_0^1 f(n - 1 + s) ds \\ &= \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} f(n - 1) - \int_{n-1}^n f(t) dt.\end{aligned}$$

Αθροίζοντας αυτές τις εξισώσεις για $n = a + 1, a + 2, \dots, b$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(t) f''(t) dt &= \frac{1}{2} \sum_{n=a+1}^b f(n) + f(n - 1) - \int_a^b f(t) dt \\ &= \sum_{n=a+1}^b f(n) - \frac{1}{2} f(b) + \frac{1}{2} f(a) - \int_a^b f(t) dt,\end{aligned}$$

για να ολοκληρωθεί έτσι η απόδειξη της (3.3.2).⁶ ■

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δύο πορίσματα που προκύπτουν άμεσα από την προηγούμενη πρόταση.

⁶Η μορφή της πρότασης για συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[y, x]$, $y, x \in \mathbb{R}$ (απαντάται συνήθως στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών) είναι η ακόλουθη:

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x (t - [t]) f'(t) dt + f(x) ([x] - x) - f(y) ([y] - y).$$

Πόρισμα 3.3.2 (*Euler-Maclaurin summation formula, Ο-εκδοχή*). Έστω $a < b$ θετικοί ακέραιοι και συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο σε αυτό. Τότε

$$\sum_{n=a+1}^b f(n) = \int_a^b f(t)dt + O\left(\int_a^b |f'(t)|dt\right),$$

$$\sum_{n=a+1}^b f(n) = \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{2}f(b) - \frac{1}{2}f(a) + O\left(\int_a^b |f''(t)|dt\right).$$

Εάν $b \rightarrow \infty$ έχουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 3.3.3 (*Euler-Maclaurin summation formula -εκδοχή άπειρον αθροίσματος*). Έστω a θετικός ακέραιος και συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, \infty)$ με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο σε αυτό. Εάν επιπλέον

$$\sum_{n=a+1}^{\infty} f(n) < \infty,$$

τότε,

$$\sum_{n=a+1}^{\infty} f(n) = \int_a^{\infty} f(t)dt + O\left(\int_a^{\infty} |f'(t)|dt\right), \quad (3.3.3)$$

$$\sum_{n=a+1}^{\infty} f(n) = \int_a^{\infty} f(t)dt - \frac{1}{2}f(a) + O\left(\int_a^{\infty} |f''(t)|dt\right). \quad (3.3.4)$$

Παράδειγμα 3.3.4 Ως μία άμεση εφαρμογή του τελευταίου πορίσματος ας δούμε την περίπτωση των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς τάξης 2, δηλαδή τη συμπεριφορά της ποσότητας

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Είναι γνωστό από τον Euler ότι⁷

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t^2}$ για την οποία $f'(t) = -\frac{2}{t^3}$, $f''(t) = \frac{6}{t^4}$. Για $a = N$ (αρκούντως μεγάλο) η (3.3.4) δίδει

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \int_N^{\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2N^2} + O\left(\int_N^{\infty} \frac{1}{t^4}dt\right) \\ &= \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.3.5)$$

⁷The Basel problem.

Πρόταση 3.3.5 (Euler-Maclaurin summation formula - γενική μορφή). Έστω a, b, m θετικοί ακέραιοι, $a < b$, και συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ με $f^{(2m)}(t)$ απολύτως ολοκληρώσιμη σε αυτό. Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{j=a}^b f(j) &= \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} (f^{(2s-1)}(b) - f^{(2s-1)}(a)) \\ &\quad + \int_a^b \frac{B_{2m} - \tilde{B}_{2m}(t)}{(2m)!} f^{(2m)}(t)dt, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

όπου $B_m, B_m(x), \tilde{B}_m(x)$ είναι ο m -οστός αριθμός Bernoulli, το m -οστό πολυώνυμο Bernoulli και ο αντίστοιχος περιοδικός αριθμός Bernoulli, δηλαδή:

$$\tilde{B}_m(x) := B_m(m - [x]).$$

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε μία απόδειξη. Για μία διαφορετική, αλλά παρόμοια προσέγγιση παραπέμπουμε τον αναγνώστη, για παράδειγμα, στο σύγγραμμα [1]. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2} [f(k) + f(k+1)] - \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt.$$

Αθροίζοντας την ταυτότητα αυτή για $k = a, \dots, b$ λαμβάνουμε

$$\sum_{j=a}^b f(j) = \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] + \int_a^b f(t)dt + \int_a^b B_1(t - [t]) f'(t)dt.$$

Θυμίζουμε ότι τα πολυώνυμα Bernoulli, $B_n(x)$ ικανοποιούν για κάθε $n \geq 2$ την αναδρομική σχέση

$$B_n(x) = nB_{n-1}(x), \quad B_n(0) = B_n(1),$$

καθώς επίσης ότι όλοι οι αριθμοί Bernoulli με μονό δείκτη μεγαλύτερο της μονάδας είναι ίσοι με το μηδέν. Εφαρμόζοντας συνεχώς την κατά παράγοντες ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=a}^b f(j) &= \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] + \int_a^b f(t)dt + \sum_{s=1}^m (-1)^{s+1} \frac{B_{s+1}}{(s+1)!} \\ &\quad \times (f^{(s)}(b) - f^{(s)}(a)) + \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \int_a^b B_{m+1}(t) f^{(m+1)}(t)dt, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

και το ζητούμενο έπεται άμεσα. ■

Αναμφίβολα, η φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin είναι ένα κομψό εργαλείο που μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε το **πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα** μίας μεγάλης κλάσης αθροισμάτων της μορφής

$$S(N) = \sum_{j=1}^N f(j), \quad N \rightarrow \infty.$$

Μάλιστα, το ανάπτυγμα αυτό εκφράζεται μέσω των αριθμών και πολυωνύμων Bernoulli όπως περιγράφεται στην ακόλουθη

Πρόταση 3.3.6

$$\sum_{j=1}^N f(j) \sim \frac{1}{2}f(N) + \int_0^N f(t)dt + C + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!} f^{(j)}(N), \quad N \rightarrow \infty, \quad (3.3.8)$$

όπου η σταθερά C δίδεται από τη σχέση

$$C = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^m (-1)^j \frac{B_{j+1}}{(j+1)!} f^{(j)}(0) + \frac{1}{2} f(0) + \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \int_0^\infty B_{m+1}(t - [t]) f^{(m+1)}(t) dt \right]. \quad (3.3.9)$$

Παρατήρηση 3.3.7 Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι ο πρωτεύων όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της σχέσης (3.3.8) εξαρτάται από τη συμπεριφορά της σειράς $\sum_{j=1}^\infty f(j)$. Συγκεκριμένα,

$$\sum_{j=1}^N f(j) \sim \int_1^N f(t) dt, \quad \text{εάν} \quad \sum_{j=1}^\infty f(j) = \infty,$$

$$\sum_{j=1}^N f(j) \sim C, \quad \text{εάν} \quad \sum_{j=1}^\infty f(j) < \infty.$$

Το πρώτο από τα παραδείγματα που θα παρουσιάσουμε είναι μία γνωστή εφαρμογή της φόρμουλας άθροισης των Euler-Maclaurin.

