Δευτέρα 23/5/22 18η Διάλεξη: Κοκκίνης 9

1. Μέθοδος Euler (συνέχεια)

$$\text{T}\left\| \begin{array}{l} y'(x) = f(x, y(x)), \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{array} \right.$$

- Υποθέτουμε ότι έχει μοναδική λύση $\forall y_0 \in \mathbb{R}$
- $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ομοιόμορφος διαμερισμός βήμα $h = \frac{b-a}{n}$

- $y_k \cong y(x_k)$, $k = 0, 1, \dots n$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ y_0 \text{ δοσμένο} \end{array}}$$

<u>κατασκευή:</u> Γράφουμε τη δ.ε. για $x = x_k$:

$$y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$$

Προσεγγίζουμε την παράγωγο $y'(x_k) \cong \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$

$$= \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}$$

Επομένως $\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} \cong f(x_k, y(x_k))$

και αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές έχουμε:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

$y_k \cong y(x_k)$, $\quad |y_k - y(x_k)| = ?$

Θεώρημα 2: (Εκτίμηση σφάλματος μεθόδου Euler)

~~Εκτίμηση~~ Έστω f συνεχής στο $[a,b]\times\mathbb{R}$ και υπάρχει L: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$ $\forall x \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Τότε:

$$\max_{k=0,1,\dots,n-1} |y_k - y(x_k)| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)\cdot h$$ όπου

$$M = \max_{a \le x \le b} |y''(x)|$$

Δηλαδή $\boxed{\max_k |y_k - y(x_k)| \le c\cdot h}$ $\quad c$ σταθερά ανεξάρτητη του h

Επειδή είναι h^1, η μέθοδος Euler έχει τάξη ακρίβειας 1.

Παράδειγμα: $\begin{cases} y' = 1 + \frac{y}{x}, & x \in [1, 1.5] \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Να προσεγγίσετε τη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο Euler ~~με τη μέθοδο ...~~, με $h = 0{,}25$

$f(x,y) = 1 + \frac{y}{x}$

$a = 1$, $\quad b = 1{,}5$

$y_0 = 2$

δίνεται y_0	$y_1 = ;$	$y_2 = ;$
1	$1{,}25$	$1{,}5$
$x_0 = a$	x_1	$x_2 = b$

$y_1 \cong y(x_1) = y(1{,}25)$

$y_2 \cong y(x_2) = y(1{,}5)$

$y_{k+1} = y_k + h\left(1 + \frac{y_k}{x_k}\right)$, $\quad k = 0, 1$,

$y_1 = y_0 + 0{,}25\left(1 + \frac{y_0}{x_0}\right) = 2{,}75$

$y_2 = y_1 + h\left(1 + \frac{y_1}{x_1}\right) = 2{,}75 + 0{,}25\left(1 + \frac{2{,}75}{1{,}25}\right) = 3{,}55$

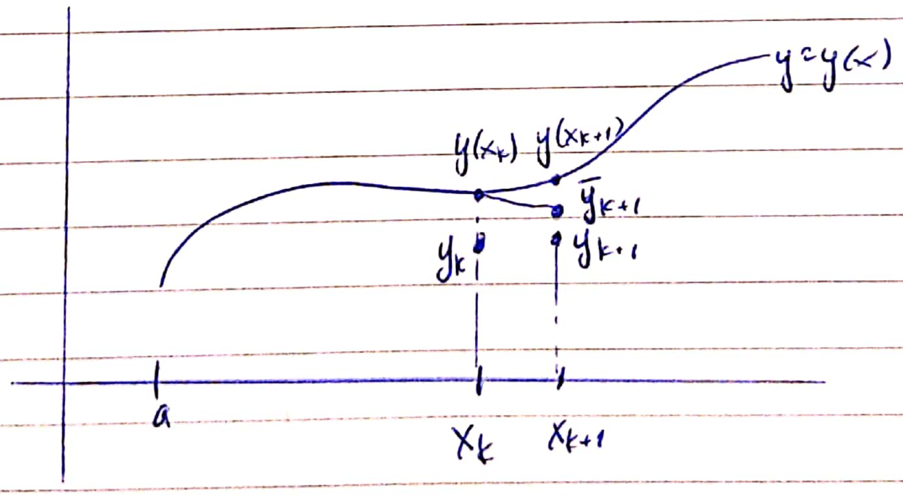
Αν η ακριβής λύση του προβλήματος είναι η $y(x) = x\ln x + 2x$ ποιό το σφάλμα στο σημείο $x = 1{,}5$;

Συγκρίνουμε: $y_2 - y(1{,}5) = 3{,}55 - 3{,}608197662 = -0{,}058198$

3,55

<u>Σφάλματα:</u>

- Σφάλματα στρογγυλοποίησης
- Σφάλμα $\varepsilon_k = y_k - y(x_k)$, $k = 0, 1, \dots n-1$, λέγεται σφάλμα ~~[illegible]~~ διακριτοποίησης της μεθόδου ή και ολικό σφάλμα.
- Τοπικό σφάλμα: Το σφάλμα σε 1 βήμα αν θεωρήσω ότι οι προηγούμενες τιμές είναι ακριβείς λέγεται <u>τοπικό σφάλμα</u>.



