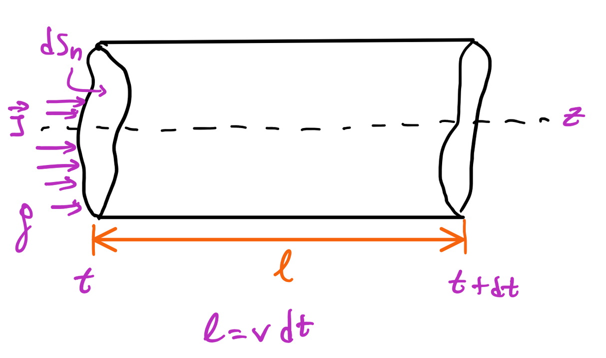
03.03.22

Credits: Μάριος Ρόζος

Thursday, 3 March 2022 12:52 PM

Σχέσεις μεταξύ $\vec{J}, \rho, \vec{v}$



$$d^2q = \rho\, dS_n \cdot v\, dt$$

$$J_n = \frac{d^2q}{dt \cdot dS_n} = \rho v$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

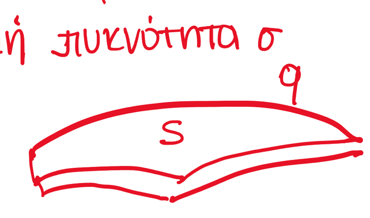
J : χωρική πυκνότητα ρεύματος $[A/m^2]$

ρ : χωρική πυκνότητα φορτίου $[C/m^3]$

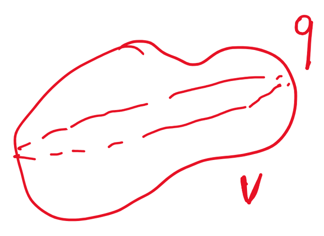
Είδη φορτίων

- Σημειακά q
- Με γραμμική πυκνότητα λ

- Με επιφανειακή πυκνότητα σ



- Με χωρική πυκνότητα ρ



Για ν ιόντα (φορέα): $\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \vec{v_i}$

Για επιφανειακά ρεύματα: $\vec{K} = \sigma \vec{v} \xrightarrow{\text{γενίκευση}} \vec{K} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \vec{v_i}$

K : επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $[A/m]$

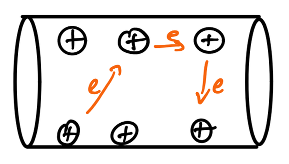
Για γραμμική πυκνότητα ρεύματος έχουμε το ρεύμα i $[A]$

σ: επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $[C/m^2]$

λ: γραμμική πυκνότητα φορτίου $[C/m]$

Παράδειγμα

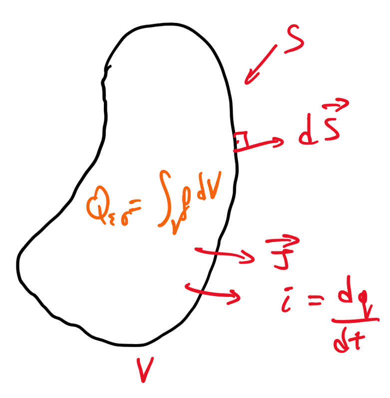
Στους αγωγούς:



$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$$

$$\vec{J} = \rho_+ \cancel{\vec{v}_+} + \rho_- \vec{v}_- = \rho_- \vec{v}_- \neq 0$$

Νόμος διατήρησης ηλ. φορτίου



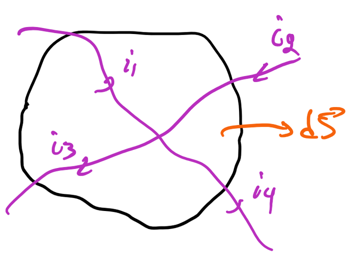
$$dq = -dQ_{\varepsilon\sigma}$$

$$i = -\frac{dQ_{\varepsilon\sigma}}{dt}, \quad i = \oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = \frac{-dQ_{\varepsilon\sigma}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho\, dV\right)$$

$$\oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = \frac{d}{dt}\left(\int_V \rho\, dV\right) \rightarrow$$ νόμος διατήρησης του ηλ. φορτίου ή εξίσωση συνέχειας

Εφαρμογές

1. Για $\frac{d}{dt} = 0$ ή $\frac{d}{dt} \approx 0$, $\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

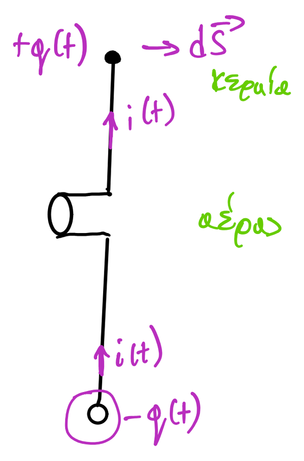


$$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$\boxed{i_1 + i_2 = i_3 + i_4}$$

