Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

Ονοματεπώνυμο:.................................

Αρ. Μητρώου: ....

Εξάμηνο: ....

Θέση: ....

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
Σ	

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Κανονική Εξέταση, Φεβρουάριος 2019

Διάρκεια εξέτασης: 2:30. Σύνολο μονάδων: 80

Δεν επιτρέπεται κινητό τηλέφωνο, αριθμομηχανή ή άλλη ηλεκτρονική συσκευή. Σε περίπτωση που έχετε μαζί σας κάτι από τα παραπάνω παρακαλούμε απενεργοποιήστε τα και κρύψτε τα. Η αποχώρηση είναι δυνατή μετά την παρέλευση τουλάχιστον 1 ώρας από την έναρξη.

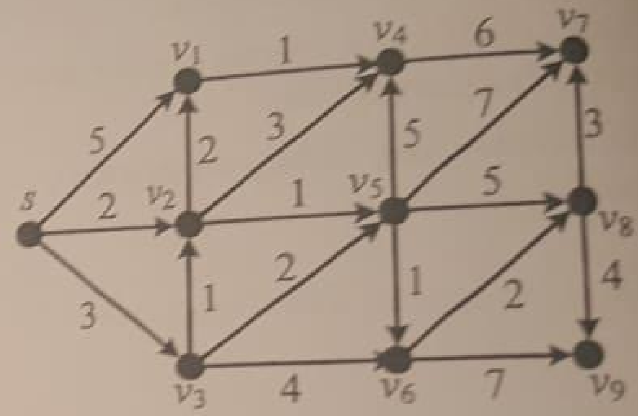
Θέμα 1. (12)

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ). Δεν απαιτείται αιτιολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση παίρνει 1 μονάδα, κάθε λάθος απάντηση αφαιρεί 0.5 μονάδα (αρνητική βαθμολογία). Κενές ή άκυρες απαντήσεις δεν προσθέτουν ούτε αφαιρούν μονάδες. Για τις απαντήσεις σας, να υποθέσετε ότι **P** $\neq$ **NP**, αν αυτό χρειάζεται.

	Η αναδρομική σχέση $T(n) = T(n/2) + \sqrt{n}$, με $T(1) = \Theta(1)$, έχει λύση $T(n) = O(\sqrt{n}\log n)$.
	Η αναδρομική σχέση $T(n) = T(n/3) + T(n/2) + n$, με $T(1) = \Theta(1)$, έχει λύση $T(n) = \Theta(n \log n)$.
	Η αναδρομική σχέση $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \log n$, με $T(1) = \Theta(1)$, έχει λύση $T(n) = \Omega(n^2 \log^2 n)$.
	Υπάρχει συγκριτικός αλγόριθμος ταξινόμησης που για πίνακες 7 στοιχείων κάνει λιγότερες από 12 συγκρίσεις, στη χειρότερη περίπτωση.
	Ένα κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα G έχει μοναδική τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν το G έχει μονοπάτι Hamilton, δηλ. ένα απλό κατευθυνόμενο μονοπάτι που περνάει από όλες τις κορυφές.
	Το DFS σε ένα γράφημα με n κορυφές χρειάζεται χρόνο $\Theta(n^2)$ αν το γράφημα αναπαρίσταται με πίνακα γειτνίασης.
	Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά μήκη w στις ακμές, και έστω s, t δύο κορυφές του G. Αν το συντομότερο $s-t$ μονοπάτι p είναι μοναδικό, τότε κάθε Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G που περιέχει τουλάχιστον μία ακμή του p.
	Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά μήκη w στις ακμές, και έστω $s \in V$. Η ελαφρύτερη ακμή που προσπίπτει στην s, αν είναι μοναδική, ανήκει σε κάθε Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G.
	Έστω κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με μήκη w στις ακμές, και έστω s, t δύο κορυφές του G. Αν το G δεν περιέχει κύκλους, τότε το μακρύτερο $s-t$ μονοπάτι μπορεί να υπολογισθεί χρόνο $O(\|V\|+\|E\|)$.
	Σε ένα s-t δίκτυο, αν αυξήσουμε την χωρητικότητα δύο ακμών της μέγιστης τομής κατά k, τότε η μέγιστη ροή αυξάνεται κατά $2k$.
	Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με μέγιστο βαθμό κορυφής 2019 και φυσικός $k \geq 1$. Είναι **NP**-πλήρες να αποφασίσουμε αν το G έχει πλήρες υπογράφημα με τουλάχιστον k κορυφές.
	Αν ένα πρόβλημα απόφασης Π μπορεί να αναχθεί πολυωνυμικά σε ένα γνωστό **NP**-πλήρες πρόβλημα τότε το Π είναι **NP**-πλήρες.

