ΓΙΑΝΝΗΣ Β. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

SPIN

ΑΘΗΝΑ

ΓΙΑΝΝΗΣ Β. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

SPIN

Α Θ Η Ν Α

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με σκοπό να αποτελέσει βοήθημα κατά τη μελέτη της ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ κ' ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ κ' ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ. Είναι καρπός μακροχρόνιας μελέτης και διδασκαλίας του αντικειμένου.

Στην εισαγωγή του βιβλίου παρατίθενται βασικές έννοιες και πράξεις διανυσμάτων καθώς και ειδικές μορφές συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Ειδικά η ευχέρεια στις πράξεις διανυσμάτων είναι πολύ χρήσιμη για τη μελέτη του παρόντος.

Στη συνέχεια εξετάζεται η κινηματική και δυναμική υλικού σημείου και κατόπιν η κινηματική και δυναμική απόλυτα στερεού σώματος. Κάθε έννοια και μέθοδος παρουσιάζεται με σύντομο και απλό τρόπο. Οι ασκήσεις που ακολουθούν συνεισφέρουν τα μέγιστα στην κατανόηση και εμπέδωση της μεθόδου. Έτσι ο αναγνώστης έχει αποκτήσει τις βασικές γνώσεις για την αντιμετώπιση προβλημάτων κινηματικής και δυναμικής υλικού σημείου και απόλυτα στερεού σώματος.

Με την ελπίδα ότι το παρόν θα είναι πολύ χρήσιμο στον αναγνώστη είμαι διαθέσιμος σε κάθε δημιουργική παρατήρηση ή υπόδειξη ή ερώτηση.

ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ

ΑΘΗΝΑ

210-3809282 ή 6944611447

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1 Μαθηματική εισαγωγή

Κεφάλαιο 2 Κινηματική και δυναμική του υλικού σημείου.

Κεφάλαιο 3 Κινηματική στερεού σώματος

Κεφάλαιο 4 Η σχετική κίνηση

Κεφάλαιο 5 Αρχή δυνατών έργων - Μελέτη ισορροπίας

Κεφάλαιο 6 Επίπεδη δυναμική στερεού σώματος.

Κεφάλαιο 7 Ορμή - Στροφορμή - κρούση

Κεφάλαιο 8 Αρμονική ταλάντωση

Κεφάλαιο 9 Μέθοδος Lagrange

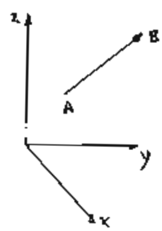
Κεφάλαιο 10 Δυναμική στερεού σώματος στο χώρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μαθηματική εισαγωγή

1.1 Διανύσματα

Θεωρούμε τα σημεία $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$ του χώρου. Ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (ή $\underset{\sim}{AB}$) το οποίο έχει ως αρχή το σημείο A και πέρας το σημείο B. Οι συντεταγμένες x, y, z του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι:



$$x = x_2 - x_1, \qquad y = y_2 - y_1 \qquad z = z_2 - z_1$$

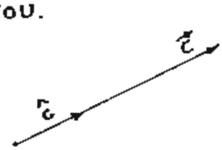
δηλαδή ίσες με τις διαφορές των συντεταγμένων του πέρατος μείον τις αντίστοιχες συντεταγμένες της αρχής. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ παριστάνουμε και με ένα μόνο γράμμα:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c} = (x, y, z)$$

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{c}$ είναι ίσο με το μήκος του και δίνεται από τη σχέση:

$$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.1.1)$$

Φυσικά, το μέτρο ενός διανύσματος είναι ίσο με την απόσταση της αρχής του από το πέρας του.



Αν $\vec{c}$ είναι ένα διάνυσμα και $|\vec{c}|$ το μέτρο του, ορίζεται το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα του διανύσματος $\vec{c}$ από τη σχέση:

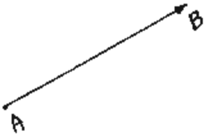
$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \qquad (1.1.2)$$

Η προηγούμενη σχέση γράφεται και στη μορφή:

$$\vec{c} = |\vec{c}|\,\hat{c} \qquad (1.1.3)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι κάθε διάνυσμα γράφεται στη μορφή : μέτρο επί αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα.

Παράδειγμα: Δίνονται τα σημεία:



$A(4,2,5)$, $B(6,3,3)$

Το διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι:

$$\vec{AB} = (6-4,\ 3-2,\ 3-5) \implies \vec{AB} = (2,1,-2) = \vec{c}$$

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{c}$ είναι:

$$|\vec{c}| = |(2,1,-2)| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{c}$ είναι:

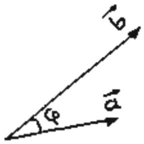
$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{(2,1,-2)}{3} \implies \hat{c} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ ορίζει έναν άξονα (n). Έτσι, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{x}$ που συμβολίζεται και ως $\vec{i}$ ή $\hat{i}$ ορίζει τον άξονα Ox του ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{y}$ ή $\vec{j}$ ή $\hat{j}$ ορίζει τον άξονα Oy, ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ ή $\vec{k}$ ή $\hat{k}$ ορίζει τον άξονα Oz. Έτσι ένα διάνυσμα $\vec{c}$ με συντεταγμένες x, y, z γράφεται και στη μορφή

$$\vec{c} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

1.2 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων(*)

Θεωρούμε τα διανύσματα



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

τα οποία σχηματίζουν γωνία φ μεταξύ τους. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \qquad (1.2.1)$$

ή ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (1.2.2)$$

Ο πρώτος τύπος (1.2.1) χρησιμοποιείται όταν δίνεται ή ζητείται η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$. Μάλιστα, όταν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι μεταξύ τους κάθετα, είναι $\varphi = 90^\circ$, άρα $\cos\varphi = 0$ και συνεπώς είναι $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Ισχύει και το αντίστροφο: Όταν $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, είναι $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Παράδειγμα: Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2,1,3)$ και $\vec{b} = (-4,3,5)$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-4) + 1\cdot 3 + 3\cdot 5 = 10$$

και τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ είναι:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

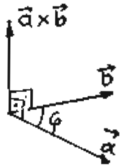
Με αντικατάσταση στη σχέση (1.2.1) βρίσκουμε:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \implies 10 = \sqrt{14}\,\sqrt{50}\,\cos\varphi \implies \cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{700}}$$

(*) Βλέπε: "ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ κ' ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ"

1.3 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων(*)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$:



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{a}\times\vec{b}$ είναι **διάνυσμα κάθετο στα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$** και δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.3.1}$$

Στην πρώτη σειρά της ορίζουσας γράφουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ κατά τους άξονες Ox, Oy, Oz αντίστοιχα. Στη δεύτερη σειρά γράφουμε τις προβολές a_x, a_y, a_z του διανύσματος $\vec{a}$ στους άξονες Ox, Oy, Oz αντίστοιχα, ενώ στην τρίτη σειρά γράφουμε τις προβολές b_x, b_y, b_z του διανύσματος $\vec{b}$ στους άξονες Ox, Oy, Oz.

Αν στο εξωτερικό γινόμενο αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων $\vec{a}, \vec{b}$, τότε αυτό αλλάζει πρόσημο:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \tag{1.3.2}$$

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δίνεται από τη σχέση:

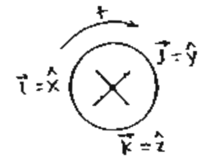
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi \tag{1.3.3}$$

Έτσι, αν δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά, τότε η μεταξύ τους γωνία φ είναι ίση με 0 ή π, οπότε είναι $\sin\varphi = 0$, άρα: Τα συγγραμμικά διανύσματα έχουν εξωτερικό γινόμενο ίσο με μηδέν.

(*) Βλέπε: "ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ κ' ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ"

Τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ των αξόνων Ox, Oy, Oz ενός δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ πολλαπλασιαζόμενα ανά δύο δίνουν το τρίτο:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



ενώ αν αλλάξει η σειρά των παραγόντων το γινόμενο αλλάζει πρόσημο. Σα μνημονικό κανόνα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κυκλικό σχήμα. Όταν κινούμαστε κατά την ωρολογιακή φορά παίρνουμε σαν αποτέλεσμα το τρίτο διάνυσμα, ενώ κατά την αντιωρολογιακή το αντίθετο του τρίτου διανύσματος. Φυσικά, είναι:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \qquad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \qquad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

Με βάση τα παραπάνω, το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να υπολογισθεί χωρίς τον υπολογισμό της ορίζουσας, αλλά με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και του μνημονικού κανόνα:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} +$$

$$+ a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} +$$

$$+ a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} =$$

$$= a_x b_x \vec{0} + a_x b_y \vec{k} + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_x (-\vec{k}) + a_y b_y \vec{0} + a_y b_z \vec{i} +$$

$$+ a_z b_x \vec{j} + a_z b_y (-\vec{i}) + a_z b_z \vec{0} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

1.4 Διαφορικές εξισώσεις

Η διαφορική εξίσωση

$$y'' + k^2 y = 0 \qquad (1.4.1)$$

όπου k^2 είναι θετική σταθερή, είναι γνωστή ως **διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή** και έχει γενική λύση

$$y(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

όπου A, B είναι αυθαίρετες σταθερές. Αυτές υπολογίζονται από δοσμένες συνθήκες για τη συνάρτηση $y(x)$. Για παράδειγμα, αν είναι $y(0)=2$, $y'(0)=1$ έχουμε:

$$y(0)=2 \implies A\sin 0 + B\cos 0 = 2 \implies B=2$$

$$y'(0)=1 \implies y'(x)\Big|_{x=0}=1 \implies Ak\cos(kx) - Bk\sin(kx)\Big|_{x=0}=1$$

$$\implies Ak=1 \implies A=1/k$$

όπου το k είναι γνωστό.

Η διαφορική εξίσωση

$$y'' - \lambda^2 y = 0$$

όπου λ^2 είναι θετική σταθερή, έχει γενική λύση:

$$y(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

όπου, πάλι, οι A, B είναι αυθαίρετες σταθερές.

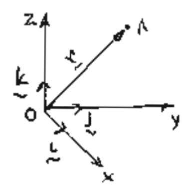
Συνιστούμε στον αναγνώστη να μελετήσει προσεκτικά τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης και ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές από το βιβλίο μας: "ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ".

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κινηματική και δυναμική του υλικού σημείου.

2.1 Κινηματικά μεγέθη - Εξισώσεις κίνησης

Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxyz και το υλικό σημείο Α το οποίο έχει διάνυσμα θέσης



$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{OA} = (x, y, z) = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}$$

όπου $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες Ox, Oy, Oz αντίστοιχα.

Αν το υλικό σημείο Α κινείται, τότε τα x, y, z αλλάζουν με το χρόνο. Είναι δηλαδή συναρτήσεις του χρόνου t. Έτσι και το διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r}$ είναι συνάρτηση του χρόνου t:

$$\underset{\sim}{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\underset{\sim}{i} + y(t)\underset{\sim}{j} + z(t)\underset{\sim}{k}$$

Ορίζεται η ταχύτητα $\underset{\sim}{\upsilon}$ του υλικού σημείου:

$$\underset{\sim}{\upsilon} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = \dot{\underset{\sim}{r}} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{\upsilon} = \dot{x}(t)\underset{\sim}{i} + \dot{y}(t)\underset{\sim}{j} + \dot{z}(t)\underset{\sim}{k}$$

όπου η τελεία (·) σημαίνει παραγώγιση ως προς το χρόνο t. Η ταχύτητα $\underset{\sim}{\upsilon} = \underset{\sim}{\upsilon}(t)$ είναι διάνυσμα το οποίο είναι πάντα εφαπτόμενο στην τροχιά του υλ. σημείου.

Ορίζεται η επιτάχυνση του υλικού σημείου Α, ίση με την παράγωγο της ταχύτητας:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \frac{d\underset{\sim}{\upsilon}}{dt} = \dot{\underset{\sim}{\upsilon}} = \ddot{\underset{\sim}{r}} = \ddot{x}\underset{\sim}{i} + \ddot{y}\underset{\sim}{j} + \ddot{z}\underset{\sim}{k}$$

Αν η μάζα **m** του υλικού σημείου είναι σταθερή και $\underset{\sim}{F}$ η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο, έχουμε:

$$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{\gamma}$$

Επειδή είναι $m>0$, τα διανύσματα $\underset{\sim}{\gamma}$, $\underset{\sim}{F}$ είναι παράλληλα και ομόρροπα. Με

$$\underset{\sim}{F} = F_x \underset{\sim}{i} + F_y \underset{\sim}{j} + F_z \underset{\sim}{k} \quad , \quad \underset{\sim}{\gamma} = \ddot{x}\underset{\sim}{i} + \ddot{y}\underset{\sim}{j} + \ddot{z}\underset{\sim}{k}$$

η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$F_x \underset{\sim}{i} + F_y \underset{\sim}{j} + F_z \underset{\sim}{k} = m(\ddot{x}\underset{\sim}{i} + \ddot{y}\underset{\sim}{j} + \ddot{z}\underset{\sim}{k})$$

Με βάση τη σχέση αυτή, για κάθε άξονα χωριστά, παίρνουμε:

$$F_x = m\ddot{x} \qquad F_y = m\ddot{y} \qquad F_z = m\ddot{z}$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τις **διαφορικές εξισώσεις κίνησης** του υλικού σημείου.

Επίλυση των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων, δίνει τις εκφράσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Οι τελευταίες σχέσεις αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου.

Περισσότερα για την κίνηση του υλικού σημείου θα βρεί ο αναγνώστης στο βιβλίο μας "ΦΥΣΙΚΗ I Μηχανική".

Άσκηση 1

Δίνεται το διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r}(t)$ ενός υλικού σημείου:

$$\underset{\sim}{r}(t) = \sqrt{3}t\,\underset{\sim}{i} + 2\sin 2t\,\underset{\sim}{j}$$

Ζητούνται: (α) Η εξίσωση τροχιάς (β) Το διάνυσμα της ταχύτητας. (γ) Το διάνυσμα της επιτάχυνσης (δ) Οι ακρότατες τιμές του μέτρου της ταχύτητας και του μέτρου της επιτάχυνσης

Λύση

(α) Έχω: (από το δοσμένο διάνυσμα θέσης)

$$x = \sqrt{3}t \quad , \quad y = 2\sin(2t)$$

Από την πρώτη παίρνω

$$t = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

οπότε με αντικατάσταση στη δεύτερη προκύπτει η εξίσωση της τροχιάς:

$$y = 2\sin\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) \qquad (1)$$

(β) Η ταχύτητα $\underset{\sim}{u}$ προκύπτει με παραγώγιση του διανύσματος θέσης ως προς t:

$$\underset{\sim}{u}(t) = \dot{\underset{\sim}{r}} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = \dot{x}\underset{\sim}{i} + \dot{y}\underset{\sim}{j} = \sqrt{3}\,\underset{\sim}{i} + 4\cos 2t\,\underset{\sim}{j} \implies$$

$$\underset{\sim}{u}(t) = \sqrt{3}\,\underset{\sim}{i} + 4\cos 2t\,\underset{\sim}{j} \qquad (2)$$

(γ) Η επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}(t)$ είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}(t) = \frac{d\underset{\sim}{u}}{dt} = \dot{\underset{\sim}{u}} = \ddot{x}\underset{\sim}{i} + \ddot{y}\underset{\sim}{j} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}(t) = -8\sin 2t\,\underset{\sim}{j} \qquad (3)$$

(δ) Από τη σχέση (2) υπολογίζω το μέτρο της ταχύτητας:

$$|\underset{\sim}{u}| = \left((\sqrt{3})^2 + (4\cos 2t)^2 \right)^{1/2} = \left(3 + 16\cos^2 2t\right)^{1/2}$$

Το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο, όταν $\cos^2 2t = 1$. Η μέγιστη τιμή προκύπτει ίση με

$$|\underline{v}|_{max} = (3+16\cdot 1)^{1/2} = \sqrt{19}$$

Από τη σχέση (3) παίρνω:

$$|\underline{\gamma}| = 8|\sin 2t|$$

οπότε βλέπουμε ότι η $|\underline{\gamma}|$ γίνεται μέγιστη όταν $|\sin 2t| = 1$. Η μέγιστη τιμή είναι

$$|\underline{\gamma}|_{max} = 8$$

Από τις εκφράσεις των $|\underline{v}|$, $|\underline{\gamma}|$, φαίνεται ότι

$$|\underline{v}|_{min} = \sqrt{3}, \qquad |\underline{\gamma}|_{min} = 0$$

Άσκηση 2

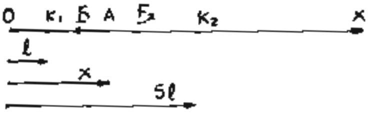
Ένα υλικό σημείο Α κινείται στο θετικό ημιάξονα x. Η κίνηση γίνεται υπό την επίδραση των δυνάμεων $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, που δέχεται το Α από τα ελκτικά κέντρα K_1, K_2, αντίστοιχα. Τα K_1, K_2 βρίσκονται πάνω στον άξονα x, στις θέσεις $x_1 = \ell$, $x_2 = 5\ell$ αντίστοιχα. Τα μέτρα των δυνάμεων $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ είναι:

$$|\underline{F}_1| = k^2 (K_1 A), \qquad |\underline{F}_2| = 4k^2 (K_2 A)$$

όπου k θετική σταθερή. Αρχικά το σωματίδιο ήταν ακίνητο στη θέση $x(0) = 2\ell$. Ζητείται η ταχύτητα και η θέση του σωματίδιου τη χρονική στιγμή t. Δίνεται η μάζα m.

Λύση

Θεωρούμε το σωματίδιο σε τυχαία θέση x. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο είναι:



$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 \implies$$

$$\underline{F} = -k^2 (K_1A)\,\underline{i} + 4k^2 (K_2A)\,\underline{i} \implies$$

$$\underline{F} = -k^2 (x-\ell)\,\underline{i} + 4k^2(5\ell - x)\,\underline{i} \implies$$

$$\underline{F} = (21k^2\ell - 5k^2x)\,\underline{i} \qquad (1)$$

Με εφαρμογή του Β' Νόμου του Newton παίρνω:

$$\underline{F} = m\underline{\gamma} \implies (21k^2\ell - 5k^2x)\,\underline{i} = m\ddot{x}\,\underline{i} \implies$$

$$m\ddot{x} + 5k^2x = 21k^2\ell \implies$$

$$\ddot{x} + \frac{5k^2}{m}x = 21\frac{k^2\ell}{m} \qquad (2)$$

Λύνουμε τώρα τη διαφορική εξίσωση (2) που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση β' τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η αντίστοιχη ομογενής είναι:

$$\ddot{x} + \frac{5k^2}{m}x = 0 \qquad (3)$$

Αυτή είναι της μορφής $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ και όπως γνωρίσαμε στη σελίδα 12 (Μαθηματική Εισαγωγή), έχει τη λύση:

$$x_o(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (4)$$

όπου A, B αυθαίρετες σταθερές και

$$\omega^2 = \frac{5k^2}{m} \qquad (5)$$

Ψάχνουμε τώρα μία μερική λύση $x_\mu(t)$ της διαφορικής εξίσωσης (2). Επειδή το β' μέλος της (2) είναι σταθερό, η μερική λύση $x_\mu(t)$ πρέπει να είναι σταθερή. Με αντικατάσταση η σχέση (2) δίνει:

$$\ddot{x}_\mu + \frac{5k^2}{m}x_\mu = 21\frac{k^2\ell}{m}$$

Όμως η x_μ είναι σταθερή, οπότε $\ddot{x}_\mu = 0$. Προκύπτει

$$x_\mu = \frac{21\ell}{5}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) είναι:

$$x(t) = x_0(t) + x_\mu(t) \Rightarrow$$

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{21}{5}\ell$$

Υπολογίζουμε τώρα τα A, B από τις αρχικές συνθήκες. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x(0) = 2\ell$. Άρα:

$$A\sin 0 + B\cos 0 + 21\frac{\ell}{5} = 2\ell \Rightarrow B = -\frac{11}{5}\ell$$

Επειδή για $t=0$ το σωματίδιο είναι ακίνητο, πρέπει:

$$\upsilon(0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\,\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow$$

$$A\omega = 0 \Rightarrow A = 0$$

Έτσι η θέση του σωματιδίου δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = -\frac{11\ell}{5}\cos\omega t + 21\frac{\ell}{5}$$

και η ταχύτητά του από τη σχέση:

$$\upsilon(t) = \dot{x}(t) = -\frac{11\ell\omega}{5}\sin\omega t$$

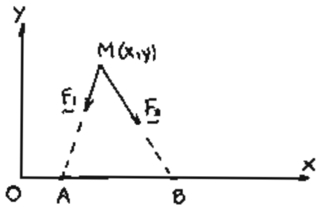
Άσκηση 3

Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται στο επίπεδο Oxy, ενώ έλκεται ταυτόχρονα από τα κέντρα A, B με δυνάμεις:

$$\underset{\sim}{F_1} = -k(\underset{\sim}{AM}), \qquad \underset{\sim}{F_2} = -k(\underset{\sim}{BM})$$

όπου $M(x,y)$ είναι η τυχαία θέση του σημείου και k μία δοσμένη θετική σταθερή. Τα A, B βρίσκονται στον άξονα x στις θέσεις $(0,a)$, $(0,4a)$ αντίστοιχα.

Αν αρχικά $(t=0)$ το σωματίδιο ήταν ακίνητο στη θέση $(0,5a)$ να βρεθεί το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t



Λύση

Στην τυχαία θέση $M(x,y)$, το σωματίδιο δέχεται συνολική δύναμη:

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F_1} + \underset{\sim}{F_2} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{F} = -k(\underset{\sim}{AM}) - k(\underset{\sim}{BM}) \qquad (1)$$

Όμως οι συντεταγμένες ενός διανύσματος υπολογίζονται αν από τις συντεταγμένες του πέρατος αφαιρέσουμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες της αρχής του. Έτσι έχω:

$$\underset{\sim}{AM} = (x,y)-(a,0) = (x-a,y) \Rightarrow \underset{\sim}{AM} = (x-a)\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} \qquad (2)$$

$$\underset{\sim}{BM} = (x,y)-(4a,0) = (x-4a,y) \Rightarrow \underset{\sim}{BM} = (x-4a)\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} \qquad (3)$$

Η σχέση (1) λόγω των (2), (3) γράφεται:

$$\underset{\sim}{F} = -k\left[(x-a)\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}\right] - k\left[(x-4a)\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}\right] \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{F} = -k(2x-5a)\underset{\sim}{i} - k2y\underset{\sim}{j}$$

Εφαρμόζουμε τώρα το δεύτερο νόμο του Newton:

$$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{\gamma} \Rightarrow -k(2x-5a)\underset{\sim}{i} - 2ky\underset{\sim}{j} = m\ddot{x}\underset{\sim}{i} + m\ddot{y}\underset{\sim}{j}$$

οπότε για κάθε άξονα χωριστά προκύπτει:

$$m\ddot{x} = -2kx + 5ka \qquad (4)$$

$$m\ddot{y} = -2ky \qquad (5)$$

Η σχέση (4) γράφεται:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 5\frac{ka}{m} \qquad (6)$$

Για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (6), παρατηρούμε ότι η αντίστοιχη ομογενής έχει τη μορφή $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$, οπότε η λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$x_o(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \;, \qquad \omega^2 = \frac{2k}{m}$$

και τα A,B σταθερές. Η μερική λύση είναι μία σταθερή οπότε με αντικατάσταση (όπως στην προηγούμενη Άσκηση) προκύπτει $x_\mu = \frac{5a}{2}$. Έτσι η γενική λύση της (6) είναι:

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{5a}{2} \qquad (7)$$

Όμως $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, οπότε προκύπτουν οι τιμές των σταθερών:

$$A = 0, \quad B = -\frac{5a}{2}$$

Η σχέση (7) γράφεται:

$$x(t) = -\frac{5a}{2}\cos\omega t + \frac{5a}{2}$$

Η σχέση (5) γράφεται:

$$\ddot{y} + \frac{2k}{m}y = 0 \qquad (8)$$

και έχει προφανώς τη λύση

$$y(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \qquad (9)$$

Όμως $y(0)=5a$, $\dot{y}(0)=0$. Άρα

$$D=5a \qquad C=0$$

και η $y(t)$ παίρνει τη μορφή:

$$y(t)=5a\cos\omega t \tag{10}$$

Γράφουμε τώρα το διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r}(t)$:

$$\underset{\sim}{r}(t)=\frac{5a}{2}(1-\cos\omega t)\underset{\sim}{i}+5a\cos\omega t\,\underset{\sim}{j}$$

και με παραγώγιση προκύπτει το διάνυσμα ταχύτητας:

$$\underset{\sim}{v}(t)=\frac{5a\omega}{2}\sin\omega t\,\underset{\sim}{i}-5a\omega\sin\omega t\,\underset{\sim}{j}$$

Άσκηση 4

Ένα κινητό $M(x,y)$ που αρχικά είναι ακίνητο στη θέση (a,b), αρχίζει να κινείται στην παραβολή

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x$$

υπό την επίδραση δύναμης, ώστε:

$$\gamma_y=-ky$$

όπου k μία θετική σταθερή. Ζητούνται:

(a) Το διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r}(t)$ του M

(b) Το διάνυσμα της ταχύτητας $\underset{\sim}{v}(t)$ του M.

(c) Η επιτάχυνση γ_y

Λύση

Είναι $\ddot{y}=-ky$, άρα:

$$\ddot{y} + ky = 0 \qquad (1)$$

Επειδή είναι $k = \omega^2 > 0$, η δ.ε. (1) γράφεται:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (2)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση έχει γενική λύση:

$$y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (3)$$

Επειδή αρχικά ($t=0$) το υλικό σημείο είναι ακίνητο στη θέση $y = b$, έχουμε: $y(0) = b$, $\dot{y}(0) = 0$. Έτσι έχουμε:

$$y(0) = b \implies A\sin 0 + B\cos 0 = b \implies B = b$$

$$\dot{y}(0) = 0 \implies \dot{y}'(t)\Big|_{t=0} = 0 \implies A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\Big|_{t=0} = 0 \implies$$

$$A = 0$$

Άρα έχουμε:

$$y(t) = b\cos\omega t \qquad (4)$$

και από τη δοσμένη εξίσωση τροχιάς βρίσκουμε:

$$x = \frac{a^2}{b^2}y^2 \implies x = a^2\cos^2\omega t \qquad (5)$$

Άρα το διάνυσμα θέσης είναι:

$$\underset{\sim}{r}(t) = (x(t), y(t)) \implies \underset{\sim}{r}(t) = \left(a^2\cos^2\omega t,\ b\cos\omega t\right) \qquad (6)$$

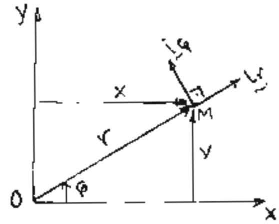
Με παραγώγιση ως προς t βρίσκουμε την ταχύτητα:

$$\underset{\sim}{v}(t) = \dot{\underset{\sim}{r}}(t) = \left(-2a^2\omega\cos\omega t\sin\omega t,\ -b\omega\sin\omega t\right)$$

Με $y = b\cos\omega t$ έχουμε:

$$\gamma_y = \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t \qquad (7)$$

2.2 Η κίνηση σε πολικές συντεταγμένες



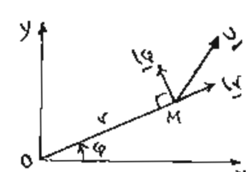
Υποθέτουμε ότι ένα υλικό σημείο Μ κινείται στο επίπεδο Oxy. Η τυχαία θέση του Μ είναι δυνατό να καθορισθεί από τις πολικές συντεταγμένες r, φ. Το r είναι η απόσταση του Μ από το Ο και είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος θέσης $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{OM}$, δηλαδή είναι $r = |\underset{\sim}{r}|$. Προφανώς είναι $r \geqslant 0$. Η γωνία φ ισούται με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{OM}$ με το θετικό ημιάξονα Οx. Αρχή της γωνίας φ είναι ο θετικός ημιάξονας Οx και θετική φορά η **αντιωρολογιακή**. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες x, y συνδέονται με τις πολικές συντεταγμένες r, φ με τις σχέσεις:

$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad y = r\sin\varphi$$

Στη θέση $M(r, \varphi)$ ορίζονται τα μοναδιαία διανύσματα $\underset{\sim}{i_r}$, $\underset{\sim}{i_\varphi}$: Το μοναδιαίο διάνυσμα $\underset{\sim}{i_r}$ είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα του διανύσματος θέσης $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{OM}$:

$$\underset{\sim}{i_r} = \frac{\underset{\sim}{r}}{r}$$

όπου r είναι το μέτρο του διανύσματος $\underset{\sim}{r}$. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\underset{\sim}{i_r}$ ονομάζεται **μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα** και έχει φορά από το Ο προς τα έξω. Το $\underset{\sim}{i_\varphi}$ είναι το **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα** και έχει στραφεί κατά 90° **αντιωρολογιακά** ως προς το $\underset{\sim}{i_r}$. Έτσι, το $\underset{\sim}{i_r}$ έχει φορά προς τα αυξανόμενα φ.



Αν $\underset{\sim}{\upsilon}$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου Μ το οποίο κινείται στο επίπεδο Oxy, τότε έχουμε:

$$\underset{\sim}{v} = v_r \underset{\sim}{i_r} + v_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi}$$

όπου v_r είναι η προβολή του διανύσματος $\underset{\sim}{v}$ στη διεύθυνση του $\underset{\sim}{i_r}$ και v_φ η προβολή του διανύσματος $\underset{\sim}{v}$ στη διεύθυνση του $\underset{\sim}{i_\varphi}$. Έτσι, $v_r \underset{\sim}{i_r}$ είναι η **ακτινική** συνιστώσα της ταχύτητας $\underset{\sim}{v}$ και $v_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi}$ είναι η **κάθετη** συνιστώσα της ταχύτητας.

Όμοια, η επιτάχυνση γ του σημείου Μ γράφεται:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \gamma_r \underset{\sim}{i_r} + \gamma_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (2.2.1)$$

όπου $\gamma_r \underset{\sim}{i_r}$ είναι η ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης και $\gamma_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi}$ η κάθετη συνιστώσα της.

Γενικά, καθώς το υλικό σημείο Μ κινείται στο επίπεδο, τα r, φ, $\underset{\sim}{i_r}$, $\underset{\sim}{i_\varphi}$ είναι συναρτήσεις του χρόνου: $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $\underset{\sim}{i_r}=\underset{\sim}{i_r}(t)$, $\underset{\sim}{i_\varphi}=\underset{\sim}{i_\varphi}(t)$. Σε τυχαία θέση (r,φ) με μοναδιαία διανύσματα $\underset{\sim}{i_r}$, $\underset{\sim}{i_\varphi}$, η ταχύτητα $\underset{\sim}{v}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\underset{\sim}{v} = \dot{r}\, \underset{\sim}{i_r} + r\dot{\varphi}\, \underset{\sim}{i_\varphi}$$

όπου $\dot{r} = dr/dt$, $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$. Η επιτάχυνση στην ίδια θέση είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\, \underset{\sim}{i_r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\, \underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (2.2.2)$$

Οι σχέσεις αυτές χρησιμοποιούνται χωρίς απόδειξη στα επόμενα.

Εξίσωση τροχιάς: Είναι η σχέση μεταξύ των συντεταγμένων r, φ. Αν είναι $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, με απαλειφή του χρόνου t από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει η εξίσωση της τροχιάς.

Δυναμική του υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες: Αν $\underset{\sim}{F}$ είναι η συνισταμένη δύναμη, η οποία ασκείται σε υλικό σημείο μάζας m, η δύναμη αυτή αναλύεται κατά τις διευθύνσεις $\underset{\sim}{i_r}$, $\underset{\sim}{i_\varphi}$:

$$\underset{\sim}{F} = F_r \underset{\sim}{i_r} + F_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi}$$

όπου $F_r \underset{\sim}{i_r}$ είναι η ακτινική συνιστώσα και $F_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi}$ είναι η κάθετη συνιστώσα της δύναμης $\underset{\sim}{F}$. Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής έχουμε:

$$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{\gamma} \quad \Longrightarrow$$

$$F_r \underset{\sim}{i_r} + F_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underset{\sim}{i_r} + m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (2.2.3)$$

Έτσι, κατά την ακτινική διεύθυνση έχουμε:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \qquad (2.2.4)$$

και κατά την κάθετη διεύθυνση:

$$F_\varphi = m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \qquad (2.2.5)$$

Παρατήρηση: Το εξωτερικό γινόμενο $\underset{\sim}{i_r} \times \underset{\sim}{i_\varphi}$ των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι κάθετο στα $\underset{\sim}{i_r}, \underset{\sim}{i_\varphi}$ και έχει μέτρο ίσο με 1. Άρα, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού είναι:

$$\underset{\sim}{i_r} \times \underset{\sim}{i_\varphi} = \underset{\sim}{i_z} = \underline{k}$$

Άσκηση 1

Ένα υλικό σημείο το οποίο κινείται στο επίπεδο Oxy έχει ακτινική προβολή ταχύτητας $u_r = k\varphi$ και κάθετη προβολή ταχύτητος $u_\varphi = \lambda r$ όπου r, φ είναι οι πολικές συντεταγμένες του υλικού σημείου και k, λ γνωστές σταθερές. Αρχικά, δηλαδή για $t=0$, το υλικό σημείο βρισκόταν στη θέση $r_0 = a$, $\varphi_0 = 0$. Ζητούνται:

(i) Η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες συναρτήσει του χρόνου t.

(ii) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες συναρτήσει της γωνίας φ.

Λύση

(i) Η έκφραση της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\underset{\sim}{u} = \dot{r}\, \underset{\sim}{i}_r + r\dot{\varphi}\, \underset{\sim}{i}_\varphi \qquad (1)$$

οπότε είναι $u_r = \dot{r}$, $u_\varphi = r\dot{\varphi}$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε $u_r = k\varphi$, $u_\varphi = \lambda r$. Άρα έχουμε τις σχέσεις:

$$\dot{r} = k\varphi \qquad (2)$$

$$r\dot{\varphi} = \lambda r \qquad (3)$$

Η τελευταία σχέση, που είναι και η απλούστερη από τις δύο, δίνει:

$$\dot{\varphi} = \lambda \quad \overset{\int}{\Longrightarrow} \quad \varphi(t) = \lambda t + c_1 \qquad (4)$$

αφού το λ είναι σταθερό. Η c_1 είναι μία σταθερή (ολοκλήρωσης). Επειδή για $t=0$ είναι $\varphi_0 = \varphi(0) = 0$, η σχέση (4) δίνει

$$\varphi(0) = \lambda \cdot 0 + c_1 \Longrightarrow 0 = c_1 \Longrightarrow c_1 = 0.$$

Έτσι, η σχέση (4) δίνει $\varphi=\lambda t$ και η σχέση (2) δίνει:

$$\dot{r}=k\lambda t \overset{\int}{\Longrightarrow} r(t)=k\lambda\frac{t^2}{2}+c_2 \qquad (5)$$

Επειδή για $t=0$ είναι $\underset{\sim}{r}(0)=a$, η τελευταία σχέση δίνει:

$$r(0)=k\lambda\cdot\frac{0^2}{2}+c_2 \Longrightarrow a=c_2 \Longrightarrow c_2=a$$

και η σχέση (5) δίνει

$$r(t)=k\lambda\frac{t^2}{2}+a \qquad (6)$$

Με $\varphi=\lambda t$, $r=k\lambda\frac{t^2}{2}+a$ έχουμε:

$$\dot{\varphi}=\lambda,\quad \ddot{\varphi}=0,\quad \dot{r}=k\lambda t \quad \ddot{r}=k\lambda$$

Έτσι, η σχέση (1) γράφεται:

$$\underset{\sim}{v}=k\lambda t\,\underset{\sim}{i_r}+\left(k\lambda\frac{t^2}{2}+a\right)\cdot\lambda\,\underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (7)$$

Η γενική σχέση που δίνει την επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\,\underset{\sim}{i_r}+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\,\underset{\sim}{i_\varphi}$$

και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των $r,\dot{r},\ddot{r},\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}$ προκύπτει:

$$\underset{\sim}{\gamma}=\left(k\lambda-\left(k\lambda\frac{t^2}{2}+a\right)\lambda^2\right)\underset{\sim}{i_r}+\left(2k\lambda t\cdot\lambda+\left(k\lambda\frac{t^2}{2}+a\right)\cdot 0\right)\underset{\sim}{i_\varphi} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}=\left(k\lambda-\lambda^2\left(k\lambda\frac{t^2}{2}+a\right)\right)\underset{\sim}{i_r}+2k\lambda^2 t\,\underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (8)$$

(ii) Με $\varphi=\lambda t$ είναι $t=\varphi/\lambda$ και η σχέση (7) δίνει:

$$\underset{\sim}{v}=k\lambda\cdot\frac{\varphi}{\lambda}\,\underset{\sim}{i_r}+\left(k\lambda\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)^2+a\right)\lambda\,\underset{\sim}{i_\varphi} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}=k\varphi\,\underset{\sim}{i_r}+\left(k\frac{\varphi^2}{2}+a\lambda\right)\underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (9)$$

Όμοια, με $t = \varphi/\lambda$ η σχέση (8) δίνει:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \left(k\lambda - \lambda^2\left(k\lambda\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)^2 + a\right)\right)\underset{\sim}{i_r} + 2k\lambda^2\frac{\varphi}{\lambda}\underset{\sim}{i_\varphi} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma} = \left(k\lambda - \frac{1}{2}k\lambda\varphi^2 - \lambda^2 a\right)\underset{\sim}{i_r} + 2k\lambda\varphi\,\underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (10)$$

Άσκηση 2

Ένα υλικό σημείο Μ διαγράφει την καμπύλη:

$$r = ce^{k\varphi} \qquad \text{(λογαριθμική έλικα)}$$

Η ταχύτητά του έχει μέτρο $|\underset{\sim}{u}| = u$ που δίνεται από τη σχέση:

$$u = \frac{b^2}{r} \qquad (1)$$

όπου c, k, b είναι σταθερές.

Να δειχθεί ότι η παράσταση $r^2\dot{\varphi}$ είναι σταθερή και ότι η επιτάχυνσή του δίνεται από τη σχέση

$$\underset{\sim}{\gamma} = -b^4 r^{-3}\underset{\sim}{i_r} \qquad (2)$$

Λύση

Η έκφραση της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\underset{\sim}{u} = \dot{r}\,\underset{\sim}{i_r} + r\dot{\varphi}\,\underset{\sim}{i_\varphi} \implies u = |\underset{\sim}{u}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \implies$$

$$u^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \qquad (3)$$

Παραγώγιση ως προς t της εξίσωσης $r = ce^{k\varphi}$ δίνει:

$$\dot{r} = cke^{k\varphi}\dot{\varphi} \overset{r=ce^{k\varphi}}{\implies} \dot{r} = kr\dot{\varphi} \qquad (4)$$

Αντικαθιστούμε το $\dot{r}$ από την τελευταία σχέση στη σχέση (3) και παίρνουμε:

$$\upsilon^2 = k^2 r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \qquad (5)$$

Στη σχέση αυτή αντικαθιστούμε $\upsilon = b^2/r$ από τη σχέση (1) και παίρνουμε:

$$\frac{b^4}{r^2} = k^2 r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \Longrightarrow r^4 \dot{\varphi}^2 = \frac{b^4}{k^2+1} \qquad (6)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το $r^4\dot{\varphi}^2$ είναι σταθερό, άρα και η ποσότητα $r^4\dot{\varphi}$ είναι σταθερή.

Η γενική έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\underset{\sim}{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underset{\sim}{i_r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (7)$$

Επειδή, όπως αποδείχθηκε, η ποσότητα $r^2\dot{\varphi}$ είναι σταθερή, έχουμε:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \Rightarrow$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \qquad (8)$$

αφού γενικά είναι $r \neq 0$. Έτσι, η σχέση (7) γράφεται:

$$\underset{\sim}{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underset{\sim}{i_r} \qquad (9)$$

Παραγώγιση τη σχέσης (4) ως προς t δίνει:

$$\ddot{r} = k\dot{r}\dot{\varphi} + kr\ddot{\varphi} \qquad (10)$$

Από τη σχέση (8) παίρνουμε:

$$r\ddot{\varphi} = -2\dot{r}\dot{\varphi}$$

και η σχέση (10) δίνει:

$$\ddot{r} = k\dot{r}\dot{\varphi} - 2k\dot{r}\dot{\varphi} \Longrightarrow \ddot{r} = -k\dot{r}\dot{\varphi}$$

Με αντικατάσταση του $\dot{r}$ από τη σχέση (4) στην τελευταία σχέση, παίρνουμε:

$$\ddot{r} = -k\cdot k r\dot{\varphi}\cdot\dot{\varphi} \implies \ddot{r} = -k^2 r\dot{\varphi}^2 \qquad (11)$$

Αντικαθιστούμε τώρα το $\ddot{r}$ από την τελευταία σχέση στη σχέση (9) και παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \left(-k^2 r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\varphi}^2\right)\underset{\sim}{l_r} \implies \underset{\sim}{\gamma} = -\left(k^2+1\right) r\dot{\varphi}^2\underset{\sim}{l_r} \qquad (12)$$

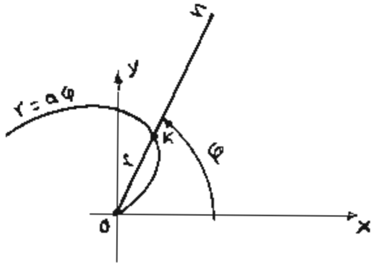
Όμως, από τη σχέση (6) προκύπτει:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{b^4}{(k^2+1)r^4} \qquad (13)$$

Με αντικατάσταση του $\dot{\varphi}^2$ από την τελευταία σχέση στη σχέση (12), παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma} = -\left(k^2+1\right) r\cdot\frac{b^4}{(k^2+1)r^4}\underset{\sim}{l_r} \implies \underset{\sim}{\gamma} = -b^4 r^{-3}\underset{\sim}{l_r}$$

Άσκηση 3



r = OK

Η ημιευθεία Οη περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Oz με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\varphi} = c$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $\varphi(0)=\frac{\pi}{4}$, $\dot{\varphi}(0)=0$. Αν Κ είναι το σημείο τομής της ημιευθείας με τη σταθερή καμπύλη $r=a\varphi$, να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Κ συναρτήσει του χρόνου t.

Λύση

Από τη σχέση $\ddot{\varphi} = c$, με ολοκλήρωση, παίρνουμε:

$$\dot\varphi(t) = ct + k_1 \quad \Longrightarrow \quad \dot\varphi(t) = ct \qquad (1)$$

(αφού είναι $\dot\varphi(0)=0$ είναι $k_1=0$). Ολουλήρωση της σχέσης (1) δίνει:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}ct^2 + k_2 \qquad (2)$$

Όμως είναι $\varphi(0)=\pi/4$ άρα είναι $k_2 = \frac{\pi}{4}$, οπότε είναι:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}ct^2 + \frac{\pi}{4} \qquad (3)$$

Από την εξίσωση της υαμπύλης $r=a\varphi$ παίρνουμε:

$$r(t) = \frac{ac}{2}t^2 + \frac{a\pi}{4} \qquad (4)$$

Απο την έυφραση (4) παίρνουμε:

$$\dot r = act \qquad \ddot r = ac$$

Η ταχύτητα του σημείου K σε πολιυές συντεταγμένες είναι:

$$\underset{\sim}{v} = \dot r\, \underset{\sim}{i_r} + r\dot\varphi\, \underset{\sim}{i_\varphi}$$

υαι αντιυαθιστώντας τις ευφράσεις των $\dot r, r, \dot\varphi$ που βρήυαμε προηγούμενα παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{v} = act\, \underset{\sim}{i_r} + \left(ac\frac{t^2}{2} + a\frac{\pi}{4}\right)ct\, \underset{\sim}{i_\varphi}$$

Όμοια, βρίσυουμε την έυφραση της επιτάχυνσης

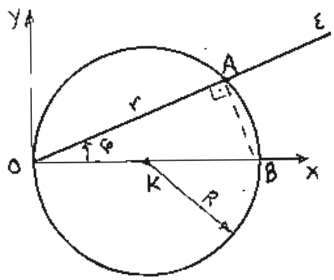
$$\underset{\sim}{\gamma} = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\underset{\sim}{i_r} + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)\underset{\sim}{i_\varphi} \quad \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma} = \left(ac - \left(\frac{ac}{2}t^2 + \frac{a\pi}{4}\right)(ct)^2\right)\underset{\sim}{i_r} + \left(2act\cdot ct + \left(\frac{ac}{2}t^2 + \frac{a\pi}{4}\right)c\right)\underset{\sim}{i_\varphi}$$

$$\Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma} = ac\left(1 - \left(\frac{ct^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)ct^2\right)\underset{\sim}{i_r} + ac\left(2ct^2 + \left(\frac{ct^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\underset{\sim}{i_\varphi}$$

Άσκηση 4

Η ημιευθεία Οε περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Οz με γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\varphi}$ η οποία δίνεται από τη σχέση:



$$\ddot{\varphi} = b\cos\varphi \qquad (1)$$

Αν A είναι το σημείο τομής της ημιευθείας Οε και της σταθερής περιφέρειας κέντρου K και ακτίνας R, να βρεθεί η έκφραση της επιτάχυνσης του σημείου A συναρτήσει της γωνίας φ. Δίνεται ότι η ημιευθεία Οε έχει μηδενική γωνιακή ταχύτητα όταν περνά από τη θέση Οx.

Λύση

Η επιτάχυνση του A σε τυχαία θέση (r,φ) είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\underset{\sim}{i_r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (2)$$

Θα προσδιορίσουμε τις εκφράσεις των $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dot{\varphi}$, συναρτήσει της γωνίας φ. Από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = b\cos\varphi \implies \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = b\cos\varphi \implies$$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} = b\cos\varphi \implies \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = b\cos\varphi\,d\varphi \qquad (3)$$

Με το τέχνασμα αυτό, που είναι εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας για την παραγώγιση συναρτήσεων(*) πετυχαίνουμε να μην εμφανίζεται ο χρόνος t. Ολοκλήρωση της σχέσης (3) δίνει:

(*) Γ. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: "ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ"

$$\int \dot{\varphi}\, d\varphi = \int b\cos\varphi\, d\varphi \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = b\sin\varphi + c \qquad (4)$$

Όμως, όταν η ημιευθεία Οξ περνά από τον άξονα Οx έχει γωνιακή ταχύτητα ίση με μηδέν. Άρα για $\varphi = 0$ είναι $\dot{\varphi} = 0$ και η σχέση (4) δίνει $c = 0$. Άρα αυτή γράφεται:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = b\sin\varphi \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = 2b\sin\varphi \qquad (5)$$

Στο σχήμα η γωνία $O\hat{A}B$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημιπεριφέρεια. Άρα είναι ορθή και έχουμε:

$$OA = OB\cdot\cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad r = 2R\cos\varphi \qquad (6)$$

Παραγώγιση αυτής ως προς t δίνει:

$$\dot{r} = -2R\sin\varphi\,\dot{\varphi} \qquad (7)$$

και με δεύτερη παραγώγιση ως προς t παίρνουμε:

$$\ddot{r} = -2R\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{\varphi} - 2R\sin\varphi\,\ddot{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} = -2R\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - 2R\sin\varphi\,\ddot{\varphi} \quad (8)$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (2) τις εκφράσεις των $\dot{r}$, $\ddot{r}$ από τις σχέσεις (7), (8) και παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \left(-2R\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - 2R\sin\varphi\,\ddot{\varphi} - r\dot{\varphi}^2\right)\underset{\sim}{i_r} + \left(-4R\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + r\ddot{\varphi}\right)\underset{\sim}{i_\varphi}$$

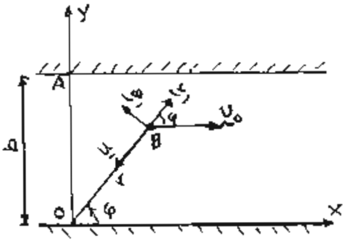
Αντικαθιστούμε τώρα στη σχέση αυτή τις εκφράσεις των r, $\dot{\varphi}^2$, $\ddot{\varphi}$ από τις σχέσεις (6), (5), (1) και παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \left(-2R\cos\varphi\cdot 2b\sin\varphi - 2R\sin\varphi\cdot b\cos\varphi - 2R\cos\varphi\, 2b\sin\varphi\right)\underset{\sim}{i_r} +$$

$$+\left(-4R\sin\varphi\cdot 2b\sin\varphi + 2R\cos\varphi\, b\cos\varphi\right)\underset{\sim}{i_\varphi} \quad \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma} = -8bR\sin\varphi\cos\varphi\,\underset{\sim}{i_r} + 2bR\left(\cos^2\varphi - 4\sin^2\varphi\right)\underset{\sim}{i_\varphi}$$

Άσκηση 5



Μια βάρκα Β αναχωρεί από το σημείο Α της όχθης ενός ποταμού πλάτους b και κινείται ώστε σε τυχαία θέση η ταχύτητά της ως προς το νερό να έχει μέτρο ίσο με u και να κατευθύνεται προς το σημείο Ο το οποίο βρίσκεται ακριβώς απέναντι από το Α. Αν η ταχύτητα του νερού είναι σταθερή με μέτρο u_0 να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς της βάρκας σε πολικές συντεταγμένες. Δίνεται: $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

Λύση

Στο σχήμα φαίνεται η τυχαία θέση της βάρκας, και είναι:

$$\underline{u} = -u\,\underline{i}_r \qquad \underline{u}_0 = u_0\cos\varphi\,\underline{i}_r - u_0\sin\varphi\,\underline{i}_\varphi$$

Η συνολική ταχύτητα της βάρκας είναι

$$\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}_0 \Rightarrow \underline{v} = -u\,\underline{i}_r + u_0\cos\varphi\,\underline{i}_r - u_0\sin\varphi\,\underline{i}_\varphi \Rightarrow$$

$$\underline{v} = (u_0\cos\varphi - u)\,\underline{i}_r - u_0\sin\varphi\,\underline{i}_\varphi \qquad (1)$$

Η γενική έκφραση της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{i}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{i}_\varphi \qquad (2)$$

Άρα:

$$\dot{r} = u_0\cos\varphi - u \qquad (3)$$

$$r\dot{\varphi} = -u_0\sin\varphi \qquad (4)$$

Η εξίσωση (3) γράφεται

$$\frac{dr}{dt} = u_0\cos\varphi - u \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = u_0\cos\varphi - u \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} = u_0\cos\varphi - u \qquad (5)$$

Από τη σχέση (4) παίρνουμε:

$$\dot{\varphi} = -\frac{u_0}{r}\sin\varphi \qquad (6)$$

και με αντικατάσταση στη σχέση (5) προκύπτει:

$$\frac{dr}{d\varphi}\left(-\frac{u_0}{r}\sin\varphi\right) = u_0\cos\varphi - u \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{u - u_0\cos\varphi}{u_0\sin\varphi}\,d\varphi \quad \Longrightarrow \quad \int\frac{dr}{r} = \int\frac{u-u_0\cos\varphi}{u_0\sin\varphi}\,d\varphi \quad \Longrightarrow$$

$$\ln r = \frac{u}{u_0}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \int\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi \quad \Longrightarrow$$

$$\ln r = \frac{u}{u_0}\ln\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right| - \int\frac{d(\sin\varphi)}{\sin\varphi} \quad \Longrightarrow$$

$$\ln r = \frac{u}{u_0}\ln\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right| - \ln|\sin\varphi| + c \quad \Longrightarrow$$

$$\ln r = \frac{u}{u_0}\ln\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right) - \ln(\sin\varphi) + c \qquad (7)$$

αφού είναι $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, άρα $\tan\frac{\varphi}{2}>0$, $\sin\varphi>0$. Όμως, για $\varphi=\frac{\pi}{2}$ είναι $r=b$. Έτσι, η σχέση (7) δίνει:

$$\ln b = \frac{u}{u_0}\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) + c \quad \Longrightarrow \quad c = \ln b$$

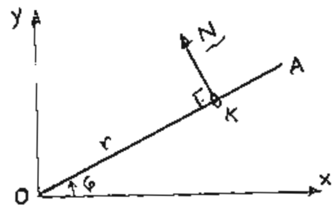
και η σχέση (7) δίνει:

$$\ln r = \ln\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{u_0}} - \ln(\sin\varphi) + \ln b \quad \Longrightarrow$$

$$\ln r = \ln\frac{b\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{u_0}}}{\sin\varphi} \quad \Longrightarrow \quad r = b\,\frac{\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{u_0}}}{\sin\varphi}$$

Άσκηση 6

Η αβαρής ράβδος ΟΑ του σχήματος περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο Oxy περί το άκρο της Ο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Τη χρονική στιγμή t=0, ο κρίκος Κ αποσπάται από το μέσο της ράβδου. Να βρεθεί η απόσταση του κρίκου από το Ο σα συνάρτηση του χρόνου και η χρονική στιγμή που ο κρίκος φτάνει στο Β, αν δεν υπάρχει τριβή. Να βρεθεί επίσης η κάθετη δύναμη N που δέχεται ο κρίκος Κ από τη ράβδο. Η μάζα του κρίκου είναι m.



$(OA)=\ell$

Λύση

Θεωρούμε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία ο κρίκος απέχει r από το Ο, όπου $r<\ell$. Η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με τον ημιάξονα Οx. Επειδή δεν υπάρχει τριβή, η μοναδική οριζόντια δύναμη που ασκείται στον κρίκο είναι η $\underset{\sim}{N}=N\underset{\sim}{i}_\varphi$. Σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\underset{\sim}{N}=m\underset{\sim}{\gamma} \Rightarrow N\underset{\sim}{i}_\varphi=m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\underset{\sim}{i}_r+m(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\underset{\sim}{i}_\varphi$$

Κατά τις διευθύνσεις $\underset{\sim}{i}_r$, $\underset{\sim}{i}_\varphi$ έχουμε:

$$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=0 \qquad (1)$$

$$N=m(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}) \qquad (2)$$

Με $\dot{\varphi}=\omega$ (σταθερό) η σχέση (1) δίνει τη δ.ε.

$$\ddot{r}-\omega^2 r=0 \qquad (3)$$

Η γραμμική αυτή διαφορική εξίσωση(x) είναι ομογενής, γραμμική, δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και άγνωστη συνάρτηση $r(t)$. Η χαρακτηριστική αλγεβρική είναι $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$. Άρα η γενική λύση της είναι:

$$r(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} \qquad (4)$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 θα προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για $t=0$, ο κρίκος βρίσκεται στο μέσο της ράβδου. Άρα είναι:

$$r(0) = \frac{\ell}{2} \implies c_1 e^{\omega \cdot 0} + c_2 e^{-\omega \cdot 0} = \frac{\ell}{2} \implies c_1 + c_2 = \frac{\ell}{2} \qquad (5)$$

Επειδή ο κρίκος "αποσπάται" από το μέσο της ράβδου, δεν έχει ακτινική ταχύτητα για $t=0$:

$$\dot{r}(0) = 0 \implies \left.\frac{dr(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \implies \left. c_1 \omega e^{\omega t} - c_2 \omega e^{-\omega t}\right|_{t=0} = 0$$

$$\implies c_1 \omega - c_2 \omega = 0 \implies c_1 = c_2 \qquad (6)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (5), (6) δίνει $c_1 = c_2 = \ell/4$. Έτσι η σχέση (4) γράφεται:

$$r(t) = \frac{\ell}{4} e^{\omega t} + \frac{\ell}{4} e^{-\omega t} \qquad (7)$$

Ο κρίκος θα φτάσει στο άκρο Α της ράβδου τη χρονική στιγμή τ:

$$r(\tau) = \ell \implies \frac{\ell}{4} e^{\omega \tau} + \frac{\ell}{4} e^{-\omega \tau} = \ell \implies e^{\omega \tau} + e^{-\omega \tau} = 4 \implies$$

$$e^{2\omega \tau} - 4 e^{\omega \tau} + 1 = 0 \qquad (8)$$

Με $x = e^{\omega \tau}$ αυτή έχει λύσεις: $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Άρα είναι:

(x) ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: "ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

$$e^{\omega\tau} = 2 \pm \sqrt{2} \implies \omega\tau = \ln(2 \pm \sqrt{2}) \implies \tau = \frac{1}{\omega} \ln(2+\sqrt{2})$$

όπου κρατήσαμε μόνο το πρόσημο (+), αφού το πρόσημο (-) δίνει $\tau < 0$.

Με $\dot{\varphi} = \omega$ (σταθερό) είναι $\ddot{\varphi} = 0$ και με $r(t)$ να δίνεται από τη σχέση (7) είναι:

$$\dot{r}(t) = \frac{\omega \ell}{4} e^{\omega t} - \frac{\omega \ell}{4} e^{-\omega t}$$

Ετσι, η σχέση (4) δίνει:

$$N = m\left(2\frac{\omega \ell}{4} e^{\omega t} - 2\frac{\omega \ell}{4} e^{-\omega t}\right)\omega \implies N = \frac{m\omega^2 \ell}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$$

Άσκηση 7

Μέσα σε ευθύγραμμο σωλήνα μήκους ℓ, βρίσκεται σημειακή μάζα m η οποία συνδέεται με το άκρο O του σωλήνα με τη βοήθεια ελατηρίου σταθεράς k. O σωλήνας είναι εσωτερικά λείος και αβαρής, όπως αβαρές είναι και το ελατήριο το οποίο έχει φυσικό μήκος ίσο με $\frac{\ell}{2}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο σωλήνας αρχίζει να περιστρέφεται περί το O σε σταθερό οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Ζητούνται:

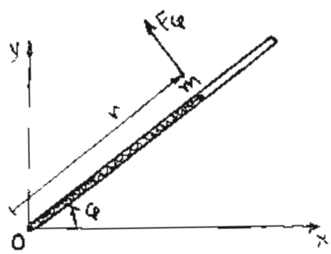
(i) Η συνθήκη ώστε η μάζα m να εκτελεί αρμονική ταλάντωση μέσα στο σωλήνα.

(ii) Η εξίσωση κίνησης της μάζας m.

(iii) Η κάθετη δύναμη που δέχεται η μάζα m από το σωλήνα.

Λύση

Σε τυχαία θέση (r, φ) της σημειακής μάζας m, αυτή δέχεται μία δύναμη F_r από το ελατήριο και μία κάθετη δύναμη F_φ από το σωλήνα. Το βάρος της μάζας m αναιρείται α-



από την αντίστοιχη κατακόρυφη δύναμη που δέχεται η m από το σωλήνα. Επειδή το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι ίσο με $\frac{\ell}{2}$, η επιμήκυνσή του είναι ίση με $r-\frac{\ell}{2}$. Άρα, η μάζα m δέχεται δύναμη μέτρου $k(r-\frac{\ell}{2})$ με φορά προς το O. Άρα είναι

$$\underset{\sim}{F} = F_r \underset{\sim}{i_r} + F_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{F} = -k\left(r-\frac{\ell}{2}\right)\underset{\sim}{i_r} + F_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi} \qquad (1)$$

και σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$-k\left(r-\frac{\ell}{2}\right)\underset{\sim}{i_r} + F_\varphi \underset{\sim}{i_\varphi} = m\left((\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\underset{\sim}{i_r} + (2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\underset{\sim}{i_\varphi}\right)$$

σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής. Άρα είναι:

$$-k\left(r-\frac{\ell}{2}\right) = m\left(\ddot{r}-r\omega^2\right) \qquad (2)$$

$$F_\varphi = m\left(2\dot{r}\omega\right) \qquad (3)$$

αφού είναι $\dot{\varphi}=\omega$ (σταθερό).
Η δ.ε. (2) γράφεται:

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}\left(r-\frac{\ell}{2}\right) - \omega^2 r = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} + \left(\frac{k}{m}-\omega^2\right) r - \frac{k\ell}{2m} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\left(r - \frac{k\ell}{2m\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)}\right) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\left(r - \frac{k\ell}{2(k-m\omega^2)}\right) = 0 \qquad (4)$$

Με την αντικατάσταση:

$$s = r - \frac{k\ell}{2\left(k-m\omega^2\right)} \quad \Longrightarrow \quad \dot{s} = \dot{r} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{s} = \ddot{r}$$

και η δ.ε. (4) γράφεται:

$$\ddot{s} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) s = 0 \qquad (5)$$

Η δ.ε. περιγράφει αρμονική ταλάντωση όταν είναι:

$$\frac{k}{m} - \omega^2 = \Omega^2 > 0 \qquad \text{δηλ.} \quad \frac{k}{m} > \omega^2$$

οπότε παίρνει τη μορφή

$$\ddot{s} + \Omega^2 s = 0 \qquad (6)$$

και έχει λύση

$$s(t) = A\sin\Omega t + B\cos\Omega t \qquad (7)$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση

$$s = r - \frac{k\ell}{2(k - m\omega^2)}$$

παίρνουμε:

$$r(t) = A\sin\Omega t + B\cos\Omega t + \frac{k\ell}{2(k - m\omega^2)} \qquad (8)$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Άρα είναι:

$$r(0) = 0 \implies B + \frac{k\ell}{2(k - m\omega^2)} = \frac{\ell}{2} \implies B = -\frac{k\ell}{2(k - m\omega^2)} + \frac{\ell}{2}$$

Ακόμη, για $t=0$ η μάζα m έχει μηδενική ακτινική ταχύτητα:

$$\dot{r}(0) = 0 \implies \dot{r}(t)\Big|_{t=0} = 0 \implies A\Omega\cos\Omega\cdot 0 - B\Omega\sin\Omega\cdot 0 = 0$$

$$\implies A = 0$$

Άρα είναι:

$$r(t) = \left(-\frac{k\ell}{2(k - m\omega^2)} + \frac{\ell}{2}\right)\cos\Omega t + \frac{k\ell}{2(k - m\omega^2)} \qquad (9)$$

Με βάση την τελευταία σχέση βρίσκουμε την κάθετη δύναμη F_φ χρησιμοποιώντας τη σχέση (3):

$$F_\varphi = 2m\omega\dot{r} = 2m\omega \cdot \left(-\frac{k\ell}{2(k-m\omega^2)} + \frac{\ell}{2} \right)(-\Omega)\sin\Omega t \implies$$

$$F_\varphi = \frac{m^2\omega^3\Omega\ell}{k-m\omega^2}\sin\Omega t$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση:

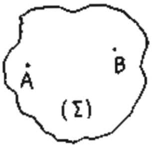
$$\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega^2 \implies \Omega = \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^{1/2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

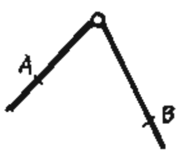
Κινηματική στερεού σώματος

3.1 Η γενική κίνηση απόλυτα στερεού σώματος.

Ένα σώμα (Σ) θα ονομάζεται **απόλυτα στερεό** όταν η απόσταση δύο οποιωνδήποτε σημείων του Α, Β παραμένει σταθερή με το χρόνο.



Για παράδειγμα, μία ράβδος, ένας μεταλλικός δίσκος, μία συμπαγής σφαίρα, είναι απόλυτα στερεά σώματα. Όμως, ένας διαβήτης δεν είναι απόλυτα στερεό σώμα. Πράγματι: Αν Α είναι ένα ορισμένο σημείο του ενός σκέλους του διαβήτη και Β κάποιο (ορισμένο) σημείο του άλλου σκέλους, η απόσταση ΑΒ είναι δυνατόν να μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Όταν ένα απόλυτα στερεό σώμα κινείται, κάθε σημείο του Α έχει ένα διάνυσμα ταχύτητας $\underset{\sim}{\upsilon}_A$ και ένα διάνυσμα επιτάχυνσης $\underset{\sim}{\gamma}_A$. Γενικά, τα διανύσματα $\underset{\sim}{\upsilon}_A$, $\underset{\sim}{\gamma}_A$, μεταβάλλονται με το χρόνο για το συγκεκριμένο σημείο.

Αν σε χρονικό διάστημα dt το απόλυτα στερεό (Σ) στραφεί κατά γωνία dφ γύρω από κάποιο άξονα (η), η γωνιακή ταχύτητα ω του **στερεού** είναι:

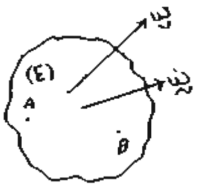
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι διάνυσμα: Ο αντίχειρας του δεξιού χεριού δείχνει τη διεύθυνση και φορά του διανύσματος $\underset{\sim}{\omega}$, όταν τα υπόλοιπα δάκτυλα δείχνουν τη φορά του $d\varphi$ (δηλαδή τη φορά περιστροφής). Προφανώς, αν ο άξονας περιστροφής έχει σταθερή διεύθυνση, τότε και το διάνυσμα $\underset{\sim}{\omega}$ έχει σταθερή διεύθυνση.

Ορίζεται η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$ του **στερεού**, ίση με την παράγωγο του διανύσματος $\underset{\sim}{\omega}$ της γωνιακής ταχύτητας ως προς το χρόνο:

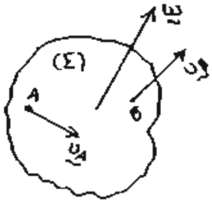
$$\dot{\underset{\sim}{\omega}} = \frac{d\underset{\sim}{\omega}}{dt}$$

Αν το διάνυσμα $\underset{\sim}{\omega}$ είναι σταθερό, τότε η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$ είναι μηδενικό διάνυσμα. Γενικά, αν το διάνυσμα $\underset{\sim}{\omega}$ δεν έχει σταθερή διεύθυνση (δηλαδή ο άξονας περιστροφής δεν έχει σταθερή διεύθυνση) τότε τα διανύσματα $\dot{\underset{\sim}{\omega}}, \underset{\sim}{\omega}$ έχουν **διαφορετικές διευθύνσεις**.



Ο νόμος των ταχυτήτων: Αν A, B είναι δύο οποιαδήποτε σημεία ενός **απόλυτα στερεού** (Σ) τότε οι ταχύτητες $\underset{\sim}{\upsilon}_A$, $\underset{\sim}{\upsilon}_B$ συνδέονται με τη σχέση:

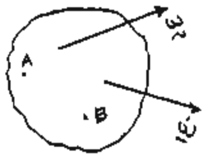
$$\underset{\sim}{\upsilon}_B = \underset{\sim}{\upsilon}_A + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{AB} \qquad (3.1.1)$$



όπου $\underset{\sim}{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού (Σ). Στην περίπτωση που είναι $\underset{\sim}{\omega}=0$ έχουμε $\underset{\sim}{\upsilon}_A = \underset{\sim}{\upsilon}_B$ για οποιαδήποτε σημεία A, B. Άρα, αν είναι $\underset{\sim}{\omega}=0$, τότε όλα τα σημεία του στερεού έχουν ίσα διανύσματα ταχυτήτων. Στην περίπτωση αυτή, το στερεό κάνει **απλή μεταφορά**.

Ο νόμος των επιταχύνσεων: Αν ένα **απόλυτα στερεό** (Σ) έχει γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$, τότε για δύο οποιαδήποτε σημεία του A και B ισχύει:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_A + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{AB} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{AB}) \qquad (3.1.2)$$



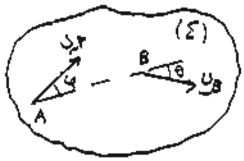
όπου $\underset{\sim}{\gamma}_B$ είναι η επιτάχυνση του σημείου B, ενώ $\underset{\sim}{\gamma}_A$ είναι η επιτάχυνση του σημείου A.

Παρατηρούμε στις δύο προηγούμενες σχέσεις ότι το διάνυσμα $\underset{\sim}{AB}$ έχει αρχή το σημείο A του οποίου η ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_A$ εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος του νόμου ταχυτήτων και η επιτάχυνση γ_A στο δεύτερο μέλος του νόμου των επιταχύνσεων. Η ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_B$ και η επιτάχυνση γ_B εμφανίζονται στα πρώτα μέλη των παραπάνω σχέσεων.

Τονίζουμε ιδιαίτερα ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση αναφέρονται πάντα σε κάποιο **σημείο**, ενώ η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση αναφέρονται στο απόλυτα στερεό **σώμα** στο οποίο ανήκει το σημείο.

Ο νόμος των προβολών των ταχυτήτων

Έστω A, B δύο σημεία του απόλυτα στερεού (Σ), με ταχύτητες $\underset{\sim}{v}_A$, $\underset{\sim}{v}_B$ αντίστοιχα. Αποδεικνύεται εύκολα ότι:



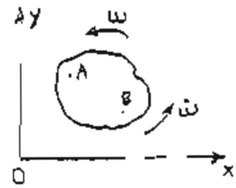
Οι ταχύτητες $\underset{\sim}{v}_A$, $\underset{\sim}{v}_B$, έχουν ίσες προβολές στην ευθεία η οποία ορίζεται από τα σημεία A, B:

$$|\underset{\sim}{v}_A| \cos\varphi = |\underset{\sim}{v}_B| \cos\vartheta$$

Με χρήση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{n} = \underset{\sim}{AB}/|AB|$, ο νόμος των προβολών γράφεται σε διανυσματική μορφή:

$$\underset{\sim}{v}_A \cdot \hat{n} = \underset{\sim}{v}_B \cdot \hat{n}$$

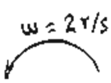
3.2 Η επίπεδη κίνηση απόλυτα στερεού σώματος



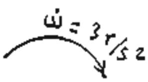
Θεωρούμε την επίπεδη πλάκα τυχαίου σχήματος η οποία κινείται στο επίπεδό της Oxy όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο άξονας Oz έχει θετική φορά προς τα πάνω αφού το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι δεξιόστροφο: Ο αντίχειρας του δεξιού χεριού δείχνει το θετικό ημιάξονα Ox, ο δείκτης τον θετικό ημιάξονα Oy ενώ ο μεσαίος δείχνει τον θετικό ημιάξονα Oz, όταν τα υπόλοιπα δύο δάκτυλα μαζευτούν.

Η γωνιακή ταχύτητα ω και η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$ παριστάνονται με τόξα όπως φαίνονται στο σχήμα. Τα τόξα είναι προσανατολισμένα και βρίσκονται στο επίπεδο Oxy της κίνησης. Από το τόξο βρίσκουμε το διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο στον άξονα z: Ο αντίχειρας του δεξιού χεριού έχει τη διεύθυνση και φορά του διανύσματος $\underset{\sim}{\omega}$, όταν τα υπόλοιπα δάκτυλα του ιδίου χεριού έχουν τη φορά του τόξου ω. (Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για το $\underset{\sim}{\dot{\omega}}$) Έτσι, αν το τόξο ω έχει την αντιωρολογιακή φορά, τότε είναι $\underset{\sim}{\omega} = \omega \underset{\sim}{k}$, ενώ όταν το ω έχει ωρολογιακή φορά, τότε είναι $\underset{\sim}{\omega} = \omega(-\underset{\sim}{k})$. Αντίστοιχα ισχύει για το $\underset{\sim}{\dot{\omega}}$.

Παράδειγμα:



$\underset{\sim}{\omega} = 2\underset{\sim}{k}$



$\underset{\sim}{\dot{\omega}} = -3\underset{\sim}{k}$

Με βάση τα όσα είπαμε ο άξονας περιστροφής του στερεού το οποίο κάνει επίπεδη κίνηση στο επίπεδο Oxy είναι παράλληλος στον άξονα z δηλαδή κάθετος στο επίπεδο Oxy. Η ακριβής του θέση, προς το παρόν, δεν ενδιαφέρει.

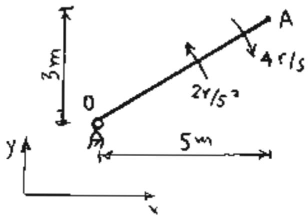
Για οποιαδήποτε σημεία Α, Β του απόλυτα στερεού που κάνει επίπεδη κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$, ισχύει ο νόμος ταχυτήτων:

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{AB} \qquad (3.2.1)$$

όπως στην γενική κίνηση. Ο νόμος των επιταχύνσεων παίρνει τη μορφή:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_A + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{AB} - \omega^2 \underset{\sim}{AB} \qquad (3.2.2)$$

Παράδειγμα Η ράβδος ΟΑ του σχήματος που είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο κινείται στη φάση του σχήματος με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 4 r/s$ Σύμφωνα με τους Δείκτες του Ωρολογίου (Σ.Δ.Ω.) και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega} = 2 r/s^2$ Αντίθετη με τους Δείκτες του Ωρολογίου (Α.Δ.Ω.).



Έτσι έχουμε $\underset{\sim}{\omega} = -4\underset{\sim}{k}$, $\dot{\underset{\sim}{\omega}} = 2\underset{\sim}{k}$. Η ταχύτητα του σημείου Α είναι:

$$\underset{\sim}{v}_A = \cancel{\underset{\sim}{v}_0}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{OA} = -4\underset{\sim}{k} \times (5\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}) = -20\underset{\sim}{j} + 12\underset{\sim}{i}$$

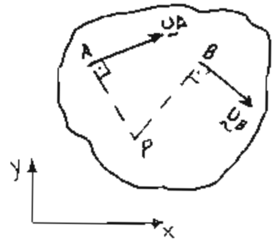
αφού το σημείο Ο είναι αρθρωμένο οπότε $\underset{\sim}{v}_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$. (Συνιστούμε στον αναγνώστη να επαναλάβει το εξωτεριικό γινόμενο διανυσμάτων στο κεφάλαιο 1). Η επιτάχυνση του σημείου Α είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \cancel{\underset{\sim}{\gamma}_0}^{\,0} + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{OA} - \omega^2 \underset{\sim}{OA} = 2\underset{\sim}{k} \times (5\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}) - (-4)^2 \cdot (5\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = 10\underset{\sim}{j} - 6\underset{\sim}{i} - 16(5\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma}_A = -86\underset{\sim}{i} - 38\underset{\sim}{j}$$

Ο στιγμιαίος πόλος περιστροφής (σ.π.π.)

Υποθέτουμε ότι ένα απόλυτα στερεό σώμα (Σ) κάνει επίπεδη κίνηση. Ψάχνουμε ένα σημείο P το οποίο να έχει μηδενική ταχύτητα. Ο νόμος ταχυτήτων δίνει:



$$\underset{\sim}{v}_A = \cancelto{0}{\underset{\sim}{v}_P} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{PA} \implies \underset{\sim}{v}_A = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{PA}$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι η ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_A$ είναι κάθετη στα διανύσματα $\underset{\sim}{\omega}$, $\underset{\sim}{PA}$ αφού αυτή είναι το αποτέλεσμα του εξωτερικού γινομένου των διανυσμάτων αυτών. Όμοια, έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_B = \cancelto{0}{\underset{\sim}{v}_P} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{PB} \implies \underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{PB}$$

και επομένως $\underset{\sim}{v}_B \perp \underset{\sim}{\omega}$, $\underset{\sim}{v}_B \perp \underset{\sim}{PB}$. Έτσι, επειδή είναι $\underset{\sim}{v}_A \perp \underset{\sim}{PA}$, $\underset{\sim}{v}_B \perp \underset{\sim}{PB}$, το σημείο P προσδιορίζεται ως η τομή των ευθειών που είναι κάθετες στα σημεία A, B στις ταχύτητες $\underset{\sim}{v}_A$, $\underset{\sim}{v}_B$ αντίστοιχα.

Επειδή το σημείο P έχει μηδενική ταχύτητα, συμπεραίνουμε αμέσως ότι ο άξονας περιστροφής, **στη φάση του σχήματος**, είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης στο σημείο P. Φυσικά, ο σ.π.π. P μπορεί να βρίσκεται και εκτός του απόλ. στερεού.

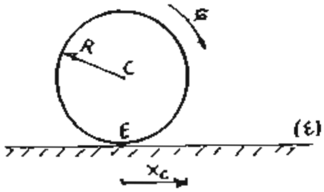
Αν M είναι τυχαίο σημείο του απόλ. στερεού Σ, έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_M = \cancelto{0}{\underset{\sim}{v}_P} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{PM} \implies \underset{\sim}{v}_M = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{PM} \implies$$

$$|\underset{\sim}{v}_M| = |\underset{\sim}{\omega}| \cdot |\underset{\sim}{PM}| \sin 90^\circ \implies |\underset{\sim}{v}_M| = |\underset{\sim}{\omega}||\underset{\sim}{PM}|$$

αφού $\underset{\sim}{\omega} \perp \underset{\sim}{PM}$. Από την τελευταία σχέση φαίνεται αμέσως ότι: **Το σημείο του στερεού με μικρότερο μέτρο ταχύτητας είναι αυτό το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από τον σ.π.π.**

Ο τροχός που κυλίεται χωρίς ολίσθηση



Θεωρούμε τον τροχό που έχει κέντρο C και ακτίνα ίση με R, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω ότι ο τροχός περιστρέφεται κατά γωνία φ και συγχρόνως το κέντρο του C μετατοπίζεται κατά x_c με φορές που φαίνονται στο σχήμα. Αν ισχύει $x_c = R\varphi$ τότε λέμε ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση. Παραγώγιση της σχέσης $x_c = R\varphi$ (η οποία ισχύει για κάθε t) ως προς t δίνει

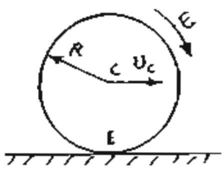
$$\dot{x}_c = R\dot{\varphi} \implies \upsilon_c = R\omega$$

Η σχέση αυτή ισχύει όταν οι φορές των υ_c, ω είναι συσχετισμένες ως εξής: Για ωρολογιακή φορά του ω, η υ_c έχει φορά προς τα δεξιά ενώ για αντιωρολογιακή φορά του ω, η υ_c έχει φορά προς τ' αριστερά.

Παραγώγιση της σχέσης $\upsilon_c = R\omega$ ως προς t δίνει:

$$\dot{\upsilon}_c = R\dot{\omega} \implies \gamma_c = R\dot{\omega}$$

όπου: Για ωρολογιακή φορά του $\dot{\omega}$, το γ_c έχει φορά προς τα δεξιά, ενώ για αντιωρολογιακή φορά του $\dot{\omega}$, το γ_c έχει φορά προς τ' αριστερά.



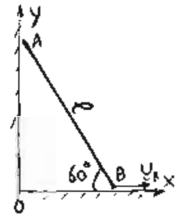
Στο διπλανό σχήμα είναι $\underline{\omega} = -\omega\underline{k}$ και $\underline{\upsilon}_c = \upsilon_c\underline{i}$. Άρα η ταχύτητα του σημείου επαφής Ε του τροχού με την επίπεδη επιφάνεια είναι:

$$\underline{\upsilon}_E = \underline{\upsilon}_c + \underline{\omega} \times \underline{CE} = \upsilon_c\underline{i} + (-\omega\underline{k}) \times (-R\underline{j}) = \upsilon_c\underline{i} - \omega R\underline{i} \implies \underline{\upsilon}_E = 0,$$

αφού $\upsilon_c = \omega R$. Άρα: **Το σημείο επαφής του τροχού με την ακίνητη επιφάνεια έχει μηδενική ταχύτητα όταν ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση.** (Το Ε είναι σ.π.π. του τροχού).

Άσκηση 1

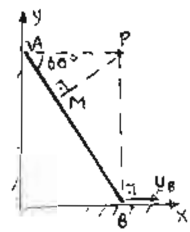
Στη φάση του σχήματος η ράβδος μήκους $\ell = 2m$ σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα και το σημείο της Β έχει σταθερή ταχύτητα $\upsilon_B = 0{,}3\,m/s$ με φορά όπως δείχνει το σχήμα. Ζητούνται:



Σχ.1

(i) Ο στιγμιαίος πόλος περιστροφής της ράβδου.
(ii) Η ταχύτητα του άκρου Α
(iii) Το σημείο της ράβδου με το μικρότερο μέτρο ταχύτητας.
(iv) Η επιτάχυνση του σημείου Α.
(v) Να ελεγχθεί αν ικανοποιείται ο νόμος των προβολών για τα σημεία Α, Β.

