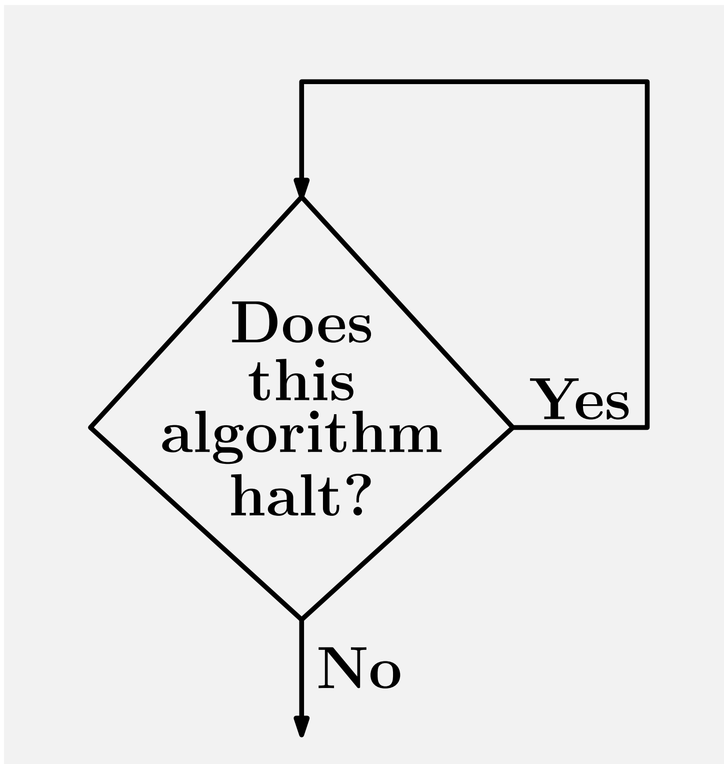
(Πρόχειρες) σημειώσεις στη ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ



Δημήτρης Ζώρος

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ, ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ I

ΜΟΝΤΕΛΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0.1 Σχέσεις και συναρτήσεις

Συμβολισμός 0.1.1. Στις σημειώσεις αυτές χρησιμοποιούνται κατά κόρον τα ακόλουθα σύμβολα:

$$\varnothing,\ \in,\ 2^A,\ \cup,\ \cap,\ \subseteq,\ \setminus,\ \overline{A},\ |A|,\ \times,\ \wedge,\ \vee,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ \text{όπου } A \text{ σύνολο}$$

Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι στοιχειωδώς εξοικειωμένος με αυτά [1].

Συμβολισμός 0.1.2. Με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών [2] και με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Για οικονομία χώρου θα γράφουμε $[n]$ αντί για $\{1,\ldots,n\}$, όπου $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Τέλος, με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 0.1.3. P είναι μία *n-μελής σχέση* στο σύνολο A ανν [3] $P \subseteq A^n$ [4], όπου $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ορισμός 0.1.4. $\mathcal{R}$ είναι μία *ιδιότητα* του σύνολου A ανν $\mathcal{R} \subseteq 2^A$.

Ορισμός 0.1.5. Η *ανακλαστική* ιδιότητα του συνόλου A^2 είναι η $\mathcal{R}^A_{\text{αν}} = \{P \subseteq A^2 \mid (a,a) \in P \text{ για κάθε } a \in A\}$. Η *μεταβατική* ιδιότητα του συνόλου A^2 είναι η $\mathcal{R}^A_{\text{μετ}} = \{P \subseteq A^2 \mid \text{ Αν } (a,b),(b,c) \in P \text{ τότε και } (a,c) \in P\}$.

Ορισμός 0.1.6. Μία διμελής σχέση $P \subseteq A^2$ καλείται *μεταβατική* ανν $P \in \mathcal{R}^A_{\text{μετ}}$.

Ορισμός 0.1.7. Έστω διμελής σχέση $P \subseteq A \times B$, και ιδιότητα $\mathcal{R} \subseteq 2^{A\times B}$. Η *κλειστότητα της P ως προς τη $\mathcal{R}$* είναι η σχέση $P^{\mathcal{R}}$ που προκύπτει από την P αν προσθέσουμε το ελάχιστο απαραίτητο πλήθος ζευγών ώστε $P^{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$.

Παράδειγμα 0.1.8. Η *μεταβατική κλειστότητα* της σχέσης $\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid m = n+1\}$ είναι η σχέση $\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m\}$. Η *ανακλαστική κλειστότητα* της σχέσης $\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m\}$ είναι η σχέση $\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.

---

[1] Για περισσότερες πληροφορίες ανατρέξτε στο [8].

[2] Το 0 θεωρείται φυσικός αριθμός.

[3] Παρακαλώ μην συγκαταλέξετε το «ανν» στη λίστα των τυπογραφικών λαθών αυτών των σημειώσεων. Το χρησιμοποιούμε σαν συντόμευση του «αν και μόνο αν».

[4] $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-φορές}}$

Ορισμός 0.1.9. f είναι *συνάρτηση από το A στο B*, συμβολισμός $f : A \to B$, ανν

- f διμελής σχέση και
- $((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \to b_1 = b_2$.

Αν $(a, b) \in f$ θα γράφουμε $f(a) = b$.

Ορισμός 0.1.10. Έστω $f : A \to B$.

- Το *πεδίο ορισμού* της f είναι το σύνολο $\mathsf{dom(f)} = \{\mathsf{a} \in \mathsf{A} \mid \mathsf{f(a)} \in \mathsf{B}\}$.
- Το *πεδίο τιμών* της f είναι το σύνολο $\mathsf{im(f)} = \{\mathsf{b} \in \mathsf{B} \mid \exists \mathsf{a} \in \mathsf{A}(\mathsf{f(a)} = \mathsf{b})\}$.
- Η f είναι *επί του B* ανν $\forall b \in B\ \exists a \in \mathsf{dom}(f)(f(a) = b)$ [1].
- Η f είναι *ένα προς ένα* (1-1) ανν $(f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b) \to a_1 = a_2$.

Ορισμός 0.1.11. Έστω $f : A \to B$. Η f είναι *μερική συνάρτηση* ανν $\exists a \in A\ \forall b \in \mathsf{im}(f)(f(a) \neq b)$ [2]. Σε αυτήν την περίπτωση θα γράφουμε $f(a) = \perp$, όπου $\perp \notin A \cup B$ [3]. Μία συνάρτηση που δεν είναι μερική καλείται *ολική συνάρτηση* (ή *πλήρης*).

Παράδειγμα 0.1.12. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$. Η f προφανώς είναι μερική συνάρτηση, καθώς για οποιοδήποτε $r < 0$ ισχύει ότι $r \notin \mathsf{dom}(f)$ (ή αλλιώς $f(r) = \perp$).

Ορισμός 0.1.13. Έστω $f : A \to B$, 1-1 και επί συνάρτηση. Η *αντίστροφη συνάρτηση της f* είναι η συνάρτηση $f^{-1} : \mathsf{im}(f) \to \mathsf{dom}(f)$ με $f^{-1}(x) = y$, όπου το y είναι τέτοιο ώστε $f(y) = x$.

Ορισμός 0.1.14. Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to C$. Η *σύνδεση των f και g* είναι η συνάρτηση $g \circ f : A \to C$ με:

$$g \circ f(x) = \begin{cases} g(f(x)) & ,\ \text{αν } x \in \mathsf{dom}(f) \\ \perp & ,\ \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ορισμός 0.1.15. Έστω σύνολο B. Η *χαρακτηριστική συνάρτηση* $\chi_A : B \to \{0, 1\}$ ενός συνόλου $A \subseteq B$ ορίζεται ως εξής:

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1 & ,\text{αν } a \in A \\ 0 & ,\text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ορισμός 0.1.16. Ένα σύνολο A είναι *πεπερασμένο* αν $|A| \in \mathbb{N}$ και *άπειρο* αν $|A| \notin \mathbb{N}$. Δύο σύνολα A, B είναι *ισοπληθικά* ανν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \to B$. Ένα σύνολο A είναι *αριθμησίμως άπειρο* αν είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$ (σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $|A| = \aleph_0$).

Θεώρημα 0.1.17. Για κάθε σύνολο A ισχύει ότι $|A| < |2^A|$ [4].

Απόδειξη. Έστω (προς άτοπο) 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \to 2^A$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Αφού $B \subseteq A$ και η f είναι επί του 2^A, υπάρχει $b \in A$ τέτοιο ώστε $f(b) = B$. Όμως τότε $b \in B$ ανν $b \notin B$. Άτοπο. □

[1] Κάθε συνάρτηση f είναι επί του $\mathsf{im}(f)$.
[2] Το a δηλαδή δεν ανήκει στο $\mathsf{dom}(f)$.
[3] Επομένως ισχύει ότι $f(\perp) = \perp$ αφού $\perp \notin \mathsf{dom}(f)$. Το σύμβολο $\perp$ συνήθως καλείται *πάτος*.
[4] Εδώ το σύμβολο $<$ επεκτείνεται πέρα από το $\mathbb{N}$ στους άπειρους πληθάριθμους

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, να αναφέρουμε ότι στο Κεφάλαιο 2 που πραγματευόμαστε συναρτήσεις φυσικών αριθμών χρησιμοποιούμε τα σύμβολα:

$$\begin{aligned} x! &: \text{το παραγοντικό του } x \\ x \bmod y &: \text{το υπόλοιπο της διαίρεσης του } x \text{ με το } y \\ x \mid y &: \text{το } x \text{ διαιρεί το } y \end{aligned}$$

0.2 Λέξεις και γλώσσες

Ορισμός 0.2.1. *Αλφάβητο* είναι ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων.

Παράδειγμα 0.2.2. Παραδείγματα αλφαβήτων είναι τα ακόλουθα:

- $\{0,1\}$
- $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- $\{q,w,e,r,t,y,u,i,o,p,a,s,d,f,g,h,j,k,l,z,x,c,v,b,n,m,\ ,.,?,!\}$ [1]

Ορισμός 0.2.3. Μία *λέξη* (ή *συμβολοσειρά*) του αλφάβητου Σ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του Σ.

Παράδειγμα 0.2.4.

- 101010101010110 είναι μία λέξη του $\{0,1\}$
- 1917 είναι μία λέξη του $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- $mpla$ είναι μια λέξη του $\{q,w,e,r,t,y,u,i,o,p,a,s,d,f,g,h,j,k,l,z,x,c,v,b,n,m,\sqcup,.,?,!\}$

Ορισμός 0.2.5. Έστω w μία λέξη του αλφάβητου Σ. Το *μήκος* της w, συμβολισμός $|w|$, είναι το πλήθος συμβόλων της [2].

Παράδειγμα 0.2.6.

- $|101010101010110| = 15$
- $|1917| = 4$
- $|mpla| = 4$

Συμβολισμός 0.2.7.

- Με ϵ συμβολίζουμε την *κενή λέξη*, δηλαδή τη μοναδική λέξη με μήκος 0.
- Ορίζουμε τα σύνολα $\Sigma^i = \{w \text{ λέξη του } \Sigma \mid |w| = i\}$, $i \in \mathbb{N}$.

[1] Για λόγους ευκρίνειας για το σύμβολο του κενού θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sqcup$.

[2] Μετράμε κάθε εμφάνιση του ίδιου συμβόλου.

- Η *κλειστότητα Kleene (Kleene Star)* του Σ είναι το σύνολο:

$$\Sigma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i$$

  Το σύνολο αυτό περιέχει όλες τις (πεπερασμένου μήκους) λέξεις που μπορούν να κατασκευαστούν με σύμβολα από το Σ.

- Έστω λέξη w ενός αλφαβήτου. Με w^R συμβολίζουμε την *αντίστροφη λέξη* της w. Για παράδειγμα $mpla^R = alpm$.

Ορισμός 0.2.8. Έστω $w_1 = x_1 \cdots x_m$ και $w_2 = y_1 \cdots y_n$ δύο λέξεις στο Σ^*. Η *παράθεσή* τους, συμβολισμός $w_1 \circ w_2$ (ή και $w_1 w_2$), είναι η λέξη:

$$w_1 \circ w_2 = x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_n$$

Ορισμός 0.2.9. Έστω $w, w' \in \Sigma^*$. Η w' είναι *υπολέξη* της w ανν υπάρχουν $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ (ενδεχομένως $w_1 = \epsilon$ ή $w_2 = \epsilon$) τέτοιες ώστε $w = w_1 \circ w' \circ w_2$.

Ορισμός 0.2.10. Έστω αλφάβητο Σ και αρίθμηση $\sigma : \Sigma \to [|\Sigma|]$ των στοιχείων του. Η *λεξικογραφική διάταξη* των λέξεων του Σ^*, σύμφωνα με τη σ, είναι η διάταξη που χρησιμοποιείται στα λεξικά [1] μόνο που οι λέξεις με μικρότερο μήκος προηγούνται.

Παράδειγμα 0.2.11. Η λεξικογραφική διάταξη του $\{0,1\}^*$ (με την αρίθμηση $\sigma(0) = 1$ και $\sigma(1) = 2$) είναι η: $\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots$.

Παρατήρηση 0.2.12. Έστω αλφάβητο Σ και συνάρτηση $\sigma : \Sigma \to [|\Sigma|]$. Η λεξικογραφική διάταξη του Σ^* (σύμφωνα με τη σ) είναι μία 1-1 και επί συνάρτηση από το Σ^* στο $\mathbb{N}$. Συνεπώς $|\Sigma^*| = \aleph_0$.

Ορισμός 0.2.13. Έστω αλφάβητο Σ, συνάρτηση $\sigma : \Sigma \to [|\Sigma|]$ και $w, w' \in \Sigma^*$. Αν η w βρίσκεται πριν από την w' στη λεξικογραφική διάταξη, σύμφωνα με τη σ, θα γράφουμε $w <_\sigma w'$.

Σύμβαση 0.2.14. Θα θεωρούμε ότι κάθε αλφάβητο Σ συνοδεύεται από μια προσυμφωνημένη λεξικογραφική διάταξη, χωρίς να αναφερόμαστε ρητά στην αρίθμηση σ. Έτσι θα γράφουμε $w < w'$ (ή ακόμα και $w \le w'$, στην περίπτωση που η w μπορεί να ταυτίζεται με την w').

Παράδειγμα 0.2.15. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 0.2.11 $11 < 000$.

Συμβολισμός 0.2.16. Έστω αλφάβητο Σ και λέξη $x \in \Sigma^*$. Με x^k συμβολίζουμε τη λέξη $\underbrace{x \circ \cdots \circ x}_{k \text{ φορές}}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ (όταν $k = 0$ το x^k ισούται την κενή λέξη ϵ) [2].

Ορισμός 0.2.17. Έστω αλφάβητο Σ. Κάθε υποσύνολο $L \subseteq \Sigma^*$ καλείται *γλώσσα* του Σ.

Παράδειγμα 0.2.18. Τα παρακάτω σύνολα είναι γλώσσες του $\{0,1\}$:

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = 0^n 1^n,\ n \in \mathbb{N}\}$
- $L_{\text{Παλίνδρομο}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

[1] Παραδείγματος χάρη αν $\$, @ \in \Sigma$ και $\sigma(\$) < \sigma(@)$ τότε οι λέξεις που αρχίζουν από \$ προηγούνται αυτών που αρχίζουν από @. Για λέξεις που αρχίζουν με το ίδιο σύμβολο συγκρίνουμε το δεύτερο σύμβολο και ούτω καθεξής.

[2] Ενίοτε, προς αποφυγή αμφισημιών, θα βάζουμε παρενθέσεις γύρω από τη λέξη. Για παράδειγμα $(01)^2 = 0101$ ενώ $01^2 = 011$.

- $L = \varnothing$ (κενή γλώσσα)

- $L = \{\epsilon\}$ (η γλώσσα που περιέχει μόνο την κενή λέξη)

Ορισμός 0.2.19. Έστω αλφάβητο Σ, $a \in \Sigma$ και γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$. Ορίζουμε τη γλώσσα:

$$aL = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L(w = a \circ x)\}$$

Ορισμός 0.2.20. Έστω αλφάβητο Σ και γλώσσες $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Ορίζουμε τη γλώσσα:

$$L_1L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1 \in L_1 \; \exists w_2 \in L_2(w = w_1 \circ w_2)\}$$

Ορισμός 0.2.21. Έστω αλφάβητο Σ και γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$. Ορίζουμε:

$$\begin{array}{rcl} L^0 &=& \{\epsilon\} \\ L^1 &=& L \\ L^n &=& LL^{n-1} \\ L^* &=& \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i \end{array}$$

Ορισμός 0.2.22. Έστω αλφάβητο Σ. *Κανονική έκφραση* του Σ είναι κάθε λέξη του αλφαβήτου $\Sigma \cup \{[,], \oslash, \varepsilon, \sqcup, ^\star\}$ που κατασκευάζεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

1. Το $\oslash$, το ε και κάθε σύμβολο του Σ είναι κανονική έκφραση.

2. Αν a, b κανονικές εκφράσεις τότε και η $[\mathsf{ab}]$ είναι κανονική έκφραση.

3. Αν a, b κανονικές εκφράσεις τότε και η $[\mathsf{a} \sqcup \mathsf{b}]$ είναι κανονική έκφραση.

4. Αν a κανονική έκφραση τότε και η $\mathsf{a}^\star$ είναι κανονική έκφραση.

Συμβολίζουμε με R_Σ το σύνολο των κανονικών εκφράσεων του Σ.

Παράδειγμα 0.2.23. Οι λέξεις $[0^\star 1^\star], [0^\star \sqcup 1^\star], [[01^\star]0], [01] \sqcup \oslash$ είναι κανονικές εκφράσεις του $\{0, 1\}$.

Ορισμός 0.2.24. Έστω αλφάβητο Σ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathcal{L} : R_\Sigma \to 2^{\Sigma^*}$ που αντιστοιχεί σε κάθε κανονική έκφραση μία γλώσσα ως εξής:

$$\mathcal{L}(\mathsf{x}) = \begin{cases} \varnothing & \text{, αν } \mathsf{x} = \oslash \\ \{\epsilon\} & \text{, αν } \mathsf{x} = \varepsilon \\ \{a\} & \text{, αν } \mathsf{x} = a \in \Sigma \\ \mathcal{L}(\mathsf{a})\mathcal{L}(\mathsf{b}) & \text{, αν } \mathsf{x} = [\mathsf{ab}] \text{ όπου } \mathsf{a}, \mathsf{b} \in R_\Sigma \\ \mathcal{L}(\mathsf{a}) \cup \mathcal{L}(\mathsf{b}) & \text{, αν } \mathsf{x} = [\mathsf{a} \sqcup \mathsf{b}] \text{ όπου } \mathsf{a}, \mathsf{b} \in R_\Sigma \\ \mathcal{L}(\mathsf{a})^* & \text{, αν } \mathsf{x} = \mathsf{a}^\star \text{ όπου } \mathsf{a} \in R_\Sigma \end{cases}$$

Παράδειγμα 0.2.25. Η $\mathcal{L}$ αντιστοιχεί στην κανονική έκφραση $[[0 \sqcup 1]^\star 0]$ του $\{0, 1\}$ τη γλώσσα:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}([[0 \sqcup 1]^\star 0]) &=& \mathcal{L}([0 \sqcup 1]^\star)\mathcal{L}(0) \\ &=& \mathcal{L}([0 \sqcup 1])^*\{0\} \\ &=& (\mathcal{L}(0) \cup \mathcal{L}(1))^*\{0\} \\ &=& (\{0\} \cup \{1\})^*\{0\} \\ &=& \{0, 1\}^*\{0\} \\ &=& \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists w_1 \in \{0, 1\}^* \; (w = w_1 \circ 0)\} \end{array}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΗΧΑΝΕΣ TURING

Στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα, στα πλαίσια της γενικευμένης ανάγκης να λυθούν τα παράδοξα που είχαν προκύψει στη *Θεωρία Συνόλων*, ο *David Hilbert* έθεσε μια σειρά από ερωτήματα-στόχους στην επιστημονική κοινότητα. Στα ερωτήματα αυτά εκφραζόταν ρητά η απαίτηση για την τυπική θεμελίωση των μαθηματικών και καταδεικνυόταν η αναγκαιότητα διερεύνησης των ορίων της *Αλγοριθμικής Υπολογισιμότητας*. Ως γνωστόν, οι απαντήσεις που δόθηκαν σε αυτά τα ερωτήματα ήταν αρνητικές: Πρώτα ο *Kurt Gödel* έδειξε ότι δεν είναι δυνατό να υπάρξει αξιωματικοποίηση των μαθηματικών που να είναι συνεπής και παράλληλα ικανή να αποδείξει όλες τις αλήθειες των μαθηματικών, και έπειτα οι *Alonzo Church* και *Alan Turing* απέδειξαν ότι το *Entscheidungsproblem* [1] δεν μπορεί να λυθεί αλγοριθμικά καθώς δεν μπορεί να υπάρξει διαδικασία που να ελέγχει αν μια μαθηματική έκφραση είναι αληθής είτε όχι (δες Θεώρημα 8.5.12).

Κύριο πόνημά μας στις σημειώσεις αυτές είναι να παρουσιάσουμε αναλυτικά τη θεωρία που δημιουργήθηκε από τα παραπάνω γεγονότα. Ο αρχικός μας στόχος είναι να δώσουμε τυπικούς ορισμούς των συναρτήσεων που είναι *αλγοριθμικά υπολογίσιμες*. Για την ακρίβεια θα δώσουμε τέσσερις διαφορετικούς – αλλά ισοδύναμους – ορισμούς, βασιζόμενοι κάθε φορά και σε μία διαφορετική «προσέγγιση» της έννοιας του *Αλγορίθμου*. Η πρώτη πηγάζει στη δουλειά του Alan Turing και παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο (οι υπόλοιπες θα παρουσιαστούν στα Κεφάλαια 2, 4 και 3).

1.1 Ορισμός Μηχανής Turing και Υπολογισμού

Ορισμός 1.1.1. *Μηχανή Turing (TM)* είναι μια εξάδα $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ όπου Q, Σ, Γ πεπερασμένα σύνολα, και:

1. Q είναι το *σύνολο των καταστάσεων*
2. $q_0, q_{\text{τέλος}} \in Q$, q_0 είναι η *αρχική κατάσταση* και $q_{\text{τέλος}}$ η *τερματική κατάσταση*
3. Σ είναι το *αλφάβητο εισόδου*
4. Γ είναι το *αλφάβητο ταινίας*

[1] Ελεύθερη μετάφραση: *Το Πρόβλημα Απόφασης Λογικών Θεωριών.*

5. $\Sigma \subset \Gamma$

6. $\triangleright, \sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, το $\triangleright$ είναι το *μαξιλαράκι* και $\sqcup$ το *σύμβολο του κενού*

7. $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathrm{A}, \Delta\}$ είναι η *συνάρτηση μετάβασης*, τα A, Δ συμβολίζουν τις δύο κατευθύνσεις (αριστερά και δεξιά αντίστοιχα), και η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τους ακόλουθους περιορισμούς:

   - $\forall a \in \Gamma(\delta(q_{\text{τέλος}}, a) = \bot)$
   - $\forall q \in Q \setminus \{q_{\text{τέλος}}\} \forall q' \in Q \ \forall a \in \Gamma(\delta(q, \triangleright) = (q', a, x) \to x = \Delta \wedge a = \triangleright)$

Η *λέξη εισόδου* (ή απλά η *είσοδος*) μίας ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ είναι μία λέξη $w \in \Sigma^*$. Μπορούμε να φανταστούμε την M ως εξής (δες Σχήμα 1.1.1):

> *Η M αποτελείται από μια άπειρη (από τα δεξιά) ταινία, χωρισμένη σε κελιά που μπορούν να περιέχουν ακριβώς ένα σύμβολο του Γ, έναν δείκτη καταστάσεων (ή αλλιώς έναν ελεγκτή) και μία κεφαλή που κινείται πάνω στην ταινία και μπορεί να διαβάζει το περιεχόμενο ενός κελιού ή να γράφει ένα σύμβολο του Γ σε αυτό.*

Το πρώτο κελί της ταινίας περιέχει το σύμβολο $\triangleright$, πάνω στο οποίο δεν μπορεί να γράψει η κεφαλή της M. Τα επόμενα $|w|$ κελιά περιέχουν την είσοδο w και τα υπόλοιπα κελιά το σύμβολο $\sqcup$. Σε κάθε «βήμα λειτουργίας» της M η κεφαλή βρίσκεται σε ένα κελί της ταινίας (που φυσικά περιέχει ένα σύμβολο του Γ) και ο ελεγκτής δείχνει μία κατάσταση του Q (έχουμε δηλαδή ένα όρισμα για τη συνάρτηση μετάβασης δ). Η «λειτουργία» της M με είσοδο w εξελίσσεται ως εξής:

1. Διαβάζουμε το σύμβολο που περιέχει το κελί που βρίσκεται η κεφαλή και την κατάσταση που δείχνει ο ελεγκτής.

2. Συμβουλευόμαστε τη συνάρτηση μεταβάσεων δ (βλέπουμε δηλαδή την τιμή της για το δεδομένο όρισμα) και βρίσκουμε:

   - το σύμβολο που πρέπει να γράψουμε στην ταινία,
   - τη νέα κατάσταση που πρέπει να δείξει ο ελεγκτής και
   - τη φορά που πρέπει να κινήσουμε την κεφαλή πάνω στην ταινία.

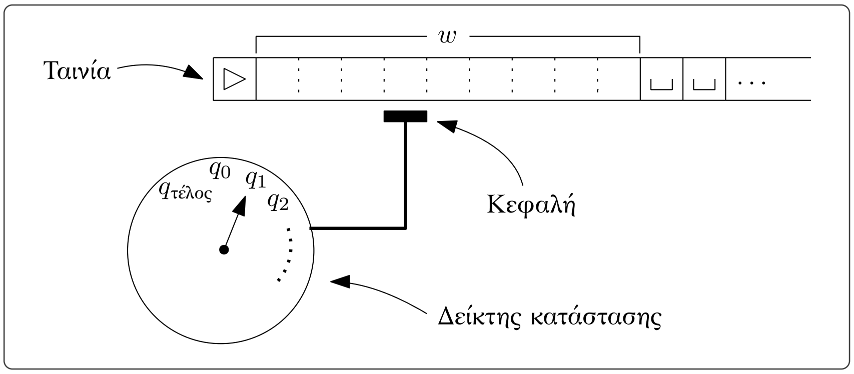
3. Γράφουμε το καινούριο σύμβολο στο κελί που βρίσκεται η κεφαλή (στη θέση του παλιού συμβόλου).

4. Αλλάζουμε τον δείκτη του ελεγκτή ώστε να δείχνει τη νέα κατάσταση.

5. Κινούμε την κεφαλή ένα κελί αριστερά αν έχουμε Α ή ένα κελί δεξιά αν έχουμε Δ.

Είναι ιδιαίτερα βοηθητικό να φανταζόμαστε τη συνάρτηση δ σαν τις εντολές του αλγορίθμου που υλοποιεί η μηχανή Turing. Οι εντολές αυτές δεν θυμίζουν τις εντολές που συνήθως χρησιμοποιούμε στον προγραμματισμό (εντολές ανάθεσης, εντολές ελέγχου ροής κ.λπ.). Η υλοποίηση του αλγορίθμου μέσω μίας μηχανής Turing μοιάζει περισσότερο με τον προγραμματισμό σε μία «χαμηλού επιπέδου» γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. τη *γλώσσα μηχανής*).

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω ότι $(q_3, 0, q_4, 3, \mathrm{A}) \in \delta$, το Σχήμα 1.1.2 δείχνει τις αλλαγές που γίνονται στην ΤΜ.



Σχήμα 1.1.1: *Σχηματική αναπαράσταση μίας ΤΜ.*

Ορισμός 1.1.3. Έστω ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$. Κάθε δυνατός συνδυασμός λέξης στην ταινία, θέσης κεφαλής και κατάστασης κατά τη λειτουργία της M με είσοδο την w (αντί για «η λειτουργία της M με είσοδο την w» χάριν συντομίας θα γράφουμε $M(w)$) καλείται *φάση* ή *στιγμιότυπο* λειτουργίας.

Συμβολισμός 1.1.4. Έστω ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$. Ας υποθέσουμε παραδείγματος χάρη ότι η ταινία γράφει τη λέξη $\triangleright 100010100$ (τα σύμβολα $\sqcup$ δεν τα αναφέρουμε [1]), η κεφαλή βρίσκεται στο πέμπτο κελί και ο δείκτης δείχνει την q_3 (Σχήμα 1.1.2 το «Αν»). Αυτό το στιγμιότυπο λειτουργίας το συμβολίζουμε με τη λέξη $\triangleright 100q_3010100 \in (\Gamma \cup Q)^*$.

Ορισμός 1.1.5. Έστω ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ και λέξη $w \in \Sigma^*$.

- Το *αρχικό στιγμιότυπο* της $M(w)$ είναι το: $\triangleright q_0 w$.
- *Καταληκτικό στιγμιότυπο* της $M(w)$ είναι κάθε στιγμιότυπο της μορφής: $\triangleright w_1 q_{\text{τέλος}} w_2$, όπου $w_1, w_2 \in \Gamma^*$ [2].

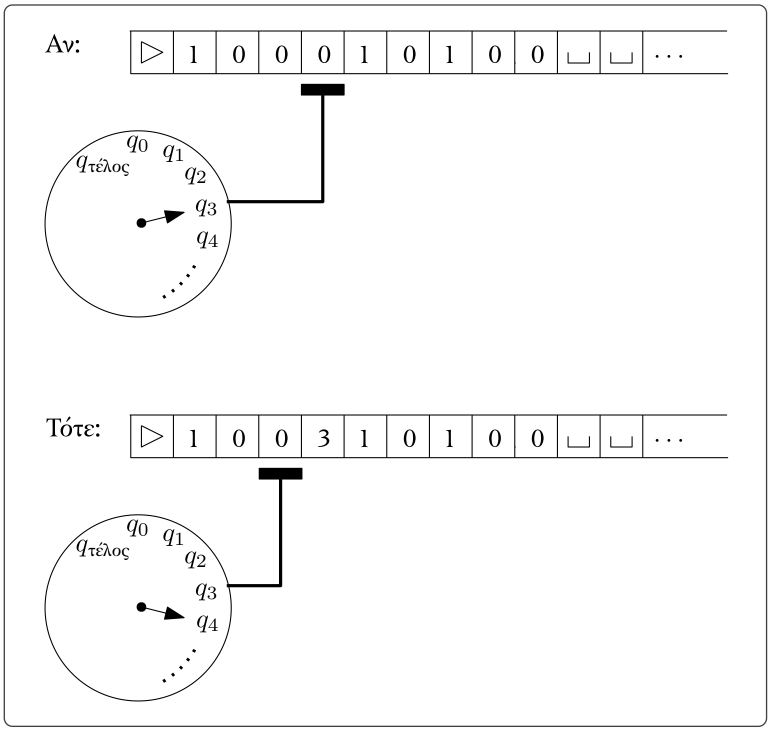
Ορισμός 1.1.6. Έστω ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ και στιγμιότυπο:

$$\triangleright a_1 a_2 \cdots a_{i-1} q a_i \cdots a_n$$

όπου $a_i \in \Gamma,\ i \in [n]$ και $q \in Q$.

- Αν $\delta(q, a_i) = (p, b, \mathrm{A})$ και $i > 1$ τότε το *επόμενο στιγμιότυπο* είναι το $\triangleright a_1 a_2 \cdots a_{i-2} p a_{i-1} b a_{i+1} \cdots a_n$ και θα γράφουμε:
$$\triangleright a_1 a_2 \cdots a_{i-1} q a_i \cdots a_n \vdash_M \triangleright a_1 a_2 \cdots a_{i-2} p a_{i-1} b a_{i+1} \cdots a_n$$
- Αν $\delta(q, a_i) = (p, b, \Delta)$ και $i > 1$ τότε το *επόμενο στιγμιότυπο* είναι το $\triangleright a_1 a_2 \cdots a_{i-1} b p a_{i+1} \cdots a_n$ και θα γράφουμε:
$$\triangleright a_1 a_2 \cdots a_{i-1} q a_i \cdots a_n \vdash_M \triangleright a_1 a_2 \cdots a_{i-1} b p a_{i+1} \cdots a_n$$
- Αν $\delta(q, a_i) = \perp$ τότε δεν υπάρχει επόμενο στιγμιότυπο και θα λέμε ότι η M *σταματάει τη λειτουργία της* αν $q = q_{\text{τέλος}}$ ή ότι *κολλάει* αν $q \neq q_{\text{τέλος}}$.

[1] Τυπικά θα πρέπει να αναφέρουμε μόνο ένα.
[2] Δεν είναι απαραίτητο ότι υπάρχει καταληκτικό στιγμιότυπο για την $M(w)$. Περισσότερα σε λίγο...



Σχήμα 1.1.2: *Παράδειγμα λειτουργίας TM που περιέχει τη μετάβαση* $(q_3, 0, q_4, 3, \mathrm{A})$.

Ορισμός 1.1.7. Έστω TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$, $w \in \Sigma^*$ και C_1, C_2 στιγμιότυπα λειτουργίας της $M(w)$.

- Αν ισχύει ότι $C_1 \vdash_M C_2$, θα λέμε ότι από το C_1 *μεταβαίνουμε* στο C_2 (σύμφωνα με τη δ).

- Έστω $\vdash_M^*$ η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα της σχέσης $\vdash_M$. Αν $C_1 \vdash_M^* C_2$ θα λέμε ότι το C_1 *παράγει* το C_2.

Ορισμός 1.1.8. Έστω TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ και $w \in \Sigma^*$. *Υπολογισμός* της $M(w)$ είναι μια ακολουθία στιγμιοτύπων $C_0, C_1, \ldots$ (πιθανώς πεπερασμένη) όπου:

1. C_0 είναι το αρχικό στιγμιότυπο και

2. $C_i \vdash_M C_{i+1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Μπορούμε να φανταστούμε τον υπολογισμό της $M(w)$ σαν ένα (πιθανώς άπειρο) διατεταγμένο γραφοθεωρητικό μονοπάτι με κορυφές του τα στιγμιότυπα λειτουργίας της $M(w)$ και ακμές μεταξύ προηγούμενου και επόμενου στιγμιοτύπου.

Ο υπολογισμός της $M(w)$ *τερματίζει* ανν υπάρχουν $w_1, w_2 \in \Gamma^*$ τέτοια ώστε:

$$\triangleright\, q_0 w \vdash_M^* \triangleright\, w_1 q_{\text{τέλος}} w_2$$

δηλαδή από το αρχικό στιγμιότυπο μεταβαίνουμε σε ένα καταληκτικό στιγμιότυπο.

Στην περίπτωση που έχουμε τερματισμό η ακολουθία στιγμιοτύπων είναι πεπερασμένη [1]. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $M(w)\downarrow$. Αν ο υπολογισμός της $M(w)$ *δεν τερματίζει* θα γράφουμε $M(w)\uparrow$ [2].

Συμβολισμός 1.1.9. Όταν μας ενδιαφέρει το *πλήθος βημάτων* (κινήσεων της κεφαλής) που κάνει μία ΤΜ M με είσοδο $w \in \Sigma^*$ πριν τερματίσει θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $M(w)\downarrow^t$, όπου $t \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος βημάτων. Τέλος, θα γράφουμε $M(w)\downarrow_q$ για μία κατάσταση q θέλοντας να δηλώσουμε το γεγονός ότι η $M(w)$ μεταβαίνει σε στιγμιότυπο που περιέχει την q (και αν επιπλέον μας ενδιαφέρει και το πλήθος βημάτων θα γράφουμε $M(w)\downarrow_q^t$).

1.2 Τι κάνουν οι Μηχανές Turing;

Η συνάρτηση μεταβάσεων μίας ΤΜ μπορεί να μην προσεγγίζει καθόλου την έννοια του αλγορίθμου που έχουμε συναντήσει στα μαθηματικά, όπως και ο τυπικός ορισμός του υπολογισμού μπορεί να μη θυμίζει σε τίποτα τον υπολογισμού από έναν Ηλεκτρονικό Υπολογιστή (Η/Υ). Όμως, όπως θα δούμε, στην πραγματικότητα η ΤΜ είναι μία πολύ καλή μαθηματική θεμελίωση του Αλγορίθμου και ο υπολογισμός μία αρκετά πιστή περιγραφή των στοιχειωδών εργασιών που κάνει ο Η/Υ μας κατά τη λειτουργία του.

Σε αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε τις τρεις βασικές λειτουργίες που μπορούν να φέρουν εις πέρας οι ΤΜ και θα επιχειρηματολογήσουμε ότι αποτελούν τις τρεις βασικές λειτουργίες ενός Η/Υ. Οι λειτουργίες αυτές είναι:

- Ο *υπολογισμός συναρτήσεων.*
- Η *αναγνώριση* ή η *απόφαση γλωσσών.*
- Η *απαρίθμηση γλωσσών.*

1.2.1 Υπολογισμός συναρτήσεων

Σε αυτές τις σημειώσεις ενδιαφερόμαστε κυρίως για μία ειδική κατηγορία αριθμητικών συναρτήσεων (δες Κεφάλαιο 2). Όμως, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο υπολογισμός μίας Μηχανής Turing αφορά τις λέξεις του αλφάβητου εισόδου της. Το *αντικείμενο του υπολογισμού* δηλαδή είναι μία λέξη και όχι ένας αριθμός όπως θα επιθυμούσαμε. Αυτό το πρόβλημα μπορεί εύκολα να ξεπεραστεί αν συμφωνήσουμε έναν τρόπο να «κωδικοποιούμε» τους αριθμούς σε κάποιο αλφάβητο [3]. Έτσι παρόλο που το αντικείμενο του υπολογισμού θα παραμένει μία λέξη ο υπολογισμός θα αφορά κάποιον αριθμό.

Ας δούμε με ποιον τρόπο οι μηχανές Turing μπορούν να υπολογίσουν μία συνάρτηση.

[1] Λόγω του πρώτου περιορισμού που θέσαμε στην συνάρτηση μετάβασης δεν θα υπάρξει επόμενο στιγμιότυπο, συνεπώς η ακολουθία θα είναι πεπερασμένη.

[2] Ο υπολογισμός μπορεί να μην τερματίζει είτε επειδή η ακολουθία στιγμιοτύπων είναι άπειρη, είτε επειδή η M κολλάει, οπότε η ακολουθία στιγμιοτύπων ναι μεν είναι πεπερασμένη, αλλά το τελευταίο στιγμιότυπο της δεν είναι καταληκτικό. Παρατηρήστε ότι η πρώτη περίπτωση μη τερματισμού είναι η ουσιαστική καθώς τη δεύτερη θα μπορούσαμε να την αποφύγουμε αν είχαμε προνοήσει να ορίσουμε τη δ για όλες τις δυνατές εισόδους που μπορούν να προκύψουν (εκτός φυσικά από την περίπτωση όπου η κατάσταση εισόδου είναι τερματική).

[3] Για παράδειγμα μπορούμε να κωδικοποιήσουμε τους φυσικούς αριθμούς στο αλφάβητο $\{0,1\}$, παίρνοντας τη δυαδική αναπαράστασή τους, όπως επίσης θα μπορούσαμε απλά να ορίσουμε ΤΜ με αλφάβητο εισόδου το $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Και στις δύο περιπτώσεις θα πρέπει να δώσουμε μεγάλη προσοχή κατά τον σχεδιασμό της ΤΜ έτσι ώστε να χειρίζεται ειδικά τις λέξεις που δεν αντιστοιχούν σε φυσικούς αριθμούς (όπως π.χ. τη 0000).

Ορισμός 1.2.1. Μία συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ καλείται *(Turing) υπολογίσιμη* ανν υπάρχει TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ τέτοια ώστε:

$$\forall w \in \mathsf{dom}(f)(\triangleright\, q_0 w \vdash_M^* \triangleright\, q_{\text{τέλος}} f(w)) \text{ και } \forall w \notin \mathsf{dom}(f)(M(w)\uparrow)$$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η M *υπολογίζει* την f.

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω $\mathsf{id} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ η *ταυτοτική συνάρτηση* με $\mathsf{id}(x) = x$. Η TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{τέλος}}, q_{\text{τέλος}})$ [1] με $Q = \{q_{\text{τέλος}}\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}$ και $\delta = \varnothing$ την υπολογίζει.

Το Παράδειγμα 1.2.2 είναι ένα «ακραίο» δείγμα υπολογισμού συνάρτησης (τα παραδείγματα που ακολουθούν θα είναι πιο διδακτικά). Αντί να παρουσιάζουμε αναλυτικά τη συνάρτηση μεταβάσεων δ (που όπως θα δούμε συνήθως έχει πάρα πολλά στοιχεία) θα δίνουμε μια συμβολική περιγραφή της, το λεγόμενο *διάγραμμα καταστάσεων* (δες Παράδειγμα 1.2.3).

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ η *σταθερή συνάρτηση* $f(x) = 1$. Η TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ με $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{\text{τέλος}}\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}$ και

$$\begin{aligned}\delta \;=\; &\{(q_0, 0, q_1, 1, \Delta), (q_0, 1, q_1, 1, \Delta), (q_0, \sqcup, q_1, 1, \Delta),\\ &(q_1, 0, q_1, \sqcup, \Delta), (q_1, 1, q_1, \sqcup, \Delta), (q_1, \sqcup, q_2, \sqcup, \mathrm{A}),\\ &(q_2, \sqcup, q_2, \sqcup, \mathrm{A}), (q_2, 1, q_2, 1, \mathrm{A}), (q_2, \triangleright, q_{\text{τέλος}}, \triangleright, \Delta)\}\end{aligned}$$

την υπολογίζει [2]. Το διάγραμμα καταστάσεων της δ φαίνεται στο Σχήμα 1.2.1.

Σημείωση 1.2.4. Από εδώ και πέρα (αν δεν συντρέχει σημαντικός λόγος) θα παρουσιάζουμε μόνο το διάγραμμα καταστάσεων μίας TM καθώς αυτό περιέχει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε [3].

Παράδειγμα 1.2.5. Έστω $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } x \in \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \bot & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$. Η TM του Σχήματος 1.2.2 την υπολογίζει.

Παράδειγμα 1.2.6. Έστω $\emptyset$: $\Sigma^* \to \Sigma^*$ η κενή συνάρτηση με $\emptyset(x) = \bot$. Η TM του Σχήματος 1.2.3 την υπολογίζει.

---

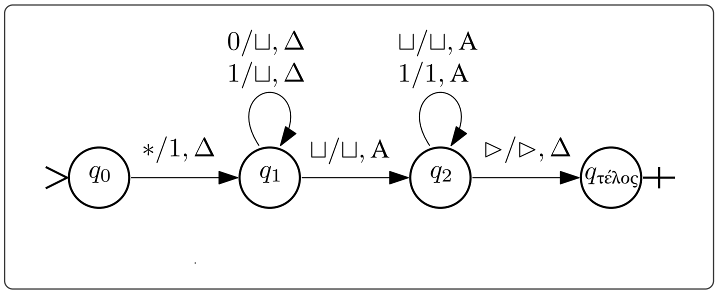
[1] Ο Ορισμός 1.1.1 δεν απαιτεί η αρχική κατάσταση και η τερματική κατάσταση να μην ταυτίζονται.

[2] Μπορούμε να φανταστούμε ότι η M υλοποιεί το ακόλουθο πρόγραμμα:

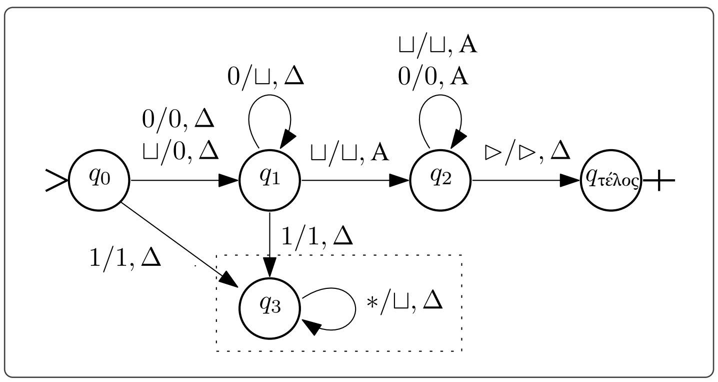
1. **while** $1 > 0$
2.   **if** $q_0 0$ **then** $q_1 1 \Delta$
3.   **elseif** $q_0 1$ **then** $q_1 1 \Delta$
4.   **elseif** $q_0 \sqcup$ **then** $q_1 1 \Delta$
5.   **elseif** $q_1 0$ **then** $q_1 \sqcup \Delta$
6.   **elseif** $q_1 1$ **then** $q_1 \sqcup \Delta$
7.   **elseif** $q_1 \sqcup$ **then** $q_2 \sqcup \mathrm{A}$
8.   **elseif** $q_2 \sqcup$ **then** $q_2 \sqcup \mathrm{A}$
9.   **elseif** $q_2 1$ **then** $q_2 1 \mathrm{A}$
10.   **else** $q_2 \triangleright$ **then** $q_{\text{τέλος}} \triangleright \Delta$ **; break**

Η επανάληψη θα τελειώσει μόνο αν φτάσουμε στο **break** στο βήμα 10.

[3] Το μόνο ενδεχομένως που δεν είναι ξεκάθαρο στο διάγραμμα καταστάσεων είναι το αλφάβητο εισόδου της TM. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι (χωρίς βλάβη της γενικότητας) μπορούμε να θεωρήσουμε πως όλες οι TM έχουν ως αλφάβητο εισόδου το $\{0,1\}$.



Σχήμα 1.2.1: *Η ΤΜ που υπολογίζει τη συνάρτηση του Παραδείγματος 1.2.3 (το σύμβολο $*$ παίρνει όλες τις τιμές του $\Sigma \smallsetminus \{\triangleright\}$).*



Σχήμα 1.2.2: *Η ΤΜ που υπολογίζει τη συνάρτηση του Παραδείγματος 1.2.5 (το σύμβολο $*$ παίρνει όλες τις τιμές του $\Sigma \smallsetminus \{\triangleright\}$). Παρατηρήστε ότι η ΤΜ «κολλάει» στην κατάσταση q_3.*

Σύμβαση 1.2.7. Για να διευκολύνουμε την παρουσίαση θα «χαλαρώσουμε» την απαίτηση η ΤΜ να γυρίζει την κεφαλή στην αρχή της ταινίας πριν τερματίσει.

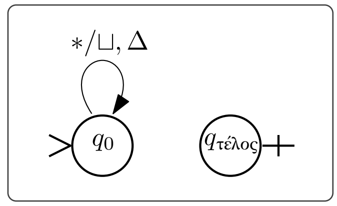
Παράδειγμα 1.2.8. Έστω $\mathsf{next} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $\mathsf{next}(x) =$«Η επόμενη λέξη της x στην λεξικογραφική διάταξη του $\{0,1\}^*$» [1]. Η ΤΜ M_{next} του Σχήματος 1.2.4 την υπολογίζει.

Παράδειγμα 1.2.9. Έστω $\mathsf{space} : \{0,1,\_\}^* \to \{0,1,\_\}^*$ με $\mathsf{space}(x) = \begin{cases} \_x & , \text{ αν } x \in \{0,1\}^* \\ \bot & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$. Η ΤΜ M_{space} του Σχήματος 1.2.5 την υπολογίζει.

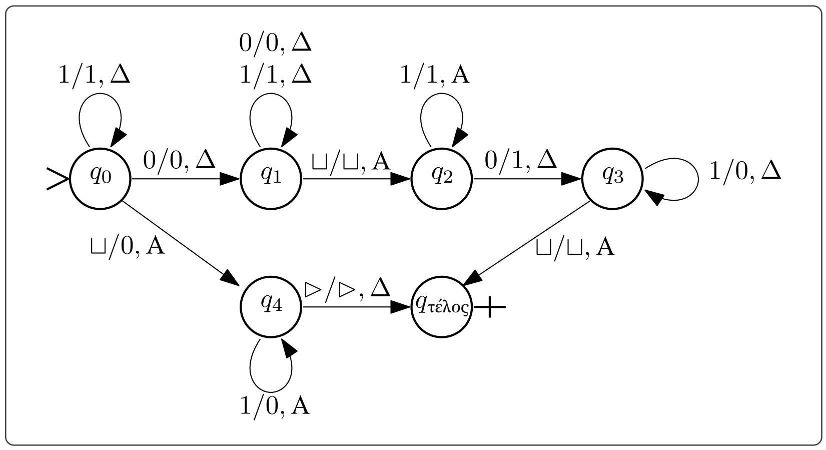
Παράδειγμα 1.2.10. Έστω $f : \{0,1,\_\}^* \to \{0,1,\_\}^*$ με $f(x) = \begin{cases} \_\_x & , \text{ αν } x \in \{0,1\}^* \\ \bot & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$. Η ΤΜ του Σχήματος 1.2.6 την υπολογίζει (χρησιμοποιώντας την M_{space} σαν «υπορουτίνα»).

Συμβολισμός 1.2.11 (Κουτάκια). Για διευκόλυνση της παρουσίασης θα χρησιμοποιούμε «κουτάκια» για να περιγράψουμε τις υπορουτίνες των ΤΜ:

[1] Η next, αν λάβουμε υπόψιν ότι πολλές λέξεις του $\{0,1\}^*$ δεν αντιστοιχούν σε δυαδική αναπαράσταση φυσικών αριθμών, μπορεί να τροποποιηθεί στη συνάρτηση $f(x) = x + 1$ στο δυαδικό σύστημα.

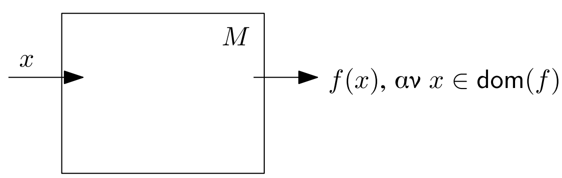


Σχήμα 1.2.3: *Το διάγραμμα καταστάσεων της TM του Παραδείγματος 1.2.21 (το σύμβολο $*$ παίρνει όλες τις τιμές του $\Sigma \setminus \{\triangleright\}$).*



Σχήμα 1.2.4: *Η TM που υπολογίζει την επόμενη λέξη στην λεξικογραφική διάταξη του $\{0,1\}^*$.*

1. Αν η $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ είναι υπολογίσιμη συνάρτηση και M είναι μία TM που την υπολογίζει θα γράφουμε:



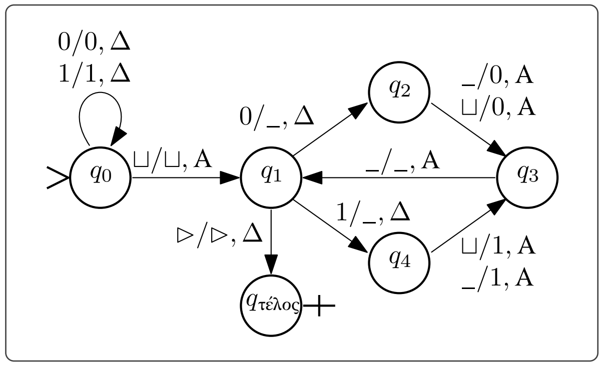
και θα λέμε ότι η $M(x)$ επιστρέφει $f(x)$.

Ο συμβολισμός με τα κουτάκια μας επιτρέπει να διευκολύνουμε δραστικά την παρουσίαση των TM. Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε απλές υπορουτίνες σαν «κουτάκια», χωρίς να παρουσιάζουμε τις λεπτομέρειες σχεδιασμού τους [1]. Προκειμένου να γίνει πιο κατανοητός ο συμβολισμός θα τον χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε μία πρόταση.

Πρόταση 1.2.12. Έστω $f_1, f_2 : \Sigma^* \to \Sigma^*$ υπολογίσιμες συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f_2 \circ f_1$ είναι επίσης υπολογίσιμη.

Απόδειξη. Έστω M_1 και M_2 οι TM που υπολογίζουν τις f_1 και f_2 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι για την TM M του Σχήματος 1.2.7 ισχύει ότι:

[1] Εδώ γίνεται ξεκάθαρος ο λόγος που απαιτήσαμε οι TM να γυρίζουν την κεφαλή στην αρχή της ταινίας προτού τερματίσουν.



Σχήμα 1.2.5: *Η ΤΜ M_{space} του Παραδείγματος 1.2.9.*

- αν $f_2(f_1(x)) \in \Sigma^*$ η $M(x)$ την επιστρέφει,

- αν $f_1(x) = \perp$ ή $f_2(f_1(x)) = \perp$ η $M(x)$ δεν τερματίζει.

Συνεπώς η M υπολογίζει την $f_2 \circ f_1$. □

Ορισμός 1.2.13. Έστω ΤΜ M. Με ϕ_M θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση που υπολογίζει.

Όπως είναι εμφανές κάθε ΤΜ υπολογίζει και κάποια συνάρτηση. Αυτή η αντιστοίχιση όμως δεν είναι 1-1 καθώς υπάρχουν πολλές ΤΜ που υπολογίζουν την ίδια συνάρτηση [1]. Επομένως έχει νόημα ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.2.14. Δύο ΤΜ M_1 και M_2 είναι *ισοδύναμες* ανν $\phi_{M_1} = \phi_{M_2}$.

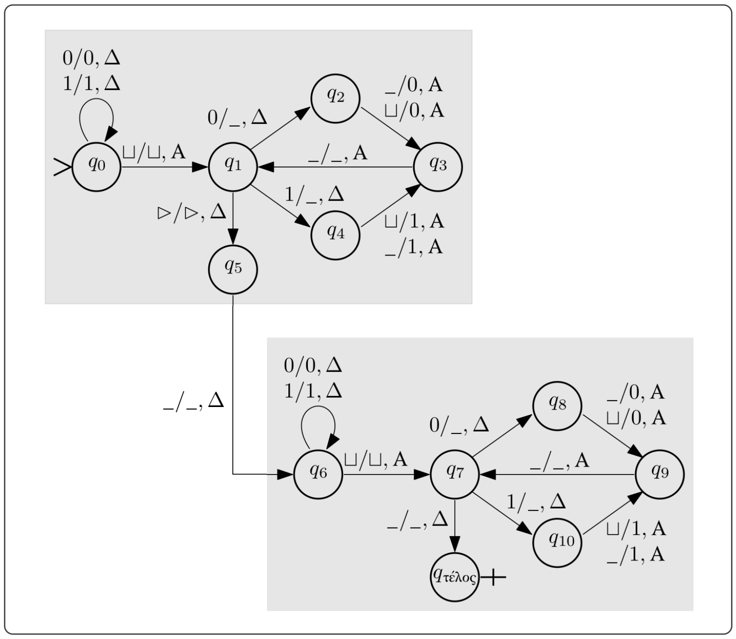
Σύμβαση 1.2.15. Στην Παράγραφο 1.4 θα δούμε ότι μπορούμε να απαριθμήσουμε τις ΤΜ. Για να ελαφρύνουμε λίγο τον συμβολισμό, όταν έχουμε μία απαρίθμηση των ΤΜ θα αναφερόμαστε στη συνάρτηση που υπολογίζει η ΤΜ M_i γράφοντας ϕ_i αντί γαι ϕ_{M_i}, όπου $i \in \mathbb{N}$ η σειρά της ΤΜ σύμφωνα με την απαρίθμηση.

1.2.2 Αναγνώριση ή απόφαση γλώσσων

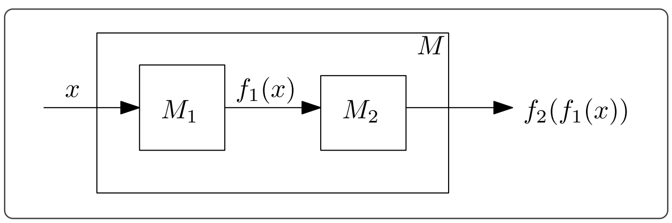
Στη *θεωρητική πληροφορική* είναι πολύ σημαντικό να μπορούμε να ελέγχουμε αν μία είσοδος στον ηλεκτρονικό υπολογιστή αποτελεί *θετικό-στιγμιότυπο* ή *αρνητικό-στιγμιότυπο* για το πρόβλημα που εξετάζουμε. Πιο απλά, μας ενδιαφέρει να μπορούμε να απαντάμε με ένα «ναι» ή ένα «όχι» στα λεγόμενα *προβλήματα απόφασης*. Στη δική μας θεωρία τα προβλήματα απόφασης εισάγονται ως εξής: Οι είσοδοι είναι κωδικοποιημένες σε ένα αλφάβητο Σ, οπότε τα θετικά-στιγμιότυπα αποτελούν ένα υποσύνολο του Σ^*, δηλαδή μία γλώσσα [2].

[1] Για την ακρίβεια για κάθε συνάρτηση υπάρχουν αριθμησίμως άπειρες ΤΜ που την υπολογίζουν.

[2] Πάρτε για παράδειγμα το πρόβλημα του *Χρωματισμού Γραφήματος* όπου μας δίνουν ένα *γράφημα* G και έναν ακέραιο k και μας ρωτούν αν είναι δυνατόν να *χρωματιστούν* οι κορυφές του γραφήματος με k χρώματα έτσι ώστε τα άκρα των ακμών να έχουν διαφορετικό χρώμα. Η «τυπική» περιγραφή του προβλήματις είναι η εξής: Τα G, k είναι κωδικοποιημένα σε ένα αλφάβητο, ας πούμε το $\{0, 1\}$, και μας ενδιαφέρει να δούμε αν μια λέξη του $\{0, 1\}^*$ ανήκει στη γλώσσα $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid$ Η w είναι κωδικοποίηση γραφήματος G και ακεραίου k και το G χρωματίζεται με k χώματα$\}$. Αργότερα (στο Κεφάλαιο 8) θα δούμε ότι ανάλογα με την τυπική περιγραφή μίας γλώσσας (πιο συγκεκριμένα την εναλλαγή ποσοδεικτών σε αυτή) μπορούμε να την κατατάξουμε σε διαφορετική κατηγορία «δυσκολίας».



Σχήμα 1.2.6: *Η TM που υπολογίζει τη συνάρτηση του Παραδείγματος 1.2.10.*



Σχήμα 1.2.7: *Η TM που υπολογίζει τη συνάρτηση $f_2 \circ f_1$.*

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε πως οι TM μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως «αλγόριθμοι» που ελέγχουν αν η είσοδος τους είναι θετικό ή αρνητικό στιγμιότυπο του προβλήματος. Μάλιστα θα δούμε ότι μία μηχανή μπορεί είτε απλά να «αναγνωρίζει» τα θετικά στιγμιότυπα ενός προβλήματος είτε να «αποφασίζει» αν ένα στιγμιότυπο είναι θετικό ή όχι. Παρόλο που η διαφορά μεταξύ τον δύο μοιάζει λεπτή, το δεύτερο είναι πολύ πιο ισχυρό. Όταν έχουμε απλή αναγνώριση μίας γλώσσας η TM μας επιστρέφει θετική απάντηση για τα θετικά στιγμιότυπα αλλά δεν επιστρέφει αρνητική απάντηση για (τουλάχιστον ένα από) τα υπόλοιπα. Στην απόφαση, για κάθε στιγμιότυπο λαμβάνουμε την αντίστοιχη απάντηση.

Παρατήρηση 1.2.16. Κάθε αλφάβητο Σ μπορεί να κωδικοποιηθεί στο $\{0,1\}$ [1]. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι γλώσσες ανήκουν στο $2^{\{0,1\}^*}$.

[1] Για παράδειγμα το $\{A, B, C\}$ μπορούμε να το κωδικοποιήσουμε ως εξής:

$$A \rightsquigarrow 01$$
$$B \rightsquigarrow 011$$
$$C \rightsquigarrow 0111$$

Από εδώ και στο εξής θα εστιάσουμε στο αλφάβητο $\{0,1\}$ (αυτό όπως είδαμε δεν θα προκαλέσει βλάβη της γενικότητας).

Ορισμός 1.2.17. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ και χ_L η χαρακτηριστική της συνάρτηση (δες Ορισμό 0.1.15). Η L είναι *αποφάνσιμη* ανν υπάρχει ΤΜ M που υπολογίζει τη χ_L.

Παράδειγμα 1.2.18. Η γλώσσα $L = \{0,1\}^*$ είναι αποφάνσιμη καθώς η ΤΜ του Σχήματος 1.2.1 υπολογίζει τη χαρακτηριστική της συνάρτηση (που ταυτίζεται με τη σταθερή συνάρτηση του Παραδείγματος 1.2.3).

Για να ελέγξουμε αν μία λέξη w ανήκει σε μία γλώσσα L (ή αντίστοιχα αν ένα στιγμιότυπο του προβλήματος είναι θετικό στιγμιότυπο) βασική προϋπόθεση είναι η ύπαρξη μιας ΤΜ, έστω M, που υπολογίζει τη χαρακτηριστική συνάρτηση της L. Έτσι, τρέχοντάς την M με είσοδο τη w αν ο υπολογισμός επιστρέψει 1 θα έπεται ότι $w \in L$ και αν επιστρέψει 0 ότι $w \notin L$. Όπως θα δούμε αργότερα (Κεφάλαιο 5) υπάρχουν γλώσσες για τις οποίες δεν μπορούμε να έχουμε και τα δύο κομμάτια πληροφορίας (και το «ναι» και το «όχι»). Για τον λόγο αυτό θα ορίσουμε άλλη μία κατηγορία γλωσσών τις *αναγνωρίσιμες* (ή *ημι-αποφάνσιμες*).

Ορισμός 1.2.19. Έστω ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$. Η γλώσσα που *αναγνωρίζει* (ή *αποδέχεται*) η M είναι η:

$$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \triangleright q_0 w \vdash_M^* \triangleright q_{\text{τέλος}} 1\}$$

Παρατήρηση 1.2.20. Παρατηρήστε ότι στον Ορισμό 1.2.19 η M δεν υπολογίζει κατ' ανάγκη τη χαρακτηριστική συνάρτηση της γλώσσας $L(M)$.

Παράδειγμα 1.2.21. Έστω ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ με $Q = \{q_0, q_{\text{τέλος}}\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}$ και δ με διάγραμμα καταστάσεων αυτό του Σχήματος 1.2.3. Παρατηρούμε ότι $L(M) = \varnothing$.

Ορισμός 1.2.22. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$. Η L είναι *αναγνωρίσιμη* (ή *ημι-αποφάνσιμη*) ανν υπάρχει ΤΜ M τέτοια ώστε $L = L(M)$.

Παρατηρήστε ότι στον παραπάνω ορισμό ζητάμε κάτι πιο ασθενές από τον Ορισμό 1.2.17, καθώς δεν απαιτούμε από τη ΤΜ να επιστρέφει 0 για τις λέξεις που δεν ανήκουν στη γλώσσα. Η ύπαρξη γλωσσών που είναι ημι-αποφάνισμες και όχι αποφάνσιμες ενδεχομένως να μην γίνεται εύκολα πιστευτή. Για να μπορέσουμε να δείξουμε ότι αυτός ο ισχυρισμός είναι αληθής θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε ισχυρά «εργαλεία» της *Θεωρίας Συνόλων* (συγκεκριμένα τη μέθοδο της *Διαγωνιοποίησης* που εφαρμόσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 0.1.17).

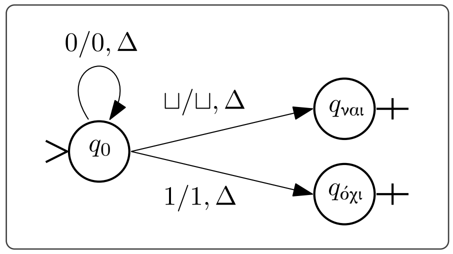
Συνήθως στη βιβλιογραφία αναφέρεται ένας διαφορετικός ορισμός των ΤΜ, όπου χρησιμοποιούνται δύο τερματικές καταστάσεις αντί για μία, η $q_{\text{ναι}}$ και η $q_{\text{όχι}}$. Αυτό είναι ιδιαιτέρως χρήσιμο όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν μία λέξη ανήκει σε μια γλώσσα ή όχι. Ας δούμε αυτόν τον εναλλακτικό ορισμό.

Ορισμός 1.2.23. Μηχανή Turing είναι μια επτάδα $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ όπου Q, Σ, Γ πεπερασμένα σύνολα, και:

1. $q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}} \in Q$, με $q_{\text{ναι}} \neq q_{\text{όχι}}$ όπου $q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}$ οι τερματικές καταστάσεις

2. $\Sigma \subset \Gamma$

Άρα η λέξη $ACAB$ θα κωδικοποιείται ως 01011101011. Θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά στην κωδικοποίηση λέξεων στην Παράγραφο 1.4.



Σχήμα 1.2.8: *Το διάγραμμα καταστάσεων της TM του Παραδείγματος 1.2.26.*

3. $\triangleright, \sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$
4. $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathrm{A}, \Delta\}$ τέτοια ώστε:
   - $\forall a \in \Gamma\ \forall q \in \{q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}\}(\delta(q,a) = \bot)$
   - $\forall q \in Q \setminus \{q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}\} \forall q' \in Q\ \forall a \in \Gamma(\delta(q,\triangleright) = (q', a, x) \to x = \Delta \wedge a = \triangleright)$

Ορισμός 1.2.24. Έστω TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ και $w \in \Sigma^*$. Ο υπολογισμός της $M(w)$ τερματίζει ανν υπάρχουν $w_1, w_2 \in \Gamma^*$ τέτοια ώστε

$$\triangleright\, q_0 w \vdash_M^* \triangleright\, w_1 q w_2$$

όπου $q \in \{q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}\}$.

- Αν $q = q_{\text{ναι}}$ (δηλαδή $M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$) λέμε ότι η M *αποδέχεται την* w.
- Αν $q = q_{\text{όχι}}$ (δηλαδή $M(w) \downarrow_{q_{\text{όχι}}}$) λέμε ότι η M *απορρίπτει την* w.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω «παραλλαγή» των TM μπορούμε να παρακάμψουμε κατά τον υπολογισμό το κομμάτι που προετοιμάζει την «έξοδο» (το 1 ή το 0 ανάλογα με το αν η λέξη ανήκει ή όχι στη γλώσσα) και απλά να μεταβούμε στην κατάλληλη τερματική κατάσταση. Καθώς αυτό διευκολύνει πολύ την παρουσίαση, θα χρησιμοποιήσουμε τον Ορισμό 1.2.23 σε αυτήν την παράγραφο (και σε όποιο άλλο κομμάτι των σημειώσεων ενδιαφερόμαστε για την *αποφανσιμότητα* μίας γλώσσας). Για λόγους πληρότητας θα χρειαστεί να επαναλάβουμε κάποιους από τους ορισμούς.

Ορισμός 1.2.25. Έστω TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$. Η γλώσσα που αναγνωρίζει (ή αποδέχεται) η M είναι η:

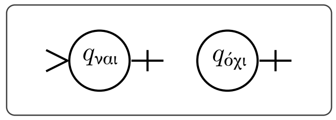
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}\}$$

Παράδειγμα 1.2.26. Έστω TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ με $Q = \{q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}$ και δ με διάγραμμα καταστάσεων αυτό του Σχήματος 1.2.8. Παρατηρούμε ότι:

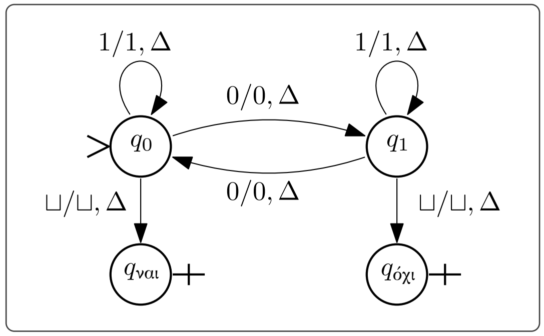
$$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = 0^n, n \in \mathbb{N}\}$$

Παράδειγμα 1.2.27. Έστω TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{ναι}}, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ με $Q = \{q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}$ και δ με διάγραμμα καταστάσεων αυτό του Σχήματος 1.2.9. Παρατηρούμε ότι $L(M) = \{0,1\}^*$.

Παρατηρήστε πόσο πιο απλή περιγραφή έχει η TM του Παραδείγματος 1.2.27 σε σχέση με αυτήν του Παραδείγματος 1.2.18.



Σχήμα 1.2.9: *Το διάγραμμα καταστάσεων της TM του Παραδείγματος 1.2.27.*



Σχήμα 1.2.10: *Η TM του Παραδείγματος 1.2.30.*

Ορισμός 1.2.28. Έστω $L \subseteq \Sigma^*$. Η L είναι αναγνωρίσιμη (ή ημι-αποφάνσιμη) ανν υπάρχει TM M τέτοια ώστε:

(A) $w \in L \Leftrightarrow M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$

Ορισμός 1.2.29. Έστω $L \subseteq \Sigma^*$. Η L είναι αποφάνσιμη ανν υπάρχει TM M τέτοια ώστε:

(A) $w \in L \Leftrightarrow M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$

(B) $w \notin L \Leftrightarrow M(w) \downarrow_{q_{\text{όχι}}}$

Παράδειγμα 1.2.30. Έστω $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{το πλήθος των } 0 \text{ στην } w \text{ είναι άρτιο}\}$. Η L είναι αποφάνσιμη καθώς για την TM του Σχήματος 1.2.10 για κάθε $w \in \{0,1\}^*$ ισχύει ότι:

(A) Το πλήθος των 0 στην w είναι άρτιο ανν $M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$.

(B) Το πλήθος των 0 στην w είναι περιττό ανν $M(w) \downarrow_{q_{\text{όχι}}}$.

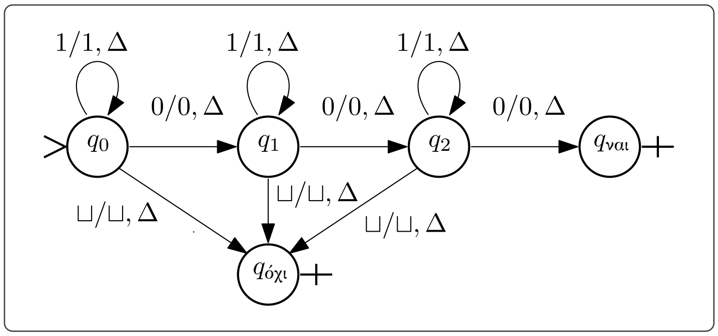
Παράδειγμα 1.2.31. Έστω $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{το πλήθος των } 0 \text{ στην } w \text{ είναι } \geq 3\}$. Η L είναι αποφάνσιμη από την TM του Σχήματος 1.2.11.

Παράδειγμα 1.2.32. Η $L_{\text{Παλίνδρομο}}$ (Παράδειγμα 0.2.18) είναι αποφάνσιμη από την TM με $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\triangleright, \sqcup, 0, 1, \times\}$ και δ με διάγραμμα καταστάσεων αυτό του Σχήματος 1.2.12.

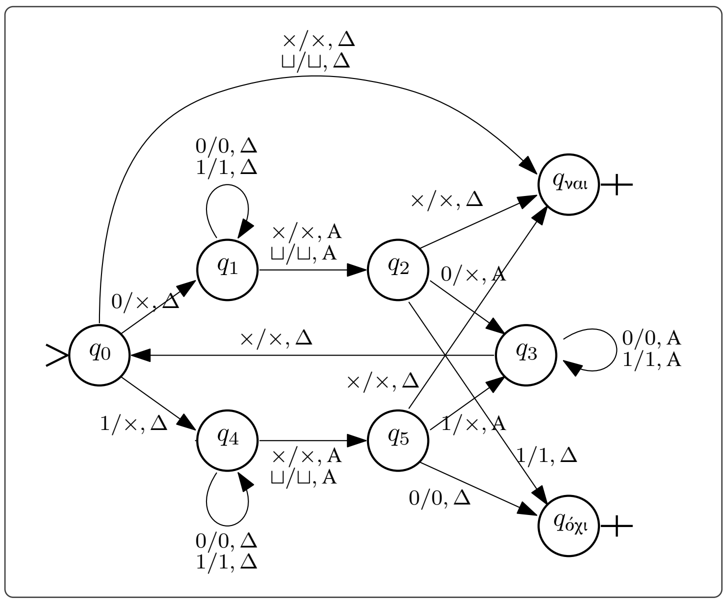
Παρατήρηση 1.2.33. Αν στη TM του Σχήματος 1.2.12 είχαμε παραλείψει κάποια από τις μεταβάσεις στην κατάσταση $q_{\text{όχι}}$ τότε αυτή η μηχανή θα αναγνώριζε μόνο την $L_{\text{Παλίνδρομο}}$.

Ορισμός 1.2.34. Ορίζουμε τις ακόλουθες κλάσεις [1] γλωσσών:

[1] Είθισται στη Θεωρία Συνόλων τα σύνολα με στοιχεία σύνολα που έχουν κάποια κοινή ιδιότητα να τα αποκαλούμε *κλάσεις*. Έτσι και εδώ τα σύνολα γλωσσών θα τα αποκαλούμε κλάσεις γλωσσών.



Σχήμα 1.2.11: *Η TM του Παραδείγματος 1.2.31.*



Σχήμα 1.2.12: *Η TM του Παραδείγματος 1.2.32.*

- $\mathsf{RE} = \{\mathsf{L} \subseteq \{0,1\}^* \mid$ υπάρχει TM που ημι-αποφασίζει την $\mathsf{L}\}$
- $\mathsf{REC} = \{\mathsf{L} \subseteq \{0,1\}^* \mid$ υπάρχει TM που αποφασίζει την $\mathsf{L}\}$

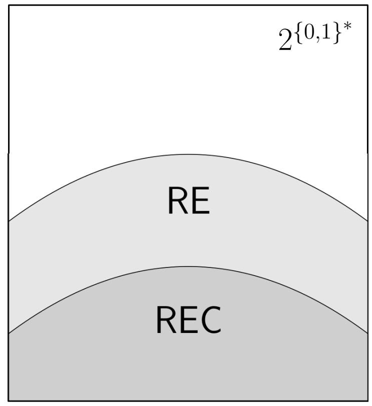
Προφανώς ισχύει ότι $\mathsf{REC} \subseteq \mathsf{RE} \subseteq 2^{\{0,1\}^*}$(Σχήμα 1.2.13). Ένας από τους βασικούς σκοπούς μας είναι να ερευνήσουμε κατά πόσον αυτοί οι εγκλεισμοί είναι αυστηροί, δηλαδή να απαντήσουμε στα ερωτήματα:

Ερώτημα 1: $\exists L \in \mathsf{RE} \setminus \mathsf{REC}$;

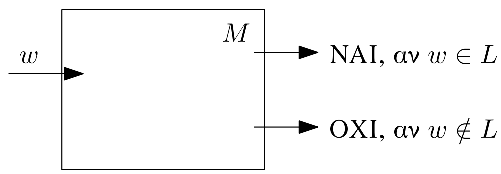
Ερώτημα 2: $\exists L \in 2^{\{0,1\}^*} \setminus \mathsf{RE}$;

Συμβολισμός 1.2.35 (Κουτάκια συνέχεια...).

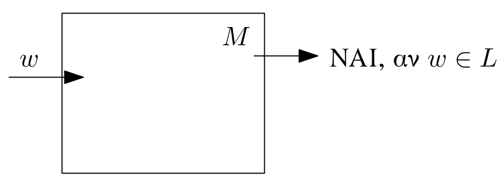
2. Αν $L \in \mathsf{REC}$ και M είναι μία TM που αποφασίζει την L θα γράφουμε:



Σχήμα 1.2.13: *Η σχέση εγκλεισμού μεταξύ* REC *και* RE*. Στο Κεφάλαιο 5 θα δούμε ότι ο εγκλεισμός αυτός είναι γνήσιος (δηλαδή ότι* REC ≠ RE*).*



3. Αν $L \in$ RE και M είναι μία TM που ημι-αποφασίζει την L θα γράφουμε:



Όσο εξοικειωνόμαστε με τις δυνατότητες των TM θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό με τα κουτάκια με μεγαλύτερη ελευθερία.

Παραδείγματα πιο σύνθετων TM

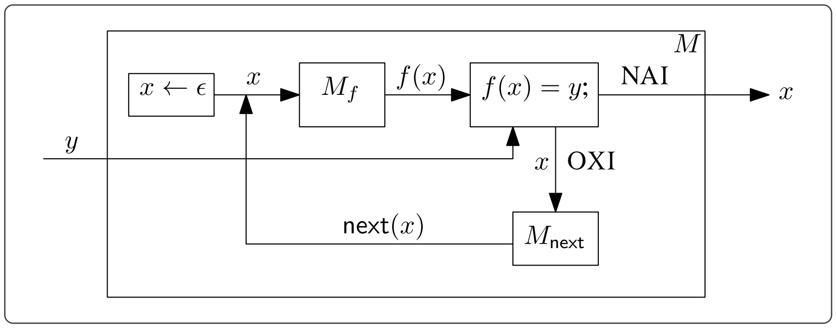
Θα δούμε μερικά παραδείγματα του τρόπου που θα σχεδιάζουμε TM χρησιμοποιώντας υπορουτίνες-κουτάκια.

