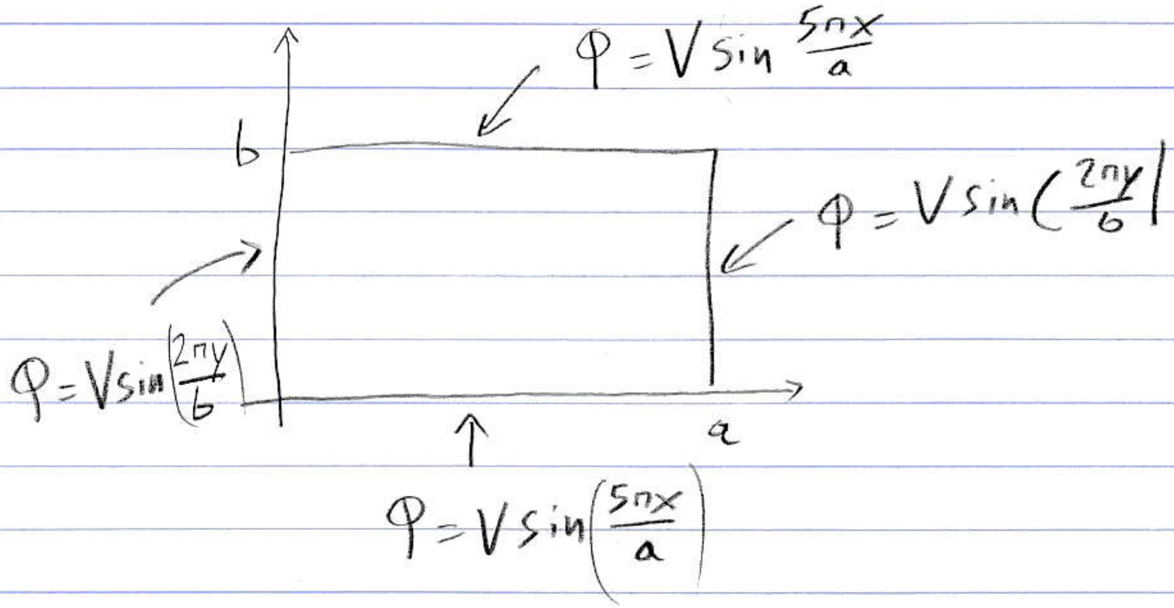
Θέμα 4, Σεπτέμβριος 2019



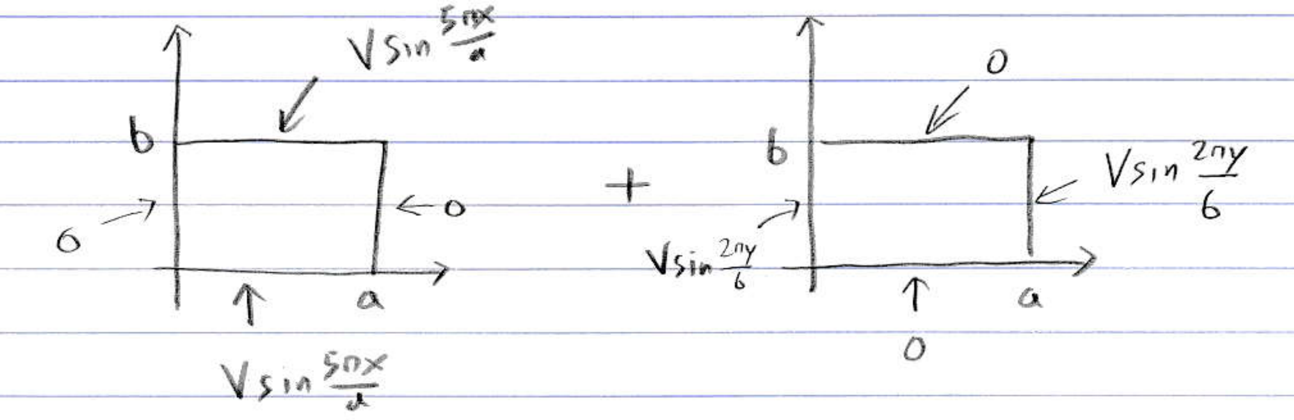
(α) $\varphi(x,y) = ?$

(β) Σχεδιάστε πρόχειρα τις συναρτήσεις $\varphi\left(\frac{a}{5}, y\right)$

και $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a/5, y)$

(γ) $\vec{E}(x,y) = ?$

<u>Λύση</u> Το πρόβλημα λύνεται με επαλληλία



Η τελική λύση είναι

$$\varphi(x,y) = \frac{V\sin\frac{5\pi x}{a}\cosh\left[\frac{5\pi}{a}\left(y-\frac{b}{2}\right)\right]}{\cosh\frac{5\pi b}{2a}} + \frac{V\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\cosh\left[\frac{2\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]}{\cosh\left(\frac{a\pi}{b}\right)}$$

