Ιωάννης Τσαντίδης
ΑΜ: el20883

1ο Φυλλάδιο Μαθηματικής Ανάλυσης ΙΙ

(1) Αρχικά οι μερικές παράγωγοι στο (0,0) είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

Έστω συναρτήσεις g, h τέτοιες ώστε:

$$g(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{για } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{για } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$h(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{για } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{για } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Άρα: $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \dfrac{g(0,y)-g(0,0)}{y-0} = \lim_{y \to 0} \dfrac{-y^5}{y^5} = -1$

και:

$\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial h(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{h(x,0)-h(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^5}{x^5} = 1$

Επομένως, υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ αλλά $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

(2) Αφού η f είναι ακτινική, θα είναι της μορφής $f(x_1,\dots,x_n) = f(r)$.

$\vec{\nabla} f(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x_n}\right) = f'(r)\left(\dfrac{2x_1}{2r}, \dots, \dfrac{2x_n}{2r}\right)$

$= f'(r)\cdot\dfrac{1}{r}(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{f'(r)}{r}x$, δηλαδή έχουμε δύο διανύσματα που συνδέονται: $\vec{a} = c\cdot\vec{b}$, με c σταθερά $\left(c = \dfrac{f'(r)}{r}\right)$. Άρα $\vec{\nabla} f(\vec{x}) \parallel \vec{x}$

Για το αντίστροφο, αφού $\vec{\nabla} f(\vec{x}) \parallel (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \Rightarrow \vec{\nabla} f(\vec{x}) = a\vec{x}$, με a σταθερά $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = a\cdot x_i \Rightarrow f = \int a x_i \, dx_i + c$

Όπου το c είναι συνάρτηση των άλλων $x_n - 1$ μεταβλητών. Ισχύει:

$f(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{a}{2}x_i^2 + c$

Αν $c = \dfrac{a}{2}(x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots x_n^2)$ τότε $f(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{a}{2}r^2 \Rightarrow$

$f(r) = \dfrac{a}{2}r^2 \Rightarrow f$ ακτινική ∎

③ Αφού ισχύει $f(tx, ty) = t^m f(x,y)$, η f είναι ομογενής με βαθμό ομογένειας m. Από το Θεώρημα του Euler έχουμε:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = m \cdot f(x,y)$$

Οι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι ομογενείς βαθμού $m-1$, επομένως από το ίδιο Θεώρημα: $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (m-1)\frac{\partial f}{\partial x}$ και

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (m-1)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{m-1}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{m-1}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

Αντικαθιστώντας στην 1η:

$$\frac{x}{m-1}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + \frac{y}{m-1}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = m\, f(x,y)$$

$$\Rightarrow x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = m(m-1)\, f(x,y)$$

∎

4) α) Έστω συνάρτηση g, τέτοια ώστε $g(t) = f(r(t))$, με $t \in [0, +\infty)$.
Η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση των συνεχών f, r. Επιπλέον: $g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = r'^2(t) \geq 0 \Rightarrow g$ αύξουσα

Άρα, για $t_1 < t_2$, με $t_i \in [0, +\infty)$, ισχύει: $f(r(t_1)) \leq f(r(t_2))$, δηλαδή, οι τιμές της f αυξάνονται κατά μήκος οποιασδήποτε τροχιάς κλίσεων.

β) Αφού $\lim_{t \to +\infty} r(t) = (x_0, y_0, z_0)$, η r τείνει ασυμπτωτικά στο $A(x_0, y_0, z_0)$ για $t \to +\infty$, επομένως $\lim_{t \to +\infty} r'(t) = 0$, δηλαδή το A αποτελεί κρίσιμο σημείο της r. Η f ωστόσο αποτελεί τον περιορισμό της πάνω στην r, έτσι το A θα είναι και αυτό κρίσιμο σημείο της f.

5

Θέτω $x = \frac{u}{\sqrt{3}}$, $y = v$, $z = -w$ και η Jacobian ορίζουσα είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\sqrt{3}/3$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται: $\iiint_G (-w)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) du \cdot dv \cdot dw =$

$$= \iiint_G w\frac{\sqrt{3}}{3}\, du \cdot dv \cdot dw$$

Θέτω $u = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta$, $v = r \cdot \sin\varphi \sin\theta$, $w = r \cdot \cos\varphi$ και η Jacobian είναι:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} u_r & u_\theta & u_\varphi \\ v_r & v_\theta & v_\varphi \\ w_r & w_\theta & w_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi$$

Πρέπει $3x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \Rightarrow \frac{3u^2}{3} + v^2 + w^2 \le 1 \Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 \le 1 \Rightarrow$

$r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\varphi \le 1 \Rightarrow r^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$

Επίσης, $z \le 0 \Rightarrow -w \le 0 \Rightarrow -r\cos\varphi \le 0 \xRightarrow{r>0} \cos\varphi \ge 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \varphi \in [0, \pi/4]$

Άρα, έχουμε: $\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{1} r^3\cos\varphi\sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \int_{r=0}^{1} r^3 dr$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sin^2(\pi/4) \cdot \frac{1^4}{4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$$

6

Για να ισχύει το Θεώρημα Green, θα πρέπει: $\oint_\gamma y\,dx + x^2 dx = \iint_{(\tau)} \left(\frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y)}{\partial y} \right) dx\,dy$