$\bar{y}_{k+1}$: y_{k+1} αν αντί για y_k στο υπολογισμό του χρησιμοποιούσα το $y(x_k)$, ακριβής τιμή.

α. Πεπλεγμένη Μέθοδος Euler

$$\boxed{\begin{array}{c} y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k=0,1,\dots,n-1 \\ y_0 \text{ δοθέν} \end{array}}$$

π.χ. $y_1 = y_0 + h f(x_1, y_1)$

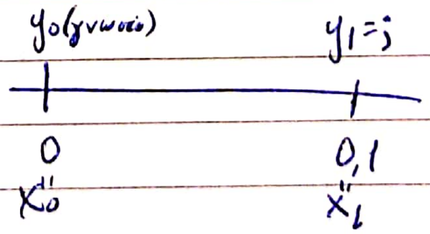
Θεωρώντας γνωστή τη προσέγγιση y_k ο υπολογισμός της y_{k+1} απαιτεί την επίλυση, γενικά, μίας μη γραμμικής εξίσωσης.
Αν η δ.ε. είναι γραμμική η εξίσωση αυτή επιλύεται εύκολα.

Η μέθοδος αυτή έχει καλύτερη ευστάθεια από την απλή Euler (δεν μας ενδιαφέρει στο παρόν μάθημα)

<u>Παράδειγμα:</u> $y' = xy^3 - y, \quad y(0)=1$

Χρησιμοποιώντας την πεπλεγμένη Euler με βήμα $h=0{,}1$ να υπολογίσετε μία προσέγγιση της λύσης στο $x=0{,}1$ (Για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Newton-Raphson)

$f(x,y) = xy^3 - y$
$a=0, \quad y_0=1$



$k=0$: $\quad y_1 = y_0 + h(x_1 y_1^3 - y_1)$ ή $y_1 = 1 + 0{,}1(0{,}1 \cdot y_1^3 - y_1)$

$\Rightarrow \boxed{0{,}001 \cdot y_1^3 - 1{,}1 y_1 + 1 = 0}$ μη γραμμική εξίσωση

$$y_{1,k+1} = y_{1,k} - \frac{f(y_{1,k})}{f'(y_{1,k})}, \quad k=0,1,2$$

Παίρνω: $y_{1,0} = y_0 = 1$
(όχι αναγκαστικά)

$y_{1,0} = 1$

$y_{1,1} = 0,9159$

$y_{1,2} = 0,9161$

$y_{1,3} = 0,9161$

Άρα $\boxed{y_1 = 0,9161}$

Άλλη καλή αρχική τιμή $y_{1,0}$ θα ήταν η 1η τιμή της απλής Euler, δηλαδή $y_{1,0} = y_0 + h(x_0 y_0^3 - y_0)$

3. Μέθοδοι Taylor

Στη μέθοδο Taylor τάξης m κατασκευάζουμε μια ακολουθία διαδοχικών προσεγγιστικών τιμών y_k, αναπτύσσοντας τη $y(x)$ σε σειρά Taylor μέχρι και τάξης m.

$$\boxed{\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h y_k' + \frac{h^2}{2!} y''_k + \dots + \frac{h^m}{m!} y_k^{(m)}, \quad k = 0,1,2,\dots n-1 \\ y_k^{(i)} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} f(x, y(x)) \Big|_{(x_k, y_k)}, \quad i = 1,2,\dots m \end{aligned}}$$

m=1: $y_{k+1} = y_k + h y_k' = y_k + h f(x_k, y_k)$ δηλαδή Euler

m=2: $y_{k+1} = y_k + h \underbrace{y'_k}_{f(x_k, y_k)} + \frac{h^2}{2!} y''_k$

$$y_k'' = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) \Big|_{(x_k, y_k)} = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_k, y_k)}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \cdot f(x_k, y_k)$$

Άρα
$$\boxed{\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \cdot f(x_k, y_k) \right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 0, 1, \ldots n-1 \\ y_0 = \text{δοθέν} \end{array}}$$

~~Μέθοδος Taylor τάξης 2.~~

δηλαδή $\max_k |y_k - y(x_k)| \leq c h^2$