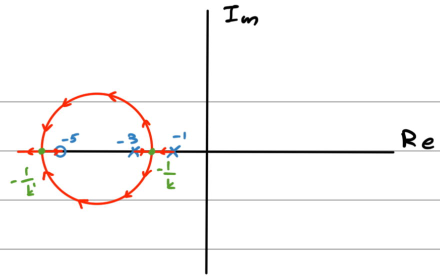
$G_o(s) = \dfrac{s+5}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow \varphi_k(s) = (s+1)(s+3) + k(s+5)$

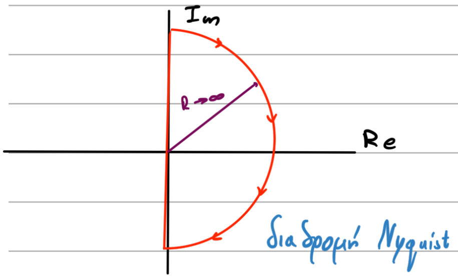


Σημεία θλάσης: $\dfrac{d}{ds}\left\{\dfrac{1}{G_o(s)}\right\} = \dfrac{d}{ds}\left\{\dfrac{(s+1)(s+3)}{s+5}\right\} = \dfrac{s^2+10s+17}{(s+5)^2} = 0 \Rightarrow \tilde{s} = -5 \pm \sqrt{8} = \begin{cases} -2{,}171 \\ -7{,}829 \end{cases}$

$G_o(\tilde{s}) = G_o(-5 \pm \sqrt{8}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{8}-6} = -\dfrac{1}{k} \Rightarrow k = 6 - 2\sqrt{8} > 0, \text{ αποδεκτό} \\ \dfrac{1}{-2\sqrt{8}-6} = -\dfrac{1}{k'} \Rightarrow k' = 6 + 2\sqrt{8} > 0, \text{ αποδεκτό} \end{cases}$

Άσκηση

Δίνεται $G(s) = \dfrac{4(s+10)}{(s-10)(s+2)}$. Να σχεδιαστεί η διαδρομή και το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$. Να βρεθούν τα σημεία τομής του διαγράμματος με τον πραγματικό άξονα.



$G(j\omega) = \dfrac{4(j\omega+10)}{(j\omega-10)(j\omega+2)} = \dfrac{4(10+j\omega)(-10-j\omega)(2-j\omega)}{(4+\omega^2)(10+\omega^2)} = \dfrac{-4(10+j\omega)^2(2-j\omega)}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)} = \dots =$

$= \dfrac{-4(200-2\omega^2+20\omega^2) - 4j\omega(40-100+\omega^2)}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow R(\omega) = Re\{G(j\omega)\} = \dfrac{-8(100-\omega^2+10\omega^2)}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)} < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

$X(\omega) = Im\{G(j\omega)\} = \dfrac{-4\omega(60+\omega^2)}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)}$

Για $\omega = 0^{\pm}$: $R(0^{\pm}) = \dfrac{-800}{400} = -2, \quad X(0^{\pm}) = 0$

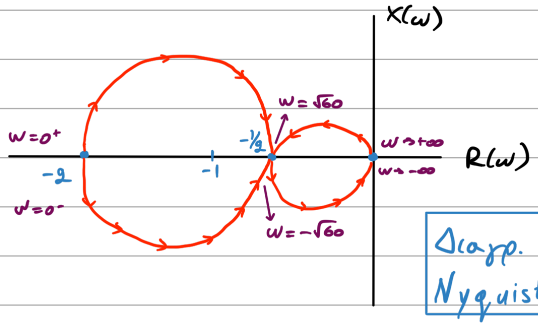
Για $\omega = \pm\sqrt{60}$: $X(\pm\sqrt{60}) = 0, \quad R(\pm\sqrt{60}) = -0{,}5$

Για $\omega \in (0, \sqrt{60})$: $\omega^2 < 60 \Rightarrow X(\omega) > 0$

Για $\omega > \sqrt{60}$: $\omega^2 > 60 \Rightarrow X(\omega) < 0$

Για $\omega < -\sqrt{60}$: $|\omega| > \sqrt{60} \Rightarrow \omega^2 > 60 \Rightarrow X(\omega) > 0$

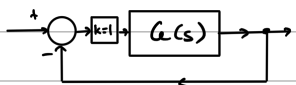
Για $\omega \in (-\sqrt{60}, 0)$: $|\omega| < \sqrt{60} \Rightarrow \omega^2 < 60 \Rightarrow X(\omega) < 0$