Παράδειγμα 3.3.8 Η συμπεριφορά του $\ln(n!)$, καθώς $n \rightarrow \infty$ και ο τύπος του Stirling.

Επειδή

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k,$$

θα εφαρμόσουμε τον τύπο άθροισης των Euler-Maclaurin για τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$, $n \rightarrow \infty$. Είναι ⁸

$$\sum_{k=1}^n \ln k = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + C + \frac{B_2}{2n} + \frac{B_3}{3!n^2} + \frac{2B_4}{4!n^3} + \dots, \quad (3.3.10)$$

όπου

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n + n \right).$$

⁸Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο (μέθοδος Laplace με κινητό μέγιστο) ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης Γάμμα

$$\Gamma(x+1) := \int_0^\infty e^{-t} t^x dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

η οποία λαμβάνει τη μορφή

$$\int_0^\infty e^{-t+x \ln t} dt, \quad x \rightarrow \infty,$$

με την αλλαγή μεταβλητής

$$t := xs,$$

μετατρέπεται σε ένα ολοκλήρωμα Laplace. Πράγματι,

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1} e^{-x} \left(\frac{2\pi}{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Σχετικά με τον δεύτερο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα είχαμε δείξει ότι

$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left(1 + \frac{1}{12x} \right), \quad x \rightarrow \infty,$$

η οποία για ακέραιο x δίνει τους δύο πρώτους όρους της ποσότητας $n!$.

Θυμίζουμε τώρα μία σημαντική παρατήρησή μας από το Πρώτο κεφάλαιο. Εάν,

$$f(x) - g(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

τότε μπορούμε να πούμε ότι

$$e^{f(x)} \sim e^{g(x)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με αυτήν την παρατήρηση από τη σχέση (3.3.10) λαμβάνουμε

$$n! \sim n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-ne^C}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3.11)$$

Από την ταυτότητα Wallis έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \cdots (2n)(2n)}{1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \cdots (2n-1)(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως

$$\frac{2 \times 4 \times 6 \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times (2n-1) \sqrt{2n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad n \rightarrow \infty$$

και πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του παραπάνω κλάσματος με τον αριθμητή του λαμβάνουμε

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (3.3.11) η τελευταία αποδίδει

$$\frac{2^{2n} \left(n^{(2n+1)} e^{-2n} e^{2C} \right)}{(2n)^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)} e^{-2n} e^C} \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Συνεπώς,

$$e^C \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

και επειδή αναφερόμαστε σε σταθερές

$$C = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Αντικαθιστώντας στην (3.3.10) καταλήγουμε ότι

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{B_2}{2n} + \frac{B_3}{3!n^2} + \frac{2B_4}{4!n^3} + \cdots, \quad n \rightarrow \infty.$$

Παράδειγμα 3.3.9 Η συμπεριφορά του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N k \ln k, \quad N \rightarrow \infty.$$

Επειδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \ln k = \infty,$$

ο πρωτεύων όρος του αθροίσματός μας, καθώς $N \rightarrow \infty$, θα προκύψει από τη συνεισφορά του άνω άκρου ολοκλήρωσης της ποσότητας

$$\int_1^N t \ln t \, dt.$$

Έχουμε λοιπόν από τις (3.3.8) και (3.3.9) έχουμε

$$\sum_{k=1}^N k \ln k \sim \frac{1}{2}N^2 \ln N - \frac{1}{4}N^2 + \frac{1}{2}N \ln N + \frac{1}{12} \ln N + C + \frac{1}{720N^2} + \dots, N \rightarrow \infty.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή οι δύο πρώτοι όροι προέκυψαν από το ολοκλήρωμα $\int_1^N t \ln t dt$, ο τρίτος όρος από τον όρο $\frac{1}{2}N \ln N$, ενώ ο τέταρτος από τον πρώτο όρο του αθροίσματος που περιέχει τους αριθμούς *Bernoulli* στη σχέση (3.3.8). **Η σταθερά C συμμετέχει στον πέμπτο όρο.** Για την τιμή της σταθεράς αυτής C έχουμε

$$\begin{aligned} C &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^N k \ln k - \left(\frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N + \frac{1}{12} \right) \ln N + \frac{1}{4}N^2 \right) \\ &= \frac{\gamma + \ln(2\pi)}{12} - \frac{\zeta'(2)}{2\pi^2} \\ &= \frac{1}{12} - \zeta'(-1). \end{aligned}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η σταθερά

$$e^C \approx 1.28242712910062263687 \dots$$

είναι η σταθερά **Glaisher** η οποία συνδέεται με τις συναρτήσεις **Kinkelin** και **Barnes G**.

Παράδειγμα 3.3.10 Ο πρώτος ασυμπτωτικός όρος του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k - 1}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι⁹

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1} = C < \infty.$$

Επομένως,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k - 1} \sim C, \quad N \rightarrow \infty.$$

Σχετικά με την τιμή της σταθεράς C έχουμε

$$C = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots \approx 1.6066.$$

Παράδειγμα 3.3.11 Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right), \quad p > 0.$$

⁹Για παράδειγμα, εάν εφαρμόσει κάποιος το κριτήριο σύγκρισης χρησιμοποιώντας τη συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

Η ποσότητα

$$S(p) := 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

υπολογίζεται ακριβώς από την ταυτότητα **Faulhaber** (επίσης γνωστή και ως ταυτότητα Bernoulli). Αυτή εκφράζει το άθροισμα $S(p)$ ως πολώνυμο βαθμού $(p+1)$:

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k} \\ &= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{k=2}^p \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}, \end{aligned}$$

όπου B_k είναι, φυσικά, οι αριθμοί Bernoulli. Μπορούμε όμως να έχουμε επαρκή απάντηση από τη φόρμουλα άθροισμα Euler-Maclaurin:

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} n^p + O(n^{p-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3.12)$$

Από τη σχέση (3.3.12) μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε το ζητούμενο όριο:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} n^p + O(n^{p-1})}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Σημείωση 3.3.12 Εναλλακτικά μπορεί κανείς να υπολογίσει το όριο αυτό με το Θεώρημα των Stolz-Cesaro.