Επαλήθευση οριακών συνθηκών

$$\varphi(x,0) = \frac{V\sin\frac{5\pi x}{a}\cancel{\cosh\left(\frac{5\pi}{a}\frac{b}{2}\right)}}{\cancel{\cosh\frac{5\pi b}{2a}}} = V\sin\frac{5\pi x}{a} \checkmark$$

$$\varphi(a,y) = \frac{V\sin\frac{2\pi y}{b}\cancel{\cosh\frac{2\pi a}{2b}}}{\cancel{\cosh\frac{a\pi}{b}}} \checkmark$$

$$\varphi(x,b) = \frac{V\sin\frac{5\pi x}{a}\cancel{\cosh\frac{5\pi b}{2a}}}{\cancel{\cosh\frac{5\pi b}{2a}}} \checkmark$$

$$\varphi(0,y) = \frac{V\sin\frac{2\pi y}{b}\cancel{\cosh 2\pi\frac{a}{2b}}}{\cancel{\cosh\frac{a\pi}{b}}} \checkmark$$

Επαλήθευση Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\sin(kx)\cosh(ky-d)$$

$$=-k^2\sin(kx)\cosh(ky-d)+k^2\sin(kx)\cosh(ky-d)=0$$

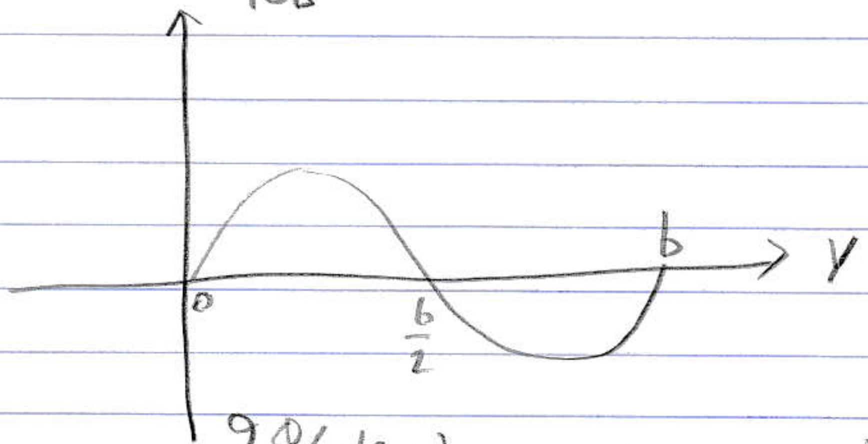
Και ο δεύτερος όρος ικανοποιεί τη Laplace, διότι

έχει $x \rightleftarrows y$

(β) $$\varphi\left(\frac{a}{5},y\right)=\frac{V\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\cosh\frac{3a}{10b}}{\cosh\left(\frac{a\pi}{b}\right)}$$

(ο $1^{ος}$ όρος μηδενίζεται διότι $\sin\frac{5\pi}{a}\frac{a}{5}=\sin\pi=0$

$$\frac{\cosh\left(\frac{a\pi}{b}\right)\varphi\left(\frac{a}{5},y\right)}{V\cosh\frac{3a}{10b}}=\sin\frac{2\pi y}{b}$$



Παράγωγο για το $\frac{\partial\varphi(a/5,y)}{\partial y}$, που είναι συνημίτονο (γ) $\vec{E} = -\nabla\varphi(x,y) \Rightarrow$

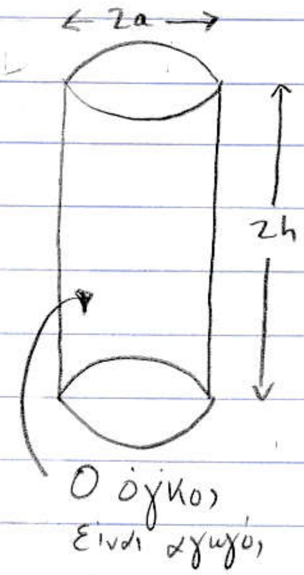
$$\vec{E} = \hat{x}E_x(x,y) + \hat{y}E_y(x,y)$$

