Χρησιμότητα

Αντώνης Παπαβασιλείου, ΕΜΠ

Βασισμένο στον Varian [1]

Περιεχόμενα

- Απόλυτη χρησιμότητα
- Κατασκευή μιας συνάρτησης χρησιμότητας
- Μερικά παραδείγματα συναρτήσεων χρησιμότητας
  - Παράδειγμα: καμπύλες αδιαφορίας από μια συνάρτηση χρησιμότητας
  - Τέλεια υποκατάστατα
  - Τέλεια συμπληρώματα
  - Οιωνεί γραμμικές προτιμήσεις
  - Προτιμήσεις Cobb Douglas
- Οριακή χρησιμότητα
- Οριακή χρησιμότητα και οριακός λόγος υποκατάστασης
- Χρησιμότητα από τα μεταφορικά μέσα
- Παράρτημα

Εξέλιξη της σχέσης όσον αφορά τη χρησιμότητα

- Οι παλαιότερες οικονομικές θεωρίες αντιλαμβάνονταν τη χρησιμότητα ως πρωταρχικό μέγεθος για την περιγραφή της συμπεριφοράς των καταναλωτών
- Στην πορεία έγινε αντιληπτό πως το μόνο που έχει σημασία για την εξήγηση της συμπεριφοράς είναι να μεγιστοποιείται η χρησιμότητα
- Και αυτό μετέθεσε το βάρος στις **προτιμήσεις των καταναλωτών** ως πρωτογενές μετρήσιμο μέγεθος, και η χρησιμότητα υποβιβάστηκε σε *μέσο περιγραφής των προτιμήσεων*
- Έγινε συγκεκριμένα αντιληπτό ότι το μόνο που έχει σημασία έχει η σχετική τιμή της χρησιμότητας, και όχι το απόλυτό της μέγεθος
  - Δεδομένου ενός συνδυασμού αγαθών (x_1, x_2) και ενός συνδυασμού αγαθών (y_1, y_2), το ότι η χρησιμότητα του (x_1, x_2) είναι υψηλότερη της χρησιμότητας του (y_1, y_2) σημαίνει πως το (x_1, x_2) είναι προτιμότερο του (y_1, y_2)
  - Στη μοντέρνα οικονομική θεωρία αυτό που έχει σημασία είναι πως το (x_1, x_2) είναι προτιμότερο του (y_1, y_2), η χρησιμότητα είναι απλά ένα εργαλείο περιγραφής των προτιμήσεων

Συνάρτηση χρησιμότητας

- Η **συνάρτηση χρησιμότητας** είναι η ανάθεση μιας αριθμητικής τιμής σε κάθε συνδυασμό αγαθών, με τον εξής τρόπο:

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) \Leftrightarrow u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$$

- Το μέγεθος της διαφοράς χρησιμότητας δεν έχει σημασία, μόνο η κατάταξη των καλαθιών ως προς χρησιμότητα, για αυτόν το λόγο αναφερόμαστε σε **τακτική χρησιμότητα** (ordinal utility)

