Παρασκευή 4/3/22, 2η Διάλεξη, Κολέτσος

Αριθμητική
- Επίλυση Γραμμικών Εξισώσεων
- Παρεμβολή
- Ολοκλήρωση
- Προσέγγιση

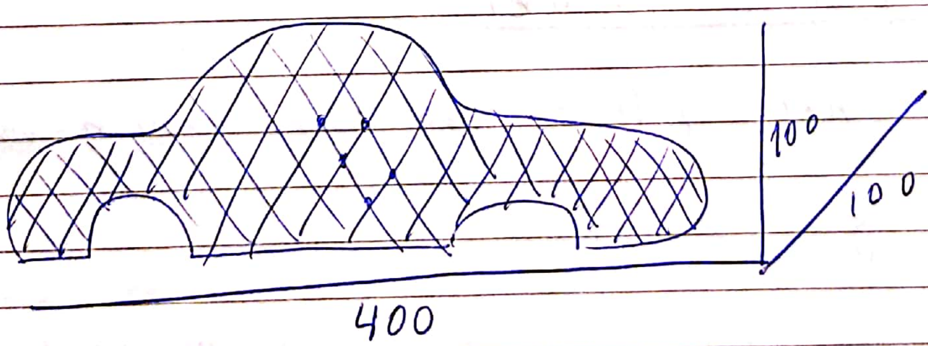
Προτείνεται ισχυρό Calculator με κουμπί $\boxed{\text{answ}}$

Συγγράμματα: Όλα κάνουν

Σοβέργης: Παλαιότερο, πιο θεωρητικό,
Τσιτούρας: πιο καινούργιο

$\boxed{\text{Fortran, Matlab}}$ → δε θα προγραμματίσουμε, δε μας ενδιαφέρει η διαφορά

Εγκυκλοπαιδικό Παράδειγμα χρήσης συστημάτων: Σχεδιασμός Αυτοκινήτου



Κάνω διαμέριση, κάθε κόμβος αποτελεί άγνωστο,
4.000.000 άγνωστοι

$A \cdot x = b$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{n \times n \quad n \times 1}_{} \qquad n \times 1$$

$$\text{ή} \quad \underbrace{m \times n \quad n \times 1}_{} \qquad m \times 1$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots & a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Έχω λοιπόν n εξισώσεις:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

[illegible]

Γνωστή μέθοδος Cramer:

Βρίσκω $n+1$ ορίζουσες, του πίνακα και n υποορίζουσες,

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \dots$$

Ένα μικρό σύστημα 100×100 με μέθοδο Cramer χρειάζεται 10^{144} αιώνες σε υπολογιστή

Η νέα μέθοδος που θα δούμε < 1 sec

Θεώρημα Cramer

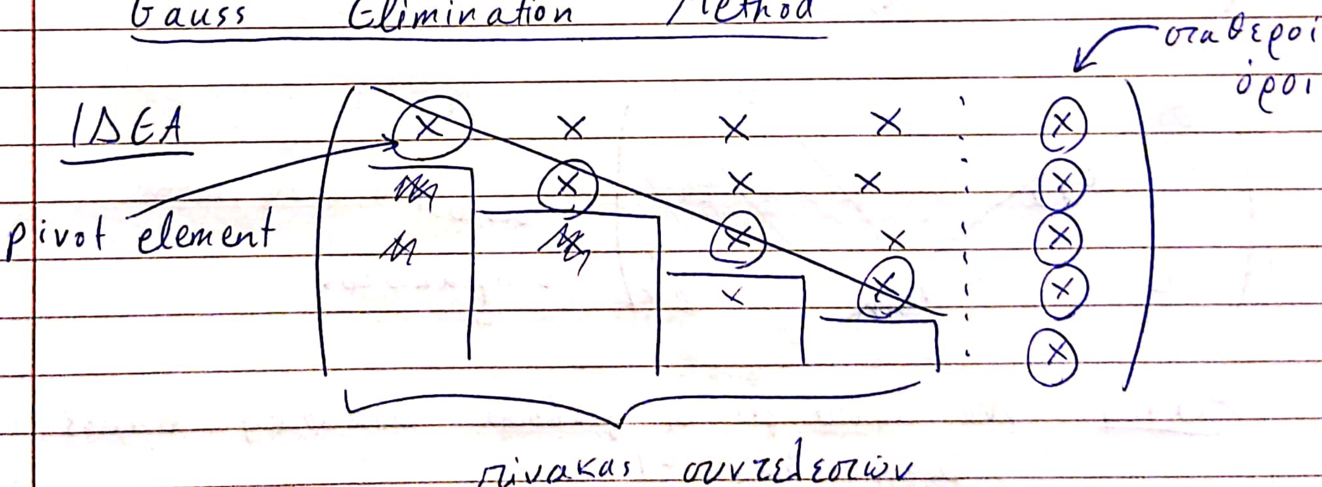
A: M_n, τετραγωνικός

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) $\det(A) \neq 0$
2) $\exists A^{-1}$
3) Το σύστημα $Ax=b$ έχει μοναδική λύση
4) Το ομογενές σύστημα $Ax=\vec{0}$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική
5) Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες
6) Οι ~~στήλες~~ γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Ο Cramer δουλεύει μόνο για τετραγωνικούς, Η νέα για όλους

Gauss Elimination Method

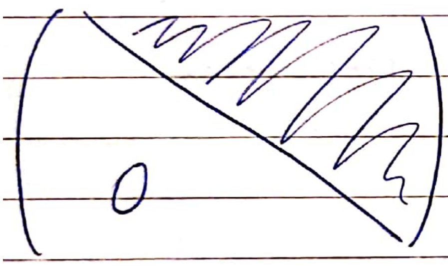


Έστω ότι μου δίνεται σύστημα σε μορφή εξισώσεων φτιάχνω κατευθείαν τον επαυξημένο πίνακα