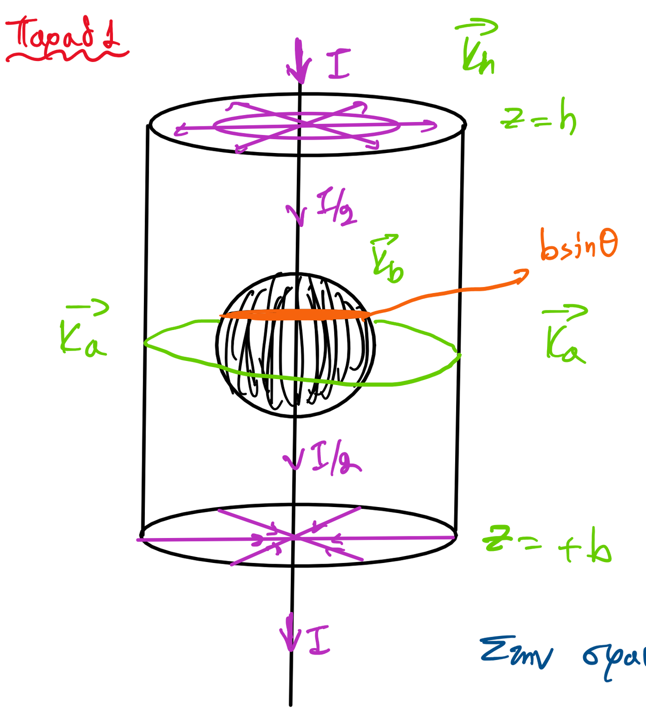
Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff

2.



Παραδείγματα

Παραδ.1



$\vec{K}_h$;

$\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$ αζομιθιακή κυλινδρική συμμετρία

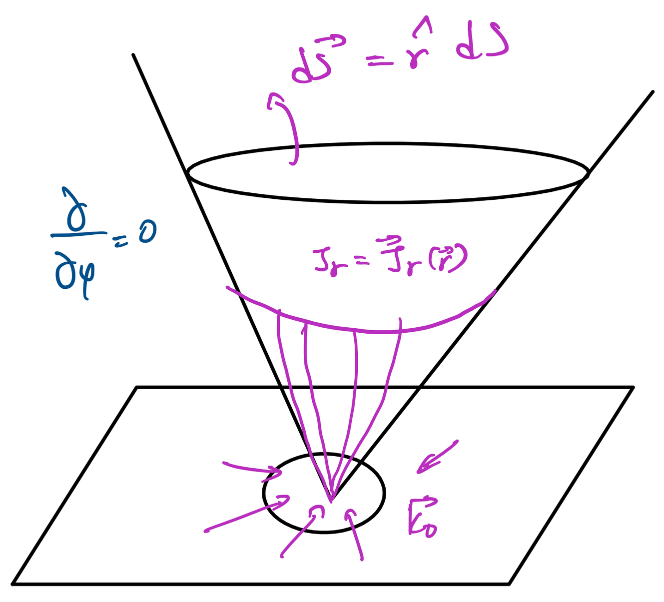
Για $z=h$: $K_h = \frac{I/2}{2\pi r} = \frac{I}{4\pi r}$, $\vec{K}_h = \frac{I}{4\pi r}\hat{r}$, $0 \le r \le a$

Για $r=a$: $K_a = \frac{I/2}{2\pi a} = \frac{I}{4\pi a} \Rightarrow \vec{K}_a = -\frac{I}{4\pi a}\hat{z}$

Για $z=0$: $\vec{K}_a = -\frac{I}{4\pi r}\hat{r}$

Στην σφαιρική επιφάνεια ακτίνας b: $K_b = \frac{I/2}{2\pi b\sin\theta} = \frac{I}{4\pi b\sin\theta} \Rightarrow \vec{K}_b = \frac{I}{4\pi b \sin\theta}\hat{\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$

Παραδ.2



$\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$

Συνολικό ρεύμα I

$\vec{K}_0 = ;$ $J_r(r) = ;$

Για $z=0$:

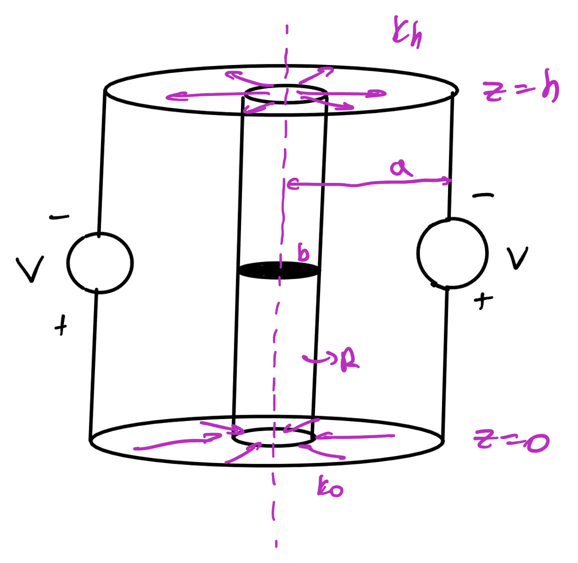
$$K_0 = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{K}_0 = -\frac{I}{2\pi r}\hat{r}$$

