Αβεβαιότητα

Αντώνης Παπαβασιλείου, ΕΜΠ

Βασισμένο στον Varian [1]

Περιεχόμενα

- Ενδεχόμενη κατανάλωση
- Συναρτήσεις χρησιμότητας και πιθανότητες
- Προσδοκώμενη χρησιμότητα
- Γιατί είναι ορθολογική η προσδοκώμενη χρησιμότητα
- Αποστροφή προς το ρίσκο
- Διαφοροποίηση
- Διασπορά κινδύνου
- Ο ρόλος του χρηματιστηρίου
- Παράρτημα

Ενδεχόμενη κατανάλωση

Ενδεχόμενη κατανάλωση

- Έχουμε αναλύσει πώς οι καταναλωτές αποφασίζουν μεταξύ καταναλωτικών συνδυασμών σε συνθήκες βεβαιότητας
- Σε συνθήκες αβεβαιότητας, οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την **κατανομή πιθανοτήτων** για την κατανάλωση διαφορετικών καταναλωτικών συνδυασμών
- Έστω, για παράδειγμα, ότι έχουμε 100 € περιουσία και σκεφτόμαστε να αγοράσουμε μια λοταρία που κοστίζει 5 € και πληρώνει 200 € αν κληρωθεί ο αριθμός 13. Τότε η **ενδεχόμενη κατανάλωση** είναι
    - Αν κληρωθεί ο αριθμός 13, η περιουσία γίνεται 295 €
    - Αν δεν κληρωθεί ο αριθμός 13, η περιουσία γίνεται 95 €

Ασφάλεια

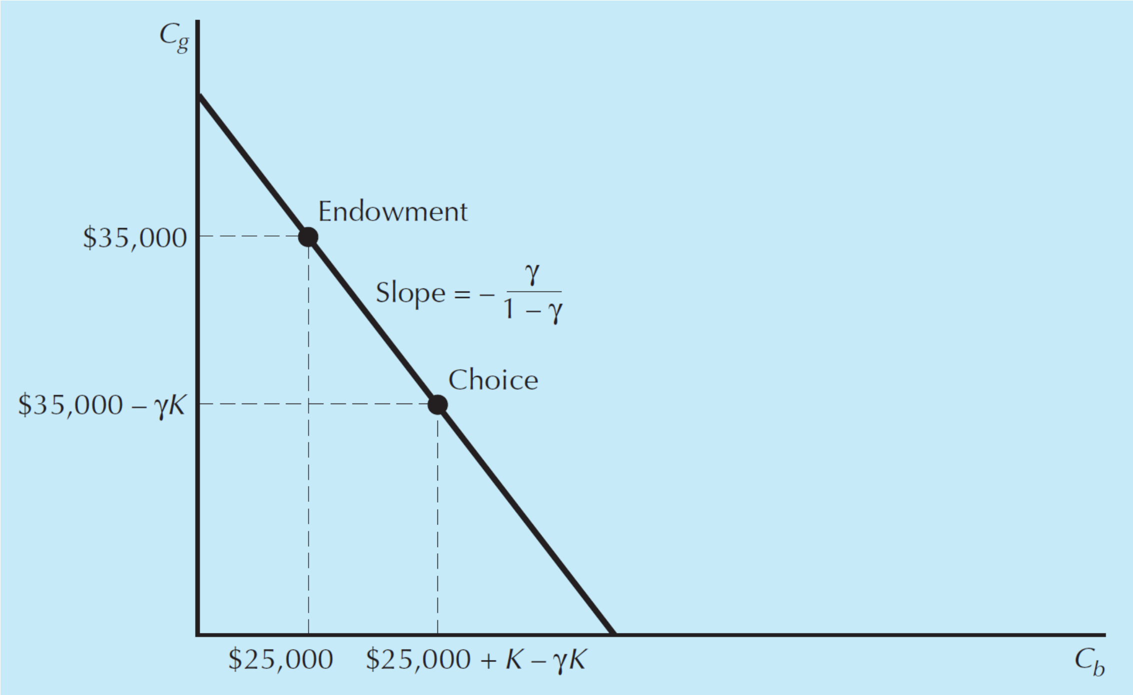
- Έστω ότι έχουμε αρχικά 35,000 € περιουσιακά στοιχεία
- Αλλά υπάρχει ενδεχόμενο απώλειας 10,000 € (π.χ. κλοπή αυτοκινήτου, βλάβη σπιτιού από καταιγίδα) με πιθανότητα $p = 0.01$
- Η κατανομή πιθανοτήτων που αντιμετωπίζουμε είναι
    - Πιθανότητα 1% για περιουσιακά στοιχεία 25,000 €
    - Πιθανότητα 99% για περιουσιακά στοιχεία 35,000 €
- Η ασφάλεια αλλάζει αυτήν την κατανομή πιθανοτήτων: ας υποθέσουμε ότι κοστίζει 1 € και αποδίδει 100 € αν υποστούμε την απώλειά μας
- Συγκεκριμένα, αν αγοράσουμε 10,000 € ασφάλειας (που κοστίζει 100 €):
    - Πιθανότητα 1% για περιουσιακά στοιχεία 34,900 € (35,000 αρχική περιουσία – 10,000 € απώλεια + 10,000 € αποζημίωση ασφάλισης – 100 € κόστος ασφάλειας)
    - Και πιθανότητα 99% για περιουσιακά στοιχεία 34,900 € (35,000 αρχική περιουσία – 100 € κόστος ασφάλειας)
    - Άρα με βεβαιότητα 34,900 €