Λύση



Σχ.2

(i) Είναι προφανές ότι η ταχύτητα $\underset{\sim}{\upsilon_A}$ του σημείου Α έχει τη διεύθυνση του άξονα y, ενώ η $\underset{\sim}{\upsilon_B}$ έχει τη διεύθυνση του x. Αν φέρουμε κάθετη στο σημείο Β στον άξονα x και κάθετη στο σημείο Α στον y, η τομή των καθέτων αυτών είναι ο σ.π.π. της ράβδου. και έχει συντεταγμένες:

$$P(\ell\cos 60,\ \ell\sin 60) = P\left(2\ \tfrac{1}{2},\ 2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(1, \sqrt{3})$$

(ii) Ο νόμος των ταχυτήτων δίνει:

$$\underset{\sim}{\upsilon_A} = \underset{\sim}{\upsilon_B} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{BA} \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα είναι $\underset{\sim}{\upsilon_B} = 0{,}3\,\underset{\sim}{i}$. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\underset{\sim}{BA}$ βρίσκονται αν μεταφέρουμε παράλληλα το σύστημα αξόνων ώστε η αρχή να συμπέσει με την αρχή Β του $\underset{\sim}{BA}$. Έτσι είναι:

$$\underset{\sim}{BA} = (-\ell\cos 60,\ \ell\sin 60) \implies \underset{\sim}{BA} = (-1, \sqrt{3}) = -\underset{\sim}{i} + \sqrt{3}\,\underset{\sim}{j}$$

Η γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}$ της ράβδου είναι άγνωστη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι $\underset{\sim}{\omega}=\omega\underset{\sim}{k}$. Η σχέση (1) δίνει:

$$\underset{\sim}{v}_A = 0{,}3\underset{\sim}{i} + \omega\underset{\sim}{k}\times(-\underset{\sim}{i}+\sqrt{3}\underset{\sim}{j}) \implies \underset{\sim}{v}_A = 0{,}3\underset{\sim}{i} - \omega\underset{\sim}{j} - \omega\sqrt{3}\underset{\sim}{i} \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_A = (0{,}3-\omega\sqrt{3})\underset{\sim}{i} - \omega\underset{\sim}{j} \qquad (2)$$

Όμως, όπως είναι προφανές, η ταχύτητα του σημείου Α έχει τη διεύθυνση του άξονα y. Άρα είναι $\underset{\sim}{v}_A = v_A\underset{\sim}{j}$ και η σχέση (2) γράφεται:

$$v_A\underset{\sim}{j} = (0{,}3-\omega\sqrt{3})\underset{\sim}{i} - \omega\underset{\sim}{j} \qquad (3)$$

Με εξίσωση των συντελεστών των $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$ στα δύο μέλη έχουμε:

$$0 = 0{,}3-\omega\sqrt{3} \qquad\qquad v_A = -\omega$$

Άρα είναι $\omega = 0{,}1\sqrt{3}\ r/s = 0{,}17\ r/s$, $v_A = -0{,}17\ m/s$. Άρα η ταχύτητα του σημείου Α είναι $\underset{\sim}{v}_A = -0{,}17\underset{\sim}{j}$. Ήταν αναμενόμενο το πρόσημο του αποτελέσματος, αφού, καθώς το άκρο Β της ράβδου κινείται προς τα δεξιά, το άκρο Α πρέπει να κινείται προς τα κάτω.

(iii) Το σημείο της ράβδου με το μικρότερο μέτρο ταχύτητας είναι αυτό που βρίσκεται πλησιέστερα στο σ.π.π. Ρ. Προφανώς βρίσκεται αν φέρουμε την κάθετο από το σημείο Ρ στη ράβδο και είναι το σημείο Μ της ράβδου όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Είναι

$$\underset{\sim}{AM} \,//\, \underset{\sim}{AB} \implies \underset{\sim}{AM} = \lambda\underset{\sim}{AB} \implies (x_M-x_A,\ y_M-y_A) = \lambda(1,-\sqrt{3}) \implies$$

$$(x_M,\ y_M-\sqrt{3}) = \lambda(1,-\sqrt{3}) \implies$$

$$\{x_M = \lambda,\quad y_M = \sqrt{3}-\lambda\sqrt{3}\} \qquad (4)$$

Ακόμη είναι $\underset{\sim}{PM} \perp \underset{\sim}{AB} \implies \underset{\sim}{PM}\cdot\underset{\sim}{AB} = 0 \implies$

$$(x_M-1,\ y_M-\sqrt{3})\cdot(1,-\sqrt{3}) = 0 \implies (x_M-1)\cdot 1 + (y_M-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = 0$$

$$\implies x_M - 1 - y_M\sqrt{3} + 3 = 0 \implies x_M - \sqrt{3}\,y_M + 2 = 0 \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (4),(5) βρίσκουμε: $x_M = 1/4$, $y_M = \sqrt{3}/4$. Η ταχύτητα του σημείου Μ βρίσκεται:

$$\underset{\sim}{v}_M = \underset{\sim}{v}_B + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{BM}$$

όπου $\underset{\sim}{\omega} = 0{,}1\sqrt{3}\,\underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου και

$$\underset{\sim}{BM} = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - (1,0) \implies \underset{\sim}{BM} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{3}{4}\underset{\sim}{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\underset{\sim}{j}$$

Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{v}_M = 0{,}3\underset{\sim}{i} + 0{,}1\sqrt{3}\,\underset{\sim}{k} \times \left(-\frac{3}{4}\underset{\sim}{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\underset{\sim}{j}\right) \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_M = 0{,}3\underset{\sim}{i} - \frac{0{,}3\sqrt{3}}{4}\underset{\sim}{j} - \frac{0{,}3}{4}\underset{\sim}{i} \implies \underset{\sim}{v}_M = \frac{0{,}9}{4}\underset{\sim}{i} - \frac{0{,}3\sqrt{3}}{4}\underset{\sim}{j}$$

Το μέτρο της είναι:

$$|\underset{\sim}{v}_M| = \sqrt{\left(\frac{0{,}9}{4}\right)^2 + \left(-\frac{0{,}3\sqrt{3}}{4}\right)^2} \implies |\underset{\sim}{v}_M| \approx 0{,}26\ m/s$$

Αυτή είναι η μικρότερη κατά μέτρο ταχύτητα που μπορεί να έχει ένα σημείο (το Μ) της ράβδου στη φάση του σχήματος.

(iv) Η επιτάχυνση του σημείου Α μπορεί να βρεθεί από το νόμο των επιταχύνσεων:

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \underset{\sim}{\gamma}_B + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{BA} - \omega^2\,\underset{\sim}{BA} \qquad (6)$$

Επειδή, σύμφωνα με τα δεδομένα, η ταχύτητα του σημείου Β είναι **σταθερή**, είναι $\underset{\sim}{\gamma}_B = 0$. Η άγνωστη γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$ έχει τη μορφή $\dot{\underset{\sim}{\omega}} = \dot{\omega}\underset{\sim}{k}$ και με $\omega = 0{,}1\sqrt{3}$ που βρήκαμε στο (ii), η σχέση (6) δίνει:

$$\underline{\gamma}_A = 0 + \dot{\omega}\underline{k} \times (-\underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}) - (0{,}1\sqrt{3})^2(-\underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}) \Longrightarrow$$

$$\underline{\gamma}_A = -\dot{\omega}\underline{j} - \dot{\omega}\sqrt{3}\underline{i} + 0{,}03\underline{i} - 0{,}03\sqrt{3}\underline{j} \Longrightarrow$$

$$\gamma_A\underline{j} = (-\dot{\omega}\sqrt{3} + 0{,}03)\underline{i} + (-\dot{\omega} - 0{,}03\sqrt{3})\underline{j} \qquad (7)$$

(Γράψαμε $\underline{\gamma}_A = \gamma_A\underline{j}$ αφού η επιτάχυνση $\underline{\gamma}_A$ έχει τη διεύθυνση του άξονα y). Από τη σχέση (7) παίρνουμε:

$$-\dot{\omega}\sqrt{3} + 0{,}03 = 0 \qquad\qquad \gamma_A = -\dot{\omega} - 0{,}03\sqrt{3}$$

Άρα είναι $\dot{\omega} = 0{,}01\sqrt{3} \approx 0{,}017\ r/s^2$ και $\gamma_A = -0{,}04\sqrt{3}$. Άρα είναι: $\underline{\gamma}_A = -0{,}04\sqrt{3}\,\underline{j}$.

(v) Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα του διανύσματος $\underline{AB}$ είναι:

$$\hat{n} = \frac{\underline{AB}}{|\underline{AB}|} = \frac{(1,-\sqrt{3})}{|(1,-\sqrt{3})|} = \frac{(1,-\sqrt{3})}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} \Longrightarrow \hat{n} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Η προβολή της ταχύτητας $\underline{v}_A$ πάνω στην ευθεία AB είναι:

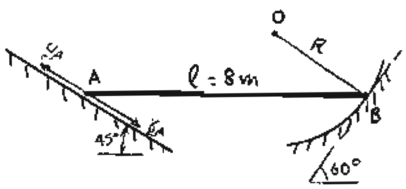
$$\underline{v}_A \cdot \hat{n} = -0{,}1\sqrt{3}\underline{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j}\right) = \frac{0{,}3}{2}$$

και η προβολή της $\underline{v}_B$ πάνω στην AB είναι:

$$\underline{v}_B \cdot \hat{n} = 0{,}3\underline{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j}\right) = \frac{0{,}3}{2}$$

Άρα οι δύο προβολές είναι ίσες και επαληθεύεται ο νόμος των προβολών.

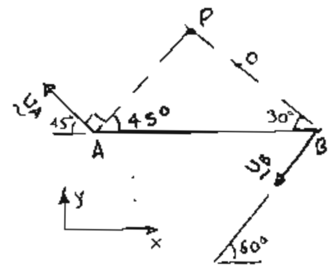
Άσκηση 2



Το άκρο A της ράβδου AB ολισθαίνει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου το οποίο έχει γωνία κλίσης 45°. Το άκρο B ολισθαίνει στο κυκλικό τόξο ακτίνας R = 3m.

Στη φάση του σχήματος η ράβδος AB είναι οριζόντια, με το άκρο της A να έχει ταχύτητα $4m/s$ επιτάχυνση $2m/s^2$ και φορές όπως στο σχήμα. Στη φάση αυτή να βρεθεί ο σ.π.π. καθώς και η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου B.

Λύση



Σχ. 2

Στη φάση του σχήματος η ταχύτητα του σημείου B είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά και σχηματίζει γωνία $60°$ με την οριζόντια διεύθυνση x. Η κάθετος στο σημείο B στη διεύθυνση της ταχύτητας $\underset{\sim}{u}_B$ έχει τη διεύθυνση της ακτίνας BO του κυκλικού τόξου. Φέρουμε την κάθετο στο σημείο A στην διεύθυνση της ταχύτητας $\underset{\sim}{u}_A$ η οποία τέμνει την προέκταση της BO στο σημείο P το οποίο αποτελεί και τον σ.π.π. της ράβδου.

Στο τρίγωνο APB έχουμε $A\hat{P}B = 180° - 45° - 30°$, άρα $A\hat{P}B = 115°$ και ο νόμος των ημιτόνων δίνει:

$$\frac{AB}{\sin 115°} = \frac{AP}{\sin 30°} = \frac{BP}{\sin 45°} \Rightarrow \frac{8m}{0{,}91} = \frac{AP}{0{,}5} = \frac{BP}{0{,}71}$$

Άρα είναι $AP = 4{,}4m$, $BP = 6{,}24m$.

Ταχύτητες: Ο νόμος των ταχυτήτων στη ράβδο AB δίνει:

$$\underset{\sim}{u}_A = \underset{\sim}{u}_B + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{BA} \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα, το διάνυσμα $\underset{\sim}{u}_A$ γράφεται:

$$\underset{\sim}{u}_A = 4\cos 45° \cdot (-\underset{\sim}{i}) + 4\sin 45° \underset{\sim}{j} \Rightarrow \underset{\sim}{u}_A = -2\sqrt{2}\,\underset{\sim}{i} + 2\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}$$

Με τη φορά της $\underset{\sim}{u}_B$ του σχήματος 2, η $\underset{\sim}{u}_B$ γράφεται:

$$\underline{v}_B = v_B \cos 60^\circ(-\underline{i}) + v_B \sin 60^\circ(-\underline{j}) \implies \underline{v}_B = -\frac{v_B}{2}\underline{i} - \frac{v_B\sqrt{3}}{2}\underline{j}$$

όπου $v_B = |\underline{v}_B|$. Με $\underline{\omega} = \omega\underline{k}$ και $\underline{BA} = -8\underline{i}$ η σχέση (1) δίνει:

$$-2\sqrt{2}\,\underline{i} + 2\sqrt{2}\,\underline{j} = -\frac{v_B}{2}\underline{i} - v_B\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j} + \omega\underline{k}\times(-8\underline{i}) \implies$$

$$-2\sqrt{2}\,\underline{i} + 2\sqrt{2}\,\underline{j} = -\frac{v_B}{2}\underline{i} - v_B\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j} - 8\omega\underline{j} \qquad (2)$$

και με εξίσωση των συντελεστών των $\underline{i}, \underline{j}$ στα δύο μέλη βρίσκουμε:

$$\left\{-2\sqrt{2} = -\frac{v_B}{2}\,,\ 2\sqrt{2} = -v_B\frac{\sqrt{3}}{2} - 8\omega\right\} \implies v_B = 5{,}64\,m/s,\ \omega = 10{,}52\,r/s.$$

Επιταχύνσεις: Ο νόμος των επιταχύνσεων δίνει:

$$\underline{\gamma}_A = \underline{\gamma}_B + \dot{\underline{\omega}}\times\underline{BA} - \omega^2\underline{BA} \qquad (3)$$

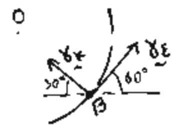
Από τα δεδομένα, η επιτάχυνση του σημείου A γράφεται:

$$\underline{\gamma}_A = 2\cos 45^\circ\,\underline{i} + 2\cos 45^\circ(-\underline{j}) \implies \underline{\gamma}_A = \sqrt{2}\,\underline{i} - \sqrt{2}\,\underline{j}$$

Ακόμη είναι: $\dot{\underline{\omega}} = \dot{\omega}\underline{k}$, $\omega = 10{,}52\ r/s$, $\underline{BA} = -8\underline{i}$. Έτσι, η σχέση (3) γράφεται:

$$\sqrt{2}\,\underline{i} - \sqrt{2}\,\underline{j} = \underline{\gamma}_B + \dot{\omega}\underline{k}\times(-8\underline{i}) - 10{,}52^2(-8\underline{i}) \implies$$

$$\sqrt{2}\,\underline{i} - \sqrt{2}\,\underline{j} = \underline{\gamma}_B - 8\dot{\omega}\underline{j} + 885{,}13\,\underline{i} \qquad (4)$$



Όμως το σημείο B κάνει κυκλική κίνηση κέντρου O και ακτίνας R=3m. Έτσι η επιτάχυνσή του αναλύεται στην κεντρομόλα γ_K η οποία έχει φορά προς το κέντρο O και στην επιτρόχια γ_ε η οποία είναι εφαπτομένη με φορά έστω αυτή του σχήματος. Είναι

$$\underline{\gamma}_K = |\underline{\gamma}_K|\cos 30^\circ(-\underline{i}) + |\underline{\gamma}_K|\sin 30^\circ\,\underline{j} = -|\underline{\gamma}_K|\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{i} + |\underline{\gamma}_K|\frac{1}{2}\underline{j}$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon} = |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}|\cos 60^\circ \underset{\sim}{i} + |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}|\sin 60 \underset{\sim}{j} = |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \frac{1}{2} \underset{\sim}{i} + |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{j}$$

Άρα

$$\underset{\sim}{\gamma}_{B} = \underset{\sim}{\gamma}_{K} + \underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon} = -|\underset{\sim}{\gamma}_{K}| \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{i} + |\underset{\sim}{\gamma}_{K}| \frac{1}{2} \underset{\sim}{j} + |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \frac{1}{2} \underset{\sim}{i} + |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{j} \Longrightarrow$$

Το μέτρο όμως της κεντρομόλας επιτάχυνσης είναι:

$$|\underset{\sim}{\gamma}_{K}| = \frac{U_B^2}{R} = \frac{5{,}64^2}{3} \Longrightarrow |\underset{\sim}{\gamma}_{K}| = 10{,}6 \; m/s^2$$

Άρα

$$\underset{\sim}{\gamma}_{B} = -10{,}6 \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{i} + 10{,}6 \frac{1}{2} \underset{\sim}{j} + |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \frac{1}{2} \underset{\sim}{i} + |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{j} \qquad (5)$$

Η σχέση (4) με αντικατάσταση της έκφρασης του $\underset{\sim}{\gamma}_{B}$ από τη σχέση (5) δίνει:

$$\sqrt{2}\underset{\sim}{i} - \sqrt{2}\underset{\sim}{j} = -9{,}12 \underset{\sim}{i} + 5{,}3 \underset{\sim}{j} + \frac{1}{2}|\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \underset{\sim}{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} |\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \underset{\sim}{j} - 8\dot{\omega} \underset{\sim}{j} + 885{,}13 \underset{\sim}{i} \Longrightarrow$$

$$1{,}41 \underset{\sim}{i} - 1{,}41 \underset{\sim}{j} = \left(876 + \frac{1}{2}|\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}|\right) \underset{\sim}{i} + \left(5{,}3 - 8\dot{\omega} + \frac{\sqrt{3}}{2}|\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}|\right) \Longrightarrow \qquad (6)$$

$$\left\{ 1{,}41 = 876 + \frac{1}{2}|\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}|, \qquad -1{,}41 = 5{,}3 - 8\dot{\omega} + 0{,}87\,|\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| \right\} \Longrightarrow$$

$$|\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}| = 874{,}6 \; m/s^2 \qquad \dot{\omega} = -95{,}95 \; r/s^2$$

Με αντικατάσταση του $|\underset{\sim}{\gamma}_{\varepsilon}|$ στη σχέση (5) παίρνουμε τελικά:

$$\underset{\sim}{\gamma}_{B} = 428{,}18 \underset{\sim}{i} + 761{,}83 \underset{\sim}{j}$$

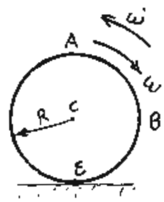
Παρατήρηση 1. Είναι φανερό ότι για τον προσδιορισμό των επιταχύνσεων διαφόρων σημείων είναι απαραίτητο να έχουν προσδιορισθεί οι ταχύτητές τους ή και η γωνιακή ταχύτητα του στερεού. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτο να εφαρμόσουμε πρώτα το νόμο των ταχυτήτων πριν εφαρμόσουμε το νόμο των επιταχύνσεων.

Παρατήρηση 2. Η εφαρμογή του νόμου των ταχυτήτων ή του νόμου των επιταχύνσεων σε κάποιο στερεό σώμα γίνεται πάντα **στη φάση που φαίνεται**

στο σχήμα! Έτσι, οι τιμές των γωνιακών ταχυτήτων, γωνιακών επιταχύνσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων είναι στιγμιαίες εκτός αν το πρόβλημα αναφέρει διαφορετικά.

Παρατήρηση 3. Όταν ένα σημείο κινείται κατά μήκος μίας ευθείας, ο περιορισμός είναι ότι η ταχύτητά του και η επιτάχυνσή του έχουν τη διεύθυνση της ευθείας αυτής. Όταν το σημείο κινείται κατά μήκος κυκλικού τόξου ο περιορισμός για την ταχύτητα είναι ότι αυτή έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης του τόξου. Ο περιορισμός για την επιτάχυνση είναι ότι η ακτινική (κεντρομόλα) συνιστώσα ισούται με $υ^2/R$ όπου $υ=|\underline{υ}|$ είναι το μέτρο της ταχύτητας και R η ακτίνα του κυκλικού τόξου.

Άσκηση 3



Ο τροχός του διπλανού σχήματος έχει κέντρο C ακτίνα $R=1m$ και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντια ευθεία. Στη φάση του σχήματος, ο τροχός έχει γωνιακή ταχύτητα $ω=2\,r/s$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{ω}=3\,r/s^2$ με φορές όπως στο σχήμα. Ζητείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση καθενός εκ των σημείων C, E, A, B.

Λύση

Η γωνιακή ταχύτητα $ω$ έχει φορά σύμφωνη με τους δείκτες του ωρολογίου (Σ.Δ.Ω.). Άρα το κέντρο C έχει ταχύτητα $υ_C = ωR$ με φορά προς τα δεξιά:

$$\underset{\sim}{υ}_C = ωR\underline{i} = 2\,r/s \cdot 1m\,\underline{i} \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{υ}_C = 2\underline{i}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{ω}$ έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου (Α.Δ.Ω.). Άρα το κέντρο C έχει επιτάχυνση $\gamma_c = R\dot{\omega}$ με φορά προς τ' αριστερά:

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = R\dot{\omega}(-\underset{\sim}{i}) = 1m \cdot 3r/s^2(-\underset{\sim}{i}) \Rightarrow \underset{\sim}{\gamma}_c = -3\underset{\sim}{i}$$

Εύκολα βρίσκουμε τώρα τις ταχύτητες των υπολοίπων σημείων με χρήση των νόμων:

Σημείο Ε:

$$\underset{\sim}{v}_E = \underset{\sim}{v}_c + \underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{CE} = 2\underset{\sim}{i} + (-2\underset{\sim}{k})\times(-1\cdot\underset{\sim}{j}) = 2\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{i} = 0 \quad \text{(αναμενόμενο)}$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_E = \underset{\sim}{\gamma}_c + \underset{\sim}{\dot{\omega}}\times\underset{\sim}{CE} - \omega^2\underset{\sim}{CE} = -3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{k}\times(-1\cdot\underset{\sim}{j}) - 2^2\cdot(-\underset{\sim}{j}) =$$

$$= -3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} \Rightarrow \underset{\sim}{\gamma}_E = 4\underset{\sim}{j}$$

Το σημείο Ε έχει $\underset{\sim}{v}_E = 0$, αλλά $\gamma_E \neq 0$ που είναι και αυτό αναμενόμενο αφού το σημείο Ε θ' αρχίσει να κινείται!

Σημείο Α:

$$\underset{\sim}{v}_A = \cancel{\underset{\sim}{v}_E}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{EA} = (-2\underset{\sim}{k})\times(2\cdot1\,\underset{\sim}{j}) \Rightarrow \underset{\sim}{v}_A = 4\underset{\sim}{i}$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \underset{\sim}{\gamma}_c + \underset{\sim}{\dot{\omega}}\times\underset{\sim}{CA} - \omega^2\underset{\sim}{CA} = -3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{k}\times(1\cdot\underset{\sim}{j}) - 2^2\cdot(1\cdot\underset{\sim}{j}) =$$

$$= -3\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j} \Rightarrow \underset{\sim}{\gamma}_A = -4\underset{\sim}{j}$$

Σημείο Β:

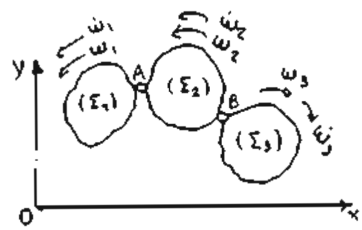
$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_c + \underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{CB} = 2\underset{\sim}{i} + (-2\underset{\sim}{k})\times(1\underset{\sim}{i}) = 2\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j}$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_c + \underset{\sim}{\dot{\omega}}\times\underset{\sim}{CB} - \omega^2\underset{\sim}{CB} = -3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{k}\times(1\cdot\underset{\sim}{i}) - 2^2\cdot(1\cdot\underset{\sim}{i}) =$$

$$= -3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{i} \Rightarrow \underset{\sim}{\gamma}_B = -7\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$$

3.3 Επίλυση προβλημάτων επιπέδων μηχανισμών.

Ο επίπεδος μηχανισμός είναι ένα σύστημα απολύτως στερεών σωμάτων καθένα από τα οποία κάνει επίπεδη κίνηση στο επίπεδο Oxy, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η μελέτη του προβλήματος γίνεται πάντα **στη φάση που φαίνεται στο σχήμα**. Στη φάση αυτή:



(i) Η απόσταση οποιωνδήποτε σημείων είναι δοσμένη ή μπορεί να καθορισθεί με βάση τα δεδομένα του προβλήματος.

(ii) Καθένα απόλυτα στερεό - μέλος του μηχανισμού έχει δική του γωνιακή ταχύτητα και δική του γωνιακή επιτάχυνση.

(iii) Αν δύο απόλυτα στερεά (Σ_1), (Σ_2) συνδέονται με μία άρθρωση A, η άρθρωση αυτή είναι σημείο και του απόλυτα στερεού (Σ_1) **και** του απόλυτα στερεού (Σ_2).

Στη **φάση του μηχανισμού που φαίνεται στο σχήμα** δίνονται οι ταχύτητες κάποιων σημείων, καθώς και οι επιταχύνσεις κάποιων σημείων, οι γωνιακές ταχύτητες κάποιων απολύτως στερεών και οι γωνιακές επιταχύνσεις επίσης κάποιων απολύτως στερεών: **Στη φάση αυτή** ζητούνται οι ταχύτητες ή και οι επιταχύνσεις κάποιων σημείων ή και οι γωνιακές ταχύτητες ή και οι γωνιακές επιταχύνσεις κάποιων στερεών - μελών.

Η επίλυση του προβλήματος, **ανεξάρτητα** από το τί ζητείται αρχίζει με τον υπολογισμό ταχυτήτων και γωνιακών ταχυτήτων:

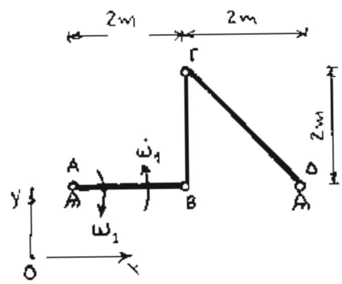
Θεωρούμε το μέλος του οποίου δίνεται η γωνιακή ταχύτητα ή η ταχύτητα κάποιου σημείου του. Με εφαρμογή του νόμου των ταχυτήτων στο μέλος αυτό του μηχανισμού βρίσκουμε την ταχύτητα της άρθρωσης η οποία συνδέει το μέλος αυτό με κάποιο άλλο μέλος του μηχανισμού. Στο επόμενο μέλος του μηχανισμού, με εφαρμογή πάλι του νόμου ταχυτήτων βρίσκουμε κάποια ταχύτητα σημείου ή τη γωνιακή ταχύτητα του μέλους αυτού. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, διατρέχουμε όλο το μηχανισμό, οπότε προσδιορίζουμε τις γωνιακές ταχύτητες όλων των μελών του. Έτσι, είναι εύκολο να βρούμε την ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου με εφαρμογή του νόμου ταχυτήτων στο απόλυτα στερεό (μέλος του μηχανισμού) που ανήκει το σημείο αυτό.

Με γνωστές τις γωνιακές ταχύτητες των μελών του μηχανισμού, με εφαρμογή του νόμου των επιταχύνσεων υπολογίζουμε τις γωνιακές επιταχύνσεις των διαφόρων μελών του μηχανισμού καθώς και τις επιταχύνσεις διαφόρων σημείων του, εργαζόμενοι όπως στις ταχύτητες.

Παρατήρηση 1 Για αποφυγή λαθών κατά τον προσδιορισμό των συντεταγμένων ενός διανύσματος μεταφέρουμε παράλληλα το σύστημα συντεταγμένων ώστε η αρχή του να συμπέσει με την αρχή του διανύσματος.

Παρατήρηση 2 Αν η γωνιακή ταχύτητα κάποιου μέλους του μηχανισμού είναι άγνωστη, τότε αυτή τη γράφουμε στη μορφή: $\underline{\omega} = \omega \underline{k}$. Όμοια, για τη γωνιακή επιτάχυνση γράφουμε: $\underline{\dot{\omega}} = \dot{\omega} \underline{k}$.

Άσκηση 1



Στη φάση που φαίνεται στο σχήμα, η ράβδος ΑΒ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 2\,r/s$ κατά την ωρολογιακή φορά και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}_1 = 4\,r/s^2$ κατά την αντιωρολογιακή φορά. Ζητείται η ταχύτητα του σημείου Γ και η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου ΒΓ. Να βρεθεί επίσης η ταχύτητα του μέσου Μ της ράβδου ΓΔ καθώς και η επιτάχυνση του μέσου Ν της ράβδου ΒΓ.

Λύση

Οι υπολογισμοί ταχυτήτων και επιταχύνσεων θα γίνουν στη φάση που φαίνεται στο σχήμα.

Ταχύτητες: Αρχίζουμε τους υπολογισμούς από τη ράβδο ΑΒ της οποίας η γωνιακή ταχύτητα είναι γνωστή: $\underset{\sim}{\omega}_1 = -2\underset{\sim}{k}$ (Έχει μέτρο $2\,r/s$ και ωρολογιακή φορά). Ο νόμος ταχυτήτων για τα σημεία Α, Β δίνει:

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{AB} = 0 + (-2\underset{\sim}{k}) \times 2\underset{\sim}{i} \implies \underset{\sim}{v}_B = -4\underset{\sim}{j}$$

όπου $\underset{\sim}{v}_A = 0$ αφού η άρθρωση Α είναι ακίνητη. Στη ράβδο ΒΓ, με γνωστή την ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_A$, έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_\Gamma = \underset{\sim}{v}_B + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{B\Gamma} \implies \underset{\sim}{v}_\Gamma = -4\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{\omega}_2 \times (2\underset{\sim}{j}) \qquad (1)$$

Όμως, η γωνιακή ταχύτητα ω_2 της ράβδου ΒΓ είναι άγνωστη και επειδή είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο Oxy, υποθέτουμε ότι είναι: $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \underset{\sim}{k}$. Έτσι, η σχέση (1) δίνει:

$$\underset{\sim}{v}_\Gamma = -4\underset{\sim}{j} + \omega_2 \underset{\sim}{k} \times (2\underset{\sim}{j}) \implies \underset{\sim}{v}_\Gamma = -4\underset{\sim}{j} - 2\omega_2 \underset{\sim}{i} \qquad (2)$$

Επειδή το σημείο Γ είναι και σημείο της ράβδου ΓΔ, από τη ράβδο ΓΔ έχουμε:

$$\underline{v}_\Gamma = \underline{v}_\Delta + \underline{\omega}_3 \times \underline{\Delta\Gamma} = \underline{0} + \omega_3 \underline{k} \times (-2\underline{i} + 2\underline{j}) \Longrightarrow$$

$$\underline{v}_\Gamma = -2\omega_3 \underline{j} - 2\omega_3 \underline{i} \qquad (3)$$

όπου η ταχύτητα της άρθρωσης Δ είναι μηδενική και $\underline{\omega}_3 = \omega_3 \underline{k}$ η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ΓΔ.

Με εξίσωση των β΄ μελών των σχέσεων (2) και (3) βρίσκουμε:

$$-4\underline{j} - 2\omega_2 \underline{i} = -2\omega_3 \underline{j} - 2\omega_3 \underline{i} \Longrightarrow \{-4 = -2\omega_3,\ -2\omega_2 = -2\omega_3\}$$

Άρα είναι $\omega_3 = 2\, r/s$, $\omega_2 = 2\, r/s$ και μπορούμε αμέσως να βρούμε την ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου του μηχανισμού. Για το σημείο Γ, η σχέση (3) δίνει:

$$\underline{v}_\Gamma = -2 \cdot 2\underline{j} - 2 \cdot 2\underline{i} \Longrightarrow \underline{v}_\Gamma = -4\underline{i} - 4\underline{j}$$

και για το μέσο Μ της ράβδου ΓΔ είναι:

$$\underline{v}_M = \underline{v}_\Delta + \underline{\omega}_3 \times \underline{\Delta M} = 0 + \underline{\omega}_3 \times \underline{\Delta M} \Longrightarrow \underline{v}_M = \underline{\omega}_3 \times \underline{\Delta M} \qquad (4)$$

Όμως είναι: $\underline{\Delta M} = \frac{1}{2}\underline{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}(-2\underline{i} + 2\underline{j}) = -\underline{i} + \underline{j}$ και σύμφωνα με τα παραπάνω: $\underline{\omega}_3 = 2\underline{k}$. Έτσι, η σχέση (4) δίνει:

$$\underline{v}_M = 2\underline{k} \times (-\underline{i} + \underline{j}) \Longrightarrow \underline{v}_M = -2\underline{j} - 2\underline{i}$$

Επιταχύνσεις: Αρχίζουμε τους υπολογισμούς από τη ράβδο ΑΒ της οποίας γνωρίζουμε την γωνιακή επιτάχυνση $\underline{\dot\omega}_1 = 4\underline{k}$ (αντιωρολογιακή, με μέτρο ίσο με $4 r/s^2$). Άρα έχουμε:

$$\underline{\gamma}_B = \underline{\gamma}_A + \underline{\dot\omega}_1 \times \underline{AB} - \omega_1^2 \cdot \underline{AB} \Longrightarrow$$

$$\underline{\gamma}_B = 0 + 4\underline{k} \times (2\underline{i}) - 2^2 \cdot 2\underline{i} \Longrightarrow \underline{\gamma}_B = 8\underline{j} - 8\underline{i}$$

αφού είναι $\omega_1^2 = |\underline{\omega}_1|^2 = |-2\underline{k}|^2 = 2^2$. Με γνωστή την επιτάχυνση του σημείου Β προχωράμε στη ράβδο ΒΓ:

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Gamma = \underset{\sim}{\gamma}_B + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 \times \underset{\sim}{B\Gamma} - \omega_2^2 \cdot \underset{\sim}{B\Gamma} = 8\underset{\sim}{j} - 8\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 \times (2\underset{\sim}{j}) - 2^2 \cdot 2\underset{\sim}{j}$$

και με $\underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{k}$, παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Gamma = 8\underset{\sim}{j} - 8\underset{\sim}{i} + \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{k} \times (2\underset{\sim}{j}) - 8\underset{\sim}{j} = 8\underset{\sim}{j} - 8\underset{\sim}{i} - 2\dot{\omega}_2 \underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Gamma = -(8 + 2\dot{\omega}_2)\underset{\sim}{i} \qquad (5)$$

όπου το $\dot{\omega}_2$ είναι άγνωστο. Όμως, το Γ είναι και σημείο της ράβδου ΓΔ. Άρα έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Gamma = \underset{\sim}{\gamma}_\Delta + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_3 \times \underset{\sim}{\Delta\Gamma} - \omega_3^2 \, \underset{\sim}{\Delta\Gamma} = 0 + \dot{\omega}_3 \underset{\sim}{k} \times (-2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}) - 2^2 \cdot (-2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j})$$

$$\Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma}_\Gamma = -2\dot{\omega}_3 \underset{\sim}{j} - 2\dot{\omega}_3 \underset{\sim}{i} + 8\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Gamma = (8 - 2\dot{\omega}_3)\underset{\sim}{i} - (8 + 2\dot{\omega}_3)\underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

όπου $\underset{\sim}{\dot{\omega}}_3 = \dot{\omega}_3 \underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ΓΔ. Με εξίσωση των β μελών των σχέσεων (5), (6) παίρνουμε:

$$-(8 + 2\dot{\omega}_2)\underset{\sim}{i} = (8 - 2\dot{\omega}_3)\underset{\sim}{i} - (8 + 2\dot{\omega}_3)\underset{\sim}{j} \Longrightarrow \qquad (7)$$

$$\{ -8 - 2\dot{\omega}_2 = 8 - 2\dot{\omega}_3 \, , \quad 0 = -8 - 2\dot{\omega}_3 \}$$

Άρα είναι $\dot{\omega}_3 = -4\, r/s^2$, $\dot{\omega}_2 = -12\, r/s^2$ και η σχέση (5) δίνει: $\underset{\sim}{\gamma}_\Gamma = 16\underset{\sim}{i}$.

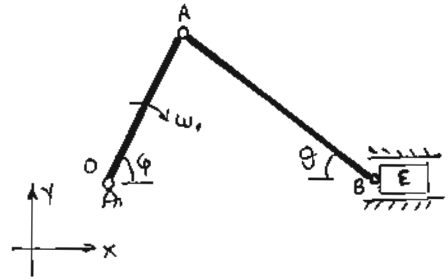
Η επιτάχυνση του μέσου Ν της ράβδου ΒΓ βρίσκεται:

$$\underset{\sim}{\gamma}_N = \underset{\sim}{\gamma}_B + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 \times \underset{\sim}{BN} - \omega_2^2 \cdot \underset{\sim}{BN} = 8\underset{\sim}{j} - 8\underset{\sim}{i} + (-12\underset{\sim}{k}) \times \underset{\sim}{j} - 2^2 \cdot \underset{\sim}{j} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_N = 8\underset{\sim}{j} - 8\underset{\sim}{i} + 12\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j} \Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma}_N = 4\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$$

αφού είναι $\underset{\sim}{BN} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{B\Gamma} = \frac{1}{2}(2\underset{\sim}{j}) = \underset{\sim}{j}$ αφού το σημείο Ν είναι το μέσο της ΒΓ.

Άσκηση 2



Στη φάση που φαίνεται στο σχήμα είναι $\varphi = 60^\circ$ και ο **στρόφαλος** OA μήκους 2m περιστρέφεται κατά την ωρολογιακή φορά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 1^r/_s$. Ζητείται στη φάση αυτή η ταχύτητα και η επιτάχυνση του **εμβόλου** E καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση του **διωστήρα** AB μήκους 5m.

Λύση

Πρόκειται για επίπεδο μηχανισμό. Οι υπολογισμοί ταχυτήτων και επιταχύνσεων θα γίνουν στη φάση που φαίνεται στο σχήμα. Ξεκινάμε, όπως πάντα, με τον υπολογισμό ταχυτήτων και συγκεκριμένα από το μέλος OA (δηλ. τον στρόφαλο) του οποίου είναι γνωστή η γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 1^r/_s$, με ωρολογιακή φορά. Άρα είναι $\underset{\sim}{\omega}_1 = -\underset{\sim}{k}$

Είναι:

$$\underset{\sim}{v}_A = \cancel{\underset{\sim}{v}_O}^{0} + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{OA} \implies \underset{\sim}{v}_A = \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{OA} \qquad (1)$$

όπου, από το σχήμα, έχουμε:

$$\underset{\sim}{OA} = (OA)\cos\varphi\, \underset{\sim}{i} + (OA)\sin\varphi\, \underset{\sim}{j} = 2\cos 60\, \underset{\sim}{i} + 2\sin 60\, \underset{\sim}{j} \implies$$

$$\underset{\sim}{OA} = 2\cdot\frac{1}{2}\, \underset{\sim}{i} + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\, \underset{\sim}{j} \implies \underset{\sim}{OA} = \underset{\sim}{i} + 1{,}73\, \underset{\sim}{j}$$

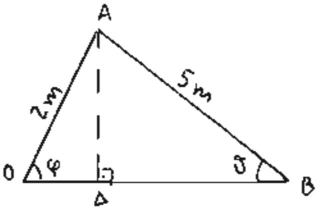
και η σχέση (1) δίνει:

$$\underset{\sim}{v}_A = -\underset{\sim}{k} \times (\underset{\sim}{i} + 1{,}73\, \underset{\sim}{j}) \implies \underset{\sim}{v}_A = -\underset{\sim}{j} + 1{,}73\, \underset{\sim}{i}$$

Με γνωστή την ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_A$ του σημείου A, στο διωστήρα AB έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{AB} \implies \underset{\sim}{v}_B = -\underline{j} + 1{,}73\,\underline{i} + \omega_2 \underline{k} \times \underset{\sim}{AB} \qquad (2)$$

όπου $\underline{\omega_2} = \omega_2 \underline{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του διωστήρα AB. Με $\varphi = 60°$, από το διπλανό σχήμα έχουμε:



$$A\Delta = 2 \cdot \sin 60° = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1{,}73$$

$$A\Delta^2 + \Delta B^2 = AB^2 \implies$$

$$1{,}73^2 + \Delta B^2 = 5^2 \implies \Delta B = 4{,}69$$

Άρα είναι $\underset{\sim}{AB} = 4{,}69\,\underline{i} - 1{,}73\,\underline{j}$ και η σχέση (2) γράφεται:

$$\underset{\sim}{v}_B = 1{,}73\,\underline{i} - \underset{\sim}{j} + \omega_2 \underline{k} \times (4{,}69\,\underline{i} - 1{,}73\,\underline{j}) \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_B = 1{,}73\,\underline{i} - \underline{j} + 4{,}69\,\omega_2\,\underline{j} + 1{,}73\,\omega_2\,\underset{\sim}{i} \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_B = (1{,}73 + 1{,}73\,\omega_2)\underset{\sim}{i} + (4{,}69\,\omega_2 - 1)\,\underset{\sim}{j} \qquad (3)$$

Όμως, είναι προφανές, ότι η ταχύτητα του σημείου B είναι η ίδια με την ταχύτητα του εμβόλου Ε, το οποίο κινείται σε οριζόντιο οδηγό: $\underset{\sim}{v}_B = v_B\,\underset{\sim}{i}$. Έτσι, η σχέση (3) δίνει:

$$v_B \underset{\sim}{i} = (1{,}73 + 1{,}73\,\omega_2)\,\underline{i} + (4{,}69\,\omega_2 - 1)\,\underset{\sim}{j} \implies$$

$$\{ v_B = 1{,}73 + 1{,}73\,\omega_2, \qquad 0 = 4{,}69\,\omega_2 - 1 \}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις παίρνουμε $\omega_2 = 0{,}21\ r/s$, $v_B = 2{,}09\ m/s$. Έτσι, η ταχύτητα του εμβόλου Ε είναι ίση με $2{,}09\,\underline{i}$ (όση και η $\underline{v}_B$).

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό επιταχύνσεων: Επειδή η γωνιακή ταχύτητα ω_1 του στροφάλου διατηρείται σταθερή (ίση με $1\,r/s$) συμπεραίνουμε αμέσως ότι είναι $\dot{\omega}_1 = 0$. Άρα έχουμε γνωστή τη γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}_1$ του στροφάλου OA και αρχίζουμε τον υπολογισμό των επιταχύνσεων απ' αυτόν:

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \underset{\sim}{\gamma}_O + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_1 \times \underset{\sim}{OA} - \omega_1^2 \, \underset{\sim}{OA}$$

Όμως είναι $\underset{\sim}{\gamma}_O = 0$, $\dot{\omega}_1 = 0$, $\omega_1^2 = 1$. Άρα παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = -1 \cdot \underset{\sim}{OA} = -(\underset{\sim}{i} + 1{,}73\underset{\sim}{j}) \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{\gamma}_A = -\underset{\sim}{i} - 1{,}73\underset{\sim}{j}$$

και προχωράμε στο διωστήρα ΑΒ:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_A + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 \times \underset{\sim}{AB} - \omega_2^2 \, \underset{\sim}{AB} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = -\underset{\sim}{i} - 1{,}73\underset{\sim}{j} + \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{k} \times (4{,}69\underset{\sim}{i} - 1{,}73\underset{\sim}{j}) - 0{,}21^2 \cdot (4{,}69\underset{\sim}{i} - 1{,}73\underset{\sim}{j}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = -\underset{\sim}{i} - 1{,}73\underset{\sim}{j} + 4{,}69\dot{\omega}_2 \underset{\sim}{j} + 1{,}73\dot{\omega}_2 \underset{\sim}{i} - 0{,}21\underset{\sim}{i} + 0{,}8\underset{\sim}{j} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = (1{,}73\dot{\omega}_2 - 1{,}21)\underset{\sim}{i} + (4{,}69\dot{\omega}_2 - 0{,}93\underset{\sim}{j}) \qquad (4)$$

αφού είναι $\underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{k}$ η γωνιακή επιτάχυνση του διωστήρα ΑΒ.

Όμως, η επιτάχυνση γ_B του σημείου Β συμπίπτει με την επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_E$ του εμβόλου Ε, το οποίο κινείται ευθύγραμμα παράλληλα στον άξονα x. Άρα είναι $\underset{\sim}{\gamma}_B = \gamma_B \underset{\sim}{i}$ και η σχέση (4) γράφεται:

$$\gamma_B \underset{\sim}{i} = (1{,}73\dot{\omega}_2 - 1{,}21)\underset{\sim}{i} + (4{,}69\dot{\omega}_2 - 0{,}93\underset{\sim}{j})$$

Η τελευταία σχέση, κατά τα γνωστά, δίνει το αλγεβρικό σύστημα:

$$\gamma_B = 1{,}73\dot{\omega}_2 - 1{,}21$$

$$0 = 4{,}69\dot{\omega}_2 - 0{,}93$$

οπότε βρίσκουμε

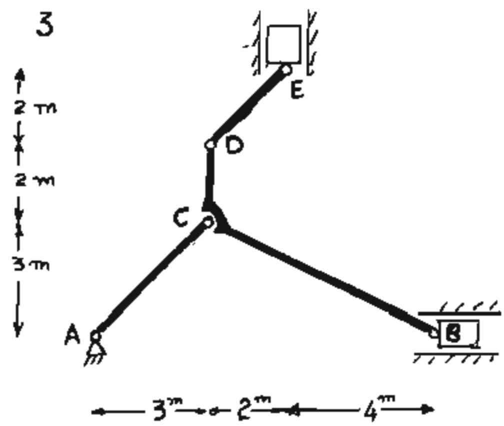
$$\dot{\omega}_2 = 0{,}2 \ r/s^2 \qquad \gamma_B = -0{,}86 \ m/s^2$$

Άρα, η επιτάχυνση του εμβόλου είναι $\underset{\sim}{\gamma}_E = \underset{\sim}{\gamma}_B = -0{,}86\ m/s^2$ και η γωνιακή επιτάχυνση του διωστήρα είναι ίση με $0{,}2\ r/s^2$.

Άσκηση 3

Στη φάση του σχήματος η επιτάχυνση του σημείου C είναι ίση με: $\underset{\sim}{\gamma}_C = -12\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j}$

Ζητείται η επιτάχυνση του σημείου E. Δίνεται η φορά περιστροφής της AC, Σ.Δ.Ω.



Λύση

Αν $\underset{\sim}{\omega}_1 = \omega_1 \underset{\sim}{k}$, $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 = \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{k}$ η γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση, αντίστοιχα, της AC, έχω:

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = \underset{\sim}{\gamma}_A + \dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 \times \underset{\sim}{AC} - \omega_1^2 \cdot \underset{\sim}{AC} \implies$$

$$-12\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} = 0 + \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{k} \times (3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}) - \omega_1^2 \cdot (3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}) \implies$$

$$-12\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} = 3\dot{\omega}_1 \underset{\sim}{j} - 3\dot{\omega}_1 \underset{\sim}{i} - 3\omega_1^2 \underset{\sim}{i} - 3\omega_1^2 \underset{\sim}{j}$$

Από την ισότητα αυτή παίρνουμε

$$-12 = -3\dot{\omega}_1 - 3\omega_1^2$$

$$-12 = 3\dot{\omega}_1 - 3\omega_1^2$$

Από το σύστημα των εξισώσεων προκύπτει $\dot{\omega}_1 = 0$,

$\omega_1^2 = \frac{12}{3} = 4 \quad \Rightarrow \omega_1 = \pm 2$. Επειδή όμως δίνεται ότι η γωνιακή ταχύτητα της AC είναι Σ.Δ.Ω. έχω $\underset{\sim}{\omega}_1 = -2\underset{\sim}{k}$
Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του E, υπολογίζουμε πρώτα τις ταχύτητες. Οι υπολογισμοί θα γίνουν με δεδομένα τα $\omega_1, \dot{\omega}_1$.

Υπολογισμός ταχυτήτων. Ξεκινάμε από την AC όπου είναι γνωστή η $\underset{\sim}{\omega}_1 = -2\underset{\sim}{k}$. Έχω

$$\underset{\sim}{v}_C = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{AC} \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{v}_C = -2\underset{\sim}{k} \times (3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}) \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_C = -6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{i} \qquad (1)$$

(Το A προφανώς είναι ακίνητο).
Συνεχίζουμε με το στερεό DCB. Αν $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή του ταχύτητα, τότε:

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_C + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{CB} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_B = -6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{i} + \omega_2 \underset{\sim}{k} \times (6\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}) \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_B = -6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{i} + 6\omega_2 \underset{\sim}{j} + 3\omega_2 \underset{\sim}{i} \qquad (2)$$

Οι υπολογισμοί δεν συνεχίζονται, αλλά από το άκρο B προκύπτει $\underset{\sim}{v}_B = v_B \underset{\sim}{i}$. Έτσι λόγω της (2) έχω:

$$v_B \underset{\sim}{i} = -6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{i} + 6\omega_2 \underset{\sim}{j} + 3\omega_2 \underset{\sim}{i} \quad \Rightarrow$$

$$v_B = 6 + 3\omega_2$$

$$0 = -6 + 6\omega_2$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει $\omega_2 = 1$ και $v_B = 9$.
Θεωρούμε τώρα τα σημεία C, D της ACD. Είναι:

$$\underset{\sim}{v}_D = \underset{\sim}{v}_C + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{CD} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_D = -6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{i} + 1\cdot\underset{\sim}{k}\times 2\underset{\sim}{j} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_D = -6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{i} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_D = 4\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} \qquad (3)$$

Συνεχίζουμε με την DE. Αν $\underset{\sim}{\omega}_3 = \omega_3\underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της DE, τότε:

$$\underset{\sim}{v}_E = \underset{\sim}{v}_D + \underset{\sim}{\omega}_3 \times \underset{\sim}{DE} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_E = 4\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} + \omega_3\underset{\sim}{k}\times(2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_E = 4\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} + 2\omega_3\underset{\sim}{j} - 2\omega_3\underset{\sim}{i} \qquad (4)$$

Από το άκρο E όμως, επειδή το έμβολο E κάνει κατακόρυφη κίνηση, προκύπτει $\underset{\sim}{v}_E = v_E\underset{\sim}{j}$. Άρα:

$$4 - 2\omega_3 = 0$$

$$v_E = -6 + 2\omega_3$$

Άρα $\omega_3 = 2$ και $v_E = -2$

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των επιταχύνσεων.

Ξεκινάμε από την AC όπου ξέρουμε $\dot{\omega}_1 = 0$ και

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = -12\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} \qquad (5)$$

Συνεχίζουμε με το στερεό DCB:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_C + \dot{\underset{\sim}{\omega}}_2 \times \underset{\sim}{CB} - \omega_2^2\underset{\sim}{CB}$$

όπου $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2\underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση της CB και $\omega_2^2 = 1$. Προκύπτει

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = -12\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} + \dot{\omega}_2\underset{\sim}{k}\times(6\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}) - 1\cdot(6\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = -12\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} + 6\dot{\omega}_2\underset{\sim}{j} + 3\dot{\omega}_2\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = (-18 + 3\dot{\omega}_2)\underset{\sim}{i} + (6\dot{\omega}_2 - 9)\underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

Όμως από το αυρο B έχω: $\underset{\sim}{\gamma}_B = \gamma_B \underset{\sim}{i}$ και η (6) δίνει:

$$\gamma_B = -18 + 3\dot{\omega}_2$$

$$0 = 6\dot{\omega}_2 - 9$$

δηλαδή προυύπτει $\dot{\omega}_2 = 1{,}5$ και $\underset{\sim}{\gamma}_B = -13{,}5\,\underset{\sim}{i}$. Υπολογίζουμε τώρα το $\underset{\sim}{\gamma}_D$ θεωρώντας τα σημεία C, D της DCB:

$$\underset{\sim}{\gamma}_D = \underset{\sim}{\gamma}_C + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 \times \underset{\sim}{CD} - \omega_2^2 \underset{\sim}{CD} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_D = -12\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} + 1{,}5\underset{\sim}{k} \times 2\underset{\sim}{j} - (1{,}0)^2 \cdot 2\underset{\sim}{j} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_D = -12\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_D = -15\underset{\sim}{i} - 14\underset{\sim}{j}$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε στην DE:

$$\underset{\sim}{\gamma}_E = \underset{\sim}{\gamma}_D + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_3 \times \underset{\sim}{DE} - \omega_3^2 \underset{\sim}{DE} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_E = -15\underset{\sim}{i} - 16{,}5\underset{\sim}{j} + \dot{\omega}_3\underset{\sim}{k} \times (2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}) - 2^2(2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_E = -15\underset{\sim}{i} - 16{,}5\underset{\sim}{j} + 2\dot{\omega}_3\underset{\sim}{j} - 2\dot{\omega}_3\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_E = (-23 - 2\dot{\omega}_3)\underset{\sim}{i} + (2\dot{\omega}_3 - 24{,}5)\underset{\sim}{j} \qquad (7)$$

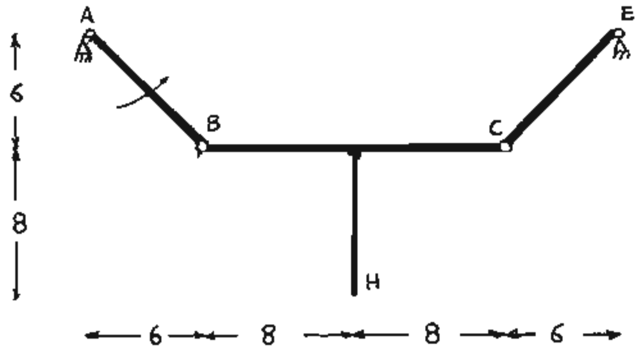
Όμως η επιτάχυνση του E είναι κατακόρυφη, οπότε η (7) δίνει:

$$-23 - 2\dot{\omega}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_3 = -11{,}5$$

και η επιτάχυνση του E προκύπτει:

$$\underset{\sim}{\gamma}_E = -47{,}5\,\underset{\sim}{j}$$

Άσκηση 4



Στο μηχανισμό του σχήματος το σώμα σχήματος ταύ είναι αρθρωμένο στα B,C με τις ράβδους AB, EC. Στη φάση του σχήματος η γωνιακή ταχύτητα ω_1 της AB είναι 1 r/sec Α.Δ.Ω. και είναι σταθερή. Στη φάση αυτή να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου H

Λύση

Υπολογισμός ταχυτήτων. Ξεκινάμε από την AB όπου δίνεται η γωνιακή της ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}_1 = 1\cdot\underset{\sim}{k}$. Έχω:

$$\underset{\sim}{V}_B = \underset{\sim}{V}_A + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{AB} \Rightarrow \underset{\sim}{V}_B = 0 + \underset{\sim}{k} \times (6\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{V}_B = 6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{i} \qquad (1)$$

Συνεχίζουμε στο ταύ. Είναι

$$\underset{\sim}{V}_C = \underset{\sim}{V}_B + \underset{\sim}{\omega}_T \times \underset{\sim}{BC} \qquad (2)$$

όπου $\underset{\sim}{\omega_T} = \omega_T \underline{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του ταύ. Η (2) γράφεται:

$$\underset{\sim}{v_c} = 6\underline{i} + 6\underline{j} + \omega_T \underline{k} \times 16\underline{i} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v_c} = 6\underline{i} + 6\underline{j} + 16\omega_T \underline{j} \qquad (3)$$

Επειδή υπάρχει ο άγνωστος ω_T συνεχίζουμε με την EC:

$$\underset{\sim}{v_c} = \underset{\sim}{v_E} + \underset{\sim}{\omega_2} \times \underset{\sim}{EC} \qquad (4)$$

όπου $\underset{\sim}{\omega_2} = \omega_2 \underline{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της EC. Η σχέση (4) δίνει:

$$\underset{\sim}{v_c} = \omega_2 \underline{k} \times (-6\underline{i} - 6\underline{j}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v_c} = -6\omega_2 \underline{j} + 6\omega_2 \underline{i} \qquad (5)$$

Εξισώνουμε τώρα τα δεύτερα μέλη των (3), (5) οπότε παίρνουμε:

$$6\underline{i} + 6\underline{j} + 16\omega_T \underline{j} = -6\omega_2 \underline{j} + 6\omega_2 \underline{i} \Rightarrow$$

$$6 = 6\omega_2$$

$$6 + 16\omega_T = -6\omega_2$$

Από τις εξισώσεις αυτές προυύπτει $\omega_2 = 1$, $\omega_T = -0.75$ Έτσι η ταχύτητα του σημείου Η είναι:

$$\underset{\sim}{v_H} = \underset{\sim}{v_B} + \underset{\sim}{\omega_T} \times \underset{\sim}{BH} = 6\underline{i} + 6\underline{j} - 0.75\underline{k} \times (8\underline{i} - 8\underline{j}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v_H} = 0$$

Υπολογισμός επιταχύνσεων. Ξεκινάμε από την AB. Επειδή δίνεται ότι $\omega_1 = \sigma\tau\alpha\vartheta.$, έχω $\dot{\omega}_1 = 0$.

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_A + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_1 \times \underset{\sim}{AB} - \omega_1^2 \cdot \underset{\sim}{AB} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = 0 + 0 - 1 \cdot (6\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j}) \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = -6\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

Συνεχίζουμε στο ταύ: ($\underset{\sim}{\dot{\omega}}_T = \dot{\omega}_T \underset{\sim}{k}$ η γωνιακή επιτάχυνσή του)

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = \underset{\sim}{\gamma}_B + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_T \times \underset{\sim}{BC} - \omega_T^2 \underset{\sim}{BC} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = -6\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + \dot{\omega}_T \underset{\sim}{k} \times 16\underset{\sim}{i} - (-0.75)^2 \cdot 16\underset{\sim}{i} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = -15\underset{\sim}{i} + (6 + 16\dot{\omega}_T)\underset{\sim}{j} \qquad (7)$$

Από την EC παίρνω:

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = \underset{\sim}{\gamma}_E + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 \times \underset{\sim}{EC} - \omega_2^2 \underset{\sim}{EC} \qquad (8)$$

όπου $\underset{\sim}{\dot{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{k}$ η γωνιακή επιτάχυνση της EC. Η (8) δίνει:

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{k} \times (-6\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j}) - 1^2 \cdot (-6\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j}) \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = -6\dot{\omega}_2 \underset{\sim}{j} + 6\dot{\omega}_2 \underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = (6\dot{\omega}_2 + 6)\underset{\sim}{i} + (6 - 6\dot{\omega}_2)\underset{\sim}{j} \qquad (9)$$

Εξισώνουμε τα β' μέλη των (7), (9) οπότε προκύπτει:

$$-15 = 6\dot{\omega}_2 + 6$$
$$6 + 16\dot{\omega}_T = 6 - 6\dot{\omega}_2$$

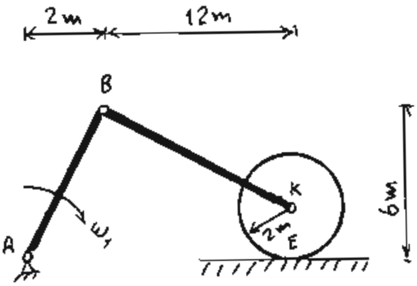
Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει $\dot{\omega}_2 = -\frac{21}{6}$, $\dot{\omega}_T = \frac{21}{16}$ και η επιτάχυνση του Η είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_H = \underset{\sim}{\gamma}_B + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_T \times \underset{\sim}{BH} - \omega_T^2 \cdot \underset{\sim}{BH} = -6\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + \frac{21}{16}\underset{\sim}{k} \times (8\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j}) -$$

$$-(-0.75)^2 \cdot (8\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j}) = -6\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + \frac{21}{2}\underset{\sim}{j} + \frac{21}{2}\underset{\sim}{i} - 4{,}5\underset{\sim}{i} + 4{,}5\underset{\sim}{j} = 21\underset{\sim}{j}$$

Άσκηση 5

Στη φάση του σχήματος, η ράβδος AB περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 1 r/s$ κατά την ωρολογιακή φορά. Ζητείται η επιτάχυνση του σημείου επαφής Ε του τροχού με το έδαφος στη φάση αυτή. Ο τροχός δεν ολισθαίνει.



Λύση

Αρχίζουμε με τον υπολογισμό ταχυτήτων αν και δεν υπάρχει ζητούμενη κάποια ταχύτητα ή γωνιακή ταχύτητα αλλά μόνο επιτάχυνση. Στη ράβδο AB η οποία έχει γωνιακή ταχύτητα $\underline{\omega}_1 = -\underline{k}$ έχουμε:

$$\underline{v}_B = \cancel{\underline{v}_A}^{\,0} + \underline{\omega}_1 \times \underline{AB} = -\underline{k} \times (2\underline{i} + 6\underline{j}) \implies \underline{v}_B = -2\underline{j} + 6\underline{i}$$

Συνεχίζουμε με τη ράβδο BK:

$$\underline{v}_K = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{BK} = -2\underline{j} + 6\underline{i} + \omega_2 \underline{k} \times (12\underline{i} - 4\underline{j}) =$$

$$= -2\underline{j} + 6\underline{i} + 12\omega_2 \underline{j} + 4\omega_2 \underline{i} \implies$$

$$\underline{v}_K = (4\omega_2 + 6)\underline{i} + (12\omega_2 - 2)\underline{j} \qquad (1)$$

όπου $\underline{\omega}_2 = \omega_2 \underline{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου BK και $\underline{BK} = 12\underline{i} - 4\underline{j}$ σύμφωνα με το σχήμα. Όμως, προφανώς, η ταχύτητα $\underline{v}_K$ είναι παράλληλη στο οριζόντιο έδαφος: $\underline{v}_K = v_K \underline{i}$. Άρα, η σχέση (1) δίνει:

$$v_K \underline{i} = (4\omega_2 + 6)\underline{i} + (12\omega_2 - 2)\underline{j} \implies$$

$$\left\{ v_K = 4\omega_2 + 6 \qquad 0 = 12\omega_2 - 2 \right\}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε $\omega_2 = 0{,}17\,r/s$ και $u_K = 6{,}67\ m/s$, δηλαδή $\underset{\sim}{u}_K = 6{,}67\,\underline{i}$. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ότι η ταχύτητα $\underset{\sim}{u}_K$ του κέντρου K του τροχού έχει φορά προς τα δεξιά. Έτσι, επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση, αυτός έχει γωνιακή ταχύτητα ω_3 ωρολογιακής φοράς και μέτρου:

$$\omega_3 = \frac{|\underset{\sim}{u}_K|}{R} = \frac{6{,}67\ m/s}{2\ m} \implies \omega_3 = 3{,}33\ r/s$$

$$\implies \underset{\sim}{\omega}_3 = -3{,}33\,\underline{k}$$

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό επιταχύνσεων αρχίζοντας από τη ράβδο AB η οποία έχει μηδενική γωνιακή επιτάχυνση: $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 = 0$ αφού η γωνιακή της ταχύτητα είναι γνωστό ότι είναι σταθερή:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \cancelto{0}{\underset{\sim}{\gamma}_A} + \cancelto{0}{\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1} \times \underset{\sim}{AB} - \omega_1^2\,\underset{\sim}{AB} = -1^2\cdot(2\underline{i} + 6\underline{j}) \implies \underset{\sim}{\gamma}_B = -2\underline{i} - 6\underline{j}$$

Με γνωστή την επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_B$ προχωράμε στη ράβδο BK:

$$\underset{\sim}{\gamma}_K = \underset{\sim}{\gamma}_B + \dot{\underset{\sim}{\omega}}_2 \times \underset{\sim}{BK} - \omega_2^2\,\underset{\sim}{BK} =$$

$$= -2\underline{i} - 6\underline{j} + \dot{\omega}_2\underline{k} \times (12\underline{i} - 4\underline{j}) - 0{,}17^2\cdot(12\underline{i} - 4\underline{j}) =$$

$$= -2\underline{i} - 6\underline{j} + 12\dot{\omega}_2\underline{j} + 4\dot{\omega}_2\underline{i} - 0{,}35\underline{i} + 0{,}12\underline{j} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_K = (-2{,}35 + 4\dot{\omega}_2)\underline{i} + (12\dot{\omega}_2 - 5{,}88)\underline{j} \qquad (2)$$

όπου $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου BK. Όμως, επειδή το σημείο K κινείται οριζόντια, παράλληλα στο έδαφος, έχουμε: $\underset{\sim}{\gamma}_K = \gamma_K\underline{i}$. Έτσι, η σχέση (2) γράφεται:

$$\gamma_K\underline{i} = (-2{,}35 + 4\dot{\omega}_2)\underline{i} + (12\dot{\omega}_2 - 5{,}88)\underline{j} \implies$$

$$\{\ \gamma_K = -2{,}35 + 4\dot{\omega}_2\ ,\qquad 0 = 12\dot{\omega}_2 - 5{,}88\ \}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε: $\dot{\omega}_2 = 0{,}49\ r/s^2$, $\gamma_K = -0{,}39\ m/s^2$. Άρα είναι $\underset{\sim}{\gamma}_K = -0{,}39\ \underline{i}$.

Επειδή η επιτάχυνση του κέντρου Κ του τροχού έχει φορά προς τ' αριστερά και ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο οριζόντιο έδαφος, η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού έχει αντιωρολογιακή φορά και μέτρο:

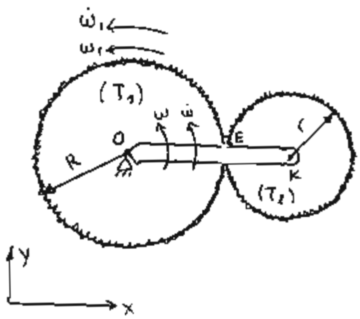
$$\dot{\omega}_3 = \frac{|\underset{\sim}{\gamma}_K|}{R} = \frac{0{,}39\ m/s^2}{2m} \implies \underset{\sim}{\dot{\omega}}_3 = 0{,}19\ \underline{k}$$

Βρίσκουμε τώρα την επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_E$ του σημείου επαφής Ε του τροχού με το έδαφος:

$$\underset{\sim}{\gamma}_E = \underset{\sim}{\gamma}_K + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_3 \times \underset{\sim}{KE} - \dot{\omega}_3^2\ \underset{\sim}{KE} = -0{,}39\underline{i} + 0{,}19\underline{k} \times (-2\underline{j}) - 3{,}33^2(-2\underline{j})$$

$$\implies \underset{\sim}{\gamma}_E = 22\underline{j}$$

Άσκηση 6



Ο βραχίονας ΟΚ έχει τα άκρα του Ο, Κ στα κέντρα Ο, Κ των οδοντωτών τροχών (T_1), (T_2). Ο βραχίονας ΟΚ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$, ενώ ο τροχός (T_1) με γωνιακή ταχύτητα ω_1 και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}_1$ με φορές που φαίνονται στο σχήμα. Ζητείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Κ καθώς και η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού (T_2).

Λύση

Στο βραχίονα ΟΚ μήκους $\ell = R + r$, του οποίου το άκρο Ο είναι ακίνητο, έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_K = \cancel{\underset{\sim}{v}_O}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{OK} = \omega \underset{\sim}{k} \times (\ell \underset{\sim}{i}) \implies \underset{\sim}{v}_K = \omega \ell \underset{\sim}{j} \qquad (1)$$

Το σημείο επαφής Ε των οδοντωτών τροχών, το οποίο στο σχήμα βρίσκεται πίσω από το βραχίονα ΟΚ, έχει ταχύτητα:

$$\underset{\sim}{v}_E = \cancel{\underset{\sim}{v}_O}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{OE} = \omega_1 \underset{\sim}{k} \times (R \underset{\sim}{i}) = \omega_1 R \underset{\sim}{j} \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_E = \omega_1 R \underset{\sim}{j} \qquad (2)$$

αφού το σημείο αυτό είναι σημείο του οδοντωτού τροχού (T_1), ο οποίος έχει σταθερό το κέντρο του Ο. Όμως, οι οδοντωτοί τροχοί δέν ολισθαίνουν μεταξύ τους στο σημείο επαφής Ε. Έτσι, στιγμιαία, το σημείο Ε είναι και σημείο του οδοντωτού τροχού (T_2). Άρα ισχύει:

$$\underset{\sim}{v}_E = \underset{\sim}{v}_K + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{KE} \overset{(1)}{\implies} \underset{\sim}{v}_E = \omega \ell \underset{\sim}{j} + \omega_2 \underset{\sim}{k} \times (-r \underset{\sim}{i}) \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_E = \omega \ell \underset{\sim}{j} - \omega_2 r \underset{\sim}{j} = \left(\omega (R+r) - \omega_2 r\right) \underset{\sim}{j} \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_E = \left(\omega (R+r) - \omega_2 r\right) \underset{\sim}{j} \qquad (3)$$

όπου $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του τροχού (T_2) και $\ell = R + r$. Από τις σχέσεις (2), (3) παίρνουμε:

$$\omega_1 R = \omega (R+r) - \omega_2 r \implies \omega_2 = \frac{\omega (R+r) - \omega_1 R}{r} \qquad (4)$$

Συνεχίζουμε τώρα με τον υπολογισμό επιταχύνσεων. Στο βραχίονα ΟΚ έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_K = \cancel{\underset{\sim}{\gamma}_O}^{\,0} + \underset{\sim}{\dot\omega} \times \underset{\sim}{OK} - \omega^2 \underset{\sim}{OK} = \dot\omega \underset{\sim}{k} \times (\ell \underset{\sim}{i}) - \omega^2 \ell \underset{\sim}{i} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_K = -\omega^2 \ell \underset{\sim}{i} + \dot\omega \ell \underset{\sim}{j} \implies \underset{\sim}{\gamma}_K = -\omega^2 (R+r) \underset{\sim}{i} + \dot\omega (R+r) \underset{\sim}{j} \qquad (5)$$

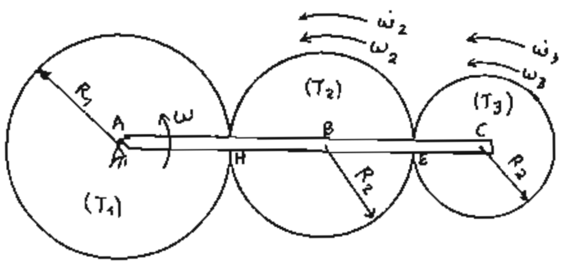
Η σχέση (4) που συνδέει τις γωνιακές ταχύτητες ω, ω_1, ω_2 των τριών στερεών ισχύει οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Παραγώγιση αυτής ως προς t δίνει τη γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}_2$ του τροχού (T_2):

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\dot{\omega}(R+r) - \omega_1 R}{r} \qquad (6)$$

Παρατήρηση: Το σημείο Ε είναι **στιγμιαία** το σημείο επαφής των τροχών (T_1), (T_2), οι οποίοι ως οδοντωτοί δεν ολισθαίνουν στο σημείο αυτό. Έτσι, για τον υπολογισμό ταχυτήτων, το σημείο Ε θεωρείται σημείο και των δύο τροχών. Δεν ισχύει όμως το ίδιο κατά τον υπολογισμό των επιταχύνσεων!

Άσκηση 7

Στο σύστημα των οδοντωτών τροχών του σχήματος ο τροχός (T_1) είναι ακίνητος, ενώ ο βραχίονας ABC περιστρέφεται με N στροφές ανά λεπτό (Σ.Α.Λ.) και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$. Ζητούνται οι γωνιακές ταχύτητες και οι γωνιακές επιταχύνσεις των τροχών (T_2), (T_3).



Λύση

Η συχνότητα περιστροφής του βραχίονα ABC είναι:

$$f = \frac{N}{60}$$

αφού αυτός περιστρέφεται με N στροφές ανά λεπτό (Σ.Α.Λ.)
Άρα, η γωνιακή ταχύτητά του είναι:

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \frac{N}{60} \qquad (1)$$

Στην απόλυτα στερεή ράβδο ABC έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_B = \cancel{\underset{\sim}{v}_A}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{AB} = \omega \underset{\sim}{k} \times \left((R_1 + R_2) \underset{\sim}{i} \right) \Rightarrow \underset{\sim}{v}_B = \omega (R_1 + R_2) \underset{\sim}{j} \qquad (2)$$

$$\underset{\sim}{v}_C = \cancel{\underset{\sim}{v}_A}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{AC} = \omega \underset{\sim}{k} \times \left((R_1 + 2R_2 + R_3) \underset{\sim}{i} \right) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_C = \omega (R_1 + 2R_2 + R_3) \underset{\sim}{j} \qquad (3)$$

Στον τροχό (T_2), ο οποίος δεν ολισθαίνει στον τροχό (T_1) (οδοντωτοί τροχοί), το σημείο H έχει μηδενική ταχύτητα, αφού, στιγμιαία, το σημείο H είναι σημείο του (T_2) και του ακίνητου (T_1). Άρα:

$$\underset{\sim}{v}_H = \underset{\sim}{v}_B + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{BH} \overset{(2)}{\Longrightarrow} 0 = \omega (R_1 + R_2) \underset{\sim}{j} + \omega_2 \underset{\sim}{k} \times (-R_2 \underset{\sim}{i}) \Rightarrow$$

$$0 = \omega (R_1 + R_2) \underset{\sim}{j} - \omega_2 R_2 \underset{\sim}{j} \Longrightarrow \omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \omega \qquad (4)$$

Στον ίδιο τροχό (T_2), το σημείο επαφής E με τον τροχό (T_3) έχει ταχύτητα:

$$\underset{\sim}{v}_E = \cancel{\underset{\sim}{v}_H}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{HE} = \omega_2 \underset{\sim}{k} \times (2R_2 \underset{\sim}{i}) = 2\omega_2 R_2 \underset{\sim}{j} \overset{(4)}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{\sim}{v}_E = 2(R_1 + R_2)\omega \underset{\sim}{j} \qquad (5)$$

Στον τροχό (T_3), το σημείο E έχει ταχύτητα:

$$\underset{\sim}{v}_E = \underset{\sim}{v}_C + \underset{\sim}{\omega}_3 \times \underset{\sim}{CE} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \underset{\sim}{v}_E = \omega (R_1 + 2R_2 + R_3) \underset{\sim}{j} + \omega_3 \underset{\sim}{k} \times (-R_3 \underset{\sim}{i}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_E = \omega (R_1 + 2R_2 + R_3) \underset{\sim}{j} - \omega_3 R_3 \underset{\sim}{j} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_E = \left(\omega (R_1 + 2R_2 + R_3) - \omega_3 R_3 \right) \underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

Όμως οι οδοντωτοί τροχοί (T_2), (T_3) δεν ολισθαίνουν μεταξύ τους στο σημείο επαφής E. Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) παίρνουμε:

$$2(R_1 + R_2)\omega = \omega (R_1 + 2R_2 + R_3) - \omega_3 R_3 \Longrightarrow$$

$$\omega_3 = \frac{R_3 - R_1}{R_3}\,\omega \qquad (7)$$

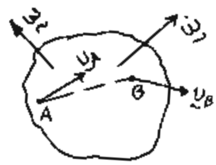
Οι σχέσεις (4), (7) ισχύουν κάθε χρονική στιγμή t. Άρα με παραγώγιση καθεμιάς εξ αυτών ως προς t βρίσκουμε:

$$\dot{\omega}_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}\,\dot{\omega} \qquad\qquad \dot{\omega}_3 = \frac{R_3 - R_1}{R_3}\,\dot{\omega}$$

δηλαδή τις γωνιακές επιταχύνσεις των (T_2), (T_3) αντίστοιχα.

3.4 Κινηματική του απόλυτα στερεού σώματος στο χώρο.

Αν $\underline{\omega}$ είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας του απόλυτα στερεού σώματος (Σ) και A, B δύο οποιαδήποτε σημεία του, τότε έχουμε το νόμο:



$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BA} \qquad (\text{ταχυτήτων})$$

δηλαδή η ίδια σχέση, όπως στο επίπεδο. Οι προβολές των $\underline{v}_A, \underline{v}_B$ πάνω στην ευθεία AB είναι ίσες:

$$\underline{v}_A \cdot \hat{n} = \underline{v}_B \cdot \hat{n} \qquad (\text{νόμος προβολών})$$

όπου $\hat{n} = \underline{AB}/|\underline{AB}|$ είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα του $\underline{AB}$.

Αν $\dot{\underline{\omega}}$ είναι το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης του απόλυτα στερεού (Σ) έχουμε το νόμο:

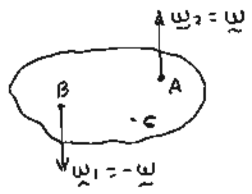
$$\underline{\gamma}_A = \underline{\gamma}_B + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{BA} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{BA}) \qquad (\text{επιταχύνσεων})$$

Για κίνηση του στερεού στο χώρο, τα διανύσματα $\underline{\omega}$, $\dot{\underline{\omega}}$ δεν είναι συγγραμμικά. Ο φορέας του διανύσματος $\underline{\omega}$ είναι ο άξονας περιστροφής (στιγμιαία).

Σύνθεση περιστροφών: Είναι δυνατόν ένα στερεό να εκτελεί συγχρόνως περισσότερες από μία περιστροφές. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

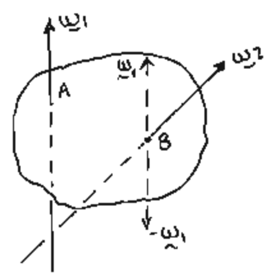
(α) Το στερεό εκτελεί τις περιστροφές $\underline{\omega}_1$, $\underline{\omega}_2$ περί άξονες οι οποίοι **τέμνονται (συντρέχουν)** στο σημείο O: Ισοδύναμα, το στερεό εκτελεί την περιστροφή $\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$ περί άξονα από το O.

(b) Ζεύγος αντίθετων περιστροφών: Το στερεό εκτελεί συγχρόνως την περιστροφή $\underset{\sim}{\omega}_1=\underset{\sim}{\omega}$ περί άξονα από το σημείο A και την περιστροφή $\underset{\sim}{\omega}_2=-\underset{\sim}{\omega}$ περί (παράλληλο) άξονα από το B. Στην περίπτωση αυτή, το στερεό εκτελεί απλή μεταφορά: Όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια ταχύτητα, η οποία είναι:



$$\underset{\sim}{v}_c=\underset{\sim}{\omega}\times \underset{\sim}{AB}$$

(c) Περιστροφές περί ασύμβατους άξονες: Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε τα αντίθετα διανύσματα $\underset{\sim}{\omega}_1$, $-\underset{\sim}{\omega}_1$ από το σημείο B που παριστάνονται στο σχήμα με διακοπτόμενες γραμμές. Εύκολα παρατηρούμε ότι τα δύο διανύσματα $\underset{\sim}{\omega}_1$, $\underset{\sim}{\omega}_2$ με σημείο εφαρμογής το B συνιστούν περιστροφές περί συντρέχοντες άξονες στο B. Έτσι, αυτά συνιστούν περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}_1+\underset{\sim}{\omega}_2$ από το B. Τα εναπομείναντα διανύσματα $\underset{\sim}{\omega}_1$ (από το A), $-\underset{\sim}{\omega}_1$ από το B συνιστούν απλή μεταφορά με ταχύτητα ίση με $\underset{\sim}{\omega}_1\times\underset{\sim}{AB}$ σύμφωνα με την περίπτωση (b).



Πρόταση: Αν κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}$, τότε η παράγωγός του ως προς το χρόνο είναι ίση με $\underset{\sim}{\omega}\times\hat{n}$:

$$\frac{d\hat{n}}{dt}=\underset{\sim}{\omega}\times\hat{n}$$

Με βάση τα παραπάνω, επιλύουμε προβλήματα κίνησης στερεών στο χώρο, όταν το στερεό εκτελεί περισσότερες από μία περιστροφές.

(I) **Οι άξονες περιστροφών συντρέχουν** σε κάποιο σημείο O, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Σύμφωνα με την περίπτωση (α), το στερεό εκτελεί περιστροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}=\underset{\sim}{\omega}_1+\underset{\sim}{\omega}_2$ περί άξονα από το O. Η γωνιακή επιτάχυνση είναι:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}}=\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1+\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2$$

Αν $\hat{n}_1$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της $\underset{\sim}{\omega}_1$, τότε είναι: $\underset{\sim}{\omega}_1=\omega_1\hat{n}_1$ και έχουμε:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1=\frac{d\underset{\sim}{\omega}_1}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega_1\hat{n}_1)=\dot{\omega}_1\hat{n}_1+\omega_1\frac{d\hat{n}_1}{dt}$$

Επειδή το διάνυσμα $\hat{n}_1$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}=\underset{\sim}{\omega}_1+\underset{\sim}{\omega}_2$, έχουμε:

$$\frac{d\hat{n}_1}{dt}=\underset{\sim}{\omega}\times\hat{n}_1=(\underset{\sim}{\omega}_1+\underset{\sim}{\omega}_2)\times\hat{n}_1=\underset{\sim}{\omega}_2\times\hat{n}_1$$

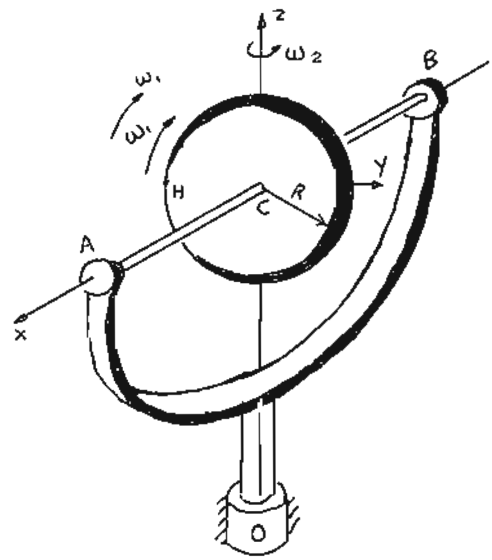
αφού $\underset{\sim}{\omega}_1\times\hat{n}_1=0$ ($\underset{\sim}{\omega}_1$, $\hat{n}_1$ συγγραμμικά διανύσματα). Άρα, είναι:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1=\dot{\omega}_1\hat{n}_1+\omega_1\underset{\sim}{\omega}_2\times\hat{n}_1$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2$, οπότε είναι γνωστή και η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού.
Με εφαρμογή του νόμου ταχυτήτων και του νόμου των επιταχύνσεων βρίσκουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση διαφόρων σημείων του στερεού.

(II) **Οι άξονες περιστροφής είναι ασύμβατοι.** Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζοντας την περίπτωση (c) βρίσκουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου B οπότε εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση που οι άξονες συντρέχουν.

Άσκηση 1



Ο δίσκος ακτίνας $R = 0{,}5m$ περιστρέφεται περί τον άξονα AB με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 2 r/s$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}_1 = 1 r/s^2$ των οποίων οι φορές φαίνονται στο σχήμα. Ο άξονας AB, ο οποίος είναι κάθετος στο δίσκο, περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονα Oz με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = 4 r/s$.

