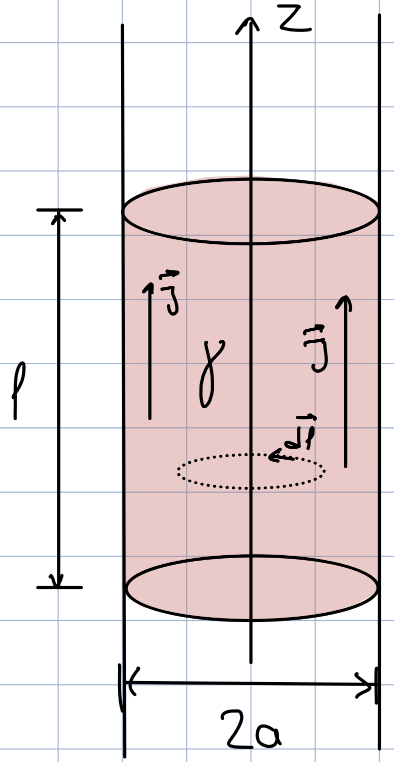
Παράδειγμα 1, σελίδα 626



Αφού είναι απείρου μήκους κύλινδρος, $\frac{\partial}{\partial z} = 0 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$

$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}}$ επιδερμικό βάθος, $f \to 0$ $\delta \to \infty$

$$I = \oint \vec{J} d\vec{S} \Rightarrow J = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$$

(το J έχει διεύθυνση $\hat{z}$
άρα $dS_z = r dr d\varphi$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} \quad , \quad \vec{E} = \hat{z} \frac{I}{\gamma \pi a^2} \quad (1)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{J} d\vec{S} = I_c$$

$$H_\varphi \cdot 2\pi r = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{I}{\pi a^2} r' dr' d\varphi \Rightarrow H_\varphi \cdot 2\pi \cancel{r} = \frac{2\cancel{\pi} I}{\cancel{\pi} a^2} \cdot \frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}$$

$$\vec{H}(r) = \frac{I \cdot r}{2\pi a^2} \hat{\varphi} \quad , \text{ για } 0 \le r \le a \quad (2)$$

άρα $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = (\hat{z} \times \hat{\varphi}) \left(\frac{I}{\gamma \pi a^2}\right)\left(\frac{I r}{2\pi a^2}\right) = -\hat{r}\left(\frac{I^2 r}{2\pi^2 \gamma a^4}\right) \quad (3)$

Εφαρμόζουμε θεώρημα poynting

είμαστε σε χρονοσταθερό

ισχύς απωλειών

$$\oint_S \vec{N} d\vec{S} + \cancel{\frac{d}{dt}} \int_V w_{em} dV = -\int_V \vec{E} \vec{J} dV \quad (4)$$

(1)-(4) $-\frac{I^2 \cancel{a}}{2\pi^{\cancel{2}} \gamma a^{\cancel{4}\,2}} \cdot 2\pi \cancel{a} \ell = -\gamma E^2 \pi a^2 \ell \overset{(1)}{=} -\cancel{\gamma} \cdot \frac{I^2}{\gamma^{\cancel{2}} \pi^{\cancel{2}} a^{\cancel{4}\,2}} \cdot \cancel{\pi} \cancel{a^2} \ell$

$$\frac{I^2 \ell}{\pi \gamma a^2} = \frac{I^2 \ell}{\gamma \pi a^2}$$

άρα αποδείξαμε το Θ. poynting
και $R = \frac{\ell}{\gamma S}$, άρα $I^2 R$ από Θ. κυμαίνεται

η ισχύς κινείται στον r, κάτι που μας ξαφνιάζει μαζί έτσι δεν πας στον z, αλλά γίνεται θερμότητα προς τον άξονα $(-\hat{r})$

Για $r>a$ $\quad \vec{E} = E_r\hat{r} + E_z\hat{z}$, ενώ $\vec{H} = H_\varphi\hat{\varphi}$, το $N = \underbrace{\hat{z}E_rH_\varphi}_{\text{στον } z} - \underbrace{\hat{r}E_zH_\varphi}_{\text{θερμότητα}}$

Διατύπωση του Θ. Poynting στην ημιτονική μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ)

$$\vec{N} = \vec{E}\times\vec{H} = Re(\dot{\vec{E}}e^{j\omega t})\times Re(\dot{\vec{H}}e^{j\omega t})$$

