ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στοχαστικές Ανελίξεις

- Εισαγωγή
- Πιθανότητες
- Τυχαίες Μεταβλητές
- Στατιστικοί Μέσοι Όροι

08 Απριλίου, 2022

Original version prepared by Prof. V. Maglaris – Revision performed by Prof. S. Papavassiliou and Assist. Prof. I. Roussaki

Εισαγωγή

Τυχαίο σήμα: Άγνοια δέκτη για ακριβή πληροφορία προς μετάδοση

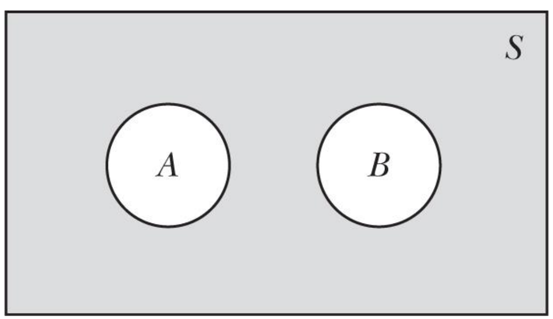
Τυχαία παρεμβολή: Θόρυβος από παράλληλες μεταδόσεις, κλιματικές συνθήκες, ακτινοβολίες, θερμικό θόρυβο συσκευών

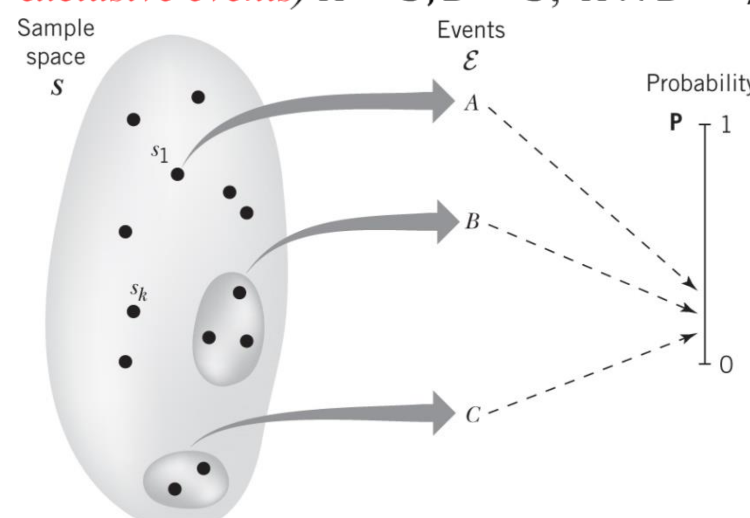
Μέθοδοι εκτίμησης στατιστικών χαρακτηριστικών: Προκύπτουν από την φύση του τυχαίου σήματος/παρεμβολής και αντίστοιχες μετρήσεις στο παρελθόν των σχετικών τυχαίων μεταβλητών *(random variables)* και ιδιοτήτων χρονικής εξέλιξης στοχαστικών ανελίξεων *(time series, stochastic processes)* των σημάτων και παρεμβολών

Πρόβλεψη με βάση στατιστικές ιδιότητες: Μέση τιμή *(mean)*, διασπορά *(variance)*, ιστόγραμμα κατανομής τυχαίας μεταβλητής *(histogram of random variable distribution)*, συσχέτιση *(correlation)* και φασματική κατανομή *(power spectral density)* των μοντέλων στοχαστικών ανελίξεων

Πιθανότητες - Βασικοί Ορισμοί(1/2)

