



ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σχολη ΗΜ&ΜΥ, ΕΜΠ
Καθηγητης Πετρος Μαραγκος

**Laplace Μετ/σμος & Εφαρμογες
σε Αναλυση ΓΧΑ Συστηματων Σ.Χ.
και Διαφορικες Εξισωσεις**

ΓΧΑ Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

- Αν ένα συνεχούς-χρόνου σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο τότε η έξοδος $y(t)$ σχετίζεται με την είσοδο $x(t)$ μέσω ενός ολοκληρώματος Συνέλιξης

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

όπου $h(t)$ η κρουστική απόκριση του συστήματος.

- Η συνέλιξη γίνεται Πολλαπλασιασμός στο πεδίο Συχνότητας μέσω Μετασχηματισμών

Ιδιότητες ΓΧΑ Συστηματος μεσω Κρουστικης Αποκρισης

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ
(Causality)

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

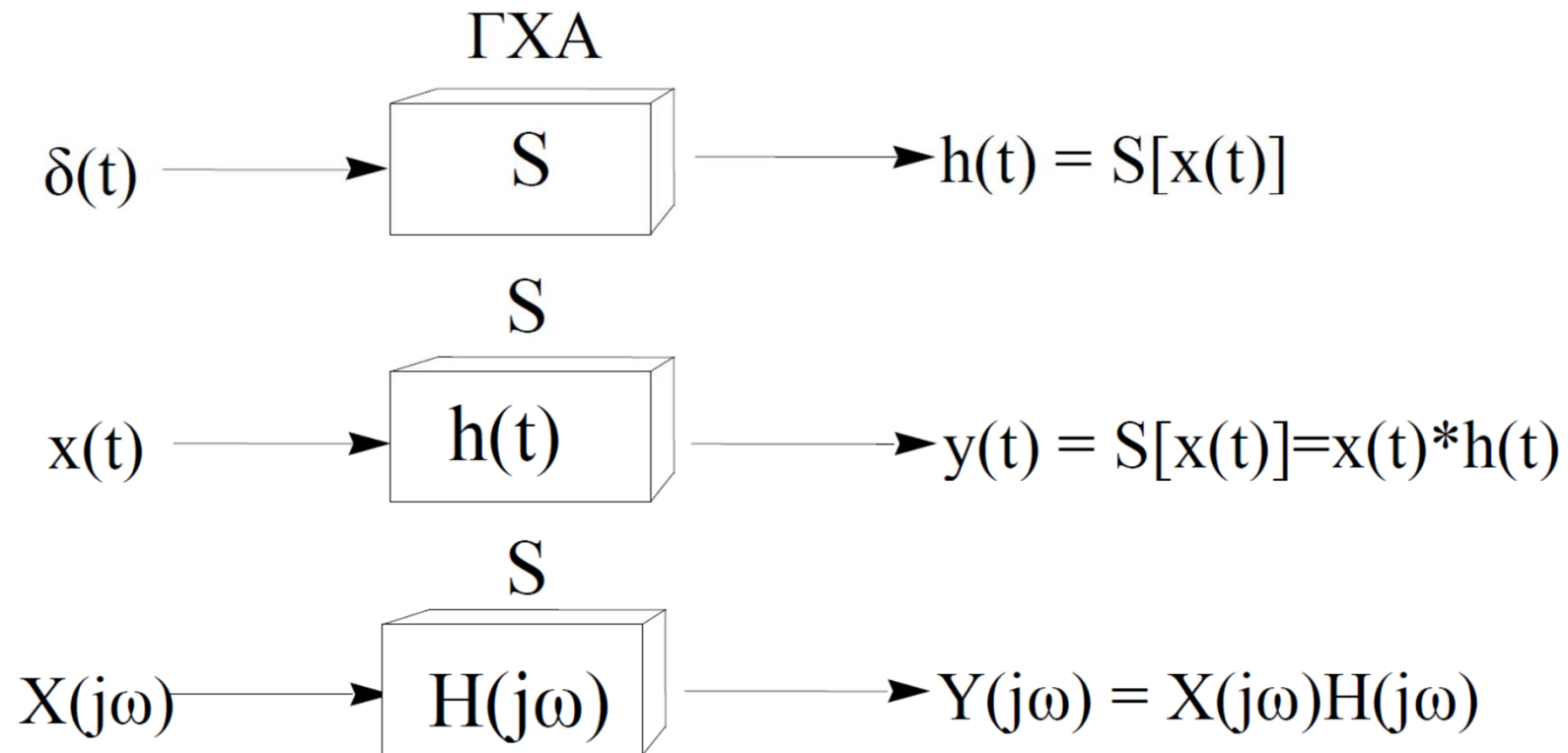
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ
(Stability)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

ΕΛΛΕΙΨΗ ΜΝΗΜΗΣ
(Memoryless)

$$h(t) = K \cdot \delta(\tau)$$

Αναπαράσταση/Υλοποίηση ΓΧΑ Συστηματος σε Χρονο και Συχνότητα (μεσω Fourier)



Μετ/σμοι Σημάτων Συνεχους & Διακριτου Χρονου

I. Σημα Συνεχους Χρονου: $x_c(t)$

Laplace μετ/σμος: $X_c(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-st} dt$

Fourier μετ/σμος: $X_c(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega t} dt$

II. Σημα Διακριτου Χρονου: $x[n]$

Z μετ/σμος: $X_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

Discrete-Time Fourier Transform (DTFT): $X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$

Discrete Fourier Transform (DFT): $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, \dots, N-1$