Πρόταση 1.2.36. Έστω $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ πλήρης, 1-1 και επί, υπολογίσιμη συνάρτηση. Η συνάρτηση f^{-1} είναι επίσης υπολογίσιμη.

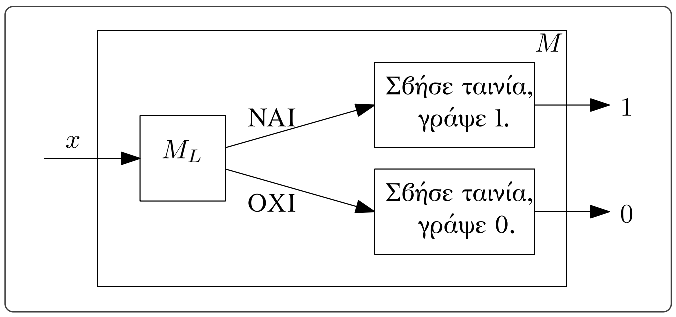
Απόδειξη. Έστω M_f η TM που υπολογίζει την f. Θα κατασκευάσουμε μία TM που χρησιμοποιεί σαν υπορουτίνες τις M_f και M_{next} (δες Παράδειγμα 1.2.8), καθώς και μία TM που αρχικοποιεί έναν μετρητή y στην τιμή ϵ (και επιστρέφει αυτήν την τιμή) [1] και μία TM που ελέγχει αν δύο λέξεις ταυτίζονται [2]. Η

[1] Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μετρητές κατά τον υπολογισμό μίας TM αποθηκεύοντας την τιμή τους σε συγκεκριμένα μέρη της ταινίας (για παράδειγμα τα πρώτα κελιά της) που θα χωρίζονται μεταξύ τους με κάποιο ειδικό σύμβολο (για παράδειγμα το #). Όποτε χρειαζόμαστε παραπάνω χώρο για κάποιο μετρητή μπορούμε να χρησιμοποιούμε κάποια παραλλαγή της M_{space} (δες Παράδειγμα 1.2.9) για να τον δημιουργήσουμε.

[2] Οι λέξεις αυτές, όπως και πριν, είναι αποθηκευμένες σε ξεχωριστά κομμάτι της ταινίας. Η TM κινεί την κεφαλή, πότε στην μία λέξη και πότε στην άλλη, και ελέγχει αν οι λέξεις περιέχουν τα ίδια σύμβολα στις ίδιες θέσεις.



Σχήμα 1.2.14: *Η ΤΜ που υπολογίζει τη συνάρτηση f^{-1}.*



Σχήμα 1.2.15: *Η ΤΜ που υπολογίζει τη συνάρτηση χ_L όταν $L \in$ REC.*

μηχανή αυτή φαίνεται στο Σχήμα 1.2.14. □

Παρατήρηση 1.2.37. Η Πρόταση 1.2.36 ισχύει ακόμα και αν η f δεν είναι πλήρης συνάρτηση (δες Άσκηση 1.7).

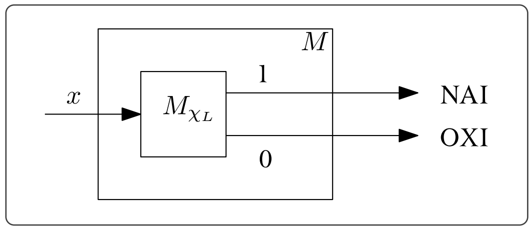
Για λόγους πληρότητας θα πρέπει να δείξουμε ότι οι δύο ορισμοί των ΤΜ που είδαμε είναι *ισοδύναμοι.* Όσον αφορά τον υπολογισμό συναρτήσεων η ύπαρξη μίας επιπλέον τερματικής κατάστασης δεν αλλοιώνει καθόλου τον υπολογισμό (επιλέγουμε μία από αυτές σαν τερματική κατάσταση και σχεδιάζουμε ΤΜ που δεν μπορούν να μεταβούν ποτέ στην άλλη). Για την αποφανσιμότητα γλωσσών η ισοδυναμία προκύπτει από τις ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση 1.2.38. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$. Ισχύει ότι $L \in$ REC ανν η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_L της L είναι υπολογίσιμη.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $L \in$ REC και έστω M_L μία ΤΜ που την αποφασίζει. Η ΤΜ του Σχήματος 1.2.15 υπολογίζει την χ_L.
($\Leftarrow$) Έστω ότι η ΤΜ M_{χ_L} υπολογίζει την χ_L. Η ΤΜ M του Σχήματος 1.2.16 αποφασίζει την L. □

Πρόταση 1.2.39. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$. Ισχύει ότι $L \in$ RE ανν η συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } x \in L \\ \perp & \text{, αλλιώς} \end{cases}$ είναι υπολογίσιμη.

Η απόδειξη της Πρότασης 1.2.39 αφήνεται ως άσκηση.



Σχήμα 1.2.16: *Η TM που αποφασίζει την L όταν η χ_L είναι υπολογίσιμη.*

1.2.3 Απαρίθμηση γλωσσών

Στο Κεφάλαιο 4 θα δούμε πως μπορούμε να «παράγουμε» τις λέξεις μιας γλώσσας από ένα πεπερασμένο σύνολο κανόνων (κάτι αντίστοιχο με την παραγωγή λέξεων σε μία φυσική γλώσσα, η οποία βασίζεται στους γραμματικούς κανόνες της γλώσσας). Η *παραγωγή* μιας γλώσσας (ή η *απαρίθμηση* όπως την αποκαλούμε σε αυτήν την παράγραφο), παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, όχι μόνο γιατί αποτελεί έναν πεπερασμένο και αυστηρό τρόπο να περιγραφεί ένα άπειρο σύνολο, αλλά γιατί στην ουσία μας περιγράφει τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουμε για να κατασκευάσουμε τις λέξεις της γλώσσας. Μάλιστα από αυτήν πηγάζουν τα ονόματα – τα ακρωνύμια – των κλάσεων γλωσσών που ορίσαμε πριν [1].

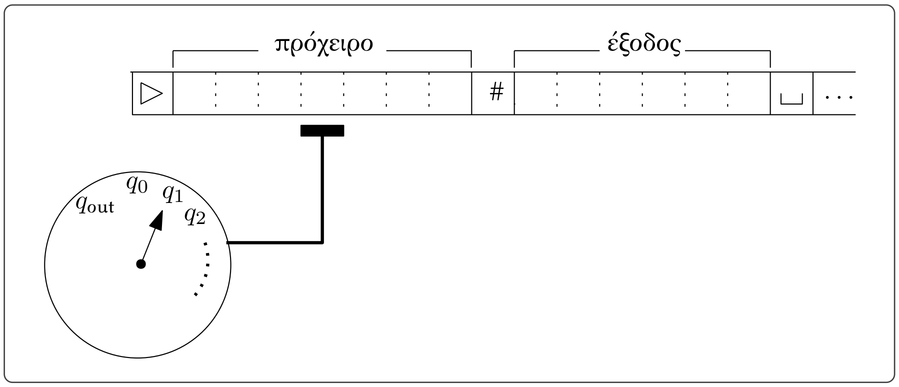
Θα εισάγουμε ακόμα μία παραλλαγή του ορισμού της TM. Ο σκοπός της μηχανής αυτής θα είναι να «τυπώσει» όλες τις λέξεις μιας γλώσσας [2].

Ορισμός 1.2.40. *Απαριθμητής* είναι μια εξάδα $E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{out}})$ όπου Q, Σ, Γ πεπερασμένα σύνολα, και:

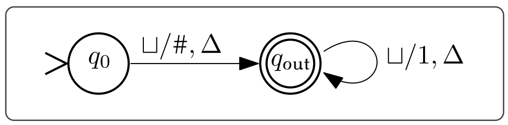
1. Q είναι το *σύνολο των καταστάσεων*
2. $q_0, q_{\text{out}} \in Q$, q_{out} είναι η *κατάσταση εξόδου*
3. Το Q δεν έχει τερματικές καταστάσεις
4. Σ είναι το *αλφάβητο εξόδου*
5. Γ είναι το *αλφάβητο ταινίας*
6. $\Sigma \subset \Gamma$
7. $\triangleright, \sqcup, \# \in \Gamma \setminus \Sigma$, το # χρησιμοποιείται για να χωρίζουμε την ταινία του E σε δύο μέρη: το *πρόχειρο* και την *έξοδο* (δες Σχήμα 1.2.17)
8. $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\text{Α}, \Delta\}$ είναι η *συνάρτηση μετάβασης* για την οποία ισχύει ότι:
   - $\forall q, q' \in Q \ \forall a \in \Gamma(\delta(q, \triangleright) = (q', a, x) \to x = \Delta \wedge a = \triangleright)$

[1] Το RE αντιστοιχεί στο Recursive Enumerable και το REC στο Recursive.

[2] Προφανώς, αν η γλώσσα είναι άπειρη η μηχανή θα πρέπει να δουλεύει για πάντα. Η έννοια του τερματισμού δεν υφίσταται σε αυτού του είδους τον υπολογισμό.



Σχήμα 1.2.17: *Σχηματική αναπαράσταση ενός απαριθμητή.*



Σχήμα 1.2.18: *Ο απαριθμητής της γλώσσας* $\{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ο E δεν δέχεται σαν είσοδο κάποια λέξη (ξεκινάει με κενή ταινία). Κάνει υπολογισμούς στο πρόχειρο [1] και όταν μεταβεί στην κατάσταση q_{out} λέμε ότι «*τυπώνει*» τη λέξη που βρίσκεται στο κομμάτι της εξόδου (δεξιά από το # δηλαδή). Στο κομμάτι της εξόδου ο E μπορεί να γράψει μόνο σύμβολα από το $\Sigma \cup \{\sqcup\}$ [2]. Στην περίπτωση όπου ο E τυπώνει τη λέξη $w \in \Sigma^*$ θα γράφουμε $\mathsf{print}_E(w)$ (ή σκέτο $\mathsf{print}(w)$ αν ο E εννοείται από τα συμφραζόμενα). Ο E δεν τερματίζει ποτέ (ακόμα και αν τυπώσει όλες τις λέξεις μιας πεπερασμένης γλώσσας) και συνεχώς τυπώνει λέξεις.

Ορισμός 1.2.41. Έστω απαριθμητής $E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{out}})$. Η γλώσσα που *απαριθμεί* ο E είναι η:

$$L(E) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w' \in \Gamma^* (\triangleright\, q_0 \vdash_E^* \triangleright\, q_{\text{out}} w' \# w)\}$$ [3]

ή αλλιώς:

$$L(E) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathsf{print}_E(w)\}$$

Ορισμός 1.2.42. Μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ καλείται *αναδρομικά απαριθμήσιμη* ανν υπάρχει απαριθμητής $E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{out}})$ τέτοιος ώστε $L = L(E)$.

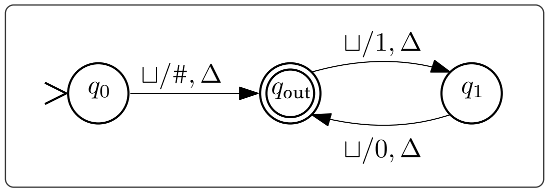
Παράδειγμα 1.2.43. Ο απαριθμητής E του Σχήματος 1.2.18 απαριθμεί τη γλώσσα $L(E) = \{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Παράδειγμα 1.2.44. Ο απαριθμητής E του Σχήματος 1.2.19 απαριθμεί τη γλώσσα $L(E) = \{(10)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

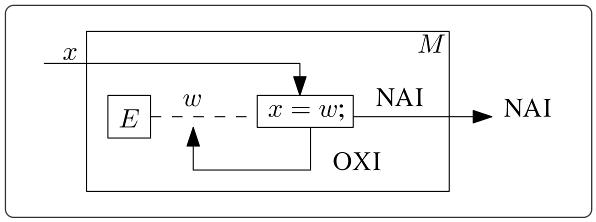
[1] Στην αρχή αυτών των υπολογισμών γράφει το σύμβολο # πάνω στην ταινία, ώστε να χωρίσει το πρόχειρο από το κομμάτι της εξόδου (δες τα Παραδείγματα 1.2.43, 1.2.44).

[2] Τυπικά δεν μπορούμε να επιβάλουμε κάποιον περιορισμό στη συνάρτηση μετάβασης για να το εξασφαλίσουμε αυτό. Αυτό που θα κάνουμε είναι όταν ο E μεταβαίνει στην κατάσταση q_{out} να θεωρούμε σαν λέξη εξόδου το κομμάτι της ταινίας δεξιά από το # και αν τυχαίνει αυτό να περιέχει κάποιο σύμβολα που δεν ανήκουν στο Σ απλά θα τα αγνοούμε. Πρακτικά όμως όταν σχεδιάζουμε έναν απαριθμητή θα φροντίζουμε να ικανοποιείται αυτή η προϋπόθεση.

[3] Και εδώ η σύμβαση ότι πριν μεταβεί ο E στην q_{out} θα πρέπει να έχει πάει την κεφαλή στην αρχή της ταινίας δεν είναι ουσιαστική.



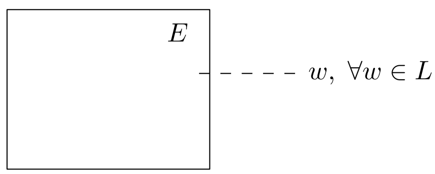
Σχήμα 1.2.19: *Ο απαριθμητής της γλώσσας* $\{(10)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.



Σχήμα 1.2.20: *Η ΤΜ που ημι-αποφασίζει την* L *όταν υπάρχει απαριθμητής* E *που την απαριθμεί.*

Συμβολισμός 1.2.45 (Κουτάκια συνέχεια...).

4. Αν ο απαριθμητής E απαριθμεί τη γλώσσα L θα γράφουμε:



Παρατηρήστε ότι η χρησιμοποίηση ενός απαριθμητή E ως υπορουτίνα σε μία ΤΜ M είναι εξ ορισμού προβληματική. Όχι τόσο γιατί ο Ορισμός 1.2.40 διαφέρει από τον Ορισμό 1.1.1 [1], αλλά γιατί στους απαριθμητές δεν υφίσταται τερματισμός. Στην πραγματικότητα αυτό που κάνουμε είναι να προσθέσουμε στην M τις απαραίτητες μεταβάσεις του E για να παραχθούν οι λέξεις της $L(E)$, και όχι να «συνδέουμε» τις δύο μηχανές.

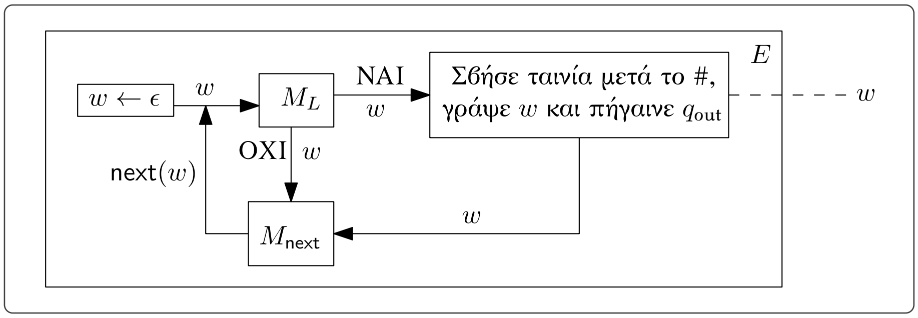
Θεώρημα 1.2.46. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. $L \in \mathsf{RE}$ ανν υπάρχει απαριθμητής E τέτοιος ώστε $L(E) = L$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Η απόδειξη θα γίνει αργότερα (δες σελίδα 41) καθώς χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια της *Καθολικής ΤΜ* πρώτα.

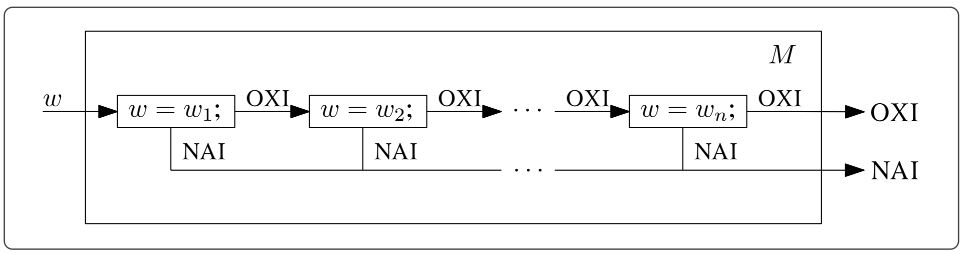
($\Leftarrow$) Έστω απαριθμητής E που απαριθμεί την L. Η ΤΜ M του Σχήματος 1.2.20 ημι-αποφασίζει την L. □

Παρατήρηση 1.2.47. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.46 μία γλώσσα L είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη ανν $L \in \mathsf{RE}$.

[1] Αυτό διορθώνεται εύκολα χρίζοντας κατάσταση εξόδου μία από τις (μη-τερματικές) καταστάσεις της ΤΜ.



Σχήμα 1.2.21: *Ο απαριθμητής που απαριθμεί την $L \in$ REC σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη (M_{next} είναι η TM του Παραδείγματος 1.2.8).*



Σχήμα 1.2.22: *Η TM που αποφασίζει την πεπερασμένη γλώσσα $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.*

Παρατήρηση 1.2.48. Έστω γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ και απαριθμητής $E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{out}})$ με $L(E) = L$. Ο ορισμός που δώσαμε για τον απαριθμητή αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο ο E να τυπώνει τις λέξεις της L σε οποιαδήποτε σειρά, ακόμα και με επαναλήψεις.

Θεώρημα 1.2.49. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. $L \in$ REC ανν υπάρχει απαριθμητής E που απαριθμεί τις λέξεις της L σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $L \in$ REC και ότι η TM M_L την αποφασίζει. Ο απαριθμητής E του Σχήματος 1.2.21 απαριθμεί τις λέξεις της σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη.

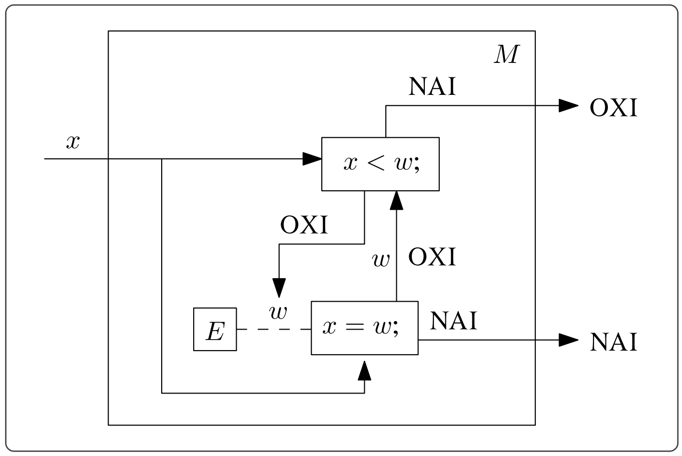
($\Leftarrow$) Αν η L είναι πεπερασμένη γλώσσα, έστω η $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, τότε π.χ. η TM του Σχήματος 1.2.22 την αποφασίζει.

Έστω ότι η L είναι άπειρη γλώσσα και ότι ο απαριθμητής E την απαριθμεί σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη. Η TM M του Σχήματος 1.2.23 αποφασίζει την L. □

Ορισμός 1.2.50. Μία γλώσσα L λέγεται *αναδρομική* ανν $L \in$ REC.

1.3 Επεκτάσεις Μηχανών Turing

Μπορούμε να φανταστούμε πολλούς τρόπου να «βελτιώσουμε» τις TM ούτως ώστε ο υπολογισμός να γίνεται ευκολότερα και γρηγορότερα. Το ενδιαφέρον μας όμως στρέφεται στο κατά πόσον μία συνάρτηση *είναι* υπολογίσιμη (ή μία γλώσσα *είναι* αναγνωρίσιμη/αποφάνσιμη), χωρίς να ενδιαφερόμαστε για την *Πολυπλοκότητα* του τρόπου που υπολογίζεται (αντίστοιχα αναγνωρίζεται/αποφασίζεται).



Σχήμα 1.2.23: *Η TM που αποφασίζει την L όταν υπάρχει απαριθμητής E που τη απαριθμεί σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη.*

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε ότι οι πιο εύλογες βελτιώσεις-επεκτάσεις στον ορισμό των TM δεν είναι ικανές να επεκτείνουν το σύνολο των υπολογίσιμων συναρτήσεων (ή των διαγνώσιμων/αποφάνσιμων γλωσσών) [1], πράγμα που καταδεικνύει πως αν θέλουμε απλά να ερευνήσουμε τους ορίζοντες της *Υπολογισιμότητας* η μηχανή του Ορισμού 1.1.1 είναι η μόνη που χρειαζόμαστε.

1.3.1 Πολυταινιακές Μηχανές Turing

Ορισμός 1.3.1. Για κάθε $k \geq 1$ *Μηχανή Turing k-ταινιών* είναι μια εξάδα $M_k = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ όπου Q, Σ, Γ πεπερασμένα σύνολα, και:

1. Q είναι το *σύνολο των καταστάσεων*

2. $q_0, q_{\text{τέλος}} \in Q$, $q_{\text{τέλος}}$ η τερματική κατάσταση

3. Σ είναι το *αλφάβητο εισόδου*

4. Γ είναι το *αλφάβητο ταινίας*

5. $\Sigma \subset \Gamma$

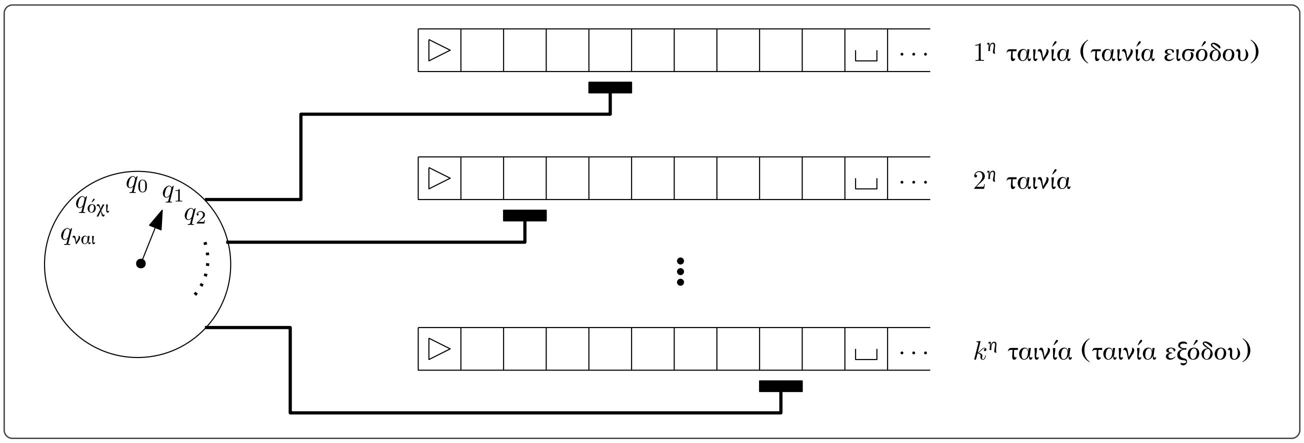
6. $\triangleright, \sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$

7. $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{A}, \Delta\}^k$ που ικανοποιεί τους ακόλουθους περιορισμούς:

   - $\forall a_1, \dots, a_k \in \Gamma (\delta(q_{\text{τέλος}}, a_1, \dots, a_k) = \bot)$
   - $\forall i \in [k]\ \forall q' \in Q \setminus \{q_{\text{τέλος}}\}\ \forall q' \in Q\ \forall a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \Gamma\ \forall x_1, \dots, x_k \in \{\mathrm{A}, \Delta\}$
     $(\delta(q, a_1, \dots, a_k) = (q', b_1, \dots, b_k, x_1, \dots, x_k) \wedge a_i = \triangleright \to x_i = \Delta \wedge b_i = \triangleright)$

Μπορούμε να φανταστούμε την M_k ως εξής (δες Σχήμα 1.3.1):

[1] Αποδεικνύεται ότι το ίδιο ισχύει και για όλες τις άλλες (εύλογες) επεκτάσεις TM (δες Σημείωση 1.3.16).



Σχήμα 1.3.1: *Σχηματική αναπαράσταση μίας ΤΜ k-ταινιών.*

Η M_k αποτελείται από k-ταινίες, k-κεφαλές (μία για κάθε ταινία) και έναν δείκτη καταστάσεων. Η είσοδος βρίσκεται στην ταινία 1 [1] και η έξοδος βρίσκεται στην ταινία k (οι υπόλοιπες ταινίες χρησιμοποιούνται ως πρόχειρο).

Παράδειγμα 1.3.2. Μπορούμε να ορίσουμε τους απαριθμητές σαν ΤΜ με δύο ταινίες. Η πρώτη ταινία είναι το πρόχειρο και η δεύτερη η ταινία εξόδου.

Για να δείξουμε ότι οι πολλαπλές ταινίες (παρόλο που αντικειμενικά διευκολύνουν πολύ τον σχεδιασμό τον ΤΜ και επισπεύδουν τον υπολογισμό) δεν έχουν τη δυνατότητα να υπολογίζουν συναρτήσεις που δεν είναι υπολογίσιμες σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.1, θα δείξουμε ότι για κάθε πολυταινιακή ΤΜ υπάρχει *ισοδύναμη μονοταινιακή* (δες ορισμός 1.2.14).

Θεώρημα 1.3.3. Για κάθε ΤΜ k-ταινιών, $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει ισοδύναμη μονοταινιακή ΤΜ.

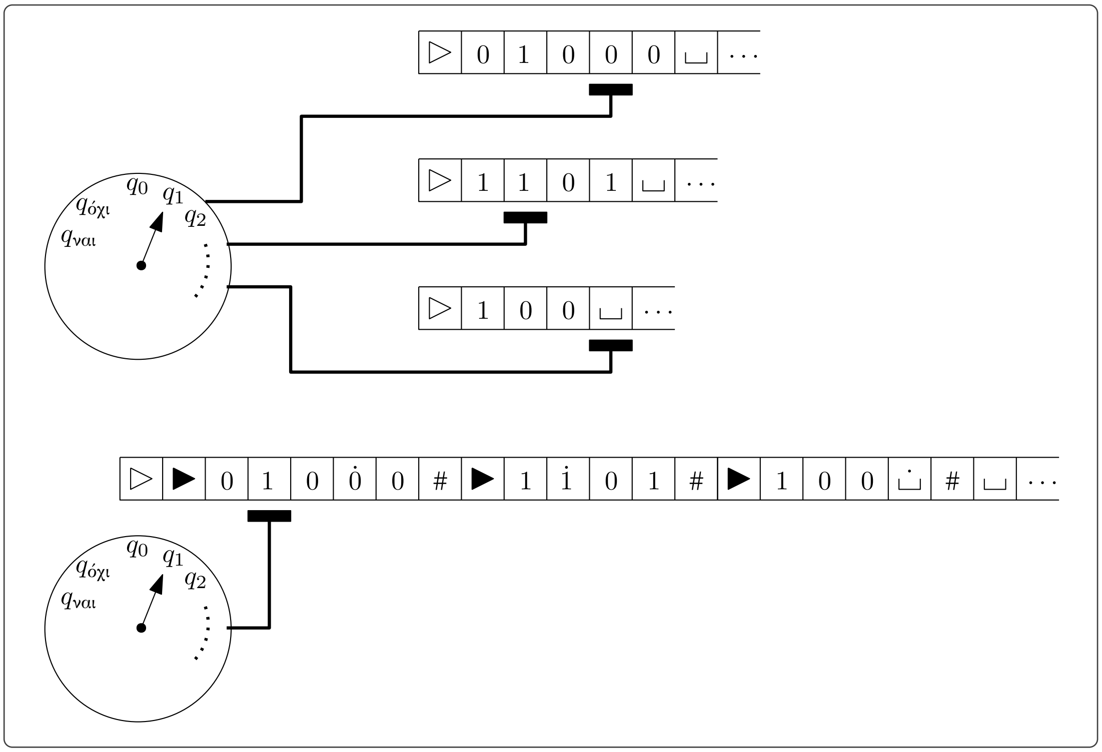
Απόδειξη. Έστω $M_k = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{τέλος})$ η ΤΜ k-τανιών. Θα *προσομοιώσουμε* [2] τη λειτουργία της με μία μονοταινιακή ΤΜ $M = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0, q_{τέλος})$ όπου

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{\#\} \cup \{\dot{a} \mid a \in \Gamma \setminus \{\triangleright\}\} \cup \{\blacktriangleright, \dot{\blacktriangleright}\}$$

Το σύμβολο # χρησιμοποιείται για να χωρίσουμε την ταινία της M σε k-τμήματα που αντιστοιχούν στις k ταινίες της M_k. Τα σύμβολα με κουκκίδα χρησιμοποιούνται για να επισημάνουν τη θέση του συμβόλου που βρίσκεται η κεφαλή σε κάθε ταινία της M_k. Σε κάθε βήμα υπολογισμού της M θα υπάρχουν k-σύμβολα με κουκκίδα στην ταινία της M, ένα σε κάθε τμήμα της. Για κάθε κεφαλή που διαβάζει κενό το τμήμα που αντιστοιχεί στην ταινία της θα περιέχει εκτός από τη λέξη και όσα κενά προηγούνται του κενού που διαβάζει (για το οποίο φυσικά θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\dot{\sqcup}$). Τέλος, το $\blacktriangleright$ παίζει τον ρόλο του αριστερού μαξιλαρακίου σε κάθε τμήμα της ταινίας (δες Σχήμα 1.3.2).

[1] Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η M_k δέχεται παραπάνω από μια λέξεις σαν είσοδο, για παράδειγμα $i \in \mathbb{N}$ λέξεις. Στην περίπτωση όπου $i \leq k$, οι λέξεις μπορεί να γραφτούν, η κάθε μία ξεχωριστά, στις i-πρώτες ταινίες. Αν $i > k$ θα πρέπει κάποια ταινία να περιέχει παραπάνω από μία λέξεις, τις οποίες θα χωρίζουμε με κάποιο ειδικό σύμβολο όπως παραδείγματος χάρη το #.

[2] Για κάθε μετάβαση της M_k θα ορίσουμε (περιγραφικά και όχι τυπικά) μία ακολουθία μεταβάσεων της M που καταλήγει στο ίδιο (ή πιο σωστά, σε αντίστοιχο) στιγμιότυπο.



Σχήμα 1.3.2: *Παράδειγμα προσομοίωσης TM k-ταινιών από μονοταινιακή TM.*

Η συνάρτηση δ' (και το σύνολο καταστάσεων Q') ορίζεται ως εξής [1]:

1. Η M ξεκινάει από το $\triangleright$ και διαβάζει τα σύμβολα που έχουν κουκκίδα σε κάθε τμήμα της ταινίας μέχρι να βρει το πρώτο σύμβολο κενού που ακολουθεί το σύμβολο # (τα σύμβολα αυτά τα «θυμάται» χρησιμοποιώντας επιπλέον καταστάσεις).

2. Επιστρέφει στην αρχή της ταινίας.

3. Διασχίζει πάλι την ταινία (από τα αριστερά προς τα δεξιά) και κάνει τις αλλαγές στα σύμβολα με την κουκκίδα, σε κάθε τμήμα, σύμφωνα με τη δ (γράφοντας σύμβολα χωρίς κουκκίδα). Στο ίδιο πέρασμα αλλάζει το σύμβολο αριστερά ή δεξιά από τα σύμβολα αυτά, γράφοντας το αντίστοιχο σύμβολο με κουκκίδα, ανάλογα με το αν η κεφαλή στην εν λόγω ταινία της M_k κινείται αριστερά ή δεξιά.

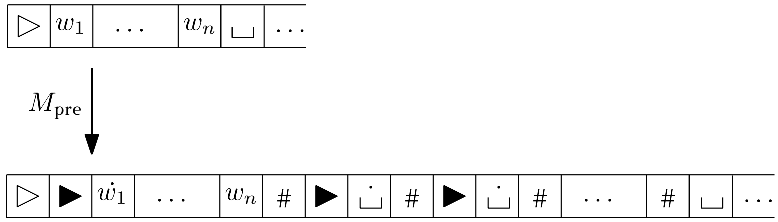
   Αν χρειαστεί να γράψει πάνω στο # σε κάποιο κομμάτι της ταινίας [2], μεταφέρει το περιεχόμενο της ταινίας που ακολουθεί το εν λόγω # ένα κελί δεξιά (χρησιμοποιώντας παραδείγματος χάρη κάποια παραλλαγή της M_{space} του Παραδείγματος 1.2.9), κάνει την αλλαγή που πρέπει και μετά γράφει # στο «κενό» κελί (που θα περιέχει π.χ. το σύμβολο _ αν χρησιμοποιήσουμε την M_{space}).

4. Επιστρέφει στην αρχή της ταινίας και αλλάζει την κατάσταση στον ελεγκτή σύμφωνα με τη δ.

[1] Δεν θα δώσουμε αναλυτική περιγραφή της δ' και του Q'. Αντ'αυτού θα περιγράψουμε τη λειτουργία της M. Ο σχεδιασμός συνάρτησης μεταβάσεων που να υλοποιεί αυτήν τη λειτουργία επαφίεται στον λεπτολόγο αναγνώστη.

[2] Για παράδειγμα αν η M_k πρέπει να προσθέσει κάποιο σύμβολο στο τέλος της λέξης που περιέχει μία ταινία.

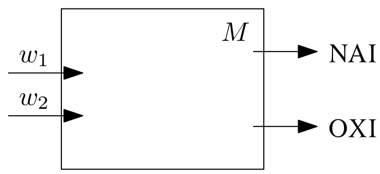
Τέλος, πριν ξεκινήσει τη λειτουργία της η M με είσοδο τη λέξη $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$, η M τρέχει μία υπορουτίνα, έστω M_{pre}, που τροποποιεί την ταινία της ως εξής:



□

Συμβολισμός 1.3.4 (Κουτάκια συνέχεια...).

5. Πολλές φορές στη συνέχεια, όταν σχεδιάζουμε μία ΤΜ M, θα γράφουμε (παραδείγματος χάρη):



εννοώντας ότι η M είναι ΤΜ δύο ταινιών, όπου η πρώτη ταινία γράφει την είσοδο w_1 και η δεύτερη την είσοδο w_2 [1].

1.3.2 Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

Από τη *Θεωρία Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας* γνωρίζουμε ότι η προσθήκη επιπλέον ταινιών σε μία ΤΜ δεν βελτιώνει ουσιαστικά τον χρόνο του υπολογισμού. Από την άλλη πλευρά, αν προσθέσουμε στη ΤΜ τη δυνατότητα να κάνει και *μη-ντετερμινιστικά βήματα* τότε η βελτίωση στον χρόνο είναι ουσιαστική [2]. Όμως όσον αφορά τη *Θεωρία Υπολογισμού* που μελετάμε εδώ, βελτιώσεις στη *χρονική πολυπλοκότητα* δεν λαμβάνονται υπόψιν καθώς ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά και μόνο για το αν μία συνάρτηση είναι υπολογίσιμη ή όχι.

Για τον ορισμό της *Μη-ντετερμινιστικής ΤΜ* θα χρησιμοποιήσουμε την παραλλαγή με τις δύο τερματικές καταστάσεις.

Ορισμός 1.3.5. *Μη-ντετερμινιστική Μηχανή Turing (NTM)* είναι μια επτάδα $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ όπου Q, Σ, Γ πεπερασμένα σύνολα, και:

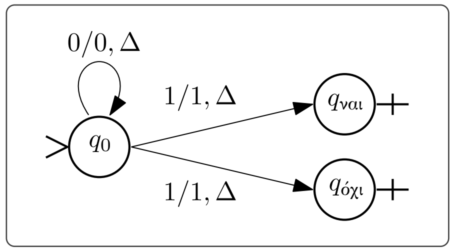
1. Q είναι το *σύνολο των καταστάσεων*

2. $q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}} \in Q$, με $q_{\text{ναι}} \neq q_{\text{όχι}}$ όπου $q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}$ οι τερματικές καταστάσεις

3. Σ είναι το *αλφάβητο εισόδου*

[1] Γνωρίζοντας (από το Θεώρημα 1.3.3) ότι υπάρχει ισοδύναμη μονοταινιακή ΤΜ θα θεωρούμε καταχρηστικά ότι και η μηχανή που χρησιμοποιεί την M ως υπορουτίνα είναι μονοταινιακή.

[2] Για παράδειγμα αν θέλουμε να βρούμε τη θέση ενός στοιχείου x σε έναν πίνακα A με n στοιχεία, μη-ντετερμινιστικά μπορούμε να πάρουμε την απάντηση σε ένα μόνο βήμα (ελέγχουμε μη-ντετερμινιστικά αν το στοιχείο $A[i]$, $i = 1, \ldots, n$, ταυτίζεται με το x. Ντετερμινιστικά όμως, στη χειρότερη περίπτωση, θα πρέπει να επισκεφτούμε όλα τα κελιά του A για να βρούμε την απάντηση (εκτός βέβαια αν ο A είναι ταξινομημένος, όπου και πάλι θα χρειαστεί να ελέγξουμε $\log n$ κελιά).



Σχήμα 1.3.3: *Παράδειγμα μη-ντετερμινιστικής ΤΜ.*

4. Γ είναι το *αλφάβητο ταινίας*
5. $\Sigma \subset \Gamma$
6. $\triangleright, \sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$
7. $\delta \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times \{\mathrm{A}, \Delta\}$ είναι η *σχέση μετάβασης* που ικανοποιεί τους ακόλουθους περιορισμούς:
   - $\forall a, b \in \Gamma\ \forall q \in Q\ \forall x \in \{\mathrm{A}, \Delta\}((q_{\text{ναι}}, a, q, b, x) \notin \delta \land (q_{\text{όχι}}, a, q, b, x) \notin \delta)$
   - $\forall q \in Q \setminus \{q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}\}\ \forall q' \in Q\ \forall a \in \Gamma((q, \triangleright, q', a, x) \in \delta \to x = \Delta \land a = \triangleright)$

Ο υπολογισμός της N κάθε φορά που η δ έχει παραπάνω από μία επιλογές για το επόμενο στιγμιότυπο λειτουργίας (*μη-ντετερμινιστικό βήμα*) χωρίζεται σε δύο ή περισσότερα *υπολογιστικά σενάρια*. Συνεπώς, αντί να έχουμε ένα μονοπάτι υπολογισμού, όπως στην περίπτωση των ντετερμινιστικών ΤΜ, έχουμε ένα *δέντρο υπολογισμού*, που πιθανόν να έχει «κλαδιά» με άπειρο μήκος.

Παράδειγμα 1.3.6. Η ΤΜ N του Σχήματος 1.3.3 είναι μία μη-ντετερμινιστική ΤΜ. Παρατηρήστε ότι ο υπολογισμός της N με είσοδο 0010 αποτελείτε από δύο υπολογιστικά σενάρια:

1ο σενάριο: $\triangleright q_0 0010 \vdash_N \triangleright 0 q_0 010 \vdash_N \triangleright 00 q_0 10 \vdash_N \triangleright 001 q_{\text{ναι}} 0$

2ο σενάριο: $\triangleright q_0 0010 \vdash_N \triangleright 0 q_0 010 \vdash_N \triangleright 00 q_0 10 \vdash_N \triangleright 001 q_{\text{όχι}} 0$

Ορισμός 1.3.7. Έστω συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ και ΝΤΜ N. Η N *υπολογίζει* την f ανν για κάθε $w \in \Sigma^*$:

- αν $w \in \mathsf{dom}(f)$, τότε κάθε υπολογιστικό σενάριο της $N(w)$ τερματίζει στο στιγμιότυπο $\triangleright\ q f(w)$, όπου $q \in \{q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}}\}$,
- αν $w \notin \mathsf{dom}(f)$, τότε υπάρχει υπολογιστικό σενάριο της $N(w)$ που δεν τερματίζει.

Ορισμός 1.3.8. Έστω ΝΤΜ $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$. Η γλώσσα που *αναγνωρίζει* (ή *αποδέχεται*) η N είναι η:

$$L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2 \in \Gamma^* (\triangleright\ q_0 w \vdash_N^* \triangleright\ w_1 q_{\text{ναι}} w_2)\}$$

δηλαδή υπάρχει υπολογιστικό σενάριο στο οποίο εμφανίζεται η $q_{\text{ναι}}$ [1].

Ορισμός 1.3.9. Έστω $L \subseteq \Sigma^*$ και ΝΤΜ N. Η N *ημι-αποφασίζει* την L ανν:

(Α) $L = L(N)$

[1] Δεν έχει σημασία αν στα υπόλοιπα σενάρια η N κολλάει ή απορρίπτει.

Ορισμός 1.3.10. Έστω $L \subseteq \Sigma^*$ και NTM N. Η N *αποφασίζει* την L ανν:

(A) $L = L(N)$

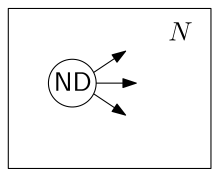
(B) Για κάθε $w \in \Sigma^*$, κάθε υπολογιστικό σενάριο της $N(w)$ τερματίζει.

Παρατήρηση 1.3.11. Μία NTM απορρίπτει την είσοδο της ανν κάθε υπολογιστικό σενάριο τερματίζει στην $q_{\text{όχι}}$.

Παράδειγμα 1.3.12. Η NTM του Παραδείγματος 1.3.6 ημι-αποφασίζει τη γλώσσα $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ η w περιέχει τουλάχιστον ένα $1\}$ [1].

Συμβολισμός 1.3.13 (Κουτάκια συνέχεια...).

6. Όταν σχεδιάζουμε μία N.T.M N θα σημειώνουμε τα μη-ντετερμινιστικά βήματα ως εξής (παραδείγματος χάρη αν έχουμε τρεις μη-ντετερμινιστικές επιλογές):



Θεώρημα 1.3.14. Για κάθε NTM υπάρχει ισοδύναμη TM.

Απόδειξη. [2] Έστω NTM $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει TM M (με τρεις ταινίες σε πρώτη φάση) τέτοια ώστε:

$$\forall w \in \Sigma^* (w \in L(N) \leftrightarrow w \in L(M))$$

Η ιδέα της απόδειξης είναι η ακόλουθη:

> *Δοσμένης μίας λέξης $w \in \Sigma^*$ «ακολουθούμε» όλα τα υπολογιστικά σενάρια στο δέντρο υπολογισμού της $N(w)$ για πεπερασμένο αριθμό βημάτων, έστω $k \in \mathbb{N}$. Ελέγχουμε αν κάποιο από αυτά τερματίζει στην $q_{\text{ναι}}$. Αν υπάρχει τέτοιο σενάριο, η $M(w)$ τερματίζει και επιστρέφει ΝΑΙ, αλλιώς αυξάνουμε το k και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο.*

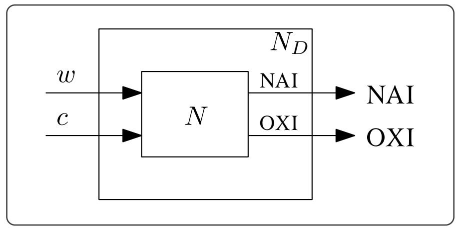
Παρατηρούμε ότι για κάθε $w \in \Sigma^*$:

- Αν $w \in L(N)$ τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε κάποιο υπολογιστικό σενάριο της $N(w)$ τερματίζει στην $q_{\text{ναι}}$. Συνεπώς, όταν ακολουθούμε τα υπολογιστικά σενάρια της $N(w)$ για k_0 βήματα, η $M(w)$ θα τερματίσει στην $q_{\text{ναι}}$. Άρα $w \in L(M)$.

- Αν $w \notin L(N)$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ δεν υπάρχει υπολογιστικό σενάριο της $N(w)$ που τερματίζει στην $q_{\text{ναι}}$. Συνεπώς, η $M(w)$ δεν τερματίζει ποτέ. Άρα $w \notin L(M)$.

[1] Δεν την αποφασίζει γιατί, παραδείγματος χάρη, για την ϵ υπάρχουν σενάρια στο υπολογιστικό δέντρο της $N(\epsilon)$ που δεν τερματίζουν (όλα για την ακρίβεια).

[2] Θα δείξουμε μόνο την (πιο εύκολη) περίπτωση όπου η NTM ημι-αποφασίζει μία γλώσσα (η κεντρική ιδέα είναι ίδια και για την περίπτωση όπου η NTM αποφασίζει μία γλώσσα ή υπολογίζει μία συνάρτηση).



Σχήμα 1.3.4: *Η ΤΜ N_D στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.14.*

Για να διευκολύνουμε την παρουσίαση θα θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι κάθε βήμα της $N(w)$ είναι μη-ντετερμινιστικό. Για ένα ζεύγος (q,a), όπου $q \in Q$ και $a \in \Gamma$ υπάρχουν το πολύ $r = |Q| \cdot |\Gamma| \cdot 2$ διαφορετικές δυνατές τιμές για το (q,a,p,b,x) όπου $p \in Q$, $b \in \Gamma$ και $x \in \{\mathrm{A}, \Delta\}$. Συνεπώς σε κάθε βήμα της $N(w)$ υπάρχουν το πολύ r μη-ντετερμινιστικές επιλογές. Θεωρώντας μία αρίθμηση των r αυτών επιλογών παρατηρούμε ότι σε κάθε υπολογιστικό σενάριο το επόμενο στιγμιότυπο προκύπτει από έναν αριθμό στο $[r]$ (τη μη-ντετερμινιστική επιλογή δηλαδή που θα εκτελέσει η $N(w)$). Συνεπώς ένα υπολογιστικό σενάριο k-βημάτων, $k \in \mathbb{N}$, μπορεί να χαρακτηρισθεί από μία λέξη $c \in \{1,\ldots,r\}^*$ με μήκος k [1].

Θεωρούμε την ΤΜ N_D του Σχήματος 1.3.4 η οποία δέχεται σαν είσοδο τη w και μία λέξη $c \in \{1,\ldots,r\}^*$ και «τρέχει», με ντετερμινιστικό τρόπο, την $N(w)$ ως εξής: Σε κάθε βήμα της η $N_D(w,c)$ διαβάζει ένα σύμβολο από τη δεύτερη ταινία (που περιέχει τη c), δηλαδή έναν αριθμό, έστω c_0, στο $[r]$, και κάνει ότι θα έκανε η $N(w)$ εφαρμόζοντας τη c_0-οστή μη-ντετερμινιστική επιλογή [2].

- Αν η $N(w)$, κάνοντας τις επιλογές της c, φτάσει στην $q_{\text{ναι}}$ τότε η $N_D(w,c)$ επιστρέφει ΝΑΙ.

- Αν η δεύτερη κεφαλή διαβάσει $\sqcup$ (δηλαδή τελείωσαν οι επιλογές της c) η $N_D(w,c)$ θα πάει σε μία ειδική κατάσταση, έστω την q_{next}.

- Αν για κάποιο $i \in [|c|]$ η c_i-οστή μη-ντετερμινιστική επιλογή δεν αποτελεί επιλογή για την N, η $N_D(w,c)$ θα πάει στην q_{next}.

Θεωρούμε επίσης την ΤΜ M_{next} που δέχεται σαν είσοδο μία λέξη $w \in \{1,\ldots,r\}^*$ και επιστρέφει την επόμενη λέξη $\mathsf{next}(w)$(σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη του $\{1,\ldots,r\}^*$).

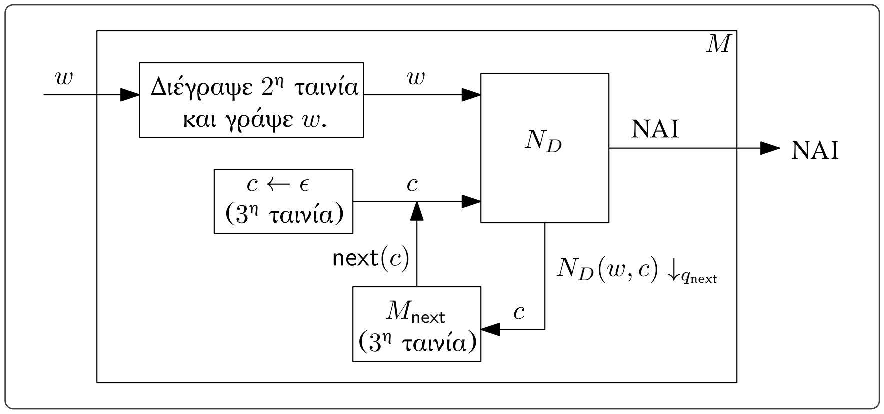
Τέλος, κατασκευάζουμε την ΤΜ M του Σχήματος 1.3.5, της οποίας η πρώτη ταινία περιέχει την w και δεν αλλάζει ποτέ, και οι άλλες δύο χρησιμοποιούνται από την N_D.

Από το Θεώρημα 1.3.3 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μονοταινιακή ΤΜ M' που είναι ισοδύναμη με την M. Η M' είναι η ζητούμενη ΤΜ. □

Παρατήρηση 1.3.15. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.14 ούτε οι NTM είναι ικανές να επεκτείνουν το σύνολο των υπολογίσιμων συναρτήσεων (ή των διαγνώσιμων/αποφάνσιμων γλωσσών).

[1] Για παράδειγμα η λέξη $c_1\cdots c_k$ (ή πιο σωστά $c_1\#\cdots\#c_k$, όπου το σύμβολο # χρησιμοποιείτε για να διαχωρίσουμε τους αριθμούς μεταξύ τους, οπότε είναι λέξη μήκους $2k-1$ από το αλφάβητο $\{1,\ldots,r,\#\}$) είναι ένα υπολογιστικό σενάριο k-βημάτων, που στο πρώτο μη-ντετερμινιστικό βήμα κάνουμε την επιλογή c_1, στο δεύτερο τη c_2 κ.ο.κ.. Τυπικά θα θεωρήσουμε ότι αν σε κάποιο βήμα υπολογισμού η επιλογή c_i, $i \le k$, δεν υπάρχει στη σχέση δ θα την αγνοούμε και θα πηγαίνουμε στην επόμενη επιλογή.

[2] Αυτό γίνεται προσθέτοντας ξεχωριστές καταστάσεις για κάθε ένα από τα μη-ντετερμινιστικά βήματα και αφού μεταβούμε στην κατάλληλη κατάσταση, συνεχίζουμε τον υπολογισμό όπως επιβάλει η σχέση μεταβάσεων της NTM.



Σχήμα 1.3.5: *Η ΤΜ M στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.14.*

Σημείωση 1.3.16. Μπορούμε να ορίσουμε πολλές ακόμα παραλλαγές ΤΜ, όπως για παράδειγμα ΤΜ με άπειρη ταινία και από τις δύο μεριές ή ΤΜ με άπειρο πίνακα αντί για ταινία, όπως επίσης και συνδυασμούς παραλλαγών ΤΜ, για παράδειγμα πολυταινιακές μη-ντετερμινιστικές ΤΜ (δες την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.8). Όλες αυτές οι παραλλαγές αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμες με την απλή ΤΜ (δες Ασκήσεις 1.2 και 1.3).

Εκτός από τις επεκτάσεις των ΤΜ, για να διευκολύνουμε την παρουσίαση των αποδείξεων συχνά θα υποθέτουμε ότι μία δοσμένη ΤΜ ικανοποιεί κάποιους περιορισμούς, που δεν θα βλάπτουν όμως τη γενικότητα (γα παράδειγμα δες τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 2.5.1 και 4.1.8).

1.4 Καθολική Μηχανή Turing

Ο φορμαλισμός που εισήγαγε ο Alan Turing έχει επικρατήσει έναντι των υπόλοιπων φορμαλισμών (ιδιαιτέρως μετά την έλευση του Η/Υ), και πλέον είναι ο βασικός φορμαλισμός που χρησιμοποιείται τόσο σε μαθήματα Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας όσο και σε μαθήματα Θεωρίας Υπολογισμού. Ο κύριος λόγος είναι το γεγονός ότι μπορούμε να διακρίνουμε πολλές πτυχές της λειτουργίας των σημερινών υπολογιστών στις ΤΜ (σε πολύ πιο στοιχειώδη μορφή φυσικά). Μία από αυτές τις λειτουργίες – ίσως η πιο ουσιαστική σε έναν Η/Υ – είναι η δυνατότητά τους να «προγραμματίζονται», δηλαδή να εισάγουμε σε αυτούς κάποιες απλές οδηγίες και αυτοί με τις σειρά τους να τις διεκπεραιώνουν. Σε πρώτη ανάγνωση, ο προγραμματισμός μπορεί να μην μοιάζει και τόσο σημαντικός, σκεφτείτε όμως ότι οι πρώτοι υπολογιστές που κατασκευάστηκαν είχαν μία και μοναδική λειτουργία (ή, έστω, ένα πολύ περιορισμένο σύνολο λειτουργιών [1]), πράγμα που μείωνε δραματικά το εύρος εφαρμογών τους.

Μέχρι τώρα είδαμε ότι η ΤΜ μπορεί να θεωρηθεί το πρόγραμμα που υπολογίζει μία (και μόνο μία) συνάρτηση (ή αποφασίζει/ημι-αποφασίζει μία και μόνο μία γλώσσα). Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε μία ΤΜ που δέχεται σαν είσοδο την *κωδικοποίηση* μίας άλλης ΤΜ, μαζί με μία λέξη εισόδου, και φέρει «εις πέρας» τον υπολογισμό της δεύτερης. Έτσι, στην ουσία, οι ΤΜ μπορούν να προγραμματίζονται όπως και ο Η/Υ μας.

Καθώς θα χρησιμοποιούμε συνεχώς παραλλαγές αυτής της μηχανή θα της δώσουμε ένα ξεχωριστό

[1] Όπως για παράδειγμα η *Διαφορική Μηχανή* και η *Αναλυτική Μηχανή* (που υποστήριξε αρκετές στοιχειώδεις υπολογιστικές λειτουργίες και χρησιμοποιούσε διάτρητες κάρτες για την επιλογή μεταξύ τους), που σχεδίασε ο *Charles Babbage* στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα.

όνομα, θα την αποκαλούμε *Καθολική Μηχανή Turing*. Πριν περάσουμε στον ορισμό της θα πρέπει να συμφωνήσουμε σε μία κωδικοποίηση των TM.

Κωδικοποίηση Μηχανών Turing στο αλφάβητο $\{0,1\}$

Συμβολισμός 1.4.1. Έστω αλφάβητο Σ. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\langle * \rangle_\Sigma$ για να δηλώσουμε το γεγονός ότι το $*$ είναι κωδικοποιημένο στο αλφάβητο Σ [1].

Έστω TM $M = (Q, \{0,1\}, \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ [2]. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η δ περιέχει όλη την πληροφορία που χαρακτηρίζει την M [3]. Συνεπώς για να κωδικοποιήσουμε την M πρέπει να κωδικοποιήσουμε τη δ.

Σε πρώτη φάση κωδικοποιούμε τη δ σε μία λέξη του αλφαβήτου $\Sigma = \{0,1,q,s,d,\#\}$:

- Κάθε κατάσταση του Q κωδικοποιείται από το q ακολουθούμενο από μία λέξη του $\{0,1\}$ μήκους $|Q|-1$ [4]:

$$\begin{aligned}
\langle q_0 \rangle_\Sigma &= q\overbrace{01\cdots00}^{|Q|-1\text{-φορές}} \\
\langle q_1 \rangle_\Sigma &= q00\cdots01 \\
\langle q_2 \rangle_\Sigma &= q00\cdots11 \\
&\vdots \\
\langle q_{\text{ναι}} \rangle_\Sigma &= q01\cdots11 \\
\langle q_{\text{όχι}} \rangle_\Sigma &= q11\cdots11
\end{aligned}$$

- Κωδικοποιούμε τα σύμβολα του $\{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}$ ως εξής [5]:

$$\begin{aligned}
\langle \triangleright \rangle_\Sigma &= s000 \\
\langle \sqcup \rangle_\Sigma &= s001 \\
\langle 0 \rangle_\Sigma &= s011 \\
\langle 1 \rangle_\Sigma &= s111
\end{aligned}$$

- Κωδικοποιούμε τα A, Δ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{A} \rangle_\Sigma &= d0 \\
\langle \Delta \rangle_\Sigma &= d1
\end{aligned}$$

- Κωδικοποιούμε κάθε μετάβαση $(q,a,p,b,x) \in \delta$, όπου $a,b \in \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}$, $q,p \in Q$ και $x \in \{\mathrm{A}, \Delta\}$ ως εξής:

$$\langle (q,a,p,b,x) \rangle_\Sigma = \langle q \rangle_\Sigma \langle a \rangle_\Sigma \langle p \rangle_\Sigma \langle b \rangle_\Sigma \langle x \rangle_\Sigma$$

[1] Όπως θα δούμε λίαν συντόμως, το $*$ μπορεί να είναι σύμβολο, λέξη, συνάρτηση ακόμα και TM.

[2] Φυσικά μπορούμε να κωδικοποιήσουμε και τις TM που έχουν περισσότερα από τέσσερα σύμβολα στο αλφάβητο ταινίας τους. Θα κρατήσουμε όμως το μέγεθος του Γ στο ελάχιστο δυνατό για να διευκολύνουμε την παρουσίαση.

[3] Η μόνη πληροφορία που δεν περιέχεται στη δ είναι αν η M περιέχει καταστάσεις που είναι «απομονωμένες» (δηλαδή για κάθε λέξη w η $M(w)$ δεν μεταβαίνει ποτέ σε αυτές), και αν ναι, πόσες είναι αυτές.

[4] Ο λόγος που θέλουμε να έχουμε το ίδιο πλήθος συμβόλων στην κωδικοποίηση όλων των καταστάσεων είναι ότι μας βολεύει περισσότερο κατά τη λειτουργία της καθολικής TM. Το ίδιο θα κάνουμε και στις κωδικοποιήσεις που ακολουθούν.

[5] Αν το Γ είχε περισσότερα σύμβολα θα τα κωδικοποιούσαμε κατά τον ίδιο τρόπο.

- Τέλος, έστω $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\}$, κωδικοποιούμε τη δ ως εξής:

$$\langle\delta\rangle_\Sigma \quad = \quad \langle\delta_1\rangle_\Sigma\#\langle\delta_2\rangle_\Sigma\#\cdots\#\langle\delta_k\rangle_\Sigma$$

Παράδειγμα 1.4.2. Η συνάρτηση μετάβασης της ΤΜ του Παραδείγματος 1.2.26 (Σχήμα 1.2.8) κωδικοποιείται στη λέξη του $\{0,1,q,s,d,\#\}^*$:

$$q00s011q00s011d1\#q00s001q01s001d1\#q00s111q11s111d1$$

Παρατηρήστε ότι με τον τρόπο που κωδικοποιούμε το σύνολο καταστάσεων και το αλφάβητο ταινίας αποτυπώνεται ο πληθάριθμος των δύο συνόλων. Αυτό είναι απαραίτητο έτσι ώστε ΤΜ με την ίδια συνάρτηση μεταβάσεων αλλά με μη προσβάσιμες καταστάσεις ή μη χρησιμοποιούμενα σύμβολα να έχουν διαφορετική κωδικοποίηση.

Παρατήρηση 1.4.3. Μπορούμε περαιτέρω να κωδικοποιήσουμε τα σύμβολα του $\{0,1,q,s,d,\#\}$ στο $\{0,1\}$, όπως για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
\langle 0\rangle_{\{0,1\}} &= 001\\
\langle 1\rangle_{\{0,1\}} &= 010\\
\langle q\rangle_{\{0,1\}} &= 011\\
\langle s\rangle_{\{0,1\}} &= 100\\
\langle d\rangle_{\{0,1\}} &= 101\\
\langle \#\rangle_{\{0,1\}} &= 110
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.4.4. Η ΤΜ του Παραδείγματος 1.2.26 (Σχήμα 1.2.8) κωδικοποιείται στη λέξη του $\{0,1\}^*$:

011 001 001 100 001 010 010 011 001 001 100 001 010 010 101 010 110
011 001 001 100 001 001 010 011 001 010 100 001 001 010 101 010 110
011 001 001 100 010 010 010 011 010 010 100 010 010 010 101 010

(Η γραμμή αλλάζει μετά από κάθε #.)

Συνεπώς καταλήγουμε στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.4.5. Κάθε ΤΜ κωδικοποιείται μονοσήμαντα [1] σε μία λέξη του $\{0,1\}^*$.

Παρατήρηση 1.4.6. Ακολουθώντας την «αντίστροφη» διαδικασία από αυτήν που ακολουθήσαμε στην κωδικοποίηση των ΤΜ μπορούμε, πρώτον να ελέγξουμε αν μια λέξη του $\{0,1\}^*$ αποτελεί κωδικοποίηση ΤΜ και, δεύτερον, αν όντως αποτελεί κωδικοποίηση, να δούμε τις μεταβάσεις της. Αυτή η διαδικασία καλείται *αποκωδικοποίηση*.

[1] Αυτό δεν είναι απολύτως ακριβές, καθώς η κωδικοποίηση που παρουσιάσαμε εξαρτάται από τη σειρά που έχουμε επιλέξει για τις πεντάδες της συνάρτησης μετάβασης δ. Για να έχουμε μονοσήμαντη κωδικοποίηση θα πρέπει να συμφωνήσουμε και σε μία συγκεκριμένη σειρά. Θα μπορούσαμε παραδείγματος χάρη να ακολουθήσουμε τη σειρά που έχει μία πεντάδα στη λεξικογραφική διάταξη όταν κωδικοποιηθεί σε λέξη του $\{0,1,q,s,d,\#\}^*$.

Σημείωση 1.4.7. Υπάρχουν πολύ πιο «αποδοτικοί» τρόποι να κωδικοποιήσουμε τις TM από αυτόν που είδαμε [1], όμως το επίθετο *αποδοτικός* σε αυτές τις σημειώσεις χρησιμοποιείται μόνο όπου θέλουμε να τονίσουμε ότι δεν ενδιαφερόμαστε στο να κάνουμε τον υπολογισμό πιο αποδοτικό κατ' οποιονδήποτε τρόπο.

Σύμβαση 1.4.8. Όταν το αλφάβητο στο οποίο έχουμε κωδικοποιήσει μία TM εννοείται από τα συμφραζόμενα θα χρησιμοποιούμε τον απλουστευμένο συμβολισμό $\langle M \rangle$.

Ορισμός 1.4.9. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{G} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{Υπάρχει TM } M \text{ τέτοια ώστε } w = \langle M \rangle\}$ [2]. Μπορούμε να διατάξουμε τις λέξεις του $\mathcal{G}$ σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη του $\{0,1\}^*$, ορίζοντας έτσι μία συνάρτηση $\mathsf{Gödel} : \mathcal{G} \to \mathbb{N}$, όπου $\mathsf{Gödel}(M) =$ «Η σειρά εμφάνισης της $\langle M \rangle$ στο $\mathcal{G}$ σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη του $\{0,1\}^*$» [3]. Το $\mathsf{Gödel}(M)$ καλείται *αριθμός Gödel* της M.

Παρατήρηση 1.4.10. Ισχύει ότι $\mathcal{G} \in \mathsf{REC}$ και ότι η συνάρτηση Gödel είναι υπολογίσιμη, 1-1 και επί [4].

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Gödel μπορούμε να δείξουμε (μη-κατασκευαστικά) ότι η απάντηση στο Ερώτημα 2 (σελίδα 22) είναι καταφατική.

Θεώρημα 1.4.11. Υπάρχει γλώσσα $L \in 2^{\{0,1\}^*} \setminus \mathsf{RE}$.

Απόδειξη. Αφού η Gödel είναι μια 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathcal{G}$ στο $\mathbb{N}$ έπεται ότι $|\mathcal{G}| = \aleph_0$. Από την Παρατήρηση 0.2.12 και το Θεώρημα 0.1.17 προκύπτει ότι $|2^{\{0,1\}^*}| > \aleph_0$. Ως συνέπεια δεν μπορεί να υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση από το $2^{\{0,1\}^*}$ στο $\mathcal{G}$. Οπότε υπάρχει γλώσσα $L \in 2^{\{0,1\}^*}$ για την οποία δεν υπάρχει TM M με $L(M) = L$ [5]. □

Παρατήρηση 1.4.12. Αφού το σύνολο των συναρτήσεων από το $\{0,1\}^*$ στο $\{0,1\}^*$ έχει πληθάριθμο τουλάχιστον τον πληθάριθμο του $2^{\{0,1\}^*}$ [6], έπεται επίσης ότι υπάρχουν μη-υπολογίσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός Καθολικής Μηχανής Turing

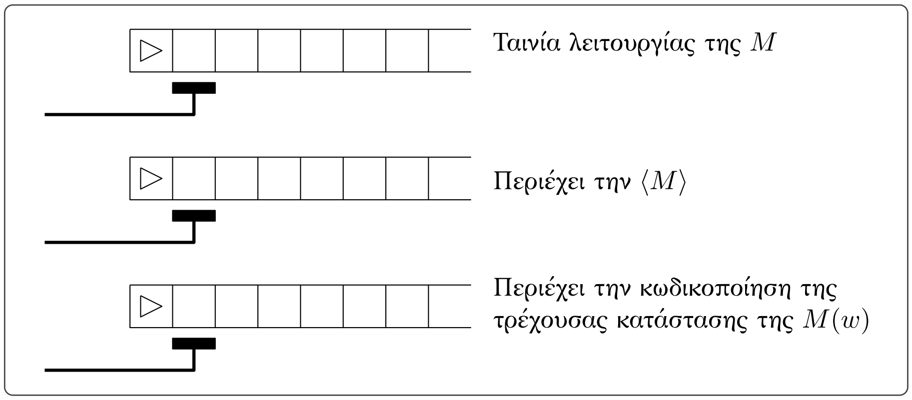
Ορισμός 1.4.13. *Καθολική Μηχανή Turing* (συμβολισμός $\boxed{\mathrm{M}}$) είναι μία TM τριών ταινιών (Σχήμα 1.4.1) με αλφάβητο εισόδου το $\{0,1\}$, που δέχεται ως είσοδο την κωδικοποίηση μίας TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ και μίας λέξης w (την είσοδο για την M) στο $\{0,1\}^*$ [7] και μπορεί να προσομοιώσει την $M(w)$. Η 1^{η} ταινία της $\boxed{\mathrm{M}}$ περιέχει την είσοδό της, δηλαδή την $\langle M, w \rangle$. Στην αρχή του υπολογισμού $\boxed{\mathrm{M}}(\langle M, w \rangle)$ η $\boxed{\mathrm{M}}$ κάνει τα ακόλουθα:

1. Αντιγράφει την $\langle M \rangle$ στην 2^{η} ταινία της και αφήνει την $\langle w \rangle$ στην 1^{η}.

2. Γράφει $\langle q_0 \rangle$ στην 3^{η} ταινία της.

Έπειτα, σε κάθε βήμα προσομοίωσης (ενός βήματος της $M(w)$) η $\boxed{\mathrm{M}}(\langle M, w \rangle)$ κάνει τα ακόλουθα:

[1] Που θα παρήγαγαν για παράδειγμα κωδικοποιήσεις με πολύ μικρότερο μήκος.
[2] Χάριν απλότητας θα γράφαμε $\mathcal{G} = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid \text{Η } M \text{ είναι TM}\}$.
[3] Για να απλοποιήσουμε λίγο τον συμβολισμό γράφουμε $\mathsf{Gödel}(M)$ και όχι $\mathsf{Gödel}(\langle M \rangle)$.
[4] Οι λεπτομέρειες της απόδειξης αυτής της παρατήρησης αφήνονται ως άσκηση (Άσκηση 1.4).
[5] Για λόγους πληρότητας πρέπει να τονίσουμε, μία ακόμα φορά, ότι κάθε TM κωδικοποιείται μονοσήμαντα στο $\{0,1\}$ και ότι αναγνωρίζει ακριβώς μία γλώσσα.
[6] Το σύνολο αυτό περιέχει για κάθε στοιχείο $L \in 2^{\{0,1\}^*}$ και μία συνάρτηση, τη χ_L.
[7] Θα γράφουμε $\langle M, w \rangle$ βάζοντας «κάτω από το χαλί» τις λεπτομέρειες που αποκρύπτει αυτός ο συμβολισμός.



Σχήμα 1.4.1: *Οι τρεις ταινίες μίας Καθολικής ΤΜ.*

1. Διαβάζει την κατάσταση που γράφει η $3^{\text{η}}$ ταινία και το (κωδικοποιημένο) σύμβολο της $1^{\text{ης}}$ ταινίας (προσπελάσει δηλαδή όλα τα κελιά της $1^{\text{ης}}$ ταινίας που αποτελούν την κωδικοποίηση του συμβόλου που διαβάζει η M).

2. Ψάχνει μετάβαση της M στην $2^{\text{η}}$ ταινία που να ξεκινάει με τον συνδυασμό κατάστασης και συμβόλου που διάβασε.

3. - Αν βρει τέτοια μετάβαση:

   (α΄) γράφει την κωδικοποίηση της καινούριας κατάσταση στην $3^{\text{η}}$ ταινία,

   (β΄) γράφει την κωδικοποίηση του καινούριο συμβόλου στη θέση της κωδικοποίησης του παλιού [1] και

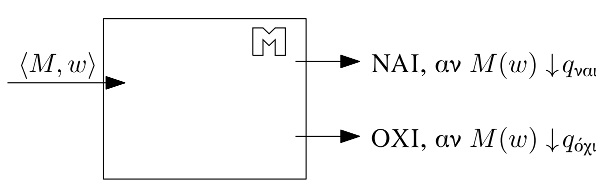
   (γ΄) κινεί την κεφαλή της $1^{\text{ης}}$ ταινίας είτε στο προηγούμενο σύμβολο της $1^{\text{ης}}$ ταινίας (όχι κατ' ανάγκη στο προηγούμενο κελί) είτε στο επόμενο, ανάλογα μα το αν η μετάβαση είχε Α ή Δ.

   - Αν δεν βρει τέτοιο συνδυασμό και η κατάσταση της $3^{\text{ης}}$ ταινίας είναι τερματική, πάει στην $q_{\text{ναι}}$ αν η $3^{\text{η}}$ ταινία περιέχει την $\langle q_{\text{ναι}} \rangle$ και στην $q_{\text{όχι}}$ αν περιέχει την $\langle q_{\text{όχι}} \rangle$. Σε αντίθετη περίπτωση κολλάει.

4. Γυρίζει τις κεφαλές της $2^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ ταινίας στο $\triangleright$.

Συμβολισμός 1.4.14 (Κουτάκια συνέχεια...).

7. Έστω ΤΜ M και $w \in \Sigma^*$. Θα γράφουμε:



[1] Παρατηρήστε ότι δεν θα χρειαστεί ποτέ να δημιουργήσουμε (ή να μειώσουμε) χώρο στην ταινία για να φέρουμε εις πέρας αυτήν την εργασία, καθώς οι κωδικοποιήσεις όλων των συμβόλων του αλφαβήτου ταινίας έχουν το ίδιο μήκος.

	0	1	2	3	4	$\cdots$
ϵ	$\cancel{(\epsilon,0)}$	$\cancel{(\epsilon,1)}$	$\cancel{(\epsilon,2)}$	$\cancel{(\epsilon,3)}$	$\cancel{(\epsilon,4)}$	$\cdots$
0	$\cancel{(0,0)}$	$\cancel{(0,1)}$	$\cancel{(0,2)}$	$\cancel{(0,3)}$	$(0,4)$	$\cdots$
1	$\cancel{(1,0)}$	$\cancel{(1,1)}$	$\cancel{(1,2)}$	$(1,3)$	$(1,4)$	$\cdots$
00	$\cancel{(00,0)}$	$\cancel{(00,1)}$	$(00,2)$	$(00,3)$	$(00,4)$	$\cdots$
01	$\cancel{(01,0)}$	$(01,1)$	$(01,2)$	$(01,3)$	$(01,4)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Σχήμα 1.4.2: *Η σειρά με την οποία επιστρέφει η* np *τα ζευγάρια του* $\{0,1\}^* \times \mathbb{N}$.

Εφαρμογή Καθολικής Μηχανής Turing

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθολική TM (ή παραλλαγές αυτής) για να κάνουμε διάφορους ελέγχους όσον αφορά τον υπολογισμό μίας TM M με κάποια είσοδο w. Για παράδειγμα μπορούμε να ελέγξουμε σε πόσα βήματα η $M(w)$ θα τερματίσει (εφόσον τερματίσει) ή να τρέξουμε την $M(w)$ για κάποιο συγκεκριμένο αριθμό βημάτων t και να ελέγξουμε αν θα τερματίσει σε το πολύ t βήματα. Σε αυτήν την περίπτωση θα αναφέρουμε τον έλεγχο που κάνει η $\boxed{M}$ μέσα στο «κουτάκι» της.

Σύμβαση 1.4.15. Όπως φαίνεται στον Συμβολισμό 1.4.14, χάριν απλότητας θα γράφουμε ότι η είσοδος της $\boxed{M}$ είναι πάντα κωδικοποίηση TM και λέξης. Αν θέλουμε να είμαστε πιο τυπικοί, θα πρέπει πρώτα η $\boxed{M}$ να ελέγξει ότι η είσοδός της έχει αυτήν τη μορφή.

Ορισμός 1.4.16. Έστω αλφάβητο Σ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathsf{np} : \Sigma^* \times \mathbb{N} \to \Sigma^* \times \mathbb{N}$ που επιστρέφει το επόμενο ζευγάρι λέξης και φυσικού αριθμού σύμφωνα με τον πίνακα του Σχήματος 1.4.2.

Παρατήρηση 1.4.17. Η np είναι υπολογίσιμη, έστω από την TM M_{np} (Άσκηση 1.5).

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της $\boxed{M}$ είναι η απόδειξη της κατεύθυνσης ($\Rightarrow$) του Θεωρήματος 1.2.46.

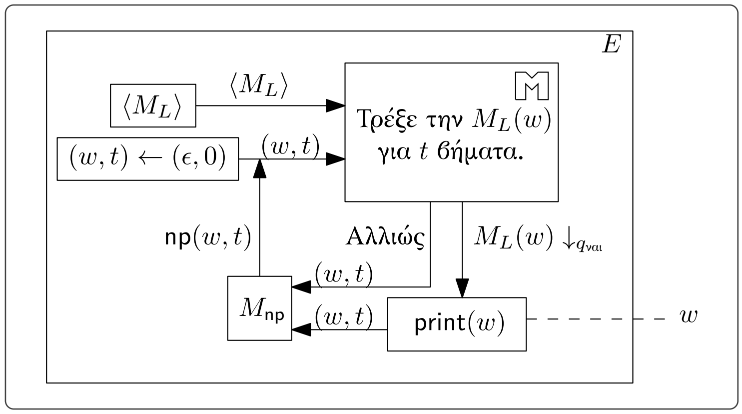
Απόδειξη Θεωρήματος 1.2.46. ($\Rightarrow$) Έστω M_L η TM που ημι-αποφασίζει την L και M_{np} η TM της Παρατήρησης 1.4.17. Κατασκευάζουμε [1] τον απαριθμητή E του Σχήματος 1.4.3 και παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε λέξη $x \in L$ υπάρχει $t_x \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $M_L(x) \downarrow^{t_x}_{q_{\text{ναι}}}$. Το ζευγάρι (w,t) κάποια στιγμή θα γίνει (x,t_x), άρα ο έλεγχος της $\boxed{M}$ θα είναι τελικά επιτυχής για την x και ο E θα την τυπώσει.
- Έστω $x \notin L$. Αφού ο E τυπώνει μόνο λέξεις που αποδέχεται η M_L (και η M_L αναγνωρίζει την L), ο E δεν θα τυπώσει ποτέ την x.