όπου $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $E_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$

Χρειάζονται τα $\dfrac{\partial}{\partial z}\sin(\alpha z) = \alpha\cos(\alpha z)$

$$\frac{\partial}{\partial z}\cosh(\alpha z+\beta) = \alpha\sinh(\alpha z+\beta)$$

Άσκηση 1, 2η σειρά



Δίνεται $\Phi_{κυλίνδρου} = V$

(α) Αμελώντας τα επιφανειακά φορτία στα καπάκια, δείξτε ότι το $\sigma(z)$ ικανοποιεί εξίσωση της μορφής

$$\int_{-h}^{h} \sigma(z')\, K(z-z')\, dz' = \varepsilon_0 V, \quad -h<z<h$$

όπου $\sigma(z)$ το επιφανειακό φορτίο στην παράπλευρη επιφάνεια.

(β) Στο $K(z)$, υπεισέρχεται η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στην παράπλευρη επιφάνεια. Προσεγγίστε την απόσταση αυτή με την ακτίνα a προκειμένου να καταλήξετε σε απλούστερη συνάρτηση $K(z)$. Υπό ποιες προϋποθέσεις η προσέγγιση είναι λογική?

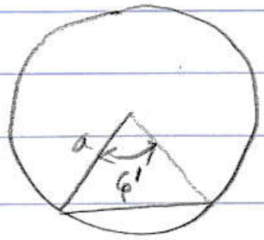
"Ποια κατανομή φορτίου κρατάει σταθερό δυναμικό"?

Αν αμελήσουμε τα σ στα καπάκια -α, υπάρχει σ(z) μόνο στην παράπλευρη, του οποίου το δυναμικό είναι ανεξάρτητο του φ. Θέτοντας το παραγόμενο από το σ δυναμικό ίσο με V στην επιφάνεια

Παίρνουμε τελικά

$$\int_{-h}^{h} 2\pi a\sigma(z') \underbrace{\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{(z-z')^2+\left(2a\sin\frac{\varphi'}{2}\right)^2}}\,d\varphi'}_{K(z-z'),\ \text{"πυρήνας" της "ολοκληρωτικής εξίσωσης"}}\, dz' = V \qquad -h<z<h$$

$\left|2a\sin\frac{\varphi'}{2}\right|$ είναι η απόσταση



οπότε το $\sqrt{\sim}$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στην κυλινδρική επιφάνεια

Το $\left|2a\sin\frac{\varphi'}{2}\right|$ έχει μέγιστη τιμή $2a$ (για $\varphi'=\pm\pi$) και ελάχιστη τιμή 0 (για $\varphi'=0$)

Είναι λοιπόν "λογικό" να θέσουμε

$|2a\sin\frac{\varphi'}{2}| \cong a$, υπό την προϋπόθεση ότι ο κύλινδρος έχει μικρή ακτίνα, ή όταν $a \ll h$

Τότε

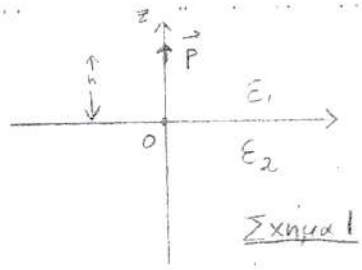
$$K(z-z') \cong \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}}$$

"Προσεγγιστικός πυρήνας" σε αντίθεση με "ακριβή"

(αλλά αυτό δημιουργεί σοβαρά προβλήματα, δες εργασία)

Καλύτερο μοντέλο: Ο σωληνοειδής αγωγός (tubular conductor) για τον οποίον η εξίσωση με τον "ακριβή πυρήνα" είναι ακριβής

Εδώ, $\sigma(z')$ = άθροισμα σ στο $r_T = a^-$ και $r_T = a^+$

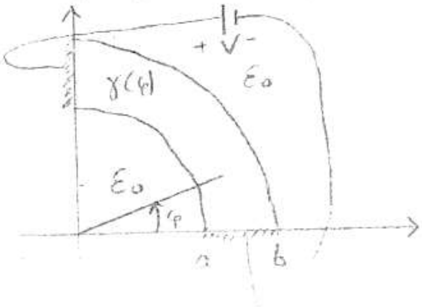


Σχημα 1

Ασκηση 3: (Θέμα 2, εξέταση Φεβρουαρίου 2015)
Η διάταξη του Σχήματος 2 είναι το ¼ κυλινδρικού αγώγιμου κελύφους με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b. Ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος. Κατά μήκος του άξονα z, η διάταξη έχει πάχος h. Το κέλυφος έχει ειδική αγωγιμότητα $\gamma(\phi)=\gamma_0/\cosh\phi$, όπου ϕ η γωνία που φαίνεται στο σχήμα και γ_0 σταθερά με διαστάσεις Siemens/meter. Οι ακροδέκτες στα $\phi=0$ και $\phi=\pi/2$ θεωρούνται ισοδυναμικές επιφάνειες με διαφορά δυναμικού $V=\Phi(\pi/2)-\Phi(0)$, όπου $\Phi(\phi)$ το δυναμικό μέσα στο κέλυφος. (Θεωρούμε ότι το Φ εξαρτάται μόνο από τη γωνία ϕ.)

(α) Να υπολογιστεί το $\Phi(\phi)$.

(β) Να υπολογιστεί η αντίσταση R της διάταξης.



Σχημα 2

Θέμα 2

(α) Απο εξ. (4) σελ. 236 του βιβλίου Ρουγελιώτη- Τσαλαμέγκα, το $\Phi(\varphi)$ ικανοποιεί

$$\nabla \cdot [\gamma(\varphi)\nabla\Phi(\varphi)] = 0$$

(προσοχή, όχι $\nabla^2\Phi=0$). Με την έκφραση του grad σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η εξίσωση γίνεται

$$\nabla \cdot \left[\gamma(\varphi)\frac{1}{r_T}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right] = 0$$

Και με την έκφραση του div σε κυλινδρικές συντεταγμένες,

$$\frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\gamma(\varphi)\frac{1}{r_T}\Phi'(\varphi)\right] = 0$$

απο την οποία

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\gamma(\varphi)\Phi'(\varphi)\right] = 0$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση λύνεται ως εξής

$$\gamma(\varphi)\Phi'(\varphi) = C \Rightarrow \Phi'(\varphi) = \frac{C}{\gamma(\varphi)} \Rightarrow \Phi(\varphi) = C\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\gamma(\varphi)} + \Phi(0)$$

όπου C και $\Phi(0)$ σταθερές.

Με $\gamma(\varphi) = \gamma_0/\cosh\varphi$ και $\int \cosh\varphi\, d\varphi = \int \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}d\varphi$
$= \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2} = \sinh\varphi$ η λύση γίνεται

$$\Phi(\varphi) = \frac{C}{\gamma_0}\sinh\varphi + \Phi(0)$$

Η οριακή συνθήκη $\Phi(\frac{\pi}{2}) - \Phi(0) = V$ δίνει

$$\Phi(\varphi) = \frac{V\sinh\varphi}{\sinh\frac{\pi}{2}} + \Phi(0)$$

(Η σταθερά $\Phi(0)$ εξαρτάται απο το σημείο αναφοράς και δεν θα παίξει ρόλο στη συνέχεια) (β) $\vec{E} = -\nabla\Phi = -\frac{1}{r_T}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} = -\frac{V\cosh\varphi}{\sinh\frac{\pi}{2}\, r_T}\hat{\varphi}$

$\vec{J} = \gamma\vec{E} = -\frac{\gamma_0 V}{\sinh\frac{\pi}{2}\, r_T}\hat{\varphi}$

(Παρατηρούμε ότι το $\vec{J}$ είναι ανεξάρτητο το φ και ικανοποιεί $\nabla\cdot\vec{J}=0$ παρόμοια με τη σελ. 249 του βιβλίου. Επίσης, το $\vec{J}$ είναι ανάλογο του $1/r_T$. Το αρνητικό πρόσημο ήταν αναμενόμενο διότι το $\vec{J}$ κατευθύνεται απο το θετικό στον αρνητικό πόλο.)

$$|I| = \int_0^h\int_a^b \vec{J}\cdot\vec{ds} = \frac{\gamma_0 V}{\sinh\frac{\pi}{2}}\int_0^h\int_a^b \frac{dr_T}{r_T}dz = \frac{\gamma_0 V h}{\sinh\frac{\pi}{2}}\ln\frac{b}{a}$$

Και τελικά

$$R = \frac{V}{|I|} = \frac{\sinh\frac{\pi}{2}}{\gamma_0 h \ln\frac{b}{a}}$$