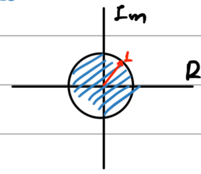
Ευστάθεια γραμμ. συστ. διακριτού χρόνου

α) Θεώρημα

Αν $|\lambda_i| < 1$, $i=1,\dots,n$ (όπου λ_i οι ιδιοτιμές της A) τότε $\lim_{k\to\infty} \{x(k)\} = 0$, δηλ. ασυμπτωτική ευστάθεια.

Αν $\exists \lambda_j$ με $|\lambda_j| > 1$ τότε σύστημα ασταθές

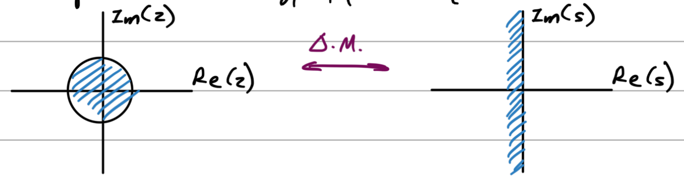


β) Αλγεβρικά κριτήρια ευστάθειας

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\psi(z) = \det\{zI - A\} = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

→ Κριτήριο Jury

→ Με βάση τον διγραμμικό μετασχ.: $z = \frac{s+1}{s-1}$ ή $s = \frac{z+1}{z-1}$ (αλλαγή μεταβλητής)



↳ εναλλακτικά: $z = \frac{s-1}{s+1}$ ή $s = \frac{z-1}{z+1}$

$|z| \le 1 \Leftrightarrow |s+1| \le |s-1| \Leftrightarrow |r+j\omega+1|^2 \le |r+j\omega-1|^2 \Leftrightarrow (r+1)^2 - \omega^2 \le (r-1)^2 - \omega^2 \Leftrightarrow \boxed{r \le 0}$

- Ας είναι: $\phi(s) = (s-1)^n \psi(z)\Big|_{z=\frac{s+1}{s-1}} = (s-1)^n \left[\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{s+1}{s-1} + a_0\right]$

  άρα: $\psi(z)$ ασυμπτωματικά ευσταθές $\Leftrightarrow$ $\phi(s)$ ασυμπτωματικά ευσταθές

Επομένως κριτήριο Routh στο $\phi(s)$: ευστάθεια ή αστάθεια ή οριακή ευστάθεια στο συσχ. Δ.Χ.

Παράδειγμα

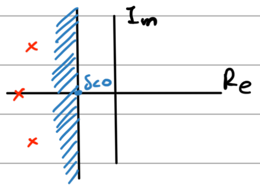
$\psi(z) = z^4 + 0.6z^3 + 0.3z^2 - 0.5z + 0.25$

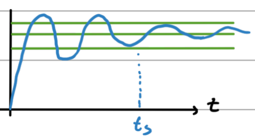
$\phi(s) = (s+1)^4 \left[\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^4 + 0.6\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 0.3\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 - 0.5\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 0.25\right] = \dots = 1.65s^4 + 5.2s^3 + 6.3s^2 + 0.8s + 1.65$

s^4	1.65	6.3	1.65	0
s^3	5.2	0.8	0	
s^2	6.046	1.65	0	
s^1	-0.62	0		
s^0	1.65	0		

⇒ $\psi(z)$ ασταθές με 2 πόλους έξω από τον μοναδιαίο κύκλο

- Εφαρμογή:





$t_s \le t_{επιθυμ.}$

↳ Θέλουμε οι πόλοι p_i, $i=1,\dots,n$ του $\psi(s)$ να ικανοποιούν $Re\{p_i\} < \delta$, $i=1,\dots,n$ (με $\delta<0$):

→ Μετασχ.: $\tilde{s} = s + \delta$

→ $\tilde{\varphi}(s) \triangleq \psi(\tilde{s}) = \psi(s+\delta) = (s+\delta)^n + a_{n-1}(s+\delta)^{n-1} + \dots + a_1(s+\delta) + a_0 = \dots = s^n + \tilde{a}_{n-1}(\delta) s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1(\delta)s + \tilde{a}_0(\delta)$

↳ Εφαρμόζουμε κρ. Routh στο $\tilde{\varphi}(s)$: Αν $\tilde{\varphi}(s)$ ασυμπτ. ευσταθές τότε $Re\{p_i\} < \delta$, $i=1,\dots,n$

Κεφ 6: Ελεγξιμότητα κ' παρατηρησιμότητα.

