Δευτέρα, 17/10/2022

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\,ds$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \left[ \int_0^t Ce^{A(t-s)} Bu(s)\,ds + Du(t) \right]$$

## Εκθετικός Πίνακας

$$e^{At} \triangleq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{ (s\mathbb{I}-A)^{-1} \}$$

## Ιδιότητες

1) $e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$

$\dot{x} = Ax$

$x(t) = e^{At}x(0)$

$$\begin{aligned} x(t_1+t_2) &= e^{A(t_1+t_2)}x(0) \\ &= e^{At_2}x(t_1) \\ &= e^{At_2}e^{At_1}x(0) \end{aligned}$$

2) $e^{At}e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$

Ισότητα ισχύει αν $AB = BA$

Αν ο $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος

$$A = U \Lambda U^{-1}$$

όπου $\Lambda$ διαγώνιος, $\Lambda = diag\{\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)\}$

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$$

↳ ιδιοδιανύσματα του $A$

$$A u_i = \lambda_i u_i$$

$$AU = A[u_1 \ u_2 \dots u_n] = [Au_1 \ Au_2 \ \dots \ Au_n]$$
$$= [\lambda_1 u_1 \ \lambda_2 u_2 \ \dots \ \lambda_n u_n] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathbb{I} + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

$$A^2 = A \cdot A = U\Lambda U^{-1} \cdot U \Lambda U^{-1} = U \Lambda^2 U^{-1}$$
$$A^k = (U\Lambda U^{-1}) \cdot \dots \cdot (U \Lambda U^{-1}) = U \Lambda^k U^{-1}$$

$$e^{At} = \mathbb{I} + U\Lambda U^{-1} t + \frac{t^2}{2!} U \Lambda^2 U^{-1} + \dots$$

$$= U \left[ \mathbb{I} + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \dots \right] U^{-1}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 t + \lambda_1 \frac{t^2}{2} \dots & & 0 \\ & 1+\lambda_2 t + \lambda_2 t^2/2 & \\ 0 & & \ddots \ 1+\lambda_n t + \lambda_n \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

3) $e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1}$, αν $A$ διαγωνοποιήσιμος

Scanned with CamScanner

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - \mathbb{I})U_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U_1 = 0 \Rightarrow U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2\mathbb{I})U_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_2 = 0 \Rightarrow U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = [U_1 \quad U_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Ue^{\Lambda t}U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} - e^{t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός Εκθετικού Πίνακα μέσω Θ. Cayley - Hamilton

↳ (κάθε πίνακας ικανοποιεί το χαρακτ. πολυώνυμό του)

$$e^{At} = \mathbb{I} + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\psi(s) = \det(s\mathbb{I} - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$

$$\psi(\lambda_i) = 0$$

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0\mathbb{I} = 0$$

$$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$$

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k A^k$$

$$e^{At} = f_0(t)\mathbb{I} + f_1(t)A + \dots + f_{n-1}(t)A^{n-1}$$

$$e^{\lambda_i t} = f_0(t) + f_1(t)\lambda_i + \dots + f_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

↳ Vandermonde matrix $\quad \det V = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$

Αν ιδιοτιμή είναι πολλαπλή

$$\det(s\mathbb{I}-A) = (s-\lambda_i)^k \cdot \ldots$$

$$e^{st} = 1 + st + \frac{s^2t^2}{2!} + \ldots = \psi(s)\pi(s) + r(s)$$

$$r(s) = f_0(t) + f_1(t)s + \ldots + f_{n-1}(t)s^{n-1}$$

$$e^{At} = \psi(A)\pi(A) + r(A)$$

$d/ds$

$$te^{st} = \frac{d\psi}{ds}\pi(s) + \psi(s)\frac{d\pi}{ds} + \frac{dr}{ds} \xrightarrow[\text{πολλ. ρίζα}]{s=\lambda_i} te^{\lambda_i t} = \left.\frac{dr}{ds}\right|_{s=\lambda_i}$$

$$\frac{dr}{ds} = f_1(t) + 2f_2(t)s + \ldots + (n-1)f_{n-1}(t)\cdot s$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad e^{At} = f_0(t) + f_1(t)A$$

$$e^{1\cdot t} = f_0(t) + f_1(t) \rightarrow f_1(t) = e^{2t} - e^{t}$$

$$e^{2\cdot t} = f_0(t) + 2f_1(t) \qquad f_0(t) = e^{t} - f_1(t) = 2e^{t} - e^{2t}$$

$$e^{At} = (2e^{t} - e^{2t})\mathbb{I} + (e^{2t} - e^{t})\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} - e^{t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

