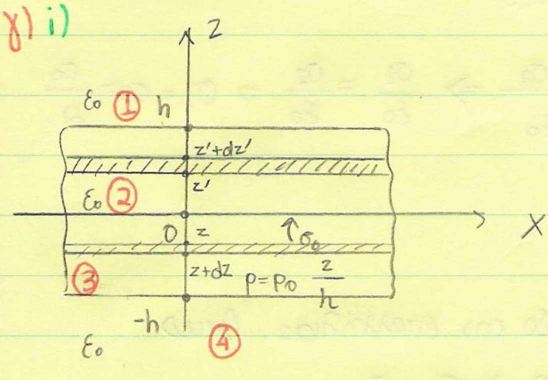
Μαθημα 12ο 05/05/2011

Ασκηση 3.3

γ) i)



Στη διπλανη διαταξη ισχυει οτι $\frac{\partial}{\partial x}=0=\frac{\partial}{\partial y}$. Συνεπως $\vec{E}=E_z(z)\hat{z}$

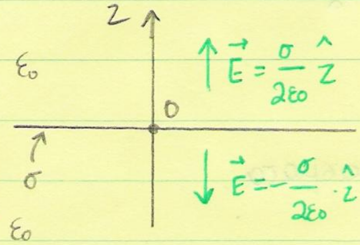
παιρναμε αποτελεσματα για τις διαφορες πηγες και τα αθροιζαμε.

Εφαρμοζω την μεθοδο της επαλληλιας: ισχυει οτι $\sigma(z')=\rho(z')dz'=\rho_0\cdot\frac{z'}{h}\cdot dz'$

Πηγες τωρα ε... η σ_0 ... οι πανω και κατω φετες

Για τις περιοχες ①, ④ ισχυει οτι:

$$E_{z_1}=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{h}\int_{-h}^{h}z'dz'=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{2}\right)=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$



φαινεται η αντισυμμετρια

$=-E_{z_4}$ αφου $E_{z_1}=-E_{z_4}$ οπως φαινεται στο διπλανο σχημα.

η συνεισφορα των κατω φετων (θετικη λογω του δευτερου σχηματος) αναιρειται εν μερει απο την συνεισφορα των ανω.

Στην περιοχη ② ισχυει

$$E_{z_2}=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\int_{-h}^{z}z'dz'-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\int_{z}^{h}z'dz'$$

$$=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\cdot\left(\frac{z^2}{2}-\frac{h^2}{2}\right)-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\left(\frac{h^2}{2}-\frac{z^2}{2}\right)$$

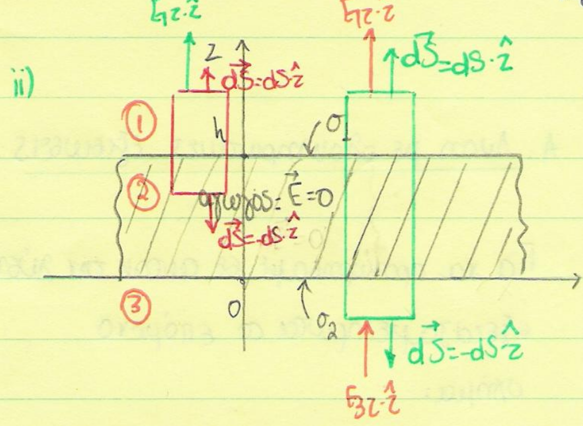
$$=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\cdot(z^2-h^2).$$

Για την περιοχη ③ ισχυει

$$E_{z_3}=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\int_{-h}^{z}z'dz'-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\int_{z}^{h}z'dz'$$

$$=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\cdot\frac{z^2-h^2}{2}-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}\cdot\frac{h^2-z^2}{2}=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 h}(z^2-h$$

ii)



Δινεται οτι $\sigma_1+\sigma_2=\sigma_0$, ενω ζητειται το E. Λογω και του δευτερου σχηματος θα ισχυει οτι υπαρχει μονο $E_z(z)$.

