Κεφ7: Διακριτός Μ/F και Εφαρμογές

Wednesday, 19 January 2022 8:48 PM

7.1 Διακριτός Μ/F

Discrete Time Fourier Transform

Basically ο κλασσικός DTFT που ξέρουμε:

$$x(n) \longleftrightarrow X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

κάνει μετατροπή διακριτή μεταβλητή ⟷ συνεχής μεταβλητή

* Τι και αν* υπάρχουν άλλες; Για τις μετατροπές θα ορίσουμε τα εξής μεγέθη:

t	Συνεχής μεταβλητή χρόνου
T	Περίοδος περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου
f	Συνεχής μεταβλητή συχνότητας

T_s / f_s	Περίοδος/συχνότητα περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου
N	Πλήθος δειγμάτων εντός μιας περιόδου T
F	Σχετική "Διακριτή" Συχνότητα
ϕ_s	Διακριτή συχνότητα ??

Για τα οποία ισχύουν:

$w = 2\pi f$ $\quad w_s = 2\pi f_s$ $\quad \Omega = 2\pi F$

$F = f \cdot T_s$ $\quad T = N T_s$ $\quad \Omega_s = 2\pi \phi_s$

Συνεχής Χρόνος ⇄ Συνεχής Συχνότητα

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \rightleftharpoons X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Συνεχής Χρόνος ⇄ Διακριτή Συχνότητα

$$\underset{\text{περιοδικό}}{x(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} X(\underset{m\in\mathbb{Z}}{m}\phi_s) e^{j2\pi m \phi_s t} \rightleftharpoons X(m\phi_s) = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j2\pi m\phi_s t} dt \quad , \text{με} \quad \phi_s = \frac{1}{T}$$

Ένα περιοδικό σσχ οδηγεί σε απεριοδικό σδχ.

Διακριτός Χρόνος ⇄ Συνεχής Συχνότητα (ol' buddy DTFT)

$$x(nT_s) = \frac{1}{f_s}\int_{f_s} X(f) e^{j2\pi n f T_s} df \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi n f T_s} \quad , \text{με} \quad \overset{\text{συχνότητα δειγματοληψίας}}{f_s} = \frac{1}{\underset{\text{περίοδος } X(f)}{T_s}}$$

Ένα απεριοδικό σδχ οδηγεί σε περιοδικό σσ συχνότητας.

Διακριτός Χρόνος ⇄ Διακριτή Συχνότητα (Discrete Fourier Transform - DFT)

$$x(\underset{n\in\mathbb{Z}}{n} T_s) = \frac{1}{N}\sum_n X(\underset{m\in\mathbb{Z}}{m}\phi_s) e^{j2\pi mn\phi_s T_s} \rightleftharpoons X(m\phi_s) = \sum_n x(nT_s) e^{-j2\pi mn\phi_s T_s} \quad , \text{με} \quad \phi_s = \frac{1}{NT_s} = \frac{f_s}{N}$$

Άρα $\phi_s T_s = \frac{1}{N}$

Ένα περιοδικό σδχ οδηγεί σε περιοδικό σδ συχνότητας.

Εάν θέσουμε $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ προκύπτει:

$$! \quad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m) w^{-mn} \longrightarrow X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w^{mn}$$

Έστω ότι $x(n)$ πραγματικό. Τότε

$$X(m) = X_r(m) + jX_i(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi mn}{N} - j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi mn}{N}$$

Ισχύει: $\left.\begin{array}{l} X_r(N-m) = X_r(m) \\ X_i(N-m) = -X_i(m) \end{array}\right\} \Rightarrow |X(m)| = |X(N-m)|$

Ιδιότητες DFT:

$x(n)$	$X(m)$
Πραγματικό	X_r: άρτιο, X_i: περιττό
Φανταστικό	X_r: περιττό, X_i: άρτιο
Πραγματικό, άρτιο	Φανταστικό, άρτιο
Πραγματικό, περιττό	Πραγματικό, περιττό