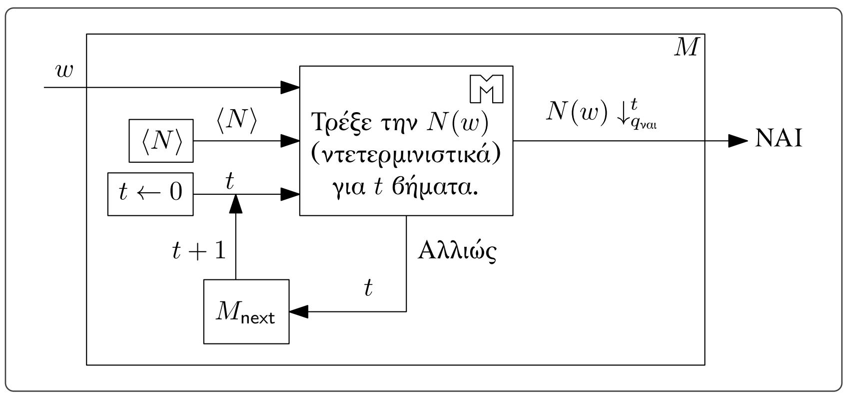
Συνεπώς ο E απαριθμεί την L. $\square$

Μια άλλη εφαρμογή της $\boxed{M}$ είναι η απόδειξη της ισοδυναμίας μη-ντετερμινιστικών και ντετερμινιστικών TM. Παρατηρήστε ότι μπορούμε να κωδικοποιήσουμε μία μη-ντετερμινιστική TM ακολουθώντας ακριβώς τα βήματα που κάναμε για τις ντετερμινιστικές TM.

[1] Ο όρος «κατασκευάζουμε» εδώ είναι ιδιαίτερα παραπλανητικός. Για να κατασκευάσουμε τον E πρέπει πρώτα να έχουμε στα χέρια μας την M_L. Είναι προφανές ότι δοσμένης μιας αναγνωρίσιμης γλώσσας δεν υπάρχει τρόπος να κατασκευάσουμε μία TM που να την ημι-αποφασίζει (ξέρουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία αλλά δεν είναι δυνατό να την κατασκευάσουμε). Ο κυριότερος όγκος των «μαθηματικών» που περιέχουν αυτές οι σημειώσεις είναι μη-κατασκευαστικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μοιάζουν περισσότερο με την *Ανάλυση* και όχι με τα *Διακριτά Μαθηματικά* (όπως θα περίμενε κάποιος σε σημειώσεις που προσπαθούν – υπό μία ερμηνεία – να οριοθετήσουν την υπολογιστική δυνατότητα των Η/Υ).



Σχήμα 1.4.3: *Ο απαριθμητής E που απαριθμεί την L όταν η TM M_L την ημι-αποφασίζει.*



Σχήμα 1.4.4: *Η ντετερμινιστική TM που αποφασίζει την $L(N)$. Εδώ η M_{next} δέχεται ως είσοδο τη δυαδική αναπαράσταση ενός φυσικού αριθμού και επιστρέφει (τη δυαδική αναπαράσταση) του επόμενου φυσικού αριθμού (από εδώ και στο εξής θα γράφουμε πιο απλά: $t \leftarrow t+1$).*

Απόδειξη Θεωρήματος 1.3.14. [1]Έστω NTM $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ναι}, q_{όχι})$. Η TM M του Σχήματος 1.4.4 αναγνωρίζει την $L(N)$. Στην «προσομοίωση» της N με την καθολική μηχανή ελέγχονται όλοι οι κλάδοι μη ντετερμινισμού [2], για ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων (το πολύ t) κάθε φορά. □

1.5 Κλειστότητα REC και RE ως προς συνολοθεωρητικές πράξεις

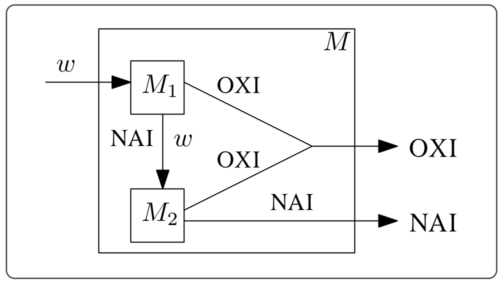
Τα ακόλουθα θεωρήματα βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στις προτάσεις και στις ασκήσεις αυτών των σημειώσεων.

Θεώρημα 1.5.1. Έστω $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$.

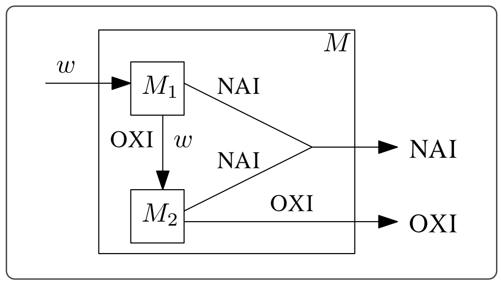
i. Αν $L_1, L_2 \in \mathsf{REC}$ τότε $L_1 \cap L_2 \in \mathsf{REC}$.

[1] Πάλι θα δείξουμε την περίπτωση όπου η NTM ημι-αποφασίζει μία γλώσσα.

[2] Η σειρά με την οποία ελέγχονται οι μη-ντετερμινιστικοί κλάδοι είναι μια λεπτομέρεια που δεν μας απασχολεί ιδιαίτερα. Θα την βάλουμε και αυτή «κάτω από το χαλί» όπως και τόσες άλλες.



Σχήμα 1.5.1: *Η ΤΜ M που αποφασίζει (ημι-αποφασίζει) την $L_1 \cap L_2$.*



Σχήμα 1.5.2: *Η ΤΜ M που αποφασίζει την $L_1 \cup L_2$.*

ii. Αν $L_1, L_2 \in \mathsf{RE}$ τότε $L_1 \cap L_2 \in \mathsf{RE}$.

Απόδειξη. i. - ii. [1] Έστω M_1, M_2 οι ΤΜ που αποφασίζουν (ημι-αποφασίζουν) τις L_1, L_2 αντίστοιχα. Η ΤΜ M του Σχήματος 1.5.1 αποφασίζει (ημι-αποφασίζει) την $L_1 \cap L_2$. □

Θεώρημα 1.5.2. Έστω $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$.

i. Αν $L_1, L_2 \in \mathsf{REC}$ τότε $L_1 \cup L_2 \in \mathsf{REC}$.

ii. Αν $L_1, L_2 \in \mathsf{RE}$ τότε $L_1 \cup L_2 \in \mathsf{RE}$.

Απόδειξη. i. Έστω M_1, M_2 οι ΤΜ που αποφασίζουν τις L_1, L_2 αντίστοιχα. Η ΤΜ M του Σχήματος 1.5.2 αποφασίζει την $L_1 \cup L_2$.

ii. Έστω M_1, M_2 οι ΤΜ που ημι-αποφασίζουν τις L_1, L_2 αντίστοιχα. Η ΤΜ M του Σχήματος 1.5.3 ημι-αποφασίζει την $L_1 \cup L_2$. □

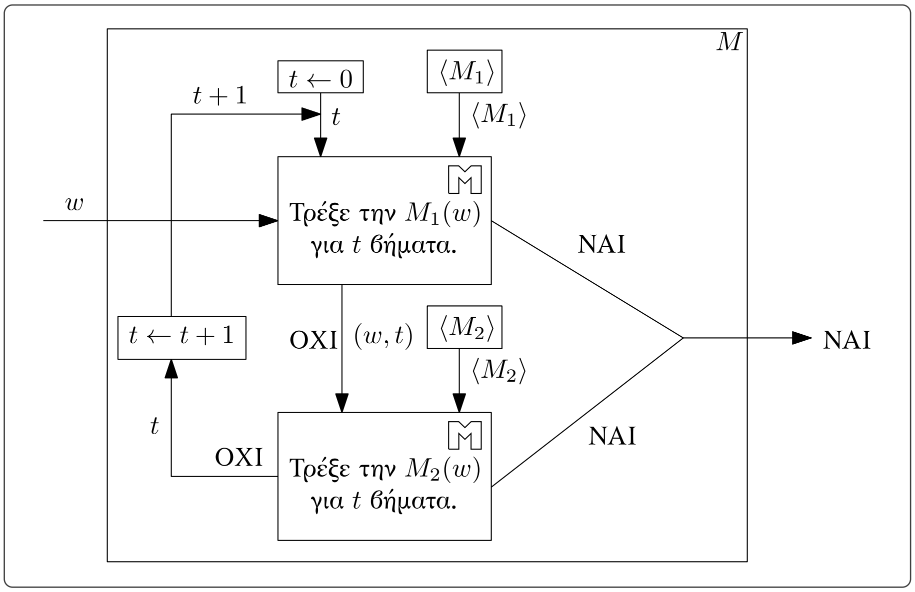
Θεώρημα 1.5.3. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$. $L \in \mathsf{REC}$ ανν $\overline{L} \in \mathsf{REC}$.

Απόδειξη. ($\Leftrightarrow$) Έστω M_L η ΤΜ που αποφασίζει την L. Η ΤΜ $M_{\overline{L}}$ του Σχήματος 1.5.4 αποφασίζει την $\overline{L}$. □

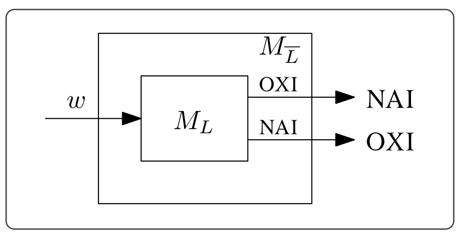
Οι αποδείξεις των ακόλουθων Θεωρημάτων αφήνονται ως άσκηση (Άσκηση 1.6).

Θεώρημα 1.5.4. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$. Αν $L \in \mathsf{RE}$ και $\overline{L} \in \mathsf{RE}$ τότε $L \in \mathsf{REC}$.

[1] Η απόδειξη είναι ίδια και για τους δύο ισχυρισμούς.



Σχήμα 1.5.3: *Η ΤΜ M που ημι-αποφασίζει την $L_1 \cup L_2$.*



Σχήμα 1.5.4: *Η ΤΜ $M_{\overline{L}}$ που αποφασίζει την $\overline{L}$.*

Θεώρημα 1.5.5. Έστω $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$.

i. Αν $L_1, L_2 \in$ REC τότε $L_1L_2 \in$ REC.

ii. Αν $L_1, L_2 \in$ RE τότε $L_1L_2 \in$ RE.

Θεώρημα 1.5.6. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$.

i. Αν $L \in$ REC τότε $L^* \in$ REC.

ii. Αν $L \in$ RE τότε $L^* \in$ RE.

Θεώρημα 1.5.7. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$ και $L^R = \{w \in \Sigma^* \mid w^R \in L\}$.

i. Αν $L \in$ REC τότε $L^R \in$ REC.

ii. Αν $L \in$ RE τότε $L^R \in$ RE.

Θεώρημα 1.5.8. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$ και $L^p = \{w \in L \mid w = w^R\}$.

i. Αν $L \in$ REC τότε $L^p \in$ REC.

ii. Αν $L \in$ RE τότε $L^p \in$ RE.

Ασκήσεις

1.1 (☆☆☆). Αποδείξτε την Πρόταση 1.2.39.

1.2 (★☆☆). Θεωρήστε TM που πέρα από τις κατεύθυνσης αριστερά και δεξιά η κεφαλή μπορεί να μείνει και στάσιμη σε ένα βήμα υπολογισμού. Δείξτε ότι για κάθε TM με αυτή την περιγραφή υπάρχει ισοδύναμη μονοταινιακή TM.

1.3 (★★☆). Θεωρήστε TM που η ταινία τους είναι άπειρη και από τις δύο πλευρές, δεν υπάρχει το μαξιλαράκι και φυσικά δεν υπάρχει ο περιορισμός ότι δεν μπορούμε να κινηθούμε αριστερότερα από αυτό. Δείξτε ότι για κάθε TM με αυτή την περιγραφή υπάρχει ισοδύναμη μονοταινιακή TM.

1.4 (☆☆☆). Αποδείξτε την Πρόταση 1.4.10.

1.5 (☆☆☆). Αποδείξτε την Παρατήρηση 1.4.17.

1.6 (★☆☆). Αποδείξτε τα Θεωρήματα 1.5.4, 1.5.5, 1.5.6, 1.5.7 και 1.5.8.

1.7 (★☆☆). Έστω $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ 1-1, επί, υπολογίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f^{-1} είναι υπολογίσιμη.

1.8 (★☆☆). Έστω $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ υπολογίσιμη συνάρτηση. Κατασκευάστε απαριθμητή που απαριθμεί το σύνολο $\mathsf{dom}(f)$.

1.9 (★☆☆). Έστω $L \in \{0,1\}^*$. Δείξτε ότι $L \in \mathsf{RE}$ αν και μόνο αν $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \exists y \in \{0,1\}^* (\langle x, y\rangle \in B)\}$, όπου $B \in \mathsf{REC}$.

1.10 (★★☆). Δείξτε ότι:

1. Κάθε άπειρη αναδρομική γλώσσα είναι η ξένη ένωση δύο άπειρων αναδρομικών γλωσσών.
2. Κάθε άπειρη αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα είναι η ξένη ένωση δύο άπειρων αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών.

1.11 (★★☆). Έστω $A, B, C \subseteq \{0,1\}^*$. Λέμε ότι η C *διαχωρίζει* τις A και B αν $A \subseteq C$ και $B \subseteq \overline{C}$.

1. Βρείτε $A, B \in \mathsf{RE}$ με $A \cap B = \varnothing$ για τις οποίες δεν υπάρχει $C \in \mathsf{REC}$ που τις διαχωρίζει.
2. Έστω $A, B \subseteq \{0,1\}^*$ με $A \cap B = \varnothing$ και $\overline{A}, \overline{B} \in \mathsf{RE}$. Δείξτε ότι υπάρχει $C \in \mathsf{REC}$ που τις διαχωρίζει.

1.12 (★☆☆). Θεωρήστε τη γλώσσα:

$$L = \{\langle M, w, n\rangle \in \{0,1\}^* \mid n \geq 1 \text{ και κατά τον υπολογισμό } M(w) \text{ η κεφαλή επισκέπτεται}$$
$$\text{τη } n\text{-οστή θέση της ταινίας}\}$$

Δείξτε ότι $L \in \mathsf{REC}$.

1.13 (★★★). Δείξτε ότι αν $A \subseteq \mathcal{G}$ και $A \in \mathsf{RE}$ τότε υπάρχει $B \subseteq \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε:

- αν $\langle M \rangle \in A$ τότε υπάρχει TM M' ισοδύναμη της M με $\langle M' \rangle \in B$ και
- η B είναι αναδρομική γλώσσα.

1.14 (★★★). Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες $L \subseteq \Sigma^*$ τέτοιες ώστε η $\bar{L}$ να είναι άπειρη γλώσσα αλλά κάθε αναδρομικά απαριθμήσιμο υποσύνολο της $\bar{L}$ να είναι πεπερασμένο.

1.15 (★★☆). Θεωρήστε τα σύνολα

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n, \text{ και } M_n(w)\downarrow\}$$
$$R = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n, \text{ και } \mathsf{dom}(\phi_{M_n}) \in \mathsf{REC}\}$$

όπου με M_n συμβολίζουμε την TM με αριθμό Gödel n και με ϕ_{M_n} τη συνάρτηση που υπολογίζει η M_n (δες Ορισμό 1.2.13). Εξετάστε αν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $R \subseteq K$.
2. $R \cap K = \varnothing$.
3. Υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : K \to \overline{K}$.

1.16 (★☆☆). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } x \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n, \text{ και υπάρχει } w \in \{0,1\}^* \text{ τέτοιο} \\ & \quad \text{ώστε } M_n(w)\downarrow \\ \bot & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

όπου M_n είναι η TM με αριθμό Gödel n, είναι υπολογίσιμη.

1.17 (★☆☆). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, αν } x \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n, \text{ και } |L(M_n)| \geq n \\ \bot & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

όπου M_n είναι η TM με αριθμό Gödel n, είναι υπολογίσιμη.

1.18 (★☆☆). Έστω $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ συνάρτηση η οποία είναι υπολογίσιμη και φθίνουσα (ως προς τη λεξικογραφική διάταξη του $\{0,1\}$) στο $\mathsf{dom}(f)$. Δείξτε ότι $\mathsf{im}(f) \in \mathsf{REC}$. Επιπλέον δείξτε ότι για κάθε γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$, ισχύει ότι $f(L) \in \mathsf{REC}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με συναρτήσεις φυσικών αριθμών. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.2.16 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα «αντικείμενα του υπολογισμού» είναι οι λέξεις του $\{0,1\}^*$. Μπορούμε περαιτέρω να αντιστοιχίσουμε κάθε λέξη $w \in \{0,1\}^*$ σε έναν φυσικό αριθμό (για παράδειγμα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη «σειρά» εμφάνισης της w στη λεξικογραφική διάταξη) και έτσι να υποθέσουμε ότι τα «αντικείμενα υπολογισμού» είναι οι φυσικοί αριθμοί, οπότε οι γλώσσες του $2^{\{0,1\}^*}$ θα αποτελούν στην ουσία σύνολα φυσικών αριθμών και οι συναρτήσεις από το $\{0,1\}^*$ στο $\{0,1\}^*$ θα είναι αριθμητικές συναρτήσεις από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$.

Θα κατατάξουμε (μερικές από) τις αριθμητικές συναρτήσεις σύμφωνα με τον «τρόπο που ορίζονται» σε δύο κλάσεις: τις *πρωτογενώς αναδρομικές* συναρτήσεις και τις *ελαχιστικά αναδρομικές* συναρτήσεις. Η δεύτερη και γενικότερη κλάση ταυτίζεται με την κλάση των υπολογίσιμων (κατά Turing) συναρτήσεων. Θα δούμε λοιπόν έναν δεύτερο – και εντελώς ανεξάρτητο από τον πρώτο – ορισμό των υπολογίσιμων συναρτήσεων. Αυτό μας οδηγεί σε μια δεύτερη προσέγγιση της έννοιας του αλγορίθμου: *Ο αλγόριθμος που υπολογίζει μία πρωτογενώς ή ελαχιστικά αναδρομική συνάρτηση είναι ο ίδιος ο ορισμός της!*

Σκοπός μας, πέρα από την παρουσίαση ενός διαφορετικού φορμαλισμού της Θεωρίας Αναδρομής, είναι να καλλιεργήσουμε την προδιάθεση στον αναγνώστη ότι η *Θέση Church-Turing* (σελίδα 98) αποτελεί μία εύλογη παραδοχή. Μόνον εφόσον πεισθούμε ότι η Θέση Church-Turing δίνει μία επαρκή προσέγγιση της έννοιας του Αλγορίθμου, θα μπορέσουμε να προχωρήσουμε στη θεωρία μας και να δώσουμε απάντηση στα ερωτήματα που έχουμε θέσει.

2.1 Πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις

Ορισμός 2.1.1. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$ είναι *πρωτογενώς αναδρομική* ανν είναι μία εκ των

(a) $\mathsf{s}(x) = x + 1$ (η *συνάρτηση του επόμενου*) [1]

(b) $\mathsf{z}^m(x_1, \ldots, x_m) = 0$ (η *σταθερή συνάρτηση ίση με μηδέν* m μεταβλητών)

(c) $\mathsf{p}_i^m(x_1, \ldots, x_m) = x_i$, όπου $i \in [m]$ (η *προβολή στην* i*-οστή μεταβλητή*) [2]

[1] Φυσικά $f = \mathsf{s}$ μόνο αν $m = 1$.

[2] Τα (b) και (c) (μαζί με ένα πεπερασμένο πλήθος «εφαρμογών» του (a), δες Παράδειγμα 2.1.2) αντιστοιχούν στις *εντολές ανάθεσης* μίας γλώσσας προγραμματισμού.

ή προκύπτει από τις πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις

(1) $\mathsf{g} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ και $\mathsf{h}_i : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $i \in [n]$ ως εξής:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \mathsf{g}(\mathsf{h}_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \mathsf{h}_n(x_1, \ldots, x_m)) \quad \textit{(σύνδεση της } \mathsf{g} \textit{ με τις } \mathsf{h}_i,\ i \in [n])$$

(2) $\mathsf{g} : \mathbb{N}^{m-1} \to \mathbb{N}$ και $\mathsf{h} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ όντας λύση των εξισώσεων [1]:

$$\begin{cases} f(0, x_1, \ldots, x_{m-1}) = \mathsf{g}(x_1, \ldots, x_{m-1}) \\ f(y+1, x_1, \ldots, x_{m-1}) = \mathsf{h}(f(y, x_1, \ldots, x_{m-1}), y, x_1, \ldots, x_{m-1}) \end{cases} \quad \textit{(πρωτογενής αναδρομή)}$$ [2]

Ο Ορισμός 2.1.1 θα γίνει περισσότερο κατανοητός μέσα από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 2.1.2. Οι σταθερές συναρτήσεις $\mathsf{c}_q^m : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{c}_q^m(x_1, \ldots, x_m) = q$, όπου $q \in \mathbb{N}$, είναι πρωτογενώς αναδρομικές καθώς:

$$\mathsf{c}_q^m(x_1, \ldots, x_m) = \underbrace{\mathsf{s}(\mathsf{s}(\cdots\mathsf{s}}_{q\text{-φορές}}(\mathsf{z}^m(x_1, \ldots, x_m))\cdots))$$

Παράδειγμα 2.1.3. Οι συναρτήσεις $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{h}(x, y, z) = x+1$, και $\mathsf{plus} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{plus}(x, y) = x + y$, είναι πρωτογενώς αναδρομικές καθώς:

$$\mathsf{h}(x, y, z) = \mathsf{s}(\mathsf{p}_1^3(x, y, z))$$

και η plus αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0, y) = \mathsf{p}_1^1(y) & [= y\ ] \\ f(x+1, y) = \mathsf{h}(f(x, y), x, y) & [= f(x, y) + 1\ ] \end{cases}$$

Για να το δείξουμε αυτό θα δείξουμε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ ισχύει ότι $f(x, y) = \mathsf{plus}(x, y)$ κάνοντας επαγωγή ως προς την πρώτη μεταβλητή [3]. Παρατηρούμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{N}$:

Επαγωγική Βάση: Για $x = 0$ ισχύει ότι $f(0, y) = \mathsf{p}_1^1(y) = y = \mathsf{plus}(0, y)$.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι $f(x, y) = \mathsf{plus}(x, y)$.

Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξουμε ότι $f(x+1, y) = \mathsf{plus}(x+1, y)$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x+1, y) &= \mathsf{h}(f(x, y), x, y) \\ &= f(x, y) + 1 \\ &= \mathsf{plus}(x, y) + 1 \quad \text{(Λόγω της Επαγωγικής Υπόθεσης)} \\ &= x + y + 1 \\ &= \mathsf{plus}(x+1, y) \end{aligned}$$

[1] Προφανώς ο ορισμός αυτός ισχύει μόνο για $m > 1$. Για $m = 1$ δες την Πρόταση 2.1.7.

[2] Η πρωτογενής αναδρομή αντιστοιχεί στο *for-loop* μίας γλώσσας προγραμματισμού.

[3] Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα αποφύγουμε τις αποδείξεις με επαγωγή καθώς, όπως θα δείτε, δεν παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον.

Παράδειγμα 2.1.4. Η συνάρτηση $\mathsf{mult} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{mult}(x, y) = x \cdot y$, είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0, y) = \mathsf{z}^1(y) & [\, = 0\,] \\ f(x+1, y) = \mathsf{plus}(\mathsf{p}_1^3(f(x,y), x, y), \mathsf{p}_3^3(f(x,y), x, y)) & [\, = f(x,y) + y\,] \end{cases}$$

όπου plus η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.3.

Θα αποδείξουμε μερικές προτάσεις που θα μας διευκολύνουν στον ορισμό πρωτογενών αναδρομικών συναρτήσεων.

Πρόταση 2.1.5. Έστω πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις $\mathsf{g} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $n \geq 1$, και $\mathsf{h}_i : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$, όπου $i \in [n-1]$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, με $f(x_1, \ldots, x_m) = \mathsf{g}(\mathsf{h}_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \mathsf{h}_{n-1}(x_1, \ldots, x_m), y)$, όπου $y \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Απόδειξη. Έστω $y = x_i$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \mathsf{g}(\mathsf{h}_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \mathsf{h}_{n-1}(x_1, \ldots, x_m), \mathsf{p}_i^m(x_1, \ldots, x_m))$$

Άρα η f είναι πρωτογενώς αναδρομική. □

Η Πρόταση 2.1.5 μπορεί να γενικευτεί άμεσα δίνοντάς μας το δικαίωμα να ορίζουμε πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις εφαρμόζοντας σύνθεση μόνο σε μερικές από τις μεταβλητές.

Πρόταση 2.1.6. Έστω πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $\mathsf{g} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$, με $f(x_1, \ldots, x_m) = \mathsf{g}(y_1, \ldots, y_n)$ όπου $y_i \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, $i \in [n]$, είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Απόδειξη. Έστω $y_j = x_{i_j}$, $j \in [n]$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \mathsf{g}(\mathsf{p}_{i_1}^m(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \mathsf{p}_{i_n}^m(x_1, \ldots, x_m))$$

Άρα η f είναι πρωτογενώς αναδρομική. □

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.6 μπορούμε να αντιμεταθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να επαναλάβουμε μεταβλητές όταν κατασκευάζουμε πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, στο Παράδειγμα 2.1.3 ορίσαμε τη συνάρτηση $\mathsf{h} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ που ταυτίζεται με τη συνάρτηση του επομένου στην πρώτη μεταβλητή, θα μπορούσαμε χάριν συντομίας να γράψουμε $\mathsf{h}(x, y, z) = \mathsf{s}(x)$.

Πρόταση 2.1.7. Έστω $\mathsf{h} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση και $q \in \mathbb{N}$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0) = q \\ f(y+1) = \mathsf{h}(f(y), y) \end{cases} \quad (\textit{πρωτογενής αναδρομή χωρίς παραμέτρους})$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ που αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} g(0, x) = \mathsf{c}_q^1(x) & [\, = q\,] \\ g(y+1, x) = \mathsf{p}_1^3(\mathsf{h}(g(y,x), y), y, x) & [\, = \mathsf{h}(g(y,x), y)\,] \end{cases}$$

όπου c_q^1 η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.2, είναι πρωτογενώς αναδρομική. Παρατηρούμε ότι $f(y) = g(y, y)$ [1], οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.6, η f είναι πρωτογενώς αναδρομική. □

[1] Αν θέλουμε να το δείξουμε αυτό με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι $f(y) = g(y, x)$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, άρα και για $x = y$.

Η Πρόταση 2.1.7 συμπληρώνει τον ορισμό της πρωτογενής αναδρομής και μας δίνει το δικαίωμα να την εφαρμόζουμε για να ορίζουμε ακόμα και συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Παράδειγμα 2.1.8. Η συνάρτηση $\mathsf{fact} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{fact}(x) = x!$, είναι πρωτογενώς αναδρομική, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.7, καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x+1) = \mathsf{mult}(f(x), \mathsf{s}(x)) \qquad [\, = f(x) \cdot (x+1) \,] \end{cases}$$

όπου mult η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.4.

Παράδειγμα 2.1.9. Η συνάρτηση $\mathsf{pd} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{pd}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } x = 0 \\ x - 1 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$, είναι πρωτογενώς αναδρομική, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.7, καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+1) = \mathsf{p}_2^2(f(x), x) \qquad [\, = x \,] \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.1.10. Η συνάρτηση $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\dot{-}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } x < y \\ x - y & , \text{αλλιώς} \end{cases}$, είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(x, 0) = \mathsf{p}_1^1(x) \qquad [\, = x \,] \\ f(x, y+1) = \mathsf{pd}(\mathsf{p}_1^3(f(x, y), x, y)) \qquad [\, = f(x, y) - 1 \,] \end{cases}$$

όπου pd η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.9 [1]. Για λόγους «αισθητικής» θα γράφουμε $x \dot{-} y$ αντί για $\dot{-}(x, y)$.

Παράδειγμα 2.1.11. Η συνάρτηση $\mathsf{min} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{min}(x, y) = \min\{x, y\}$, είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς:

$$\mathsf{min}(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$$

όπου $\dot{-}$ η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.10.

Παράδειγμα 2.1.12. Η συνάρτηση $\mathsf{max} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{max}(x, y) = \max\{x, y\}$, είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς:

$$\mathsf{max}(x, y) = \mathsf{plus}(x, y) \dot{-} \mathsf{min}(x, y)$$

όπου plus, $\dot{-}$ και min οι συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 2.1.3, 2.1.10 και 2.1.11.

Παρατήρηση 2.1.13. Οι συναρτήσεις min και max γενικεύονται άμεσα σε συναρτήσεις m μεταβλητών, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ (δες Άσκηση 2.2).

[1] Εδώ κάναμε την πρώτη μας «παρατυπία» για αυτό το κεφάλαιο: Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.1 η πρωτογενής αναδρομή γίνεται στην πρώτη μεταβλητή ενώ εδώ την εφαρμόσαμε στη δεύτερη. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί λόγω της Πρότασης 2.1.6, ορίζοντας την $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ που αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0, y) = \mathsf{p}_1^1(y) \\ f(x+1, y) = \mathsf{pd}(\mathsf{p}_1^3(f(x, y), x, y)) \end{cases}$$

και έπειτα ορίζοντας $\dot{-}(x, y) = f(y, x)$.

Παράδειγμα 2.1.14. Η συνάρτηση $\mathsf{exp} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{exp}(x, y) = x^y$, είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(x,0) = \mathsf{c}_1^1(x) & [=1] \\ f(x,y+1) = \mathsf{mult}(f(x,y),x)\ ^1 & [= f(x,y)\cdot x] \end{cases}$$

όπου c_1^1 και mult οι συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 2.1.2 και 2.1.4.

Μπορούμε να μεταφέρουμε τον Ορισμό 2.1.1 και σε υποσύνολα του $\mathbb{N}^m$, για $m \geq 1$, ορίζοντας έτσι *πρωτογενώς αναδρομικές σχέσεις* φυσικών αριθμών.

Ορισμός 2.1.15. Μία σχέση $P \subseteq \mathbb{N}^m$, $m \geq 1$, είναι *πρωτογενώς αναδρομική* ανν η χαρακτηριστική της συνάρτηση $\chi_P : \mathbb{N}^m \to \{0, 1\}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Παράδειγμα 2.1.16. Η σχέση $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = y\}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι πρωτογενώς αναδρομική [2]:

$$\chi_=(x,y) = \mathsf{c}_1^2(x,y) \dot{-} \mathsf{plus}(x \dot{-} y, y \dot{-} x)$$

όπου c_1^2, plus και $\dot{-}$ οι συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 2.1.2, 2.1.3 και 2.1.10.

Παρατηρήστε ότι και η σχέση $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \neq y\}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι η:

$$\chi_{\neq}(x,y) = \mathsf{c}_1^2(x,y) \dot{-} \chi_=(x,y)$$

Παράδειγμα 2.1.17. Η σχέση $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι πρωτογενώς αναδρομική:

$$\chi_{\leq}(x,y) = \mathsf{c}_1^2(x,y) \dot{-} (x \dot{-} y)$$

όπου c_1^2 και $\dot{-}$ οι συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 2.1.2 και 2.1.10.

Παράδειγμα 2.1.18. Η σχέση $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι πρωτογενώς αναδρομική:

$$\chi_<(x,y) = \chi_{\leq}(\mathsf{s}(x), y)$$

όπου η $\chi_{\leq}$ ορίζεται στο Παράδειγμα 2.1.17.

Σύμβαση 2.1.19. Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τους φυσικούς αριθμούς και τα σύμβολα $+, \cdot$ αντί για τις πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις που τα ορίζουν. Επίσης, θα γράφουμε την ύψωση σε δύναμη κατά τον συνήθη τρόπο και όχι χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση exp του Παραδείγματος 2.1.14.

Πρόταση 2.1.20. Έστω ξένες ανά δύο πρωτογενώς αναδρομικές σχέσεις $\mathsf{P}_i \subseteq \mathbb{N}^m$, $i \in [n]$, και πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις $\mathsf{g}_j : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $j \in [n+1]$, όπου $n, m \geq 1$. Η $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ με:

$$f(x_1,\dots,x_m) = \begin{cases} \mathsf{g}_1(x_1,\dots,x_m) & ,\ \text{αν } (x_1,\dots,x_m) \in \mathsf{P}_1 \\ \mathsf{g}_2(x_1,\dots,x_m) & ,\ \text{αν } (x_1,\dots,x_m) \in \mathsf{P}_2 \\ \quad\vdots & \\ \mathsf{g}_n(x_1,\dots,x_m) & ,\ \text{αν } (x_1,\dots,x_m) \in \mathsf{P}_n \\ \mathsf{g}_{n+1}(x_1,\dots,x_m) & ,\ \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική [3].

[1] Η Πρόταση 2.1.6 μας δίνει το δικαίωμα να το γράψουμε σε αυτήν την μορφή.Τυπικά θα έπρεπε να γράψουμε: $f(x, y+1) = \mathsf{mult}(\mathsf{p}_1^3(f(x,y),x,y), \mathsf{p}_2^3(f(x,y),x,y))$.

[2] Εδώ κάνουμε τη δεύτερη παρατυπία (μπορείτε να την εντοπίσετε;). Πολλές ακόμα έπονται.

[3] Η συνάρτηση f αντιστοιχεί στο *if-then-else* μίας γλώσσας προγραμματισμού.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση για $n = 1$ [1]. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \chi_{\mathsf{P}_1}(x_1,\ldots,x_m)\cdot \mathsf{g}_1(x_1,\ldots,x_m) + (1 \dot{-} \chi_{\mathsf{P}_1}(x_1,\ldots,x_m))\cdot \mathsf{g}_2(x_1,\ldots,x_m),$$

από τα Παραδείγματα 2.1.3 και 2.1.4 η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις και τέλος το 1 ορίζεται ως $\mathsf{c}_1^m(x_1,\ldots,x_m)$ (δες Παράδειγμα 2.1.2). □

Οι αποδείξεις των παρακάτω προτάσεων αφήνονται ως άσκηση (Άσκηση 2.4).

Πρόταση 2.1.21. Έστω πρωτογενώς αναδρομικές σχέσεις $\mathsf{P},\mathsf{Q} \subseteq \mathbb{N}^m$. Οι σχέσεις $\overline{\mathsf{P}}$, $\mathsf{P}\cup\mathsf{Q}$, $\mathsf{P}\cap\mathsf{Q}$ και $\mathsf{P}\setminus\mathsf{Q}$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

Πρόταση 2.1.22. Έστω πρωτογενώς αναδρομική σχέση $\mathsf{P}\subseteq\mathbb{N}^m$ και πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις $\mathsf{f}_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $i \in [m]$. Η σχέση:

$$Q = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{N}^n \mid (\mathsf{f}_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\mathsf{f}_\mathsf{m}(x_1,\ldots,x_n))\in\mathsf{P}\}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Παράδειγμα 2.1.23. Η συνάρτηση $\mathsf{rm} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{rm}(x,y) = \begin{cases} x \bmod y & ,\ \text{αν } y \neq 0 \\ x+1 & ,\ \text{αν } y = 0 \end{cases}$, (το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το y [2]) είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0,y) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{αν } y \neq 0 \\ 1 & ,\ \text{αλλιώς } (y=0) \end{cases} \\ f(x+1,y) = \begin{cases} x+2 & ,\ \text{αν } y = 0 \\ 0 & ,\ \text{αν } f(x,y)+1 = y \\ f(x,y)+1 & ,\ \text{αλλιώς} \end{cases} \end{cases}$$

και οι σχέσεις $=$ και $\neq$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές (δες Παράδειγμα 2.1.16).

Σημείωση 2.1.24. Αρχής γενομένης από το προηγούμενο παράδειγμα θα υιοθετήσουμε έναν ακόμα πιο χαλαρό τρόπο ορισμού των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων και σχέσεων.

Παράδειγμα 2.1.25. Η σχέση $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x \mid y\}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι πρωτογενώς αναδρομική :

$$\chi_{|}(x,y) = 1 \dot{-} \mathsf{rm}(y,x)$$

όπου $\dot{-}$ και rm οι συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 2.1.10 και 2.1.23.

[1] Η γενική περίπτωση αφήνεται ως άσκηση (Άσκηση 2.4).

[2] Θα αναρωτιέστε γιατί δώσαμε τιμή ακόμα και όταν έχουμε διαίρεση με το μηδέν. Ο λόγος είναι ότι σε αντίθετη περίπτωση θα ορίζαμε μερική συνάρτηση και θέλουμε οι πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις να είναι ολικές (δες Άσκηση 2.1). Επιπλέον, η σύμβαση αυτή μας δίνει το δικαίωμα να κάνουμε τον έλεγχο αν έχουμε διαίρεση με το μηδέν. Θέλουμε να κρατήσουμε τη μη ύπαρξη τιμής για κάποιο όρισμα της συνάρτησης για κάτι πιο ουσιαστικό: *Θέλουμε να σηματοδοτεί τον μη τερματισμό κατά τον υπολογισμού της.*

Παράδειγμα 2.1.26. Η συνάρτηση $\mathsf{qt} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{qt}(x,y) = \begin{cases} \frac{x - x \bmod y}{y} & \text{, αν } y \neq 0 \\ x+1 & \text{, αν } y = 0 \end{cases}$$

(το πηλίκο της διαίρεσης του x με το y) είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0,y) = \begin{cases} 0 & \text{, αν } y \neq 0 \\ 1 & \text{, αλλιώς } (y=0) \end{cases} \\ f(x+1,y) = \begin{cases} x+2 & \text{, αν } y = 0 \\ f(x,y)+1 & \text{, αν } \mathsf{rm}(x,y)+1 = y \\ f(x,y) & \text{, αλλιώς} \end{cases} \end{cases}$$

όπου rm η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.23.

Παράδειγμα 2.1.27. Η συνάρτηση $\mathsf{dn} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{dn}(x,y) = |\{d \in \mathbb{N} \mid (d \mid x) \wedge (d \leq y)\}|$ (το πλήθος των διαιρετών του x που είναι μικρότεροι του y) είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(x,0) = 0 \\ f(x,y+1) = f(x,y) + \chi_{\mid}(y+1,x) \end{cases}$$

όπου η $\chi_{\mid}$ ορίζεται στο Παράδειγμα 2.1.25.

Όλες οι συναρτήσεις και σχέσεις που ορίσθηκαν σε αυτήν την παράγραφο ήταν απαραίτητες για να φτάσουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Παράδειγμα 2.1.28. Η σχέση $\mathsf{Prime} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ πρώτος αριθμός}\}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι πρωτογενώς αναδρομική:

$$\chi_{\mathsf{Prime}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } \mathsf{dn}(x,x) = 2 \\ 0 & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

όπου dn η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.27.

2.2 Φραγμένη ελαχιστοποίηση

Ορισμός 2.2.1. Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$ και $y \in \mathbb{N}$. Ο *τελεστής φραγμένης ελαχιστοποίησης της g* [1] ορίζεται ως εξής:

$$(\mu\, i \leq y)[g(i,x_1,\ldots,x_m) = 0] = \begin{cases} \min\{i \leq y \mid g(i,x_1,\ldots,x_m) = 0\} & \text{, αν υπάρχει }^{2} \\ y+1 & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

[1] Η φραγμένη ελαχιστοποίηση αντιστοιχεί στο *φραγμένο while* μίας γλώσσας προγραμματισμού.

[2] Αργότερα θα μας απασχολήσουν και μερικές συναρτήσεις. Τυπικά θα πρέπει να προσέξουμε τις τιμές που επιστρέφει η φραγμένη ελαχιστοποίηση όταν εφαρμοστεί σε μερική συνάρτηση g. Αν για κάποιο $0 \leq j \leq y$ ισχύει ότι $g(j,x_1,\ldots,x_m) = \perp$ και για κάθε i με $0 \leq i < j$ ισχύει ότι $g(i,x_1,\ldots,x_m) \neq 0$, ακόμα και αν υπάρχει k με $j < k \leq y$ για το οποίο $g(k,x_1,\ldots,x_m) = 0$, έχουμε ότι $(\mu\, i \leq y)[g(i,x_1,\ldots,x_m) = 0] = \perp$!

Πρόταση 2.2.2. Έστω $\mathsf{g} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$, πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ με:

$$f(y, x_1, \ldots, x_m) = (\mu\ i \leq y)[\mathsf{g}(i, x_1, \ldots, x_m) = 0]$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Απόδειξη. [1] Έστω $\mathsf{h}(j, x_1, \ldots, x_m) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} \mathsf{g}(j, x_1, \ldots, x_m))$, όπου $\dot{-}$ η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.10. Παρατηρήστε ότι

$$\mathsf{h}(j, x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \mathsf{g}(j, x_1, \ldots, x_m) \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } \mathsf{g}(j, x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{cases}$$

Ορίζουμε:

$$\mathsf{s}(i, x_1, \ldots, x_m) = \mathsf{prod}_{\mathsf{h}}(i, x_1, \ldots, x_m) \qquad [\textstyle\prod_{j=0}^{i}\ \mathsf{h}(j, x_1, \ldots, x_m)\ ]$$

και

$$f(y, x_1, \ldots, x_m) = \mathsf{sum}_{\mathsf{s}}(y, x_1, \ldots, x_m) \qquad [\textstyle\sum_{i=0}^{y}\ \mathsf{s}(i, x_1, \ldots, x_m)\ ]$$

Παρατηρήστε ότι αν υπάρχει $i \leq y$ τέτοιο ώστε $g(i, x_1, \ldots, x_m) = 0$, οι τιμές του $\mathsf{prod}_{\mathsf{h}}(j, x_1, \ldots, x_m)$ για κάθε $i \leq j \leq y$ θα είναι 0, οπότε το $\mathsf{sum}_{\mathsf{s}}(y, x_1, \ldots, x_m)$ θα ισούται με i [2]. □

Αντίστοιχα μπορούμε να αποδείξουμε και την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.3. Έστω $\mathsf{h} : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ και $\mathsf{g} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$, πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ με:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (\mu\ i \leq \mathsf{h}(x_1, \ldots, x_m))[\mathsf{g}(i, x_1, \ldots, x_m) = 0]$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Οι Προτάσεις 2.2.2 και 2.2.3 αποδεικνύουν ότι η φραγμένη ελαχιστοποίηση δεν «διευρύνει» την κλάση των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων. Παρ' όλα αυτά ο τελεστής της φραγμένης ελαχιστοποίησης μας είναι πολύ χρήσιμος. Ας δούμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του.

Παράδειγμα 2.2.4. Η συνάρτηση $\mathsf{pn} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ όπου ο $\mathsf{pn}(x)$ είναι ο x-οστός πρώτος αριθμός, δηλαδή:

$$\mathsf{pn}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } x = 0 \\ \min\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ πρώτος και υπάρχουν } \geq x \text{ πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του}\} & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

μπορεί να οριστεί ως λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x+1) = \begin{cases} 2 & , \text{ αν } x = 0 \\ (\mu\ i \leq \mathsf{fact}(f(x)) + 1)[\mathsf{g}(i, f(x)) = 0] & , \text{ αλλιώς} \end{cases} \end{cases}$$

[1] Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι συναρτήσεις:

$$\mathsf{sum}_{\mathsf{g}}(y, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{y} \mathsf{g}(i, x_1, \ldots, x_m)$$

$$\mathsf{prod}_{\mathsf{g}}(y, x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i=0}^{y} \mathsf{g}(i, x_1, \ldots, x_m)$$

όπου $\mathsf{g} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ και $\mathsf{h} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις, είναι πρωτογενώς αναδρομικές (δες Άσκηση 2.3).

[2] Ενώ αν για κάθε $i \in [y]$ έχουμε $g(i, x_1, \ldots, x_m) \neq 0$, τότε $\mathsf{sum}_{\mathsf{s}}(y, x_1, \ldots, x_m) = y + 1$.

όπου $\mathsf{g}(i,x) = 1 \dot{-} \chi_{\mathsf{P}}(i,x)$, $\mathsf{P} = \{(i,x) \in \mathbb{N}^2 \mid x < i$ και $i \in \mathsf{Prime}\}$ και fact η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.8. Για να αποδείξουμε ότι η pn είναι πρωτογενώς αναδρομική πρέπει να δείξουμε ότι:

α) Η g είναι πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση.

και για να αποδείξουμε ότι όντως επιστρέφει τον x-οστός πρώτο ότι:

β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πρώτος αριθμός p τέτοιος ώστε $n < p \leq n! + 1$ [1].

Για το α) παρατηρήστε ότι $\chi_{\mathsf{P}}(i,x) = \chi_{<}(x,i) + \chi_{\mathsf{Prime}}(i) \dot{-} 1$, όπου οι $\chi_{<}$ και χ_{Prime} ορίζονται στα Παραδείγματα 2.1.18 και 2.1.28, άρα τόσο η χ_{P} όσο και η g είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

Για το β) υποθέτουμε ότι ο $n! + 1$ δεν είναι πρώτος, τότε θα υπάρχει πρώτος αριθμός $p < n! + 1$ τέτοιος ώστε $p \mid n! + 1$. Ο p δεν μπορεί να διαιρεί το $n!$ γιατί τότε θα έπρεπε να διαιρεί το 1, άρα ο p δεν διαιρεί κανέναν από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$. Συνεπώς ο p είναι ο ζητούμενος πρώτος αριθμός καθώς $n < p \leq n! + 1$.

Σύμβαση 2.2.5. Έστω σχέση $P \subseteq \mathbb{N}^{m+1}$, $m \geq 1$ και $y \in \mathbb{N}$. Είναι βολικό πολλές φορές (όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο) να χρησιμοποιούμε τον τελεστή φραγμένης ελαχιστοποίησης ως εξής:

$$(\mu\ i \leq y)[(i, x_1, \ldots, x_m) \in P] = \begin{cases} \min\{i \leq y \mid (i, x_1, \ldots, x_m) \in P\} & ,\ \text{αν υπάρχει} \\ y + 1 & ,\ \text{αλλιώς} \end{cases}$$

καθώς ελαφρύνει λίγο τον συμβολισμό [2].

2.3 Πλήρης πρωτογενής αναδρομή

Προτού ορίσουμε την *πλήρη πρωτογενή αναδρομή*, σύμφωνα με την οποία ορίζουμε αναδρομικά μία συνάρτηση χρησιμοποιώντας όλες τις ήδη υπολογισμένες τιμές της, θα χρειαστεί να κωδικοποιήσουμε ακολουθίες φυσικών αριθμών. Όπως αποδεικνύει η Πρόταση 2.3.5 ούτε η πλήρης πρωτογενής αναδρομή επεκτείνει την κλάση των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων.

Κωδικοποίηση ακολουθιών φυσικών αριθμών

Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε μονοσήμαντα μία ακολουθία φυσικών αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ως το γινόμενο των n-πρώτων πρώτων αριθμών, όπου ο i-οστός πρώτος έχει υψωθεί στη (x_i+1)-οστή δύναμη [3]. Για παράδειγμα κωδικοποιούμε την ακολουθία 0,1,2,3 στον αριθμό $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4 = 5402250$ [4].

Αν κάποιος μας δώσει έναν φυσικό αριθμό n που αποτελεί κωδικοποίηση κάποιας ακολουθίας μπορούμε εύκολα να βρούμε τον i-οστό όρο της βρίσκοντας τη μέγιστη δύναμη του i-οστού πρώτου αριθμού που διαιρεί τον n και αφαιρώντας ένα από αυτή. Στο παράδειγμα που δώσαμε παραπάνω, αναζητώντας τον τρίτο όρο της ακολουθίας παρατηρούμε ότι οι $5, 5^2, 5^3$ διαιρούν τον 5402250 ενώ ο 5^4 όχι. Συνεπώς ο ζητούμενος όρος ισούται με $3 - 1 = 2$. Ας κάνουμε αυτήν την περιγραφή τυπικό ορισμό.

[1] Παρατηρήστε ότι αν αντικαταστήσω το n με $\mathsf{pn}(x)$, από τον ισχυρισμό έπεται ότι υπάρχει πρώτος αριθμός στο διάστημα $(\mathsf{pn}(x), \mathsf{pn}(x)! + 1]$.

[2] Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1 τυπικά θα έπρεπε να γράψουμε $(\mu\ i \leq y)[1 \dot{-} \chi_P(i, x_1, \ldots, x_m) = 0]$.

[3] Το $+1$ χρειάζεται γιατί μπορεί κάποιος από τους όρους της ακολουθίας να είναι 0.

[4] Προφανώς η κωδικοποίηση αυτή δεν είναι καθόλου αποδοτική όσον αφορά τον χρόνο που χρειαζόμαστε να κωδικοποιήσουμε και να αποκωδικοποιήσουμε μία ακολουθία.

Ορισμός 2.3.1. Ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τις συναρτήσεις $\mathsf{enc}_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\mathsf{enc}_0 = 1 \text{ [1]} \\ &\mathsf{enc}_n(x_1, \dots, x_n) = 2^{x_1+1} \cdot 3^{x_2+1} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n+1}, \quad \text{για } n \geq 1 \end{aligned}$$

όπου p_n ο n-οστος πρώτος αριθμός. Ορίζουμε επίσης τη σχέση:

$$\mathsf{seq} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1 \text{ ή υπάρχουν } n, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq 1 \text{ τέτοια ώστε } x = \mathsf{enc}_n(x_1, \dots, x_n)\}$$

και τη συνάρτηση $\mathsf{dec} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{dec}(i, x) = \begin{cases} x_i & , \text{ αν } x \in \mathsf{seq}, \text{ με } x = \mathsf{enc}_n(x_1, \dots, x_n) \text{ και } i \in [n] \\ x + 1 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Πρόταση 2.3.2. Οι συναρτήσεις enc_n, dec και η σχέση seq είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

Απόδειξη. Ορίζουμε:

$$\begin{aligned} &\mathsf{enc}_0 = 1 \\ &\mathsf{enc}_n(x_1, \dots, x_n) = \mathsf{pn}(1)^{x_1+1} \cdot \dots \cdot \mathsf{pn}(n)^{x_n+1} \end{aligned}$$

όπου pn η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.2.4.

Παρατηρήστε ότι ένας φυσικός αριθμός (μεγαλύτερος της μονάδας) αποτελεί κωδικοποίηση ακολουθίας n φυσικών αριθμών αν είναι το γινόμενο δυνάμεων των n-πρώτων πρώτων αριθμών. Με άλλα λόγια, θα πρέπει οι n-πρώτοι αριθμοί να τον διαιρούν (και μόνο αυτοί). Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της seq ως εξής:

$$\chi_{\mathsf{seq}}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } x = 1 \\ 1 \dot{-} ((x+1) \dot{-} (\mu\, j \leq x)[(j > (\mu\, i \leq x)[\mathsf{pn}(i) \nmid x]) \wedge \mathsf{pn}(j) \mid x]) & , \text{ αλλιώς [2]} \end{cases}$$

όπου γράφουμε $\mathsf{pn}(i) \nmid x$ αντί για $(\mathsf{pn}(i), x) \in \overline{\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \mid y\}}$ [3].

Τέλος ορίζουμε:

$$\mathsf{dec}(i, x) = \begin{cases} (\mu\, j \leq x)[\mathsf{pn}(i)^{j+1} \nmid x] \dot{-} 1 & , \text{ αν } x \in \mathsf{seq} \text{ και } \mathsf{pn}(i) \mid x \\ x + 1 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

□

Σύμβαση 2.3.3. Για να ελαφρύνουμε λίγο τον συμβολισμό θα γράφουμε $\langle\ \rangle$ αντί για enc_0 και $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ αντί για $\mathsf{enc}_n(x_1, \dots, x_n)$ [4].

[1] Στην περίπτωση αυτή έχουμε την *κενή ακολουθία φυσικών αριθμών.*

[2] Λίγη βοήθεια ενδεχομένως να χρειάζεται εδώ... Για να πάρει η $\chi_{\mathsf{seq}}(x)$ τιμή 1 θα πρέπει ($x = 1$ ή) η ελαχιστοποίηση να πάρει τιμή $x + 1$. Έστω $\mathsf{pn}(i)$ ο πρώτος πρώτος αριθμός που δεν διαιρεί τον x. Παρατηρήστε ότι αν δεν υπάρχει άλλος πρώτος μεγαλύτερος του $\mathsf{pn}(i)$ που να διαιρεί τον x (δηλαδή ο x διαιρείται από όλους τους πρώτους πριν από τον i-οστό, και μόνο από αυτούς) τότε η ελαχιστοποίηση (θα «αποτύχει» και) θα επιστρέψει $x + 1$.

[3] Χρησιμοποιούμε επίσης την Παρατήρηση 2.2.5.

[4] Για να δούμε ποια απ' όλες τις συναρτήσεις κωδικοποίησης enc_n χρησιμοποιούμε κάθε φορά αρκεί να μετρήσουμε το πλήθος των όρων μέσα στις αγκύλες.

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται ως άσκηση (Άσκηση 2.8).

Πρόταση 2.3.4. Οι συναρτήσεις $\mathsf{length} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathsf{add} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ και $\mathsf{remove} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{length}(x) = \begin{cases} n & \text{, αν } x \in \mathsf{seq} \text{ με } x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \\ x+1 & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

$$\mathsf{add}(x,y) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_n, y \rangle & \text{, αν } x \in \mathsf{seq} \text{ με } x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \\ 0 & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$\mathsf{remove}(x) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle & \text{, αν } x \in \mathsf{seq} \text{ με } x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \text{ και } n \geq 2 \\ 1 & \text{, αν } x \in \mathsf{seq} \text{ με } x = \langle x_1 \rangle \\ 0 & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

Πρόταση 2.3.5 (Πλήρης πρωτογενής αναδρομή)**.** Έστω $\mathsf{g} : \mathbb{N}^{m-1} \to \mathbb{N}$ και $\mathsf{h} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις, όπου $m > 1$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ που αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \mathsf{g}(x_1, \dots, x_{m-1}) \\ f(y+1, x_1, \dots, x_{m-1}) = \mathsf{h}(\langle f(0, x_1, \dots, x_{m-1}), \dots, f(y, x_1, \dots, x_{m-1}) \rangle, y, x_1, \dots, x_{m-1}) \end{cases}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Απόδειξη. Πρώτα θεωρούμε την πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $k : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ που αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} k(0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \langle \mathsf{g}(x_1, \dots, x_{m-1}) \rangle \\ k(y+1, x_1, \dots, x_{m-1}) = \mathsf{add}(k(y, x_1, \dots, x_{m-1}), \mathsf{h}(k(y, x_1, \dots, x_{m-1}), y, x_1, \dots, x_{m-1})) \end{cases}$$

και ορίζουμε την f ως εξής:

$$f(y, x_1, \dots, x_{m-1}) = \mathsf{dec}(y+1, k(y, x_1, \dots, x_{m-1}))$$

□

Παρατήρηση 2.3.6. Αντίστοιχα με την Πρόταση 2.1.7 μπορούμε να ορίσουμε την πλήρη πρωτογενή αναδρομή και χωρίς παραμέτρους.

Παράδειγμα 2.3.7 (Αριθμοί Fibonacci)**.** Η συνάρτηση $\mathsf{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{fib}(n) = \begin{cases} 0 & \text{, αν } n = 0 \\ 1 & \text{, αν } n = 1 \\ \mathsf{fib}(n-1) + \mathsf{fib}(n-2) & \text{, αν } n \geq 2 \end{cases}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική, καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } n = 0 \\ \mathsf{dec}(n+1, \langle f(0), \dots, f(n) \rangle) + \mathsf{dec}(n, \langle f(0), \dots, f(n) \rangle) \; [\, = f(n) + f(n-1) \,] & \text{, αλλιώς} \end{cases} \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3.8 (Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη). Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathsf{gcd} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $\mathsf{gcd}(x,y) = \max\{d \in \mathbb{N} \mid d = 0 \ \vee \ (d \mid x \ \wedge \ d \mid y)\}$ (ο *μέγιστος κοινός διαιρέτης των* x *και* y δηλαδή), είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Ας θυμηθούμε πρώτα τον αλγόριθμο του Ευκλείδη [1]:

$$\text{ΜΚΔ}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, αν } x = 0 \text{ ή } y = 0 \\ x & \text{, αν } x, y \geq 1 \text{ και } x \mid y \\ \text{ΜΚΔ}(y \bmod x, y) & \text{, αν } 1 \leq x \leq y \text{ και } x \nmid y \\ \text{ΜΚΔ}(x \bmod y, y) & \text{, αν } 1 \leq y < x \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση gcd αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0,y) = 0 \\ f(x+1,y) = \begin{cases} 0 & \text{, αν } y = 0 \\ x+1 & \text{, αν } y \geq 1 \text{ και } x+1 \mid y \\ \mathsf{dec}(\mathsf{rm}(y, x+1) + 1, \langle f(0,y), \ldots, f(x,y) \rangle) & \text{, αν } x+1 \leq y \text{ και } x+1 \nmid y \ ^{2} \\ \mathsf{dec}(\mathsf{rm}(x+1, y) + 1, \langle f(0,y), \ldots, f(x,y) \rangle) & \text{, αλλιώς } (1 \leq y < x+1) \end{cases} \end{cases}$$

όπου rm η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.23, άρα όντως είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Στις ασκήσεις θα δούμε ότι υπάρχουν και άλλες μορφές αναδρομής, όπως για παράδειγμα η *αμοιβαία αναδρομή* (Άσκηση 2.9) και η *εμφωλευμένη αναδρομή* (Άσκηση 2.10), που πάλι όμως δεν επεκτείνουν την κλάση των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων. Για τη *διπλή αναδρομή* (Άσκηση 2.12) δεν ισχύει το ίδιο. Συνεπώς ακόμα και βασικές παραλλαγές τις αναδρομής μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις που δεν είναι πρωτογενώς αναδρομικές. Αυτός είναι ένας ακόμα λόγος να οδηγηθούμε στη διαπίστωση ότι η κλάση των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων είναι πολύ «στενή [3]» για τους σκοπούς μας.

2.4 Ελαχιστικά αναδρομικές συναρτήσεις

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις είναι ολικές συναρτήσεις (Άσκηση 2.1) [4]. Στο Κεφάλαιο 1 όμως είδαμε ότι οι υπολογίσιμες συναρτήσεις δεν είναι απαραίτητα ολικές. Για να φτάσουμε σε έναν δεύτερο ορισμό των υπολογίσιμων συναρτήσεων θα πρέπει να ορίσουμε μία γενικότερη κλάση από αυτήν των πρωτογενώς αναδρομικών. Στην κλάση αυτή θα μας οδηγήσει ένας τελεστής που μπορεί να παράγει και μερικές συναρτήσεις, ο τελεστής της *μη-φραγμένης* ελαχιστοποίησης.

[1] Η εκδοχή αυτή δεν είναι η αποδοτικότερη δυνατή (όσον αφορά το πλήθος επαναλήψεων).

[2] Παρατηρήστε ότι η τιμή $f(\mathsf{rm}(y, x+1), y)$ υπάρχει στην ακολουθία $\langle f(0,y), \ldots, f(x,y) \rangle$, καθώς $y \bmod (x+1) \leq x$. Μάλιστα είναι ο $(y \bmod (x+1) + 1)$-οστός όρος της ακολουθίας.

[3] *Στενή είναι η αρετή, δεν μπορώ ν' αναπνέψω· μικρός, στενός είναι ο Παράδεισος, δε με χωράει· σαν άνθρωπος μου φαίνεται ο Θεός σας, δεν τον θέλω!* [12].

[4] Για να είμαστε ειλικρινείς, βάλαμε το χέρι μας και εμείς για αυτό.

Ορισμός 2.4.1. Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$, και $y \in \mathbb{N}$. Ο *τελεστής ελαχιστοποίησης της g* (ή *μ-ελαχιστοποίησης*) [1] ορίζεται ως εξής:

$$(\mu\ i \geq y)[g(i, x_1, \ldots, x_m) = 0] = \begin{cases} \min\{i \geq y \mid g(i, x_1, \ldots, x_m) = 0\}, & \text{αν υπάρχει τέτοιο } i \text{ και για} \\ & \text{κάθε } j \text{ με } y \leq j < i \text{ ισχύει ότι} \\ & g(j, x_1, \ldots, x_m) > 0 \\ \perp & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατήρηση 2.4.2. Ας τονίσουμε μία σημαντική λεπτομέρεια του Ορισμού 2.4.1. Αν για κάποιο $j \geq y$ ισχύει ότι $g(j, x_1, \ldots, x_m) = \perp$ και για κάθε i με $y \leq i < j$ ισχύει ότι $g(i, x_1, \ldots, x_m) \neq 0$, ακόμα και αν υπάρχει k με $j < k$ για το οποίο $g(k, x_1, \ldots, x_m) = 0$, έχουμε ότι $(\mu\ i \geq y)[g(i, x_1, \ldots, x_m) = 0] = \perp$.

Ορισμός 2.4.3. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$ είναι *ελαχιστικά αναδρομική* (ή *μ-αναδρομική*) ανν είναι μία εκ των (a), (b) και (c) του Ορισμού 2.1.1 ή προκύπτει με εφαρμογή των (1), (2) του Ορισμού 2.1.1 και του τελεστή ελαχιστοποίησης, σε ελαχιστικά αναδρομικές συναρτήσεις.

Ορισμός 2.4.4. Μία σχέση $P \subseteq \mathbb{N}^m$, $m \geq 1$, είναι *ελαχιστικά αναδρομική* (ή *μ-αναδρομική*) ανν η χαρακτηριστική της συνάρτηση $\chi_P : \mathbb{N}^m \to \{0, 1\}$ είναι ελαχιστικά αναδρομική.

Παράδειγμα 2.4.5. Ο αριθμός $p \in \mathbb{N}$ καλείται *δίδυμος πρώτος* ανν οι p και $p + 2$ είναι πρώτοι αριθμοί. Η συνάρτηση $\mathsf{tpn} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ όπου ο $\mathsf{tpn}(x)$ είναι ο x-οστός δίδυμος πρώτος αριθμός, δηλαδή:

$$\mathsf{tpn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } x = 0 \\ \min\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ δίδυμος πρώτος και υπάρχουν } \geq x & \\ \qquad \text{δίδυμοι πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του } p\} & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

είναι ελαχιστικά αναδρομική καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x+1) = \begin{cases} 3 & \text{, αν } x = 0 \\ (\mu\ i \geq f(x) + 1)[2 \dot{-} (\chi_{\mathsf{Prime}}(i) + \chi_{\mathsf{Prime}}(i+2)) = 0] & \text{, αλλιώς} \end{cases} \end{cases}$$

όπου η χ_{Prime} ορίζεται στο Παράδειγμα 2.1.28.

Σημείωση 2.4.6. Αν υπήρχε ένα άνω φράγμα μέχρι το οποίο θα έπρεπε να ψάξουμε για να βρούμε τον επόμενο δίδυμο πρώτο αριθμό, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την tpn του Παραδείγματος 2.4.5 χρησιμοποιώντας τον τελεστή της φραγμένης ελαχιστοποίησης. Όμως δεν έχει βρεθεί ακόμα τέτοιο άνω φράγμα, όπως δεν έχει ακόμα δοθεί απάντηση στο ερώτημα αν υπάρχουν άπειροι το πλήθος δίδυμοι πρώτοι.

Σύμφωνα με την παραπάνω σημείωση η tpn είναι μία ελαχιστικά αναδρομική συνάρτηση για την οποία δεν μπορούμε να αποφασίσουμε «ακόμα» [2] αν επιπλέον είναι και πρωτογενώς αναδρομική. Ενδεχομένως το πιο γνωστό παράδειγμα ελαχιστικά αναδρομικής συνάρτησης που (αποδεδειγμένα) δεν

[1] Η ελαχιστοποίηση αντιστοιχεί στο *(μη-φραγμένο) while* μίας γλώσσας προγραμματισμού.

[2] Σύμφωνα με το πρώτο Θεώρημα Μη-πληρότητας του Gödel ενδέχεται να μην πάρουμε ποτέ θετική ή αρνητική απάντηση για αυτό το ερώτημα!

είναι πρωτογενώς αναδρομική είναι η συνάρτηση του Ackermann που αποτελεί λύση των εξισώσεων [1]:

$$\begin{cases} A(0,y) = y+1 \\ A(x+1,0) = A(x,1) \\ A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y)) \end{cases}$$

Συνεπώς ισχύει το ακόλουθο θεώρημα (το οποίο προκύπτει από την Άσκηση 2.14).

Θεώρημα 2.4.7. Η κλάση των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων αποτελεί γνήσιο υποσύνολο της κλάσης των ελαχιστικά αναδρομικών συναρτήσεων.

2.5 Δεύτερος ορισμός υπολογίσιμων συναρτήσεων

Ο δεύτερος ορισμός των υπολογίσιμων συναρτήσεων είναι ο Ορισμός 2.4.3 και η εξήγηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.1. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ είναι ελαχιστικά αναδρομική ανν είναι (Turing) υπολογίσιμη.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1

Για το ευθύ [2] θα περιγράψουμε μόνο την κεντρική ιδέα και θα αφήσουμε τις περισσότερες λεπτομέρειες ως άσκηση για τον αναγνώστη.

Το αντίστροφο παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον και θα το δούμε πολύ προσεκτικά. Έστω υπολογίσιμη συνάρτηση f και έστω M μία TM που την υπολογίζει. Το σχεδιάγραμμα της απόδειξης είναι το εξής:

Στάδιο 1: Κωδικοποιούμε τα στιγμιότυπα λειτουργίας της M, για κάποια είσοδο $n \in \mathbb{N}$, με αριθμούς από το seq (δες Ορισμό 2.3.1). Έτσι ο υπολογισμός $M(n)$ θα αντιστοιχεί σε μια ακολουθία από αριθμούς.

Στάδιο 2: Ορίζουμε πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση που «ακολουθεί» τον υπολογισμό $M(n)$: Δεδομένου του αριθμού ενός στιγμιοτύπου μας επιστρέφει τον αριθμό του επόμενου στιγμιοτύπου.

Στάδιο 3: Ορίζουμε τη συνθήκη που μας δείχνει ότι η $M(n)$ τερμάτισε [3].

Στάδιο 4: Υπολογίζουμε την τιμή της $f(n)$.

[1] Η απόδειξη ότι η Ackermann είναι ελάχιστικά αλλά όχι πρωτογενώς αναδρομική αφήνεται ως άσκηση (δες Άσκηση 2.14). Με λίγα λόγια θα μπορούσαμε να πούμε ότι η Ackermann «αυξάνει» πιο γρήγορα από οποιαδήποτε πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση.

[2] Ελαχιστικά αναδρομική ⇒ Υπολογίσιμη.

[3] Μέχρι αυτό το σημείο δεν θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την ελαχιστοποίηση. Εδώ όμως είμαστε αναγκασμένοι να τη χρησιμοποιήσουμε καθώς θα αναζητήσουμε το ελάχιστο «βήμα» για το οποίο ο υπολογισμός της $M(n)$ δεν έκανε «πρόοδο» (δηλαδή η κεφαλή της M δεν κινήθηκε).

Απόδειξη Θεωρήματος 2.5.1. $(\Rightarrow)$ Αρκεί να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις (a), (b) και (c) του Ορισμού 2.1.1 είναι υπολογίσιμες συναρτήσεις και ότι τα (1), (2) του Ορισμού 2.1.1 και η ελαχιστοποίηση, αν εφαρμοστούν σε υπολογίσιμες συναρτήσεις, δίνουν υπολογίσιμη συνάρτηση (δες Άσκηση 2.19).

$(\Leftarrow)$ Έστω υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και έστω ότι η ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ την υπολογίζει. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα κάνουμε τις κάτωθι παραδοχές για την M, με σκοπό τη διευκόλυνση της παρουσίασης:

1. $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ και η q_n είναι η τερματική κατάσταση.
2. $\Sigma = \{1\}$, δηλαδή ο φυσικός αριθμός της εισόδου (και η τιμή της εξόδου) δίνεται στο *μοναδιαίο* σύστημα αρίθμησης [1].
3. $\Gamma = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ όπου $a_0 = \sqcup$, $a_1 = \triangleright$ και $a_2 = 1$.
4. Η M είναι μονοταινιακή και ντετερμινιστική.
5. Τέλος, θα πρέπει η M να μην κολλάει εξαιτίας μη ύπαρξης επόμενου στιγμιότυπου σύμφωνα με τη δ (δες Υποσημείωση 2 Σελίδα 13, και Υποσημείωση 1 Σελίδα 63 για τον λόγο που αυτό είναι απαραίτητο).

Στάδιο 1.1 Κωδικοποίηση: Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.5 ένα στιγμιότυπο χαρακτηρίζεται από τρεις πληροφορίες: την κατάσταση που βρίσκεται η M, τη λέξη που περιέχει η ταινία της και τη θέση της κεφαλής. Αρχίζουμε *αριθμητικοποιώντας* (ο όρος αυτός αναλύεται στην Παράγραφο Α.5.1) τις τρεις αυτές πληροφορίες, όπου με $\langle * \rangle_{\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε τον αριθμό που αντιστοιχίσαμε στο $*$:

- Για κάθε κατάσταση $q_i \in Q$ ορίζουμε $\langle q_i \rangle_{\mathbb{N}} = i$.
- Για κάθε σύμβολο $a_i \in \Gamma$ ορίζουμε $\langle a_i \rangle_{\mathbb{N}} = i$.
- Κάθε λέξη $s_1 \cdots s_l \in \Gamma^*$ ορίζουμε $\langle s_1 \cdots s_l \rangle_{\mathbb{N}} = \mathsf{enc}_l(\langle s_1 \rangle_{\mathbb{N}}, \ldots, \langle s_l \rangle_{\mathbb{N}})$.
- Αντιστοιχούμε τη θέση της κεφαλής στον αριθμό του κελιού που βρίσκεται η κεφαλή.
- Αριθμητικοποιήσουμε τα Α, Δ ως εξής: $\langle \mathrm{A} \rangle_{\mathbb{N}} = 0$ και $\langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}} = 2$.

Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε το στιγμιότυπο $\triangleright w_1 q_i w_2$ ως μία ακολουδία τριών αριθμών, των: i (κατάσταση), $|w_1| + 2$ (θέση κεφαλής) και $\langle \triangleright w_1 w_2 \rangle_{\mathbb{N}}$ (λέξη ταινίας), και να το αριθμητικοποιήσουμε ως εξής:

$$\langle \triangleright w_1 q_i w_2 \rangle_{\mathbb{N}} = \mathsf{enc}_3(i, |w_1| + 2, \langle \triangleright w_1 w_2 \rangle_{\mathbb{N}})$$

Για παράδειγμα το αρχικό στιγμιότυπο αριθμητικοποιείται ως:

$$\langle \triangleright q_0 \underbrace{1 \cdots 1}_{n+1 \text{ φορές}} \rangle_{\mathbb{N}} = \mathsf{enc}_3(0, 2, \langle \triangleright \underbrace{1 \cdots 1}_{n+1 \text{ φορές}} \rangle_{\mathbb{N}}) = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot \dots \cdot p_{n+2}^3 + 1}$$

Στάδιο 1.2 Αποκωδικοποίηση: Έστω $x \in \mathsf{seq}$ η κωδικοποίηση ενός στιγμιοτύπου της $M(n)$. Για να διευκολύνουμε την κατανόηση χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις συναρτήσεις που αποκωδικοποιούν το x:

[1] Σε αυτό το σύστημα το 0 γράφεται ως 1 και ο αριθμός n ως $\underbrace{1 \cdots 1}_{n+1 \text{ φορές}}$.

- $\mathsf{cs}(x) = \mathsf{dec}(1, x)$ (επιστρέφει τον αριθμό της κατάστασης)
- $\mathsf{ctp}(x) = \mathsf{dec}(2, x)$ (επιστρέφει τη θέση της κεφαλής)
- $\mathsf{ctn}(x) = \mathsf{dec}(3, x)$ (επιστρέφει τον αριθμό που αντιστοιχεί στη λέξη που περιέχει η ταινία)
- $\mathsf{cts}(x) = \mathsf{dec}(\mathsf{ctp}(x), \mathsf{ctn}(x))$ (επιστρέφει το σύμβολο που διαβάζει η κεφαλή)

Στάδιο 2: Θα ορίσουμε τη συνάρτηση $\mathsf{tr}_M : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ με το $\mathsf{tr}_M(x, y)$ να ισούται με τον αριθμό που αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο της $M(x)$ μετά από y βήματα υπολογισμού [1]. Πρώτα θα ορίσουμε συναρτήσεις που μας επιστρέφουν τον αριθμό που αντιστοιχεί στην επόμενη κατάσταση, στην επόμενη θέση της κεφαλής και στην επόμενη λέξη στην ταινία, και μετά θα τα κωδικοποιήσουμε όλα μαζί σε έναν αριθμό που θα αντιστοιχεί στο επόμενο στιγμιότυπο.

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση δ περιέχει τις μεταβάσεις:

$$\begin{array}{rcl} \delta(q_{i_0}, b_0) & = & (q_{j_0}, c_0, d_0) \\ \delta(q_{i_1}, b_1) & = & (q_{j_1}, c_1, d_1) \\ & \vdots & \\ \delta(q_{i_m}, b_m) & = & (q_{j_m}, c_m, d_m) \\ \delta(q_n, b) & = & \bot, \ \forall b \in \mathit{\Gamma} \end{array}$$

όπου $q_{i_r} \in Q \setminus \{q_n\}, q_{j_r} \in Q$, $b_r, c_r \in \mathit{\Gamma}$ και $d_r \in \{\mathrm{A}, \Delta\}$ για $r \in [m]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\mathsf{ns} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{ns}(x) = \begin{cases} j_0 & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_0 \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_0 \rangle_{\mathbb{N}} \\ j_1 & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_1 \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_1 \rangle_{\mathbb{N}} \\ \vdots & \\ j_m & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_m \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_m \rangle_{\mathbb{N}} \\ \mathsf{cs}(x) & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

που επιστρέφει την αριθμητικοποίηση της επόμενης κατάστασης, τη συνάρτηση $\mathsf{ntp} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{ntp}(x) = \begin{cases} \mathsf{ctp}(x) + \langle d_0 \rangle_{\mathbb{N}} \dot{-} 1 & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_0 \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_0 \rangle_{\mathbb{N}} \text{ [2]} \\ \mathsf{ctp}(x) + \langle d_1 \rangle_{\mathbb{N}} \dot{-} 1 & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_1 \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_1 \rangle_{\mathbb{N}} \\ \qquad \vdots & \\ \mathsf{ctp}(x) + \langle d_m \rangle_{\mathbb{N}} \dot{-} 1 & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_m \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_m \rangle_{\mathbb{N}} \\ \mathsf{ctp}(x) & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

που επιστρέφει την αριθμητικοποίηση της επόμενης θέσης στην ταινία και, τέλος, τη συνάρτηση $\mathsf{nts} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{nts}(x) = \begin{cases} \langle c_0 \rangle_{\mathbb{N}} & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_0 \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_0 \rangle_{\mathbb{N}} \\ \langle c_1 \rangle_{\mathbb{N}} & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_1 \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_1 \rangle_{\mathbb{N}} \\ \ \vdots & \\ \langle c_m \rangle_{\mathbb{N}} & , \text{ αν } \mathsf{cs}(x) = i_m \text{ και } \mathsf{cts}(x) = \langle b_m \rangle_{\mathbb{N}} \\ \mathsf{cts}(x) & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

[1] Για παράδειγμα: $\mathsf{tr}_M(x, 0) = \langle \triangleright\, q_0 \underbrace{1 \cdots 1}_{x+1 \text{ φορές}} \rangle_{\mathbb{N}}$.

[2] Εδώ γίνεται εμφανής ο λόγος που αντιστοιχήσαμε το Α το 0 και το Δ στο 2.

που επιστρέφει την αριθμητικοποίηση του συμβόλου που πρέπει να γράψουμε στην ταινία.

Παρατηρήστε ότι μετά από μία μετάβαση της M αλλάζει μόνο το σύμβολο που διαβάζει η κεφαλή. Συνεπώς αν $x \in \mathbb{N}$ είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί σε ένα στιγμιότυπο, για να βρούμε τον αριθμό που αντιστοιχεί στην επόμενη λέξη πρέπει να αλλάξουμε στον αριθμό $\mathsf{ctn}(x)$ τη δύναμη του $\mathsf{ctp}(x)$-οστού πρώτου από $\mathsf{cts}(x)+1$ σε $\mathsf{nts}(x)+1$. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε διαιρώντας τον $\mathsf{ctn}(x)$ με $\mathsf{pn}(\mathsf{ctp}(x))^{\mathsf{cts}(x)+1}$ και πολλαπλασιάζοντας τον με $\mathsf{pn}(\mathsf{ctp}(x))^{\mathsf{nts}(x)+1}$ (pn είναι η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.2.4). Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $\mathsf{ntn} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{ntn}(x) = \mathsf{qt}(\mathsf{ctn}(x), \mathsf{pn}(\mathsf{ctp}(x))^{\mathsf{cts}(x)+1}) \cdot \mathsf{pn}(\mathsf{ctp}(x))^{\mathsf{nts}(x)+1}$$

που επιστρέφει την αριθμητικοποίηση της επόμενης λέξης στην ταινία (qt είναι η συνάρτηση του Παραδείγματος 2.1.26).