Παράδειγμα 3.3.13 Θα βρούμε τους πρώτους όρους από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N \sqrt{k}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Επειδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} = \infty,$$

έχουμε άμεσα από τη φόρμουλα άθροισμα Euler-Maclaurin (δηλαδή τη σχέση (3.3.8) για τη συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$)

$$\sum_{k=1}^N \sqrt{k} \sim \int_0^N \sqrt{t} dt + \frac{1}{2} \sqrt{N} + C + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!} f^{(j)}(N), \quad N \rightarrow \infty,$$

ή μετά τις πράξεις

$$\sum_{k=1}^N \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} N^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} N^{\frac{1}{2}} + C + \frac{1}{24} N^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1920} N^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{9216} N^{-\frac{9}{2}} + \cdots, \quad N \rightarrow \infty,$$

όπου η σταθερά C εκφράζεται στην περίπτωση αυτή μέσω της συνάρτησης ζήτα ως:¹⁰

$$C = \zeta\left(-\frac{1}{2}\right).$$

¹⁰ Ακριβέστερα έχουμε

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Το ζητούμενο μπορεί να υπολογιστεί και μέσω της συναρτησιακής εξίσωσης

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

από όπου έχουμε

$$\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta\left(-\frac{1}{2}\right)} = -4\pi,$$

καταλήγοντας έτσι ότι¹¹

$$C = \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0.207886224977 \dots$$

Παράδειγμα 3.3.14 Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

όπου

$$C = \int_1^\infty \{t\} \frac{1 - \log t}{t^2} dt.$$

Με εφαρμογή του τύπου άθροισης των Euler-Maclaurin μπορούμε να βρούμε όσους όρους επιθυμούμε στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$\sum_{n=1}^N \frac{\log n}{n}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Ας βρούμε τον επόμενο όρο. Επειδή,

$$\int_1^\infty \frac{\log t}{t} dt \sim \frac{\ln^2 N}{2}, \quad N \rightarrow \infty,$$

έχουμε

$$\sum_{n=1}^N \frac{\log n}{n} \sim \frac{\ln^2 N}{2} + C + \frac{\ln N}{2N} + \dots, \quad N \rightarrow \infty.$$

Ο επόμενος όρος είναι $O\left(\frac{\ln N}{N^2}\right)$.

Παράδειγμα 3.3.15 Η συμπεριφορά της ποσότητας

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Επειδή

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$$

και

$$\int_1^N \frac{1}{\sqrt{t}} dt \sim 2\sqrt{N}, \quad N \rightarrow \infty,$$

¹¹Θυμίζουμε ότι $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ και ότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

έχουμε

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{N} + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{N}} + \frac{1}{24N\sqrt{N}} + \dots, \quad N \rightarrow \infty,$$

όπου

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -1.4603545088 \dots$$

Συνεχίζουμε με ένα ακόμη

Παράδειγμα 3.3.16 Η συμπεριφορά της ποσότητας

$$\sum_{k=2}^N \sqrt{\ln k}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Προφανώς,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N \sqrt{\ln k} = \infty.$$

Θα ξεκινήσουμε με το ολοκλήρωμα

$$I(N) := \int_2^N \sqrt{\ln t} dt.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής

$$y := \sqrt{\ln t}$$

έχουμε

$$I(N) = \int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln N}} y (e^{y^2})' dy = [ye^{y^2}]_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln N}} - \int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln N}} e^{y^2} dy.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι¹²

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(3)(5) \cdots (2n-1)}{(2x^2)^n} \right], \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.3.13)$$

Συνεπώς,

$$I(N) \sim N\sqrt{\ln N} - \frac{N}{2\sqrt{\ln N}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(3)(5) \cdots (2n-1)}{(2 \ln N)^n} \right], \quad N \rightarrow \infty.$$

Με εφαρμογή του τύπου άθροισης των Euler-Maclaurin έχουμε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματός μας το οποίο ταυτίζεται με αυτό του $I(N)$, $N \rightarrow \infty$.

¹²Στο σημείο αυτό θυμίζουμε στον αναγνώστη ότι όπως έχουμε ήδη δείξει (βλέπε σχέση (2.1.9))

$$\int_0^x e^{t^4} dt \sim \frac{e^{x^4}}{4x^3} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3)(7) \cdots (4n-1)}{(4x^4)^n} \right], \quad x \rightarrow \infty.$$

Η απόδειξη της (3.3.13) είναι παρόμοια.

3.3.1 Ασκήσεις

Άσκηση 3.3.17 Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \ln N - \gamma \right).$$

Άσκηση 3.3.18 Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right).$$

Άσκηση 3.3.19 Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} - 2N^{-1} - \zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}N^{-\frac{5}{2}}.$$

Άσκηση 3.3.20 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.3.21 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N \sqrt{\ln k}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.3.22 Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N \ln k \sqrt{\ln k}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.3.23 Να βρείτε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N \sqrt[3]{k^2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.3.24 Να βρείτε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.3.25 Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των αθροισμάτων

$$\sum_{k=2}^N \ln^2 k, \quad N \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{k=2}^N k \ln^2 k, \quad N \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{k=2}^N k^3 \ln^2 k, \quad N \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{k=2}^N \ln^3 k, \quad N \rightarrow \infty.$$

Υπόδειξη. Οι σταθερές του δευτέρου και τρίτου αθροίσματος είναι αντίστοιχα $-\zeta'(1)$ και $-\zeta'(3)$.

