

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
Σ	

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ
Φεβρουάριος 2005
 Σύνολο μονάδων: 91

1. (8) Τοποθετήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σε έναν νέο πίνακα έτσι ώστε: δύο συναρτήσεις $f(n)$, $g(n)$ να βρίσκονται στην ίδια γραμμή αν και μόνο αν $f(n)=\Theta(g(n))$, και μια συνάρτηση $f(n)$ να είναι κάτω από μια συνάρτηση $g(n)$ στον πίνακα αν και μόνο αν $f(n)=o(g(n))$.

$\frac{n}{\log n} + \log^7 n$	$2^{\log n}$	$\frac{n^n}{100}$	$200 n!$	$n \log_{13} \sqrt{n}$	$n \log^6 n$	$\frac{1}{5} \log^6 n^2$	$n^{\log n}$
$0.3n \log n + \frac{\log 8n}{n}$	$7^{100}!$	$3^{\sqrt{n}}$	$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\frac{n^n}{8n^8 + 1}$	$200n!$	$\log(n!)$	2^n

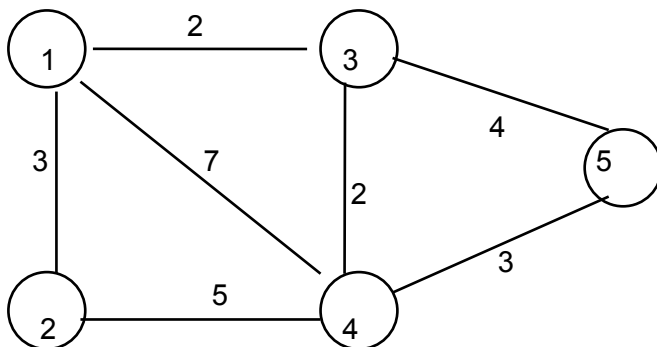
2. a. (2) Αναφέρατε και ορίστε ένα πρόβλημα το οποίο δεν είναι γνωστό αν είναι NP-πλήρες, ούτε αν ανήκει στο P.

- b. (3) Σωστό ή λάθος; (με εξήγηση).
 i) **NPSPACE \subseteq PSPACE**
 ii) **P = NP**
 iii) **PSPACE \subseteq P**

3. (10) Χαρακτηρίστε τις επόμενες προτάσεις ως αληθείς, ψευδείς ή ανοιχτά προβλήματα. Κάθε λάθος απάντηση θα μειώνει κατά μια μονάδα τη βαθμολογία.

	Το πρόβλημα primality ανήκει στην κλάση NP.
	Υπάρχει πλήρες πρόβλημα για την κλάση P που ανήκει στην κλάση NP.
	Ο αλγόριθμος hearsort χρειάζεται $\Omega(n)$ βήματα για να διατάξει οποιαδήποτε n στοιχεία.
	Υπάρχει πρόβλημα για το οποίο υπάρχει αλγόριθμος που το λύνει σε $O(n^3)$ βήματα και το οποίο ανάγεται στο πρόβλημα 3-SAT.
	Κάθε (όχι απαραίτητα γνησίως) αύξουσα ακολουθία ακεραίων είναι σωρός.
	Κάθε αλγόριθμος που χρησιμοποιεί δυναμικό προγραμματισμό χρειάζεται τουλάχιστον εκθετικό χρόνο για να λυθεί.
	Αν ένας γράφος έχει ακμές με αρνητικό και θετικό βάρος, ο αλγόριθμος του Dijkstra λύνει σωστά το πρόβλημα της εύρεσης ελαχίστου μονοπατιού από μια πηγή προς κάθε άλλο κόμβο, μόνο για όσους κόμβους υπάρχει μονοπάτι χωρίς ακμές με αρνητικό βάρος. Για τους υπόλοιπους κόμβους υπολογίζει λάθος μονοπάτι.
	Ο αλγόριθμος dfs εφαρμοσμένος μόνο μια φορά, μπορεί να βοηθήσει για να απαντήσουμε αν ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι ασθενώς συνεκτικός αλλά όχι για να απαντήσουμε αν είναι ισχυρά συνεκτικός.
	Για το πρόβλημα διάσχισης γράφων δεν έχει βρεθεί μέχρι στιγμής πολυωνυμικός αλγόριθμος ως προς το πλήθος των κόμβων
	Αν το συμπλήρωμα ενός συνόλου S είναι αποκρίσιμο, τότε το σύνολο S είναι καταγράψιμο

4. (10) Για το παρακάτω γράφημα βρείτε τις ελάχιστες αποστάσεις ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών, με τον αλγόριθμο των Floyd-Warshall. Δώστε όλες τις ενδιάμεσες τιμές δηλαδή 6 πίνακες.



5. (10) Εστω ένας γράφος $G=(V,E)$ χωρίς κατευθύνσεις. Με $\deg(v)$ συμβολίζουμε τον βαθμό του κόμβου v .
- Διατυπώστε μια σχέση (εξίσωση) μεταξύ του $|E|$ και των βαθμών όλων των κόμβων του V .
 - Αποδείξτε ότι ο γράφος περιέχει άρτιο αριθμό κόμβων περιττού βαθμού.
 - Αποδείξτε: Σε κάθε γράφο με περισσότερους από δύο κόμβους υπάρχουν δύο κόμβοι με τον ίδιο βαθμό.
6. (12) Σε ένα σταθμό λεωφορείων, η δρομολόγια για n αντίστοιχα λεωφορεία έχουν προγραμματιστεί για μια συγκεκριμένη μέρα κάθε ένα με τη δική του ώρα αναχώρησης και επιστροφής. Ένας υπάλληλος της εταιρίας επιθυμεί να συμμετάσχει σε δρομολόγια ώστε να λάβει στατιστικά στοιχεία για κάθε διαδρομή από την έναρξή της μέχρι και την επιστροφή της στο σταθμό. Εξετάστε αν ο υπάλληλος εφαρμόζοντας κάποιο άπληστο κριτήριο, μπορεί να επιλέξει τα δρομολόγια στα οποία θα συμμετάσχει ώστε να λάβει μέρος σε όσο το δυνατό περισσότερες διαδρομές σε μία μέρα; (Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.)

7. (12) Σχεδιάστε έναν όσο το δυνατό πιο αποδοτικό αλγόριθμο (και αναφέρατε την πολυπλοκότητά του) που θα απαντάει στην ερώτηση αν υπάρχει στοιχείο σε ένα πίνακα A με n στοιχεία το οποίο πλειοψηφεί, δηλαδή εμφανίζεται περισσότερες από $n/2$ φορές. Υποθέστε πως στη διάθεση σας έχετε μόνο την σύγκριση ισότητας '=' δύο στοιχείων και όχι τις συγκρίσεις '<' και '>'. (Δεν μπορούμε να ταξινομήσουμε).
8. (12) Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο πολυπλοκότητας $O(n)$ που σε ένα πίνακα n (το πλήθος) στοιχείων ταξινομεί τα πρώτα \sqrt{n} (το πλήθος) στοιχεία.

9. (12) Θεωρήστε γνωστό ότι το πρόβλημα του κύκλου Hamilton σε γράφους χωρίς κατεύθυνση είναι NP-πλήρες. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του μονοπατιού Hamilton (υπάρχει μονοπάτι που διέρχεται από κάθε κόμβο του γράφου ακριβώς μια φορά;) σε γράφους χωρίς κατεύθυνση είναι NP-πλήρες.