Μιγαδικά Ημιτονοειδή = Ιδιοσηµατά για ΓΧΑ Συστήµατα

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{\mathbf{h(t)}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

$s = \sigma + j\omega$

$$= e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{H(s)}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

Συναρτηση Μεταφορας
(Transfer Function)

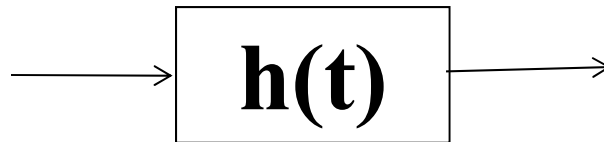
ή Συναρτηση Συστηµατος
(System Function)

= Laplace Transform {Impulse Response}

$$y(t) = \underbrace{H(s)}_{\text{eigenvalue}} \cdot \underbrace{e^{st}}_{\text{eigensignal}}$$

Αποκριση ΓΧΑ Συστηματος για Εισοδο = Γραμμικο Συνδυασμο Μιγ. Ημιτονοειδων

$$x(t) = \sum_k c_k e^{s_k t}$$



$$y(t) = \sum_k c_k H(s_k) e^{s_k t}$$

Αμφίπλευρος Μετ/σμός Laplace

$$X^{\alpha}(s) = \mathcal{L}^{\alpha}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Μιγαδική Συχνότητα

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\text{ROC} = \left\{ s \in \mathbb{C} : |X^{\alpha}(s)| < \infty \right\}$$

Περιοχή Συγκλισης (ΠΣ)
(Region Of Convergence)

$$\mathcal{F}[x(t)] = X^{\alpha}(s) \Big|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Fourier Transform
from Laplace

$$\mathcal{L}^{\alpha}[x(t)] = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{Br}} X^{\alpha}(s) e^{st} ds$$

Inverse Laplace Transform

καμπύλη Bromwich (Bromwich contour) $\{\sigma + j\omega : \omega \in \mathbb{R}\}$

Βασικά Παραδείγματα Μετ/σμου Laplace

$$1. \ x(t) = e^{at}u(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

$\Pi\Sigma =$

$\text{FT}[e^{at}u(t)] = ?$

$$2. \ x(t) = -e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) = -\int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

$\Pi\Sigma =$

$\text{FT}[-e^{at}u(-t)] = ?$

$$3. \ x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$\Pi\Sigma =$

$\text{FT}[\cos(\omega_0 t)u(t)] = ?$

Ιδιότητες του Αμφιπλευρου Μετασχηματισμου Laplace

a/a	Σήμα	Μετασχηματισμός	Περιοχή Σύγκλισης (Region of Convergence) $\text{ROC} = \{s : X(s) < \infty\}$
1	$x(t)$	$X(s)$	R
2	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
3	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
4	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	$R_1 \cap R_2 \subseteq \text{ROC}$
5	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
6	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$\text{ROC} = R + s_0$
7	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\text{ROC} = aR$
8	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$R_1 \cap R_2 \subseteq \text{ROC}$
9	$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s)$	$R \subseteq \text{ROC}$
10	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
11	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$R \cap \{\Re\{s\} > 0\} \subseteq \text{ROC}$

Ζεύγη Μετασχηματισμων Laplace

a/a	Σήμα $x(t)$	Μετασχηματισμός $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$	Περιοχή Σύγκλισης $\{s : X(s) < \infty\}$
1	$\delta(t)$	1	$\forall s$
2	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	$\forall s$
3	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
4	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t), \quad n = 2, 3, \dots$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$
6	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} < 0$
7	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -a$
8	$-e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -a$
9	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \quad n = 2, 3, \dots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} > -a$
10	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} < -a$
11	$\cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
12	$\sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
13	$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -a$
14	$e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -a$
15	$t \cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
16	$t \sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$

Μονόπλευρος Μετ/σμός Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)u(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Σημαντική Ιδιότητα: LT {Χρονική Παράγωγος} περιλαμβάνει και αρχική συνθήκη

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= sX(s) - x(0+) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left[x^{(n)}(t)\right] = s^n X(s) - s^{n-1}x(0+) - s^{n-2}x^{(1)}(0+) - \dots - x^{(n-1)}(0+)$$

Αμφίπλευρος Laplace = Αθροισμα 2 Μονόπλευρων Μετ/σμών

αν $x(t) = 0 \ \forall t > 0$, και $y(t) = x(-t)$, τότε

$$X^{\alpha}(s) = \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} y(\tau)e^{s\tau}d\tau = Y(-s)$$

Για την γενική περίπτωση που έχουμε ένα **αμφίπλευρο σήμα** $x(t)$, μπορούμε να το γράψουμε ως άθροισμα ενός δεξίπλευρου και ενός αριστερόπλευρου σήματος:

$$x(t) = \underbrace{x(t)u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{x(t)u(-t)}_{x_2(-t)}$$

$$X^{\alpha}(s) = X_1(s) + X_2(-s)$$

Πολλαπλές Λυσεις Απο την Αντιστροφη του Αμφιπλευρου Laplace μετ/σμου

$$X^{\alpha}(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{s + 2} - \frac{1}{s + 3}$$

$$x(t) = \underbrace{x(t)u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{x(t)u(-t)}_{x_2(-t)} \Rightarrow X^{\alpha}(s) = X_1(s) + X_2(-s) : \text{Αθροισμα δυο μονοπλευρων}$$

$$X_1(s) = \mathcal{L}[x(t)u(t)] \text{ και } X_2(s) = \mathcal{L}[x(-t)u(t)]$$

Λύση #	ROC	Σήμα $x(t)$	$X_1(s)$	$X_2(-s)$
Λύση α	$\text{Re}(s) < -3$	$x_a(t) = (e^{-3t} - e^{-2t})u(-t)$	0	$\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$
Λύση β	$-3 < \text{Re}(s) < -2$	$x_b(t) = -e^{-2t}u(-t) - e^{-3t}u(t)$	$-\frac{1}{s+3}$	$\frac{1}{s+2}$
Λύση γ	$-2 < \text{Re}(s)$	$x_c(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$	$\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$	0

Μονόπλευρος Μετ/σμός Laplace

Ευθυσ:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Περιοχη Συγκλισης:

$$\text{ROC} = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_c\}\}$$

s_c είναι το singular σημείο της $X(s)$ με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.

