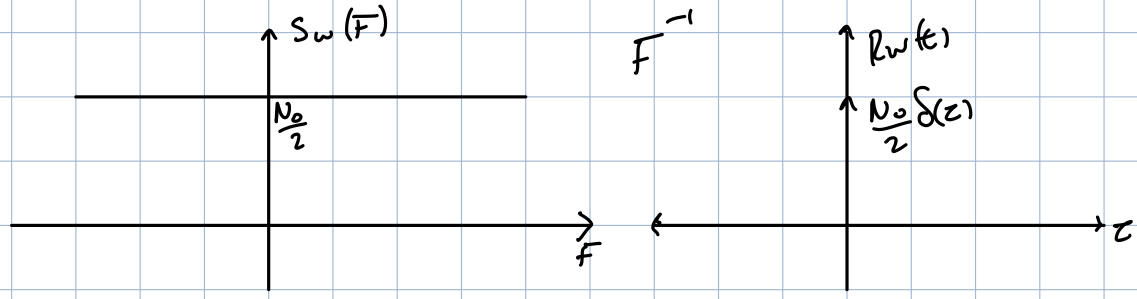
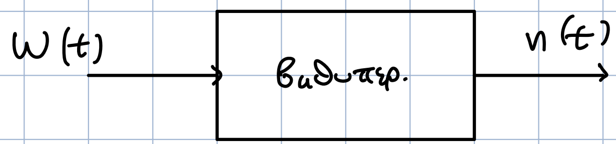
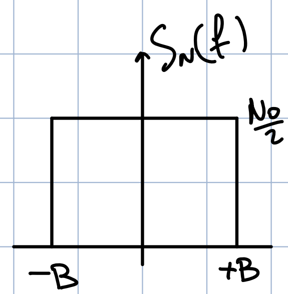
Λευκός Θόρυβος $w(t)$





Ιδανικός Βαθυπερατός Λευκός Θόρυβος

$$S_N(F) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |F| \le B \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$\Rightarrow F^{-1} \quad R_N(\tau) = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df$$

$$R_N(\tau) = N_0 B \,\mathrm{sinc}(2B\tau)$$

Θόρυβος στενής ζώνης $n(t)$

λευκός θόρυβος Gauss

Είσοδος $w(t)$ μηδενικής μέσης τιμής και μοναδικής πυκνότητας φάσματος

$$\boxed{\begin{aligned} n(t) &= \overset{\text{συμφασική}}{\underline{n_c(t)}} \cos(2\pi f_c t) - \overset{\text{ετεροφασική}}{\underline{n_s(t)}} \sin(2\pi f_c t) \\ \hat{n}(t) &= n_c(t) \sin(2\pi f_c t) + n_s(t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n_c(t) &= n(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{n}(t)\sin(2\pi f_c t) \\ n_s(t) &= \hat{n}(t)\cos(2\pi f_c t) - n(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned}}$$

Ιδιότητα 1: Αν $E[n(t)]=0 \Rightarrow E[n_c(t)]=E[n_s(t)]=0$

Ιδιότητα 2: Αν $n(t)$ στατική και μηδενικής μέσης τιμής τότε $n_c(t)$ και $n_s(t)$ είναι επίσης στατικές

$$R_{n_c}(\tau)=E[n_c(t+\tau)n_c(t)]=E\Big[\{n(t+\tau)\cos(2\pi f_c(t+\tau))+\hat{n}(t+\tau)\sin(2\pi f_c(t+\tau))\}\{n(t)\cos(2\pi f_c t)+\hat{n}(t)\sin(2\pi f_c t)\}\Big]$$

$$=\underbrace{E[n(t+\tau)n(t)]}^{R_n(\tau)}\cos(2\pi f_c(t+\tau))\cdot\cos(2\pi f_c t)+\underbrace{E[\hat{n}(t+\tau)\hat{n}(t)]}^{R_{\hat{n}}(t)}\sin(2\pi f_c(t+\tau))\sin(2\pi f_c t)$$
$$+\underbrace{E[n(t+\tau)\hat{n}(t)]}_{R_{n\hat{n}}(\tau)}\cos(2\pi f_c(t+\tau))\sin(2\pi f_c t)+\underbrace{E[\hat{n}(t+\tau)n(t)]}_{R_{\hat{n}n}(\tau)}\sin(2\pi f_c t+\tau)\cos(2\pi f_c t)$$

$$R_{n_c}(t)=R_n(\tau)[\cos 2\pi f_c(t+\tau)\cos 2\pi f_c t+\sin 2\pi f_c(t+\tau)\sin 2\pi f_c t]$$
$$-R_{\hat{n}}(\tau)[\cos 2\pi f_c(t+\tau)\sin 2\pi f_c t-\sin 2\pi f_c(t+\tau)\cos 2\pi f_c t]$$

$R_{\hat{n}}(\tau)=R_n(\tau)$ $\Rightarrow$ $\boxed{R_{n_c}(\tau)=R_n(\tau)\cos(2\pi f_c\tau)+\hat{R}_n(\tau)\sin(2\pi f_c\tau)}$