Παράδειγμα: χρησιμότητα τριών συνδυασμών αγαθών

Συνδυασμός αγαθών	U_1	U_2	U_3
A	3	17	-1
B	2	10	-2
C	1	0.002	-3

Τρεις ισοδύναμοι τρόποι να απεικονίσουμε ότι το $A \succ B \succ C$

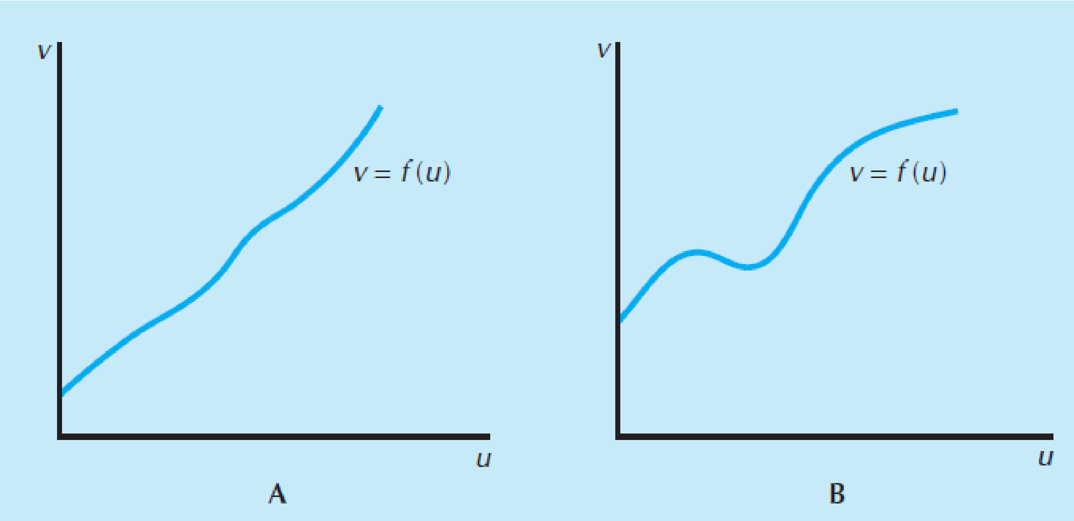
Μονοτονικοί μετασχηματισμοί

- Αν μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο να αναθέσουμε τιμές σε συνδυασμούς αγαθών ώστε αυτό να συνεπάγεται συγκεκριμένες προτιμήσεις, τότε μπορούμε να βρούμε άπειρους τρόπους
    - Πχ: πολλαπλασιασμός επί 2
- Ένας **μονοτονικός μετασχηματισμός** είναι ένας τρόπος μετατροπής ενός συνόλου αριθμών σε άλλους αριθμούς που διατηρεί τη διάταξη των αρχικών αριθμών
- Μαθηματικά, αναπαριστούμε ένα μονοτονικό μετασχηματισμό με μια μονοτονική συνάρτηση $f(u)$ με την ιδιότητα ότι $u_1 > u_2 \Rightarrow f(u_1) > f(u_2)$

Παραδείγματα μονοτονικών μετασχηματισμών

- Πολλαπλασιασμός με θετικό αριθμό (πχ $f(u) = 3u$)
- Πρόσθεση σταθεράς (πχ $f(u) = u + 17$)
- Ύψωση σε μονή δύναμη (πχ $f(u) = u^3$)

Κλίση μονοτονικού μετασχηματισμού



- Δεδομένου ότι η κλίση μιας συνάρτησης είναι $\frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{f(u_2)-f(u_1)}{u_2-u_1}$, οι μονοτονικοί μετασχηματισμοί έχουν παντού θετική κλίση
- Στο σχήμα, ο μετασχηματισμός Α είναι μονοτονικός, ο Β δεν είναι

Ερώτηση 4.1

- Το κείμενο αναφέρει πως το να υψώσουμε έναν αριθμό σε μονή δύναμη είναι μονοτονικός μετασχηματισμός
- Αυτό ισχύει και αν υψώσουμε έναν αριθμό σε ζυγή δύναμη; Παραμένει μονοτονικός μετασχηματισμός;

Απάντηση στην ερώτηση 4.1

- Η συνάρτηση $f(u) = u^2$ είναι μονοτονικός μετασχηματισμός για θετικά u, αλλά όχι για αρνητικά u

Ερώτηση 4.2

Ποιοι από τους ακόλουθους είναι μονοτονικοί μετασχηματισμοί;

1. $u = 2v - 13$
2. $u = -1/v^2$
3. $u = 1/v^2$
4. $u = lnv$
5. $u = -e^{-v}$
6. $u = v^2$
7. $u = v^2$ για $v > 0$
8. $u = v^2$ για $v < 0$

Απάντηση στην ερώτηση 4.2

1. $u = 2v - 13$: Ναι
2. $u = -1/v^2$: Όχι (είναι μόνο για v θετικό)
3. $u = 1/v^2$: Όχι (είναι μόνο για v αρνητικό)
4. $u = lnv$: Ναι (ορίζεται μόνο για v θετικό)
5. $u = -e^{-v}$: Ναι
6. $u = v^2$: Όχι
7. $u = v^2$ για $v > 0$: Ναι
8. $u = v^2$ για $v < 0$: Όχι

Οι μονοτονικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τις ίδιες προτιμήσεις

1. Η συνάρτηση χρησιμότητας $u(x_1, x_2)$ αντιπροσωπεύει ορισμένες προτιμήσεις σημαίνει πως $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$
2. Αλλά αν η $f(u)$ είναι μονοτονικός μετασχηματισμός, τότε $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2) \Leftrightarrow f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$
3. Άρα $f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2)) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$

- Συνεπώς η $f(u)$ αντιστοιχεί στις ίδιες ακριβώς προτιμήσεις με την u
- Γεωμετρικά, οι συναρτήσεις χρησιμότητας αντιστοιχούν σε αριθμητικές ετικέτες στις καμπύλες αδιαφορίας, με προτιμότερους συνδυασμούς αγαθών να παίρνουν υψηλότερη ετικέτα

Απόλυτη χρησιμότητα

Απόλυτη χρησιμότητα

- Υπάρχουν οικονομικές θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί βασιζόμενες στην έννοια της **απόλυτης χρησιμότητας** (cardinal utility)
- Η μέτρηση της τακτικής χρησιμότητας είναι απλή: παρουσιάζουμε σε έναν καταναλωτή δύο δυνατούς συνδυασμούς αγαθών, και παρατηρούμε ποιο συνδυασμό επιλέγει, αυτός λαμβάνει μεγαλύτερη χρησιμότητα
- Αλλά πώς μετράμε το ότι προτιμώ κάτι δύο φορές περισσότερο; (πχ πληρώνω διπλάσια, περιμένω διπλάσιο χρόνο, διακινδυνεύω διπλάσιο ποσό για να το αποκτήσω; ...)
- Και αν ακόμα δεχθούμε πως κάποιος από αυτούς τους τρόπους μέτρησης είναι πειστικός, δε δίνει περισσότερη πληροφορία από την τακτική χρησιμότητα, δεδομένου ότι το μόνο που χρειάζεται να ξέρουμε για να μεγιστοποιήσουμε χρησιμότητα είναι η σχετική κατάταξη δύο συνδυασμών αγαθών
- Συνεπώς, τέτοιες οικονομικές θεωρίες δε θα εξεταστούν περαιτέρω στο μάθημα