Αντιστροφος: η Περιοχη Συγκλισης ορίζεται μοναδικα, είναι παντα ενα δεξιο ημιεπιπεδο. Επομενως, υπαρχει παντα ενας μοναδικος αντιστροφος Laplace μετ/σμος.

Ιδιότητες του Μονοπλευρου Μετασχηματισμου Laplace

a/a	Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός
1		$\left. \begin{array}{l} x(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\} = 0 \quad \forall t < 0$	$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
2	Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
3	Μετατόπιση στο χρόνο	$x(t - t_o), \quad t_o > 0$	$e^{-s_o t} X(s)$
4	Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_o t} x(t)$	$X(s - s_o)$
5	Κλιμάκωση χρόνου	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$
6	Συζυγές	$x^*(t)$	$X^*(s)$
7	Συνέλιξη	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) X_2(s)$
8	Παραγωγή στο χρόνο, Δεύτερη παράγωγος	$\begin{array}{l} x'(t) \\ x''(t) \end{array}$	$sX(s) - x(0+)$ $s^2 X(s) - sx(0+) - x'(0+)$
9	Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$
10	Πολλαπλασιασμός με δόναμη χρόνου	$t^n x(t), \quad n = 1, 2, \dots$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s)$
11	Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$
12	Θεώρημα Αρχικής Τιμής: Αν $x(t)$ δεν περιέχει κρουστικές στο $t = 0$, τότε	$x(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$	
13	Θεώρημα Τελικής Τιμής: Αν $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty$, τότε	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ HEAVISIDE: Έστω μια ρητή συνάρτηση $X(s)$ που εκφράζει ένα μονόπλευρο μετ/σμό Laplace, με βαθμό πολωνύμου αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή. Αν οι πόλοι της είναι s_1, s_2, \dots, s_k με βαθμούς πολλαπλότητας m_1, m_2, \dots, m_k , τότε η συνάρτηση του μετασχηματισμού μπορεί να αναπτυχθεί ως το ακόλουθο άθροισμα

$$X(s) = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{m_k} \frac{A_{i,n}}{(s - s_i)^n}$$

Το *residue* της συνάρτησης και, ισοδύναμα, ο αντίστροφος μετ/σμός Laplace του (i, n) όρου δίνει το σήμα

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A_{i,n}}{(s - s_i)^n} \right] = \frac{A_{i,n}}{(n-1)!} t^{n-1} e^{s_i t}, \quad t \geq 0$$

ζεύγος δύο συζυγών μιγαδικών πόλων:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A_{i,n}}{(s - s_i)^n} + \frac{A_{i,n}^*}{(s - s_i^*)^n} \right] = \frac{2|A_{i,n}| t^{n-1} e^{\sigma_i t}}{(n-1)!} \cos(\omega_i t + \angle A_{i,n}) u(t)$$

Αναπτυξη σε Μερικά Κλασμάτα

PARTIAL FRACTION EXPANSION (CT signals/systems)

original rational function

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

$m < n \rightarrow$ proper

$m \geq n \rightarrow$ non-proper

if $m \geq n$,

$$H(s) = c_{m-n} s^{m-n} + \dots + c_1 s + c_0 +$$

$$\frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$G(s)$

P.F.E. of $G(s)$: examples

* 3 distinct roots :

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

$$= \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \frac{A_3}{s-p_3}, \quad A_i = G(s)(s-p_i) \Big|_{s=p_i}$$

* 3 non-distinct roots :

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s-p_1)^2 (s-p_2)} = \frac{A_{11}}{s-p_1} + \frac{A_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{A_{21}}{s-p_2}$$

$$A_{21} = G(s)(s-p_2) \Big|_{s=p_2}, \quad A_{11} = \frac{d}{ds} G(s)(s-p_1)^2 \Big|_{s=p_1}, \quad A_{12} = G(s)(s-p_1) \Big|_{s=p_1}$$

General case : roots p_i , $1 \leq i \leq K$, of multiplicity m_i

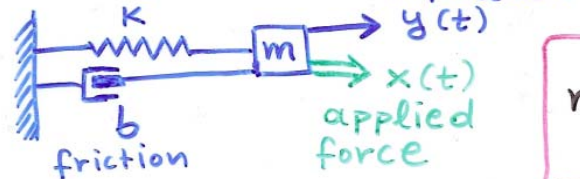
$$G(s) = \sum_{i=1}^K \sum_{n=1}^{m_i} \frac{A_{in}}{(s-p_i)^n}$$

$$A_{in} = \frac{1}{(m_i-n)!} \left[\frac{d^{m_i-n}}{ds^{m_i-n}} G(s)(s-p_i)^{m_i} \right] \Big|_{s=p_i}$$

Μηχανικά και Ηλεκτρικά Συστήματα περιγραφόμενα από Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