# Διάσπαση σε κανονική μορφή Jordan

$A = UJU^{-1}$

↳ έχει στήλες ιδιοδιανύσματα + γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & & & & & & \\ & J_{12} & & & & 0 & \\ & & \ddots\, J_{1,n_1} & & & & \\ & & & J_{21} & & & \\ & 0 & & & J_{22} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{k,n_k} \end{bmatrix}$$

$J_{ij} \in \mathbb{C}^{l_{ij} \times l_{ji}}$

ιδιοτιμή $\lambda_1$ εμφανίζεται $\sum_{j=1}^{n_1} l_{ij}$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} = n$$

ιδιοτιμή $\lambda_1$ εμφανίζεται $\sum_{j=1}^{n} l_{ij}$

π.χ. Πίνακας $10 \times 10$

3 ιδιοτιμές: $\lambda_1$ με πολ. 5 $\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ ή $\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$

$\lambda_2$ με -"- 3

$\lambda_3$ με -"- 2

$(A - \lambda_i \mathbb{I}), (A - \lambda_i \mathbb{I})^2, \dots$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

↳ Jordan Blocks

$AU = UJ$

$$A[u_1\ u_2\ \dots\ u_{l_1}\ \dots] = [u_1\ u_2\ \dots\ u_{l_1}\ \dots] \begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

$Au_1 = \lambda_1 u_1$

$Au_2 = u_1 + \lambda_1 u_2 \Rightarrow (A - \lambda_1 \mathbb{I}) u_2 = u_1 \Rightarrow (A - \lambda_1 \mathbb{I})^2 u_2 = 0$

$(A - \lambda_1 \mathbb{I}) u_{l_1} = u_{l_1 - 1} \Rightarrow (A - \lambda_1 \mathbb{I})^{l_1} u_{l_1} = 0$

$u_2 = \ker[(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2]$

$d_i = \dim \ker[(A - \lambda_i \mathbb{I})^i]$

$\underset{n \times n}{\ker\{Q\}} = \{ y \in \mathbb{C}^n \mid Qy = 0 \}$

$A$ $3\times3$ πίνακας, $rank(A) = 2$

$\boxed{rank(A) + \dim(\ker A) = n}$

$rank(A - \lambda_1 \mathbb{I}) \longrightarrow \dim \ker(A - \lambda_1 \mathbb{I}) = n - rank(A - \lambda_1 \mathbb{I}) = d_1$, $d_0 = 0$

έχουμε $d_1 - d_0$ Jordan blocks διάστασης τουλάχιστον 1

Επόμενο βήμα: $rank[(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2] \longrightarrow \dim \ker[(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2] = d_2$

$\Rightarrow d_2 - d_1$ blocks με διάσταση $\geq 2$

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$ έχει τριπλή ιδιοτιμή $\lambda = 1$

$$A - \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow rank(A - \mathbb{I}) = 1 \Rightarrow d_1 = \dim[\ker(A - \mathbb{I})]$$

$= 3 - rank(A - \mathbb{I}) = 2$

$\Rightarrow d_2 = 3$

$(A - \mathbb{I})^2 = 0$

$d_1 = 2$ : έχω 2 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\rightarrow$ 2 block με διάσταση $\geq 1$

$d_2 - d_1 = 1$ : έχω 1 block με διάσταση τουλ. 2

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{ή} \quad \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{6 ιδιοτιμές στο 1}$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(A-I) = 3$

$d_1 = \dim(\ker(A-I)) =$

$= 6 - \text{rank}(A-I)$

$= 3 \rightarrow$ 3 γρ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα

$\rightarrow$ 3 blocks με διάσταση $\geq 1$

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rank}\left[(A-I)^2\right] = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_2 = 6 - 1 = 5$

$\Rightarrow d_2 - d_1 = 2$ blocks διάστασης $\geq 2$

$d_3 = 6 \Rightarrow d_3 - d_2 = 1$ block διάστασης $\geq 3$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$