~~Πεδία Α~~

~~28/2/2022~~

Αριθμητική Ανάλυση

Δευτέρα 28/2/22 1η Διάλεξη

Επιλύσιμες εξισώσεις: (με έως τώρα γνώσεις)

- 1ο βάθμια: $ax+b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$
- 2ου βαθμού: $ax^2+bx+\gamma=0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4a\gamma}}{2a}$
- 3ου βαθμού: $ax^3+bx^2+\gamma x+\delta=0$ Υπάρχουν περίπλοκοι τύποι
  Το ίδιο για 4ου βαθμού

Για βαθμό ≥5 αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν, και δε θα υπάρξουν τύποι.

Καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους.

Το ίδιο κάνουμε για:

$\sigma v \nu x - x = 0$

$e^{-x} - x = 0$

$\ln x - 1/x = 0$, $x>0$

- Κατασκευή μεθόδων για επίλυση τέτοιων εξισώσεων
- Σύγκλιση: (Θα καταλήγουμε σε ακολουθίες προσεγγίσεων) και ταχύτητα σύγκλισης.
- Σφάλμα – Εκτίμηση Σφάλματος
  Θέλουμε υπολογίσιμες ποσότητες
- Ευστάθεια: Μικρή μεταβολή λύσης με μικρή μεταβολή δεδομένων.

• Υλοποίηση σε Η/Υ: ΔΕ ΘΑ ΑΣΧΟΛΗΘΟΥΜΕ

ΚΕΦΑΛΑΙΑ:

- ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
- " ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ (με τον άλλο καθηγ.)
- ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
- ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ (Αριθμητική)
- ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
- ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$\boxed{f(x)=0}$, f πραγματική συναρτ. μίας μεταβλητής.

Ψάχνουμε $\tilde{x}$ τέτοιο ώστε $f(\tilde{x})=0$.
Λέγεται λύση της εξίσωσης ή ρίζα της f

Προσεγγιστικές & Επαναληπτικές μέθοδοι: Σύγκλιση

$$x_0 \xrightarrow{\text{"M" (Μέθοδος)}} x_1 \xrightarrow{\text{"M"}} x_2 \xrightarrow{\text{"M"}} \dots \xrightarrow{\text{"M"}} \bar{x}$$

Αρχική Προσέγγιση μίας ρίζας $\tilde{x}$

ρίζα της f

x_k: προσέγγιση της $\bar{x}$

$|x_k-\bar{x}| \le ?$ Εκτίμηση

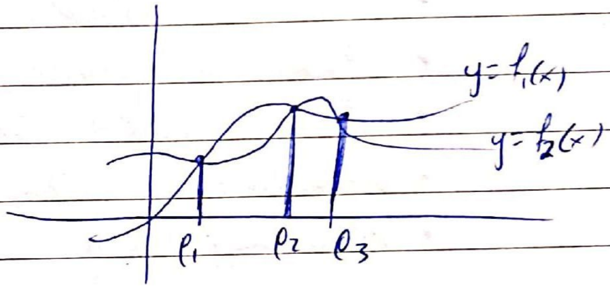
Για την καλύτερη μέθοδο που θα δούμε, ~~η σύγκλιση~~ θα εγγυάται σύγκλιση μόνο αν το x_0 είναι αρκετά κοντά. Θα πρέπει λοιπόν, πριν την "Μ" να εντοπίσουμε τις ρίζες.

(Το προηγούμενο ισχύει στο συγκεκριμένο κεφάλαιο. Στα γεωμ. συστήματα π.χ. δεν ισχύει)

Εντοπισμός ριζών

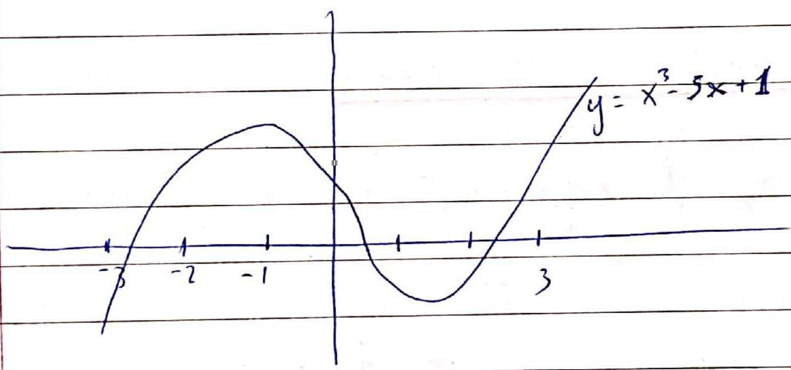
(A) Γραφικά $y = f(x)$ $f(x) = 0$

Μερικές φορές βοηθάει να γράφουμε την εξίσωση ως $f_1(x) = f_2(x)$, όπου f_1, f_2, απλούστερες συναρτήσεις