MECHANICAL & ELECTRICAL SYSTEMS

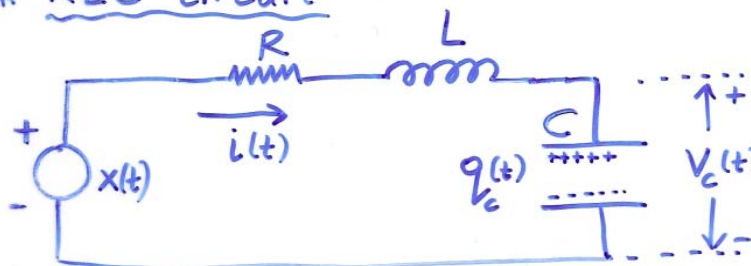
* mass-spring-friction



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + K y(t) = x(t)$$

(M)

* RLC circuit



$$i(t) = C \frac{dV_c}{dt}$$

$$q_c(t) = C \cdot V_c(t)$$



if $y(t) \equiv V_c(t) \Rightarrow LC \frac{d^2 y}{dt^2} + RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$ (E1)

if $y(t) \equiv q_c(t) \Rightarrow L \frac{d^2 y}{dt^2} + R \frac{dy}{dt} + \frac{1}{C} y(t) = x(t)$ (E2)

* Analogies between mechanical & electrical systems :

(M), (E2) \Rightarrow

mech.	mass	friction	compliance (1/K)	displacement	force
electr.	inductance	resistance	capacitance	charge	voltage

Λυσεις Διαφορικων Εξισωσεων (Μοντελων Συστηματων)

Γραμμικη Διαφορικη Εξισωση με Σταθερους Συντελεστες

$$a_p \frac{d^p y(t)}{dt^p} + a_{p-1} \frac{d^{p-1} y(t)}{dt^{p-1}} + \dots + a_o y(t) = b_q \frac{d^q x(t)}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} x(t)}{dt^{q-1}} + \dots + b_o x(t)$$

$$\left[y(t_o), \frac{dy(t_o)}{dt}, \frac{d^2 y(t_o)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{p-1} y(t_o)}{dt^{p-1}} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Αρχικες Συνθηκες} \\ \text{(Initial Conditions)} \end{array}$$

Γενικη Λυση = Λυση Ομογενους (Zero-Input Response)

+ Ειδικη Λυση (Zero-State Response)

(General Solution = Homogeneous Solution + Particular Solution)

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_o}{a_p s^p + a_{p-1} s^{p-1} + \dots + a_o}$$

Συναρτηση Μεταφορας
(Transfer Function)

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s)$$

Θεώρημα: Η γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$a_p \frac{d^p y(t)}{dt^p} + a_{p-1} \frac{d^{p-1} y(t)}{dt^{p-1}} + \dots + a_o y(t) = b_q \frac{d^q x(t)}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} x(t)}{dt^{q-1}} + \dots + b_o x(t)$$

ισοδυναμεί με ένα **αιτιατό γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα** συνεχούς χρόνου εάν ισχύει η **συνθήκη αρχικής ηρεμίας**

$$x(t) = 0 \quad \forall t \leq t_o \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 \quad \forall t \leq t_o$$

και ταυτόχρονα έχουμε **μηδενικές αρχικές συνθήκες** για $t = t_o$:

$$y(t_o) = \frac{dy(t_o)}{dt} = \dots = \frac{d^{p-1} y(t_o)}{dt^{p-1}} = 0$$

Τότε η συνέλιξη εισόδου και κρουστικής απόκρισης συμπίπτει με την απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

Θεώρημα 6.5: Θεωρούμε ένα σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$a_p \frac{d^p y(t)}{dt^p} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_o y(t) = b_q \frac{d^q x(t)}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_o x(t) \quad (6.4.61)$$

με αρχικές συνθήκες $[y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0)]$. Υποθέτουμε $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(p-1)}(0) = 0$.

(α) Ο μονόπλευρος μετ/σμός Laplace και των δύο πλευρών της (6.4.61) μας δίνει

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s) + \frac{C(s)}{A(s)} \quad (6.4.62)$$

όπου ορίζουμε

$$A(s) = a_p s^p + \dots + a_1 s + a_o, \quad B(s) = b_q s^q + \dots + b_1 s + b_o \quad (6.4.63)$$

το πολυώνυμο $C(s)$ έχει βαθμό $\leq p-1$ και εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες $[y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0)]$ και τους συντελεστές a_1, \dots, a_p . Αντίστροφος μετ/σμός Laplace της (6.4.62) μας δίνει την έξοδο ως άθροισμα της απόκρισης μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, και της απόκρισης μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$, όπου:

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B(s)}{A(s)} X(s) \right], \quad y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C(s)}{A(s)} \right] \quad (6.4.64)$$

(β) Αντίστροφος μετ/σμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς δίνει την κρουστική απόκριση:

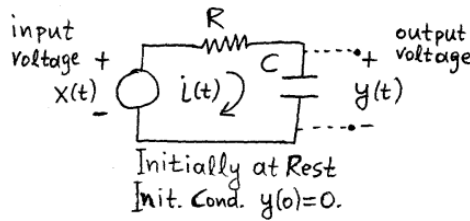
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \right] \quad (6.4.65)$$

ΓΧΑ

Συστήματα/ Κυκλώματα

Τάξης- 1

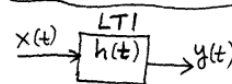
1st - ORDER LTI SYSTEMS / CIRCUITS



$$\left. \begin{aligned} \text{K.V.L} \rightarrow x(t) &= Ri(t) + y(t) \\ i(t) &= C dy/dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow RC \dot{y} + y = x$$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{\tau} y(t) = \frac{1}{\tau} x(t) \quad (\text{D.E.})$$

$$\tau = RC = \text{time const.}$$



TIME-DOMAIN ANALYSIS

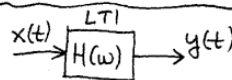
- Find Impulse Response by solving the D.E. $\dot{h}(t) + \frac{h(t)}{\tau} = \frac{\delta(t)}{\tau}$:
Integrate DE. over $[0^-, 0^+] \rightarrow h(0^+) = 1/\tau$.