α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

b) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου H στη φάση που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση

Είναι φανερό ότι ο δίσκος κάνει συγχρόνως δύο περιστροφές: Μία περί την AB (άξονας x) με γωνιακή ταχύτητα $\underline{\omega}_1 = -2\underline{i}$ (κανόνας δεξιού χεριού) και μία περί τον κατακόρυφο άξονα Oz με γωνιακή ταχύτητα $\underline{\omega}_2 = 4\underline{k}$. Οι άξονες των $\underline{\omega}_1$, $\underline{\omega}_2$ συντρέχουν στο σημείο C. Έτσι, συνολικά, ο δίσκος εκτελεί περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 = -2\underline{i} + 4\underline{k} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\omega} = -2\underline{i} + 4\underline{k}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι:

$$\dot{\underline{\omega}} = \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2) \Longrightarrow \quad \dot{\underline{\omega}} = \frac{d\underline{\omega}_1}{dt} + \frac{d\underline{\omega}_2}{dt}$$

Με $\underset{\sim}{\omega}_1 = \omega_1 \underset{\sim}{i}$ έχουμε:

$$\frac{d\underset{\sim}{\omega}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \underset{\sim}{i}) = \frac{d\omega_1}{dt}\cdot \underset{\sim}{i} + \omega_1 \frac{d\underset{\sim}{i}}{dt}$$

Το διάνυσμα $\underset{\sim}{i}$ περιστρέφεται με τη γωνιακή ταχύτητα του στερεού $\underset{\sim}{\omega} = -2\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{k}$. Άρα είναι:

$$\frac{d\underset{\sim}{i}}{dt} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{i} = (-2\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{k}) \times \underset{\sim}{i} = 4\underset{\sim}{j}$$

και από τα δεδομένα είναι $d\omega_1/_{dt} = -1\ r/s^2$. Άρα έχουμε:

$$\frac{d\underset{\sim}{\omega}_1}{dt} = -1\cdot \underset{\sim}{i} + \omega_1\, 4\underset{\sim}{j} = -\underset{\sim}{i} + (-2)\,4\underset{\sim}{j} \implies \frac{d\underset{\sim}{\omega}_1}{dt} = -\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j}$$

Με $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \underset{\sim}{k}$ έχουμε:

$$\frac{d\underset{\sim}{\omega}_2}{dt} = \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{k} + \omega_2 \frac{d\underset{\sim}{k}}{dt}$$

Όμως, η γωνιακή ταχύτητα ω_2 είναι σταθερή, άρα είναι $\dot{\omega}_2 = 0$. Ακόμη, το διάνυσμα $\underset{\sim}{k}$ είναι σταθερό αφού ο άξονας OC είναι σταθερός. Άρα είναι $d\underset{\sim}{k}/_{dt} = 0$ και τελικά είναι $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2 = 0$. Άρα έχουμε:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}} = \dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 + \dot{\underset{\sim}{\omega}}_2 = -\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j} + 0 \implies \dot{\underset{\sim}{\omega}} = -\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j}$$

Η ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_C$ και η επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_C$ είναι μηδενικές αφού το σημείο C βρίσκεται πάνω στο σταθερό άξονα OC. Άρα έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_H = \underset{\sim}{v}_C + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{CH} = 0 + (-2\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{k}) \times (-0{,}5\underset{\sim}{j}) = \underset{\sim}{k} + 2\underset{\sim}{i} = 2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{k}$$

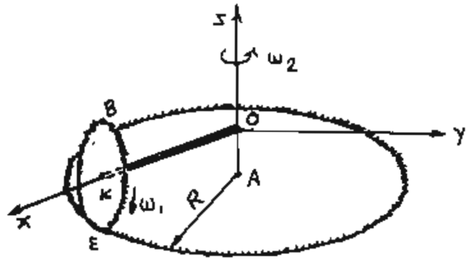
$$\underset{\sim}{\gamma}_H = \underset{\sim}{\gamma}_C + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{CH} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{CH}) =$$

$$= 0 + (-\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j}) \times (-0{,}5\underset{\sim}{j}) + (-2\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{k}) \times \Big((-2\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{k}) \times (-0{,}5\underset{\sim}{j})\Big) =$$

$$= 0{,}5\underset{\sim}{k} + (-2\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{k}) \times (\underset{\sim}{k} + 2\underset{\sim}{i}) = 0{,}5\underset{\sim}{k} + 2\underset{\sim}{j} + 8\underset{\sim}{j} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_H = 10\underset{\sim}{j} + 0{,}5\underset{\sim}{k}$$

Άσκηση 2



Ο τροχός με κέντρο Κ και ακτίνα $r = 1m$ περιστρέφεται περί τον άξονά του ΟΚ με γωνιακή ταχύτητα ω η οποία διατηρείται σταθερή κατά μέτρο. Το στέλεχος ΟΚ είναι προσαρμοσμένο στο Κ ώστε μαζί με τον τροχό να αποτελούν ένα στερεό σώμα, το οποίο μπορεί να περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονα Az, όπου $OA = r$. Αν η κυκλική πλατφόρμα ακτίνας $R = 4m$ είναι ακίνητη, να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του ανώτατου σημείου Β του τροχού, ο οποίος δεν ολισθαίνει στην πλατφόρμα.

Λύση

Το στερεό (τροχός - στέλεχος ΟΚ) είναι προφανές ότι κάνει ταυτόχρονα δύο περιστροφές. Η μία περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα ΟΚ (άξονα x) με γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\omega}_1 = -2\mathbf{i}$, σύμφωνα με τα δεδομένα και τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η δεύτερη περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα Az με γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\omega}_2 = \omega_2 \mathbf{k}$ η οποία είναι άγνωστη. Οι άξονες των δύο περιστροφών τέμνονται στο σημείο Ο. Έτσι, το στερεό κάνει περιστροφή περί άξονα από το Ο με γωνιακή ταχύτητα

$$\mathbf{\omega} = \mathbf{\omega}_1 + \mathbf{\omega}_2 \implies \mathbf{\omega} = -2\mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{k} \qquad (1)$$

Όμως, το σημείο Ε του τροχού έχει μηδενική ταχύτητα αφού ο τροχός δεν ολισθαίνει στην πλατφόρμα. Άρα:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_O + \mathbf{\omega} \times \mathbf{OE} \implies 0 = 0 + (-2\mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{k}) \times (R\mathbf{i} - r\mathbf{k}) \implies$$

$$0 = -2r\mathbf{j} + \omega_2 R \mathbf{j} \implies -2 \cdot 1 + \omega_2 4 = 0 \implies \omega_2 = 0{,}5\ r/s$$

Άρα, η γωνιακή ταχύτητα του στερεού είναι $\underset{\sim}{\omega} = -2\underset{\sim}{i} + 0{,}5\underset{\sim}{k}$.
Για την εύρεση της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού γράφουμε:

$$\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{\omega}_1 + \underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_1 \underset{\sim}{i} + \omega_2 \underset{\sim}{k} \implies$$

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}} = \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{i} + \omega_1 \frac{d\underset{\sim}{i}}{dt} + \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{k} + \omega_2 \frac{d\underset{\sim}{k}}{dt} \qquad (2)$$

Με $\underset{\sim}{\omega} = \omega_1 \underset{\sim}{i} + \omega_2 \underset{\sim}{k}$ έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_E = \underset{\sim}{v}_0 + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{OE} \implies 0 = 0 + (\omega_1 \underset{\sim}{i} + \omega_2 \underset{\sim}{k}) \times (R\underset{\sim}{i} - r\underset{\sim}{k}) \implies$$

$$0 = \omega_1 r \underset{\sim}{j} + \omega_2 R \underset{\sim}{j} \implies \omega_1 r + \omega_2 R = 0 \implies \dot{\omega}_1 r + \dot{\omega}_2 R = 0$$

Όμως η γωνιακή ταχύτητα ω_1 είναι σταθερή, άρα $\dot{\omega}_1 = 0$ και, σύμφωνα με την τελευταία σχέση είναι $\dot{\omega}_2 = 0$. Το διάνυσμα $\underset{\sim}{i}$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega} = -2\underset{\sim}{i} + 0{,}5\underset{\sim}{k}$ (δηλ. την γωνιακή ταχύτητα του στερεού). Άρα

$$\frac{d\underset{\sim}{i}}{dt} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{i} = (-2\underset{\sim}{i} + 0{,}5\underset{\sim}{k}) \times \underset{\sim}{i} \implies \frac{d\underset{\sim}{i}}{dt} = 0{,}5\underset{\sim}{j}$$

Ακόμη, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\underset{\sim}{k}$ είναι σταθερό αφού ο άξονας Az είναι σταθερός. Άρα είναι $d\underset{\sim}{k}/dt = 0$
Με βάση τα παραπάνω, η σχέση (2) δίνει:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}} = 0 \cdot \underset{\sim}{i} + (-2) \cdot 0{,}5\underset{\sim}{j} + 0\underset{\sim}{k} + \omega_2 \cdot 0 \implies \dot{\underset{\sim}{\omega}} = -\underset{\sim}{j}$$

Ο νόμος των επιταχύνσεων στο στερεό δίσκος - στέλεχος OK δίνει:

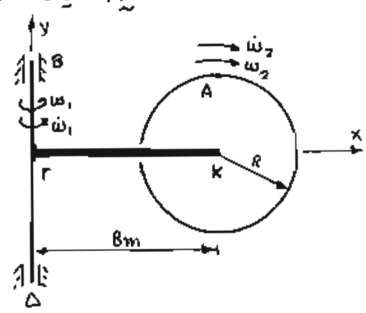
$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_0 + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{OB} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{OB})$$

Στη σχέση αυτή αντικαθιστούμε $\gamma_0 = 0$, $\dot{\underset{\sim}{\omega}} = -\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{OB} = R\underset{\sim}{i} + r\underset{\sim}{k} = 4\underset{\sim}{i} + 1 \cdot \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{\omega} = -2\underset{\sim}{i} + 0{,}5\underset{\sim}{k}$ και παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = 0 + (-\underset{\sim}{j}) \times (4\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{k}) + (-2\underset{\sim}{i} + 0{,}5\underset{\sim}{k}) \times \big((-2\underset{\sim}{i} + 0{,}5\underset{\sim}{k}) \times (4\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{k})\big) \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = 4\underset{\sim}{k} - \underset{\sim}{i} + (-2\underset{\sim}{i} + 0{,}5\underset{\sim}{k}) \times (2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}) = -3\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{k}$$

Άσκηση 28



Ο άξονας ΔΒ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 2\,r/s$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot\omega_1 = 4\,r/s^2$ ενώ ο τροχός ακτίνας $R = 2m$ περιστρέφεται περί άξονα κάθετο στο κέντρο του Κ με γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = 1\,r/s$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot\omega_2 = 3\,r/s$ (οι φορές φαίνονται στο σχήμα). Ζητείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Α.

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Γxyz (ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος με θετική φορά προς τα έξω). Ο τροχός εκτελεί ταυτόχρονα δύο περιστροφές με $\underset{\sim}{\omega}_1 = \omega_1 \underset{\sim}{j}$ (περί τον άξονα y) και $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \underset{\sim}{k}$ $(\omega_2 = -1\,r/s)$ περί τον άξονα kz. Οι άξονες των περιστροφών είναι ασύμβατοι. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

(α) Αναγνωρίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση $\underset{\sim}{\omega}_1$ και $\underset{\sim}{\dot\omega}_1$ με τις οποίες περιστρέφεται όλο το σύστημα.

(β) Βρίσκουμε την ταχύτητα και επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής Κ του $\underset{\sim}{\omega}_2$. Επειδή το Κ είναι σημείο εφαρμογής του $\underset{\sim}{\omega}_2$, αυτό έχει ταχύτητα μόνο λόγω $\underset{\sim}{\omega}_1$:

$$\underset{\sim}{V}_K = \underset{\sim}{V}_\Gamma + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{\Gamma K} = \underset{\sim}{0} + 2\underset{\sim}{j} \times 8\underset{\sim}{i} = -16\underset{\sim}{k}$$

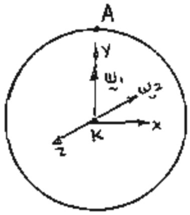
και επιτάχυνση

$$\underset{\sim}{\gamma}_K = \underset{\sim}{\gamma}_\Gamma + \underset{\sim}{\dot\omega}_1 \times \underset{\sim}{\Gamma K} + \underset{\sim}{\omega}_1 \times (\underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{\Gamma K}) =$$

$$= \underset{\sim}{0} + 4\underset{\sim}{j} \times 8\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} \times (2\underset{\sim}{j} \times 8\underset{\sim}{i}) = -32\underset{\sim}{k} + 2\underset{\sim}{j} \times (-16\underset{\sim}{k}) = -32\underset{\sim}{i} - 32\underset{\sim}{k}$$

(γ) Θεωρούμε τώρα τον τροχό που έχει ταχύτητα κέντρου:

$\mathbf{v}_K = -16\mathbf{k}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\gamma}_K = -32\mathbf{i} - 32\mathbf{k}$



και γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$$

που όμως οι άξονες των $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ συντρέχουν στο K.
Υπολογίζουμε τώρα:

(a) Ταχύτητες. Είναι $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ Άρα

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_K + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{KA} = -16\mathbf{k} + (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times 2\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 16\mathbf{k}$$

(b) Επιταχύνσεις: Είναι:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \mathbf{j} + \omega_2 \mathbf{k}) = \dot{\omega}_1 \mathbf{j} + \omega_1 \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{\omega}_2 \mathbf{k} + \omega_2 \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

Όμως ο άξονας y δεν αλλάζει διεύθυνση, άρα $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0$. Το $\mathbf{k}$ έχει παράγωγο

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{k} = 2\mathbf{j} \times \mathbf{k} = 2\mathbf{i}$$

Άρα η γωνιακή επιτάχυνση είναι:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_1 \mathbf{j} + \dot{\omega}_2 \mathbf{k} + \omega_2 \cdot 2\mathbf{i} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + (-1)2\mathbf{i} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Το σημείο A έχει:

$$\boldsymbol{\gamma}_A = \boldsymbol{\gamma}_K + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{KA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{KA}) =$$

$$= -32\mathbf{i} - 32\mathbf{k} + (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times 2\mathbf{j} + (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times \left[(2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times 2\mathbf{j}\right] \Rightarrow$$

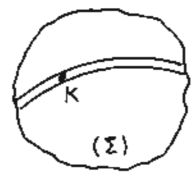
$$\boldsymbol{\gamma}_K = -26\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η σχετική κίνηση

4.1 Η ταχύτητα και η επιτάχυνση στη σχετική κίνηση

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου το οποίο **δεν είναι σημείο του απόλυτα στερεού**. Λέμε ότι το υλικό σημείο κάνει **σχετική κίνηση** ως προς το στερεό σώμα.



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το απόλυτα στερεό σώμα (Σ) το οποίο παρουσιάζει μία επιμήκη σχισμή. Μέσα στη σχισμή κινείται το σφαιρίδιο Κ. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του (σημείου) Κ δεν μπορεί να προσδιορισθούν με εφαρμογή του νόμου ταχυτήτων και του νόμου των επιταχύνσεων αντίστοιχα που γνωρίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο αφού το σημείο Κ **δεν είναι** σημείο του απόλυτα στερεού (Σ).

Η ταχύτητα $\underline{\upsilon}_K$ του σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{\upsilon}_K = \underline{\upsilon}_r + \underline{\upsilon}_\Pi \qquad (4.1.1)$$

Ο όρος $\underline{\upsilon}_r$ είναι η **σχετική ταχύτητα** του σημείου Κ και είναι η ταχύτητα που θα είχε το σημείο Κ αν το στερεό ήταν ακίνητο. Είναι πολύ χρήσιμο να τονίσουμε ότι η σχετική ταχύτητα $\underline{\upsilon}_r$ είναι πάντα εφαπτόμενη της τροχιάς την οποία διαγράφει το υλικό σημείο Κ πάνω στο στερεό. Ο όρος $\underline{\upsilon}_\Pi$ είναι η **μετοχική ταχύτητα** του σημείου Κ και ισούται με την ταχύτητα του σημείου Π του στερεού στο οποίο πατάει το υλικό σημείο Κ. Για την ταχύτητα $\underline{v}_\pi$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο ταχυτήτων που ισχύει σε απόλυτα στερεό σώμα αφού το σημείο Π είναι σημείο του απόλυτα στερεού.

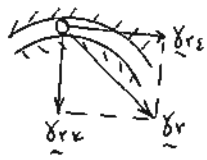
Η επιτάχυνση $\underline{\gamma}_K$ του σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{\gamma}_K = \underline{\gamma}_r + \underline{\gamma}_\pi + \underline{\gamma}_{cor} \qquad (4.1.2)$$

Ο όρος $\underline{\gamma}_r$ είναι η **σχετική επιτάχυνση** και είναι η ταχύτητα που θα είχε το σημείο Κ αν το στερεό ήταν ακίνητο. Είναι:

$$\underline{\gamma}_r = \frac{d\underline{v}_r}{dt}$$

Η $\underline{\gamma}_r$ έχει τη διεύθυνση της τροχιάς του Κ πάνω στο στερεό όταν η τροχιά είναι ευθύγραμμη, οπότε είναι $\underline{v}_r // \underline{\gamma}_r$. Όταν η τροχιά αυτή είναι καμπύλη, η $\underline{\gamma}_r$ έχει δύο συνιστώσες: Την επιτρόχια, η οποία ισούται με $d|\underline{v}_r|/dt$ και την κεντρομόλα η οποία ισούται με v_r^2/R κατά μέτρο.



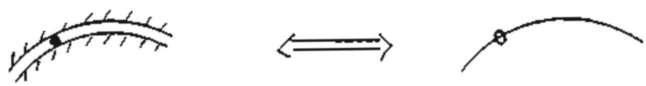
Ο όρος $\underline{\gamma}_\pi$ είναι η **μεταφορική επιτάχυνση** του σημείου Κ και ισούται με την επιτάχυνση του σημείου Π του στερεού στο οποίο πατάει το υλικό σημείο Κ. Για την επιτάχυνση $\underline{v}_\pi$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο επιταχύνσεων που ισχύει σε απόλυτα στερεό σώμα, αφού το Π είναι σημείο του απόλυτα στερεού.

Ο όρος $\underline{\gamma}_{cor}$ είναι η **επιτάχυνση Coriolis** και δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{\gamma}_{cor} = 2\underline{\omega} \times \underline{v}_r$$

όπου $\underline{v}_r$ είναι η σχετική ταχύτητα και $\underline{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα του απόλυτα στερεού ως προς το οποίο γίνεται η σχετική κίνηση του υλικού σημείου Κ.

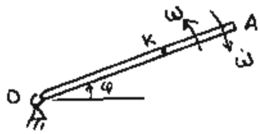
Παρατήρηση Είναι προφανές ότι ένα υλικό σημείο το οποίο κινείται κατά μήκος μίας σχισμής ισοδυναμεί με ένα κρίκο ο οποίος κινείται κατά μήκος ενός σύρματος το οποίο έχει το ίδιο σχήμα με τη σχισμή, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Με βάση την παρατήρηση αυτή απλοποιούνται πολύπλοκα σχήματα σε διάφορα προβλήματα.

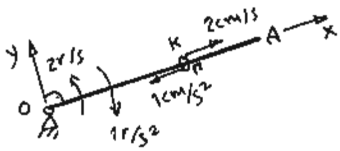
Σημείωση: Η ταχύτητα $\underset{\sim}{υ}_κ$ είναι γνωστή και ως απόλυτη ταχύτητα του σημείου Κ. Αντίστοιχα, η επιτάχυνση $\underset{\sim}{γ}_κ$ αναφέρεται και ως απόλυτη επιτάχυνση του σημείου Κ. Αυτά έχουν καθιερωθεί προς διάκριση από τη σχετική ταχύτητα και τη σχετική επιτάχυνση.

Άσκηση 1



Ο σωλήνας ΟΑ του σχήματος περιστρέφεται στο επίπεδο Oxy με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2r/s$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega} = 1r/s^2$ οι οποίες έχουν τις φορές που φαίνονται στο σχήμα. Το σφαιρίδιο Κ κινείται μέσα στο σωλήνα και στη φάση του σχήματος απέχει από το άκρο Ο απόσταση 8cm, έχει ταχύτητα με φορά προς το Α μέτρου 2cm/s και επιβράδυνση $1cm/s^2$. Ζητείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σφαιριδίου.

Λύση



Για απλούστευση του σχήματος θεωρούμε ισοδύναμα τη ράβδο ΟΑ στην οποία ολισθαίνει ο κρίκος Κ, με ταχύτητα 2cm/s και επιβράδυνση $1cm/s^2$. Επειδή δεν έχει δοθεί σύστημα αναφοράς, θεωρούμε εμείς το πιο βολικό: Ο άξονας Ox κατά μήκος της ράβδου και ο άξονας Oy κάθετος σ' αυτόν.

Ο κρίκος κάνει σχετική κίνηση ως προς τη ράβδο, άρα έχει ταχύτητα:

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v_r} + \underset{\sim}{v_\Pi} \qquad (1)$$

Η σχετική ταχύτητα είναι $\underset{\sim}{v_r} = 2\underset{\sim}{i}$ αφού ο κρίκος κινείται πάνω στη ράβδο με ταχύτητα 2cm/s και φορά από το Ο προς το Α. Η μετοχική ταχύτητα v_Π είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Π της ράβδου στο οποίο πατάει ο κρίκος. Ο νόμος ταχυτήτων δίνει:

$$\underset{\sim}{v_\Pi} = \cancel{\underset{\sim}{v_O}}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{O\Pi} = 2\underset{\sim}{k} \times (8\underset{\sim}{i}) = 16\underset{\sim}{j}$$

αφού τα Ο, Π είναι σημεία της ράβδου η οποία έχει γωνιακή ταχύτητα $\underline{\omega} = 2\underline{k}$ και $OA = 8cm$. Αντικατάσταση των $\underline{\upsilon}_r$, $\underline{\upsilon}_\Pi$ στη σχέση (1) δίνει $\underline{\upsilon} = 2\underline{i} + 16\underline{j}$. Αυτή είναι η απόλυτη ταχύτητα του κρίκου.

Η επιτάχυνση του κρίκου είναι:

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_r + \underline{\gamma}_\Pi + \underline{\gamma}_{COR} \qquad (2)$$

Επειδή ο κρίκος Κ κινείται με ταχύτητα που έχει φορά από το Ο προς το Α πάνω στη ράβδο και επιβράδυνση $1cm/s^2$, συμπεραίνουμε ότι η σχετική επιτάχυνση του κρίκου είναι $\underline{\gamma}_r = -\underline{i}$. Η επιτάχυνση του σημείου Π της ράβδου στο οποίο πατάει ο κρίκος είναι:

$$\underline{\gamma}_\Pi = \cancel{\underline{\gamma}_0}^{\,0} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{O\Pi} - \omega^2 \underline{O\Pi} = -\underline{k} \times (8\underline{i}) - 2^2 8\underline{i} = -8\underline{j} - 32\underline{i}$$

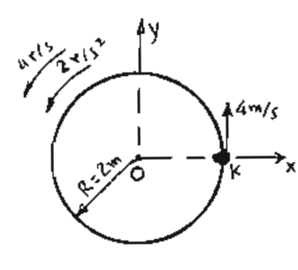
σύμφωνα με το νόμο των επιταχύνσεων. Η επιτάχυνση Coriolis βρίσκεται αμέσως:

$$\underline{\gamma}_{COR} = 2\underline{\omega} \times \underline{\upsilon}_r = 2 \cdot 2\underline{k} \times 2\underline{i} = 8\underline{j}$$

Αντικατάσταση των $\underline{\gamma}_r, \underline{\gamma}_\Pi, \underline{\gamma}_{COR}$ που βρήκαμε στη σχέση (1) δίνει:

$$\underline{\gamma} = -\underline{i} - 8\underline{j} - 32\underline{i} + 8\underline{j} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\gamma} = -33\underline{i}$$

Άσκηση 2



Ο τροχός ακτίνας $R = 2m$ του σχήματος περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα Oz με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 4r/s$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega} = 2r/s^2$ με φορές που φαίνονται στο σχήμα. Στην περιφέρεια του κινείται σφαιρίδιο Κ με σταθερή ταχύτητα $4m/s$ και φορά όπως στο σχήμα. Ζητείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση του Κ στη φάση που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση

Το σφαιρίδιο Κ κάνει, προφανώς, σχετική κίνηση ως προς τον τροχό. Έτσι, η ταχύτητά του είναι:

$$\underset{\frown}{u} = \underset{\frown}{u}_r + \underset{\frown}{u}_\pi \qquad (1)$$

Επειδή το Κ κινείται στην περιφέρεια του τροχού με ταχύτητα 4m/s (εννοείται ως προς τον τροχό) συμπεραίνουμε ότι στη φάση του σχήματος είναι: $\underset{\frown}{u}_r = 4\underset{\frown}{j}$. Η μετοχική ταχύτητα u_π είναι η ταχύτητα του σημείου Π του δίσκου στο οποίο πατάει το Κ. Ο νόμος ταχυτήτων στο δίσκο δίνει:

$$\underset{\frown}{u}_\pi = \cancel{\underset{\frown}{u}_o}^{\,0} + \underset{\frown}{\omega} \times \underset{\frown}{o\pi} = 4\underset{\frown}{k} \times (2\underset{\frown}{i}) \implies \underset{\frown}{u}_\pi = 8\underset{\frown}{j}$$

αφού, σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι: $\underset{\frown}{\omega} = 4\underset{\frown}{k}$. Αντικατάσταση στη σχέση (1) δίνει: $\underset{\frown}{u} = 4\underset{\frown}{j} + 8\underset{\frown}{j} = 12\underset{\frown}{j}$.

Η επιτάχυνση του Κ είναι:

$$\underset{\frown}{\gamma} = \underset{\frown}{\gamma}_r + \underset{\frown}{\gamma}_\pi + \underset{\frown}{\gamma}_{COR} \qquad (2)$$

Επειδή το Κ κινείται στην περιφέρεια ακτίνας R=2m με σταθερή ταχύτητα ως προς το δίσκο $u_r = 4$m/s, συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση του Κ ως προς το δίσκο έχει μόνο κεντρομόλα συνιστώσα ίση με u_r^2/R. Άρα είναι:

$$\underset{\frown}{\gamma}_r = \frac{u_r^2}{R}(-\underset{\frown}{i}) = \frac{4^2}{2}(-\underset{\frown}{i}) \implies \underset{\frown}{\gamma}_r = -8\underset{\frown}{i}$$

αφού η γ_r έχει φορά από το Κ προς το Ο. Η μετοχική επιτάχυνση γ_π βρίσκεται από το νόμο των επιταχύνσεων στο δίσκο:

$$\underset{\frown}{\gamma}_\pi = \cancel{\underset{\frown}{\gamma}_o}^{\,0} + \underset{\frown}{\dot\omega} \times \underset{\frown}{o\pi} - \omega^2 \underset{\frown}{o\pi} = 2\underset{\frown}{k} \times (2\underset{\frown}{i}) - 4^2 \cdot 2\underset{\frown}{i} = 4\underset{\frown}{j} - 32\underset{\frown}{i}$$

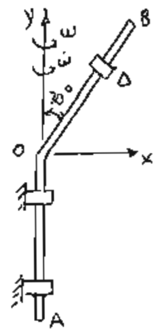
Η επιτάχυνση Coriolis είναι:

$$\underline{\gamma}_{cor} = 2\underline{\omega} \times \underline{v}_r = 2 \cdot 4\underline{k} \times 4\underline{j} \implies \underline{\gamma}_{cor} = -32\underline{i}$$

και αντικατάσταση των $\underline{\gamma}_r, \underline{\gamma}_\pi, \underline{\gamma}_{cor}$ στη σχέση (2) δίνει:

$$\underline{\gamma} = -8\underline{i} + 4\underline{j} - 32\underline{i} - 32\underline{i} \implies \underline{\gamma} = -72\underline{i} + 4\underline{j}$$

Άσκηση 3



Η ράβδος ΑΒ του σχήματος έχει καμφθεί στο σημείο Ο ώστε να σχηματίζει γωνία $A\hat{O}B = 150^\circ$ και περιστρέφεται περί την ευθεία ΟΑ με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 r/s$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega} = 1 r/s^2$ των οποίων οι φορές φαίνονται στο σχήμα. Ο δακτύλιος Δ κινείται κατά μήκος της ΟΒ. Στη φάση του σχήματος απέχει 8cm από το Ο έχει ταχύτητα $2 cm/s$ με φορά προς το Β και επιτάχυνση $4 cm/s^2$ με φορά προς το Ο. Ζητείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση του Δ στη φάση του σχήματος όπου η ράβδος βρίσκεται στο επίπεδο Οxy.

Λύση

Ο δακτύλιος Δ, προφανώς, κάνει σχετική κίνηση ως προς τη ράβδο. Άρα η (απόλυτη) ταχύτητά του είναι:

$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_\pi \qquad (1)$$

Όμως, ο δακτύλιος κινείται κατά μήκος της ράβδου με ταχύτητα $2 cm/s$ και φορά προς το Β. Άρα, η σχετική ταχύτητα του δακτυλίου ως προς τη ράβδο είναι:

$$\underline{v}_r = |\underline{v}_r| \sin 30^\circ \underline{i} + |\underline{v}_r| \cos 30^\circ \underline{j} = 2 \cdot \frac{1}{2}\underline{i} + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j} = \underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}$$

αφού στη φάση του σχήματος η OB βρίσκεται στο επίπεδο Oxy. Η μεταφορική ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_\pi$ του κρίκου είναι η ταχύτητα του σημείου Π της ράβδου στο οποίο πατάει ο κρίκος στη φάση του σχήματος. Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{v}_\pi = \underset{\sim}{v}_o + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{O\Pi} \qquad (2)$$

όπου $\underset{\sim}{v}_o = 0$, $\underset{\sim}{\omega} = 2\underset{\sim}{j}$ (η ράβδος περιστρέφεται περί τον άξονα Oy με φορά που φαίνεται στο σχήμα) και από το σχήμα είναι

$$\underset{\sim}{O\Pi} = 8\sin 30^\circ \underset{\sim}{i} + 8\cos 30^\circ \underset{\sim}{j} = 4\underset{\sim}{i} + 4\sqrt{3}\underset{\sim}{j}$$

Η σχέση (2) δίνει:

$$\underset{\sim}{v}_\pi = 0 + 2\underset{\sim}{j} \times (4\underset{\sim}{i} + 4\sqrt{3}\underset{\sim}{j}) \implies \underset{\sim}{v}_\pi = -8\underset{\sim}{k}$$

Αντικατάσταση των $\underset{\sim}{v}_r$, $\underset{\sim}{v}_\pi$ στη σχέση (1) δίνει:

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{i} + \sqrt{3}\underset{\sim}{j} - 8\underset{\sim}{k}$$

Η επιτάχυνση του κρίκου Δ είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Delta = \underset{\sim}{\gamma}_r + \underset{\sim}{\gamma}_\pi + \underset{\sim}{\gamma}_{COR} \qquad (3)$$

Από τα δεδομένα, η επιτάχυνση του κρίκου Κ κατά την κίνησή του κατά μήκος της OB (σχετική επιτάχυνση), έχει μέτρο $4\,cm/s^2$ και φορά από το Δ προς το O. Άρα:

$$\underset{\sim}{\gamma}_r = -4\sin 30\,\underset{\sim}{i} - 4\cos 30\,\underset{\sim}{j} \implies \underset{\sim}{\gamma}_r = -2\underset{\sim}{i} - 2\sqrt{3}\underset{\sim}{j}$$

Η μεταφορική επιτάχυνση του κρίκου Κ είναι ίση με την επιτάχυνση του σημείου Π της ράβδου στο οποίο πατάει ο κρίκος Κ στη φάση του σχήματος. Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_\pi = \underset{\sim}{\gamma}_o + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{O\Pi} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{O\Pi}) \qquad (4)$$

αφού η ράβδος κινείται στον (τριδιάστατο) χώρο. Με $\underset{\sim}{\gamma}_0 = 0$, $\underset{\sim}{\dot{\omega}} = 1 \cdot \underset{\sim}{j}$ και $\underset{\sim}{O\Pi}$, $\underset{\sim}{\omega}$ όπως παραπάνω, έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_n = \underset{\sim}{0} + \underset{\sim}{j} \times (4\underset{\sim}{i} + 4\sqrt{3}\underset{\sim}{j}) + 2\underset{\sim}{j} \times \left(2\underset{\sim}{j} \times (4\underset{\sim}{i} + 4\sqrt{3}\underset{\sim}{j})\right) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_n = -4\underset{\sim}{k} + 2\underset{\sim}{j} \times (-8\underset{\sim}{k}) = -4\underset{\sim}{k} - 16\underset{\sim}{i}$$

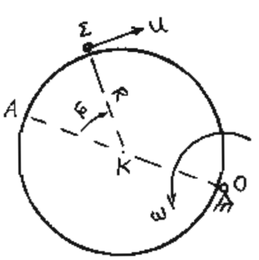
Η επιτάχυνση Coriolis είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_{cor} = 2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}_r = 2 \cdot 2\underset{\sim}{j} \times (\underset{\sim}{i} + \sqrt{3}\underset{\sim}{j}) = -4\underset{\sim}{k}$$

Με αντικατάσταση των $\underset{\sim}{\gamma}_r$, $\underset{\sim}{\gamma}_n$, $\underset{\sim}{\gamma}_{cor}$ στη σχέση (3), βρίσκουμε τελικά:

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Delta = -2\underset{\sim}{i} - 2\sqrt{3}\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{k} - 16\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{k} \Rightarrow \underset{\sim}{\gamma}_\Delta = -18\underset{\sim}{i} - 2\sqrt{3}\underset{\sim}{j} - 8\underset{\sim}{k}$$

Άσκηση 4

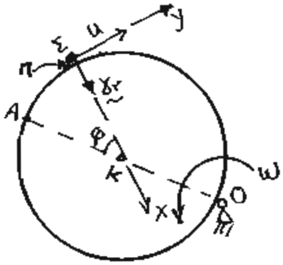


Ο κυκλικός δίσκος ακτίνας R περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω περί άξονα κάθετο στο επίπεδό του, ο οποίος περνά από το σταθερό σημείο O της περιφέρειάς του. Ένα υλικό σημείο Σ κινείται πάνω στην περιφέρεια του δίσκου με ταχύτητα σταθερού μέτρου u και φορά όπως στο σχήμα, ξεκινώντας από το σημείο A που είναι αντιδιαμετρικό του O. Ζητείται η (απόλυτη) επιτάχυνση του σημείου Σ σα συνάρτηση του χρόνου t.

Λύση

Το υλικό σημείο Σ κάνει σχετική κίνηση ως προς τον δίσκο. Άρα η επιτάχυνσή του είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{\gamma}_r + \underset{\sim}{\gamma}_n + \underset{\sim}{\gamma}_c \qquad (1)$$



Κατ' αρχήν, επειδή δεν έχει ορισθεί κάποιο σύστημα συντεταγμένων, θεωρούμε το Σxy του σχήματος, όπου ο άξονας Σx έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και ο Σy τη διεύθυνση της εφαπτομένης στη θέση Σ. Επειδή το Σ κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου u κατά μήκος της περιφέρειας του δίσκου, συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του Σ στην περιφέρεια είναι ομαλή κυκλική. Έτσι, η σχετική ταχύτητα είναι $v_r = u\hat{y}$ και η σχετική επιτάχυνση γ_r έχει τη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο K του δίσκου και μέτρο ίσο με u^2/R. Άρα:

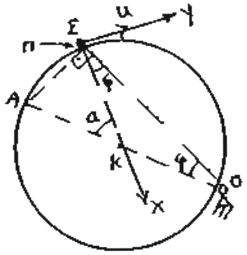
$$\underset{\sim}{\gamma_r} = \frac{u^2}{R}\underset{\sim}{i} \qquad (2)$$

Η μετοχική επιτάχυνση ισούται με την επιτάχυνση γ_π του σημείου Π του δίσκου στο οποίο πατάει το Σ. Άρα:

$$\underset{\sim}{\gamma_\pi} = \underset{\sim}{\gamma_o} + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{o\pi} - \omega^2 \underset{\sim}{o\pi} \qquad (3)$$

αφού η κίνηση του δίσκου είναι επίπεδη. Όμως είναι $\gamma_o = 0$ και $\dot{\underset{\sim}{\omega}} = 0$ αφού η γωνιακή ταχύτητα ω του δίσκου είναι σταθερή. Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma_\pi} = -\omega^2 \underset{\sim}{o\pi} \qquad (4)$$



Επειδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{K\Sigma O}$ είναι ισοσκελές ($K\Sigma = KO$), έχουμε:

$$K\hat{\Sigma}O = K\hat{O}\Sigma = \varphi$$

όπου $\varphi = a/2$ αφού $a = \varphi + \varphi$ (εξωτερική γωνία του τριγώνου $K\hat{O}\Sigma$. Έτσι, από το σχήμα αυτό έχουμε:

$$\underset{\sim}{O\Pi} = \underset{\sim}{O\Sigma} = -(O\Sigma)\cos\varphi\, \underset{\sim}{i} - (O\Sigma)\sin\varphi\, \underset{\sim}{j} \qquad (5)$$

Όμως, η γωνία $A\hat{\Sigma}O$ είναι ορθή αφού είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει σε ημιπεριφέρεια. Έτσι, από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{\Sigma}O$ έχουμε

$$(O\Sigma) = (OA)\cos\varphi = 2R\cos\varphi$$

και η σχέση (5) δίνει:

$$\underset{\sim}{O\Pi} = -2R\cos^2\varphi\, \underset{\sim}{i} - 2R\cos\varphi\sin\varphi\, \underset{\sim}{j}$$

Με αντικατάσταση του $O\Pi$ στη σχέση (4) παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_{\Pi} = 2R\omega^2\cos^2\varphi\, \underset{\sim}{i} + 2R\omega^2\cos\varphi\sin\varphi\, \underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

Η επιτάχυνση Coriolis είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = 2\underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{v}_r = 2\omega\underset{\sim}{k}\times(u\underset{\sim}{j}) \implies \underset{\sim}{\gamma}_c = -2\omega u\, \underset{\sim}{i} \qquad (7)$$

Αντικατάσταση των εκφράσεων των $\underset{\sim}{\gamma}_r$, $\underset{\sim}{\gamma}_{\Pi}$, $\underset{\sim}{\gamma}_c$ στη σχέση (1) δίνει τελικά:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \frac{u^2}{R}\underset{\sim}{i} + 2R\omega^2\cos^2\varphi\, \underset{\sim}{i} + 2R\omega^2\cos\varphi\sin\varphi\, \underset{\sim}{j} - 2\omega u\, \underset{\sim}{i} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma} = \left(\frac{u^2}{R} + 2R\omega^2\cos^2\varphi - 2\omega u\right)\underset{\sim}{i} + 2R\omega^2\cos\varphi\sin\varphi\, \underset{\sim}{j} \qquad (8)$$

Από το σχήμα έχουμε ότι το τόξο ΑΣ ισούται με Ra και επειδή το Σ κινείται με σταθερή ταχύτητα u ως προς το δίσκο έχουμε:

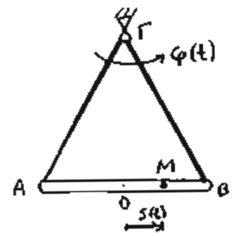
$$(A\Sigma) = u.t \implies Ra = ut \implies a = \frac{ut}{R} \implies$$

$$\varphi = \frac{a}{2} = \frac{ut}{2R} \implies \varphi = \frac{ut}{2R} \qquad (9)$$

αφού το Σ ξεκινά για $t=0$ από το Α. Από τις σχέσεις (8), (9), ορίζεται η επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{\gamma}(t)$.

Άσκηση 5

Το ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB}$ έχει πλευρά ΑΒ το σωλήνα του σχήματος μέσα στον οποίο κινείται το υλικό σημείο Μ με εξίσωση



$$(OM) = s(t) = 20\cos 2\pi t \quad (m)$$

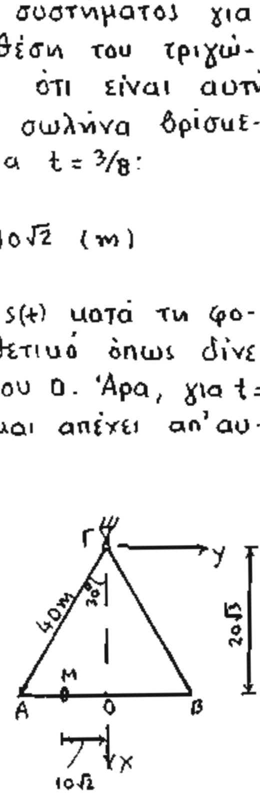
Η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου έχει μήκος 40m. Το τρίγωνο περιστρέφεται περί άξονα κάθετο στο επίπεδό του στο Γ με $\varphi(t) = t^2/2$. Για $t = 3/8$ να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Μ.

Λύση

Καθορίζουμε κατ' αρχήν τη θέση του συστήματος για $t = 3/8$. Επειδή δεν δίνεται η αρχική θέση του τριγώνου, η θέση του για $t = 3/8$ υποτίθεται ότι είναι αυτή του σχήματος. Η θέση του Μ μέσα στο σωλήνα βρίσκεται από την εξίσωση $s(t) = 20\cos 2\pi t$ για $t = 3/8$:

$$s(3/8) = 20\cos\left(2\pi\frac{3}{8}\right) = 20\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -10\sqrt{2} \quad (m)$$

Υποτίθεται βέβαια ότι θετικό είναι το s(t) κατά τη φορά του βέλους δηλαδή το ΟΜ είναι θετικό όπως δίνεται στο σχήμα: το Μ βρίσκεται δεξιά του Ο. Άρα, για $t = 3/8$ το Μ βρίσκεται αριστερά του Ο και απέχει απ' αυτό $10\sqrt{2}$m, όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα. Στο σχήμα αυτό σχεδιάσαμε και το σύστημα αναφοράς Γxy. Ο θετικός ημιάξονας z έχει φορά προς τα πάνω σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αυτό είναι ένα βολικό σύστημα αναφοράς.



Το σημείο Μ κάνει σχετική κίνηση ως προς το στερεό τρίγωνο.

Η σχετική αυτή κίνηση καθορίζεται από το νόμο: $s(t)=$ $=20\cos 2\pi t$ με θετική φορά τη φορά του βέλους του $s(t)$ στο αρχικό σχήμα, δηλαδή τη φορά του ΟΜ, άρα του άξονα y. Έτσι, η ταχύτητα του Μ πάνω στην ΑΒ (σχετική ταχύτητα) είναι:

$$\dot{s}(t)=\frac{d}{dt}(20\cos 2\pi t)=-40\pi\sin 2\pi t \overset{t=3/8}{\Longrightarrow} \dot{s}(3/8)=-40\pi\sin\frac{6\pi}{8}$$

$$\Longrightarrow \dot{s}(3/8)=-40\pi\sin\frac{3\pi}{4}=-40\pi\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \dot{s}\left(\frac{3}{8}\right)=-20\pi\sqrt{2}\ (m/s) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{u}_r=-20\pi\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}$$

και η σχετική επιτάχυνση:

$$\ddot{s}(t)=\frac{d}{dt}\dot{s}(t)=\frac{d}{dt}(-40\pi\sin 2\pi t)=-80\pi^2\cos 2\pi t \overset{t=3/8}{\Longrightarrow}$$

$$\ddot{s}(3/8)=-80\pi^2\cos\left(2\pi\frac{3}{8}\right)=-40\pi^2\sqrt{2} \Rightarrow \underset{\sim}{\gamma}_r=-40\pi^2\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}$$

Από το νόμο $\varphi(t)=t^2/2$, με παραγώγιση βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα του τριγώνου:

$$\dot{\varphi}(t)=t \overset{t=3/8}{\Longrightarrow} \dot{\varphi}(3/8)=3/8 \Longrightarrow \underset{\sim}{\omega}=3/8\,\underset{\sim}{k}$$

αφού θετική φορά περιστροφής είναι η θετική φορά στο δοσμένο σχήμα. Η γωνιακή επιτάχυνση του τριγώνου είναι

$$\ddot{\varphi}(t)=\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{t^2}{2}\right)=1 \Longrightarrow \ddot{\varphi}(3/8)=1 \Longrightarrow \dot{\underset{\sim}{\omega}}=\underset{\sim}{k}$$

Η (απόλυτη) ταχύτητα του Μ είναι:

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{u}_r+\underset{\sim}{u}_n \qquad (1)$$

όπου $\underset{\sim}{u}_r=-20\pi\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}$, όπως βρέθηκε παραπάνω, και η μεταφορική ταχύτητα είναι:

$$\underset{\sim}{u}_n=\cancel{\underset{\sim}{u}_{\Gamma}}^{0}+\underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{O\Pi}=\frac{3}{8}\underset{\sim}{k}\times(20\sqrt{3}\,\underset{\sim}{i}-10\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{u}_n = \frac{60}{8}\sqrt{3}\,\underset{\sim}{j} + \frac{30}{8}\sqrt{2}\,\underset{\sim}{i} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{u}_n = \frac{15\sqrt{3}}{2}\,\underset{\sim}{j} + \frac{15}{4}\sqrt{2}\,\underset{\sim}{i}$$

Άρα, με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\underset{\sim}{u} = -20\pi\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j} + \frac{15\sqrt{3}}{2}\,\underset{\sim}{j} + \frac{15\sqrt{2}}{4}\,\underset{\sim}{i} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{u} = 18{,}26\,\underset{\sim}{i} - 88{,}55\,\underset{\sim}{j}$$

Η (απόλυτη) επιτάχυνση του Μ είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{\gamma}_r + \underset{\sim}{\gamma}_n + \underset{\sim}{\gamma}_{cor} \qquad (2)$$

όπου $\underset{\sim}{\gamma}_r = -40\pi^2\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}$, όπως βρέθηκε παραπάνω. Η μεταφορική επιτάχυνση είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_n = \cancel{\underset{\sim}{\gamma}_{\Gamma}}^{\,0} + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{r}_{\Gamma\Pi} - \omega^2 \underset{\sim}{r}_{\Gamma\Pi} = \underset{\sim}{k} \times (20\sqrt{3}\,\underset{\sim}{i} - 10\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}) - \left(\tfrac{3}{8}\right)^2 (20\sqrt{3}\,\underset{\sim}{i} - 10\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j})$$

$$= 20\sqrt{3}\,\underset{\sim}{j} + 10\sqrt{2}\,\underset{\sim}{i} - \left(\tfrac{3}{8}\right)^2 (20\sqrt{3}\,\underset{\sim}{i} - 10\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma}_n = 9{,}23\,\underset{\sim}{i} + 36{,}60\,\underset{\sim}{j}$$

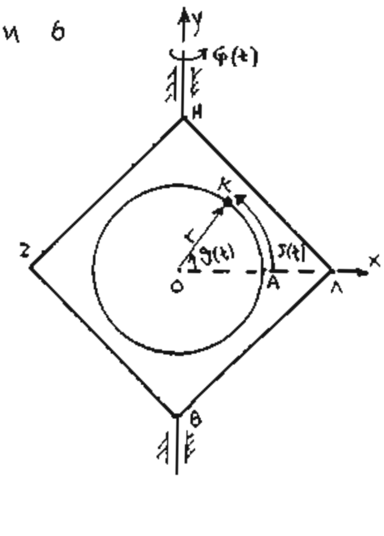
και η επιτάχυνση Coriolis:

$$\underset{\sim}{\gamma}_{cor} = 2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{u}_r = 2 \cdot \frac{3}{8}\,\underset{\sim}{k} \times (-20\pi\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma}_{cor} = 66{,}41\,\underset{\sim}{i}$$

Αντικατάσταση στη σχέση (2) δίνει:

$$\underset{\sim}{\gamma} = -40\pi^2\sqrt{2}\,\underset{\sim}{j} + 9{,}23\,\underset{\sim}{i} + 36{,}60\,\underset{\sim}{j} + 66{,}41\,\underset{\sim}{i} \Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma} = 75{,}64\,\underset{\sim}{i} - 519{,}5\,\underset{\sim}{j}$$

Άσκηση 6



Η πλατφόρμα ΗΖΘΛ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, περιστρέφεται περί το σταθερό άξονα y με νόμο:

$$\varphi(t) = 2t^3 - 2t \qquad (1)$$

όπου t η χρονική στιγμή σε sec και φ η γωνία σε rad. Ταυτόχρονα, στο κυκλικό αυλάκι ακτίνας $r = 10cm$ της πλατφόρμας, κινείται το σφαιρίδιο Κ έτσι ώστε το τόξο $AK = s(t)$ να είναι:

$$s(t) = \frac{\pi r}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \qquad (2)$$

Ζητείται η (απόλυτη) ταχύτητα και η (απόλυτη) επιτάχυνση του σφαιριδίου Κ τη χρονική στιγμή $t = 1sec$.

Λύση

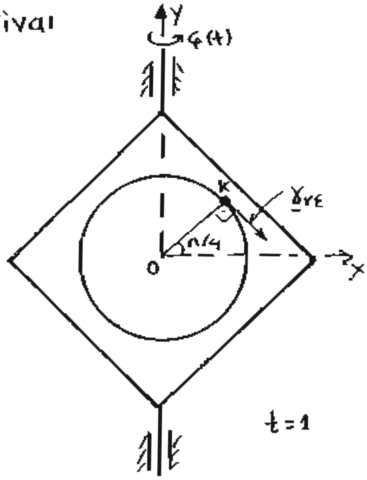
Η γωνία $\varphi(t)$ καθορίζει τη θέση της πλατφόρμας την τυχαία χρονική στιγμή t. Επειδή δεν δίνεται κάποια αρχική θέση της, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για $t = 1sec$ αυτή βρίσκεται στη θέση του σχήματος (στο επίπεδο Oxy). Η θέση του σφαιριδίου Κ πάνω στη πλατφόρμα καθορίζεται από το τόξο $s(t)$ το οποίο δίνεται από τη σχέση (2) και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\vartheta(t)$ είναι:

$$\vartheta(t) = \frac{s(t)}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\pi r}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \Longrightarrow \vartheta(t) = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Έτσι, τη χρονική στιγμή $t = 1$ είναι

$$\vartheta(1) = \frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \vartheta(1) = \frac{\pi}{4}$$

και έχουμε τη φάση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Με θετική φορά τη φορά της γωνίας $\varphi(t)$, για $t = 1$ έχουμε:

$$\omega = \dot{\varphi}(1) = \dot{\varphi}(t)\Big|_{t=1} =$$

$$= 6t^2 - 2\Big|_{t=1} = 4 \Longrightarrow \underset{\sim}{\omega} = 4\underset{\sim}{j}$$

$$\dot{\omega} = \ddot{\varphi}(1) = \ddot{\varphi}(t)\Big|_{t=1} = 12t\Big|_{t=1}$$

$$\Longrightarrow \underset{\sim}{\dot{\omega}} = 12\underset{\sim}{j}$$

αφού η πλατφόρμα περιστρέφεται περί τον άξονα y.

Η ταχύτητα του σφαιριδίου ως προς την πλατφόρμα για $t=1$ είναι εφαπτόμενη στην περιφέρεια και έχει τιμή:

$$\dot{s}(1) = \dot{s}(t)\Big|_{t=1} = \frac{\pi r}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\Big|_{t=1} = 0$$

Άρα η σχετική ταχύτητα $\underset{\sim}{u}_r$ είναι μηδενική.

Η σχετική επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_r$ έχει κεντρομόλα συνιστώσα: $u_r^2/r = 0$ αφού $u_r = 0$ και επιτρόχια με τιμή:

$$\ddot{s}(1) = \ddot{s}(t)\Big|_{t=1} = -\frac{\pi^3}{16} r\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\Big|_{t=1} = -\frac{\pi^3 r}{16}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^3 r}{16}$$

Αυτή είναι εφαπτόμενη στο σημείο Κ και έχει αντίθετη φορά εκείνης του τόξου s. Το διάνυσμά της είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_{r,\varepsilon} = \frac{\pi^3 r}{16}\cos\frac{\pi}{4}\,\underset{\sim}{i} - \frac{\pi^3 r}{16}\sin\frac{\pi}{4}\,\underset{\sim}{j} \Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma}_{r\varepsilon} = 43{,}1\,\underset{\sim}{i} - 43{,}1\,\underset{\sim}{j}$$

αφού $r = 10cm$. Επειδή η κεντρομόλα συνιστώσα της $\underset{\sim}{\gamma}_r$ είναι μηδενική, έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_r = \underset{\sim}{\gamma}_{r\kappa} + \underset{\sim}{\gamma}_{r\varepsilon} \Longrightarrow \underset{\sim}{\gamma}_r = 43{,}1\,\underset{\sim}{i} - 43{,}1\,\underset{\sim}{j} \qquad (1)$$

(Εδώ παρατηρούμε ότι ενώ $\underset{\sim}{u}_r = 0$, είναι $\underset{\sim}{\gamma}_r \neq 0$. Αυτό ισχύει γιατί πρόκειται για στιγμιαίες τιμές).

Το σημείο Κ κάνει σχετική κίνηση ως προς την πλατφόρμα. Άρα έχουμε:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}_r + \underset{\sim}{u}_\pi = 0 + \underset{\sim}{u}_\pi \Longrightarrow \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}_\pi$$

όπου η μετοχική ταχύτητα είναι:

$$\underset{\sim}{u}_\pi = \cancel{\underset{\sim}{u}_0}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega}\times \underset{\sim}{O\pi} = 4\underset{\sim}{j}\times\left(r\cos\frac{\pi}{4}\,\underset{\sim}{i} + r\sin\frac{\pi}{4}\,\underset{\sim}{j}\right) = -4r\cos\frac{\pi}{4}\,\underset{\sim}{k} =$$

$$= -4\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\underset{\sim}{k} \Longrightarrow \underset{\sim}{u}_\pi = -28{,}2\,\underset{\sim}{k}$$

Άρα είναι $\underset{\sim}{u} = -28{,}2\underset{\sim}{k}$

Η επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{\gamma}_r + \underset{\sim}{\gamma}_n + \underset{\sim}{\gamma}_{cor}$$

όπου η σχετική επιτάχυνση γ_r προσδιορίσθηκε παραπάνω και δίνεται από τη σχέση (1). Η μεταφορική επιτάχυνση, επειδή η πλατφόρμα κινείται στον τριδιάστατο χώρο, δίνεται από τη σχέση:

$$\underset{\sim}{\gamma}_n = \cancel{\underset{\sim}{\gamma}_0}^{\,0} + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{o\pi} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{o\pi}) =$$

$$= 12\underset{\sim}{j} \times \left(10\cos\frac{\pi}{4}\underset{\sim}{i} + 10\sin\frac{\pi}{4}\underset{\sim}{j}\right) + 4\underset{\sim}{j} \times \left(4\underset{\sim}{j} \times \left(10\cos\frac{\pi}{4}\underset{\sim}{i} + 10\sin\frac{\pi}{4}\underset{\sim}{j}\right)\right) =$$

$$= -120\cos\frac{\pi}{4}\underset{\sim}{k} + 4\underset{\sim}{j} \times \left(-40\cos\frac{\pi}{4}\underset{\sim}{k}\right) = -60\sqrt{2}\,\underset{\sim}{k} - 80\sqrt{2}\,\underset{\sim}{i} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_n = -112{,}8\underset{\sim}{i} - 84{,}6\underset{\sim}{k} \qquad (2)$$

Η επιτάχυνση Coriolis είναι:

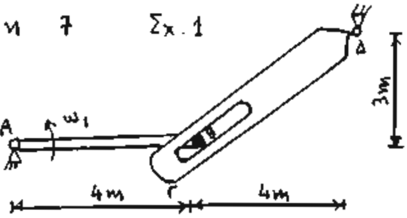
$$\underset{\sim}{\gamma}_{cor} = 2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{u}_r = 2 \cdot 4\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{0} = 0$$

Τελικά, η επιτάχυνση του σφαιριδίου είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{\gamma}_r + \underset{\sim}{\gamma}_n + \underset{\sim}{\gamma}_{cor} = 43{,}1\underset{\sim}{i} - 43{,}1\underset{\sim}{j} - 112{,}8\underset{\sim}{i} - 84{,}6\underset{\sim}{k} + 0 \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma} = -69{,}7\underset{\sim}{i} - 43{,}1\underset{\sim}{j} - 84{,}6\underset{\sim}{k}$$

Άσκηση 7 Σχ. 1

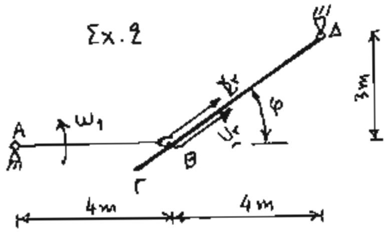


Ο πείρος Β είναι σταθερά προσαρμοσμένος στο άκρο Β της ράβδου ΑΒ και μπορεί να ολισθαίνει κατά μήκος της σχισμής της ράβδου ΓΔ. Στη φάση του σχήματος, η ράβδος ΑΒ περιστρέφεται αντιωρολογιακά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 2\,r/s$.

Ζητείται η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου ΓΔ στη φάση αυτή.

Λύση

Σχ.2



Για ευχερέστερη μελέτη του προβλήματος μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον πείρο που ολισθαίνει στην σχισμή με κρίκο ο οποίος ολισθαίνει κατά μήκος της ράβδου ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Προφανώς, έχουμε πρόβλημα επίπεδου μηχανισμού.

Υπολογισμός ταχυτήτων: Αρχίζουμε από τη ράβδο ΑΒ της οποίας είναι γνωστή η γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}_1 = 2\underset{\sim}{k}$. Ο πείρος Β είναι σημείο του απόλυτα στερεού ΑΒ. Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{AB} = 0 + 2\underset{\sim}{k} \times 4\underset{\sim}{i} \implies \underset{\sim}{v}_B = 8\underset{\sim}{j}$$

Συνεχίζουμε στη ράβδο ΓΔ. Ο πείρος Β κάνει σχετική κίνηση ως προς τη ράβδο ΓΔ (Το σημείο Β δεν ανήκει στο απόλυτα στερεό ΓΔ). Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_r + \underset{\sim}{v}_\pi \qquad (1)$$

Η σχετική ταχύτητα v_r του Β ως προς τη ΓΔ έχει τη διεύθυνση της ΓΔ. Υποθέτουμε ότι η $\underset{\sim}{v}_r$ έχει τη φορά του σχήματος. Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{v}_r = v_r \cos\varphi\, \underset{\sim}{i} + v_r \sin\varphi\, \underset{\sim}{j}$$

Από το σχήμα έχουμε:

$$\tan\varphi = \frac{3}{4} \implies \cos\varphi = 0{,}8\,, \qquad \sin\varphi = 0{,}6$$

Άρα:

$$\underset{\sim}{v}_r = v_r\, 0{,}8\, \underset{\sim}{i} + v_r\, 0{,}6\, \underset{\sim}{j} \qquad (2)$$

Η μετοχική ταχύτητα του Β είναι η ταχύτητα του σημείου Π της ράβδου ΓΔ (ως προς την οποία γίνεται η σχετική κίνηση του Β) στο οποίο πατάει ο πείρος Β. Έτσι, ο νόμος ταχυτήτων στη ράβδο ΓΔ δίνει:

$$\underset{\sim}{v}_\Pi = \underset{\sim}{v}_\Delta + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \Delta\underset{\sim}{\Pi} = 0 + \omega_2 \underset{\sim}{k} \times \Delta\underset{\sim}{B} = \omega_2 \underset{\sim}{k} \times (-4\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}) \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_\Pi = -4\omega_2 \underset{\sim}{j} + 3\omega_2 \underset{\sim}{i} \qquad (3)$$

όπου $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της ΓΔ. Η σχέση (1) λόγω των (2), (3) γράφεται (με $\underset{\sim}{v}_B = 8\underset{\sim}{j}$):

$$8\underset{\sim}{j} = v_r 0{,}8\underset{\sim}{i} + v_r 0{,}6\underset{\sim}{j} - 4\omega_2 \underset{\sim}{j} + 3\omega_2 \underset{\sim}{i} \implies$$

$$8\underset{\sim}{j} = (0{,}8v_r + 3\omega_2)\underset{\sim}{i} + (0{,}6v_r - 4\omega_2)\underset{\sim}{j} \implies$$

$$\{0 = 0{,}8v_r + 3\omega_2, \qquad 8 = 0{,}6v_r - 4\omega_2\}$$

Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε $v_r = 4{,}8$, $\omega_2 = -1{,}28$. Άρα:

$$\underset{\sim}{\omega}_2 = -1{,}28\underset{\sim}{k}$$

$$\underset{\sim}{v}_r = 4{,}8 \cdot 0{,}8\underset{\sim}{i} + 4{,}8 \cdot 0{,}6\underset{\sim}{j} \implies \underset{\sim}{v}_r = 3{,}84\underset{\sim}{i} + 2{,}88\underset{\sim}{j} \qquad (4)$$

Υπολογισμός επιταχύνσεων: Ξεκινάμε από τη ράβδο ΑΒ η οποία έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}_1 = 2\underset{\sim}{k}$. Άρα είναι $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 = 0$. Το σημείο Β είναι σημείο του απόλυτα στερεού ΑΒ. Άρα, ο νόμος των επιταχύνσεων δίνει:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \cancelto{0}{\underset{\sim}{\gamma}_A} + \cancelto{0}{\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1} \times A\underset{\sim}{B} - \omega_1^2 A\underset{\sim}{B} = -2^2 \cdot 4\underset{\sim}{i} \implies \underset{\sim}{\gamma}_B = -16\underset{\sim}{i}$$

Συνεχίζουμε στη ράβδο ΓΔ, ως προς την οποία, το σημείο Β κάνει σχετική κίνηση. Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_r + \underset{\sim}{\gamma}_\Pi + \underset{\sim}{\gamma}_{cor} \qquad (5)$$

Η σχετική επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_r$ του Β ως προς τη ράβδο ΓΔ, εχει διεύθυνση τη διεύθυνση της σχισμής, δηλαδή τη διεύθυνση της ράβδου ΓΔ και φορά, έστω από το Γ προς το Δ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma_r} = \gamma_r \cos\varphi \, \underset{\sim}{i} + \gamma_r \sin\varphi \, \underset{\sim}{j} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{\gamma_r} = \gamma_r 0{,}8 \, \underset{\sim}{i} + \gamma_r 0{,}6 \, \underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

Η μετοχική επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma_\Pi}$ του σημείου Β, ισούται με την επιτάχυνση του σημείου Π της ράβδου ΓΔ στο οποίο πατάει το σημείο Β. Άρα έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma_\Pi} = \cancel{\underset{\sim}{\gamma_\Delta}}^{\,0} + \underset{\sim}{\dot\omega_2} \times \underset{\sim}{\Delta\Pi} - \omega_2^2 \underset{\sim}{\Delta\Pi} = \dot\omega_2 \underset{\sim}{k} \times (-4\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}) - (-1{,}28)^2(-4\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma_\Pi} = -4\dot\omega_2 \underset{\sim}{j} + 3\dot\omega_2 \underset{\sim}{i} + 6{,}55 \underset{\sim}{i} + 4{,}92 \underset{\sim}{j} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma_\Pi} = (6{,}55 + 3\dot\omega_2)\underset{\sim}{i} + (4{,}92 - 4\dot\omega_2)\underset{\sim}{j} \qquad (7)$$

όπου $\underset{\sim}{\dot\omega_2} = \dot\omega_2 \underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ΓΔ.

Η επιτάχυνση Coriolis είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma_{COR}} = 2\underset{\sim}{\omega_2} \times \underset{\sim}{u_r} = 2 \cdot (-1{,}28\underset{\sim}{k}) \times (3{,}84\underset{\sim}{i} + 2{,}88\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma_{COR}} = -9{,}83\underset{\sim}{j} + 7{,}37\underset{\sim}{i} \qquad (8)$$

Χρειάζεται να προσέξουμε ιδιαίτερα εδώ στο γεγονός ότι στον τύπο της γ_{COR} εμφανίζεται η γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega_2}$ της ράβδου ΓΔ ως προς την οποία γίνεται η σχετική κίνηση του σημείου Β.

Η σχέση (5) λόγω των σχέσεων (6), (7), (8) και με $\underset{\sim}{\gamma_B} = -16\underset{\sim}{i}$ δίνει:

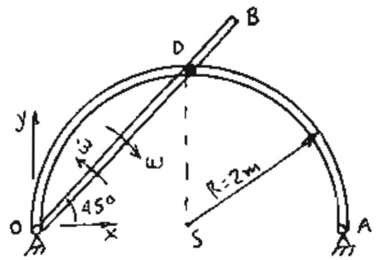
$$-16\underset{\sim}{i} = \gamma_r 0{,}8\underset{\sim}{i} + \gamma_r 0{,}6\underset{\sim}{j} + (6{,}55 + 3\dot\omega_2)\underset{\sim}{i} + (4{,}92 - 4\dot\omega_2)\underset{\sim}{j} - 9{,}83\underset{\sim}{j} + 7{,}37\underset{\sim}{i}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -16 = \gamma_r 0{,}8 + 6{,}55 + 3\dot\omega_2 + 7{,}37 \\ \\ 0 = \gamma_r 0{,}6 + 4{,}92 - 4\dot\omega_2 - 9{,}83 \end{cases}$$

Από το σύστημα αυτό παίρνουμε $\gamma_r = -21\, m/s^2$, $\dot\omega_2 = -4{,}37\, r/s^2$

Άσκηση 8

Στο σχήμα, ο πείρος D μπορεί να κινείται συγχρόνως στο ημικυκλικό τόξο OA και στη ράβδο OB. Το ημικυκλικό τόξο είναι ακίνητο, ενώ η ράβδος OB περιστρέφεται στο επίπεδό της με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2r/s$ και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega} = 3r/s^2$ των οποίων οι φορείς φαίνονται στο σχήμα. Στη φάση του σχήματος, ζητείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση του πείρου D.

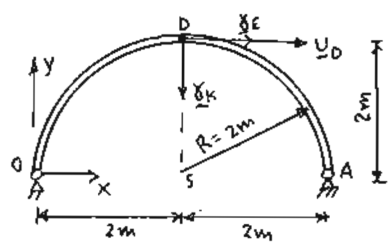


Λύση

Στο πρόβλημα αυτό, ο πείρος D κάνει σχετική κίνηση ως προς την κυκλική ράβδο OA και συγχρόνως κάνει σχετική κίνηση ως προς την ευθύγραμμη ράβδο OB.

Κίνηση του D ως προς την ακίνητη OA:

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι επειδή η OA είναι ακίνητη, η ταχύτητα $\underline{\upsilon}_D$ του σημείου D ως προς την OA είναι συγχρόνως και η απόλυτη ταχύτητα του D. Αυτή είναι εφαπτόμενη στο κυκλικό τόξο στο σημείο D όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι είναι:



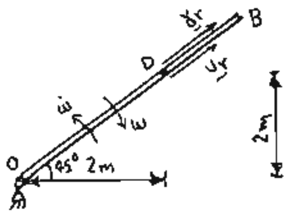
$$\underline{\upsilon}_D = \upsilon_D \underline{\varepsilon} \qquad (1)$$

Όμοια, η επιτάχυνση του σημείου D ως προς την OA είναι συγχρόνως και η απόλυτη επιτάχυνση D αφού η OA είναι ακίνητη. Αυτή έχει κεντρομόλα συνιστώσα $\underline{\gamma}_K$ με φορά προς το κέντρο S του κυκλικού τόξου και μέτρο ίσο με $υ_D^2/R$. Άρα είναι:

$$\underset{\sim}{γ}_D = γ_ε \underset{\sim}{i} + \left(-\frac{υ_D^2}{R}\right) \underset{\sim}{j} \qquad (2)$$

Κίνηση του D ως προς την ράβδο OB:

Ο πείρος D κάνει σχετική κίνηση ως προς τη ράβδο OB. Έτσι, η απόλυτη ταχύτητά του είναι:



$$\underset{\sim}{υ}_D = \underset{\sim}{υ}_r + \underset{\sim}{υ}_π \qquad (3)$$

Η σχετική ταχύτητα $\underset{\sim}{υ}_r$ του D ως προς τη ράβδο OB είναι:

$$\underset{\sim}{υ}_r = υ_r \cos 45° \underset{\sim}{i} + υ_r \sin 45° \underset{\sim}{j} \implies \underset{\sim}{υ}_r = υ_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{\sim}{i} + υ_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{\sim}{j} \qquad (4)$$

αφού αυτή έχει τη διεύθυνση της ράβδου OB. Η μετοχική ταχύτητα $\underset{\sim}{υ}_π$ του πείρου D είναι:

$$\underset{\sim}{υ}_π = \cancel{\underset{\sim}{υ}_O}^{0} + \underset{\sim}{ω} \times \underset{\sim}{OD} = -2\underset{\sim}{k} \times (2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}) \implies \underset{\sim}{υ}_π = -4\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{i} \qquad (5)$$

Με αντικατάσταση των $\underset{\sim}{υ}_D$, $\underset{\sim}{υ}_r$, $\underset{\sim}{υ}_π$ από τις σχέσεις (1), (4), (5) στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$υ_D \underset{\sim}{i} = υ_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{\sim}{i} + υ_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{i} \implies$$

$$\left\{ υ_D = υ_r \frac{\sqrt{2}}{2} + 4, \quad 0 = υ_r \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \right\} \implies υ_r = 4\sqrt{2}, \quad υ_D = 8$$

Άρα η ταχύτητα του πείρου είναι $\underset{\sim}{υ}_D = 8\underset{\sim}{i}$ και η σχετική του ταχύτητα ως προς τη ράβδο OB είναι:

$$\underset{\sim}{υ}_r = 4\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

σύμφωνα με τη σχέση (4).

Η απόλυτη επιτάχυνση του πείρου D ως προς την OB είναι:

$$\underline{\gamma}_D = \underline{\gamma}_r + \underline{\gamma}_\pi + \underline{\gamma}_{COR} \qquad (7)$$

Η σχετική επιτάχυνση του σημείου D ως προς την OB έχει τη διεύθυνση της OB και, σύμφωνα με το σχήμα, είναι:

$$\underline{\gamma}_r = \gamma_r \cos 45° \underline{i} + \gamma_r \sin 45° \underline{j} \implies \underline{\gamma}_r = \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} \qquad (8)$$

Η μετοχική επιτάχυνση $\underline{\gamma}_\pi$ του D είναι:

$$\underline{\gamma}_\pi = \cancel{\underline{\gamma}_0}^{\,0} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{O\Pi} - \omega^2 \underline{O\Pi} = 3\underline{k} \times (2\underline{i} + 2\underline{j}) - (-4)^2 (2\underline{i} + 2\underline{j}) =$$

$$= 6\underline{j} - 6\underline{i} - 32\underline{i} - 32\underline{j} \implies \underline{\gamma}_\pi = -38\underline{i} - 26\underline{j} \qquad (9)$$

Η επιτάχυνση Coriolis του D είναι:

$$\underline{\gamma}_{COR} = 2\underline{\omega} \times \underline{U}_r = 2(-2\underline{k}) \times (4\underline{i} + 4\underline{j}) = -16\underline{j} + 16\underline{i} \implies$$

$$\underline{\gamma}_{COR} = 16\underline{i} - 16\underline{j} \qquad (10)$$

Με αντικατάσταση των $\underline{\gamma}_D$, $\underline{\gamma}_r$, $\underline{\gamma}_\pi$, $\underline{\gamma}_{COR}$ από τις σχέσεις (2), (8), (9), (10) παίρνουμε:

$$\gamma_\varepsilon \underline{i} - \frac{U_D^2}{R} \underline{j} = \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} - 38\underline{i} - 26\underline{j} + 16\underline{i} - 16\underline{j} \implies$$

$$\gamma_\varepsilon \underline{i} - \frac{U_D^2}{R} \underline{j} = \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} - 22\underline{i} - 42\underline{j} \qquad (11)$$

και αντικαθιστώντας $U_D = 8$, $R = 2$ παίρνουμε:

$$\gamma_\varepsilon \underline{i} - 32\underline{j} = \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} - 22\underline{i} - 42\underline{j} \implies$$

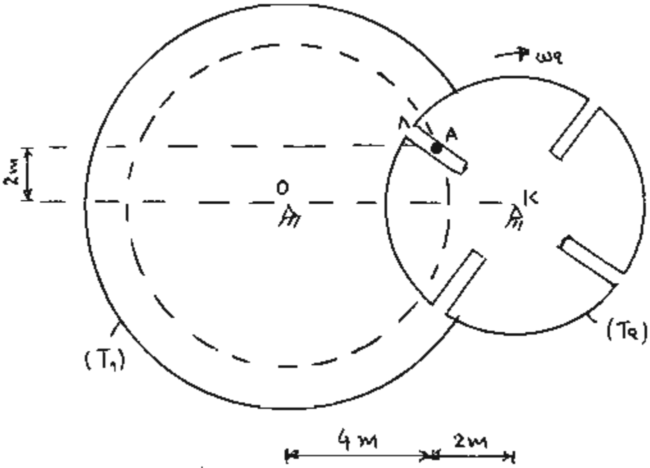
$$\left\{ \gamma_\varepsilon = \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} - 22, \quad -32 = \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2} - 42 \right\}$$

Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε: $\gamma_r = 10\sqrt{2}$, $\gamma_\varepsilon = -12$.
Έτσι, η σχέση (2) δίνει:

$$\underline{\gamma}_D = -12\underline{i} - \frac{8^2}{2} \underline{j} \implies \underline{\gamma}_D = -12\underline{i} - 32\underline{j}$$

Άσκηση 9

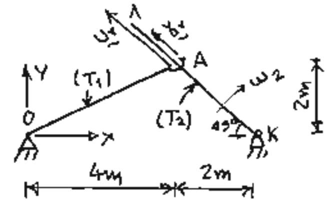
Διαλείπουσα περιστροφική κίνηση



Ο πείρος Α είναι στερεά προσαρμοσμένος (συγκολλημένος) στον τροχό (T_1) σε απόσταση $OA = r_1$ από το κέντρο του O. Ο τροχός (T_2) φέρει ακτινικές εγκοπές τοποθετημένες ανά 90° στην περιφέρειά του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο τροχός (T_2) περιστρέφεται με ωρολογιακή ταχύτητα $\omega_2 = 2r/s$ η οποία διατηρείται σταθερή. Έτσι, όσο χρόνο βρίσκεται ο πείρος Α στην εγκοπή εξαναγκάζεται και ο τροχός (T_1) σε περιστροφή. Στη φάση που φαίνεται στο σχήμα, ζητείται η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού (T_1). (Διαλείπουσα περιστροφή του (T_1)).

Λύση

Κατ' αρχήν μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά το σχήμα αν παρατηρήσουμε ότι από όλο τον τροχό (T_1) σημασία για την κίνηση έχει μόνο η ακτίνα OA και από τον τροχό T_2 μόνο η KΛ



δηλαδή η εγκοπή, για τη φάση που φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, ισοδύναμα, αντί πείρου μέσα στη σχισμή, έχουμε τον κρίκο Α που βρίσκεται στο άκρο της ΟΑ και ολισθαίνει στη ράβδο ΚΛ όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα. Στο σχήμα αυτό έχουμε:

Ταχύτητες: Αρχίζουμε τους υπολογισμούς από τη ράβδο ΚΛ (τροχό (T_2)) που έχει γνωστή γωνιακή ταχύτητα $\underline{\omega}_2 = -2\underline{k}$. Το σημείο Α κάνει σχετική κίνηση ως προς τον τροχό (T_2). Άρα έχουμε:

$$\underline{\upsilon}_A = \underline{\upsilon}_r + \underline{\upsilon}_\Pi \qquad (1)$$

Η σχετική ταχύτητα $\underline{\upsilon}_r$ του Α ως προς τον τροχό (T_2) έχει τη διεύθυνση της σχισμής και φορά έστω αυτή του σχήματος (άγνωστη). Άρα είναι:

$$\underline{\upsilon}_r = -\upsilon_r\cos45^\circ\underline{i} + \upsilon_r\sin45^\circ\underline{j} \Longrightarrow \underline{\upsilon}_r = -\upsilon_r\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \upsilon_r\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j} \qquad (2)$$

Η μετοχική ταχύτητα υ_Π του Α κατά τη σχετική κίνησή του ως προς την ράβδο ΚΛ είναι:

$$\underline{\upsilon}_\Pi = \cancel{\underline{\upsilon}_K}^{0} + \underline{\omega}_2\times\underline{K\Pi} = -2\underline{k}\times(-2\underline{i}+2\underline{j}) \Rightarrow \underline{\upsilon}_\Pi = 4\underline{j} + 4\underline{i} \qquad (3)$$

Έτσι, η σχέση (1), λόγω των (2), (3) γράφεται:

$$\underline{\upsilon}_A = -\upsilon_r\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \upsilon_r\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j} + 4\underline{i} + 4\underline{j} \qquad (4)$$

Όμως το σημείο Α είναι σημείο του απόλυτα στερεού (T_1). Άρα έχουμε:

$$\underline{\upsilon}_A = \cancel{\underline{\upsilon}_O}^{0} + \underline{\omega}_1\times\underline{OA} = \omega_1\underline{k}\times(4\underline{i}+2\underline{j}) = 4\omega_1\underline{j} - 2\omega_1\underline{i} \Longrightarrow$$

$$\underline{\upsilon}_A = -2\omega_1\underline{i} + 4\omega_1\underline{j} \qquad (5)$$

Με αντικατάσταση του $\underline{\upsilon}_A$ από τη σχέση (5) στην (4) έχω:

$$-2\omega_1\underline{i} + 4\omega_1\underline{j} = -\upsilon_r\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \upsilon_r\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j} + 4\underline{i} + 4\underline{j} \Longrightarrow$$

$$\left\{ -2\omega_1 = -\upsilon_r \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \;, \quad 4\omega_1 = \upsilon_r \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \right\}$$

Το σύστημα αυτό των εξισώσεων δίνει $\upsilon_r = 12\sqrt{2}$, $\omega_1 = 4\,r/s$. Άρα είναι:

$$\underline{\omega}_1 = 4\underline{k} \qquad \underline{\upsilon}_r = -12\underline{i} + 12\underline{j}$$

Επιταχύνσεις: Ο τροχός (T_2) περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = 2\,r/s$. Άρα έχει $\dot{\omega}_2 = 0$. Ο πείρος Α που κάνει σχετική κίνηση ως προς τον (T_2) έχει επιτάχυνση:

$$\underline{\gamma}_A = \underline{\gamma}_r + \underline{\gamma}_\Pi + \underline{\gamma}_{COR} \qquad (6)$$

Η σχετική επιτάχυνση γ_r του Α ως προς τον (T_2) έχει τη διεύθυνση της σχισμής. Από το σχήμα έχουμε:

$$\underline{\gamma}_r = -\gamma_r \cos 45^\circ \underline{i} + \gamma_r \sin 45^\circ \underline{j} \implies \underline{\gamma}_r = -\gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j} \qquad (7)$$

Η μετοχική επιτάχυνση γ_Π του Α κατά τη σχετική κίνησή του ως προς τον (T_2) είναι:

$$\underline{\gamma}_\Pi = \cancel{\underline{\gamma}_K}^{0} + \cancel{\dot{\underline{\omega}}_2}^{0} \times \underline{K\Pi} - \omega_2^2 \underline{K\Pi} = -(-2)^2(-2\underline{i} + 2\underline{j}) \implies$$

$$\underline{\gamma}_\Pi = 8\underline{i} - 8\underline{j} \qquad (8)$$

Η επιτάχυνση Coriolis του Α κατά τη σχετική κίνησή του ως προς τον (T_2) είναι:

$$\underline{\gamma}_{COR} = 2\underline{\omega}_2 \times \underline{\upsilon}_r = 2(-2\underline{k}) \times (-12\underline{i} + 12\underline{j}) = 48\underline{j} + 48\underline{i} \implies$$

$$\underline{\gamma}_{COR} = 48\underline{i} + 48\underline{j} \qquad (9)$$

Η σχέση (6) λόγω των (7), (8), (9) γράφεται:

$$\underline{\gamma}_A = -\gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j} + 8\underline{i} - 8\underline{j} + 48\underline{i} + 48\underline{j} \implies$$

$$\underline{\gamma}_A = -\gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j} + 56\underline{i} + 40\underline{j} \qquad (10)$$

Ο πείρος Α είναι σημείο του απόλυτα στερεού (T_1). Άρα έχουμε:

$$\underline{\gamma}_A = \cancel{\underline{\gamma}_0}^{\,0} + \underline{\dot{\omega}}_1 \times \underline{OA} - \omega_1^2 \underline{OA} \implies$$

$$\underline{\gamma}_A = \dot{\omega}_1 \underline{k} \times (4\underline{i} + 2\underline{j}) - 4^2 (4\underline{i} + 2\underline{j}) \implies$$

$$\underline{\gamma}_A = 4\dot{\omega}_1 \underline{j} - 2\dot{\omega}_1 \underline{i} - 64\underline{i} - 32\underline{j} \implies$$

$$\underline{\gamma}_A = (-64 - 2\dot{\omega}_1)\underline{i} + (4\dot{\omega}_1 - 32)\underline{j} \qquad (1)$$

Η σχέση (10) με αντικατάσταση της έκφρασης αυτής της $\underline{\gamma}_A$ γράφεται:

$$(-64 - 2\dot{\omega}_1)\underline{i} + (4\dot{\omega}_1 - 32)\underline{j} = \left(56 - \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\underline{i} + \left(40 + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\underline{j}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων:

$$-64 - 2\dot{\omega}_1 = 56 - \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4\dot{\omega}_1 - 32 = 40 + \gamma_r \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει $\dot{\omega}_1 = 96 r/s^2$. Άρα:

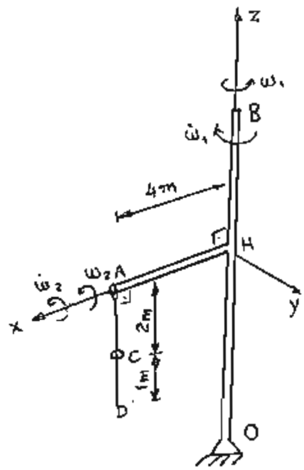
$$\underline{\dot{\omega}}_1 = 96\underline{k}$$

Παρατήρηση: Στο πρόβλημα αυτό, αλλά και σ'όλα τα προβλήματα που υπάρχει σχετική κίνηση χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή κατά τον εντοπισμό του στερεού ως προς το οποίο γίνεται η σχετική κίνηση.