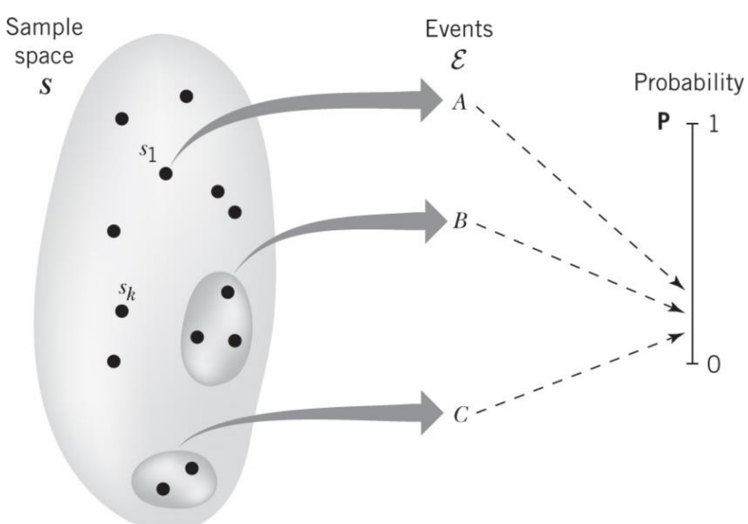
- Τυχαίο πείραμα (*random experiment*) με πιθανά ενδεχόμενα (*outcomes*) που ανήκουν στο υπερσύνολο ενδεχομένων S
- Αντιστοίχηση ενδεχομένων σε **δείγματα** (*sample points*) s_k του **χώρου δειγμάτων** (*sample space*) S, $s_k \in S$
- **Συμβάν** (*event*): Υποσύνολο δειγμάτων $A = \{s_1, s_2 \ldots\}$, $A \subseteq S$
- **Σχετική συχνότητα δείγματος** ή **συμβάντος** (*relative frequency*): *Αριθμός εμφανίσεων* m δείγματος s_k ή του υποσυνόλου δειγμάτων ενός συμβάντος A σε n επαναλήψεις του τυχαίου πειράματος
- **Μέτρο Πιθανότητας** (*probability measure*):
  - Συνάρτηση $A \rightarrow \mathbf{P}[A]$, $0 \leq \mathbf{P}[A] \leq 1$
  - **Στοιχειώδες γεγονός** (*elementary event*) αποτελούμενο από ένα απλό δείγμα $A = \{s_k\}$, $\mathbf{P}[A] = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$ (σχετική συχνότητα δείγματος s_k)
  - **Βέβαιο γεγονός** (*certain event*) $E = S, \mathbf{P}[S] = 1$
  - **Μηδενικό γεγονός** (*null event*) $E = \emptyset$, $\mathbf{P}[\emptyset] = 0$
  - **Αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα** (*mutually exclusive events*) $A \subset S, B \subset S$, $A \cap B = \emptyset$, $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$

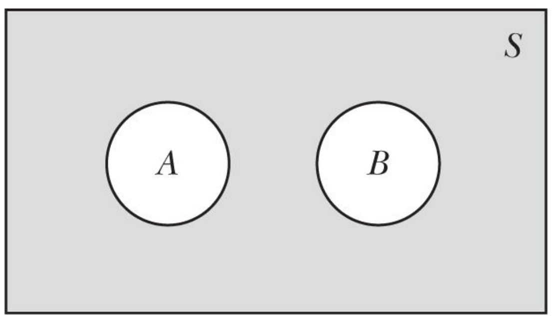




Πιθανότητες - Βασικοί Ορισμοί(2/2)

- **Συμβάν** *(event)*: Υποσύνολο δειγμάτων $A = \{s_1, s_2 \ldots\}, A \subseteq S,\ s_k \in S$ *(sample space)*
- **Μέτρο Πιθανότητας** *(probability measure)*: Συνάρτηση $A \to \mathbf{P}[A] \geq 0$ που ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του Kolmogorov:
  1. $0 \leq \mathbf{P}[A] \leq 1$
  2. $\mathbf{P}[S] = 1$
  3. Αν $A \subset S, B \subset S$ και $A \cap B = \emptyset$ *(mutually exclusive events)* $\Rightarrow \mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$
- Συνεπαγόμενες ιδιότητες:
  1. $\mathbf{P}[\bar{A}] = 1 - \mathbf{P}[A],\ \bar{\boldsymbol{A}} \cup A = S, \bar{\boldsymbol{A}} \cap A = \emptyset$
  2. $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] - P[A \cap B]$
  3. Αν $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = S, A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall (i,j)$ τότε $\mathbf{P}[A_1] + \mathbf{P}[A_2] + \cdots + \mathbf{P}[A_m] = 1$





Τα εξαγόμενα ενός πειράματος, π.χ. της ρίψης ενός ζευγαριού ζαριών

$S=$
$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

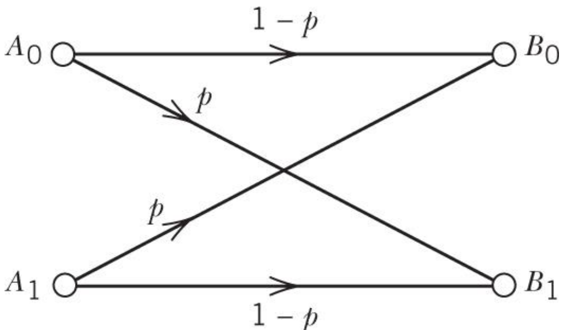
Οποιοδήποτε υποσύνολο E του *δειγματοχώρου* S είναι *γεγονός*. Π.χ.
$E=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$
ή ισοδύναμα
$E=\{$το άθροισμα των δύο ζαριών να είναι μικρότερο του 5$\}$.