Solve $\dot{h}(t) + h(t)/\tau = 0, t > 0$
 $h(0^+) = 1/\tau$

$$h(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} u(t)$$

- Find Frequency Response by applying F.T. to $h(t)$:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1/\tau}{\frac{1}{\tau} + j\omega} \rightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}}$$




FREQUENCY-DOMAIN ANALYSIS

- Find Frequency Response by applying F.T. to D.E.:

$$(DE) \rightarrow j\omega Y(\omega) + \frac{Y(\omega)}{2} = \frac{X(\omega)}{2} \rightarrow H(\omega) \triangleq \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1+j\omega 2}$$

- Find Frequency Response by using Generalized Impedances:

Circuit \rightarrow  $\rightarrow H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{1/jwC}{R + 1/jwC} = \frac{1}{1 + jwRC}$

- Find Impulse Response from Inverse F.T. on $H(\omega)$:

$$h(t) = \text{I.F.T.} \left\{ \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right\} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t).$$

FIND OUTPUT SIGNAL.

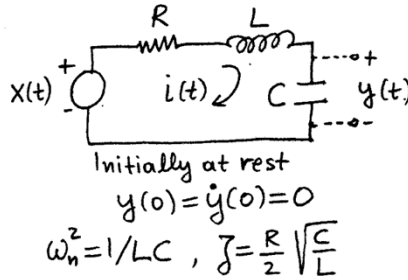
- via Convolution
- via Fourier Transform
- via Eigenfunctions if input consists of sinusoids (steady-state resp.)

ΓΧΑ

Συστήματα/ Κυκλώματα

Τάξης- 2

2nd-ORDER LTI SYSTEMS / CIRCUITS



$$\text{K.V.L.} \rightarrow \begin{cases} x(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) \\ i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$LC \ddot{y} + RC \dot{y} + y = x \rightarrow$$

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t) \quad \text{D.E.}$$

ζ = damping ratio, ω_n = nat. frequency

TIME-DOMAIN ANALYSIS

- Find Impulse Response by solving D.E.: $\ddot{h} + 2\zeta\omega_n \dot{h} + \omega_n^2 h = \omega_n^2 \delta(t)$

Integrate D.E. over $[0^-, 0^+] \rightarrow \dot{h}(0^+) = \omega_n^2$

$$\text{Solve } \begin{cases} \ddot{h} + 2\zeta\omega_n \dot{h} + \omega_n^2 h = 0, t > 0 \\ h(0^+) = 0, \dot{h}(0^+) = \omega_n^2 \end{cases} \rightarrow h(t)$$

$$\text{CHARACTERISTIC EQN: } s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \text{C.E.}$$

Case 1 ($\zeta > 1$)

2 real roots: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

Case 2 ($\zeta = 1$)

1 real root: $s_1 = s_2 = -\omega_n$

Case 3 ($0 < \zeta < 1$)

2 complex conj. roots
 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

FREQUENCY-DOMAIN ANALYSIS

- Find Frequency Response by applying F.T. to D.E:

$$(\text{D.E.}) \rightarrow -\omega^2 Y(\omega) + 2\zeta\omega_n j\omega Y(\omega) + \omega_n^2 Y(\omega) = \omega_n^2 X(\omega) \rightarrow H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n \omega}$$

Case 1 ($\zeta > 1$): Overdamped

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \xrightarrow{\text{P.F.E.}} \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{1}{j\omega - s_1} - \frac{1}{j\omega - s_2} \right) \xrightarrow{\text{I.F.T.}} h(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) u(t)$$

Case 2 ($\zeta = 1$): Critically damped

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2} \xrightarrow{\text{I.F.T.}}$$

