Συνοπτική παρουσίαση επιλεγμένων τμημάτων της ενότητας 8 της ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ (σελ. 27-38) του βιβλίου:

Ι. Τσαλαμέγκα – Ι. Ρουμελιώτη, "Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία – Τόμος Α"

Ι. Τσαλαμέγκας – Ι. Ρουμελιώτης

Μάρτιος 2020

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
Κυλινδρικό και Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Α. Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r,φ,z)

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

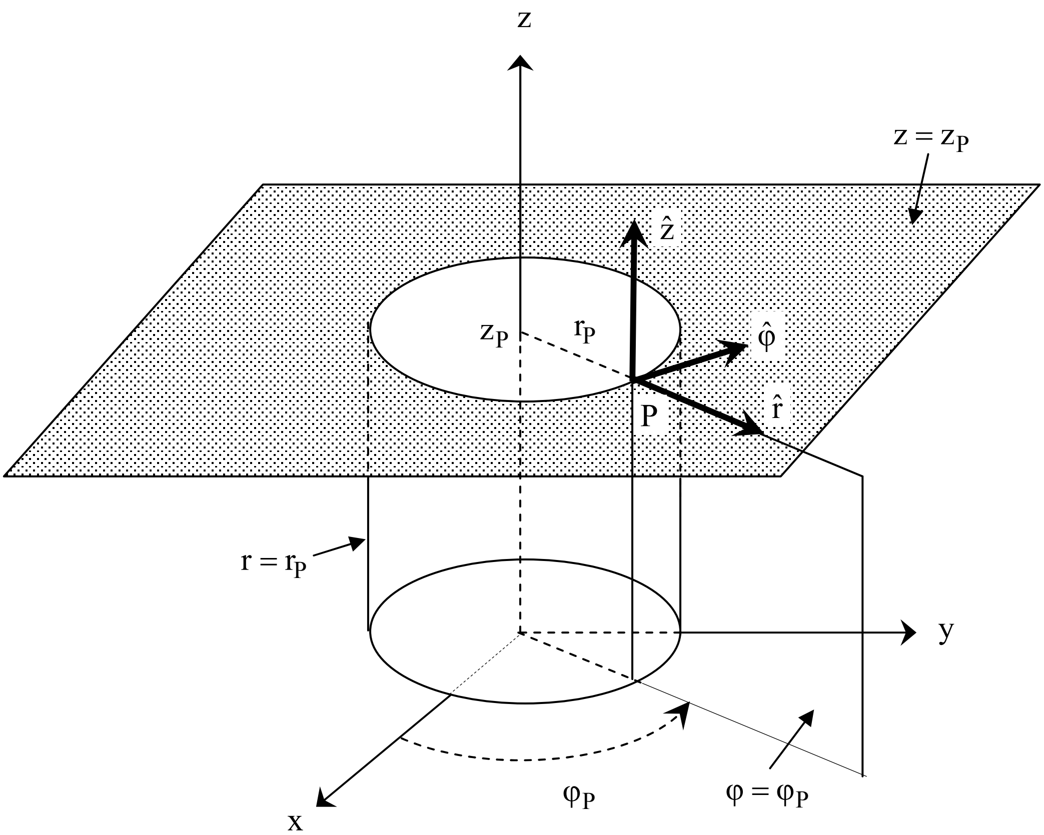
με $r > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty$.

- *Αντίστροφος μετασχηματισμός*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1}(y/x)$$
$$z = z.$$

- *Συντεταγμένες επιφάνειες (Σχ.1)*

S_r (με εξίσωση $r = r_P = \sigma\tau\alpha\theta$): Κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r.
S_φ (με εξίσωση $\varphi = \varphi_P = \sigma\tau\alpha\theta$): Ημιεπίπεδο.
S_z (με εξίσωση $z = z_P = \sigma\tau\alpha\theta$): Επίπεδο.



