Γεννήτριες Συναρτήσεις

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Email: fotakis@cs.ntua.gr

1 Γεννήτριες Συναρτήσεις

Η *συνήθης Γεννήτρια Συνάρτηση* μιας ακολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ δίνεται από τη σειρά $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$. Ο συντελεστής του x^i είναι ο i-οστός όρος της ακολουθίας[1] (δηλ. ο α_i).

Οι Γεννήτριες Συναρτήσεις (ΓΣ) αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης / κωδικοποίησης των ακολουθιών. Κάθε ακολουθία αντιστοιχεί σε μια μοναδική ΓΣ και αντίστροφα. Αν γνωρίζουμε την ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη ΓΣ $A(x)$ με βάση τον ορισμό. Αν γνωρίζουμε τη ΓΣ $A(x)$ υπολογίζουμε τους όρους της ακολουθίας / συντελεστές των δυνάμεων του x από τη σχέση $\alpha_n = (1/n!)A^{(n)}(0)$, όπου $A^{(n)}(0)$ είναι η τιμή της n-οστής παραγώγου της $A(x)$ στο 0.

Για παράδειγμα, η ΓΣ της ακολουθίας με n-οστό όρο $\alpha_n = b\lambda^n$ είναι

$$A(x) = b\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x^i = \frac{b}{1-\lambda x}$$

Η ΓΣ της ακολουθίας $1,1,1,1,0,0,0,\dots$ είναι $1 + x + x^2 + x^3$. Η ΓΣ της ακολουθίας $7,6,5,4,3,2,1,0,0,0,\dots$ είναι $7 + 6x + 5x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$. Αντίστροφα, η ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ $A(x) = 5/(1-4x)$ έχει n-οστό όρο $\alpha_n = 5 \cdot 4^n$, και η ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ $B(x) = 2 + 3x + 4x^2 + x^3$ είναι η $2,3,4,1,0,0,0,0,\dots$.

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε την ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ $\frac{1}{1+x}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας το δυωνυμικό ανάπτυγμα[2], προκύπτει ότι

$$(1+x)^{-1} = 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!}x^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 2\cdots k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

Επομένως, η ακολουθία είναι $\alpha_n = (-1)^n$. □

[1] Θα θεωρούμε πάντα ότι οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή x είναι αρκετά μικρές ώστε η σειρά να συγκλίνει. Εξ' αιτίας αυτής της υπόθεσης, μπορούμε να χειριστούμε τη σειρά σαν πεπερασμένο άθροισμα. Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι η συνάρτηση $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ είναι άπειρα παραγωγίσιμη (αναλυτική) και οι παράγωγοί της υπολογίζονται παραγωγίζοντας τη σειρά σαν πεπερασμένο άθροισμα. Με άλλα λόγια, $A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i\alpha_i x^{i-1}$.

[2] Το ανάπτυγμα της παράστασης $(1+x)^n$ είναι $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ όταν το n είναι φυσικός αριθμός, και $(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k$ διαφορετικά (π.χ. όταν το n είναι αρνητικός ακέραιος ή μη-ακέραιος αριθμός). Αυτό το ανάπτυγμα είναι γνωστό σαν *δυωνυμικό ανάπτυγμα*. Μια συνηθισμένη ειδική περίπτωση είναι το ανάπτυγμα του $(1-x)^{-n}$ όπου το n είναι φυσικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση, $(1-x)^{-n} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$.

2 Βασικές Ιδιότητες

Για τη συνέχεια, θεωρούμε ακολουθίες $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ και $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$ και $B(x)$ αντίστοιχα.

Γραμμική Ιδιότητα. Έστω c, d σταθερές. Η ΓΣ της ακολουθίας $c\,\boldsymbol{\alpha} + d\,\boldsymbol{\beta}$ είναι $c\,A(x) + d\,B(x)$. Για παράδειγμα, η ΓΣ της ακολουθίας $4^n + 9 \cdot 2^n$ είναι $\frac{1}{1-4x} + \frac{9}{1-2x} = \frac{10-38x}{1-6x+8x^2}$. Αντίστροφα, για να βρούμε την ακολουθία με ΓΣ $\frac{9-47x}{1-10x+21x^2}$ αναλύουμε τη ΓΣ σε μερικά κλάσματα $\frac{5}{1-3x} + \frac{4}{1-7x}$. Η ακολουθία είναι $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$.

Ιδιότητα της Ολίσθησης. Συμβολίζουμε με $S^k\boldsymbol{\alpha}$ την ακολουθία με τιμές:

$$(S^k\boldsymbol{\alpha})_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 0, \ldots, k-1. \\ \alpha_{n-k} & \text{για } n \geq k. \end{cases}$$

Δηλαδή πρόκειται για την ακολουθία που προκύπτει από την "δεξιά ολίσθηση" της $\boldsymbol{\alpha}$ κατά k όρους. Η ΓΣ της ακολουθίας $S^k\boldsymbol{\alpha}$ είναι η $x^k A(x)$. Πράγματι,

$$x^k A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^{j+k} = \sum_{n=0}^{k-1} 0x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k} x^n$$

Το τελευταίο άθροισμα προκύπτει από το πρώτο με αλλαγή μεταβλητής (θέτουμε $n = j + k$).

Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα βρίσκουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots$ είναι $\frac{x^4}{1-x}$. Ομοίως, η ΓΣ της ακολουθίας $0, 0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-2}, \ldots$ είναι $\frac{x^2}{1-2x}$.

Συμβολίζουμε με $S^{-k}\boldsymbol{\alpha}$ την ακολουθία με τιμές:

$$(S^{-k}\boldsymbol{\alpha})_n = \alpha_{n+k} \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Δηλαδή πρόκειται για την ακολουθία που προκύπτει από την "αριστερή ολίσθηση" της $\boldsymbol{\alpha}$ κατά k όρους. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $S^{-k}\boldsymbol{\alpha}$ είναι:

$$x^{-k}\Big(A(x) - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x^i\Big)$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα, βρίσκουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $8, 16, 32, \ldots, 2^{n+3}, \ldots$ είναι:

$$x^{-3}[\tfrac{1}{1-2x} - 1 - 2x - 4x^2] = \tfrac{8}{1-2x}$$

Βέβαια σε αυτή την απλή περίπτωση μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Άσκηση 2. Έστω ακολουθία $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$. Να υπολογίσετε τη ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c\alpha_n + d$, όπου c, d δύο σταθερές.

Λύση. Από τη γραμμική ιδιότητα προκύπτει ότι η ζητούμενη ΓΣ είναι $B(x) = cA(x) + \frac{d}{1-x}$. □

Άσκηση 3. Έστω ακολουθία $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$. Να υπολογίσετε τη ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c^n\alpha_n$, όπου c μία σταθερά.