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε τη συνάρτηση tr_M. Η tr_M είναι η λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(x,0) = \langle \rhd\, q_0 \underbrace{1 \cdots 1}_{x+1 \text{ φορές}} \rangle_{\mathbb{N}} \\ f(x,y+1) = \mathsf{enc}_3(\mathsf{ns}(f(x,y)), \mathsf{ntp}(f(x,y)), \mathsf{ntn}(f(x,y))) \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις cs, ctp, ctn, cts και ns, ntp, nts, ntn είναι όλες πρωτογενώς αναδρομικές, άρα και η tr_M είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Στάδιο 3: Παρατηρήστε ότι αν η M με είσοδο $x \in \mathbb{N}$ τερματίσει σε t-βήματα τότε $\mathsf{tr}_M(x,t') = \mathsf{tr}_M(x,t)$ για κάθε $t' \geq t$, και ότι αν η $M(x)$ δεν τερματίζει στο βήμα t τότε $\mathsf{tr}_M(x,t+1) \neq \mathsf{tr}_M(x,t)$ [1] . Συνεπώς η συνθήκη που μας δείχνει ότι η $M(x)$ τερμάτισε είναι η ακόλουθη:

Υπάρχει $t_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $\mathsf{tr}_M(x,t)$ να έχει την ίδια τιμή για κάθε $t \geq t_0$.

Από τον τρόπο που ορίσαμε την tr_M, αυτό συμβαίνει άπαξ και δύο συνεχόμενες τιμές της είναι ίσες. Επομένως για να βρούμε το βήμα κατά το οποίο η $M(x)$ τερματίζει (αν φυσικά τερματίζει) πρέπει να βρούμε το ελάχιστο $t \in \mathbb{N}$ για το οποίο $\mathsf{tr}_M(x,t+1) = \mathsf{tr}_M(x,t)$ (αν φυσικά υπάρχει). Ορίζουμε λοιπόν την ελαχιστικά αναδρομική συνάρτηση $\mathsf{term} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{term}(x) = (\mu\, t \geq 0)[1 \dot{-} \chi_{=}(\mathsf{tr}_M(x,t+1), \mathsf{tr}_M(x,t)) = 0]$$

που επιστρέφει το (ελάχιστο) πλήθος βημάτων που χρειάζεται η $M(x)$ για να τερματίσει (η $\chi_{=}$ ορίζεται στο Παράδειγμα 2.1.16).

Στάδιο 4: Η τιμή της $f(x)$ (στο μοναδιαίο σύστημα αρίθμησης) ισούται με $\mathsf{qt}(\mathsf{ctn}(\mathsf{tr}_M(x, \mathsf{term}(x))), 2^2)$ [2]. Για να βρούμε την τιμή της $f(x)$ αρκεί να αποκωδικοποιήσουμε αυτόν τον αριθμό και να προσθέσουμε τους άσους [3] □

[1] Για παράδειγμα η κεφαλή κινείται, συνεπώς $\mathsf{ntp}(\mathsf{tr}_M(x,t)) \neq \mathsf{ctp}(\mathsf{tr}_M(x,t))$ και κατ' επέκταση $\mathsf{tr}_M(x,t+1) \neq \mathsf{tr}_M(x,t)$. Αυτός είναι ο λόγο που στην αρχή θεωρήσαμε ότι η M δεν κολλάει εξαιτίας μη ύπαρξης επόμενου στιγμιότυπου σύμφωνα με τη συνάρτηση μεταβάσεών της.

[2] Γιατί η ταινία θα περιέχει τη λέξη $\rhd \underbrace{1 \cdots 1}_{f(x)+1 \text{ φορές}}$.

[3] Όπως κάθε άλλη «κομψή» έκφραση σε αυτές τις σημειώσεις, έτσι και αυτή περιέχει κάποιες λεπτομέρειες. Η διευθέτησή τους αφήνετε ως άσκηση. Εναλλακτικά (και ίσως πιο απλά) μπορούμε να ορίσουμε την f ως $f(x) = \mathsf{length}(\mathsf{ctn}(\mathsf{tr}_M(x, \mathsf{term}(x)))) \dot{-} 2$.

Παρατήρηση 2.5.2. Υπάρχει TM $M_{TM\to\mu}$ που δέχεται σαν είσοδο την κωδικοποίηση μίας TM M και επιστρέφει την κωδικοποίηση [1] της ελαχιστικά αναδρομικής συνάρτησης που υπολογίζει η M.

Μέσα από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1 προκύπτει άμεσα το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 2.5.3 (Κανονική Μορφή Kleene). Για κάθε ελαχιστικά αναδρομική συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$, υπάρχουν πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις $g : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ και $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε:

$$f(x_1, \cdots, x_m) = h((\mu\ i \geq 0)[g(i, x_1, \ldots, x_m) = 0])$$

Ασκήσεις

2.1 (☆☆☆). Δείξτε ότι όλες οι πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις είναι ολικές συναρτήσεις και ότι η κλάση των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων είναι αριθμήσιμη.

2.2 (☆☆☆). Δείξτε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ οι συναρτήσεις $\mathsf{min}, \mathsf{max} : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, με

$$\mathsf{min}_m = \mathsf{min}\{x_1, \ldots, x_m\} \text{ και } \mathsf{max}_m = \mathsf{max}\{x_1, \ldots, x_m\}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

2.3 (★☆☆). Έστω $\mathsf{g} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\mathsf{sum_g}, \mathsf{prod_g} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με

$$\mathsf{sum_g}(z, x) = \sum_{i=0}^{z} \mathsf{g}(i, x) \text{ και } \mathsf{prod_g}(z, x) = \prod_{i=0}^{z} \mathsf{g}(i, x)$$

είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

2.4 (☆☆☆). Αποδείξτε τις Προτάσεις 2.1.20, 2.1.21 και 2.1.22.

2.5 (☆☆☆). Έστω $\mathsf{R} \subseteq \mathbb{N}^2$ πρωτογενώς αναδρομική σχέση. Δείξτε ότι οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}(\forall y < z)[\mathsf{R}] &= \{x \in \mathbb{N} \mid \text{Για κάθε } y < z \text{ ισχύει ότι} (x, y) \in \mathsf{R}\}\\ (\exists y < z)[\mathsf{R}] &= \{x \in \mathbb{N} \mid \text{Υπάρχει } y < z \text{ για το οποίο ισχύει ότι} (x, y) \in \mathsf{R}\}\end{aligned}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

2.6 (★☆☆). Έστω $\mathsf{R} \subseteq \mathbb{N}^2$ πρωτογενώς αναδρομική σχέση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, με $f(z, x) = (\mu\ i \leq z)[(i, x) \in \mathsf{R}]$ είναι πρωτογενώς αναδρομική.

2.7 (★☆☆). Δείξτε ότι για κάθε $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ η συνάρτηση $\mathsf{log}_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:

$$\mathsf{log}_b(x) = \begin{cases} \mathsf{max}\{n \in \mathbb{N} \mid b^n \mid x\} & , \text{ αν } x > 0\\ 0 & , \text{ αλλιώς}\end{cases}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

[1] Ένα παράδειγμα κωδικοποίησης ελαχιστικά αναδρομικών συναρτήσεων δίνεται από το Θεώρημα 3.3.8 όπου «αντιστοιχούμε» σε κάθε αναδρομική συνάρτηση έναν λ-όρο, μία λέξη δηλαδή στο αλφάβητο $\{x, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (,), \lambda, .\}$.

2.8 (★☆☆). Αποδείξτε την Πρόταση 2.3.4.

2.9 (★☆☆). *(Αμοιβαία πρωτογενής αναδρομή)* Έστω $\mathsf{g}_1, \mathsf{g}_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και $\mathsf{h}_1, \mathsf{h}_2 : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις. Δείξτε ότι οι $f_1, f_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} f_1(0,x) = \mathsf{g}_1(x) \\ f_1(y+1,x) = \mathsf{h}_1(f_1(y,x), f_2(y,x), y, x) \\ f_2(0,x) = \mathsf{g}_2(x) \\ f_2(y+1,x) = \mathsf{h}_2(f_1(y,x), f_2(y,x), y, x) \end{cases}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις.

2.10 (★★★). *(Εμφωλευμένη πρωτογενής αναδρομή)* Έστω συναρτήσεις $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ και $\tau : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση που είναι λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0,y) = g(y) \\ f(x+1,y) = h(f(x,\tau(x,y)), x, y) \end{cases}$$

και ότι αν οι g, h και τ είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε και η f είναι πρωτογενώς αναδρομική.

2.11 (★★☆). Έστω συναρτήσεις $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ και $g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση που είναι λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0,y) = g_1(y) \\ f(1,y) = g_2(y) \\ f(x+2,y) = h(f(x+1), f(x), y) \end{cases}$$

και ότι αν οι h, g_1, g_2 είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε και η f είναι πρωτογενώς αναδρομική.

2.12 (★★★). *(Διπλή αναδρομή)* Έστω συναρτήσεις $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\tau : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ και $z \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση που είναι λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0,y) = g(y) \\ f(x+1,0) = h(f(x,z), x) \\ f(x+1,y+1) = \tau(f(x+1,y), f(x,z), x, y) \end{cases}$$

και ότι αν οι g, h και τ είναι ελαχιστικά αναδρομικές, τότε και η f είναι ελαχιστικά αναδρομική.

2.13 (★☆☆). Δείξτε ότι η συνάρτηση $- : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ με:

$$-(x,y) = \begin{cases} x - y & , \text{ αν } x \geq y \\ \perp & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

είναι ελαχιστικά αναδρομική.

2.14 (★★☆). Δείξτε ότι η συνάρτηση του Ackermann (Σελίδα 60) είναι ελαχιστικά αλλά όχι πρωτογενώς αναδρομική.

2.15 (☆☆☆). Δώστε παράδειγμα ολικής, ελαχιστικά αναδρομικής συνάρτησης, που δεν είναι πρωτογενώς αναδρομική και παίρνει τιμές 0 και 1.

2.16 (★★★). Δώστε παράδειγμα ολικής, ελαχιστικά αναδρομικής συνάρτησης, που δεν είναι πρωτογενώς αναδρομική και παίρνει τιμές 0 και 1, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση του Ackermann.

2.17 (☆☆☆). Ο Αρχιμήδης σε επιστολή του προς τον Βασιλιά Γέλωντα τον Συρακούσιο, προκειμένου να τον πείσει ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι σε μέγεθος από το πλήθος κόκκων άμμου που χρειάζεται για να γεμίσει το σύμπαν (σύμφωνα φυσικά με την τότε αντίληψη για το σύμπαν), εκτίμησε ότι το πλήθος κόκκων που θα χρειαστεί είναι μικρότερο από 10^{63} χρησιμοποιώντας την ακόλουθη συνάρτηση (που ορίζεται με διπλή αναδρομή):

$$\begin{cases} f(0,y) = 1 \\ f(x+1,0) = f(x,a) \\ f(x+1,y+1) = a \cdot f(x+1,y) \end{cases}$$

για $a = 10^8$ που ισοδυναμεί με μία *μυριάδα μυριάδες* (αυτός θεωρείται ο μεγαλύτερος αριθμός για τον οποίο οι αρχαίοι Έλληνες είχαν όνομα). Δείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι ελαχιστικά αναδρομική.

2.18 (☆☆☆). Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που δεν είναι ελαχιστικά αναδρομική (δες και Άσκηση 2.1).

2.19 (★☆☆). Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες του ευθέως της απόδειξης του Θεωρήματος 2.5.1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

λ-ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 Εισαγωγή

Συνεχίζοντας την παρουσίαση των διαφόρων «μοντέλων υπολογισμού» θα μελετήσουμε τον *λ-λογισμός*, το πρώτο χρονικά μοντέλο που αναπτύχθηκε σε τόσο μεγάλο βαθμό ώστε να δώσει απάντηση στα καίρια ερωτήματα που απασχολούσαν την κοινότητα των Λογικών στις αρχές του εικοστού αιώνα. Ο λ-λογισμός εισήχθη στις αρχές του 1930 από τον Alonzo Church ως ένα σύστημα που θα μπορούσε να θεμελιώσει τα μαθηματικά με κεντρικό όργανο την συνάρτηση. Όταν αποδείχθηκε όμως ότι αυτός ο στόχος δεν είναι επιτεύξιμος, ο Church έστρεψε την προσοχή του στον ορισμό της «Υπολογισιμότητας», με απώτερο σκοπό την απάντηση του Entscheidungsproblem που είχε θέσει ο David Hilbert.

Στον μετέπειτα «αγώνα» για την επικράτηση ενός μοντέλου υπολογισμού, δηλαδή τυπικής προσέγγισης της έννοιας του αλγορίθμου, παρόλο που σε κάθε βασικό σταθμό ο λ-λογισμός έφτασε πρώτος μπροστά από της μηχανές Turing, τελικά τερμάτισε πίσω από αυτές. Ο λόγος φυσικά είναι ότι η μηχανές Turing αποτελούσαν μια καλή αποτύπωση στο χαρτί ενός υποτυπώδους ηλεκτρονικού υπολογιστή και ως εκ τούτου, όταν τελικά η Θεωρία Υπολογισμού αυτονομήθηκε από τη Λογική, κρίθηκαν διαισθητικότερες των *λ-όρων*. Όμως στο πεδίο στο οποίο ο λ-λογισμός αναμφισβήτητα επικρατεί είναι ο λεγόμενος *Συναρτησιακός Προγραμματισμός*, δηλαδή η αποκλειστική χρήση συναρτήσεων για τον υπολογισμό.

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να αποκαλύψουμε μέσω του λ-λογισμού την πραγματική διάσταση της έννοιας της συνάρτηση. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν με μια «φιλοσοφική» συζήτηση περί συναρτήσεων.

3.1.1 Περί συναρτήσεων

Στο Κεφάλαιο 0 δώσαμε τον συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης. Στα υπόλοιπα κεφάλαια προσπαθήσαμε να δώσουμε ισοδύναμους αλλά εντελώς διαφορετικούς ορισμούς της κλάσης των υπολογίσιμων συναρτήσεων. Αυτό που δεν κάναμε σαφές τότε είναι ότι έχει εξίσου μεγάλη σημασία ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται μία συνάρτηση, ο αλγόριθμος δηλαδή που την υπολογίζει (είτε αυτός είναι μία TM είτε ο ορισμός της ως αναδρομική συνάρτηση). Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(x) = 2x$ και $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $g(x) = x + x$ σύμφωνα με τον Ορισμό 0.1.9 αποτελούν την «ίδια» συνάρτηση, καθώς σαν σύνολα είναι ίσα, όμως ακολουθώντας τον Ορισμό 2.1.1 την πρώτη θα την ορίζαμε ως $f(x) = \mathsf{mult}(\mathsf{c}_2^1(x), x)$ ενώ τη δεύτερη ως $g(x) = \mathsf{plus}(x, x)$. Ο λόγος που αυτές οι δύο συναρτήσεις διαφέρουν υπό το πρίσμα της Θεωρίας Αναδρομής είναι ότι διαφέρει ο αλγόριθμος που τις υπολογίζει.

Αυτή η διάκριση για το μεγαλύτερο κομμάτι των Θεωρητικών Μαθηματικών δεν έχει καμία απολύτως σημασία, στο κομμάτι όμως των Υπολογιστικών Μαθηματικών έχει κεντρικό ρόλο, κυρίως όταν βάλουμε στην εξίσωση και την «αποδοτικότητα» του υπολογισμού μίας συνάρτησης [1].

Ένα ακόμα σημείο όπου ο συνολοθεωρητικός ορισμός δεν επαρκεί για τους σκοπούς μας είναι το γεγονός ότι δεν μας επιτρέπει να έχουμε συναρτήσεις που έχουν ως είσοδο άλλες συναρτήσεις. Φυσικά κάποιος θα προβάλει τον ορισμό της σύνθεσης συναρτήσεων (Ορισμός 0.1.14) και θα ισχυριστεί ότι μπορεί υπό περιπτώσεις να λύσει αυτό το πρόβλημα. Η σύνθεση όμως δεν μπορεί να μας επιτρέψει να έχουμε συναρτήσεις που έχουν σαν είσοδο τον ίδιο τους τον εαυτό! Στην Πληροφορική το φαινόμενο της *αυτοεφαρμογής* είναι αρκετά σύνηθες και ο λόγος που είναι εφικτό είναι ότι οι συναρτήσεις αντιμετωπίζονταν σαν κανόνες υπολογισμού (ή αλγόριθμοι αν προτιμάτε). Συνεπώς όταν μια συνάρτηση δέχεται σαν είσοδο τον εαυτό της στην ουσία έχουμε μία επαναληπτική εκτέλεση των κανόνων υπολογισμού της.

Το γεγονός ότι στον λ-λογισμό μπορούμε να έχουμε συναρτήσεις που δέχονται ως είσοδο άλλες συναρτήσεις μας δίνει το δικαίωμα να επικεντρωθούμε αποκλειστικά σε συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Ο τρόπος που το κάνουμε αυτό είναι ο εξής: Όταν θέλουμε να ορίσουμε μια συνάρτηση n μεταβλητών ορίζουμε μία συνάρτηση μίας μεταβλητής στην οποία έπειτα θα δώσουμε ως είσοδο μία συνάρτηση με $n-1$ μεταβλητές. Θα επανέλθουμε σε αυτό το θέμα με μεγαλήτερη λεπτομέρεια όταν θα έχουμε δει το συντακτικό του λ-λογισμού [2].

3.1.2 Περί συμβολισμού

Στον λ-λογισμός ο συμβολισμός έχει κυρίαρχο ρόλο. Παρόλο που οι λ-όροι ενδεχομένως δείχνουν αρκετά περίπλοκοι, ο ορισμός τους βασίζεται σε τρεις πολύ απλές ιδέες:

1. *Εφαρμογή*
2. *Αφαίρεση*
3. *Συστολή*

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση φυσικών αριθμών, παραδείγματος χάρη την $f(x) = x^2$. Μας ενδιαφέρει η τιμή που έχει η f για κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, ας υποθέσουμε τον αριθμό 3. Η συνήθης γραφή αυτής της *εφαρμογής* της f πάνω στον αριθμό 3 είναι $f(3)$. Στους λ-όρους για να συμβολίσουμε την εφαρμογή αυτή απλά θα μεταφέρουμε τις παρενθέσεις γράφοντας $(f3)$. Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε ότι η εφαρμογή γίνεται μόνο μεταξύ δύο λ-όρων [3], ως εκ τούτου θα πρέπει να ορίσουμε τους φυσικούς αριθμούς ως λ-όρους (ως συναρτήσεις δηλαδή, Ορισμός 3.3.2).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να εκφράσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x + y$ και $g(y) = x + y$, όπου η x για την f και η y για την g αποτελούν *ελεύθερες μεταβλητές*. Ο Church εισήγαγε έναν τρόπο που μας επιτρέπει να συμβολίσουμε τις δύο συναρτήσεις χωρίς να χρειαζόμαστε δύο διαφορετικά ονόματα για να τις ξεχωρίσουμε: Την πρώτη τη συμβόλισε ως $\lambda x.(x + y)$ και τη δεύτερη ως $\lambda y.(x + y)$. Η λ-*αφαίρεση* χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει αυτό που συνήθως αποκαλούμε «μεταβλητή» της συνάρτησης. Η πιο σημαντική χρήση όμως της λ-αφαίρεσης είναι ότι μας δείχνει τη θέση μέσα στον λ-όρο που θα γίνει η εφαρμογή κατά τον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης. Ο υπολογισμός αυτός

[1] Μία ενδεικτική περίπτωση είναι η συνάρτηση fib που είδαμε στο Παράδειγμα 2.3.7, όπου ο αναδρομικός αλγόριθμος που εφαρμόζει τυφλά τον τύπο $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ χρειάζεται πολύ παραπάνω «χρόνο» από τον αλγόριθμο που υπολογίζει τις τιμές $f(0), f(1), \ldots, f(n)$ χρησιμοποιώντας τις ήδη υπολογισμένες τιμές (ο αλγόριθμος του Παραδείγματος 2.3.7 δηλαδή).

[2] Η ιδέα αυτή στη βιβλιογραφία συναντάται ως *Currying*, προς τιμήν του *Haskell Curry* που την έκανε δημοφιλή.

[3] Ακόμα και του ίδιου λ-όρου, π.χ. (ff).

γίνεται σε συμβολικό επίπεδο μέσω μιας ακολουθίας αντικαταστάσεων μεταβλητών με λ-όρους. Αυτές οι αντικαταστάσεις αποκαλούνται *β-συστολές*. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θεωρήστε τον όρο $\lambda x.M$ και υποθέστε ότι θέλουμε να τον εφαρμόσουμε στον όρο N. Η εφαρμογή γίνεται μέσω της β-συστολής ως εξής [1]:

$$(\lambda x.M)N \to_\beta M[x/N]$$

όπου με $M[x/N]$ συμβολίσουμε τον όρο που προκύπτει μετά από την αντικατάσταση κάθε «ελεύθερης» εμφάνισης της x με τον όρο N. Η συστολή λοιπόν είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ της αφαίρεσης και της εφαρμογής και βάση αυτής υλοποιείται ο υπολογισμός, ή πιο σωστά η *αποτίμηση*. Όταν πλέον δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστούν β-συστολές (έχουμε φτάσει σε μία *κανονική μορφή*) ο υπολογισμός-αποτίμηση έχει ολοκληρωθεί και έτσι έχουμε πάρει τη ζητούμενη τιμή.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ξανά για να γίνει σαφές ότι η αποτίμηση γίνεται σε καθαρά συμβολικό επίπεδο (κάνουμε απλή *συντακτική αντικατάσταση*) και δεν έχουμε δικαίωμα να απλοποιούμε τους όρους καθ' οιονδήποτε τρόπο. Για παράδειγμα ο όρος $\lambda x.(x+x)$ δεν θα είναι δυνατό να «απλοποιηθεί» στον όρο $\lambda x.2x$. Ο λόγος είναι ότι ο αλγόριθμος υπολογισμού των δύο εκφράσεων ($x+x$ και $2x$) διαφέρει, συνεπώς οι δύο όροι δεν θα πρέπει να ταυτίζονται.

3.2 Συντακτικό λ-λογισμού

Ας περάσουμε στον ορισμό του συστήματος του *Καθαρού λ-λογιμού* (η *λ-λογισμού χωρίς τύπους* [2]). Θα χρησιμοποιήσουμε ένα αριθμήσιμο πλήθος μεταβλητών: $x_0, x_1, \ldots$.

Ορισμός 3.2.1. Το σύνολο των *λ-ορών* ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

1. Οι μεταβλητές είναι λ-όροι.

2. Αν οι M, N είναι λ-όροι τότε και το (MN) είναι λ-όρος που αποκαλείται *όρος της εφαρμογής (του M στον N)*.

3. Αν ο M είναι λ-όρος και η x μεταβλητή τότε και το $(\lambda x.M)$ είναι όρος που αποκαλείται *όρος της λ-αφαίρεσης*.

Παράδειγμα 3.2.2. Αν τα x, y είναι μεταβλητές τότε οι ακόλουθες εκφράσεις είναι λ-όροι:

- $(\lambda x.x)$ *(ταυτοτική συνάρτηση)*

- $(\lambda y.x)$ *(σταθερή συνάρτηση)*

- $(\lambda x.(xx))$ *(συνδυαστής ω)*

- $((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx)))$ *(συνδυαστής Ω)*

Παρατηρήστε ότι στον τελευταίο όρο έχουμε αυτοεφαρμογή.

[1] Παραλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις της εφαρμογής χάριν απλότητας.

[2] Στον *λ-λογισμό με τύπους* οι μεταβλητές (και κατ' επέκταση οι όροι) ανήκουν σε κάποιον τύπο ούτως ώστε να «απαγορεύονται» εφαρμογές όποτε οι τύποι δεν «ταιριάζουν». Αυτό μας γλιτώνει από πολλές «δυσάρεστες καταστάσεις» που μπορεί να προκύψουν με την αυτοεφαρμογή ενός όρου. Θα πρέπει να διευκρινίσουμε όμως εδώ ότι η αυτοεφαρμογή δίνει στον λ-λογισμό (ως υπολογιστικό μοντέλο) την ισχύ που έχουν π.χ. οι TM ή οι αναδρομικές συναρτήσεις.

Θα χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα x, y, z κ.λπ. για τις μεταβλητές και τα κεφαλαία F, M, N κ.λπ. για τους όρους. Όπως είναι κατανοητό για να απλοποιήσουμε λίγο τους όρους θα χρειαστεί να καταργήσουμε κάποιες παρενθέσεις.

Συμβολισμός 3.2.3. Αν έχουμε έναν όρο της μορφής $(\cdots((FM_1)M_2)\cdots M_n)$ θα τον συμπτύξουμε στην έκφραση $FM_1M_2\cdots M_n$. Αν έχουμε έναν όρο της μορφής $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\cdots(\lambda x_n.M)\cdots))$ θα τον συμπτύξουμε στην έκφραση $\lambda x_1 x_2 \cdots x_n.M$. Τέλος η εφαρμογή θα έχει προτεραιότητα έναντι της λ-αφαίρεσης, έτσι θα μπορούμε να γράφουμε τον όρο $\lambda x.(MN)$ ως $\lambda x.MN$.

Παράδειγμα 3.2.4. Οι όροι του Παραδείγματος 3.2.2 μπορούν να απλοποιηθούν ως ακολούθως: $\lambda x.x$, $\lambda y.x$, $\lambda x.xx$, $(\lambda x.xx)\lambda x.xx$.

Αναφέρθηκε πριν επιγραμματικά ότι κατά τη διαδικασία της συστολής γίνεται συντακτική αντικατάσταση των ελεύθερων μεταβλητών με κάποιους όρους. Το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών καθορίζεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2.5. Για έναν όρο M ορίζουμε το σύνολο των *ελεύθερων μεταβλητών* του, συμβολισμός $FV(M)$, και το σύνολο των *δεσμευμένων μεταβλητών* του, συμβολισμός $BV(M)$, αναδρομικά ως εξής:

1. Αν $M = x$ [1], όπου x μεταβλητή, τότε $FV(M) = \{x\}$ και $BV(M) = \varnothing$.
2. Αν $M = (PQ)$, όπου P, Q όροι, τότε $FV(M) = FV(P) \cup FV(Q)$ και $BV(M) = BV(P) \cup BV(Q)$.
3. Αν $M = (\lambda x.N)$, όπου x μεταβλητή και N όρος, τότε $FV(M) = FV(N) \setminus \{x\}$ και $BV(M) = BV(N) \cup \{x\}$.

Παράδειγμα 3.2.6. Θεωρήστε τον όρο $M = (\lambda x.xy)xy$, τότε $FV(M) = \{x, y\}$ και $BV(M) = \{x\}$.

Το φαινόμενο που παρατηρήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, τα σύνολα δηλαδή των ελεύθερων και δεσμευμένων μεταβλητών να έχουν μη κενή τομή, καλό θα ήταν να αποφευχθεί για λόγους σαφήνειας. Γι' αυτό θα θεωρούμε πάντα ότι τα ονόματα των δεσμευμένων μεταβλητών διαφέρουν από τα ονόματα των ελευθέρων. Αυτό μπορεί να φαίνεται κάπως αυθαίρετο, όμως όπως θα δούμε ευθύς αμέσως σημασία δεν έχει το όνομα μίας δεσμευμένης μεταβλητής αλλά η θέση της μέσα στον όρο. Για παράδειγμα οι όροι $\lambda x.xy$ και $\lambda z.zy$ πρέπει να θεωρούνται ισοδύναμοι καθώς η εφαρμογή τους στον ίδιο όρο θα μας οδηγήσει μέσω της β-συστολής ακριβώς στον ίδιο όρο (υποδηλώνουν ακριβώς τον ίδιο αλγόριθμο). Θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το «πρόβλημα» και τυπικότερα [2] αλλά αυτό ξεφεύγει των σκοπών μας.

Ορισμός 3.2.7. Ένας όρος M με $FV(M) = \varnothing$ καλείται *κλειστός όρος* ή *συνδυαστής*.

Στο Παράδειγμα 3.2.2 είδαμε τους συνδυαστές ω και Ω. Αργότερα θα συναντήσουμε και άλλους γνωστούς συνδυαστές.

Ορισμός 3.2.8. Για κάθε όρους M, N και μεταβλητή x με $M[x/N]$ συμβολίζουμε τον όρο που προκύπτει με *αντικατάσταση* της x (στις ελεύθερες εμφανίσεις της) από τον N. Τυπικά ο όρος $M[x/N]$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

1. Αν $M = x$ τότε $M[x/N] = N$.

[1] Να τονίσουμε ότι το σύμβολο $=$ υποδουλώνει συντακτική ισότητα.

[2] Ο φιλομαθής αναγνώστης μπορεί να ψάξει τους όρους α-conversion ή α-equivalence στη βιβλιογραφία.

2. Αν $M = y$, όπου y μεταβλητή διαφορετική της x, τότε $M[x/N] = y$.
3. Αν $M = (PQ)$, όπου P, Q όροι, τότε $M[x/N] = (P[x/N]Q[x/N])$.
4. Αν $M = (\lambda x.P)$, όπου P όρος, τότε $M[x/N] = (\lambda x.P)$.
5. Αν $M = (\lambda y.P)$, όπου y μεταβλητή διαφορετική της x και P όρος, τότε $M[x/N] = (\lambda y.P[x/N])$.

Για οικονομία χώρου, καθώς η αντικατάσταση είναι μία στοιχειώδης διαδικασία, θα μελετήσουμε ένα μόνο παράδειγμα. Η επιλογή όμως του παραδείγματος δεν είναι τυχαία γιατί όπως θα δούμε σε αυτήν την περίπτωση η αντικατάσταση είναι «προβληματική».

Παράδειγμα 3.2.9. Παρατηρήστε ότι αν x, y, z μεταβλητές τότε $(\lambda x.y)[y/z] = \lambda x.z$ (η σταθερή συνάρτηση) ενώ $(\lambda z.y)[y/z] = \lambda z.z$ (η ταυτοτική συνάρτηση). Συνεπώς κάνοντας την ίδια αντικατάσταση σε δύο όρους όπου σύμφωνα με όσα αναφέραμε πριν θα πρέπει να θεωρούνται ταυτόσημοι προκύπτουν δύο διαφορετικοί όροι. Ο τρόπος να το αποφύγουμε αυτό είναι ξανά η μετονομασία των δεσμευμένων μεταβλητών [1]: Προτού εφαρμόσουμε την αντικατάσταση θα αλλάξουμε στον δεύτερο όρο το όνομα της δεσμευμένης μεταβλητής z π.χ. σε x. Έτσι η αντικατάσταση θα μας οδηγήσει στον ίδιο όρο [2].

Ο λόγος που στο προηγούμενο παράδειγμα χρειάστηκε να προσθέσουμε παρενθέσεις στον όρο $\lambda x.y$ είναι ότι η αντικατάσταση έχει προτεραιότητα έναντι της αφαίρεσης και της εφαρμογής. Για παράδειγμα ο όρος $\lambda x.x[x/y]$ είναι ο όρος $\lambda x.y$ και όχι ο όρος $\lambda x.x$.

Ας έλθουμε τώρα στην ουσία του συμβολισμού και πώς αυτός φέρει εις πέρας τον υπολογισμό της συνάρτησης. Μπορούμε να φανταστούμε έναν όρο της μορφής $(\lambda x.M)N$ ως εφαρμογή της συνάρτησης που αναπαριστά ο όρος $\lambda x.M$ (όπου μεταβλητή είναι η x) πάνω στον όρο N. Η εφαρμογή αυτή στον λ-λογισμό υλοποιείται μέσω της αντικατάστασης $M[x/N]$.

Ορισμός 3.2.10. Κάθε όρος της μορφής $(\lambda x.M)N$ καλείται β-*redex*, ενώ ο όρος $M[x/N]$ καλείται *contractum* [3]. Ορίζουμε τη σχέση της β-*συστολής* μεταξύ δύο όρων M, N, συμβολισμός $M \to_\beta N$, αναδρομικά ως εξής:

1. Αν $M = x$, όπου x μεταβλητή, τότε δεν υπάρχει όρος N τέτοιος ώστε $M \to_\beta N$.
2. Αν $M = (PQ)$, όπου P, Q όροι, τότε $M \to_\beta N$ ανν
   - $N = (P'Q)$ και $P \to_\beta P'$ ή
   - $N = (PQ')$ και $Q \to_\beta Q'$ ή
   - $P = (\lambda x.R)$, όπου x μεταβλητή και R όρος, και $N = R[x/Q]$.
3. Αν $M = (\lambda x.P)$, όπου x μεταβλητή και P όρος, τότε $M \to_\beta N$ ανν $N = (\lambda x.P')$ και $P \to_\beta P'$.

Τέλος, η μεταβατική και ανακλαστική κλειστότητα της σχέσης $\to_\beta$ καλείται β-*αναγωγή* και συμβολίζεται με $\to_\beta^*$.

[1] Ούτε εδώ θα προβούμε σε τυπικότερη ανάλυση. Δείτε σχετική προηγούμενη υποσημείωση.

[2] Δεν είναι απαραίτητο να μετονομάσουμε τη z σε x. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον όρο z.

[3] Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τους ελληνικούς όρους β-*μειωτέο* και *μειωμένο*, *συνεσταλμένο* ή κάτι αντίστοιχο, όμως ακόμα και στην ελληνική βιβλιογραφία έχουν επικρατήσει οι αγγλικοί-λατινικοί όροι ελλείψει ικανοποιητικής μετάφρασης.

Αν θέλαμε να απλοποιήσουμε λίγο τον παραπάνω ορισμό θα λέγαμε επιγραμματικά ότι $M \to_\beta N$ ανν μέσα στον M υπάρχει κάποιο β-redex που το αντικαθιστούμε με το contractum του και καταλήγουμε στον όρο N. Επίσης $M \to_\beta^* N$ ανν υπάρχει μία ακολουθία όρων $P_1, P_2, \dots, P_n$ τέτοια ώστε $M = P_1 \to_\beta P_2 \to_\beta \cdots \to_\beta P_n = N$ ή απλά αν $N = M$.

Παράδειγμα 3.2.11. Έστω M όρος. Τότε:

- $(\lambda x.x)M \to_\beta x[x/M] = M$
- $(\lambda x.y)M \to_\beta y[x/M] = y$
- $(\lambda x.xx)\lambda x.xx \to_\beta (xx)[x/\lambda x.xx] = (\lambda x.xx)\lambda x.xx$

Παρατηρήστε ότι ο συνδυαστής Ω μέσω της β-συστολής μας δίνει τον ίδιο του τον εαυτό. Αυτό αποτελεί μία ένδειξη ότι μπορούν να υπάρξουν άπειρες β-αναγωγές. Ας δούμε ένα ακόμα ενδεικτικό παράδειγμα:

- $(\lambda x.xxy)\lambda x.xxy \to_\beta (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)y \to_\beta (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)yy \to_\beta \cdots$

Ο υπολογισμός διεξάγεται μέσα από την υλοποίηση της εφαρμογής μιας συνάρτησης πάνω σε μία άλλη. Αυτή η εφαρμογή στη γλώσσα του λ-λογισμού αναπαριστάται μέσω ενός β-redex και υλοποιείται μέσω της β-συστολής. Το αποτέλεσμα της β-συστολής (contractum) «αξιοποιείται» κατά αντίστοιχο τρόπο και συνεχίζεται ο υπολογισμός. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις στο παραπάνω παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι ο όρος M δεν περιέχει μέσα του κάποιο β-redex, οδηγούμαστε σε έναν όρο στον οποίο δεν μπορούμε πλέον να κάνουμε β-συστολή. Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε ότι ο υπολογισμός ολοκληρώθηκε και το αποτέλεσμά του ήταν η συνάρτηση που αναπαριστά ο τελικός όρος. Στις υπόλοιπες δύο περιπτώσεις οι όροι που δίνει η β-συστολή συνεχώς περιέχουν κάποιο β-redex και έτσι η β-αναγωγή θα είναι άπειρη. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο υπολογισμός δεν τερματίζει [1].

Ορισμός 3.2.12. Ένας όρος M βρίσκεται σε *β-κανονική μορφή* ανν δεν υπάρχει όρος N τέτοιος ώστε $M \to_\beta N$. Ισοδύναμα, ο M είναι σε β-κανονική μορφή ανν δεν περιέχει μέσα του (ως *υποόρο*) κάποιο β-redex.

Συνεπώς ο υπολογισμός τερματίζει ανν η β-αναγωγή οδηγήσει σε κάποιον όρο που βρίσκεται σε β-κανονική μορφή.

Όταν ο όρος περιέχει παραπάνω από ένα β-redex μπορούμε να κάνουμε β-συστολή σε οποιοδήποτε από αυτά. Θα ήταν μεγάλη αποτυχία του υπολογιστικού μας μοντέλου αν αυτή η αυθαίρετη επιλογή οδηγούσε σε διαφορετικές κανονικές μορφές.

Παράδειγμα 3.2.13. Στις ακόλουθες β-αναγωγές έχουμε υπογραμμίσει το β-redex που συστέλλουμε:

- $\underline{(\lambda x.(\lambda y.yx)z)x} \to_\beta \underline{(\lambda y.yx)z} \to_\beta zx$
- $(\lambda x.\underline{(\lambda y.yx)z})x \to_\beta \underline{(\lambda x.zx)x} \to_\beta zx$

Η μοναδικότητα της κανονικής μορφής (εφόσον αυτή υπάρχει) προκύπτει από το ακόλουθο Θεώρημα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.2.14 (Θεώρημα Church-Rosser)**.** Έστω όροι P, M, N τέτοιοι ώστε $P \to_\beta^* M$ και $P \to_\beta^* N$. Τότε υπάρχει όρος T τέτοιος ώστε $M \to_\beta^* T$ και $N \to_\beta^* T$ (δες Σχήμα 3.2.1).

[1] Θυμηθείτε ότι ο μη-τερματισμός είναι απαραίτητος για ένα υπολογιστικό μοντέλο αν θέλουμε να έχει την ίδια «ισχύ» με τα υπόλοιπα μοντέλα που μελετήσαμε. Αυτό οφείλεται στις υπολογίσιμες μερικές συναρτήσεις.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "{}^{*}_{\beta}"'] \arrow[dr, "{}^{*}_{\beta}"] & \\ M \arrow[dr, "{}^{*}_{\beta}"'] & & N \arrow[dl, "{}^{*}_{\beta}"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Σχήμα 3.2.1: *Σχηματική αναπαράσταση του Θεωρήματος Church-Rosser.*

Άμεσο είναι το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.15. Έστω όροι P, M, N τέτοιοι ώστε $P \to_\beta^* M$ και $P \to_\beta^* N$ και οι όροι M, N βρίσκονται σε κανονική μορφή. Τότε $M = N$ [1].

Ορισμός 3.2.16. Αν για τους όρους M, N ισχύει ότι $M \to_\beta^* N$ και ο N βρίσκεται σε κανονική μορφή τότε θα λέμε ότι *ο N είναι η κανονική μορφή του M*.

3.3 Ισοδυναμία λ-λογισμού με Αναδρομικές Συναρτήσεις

Θα ξεκινήσουμε βλέποντας πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε με λ-όρους συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση όπου έχουμε δύο μεταβλητές [2]. Θεωρήστε μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Για κάθε φιξαρισμένο x ορίζουμε τη συνάρτηση $f_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $f_x(y) = f(x, y)$. Για να αναπαραστήσουμε την f αρκεί να αναπαραστήσουμε τη συνάρτηση που «στέλνει» τα x στις συναρτήσεις f_x [3]. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της λ-αφαίρεσης θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε την f_x ως $F_x = \lambda y.f(x, y)$ και έπειτα την f ως $F = \lambda x.F_x = \lambda x.(\lambda y.f(x, y))$. Έτσι αν M, N όροι θα έχουμε $FMN = (\lambda x.(\lambda y.f(x, y)))MN \to_\beta (\lambda y.f(M, y))N \to_\beta f(M, N)$. Γενικότερα, θα αναπαριστούμε μία συνάρτηση με $n \geq 2$ μεταβλητές αναδρομικά φιξάροντας κάθε φορά και από μία μεταβλητή.

Παράδειγμα 3.3.1. Ας δούμε πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $f(x, y) = x$ και $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $g(x, y) = y$. Πρώτα αναπαριστούμε τη συνάρτηση $f_x(y) = x$ με τον όρο $F_x = \lambda y.x$ και έπειτα την f με τον όρο $F = \lambda x.F_x = \lambda x.(\lambda y.x)$. Αντίστοιχα θα αναπαραστήσουμε την g με τον όρο $G = \lambda x.(\lambda y.y)$.

Ορισμός 3.3.2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τους συνδυαστές c_n ως εξής:

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & \lambda fx.x \\ c_1 & = & \lambda fx.fx \\ & \vdots & \\ c_n & = & \lambda fx.f^n(x) \end{array}$$

όπου με $f^n(x)$ συμβολίζουμε τον όρο $\underbrace{f(f(\cdots(fx)\cdots))}_{n \text{ φορές}}$.

[1] Τυπικά οι δύο όροι δεν είναι απαραίτητο ότι θα ταυτίζονται. Υπάρχει το ενδεχόμενο κάποιες δεσμευμένες μεταβλητές να έχουν διαφορετικό όνομα.

[2] Για $n > 2$ μεταβλητές δουλεύουμε αναλόγως.

[3] Ορίζουμε δηλαδή την f ως συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$, όπου $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$.

Οι συνδυαστές αυτοί αναφέρονται συχνά στη βιβλιογραφία ως *αριθμοί του Church (Church Numerals)* και χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς. Παρατηρήστε ότι οι αριθμοί του Church βρίσκονται σε β-κανονική μορφή. Ο λόγος που επιλέξαμε να αναπαραστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς κατά αυτόν τον τρόπο φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.3.3. Έστω F λ-όρος και z μεταβλητή τότε:

$$c_n F z = (\lambda f x. f^n(x)) F z \to_\beta (\lambda x. F^n(x)) z \to_\beta F^n(z)$$

και, καθώς ο συμβολισμός $F^n(z)$ υποδουλώνει n εφαρμογές του συνδυαστή F πάνω στη z, ο συνδυαστής c_n στην ουσία εφαρμόζει επαναληπτικά τη συνάρτηση που αναπαριστά ο F πάνω στο αρχικό όρισμα z.

Ορισμός 3.3.4. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ καλείται λ-*ορίσιμη* ανν υπάρχει λ-όρος F τέτοιος ώστε για κάθε $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$:

1. Αν $f(n_1, n_2, \ldots, n_m) \neq \perp$ τότε $F c_{n_1} c_{n_2} \cdots c_{n_m} \to_\beta^* c_{f(n_1, n_2, \ldots, n_m)}$.
2. Αν $f(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \perp$ τότε ο $F c_{n_1} c_{n_2} \cdots c_{n_m}$ δεν ανάγεται σε όρο που είναι σε κανονική μορφή (η β-αναγωγή είναι άπειρη).

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δείξουμε ότι οι κλάσεις των αναδρομικών συναρτήσεων και των λ-ορίσιμων συναρτήσεων ταυτίζονται. Όπως φαντάζεσθε θα χρειαστεί να κάνουμε πρώτα κάποια προετοιμασία.

Παράδειγμα 3.3.5. Ας εξετάσουμε μερικές αριθμητικές συναρτήσεις που συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 2:

- Η $\mathsf{z}^1(n) = 0$ ορίζεται από τον όρο $Z = \lambda x. c_0$, καθώς για κάθε $n \in N$ ισχύει ότι:

$$Z c_n = (\lambda x. c_0) c_n \to_\beta c_0$$

- Η $\mathsf{s}(n) = n + 1$ ορίζεται από τον όρο $S = \lambda xyz. y(xyz)$, καθώς για κάθε $n \in N$ ισχύει ότι:

$$S c_n = (\lambda xyz. y(xyz)) c_n \to_\beta \lambda yz. y(c_n yz) \to_\beta^* \lambda yz. y(y^n(z)) = \lambda yz. y^{n+1}(z) = c_{n+1}$$

- Η συνάρτηση $\mathsf{plus}(m, n) = m + n$ ορίζεται από τον όρο $F_+ = \lambda xypq. xp(ypq)$, καθώς για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\begin{array}{rcl} F_+ c_m c_n & = & (\lambda xypq. xp(ypq)) c_m c_n \\ & \to_\beta & (\lambda ypq. c_m p(ypq)) c_n \\ & \to_\beta & \lambda pq. c_m p(c_n pq) \\ & \to_\beta^* & \lambda pq. p^m(p^n(q)) \\ & = & \lambda pq. p^{m+n}(q) \\ & = & c_{m+n} \end{array}$$

Στη συνέχεια θα χρειαστεί να αναπαραστήσουμε ζεύγη λ-όρων και να ορίσουμε συναρτήσεις που προβάλουν το ζεύγος στην πρώτη ή στη δεύτερη μεταβλητή.

Ορισμός 3.3.6. Έστω M, N όροι. Ορίζουμε τους ακόλουθους συνδυαστές:

$$\begin{aligned}\langle M, N\rangle &= \lambda z.zMN \text{ (Συδυαστής ζεύγους)}\\ True &= \lambda xy.x \text{ (Αληθής αληθοτιμή)}\\ False &= \lambda xy.y \text{ (Ψευδής αληθοτιμή)}\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι:

$$\langle M, N\rangle True = (\lambda z.zMN)\lambda xy.x \to_\beta (\lambda xy.x)MN \to_\beta^* M$$

και αντίστοιχα $\langle M, N\rangle False \to_\beta^* N$. Συνεπώς οι όροι $True, False$ αναπαριστούν τις *προβολές* στις δύο μεταβλητές του ζεύγους. Επιπλέον τον συνδυαστή του ζεύγους μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε (το γνωστό μας από την πληροφορική) if-then-else. Για λόγους παραστατικότητας συχνά θα γράφουμε $If(X)\ Then(M)\ Else(N)$ αντί για τον όρο $\langle M, N\rangle X$. Τέλος, ο όρος $False$ ταυτίζεται με τον όρο που έχουμε αντιστοιχίσει στον αριθμό 0.

Παράδειγμα 3.3.7. Θα κατασκευάσουμε έναν συνδυαστή $IsZero$ τέτοιον ώστε:

$$IsZero\ c_n = \begin{cases} True & \text{, αν } n = 0\\ False & \text{, αλλιώς}\end{cases}$$

Έστω $IsZero = \langle True\ False, True\rangle$, τότε:

$$IsZero\ c_0 \;=\; \langle True\ False, True\rangle False \to_\beta True$$

και για κάθε όρο $n > 0$:

$$\begin{aligned}IsZero\ c_n &= \langle True\ False, True\rangle c_n = (\lambda z.z(True\ False)True)c_n\\ &\to_\beta c_n(True\ False)True = (\lambda fx.f^n(x))(True\ False)True\\ &\to_\beta^* (True\ False)^n(True) = (True\ False)^{n-1}((True\ False)True)\\ &= (True\ False)^{n-1}(((\lambda xy.x)False)True)\\ &\to_\beta^* (True\ False)^{n-1}(False) = (True\ False)^{n-2}((True\ False)False)\\ &\to_\beta^* (True\ False)^{n-2}(False)\\ &\to_\beta \cdots \to_\beta False\end{aligned}$$

Θεώρημα 3.3.8. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ είναι ελαχιστικά αναδρομική ανν είναι λ-ορίσιμη.

Θα μοιράσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.8 σε μερικά επιμέρους Λήμματα και Προτάσεις.

Λήμμα 3.3.9. Για κάθε $m > 1$ οι συναρτήσεις:

(a) $\mathsf{s}(x) = x + 1$

(b) $\mathsf{z}^m(x_1, \ldots, x_m) = 0$

(c) $\mathsf{p}_i^m(x_1, \ldots, x_m) = x_i$, όπου $i \in [m]$

είναι λ-ορίσιμες.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι την s την ορίζει ο όρος S του Παραδείγματος 3.3.5, τις σταθερές μηδενικές συναρτήσεις οι όροι $Z_m = \lambda x_1 \cdots x_m . c_0$, και τις προβολές οι όροι $P_i^m = \lambda x_1 \cdots x_m . x_i$. □

Λήμμα 3.3.10. Έστω ότι οι συναρτήσεις $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ και $h_i : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $i \in [n]$ είναι λ-ορίσιμες, τότε και η $f(x_1, \ldots, x_m) = g(h_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_m))$ είναι λ-ορίσιμη.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι ο όρος G ορίζει την g και οι όροι $H_1, \ldots, H_n$ τις $h_1, \ldots, h_n$, τότε ο όρος: $F_f = \lambda x_1 \cdots x_m . G(H_1 x_1 \cdots x_m) \cdots (H_n x_1 \cdots x_m)$ ορίζει την f. □

Λήμμα 3.3.11. Έστω λ-ορίσιμες συναρτήσεις $g : \mathbb{N}^{m-1} \to \mathbb{N}$ και $h : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ που είναι λύση των εξισώσεων:

$$\begin{cases} f(0, x_1, \ldots, x_{m-1}) = g(x_1, \ldots, x_{m-1}) \\ f(y+1, x_1, \ldots, x_{m-1}) = h(f(y, x_1, \ldots, x_{m-1}), y, x_1, \ldots, x_{m-1}) \end{cases}$$

είναι λ-ορίσιμη.

Απόδειξη. Έστω ότι οι όροι G, H ορίζουν τις συναρτήσεις g, h αντίστοιχα. Θεωρούμε τον όρο:

$$Next = \lambda p . \langle S(pTrue), H(pFalse)(pTrue) x_1 \cdots x_{m-1} \rangle$$

όπου $\langle , \rangle, True, False$ οι συνδυαστές του Ορισμού 3.3.6 [1] και S ο συνδυαστής του Παραδείγματος 3.3.5. Παρατηρήστε ότι αν y μεταβλητή και M όρος τότε:

$$Next\langle y, M \rangle \to_\beta^* \langle Sy, HMyx_1 \cdots x_{m-1} \rangle$$

Συνεπώς, αν ο M αντιστοιχεί στην τιμή $f(y, x_1, \ldots, x_{m-1})$ τότε η δεύτερη συντεταγμένη του $Next\langle y, M \rangle$ αντιστοιχεί στην τιμή $f(y+1, x_1, \ldots, x_{m-1})$ [2]. Ο όρος:

$$F_f = \lambda y x_1 \cdots x_{m-1} . y Next \langle c_0, G x_1 \cdots x_{m-1} \rangle False$$

ορίζει την f, καθώς:

$$\begin{aligned} F_f c_y c_{x_1} \cdots c_{x_{m-1}} & \to_\beta^* \; c_y Next \langle c_o, G c_{x_1} \cdots c_{c_{x_{m-1}}} \rangle False \\ & \to_\beta \; Next^y (\langle c_o, G c_{x_1} \cdots c_{c_{x_{m-1}}} \rangle) False \end{aligned}$$

άρα έχουμε y επαναλήψεις, ξεκινώντας από το ζευγάρι $\langle 0, g(x_1, \ldots, x_{m-1}) \rangle$, και στο τέλος παίρνουμε τη δεύτερη προβολή, δηλαδή την τιμή $h(f(y, x_1, \ldots, x_{m-1}), y, x_1, \ldots, x_{m-1})$. □

Από τα παραπάνω Λήμματα προκύπτει άμεσα η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.12. Κάθε πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση είναι λ-ορίσιμη.

Υπάρχει ένας πιο γενικός τρόπος να ορίσουμε την αναδρομή. Θα χρειαστούμε ένα *Θεώρημα Σταθερού Σημείου.*

Θεώρημα 3.3.13 (Θεώρημα Σταθερού Σημείου)**.** Για κάθε λ-όρο F υπάρχει λ-όρος X τέτοιος ώστε $X \to_\beta^* FX$. Ο όρος X ονομάζεται *σταθερό σημείο του F.*

[1] Θυμηθείτε ότι οι συνδυαστές $True$ και $False$ δρουν σαν την πρώτη και τη δεύτερη προβολή πάνω στον $\langle , \rangle$.

[2] Η πρώτη χρησιμοποιείται για να «σημειώνουμε» τον αριθμό της επανάληψης.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον συνδυαστή $\Theta = (\lambda xy.y(xxy))\lambda xy.y(xxy)$. Θα δείξουμε ότι $\Theta F \to_\beta^* F(\Theta F)$, δηλαδή ο ΘF είναι σταθερό σημείο του F. Έστω $U = \lambda xy.y(xxy)$. Παρατηρούμε ότι:

$$\Theta F = (\lambda xy.y(xxy))UF \to_\beta^* F(UUF) = F(\Theta F)$$

□

Παρατήρηση 3.3.14. Παρατηρήστε ότι αν θέλουμε να ορίσουμε όρο F τέτοιον ώστε για κάθε όρο X να ισχύει ότι:

$$FX \to_\beta^* M(X,F)$$

όπου $M(X,F)$ ένας όρος στον οποίο εμφανίζεται ο όρος F (ο F δηλαδή ορίζεται μέσω μιας *αναδρομικής εξίσωσης* και αναπαριστά μια αναδρομική συνάρτηση) τότε αρκεί να ορίσουμε $F = \Theta J$, όπου $J = (\lambda fx.M(x,f))$, καθώς:

$$FX = \Theta JX \to_\beta^* J(\Theta J)X = JFX = (\lambda fx.M(x,f))FX \to_\beta^* M(X,F)$$

Λήμμα 3.3.15. Έστω λ-ορίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, $m \geq 1$, τέτοια ώστε για κάθε $i, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $g(i, x_1, \ldots, x_m) \neq \perp$, τότε η συνάρτηση $f(x_1, \ldots, x_m) = (\mu\ i \geq 0)[g(i, x_1, \ldots, x_m) = 0]$ είναι λ-ορίσιμη.

Απόδειξη. Έστω ότι ο όρος G ορίζει την g. Θεωρούμε τον όρο:

$$M(i,f) = \lambda x_1 \cdots x_m.If(IsZero\ (Gix_1 \cdots x_m))\ Then(i)\ Else(f(Si)x_1 \cdots x_m)$$

όπου $IsZero$ ο συνδυαστής του Παραδείγματος 3.3.7, S ο συνδυαστής του Παραδείγματος 3.3.5 και $If(\ )\ Then(\ )\ Else(\ )$ ο συνδυαστής που υλοποιεί το if-then-else. Τέλος, θεωρούμε τους συνδυαστές:

$$J = \lambda fi.M(i,f) \text{ και } F = \Theta J$$

και παρατηρούμε ότι για το πρώτο $i \in \mathbb{N}$ που είναι τέτοιο ώστε $g(i, n_1, \ldots, n_m) = 0$:

$$\begin{array}{lll}
Fc_0c_{n_1} \cdots c_{n_m} & = & \Theta Jc_0c_{n_1} \cdots c_{n_m} \\
& \to_\beta^* & M(c_0,F)c_{n_1} \cdots c_{n_m} \\
& = & (\lambda x_1 \cdots x_m.If(IsZero\ (Gc_0x_1 \cdots x_m))\ Then(c_0)\ Else(F(Sc_0)x_1 \cdots x_m))c_{n_1} \cdots c_{n_m} \\
& \to_\beta^* & If(IsZero\ (Gc_0c_{n_1} \cdots c_{n_m}))\ Then(c_0)\ Else(F(Sc_0)c_{n_1} \cdots c_{n_m}) \\
& \to_\beta^* & If(IsZero\ (Gc_0c_{n_1} \cdots c_{n_m}))\ Then(c_0)\ Else(Fc_1c_{n_1} \cdots c_{n_m}) \\
& \to_\beta^{*\ 1} & Fc_1c_{n_1} \cdots c_{n_m} \\
& \vdots & \\
& \to_\beta^* & Fc_ic_{n_1} \cdots c_{n_m} \\
& \to_\beta^* & If(IsZero\ (Gc_ic_{n_1} \cdots c_{n_m}))\ Then(c_i)\ Else(Fc_{i+1}c_{n_1} \cdots c_{n_m}) \\
& \to_\beta^* & If(IsZero\ c_0)\ Then(c_i)\ Else(Fc_{i+1}c_{n_1} \cdots c_{n_m}) \\
& \to_\beta^* & c_i
\end{array}$$

Φυσικά αν δεν υπάρχει τέτοιο i τότε η β-αναγωγή θα είναι άπειρη. Τέλος, ο όρος που ορίζει την f είναι ο $F_f = Fc_0$. □

[1] Αφού $g(0, x_1, \ldots, x_m) \neq 0$ ισχύει ότι $IsZero\ Gc_0c_{n_1} \cdots c_{n_m} \to_\beta^* False$.

Αν συνδυάσουμε το παραπάνω Λήμμα με την Πρόταση 3.3.12 συμπεραίνουμε ότι κάθε ολική ελαχιστικά αναδρομική συνάρτηση είναι λ-ορίσιμη. Τι συμβαίνει όμως με τις μερικές ελαχιστικά αναδρομικές συναρτήσεις; Για να δείξουμε ότι είνα λ-ορίσιμες θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.3.12, το Λήμμα 3.3.15 και την *κανονική μορφή του Kleene* που είδαμε στο Πόρισμα 2.5.3.

Απόδειξη Θεωρήματος 3.3.8. ($\Rightarrow$) Από το Πόρισμα 2.5.3 προκύπτει ότι υπάρχουν πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις $g : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ και $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε $f(x_1, \cdots, x_m) = h((\mu\, i \geq 0)[g(i, x_1, \ldots, x_m) = 0])$. Από την Πρόταση 3.3.12 υπάρχουν λ-όροι H, G που ορίζουν τις h, g αντίστοιχα. Τέλος, από το Λήμμα 3.3.10 έπεται ότι η f είναι λ-ορίσιμη [1].

($\Leftarrow$) Η απόδειξη ότι κάθε λ-ορίσιμη συνάρτηση είναι αναδρομική μοιάζει πολύ με την απόδειξη του αντιστρόφου του Θεωρήματος 2.5.1 (για αυτό θα την παραλείψουμε): Ξεκινάμε αντιστοιχίζοντας σε κάθε λ-όρο έναν φυσικό αριθμό. Έπειτα ορίζουμε μια πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση που με όρισμα τον αριθμό του όρου μας δίνει τον αριθμό του όρου που προκύπτει μετά από μία β-συστολή. Τέλος, ορίζουμε ελαχιστική αναδρομική συνάρτηση που με όρισμα τον αριθμό που αντιστοιχεί σε έναν λ-όρο μας επιστρέφει τον αριθμό της κανονικής μορφής του εφόσον αυτή υπάρχει. Αν δεν υπάρχει κανονική μορφή τότε η συνάρτηση δεν ορίζεται. □

Ασκήσεις

3.1 (★☆☆). (Λήμμα αντικατάστασης) Έστω μεταβλητές x, y, z και λ-όροι M, N, L τέτοιοι ώστε $BV(M) \cap FV(zNL) = \varnothing$. Δείξτε ότι:

- $M[y/L][x/N] = M[x/N][y/L[x/N]]$ αν $y \notin FV(N)$
- $M[y/L][x/N] = M[x/N][y/L]$ αν $y \notin FV(N)$ και $x \notin FV(L)$
- $M[x/L][x/N] = M[x/[L[x/N]]]$

3.2 (★★☆). Έστω λ-όροι M, M', N, N' και μεταβλητή x. Εξετάστε αν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $N \to_\beta N'$ τότε $M[x/N] \to_\beta M[x/N']$.
2. Αν $M \to_\beta^* M'$ και $N \to_\beta^* N'$ τότε $M[x/N] \to_\beta^* M'[x/N']$.

3.3 (★★☆). Βρείτε λ-όρους M, N με την ιδιότητα ότι κανένας τους δεν έχει β-κανονική μορφή αλλά ο λ-όρος MN έχει.

3.4 (★☆☆). Βρείτε λ-όρο που ορίζει τη συνάρτηση $\mathsf{mult}(m, n) = m \cdot n$.

3.5 (★☆☆). Βρείτε λ-όρο που ορίζει τη συνάρτηση $\mathsf{exp}(m, n) = m^n$.

3.6 (★★☆). Βρείτε λ-όρο που ορίζει τη συνάρτηση $\mathsf{fact}(n) = n!$.

[1] Παρατηρήστε ότι καθώς η g είναι πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση θα είναι ολική συνάρτηση. Συνεπώς δεν υπάρχει πρόβλημα στην εφαρμογή του Λήμματος 3.3.15. Αν η f είναι μερική συνάρτηση αυτό θα οφείλετε στο γεγονός ότι δεν θα υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $g(i, n_1, \ldots, n_m) = 0$.

3.7 (★★★). Βρείτε λ-όρο που ορίζει τη συνάρτηση $\mathsf{pd}(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } n = 0 \\ n-1 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$.

3.8 (★☆☆). Βρείτε λ-όρο που ορίζει τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } x = 0 \\ \perp & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$.

3.9 (★☆☆). Έστω $M_1, \ldots, M_n$, $n \geq 2$ λ-όροι. Ορίστε συνδυαστή $\langle M_1, \ldots, M_n \rangle$ που αναπαριστά τη n-άδα τον όρων και συνδυαστή X^n_i τέτοιο ώστε $\langle M_1, \ldots, M_n \rangle X^n_i \to^*_\beta M_i$, για $1 \leq i \leq n$.

3.10 (★★★). Αποδείξτε το Λήμμα 3.3.11 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.3.13.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ-ΙΕΡΑΡΧΙΑ CHOMSKY

Στα Κεφάλαιο 1 ασχοληθήκαμε αρκετά με τις γλώσσες ενός πεπερασμένου αλφαβήτου. Το ενδιαφέρον μας στράφηκε στο κατά πόσον μπορούμε να αποφανθούμε αν μια λέξη ανήκει σε μία υπό εξέταση γλώσσα. Η ύπαρξη μίας TM που μπορεί να αναγνωρίσει ή να αποφασίσει μία γλώσσα με λίγη φαντασία μπορεί να ιδωθεί σαν ένας (πεπερασμένος) ορισμός μίας (πιθανώς άπειρης) γλώσσας.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ακόμα έναν φορμαλισμό, που παρόλο του ότι δεν είναι «μηχανιστικός» όπως οι TM, μπορεί επίσης να χαρακτηρίσει (με πεπερασμένο τρόπο) μία γλώσσα. Θα ερευνήσουμε το αν υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο κανόνων που αν συνδυαστούν μεταξύ τους, ένα πεπερασμένο πλήθος φορών, μπορούν να παράξουν οποιαδήποτε λέξη της γλώσσας. Όπως κάνουμε και στις «φυσικές γλώσσες» [1] θα ορίσουμε μία *Γραμματική*, ένα σύνολο κανόνων δηλαδή που διέπει ποιες λέξεις επιτρέπονται και ποιες όχι [2]. Θα δείξουμε ότι οι γλώσσες για τις οποίες υπάρχουν γραμματικές (χωρίς περιορισμούς) που τις παράγουν είναι ακριβώς οι αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες. Αργότερα θα θέσουμε περιορισμούς στους κανόνες μίας γραμματικής και έτσι θα ορίσουμε νέες κλάσεις γλωσσών που θα αποτελέσουν την *Ιεραρχία Chomsky*.

Ως «παράπλευρο αποτέλεσμα» θα δώσουμε μέσα από τον φορμαλισμό των γραμματικών έναν ακόμα ορισμό των υπολογίσιμων συναρτήσεων.

4.1 Γενικές γραμματικές

Ορισμός 4.1.1. *Γενική γραμματική (ή γραμματική χωρίς περιορισμούς ή γραμματική Τύπου 0 ή απλά γραμματική)* είναι μία τετράδα $G = (V, \Sigma, R, S)$ όπου:

1. V είναι ένα πεπερασμένο αλφάβητο
2. $\Sigma \subseteq V$ είναι το σύνολο των *τερματικών συμβόλων*
3. $V \setminus \Sigma$ είναι το σύνολο των *μη-τερματικών συμβόλων*
4. $S \in V \setminus \Sigma$ είναι το *αρχικό σύμβολο*

[1] Όπως για παράδειγμα στα ελληνικά.

[2] Για παράδειγμα, σύμφωνα με τη γραμματική της ελληνικής γλώσσας, η λέξη «καλλιτέχνης» είναι αποδεκτή ενώ η λέξη «καλητέχνης» επιεικώς απαράδεκτη.

5. $R \subseteq V^*(V \setminus \Sigma)V^* \times V^*$ [1] είναι το πεπερασμένο *σύνολο κανόνων παραγωγής*

Συμβολισμός 4.1.2. Έστω γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$. Αν $(u, v) \in R$ θα γράφουμε $u \to v$ καθώς είναι πιο παραστατικό.

Ένας κανόνας $u \to v \in R$ μας επιτρέπει να μετατρέψουμε τη λέξη u στη λέξη v. Βασική προϋπόθεση όμως (σύμφωνα με το 5. του Ορισμού 4.1.1) είναι η λέξη u να περιέχει κάποιο μη-τερματικό σύμβολο. Τους κανόνες παραγωγής, όπως θα δούμε στον ακόλουθο ορισμό, μπορούμε να τους εφαρμόσουμε σε οποιαδήποτε υπολέξη.

Ορισμός 4.1.3. Έστω γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ και $u, v \in V^*$. Ορίζουμε τις σχέσεις $\Rightarrow_G, \Rightarrow_G^* \subseteq V^* \times V^*$ ως εξής:

- $u \Rightarrow_G v$ ανν υπάρχουν $w_1, w_2 \in V^*$ και κανόνας $u' \to v' \in R$ έτσι ώστε $u = w_1 u' w_2$ και $v = w_1 v' w_2$.
- $\Rightarrow_G^*$ είναι η μεταβατική και ανακλαστική κλειστότητα της $\Rightarrow_G$.

Αν $u \Rightarrow_G^* v$ θα λέμε ότι η u *παράγει τη* v *στην* G.

«Αφετηρία» όλων το παραγωγών λέξεων που θα μας απασχολήσουν θα είναι το αρχικό σύμβολο S. Επιπλέον, από όλες τις δυνατές παραγωγές ενδιαφερόμαστε μόνο για αυτές που «καταλήγουν» σε μία λέξη που απαρτίζεται αποκλειστικά από τερματικά σύμβολα. Παρατηρήστε ότι, εφόσον το αριστερό μέρος των κανόνων απαιτεί να υπάρχει στη λέξη που θα μετασχηματίσουμε μη-τερματικό σύμβολο, όταν φτάσουμε σε λέξη που περιέχει μόνο τερματικά σύμβολα η παραγωγή έχει «τελειώσει» (δεν μπορούμε πλέον να εφαρμόσουμε κάποιον κανόνα δηλαδή). Φυσικά υπάρχει η περίπτωση να μην μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιον κανόνα ενώ η τελευταία λέξη της παραγωγής περιέχει μη-τερματικά σύμβολα (η παραγωγή «κολλάει») ή ακόμα μία παραγωγή να συνεχίζεται επ' άπειρον [2].

Σε κάθε γραμματική αντιστοιχούμε μία γλώσσα σύμφωνα με τον ορισμό που ακολουθεί.

Ορισμός 4.1.4. Έστω γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$. Η γλώσσα που *παράγει η* G είναι η γλώσσα:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$ [3]

Αν $w \in L(G)$ θα λέμε ότι η w *παράγεται από την* G.

Ορισμός 4.1.5. Δύο γραμματικές G_1, G_2 είναι *ισοδύναμες* ανν $L(G_1) = L(G_2)$.

Οι ορισμοί αυτοί θα γίνουν ευκολότερα κατανοητοί μέσω μερικών παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 4.1.6. Ας θεωρήσουμε τη γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ με $V = \{0, 1, S\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ και $R = \{S \to 0S1, S \to \epsilon\}$ [4]. Μία *παραγωγή από την* G είναι η ακόλουθη:

$$S \Rightarrow_G 0S1 \Rightarrow_G 00S11 \Rightarrow_G 000S111 \Rightarrow_G 000111$$

όπου στις τρεις πρώτες παραγωγές εφαρμόζουμε τον κανόνα $S \to 0S1$ και στην τέταρτη τον κανόνα $S \to \epsilon$. Παρατηρήστε ότι $L(G) = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ [5].

[1] $V^*(V \setminus \Sigma)V^* = \{w \in V^* \mid \exists w_1, w_2 \in V^* \; \exists a \in V \setminus \Sigma \; (w = w_1 a w_2)\}$

[2] Όπως και στις TM το πρώτο είδος κολλήματος δεν είναι ουσιαστικό καθώς θα μπορούσε να αποφευχθεί αν προσθέταμε κατάλληλους κανόνες στη γραμματική (π.χ. τους κανόνες $a \to a$ για κάθε σύμβολο $a \in V \setminus \Sigma$).

[3] Προσέξτε ότι η w αποτελείται μόνο από τερματικά σύμβολά του V^*.

[4] Παρατηρήστε ότι έχουμε μη-ντετερμινισμό στους κανόνες της γραμματικής καθώς το S μπορεί να μετατραπεί είτε σε $0S1$ είτε σε ϵ.

[5] Μπορείτε για εξάσκηση να αποδείξετε αυτόν τον ισχυρισμό τυπικά.

Παράδειγμα 4.1.7. Έστω γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ με $V = \{A, B, C, T_a, T_b, T_c, S\} \cup \Sigma$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ και

$$
\begin{array}{rl|l}
R = \{ & S \to ABCS, & CT_c \to T_b c, \\
& S \to T_c, & BT_b \to T_b b, \\
& CA \to AC, & BT_b \to T_a b, \\
& BA \to AB, & AT_a \to T_a a, \\
& CB \to BC, & T_a \to \epsilon\} \\
& CT_c \to T_c c, &
\end{array}
$$

Μία *παραγωγή από την* G είναι η ακόλουθη [1]:

$$
\begin{array}{rl}
\underline{S} \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } S \to ABCS) \\
ABC\underline{S} \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } S \to ABCS) \\
ABCABC\underline{S} \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } S \to ABCS) \\
ABCABCABC\underline{S} \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } S \to T_c) \\
AB\underline{CA}BCABCT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CA \to AC) \\
A\underline{BA}CBCABCT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } BA \to AB) \\
AAB\underline{CB}CABCT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CB \to BC) \\
AABBC\underline{CA}BCT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CA \to AC) \\
AABB\underline{CA}CBCT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CA \to AC) \\
AAB\underline{BA}CCBCT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } BA \to AB) \\
AA\underline{BA}BCCBCT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } BA \to AB) \\
AAABBC\underline{CB}CT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CB \to BC) \\
AAABB\underline{CB}CCT_c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CB \to BC) \\
AAABBBCC\underline{CT_c} \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CT_c \to T_c c) \\
AAABBBC\underline{CT_c}c \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CT_c \to T_c c) \\
AAABBB\underline{CT_c}cc \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } CT_c \to T_b c) \\
AAABB\underline{BT_b}ccc \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } BT_b \to T_b b) \\
AAAB\underline{BT_b}bccc \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } BT_b \to T_b b) \\
AAA\underline{BT_b}bbccc \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } BT_b \to T_a b) \\
AA\underline{AT_a}bbbccc \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } AT_a \to T_a a) \\
A\underline{AT_a}abbbccc \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } AT_a \to T_a a) \\
\underline{AT_a}aabbbccc \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } AT_a \to T_a a) \\
\underline{T_a}aaabbbccc \Rightarrow_G & (\text{εφαρμόζουμε τον κανόνα } T_a \to \epsilon) \\
aaabbbccc &
\end{array}
$$

Παρατηρήστε ότι αν εφαρμόσουμε τους κανόνες με διαφορετική σειρά θα καταλήξουμε σε μία λέξη στην οποία, ναι μεν δεν μπορεί να εφαρμοστεί κάποιος κανόνας, αλλά θα περιέχει μη-τερματικά σύμβολα. Η γλώσσα που παράγει αυτή η γραμματική είναι η $L(G) = \{a^n b^n c^n \in \{a, b, c\}^* \mid n \geq 1\}$.

[1] Υπογραμίζουμε την υπολέξη που αλλάζει σε κάθε βήμα.

Κωδικοποίηση γραμματικών στο $\{0,1\}$

Έστω γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ με $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \cup \Sigma$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, όπου (χωρίς βλάβη της γενικότητας) $\Sigma = \{0,1\}$ και $v_1 = S, v_2 = 0, v_3 = 1$. Έστω επίσης ότι $R = \{x_1 \to y_1, x_2 \to y_2, \ldots, x_l \to y_l\}$, για κάποιο $l \in \mathbb{N}$. Μία γραμματική (αυτής της μορφής [1]) χαρακτηρίζεται πλήρως από το σύνολο των κανόνων της, συνεπώς προκειμένου να κωδικοποιήσουμε την G αρκεί να κωδικοποιήσουμε το R. Πρώτα το κωδικοποιούμε σε μία λέξη του $V \cup \{\to, ;\}$ ως εξής:

$$\langle R \rangle_{V \cup \{\to,;\}} = x_1 \to y_1; x_2 \to y_2; \;\cdots; x_l \to y_l$$

Έπειτα κωδικοποιούμε τα σύμβολα του $V \cup \{\to, ;\}$ στο $\{0,1\}$:

$$\begin{array}{rcl} \langle 0 \rangle_{\{0,1\}} & = & 01 \\ \langle 1 \rangle_{\{0,1\}} & = & 011 \\ \langle \to \rangle_{\{0,1\}} & = & 0111 \\ \langle ; \rangle_{\{0,1\}} & = & 01111 \\ \langle v_i \rangle_{\{0,1\}} & = & 0\underbrace{1\cdots1}_{i+4 \text{ φορές}}\text{, για κάθε } i \in [n] \end{array}$$

Επομένως μπορούμε να κωδικοποιήσουμε την G στη λέξη $\langle \langle R \rangle_{V \cup \{\to,;\}} \rangle_{\{0,1\}}$. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $\langle G \rangle$ αντί για $\langle G \rangle_{\{0,1\}}$.

Οι γενικές γραμματικές αποτελούν το τέταρτο (και τελευταίο) «υπολογιστικό μοντέλο» που θα δούμε σε αυτές τις σημειώσεις [2]. Και αυτό είναι ισοδύναμο με τις TM. Η απόδειξη οφείλεται στον Noam Chomsky.

Θεώρημα 4.1.8 (Chomsky). Μία γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη ανν υπάρχει γενική γραμματική G που την παράγει.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω γλώσσα $L \in \mathsf{RE}$ και TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ που την ημι-αποφασίζει. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας [3] ότι:

1. Η M είναι ντετερμινιστική και μονοταινιακή.
2. Η M είτε τερματίζει στην $q_{\text{ναι}}$ είτε κολλάει [4].
3. Η M πριν τερματίσει σβήνει την ταινία της, δηλαδή το καταληκτικό στιγμιότυπο είναι πάντα το $\triangleright q_{\text{ναι}}$.
4. Η κατάσταση «σβησίματος» είναι η $q_\sigma \in Q$ και η M σβήνει την ταινία από το τέλος (πρώτο σύμβολο $\sqcup$) προς την αρχή ($\triangleright$).

[1] Αν δεν ξέραμε εξαρχής ποια είναι τα τερματικά σύμβολα της γραμματικής, κωδικοποιώντας απλά τους κανόνες της και διαβάζοντας την κωδικοποίηση, δεν θα μπορούσαμε να ανακτήσουμε αυτήν την πληροφορία.

[2] Δεν μετράμε φυσικά τις επεκτάσεις των TM που είδαμε στο Κεφάλαιο 1 και θα δούμε και στο Κεφάλαιο 8, καθώς και τους περιορισμούς των TM που θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο.

[3] Υπο την έννοια ότι αν υπάρχει TM που ημι-αποφασίζει την L τότε υπάρχει και TM που την ημι-αποφασίζει με τις επιπλέον ιδιότητες που ζητάμε.

[4] Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε αν αφαιρέσουμε από την συνάρτηση μεταβάσεων όλες τις μεταβάσεις στην κατάσταση $q_{\text{όχι}}$.