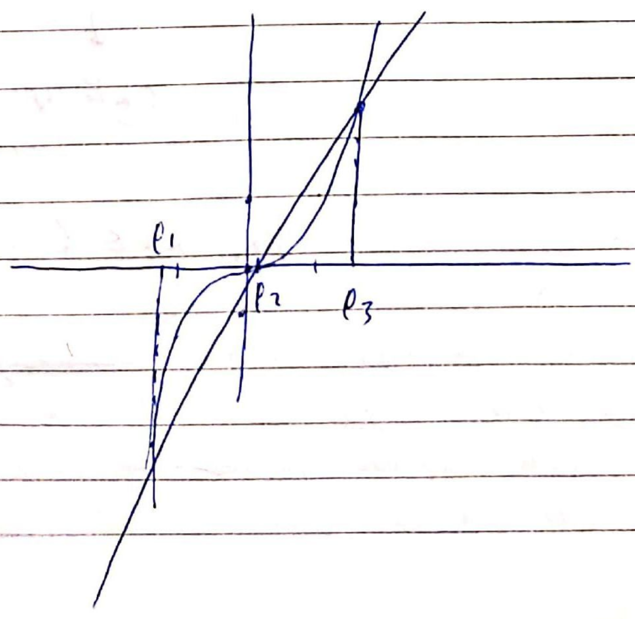
Παράδειγμα 1

$x^3 - 5x + 1 = 0$

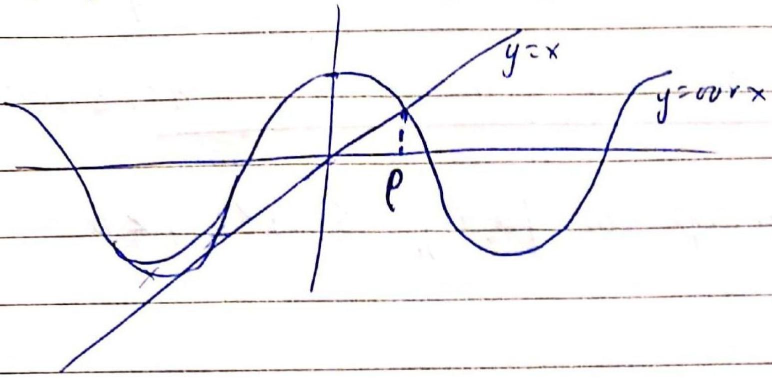


Παράδειγμα 2

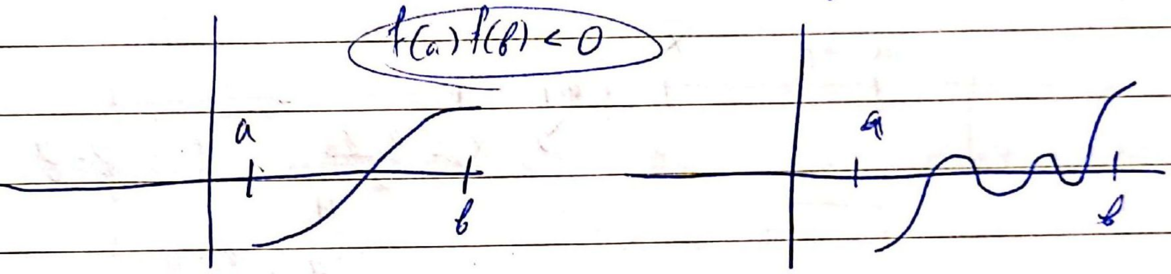
$$x^3 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^3}_{f_1(x)} = \underbrace{5x - 1}_{f_2(x)}$$