Άσκηση 3.3.26 Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των αθροισμάτων

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^N \frac{\ln k}{k^2}, \quad N \rightarrow \infty, \\ \sum_{k=2}^N \frac{\ln k}{k^3}, \quad N \rightarrow \infty, \\ \sum_{k=2}^N \frac{\ln^2 k}{k^2}, \quad N \rightarrow \infty, \\ \sum_{k=2}^N \frac{\ln^2 k}{k}, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.3.27 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των αθροισμάτων (p : πρώτος μεγαλύτερος του 2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \sqrt[p]{k}, \quad N \rightarrow \infty, \\ \sum_{k=1}^N \sqrt[p]{k}, \quad N \rightarrow \infty, \\ \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt[p]{k}}, \quad N \rightarrow \infty, \\ \sum_{k=2}^N \sqrt[p]{\ln k}, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

3.4 Αρμονικοί και Υπερ-αρμονικοί αριθμοί

Ορισμός 3.4.1 Ο N -οστός αρμονικός αριθμός H_N ορίζεται για κάθε φυσικό αριθμό ως:

$$H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

Ασφαλώς,

$$H_N := H_{N-1} + \frac{1}{N}, \quad H_1 = 1.$$

Οι πρώτοι αρμονικοί αριθμοί είναι¹³

$$\begin{aligned} H_1 = 1, H_2 = 3/2, H_3 = 11/6, H_4 = 25/12, H_5 = 137/60, \\ H_6 = 49/20, H_7 = 363/140, H_8 = 761/280, H_9 = 7129/2520. \end{aligned}$$

Πριν μιλήσουμε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των αρμονικών αριθμών (καθώς $N \rightarrow \infty$), ας δούμε μια ενδιαφέρουσα σχέση η οποία τους συνδέει με ένα εναλλασσόμενο άθροισμα που περιέχει διωνυμικούς όρους. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k \frac{1}{k} = -H_N.$$

¹³ $H_0 = 0$.

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \\
 &= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k t^{k-1} \right] \\
 &= \int_0^1 \frac{(1-t)^N - 1}{t} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{x^N - 1}{1-x} dx \\
 &= -H_N,
 \end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα προέκυψε από το Διωνυμικό Θεώρημα, ενώ η τελευταία με την αλλαγή μεταβλητής $x = 1 - t$.

Ερώτηση. Ποια είναι η συμπεριφορά των αρμονικών αριθμών όταν $N \rightarrow \infty$;

Η απάντηση δίδεται με απλή εφαρμογή του τύπου άθροισης των Euler-Maclaurin (δηλαδή τη σχέση (3.3.8) για τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t}$) και περιγράφεται στο ακόλουθο

Παράδειγμα 3.4.2 Η πλήρης ασυμπτωτική συμπεριφορά του αθροίσματος

$$H_N =: \sum_{j=1}^N \frac{1}{j}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο πώς μπορούμε να φτάσουμε μέχρι τον δεύτερο όρο. Καθώς

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty,$$

έχουμε άμεσα το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματός μας ως ακολούθως:

$$H_N := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \sim \ln N + C + \frac{1}{2N} - \frac{B_2}{2N^2} - \frac{B_4}{4N^4} - \frac{B_6}{6N^6} - \dots, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.4.1)$$

Για την τιμή της σταθεράς C έχουμε

$$\begin{aligned}
 C &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{j} - \ln N \right) \\
 &= \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) \\
 &= \gamma \approx 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992 \dots,
 \end{aligned}$$

η γνωστή σταθερά των Euler-Mascheroni.

Συνεχίζουμε με μία πολύ γνωστή ειδική συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.4.3 Το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης **δίγαμμα** (*digamma function*):

$$\begin{aligned}\psi(x) &:= \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x)) \\ &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.\end{aligned}$$

Η συνάρτηση **δίγαμμα** είναι η λογαριθμική παράγωγος της συνάρτησης **Γάμμα**. Θυμίζουμε ότι η συνάρτηση Γάμμα ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0. \quad (3.4.2)$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία (ως προς x) και διαιρώντας την προκύπτουσα εξίσωση με $\Gamma(x+1)$ έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\Gamma'(x+1) &= x\Gamma'(x) + \Gamma(x) \\ \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} &= \frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x+1)} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x+1)} \\ &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει με διπλή εφαρμογή της σχέσεως (3.4.2). Από τον ορισμό της συνάρτησης **δίγαμμα** η τελευταία ισότητα γράφεται στη μορφή

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x},$$

από όπου εύκολα με άθροιση της τηλεσκοπικής αυτής ισότητας καταλήγουμε στη σχέση που συνδέει τη συνάρτηση **δίγαμμα** με τους αρμονικούς αριθμούς ως εξής:

$$\psi(n) = H_{n-1} - \gamma. \quad (3.4.3)$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma.$$

Με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής σχέσης (3.4.1) λαμβάνουμε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης **δίγαμμα**, από τη σχέση (3.4.3) η οποία αποδίδει

$$\psi(n) \sim \ln n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{kn^k}, \quad n \rightarrow \infty,$$

όπου b_k είναι οι **αριθμοί Bernoulli δευτέρου είδους** οι οποίοι ορίζονται μέσω της γεννήτριας συνάρτησης

$$\frac{t}{\log(1+t)} (1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Οι πρώτοι αριθμοί Bernoulli δευτέρου είδους είναι

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{6}, \quad b_3 = \frac{1}{4}, \quad b_4 = -\frac{19}{30}, \quad b_5 = \frac{9}{4} \dots$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα συνδυάσουμε τον τύπο άθροισης κατά μέρη του Abel, αλλά και τη φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin.

Παράδειγμα 3.4.4 Το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N H_k, \quad N \rightarrow \infty.$$

Γνωρίζοντας τη συμπεριφορά των αρμονικών αριθμών H_N , $N \rightarrow \infty$, περιμένουμε ότι ο πρώτος όρος θα είναι $N \ln N$. Για τους επόμενους όρους θα χρειαστεί λίγη δουλειά. Από τον τύπο της άθροισης κατά μέρη του Abel (βλέπε τη σχέση (3.1.12)) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N H_k &= \sum_{k=1}^N H_k [(k+1) - k] \\ &= (N+1)H_N - H_1 - \sum_{k=2}^N 1 \\ &= (N+1)H_N - 1 - (N-1) \\ &= (N+1)H_N - N. \end{aligned}$$

Στην τελευταία έκφραση μπορούμε να καταλήξουμε και με **αλλαγή της σειράς άθροισης**:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N H_k &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \sum_{k=j}^N 1 \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} (N - j + 1) \\ &= (N+1)H_N - N. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Το αποτέλεσμα μας συχνά γράφεται στη μορφή (η απόδειξη είναι άμεση εάν γράψουμε: $H_N = H_{N+1} - \frac{1}{N+1}$).

$$\sum_{k=1}^N H_k = (N+1)(H_{N+1} - 1). \tag{3.4.5}$$

Για να πάμε στο ζητούμενο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα θα χρειαστούμε τη βοήθεια της σχέσης (3.4.1). Λαμβάνουμε

$$\sum_{k=1}^N H_k \sim N \ln N + (\gamma - 1)N + \ln N + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{12} \frac{1}{N} - \frac{1}{12N^2} + \dots, \quad N \rightarrow \infty. \tag{3.4.6}$$

Και το παράδειγμα που ακολουθεί θα το δούμε με δύο τρόπους (με τον τύπο άθροισης κατά μέρη του Abel, αλλά και τη φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin).