Θεωρούμε τη γραμματική $G_M = (V, \Sigma, R, S)$ [1] όπου $V = \Gamma \cup Q \cup \{S\}$ [2] και:

$$\begin{aligned} R = \{ & S \to \triangleright q_{\text{ναι}} \sqcup \} \cup \\ & \cup \{ \triangleright q_{\text{ναι}} \to q_\sigma \triangleright \} \cup \\ & \cup \{ bp \to qa \mid \exists q, p \in Q \setminus \{q_\sigma\} \ \exists a, b \in \Gamma \ (\delta(q,a) = (p, b, \Delta)) \} \cup \\ & \cup \{ p * b \to *qa \mid \exists q, p \in Q \setminus \{q_\sigma\} \ \exists a, b \in \Gamma \ (\delta(q,a) = (p, b, \mathrm{A})), \text{ για } * \in \Gamma \} \cup \\ & \cup \{ q_\sigma * \sqcup \to *qa \mid \exists q \in Q \ \exists a \in \Gamma \ (\delta(q,a) = (q_\sigma, \sqcup, \mathrm{A})), \text{ για } * \in \Gamma \} \cup \\ & \cup \{ \triangleright q_0 \to \epsilon, \sqcup \to \epsilon \} \end{aligned}$$

Έστω $w \in \Sigma^*$ είσοδος της M. Αντιστοιχούμε κάθε στιγμιότυπο $\triangleright w_1 q w_2$ της $M(w)$ (όπου $w_1, w_2 \in \Gamma$ και $q \in Q$) στη λέξη $\triangleright w_1 q w_2 \sqcup \in (\Gamma \cup Q)^*$ και, έχοντας προσθέσει στο R κανόνες που εφαρμόζουν της μεταβάσεις της δ αντίστροφα [3], προσομοιώνουμε τη λειτουργία της $M(w)$ από το τέλος (το στιγμιότυπο $\triangleright q_{\text{ναι}}$ δηλαδή) προς την αρχή (το στιγμιότυπο $\triangleright q_0 w$). Παρατηρήστε ότι $M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$ ανν $S \Rightarrow^*_{G_M} w$, άρα $L(G_M) = L(M) = L$.

($\Leftarrow$) Έστω γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$. Υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $\Sigma = \{0, 1\}$. Θα ορίσουμε μία NTM $N_G = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$, με $V \subseteq \Gamma$, που θα ημι-αποφασίζει την $L(G)$. Η N_G έχει τρεις ταινίες: Η πρώτη περιέχει τη λέξη εισόδου (και δεν μεταβάλλεται ποτέ), η δεύτερη είναι η ταινία εργασίας και η τρίτη περιέχει την κωδικοποίηση της G (δηλαδή τη λέξη $\langle G \rangle$).

Η N_G ελέγχει αν είναι δυνατό να παραχθεί η είσοδος $w \in \Sigma^*$ σύμφωνα με τους κανόνες της G. Στην αρχή του υπολογισμού η δεύτερη ταινία περιέχει το σύμβολο S και σε κάθε βήμα κάνει τα ακόλουθα:

1. Είτε επιλέγει μη-ντετερμινιστικά έναν κανόνα από το R, είτε ελέγχει αν η δεύτερη ταινία ταυτίζεται με την πρώτη.
2. (α΄) Αν επιλέξει τον κανόνα $u \to v \in R$, η N_G:
   i. Σαρώνει τη δεύτερη ταινία (από τα αριστερά προς τα δεξιά),
   ii. σταματάει μη-ντετερμινιστικά σε ένα σύμβολο,
   iii. ελέγχει αν τα επόμενα $|u|$ σύμβολα ταυτίζονται με τη u:
      - αν ταυτίζονται τα αντικαδιστά με τη v (δημιουργώντας χώρο ή «διαγράφοντας» κενά όταν χρειαστεί),
      - αν δεν ταυτίζονται η N_G «κολλάει».

   (β΄) Αν επιλέξει να ελέγξει αν η δεύτερη ταινία ταυτίζεται με την πρώτη:
      - Αν όντως ταυτίζονται η N_G πάει στην $q_{\text{ναι}}$ και τερματίζει.
      - Αν δεν ταυτίζονται η N_G «κολλάει».

Εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχει παραγωγή της w από την G ανν υπάρχει κλάδος μη-ντετερμινισμού της $N_G(w)$ που καταλήγει στην $q_{\text{ναι}}$, άρα $L(M_G) = L(G)$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε μη-ντετερμινιστική TM k-ταινιών υπάρχει ισοδύναμη μονοταινιακή και ντετερμινιστική TM [4]. □

[1] Προσέξτε ότι το σύνολο των τερματικών συμβόλων της G_M είναι το αλφάβητο εισόδου της M.

[2] Θεωρούμε τις καταστάσεις σύμβολα. Για να είμαστε τυπικοί θα πρέπει επιπλέον να υποθέσουμε ότι τα σύμβολά του Q δεν εμφανίζονται στο Γ.

[3] Αν $C_1 \vdash_M C_2$ για δύο στιγμιότυπα C_1, C_2 της $M(w)$ τότε, σύμφωνα με τους κανόνες της G_M, έχουμε $C_2 \Rightarrow_{G_M} C_1$ όπου πλέον τα C_1, C_2 τα βλέπουμε ως λέξεις του $(\Gamma \cup Q)^*$.

[4] Αφήνεται ως άσκηση.

Οι γενικές γραμματικές πέρα από το να παράγουν λέξεις μπορούν να υπολογίσουν και συναρτήσεις.

Ορισμός 4.1.9. Η γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ *υπολογίζει τη συνάρτηση* $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ανν για κάθε $x, y \in \Sigma^*$:

$$SxS \Rightarrow_G^* y \Leftrightarrow f(x) = y$$

και αν $x \notin \mathsf{dom}(f)$ τότε δεν υπάρχει $y \in \Sigma^*$ τέτοιο ώστε $SxS \Rightarrow_G^* y$.

Μία συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ καλείται *γραμματικά υπολογίσιμη* ανν υπάρχει γενική γραμματική που την υπολογίζει [1].

Παράδειγμα 4.1.10. Η συνάρτηση $f : \{1\}^* \to \{1\}^*$ με $f(x) = xx$ είναι γραμματικά υπολογίσιμη καθώς η γραμματική $G = (\{1, S\}, \{1\}, S, R)$, όπου $R = \{S1 \to 11S, SS \to \epsilon\}$, την υπολογίζει.

Παράδειγμα 4.1.11. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $f(x) = 3x + 5$ είναι γραμματικά υπολογίσιμη, αν χρησιμοποιήσουμε το μοναδιαίο σύστημα αρίθμησης (δες σελίδα 61), καθώς η γραμματική $G = (\{1, S\}, \{1\}, S, R)$, όπου $R = \{S1 \to 111S, S1S \to 111111\}$, την υπολογίζει.

Αντίστοιχα με το Θεώρημα 4.1.8 μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα (τέταρτος ορισμός υπολογίσιμων συναρτήσεων).

Θεώρημα 4.1.12. Μία συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ είναι υπολογίσιμη ανν είναι γραμματικά υπολογίσιμη.

4.2 Γραμματικές με συμφραζόμενα

Ορισμός 4.2.1. *Γραμματική με συμφραζόμενα (ή γραμματική Τύπου 1)* είναι μία γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ όπου για κάθε κανόνα $u \to v \in R$ ισχύει ότι $|u| \leq |v|$.

Το ακόλουθο Θεώρημα αναφέρεται χωρίς απόδειξη (δες Άσκηση 4.11).

Θεώρημα 4.2.2. Για κάθε γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ με συμφραζόμενα υπάρχει ισοδύναμη γραμματική $G' = (V', \Sigma, R', S)$, όπου $V \subseteq V'$ και κάθε κανόνας $u \to v \in R'$ έχει τη μορφή $w_1 A w_2 \to w_1 w w_2$, όπου $w, w_1, w_2 \in V'^*$, $A \in V' \smallsetminus \Sigma$ και $w \neq \epsilon$ [2].

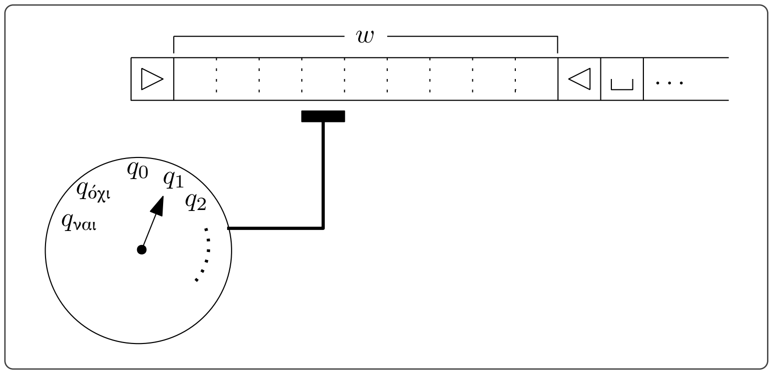
Ορισμός 4.2.3. Μία γλώσσα $L \subseteq \{0, 1\}^*$ ονομάζετε *γλώσσα με συμφραζόμενα* ανν υπάρχει γραμματική με συμφραζόμενα που την παράγει. Συμβολίζουμε το σύνολο των γλωσσών με συμφραζόμενα ως CS.

Σημείωση 4.2.4. Παρατηρήστε ότι σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2.1 οι γλώσσες του CS δεν μπορούν να περιέχουν την κενή λέξη. Αυτό θα μας δημιουργίσει πρόβλημα στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.8 και στην Ιεραρχία Chomsky (Παράγραφος 4.5), όπου θα ιεραρχήσουμε (σύμφωνα με τη σχέση του συνολοθεωρητικού εγκλεισμού) τις κλάσεις των γλωσσών που παράγονται από τους τύπους γραμματικών που θα δούμε στις Παραγράφους 4.2, 4.3 και 4.4. Ένας τρόπος να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα είναι να επιτρέψουμε στον Ορισμό 4.2.1 τον κανόνα $S \to \epsilon$, όταν το S δεν εμφανίζεται στο δεξιό μέρος κάποιου κανόνα [3].

[1] Μια βασική ιδιότητα που θα πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι η σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι κανόνες πάντα τελικά οδηγεί στην ίδια ακριβώς λέξη (την τιμή της συνάρτησης). Αυτή η ιδιότητα συνήθως αναφέρεται ως ιδιότητα Church-Rosser.

[2] Με λόγια: Το σύμβολο A όταν έχει συμφραζόμενα w_1 και w_2 μετατρέπεται στη λέξη w.

[3] Έτσι όλες οι παραγωγές λέξεων από τη γραμματική θα αυξάνουν το μήκος της λέξης, εκτός φυσικά από την παραγωγή της κενής λέξης



Σχήμα 4.2.1: *Σχηματική αναπαράσταση ενός LBA.*

Παράδειγμα 4.2.5. Η γλώσσα $L = \{a^n b^n c^n \in \{a,b,c\}^* \mid n \geq 1\}$ [1] του Παραδείγματος 4.1.7 είναι γλώσσα με συμφραζόμενα [2], καθώς εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ με $V = \{B, C, T_b, T_c, S\} \cup \Sigma$, όπου $\Sigma = \{a, b, c\}$, και

$$\begin{array}{rl|l} R = \{ & S \to aBC, & T_bC \to BC, \\ & S \to aSBC, & aB \to ab, \\ & CB \to CT_c, & bB \to bb, \\ & CT_c \to T_bT_c, & bC \to bc, \\ & T_bT_c \to T_bC, & cC \to cc\} \end{array}$$

την παράγει [3].

Ορισμός 4.2.6. *Γραμμικά φραγμένο αυτόματο (LBA)* είναι μία NTM $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ναι}, q_{όχι})$ με $\triangleleft \in \Gamma \setminus \Sigma$ όπου το $\triangleleft$ είναι ένα σύμβολο που σηματοδοτεί το τέλος της λέξης εισόδου (δες Σχήμα 4.2.1) και η N δεν μπορεί να κινήσει την κεφαλή δεξιότερα από το σύμβολο $\triangleleft$ ούτε να γράψει πάνω σε αυτό [4].

Ορίζοντας τον υπολογισμό και κατ' επέκταση την αποδοχή και την απόρριψη μίας λέξεις αντίστοιχα με τον Ορισμό 1.3.8 μπορούμε να ορίσουμε τη γλώσσα που αναγνωρίζει ένα LBA.

Παρατήρηση 4.2.7. Έστω LBA $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ναι}, q_{όχι})$. Χρησιμοποιώντας σύμβολα που αντιστοιχούν σε λέξεις μήκους το πολύ $c \in \mathbb{N}$ του Γ^* και τροποποιώντας κατάλληλα τη δ μπορούμε να

[1] Η L ορίζεται σαν γλώσσα του $\{a, b, c\}$ για λόγους απλότητας. Θα μπορούσαμε να την ορίσουμε στο $\{0, 1\}$ παραδείγματος χάρη ως εξής: $L = \{(01)^n(011)^n(0111)^n \in \{0,1\}^* \mid n \geq 1\}$.

[2] Παρατηρήστε ότι η γραμματική του Παραδείγματος 4.1.7 δεν είναι γραμματική με συμφραζόμενα καθώς περιέχει τον κανόνα $T_a \to \epsilon$.

[3] Και η γραμματική με συμφραζόμενα $G = (V, \Sigma, R, S)$ με $V = \{B, C, S\} \cup \Sigma$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, και

$$\begin{array}{rl|l} R = \{ & S \to aBC, & bB \to bb, \\ & S \to aSBC, & bC \to bc, \\ & CB \to BC, & cC \to cc\} \\ & aB \to ab, & \end{array}$$

την παράγει μόνο που η γραμματική του Παραδείγματος 4.2.5 έχει την «κανονική μορφή» του Θεωρήματος 4.2.2.

[4] Συνεπώς η N έχει πρόσβαση μόνο στο κομμάτι της ταινίας που περιέχει την είσοδο.

«μεγαλώσουμε» τη διαθέσιμη «μνήμη» [1] από $|w|$, όπου $w \in \Sigma^*$ η είσοδος, σε $c \cdot |w|$.

Τα LBA αποτελούν έναν περιορισμό των TM. Αυτός ο περιορισμός είναι ουσιαστικός καθώς (ακόμα και διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι) τα LBA δεν είναι το ίδιο «ισχυρά» με τις TM. Για να το αποδείξουμε όμως αυτό θα χρειαστεί (για μία ακόμα φορά) να κάνουμε διαγωνιοποίηση (δες Θεώρημα 4.2.11).

Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύει ότι οι γλώσσες που αναγνωρίζονται από τα LBA είναι ακριβώς οι γλώσσες με συμφραζόμενα (η απόδειξή του αφήνεται ως Άσκηση).

Θεώρημα 4.2.8. Μία γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ είναι γλώσσα με συμφραζόμενα ανν υπάρχει LBA που την αναγνωρίζει [2].

Αν εξετάσουμε προσεκτικά την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.8 θα καταλήξουμε στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.9. Έστω $L \in \mathsf{CS}$ γλώσσα με συμφραζόμενα και έστω ότι η γραμματική G Τύπου 1 την παράγει. Υπάρχει TM $M_{G \to LBA}$ που δέχεται σαν είσοδο $\langle G \rangle$ και επιστρέφει $\langle N_G \rangle$ όπου N_G το LBA που αναγνωρίζει την L.

Δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να αποδείξει κανείς ότι τα LBA είναι TM που «τερματίζουν πάντα» (ή τουλάχιστον, μπορούμε να εξακριβώσουμε πότε «κολλάνε», Άσκηση 4.14), επομένως μία γλώσσα με συμφραζόμενα είναι αναδρομική γλώσσα. Αυτός ο ισχυρισμός (Θεώρημα 4.2.10) μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς τη χρήση LBA (δες Άσκηση 4.13).

Θεώρημα 4.2.10. Κάθε γλώσσα με συμφραζόμενα είναι αναδρομική (δηλαδή $\mathsf{CS} \subseteq \mathsf{REC}$).

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.2.10 δεν ισχύει καθώς υπάρχουν αναδρομικές γλώσσες που δεν είναι γλώσσες με συμφραζόμενα [3].

Θεώρημα 4.2.11. Υπάρχει γλώσσα $L \in \mathsf{REC} \setminus \mathsf{CS}$.

Απόδειξη. Κωδικοποιούμε τις γραμματικές με συμφραζόμενα στο $\{0,1\}$ (δες Σελίδα 84), υποθέτοντας όπως και πριν ότι το σύνολο των τερματικών συμβόλων σε όλες τις γραμματικές με συμφραζόμενα είναι το $\{0,1\}$. Θεωρούμε επίσης τη γλώσσα:

$$L = \{\langle G \rangle \in \{0,1\}^* \mid G \text{ γραμματική με συμφραζόμενα και } \langle G \rangle \notin L(G)\}$$

Παρατηρήστε ότι $L \in \mathsf{REC}$ καθώς η TM M του Σχήματος 4.2.2 την αποφασίζει [4]. Η L όμως δεν θα μπορούσε να είναι γλώσσα με συμφραζόμενα καθώς τότε, αν G_L ήταν η γραμματική με συμφραζόμενα που την παρήγαγε, θα ίσχυε ότι:

$$\langle G_L \rangle \in L \Leftrightarrow \langle G_L \rangle \notin L(G_L) \Leftrightarrow \langle G_L \rangle \notin L$$

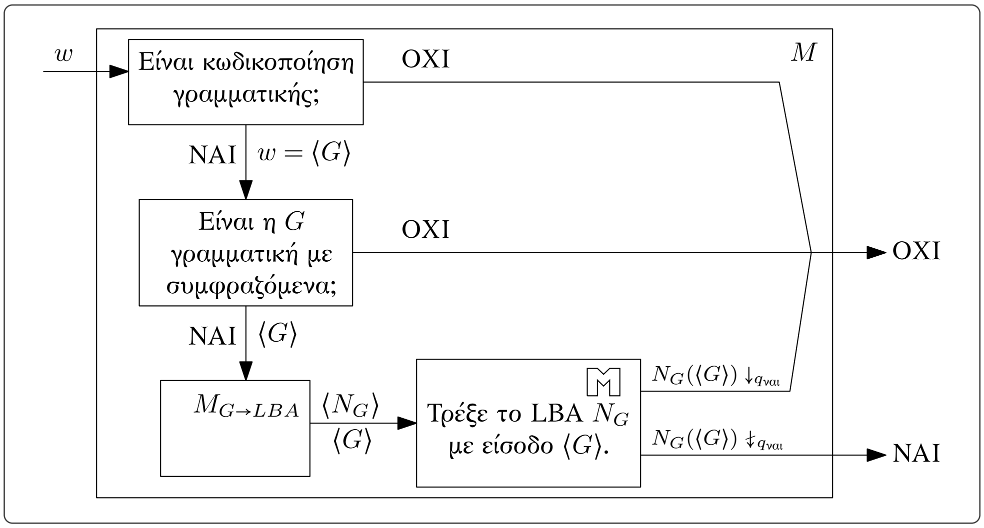
που είναι άτοπο. □

[1] Το πλήθος συμβόλων δηλαδή που μπορούμε να αποθηκεύσουμε στο κομμάτι της ταινίας που μας επιτρέπεται να τροποποιήσουμε.

[2] Δες τη Σημείωση 4.2.4.

[3] Πόρισμα αυτού είναι ότι τα LBA είναι ασθενέστερα από τις TM.

[4] Σύμφωνα με την Άσκηση 4.14 ο έλεγχος που κάνει η καθολική TM στο Σχήμα 4.2.2 τερματίζει πάντα.



Σχήμα 4.2.2: *Η TM που αποφασίζει την L στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.11. $M_{G \to LBA}$ είναι η TM του Πορίσματος 4.2.9.*

4.3 Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

Ορισμός 4.3.1. *Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα (ή γραμματική Τύπου 2)* είναι μία γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ τέτοια ώστε $R \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^*$ [1].

Ορισμός 4.3.2. Μία γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ ονομάζετε *γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα* ανν υπάρχει γραμματική χωρίς συμφραζόμενα που την παράγει. Συμβολίζουμε το σύνολο των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα ως CF.

Σημείωση 4.3.3. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στον Ορισμό 4.3.1 ο μόνος κανόνας που περιέχει την κενή λέξη στο δεξιό μέρος του είναι ο $S \to \epsilon$ και ότι το S δεν εμφανίζεται στο δεξιό μέρος κάποιου κανόνα. Το γεγονός αυτό θα το χρειαστούμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.1.

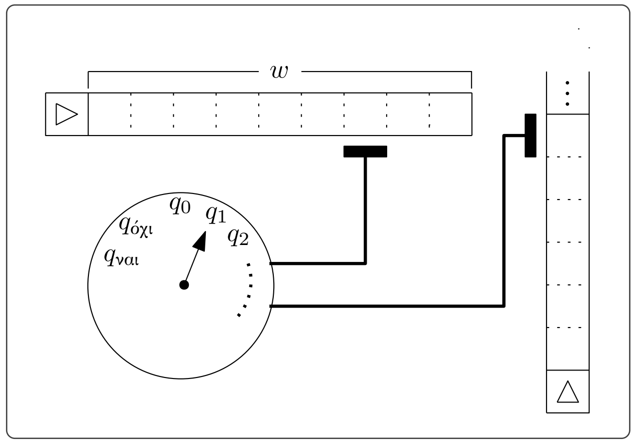
Παράδειγμα 4.3.4. Η γλώσσα $L = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα καθώς η γραμματική G του Παραδείγματος 4.1.6 είναι γραμματική χωρίς συμφραζόμενα.

Όπως κάναμε με τις γλώσσες με συμφραζόμενα θα ορίσουμε έναν «περιορισμό» των TM που αναγνωρίζει τις γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα.

Ορισμός 4.3.5. *Αυτόματο στοίβας (PDA)* είναι μία NTM δύο ταινιών $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ όπου $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\})$. Αν έχουμε τη μετάβαση $(p, a, b, q, c) \in \delta$ τότε αν το N βρίσκεται στην κατάσταση p, διαβάζει το σύμβολο $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ στην πρώτη ταινία και το σύμβολο $b \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ στη δεύτερη, θα μεταβεί στην κατάσταση q και θα γράψει το σύμβολο $c \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ στη θέση του b (δες Σχήμα 4.3.1). Οι κεφαλές κινούνται πάντα δεξιά, εκτός αν:

- $a = \varepsilon$ οπότε η κεφαλή της πρώτης ταινίας (ταινία εισόδου) δεν μετακινείτε (και έτσι δεν λαμβάνουμε κάποια πληροφορία από αυτή),

[1] Δηλαδή έχουμε κανόνες της μορφής $A \to u$, όπου A μη-τερματικό σύμβολο και $u \in V^*$ (η u μπορεί να είναι και η κενή λέξη).



Σχήμα 4.3.1: *Σχηματική αναπαράσταση ενός PDA.*

- $b = \varepsilon$ το N μετακινεί την κεφαλή της δεύτερης ταινίας (της «στοίβας») ένα κελί δεξιά και γράφει c στη θέση του $\sqcup$,

- $c = \varepsilon$ οπότε η N αντικαδιστά το b με $\sqcup$ και κινεί την κεφαλή της δεύτερης ταινίας αριστερά [1],

Η N τερματίζει όταν διαβαστεί όλη η είσοδος (όταν δηλαδή η κεφαλή στην πρώτη ταινία διαβάσει το πρώτο $\sqcup$).

Ο υπολογισμός και η αποδοχή/απόρριψη μίας λέξεις και η αναγνωρισιμότητα μίας γλώσσας για ένα PDA ορίζονται κατά τα γνωστά.

Το παρακάτω Θεώρημα αναφέρεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.3.6. Μία γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα ανν υπάρχει PDA που την αναγνωρίζει.

4.4 Κανονικές γραμματικές

Ας ξεκινήσουμε ορίζοντας της γλώσσες που «προέρχονται» από κανονικές εκφράσεις του $\{0,1\}$ (θυμηθείτε τους Ορισμούς 0.2.22 και 0.2.24).

Ορισμός 4.4.1. Μία γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ είναι *κανονική* ανν υπάρχει $\mathsf{x} \in R_{\{0,1\}}$ τέτοια ώστε $L = \mathcal{L}(\mathsf{x})$. Το σύνολο των κανονικών γλωσσών το συμβολίζουμε με R.

Ορισμός 4.4.2. *Κανονική γραμματική (ή αριστερο-γραμμική [2] γραμματική ή γραμματική Τύπου 3)* είναι μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα $G = (V, \Sigma, R, S)$ όπου το δεξιό μέρος των κανόνων του R περιέχει το πολύ ένα μη-τερματικό σύμβολο, το οποίο βρίσκεται στο αριστερότερο άκρο [3].

[1] Παρατηρήστε ότι η πρώτη ταινία περιέχει την είσοδο και δεν τροποποιείται ποτέ, το M μπορεί να διαβάσει μόνο το τελευταίο μη-κενό κελί της δεύτερης ταινίας και να γράψει μόνο στο πρώτο κενό κελί της, τη χρησιμοποιεί δηλαδή σαν μία «στοίβα» συμβόλων.

[2] Μπορούμε να ορίσουμε και *δεξιο-γραμμικές* γραμματικές με αντίστοιχο τρόπο.

[3] Δηλαδή έχουμε κανόνες της μορφής $A \to Bu$ ή $A \to u$ ή $A \to \epsilon$ όπου A, B μη-τερματικά σύμβολα και $u \in \Sigma^*$.

Γλώσσες	Γραμματικές	Υπολογιστικό Μοντέλο
RE	Γενικές	TM
CS	Με συμφραζόμενα	LBA
CF	Χωρίς συμφραζόμενα	PDA
R	Κανονικές	NFA

Πίνακας 4.1: *Σχέση μεταξύ κλάσεων γλωσσών, γραμματικών και μηχανών.*

Παράδειγμα 4.4.3. Η γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ με $V = \{0, 1, A, S\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ και

$$R = \{S \to A, \quad | \quad A \to A1, \\ S \to \epsilon, \quad | \quad A \to A0\}$$

είναι κανονική γραμματική. Παρατηρήστε ότι $L(G) = \{0^n 1^m \in \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Παρατηρήστε επίσης ότι $L(G) = [0^\star 1^\star]$. Όπως μας δείχνει το Θεώρημα 4.4.5, το γεγονός αυτό δεν είναι τυχαίο.

Ορισμός 4.4.4. *Πεπερασμένο αυτόματο (NFA)* είναι ένα PDA $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{ναι}}, q_{\text{όχι}})$ που δεν έχει «στοίβα», δηλαδή η συνάρτηση μετάβασής του είναι $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$.

Το παρακάτω Θεώρημα αναφέρεται επίσης χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.4.5. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η $L \in \mathsf{R}$.
2. Υπάρχει κανονική γραμματική G με $L(G) = L$.
3. Υπάρχει NFA N με $L(N) = L$.

4.5 Ιεραρχία Chomsky

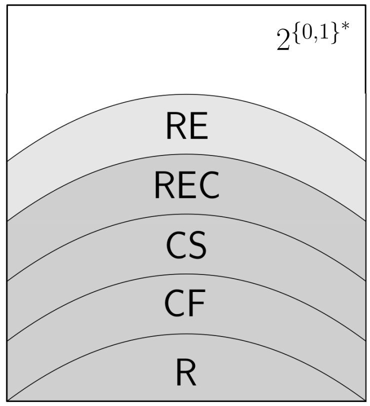
Ο Πίνακας 4.1 δείχνει τη σχέση των κλάσεων γλωσσών, τύπου γραμματικής και υπολογιστικού μοντέλου που είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους.

Θεώρημα 4.5.1 (Ιεραρχία Chomsky). Ισχύει ότι $\mathsf{R} \subset \mathsf{CF} \subset \mathsf{CS} \subset \mathsf{RE}$ (δες Σχήμα 4.5.1).

Σκιαγράφηση απόδειξης. Η συμπερίληψη προκύπτει από τους Ορισμούς, το Θεώρημα 4.4.5 και το γεγονός ότι:

- Μία κανονική γραμματική είναι και γραμματική χωρίς συμφραζόμενα.
- Μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα είναι και γραμματική με συμφραζόμενα [1].
- Μία γραμματική με συμφραζόμενα είναι και γενική γραμματική.

[1] Αυτό προκύπτει από αυτά που αναφέρονται στις Σημειώσεις 4.2.4 και 4.3.3. Ο εγκλεισμός $\mathsf{CF} \subseteq \mathsf{CS}$ μπορεί επίσης να αποδειχθεί δείχνοντας ότι μπορούμε να προσομοιώσουμε τη λειτουργία ενός PDA με ένα LBA.



Σχήμα 4.5.1: *Η Ιεραρχία Chomsky.*

Για να αποδειχθεί ότι οι συμπεριλήψεις μεταξύ των R,CF και των CF,CS είναι γνήσιες πρέπει να εφαρμόσουμε τα *Λήμματα άντλησης* [1], ενώ το γνήσιο της συμπερίληψης του CS στο RE αποδείχθηκε στο Θεώρημα 4.2.11. □

Σημείωση 4.5.2. Δεν υπάρχει τύπος γραμματικής [2] που να παράγει ακριβώς τις γλώσσες της κλάσης REC.

Ασκήσεις

4.1 (★★☆). Αποδείξτε το Θεώρημα 4.1.12.

4.2 (★☆☆). Βρείτε γραμματική Τύπου 0 που παράγει τη γλώσσα $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

4.3 (★★☆). Αποδείξτε το Θεώρημα 4.2.8.

4.4 (★★☆). Βρείτε γραμματική Τύπου 0 που παράγει τη γλώσσα $L = \{1^{2^i} \mid i \geq 1\}$. Εξετάστε αν είναι γλώσσα με συμφραζόμενα.

4.5 (★☆☆). Βρείτε γραμματική που υπολογίζει τη συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, με $f(x)$ να είναι η λέξη x με τα 0 να έχουν γίνει 1 και τα 1 να έχουν γίνει 0.

[1] Το Λήμμα άντλησης για κανονικές γλώσσες (με δυο λόγια) λέει ότι οι «αρκετά μεγάλες» λέξεις περιέχουν μία υπολέξη που επαναλαμβάνεται ένα πλήθος φορών. Στις γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα για κάθε «αρκετά μεγάλη» λέξη υπάρχουν δύο επαναλαμβανόμενες υπολέξεις. Για περισσότερες λεπτομέρειες ανατρέξτε στα [1, 2, 3, 4, 7].

[2] Οι γραμματικές που είδαμε στο κεφάλαιο αυτό συνήθως αποκαλούνται Phrase Structure Grammars, ένα όνομα που έδωσε ο Noam Chomsky το 1957 στις «γραμματικές» που είχαν πρότερα μελετήσει οι Emil Post και Axel Thue. Σε αυτές τις γραμματικές οι παραγωγές των λέξεων βασίζονται στον μετασχηματισμό των μη-τερματικών συμβόλων. Στις λεγόμενες Left-associative Grammars οι παραγωγές των λέξεων βασίζονται στην ακόλουθη ιδέα: Ξεκινάμε από κάποιο αρχικό σύμβολο και συνεχίζουμε την παραγωγή ανάλογα με τους επιτρεπόμενους από τους κανόνες τρόπους επέκτασης της λέξης (π.χ. προσθέτοντας κάποιο σύμβολο). Η κλάση των γλωσσών που παράγεται από τις γραμματικές αυτού του είδους ταυτίζεται με τη REC (περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στο [9].)

4.6 (★☆☆). Βρείτε γραμματική που υπολογίζει τη συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, με $f(x_1x_2 \cdots x_n) = x_1x_1x_2x_2 \cdots x_nx_n$.

4.7 (★★☆). Βρείτε γραμματική που υπολογίζει τη συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, με:

$$f(x_1x_2 \cdots x_n) = \begin{cases} x_1x_1x_2x_2 \cdots x_nx_n & , \text{ Αν } x_n = 0 \\ y_1y_2 \cdots y_n \text{ όπου } y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ Αν } x_i = 0 \\ 0 & , \text{ Αλλιώς} \end{cases} & , \text{ Αλλιώς} \end{cases}$$

4.8 (★☆☆). Βρείτε γραμματική που υπολογίζει στο μοναδιαίο σύστημα τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $f(x) = x \bmod 3$.

4.9 (★☆☆). Βρείτε γραμματική που υπολογίζει στο μοναδιαίο σύστημα τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, με $f(x) = x - 1$.

4.10 (★☆☆). Βρείτε γραμματική που υπολογίζει στο μοναδιαίο σύστημα τη συνάρτηση $f : \{x \in \mathbb{N} \mid x = 0 \bmod 2\} \to \mathbb{N}$, με $f(x) = x/2$.

4.11 (★★☆). Αποδείξτε το Θεώρημα 4.2.2 Αν αποσύρουμε τον περιορισμό $w \neq \epsilon$ ισχύει το ίδιο για κάθε γραμματική Τύπου 0;

4.12 (★★☆). Αποδείξτε το Θεώρημα 4.2.8.

4.13 (★☆☆). Αποδείξτε το Θεώρημα 4.2.10 χωρίς να χρησιμοποιήσετε LBA.

4.14 (★☆☆). Θεωρήστε τη γλώσσα

$$L_{\text{Αποδοχής/LBA}} = \{\langle M, w \rangle \in \Sigma^* \mid M \text{ είναι LBA και } M(w) \downarrow q_{\text{ναι}}\}$$

Δείξτε ότι $L_{\text{Αποδοχής/LBA}} \in \mathsf{REC}$.

4.15 (☆☆☆). Δείξτε ότι η γλώσσα $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

ΜΕΡΟΣ II

ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΗ-ΑΠΟΦΑΝΣΙΜΟΤΗΤΑ

5.1 Θέση Church-Turing

Ο 1900 ο David Hilbert δημοσίευσε μία λίστα αποτελούμενη από 23 προβλήματα που (κατά τον ίδιο) θα έπρεπε να απασχολήσουν τη Μαθηματική κοινότητα για τον (τότε) νέο αιώνα [1]. Στη δική μας αφήγηση, το δέκατο από αυτά θα μπορούσε κάλλιστα να αποτελέσει την εισαγωγή:

> **Το 10ο πρόβλημα του Hilbert**
> *«Βρείτε μια διαδικασία σύμφωνα με την οποία μπορεί να εξακριβωθεί αν μία πολυωνυμική διοφαντική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές έχει ακέραιες λύσεις, μετά από πεπερασμένο πλήθος πράξεων.»*

Η σπουδαιότητα αυτού του προβλήματος έγκειται στο γεγονός ότι, στην ουσία, ζητάει την εύρεση ενός *αλγορίθμου* που με είσοδο μία εξίσωση θα αποφασίζει αν αυτή έχει ακέραιες λύσεις ή όχι. Διαισθητικά θα μπορούσαμε να ορίσουμε την έννοια του αλγορίθμου ως εξής.

Ορισμός 5.1.1 (Διαισθητικός Ορισμός Αλγορίθμου). *Αλγόριθμος* είναι μία πεπερασμένη ακολουθία (αυστηρά καθορισμένων) απλών οδηγιών που διεκπεραιώνουν κάποια εργασία.

Ένα κλασικό παράδειγμα αλγόριθμου με την παραπάνω έννοια είναι ο αλγόριθμος του Ευκλείδη για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη (ΜΚΔ) (αποδοσμένος όπως διδάσκεται στην έκτη τάξη του Δημοτικού) [2]:

Είσοδος:	Μία ακολουθία από φυσικούς αριθμούς.

Βήμα 1:	Γράφουμε σε μία σειρά τους αριθμούς.
Βήμα 2:	Γράφουμε στην από κάτω σειρά τον μικρότερο από αυτούς και κάτω από τους άλλους το υπόλοιπο της διαίρεσης τους με αυτό τον αριθμό.

[1] Τα 10 πιο σημαντικά από αυτά τα παρουσίασε στο Παρίσι την ίδια χρονιά, στα πλαίσια του 2ου Διεθνούς Συνεδρίου Μαθηματικών.

[2] Δες επίσης τον ορισμό της συνάρτησης gcd στο Παράδειγμα 2.3.8.

Βήμα 3: Επαναλαμβάνουμε το **Βήμα 2** έως ότου βρεθεί σειρά που περιέχει μόνο έναν αριθμό διαφορετικό του μηδενός.

Βήμα 4: Ο αριθμός αυτός είναι ο ΜΚΔ.

Όπως επίσης, αλγόριθμος μπορεί να θεωρηθεί και μία συνταγή μαγειρικής:

Είσοδος: Δύο αβγά, λάδι.

Βήμα 1: Ζεσταίνουμε το λάδι σε ένα μεγάλο τηγάνι σε μέτρια προς δυνατή φωτιά.

Βήμα 2: Σπάμε τα αυγά, ένα τη φορά, μέσα στο τηγάνι.

Βήμα 3: Γέρνουμε το τηγάνι και ρίχνουμε με ένα κουτάλι λάδι πάνω στους κρόκους.

Βήμα 4: Επαναλαμβάνουμε το **Βήμα 3** έως ότου το ασπράδι γίνει αδιαφανές.

Βήμα 5: Κατεβάζουμε τα αβγά από τη φωτιά και τα σερβίρουμε.

Φυσικά στο πλαίσιο αυτών των σημειώσεων δεν ενδιαφερόμαστε για αλγόριθμους της δεύτερης μορφής. Σκοπός μας εδώ είναι να διερευνήσουμε τις δυνατότητες των «μηχανών υπολογισμού», όπως για παράδειγμα οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, και κυρίως να ανακαλύψουμε προβλήματα που δεν είναι επιλύσιμα από αυτές. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος για κάποιο πρόβλημα θα πρέπει να ορίσουμε με αυστηρό τρόπο τον αλγόριθμο ως μαθηματικό αντικείμενο. Έτσι, αντί να πρέπει να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει «πεπερασμένη ακολουθία απλών οδηγιών που διεκπεραιώνουν κάποια εργασία» θα πρέπει να αποδείξουμε την μη ύπαρξη κάποιου μαθηματικού αντικειμένου.

Για το λόγο αυτό ασπαζόμαστε τη *Θέση Church-Turing*, οι οποίοι το 1936, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, προσπάθησαν να δώσουν έναν τυπικό ορισμό του αλγορίθμου (τουλάχιστον τυπικότερο του διαισθητικού), ο μεν Church χρησιμοποιώντας ένα «συμβολικό» σύστημα τον λ-λογισμό και ο δε Turing ένα «μηχανιστικό» σύστημα τις ΤΜ. Τα δύο αυτά «μοντέλα υπολογισμού» αποδείχθηκε ότι είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, και κατ' επέκταση ισοδύναμα με τις ελαχιστικά αναδρομικές συναρτήσεις και τις γενικές γραμματικές [1]. Συνεπώς, εύλογα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αλγόριθμος είναι, παραδείγματος χάρη, μία ΤΜ. Έχοντας καταλήξει ότι ο συμβολισμός που θα ακολουθήσουμε στην συνέχεια των σημειώσεων είναι οι ΤΜ, παραθέτουμε τη θέση αυτή ως εξής:

Θέση Church-Turing. Αλγοριθμικά υπολογίσιμες συναρτήσεις [2] είναι ακριβώς οι Turing υπολογίσιμες συναρτήσεις.

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, θα αποδείξουμε ότι το 10^o πρόβλημα του Hilbert είναι «μη επιλύσιμο» (παραθέτοντας το κεντρικό Λήμμα αυτής της απόδειξης, το Θεώρημα 5.1.6, χωρίς απόδειξη). Αυτό θα μας εισάγει στη μεθοδολογία που θα εφαρμόζουμε για να απαντάμε σε ερωτήματα που αφορούν την ύπαρξη ή όχι αλγορίθμου για κάποιο πρόβλημα.

Ξεκινάμε δίνοντας τους ορισμούς που χρειαζόμαστε για να ορίσουμε τυπικά το πρόβλημα και να το μεταφέρουμε στον δικό μας συμβολισμό.

[1] Επιπλέον έχει αποδειχθεί ότι είναι ισοδύναμα με όλα τα υπόλοιπα «ρεαλιστικά» μοντέλα υπολογισμού που έχουν προταθεί (όπως π.χ. τα προγράμματα McCarthy, το μοντέλο του Post, ακόμα και το μοντέλο RAM πάνω στο οποίο βασίζονται οι σύγχρονοι ηλεκτρονικοί υπολογιστές).

[2] Χρησιμοποιώντας οσοδήποτε μεγάλους υπολογιστικούς πόρους (χώρο, χρόνο, πλήθος παράλληλων επεξεργαστών κλπ.) αλλά πεπερασμένους.

Ορισμός 5.1.2. *Πολυωνυμική διοφαντική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές (Π.Δ.Ε.)* είναι μία εξίσωση της μορφής:

$$P(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}a_i x_1^{k_{1_i}}\cdots x_n^{k_{n_i}}=0$$

όπου $a_i\in\mathbb{Z}$ (οι *συντελεστές*) και $k_{1_i},\ldots,k_{n_i}\in\mathbb{N}$ (οι δυνάμεις των *μεταβλητών* $x_1,\ldots,x_n$), για κάθε $i\in[m]$. *Ακέραια ρίζα* της εξίσωσης $P(x_1,\ldots,x_n)=0$ είναι μία n-άδα $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{Z}^n$ τέτοια ώστε $P(z_1,\ldots,z_n)=0$.

Παράδειγμα 5.1.3. Μία Π.Δ.Ε. με τρείς μεταβλητές είναι η $3x^2-2xy-y^2z-7=0$. Η εξίσωση αυτή έχει πολλές ακέραιες ρίζες, μία από αυτές είναι η $x=1,\ y=2,\ z=-2$.

Συμβολισμός 5.1.4. Έστω Π.Δ.Ε. $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}a_i x_1^{k_{1_i}}x_2^{k_{2_i}}\cdots x_n^{k_{n_i}}=0$ και $s\in\mathbb{Z}$. Με P_s συμβολίζουμε την Π.Δ.Ε. $P(s,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}a_i s^{k_{1_i}}x_2^{k_{2_i}}\cdots x_n^{k_{n_i}}=0$.

Θεωρώντας μια κωδικοποίηση των Π.Δ.Ε. σε ένα αλφάβητο, έστω το $\{0,1\}$, μπορούμε να εκφράσουμε το 10^o πρόβλημα του Hilbert ως εξής:

> **Το 10^o πρόβλημα του Hilbert με ορολογία TM**
> *«Δείξτε (κατασκευαστικά) ότι η γλώσσα $D=\{\langle P\rangle\in\{0,1\}^*\mid P$ είναι Π.Δ.Ε. με ακέραιες ρίζες$\}$ είναι αναδρομική.»*

καθώς ενδιαφερόμαστε για την εύρεση ενός αλγορίθμου – δηλαδή μίας TM σύμφωνα με τη θέση Church-Turing – που δεχόμενος ως είσοδο μία Π.Δ.Ε. να τερματίζει πάντα και να μας επιστρέφει απάντηση «Ναι» ανν η εξίσωση έχει ακέραιες ρίζες.

Ορισμός 5.1.5. Ένα σύνολο $S\subseteq\mathbb{N}$ καλείται *διοφαντικό* ανν υπάρχει Π.Δ.Ε. $P(x_1,\ldots,x_{n+1})$ τέτοια ώστε

$$s\in S\Leftrightarrow\exists z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{Z}\ (P(s,z_1,\ldots,z_n)=0)$$

Το ακόλουθο Θεώρημα αποδείχθηκε το 1970 και έδωσε «αρνητική απάντηση» στο 10^o πρόβλημα του Hilbert.

Θεώρημα 5.1.6 (Matiyasevich, Robinson, Davis, Putman)**.** Κάθε αναδρομικά απαριθμήσιμο σύνολο είναι διοφαντικό.

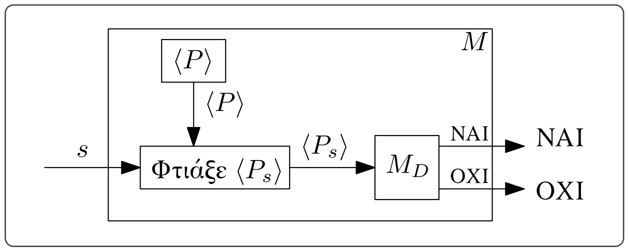
Θεώρημα 5.1.7. $D\notin\mathsf{REC}$.

Απόδειξη. Έστω (προς άτοπο) ότι $D\in\mathsf{REC}$ και ότι η TM M_D την αποφασίζει. Έστω επίσης $L\in\mathsf{RE}\smallsetminus\mathsf{REC}$ [1]. Αφού $L\in\mathsf{RE}$, από το Θεώρημα 5.1.6, υπάρχει Π.Δ.Ε. $P(x_1,\ldots,x_{n+1})$, για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, τέτοια ώστε:

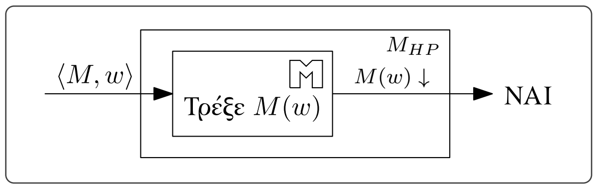
$$L=\{s\in\mathbb{N}\mid\exists z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{Z}\ (P(s,z_1,\ldots,z_n)=0)\}$$

Η TM M του Σχήματος 5.1.1 αποφασίζει την L. Άτοπο καθώς $L\notin\mathsf{REC}$. □

[1] Εδώ χρησιμοποιούμε ανεπίσημα το γεγονός ότι $\mathsf{REC}\subset\mathsf{RE}$, παρόλο που δεν το έχουμε αποδείξει ακόμα. Θα το κάνουμε όμως, με κάθε επισημότητα, στην παράγραφο που ακολουθεί. Επίσης, θεωρούμε ότι οι γλώσσες που εξετάζουμε είναι υποσύνολα του $\mathbb{N}$.



Σχήμα 5.1.1: *Η ΤΜ M στην απόδειξη ότι $D \notin$ REC.*



Σχήμα 5.2.1: *Η ΤΜ M_{HP} ημι-αποφασίζει την HP.*

5.2 Μη-αποφανσιμότητα γλωσσών

5.2.1 Το πρόβλημα του τερματισμού

Το ακόλουθο Θεώρημα μας δείχνει ότι η απάντηση στο Ερώτημα 1 (Σελίδα 22) είναι καταφατική και ανοίγει τον ασκό του Αιόλου όσον αφορά τα μη-επιλύσιμα προβλήματα μηχανών Turing.

Θεώρημα 5.2.1. $HP = \{\langle M, w \rangle \in \{0,1\}^* \mid M(w)\downarrow\} \in \mathsf{RE} \setminus \mathsf{REC}$ [1].

Απόδειξη. Η HP ανήκει στο RE καθώς η ΤΜ M_{HP} του Σχήματος 5.2.1 την ημι-αποφασίζει [2]. Έστω (προς άτοπο) ότι $HP \in$ REC και ότι η ΤΜ H την αποφασίζει. Θεωρούμε την ΤΜ D του Σχήματος 5.2.2 και παρατηρούμε ότι:

$$D(\langle D \rangle)\downarrow \Leftrightarrow H(\langle D, \langle D \rangle \rangle)\downarrow_{q_{\text{όχι}}} \Leftrightarrow \langle D, \langle D \rangle \rangle \notin HP \Leftrightarrow D(\langle D \rangle)\uparrow$$

Άτοπο, άρα $HP \notin$ REC. □

Παρατήρηση 5.2.2. Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 αποτελεί παράδειγμα του *διαγώνιου επιχειρήματος του Cantor* [3]. Ας θεωρήσουμε την αρίθμηση των ΤΜ σύμφωνα με τον αριθμό Gödel τους και ας δούμε τον πίνακα που περιέχει τις τιμές της συνάρτησης ϕ_k, που υπολογίζει η ΤΜ με αριθμό Gödel k, με είσοδο τις κωδικοποιήσεις των ΤΜ (δες τους Ορισμούς 1.2.13 και 1.4.9 καθώς και τη Σύμβαση 1.2.15):

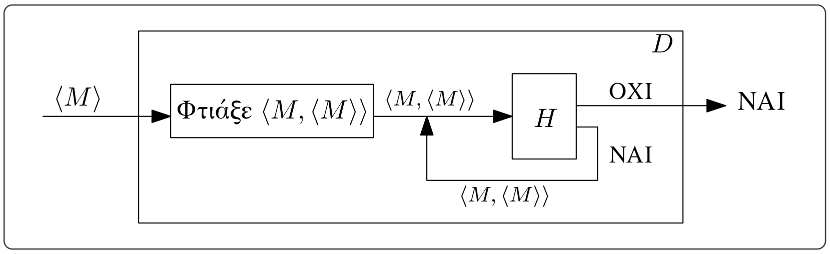
[1] Πιο τυπικά θα έπρεπε να ορίσουμε τη HP ως εξής:

$$HP = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \text{ TM } M \; \exists w' \in \{0,1\}^* (w = \langle M, w' \rangle \wedge M(w')\downarrow)\}$$

Θα υποπέσουμε σε αυτή την «παρατυπία» κατ' εξακολούθηση στη σενέχεια.

[2] Σύμφωνα με τη Σύμβαση 1.4.15 η καθολική ΤΜ για εισόδους που δεν αποτελούν κωδικοποίηση ΤΜ και λέξης απορρίπτει την είσοδό της. Επομένως οι μόνες ενδιαφέρουσες είσοδοι για την M_{HP} είναι οι λέξεις που αποτελούν κωδικοποίηση ΤΜ και λέξης. Συνεπώς, αντί να προσθέσουμε στην περιγραφή της M_{HP} έναν έλεγχο για το αν η είσοδος αποτελεί κωδικοποίηση ΤΜ και λέξης, θα περιγράφουμε τη λειτουργία της μόνο για εισόδους αυτής της μορφής. Αυτή την πρακτική θα την εφαρμόσουμε πολλές φορές στη συνέχεια (ακόμα και όταν περιγράφουμε ΤΜ που δεν χρησιμοποιούν την καθολική ΤΜ, δες για παράδειγμα την ΤΜ του Σχήματος 5.2.2).

[3] Έχουμε εφαρμόσει ήδη δύο φορές αυτό το επιχείρημα (στις αποδείξεις των Θεωρημάτων 0.1.17 και 4.2.11).



Σχήμα 5.2.2: *Η ΤΜ D στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1.*

	$\langle M_1\rangle$	$\langle M_2\rangle$	$\langle M_3\rangle$	$\cdots$	$\langle M_k\rangle$	$\cdots$
M_1	$\phi_1(\langle M_1\rangle)$	$\phi_1(\langle M_2\rangle)$	$\phi_1(\langle M_3\rangle)$	$\cdots$	$\phi_1(\langle M_k\rangle)$	$\cdots$
M_2	$\phi_2(\langle M_1\rangle)$	$\phi_2(\langle M_2\rangle)$	$\phi_2(\langle M_3\rangle)$	$\cdots$	$\phi_2(\langle M_k\rangle)$	$\cdots$
M_3	$\phi_3(\langle M_1\rangle)$	$\phi_3(\langle M_2\rangle)$	$\phi_3(\langle M_3\rangle)$	$\cdots$	$\phi_3(\langle M_k\rangle)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
M_k	$\phi_k(\langle M_1\rangle)$	$\phi_k(\langle M_2\rangle)$	$\phi_k(\langle M_3\rangle)$	$\cdots$	$\phi_k(\langle M_k\rangle)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Φυσικά κάποιες τιμές σε αυτόν τον πίνακα δεν θα ορίζονται (θα είναι ίσες δηλαδή με $\perp$).

Η (υποτιθέμενη) ύπαρξη της ΤΜ H (που αποφασίζει την HP) μας οδηγεί στην (υποτιθέμενη) ύπαρξη της ΤΜ D, η οποία προφανώς οφείλει να εμφανίζεται στον πίνακα, ας πούμε στη θέση d (δηλαδή $\mathsf{Gödel}(D) = d$, ή αλλιώς η D ταυτίζεται με την M_d). Όμως η συνάρτηση που υπολογίζει η D «αντιστρέφει» (υπο μία έννοια) την τιμή της διαγωνίου του πίνακα, δηλαδή:

$$\phi_d(\langle M_k\rangle) = \begin{cases} w \in \{0,1\}^* & ,\text{αν } \phi_k(\langle M_k\rangle) = \perp \\ \perp & ,\text{αν } \phi_k(\langle M_k\rangle) \neq \perp \end{cases}$$

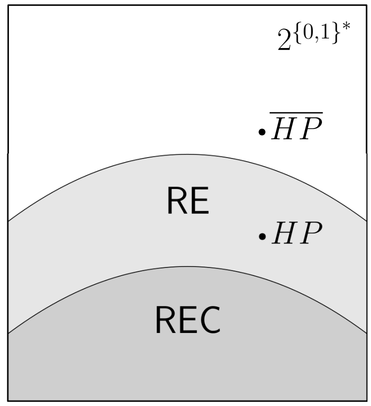
Αναπόφευκτα θα οδηγηθούμε σε άτοπο όταν εξετάσουμε την τιμή $\phi_d(\langle M_d\rangle)$.

Στοχαζόμενοι πάνω στο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.2.1 μπορούμε να φέρουμε στο μυαλό μας το ακόλουθο καθημερινό σενάριο:

> *Έχουμε γράψει τον κώδικα ενός προγράμματος (στη γλώσσα προγραματισμού που προτιμούμε) και τον τρέχουμε στον υπολογιστή μας δίνοντας του κάποια είσοδο. Καθώς ο υπολογισμός αργεί να τερματίσει αρχίζουμε να αναρωτιώμαστε αν θα τερματίσει τελικά ή όχι...*

Παρόλο που τις περισσότερες φορές, όταν έχουμε να κάνουμε με απλά προγράμματα, μπορούμε να διαπιστώσουμε αν θα τερματίσουν για μία δεδομένη είσοδο, γενικά το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι απλά να περιμένουμε να δούμε τελικά τι θα γίνει. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 5.2.1 καθώς μας αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος που να αποφασίζει (γενικά) αν ένα πρόγραμμα θα τερματίσει για δεδομένη είσοδο.

Πόρισμα 5.2.3. $\overline{HP} \notin \mathsf{RE}$.



Σχήμα 5.2.3: *Η σχέση εγκλεισμού μεταξύ* REC *και* RE.

Πράγματι, αν υποθέσουμε (προς άτοπο) ότι $\overline{HP} \in$ RE, θα είχαμε ότι $HP, \overline{HP} \in$ RE, άρα από το Θεώρημα 1.5.4 θα έπρεπε να ίσχυε ότι $HP \in$ REC που αντιβαίνει στο Θεωρήμα 5.2.1.

Πλέον είμαστε σε θέση να εμπλουτίσουμε το Σχήμα 1.2.13 προσθέτοντας σε αυτό τις γλώσσες HP και $\overline{HP}$ (Σχήμα 5.2.3). Το παρακάτω πόρισμα προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.2.38.

Πόρισμα 5.2.4. Η Χαρακτηριστική συνάρτηση της γλώσσας HP δεν είναι υπολογίσιμη.

Η χ_{HP} είναι η πρώτη συνάρτηση που αποδεδειγμένα δεν είναι υπολογίσιμη (ή ισοδύναμα, ελαχιστικά αναδρομική). Μέχρι τώρα γνωρίζαμε ότι υπάρχουν μη-υπολογίσιμες συναρτήσεις αλλά δεν είχαμε στα χέρια μας κάποιο παράδειγμα (η απόδειξη δεν ήταν κατασκευαστική) [1].

5.2.2 Απεικονιστικές Αναγωγές

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τη μεθοδολογία που θα ακολουθούμε για να αποδεικνύουμε ότι μία γλώσσα δεν είναι αναδρομική (ή αναδρομικά απαριθμήσιμη). Θα μπορούσαμε φυσικά κάθε φορά να επαναλαμβάναμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1, αυτό όμως (όπως πιθανώς να παρατηρήσατε) θα ήταν πιο δύσκολο.

Ορισμός 5.2.5. Έστω γλώσσες $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Η A *ανάγεται (απεικονιστικά) στη* B, συμβολισμός $A \leq_m B$, ανν υπάρχει συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, τέτοια ώστε:

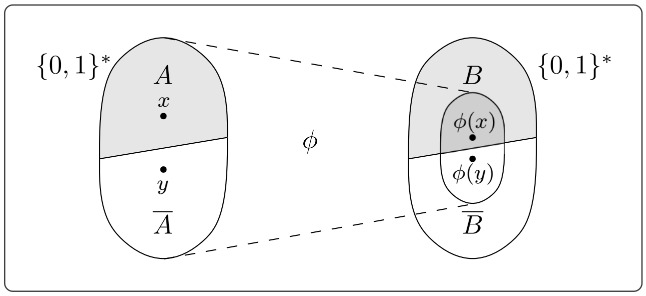
1. Η ϕ είναι πλήρης και υπολογίσιμη.
2. $\forall w \in \{0,1\}^* \ (w \in A \leftrightarrow \phi(w) \in B)$

Η συνάρτηση ϕ καλείται *(απεικονιστική ή many-one) αναγωγή της* A *στη* B (δες Σχήμα 5.2.4).

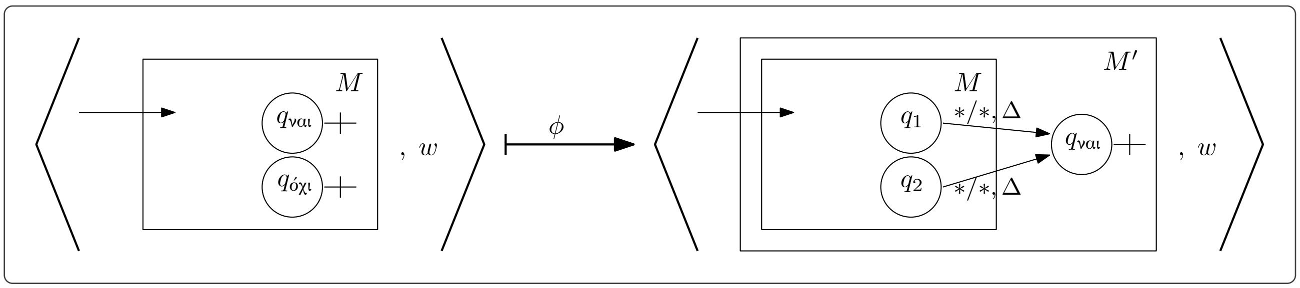
Παράδειγμα 5.2.6. Θεωρούμε τη γλώσσα $L_{\text{Αποδοχής}} = \{\langle M, w\rangle \in \{0,1\}^* \mid M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}\}$. Θα ορίσουμε μία συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ ως εξής:

- Για τα $x \in \{0,1\}^*$ για τα οποία υπάρχει TM M και $w \in \{0,1\}^*$ τέτοιες ώστε $x = \langle M, w\rangle$, η ϕ απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2.5, όπου M' είναι μια TM που

[1] Ενδεχομένως να προκαλεί εντύπωση το γεγονός ότι η πρώτη μη-υπολογίσιμη συνάρτηση που συναντάμε δεν είναι κάποια «περίεργη» μερική συνάρτηση. Είναι μία ολική συνάρτηση και μάλιστα αφορά ένα πολύ στοιχειώδες ερώτημα αναφορικά με τις TM.



Σχήμα 5.2.4: *Η ϕ είναι αναγωγή της A στην B.*



Σχήμα 5.2.5: *Η αναγωγή της HP στην $L_{\text{Αποδοχής}}$.*

α) περιέχει την M σαν υπορουτίνα, έχοντας όμως «αποχαρακτηρίσει» τις τερματικές καταστάσεις της, οι οποίες πλέον είναι οι (απλές) καταστάσεις q_1, q_2 και

β) μεταβαίνει στην $q_{\text{ναι}}$ (μόνο) μέσω των καταστάσεων q_1, q_2 όποιο σύμβολο και να διαβάσει.

- Σε διαφορετική περίπτωση $\phi(x) = x$.

Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι αναγωγή της HP στην $L_{\text{Αποδοχής}}$, καθώς:

1. Η ϕ είναι πλήρης και υπολογίσιμη.

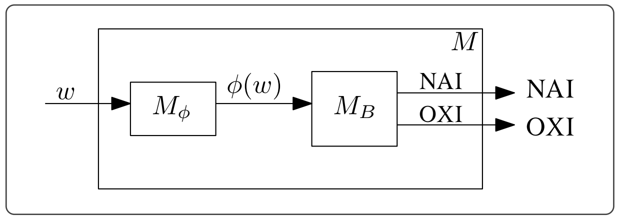
2. - $x \in HP \Rightarrow \exists$ TM M $\exists w \in \{0,1\}^*(x = \langle M, w\rangle \wedge \langle M, w\rangle \in HP) \Rightarrow M(w) \downarrow \Rightarrow M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$ ή $M(w) \downarrow_{q_{\text{όχι}}} \Rightarrow M'(w) \downarrow_{q_1}$ ή $M'(w) \downarrow_{q_2} \Rightarrow M'(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow \phi(\langle M, w\rangle) \in L_{\text{Αποδοχής}}$
   - $x \notin HP \Rightarrow$ Είτε $\neg(\exists$ TM M $\exists w \in \{0,1\}^*(x = \langle M, w\rangle))$, είτε $\exists$ TM M $\exists w \in \{0,1\}^*(x = \langle M, w\rangle \wedge \langle M, w\rangle \notin HP))$:
     α. Στην πρώτη περίπτωση $\phi(x) = x$ και προφανώς $x \notin L_{\text{Αποδοχής}}$.
     β. Στην δεύτερη περίπτωση $\langle M, w\rangle \notin HP \Rightarrow M(w) \uparrow \Rightarrow M'(w) \uparrow \Rightarrow \phi(\langle M, w\rangle) \notin L_{\text{Αποδοχής}}$.

Συνεπώς $HP \leq_m L_{\text{Αποδοχής}}$.

Θεώρημα 5.2.7. Έστω $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Αν $A \leq_m B$ και $B \in$ REC ($B \in$ RE) τότε $A \in$ REC ($A \in$ RE αντίστοιχα).

Απόδειξη. Έστω ϕ η αναγωγή της A στη B, έστω M_ϕ η TM που την υπολογίζει και M_B η TM που αποφασίζει (ημι-αποφασίζει) τη B. Η TM του Σχήματος 5.2.6 αποφασίζει (ημι-αποφασίζει) την A καθώς [1]:

[1] Η δεύτερη παύλα είναι που διαφοροποιεί τις περιπτώσεις του REC και του RE.



Σχήμα 5.2.6: *Η ΤΜ στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.7.*

- $w \in A \Leftrightarrow \phi(w) \in B \Leftrightarrow M_B(\phi(w)) \downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Leftrightarrow M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$
- $w \notin A \Leftrightarrow \phi(w) \notin B \Leftrightarrow M_B(\phi(w)) \downarrow_{q_{\text{όχι}}} \Leftrightarrow M(w) \downarrow_{q_{\text{όχι}}}$

Συνεπώς, $A \in$ REC ($A \in$ RE). □

Για τους δικούς μας σκοπούς θα χρησιμοποιούμε κατά κύριο λόγο το ακόλουθο (άμεσο) πόρισμα του Θεωρήματος 5.2.7.

Πόρισμα 5.2.8. Έστω $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Αν $A \leq_m B$ και $A \notin$ REC ($A \notin$ RE) τότε $B \notin$ REC ($B \notin$ RE αντίστοιχα).

Παράδειγμα 5.2.9. Στο Παράδειγμα 5.2.6 είδαμε ότι $HP \leq_m L_{\text{Αποδοχής}}$, επομένως, αφού $HP \notin$ REC έπεται ότι $L_{\text{Αποδοχής}} \notin$ REC.

Σημείωση 5.2.10. Αν για τις γλώσσες $A, B \subseteq \{0,1\}^*$ ισχύει ότι $A \leq_m B$, διαισθητικά η B αντιστοιχεί σε πιο «δύσκολο πρόβλημα» από την A, καθώς αν υπάρχει αλγόριθμος που «λύνει» τη B τότε υπάρχει και αλγόριθμος που «λύνει» την A. Αυτή η «διαίσθηση» θα γίνει μαθηματική απόδειξη στο Κεφάλαιο 8.

Σύμβαση 5.2.11. Προκειμένου να στρέψουμε την προσοχή του αναγνώστη στην ουσία μίας συνάρτησης αναγωγής ϕ θα την παρουσιάζουμε αναλυτικά μόνο για τις εισόδους που έχουν «ενδιαφέρον» για εμάς (για της υπόλοιπες ναι μεν θα ορίζουμε τη ϕ, συνήθως σε κάποια υποσημείωση, αλλά δεν θα ελέγχουμε αν πληρούται η δεύτερη προϋπόθεση του Ορισμού 5.2.5).

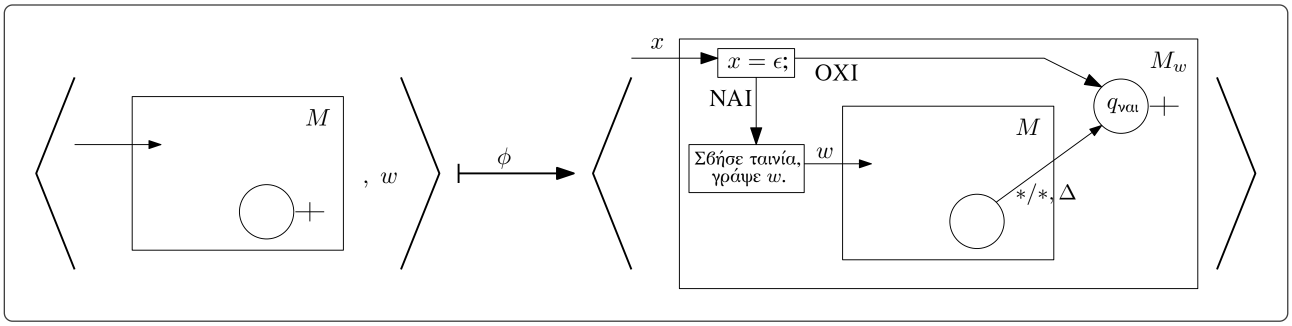
Παραδείγματα μη-αναδρομικών γλωσσών

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα γλωσσών που δεν είναι αναδρομικές (ή και αναδρομικά απαριθμήσιμες). Τα παραδείγματα αυτά θα μας αποκαλύψουν μερικά προβλήματα που είναι πέραν των «δυνατοτήτων» των ΤΜ και κατ' επέκταση (λόγω της Θέσης Church-Turing) αλγοριθμικά μη-επιλύσιμα.

Παράδειγμα 5.2.12. Θεωρούμε τη γλώσσα $L = \{\langle M, w, q\rangle \in \{0,1\}^* \mid \text{Η } M(w) \text{ μεταβαίνει στην κατάσταση } q\}$. Η συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $\phi(\langle M, w\rangle) = \langle M, w, q_{\text{ναι}}\rangle$ [1] είναι αναγωγή της $L_{\text{Αποδοχής}}$ στην L καθώς:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}} \Rightarrow M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow \langle M, w, q_{\text{ναι}}\rangle \in L$

[1] Για τα x που δεν αποτελούν κωδικοποίηση ΤΜ και λέξης ορίζουμε $\phi(x) = \langle M, w, q_{\text{ναι}}\rangle$, όπου M μία ΤΜ που δεν τερματίζει ποτέ.



Σχήμα 5.2.7: *Η αναγωγή της HP στην L_ϵ.*

- $\langle M, w\rangle \notin L_{\text{Αποδοχής}} \Rightarrow M(w)\uparrow$ ή $M(w)\downarrow_{q_{όχι}} \Rightarrow M(w) \not\downarrow_{q_{ναι}} \Rightarrow \langle M, w, q_{ναι}\rangle \notin L$

Αφού $L_{\text{Αποδοχής}} \notin$ REC έπεται ότι $L \notin$ REC.

Σημείωση 5.2.13. Από το Παράδειγμα 5.2.12 συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν μία TM περνάει από κάποια συγκεκριμένη κατάσταση κατά τον υπολογισμό της με είσοδο μία (τυχούσα) λέξη w [1].

Παράδειγμα 5.2.14. Θεωρούμε τη γλώσσα $L_\epsilon = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid M(\epsilon) \downarrow q_{ναι}\}$. Η συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2.7 [2] είναι αναγωγή της HP στην L_ϵ καθώς:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $\langle M, w\rangle \in HP \Rightarrow M(w)\downarrow \Rightarrow M_w(\epsilon) \downarrow q_{ναι} \Rightarrow \langle M_w\rangle \in L_\epsilon$
   - $\langle M, w\rangle \notin HP \Rightarrow M(w)\uparrow \Rightarrow M_w(\epsilon)\uparrow \Rightarrow \langle M_w\rangle \notin L_\epsilon$

Αφού $HP \notin$ REC έπεται ότι $L_\epsilon \notin$ REC.

Παράδειγμα 5.2.15. Θεωρούμε τη γλώσσα $L_\infty = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M)| = \aleph_0\}$. Η συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2.8 [3] είναι αναγωγή της L_ϵ στην L_∞ καθώς:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $\langle M\rangle \in L_\epsilon \Rightarrow M(\epsilon)\downarrow_{q_{ναι}} \Rightarrow \forall w \in \{0,1\}^*(M'(w)\downarrow_{q_{ναι}}) \Rightarrow L(M') = \{0,1\}^* \Rightarrow |L(M')| = \aleph_0 \Rightarrow \langle M'\rangle \in L_\infty$
   - $\langle M\rangle \notin L_\epsilon \Rightarrow M(\epsilon) \not\downarrow_{q_{ναι}} \Rightarrow \forall w \in \{0,1\}^*(M'(w) \not\downarrow_{q_{ναι}}) \Rightarrow L(M') = \varnothing \Rightarrow |L(M')| = 0 \Rightarrow \langle M'\rangle \notin L_\infty$

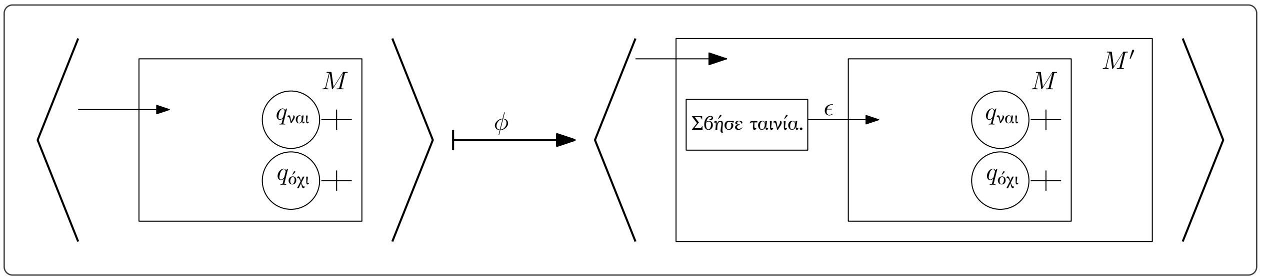
Αφού $L_\epsilon \notin$ REC έπεται ότι $L_\infty \notin$ REC.

Παρατήρηση 5.2.16. Η συνάρτηση ϕ του Παραδείγματος 5.2.15 είναι και αναγωγή της L_ϵ στη γλώσσα $L_{\{0,1\}^*} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) = \{0,1\}^*\}$. Επομένως $L_{\{0,1\}^*} \notin$ REC.

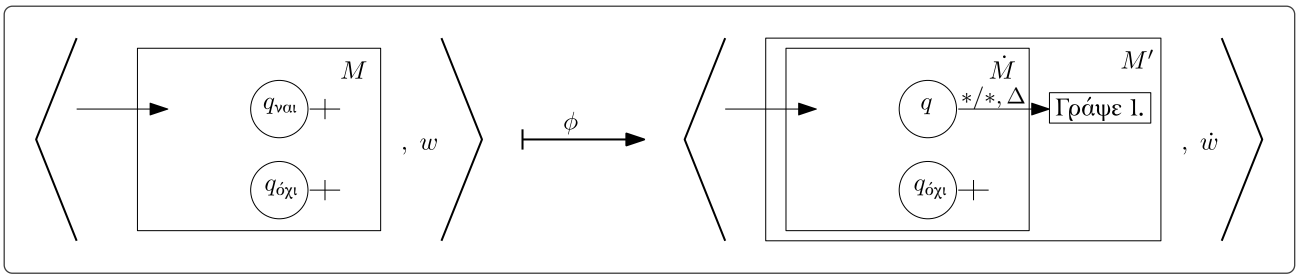
[1] Σε αντίθετη περίπτωση (όπως φαίνεται από τη συνάρτησή αναγωγής) θα μπορούσαμε να ξέρουμε αν θα περάσει και από την $q_{ναι}$, πράγμα που θα καθιστούσε την $L_{\text{Αποδοχής}}$ αναδρομική γλώσσα.

[2] Για τα x που δεν αποτελούν κωδικοποίηση TM και λέξης ορίζουμε $\phi(x) = \langle M\rangle$, όπου M μία TM που δεν τερματίζει ποτέ.

[3] Για τα x που δεν αποτελούν κωδικοποίηση TM ορίζουμε $\phi(x) = x$.



Σχήμα 5.2.8: *Η αναγωγή της L_ϵ στην L_∞.*



Σχήμα 5.2.9: *Η αναγωγή της $L_{\text{Αποδοχής}}$ στη γλώσσα του Παραδείγματος 5.2.17.*

Παράδειγμα 5.2.17. Θεωρούμε τη γλώσσα $L = \{\langle M, w\rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Η $M(w)$ γράφει 1 στην ταινία$\}$. Η συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2.9 [1], όπου η $\dot{M}$ και η $\dot{w}$ προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε στη συνάρτηση μεταβάσεων της $\langle M\rangle$ και στη w αντίστοιχα κάθε σύμβολο $* \in \{0,1\}^*$ με το σύμβολο $\dot{*}$ [2], είναι αναγωγή της $L_{\text{Αποδοχής}}$ στην L καθώς:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}} \Rightarrow M(w)\downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow M'(\dot{w})\downarrow_q \Rightarrow$ Η $M'(\dot{w})$ θα γράψει $1 \Rightarrow \langle M', \dot{w}\rangle \in L$
   - $\langle M, w\rangle \notin L_{\text{Αποδοχής}} \Rightarrow M(w) \not\downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow$ Η $M'(\dot{w})$ δεν θα επισκεφτεί την $q \Rightarrow$ Η $M'(\dot{w})$ δεν θα γράψει $1 \Rightarrow \langle M', \dot{w}\rangle \notin L$

Αφού $L_{\text{Αποδοχής}} \notin$ REC έπεται ότι $L \notin$ REC.

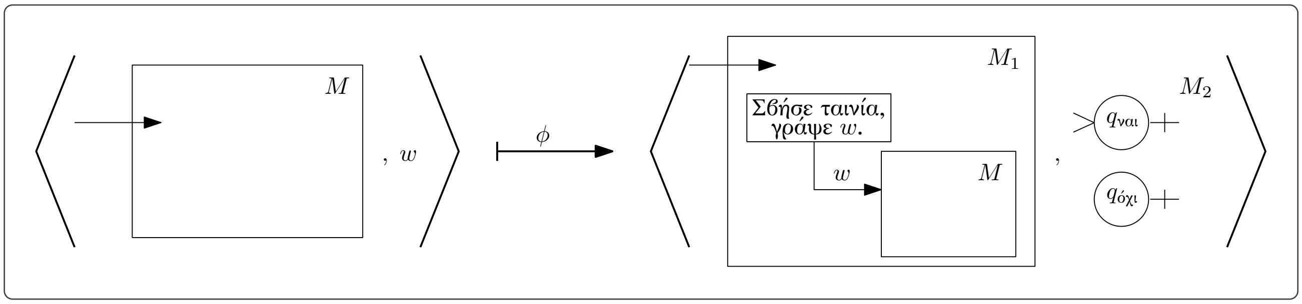
Παράδειγμα 5.2.18. Θεωρούμε τη γλώσσα $L_\equiv = \{\langle M_1, M_2\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M_1) = L(M_2)\}$. Η συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2.10 [3] είναι αναγωγή της $L_{\text{Αποδοχής}}$ στην $L_\equiv$ καθώς:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}} \Rightarrow M(w)\downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow \forall x \in \{0,1\}^*(M_1(x)\downarrow_{q_{\text{ναι}}}) \Rightarrow L(M_1) = \{0,1\}^* = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2\rangle \in L_\equiv$

[1] Για τα x που δεν αποτελούν κωδικοποίηση TM και λέξης ορίζουμε $\phi(x) = \langle M, w\rangle$, όπου η TM M και η λέξη $w \in \{0,1\}^*$ είναι τέτοιες ώστε η $M(w)$ να μην γράφει ποτέ 1.

[2] Τα σύμβολα $\dot{0}$ και $\dot{1}$ αποτελούν σύμβολα του αλφαβήτου ταινίας της TM M' και θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν στο αλφάβητο ταινίας της M. Επίσης θεωρούμε ότι η $\langle M', \dot{w}\rangle$ είναι κωδικοποιημένη στο $\{0,1\}$.

[3] Για τα x που δεν αποτελούν κωδικοποίηση TM και λέξης ορίζουμε $\phi(x) = \langle M_1, M_2\rangle$, όπου M_1 μία TM που δεν τερματίζει ποτέ και M_2 η TM στο Σχήμα 5.2.10.



