Ευστάθεια

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ αυτόνομο σύστημα

↳ x_0 τω $f(x_0)=0$ σημείο ευστάθειας

Ορισμός

Το x_0 λέγεται ευσταθές (κατ' Lyapunov) αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ τω:

$\|x(0)-x_0\|<\delta \Rightarrow \|x(t)-x_0\|<\varepsilon$ $\quad \forall t\geq 0$

Το x_0 λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν $\exists \delta_a>0$ τω:

$\|x(0)-x_0\|<\delta_a \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\{x(t)\}=x_0$

A) Άμεση μέθοδος Lyapunov (2η μέθοδος Lyapunov)

Αν $\bar{x}(t)=x(t)-x_0$ τότε $\dot{\bar{x}}(t)=\dot{x}(t)=f(x(t))=f(\bar{x}(t)+x_0)=\bar{f}(\bar{x}(t))$ οπότε $f(x_0)=0 \Rightarrow \bar{x}_0=0$ είναι σημείο ισορροπίας του $\dot{\bar{x}}(t)=\bar{f}(\bar{x}(t))$

Ορισμοί

Ας είναι $D\subset R^n$ τω $0\in D$ και $V: D\to R$ τω $V(0)=0$. Η V λέγεται:

↳ Θετικά (αρνητικά) ορισμένη στο D αν: $V(x)>0$ $(<)$, $\forall x\in D^*$

↳ Θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη στο D αν: $V(x)\geq 0$ $(\leq)$, $\forall x\in D$ και $\exists \hat{x}\neq 0$ τω $V(\hat{x})=0$

Συνάρτηση Lyapunov: οποιαδήποτε συνάρτηση $V(x)$, $V: R^n\to R$ τω $V(0)=0$ υπολογισμένη κατά μήκος μίας λύσης $x(t)$ του $\dot{x}(t)=f(x(t))$, $f(0)=0$, δηλαδή $V(x(t))$.

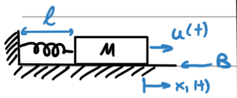
↳ Τότε:
$$\frac{dV(x(t))}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i(t)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\right|_{x=x(t)}\cdot f_i(x(t))=\nabla V(x(t))^T f(x(t))$$

Θεώρημα Lyapunov: ας είναι $\dot{x}(t)=f(x(t))$, $f(0)=0$. Έστω ότι $\exists$ μία συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά συνάρτηση Lyapunov $V(x)$ και έστω ότι $\exists k>0$ τω για το σύνολο: $D=\{x\in R^n : V(x)\leq k\}$ η συνάρτηση $\frac{dV(x(t))}{dt}=\nabla V(x(t))^T f(x(t))$ είναι:

→ αρνητικά ημιορισμένη στο σύνολο D τότε $x_0=0$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

→ αρνητικά ορισμένη στο σύνολο D τότε $x_0=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα



Μη γραμ. ελατήριο: $F_{ελ}=k\ell\left(1-\frac{\ell^2}{4}\right)$

• Εξισώσεις κατάστασης: $x_2(t)=\dot{x}_1(t)$ (επιτάχυνση)

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2(t)\\ -\frac{k}{M}x_1(t)\left(1-\frac{x_1^2(t)}{2}\right)-\frac{B}{M}x_2(t)+\cancel{\frac{u(t)}{M}}^{\,0}\end{bmatrix}$$

• Σημεία ισορροπίας: → $x_{02}=0$

→ $-\frac{k}{M}x_{01}\left(1-\frac{x_{01}^2}{2}\right)-\cancel{\frac{B}{M}x_{02}}^{\,0}=0 \Rightarrow$ → $x_{01}=0$, ↘ $x_{01}=\pm\sqrt{2}$

δηλαδή: $x_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\bar{x}_0=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$, $\bar{x}_0'=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

Για το $x_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ θεωρούμε την $V(x)=\frac{1}{2}Mx_2^2+\frac{1}{2}kx_1^2\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)$

- Η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη στο σύνολο $\Delta = \{x \in R^2 : |x_1| < 2\}$

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \nabla V(x)\Big|^{T}_{x=x(t)} \cdot f(x(t)) = \left[k x_1(t) - k\frac{x_1^3(t)}{2}, \quad M x_2(t)\right] \cdot \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{M}x_1(t)\left(1-\frac{x_1^2(t)}{2}\right) - \frac{B}{M}x_2(t)\end{bmatrix} =$$

$$= k x_1(t) x_2(t)\left[1-\frac{x_1^2(t)}{2}\right] - k x_1 x_2 \left[1-\frac{x_1^2(t)}{2}\right] - B x_2^2(t) = -B x_2^2(t) \le 0 \xrightarrow{\text{Θ. Lyapunov}} x_0 = 0, \text{ ευσταθές}$$

B) Η έμμεση μέθοδος Lyapunov (1η μέθοδος Lyapunov)

Χρησιμοποιείται το γραμμικοποιημένο γύρω από το x_0 σύστημα

Θεώρημα: Ας είναι $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $f(x_0)=0$. Ας είναι $A = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]_{x=x_0}$ και έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $x=x_0$. Τότε:

i) αν όλες οι ιδιοτιμές της A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε το x_0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

ii) αν η A έχει τουλ. 1 ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος, τότε το x_0 είναι ασταθές κατ. ισορ.

iii) αν η A έχει τουλ. 1 ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος, και οι υπόλοιπες έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε κανένα συμπέρασμα δεν προκύπτει σχετικά με την ευστάθεια ή όχι της κατάστασης ισορροπίας x_0.

Στο παράδειγμα:

Για το $x_0 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ είναι: $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M}\left(1-\frac{3}{2}x^2\right) & -B/M\end{bmatrix}$, $A = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]_{x=x_0=0} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & -B/M\end{bmatrix}$

$$\det[\lambda I - A] = \det\begin{bmatrix}\lambda & -1 \\ k/M & \lambda + B/M\end{bmatrix} = \dots = \lambda^2 + \frac{B}{M}\lambda + \frac{k}{M} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{B}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{M}\right)^2 - 4\frac{k}{M}}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow Re\{\lambda_{1,2}\} < 0 \Rightarrow$ ασυμπτωτική ευστάθεια