Παρασκευή 18/3/22 5η Διάλεξη: Κολέτσος 3η

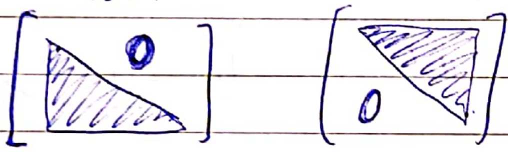
Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

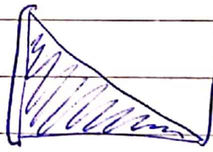
✓ Gauss Elimination Method (πάνω με μερική οδήγηση)
(Δε θα κάνουμε Gauss/Jordan)
(Στο διαγώνισμα να γίνει ακριβώς η μέθοδος, ακόμα και αν βγαίνει αλλιώς πιο γρήγορα/εύκολα)

Μέθοδοι παραγοντοποίησης (LU Method)

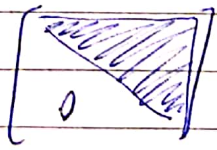
(1) $\boxed{Ax=b} \Rightarrow (LU)\cdot x = b \Rightarrow L(Ux)=b \Rightarrow \begin{cases} Ux = z & (2) \\ Lz = b & (3) \end{cases}$

Low band matrix   Upper



Ξεκινάω από το (3)  $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

και το λύνω με
προς τα εμπρός αντικατάσταση

Συνεχίζω στο (2):  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

• Δίνεται το σύστημα $Ax=b$ με $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Να λυθεί με τη μέθοδο παραγοντοποίησης.

Θέλω να γράψω τον A ως: $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{U}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}\cdot u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+l_{22}u_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \cancel{l_{11}u_{11} = 6 \quad (1)}$$
$$\cancel{l_{11}u_{12} = 2 \quad (2)}$$
$$\cancel{l_{11}u_{13} = 1 \quad (3)}$$

$$\Rightarrow \quad l_{11}u_{11} = 6 \quad (1) \qquad l_{11}u_{12} = 2 \quad (2) \qquad l_{11}u_{13} = 1 \quad (3)$$
$$l_{21}u_{11} = 2 \quad (4) \qquad l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} = 4 \quad (5) \qquad l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 1 \quad (6)$$
$$l_{31}u_{11} = 1 \quad (7) \qquad l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 1 \quad (8) \qquad l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} = 4 \quad (9)$$

9 εξισώσεις και 12 άγνωστοι, άρα υπάρχει πρόβλημα. Το αντιμετωπίζουμε με διάφορες μεθόδους:

1η) Μέθοδος Doolittle, $\boxed{l_{ii} = 1}$

2η) Μέθοδος Crout, $\boxed{u_{ii} = 1}$

3η) Μέθοδος Choleski, $\boxed{l_{ii} = u_{ii}}$

Εδώ ακολουθούμε την 1η, $\boxed{l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1}$

$$(1) \Rightarrow u_{11} = 6 \quad (10)$$
$$(2) \Rightarrow u_{12} = 2 \quad (11)$$
$$(3) \Rightarrow u_{13} = 1 \quad (12)$$
$$(4) \Rightarrow l_{21} = 1/3 \quad (13)$$
$$(5) \xRightarrow{(13)} u_{22} = \frac{10}{3} \quad (14)$$
$$(6) \xRightarrow{(12)} u_{23} = \frac{2}{3} \quad (15)$$
$$(7) \xRightarrow{(10)} l_{31} = 1/6 \quad (16)$$
$$(8) \underset{(11)\,(14)}{\xRightarrow{(16)}} l_{32} = 1/5 \quad (17)$$

$$(9) \xRightarrow{\text{όλα}} u_{33} = \frac{37}{10} \quad (18)$$

Άρα: $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 37/10 \end{bmatrix}$

- $L \cdot z = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\text{αντικατάσταση}]{\text{με εμπρός}} \begin{cases} z_1 = 7 \\ \frac{1}{3} z_1 + z_2 = 3 \Rightarrow z_2 = 2/3 \\ \frac{1}{6} z_1 + \frac{1}{5} z_2 + z_3 = 5 \Rightarrow z_3 = 37/10 \end{cases}$

- $U x = z \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 37/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2/3 \\ 37/10 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\text{αντικατάσταση}]{\text{πίσω}} \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 1 \\ \frac{10}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = 0 \\ \frac{37}{10} x_3 = \frac{37}{10} \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Άρα} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Οι αντικαταστάσεις ήταν απλές, αλλά επιθυμούμε να βρούμε πιο καλό τρόπο για τη διάσπαση σε LU.