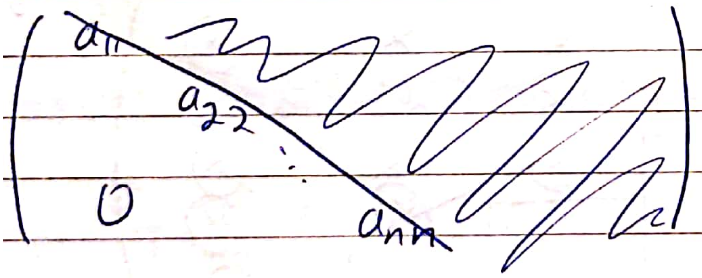
$$\begin{aligned} 2y + 3z &= -1 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 2x + z &= -1 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Μέσω γραμμοπράξεων μηδενίζω τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης κάτω από το pivot element.
Ορίζω ως pivot στην επόμενη στήλη στην επόμενη γραμμή και επαναλαμβάνω
Οτιδήποτε βρίσκεται κάτω από τη διαγώνιο θα είναι 0.
Ο πίνακας που προκύπτει ονομάζεται <u>άνω κλιμακωτός</u>

Αν $A: M_n$, τετραγωνικός, τότε άνω κλιμακωτός $\iff$ άνω τριγωνικός



: άνω τριγωνικός



: άνω κλιμακωτός

<u>Άσκηση</u>: Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφή Gauss

$$
\begin{aligned}
2x_2 + 3x_3 &= -1 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\
2x_1 + + 3x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

Σχηματίζω τον επαυξημένο:

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
0 & 2 & 3 & -1 \\
1 & 1 & 2 & 0 \\
2 & 0 & 3 & -1
\end{array}\right)
$$

Επειδή $a_{11}=0$, για να είναι δυνατές οι αναλογίες

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{*}{\overset{E_1 \leftrightarrow E_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

~~$m_{32}=$~~ $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$

$$\underset{\sim}{E_3 \leftarrow E_3 - m_{31}E_1 = E_3 - 2E_1} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\underset{\sim}{E_3 \leftarrow E_3 - m_{32}\cdot E_2 = E_3 + E_2} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \; *$$

Η φάση μεταξύ των αστερίσκων λέγεται $\boxed{\text{τριγωνοποίηση}}$

Μπαίνουμε στην πίσω αντικατάσταση

$2x_3 = -2 \Rightarrow \boxed{x_3 = -1}$

$2x_2 + 3x_3 = -1 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Παρένθεση, δε μας ενδιαφέρουν λεπτομέρειες για διαγώνισμα,

1ο βήμα: $(n-1)^2 + (n+1)$ Πολλαπλασιασμοί

$n-1$ Αφαιρέσεις

$(n+1)^2 + (n-1)$ Προσθέσεις

Συνολικά $\overset{*}{\frac{3n^3}{3}} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{6}$ = σύνολο flops για έναν $n \times n$ με Gauss

(flops: Πολ/μοι, διαιρέσεις, προσθέσεις, αφαιρέσεις)

(* Υπολογίστηκε με χρήση $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

Cramer: $(n+1) \cdot n! (n-1) + n$

Σε ένα μικρό σύστημα 30×30:

Gauss: 0,00000989 sec
Cramer: $7{,}56 \cdot 10^{16}$ αιώνες
} Για 10^9 flops/sec

Τέλος παρένθεσης

Παρένθεση: Σημαντικά Ψηφία: (για υπολογιστές)

$800 = 8 \cdot 10^2$, 2 σ.ψ
$0.003 = 3 \cdot 10^{-3}$, 1 σ.ψ
$0.00850 = 8.50 \cdot 10^{-3}$, 3 σ.ψ
$50.0 = 5.00 \cdot 10^1$, 3 σ.ψ

$50 \neq 50.0$

$x = 8.5 \Rightarrow 8.45 \leq x < 8.55$
$y = 8.50 \Rightarrow 8.495 \leq y < 8.505$

800, 1 σ.ψ
800.0, 4 σ.ψ

Παράδειγμα προβληματικού υπολογισμού σε υπολογιστή

Δεχόμαστε 4 σ.ψ.

$$\begin{aligned} 0.003x_1 + 1.566x_2 &= 1.569 \\ 0.3454x_1 - 2.436x_2 &= 1.018 \end{aligned}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

πραγματική λύση

$$m_{21} = \text{float}\left(\frac{0,3454}{0,003}\right) = fl(1151.3) = 1151$$

$$a_{22}^{(2)} = fl(-2.436 - fl(1151 \cdot 1.566)) = fl(-2.436 - 1802)$$

$$= fl(-1804.436) = -1804$$

$$\left.\begin{aligned} 0.003x_1 + 1.566x_2 &= 1.569 \\ -1804 \quad &= -1805 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_2 &= 1,001 \\ x_1 &= 3.333 \end{aligned}\right.$$

Παρατηρούμε ότι με περιορισμό 4 σ.ψ, σε σύστημα 2×2 έχουμε μεγάλο σφάλμα στο αποτέλεσμα.

Αύξηση των σ.ψ. μπορεί να λύσει το πρόβλημα εδώ, όμως αν είχαμε μεγαλύτερο σύστημα, πχ. 100×100, πιθανόν να επανερχόταν.

Αντιμετώπιση του ζητήματος στο επόμενο μάθημα.