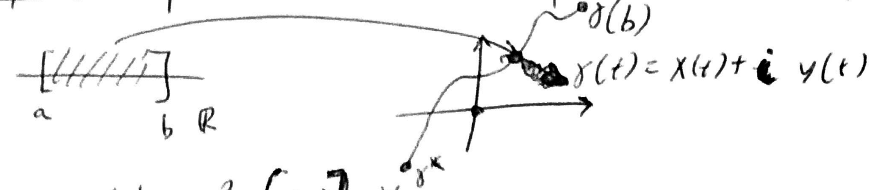
• Στοιχεία θεωρίας καμπυλών στο μιγαδικό επίπεδο

<u>Ορισμός 1:</u> Καμπύλη στο $\mathbb{C}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$



$x(t) = Re[\gamma(t)]$
$y(t) = Im[\gamma(t)]$

Ορίζονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $x(\cdot), y(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$
ώστε $x(t) = Re[\gamma(t)]$, $y(t) = Im[\gamma(t)]$, $t \in [a,b]$

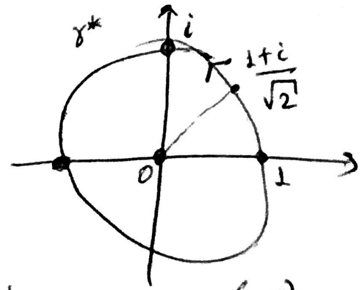
Το $\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ λέγεται ίχνος της γ

Το $\gamma(a)$ λέγεται αρχή και το $\gamma(b)$ πέρας της γ

Στα σημεία του γ^* ορίζεται μια διάταξη:
"Το σημείο $\gamma(t_1)$ προηγείται του $\gamma(t_2)$ αν και μόνο αν $t_1<t_2$"
Με αυτόν τον τρόπο καθορίζεται η φορά διαγραφής του γ^*.

π.χ. $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$

γ^* = ο κύκλος κέντρου O και ακτίνας 1



Το $\gamma(0)$ προηγείται του $\gamma(\frac{\pi}{4})$ προηγείται του $\gamma(\frac{\pi}{2})$
επειδή $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

δηλαδή $(0,0)$ προηγείται του $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ προηγείται του $(0,1)$

$\Rightarrow$ το γ^* διαγράφεται αριστερόστροφα

Ορισμός 2: Έστω $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη

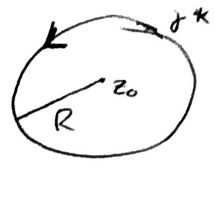
Η γ λέγεται

→ Απλή αν και μόνο αν η $\gamma[a,b]$ είναι 1-1 (καμπύλη που δεν τέμνει τον εαυτό της)

→ Κλειστή αν και μόνο αν $\gamma(a)=\gamma(b)$

Σχόλιο: Η διάταξη που ορίσαμε παραπάνω αναφέρεται σε απλές καμπύλες

Παραδείγματα:



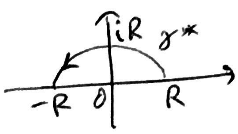
(a) $\gamma:[0,2\pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = z_0 + R\cdot e^{it}, t\in[0,2\pi]$, $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$

γ: απλή κλειστή καμπύλη

(β) εαν γ όπως στο (a) ορισμένη στο $[0,4\pi]$ ο κύκλος διαγράφεται δύο φορές.

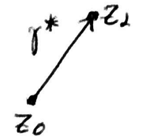
(γ) $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $R>0$



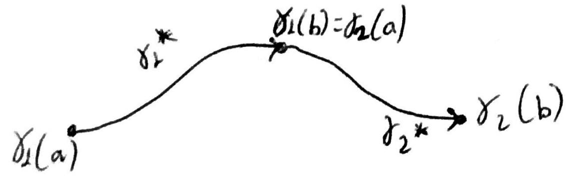
(δ) $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$

$\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $t\in[0,1]$

$\gamma^* = [z_0, z_1]$



Ορισμός 3: Έστω $\gamma_1,\gamma_2:[a,b] \to \mathbb{C}$ διαδοχικές καμπύλες δηλαδή: $\gamma_1(b)=\gamma_2(a)$



Ορίζεται το άθροισμα $\gamma_1+\gamma_2$ (βλέπε σημειώσεις)

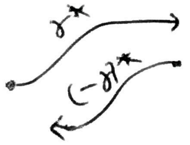
$(\gamma_1+\gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

Η $\gamma_1+\gamma_2$ λέγεται άθροισμα των γ_1,γ_2

Ορισμός 4: Έστω $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη. Ορίζεται η αντίθετη της γ, η $(-\gamma):[a,b] \to \mathbb{C}$ με $(-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t)$, $t\in[a,b]$