Άσκηση 10

Στο σχήμα ο άξονας περιστροφής OB είναι σταθερός και έχουμε δεδομένα: $\omega_1 = 2 r/s$, $\dot{\omega}_1 = 1 r/s^2$. Η ράβδος AD περιστρέφεται γύρω από την οριζόντια HA με γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = 3\,r/sec$ και επιτάχυνση $\dot{\omega}_2 = 2\,r/sec^2$, ώστε να παραμένει κάθετη στην AH. Οι φορές φαίνονται στο σχήμα. Ο κρίκος C κινείται κατά μήκος της DA με ταχύτητα $1\,m/sec$ ως πρός τη DA και φορά από το D στο A και επιτάχυνση $2\,m/sec^2$ ως προς τη DA που έχει φορά από το A προς το D. Ζητείται η ταχύτητα και επιτάχυνση του κρίκου C στη φάση που φαίνεται στο σχήμα όπου η AD περνά από την κατακόρυφη θέση.

Λύση



Η ραβδος AD εκτελεί ταυτόχρονα δύο περιστροφές: Μία περί OB (τον άξονα z) με $\underset{\sim}{\omega}_1 = \omega_1 \underset{\sim}{k}$ και δεύτερη περί την AH (άξονας x) με $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \underset{\sim}{i}$. Οι άξονες συντρέχουν στο H, οπότε η AD εκτελεί απλή περιστροφή με

$$\underset{\sim}{\omega} = \omega_1 \underset{\sim}{k} + \omega_2 \underset{\sim}{i}$$

περί άξονα από το H.

Με παραγώγιση προκύπτει η γωνιακή επιτάχυνση της AD:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \underset{\sim}{k} + \omega_2 \underset{\sim}{i}) = \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{k} + \omega_1 \frac{d\underset{\sim}{k}}{dt} + \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{i} + \omega_2 \frac{d\underset{\sim}{i}}{dt}$$

Όμως ο άξονας z είναι σταθερός, άρα $\frac{d\underset{\sim}{k}}{dt} = 0$. Το διάνυσμα $\underset{\sim}{i}$ περιστρέφεται περί τον z με $\underset{\sim}{\omega}_1 = \omega_1 \underset{\sim}{k}$. Άρα

$$\frac{d\underset{\sim}{i}}{dt} = \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{i} = \omega_1 \underset{\sim}{k} \times \underset{\sim}{i} = \omega_1 \underset{\sim}{j}$$

Η εκφραση για το $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$ παίρνει τη μορφή:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}} = \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{k} + \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{i} + \omega_2\omega_1 \underset{\sim}{j}$$

Με αριθμητικές τιμές έχουμε:

$$\underset{\sim}{\omega} = 2\underset{\sim}{k} + 3\underset{\sim}{i} \qquad \dot{\underset{\sim}{\omega}} = -\underset{\sim}{k} + 2\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j}$$

Ο κρίκος C εκτελεί σχετική κίνηση ως προς την AD. με σχετική ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_r = \underset{\sim}{k}$ και σχετική επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_r = -2\underset{\sim}{k}$ (φορά από A προς D). Έτσι έχουμε:

Ταχύτητα του C:

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_r + \underset{\sim}{v}_\Pi \qquad (1)$$

όπου $\underset{\sim}{v}_\Pi$ η ταχύτητα του σημείου Π της AD στο οποίο πατάει το C. (μετοχική ταχύτητα):

$$\underset{\sim}{v}_\Pi = \underset{\sim}{v}_H + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{H\Pi} = 0 + (2\underset{\sim}{k} + 3\underset{\sim}{i}) \times (4\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{k}) = 8\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{j} = 14\underset{\sim}{j}$$

Η σχέση (1) δίνει:

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{k} + 14\underset{\sim}{j}$$

Επιτάχυνση του C:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{\gamma}_r + \underset{\sim}{\gamma}_\Pi + 2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}_r \qquad (2)$$

Είναι:

$$2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}_r = 2(2\underset{\sim}{k} + 3\underset{\sim}{i}) \times \underset{\sim}{k} = -6\underset{\sim}{j}$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Pi = \underset{\sim}{\gamma}_H + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{H\Pi} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{H\Pi}) =$$

$$= 0 + (-\underset{\sim}{k} + 2\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j}) \times (4\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{k}) + (2\underset{\sim}{k} + 3\underset{\sim}{i}) \times \left((2\underset{\sim}{k} + 3\underset{\sim}{i}) \times (4\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{k})\right) =$$

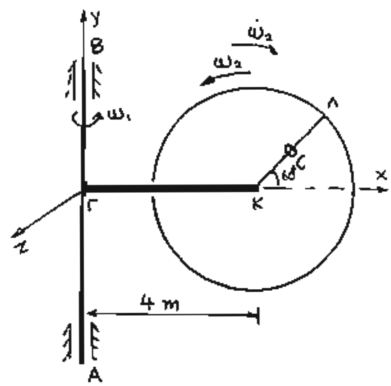
$$= -4\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{j} - 24\underset{\sim}{k} - 12\underset{\sim}{i} + (2\underset{\sim}{k} + 3\underset{\sim}{i}) \times 14\underset{\sim}{j} \implies$$

$\underset{\sim}{\gamma}_{\pi} = -40\underset{\sim}{i} + 18\underset{\sim}{k}$

Η σχέση (2) γράφεται:

$\underset{\sim}{\gamma} = -2\underset{\sim}{k} - 40\underset{\sim}{i} + 18\underset{\sim}{k} - 6\underset{\sim}{j} \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{\gamma} = -40\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} + 16\underset{\sim}{k}$

Άσκηση 11.



Το σύστημα του σχήματος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 2\,r/s$ περί το (σταθερό) άξονα ΑΒ. Ο τροχός κέντρου Κ και ακτίνας $R = 2m$ περιστρέφεται με $\omega_2 = 3\,r/s$, $\dot{\omega}_2 = 1\,r/s$ και φορές όπως στο σχήμα. Κατά μήκος της ακτίνας ΚΛ ολισθαίνει κρίκος με σταθερή ταχύτητα $6\,m/s$ και φορά από το Λ προς το Κ. Στη φάση του σχήματος, που ο κρίκος C βρίσκεται στο μέσο της ΚΛ, να υπολογισθεί η ταχύτητα και επιτάχυνση του κρίκου.

Λύση

Επειδή ο κρίκος C εκτελεί σχετική κίνηση ως προς την ακτίνα του τροχού, θα εξετάσουμε πρώτα την κίνηση του τροχού, που εκτελεί ταυτόχρονα δύο περιστροφές: Μία περί το σταθερό άξονα Γy με $\underset{\sim}{\omega}_1 = 2\underset{\sim}{j}$, $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 = 0$ και δεύτερη περί άξονα Kz' με $\underset{\sim}{\omega}_2 = 3\underset{\sim}{k}$, $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2 = -\underset{\sim}{k}$. Οι άξονες είναι ασύμβατοι.

Λόγω της περιστροφής όλου του συστήματος, το Κ (βρίσκεται πάνω στον άξονα του $\underset{\sim}{\omega}_2$) έχει:

$\underset{\sim}{v}_K = \underset{\sim}{v}_\Gamma + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{\Gamma K} = \underset{\sim}{0} + 2\underset{\sim}{j} \times 4\underset{\sim}{i} = -8\underset{\sim}{k}$

$\underset{\sim}{\gamma}_K = \underset{\sim}{\gamma}_\Gamma + \dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 \times \underset{\sim}{\Gamma K} + \underset{\sim}{\omega}_1 \times (\underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{\Gamma K}) = \underset{\sim}{0} + \underset{\sim}{0} + 2\underset{\sim}{j} \times (2\underset{\sim}{j} \times 4\underset{\sim}{i}) = -16\underset{\sim}{i}$

(αφού είναι $\underset{\sim}{v}_r=0$, $\underset{\sim}{\gamma}_r=0$).

Θεωρούμε τώρα μόνο του τον τροχό όπου το κέντρο του Κ έχει:

$$\underset{\sim}{v}_K=-8\underset{\sim}{k} \qquad \underset{\sim}{\gamma}_K=-16\underset{\sim}{i}$$

όπου όμως τα $\underset{\sim}{\omega}_1, \underset{\sim}{\omega}_2$ συντρέχουν στο Κ. Έτσι, η γωνιαυή ταχύτητα του τροχού είναι:

$$\underset{\sim}{\omega}=\underset{\sim}{\omega}_1+\underset{\sim}{\omega}_2=2\underset{\sim}{j}+3\underset{\sim}{k}$$

ενώ η γωνιαυή επιτάχυνση:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}}=\frac{d}{dt}(\omega_1\underset{\sim}{j}+\omega_2\underset{\sim}{k})=\dot{\omega}_1\underset{\sim}{j}+\omega_1\frac{d\underset{\sim}{j}}{dt}+\dot{\omega}_2\underset{\sim}{k}+\omega_2\frac{d\underset{\sim}{k}}{dt}$$

όπου το $\underset{\sim}{j}$ είναι σταθερό ενώ το $\underset{\sim}{k}$ περιστρέφεται με $\underset{\sim}{\omega}_1$:

$$\frac{d\underset{\sim}{k}}{dt}=\underset{\sim}{\omega}_1\times\underset{\sim}{k}=2\underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{k}=2\underset{\sim}{i}$$

Άρα έχουμε:

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}}=0\cdot\underset{\sim}{j}+\omega_1\cdot\underset{\sim}{0}-\underset{\sim}{k}+3(2\underset{\sim}{i})=6\underset{\sim}{i}-\underset{\sim}{k}$$

Υπολογίζουμε τώρα:

Ταχύτητα του c:

$$\underset{\sim}{v}=\underset{\sim}{v}_r+\underset{\sim}{v}_\pi \qquad (1)$$

Η $\underset{\sim}{v}_r$ έχει φορά προς το Κ άρα:

$$\underset{\sim}{v}_r=-|\underset{\sim}{v}_r|\cos 60\,\underset{\sim}{i}-|\underset{\sim}{v}_r|\sin 60\,\underset{\sim}{j}=-6\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{i}-6\tfrac{\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{j}=-3\underset{\sim}{i}-3\sqrt{3}\underset{\sim}{j}$$

Η ταχύτητα $\underset{\sim}{v}_\pi$ του σημείου της ακτίνας στο οποίο πατάει το Κ είναι:

$$\underset{\sim}{v}_\Pi = \underset{\sim}{v}_K + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{K\Pi} = -8\underset{\sim}{k} + (2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) \times (1\cos 60\underset{\sim}{i} + 1\sin 60\underset{\sim}{j}) =$$

$$= -8\underset{\sim}{k} + (2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) \times \left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{j}\right) = -8\underset{\sim}{k} - \underset{\sim}{k} + \frac{3}{2}\underset{\sim}{j} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{i} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_\Pi = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{i} + \frac{3}{2}\underset{\sim}{j} - 9\underset{\sim}{k}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$\underset{\sim}{v} = -3\underset{\sim}{i} - 3\sqrt{3}\underset{\sim}{j} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{i} + \frac{3}{2}\underset{\sim}{j} - 9\underset{\sim}{k} = -\left(3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\underset{\sim}{i} + \left(\frac{3}{2} - 3\sqrt{3}\right)\underset{\sim}{j} - 9\underset{\sim}{k}$$

Επιτάχυνση του C:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{\gamma}_r + \underset{\sim}{\gamma}_\Pi + 2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}_r \qquad (2)$$

όπου $\underset{\sim}{\gamma}_r = \underset{\sim}{0}$ διότι η σχετική ταχύτητα του κρίκου ως προς την ακτίνα είναι σταθερή. Είναι: $(\hat{K\Pi} = \hat{KC})$

$$2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}_r = 2(2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) \times (-3\underset{\sim}{i} - 3\sqrt{3}\underset{\sim}{j}) = 2(6\underset{\sim}{k} - 9\underset{\sim}{j} + 9\sqrt{3}\underset{\sim}{i})$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_\Pi = \underset{\sim}{\gamma}_K + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{K\Pi} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{K\Pi}) =$$

$$= -16\underset{\sim}{i} + (6\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{k}) \times \left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{j}\right) + (2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) \times \left((2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) \times \left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{j}\right)\right) =$$

$$= -16\underset{\sim}{i} + 3\sqrt{3}\underset{\sim}{k} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{i} + (2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) \times \left(-\underset{\sim}{k} + \frac{3}{2}\underset{\sim}{j} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{i}\right) =$$

$$= -16\underset{\sim}{i} + 3\sqrt{3}\underset{\sim}{k} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{i} + 3\sqrt{3}\underset{\sim}{k} - \frac{9}{2}\underset{\sim}{i} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\underset{\sim}{j}$$

Με αντικατάσταση, η σχέση (2) δίνει την επιτάχυνση.

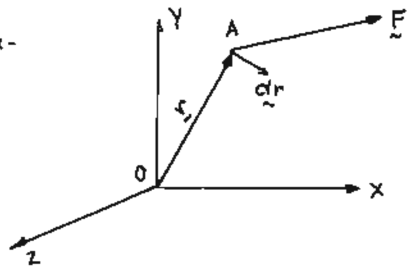
$$\underset{\sim}{\gamma} = -21{,}6\underset{\sim}{i} - 8{,}3\underset{\sim}{j} + 22{,}4\underset{\sim}{k}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αρχή δυνατών έργων - Μελέτη ισορροπίας

5.1 Η αρχή των δυνατών έργων

Υποθέτουμε ότι ένα σωματίδιο Α βρίσκεται στη θέση $\underset{\sim}{r}$ και ασκείται σ' αυτό μία δύναμη $\underset{\sim}{F}$. Αν το σωματίδιο μετακινηθεί κατά $d\underset{\sim}{r}$, η δύναμη $\underset{\sim}{F}$ παράγει έργο



$$dW = \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} \qquad (5.1.1)$$

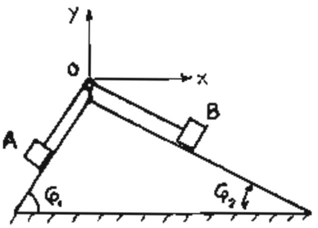
Αν $\underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = 0$ τότε η δύναμη $\underset{\sim}{F}$ δεν παράγει έργο. Αν $\underset{\sim}{F}$ παράλληλη και ομόρροπη με το $d\underset{\sim}{r}$ τότε $dW = F\cdot dr$. Αν $\underset{\sim}{F}$ παράλληλη και αντίρροπη με το $d\underset{\sim}{r}$ τότε $dW = -F\cdot dr$.

Υποθέτουμε τώρα ότι σ' ένα στερεό σώμα ασκείται ροπή Μ και ότι το στερεό στρέφεται κατά γωνία $d\varphi$ στο επίπεδο του τόξου της ροπής. Το έργο της ροπής είναι

$$dW = M\,d\varphi \qquad (5.1.2)$$

Αν η ροπή Μ έχει αντίθετη φορά της φοράς περιστροφής τότε το $M d\varphi$ αντικαθίσταται από το $-M d\varphi$.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την αρχή δυνατών έργων: Αν ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και προκαλέσουμε μία στοιχειώδη επιτρεπτή (δυνατή) μετακίνηση του συστήματος, το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με μηδέν. Όταν λέμε "δυνατή" ή "επιτρεπτή" μετακίνηση, εννοούμε τη μετακίνηση εκείνη που δεν παραβιάζει τους συνδέσμους του προβλήματος. Πρέπει να τονίσουμε εδώ, ότι από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε. (Αρχής Δυνατών Έργων) προκύπτουν τόσες εξισώσεις όσες και οι δυνατές μετακινήσεις του συστήματος. Ο αριθμός αυτός συμπίπτει με τον αριθμό των παραμέτρων (ανεξάρτητων) που καθορίζουν την τυχαία θέση του συστήματος.



Άσκηση 1

Τα σώματα Α, Β έχουν μάζες ίσες με m_1, m_2 αντίστοιχα και είναι συνδεμένα με το αβαρές – μη εκτατό νήμα μήκους ℓ. Αν δεν υπάρχουν τριβές, να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $m_1, m_2, \varphi_1, \varphi_2, \ell$, (ώστε να έχουμε ισορροπία) με χρήση της Α.Δ.Ε.

Λύση

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι μόνο μία μετακίνηση είναι δυνατή: Η ταυτόχρονη και ισομήκης μετακίνηση των μαζών στα κεκλιμένα επίπεδα, αφού το σχοινί είναι μη εκτατό. Η τυχαία θέση του συστήματος καθορίζεται από το μήκος s του τμήματος ΟΑ του σχοινιού, οπότε $(OB) = \ell - s$. Έτσι θα προκύψει μία εξίσωση από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε.

Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Oxy. Οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα που παράγουν έργο είναι τα βάρη των σωμάτων Α, Β:

$$\underset{\sim}{B}_1 = m_1 g\,(-\underset{\sim}{j}) \qquad \underset{\sim}{B}_2 = m_2 g\,(-\underset{\sim}{j})$$

(Η δύναμη του σχοινιού είναι εσωτερική δύναμη στο σύστημα, ενώ οι αντιδράσεις των κεκλιμένων επιπέδων είναι κάθετες στις δυνατές μετατοπίσεις). Τα σημεία εφαρμογής των $\underset{\sim}{B}_1$, $\underset{\sim}{B}_2$ έχουν διανύσματα θέσης αντίστοιχα:

$$\underset{\sim}{r}_A = -s\cos\varphi_1 \underset{\sim}{i} - s\sin\varphi_1 \underset{\sim}{j}$$

$$\underset{\sim}{r}_B = (\ell - s)\cos\varphi_2 \underset{\sim}{i} - (\ell - s)\sin\varphi_2 \underset{\sim}{j}$$

Επειδή τα φ_1, φ_2 είναι σταθερά παίρνω:

$$d\underset{\sim}{r}_A = (-\cos\varphi_1 \underset{\sim}{i} - \sin\varphi_1 \underset{\sim}{j})\,ds$$

$$d\underset{\sim}{r}_B = (-\cos\varphi_2 \underset{\sim}{i} + \sin\varphi_2 \underset{\sim}{j})\,ds$$

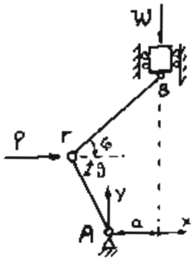
Εφαρμόζω τώρα την αρχή δυνατών έργων:

$$\underset{\sim}{B}_1 d\underset{\sim}{r}_A + \underset{\sim}{B}_2 d\underset{\sim}{r}_B = 0 \implies$$

$$m_1 g(-\underset{\sim}{j})\cdot(-\cos\varphi_1 \underset{\sim}{i} - \sin\varphi_1 \underset{\sim}{j})\,ds + m_2 g(-\underset{\sim}{j})\cdot(-\cos\varphi_2 \underset{\sim}{i} + \sin\varphi_2 \underset{\sim}{j})\,ds = 0 \implies$$

$$m_1 g\sin\varphi_1 - m_2 g\sin\varphi_2 = 0 \implies m_1\sin\varphi_1 = m_2\sin\varphi_2 .$$

Άσκηση 2



Στο σύστημα του σχήματος, να βρεθεί η δύναμη P που ισορροπεί το βάρος W. Δίνονται: $(AΓ) = \ell$, $(ΓB) = 1{,}5\ell$, a, ϑ, φ.

Λύση

Στο πρόβλημα αυτό, μόνο μία μετακίνηση είναι δυνατή: Κατακόρυφη μετακίνηση του B με αλλαγή των φ, ϑ. Η τυχαία θέση του συστήματος καθορίζεται από τις γωνίες φ, ϑ, που όμως δεν είναι ανεξάρτητες, αφού ισχύει:

$$a = (ΓB)\cos\varphi + (AΓ)\cos\vartheta \implies a = 1{,}5\ell\cos\varphi + \ell\cos\vartheta \qquad (1)$$

Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Axy. Οι εξωτερικές δυνάμεις που μπορούν να παράγουν έργο είναι:

$$\underset{\sim}{P} = P\underset{\sim}{i} \qquad \underset{\sim}{W} = W(-\underset{\sim}{j})$$

και έχουν σημείο εφαρμογής:

$$\underset{\sim}{r}_\Gamma = -\ell\cos\vartheta\,\underset{\sim}{i} + \ell\sin\vartheta\,\underset{\sim}{j}\ , \quad \underset{\sim}{r}_B = a\,\underset{\sim}{i} + (1{,}5\ell\sin\varphi + \ell\sin\vartheta)\underset{\sim}{j}$$

οπότε για στοιχειώδη μετακίνηση, παίρνω:

$$d\underset{\sim}{r}_\Gamma = (\ell\sin\vartheta\,\underset{\sim}{i} + \ell\cos\vartheta\,\underset{\sim}{j})d\vartheta\ , \quad d\underset{\sim}{r}_B = (1{,}5\ell\cos\varphi d\varphi + \ell\cos\vartheta d\vartheta)\underset{\sim}{j}$$

Εφαρμόζουμε τώρα την Αρχή Δυνατών Έργων (Α.Δ.Ε)

$$\underset{\sim}{P}\cdot d\underset{\sim}{r}_\Gamma + \underset{\sim}{W}\cdot d\underset{\sim}{r}_B = 0 \implies$$

$$P\underset{\sim}{i}\cdot(\ell\sin\vartheta\,\underset{\sim}{i} + \ell\cos\vartheta\,\underset{\sim}{j})d\vartheta + W(-\underset{\sim}{j})\cdot(1{,}5\ell\cos\varphi d\varphi + \ell\cos\vartheta d\vartheta)\underset{\sim}{j} = 0 \implies$$

$$P\ell\sin\vartheta d\vartheta - W\ell\,1{,}5\cos\varphi d\varphi - W\ell\cos\vartheta d\vartheta = 0 \implies$$

$$(P\sin\vartheta - W\cos\vartheta)d\vartheta - 1{,}5W\cos\varphi d\varphi = 0 \qquad (2)$$

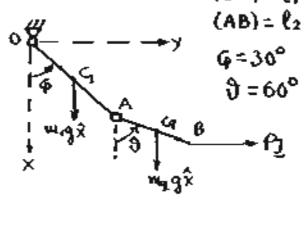
Από τη σχέση (1) παίρνω:

$$0 = -1{,}5\ell\sin\varphi d\varphi - \ell\sin\vartheta d\vartheta = 0 \implies d\varphi = -\frac{\sin\vartheta}{1{,}5\sin\varphi}d\vartheta$$

οπότε με αντικατάσταση στη (2) προκύπτει:

$$(P\sin\vartheta - W\cos\vartheta)d\vartheta - 1{,}5W\cos\varphi\cdot\left(-\frac{\sin\vartheta}{1{,}5\sin\varphi}\right)d\vartheta = 0 \implies$$

$$P\sin\vartheta - W\cos\vartheta + W\frac{\sin\vartheta}{\tan\varphi} = 0$$



Άσκηση 3

Ζητούνται η P και το a για ισορροπία. Δίνονται: $\ell_1 = 2\ell_2$, $m_1 = am_2 = am_0$

Η τυχαία θέση του συστήματος καθορίζεται από τις ανεξάρτητες παραμέτρους φ, θ. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι:

$$\underset{\sim}{W_1} = m_1 g \underset{\sim}{i} \qquad (1)$$

$$\underset{\sim}{W_2} = m_2 g \underset{\sim}{i} \qquad (2)$$

$$\underset{\sim}{P} = P \underset{\sim}{j} \qquad (3)$$

Η αντίδραση στο Ο δεν ενδιαφέρει γιατί σε οποιαδήποτε δυνατή μετακίνηση δεν παράγει έργο, αφού η μετακίνηση του Ο δεν είναι δυνατή. Τα σημεία εφαρμογής των $\underset{\sim}{W_1}$, $\underset{\sim}{W_2}$, $\underset{\sim}{P}$ είναι:

$$\underset{\sim}{r_{c_1}} = \frac{\ell_1}{2}\cos\varphi \underset{\sim}{i} + \frac{\ell_1}{2}\sin\varphi \underset{\sim}{j} \qquad (4)$$

$$\underset{\sim}{r_{c_2}} = \left(\ell_1\cos\varphi + \frac{\ell_2}{2}\cos\vartheta\right)\underset{\sim}{i} + \left(\ell_2\sin\varphi + \frac{\ell_2}{2}\sin\vartheta\right)\underset{\sim}{j} \qquad (5)$$

$$\underset{\sim}{r_B} = (\ell_1\cos\varphi + \ell_2\cos\vartheta)\underset{\sim}{i} + (\ell_1\sin\varphi + \ell_2\sin\vartheta)\underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

Το σύστημα μπορεί να μετακινηθεί:
(i) Αν η θ διατηρείται σταθερή και αλλάξει μόνο η φ:

$$d\underset{\sim}{r_{c_1}} = -\frac{\ell_1}{2}\sin\varphi d\varphi \underset{\sim}{i} + \frac{\ell_1}{2}\cos\varphi d\varphi \underset{\sim}{j} \qquad (7)$$

$$d\underset{\sim}{r_{c_2}} = -\ell_1\sin\varphi d\varphi \underset{\sim}{i} + \ell_1\cos\varphi d\varphi \underset{\sim}{j} \qquad (8)$$

$$d\underset{\sim}{r_B} = -\ell_1\sin\varphi d\varphi \underset{\sim}{i} + \ell_1\cos\varphi d\varphi \underset{\sim}{j} \qquad (9)$$

Εφαρμόζουμε την αρχή δυνατών έργων:

$$\underset{\sim}{W_1}\cdot d\underset{\sim}{r_{c_1}} + \underset{\sim}{W_2}\, d\underset{\sim}{r_{c_2}} + \underset{\sim}{P}\cdot d\underset{\sim}{r_B} = 0 \implies$$

$$m_1 g\cdot\left(-\frac{\ell_1}{2}\sin\varphi d\varphi\right) + m_2 g\cdot(-\ell_1\sin\varphi d\varphi) + P\ell_1\cos\varphi d\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\left(-m_1 g\frac{\ell_1}{2} - m_2 g\ell_1\right)\sin\varphi + P\ell_1\cos\varphi\right]d\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$P = \left(m_1\frac{g}{2} + m_2 g\right)\tan\varphi \qquad (10)$$

(ii) Αν η φ παραμένει σταθερή και αλλάζει μόνο η θ:

$$d\underset{\sim}{r}_{c_1} = 0 \qquad (11)$$

$$d\underset{\sim}{r}_{c_2} = -\frac{\ell_2}{2}\sin\vartheta d\vartheta\,\underset{\sim}{i} + \frac{\ell_2}{2}\cos\vartheta d\vartheta\,\underset{\sim}{j} \qquad (12)$$

$$d\underset{\sim}{r}_B = -\ell_2\sin\vartheta d\vartheta\,\underset{\sim}{i} + \ell_2\cos\vartheta d\vartheta\,\underset{\sim}{j} \qquad (13)$$

Η αρχή δυνατών έργων δίνει:

$$\underset{\sim}{W}_1\cdot d\underset{\sim}{r}_{c_1} + \underset{\sim}{W}_2 d\underset{\sim}{r}_{c_2} + \underset{\sim}{P}\cdot d\underset{\sim}{r}_B = 0 \Rightarrow$$

$$0 + m_2 g\cdot\left(-\frac{\ell_2}{2}\sin\vartheta d\vartheta\right) + P\ell_2\cos\vartheta d\vartheta = 0 \Rightarrow$$

$$\left(-m_2 g\frac{\ell_2}{2}\sin\vartheta + P\ell_2\cos\vartheta\right)d\vartheta = 0 \Rightarrow$$

$$P = m_2 g\,\frac{\tan\vartheta}{2} \qquad (14)$$

Με $\varphi = 30^\circ$, $\vartheta = 60^\circ$, $m_1 = a m_0$ έχω: Από την (10)

$$P = \left(\frac{a m_0}{2}g + m_0 g\right)\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (15)$$

και από την (14):

$$P = m_0 g\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (16)$$

Με αντικατάσταση του P από την (16) στην (15):

$$m_0 g\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{a m_0}{2}g + m_0 g\right)\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 1$$

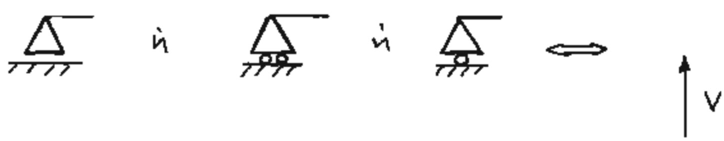
5.2 Επίλυση ισοστατικών προβλημάτων με την αρχή δυνατών έργων.

Υποθέτουμε ότι ο φορέας είναι απόλυτα στερεό σώμα. Με χρήση της αρχής δυνατών έργων μπορούμε να υπολογίσουμε μία αντίδραση στήριξης ή κάποιο εσωτερικό μέγεθος.

Για τον υπολογισμό ενός μεγέθους, δίνουμε δυνατή μετατόπιση στό σύστημα ώστε το μέγεθος που ζητάμε να παράγει έργο και προφανώς να δρα σαν εξωτερικό φορτίο. Κατόπιν γράφουμε την εξίσωση της αρχής δυνατών έργων από την οποία υπολογίζουμε το ζητούμενο μέγεθος.

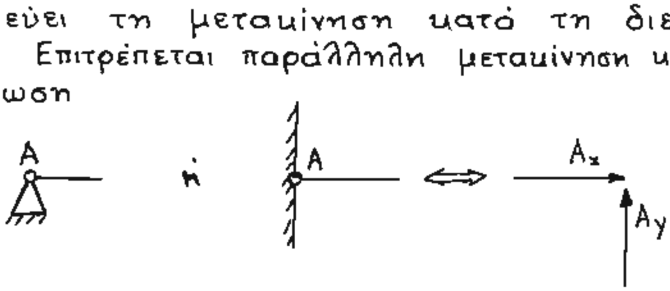
Πριν προχωρήσουμε στη λύση ασκήσεων, κάνουμε μία σύντομη επανάληψη που αφορά τα είδη στήριξης ενός φορέα:

(i) Κύλιση



Αντιστοιχεί σε αντίδραση V που είναι κάθετη στην επιφάνεια κύλισης. Η κύλιση (δύναμη V) απαγορεύει τη μετακίνηση κατά τη διεύθυνση της V. Επιτρέπεται παράλληλη μετακίνηση καί στροφή.

(ii) Άρθρωση



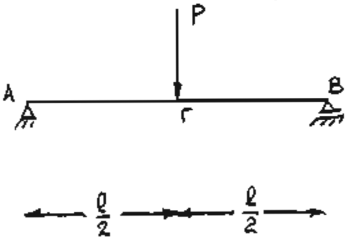
Αντιστοιχεί σε δύο δυνάμεις A_x, A_y οι οποίες δεν επιτρέπουν οριζόντια - κατακόρυφη μετακίνηση. Επιτρέπεται μόνο στροφή περί το A.

(iii) Πάκτωση

Εμφανίζονται σαν αντιδράσεις: Οριζόντια δυναμη H, κατακόρυφη δύναμη V και ζεύγος ροπής M, που απαγορεύουν αντίστοιχα την οριζόντια μετακίνηση, την κατακόρυφη μετακίνηση και την περιστροφή.

Άσκηση 1

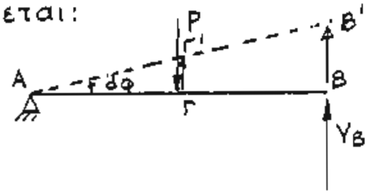
Με χρήση της αρχής δυνατών έργων να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στη δοκό του σχήματος:



Λύση

Στο φορέα του σχήματος, καμμία μετακίνηση δεν είναι δυνατή.

Για τον υπολογισμό της αντίδρασης στήριξης στο B, αφαιρούμε τη στήριξη στο B. Ο φορέας γίνεται:



Στον φορέα αυτό επιτρέπεται η περιστροφή περί το A, αφού εκεί υπάρχει άρθρωση, ενώ δεν υπάρχει άλλος περιορισμός.

Θεωρούμε στοιχειώδη στροφή περί το Α κατά γωνία $d\varphi$. Η γωνία είναι πολύ μικρή, άρα τα Γ,Β μετατοπίζονται κατακόρυφα. Το έργο της δύναμης V_B είναι ίσο με $V_B\,(BB')$ ενώ της P είναι $-P(\Gamma\Gamma')$ αφού η μετατόπιση του Β έχει τη φορά της V_B, ενώ η μετατόπιση του Γ έχει φορά αντίθετη της P. Άλλη δύναμη δεν επιτελεί έργο. Το συνολικό έργο είναι μηδενικό :

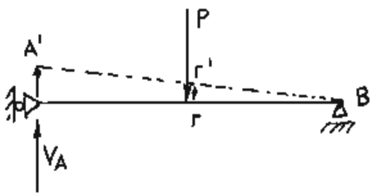
$$V_B\,(BB') - P\cdot(\Gamma\Gamma') = 0 \qquad (1)$$

σύμφωνα με την αρχή δυνατών έργων. Από το σχήμα έχω $(BB') = 2(\Gamma\Gamma')$ οπότε η (1) δίνει :

$$V_B\cdot 2(\Gamma\Gamma') - P\,(\Gamma\Gamma') = 0 \implies$$

$$V_B = \frac{P}{2}$$

Για τον υπολογισμό της κατακόρυφης δύναμης στο Α, επιτρέπουμε μόνο την κατακόρυφη μετακίνηση στη στήριξη Α:



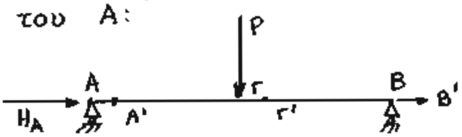
Δίνουμε στοιχειώδη μετακίνηση, οπότε οι μετακινήσεις ΑΑ', ΓΓ' είναι κατακόρυφες. Το άθροισμα (αλγεβρικό) των έργων είναι μηδενικό:

$$V_A\,(AA') - P\,(\Gamma\Gamma') = 0 \qquad (2)$$

Όμως $(AA') = 2\,(\Gamma\Gamma')$, οπότε η (2) δίνει:

$$V_A = \frac{P}{2}$$

Για τον υπολογισμό της οριζόντιας δύναμης στο Α, επιτρέπουμε μόνο την οριζόντια μετακίνηση του Α:



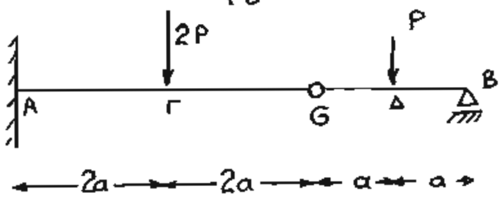
Δίνουμε στοιχειώδη οριζόντια μετακίνηση οπότε:

$$H_A\,(AA') = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

Παρατήρηση: Η άρθρωση είναι ισοδύναμη με δύο κυλίσεις. Για τον υπολογισμό μίας δύναμης σε άρθρωση, αφαιρούμε την αντίστοιχη κύλιση.

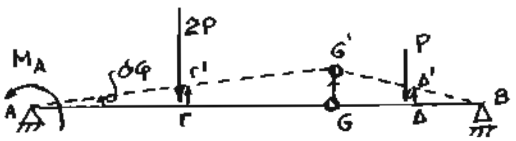
Άσκηση 2

Να υπολογισθεί η ροπή στην πάκτωση Α και η δύναμη στην κύλιση Β με χρήση της αρχής δυνατών έργων



Λύση

Στο φορέα δεν είναι δυνατή καμμία μετακίνηση. Για τον υπολογισμό της ροπής στο Α, θεωρούμε το ακόλουθο ισοδύναμο:



όπου αντικαταστήσαμε την πάκτωση με άρθρωση και την ροπή πάκτωσης M_A. Τώρα το Α επιτρέπει την περιστροφή μόνο. Δίνουμε στοιχειώδη μετακίνηση όπως φαίνεται στο σχήμα, ώστε η AG να στραφεί κατά γωνία $d\varphi$. Το συνολικό έργο είναι ίσο με μηδέν.

$$M_A \cdot d\varphi - 2P \cdot (\Gamma\Gamma') - P \cdot (\Delta\Delta') = 0 \qquad (1)$$

Απο το σχήμα έχω:

$$(\Gamma\Gamma') = \frac{(GG')}{2} = (\Delta\Delta')$$

και

$$d\varphi \approx \tan(d\varphi) = \frac{(GG')}{4a} \implies$$

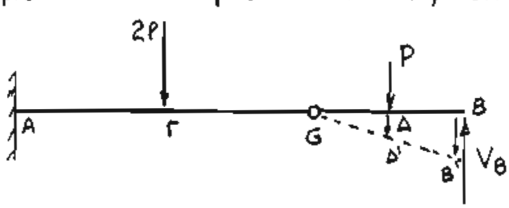
$$(\Gamma\Gamma') = (\Delta\Delta') = 2a d\varphi$$

οπότε η σχέση (1) δίνει:

$$M_A d\varphi - 2P \cdot 2a d\varphi - P \cdot 2a d\varphi = 0 \implies$$

$$M_A = 6Pa$$

Για τον υπολογισμό της αντίδρασης στο Β, αφαιρούμε τη στήριξη στο Β, οπότε προκύπτει:



Η πάκτωση Α δεν επιτρέπει ούτε μεταφορά, ούτε περιστροφή, οπότε η AG είναι τελείως ακίνητη. Η GB μπορεί να περιστραφεί περί το σταθερό σημείο Θ. Δίνουμε στοιχειώδη μετακίνηση. Το συνολικό έργο είναι μηδενικό:

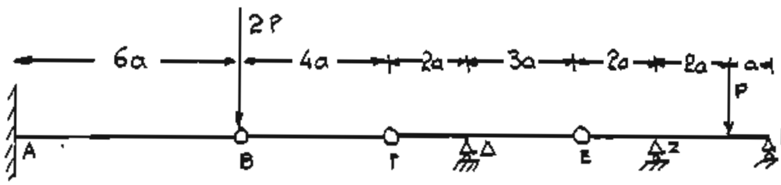
$$P(\Delta\Delta') - V_B(BB') = 0 \qquad (2)$$

Όμως $(BB') = 2(\Delta\Delta')$ οπότε η (2) δίνει:

$$V_B = \frac{P}{2}$$

Παρατήρηση: Δεν έχει σημασία η φορά της δυνατής μετακίνησης.

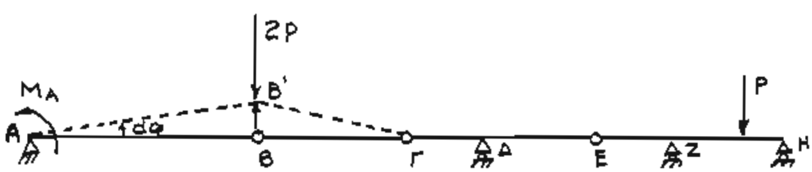
Άσκηση 3



Στο φορέα του σχήματος ζητείται η ροπή πάκτωσης M_A και οι υπόλοιπες κατακόρυφες αντιδράσεις, χρησιμοποιώντας την αρχή δυνατών έργων.

Λύση

Υπολογισμός της M_A. Αντικαθιστούμε την πάκτωση στο Α με μία άρθρωση (που αντιπροσωπεύει τις δύο δυνάμεις) και τη ροπή M_A:



Δίνουμε στοιχειώδη μετατόπιση στο σύστημα. Η AB μπορεί να περιστραφεί περί το Α που δεν μετακινείται. Τα Ζ,Η δεν μετακινούνται κατακόρυφα, (κυλίσεις), οπότε και το Ε δεν μετακινείται κατακόρυφα. Επειδή και το Δ δεν μετακινείται κατακόρυφα, ούτε το Γ μετακινείται κατακόρυφα. Η ΒΓ μπορεί απλά να περιστραφεί γύρω από το Γ. Η δυνατή μετατόπιση φαίνεται στο σχήμα. Η αρχή δυνατών έργων δίνει:

$$M_A \cdot d\varphi - 2P(BB') = 0 \qquad (1)$$

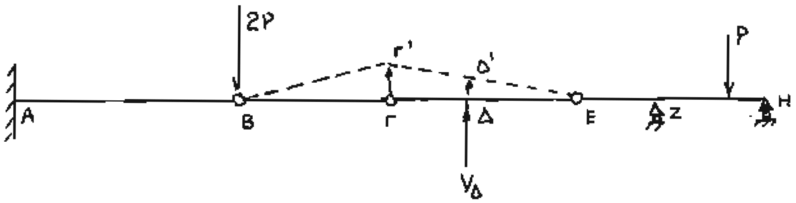
Από το σχήμα έχω:

$$d\varphi \simeq \tan(d\varphi) = \frac{(BB')}{6a}$$

οπότε η (6) δίνει:

$$M_A \cdot \frac{(BB')}{6a} - 2P(BB') = 0 \implies M_A = 12Pa$$

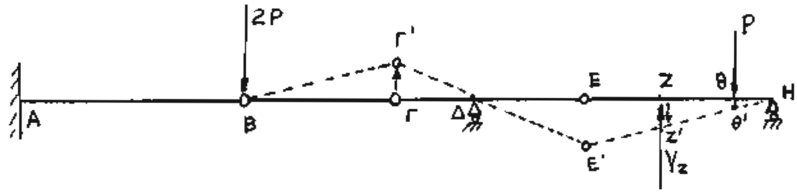
Υπολογισμός της V_Δ. Αφαιρούμε τη στήριξη στο Δ.



Λόγω της πάκτωσης στο Α, η ΑΒ είναι ακλόνητη, άρα το Β είναι ακίνητο. Οι κυλίσεις Ζ,Η απαγορεύουν την κατακόρυφη μετακίνηση των σημείων Ζ,Η, οπότε και του Ε. Η δυνατή μετακίνηση φαίνεται στο σχήμα. Εξίσωση δυνατών έργων:

$$V_\Delta \cdot (\Delta\Delta') = 0 \implies V_\Delta = 0$$

Υπολογισμός της V_Z. Αφαιρούμε τη στήριξη στο Ζ.



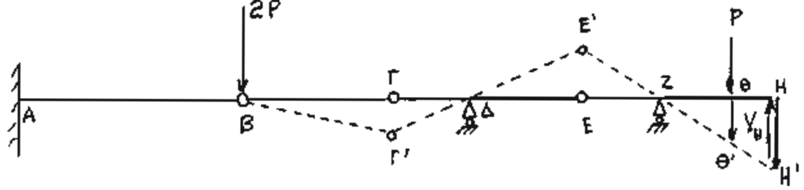
Η ΑΒ παραμενει αυλόνητη. Είναι δυνατή η μετατόπιση του σχήματος, αφού επιτρέπεται η περιστροφή περί τα Δ, Η. Η αρχή δυνατών έργων δίνει:

$$P\cdot(\theta\theta') - V_Z\,(zz') = 0 \qquad (2)$$

Από τα όμοια τρίγωνα έχω: $(\theta\theta') = \frac{(zz')}{3}$. Η (2) γράφεται:

$$V_Z = \frac{P}{3}$$

Υπολογισμός της V_H. Αφαιρούμε τη στήριξη στο Η:

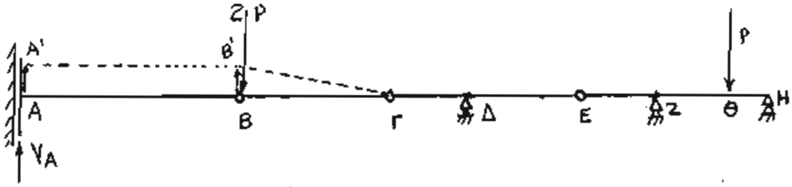


Η ΑΒ είναι αυλόνητη και επιτρέπεται η περιστροφή περί τα Δ, Ζ. Η αρχή δυνατών έργων δίνει:

$$P(\theta\theta') - V_H\cdot(HH') = 0 \implies$$

$$V_H = P\frac{2}{3}$$

Υπολογισμός της V_A. Αφαιρούμε την πάκτωση Α και τοποθετούμε την "κυλιόμενη πάκτωση". Αυτή επιτρέπει μόνο την κατακόρυφη μετακίνηση και απαγορεύει την οριζόντια και τη στροφή:

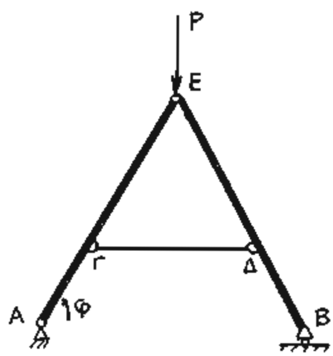


Τα Z, H δεν μετατοπίζονται κατακόρυφα, άρα ούτε το E. Επειδή και το Δ δεν μετατοπίζεται κατακόρυφα, ούτε το Γ μετατοπίζεται κατακόρυφα. Μία δυνατή μετατόπιση φαίνεται στο σχήμα. Το συνολικό έργο είναι μηδενικό:

$$V_A \cdot (AA') - 2P\,(BB') = 0$$

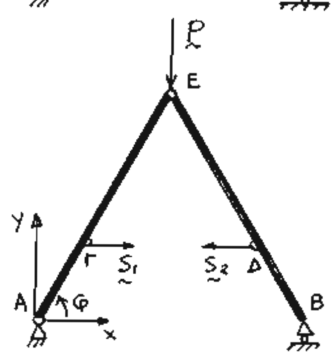
Όμως $(AA') = (BB')$, άρα $V_A = 2P$.

Άσκηση 4



Να βρεθεί η δύναμη που καταπονεί τη ράβδο ΓΔ του σχήματος αν $(AE) = \ell = (EB)$, $(A\Gamma) = (\Delta B) = \ell/3$, $\varphi = 60°$

Λύση



Αφαιρούμε τη ράβδο ΓΔ και τοποθετούμε τις δυνάμεις $\underset{\sim}{S}_1$, $\underset{\sim}{S}_2$, όπου $|\underset{\sim}{S}_1| = |\underset{\sim}{S}_2| = S$.

Τώρα το σύστημα μπορεί να κινείται και η τυχαία θέση του καθορίζεται από τη γωνία φ. Οι εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο είναι:

$$\mathbf{P} = -P\mathbf{j}, \quad \mathbf{S}_1 = S\mathbf{i}, \quad \mathbf{S}_2 = -S\mathbf{i}$$

και τα διανύσματα θέσης των σημείων στα οποία ενεργούν:

$$\mathbf{r}_E = \ell\cos\varphi\,\mathbf{i} + \ell\sin\varphi\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_\Gamma = \frac{\ell}{3}\cos\varphi\,\mathbf{i} + \frac{\ell}{3}\sin\varphi\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_\Delta = \left(\ell\cos\varphi + 2\frac{\ell}{3}\cos\varphi\right)\mathbf{i} + \frac{\ell}{3}\sin\varphi\,\mathbf{j} \implies$$

$$\mathbf{r}_\Delta = \frac{5\ell}{3}\cos\varphi\,\mathbf{i} + \frac{\ell}{3}\sin\varphi\,\mathbf{j}$$

Για μεταβολή της γωνίας φ κατά $d\varphi$ έχω:

$$d\mathbf{r}_E = -\ell\sin\varphi d\varphi\,\mathbf{i} + \ell\cos\varphi d\varphi\,\mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}_\Gamma = -\frac{\ell}{3}\sin\varphi d\varphi\,\mathbf{i} + \frac{\ell}{3}\cos\varphi d\varphi\,\mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}_\Delta = -\frac{5\ell}{3}\sin\varphi d\varphi\,\mathbf{i} + \frac{\ell}{3}\cos\varphi d\varphi\,\mathbf{j}$$

Σύμφωνα με την αρχή δυνατών έργων έχω:

$$\mathbf{P}\cdot d\mathbf{r}_E + \mathbf{S}_1\cdot d\mathbf{r}_\Gamma + \mathbf{S}_2\cdot d\mathbf{r}_\Delta = 0 \implies$$

$$(-P\mathbf{j})\cdot(-\ell\sin\varphi d\varphi\,\mathbf{i} + \ell\cos\varphi d\varphi\,\mathbf{j}) +$$

$$+ (S\mathbf{i})\cdot\left(-\frac{\ell}{3}\sin\varphi d\varphi\,\mathbf{i} + \frac{\ell}{3}\cos\varphi d\varphi\,\mathbf{j}\right) +$$

$$+ (-S\mathbf{i})\left(-\frac{5\ell}{3}\sin\varphi d\varphi\,\mathbf{i} + \frac{\ell}{3}\cos\varphi d\varphi\,\mathbf{j}\right) = 0 \implies$$

$$-P\ell\cos\varphi d\varphi - \frac{S\ell}{3}\sin\varphi d\varphi + 5\frac{S\ell}{3}\sin\varphi d\varphi = 0 \implies$$

$$\left(-P + \frac{4S}{3}\tan\varphi\right)d\varphi = 0 \implies \quad S = \frac{3P}{4\tan\varphi}$$

και για $\varphi = 60^\circ$:

$$S = \frac{\sqrt{3}\,P}{4}$$

5.3 Μελέτη ισορροπίας: Ευσταθής - ασταθής ισορροπία.

Ονομάζουμε αριθμό βαθμών ελευθερίας ενός συστήματος, τον ελάχιστο αριθμό των αναγκαίων ανεξαρτήτων παραμέτρων που απαιτούνται για τον καθορισμό της τυχαίας θέσης ενός συστήματος.

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας: Η τυχαία θέση ενός τέτοιου συστήματος καθορίζεται από τη μεταβλητή q. Η q μπορεί να είναι μήκος, γωνία κ.τ.λ δηλαδή μία γενικευμένη συντεταγμένη.
Σε τυχαία θέση q, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι U(q). Για ισορροπία πρέπει:

$$\frac{dU}{dq} = 0 \qquad (5.3.1)$$

Από την εξίσωση (5.3.1) προκύπτουν οι τιμές q_i που καθορίζουν τις θέσεις ισορροπίας (μία ή περισσότερες).
Η ισορροπία στη θέση q_i είναι ευσταθής αν ισχύει

$$\left.\frac{d^2U(q)}{dq^2}\right|_{q=q_i} > 0 \qquad (5.3.2)$$

και ασταθής όταν:

$$\left.\frac{d^2U(q)}{dq^2}\right|_{q=q_i} < 0 \qquad (5.3.3)$$

Αν προκύψει μηδενική δεύτερη παράγωγος, το είδος της ισορροπίας καθορίζεται, ανάλογα, από το πρόσημο της μη μηδενικής παραγώγου με χαμηλότερη τάξη

Συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας. Η τυχαία θέση ενός τέτοιου συστήματος καθορίζεται από τις μεταβλητές p, q. (γενικευμένες συντεταγμένες). Η θέση ισορροπίας καθορίζεται από τις λύσεις του συστήματος: (p_i, q_i)

$$\frac{\partial U(p,q)}{\partial q} = 0 \qquad (5.3.4)$$

$$\frac{\partial U(p,q)}{\partial p} = 0 \qquad (5.3.5)$$

Αν ισχύουν ταυτόχρονα

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0 \quad \text{για } (p,q) = (p_i, q_i)$$

τότε έχουμε ευστάθεια.

Αν ισχύουν ταυτόχρονα

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0 \quad \text{για } (p,q) = (p_i, q_i)$$

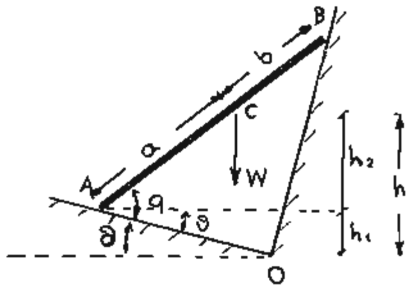
τότε έχουμε αστάθεια

Άσκηση 1

Η ράβδος AB στηρίζεται στα λεία τοιχώματα της ορθής γωνίας του σχήματος. Το βάρος της ράβδου είναι W και το μήκος της ℓ. Η ράβδος δεν είναι ομογενής και το κέντρο βάρους της C απέχει a, b από τα άκρα της A, B αντίστοιχα. Να εξετασθεί το είδος της ισορροπίας της.

Λύση

Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας: Η τυχαία θέση της ράβδου καθορίζεται από τη γωνία q. Στην τυχαία αυτή θέση το κέντρο βάρους της ράβδου βρίσκεται σε ύψος h:



$$h = h_1 + h_2 \qquad (1)$$

από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το O. Όμως από το σχήμα έχω

$$h_2 = a\sin(q-\vartheta)$$

$$h_1 = (OA)\sin\vartheta = \ell\cos q\sin\vartheta$$

οπότε η (1) δίνει:

$$h = a\sin(q-\vartheta) + \ell\sin\vartheta\cos q \qquad (2)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος σε τυχαία θέση q είναι (λόγω βαρύτητας)

$$U(q) = Wh \implies$$

$$U(q) = \left(a\sin(q-\vartheta) + \ell\sin\vartheta\cos q\right)W \qquad (3)$$

με επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο από το O.

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{dU}{dq} = 0 \implies \left(a\cos(q-\vartheta) - \ell\sin\vartheta\sin q\right)W = 0 \implies$$

$$a\cos q\cos\vartheta + a\sin q\sin\vartheta - \ell\sin\vartheta\sin q = 0 \implies$$

$$a\cos q\cos\vartheta + a\sin q\sin\vartheta - (a+b)\sin\vartheta\sin q = 0 \implies$$

$$a\cos q\cos\vartheta - b\sin\vartheta\sin q = 0 \implies$$

$$\tan q = \frac{a}{b}\,\frac{1}{\tan\vartheta} \qquad (4)$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d^2U}{dq^2} = \left(-a\sin(q-\vartheta) - \ell\sin\vartheta\cos q\right)W =$$

$$= W\left(-a\sin q\cos\vartheta + a\cos q\sin\vartheta - (a+b)\sin\vartheta\cos q\right) =$$

$$= W\left(-a\sin q\cos\vartheta - b\sin\vartheta\cos q\right) =$$

$$= -W\left(a\sin q\cos\vartheta + b\sin\vartheta\cos q\right) < 0$$

αφού $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, $0<q<\frac{\pi}{2}$. Άρα η ισορροπία είναι α-σταθής

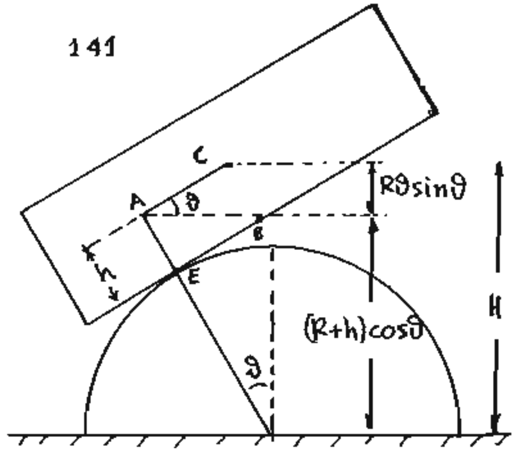
Άσκηση 2

Μία ομογενής σανίδα πάχους $2h$ ισορροπεί στο ανώτατο σημείο μίας κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας R. Αν η σανίδα δεν ολισθαίνει στην κυλινδρική επιφάνεια, να εξετασθεί το είδος της ισορροπίας για τυχαία τιμή του h

Λύση

Το πρόβλημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Η τυχαία θέση της σανίδας καθορίζεται από τη γωνία ϑ του σχήματος. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κυλίνδρου. Η δυναμική ενέργεια της σανίδας σε τυχαία θέση είναι:

$$U(\vartheta) = mgH$$



όπου m η μάζα της σανίδας και $H = H(\vartheta)$ το ύψος που βρίσκεται το κέντρο βάρους της όταν αυτή βρίσκεται στη θέση ϑ. Εχω:

$$H(\vartheta) = (R+h)\cos\vartheta + R\vartheta\sin\vartheta$$

αφού $(EB) = (AC) = R\vartheta$ γιατί η σανίδα δεν ολισθαίνει πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια. Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$U(\vartheta) = mg(R+h)\cos\vartheta + mgR\vartheta\sin\vartheta \qquad (2)$$

Θέσεις ισορροπίας:

$$\frac{dU(\vartheta)}{d\vartheta} = 0 \implies -mg(R+h)\sin\vartheta + mgR\sin\vartheta + mgR\vartheta\cos\vartheta = 0$$

με προφανή λύση τη $\vartheta = 0$. η οποία και μας ενδιαφέρει.

Η δεύτερη παράγωγος της $U(\vartheta)$ είναι:

$$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} = -mg(R+h)\cos\vartheta + mgR\cos\vartheta + mgR\cos\vartheta - mgR\vartheta\sin\vartheta$$

και για $\vartheta = 0$:

$$\left.\frac{d^2U}{d\vartheta^2}\right|_{\vartheta=0} = -mg(h-R)$$

Αν $h > R$ έχω αστάθεια, αν $h < R$ έχω ευστάθεια,

αν $h=R$ εξετάζω το πρόσημο της τέταρτης παραγώγου στο $\vartheta=0$.
Με $h=R$ έχω

$$\frac{d^2U(\vartheta)}{d\vartheta^2} = -4mgR\cos\vartheta - mgR\vartheta\sin\vartheta \Rightarrow$$

$$\frac{d^3U(\vartheta)}{d\vartheta^3} = 4mgR\sin\vartheta - mgR\sin\vartheta - mgR\vartheta\cos\vartheta \Rightarrow$$

$$\frac{d^4U(\vartheta)}{d\vartheta^4} = 4mgR\cos\vartheta - mgR\cos\vartheta - mgR\cos\vartheta + mgR\vartheta\sin\vartheta$$

και για $\vartheta=0$:

$$\left.\frac{d^4U(\vartheta)}{d\vartheta^4}\right|_{\vartheta=0} = 2mgR > 0$$

άρα έχουμε ευστάθεια

Άσκηση 3

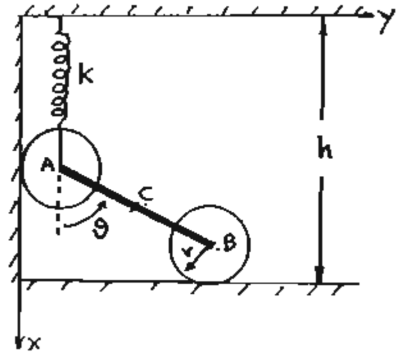
Το αβαρές ελατήριο του σχήματος έχει $\ell_0 = r$ φυσικό μήκος και σταθερή k. Η ράβδος ΑΒ έχει μάζα m και μήκος ℓ, ενώ οι αβαρείς δίσκοι έχουν ακτίνα r ο καθένας. Να προσδιορισθεί η γωνία ϑ που ισορροπεί το σύστημα, καθώς και το είδος της ισορροπίας. $(h = \ell + 2r)$

Λύση

Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Η τυχαία θέση του, καθορίζεται από τη γωνία ϑ, που σχηματίζει η ράβδος ΑΒ με την κατακόρυφο.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς, το επίπεδο $x=0$. Σε τυχαία θέση, το κέντρο C της ΑΒ βρίσκεται σε απόσταση $h - r - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta$ κάτω από το επίπεδο αναφο-

αναφοράς. Άρα η δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι $-mg(h-r-\frac{\ell}{2}\cos\vartheta)$. Στην ίδια θέση το ελατήριο



έχει μήκος $h-r-\ell\cos\vartheta$ και επειδή το φυσικό του μήκος είναι ίσο με r, η δυναμική ενέργεια του ελατήριου είναι ίση με $\frac{k}{2}(h-2r-\ell\cos\vartheta)^2$

Έτσι η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U(\vartheta) = -mg\left(h-r-\frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right) + \frac{1}{2}k\left(h-2r-\ell\cos\vartheta\right)^2 \qquad (1)$$

Οι θέσεις ισορροπίας προκύπτουν σαν λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{dU(\vartheta)}{d\vartheta} = 0 \implies -mg\left(\frac{\ell}{2}\sin\vartheta\right) + \frac{1}{2}k\,2\,(h-2r-\ell\cos\vartheta)\,(\ell\sin\vartheta) = 0$$

$$\implies \left(-mg\frac{1}{2} + k\left(h-2r-\ell\cos\vartheta\right)\right)\ell\sin\vartheta = 0$$

και επειδή $h=\ell+2r$ έχω

$$\left(-mg\frac{1}{2} + k\left(\ell-\ell\cos\vartheta\right)\right)\ell\sin\vartheta = 0 \qquad (2)$$

Η (2) έχει λύσεις: $\vartheta = 0$, $\cos\vartheta = 1-\frac{mg}{2k\ell}$

Η δεύτερη παράγωγος της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta + k\ell^2\sin^2\vartheta + k\ell^2(1-\cos\vartheta)\cos\vartheta \implies$$

$$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta + k\ell^2 - 2k\ell^2\cos^2\vartheta + k\ell^2\cos\vartheta$$

$$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta + k\ell^2\left(1-2\cos^2\vartheta+\cos\vartheta\right) \quad (3)$$

Για $\vartheta=0$ από την (3) παίρνω

$$\left.\frac{d^2U}{d\vartheta^2}\right|_{\vartheta=0} = -mg\frac{\ell}{2} < 0$$

δηλαδή η θέση $\vartheta=0$ είναι θέση ασταθούς ισορροπίας. Για $\cos\vartheta = 1-\frac{mg}{2k\ell}$ έχω ισορροπία. Η θέση αυτή υπάρχει εφόσον $0<\cos\vartheta<1$ δηλαδή εφόσον $mg<2k\ell$. Αντικαθιστούμε στην (3) το $\cos\vartheta$ με $\cos\vartheta = 1-\frac{mg}{2k\ell}$ οπότε προκύπτει

$$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} = -mg\frac{\ell}{2}\left(1-\frac{mg}{2k\ell}\right) + k\ell^2 - 2k\ell^2\left(1-\frac{mg}{2k\ell}\right)^2 + k\ell^2\left(1-\frac{mg}{2k\ell}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} > 0 \text{ , αφού } mg<2k\ell$$

Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι αν ικανοποιείται η συνθήκη:

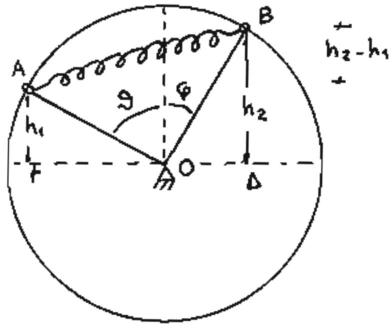
$$mg < 2k\ell$$

η θέση : $\cos\vartheta = 1-\frac{mg}{2k\ell}$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Άσκηση 4

Δύο υλικά σημεία με μάζα m το καθένα, συνδέονται με ένα ελατήριο σταθεράς C, που έχει μηδενικό φυσικό μήκος. Τα σωματίδια μπορούν να κινούνται στην περιφέρεια κατακόρυφου κύκλου που έχει ακτίνα R. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας και το είδος τους. Η κυκλική τροχιά είναι ακίνητη.

Λύση



Η τυχαία θέση του συστήματος καθορίζεται από τις γωνίες ϑ και φ (ανεξάρτητη η μία από την άλλη). Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο από το κέντρο O του κύκλου. Η δυναμική ενέργεια U_β λόγω βαρύτητας είναι:

$$U_\beta = mgh_1 + mgh_2 = mgR\cos\vartheta + mgR\cos\varphi \Longrightarrow$$

$$U_\beta = mgR(\cos\varphi + \cos\vartheta) \qquad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια λόγω ελατηρίου (U_ε) είναι

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2}c\,(AB)^2 = \frac{1}{2}c\left[(\Gamma\Delta)^2 + (h_2-h_1)^2\right] \Longrightarrow$$

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2}c\left[(R\sin\varphi + R\sin\vartheta)^2 + (R\cos\varphi - R\cos\vartheta)^2\right] \Longrightarrow$$

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2}c\left[R^2 + R^2 + 2R^2\sin\vartheta\sin\varphi - 2R^2\cos\vartheta\cos\varphi\right] \Longrightarrow$$

$$U_\varepsilon = cR^2\left(1-\cos(\vartheta+\varphi)\right) \qquad (2)$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια $U = U_\beta + U_\varepsilon$ λόγω των (1), (2) είναι:

$$U = mgR(\cos\varphi + \cos\vartheta) + cR^2\left(1-\cos(\vartheta+\varphi)\right) \qquad (3)$$

Οι θέσεις ισορροπίας καθορίζονται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \qquad (5)$$

Η σχέση (4) με βάση τη σχέση (3) δίνει:

$$-mgR\sin\vartheta + cR^2\sin(\vartheta+\varphi) = 0 \implies$$

$$-mg\sin\vartheta + cR\sin(\vartheta+\varphi) = 0 \qquad (6)$$

Η σχέση (5) με βάση τη σχέση (3) δίνει:

$$-mgR\sin\varphi + cR^2\sin(\vartheta+\varphi) = 0 \implies$$

$$-mg\sin\varphi + cR\sin(\vartheta+\varphi) = 0 \qquad (7)$$

Από τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (6), (7), ξεχωρίζουμε και εξετάζουμε τις προφανείς:
(a) $\varphi = \vartheta = 0$. Έχω

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -mgR\cos\vartheta + cR^2\cos(\vartheta+\varphi) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -mgR\cos\varphi + cR^2\cos(\vartheta+\varphi) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \varphi} = cR^2\cos(\vartheta+\varphi) \qquad (10)$$

και για $\varphi = \vartheta = 0$ από τις (8), (9), (10) παίρνω:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -mgR + cR^2 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -mgR + cR^2 \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \varphi} = cR^2 \tag{13}$$

Είναι

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \varphi}\right)^2 = (-mgR + cR^2)^2 - (cR^2)^2 = J \Rightarrow$$

$$J = m^2 g^2 R^2 - 2mgcR^3 = mgR\,(mgR - 2cR^2)$$

Αν $mgR > 2cR^2$ τότε $J > 0$ και $mgR > cR^2$ οπότε $\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} < 0$ δηλαδή αστάθεια. Αν $mgR < 2cR^2 \Rightarrow$ πάλι αστάθεια, γιατί $J < 0$

(β) $\varphi = \vartheta \neq 0, \pi$. Οι (6), (7) είναι ισοδύναμες, οπότε έχω:

$$-mgR\sin\vartheta + cR^2 \sin 2\vartheta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-mgR\sin\vartheta + cR^2 2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$R\sin\vartheta\,(-mg + 2cR\cos\vartheta) = 0$$

Όμως $\vartheta \neq 0, \pi$ οπότε $\sin\vartheta \neq 0$, άρα

$$\cos\vartheta = \cos\varphi = \frac{mg}{2cR}$$

Περιορισμός: $\frac{mg}{2cR} < 1$ ώστε $\cos\varphi < 1$.

Για $\cos\vartheta = \cos\varphi = \frac{mg}{2cR} < 1$ η (8) δίνει:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -mgR\cos\vartheta + cR^2\cos 2\vartheta = -mgR\cos\vartheta + cR^2(2\cos^2\vartheta - 1) =$$

$$= -mgR\,\frac{mg}{2cR} + cR^2\left(2\frac{m^2g^2}{4c^2R^2} - 1\right) = -\frac{m^2g^2}{2c} + \frac{m^2g^2}{2c} - cR^2 =$$

$$= -cR^2 < 0$$

άρα αστάθεια.

(γ) Για $\varphi = \vartheta = \pi$ από τις (8), (9), (10) παίρνω:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = mgR > 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgR > 0$$

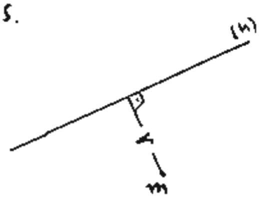
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \varphi} = cR^2$$

οπότε $J = m^2g^2R^2 - (cR^2)^2$. Αν $mgR > cR^2 \Rightarrow J > 0$ οπότε έχω ευστάθεια. Αν $mgR < cR^2 \Rightarrow J < 0$ οπότε έχω αστάθεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

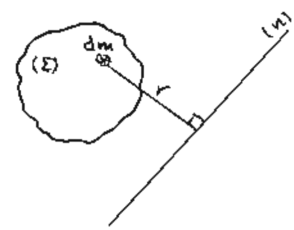
Επίπεδη δυναμική στερεού σώματος

6.1 Ροπή αδράνειας στερεού σώματος.



Αν m είναι μία σημειακή μάζα η οποία απέχει r από κάποιο άξονα (η), τότε η ροπή αδράνειας της σημειακής μάζας m ως προς τον άξονα (η) είναι ίση με το γινόμενο της μάζας m επί την απόστασή της από τον άξονα στο τετράγωνο:

$$I_\eta = mr^2 \tag{6.1.1}$$



Στην περίπτωση στερεού σώματος οποιουδήποτε σχήματος, θεωρούμε τυχαία στοιχειώδη μάζα dm, η οποία απέχει r από τον άξονα (η). Η μάζα dm, θεωρείται σημειακή, άρα η ροπή αδράνειας ως προς κάποιο καθορισμένο άξονα (η) είναι

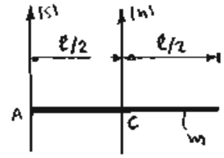
$$dI_\eta = r^2 \cdot dm$$

σύμφωνα με τον ορισμό. Ολοκλήρωση της τελευταίας σχέσης σ' όλο το στερεό (Σ), δίνει τη ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα (η):

$$I_\eta = \int_{(\Sigma)} r^2 dm \tag{6.1.2}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι, όπως είναι προφανές, η φορά του άξονα (η) δεν έχει σημασία!

Αναφέρουμε εδώ χωρίς απόδειξη τις ροπές αδράνειας κάποιων σωμάτων τα οποία συναντάμε συχνά. Για την απόδειξη των σχέσεων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο μας με τίτλο "ΦΥΣΙΚΗ Ι Μηχανική".

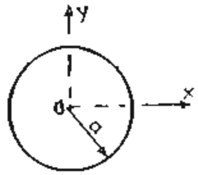


1) Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους ℓ. Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα Cn κάθετο στο μέσο της (κέντρο βάρους) C είναι:

$$I_n = \frac{1}{12} m \ell^2$$

Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο σ' ένα από τα άκρα της είναι:

$$I_s = \frac{1}{3} m \ell^2$$

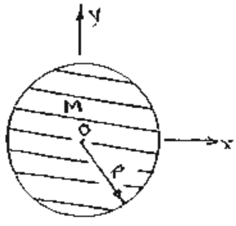


2) Λεπτός ομογενής κυκλικός δακτύλιος (στεφάνη) μάζας m και ακτίνας a. Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα Oz κάθετο στο επίπεδο του δακτυλίου, στο κέντρο του O, είναι:

$$I_z = m a^2$$

Η ροπή αδράνειας ως προς οποιαδήποτε διάμετρο του δακτυλίου είναι:

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} m a^2$$



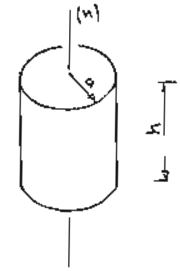
3) Ομογενής επίπεδος κυκλικός δίσκος, μικρού πάχους, μάζας M και ακτίνας R. Ως προς τον άξονα Oz που είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου στο κέντρο O:

$$I_z = \frac{1}{2} M R^2$$

Ως προς οποιαδήποτε διάμετρο του δίσκου:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} M R^2$$

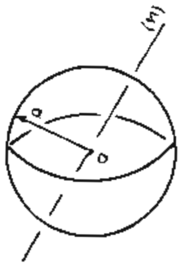
4) Ομογενής κύλινδρος (κυκλικός) ακτίνας a, ύψους h και μάζας M έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του (κ) (συμπαγής κύλινδρος):



$$I_\kappa = \frac{1}{2} M a^2$$

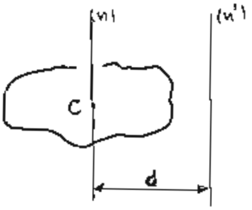
ανεξάρτητη από το ύψος h.

(5) Ομογενής σφαίρα ακτίνας a και μάζας m έχει ροπή αδράνειας ως προς οποιαδήποτε διάμετρό της (συμπαγής σφαίρα):



$$I_s = \frac{2}{5} m a^2$$

Το θεώρημα παραλλήλων αξόνων (Steiner)



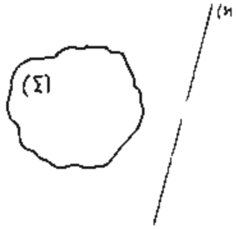
Θεωρούμε ένα στερεό οποιουδήποτε σχήματος με μάζα M και κέντρο μάζας C. Αν (κ) είναι ένας οποιοσδήποτε άξονας που περνά από το κέντρο μάζας C και (κ') κάποιος άλλος άξονας **παράλληλος** στον (κ) σε απόσταση d απ' αυτόν, τότε ισχύει:

$$I_{\kappa'} = I_\kappa + M d^2 \qquad \text{(Steiner)}$$

Προσοχή! Η ποσότητα Md^2 προστίθεται πάντα στη ροπή αδράνειας ως προς τον **κεντροβαρικό άξονα.**

Η ακτίνα περιφοράς (ακτίνα αδράνειας)

Έστω κάποιο στερεό σώμα (Σ) με μάζα M και ροπή αδράνειας I_n ως προς κάποιο (οποιοδήποτε) άξονα (n). Ορίζεται η ακτίνα περιφοράς του στερεού (Σ) ως προς τον άξονα (n):



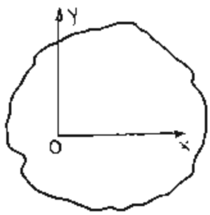
$$k_n = \sqrt{\frac{I_n}{M}}$$

Έτσι, με γνωστή την ακτίνα περιφοράς ρ ως προς τον άξονα (n), η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα (n) δίνεται από τη σχέση:

$$I_n = M k_n^2$$

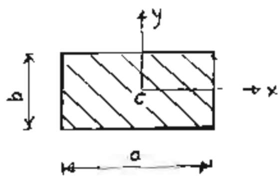
Το θεώρημα των καθέτων αξόνων

Θεωρούμε μία στερεά επίπεδη πλάκα οποιουδήποτε σχήματος τοποθετημένη στο επίπεδο Oxy. Αν I_x, I_y είναι οι ροπές αδράνειας της επίπεδης πλάκας ως προς τους άξονες Ox, Oy αντίστοιχα, τότε η ροπή αδράνειας I_z ως προς τον άξονα Oz ισούται με το άθροισμα $I_x + I_y$:



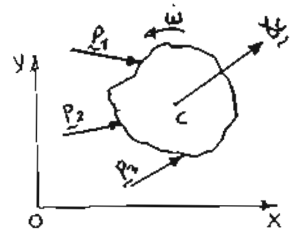
$$I_z = I_x + I_y$$

Παράδειγμα Η ορθογωνική λεπτή πλάκα του σχήματος έχει μάζα M και ροπές αδράνειας $I_x = \frac{1}{12} M b^2$, $I_y = \frac{1}{12} M a^2$. Άρα είναι:



$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} M b^2 + \frac{1}{12} M a^2 \implies I_z = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

6.2 Επίπεδη δυναμική στερεού σώματος



Υποθέτουμε ότι σε κάποιο στερεό σώμα (Σ) εφαρμόζεται ένα σύστημα δυνάμεων $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2, \ldots \underset{\sim}{P}_\nu$ οι οποίες είναι παράλληλες στο επίπεδο Oxy. Υπό την επίδραση του συστήματος αυτού των δυνάμεων το κέντρο μάζας C του στερεού αποκτά επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_c$, ενώ το στερεό αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$. Έτσι, το στερεό εκτελεί επίπεδη κίνηση στο επίπεδο Oxy.

Η μελέτη της κίνησης του στερεού υπό την επίδραση των δυνάμεων $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2, \ldots \underset{\sim}{P}_\nu$, περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια:

(i) Υπολογίζουμε το διανυσματικό άθροισμα $\Sigma \underset{\sim}{P}_i$ των δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό και γράφουμε:

$$\Sigma \underset{\sim}{P}_i = M \underset{\sim}{\gamma}_c \quad \text{(μεταφορική κίνηση του C)} \quad (6.2.1)$$

όπου $\underset{\sim}{\gamma}_c$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού. Η διανυσματική αυτή εξίσωση δίνει δύο αλγεβρικές εξισώσεις αναλύοντας τις δυνάμεις $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2, \ldots \underset{\sim}{P}_\nu$ και την επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_c$ κατά τις διευθύνσεις x, y.

(ii) Υπολογίζουμε το άθροισμα των ροπών ΣM_{cz} ως προς τον άξονα Cz ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο Oxy στο κέντρο μάζας C του στερεού, με **θετική** φορά τη φορά της γωνιακής επιτάχυνσης $\dot{\omega}$. Είναι

$\dot{\omega}+\leftarrow$

$$\Sigma M_{cz} = I_{cz}\,\dot{\omega} \quad \text{(περιστροφική κίνηση)} \quad (6.2.2)$$

όπου I_{cz} είναι η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα Cz.

(iii) Γράφουμε την επιπλέον εξίσωση (αν υπάρχει) η οποία συνδέει μεγέθη τα οποία εμφανίζονται στις προηγούμενες εξισώσεις. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως **εξίσωση συνδέσμων** και εξαρτάται από τον τρόπο επαφής του στερεού με άλλα σώματα, δηλαδή εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα.

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων που γράψαμε παραπάνω, προσδιορίζουμε τους αγνώστους του προβλήματος.

Παρατήρηση: Αν υπάρχει σημείο A του στερεού το οποίο έχει μηδενική επιτάχυνση, αντί της εξίσωσης (6.2.2) του βήματος (ii) γράφουμε:

$$\overset{\dot\omega+}{\curvearrowleft}\ \sum M_{Az} = I_{Az}\,\dot\omega$$

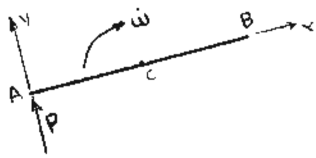
όπου I_{Az} η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα Az ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο στο σημείο A το οποίο έχει μηδενική επιτάχυνση. Αν γράψουμε την εξίσωση αυτή αντί της εξίσωσης του βήματος (ii) καταλήγουμε συνήθως σε απλούστερο σύστημα εξισώσεων.

Σημειώνουμε εδώ ότι αν εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία, μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε άγνωστη δύναμη που ασκείται στο στερεό σώμα, την επιτάχυνση του κέντρου μάζας C και τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος. Αν η τιμή κάποιου από τα μεγέθη αυτά προκύψει αρνητική, αυτό σημαίνει ότι η φορά του είναι αντίθετη αυτής που υποθέσαμε.

Άσκηση 1

Μία ράβδος ΑΒ έχει μάζα Μ, μήκος L και βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο άκρο Α της ράβδου ασκείται δύναμη P κάθετη στη ράβδο. Τη στιγμή που εφαρμόζεται η P, να βρεθεί η γωνιακή της επιτάχυνση καθώς και η επιτάχυνση του άκρου της Β. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της ίση με $ML^2/12$.

Λύση



Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Αxy ώστε η ράβδος να είναι παράλληλη στον άξονα x όπως φαίνεται στο σχήμα. Επειδή το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο, η μόνη δύναμη που ασκείται στη ράβδο είναι η P, αφού το βάρος Mg εξουδετερώνεται από την κάθετη αντίδραση του επιπέδου.

Κατά τη διεύθυνση x έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\gamma_{cx} \implies 0 = M\gamma_{cx} \implies \gamma_{cx} = 0$$

Κατά τη διεύθυνση y έχουμε:

$$\Sigma F_y = M\gamma_{cy} \implies P = M\gamma_{cy} \implies \gamma_{cy} = \frac{P}{M}$$

Περιστροφική κίνηση: Με θετική φορά τη φορά της γωνιακής επιτάχυνσης $\dot{\omega}$, έχουμε:

$$\overset{\curvearrowright +}{\Sigma M_{cz}} = J_{cz}\dot{\omega} \implies P\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{12}ML^2\dot{\omega} \implies \dot{\omega} = \frac{6P}{ML}$$

Σύμφωνα με το σχήμα, τη στιγμή που εφαρμόζεται η δύναμη P έχουμε

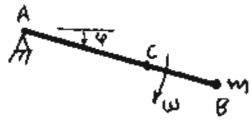
$$\underset{\sim}{\gamma}_c = \frac{P}{M}\underset{\sim}{j} \qquad \underset{\sim}{\dot{\omega}} = -\frac{6P}{ML}\underset{\sim}{k}$$

και η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου είναι μηδενική. Άρα, η επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_B$ του άκρου B είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_C + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{CB} - \omega^2 \underset{\sim}{CB} = \frac{P}{M}\underset{\sim}{j} - \frac{6P}{ML}\underset{\sim}{k} \times \left(\frac{L}{2}\underset{\sim}{i}\right) - 0^2 \cdot \frac{L}{2}\underset{\sim}{i} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \frac{P}{M}\underset{\sim}{j} - \frac{6P}{ML}\cdot\frac{L}{2}\underset{\sim}{j} \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{\gamma}_B = -\frac{2P}{M}\underset{\sim}{j}$$

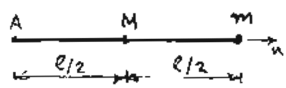
Άσκηση 2



Η ομογενής ράβδος AB, μάζας M και μήκους ℓ έχει αρθρωμένο το άκρο της A, ενώ στο άκρο της B που είναι ελεύθερο φέρει συγκολλημένη σημειακή μάζα $m = M/4$. Η ράβδος περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο και στη φάση του σχήματος έχει γνωστή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\varphi} = \omega$. Ζητείται η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη στιγμή αυτή. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της ίση με $M\ell^2/12$.