Πλάνο ενδεχόμενης κατανάλωσης

- Έστω ότι ο καταναλωτής αγοράζει K € ασφάλειας και πληρώνει ασφάλιστρο γK, τότε αντιμετωπίζει την εξής λοταρία:
  - Με πιθανότητα 0.01 περιουσία $25{,}000$ € $+ K - \gamma K$
  - Με πιθανότητα 0.99 περιουσία $35{,}000$ € $- \gamma K$
- Τι θα διαλέξει ο καταναλωτής; Εξαρτάται από τη στάση του προς την αβεβαιότητα (όπως οι επιλογές καταναλωτικών αγαθών εξαρτώνται από τις προτιμήσεις)
- Μια οπτική είναι ότι καταναλωτικά αγαθά σε διαφορετικές **καταστάσεις του κόσμου** αντιστοιχούν σε διαφορετικά αγαθά
  - Άλλο ένα παγωτό σε καύσωνα, και άλλο ένα παγωτό σε βαρυχειμωνιά
- **Πλάνο ενδεχόμενης κατανάλωσης**: διευκρίνιση του τι καταναλώνεται σε διαφορετικές καταστάσεις του κόσμου
- Όπως έχουμε αναπτύξει θεωρία για την προτίμηση κατανάλωσης διαφορετικών καταναλωτικών συνδυασμών, μπορούμε να γενικεύσουμε τη θεωρία για προτιμήσεις επί πλάνων ενδεχόμενης κατανάλωσης

Εισοδηματικός περιορισμός σε συνθήκες αβεβαιότητας

- Κάθε «αγαθό» στο γράφημα αντιστοιχεί στην περιουσία που έχει ο καταναλωτής σε κάθε διαφορετική κατάσταση του κόσμου (C_g για την καλή έκβαση και C_b για κακή έκβαση)
- Το απόθεμα αντιστοιχεί στην περιουσία στην περίπτωση χωρίς ασφάλιση (35,000 € στην καλή έκβαση και 25,000 € στην κακή έκβαση)
- Η ασφάλιση επιτρέπει να κινηθούμε πέρα από το σημείο του αρχικού αποθέματος



Έκφραση του εισοδηματικού περιορισμού

- Αν αγοράσουμε K € ασφάλειας, ανταλλάσσουμε γK € καταναλωτικών δυνατοτήτων στην καλή κατάσταση έναντι $K - \gamma K$ € στην κακή κατάσταση
- Άρα η κατανάλωση που χάνουμε στην καλή κατάσταση, διαρούμενη με την κατανάλωση που κερδίζουμε στην κακή κατάσταση, είναι:

$$\frac{\Delta C_g}{\Delta C_b} = -\frac{\gamma K}{K - \gamma K} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}$$

- Αυτή είναι η κλίση της γραμμή εισοδηματικού περιορισμού

Συμπεριφορά καταναλωτή σε συνθήκες αβεβαιότητας

- Μπορούμε τώρα να εισάγουμε καμπύλες αδιαφορίας που απεικονίζουμε προτιμήσεις για κατανάλωση σε συνθήκες αβεβαιότητας
- Για παράδειγμα, κυρτές προτιμήσεις σημαίνουν ότι ο καταναλωτής προτιμά μια σταθερή κατανάλωση σε διαφορετικές εκβάσεις παρά πολλή κατανάλωση σε μία έκβαση και πολύ λίγη κατανάλωση σε άλλη έκβαση
- Και η βέλτιστη επιλογή είναι όταν οι καμπύλες αδιαφορίας εφάπτονται στον εισοδηματικό περιορισμό

Ερώτηση 12.1

- Πώς φτάνουμε σε σημεία κατανάλωσης στα αριστερά του αποθέματος του γραφήματος της διαφάνειας 7;

Απάντηση στην ερώτηση 12.1

- Χρειαζόμαστε έναν τρόπο να μειώσουμε την κατανάλωση στην κακή έκβαση και να την αυξήσουμε στην καλή έκβαση
- Για να γίνει αυτό πρέπει να πουλήσεις ασφάλιση έναντι της απώλειας (αντί να την αγοράσεις)

Συναρτήσεις χρησιμότητας και πιθανότητες

Συναρτήσεις χρησιμότητας σε συνθήκες αβεβαιότητας

- Οι προτιμήσεις για καταναλώσεις σε συνθήκες αβεβαιότητας εξαρτάται όχι μόνο από τα επίπεδα κατανάλωσης, αλλά και από τις ίδιες τις πιθανότητες των ενδεχομένων
- Ας συμβολίσουμε ως c_1 και c_2 την κατανάλωση στην κατάσταση 1 και 2
- Και ας συμβολίσουμε ως π_1 και π_2 τις πιθανότητες της κατάστασης 1 και 2
- Άρα οι προτιμήσεις περιγράφονται από μια συνάρτηση χρησιμότητας $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2)$