$R_{n\hat{n}}(\tau)=-\hat{R}_n(\tau)$

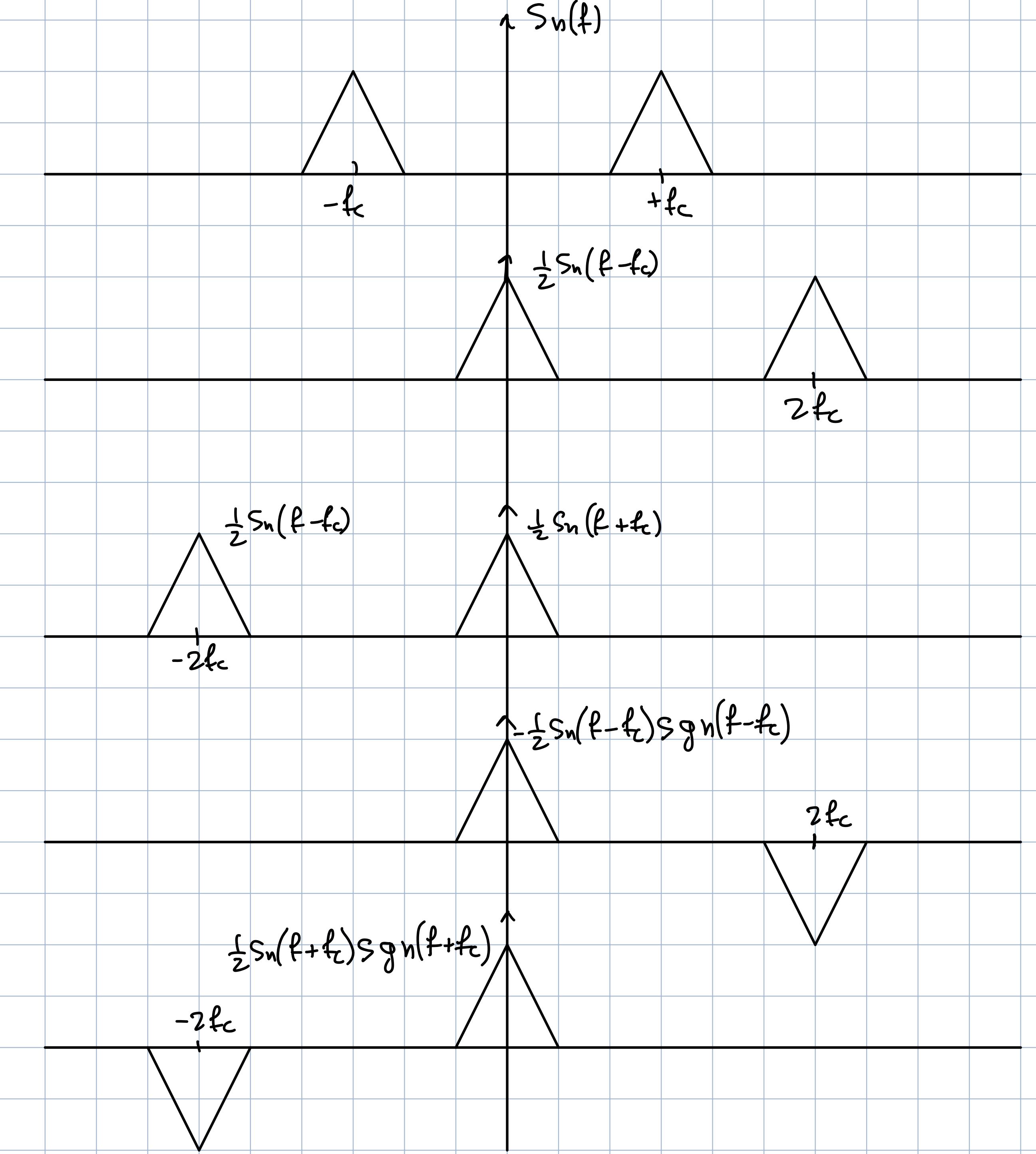
$R_{\hat{n}n}(\tau)=\hat{R}_n(\tau)$

Ιδιότητα 3:

$$S_{n_c}(f)=S_{n_s}(f)=\begin{cases}S_n(f-f_c)+S_n(f+f_c), & |f|\leq B\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$F[\hat{R}_n(\tau)]=-j\,\mathrm{sgn}\,F\cdot S_n(t)$$

$$S_{n_c}(f)=\tfrac{1}{2}[S_n(f-f_c)+S_n(f+f_c)]-\tfrac{1}{2}[S_n(f-f_c)\mathrm{sgn}(f-f_c)-S_n(f+f_c)\mathrm{sgn}(f+f_c)]$$

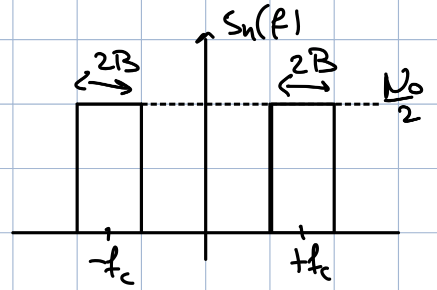


Ιδιότητα 4

$$E[n_c^2(t)] = E[n_s^2(t)] = E[n^2(t)]$$

$$E[n_c^2(t)] = R_{nc}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{nc}(f)\,df$$