Θέμα 2. (9+9=18)

1. Στο διπλανό γράφημα, να υπολογίσετε τις αποστάσεις και τα συντομότερα μονοπάτια όλων των κορυφών από την κορυφή *s*, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra. Να περιγράψετε αναλυτικά την λειτουργία του αλγόριθμου στο συγκεκριμένο γράφημα. Ποιο είναι το τελικό αποτέλεσμα του αλγόριθμου;



2. *Εστω συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα* $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη w στις ακμές. Υποθέτουμε ότι το G είναι *σχεδόν-δέντρο*, με την έννοια ότι $|E| = |V| + c$, για κάποια θετική σταθερά c. Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* για τον υπολογισμό ενός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου σε ένα τέτοιο γράφημα G. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Θέμα 3. (8)

Έστω πίνακας $A[1..n]$ με n φυσικούς αριθμούς. Η *τάξη* $order(k)$ του στοιχείου $A[k]$ είναι το πλήθος των στοιχείων που έχουν μεγαλύτερη τιμή και βρίσκονται σε θέσεις $j > k$ στον A, δηλ. $order(k) = \left|\{ j : j > k \text{ και } A[j] > A[k]\}\right|$. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει την τάξη όλων των στοιχείων ενός (μη-ταξινομημένου) πίνακα $A[1..n]$. Δηλ. ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει και να επιστρέφει έναν πίνακα $B[1..n]$ τέτοιον ώστε $B[k] = order(k)$, για κάθε $k = 1, .., n$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. **Παράδειγμα:** Με είσοδο τον πίνακα $A = [2, 7, 5, 3, 0, 8, 1]$, ο αλγόριθμος πρέπει να υπολογίζει τον πίνακα $B = [4, 1, 1, 1, 2, 0, 0]$.

Θέμα 4. (6+8=14)

Ένα παιχνίδι παίζεται σε μία σκακιέρα $N \times N$ πάνω στην οποία μετακινούμε ένα πιόνι. Κάθε τετράγωνο (x, y) της σκακιέρας (έτσι συμβολίζουμε το τετράγωνο στην x-οστή γραμμή και στην y-οστή στήλη, $1 \leq x, y \leq N$) περιέχει έναν θετικό ακέραιο αριθμό $A(x, y)$. Αυτοί οι αριθμοί είναι γνωστοί πριν ξεκινήσουμε το παιχνίδι. Το παιχνίδι ξεκινά με το πιόνι στο τετράγωνο $(1, 1)$ και ολοκληρώνεται πάντα με το πιόνι στο τετράγωνο (N, N). Σε κάθε γύρο που το πιόνι μας βρίσκεται στο τετράγωνο (x, y), εισπράττουμε $A(x, y)$ ευρώ. Στόχος είναι να ολοκληρώσουμε το παιχνίδι έχοντας συγκεντρώσει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Για καθεμία από τις περιπτώσεις (α) και (β) παρακάτω, να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το μέγιστο δυνατό κέρδος. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα των αλγορίθμων σας.

α) Θεωρούμε την περίπτωση όπου το πιόνι κινείται (υποχρεωτικά) κατά ένα τετράγωνο είτε προς τα δεξιά (αύξηση της στήλης κατά 1) είτε προς τα κάτω (αύξηση της γραμμής κατά 1) σε κάθε γύρο.