Υποκατάστατα

- Αν υποθέσουμε ότι οι καταναλώσεις είναι τέλεια υποκατάστατα, και σταθμίσουμε την κάθε κατανάλωση με την πιθανότητά της, έχουμε

$$u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2$$

- Αντιστοιχεί στην **αναμενόμενη τιμή** της κατανάλωσης

Προτιμήσεις Cobb-Douglas

- Οι συναρτήσεις Cobb-Douglas μπορούν να εκφραστούν ως

$$u(c_1, c_2, \pi, 1-\pi) = c_1^{\pi} c_2^{1-\pi}$$

- Και οι μονοτονικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τις ίδιες προτιμήσεις, άρα μπορούμε να δουλέψουμε με το λογαριθμικό μετασχηματισμό της Cobb-Douglas:

$$\ln u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 \ln c_1 + \pi_2 \ln c_2$$

Προσδοκώμενη χρησιμότητα

Συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας / von Neumann - Morgenstern

- Μια χρήσιμη μορφή συνάρτησης χρησιμότητας είναι η
$$u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$$
- Έχουμε δει δύο τέτοιες συναρτήσεις στην προηγούμενη ενότητα:
  - Τέλεια συμπληρώματα: $v(c) = c$
  - Η Cobb-Douglas μετά από λογαριθμικό μετασχηματισμό: $v(c) = \ln c$
- Αν $\pi_1 = 1$, τότε η χρησιμότητα στην έκβαση 1 είναι $v(c_1)$, και αντίστοιχα για $\pi_2 = 1$
- Άρα η έκφραση
$$\pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$$

αντιστοιχεί στη μέση χρησιμότητα

- Συναρτήσεις χρησιμότητας αυτής της μορφής αναφέρονται ως **συναρτήσεις προσδοκώμενης χρησιμότητας** / **von Neumann - Morgenstern**

Θετικός συναφής μετασχηματισμός

- Η συνάρτηση $v(u)$ είναι **θετικός συναφής μετασχηματισμός** αν μπορεί να γραφτεί ως

$$v(u) = au + b$$

όπου $a > 0$

- Ως μονοτονικός μετασχηματισμός, σημαίνει πως αποτυπώνει ακριβώς τις ίδιες προτιμήσεις με το u
- Για συναρτήσεις χρησιμότητας von Neumann – Morgenstern, η νέα συνάρτηση χρησιμότητας είναι επίσης von Neumann – Morgenstern
- Και οποιοσδήποτε μετασχηματισμός μιας συνάρτησης von Neumann – Morgenstern που <u>δεν</u> είναι θετικός συναφής οδηγεί σε συνάρτηση χρησιμότητας που <u>δεν</u> είναι von Neumann – Morgenstern

Ερώτηση 12.2

- Ποια από τις ακόλουθες συναρτήσεις χρησιμότητας έχει την ιδιότητα της προσδοκώμενης χρησιμότητας;

a) $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \alpha(\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2)$

b) $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2^2$

c) $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 \ln c_1 + \pi_2 \ln c_2 + 17$

Απάντηση στην ερώτηση 12.2

- Οι συναρτήσεις (a) και (c) έχουν την ιδιότητα της προσδοκώμενης χρησιμότητας (είναι συναφείς μετασχηματισμοί των συναρτήσεων που συζητήσαμε στο κεφάλαιο), ενώ το (b) δεν την έχει

Γιατί είναι ορθολογική η προσδοκώμενη χρησιμότητα

Ανεξαρτησία προτιμήσεων

- Είναι λογικό οι συναρτήσεις χρησιμότητας να έχουν τη μορφή προσδοκώμενης χρησιμότητας;
- Η **υπόθεση ανεξαρτησίας** λέει ότι οι επιλογές που κάνουν οι άνθρωποι σε μια κατάσταση του κόσμου δεν εξαρτάται από τις επιλογές που κάνουν σε διαφορετικές καταστάσεις του κόσμου
- Η υπόθεση ανεξαρτησίας συνεπάγεται πως η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αθροιστική επί των διαφορετικών καλαθιών κατανάλωσης
- Άρα αν υπάρχουν τρεις καταστάσεις του κόσμου με πιθανότητες π_1, π_2, π_3 αντίστοιχα, και αντίστοιχες καταναλώσεις c_1, c_2, c_3, η συνάρτηση χρησιμότητας παίρνει τη μορφή
$$U(c_1, c_2, c_3) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) + \pi_3 u(c_3)$$
- Πώς προκύπτει η ανεξαρτησία; Ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ των αγαθών 1 και 2 δεν εξαρτάται από το αγαθό 3:
$$MRS_{12} = \frac{\Delta U(c_1, c_2, c_3)/\Delta c_1}{\Delta U(c_1, c_2, c_3)/\Delta c_2} = -\frac{\Delta u(c_1)/\Delta c_1}{\Delta u(c_2)/\Delta c_2}$$