Λευκός θόρυβος Gauss μηδενικής μέσης τιμής, ισχύος $N_0/2$ που περνά από ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο πλάτους 1 και μήκους 2B και συχν. f_c



$$\Rightarrow F^{-1}$$

$$R_n(\tau) = 2N_0 B \,\mathrm{sinc}(2B\tau)\cos(2\pi f_c \tau)$$

Παράδειγμα:

Σ.Α. $\quad Z(t) = X\cdot\cos(2\pi t) + Y\sin(2\pi t)$

X, Y τ.μ. στατιστικά ανεξάρτητες

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1 \qquad E[X] = E[Y] = 0$

$$E[Z(t_1)] = E[X\cos(2\pi t_1) + Y\sin(2\pi t_1)]$$
$$= \cancel{E[X]}^{0}\cos 2\pi t_1 + \cancel{E[Y]}^{0}\sin(2\pi t_1) = 0$$

$$E[Z(t_2)] = \cdots = 0$$

$$Cov(Z(t_1), Z(t_2)) = E[Z(t_1)Z(t_2)] - \cancel{E[Z(t_1)]}^{0}\cancel{E[Z(t_2)]}^{0}$$

$$= E[(X\cos 2\pi f_c t_1 + Y\sin 2\pi f_c t_1)(X\cos 2\pi t_2 + Y\sin 2\pi t_2)]$$

στατιστικά ανεξ. μετ.

$$= \cos 2\pi t_1 \cdot \cos 2\pi t_2\, E[X^2] + \sin 2\pi t_1 \sin 2\pi t_2\, E[Y^2] + (\ldots)\cancel{E[XY]}^{0}$$

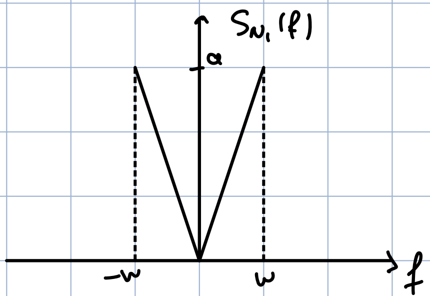
$E[X^2] = E[Y^2] = 1$, λόγω των σ_x, σ_y

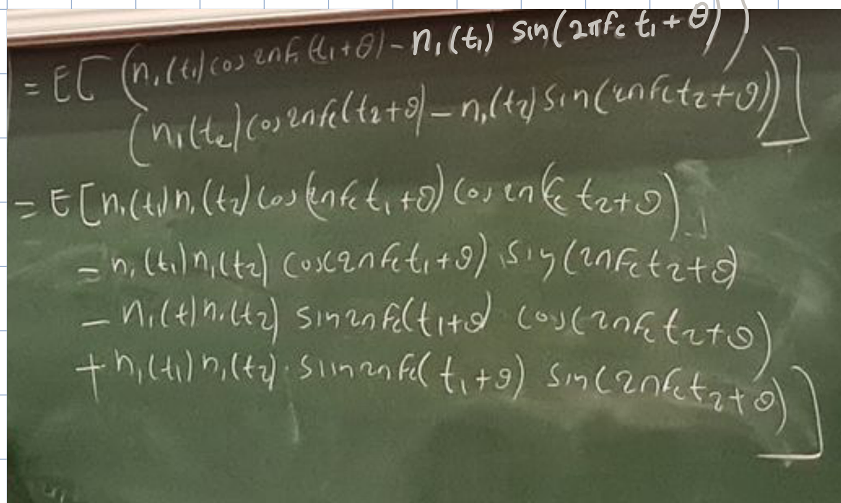
$$= \cos 2\pi(t_1 - t_2)$$

Παράδειγμα: $n_1(t)$, $n_2(t)$ $\quad n_2(t) = n_1(t)\cos(2\pi f_c t+\Theta) - n_1(t)\sin(2\pi f_c t+\Theta)$

Θ, τ.μ.δ. ανεξ. από άλλες μεταβλητές $\quad f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Έστω $n_1(t)$ στατική $\quad R_{n_2}(t_1,t_2) = E[n_2(t_1)\, n_2(t_2)]$





$$= E\left[n_1(t_1)\, n_1(t_2)\cos[2\pi f_c(t_1-t_2)] - n_1(t_1)\, n_1(t_2)\sin\{2\pi f_c(t_1+t_2)+2\Theta\}\right]$$

$$= E[n_1(t_1)\, n_1(t_2)] - E[n_1(t_1)\, n_1(t_2)]\, \underbrace{E[\sin\{\cancel{2\pi f_c(t_1+t_2)+2\Theta}\}]}_{0}$$

$$= R_{n_1}(t_1,t_2)\cos[2\pi f_c(t_1-t_2)]$$

$$S_{n_2}(f) = \frac{1}{2}\left[S_{n_1}(f-f_c) + S_{n_1}(f+f_c)\right]$$