Διαγρ. Nyquist

$\lim\limits_{\omega\to\pm\infty} R(\omega) = \lim\limits_{\omega\to\pm\infty} \dfrac{-\frac{8}{\omega^2}\left(9+\frac{100}{\omega^2}\right)}{\left(1+\frac{100}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{4}{\omega^2}\right)} = 0, \quad \lim\limits_{\omega\to\pm\infty} X(\omega) = \dfrac{-\frac{4}{\omega}\left(\frac{60}{\omega^2}-1\right)}{\left(1+\frac{100}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{4}{\omega^2}\right)} = 0$

↳ Να εξεταστεί η ευστάθεια του:



Κέρδος $k=1 \Rightarrow$ κρίσιμο σημείο $\left(-\dfrac{1}{k}, 0\right) = (-1, 0)$

$N = 1$ περιτριγύρισμα του $(-1,0)$

$P = 1$ πόλος της $G(s)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο

$\Rightarrow$ Κριτήριο Nyquist: $Z = N + P = 1+1 = 2$ πόλοι του κλειστού βρόχου στο δεξί ημιεπίπεδο $\Rightarrow$ $\boxed{\text{αστάθεια}}$

Ανάδραση κατάστασης: $u(t) = -Kx(t)$

Προς έλεγχο σύστημα: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ → αν ελέγξιμο τότε $\exists K$ ώστε οι πόλοι του αντισταθμισμένου να είναι σε αυθαίρετες θέσεις

↳ **Αντισταθμισμένο σύστημα:** $\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = [A - BK]x(t) \\ y(t) = Cx(t) - DKx(t) = [C - DK]x(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Χαρακτηριστική εξίσωση του αντισταθμισμένου:

$$\varphi_k(s) = \det[sI - A + BK] = 0$$

↳ **Ανάδραση εξόδου:** $u(t) = -Ky(t) = -KCx(t) - KDu(t) \Longrightarrow u(t) = -[I + KD]^{-1}KC\,x(t)$

$\dot{x}(t) = [A - B[I + KD]^{-1}KC]\,x(t) \Longrightarrow$ Χαρακτηριστική εξίσωση του αντισταθμισμένου:

$$\varphi_\varepsilon(s) = \det[sI - A + B[I + KD]^{-1}KC] = 0$$

Άσκηση

α) $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} u(k)$, $x(0) = x_0$. Να μετατοπισθούν οι ιδιοτιμές του συστήματος στις θέσεις 0,7 και −0,7 με ανατροφοδότηση κατάστασης $u(k) = -[k_1\ k_2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[k_1\ k_2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - k_1 & -1 - k_2 \\ 2 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix}}_{A_k}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$

- Το χαρακτηριστικό πολ. του αντισταθμισμένου: $\varphi_k(z) = \det[zI - A_k] = \det\begin{bmatrix} z - 1 + k_1 & 1 + k_2 \\ -2 + k_1 & z + 1 + k_2 \end{bmatrix} =$

$= (z - 1 + k_1)(z + 1 + k_2) - (1 - k_2)(-2 + k_1) = \ldots = z^2 + (k_1 + k_2)z + k_2 + 1$

- Το επιθυμητό χαρακτ. πολ.: $\varphi_{\varepsilon\pi}(z) = (z - 0{,}7)(z + 0{,}7) = z^2 - 0{,}49$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + 1 = -0{,}49 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-k_1 = k_2 = -1{,}49}$

β) Να μετατοπισθούν οι ιδιοτιμές του συστήματος στις θέσεις 0,7 και −0,7 με ανατροφοδότηση κατάστασης $u(k) = -[F_1\ F_2]\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$ → $y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \overset{D}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} u(k)$

- $u(k) = -[F_1\ F_2]\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = -[F_1\ F_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - [F_1\ F_2]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) =$

$= -[F_1 + F_2\ \ F_2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - (2F_1 + F_2)u(k) \Longrightarrow u(k) = \dfrac{-1}{1 + 2F_1 + F_2}[F_1 + F_2\ \ F_2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$

- Αντισταθμισμένο: $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - \dfrac{1}{1 + 2F_1 + F_2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[F_1 + F_2\ \ F_2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} =$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \dfrac{F_2 + F_1}{1 + 2F_1 + F_2} & -1 - \dfrac{F_2}{1 + 2F_1 + F_2} \\ 2 - \dfrac{F_2 + F_1}{1 + 2F_1 + F_2} & -1 - \dfrac{F_2}{1 + 2F_1 + F_2} \end{bmatrix}}_{A_{\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau.}}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

- $\varphi_{\alpha\nu\tau}(z) = \det\{zI - A_{\alpha\nu\tau}\} = \varphi_{\varepsilon\pi}(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$