ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 13

Διάλεξη: 12 Νοεμβρίου 2020

Προηγούμενο επεισόδιο: <u>Λύση γραμμικών ΔΕ με δυναμοσειρές</u>

Ιδέα της μεθόδου: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

<u>Υπέρ</u>: 1. Αρκετά γενική μέθοδος. Πολλές συναρτήσεις μπορούν να γραφούν σαν δυναμοσειρές.

2. Αντί για $y(x)$ τώρα ψάχνουμε τα $a_0, a_1, a_2, \ldots$

<u>Κατά</u>: 1. Ψάχνουμε άπειρα a: $a_0, a_1, \ldots, a_{100}, \ldots, a_{1000}, \ldots$

2. Υπολογισμός πχ $y(1)$ → πόσους όρους θα πάρουμε;

3. Σε κάποιες περιπτώσεις δεν θα συγκλίνει.

Παράδειγμα 1: Λύση $y' - y = 0$ $\forall x$ με δυναμοσειρές

Έστω $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ $\quad y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

Αντικατάσταση: $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_1 - a_0)} + \underbrace{(2a_2 - a_1)} x + \underbrace{(3a_3 - a_2)} x^2 + \dots = 0 \quad \forall x$$

$$a_1 - a_0 = 0 \qquad a_1 = a_0 \qquad a_1 = \frac{a_0}{1!}$$

$$\Rightarrow 2a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2!}$$

$$3a_3 - a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2\,3} \qquad a_3 = \frac{a_0}{3!}$$

$$\dots$$

$$\left(a_4 = \frac{a_0}{2\;3\;4}\right)$$

Αντικατάσταση στο $y(x)$

$$y(x) = a_0 + \frac{a_0}{1!} x + \frac{a_0}{2!} x^2 + \frac{a_0}{3!} x^3 + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 \underbrace{\left[1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots\right]}_{e^x}$$

$$\boxed{y(x) = a_0 e^x}$$

Παρατηρήσεις

1. Λύνεται σαν χωριζομένων μεταβλητών $y(x)=Ce^{x}$

   Το παράδειγμα δείχνει την μέθοδο.

2. Η σταθερά (C ή ea_0) εμφανίστηκε μόνο του.

3. Δεν χρειαστήκαμε ολοκλήρωση.

Παράδειγμα 2

Λύση $y'' + y = 0$ με δυναμοσειρές

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

Αντικατάσταση: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

αλλαγή μεταβλητής $\Big|$ $k = n-2$, $n = k+2$

$$\sum_{k=-2}^{\infty} a_{k+2} (k+1)(k+2) x^k \xrightarrow[\substack{\text{αλλαγή} \\ \text{ονόματος} \\ k \to n}]{} \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2} (n+1)(n+2) x^n$$

$$\sum_{n=-2 \to n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Για $n=-2$: $a_0 (-1)\, 0 \Rightarrow$ όρος $= 0$

Για $n=-1$: $a_1\, 0\, 1 = 0 \Rightarrow$ όρος $= 0$

$$\left(\sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n = 0 + 0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$[\ ]x^0 + [\ ]x + [\ ]x^2 + \cdots$$

$$\forall x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+1)(n+2) + a_n\right]x^n = 0$$

$$a_{n+2}(n+1)(n+2) + a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots}$$

Αναδρομικός τύπος

$$\rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Για $n=0$ $\quad a_2 = -\frac{a_0}{1\ 2} = -\frac{a_0}{2!}$

Για $n=1$ $\quad a_3 = -\frac{a_1}{2\ 3} = -\frac{a_1}{3!}$

Για $n=2$ $\quad a_4 = -\frac{a_2}{3\ 4} = +\frac{a_0}{4!}$

Για $n=3$ $\quad a_5 = -\frac{a_3}{4\ 5} = +\frac{a_1}{5!}$

για $n=4$ $\quad a_6 = -\frac{a_0}{6!}$

Για $n=5$ $\quad a_7 = -\frac{a_1}{7!}$

κλπ.