Σχήμα 5.2.10: *Η αναγωγή της $L_{\text{Αποδοχής}}$ στην $L_{\equiv}$.*

- $\langle M, w\rangle \notin L_{\text{Αποδοχής}} \Rightarrow M(w) \not\downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow \forall x \in \{0,1\}^*(M_1(x) \not\downarrow_{q_{\text{ναι}}}) \Rightarrow L(M_1) = \varnothing \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2\rangle \notin L_{\equiv}$

Αφού $L_{\text{Αποδοχής}} \notin$ REC έπεται ότι $L_{\equiv} \notin$ REC.

Σημείωση 5.2.19. Από το Παράδειγμα 5.2.18 συμπεραίνουμε ότι, παρόλο που γνωρίζουμε ότι υπάρχουν (αριθμησίμως) άπειρες TM που αναγνωρίζουν την ίδια γλώσσα, αν μας δοθούν δύο TM δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν όντως ισχύει αυτό [1].

Παράδειγμα 5.2.20. Θεωρούμε τη γλώσσα $L_{\varnothing} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) = \varnothing\}$. Η συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2.11, όπου για τα $x \in \{0,1\}^*$ που δεν αντιστοιχούν σε κωδικοποίηση TM και λέξης, η ϕ είναι η σταθερή συνάρτηση $\phi(x) = \langle M_{\uparrow}\rangle$ όπου $M_{\uparrow}$ μία TM που «κολλάει» για κάθε είσοδο [2], είναι αναγωγή της $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ στην $L_{\varnothing}$ καθώς:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - Αν $x \in \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:
     α. Η x δεν έχει τη μορφή $\langle M, w\rangle \Rightarrow \phi(x) = \langle M_{\uparrow}\rangle \in L_{\varnothing}$.
     β. $x = \langle M, w\rangle \Rightarrow M(w) \not\downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow \forall x \in \{0,1\}^*(M_w(x) \not\downarrow_{q_{\text{ναι}}}) \Rightarrow L(M_w) = \varnothing \Rightarrow \langle M_w\rangle \in L_{\varnothing}$
   - Αν $x \notin \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$, τότε $x = \langle M, w\rangle$ και μάλιστα $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}} \Rightarrow M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow M_w(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow L(M_w) = \{w\} \Rightarrow \langle M_w\rangle \notin L_{\varnothing}$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $L_{\text{Αποδοχής}} \in$ RE $\smallsetminus$ REC, οπότε, από το Θεώρημα 1.5.4 έπεται ότι $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}} \notin$ RE. Συνεπώς $L_{\varnothing} \notin$ RE.

Κλείνοντας, θα αποδείξουμε δύο προτάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στο Κεφάλαιο 8.

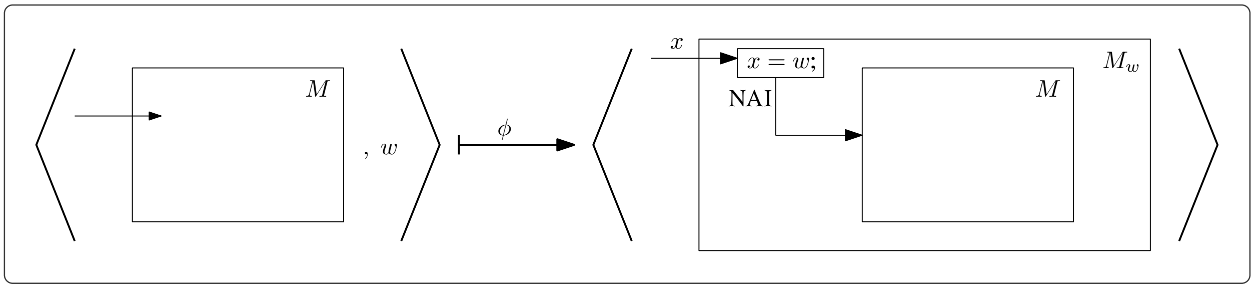
Πρόταση 5.2.21. Η σχέση $\leq_m$ επί του συνόλου $2^{\{0,1\}^*}$ είναι μεταβατική σχέση.

Απόδειξη. Έστω γλώσσες $A, B, C \subseteq \{0,1\}^*$ τέτοιες ώστε $A \leq_m B$ και $B \leq_m C$, και έστω ϕ_1 η αναγωγή της A στην B και ϕ_2 η αναγωγή της B στη C. Θα δείξουμε ότι η $\phi_2 \circ \phi_1$ είναι αναγωγή της A στη C. Παρατηρούμε ότι:

1. Η $\phi_2 \circ \phi_1$ είναι (προφανώς) πλήρης και υπολογίσιμη από την Πρόταση 1.2.12.

[1] Η γλώσσα $L_{\equiv}$ δεν είναι ούτε αναδρομικά απαριθμήσιμη. Μπορείτε να δείτε το γιατί (Άσκηση 5.17);

[2] Όταν κάνουμε αναγωγή από το συμπλήρωμα μίας γλώσσας θα πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί και να ελέγχουμε επιμελώς ότι η δεύτερη ιδιότητα του Ορισμού 5.2.5 πληρούται.



Σχήμα 5.2.11: *Η αναγωγή της* $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ *στην* $L_{\varnothing}$.

2. $w \in A \Leftrightarrow \phi_1(w) \in B \Leftrightarrow \phi_2(\phi_1(w)) \in C$

Συνεπώς, $A \leq_m C$. □

Πρόταση 5.2.22. Έστω $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Αν $A \leq_m B$ τότε $\overline{A} \leq_m \overline{B}$.

Απόδειξη. Έστω ϕ η αναγωγή της A στη B. Αρκεί να δούμε το Σχήμα 5.2.4 και να παρατηρήσουμε ότι:

$$w \in \overline{A} \Leftrightarrow \phi(w) \in \overline{B}$$

Συνεπώς η ϕ είναι και αναγωγή της $\overline{A}$ στη $\overline{B}$. □

Ασκήσεις

5.1 (★☆☆). Δείξτε ότι $D = \{\langle P \rangle \in \{0,1\}^* \mid$ η διοφαντική εξίσωση P έχει ακέραιες ρίζες$\} \in$ RE.

5.2 (★★☆). Δείξτε ότι $D_1 = \{\langle P \rangle \in \{0,1\}^* \mid$ η διοφαντική εξίσωση P μίας μεταβλητής έχει ακέραιες ρίζες$\} \in$ REC.

5.3 (★☆☆). Έστω $L \in$ RE ∖ REC και TM M τέτοια ώστε $L(M) = L$. Δείξτε ότι το σύνολο $S_L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M(w)\uparrow\}$ είναι άπειρο.

5.4 (★☆☆). Δείξτε ότι $L_\infty \leq_m L_{\{0,1\}^*}$.

5.5 (★☆☆). Δείξτε ότι $L = \{\langle M, w \rangle \in \{0,1\}^* \mid M(w)$ περνάει από όλες τις μη-τερματικές καταστάσεις της $M\} \notin$ REC.

5.6 (★☆☆). Δείξτε ότι $L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid \forall w \in \{0,1\}^*($η $M(w)$ γράφει κάποτε 1 και αμέσως κινεί την κεφαλή αριστερά$)\} \notin$ REC.

5.7 (★☆☆). Δείξτε ότι $L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid \forall w \in \{0,1\}^*($η $M(w)$ αποδέχεται μετά από άρτιο πλήθος βημάτων$)\} \notin$ REC.

5.8 (★★☆). Δείξτε ότι $L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Υπάρχει λέξη $w \in \{0,1\}^*$ τέτοια ώστε

$M_1(w)\downarrow^m_{q_{\text{ναι}}} \wedge M_2(w)\downarrow^n_{q_{\text{ναι}}}$ με $n \neq m\} \notin \mathsf{REC}$.

5.9 (★☆☆). Δείξτε ότι $L = \{\langle M_1, M_2, w\rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Υπάρχει $t \in \mathbb{N}$ και $a \in \{0,1\}$ τέτοια ώστε οι M_1 και M_2 στο t-οστό βήμα της λειτουργίας τους με είσοδο την w γράφουν $a\} \notin \mathsf{REC}$.

5.10 (★★☆). Δείξτε ότι για κάθε $L \in \mathsf{RE}$ ισχύει ότι $L \leq_m \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid M(\langle M\rangle)\downarrow\}$.

5.11 (★☆☆). Δείξτε ότι $L \in \mathsf{REC}$ ανν $L \leq_m 0^*1^*$.

5.12 (★☆☆). Δείξτε ότι αν $L_1, L_2 \in \mathsf{REC} \setminus \{\varnothing, \{0,1\}^*\}$ τότε $L_1 \leq_m L_2$.

5.13 (★★☆). Έστω K και R τα σύνολα της Άσκησης 1.15. Ισχύει ότι $R \cup K \in \mathsf{RE}$;

5.14 (☆☆☆). Εξετάστε αν η γλώσσα $L = \{\langle M, w\rangle \in \{0,1\}^* \mid \exists$ TM M' $(w \notin L(M) \cap L(M')\}$ είναι αναδρομική.

5.15 (★☆☆). Εξετάστε αν η γλώσσα $L = \{\langle M_1, M_2, M_3\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M_1) = L(M_2) \cup L(M_3)\}$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

5.16 (★☆☆). Δείξτε ότι $L = \{\langle M_1, M_2\rangle \in \{0,1\}^* \mid \epsilon \in L(M_1) \cap L(M_2)\} \in \mathsf{RE} \setminus \mathsf{REC}$.

5.17 (☆☆☆). Δείξτε ότι $L_{\equiv} = \{\langle M_1, M_2\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M_1) = L(M_2)\} \notin \mathsf{RE}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ RICE

Θα ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο με τον ίδιο τρόπο που τελειώσαμε το προηγούμενο, με μία αναγωγή. Η αναγωγή αυτή έχει μία βασική ομοιότητα με τις αναγωγές των Παραδειγμάτων 5.2.14, 5.2.15 και 5.2.20. Μπορείτε να την εντοπίσετε;

Παράδειγμα 6.0.1. Θεωρούμε τη γλώσσα $L_{\mathsf{REC}} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \in \mathsf{REC}\}$. Η συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} \langle M'\rangle & \text{, αν υπάρχει TM } M \text{ και } w \in \{0,1\}^* \text{ τέτοια ώστε } x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_{\uparrow}\rangle & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $M_{\uparrow}$ μία TM που «κολλάει» για κάθε είσοδο και M' η TM του Σχήματος 6.0.1, είναι αναγωγή της $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ στην L_{REC} καθώς:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.

2. - $x \in \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ τότε:

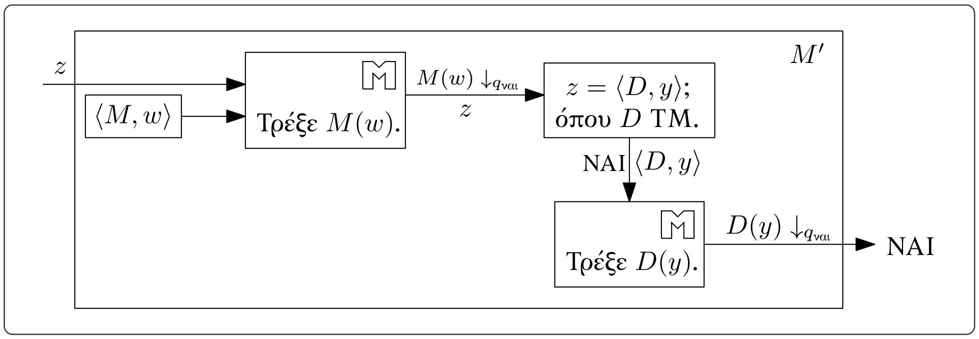
     α. είτε $x = \langle M, w\rangle$ με $\langle M, w\rangle \in \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$, οπότε $\phi(x) = \langle M'\rangle$ και για κάθε $x \in \{0,1\}^*$ ισχύει ότι $M'(x)\uparrow$ (αφού $M(w) \not\downarrow_{q_{\text{ναι}}}$), άρα $L(M') = \varnothing \in \mathsf{REC}$, συνεπώς $\phi(x) \in L_{\mathsf{REC}}$,

     β. είτε $x \neq \langle M, w\rangle$, οπότε $\phi(x) = \langle M_{\uparrow}\rangle$ και $L(M_{\uparrow}) = \varnothing \in \mathsf{REC}$, άρα $\phi(x) \in L_{\mathsf{REC}}$.

   - $x \notin \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ τότε $x = \langle M, w\rangle$ με $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}}$, οπότε $\phi(x) = \langle M'\rangle$ και $L(M') = \{\langle D, y\rangle \in \{0,1\}^* \mid D(y) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}\} = L_{\text{Αποδοχής}}$ (αφού $M(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$), και αφού $L_{\text{Αποδοχής}} \notin \mathsf{REC}$ έπεται ότι $\phi(x) \notin L_{\mathsf{REC}}$.

Τέλος, αφού $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}} \notin \mathsf{RE}$ έπεται ότι $L_{\mathsf{REC}} \notin \mathsf{RE}$.

Η γλώσσα L_{REC} ανήκει σε μία ευρεία κλάση γλωσσών που περιέχουν (αποκλειστικά) λέξεις που αντιστοιχούν σε κωδικοποιήσεις TM των οποίων η γλώσσα που αναγνωρίζουν πληροί κάποιες προδιαγραφές (για παράδειγμα στην L_{REC} είναι αναδρομικές). Για όλες αυτές τις γλώσσες μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια ακριβώς αναγωγή. Η βασική ιδέα αυτής της (μετα-)αναγωγής μπορεί να περιγραφεί μέσω του Παραδείγματος 6.0.1 (ή των Παραδειγμάτων 5.2.14, 5.2.15 και 5.2.20):



Σχήμα 6.0.1: *Η TM M' του Παραδείγματος 6.0.1.*

Ορίζουμε συνάρτηση ϕ που «στέλνει» μία λέξη x στην κωδικοποίηση μιας TM M, έτσι ώστε:

$$L(M) = \begin{cases} \varnothing\ (\in \mathsf{REC}) & ,\ \textit{αν } x \in \overline{L}_{\textit{Αποδοχής}} \\ L_{\textit{Αποδοχής}}\ (\notin \mathsf{REC}) & ,\ \textit{αν } x \notin \overline{L}_{\textit{Αποδοχής}} \end{cases}.$$

Το γεγονός αυτό παρατηρήθηκε από τον Henry Gordon Rice, ο οποίος απέδειξε το 1951 δύο Θεωρήματα που το καταδεικνύουν (τα Θεώρημα 6.1.1 και 6.2.1). Τα Θεωρήματα αυτά στη βιβλιογραφία συνήθως φέρουν το όνομά του.

Προτού δούμε το πρώτο από τα Θεωρήματα του Rice, θα χρειαστεί να δώσουμε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 6.0.2. *Ιδιότητα (αναδρομικά απαριθμήσιμων) γλωσσών* είναι κάθε σύνολο $\mathcal{P} \subseteq \mathsf{RE}$. Θα λέμε ότι η γλώσσα $L \in \mathsf{RE}$ έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$ ανν $L \in \mathcal{P}$.

Παράδειγμα 6.0.3. Τα ακόλουθα σύνολα αποτελούν ιδιότητες γλωσσών:

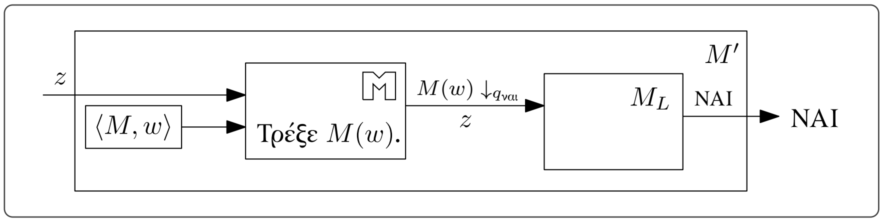
- $\mathcal{P}_\epsilon = \{L \in \mathsf{RE} \mid \epsilon \in L\}$
- $\mathcal{P}_\infty = \{L \in \mathsf{RE} \mid |L| = \aleph_0\}$
- $\mathcal{P}_\varnothing = \{L \in \mathsf{RE} \mid L = \varnothing\}$
- $\mathcal{P}_\mathbb{N} = \{L \in \mathsf{RE} \mid |L| \in \mathbb{N}\}$
- REC

Ορισμός 6.0.4. Έστω ιδιότητα $\mathcal{P} \subseteq \mathsf{RE}$. Ορίζουμε τη γλώσσα $L_\mathcal{P} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \in \mathcal{P}\}$.

Τα Θεωρήματα του Rice επικεντρώνονται στη γλώσσα $L_\mathcal{P}$ (μία γλώσσα που περιέχει αποκλειστικά λέξεις που αντιστοιχούν σε κωδικοποιήσεις TM) και καθορίζουν τις προδιαγραφές που θα πρέπει να πληροί μία ιδιότητα γλωσσών $\mathcal{P}$ για να είναι η $L_\mathcal{P}$ αναδρομική ή αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα.

6.1 Το Θεώρημα του Rice για αναδρομικές γλώσσες

Παρατηρήστε ότι και οι τέσσερις γλώσσες που έχουμε παραλληλίσει σε αυτό το κεφάλαιο, οι L_ϵ, $L_\infty, L_\varnothing$ και L_{REC}, δεν είναι αναδρομικές. Εξετάζοντας τις ιδιότητες στις οποίες αντιστοιχούν ($\mathcal{P}_\epsilon, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{P}_\varnothing$ και REC αντίστοιχα) δεν μπορούμε να βρούμε κάτι κοινό, πέρα φυσικά από το απλό γεγονός ότι περιέχουν τουλάχιστον μία γλώσσα του RE αλλά δεν περιέχουν όλες τις γλώσσες του RE. Τέτοιου είδους ιδιότητες συνήθως τις αποκαλούμε *μη-τετριμμένες*. Το (απλό) Θεώρημα του Rice αποδεικνύει ότι η $L_\mathcal{P}$ είναι αναδρομική ανν η ιδιότητα $\mathcal{P}$ είναι τετριμμένη.



Σχήμα 6.1.1: *Η ΤΜ M' στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1.*

Θεώρημα 6.1.1 (Rice)**.** Για κάθε ιδιότητα $\mathcal{P} \subseteq \mathsf{RE}$ ισχύει ότι:

$$L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{REC} \Leftrightarrow \mathcal{P} = \varnothing \vee \mathcal{P} = \mathsf{RE}$$

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ [1] Έστω ιδιότητα $\mathcal{P} \subseteq \mathsf{RE}$, με $\mathcal{P} \notin \{\varnothing, \mathsf{RE}\}$. Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\varnothing \notin \mathcal{P}$ [2]. Έστω επίσης γλώσσα $L \in \mathcal{P}$ και ΤΜ M_L που την ημι-αποφασίζει. Θα δείξουμε ότι $L_{\text{Αποδοχής}} \leq_m L_{\mathcal{P}}$. Θεωρούμε $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & \text{, αν υπάρχει ΤΜ } M \text{ και } w \in \{0,1\}^* \text{ τέτοια ώστε } x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_{\uparrow} \rangle & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

όπου M' η ΤΜ του Σχήματος 6.1.1 και $M_{\uparrow}$ μία ΤΜ που «κολλάει» για κάθε είσοδο. Παρατηρούμε ότι:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $x \in L_{\text{Αποδοχής}}$ τότε $x = \langle M, w\rangle$ με $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}}$, οπότε $\phi(x) = \langle M' \rangle$ και $L(M') = L(M_L) = L \in \mathcal{P}$ άρα $\phi(x) \in L_{\mathcal{P}}$.
   - $x \notin L_{\text{Αποδοχής}}$ τότε:
     α. είτε $x = \langle M, w\rangle$ με $\langle M, w\rangle \notin L_{\text{Αποδοχής}}$, οπότε $\phi(x) = \langle M' \rangle$ και $L(M') = \varnothing \notin \mathcal{P}$ (αφού $M(w) \not\downarrow_{q_{\text{ναι}}}$), άρα $\phi(x) \notin L_{\mathcal{P}}$,
     β. είτε $x \neq \langle M, w\rangle$ οπότε $\phi(x) = \langle M_{\uparrow} \rangle$ και $L(M_{\uparrow}) = \varnothing \notin \mathcal{P}$, άρα $\phi(x) \notin L_{\mathcal{P}}$.

Αφού $L_{\text{Αποδοχής}} \notin \mathsf{REC}$ έπεται ότι $L_{\mathcal{P}} \notin \mathsf{REC}$.

$(\Leftarrow)$ Παρατηρούμε ότι:

$$\text{Αν } \mathcal{P} = \varnothing \text{ τότε } L_{\mathcal{P}} = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \in \varnothing\} = \varnothing \in \mathsf{REC}$$

και

$$\text{Αν } \mathcal{P} = \mathsf{RE} \text{ τότε } L_{\mathcal{P}} = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \in \mathsf{RE}\} = \mathcal{G} \in \mathsf{REC}$$ [3]

□

Παράδειγμα 6.1.2 (Εφαρμογή του Θεωρήματος του Rice)**.**

[1] Θα δείξουμε την αντιθετοαντιστροφή του.

[2] Αλλιώς θα πάρουμε την $\overline{\mathcal{P}}$ για την οποία επίσης ισχύει ότι $\overline{\mathcal{P}} \notin \{\varnothing, \mathsf{RE}\}$. Ολοκληρώνοντας την απόδειξη θα έχουμε δείξει ότι $L_{\overline{\mathcal{P}}} \notin \mathsf{REC}$. Για να συνάγουμε το ζητούμενο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{REC}$ ανν $L_{\overline{\mathcal{P}}} \in \mathsf{REC}$.

[3] Δες Ορισμό 1.4.9 και Παρατήρηση 1.4.10.

- $L_{\mathbb{N}} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M)| \in \mathbb{N}\} \notin \mathsf{REC}$ καθώς για την ιδιότητα $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ ισχύει ότι $\mathcal{P}_{\mathbb{N}} \neq \varnothing$ (παραδείγματος χάρη $\{\epsilon\} \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$) και $\mathcal{P}_{\mathbb{N}} \neq \mathsf{RE}$ ($\{0,1\}^* \notin \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$).

- $L = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) = \varnothing \vee L(M) = \{(01)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \vee L(M) = \{0,1\}^*\} \notin \mathsf{REC}$ καθώς για την ιδιότητα $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{(01)^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{0,1\}^*\}$ ισχύει ότι $L = L_{\mathcal{P}}$ και προφανώς $\mathcal{P} \notin \{\varnothing, \mathsf{RE}\}$.

6.2 Το Θεώρημα του Rice για αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες

Στο Παράδειγμα 6.0.1 είδαμε ότι η γλώσσα L_{REC} δεν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη. Είναι φανερό ότι η κλάση REC, ιδωμένη σαν ιδιότητα γλωσσών, ικανοποιεί πολλές και ποικίλες «προδιαγραφές». Η προδιαγραφή όμως που δεν ικανοποιεί, και ως εκ τούτου η γλώσσα L_{REC} δεν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη, είναι ότι υπάρχουν υπερσύνολα γλωσσών του REC που δεν ανήκουν στο REC (δες το Παράδειγμα 6.2.2 για περισσότερες λεπτομέριες). Το δεύτερο Θεώρημα του Rice (γνωστό ως *Γενικευμένο Θεώρημα του Rice*) καθορίζει πλήρως τις απαραίτητες προδιαγραφές μίας ιδιότητας $\mathcal{P}$ ώστε η $L_{\mathcal{P}}$ να είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Θεώρημα 6.2.1 (Γενικευμένο Θεώρημα του Rice)**.** Για κάθε ιδιότητα $\mathcal{P} \subseteq \mathsf{RE}$ ισχύει ότι:

$$L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE} \Leftrightarrow ① \wedge ② \wedge ③$$

όπου:

① $\forall L \in \mathcal{P}\ \forall L' \in \mathsf{RE}\ (L \subseteq L' \to L' \in \mathcal{P})$ [1]

② $\forall L \in \mathcal{P}\ (|L| = \aleph_0 \to \exists L' \subseteq L\ (|L'| \in \mathbb{N} \wedge L' \in \mathcal{P}))$ [2]

③ $F_{\mathcal{P}} = \{w_1\#w_2\#\cdots\#w_n \in (\{0,1\} \cup \{\#\})^* \mid \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \in \{L \in \mathcal{P} \mid |L| \in \mathbb{N}\}\} \in \mathsf{RE}$ [3] [4]

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE} \Rightarrow ①$: [5] Έστω γλώσσες $L_1 \in \mathcal{P}$ και $L_2 \in \mathsf{RE}$ τέτοιες ώστε $L_1 \subseteq L_2$ και $L_2 \notin \mathcal{P}$. Έστω επίσης ότι οι TM M_1, M_2 ημι-αποφασίζουν τις L_1, L_2 αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}} \leq_m L_{\mathcal{P}}$. Θεωρούμε συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & \text{, αν υπάρχει TM } M \text{ και } w \in \{0,1\}^* \text{ τέτοια ώστε } x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_1 \rangle & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

όπου M' η TM του Σχήματος 6.2.1. Παρατηρούμε ότι:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $x \in \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ τότε
      α. είτε $x = \langle M, w\rangle$ με $\langle M, w\rangle \in \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$, οπότε $\phi(x) = \langle M'\rangle$ και $L(M') = L(M_1) = L_1 \in \mathcal{P}$ άρα $\phi(x) \in L_{\mathcal{P}}$,

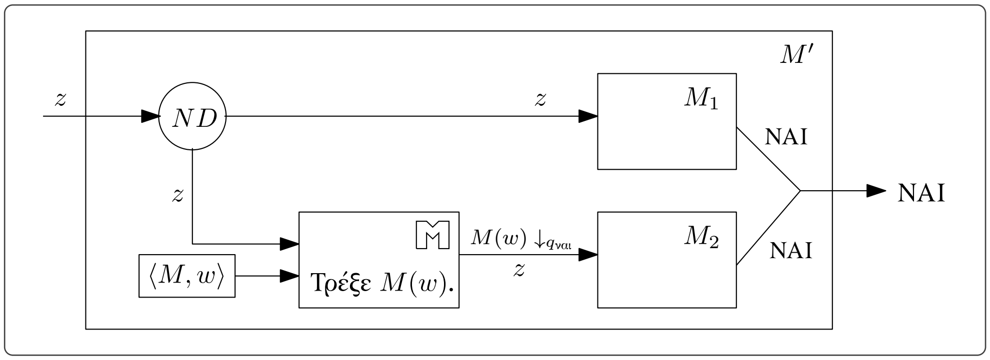
[1] Η συνθήκη αυτή «διαβάζεται»: *Κάθε αναδρομικά απαριθμήσιμο υπερσύνολο μίας γλώσσας που έχει την ιδιότητα, έχει επίσης την ιδιότητα.*

[2] *Κάθε γλώσσα που έχει την ιδιότητα έχει πεπερασμένο υποσύνολο που έχει επίσης την ιδιότητα.*

[3] Όπου $\# \notin \Sigma$. Τυπικά θα πρέπει να κωδικοποιήσουμε τη γλώσσα $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ στο $\{0,1\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε όμως άτυπα την κωδικοποίηση στο $\{0,1\} \cup \{\#\}$ καθώς είναι πιο παραστατική.

[4] *Η γλώσσα που περιέχει λέξεις που αντιστοιχούν σε πεπερασμένες γλώσσες που έχουν την ιδιότητα είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.*

[5] Θα δείξουμε την αντιθετοαντιστροφή του, δηλαδή ότι $\neg ① \Rightarrow L_{\mathcal{P}} \notin \mathsf{RE}$.



Σχήμα 6.2.1: *Η ΤΜ M' στην απόδειξη του ότι $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE} \Rightarrow$ 1 στο Θεώρημα 6.2.1.*

β. είτε $x \neq \langle M, w\rangle$, οπότε $\phi(x) = \langle M_1\rangle$ και $L_1 \in \mathcal{P}$ άρα $\phi(x) \in L_{\mathcal{P}}$.

- $x \notin \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ τότε $x = \langle M, w\rangle$ με $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}}$, οπότε $\phi(x) = \langle M'\rangle$ και $L(M') = L(M_2) = L_2 \notin \mathcal{P}$ (αφού $M(w)\downarrow_{q_{\text{ναι}}}$ και $L1 \subseteq L_2$), άρα $\phi(x) \notin L_{\mathcal{P}}$.

Αφού $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}} \notin \mathsf{RE}$ έπεται ότι $L_{\mathcal{P}} \notin \mathsf{RE}$.

$L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE} \Rightarrow$ 2 : [1] Έστω γλώσσα $L \in \mathcal{P}$ τέτοια ώστε $|L| = \aleph_0$ και κάθε πεπερασμένο υποσύνολό της δεν ανήκει στην $\mathcal{P}$. Έστω επίσης M_L η ΤΜ που ημι-αποφασίζει την L. Θα δείξουμε ότι $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}} \leq_m L_{\mathcal{P}}$. Θεωρούμε συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} \langle M'\rangle & , \text{ αν υπάρχει ΤΜ } M \text{ και } w \in \{0,1\}^* \text{ τέτοια ώστε } x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_L\rangle & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

όπου M' η ΤΜ του Σχήματος 6.2.2. Παρατηρούμε ότι:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.

2. - $x \in \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ τότε

    α. είτε $x = \langle M, w\rangle$ με $\langle M, w\rangle \in \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$, οπότε $\phi(x) = \langle M'\rangle$ και $L(M') = L(M_L) = L \in \mathcal{P}$ άρα $\phi(x) \in L_{\mathcal{P}}$,

    β. είτε $x \neq \langle M, w\rangle$, οπότε $\phi(x) = \langle M_L\rangle$ και $L \in \mathcal{P}$ άρα $\phi(x) \in L_{\mathcal{P}}$.

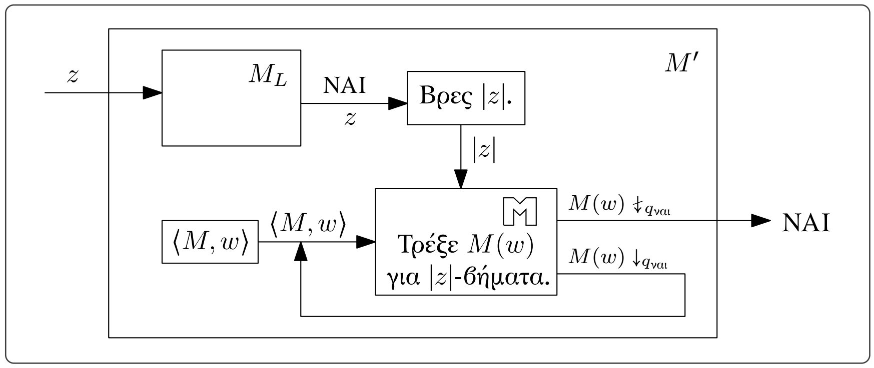
   - $x \notin \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ τότε $x = \langle M, w\rangle$ με $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}}$, οπότε $\phi(x) = \langle M'\rangle$. Παρατηρούμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $M(w)\downarrow^t_{q_{\text{ναι}}}$, οπότε $L(M') = \{z \in L \mid |z| < t\}$. Συνεπώς $|L(M')| \in \mathbb{N}$ και $L(M') \subseteq L$ άρα $L(M') \notin \mathcal{P}$, οπότε $\phi(x) \notin L_{\mathcal{P}}$.

Αφού $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}} \notin \mathsf{RE}$ έπεται ότι $L_{\mathcal{P}} \notin \mathsf{RE}$.

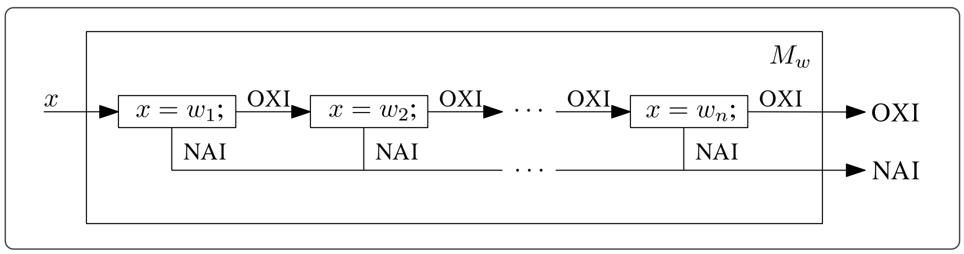
$L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE} \Rightarrow$ 3 : Για κάθε λέξη του $(\Sigma \cup \{\#\})^*$, έστω τη $w = w_1\#w_2\#\cdots\#w_n$ όπου $w_i \in \{0,1\}^*$ για $i \in [n]$ [2], θεωρούμε τη λέξη $\langle M_w\rangle \in \{0,1\}^*$, όπου M_w η Μ.Τ του Σχήματος 6.2.3.

Αφού $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE}$ υπάρχει απαριθμητής, έστω E, που απαριθμεί την $L_{\mathcal{P}}$. Θεωρούμε την ΤΜ $M_{F_{\mathcal{P}}}$ του Σχήματος 6.2.4 και παρατηρούμε ότι:

[1] Θα δείξουμε την αντιθετοαντιστροφή του, δηλαδή ότι ¬2 $\Rightarrow L_{\mathcal{P}} \notin \mathsf{RE}$.
[2] Ενδεχομένως κάποια από τις w_i, $i \in [n]$, να είναι η κενή λέξη και να έχουμε και επαναλήψεις.



Σχήμα 6.2.2: *Η ΤΜ M' στην απόδειξη του ότι $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE} \Rightarrow$ 2 στο Θεώρημα 6.2.1.*



Σχήμα 6.2.3: *Η ΤΜ M_w στην απόδειξη του ότι $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE} \Rightarrow$ 3 στο Θεώρημα 6.2.1.*

- Αν $w \in F_{\mathcal{P}}$, τότε $w = w_1\#w_2\#\cdots\#w_n$ για κάποιες λέξεις $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \{0,1\}^*$, όπου $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \in \mathcal{P}$. Αφού η M_w αποφασίζει την L ο E κάποια στιγμή θα κάνει τυπώσει $\langle M_w\rangle$. Άρα $M_{F_{\mathcal{P}}}(w) \downarrow q_{\text{ναι}}$.
- Αν $w \notin F_{\mathcal{P}}$, τότε $w = w_1\#w_2\#\cdots\#w_n$ για κάποιες λέξεις $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \{0,1\}^*$, όπου $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \notin \mathcal{P}$. Ο E δεν θα τυπώσει ποτέ $\langle M_w\rangle$. Άρα $M_{F_{\mathcal{P}}}(w) \uparrow$.

Επομένως η $M_{F_{\mathcal{P}}}$ ημι-αποφασίζει την $F_{\mathcal{P}}$.

($\Leftarrow$): Από το 3 υπάρχει απαριθμητής E που απαριθμεί την $F_{\mathcal{P}}$. Θα δείξουμε ότι η ΤΜ D του Σχήματος 6.2.5 ημι-αποφασίζει την $L_{\mathcal{P}}$ [1].

$L_{\mathcal{P}} \subseteq L(D)$: Έστω $\langle M\rangle \in L_{\mathcal{P}}$ δηλαδή $L(M) \in \mathcal{P}$. Από το 2 έπεται ότι

$$\exists L \subseteq L(M)\ (|L| \in \mathbb{N} \wedge L \in \mathcal{P}),$$

έστω ότι $L = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Από το 3 έπεται ότι ο E κάποια στιγμή θα τυπώσει $w_1\#\cdots\#w_n$, έστω μετά από i-βήματα, και αφού $L \subseteq L(M)$, έπεται ότι

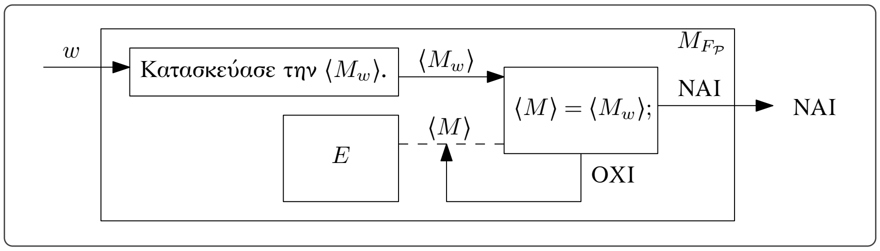
$$\exists j \in \mathbb{N}\ \forall s \in [n]\ (M(w_s) \downarrow^{j}_{q_{\text{ναι}}}),$$

οπότε για το ζευγάρι (i, j) ισχύει ότι $D(\langle M\rangle) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$, άρα $\langle M\rangle \in L(D)$.

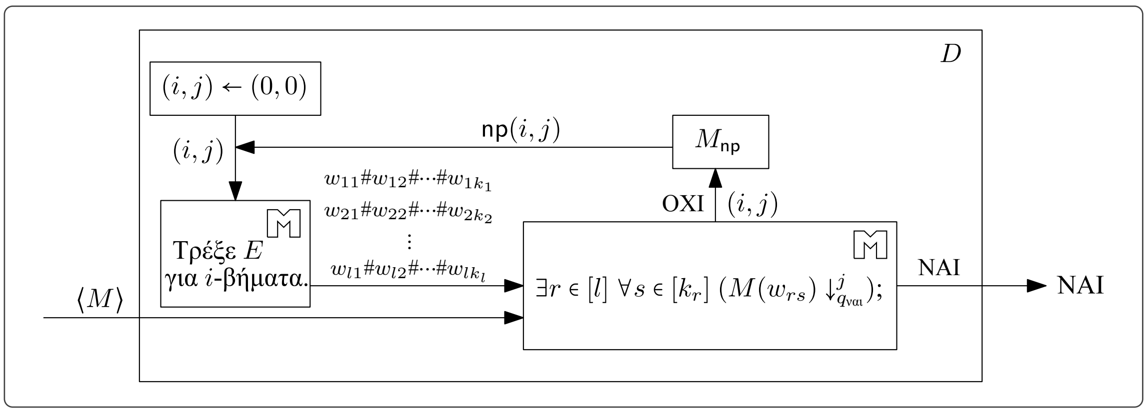
$L(D) \subseteq L_{\mathcal{P}}$: Έστω $\langle M\rangle \in L(D)$, δηλαδή υπάρχει $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ τέτοιο ώστε

$$\forall s \in [n]\ (M(w_s) \downarrow^{j}_{q_{\text{ναι}}}),$$

[1] Η ΤΜ $M_{\text{πρ}}$ που χρησιμοποιεί σαν υπορουτίνα η D είναι μία παραλλαγή της ΤΜ της Παρατήρησης 1.4.17.



Σχήμα 6.2.4: *Η ΤΜ $M_{F_{\mathcal{P}}}$ στην απόδειξη του ότι $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE} \Rightarrow$ (3) στο Θεώρημα 6.2.1.*



Σχήμα 6.2.5: *Η ΤΜ D στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1.*

όπου $w_1\#\cdots\#w_n$ είναι μία από τις λέξεις που τύπωσε ο E σε i-βήματα. Συνεπώς ισχύει ότι η $L = \{w_1, \ldots, w_n\}$ είναι υποσύνολο της $L(M)$ και, αφού ο E απαριθμεί την $F_{\mathcal{P}}$, ισχύει ότι η L έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$. Από το (1) έπεται ότι $L(M) \in \mathcal{P}$, άρα $\langle M \rangle \in L_{\mathcal{P}}$. $\square$

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής του Γενικευμένου Θεωρήματος του Rice.

Παράδειγμα 6.2.2. Θα αποδείξουμε ξανά ότι η γλώσσα L_{REC} δεν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε αναγωγή (όπως κάναμε στο Παράδειγμα 6.0.1).

Θεωρούμε την ιδιότητα $\mathcal{P} = \mathsf{REC}$. Παρατηρούμε ότι για τη γλώσσα $\varnothing$ (που προφανώς έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$) υπάρχει γλώσσα L' με $\varnothing \subseteq L'$ που δεν έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$, παραδείγματος χάρη η $L_{\text{Αποδοχής}}$. Συνεπώς παραβιάζεται η συνθήκη (1) του Θεωρήματος 6.2.1, άρα $L_{\mathsf{REC}} \notin \mathsf{RE}$.

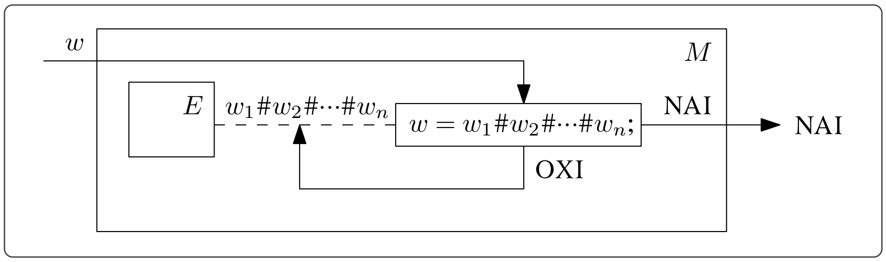
Παράδειγμα 6.2.3. Έστω η ιδιότητα $\mathcal{P} = \{L \in \mathsf{RE} \mid L \setminus L_{\text{Αποδοχής}} \neq \varnothing\}$. Παρατηρούμε ότι αν η L έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$ τότε $L \setminus L_{\text{Αποδοχής}} \neq \varnothing$, οπότε:

$$\forall L' \in \mathsf{RE}\ (L \subseteq L' \to L' \setminus L_{\text{Αποδοχής}} \neq \varnothing)$$

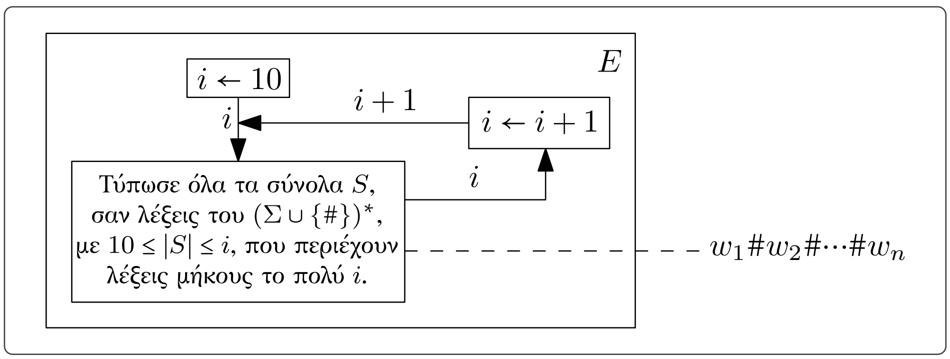
Άρα η $\mathcal{P}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (1) του Θεωρήματος 6.2.1.

Επίσης, αφού $L \setminus L_{\text{Αποδοχής}} \neq \varnothing$, υπάρχει $w \in L \setminus L_{\text{Αποδοχής}}$. Θεωρούμε τη γλώσσα $\{w\} \subseteq L$ για την οποία ισχύει επίσης ότι $\{w\} \setminus L_{\text{Αποδοχής}} \neq \varnothing$, άρα $\{w\} \in \mathcal{P}$. Συνεπώς η $\mathcal{P}$ ικανοποιεί και τη συνθήκη (2) του Θεωρήματος 6.2.1.

Έστω (προς άτοπο) ότι ικανοποιεί και τη συνθήκη (3), δηλαδή υπάρχει απαριθμητής E που απαριθμεί την $F_{\mathcal{P}}$. Η ΤΜ M του Σχήματος 6.2.6 ημι-αποφασίζει την $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$, καθώς αν $w \in \overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ τότε $\{w\} \in \mathcal{P}$ άρα ο E κάποια στιγμή θα τυπώσει τη w. Άτοπο. Συνεπώς $L_{\mathcal{P}} \notin \mathsf{RE}$.



Σχήμα 6.2.6: *Η ΤΜ M που (υποθετικά) ημι-αποφασίζει την $\overline{L}_{\text{Αποδοχής}}$ στο Παράδειγμα 6.2.3.*



Σχήμα 6.2.7: *Ο απαριθμητής E στο Παράδειγμα 6.2.4.*

Παράδειγμα 6.2.4. Έστω η ιδιότητα $\mathcal{P} = \{L \in \mathsf{RE} \mid |L| \geq 10\}$. Παρατηρούμε ότι αν η L έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$ τότε $|L| \geq 10$, οπότε:

$$\forall L' \in \mathsf{RE}\ (L \subseteq L' \rightarrow |L'| \geq |L| \geq 10)$$

Άρα η $\mathcal{P}$ ικανοποιεί τη συνθήκη ① του Θεωρήματος 6.2.1.

Επίσης, αφού $|L| \geq 10$, υπάρχουν $w_1, \ldots, w_{10} \in L$. Θεωρούμε τη γλώσσα $L' = \{w_1, \ldots, w_{10}\} \subseteq L$ η οποία έχει 10 στοιχεία, άρα $L' \in \mathcal{P}$. Συνεπώς η $\mathcal{P}$ ικανοποιεί και τη συνθήκη ② του Θεωρήματος 6.2.1.

Τέλος, ο απαριθμητής E του Σχήματος 6.2.7 απαριθμεί την $F_{\mathcal{P}}$. Συνεπώς η $\mathcal{P}$ ικανοποιεί και τη συνθήκη ③ του Θεωρήματος 6.2.1, άρα έπεται ότι $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE}$ [1].

Ασκήσεις

6.1 (☆☆☆). Έστω $L \in \mathsf{RE}$. Εκφράστε σαν γλώσσα το ακόλουθο πρόβλημα:

Είσοδος:	Κωδικοποίηση μίας ΤΜ M
Έξοδος:	Ναι αν η M αναγνωρίζει την L και όχι αλλιώς.

Και ελέγξτε αν ανήκει στο REC.

[1] Φυσικά στην προκειμένη περίπτωση θα ήταν λιγότερο κουραστικό να κατασκευάσουμε κατευθείαν μία ΤΜ που να ημι-αποφασίζει την $L_{10} = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M)| \geq 10\}$. Η κατασκευή αυτής της ΤΜ αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

6.2 (★☆☆). Εξετάστε αν η γλώσσα $L = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Υπάρχει TM M' με άρτιο πλήθος καταστάσεων τέτοια ώστε $L(M') = L(M)\}$ είναι αναδρομική.

6.3 (★☆☆). Δείξτε ότι $L = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid \exists w \in \Sigma^* : |w| = 1871 \ \wedge \ w \in L(M)\} \in \mathsf{RE}$. Ισχύει ότι $\overline{L} \in \mathsf{RE}$;

6.4 (★☆☆). Εξετάστε αν οι γλώσσες:

- $L_{\mathsf{RE}} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \in \mathsf{RE}\}$
- $L_{\mathsf{CS}} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \in \mathsf{CS}\}$
- $L_{\mathsf{CF}} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \in \mathsf{CF}\}$
- $L_{\mathsf{R}} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \in \mathsf{R}\}$

είναι αναδρομικά απαριθμήσιμες.

6.5 (★☆☆). Δώστε παράδειγμα ιδιότητας που ικανοποιεί τα 1 και 3 στην εκφώνηση του Θεωρήματος 6.2.1, αλλά δεν ικανοποιεί το 2.

6.6 (☆☆☆). Εξετάστε αν οι γλώσσες:

- $L_1 = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \cap \{0^{2^n} \in \{0,1\}^* \mid n \in \mathbb{N}\} = \varnothing\}$
- $L_2 = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) \cap \{0^{2^n} \in \{0,1\}^* \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing\}$

είναι αναδρομικά απαριθμήσιμες.

6.7 (☆☆☆). Εξετάστε αν οι γλώσσες:

- $L_1 = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Υπάρχουν τουλάχιστον δύο λέξεις w_1, w_2, με $|w_1| \neq |w_2|$, για τις οποίες η M τερματίζει$\}$
- $L_2 = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Υπάρχουν ακριβώς δύο λέξεις w_1, w_2, με $|w_1| \neq |w_2|$, για τις οποίες η M τερματίζει$\}$

είναι αναδρομικά απαριθμήσιμες.

6.8 (★☆☆). Εξετάστε αν οι γλώσσες:

- $L_1 = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M)| \leq 68\}$
- $L_2 = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M)| \geq 68\}$

είναι αναδρομικά απαριθμήσιμες.

6.9 (★☆☆). Εξετάστε αν οι γλώσσες:

- $L_1 = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Η M τερματίζει για όλες τις λέξεις με άρτιο μήκος$\}$

- $L_2 = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Υπάρχει λέξη αρτίου μήκους για την οποία η M τερματίζει$\}$

είναι αναδρομικά απαριθμήσιμες.

6.10 (★☆☆). Εξετάστε αν η γλώσσα $L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M)|$ είναι πρώτος αριθμός$\}$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

6.11 (★☆☆). Εξετάστε αν η γλώσσα $L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid$ Η M τερματίζει για όλα τα παλίνδρομα του $\{0,1\}^*\}$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

6.12 (★☆☆). Εξετάστε αν η γλώσσα $L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M)| = |\overline{L(M)}| = \aleph_0\}$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ

7.1 Μπορούν οι μηχανές να αυτο-αναπαράγονται;

Προτού απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα ας παρακολουθήσουμε τον ακόλουθο συνειρμό:

1. *Οι ζωντανοί οργανισμοί είναι μηχανές.*

   Η πρόταση αυτή είναι αληθής και αποτελεί θεμελιώδες δόγμα της σύγχρονης Βιολογίας. Οι ζωντανοί οργανισμοί λειτουργούν με «μηχανιστικό» τρόπο.

2. *Οι ζωντανοί οργανισμοί μπορούν να αυτο-αναπαράγονται.*

   Η πρόταση αυτή είναι επίσης αληθής. Είναι ουσιώδες γνώρισμα των ζωντανών οργανισμών να μπορούν να παράξουν, μέσω κάποιας διαδικασίας γονιμοποίησης και γέννησης, ένα ζωντανό οργανισμό του ίδιου είδους.

Μπορούν λοιπόν οι μηχανές να αυτο-αναπαράγονται, όπως θα έκανε ένας ζωντανός οργανισμός;

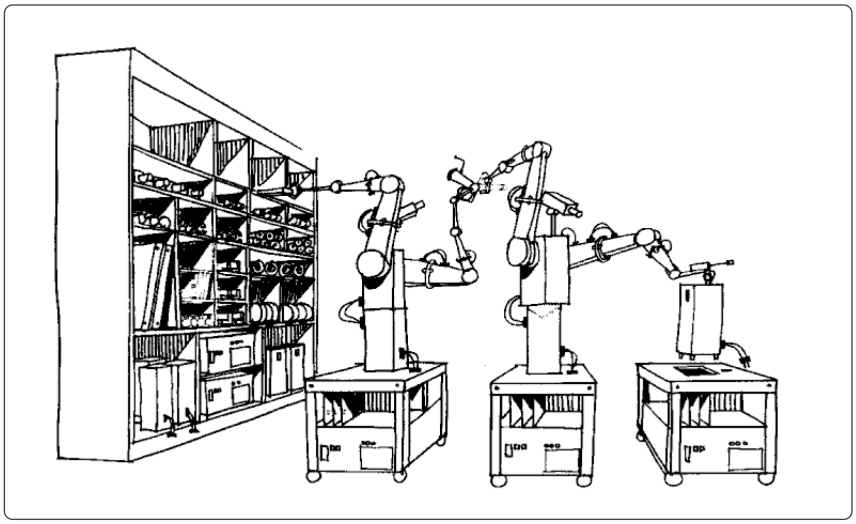
Αν μιλούσαμε γενικά για μηχανές, διαισθητικά θα απαντούσαμε αρνητικά, καθώς αν η μηχανή A παράγει τη μηχανή B μάλλον θα πρέπει να είναι «πιο πολύπλοκη» (σε επίπεδο σχεδίασης και περιγραφής) από τη B. Συνεπώς η A δεν θα μπορούσε να παράξει την A. Στην πραγματικότητα όμως η απάντηση είναι καταφατική, όντως μία μηχανή μπορεί να αυτο-αναπαράγεται (δες Σχήμα 7.1.1).

Ας επικεντρωθούμε όμως στις μηχανές που μας ενδιαφέρουν, τις ΤΜ, και ας μεταφέρουμε το ερώτημα στα πλαίσιά τους. Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να αποδείξουμε ότι και οι ΤΜ μπορούν να αυτο-αναπαράγονται με την ακόλουθη έννοια: *Μπορεί μία ΤΜ M να έχει σαν έξοδο την $\langle M \rangle$.* Μπορούμε να φανταστούμε τις ΤΜ σαν ένα πρόγραμμα (δες Σελίδα 14) και ξέρουμε ότι ένα πρόγραμμα μπορεί να έχει σαν έξοδο τον κώδικα του. Για παράδειγμα ας δούμε το ακόλουθο πρόγραμμα σε ψευδογλώσσα [1]:

[1] Σε Python θα γράφαμε:

```
a = ['print("a =", a)','for s in a:','    print(s)']
print("a =", a)
for s in a:
    print(s)
```

Παραδείγματα για άλλες γλώσσες προγραμματισμού υπάρχουν εδώ: http://www.nyx.net/~gthompso/quine.htm.



Σχήμα 7.1.1: *Καλλιτεχνική αναπαράσταση μίας μηχανής που αυτο-αναπαράγεται.*

Γράψε δύο αντίγραφα του παρακάτω μηνύματος το δεύτερο σε εισαγωγικά.
«Γράψε δύο αντίγραφα του παρακάτω μηνύματος το δεύτερο σε εισαγωγικά.»

Σε φυσική γλώσσα αυτό θα το γράφαμε απλούστατα ως εξής:

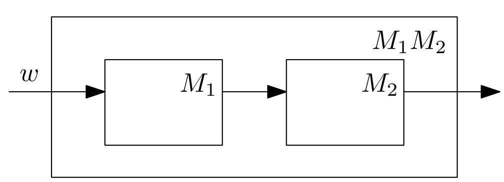
Γράψε αυτήν την πρόταση.

όμως μία γλώσσα προγραμματισμού δεν μπορεί να καταλάβει την *αυτοαναφορά* (το «αυτήν» δηλαδή).

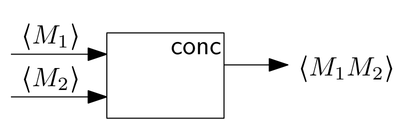
Μιμούμενοι την παραπάνω υλοποίηση της αυτοαναφοράς θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν ΤΜ με έξοδο την κωδικοποίησή τους (οι λεγόμενες *αυτογραφικές ΤΜ*). Μάλιστα θα προχωρήσουμε παρακάτω και θα αποδείξουμε κάτι ακόμα πιο εντυπωσιακό: *Μία ΤΜ M μπορεί να χρησιμοποιεί κατά τη λειτουργία της την $\langle M \rangle$*. Μπορεί να έχει δηλαδή «επίγνωση» του «εαυτού» της.

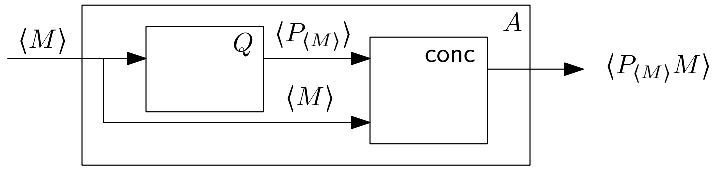
Θα ξεκινήσουμε εισάγοντας τον συμβολισμό που θα διευκολύνει την περιγραφή των ΤΜ στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Συμβολισμός 7.1.1. Έστω ΤΜ M_1, M_2. Θεωρούμε την ΤΜ $M_1 M_2$:

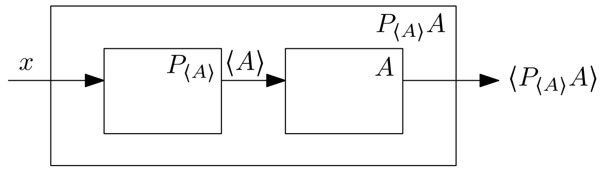


που τρέχει την M_1 με είσοδο w και όταν αυτή τερματίσει (αν τερματίσει) τρέχει την M_2 με είσοδο το περιεχόμενο της ταινίας της $M_1(w)$ κατά τον τερματισμό της. Στην περίπτωση όπου η M_2 δέχεται δύο εισόδους (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1), η πρώτη θα είναι το περιεχόμενο της ταινίας της $M_1(w)$ και η δεύτερη η w. Θεωρούμε επίσης την ΤΜ conc:





Σχήμα 7.1.2: *Η ΤΜ A στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.2.*



Σχήμα 7.1.3: *Η ΤΜ $P_{\langle A \rangle} A$ στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.2.*

που δέχεται ως είσοδο τις κωδικοποιήσεις των ΤΜ M_1 και M_2 και επιστρέφει την κωδικοποίηση της ΤΜ $M_1 M_2$ (και όχι την παράθεση των λέξεων $\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle$).

Θεώρημα 7.1.2. Υπάρχει ΤΜ M που («αγνοεί» την είσοδό της και) επιστρέφει $\langle M \rangle$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ΤΜ P_w που «αγνοεί» την είσοδό της και επιστρέφει τη λέξη w και την ΤΜ Q που παίρνει μία λέξη w σαν είσοδο και επιστρέφει την $\langle P_w \rangle$. Τέλος, θεωρούμε την ΤΜ A του Σχήματος 7.1.2 και παρατηρούμε ότι η ΤΜ $P_{\langle A \rangle} A$ του Σχήματος 7.1.3 («αγνοεί» την είσοδό της και) επιστρέφει $\langle P_{\langle A \rangle} A \rangle$, άρα είναι η ΤΜ που αναζητούσαμε. □

7.2 Το Θεώρημα Αναδρομής

Θεώρημα 7.2.1 (Θεώρημα Αναδρομής). Για κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση $t : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ υπάρχει ΤΜ R τέτοια ώστε για κάθε $x \in \{0,1\}^*$:

$$\phi_R(x) = t(\langle R \rangle, x)$$

όπου ϕ_R είναι η συνάρτηση που υπολογίζει η ΤΜ R (δες Ορισμό 1.2.13).

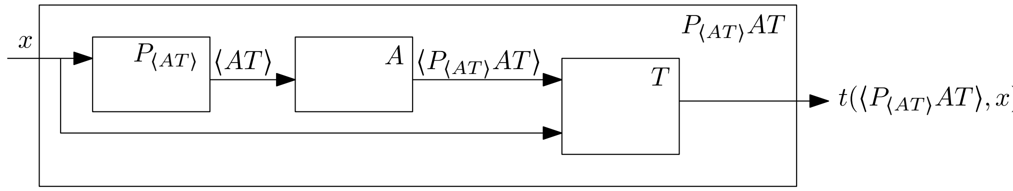
Απόδειξη. Έστω T η ΤΜ που υπολογίζει τη συνάρτηση t (η T δέχεται σαν είσοδο δύο λέξεις). Παρατηρούμε ότι η ΤΜ $P_{\langle AT \rangle} AT$ του Σχήματος 7.2.1, με είσοδο $x \in \{0,1\}^*$ επιστρέφει την τιμή $t(\langle P_{\langle AT \rangle} AT \rangle, x)$, άρα είναι η ΤΜ R που αναζητούσαμε. □

Ως παράδειγμα εφαρμογής του Θεωρήματος Αναδρομής θα αποδείξουμε ξανά ότι $HP \notin \text{REC}$.

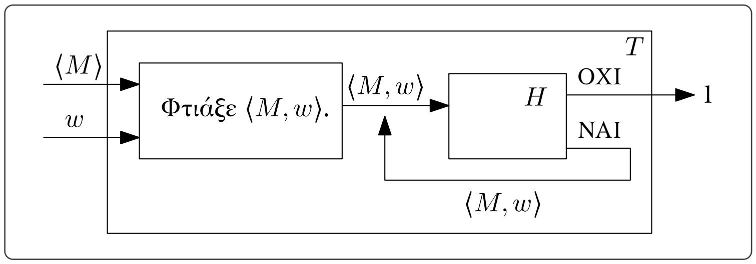
Παράδειγμα 7.2.2. Έστω (προς άτοπο) ότι η ΤΜ H αποφασίζει την HP. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, με:

$$t(x, w) = \begin{cases} 1 & \text{, αν υπάρχει ΤΜ } M \text{ τέτοια ώστε } x = \langle M \rangle \text{ και } M(w) \uparrow \\ \bot & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

Αυτή η (μερική) συνάρτηση είναι υπολογίσιμη (π.χ. από την ΤΜ του Σχήματος 7.2.2), άρα από το Θεώρημα 7.2.1 υπάρχει ΤΜ R τέτοια ώστε για κάθε $w \in \{0,1\}^*$:



Σχήμα 7.2.1: *Η TM $P_{\langle AT \rangle} AT$ στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1.*



Σχήμα 7.2.2: *Η TM του Παραδείγματος 7.2.2.*

$$\phi_R(w) = t(\langle R \rangle, w) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } R(w) \uparrow \\ \perp & , \text{ αν } R(w) \downarrow \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } \phi_R(w) = \perp \\ \perp & , \text{ αν } \phi_R(w) \neq \perp \end{cases}$$

πράγμα που φυσικά είναι άτοπο.

Το Παράδειγμα 7.2.2 είναι ενδεικτικό της δύναμης του Θεώρημα Αναδρομής, καθώς μας δείχνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι η HP δεν ανήκει στο REC, χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε διαγωνιοποίηση. Η πραγματικότητα όμως είναι ότι αντί για διαγωνιοποίηση χρησιμοποιήσαμε αυτοαναφορά, μία έννοια που στη λογική ταυτίζεται συχνά με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor (και με τα *Θεωρήματα Σταθερού Σημείου*, όπως π.χ. το Θεώρημα 7.3.3).

Πόρισμα 7.2.3. Έστω υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$. Υπάρχει TM R που υπολογίζει την f και «χρησιμοποιεί» κατά τον υπολογισμό την $\langle R \rangle$.

Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $t : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $t(x,y) = f(y)$, καθώς από το Θεώρημα 7.2.1 (αφού η t προφανώς είναι υπολογίσιμη) παίρνουμε TM R τέτοια ώστε για κάθε $y \in \{0,1\}^*$ να ισχύει ότι $\phi_R(y) = t(\langle R \rangle, y) = f(y)$ [1].

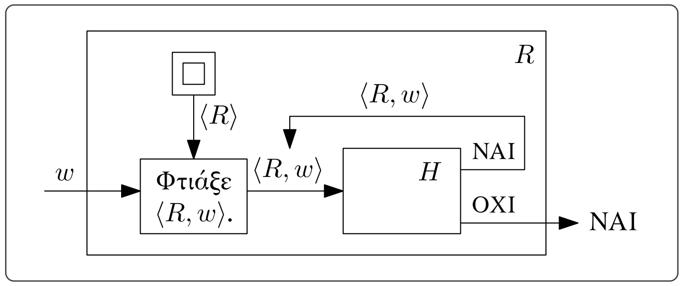
Πόρισμα (του Πορίσματος 7.2.3). Έστω γλώσσα $L \in$ RE. Υπάρχει TM R που ημι-αποφασίζει την L και «χρησιμοποιεί» στον υπολογισμό της την $\langle R \rangle$ [2].

Αν κοιτάξουμε προσεκτικά την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1 θα δούμε ότι η TM R (δηλαδή η $P_{\langle AT \rangle} AT$) πρώτα δημιουργεί την $\langle R \rangle$ (δηλαδή την $\langle P_{\langle AT \rangle} AT \rangle$) και έπειτα τη χρησιμοποιεί για να υπολογίσει την $t(\langle R \rangle, y)$. Το γεγονός αυτό αποτελεί την έμπνευση του ακόλουθου συμβολισμού.

Συμβολισμός 7.2.4 (Κουτάκια συνέχεια...).

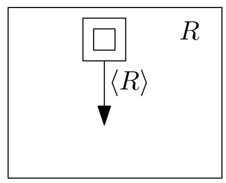
[1] Πιο αναλυτικά: Έστω M_f η TM που υπολογίζει την f και T η TM που υπολογίζει την t (απλά τρέχει την M_f για τη δεύτερη είσοδο). Τότε η ζητούμενη R είναι η $P_{\langle AT \rangle} AT$.

[2] Αρκεί να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 7.2.3 για τη συνάρτηση της Πρότασης 1.2.39.



Σχήμα 7.2.3: *Η ΤΜ του Παραδείγματος 7.2.5, όπου H η ΤΜ που (υποθετικά) αποφασίζει την HP.*

8. Όταν χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Αναδρομής κατά τον σχεδιασμό μίας ΤΜ θα γράφουμε:



Παράδειγμα 7.2.5 (Το Παράδειγμα 7.2.2 με τον παραπάνω συμβολισμό). Θωρούμε την ΤΜ R του Σχήματος 7.2.3 και παρατηρούμε ότι για $w \in \{0,1\}^*$:

$$R(w) \downarrow \Leftrightarrow H(\langle R, w \rangle) \downarrow_{q_{\text{όχι}}} \Leftrightarrow R(w) \uparrow$$

που είναι άτοπο.

Πιο αναλυτικά θα έπρεπε να ορίσουμε την ΤΜ T του Σχήματος 7.2.2 (όπου αντί να επιστρέφει 1 αποδέχεται την είσοδό της) και έπειτα να πάρουμε ως R τη μηχανή $P_{\langle AT \rangle}AT$. Όπως θα παρατηρήσατε ο Συμβολισμός 7.2.4 είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για την απλοποίηση της παρουσίασης.

Παράδειγμα 7.2.6 (Εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1).
($\Rightarrow$) Έστω ιδιότητα $\mathcal{P} \subseteq \mathsf{RE}$ με $\mathcal{P} \notin \{\varnothing, \mathsf{RE}\}$ και γλώσσες $L_1 \in \mathcal{P}$ και $L_2 \in \mathsf{RE} \setminus \mathcal{P}$. Έστω επίσης ότι οι ΤΜ M_1, M_2 ημι-αποφασίζουν τις L_1 και L_2 αντίστοιχα και (προς άτοπο) ότι η H αποφασίζει την $L_{\mathcal{P}}$. Παρατηρούμε ότι για την ΤΜ του Σχήματος 7.2.4 ισχύει ότι:

- $\langle R \rangle \in L_{\mathcal{P}} \Rightarrow H(\langle R \rangle) \downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow L(R) = L(M_2) = L_2 \notin \mathcal{P} \Rightarrow \langle R \rangle \notin L_{\mathcal{P}}$

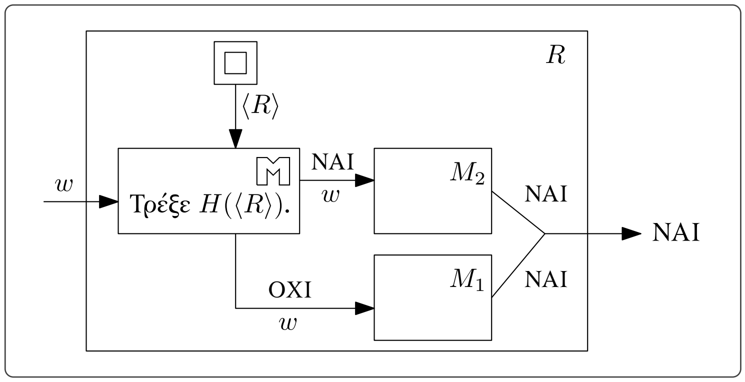
- $\langle R \rangle \notin L_{\mathcal{P}} \Rightarrow H(\langle R \rangle) \downarrow_{q_{\text{όχι}}} \Rightarrow L(R) = L(M_1) = L_1 \in \mathcal{P} \Rightarrow \langle R \rangle \in L_{\mathcal{P}}$

που είναι άτοπο.

Θα κλείσουμε τα παραδείγματα εφαρμογών του Θεωρήματος Αναδρομής ορίζοντας μία πολύ ενδιαφέρουσα κλάση ΤΜ. Υπάρχουν αριθμησίμως άπειρες ΤΜ που αποφασίζουν μια γλώσσα $L \in \mathsf{RE}$, απ' όλες αυτές, ακριβώς μία έχει τη *βραχύτερη-συντομότερη «περιγραφή»*.

Ορισμός 7.2.7. Μία ΤΜ M καλείται *βραχύτατη ΤΜ* ανν για κάθε $i \in \mathbb{N}$ με $i < \mathsf{Gödel}(M)$ ισχύει ότι $L(M_i) \neq L(M)$, όπου M_i η ΤΜ με αριθμό Gödel i. Ορίζουμε επίσης τη γλώσσα $L_{\text{Βραχύτατες}} = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid M \text{ βραχύτατη ΤΜ}\}$ [1].

[1] Η $L_{\text{Βραχύτατες}}$ περιέχει τις βραχύτερες κωδικοποιήσεις ΤΜ που αναγνωρίζουν τις γλώσσες στο RE.



Σχήμα 7.2.4: *Η TM του Παραδείγματος 7.2.6.*

Λήμμα 7.2.8. Η γλώσσα $L_{\text{Βραχύτατες}}$ είναι άπειρη.

Απόδειξη. Έστω (προς άτοπο) ότι $L_{\text{Βραχύτατες}} = \{\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle \ldots, \langle M_n\rangle\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει πεπερασμένη γλώσσα $L \notin \{L(M_1), L(M_2), \ldots, L(M_n)\}$ [1]. Συνεπώς η βραχύτατη TM που αποφασίζει την L θα έπρεπε να είναι μία εκ των $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Άτοπο. □

Πρόταση 7.2.9. $L_{\text{Βραχύτατες}} \notin \mathsf{RE}$.

Απόδειξη. Έστω (προς άτοπο) ότι $L_{\text{Βραχύτατες}} \in \mathsf{RE}$ και ότι ο απαριθμητής E την απαριθμεί. Θεωρούμε την TM R του Σχήματος 7.2.5 και παρατηρούμε ότι ο E κάποτε θα επιστρέψει μία TM M με $\mathsf{Gödel}(M) > \mathsf{Gödel}(R)$, καθώς η $L_{\text{Βραχύτατες}}$ είναι άπειρη (Λήμμα 7.2.8). Οπότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} L(R) = L(M) \\ \langle M\rangle \in L_{\text{Βραχύτατες}} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathsf{Gödel}(M) \le \mathsf{Gödel}(R)$$

που είναι άτοπο. □

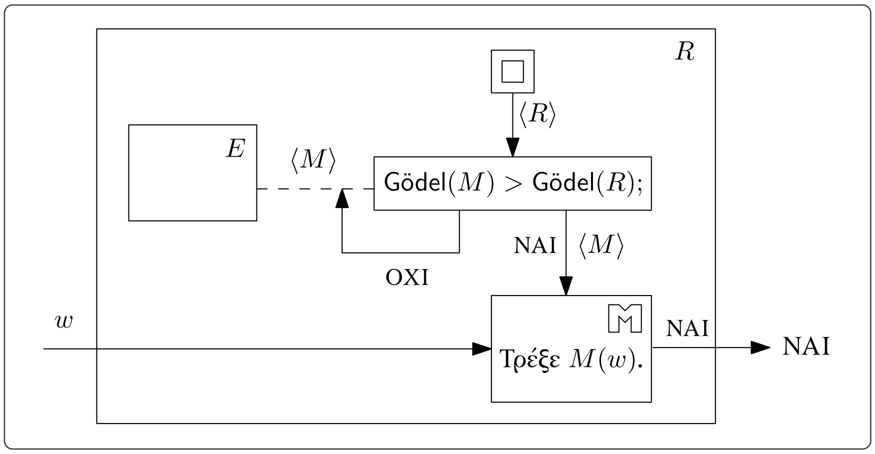
7.3 Το Πρώτο Θεώρημα Μη-πληρότητας του Gödel

Ορισμός 7.3.1. *Μετασχηματισμός TM* είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $t : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (δες Ορισμό 1.4.9). Εναλλακτικά (και ίσως πιο βολικά), μπορούμε να θεωρήσουμε ως μετασχηματισμό TM τη συνάρτηση $t' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $t'(\mathsf{Gödel}(M)) = \mathsf{Gödel}(N)$ ανν $t(\langle M\rangle) = \langle N\rangle$.

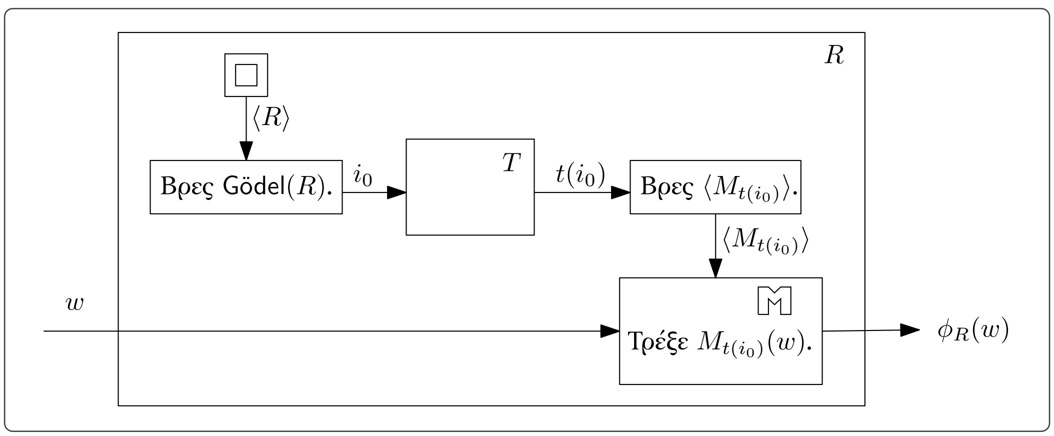
Ορισμός 7.3.2. Έστω μετασχηματισμός $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Το $i_0 \in \mathbb{N}$ είναι *σταθερό σημείο του* t ανν οι TM με αριθμούς Gödel i_0 και $t(i_0)$ είναι ισοδύναμες (δες Ορισμό 1.2.14).

Θεώρημα 7.3.3 (Θεώρημα Σταθερού Σημείου)**.** Κάθε πλήρης και υπολογίσιμος μετασχηματισμός TM έχει σταθερό σημείο.

[1] Παρατηρήστε ότι ακριβώς μία από τις $L(M_1), \ldots, L(M_n)$ μπορεί να είναι η $\{0,1\}^*$, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι είναι η M_1 (η περίπτωση όπου καμία από τις $L(M_1), \ldots, L(M_n)$ δεν είναι η $\{0,1\}^*$ καλύπτεται από τα επιχειρήματα που θα ακολουθήσουν). Συνεπώς υπάρχουν λέξεις $w_2 \notin L(M_2), \ldots, w_n \notin L(M_n)$. Παρατηρήστε ότι $L = \{w_2, \ldots, w_n\} \notin \{L(M_1), L(M_2), \ldots, L(M_n)\}$.



Σχήμα 7.2.5: *Η ΤΜ της Πρότασης 7.2.9.*



Σχήμα 7.3.1: *Η ΤΜ που «αποτελεί» σταθερό σημείο για τον μετασχηματισμό t.*

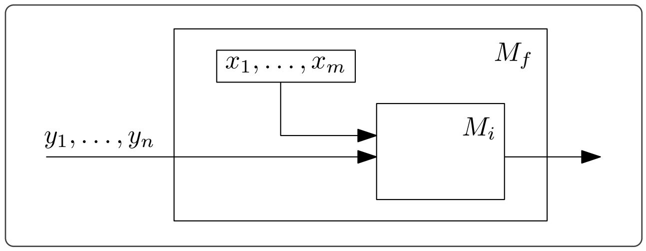
Απόδειξη. Έστω T η ΤΜ που υπολογίζει τον μετασχηματισμό t. Θα συμβολίζουμε με M_i την ΤΜ με αριθμό Gödel i. Παρατηρούμε ότι αν η ΤΜ R του Σχήματος 7.3.1 έχει αριθμό Gödel i_0 τότε για κάθε $w \in \{0,1\}^*$ ισχύει ότι $\phi_R(w) = \phi_{M_{i_0}}(w) = \phi_{M_{t(i_0)}}(w)$. Άρα το i_0 είναι ένα σταθερό σημείο για τον μετασχηματισμό t. □

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί παράδειγμα εφαρμογής του Θεωρήματος 7.3.3.

Πρόταση 7.3.4. Για κάθε πλήρη, υπολογίσιμο, 1-1 και επί μετασχηματισμό ΤΜ υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε οι ΤΜ με αριθμούς Gödel $t(i_0)$ και $t(i_0+1)$ να είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Έστω ότι με M_i συμβολίζουμε την ΤΜ με αριθμό Gödel i. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\phi_{M_{t(i_0)}} = \phi_{M_{t(i_0+1)}}$.