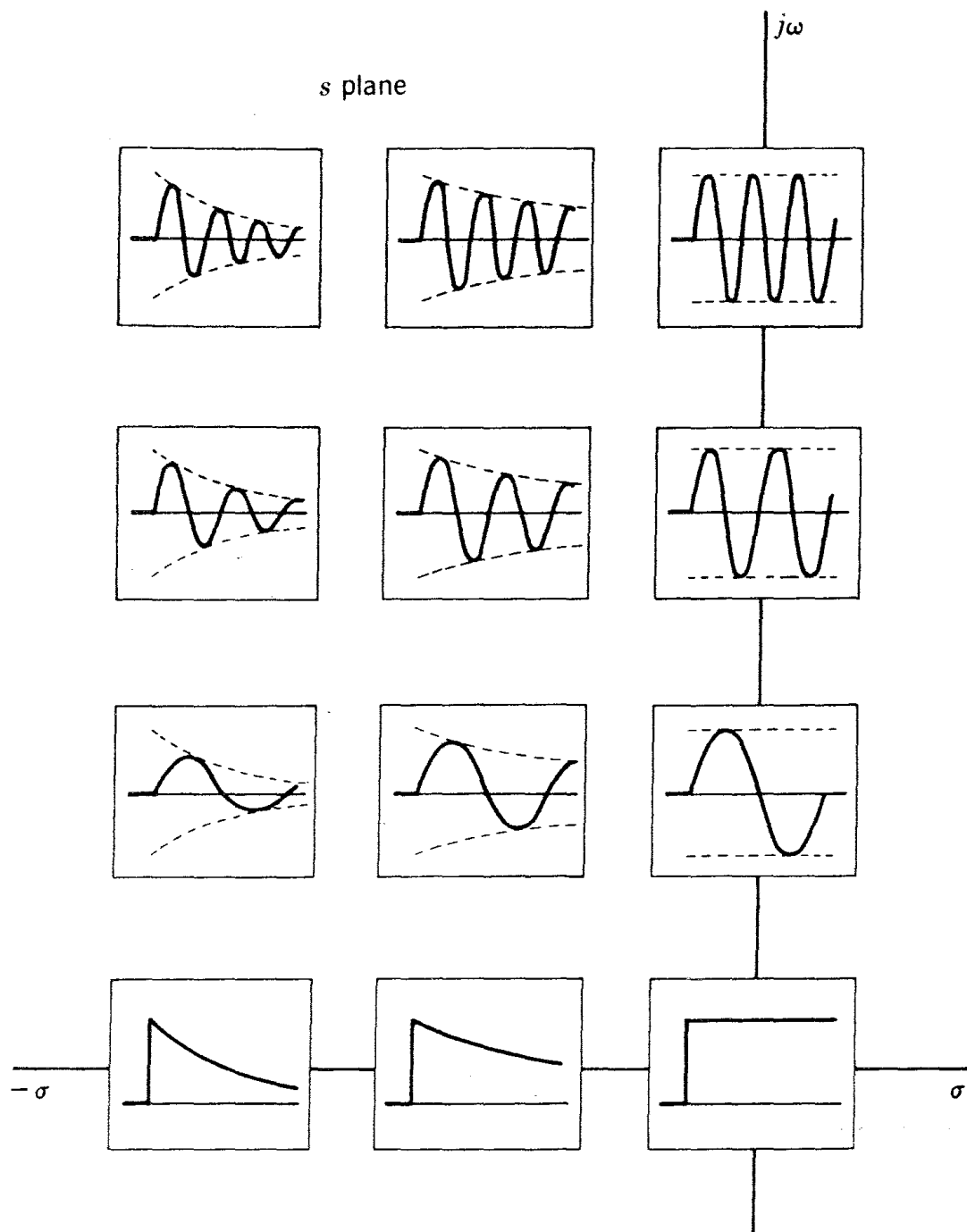
$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$$

Case 3 ($\zeta < 1$): Underdamped

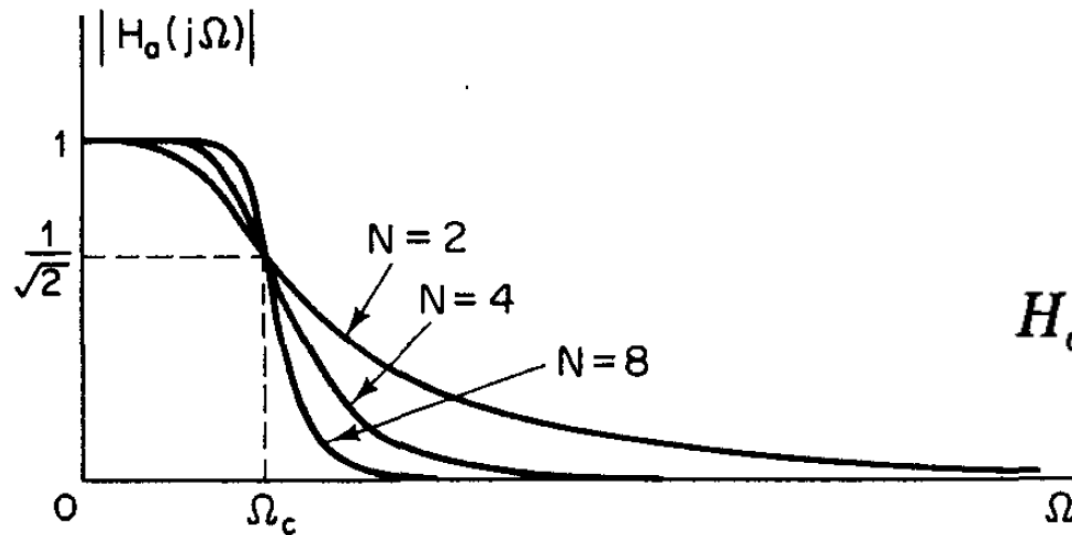
$$H(\omega) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(\frac{1}{j\omega - s_1} - \frac{1}{j\omega - s_2} \right)$$

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin[\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t] u(t)$$