Αν τα ζάρια είναι δίκαια και $P(i,j)=1/36$ για οποιαδήποτε i,j,
$P\{$το άθροισμα των δύο ζαριών να είναι μικρότερο του 5$\}=$
$=P\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$
$= P\{(1,1)\} + P\{(1,2)\} + P\{(1,3)\} + P\{(2,1)\} + P\{(2,2)\} + P\{(3,1)\} = 6/36.$

Πιθανότητες υπό συνθήκη

- Πιθανότητα B **υπό την συνθήκη** A: $\mathbf{P}[B|A] = \frac{\mathbf{P}[A\cap B]}{\mathbf{P}[A]}$
  και $\mathbf{P}[A \cap B] = \mathbf{P}[B|A]\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[A|B]\mathbf{P}[B]$
- $\mathbf{P}[B|A] = \frac{\mathbf{P}[A|B]\mathbf{P}[B]}{\mathbf{P}[A]}$ Κανόνας **Bayes**
- Αν $\mathbf{P}[B|A] = \mathbf{P}[B]$ τότε τα γεγονότα A και B είναι στατιστικά **ανεξάρτητα** *(independent)* και $\mathbf{P}[A \cap B] = \mathbf{P}[A]\mathbf{P}[B]$
- Αν οι συνθήκες A_i είναι γεγονότα ξένα μεταξύ τους και καλύπτουν τον χώρο $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ τότε $\mathbf{P}[B] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}[B|A_i]\mathbf{P}[A_i]$ (Νόμος **Συνολικής Πιθανότητας**)

Δυαδικός συμμετρικός δίαυλος (Memoryless Binary Symmetric Channel)



- Ο πομπός στέλνει σειριακά και χωρίς μνήμη δυαδικά ψηφία 0,1 (γεγονότα A_0, A_1) με εκ των προτέρων πιθανότητες *(a priori probabilities)* $\mathbf{P}[A_0] = p_0, \mathbf{P}[A_1] = p_1 = 1 - p_0$
- Ο δέκτης ερμηνεύει λήψεις ψηφίων 0,1 (γεγονότα B_0, B_1) με πιθανότητα λάθους λόγω παραμορφώσεων του διαύλου ίση με $\mathbf{P}[B_1|A_0] = \mathbf{P}[B_0|A_1] = p$
- Οι πιθανότητες ορθής μετάδοσης είναι $\mathbf{P}[B_0|A_0] = \mathbf{P}[B_1|A_1] = 1 - p$
- Η πιθανότητα λήψης ψηφίου 0 είναι $\mathbf{P}[B_0] = \mathbf{P}[B_0|A_0]\mathbf{P}[A_0] + \mathbf{P}[B_0|A_1]\mathbf{P}[A_1] = (1-p)p_0 + pp_1$
- Ομοίως $\mathbf{P}[B_1] = \mathbf{P}[B_1|A_0]\mathbf{P}[A_0] + \mathbf{P}[B_1|A_1]\mathbf{P}[A_1] = pp_0 + (1-p)p_1$
- Από τον κανόνα του Bayes προκύπτουν οι εκ των υστέρων πιθανότητες *(a posteriori probabilities)* ορθής μετάδοσης όταν ο δέκτης ερμηνεύει 0 ή 1 (γεγονότα B_0, B_1) είναι:

$$\mathbf{P}[A_0|B_0] = \frac{\mathbf{P}[B_0|A_0]\mathbf{P}[A_0]}{\mathbf{P}[B_0]} = \frac{(1-p)p_0}{(1-p)p_0 + pp_1}, \qquad \mathbf{P}[A_1|B_1] = \frac{\mathbf{P}[B_1|A_1]\mathbf{P}[A_1]}{\mathbf{P}[B_1]} = \frac{(1-p)p_1}{pp_0 + (1-p)p_1}$$

