Δευτέρα 1/4/22 8η Διάλεξη: ~~Κ~~ 4η Κολέτσος

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Επαναληπτικές Μέθοδοι

ΙΔΕΑ: $Ax=b$, χωρίζω τον A σε διαφορά πινάκων

$(Q-P)x=b$

$Qx=Px+b$ θεωρώ ότι Q αντιστρέψιμος

$x=\boxed{Q^{-1}P}x+\boxed{Q^{-1}}b$

$x=\boxed{B}x+\boxed{d}$

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+d$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x^{(k)} \leftarrow$ δείκτης επανάληψης, όχι δύναμη ή παράγωγος.

Παράγουμε ακολουθία διανυσμάτων $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(m)} \ldots$ που ελπίζω να συγκλίνει σε μια αληθινή λύση του συστήματος

Ⓐ Νόρμες Διανυσμάτων

$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$, X οποιοσδήποτε διανυσματικός χώρος π.χ. $\mathbb{R}^n$

Αποκαλείται νόρμα αν κάνει τα εξής:

i) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$

ii) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\vec{0}$

iii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x,y \in X$, Τριγωνική Ανισότητα

<u>Προφανώς:</u> $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$

<u>Απόδειξη</u>: • $\|x\| = \|x-y+y\| \overset{(4)}{\le} \|x-y\| + \|y\|$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|-\|y\| \le \|x-y\|}$$

• $\|y\| = \|y-x+x\| \overset{(4)}{\le} \|y-x\| + \|x\|$

$$\Rightarrow \boxed{\|y\|-\|x\| \le \|y-x\|}$$

Άρα $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\|$ //

Οι πιο συνηθισμένες νόρμες διανυσμάτων:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, Ευκλείδια νόρμα, $= \|x\|_E$

Οι παραπάνω είναι περιπτώσεις της $\|x\|_p$,

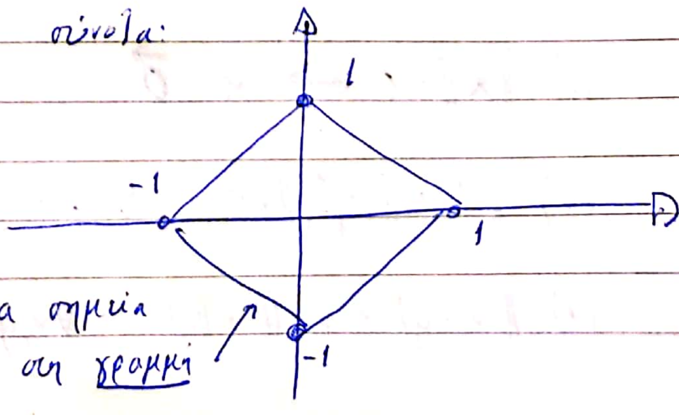
όπου $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$

- $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$

$$\left[\ \text{π.χ.}\quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \|x\|_1 &= 6 \\ \|x\|_2 &= \sqrt{14} \\ \|x\|_\infty &= 3 \end{aligned}\ \right]$$

<u>Παραδείγματα</u> Βρείτε τα σύνολα:

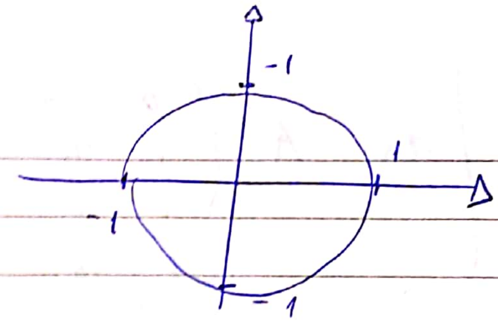
$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_1 = 1\}$:



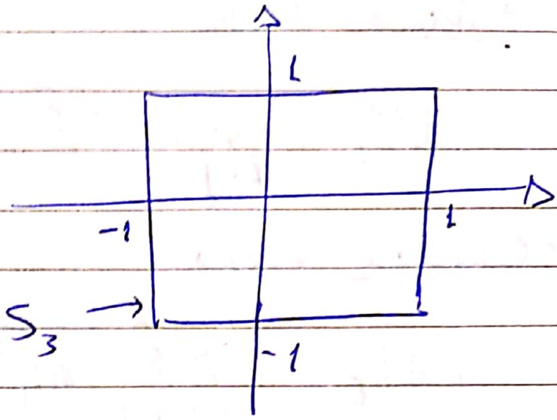
Όλα τα σημεία πάνω στη γραμμή

$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$:

Ο μοναδιαίος κύκλος



$S_3 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty = 1\}$:



• Στον $\mathbb{R}^n$ όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, δηλαδή:

$\exists m, M$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $m \cdot \|x\|_a \le \|x\|_b \le M \cdot \|x\|_a$

Ορισμός: $\boxed{x^{(k)} \to x \iff \lim_{k \to +\infty} \|x_k - x\| = 0}$ S.O.S.

για οποιαδήποτε νόρμα

(B) Νόρμες Πινάκων

$\|\cdot\|: M_n \to \mathbb{R}$ $\quad M_n$ τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες

i) $\|A\| \ge 0, \ \forall A \in M_n$

ii) $\|A\| = 0 \iff A = \mathbb{O}$

iii) $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall A \in M_n$

iv) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \ \forall A, B \in M_n$, Τριγωνική Ανισότητα

v) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|, \ \forall A, B \in M_n$

Παραδείγματα νορμών πίνακα:

$\|A\|_r = \max\limits_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$, Νόρμα Γραμμή

$$\left[\text{π.χ.} \quad A = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 3 & -11 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 4 & 16 & 2 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{sum} \\ 5 \\ 14 \\ 3 \\ \\ \end{array} \quad \text{Άρα } \|A\|_\Gamma = 14 \right]$$

- Νόρμα Στήλη:

$$\|A\|_\Sigma = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right), \quad \left[\|A\|_\Sigma = 16 \right]$$

- Ευκλείδεια νόρμα:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \quad \left[\|A\|_E = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 1^2 + 3^2 + (-11)^2 + \dots} \right]$$

Ορισμός Αν $\|\cdot\|_\gamma$ είναι μια νόρμα διανύσματος

Τότε η παράσταση Φυσικές Νόρμες

$$\|A\|_\gamma := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \vec{0}}} \frac{\|Ax\|_\gamma}{\|x\|_\gamma} = \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^n \\ \|u\|_\gamma = 1}} \|A \cdot u\|_\gamma, \text{ ορίζει μια νόρμα πίνακα } \|A\|_\gamma$$

με την επιπλέον ιδιότητα $\|A \cdot x\|_\gamma \le \|A\|_\gamma \|x\|_\gamma$

(δεν ταυτίζεται με την (5))

$\left\{ \text{Απόδειξη ιδιότητας: } \|A\|_\gamma \ge \frac{\|Ax\|_\gamma}{\|x\|_\gamma} \Rightarrow \|Ax\|_\gamma \le \|A\|_\gamma \cdot \|x\|_\gamma \right\}$

Ο παραπάνω ορισμός είναι υπολογιστικά άχρηστος, αφού πρέπει να υπολογιστεί το $\frac{\|Ax\|_\gamma}{\|x\|_\gamma}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$

Ωστόσο έχουν αποδειχθεί:

$$\|A\|_\infty = \|A\|_\Gamma$$

$$\|A\|_1 = \|A\|_\Sigma$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)} \xrightarrow{A.\ \text{συμμετρικός}} \rho(A) \quad *$$

$* \; \rho(A) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$, φασματική ακτίνα του πίνακα
(λ_i: ιδιοτιμές)

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ x + 3.0001y &= 4.0001, \quad (x,y) = (1,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ x + 2.9999y &= 4.0002 \quad (x,y) = (10,-2) \end{aligned}$$

Ελάχιστη μεταβολή δεδομένων $\longrightarrow$ μεγάλη μεταβολή της λύσης

Ασταθή Συστήματα, Next time