Πέμπτη, 23/02/2023

Ύλη Μαθήματος

Σχεδίαση στο Πεδίο της Συχνότητας

ΣΧ, ΔΧ

- Ελεγκτές Προήγησης-Καθυστέρησης
- PID ελεγκτές
- Εσωτερική Ευστάθεια
- Παραμετρική μορφή όλων των ελεγκτών που κάνουν το σύστημα κλειστού βρόχου ευσταθές
- Loop Shaping

Σχεδίαση στον χώρο κατάστασης

ΣΧ, ΔΧ

- Τοποθέτηση Πόλων (για συστήματα 1 εισόδου)
- Διάσπαση Kalman
- Βέλτιστος Έλεγχος (λογισμός των μεταβολών)

$\dot{x} = f(x,u)$

$y = h(x,u)$

$x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^p$

y^* επιθυμητή έξοδος κ' έστω x^*, u^*

$$\underline{f(x^*,u^*)=0}, \quad y^* = h(x^*,u^*)$$

$\Delta y = y - y^*$, $\Delta x = x - x^*$, $\Delta u = u - u^*$

$$\Delta\dot{x} = \dot{x} = f(x,u) = f(\Delta x + x^*, \Delta u + u^*) = \underbrace{\cancel{f(x^*,u^*)}}_{0} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x^*,u^*)} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x^*,u^*)} \Delta u + HOT$$

$$\Delta\dot{x} = A \cdot \Delta x + B\Delta u, \quad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*,u^*)}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x^*,u^*)}$$

$$\Delta y = y - y^* = h(x,u) - h(x^*,u^*) = \underbrace{\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x^*,u^*)}}_{C} \Delta x + \underbrace{\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x^*,u^*)}}_{D} \Delta u + HOT$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & (\Sigma) \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

(Σ) ελέγξιμο αν $\forall x_0, x_T \in \mathbb{R}^n, \forall T > 0 \quad \exists u_{[0,T]} : x(T; 0, x_0) = x_T$

Πίνακας ελεγξιμότητας: $\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{n-1}B] \rightarrow n \times nm$

ελέγξιμο $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\mathcal{C}) = n$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\,ds$$

ελέγξιμο $\Leftrightarrow \quad x_{T_f} = e^{AT_f}x_0 + \int_0^{T_f} e^{A(T-s)} Bu(s)\,ds$

Gramian ελεγξιμότητας: $\underset{n \times n}{W_c(t)} = \int_0^t e^{As} \underset{n \times m,\ m \leq n}{B} B^T e^{A^T s}\,ds$ το πολύ τάξη m

ελέγξιμο $\Leftrightarrow W_c(t) > 0$ θετικά ορισμένος $\forall t > 0$

$Q = Q^T$, Q θετικά ορισμένος, $x^T Q x > 0 \;\; \forall x \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda_i(Q) > 0 \;\; \forall i$

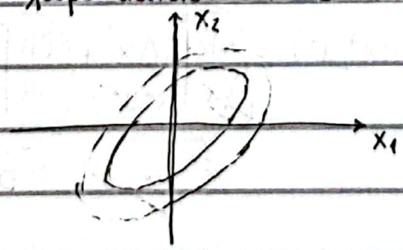
$\Leftrightarrow$ κύριες υποορίζουσες > 0

π.χ. $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ κύριες υποορίζουσες:

$$\lambda_{max}(Q)\|x\|^2 \geq x^T Q x \geq \lambda_{min}(Q)\|x\|^2$$

$x^T Q x = c \rightarrow$ στον χώρο κατάστασης απεικονίζουν γενικευμένα ελλειψοειδή

π.χ. $2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = c$



άξονες της έλλειψης είναι τα ιδιοδιανύσματα της Q

Q θετικά ημιορισμένος $x^T Q x \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i(Q) \geq 0 \;\; \forall i$

$$q^T W_c q = \int_0^t q^T e^{As} B B^T e^{A^T s} q \, ds = \int_0^t \|B^T e^{A^T s} q\|^2 ds \geq 0$$

$$u(t) = B^T e^{A^T(T_f - t)} W_c^{-1}(T_f) \left[-e^{AT_f} x_0 + x_{T_f}\right]$$

$$\int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)} B B^T e^{A^T(T_f-s)} ds \; W_c^{-1}(T_f) \left[-e^{AT_f} x_0 + x_{T_f}\right]$$

$$\overset{\shortparallel}{w} = T_f - s$$

$$\int_{T_f}^{0} e^{Aw} B B^T e^{A^T w} (-dw) \; W_c^{-1}(T_f) = -e^{AT_f} x_0 + x_{T_f}$$

Έστω ότι $v^T W_c(T_1) v = 0$

$$\int_0^{T_1} \|B^T e^{A^T s} v\|^2 ds \; , \; B^T e^{A^T t} v = 0 \quad \forall t \in [0, T_1]$$

$x_0 = 0$, $T_f = T_1$, $x_{T_f} = v$, $v = \int_0^{T_1} e^{A(T_1 - s)} B u(s) ds$ δεν έχει ποτέ λύση, γιατί

$$\underset{\neq 0}{v^T v} = \int_0^{T_1} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{v^T e^{A(T_1-s)} B} u(s) ds \; , \text{άτοπο}$$