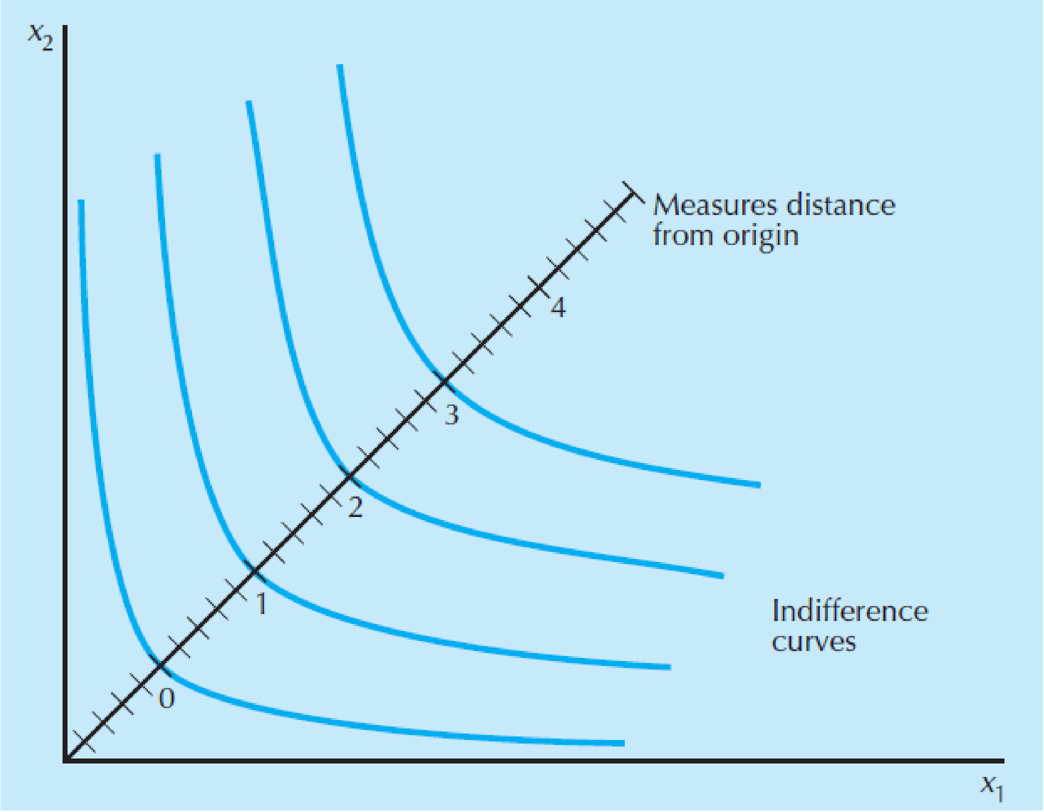
Κατασκευή μιας συνάρτησης χρησιμότητας

Ύπαρξη συνάρτησης χρησιμότητας

- Πώς ξέρουμε ότι υπάρχει διάταξη χρησιμοτήτων που να αναπαριστά οποιοδήποτε σχήμα προτιμήσεων;
- Άσχημα νέα: δεν αναπαρίστανται όλες οι προτιμήσεις με συναρτήσεις χρησιμότητας
  - Παράδειγμα: έστω ότι $A \succ B \succ C \succ A$
- Αλλά για προτιμήσεις που δεν είναι περίεργες (πχ που δεν παραβιάζουν τη μεταβατικότητα), έχουμε τρόπο ανάθεσης χρησιμοτήτων

Κατασκευή συναρτήσεων χρησιμότητας

- Έστω ότι μας δίνεται ένας χάρτης καμπυλών αδιαφορίας όπως στο σχήμα
- Θα αποδείξουμε στην άσκηση 4.3 ότι αν οι προτιμήσεις είναι μονοτονικές τότε η διαγώνια γραμμή που περνά από την αρχή των αξόνων τέμνει κάθε καμπύλη αδιαφορίας ακριβώς μία φορά
- Τραβάμε τη διαγώνια γραμμή, και αντιστοιχούμε σε κάθε καμπύλη αδιαφορίας την απόσταση του σημείου τομής της με τη διαγώνια γραμμή
- Άρα η μέθοδος κατασκευής που προτείνουμε πληροί τα κριτήρια μιας συνάρτησης χρησιμότητας:
    - Κάθε συνδυασμός αγαθών αντιστοιχεί σε μία τιμή
    - Και προτιμότερα αγαθά λαμβάνουν υψηλότερες τιμές χρησιμότητας