Αφού η t είναι 1-1 και επί έπεται ότι αντιστρέφεται. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $\sigma(x) = t(t^{-1}(x)+1)$. Από την Πρόταση 1.2.12 προκύπτει ότι η σ είναι υπολογίσιμη ως σύνθεση υπολογίσιμων συναρτήσεων και (προφανώς) πλήρης, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.3.3 και



Σχήμα 7.3.2: *Η ΤΜ M_f στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.5.*

να πάρουμε $j_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\phi_{M_{j_0}} = \phi_{M_{\sigma(j_0)}} \tag{7.1}$$

Παρατηρούμε ότι το $i_0 = t^{-1}(j_0)$ έχει την ζητούμενη ιδιότητα καθώς:

$$\phi_{M_{\sigma(j_0)}} = \phi_{M_{t(t^{-1}(j_0)+1)}} = \phi_{M_{t(i_0+1)}}$$

και

$$\phi_{M_{j_0}} = \phi_{M_{t(t^{-1}(j_0))}} = \phi_{M_{t(i_0)}}$$

άρα από την (7.1) έπεται ότι $\phi_{M_{t(i_0)}} = \phi_{M_{t(i_0+1)}}$. □

Προκειμένου να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το 1^o Θεώρημα Μη-πληρότητας του Gödel θα χρειαστεί να περάσουμε και πάλι στον «κόσμο» των φυσικών αριθμών και των υπολογίσιμων αριθμητικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 7.3.5 (Θεώρημα S-m-n [1]). Για κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{N}^{m+n} \to \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{N}$ υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε:

$$\forall y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}\ (f(y_1, \ldots, y_n) = g(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n))$$

Επιπλέον, αν η ΤΜ με αριθμό Gödel i υπολογίζει την g, τότε υπάρχει πλήρης και υπολογίσιμη συνάρτηση $\mathsf{S}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{n}} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ με το $\mathsf{S}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{n}}(i, x_1, \ldots, x_m)$ να ισούται με τον αριθμό Gödel μίας ΤΜ που υπολογίζει την f.

Απόδειξη. Έστω M_i η ΤΜ που υπολογίζει την g. Παρατηρούμε ότι η ΤΜ M_f του Σχήματος 7.3.2 υπολογίζει την f.

Τέλος, ορίζουμε τη συνάρτηση $\mathsf{S}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{n}}(i, x_1, \ldots, x_m) = \mathsf{Gödel}(M_f)$. Η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς υπολογίσιμη [2] και πλήρης. □

Πλέον έχουμε τα δύο βασικά λήμματα που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε το Θεώρημα Μη-πληρότητας του Gödel. Ο αναγνώστης που δεν είναι εξοικειωμένος με την πρωτοβάθμια λογική θα πρέπει να ανατρέξει στο Παράρτημα Α προτού συνεχίσει τη μελέτη του.

[1] Το θεώρημα αυτό πολλές φορές στη βιβλιογραφία αναφέρετε και ως *Θεώρημα Παραμετροποίησης*.

[2] Αφού υπολογίσουμε την κωδικοποίηση της M_i, έχοντας τις «σταθερές» $x_1, \ldots, x_m$, μπορούμε να φτιάξουμε την κωδικοποίηση της M_f.

Θεώρημα 7.3.6 ($1^{\text{ο}}$ Θεώρημα Μη-πληρότητας Gödel)**.** Υπάρχει πρόταση φ της $\Gamma_1^{\text{δα}}$ τέτοια ώστε αν το P είναι συνεπές τότε $P \nvdash \varphi$ και $P \nvdash \neg\varphi$ [1].

Απόδειξη. Έστω ότι το P είναι συνεπές. Αφού η συνάρτηση ϕ_M που υπολογίζει μία TM M είναι ελαχιστικά αναδρομική (Θεώρημα 2.5.1), έπεται ότι θα είναι αναπαραστάσιμη στο P (Θεώρημα A.5.6), δηλαδή υπάρχει τύπος $\varphi(x,y)$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \phi_M(x) = y &\;\Rightarrow\; P \vdash \varphi(\underline{x},\underline{y}) \\ \phi_M(x) \neq y &\;\Rightarrow\; P \vdash \neg\varphi(\underline{x},\underline{y}) \end{aligned}$$

Θα συμβολίζουμε με M_i την TM με αριθμό Gödel i, με f_i την ελαχιστικά αναδρομική συνάρτηση που ορίζει η ϕ_{M_i} και με φ_i την πρόταση που αναπαριστά την f_i.

Θεωρούμε συνάρτηση $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ με:

$$g(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } P \vdash \forall k\ \neg\varphi_i(\underline{j},k) \\ \bot & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι αν $P \vdash \forall k\ \neg\varphi_i(\underline{j},k)$ (αφού η πρόταση φ_i στην ουσία αναπαριστά τη ϕ_{M_i}) δεν υπάρχει η τιμή $\phi_{M_i}(j)$ και κατ' επέκταση ο υπολογισμός $M_i(j)$ δεν τερματίζει. Το γεγονός αυτό θα το αποδείξουμε και τυπικά σε λίγο.

Η συνάρτηση g είναι υπολογίσιμη [2] από την TM M του Σχήματος 7.3.3, όπου $M_{\chi_{\mathsf{Proof}}}$ η TM που υπολογίζει τη χαρακτηριστική συνάρτηση της σχέσης Proof (δες Πρόταση A.5.9 και φυσικά το Θεώρημα 2.5.1) και $M_{TM\to\mu}$, $M_{\mu\to\varphi}$ οι TM των Παρατηρήσεων 2.5.2 και A.5.8 αντίστοιχα.

Έστω ότι $\mathsf{Gödel}(M) = l$. Από το Θεώρημα 7.3.5 προκύπτει ότι υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $f(j) = g(i,j)$ και ότι $f = \phi_{M_{\mathsf{S}_1^1(l,i)}}$. Ο μετασχηματισμός t με $t(i) = \mathsf{S}_1^1(l,i)$ είναι πλήρης και υπολογίσιμος άρα από το Θεώρημα 7.3.3 έχει σταθερό σημείο $i_0 \in \mathbb{N}$ [3], οπότε για κάθε $j \in \mathbb{N}$:

$$g(i_0,j) = \phi_{M_{\mathsf{S}_1^1(l,i_0)}}(j) = \phi_{M_{t(i_0)}}(j) = \phi_{M_{i_0}}(j) \tag{7.2}$$

Αφού το P έχει υποτεθεί συνεπές μπορούν να ισχύουν τα ακόλουθα δύο για τον τύπο $\forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j},k)$:

1. είτε $P \vdash \forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j},k)$,
2. είτε $P \vdash \neg\forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j},k)$ [4].

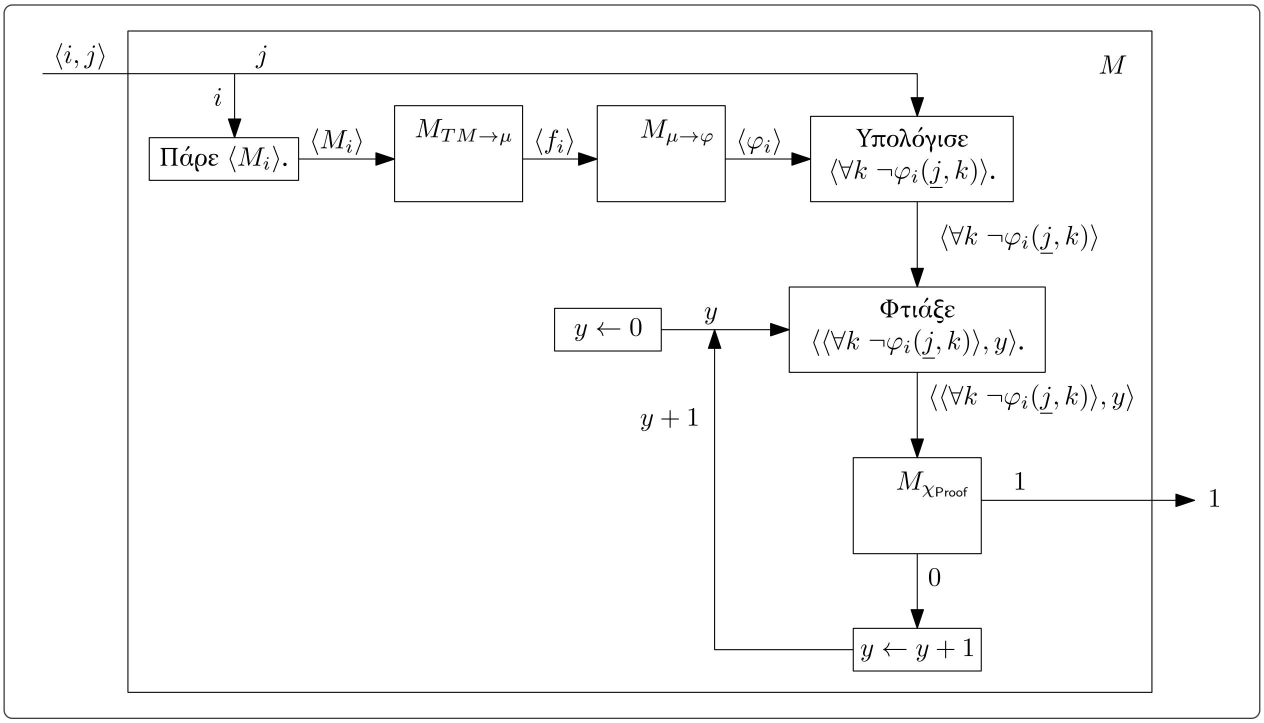
Σκοπός μας είναι να οδηγηθούμε σε άτοπο και στις δύο περιπτώσεις και να συνάγουμε ότι ο τύπος $\forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j},k)$ είναι ο τύπος που αναζητούμε.

[1] Στην απόδειξη του Gödel, η πρόταση φ έφερε το νόημα «Εγώ δεν αποδεικνύομαι στο P», βασιζόταν δηλαδή στην αυτοαναφορά (εκφρασμένη μέσω ενός Θεωρήματος Σταθερού Σημείου). Για να ορίσει ο Gödel αυτήν την πρόταση χρειάστηκε να κωδικοποιήσει τους λογικούς τύπους (και τις ακολουθίες αυτών) σε φυσικούς αριθμούς, πράγμα απαραίτητο για να ορίσει την ελαχιστικά αναδρομική σχέση Proof (δες Πρόταση A.5.9). Τέλος, αποδεικνύοντας ότι οι ελαχιστικά αναδρομικές σχέσεις είναι αναπαραστάσιμες (Ορισμός A.5.5) στο P κατέστησε δυνατό να εκφραστεί τυπικά ότι ένας τύπος δεν αποδεικνύεται στο P.

[2] Παρατηρήστε ότι το βασικό συστατικό για να το πετύχουμε αυτό είναι η «κωδικοποίηση» που έχουμε κάνει.

[3] Εδώ προσθέτουμε και την αυτοαναφορά στο μείγμα.

[4] Το ότι το P είναι συνεπές μας αποκλείει το ενδεχόμενο να ισχύει ταυτόχρονα $P \vdash \forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j},k)$ και $P \vdash \neg\forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j},k)$.



Σχήμα 7.3.3: *Η TM M που υπολογίζει τη συνάρτηση g στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.6.*

1. Υποθέτουμε πρώτα (προς άτοπο) ότι $P \vdash \forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j}, k)$. Σε αυτήν την περίπτωση θα είχαμε ότι $g(i_0, j) = 1$, άρα από τη (7.2) θα ίσχυε ότι $\phi_{M_{i_0}}(j) = 1$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\phi_{M_{i_0}}(j) \neq n$, δηλαδή ότι $\phi_{M_{i_0}}(j) \notin \mathbb{N}$, που είναι άτοπο.

   Από το Θεώρημα Εγκυρότητας (Θεώρημα A.4.1) έπεται ότι $P \vDash \forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j}, k)$ και, αφού $\mathfrak{N} \vDash P$, ότι $\mathfrak{N} \vDash \forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j}, k)$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του Tarski καταλήγουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mathfrak{N} \nvDash \varphi_{i_0}(\underline{j}, k/n)$. Αν ίσχυε ότι $\phi_{M_{i_0}}(j) = n$, αφού η φ_{i_0} αναπαριστά την f_{i_0}, θα έπρεπε να ισχύει ότι $P \vdash \varphi_{i_0}(\underline{j}, \underline{n})$, άρα (από το Θεώρημα Εγκυρότητας) ότι $\mathfrak{N} \vDash \varphi_{i_0}(\underline{j}, \underline{n})$ [1]. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\phi_{M_{i_0}}(j) \neq n$.

2. Υποθέτουμε τώρα (πάλι προς άτοπο) ότι $P \vdash \neg\forall k\ \neg\varphi_{i_0}(\underline{j}, k)$. Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε ότι $g(i_0, j) = \bot$, οπότε $\phi_{M_{i_0}}(j) = \bot$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\phi_{M_{i_0}}(j) = n$, δηλαδή ότι $\phi_{M_{i_0}}(j) \in \mathbb{N}$, που είναι άτοπο.

   Επικαλούμενοι το Θεώρημα Εγκυρότητας και εφαρμόζοντας τον ορισμό του Tarski καταλήγουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{N} \vDash \varphi_{i_0}(\underline{j}, k/n)$. Αν ίσχυε ότι $\phi_{M_{i_0}}(j) \neq n$ τότε θα είχαμε $P \vdash \neg\varphi_{i_0}(\underline{j}, \underline{n})$, άρα $\mathfrak{N} \vDash \neg\varphi_{i_0}(\underline{j}, \underline{n})$. Συνεπώς υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\phi_{M_{i_0}}(j) = n$. □

Παρατήρηση 7.3.7. Έστω φ η πρόταση του Θεωρήματος 7.3.6. Αφού προφανώς μία εκ των $\varphi, \neg\varphi$ είναι αληθής στην προτιθέμενη ερμηνεία $\mathfrak{N}$ της $\Gamma_1^{\text{δα}}$, το Θεώρημα 7.3.6 αποδεικνύει ότι υπάρχουν αληθείς προτάσεις των μαθηματικών που χρησιμοποιούμε (που φυσικά εμπεριέχουν την αριθμητική Peano) οι οποίες δεν μπορούν να αποδειχτούν. Μία πιθανή λύση σε αυτό το «πρόβλημα» θα ήταν να διαλέξουμε

[1] Το οποίο σημαίνει ότι $\mathfrak{N} \vDash \varphi_{i_0}(\underline{j}, k|n)$ αφού το ψηφίο $\underline{n}$ ερμηνεύεται στη $\mathfrak{N}$ ως $n \in \mathbb{N}$.

μία εκ των $\varphi, \neg\varphi$ και να την εντάξουμε ως αξίωμα στο P. Και πάλι όμως θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.6 και να βρούμε άλλη πρόταση με αυτήν την ιδιότητα...

Παρόλο που η πρόταση φ του Θεωρήματος 7.3.6 φαίνεται να είναι «κατασκευασμένη» και δε μοιάζει στις προτάσεις των μαθηματικών που έχουμε συνηθίσει, η Μη-πληρότητα της αριθμητικής Peano (και κατ' επέκταση όλων των μαθηματικών που την περιέχουν) δεν αφορά μόνο κατασκευασμένες προτάσεις. Δυστυχώς υπάρχουν προτάσεις με καθαρά «μαθηματικό περιεχόμενο», όχι προτάσεις που προέκυψαν από μια διαδικασία παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος Μη-πληρότητας, που απασχολούσαν τους μαθηματικούς καιρό και τελικά αποδείχθηκαν «μη αποδείξιμες».

Σημείωση 7.3.8. Το Θεώρημα 7.3.6 στην ουσία αποδεικνύει ότι το P (που περιέχει μόνο τα στοιχειώδη αξιώματα της αριθμητικής) δεν είναι *τυπικά πλήρες*. Σε αυτή την διαπίστωση οδηγούμαστε αν υποθέσουμε ότι το P είναι συνεπές [1]. Είναι όμως το P τελικά συνεπές; Σε αυτό το ερώτημα ο Kurt Gödel έδωσε (πάλι) μία «δυσάρεστη» απάντηση για τους μαθηματικούς. Το 2^o *Θεώρημα Μη-πληρότητας* δείχνει ότι δεν μπορεί να αποδειχθεί από το P η συνέπειά του. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε (με στοιχειώδεις μεθόδους) να αποδείξουμε τη συνέπεια του P.

Ασκήσεις

7.1 (★☆☆). Βρείτε δύο διαφορετικές ΤΜ M και N τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \{0,1\}^*$ να ισχύει ότι $\phi_M(x) = \langle N \rangle$ και $\phi_N(x) = \langle M \rangle$.

7.2 (★★☆). Θεωρήστε τη γλώσσα:

$$L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid \text{Για κάθε Τ.Μ. } M' \text{ ισχύει ότι αν } L(M) = L(M') \text{ τότε } |\langle M \rangle| \leq |\langle M' \rangle|\}$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει άπειρο αναδρομικά απαριθμήσιμο υποσύνολο της L.

7.3 (★★☆). Μια ΤΜ M ονομάζεται *ελαχιστική* αν κάθε ΤΜ M' με $L(M') = L(M)$ έχει περισσότερες καταστάσεις από την M. Υπάρχει άπειρο, Αναδρομικά Απαριθμήσιμο σύνολο κωδικοποιήσεων ελαχιστικών ΤΜ;

7.4 (★★★). Υπάρχει 1-1 και επί, πλήρης υπολογίσιμος μετασχηματισμός ΤΜ $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ για τον οποίο δεν υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε οι $M_{t(i)}, M_{t(i+1)}, M_{t(i+2)}$ να υπολογίζουν την ίδια συνάρτηση;

7.5 (★☆☆). Έστω $d(x)$ η βραχύτερη λέξη της μορφής $\langle M, w \rangle$ όπου η ΤΜ M με είσοδο w τερματίζει γράφοντας x στην ταινία της. Δείξτε ότι η συνάρτηση $: \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$, με $K(x) = |d(x)|$, δεν είναι υπολογίσιμη.

7.6 (★★★). Αποδείξτε το Θεώρημα 7.3.3 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.3.5 (και όχι το Θεώρημα 7.2.1).

[1] Αν δεν είναι συνεπές τότε προφανώς είναι τυπικά πλήρες: Αφού θα μπορούμε να αποδείξουμε έναν τύπο και την άρνησή του θα μπορούμε να αποδείξουμε μία αντίφαση και ως συνέπεια θα μπορούμε να αποδείξουμε όλους τους λογικούς τύπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΙΕΡΑΡΧΙΑ

Η απάντηση των ερωτημάτων της Σελίδας 22 μας έδειξε ότι υπάρχουν γλώσσες (ή προβλήματα αν προτιμάτε) τριών κατηγοριών: οι αναδρομικές, οι αναδρομικά απαριθμήσιμες και οι άλλες. Το «οι άλλες» προφανώς δεν μπορεί γίνει ανεκτό σε ένα επιστημονικό κείμενο. Η περιέργειά μας αναπόφευκτα καλλιεργεί την ανάγκη να κατατάξουμε *όλες* [1] τις γλώσσες ως προς τον «βαθμό δυσκολίας» τους. Ας καταπιαστούμε λοιπόν με αυτό το εγχείρημα.

Υπό ποία έννοια «δυσκολίας» όμως θα γίνει αυτή η κατάταξη; Η δυσκολία στο να αποφασίσουμε μία γλώσσα (ή να υπολογίσουμε μία συνάρτηση) δεν θα οφείλεται στο πλήθος των υπολογιστικών πόρων που θα χρειαστεί να δαπανήσουμε προς αυτό, όπως γίνεται π.χ. στη Θεωρία της Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας (ούτως ή άλλως έχουμε αποφασίσει ότι έχουμε στη διάθεσή μας οσοδήποτε μεγάλους αλλά πεπερασμένους πόρους). Εμάς μας ενδιαφέρει πόσο «ισχυρές» παραδοχές θα χρειαστεί να κάνουμε για να αποφασίσουμε τη γλώσσα. Για τον λόγο αυτό θα εισάγουμε τον λεγόμενο *σχετικό υπολογισμό*, τον υπολογισμό δηλαδή που εξαρτάται από κάποιες (κατά κανόνα πολύ ισχυρές) παραδοχές.

8.1 Σχετικός υπολογισμός

Θα θέσουμε δύο ακόμα υποθετικά ερωτήματα τα οποία θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε:

> **Ερώτημα 3:** Ας κάνουμε την υπόθεση εργασίας ότι η γλώσσα HP (που άνοιξε τον ασκό του Αιόλου) είναι αναδρομική γλώσσα. Είναι τότε κάθε γλώσσα αναδρομική ή έστω αναδρομικά απαριθμήσιμη [2];

Μιλώντας πιο χαλαρά, το ερώτημα θα διατυπωνόταν ως εξής: *Αν ξέραμε για ποιες εισόδους τερματίζει μία ΤΜ και για ποιες όχι θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε όλες τις γλώσσες, ή έστω να τις αναγνωρίσουμε;*΄Ενα πιο γενικό ερώτημα είναι το εξής:

[1] Δυστυχώς –στα πλαίσια αυτών των σημειώσεων– δεν θα μπορέσουμε να καθορίσουμε τη δυσκολία όλων των γλωσσών. Η μελέτη μας σταματάει σε μία γλώσσα την οποία αδυνατούμε μέσω της θεωρία που θα αναπτύξουμε να την κατατάξουμε σε κάποια κλάση δυσκολίας. Ο φιλομαθής αναγνώστης θα χρειαστεί να συνεχίσει την αναζήτησή του στο πεδίο της *Περιγραφικής Συνολοθεωρίας*.

[2] Προσοχή! Δεν θα δεχθούμε σαν αληθή πρόταση μία αντίφαση γιατί τότε όλες οι προτάσεις θα ήταν αληθείς. Το ερώτημα θα γίνει πιο ξεκάθαρο στη συνέχεια.

Ερώτημα 4: Είναι όλες οι γλώσσες στο $2^{\{0,1\}^*} \setminus \mathsf{RE}$ το ίδιο «μη-αποφάνσιμες»;

Προκειμένου να ορίσουμε ένα μέτρο «μη-αποφανσιμότητας» μίας γλώσσας θα εισάγουμε τον σχετικό υπολογισμό, δηλαδή τον υπολογισμό μίας συνάρτησης ή την αποφανσιμότητα μίας γλώσσας σε σχέση με κάποια άλλη συνάρτηση ή γλώσσα. Ακολουθώντας την ιδέα του σχετικού υπολογισμού, θα θεωρούμε ότι μία γλώσσα B είναι «δυσκολότερη» από μία γλώσσα A αν η (υποθετική στις περισσότερες περιπτώσεις) ύπαρξη ενός αλγόριθμου που αποφασίζει τη B μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποφασίσουμε ή να αναγνωρίσουμε την A [1].

Κεντρικό ρόλο στον σχετικό υπολογισμό παίζει η έννοια του *μαντείου για μία γλώσσα* και το μοντέλο ΤΜ που μπορεί να χρησιμοποιεί ένα τέτοιο «μαντείο». Ας περάσουμε στις λεπτομέρειες αυτών των εννοιών.

Ορισμός 8.1.1. *Χρησμοδότης (ή μαντείο) για μία γλώσσα* $L \subseteq \{0,1\}^*$ είναι μία εξωτερική μηχανή (όχι ΤΜ) που δέχεται σαν είσοδο μία λέξη $w \in \{0,1\}^*$ και επιστέφει 1 αν $w \in L$ και 0 αν $w \notin L$.

Για να μπορέσουμε να συνδέσουμε το ασαφές «εξωτερική μηχανή» με τις αυστηρά ορισμένες ΤΜ θα πρέπει να ορίσουμε τα μαντεία με πιο τυπικό τρόπο. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ως μαντείο για τη γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ μία άπειρη ταινία (από τα δεξιά) που περιέχει τη χαρακτηριστική συνάρτηση της L. Πιο συγκεκριμένα, τα κελιά αυτής της ταινίας αντιστοιχούν στις λέξεις του $\{0,1\}^*$ (το αριστερότερο αντιστοιχεί στην ϵ και τα υπόλοιπα ακολουθούν τη λεξικογραφική διάταξη του $\{0,1\}^*$) και αναγράφουν 1 αν η λέξη του κελιού ανήκει στη γλώσσα και 0 αν δεν ανήκει.

Ορισμός 8.1.2. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. *Χρησμοληπτική ΤΜ ως προς την L (ή ΤΜ με μαντείο για την L ή, εν συντομία, ΟΤΜ)* είναι μία ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ τριών ταινιών, όπου η 3^{η} ταινία είναι το μαντείο για την L (δες Σχήμα 8.1.1). Επιπλέον το Q περιέχει τρεις ειδικές, μη-τερματικές καταστάσεις, τις $q_?$, q_{y} και q_{n}, οι οποίες σταματούν την «κανονική» ροή του υπολογισμού και ξεκινούν τη διαδικασία «ερώτησης» στο μαντείο. Η M όταν μεταβαίνει στην $q_?$ κάνει τα ακόλουθα:

1. Υπολογίζει τη σειρά στη λεξικογραφική διάταξη της λέξης που περιέχει η 2^{η} ταινία, έστω ότι είναι η i-οστή λέξη,

2. κινεί την κεφαλή της $3^{\eta\varsigma}$ ταινίας στο κελί i και διαβάζει το περιεχόμενό του: Αν αυτό είναι 1 μεταβαίνει στην κατάσταση q_{y} και αν αυτό είναι 0 στην κατάσταση q_{n}.

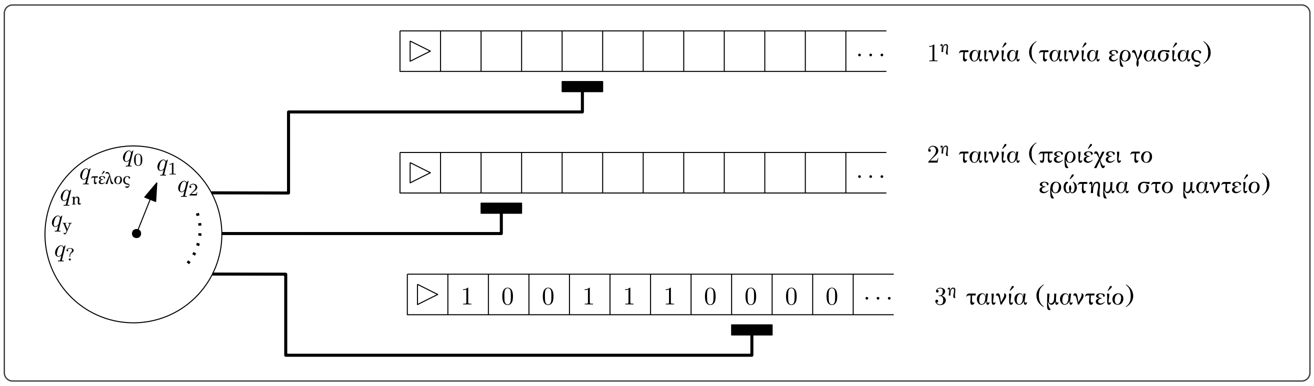
Έχοντας πάρει θετική ή αρνητική απάντηση από το μαντείο ο υπολογισμός συνεχίζει κατά τα γνωστά [2].

Παρατήρηση 8.1.3. Κατ' αντιστοιχία με τον Ορισμό 1.2.23, μπορούμε να ορίσουμε τις χρησμοληπτικές ΤΜ με δύο τερματικές καταστάσεις (τις $q_{\text{ναι}}$ και $q_{\text{όχι}}$), αν το ενδιαφέρον μας στρέφεται προς την αποφανσιμότητα γλωσσών.

Συμβολισμός 8.1.4. Έστω ΟΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ και γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. Θα γράφουμε M^L όταν θέλουμε να τονίσουμε το μαντείο το οποίο προτιθέμεθα να χρησιμοποιούμε για την M.

[1] Κάτι αντίστοιχο είχαμε κάνει και στο Κεφάλαιο 5 με τις απεικονιστικές αναγωγές. Στην Παράγραφο 8.3 θα κάνουμε αυτή τη συσχέτιση και θα δούμε τις διαφορές που υπάρχουν.

[2] Ο υπολογισμός ναι μεν διεξάγεται «κατά τα γνωστά» αλλά η γνώση που αποκομίσαμε από το μαντείο κάνει τις ΟΤΜ πολύ πιο «ισχυρές» από τις ΤΜ (τυπικά δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τη δύναμη αυτών των δύο υπολογιστικών μοντέλων όπως εξηγεί η Παρατήρηση 8.1.15). Ο λόγος φυσικά είναι ότι με το μαντείο μπορούμε να γνωρίζουμε αν μία λέξη ανήκει σε μία γλώσσα ή όχι, ακόμα και για γλώσσες που είναι μη-αποφάνσιμες, για της οποίες δηλαδή δεν θα μπορούσαμε να αποκτήσουμε αυτή τη γνώση με κάποιον υπολογιστικό τρόπο. Αυτήν την πληροφορία θα την αξιοποιήσουμε κατάλληλα στον υπολογισμό μας.



Σχήμα 8.1.1: *Σχηματική αναπαράσταση μίας OTM.*

Στη συνέχεια θα γίνει αντιληπτό ότι ανάλογα με το μαντείο που χρησιμοποιεί η M θα αλλάζει και η «συμπεριφορά της». Έτσι, όταν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της σε σχέση με τη γλώσσα L θα την τρέχουμε χρησιμοποιώντας ως μαντείο την L.

Ορισμός 8.1.5. Έστω γλώσσα $A \subseteq \{0,1\}^*$ και συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$. Μία OTM M που χρησιμοποιεί μαντείο για την A *υπολογίζει* την f ανν:

$$\forall w \in \mathsf{dom}(f)(\triangleright\, q_0 w \vdash^*_{M^A} \triangleright\, q_{\text{τέλος}} f(w)) \text{ και } \forall w \notin \mathsf{dom}(f)(M^A(w)\uparrow)$$

Ορισμός 8.1.6. Έστω γλώσσα $A \subseteq \{0,1\}^*$ και συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$. Αν υπάρχει OTM M που υπολογίζει την f αν χρησιμοποιήσουμε μαντείο για την A θα λέμε ότι η f είναι *υπολογίσιμη ως προς την A*.

Ορισμός 8.1.7. Έστω γλώσσες $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Μία OTM M που χρησιμοποιεί μαντείο για την A *αναγνωρίζει* (*ή ημι-αποφασίζει*) την B ανν:

(A) $w \in B \Leftrightarrow M^A(w)\downarrow_{q_{\text{ναι}}}$

Ορισμός 8.1.8. Έστω γλώσσες $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Αν υπάρχει OTM M που ημι-αποφασίζει την B αν χρησιμοποιήσουμε μαντείο για την A θα λέμε ότι η B είναι *αναδρομικά απαριθμήσιμη ως προς την A*.

Ορισμός 8.1.9. Έστω γλώσσες $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Μία OTM M που χρησιμοποιεί μαντείο για την A *αποφασίζει* την B ανν:

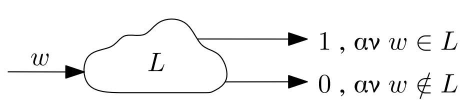
(A) $w \in B \Leftrightarrow M^A(w)\downarrow_{q_{\text{ναι}}}$

(B) $w \notin B \Leftrightarrow M^A(w)\downarrow_{q_{\text{όχι}}}$

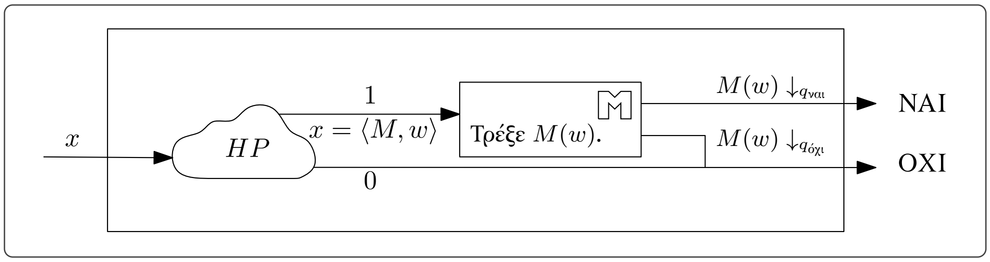
Ορισμός 8.1.10. Έστω γλώσσες $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Αν υπάρχει OTM M που αποφασίζει την B αν χρησιμοποιήσουμε μαντείο για την A θα λέμε ότι η B είναι *αναδρομική ως προς την A*.

Συμβολισμός 8.1.11 (Κουτάκια συνέχεια...).

9. Θα συμβολίζουμε το μαντείο για τη γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ ως εξής:



(Στην απεικονιζόμενη περίπτωση γίνεται ερώτημα στο μαντείο για τη λέξη w.)



Σχήμα 8.1.2: *Η ΟΤΜ που αποφασίζει την* $L_{\text{Αποδοχής}}$.

Παράδειγμα 8.1.12. Η $L_{\text{Αποδοχής}}$ είναι αναδρομική ως προς την HP καθώς η ΟΤΜ του Σχήματος 8.1.2 την αποφασίζει.

Παρατήρηση 8.1.13. Παρατηρήστε ότι αν είχαμε εφοδιάσει την ΟΤΜ του παραπάνω παραδείγματος με μαντείο για τη $\overline{HP}$ (αντί για το μαντείο για την HP), τότε θα αποφάσιζε την κενή γλώσσα [1]. Ακόμα και αν η ΟΤΜ αποφασίζει (ημι-αποφασίζει) μία συγκεκριμένη γλώσσα (ή υπολογίζει μία συγκεκριμένη συνάρτηση), αν το μαντείο αλλάξει τότε αλλάζει και η γλώσσα που αποφασίζει (ημι-αποφασίζει, ή η συνάρτηση που υπολογίζει). Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε σε μία ΟΤΜ μία γλώσσα (ή μία συνάρτηση) μόνο *εν σχέσει* με τη γλώσσα που χρησιμοποιούμε ως μαντείο [2].

Συμβολισμός 8.1.14. Έστω ΟΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ και γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. Χάριν συντομίας σε όσα ακολουθούν θα γράφουμε «υπάρχει ΟΤΜ M^L...» αντί για την πρόταση «υπάρχει ΟΤΜ που αν χρησιμοποιήσουμε ως μαντείο την L ...».

Παρατήρηση 8.1.15. Οι ΟΤΜ είναι επέκταση των ΤΜ. Θα μπορούσαμε να το φανταστούμε αυτό ως εξής: Μία ΤΜ μπορεί να θεωρηθεί ΟΤΜ που δεν χρησιμοποιεί ποτέ το μαντείο της [3]. Η επέκταση αυτή, σε αντίθεση με τις επεκτάσεις που είδαμε στην Παράγραφο 1.3, μπορεί να θεωρηθεί (εσφαλμένα) ισχυρότερη από τις ΤΜ [4], καθώς για παράδειγμα η ΟΤΜ του Παραδείγματος 8.1.12 αποφασίζει μία μη-αναδρομική γλώσσα. Εδώ όμως έχουμε να κάνουμε με «σχετικό υπολογισμό» (καθώς κάνουμε την παραδοχή ότι μπορούμε να γνωρίζουμε αν μια λέξη ανήκει στην HP ή όχι) και όχι με «απόλυτο υπολογισμό» (όπου δεν κάνουμε καμία παραδοχή).

Ένας πιο τυπικός τρόπος να δούμε ότι οι ΟΤΜ είναι επέκταση των ΤΜ, ή, σωστότερα, ότι οι ΤΜ είναι περιορισμός των ΟΤΜ, δίνεται στη Σύμβαση 8.1.16.

Σύμβαση 8.1.16. Για λόγους «συμβατότητας» θα θεωρήσουμε ότι μία ΤΜ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{τέλος}})$ είναι μία ΟΤΜ στην οποία έχουμε θέσει τον ακόλουθο έξτρα περιορισμό για τη συνάρτηση μετάβασης:

$$\forall a, b \in \Gamma \ \forall q, p \in Q \ \forall x \in \{\mathrm{A}, \Delta\} (\delta(q,a) = (p,b,x) \rightarrow p \neq q_?) \tag{8.1}$$

δηλαδή, κατά τη λειτουργία της δεν μεταβαίνουν ποτέ στην κατάσταση $q_?$.

[1] Εδώ υποθέτουμε ότι αν δώσουμε στην καθολική ΤΜ ως είσοδο λέξη που δεν αποτελεί κωδικοποίηση ΤΜ και λέξης, αυτή θα κολλήσει.

[2] Θυμηθείτε ότι έως τώρα σε κάθε ΤΜ αντιστοιχούσαμε ακριβώς μία συνάρτηση και ακριβώς μία γλώσσα. Στον σχετικό υπολογισμό αυτό γενικά δεν ισχύει. Ισχύει μόνο όταν δηλώσουμε ρητά το μαντείο που θα χρησιμοποιήσουμε στην ΟΤΜ. Υπό μία έννοια ο σχετικός υπολογισμός ταυτίζεται με τον υπολογισμό που μελετούσαμε έως τώρα αν επικεντρωθούμε σε μία συγκεκριμένη γλώσσα μαντείου. Φυσικά η χρήση μαντείου μας οδηγεί σε αποτελέσματα που είναι αντίθετα με αυτά που θεωρούσαμε αλγοριθμικά εφικτά.

[3] Έχει τη δυνατότητα να το χρησιμοποιήσει αλλά δεν το κάνει.

[4] Πράγμα που φυσικά θα κλόνιζε την εμπιστοσύνη μας στη Θέση Church-Turing!

Η παραπάνω σύμβαση μας δίνει εν ολίγης το δικαίωμα να τρέχουμε τις OTM που ικανοποιούν την προϋπόθεση (8.1) «χωρίς να χρησιμοποιούμε μαντείο» [1], όπως δηλαδή κάναμε έως τώρα.

Συνδυάζοντας τη Σύμβαση 8.1.16 με τους Ορισμούς 1.2.28 και 1.2.29 οδηγούμαστε στην ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 8.1.17. Μία γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ είναι αναδρομική (αναδρομικά απαριθμήσιμη) ανν υπάρχει OTM που την αποφασίζει (ημι-αποφασίζει αντίστοιχα) ασχέτως με ποια γλώσσα θα χρησιμοποιήσουμε ως μαντείο. Επομένως, οι κλάσεις REC και RE αφορούν απόλυτο υπολογισμό [2].

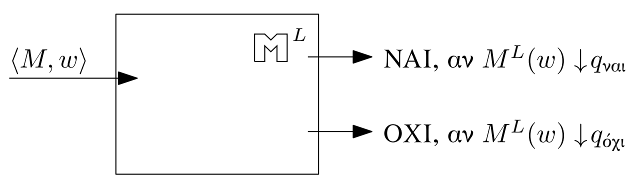
Χρησμοληπτική Καθολική Μηχανή Turing

Στην Παράγραφο 1.4 κωδικοποιήσαμε τη συνάρτηση μεταβάσεων μίας TM στο $\{0,1\}$, με απώτερο σκοπό να ορίσουμε την καθολική TM. Η καθολική TM μπορεί να δεχθεί σαν είσοδο την κωδικοποίηση μίας TM και μίας εισόδου και να προσομοιώσει τη λειτουργία της για αυτήν την είσοδο. Όσον αφορά τις OTM δεν έχουμε να προσθέσουμε κάτι παραπάνω ως προς την κωδικοποίησή τους, καθώς τις ορίσαμε σαν TM 3-ταινιών [3]. Μπορούμε λοιπόν να περάσουμε στον ορισμό της *Χρησμοληπτικής Καθολικής TM*.

Ορισμός 8.1.18. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. *Χρησμοληπτική Καθολική TM ως προς την* L, συμβολισμός $\boxed{\mathsf{M}}^L$, είναι μία OTM που δέχεται ως είσοδο την κωδικοποίηση μίας OTM M και μίας λέξης w και μπορεί να προσομοιώσει την $M(w)$ με τον ίδιο τρόπο όπως μία (απλή) Καθολική TM (δες Ορισμό 1.4.13), μόνο που χρησιμοποιεί το μαντείο για την L όποτε η $M(w)$ πηγαίνει στην κατάσταση $q_?$.

Συμβολισμός 8.1.19 (Κουτάκια συνέχεια...).

10. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$, OTM M και $w \in \{0,1\}^*$. Θα γράφουμε: [4]



Παρατηρήστε ότι ανάλογα με το μαντείο που χρησιμοποιεί η καθολική OTM μπορεί να αποδεχθεί ή να απορρίψει την είσοδό της. Για παράδειγμα αν προσομοιώσουμε την OTM του Παραδείγματος 8.1.12 με είσοδο $\langle M, w\rangle \in L_{\text{Αποδοχής}}$, χρησιμοποιώντας για μαντείο την HP, η καθολική OTM θα αποδεχθεί την είσοδο, ενώ αν χρησιμοποιήσουμε για μαντείο τη $\overline{HP}$ θα απορρίψει την είσοδο.

[1] Αν το κάναμε αυτό σε μία OTM που δεν ικανοποιεί την (8.1) τότε αυτή θα κόλλαγε όταν έφτανε στην κατάσταση $q_?$ καθώς θα περίμενε για πάντα έναν «χρησμό».

[2] Η Σύμβαση 8.1.16 δεν είναι απαραίτητη για να ισχύει αυτή η παρατήρηση (δες Άσκηση 8.2).

[3] Όπως στις TM δεν κωδικοποιούσαμε το περιεχόμενο της ταινίας, έτσι και για τις OTM κωδικοποιούμε μόνο τη συνάρτηση μετάβασης (και όχι την ταινία του μαντείου). Προσοχή: Δεν θα ήταν σωστό να πάρουμε πρώτα ισοδύναμη μονοταινιακή TM και να κωδικοποιήσουμε αυτήν (δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.3). Κωδικοποιούμε κατευθείαν τη συνάρτηση μεταβάσεων όπως στην Παράγραφο 1.4.

[4] Γράφουμε $\boxed{\mathsf{M}}^L$ αντί για $\boxed{\mathsf{M}}$ θέλοντας να τονίσουμε το μαντείο που προτιθέμεθα να χρησιμοποιήσουμε στην προσομοίωση. Μην παρεξηγηθεί αυτός ο συμβολισμός και θεωρηθεί ότι η γλώσσα L έχει συγκεκριμενοποιηθεί. Ανάλογα με τον σκοπό που χρησιμοποιούμε τη χρησμοληπτική καθολική μηχανή η γλώσσα μαντείο μπορεί να αλλάξει.

Κλάσεις σχετικού υπολογισμού

Ορισμός 8.1.20. Έστω γλώσσα $A \subseteq \{0,1\}^*$. Ορίζουμε τις ακόλουθες *κλάσεις γλωσσών ως προς την* A:

- $\mathsf{RE}^A = \{L \subseteq \{0,1\}^* \mid$ υπάρχει ΟΤΜ M^A που ημι-αποφασίζει την $L\}$
- $\mathsf{REC}^A = \{L \subseteq \{0,1\}^* \mid$ υπάρχει ΟΤΜ M^A που αποφασίζει την $L\}$

Θεώρημα 8.1.21. Έστω γλώσσα $A \subseteq \{0,1\}^*$. Αν $A \in \mathsf{REC}$ τότε $\mathsf{RE}^A = \mathsf{RE}$ και $\mathsf{REC}^A = \mathsf{REC}$.

Απόδειξη. [1] Έστω M_A η ΤΜ που αποφασίζει την A και έστω γλώσσα $L \in \mathsf{RE}^A$, δηλαδή υπάρχει ΟΤΜ M_L^A που την ημι-αποφασίζει. «Αντικαθιστούμε» το μαντείο για την A με την M_A στην M_L^A και παίρνουμε ΤΜ M ως εξής:

> *Η M προσομοιώνει με μία (απλή) καθολική ΤΜ την M_L^A. Όταν η M_L^A «ρωτάει» το μαντείο για μία λέξη w η M τρέχει την M_A με είσοδο w και αν αυτή αποδεχτεί γράφει 1 στην τρίτη ταινία (την ταινία του μαντείου), ενώ αν απορρίψει γράφει 0.*

Κατά αυτόν τον τρόπο μπορούμε να «ξεγελάσουμε» την M_L^A και να λειτουργεί όπως θα έκανε αν χρησιμοποιούσε μαντείο για την A, αλλά στην ουσία τους «χρησμούς» τους υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας την M_A [2]. Έτσι κατασκευάσαμε μία ΤΜ M που ημι-αποφασίζει την L και άρα $L \in \mathsf{RE}$. Συνεπώς $\mathsf{RE}^A \subseteq \mathsf{RE}$.

Έστω τώρα γλώσσα $L \in \mathsf{RE}$ και ΤΜ M_L που την ημι-αποφασίζει. Από τη Σύμβαση 8.1.16 προκύπτει ότι η M_L αποτελεί ΟΤΜ που δεν «ρωτάει» ποτέ το μαντείο. Συνεπώς $L \in \mathsf{RE}^A$ και έτσι $\mathsf{RE} \subseteq \mathsf{RE}^A$. □

Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1.21 η θεωρία του σχετικού υπολογισμού δεν παρουσιάζει «ενδιαφέρον» όταν χρησιμοποιούμε ως μαντείο μία αναδρομική γλώσσα. Ας δούμε λοιπόν τι συμβαίνει όταν χρησιμοποιήσουμε μια αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα $A \subseteq \{0,1\}^*$ (που δεν είναι αναδρομική). Από το δεύτερο σκέλος της απόδειξης του Θεωρήματος 8.1.21 προκύπτει ότι $\mathsf{RE} \subseteq \mathsf{RE}^A$. Για μερικές γλώσσες-μαντεία ισχύει ότι $\mathsf{RE} \subseteq \mathsf{REC}^A$, όπως για παράδειγμα την HP.

Πρόταση 8.1.22. Ισχύει ότι $\mathsf{RE} \subseteq \mathsf{REC}^{HP}$.

Απόδειξη. Έστω γλώσσα $L \in \mathsf{RE}$ και έστω M_L η ΤΜ που την ημι-αποφασίζει. Παρατηρούμε ότι η ΟΤΜ M του Σχήματος 8.1.3 αποφασίζει την L, άρα $L \in \mathsf{REC}^{HP}$. □

Συνεπώς η απάντηση στο Ερώτημα 3 (σελίδα 133) είναι καταφατική αλλά μόνο όσον αφορά τις αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες, όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 8.1.23. Υπάρχει γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ που δεν ανήκει στο REC^{HP}.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη γλώσσα:

$$HP_2 = \{\langle M, w\rangle \in \{0,1\}^* \mid M^{HP}(w)\downarrow\}$$ [3]

Θα δείξουμε ότι $HP_2 \notin \mathsf{REC}^{HP}$. Έστω (προς άτοπο) ότι $HP_2 \in \mathsf{REC}^{HP}$ και έστω ότι η ΟΤΜ H^{HP} την αποφασίζει. Θεωρούμε την ΟΤΜ D του Σχήματος 8.1.4 και παρατηρούμε ότι:

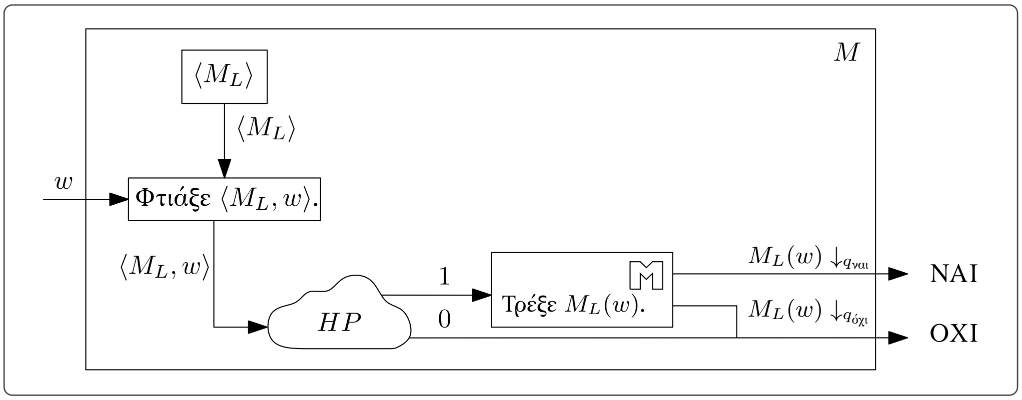
$$D^{HP}(\langle D\rangle)\downarrow \Leftrightarrow H^{HP}(\langle D, \langle D\rangle\rangle)\downarrow_{q_{\text{όχι}}} \Leftrightarrow \langle D, \langle D\rangle\rangle \notin HP_2 \Leftrightarrow D^{HP}(\langle D\rangle)\uparrow$$

Άτοπο, άρα $HP_2 \notin \mathsf{REC}^{HP}$. □

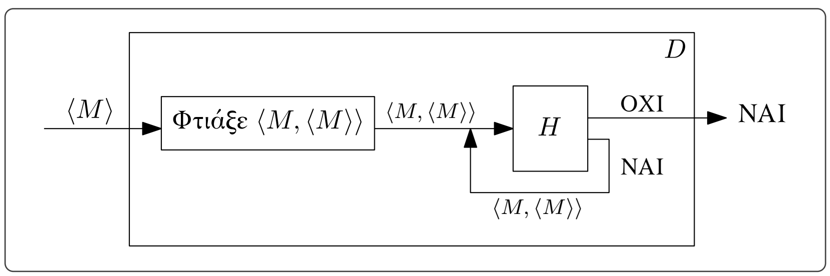
[1] Θα δείξουμε μόνο την πρώτη περίπτωση. Η δεύτερη είναι εντελώς αντίστοιχη.

[2] Τυπικά, για να συμμορφωθούμε απόλυτα με τη Σύμβαση 8.1.16, θα πρέπει να παρακάμψουμε την κατάσταση $q_?$ της M_L^A έτσι ώστε η ΤΜ που κατασκευάζουμε να μην μεταβαίνει ποτέ στην $q_?$.

[3] Το «2» στο HP_2 προκύπτει από τον Ορισμό 8.2.4 που ακολουθεί.



Σχήμα 8.1.3: *Η ΟΤΜ M στην απόδειξη της Πρότασης 8.1.22.*



Σχήμα 8.1.4: *Η ΟΤΜ D στην απόδειξη της Πρότασης 8.1.23. Παρατηρήστε ότι είναι ακριβώς ίδια με την ΤΜ στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1.*

Η Πρόταση 8.1.23 ρίχνει λίγο φως στο Ερώτημα 4: Υπάρχουν γλώσσες που ακόμα και η γνώση του πότε ο υπολογισμός μίας ΤΜ τερματίζει δεν αρκεί για να τις αποφασίσουμε. Ο «βαθμός» μη-αποφανσιμότητάς τους συνεπώς οφείλει να είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό π.χ. των γλωσσών στην κλάση RE. Αυτό ισχύει φυσικά αν πάρουμε την HP ως γλώσσα αναφοράς. Στην επόμενη παράγραφο θα προχωρήσουμε την ιδέα του σχετικού υπολογισμού ακόμα πιο πέρα εξετάζοντας γενικότερα τη μη-αποφανσιμότητα, έχοντας ως αναφορά ολόκληρες κλάσεις γλωσσών.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύοντας μερικές χρήσιμες ιδιότητες των κλάσεων σχετικού υπολογισμού.

Θεώρημα 8.1.24. Έστω γλώσσα $A \subseteq \{0,1\}^*$. $L \in \mathsf{REC}^A$ ανν $\overline{L} \in \mathsf{REC}^A$.

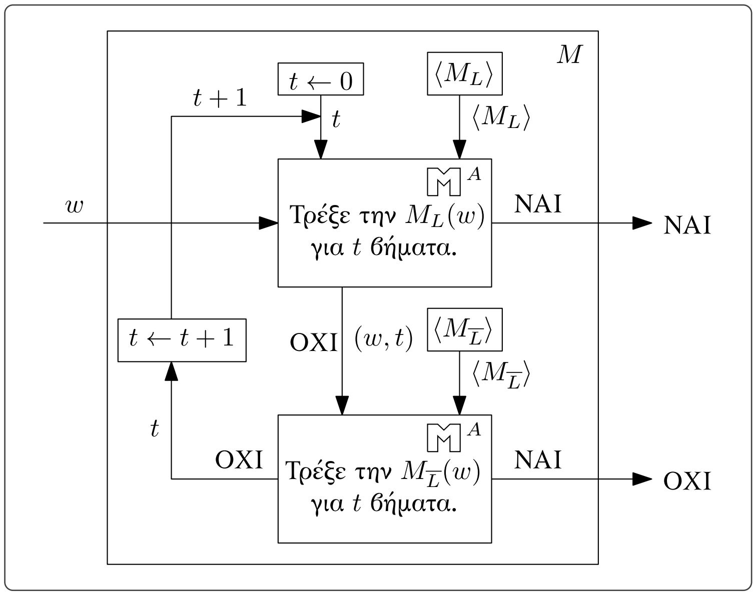
Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.3, μόνο που σε αυτή την περίπτωση έχουμε ΟΤΜ. □

Ορισμός 8.1.25. Εστω κλάση γλωσσών $\mathcal{C}$. Ορίζουμε την κλάση γλωσσών co-$\mathcal{C} = \{L \subseteq \{0,1\}^* \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$.

Θεώρημα 8.1.26. Έστω γλώσσα $A \subseteq \{0,1\}^*$. Ισχύει ότι $\mathsf{RE}^A \cap \text{co-}\mathsf{RE}^A = \mathsf{REC}^A$.

Απόδειξη. Έστω γλώσσα $L \in \mathsf{REC}^A$. Κατά ήσσονα λόγο ισχύει ότι $L \in \mathsf{RE}^A$. Από το Θεώρημα 8.1.24 προκύπτει ότι $\overline{L} \in \mathsf{REC}^A$ και αντίστοιχα ότι $\overline{L} \in \mathsf{RE}^A$. Άρα $L \in \mathsf{RE}^A \cap \text{co-}\mathsf{RE}^A$.

Έστω τώρα γλώσσα $L \in \mathsf{RE}^A \cap \text{co-}\mathsf{RE}^A$ δηλαδή υπάρχουν ΟΤΜ M_L^A και $M_{\overline{L}}^A$ που ημι-αποφασίζουν τις L και $\overline{L}$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε την ΟΤΜ M του Σχήματος 8.1.5 και παρατηρούμε ότι αποφασίζει την L. Άρα $L \in \mathsf{REC}^A$. □



Σχήμα 8.1.5: *Η TM M που αποφασίζει την L όταν $L \in \mathsf{RE}^A \cap \text{co-}\mathsf{RE}^A$ (ο λόγος που χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\boxed{M}^A$ αναφέρεται στην Υποσημείωση 4 στη Σελίδα 137).*

Το ακόλουθο Θεώρημα είναι πάρα πολύ χρήσιμο καθώς μας δίνει το δικαίωμα να αλλάξουμε τη «γλώσσα αναφοράς».

Θεώρημα 8.1.27. Έστω γλώσσες $A, B, C \subseteq \{0,1\}^*$. Ισχύει ότι:

i. Αν $A \in \mathsf{RE}^B$ και $B \in \mathsf{REC}^C$ τότε $A \in \mathsf{RE}^C$.

ii. Αν $A \in \mathsf{REC}^B$ και $B \in \mathsf{REC}^C$ τότε $A \in \mathsf{REC}^C$.

Απόδειξη. [1] i. Έστω M_A^B η TM που ημι-αποφασίζει την A και M_B^C η TM που αποφασίζει την B. Αρκεί να «αντικαταστήσουμε» το μαντείο για τη B στην M_A με την M_B (όπως κάναμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.21). Η «αντικατάσταση» αυτή θα γίνει ως εξής:

> *Προσομοιώνουμε με μία χρησμοληπτική καθολική TM την M_A και όταν η M_A «ρωτάει» το μαντείο αν μία λέξη w ανήκει στη γλώσσα B, αντί αυτού τρέχουμε την M_B με είσοδο w.*

Έτσι παίρνουμε μία OTM που, αν χρησιμοποιήσουμε μαντείο για τη C, θα ημι-αποφασίζει την A. □

Θεώρημα 8.1.28. Έστω γλώσσες $A, B, C \subseteq \{0,1\}^*$. Αν $A \leq_m B$ και $B \in \mathsf{REC}^C$ ($B \in \mathsf{RE}^C$) τότε $A \in \mathsf{REC}^C$ ($A \in \mathsf{RE}^C$ αντίστοιχα).

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι εντελώς αντίστοιχη με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.7. □

Στο πλαίσιο του σχετικού υπολογισμού γίνεται πιο εύκολα αντιληπτό ότι η σχέση που ορίζει η αναγωγή ισχύει γενικότερα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση του αν μια γλώσσα ανήκει σε πιο ευρείες κλάσεις από τις REC και RE.

[1] Θα δείξουμε μόνο το i., η απόδειξη για το ii. είναι εντελώς ανάλογη.

8.2 Αριθμητική Ιεραρχία

Ορισμός 8.2.1. Έστω μία κλάση γλωσσών $\mathcal{C} \subseteq 2^{\{0,1\}^*}$. Ορίζουμε τις ακόλουθες κλάσεις γλωσσών ως προς τη $\mathcal{C}$:

- $\mathsf{RE}^{\mathcal{C}} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} \mathsf{RE}^A$

- $\mathsf{REC}^{\mathcal{C}} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} \mathsf{REC}^A$

Παρατήρηση 8.2.2. Από το Θεώρημα 8.1.21 προκύπτει ότι $\mathsf{REC}^{\mathsf{REC}} = \mathsf{REC}$ και $\mathsf{RE}^{\mathsf{REC}} = \mathsf{RE}$.

Οι κλάσεις που απαρτίζουν την *Αριθμητική Ιεραρχία* δίνονται στον ακόλουθο Ορισμό.

Ορισμός 8.2.3 (Αριθμητική Ιεραρχία)**.** Ορίζουμε αναδρομικά για κάθε $n \geq 1$ τις κλάσεις γλωσσών:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^0 &= \mathsf{RE} \\ \Delta_1^0 &= \mathsf{REC} \\ \Sigma_{n+1}^0 &= \mathsf{RE}^{\Sigma_n^0} \\ \Delta_{n+1}^0 &= \mathsf{REC}^{\Sigma_n^0} \end{aligned}$$

και τις κλάσεις γλωσσών:

$$\Pi_n^0 = \text{co-}\Sigma_n^0$$

Οι κλάσεις αυτές αποτελούν μία κατάταξη μερικών γλωσσών του $\{0,1\}^*$ ως προς τον βαθμό μη-αποφανσιμότητας τους καθώς, όπως θα δούμε στο Θεώρημα 8.2.10, για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει γλώσσα που ανήκει στην κλάση $\Sigma_{n+1}^0 \setminus \Sigma_n^0$, ή αλλιώς γλώσσα που δεν αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μαντείο «επιπέδου» Σ_{n-1}^0 για να την ημι-αποφασίσουμε, αλλά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μαντείο «επιπέδου» Σ_n^0.

Προκειμένου να έχουν νόημα αυτές οι κλάσεις θα πρέπει να δείξουμε ότι οι προφανείς εγκλεισμοί είναι γνήσιοι. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως *Θεώρημα Αριθμητικής Ιεραρχίας* (Θεώρημα 8.2.10) και για να το αποδείξουμε θα χρειαστεί πρώτα να κάνουμε κάποια προεργασία.

Ορισμός 8.2.4. Ορίζουμε αναδρομικά για κάθε $n \geq 1$ τις γλώσσες:

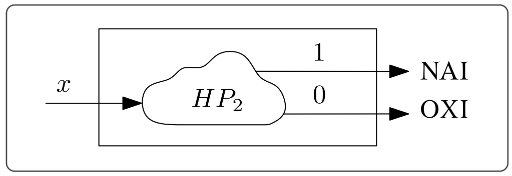
$$\begin{aligned} HP_1 &= HP \\ HP_{n+1} &= \{\langle M, w\rangle \in \{0,1\}^* \mid M^{HP_n}(w)\downarrow\} \end{aligned}$$

Πρόταση 8.2.5. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $HP_n \in \mathsf{REC}^{HP_n+1}$.

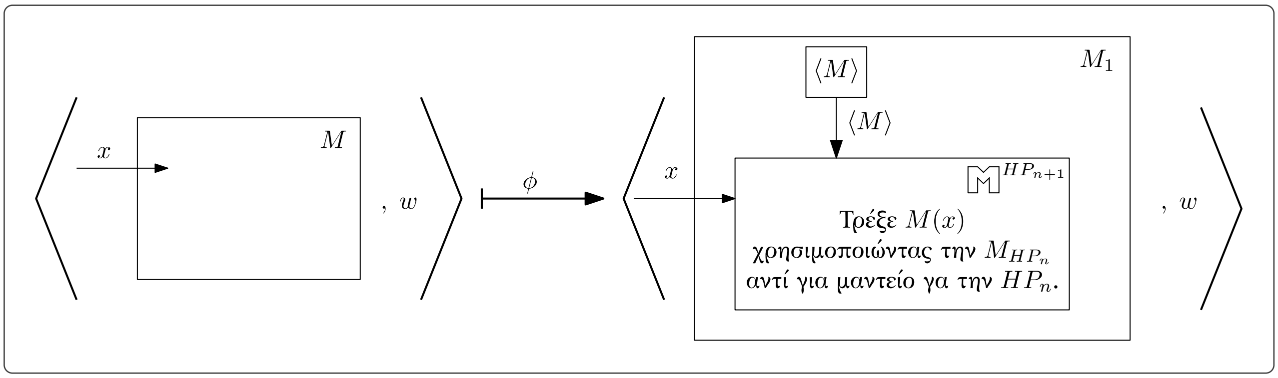
Απόδειξη. Θα το δείξουμε κάνοντας επαγωγή στο n.

<u>*Βάση:*</u> Για $n = 1$ πρέπει να δείξουμε ότι $HP \in \mathsf{REC}^{HP_2}$. Παρατηρήστε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μία TM είναι OTM που χρησιμοποιεί μαντείο για την HP (απλά δεν «ρωτάει» ποτέ αυτό το μαντείο, δες Σύμβαση 8.1.16). Συνεπώς η OTM του Σχήματος 8.2.1 αποφασίζει την HP καθώς:

- Αν υπάρχει TM M και λέξη $w \in \{0,1\}^*$ τέτοιες ώστε $x = \langle M, w\rangle$ και το μαντείο για την HP_2 επιστρέψει 1 τότε $\langle M, w\rangle \in HP_2$, δηλαδή $M^{HP}(w)\downarrow$. Όμως θεωρούμε ότι η TM M, παρόλο



Σχήμα 8.2.1: *Η TM που αποφασίζει την HP χρησιμοποιώντας μαντείο για την HP_2.*



Σχήμα 8.2.2: *Η αναγωγή της HP_{n+1} στην HP_{n+2}.*

που την αντιμετωπίζουμε σαν OTM, δεν ρωτάει ποτέ το μαντείο της, συνεπώς $M(w) \downarrow$ [1]. Οπότε $x \in HP$.

- Αν είτε δεν υπάρχουν TM M και λέξη $w \in \{0,1\}^*$ τέτοιες ώστε $x = \langle M, w \rangle$, είτε υπάρχουν αλλά το μαντείο για την HP_2 επιστρέφει 0, εύκολα καταλήγουμε ότι $x \notin HP$.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι $HP_n \in \mathsf{REC}^{HP_{n+1}}$.

Επαγωγικό βήμα: Αρκεί να δείξουμε ότι $HP_{n+1} \leq_m HP_{n+2}$ καθώς (προφανώς) ισχύει ότι $HP_{n+2} \in \mathsf{REC}^{HP_{n+2}}$ και έτσι, από το Θεώρημα 8.1.28, έπεται ότι $HP_{n+1} \in \mathsf{REC}^{HP_{n+2}}$.

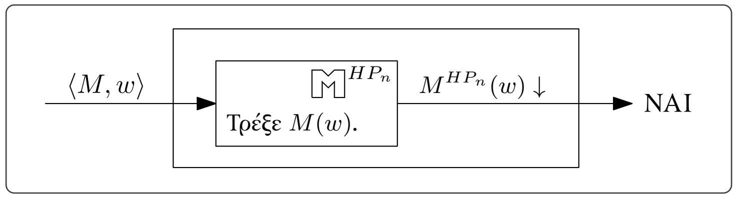
Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει OTM $M_{HP_n}^{HP_{n+1}}$ που αποφασίζει την HP_n. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $\phi(x) = \langle M_1, w \rangle$, όπου η OTM M_1 απεικονίζεται στο Σχήμα 8.2.2, αν το x είναι κωδικοποίηση OTM M και λέξης w και $\phi(x) = x$ αλλιώς, και παρατηρούμε ότι:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.

2. $\langle M, w \rangle \in HP_{n+1} \Leftrightarrow M^{HP_n}(w) \downarrow \Leftrightarrow M_1^{HP_{n+1}}(w) \downarrow \Leftrightarrow \langle M_1, w \rangle \in HP_{n+2}$

Επομένως η ϕ είναι αναγωγή της HP_{n+1} στην HP_{n+2}. □

[1] Το γεγονός ότι τερματίζει δεν οφείλεται στους «χρησμούς» του μαντείου, αλλά στην σχεδίασή της και (φυσικά) στη λέξη εισόδου w. Για να είμαστε απολύτως τυπικοί θα πρέπει να ελέγξουμε τι γίνεται με την περίπτωση όπου $x = \langle M, w \rangle$ και η M είναι OTM (και όχι απλή TM) και ισχύει ότι $M^{HP}(w) \downarrow$, αλλά ο τερματισμός της $M^{HP}(w)$ βασίζεται στους«χρησμούς» του μαντείου. Στην περίπτωση αυτή η OTM του Σχήματος 8.2.1 θα επιστρέψει NAI αλλά θα έπρεπε να επιστρέψει OXI (καθώς η M δεν είναι απλή TM). Για να αποφύγουμε τη λάθος απάντηση της OTM του Σχήματος 8.2.1 θα πρέπει πρώτα να ελέγξουμε αν η M είναι απλή TM ή όχι (ελέγχωντας την κωδικοποίησή της για να δούμε αν ικανοποιεί την ιδιότητα της Σύμβασης 8.1.16).



Σχήμα 8.2.3: *Η ΟΤΜ στην απόδειξη του Λήμματος 8.2.7.*

Λήμμα 8.2.6. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $HP_{n+1} \notin \mathsf{REC}^{HP_n}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι αντίστοιχη με την απόδειξη της Πρότασης 8.1.23 [1]. □

Λήμμα 8.2.7. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $HP_n \in \Sigma_n^0$.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε κάνοντας επαγωγή στο n.

Βάση: Για $n = 1$ στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 δείξαμε ότι $HP \in \mathsf{RE}$ (δηλαδή ότι $HP_1 \in \Sigma_1^0$).

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι $HP_n \in \Sigma_n^0$.

Επαγωγικό βήμα: Παρατηρούμε ότι η ΟΤΜ του Σχήματος 8.2.3 ημι-αποφασίζει την HP_{n+1} χρησιμοποιώντας για μαντείο την HP_n. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $HP_n \in \Sigma_n^0$, άρα $HP_{n+1} \in \Sigma_{n+1}^0$. □

Λήμμα 8.2.8. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $\Sigma_n^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_n}$.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε κάνοντας επαγωγή στο n.

Βάση: Για $n = 1$ πρέπει να δείξουμε ότι $\Sigma_1^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_1}$ ή αλλιώς ότι $\mathsf{RE} \subseteq \mathsf{REC}^{HP}$ το οποίο ισχύει από την Πρόταση 8.1.22.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι $\Sigma_n^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_n}$.

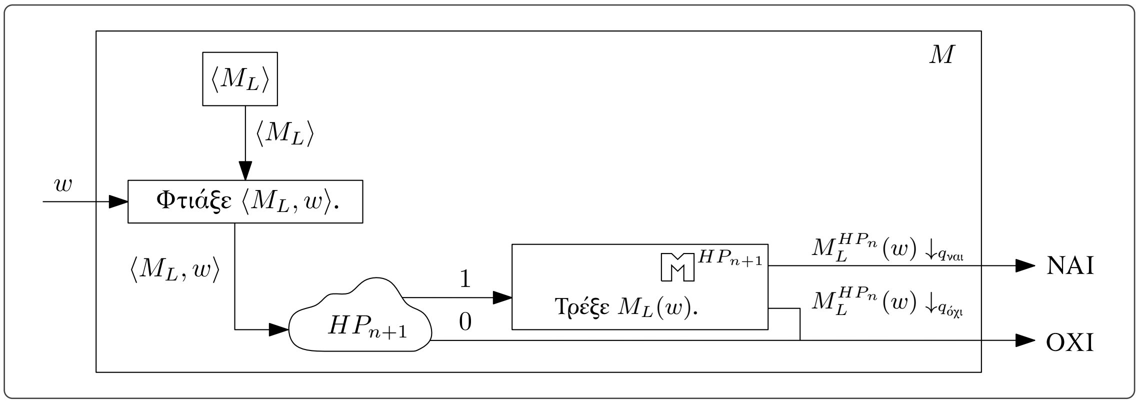
Επαγωγικό βήμα: Έστω $L \in \Sigma_{n+1}^0$, δηλαδή υπάρχει γλώσσα $A \in \Sigma_n^0$ τέτοια ώστε $L \in \mathsf{RE}^A$. Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι $A \in \mathsf{REC}^{HP_n}$, συνεπώς από το Θεώρημα 8.1.27 έπεται ότι $L \in \mathsf{RE}^{HP_n}$, άρα υπάρχει ΟΤΜ $M_L^{HP_n}$ που την ημι-αποφασίζει. Θεωρούμε την ΟΤΜ M του Σχήματος 8.2.4. Η χρησμοληπτική καθολική ΤΜ του Σχήματος 8.2.4 χρησιμοποιεί μαντείο για την HP_{n+1} και όχι για την HP_n. Για να προσομοιώσουμε όμως την λειτουργία της $M_L^{HP_n}$ χρειαζόμαστε μαντείο για την HP_n αντ' αυτής όμως χρησιμοποιούμε την HP_{n+1}. Αυτό είναι εφικτό καθώς στην Πρόταση 8.2.5 δείξαμε ότι $HP_n \in \mathsf{REC}^{HP_{n+1}}$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στη θέση του μαντείου για την HP_n την ΟΤΜ που αποφασίζει την HP_n και χρησιμοποιεί μαντείο για την HP_{n+1}.

Παρατηρούμε ότι η ΟΤΜ $M^{HP_{n+1}}$ του Σχήματος 8.2.4 αποφασίζει την L, άρα $L \in \mathsf{REC}^{HP_n+1}$. □

Παρατήρηση 8.2.9. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. Για κάθε $n \geq 2$ αν $L \in \Sigma_n^0$ ($L \in \Delta_n^0$) τότε $L \in \mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$ ($L \in \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$ αντίστοιχα).

Πράγματι, αν $L \in \Sigma_n^0$ τότε υπάρχει γλώσσα $A \in \Sigma_{n-1}^0$ τέτοια ώστε $L \in \mathsf{RE}^A$. Από το Λήμμα 8.2.8 ισχύει ότι $\Sigma_{n-1}^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$, άρα $A \in \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$, οπότε, από το Θεώρημα 8.1.27, προκύπτει ότι $L \in \mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$.

[1] Για την ακρίβεια, στην Πρόταση 8.1.23 δείξαμε ότι $HP_2 \notin \mathsf{REC}^{HP_1}$.



Σχήμα 8.2.4: *Η ΟΤΜ M στην απόδειξη του Λήμματος 8.2.8.*

Πλέον είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι ο Ορισμός 8.2.3 δεν ήταν εις μάτην, καθώς καμία από τις κλάσεις Σ_n^0, Π_n^0 και Δ_n^0 δεν «καταρρέει» μέσα σε κάποια άλλη. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δίνεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 8.2.10 (Θεώρημα Αριθμητικής Ιεραρχίας , Kleene-Turing). Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι:

i. $\Sigma_n^0 \subset \Sigma_{n+1}^0$ και $\Pi_n^0 \subset \Pi_{n+1}^0$

ii. $\Sigma_n^0 \nsubseteq \Pi_n^0$ και $\Pi_n^0 \nsubseteq \Sigma_n^0$

iii. $\Sigma_n^0 \cup \Pi_n^0 \subset \Delta_{n+1}^0$

iv. $\Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0 = \Delta_n^0$

v. $\Delta_n^0 \subset \Sigma_n^0$ και $\Delta_n^0 \subset \Pi_n^0$

Απόδειξη. i. Από το Λήμμα 8.2.8 ξέρουμε ότι $\Sigma_n^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_n}$, άρα και ότι $\Sigma_n^0 \subseteq \mathsf{RE}^{HP_n}$. Από το Λήμμα 8.2.7 ξέρουμε ότι $HP_n \in \Sigma_n^0$. Συνεπώς $\Sigma_n^0 \subseteq \Sigma_{n+1}^0$. Επίσης, αν $L \in \Pi_n^0$ τότε $\overline{L} \in \Sigma_n^0 \subseteq \Sigma_{n+1}^0$, άρα $L \in \Pi_{n+1}^0$, Συνεπώς $\Pi_n^0 \subseteq \Pi_{n+1}^0$.

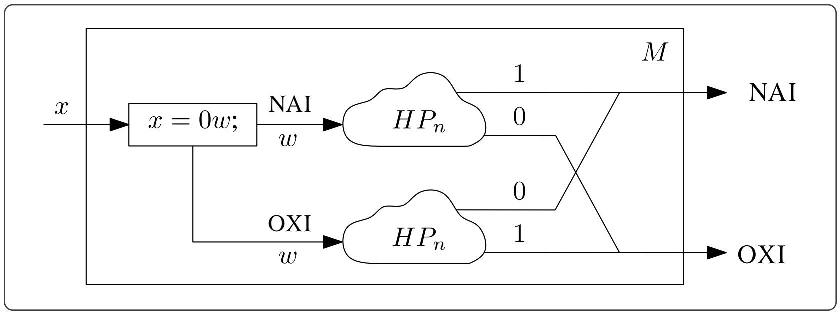
Ας δείξουμε τώρα ότι οι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι. Από το Λήμμα 8.2.7 ξέρουμε ότι $HP_{n+1} \in \Sigma_{n+1}^0$, από το Λήμμα 8.2.8 ότι $\Sigma_n^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_n}$ και από το Λήμμα 8.2.6 ότι $HP_{n+1} \notin \mathsf{REC}^{HP_n}$, άρα $HP_{n+1} \notin \Sigma_n^0$. Επίσης, $\overline{HP}_{n+1} \in \Pi_{n+1}^0$, αφού $HP_{n+1} \in \Sigma_{n+1}^0$, αλλά $\overline{HP}_{n+1} \notin \Pi_n^0$ καθώς τότε θα ίσχυε ότι $HP_{n+1} \in \Sigma_n^0$.

ii. Από το Λήμμα 8.2.7 ξέρουμε ότι $HP_n \in \Sigma_n^0$ και από την Παρατήρηση 8.2.9 ότι $\Sigma_n^0 \subseteq \mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$ για $n \geq 2$ [1]. Συνεπώς $HP_n \in \mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$. Αν ίσχυε ότι $\Sigma_n^0 \subseteq \Pi_n^0$ τότε $HP_n \in \Pi_n^0$, οπότε $\overline{HP}_n \in \Sigma_n^0$. Όπως πριν μπορούμε να δείξουμε ότι $\overline{HP}_n \in \mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 8.1.26 θα ίσχυε ότι $HP_n \in \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$ πράγμα που αντιβαίνει στο Λήμμα 8.2.6.

Με αντίστοιχο τρόπο (χρησιμοποιώντας την $\overline{HP}_n$) δείχνουμε ότι $\Pi_n^0 \nsubseteq \Sigma_n^0$.

iii. Από το Λήμμα 8.2.8 ξέρουμε ότι $\Sigma_n^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_n}$. Από το Λήμμα 8.2.7 ξέρουμε ότι $HP_n \in \Sigma_n^0$. Συνεπώς $\Sigma_n^0 \subseteq \Delta_{n+1}^0$. Επίσης, αν $L \in \Pi_n^0$ τότε $\overline{L} \in \Sigma_n^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_n}$. Από το Θεώρημα 8.1.24 έπεται ότι και $L \in \mathsf{REC}^{HP_n}$, άρα, όπως πριν, $\Pi_n^0 \subseteq \Delta_{n+1}^0$.

[1] Για $n = 1$ το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι $\overline{HP} \notin RE$.



Σχήμα 8.2.5: *Η ΟΤΜ M που αποφασίζει την $0HP_n \cup 1\overline{HP}_n$ αν χρησιμοποιήσουμε μαντείο για την HP_n.*

Ας δείξουμε τώρα ότι οι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι. Θεωρούμε τη γλώσσα:

$$0HP_n \cup 1\overline{HP}_n = \{0w \in \{0,1\}^* \mid w \in HP_n\} \cup \{1w \in \{0,1\}^* \mid w \notin HP_n\}$$ [1]

Παρατηρούμε ότι $0HP_n \cup 1\overline{HP}_n \in \mathsf{REC}^{HP_n}$ καθώς η ΟΤΜ M^{HP_n} του Σχήματος 8.2.5 την αποφασίζει. Άρα $0HP_n \cup 1\overline{HP}_n \in \Delta^0_{n+1}$.