Αν $\mathbf{P}[A_0] = p_0 \to 1$ (ο δέκτης ξέρει πως ο πομπός στέλνει συνήθως 0), $\mathbf{P}[A_0|B_0] \to 1, \mathbf{P}[A_1|B_0] \to 0\ \forall p$

Τυχαίες Μεταβλητές (1/3)

Ορισμοί

Τυχαία Μεταβλητή (Random Variable - RV): Αντιστοίχηση (συνάρτηση) ενδεχομένων $s_k \in S$ σε πραγματικούς αριθμούς (παραμέτρου) x: $X(s_k) = x \in (-\infty, \infty)$

Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής (Cumulative Distribution Function, CDF) $F_X(x) = \mathbf{P}[X \leq x]$

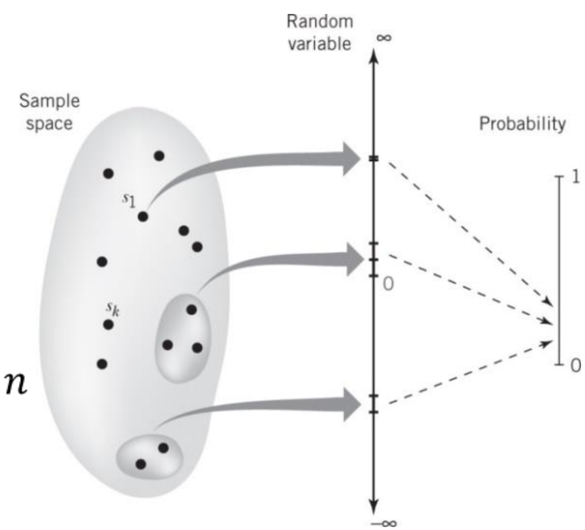
- Για $-\infty < x < \infty,\ 0 \leq F_X(x) \leq 1$
- Μονότονη μη φθίνουσα συνάρτηση της παραμέτρου x: $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ αν $x_1 < x_2$
- Ισχύει $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (Probability Density Function, PDF) :

$$f_x(x) = \frac{d}{dx}F_X(x), \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

- Ισχύει $\mathbf{P}[x_1 < X \leq x_2] = \mathbf{P}[X \leq x_2] - \mathbf{P}[X \leq x_1] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

  $\mathbf{P}[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(y)dy$
- Ισχύει για PDF, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$



Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας (Probability Mass Function)

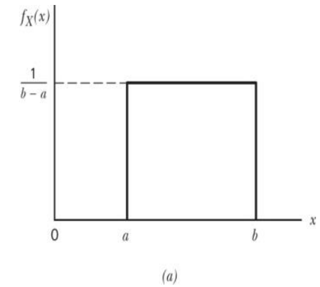
- Σε περίπτωση **διακριτών** ενδεχομένων s_k, k ακέραιος αριθμός:

  $\mathbf{P}[X = x_k] \triangleq \mathbf{P}_k$, και $F_X(x) = \mathbf{P}[X \leq x] = \sum_{k=-\infty}^{n} \mathbf{P}_k$ για όλα τα $k \leq n$ που ικανοποιούν την ανισότητα $x_k \leq x$

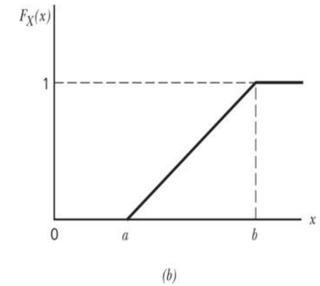
Τυχαίες Μεταβλητές (2/3)

Ομοιόμορφη Κατανομή (Uniform Distribution)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



PDF



CDF

Πολλές Τυχαίες Μεταβλητές

Joint CDF: $F_{X,Y}(x,y) = \mathbf{P}[X \leq x, Y \leq y], (-\infty < X \leq x, -\infty < Y \leq y)$

Joint PDF: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \geq 0$

οπότε $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = 1$

Για **Ανεξάρτητες Τυχαίες Μεταβλητές**: $F_{X,Y}(x,y) = \mathbf{P}[X \leq x]\mathbf{P}[Y \leq y] = F_X(x)F_Y(y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Οριακές – Marginal CDF, PDF: $F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(\xi,\eta)d\xi]d\eta$,

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\eta)d\eta$

Υπό Συνθήκη – Conditional PDF: $f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y|x)dx = 1$

Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες R.V. $f_Y(y|x) = f_Y(y)$ και $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

Τυχαίες Μεταβλητές (3/3)

Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή (Binomial R.V.)