Παράδειγμα 3.4.5 Το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N H_k^2, \quad N \rightarrow \infty.$$

Γνωρίζοντας τη συμπεριφορά των αρμονικών αριθμών H_N , $N \rightarrow \infty$, περιμένουμε ότι ο πρώτος όρος θα είναι $N \ln^2 N$. Για τους επόμενους όρους θα χρειαστεί -και εδώ- λίγο παραπάνω δουλειά. Από τον τύπο της άθροισης κατά μέρη του Abel (βλέπε τη σχέση (3.1.12)) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N H_k^2 &= \sum_{k=1}^N H_k^2 [(k+1) - k] \\ &= (N+1)H_N^2 - H_1^2 - \sum_{k=2}^N (H_k^2 - H_{k-1}^2) \\ &= (N+1)H_N^2 - 1 - \sum_{k=2}^N \left(2H_k - \frac{1}{k}\right) \\ &= (N+1)H_N^2 - 2 \sum_{k=1}^N H_k + H_N. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.4.4) από το προηγούμενο παράδειγμα λαμβάνουμε

$$\sum_{k=1}^N H_k^2 = (N+1)H_N^2 - (2N+1)H_N + 2N.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N H_k^2 &= \sum_{k=1}^N H_k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \sum_{k=j}^N H_k \quad (\text{αλλαγή της σειράς άθροισης}) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \left(\sum_{k=1}^N H_k - \sum_{k=1}^{j-1} H_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} [(N+1)(H_{N+1} - 1) - j(H_j - 1)] \quad (3.4.5) \\ &= (N+1) \left(H_N + \frac{1}{N+1} \right) H_N - (N+1)H_N - (N+1)(H_{N+1} - 1) + N \\ &= (N+1)H_N^2 - 2 \sum_{k=1}^N H_k + H_N. \end{aligned}$$

Έχοντας το τελευταίο αποτέλεσμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.4.4) και να καταλήξουμε σε έναν κλειστό τύπο που θα είναι συνάρτηση μόνον της ποσότητας H_N :

$$\sum_{k=1}^N H_k^2 = (N+1)H_N^2 - (2N+1)H_N + 2N,$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (3.4.1) μπορούμε να βρούμε όσους όρους επιθυμούμε επί του ζητούμενου ασυμπτωτικού αναπτύγματος:

$$\sum_{k=1}^N H_k^2 \sim N \ln^2 N + 2(\gamma - 1)N \ln N + (\gamma^2 - 2\gamma + 2)N - \dots, \quad N \rightarrow \infty.$$

Σημείωση 3.4.6 Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να βρει κλειστούς τύπους και ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την ποσότητα

$$\sum_{k=1}^N H_k^p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Παρατήρηση 3.4.7 Μία όχι και τόσο εύκολη (???) ανισότητα.

Έστω

$$H_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Θα θέλαμε να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$:

$$\sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον εάν $n = 1$. Η συνάρτηση

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

είναι η συνάρτηση αθροίσματος διαιρετών (*sum of divisors function*). Για παράδειγμα, $\sigma(6) = 12$.

Ερώτηση.

Γιατί θα είναι σημαντικό εάν αποδείξει κάποιος αυτήν την ανισότητα;

Απάντηση.

Διότι, όπως απέδειξε ο Jeffrey C. Lagarias¹⁴ η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την εικασία του Riemann.

3.4.1 Γενικευμένοι αρμονικοί αριθμοί

Ορισμός 3.4.8 Ο γενικευμένος N -οστος αρμονικός αριθμός τάξεως m : $H_N^{(m)}$ ορίζεται για κάθε φυσικό αριθμό N και για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m ως:

$$H_N^{(m)} := \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^m}.$$

Οι ακόλουθες παρατηρήσεις, προφανώς, ισχύουν:

- $H_N^{(0)} = N$,
- $H_N^{(1)} = H_N$,
- $\lim_{N \rightarrow \infty} H_N^{(m)} = \zeta(m)$, $m > 1$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα σχετικά με τη συμπεριφορά γενικευμένων αρμονικών αριθμών καθώς $N \rightarrow \infty$.

Παράδειγμα 3.4.9 Η πλήρης ασυμπτωτική συμπεριφορά του αθροίσματος

$$H_N^{(2)} := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

¹⁴An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis, Amer. Math. Monthly. 109 (6) pp. 534–543, (2002).

Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα και συγκεκριμένα στην (3.3.5) το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα έως τον τρίτο όρο. Από τη φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin βρίσκουμε άμεσα το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ως εξής: Επειδή,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < \infty,$$

αυτός είναι και ο πρωτεύων όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματός μας. Έχουμε ¹⁵:

$$H_N^{(2)} := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2} \sim \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} - \frac{1}{6N^3} + \frac{1}{30N^5} - \frac{1}{42N^7} + \dots, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.4.7)$$

Παράδειγμα 3.4.10 Η πλήρης ασυμπτωτική συμπεριφορά του αθροίσματος

$$H_N^{(4)} := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^4}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Επειδή

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

έχουμε ήδη βρει τον πρωτεύοντα όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος. Σχετικά με το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα έχουμε:

$$H_N^{(4)} := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^4} \sim \frac{\pi^4}{90} + \frac{1}{2N} - \frac{B_2}{2N^2} - \frac{B_4}{4N^4} - \frac{B_6}{6N^6} - \dots, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.4.8)$$

Παράδειγμα 3.4.11 Ο πρωτεύων όρος του

$$H_N^{(p)} := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^p}, \quad p > 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

Επειδή όπως ήδη αναφέραμε $\lim_{N \rightarrow \infty} H_N^{(p)} = \zeta(p)$, $p > 1$, έχουμε

$$H_N^{(p)} := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^p} \sim \zeta(p), \quad p > 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

Ειδικά για την περίπτωση $p = 3$ ισχύει

$$H_N^{(3)} := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^3} \sim \zeta(3), \quad N \rightarrow \infty,$$

όπου

$$\zeta(3) = 1.2020569031595942853997381615114499907649 \dots$$

¹⁵Θυμίζουμε ότι $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ..., ενώ $B_{2k+1} = 0$, $k = 1, 3, 5, \dots$