Να λυθεί με τη μέθοδο της παραγοντοποίησης Doolittle το Γ.Σ.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Επαυξημένος πίνακας
$$\left(\begin{array}{cccc:c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} m_2 = 3/4 \\ m_3 = 1/2 \\ m_4 = 1/4 \end{array}$$

R_X

$R_4 \leftarrow R_4 - \frac{1}{4} R_1$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ (3/4)\,0 & 7/4 & 3/2 & 5/4 & 1/4 \\ (1/2)\,0 & 3/2 & 3 & 5/2 & -3/2 \\ (1/4)\,0 & 5/4 & 5/2 & 15/4 & -5/4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} m_3' = 6/7 \\ m_4' = 5/7 \end{array}$$

Στις θέσεις των μηδενικών αντί για αυτά αποθηκεύουμε τους πολλαπλασιαστές m_2, m_3, m_4, προς αποφυγή σπατάλης μνήμης (3η Διάλεξη σελ. 2, παρόμοιο σχόλιο)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ (3/4) & 7/4 & 3/2 & 5/4 & 1/4 \\ (1/2) & (6/7) & 12/7 & 10/7 & -12/7 \\ (1/4) & (5/7) & 10/7 & 20/7 & -10/7 \end{array}\right) \quad m_4'' = 5/6$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ (3/4) & 7/4 & 3/2 & 5/4 & 1/4 \\ (1/2) & (6/7) & 12/7 & 10/7 & -12/7 \\ (1/4) & (5/7) & (5/6) & 5/3 & 0 \end{array}\right)$$

* Δεν το αποδεικνύει, βλέπε σελ 186-7 Παπαγεωργίου - Τσίτουρα

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 6/7 & 1 & 0 \\ 1/4 & 5/7 & 5/6 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7/4 & 3/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 12/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Και λύνω $\begin{cases} Lz = b & \text{με προς αντικατάσταση βρίσκω } z \\ Ux = z & \text{με πίσω βρίσκω } x \end{cases}$

Αποδεικνύεται ότι ~~και~~ σε μεγάλους, αραιούς πίνακες είναι πιο αποδοτικό να σταματήσουμε εκεί την Gauss και να εφαρμόσουμε LU.

<u>Τι γίνεται με την οδήγηση?</u>

Να λυθεί με παραγοντοποίηση <u>Doolittle</u> και με μερική οδήγηση:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$|2|>|1|$
$|2|>|-1|$,
άρα $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad n_p=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$m_2=1/2$
$m_3=-1/2$

$\boxed{n_p}$: ξεκινάει ως $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, σε αυτό αποθηκεύω που βρίσκεται κάθε γραμμή.

$$A''=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1/2 & 3/2 & -5\\ -1/2 & 9/2 & 3\end{pmatrix}$$

$|9/2|>|3/2|$ Άρα $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{array}{c c} & \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1/2 & 9/2 & 3\\ +1/2 & 3/2 & -5\end{pmatrix}\\ m_3'=1/3 & \end{array},\quad n_p=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1/2 & 9/2 & 3\\ 1/2 & 1/3 & -6\end{pmatrix}:\quad L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1/2 & 1 & 0\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 9/2 & 3\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

<u>Πάμε στην Άσκηση</u>

$$\boxed{\bullet\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{λέγεται πίνακας μετασχηματισμού} \qquad P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}$$

<u>Συνεχίζει η Λύση:</u> Δημιουργώ τον πίνακα μετασχηματισμού που "διατάξει" ο np:

$$\boxed{np = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P}$$

<u>Ισχύει το εξής:</u>

$$Ax = b$$
$$P(Ax) = Pb$$
$$(PA)x = Pb$$
$$(LU)x = Pb$$
$$L(Ux) = Pb \Rightarrow \begin{cases} Lz = Pb \\ Ux = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = -1 \\ z_3 = 1/3 \end{cases}$$

$$Ux = z \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 9/2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \ \\ -1/18 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65/54 \\ -5/27 \\ -1/18 \end{pmatrix}$$

Όποτε ζητείται LU, εννοείται η οδήγηση.