Ερώτηση 4.3

- Ισχυριστήκαμε πως, αν οι προτιμήσεις είναι μονοτονικές, τότε μια διαγώνια γραμμή που περνά από την αρχή των αξόνων τέμνει κάθε καμπύλη αδιαφορίας ακριβώς μία φορά
- Μπορείτε να το αποδείξετε μαθηματικά;
- Στοιχείο: τι θα συνέβαινε αν κάποια καμπύλη αδιαφορίας τεμνόταν δύο φορές;

- Υπενθύμιση: έστω συνδυασμοί αγαθών (x_1, x_2) και (y_1, y_2) με το δεύτερο συνδυασμό να περιέχει τουλάχιστον όσο ο πρώτος σε κάθε αγαθό και ένα από τα δύο αγαθά αυστηρώς περισσότερο, τότε οι προτιμήσεις είναι μονοτονικές αν $(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$

Απάντηση στην ερώτηση 4.3

- Έστω ότι η διαγώνιος τέμνει μια ορισμένη καμπύλη αδιαφορίας σε δύο σημεία, έστω (x, x) και (y, y)
- Τότε είτε $x > y$ είτε $y > x$, που σημαίνει πως ένας από τους δύο συνδυασμούς έχει περισσότερο και από τα δύο αγαθά
- Αλλά αν οι προτιμήσεις είναι μονοτονικές, τότε ένας από τους συνδυασμούς πρέπει να είναι προτιμότερος από τον άλλο

Μερικά παραδείγματα συναρτήσεων χρησιμότητας

Παράδειγμα: καμπύλες αδιαφορίας από μια συνάρτηση χρησιμότητας

Τέλεια υποκατάστατα

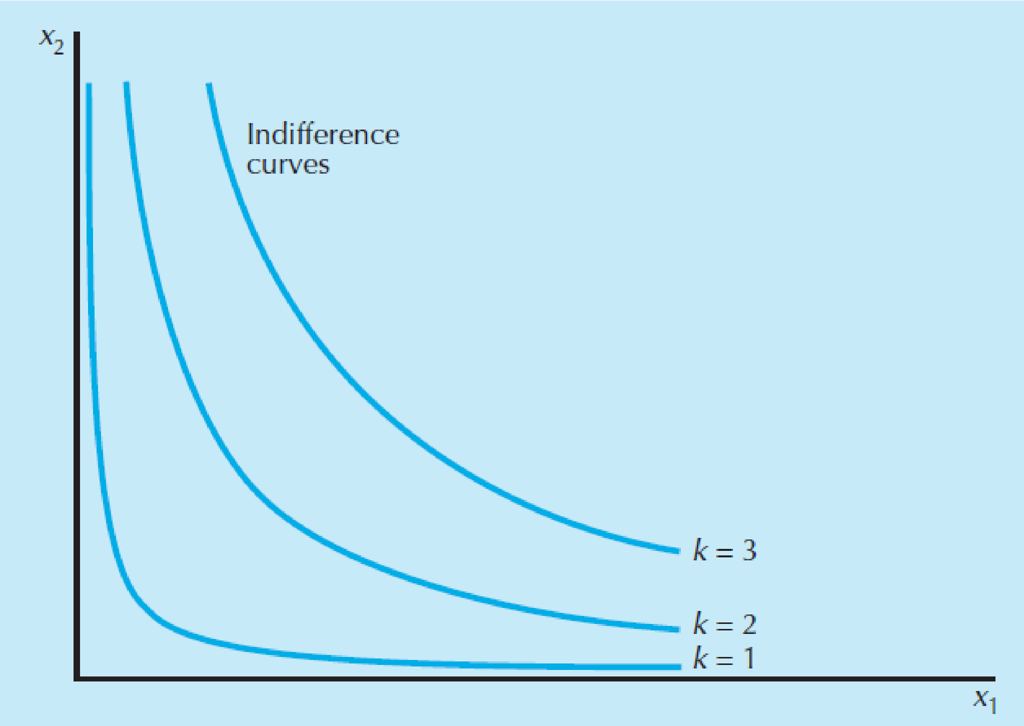
Τέλεια συμπληρώματα

Οιωνεί γραμμικές προτιμήσεις

Προτιμήσεις Cobb Douglas

Καμπύλες αδιαφορίας από συναρτήσεις χρησιμότητας

- Είναι εύκολο να πάμε από συναρτήσεις χρησιμότητας σε καμπύλες αδιαφορίας
- Οι καμπύλες αδιαφορίας είναι οι ισοϋψείς της καμπύλης χρησιμότητας
- Για παράδειγμα, έστω ότι $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, τότε οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν τη μορφή $x_2 = \frac{k}{x_1}$ για σταθερά k