**Κρουστικές
Αποκρισεις
ΓΧΑ
Συστηματος
Ταξης- 2
για
διαφορετικές
θεσεις των
πολων**

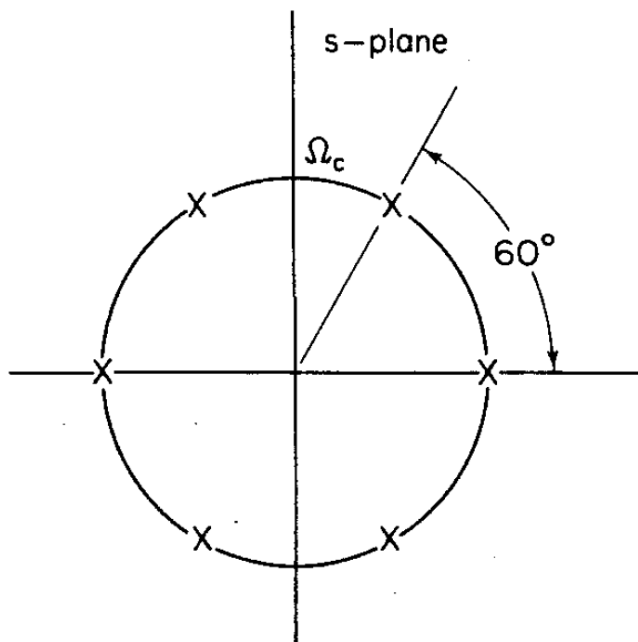


Αναλογικά Παθητικά Φίλτρα Butterworth



$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega/j\Omega_c)^{2N}}$$

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}}$$

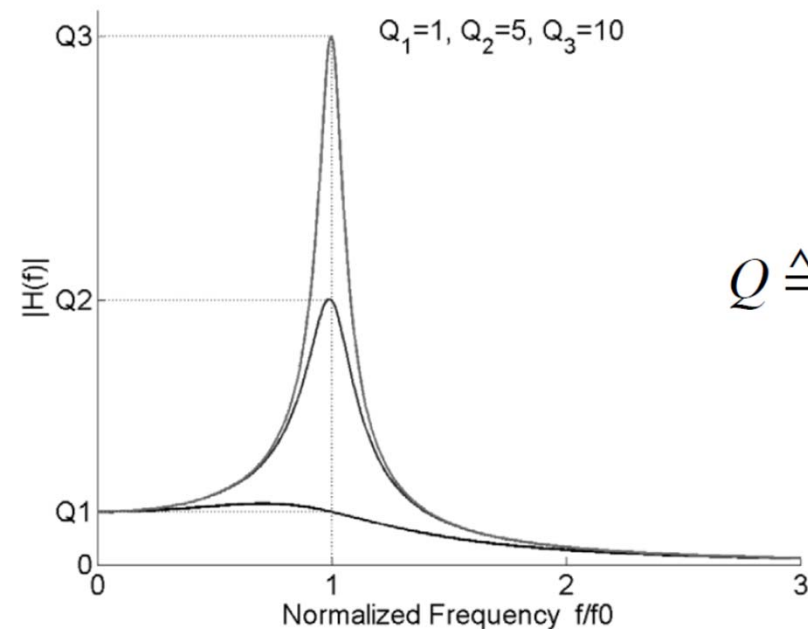
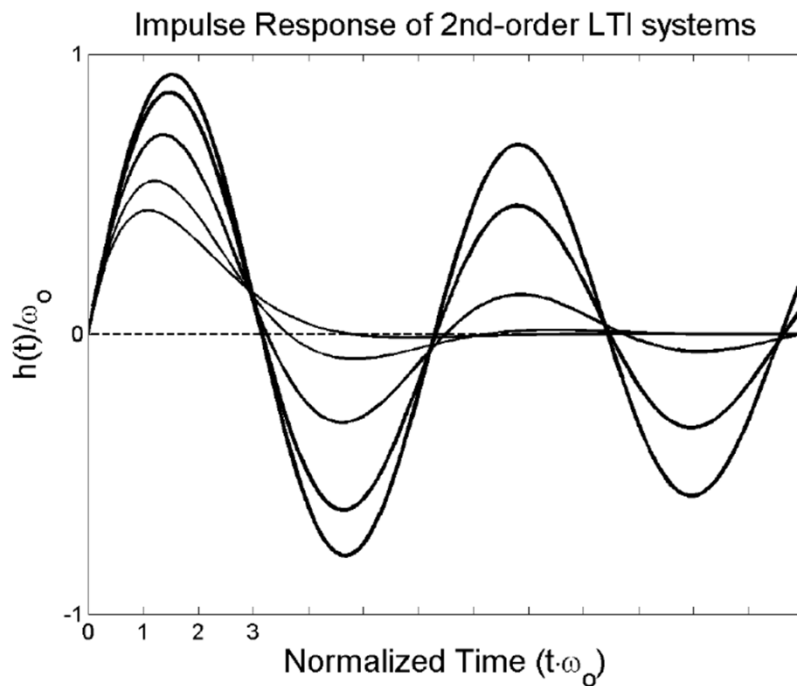


$$s_p = (-1)^{\frac{1}{2N}}(j\Omega_c)$$

Γραμμικοί Ταλαντωτές - Συντονισμός

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_o \frac{dy(t)}{dt} + \omega_o^2 y(t) = b_o x(t)$$

$$0 \leq \zeta < 1 \text{ (underdamped)} \Rightarrow h(t) = \left(\frac{b_o}{\omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) e^{-\zeta\omega_o t} \sin \left[\left(\omega_o \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t \right] u(t)$$

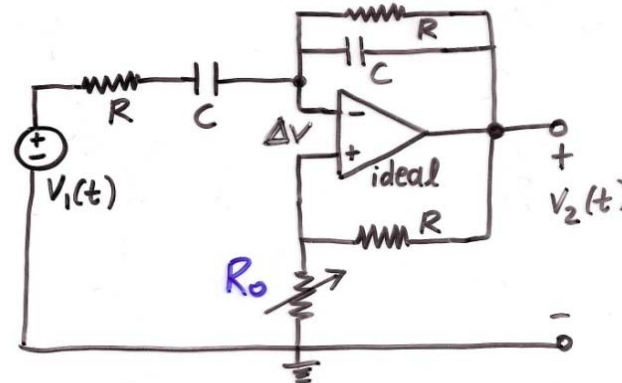


$$Q \triangleq \frac{1}{2\zeta}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_o^2}{(\omega_o^2 - \omega^2) + j\omega(\omega_o/Q)}$$