Θεωρούμε τυχαίο πείραμα N ανεξαρτήτων επαναλαμβανόμενων δοκιμών ***Bernoulli Trials*** π.χ. ρίψεις νομισμάτων με δύο ενδεχόμενα: H (**Heads**, κορώνα) και T (**Tails**, γράμματα).
Έστω X_n τυχαία μεταβλητή με δύο δυνατές τιμές στα ενδεχόμενα $H \rightarrow 1$ και $T \rightarrow 0$ κατά την δοκιμή n, $\;n = 1,2,\ldots,N$

$$P[H] = p, P[T] = 1 - p$$

Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή (Binomial R.V.): $Y = \sum_{n=1}^{N} X_n$
(αριθμός από ενδεχόμενα H σε N **ανεξάρτητες** δοκιμές ***Bernoulli***)

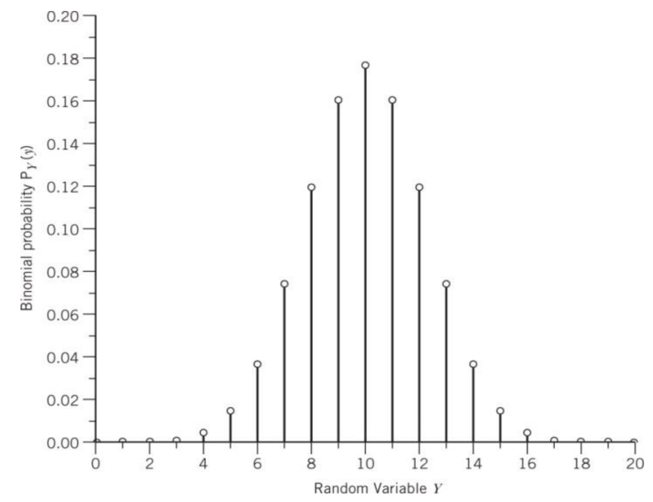
Πιθανότητα καταγραφής γεγονότος με $Y = y$ ενδεχόμενα **Heads** και $N - y$ ενδεχόμενα **Tails** σε N ανεξάρτητες *δοκιμές* ***Bernoulli*** με συγκεκριμένη σειρά εμφάνισης: $p^y(1-p)^{N-y}$

Αριθμός συνδυασμών y **Heads**, $(N - y)$ **Tails** ανεξάρτητα από σειρά εμφάνισης: $\binom{N}{y} = \frac{N!}{y!(N-y)!}$

Πιθανότητα εμφάνισης y **Heads** *σε* N ανεξάρτητες δοκιμές ***Bernoulli***:

$$\mathbf{P}[y] = \binom{N}{y} p^y (1-p)^{N-y}$$

Η y ακολουθεί τη ***Διωνυμική Κατανομή, Binomial Distribution***



Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας Διωνυμικής Κατανομής, $N = 20, p = 0.5$

Στατιστικοί Μέσοι Όροι (1/3)

Μέση Τιμή *(Expected Value, Mean)*: $\mu_X \triangleq \mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ (κέντρο βάρους της PDF)

Γενίκευση: Μέση Τιμή Συνάρτησης Τυχαίας Μεταβλητής - *RV* (*Random Variable*)

$$Y = g(X)$$

$$\mathbf{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \tau f_Y(\tau) d\tau, \quad \mathbf{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f_X(\tau) d\tau$$

Παράδειγμα: $Y = g(X) = \sin(X + \theta)$, X ομοιόμορφη *RV*: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi < x < \pi \\ 0, & |x| \geq \pi \end{cases}$

$$\mathbf{E}[Y] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tau + \theta) \frac{1}{2\pi} d\tau = 0$$

Μέση Τιμή Γραμμικού Μετασχηματισμού *RV*: $Z = aX + bY + c \Rightarrow \mathbf{E}[Z] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y] + c$

Στατιστικοί Μέσοι Όροι (2/3)

Ροπές *(Moments)*: $\mathbf{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx$

Κεντρικές Ροπές *(Central Moments)*: $\mathbf{E}[(X-\mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^n f_X(x)dx$

Διασπορά *(Variance)*: $\sigma_X^2 = \mathbf{E}[(X-\mu_X)^2] = \mathbf{E}[X^2] - 2\mathbf{E}[X]\mu_X + \mu_X^2 \Rightarrow \sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mu_X^2 \geq 0$
Αν $\mu_X = 0 \Rightarrow \sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2]$, αν $\sigma_X^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{E}[X^2] = \mu_X^2$