συμβολίζουμε ως:
$z = x + jy$, και το συζυγής
$z^* = x - jy$
$Re(z) = \frac{1}{2}(z+z^*)$

άρα $= \frac{1}{2}(\dot{\vec{E}}e^{j\omega t} + \dot{\vec{E}}^*e^{-j\omega t})\times\frac{1}{2}(\dot{\vec{H}}e^{j\omega t} + \dot{\vec{H}}^*e^{-j\omega t})$

$$= \frac{1}{4}\left[(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}})e^{j2\omega t} + (\dot{\vec{E}}^*\times\dot{\vec{H}}^*)e^{-j2\omega t}\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^* + \dot{\vec{E}}^*\times\dot{\vec{H}}\right]$$

$\vec{N} = \frac{1}{2}Re\left[(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}})e^{j2\omega t}\right] + \frac{1}{2}Re\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right]$, με τον χρονικό μέσο όρο να είναι:

$$\langle\vec{N}\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\vec{N}dt = \frac{1}{2}Re(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*)$$

αφού ο άλλος όρος έχει $e^{j2\omega t}$ το οποίο είναι περιοδικό μέγεθος

Το μιγαδικό διάνυσμα Poynting είναι το $\vec{S} = \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*$ (1) , $\langle\vec{N}\rangle = Re(\vec{S})$

Τώρα βλέπουμε το $\nabla\vec{S} = \frac{1}{2}\nabla(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*) \overset{\text{τύπος}}{=} \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{H}}^*\underbrace{(\nabla\times\dot{\vec{E}})}_{\text{Faraday}} - \dot{\vec{E}}\underbrace{(\nabla\dot{\vec{H}}^*)}_{\text{Amper-Maxwell}}\right]$

$$\nabla\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{H}}^*(-j\omega\dot{\vec{B}}) - \dot{\vec{E}}(\dot{\vec{J}}^* - j\omega\dot{\vec{D}}^*)\right]$$

$= -\frac{j\omega}{2}\left[\dot{\vec{H}}^*\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{E}}\dot{\vec{D}}^*\right] + \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\dot{\vec{J}}^*$ (2) , ξέρουμε $J = J_\pi + \underset{\sigma\vec{E}}{J_c}$ (3)

αυτό της πηγής, είναι μηδέν εκτός πηγής (σε αγωγό)

ότι

Συνεπώς έχουμε ότι από (2), (3) και $\dot{\vec{J}}_c = \gamma \dot{\vec{E}}$ (μικροσκοπικός νόμος ohm)

$$\nabla \vec{S} = -\frac{j\omega}{2}\left(\dot{\vec{H}}\dot{\vec{B}}^* - \dot{\vec{E}}\dot{\vec{D}}^*\right) - \frac{1}{2}\gamma|\dot{\vec{E}}|^2 - \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\dot{\vec{J}}_\pi^*$$

$$\boxed{\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^* = |\dot{\vec{E}}|^2}$$

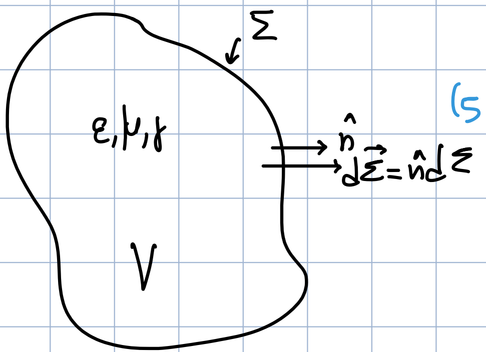
$$\nabla \vec{S} + \frac{j\omega}{2}\left(\dot{\vec{H}}\dot{\vec{B}}^* - \dot{\vec{E}}\dot{\vec{D}}^*\right) + \frac{1}{2}\gamma|\dot{\vec{E}}|^2 = -\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\dot{\vec{J}}_\pi^* \quad (4)$$

Για γραμμικά ισοτροπικά υλικά με ε, μ, γ

$$(4) \Rightarrow \nabla \vec{S} + \frac{j\omega}{2}\left(\mu|\dot{\vec{H}}|^2 - \varepsilon|\dot{\vec{E}}|^2\right) + \frac{1}{2}\gamma|\dot{\vec{E}}|^2 = -\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\dot{\vec{J}}_\pi^* \quad (5)$$