είναι η γνωστή σταθερά του Apery.¹⁶

Συνεχίζουμε με ένα ακόμη παράδειγμα που αφορά τον υπολογισμό μιας σειράς στον γενικό όρο της οποίας εμφανίζεται ο αρμονικός αριθμός δεύτερης τάξης:

Παράδειγμα 3.4.12 Ο υπολογισμός του αθροίσματος

$$S_N := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(s)}}{n^s}, \quad s \in \{2, 3, \dots\}.^{17}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} S_N &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} && \text{(ορισμός)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^s} && \text{(αλλαγή σειράς άθροισης)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^s} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \right)^s - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} - \frac{1}{k^s} \right) \\ &= \zeta^2(s) - S_N + \zeta(2s). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$S_N = \frac{\zeta^2(s) + \zeta(2s)}{2}.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $s = 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{\zeta^2(2) + \zeta(4)}{2} \\ &= \frac{7}{4} \zeta(4) \\ &= \frac{7\pi^4}{360}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.4.13 Το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$S_N := \sum_{m=1}^N \frac{H_m}{m}, \quad N \rightarrow \infty.$$

¹⁶Ο Roger Apery είχε Γαλλίδα μητέρα και Έλληνα πατέρα.

¹⁷Με την περίπτωση $s = 1$ ασχολείται το επόμενο παράδειγμα.

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
 S_N &:= \sum_{m=1}^N \frac{H_m}{m} \\
 &= \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \quad (\text{ορισμός}) \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \sum_{m=k}^N \frac{1}{m} \quad (\text{αλλαγή της σειράς άθροισης}) \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} (H_N - H_{k-1}) \\
 &= H_N \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} H_{k-1} \\
 &= H_N^2 - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(H_k - \frac{1}{k} \right) \\
 &= H_N^2 - S_N + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$S_N := \sum_{m=1}^N \frac{H_m}{m} = \frac{1}{2} H_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (3.4.1) και (3.4.7) (που ήδη ανακαλύψαμε σε προηγούμενα παραδείγματα με εφαρμογή του τύπου αθροισής των Euler-Maclaurin) λαμβάνουμε καθώς $N \rightarrow \infty$

$$S_N := \sum_{m=1}^N \frac{H_m}{m} = \frac{\ln^2 N}{2} + \gamma \ln N + \frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) + \frac{\ln N}{2N} + \frac{\gamma - 1}{2N} + \left(\frac{\ln N}{N^2} \right).$$

Φυσικά, μπορούμε να βρούμε όσους όρους επιθυμούμε, εάν προχωρήσουμε βαθύτερα στα αναπτύγματα των (3.4.1) και (3.4.7).

Παράδειγμα 3.4.14 Θα υπολογίσουμε την τιμή

$$e^{2H_N + H_N^{(2)} + H_N^{(4)}}$$

με απόλυτο σφάλμα $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$, $N \rightarrow \infty$.

Με τη βοήθεια των σχέσεων (3.4.1), (3.4.7), και, (3.4.8) έχουμε καθώς $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 e^{2H_N + H_N^{(2)} + H_N^{(4)}} &= e^{2 \ln N + 2\gamma + \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)} \\
 &\times e^{\zeta(2) - \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)} \\
 &\times e^{\zeta(4) + \frac{1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)} \\
 &= N^2 e^{2\gamma + \zeta(2) + \zeta(4)} e^{\frac{1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)} \\
 &= N^2 e^{2\gamma + \zeta(2) + \zeta(4)} \left(1 + \frac{1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right).
 \end{aligned}$$

3.4.2 Υπερ-αρμονικοί αριθμοί

Ορισμός 3.4.15 Ο N -οστός υπερ-αρμονικός αριθμός τάξεως r : $H(N, r)$ ορίζεται αναδρομικά για κάθε φυσικό αριθμό N και για κάθε μη αρνητικό ακέραιο r ως:

$$H(N, 0) = \frac{1}{N},$$

$$H(N, r) := \sum_{k=1}^N H(k, r-1).$$

Οι ακόλουθες παρατηρήσεις, προφανώς, ισχύουν:

- $H(N, 1) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = H_N,$
- $H(N, r) = H(N-1, r) + H(N, r-1).$

Τους αριθμούς αυτούς εισήγαγαν οι J. H. Conway και R. K. Guy το 1995, στο σύγγραμμά τους με τίτλο *The Book of Numbers*, Copernicus.¹⁸

Ερώτηση 3.4.16 Ποια είναι η συμπεριφορά των υπεραρμονικών αριθμών $H(N, r)$ όταν $N \rightarrow \infty$;

Η απάντηση σχετικά με την ερώτηση αυτή (τουλάχιστον ως προς τον πρωτεύοντα όρο) δίδεται από την ακόλουθη ασυμπτωτική σχέση:

$$H(N, r) \sim \frac{1}{(r-1)!} N^{r-1} \ln N, \quad N \rightarrow \infty, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (3.4.9)$$

Για $r = 1$ η (3.4.9) ισχύει άμεσα και μάλιστα έχουμε εύκολα το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, καθώς όπως είδαμε

$$H(N, 1) = H_N,$$

και η συμπεριφορά της ποσότητας H_N είναι γνωστή μέσω του τύπου άθροισης των Euler-Maclaurin.

Για $r = 2$ έχουμε από τον ορισμό

$$H(N, 2) = \sum_{k=1}^N H(k, 1)$$

$$= \sum_{k=1}^N H_k$$

και από τη σχέση (3.4.6) έχουμε το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα διαθέσιμο, και φυσικά η σχέση (3.4.9) ισχύει και στην περίπτωση αυτή.

