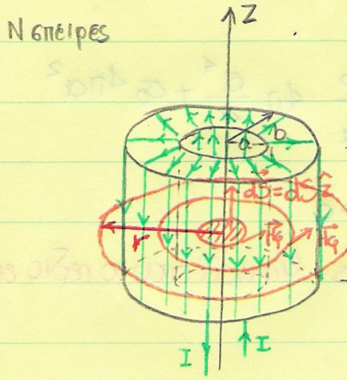
Μαθημα 11ο

02/05/2011

Τοροειδές πηνίο (παράδειγμα σελίδας 374)



Στο παραδιπλα σχήμα ισχυει ότι $\frac{\partial}{\partial \varphi}=0$ και ζητείται το $\vec{H}$.

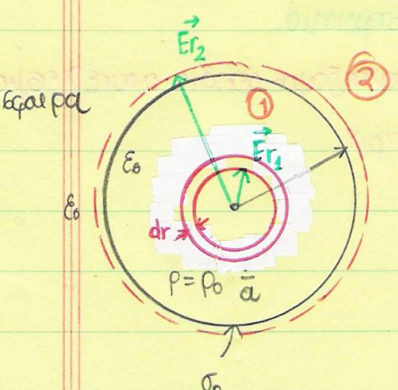
Γνωρίζουμε ότι $J_\varphi=0$, δηλαδή υπάρχει μόνο το J_r και J_z, όπως αποδεικνύεται στις σελίδες 346 και 347, και ισχύει
$\vec{H} = H_\varphi(r,z)\hat{\varphi}$.

Συνεπώς ισχύει

$$H_\varphi \cdot 2\pi r = \begin{cases} 0, & 0 \le r < a \\ NI, & a<r<b \\ NI-NI=0, & b<r<\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H_\varphi = \begin{cases} 0, & 0 \le r < a \\ \frac{NI}{2\pi r}, & a<r<b \\ 0, & b<r<\infty \end{cases}$$

Άσκηση 3.3



Στη διάταξη μας έχουμε σφαιρική συμμετρία $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}=0=\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ και ζητείται το $\vec{E}$.

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας έχουμε
$\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$.

Χρησιμοποιούμε νόμο Gauss, αφού με τον νόμο του Ampère θα δείχναμε ότι $E_\varphi = E_\theta = 0$, κάτι το οποίο πλέον παίρνουμε δεδομένο

A. Λύση με ολοκληρωτικές εξισώσεις

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{εσ}$$

Στην περίπτωση 1 έχουμε ότι

$$\varepsilon_0 \cdot E_{r_1} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{a}\cdot \int_0^r r' \cdot 4\pi r'^2 \, dr'$$

$$= \frac{\rho_0}{a}\cdot 4\pi \frac{r^4}{4}$$

$$E_{r_1} = \frac{\rho_0}{a} \cdot \frac{r^2}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 \cdot r^2}{4\varepsilon_0 a} \quad \text{με} \quad 0 \le r < a$$

Για την περιοχή ② ισχύει ότι :

$$\varepsilon_0 \cdot E_{r_2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{a} \int_0^a r' 4\pi r'^2 dr' + \sigma_0 \cdot 4\pi a^2 = \frac{\rho_0}{a} \cdot 4\pi \cdot \frac{a^4}{4} + \sigma_0 4\pi a^2$$

$$\Rightarrow E_{r_2} = \rho_0 \frac{a^3}{4\varepsilon_0 r^2} + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{a^2}{r^2} \quad \text{με} \quad r > a$$

διαφορικές εξισώσεις Maxwell όταν το πεδίο είναι συνεχές και οριακές συνθήκες

B. Λύση με σημειακές σχέσεις

Για την περιοχή ① ισχύει :

$$\nabla \cdot \vec{D_1} = \rho \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \cdot D_{r_1}) = \rho = \rho_0 \frac{r}{a}$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot D_{r_1} = \frac{\rho_0}{a} \int r^3 dr + C_1 = \frac{\rho_0}{a} \frac{r^4}{4} + C_1.$$