$(-\gamma)(a)\ \gamma(b)$, $(-\gamma)(b)=\gamma(a)$

Τα $\gamma^*, (\gamma)^*$ έχουν αντίθετες φορές διαγραφής



• Θεώρημα Jordan

Έστω γ απλή κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C}$

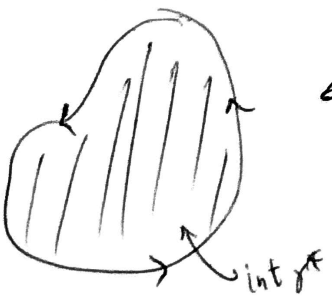
Τότε το $\mathbb{C} - \gamma^*$ χωρίζεται σε δύο ξένα πεδία

→ ένα φραγμένο πεδίο που ονομάζεται εσωτερικό της γ ($\text{int}\,\gamma^*$)

→ ένα φραγμένο πεδίο που ονομάζεται εξωτερικό της γ ($\text{ext}\,\gamma^*$)

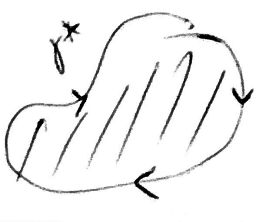
Ορισμός 5: Μια απλή κλειστή καμπύλη λέγεται θετικά προσανατολισμένη αν και μόνο αν ένας παρατηρητής που ~~[illegible]~~ κινείται πάνω στο γ^* αφήνει στα αριστερά του το $\text{int}\,\gamma^*$

(+) με τη φορά διαγραφής της γ

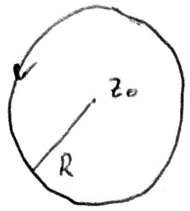


← η γ είναι θετικά προσανατολισμένη

Εάν η γ δεν είναι θετικά προσανατολισμένη, λέγεται αρνητικά προσανατολισμένη



← η γ είναι αρνητικά προσανατολισμένη π.χ. $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$



Η γ είναι θετικά προσανατολισμένη

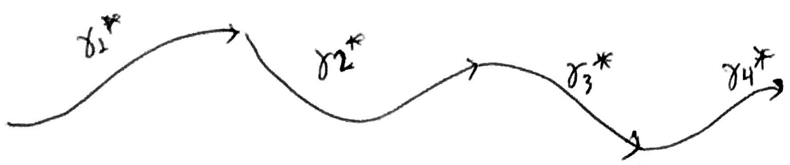
Ορισμός 6: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη με $x(t) = Re[\gamma(t)]$, $y(t) = Im[\gamma(t)]$, $t \in [a,b]$
Η γ λέγεται διαφορίσιμη αν και μόνο αν $x(\cdot), y(\cdot)$ είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b]$
Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $\gamma'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$, $t \in [a,b]$
π.χ. $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
$\gamma'(t) = i e^{it}$

Ορισμός 7: Εάν οι $x(\cdot), y(\cdot)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε η γ λέγεται κλάσης C^1

Ορισμός 8: Μια καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ κλάσης C^1 λέγεται λεία αν και μόνο αν $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$

Ορισμός 9: Εάν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ λεία, το μήκος της γ είναι το $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \|\gamma\| = \ell(\gamma)$

Ορισμός 10: Μια καμπύλη λέγεται τμηματικά λεία αν και μόνο αν ισούται με το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους διαδοχικών λείων καμπυλών $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ δηλαδή $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$



Τμηματικά λείες

Το μήκος της $\gamma = \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\| + \ldots + \|\gamma_n\| = \|\gamma\|$

• Εισαγωγή στο μιγαδικό ολοκλήρωμα

I. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_a^b \varphi(t)\,dt$, όπου $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής

Εάν $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής, $\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$, $\left\{\begin{matrix} u(t)=Re[\varphi(t)] \\ v(t)=Im[\varphi(t)] \end{matrix}\right\}$

π.χ. $\varphi(t)=t^2+it^3$, $t\in[0,1]$

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt + i\int_0^1 t^3\,dt = \dots = \frac{1}{3}+\frac{i}{4}$$

<u>Πρόταση 1:</u> Εάν $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ διαφορίσιμη με F' συνεχή τότε $\int_a^b F'(t)\,dt = F(b)-F(a) = F(t)\Big|_a^b$

π.χ. $\int_0^{\pi} e^{it}\,dt = \frac{e^{it}}{i}\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{i} = 2i$

Ιδιότητες (I):

(i) Εάν $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ τότε $\int_a^b(\lambda\varphi+\mu\psi) = \lambda\int_a^b\varphi + \mu\int_a^b\psi$

(ii) Εάν $a<c<b$ τότε $\int_a^b\varphi = \int_a^c\varphi + \int_c^b\varphi$

(iii) $\overline{\int_a^b\varphi} = \int_a^b\overline{\varphi}$

<u>Πρόταση 2:</u> Εάν $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής, τότε $\left|\int_a^b\varphi(t)\,dt\right| \le \int_a^b|\varphi(t)|\,dt$ $\quad |\varphi|\ge 0$

<u>Απόδειξη:</u> Θέτουμε $z=\int_a^b\varphi(t)\,dt\in\mathbb{C}$

- Εάν $z=0$ προφανώς η ανισότητα ισχύει
- Υποθέτουμε ότι $z\ne 0 \Rightarrow z=|z|e^{i\theta}$, για κάποιο θ