Μονοτονικός μετασχηματισμός

- Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$, τι μορφή έχουν οι καμπύλες αδιαφορίας;
- Έχουμε $v(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^2 = u(x_1, x_2)^2$, όπου $u(x_1, x_2)$ η συνάρτηση χρησιμότητας της προηγούμενης διαφάνειας
- Και επειδή η χρησιμότητα $u(x_1, x_2)$ είναι μη αρνητική για μη αρνητική ποσότητα αγαθών, ο μετασχηματισμός είναι μονοτονικός
- Άρα οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με την προηγούμενη διαφάνεια, απλά με διαφορετικές ετικέτες (πχ η καμπύλη αδιαφορίας με την ετικέτα $u(x_1, x_2) = 3$ έχει τώρα την ετικέτα 9)

Τέλεια υποκατάστατα

- Έστω ότι κάποιος ενδιαφέρεται μόνο για το συνολικό αριθμό μολυβιών, και δεν τον νοιάζει αν είναι κόκκινα ή μπλε, τότε $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, όπου x_1 τα κόκκινα και x_2 τα μπλε μολύβια
- Αν το αγαθό 1 έχει *διπλάσια* αξία από το αγαθό 2 (δηλαδή κάποιος είναι διατεθιμένος να υποκαταστήσει 2 μονάδες του αγαθού 2 για το αγαθό 1) τότε $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$
- Οι μονοτονικοί μετασχηματισμοί περιγράφουν την ίδια συμπεριφορά (πχ η συνάρτηση $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ περιγράφει τις ίδιες προτιμήσεις με τη συνάρτηση $x_1 + x_2$)
- Οι προτιμήσεις για τα τέλεια υποκατάστατα αναπαρίστανται στη γενική περίπτωση από συναρτήσεις χρησιμότητας της μορφής

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

όπου τα a, b είναι θετικές σταθερές

- Η κλίση των γραμμικών καμπυλών αδιαφορίας είναι $-a/b$

Ερώτηση 4.4

- Τι είδους προτιμήσεις αναπαρίστανται από τη συνάρτηση χρησιμότητας $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$;
- Από τη συνάρτηση χρησιμότητας $v(x_1, x_2) = 13x_1 + 13x_2$;

Απάντηση στην ερώτηση 4.4

- Και οι δύο αναπαριστούν τέλεια υποκατάστατα

Τέλεια συμπληρώματα

- Προτιμήσεις για ζευγάρια παπουτσιών: $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ όπου x_1 ο αριθμός των παπουτσιών αριστερού ποδιού και x_2 ο αριθμός παπουτσιών δεξιού ποδιού
- Άλλο παράδειγμα: έστω ότι θέλουμε 2 κουταλιές ζάχαρη για κάθε κούπα τσαγιού, τότε $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, \frac{1}{2}x_2\}$
- Οι μονοτονικοί μεταχηματισμοί (για παράδειγμα πολλαπλασιασμοί με θετικούς αριθμούς) οδηγούν σε ισοδύναμες προτιμήσεις, πχ το $\min\{2x_1, x_2\}$ επίσης αναπαριστά τις ίδιες προτιμήσεις με την $\min\{x_1, \frac{1}{2}x_2\}$
- Γενική έκφραση συναρτήσεων χρησιμότητας για τέλεια συμπληρώματα:

$$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$

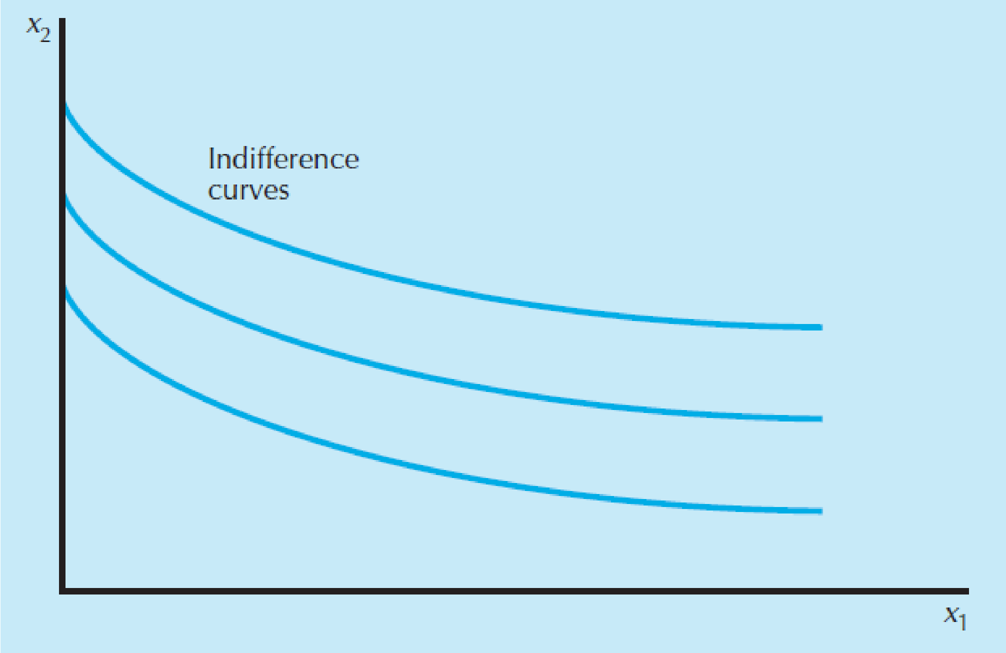
όπου τα a, b είναι θετικές σταθερές

Οιωνεί γραμμικές προτιμήσεις

- Έστω ότι οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κάθετες μεταθέσεις η μία της άλλης
- ‘Αρα έχουν τη μορφή

$$x_2 = k - v(x_1)$$

όπου το k είναι ετικέτα για διαφορετικές καμπύλες αδιαφορίας



Συναρτησιακή μορφή των οιωνεί γραμμικών προτιμήσεων

- Λύνοντας ως προς το k, έχουμε την εξής μορφή για τις καμπύλες αδιαφορίας
$$u(x_1, x_2) = k = v(x_1) + x_2$$
- Άρα είναι συναρτήσεις που είναι γραμμικές ως προς το αγαθό 2, αλλά μη γραμμικές ως προς το αγαθό 1, άρα “σχεδόν” γραμμικές / **οιωνεί γραμμικές**
- Παραδείγματα: $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ ή $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$

Ερώτηση 4.5

- Τι είδους προτιμήσεις αναπαρίστανται από τη συνάρτηση χρησιμότητας $u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$;
- Είναι η συνάρτηση χρησιμότητας $v(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1\sqrt{x_2} + x_2$ μονοτονικός μετασχηματισμός της $u(x_1, x_2)$;

Απάντηση στην ερώτηση 4.5

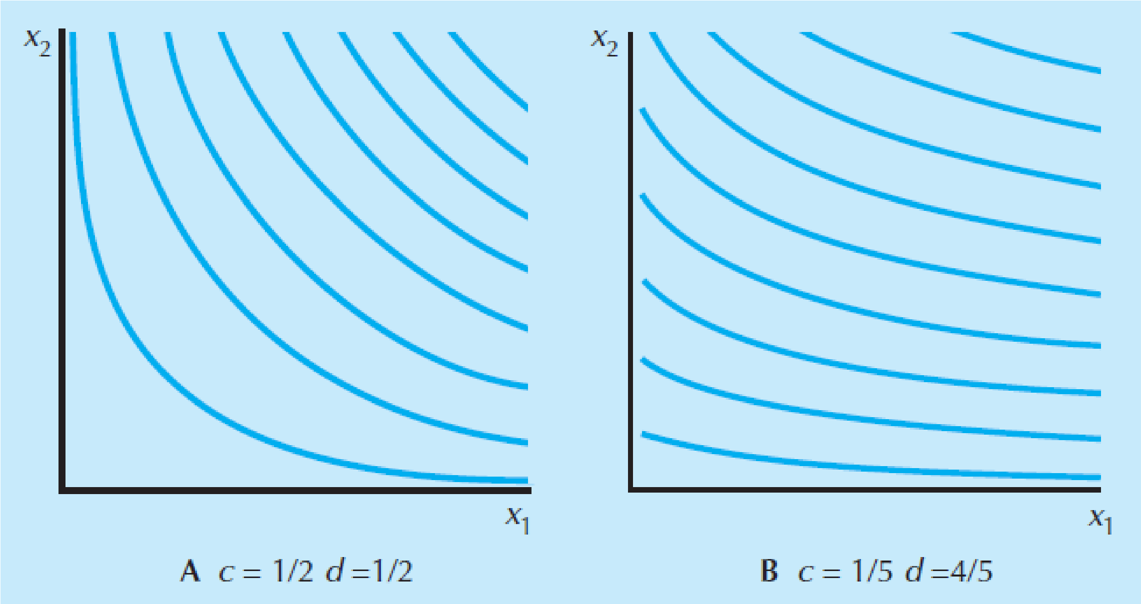
- Οιωνεί γραμμικές
- Ναι

Προτιμήσεις Cobb-Douglas

- Συνάρτηση χρησιμότητας **Cobb-Douglas**:

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

όπου τα c και d είναι θετικές σταθερές



Συναρτήσεις χρησιμότητας Cobb-Douglas

- Από τις απλούστερες συναρτήσεις χρησιμότητας με "καλή" συμπεριφορά (αυστηρώς κυρτές)
- Οι μονοτονικοί μετασχηματισμοί οδηγούν σε ισοδύναμες προτιμήσεις:
$$v(x_1, x_2) = \ln\left(x_1^c x_2^d\right) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$
- Έστω ότι υψώνουμε στη δύναμη $1/(c+d)$, τότε έχουμε ισοδύναμες προτιμήσεις με τη συνάρτηση χρησιμότητας
$$x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}$$
- Και ορίζοντας $a = \frac{c}{c+d}$, έχουμε
$$v(x_1, x_2) = x_1^a x_1^{1-a}$$
- Άρα μπορούμε πάντα να παίρνουμε εκθέτες που αθροίζονται σε 1