Αποστροφή προς το ρίσκο

Αποστροφή προς τον κίνδυνο

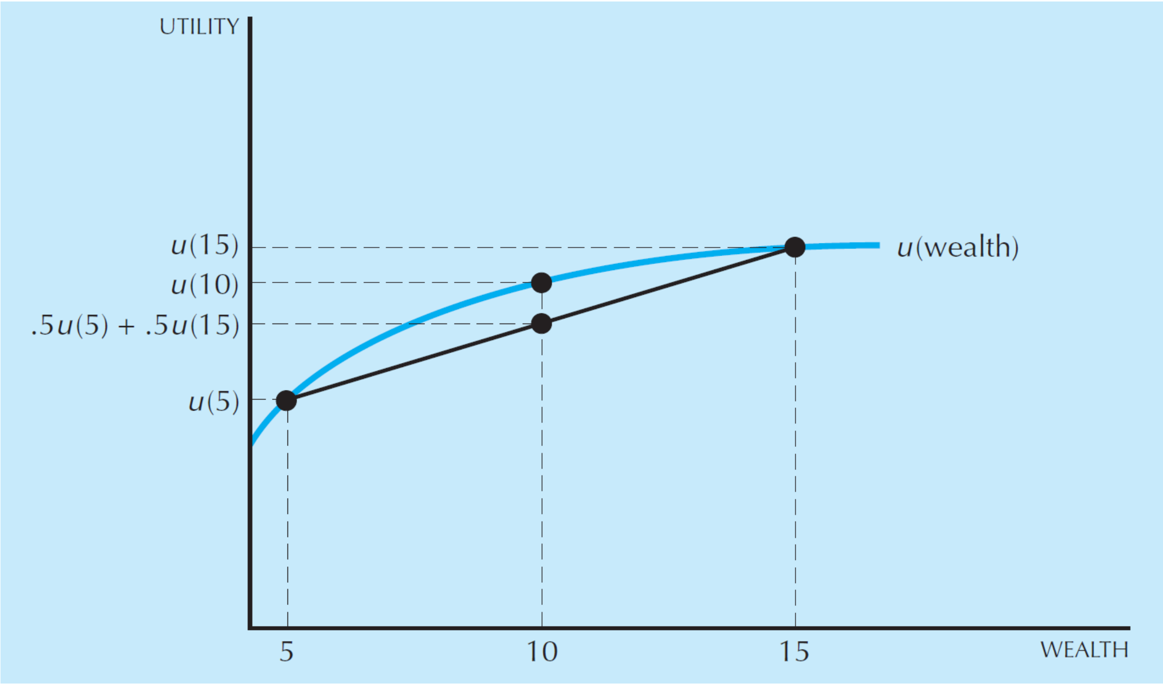
- Οι συναρτήσεις προσδοκώμενης χρησιμότητας έχουν ισχυρή διαισθητική ερμηνεία όσον αφορά τη στάση των πρακτόρων προς τον κίνδυνο
- Έστω ένας καταναλωτής με αρχικό απόθεμα 10 €, που σκέφτεται να αγοράσει μια λοταρία που κοστίζει 5 € και αποδίδει 10 € με πιθανότητα 0.5
- Η απόδοση του καταναλωτή είναι:
  - Με πιθανότητα 0.5 ίση με 5 €
  - Με πιθανότητα 0.5 ίση με 15 €
- Μέση αξία της περιουσίας του: 10 €
- Μέση χρησιμότητα:

$$\frac{1}{2}u(15€) + \frac{1}{2}u(5€)$$

- Για τη συνάρτηση χρησιμότητας του γραφήματος:

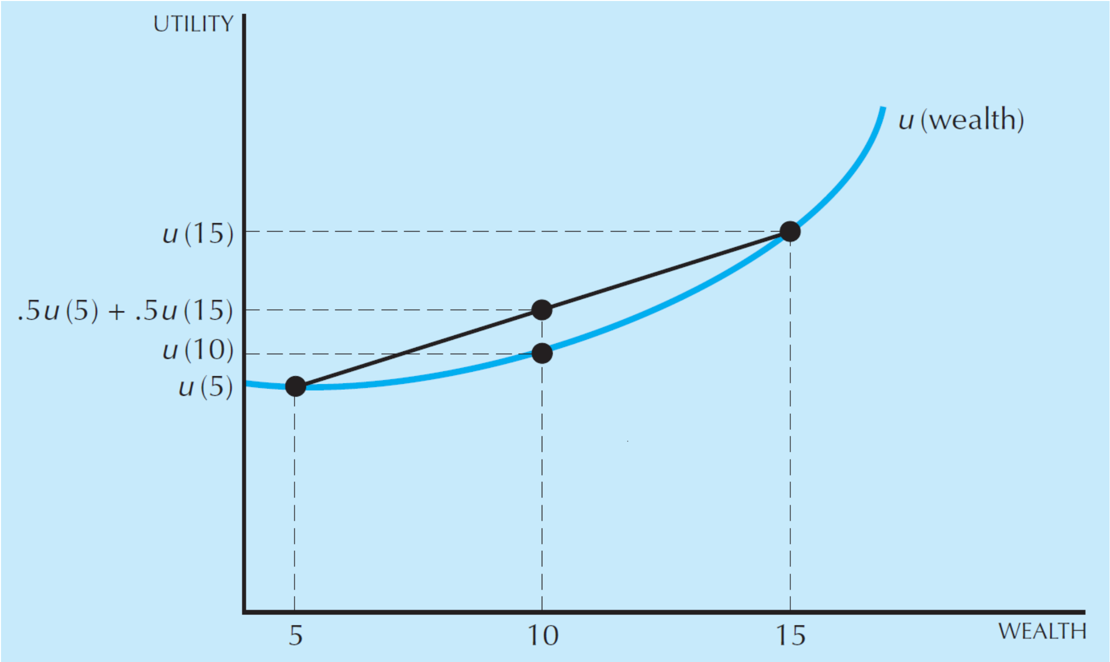
$$u\left(\frac{1}{2}15 + \frac{1}{2}5\right) > \frac{1}{2}u(15€) + \frac{1}{2}u(5€)$$