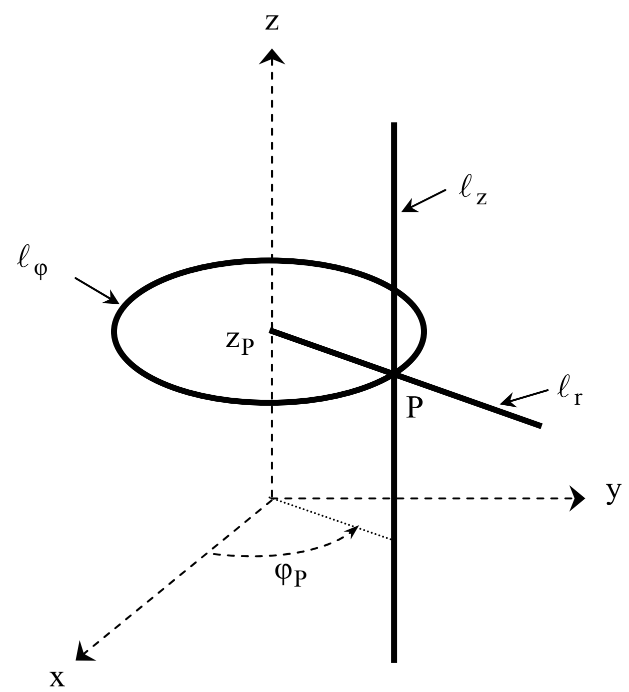
Σχήμα 1

● <u>*Συντεταγμένες καμπύλες*</u> (Σχ.2)

ℓ_r (καμπύλη των r) : $\varphi = \varphi_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $\theta = \theta_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $0 \le r < \infty$.

ℓ_φ (καμπύλη των φ) : $r = r_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $z = z_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $0 \le \varphi < 2\pi$,

ℓ_z (καμπύλη των z) : $r = r_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $\varphi = \varphi_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $-\infty < z < \infty$.



Σχήμα 4

● <u>*Μοναδιαία διανύσματα- Μετρικοί συντελεστές*</u> (Σχ.1)

Με τη βοήθεια της σχέσεως

$\overline{\mathrm{r}} = (\mathrm{r}\cos\varphi, \mathrm{r}\sin\varphi, \mathrm{z}) = \hat{\mathrm{x}}\mathrm{r}\cos\varphi + \hat{\mathrm{y}}\mathrm{r}\sin\varphi + \hat{\mathrm{z}}\mathrm{z}$,

παίρνουμε

$$\frac{\partial\overline{\mathrm{r}}}{\partial\mathrm{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,, \quad \frac{\partial\overline{\mathrm{r}}}{\partial\varphi} = (-\mathrm{r}\sin\varphi, \mathrm{r}\cos\varphi, 0)\,, \quad \frac{\partial\overline{\mathrm{r}}}{\partial\mathrm{z}} = (0,0,1)$$

και

$$\mathrm{h_r} \equiv \left|\frac{\partial\overline{\mathrm{r}}}{\partial\mathrm{r}}\right| = 1\,,\ \mathrm{h}_\varphi \equiv \left|\frac{\partial\overline{\mathrm{r}}}{\partial\varphi}\right| = \mathrm{r}\,,\ \mathrm{h_z} = \left|\frac{\partial\overline{\mathrm{r}}}{\partial\mathrm{z}}\right| = 1 \quad (\textit{μετρικοί συντελεστές}). \tag{1}$$

Επομένως,

$$\hat{\mathrm{r}} = \frac{1}{\mathrm{h_r}}\frac{\partial\overline{\mathrm{r}}}{\partial\mathrm{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = \hat{\mathrm{x}}\cos\varphi + \hat{\mathrm{y}}\sin\varphi\,, \tag{2α}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\mathrm{h}_\varphi}\frac{\partial\overline{\mathrm{r}}}{\partial\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = -\hat{\mathrm{x}}\sin\varphi + \hat{\mathrm{y}}\cos\varphi\,, \tag{2β}$$

$$\hat{\mathrm{z}} = \hat{\mathrm{z}}\,. \quad \text{(Ίδιο με του καρτεσιανού συστήματος.)} \tag{2γ}$$

(**Σημείωση**: Η (1α) προκύπτει άμεσα και πιο απλά από τη σχέση $\hat{r} = \overline{r}/r$).

