Πέμπτη, 10/11/2022

$\dot{x} = Ax + Bu$

(A, B) · ελέγξιμο

$\bar{x} = Tx$: μετασχ. ομοιότητας

$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$

$\bar{A} = TAT^{-1}, \ \bar{B} = TB$

$$\bar{\mathcal{C}} = [\bar{B} \ \ \bar{A}\bar{B} \ \dots \ \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = [TB \ \ TAT^{-1}TB \ \dots \ TA^{n-1}TTB]$$
$$= [TB \ \ TAB \ \dots \ TA^{n-1}B] = T[B \ \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$\bar{\mathcal{C}} = T\mathcal{C} \Rightarrow \text{rank}(\bar{\mathcal{C}}) = \text{rank}(\mathcal{C})$

<u>Άσκηση</u>: Αν (A,B) ελέγξιμο $\Rightarrow (A+BK, B)$ ελέγξιμο.

<u>Παρατηρησιμότητα</u> (observability)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}\right\} \qquad u \to \boxed{\Sigma} \to y$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

<u>Παρατηρήσιμο</u>: Αν $\forall t > 0$ μετρώντας u, y στο $[0,t]$ μπορώ να υπολογίσω το $x(t) \Leftrightarrow x(0)$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)\,ds + Du(t)$$

$x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^p, \ u \in \mathbb{R}^m, \ p \leq n, \ m \leq n$ ↳ p εξισώσεις με n αγνώστους

$$z(t) \triangleq y(t) - Du(t) - \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)\,ds \Leftrightarrow z(t) = \underbrace{Ce^{At}}_{p \times n} x(0)$$

∃ μοναδική λύση αν: $W_o(t) = \int_0^t \underbrace{e^{A^T s}C^T C e^{As}}_{n \times n} ds > 0 \quad \forall t > 0$

(C, A) παρατηρήσιμο

$$z(t) = Ce^{At}x(0) \Rightarrow e^{A^T t}C^T Ce^{At}x(0) = e^{A^T t}C^T z(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_0^t e^{A^T s}C^T Ce^{As}ds \, x(0) = \int_0^t e^{A^T s}C^T z(s)\,ds \Rightarrow x(0) = W_o^{-1}(t)\int_0^t e^{A^T s}C^T z(s)\,ds$$

η συνθήκη αυτή είναι και αναγκαία

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T s} C^T C e^{As} ds$$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{As} B B^T e^{A^T s} ds$$

(C, A) παρατηρήσιμο $\Leftrightarrow$ (A^T, C^T) ελέγξιμο

Έστω $W_o(t)$ έχει ιδιοτιμή στο 0 για $t^* > 0$.
Έστω $v \neq 0$ το ιδιοδιάνυσμα

$$v^T W_o(t^*) v = 0 \Rightarrow C e^{At} v = 0 \quad \forall t \in [0, t^*]$$

$x(0) = 0$, $x(0) = v$

$$y(t) = C e^{At} x(0) + Du(t) + \int_0^t C e^{A(t-s)} B u(s) ds$$

2) (A^T, C^T) πίνακας ελεγξιμότητας: $\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \text{observability matrix}$$

$\text{rank}(O) = n \Rightarrow (C, A)$ παρατηρήσιμο

3) Hautus Test: $\begin{bmatrix} A^T - \lambda I & C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}^T$

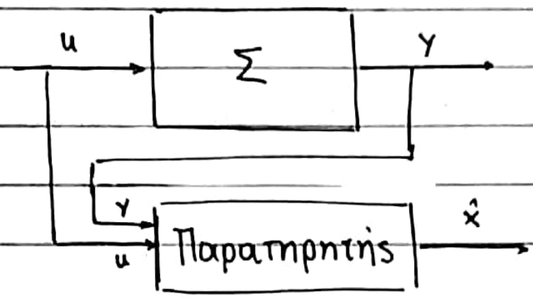
$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

4) $v^H A^T = \lambda v^H$; $v^H C^T = 0$

Αν $Av = \lambda v$, $Cv \neq 0$ ιδιοτιμή λ παρατηρήσιμο

5) $A^T + C^T K = (A + \underbrace{K^T}_{L} C)^T$

Οι ιδιοτιμές του $A + LC$ μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα.