Έστω (προς άτοπο) ότι $0HP_n \cup 1\overline{HP}_n \in \Sigma^0_n$ για $n \geq 2$ [2], δηλαδή υπάρχει γλώσσα $A \in \Sigma^0_{n-1}$ και ΟΤΜ, έστω $M^A_{0HP_n \cup 1\overline{HP}_n}$, που την ημι-αποφασίζει. Η ΟΤΜ $M^A_{HP_n}$ του Σχήματος 8.2.6 αποφασίζει την HP_n, συνεπώς $HP_n \in \mathsf{REC}^A$. Καθώς $A \in \Sigma^0_{n-1}$ και (λόγω του Λήμματος 8.2.8) $\Sigma^0_{n-1} \subseteq \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$, έπεται ότι $HP_n \in \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$ (λόγω του Θεωρήματος 8.1.27) πράγμα που αντιβαίνει στο Λήμμα 8.2.6.

Μένει να δείξουμε ότι $0HP_n \cup 1\overline{HP}_n \notin \Pi^0_n$, ή αλλιώς ότι $\overline{0HP_n \cup 1\overline{HP}_n} \notin \Sigma^0_n$. Παρατηρούμε ότι:

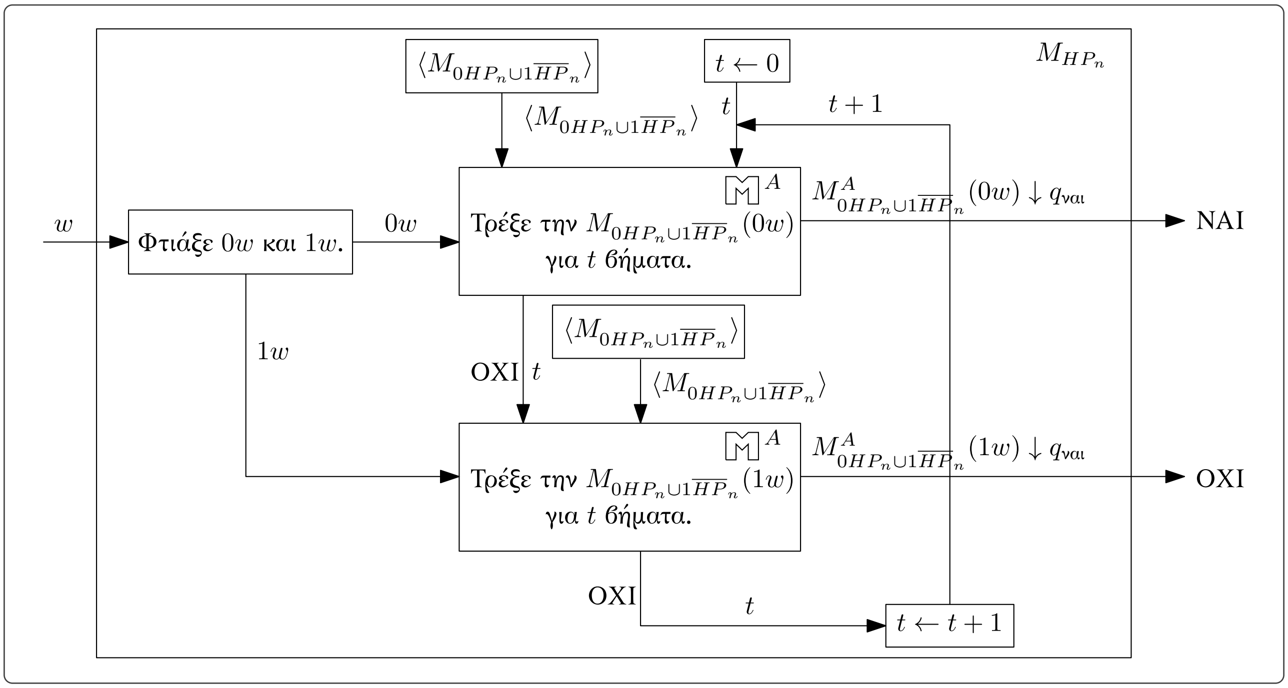
$$\begin{aligned}
\overline{0HP_n \cup 1\overline{HP}_n} &= \overline{\{0w \in \{0,1\}^* \mid w \in HP_n\} \cup \{1w \in \{0,1\}^* \mid w \notin HP_n\}} \\
&= \overline{\{0w \in \{0,1\}^* \mid w \in HP_n\}} \setminus \{1w \in \{0,1\}^* \mid w \notin HP_n\} \\
&= \Big(\{x \in \{0,1\}^* \mid \exists w \in \{0,1\}^* \ (x = 1w)\} \cup \{0w \in \{0,1\}^* \mid w \notin HP_n\} \cup \{\epsilon\}\Big) \\
&\quad \setminus \{1w \in \{0,1\}^* \mid w \notin HP_n\} \\
&= \Big(\{x \in \{0,1\}^* \mid \exists w \in \{0,1\}^* \ (x = 1w)\} \cup 0\overline{HP_n} \cup \{\epsilon\}\Big) \setminus 1\overline{HP_n} \\
&= 1HP_n \cup 0\overline{HP_n} \cup \{\epsilon\}
\end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω απόδειξη, με το 0 και το 1 στην αρχή των λέξεων αντεστραμμένα (λαμβάνοντας υπόψιν και την ϵ), αποδεικνύουμε ότι $1HP_n \cup 0\overline{HP_n} \cup \{\epsilon\} \notin \Sigma^0_n$.

iv. Έστω γλώσσα $L \in \Delta^0_n$ για $n \geq 2$ [3], δηλαδή υπάρχει $A \in \Sigma^0_{n-1}$ τέτοια ώστε $L \in \mathsf{REC}^A$. Από το Θεώρημα 8.1.24 έπεται ότι $\overline{L} \in \mathsf{REC}^A$ επίσης. Άρα:

$$\left.\begin{aligned} L \in \mathsf{REC}^A \Rightarrow L \in \mathsf{RE}^A \Rightarrow L \in \Sigma^0_n \\ \overline{L} \in \mathsf{REC}^A \Rightarrow \overline{L} \in \mathsf{RE}^A \Rightarrow \overline{L} \in \Sigma^0_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow L \in \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$$

[1] Θυμηθείτε τον Οριοσμό 0.2.19.
[2] Για $n = 1$ είναι προφανές ότι $0HP \cup 1\overline{HP} \notin \mathsf{REC}$ (η απόδειξη είναι αντίστοιχη με αυτή για $n \geq 2$ μόνο που δεν χρησιμοποιούμε μαντεία).
[3] Για $n = 1$ το ζητούμενο προκύπτει από τα Θεωρήματα 1.5.3 και 1.5.4.



Σχήμα 8.2.6: *Η ΟΤΜ M_{HP_n} που (υποθετικά) αποφασίζει την HP_n αν χρησιμοποιήσει μαντείο για την* $A \in \Sigma^0_{n-1}$.

Έστω τώρα γλώσσα $L \in \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$, δηλαδή οι L και $\overline{L}$ ανήκουν στην κλάση Σ^0_n. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.2.9 έπεται ότι $L, \overline{L} \in \mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$, ή αλλιώς ότι $L \in \mathsf{RE}^{HP_{n-1}} \cap \text{co-}\mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$. Τέλος, από το Θεώρημα 8.1.26 έπεται ότι $L \in \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$ και από το Λήμμα 8.2.7 ότι $HP_{n-1} \in \Sigma^0_{n-1}$, άρα $L \in \Delta^0_n$.

v. Έστω (προς άτοπο) ότι $HP_n \in \Delta^0_n$ για $n \geq 2$[1]. Από την Παρατήρηση 8.2.9 έπεται ότι $HP_n \in \mathsf{REC}^{HP_{n-1}}$, πράγμα που αντιβαίνει στο Λήμμα 8.2.6. Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι $\overline{HP_n} \notin \Delta^0_n$. □

Οι κλάσεις γλωσσών της Αριθμητικής Ιεραρχίας φαίνονται στο Σχήμα 8.2.7.

8.3 Αλγοριθμικές Αναγωγές

Οι χρησμοληπτικές ΤΜ και τα μαντεία χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε μία ακόμα μορφή αναγωγής μεταξύ γλωσσών. Οι αναγωγές αυτές μπορεί να θεωρηθούν γενίκευση των απεικονιστικών αναγωγών για λόγους που θα συζητήσουμε στη συνέχεια.

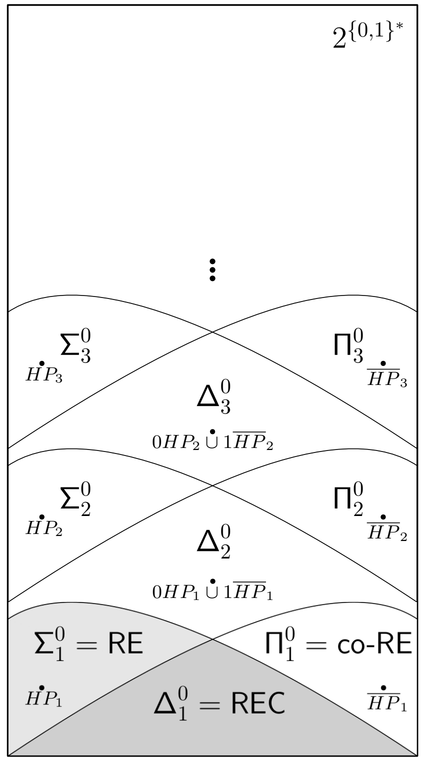
Ορισμός 8.3.1. Έστω γλώσσες $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Η A *ανάγεται (αλγοριθμικά ή κατά Turing) στη* B, συμβολισμός $A \leq_T B$, ανν $A \in \mathsf{REC}^B$.

Στο Παράδειγμα 8.1.12 είδαμε ότι $L_{\text{Αποδοχής}} \leq_T HP$. Ας δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.3.2. Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $L_\varnothing$ του Παραδείγματος 5.2.20 ανάγεται αλγοριθμικά στην HP. Πρώτα θα δείξουμε ότι $L_\varnothing \in \text{co-}\mathsf{RE}$, δηλαδή ότι $\overline{L}_\varnothing \in \mathsf{RE}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\overline{L}_\varnothing = \{w \in \{0,1\}^* \mid (\exists \text{ TM } M\ (w = \langle M \rangle)) \to (L(M) \neq \varnothing)\}$$

[1] Για $n = 1$ στο Κεφάλαιο 5 δείξαμε ότι $HP, \overline{HP} \notin \mathsf{REC}$.



Σχήμα 8.2.7: *Η Αριθμητική Ιεραρχία.*

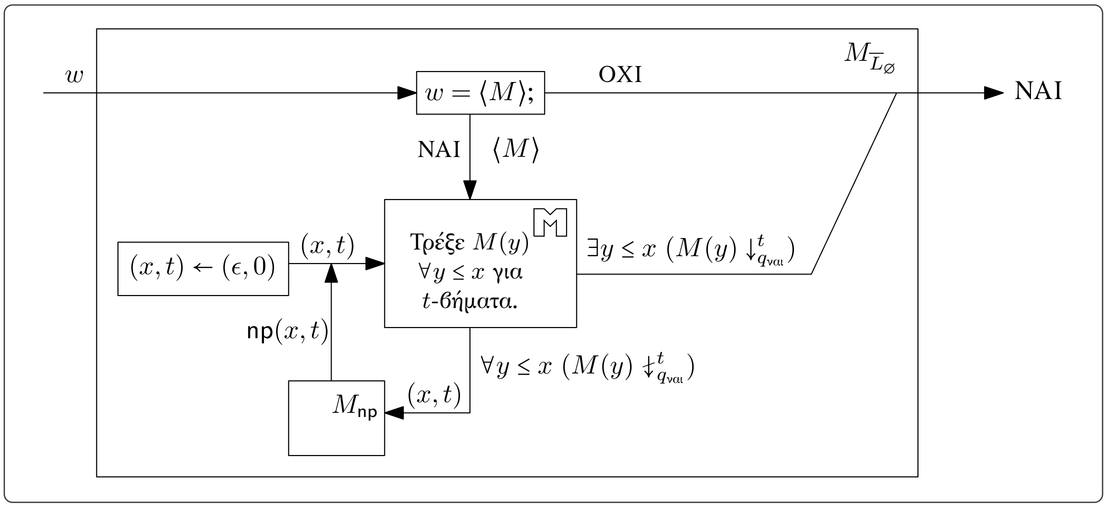
και ότι η TM $M_{\overline{L}_\varnothing}$ του Σχήματος 8.3.1 την ημι-αποφασίζει. Από το Θεώρημα 8.2.10 (το ii.), αφού $L_\varnothing \in \Pi_1^0$, προκύπτει ότι $L_\varnothing \in \Delta_2^0$. Από την Παρατήρηση 8.2.9 έπεται ότι $L_\varnothing \in \mathsf{REC}^{HP}$. Επομένως $L_\varnothing \leq_T HP$.

Επιπλέον, αφού $L_\varnothing \notin \mathsf{REC}$ (δες Παράδειγμα 5.2.20), μπορούμε να κατατάξουμε την $L_\varnothing$ στην Αριθμητική Ιεραρχία. Έπεται ότι $L_\varnothing \in \Pi_1^0 \setminus \Delta_1^0$.

Διαισθητικά ο ορισμός της αλγοριθμικής αναγωγής μας λέει ότι αν η ύπαρξη ενός αλγορίθμου για τη γλώσσα B μπορεί να χρησιμοποιηθεί, έστω και με «μη-ρεαλιστικό» τρόπο (μέσω ενός μαντείο για τη B), για να αποφασίσουμε την A, τότε $A \leq_T B$. Αν έχουμε έναν «ρεαλιστικό» τρόπο (μέσω μίας υπολογίσιμης συνάρτησης) να εκμεταλλευτούμε την ύπαρξη αλγορίθμου για την B τότε η A ανάγεται απεικονιστικά στην B.

Μία πιο ουσιαστική διαφορά μεταξύ των δύο μορφών αναγωγής προκύπτει όταν ενδιαφερθούμε και για τον χρόνο υπολογισμού. Προφανώς αν $A \leq_T B$ και υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει τη B τότε υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει την A [1]. Καθώς όμως μπορεί να γίνονται πολλά ερωτήματα προς το μαντείο, αυτός ο αλγόριθμος για την A πιθανώς να χρειάζεται παραπάνω χρόνο από τον αλγόριθμο για τη B (περισσότερο και από την OTM που αποφασίζει την A ως προς τη B, αν δεν μετρήσουμε στον χρόνο αυτόν τα ερωτήματα προς το μαντείο). Στις απεικονιστικές αναγωγές όμως ο χρόνος του αλγορίθμου για την A είναι πάντα ο χρόνος που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση της αναγωγής συν τον χρόνο που χρειάζεται ο αλγόριθμος για τη B (με είσοδο την εικόνα της αναγωγής).

[1] Αντικαθιστούμε κάθε αλληλεπίδραση με το μαντείο με μία εκτέλεση του αλγορίθμου για τη B, με είσοδο τη λέξη για την οποία έγινε το ερώτημα προς το μαντείο.



Σχήμα 8.3.1: *Η ΤΜ που ημι-αποφασίζει την $\overline{L}_\varnothing$, όπου M_{np} η ΤΜ της Παρατήρησης 1.4.17.*

Στην Υπολογιστική Πολυπλοκότητα οι αλγοριθμικές αναγωγές είναι γνωστές και ως *αναγωγές Cook* [1] (προς τιμήν του *Stephen Cook*), ενώ οι απεικονιστικές αναγωγές ως *αναγωγές Karp* [2] (προς τιμήν του *Richard Karp*).

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι απεικονιστικές αναγωγές είναι στην ουσία αλγοριθμικές αναγωγές, μόνο που έχουμε το δικαίωμα να κάνουμε ένα και μόνο ερώτημα στο μαντείο (για τη λέξη που προκύπτει εφαρμόζοντας τη συνάρτηση αναγωγής πάνω στη λέξη εισόδου) και η απάντηση που θα επιστρέψει η μηχανή μας είναι ακριβώς η απάντηση του μαντείου. Αυτή είναι η ιδέα της απόδειξης της πρότασης που ακολουθεί.

Πρόταση 8.3.3. Έστω γλώσσες $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Αν $A \leq_m B$ τότε $A \leq_T B$.

Απόδειξη. Έστω ϕ η αναγωγή της A στη B και M_ϕ η ΤΜ που την υπολογίζει. Παρατηρούμε ότι η ΟΤΜ M^B του Σχήματος 8.3.2 αποφασίζει την A, καθώς:

- $w \in A \Leftrightarrow \phi(w) \in B \Leftrightarrow$ Το μαντείο θα επιστρέψει 1 $\Leftrightarrow M^B(w) \downarrow_{q_{\text{ναι}}}$
- $w \notin A \Leftrightarrow \phi(w) \notin B \Leftrightarrow$ Το μαντείο θα επιστρέψει 0 $\Leftrightarrow M^B(w) \downarrow_{q_{\text{όχι}}}$

Συνεπώς $A \leq_T B$. □

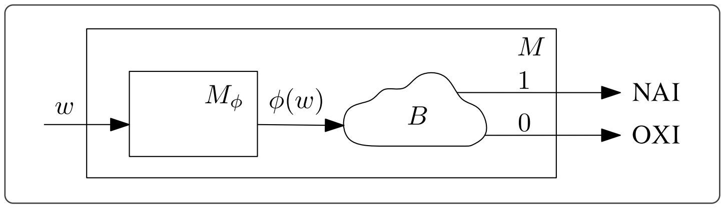
Συνεπώς οι αλγοριθμικές αναγωγές αποτελούν γενίκευση των απεικονιστικών. Η γενίκευση αυτή είναι ουσιαστική, καθώς, όπως μας δείχνει η ακόλουθη παρατήρηση, το αντίστροφο της Πρότασης 8.3.3 δεν ισχύει.

Παρατήρηση 8.3.4. Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. Παρατηρούμε ότι $L \leq_T \overline{L}$ καθώς η ΟΤΜ M^L του Σχήματος 8.3.3 την αποφασίζει. Αυτό φυσικά δεν ισχύει με τις απεικονιστικές αναγωγές, καθώς η γλώσσα $\overline{HP}$ δεν ανάγεται απεικονιστικά στην HP, καθώς τότε θα ίσχυε ότι $\overline{HP} \in \mathsf{RE}$.

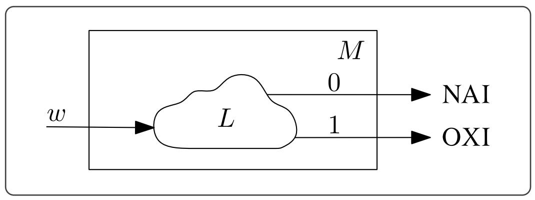
Παρατήρηση 8.3.5. Η σχέση $\leq_T$ είναι μεταβατική λόγω του Θεωρήματος 8.1.27 (το ii.).

[1] Εκεί μπορούμε να κάνουμε μόνο ένα πολυωνυμικό πλήθος ερωτημάτων προς το μαντείο και, φυσικά, η ΟΤΜ χρειάζεται πολυωνυμικό πλήθος βημάτων για να τερματίσει.

[2] Η συνάρτηση της αναγωγής πρέπει να είναι υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο.



Σχήμα 8.3.2: *Η OTM M στην απόδειξη της Πρότασης 8.3.3.*



Σχήμα 8.3.3: *Η OTM M που αποφασίζει την $\overline{L}$ αν χρησιμοποιήσει μαντείο για την L.*

8.4 Πληρότητα γλωσσών ως προς σχέση αναγωγής

Μία ακόμα έννοια (ενδεχομένως) γνωστή από την Υπολογιστική Πολυπλοκότητα είναι η έννοια της *πληρότητας* μίας γλώσσα σε μία κλάση γλωσσών.

Ορισμός 8.4.1. Έστω κλάση γλωσσών $\mathcal{C} \subseteq 2^{\{0,1\}^*}$ και γλώσσα $B \subseteq \{0,1\}^*$. Η B καλείται *$\mathcal{C}$-δύσκολη ως προς τη σχέση αναγωγής* $\trianglelefteq \in \{\leq_m, \leq_T\}$ ανν για κάθε $A \in \mathcal{C}$ ισχύει ότι $A \trianglelefteq B$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $B \in \mathcal{C}$, τότε η B καλείται *$\mathcal{C}$-πλήρης ως προς τη* $\trianglelefteq$.

Παρατήρηση 8.4.2. Από το Λήμμα 8.2.8 προκύπτει ότι για κάθε $n \geq 1$ η HP_n είναι Σ_n^0-δύσκολη ως προς τη $\leq_T$ και από το Λήμμα 8.2.7 ότι είναι και Σ_n^0-πλήρης ως προς τη $\leq_T$. Αναλόγως προκύπτει ότι η $\overline{HP}_n$ είναι Π_n^0-πλήρης ως προς τη $\leq_T$.

Παρατηρήστε όμως και το εξής: Ως προς την $\leq_T$ η HP_n είναι Π_n^0-δύσκολη και η $\overline{HP}_n$ είναι Σ_n^0-δύσκολη, όπως επίσης η HP_n είναι Δ_{n+1}^0-πλήρης!

Πρόταση 8.4.3. Για κάθε $n \geq 1$ η γλώσσα $0HP_n \cup 1\overline{HP}_n$ είναι Δ_{n+1}^0-πλήρης ως προς τη $\leq_T$.

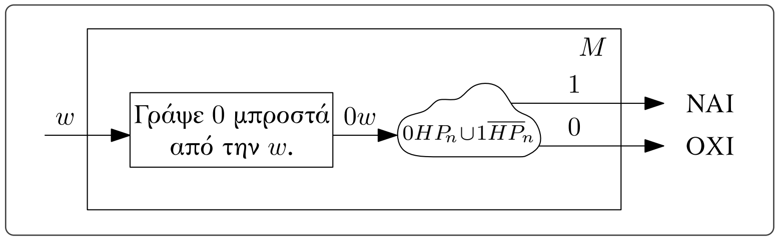
Απόδειξη. Στο ii. της απόδειξης του Θεωρήματος 8.2.10 δείξαμε ότι $0HP_n \cup 1\overline{HP}_n \in \Delta_{n+1}^0$, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι είναι Δ_{n+1}^0-δύσκολη ως προς τη $\leq_T$. Έστω $L \in \Delta_{n+1}^0$. Από την Παρατήρηση 8.2.9 έπεται ότι $L \in \mathsf{REC}^{HP_n}$, άρα $L \leq_T HP_n$. Παρατηρούμε ότι η OTM $M^{0HP_n \cup 1\overline{HP}_n}$ του Σχήματος 8.4.1 αποφασίζει την HP_n, άρα $HP_n \leq_T 0HP_n \cup 1\overline{HP}_n$ και από τη μεταβατικότητας της $\leq_T$ έπεται ότι $L \leq_T 0HP_n \cup 1\overline{HP}_n$. □

Ας δούμε τι συμβαίνει όσον αφορά την πληρότητα των κλάσεων Σ_n^0 και Π_n^0 ως προς τη $\leq_m$.

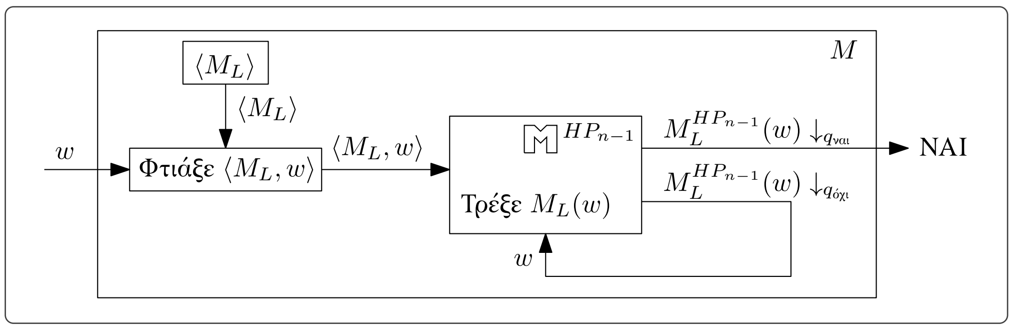
Θεώρημα 8.4.4. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι:

i. Η γλώσσα HP_n είναι Σ_n^0-πλήρης ως προς τη $\leq_m$.

ii. Η γλώσσα $\overline{HP}_n$ είναι Π_n^0-πλήρης ως προς τη $\leq_m$.



Σχήμα 8.4.1: *Η ΟΤΜ M στην απόδειξη της Πρότασης 8.4.3.*



Σχήμα 8.4.2: *Η ΟΤΜ M στην απόδειξη του Θεωρήματος 8.4.4.*

Απόδειξη. i. Από το Λήμμα 8.2.7 προκύπτει ότι $HP_n \in \Sigma_n^0$. Μένει να δείξουμε ότι η HP_n είναι Σ_n^0-δύσκολη ως προς τη $\leq_m$. Έστω γλώσσα $L \in \Sigma_n^0$. Από την Παρατήρηση 8.2.9 έπεται ότι $L \in \mathsf{RE}^{HP_{n-1}}$, άρα υπάρχει ΟΤΜ $M_L^{HP_{n-1}}$ που την ημι-αποφασίζει. Θεωρούμε συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $\phi(w) = \langle M, w\rangle$ όπου M η ΟΤΜ του Σχήματος 8.4.2 και παρατηρούμε ότι:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $w \in L \Rightarrow M_L^{HP_{n-1}}(w)\downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow M^{HP_{n-1}}(w)\downarrow \Rightarrow \langle M, w\rangle \in HP_n$
   - $w \notin L \Rightarrow M_L^{HP_{n-1}}(w)\not\downarrow_{q_{\text{ναι}}} \Rightarrow M^{HP_{n-1}}(w)\uparrow \Rightarrow \langle M, w\rangle \notin HP_n$

Συνεπώς $L \leq_m HP_n$.

ii. Από το Λήμμα 8.2.7 προκύπτει ότι $HP_n \in \Sigma_n^0$, άρα $\overline{HP_n} \in \Pi_n^0$. Μένει να δείξουμε ότι η $\overline{HP}_n$ είναι Π_n^0-δύσκολη ως προς τη $\leq_m$. Έστω γλώσσα $L \in \Pi_n^0$, δηλαδή $\overline{L} \in \Sigma_n^0$. Από το i. έπεται ότι $\overline{L} \leq_m HP_n$ και την Πρόταση 5.2.22 ότι $L \leq_m \overline{HP}_n$. □

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα 8.4.5. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι η γλώσσα $0HP_n \cup 1\overline{HP_n}$ είναι Δ_{n+1}^0-πλήρης ως προς τη $\leq_m$.

8.5 Πέρα από την Αριθμητική Ιεραρχία

Σε αυτήν την παράγραφο θα δώσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό των κλάσεων της Αριθμητικής Ιεραρχίας, χωρίς τη χρήση των μαντείων.

Ορισμός 8.5.1. Ένα *n-μελές κατηγόρημα*, για $n \in \mathbb{N}$, είναι απλά μία σχέση του $(\{0,1\}^*)^n$.

Συμβολισμός 8.5.2. Έστω n-μελές κατηγόρημα R. Αντί για $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ θα γράφουμε $R(x_1, \ldots, x_n)$.

Ορισμός 8.5.3. Ένα *n-μελές κατηγόρημα* R είναι *αποφάνσιμο* ανν η γλώσσα $L_R = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \{0,1\}^* \mid R(x_1, \ldots, x_n)\}$ είναι αναδρομική.

Το παρακάτω Θεώρημα-Ορισμός δίνεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 8.5.4 (Ποσοδεικτικός ορισμός Αριθμητικής Ιεραρχίας). Έστω γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$.

i. $L \in \Sigma_n^0$ ανν υπάρχει αποφάνσιμο $(n+1)$-μελές κατηγόρημα R τέτοιο ώστε:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \exists y_1 \ \forall y_2 \cdots * \, y_n \ R(x, y_1, \ldots, y_n)\}$$

όπου $* = \begin{cases} \exists & , \text{ αν το } n \text{ είναι περιττό} \\ \forall & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$.

ii. $L \in \Pi_n^0$ ανν υπάρχει αποφάνσιμο $(n+1)$-μελές κατηγόρημα R τέτοιο ώστε:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \forall y_1 \ \exists y_2 \cdots * \, y_n \ R(x, y_1, \ldots, y_n)\}$$

όπου $* = \begin{cases} \forall & , \text{ αν το } n \text{ είναι περιττό} \\ \exists & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$.

Παρατήρηση 8.5.5. Παρατηρήστε ότι ο ποσοδεικτικός ορισμός των κλάσεων της Αριθμητικής Ιεραρχίας επεκτείνει τον ορισμό της κλάσης RE που είδαμε στην Άσκηση 1.9.

Παρατήρηση 8.5.6. Το πως εναλλάσσονται οι ποσοδείκτες είναι αυτό που διαχωρίζει τις γλώσσες σε αυτές που ανήκουν στη Σ_n^0 και σε αυτές που ανήκουν στην Π_n^0. Το πλήθος των εναλλαγών είναι εξίσου συμαντικό καθώς από το Θεώρημα 8.2.10 προκύπτει ότι υπάρχουν γλώσσες που ορίζονται με n-εναλλαγές ποσοδεικτών αλλά όχι με $n-1$.

Ο ορισμός αυτός είναι πολύ χρήσιμος για να κατατάσσουμε τις γλώσσες στην Αριθμητική Ιεραρχία. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.5.7. Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $L_\varnothing$ του Παραδείγματος 5.2.20 ανήκει στο Π_1^0 χρησιμοποιώντας τον ποσοδεικτικό ορισμό της Αριθμητικής Ιεραρχίας [1]. Παρατηρούμε ότι:

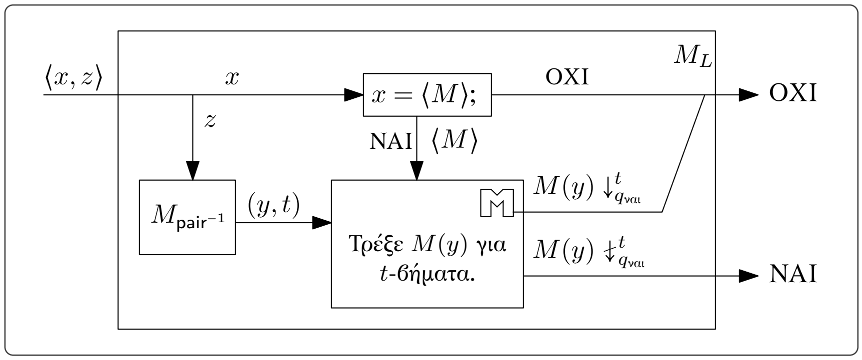
$$\begin{aligned} L_\varnothing &= \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) = \varnothing\} \\ &= \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid \forall y \ \forall t \ (M(y) \not\downarrow^t_{q_{\text{ναι}}})\}\ ^2 \\ &= \{x \in \{0,1\}^* \mid \forall y \ \forall t \ (x = \langle M\rangle \wedge M(y) \not\downarrow^t_{q_{\text{ναι}}})\} \end{aligned}$$

Μπορούμε να «συνδυάσουμε» τους δύο καθολικούς ποσοδείκτες σε έναν χρησιμοποιώντας την 1-1 και επί συνάρτηση $\mathsf{pair} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ με $\mathsf{pair}(i,j) = \binom{i+j+1}{2} + i$, όπου i, j η σειρά εμφάνισης των δύο λέξεων (y και t) στη λεξικογραφική διάταξη, και αντικαθιστούμε τους ποσοδείκτες με $\forall w$, όπου w η $\mathsf{pair}(i,j)$-οστή λέξη του $\{0,1\}^*$. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

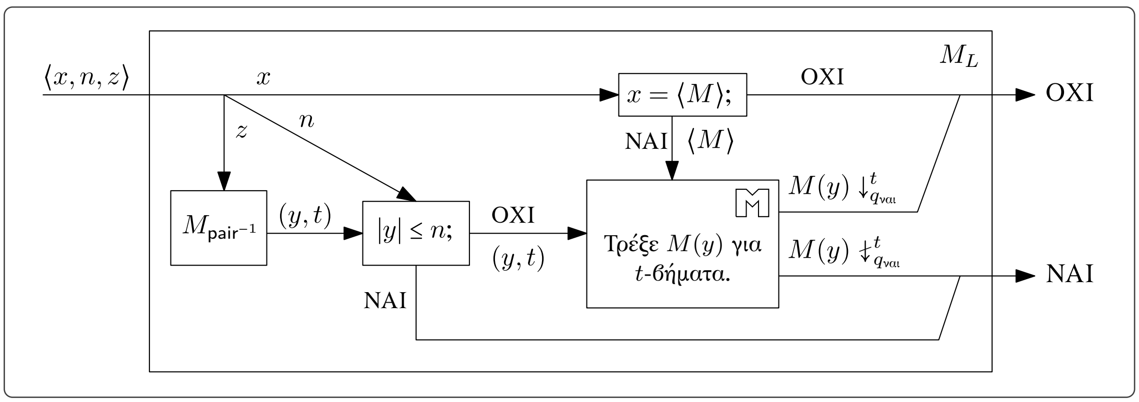
$$L_\varnothing = \{x \in \{0,1\}^* \mid \forall z \ (x = \langle M\rangle \wedge \mathsf{pair}^{-1}(z) = (y,t) \wedge M(y) \not\downarrow^t_{q_{\text{ναι}}})\}$$

[1] Έχουμε ήδη δείξει ότι $L_\varnothing \in \Pi_1^0$ στο Παράδειγμα 8.3.2.

[2] Εδώ «ταυτίζουμε» τη λέξη t με τη σειρά εμφάνισής της στη λεξικογραφική διάταξη προκειμένου να τη «χρησιμοποιήσουμε» ως αριθμό.



Σχήμα 8.5.1: *Η TM του Παραδείγματος 8.5.7.*



Σχήμα 8.5.2: *Η TM M_L του Παραδείγματος 8.5.8.*

Η γλώσσα $L = \{\langle x, z\rangle \in \{0,1\}^* \mid x = \langle M\rangle \wedge z = \mathsf{pair}^{-1}(y,t) \wedge M(y) \not\downarrow^t_{q_{\text{ναι}}}\}$ είναι αναδρομική, καθώς η TM του Σχήματος 8.5.1 την αποφασίζει ($M_{\mathsf{pair}^{-1}}$ είναι η TM που υπολογίζει την pair^{-1} [1]). Άρα, από το Θεώρημα 8.5.4 έπεται ότι $L_\varnothing \in \Pi^0_1$.

Παράδειγμα 8.5.8. Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $L_\mathbb{N}$ του Παραδείγματος 6.1.2 είναι Σ^0_2-πλήρης ως προς τη $\le_m$. Πρώτα θα δείξουμε ότι ανήκει στο Σ^0_2. Παρατηρούμε ότι:

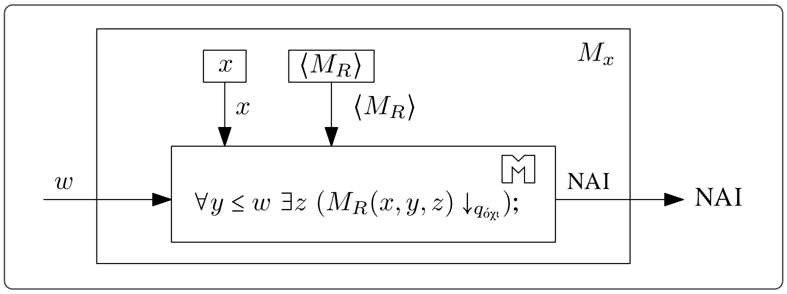
$$\begin{aligned} L_\mathbb{N} &= \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M)| \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid \exists n\ \forall y\ (y > n \to y \notin L(M))\} \\ &= \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid \exists n\ \forall y\ \forall t\ (y \le n \vee M(y) \not\downarrow^t_{q_{\text{ναι}}})\} \\ &= \{x \in \{0,1\}^* \mid \exists n\ \forall z\ (x = \langle M\rangle \wedge \mathsf{pair}^{-1}(z) = (y,t) \wedge (y \le n \vee M(y) \not\downarrow^t_{q_{\text{ναι}}}))\} \end{aligned}$$

Η γλώσσα $L = \{\langle x, n, z\rangle \in \{0,1\}^* \mid x = \langle M\rangle \wedge \mathsf{pair}^{-1}(z) = (y,t) \wedge (y \le n \vee M(y) \not\downarrow^t_{q_{\text{ναι}}})\}$ είναι αναδρομική, καθώς η TM του Σχήματος 8.5.2 την αποφασίζει. Άρα, από το Θεώρημα 8.5.4 έπεται ότι $L_\mathbb{N} \in \Sigma^0_2$.

Έστω τώρα γλώσσα $L \in \Sigma^0_2$, δηλαδή υπάρχει αποφάνσιμο 3-μελές κατηγόρημα R τέτοιο ώστε:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \exists y\ \forall z\ R(x,y,z)\}$$

[1] Η pair^{-1} είναι υπολογίσιμη συνάρτηση καθώς η pair είναι υπολογίσιμη συνάρτηση (δες Πρόταση 1.2.36, για να είμαστε τυπικοί, σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει η TM του Σχήματος 1.2.14 να «δοκιμάζει» ζευγάρια και όχι μεμονωμένες λέξεις).



Σχήμα 8.5.3: *Η ΤΜ M_x του Παραδείγματος 8.5.8. Να τονίσουμε ότι μέσα στην καθολική ΤΜ ο έλεγχος για την ύπαρξη του z γίνεται χωρίς κάποια επιπλέον φροντίδα. Δοκιμάζουμε όλα τα $z \in \{0,1\}^*$ ακολουθώντας όποια σειρά μας αρέσει.*

Έστω επίσης ότι η ΤΜ M_R αποφασίζει την L_R. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $\phi(x) = \langle M_x \rangle$ όπου M_x η ΤΜ του Σχήματος 8.5.3. Παρατηρούμε ότι:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. - $x \in L \Rightarrow \exists y_0\ \forall z\ (M_R(x,y_0,z)\downarrow_{q_{ναι}}) \Rightarrow$ Αν $w \ge y_0$ τότε $M_x(w)\uparrow$ καθώς $M_R(x,y_0,z)\downarrow_{q_{ναι}}$ για κάθε $z \Rightarrow L(M_x) \subseteq \{w \in \{0,1\}^* \mid w < y_0\} \Rightarrow |L(M_x)| \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle M_x \rangle \in L_{\mathbb{N}}$
   - $x \notin L \Rightarrow \forall y\ \exists z\ (M_R(x,y,z)\downarrow_{q_{όχι}}) \Rightarrow \forall w\ (\forall y \le w\ \exists z\ (M_R(x,y,z)\downarrow_{q_{όχι}})) \Rightarrow \forall w\ (M_x(w)\downarrow_{q_{ναι}}) \Rightarrow L(M_x) = \mathbb{N} \Rightarrow |L(M_x)| = \aleph_0 \Rightarrow \langle M_x \rangle \notin L_{\mathbb{N}}$

Ορισμός 8.5.9. [1] Για κάθε $n \ge 1$ ορίζουμε τη γλώσσα:

$$T_n = \{\langle \varphi \rangle \in \{0,1\}^* \mid \varphi = \exists y_1\ \forall y_2 \cdots * y_n\ \psi(y_1,\dots,y_n) \text{ και } \mathfrak{N} \vDash \varphi\}$$

όπου ψ πρόταση της $\Gamma_1^{\text{θα}}$, $* = \begin{cases} \exists & \text{, αν το } n \text{ είναι περιττό} \\ \forall & \text{, αλλιώς} \end{cases}$ και $\langle \varphi \rangle$ είναι η λέξη του $\{0,1\}^*$ που αντιστοιχούμε στον φυσικό αριθμό που κωδικοποιεί την πρόταση φ σύμφωνα με την Παράγραφο Α.5.1.

Θεώρημα 8.5.10. Για κάθε $n \ge 1$ η T_n είναι Σ_n^0-δύσκολη γλώσσα ως προς τη $\le_m$.

Απόδειξη. Έστω γλώσσα $L \in \Sigma_n^0$, δηλαδή υπάρχει αποφάνσιμο $(n+1)$-μελές κατηγόρημα R τέτοιο ώστε $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \exists y_1 \forall y_2 \cdots * y_n\ R(x,y_1,\dots,y_n)\}$ όπου $* = \begin{cases} \exists & \text{, αν το } n \text{ είναι περιττό} \\ \forall & \text{, αλλιώς} \end{cases}$.

Αφού το R είναι αποφάνσιμο από το Θεώρημα Α.5.11 έπεται ότι είναι αναπαραστάσιμο στο P έστω από τον τύπο $\varphi_R(x,y_1,\dots,y_n)$. Θεωρούμε συνάρτηση $\phi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* v$ με $\phi(x) = \langle \varphi_x \rangle$ όπου:

$$\varphi_x = \exists y_1\ \forall y_2 \cdots * y_n\ \varphi_R(\underline{x}, y_1,\dots,y_n)$$

και παρατηρούμε ότι:

1. ϕ πλήρης και υπολογίσιμη.
2. $x \in L \Leftrightarrow \exists y_1\ \forall y_2 \cdots * y_n\ R(x,y_1,\dots,y_n) \Leftrightarrow$ [2] $\mathfrak{N} \vDash \exists y_1\ \forall y_2 \cdots * y_n\ \varphi_R(\underline{x},y_1,\dots,y_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \vDash \varphi_x \Leftrightarrow \langle \varphi_x \rangle \in T_n$

[1] Δες Ορισμούς Α.2.5, Α.5.1 και Α.5.2

[2] Λόγω του ότι ο $\varphi_R(x,y_1,\dots,y_n)$ αναπαριστά το R στο P προκύπτει ότι:

Συνεπώς $L \leq_m T_n$. □

Ορισμός 8.5.11. Ορίζουμε τη γλώσσα:

$$Truth = \{\langle\varphi\rangle \in \{0,1\}^* \mid \varphi \text{ πρόταση και } \mathfrak{N} \models \varphi\}$$

Θεώρημα 8.5.12 (Θεώρημα Tarski). Η γλώσσα $Truth$ δεν ανήκει στην Αριθμητική Ιεραρχία.

Απόδειξη. Έστω (προς άτοπο) ότι η $Truth$ ανήκει στην Αριθμητική Ιεραρχία, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $Truth \in \Sigma_n^0$. Παρατηρούμε ότι $T_{n+1} \leq_m Truth$ [1]. Από το Θεώρημα 8.5.10 η T_{n+1} είναι Σ_{n+1}^0-δύσκολη ως προ τη $\leq_m$, άρα έπεται ότι $HP_{n+1} \leq_m T_{n+1}$. Από τη μεταβατικότητα της $\leq_m$ έπεται ότι $HP_{n+1} \leq_m Truth$. Τέλος, από την Πρόταση 8.3.3 προκύπτει ότι $HP_{n+1} \leq_T Truth$, δηλαδή ότι $HP_{n+1} \in \mathsf{REC}^{Truth} \subseteq \mathsf{REC}^{\Sigma_n^0} = \Delta_{n+1}^0$. Όμως, από την Παρατήρηση 8.2.9, γνωρίζουμε ότι $\Delta_{n+1}^0 \subseteq \mathsf{REC}^{HP_n}$, οπότε $HP_{n+1} \in \mathsf{REC}^{HP_n}$ πράγμα που φυσικά αντιβάινει στο Λήμμα 8.2.6. □

Το παραπάνω θεώρημα μας αποδεικνύει ότι υπάρχουν γλώσσες που δεν ανήκουν σε καμία κλάση της αριθμητικής ιεραρχίας. Μία επέκταση της Αριθμητικής Ιεραρχίας είναι η *Αναλυτική Ιεραρχία* η οποία ορίζεται πάνω σε λογικούς τύπους της *δευτεροβάδμιας λογικής*.

Ασκήσεις

8.1 (★☆☆). Δείξτε ότι η συνάρτηση K της Άσκησης 7.5 είναι υπολογίσιμη χρησιμοποιώντας μαντείο για τη γλώσσα $L_{\text{Αποδοχής}}$.

8.2 (☆☆☆). Δείξτε ότι μια γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ είναι αναδρομική (αναδρομικά απαριθμήσιμη) ανν για κάθε γλώσσα $L' \subseteq \{0,1\}^*$ υπάρχει OTM $M^{L'}$ που αποφασίζει (ημι-αποφασίζει αντίστοιχα) την L.

8.3 (★☆☆). Έστω γλώσσες $A, B, C \subseteq \{0,1\}^*$. Ισχύει ότι αν $A \in \mathsf{RE}^B$ και $B \in \mathsf{RE}^C$ τότε $A \in \mathsf{RE}^C$;

8.4 (★★★). Δείξτε ότι υπάρχουν δύο γλώσσες $A, B \in \{0,1\}^*$ τέτοιες ώστε $A \nleq_T B$ και $B \nleq_T A$.

8.5 (★★☆). Αποδείτε το Θεώρημα 8.4.5.

8.6 (★☆☆). Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$:

- Η HP_n δεν είναι Π_n^0-δύσκολη ως προς την $\leq_m$.
- Η $\overline{HP}_n$ δεν είναι Σ_n^0-δύσκολη ως προς την $\leq_m$.

Υπάρχει y_1, για κάθε y_2, ⋯, υπάρχει (ή για κάθε) y_n ισχύει ότι $P \vdash \varphi_R(\underline{x}, \underline{y_1}, \ldots, \underline{y_n})$.

Από το Θεώρημα Εγκυρότητας (λόγω και του ότι $\mathfrak{N} \models P$) έπεται ότι:

Υπάρχει y_1, για κάθε y_2, ⋯, υπάρχει (ή για κάθε) y_n ισχύει ότι $\mathfrak{N} \models \varphi_R(\underline{x}, \underline{y_1}, \ldots, \underline{y_n})$.

Οπότε από τον Ορ. Tarski έχουμε $\mathfrak{N} \models \exists y_1\ \forall y_2 \cdots * y_n\ \varphi_R(\underline{x}, y_1, \ldots, y_n)$.

[1] Η αναγωγή είναι η ταυτοτική συνάρτηση για τις προτάσεις φ που έχουν τη μορφή $\exists y_1\ \forall y_2 \cdots * y_{n+1}\ \psi(y_1, \ldots, y_{n+1})$ και για τις υπόλοιπες λέξεις είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή $\langle x \wedge \neg x\rangle$.

- Η HP_n δεν είναι Δ^0_{n+1}-δύσκολη ως προς την $\leq_m$.

8.7 (★☆☆). Κατατάξτε τη γλώσσα $L = \{\langle M\rangle \in \{0,1\} \mid$ Δεν υπάρχει λέξη w που ξεκινάει με 001 τέτοια ώστε $w \in L(M)\}$ στην Αριθμητική Ιεραρχία.

8.8 (★★☆). Έστω A $\leq_m$-πλήρης γλώσσα για το Σ^0_n. Δείξτε ότι η γλώσσα $L^A_{\mathbb{N}} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid |L(M^A)| \in \mathbb{N}\}$ είναι $\leq_m$-πλήρηςγια το Σ^0_{n+2}.

8.9 (★★☆). Κατατάξτε τη γλώσσα $L_{\equiv} = \{\langle M_1, M_2\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M_1) = L(M_2)\}$ στην Αριθμητική Ιεραρχία.

8.10 (★★☆). Κατατάξτε τη γλώσσα $L = \{\langle M_1, M_2\rangle \in \{0,1\}^* \mid \epsilon \in L(M_1) \smallsetminus (M_2)\}$ στην Αριθμητική Ιεραρχία.

8.11 (★★☆). Δείξτε ότι η γλώσσα $L_{\varnothing} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M) = \varnothing\}$ είναι $\leq_m$-πλήρης για το Π^0_1.

8.12 (★★★). Δείξτε ότι η γλώσσα $L_{\text{Συνπεπερασμενότητα}} = \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* \mid |\overline{L(M)}| \in \mathbb{N}\}$ είναι $\leq_m$-πλήρης για το Σ^0_3.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΛΟΓΙΚΗ

A.1 Βασικές έννοιες

Ορισμός A.1.1. Μία *πρωτοβάθμια γλώσσα* Γ_1 αποτελείται από:

1. Ένα άπειρο σύνολο *μεταβλητών* $M(\Gamma_1) = \{x_0, x_1, \ldots\}$.
2. Τους *λογικούς συνδέσμους* $\neg, \rightarrow$ (οι σύνδεσμοι $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ εισάγονται ως συντομεύσεις).
3. Τις παρενθέσεις $(,)$.
4. Το *σύμβολο της ισότητας* $\approx$.
5. Τον *καθολικό ποσοδείκτη* $\forall$ (ο υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$ εισάγεται ως συντόμευση).
6. Για κάθε φυσικό $n \geq 0$ ένα σύνολο (ενδεχομένως κενό) $\{P_i \mid i \in I\}$ από *n-μελή κατηγορηματικά σύμβολα*.
7. Για κάθε φυσικό $n \geq 0$ ένα σύνολο (ενδεχομένως κενό) $\{f_i \mid i \in I\}$ από *n-θέσια συναρτησιακά σύμβολα*. Τα 0-θέσια συναρτησιακά σύμβολα καλούνται *σταθερές*.

Σημείωση A.1.2. Τα σύμβολα των κατηγοριών 2.–5. καλούνται *λογικά σύμβολα* και είναι ίδια για κάθε πρωτοβάθμια γλώσσα. Τα σύνολα των κατηγοριών 6.–7. περιέχουν τα *μη-λογικά σύμβολα* μίας γλώσσας και αλλάζουν από γλώσσα σε γλώσσα. Τα σύμβολα αυτά –σε αντίθεση με τα λογικά σύμβολα– μπορούν να «ερμηνευτούν» στη μεταγλώσσα με πολλούς τρόπους [1].

Ορισμός A.1.3. Μία λέξη του Γ_1^* είναι *όρος της* Γ_1 ανν:

1. είναι μεταβλητή,
2. είναι σταθερά,
3. είναι της μορφής $ft_1, \ldots, t_n$, όπου $t_1, \ldots, t_n$ όροι και f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο της Γ_1 [2].

[1] Οι πρωτοβάθμιες γλώσσες της λογικής δεν θα πρέπει να συγχέονται με τις γλώσσες που ορίσαμε στην Παράγραφο 0.2, καθώς εκεί είχαμε πεπερασμένο αλφάβητο ενώ εδώ έχουμε ένα αριθμησίμως άπειρο σύνολο συμβόλων.

[2] Αντί για $ft_1, \ldots, t_n$ από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $f(t_1, \ldots, t_n)$.

Το σύνολο των όρων της $\varGamma_1$ το συμβολίζουμε ως $O(\varGamma_1)$.

Ορισμός Α.1.4. Μία λέξη του $\varGamma_1^*$ είναι *τύπος της* $\varGamma_1$ ανν:

1. είναι της μορφής $\approx t_1 t_2$, όπου $t_1, t_2 \in O(\varGamma_1)$ [1],
2. είναι της μορφής $Rt_1, \ldots, t_n$ όπου $t_1, \ldots, t_n \in O(\varGamma_1)$ και R n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο της $\varGamma_1$ [2],
3. είναι της μορφής $(\neg\varphi), (\varphi \to \psi), (\forall x \varphi)$ όπου φ, ψ τύποι της $\varGamma_1$ και x μεταβλητή της $\varGamma_1$.

Το σύνολο των τύπων της $\varGamma_1$ το συμβολίζουμε ως $T(\varGamma_1)$. Οι τύποι της μορφής 1. και 2. ονομάζονται *ατομικοί τύποι*.

Σύμβαση Α.1.5. Θα γράφουμε $(\exists x\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$ και $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ αντί για $(\neg(\forall x(\neg\varphi))), (\neg(\varphi \to (\neg\psi))), ((\neg\varphi) \to \psi)$ και $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$. Επίσης θα παραλείπουμε όσες παρενθέσεις δεν είναι απαραίτητες για τη μοναδική αναγνωσιμότητα ενός τύπου (όπως είναι για παράδειγμα οι εξωτερικές παρενθέσεις).

Ορισμός Α.1.6. Έστω $\varphi \in T(\varGamma_1)$ και μεταβλητή x. Η x *εμφανίζεται ελεύθερη στον* φ ανν:

1. Ο φ είναι ατομικός (και φυσικά) η x εμφανίζεται στον φ.
2. Ο φ είναι της μορφής $(\neg\psi)$ και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ.
3. Ο φ είναι της μορφής $(\chi \to \psi)$ και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον χ ή στον ψ.
4. Ο φ είναι της μορφής $(\forall y\psi)$ και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ (όπου $y \neq x$).

Μία εμφάνιση μεταβλητής που δεν είναι ελεύθερη θα ονομάζεται *δεσμευμένη*. Αν στον τύπο φ όλες οι εμφανίσεις μεταβλητών είναι δεσμευμένες τότε ο φ καλείται *πρόταση της* $\varGamma_1$.

Συμβολισμός Α.1.7. Θα γράφουμε $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ για να δηλώνουμε το γεγονός ότι οι μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ (και μόνο αυτές) εμφανίζονται ελεύθερες στον φ.

Α.2 Σημασιολογία

Ορισμός Α.2.1. Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα $\varGamma_1$. *Δομή (ή ερμηνεία)* $\mathfrak{A}$ για τη $\varGamma_1$ είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από:

1. Ένα μη κενό σύνολο A (το *σύμπαν* της δομής, συνήθως το συμβολίζουμε $|\mathfrak{A}|$).
2. Για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P μία n-μελή σχέση $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.
3. Για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο μία συνάρτηση $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$.
4. Για κάθε σύμβολο σταθεράς c μία τιμή $c^{\mathfrak{A}} \in A$.

Παρατήρηση Α.2.2. Είθισται όταν ορίζουμε μία πρωτοβάθμια γλώσσα να έχουμε στο μυαλό μας μία ερμηνεία για τα μη-λογικά σύμβολά της. Αυτήν την ερμηνεία συνήθως την αποκαλούμε *προτιθέμενη* (δες Ορισμό Α.5.2 για ένα παράδειγμα).

[1] Αντί για $\approx t_1 t_2$ από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $t_1 \approx t_2$.

[2] Αντί για $Rt_1, \ldots, t_n$ από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $R(t_1, \ldots, t_n)$.

Ορισμός Α.2.3. Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα $\varGamma_1$ και δομή $\mathfrak{A}$. *Αποτίμηση* είναι μία συνάρτηση $v : M(\varGamma_1) \to |\mathfrak{A}|$. Επεκτείνουμε την αποτίμηση v σε μία συνάρτηση $\bar{v} : O(\varGamma_1) \to |\mathfrak{A}|$ έτσι ώστε:

1. $\bar{v}(c) = c^{\mathfrak{A}}$, όπου c σταθερά της $\varGamma_1$.

2. $\bar{v}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{v}(t_1), \ldots, \bar{v}(t_n))$, όπου f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο της $\varGamma_1$ και $t_1, \ldots, t_n \in O(\varGamma_1)$.

Ορισμός Α.2.4. Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα $\varGamma_1$, δομή $\mathfrak{A}$, αποτίμηση v και μεταβλητή x. Ορίζουμε την αποτίμηση $v(x/a)$, όπου $a \in |\mathfrak{A}|$, ως εξής:

$$v(x/a)(y) = \begin{cases} a & \text{, αν } y = x \\ v(y) & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

Ορισμός Α.2.5 (Ορισμός αλήθειας Tarski)**.** Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα $\varGamma_1$, δομή $\mathfrak{A}$, αποτίμηση v και $\varphi \in T(\varGamma_1)$. Θα λέμε ότι *η ερμηνεία* $\mathfrak{A}$ *ικανοποιεί τον τύπο* φ *για την αποτίμηση* v, συμβολισμός $\mathfrak{A} \vDash \varphi[v]$, ανν:

1. Ο φ είναι της μορφής $t_1 \approx t_2$, όπου $t_1, t_2 \in O(\varGamma_1)$, και ισχύει ότι $\bar{v}(t_1) = \bar{v}(t_2)$.

2. Ο φ είναι της μορφής $R(t_1, \ldots, t_n)$, και ισχύει ότι $(\bar{v}(t_1), \ldots, \bar{v}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$.

3. Ο φ είναι της μορφής $(\neg\chi)$, και δεν ισχύει ότι $\mathfrak{A} \vDash \chi[v]$.

4. Ο φ είναι της μορφής $(\chi \to \psi)$, και ισχύει ότι αν $\mathfrak{A} \vDash \chi[v]$ τότε $\mathfrak{A} \vDash \psi[v]$.

5. Ο φ είναι της μορφής $(\forall x \chi)$, και ισχύει ότι για κάθε $a \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \vDash \chi[v(x/a)]$.

Ορισμός Α.2.6. Έστω $\varphi \in T(\varGamma_1)$ και $T \subseteq T(\varGamma_1)$. Θα λέμε ότι:

1. Ο τύπος φ είναι *ικανοποιήσιμος* ανν υπάρχει δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση v τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \vDash \varphi[v]$. Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε ότι *οι* $\mathfrak{A}, v$ *ικανοποιούν τον* φ [1].

2. *Η δομή* $\mathfrak{A}$ *και η αποτίμηση* v *ικανοποιούν το* T ανν ικανοποιούν κάθε στοιχείο του T.

3. Το T είναι *ικανοποιήσιμο* αν και μόνον αν υπάρχουν δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση v που το ικανοποιούν.

4. Το T *συνεπάγεται λογικά* τον φ, συμβολισμός $T \vDash \varphi$, ανν κάθε δομή και αποτίμηση που ικανοποιούν το T ικανοποιούν και το φ.

Συμβολισμός Α.2.7. Καθώς μία πρόταση φ ικανοποιείται σε μία δομή $\mathfrak{A}$ ανεξάρτητα από την αποτίμηση (όλες οι μεταβλητές εμφανίζονται δεσμευμένες στη φ) θα γράφουμε $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ και θα λέμε ότι η $\mathfrak{A}$ είναι *μοντέλο* της φ. Επίσης αν ο τύπος $\forall x \chi$ είναι πρόταση, εφαρμόζοντας τον Ορισμό του Tarski θα γράφουμε $\mathfrak{A} \vDash \forall x \chi$ ανν για κάθε $a \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \vDash \chi(x/a)$. Τέλος, αντί για $\neg(t_1 \approx t_2)$, όπου $t_1,\ t_2$ όροι, θα γράφουμε $t_1 \not\approx t_2$.

[1] Αν ο φ είναι πρόταση η ικανοποιησιμότητά του είναι ανεξάρτητη από την εκάστοτε αποτίμηση, καθώς δεν εμφανίζονται σε αυτόν ελεύθερες μεταβλητές.

Α.3 Τυπικές αποδείξεις

Ορισμός Α.3.1. Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1. Ένα *αξιωματικό σύστημα* $\mathcal{A}$ για την Γ_1 αποτελείται από

1. ένα σύνολο *αξιωμάτων* $A \subseteq T(\Gamma_1)$ και
2. ένα σύνολο *αποδεικτικών κανόνων* K,

όπου *αποδεικτικός κανόνας* $\kappa \in K$ είναι μια διμελής σχέση $\kappa \in 2^{T(\Gamma_1)} \times T(\Gamma_1)$. Αν $(B, \varphi) \in \kappa$, τότε λέμε ότι *ο* φ *είναι άμεσο συμπέρασμα της εφαρμογής του* κ *στα στοιχεία του* B. Το A χωρίζεται σε δύο ξένα σύνολα Λ και M (δηλαδή $A = \Lambda \cup M$), όπου Λ είναι το σύνολο των *λογικών αξιωμάτων* (το ίδιο για κάθε γλώσσα) και M το σύνολο των *μη-λογικών αξιωμάτων* (διαφέρει για κάθε γλώσσα).

Ορισμός Α.3.2. Έστω $\mathcal{A} = (A, K)$ ένα αξιωματικό σύστημα, $T \subseteq T(\Gamma_1)$, και φ τύπος. Θα λέμε ότι *ο* φ *αποδεικνύεται* από τα στοιχεία του T (το *σύνολο υποθέσεων*) στο $\mathcal{A}$, συμβολισμός $T \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$, αν υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία τύπων $\tau_1, \ldots, \tau_n$, όπου $\tau_n = \varphi$, και για κάθε τ_i ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

1. $\tau_i \in A \cup T$, είναι δηλαδή αξίωμα ή *υπόθεση*, ή
2. το τ_i είναι άμεσο συμπέρασμα της εφαρμογής κανόνα $\kappa \in K$ σε ένα σύνολο $S \subseteq \{\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}\}$.

Συμβολισμός Α.3.3. Έστω x μεταβλητή, t όρος, και φ τύπος της Γ_1. Συμβολίζουμε με φ_t^x τον τύπο που προκύπτει από τον φ, με αντικατάσταση όλων των ελεύθερων εμφανίσεων της x από τον όρο t.

Ορισμός Α.3.4. Η μεταβλητή x καλείται *αντικαταστάσιμη* από τον όρο t στον τύπο φ, αν με την αντικατάσταση των ελεύθερων εμφανίσεων της x από τον t στον φ, δεν δεσμεύονται μεταβλητές του t.

Ορισμός Α.3.5. Γενίκευση ενός τύπου φ καλείτε οποιοσδήποτε τύπος της μορφής $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$, όπου x_i μεταβλητές για $n \geq 0$.

Ορισμός Α.3.6. Το αξιωματικό σύστημα $\mathcal{A}_1 = (A_1, K_1)$ για την πρωτοβάθμια λογική, έχει ως λογικά αξιώματα όλες τις γενικεύσεις των ακόλουθων *αξιωματικών σχημάτων* [1]:

ΑΣ1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

ΑΣ2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

ΑΣ3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

ΑΣ4 $\forall x \varphi \to \varphi_t^x$, με την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον φ

ΑΣ5 $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$

ΑΣ6 $\varphi \to \forall x \varphi$, με την προϋπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ

ΑΣ7 $x \approx x$

ΑΣ8 $x \approx y \to (\varphi \to \varphi^*)$, όπου φ ατομικός τύπος, και φ^* ο (ατομικός) τύπος που προκύπτει από τον φ αντικαθιστώντας μερικές (ή και όλες) τις εμφανίσεις της x από τη y

και K_1 που περιέχει μόνον έναν κανόνα, τον *Modus Ponens (M.P.)*:

[1] Περιέχει δηλαδή όλους τους τύπους που μπορούν να προκύψουν αν αντικαταστήσουμε τις συντακτικές μεταβλητές (φ, ψ, χ, t, x και y) σε αυτά τα «σχήματα» με οποιουσδήποτε τύπους της γλώσσας που εξετάζουμε.

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \text{ M.P.}$$

Σύμβαση Α.3.7. Αντί για $T \vdash_{A_1} \varphi$ θα γράφουμε $T \vdash \varphi$ και αντί για $\varnothing \vdash \varphi$ θα γράφουμε $\vdash \varphi$. Παρατηρήστε επίσης ότι μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο των μη λογικών αξιωμάτων ως υποθέσεις.

Ορισμός Α.3.8. Έστω T σύνολο μη-λογικών αξιωμάτων για μία πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1. Το T είναι *συνεπές* ανν δεν υπάρχει $\varphi \in T(\Gamma_1)$ τέτοιος ώστε $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg\varphi$.

Α.4 Τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας

Θεώρημα Α.4.1 (Θεώρημα Εγκυρότητας). Για κάθε σύνολο τύπων T και τύπο φ μίας πρωτοβάθμιας γλώσσας ισχύει ότι αν $T \vdash \varphi$ τότε $T \vDash \varphi$.

Θεώρημα Α.4.2 (Θεώρημα Πληρότητας). Για κάθε σύνολο τύπων T και τύπο φ μίας πρωτοβάθμιας γλώσσας ισχύει ότι αν $T \vDash \varphi$ τότε $T \vdash \varphi$.

Ο μη εξοικειωμένος με τη λογική αναγνώστης θα βρίσκεται σίγουρα σε σύγχυση από το γεγονός πως έχουμε ένα Θεώρημα Πληρότητας και ένα Θεώρημα Μη-πληρότητας. Το Θεώρημα Μη-πληρότητας αφορά όμως δύο «διαφορετικές» (και ισοδύναμες μεταξύ τους) έννοιες πληρότητας από αυτήν του Θεωρήματος Α.4.2: την *τυπική πληρότητα* ενός συνόλου αξιωμάτων (ή υποθέσεων) και την *πληρότητα ως προς μοντέλο* του συνόλου αξιωμάτων.

Ορισμός Α.4.3. Έστω A σύνολο με λογικών αξιωμάτων για τη Γ_1 και $\mathfrak{A}$ μοντέλο του A.

1. Το A είναι *τυπικά πλήρες* ανν για κάθε πρόταση φ της Γ_1 ισχύει ότι $A \vdash \varphi$ ή $A \nvdash \varphi$.
2. Το A είναι *πλήρες ως προς το* $\mathfrak{A}$ ανν για κάθε πρόταση φ της Γ_1, αν ισχύει ότι $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ τότε $A \vdash \varphi$.

Ο παραπάνω Ορισμός (το 2.) ίσως προσθέτει ακόμα μεγαλύτερη σύγχυση, καθώς από το Θεώρημα Α.4.2 προκύπτει ότι (αφού $\mathfrak{A} \vDash A$) αν $A \vDash \varphi$ (οπότε και $\mathfrak{A} \vDash \varphi$) θα έχουμε ότι $A \vdash \varphi$. Το Θεώρημα Α.4.1 όμως για να ισχύσει απαιτεί κάτι πολύ πιο ειδικό από την προϋπόθεση (του 2. του) του Ορισμού Α.4.3: Απαιτεί από όλα τα μοντέλα του A να ικανοποιούν τον φ και όχι μόνο το $\mathfrak{A}$. Τέλος, η πληρότητα ως προς μοντέλο προϋποθέτει την ύπαρξη ενός μοντέλου για το A, δηλαδή ότι το A είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει αν το A δεν είναι συνεπές (γιατί;) [1].

Α.5 Αριθμητική Peano

Ορισμός Α.5.1. Η γλώσσα της *Θεωρίας Αριθμών*, συμβολισμός $\Gamma_1^{\text{θα}}$, αποτελείται από τη σταθερά $\mathbf{0}$, το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο $\prime$, και τα διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $\oplus$ και $\odot$.

Ορισμός Α.5.2. Η *κύρια (ή προτιθέμενη) ερμηνεία* για τη $\Gamma_1^{\text{θα}}$ είναι η $\mathfrak{N}$ όπου:

- $|\mathfrak{N}| = \mathbb{N}$ (σύμπαν είναι οι φυσικοί αριθμοί),
- $\prime^{\mathfrak{N}} = \mathsf{S}$ (η συνάρτηση του επόμενου),
- $\oplus^{\mathfrak{N}} = +$ (η συνάρτηση της πρόσθεσης),

[1] Αν το A δεν είναι συνεπές είναι όμως τετριμμένα τυπικά πλήρες. Αυτό ισχύει επειδή αν μπορούμε να αποδείξουμε έναν τύπο και την άρνηση του μπορούμε να αποδείξουμε οποιονδήποτε τύπο καθώς $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

- $\odot^{\mathfrak{N}} = \cdot$ (η συνάρτηση του πολλαπλασιασμού),

- $\mathbf{0}^{\mathfrak{N}} = 0$ (το μηδέν).

Ορισμός A.5.3. Το σύνολο P των (μη-λογικών) αξιωμάτων της *αριθμητικής Peano* για τη $\Gamma_1^{\text{δα}}$ είναι το εξής:

P1 $\forall x_1 (x_1{\prime} \not\approx \mathbf{0})$

P2 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1{\prime} = x_2{\prime} \to x_1 = x_2)$

P3 $\forall x_1 (x_1 \oplus \mathbf{0} = x_1)$

P4 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \oplus x_2{\prime} = (x_1 \oplus x_2){\prime})$

P5 $\forall x_1 (x_1 \odot \mathbf{0} = \mathbf{0})$

P6 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \oplus x_2{\prime} = x_1 \odot x_2 \oplus x_2)$

P7 $\forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi(x_1, \ldots, x_n, \mathbf{0}) \wedge \forall x_0 (\varphi(x_1, \ldots, x_n, x_0) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n, x_0{\prime})) \to \forall x_0 \varphi(x_1, \ldots, x_n, x_0))$

Συμβολισμός A.5.4. Συμβολίζουμε με $\underline{n}$ τον όρο που αντιστοιχεί στο *ψηφίο* του αριθμού $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\underline{n} = \mathbf{0} \underbrace{{\prime}{\prime}\cdots{\prime}}_{n\text{-φορές}}$$

Ορισμός A.5.5. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1^{\text{δα}})$ και $R \subseteq \mathbb{N}^n$, όπου $n \geq 1$. Η σχέση R είναι *αναπαραστάσιμη στο* T ανν υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ τέτοιος ώστε για κάθε $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι:

1. αν $(m_1, \ldots, m_n) \in R$ τότε $T \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$
2. αν $(m_1, \ldots, m_n) \notin R$ τότε $T \vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$

Αντίστοιχα, μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ είναι *αναπαραστάσιμη στο* T ανν υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ τέτοιος ώστε για κάθε $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι:

1. αν $f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$ τότε $T \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$
2. αν $f(m_1, \ldots, m_n) \neq m_{n+1}$ τότε $T \vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$

Θεώρημα A.5.6. Κάθε ελαχιστικά αναδρομική συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη στο P .

Το παραπάνω Θεώρημα μας δίνει το δικαίωμα να περάσουμε από τον κόσμο των αριθμητικών συναρτήσεων στους τύπους της $\Gamma_1^{\text{δα}}$. Ισχύει και το αντίστροφό του, με την προϋπόθεση όμως ότι το P είναι συνεπές.

A.5.1 Αριθμητικοποίηση

Σημείωση A.5.7. Έχει επικρατήσει η διαδικασία που αντιστοιχεί φυσικούς αριθμούς σε «οντότητες», όπως είναι οι ακολουθίες φυσικών αριθμών ή οι λογικοί τύποι, να αποκαλείται *αριθμητικοποίηση.* Ένα Παράδειγμα είδαμε στο Κεφάλαιο 2, άλλο ένα θα δούμε εδώ.

Αριθμητικοποίηση των τύπων της $\Gamma_1^{\text{δα}}$

Αντιστοιχούμε σε κάθε σύμβολο της $\Gamma_1^{\text{δα}}$ έναν φυσικό αριθμό ως εξής:

$$
\begin{array}{r|r}
\langle x_i \rangle_{\mathbb{N}} = 3^{i+1},\ i = 0, 1, \dots & \langle \approx \rangle_{\mathbb{N}} = 19 \\
\langle \neg \rangle_{\mathbb{N}} = 5 & \langle \prime \rangle_{\mathbb{N}} = 23 \\
\langle \rightarrow \rangle_{\mathbb{N}} = 7 & \langle \oplus \rangle_{\mathbb{N}} = 27 \\
\langle \forall \rangle_{\mathbb{N}} = 11 & \langle \odot \rangle_{\mathbb{N}} = 29 \\
\langle (\rangle_{\mathbb{N}} = 13 & \langle \mathbf{0} \rangle_{\mathbb{N}} = 31 \\
\langle) \rangle_{\mathbb{N}} = 17 &
\end{array}
$$

Έστω $\varphi = a_1 \cdots a_n \in T(\Gamma_1^{\text{δα}})$, όπου $a_1, \dots, a_n \in \{\neg, \rightarrow, \forall, (,), \approx, \prime, \oplus, \odot, \mathbf{0}\} \cup M(\Gamma_1^{\text{δα}})$, αντιστοιχούμε στον φ τον αριθμό:

$$\langle \varphi \rangle_{\mathbb{N}} = \mathsf{enc}_n(\langle a_1 \rangle_{\mathbb{N}}, \dots, \langle a_n \rangle_{\mathbb{N}})$$

όπου enc_n η συνάρτηση του Ορισμού 2.3.1. Ο αριθμός $\langle \varphi \rangle_{\mathbb{N}}$ καλείται *αριθμός Gödel* του φ.

Έστω $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ πεπερασμένη ακολουθία τύπων της $\Gamma_1^{\text{δα}}$. Αντιστοιχούμε την ακολουθία αυτή στον αριθμό:

$$\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle_{\mathbb{N}} = \mathsf{enc}_n(\langle \varphi_1 \rangle_{\mathbb{N}}, \dots, \langle \varphi_n \rangle_{\mathbb{N}})$$

Παρατηρήστε ότι κατά αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τυπικές αποδείξεις από το P σε φυσικούς αριθμούς.

Παρατήρηση A.5.8. Υπάρχει TM $M_{\mu \to \varphi}$ που δέχεται σαν είσοδο την κωδικοποίηση μίας ελαχιστικά αναδρομικής συνάρτησης f και επιστρέφει τον αριθμό Gödel του τύπου φ που την αναπαριστά.

Για να κατασκευάσουμε την TM $M_{\mu \to \varphi}$ πρέπει πρώτα να περάσουμε μέσα από τις λεπτομέρειες της απόδειξης του Θεωρήματος A.5.6, θέμα που ξεφεύγει των σκοπών αυτών των σημειώσεων.

Πρόταση A.5.9. Η σχέση $\mathsf{Proof} \subseteq \mathbb{N}^2$ με $(x, y) \in \mathsf{Proof}$ ανν

> *"Ο y είναι αριθμός που αντιστοιχεί σε τυπική απόδειξη από το P της οποίας ο τελευταίος τύπος είναι ο τύπος με αριθμό Gödel x."*

είναι ελαχιστικά αναδρομική.

Σημείωση A.5.10. Για να αποδείξουμε ότι η Proof είναι ελαχιστικά αναδρομική σχέση πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι 16 ακόμα συναρτήσεις και σχέσεις [1] είναι ελαχιστικά αναδρομικές

Θεώρημα A.5.11. Κάθε n-μελές αποφάνσιμο κατηγόρημα R είναι αναπαραστάσιμο στο P από έναν τύπο με n-ελεύθερες μεταβλητές.

Απόδειξη. Αφού το R είναι αποφάνσιμο κατηγόρημα έπεται ότι $L_R \in \mathsf{REC}$. Παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της L_R είναι υπολογίσιμη (δες Πρόταση 1.2.38), άρα από το Θεώρημα 2.5.1 είναι ελαχιστικά αναδρομική και από το Θεώρημα A.5.6 είναι αναπαραστάσιμη στο P, έστω από τον τύπο $\varphi_R(y_1, \dots, y_n, x)$. Ο τύπος $\varphi_R(y_1, \dots, y_n, \underline{1})$ αναπαριστά το R. $\square$

[1] Οι σχέσεις αυτές ελέγχουν παραδείγματος χάρη αν ο x είναι αριθμός Gödel τύπου της $\Gamma_1^{\text{δα}}$, αν ο x είναι αριθμός Gödel αξιώματος, αν ο x είναι αριθμός που αντιστοιχεί σε τυπική απόδειξη κλπ..

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν (κατά κύριο λόγο) στα μαθήματα που διδάχθηκα από τον Καθ. Δ. Μ. Θηλυκό και στα ακόλουθα:

Επιστημονικά συγγράμματα:

[1] Michael Sipser: *Εισαγωγή στην Θεωρία Υπολογισμού*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[2] Harry R. Lewis, Χρήστος Παπαδημητρίου: *Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού*, Εκδόσεις Κριτική.

[3] John E. Hopcroft, Jefrey D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (1st edition)*, Addison-Wesley.

[4] Dexter C. Kozen: *Automata and Computability*, Springer.

[5] Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης: *Αναδρομή και Υπολογισιμότητα.*

[6] Αθανάσιος Τζουβάρας: *Θεωρία Αναδρομικών Συναρτήσεων και Υπολογισιμότητας.*

[7] Thomas Sudkamp: *Languages and Machines An Introduction to the Theory of Computer Science (3rd Edition)*, Pearson.

[8] Κώστας Ι. Δημητρακόπουλος: *Σημειώσεις Μαθηματικής Λογικής.*

[9] Roland Hausser: *Foundations of Computational Linguistics*, Springer.

[10] J. Roger Hindley, Jonathan P. Seldin: *Lambda-Calculus and Combinators, An Introduction*, Cambridge University Press

[11] Γεώργιος Κολέτσος:*Εφαρμογές της Λογικής στην Πληροφορική (Λάμδα-Λογισμοί)*

Λοιπά συγγράμματα:

[12] Νίκος Καζαντζάκης: *Ασκητική*, Εκδόσεις Καζαντζάκη.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΩΝ