''ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ'' -ΣΗΜΜΥ -Ε.Μ.Π.
05/09/2017

Θέμα 1: (α)(1 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,\ x, y \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\mathrm{Real}(f) = u,\ f(0) = 0$.

(β) (1,5 μ.) Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό. Εάν $f : A \to \mathbb{C}$ και οι $f^5,\ \overline{f}^2$ είναι ολόμορφες στο A, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 2: (α)(1,5 μ.) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|z^2 + z - 1|$ στο δίσκο $|z| \leq 1$ καθώς και τα σημεία του δίσκου στα οποία η παραπάνω μέγιστη τιμή λαμβάνεται.

(β)(1,5 μ.) Αναπτύξτε σε σειρά Laurent γύρω από το 1 τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z},$$

στους δακτυλίους $0 < |z-1| < 2, \quad |z-1| > 2$.

Θέμα 3: (α)(1 μ.) Έστω f, g ολόμορφες συναρτήσεις σε μια περιοχή του $z_0 \in \mathbb{C}$ με $f(z_0) = g(z_0) = 0,\ \ g'(z_0) \neq 0$. Να δείξετε ότι το z_0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f/g.

(β)(1 μ.) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-1}{\sin(\pi z)} dz$, όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z - 1/2| = 1$.

(γ)(0,5 μ.) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(z) = \mathrm{Real}(z)$ δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}$.

Θέμα 4: (α) (1 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2 - 1},$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [-\pi/2,\ \pi/2],\quad R > 1$.(*Υπόδειξη*: Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy πάνω στην κλειστή καμπύλη $\gamma_R + [Ri, -Ri]$.)

(γ)(1 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx$ με χρήση μιγαδικής ολοκλήρωσης.

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1: (α) Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Οι συνθήκες Cauchy-Riemann δίνουν

$$v_y = u_x = 3x^2 \; + \; 12xy \; - \; 3y^2 \tag{1}$$

και

$$v_x = -u_y = -6x^2 \; + \; 6xy \; + \; 6y^2. \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y παίρνουμε

$$v = 3x^2y \; + \; 6xy^2 \; - \; y^3 \; + \; c(x). \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς x παίρνουμε

$$v_x = 6xy \; + \; 6y^2 \; + \; c'(x),$$

οπότε, λόγω της (2), $c'(x) = -6x^2$, δηλ. $c(x) = -2x^3 \; + \; c_1$, όπου c_1 σταθερά. Η (3) τώρα γράφεται

$$v = 3x^2y \; + \; 6xy^2 \; - \; y^3 \; -2x^3 \; + \; c_1.$$

Επειδή $f(0) = 0$, θα πρέπει $u(0,0) = v(0,0) = 0 \; \Rightarrow \; c = 0$.
Άρα, η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f(x+iy) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \; + \; i(3x^2y \; + \; 6xy^2 \; - \; y^3 \; -2x^3).$$

(β) Έχουμε

$$f^{10} = (f^5)^2 \; \in \; \mathcal{H}(A), \quad \overline{f^{10}} = (\overline{f}^2)^5 \; \in \; \mathcal{H}(A)$$

και άρα $f^{10} =$ σταθερή οπότε και $|f| =$ σταθερή. Επομένως,

$$|f^5| = |f|^5 = \text{σταθερή} \quad \Rightarrow \quad f^5 = c_1 = \text{σταθερή}$$

και

$$|\overline{f}^2| = |f^2| = |f|^2 = \text{σταθερή} \quad \Rightarrow \quad \overline{f}^2 = \text{σταθερή} \quad \Rightarrow \quad f^2 = c_2 = \text{σταθερή}.$$

Άρα,

$$c_1 = c_2^2 f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

–Εάν $c_2 = 0$, τότε $f(z)^2 = 0 \ \Rightarrow f(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
– Εάν $c_2 \neq 0$, τότε $f(z) = c_1/c_2^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

Θέμα 2: (α) Θέτουμε $f(z) = z^2 + z - 1$. Η f είναι ολόμορφη και μη σταθερή στον κλειστό δίσκο $|z| \leq 1$, οπότε από την Αρχή του Μεγίστου παίρνουμε

$$\max_{|z|\leq 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Έστω z με $|z| = 1$. Τότε,

$$\overline{z} = 1/z\ , \quad z = e^{i\varphi}, \quad \text{για κάποιο } \varphi \in (-\pi, \pi]$$

και

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= (z^2 + z - 1)(\overline{z}^2 + \overline{z} - 1) = (z^2 + z - 1)\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1\right) \\ &= 3 - \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = 3 \ - \ (z^2 + \overline{z}^2) = 3 \ - \ 2\mathrm{Real}(z^2) = 3 \ - \ 2\cos(2\varphi). \end{aligned}$$

Η μέγιστη τιμή της παραπάνω παράστασης είναι ίση με 5 και λαμβάνεται για

$$\cos(2\varphi) = -1 \ \Leftrightarrow \ 2\varphi = \pm\pi \ \Leftrightarrow \ \varphi = \pm\pi/2 \ \Leftrightarrow \ z = \pm i.$$

Άρα

$$\max_{|z|\leq 1} |f(z)| = \sqrt{5}$$

και η παραπάνω μέγιστη τιμή λαμβάνεται στα σημεία $\pm i$.

(β) Για $0 < |z - 1| < 2$, θέτουμε

$$w = \frac{z-1}{2} \ \Rightarrow \ z = 1 + 2w, \quad |w| \ < \ 1$$

οπότε

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+w} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

και άρα

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} \ + \ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}, \quad 0 < |z-1| < 2.$$

Για $|z-1| > 2$, θέτουμε

$$w = \frac{2}{z-1} \ \Rightarrow \ z = 1 + \frac{2}{w}, \quad |w| \ < \ 1$$

οπότε

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{w}{1+w} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$$

και άρα

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{1+z} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 2.$$

Θέμα 1: (α) Έστω U περιοχή του z_0 με $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Επειδή

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0) \neq 0,$$

υπάρχει περιοχή $W \subseteq U$ του z_0 με

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \neq 0, \quad \forall z \in W \setminus \{z_0\}.$$

Έχουμε

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}, \quad \forall z \in W \setminus \{z_0\}$$

οπότε

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\in\mathbb{C}.$$

(β) Θέτουμε

$$f(z)=z-1,\quad g(z)=\sin(\pi z).$$

Τα ανώμαλα σημεία της f/g είναι οι ρίζες της g, δηλ. όλοι οι ακέραιοι αριθμοί. Οι ακέραιοι k που ικανοποιούν την ανισότητα $|k-1/2|<1$ είναι οι 0, 1.

–Επειδή

$$f(1)=g(1)=0,\quad g'(1)\neq 0,$$

το σημείο 1 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f/g (βλ. ερώτ. ερ. (α)) οπότε

$$\mathrm{Res}\,(f/g,\ 1)=0.$$

– Επειδή

$$f(0)=-1\neq 0,\quad g(0)=0,\quad g'(0)=\pi\neq 0,$$

το σημείο 0 είναι απλός πόλος της f/g οπότε

$$\mathrm{Res}\,(f/g,\ 1)=\frac{f(0)}{g'(0)}=-\frac{1}{\pi}.$$

Άρα,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{g(z)}dz=2\pi i\left(0-\frac{1}{\pi}\right)=-2i.$$

(γ) Εάν η $f(z)=\mathrm{Real}(z)$ είχε παράγουσα στο $\mathbb{C}$, θα ήταν και η ίδια ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Αυτό όμως δεν ισχύει, αφού εύκολα διαπιστώνεται ότι δεν ικανοποιούναι οι συνθήκες Cauchy - Riemann.

Θέμα 4: (α) Θεωρούμε την απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη

$$\Gamma_R=\gamma_R\ +\ [Ri,\ -Ri].$$

Η Γ_R περικλείει μόνο ένα ανώμαλο σημείο της $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$, τον απλό πόλο $z_0=1$. Άρα,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),1) = 2\pi i \frac{1}{(z^2-1)'} \,|_{z=1} = \pi i.$$

Ταυτόχρονα,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz \;+\; \int_{[Ri,\,-Ri]} f(z)dz.$$

Μια παραμέτρηση του ευθ. τμήματος $[-Ri,\ Ri]$ είναι η $z = it,\ t \in [-R,\ R]$, οπότε

$$\int_{[Ri,\,-Ri]} f(z)dz = -\int_{-R}^{R} f(it)d(it) = i\int_{-R}^{R} \frac{dt}{1+t^2}dt = 2i\mathrm{Arctan}R.$$

Άρα,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \pi i \;-\; 2i\mathrm{Arctan}R.$$

(β) Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$

έχει δύο ανώμαλα σημεία $\pm i$ από τα οποία μόνο το i βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και είναι διπλός πόλος. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \pi i \mathrm{Res}(f,i) \\
&= \pi i \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2 \cdot \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right]' = \pi i \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]' = \pi i \lim_{z\to i}\frac{2iz}{(z+i)^3} \\
&= -\pi i \cdot \frac{i}{4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$