- *Στοιχεία μήκους*

$$d\ell_r = h_r dr = dr\,,\quad d\ell_\varphi = h_\varphi d\varphi = r d\varphi\,,\quad d\ell_z = dz \tag{3}$$

- *Στοιχεία επιφάνειας*

$$dS_r = (d\ell_z)(d\ell_\varphi) = r d\varphi dz \tag{4α}$$

$$dS_\varphi = (d\ell_z)(d\ell_r) = dr dz \tag{4β}$$

$$dS_z = (d\ell_r)(d\ell_\varphi) = r dr d\varphi\,. \tag{4γ}$$

- *Στοιχείο όγκου*

$$\mathrm{dV} = (\mathrm{d}\ell_{\mathrm{r}})(\mathrm{d}\ell_\varphi)(\mathrm{d}\ell_{\mathrm{z}}) = \mathrm{r dr d\varphi dz}\,. \tag{5}$$

<u>Εφαρμογή:</u> Εύρεση καρτεσιανών συνιστωσών διανύσματος από τις κυλινδρικές συνιστώσες

Δίνεται η έκφραση

$$\overline{A} = A_r\hat{r} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}$$

ενός διανύσματος $\overline{\mathrm{A}}$ μέσω των κυλινδρικών συνιστωσών του. Να βρεθεί η έκφρασή του

$$\overline{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\,.$$

Λύση

$$A_x = \overline{A}\cdot\hat{x} = (A_r\hat{r} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z})\cdot\hat{x} = A_r\hat{r}\cdot\hat{x} + A_\varphi\hat{\varphi}\cdot\hat{x} + A_z\hat{z}\cdot\hat{x} \overset{(2)}{=} A_r\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi\,.$$

Ομοίως

$$A_y = \overline{A}\cdot\hat{y} = (A_r\hat{r} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z})\cdot\hat{y} = A_r\hat{r}\cdot\hat{y} + A_\varphi\hat{\varphi}\cdot\hat{y} + A_z\hat{z}\cdot\hat{y} \overset{(2)}{=} A_r\sin\varphi + A_\phi\cos\varphi\,.$$

Η συνιστώσα A_z δεν μεταβάλλεται κατά τον παραπάνω μετασχηματισμό.

Σε μητρική μορφή,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A_x} \\ \mathrm{A_y} \\ \mathrm{A_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A_r} \\ \mathrm{A_\varphi} \\ \mathrm{A_z} \end{pmatrix}$$

Β. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r,θ,φ)

$$\mathrm{x} = \mathrm{r}\sin\theta\cos\varphi$$
$$\mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\theta\sin\varphi$$
$$\mathrm{z} = \mathrm{r}\cos\theta$$

με $0 < \mathrm{r} < \infty, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta \le \pi$.

- *Αντίστροφος μετασχηματισμός*

$$\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}\,,$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}}{\mathrm{z}}\,,$$

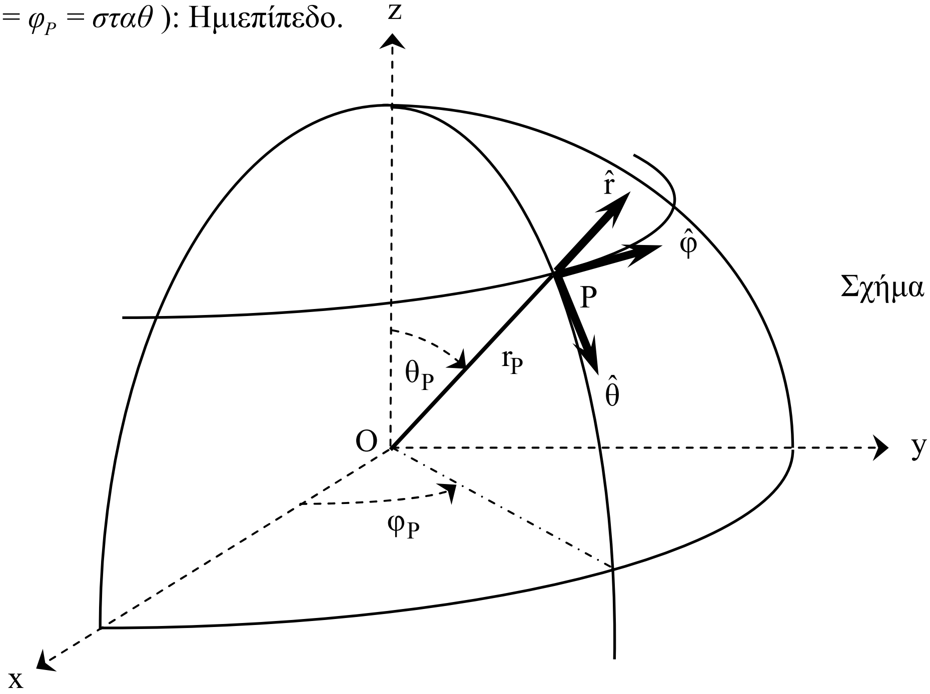
$$\varphi = \tan^{-1}(\mathrm{y}/\mathrm{x})\,.$$

● *<u>Συντεταγμένες επιφάνειες</u> (Σχ.5)*

S_r (με εξίσωση $r = r_P = \sigma\tau\alpha\theta$): Σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r .

