ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 7

Διάλεξη: 22 Οκτωβρίου 2020

Περίληψη προηγουμένων επεισοδίων

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ πολ/σμός με $\mu(x,y)$

1. Αν $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = Q(x) \longrightarrow \mu(x,y) = \phi(x) = \exp\left[\int Q(x)\,dx\right]$

2. Αν $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{(-M)} = Q(y) \longrightarrow \mu(x,y) = \phi(y) = \exp\left[\int Q(y)\,dy\right]$

3. Αν $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{yN - xM} = Q(xy) \longrightarrow \mu(x,y) = \phi(xy) = \exp\left[\int Q(z)\,dz\right]$ $\quad z = xy$

4. Αν $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{\frac{N}{y} + \frac{xM}{y^2}} = Q\left(\frac{x}{y}\right) \longrightarrow \mu(x,y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right) = \exp\left[\int Q(z)\,dz\right]$ $\quad z = \dfrac{x}{y}$

Λύση ακριβούς: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = N$ και $u(x,y) = C$

Παράδειγμα 2: $\underbrace{3x^2}_{N}dy + \underbrace{2xy}_{M}dx = 0$ $\quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x$ Μη ακριβής

(α) $\mu(x,y) = \phi(x) = \boxed{x^{-4/3}}$ $\longrightarrow$ $2x^{-1/3}y\,dx + 3x^{2/3}dy = 0$ ① Ακριβής

(β) $\mu(x,y) = \phi(y) = \boxed{y^2}$ $\longrightarrow$ $2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0$. ② Ακριβής.

(γ) Έστω $\mu(x,y) = \phi(xy)$

-Έλεγχος $\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{yN - xM} = \frac{2x - 6x}{3x^2y - 2x^2y} = \frac{-4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}y} = -\frac{4}{xy}$ $\quad z = xy \quad = -\frac{4}{z}$ Q

$$\mu = \exp\left[\int\left(-\frac{4}{z}\right)dz\right] = \exp\left[-4\ln z\right] = z^{-4} = \frac{1}{z^4} \xrightarrow{z=xy} \boxed{\frac{1}{x^4y^4}}$$ ③

$$\frac{2xy}{x^4y^4}dx + \frac{3x^2}{x^4y^4}dy = 0 \Rightarrow \underbrace{2x^{-3}y^{-3}}_{M}dx + \underbrace{3x^{-2}y^{-4}}_{N}dy = 0$$ Ακριβής

$\partial M/\partial y = 2x^{-3}(-3)y^{-4} = \underline{-6x^{-3}y^{-4}}$ $\qquad \partial N/\partial x = 3y^{-4}(-2)x^{-3} = \underline{-6x^{-3}y^{-4}}$

Ας λύσουμε την (1) $\underbrace{2x^{-1/3}y}_{M}dx + \underbrace{3x^{2/3}}_{N}dy = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = +2x^{-1/3}y \Rightarrow \int \partial u = +2y\int x^{-1/3}dx + k(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = +2y\,\frac{3}{2}\,x^{2/3} + k(y) \Rightarrow u(x,y) = 3x^{2/3}y + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^{2/3}y + k(y)\right) = 3x^{2/3} \Rightarrow \cancel{3x^{2/3}} + \frac{dk(y)}{dy} = \cancel{3x^{2/3}}$$

$$\Rightarrow \frac{dk(y)}{dy} = 0 \Rightarrow k(y) = Q \text{ σταθερά} \qquad u(x,y) = 3x^{2/3}y + Q$$

Λύση: $u(x,y) = W \Rightarrow 3x^{2/3}y + Q = W \Rightarrow 3x^{2/3}y = R \Rightarrow y = \frac{R}{3x^{2/3}}$, $R \to A$

$R = W - Q$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A\,x^{-2/3}}$$

<u>Σημείωση:</u> Η αρχική ΔΕ $3x^2 dy + 2xy\,dx = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x^2 dy = -2xy\,dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{3x^{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{3x}$$

Χωριζομένων μεταβλητών:

$$y(x) = A\, x^{-2/3}$$

Στρατηγική για λύση των ΣΔΕs 1ης τάξης $dy/dx = f(x,y)$ $\quad y(x) = ;$

1. Χωρισμένων μεταβλητών: $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow \int P(x)\,dx = \int Q(y)\,dy + K$

2. Γραμμικές: $\underline{1}\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ $\quad$ Ολοκ. παράγων $\exp\left[\int p(x)\,dx\right]$

3. Ομοιογενείς: $\frac{dy}{dx} = f(x,y) = f(ax, ay) \Rightarrow u = \frac{y}{x} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ χωρισ. μεταβλητών

4. Ειδικές μορφές: Bernoulli: $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)y^a \xrightarrow{u = y^{1-a}} \frac{du}{dt} + (1-a)p(t)u = (1-a)g(t)$

5. Ακριβείς: $\underline{M}(x,y)\,dx + \underline{N}(x,y)\,dy = 0$ με $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Λύση: $u(x,y) = C$ με $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$

6. Μετατροπή σε ακριβή: Εύρεση $\mu(x,y)$ (πολ/στής του Euler)

Περιπτώσεις: $\phi(x)$, $\phi(y)$, $\phi(xy)$, $\phi(x/y)$, κλπ.

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 2
22 Οκτωβρίου 2020

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(α)(7 μονάδες) Μετατρέψτε την παρακάτω διαφορική εξίσωση σε ακριβή με την χρήση κατάλληλου ολοκληρωτικού παράγοντα **φ(xy)**:

$$2\,y^3\,dx + 3\,y^2\,x\,dy = 0$$

(β) (6 μονάδες) Βρείτε την γενική λύση της αντίστοιχης ακριβούς εξίσωσης
(γ) (2 μονάδες) Βρείτε την ειδική λύση για $y(1)=1$.