$$I = \int_S \vec{J}\, dS = \int_{\theta=0}^{\theta_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \hat{r}\, J_r(r)\, r^2 \sin\theta\, d\theta \cdot d\varphi = 2\pi r^2 J_r(r) \int_0^{\theta_0} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi r^2 J_r(r) \cdot [-\cos\theta]_0^{\theta_0} = 2\pi r^2 J_r(r)\,(1-\cos\theta_0)$$

$$J_r(r) = \frac{I}{2\pi r(1-\cos\theta_0)}$$

Άσκηση 1.7



$\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$

Νόμος του Ohm: $I = V/R$

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi b^2}\hat{z} = \frac{V}{R\pi b^2}\hat{z}$$

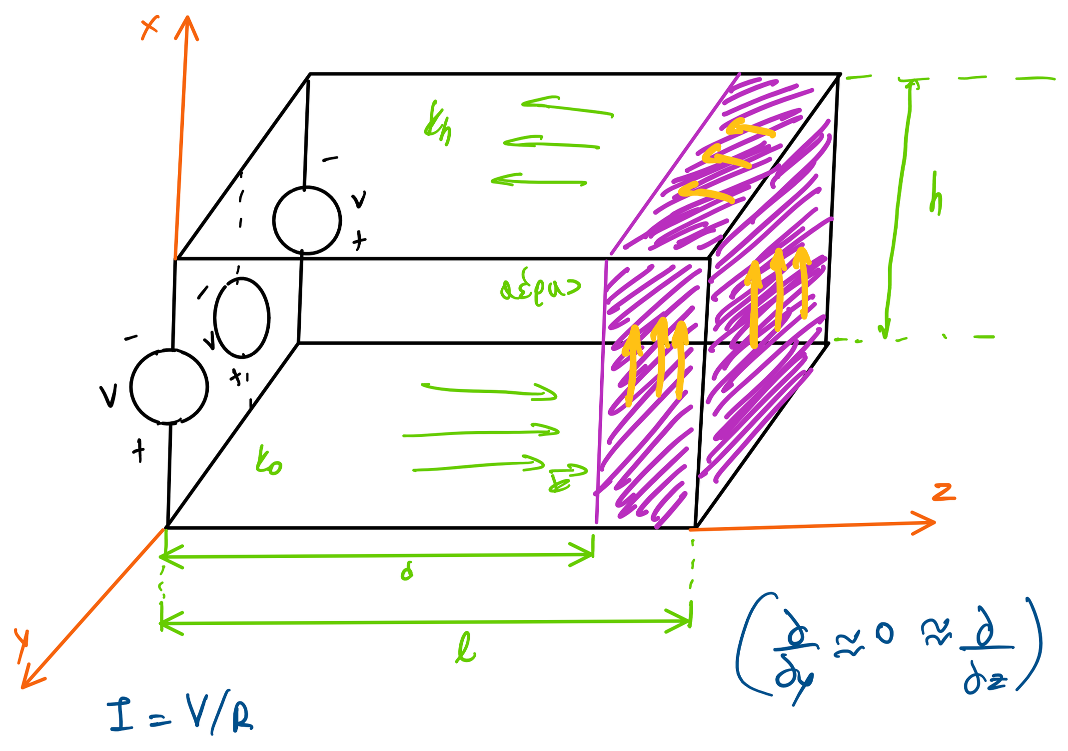
Για $z=h$:

$$\vec{K}_h = \frac{I}{2\pi r}\hat{r}, \quad b \le r \le a$$

$$K_{h,r} = 2\pi r = J_z = \pi r^2$$

$$K_{h,r} = J_z \cdot \frac{r}{2} = \frac{Ir}{2\pi b^2} = \frac{V \cdot r}{2\pi b^2 R}\hat{r}$$

Άσκηση 1.8



$\boxed{\ell, w \gg h}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \approx 0 \approx \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$I = V/R$

Για $z=0$ $\vec{K}_0 = \frac{I}{W}\hat{z}$, $0 < z \le d$

$$\vec{J} = J_x\hat{x} = \frac{I}{W(\ell-d)}\hat{x} = \frac{V}{RW(\ell-d)}\hat{x}, \quad d \le z \le \ell$$

$$K_0(z) \cdot W = J_x \cdot W(\ell - z) \Rightarrow K_0(z) = J_x(\ell - z) = \frac{I}{W}\frac{\ell-z}{\ell-d} = \frac{V}{RW}\frac{\ell-z}{\ell-d}$$

$$\boxed{\vec{K}_0(z) = \frac{V}{RW} \cdot \frac{\ell-z}{\ell-d}\hat{z}, \quad d \le z \le \ell}$$

Για $z=h$:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{K}_h(z) &= -\frac{V}{R \cdot W}\frac{\ell-z}{\ell-d}\hat{z}, \quad d \le z \le \ell \\ \vec{K}_h(z) &= -\frac{I}{W}\hat{z}, \quad 0 < z < d \end{aligned}}$$