¹⁸Ο μεγάλος John Horton Conway έφυγε από αυτόν τον κόσμο στις 11 Απριλίου 2020.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση όπου $r = 3$ (με παρόμοια βήματα μπορεί κανείς να γενικεύσει). Έχουμε

$$\begin{aligned}
 H(N, 3) &= \sum_{k=1}^N H(k, 2) \\
 &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k H_j \\
 &= \sum_{j=1}^N H_j \sum_{k=j}^N 1 \\
 &= \sum_{j=1}^N H_j (N - j + 1) \\
 &= (N + 1) \sum_{j=1}^N H_j - \sum_{j=1}^N j H_j.
 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Για το άθροισμα $\sum_{j=1}^N H_j$ έχουμε διαθέσιμο το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (από τη σχέση ((3.4.6)). Για το άθροισμα $\sum_{j=1}^N j H_j$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N j H_j &= \sum_{j=1}^N j \sum_{k=1}^j \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \sum_{j=k}^N j \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left[\frac{N(N+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} \right] \\
 &= \frac{N(N+1)}{2} H_N + \frac{1}{2} \left(N - \frac{N(N+1)}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Από τις σχέσεις (3.4.10), (3.4.11), και (3.4.6) έχουμε

$$H(N, 3) = (N + 1)^2 H_N - \frac{N(N + 1)}{2} H_N - N(N + 1) - \frac{1}{2}N + \frac{1}{4}N(N + 1),$$

και επειδή η συμπεριφορά της ποσότητας H_N είναι γνωστή μέσω του τύπου άθροισης των Euler-Maclaurin, μετά από τις σχετικές πράξεις μπορούμε να λάβουμε όσους όρους από το ζητούμενο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα επιθυμούμε. Σε κάθε περίπτωση πάντως και ως προς τον πρώτο όρο έχουμε

$$H(N, 3) \sim \frac{1}{2}N^2 \ln N, \quad N \rightarrow \infty.$$

Παρατήρηση 3.4.17 Μία άμεση συνέπεια της σχέσης (3.4.9) είναι η ακόλουθη:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H(k, r)}{k^m} < \infty, \quad m > r. \tag{3.4.12}$$

3.4.3 Ασκήσεις

Άσκηση 3.4.18 Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος για το άθροισμα

$$\sum_{m=1}^N \frac{H_m}{m^2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.4.19 Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος για το άθροισμα

$$\sum_{m=1}^N \frac{H_m}{m^3}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.4.20 Να αποδειχθεί ότι η ακόλουθη σειρά συγκλίνει για $m > r$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H(k, r)}{k^m}.$$

Άσκηση 3.4.21 Να βρεθεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N k H_k, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.4.22 Να βρεθεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N k^2 H_k, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.4.23 Να βρεθεί το πλήρες ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N k^3 H_k, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.4.24 Να βρεθούν οι πέντε πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^N H_k^3, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.4.25 Να υπολογιστεί η τιμή της ποσότητας

$$e^{\left(\sum_{k=1}^N k H_k\right) + \left(\sum_{k=1}^N H_k\right) + H_N}$$

με απόλυτο σφάλμα $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$, $N \rightarrow \infty$.

Άσκηση 3.4.26 Να υπολογιστεί η ποσότητα

$$e^{H(N,2)}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.4.27 Να υπολογιστεί η ποσότητα

$$e^{H(N,3)}, \quad N \rightarrow \infty.$$

3.5 Μερικές ακόμη τεχνικές για την ασυμπτωτική συμπεριφορά αθροισμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε και μερικούς ακόμη τρόπους για τη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς αθροισμάτων που εξαρτώνται από μία μεγάλη παράμετρο. Αυτοί οι τρόποι έρχονται να προστεθούν στον τύπο άθροισης των Euler-Maclaurin, ώστε ο αναγνώστης να έχει περισσότερα εργαλεία στη διάθεσή του.

Παράδειγμα 3.5.1 Θεωρούμε την ακολουθία

$$a_j = e^{jc_j}, \quad \text{όπου η ακολουθία } c_j \text{ είναι αύξουσα με } \lim_{j \rightarrow \infty} c_j = \infty.$$

Τότε,

$$A_N = \sum_{j=1}^N a_j \sim a_N, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.5.1)$$

Για την απόδειξη έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} A_N &= \sum_{j=1}^N e^{jc_j} \\ &\leq \sum_{j=1}^N e^{jc_N} \\ &= \frac{e^{(N+1)c_N} - e^{c_N}}{e^{c_N} - 1} \\ &\leq M e^{(N+1)c_N}, \end{aligned}$$

όπου

$$M = \frac{1}{e^{c_1} - 1}.$$

Επειδή

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M e^{(N+1)c_N}}{a_{N+1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} M e^{(c_N - c_{N+1})} (N+1) = 0$$

το ζητούμενο έπεται άμεσα.

Παρόμοιο είναι και το ακόλουθο

Παράδειγμα 3.5.2 Η συμπεριφορά της (συγκλίνουσας) σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^4 x^2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Με επιχειρήματα παρόμοια με αυτά του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε ότι ο πρώτος όρος σβήνει όλους τους υπόλοιπους. Έτσι, για τον πρώτο όρο έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^4 x^2} \sim 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεχίζουμε με ένα γενικό παράδειγμα στο οποίο προσεγγίζουμε το άθροισμά μας με ολοκληρώματα Riemann.

¹⁹ Δηλαδή με τις υποθέσεις μας ο τελευταίος όρος του αθροίσματος (3.5.1) σβήνει όλους τους υπόλοιπους. Αυτό φυσικά ισχύει για τον πρωτεύοντα όρο.

Παράδειγμα 3.5.3 Η συμπεριφορά του αθροίσματος

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x^2)^2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Είναι λογικό το άθροισμά μας να συμπεριφέρεται σαν τον όρο $\frac{C}{x^m}$ με πιθανότερη επιλογή για το m την τιμή 4, καθώς το $S(x)$ φθίνει προς το μηδέν σαν το x^{-4} καθώς $x \rightarrow \infty$. Σε λίγο θα δούμε ότι αυτό **δεν ισχύει**. Έχουμε

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2\right]^2} \frac{1}{x^4},$$

και

$$x^3 S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2\right]^2} \frac{1}{x}, \quad (3.5.2)$$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt, \quad (3.5.3)$$

(που προφανώς συγκλίνει - μάλιστα η τιμή του είναι $\frac{\pi}{4}$) και την ακόλουθη διαμέριση: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ με $t_n = \frac{n}{x}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Τότε, καθώς το $x \rightarrow \infty$ η σειρά του δευτέρου μέλους της σχέσης (3.5.2) είναι το άθροισμα Riemann για το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.5.3). Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 S(x) = \frac{\pi}{4}$$

καταλήγοντας έτσι στον πρωτεύοντα όρο

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x^2)^2} \sim \frac{\pi}{4x^3}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Συνεχίζουμε με ένα πολύ κλασικό

Παράδειγμα 3.5.4 Η συμπεριφορά της ποσότητας

$$S_N = N! \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{1}{k!}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Επειδή οι όροι φθίνουν γρήγορα θα θεωρήσουμε όλη τη σειρά, και θα αφαιρέσουμε την ουρά την οποία και θα φράξουμε ελπίζοντας σε φράγμα μικρότερο του πρώτου όρου.