- Ο καταναλωτής έχει **αποστροφή προς τον κίνδυνο**: προτιμά τη βέβαιη μέση απόδοση των 10 € από τη λοταρία



Επιδίωξη κινδύνου

- Στην περίπτωση που ο καταναλωτής προτιμά τη λοταρία από τη βέβαιη απόδοση, έχει **επιδίωξη κινδύνου**
- Κυρτές συναρτήσεις χρησιμότητας αντιστοιχούν σε επιδίωξη κινδύνου
- Κοίλες συναρτήσεις αντιστοιχούν σε αποστροφή κινδύνου
- Η ενδιάμεση κατάσταση των γραμμικών συναρτήσεων αντιστοιχεί σε **ουδετερότητα προς τον κίνδυνο**



Ερώτηση 12.3

- Ένας καταναλωτής με αποστροφή προς το ρίσκο έχει την επιλογή μεταξύ μιας λοταρίας που πληρώνει 1000 € με πιθανότητα 25% και 100 € με πιθανότητα 75%, ή μιας πληρωμής 325 €
- Ποιο διαλέγει;

Απάντηση στην ερώτηση 12.3

- Αφού αποστρέφεται το ρίσκο, προτιμά την προσδοκώμενη αξία της λοταρίας, 325 €, από την ίδια τη λοταρία, και άρα επιλέγει τη βέβαιη πληρωμή

Ερώτηση 12.4

- Τι γίνεται αν η πληρωμή είναι 320 €;

Απάντηση στην ερώτηση 12.4

- Αν η πληρωμή είναι 320 € η απόφαση εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης χρησιμότητας, δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά

Ερώτηση 12.5

- Απεικονίστε μια συνάρτηση χρησιμότητας η οποία επιδεικνύει επιδίωξη κινδύνου για μικρά ποσά και αποστροφή προς τον κίνδυνο για μεγάλα ποσά

Απάντηση στην ερώτηση 12.5

- Η συνάρτηση πρέπει να είναι αρχικά κυρτή και μετέπειτα κοίλη

Παράδειγμα: ασφάλιση

- Επιστρέφουμε στο παράδειγμα του καταναλωτή που έχει περιουσία 35,000 € και αντιμετωπίζει πιθανή απώλεια 10,000 € με πιθανότητα π
- Η πιθανότητα απώλειας είναι 1%
- Κοστίζει γK € για να αγοράσει ασφάλιση K €
- Η βέλτιστη ασφάλιση είναι στο σημείο που η καμπύλη εισοδήματος (με κλίση $-\gamma/(1-\gamma)$) ισούται με τον ΟΛΥ της καμπύλης χρησιμότητας
- Κατάσταση 1: χωρίς απώλεια, άρα η περιουσία είναι
$$c_1 = 35{,}000€ - \gamma K$$
- Κατάσταση 2: με απώλεια, άρα η περιουσία είναι
$$c_2 = 35{,}000€ - 10{,}000€ + K - \gamma K$$

Βέλτιστη ασφάλιση

- Η συνθήκη βέλτιστης επιλογής γίνεται:
$$\text{ΟΛΥ} = -\frac{\pi \Delta u(c_2)/\Delta c_2}{(1-\pi)\Delta u(c_1)/\Delta c_1} = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \quad (12.1)$$
- Από την πλευρά της ασφαλιστικής, πληρώνουν K με πιθανότητα π και 0 με πιθανότητα $1-\pi$, επίσης συλλέγουν το ασφάλιστρο γK
- Το αναμενόμενο κέρδος της ασφαλιστικής είναι
$$P = \gamma K - \pi K - (1-\pi)\cdot 0 = \gamma K - \pi K$$
- Αν η ασφαλιστική δίνει ένα «δίκαιο» ασφάλιστρο (δηλαδή στο οποίο απλά καλύπτει τα έξοδά της):
$$P = \gamma K - \pi K = 0 \Rightarrow \gamma = \pi$$
- Βάζοντας στην εξίσωση (12.1)
$$\frac{\pi \Delta u(c_2)/\Delta c_2}{(1-\pi)\Delta u(c_1)/\Delta c_1} = \frac{\pi}{1-\pi}$$
- Βγάζοντας το π ως κοινό παρονομαστή:
$$\frac{\Delta u(c_1)}{\Delta c_1} = \frac{\Delta u(c_2)}{\Delta c_2} \quad (12.2)$$
- Άρα στη βέλτιστη επιλογή, η οριακή χρησιμότητα στην κακή έκβαση ισούται με την οριακή χρησιμότητα αν προκύψε η καλή έκβαση

Επίπεδο ασφάλισης

- Αν ο καταναλωτής έχει αποστροφή προς τον κίνδυνο, τότε η συνάρτηση χρησιμότητας είναι κοίλη
- Και άρα το σημείο στο οποίο οι οριακές χρησιμότητες είναι ίσες είναι για $c_1 = c_2$
- Χρησιμοποιώντας τους τύπους για τα c_1 και c_2, έχουμε

$$35{,}000€ - \gamma K = 35{,}000€ - 10{,}000€ + K - \gamma K \Rightarrow K = 10{,}000€$$