Ερώτηση 4.6

- Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$

Τι είδους προτιμήσεις αναπαριστά;

- Είναι η συνάρτηση $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ μονοτονικός μετασχηματισμός της $u(x_1, x_2)$;
- Είναι η συνάρτηση $w(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ μονοτονικός μεταχηματισμός της $u(x_1, x_2)$;

Απάντηση στην ερώτηση 4.6

- Η συνάρτηση χρησιμότητας αντιστοιχεί σε προτιμήσεις Cobb-Douglas
- Όχι (πρέπει να βρούμε αντιπαράδειγμα)
  - $(x_1, x_2) = (2,1) \Rightarrow u = \sqrt{2}$ και $v = 4$
  - $(x_1, x_2) = (1,4) \Rightarrow u = 2$ και $v = 4$
  - Άρα ενώ το u αυξάνεται, το v παραμένει σταθερό
- Ναι (γιατί το $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ είναι μη αρνητικό)

Οριακή χρησιμότητα

Οριακή χρησιμότητα

- Έστω ένας καταναλωτής που καταναλώνει (x_1, x_2), η οριακή αλλαγή της χρησιμότητας του καταναλωτή αν του δώσουμε λίγο ακόμα από το αγαθό 1 ορίζεται ως η **οριακή χρησιμότητα**:

$$MU_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{U(x_1 + \Delta x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

όπου το x_2 διατηρείται σταθερό, άρα μιλάμε για μερική παράγωγο

- Άρα $\Delta U = MU_1 \Delta x_1$
- Αντίστοιχα, η οριακή χρησιμότητα για το αγαθό 2 είναι

$$MU_2 = \frac{\Delta U}{\Delta x_2} = \frac{U(x_1, x_2 + \Delta x_2)}{\Delta x_2}$$

- Και $\Delta U = MU_2 \Delta x_2$
- Δεδομένου ότι η οριακή χρησιμότητα εξαρτάται από το μέγεθος της χρησιμότητας (πχ διπλασιασμός της συνάρτησης οδηγεί σε διπλάσια οριακή χρησιμότητα), δεν έχει συμπεριφορικό περιεχόμενο
- Αλλά ο οριακός λόγος υποκατάστασης (τον οποίο θα δούμε αμέσως) είναι αμετάβλητος για μονοτονικούς μετασχηματισμούς

Οριακή χρησιμότητα και οριακός λόγος υποκατάστασης

Οριακός λόγος υποκατάστασης

- Ο ΟΛΥ έχει οριστεί ως η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας σε ένα δεδομένο επίπεδο κατανάλωσης
- Διαισθητικά είναι ο ρυθμός με τον οποίο ο καταναλωτής είναι διατεθιμένος να αντικαταστήσει μια ποσότητα του αγαθού 2 για το αγαθό 1
- Μαθηματικά, η συνολική αλλαγή χρησιμότητας θέλουμε να είναι μηδέν:
$$MU_1 \Delta x_1 + MU_2 \Delta x_2 = \Delta U = 0$$
- Λύνοντας για την κλίση της καμπύλης αδιαφορίας:
$$MRS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{MU_1}{MU_2} \quad (4.1)$$
- Ο ΟΛΥ είναι αρνητικός: αν λάβουμε περισσότερο από το αγαθό 1, πρέπει να χάσουμε κάποιο από το αγαθό 2 για να παραμείνουμε αδιάφοροι
- Ο ΟΛΥ είναι ανεξάρτητος ενός μονοτονικού μετασχηματισμού, πχ αν πολλαπλασιάσουμε κατά 2 τη συνάρτηση χρησιμότητας έχουμε
$$MRS = -\frac{2MU_1}{2MU_2} = -\frac{MU_1}{MU_2}$$

Ερώτηση 4.7

- Μπορείς να εξηγήσεις γιατί ο μονοτονικός μετασχηματισμός μιας συνάρτησης χρησιμότητας δεν αλλάζει τον οριακό λόγο υποκατάστασης;

Απάντηση στην ερώτηση 4.7

- Γιατί ο ΟΛΥ μετράται επί μιας καμπύλης αδιαφορίας, και η χρησιμότητα παραμένει σταθερή πάνω στην καμπύλη αδιαφορίας