Εφαρμόζω οριακή συνθήκη για $r \to 0$

$$\Rightarrow D_{r_1} = \frac{\rho_0}{a} \cdot \frac{r^2}{4} + \frac{C_1}{r^2}$$

Όταν $r \to 0$ έχουμε $D_{r_1} \to \dfrac{C_1}{r^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ Εδώ όμως $q = 0$. Συνεπώς $C_1 = 0$

τιμή που ισχύει για σημειακό φορτίο

Συνεπώς $D_{r_1} = \dfrac{\rho_0 r^2}{4a} \Rightarrow E_{r_1} = \dfrac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}$

καταλήξαμε σε ίδιο αποτέλεσμα με πριν.

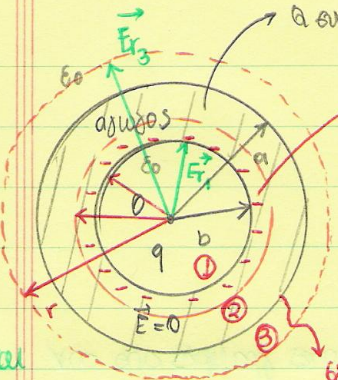
Για την περιοχή ② ισχύει :

$$\nabla \cdot \vec{D_2} = \rho = 0 \Rightarrow D_{r_2} = \frac{C_2}{r^2}$$

Για $r = a$ έχουμε $D_{r_2} - D_{r_1} = \sigma_0 \Rightarrow \dfrac{C_2}{a^2} - \dfrac{\rho_0 a^2}{4a} = \sigma_0$

$$\Rightarrow C_2 = \sigma_0 \cdot a^2 + \frac{\rho_0 a^3}{4} \quad \text{Άρα} \quad E_{r_2} = \frac{C_2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Στο παρακάτω σχήμα θα εξετάσουμε 2 περιπτώσεις :
- Το φορτίο Q είναι τυχαίο και
- $Q = +q$ ή $-q$



Q συνολικο φορτιο αγωγου

για να εχουμε $D_{r_2}=0$ πρεπει τα αρνητικα φορτια που συγκεντρωνεται στον αγωγο να εχουν συνολικα φορτιο $-q$

σε αυτην την εξωτερικη επιφανεια θα πρεπει να εχουμε φορτιο $Q+q$

Το πεδιο στο εσωτερικο ενος αγωγου ειναι 0, οπως αποδεικνυεται απο τον νομο του Ohm σε στατικα προβληματα (για να εχουμε στατικο πεδιο δεν πρεπει να κινουνται τα e, δηλαδη να εχουμε $\vec{J}=0$, αρα και $\vec{E}=0$)

A. Λυση με ολοκληρωτικες σχεσεις

Στην περιοχή ① εχουμε

$$D_{r_1}\cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D_{r_1} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow E_{r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{με } 0<r<a$$

Στην περιοχή ② εχουμε

$$D_{r_2}=0 \quad \text{αφου} \quad D_{r_2}\cdot 4\pi r^2 = q-q=0$$

και $E_{r_2}=0$

Στην περιοχή ③ εχουμε : $D_{r_3}\cdot 4\pi r^2 = q+Q \Rightarrow D_{r_3} = \dfrac{q+Q}{4\pi r^2}$

$$\Rightarrow E_{r_3} = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

B. Λυση με σημειακες σχεσεις:

Στην περιοχή ① εχουμε $\nabla\cdot\vec{D_1} = \rho \Rightarrow \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}(r^2\cdot D_{r_1}) = 0 \Rightarrow D_{r_1} = \dfrac{C_1}{r^2}$

Όταν $r\to 0$ εχουμε $D_{r_1} = \dfrac{C_1}{r^2} = \dfrac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow C_1 = \dfrac{q}{4\pi}$