Τυπική Απόκλιση *(Standard Deviation)*: σ_X

Διασπορά Γραμμικού Μετασχηματισμού *RV*: $Z = aX + c \Rightarrow \sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2$
$Z = aX + bY + c \Rightarrow \mathbf{E}[Z^2] = a^2\mathbf{E}[X^2] + b^2\mathbf{E}[Y^2] + c^2 + 2ab\mathbf{E}[X \cdot Y] + 2ac\mathbf{E}[X] + 2bc\mathbf{E}[Y]$

Αν X, Y ***ανεξάρτητες*** *RV*, $\mathbf{E}[X \cdot Y] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$ *και* $\sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$

Στατιστικοί Μέσοι Όροι (3/3)

Συνδυασμένες Ροπές *(Joint Moments)*: $\mathbf{E}[X^i Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Συσχέτιση *(Correlation)*: $\mathbf{E}[XY]$

Συνδιακύμανση *(Covariance)*: $cov[X,Y] = \mathbf{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mathbf{E}[XY] - \mu_X\mu_Y$

Συντελεστής Συσχέτισης *(Correlation Coefficient)*: $\rho = \dfrac{cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}$

Ασυσχέτιστες *(Uncorrelated)* RV X,Y**:** $cov[X,Y] = 0$

Ανεξάρτητες *(Independent)* RV X,Y: $cov[X,Y] = \mathbf{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mathbf{E}[X-\mu_X]\mathbf{E}[Y-\mu_Y] = 0$

INDEPENDENT ⇒ UNCORRELATED (το ανάστροφο δεν ισχύει)

Ορθογώνιες *(Orthogonal)* RV X,Y**:** $\mathbf{E}[XY] = 0$

{ORTHOGONAL & $\mu_X\mu_y = 0$} ⇒ UNCORRELATED

{UNCORRELATED & $\mu_X\mu_Y = 0$} ⇒ ORTHOGONAL

Κατανομή Δοκιμής Bernoulli με παράμετρο p

PDF: $\mathbf{P}(X=0) = 1-p,\ \mathbf{P}(X=1) = p$

Moments: $\mu_X = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p,\ \mathbf{E}[X^2] = p,\ \sigma_X^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mu_X^2 = p - p^2$

Η εκθετική κατανομή-(exponential distribution)

- Μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) - random variable - ***X*** ακολουθεί ***Εκθετική Κατανομή*** (*Exponential Distribution*) με παράμετρο **λ** όταν:
- **CDF**: $F_X(t) = \mathrm{P}[X \le t] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \ge 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}$ και **PDF**: $f_X(t) = \frac{dF_X(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}$
- $\mathrm{E}[X] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$
- $\mathrm{E}[X^2] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = 2/\lambda^2, \ \sigma_X^2 = \mathrm{E}[X] - (\mathrm{E}[X])^2 = 1/\lambda^2$
- Ιδιότητα έλλειψης μνήμης:
  - $\mathrm{P}[X > t + s \,|X > s] = \frac{\mathrm{P}[X>t+s, X>s]}{\mathrm{P}[X>s]} = \frac{\mathrm{P}[X>t+s]}{\mathrm{P}[X>s]} = e^{-\lambda t} = \mathrm{P}[X > t] = 1 - F_X(t)$

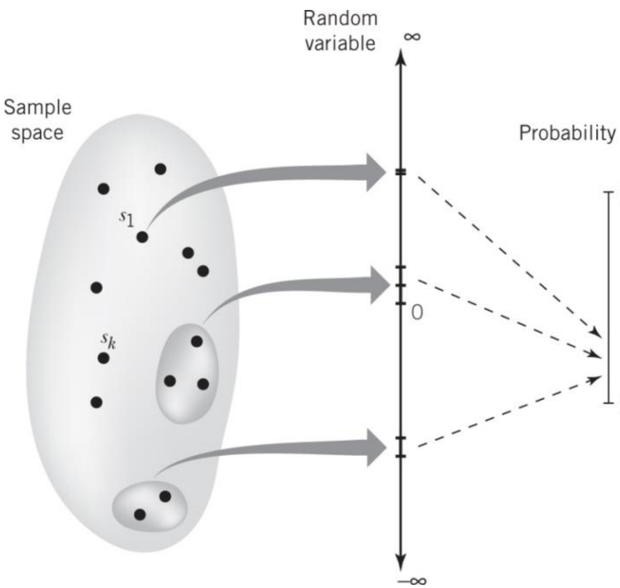
  Η εκθετική κατανομή είναι η **μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής** με την ιδιότητα αυτή *(Memoryless, Markov Property)*.
- Κατανομή ελαχίστου μεταξύ ανεξάρτητων τ.μ. εκθετικά κατανεμημένων