Χρησιμότητα από τα μεταφορικά μέσα

Εφαρμογή στο χώρο των οικονομικών μεταφοράς

- Όταν σκεφτόμαστε για επιλογές μεταφοράς, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μεταφορά ως μια συλλογή χαρακτηριστικών, για παράδειγμα:
  - x_1: χρόνος μεταφοράς
  - x_2: χρόνος αναμονής
  - …
- Έστω ότι $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ οι τιμές αυτών των χαρακτηριστικών για οδήγηση, και $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ για λεωφορείο, τότε μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα ανάλογα με τις επιλογές των καταναλωτών μεταξύ οδήγησης ή μεταφοράς με λεωφορείο
- Και διαλέγοντας καταναλωτές παρόμοιου προφίλ, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους β_i μιας πχ γραμμικής συνάρτησης χρησιμότητας:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

Συνάρτηση χρησιμότητας σε μια πραγματική μελέτη

- Μια μελέτη αναφέρει την εξής συνάρτηση χρησιμότητας:
$$U(TW, TT, C) = -0.147TW - 0.0411TT - 2.24C$$
- Όπου
  - TW: συνολικός χρόνος περπατήματος από – προς το λεωφορείο ή αυτοκίνητο
  - TT: συνολικός χρόνος διαδρομής σε λεπτά
  - C: συνολικό κόστος ταξιδιού σε \$

Μερικά συμπεράσματα / χρήσεις της συνάρτησης χρησιμότητας

- Ο μέσος καταναλωτής προτιμά να υποκαταστήσει 3 λεπτά επιπλέον ταξιδιού με 1 λεπτό περπατήματος από – προς το μέσο μεταφοράς
- Ο μέσος καταναλωτής αποτιμά ένα λεπτό ταξιδιού κατά 0.0411/2.24=0.0183 $ ανά λεπτό, δηλαδή 1.1 $ ανά ώρα
  - Το μέσο ωρομίσθιο το έτος της μελέτης (1967) ήταν 2.85 $ ανά ώρα
- Έστω ότι ο δήμος θέλει να αγοράσει νέα λεωφορεία σε ένα ορισμένο κόστος:
  - Θα αξίζει το επιπλέον όφελος των χρηστών λεωφορείου το επιπλέον κόστος;
  - Θα μπορέσει ο δήμος να καλύψει το κόστος από τους επιπλέον χρήστες;

Παράρτημα

Υπολογισμός οριακού λόγου υποκατάστασης

- Μπορούμε να υπολογίσουμε τον οριακό λόγο υποκατάστασης με δύο μεθόδους:
  - Χρησιμοποιώντας το ολικό διαφορικό
  - Χρησιμοποιώντας έμμεσες συναρτήσεις
- Οριακή χρησιμότητα:

$$MU_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

- Άρα η μερική παράγωγος της χρησιμότητας ως προς το αγαθό 1

Μέθοδος συνολικής αλλαγής χρησιμότητας

- Έστω ότι αλλάζουμε κατά (dx_1, dx_2) την κατανάλωση, η συνθήκη για μηδενική αλλαγή στη χρησιμότητα είναι

$$du = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

- Λύνοντας ως προς dx_2/dx_1, έχουμε

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

Μέθοδος έμμεσης συνάρτησης

- Ορίζουμε ως $x_2(x_1)$ το πώς πρέπει να επιλέξουμε το x_2 καθώς αλλάζει το x_1 για να μείνουμε στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας
- Άρα η συνάρτηση $x_2(x_1)$ πρέπει να ικανοποιεί την εξής συνθήκη:

$$u\big(x_1, x_2(x_1)\big) = k$$

όπου k είναι η ετικέτα της εν λόγω καμπύλης αδιαφορίας

- Παίρνουμε την παράγωγο και των δύο πλευρών της ταυτότητας ως προς x_1:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = 0$$

- Λύνοντας ως προς $\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1}$, βρίσκουμε

$$\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

Μονοτονικός μετασχηματισμός

- Έστω ένας μονοτονικός μετασχηματισμός μιας συνάρτησης χρησιμότητας $v(x_1, x_2) = f(u(x_1, x_2))$
- Ο ΟΛΥ υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{ΟΛΥ} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\frac{\partial v}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$$

- Άρα ο ΟΛΥ είναι ανεξάρτητος της αναπαράστασης της συνάρτησης χρησιμότητας

Παράδειγμα: προτιμήσεις Cobb-Douglas

- Ας επιλέξουμε τη λογαριθμική αναπαράσταση των προτιμήσεων Cobb-Douglas:
$$u(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$
- Τότε έχουμε
$$MRS = -\frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{c}{x_1}}{\frac{d}{x_2}} = -\frac{c}{d}\frac{x_2}{x_1}$$
- Και με την εκθετική αναπαράσταση:
$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$
- Έχουμε
$$MRS = -\frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{c x_1^{c-1} x_2^d}{d x_1^c x_2^{d-1}} = -\frac{c}{d}\frac{x_2}{x_1}$$
- Ο ΟΛΥ δεν αλλάζει, όπως προβλέπει η θεωρητική ανάλυση

Βιβλιογραφία

- [1] Hal Varian, Μικροοικονομική: μια σύγχρονη προσέγγιση, 3η έκδοση, εκδόσεις Κριτική, 2015