Λύση

Προσδιορίζουμε κατ' αρχήν τη θέση του κέντρου μάζας C του στερεού. Για το σκοπό αυτό, η ομογενής ράβδος θεωρείται υλικό σημείο μάζας M τοποθετημένο στο μέσο της. Θεωρούμε το βοηθητικό άξονα Ax και έχουμε(x):

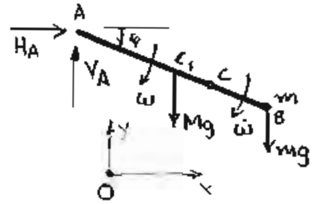


$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow$$

$$x_C = \frac{\ell/2\, M + \ell m}{M + m} = \frac{\frac{1}{2}M + \frac{M}{4}}{M + \frac{M}{4}}\ell \quad \Rightarrow \quad x_C = (AC) = 0,6\ell$$

αφού δίνεται $m = M/4$.

(x) ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: "ΦΥΣΙΚΗ Ι Μηχανική"



Θεωρούμε τώρα το στερεό μόνο του στο χώρο και σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό. Έτσι προκύπτει το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ.) που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Βέβαια, τα βάρη Mg (της ράβδου AB) και mg (της σημειακής μάζας m) θα μπορούσαν να αντικατασταθούν με το συνολικό βάρος Mg+mg το οποίο να ασκείται στο κέντρο μάζας C του στερεού. Οι δυνάμεις V_A, H_A ασκούνται από την άρθρωση A. Στο σύστημα αξόνων Oxy έχουμε:

Μεταφορική κίνηση του C:

$$\Sigma F_x = (M+m)\gamma_{cx} \Rightarrow H_A = (M+m)\gamma_{cx} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = (M+m)\gamma_{cy} \Rightarrow V_A - Mg - mg = (M+m)\gamma_{cy} \qquad (2)$$

Περιστροφική κίνηση του στερεού.

$$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_c = I_c\dot{\omega} \Rightarrow V_A\cdot(AC)\cos\varphi + H_A(AC)\sin\varphi - Mg(C_1C)\cos\varphi +$$

$$+ mg(CB)\cos\varphi = I_c\dot{\omega}$$

όπου $(AC) = 0{,}6\ell$, $(C_1C) = 0{,}1\ell$, $(CB) = 0{,}4\ell$. Έτσι, η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$V_A\cdot 0{,}6\ell\cos\varphi + H_A\,0{,}6\ell\sin\varphi - Mg\cdot 0{,}1\ell\cos\varphi + mg\,0{,}4\ell\cos\varphi = I_c\dot{\omega} \qquad (3)$$

Από την κίνηση του στερεού, έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = \underset{\sim}{\gamma_A} + \underset{\sim}{\dot{\omega}} \times \underset{\sim}{AC} - \omega^2\underset{\sim}{AC}$$

και επειδή είναι $\underset{\sim}{\gamma_A} = 0$, $\underset{\sim}{\dot{\omega}} = -\dot{\omega}\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{AC} = 0{,}6\ell\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} - 0{,}6\ell\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}$, έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = -\dot{\omega}\underset{\sim}{k} \times (0{,}6\ell\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} - 0{,}6\ell\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}) - \omega^2(0{,}6\ell\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} - 0{,}6\ell\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = -0{,}6\ell\dot{\omega}\cos\varphi\,\underset{\sim}{j} - 0{,}6\ell\dot{\omega}\sin\varphi\,\underset{\sim}{i} - 0{,}6\omega^2\ell\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} + 0{,}6\omega^2\ell\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}$$

Άρα

$$\gamma_{cx} = -0{,}6\ell\dot{\omega}\sin\varphi - 0{,}6\omega^2\ell\cos\varphi \qquad (4)$$

$$\gamma_{cy} = -0{,}6\ell\dot{\omega}\cos\varphi + 0{,}6\omega^2\ell\sin\varphi \qquad (5)$$

Η ροπή αδράνειας I_c του στερεού η οποία εμφανίζεται στη σχέση (3) υπολογίζεται:

$$I_c = I_c^{\text{ράβδου}} + I_c^{\text{σημ. μάζας}}$$

Όμως για τη σημειακή μάζα έχουμε:

$$I_c^{\text{σημ. μάζας}} = m(CB)^2 = m(0{,}4\ell)^2 = 0{,}16m\ell^2$$

και, για τη ράβδο, σύμφωνα με το θ. Steiner, έχουμε:

$$I_c^{\text{ράβδου}} = I_{c_1}^{\text{ράβδου}} + M(CC_1)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\cdot(0{,}1\ell)^2$$

Άρα είναι:

$$I_c = \frac{1}{12}M\ell^2 + M(0{,}1\ell)^2 + 0{,}16m\ell^2 \implies I_c = \frac{2}{15}M\ell^2 \qquad (6)$$

όπου αντικαταστήσαμε $m = M/4$.

Από το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3), (4), (5) με τη I_c να δίνεται από τη σχέση (6), βρίσκουμε το $\dot{\omega}$, αλλά και τα $V_A, H_A, \gamma_{cx}, \gamma_{cy}$, τα οποία εδώ δεν ζητούνται. Παρατηρούμε όμως ότι είναι $\gamma_A = 0$ (σημείο A αρθρωμένο). Έτσι, αντί της εξίσωσης $\Sigma\vec{M}_c^{+} = I_c\dot{\omega}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\Sigma\vec{M}_A^{+} = I_A\dot{\omega} \implies Mg\cdot\frac{\ell}{2}\cos\varphi + mg\ell\cos\varphi = I_A\dot{\omega} \implies$$

$$\frac{3}{4}Mg\ell\cos\varphi = I_A\dot{\omega} \qquad (7)$$

όπου I_A είναι η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα Az ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο στο σημείο Α. Είναι:

$$I_A = I_A^{\text{ράβδου}} + I_A^{\text{σημ. μάζας}}$$

Όμως σύμφωνα με το θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_A^{\text{ράβδου}} = I_C^{\text{ράβδου}} + M(AC)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$$

Για τη σημειακή μάζα, σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε:

$$I_A^{\text{σημ. μάζας}} = m\cdot(AB)^2 = m\ell^2$$

Άρα

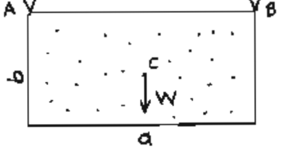
$$I_A = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2 = \frac{1}{3}M\ell^2 + \frac{M}{4}\ell^2 \implies I_A = \frac{7}{12}M\ell^2$$

Η σχέση (7) γράφεται:

$$\frac{3}{4}Mg\ell\cos\varphi = \frac{7}{12}M\ell^2\dot{\omega} \implies \dot{\omega} = \frac{9g}{\ell}\cos\varphi$$

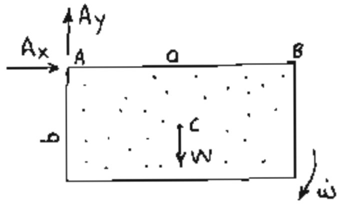
Καταλήξαμε δηλαδή στο ζητούμενο γράφοντας μόνο την εξίσωση $\overset{+}{\Sigma \vec{M}_A} = I_A\dot{\omega}$. Από το πρόβλημα αυτό φαίνεται πόσο χρήσιμο είναι αντί της εξίσωσης $\overset{+\dot{\omega}}{\Sigma \vec{M}_C} = I_C\dot{\omega}$ να γράφουμε την εξίσωση $\overset{+\dot{\omega}}{\Sigma \vec{M}_A} = I_A\dot{\omega}$ αν υπάρχει, βέβαια, σημείο Α του στερεού με μηδενική επιτάχυνση.

Άσκηση 3



Η ομογενής λεπτή ορθογωνική πλάκα που φαίνεται στο σχήμα βάρους W βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο καθώς κρέμεται από τις αρθρώσεις Α και Β. Αν κάποια στιγμή αφαιρέσουμε την άρθρωση Β, να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της πλάκας και η αντίδραση στο Α τη στιγμή αυτή. Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο της C ίση με $M(a^2+b^2)/12$, όπου $W = Mg$.

Λύση



Τη στιγμή που αφαιρείται η άρθρωση B, το στερεό στηρίζεται μόνο στην άρθρωση A. Άρα δέχεται μόνο την αντίδραση στο A (η οποία αναλύεται στις A_x, A_y) και το βάρος του W. Το Δ.Ε.Σ. φαίνεται στο σχήμα.

Για την επίλυση του προβλήματος, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι το σημείο A είναι μονίμως ακίνητο. Άρα $\underset{\sim}{\gamma}_A = 0$
Έτσι έχουμε για την περιστροφική κίνηση:

$$\overset{\curvearrowright +}{\Sigma M_A} = I_A \dot{\omega} \implies W \cdot \frac{a}{2} = I_A \dot{\omega} \qquad (1)$$

Σύμφωνα με το θ. Steiner έχουμε:

$$I_A = I_C + M(AC)^2 = \frac{1}{12} M(a^2+b^2) + M\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) \implies$$

$$I_A = \frac{1}{3} M(a^2+b^2)$$

και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$W \frac{a}{2} = \frac{1}{3} M(a^2+b^2)\dot{\omega} \implies \dot{\omega} = \frac{3ga}{2(a^2+b^2)} \qquad (2)$$

Έτσι, προέκυψε αμέσως το $\dot{\omega}$. Επειδή όμως ζητούνται και τα A_x, A_y (αντίδραση στο A) γράφουμε και τις εξισώσεις της μεταφορικής κίνησης του C:

$$\Sigma F_x = 0 \implies A_x = M\gamma_{cx} \qquad (3)$$

$$\Sigma F_y = 0 \implies A_y - W = M\gamma_{cy} \qquad (4)$$

Η εξίσωση συνδέσμου εδώ είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = \underset{\sim}{\gamma}_A + \underset{\sim}{\dot{\omega}} \times \underset{\sim}{AC} - \omega^2 \underset{\sim}{AC}$$

Όμως είναι $\underset{\sim}{\gamma}_A = 0$ και $\omega = 0$ (τη στιγμή που αφαιρείται η άρθρωση B). Άρα έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_C = -\dot{\omega}\underset{\sim}{k} \times \left(\frac{a}{2}\underset{\sim}{i} - \frac{b}{2}\underset{\sim}{j}\right) = -\dot{\omega}\frac{a}{2}\underset{\sim}{j} - \dot{\omega}\frac{b}{2}\underset{\sim}{i} = -\dot{\omega}\frac{b}{2}\underset{\sim}{i} - \dot{\omega}\frac{a}{2}\underset{\sim}{j}$$

Άρα

$$\gamma_{cx} = -\dot{\omega}\frac{b}{2} \qquad (5) \qquad\qquad \gamma_{cy} = -\dot{\omega}\frac{a}{2} \qquad (6)$$

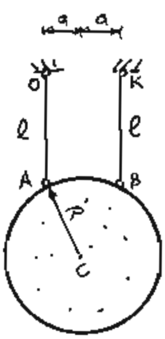
Με βάση τη σχέση (2), από τις σχέσεις (5), (6) παίρνουμε:

$$\gamma_{cx} = -\frac{3gb}{4(a^2+b^2)} \qquad\qquad \gamma_{cy} = -\frac{3ga}{4(a^2+b^2)}$$

και οι σχέσεις (3), (4) δίνουν:

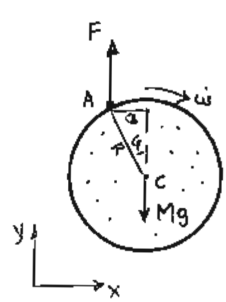
$$A_x = -\frac{3Mg\,ba}{4(a^2+b^2)} \qquad\qquad A_y = W - \frac{3Mga^2}{4(a^2+b^2)} = W\frac{a^2+4b^2}{4(a^2+b^2)}$$

Άσκηση 4



Ο ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R κρέμεται με τη βοήθεια των αβαρών νημάτων OA, KB. Τη χρονική στιγμή t=0 κόβεται το νήμα KB. Τη στιγμή αυτή να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, η γωνιακή επιτάχυνση του νήματος OA και η επιτάχυνση του σημείου A. Δίνεται $I_C = MR^2/2$.

Λύση



Λίγο μετά την κοπή του νήματος έχουμε το Δ.Ε.Σ. που φαίνεται στο διπλανό σχήμα: Ο δίσκος δέχεται το βάρος του Mg και μία δύναμη F από το νήμα OA.

Μεταφορική κίνηση του C:

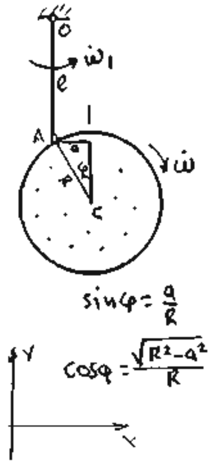
$$\Sigma F_x = M\gamma_{cx} \implies 0 = M\gamma_{cx} \implies \gamma_{cx} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = M\gamma_{cy} \implies F - Mg = M\gamma_{cy} \qquad (2)$$

Περιστροφική κίνηση

$$\overset{+}{\Sigma M_c} = I_c\dot{\omega} \implies Fa = I_c\dot{\omega} \implies Fa = \frac{MR^2}{2}\dot{\omega} \qquad (3)$$

Για την εύρεση της εξίσωσης συνδέσμου σχεδιάζουμε το σύστημα τη χρονική στιγμή λίγο μετά την κοπή του νήματος. Όλες οι ταχύτητες καθώς και οι γωνιακές ταχύτητες είναι μηδενικές. Το τεντωμένο νήμα συμπεριφέρεται σαν απόλυτα στερεό. Αν $\dot{\omega}_1$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση του νήματος ΟΑ έχουμε:



$\sin\varphi = \frac{a}{R}$

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}$

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \cancel{\underset{\sim}{\gamma}_O} + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_1 \times \underset{\sim}{OA} - \cancel{\omega_1^2}\,\underset{\sim}{OA} = \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{k} \times (-\ell \underset{\sim}{j}) \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \dot{\omega}_1 \ell \underset{\sim}{i} \qquad (4)$$

και στο δίσκο:

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = \underset{\sim}{\gamma}_A + \underset{\sim}{\dot{\omega}} \times \underset{\sim}{AC} - \cancel{\omega^2}\,\underset{\sim}{AC} = \underset{\sim}{\gamma}_A - \dot{\omega}\underset{\sim}{k} \times (R\sin\varphi \underset{\sim}{i} - R\cos\varphi \underset{\sim}{j}) \overset{(4)}{\implies}$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = \dot{\omega}_1 \ell \underset{\sim}{i} - \dot{\omega} R\sin\varphi \underset{\sim}{j} - \dot{\omega} R\cos\varphi \underset{\sim}{i} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = (\dot{\omega}_1 \ell - \omega R\cos\varphi)\underset{\sim}{i} - \dot{\omega} R\sin\varphi \underset{\sim}{j} \overset{(1)}{\implies}$$

$$0 = \dot{\omega}_1 \ell - \omega R\cos\varphi \qquad (5) \qquad\qquad \gamma_{cy} = -\dot{\omega} R\sin\varphi \qquad (6)$$

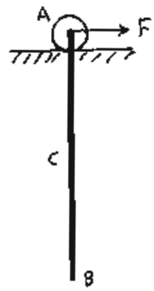
Το σύστημα των εξισώσεων (2), (3), (5), (6) δίνει:

$$\dot{\omega} = \frac{2ga}{R^2+2a^2} \qquad\qquad \dot{\omega}_1 = \frac{2g\sqrt{R^2-a^2}\cdot a}{\ell(R^2+2a^2)}$$

και από τη σχέση (4):

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \frac{2g\sqrt{R^2-a^2}\cdot a}{R^2+2a^2}$$

Άσκηση 5



Στο άκρο A της ομογενούς ράβδου AB η οποία έχει μάζα M και μήκος ℓ είναι προσαρμοσμένος μικρός αβαρής τροχός. Έτσι, το άκρο A μπορεί να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος του οριζόντιου ευθύγραμμου οδηγού. Κάποια στιγμή εφαρμόζεται στο A μία οριζόντια δύναμη F. Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας C της ράβδου τη στιγμή αυτή. $I_C = M\ell^2/12$.

Λύση

Η ράβδος εκτός από τη δύναμη F, δέχεται ακόμη το βάρος της και την κατακόρυφη δύναμη N από τον οδηγό.

Μεταφορική δύναμη του C:

$$\Sigma F_x = M\gamma_{cx} \implies F = M\gamma_{cx} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = M\gamma_{cy} \implies N - Mg = M\gamma_{cy} \qquad (2)$$

Περιστροφική κίνηση:

$$\overset{+}{\Sigma M_C} = I_C\dot{\omega} \implies F\frac{\ell}{2} = M\frac{\ell^2}{12}\dot{\omega} \implies \dot{\omega} = \frac{6F}{M\ell} \qquad (3)$$

Εξίσωση συνδέσμου:

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = \underset{\sim}{\gamma_A} + \underset{\sim}{\dot{\omega}} \times \underset{\sim}{AC} - \omega^2 \underset{\sim}{AC} \qquad (4)$$

Όμως, λίγο μετά την εφαρμογή της δύναμης F είναι $\omega = 0$. Η γ_A είναι οριζόντια: $\underset{\sim}{\gamma_A} = \gamma_A \underset{\sim}{i}$. Έτσι, η σχέση (4) γράφεται:

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = \gamma_A \underset{\sim}{i} - \dot{\omega}\underset{\sim}{k} \times \left(-\frac{\ell}{2}\underset{\sim}{j}\right) \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = \left(\gamma_A - \dot{\omega}\frac{\ell}{2}\right)\underset{\sim}{i}$$

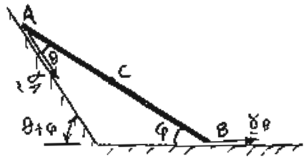
Άρα

$$\gamma_{cx} = \gamma_A - \dot{\omega}\frac{\ell}{2} \qquad (5) \qquad\qquad \gamma_{cy} = 0 \qquad (6)$$

Από το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων βρίσκουμε:

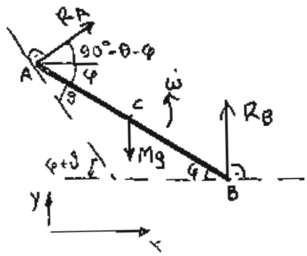
$$\gamma_{cx} = \frac{F}{M}\ ,\quad N = Mg\ ,\quad \dot{\omega} = \frac{6F}{M\ell}\ ,\quad \gamma_A = \frac{4F}{M}\ ,\quad \gamma_{cy} = 0$$

Άσκηση 6



Η ομογενής ράβδος με μάζα M, μήκος ℓ και ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της ίση με $M\ell^2/12$ αφήνεται στη φάση του σχήματος. Για $\varphi = 30^\circ$, $\vartheta = 15^\circ$ να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνσή της, αν οι πλευρές της δίεδρης γωνίας είναι λείες.

Λύση



Επειδή δεν υπάρχει τριβή, οι αντιδράσεις στα A, B είναι κάθετες στις αντίστοιχες πλευρές της δίεδρης γωνίες. Έτσι, η R_B είναι κατακόρυφη, ενώ η R_A είναι κάθετη στην κεκλιμένη πλευρά της γωνίας.

Μεταφορική κίνηση του C:

$$\Sigma F_x = M\gamma_{cx} \implies R_A\cos(90^\circ-\vartheta-\varphi) = M\gamma_{cx} \implies$$

$$R_A\sin(\vartheta+\varphi) = M\gamma_{cx} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = M\gamma_{cy} \implies R_A\sin(90^\circ-\vartheta-\varphi) + R_B - Mg = M\gamma_{cy} \implies$$

$$R_A\cos(\vartheta+\varphi) + R_B - Mg = M\gamma_{cy} \qquad (2)$$

Περιστροφική κίνηση της δοκού:

$$\overset{+\curvearrowleft}{\Sigma M_c} = I_c\dot{\omega} \implies R_B\,(CB)\cos\varphi - R_A\,(AC)\sin(\varphi + 90 - \varphi - \vartheta) = I_c\dot{\omega} \implies$$

$$R_B\,\frac{\ell}{2}\cos\varphi - R_A\,\frac{\ell}{2}\sin(90^\circ - \vartheta) = \frac{1}{12}M\ell^2\dot{\omega} \implies$$

$$R_B\cos\varphi - R_A\sin\vartheta = \frac{M\ell}{6}\,\dot{\omega} \qquad (3)$$

Θα γράψουμε τώρα την εξίσωση συνδέσμου παρατηρώντας ότι η επιτάχυνση του σημείου B είναι οριζόντια: ($\underset{\sim}{\gamma_B} = \gamma_B \underset{\sim}{i}$) ενώ η επιτάχυνση του σημείου A έχει τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου: ($\underset{\sim}{\gamma_A} = \gamma_A\cos(\vartheta+\varphi)\underset{\sim}{i} - \gamma_A\sin(\vartheta+\varphi)\underset{\sim}{j}$) σύμφωνα με τις φορές του σχήματος. Έχουμε $\omega = 0$. Άρα

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = \underset{\sim}{\gamma_B} + \underset{\sim}{\dot{\omega}} \times \underset{\sim}{BC} - \cancel{\omega^2}^{\,0}\underset{\sim}{BC} = \gamma_B\underset{\sim}{i} + \dot{\omega}\underset{\sim}{k} \times \left(-\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} + \frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}\right) \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = \gamma_B\underset{\sim}{i} - \dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underset{\sim}{j} - \dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underset{\sim}{i} \implies$$

$$\gamma_{cx} = \gamma_B - \dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\sin\varphi \quad (4) \qquad \gamma_{cy} = -\dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\cos\varphi \quad (5)$$

Ακόμη είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = \underset{\sim}{\gamma_A} + \underset{\sim}{\dot{\omega}} \times \underset{\sim}{AC} - \cancel{\omega^2}^{\,0}\underset{\sim}{AC} = \gamma_A\cos(\vartheta+\varphi)\underset{\sim}{i} - \gamma_A\sin(\vartheta+\varphi)\underset{\sim}{j} +$$

$$+\dot{\omega}\underset{\sim}{k} \times \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} - \frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}\right) \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma_c} = \gamma_A\cos(\vartheta+\varphi)\underset{\sim}{i} - \gamma_A\sin(\vartheta+\varphi)\underset{\sim}{j} - \dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} + \dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underset{\sim}{j} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \gamma_{cx} = \gamma_A\cos(\vartheta+\varphi) - \dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\cos\varphi & (6) \\ \gamma_{cy} = -\gamma_A\sin(\vartheta+\varphi) + \dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\sin\varphi & (7) \end{cases}$$

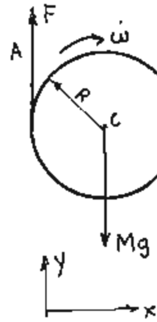
Απαλοιφή του γ_A από τις δύο αυτές σχέσεις δίνει:

$$\gamma_{cx}\sin(\vartheta+\varphi) + \gamma_{cy}\cos(\vartheta+\varphi) = \dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\left(\sin\varphi\cos(\vartheta+\varphi) - \cos\varphi\sin(\vartheta+\varphi)\right) \implies$$

$$\gamma_{cx}\sin(\vartheta+\varphi) + \gamma_{cy}\cos(\vartheta+\varphi) = -\dot{\omega}\,\frac{\ell}{2}\sin\vartheta \qquad (8)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), (5), (8) βρίσκουμε $\dot{\omega} = 0{,}285\,g/\ell$, θέτοντας $\varphi = 30^\circ$, $\vartheta = 15^\circ$.

Άσκηση 7



Στην περιφέρεια ομογενούς δίσκου μάζας M, ακτίνας R και $I_C = MR^2/2$ είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα. Τραβάμε το νήμα προς τα πάνω με δύναμη F. Ζητείται η επιτάχυνση του κέντρου της τροχαλίας καθώς και η επιτάχυνση του σημείου A.

Λύση

Το Δ.Ε.Σ. του δίσκου φαίνεται στο σχήμα. Από τη μεταφορική κίνηση του C έχουμε:

$$\Sigma F_y = M\gamma_{cy} \quad \Longrightarrow \quad F - Mg = M\gamma_{cy} \qquad (1)$$

(Οριζόντιες δυνάμεις δεν υπάρχουν και είναι $\gamma_{cx} = 0$). Από την περιστροφική κίνηση του δίσκου έχουμε:

$$\overset{+\dot{\omega}}{\Sigma M_C} = I_C\dot{\omega} \quad \Longrightarrow \quad FR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{MR}{2}\dot{\omega} \qquad (2)$$

Εξίσωση συνδέσμου: Σε περιπτώσεις όπως εδώ που έχουμε τυλιγμένο νήμα σκεφτόμαστε με τον ακόλουθο τρόπο: Υποθέτουμε ότι ο δίσκος στρέφεται κατά γωνία φ κατά τη θετική φορά περιστροφής που είναι η φορά της γωνιακής επιτάχυνσης $\dot{\omega}$. Θα ξετυλιχθεί νήμα μήκους $R\varphi$ όσο το τόξο της περιφέρειας του δίσκου το οποίο αντιστοιχεί σε γωνία φ. Έστω ότι στο ίδιο χρονικό διάστημα το σημείο A μετατοπίζεται κατά y_A και το σημείο C κατά y_C. Τα y_A, y_C υποτίθενται θετικά δηλαδή κατά τη θετική φορά του άξονα y.

Η μετατόπιση y_C είναι μικρότερη της y_A κατά το μήκος $R\varphi$ του νήματος που ξετυλίχθηκε στο ίδιο χρονικό διάστημα. Άρα είναι:

$$y_C = y_A - R\varphi \qquad (3)$$

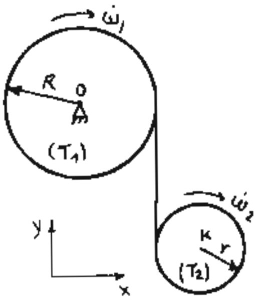
Αν παραγωγίσουμε δύο φορές τη σχέση αυτή ως προς t παίρνουμε την εξίσωση συνδέσμου:

$$\ddot{y}_c = \ddot{y}_A - R\ddot{\varphi} \implies \gamma_{cy} = \gamma_{Ay} - R\dot{\omega} \qquad (4)$$

Ήδη, από την εξίσωση (1) βρίσκουμε αμέσως $\gamma_{cy} = \frac{F}{M} - g$, και η (2) δίνει $\dot{\omega} = 2F/MR$ οπότε, η σχέση (4) δίνει:

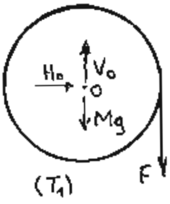
$$\gamma_{Ay} = \gamma_{cy} + R\dot{\omega} = \frac{F}{M} - g + \frac{2F}{M} \implies \gamma_{Ay} = \frac{3F}{M} - g$$

Άσκηση 8



Στο διπλανό σχήμα η τροχαλία (T_1) μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον οριζόντιο σταθερό άξονα ο οποίος περνά από το σημείο O. Ο άξονας της τροχαλίας (T_2) είναι ελεύθερος. Αβαρές μή εκτατό σχοινί έχει τυλιχθεί στις περιφέρειες των δύο τροχαλιών. Αν αφήσουμε ελεύθερη την τροχαλία (T_2), να βρεθούν οι γωνιακές επιταχύνσεις των δύο τροχαλιών.

Για την τροχαλία T_1 δίνονται m_1, R $I_o = MR^2/2$ και για την τροχαλία (T_2) m, r, $I_K = mr^2/2$.



Λύση

Καθώς το σχοινί ξετυλίγεται, η (T_1) περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$ περί τον άξονά της από το O. Η τροχαλία T_2 κάνει σύνθετη κίνηση: μεταφορική και περιστροφική ταυτόχρονα. Θα εξετάσουμε κάθε τροχαλία χωριστά.

Το Δ.Ε.Σ. της τροχαλίας (T_1) φαίνεται στο δεύτερο σχήμα. Αυτή δέχεται το βάρος της Mg, τις αντιδράσεις H_o, V_o στο O από τον άξονα (συμπεριφέρεται σαν αρθρωση) και τη δύναμη F από το σχοινί. Έχουμε:

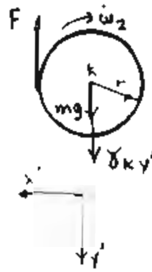
$$\Sigma F_x = M\gamma_{ox} \implies H_o = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = M\gamma_{oy} \implies V_o - Mg - F = M\cdot 0 \implies V_o - Mg - F = 0 \qquad (2)$$

αφού το σημείο O είναι σταθερό.

$$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_o = I_o\dot{\omega}_1 \implies FR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega}_1 \implies F = \frac{MR}{2}\dot{\omega}_1 \qquad (3)$$

Το Δ.Ε.Σ. της τροχαλίας (T_2) φαίνεται στο διπλανό σχήμα όπου η τροχαλία T_2 δέχεται το βάρος της mg και τη δύναμη F από το σχοινί. (Το αβαρές μη εκτατό σχοινί τραβάει προς το μέρος του με ίσες δυνάμεις τα σώματα που συνδέει). Έχουμε:



$$\Sigma F_{x'} = M\gamma_{kx} \implies 0 = 0$$

$$\Sigma F_{y'} = M\gamma_{ky} \implies -F + mg = m\gamma_{ky'} \qquad (4)$$

$$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_K = I_K\dot{\omega}_2 \implies Fr = \frac{1}{2}mr^2\dot{\omega}_2 \implies F = \frac{mr}{2}\dot{\omega}_2 \qquad (5)$$

(Εδώ θεωρήσαμε το σύστημα αξόνων x'-y' με θετική φορά του άξονα y' προς τα κάτω αφού η γ_{ky} έχει προφανώς φορά προς τα κάτω).

Για την εξίσωση συνδέσμου παρατηρούμε ότι αν σε κάποιο χρονικό διάστημα η τροχαλία (T_1) στραφεί κατά γωνία φ_1 και η τροχαλία T_2 κατά γωνία φ_2, θα ξετυλιχθεί συνολικό μήκος σχοινιού $R\varphi_1 + r\varphi_2$. Όμως, το κέντρο K της τροχαλίας (T_2) μετακινείται προς τα θετικά (κάτω) κατά y'_K ίσο με το συνολικό μήκος σχοινιού που ξετυλίγεται: $y'_K = R\varphi_1 + r\varphi_2$. Με παραγώγιση της σχέσης αυτής δύο φορές ως προς το χρόνο παίρνουμε:

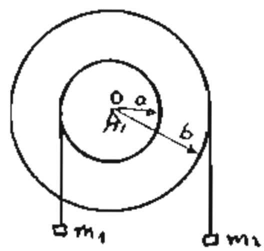
$$\gamma_{ky'} = R\dot{\omega}_1 + r\dot{\omega}_2 \qquad (6)$$

Από το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων παίρνουμε:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{2mg}{R(2m+3M)} \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{2Mg}{r(2m+3M)}$$

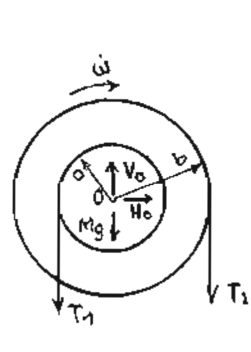
Παρατήρηση: Οι εξισώσεις (1) και (2) δεν χρησιμοποιήθηκαν. Γενικά, όταν το κέντρο μιας τροχαλίας είναι σταθερό και δεν ζητούνται οι αντιδράσεις στήριξης σ' αυτό, γράφουμε μόνο την εξίσωση της περιστροφικής κίνησης της τροχαλίας.

Άσκηση 9



Δύο τροχαλίες έχουν συγκολληθεί ώστε να αποτελούν ένα στερεό σώμα συνολικής μάζας m (διπλή τροχαλία). Η ακτίνα αδράνειας (περιφοράς) του στερεού ως προς τον οριζόντιο άξονα από το O είναι ίση με ρ. Στις περιφέρειες των δύο τροχαλιών έχει τυλιχθεί αβαρές - μη εκτατό νήμα από τα άκρα του οποίου κρέμονται οι μάζες m_1, m_2 όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο, να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m_2 και η γωνιακή επιτάχυνση της διπλής τροχαλίας.

Λύση



Το κινούμενο σύστημα αποτελείται από πολλά σώματα. και εξετάζουμε καθένα σώμα χωριστά.

Η διπλή τροχαλία φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Σ' αυτή ασκείται το βάρος της Mg, η αντίδραση στήριξης V_o, H_o και οι δυνάμεις T_1, T_2 από τα δύο νήματα. Υποθέτουμε ότι η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$ της τροχαλίας έχει τη φορά του σχήματος. Από την περιστροφική της κίνηση έχουμε:

$$\overset{+\dot{\omega}}{\curvearrowright}\ \Sigma M_0 = I_0 \dot{\omega} \implies T_2 b - T_1 a = I_0 \dot{\omega} \qquad (1)$$

όπου η ροπή αδράνειας βρίσκεται από τη δοσμένη ακτίνα περιφοράς ως προς τον άξονα από το O:

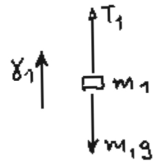
$$I_0 = M\rho^2$$

Έτσι, η σχέση (1) γράφεται:

$$T_2 b - T_1 a = M\rho^2 \dot{\omega} \qquad (2)$$

Τις εξισώσεις δυνάμεων εδώ τις παραλείπουμε αφού το κέντρο μάζας O είναι ακίνητο και δεν ζητούνται οι αντιδράσεις στήριξης στο O.

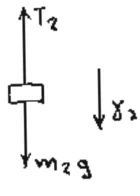
Στη μάζα m_1 που φαίνεται στο διπλανό σχήμα ασκείται το βάρος της $m_1 g$ και η δύναμη T_1 από το αβαρές νήμα (πάντα ένα αβαρές μη εκτατό νήμα ασκεί δυνάμεις ίσου μέτρου στα σώματα τα οποία αυτό συνδέει). Λόγω της φοράς της $\dot{\omega}$ την οποία υποθέσαμε, η μάζα m_1 έχει επιτάχυνση γ_1 με φορά προς τα πάνω, ενώ η επιτάχυνση γ_2 της μάζας m_2 έχει φορά προς τα κάτω. Πράγματι· σύμφωνα με τη φορά περιστροφής (φορά της $\dot{\omega}$) της διπλής τροχαλίας, το σχοινί τυλίγεται στην περιφέρεια ακτίνας a και ξετυλίγεται στην περιφέρεια ακτίνας b. Με θετική τη φορά της επιτάχυνσης γ_1, για τη μάζα m_1 έχουμε:



Σχ. 3

$$T_1 - m_1 g = m_1 \gamma_1 \qquad (3)$$

Στο σχήμα 4 φαίνεται η μάζα m_2, όπου με θετική τη φορά της γ_2 έχουμε:



$$m_2 g - T_2 = m_2 \gamma_2 \qquad (4)$$

Για την εξίσωση συνδέσμου, παρατηρούμε ότι αν η τροχαλία στραφεί κατά γωνία φ, στην περιφέρεια ακτίνας b ξετυλίγεται μήκος νήματος ίσο με $b\varphi$, ενώ στην περιφέρεια ακτίνας a τυλίγεται μήκος νήματος ίσο με $a\varphi$. Έτσι, η μάζα m_1 κατεβαίνει κατά $y_2 = b\varphi$ ενώ η m_2 ανεβαίνει κατά $y_1 = a\varphi$. Με παραγώγιση των σχέσεων αυτών δύο φορές ως προς t έχουμε:

$$y_2 = b\varphi \quad \Longrightarrow \quad \gamma_2 = b\dot{\omega} \qquad (5)$$

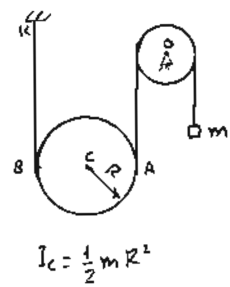
$$y_1 = a\varphi \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 = a\dot{\omega} \qquad (6)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2),... (6) δίνει

$$\gamma_2 = \frac{b(m_2 b - m_1 a)g}{M\rho^2 + m_1 a^2 + m_2 b^2} \qquad \dot{\omega} = \frac{(m_2 b - m_1 a)g}{M\rho^2 + m_1 a^2 + m_2 b^2}$$

Άσκηση 10

Στο σύστημα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, το αβαρές μη εκτατό νήμα περνά από την περιφέρεια του τυμπάνου μάζας M, ακτίνας R με $I_c = MR^2/2$ και από την αβαρή τροχαλία η οποία έχει σταθερό το κέντρο της O. Ζητείται η επιτάχυνση της μάζας m.



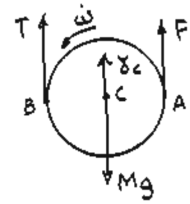
$I_c = \frac{1}{2} m R^2$

Λύση

Εξετάζουμε κάθε σώμα χωριστά.

Το Δ.Ε.Σ. της μάζας m φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Υποθέτουμε ότι αυτή πέφτει. Είναι:

$$mg - F = m\gamma \qquad (1)$$



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το Δ.Ε.Σ. του τυμπάνου. Επειδή η μάζα m πέφτει, το τύμπανο ανεβαίνει. Έτσι, στο σημείο B το νήμα τυλίγεται στο τύμπανο, ενώ στο σημείο A ξετυλίγεται και το τύμπανο περιστρέφεται αντιωρολογιακά με γωνιακή επιτάχυνση $\dot\omega$. Η τροχαλία είναι αβαρής, άρα στο σημείο A του τυμπάνου ασκείται από το σχοινί δύναμη F, όση και στη μάζα m. Εχουμε:

$$\Sigma F_y = M\gamma_c \quad \Longrightarrow \quad T + F - Mg = M\gamma_c \qquad (2)$$

$$\Sigma M_c = I_c\dot\omega \quad \Longrightarrow \quad FR - TR = \frac{1}{2}MR^2\dot\omega \quad \Longrightarrow \quad F - T = \frac{MR}{2}\dot\omega \qquad (3)$$

Εξισώσεις συνδέσμων: Είναι προφανές ότι το σημείο B του τυμπάνου είναι στιγμιαία ακίνητο. Έτσι, αν το τύμπανο στραφεί κατά γωνία $d\varphi$, κατά τη θετική φορά, το κέντρο C θ' ανέβει κατα $dy_c = Rd\varphi$, ενώ το σημείο A θ' ανέβει κατά $dy_A = 2Rd\varphi$. Άρα η m θα πέσει κατά $dy = dy_A = 2Rd\varphi$ (όσο θ' ανέβει το A). Από τις σχέσεις:

$$dy_c = Rd\varphi \qquad\qquad dy = 2Rd\varphi$$

με δεύτερη παραγώγιση ως προς t βρίσκουμε:

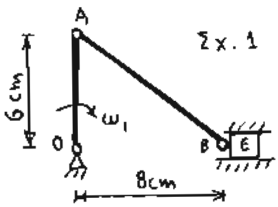
$$\gamma_c = R\dot\omega \quad (4) \qquad\qquad \gamma = 2R\dot\omega \quad (5)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3), (4), (5) δίνει:

$$\gamma = \frac{2mg - Mg}{2m + \frac{5M}{4}}$$

Άσκηση 11

Στο μηχανισμό του σχήματος ο στρόφαλος OA έχει

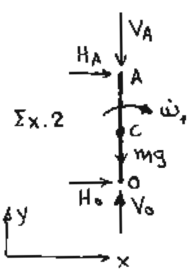


μάζα $m = 1kg$ και περιστρέφεται στη φάση του σχήματος με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 2r/s$ κατά την ωρολογιακή φορά. Ο διωστήρας ΑΒ έχει μάζα $M = 3kg$ και θεωρείται, όπως και ο στρόφαλος, ομογενής ράβδος. Το έμβολο Ε έχει μάζα $m_E = 6\,kg$ και η κίνησή του γίνεται χωρίς τριβή. Στη φάση του σχήματος, ζητείται η επιτάχυνση του εμβόλου δεδομένου ότι ο μηχανισμός βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο.

Λύση

Το μηχανισμό αυτό έχουμε εξετάσει στο κεφάλαιο της Κινηματικής. Εδώ έχουμε πρόβλημα δυναμικής αφού ζητείται επιτάχυνση χωρίς να έχουμε δεδομένη κάποια επιτάχυνση. (Άλλωστε είναι δοσμένες και οι μάζες των μελών του μηχανισμού, πράγμα άχρηστο στην Κινηματική).

Εξετάζουμε κάθε μέλος του μηχανισμού χωριστά: Το Δ.Ε.Σ. του στροφάλου φαίνεται στο σχήμα 2. Επειδή θεωρείται ομογενής ράβδος το κέντρο μάζας C βρίσκεται στο μέσο του. Έχουμε:



$$\Sigma F_x = m\gamma_{cx} \implies H_0 + H_A = m\gamma_{cx} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = m\gamma_{cy} \implies V_0 - mg - V_A = m\gamma_{cy} \quad (2)$$

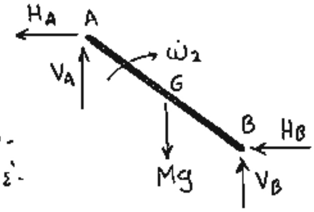
και επειδή το σημείο Ο είναι σταθερό, έχουμε:

$$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_0 = I_0\dot{\omega}_1 \implies H_A\cdot(OA) = I_0\dot{\omega}_1 \implies$$

$$H_A\cdot 6cm = \frac{1}{3}m\cdot(6cm)^2\dot{\omega}_1 \implies H_A = 2\,kg\cdot 10^{-2}m\,\dot{\omega}_1 \implies$$

$$H_A = 0{,}02\,\dot{\omega}_1 \quad (3)$$

Στο σχήμα 3 φαίνεται το Δ.Ε.Σ του διωστήρα AB ο οποίος είναι αρθρωμένος στα άκρα του A, B με το στρόφαλο OA και το έμβολο E αντίστοιχα. Επειδή θεωρείται και ο διωστήρας ομογενής ράβδος, το κέντρο μάζας του G βρίσκεται στο μέσο του. Έχουμε:



$$\Sigma F_x = M\gamma_{Gx} \implies -H_A - H_B = M\gamma_{Gx} \qquad (4)$$

$$\Sigma F_y = M\gamma_{Gy} \implies V_A + V_B - Mg = M\gamma_{Gy} \qquad (5)$$

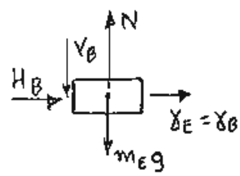
$$\overset{\curvearrowright +}{\Sigma M_G} = I_G\dot{\omega}_2 \implies V_A \cdot 0{,}04m - H_A \cdot 0{,}03m - V_B \cdot 0{,}04m +$$

$$+ H_B \cdot 0{,}03m = \frac{1}{12} M (AB)^2 \dot{\omega}_2 \implies$$

$$V_A \cdot 0{,}04 - H_A \cdot 0{,}03 - V_B \cdot 0{,}04 + H_B \cdot 0{,}03 = \frac{1}{12} 3 \cdot (0{,}06^2 + 0{,}08^2)\dot{\omega}_2 \implies$$

$$4V_A - 3H_A - 4V_B + 3H_B = 0{,}25\dot{\omega}_2 \qquad (6)$$

Για το έμβολο E, του οποίου το Δ.Ε.Σ. φαίνεται στο διπλανό σχήμα, έχουμε:



$$\Sigma F_x = m_E \cdot \gamma_B \implies H_B = m_E \cdot \gamma_B \qquad (7)$$

αφού το έμβολο κινείται ευθύγραμμα κατά τον άξονα x με επιτάχυνση $\gamma_E = \gamma_B$.

$$\Sigma F_y = 0 \implies N - m_E \cdot g - V_B = 0 \qquad (8)$$

Οι εξισώσεις συνδέσμων είναι οι σχέσεις μεταξύ των επιταχύνσεων και γωνιακών επιταχύνσεων οι οποίες εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις. Βρίσκονται με τη βοήθεια της κινηματικής:

Με γνωστή τη γωνιακή ταχύτητα $\underline{\omega}_1 = -2\underline{k}$ του στροφάλου ΟΑ έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_A = \cancel{\underset{\sim}{v}_0}^{0} + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{OA} = -2\underset{\sim}{k} \times (0{,}06\underset{\sim}{j}) \Rightarrow \quad \underset{\sim}{v}_A = 0{,}12\underset{\sim}{i}$$

και στο διωστήρα έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{AB} \quad \Longrightarrow \quad v_B\underset{\sim}{i} = 0{,}12\underset{\sim}{i} + \omega_2\underset{\sim}{k} \times (0{,}08\underset{\sim}{i} - 0{,}06\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_B = 0{,}12\underset{\sim}{i} + 0{,}08\omega_2\underset{\sim}{j} + 0{,}06\omega_2\underset{\sim}{i} \quad \Longrightarrow \underset{\sim}{v}_B = (0{,}12 + 0{,}06\omega_2)\underset{\sim}{i} + 0{,}08\omega_2\underset{\sim}{j} \quad (9)$$

όπου, προφανώς, είναι $\underset{\sim}{v}_B = v_B\underset{\sim}{i}$ και υποθέσαμε $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2\underset{\sim}{k}$. Από τη σχέση (9) προκύπτει $\omega_2 = 0$ και $\underset{\sim}{v}_B = 0{,}12\underset{\sim}{i}$

Με γνωστές τις $\underset{\sim}{\omega}_1 = -2\underset{\sim}{k}$, $\omega_2 = 0$ προχωράμε τώρα στις επιταχύνσεις. Επειδή δεν υπάρχει δοσμένη κάποια επιτάχυνση, θα υπολογίσουμε τις επιταχύνσεις συναρτήσει της γωνιακής επιτάχυνσης $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 = -\dot{\omega}_1\underset{\sim}{k}$ του στροφάλου ΟΑ. (Το γεγονός ότι είναι $\omega_2 = 0$ δεν σημαίνει, φυσικά, ότι είναι και $\dot{\omega}_2 = 0$ αφού οι τιμές αυτές είναι στιγμιαίες).

Στο στρόφαλο ΟΑ έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \cancel{\underset{\sim}{\gamma}_0}^{0} + \dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 \times \underset{\sim}{OA} - \omega_1^2\underset{\sim}{OA} = -\dot{\omega}_1\underset{\sim}{k} \times 0{,}06\underset{\sim}{j} - 2^2 \cdot 0{,}06\underset{\sim}{j} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_A = \dot{\omega}_1\, 0{,}06\underset{\sim}{i} - 0{,}24\underset{\sim}{j} \qquad (10)$$

Στο διωστήρα ΑΒ έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = \underset{\sim}{\gamma}_A + \dot{\underset{\sim}{\omega}}_2 \times \underset{\sim}{AB} - \omega_2^2\underset{\sim}{AB} \quad \overset{(10)}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = 0{,}06\dot{\omega}_1\underset{\sim}{i} - 0{,}24\underset{\sim}{j} + (-\dot{\omega}_2\underset{\sim}{k}) \times (0{,}08\underset{\sim}{i} - 0{,}06\underset{\sim}{j}) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = 0{,}06\dot{\omega}_1\underset{\sim}{i} - 0{,}24\underset{\sim}{j} - 0{,}08\dot{\omega}_2\underset{\sim}{j} - 0{,}06\dot{\omega}_2\underset{\sim}{i} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_B = (0{,}06\dot{\omega}_1 - 0{,}06\dot{\omega}_2)\underset{\sim}{i} + (-0{,}24 - 0{,}08\dot{\omega}_2)\underset{\sim}{j}$$

Όμως, προφανώς, είναι $\underset{\sim}{\gamma}_B = \gamma_B\underset{\sim}{i}$. Έτσι, η τελευταία σχέση δίνει:

$\gamma_B = 0{,}06\,\dot{\omega}_1 - 0{,}06\,\dot{\omega}_2 \quad , \quad 0 = -0{,}24 - 0{,}08\,\dot{\omega}_2$

Άρα είναι $\dot{\omega}_2 = -3\,r/s^2$ και

$$\gamma_B = 0{,}06\,\dot{\omega}_1 + 0{,}18 \qquad (11)$$

Στο μέσο C του στροφάλου έχουμε:

$$\underline{\gamma}_C = \cancel{\underline{\gamma}_O}^{\,0} + \underline{\dot{\omega}}_1 \times \underline{OC} - \omega_1^2\,\underline{OC} = -\dot{\omega}_1\,\underline{k} \times (0{,}03\,\underline{j}) - 2^2 \cdot 0{,}03\,\underline{j} \Longrightarrow$$

$$\underline{\gamma}_C = 0{,}03\,\dot{\omega}_1\,\underline{i} - 0{,}12\,\underline{j}$$

Άρα είναι:

$$\gamma_{Cx} = 0{,}03\,\dot{\omega}_1 \qquad (12)$$

$$\gamma_{Cy} = -0{,}12 \qquad (13)$$

Στο μέσο G του διωστήρα έχουμε:

$$\underline{\gamma}_G = \underline{\gamma}_A + \underline{\dot{\omega}}_2 \times \underline{AG} - \omega_2^2 \cdot \underline{AG} \overset{(10)}{\Longrightarrow}$$

$$\underline{\gamma}_G = 0{,}06\,\dot{\omega}_1\,\underline{i} - 0{,}24\,\underline{j} - \dot{\omega}_2\,\underline{k} \times (0{,}08\,\underline{i} - 0{,}06\,\underline{j}) \Longrightarrow$$

$$\underline{\gamma}_G = 0{,}06\,\dot{\omega}_1\,\underline{i} - 0{,}24\,\underline{j} + 0{,}08\,\dot{\omega}_2\,\underline{j} - 0{,}06\,\dot{\omega}_2\,\underline{i}$$

Με $\dot{\omega}_2 = -3\,r/s^2$ όπως βρέθηκε παραπάνω, παίρνουμε:

$$\underline{\gamma}_G = (0{,}06\,\dot{\omega}_1 + 0{,}18)\,\underline{i}$$

Άρα είναι $\gamma_{Gy} = 0$ και

$$\gamma_{Gx} = 0{,}06\,\dot{\omega}_1 + 0{,}18 \qquad (14)$$

Από τις εξισώσεις (3), (4), (5), (6), (7), (11) βρίσκουμε $\dot{\omega}_1 = 0{,}96\,r/s^2$ και κατόπιν $\gamma_B = 0{,}24\,m/s^2$

6.3 Κινητική ενέργεια στερεού σώματος το οποίο κάνει επίπεδη κίνηση

Υποθέτουμε ότι ένα στερεό σώμα κάνει επίπεδη κίνηση π.χ. στο επίπεδο Oxy. Αν ω είναι η γωνιακή του ταχύτητα και $\underset{\sim}{\upsilon_c}$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας C, τότε η κινητική ενέργεια του στερεού δίνεται από τη σχέση

$$T = \frac{1}{2} M \upsilon_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \qquad (6.3.1)$$

όπου M είναι η μάζα του στερεού σώματος και I_c η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα Cz ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης. Ο α΄ όρος της παραπάνω σχέσης είναι γνωστός ως **μεταφορική κινητική ενέργεια** ή **κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς**. Ο β΄ όρος (του β΄ μέλους) είναι γνωστός ως **κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής**:

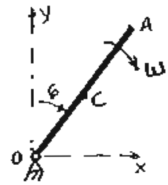
$$T_{μεταφ} = \frac{1}{2} M \upsilon_c^2 \qquad T_{περ} = \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

Στην ειδική περίπτωση που το στερεό έχει σημείο A με **μηδενική ταχύτητα**, η κινητική ενέργεια του στερεού δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \qquad (6.3.2)$$

Φυσικά, οι σχέσεις (6.3.1), (6.3.2) οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα!

Άσκηση 1



Μία ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους ℓ είναι αρθρωμένη στο άκρο της O και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές στο κατακόρυφο επίπεδο. Αρχικά η ράβδος είναι κατακόρυφη και ακίνητη. Με ελαφρά διαταραχή η ράβδος αρχίζει να πέφτει. Ζητούνται:

(a) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου και η ταχύτητα του άκρου της A όταν αυτή σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο. Δίνεται $I_c = m\ell^2/12$.

(b) Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου στην ίδια θέση και η αντίδραση στο O.

Λύση

(a) Επειδή δεν υπάρχουν τριβές, διατηρείται η μηχανική ενέργεια. Όταν η ράβδος βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση είναι ακίνητη, άρα έχει μηδενική κινητική ενέργεια στη θέση αυτή. Με επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο από το O, η δυναμική ενέργεια στην ίδια θέση είναι ίση με $mg\ell/2$ αφού το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται σε απόσταση $\ell/2$ πάνω από το επίπεδο αναφοράς. (Γενικά, για την εύρεση της δυναμικής βαρυτικής ενέργειας ενός στερεού, θεωρούμε τη μάζα του συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας του). Άρα στην κατακόρυφη θέση έχουμε:

$$E^{(1)}_{μηχ} = 0 + mg\frac{\ell}{2} \implies E^{(1)}_{μηχ} = mg\frac{\ell}{2} \qquad (1)$$

Όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω. Επειδή το σημείο O έχει μηδενική ταχύτητα, η κινητική ενέργεια της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T_\varphi = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \qquad (2)$$

όπου

$$I_O = I_C + m\,(OC)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2$$

σύμφωνα με το θ. Steiner. Έτσι, η σχέση (2) δίνει:

$$T_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} m\ell^2\omega^2 \implies T_2 = \frac{1}{6} m\ell^2\omega^2 \qquad (3)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τη γενική σχέση:

$$T_2 = \frac{1}{2} m\upsilon_C^2 + \frac{1}{2} I_C\omega^2 \qquad (4)$$

όπου είναι:

$$\underset{\sim}{\upsilon}_C = \underset{\sim}{\upsilon}_O + \underset{\sim}{\omega}\times \underset{\sim}{OC} = 0 + (-\omega\underline{k})\times\left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underline{i} + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underline{j}\right) =$$

$$= -\omega\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underline{j} + \omega\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underline{i} \implies \upsilon_C^2 = \omega^2\frac{\ell^2}{4}$$

και η σχέση (4) δίνει:

$$T_2 = \frac{1}{2} m\cdot\omega^2\frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{12} m\ell^2\omega^2 \implies T_2 = \frac{1}{6} m\ell^2\omega^2 \qquad (5)$$

Στη θέση αυτή, το κέντρο μάζας C της ράβδου βρίσκεται σε ύψος $(\ell/2)\cos\varphi$ πάνω από το επίπεδο αναφοράς. Άρα η δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι ίση με $+mg\ell\cos\varphi/2$ και έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi}^{(2)} = \frac{1}{6} m\ell^2\omega^2 + mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi \qquad (6)$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας παίρνουμε:

$$E_{\mu\eta\chi}^{(1)} = E_{\mu\eta\chi}^{(2)} \implies mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{6} m\ell^2\omega^2 + mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi \implies$$

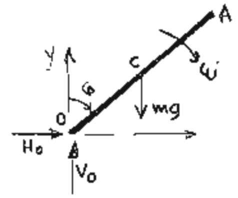
$$\omega = \left(\frac{3g}{\ell}(1-\cos\varphi)\right)^{1/2} \qquad (7)$$

Η ταχύτητα του σημείου A υπολογίζεται:

$$\underset{\sim}{\upsilon}_A = \underset{\sim}{\upsilon}_O + \underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{OA} = 0 - \omega\underline{k}\times\left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underline{i} + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underline{j}\right) \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_A = -\frac{\ell}{2}\left(\frac{3g}{\ell}(1-\cos\varphi)\right)^{1/2}\left(\sin\varphi\,\underline{j} - \cos\varphi\,\underline{i}\right) \qquad (8)$$

(b) Το Δ.Ε.Σ. (στη θέση φ) της ράβδου φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έχουμε:



$$\Sigma F_x = m\gamma_{cx} \Longrightarrow H_o = m\gamma_{cx} \qquad (9)$$

$$\Sigma F_y = m\gamma_{cy} \Longrightarrow V_o - mg = m\gamma_{cy} \qquad (10)$$

Επειδή το σημείο O έχει μηδενική επιτάχυνση, έχουμε:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_o = I_o\dot{\omega} \Longrightarrow mg\cdot\frac{\ell}{2}\sin\varphi = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\omega} \Longrightarrow \dot{\omega} = \frac{3g}{2\ell}\sin\varphi \qquad (11)$$

Η εξίσωση συνδέσμου είναι:

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = \underset{\sim}{\gamma}_o + \underset{\sim}{\dot{\omega}}\times\underset{\sim}{OC} - \omega^2\underset{\sim}{OC} = -\dot{\omega}\underset{\sim}{k}\times\left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underline{i} + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underline{j}\right) -$$

$$-\omega^2\left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underline{i} + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underline{j}\right) = -\dot{\omega}\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underline{j} + \dot{\omega}\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underline{i} -$$

$$-\omega^2\left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underline{i} + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underline{j}\right) \Longrightarrow$$

$$\gamma_{cx} = \dot{\omega}\frac{\ell}{2}\cos\varphi - \omega^2\frac{\ell}{2}\sin\varphi \qquad (12)$$

$$\gamma_{cy} = -\dot{\omega}\frac{\ell}{2}\sin\varphi - \omega^2\frac{\ell}{2}\cos\varphi \qquad (13)$$

Με βάση τις σχέσεις (7), (11), (12), η σχέση (9) δίνει:

$$H_o = m\left(\frac{3g}{2\ell}\sin\varphi\cdot\frac{\ell}{2}\cos\varphi - \frac{3g}{\ell}(1-\cos\varphi)\frac{\ell}{2}\sin\varphi\right) \Longrightarrow$$

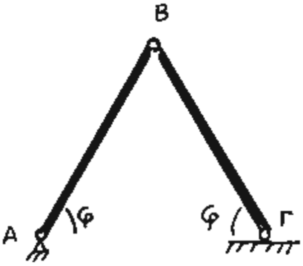
$$H_o = \frac{3mg}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - 1\right)\sin\varphi \qquad (14)$$

και, όμοια, η σχέση (10) με βάση τις (7), (11), (12) δίνει:

$$V_o = mg + m\left(-\frac{3g}{2\ell}\sin\varphi\,\frac{\ell}{2}\sin\varphi - \frac{3g}{\ell}(1-\cos\varphi)\,\frac{\ell}{2}\cos\varphi\right) \Longrightarrow$$

$$V_o = mg + \frac{3mg}{2}\left(\cos^2\varphi - \cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)$$

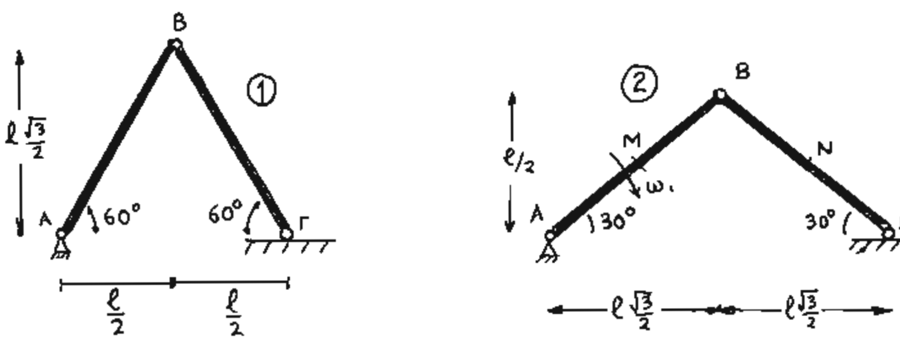
Άσκηση 2



Ο μηχανισμός του σχήματος κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο ώστε το άκρο Γ να ολισθαίνει στον οριζόντιο οδηγό χωρίς τριβή. Δίνονται $(AB)=(B\Gamma)=\ell$ και ότι οι μάζες των AB, BΓ είναι m η καθεμία. Αφήνουμε το μηχανισμό (χωρίς αρχική ταχύτητα) όταν $\varphi=60^\circ$. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της AB όταν η φ είναι ίση με 30°.

Λύση

Καθώς αφήνουμε το μηχανισμό από τη θέση $\varphi=60^\circ$ τα διάφορα μέλη του μηχανισμού αρχίζουν να κινούνται. Υποθέτουμε ότι η AB έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1 όταν $\varphi=30^\circ$, όπως δείχνει το σχήμα.



Επειδή δεν υπάρχουν τριβές, έχουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Προφανώς, στη φάση ① ($\varphi=60^\circ$), είναι $T_1=0$. Στη φάση ② όπου $\varphi=30^\circ$ θα εκφράσουμε την κινητική ενέργεια συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας ω_1 της ράβδου AB. Για το σκοπό αυτό, επιλύουμε το μηχανισμό ως προς τις ταχύτητες στη φάση αυτή.

Από τη ράβδο ΑΒ έχουμε:

$$\underset{\sim}{V}_B = \cancel{\underset{\sim}{V}_A}^{0} + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{AB} = -\omega_1 \underset{\sim}{k} \times \left(\ell \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{i} + \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{j}\right) \Rightarrow \underset{\sim}{V}_B = \omega_1 \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{i} - \omega_1 \ell \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{j} \quad (1)$$

Από τη ραβδο ΒΓ: Υποθέτουμε ότι $\underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \underset{\sim}{k}$ είναι η γωνιακή της ταχύτητα. Είναι

$$\underset{\sim}{V}_\Gamma = \underset{\sim}{V}_B + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{B\Gamma} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{V}_\Gamma = -\omega_1 \frac{\ell}{2}\sqrt{3}\, \underset{\sim}{j} + \omega_1 \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{i} + \omega_2 \underset{\sim}{k} \times \left(\ell \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{i} - \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{j}\right) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{V}_\Gamma = -\omega_1 \frac{\ell}{2}\sqrt{3}\, \underset{\sim}{j} + \omega_1 \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{i} + \omega_2 \ell \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{j} + \omega_2 \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{i}$$

Όμως λόγω του περιορισμού η ταχύτητα $\underset{\sim}{V}_\Gamma$ δεν έχει κατακόρυφη συνιστώσα. Έτσι έχουμε:

$$-\omega_1 \frac{\ell}{2}\sqrt{3} + \omega_2 \frac{\ell}{2}\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1$$

Υπολογίζουμε τώρα τις ταχύτητες των σημείων Μ, Ν που είναι μέσα αντίστοιχα των ΑΒ, ΒΓ. Έχω

$$\underset{\sim}{V}_M = \underset{\sim}{V}_A + \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{AM} = -\omega_1 \underset{\sim}{k} \times \frac{\underset{\sim}{AB}}{2} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{V}_M = \frac{\underset{\sim}{V}_B}{2} = \omega_1 \frac{\ell}{4} \underset{\sim}{i} - \omega_1 \frac{\ell}{4}\sqrt{3}\, \underset{\sim}{j}$$

και

$$\underset{\sim}{V}_N = \underset{\sim}{V}_B + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{BN} = -\omega_1 \frac{\ell}{2}\sqrt{3}\, \underset{\sim}{j} + \omega_1 \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{i} + \omega_2 \underset{\sim}{k} \times \frac{\underset{\sim}{B\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{V}_N = -\omega_1 \frac{\ell}{2}\sqrt{3}\, \underset{\sim}{j} + \omega_1 \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{i} + \omega_1 \underset{\sim}{k} \times \left(\ell \frac{\sqrt{3}}{4} \underset{\sim}{i} - \frac{\ell}{4} \underset{\sim}{j}\right) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{V}_N = -\omega_1 \ell \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sim}{j} + \omega_1 \frac{\ell}{2} \underset{\sim}{i} + \omega_1 \ell \frac{\sqrt{3}}{4} \underset{\sim}{j} + \omega_1 \frac{\ell}{4} \underset{\sim}{i} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{V}_N = 3\omega_1 \frac{\ell}{4} \underset{\sim}{i} - \omega_1 \ell \frac{\sqrt{3}}{4} \underset{\sim}{j}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος όταν $\varphi = 30^\circ$

είναι :

$$T_2 = \frac{1}{2} m |\underset{\sim}{v}_M|^2 + \frac{1}{2} I_M^{AB} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m |\underset{\sim}{v}_N|^2 + \frac{1}{2} I_N^{B\Gamma} \omega_2^2$$

Όμως η ροπή αδράνειας ράβδου με μάζα m και μήκος ℓ ως προς άξονο κάθετο στο μέσο της είναι $m\ell^2/12$ οπότε σύμφωνα με τα $\underset{\sim}{v}_M$, $\underset{\sim}{v}_N$, ω_2 που βρήκαμε έχω:

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left(\omega_1^2 \frac{\ell^2}{16} + \omega_1^2 \frac{\ell^2 \cdot 3}{16} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m \ell^2 \omega_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m \cdot \left(9\omega_1^2 \frac{\ell^2}{16} + 3\omega_1^2 \frac{\ell^2}{16} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m \ell^2 \omega_1^2 = \frac{7}{12} m \ell^2 \omega_1^2$$

Επειδή δεν υπάρχει τριβή, διατηρείται η μηχανική ενέργεια μεταξύ των φάσεων : $\varphi = 60^\circ$, $\varphi = 30^\circ$:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \qquad (2)$$

όπου $T_1 = 0$ αφού για $\varphi = 60^\circ$ ο μηχανισμός είναι ακίνητος. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο από τα Α και Γ οπότε έχω:

$$U_2 = mg \cdot \frac{\ell}{4} + mg \frac{\ell}{4} = mg \frac{\ell}{2}$$

$$U_1 = mg\ell \frac{\sqrt{3}}{4} + mg\ell \frac{\sqrt{3}}{4} = mg\ell \frac{\sqrt{3}}{2}$$

και η (2) γράφεται:

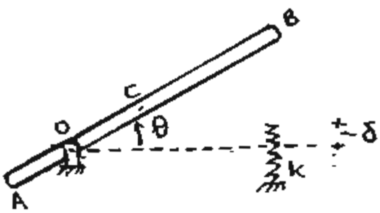
$$0 + mg\ell \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{12} m\ell^2 \omega_1^2 + mg \frac{\ell}{2} \implies$$

$$\omega_1^2 = \frac{6g}{7\ell} (\sqrt{3} - 1)$$

Άσκηση 3

Η ομογενής ράβδος με μήκος ℓ και μάζα m βρίσκεται αρχικά σε κατακόρυφη θέση και έχει γωνιακή ταχύτητα ω. Αν η ράβδος είναι ακίνητη όταν $\vartheta = 0$, να υπολογισθεί η τιμή του ω. Δίνεται η σταθερή k του ελατήριου και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της C ίση με $m\ell^2/12$, $OA = \ell/4$

Λύση



Κατά τη διάρκεια της κίνησης της ράβδου η μηχανική της ενέργεια διατηρείται σταθερή, αφού υποτίθεται ότι η περιστροφή γύρω από το O γίνεται χωρίς τριβή. Παίρνουμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το O.

Στη θέση $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ η ράβδος έχει:

Δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας $U_\beta = mg(OC)$ και επειδή $(OC) = (AC) - (AO) = \ell/4$ έχω:

$$U_\beta = mg\,\frac{\ell}{4} \qquad (1)$$

Δυναμική ενέργεια λόγω ελατήριου μηδενική αφού το ελατήριο είναι ελεύθερο.
Κινητική ενέργεια

$$E_k = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

όπου $I_o = I_C + m\cdot(OC)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{7m\ell^2}{48}$, άρα

$$E_k = \frac{7}{96} m\ell^2\omega^2 \qquad (2)$$

Η μηχανική ενέργεια για $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ είναι:

$$E = mg\frac{\ell}{4} + \frac{7}{96}m\ell^2\omega^2 \qquad (3)$$

Στη θέση $\vartheta=0$, όπου η ράβδος είναι ακίνητη, η δυναμική ενέργεια της ράβδου λόγω βαρύτητας είναι μηδενική, όπως επίσης και η κινητική της ενέργεια. Η δυναμική ενέργεια λόγω του ελατήριου είναι $\frac{1}{2}k\delta^2$ οπότε

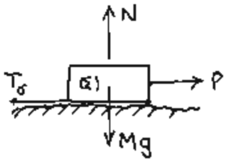
$$E = \frac{1}{2}k\delta^2 \qquad (4)$$

Εξισώνουμε τα δεύτερα μέλη των (3), (4) οπότε προκύπτει:

$$mg\frac{\ell}{4} + \frac{7}{96}m\ell^2\omega^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 \implies$$

$$\omega^2 = \frac{96}{7m\ell^2}\left(\frac{1}{2}k\delta^2 - mg\frac{\ell}{4}\right)$$

6.4 Η τριβή στη μεταφορική και στην περιστροφική κίνηση.



Η στατική τριβή

Υποθέτουμε ότι το σώμα (Σ) στηρίζεται στην τραχεία οριζόντια επιφάνεια όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Εφαρμόζουμε μια δύναμη P μικρού σχετικά μέτρου αλλά το σώμα δεν κινείται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι με την εφαρμογή της δύναμης P εμφανίζεται συγχρόνως η **δύναμη τριβής** T_σ. Η εφαρμοζόμενη δύναμη P είναι γνωστή ως **κινούσα δύναμη**. Εφ' όσον το σώμα παραμένει σε ακινησία η δύναμη τριβής T_σ είναι γνωστή ως **στατική τριβή**. Η φορά της στατικής τριβής είναι αντίθετη της φοράς της κινούσας δύναμης P.

Είναι προφανές ότι αν αυξηθεί το μέτρο της κινούσας δύναμης θα αυξηθεί και το μέτρο της δύναμης στατικής τριβής. Για κάποια τιμή P_m της κινούσας δύναμης παρατηρείται έναρξη ολίσθησης (επίκειται ολίσθηση). Για την τιμή αυτή της κινούσας δύναμης η στατική τριβή γίνεται μέγιστη. Ισχύει

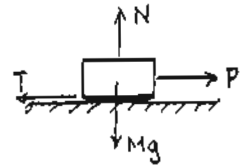
$$T_{\sigma max} = \mu_s N \qquad (6.4.1)$$

όπου N είναι η κάθετη δύναμη στην επιφάνεια επαφής που ασκείται στο σώμα (Σ) και μ_s ο **συντελεστής στατικής τριβής** μεταξύ του σώματος (Σ) και της επιφάνειας επαφής. Η προηγούμενη σχέση ισχύει μόνο τη στιγμή που αρχίζει η ολίσθηση. Είναι προφανές ότι για να μην έχουμε ολίσθηση πρέπει να ισχύει:

$$T_\sigma < \mu_s N \qquad (6.4.2)$$

Η ανισοτική αυτή σχέση αποτελεί τη συνθήκη για **μή ολίσθηση**.

Η τριβή ολίσθησης

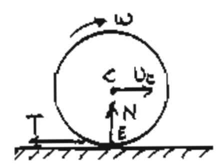


Υποθέτουμε ότι το σώμα κινείται (κατά τη φορά της δύναμης P). Στην περίπτωση αυτή η δύναμη τριβής T χαρακτηρίζεται ως **τριβή ολίσθησης**. Η T έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας του σώματος ως προς την επιφάνεια στην οποία αυτό στηρίζεται και ισχύει:

$$T = \mu N \qquad (6.4.3)$$

όπου μ είναι ο **συντελεστής τριβής ολίσθησης**. Στην πράξη, η τιμή του μ είναι λίγο μικρότερη από την τιμή του μ_s σ' ένα δεδομένο πρόβλημα.

Ο τροχός

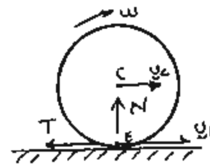


(α) Υποθέτουμε ότι ο τροχός του σχήματος κυλίεται χωρίς ολίσθηση πάνω σε μία επιφάνεια. Όπως είναι γνωστό, στην περίπτωση αυτή το σημείο επαφής E έχει μηδενική ταχύτητα: $\underline{\upsilon}_E = 0$. Οι φορές των υ_c, ω είναι συσχετισμένες: Αν η $\underline{\upsilon}_c$ έχει φορά προς τα δεξιά, η ω είναι ωρολογιακή. Αν η $\underline{\upsilon}_c$ έχει φορά προς τ' αριστερά, η ω είναι αντιωρολογιακή. Είναι $\upsilon_c = \omega R$, όπου $R = CE$.

Επειδή το σημείο εφαρμογής E της δύναμης τριβής T έχει μηδενική ταχύτητα, η δύναμη αυτή είναι **στατική τριβή**. Έτσι στην περίπτωση αυτή έχουμε **διατήρηση της μηχανικής ενέργειας**.

Στα προβλήματα, όταν έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, η φορά της T σχεδιάζεται τυχαία και η πραγματική φορά δηλώνεται από το πρόσημό της μετά τους υπολογισμούς. Ισχύει η συνθήκη μή **ολίσθησης**:

$$|T| \leq \mu_s N \qquad (6.4.4)$$

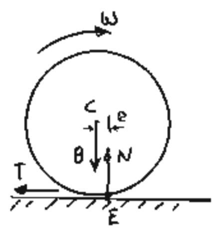


(b) Υποθέτουμε ότι ο τροχός του σχήματος κυλίεται με ολίσθηση: Εδώ, η ταχύτητα του σημείου επαφής Ε του τροχού με το έδαφος είναι διάφορη του μηδενός. Η δύναμη τριβής Τ χαρακτηρίζεται ως **τριβή ολίσθησης** και έχει φορά αντίθετη της φοράς της ταχύτητας $\underset{\sim}{υ}_E$ του σημείου επαφής Ε. Ισχύει

$$T = \mu N \qquad (6.4.5)$$

όπου μ είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ τροχού και εδάφους. Εδώ, προφανώς, η δύναμη τριβής Τ καταναλώνει έργο και, επομένως, δεν διατηρείται γενικά η μηχανική ενέργεια.

Η τριβή κυλίσεως



Πολλές φορές, το σημείο εφαρμογής Ε του κυλιόμενου τροχού δεν βρίσκεται στην ευθεία που περνά από το κέντρο του C και είναι κάθετη στην επιφάνεια που κυλίεται ο τροχός, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, στην περίπτωση αυτή, η κάθετη δύναμη Ν προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο C. Αν e είναι η απόσταση του C από το φορέα της δύναμης Ν, η ροπή αυτή είναι:

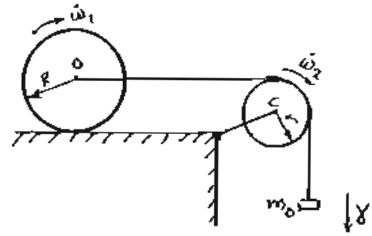
$$M_c = eN \qquad (6.4.6)$$

και ονομάζεται **τριβή κυλίσεως**, ενώ η απόσταση e είναι ο **συντελεστής τριβής κυλίσεως**.

Η τριβή κυλίσεως δεν λαμβάνεται υπόψιν αν δεν αναφέρεται στο πρόβλημα κάτι σχετικό.

Άσκηση 1

Στο πρόβλημα του διπλανού σχήματος ο τροχός κέντρου Ο και ακτίνας R έχει ροπή αδράνειας $I_o = MR^2/2$ και κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο οριζόντιο επίπεδο. Το αβαρές μη εκτατό νήμα συνδέει το κέντρο Ο του τροχού με τη μάζα m_o και

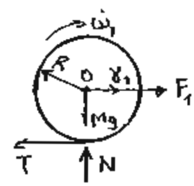


περνά από την περιφέρεια της τροχαλίας η οποία έχει σταθερό το κέντρο της C, μάζα m ακτίνα r και $I_C = mr^2/2$. Αν το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία, να βρεθεί η επιτάχυνση γ και η κινητική ενέργεια του συστήματος τη χρονική στιγμή t, δεδομένου ότι για t=0 ηρεμεί.

Λύση

Επειδή το σύστημα αποτελείται από πολλά σώματα, εξετάζουμε κάθε σώμα χωριστά:

Ο τροχός, του οποίου το Δ.Ε.Σ. φαίνεται στο διπλανό σχήμα, δέχεται τη δύναμη F_1 από το νήμα, το βάρος του Mg, την κάθετη δύναμη N και τη δύναμη τριβής T. Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση, η T είναι στατική τριβή και η φορά της επιλέγεται τυχαία. Στον τροχό έχουμε:

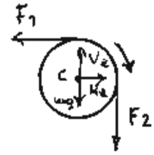


$$\Sigma F_x = M\gamma \quad \Longrightarrow \quad F_1 - T = M\gamma_1 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad N - Mg = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{+}{\Sigma M_o} = I_o\dot\omega \quad \Longrightarrow \quad TR = \frac{1}{2}MR^2\dot\omega_1 \qquad (3)$$

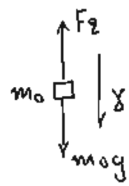
Η τροχαλία δέχεται τις δυνάμεις F_1, F_2 από το νήμα, το βάρος της mg και την κατακόρυφη V_c και οριζόνγια αντίδραση στο C. (Το οριζόντιο νήμα ασκεί δυνάμεις ίσου μέτρου στον τροχό και στην τροχαλία, η οποία θεωρείται ότι στηρίζεται με άρθρωση στο κέντρο της C). Επειδή το κέντρο της τροχαλίας είναι ακίνητο και δεν ζητούνται οι δυνάμεις H_c, V_c, γράφουμε μόνο την εξίσωση της περιστροφικής κίνησης της τροχαλίας:



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_c = I_c \dot{\omega}_2 \Rightarrow F_2 r - F_1 r = \frac{mr^2}{2}\dot{\omega}_2 \Rightarrow$$

$$F_2 - F_1 = \frac{mr}{2}\dot{\omega}_2 \qquad (4)$$

Η μάζα m_0 της οποίας το Δ.Ε.Σ. φαίνεται στο διπλανό σχήμα, δέχεται το βάρος της $m_0 g$ και τη δύναμη F_2 από το νήμα (Το αβαρές κατακόρυφο νήμα ασκεί ίσες κατά μέτρο δυνάμεις στη μάζα m_0 και στην τροχαλία) Με θετική τη φορά της επιτάχυνσης γ, έχουμε:



$$m_0 g - F_2 = m_0 \gamma \qquad (5)$$

Εξισώσεις συνδέσμων: Έστω ότι σε χρόνο t ο τροχός στρέφεται κατά γωνία φ_1 και η τροχαλία κατά γωνία φ_2. Έτσι, επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση, το κέντρο του μετατοπίζεται οριζόντια κατά $x_1 = R\varphi_1$. Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό η μάζα m_0 μετατοπίζεται κατά το ίδιο μήκος $y = R\varphi_1$. Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το μήκος του τόξου που στρέφεται η περιφέρεια της τροχαλίας είναι ίσο με $r\varphi_2$ και επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία είναι $y = x_1 = r\varphi_2$. Άρα έχουμε:

$$x_1 = R\varphi_1 = y = r\varphi_2$$

Με παραγώγιση δύο φορές ως προς το χρόνο, παίρνουμε τις εξισώσεις συνδέσμων:

$$\gamma_1 = R\dot{\omega}_1 = \gamma = r\dot{\omega}_2 \qquad (6)$$

Από το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων παίρνουμε

$$\gamma = \frac{2m_0}{3M+m+2m_0}g \qquad (7)$$

που είναι η επιτάχυνση της μάζας m_0 ίση με την επιτάχυνση γ_1 του κέντρου O του τροχού. Έτσι, επειδή όπως φαίνεται από τη σχέση (7) το γ είναι σταθερό, το κέντρο O και η m_0 εκτελούν ευθύγραμμες ομαλά επιταχυνόμενες κινήσεις, άρα: έχουν ταχύτητες με μέτρο

$$\upsilon = \gamma t.$$

Από τις σχέσεις (6) φαίνεται ότι τα $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ είναι σταθερά. Με ολοκληρώσεις ως προς t παίρνουμε:

$$\omega_1 = \frac{\gamma}{R}t \qquad \omega_2 = \frac{\gamma}{r}t$$

Τη χρονική στιγμή t, η μάζα m_0 έχει κινητική ενέργεια ίση με

$$T_0 = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2 \implies T_0 = \frac{1}{2}m_0\gamma^2t^2$$

αφού κάνει απλή μεταφορική κίνηση. Ο τροχός έχει κινητική ενέργεια

$$T_1 = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_1^2 = \frac{1}{2}M(\gamma t)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\gamma t}{R}\right)^2 \implies$$

$$T_1 = \frac{3}{4}M\gamma^2t^2$$

Η τροχαλία με το κέντρο της ακίνητο έχει:

$$T_2 = \frac{1}{2}I_c\omega_2^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{\gamma}{r}t\right)^2 \implies T_2 = \frac{1}{4}m\gamma^2t^2$$

Έτσι, η κινητική ενέργεια του συστήματος τη χρονική στιγμή t είναι:

$$T_{ολ} = T_0 + T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_0 γ^2 t^2 + \frac{3}{4} M γ^2 t^2 + \frac{1}{4} m γ^2 t^2 \Rightarrow$$

$$T_{ολ} = \frac{1}{2} γ t^2 \left(m_0 + \frac{m}{2} + \frac{3M}{2} \right) \Rightarrow T_{ολ} = \frac{1}{4} (3M + 2m_0 + m) γ^2 t^2$$

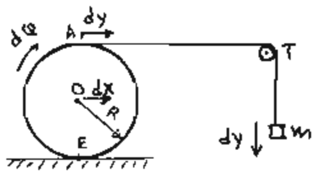
και αντικαθιστώντας το γ από τη σχέση (7) βρίσκουμε:

$$T_{ολ} = \frac{m_0^2 g^2}{3M + 2m_0 + m} t^2$$

Παρατήρηση: Από τη σχέση (4) παρατηρούμε ότι όταν είναι $m = 0$ ή $r = 0$, τότε είναι: $F_1 = F_2$. Άρα όταν κάποιο νήμα εφάπτεται και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια αβαρούς ($m = 0$) τροχαλίας ή τροχαλίας μικρής ακτίνας ($r = 0$) τότε οι δυνάμεις στα δύο άκρα του νήματος είναι ίσες.