β) Θεωρούμε την περίπτωση που το πιόνι κινείται (υποχρεωτικά) κατά ένα τετράγωνο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση (αύξηση ή μείωση της στήλης κατά 1, αύξηση ή μείωση της γραμμής κατά 1) σε κάθε γύρο (με τον περιορισμό ότι το πιόνι πρέπει να βρίσκεται πάντα εντός της σκακιέρας). Σε αυτή την περίπτωση, το παιχνίδι διαρκεί το πολύ k γύρους, για κάποιον δεδομένο φυσικό $k \geq 2N$. Το παιχνίδι ολοκληρώνεται με το πιόνι να βρίσκεται υποχρεωτικά στο τετράγωνο (N, N). Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, εισπράττουμε το ποσό $A(x, y)$ για κάθε επίσκεψή μας στο τετράγωνο (x, y).

Θέμα 5. (7+7=14)

Θεωρούμε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$ με n κορυφές, m ακμές, θετικά μήκη w στις ακμές και θετικά κόστη c στις κορυφές του G. Το γράφημα αυτό αποτελεί μοντέλο μιας χώρας για την οποία θέλουμε να σχεδιάσουμε τα αεροδρόμια και το σιδηροδρομικό της δίκτυο. Οι πόλεις της χώρας αντιστοιχούν στις κορυφές και για κάθε πόλη $u \in V$, $c(u)$ είναι το κόστος κατασκευής αεροδρομίου στην πόλη u. Μια ακμή $\{u, v\} \in E$ δηλώνει ότι μπορούμε να συνδέσουμε τις πόλεις u και v με (αμφίδρομη) σιδηροδρομική γραμμή $u - v$ που έχει κόστος κατασκευής $w(u, v)$.

Θέλουμε να συνδέσουμε όλες τις πόλεις με ελάχιστο συνολικό κόστος. Δύο πόλεις θεωρούνται συνδεδεμένες αν συνδέονται σιδηροδρομικά (μπορεί και μέσω άλλων ενδιάμεσων πόλεων) ή αν καθεμία τους συνδέεται σιδηροδρομικά με άλλη πόλη που έχει αεροδρόμιο.

Στα (α) και (β) παρακάτω, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

α) Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ποια αεροδρόμια και σιδηροδρομικές γραμμές πρέπει να κατασκευάσουμε ώστε να συνδέσουμε όλες τις πόλεις με ελάχιστο συνολικό κόστος (προσέξτε ότι μπορεί η βέλτιστη λύση να μην περιλαμβάνει κανένα αεροδρόμιο ή καμία σιδηροδρομική γραμμή).

β) Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για το πρόβλημα του (α) αν υποθέσουμε ότι $c(u) = 0$ για κάθε πόλη u και ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε το πολύ k, $2 \le k \le n$, αεροδρόμια.

Θέμα 6. (4+5+5=14)

Δεχόμενοι ότι **P** $\neq$ **NP**, ποια από τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-πλήρη (ή **NP**-δύσκολα) και ποια όχι; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα (και πλήρως) τους ισχυρισμούς σας.

α) Δίνεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές. Ζητείται να αποφανθούμε αν το G έχει (απλό) κύκλο με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του $n/2$.

β) Δίνονται σύνολο $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ με n φυσικούς αριθμούς και φυσικός αριθμός $B > 4$. Ζητείται να αποφανθούμε αν υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε $B - 4 \leq w(S) \leq B$ (συμβολίζουμε με $w(S)$ το άθροισμα όλων των στοιχείων του S).

γ) Δίνεται ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και ένας φυσικός αριθμός k. Ζητείται να αποφανθούμε αν υπάρχει σύνολο κορυφών $S \subseteq V$, με $|S| \leq k$, ώστε το γράφημα $G[V \setminus S]$ να μην έχει κύκλο. Το $G[V \setminus S]$ είναι το γράφημα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε (από το G) τις κορυφές του S (και όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε κάποια από αυτές).