Έχουμε

$$\begin{aligned} S_N &= N! \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} - N! \sum_{k=N+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \\ &= N! e^{-1} - N! \sum_{k=N+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e}.$$

Είναι

$$R_N := \sum_{k=N+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

και

$$\begin{aligned} |R_N| &< \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} + \dots \\ &= \frac{1}{N} \\ &= o(1), \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$S_N = N! \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} N! + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Παράδειγμα 3.5.5 Το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2N}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t) := e^{-\frac{t^2}{2N}}, \quad t \geq 0,$$

η οποία είναι φθίνουσα στο $[0, \infty]$. Το άθροισμα λοιπόν μπορεί να προσεγγιστεί με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα με απόλυτο σφάλμα της τάξεως $O(1)$. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με τον τύπο άθροισης Euler-Maclaurin. Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2N}} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2N}} dt + O(1), \quad N \rightarrow \infty.$$

Ως προς το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της παραπάνω ισότητας και με τη βοήθεια της αλλαγής μεταβλητής $t := \sqrt{2N}y$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2N}} dt &= \sqrt{2N} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi N}{2}}, \end{aligned}$$

διότι

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2N}} = \sqrt{\frac{\pi N}{2}} + O(1), \quad N \rightarrow \infty.$$

3.5.1 Ασκήσεις

Άσκηση 3.5.6 Να βρεθεί ο πρώτος ασυμπτωτικά όρος στα ακόλουθα αθροίσματα ($N \rightarrow \infty$)

$$\sum_{j=1}^N e^{jm}, \quad m > 1,$$

$$\sum_{j=1}^N j^j,$$

$$\sum_{j=1}^N j!.$$

Άσκηση 3.5.7 Η συμπεριφορά της (συγκλίνουσας) σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^{2m}x^{2b}}, \quad m, b > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.5.8 Να βρεθεί ο πρώτος όρος επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος των αθροισμάτων

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x^2)^3}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x^2)^4}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x^2)^6}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Γενικεύστε το αποτέλεσμα σας για την ποσότητα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x^2)^m}, \quad m \geq 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.5.9 Να βρεθεί ο πρώτος όρος επί του ασυμπτωτικού αναπτύγματος των αθροισμάτων

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^3}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^4}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Γενικεύστε το αποτέλεσμα σας για την ποσότητα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^m}, \quad m > 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.5.10 Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι όροι του αθροίσματος

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{N}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.5.11 Να βρεθεί ο πρώτος ασυμπτωτικός όρος στα ακόλουθα αθροίσματα ($N \rightarrow \infty$)

$$\sum_{j=2}^N e^{j^b \ln j}, \quad b > 0,$$

$$\sum_{j=1}^N e^{j \cos h j},$$

$$\sum_{j=1}^N e^{j \sin h j},$$

$$\sum_{j=1}^N e^{j \sin^2 h j}.$$

Βιβλιογραφία

- [1] E.T. Whittaker και G.N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1927.
- [2] Γ. Δάσιος. *Εισαγωγή στην Ασυμπτωτική Ανάλυση*. Αθήνα: Τσότρας, 2016.
- [3] R. Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals*. New York, NY, USA: Academic Press, 1989.
- [4] N.M. Temme. *Asymptotic Methods for Integrals*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2015.
- [5] F.W.J. Olver. *Asymptotics and Special Functions*. New York, NY, USA: Academic Press, 1974.
- [6] J.D. Murray. *Asymptotic Analysis*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1984.
- [7] H. Havil. *Gamma, Exploring Euler's Constant*. New Jersey, NY, USA: Princeton University Press, 2003.
- [8] G.H. Hardy. *Divergent Series*. London, UK: Oxford University Press, 1949.
- [9] P. Flajolet και R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008.
- [10] A. Erdelyi. *Asymptotic Expansions*. New York, NY, USA: Dover Publications Inc., 2010.
- [11] N.G. De Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland Publishing & Co., 1961.
- [12] G. Boros και V.H. Moll. *Irresistible Integrals: Symbolics, Analysis and Experiments in the Evaluation of Integrals*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [13] C.M. Bender και S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1999.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΑ ΣΤΟΥΣ ΑΡΤΙΟΥΣ

Θα αποδείξουμε τη φόρμουλα (Α.0.1) η οποία είναι γνωστή από τον Euler:

$$2\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!} B_{2k}, \quad (\text{Α.0.1})$$

Βήμα 1. Ξεκινάμε από τη γνωστή σχέση

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \right).$$

Είναι

$$\begin{aligned} \cot x &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{n\pi}} + \frac{1}{1 - \frac{x}{n\pi}} \right) \\ &\stackrel{|x| < n\pi}{=} \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{n\pi} \right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi} \right)^{2k} - \left(\frac{x}{n\pi} \right)^{2k+1} \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{n\pi} \right)^{2k} - \left(\frac{x}{n\pi} \right)^{2k+1} \right] \right) \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi} \right)^{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k}} \zeta(2k), \end{aligned} \quad (\text{Α.0.2})$$

όπου στην πέμπτη ισότητα αλλάξαμε τη σειρά άθροισης.

Βήμα 2. Θα δείξουμε ότι

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2B_{2n} (2x)^{2n-1}}{(2n)!}. \quad (\text{A.0.3})$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση (η οποία όπως έχουμε δει είναι άρτια)

$$f(x) := \left(B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - B_1 x = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}.$$

Για να εισάγουμε υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουμε

$$f(x) = \frac{x \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right)}{2 \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right)} = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2},$$

καθώς

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Όπως έχουμε δει το ανάπτυγμα Taylor του αριστερού μέλους έχει μηδενικούς τους περιττούς όρους του (με την αφαίρεση του όρου $B_1 x$). Συνεπώς,

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n} x^{2n}}{(2n)!}.$$

Άρα,

$$\coth x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n} (2x)^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Όμως

$$\coth(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = -i \cot x,$$

από όπου έπεται το ζητούμενο του Βήματος 2. Εξισώνουμε τώρα τις δύο εκφράσεις για τη συνάρτηση $\cot x$ (δηλαδή τις (A.0.2) και (A.0.3) και η απόδειξη της (A.0.1) ολοκληρώθηκε. ■

*Το παρόν σύγγραμμα χρηματοδοτήθηκε
από το Πρόγραμμα Δημοσίων Επενδύσεων του Υπουργείου Παιδείας.*