Άσκηση 2

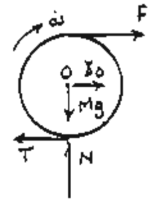
Το αβαρές - μη εκτατό νήμα έχει τυλιχθεί στην περιφέρεια τροχού μάζας M, ακτίνας R και ροπής αδράνειας $I_0 = MR^2/2$. Το νήμα περνά από τη μικρή τροχαλία, όπως στο σχήμα, και στο άκρο του έχει προσδεθεί μία μάζα m.



a) Αν είναι γνωστό ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση, να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m καθώς και η επιτάχυνση του κέντρου O του τροχού.

b) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ τροχού και οριζόντιου δαπέδου είναι $μ_s = 0{,}1$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή της μάζας m ώστε να μην υπάρχει ολίσθηση (μεταξύ τροχού και οριζόντιου επιπέδου).

Λύση



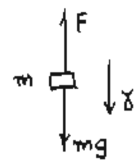
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το Δ.Ε.Σ. του τροχού. Επειδή αυτός κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο οριζόντιο επίπεδο, η φορά της δύναμης τριβής T επιλέχθηκε τυχαία. Η T είναι στατική τριβή. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\gamma_o \implies F - T = M\gamma_o \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \implies N - Mg = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{\curvearrowright}{\Sigma M_o} = I_o\dot{\omega} \implies TR + FR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \implies T + F = \frac{MR}{2}\dot{\omega} \qquad (3)$$

Το οριζόντιο νήμα ασκεί κατά τα γνωστά, οριζόντια δύναμη F στην τροχαλία και επειδή η τροχαλία είναι μικρή, η δύναμη που δέχεται από το κατακόρυφο τμήμα του νήματος είναι επίσης F.



Το κατακόρυφο νήμα ασκεί δύναμη F στη μάζα m, όση ασκεί και στη μικρή τροχαλία και σύμφωνα με το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$mg - F = m\gamma \qquad (4)$$

Για τις εξισώσεις συνδέσμων, υποθέτουμε ότι ο τροχός στρέφεται κατά γωνία $d\varphi$ σε χρονικό διάστημα dt. Το σημείο επαφής E με το οριζόντιο επίπεδο είναι στιγμιαία ακίνητο. Έτσι, ο τροχός περιστρέφεται στιγμιαία περί το E. Άρα, το κέντρο του O μετακινείται προς τα δεξιά κατά $dx = R\,d\varphi$ αφού $OE = R$, ενώ το σημείο A (ανώτατο σημείο του τροχού) μετακινείται κατά $dy = 2R\,d\varphi$, αφού $AE = 2R$. Όμως, επειδή το νήμα είναι μη εκτατό, η μάζα m πέφτει κατά το ίδιο μήκος $dy = 2R\,d\varphi$. Από τις σχέσεις $dx = R\,d\varphi$, $dy = 2R\,d\varphi$ παίρνοντας τις δεύτερες παραγώγους ως προς t βρίσκουμε:

$$\gamma_o = R\dot{\omega} \qquad (5) \qquad\qquad \gamma = 2R\dot{\omega} \qquad (6)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1), (3), (5), (6), (4) βρίσκουμε τις ζητούμενες επιταχύνσεις:

$$\gamma_0 = \frac{4mg}{3M+8m} \qquad \gamma = \frac{8mg}{3M+8m}$$

(b) Από το ίδιο σύστημα των εξισώσεων βρίσκουμε ακόμη τη δύναμη τριβής T:

$$T = -\frac{Mmg}{3M+8m} \qquad (7)$$

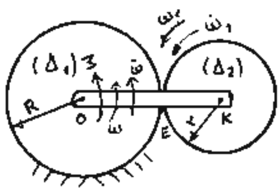
όπου, το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η πραγματική φορά της T είναι προς το δεξιά, αντίθετη δηλαδή της υποτεθείσης. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο E που είναι στιγμιαία ακίνητο, τείνει να μετακινηθεί προς τ' αριστερά στη φάση του σχήματος. Η σχέση (2) δίνει $N = Mg$. Για να μην ολισθήσει ο τροχός, κατά τα γνωστά πρέπει:

$$|T| < \mu_s N \implies \frac{Mmg}{3M+8m} < \mu_s Mg \implies$$

$$m < 0{,}1\,(3M+8m) \implies 0{,}2m < 0{,}3M \implies m < 3M/2$$

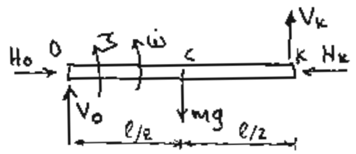
Άσκηση 3

Στο διπλανό σχήμα ο οδοντωτός δίσκος (Δ_1) με κέντρο O και ακτίνα R είναι ακίνητος, στο κατακόρυφο επίπεδο. Η ράβδος OK μπορεί να περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα από το O και περί οριζόντιο άξονα από το κέντρο K του οδοντωτού δίσκου (Δ_2). Έτσι τίθεται σε περιστροφική κίνηση και ο δίσκος (Δ_2) καθώς τίθεται σε περιστροφική κίνηση η ράβδος OK. Στη φάση του σχήματος εφαρμόζεται ροπή M στη ράβδο και αυτή έχει γωνιακή ταχύτητα ω. Οι φορείς των M, ω φαίνονται στο σχήμα. Ζητείται η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου (Δ_2) και η εφαπτομενική



δύναμη που δέχεται ο δίσκος (Δ_2) στο σημείο επαφής με το δίσκο (Δ_1). Δίνονται: η μάζα m και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της ίση με $m\ell^2/12$, η μάζα m_2 και η ροπή αδράνειας του δίσκου (Δ_2) ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο του K, ίση με $\frac{m_2 r^2}{2}$.

Λύση



Το Δ.Ε.Σ. της ράβδου OK φαίνεται στο διπλανό σχήμα (Η ράβδος είναι αρθρωμένη στα άκρα της O, K). Επειδή το O είναι σταθερό σημείο $(\gamma_o = 0)$ και δεν ζητούνται οι δυνάμεις V_o, H_o, γράφουμε μόνο την εξίσωση:

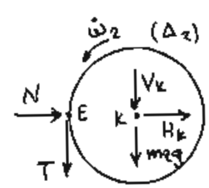
$$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_o = I_o\dot\omega \Rightarrow M - mg\frac{\ell}{2} + V_K\ell = \frac{1}{3}m\ell^2\dot\omega \Rightarrow$$

$$\frac{M}{\ell} - mg\frac{1}{2} + V_K = \frac{m\ell}{3}\dot\omega \qquad (1)$$

αφού, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_o = I_c + m(OC)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_o = \frac{1}{3}m\ell^2$$

όπου, από το δοσμένο σχήμα φαίνεται αμέσως ότι είναι $\ell = R + r$, αφού οι οδοντωτοί κυκλικοί δίσκοι (Δ_1), (Δ_2) εφάπτονται.



Το Δ.Ε.Σ. του οδοντωτού δίσκου (Δ_2) φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι δυνάμεις V_K, H_K αποτελούν δράση - αντίδραση στον τροχό των δυνάμεων V_K, H_K που ασκούνται στη ράβδο στο άκρο της K το οποίο είναι κέντρο του δίσκου Δ_2. Στο σημείο E ο δίσκος (Δ_2) εφάπτεται στον οδοντωτό δίσκο (Δ_1). Έτσι εκεί δέχεται τη στατική τριβή T και την κάθετη δύναμη N. Για τη φορά της γωνιακής επιτάχυνσης $\dot\omega$ της ράβδου προκύπτει εύκολα η φορά της γωνιακής επιτάχυνσης $\dot\omega_2$ του δίσκου (Δ_2), όπως φαίνεται αυτή στο τελευταίο σχήμα. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = m_2 \gamma_{Kx} \Longrightarrow H_K + N = m_2 \gamma_{Kx} \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = m_2 \gamma_{Ky} \Longrightarrow -T - V_K - m_2 g = m_2 \gamma_{Ky} \qquad (3)$$

$$\overset{\curvearrowleft \dot{\omega}_2}{\Sigma M_K} = I_K \dot{\omega}_2 \Longrightarrow Tr = \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\omega}_2 \Longrightarrow T = \frac{m_2 r}{2} \dot{\omega}_2 \qquad (4)$$

Για την εύρεση των εξισώσεων συνδέσμων επιλύουμε το μηχανισμό στη φάση που δίνεται στο σχήμα, κατά τα γνωστά από την κινηματική του απολύτως στερεού σώματος:

Ταχύτητες: Αρχίζουμε τους υπολογισμούς από τη ράβδο ΟΚ της οποίας είναι δοσμένη η γωνιακή ταχύτητα. Έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_K = \underset{\sim}{v}_O + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{OK} = 0 + \omega \underset{\sim}{k} \times \ell \underset{\sim}{i} \Longrightarrow \underset{\sim}{v}_K = \omega \ell \underset{\sim}{j} \qquad (5)$$

Όμως, λόγω των γραναζιών (οδοντωτοί δίσκοι), ο δίσκος (Δ_2) δεν ολισθαίνει ως προς το δίσκο (Δ_1) στο σημείο επαφής Ε, δηλαδή το σημείο Ε έχει μηδενική ταχύτητα. (Η δύναμη Τ είναι στατική τριβή.) Έτσι, στο δίσκο (Δ_2) έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_K = \underset{\sim}{v}_E + \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{EK} = 0 + \omega_2 \underset{\sim}{k} \times (r \underset{\sim}{i}) \Longrightarrow \underset{\sim}{v}_K = \omega_2 r \underset{\sim}{j} \qquad (6)$$

Η φορά της ω_2 προέκυψε από τη δοσμένη φορά της ω. Από τις σχέσεις (5), (6) παίρνουμε:

$$\omega \ell = \omega_2 r \Longrightarrow \omega_2 = \omega \frac{\ell}{r} \qquad (7)$$

Επιταχύνσεις: Από τη ράβδο ΟΚ έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_K = \underset{\sim}{\gamma}_O + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{OK} - \omega^2 \underset{\sim}{OK} = 0 + \dot{\omega} \underset{\sim}{k} \times \ell \underset{\sim}{i} - \omega^2 \ell \underset{\sim}{i} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_K = \dot{\omega} \ell \underset{\sim}{j} - \omega^2 \ell \underset{\sim}{i} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \gamma_{Kx} = -\omega^2 \ell \qquad (8) \qquad \gamma_{Ky} = \dot{\omega} \ell \qquad (9) \right\}$$

Η σχέση (7) ισχύει για οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Έτσι μπορούμε να παραγωγίσουμε ως προς t, οπότε παίρνουμε:

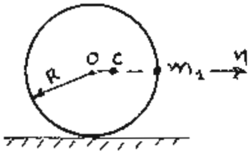
$$\dot{\omega}_2 = \dot{\omega}\,\frac{\ell}{r} \qquad (10)$$

Οι εξισώσεις (8), (9), (10) αποτελούν τις εξισώσεις συνδέσμων.
Από τις εξισώσεις (1), (3), (4), (9), (10) βρίσκουμε:

$$T = \frac{3m_2}{m}\left(\frac{M}{\ell} - m_2 g - \frac{1}{2} m g\right) \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{6}{m_2 r}\left(\frac{M}{\ell} - m_2 g - \frac{1}{2} m g\right)$$

Παρατήρηση: Οι δυνάμεις H_K, N, H_O του προβλήματος δεν είναι δυνατό να υπολογισθούν! Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά τη συναρμολόγηση της κατασκευής ασκείται μία εξωτερική δύναμη αυθαίρετου μέτρου κατά τη διεύθυνση που συνδέει τα κέντρα των δίσκων.

Άσκηση 4



Στην ομογενή κυκλική στεφάνη μάζας m και ακτίνας R έχει επικολληθεί σημειακή μάζα $m_1 = m/3$. Το στερεό αφήνεται στη θέση του διπλανού σχήματος. Αν δεν υπάρχει ολίσθηση με το οριζόντιο επίπεδο, ζητούνται:

a) Η γωνιακή ταχύτητα όταν το στερεό έχει στραφεί κατά γωνία φ.

b) Η γωνιακή επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή.

Δίνεται η ροπή αδράνειας κυκλικής στεφάνης μάζας M και ακτίνας a ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της στεφάνης στο κέντρο της ίση με Ma^2.

Λύση

Θεωρούμε το βοηθητικό άξονα Ox για την εύρεση της θέσης του κέντρου μάζας C του στερεού. Η σημειακή μάζα $m_1 = m/3$ βρίσκεται στη θέση $x_1 = R$. Για την εύρεση του κέντρου μάζας η στεφάνη αντικαθίσταται με υλικό σημείο $m_2 = m$ τοποθετημένο στο κέντρο O ($x_2 = 0$) της στεφάνης. Άρα, η θέση του κέντρου μάζας C του στερεού βρίσκεται:

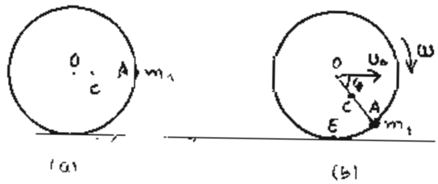
$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{R \cdot \frac{m}{3} + 0 \cdot m}{\frac{m}{3} + m} \Longrightarrow x_C = (OC) = R/4$$

Επειδή η κίνηση είναι κύλιση χωρίς ολίσθηση, το σημείο επαφής του στερεού με το έδαφος έχει μηδενική ταχύτητα. Η δύναμη τριβής είναι στατική τριβή και δεν παράγει έργο. Έτσι διατηρείται η μηχανική ενέργεια.

Με επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο πάνω στο οποίο κινείται η στεφάνη, η μηχανική ενέργεια στη φάση (a) όπου η στεφάνη αφήνεται να κινηθεί είναι:

$$E_{\mu\eta\chi}^{(a)} = 0 + (m + m_1) g R \Longrightarrow E_{\mu\eta\chi}^{(a)} = \frac{4}{3} m g R \qquad (1)$$

αφού στη φάση (a) το στερεό είναι ακίνητο, άρα έχει μηδενική κινητική ενέργεια.



Στη φάση (b), το στερεό έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια αφού έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω. Η κινητική του ενέργεια στη φάση αυτή είναι:

$$T^{(b)} = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2}(m + m_1) v_c^2 \qquad (2)$$

Επειδή το στερεό κυλίεται χωρίς ολίσθηση, είναι $\underset{\sim}{v}_E = 0$ και

$$\underset{\sim}{v}_0 = \cancel{\underset{\sim}{v}_E}^{\,0} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{EO} = -\omega \underset{\sim}{k} \times R \underset{\sim}{j} \Longrightarrow \underset{\sim}{v}_0 = \omega R \underset{\sim}{i}$$

οπότε:

$$\underset{\sim}{v}_C = \underset{\sim}{v}_0 + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{OC} = \omega R \underset{\sim}{i} + (-\omega \underset{\sim}{k}) \times \left((OC)\cos\varphi \underset{\sim}{i} - (OC)\sin\varphi \underset{\sim}{j}\right) =$$

$$= \omega R \underset{\sim}{i} - \omega (OC)\cos\varphi \underset{\sim}{j} - \omega (OC)\sin\varphi \underset{\sim}{i} \quad \xRightarrow{OC = R/4}$$

$$\underset{\sim}{v}_c = \left(\omega R - \omega \frac{R}{4}\sin\varphi\right)\underset{-}{i} - \omega\frac{R}{4}\cos\varphi\, \underset{-}{j} \implies$$

$$v_c^2 = \left(\omega R - \omega\frac{R}{4}\sin\varphi\right)^2 + \left(-\omega\frac{R}{4}\cos\varphi\right)^2 \implies v_c^2 = \frac{\omega^2 R^2}{16}(17-8\sin\varphi)$$

Έτσι, η σχέση (2) γράφεται:

$$T^{(b)} = \frac{1}{2} I_c\omega^2 + \frac{1}{2}\left(m+\frac{m}{3}\right)\frac{\omega^2R^2}{16}(17-8\sin\varphi) \implies$$

$$T^{(b)} = \frac{1}{2} I_c\omega^2 + \frac{m\omega^2R^2}{24}(17-8\sin\varphi) \qquad (3)$$

Η ροπή αδράνειας I_c, που διατηρείται σταθερή κατά την κίνηση κάθε απόλυτα στερεού σώματος είναι:

$$I_c = I_c^{\sigma\tau\varepsilon\varphi} + m_1\cdot(CA)^2 = I_0^{\sigma\tau\varepsilon\varphi} + m(OC)^2 + \frac{m}{3}\left(R-\frac{R}{4}\right)^2 =$$

$$= mR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{3R}{4}\right)^2 \implies I_c = \frac{5}{4}mR^2 \qquad (4)$$

Έτσι, η σχέση (3) γράφεται:

$$T^{(b)} = \frac{1}{2}\,\frac{5}{4}mR^2\omega^2 + \frac{m\omega^2R^2}{24}(17-8\sin\varphi) \implies$$

$$T^{(b)} = \frac{4-\sin\varphi}{3}m\omega^2R^2 \qquad (5)$$

Στη φάση (b), το κέντρο μάζας C βρίσκεται σε ύψος $R-R\sin\varphi$ πάνω από το επίπεδο αναφοράς. Άρα η δυναμική ενέργεια του στερεού στη φάση (b) είναι:

$$U^{(b)} = (m+m_1)g\,(R-R\sin\varphi) \implies U^{(b)} = \frac{4mg}{3}R(1-\sin\varphi) \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5), (6) προκύπτει η έκφραση της μηχανικής ενέργειας στη φάση (b):

$$E_{\mu\eta\chi}^{(b)} = \frac{4-\sin\varphi}{3}m\omega^2R^2 + \frac{4mgR}{3}(1-\sin\varphi) \qquad (7)$$

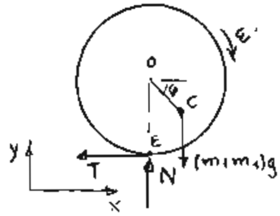
Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τις φάσεις (a) και (b) παίρνουμε:

$$E_{\mu\eta\chi}^{(a)} = E_{\mu\eta\chi}^{(b)} \Rightarrow \frac{4mgR}{3} = \frac{4-\sin\varphi}{3} m\omega^2 R^2 + \frac{4mgR}{3}(1-\sin\varphi) \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4g\sin\varphi}{R(4-\sin\varphi)}} \qquad (8)$$

με φορά που φαίνεται στη φάση (b) του σχήματος.

Το Δ.Ε.Σ. του στερεού φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έχουμε:



$$\Sigma F_x = M\gamma_{cx} \Rightarrow -T = (m+m_1)\gamma_{cx} \Rightarrow$$

$$-T = \frac{4m}{3}\gamma_{cx} \qquad (9)$$

$$\Sigma F_y = M\gamma_{cy} \Rightarrow N - (m+m_1)g = (m+m_1)\gamma_{cy} \Rightarrow$$

$$N - \frac{4m}{3}g = \frac{4m}{3}\gamma_{cy} \qquad (10)$$

$$\Sigma M_c = I_c\dot{\omega} \Rightarrow T(R-(OC)\sin\varphi) + N(OC)\cos\varphi = \frac{5}{4}mR^2\dot{\omega} \Rightarrow$$

$$T\left(R - \frac{R}{4}\sin\varphi\right) + N\frac{R}{4}\cos\varphi = \frac{5}{4}mR^2\dot{\omega} \qquad (11)$$

Εξισώσεις συνδέσμων: Επειδή ο τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο επίπεδο, το O κάνει ευθύγραμμη κίνηση με επιτάχυνση $\underset{\sim}{\gamma}_O = R\dot{\omega}\underset{\sim}{i}$. Έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = \underset{\sim}{\gamma}_O + \underset{\sim}{\dot{\omega}} \times \underset{\sim}{OC} - \omega^2\underset{\sim}{OC} = R\dot{\omega}\underset{\sim}{i} + (-\dot{\omega}\underset{\sim}{k}) \times \left(\frac{R}{4}\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} - \frac{R}{4}\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}\right) -$$

$$-\omega^2\left(\frac{R}{4}\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} - \frac{R}{4}\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}\right) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = R\dot{\omega}\underset{\sim}{i} - \dot{\omega}\frac{R}{4}\cos\varphi\,\underset{\sim}{j} - \dot{\omega}\frac{R}{4}\sin\varphi\,\underset{\sim}{i} - \omega^2\frac{R}{4}\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} + \omega^2\frac{R}{4}\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}$$

Άρα είναι:

$$\gamma_{cx} = R\dot{\omega} - \dot{\omega}\frac{R}{4}\sin\varphi - \omega^2\frac{R}{4}\cos\varphi \qquad (12)$$

$$\gamma_{cy} = -\dot{\omega}\frac{R}{4}\cos\varphi + \omega^2\frac{R}{4}\sin\varphi \qquad (13)$$

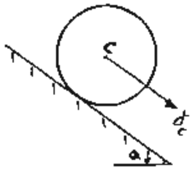
Το σύστημα των εξισώσεων (9), (10), (11), (12), (13) δίνει:

$$\dot{\omega} = \frac{8g\cos\varphi}{R(4-\sin\varphi)^2} \qquad (14)$$

όπου το ω αντικαταστάθηκε από τη σχέση (8)

Παρατήρηση: Στο πρόβλημα αυτό, φυσικά, δεν μπορούμε να γράψουμε $\widehat{\Sigma M_0} = I_0 \dot{\omega}$ αφού το 0 ούτε κέντρο μάζας του στερεού είναι ούτε μηδενική επιτάχυνση έχει!

Άσκηση 5

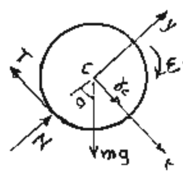


Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης a κυλίεται χωρίς ολίσθηση το στερεό του σχήματος, το οποίο έχει μάζα m και ακτίνα R. Ζητείται η επιτάχυνση της κίνησης του κέντρου μάζας C. Το στερεό είναι ομογενές.

Εφαρμογή 1. Το στερεό είναι κύλινδρος με $I_c = mR^2/2$.

Εφαρμογή 2. Το στερεό είναι σφαίρα με $I_c = 2mR^2/5$.

Λύση



Το Δ.Ε.Σ. του στερεού φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η δύναμη T είναι στατική τριβή. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\gamma_{cx} \Rightarrow mg\sin a - T = m\gamma_c \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = m\gamma_{cy} \Rightarrow N - mg\cos a = 0 \qquad (2)$$

$$\widehat{\Sigma M_c} = I_c\dot{\omega} \Rightarrow TR = I_c\dot{\omega} \qquad (3)$$

Επειδή η κίνηση είναι κύλιση χωρίς ολίσθηση, έχουμε την εξίσωση συνδέσμου:

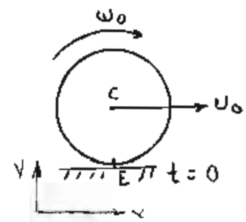
$$\gamma_c = R\dot{\omega} \qquad (4)$$

Το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων δίνει:

$$\gamma_c = \frac{mgR^2\sin a}{mR^2 + I_c} \qquad (5)$$

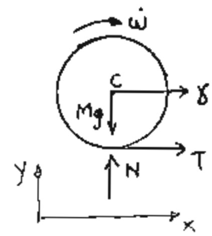
Στην εφαρμογή 1, με $I_c = mR^2/2$ προκύπτει $\gamma_{c_1} = (2g\sin a)/3$ ενώ στην εφαρμογή 2, με $I_c = 2mR^2/5$ προκύπτει $\gamma_{c_2} = (5g\sin a)/5$. Παρατηρούμε ότι είναι $\gamma_{c_2} > \gamma_{c_1}$.

Άσκηση 6



Ο κυκλικός δίσκος του σχήματος έχει μάζα M, ακτίνα R, ροπή αδράνειας $I_c = MR^2/2$ και $v_0 = \omega_0 R/2$ με φορές όπως φαίνονται στο σχήμα. Ο δίσκος αφήνεται από πολύ μικρό ύψος σε τραχύ οριζόντιο έδαφος με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Ζητείται το μήκος που θα διατρέξει ο δίσκος μέχρι η κίνηση να γίνει κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Λύση



Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 ο δίσκος ακουμπά στο έδαφος. Λίγο χρονικό διάστημα μετά, το Δ.Ε.Σ του δίσκου φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η φορά της δύναμης τριβής προκύπτει ως εξής: Για t=0, σύμφωνα με το πρώτο σχήμα, το κατώτερο σημείο Ε του δίσκου έχει ταχύτητα:

$$\underline{v}_E = \underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{CE} = v_0 \underline{i} + (-\omega_0 \underline{k}) \times (-R\underline{j}) \Longrightarrow$$

$$\underline{v}_E = v_0 \underline{i} - \omega_0 R \underline{i} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_E = (v_0 - \omega_0 R)\underline{i} \Longrightarrow$$

$$\underline{v}_E = \left(\omega_0 \frac{R}{2} - \omega_0 R\right)\underline{i} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_E = -\omega_0 \frac{R}{2}\underline{i}$$

δηλαδή η φορά της $\underline{v}_E$ είναι προς τ' αριστερά. Άρα η δύναμη τριβής έχει φορά προς τα δεξιά και είναι τριβή ολίσθησης (λίγο μετά την επαφή) αφού είναι $\underline{v}_E \neq 0$. Για t>0 και λίγο μετά την επαφή έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\gamma_{cx} \Rightarrow T = M\gamma \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = M\gamma_{cy} \Rightarrow N - Mg = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_c = I_c\dot{\omega} \Rightarrow -TR = \frac{MR^2}{2}\dot{\omega} \qquad (3)$$

Εξίσωση συνδέσμου είναι η σχέση

$$T = \mu N \qquad (4)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$\gamma = \mu g \quad (5) \qquad \dot{\omega} = -\frac{2\mu g}{R} \quad (6)$$

Διαδοχικές ολοκληρώσεις της σχέσης (5) με $\upsilon(0)=\upsilon_0$, $x(0)=0$ δίνουν:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \mu g t \quad (7) \qquad x(t) = \upsilon_0 t + \mu g \frac{t^2}{2} \quad (8)$$

ενώ, διαδοχικές ολοκληρώσεις της σχέσης (6) με $\omega(0) = \omega_0$ και $\varphi(0)=0$ δίνουν:

$$\omega(t) = -\frac{2\mu g t}{R} + \omega_0 \quad (9) \qquad \varphi(t) = -\frac{\mu g t^2}{R} + \omega_0 t \quad (10)$$

Η κίνηση θα γίνει κύλιση χωρίς ολίσθηση όταν το κατώτερο σημείο του δίσκου αποκτήσει μηδενική ταχύτητα, όταν δηλαδή ισχύει:

$$\upsilon(t) = \omega(t)R \overset{(7),(9)}{\Longrightarrow} \upsilon_0 + \mu g t = \left(-\frac{2\mu g t}{R} + \omega_0\right)R \overset{\upsilon_0 = \omega_0 R/2}{\Longrightarrow}$$

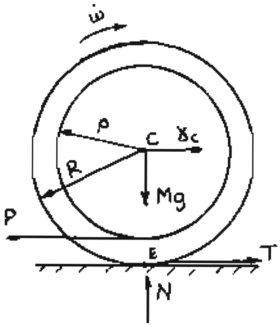
$$\frac{\omega_0 R}{2} + \mu g t = -2\mu g t + \omega_0 R \Rightarrow t = \frac{\omega_0 R}{6\mu g} \qquad (11)$$

Για την τιμή αυτή του t η σχέση (8) δίνει το ζητούμενο διάστημα:

$$x = \upsilon_0 \frac{\omega_0 R}{6\mu g} + \mu g \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0 R}{6\mu g}\right)^2 \overset{\upsilon_0 = \omega_0 R/2}{\Longrightarrow} x = \frac{7\omega_0^2 R^2}{72\mu g}$$

Άσκηση 7

Ο τροχός του σχήματος έχει μάζα $M = 10$ kg, ακτίνα $R = 0{,}6$m και φέρει τύμπανο στερεά προσαρμοσμένο σ' αυτόν, με ακτίνα $\rho = 0{,}4$m. Το στερεό έχει ακτίνα περιφοράς (αδράνειας), ως προς C, ίση με $k_c = 0{,}3$m. Δίνεται ο συντελεστής στατικής τριβής ίσος με $\mu_s = 0.25$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ίσος με $\mu = 0{,}20$. Ζητείται η επιτάχυνση του κέντρου C του τροχού στις περιπτώσεις: (α) $P = 30$Nt (β) $P = 80$Nt



Λύση

Στο πρόβλημα αυτό δεν ξέρουμε αν υπάρχει ολίσθηση ή όχι. Στις περιπτώσεις αυτές, υποθέτουμε ότι αρχικά δεν υπάρχει ολίσθηση. Τη φορά της τριβής σχεδιάζουμε τυχαία. Εξετάζουμε την κίνηση του τροχού:

Μεταφορική κίνηση:

$$T - P = M\gamma_c \qquad (1)$$

$$N - Mg = 0 \qquad (2)$$

Περιστροφική κίνηση

$$\overset{+\dot\omega}{\Sigma M_c} = I_c\dot\omega \implies P\cdot\rho - TR = I_c\dot\omega \qquad (3)$$

Όμως δίνεται η ακτίνα περιφοράς (ή ακτίνα αδράνειας) $k_c = 0{,}3$m. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας από τη σχέση:

$$I_c = M k_c^2 \implies I_c = 10\text{kg}\cdot(0{,}3\text{m})^2 \implies$$

$$I_c = 0{,}9\ \text{kgm}^2$$

Εξίσωση συνδέσμου:

Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση, εκτελεί στιγμιαία περιστροφή περί το σημείο επαφής E με το έδαφος. Άρα έχω:

$$\ddot{x}_c = R\dot{\omega} \qquad (4)$$

Η εξίσωση (4) μπορεί να προκύψει και με τον ακόλουθο τρόπο: Επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση, αν ο τροχός στραφεί κατά γωνία φ με τη φορά της ω του σχήματος, η περιφέρειά του ακτίνας R θα στραφεί κατά τόξο Rφ. Λόγω της μη ολίσθησης, το C μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά μήκος x_c ίσο με το τόξο. Άρα:

$$x_c = R\varphi \implies \ddot{x}_c = R\dot{\omega}.$$

Για να είναι η υπόθεση ορθή, πρέπει:

$$|T| < \mu_s N \qquad (5)$$

Από την εξίσωση (2) προκύπτει:

$$N = Mg = 10\,kg \cdot 10\,m/sec^2 \implies N = 100\,Nt$$

Από τις εξισώσεις (1), (3), (4) προκύπτει:

$$T = \frac{\rho R M + I_c}{MR^2 + I_c}\cdot P \qquad (6)$$

και προφανώς η φορά της στο σχήμα είναι η πραγματική, αφού από τη σχέση (6) φαίνεται ότι $T > 0$. Αντικαθιστούμε τα αριθμητικά δεδομένα, οπότε η δύναμη τριβής υπολογίζεται:

$$T = \frac{33}{45}P \qquad (7)$$

α) Αν $P = 30N$ η (7) δίνει $T = 22\,Nt$. Είναι $\mu_s N = 0.25\cdot 100 = 25\,Nt$

ικανοποιείται λοιπόν η ανισοτική σχέση $|T| < \mu_s N$, οπότε η υπόθεση ότι έχουμε κίνηση χωρίς ολίσθηση είναι ορθή. Η σχέση (1) δίνει την επιτάχυνση του C:

$$\gamma_c = \frac{1}{M}(T-P) = \frac{22-30}{10} = -0,8 \ m/sec^2$$

(β) Αν $P = 80Nt$, η σχέση (7) δίνει $T = 58,67$ Nt. Παρατηρούμε τώρα ότι $T > \mu_s N$, άρα η υπόθεση δεν ισχύει. Έχουμε κύλιση με ολίσθηση. Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης που είναι ίδιες με τις προηγούμενες:

$$T - P = M\gamma_c \qquad (8)$$

$$N - Mg = 0 \qquad (9)$$

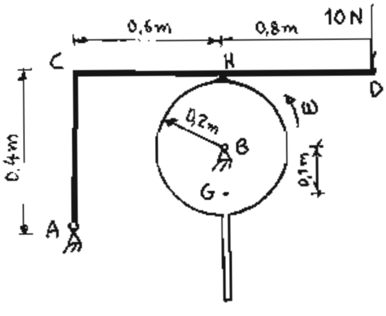
$$P\rho - TR = I_c\dot{\omega} \qquad (10)$$

Αλλάζει όμως η εξίσωση συνδέσμου. Δεν ισχύει η σχέση (4). Ισχύει

$$|T| = \mu N \qquad (11)$$

Από τις εξισώσεις (8), (9), (10), (11) προκύπτει στην περίπτωση αυτή: $\gamma_c = -6 \ m/s^2$

Άσκηση 8

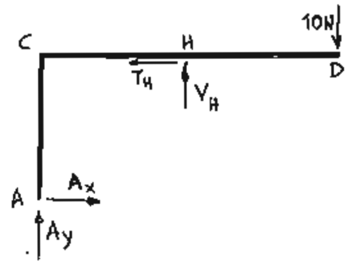


Η ορθογώνια δοκός ACD είναι αρθρωμένη στο A στο έδαφος, ενώ στο σημείο D δέχεται δύναμη 10 N κατακόρυφη. Στη φάση του σχήματος, το στερεό με κέντρο βάρους το G και ακτίνα αδράνειας $i_G = 0,4m$ πού έχει μάζα 10 kg περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 6 \ r/sec$ με τη φορά του σχήματος. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των δύο σωμάτων στο H είναι ίσος με $\mu=0{,}4$, να υπολογισθεί η αντίδραση στήριξης στο B καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$ του κινούμενου στερεού.

Λύση

Το σύστημα αποτελείται από δύο σώματα, άρα εξετάζω το καθένα χωριστά:

Η γωνία ACD, εκτός από την εξωτερική δύναμη 10N στο D τις αντιδράσεις εδάφους A_x, A_y στο A, δέχεται κάθετη δύναμη V_H στο σημείο H καθώς και δύναμη τριβής T_H από το περιστρεφόμενο στερεό. (Η φορά της T_H είναι ίδια με τη φορά



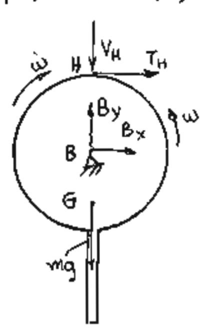
της ταχύτητας περιστροφής των σημείων της περιφέρειας του στερεού που περιστρέφεται). Το στερεό ACD ισορροπεί:

$$x: \quad A_x - T_H = 0 \qquad (1)$$

$$y: \quad A_y + V_H - 10 = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_A = 0 \implies -T_H \cdot 0{,}4 - V_H \cdot 0{,}6m + 10N(0{,}6+0{,}8)m = 0 \qquad (3)$$

Θεωρούμε τώρα το κινητό στερεό που δέχεται το βάρος του mg στο G, τις αντιδράσεις εδάφους B_x, B_y στο B και τις T_H, V_H (δράση - αντίδραση των T_H, V_H που δέχεται το στερεό ACB). Η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$ έχει φορά αντίθετη της φοράς του ω (προφανώς επιβράδυνση) Από τη μελέτη της κίνησης έχουμε:



$$x: \quad B_x + T_H = m\gamma_{Gx} \qquad (4)$$

$$y: \quad B_y - V_H - mg = m\gamma_{Gy} \qquad (5)$$

Η εξίσωση ροπών μπορεί να γραφεί ως προς G ή ως προς το B (B ακίνητο). Προτιμάμε το B:

$$\overset{+\dot{\omega}}{\Sigma M_B} = I_B\dot{\omega} \implies T_H \cdot 0{,}2m = I_B\dot{\omega} \qquad (6)$$

Εξισώσεις συνδέσμων: Από την επαφή έχουμε:

$$T_H = \mu V_H \implies T_H = 0{,}4\,V_H \qquad (7)$$

Από την κίνηση του στερεού έχουμε:

$$\underset{\sim}{\gamma_G} = \underset{\sim}{\gamma_B} + \underset{\sim}{\dot{\omega}} \times \underset{\sim}{BG} - \omega^2 \underset{\sim}{BG} \implies$$

$$\underset{\sim}{\gamma_G} = \underset{\sim}{0} - \dot{\omega}\underset{\sim}{k} \times (-0{,}1\underset{\sim}{j}) - 6^2 \cdot (-0{,}1\underset{\sim}{j}) = -0{,}1\dot{\omega}\underset{\sim}{i} + 3{,}6\underset{\sim}{j} \implies$$

$$\gamma_{Gx} = -0{,}1\dot{\omega} \qquad (8)$$

$$\gamma_{Gy} = 3{,}6 \qquad (9)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό είναι:

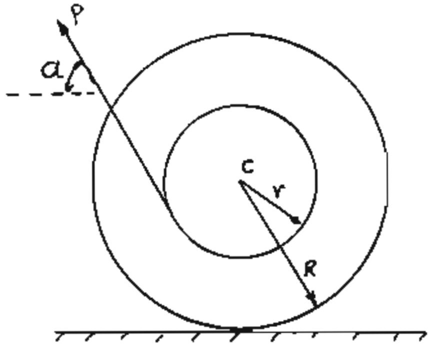
$$I_G = i_G^2 \cdot m = 0{,}4^2 \cdot 10 = 1{,}6$$

και με το θ. Steiner:

$$I_B = I_G + m \cdot (GB)^2 = 1{,}6 + 10 \cdot (0{,}1)^2 = 1{,}7$$

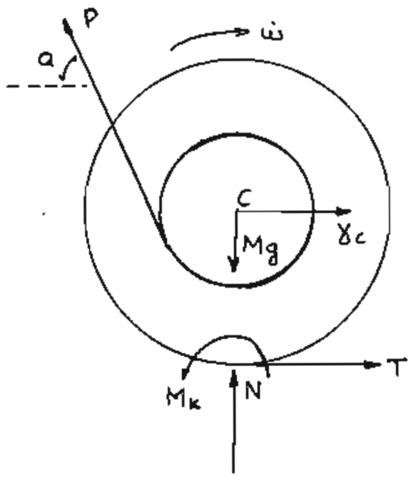
Οι εξισώσεις (3), (7) δίνουν $T_H = 7{,}4N$, $V_H = 18{,}4N$ οπότε η (6) δίνει $\dot{\omega} = 0{,}87\,r/s^2$ και οι (4), (5) τελικά $B_y = 155N$, $B_x = -8{,}3\,N$.

Άσκηση 9



Στην περιφέρεια (του διπλού τροχού του σχήματος) που έχει ακτίνα r έχει τυλιχθεί αβαρές - μη εκτατό σχοινί. Ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο έδαφος. Ο τροχός έχει μάζα M και ακτίνα περιφοράς (αδράνειας) ίση με ρ. Τραβάμε το σχοινί με δύναμη μέτρου P υπό σταθερή γωνία a με την οριζόντια. Ο συντελεστής τριβής κύλισης είναι e Να προσδιορισθεί η επιτάχυνση του κέντρου C του τροχού. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ_s, να βρεθεί η μέγιστη τιμή της P ώστε να μην ολισθήσει ο τροχός.

Λύση



Στον τροχό, πλην του βάρους και της P ασκείται η κάθετη αντίδραση N από το έδαφος η δύναμη τριβής T και η ροπή M_κ (τριβή κύλισης). Η φορά της M_κ είναι αντίθετη από τη φορά περιστροφής του τροχού.

Ο τροχός κάνει μεταφορική και περιστροφική κίνηση.

Μεταφορική:

$$T - P\cos a = M\gamma_c \qquad (1)$$

$$N + P\sin a - Mg = 0 \qquad (2)$$

Περιστροφή

$$\overset{+\dot\omega}{\sum} M_c = I_c \dot\omega \implies$$

$$Pr - TR - M_k = I_c \dot\omega$$

όπου $I_c = M\rho^2$ αφου $\rho = \left(\frac{I_c}{M}\right)^{1/2}$ είναι, από τον ορισμό, η ακτίνα περιφοράς περί άξονα από το C.
Έτσι έχω:

$$Pr - TR - M_k = M\rho^2\dot\omega \qquad (3)$$

Εξισώσεις συνδέσμων:

$$\ddot x_c = R\dot\omega \qquad (4)$$

αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση. Ακόμη

$$M_k = eN \qquad (5)$$

από την τριβή κύλισης M_k.
Από τις εξισώσεις (1)...(5) προκύπτει η τιμή του $\ddot x_c$:

$$\ddot x_c = \frac{Pr - PR\cos a - e(Mg - P\sin a)}{M\left(R + \frac{\rho^2}{R}\right)} \qquad (6)$$

Η δύναμη τριβής είναι:

$$T = P\cos a + \frac{Pr - PR\cos a - e(Mg - P\sin a)}{R + \frac{\rho^2}{R}} \qquad (7)$$

όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (1), (6).

Η κάθετη δύναμη N προκύπτει από την (2):

$$N = Mg - P\sin a \qquad (8)$$

Για να μην αρχίσει ολίσθηση, πρέπει

$$T < \mu_s N \implies$$

$$P\cos a + \frac{Pr - PR\cos a - e(Mg - P\sin a)}{R + \frac{\rho^2}{R}} < \mu_s (Mg - P\sin a)$$

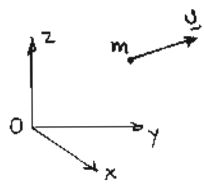
$$\implies P < \frac{\mu_s Mg\left(R + \frac{\rho^2}{R}\right) + eMg}{r + \frac{\rho^2}{R}\cos a + \left(e + \mu_s R + \mu_s \frac{\rho^2}{R}\right)\sin a}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ορμή - Στροφορμή - Κρούση

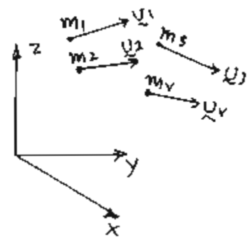
7.1 Ορμή - Στροφορμή

Υποθέτουμε ότι το υλικό σημείο μάζας m έχει ταχύτητα $\underset{\sim}{\upsilon}$. Η ορμή p του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση:



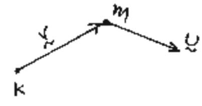
$$\underset{\sim}{p} = m\underset{\sim}{\upsilon}$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα υλικών σημείων $m_1, m_2, \dots m_\nu$ με ταχύτητες $\underset{\sim}{\upsilon_1}, \underset{\sim}{\upsilon_2}, \dots \underset{\sim}{\upsilon_\nu}$ αντίστοιχα, τότε η ορμή του συστήματος των υλικών σημείων δίνεται από τη σχέση:



$$\underset{\sim}{P_o} = m_1\underset{\sim}{\upsilon_1} + m_2\underset{\sim}{\upsilon_2} + \dots + m_\nu\underset{\sim}{\upsilon_\nu}$$

Θεώρημα διατήρησης της ορμής: Αν σε σύστημα υλικών σημείων δεν ασκείται συνολική εξωτερική δύναμη, τότε η ορμή του συστήματος των υλικών σημείων παραμένει σταθερή.



Ορίζεται η **στροφορμή** $\underset{\sim}{L}_K$ ενός υλικού σημείου ως προς κάποιο σημείο K, ως η ροπή της ορμής του υλικού αυτού σημείου ως προς το σημείο K:

$$\underset{\sim}{L}_K = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{r} \times (m\underset{\sim}{\upsilon}) \implies \underset{\sim}{L}_K = m\,\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{\upsilon}$$

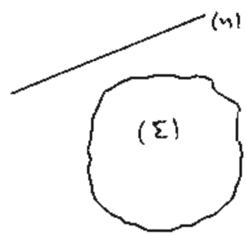
Η προβολή της $\underline{L}_K$ ως προς κάποιο άξονα ο οποίος περνά από το σημείο Κ είναι η στροφορμή του υλικού σημείου ως προς τον άξονα αυτό.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον ορισμό, ο χειρισμός της στροφορμής ως προς κάποιο σημείο ή ως προς κάποιο άξονα είναι ο ίδιος με το χειρισμό της ροπής μιας δύναμης ως προς το σημείο αυτό ή τον άξονα αυτό.

Η στροφορμή συστήματος υλικών σημείων (ως προς κάποιο σημείο ή κάποιο άξονα) ισούται με το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων τα οποία αποτελούν το σύστημα (ως προς το σημείο αυτό ή τον άξονα αυτό).

Θεώρημα: Αν η συνολική εξωτερική ροπή που δέχεται ένα σύστημα υλικών σημείων είναι μηδενική ως προς κάποιο σημείο ή άξονα, τότε η στροφορμή του συστήματος των υλικών σημείων διατηρείται σταθερή ως προς το σημείο ή τον άξονα αυτό.
Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα διατήρησης της στροφορμής**

Αν ένα στερεό σώμα (Σ) περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ως προς κάποιο άξονα (η), τότε η στροφορμή του σώματος ως προς τον άξονα αυτό είναι:



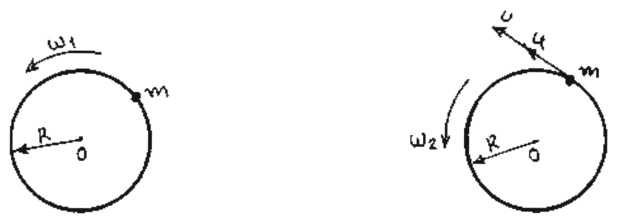
$$L_\eta = I_\eta\,\omega$$

όπου I_η είναι η ροπή αδράνειας του στερεού σώματος ως προς τον άξονα (η).

Άσκηση 1

Ένα υλικό σημείο μάζας m βρίσκεται στην περιφέρεια ενός ομογενούς δίσκου μάζας M και ακτίνας R. Η μάζα m είναι ακίνητη ως προς το δίσκο και το όλο σύστημα περιστρέφεται ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο κέντρο του δίσκου με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Ξαφνικά, η μάζα m αρχίζει να κινείται στην περιφέρεια του δίσκου με σχετική ταχύτητα μέτρου u ως προς το δίσκο. Να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του δίσκου. Ο δίσκος βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο.

Λύση



(a) (b)

Παρατηρούμε ότι τόσο πριν αρχίσει να κινείται η μάζα m ως προς το δίσκο, (φάση (a)) όσο και όταν η m κινείται ως προς το δίσκο (φάση (b)) δεν ασκείται εξωτερική ροπή ως προς τον άξονα z στο σύστημα μάζα m - δίσκος. Πράγματι οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα: μάζα m - δίσκος είναι τα βάρη τους τα οποία είναι παράλληλα στον άξονα περιστροφής z. Άρα διατηρείται η στροφορμή ως προς τον άξονα z. Άρα είναι: $L_z^{(a)} = L_z^{(b)}$.

Στη φάση (a), όπου η μάζα m είναι ακίνητη ως προς το δίσκο, η μάζα m και ο δίσκος αποτελούν ένα απόλυτα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται περί τον άξονα z με γων. ταχύτητα ω_1, ενώ έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα αυτό ίση με το άθροισμα $mR^2+\frac{1}{2}MR^2$. Άρα με θετική τη φορά του ω_1

έχουμε: $$L_z^{(a)} = I_z^{(a)}\omega_1 \implies L_z^{(a)} = \left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_1 \implies$$

$$L_z^{(a)} = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega_1 \qquad (1)$$

Στη φάση (b) η μάζα m κινείται στην περιφέρεια του δίσκου με σχετική ταχύτητα u ως προς αυτόν. Υποθέτουμε ότι η u έχει τη φορά του σχήματος. Έτσι, η απόλυτη ταχύτητα της m, κατά τα γνωστά από την κινηματική είναι:

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v_r} + \underset{\sim}{v_\pi} \implies v = \omega_2 R + u$$

όπου ω_2 η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου στη φάση (b). Έτσι, με θετική τη φορά της ω_1 η στροφορμή της μάζας m ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $m(\omega_2 R + u)R$, δηλαδή ίση με τη ροπή της ορμής της m ως προς τον άξονα αυτό. Ακόμη, η στροφορμή του δίσκου στη φάση (b) είναι ίση με $\frac{1}{2}MR^2\omega_2$. Έτσι, η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής στη φάση (b) είναι:

$$L_z^{(b)} = m(\omega_2 R + u)R + \frac{1}{2}MR^2\omega_2 \qquad (2)$$

Με βάση τις σχέσεις (1), (2) η διατήρηση της στροφορμής ως προς τον άξονα z δίνει:

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega_1 = m(\omega_2 R + u)R + \frac{1}{2}MR^2\omega_2 \implies$$

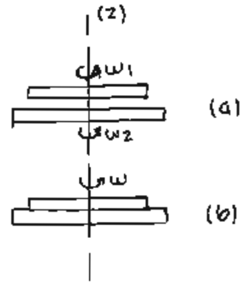
$$\omega_2 = \frac{(2m + M)R\omega_1 - 2mu}{(2m + M)R} \qquad (3)$$

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι αν η σημειακή μάζα m κινείται με αντίθετη φορά ως προς το δίσκο, τότε στην παραπάνω σχέση θέτουμε όπου u το $-u$, οπότε προκύπτει η αντίστοιχη τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω_2.

Άσκηση 2

Ένας κυκλικός δίσκος είναι οριζόντιος και περιστρέφεται περί τον κεντρικό κατακόρυφο άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Δεύτερος δίσκος περιστρέφεται περί τον ίδιο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_2. Αφήνουμε τον ένα δίσκο να πέσει πάνω στον άλλο από πολύ μικρό ύψος ώστε τα κέντρα των δύο δίσκων να συμπέσουν. Αν I_1, I_2 είναι αντίστοιχα οι ροπές αδράνειας των δύο δίσκων ως προς τον κοινό άξονα και οι δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω μετά την επαφή τους, να βρεθεί η τιμή του ω. Πόση είναι η απώλεια ενέργειας;

Λύση



Είναι προφανές ότι στο σύστημα των δύο δίσκων δεν ασκείται εξωτερική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής z. Άρα διατηρείται η στροφορμή ως προς τον άξονα αυτό:

$$L_z^{(a)} = L_z^{(b)} \Rightarrow I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1+I_2)\omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1+I_2} \qquad (1)$$

αφού στη φάση (b) οι δίσκοι έχουν κοινή γωνιακή ταχύτητα, άρα αποτελούν ένα στερεό σώμα του οποίου η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z είναι ίση με το άθροισμα $I_1 + I_2$.

Η κινητική ενέργεια στη φάση (a) είναι:

$$E_{\kappa\iota\nu}^{(a)} = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2\omega_2^2 \qquad (2)$$

ενώ η κινητική ενέργεια στη φάση (b) είναι:

$$E_{\kappa\iota\nu}^{(b)} = \frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega^2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} E_{\kappa\iota\nu}^{(b)} = \frac{1}{2}(I_1+I_2)\left(\frac{I_1\omega_1+I_2\omega_2}{I_1+I_2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$E_{\kappa\iota\nu}^{(b)} = \frac{1}{2}\,\frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{I_1 + I_2} \qquad (3)$$

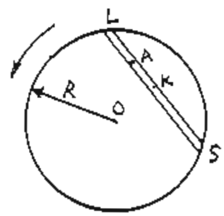
Η απώλεια ενέργειας είναι:

$$\Delta E = E_{\kappa\iota\nu}^{(b)} - E_{\kappa\iota\nu}^{(a)} = \frac{1}{2}\,\frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{I_1 + I_2} - \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2} I_2\omega_2^2 \implies$$

$$\Delta E = \frac{1}{2(I_1+I_2)}\Big((I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2 - I_1(I_1+I_2)\omega_1^2 - I_2(I_1+I_2)\omega_1^2 \Big) \implies$$

$$\Delta E = \frac{-I_1 I_2}{2(I_1+I_2)}(\omega_1-\omega_2)^2 \quad (\leq 0)$$

Άσκηση 3

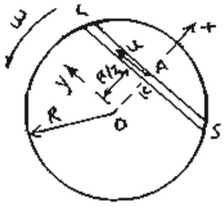


Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος έχει μάζα M, ακτίνα R και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oz. Ο δίσκος φέρει αυλάκωση LS, της οποίας το μέσο K απέχει από το κέντρο O του δίσκου απόσταση $OK = R/2$. Μέσα στην αυλάκωση κινείται υλικό σημείο A το οποίο έχει μάζα m. Όταν το A περνά από το μέσο K έχει σχετική ταχύτητα u ως προς το δίσκο και ο δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου όταν το A φτάσει στο άκρο L, οπότε έχει μηδενική σχετική ταχύτητα ως προς το δίσκο. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής ίση με $MR^2/2$

Λύση

Είναι προφανές ότι κατά την κίνηση του συστήματος αυτού δεν ασκείται εξωτερική ροπή ως προς τον άξονα Oz. Άρα έχουμε διατήρηση της στροφορμής ως προς τον άξονα αυτό.

Στη φάση (a) το υλικό σημείο A περνά από το μέσο K με σχετική ταχύτητα u ως προς το δίσκο, η οποία έχει φορά προς το L και ο δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα ω. Έτσι, κατά τα γνωστά από την κινηματική, η ταχύτητα του A είναι:



(a)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\pi = u\mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA} = u\mathbf{j} + \omega \mathbf{k} \times \left(\frac{R}{2}\mathbf{i}\right) = \left(u + \omega\frac{R}{2}\right)\mathbf{j}$$

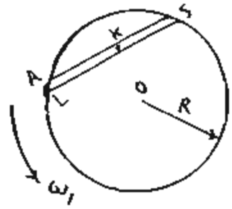
Έτσι, με θετική τη φορά του ω, η στροφορμή του συστήματος στη φάση αυτή ως προς τον άξονα Oz είναι:

$$L_z^{(a)} = m\left(u+\omega\frac{R}{2}\right)\frac{R}{2} + I_z\,\omega \implies$$

$$L_z^{(a)} = m\left(u+\omega\frac{R}{2}\right)\frac{R}{2} + \frac{1}{2}MR^2\omega \qquad (1)$$

αφού είναι $I_z = MR^2/2$ η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα Oz.

Στη φάση (b), όπου το A έχει φτάσει στο L και είναι ακίνητο ως προς το δίσκο, ο δίσκος και το A αποτελούν ένα σώμα με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z ίση με $mR^2 + MR^2/2$. Αν ω_1 είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από τον άξονα Oz, τότε η στροφορμή ως προς τον άξονα αυτό είναι:



$$L_z^{(b)} = \left(mR^2 + \frac{MR^2}{2}\right)\omega_1 \qquad (2)$$

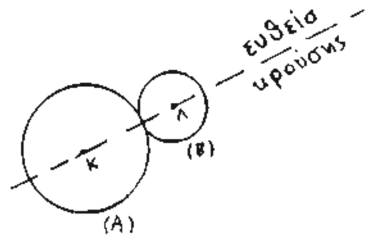
Η διατήρηση της στροφορμής δίνει:

$$L_z^{(a)} = L_z^{(b)} \implies m\left(u+\omega\frac{R}{2}\right)\frac{R}{2} + \frac{1}{2}MR^2\omega = \left(mR^2 + \frac{MR^2}{2}\right)\omega_1 \implies$$

$$\omega_1 = \frac{m\left(u+\omega\frac{R}{2}\right) + MR\omega}{(2m+M)R}$$

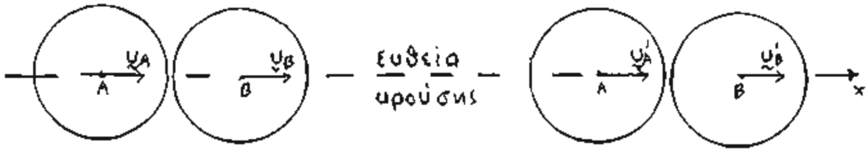
7.2 Κρούση λείων σωμάτων

Γενικά, κρούση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο οποίο δύο σώματα έρχονται σε επαφή κατά πολύ μικρό χρονικό διάστημα, κατά το οποίο το ένα σώμα ασκεί πολύ μεγάλες δυνάμεις στο άλλο.



Υποθέτουμε ότι συγκρούονται οι λείες σφαίρες που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Τη στιγμή της κρούσης η κοινή κάθετος στην επιφάνεια επαφής ονομάζεται **ευθεία κρούσης**. Αν τα κέντρα μάζας των σφαιρών βρίσκονται πάνω στην ευθεία κρούσης, τότε η κρούση λέγεται **κεντρική**. (Για ομογενείς σφαίρες η κρούση είναι προφανώς πάντα κεντρική). Αν τα κέντρα μάζας των σφαιρών δεν βρίσκονται πάνω στην ευθεία κρούσης, η κρούση τότε είναι **έκκεντρη**. Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε προβλήματα κεντρικής κρούσης σφαιρών. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) **Μετωπική κεντρική κρούση**: Έχουμε όταν τα κέντρα των σφαιρών πριν την κρούση έχουν ταχύτητες με κοινό φορέα την ευθεία κρούσης:



(α) (b)

Στη φάση (α) φαίνονται οι σφαίρες αμέσως πριν την κρούση όπου οι ταχύτητες $\underline{υ}_A$, $\underline{υ}_B$ των κέντρων έχουν κοινό φορέα τη γραμμή κρούσης. Στη φάση (b) φαίνονται οι σφαίρες αμέσως μετά την κρούση. Ο άξονας x ορίζεται πάνω στην ευθεία κρούσης.

Οι κρουστικές δυνάμεις υποτίθενται πολύ μεγαλύτερες κατά μέτρο των δυνάμεων που μπορεί να εμφανίζονται στο πρόβλημα. Όμως οι κρουστικές δυνάμεις ασκούνται από τη μία σφαίρα στην άλλη και είναι του τύπου δράση - αντίδραση. Άρα έχουν μηδενικό άθροισμα και έχουμε διατήρηση της ορμής:

$$m_A \underset{\sim}{\upsilon}_A + m_B \underset{\sim}{\upsilon}_B = m_A \underset{\sim}{\upsilon}_A' + m_B \underset{\sim}{\upsilon}_B' \qquad (1)$$

και επειδή οι $\underset{\sim}{\upsilon}_A$, $\underset{\sim}{\upsilon}_A'$, $\underset{\sim}{\upsilon}_B$, $\underset{\sim}{\upsilon}_B'$ έχουν τη διεύθυνση του άξονα x, έχουμε:

$$m_A \upsilon_A + m_B \upsilon_B = m_A \upsilon_A' + m_B \upsilon_B' \qquad (2)$$

Ορίζεται ο **συντελεστής κρούσης** e :

$$e = -\frac{\upsilon_B' - \upsilon_A'}{\upsilon_B - \upsilon_A} \quad \text{ή} \quad e = -\frac{\upsilon_A' - \upsilon_B'}{\upsilon_A - \upsilon_B} \qquad (3)$$

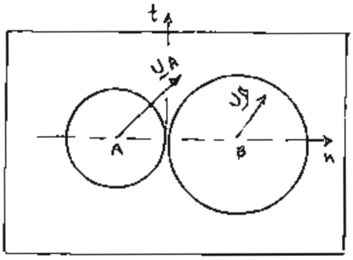
Οι σχέσεις (2), (3) αρκούν για τη λύση του προβλήματος. Πρέπει να προσέξουμε εδώ ότι οι υ_A, υ_B, υ_A', υ_B' είναι **αλγεβρικές τιμές**. Έτσι είναι θετικές όταν έχουν φορά προς τα θετικά του άξονα x και αρνητικές όταν έχουν αντίθετη φορά. Αν κάποια ταχύτητα είναι άγνωστης φοράς υποθέτουμε ότι αυτή έχει θετική φορά. Το τελικό πρόσημο δείχνει την πραγματική φορά.

Ο συντελεστής κρούσης e είναι αδιάστατος αριθμός και ισχύει $0 \le e \le 1$. Ειδικά:

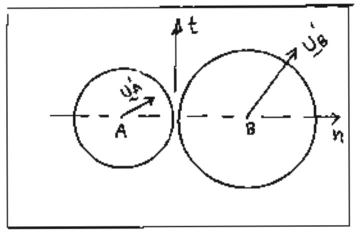
Για $e = 0$ έχουμε πλαστική κρούση: Οι δύο σφαίρες αποτελούν ένα σώμα μετά την κρούση.

Για $e = 1$ η κρούση είναι ελαστική. Στην περίπτωση αυτή και μόνον σ' αυτή έχουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση.

(b) Πλάγια κεντρική κρούση: Τα κέντρα μάζας των σφαιρών πριν την κρούση έχουν ταχύτητες των οποίων οι φορείς δεν συμπίπτουν με την ευθεία κρούσης.



(a)



(b)

Στο στιγμιότυπο (a) φαίνονται οι σφαίρες αμέσως πριν την κρούση, όπου οι φορείς των ταχυτήτων $\underset{\sim}{v}_A$, $\underset{\sim}{v}_B$ των κέντρων των A, B δεν συμπίπτουν με την ευθεία κρούσης. Το ίδιο γενικά συμβαίνει και στη φάση (b) όπου φαίνονται οι σφαίρες αμέσως μετά την κρούση.

Ορίζουμε το σύστημα αξόνων του σχήματος με αρχή στο σημείο επαφής τον άξονα (n) πάνω στην ευθεία της κρούσης και τον άξονα (t) κάθετο σ' αυτό. Άρα, αναλύοντας τα διανύσματα $\underset{\sim}{v}_A$, $\underset{\sim}{v}_B$, $\underset{\sim}{v}'_A$, $\underset{\sim}{v}'_B$ στο σύστημα αυτό των αξόνων έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}_A = (v_{An}, v_{At}) \qquad \underset{\sim}{v}_B = (v_{Bn}, v_{Bt})$$

$$\underset{\sim}{v}'_A = (v'_{An}, v'_{At}) \qquad \underset{\sim}{v}'_B = (v'_{Bn}, v'_{Bt})$$

Εδώ ισχύουν τα ακόλουθα:

(I) Διατηρείται η ορμή του συστήματος κατά τον άξονα (n) ο οποίος συμπίπτει με την ευθεία κρούσης:

$$m_A v_{An} + m_B v_{Bn} = m_A v'_{An} + m_B v'_{Bn}$$

(II) Διατηρείται η ορμή **καθεμιάς σφαίρας** χωριστά κατά τη διεύθυνση (t) που είναι κάθετη στην ευθεία κρούσης. Έτσι έχουμε τις εξισώσεις:

$$m_A v_{At} = m_A v'_{At} \quad \text{(για τη σφαίρα κέντρου A)}$$

$$m_B v_{Bt} = m_B v'_{Bt} \quad \text{(για τη σφαίρα κέντρου B)}$$

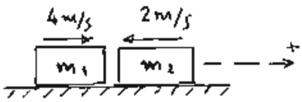
αφού δεν εμφανίζονται δυνάμεις κατά τη διεύθυνση (t) κατά τη διάρκεια της κρούσης εφόσον οι σφαίρες υποτίθενται λείες. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις φαίνεται ότι διατηρούνται οι ταχύτητες και η ορμή κατά τη δ/νση t.

(III) Ο συντελεστής κρούσης ορίζεται από τη σχέση:

$$e = -\frac{v'_{Bn} - v'_{An}}{v_{Bn} - v_{An}} \quad \text{ή} \quad e = -\frac{v'_{An} - v'_{Bn}}{v_{An} - v_{Bn}}$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις λύνεται το πρόβλημα της πλάγιας κεντρικής κρούσης. Τονίζεται ιδιαίτερα ότι οι προβολές $v_{An}, v_{At}, v'_{An}, v'_{At}, v_{Bn}, v_{Bt}, v'_{Bn}, v'_{Bt}$ είναι αλγεβρικές τιμές που καθορίζονται με βάση το σύστημα αξόνων.

Άσκηση 1

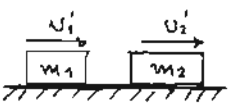


Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι μάζες $m_1 = 0{,}6\,kg$, $m_2 = 0{,}8\,kg$ οι οποίες λίγο πριν τη σύγκρουση έχουν τις ταχύτητες που αναγράφονται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής κρούσης είναι $e = 0{,}7$ να βρεθούν οι ταχύτητες των μαζών μετά την κρούση.

Λύση

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι πρόκειται για μετωπική κεντρική κρούση. Ορίζουμε τον άξονα x πάνω στην ευθεία κρούσης με θετική φορά προς τα δεξιά. Έτσι, πριν την κρούση, η μάζα $m_1 = 0{,}6\,kg$ έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 4\,m/s$, ενώ η μάζα $m_2 = 0{,}8\,kg$ έχει ταχύτητα $\upsilon_2 = -2\,m/s$. Έστω υ_1', υ_2' οι ταχύτητες των μαζών m_1, m_2, αντίστοιχα, μετά την κρούση (Οι υ_1', υ_2' είναι άγνωστες και υποτίθενται κατά τη θετική φορά, όπως συνήθως ένα άγνωστο μέγεθος).

Η διατήρηση της ορμής δίνει:



$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Longrightarrow$$

$$0{,}6 \cdot 4 + 0{,}8 \cdot (-2) = 0{,}6\upsilon_1' + 0{,}8\upsilon_2' \Longrightarrow$$

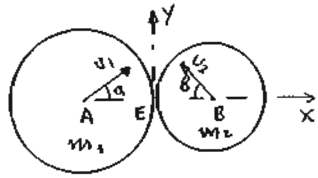
$$0{,}6\upsilon_1' + 0{,}8\upsilon_2' = 0{,}8 \qquad (1)$$

Ο συντελεστής κρούσης είναι:

$$e = -\frac{\upsilon_2' - \upsilon_1'}{\upsilon_2 - \upsilon_1} \Longrightarrow 0{,}7 = -\frac{\upsilon_2' - \upsilon_1'}{-2 - 4} \Longrightarrow \upsilon_2' - \upsilon_1' = 4{,}2 \quad (2)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) βρίσκουμε: $\upsilon_2' = 2{,}37\,m/s$, $\upsilon_1' = -1{,}83\,m/s$. Έτσι, η υ_2' έχει τη φορά του σχήματος, ενώ η υ_1' έχει αντίθετη φορά απ' αυτή του σχήματος.

Άσκηση 2



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι σφαίρες με μάζες $m_1 = 2kg$ $m_2 = 1kg$ λίγο πριν συγκρουσθούν. Το κέντρο A της m_1 έχει ταχύτητα μέτρου $6 m/s$ υπό γωνία $a = 30^\circ$ ως προς την ευθεία κρούσης όπως στο σχήμα. Το κέντρο B της m_2 έχει ταχύτητα μέτρου $8 m/s$ υπό γωνία $β = 45^\circ$ ως προς την ευθεία κρούσης, όπως στο σχήμα. Ζητούνται οι ταχύτητες των κέντρων A, B των δύο σφαιρών μετά την κρούση όταν ο συντελεστής κρούσης των σφαιρών είναι: (i) $e = 1$, (ii) $e = 0$ (iii) $e = 0,6$ (Οι σφαίρες λείες)

Λύση

Πρόκειται για λοξή κεντρική κρούση. Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Exy του σχήματος. Έτσι, πρίν την κρούση έχουμε:

$$v_{1x} = v_1 \cos a = 6 \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow v_{1x} = 5,19 \, m/s$$

$$v_{1y} = v_1 \sin a = 6 \sin 30^\circ \Rightarrow v_{1y} = 3 \, m/s$$

$$v_{2x} = -v_2 \cos β = -8 \cos 45^\circ \Rightarrow v_{2x} = -5,64 \, m/s$$

$$v_{2y} = v_2 \sin β = 8 \sin 45^\circ \Rightarrow v_{2y} = 5,64 \, m/s$$

Έστω $\underline{v}_1'$, $\underline{v}_2'$ οι ταχύτητες των κέντρων A, B (των σφαιρών) αντίστοιχα, μετά την κρούση.

Επειδή οι σφαίρες είναι λείες, διατηρείται κατά την κρούση η y-συνιστώσα της ορμής δηλαδή η συνιστώσα της ορμής που είναι κάθετη στην ευθεία κρούσης). Άρα έχουμε:

$$m_1 v_{1y} = m_1 v_{1y}' \Rightarrow v_{1y}' = v_{1y} \Rightarrow v_{1y}' = 3 m/s \quad (1)$$

$$m_2 u_{2y} = m_2 u_{2y}' \Longrightarrow u_{2y}' = u_{2y} \Longrightarrow u_{2y}' = 5{,}64\ m/s \quad (2)$$

(Είναι προφανές ότι διατηρείται κατά την κρούση και η ταχύτητα της κάθε σφαίρας κατά την y-διεύθυνση).

Η διατήρηση της ολικής ορμής κατά τη διεύθυνση x (της ευθείας κρούσης) δίνει:

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 u_{1x}' + m_2 u_{2x}' \Longrightarrow$$

$$2 \cdot 5{,}19 + 1 \cdot (-5{,}64) = 2 u_{1x}' + 1 u_{2x}' \Longrightarrow 2u_{1x}' + u_{2x}' = 4{,}74 \quad (3)$$

Ο συντελεστής κρούσης είναι:

$$e = -\frac{u_{2x}' - u_{1x}'}{u_{2x} - u_{1x}} \Longrightarrow e = -\frac{u_{2x}' - u_{1x}'}{-5{,}64 - 5{,}19} \Longrightarrow$$

$$u_{2x}' - u_{1x}' = 10{,}83\, e \quad (4)$$

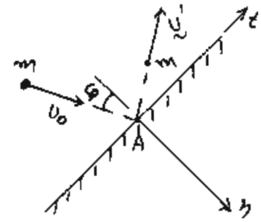
Εξετάζουμε τώρα τις ειδικές περιπτώσεις:

(i) Για $e = 1$ (ελαστική κρούση), το σύστημα των εξισώσεων (3), (4) δίνει: $u_{1x}' = -2\ m/s$, $u_{2x}' = 12{,}83\ m/s$. Άρα είναι: $\underset{\sim}{u}_1' = (-2\,;\,3)$ $\underset{\sim}{u}_2' = (12{,}83\,;\,5{,}64)$

(ii) Για $e = 0$ (πλαστική κρούση) το σύστημα των εξισώσεων (3), (4) δίνει $u_{1x}' = u_{2x}' = 1{,}58\ m/s$. Άρα έχουμε $\underset{\sim}{u}_1' = (1{,}58\,;\,3)$, $\underset{\sim}{u}_2' = (1{,}58\,;\,5{,}64)$

(iii) Για $e = 0{,}6$ το σύστημα των εξισώσεων (3), (4) δίνει: $u_{1x}' = 0{,}59\ m/s$, $u_{2x}' = 4{,}56\ m/s$. Άρα είναι: $\underset{\sim}{u}_1' = (0{,}59\,;\,3)$ και $\underset{\sim}{u}_2' = (4{,}56\,;\,5{,}64)$.

7.3 Κρούση με ανένδοτο εμπόδιο



Η μάζα m έχει ταχύτητα u_0 αμέσως πριν προσπέσει στην ανένδοτη λεία επιφάνεια στο σημείο της A. O κάθετος άξονας στην επιφάνεια στο σημείο A είναι ο An και ο εφαπτομενικός ο At.

Επειδή η επιφάνεια θεωρείται λεία, διατηρείται η ορμή του σωματιδίου κατά την εφαπτομενική διεύθυνση t:

$$m u_t = m u_t' \implies u_t = u_t' \qquad (7.3.1)$$

δηλαδή διατηρείται η εφαπτομενική ταχύτητα της μάζας m.

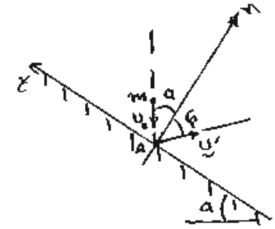
Επειδή το σημείο A της επιφάνειας είναι ακίνητο, ο συντελεστής κρούσης παίρνει τη μορφή:

$$e = -\frac{0 - u_n'}{0 - u_n} \implies u_n' = -e u_n \qquad (7.3.2)$$

(Φυσικά, τα u_t, u_t', u_n, u_n' είναι προσημασμένα με βάση το σύστημα αξόνων Ant).

Με βάση τις δύο παραπάνω σχέσεις λύνεται το πρόβλημα. Η ανένδοτη επιφάνεια, φυσικά, είναι και παραμένει ακίνητη.

Άσκηση 1



Λείο σφαιρίδιο μάζας m έχει κατακόρυφη ταχύτητα υ_0 αμέσως πριν συγκρουσθεί με το ανένδοτο κεκλιμένο επίπεδο (γωνίας κλίσης a) στο σημείο A. Ζητούνται:

(i) Το μέτρο της ταχύτητας $\underline{\upsilon}'$ αμέσως μετά την κρούση, αν ο συντελεστής κρούσης είναι e.

(ii) Η γωνία φ που σχηματίζει η ταχύτητα $\underline{\upsilon}'$ με την κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο.

(iii) Η μεταβολή της ορμής της μάζας m και η ώθηση της δύναμης που δέχεται από το κεκλιμένο επίπεδο.

Λύση

(i) Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Ant όπου ο άξονας An είναι κάθετος στην επιφάνεια (επαφής) και ο άξονας At εφαπτομενικός με θετικές φορές όπως στο σχήμα.

Επειδή η επιφάνεια επαφής είναι λεία, διατηρείται η ορμή κατά τη διεύθυνση t:

$$m\upsilon_{0t} = m\upsilon'_t \implies \upsilon'_t = \upsilon_{0t} \implies \upsilon'_t = -\upsilon_0 \sin a \qquad (1)$$

Ο συντελεστής κρούσης είναι:

$$e = -\frac{\upsilon'_n - 0}{\upsilon_n - 0} \implies \upsilon'_n = -e\upsilon_n \implies \upsilon'_n = -e\cdot(-\upsilon_0\cos a) \implies$$

$$\upsilon'_n = e\upsilon_0\cos a \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε την ταχύτητα $\underline{\upsilon}'$ της μάζας m αμέσως μετά την κρούση:

$$\underline{\upsilon}' = (\upsilon'_n, \upsilon'_t) \implies \underline{\upsilon}' = (e\upsilon_0\cos a, -\upsilon_0\sin a) \qquad (3)$$

(ii) Προφανώς, από το σχήμα έχουμε:

$$\upsilon_n' = |\underline{\upsilon}'|\cos\varphi \overset{(2)}{\Longrightarrow} e\upsilon_0\cos a = |\underline{\upsilon}'|\cos\varphi \qquad (4)$$

Όμως, από τη σχέση (3) παίρνουμε:

$$|\underline{\upsilon}'| = \sqrt{\upsilon_n'^2 + \upsilon_t'^2} = \sqrt{e^2\upsilon_0^2\cos^2 a + \upsilon_0^2\sin^2 a} \Longrightarrow$$

$$|\underline{\upsilon}'| = \upsilon_0\sqrt{e^2\cos^2 a + \sin^2 a}$$

και η σχέση (4) δίνει:

$$e\upsilon_0\cos a = \upsilon_0\sqrt{e^2\cos^2 a + \sin^2 a}\,\cos\varphi \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{e\cos a}{\sqrt{e^2\cos^2 a + \sin^2 a}}$$

(iii) Η μεταβολή της ορμής της μάζας m είναι:

$$\underset{\sim}{\Delta p} = m\underline{\upsilon}' - m\underline{\upsilon}_0 = m(e\upsilon_0\cos a, -\upsilon_0\sin a) - m(-\upsilon_0\cos a, -\upsilon_0\sin a)$$

$$\Longrightarrow \underline{\Delta p} = m\upsilon_0\big((e+1)\cos a,\ 0\big) \Longrightarrow \Delta p_n = m\upsilon_0(e+1)\cos a$$

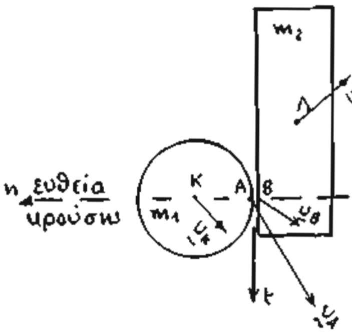
Η ώθηση της δύναμης που ασκείται στη μάζα m από το ανένδοτο επίπεδο είναι:

$$\underset{\sim}{\varrho} = \underset{\sim}{\Delta p} \Longrightarrow \underset{\sim}{\varrho} = m\upsilon_0\big((e+1)\cos a,\ 0\big) \Longrightarrow$$

$$\varrho_n = m\upsilon_0(e+1)\cos a$$

7.4 Έκκεντρη κρούση

Στην περίπτωση αυτή, τα κέντρα μάζας Κ, Λ των δύο σωμάτων που συγκρούονται δεν βρίσκονται πάνω στην ευθεία κρούσης, η οποία είναι η κοινή κάθετος στο σημείο επαφής.



Έστω $\underline{v}_A$, $\underline{v}_B$ οι ταχύτητες των σημείων Α, Β. Τα σημεία Α, Β θα έλθουν σε επαφή κατά την κρούση και μετά αυτή θα αποκτήσουν ταχύτητες $\underline{v}_A'$, $\underline{v}_B'$.

Αν στο σύστημα των δύο σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε:

(I) Διατηρείται η ορμή του συστήματος:

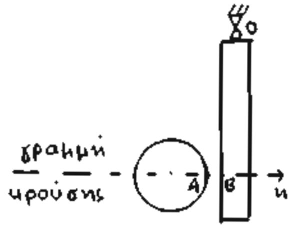
$$m_1 \underline{v}_K + m_2 \underline{v}_\Lambda = m_1 \underline{v}_K' + m_2 \underline{v}_\Lambda'$$

(II) Διατηρείται η στροφορμή ως προς οποιοδήποτε άξονα.

Ο συντελεστής κρούσης είναι:

$$e = -\frac{v_{An}' - v_{Bn}'}{v_{An} - v_{Bn}}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία το ένα από τα συγκρουόμενα στερεά μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα περί άξονα από το σημείο Ο. Στην περίπτωση αυτή αναπτύσσονται δυνάμεις στο σημείο Ο και η ορμή του συστήματος δεν διατηρείται!



Διατηρείται όμως η στροφορμή του συστήματος περί άξονα από το O όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα αυτό.

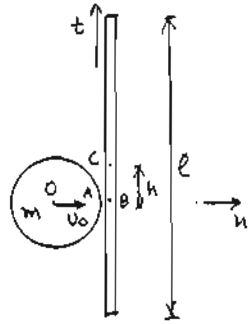
Τέτοιου είδους προβλήματα λύνονται γράφοντας τη διατήρηση της στροφορμής ως προς άξονα από το O καθώς και την έκφραση για το συντελεστή κρούσης. για τα σημεία A, B των δύο σωμάτων τα οποία έρχονται σε επαφή:

$$e = -\frac{v'_{An} - v'_{Bn}}{v_{An} - v_{Bn}}$$

Άσκηση 1

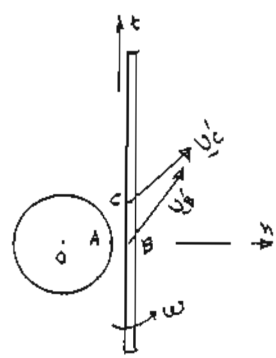
Μία ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους ℓ βρίσκεται ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Ένα νόμισμα μάζας m κινείται με ταχύτητα υ_0 και συγκρούεται ελαστικά με τη ράβδο όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το νόμισμα μένει ακίνητο μετά την κρούση, να βρεθεί η μάζα m, η ταχύτητα του κέντρου της ράβδου καθώς και η γωνιακή της ταχύτητα. Για τη ράβδο δίνεται $I_c = M\ell^2/12$.

Λύση



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα δύο σώματα αμέσως πριν την κρούση. Ο άξονας (n) βρίσκεται πάνω στη γραμμή κρούσης και ο άξονας (t) είναι κάθετος σ' αυτόν.

Στο δεύτερο σχήμα φαίνεται το σύστημα αμέσως μετά την κρούση, οπότε το νόμισμα είναι ακίνητο, το κέντρο της ράβδου έχει ταχύτητα $\underline{\upsilon}'_c$ ενώ η ράβδος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω.