(Σ) ΕΛΕΓΞΙΜΟ

1) $rank(\mathcal{C}) = n$

2) $W_c(t) > 0 \;\; \forall t > 0$

3) $rank\,[A - \lambda I \;\; B] = n \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}$ (Hautus Test)

Ιδιοτιμή λ_i του A : $rank[A - \lambda_i I \;\; B] = n$
ελέγξιμη

4) $v_i^T A = \lambda_i v_i^T$, $v_i^T B \neq 0$. Αν ισχύει $\forall i$, τότε το (A, B) ελέγξιμο

5) $\exists K$ τ.ω. οι ιδιοτιμές του $A + BK$ μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα

$\dot{x} = Ax + Bu = (A + BK)x$

$u = Kx$

(Σ) σταθεροποιήσιμο: αν οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές είναι ευσταθείς

(Σ) Σταθεροποιήσιμο

- $\text{rank}[A-\lambda I \;\; B]=n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+$
- $v_i^T A = \lambda_i v_i^T,\ v_i^T B \neq 0$, Αν ισχύει $\forall i$ με $Re(\lambda_i) \geq 0$.

(A, B) ελέγξιμο

$$u^*(t) = B^T e^{A^T(T_f-t)} W_c^{-1}(T_f)(x_{T_f} - e^{AT_f}x_0)$$

↳ ελαχιστοποιεί την ενέργεια της εισόδου

$\dot{x} = Ax + Bu$, (A, B) ελέγξιμο

Να σχεδιαστεί είσοδος u τ.ω. $x(T_f) = x_{T_f}$ για $x(0) = x_0$

που ελαχιστοποιεί το $\int_0^{T_f} \|u(t)\|^2 dt$

Η λύση είναι η παραπάνω $u^*(t)$.

$\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ → απειρία λύσεων

→ αν απαιτήσω ελαχ. ενέργειας ⇒ λύση μοναδική

Έστω $u(t) \neq u^*(t)$. $x_{T_f} = e^{AT_f}x_0 + \int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)} Bu(s)ds$

$$x_{T_f} = e^{AT_f}x_0 + \int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)} Bu^*(u)ds$$

$\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$, $\int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)} B\Delta u(s)ds = 0$

$$\int_0^{T_f} \|u(s)\|^2 ds = \int_0^{T_f} u^T(s)u(s)ds = \int_0^{T_f} (\Delta u(s) + u^*(s))^T(\Delta u(s) + u^*(s))ds$$

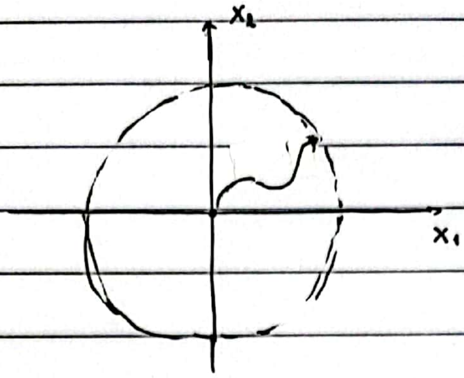
$$= \int_0^{T_f} \|\Delta u(s)\|^2 ds + \int_0^{T_f} \|u^*(s)\|^2 ds + 2\int_0^{T_f} u^{*T}(s)\Delta u(s)ds$$

$$\int_0^{T_f} u^{*T}(s)\Delta u(s)ds = \int_0^{T_f} \underbrace{(x_{T_f} - e^{AT_f}x_0)^T W_c^{-1}(T_f) e^{A(T_f-s)} B}_{u^{*T}(s)} \Delta u(s)\, ds =$$

$$= (x_{T_f} - e^{AT_f}x_0)^T W_c^{-1}(T_f) \int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)} B\Delta u(s)ds = 0$$

$$= \int_0^{T_f} \|\Delta u(s)\|^2 ds + \int_0^{T_f} \|u^*(s)\|^2 ds \geq \int_0^{T_f} \|u^*(s)\|^2 ds$$

π.χ. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$



$T_f = 1$

$x_1^2(1) + x_2^2(1) = 1$

$\min \int_0^1 u^2(s)ds \quad \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Βέλτιστη είσοδος: $u^*(t) = B^T e^{A^T(1-t)} W_c^{-1}(1)\, x(1)$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{As} BB^T e^{A^Ts} ds, \quad e^{At}B = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} s^2 & s \\ s & 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t^3/3 & t^2/2 \\ t^2/2 & t \end{bmatrix} > 0$$

$$W_c(1) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 u^2(s)ds = \int_0^1 \underbrace{x^T(1)\, W_c^{-1}(1)\, e^{A(1-s)} B}_{u^T(s)} \underbrace{B^T e^{A^T(1-s)}\, W_c^{-1}(1)\, x(1)}_{u(s)} ds$$

$$= x^T(1)\, W_c^{-1}(1) \underbrace{\int_0^1 e^{A(1-s)} BB^T e^{A^T(1-s)} ds}_{W_c(1)}\, W_c^{-1}(1)\, x(1)$$

$$= x^T(1)\, W_c^{-1}(1)\, x(1)$$

$$\min_{\|x(1)\|=1} x^T(1)\, W_c^{-1}(1)\, x(1) = \lambda_{min}(W_c^{-1}(1)) = \frac{1}{\lambda_{max}(W_c(1))} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}}$$

$\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{12} = 0, \quad \Delta = \frac{13}{9}$