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $t \geq 0$ (1.1) $\qquad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, $k \geq 0$ (2.1)

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ (1.2) $\qquad y(k) = Cx(k) + Du(k)$ (2.2)

(1) Ελεγξιμότητα

Ορισμός: Το σύστημα (1.1) (ή (2.1)) λέγεται ελέγξιμο αν για οποιαδήποτε δεδομένα $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ πεπερασμένος χρόνος t_f (ή k_f) και $\exists$ είσοδος $u(t)$, $t \in [0, t_f]$ (ή $u(k)$, $k \in [0, k_f]$) ώ $x(0) = x_0$ και $x(t_f) = x_f$ (ή $x(k_f) = x_f$).

(1.1) $\Rightarrow x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

Cayley-Hamilton $\Rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)A^k$

$$\Rightarrow x(t_f) = e^{At_f} \cdot x(0) + [B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \int_0^{t_f} a_0(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^{t_f} a_1(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^{t_f} a_{n-1}(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

Ορισμός: Για σύστημα με n καταστάσεις κ' r εισόδους ή $n \times (nr)$ μήτρα.
$\Gamma_c = [B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{n-1}B]$ λέγεται μήτρα ελεγξιμότητας

Θεώρημα: Το σύστημα (1.1) (ή (2.1)) είναι ελέγξιμο ανν:
$$\text{rank}\{\Gamma_c\} = \text{rank}[B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{n-1}B] = n$$

Ας είναι:
$$\tilde{\Gamma}_c(\lambda) = [B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{\lambda-1}B]. \text{ Προφανώς } \tilde{\Gamma}_c(n) = \Gamma_c$$

Ορισμός: Ο ελάχιστος ακέραιος λ για τον οποίο ισχύει $\tilde{\Gamma}_c(\lambda) = n$ λέγεται δείκτης ελεγξιμότητας του (1.1) (ή (2.1))

Ελεγξιμότητα $\Leftrightarrow \lambda \leq n$. Αν $r=1$ τότε $\lambda \geq n$. $\Rightarrow$ για ελέγξιμο σύστημα: $\lambda = n$
Αν $r \geq 2$ τότε ενδέχεται να ισχύει $\lambda < n$.

Αν $\hat{A} = P^{-1}AP$, $\hat{B} = P^{-1}B$ τότε $\hat{\Gamma} = [\hat{B} \mid \hat{A}\hat{B} \mid \hat{A}^2\hat{B} \mid \ldots \mid \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = P^{-1}[B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{n-1}B] = P^{-1}\Gamma_c$

Πρόταση: Η ελεγξιμότητα κ' ο δείκτης ελεγξιμότητας διατηρούνται αναλλοίωτα με μετασχηματισμό ομοιότητας

Πρόταση: Αν $A = \text{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}$ και $B = [b_1, \ldots, b_n]^T$ τότε ελεγξιμότητα $\Leftrightarrow a_i \neq a_j$ $\forall i \neq j$ και $b_j \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$

Παράδειγμα

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t), \quad n=3$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+1 \\ a-2 \\ 4a+1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2a+1 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 1 & 4a+1 \end{bmatrix}$$

(στήλες: B, AB, A^2B)

$\det(\Gamma_c) = a(4a+1) - a + 2 = 4a^2 + 2 > 0$
$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ελέγξιμο $\forall a \in \mathbb{R}$