$\Rightarrow |z| = e^{-i\theta}z = \int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt \Rightarrow |z| = Re\left[\int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt\right] = \int_a^b Re\left[e^{-i\theta}\varphi(t)\right]dt$, όμως $Re[w]\le|w|$

Άρα $\int_a^b Re\left[e^{-i\theta}\varphi(t)\right]dt \le \int_a^b\left|e^{-i\theta}\varphi(t)\right|dt = \int_a^b|e^{-i\theta}||\varphi(t)|\,dt$, όμως $|e^{ix}|=1\ \forall x\in\mathbb{R}$

Άρα $\int_a^b|e^{-i\theta}|\cdot|\varphi(t)|\,dt = \int_a^b|\varphi(t)|\,dt$

II. Μιγαδικά Ολοκληρώματα

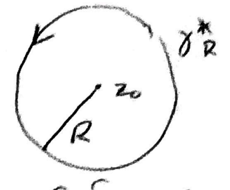
<u>Ορισμός 1</u>: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ λεία $\overset{\text{καμπύλη}}{\text{και}}$ $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής $(\gamma^* = \gamma([a,b]) \subset \mathbb{C})$

Το μιγαδικό ολοκλήρωμα της f [redacted] στη γ είναι το $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz \doteq \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)}_{g(t)}dt$

<u>Παράδειγμα</u>:

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $R>0$ και $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

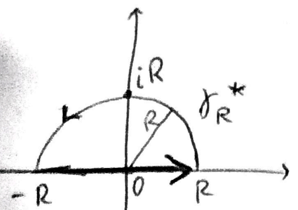
$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(z_0+Re^{it})-z_0} Rie^{it}dt = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}}dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$



<u>Ορισμός 2</u>: Έστω $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n$ τμηματικά λεία, όπου $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ διαδοχικά λείες καμπύλες. Τότε $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz \doteq \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz$

π.χ. $\displaystyle\int_{\Gamma_R} |z|\bar{z}\,dz = ?$ $\quad \Gamma_R = \gamma_R + [-R,R]$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $R>0$

$|z| = R$



$$\int_{\gamma_R} |z|\bar{z}\,dz = R\int_{\gamma_R} \bar{z}\,dz = R\int_0^{\pi} Re^{-it}Rie^{it}dt = \pi R^3 i$$

$$\int_{[-R,R]} |z|\bar{z}\,dz = \int_{-R}^{R} |t|\,t\,dt = 0$$ διότι $|t|t$ περιττή

Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα $= \pi R^3 i + 0 = \pi R^3 i$

<u>Πρόταση 1</u>: Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη, $f,g: \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς και $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$

Τότε, $\displaystyle\int_\gamma (\lambda f + \mu g) = \lambda\int_\gamma f + \mu\int_\gamma g$

<u>Πρόταση 2</u>: Εάν $\gamma, \tilde{\gamma}$ διαδοχικές τμηματικά λείες και $f: \gamma^* \cup \tilde{\gamma}^* \to \mathbb{C}$ συνεχής

τότε $\displaystyle\int_{\gamma+\tilde{\gamma}} f = \int_\gamma f + \int_{\tilde{\gamma}} f$

<u>Πρόταση 3</u>: Εάν γ τμηματικά λεία και $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$$

Πρόταση 4: (ML - ανισότητα)

Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη, $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής και $M > 0$ τέτοιος ώστε

$|f(z)| \leq M, \forall z \in \gamma^*$

$t \mapsto |f(\gamma(t))|$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ άρα είναι φραγμένη

Τότε $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq M \|\gamma\|$

Απόδειξη:

• Υποθέτω ότι $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ λεία. Τότε, $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \leq$

$\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M\|\gamma\|$

• Εάν γ τμηματικά λεία, τότε $\gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k$ όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ λείες διαδοχικές

και άρα $\left|\int_\gamma f\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f\right| \leq \sum_{k=1}^n \left|\int_{\gamma_k} f\right| \leq \sum_{k=1}^n M\|\gamma_k\| = M\sum_{k=1}^n \|\gamma_k\| = M\|\gamma\|$

Σχόλιο 1: Εάν $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ λεία, τότε $\left|\int_\gamma f\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \leq M\|\gamma\|$

το $\int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt$ είναι "καλύτερο" φράγμα από το $M\|\gamma\|$

Σχόλιο 2: Γενικά, δεν ισχύει $\left|\int_\gamma f\right| \leq \int_\gamma |f|$

π.χ. $f(z) = \frac{1}{z}$

$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$

$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i, \quad \gamma(t) = z_0 + Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$

$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

ενώ $\int_\gamma |f| = \int_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz = \int_\gamma 1\,dz = \int_0^{2\pi} \gamma'(t)\,dt = \gamma(2\pi) - \gamma(0) = e^{2\pi i} - 1 = 0$

$\Rightarrow \left|\int_\gamma f\right| > \int_\gamma |f|$!!!