Αρα $D_{r_1} = \dfrac{q}{4\pi r^2}$ και $E_{r_1} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Στην περιοχη ② εχουμε $D_{r_2}=0$ και $E_{r_2}=0$ και
στην περιοχή ③ ισχυει $D_{r_3} = \dfrac{C_3}{r^2}$

Για $r=a$ ειναι $D_{r_3} - \cancel{D_{r_2}}^{\,0} = \sigma(r=a) \Rightarrow \dfrac{C_3}{a^2} = \dfrac{Q+q}{4\pi a^2} \Rightarrow C_3 = \dfrac{Q+q}{4\pi}$

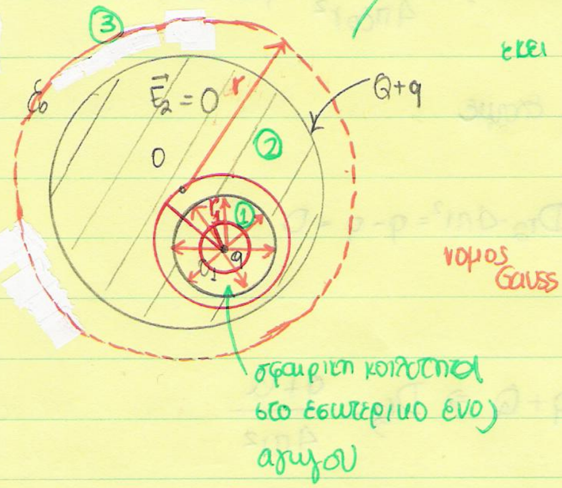
$$\Rightarrow D_{r_3} = \frac{Q+q}{4\pi r^2}$$

Τώρα διακρινω τις περιπτωσεις:

- Αν $Q=-q$ είναι $D_{r_3} = \frac{-q+q}{4\pi r^2} = 0$ και
- Αν $Q=+q$ είναι $D_{r_3} = \frac{2q}{4\pi r^2} = \frac{q}{2\pi r^2}$

Έκκεντρη γεωμετρία

Στο εξωτερικό δεν περνάνε πεδιακές γραμμές από την κοιλότητα (δεν περνά πεδίο από τον αγωγό), οπότε εκεί ισχύει ότι κάναμε πριν χωρίς κοιλότητες



Στην περιοχή 1 ισχύει ότι

$$\varepsilon_0 \cdot E_{r_1} \cdot 4\pi r_1^2 = q \Rightarrow E_{r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \quad \text{με } 0<r_1<b$$

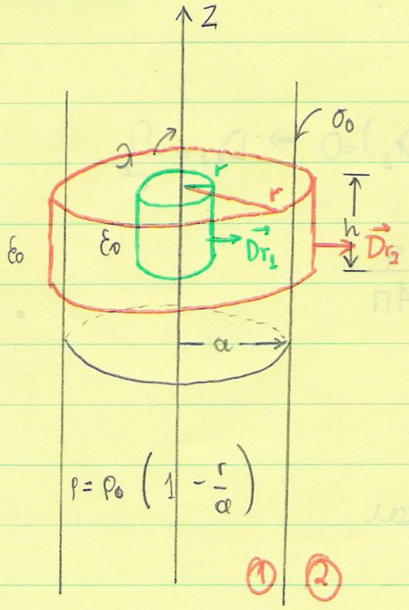
Στην περιοχή 2 ισχύει ότι

$\vec{D}_2 = 0$ και $\vec{E}_2 = 0$

Στην περιοχή 3 ισχύει ότι

$$\varepsilon_0 \cdot E_{r_3} \cdot 4\pi r^2 = Q+q \Rightarrow E_{r_3} = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{με } a<r<\infty$$

Παράδειγμα



Στην διπλανή διάταξη ισχύει ότι

$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 = \frac{\partial}{\partial z}$ και ισχύει ότι $\vec{E} = E_r(r)\cdot\hat{r}$ και

$\vec{D} = D_r(r)\cdot\hat{r}$ έτσι ζητούνται τα $\vec{E}, \vec{D}$.