Ενεργο Ζωνοπερατο Φίλτρο

ACTIVE BANDPASS FILTER



$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{R}{2R - R_0}$$

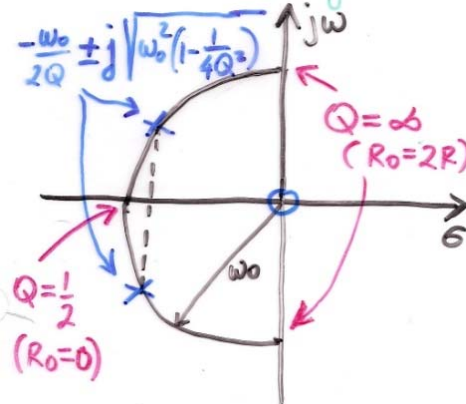
$$0 < R_0 < 2R$$

* From ideal op-amp approx. (... $\Delta V \approx 0$), lin. superposition,

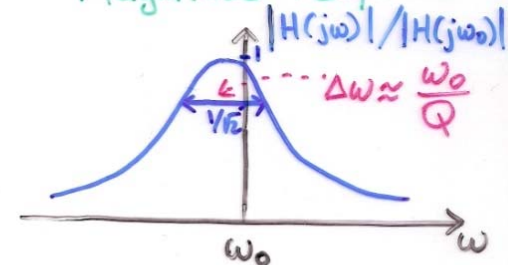
$$\Rightarrow \frac{V_2(s) \left(R + \frac{1}{Cs} \right)}{R + \frac{1}{Cs} + \frac{R/Cs}{R + 1/Cs}} + \frac{V_1(s) \frac{R/Cs}{R + 1/Cs}}{R + \frac{1}{Cs} + \frac{R/Cs}{R + 1/Cs}} = V_2(s) \frac{R_0}{R_0 + R}$$

$$\Rightarrow H(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = K \frac{\frac{1}{Q} \left(\frac{s}{\omega_0} \right)}{\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q} \left(\frac{s}{\omega_0} \right) + 1}, K = H(j\omega_0)$$

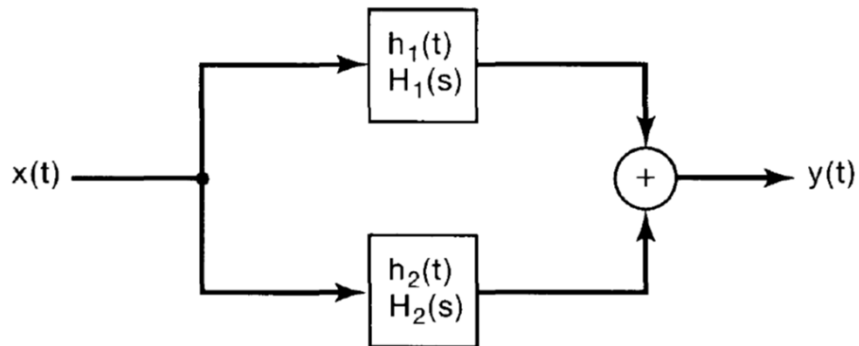
Pole-Zero diagram



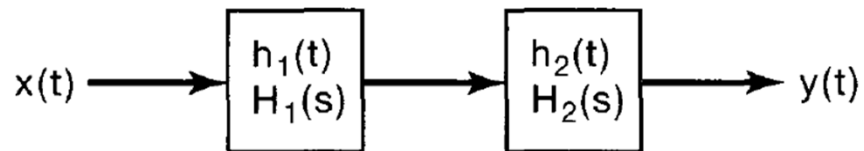
Magnitude Response



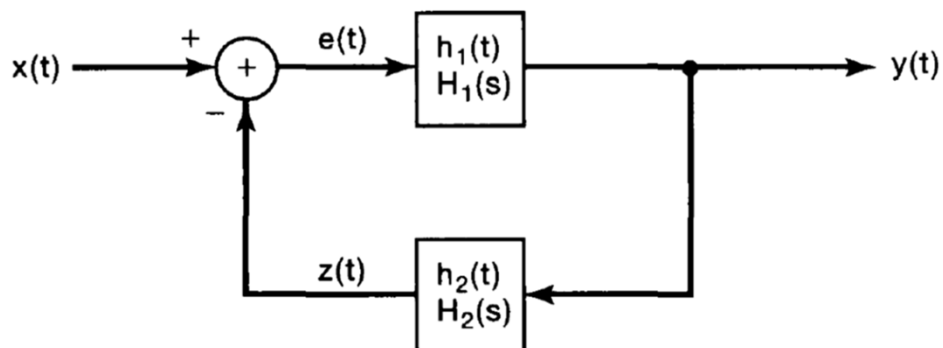
Συναρτηση Μεταφοράς Συνδυασμου Συστηματων



$$H(s) = H_1(s) + H_2(s).$$



$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Ευσταθεια

BIBO: Bounded Input \rightarrow Bounded Output

$$\text{BIBO-Ευστάθεια} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Ενα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές
εάνν όλοι οι πόλοι της $H(s)$ κείνται στο
αριστερό μιγαδικό s -ημιεπίπεδο