S_θ (με εξίσωση $\theta = \theta_P = \sigma\tau\alpha\theta$): Κώνος με άξονα Oz και γενέτειρα OP.

S_φ (με εξίσωση $\varphi = \varphi_P = \sigma\tau\alpha\theta$): Ημιεπίπεδο.



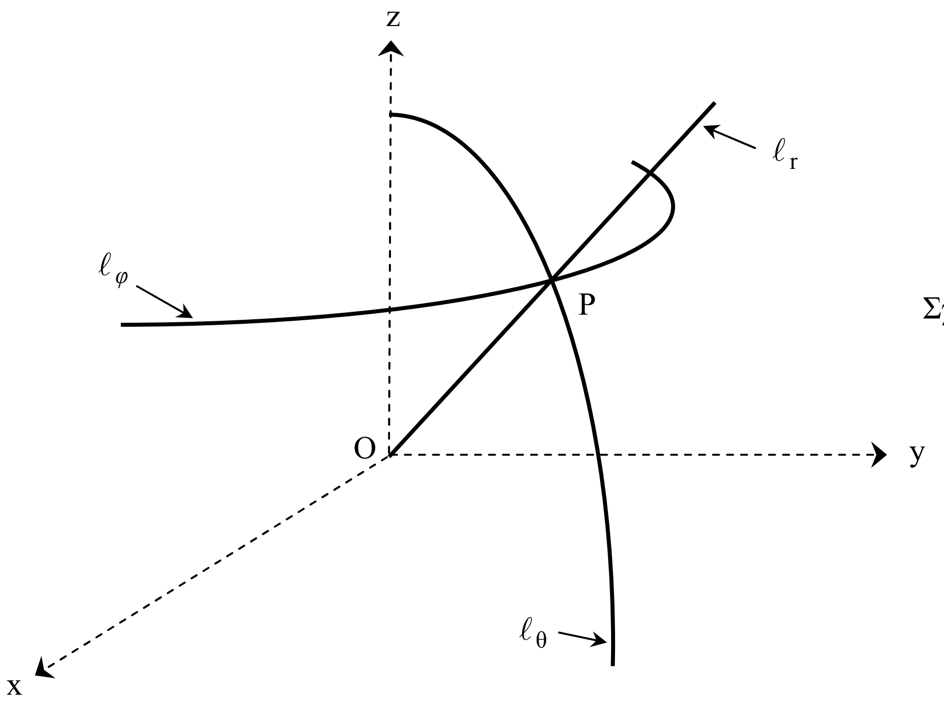
Σχήμα 5

● *<u>Συντεταγμένες καμπύλες</u>* (Σχ.6)

ℓ_r (καμπύλη των r) : $\varphi = \varphi_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $\theta = \theta_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $0 \le r < \infty$.

ℓ_θ (καμπύλη των θ) : $r = r_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $\varphi = \varphi_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $0 \le \theta \le \pi$,

ℓ_φ (καμπύλη των φ) : $r = r_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $\theta = \theta_P = \sigma\tau\alpha\theta$, $0 \le \varphi < 2\pi$.



Σχήμα 6

● *Μοναδιαία διανύσματα-μετρικοί συντελεστές*

Με τη βοήθεια της σχέσεως

$$\overline{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) = \hat{x}r\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}r\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}r\cos\theta$$

προκύπτει

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\,,$$

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta)\,,$$

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

και

$$h_r \equiv \left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial r}\right| = 1\,,\quad h_\theta \equiv \left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta}\right| = r\,,\quad h_\varphi \equiv \left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}\right| = r\sin\theta \quad (\textit{μετρικοί συντελεστές}). \tag{6}$$

Επομένως,

$$\hat{r} = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\overline{r}}{\partial r} = \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta \tag{7α}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\varphi + \hat{y}\cos\theta\sin\varphi - \hat{z}\sin\theta\,, \tag{7β}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \quad (\text{ίδιο με του κυλινδρικού συστήματος}). \tag{7γ}$$

(**Σημείωση**: Η (7α) προκύπτει άμεσα και πιο απλά από τη σχέση $\hat{r} = \overline{r}/r$).