- Άρα ένας καταναλωτής με αποστροφή προς το ρίσκο που αντιμετωπίζει «δίκαια» ασφάλιστρα επιλέγει να ασφαλιστεί πλήρως

Διαφοροποίηση

Διαφοροποίηση

- Ας υποθέσουμε πως σκέφτεσαι να επενδύσεις 100 € σε δύο εταιρείες, η μία φτιάχνει γυαλιά ηλίου (Α) και η άλλη ομπρέλες (Β)
- Η πρόγνωση καιρού για το επόμενο καλοκαίρι δίνει ίσες πιθανότητες για βροχή και ήλιο
- Έστω ότι οι μετοχές της εταιρείας Α και Β κοστίζουν 10 € η καθεμιά
- Αν έχει βροχή το καλοκαίρι, οι μετοχές της Β πάνε στα 20 € και της Α στα 5 €
- Και αντιστρόφως αν έχει ήλιο το καλοκαίρι
- Αν επενδύσεις τα 100 € μόνο στην Α:
    - Εισπράττεις 50 € με πιθανότητα 0.5
    - Εισπράττεις 200 € με πιθανότητα 0.5
- Και αντίστροφα στην επένδυση Β, και στις δύο περιπτώσεις η μέση περιουσία είναι 125 €
- Αν όμως επενδύσεις 50 € σε κάθε εταιρεία, πετυχαίνεις τέλεια **διαφοροποίηση**: με βεβαιότητα, εισπράττεις 125 € (υπολογίστε το)
- Η διαφοροποίηση είναι πολύτιμη για τη διαχείριση ρίσκου, αλλά πρέπει να αναζητούμε μετοχές που δεν είναι συσχετισμένες

Διασπορά κινδύνου

Διασπορά κινδύνου

- Επιστρέφουμε στο παράδειγμα ενός καταναλωτή ο οποίος κατέχει 35,000 € και αντιμετωπίζει πιθανότητα 0.01 για απώλεια 10,000 €
- Αν υπάρχουν 1000 τέτοιοι καταναλωτές, τότε κατά μέσο όρο έχουμε 10 ζημιές και άρα απώλειες 100,000 € ετησίως
- Ο κάθε καταναλωτής αντιμετωπίζει μια *προσδοκώμενη απώλεια* ίση με 0.01 επί 10,000 €, δηλαδή 100 € ετησίως
- Υποθέτουμε πως οι κίνδυνοι των καταναλωτών είναι *ανεξάρτητοι*
- Η προσδοκώμενη περιουσία του κάθε καταναλωτή είναι $0.99 \times 35{,}000€ + 0.01 \times 25{,}000€ = 34{,}900€$
    - Αλλά ο κάθε καταναλωτής έχει και υψηλό ρίσκο: 0.01 πιθανότητα απώλειας 10,000 €
- Οι καταναλωτές μπορούν να διαφοροποιήσουν το ρίσκο τους μέσω της **διασποράς κινδύνου**: πουλώντας ο ένας ρίσκο στον άλλο / ασφαλίζοντας ο ένας τον άλλο
    - Αν κάποιος υποστεί την απώλεια των 10,000 €, ο καθένας από τους υπόλοιπους συνεισφέρει 10 €

Επίπτωση της διασποράς κινδύνου

- Κατά μέσο όρο, 10 σπίτια θα καούν ετησίως
- Άρα κατά μέσο όρο οι 1000 καταναλωτές θα πληρώνουν ο καθένας 100 € ετησίως
    - Ωστόσο αυτός είναι απλά ο μέσος όρος: κάποιες χρονιές θα καούν 12 σπίτια, κάποιες 8 σπίτια
    - Σπανίως οποιοσδήποτε θα πληρώσει πάνω από 200 € ετησίως
    - Αλλά ακόμη και αυτό το ρίσκο μπορεί να διαφοροποιηθεί
- Αν οι καταναλωτές μαζεύουν αποθεματικό (βάζοντας 100 € στην άκρη κάθε έτος, ανεξαρτήτως του πόσα σπίτια όντως καίγονται) τότε εξουδετερώνουν και το εναπομείναν ρίσκο

Ερώτηση 12.6

- Γιατί ένα σύνολο γειτόνων μπορεί να έχει μεγαλύτερη δυσκολία να αυτό-ασφαλιστεί έναντι ζημιών από πλημμύρες σε σχέση με ζημιές από φωτιά;

Απάντηση στην ερώτηση 12.6

- Προκειμένου να αυτό-ασφαλιστούν, τα ρίσκα πρέπει να είναι ανεξάρτητα
- Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση ζημιών λόγω πλημμύρας
- Αν ένα σπίτι στη γειτονιά υποστεί ζημιά λόγω πλημμύρας είναι πιθανό πως όλα τα σπίτια υφίστανται ζημιά