Διαφορική μορφή
Θεώρημα για την
διατήρηση μιγαδικής ισχύος

Ολοκληρωτική μορφή:



$$(5) \Rightarrow \oint_\Sigma \vec{S}\, d\vec{\Sigma} + \frac{j\omega}{2}\int_V \left(\mu|\dot{\vec{H}}|^2 - \varepsilon|\dot{\vec{E}}|^2\right) dV + \int \frac{1}{2}\gamma|\dot{\vec{E}}|^2 dV = \int -\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\dot{\vec{J}}_\pi^* dV \quad (6)$$

Η πραγματική (ενεργός) ισχύς που βγαίνει έξω από τη Σ $\Big\}\; P = Re\left[\int_V \vec{S}\, d\vec{\Sigma}\right] = Re\left(\int_V \frac{1}{2}\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* d\vec{\Sigma}\right)$

$$P_{απωλειών} = \int \frac{1}{2}\gamma|\dot{\vec{E}}|^2 dV, \quad P_{πηγών} = Re\left[\int_V -\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\dot{\vec{J}}_\pi^* dV\right] \leftarrow$$

πραγματική ισχύς των πηγών

άρα $P_\pi = P + P_a$ (7)

Άεργος Ισχύς (Q)

$$Q = \mathrm{Im}\left\{ \oint_{\Sigma} \vec{S}\, d\vec{\Sigma} \right\} = \mathrm{Im}\left\{ \frac{1}{2} \oint \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^{*}\, d\Sigma \right\}$$

$$Q_{\alpha\pi o\theta} = \frac{\omega}{2} \int_V \left[\mu |\dot{\vec{H}}|^2 - \varepsilon |\dot{\vec{E}}|^2 \right] dV \qquad Q_{\pi} = \mathrm{Im}\left\{ -\frac{1}{2} \int_V \vec{E}\, \vec{J}_{\pi}^{*}\, dV \right\}$$

άεργη μαγνητική ισχύς αποθηκευμένη στον όγκο V

άεργη ηλεκτρική ισχύς αποθηκευμένη στον όγκο V

$$Q_{\pi} = Q + Q_{\alpha\pi o\theta}$$

Για ισοτροπικά υλικά:

$$W_e = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}, \quad W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}, \quad p_a = -\vec{E} \vec{J}$$

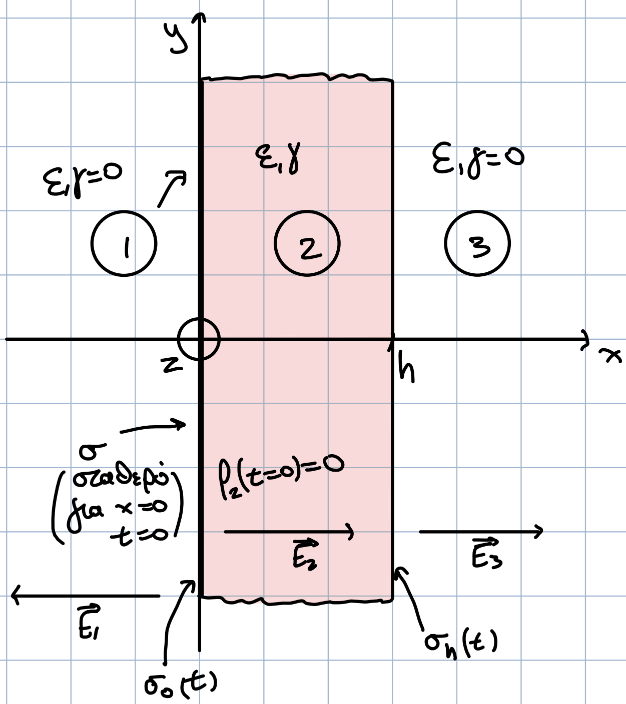
$$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left(\dot{\vec{E}}\, \dot{\vec{D}}^{*} \right) \qquad \langle W_m \rangle = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left(\vec{H} \vec{B}^{*} \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} \\ \langle \vec{N} \rangle = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H} \end{array}}$$

Για γραμμικά και ισοτροπικά υλικά:

$$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon |\vec{E}|^2, \quad \langle W_m \rangle = \frac{1}{4} \mu |\dot{\vec{H}}|^2, \quad \langle p_a \rangle = \frac{1}{2} \sigma |\dot{\vec{E}}|^2$$

Άσκηση 5.1



$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial z}$$

α) $\vec{E}, w_e = ;$

$\vec{E}_1 = -\hat{x}\frac{\sigma}{2\varepsilon}$, $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\hat{x} = \vec{E}_3$ (από γνωστό παράδειγμα του κεφαλαίου 3)

$$w_{e_1} = w_{e_2} = w_{e_3} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{\sigma^2}{8\varepsilon}$$

Βλέπουμε την Ηλεκτρική χαλάρωση relaxation (κεφ 2 σελ 221)

αγωγός $\varepsilon, \gamma =$ σταθ $\rho(\vec{r}) = 0$

$\rho = \nabla\vec{D} = \nabla(\varepsilon\vec{E}) = \nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\vec{J}\right) = \frac{\varepsilon}{\gamma}\nabla\vec{J}$, από εξ. συνέχειας

$$\rho = -\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho = 0$$

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t=0)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

όπου το τ είναι η χρονική σταθερά χαλάρωσης

άρα αν $\rho(\vec{r},t=0) = 0$ τότε $\rho(\vec{r},t) = 0$ ← αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν φορτία, αλλά ότι τα φορτία σε κάθε μονάδα όγκου έχουν πυκν. 0. Αυτό γίνεται λόγω της ειδικής τους κίνησης κατά το φαινόμενο της χαλάρωσης

Για την χρονική σταθερά χαλάρωσης:

$\tau_{χαλκού} = 0.8\times10^{-18}\,s$) όσο πιο μεγάλη η σταθερά τόσο πιο αργά κινούνται τα φορτία στον αγωγό άρα θεωρούμε ότι μένουν στην αρχική τους θέση

$\tau_{γυαλιού} = 7.5h$

$\tau_{μικα} = 10h$

Συνέχεια άσκησης 5.1

β) $\sigma_0(t), \sigma_n(t), \rho(x,t) = ;$

$\rho(x,t)=0$, αφού $\rho(x,t)=\rho(x,t=0)e^{-\frac{t}{\tau}}$, αφού $\rho(x,t=0)=0$, τότε $\rho(x,t)=0$

$\vec{D}_2(x,t\geq 0) = \frac{\sigma_0(t)}{2}\hat{x} - \frac{\sigma_n(t)}{2}\hat{x}$ (1)

για $x=0$ $\quad \hat{x}[\vec{J}_2 - \cancel{\vec{J}_1}^{\,0}] = -\cancel{\nabla\vec{K}}^{\,0} - \frac{d\sigma}{dt}$

διότι $\vec{K} = \hat{y}K_y + \hat{z}K_z$ (για να είναι επιφανειακό) και αφού $\nabla\vec{K} = \cancel{\frac{\partial K_y}{\partial y}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial K_z}{\partial z}}^{\,0} = 0$ (ανεξ. στους α ξ)

$\vec{J}_{x_2} = -\frac{d\sigma_0}{dt} \Rightarrow \gamma\vec{E}_{x_2} = -\frac{d\sigma_0}{dt}$

(3) $\frac{\gamma}{\varepsilon}\vec{D}_{x_2} = -\frac{d\sigma_0}{dt}$

$(1) \Rightarrow D_{x_2} = \frac{\sigma_0(t) - \sigma + \sigma_0(t)}{2}\hat{x} \quad (\sigma = \sigma_n + \sigma_0)$

$D_{x_2} = \left(\sigma_0(t) - \frac{\sigma}{2}\right)\hat{x}$ (2)

$(2),(3) \Rightarrow \frac{d\sigma_0}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\sigma_0(t) = \frac{\gamma}{\varepsilon}\cdot\frac{\sigma}{2}$ $\qquad \sigma_0(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\sigma}{2}$

Για $t=0$ $\quad \sigma_0(0) = C + \frac{\sigma}{2} = \sigma$, $C = \frac{\sigma}{2}$

$\boxed{\sigma_0(t) = \frac{\sigma e^{-\frac{t}{\tau}}}{2} + \frac{\sigma}{2}}$, και αφού $\sigma = \sigma_0 + \sigma_n \Rightarrow \boxed{\sigma_n = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma e^{-\frac{t}{\tau}}}{2}}$