Στο σύστημα νόμισμα - ράβδος δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (λείο τραπέζι). Άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$m\underline{\upsilon}_0 + M\cdot 0 = m\cdot 0 + M\underline{\upsilon}'_c \implies$$

$$\underline{\upsilon}'_c = \frac{m}{M}\underline{\upsilon}_0 \implies \underline{\upsilon}'_c = \frac{m}{M}\upsilon_0\hat{n} \qquad (1)$$

Ακόμη, στο σύστημα δεν ασκείται εξωτερική ροπή. Άρα διατηρείται η στροφορμή ως προς οποιοδήποτε άξονα. Ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο στο κέντρο μάζας C της ράβδου η στροφορμή πριν την κρούση, με θετική φορά την αντιωρολογιακή, ισούται με $mv_o h$, αφού η ράβδος είναι ακίνητη. Μετά την κρούση, οπότε το νόμισμα είναι ακίνητο, η στροφορμή ως προς τον ίδιο άξονα είναι ίση με $I_c\omega$. Έτσι, η διατήρηση της στροφορμής ως προς τον άξονα αυτό δίνει:

$$mv_o h = I_c\omega \implies mv_o h = \frac{1}{12}M\ell^2\omega \implies$$

$$\omega = \frac{12 m v_o h}{M\ell^2} \qquad (2)$$

Κατά την κρούση έρχεται σε επαφή το σημείο A του νομίσματος με το σημείο B της σφαίρας. Έτσι, ο συντελεστής κρούσης είναι:

$$e = -\frac{v'_{Bn} - v'_{An}}{v_{Bn} - v_{An}} \implies 1 = -\frac{v'_{Bn} - 0}{0 - v_o} \implies v'_{Bn} = v_o \qquad (3)$$

αφού η κρούση είναι ελαστική και είναι $v'_{An} = 0$, $v_{Bn} = 0$.
Όμως, από την κίνηση της ράβδου αμέσως μετά την κρούση, σύμφωνα με τον νόμο ταχυτήτων έχουμε:

$$\underset{\sim}{v}'_B = \underset{\sim}{v}'_c + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{CB}$$

και μετά τις πράξεις παίρνουμε

$$\underset{\sim}{v}'_B = \left(\frac{mv_o}{M} - \omega h\right)\hat{n} \implies v'_{Bn} = \frac{mv_o}{M} - \omega h \qquad (4)$$

Αντικαθιστούμε στην τελευταία σχέση το v'_{Bn} από τη σχέση (3) και το ω από τη σχέση (2) και παίρνουμε:

$$v_o = \frac{mv_o}{M} - \frac{12 m v_o h^2}{M\ell^2} \implies m = \frac{M\ell^2}{12h^2 + \ell^2}$$

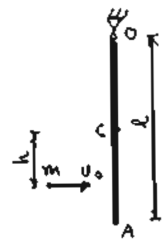
Παρατήρηση: Όταν η κρούση είναι τελείως ελαστική, οπότε είναι $e = 1$, αντί της έκφρασης για το συντελεστή κρούσης μπορούμε να γράψουμε την έκφραση για τη διατήρηση της ενέργειας. Εδώ είναι:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}Mv_c'^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \implies$$

$$mv_0^2 = Mv_c'^2 + \frac{1}{12}M\ell^2\omega^2$$

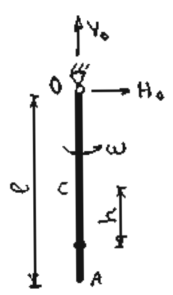
Την τελευταία σχέση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντί της σχέσης (A).

Άσκηση 2



Ένα υλικό σημείο μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_0 και σφηνώνεται στη ράβδο ΟΑ η οποία είναι ακίνητη και αρθρωμένη στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ζητείται η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. Για τη ράβδο δίνεται $I_0 = M\ell^2/3$

Λύση



Προφανώς πρόκειται για πλαστική κρούση. Η ράβδος είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο, όπου αναπτύσσονται δυνάμεις V_0, H_0 κατά τη διάρκεια της κρούσης. Έτσι, η ορμή εδώ δεν διατηρείται! Διατηρείται όμως η στροφορμή ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος στο σημείο Ο. Εδώ έχουμε:

$$L_{0z}^{\text{προ}} = L_{0z}^{\text{μετά}} \implies mv_0\left(\frac{\ell}{2}+h\right) = I_0\omega \qquad (1)$$

όπου θετική φορά περιστροφής περί τον άξονα Oz θεωρήθηκε η φορά του ω. και I_0 είναι η ροπή αδράνειας του στερεού που προκύπτει μετά την πλαστική κρούση (δηλαδή της ράβδου ΟΑ η οποία φέρει ενσωματωμένη τη μάζα m) ως προς τον άξονα περιστροφής από το Ο. Είναι:

$$I_0 = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}+h\right)^2 \qquad (2)$$

αφού η σημειακή μάζα m απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση $\ell/_2+h$. Η σχέση (1) λόγω της σχέσης (2) γράφεται:

$$m\upsilon_o\left(\frac{\ell}{2}+h\right)=\left(\frac{1}{3}M\ell^2+m\left(\frac{\ell}{2}+h\right)^2\right)\omega \Rightarrow \omega=\frac{m\upsilon_o\left(\frac{\ell}{2}+h\right)}{\frac{1}{3}M\ell^2+m\left(\frac{\ell}{2}+h\right)^2}$$

Παρατήρηση: Όταν έχουμε πλαστική κρούση, όπως στο πρόβλημα αυτό, δεν γράφουμε την έκφραση για το συντελεστή κρούσης, αλλά απλά τα δύο συγκρουόμενα σώματα αποτελούν ένα απολύτως στερεό σώμα μετά την κρούση.

7.5 Οι κρουστικές δυνάμεις

Η κρουστική δύναμη είναι μία δύναμη πολύ μεγάλου μέτρου η οποία δρα για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Έτσι, κατά το μικρό διάστημα Δt κατά το οποίο δρουν οι κρουστικές δυνάμεις, άλλες δυνάμεις του προβλήματος συνήθως παραλείπονται.

Σ' ένα πρόβλημα με κρουστικές δυνάμεις εφαρμόζουμε τις ακόλουθες δύο αρχές:

(I) Η ώθηση των κρουστικών δυνάμεων είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής:

$$\Sigma \underline{F}_i \Delta t = \Delta \underline{p}$$

(II) Η γωνιακή ώθηση των κρουστικών δυνάμεων ως προς κάποιο άξονα είναι ίση με τη μεταβολή της στροφορμής ως προς τον άξονα αυτό:

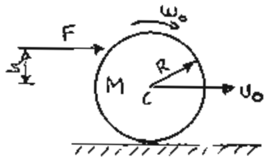
$$\Sigma \underline{M}_i \Delta t = \Delta \underline{L}$$

(Η γωνιακή ώθηση μίας δύναμης ως προς κάποιο άξονα είναι ίση με το γινόμενο της ροπής της δύναμης αυτής ως προς τον άξονα επί το χρονικό διάστημα δράσης της δύναμης).

Με βάση τις δύο παραπάνω αρχές λύνεται το πρόβλημα όπου εμφανίζονται κρουστικές δυνάμεις.

Άσκηση 1

Μία μπάλλα μπιλλιάρδου έχει μάζα M, ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς άξονα από το κέντρο της ίση με $2MR^2/5$. Μία στέκα κτυπά οριζόντια τη μπάλλα σε ύψος h πάνω από το κέντρο της. Ζητείται η σχέση της γωνιακής ταχύτητας ω_0 και της ταχύτητας υ_0 του κέντρου της σφαίρας αμέσως μετά το κτύπημα. Για ποιά τιμή του ύψους h η σφαίρα θα κυλίεται χωρίς ολίσθηση αμέσως μετά το κτύπημα;



Λύση

Προφανώς, η οριζόντια δύναμη F που δέχεται η σφαίρα από τη στέκα για τη μικρή διάρκεια Δt του κτυπήματος(*), είναι μία κρουστική δύναμη. Έτσι, για το μικρό αυτό χρονικό διάστημα αμελείται η δράση όλων των υπολοίπων δυνάμεων. Η F υποτίθεται σταθερή στο διάστημα αυτό.

Η ώθηση της δύναμης είναι ίση με $F\Delta t$ και η μεταβολή της ορμής ίση με $M\upsilon_0 - 0$. Άρα το θεώρημα ώθησης - μεταβολής της ορμής δίνει:

$$F\Delta t = M\upsilon_0 \qquad (1)$$

Με θετική τη φορά της ω_0, η ροπή της δύναμης F ως προς τον άξονα Cz που είναι κάθετος στο σχήμα στο κέντρο C της σφαίρας είναι ίση με Fh. Άρα η γωνιακή ώθηση ως προς τον άξονα αυτό είναι ίση με $Fh\Delta t$. Η μεταβολή της στροφορμής είναι ίση με $I_c\omega_0 - 0$. Άρα είναι:

$$Fh\Delta t = I_c\omega_0 \qquad (2)$$

Διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1), (2) δίνει:

(*) Η F υποτίθεται σταθερή στο διάστημα αυτό.

$$\frac{F\Delta t}{Fh\Delta t} = \frac{Mv_o}{I_c\omega_o} \Rightarrow I_c\omega = Mv_o h$$

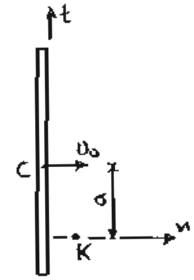
και με $I_c = 2MR^2/5$, παίρνουμε:

$$\frac{2MR^2}{5}\omega = Mv_o h \Rightarrow 2R^2\omega_o = 5v_o h \qquad (3)$$

Η σφαίρα θα κυλίεται χωρίς ολίσθηση αμέσως μετά το κτύπημα όταν ισχύει $v_o = \omega_o R$. Με βάση αυτή, η σχέση (3) δίνει:

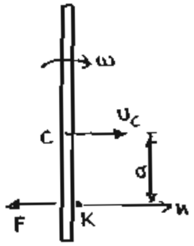
$$2R^2\omega_o = 5\omega_o R h \Rightarrow h = \frac{2R}{5}$$

Άσκηση 2



Η ράβδος μάζας M και μήκους L του σχήματος κάνει απλή μεταφορική κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι, οπότε συγκρούεται πλαστικά με το κατακόρυφο καρφί K το οποίο είναι καρφωμένο και εξέχει πάνω στο τραπέζι. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά η ράβδος μετά τη σύγκρουση. Δίνεται η ακτίνα περιφοράς k_c της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο βάρος της C και η απόσταση α. Η ταχύτητα της ράβδου πριν την κρούση είναι v_o.

Λύση



Έστω v_c η ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση και ω η γωνιακή της ταχύτητα. Η δύναμη F ασκείται από το καρφί στη ράβδο κατά το χρονικό διάστημα Δt της κρούσης. Με θετική τη φορά του άξονα (κ) έχουμε:

$$-F\Delta t = Mv_c - Mv_o \qquad (1)$$

σύμφωνα με το θεώρημα ώθησης - μεταβολής της ορμής.
Η ροπή της δύναμης F ως προς άξονα κάθετο στο C είναι ίση με Fa. Έτσι η γωνιακή ώθηση ως προς τον άξονα αυτό είναι ίση με $Fa\Delta t$.
Η στροφορμή της ράβδου ως προς τον άξονα αυτό πριν την κρούση είναι μηδενική και μετά την κρούση ίση με $I_c\omega$. Άρα έχουμε:

$$Fa\Delta t = I_c\omega \qquad (2)$$

αφού η γωνιακή ώθηση είναι ίση με τη μεταβολή της στροφορμής. Από τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε:

$$-\frac{I_c\omega}{a} = Mu_c - Mu_0 \qquad (3)$$

Όμως, επειδή η κρούση της ράβδου με το καρφί είναι πλαστική, το σημείο της ράβδου που ακουμπά στο καρφί αποκτά μηδενική ταχύτητα μετά την κρούση. Άρα είναι:

$$\omega a = u_c \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3), (4) παίρνουμε:

$$-\frac{I_c\omega}{a} = Ma\omega - Mu_0 \implies \omega = \frac{aMu_0}{Ma + \frac{I_c}{a}} = \frac{Ma^2u_0}{Ma^2 + I_c} \implies$$

$$\omega = \frac{Ma^2u_0}{Ma^2 + Mk_c^2} \implies \omega = \frac{a^2u_0}{a^2 + k_c^2}$$

αφού είναι $I_c = Mk_c^2$

Παρατήρηση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε βέβαια απ' ευθείας αν εφαρμόσουμε τη διατήρηση της στροφορμής ως προς τον κατακόρυφο άξονα από το K_1 η οποία προφανώς ισχύει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Αρμονική Ταλάντωση

8.1 Η απλή αρμονική ταλάντωση

Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή u καθορίζει τη θέση ενός σώματος ή ενός συστήματος. Η u μπορεί να είναι κάποιο μήκος ή κάποια γωνία. Υποθέτουμε ακόμη ότι η αρχή μέτρησης της μεταβλητής u είναι η **θέση ισορροπίας** του σώματος ή του συστήματος. Έτσι, η κίνηση του σώματος ή του συστήματος περιγράφεται από την εξίσωση κίνησης $u=u(t)$. Η κίνηση του σώματος ή του συστήματος είναι **απλή αρμονική ταλάντωση** όταν η μεταβλητή θέσης u ικανοποιεί διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\ddot{u}+\omega^2 u=0 \tag{8.1.1}$$

όπου ω^2 είναι θετική σταθερή: $\omega^2>0$. Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γνωστή ως **διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή**.

Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:

$$u(t)=C\sin(\omega t+\delta) \tag{8.1.2}$$

όπου C, ω, δ είναι σταθερές. Η σταθερή ω εμφανίζεται και στη διαφ. εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή και αποτελεί την **κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης**. Η συχνότητα f της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$f=\frac{\omega}{2\pi} \tag{8.1.3}$$

και η περίοδος T της ταλάντωσης είναι:

$$T=f^{-1} \tag{8.1.4}$$

Η σταθερή C είναι το **πλάτος της ταλάντωσης** και είναι η μέγιστη τιμή που παίρνει η θέση u για τις διάφορες τιμές του t. Η σταθερή δ ονομάζεται **φάση** ή **αρχική φάση** της ταλάντωσης. Οι σταθερές C, δ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή από τον τρόπο που τίθεται σε κίνηση ο ταλαντωτής τη χρονική στιγμή $t=0$.

Παρατήρηση: Αν στη σχέση $u(t)=C\sin(\omega t+\delta)$ θέσουμε όπου $\delta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon$, τότε, κατά τα γνωστά από την Τριγωνομετρία έχουμε $u(t)=C\cos(\omega t+\varepsilon)$. Έτσι, γενικά, η εξίσωση κίνησης $u=u(t)$ μπορεί να γραφεί:

$$u(t)=C\sin(\omega t+\varphi) \qquad \text{ή} \qquad u(t)=C\cos(\omega t+\varphi)$$

όπου στις δύο εκφράσεις η τιμή της φ διαφέρει κατά $\pi/2$. Και στις δύο περιπτώσεις μιλάμε για **ημιτονοειδή κίνηση**.

Με βάση το γνωστό τύπο: $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ από την Τριγωνομετρία, η έκφραση $u(t)=C\sin(\omega t+\delta)$ παίρνει τη μορφή:

$$u(t)=C\sin\omega t\cos\delta + C\cos\omega t\sin\delta = C\cos\delta\sin\omega t + C\sin\delta\cos\omega t$$

$$\Longrightarrow \quad u(t)=A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (8.1.5)$$

όπου $A=C\cos\delta$, $B=C\sin\delta$ είναι δύο νέες σταθερές.

Το βασικό πρόβλημα στην αρμονική ταλάντωση είναι να φτάσουμε στη διαφορική εξίσωση $\ddot{u}+\omega^2u=0$. Για το σκοπό αυτό εργαζόμαστε ως εξής:

(α) Καθορίζουμε τη θέση ισορροπίας του συστήματος και θεωρούμε τυχαία θέση του συστήματος η οποία καθορίζεται από τη μεταβλητή u. Η θετική φορά της u είναι από τη θέση ισορροπίας προς την τυχαία θέση.

(b) Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις στην τυχαία θέση του συστήματος που ασκούνται στο κινούμενο σώμα.

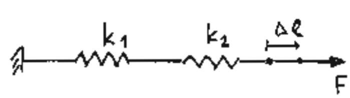
(c) Με θετική φορά τη θετική φορά της u γράφουμε την εξίσωση της μεταφορικής κίνησης: $\Sigma F = m\gamma$, όπου $\gamma = \ddot{u}$ αν πρόκειται για μεταφορική κίνηση. Αν πρόκειται για περιστροφική κίνηση, οπότε η μεταβλητή u είναι γωνία, η γωνιακή επιτάχυνση είναι $\ddot{u}$ και γράφουμε την εξίσωση της περιστροφικής κίνησης $\Sigma M = I\ddot{u}$ (Εδώ αποφεύγουμε να συμβολίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση με $\dot{\omega}$, αφού το ω είναι η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης και όχι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής κάποιου στερεού).

(d) Από το βήμα (c), μετά από πράξεις καταλήγουμε στη δ.ε. $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ από την οποία προσδιορίζεται αμέσως η κυκλική συχνότητα ω και η συχνότητα f της ταλάντωσης. Σε περίπτωση που εμφανισθούν σταθερές στην τελική εξίσωση, αυτές απαλείφονται αν γράψουμε τις εξισώσεις ισορροπίας στη θέση που ισορροπεί το σύστημα.

Σημείωση: Μία άλλη μέθοδος για να φτάσουμε στη δ.ε. του αρμονικού ταλαντωτή, οπότε προσδιορίζεται και η συχνότητα της ταλάντωσης, είναι η μέθοδος Lagrange την οποία θα γνωρίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ελατήρια: Σε προβλήματα που υπάρχουν ελατήρια συχνά έχουμε αρμονική ταλάντωση. Τα ελατήρια θεωρούνται αβαρή και υπακούουν στο νόμο του Hook: $F = k\Delta\ell$ όπου F η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο και προκαλεί μεταβολή του φυσικού του μήκους κατά $\Delta\ell$.

Όταν δύο ελατήρια είναι συνδεμένα σε σειρά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η δύναμη F καταπονεί



καθένα από τα δύο ελατήρια. Αν $\Delta\ell_1$ η μεταβολή μήκους του πρώτου και $\Delta\ell_2$ η μεταβολή μήκους του δεύτερου, έχουμε:

$$F = k_1 \Delta\ell_1 \qquad\qquad F = k_2 \Delta\ell_2$$

Όμως, η ολική μεταβολή μήκους είναι $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$ και σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

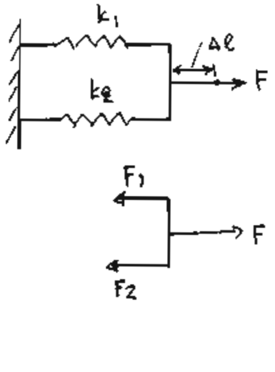
$$\Delta\ell = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\,\Delta\ell$$

Η τελευταία σχέση φανερώνει ότι τα δύο ελατήρια μπορούν να αντικατασταθούν με ένα του οποίου η σταθερή είναι:

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad \text{(σύνδεση σειράς)}$$

Γενικά, για ν ελατήρια έχουμε:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_\nu}$$



Θεωρούμε τώρα τα ελατήρια του διπλανού σχήματος τα οποία είναι συνδεμένα παράλληλα. Έτσι, η δύναμη F διαμοιράζεται: $F = F_1 + F_2$. Εδώ, η μεταβολή μήκους $\Delta\ell$ είναι η ίδια για τα δύο ελατήρια. Άρα είναι:

$$F_1 = k_1 \Delta\ell \qquad\qquad F_2 = k_2 \Delta\ell$$

και επειδή είναι $F = F_1 + F_2$ έχουμε

$$F = k_1 \Delta\ell + k_2 \Delta\ell \quad \Longrightarrow \quad F = (k_1 + k_2)\Delta\ell$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι τα δύο ελατήρια μπορούν να αντικατασταθούν με ένα, του οποίου η σταθερή είναι

$$k = k_1 + k_2$$

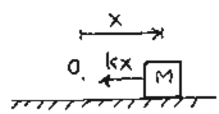
και, γενικά, για ν ελατήρια, έχουμε:

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$$

Άσκηση 1

Στο διπλανό σχήμα, η μάζα Μ μπορεί να κινείται χωρίς τριβή κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου. Μετατοπίζουμε τη μάζα Μ προς τα δεξιά κατά a και κατόπιν την αφήνουμε ελεύθερη. Να δειχθεί ότι η μάζα Μ θα κάνει αρμονική ταλάντωση, να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης και να γραφεί η εξίσωση κίνησης.

Λύση



Θεωρούμε την τυχαία θέση της μάζας Μ. Αυτή καθορίζεται από τη θέση x, όπου η αρχή του x είναι η θέση ισορροπίας. Θετική φορά του x, που είναι και η θετική φορά στο πρόβλημα είναι η φορά του βέλους. Στην τυχαία θέση, η μάζα Μ δέχεται δύναμη kx από το ελατήριο με φορά προς τ' αριστερά αφού στη θέση αυτή το ελατήριο είναι τεντωμένο. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\ddot{x} \implies -kx = M\ddot{x} \implies \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0 \qquad (1)$$

Η δ.ε. (1) έχει τη μορφή $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, όπου:

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \implies \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad (2)$$

Άρα η μάζα Μ κάνει αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \overset{(2)}{\implies} T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Η εξίσωση κίνησης, που είναι η γενική λύση της δ.ε. (1), έχει τη μορφή:

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (3)$$

(Προτιμάμε τη μορφή αυτή από τις μορφές $x(t)=C\sin(\omega t+\delta)$, $x(t)=C\cos(\omega t+\delta)$). Οι σταθερές A, B θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες:

Τη χρονική στιγμή $t=0$, η μάζα M βρίσκεται στη θέση $x=a$. Άρα έχουμε:

$$x(0)=a \implies A\sin 0 + B\cos 0 = a \implies B=a$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$ η μάζα M "αφήνεται", συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα $\dot{x}(t)$ για $t=0$ είναι μηδενική. Άρα έχουμε:

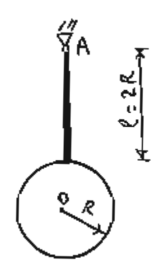
$$\dot{x}(0)=0 \implies \dot{x}(t)\Big|_{t=0}=0 \overset{(3)}{\implies} \omega A\sin\omega t-\omega A\cos\omega t\Big|_{t=0}=0$$

$$\implies \omega A=0 \implies A=0$$

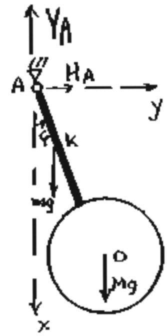
Με $A=0$, $B=a$, η σχέση (3) δίνει: $x(t)=a\cos\omega t$.

Άσκηση 2

Ο λεπτός δίσκος μάζας M και ακτίνας R είναι συγκολλημένος με τη ράβδο μάζας $m=2M$ ώστε να αποτελούν ένα σώμα το οποίο είναι αρθρωμένο στο σημείο A και μπορεί να περιστρέφεται περί αυτό σε κατακόρυφο επίπεδο. Για μικρές ακουλίσεις από τη θέση ισορροπίας, να δειχθεί ότι το σώμα κάνει αρμονική ταλάντωση της οποίας να προσδιορισθεί η συχνότητα. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του στο κέντρο του, ίση με $MR^2/2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της K με $m\ell^2/12$ (Φυσικό εκκρεμές)



Λύση



Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται περί το σταθερό σημείο A στο κατακόρυφο επίπεδο Axy. Θεωρούμε τυχαία θέση του σώματος σε μικρή γωνία φ ως προς την κατακόρυφο. Θετική φορά της φ, αλλά και της γωνιακής επιτάχυνσης $\ddot{\varphi}$ είναι αυτή που δείχνει το βέλος της φ στο σχήμα. Στο στερεό, στην τυχαία θέση φ, ασκείται το βάρος Mg του δίσκου, το βάρος mg της ράβδου και η αντίδραση στο A. Επειδή το A είναι σταθερό σημείο, έχουμε:

$$\overset{+\curvearrowleft}{\Sigma M_A} = I_A \ddot{\varphi} \implies -mg\cdot(KA)\sin\varphi - Mg\,(OA)\sin\varphi = I_A\ddot{\varphi} \implies$$

$$-mg\cdot\frac{\ell}{2}\sin\varphi - Mg\,(\ell+R)\sin\varphi = I_A\ddot{\varphi}$$

Αντικαθιστούμε $m=2M$, $\ell=2R$ και $\sin\varphi \approx \varphi$ αφού η γωνία φ είναι μικρή και παίρνουμε:

$$-2Mg\frac{2R}{2}\varphi - Mg\,(2R+R)\varphi = I_A\ddot{\varphi} \implies$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{5MgR}{I_A}\varphi = 0 \qquad (1)$$

Η τελευταία σχέση φανερώνει ότι έχουμε αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega^2 = \frac{2MgR}{I_A} \qquad (2)$$

Η ροπή αδράνειας I_A υπολογίζεται ως το άθροισμα της $I_A^{\delta\iota\sigma\kappa}$ και της $I_A^{\rho\alpha\beta}$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner έχουμε:

$$I_A^{\delta\iota\sigma\kappa} = I_O^{\delta\iota\sigma\kappa} + M\,(OA)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M(R+\ell)^2 \overset{\ell=2R}{\implies}$$

$$I_A^{\delta\iota\sigma\kappa} = \frac{7}{2}MR^2$$

$$I_A^{\text{ράβ}} = I_K^{\text{ραβ}} + m(KA)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 \xRightarrow{m=2M,\ \ell=2R}$$

$$I_A^{\text{ραβ}} = \frac{1}{3}2M(2R)^2 \implies I_A^{\text{ραβ}} = \frac{8}{3}MR^2$$

Άρα είναι:

$$I_A = I_A^{\text{ραβ}} + I_A^{\text{δισυ}} = \frac{8}{3}MR^2 + \frac{7}{2}MR^2 \implies I_A = \frac{37}{6}MR^2$$

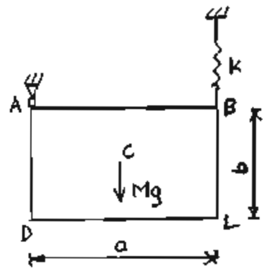
και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\omega^2 = \frac{2MgR}{\frac{37}{6}MR^2} \implies \omega = \left(\frac{12g}{37R}\right)^{1/2} \implies 2\pi f = \left(\frac{12g}{37R}\right)^{1/2} \implies$$

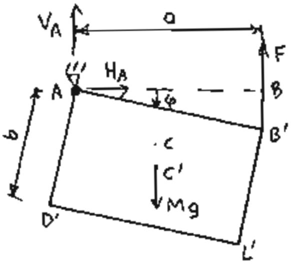
$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{12g}{37R}\right)^{1/2} \implies f = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3g}{37R}\right)^{1/2}$$

Παρατήρηση: Πρόκειται για το φυσικό εκκρεμές: Στερεό σώμα το οποίο μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο περί οριζόντιο άξονα ο οποίος δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας. Η εξίσωση της ταλάντωσης προκύπτει αν γράψουμε το νόμο της περιστροφικής κίνησης περί τον άξονα περιστροφής για μικρές γωνίες φ, οπότε είναι $\sin\varphi \simeq \varphi$, όπου η φ μετριέται σε ακτίνια (rad). Οι εξισώσεις μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας δεν χρειάζονται και επομένως δεν τις γράφουμε. Στη συνέχεια απαιτείται η εύρεση της ροπής αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.

Άσκηση 3



Στο διπλανό σχήμα η ομογενής λεπτή πλάκα ABLD είναι αρθρωμένη σε σταθερό σημείο στην κορυφή της A, ενώ στην κορυφή B είναι δεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k και βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Η πλάκα ισορροπεί όταν οι πλευρές της AB, DL είναι οριζόντιες. Να δειχθεί ότι για μικρές κινήσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας η πλάκα κάνει αρμονική ταλάντωση της οποίας να βρεθεί η συχνότητα. Δίνεται $I_c = M(a^2+b^2)/12$



Λύση

Θεωρούμε την τυχαία θέση της πλάκας όπου έχει στραφεί κατά γωνία φ ως προς τη θέση ισορροπίας της. (θετική φορά περιστροφής η φορά της φ). Στην πλάκα, εκτός από την αντίδραση στο σημείο A, ασκείται το βάρος της Mg, και η δύναμη F του ελατηρίου. Για μικρές γωνίες φ, οι αποστάσεις του A από τους φορείς των δυνάμεων Mg, F είναι $a/2$, a αντίστοιχα δηλαδή οι μετατοπίσεις BB', CC' θεωρούνται κατακόρυφες. Άρα έχουμε:

$$\overset{\curvearrowright +}{\Sigma M_A} = I_A \ddot{\varphi} \implies Mg\frac{a}{2} - F\cdot a = I_A \ddot{\varphi} \qquad (1)$$

όπου $\ddot{\varphi}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση της πλάκας.

Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_0$. Έτσι, στην τυχαία θέση, η συνολική επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + BB'$. Όμως το BB' είναι στοιχειώδες τόξο κύκλου περίπου ίσο με τη χορδή BB' αφού η γωνία φ είναι μικρή. Άρα είναι $BB' = a\varphi$ και έχουμε: $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + a\varphi$. Άρα είναι:

$$F = k\Delta\ell = k(\Delta\ell_0 + a\varphi) \implies F = k(\Delta\ell_0 + a\varphi) \qquad (2)$$

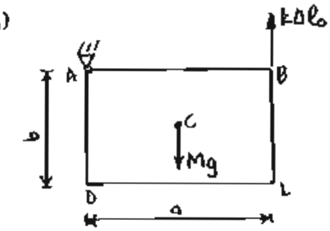
και με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$Mg\frac{a}{2} - k(\Delta\ell_0 + a\varphi) = I_A\ddot{\varphi} \implies$$

$$Mg\cdot\frac{a}{2} - k\Delta\ell_0 a - ka^2\varphi = I_A\ddot{\varphi} \qquad (3)$$

Παρατηρούμε ότι στην τελευταία σχέση εμφανίζονται οι σταθερές $Mg\frac{a}{2}$, $k\Delta\ell_0$. Αυτές απαλείφονται αν θεωρήσουμε τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας. Έχουμε:

$$\overset{\curvearrowright +}{\Sigma M_A} = 0 \implies Mg\cdot\frac{a}{2} - k\Delta\ell_0 a = 0 \qquad (4)$$



και λόγω αυτής, η σχέση (3) γράφεται:

$$-ka^2\varphi = I_A\ddot{\varphi} \implies$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{ka^2}{I_A}\varphi = 0 \qquad (5)$$

Η ροπή αδράνειας I_A υπολογίζεται σύμφωνα με το θεώρημα Steiner:

$$I_A = I_C + M(AC)^2 = \frac{1}{12}M(a^2+b^2) + M\cdot\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) \implies$$

$$I_A = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (5) βρίσκουμε:

$$\ddot{\varphi} + \frac{ka^2}{\frac{1}{3}M(a^2+b^2)}\varphi = 0 \implies \ddot{\varphi} + \frac{3ka^2}{M(a^2+b^2)}\varphi = 0 \qquad (6)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι έχουμε αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

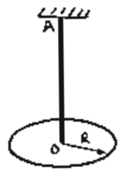
$$\omega^2 = \frac{3ka^2}{M(a^2+b^2)} \implies \omega = \left(\frac{3ka^2}{M(a^2+b^2)}\right)^{1/2} \implies$$

$$2\pi f = \left(\frac{3ka^2}{M(a^2+b^2)}\right)^{1/2} \implies f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3ka^2}{M(a^2+b^2)}\right)^{1/2}$$

Παρατήρηση Η εξίσωση (4) μπορεί να προκύψει αμέσως από την εξίσωση κίνησης (3) για $\ddot{\varphi}=0$, $\varphi=0$. Πράγματι· η (3) ισχύει για οποιαδήποτε κατάσταση γύρω από τη θέση ισορροπίας.

Ασκηση 4

Ο οριζόντιος δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R που έχει ροπή αδράνειας $I_o = MR^2/2$ ως προς άξονα κάθετο στο Ο, δένεται από το Ο με κατακόρυφο σύρμα. Καθώς στρέφουμε το δίσκο στο οριζόντιο επίπεδο κατά γωνία φ, το σύρμα ασκεί σ' αυτόν ροπή kφ με φορά αντίθετη της φ. Να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος.



Λύση

Θεωρούμε κάτοψη του συστήματος όπου ο δίσκος έχει στραφεί κατά γωνία φ, οπότε δέχεται ροπή αντίθετης φοράς της φ και μέτρου kφ.

Η δ.ε. κίνησης είναι:

$$-k\varphi = I_o \ddot{\varphi} \implies$$

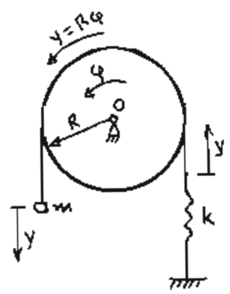
$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I_o}\varphi = 0$$

Όμως είναι $I_o = \frac{1}{2}MR^2$, οπότε βρίσκουμε:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{\frac{1}{2}MR^2}\varphi = 0 \implies \omega^2 = \frac{2k}{MR^2} \implies T = 2\pi\left(\frac{MR^2}{2k}\right)^{1/2}$$

Ασκηση 5

Στο διπλανό σχήμα, το ελατήριο σταθεράς k έχει το ένα άκρο του δεμένο στο στερεό έδαφος. Το άλλο άκρο του συνδέεται με τη μάζα m με αβαρές μή εκτατό νήμα το οποίο περνά από το την επίπεδη τροχαλία χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρειά του. Το τύμπανο έχει μάζα M, ακτίνα R και $I_o = \frac{1}{2}MR^2$. Να

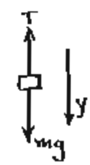


δειχθεί ότι η κίνηση του συστήματος είναι αρμονική ταλάντωση της οποίας να υπολογισθεί η περίοδος.

Λύση

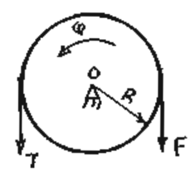
Υποθέτουμε ότι η μάζα m μετακινείται κατά y, οπότε η τροχαλία στρέφεται κατά γωνία φ κατά τις φορές του σχήματος και το ελατήριο επιμηκύνεται κατά y, αφού το νήμα είναι μη εκτατό. Το νήμα ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, άρα έχουμε:

$$y = R\varphi \qquad (1)$$



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το Δ.Ε.Σ της μάζας m. Με θετική φορά τη φορά του y έχουμε:

$$mg - T = m\ddot{y} \qquad (2)$$



Η τροχαλία δέχεται στην περιφέρειά της τη δύναμη T από τη μάζα m και τη δύναμη F από το ελατήριο. Επειδή το κέντρο της είναι σταθερό γράφουμε μόνο την εξίσωση της περιστροφικής κίνησης: Με θετική τη φορά της φ έχουμε:

$$\overset{+\leftarrow}{\Sigma M_o} = I_o\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad TR - FR = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi}$$

$$T - F = \frac{MR}{2}\ddot{\varphi} \qquad (3)$$

Στην κατάσταση ισορροπίας, το ελατήριο έχει επιμήκυνση y_o. Άρα στην τυχαία θέση η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι συνολικά ίση με $y+y_o$. Άρα είναι:

$$F = k(y+y_o) \qquad (4)$$

Η σχέση (2) δίνει $T = mg - m\ddot{y}$. Αντικαθιστώντας την εκφραση αυτή για την T και την F από τη σχέση (4) στη σχέση (3), παίρνουμε:

$$mg - m\ddot{y} - k(y+y_0) = \frac{MR}{2}\ddot{\varphi} \qquad (5)$$

Όμως, η σχέση (1) ισχύει για κάθε t και με διπλή παραγώγιση ως προς t δίνει:

$$\ddot{y} = R\ddot{\varphi} \implies R\ddot{\varphi} = \ddot{y}$$

και ,επομένως, η σχέση (5) γράφεται:

$$mg - m\ddot{y} - k(y+y_0) = \frac{M}{2}\ddot{y} \qquad (6)$$

Στην κατάσταση ισορροπίας, οπότε είναι $y = \ddot{y} = 0$ η τελευταία εξίσωση δίνει:

$$mg - ky_0 = 0 \qquad (7)$$

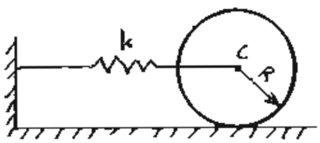
Αυτή, βέβαια προκύπτει και από την ισορροπία ροπών της τροχαλίας στη θέση ισορροπίας. Έτσι, από τις σχέσεις (6), (7) παίρνουμε:

$$-m\ddot{y} - ky = \frac{M}{2}\ddot{y} \implies \ddot{y} + \frac{k}{m+\frac{M}{2}}y = 0 \qquad (8)$$

Άρα έχουμε αρμονική ταλάντωση με

$$\omega^2 = \frac{k}{m+\frac{M}{2}} \implies T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{m+\frac{M}{2}}{k}\right)^{1/2}$$

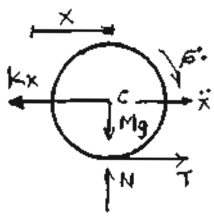
Άσκηση 6



Στο πρόβλημα του διπλανού σχήματος το ένα άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο, ενώ το άλλο έχει συνδεθεί στο κέντρο C του τροχού, ο οποίος μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο έδαφος. Το ελατήριο έχει σταθερή k και η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του είναι ίση με $MR^2/2$. Ζητείται η περίοδος των ταλαντώσεων του κέντρου C του τροχού.

Λύση

Στην κατάσταση ισορροπίας είναι προφανές ότι το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.



Στην τυχαία φάση, όπου το C έχει μετατοπισθεί προς τα δεξιά κατά x, το ελατήριο έχει τεντώσει κατά x. Έτσι το Δ.Ε.Σ. του τροχού φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η τριβή T είναι στατική και σχεδιάστηκε με τυχαία φορά. Η δύναμη kx του ελατηρίου έχει φορά προς τ' αριστερά. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\ddot{x} \implies T - kx = M\ddot{x} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \implies N - Mg = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{+}{\Sigma M_C} = I_C\ddot{\varphi} \implies -TR = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} \qquad (3)$$

Η επιτάχυνση $\ddot{x}$ του κέντρου του τροχού συνδέεται με τη γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\varphi}$ με τη σχέση

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi} \qquad (4)$$

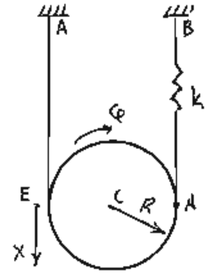
αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση. Η σχέση (3), λόγω των σχέσεων (1), (4) γράφεται:

$$-(kx + M\ddot{x}) = \frac{1}{2}M\ddot{x} \implies \ddot{x} + \frac{2k}{3M}x = 0 \qquad (5)$$

Άρα το κέντρο C του τροχού κάνει αρμονική ταλάντωση. Η κυκλική συχνότητα ω είναι:

$$\omega^2 = \frac{2k}{3M} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{3M}{2k}\right)^{1/2}$$

Άσκηση 7



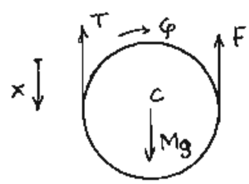
(a)

Το αβαρές μη εκτατό νήμα έχει το ένα άκρο του δεμένο στο σταθερό σημείο A, περνά από τμήμα ημιπεριφέρειας του ομογενούς κυκλικού τυμπάνου ακτίνας R και μάζας M και μέσω του ελατηρίου σταθεράς k καταλήγει στο σταθερό σημείο B. Να δειχθεί ότι το κέντρο C του τυμπάνου μπορεί να ταλαντώνεται αρμονικά περί τη θέση ισορροπίας του και να βρεθεί η συχνότητα των ταλαντώσεων αυτών. Δίνεται $I_c = MR^2/2$. Το νήμα δεν ολισθαίνει στο τύμπανο.

Λύση

Είναι προφανές ότι στη θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά α.

Θεωρούμε τώρα την τυχαία θέση, όπου το C έχει κατέβει κατά x, ενώ το τύμπανο έχει στραφεί κατά γωνία φ. Το Δ.Ε.Σ. του τυμπάνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έχουμε:



(b)

$$\Sigma F_x = M\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad Mg - T - F = M\ddot{x} \qquad (1)$$

και με θετική τη φορά της φ έχουμε:

$$\overset{\curvearrowright +}{\Sigma M_C} = I_C\ddot{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad TR - FR = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} \quad \Longrightarrow$$

$$T - F = \frac{1}{2}MR\ddot{\varphi} \qquad (2)$$

Προσέχοντας το σχήμα (α), παρατηρούμε ότι το σημείο Ε είναι στιγμιαία ακίνητο, αφού το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του τυμπάνου. Έτσι, για μετατόπιση του C κατά dx και στροφή του τυμπάνου κατά $d\varphi$ είναι $dx = R\,d\varphi$ αφού το τύμπανο περιστρέφεται στιγμιαία περί το σημείο του Ε. Συγχρόνως, το σημείο Α κατεβαίνει κατά $dx_A = 2R\,d\varphi$ αφού το Α απέχει 2R από το στιγμιαία ακίνητο σημείο Ε. Άρα, είναι $dx_A = 2dx$ και, επομένως, όταν το κέντρο C κατεβαίνει κατά x, το Α κατεβαίνει $x_A = 2x$. Έτσι, η συνολική επιμήκυνση του ελατηρίου είναι ίση με $a + 2x$. Άρα είναι:

$$F = k(a + 2x) \qquad (3)$$

Από τη σχέση $dx = R\,d\varphi$ συμπεραίνουμε ότι είναι:

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi} \implies R\ddot{\varphi} = \ddot{x} \qquad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1), (2) προκύπτει:

$$Mg - 2F = M\ddot{x} + \frac{1}{2} MR\ddot{\varphi} \qquad (5)$$

Στη σχέση αντικαθιστούμε το F από τη σχέση (3) και το $R\ddot{\varphi}$ από τη σχέση (4), οπότε παίρνουμε:

$$Mg - 2k(a + 2x) = M\ddot{x} + \frac{1}{2} M\ddot{x} \implies$$

$$Mg - 2ka - 4kx = \frac{3}{2} M\ddot{x} \qquad (6)$$

Η τελευταία σχέση, που ισχύει και στη θέση ισορροπίας, δηλαδή για $x = 0$, $\ddot{x} = 0$ δίνει $Mg - 2ka = 0$. Άρα, τελικά, έχουμε:

$$-4kx = \frac{3}{2} M\ddot{x} \implies \ddot{x} + \frac{8k}{3M} x = 0 \qquad (7)$$

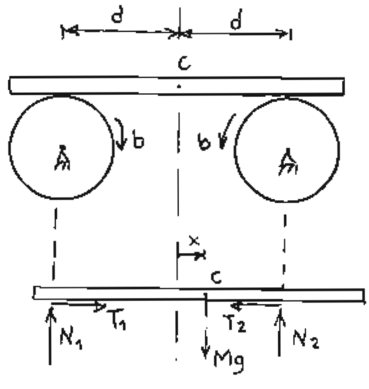
Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του C είναι αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega^2 = \frac{8k}{3M} \implies \omega = \left(\frac{8k}{3M}\right)^{1/2} \implies 2\pi f = \left(\frac{8k}{3M}\right)^{1/2} \implies$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{8k}{3M}\right)^{1/2}$$

Άσκηση 8

Δύο τροχοί με ίσες ακτίνες των οποίων τα κέντρα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν 2d μεταξύ τους περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες b, οι οποίες έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες φορές όπως φαίνεται στο σχήμα. Μια ράβδος με μάζα M είναι τοποθετημένη συμμετρικά πάνω στους τροχούς και ισορροπεί παρουσιάζοντας συντελεστή τριβής μ ίδιο και για τους δύο τροχούς. Να δειχθεί ότι αν εκτρέψουμε λίγο τη ράβδο κατά την οριζόντια διεύθυνση, η ράβδος θα κάνει αρμονική ταλάντωση της οποίας να υπολογισθεί η συχνότητα.



Λύση

Λόγω της συμμετρίας, είναι προφανές ότι η ράβδος ισορροπεί όταν το κέντρο μάζας της C βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του προβλήματος.

Θεωρούμε τώρα ότι το κέντρο μάζας C της ράβδου έχει μετατοπισθεί (οριζόντια) κατά x. Η νέα θέση της ράβδου φαίνεται σχεδιασμένη ακριβώς κάτω από το σχήμα του προβλήματος, μαζί με τις δυνάμεις οι οποίες α-

σκούνται σ' αυτήν. Οι φορές των δυνάμεων τριβής T_1, T_2 στα σημεία επαφής της ράβδου με τους τροχούς είναι κατά τις φορές περιστροφής των αντιστοίχων τροχών.
Εξετάζουμε την κίνηση της ράβδου:

$$\Sigma F_x = M\ddot{x} \implies T_1 - T_2 = M\ddot{x} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \implies N_1 - Mg + N_2 = 0 \qquad (2)$$

αφού το C δεν μετακινείται κατά y. Ακόμη, η ράβδος δεν περιστρέφεται. Άρα είναι:

$$\Sigma M_C = 0 \implies N_1(d+x) - N_2(d-x) = 0 \qquad (3)$$

Επειδή η ράβδος ολισθαίνει ως προς τους τροχούς, οι T_1, T_2 είναι δυνάμεις τριβής ολίσθησης. Άρα είναι:

$$T_1 = \mu N_1 \qquad (4) \qquad\qquad T_2 = \mu N_2 \qquad (5)$$

Με απαλοιφή των T_1, T_2, N_1, N_2 από τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε:

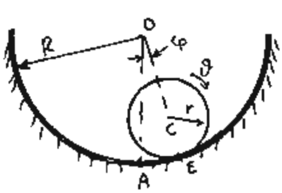
$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{d}x = 0 \qquad (6)$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι το κέντρο μάζας C κάνει αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega^2 = \frac{\mu g}{d} \implies 2\pi f = \left(\frac{\mu g}{d}\right)^{1/2} \implies f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu g}{d}\right)^{1/2}$$

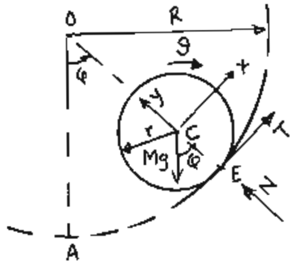
Άσκηση 9

Ο κυκλικός κύλινδρος ακτίνας r και μάζας m μπορεί να κυλίεται χωρίς ολίσθηση στη σταθερή ημικυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R. Για μικρές κινήσεις περί το σημείο A, να βρεθεί η περί-



οδος των ταλαντώσεων. $(I_c = \frac{1}{2}mr^2)$

Λύση



Θεωρούμε τυχαία θέση του κυλίνδρου ο οποίος έχει στραφεί κατά γωνία θ. Συγχρόνως, το ευθύγραμμο τμήμα OC έχει στραφεί κατά γωνία φ. Το Δ.Ε.Σ. του κυλίνδρου φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Επειδή ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει η δύναμη T είναι στατική τριβή και σχεδιάσθηκε με τυχαία φορά.

Επειδή το κέντρο μάζας C κάνει κυκλική κίνηση περί το O, θεωρήσαμε το σύστημα αξόνων Cxy όπου ο άξονας y έχει τη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το O. Έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \implies T - mg\sin\varphi = m\ddot{x} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = m\ddot{y} \implies N - mg\cos\varphi = m\ddot{y} \qquad (2)$$

$$\overset{\curvearrowright +}{\Sigma M_c} = I_c\ddot{\vartheta} \implies -Tr = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\vartheta} \implies -T = \frac{1}{2}mr\ddot{\vartheta} \qquad (3)$$

Επειδή το C κάνει κυκλική κίνηση περί το O, με ακτίνα R-r και γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\varphi}$, η $\ddot{x}$ είναι η επιτρόχια επιτάχυνση:

$$\ddot{x} = (R-r)\ddot{\varphi} \qquad (4)$$

Για μικρές γωνίες φ η κίνηση του C είναι κατά προσέγγιση οριζόντια. Άρα η $\ddot{y}$ (κεντρομόλα επιτάχυνση) είναι μηδενική. Έτσι, οι σχέσεις (1), (2) γράφονται:

$$T - mg\sin\varphi = m(R-r)\ddot{\varphi} \qquad (5)$$

$$N - mg\cos\varphi = 0 \qquad (6)$$

Όμως, ο κύλινδρος κυλίεται οριζόντια με γωνιακή ταχύτητα ίση με $\dot{\theta}$. Άρα είναι: $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$ και λόγω της σχέσης (4) παίρνουμε:

$$r\ddot{\theta} = (R-r)\ddot{\varphi} \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (3), (4) παίρνουμε:

$$-mg\sin\varphi = m(R-r)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mr\ddot{\theta} \overset{(7)}{\Longrightarrow}$$

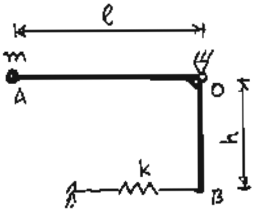
$$-g\sin\varphi = (R-r)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}(R-r)\ddot{\varphi} \Longrightarrow -g\varphi = \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} \Longrightarrow$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-r)}\varphi = 0 \qquad (8)$$

αφού $\sin\varphi \simeq \varphi$ διότι η γωνία φ είναι μικρή. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι έχουμε αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega^2 = \frac{2g}{3(R-r)} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{3(R-r)}{2g}\right)^{1/2}$$

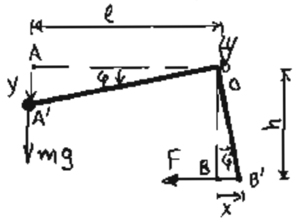
Άσκηση 10



Η απολύτως στερεά ράβδος ΑΟΒ που έχει σχήμα ορθής γωνίας είναι αβαρής. Η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο και είναι αρθρωμένη στο σημείο της Ο. Στο άκρο της Α έχει συγκολληθεί σημειακή μάζα m, ενώ στο άκρο της Β έχει συνδεθεί με το ελατήριο σταθεράς k. Η ράβδος ισορροπεί όταν το τμήμα της ΟΑ είναι οριζόντιο. Για μικρή μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, να δειχθεί ότι η ράβδος κάνει αρμονική ταλάντωση

Λύση

Είναι προφανές ότι στη θέση ισορροπίας το ελατήριο είναι τεντωμένο έστω κατά x_0. Θεωρούμε τώρα την τυχαία θέση, όπου η ράβδος έχει στραφεί κατά μικρή γωνία φ. Επειδή η γωνία φ είναι μικρή, η μετατόπιση $AA'=y$ του σημείου A μπορεί να θεωρηθεί κατακόρυφη και η μετατόπιση $BB'=x$ του B θεωρείται οριζόντια. Η ολική επιμήκυνση του ελατηρίου είναι ίση με $x+x_0$. Έτσι, η δύναμη του ελατηρίου είναι:



$$F = k(x_0 + x) \qquad (1)$$

Επειδή το O είναι σταθερό σημείο, έχουμε:

$$\overset{+\curvearrowleft}{\Sigma M_O} = I_O \ddot{\varphi} \implies mg\ell - F\cdot h = I_O\ddot{\varphi} \qquad (2)$$

(Επειδή η γωνία φ είναι μικρή η απόσταση του O από το βάρος mg είναι περίπου ίση με ℓ και η απόσταση του O από την F ίση περίπου με h, όσες στη θέση ισορροπίας). Επειδή η ράβδος είναι αβαρής, η ροπή αδράνειας I_O ισούται με τη ροπή αδράνειας της σημειακής μάζας m ως προς το σημείο αυτό, δηλαδή ίση με $m\ell^2$. Έτσι, η σχέση (2) με βάση και τη σχέση (1) γράφεται:

$$mg\ell - k(x_0+x)h = m\ell^2\ddot{\varphi} \qquad (3)$$

Από το σχήμα έχουμε:

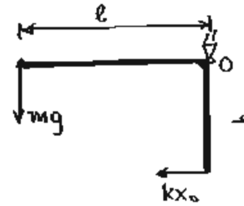
$$\tan\varphi = \frac{x}{h} \implies x = h\tan\varphi \implies x \simeq h\varphi$$

αφού η γωνία φ είναι μικρή. Έτσι, η σχέση (3) δίνει:

$$mg\ell - k(x_0 + h\varphi)h = m\ell^2\ddot{\varphi} \qquad (4)$$

Θεωρούμε τώρα τη θέση ισορροπίας για την απαλειφή των σταθερών που εμφανίζονται στη σχέση (4).

Η ισορροπία ροπών ως προς το (σταθερό) σημείο Ο δίνει:



$$+\curvearrowleft \Sigma M_o = 0 \Rightarrow mg\ell - kx_o h = 0 \qquad (5)$$

Η σχέση (4) λόγω της σχέσης (5) δίνει:

$$-kh^2\varphi = m\ell^2\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{kh^2}{m\ell^2}\varphi = 0 \qquad (6)$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι έχουμε αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega^2 = \frac{kh^2}{m\ell^2} \Rightarrow \omega = \frac{h}{\ell}\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \qquad (7)$$

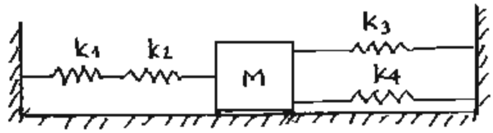
Παρατήρηση 1. Όπως και σε προηγούμενα προβλήματα, η εξίσωση (5) θα μπορούσε να προκύψει απ' ευθείας από την (4) με $\varphi = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$ δηλαδή για την κατάσταση ισορροπίας.

Παρατήρηση 2. Στη δ.ε. (6) το ταλαντούμενο μέγεθος είναι η γωνία φ. Με βάση τη σχέση $y = \ell\varphi$ έχουμε ότι $\ddot{y} = \ell\ddot{\varphi}$ και η δ.ε. γίνεται

$$\ddot{y} + \frac{kh^2}{m\ell^2}y = 0$$

δηλαδή η y ταλαντώνεται αρμονικά όπως και η φ, με την ίδια κυκλική συχνότητα ω η οποία δίνεται από τη σχέση (7).

Άσκηση 11



Στο διπλανό σχήμα, η μάζα Μ μπορεί να κινείται στον οριζόντιο άξονα χωρίς τριβή. Να δειχθεί ότι αυτή μπορεί να κάνει αρμονική ταλάντωση, της οποίας να βρεθεί η περίοδος. Δίνονται $k_1 = k_2 = k$, $k_3 = k/2$, $k_4 = 3k/2$. Στη θέση ισορροπίας δεν υπάρχουν παραμορφώσεις στα ελατήρια.

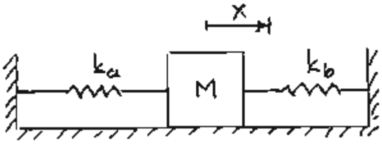
Λύση

Τα ελατήρια με σταθερές k_1, k_2 είναι συνδεμένα σε σειρά. Άρα ισοδυναμούν με ένα ελατήριο σταθερής k_a:

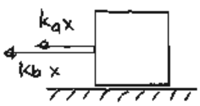
$$\frac{1}{k_a} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \implies k_a = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{k\,k}{k+k} \implies k_a = \frac{k}{2} \quad (1)$$

Τα ελατήρια με σταθερές k_3, k_4 είναι συνδεμένα παράλληλα. Άρα ισοδυναμούν με ένα ελατήριο σταθερής

$$k_b = k_3 + k_4 = \frac{k}{2} + \frac{3k}{2} \implies k_b = 2k \quad (2)$$



Άρα το δοσμένο πρόβλημα είναι ισοδύναμο μ' αυτό του διπλανού σχήματος, όπου στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκη, δηλαδή δεν έχουν παραμορφώσεις.



Αν η μάζα M μετατοπισθεί προς τα δεξιά (θετικά) κατά x, το ελατήριο σταθερής k_a τεντώνει κατά x, ενώ το ελατήριο σταθερής k_b συσπειρώνεται κατά x. Άρα έχουμε:

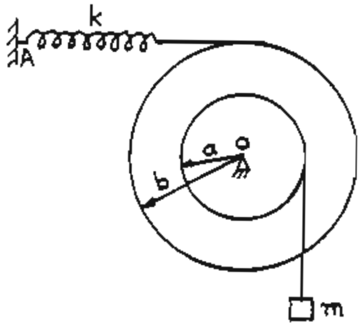
$$\Sigma F_x = M\ddot{x} \implies -k_a x - k_b x = M\ddot{x} \xRightarrow{(1),(2)} -\frac{k}{2}x - 2kx = M\ddot{x} \implies$$

$$\ddot{x} + \frac{5k}{2M}x = 0$$

Άρα η μάζα M κάνει αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

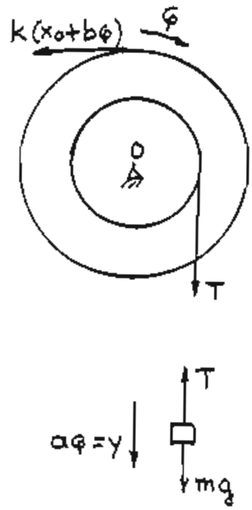
$$\omega^2 = \frac{5k}{2M} \implies \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{5k}{2M}\right)^{1/2} \implies T = 2\pi\left(\frac{2M}{5k}\right)^{1/2}$$

Άσκηση 12



Ο τροχός του σχήματος είναι διπλός με μάζα M και ακτίνα περιφοράς k_o (ακτίνα αδράνειας). Το κέντρο του O είναι σταθερό και μέσω του αβαρούς - μη εκτατού νήματος, συνδέεται με τη μάζα m και το άκρο ενός ελατήριου που έχει το άλλο άκρο του A σταθερό και σταθερή k. Να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος για μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας.

Λύση



Υποθέτουμε ότι ο τροχός στρέφεται κατά γωνία φ από τη θέση ισορροπίας του. Το ελατήριο υφίσταται επιπλέον επιμήκυνση κατά bφ, οπότε η συνολική επιμήκυνση του ελατήριου είναι $x_o + b\varphi$, άρα ασκεί στον τροχό δύναμη $k(x_o + b\varphi)$. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης για τον τροχό:

$$Ta - k(x_o + b\varphi)b = I_o \ddot{\varphi}$$

όπου $I_o = k_o^2 M$ οπότε:

$$Ta - k(x_0 + b\varphi)b = k_0^2 M\ddot{\varphi} \qquad (1)$$

Αν ο τροχός στραφεί κατά φ, η μάζα m κατεβαίνει κατά $a\varphi$. Άρα η επιτάχυνσή της είναι $a\ddot{\varphi}$. Από την κίνηση της μάζας m παίρνω:

$$mg - T = ma\ddot{\varphi} \qquad (2)$$

Απαλείφω το T μεταξύ των (1), (2) οπότε παίρνω:

$$(mg - ma\ddot{\varphi})a - bkx_0 - kb^2\varphi = k_0^2 M\ddot{\varphi} \qquad (3)$$

Για να απαλείψω το x_0 θεωρώ τη θέση ισορροπίας: Με $\Sigma M_0 = 0$ παίρνω $bkx_0 = mga$ οπότε η (3) δίνει:

$$-ma^2\ddot{\varphi} - kb^2\varphi = k_0^2 M\ddot{\varphi} \Longrightarrow$$

$$k_0^2 M\ddot{\varphi} + ma^2\ddot{\varphi} + kb^2\varphi = 0 \Longrightarrow$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{kb^2}{k_0^2 M + ma^2}\varphi = 0 \qquad (4)$$

Η σχέση (4) δείχνει ότι έχουμε αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega^2 = \frac{kb^2}{k_0^2 M + ma^2} \Longrightarrow \omega = \left(\frac{kb^2}{k_0^2 M + ma^2}\right)^{1/2} \Longrightarrow$$

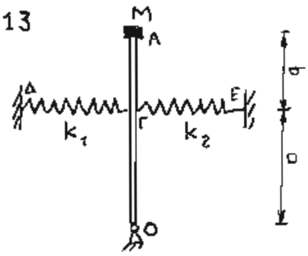
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{Mk_0^2 + ma^2}{kb^2}\right)^{1/2}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η ακτίνα περιφοράς ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο στο σημείο O ορίζεται από τη σχέση:

$$I_0 = Mk_0^2$$

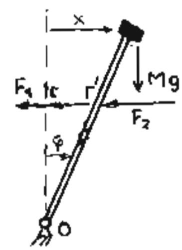
όπου I_o είναι η ροπή αδράνειας και k_o η ακτίνα περιφοράς του στερεού ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του στο σημείο Ο.

Άσκηση 13



Η αβαρής ράβδος ΟΑ, που φαίνεται στο σχήμα, είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο ενώ στο άλλο άκρο της Α φέρει σημειακή μάζα Μ. Στο σημείο Γ είναι προσδεμένη με τα ελατήρια ΔΓ, ΕΓ που έχουν την ίδια σταθερή $k_1 = k_2 = k$. Όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη, τα ελατήρια έχουν το φυσικό μήκος. Να δειχθεί ότι αν η ράβδος εκτραπεί κατά μικρή γωνία (ώστε τα ελατήρια να παραμένουν οριζόντια) τότε αυτή θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση. Να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης καθώς και το μήκος του ισοδύναμου μαθηματικού εκκρεμούς. Δίνεται: $2ka^2 > Mg(a+b)$

Λύση



Για μικρή γωνία εκτροπής φ, η μετατόπιση της μάζας Μ θεωρείται οριζόντια και ίση με $x = (a+b)\varphi$ ενώ η μετατόπιση του Γ είναι επίσης οριζόντια και ίση με $(\Gamma\Gamma') = a\varphi$. Το ελατήριο ΕΓ συσπειρώνεται ενώ το ΔΓ εκτείνεται με αποτέλεσμα να ασκούν τις δυνάμεις:

$$F_1 = k_1(\Gamma\Gamma') = ka\varphi \quad , \quad F_2 = k_2(\Gamma\Gamma') = ka\varphi$$

(Τις δυνάμεις των ελατηρίων σχεδιάζουμε ανάλογα με την παραμόρφωσή τους και δεν βάζουμε πρόσημο στις τιμές τους). Με θετική τη φορά της φ έχουμε:

$$\sum \vec{M}_0 = I_0\ddot{\varphi} \Rightarrow Mg(a+b)\sin\varphi - F_1 a\cos\varphi - F_2 a\cos\varphi = M(a+b)^2\ddot{\varphi} \quad (1)$$

όπου $I_0 = M(a+b)^2$ είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον οριζόντιο άξονα από το O, αφού η ράβδος είναι αβαρής.
Όμως για μικρές γωνίες φ είναι:

$$\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \simeq 1$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές $F_1 = F_2 = ka\varphi$, η σχέση (1) γίνεται:

$$Mg(a+b)\varphi - 2ka^2\varphi = M(a+b)^2\ddot{\varphi} \quad (2)$$

Όμως είναι $x = (a+b)\varphi$ οπότε η (2) γράφεται:

$$Mgx - 2ka^2\frac{x}{a+b} = M(a+b)\ddot{x} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{2ka^2}{M(a+b)^2} - \frac{g}{(a+b)}\right)x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{2ka^2 - Mg(a+b)}{M(a+b)^2}\right)x = 0$$

Επειδή $2ka^2 > Mg(a+b)$ εχουμε αρμονική ταλάντωση με

$$\omega^2 = \frac{2ka^2 - Mg(a+b)}{M(a+b)^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{2ka^2 - Mg(a+b)}{M(a+b)^2}\right)^{-1/2}$$

Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η περίοδος του μαθηματικού εκκρεμούς με μήκος ℓ είναι ίση με $2\pi\sqrt{\ell/g}$.
Για να είναι ισοδύναμο το σύστημα πρέπει η περίοδος να είναι ίδια:

$$2\pi\left(\frac{2ka^2 - Mg(a+b)}{M(a+b)^2}\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\frac{g}{\ell}\right)^{-1/2} \Rightarrow \frac{M(a+b)^2}{2ka^2 - Mg(a+b)} = \frac{\ell}{g} \Rightarrow$$

$$\ell = g\frac{M(a+b)^2}{2ka^2 - Mg(a+b)}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μέθοδος Lagrange

9.1 Μέθοδος Lagrange σε συστήματα όπου όλες οι δυνάμεις είναι διατηρητικες (προέρχονται από δυναμικό)

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή η τυχαία θέση του συστήματος καθορίζεται από τις n ανεξάρτητες μεταβλητές (γενικευμένες συντεταγμένες) $q_1, q_2, \dots q_n$

Στην τυχαία θέση $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$V = V(q_1, q_2, \dots q_n)$$

και η κινητική ενέργεια

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n)$$

Ορίζεται η συνάρτηση Lagrange L:

$$L = T - V \qquad (8.1.1)$$

Προφανώς $L = L(q_1, q_2, \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n)$. Ισχύουν οι επόμενες n εξισώσεις:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ . \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις Lagrange και είναι ισοδύναμες με τους θεμελειώδεις νόμους της μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης.

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στην παραγώγιση, όπου οι μεταβλητές $q_i, \dot{q}_i$ είναι ανεξάρτητες. Έτσι όταν παραγωγίζουμε ως προς q_i, το $\dot{q}_i$ θεωρείται σταθερό και αντίστροφα.

Τονίζουμε ιδιαίτερα ότι V είναι η συνολική δυναμική ενέργεια σε τυχαία θέση. Επίσης χρειάζεται προσοχή στον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας. Για υλικό σημείο είναι

$$T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

όπου x, y, z οι συντεταγμένες του υλικού σημείου ως προς ένα ακίνητο σύστημα αξόνων. Για στερεό σώμα:

$$T = \frac{1}{2}m\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

όπου $\upsilon_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2$ και I_c η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς άξονα, παράλληλο προς τον άξονα περιστροφής, που περνά από το κέντρο μάζας.

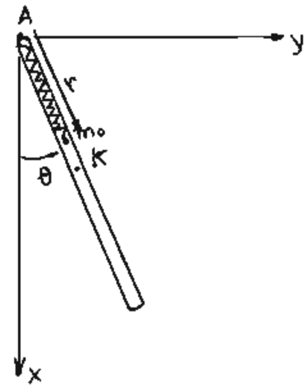
Αξιοσημείωτο είναι ακόμη το γεγονός, ότι μπορούμε να εισάγουμε στο πρόβλημα αυθαίρετες σταθερές. Αυτές με τις παραγωγίσεις απαλείφονται.

Άσκηση 1

Ένας σωλήνας με μάζα m και μήκος ℓ έχει ροπή αδράνειας $I_K = \frac{1}{12}m\ell^2$ ως προς άξονα κάθετο στο μέσο του Κ. Ο σωλήνας περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο περί σταθερό οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στο άκρο του Α. Μέσα στο σωλήνα υπάρχει αβαρές ελατήριο με φυσικό μήκος $\ell_0 = \frac{\ell}{4}$. Το ένα άκρο του ελατήριου έχει προσδεθεί στο σταθερό σημείο Α. Στο άλλο άκρο Β του ελατήριου συνδέεται σημειακή μάζα m_0. Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange. Δίνεται η σταθερή k του ελατήριου.

Λύση

Η τυχαία θέση της m_0 καθορίζεται από τις μεταβλητές r, θ. Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας εφόσον η ράβδος περιστρέφεται σε σταθερό κατακόρυφο επίπεδο. Σε τυχαία θέση (r, θ) έχω:



Θεωρώ το οριζόντιο επίπεδο από το A σαν επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας. Έτσι σε τυχαία θέση (r, θ) λόγω βαρύτητας έχω:

$$V^{\beta}(r,\vartheta) = -m_0 g r\cos\vartheta - mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta \qquad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια λόγω του ελατήριου είναι

$$V^{\varepsilon}(r,\vartheta) = \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 \qquad (2)$$

Η δυναμική ενέργεια προκύπτει:

$$V = -m_0 g r\cos\vartheta - mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 \qquad (3)$$

Στην τυχαία θέση η μάζα m_0 έχει

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta \implies \dot{x} = \dot{r}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\,\dot{\vartheta},$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta + r\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}$$

οπότε η κινητική της ενέργεια E_1 είναι:

$$E_1 = \frac{1}{2}m_o(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}m_o\left[(\dot{r}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\dot{\vartheta})^2 + (\dot{r}\sin\vartheta + r\cos\vartheta\dot{\vartheta})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m_o(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2)$$

και η κινητική ενέργεια της ράβδου:

$$E_2 = \frac{1}{2}I_A\dot{\vartheta}^2$$

όπου $I_A = I_K + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2$ είναι, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο άκρο της A.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \frac{1}{2}m_o(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 \qquad (4)$$

Με βάση τις εξισώσεις (3), (4) φτιάχνουμε τη συνάρτηση Lagrange (Lagrangian) του συστήματος:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_o(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + m_o g r\cos\vartheta + mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}k(r-\ell_o)^2$$

Συντεταγμένη r: Έχω

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2}m_o(2r\dot{\vartheta}^2) + m_o g\cos\vartheta - \frac{1}{2}k\,2(r-\ell_o) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m_o r\dot{\vartheta}^2 + m_o g\cos\vartheta - k(r-\ell_o) \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2}m_o(2\dot{r}) = m_o\dot{r} \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m_o\ddot{r} \qquad (6)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

και σύμφωνα με τις (5), (6) έχω:

$$m_o \ddot r - m_o r \dot\vartheta^2 - m_o g\cos\vartheta + k\,(r - \ell_o) = 0 \qquad (7)$$

Συντεταγμένη ϑ:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -m_o g r \sin\vartheta - mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta \qquad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} = \frac{1}{2} m_o (2r^2\dot\vartheta) + \frac{1}{6} m \ell^2 2\dot\vartheta \implies$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} = m_o r^2\dot\vartheta + \frac{1}{3} m\ell^2\dot\vartheta$$

οπότε προυύπτει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}\right) = m_o 2r\cdot\dot r\,\dot\vartheta + m_o r^2\ddot\vartheta + \frac{1}{3} m\ell^2\ddot\vartheta \qquad (9)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$$

οπότε σύμφωνα με τις (8), (9) έχω:

$$2m_o r\dot r\dot\vartheta + m_o r^2\ddot\vartheta + \frac{1}{3} m\ell^2\ddot\vartheta + m_o g r\sin\vartheta + mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta = 0 \qquad (10)$$

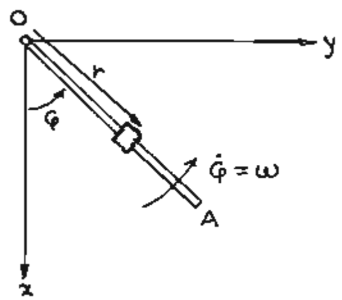
Οι εξισώσεις (7), (10) αποτελούν τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης.

Άσκηση 2

Μία ράβδος ΟΑ, με μήκος ℓ και αμελητέα μάζα, περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο περί σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Ο. Πάνω στη ράβδο ολισθαίνει χωρίς τριβή ένας δακτύλιος μάζας m. Αν η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου διατηρείται σταθερή, να βρεθεί η δ.Ε. (διαφορική Εξίσωση) κίνησης του δακτύλιου πάνω στη ράβδο. Να λυθεί η δ.Ε. αν $r(0)=0$, $\dot{r}(0)=0$, $\varphi(0)=0$

Λύση

Θεωρούμε τυχαία θέση του συστήματος που καθορίζεται από τις παραμέτρους r, φ. Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας.



Αν ορίσουμε το οριζόντιο επίπεδο από το Ο σαν επίπεδο αναφοράς, η δυναμική ενέργεια του συστήματος σε τυχαία θέση είναι:

$$V=-mgr\cos\varphi \qquad (1)$$

αφού η m βρίσκεται σε απόσταση $r\cos\varphi$ κάτω από το επίπεδο αναφοράς και η ράβδος είναι αβαρής. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) \qquad (2)$$

Όμως $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi \Rightarrow$

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\varphi-r\sin\varphi\dot{\varphi}, \quad \dot{y}=\dot{r}\sin\varphi+r\cos\varphi\dot{\varphi}$$

οπότε η (2) δίνει:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \qquad (3)$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi \qquad (4)$$

Η συντεταγμένη φ δεν ενδιαφέρει γιατί είναι γνωστό ότι $\dot{\varphi} = \omega$ (σταθερό). Άρα $\varphi(t) = \omega t + c_1$ και επειδή $\varphi(0) = 0$ παίρνω $c_1 = 0$ οπότε $\varphi(t) = \omega t$.

Παράμετρος r:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2}m(2r\dot{\varphi}^2) + mg\cos\varphi \implies$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2 + mg\cos\omega t \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2}m(2\dot{r}) = m\dot{r} \implies$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \qquad (6)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \implies$$

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 - mg\cos\omega t = 0 \implies$$

$$\ddot{r} - r\omega^2 = g\cos\omega t \qquad (7)$$

Λύνουμε τώρα τη δ.Ε. (7). Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0 \qquad (8)$$

Η (8) είναι ομογενής, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές. Η αλγεβρική χαρακτηριστική είναι:

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0$$

με λύσεις: $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$. Ετσι η λύση της ομογενούς είναι $c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$. Ψάχνουμε τώρα μία μερική λύση. Επειδή το β' μέλος είναι ημιτονοειδές, δοκιμάζω τη συνάρτηση $A\sin\omega t + B\cos\omega t$. Απαιτώ:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) - \omega^2\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) = g\cos\omega t \Rightarrow$$

$$-\omega^2\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) - \omega^2\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) = g\cos\omega t \Rightarrow$$

$$A = 0, \quad B = -\frac{g}{2\omega^2}$$

οπότε η μερική λύση είναι $-\frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t$ και η γενική λύση:

$$r(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t \qquad (9)$$

Όμως $r(0) = 0 \Rightarrow$

$$c_1 + c_2 - \frac{g}{2\omega^2} = 0 \qquad (10)$$

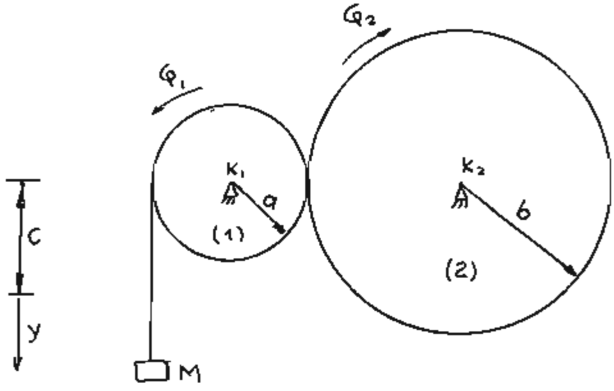
και $\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow$

$$c_1\omega - c_2\omega = 0 \qquad (11)$$

Από τις εξισώσεις (10), (11) προκύπτει $c_1 = c_2 = \frac{g}{4\omega^2}$ και η (9) γράφεται

$$r(t) = \frac{g}{4\omega^2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t} - 2\cos\omega t\right)$$

Άσκηση 3



Οι τροχοί του σχήματος δεν ολισθαίνουν μεταξύ τους. Οι ακτίνες τους είναι a, b και οι μάζες τους m_1, m_2 αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας είναι

$$I_{K_1}^{(1)} = \frac{1}{2} m_1 a^2 \quad , \qquad I_{K_2}^{(2)} = \frac{1}{2} m_2 b^2$$

αντίστοιχα. Το αβαρές - μη εκτατό σχοινί, έχει τυλιχθεί στην περιφέρεια ακτίνας a. Να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας M και η δύναμη του σχοινιού

Λύση

Υποθέτουμε ότι αρχικά η μάζα m ευρέμετο με σχοινί μήκους c, όπου c μία σταθερή. Επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση, οι δυνάμεις του προβλήματος είναι όλες διατηρητικές.

Η θέση της μάζας M καθορίζεται από το y που ισούται με το μήκος του σχοινιού που ξετυλίγεται για $t>0$. Τότε όμως ο τροχός (1) στρέφεται κατά γωνία $\varphi_1 = \frac{y}{a}$. Επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση, ο τροχός

(2) θα στραφεί κατά γωνία $\varphi_2 = \frac{y}{b}$, αφού τα τόξα στις περιφέρειες πρέπει να είναι ίσα με y. Έτσι οι γωνιακές ταχύτητες των τροχών είναι:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{y}}{a} \quad , \quad \omega_2 = \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{y}}{b}$$

και η ταχύτητα της μάζας M ίση με $\dot{y}$. Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας με γενικευμένη συντεταγμένη την y. Στη θέση y έχω:

Δυναμική ενέργεια

$$V = -Mg(c+y) \qquad (1)$$

με επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τα κέντρα των τροχών

Κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{k_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_{k_2}\omega_2^2 \Longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}m_1a^2\frac{\dot{y}^2}{a^2} + \frac{1}{2}m_2b^2\frac{\dot{y}^2}{b^2} \Longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)\dot{y}^2 \qquad (2)$$

Με βάση τις (1), (2) έχουμε τη συνάρτηση Lagrange:

$$L = T - V \Longrightarrow$$

$$L = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)\dot{y}^2 + Mg(c+y) \qquad (3)$$

Έχω:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = Mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right) 2\dot{y} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \left(M + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)\ddot{y}$$

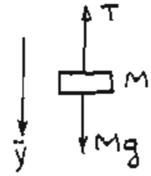
Η εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(M + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)\ddot{y} - Mg = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = \frac{Mg}{M + \frac{1}{2}(m_1+m_2)} \qquad (4)$$

Για τον υπολογισμό της δύναμης του σχοινιού θεωρώ τη μάζα M χωριστά:



$$Mg - T = M\ddot{y} \Rightarrow$$

$$T = Mg - M\ddot{y} = M(g - \ddot{y}) \Rightarrow$$

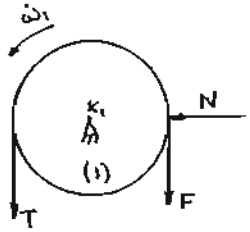
$$T = M\left(g - \frac{Mg}{M + \frac{1}{2}(m_1+m_2)}\right) \Rightarrow$$

$$T = M\,\frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)}{M + \frac{1}{2}(m_1+m_2)}\,g \qquad (5)$$

Παρατήρηση: Το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με τους νόμους της δυναμικής, εξετάζοντας κάθε σώμα χωριστά. Τη μάζα M, ήδη την εξετάσαμε. Βρήκαμε:

$$Mg - T = M\ddot{y} \qquad (6)$$

Τροχός (1)

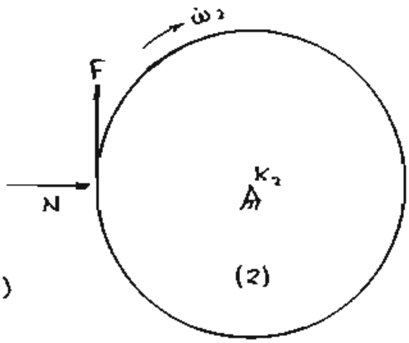


$$\Sigma M_{K_1} = I_{K_1}\dot{\omega}_1 \Rightarrow$$

$$Ta - Fa = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\omega}_1 \Rightarrow$$

$$T - F = \frac{1}{2} m_1 a \dot{\omega}_1 \qquad (7)$$

Τροχός (2)



$$\Sigma M_{K_2} = I_{K_2}\dot{\omega}_2 \Rightarrow$$

$$Fb = \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\omega}_2 \Rightarrow$$

$$F = \frac{1}{2} m_2 b \dot{\omega}_2 \qquad (8)$$

Εξισώσεις συνδέσμων:
Αν η Μ κατεβεί κατά y, ο τροχός (1) στρέφεται κατά φ_1 και ο τροχός (2) κατά φ_2:

$$y = a\varphi_1, \quad y = b\varphi_2 \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = a\dot{\omega}_1 \qquad (9)$$

$$\ddot{y} = b\dot{\omega}_2 \qquad (10)$$

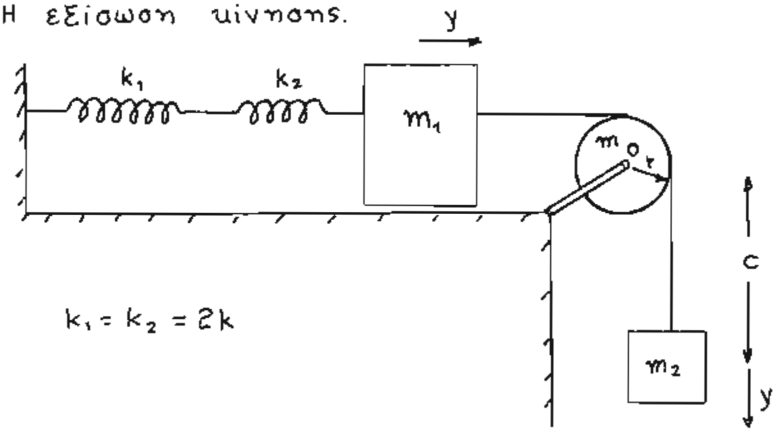
Από τις εξισώσεις (6), (7), (8), (9), (10), εύκολα προκύπτουν οι (4), (5).

Άσκηση 4

Δίνεται το σύστημα του σχήματος, όπου η μάζα m_1 κινείται χωρίς τριβή στο οριζόντιο επίπεδο. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι ίση με $\frac{1}{2}mr^2$. Το σχοινί είναι αβαρές και μη εκτατό. Τη χρονική στιγμή t=0 το σύστημα είναι ακίνητο και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Ζητούνται:

(α) Η διαφορική εξίσωση κίνησης

(β) Η εξίσωση κίνησης.