Ο ρόλος του χρηματιστηρίου

Ο ρόλος του χρηματιστηρίου

- Αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πως το χρηματιστήριο επιτρέπει στους επιχειρηματίες να μετατρέψουν τα μερίσματά τους σε μια απευθείας πληρωμή
- Αλλά τους επιτρέπει επίσης να κατανείμουν το κεφάλαιό τους σε πολλές διαφορετικές επιχειρήσεις, για να διαφοροποιήσουν το ρίσκο τους
- Στην περίπτωση της ασφάλισης υπήρχε τρόπος να εξουδετερωθεί πλήρως το ρίσκο (για 100 € ασφάλιστρο, εξουδετερωνόταν πλήρως ο κίνδυνος απώλειας 10,000 €), αν υπάρχουν *αρκετοί* ασφαλισμένοι
- Στην περίπτωση του χρηματιστηρίου υπάρχει πάντα ρίσκο, αλλά προσφέρει ένα μηχανισμό για τη μεταφορά του από αυτούς που δε θέλουν να το υφίστανται σε άλλους που είναι διατεθειμένοι να το υφίστανται έναντι μιας αμοιβής (περισσότερα για αυτό στο επόμενο κεφάλαιο)

Παράρτημα

Μεγιστοποίηση μέσης χρησιμότητας

- Έστω ένας καταναλωτής με περιουσία w που σκέφτεται να επενδύσει x σε ένα αγαθό που ενέχει κίνδυνο
- Το αγαθό αποδίδει r_g στην «καλή» έκβαση (όπου $r_g > 0$) και r_b στην κακή έκβαση (όπου $r_b < 0$)
- Άρα η περιουσία του καταναλωτή στην καλή και κακή έκβαση είναι

$$W_g = (w - x) + x\left(1 + r_g\right) = w + xr_g$$
$$W_b = (w - x) + x(1 + r_b) = w + xr_b$$

- Ας υποθέσουμε ότι η καλή έκβαση συμβαίνει με πιθανότητα π και η κακή με πιθανότητα $1 - \pi$
- Η προσδοκώμενη χρησιμότητα του καταναλωτή είναι