A. Λύση με ολοκληρωτικές σχέσεις

Ο νόμος του Gauss $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{εσ}$ μας δίνει:

Για την περιοχή 1: $D_{r_1} \cdot 2\pi h = \lambda \cdot h + \rho_0 h \int_0^r \left(1 - \frac{r'}{a}\right) 2\pi r' dr'$

$$= \lambda \cdot h + 2\pi\rho_0 \cdot h \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}\right)$$

$$\Rightarrow D_{r_1} = \frac{\lambda}{2\pi r} + \rho_0\left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3a}\right) \quad \text{και} \quad E_{r_1} = \frac{D_{r_1}}{\varepsilon_0} = \dots$$

Για την περιοχή ②: $D_{r2}\cdot 2\pi r h = \lambda h + 2\pi \rho_0 h\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3a}\right)+\sigma_0\cdot 2\pi a h$

$$\Rightarrow D_{r2}=\frac{\lambda}{2\pi r}+\frac{\rho_0}{r}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{3}\right)+\sigma_0\cdot\frac{a}{r}\Rightarrow E_{r2}=\frac{D_{r2}}{\varepsilon_0}=\ldots$$

B. Λύση με σημειακές σχέσεις

Για την περιοχή ① ισχύει $\nabla\cdot\vec{D_1}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r D_{r1}\right)=\rho_0\left(1-\frac{r}{a}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r D_{r1}\right)=\rho_0\left(r-\frac{r^2}{a}\right)$$

$$\Rightarrow r D_{r1}=\rho_0\int\left(r-\frac{r^2}{a}\right)dr+C_1=$$

$$=\rho_0\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3a}\right)+C_1$$

$$\Rightarrow D_{r1}=\rho_0\left(\frac{r}{2}-\frac{r^2}{3a}\right)+\frac{C_1}{r}$$

Για την περιοχή ② ισχύει $\nabla\cdot\vec{D_2}=0\Rightarrow D_{r2}=\frac{C_2}{r}$

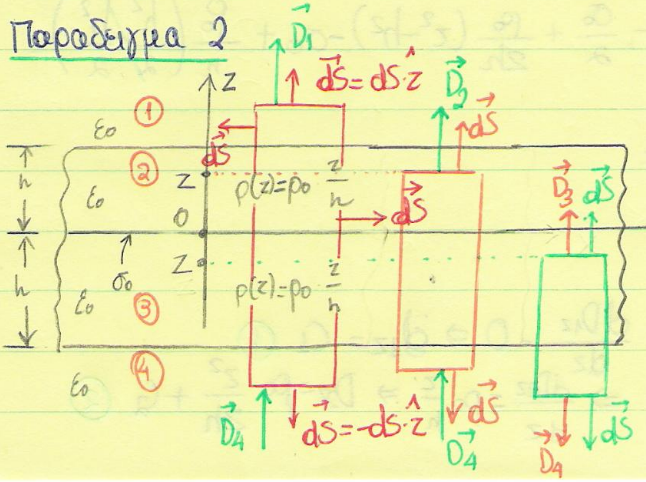
Όταν $r\to 0$ έχουμε ότι $D_{r1}\to\frac{C_1}{r}=\frac{\lambda}{2\pi r}\Rightarrow C_1=\frac{\lambda}{2\pi}$

Συνεπώς $D_{r1}=\rho_0\left(\frac{r}{2}-\frac{r^2}{3a}\right)+\frac{\lambda}{2\pi r}$

Για $r=a$ έχουμε $D_{r2}-D_{r1}=\sigma_0\Rightarrow\frac{C_2}{a}-\rho_0\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{3a}\right)-\frac{\lambda}{2\pi a}=\sigma_0$

$$\Rightarrow C_2=\ldots$$

Παράδειγμα 2



Στην διπλανή διάταξη ισχύει $\frac{\partial}{\partial x}=0=\frac{\partial}{\partial y}$ και συνεπώς

$\vec{E}=E_z(z)\cdot\hat{z}$ και $\vec{D}=D_z(z)\cdot\hat{z}$

ενώ ζητούνται τα $\vec{E}$, $\vec{D}$.