$\iint_{(\tau)} \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y)}{\partial y}\, dx\,dy$. Θέτω $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ και η Jacobian είναι

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$, και:

$x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \le 1 \Rightarrow r^2 \le 1 \Rightarrow r \in [0,1]$

$|y| \geq |x| \Rightarrow |r\cos\varphi| \geq |r\sin\varphi| \Rightarrow |\cos\varphi| \geq |\sin\varphi| \Rightarrow \varphi \in [0, \pi/4]$ και

$\varphi \in [3\pi/4, \pi]$

Άρα:

$$\iint_{(\tau)} (2x-1)\,dx\,dy = \iint (2r\cos\varphi - 1) r\,dr\,d\varphi = \iint_{r=0}^{1} (2r^2\cos\varphi - r)\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int \left(\frac{2}{3}\cos\varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{2}{3}\cos\varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi + \int_{3\pi/4}^{\pi} \left(\frac{2}{3}\cos\varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

Έχουμε 3 καμπύλες όσο αφορά το επικαμπύλιο, επομένως:

α) $r_1(t) = (t, t)$, με $t \in [0, \sqrt{2}/2]$, $\dot{r}_1(t) = (1, 1)$ άρα:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} F\Big|_{x=t}^{y=t} \cdot \dot{r}(t)\, dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} (t, t^2)(1,1)\, dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} t^2 + t\, dt = \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{1}{4}$$

β) $r_2(t) = (\cos t, \sin t)$ με $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ άρα: $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} F\Big|_{\substack{x=\cos t\\ y=\sin t}} \dot{r}_2(t)\, dt =$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^3 t - \sin^3 t\, dt = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

γ) $r_3(t) = (t, -t)$, με $t \in [-\sqrt{2}/2, 0]$ άρα $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}/2}^{0} F\Big|_{\substack{x=t\\ y=-t}} \cdot \dot{r}_3(t)\, dt =$

$$= \int_{-\sqrt{2}/2}^{0} -t - \frac{t^2}{2}\, dt = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{24}$$

Τελικά, $\displaystyle\oint_\gamma y\,dx + x^2\,dy = \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{24} = -\frac{\pi}{4}$

Επομένως, το Θ. Green επαληθεύεται.

7 Θέτω $u=x-y$, $w=x+3y \Rightarrow x=\frac{3u+w}{4}$, $y=\frac{w-u}{4}$. Η Jacobian είναι: $\begin{vmatrix} x_u & x_w \\ y_u & y_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\iint_G \frac{3u+w}{4}\cdot\frac{1}{4}\,du\,dw = \iint_G \frac{3u+w}{16}\,du\,dw$$

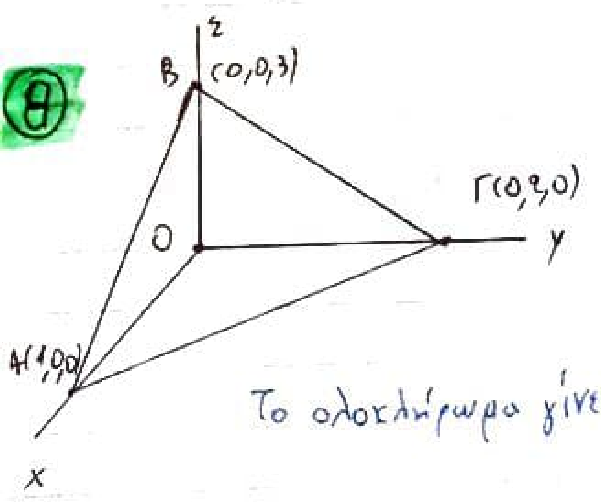
Θέτω $u=r\cos\varphi$, $w=r\sin\varphi$ και η Jacobian ορίζουσα είναι:
$\begin{vmatrix} u_r & u_\varphi \\ w_r & w_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$. Επιπλέον:

$(x-y)^2+(x+3y)^2\le 1 \Rightarrow u^2+w^2\le 1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \le 1 \Rightarrow r^2\le 1 \Rightarrow r\in[0,1]$

Άρα: $\displaystyle\iint_{\varphi=0,\ r=0}^{2\pi,\ 1} \frac{3(r\cos\varphi)+r\sin\varphi}{16}\, r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{3\cos\varphi+\sin\varphi}{16}\,d\varphi\int_{r=0}^{1} r^2\,dr =$

$= 0\cdot\frac{1}{3} = 0$

8



Έχουμε: $\vec{AB}=(-1,0,3)$, $\vec{A\Gamma}=(-1,2,0)$,
$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{A\Gamma}=(-6,-3,-2)$.
Η εξίσωση του επιπέδου των A,B,Γ:
$z=3-3x-\frac{3}{2}y$.

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{2}\int_{0}^{3-3x-\frac{3}{2}y} z\,dz\,dy\,dx =$

$\displaystyle= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2} \frac{\left(3-3x-\frac{3y}{2}\right)^2}{2}\,dy\,dz = \int_{x=0}^{1} \frac{\left(3-3x-\frac{3}{2}2\right)^3}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx =$

$\displaystyle= \int_0^1 3x^3\,dx = \frac{3}{4}$