$$EU(x) = \pi u\left(w + xr_g\right) + (1 - \pi)u(w + xr_b)$$

- Ο καταναλωτής επιλέγει το x για να μεγιστοποιήσει την παραπάνω έκφραση

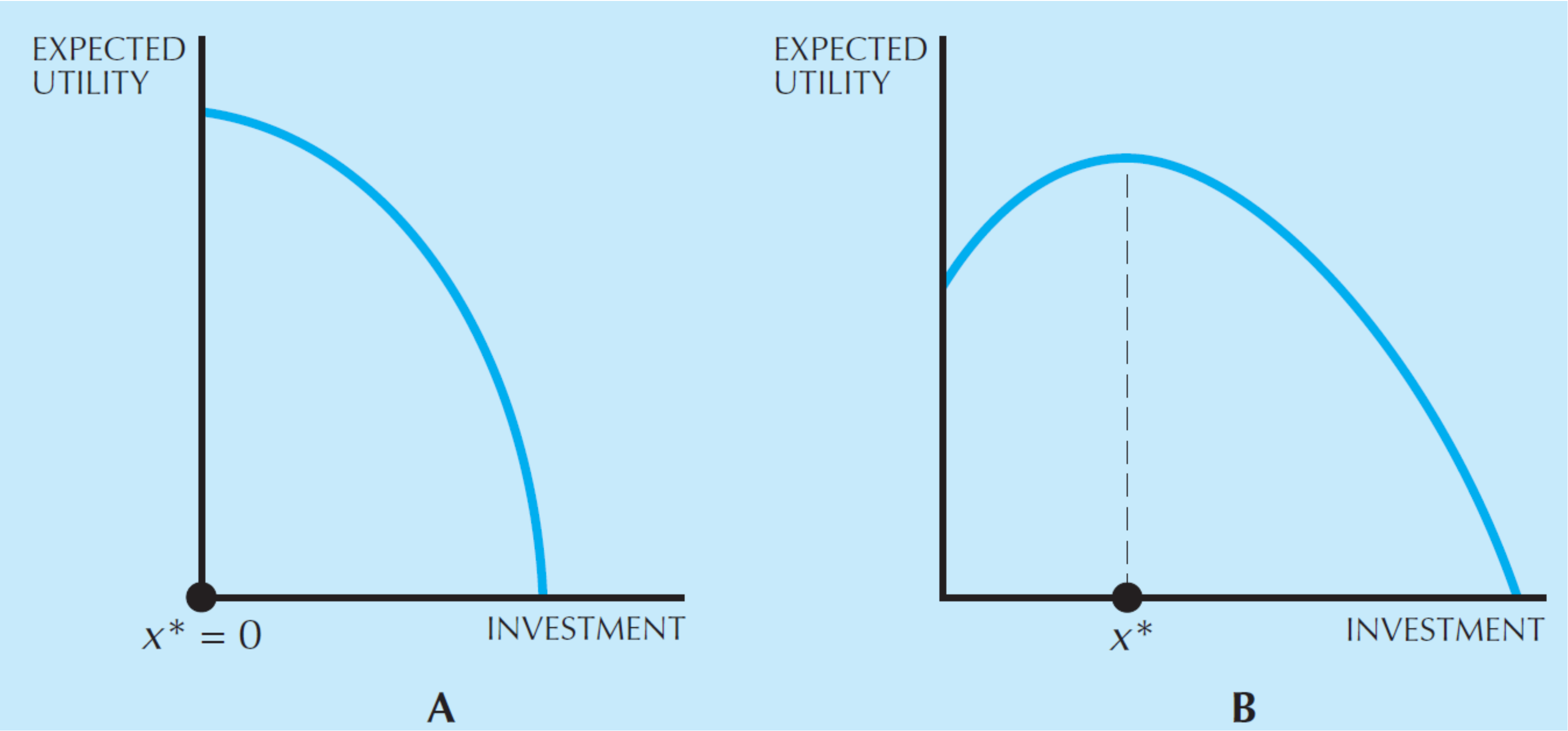
Η προσδοκώμενη χρησιμότητα είναι κοίλη

- Παραγωγίζοντας ως προς x:
$$EU'(x) = \pi u'\left(w + xr_g\right)r_g + (1-\pi)u'(w + xr_b)r_b \quad (12.3)$$
- Η δεύτερη παράγωγος ως προς x δίνει
$$EU''(x) = \pi u''\left(w + xr_g\right)r_g^2 + (1-\pi)u''(w + xr_b)r_b^2 \quad (12.4)$$
- Αν ο καταναλωτής έχει αποστροφή προς το ρίσκο, έχουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητάς του είναι κοίλη, άρα $u''(w) < 0$ για κάθε επίπεδο w
- Άρα $EU''(x) < 0$, άρα η προσδοκώμενη χρησιμότητα είναι κοίλη

Βέλτιστη επένδυση

- Η αλλαγή της προσδοκώμενης χρησιμότητας για το πρώτο € επένδυσης στο αγαθό που ενέχει κίνδυνο είναι
  $EU'(0) = \pi u'(w) r_g + (1-\pi) u'(w) r_b = u'(w)(\pi r_g + (1-\pi) r_b)$
- Η έκφραση μέσα στην παρένθεση είναι η **μέση απόδοση** του αγαθού
- Αν $\pi r_g + (1-\pi) r_b < 0$, η βέλτιστη λύση για έναν καταναλωτή με αποστροφή προς το ρίσκο είναι $x^* = 0$
- Αν $\pi r_g + (1-\pi) r_b > 0$ τότε θα θέλει να επενδύσει λίγο στο αγαθό, όση αποστροφή προς το ρίσκο κι αν έχει
- Η βέλτιστη λύση δίνεται από τη συνθήκη ότι $EU'(x) = 0$:
  $$EU'(x) = \pi u'\left(w + x r_g\right) r_g + (1-\pi) u'(w + x r_b) r_b = 0 \quad (12.5)$$

Βέλτιστη επένδυση: γραφική αναπαράσταση



Παράδειγμα: επίδραση των φόρων στην επένδυση σε αγαθά που ενέχουν κίνδυνο

- Έστω ότι εισάγουμε φόρο t στην απόδοση ενός αγαθού που ενέχει κίνδυνο
- Τότε η απόδοση μετά φόρων είναι $(1-t)r_g$ και $(1-t)r_b$ αντίστοιχα
- Η συνθήκη πρώτου βαθμού γίνεται
$$EU'(x) = \pi u'\left(w + x(1-t)r_g\right)(1-t)r_g + (1-\pi)u'(w + x(1-t)r_b)(1-t)r_b = 0$$
- Ακυρώνοντας τους όρους $(1-t)$:
$$EU'(x) = \pi u'\left(w + x(1-t)r_g\right)r_g + (1-\pi)u'(w + x(1-t)r_b)r_b = 0 \quad (12.6)$$
- Ας συμβολίσουμε ως x^* τη βέλτιστη λύση χωρίς φόρους και ως $\hat{x}$ τη βέλτιστη λύση με φόρους
- Ποια είναι η σχέση μεταξύ x^* και $\hat{x}$;
  - Η διαίσθηση ίσως λέει ότι $x^* > \hat{x}$ γιατί αποθαρρύνεται η επένδυση στο αγαθό που ενέχει κίνδυνο
  - Αυτό είναι λάθος, συμβαίνει το αντίθετο!

Σχέση μεταξύ x^* και $\hat{x}$

- Η ακριβής σχέση μεταξύ x^* και $\hat{x}$ είναι
$$\hat{x} = \frac{x^*}{1-t}$$
- Για να επιβεβαιώσουμε τη σχέση μεταξύ x^* και $\hat{x}$, αντικαθιστούμε αυτήν την επιλογή στην (12.6):
$$EU'(\hat{x}) = \pi u'\left(w + \frac{x^*}{1-t}(1-t)r_g\right)r_g + (1-\pi)u'\left(w + \frac{x^*}{1-t}(1-t)r_b\right)r_b$$
$$= \pi u'\left(w + x^* r_g\right)r_g + (1-\pi)u'(w + x^* r_b)r_b = 0$$
- Τι γίνεται;!
- Ο φόρος είναι όντως επιζήμιος στην καλή έκβαση, αλλά είναι ουσιαστικά επιδότηση στην κακή έκβαση
- Αλλάζοντας την επένδυση κατά ένα παράγοντα $\frac{1}{1-t}$, οι αποδόσεις με φόρο είναι ακριβώς ίδιες με αυτές πριν την επιβολή του φόρου

Βιβλιογραφία

[1] Hal Varian, Μικροοικονομική: μια σύγχρονη προσέγγιση, 3η έκδοση, εκδόσεις Κριτική, 2015