$k_1 = k_2 = 2k$

Λύση

Σύμφωνα με την άσκηση **92** τα δύο ελατήρια με σταθερές k_1, k_2, που είναι συνδεμένα σε σειρά, μπορούν να αντικατασταθούν από ένα ελατήριο με σταθερή

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{2k \cdot 2k}{2k + 2k} \implies$$

$$k_0 = k \qquad (1)$$

Αν η μάζα m_1 μετατοπισθεί κατά y από την αρχική θέση της, η m_2 θα μετατοπισθεί επίσης κατά y, αφού το σχοινί είναι μη εκτατό. Ταυτόχρονα η τροχαλία θα στραφεί κατά γωνία φ: $y = r\varphi$ αφού το σχοινί δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας. Το σύστημα έχει ενα βαθμό ελευθερίας με γενικευμένη συντεταγμένη την y. Όλες οι δυνάμεις είναι διατηρητικές.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο O της τροχαλίας. Υποθέτουμε ακόμη ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ το κατακόρυφο μήκος του σχοινιού είναι ίσο με c, όπου c μία σταθερή. Στην τυχαία θέση, που καθορίζεται από το y, έχω:

Δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας:

$$U^{\beta} = -m_2 g (c+y) + m_1 g r$$

Δυναμική ενέργεια λόγω ελατηρίου

$$U^{\varepsilon} = \frac{1}{2} k y^2$$

δηλαδή συνολική δυναμική ενέργεια:

$$U = -m_2 g (c+y) + m_1 g r + \frac{1}{2} k y^2 \qquad (1)$$

Κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 \qquad (2)$$

αφού οι m_1, m_2 κάνουν μεταφορική κίνηση με κοινή ταχύτητα $\dot{y}$ (μέτρο) και η τροχαλία απλή περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\varphi}$. Όμως $y = r\varphi$, άρα $\dot{y} = r\dot{\varphi}$ και με $I_0 = \frac{1}{2} m r^2$, η (2) δίνει:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \frac{\dot{y}^2}{r^2} \implies$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right) \dot{y}^2 \qquad (3)$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - U \implies$$

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right)\dot{y}^2 + m_2 g\,(c+y) - m_1 g r - \frac{1}{2} k y^2$$

Έχω:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m_2 g - \frac{1}{2} k 2y \implies$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m_2 g - ky \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right) 2\dot{y} \implies$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right)\ddot{y} \qquad (5)$$

Η εξίσωση Lagrange λόγω των (4), (5) γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \implies \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right)\ddot{y} - m_2 g + ky = 0 \implies$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}\, y = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \qquad (6)$$

Λύνουμε τώρα τη διαφορική εξίσωση (6): Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$\ddot{y} + \frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}\, y = 0 \qquad (7)$$

και έχει λύση

$$y_{o\mu}(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

αφού η (7) περιγράφει αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega^2 = \frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \qquad (8)$$

Επειδή το δεύτερο μέλος της (6) είναι σταθερό, δοκιμάζουμε μερική λύση $y_{\mu\varepsilon\rho}$ μία σταθερή. Πρέπει η σταθερή $y_{\mu\varepsilon\rho}$ να ικανοποιεί την (6). Προκύπτει:

$$y_{\mu\varepsilon\rho} = \frac{m_2 g}{k}$$

Η γενική λύση της (6) είναι:

$$y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{m_2 g}{k} \qquad (9)$$

'Ομως $y(0) = 0$ οπότε

$$B + \frac{m_2 g}{k} = 0 \implies B = -m_2 g/k$$

και $\dot{y}(0) = 0$ αφού για $t=0$ το σύστημα δεν κινείται.

$$\dot{y}(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\,\Big|_{t=0} = A\omega = 0 \implies A = 0$$

Προκύπτει με αντικατάσταση στην (9):

$$y(t) = -\frac{m_2 g}{k}\cos\omega t + \frac{m_2 g}{k}$$

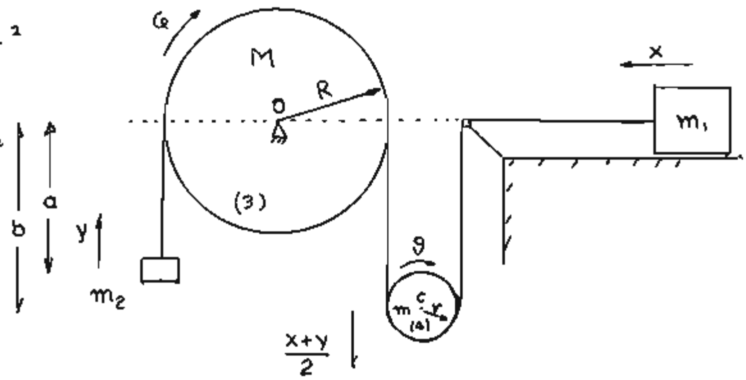
Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε να εργασθούμε με τον κλασσικό τρόπο της δυναμικής, θεωρώντας κάθε σώμα χωριστά.

'Ασκηση 5

Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος με γενικευμένες συντεταγμένες x, y. Δεν υπάρχουν τριβές ολίσθησης. Το σχοινί είναι αβαρές - μη εκτατό. Δίνονται οι ροπές αδράνειας των δίσκων:

$I_o = \frac{1}{2}MR^2$

$I_c = \frac{1}{2}mr^2$



Λύση

Αν η μάζα m_2 ανεβεί κατά y, η τροχαλία (M, R) θα στραφεί κατά φ:

$$y = R\varphi \qquad (1)$$

Αν ταυτόχρονα η μάζα m_1 μετακινηθεί προς τ' αριστερά κατά x, η τροχαλία (m, r) θα στραφεί κατά ϑ:

$$r\vartheta = \frac{x-y}{2} \qquad (2)$$

ενώ το κέντρο της θα κατεβεί κατά $\frac{x+y}{2}$. Ετσι το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας με γενικευμένες συντεταγμένες x, y.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο από το O. Αν a, b είναι οι αρχικές αποστάσεις των m_1, C (κέντρο μάζας της τροχαλίας (m, r)) από το επίπεδο αναφοράς, η δυναμική ενέργεια του συστήματος στην τυχαία θέση είναι:

$$V = -m_2 g(a-y) - mg\left(\frac{x+y}{2}+b\right) \qquad (3)$$

Κινητική ενέργεια: Καθεμία από τις m_1, m_2 κάνει απλή μεταφορική κίνηση με ταχύτητες $\dot{x}, \dot{y}$ αντίστοιχα:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 \qquad (4)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 \qquad (5)$$

Ο δίσκος ακτίνας R κάνει απλή περιστροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\varphi}$ που σύμφωνα με τη σχέση (1) δίνεται από τη σχέση

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{R} \qquad (6)$$

οπότε έχει κινητική ενέργεια:

$$T_3 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} M R^2 \frac{\dot{y}^2}{R^2} \Longrightarrow$$

$$T_3 = \frac{1}{4} M \dot{y}^2 \qquad (7)$$

Ο δίσκος ακτίνας r κάνει μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Η ταχύτητα του κέντρου του C είναι ίση με $(\dot{x}+\dot{y})/2$ ενώ η γωνιακή του ταχύτητα $\dot{\vartheta}$ είναι σύμφωνα με τη σχέση (2):

$$\dot{\vartheta} = \frac{\dot{x}-\dot{y}}{2r} \qquad (8)$$

Η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$T_4 = \frac{1}{2} m \upsilon_c^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}+\dot{y}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{\dot{x}-\dot{y}}{2r}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$T_4 = \frac{1}{8} m \left(3\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{3\dot{y}^2}{2} + \dot{x}\dot{y} \right) \qquad (9)$$

Η συνολική κινητική ενέργεια είναι:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M \dot{y}^2 + \frac{1}{8} m \left(3\frac{\dot{x}^2}{2} + 3\frac{\dot{y}^2}{2} + \dot{x}\dot{y} \right) \Rightarrow$$

$$T = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{3m}{16} \right) \dot{x}^2 + \left(\frac{m_2}{2} + \frac{M}{4} + \frac{3m}{16} \right) \dot{y}^2 + \frac{m}{8} \dot{x}\dot{y} \qquad (10)$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - V \Longrightarrow$$

$$L = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{3m}{16} \right) \dot{x}^2 + \left(\frac{m_2}{2} + \frac{M}{4} + \frac{3m}{16} \right) \dot{y}^2 + \frac{m}{8} \dot{x}\dot{y} + m_2 g (a - y) + \frac{mg}{2} (x + y + b)$$

Παράμετρος y:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m_2 g + \frac{mg}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \left(\frac{m_2}{2} + \frac{M}{4} + \frac{3m}{16} \right) 2\dot{y} + \frac{m}{8} \dot{x} \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \left(m_2 + \frac{M}{2} + \frac{3m}{8} \right) \ddot{y} + \frac{m}{8} \ddot{x}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(m_2 + \frac{M}{2} + \frac{3m}{8} \right) \ddot{y} + \frac{m}{8} \ddot{x} + m_2 g - \frac{mg}{2} = 0 \qquad (11)$$

Παράμετρος x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{mg}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{3m}{16}\right)2\dot{x} + \frac{m}{8}\dot{y}$$

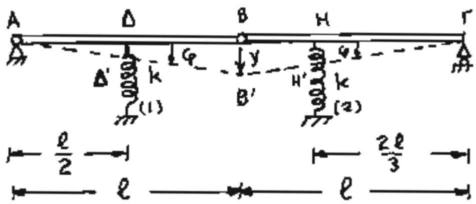
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m_1 + \frac{3m}{8}\right)\ddot{x} + \frac{m}{8}\ddot{y}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$\left(m_1 + \frac{3m}{8}\right)\ddot{x} + \frac{m\ddot{y}}{8} - \frac{mg}{2} = 0 \qquad (12)$$

Άσκηση 6

Η δοκός (Gerber) του σχήματος ισορροπεί όταν είναι οριζόντια. Να βρεθεί η περίοδος μικρών ταλαντώσεων. Τα τμήματα (ΑΒ), (ΒΓ) έχουν μάζα m το καθένα. Τα ελατήρια είναι αβαρή με σταθερή k το καθένα.



Λύση

Θεωρούμε τυχαία θέση του συστήματος, όπου το Β έχει μετατοπισθεί κατακόρυφα κατά (ΒΒ') = y. Το y είναι μικρό, οπότε και η γωνία φ είναι μικρή. Έτσι

$$\varphi \simeq \tan\varphi = \frac{y}{\ell} \Rightarrow$$

$$y = \ell\varphi \qquad (1)$$

Επειδή τα μήκη των ΑΒ, ΒΓ είναι ίδια, η στροφή είναι (κατά μέτρο) ίση και ίση με φ.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο από τα Α, Γ. Στην τυχαία θέση που προσδιορίζεται από την παράμετρο φ, (ένας βαθμός ελευθερίας) τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ βρίσκονται κατά $\frac{\ell}{2}\varphi$ κάτω από το επίπεδο αναφοράς. Η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας είναι:

$$V^{\beta} = -mg\frac{\ell}{2}\varphi - mg\frac{\ell}{2}\varphi = -mg\ell\varphi$$

Το ελατήριο (1) έχει συσπειρωθεί συνολικά κατά $x_1 + (\Delta\Delta')$ όπου x_1 η συσπείρωσή του στη θέση ισορροπίας και $(\Delta\Delta') = \frac{\ell}{2}\varphi$ η νέα συσπείρωση. Το ελατήριο (2) έχει συσπειρωθεί συνολικά κατά $x_2 + (HH')$ όπου x_2 η συσπείρωση στη θέση ισορροπίας και $(HH') = \frac{2\ell}{3}\varphi$ η νέα συσπείρωση. Έτσι η δυναμική ενέργεια λόγω ελατηρίων είναι

$$V^{\varepsilon} = \frac{1}{2}k\left(x_1 + \frac{\ell}{2}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_2 + \frac{2\ell}{3}\varphi\right)^2$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια προκύπτει:

$$V = -mg\ell\varphi + \frac{1}{2}k\left(x_1 + \frac{\ell}{2}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_2 + \frac{2\ell}{3}\varphi\right)^2$$

Η κινητική ενέργεια της ΑΒ είναι $\frac{1}{2}I_A\dot{\varphi}^2$ αφού το Α είναι ακίνητο. Όμως:

$$I_A = \frac{1}{3}m\ell^2$$

Η οριζόντια μετατόπιση του Γ είναι αμελητέα, δηλαδή το Γ είναι ακίνητο. Έτσι η κινητική ενέργεια της (ΒΓ) είναι $\frac{1}{2}I_\Gamma\dot{\varphi}^2$ με $I_\Gamma = I_A$. Έτσι η συνολική κινητική ενέργεια είναι:

$$T=\frac{1}{6}m\ell^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{6}m\ell^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow$$

$$T=\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L=T-V \Rightarrow$$

$$L=\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2+mg\ell\varphi-\frac{1}{2}k\left(x_1+\frac{\ell}{2}\varphi\right)^2-\frac{1}{2}k\left(x_2+\frac{2\ell}{3}\varphi\right)^2 \quad (2)$$

Έχω

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=mg\ell-k\left(x_1+\frac{\ell}{2}\varphi\right)\cdot\frac{\ell}{2}-k\left(x_2+\frac{2\ell}{3}\varphi\right)\frac{2\ell}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{1}{3}m\ell^2 2\dot{\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)=\frac{2m\ell^2}{3}\ddot{\varphi} \quad (4)$$

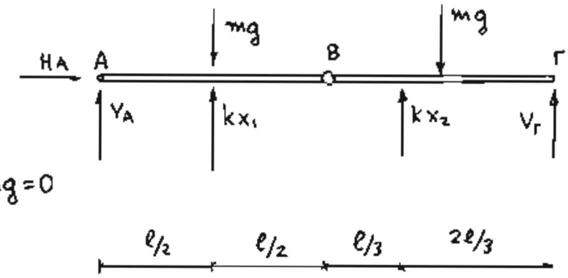
Η εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{2m\ell^2}{3}\ddot{\varphi}-mg\ell+k\frac{\ell}{2}\left(x_1+\frac{\ell\varphi}{2}\right)+\frac{2k\ell}{3}\left(x_2+\frac{2\ell}{3}\varphi\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{2m\ell}{3}\ddot{\varphi}+\frac{13}{36}k\ell^2\varphi-mg\ell+\frac{k\ell}{2}x_1+\frac{2k\ell}{3}x_2=0 \quad (5)$$

Για την απαλειφή των ανεπιθύμητων σταθερών x_1, x_2 θεωρώ τη θέση ισορροπίας. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:



x: $\quad H_A = 0$

y: $\quad V_A + kx_1 + kx_2 + V_\Gamma - 2mg = 0$

$\Sigma \overset{+}{M}_A = 0 \Rightarrow$

$$-kx_1\frac{\ell}{2} - kx_2\left(\ell + \frac{\ell}{3}\right) - V_\Gamma 2\ell + mg\frac{\ell}{2} + mg\frac{3\ell}{2} = 0 \qquad (7)$$

$$\Sigma \overset{+}{M}_{B\,\delta\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow -kx_2\frac{\ell}{3} + mg\frac{\ell}{2} - V_\Gamma \ell = 0 \qquad (8)$$

Λύνουμε την (8) ως προς V_Γ και αντικαθιστούμε στην (7) οπότε προκύπτει:

$$\frac{kx_1}{2} + \frac{2kx_2}{3} = mg \qquad (9)$$

Η εξίσωση (5) λόγω της (9) γράφεται:

$$\frac{2m\ell^2}{3}\ddot{\varphi} + \frac{13}{36}k\ell^2\varphi = 0 \implies$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{13k}{24m}\varphi = 0 \qquad (10)$$

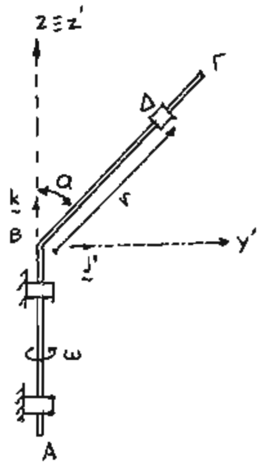
Η εξίσωση (10) περιγράφει αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega^2 = \frac{13k}{24m} \implies T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{24m}{13k}\right)^{1/2}$$

Άσκηση 7

Η ράβδος που έχει καμφθεί κατά γωνία α στο Β περιστρέφεται περί την ΑΘ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η ράβδος ΑΒΓ είναι αβαρής και πάνω στο σκέλος ΒΓ ολισθαίνει ένας δακτύλιος μάζας m χωρίς τριβή. Αρχικά ο δακτύλιος απέχει c από το Β και είναι ακίνητος ως προς τη ράβδο. Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του δακτύλιου πάνω στη ράβδο.

Λύση



Η θέση του δακτύλιου πάνω στη ράβδο καθορίζεται από τη μεταβλητή r.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο από το Θ. Στην τυχαία θέση r, η δυναμική ενέργεια είναι:

$$V = mgr\cos a \qquad (1)$$

Η ταχύτητα του δακτύλιου ως προς τη ράβδο είναι:

$$\underset{\sim}{v}_r = \dot{r}\,\hat{B\Gamma} \qquad (2)$$

αφού έχει τη διεύθυνση της ΒΓ. Θεωρούμε ότι στην τυχαία φάση η ράβδος ΑΒΓ βρίσκεται στο επίπεδο By'z. Έχω

$$\hat{B\Gamma} = \hat{B\Delta} = \frac{\underset{\sim}{B\Delta}}{|\underset{\sim}{B\Delta}|} = \frac{r\sin a\,\underset{\sim}{j}' + r\cos a\,\underset{\sim}{k}}{|r\sin a\,\underset{\sim}{j}' + r\cos a\,\underset{\sim}{k}|} = \sin a\,\underset{\sim}{j}' + \cos a\,\underset{\sim}{k}$$

οπότε η (2) δίνει:

$$\underset{\sim}{v}_r = \dot{r}(\sin a\,\underset{\sim}{j}' + \cos a\,\underset{\sim}{k}) \qquad (3)$$

Η μετοχική ταχύτητα του δακτύλιου (κάνει σχετική κίνηση ως προς τη ράβδο) είναι:

$$\underset{\sim}{v}_{\Pi} = \underset{\sim}{v}_{B} + \underset{\sim}{\omega} \times \underline{B\Pi} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{B\Delta} = \omega \underset{\sim}{k} \times (r\sin a \, \underset{\sim}{j}' + r\cos a \, \underset{\sim}{k}) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_{\Pi} = -\omega r \sin a \, \underset{\sim}{i}'$$

Έτσι η ταχύτητα του δακτύλιου είναι:

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u}_{r} + \underset{\sim}{v}_{\Pi} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{v} = -\omega r \sin a \, \underset{\sim}{i}' + \dot{r}\sin a \, \underset{\sim}{j}' + \dot{r}\cos a \, \underset{\sim}{k} \qquad (4)$$

Η κινητική ενέργεια του δακτύλιου είναι:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \Longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[(-\omega r \sin a)^2 + (\dot{r}\sin a)^2 + (\dot{r}\cos a)^2 \right] \Longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\omega^2 r^2 \sin^2 a + \dot{r}^2 \right) \qquad (5)$$

Η συνάρτηση Lagrange μπορεί να γραφεί:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\omega^2 r^2 \sin^2 a + \dot{r}^2) - mgr\cos a \Longrightarrow$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \sin^2 a \, r^2 - mg\cos a \cdot r \qquad (6)$$

Έχω:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 \sin^2 a \, r - mg\cos a$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

Η εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \Longrightarrow$$

$$m\ddot{r}-m\omega^2\sin^2 a\, r+mg\cos a=0 \Longrightarrow$$

$$\ddot{r}-\omega^2\sin^2 a\, r=-g\cos a \qquad (7)$$

Λύση της εξίσωσης (7): Η αντίστοιχη ομογενής είναι:

$$\ddot{r}-\omega^2\sin^2 a\, r=0 \qquad (8)$$

με αλγεβρική χαρακτηριστική $\lambda^2-\omega^2\sin^2 a=0$, η οποία έχει λύσεις: $\lambda_1=\omega\sin a$, $\lambda_2=-\omega\sin a$. Έτσι η λύση της ομογενούς είναι:

$$r_{o\mu}(t)=A\,e^{(\omega\sin a)t}+B\,e^{-(\omega\sin a)t} \qquad (9)$$

Σαν μερική λύση της (7) δοκιμάζουμε μία σταθερή, αφού το δεύτερο μέλος είναι σταθερό. Προκύπτει:

$$r_{\mu\varepsilon\rho}=g\,\frac{\cos a}{\omega^2\sin^2 a} \qquad (10)$$

Έτσι η γενική λύση της (7) είναι:

$$r(t)=A\,e^{(\omega\sin a)t}+B\,e^{-(\omega\sin a)t}+g\,\frac{\cos a}{\omega^2\sin^2 a}$$

Όμως $r(0)=c$:

$$A+B+g\,\frac{\cos a}{\omega^2\sin^2 a}=c \qquad (11)$$

και $\dot{r}(0)=0$:

$$A(\omega \sin a) + (-\omega \sin a) B = 0 \implies A = B$$

Έτσι η (11) δίνει

$$A = B = \frac{1}{2}\left(c - \frac{g\cos a}{\omega^2 \sin^2 a}\right)$$

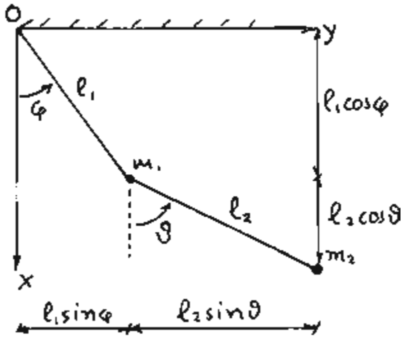
και η (9) γράφεται:

$$r(t) = \frac{1}{2}\left(c - \frac{g\cos a}{\omega^2\sin^2 a}\right)\left(e^{(\omega\sin a)t} + e^{-(\omega \sin a)t}\right) + \frac{g\cos a}{\omega^2 \sin^2 a}$$

Άσκηση 8

Το διπλό εκκρεμές του σχήματος αποτελείται από τα αβαρή και μη εκτατά νήματα που έχουν μήκη ℓ_1, ℓ_2 και τις σημειακές μάζες m_1, m_2. Η κίνηση γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο (x,y) που είναι σταθερό. Να γραφούν οι εξισώσεις Lagrange.

Λύση



Η τυχαία θέση του συστήματος καθορίζεται από τις γωνίες ϑ, φ που είναι ανεξάρτητες. Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο από το O. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος σε τυχαία θέση (ϑ, φ) είναι:

$$V = -m_1 g \ell_1 \cos\varphi - m_2 g(\ell_1\cos\varphi + \ell_2\cos\vartheta) \qquad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \implies$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \qquad (2)$$

'Ομως

$$x_1 = \ell_1 \cos\varphi \implies \dot{x}_1 = -\ell_1 \sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$y_1 = \ell_1 \sin\varphi \implies \dot{y}_1 = \ell_1 \cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

'Αρα

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \ell_1^2 \dot{\varphi}^2 \qquad (3)$$

Αυόμη

$$x_2 = \ell_1 \cos\varphi + \ell_2 \cos\vartheta \implies \dot{x}_2 = -\ell_1 \sin\varphi\,\dot{\varphi} - \ell_2 \sin\vartheta\,\dot{\vartheta}$$

$$y_2 = \ell_1 \sin\varphi + \ell_2 \sin\vartheta \implies \dot{y}_2 = \ell_1 \cos\varphi\,\dot{\varphi} + \ell_2 \cos\vartheta\,\dot{\vartheta}$$

οπότε

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \ell_1^2\dot{\varphi}^2 + \ell_2^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell_1\ell_2 \sin\varphi \sin\vartheta\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + 2\ell_1\ell_2 \cos\varphi\cos\vartheta\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta}$$

$$\implies \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \ell_1^2\dot{\varphi}^2 + \ell_2^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\vartheta-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \quad (4)$$

'Ετσι η (2) γράφεται:

$$T = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\ell_1^2\dot{\varphi}^2 + \ell_2^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\vartheta-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\right)$$

οπότε η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\ell_1^2\dot{\varphi}^2 + \ell_2^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\vartheta-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\right) +$$

$$+ m_1 g \ell_1 \cos\varphi + m_2 g(\ell_1\cos\varphi + \ell_2\cos\vartheta)$$

Παράμετρος φ:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\vartheta-\varphi)(-1)\dot{\varphi}\dot{\vartheta} - m_2 g \ell_1 \sin\varphi - m_1 g \ell_1 \sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 \ell_1^2 \dot{\varphi} + m_2 \ell_1^2 \dot{\varphi} + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\vartheta-\varphi)\dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_1 \ell_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 \ell_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 \ell_1 \ell_2 \left[-\sin(\vartheta-\varphi)(\dot{\vartheta}-\dot{\varphi})\dot{\vartheta} + \cos(\vartheta-\varphi)\ddot{\vartheta}\right]$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \implies$$

$$(m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_1^2)\ddot{\varphi} + m_2 \ell_1 \ell_2 \left[-\sin(\vartheta-\varphi)(\dot{\vartheta}-\dot{\varphi})\dot{\vartheta} + \cos(\vartheta-\varphi)\ddot{\vartheta}\right] -$$

$$-m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\vartheta-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\vartheta} + m_2 g \ell_1 \sin\varphi - m_1 g \ell_1 \sin\varphi = 0 \quad (5)$$

Παράμετρος ϑ:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\vartheta-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\vartheta} - m_2 g \ell_2 \sin\vartheta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m_2 \ell_2^2 \dot{\vartheta} + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\vartheta-\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = m_2 \ell_2^2 \ddot{\vartheta} - m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\vartheta-\varphi)(\dot{\vartheta}-\dot{\varphi})\dot{\varphi} + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\vartheta-\varphi)\ddot{\varphi}$$

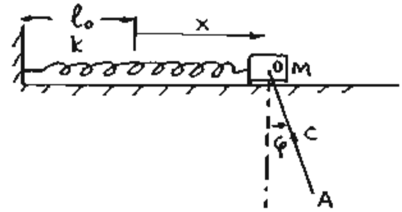
Η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{\vartheta} - m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\vartheta-\varphi)(\dot{\vartheta}-\dot{\varphi})\dot{\varphi} + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\vartheta-\varphi)\ddot{\varphi} +$$

$$+ m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\vartheta-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\vartheta} + m_2 g \ell_2 \sin\vartheta = 0 \qquad (6)$$

Άσκηση 9

Η μάζα Μ ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή, προσδεμένο με ένα αβαρές ελατήριο που έχει φυσικό μήκος ℓ_o. Στο κέντρο μάζας Ο της μάζας Μ είναι αρθρωμένη μία ράβδος ΟΑ που μπορεί να κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Παίρνοντας σάν γενικευμένες συντεταγμένες την επιμήκυνση x του ελατήριου και τη γωνίο που σχηματίζει η ράβδος ΟΑ με την κατακόρυφο να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Δίνεται ότι η ράβδος ΟΑ είναι ομογενής με μάζα m και μήκος ℓ ενώ η σταθερή του ελατήριου είναι ίση με k. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της C είναι ίση με $m\ell^2/12$



Λύση

Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας και η τυχαία θέση του καθορίζεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες x,φ.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το Ο. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος λόγω βαρύτητας είναι ίση με:

$$V^B = -mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi \qquad (1)$$

αφού το C βρίσκεται σε απόσταση $\frac{\ell}{2}\cos\varphi$ από το επίπεδο αναφοράς και κάτω απ' αυτό. Η δυναμική ενέργεια του ελατήριου είναι

$$V^E = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2)$$

και η συνολική δυναμική ενέργεια είναι:

$$V = -mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (3)$$

Κινητική ενέργεια: Η μάζα Μ έχει κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}M\dot{x}^2$ αφού η ταχύτητά της είναι $\underset{\sim}{v}_o = \dot{x}\,\underset{\sim}{i}$.

Η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι:

$$T_\rho = \frac{1}{2}m\,v_c^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\varphi}^2 \qquad (4)$$

Όμως

$$\underset{\sim}{v}_c = \underset{\sim}{v}_o + \dot{\varphi}\underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{oc} = \dot{x}\underset{\sim}{i} + \dot{\varphi}\underset{\sim}{k}\times\left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underset{\sim}{i} - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underset{\sim}{j}\right) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{v}_c = \dot{x}\underset{\sim}{i} + \dot{\varphi}\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\underset{\sim}{j} + \dot{\varphi}\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} \Rightarrow$$

$$v_c^2 = \left(\dot{x} + \dot{\varphi}\frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)^2 + \left(\dot{\varphi}\frac{\ell}{2}\sin\varphi\right)^2 \Rightarrow$$

$$v_c^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{\ell^2}{4} + \dot{x}\dot{\varphi}\ell\cos\varphi \qquad (5)$$

Ακόμη $I_c = \frac{1}{12}m\ell^2$ οπότε η (4) δίνει:

$$T_\rho = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{\ell^2}{4} + \dot{x}\dot{\varphi}\ell\cos\varphi\right) + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\varphi}^2$$

οπότε η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{\ell^2}{4} + \dot{x}\dot{\varphi}\ell\cos\varphi\right) + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\varphi}^2$$

και η συνάρτηση Lagrange:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{\ell^2}{3} + \dot{x}\dot{\varphi}\ell\cos\varphi\right) + mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}kx^2$$

Παράμετρος x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}\ell\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{\varphi}\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\ell\sin\varphi$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{\varphi}\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\ell\sin\varphi + kx = 0 \qquad (6)$$

Παράμετρος φ:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}m\dot{x}\dot{\varphi}\ell\sin\varphi - mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\frac{\ell^2}{3}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m\dot{x}\ell\cos\varphi \implies$$

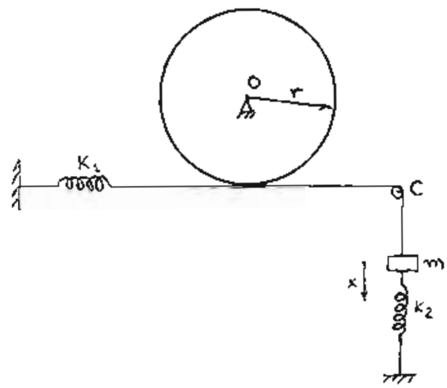
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\frac{\ell^2}{3}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}m\ddot{x}\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}m\dot{x}\ell\sin\varphi\dot{\varphi}$$

και η αντίστοιχη εξίσωση Lagrange είναι:

$$m\frac{\ell^2}{3}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}m\ddot{x}\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}m\dot{x}\dot{\varphi}\ell\sin\varphi + \frac{1}{2}m\dot{x}\dot{\varphi}\ell\sin\varphi + mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi =$$
$$= 0 \implies$$
$$\frac{\ell}{3}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\ddot{x}\cos\varphi + mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi = 0 \qquad (7)$$

Άσκηση 10

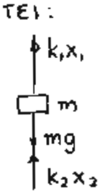
Στο σύστημα του σχήματος, το αβαρές - μη εκτατό νήμα είναι δεμένο στα άκρο των ελατηρίων με σταθερές k_1, k_2, ενώ ταυτόχρονα είναι περασμένο στην περιφέρεια τροχαλίας μάζας M, ακτίνας r και ροπής αδράνειας I_0 ίσης με $\frac{1}{2}Mr^2$. Η τροχαλία κέντρου C είναι αβαρής. Αν το σχοινί δεν ολισθαίνει στην τροχαλία κέντρου O, να γραφεί η διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος με τη μέθοδο Lagrange. Δίνεται: $k_1=k_2=k$.



Λύση

Υποθέτουμε ότι στη θέση ισορροπίας η μάζα m βρίσκεται σε απόσταση h κάτω από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το C, το οποίο θεωρούμε και επίπεδο αναφοράς. Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο, η παρουσία της μάζας m προκαλεί κατά την ισορροπία, παραμορφώσεις των ελατηρίων κατά x_1, x_2 αντίστοιχα. Από τη συνθήκη ισορροπίας της μάζας m (όταν το σύστημα ισορροπεί) προκύπτει:

$$mg = k_1x_1 + k_2x_2 \qquad (1)$$



αφού το ελατήριο σταθερής k_1 έχει τεντώσει, ενώ το ελατήριο σταθερής k_2 έχει συσπειρωθεί.

Αν η μάζα m κατεβεί επιπλέον κατά x από την ισορροπία, το ελατήριο σταθεράς k_1 θα επιμηκυνθεί επιπλέον κατά x, το ελατήριο σταθεράς k_2 θα βραχυνθεί επιπλέον κατά x, ενώ η τροχαλία ακτίνας r θα στραφεί Α.Δ.Ω. κατά γωνία φ:

$$x = r\varphi \qquad (2)$$

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι η μεταβλητή x καθορίζει πλήρως την τυχαία θέση του συστήματος, οπότε έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας. Σε τυχαία θέση έχω δυναμική ενέργεια:

$$V(x) = \frac{1}{2}k_1(x_1+x)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2+x)^2 + Mgr - mg(h+x)$$

αφού η μάζα m βρίσκεται σε απόσταση h+x κάτω από το επίπεδο αναφοράς. (Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου είναι θετική είτε όταν έχει επιμηκυνθεί, είτε όταν έχει βραχυνθεί)

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2$$

Όμως λόγω της σχέσης (2) έχω:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}$$

και επειδή $I_0 = \frac{1}{2}Mr^2$ (δοσμένο) προκύπτει:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}^2$$

Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος έχει τη μορφή:

$$L(x,\dot{x}) = T(x,\dot{x}) - V(x) \implies$$

$$L = \frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{2}\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_1(x_1+x)^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2+x)^2 - Mgr + mg(h+x)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{2}k_1\, 2\,(x_1+x) - \frac{1}{2}k_2 2(x_2+x) + mg \implies$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k_1(x_1+x) - k_2(x_2+x) + mg \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{2}\right)2\dot{x} \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m+\frac{M}{2}\right)\dot{x} \implies$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{x} \qquad (4)$$

Η εξίσωση Lagrange του συστήματος είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

που λόγω των σχέσεων (3), (4) γίνεται:

$$\left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{x} + k_1(x_1+x) + k_2(x_2+x) - mg = 0 \implies$$

$$\left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{x} + (k_1+k_2)x + k_1x_1 + k_2x_2 - mg = 0 \qquad (6)$$

Όμως $k_1 = k_2 = k$ και λόγω της σχέσης (5) η σχέση (6) γράφεται·

$$\left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{x} + 2kx = 0 \implies \ddot{x} + \frac{2k}{\frac{M}{2}+m}x = 0$$

9.2 Γενική μέθοδος Lagrange

Η γενική μέθοδος Lagrange εφαρμόζεται ανεξάρτητα από το αν οι δυνάμεις προέρχονται από δυναμικό ή όχι.

Αν το σύστημα έχει n βαθμούς ελευθερίας με γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots q_n$ και T είναι η κινητική του ενέργεια, ισχύουν οι επόμενες n εξισώσεις:

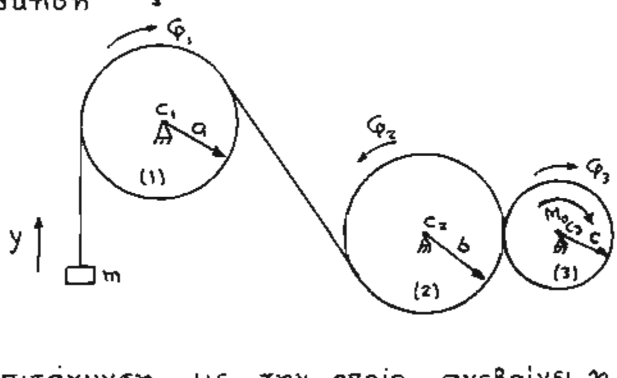
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i \qquad (9.2.1)$$

$i = 1, 2, \ldots n$. Η ποσότητα Q_i λέγεται γενικευμένη δύναμη. Ο υπολογισμός της γίνεται ως εξής:

Μεταβάλλουμε την παράμετρο (γενικευμένη συντεταγμένη) q_i κατά dq_i και υπολογίζουμε το συνολικό έργο dW_i, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι διατηρούνται σταθερές. Είναι:

$$Q_i = \frac{dW_i}{dq_i} \qquad (9.2.2)$$

Άσκηση 1



Να βρεθεί η επιτάχυνση με την οποία ανεβαίνει η μάζα m αν στον τροχό (3) εφαρμόζεται ροπή M_0. Το σχοινί είναι αβαρές μη εκτατό. Δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των τροχών (2), (3), ούτε μεταξύ σχοινιού - τροχών. Δίνονται οι μάζες m_1, m_2, m_3 των τροχών (1), (2), (3) αντίστοιχα. Ροπή αδράνειας τροχού μάζας m_0 και ακτίνας R_0 ως προς τον άξονά του: $\frac{1}{2}m_0R_0^2$

Λύση

Αν η μάζα m ανεβεί κατά y, ο τροχός (1) στρέφεται κατά γωνία φ_1: $y=a\varphi_1$. Ταυτόχρονα ο τροχός (2) στρέφεται κατά φ_2: $y=b\varphi_2$ και ο (3) κατά φ_3: $y=$ $=c\varphi_3$. Έτσι το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας με γενικευμένη συντεταγμένη την y.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος, σε τυχαία θέση y είναι:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}I_{C_1}\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}I_{C_2}\dot{\varphi}_2^2+\frac{1}{2}I_{C_3}\dot{\varphi}_3^2 \qquad (1)$$

Όμως

$$\dot{y}=a\dot{\varphi}_1=b\dot{\varphi}_2=c\dot{\varphi}_3$$

και η (1) δίνει:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}m_1a^2\,\frac{\dot{y}^2}{a^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2b^2\frac{\dot{y}^2}{b^2}+\frac{1}{2}m_3c^2\,\frac{\dot{y}^2}{c^2}\Rightarrow$$

$$T=\frac{1}{2}\left(m+\frac{m_1+m_2+m_3}{2}\right)\dot{y}^2 \qquad (2)$$

Δίνουμε τώρα μία αύξηση στην παράμετρο y κατά dy. Ο τροχός (3) θα στραφεί κατά $d\varphi_3=dy/c$. Έργο παράγεται από το βάρος mg ίσο με $-mgdy$ και από τη ροπή M_0 ίσο με $M_0d\varphi_3$. Το συνολικό έργο είναι:

$$dW=M_0d\varphi_3-mgdy=\frac{M_0}{c}dy-mgdy \Rightarrow$$

$$dW = \left(\frac{M_o}{c} - mg\right)dy \qquad (2)$$

οπότε προυύπτει

$$Q = \frac{M_o}{c} - mg \qquad (3)$$

Έχω:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \left(m + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2}\right)\dot{y} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \left(m + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2}\right)\ddot{y}$$

Η εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q \quad \Longrightarrow$$

$$m + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} \ \ddot{y} = \frac{M_o}{c} - mg \quad \Longrightarrow$$

$$\ddot{y} = \frac{\frac{M_o}{c} - mg}{m + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2}}$$

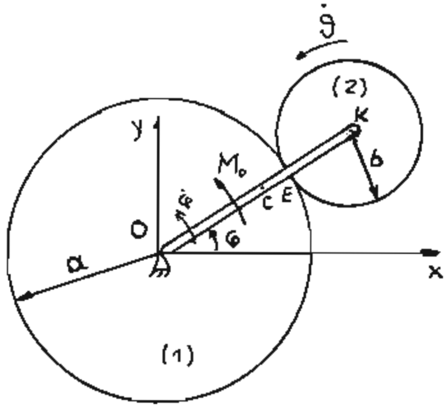
Άσκηση 2

Ο τροχός (2) με ακτίνα b εφάπτεται εξωτερικά με το σταθερό τροχό (1) που έχει ακτίνα a. Ο τροχός (2) κινείται με τη βοήθεια του βραχίονα ΟΚ που έχει μήκος $\ell = a + b$ και μάζα m. Στο βραχίονα ασκείται ροπή M_o. Ο τροχός (2) έχει μάζα M και ροπή α-

δράνειας ως προς τον άξονά του $\frac{1}{2}Mb^2$. Ζητούνται:
(α) Η διαφορική εξίσωση της κίνησης με τη μέθοδο Lagrange.
(β) Η τιμή της ροπής M_o ώστε η γωνιακή ταχύτητα του στροφάλου ΟΚ να είναι σταθερή.

Η κίνηση γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο και δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των τροχών.

Λύση



Η γωνία φ καθορίζει πλήρως τη θέση του συστήματος αφού το Ε είναι ακίνητο στιγμιαία (δεν υπάρχει ολίσθηση) Αν ο βραχίονας (στρόφαλος) ΟΚ στραφεί κατα φ, ο τροχός (2) στρέφεται κατα ϑ, έτσι ώστε:

$$(a+b)\varphi = b\vartheta. \implies$$

$$(a+b)\dot{\varphi} = b\dot{\vartheta} \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τώρα την κινητική ενέργεια του συστήματος. Ο στρόφαλος ΟΚ έχει μάζα m και μήκος ℓ, ενώ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\varphi}$ περί το άκρο του Ο. Η κινητική του ενέργεια είναι:

$$T_{(OK)} = \frac{1}{2} I_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}m(a+b)^2\dot{\varphi}^2$$

Ο τροχός (2) έχει κινητική ενέργεια

$$T_{(2)} = \frac{1}{2}Mu_K^2 + \frac{1}{2}I_K\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}Mu_K^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}Mb^2\dot{\vartheta}^2$$

Όμως

$$\underset{\sim}{v}_K = \underset{\sim}{v}_O + \dot{\varphi}\,\underset{\sim}{k} \times \underset{\sim}{OK} = \dot{\varphi}\underset{\sim}{k} \times (\ell\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} + \ell\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}) \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_K = \dot{\varphi}\,\ell\,(\cos\varphi\,\underset{\sim}{j} - \sin\varphi\,\underset{\sim}{i}) \qquad (2)$$

ή

$$\underset{\sim}{v}_K = \underset{\sim}{v}_E + \dot{\vartheta}\,\underset{\sim}{k} \times \underset{\sim}{EK} = \dot{\vartheta}\underset{\sim}{k} \times (b\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} + b\sin\varphi\,\underset{\sim}{j}) \implies$$

$$\underset{\sim}{v}_K = \dot{\vartheta}\,b\,(\cos\varphi\,\underset{\sim}{j} - \sin\varphi\,\underset{\sim}{i}) \qquad (3)$$

Λόγω της (1), τα αποτελέσματα (2), (3) συμπίπτουν. Έτσι

$$v_K^2 = (a+b)^2\dot{\varphi}^2 \qquad (4)$$

και η κινητική ενέργεια του τροχού (2) είναι:

$$T_{(2)} = \frac{1}{2}M(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}Mb^2\dot{\vartheta}^2$$

και λόγω της (1):

$$T_{(2)} = \frac{1}{2}M(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}M(a+b)^2\dot{\varphi}^2 \implies$$

$$T_{(2)} = \frac{3}{4}M(a+b)^2\dot{\varphi}^2$$

Η συνολική κινητική ενέργεια είναι:

$$T = T_{(OK)} + T_{(2)} = \frac{1}{6}m(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4}M(a+b)^2\dot{\varphi}^2 \implies$$

$$T = \left(\frac{m}{6} + \frac{3M}{4}\right)(a+b)^2\dot{\varphi}^2 \qquad (5)$$

Θεωρούμε τώρα μεταβολή της γωνίας φ κατά $d\varphi$.

Έργο παράγουν: Η ροπή M_o, ίσο με $M_o d\varphi$. Το βάρος του στροφάλου : $-mg\underset{\sim}{j}\, d\underset{\sim}{r_c} = -mg\underset{\sim}{j}\, d\left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi \underset{\sim}{i} + \frac{\ell}{2}\sin\varphi \underset{\sim}{j}\right) = -\frac{\ell}{2} mg\cos\varphi d\varphi$

και το βάρος του τροχού (2) :
$-Mg\underset{\sim}{j}\, d\underset{\sim}{r_K} = -Mg\underset{\sim}{j}\, d\left(\ell\cos\varphi \underset{\sim}{i} + \ell\sin\varphi \underset{\sim}{j}\right) = -\ell Mg\cos\varphi d\varphi$. Το συνολικό έργο είναι:

$$dW = M_o d\varphi - mg\cos\varphi d\varphi - Mg\cos\varphi d\varphi \implies$$

$$Q = M_o - \left(mg\frac{\ell}{2} + Mg\ell\right)\cos\varphi \qquad (6)$$

Έχω :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = 2\left(\frac{m}{6} + \frac{3M}{4}\right)(a+b)^2\dot\varphi \implies$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(a+b)^2\ddot\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

Η εξίσωση Lagrange είναι:

$$\left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(a+b)^2\ddot\varphi = M_o - \left(mg\frac{\ell}{2} + Mg\ell\right)\cos\varphi \qquad (7)$$

Για να είναι η $\dot\varphi$ σταθερή, πρέπει $\ddot\varphi = 0 \implies$

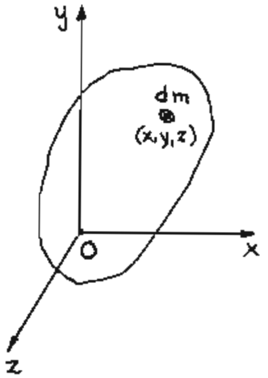
$$M_o = g\ell\left(\frac{m}{2} + M\right)\cos\varphi \qquad (8)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Δυναμική στερεού σώματος στο χώρο

10.1 Τανυστής αδράνειας.

Υποθέτουμε ότι το O είναι ένα σταθερό σημείο του στερεού σώματος, ή το κέντρο μάζας του και Oxyz είναι ένα σύστημα αξόνων με αρχή το O. Ορίζουμε τις ροπές αδράνειας:



$$I_x = \int_\Sigma (y^2+z^2)\,dm$$

$$I_y = \int_\Sigma (x^2+z^2)\,dm$$

$$I_z = \int_\Sigma (y^2+x^2)\,dm$$

και τα γινόμενα αδράνειας

$$I_{xy} = -\int_\Sigma xy\,dm = I_{yx}$$

$$I_{yz} = -\int_\Sigma yz\,dm = I_{zy}$$

$$I_{xz} = -\int_\Sigma xz\,dm = I_{zx}$$

όπου τα ολοκληρώματα υπολογίζονται σ' όλο το στερεό σώμα Σ. Ο τανυστής αδράνειας $\underline{I}$ είναι:

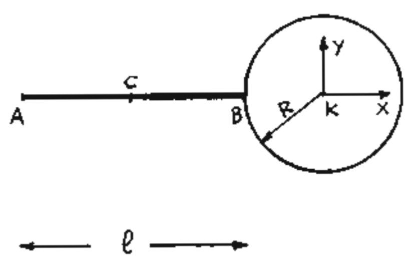
$$\underline{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \qquad (9.1.1)$$

Αν τα στοιχεία I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} είναι μηδενικά, οπότε και τα I_{yx}, I_{yz}, I_{zx} είναι μηδενικά, το σύστημα Oxyz είναι κύριο σύστημα αξόνων.

Αν ένας από τους άξονες x, y, z (π.χ. ο x) είναι άξονας συμμετρίας, τότε $I_{xy} = I_{xz} = 0$

'Ασκηση 1

Το στερεό του σχήματος αποτελείται: από το δίσκο κέντρου K, που έχει μάζα m και ακτίνα R, και από τη ράβδο AB που έχει μάζα M και μήκος ℓ. Ζητείται ο τανυστής αδράνειας ως προς το σύστημα Kxyz. Θεωρούνται γνωστά:



Η ροπή αδράνειας της ράβδου AB, ως προς άξονα κάθετο σ' αυτή, που περνάει από το μέσο της C, ίση με $M\ell^2/12$ και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα z (που περνάει από το K) ίση με $mR^2/2$.

Λύση

Ο άξονας x είναι άξονας συμμετρίας. Άρα έχω $I_{xy} = I_{xz} = 0$. Ακόμη έχω:

$$I_{yz} = I_{yz}^{\rho\alpha\beta} + I_{yz}^{\delta\iota\sigma\kappa}$$

όπου $I_{yz}^{\delta\iota\sigma\kappa} = 0$ γιατί ο y (και ο z) είναι άξονες συμμετρίας του δίσκου. Αλλά:

$$I_{yz}^{\rho\alpha\beta} = -\int_{\rho\alpha\beta} yz\,dm = 0$$

αφού $z=0$, σ' όλα τα σημεία της ράβδου. Άρα $I_{yz} = 0$, δηλαδή το Kxyz είναι κύριο σύστημα.

Έχω σύμφωνα με την άσκηση 51

$$I_z^{\delta\iota\sigma} = \frac{1}{2} m R^2 \qquad (1)$$

ακόμη $I_y^{\delta\iota\sigma\kappa} = I_x^{\delta\iota\sigma\kappa}$ λόγω συμμετρίας και από το θεώρημα καθέτων αξόνων:

$$I_z^{\delta\iota\sigma\kappa} = I_y^{\delta\iota\sigma\kappa} + I_x^{\delta\iota\sigma\kappa} \quad \Longrightarrow$$

$$I_x^{\delta\iota\sigma\kappa} = I_y^{\delta\iota\sigma\kappa} = \frac{1}{4} m R^2$$

Η ράβδος AB που βρίσκεται πάνω στον άξονα x, έχει $y = z = 0 \implies I_x^{\rho\alpha\beta} = 0$, οπότε

$$I_x = I_x^{\rho\alpha\beta} + I_x^{\delta\iota\sigma\kappa} = 0 + \frac{1}{4} m R^2 = \frac{1}{4} m R^2$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα Steiner για τη ράβδο:

$$I_y^{\rho\alpha\beta} = \frac{1}{12} M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2} + R\right)^2$$

$$I_z^{\rho\alpha\beta} = \frac{1}{12} M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2} + R\right)^2$$

Προκύπτει

$$I_y = I_y^{\delta ισκ} + I_y^{ραβδ} = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{M\ell^2}{12} + M\left(\frac{\ell}{2}+R\right)^2$$

$$I_z = I_z^{\delta ίσκ} + I_z^{ραβδ} = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{M\ell^2}{12} + M\left(\frac{\ell}{2}+R\right)^2$$

10.2 Στροφορμή - κινητική ενέργεια στερεού για κίνηση στο χώρο

Αν $Oxyz$ είναι ένα σύστημα, όπου O είναι το κέντρο μάζας, ή κάποιο ακίνητο σημείο ενός στερεού που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}$ τότε η στροφορμή $\underset{\sim}{G}_o$ είναι:

$$\underset{\sim}{G}_o = \underset{\sim}{I} \cdot \underset{\sim}{\omega} \qquad (9.2.1)$$

όπου $\underset{\sim}{I}$ είναι ο τανυστής αδράνειας στο σύστημα $Oxyz$. Η (9.2.1) γράφεται:

$$\underset{\sim}{G}_o = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \implies$$

$$G_x = I_x \omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \qquad (9.2.2)$$

$$G_y = I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z \qquad (9.2.3)$$

$$G_x = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z \qquad (9.2.4)$$

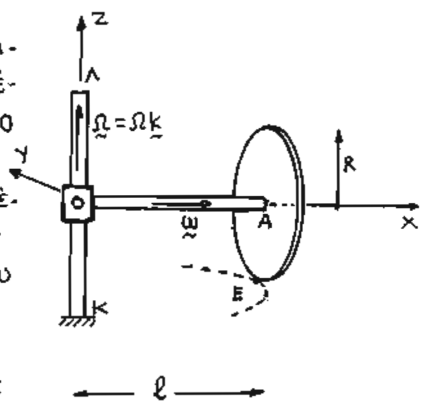
Αν το O είναι σταθερό σημείο, τότε η κινητική ενέργεια του στερεού είναι:

$$T = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\omega}^{T} \underset{\sim}{I}\, \underset{\sim}{\omega}$$

Αν $O \equiv C$ είναι το κέντρο μάζας τότε:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\omega}^{T} \underset{\sim}{I}\, \underset{\sim}{\omega}$$

Άσκηση 2



O δίσκος μάζας m και ακτίνας R συνδέεται με το στέλεχος OA που έχει μάζα M=0 και μήκος ℓ με το σταθερό κατακόρυφο άξονα KOΛ. Το στέλεχος OA και ο δίσκος αποτελούν ένα στερεό σώμα, που περιστρέφεται περί τον άξονα KΛ με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\Omega}_0 = \Omega_0 \underset{\sim}{k}$ Ταυτόχρονα ο δίσκος κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο οριζόντιο επίπεδο, περιστρεφόμενος περί την OA. Να υπολογισθούν

(α) Η ολική γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\Omega}$ του στερεού δίσκος - στέλεχος

(β) Η στροφορμή ως προς το O

(γ) Η κινητική ενέργεια

Λύση

(α) Υποθέτουμε ότι ο δίσκος περιστρέφεται περί την OA με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}_0 = \omega \underset{\sim}{i}$. Οι άξονες των $\underset{\sim}{\Omega}_0$, $\underset{\sim}{\omega}_0$ συντρέχουν στο O. Έτσι ο δίσκος κάνει απλή περιστροφή περί άξονα από το O με γωνιακή ταχύτητα

$$\underset{\sim}{\Omega} = \omega_0 \underset{\sim}{i} + \Omega_0 \underset{\sim}{k}$$

Ο δίσκος κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο οριζόντιο επίπεδο. Άρα $\underset{\sim}{v}_E = 0$, όπου E το σημείο επαφής. Έχω:

$$\underset{\sim}{v}_E = \underset{\sim}{v}_O + \underset{\sim}{\Omega} \times \underset{\sim}{OE} \Longrightarrow$$

$$0 = 0 + (\omega_0 \underset{\sim}{i} + \Omega_0 \underset{\sim}{k}) \times (\ell \underset{\sim}{i} - R \underset{\sim}{k}) \Longrightarrow$$

$$\dot{\omega}_0 R + \Omega_0 \ell = 0 \Longrightarrow \quad \omega_0 = -\Omega_0 \frac{\ell}{R} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\omega}_0 = -\Omega_0 \frac{\ell}{R} \underset{\sim}{i} \qquad (1)$$

και η ολική γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\underset{\sim}{\Omega} = \omega_0 \underset{\sim}{i} + \Omega_0 \underset{\sim}{k} = -\Omega_0 \frac{\ell}{R} \underset{\sim}{i} + \Omega_0 \underset{\sim}{k} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{\Omega} = \Omega_0 \left(\underset{\sim}{k} - \frac{\ell}{R} \underset{\sim}{i} \right) \qquad (2)$$

(β) Εύκολα μπορούμε να βρούμε τον τανυστή αδράνειας $\underset{\sim}{I}$ εργαζόμενοι όπως στην άσκηση 104:

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$I_x = \frac{1}{2} m R^2 \qquad I_y = I_z = \frac{1}{4} m R^2 + m \ell^2$$

Η στροφορμή ως προς το O είναι:

$$\underset{\sim}{G}_0 = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$G_x = I_x \omega_x = \frac{1}{2} m R^2 \left(-\Omega_o \frac{\ell}{R}\right) = -\frac{1}{2} m \Omega_o R \ell$$

$$G_y = 0$$

$$G_z = I_z \omega_z = m\left(\frac{R^2}{4} + L^2\right)\Omega_o$$

(γ) Εφόσον το O είναι ακίνητο, η κινητική ενέργεια είναι:

$$T = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\omega}^T \underset{\sim}{I}\, \underset{\sim}{\omega} \implies \quad (\underset{\sim}{\omega}^T \text{ το ανάστροφο του } \underset{\sim}{\omega})$$

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(\omega_x, 0, \omega_z) \begin{bmatrix} I_x \omega_x \\ 0 \\ I_z \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \left(-\Omega_o \frac{\ell}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} m R^2 + \ell^2\right)\Omega_o^2 = \frac{1}{8} m \Omega_o^2 (6\ell^2 + R^2)$$

10.3 Εξισώσεις κίνησης για στερεό στο χώρο.

Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων Cxyz και υπολογίζουμε τη στροφορμή $\underset{\sim}{G}_c = (G_x, G_y, G_z)$ όπου C είναι το κέντρο μάζας. Το σύστημα Cxyz είναι δεμένο πάνω στο στερεό και περιστρέφεται μαζί του με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\Omega}$. Αν $\underset{\sim}{M}_c$ είναι η συνολική ροπή ως πρός το C τότε ισχύει:

$$\underset{\sim}{M}_c = \frac{d\underset{\sim}{G}_c}{dt} \qquad (9.3.1)$$

όπου για τον υπολογισμό της παραγώγου χρησιμοποιείται ο γνωστός κανόνας για την παραγώγιση περιστρεφόμενου διανύσματος: Γράφουμε $\underset{\sim}{G}_c = G_c\hat{n}$ οπότε

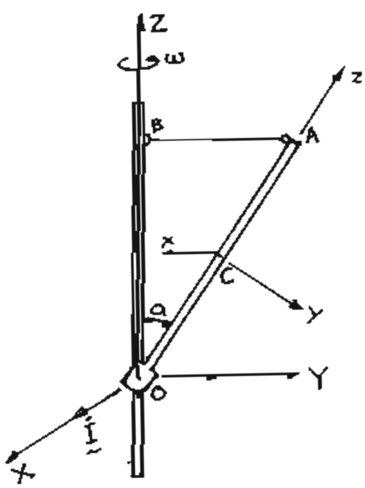
$$\frac{d\underset{\sim}{G}_c}{dt} = \dot{G}_c\hat{n} + \underset{\sim}{\Omega} \times \underset{\sim}{G}_c \qquad (9.3.2)$$

όπου $\underset{\sim}{\Omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του $\underset{\sim}{G}_c$ (ή του $\hat{n}$). Επιπλέον ισχύει:

$$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{\gamma}_c \qquad (9.3.3)$$

όπου $\underset{\sim}{F}$ η συνολική δύναμη και m η μάζα του στερεού, ενώ $\underset{\sim}{\gamma}_c$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας C του στερεού.

Άσκηση 1



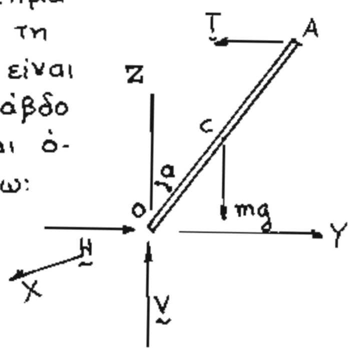
Μία ράβδος ΟΑ είναι αρθρωμένη στο Ο στον κατακόρυφο άξονα ΟΒ που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η ράβδος είναι δεμένη με το σύρμα ΒΑ ώστε να σχηματίζει γωνία a με το ΟΒ. Αν η ράβδος είναι ομογενής με μάζα m και μήκος

ℓ, να βρεθεί η δύναμη που τείνει το σύρμα.

Λύση

Θεωρούμε το ακίνητο σύστημα αξόνων OXYZ και σε τρόπο ώστε τη στιγμή αυτή η ράβδος να βρίσκεται στο επίπεδο OYZ.

Θεωρούμε ακόμη το σύστημα Cxyz που κινείται μαζί με τη ράβδο. Το σύστημα αυτό είναι κύριο σύστημα για τη ράβδο αφού οι άξονες x, y, z είναι όλοι άξονες συμμετρίας. Έχω:



$$I_x = I_y = \frac{1}{12} m\ell^2$$

αφού οι y, z είναι κάθετοι στη ράβδο στο μέσο της C. Ακόμη $I_z = 0$. Η γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega} = \omega \underset{\sim}{K}$ έχει συνιστώσες:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega \sin a \quad \omega_z = \omega \cos a$$

ως προς το σύστημα Cxyz. (Στη φάση του σχήματος τα επίπεδα OYZ, Cyz συμπίπτουν). Έτσι η στροφορμή ως προς το C στο σύστημα Cxyz είναι:

$$\underset{\sim}{G_c} = \underset{\sim}{I_c} \cdot \underset{\sim}{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{bmatrix} \implies$$

$$\underset{\sim}{G_c} = \frac{1}{12} m\ell^2 (-\omega \sin a) \underset{\sim}{J}$$

Η παράγωγος της στροφορμής ως προς το χρόνο είναι:

$$\frac{d\underset{\sim}{G_c}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{m\ell^2}{12}\omega \sin a\, \underset{\sim}{j}\right) = -\frac{m\ell^2}{12}\omega \sin a \frac{d\underset{\sim}{j}}{dt} =$$

$$= -\frac{m\ell^2}{12}\omega \sin a \cdot \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{j}$$

αφού το $\underset{\sim}{J}$ περιστρέφεται με $\underset{\sim}{\omega}$. Άρα

$$\frac{d\underset{\sim}{G_c}}{dt} = -\frac{m\ell^2}{12}\omega \sin a\, \omega \underset{\sim}{K} \times \underset{\sim}{j}$$

Όμως $\underset{\sim}{K} = \cos a \underset{\sim}{k} - \sin a \underset{\sim}{j}$ άρα

$$\frac{d\underset{\sim}{G_c}}{dt} = -\frac{m\ell^2}{12}\omega \sin a\, \omega \cdot (\cos a \underset{\sim}{k} - \sin a \underset{\sim}{j}) \times \underset{\sim}{j} \Rightarrow$$

$$\frac{d\underset{\sim}{G_c}}{dt} = \frac{m\ell^2}{12}\omega^2 \sin a \cos a\, \underset{\sim}{i} \Rightarrow$$

$$\frac{d\underset{\sim}{G_c}}{dt} = \frac{m\ell^2}{12}\omega^2 \sin a \cos a\, \underset{\sim}{\dot{I}} \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τη ροπή ως προς το C:

$$\underset{\sim}{M_c} = \underset{\sim}{CO} \times \underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{CO} \times \underset{\sim}{V} + \underset{\sim}{CA} \times \underset{\sim}{T} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{M_c} = \underset{\sim}{CO} \times (\underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{V}) - \underset{\sim}{CO} \times \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{CO} \times (\underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{V} - \underset{\sim}{T}) =$$

$$= \left(-\frac{\ell}{2}\sin a \underset{\sim}{\dot{J}} - \frac{\ell}{2}\cos a \underset{\sim}{K}\right) \times \left(H\underset{\sim}{\dot{J}} + V\underset{\sim}{K} + T\underset{\sim}{\dot{J}}\right) =$$

$$= -\frac{\ell}{2}\sin a\, V \underset{\sim}{\dot{I}} + \frac{\ell}{2}\cos a\, H \underset{\sim}{\dot{I}} + \frac{\ell}{2}\cos a\, T \underset{\sim}{\dot{I}} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{M_c} = \frac{\ell}{2}(\cos a\, H + \cos a\, T - \sin a\, V)\underset{\sim}{\dot{I}} \qquad (2)$$

Πρέπει $\underset{\sim}{M}_c = \frac{d\underset{\sim}{G}_c}{dt} \Rightarrow$

$$\frac{\ell}{2}(\cos a\, H + \cos a\, T - \sin a\, V) = \frac{m\ell^2}{12}\omega^2 \sin a \cos a \qquad (3)$$

Εξετάζουμε τώρα την μεταφορική κίνηση:

$$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{\gamma} \Rightarrow$$

$$H\underset{\sim}{j} + V\underset{\sim}{K} - mg\underset{\sim}{K} - T\underset{\sim}{j} = m\underset{\sim}{\gamma}_c \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = \frac{H-T}{m}\underset{\sim}{j} + \left(\frac{V}{m} - g\right)\underset{\sim}{K} \qquad (4)$$

Όμως $\underset{\sim}{\gamma}_c = \underset{\sim}{\gamma}_0 + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{OC} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{OC}) \Rightarrow$

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = \omega\underset{\sim}{K} \times \left(\omega\underset{\sim}{K} \times \left(\frac{\ell}{2}\sin a\,\underset{\sim}{j} + \frac{\ell}{2}\cos a\,\underset{\sim}{K}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\gamma}_c = \omega\underset{\sim}{K} \times \left(-\omega\frac{\ell}{2}\sin a\,\underset{\sim}{I}\right) = -\omega^2\frac{\ell}{2}\sin a\,\underset{\sim}{J}$$

οπότε η (4) δίνει

$$\frac{H-T}{m}\underset{\sim}{j} + \left(\frac{V}{m} - g\right)\underset{\sim}{K} = -\omega^2\frac{\ell}{2}\sin a\,\underset{\sim}{J}$$

οπότε παίρνουμε:

$$H - T = -m\omega^2\frac{\ell}{2}\sin a \qquad (5)$$

$$\frac{V}{m} - g = 0 \qquad (6)$$

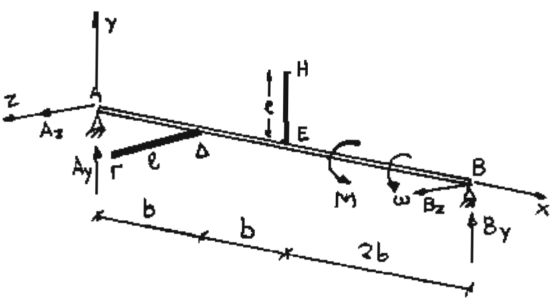
Από τις εξισώσεις (3), (5), (6) προυύπτει:

$$V = mg\ ,\quad T = \frac{m}{2}\left(g\tan a + \frac{2}{3}\ell\omega^2\sin a\right)$$

Άσκηση 107

Το αβαρές στέλεχος στηρίζεται στις θέσεις A, B και φέρει δύο προεξοχές, που έχει μήκος ℓ καθεμία και είναι κολλημένες στο στέλεχος ώστε να είναι ορθογώνιες. Η μάζα κάθε προεξοχής είναι m. Στο στέλεχος εφαρμόζεται ροπή M. Στη φάση του σχήματος το στέλεχος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$ του στελέχους και οι δυναμικές αντιδράσεις στα άκρα του A, B. Δυναμική αντίδραση είναι η μεταβολή της αντίδρασης ως προς την τιμή της όταν έχουμε ισορροπία.

Λύση



Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Axyz. Το σύστημα περιστρέφεται μαζί με το στέλεχος με γωνιακή ταχύτητα $\omega\underset{\sim}{i}$. Έτσι η στροφορμή ως προς το O είναι

$$\underset{\sim}{G}_o = \underset{\sim}{I}_o\,\underset{\sim}{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{G}_o = I_x\omega\underset{\sim}{i} + I_{yx}\omega\underset{\sim}{j} + I_{zx}\omega\underset{\sim}{k} \qquad (1)$$

Ο άξονας x είναι κάθετος στο άκρο καθεμίας από τις ΔΓ, ΕΗ. Έτσι

$$I_x = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{1}{3}m\ell^2 = \frac{2}{3}m\ell^2$$

Ακόμη έχω

$$I_{yx} = -\int xy\,dm = -\int_{\Delta\Gamma} b\cdot 0\cdot dm - \int_{EH} 2by\,dm = -2b\int_{EH} y\,dm =$$

$$= -2b\int_0^{\ell} y\frac{m}{\ell}dy = -bm\ell$$

$$I_{zx} = -\int xz\,dm = -\int_{\Delta\Gamma} b\cdot z\,dm - \int_{EH} 2b\cdot 0\,dm = -b\int_{\Delta\Gamma} z\frac{m}{\ell}dz \Rightarrow$$

$$I_{zx} = -b\frac{\ell}{2}m$$

Η (1) γράφεται:

$$\underset{\sim}{G}_o = \frac{2}{3}m\ell^2\omega\underset{\sim}{i} - bm\ell\omega\underset{\sim}{j} - bm\frac{\ell}{2}\omega\underset{\sim}{k} \qquad (2)$$

Η παράγωγος της στροφορμής ως προς το χρόνο είναι:

$$\frac{d\underset{\sim}{G}_o}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}m\ell^2\omega\underset{\sim}{i} - bm\ell\omega\underset{\sim}{j} - bm\frac{\ell}{2}\omega\underset{\sim}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}m\ell^2\left(\dot{\omega}\underset{\sim}{i} + \omega\frac{d\underset{\sim}{i}}{dt}\right) - bm\ell\left(\dot{\omega}\underset{\sim}{j} + \omega\frac{d\underset{\sim}{j}}{dt}\right) - bm\frac{\ell}{2}\left(\dot{\omega}\underset{\sim}{k} + \omega\frac{d\underset{\sim}{k}}{dt}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\omega}\underset{\sim}{i} - bm\ell\dot{\omega}\underset{\sim}{j} - bm\frac{\ell}{2}\dot{\omega}\underset{\sim}{k} +$$

$$+ \frac{2}{3}m\ell^2\omega\cdot\omega\underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{i} - bm\ell\omega\cdot\omega\underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{j} - bm\frac{\ell}{2}\omega\,\omega\underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{k} =$$

$$= \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\omega} \underset{\sim}{i} - bm\ell\dot{\omega}\underset{\sim}{j} + bm\frac{\ell}{2}\omega^2 \underset{\sim}{j} - bm\frac{\ell}{2}\dot{\omega}\underset{\sim}{k} - bm\ell\omega^2 \underset{\sim}{k} \Longrightarrow$$

$$\frac{d\underset{\sim}{G}_0}{dt} = \frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\omega}\underset{\sim}{i} + bm\ell\left(\frac{\omega^2}{2} - \dot{\omega}\right)\underset{\sim}{j} - bm\ell\left(\frac{\dot{\omega}}{2} + \omega^2\right)\underset{\sim}{k} \qquad (3)$$

(Τα διανύσματα $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega} = \omega \underset{\sim}{i}$)

Το O είναι ακίνητο σημείο. Η συνολική ροπή ως προς το O είναι:

$$\underset{\sim}{M}_0 = M\underset{\sim}{i} + 4b\underset{\sim}{i} \times B_y \underset{\sim}{j} + 4b\underset{\sim}{i} \times B_z \underset{\sim}{k} \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{M}_0 = M\underset{\sim}{i} + 4bB_y \underset{\sim}{k} - 4bB_z\underset{\sim}{j} \qquad (4)$$

Πρέπει

$$\underset{\sim}{M}_0 = \frac{d\underset{\sim}{G}_0}{dt} \Longrightarrow$$

$$M\underset{\sim}{i} - 4bB_z\underset{\sim}{j} + 4bB_y\underset{\sim}{k} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\omega}\underset{\sim}{i} + bm\ell\left(\frac{\omega^2}{2} - \dot{\omega}\right)\underset{\sim}{j} - bm\ell\left(\frac{\dot{\omega}}{2} + \omega^2\right)\underset{\sim}{k}$$

οπότε έχω:

$$M = \frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\omega} \qquad (5)$$

$$-4bB_z = bm\ell\left(\frac{\omega^2}{2} - \dot{\omega}\right) \qquad (6)$$

$$4bB_y = -bm\ell\left(\frac{\dot{\omega}}{2} + \omega^2\right) \qquad (7)$$

Από τις (5), (6), (7) παίρνω:

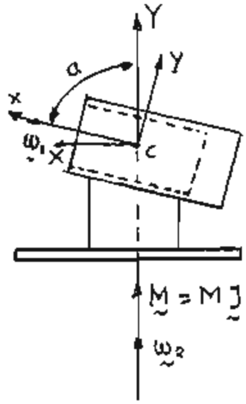
$$\dot{\omega} = \frac{3M}{2m\ell^2}, \quad B_y = -\frac{m\ell}{4}\left(\frac{3M}{4m\ell^2} + \omega^2\right), \quad B_z = -\frac{m\ell}{4}\left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{3M}{2m\ell^2}\right)$$

Τις αντιδράσεις A_y, A_z στη στήριξη A, υπολογίζουμε θεωρώντας σύστημα αναφοράς με αρχή το B με τον ίδιο τρόπο.

Άσκηση 108

Ένας κινητήρας στηρίζεται σε οριζόντια κυκλική βάση. Ο ρότωρας του κινητήρα έχει μάζα m που είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του κελύφους και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1. Ο άξονας του ρότωρα σχηματίζει σταθερή γωνία a με τον κατακόρυφο άξονα. Αν εφαρμόσουμε ροπή M στην οριζόντια βάση που έχει στηριχθεί ο κινητήρας να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της βάσης. Δίνονται οι ροπές αδράνειας του ρότωρα I_x, I_y.

Λύση



Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Cxyz που περιστρέφεται μαζί με το ρότωρα ως προς το σταθερό σύστημα CXYZ. Στη φάση του σχήματος τα επίπεδα Cxy, CXY συμπίπτουν. Η ολική γωνιακή ταχύτητα του κινητήρα είναι:

$$\underset{\sim}{\Omega} = \omega_1 \underset{\sim}{i} + \omega_2 \underset{\sim}{J} = \omega_1 \underset{\sim}{i} + \omega_2 \cos a\, \underset{\sim}{i} + \omega_2 \sin a\, \underset{\sim}{j} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\Omega} = (\omega_1 + \omega_2 \cos a)\, \underset{\sim}{i} + \omega_2 \sin a\, \underset{\sim}{j} \qquad (1)$$

Ο τανυστής αδράνειας ως προς το σύστημα Cxyz είναι:

$$\underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

αφού το Cxyz είναι κύριο σύστημα. Η στροφορμή ως προς το C είναι:

$$\underset{\sim}{G_c} = \underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = (I_x\omega_x,\ I_y\omega_y,\ I_z\omega_z) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{G_c} = I_x(\omega_1+\omega_2\cos a)\,\underset{\sim}{i} + I_y\omega_2\sin a\,\underset{\sim}{j}$$

Υπολογίζουμε τώρα την παράγωγο της στροφορμής:

$$\frac{d\underset{\sim}{G_c}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[I_x(\omega_1+\omega_2\cos a)\,\underset{\sim}{i} + I_y\omega_2\sin a\,\underset{\sim}{j}\right] =$$

$$= I_x(\dot\omega_1+\dot\omega_2\cos a)\,\underset{\sim}{i} + I_x(\omega_1+\omega_2\cos a)\frac{d\underset{\sim}{i}}{dt} +$$

$$+ I_y\dot\omega_2\sin a\,\underset{\sim}{j} + I_y\omega_2\sin a\frac{d\underset{\sim}{j}}{dt}$$

Όμως $\displaystyle \frac{d\underset{\sim}{i}}{dt} = \underset{\sim}{\Omega}\times\underset{\sim}{i} = \left((\omega_1+\omega_2\cos a)\,\underset{\sim}{i} + \omega_2\sin a\,\underset{\sim}{j}\right)\times\underset{\sim}{i} = -\omega_2\sin a\,\underset{\sim}{k}$

$$\frac{d\underset{\sim}{j}}{dt} = \underset{\sim}{\Omega}\times\underset{\sim}{j} = (\omega_1+\omega_2\cos a)\,\underset{\sim}{k}\ ,\quad \dot\omega_1 = 0$$

Έτσι προκύπτει:

$$\frac{d\underset{\sim}{G_c}}{dt} = I_x\dot\omega_2\cos a\,\underset{\sim}{i} - I_x(\omega_1+\omega_2\cos a)\,\omega_2\sin a\,\underset{\sim}{k} +$$

$$+ I_y\dot\omega_2\sin a\,\underset{\sim}{j} + I_y\omega_2\sin a\,(\omega_1+\omega_2\cos a)\,\underset{\sim}{k} \implies$$

$$\frac{d\underset{\sim}{G_c}}{dt} = I_x\dot\omega_2\cos a\,\underset{\sim}{i} + I_y\dot\omega_2\sin a\,\underset{\sim}{j} + \sin a\,(\omega_1+\omega_2\cos a)(I_y-I_x)\,\underset{\sim}{k}$$

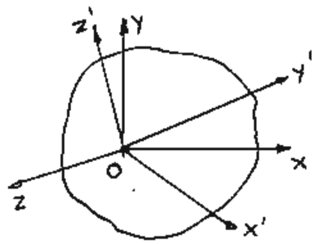
Η προβολή της $\frac{d\underline{L}_c}{dt}$ στον Y είναι:

$$\left(\frac{d\underline{L}_c}{dt}\right)_Y = (I_x\dot{\omega}_2\cos a)\cos a + (I_y\dot{\omega}_2\sin a)\sin a = M_y = M$$

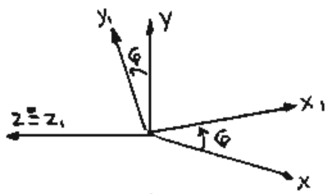
$$\Rightarrow \quad \dot{\omega}_2 = \frac{M}{I_x\cos^2 a + I_y\sin^2 a}$$

10.4 Γωνίες Euler

Θεωρούμε ένα απόλυτα στερεό σώμα και ένα σύστημα αξόνων Oxyz που κινείται μαζί με το στερεό (σωματόδετο ή σωματοπαγές σύστημα). Η κίνηση του στερεού γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το σύστημα Oxyz να βρεθεί στη θέση Ox'y'z' μετά την κίνηση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κίνηση έγινε σε τρεις φάσεις:

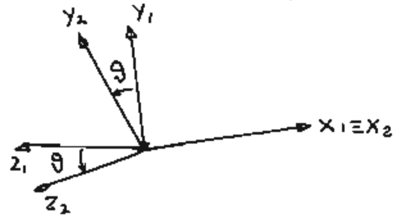


1η φάση: Ο άξονας z παραμένει σταθερός ενώ οι x, y περιστρέφονται γύρω απ' αυτόν κατά γωνία φ.

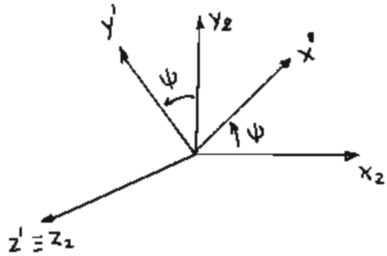


2η φάση Από τη θέση $x_1y_1z_1$ που φθάσαμε προηγούμενα με σταθερό το x_1 και στροφή των άλλων κατά θ φθάνουμε στη θέση $x_2y_2z_2$

3η φάση Κρατάμε τον z_2 σταθερό και με στροφή κατά γωνία ψ των άλλων φθάνουμε στην τελική θέση x'y'z':



Το σημείο Ο παραμένει σταθερό.



Άσκηση 109

Ένα σώμα περιστρέφεται περί το σημείο Ο, ώστε οι γωνίες Euler να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{3} t^2 \quad \text{(rad)}$$

$$\vartheta(t) = \frac{\pi}{6} t^3 \quad \text{(rad)}$$

$$\psi(t) = \frac{\pi}{4} t \quad \text{(rad)}$$

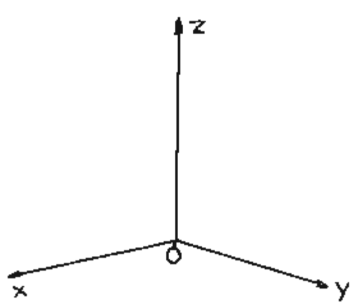
Να προσδιορισθεί η γωνιακή ταχύτητα του στερεού ως προς το αρχικό (σταθερό) σύστημα αξόνων Oxyz τη χρονική στιγμή t.

Λύση

Το στερεό κάνει τρεις περιστροφές γύρω από τρεις άξονες που συντρέχουν στο Ο.

1η περιστροφή:

$$\underset{\sim}{\omega}_1 = \dot{\varphi} \underset{\sim}{k} = \frac{2\pi}{3} t \, \underset{\sim}{k}$$



αφού αυτή λαμβάνει χώρα με z=σταθερό δηλ. γίνεται γύρω από τον άξονα z.

2η περιστροφή: Γίνεται με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}_2$:

$$\underset{\sim}{\omega}_2 = \dot{\vartheta}\hat{n} = \frac{3\pi}{6}t^2\hat{n}_1$$

όπου $\hat{n}_1 = \cos\varphi(t)\,\underset{\sim}{i} + \sin\varphi(t)\,\underset{\sim}{j}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στο νέο άξονα x_1. Έτσι:

$$\underset{\sim}{\omega}_2 = \frac{3\pi}{6}t^2\left[\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\underset{\sim}{i} + \sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\underset{\sim}{j}\right]$$

3η περιστροφή: Αυτή γίνεται με γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}_3 = \dot{\psi}\hat{m}$:

$$\underset{\sim}{\omega}_3 = \frac{\pi}{4}\hat{m}_1$$

όπου $\hat{m}_1 = \cos\vartheta(t)\,\underset{\sim}{k} - \sin\vartheta(t)\,\hat{n}_2$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στον z_2 και $\hat{n}_2$ το μοναδιαίο πάνω στον y_1: $\hat{n}_2 = -\sin\varphi\,\underset{\sim}{i} + \cos\varphi\,\underset{\sim}{j}$ $\Rightarrow$

$$\underset{\sim}{\omega}_3(t) = \frac{\pi}{4}\cos\vartheta(t)\,k - \frac{\pi}{4}\sin\vartheta(t)\left(-\sin\varphi(t)\,\underset{\sim}{i} + \cos\varphi(t)\,\underset{\sim}{j}\right)$$

Επειδή οι άξονες συντρέχουν, η γωνιακή ταχύτητα του στερεού είναι:

$$\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{\omega}_1(t) + \underset{\sim}{\omega}_2(t) + \underset{\sim}{\omega}_3(t).$$

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ↑SPIN↓

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΛΥΚΕΙΟ

1. ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΕΥΧΟΣ I
2. ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΕΥΧΟΣ II
3. ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΕΥΧΟΣ III
4. ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΕΥΧΟΣ IV

} ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Γ. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ)

5. ΑΡΧΕΣ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ (Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ)

ΑΝΩΤΑΤΕΣ ΣΧΟΛΕΣ

ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ

1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
2. ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΡ. ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ I
4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ II
5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
6. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ
7. ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ
8. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
9. ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
10. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
11. ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
12. ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
13. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ
14. ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ
15. ΦΥΣΙΚΗ I ΜΗΧΑΝΙΚΗ
16. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
17. ΚΥΜΑΤΙΚΗ
18. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΚΗ
19. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ I
20. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ II
21. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
22. ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
23. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
24. ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ
25. ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ
26. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ I
27. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ II
28. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ III
29. ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ I
30. ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ II
31. ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ III
32. ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ I
33. ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ II
34. ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ III
35. ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER
36. ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
37. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ
38. ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ I
39. ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ II
40. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ
41. ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

101. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ PASCAL (ΣΠ. ΓΕΡΟΥΛΗΣ)
102. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ C (ΣΠ. ΓΕΡΟΥΛΗΣ)
103. ΓΕΝΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ I (Δ. ΚΟΥΡΤΗΣ)
104. ΓΕΝΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ II (Δ. ΚΟΥΡΤΗΣ)
105. ΓΕΝΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ III (Δ. ΚΟΥΡΤΗΣ)
106. ΟΡΓΑΝΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ (Δ. ΚΟΥΡΤΗΣ)

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ - ΧΟΝΔΡΙΚΗ - ΛΙΑΝΙΚΗ
ΚΩΛΕΤΤΗ 14Α, ΑΘΗΝΑ 106 81
Τηλ.: 210 3809282, Fax: 2103809203, Κιν.: 6944611447