3η Διάλεξη Παρασκευή 11/3/22. Κολίτσος

Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων
Μέθοδος Απαλοιφής Gauss, επανάληψη:

επαυξημένος πίνακας
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Με κατάλληλες γραμμοπράξεις μηδενίζουμε τους όρους κάτω από το pivot element. Φτάνουμε σε πίνακα κλιμακωτό άνω. Αυτό ονομάζεται τριγωνοποίηση. ~~Επειτα αλγορίθμου~~

Περιγράφεται με τον αλγόριθμο:

$k = 1, 2, \ldots n-1$

$i = k+1, \ldots, n$

$$p_i = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

$j = k+1, \ldots n$

$$a_{ij} = a_{ij} - p_i a_{kj}$$

$$b_i = b_i - p_i \cdot b_k$$

Μετά πίσω αντικατάσταση:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$k = n-1, \ldots 1$

$$x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} \cdot x_j\right) \Big/ a_{kk}$$

Note: Ο Η/Υ δεν μηδενίζει τους όρους κάτω από τα pivot elements για να κερδίσει χρόνο,

Επιστρέφουμε στο θέμα του προηγούμενου μαθήματος

Η μεγάλη απόκλιση προέκυψε από τη μεγάλη διαφορά στο μέγεθος των συντελεστών, κατά τη διαίρεση είχαμε μικρό παρονομαστή.

Για την αντιμετώπιση του ζητήματος:

Μέθοδος απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση (partial pivoting)

Ιδέα: ψάχνω στη 1η στήλη να ορίσω ως p.e το μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο, το φέρνω στη πρώτη γραμμή. Ομοίως στη 2η στήλη φέρνω στη 2η γραμμή τον μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή μεταξύ των γραμμών 2 έως n, κ.λπ. κ.λπ. Η πίσω αντικατάσταση δεν αλλάζει.

(σε μερικά βιβλία ονομάζεται μερική οδήγηση κατά στήλες, σε αντίθεση με την -//- κατά γραμμές, την οποία δε θα την δούμε)

Θα μπορούσε κάποιος να κάνει πλήρη οδήγηση, δηλαδή να ορίσει ως p.e. το μεγαλύτερο όρο ολόκληρου του πίνακα, αλλά έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό φόρτο.

Παράδειγμα

$$x+y+z=6$$
$$2x-y+z=3$$
$$3x+2y-z=4$$

Δημιουργώ τον επαυξ. πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$|3|>|1|$

$|3|>|2|$

άρα $e_1 \rightarrow e_3$

$$\begin{matrix} p_2 = 2/3 \\ \sim \\ p_3 = 1/3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - p_3 \ell_1}{\overset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - p_2 \ell_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & +1/3 & 4/3 & 14/3 \end{array}\right)$$

<u>Σημείωση</u>: Η διάταξη που παρουσιάζεται στην εξής περίπτωση στη 1η στήλη $(3, 2, 1)$ είναι τυχαία. Δε με αφορά η σειρά των όρων πέρα του p.e.

$\left|-\frac{7}{3}\right| > \left|+\frac{1}{3}\right|$, άρα δε χρειάζεται αναλλαγή γραμμών.

$$p_3 = \frac{1/3}{-7/3} = -1/7$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 11/7 & 33/7 \end{array}\right)$$

$$\cancel{\frac{4}{3} + \frac{5}{21} = \frac{28+5}{21} = \frac{33}{21}}$$

<u>Ως εξισώσεις</u>:
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -\tfrac{7}{3}x_2 + \tfrac{5}{3}x_3 &= 1/3 \\ \tfrac{11}{7}x_3 &= 33/7 \end{aligned}$$

$\boxed{x_3 = 3}$, $-\frac{7}{3}x_2 + 3 \cdot \frac{5}{3} = 1/3$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$

$3x_1 + 2 \cdot 2 - 3 = 4$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Σε όλο το μάθημα και στις εξετάσεις θεωρούμε δεδομένο το partial pivoting όταν κάνω Μ.Α. Gauss.
- Αν ζητείται ακριβείς πράξεις, σημαίνει πράξεις με κλάσματα.

Πολύ συχνά θα χρειαστεί να επιλύσουμε σύνολο συστημάτων

$$\begin{aligned} Ax &= b_1 \\ Ax &= b_2 \\ Ax &= b_3 \\ &\vdots \\ Ax &= b_k \end{aligned}
\qquad
(A \,\vdots\, b_1 b_2 \dots b_k) \sim \big(\underbrace{\nabla}_{\text{άνω κλιμακωτός}} \,\vdots\, b_1' b_2' \dots b_k'\big)$$

$$(\nabla \,\vdots\, b_1')$$

$$(\nabla \,\vdots\, b_2')$$

$$\vdots$$

$A_{n\times n}$ ανεξάρτητος του k) Τα παραπάνω δίνουν αφορμή για μία μαθηματική μέθοδο εύρεσης του αντιστρόφου:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{γραμμή } i$$

$$(A_{n\times n} \,\vdots\, e_1 e_2 e_3 \dots e_n),$$

$$\sim (\nabla \,\vdots\, e_1' e_2' e_3' \dots e_n')$$

$$\left.\begin{aligned} A'\cdot x &= e_1' \Rightarrow x = X_1 \\ A'\cdot x &= e_2' \Rightarrow x = X_2 \\ A'\cdot x &= e_3' \Rightarrow x = X_3 \\ &\vdots \\ A'\cdot x &= e_n' \Rightarrow x = X_n \end{aligned}\right\} \longrightarrow X = (X_1 X_2 X_3 \dots X_n)$$

$$A\cdot X = (e_1 e_2 e_3 \dots e_n)$$

$$AX = I$$

$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}}$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο A^{-1} με τη Μ. μερική οδήγησης

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$ Δημιουργώ τον επαυξ. πίνακα $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$|4| > |2|$ & $|4| > |0|$ άρα $e_1 \leftrightarrow e_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -5 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$P_2 = 1/2$

$|8| > |3/2|$ άρα $e_2 \leftrightarrow e_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -43/8 & 1 & -1/2 & -3/16 \end{array}\right)$$

$= 3/16$

$$|A| = 4 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{43}{8}\right)(-1)^{m=2} = -172$$

όπου m ο αριθμός των αναλλαγών γραμμών που έγιναν

$$\left.\begin{array}{l} 4x_{11} - x_{21} = 0 \\ 8x_{21} + 2x_{31} = 0 \\ -\frac{43}{8}x_{31} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{11} = \frac{1}{86} \\ x_{21} = \frac{2}{43} \\ x_{31} = -\frac{8}{43} \end{array}\right. \quad X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/86 \\ 2/43 \\ -8/43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 4x_{12} - x_{22} = 1 \\ 8x_{22} + 2x_{32} = 0 \\ -\frac{43}{8}x_{32} = -\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{12} = 21/86 \\ x_{22} = -1/43 \\ x_{32} = \frac{4}{43} \end{array}\right. \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/86 \\ -1/43 \\ 4/43 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_{13} - x_{23} = 0 \\ 8x_{23} + 2x_{33} = 1 \\ -\frac{43}{8}x_{33} = -3/16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{13} = 5/172 \\ x_{23} = 5/43 \\ x_{33} = 3/86 \end{array}\right. \quad X_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/172 \\ 5/43 \\ 3/86 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = X = (X_1\ X_2\ X_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{86} & 21/86 & 5/172 \\ 2/43 & -1/43 & 5/43 \\ -8/43 & 4/43 & 3/86 \end{pmatrix}$$