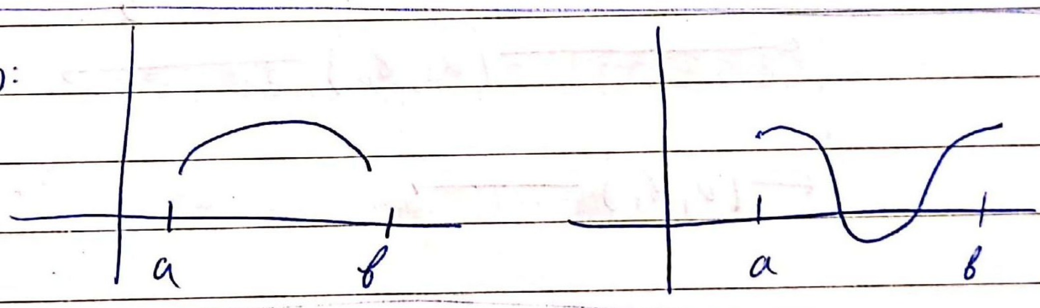
Παράδειγμα 3 $\quad συνx - x = 0 \Leftrightarrow συνx = x$



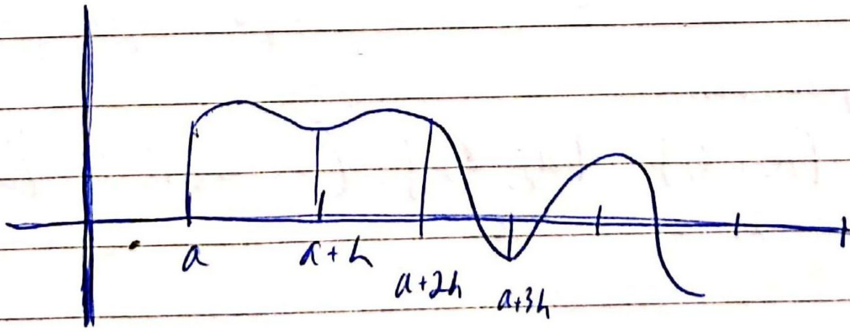
(B) Θεώρημα Bolzano: f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)f(\beta)<0$
τότε $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta)$: $f(\xi)=0$



$f(\alpha)f(\beta)>0$:



Κάνω "σάρωση" με $h>0$

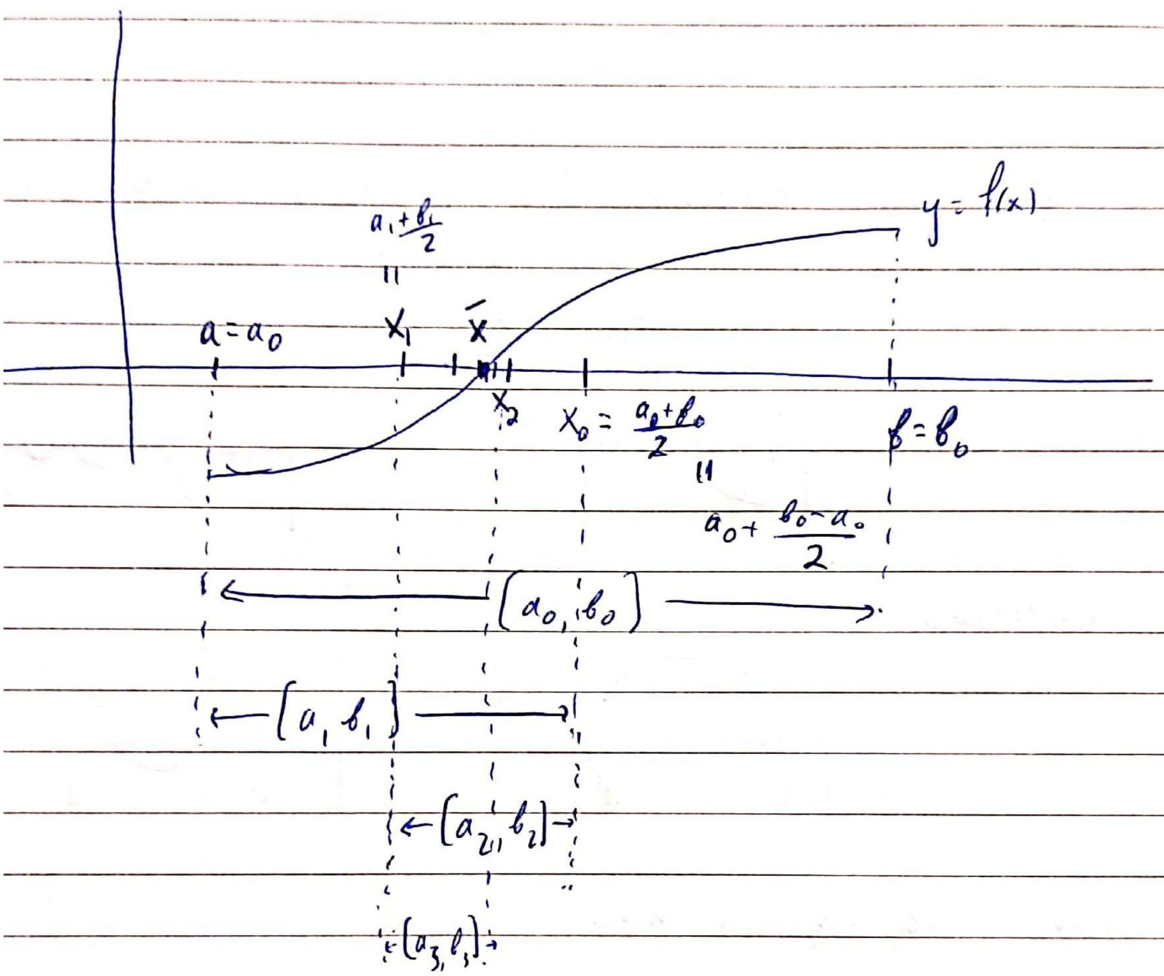


Scanned with CamScanner

$1^η$ Μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων,

Η Μέθοδος της διχοτόμησης

$f(x)=0$, f συνεχής σε $[a,b]$, $f(a)f(b)<0$



Η μέθοδος μου δίνει:

$[a_0,b_0]$, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$, ... $[a_k,b_k]$ ...

x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , ... x_k ,

$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$, $k=0,1,2.$ Φαίνεται ότι $x_k \xrightarrow{\infty} \bar{x}$

Με λόγια

Αρχικά θέτουμε $a_0=a$, $b_0=b$, $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}=a_0+\frac{b_0-a_0}{2}$

· Αν $f(x_0)=0$, τότε x_0 ρίζα της f //

ΕΞΕΤΑζουμε το γινόμενο $f(a_0)\cdot f(x_0)$:

(i) $f(a_0)f(x_0)<0$, $\exists$ ρίζα στο (a_0,x_0), οπότε βάζω $a_1=a_0$, $b_1=x_0$ $\to [a_1,b_1]$

(ii) $f(a_0)f(x_0)>0$, $\exists$ ρίζα στο (x_0,b_0) οπότε $a_1=x_0$

κ.ο.κ, επανάληψη για το διάστημα $[a_1, b_1]$

__Θεώρημα__ (Σύγκλιση μεθόδου διχοτόμησης)

f συνεχής $[a,b]$, $f(a)f(b)<0$. Τότε η ακολουθία (x_k) που κατασκευάσαμε με τη μέθοδο της διχοτόμησης συγκλίνει, $k \to \infty$ σε μία ρίζα της f στο $[a,b]$

(Αγνοώ το ενδεχόμενο $x_k = 0$ για κάποιο k)

__Απόδειξη__ (a_k): αύξουσα και άνω φραγμένη άρα
$a_k \xrightarrow{\infty} \bar{a}$
(b_k): φθίνουσα και κάτω φραγμένη άρα
$b_k \xrightarrow{\infty} \bar{b}$

$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{4}(b_0 - a_0)$

Άρα $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0) \xrightarrow[\infty]{} 0$

$\Rightarrow \bar{b} - \bar{a} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{b} = \bar{a}}$

$x_k \xrightarrow[\infty]{} \bar{x}_0 = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} = \bar{a} = \bar{b}$

$f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$

$\lim_{k \to \infty} f(a_k) \cdot f(b_k) = f(\bar{a}) \cdot f(\bar{b}) = f^2(\bar{x}) \leq 0$

και $f^2(\bar{x}) \geq 0$ προφανώς

Άρα $f(\bar{x}) = 0$ δηλ.
$\bar{x}$ ρίζα της f//

Αν έχω πολλές ρίζες θα καταλήξω σε μία.
Για να βρω τις άλλες θα πρέπει να αλλάξω το h
της σύγκλισης.