● *Στοιχεία μήκους*

$$d\ell_r = h_r dr = dr\,,\quad d\ell_\theta = h_\theta d\theta = r d\theta\,,\quad d\ell_\varphi = h_\varphi d\varphi = r\sin\theta d\varphi\,. \tag{8}$$

● *Στοιχεία επιφάνειας*

$$dS_r = (d\ell_\theta)(d\ell_\varphi) = r^2\sin\theta d\theta d\varphi \tag{9α}$$

$$dS_\theta = (d\ell_\varphi)(d\ell_r) = r\sin\theta dr d\varphi \tag{9β}$$

$$dS_\varphi = (d\ell_r)(d\ell_\theta) = r dr d\theta \tag{9γ}$$

● *Στοιχείο όγκου*

$$dV = (d\ell_r)(d\ell_\theta)(d\ell\varphi) = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi\,. \tag{10}$$

(**<u>Σημείωση</u>**: Εναλλακτικά, από τον τύπο για τον όγκο σφαίρας ακτίνας r, $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, προκύπτει

$$\frac{dV}{dr}=4\pi r^2 \Rightarrow dV=4\pi r^2 dr$$

Αυτό το στοιχείο όγκου είναι πιο εύχρηστο για ολοκληρώματα της μορφής $\int_V f(r)dV$. Για ολοκληρώματα της μορφής $\int_V f(r,\theta,\phi)dV$ πρέπει να χρησιμοποιηθεί το στοιχείο όγκου της εξίσωσης (10).)

<u>Εφαρμογή:</u> Εύρεση καρτεσιανών συνιστωσών διανύσματος από τις σφαιρικές του συνιστώσες

Δίνεται η έκφραση

$$\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}_r\hat{\mathrm{r}}+\mathrm{A}_\theta\hat{\theta}+\mathrm{A}_\varphi\hat{\varphi}$$

ενός διανύσματος $\overline{\mathrm{A}}$ μέσω των σφαιρικών συνιστωσών του. Να βρεθεί η έκφρασή του

$$\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}_x\hat{\mathrm{x}}+\mathrm{A}_y\hat{\mathrm{y}}+\mathrm{A}_z\hat{\mathrm{z}}.$$

Λύση: Έχουμε:

$$\mathrm{A}_x=(\mathrm{A}_r\hat{\mathrm{r}}+\mathrm{A}_\theta\hat{\theta}+\mathrm{A}_\varphi\hat{\varphi})\cdot\hat{\mathrm{x}}=\mathrm{A}_r\hat{\mathrm{r}}\cdot\hat{\mathrm{x}}+\mathrm{A}_\theta\hat{\theta}\cdot\hat{\mathrm{x}}+\mathrm{A}_\varphi\hat{\varphi}\cdot\hat{\mathrm{x}}\overset{(7)}{=}\mathrm{A}_r\sin\theta\cos\varphi+\mathrm{A}_\theta\cos\theta\cos\varphi-\mathrm{A}_\varphi\sin\phi$$

Ομοίως,

$$\mathrm{A}_y=(\mathrm{A}_r\hat{\mathrm{r}}+\mathrm{A}_\theta\hat{\theta}+\mathrm{A}_\varphi\hat{\varphi})\cdot\hat{\mathrm{y}}=\mathrm{A}_r\hat{\mathrm{r}}\cdot\hat{\mathrm{y}}+\mathrm{A}_\theta\hat{\theta}\cdot\hat{\mathrm{y}}+\mathrm{A}_\varphi\hat{\varphi}\cdot\hat{\mathrm{y}}\overset{(7)}{=}\mathrm{A}_r\sin\theta\sin\varphi+\mathrm{A}_\theta\cos\theta\sin\varphi+\mathrm{A}_\varphi\cos\varphi\,,$$

$$\mathrm{A}_z=(\mathrm{A}_r\hat{\mathrm{r}}+\mathrm{A}_\theta\hat{\theta}+\mathrm{A}_\varphi\hat{\varphi})\cdot\hat{\mathrm{z}}=\mathrm{A}_r\hat{\mathrm{r}}\cdot\hat{\mathrm{z}}+\mathrm{A}_\theta\hat{\theta}\cdot\hat{\mathrm{z}}+\mathrm{A}_\varphi\hat{\varphi}\cdot\hat{\mathrm{z}}\overset{(7)}{=}\mathrm{A}_r\cos\theta-\mathrm{A}_\theta\sin\theta$$