A. Λυση με ολοκληρωτικες εξισωσεις

Απο τον νομο του Gauss ισχυει οτι

• $\varepsilon_0 \cdot E_{1z} \cdot S - \varepsilon_0 \cdot E_{3z} \cdot S = (\sigma_1+\sigma_2)\cdot S \Rightarrow 2\varepsilon_0 \cdot E_{1z} = \sigma_1 + \sigma_2$ λόγω της αρχής της αντισυμμετρίας

$$\Rightarrow E_{1z} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0} = -E_{3z}.$$

• $\varepsilon_0 \cdot E_{1z} \cdot S - 0 = \sigma_1 \cdot S \Rightarrow E_{1z} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2}.$

Άρα $E_{1z} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} = -E_{3z}$ και $\vec{E}_2 = 0$

Αυτά τα αποτελέσματα βγαίναν και με την μέθοδο της επαλληλίας. Όπως αφού $E_{2z}=0$ ισχύει $E_{2z} = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$

εφαρμόζω αρχή επαλληλίας

Από εκεί μπορώ να καταλήξω στα ίδια με πριν συμπεράσματα.

B. Λύση με σημειακές εξισώσεις

Ισχύει ότι: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho = 0 \Rightarrow \frac{dD_z}{dz} = 0 \Rightarrow D_z = C$

διότι $E_{z_2}=0$

Συνεπώς για κάθε περιοχή έχουμε $D_{z_1} = C_1$, $D_{z_2} = 0$ και $D_{z_3} = C_3$

Η συνθήκη στο άπειρο μας δίνει: $D_{z_1} = -D_{z_3} \Rightarrow C_1 = -C_3$

Η οριακή συνθήκη στο $z=h$ δίνει: $D_{z_1} - D_{z_2} = \sigma_1 \Rightarrow D_{z_1} = \sigma_1 = C_1$.

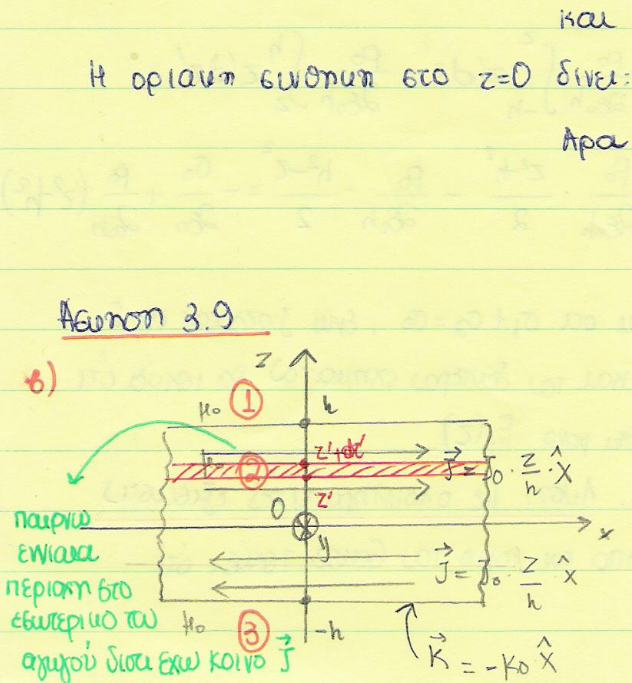
και $D_{z_3} = C_3 = -C_1 = -\sigma_1$.

Η οριακή συνθήκη στο $z=0$ δίνει: $D_{z_2} - D_{z_3} = \sigma_2 \Rightarrow D_{z_3} = -\sigma_2$

Άρα $-\sigma_2 = -\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_1 = \frac{\sigma_0}{2}$ με βάση όσα βρήκαμε πριν.

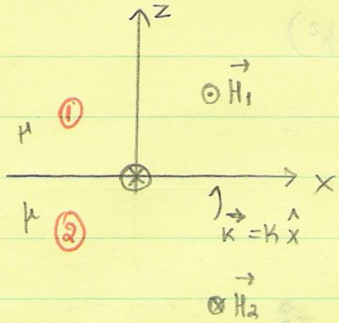
Άσκηση 3.9

β)



A. Λύση με ολοκληρωτικές εξισώσεις:

Για να προχωρήσουμε σε αυτήν την λύση εξετάζουμε πρώτα το επόμενο σχήμα:



Στη διπλανή διάταξη ισχύει ότι

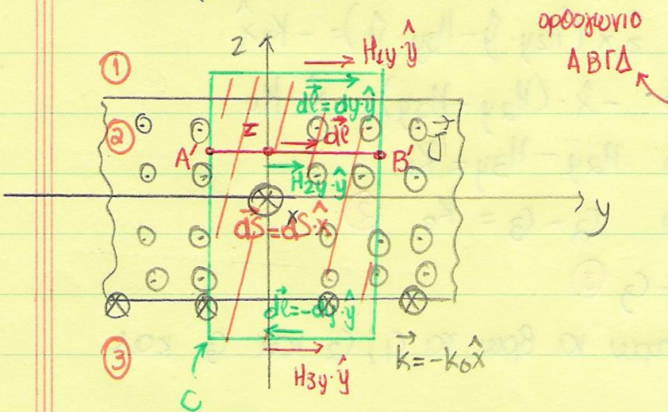
$$\left.\begin{aligned} \vec{H}_1 &= -\frac{k}{2}\hat{y} \\ \vec{H}_2 &= \frac{k}{2}\hat{y} \end{aligned}\right\} \quad \text{με } \frac{\partial}{\partial x} = 0 = \frac{\partial}{\partial y}$$

Ασκήσεις προς παράδοση:
3.9α
3.4

Στην αρχική μας διάταξη, τώρα, ισχύει ότι $\vec{K}(z') = \vec{J}(z')dz'$

ενώ επειδή $\frac{\partial}{\partial x} = 0 = \frac{\partial}{\partial y}$ θα είναι $\vec{H} = H_y(z')\hat{y}$

Για να εφαρμόσω τον νόμο του Ampere πρέπει να βρω ένα ορθογώνιο κάθετο στη ροή του $\vec{J}$. Θα έχω:



ορθογώνιο ΑΒΓΔ

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c$$

διότι $I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ εξαιτίας του $\vec{J}$

$$\Rightarrow \underbrace{H_{1y}\cdot l}_{AB} - \underbrace{H_{3y}\cdot l}_{ΓΔ} = K_0\cdot l - \frac{J_0}{h}\int_{-h}^{h} z\,l\,dz$$

Η συνθήκη στο άπειρο μας δίνει $H_{1y} = -H_{3y}$, συνεπώς

$$2H_{1y} = K_0 - \frac{J_0}{h}\cdot\frac{h^2-h^2}{2} \Rightarrow H_{1y} = -H_{3y} = \frac{K_0}{2}$$

Έτσι βρήκαμε αποτελέσματα για τις περιοχές ① και ③. Για την περιοχή ② θα ισχύει ότι:

ορθογώνιο Α'Β'ΓΔ

$$\underbrace{H_{2y}\cdot l}_{A'B'} - \underbrace{H_{3y}\cdot l}_{ΓΔ} = K_0 l - \frac{J_0}{h}\int_{-h}^{z} z'\,l\,dz$$

$$\Rightarrow H_{2y} = H_{3y} + K_0 - \frac{J_0}{h}\cdot\frac{z^2-h^2}{2} = \frac{K_0}{2} - \frac{J_0}{2h}(z^2-h^2)$$

άθροισμα επιμέρους συνεισφορών όλων των ρευμάτων

Β. Λύση με επαλληλία

Βλέπω το 1ο σχήμα της άσκησης αυτής

Θα ισχύει $H_{1y} = \frac{K_0}{2} - \frac{J_0}{2h}\int_{-h}^{h} z\,dz = \frac{K_0}{2} - \frac{J_0}{2h}\cdot\frac{h^2-h^2}{2} = \frac{K_0}{2} = -H_{3y}$

Θεωρούμε ότι και όλο το $\vec{J}$ πάει προς τα δεξιά για λόγους ευκολίας αν και άλλη είναι η πραγματική φορά

και $H_{2y} = \frac{K_0}{2} - \frac{J_0}{2h}\int_{-h}^{z} z'dz' + \frac{J_0}{2h}\int_{z}^{h} z'dz' =$

$$= \frac{K_0}{2} - \frac{J_0}{2h}\frac{z^2-h^2}{2} + \frac{J_0}{2h}\cdot\frac{h^2-z^2}{2} = \frac{K_0}{2} - \frac{J_0}{2h}\left(z^2-h^2\right)$$

Γ. Λυση με οριακες σχεσεις

ισχυει οτι $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \Rightarrow -\frac{dH_y}{dz} = J_x$

