



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
*QUIZ 2*

Ονοματεπώνυμο (με κεφαλαία γράμματα): \_\_\_\_\_

1) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A (αν υπάρχει) με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss και μερική οδήγηση κατά στήλες. Ακόμη να υπολογιστεί η ορίζουσα του A.

Λύση

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} |4| > |2| \\ |4| > |0| \end{array} \quad \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Gamma_2 \leftarrow \Gamma_2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -5 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] |8| > |3/2| \quad \Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5 & 1 & -1/2 & 0 \end{array} \right] \Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 + \left(-\frac{3}{16}\right) \cdot \Gamma_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -43/8 & 1 & -1/2 & -3/16 \end{array} \right]$$

$$\text{Det}(A) = (-1)^2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{43}{8}\right) = -172$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x_{11} - x_{21} = 0 \\ 8x_{21} + 2x_{31} = 0 \\ -\frac{43}{8}x_{31} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = \frac{1}{86} \\ x_{21} = \frac{2}{43} \\ x_{31} = -\frac{8}{43} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x_{12} - x_{22} = 1 \\ 8x_{22} + 2x_{32} = 0 \\ -\frac{43}{8}x_{32} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_{12} = \frac{21}{86} \\ x_{22} = -\frac{1}{43} \\ x_{32} = \frac{4}{43} \end{cases}$$



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

*QUIZ 2*

Ονοματεπώνυμο (με κεφαλαία γράμματα): \_\_\_\_\_

$$\left. \begin{array}{rcl} 4x_{13} - x_{23} & = & 0 \\ 8x_{23} + 2x_{33} & = & 1 \\ -\frac{43}{8}x_{33} & = & -\frac{3}{16} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} = \frac{5}{172} \\ x_{23} = \frac{5}{43} \\ x_{33} = \frac{3}{86} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{86} & \frac{21}{86} & \frac{5}{172} \\ \frac{2}{43} & -\frac{1}{43} & \frac{5}{43} \\ -\frac{8}{43} & \frac{4}{43} & \frac{3}{86} \end{bmatrix}$$



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
*QUIZ 2*

Ονοματεπώνυμο (με κεφαλαία γράμματα): \_\_\_\_\_

2) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A (αν υπάρχει) με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss και μερική οδήγηση κατά στήλες. Ακόμη να υπολογιστεί η ορίζουσα του A. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τον

$$A^{-1} \text{ για να λύσετε το γραμμικό σύστημα } A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Λύση

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} |-6| > |3| \\ |-6| > |-1| \end{array} \quad \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \leftarrow \Gamma_2 + (-\frac{1}{6}) \cdot \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 + (\frac{1}{2}) \cdot \Gamma_1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} |\frac{5}{2}| > |-\frac{1}{2}| \end{array} \quad \Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 + \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \Gamma_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{43}{15} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{15} \end{array} \right]$$

$$\text{Det}(A) = (-1)^1 \cdot (-6) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{43}{15} = 43$$

$$\left. \begin{array}{l} -6x_{11} + 3x_{21} - 2x_{31} = 0 \\ \frac{5}{2}x_{21} - \frac{2}{3}x_{31} = 0 \\ \frac{43}{15}x_{31} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = -\frac{3}{43} \\ x_{21} = \frac{4}{43} \\ x_{31} = \frac{15}{43} \end{cases}$$



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

QUIZ 2

Ονοματεπώνυμο (με κεφαλαία γράμματα): \_\_\_\_\_

$$\left. \begin{aligned} -6x_{12} + 3x_{22} - 2x_{32} &= 0 \\ \frac{5}{2}x_{22} - \frac{2}{3}x_{32} &= 1 \\ \frac{43}{15}x_{32} &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_{12} = \frac{8}{43} \\ x_{22} = \frac{18}{43} \\ x_{32} = \frac{3}{43} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} -6x_{13} + 3x_{23} - 2x_{33} &= 1 \\ \frac{5}{2}x_{23} - \frac{2}{3}x_{33} &= -\frac{1}{6} \\ \frac{43}{15}x_{33} &= \frac{7}{15} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} = -\frac{10}{43} \\ x_{23} = -\frac{1}{43} \\ x_{33} = \frac{7}{43} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{43} & \frac{8}{43} & -\frac{10}{43} \\ \frac{4}{43} & \frac{18}{43} & -\frac{1}{43} \\ \frac{15}{43} & \frac{3}{43} & \frac{7}{43} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{43} & \frac{8}{43} & -\frac{10}{43} \\ \frac{4}{43} & \frac{18}{43} & -\frac{1}{43} \\ \frac{15}{43} & \frac{3}{43} & \frac{7}{43} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \frac{16}{43} + \frac{70}{43} \\ 0 + \frac{36}{43} + \frac{7}{43} \\ 0 + \frac{6}{43} - \frac{49}{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$