A. Λυση με ολοκληρωτικες εξισωσεις

Η σχεση $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{εσ}$ μας δινει

$$\underbrace{D_{1z}\cdot S}_{\substack{\text{πανω}\\ \text{βαση}}} - \underbrace{D_{4z} S}_{\substack{\text{κατω}\\ \text{βαση}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{παραπλευρη}\\ \text{επιφανεια}}} = \sigma_0 S + \frac{\rho_0}{h}\cdot S \int_{-h}^{h} z\,dz \quad \text{για το 1° ορθογωνιο}$$

Απο την συνθηκη αντισυμμετριας (ή συνθηκη στο απειρο) εχω

$D_{1z} = -D_{4z}$.

Αρα $\quad 2D_{1z} = \sigma_0 + \frac{\rho_0}{h}\left(\frac{h^2}{2} - \cancel{\frac{h^2}{2}}\right) \Rightarrow D_{1z} = \frac{\sigma_0}{2} = -D_{4z}$.

Για το 2° ορθογωνιο εχω:

$$D_{2z}\cdot S - D_{4z}\cdot S = \sigma_0\cdot S + \frac{\rho_0\cdot S}{h}\int_{h}^{z} z'\,dz'$$

$$\Rightarrow D_{2z} = D_{4z} + \sigma_0 + \frac{\rho_0}{h}\left(\frac{z^2-h^2}{2}\right) = -\frac{\sigma_0}{2} + \sigma_0 + \frac{\rho_0}{2h}(z^2-h^2)$$

$$\Rightarrow D_{2z} = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\rho_0}{2h}(z^2-h^2)$$

Για το 3° ορθογωνιο εχω

$$D_{3z}\cdot S - D_{4z}\cdot S = \frac{\rho_0}{h}\cdot S\int_{-h}^{z} z'\,dz'$$

$$\Rightarrow D_{3z} = D_{4z} + \frac{\rho_0}{h}\,\frac{z^2-h^2}{2} = -\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\rho_0}{2h}(z^2-h^2)$$

Ενω γενικα ισχυει οτι $E_z = \frac{D_z}{\varepsilon_0}$

B. Λυση με σημειακες σχεσεις

Στην περιοχη ① εχουμε $\nabla\cdot\vec{D_1} = 0 \Rightarrow \frac{dD_{1z}}{dz} = 0 \Rightarrow D_{1z} = C_1$ ①

Στην περιοχη ② εχουμε $\nabla\cdot\vec{D_2} = \rho_0\cdot\frac{z}{h} \Rightarrow \frac{dD_{2z}}{dz} = \rho_0\frac{z}{h} \Rightarrow D_{2z} = \rho_0\cdot\frac{z^2}{2h} + C_2$ ②

Στην περιοχή 3 έχουμε $\nabla \cdot \vec{D_3} = \rho_0 \frac{z}{h} \Rightarrow D_{3z} = \rho_0 \frac{z^2}{2h} + C_3$ 3

Στην περιοχή 4 έχουμε $\nabla \cdot \vec{D_4} = 0 \Rightarrow D_{4z} = C_4$ 4

Οι οριακές συνθήκες μας δίνουν • Για $z=h$: $D_{1z} = D_{2z} \Rightarrow C_1 = \rho_0 \frac{h^2}{2h} + C_2$ 5

• Για $z=0$: $D_{2z} - D_{3z} = \sigma_0 \Rightarrow C_2 - C_3 = \sigma_0$ 6

• Για $z=-h$: $D_{3z} = D_{4z} \Rightarrow \rho_0 \cdot \frac{h^2}{2h} + C_3 = C_4$ 7

Η συνθήκη στο άπειρο (αντισυμμετρίας) δίνει ότι $D_{1z} = -D_{4z} \Rightarrow C_1 = -C_4$ 8

Από τις σχέσεις 5 - 8 υπολογίζω τα C_1, C_2, C_3 και C_4.