Αρα $\frac{dH_{2y}}{dz} = -J_0\cdot\frac{z}{h} \Rightarrow H_{2y} = -J_0\cdot\frac{z^2}{2h} + C_2$

και $H_{1y} = C_1$, $H_{3y} = C_3$

Οι οριακες συνθηκες για $z=h$ δινουν: $H_{1y} = H_{2y} \Rightarrow C_1 = -J_0\frac{h^2}{2h} + C_2$ ①

Οι οριακες συνθηκες για $z=0$ δινουν: $\hat{z}\times(H_{2y}\cdot\hat{y} - H_{3y}\cdot\hat{y}) = -K_0\hat{x}$

$$\Rightarrow -\hat{x}\cdot(H_{2y}-H_{3y}) = -\hat{x}\cdot K_0$$

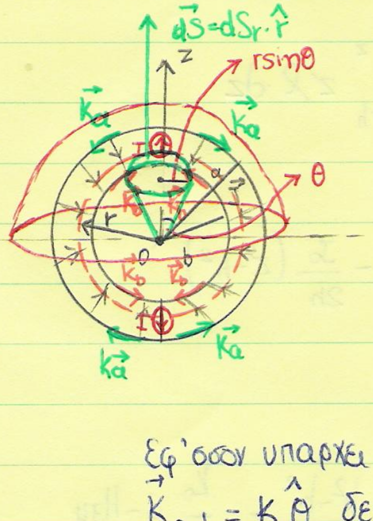
$$\Rightarrow H_{2y}-H_{3y} = K_0$$

$$\Rightarrow C_2 - C_3 = K_0 \quad ②$$

Επισης $H_{1y} = -H_{3y}$ Συνεπως $C_1 = -C_3$ ③

Απο τις σχεσεις ①, ② και ③ μπορω να βρω τα C_1, C_2 και C_3 και να λυσω το προβλημα.

Ασκηση 3.11 (γεωμετρια της 1.10)



Στη διπλανη διαταξη ισχυει $\vec{J} = -J_r\cdot\hat{r} = -\frac{I}{2\pi r^2}\cdot\hat{r}$

διοτι $J_r = \frac{2I}{4\pi r^2} = \frac{I}{2\pi r^2}$

Ζητειται το $\vec{H}$.

Α. Λυση με ολοκληρωτικες εξισωσεις

Εφ' οσον υπαρχει κυλινδρικη συμμετρια $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}=0\right)$ και $\vec{J} = -J_r\cdot\hat{r}$ και $\vec{K}_{a,b} = K\hat{\theta}$ δεν υπαρχουν οι συνιστωσες J_φ, K_φ και ισχυει οτι $\vec{H} = H_\varphi\cdot\hat{\varphi}$.

Συνεπως θα εχουμε:

εδω παιρνουμε κυλινδρικες
γιατι ολοκληρωναμε πανω σε κυκλο

αυτό τα κανω για $b<r<a$ οπως φαινεται
στο σχημα μου

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \Rightarrow H_\varphi \cdot 2\pi r \cdot \sin\theta = I - \frac{I}{2\pi \cancel{r^2}} \int_{\theta'=0}^{\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cancel{r^2} \cdot \sin\theta' d\theta' d\varphi$$

Εδω παιρναμε
σφαιρικες διοτι
ολοκληρωνω πανω
σε τμημα επιφανειας
σφαιρας

$$= I + \frac{I}{2\pi} \cdot 2\pi(\cos\theta - 1)$$

$$= I + I\cos\theta - I = I\cos\theta.$$

Αρα $H_\varphi = \dfrac{I}{2\pi r}\cot\theta$ με $b<r<a$.

η επιφανεια δεν διατρυπαται
απο ρευμα

Για $0 \le r < b$ ισχυει οτι $H_\varphi \cdot 2\pi r \cdot \sin\theta = 0 \Rightarrow H_\varphi = 0$

στο σχημα φαινεται οτι
τελικα οσο ρευμα
μπαινει στην εξωτερικη
τοσο βγαινει χωρις
τελικα να την διατρυπα

Για $r > a$ ισχυει οτι $H_\varphi \cdot 2\pi r \sin\theta = 0 \Rightarrow H_\varphi = 0$