$$\dot{\hat{x}} = A_n \hat{x} + B_n \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}, \quad y_n = \hat{x}$$

$[B_{n_1}, B_{n_2}]$

$$\lim_{t \to +\infty} \underline{\hat{x}(t) - x(t)} = 0, \quad \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq Ce^{-\lambda t}$$

$$e(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t) \Rightarrow \hat{x} = e + x$$

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = \underbrace{A_n \hat{x} + B_{n_1} u + B_{n_2} y}_{\dot{\hat{x}}} - (Ax + Bu)$$

$$\Rightarrow \dot{e} = A_n e + A_n x + B_{n_1} u + B_{n_2}(Cx + Du) - Ax - Bu$$

$$\dot{e} = A_n e + (\cancel{A_n + B_{n_2} C - A})x + (\cancel{B_{n_1} + B_{n_2} D - B})u$$

Επιλέγω: $B_{n_1} = B - B_{n_2} D$

$A_n = A - B_{n_2} C$

$\Rightarrow \dot{e} = (A - B_{n_2} C) e \qquad (L = B_{n_2})$

Επιλέγω B_{n_2} που τοποθετεί τις ιδιοτιμές του $A - B_{n_2} C$ στις επιθυμητές θέσεις.

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + (B - LD)u + Ly$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \underbrace{(C\hat{x} + Du)}_{\hat{y}})} \rightarrow \text{Luenberg observer}$$

πλήρους τάξης

Ανιχνεύσιμο (C,A) (detectable)

Αν οι μη παρατηρήσιμες ιδιοτιμές του A είναι στο αρ. μιγ. ημιεπίπεδο

$\dot{x} = Ax + Bu$

$u = Kx$ τ.ω. $\lambda_i(A+BK) = \lambda_{i,d}$

↳ επιθυμ. ιδιοτιμή

(A, B) ελέγξιμο κ' (C, A) παρατηρήσιμο

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Dy)$$

$$u = K\hat{x}$$

$$x_{ag} = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_{ag} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + BK\hat{x} \\ A\hat{x} + BK\hat{x} + LCx - LC\hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_{ag} = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A+BK-LC \end{bmatrix} x_{ag}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & +I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\dot{e} = (A-LC)e$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + BK\overbrace{\hat{x}}^{e+x} \\ (A-LC)e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

↳ σχεδιάζω ξεχωριστά ελεγκτή κ' παρατηρητή

(Ιδιοτιμές παρατηρητή να είναι 5 φορές πιο αριστερά από ιδιοτιμές ελεγκτή για να συγκλίνει πιο γρήγορα)

$d(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ → διαταραχή

A, ϕ άγνωστα, ω: γνωστό.

$$\dot{x} = x + u + d(t)$$

Νόμος ελέγχου =; τ.ω. $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$

$$\dot{d} = \omega A\cos(\omega t+\varphi) \to \ddot{d} = -\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi) = -\omega^2 d \to \ddot{d} = -\omega^2 d$$

$$x_{ag} = \begin{bmatrix} x \\ d \\ \dot{d} \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_{ag} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{d} \\ \ddot{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+u+d \\ \dot{d} \\ -\omega^2 d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{ag}} \begin{bmatrix} x \\ d \\ \dot{d} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{ag}} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{ag}} \begin{bmatrix} x \\ d \\ \dot{d} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{ag} = \begin{bmatrix} C_{ag} \\ C_{ag}A_{ag} \\ C_{ag}A_{ag} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O}_{ag} = 1 \neq 0 \to \text{παρατηρήσιμο}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{d} \\ \dot{\hat{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{d} \\ \dot{\hat{d}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}}_{L} (x - \hat{x}), \quad x_{ag} = \begin{bmatrix} x \\ d \\ \dot{d} \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} \hat{x} - x \\ \hat{d} - d \\ \dot{\hat{d}} - \dot{d} \end{bmatrix}, \quad \dot{e} = (A_{ag} - LC_{ag})\, e \Rightarrow$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 \\ l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \dot{e} = \begin{bmatrix} 1-l_1 & 1 & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 \\ -l_3 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} e$$

$$u = -\hat{d} - x - K(x - x^*), \quad \frac{d}{dt}(x - x^*) = -K(x - x^*) - (\hat{d} - d)$$

Scanned with CamScanner