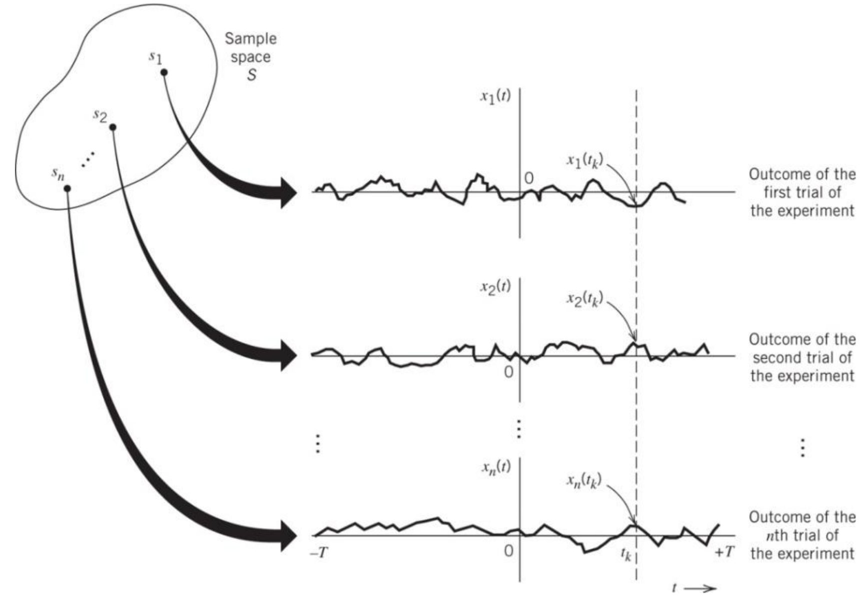
  X1: με παράμετρο λ1 $\quad X = \min(X1, X2)\,, F_x(\tau) = \mathrm{P}\{X \le \tau\} = 1 - \mathrm{P}\{X > \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}$ διότι

  X2: με παράμετρο λ2 $\quad \mathrm{P}\{X > \tau\} = \mathrm{P}\{X1 > \tau, X2 > \tau\} = \mathrm{P}\{X1 > \tau\}\mathrm{P}\{X2 > \tau\} = e^{-\lambda_1\tau}e^{-\lambda_2\tau} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}$

  X = min{X1,X2} είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο: λ = λ1+λ2

Στοχαστικές Ανελίξεις (Stochastic Processes)





Στοχαστική ή Τυχαία Διαδικασία - Ανέλιξη *(Stochastic Process - SP ή Random Process)*

Τυχαίο πείραμα με *Υλοποιήσεις* (Δείγματα) s_j ***Χρονικές Συναρτήσεις*** ή ***Χρονοσειρές*** *(Time-Series)*, στοιχεία Δειγματικού Χώρου S

Παραδείγματα:

- Τυχαίες παρεμβολές, Θόρυβος, σε επικοινωνιακά συστήματα
- Αφίξεις πελατών/πακέτων σε συστήματα αναμονής

Ορισμός: Η Στοχαστική Ανέλιξη (SP) $X(t)$ ορίζεται σαν ένα σύνολο *χρονικών συναρτήσεων* (κυματομορφών) που αντιστοιχούν σε *τυχαίες υλοποιήσεις* (δείγματα) ενός τυχαίου πειράματος

- Υλοποιήσεις (δείγματα) του SP $\{X(t,s)\} \triangleq X(t)\colon s_j \to X\left(t, s_j\right) \triangleq x_j(t),\ -T \le t \le T$
- Τιμές δειγμάτων s_j κατά τη χρονική στιγμή t_k: Τυχαίες Μεταβλητές *(Random Variables, RV)* $X\left(t_k, s_j\right)$

$$\{x_1(t_k), x_2(t_k), \cdots, x_n(t_k)\} = \{X(t_k, s_1), X(t_k, s_2), \cdots, X(t_k, s_n)\}$$