Δευτέρα 4/4/22 9η Διάλεξη: Κοκκίνης 5

Previously

$f(x)=0$ (1)

$x=g(x)$ (2)

γ.ε.μ $\boxed{x_k = g(x_{k-1}),\ k=1,2,\ldots \quad x_0 \text{ δοθεν}}$ (3)

Θ1 (Τοπική Σύγκλιση)

$\bar{x}$ λύση της (2), $|g'(\bar{x})|<1$ τότε η (3) συγκλίνει για κάθε x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$

Θ2 (Περιορισμένη Σύγκλιση)

- $g[a,b] \to [a,b]$
- g συστολή στο $[a,b]$ (με σταθερά L)

$\downarrow$

Η (3) συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [a,b]$

Παραδείγματα 1: Δίνεται η γ.ε.μ. $x_{k+1}=x_k+\sin(x_k)$, $k=0,1,2\ldots$ Να εξετάσετε αν συγκλίνει στο $\bar{x}$ [redacted] $\forall x_0$ ~~και στο $\bar{x}=\pi$~~ αρκετά κοντά στο $\bar{x}$, αν $\bar{x}=0$ και $\bar{x}=\pi$.

Λύση

Αφού θέλουμε "αρκετά κοντά", Θ1

$g(x)=x+\sin x$

$g'(x)=1+\cos x$

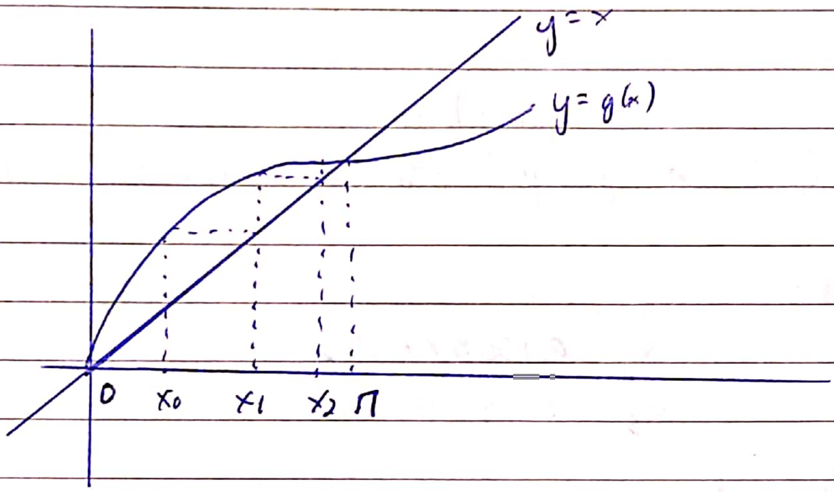
a) $\bar{x}=0$: $g(0)=0$ δηλαδή $\bar{x}=0$ είναι σταθερό σημείο της g.

$|g'(0)| = 2 > 1$, άρα δε συγκλίνει στο $\bar{x}=0$

(εκτός αν $x_0=0$)

β) $\bar{x}=\pi$, $g(\pi)=\pi$ δηλαδή το $\bar{x}=\pi$ είναι σταθερό σημείο της g

$|g'(\pi)|=0<1$ επομένως από Θ1 η γεν. συγκλίνει στο $\bar{x}=\pi$ για κάθε x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}=\pi$



Παράδειγμα 2: Η εξίσωση $5x^3-20x+3=0$ έχει μοναδική ρίζα $\bar{x}\in[0,1]$

(α) Να δειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος

$$x_{k+1}=g(x_k)=\frac{5x_k^3+3}{20}, \quad k=0,1,2\ldots$$

Συγκλίνει στο $\bar{x}$ $\forall x_0\in[0,1]$

(β) Να γίνουν 3 επαναλήψεις με $x_0=0,2$ και να δωθεί μια ~~επίλυση του~~ εκτίμηση του σφάλματος $|\bar{x}-x_3|$

(γ) Πόσες επαναλήψεις (θεωρητικά) απαιτούνται με $x_0=0.2$ ώστε το σφάλμα $|x_k-\bar{x}|\le 10^{-6}$;

(δ) Αν $\varepsilon_k = x_k-\bar{x}$ να δειχθεί ότι $\lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}=\frac{3}{4}\bar{x}^2$.

(a) $g(x)=\frac{5x^3+3}{20}$,

g συνεχής $[0,1]$, $g'(x)=\frac{3}{4}x^2>0,\ \forall x\in(0,1) \rightarrow g\uparrow [0,1]$

• $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [3/20, 8/20] \subset [0,1]$

• $\max\limits_{0\le x\le 1} |g'(x)| = 3/4$ δηλαδή η g είναι συστολή στο $[0,1]$

Άρα από Θ2 η γ.ε.μ. $\overset{\text{συγκλίνει}}{}$ στο $\bar{x}$, για κάθε $x_0\in[0,1]$

(β) $x_0=0,2$ $\qquad x_2 = 0,150877952$

$x_1=0,152$ $\qquad x_3 = 0,150858652$

$$|x_3-\bar{x}| \le \frac{L}{1-L}|x_3-x_2| = \frac{3/4}{1-3/4}|x_3-x_2| = 0,0000579$$

(γ) $|x_k-\bar{x}| \le \boxed{\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \le \overset{\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{10^{-6}}}}$

$$\frac{(3/4)^k}{(1/4)}|0{,}152-0{,}2| \le 10^{-6} \quad \text{ή} \quad \boxed{k \ge 42.28}$$

$\cancel{k \log_{3/4}}$

δ) $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1}-\bar{x} = g(x_k)-g(\bar{x}) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=\!=} g'(\theta_k)(x_k-\bar{x})$

$= g'(\theta_k)\cdot\varepsilon_k$, θ_k μεταξύ $x_k, \bar{x}$

Άρα $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \lim\limits_{k\to+\infty} g'(\theta_k) = g'(\bar{x}) = \frac{3}{4}(\bar{x})^2$ //

ΤΑΞΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

(x_k): $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{x}$

Ορισμός: Λέμε ότι η ακολουθία x_k συγκλίνει (τουλάχιστον) ~~γραμμικά~~ ή ότι η τάξη σύγκλισης της είναι (τουλάχιστον) $\underset{(\text{Ένα})}{1}$, αν υπάρχει σταθερά $c<1$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε:

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \le c|x_k - \bar{x}|, \text{ για } k \ge k_0$$

Λέμε ότι η σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) τάξης m, $m>1$, αν υπάρχει σταθερά $c>0$, τέτοια ώστε

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \le c \cdot |x_k - \bar{x}|^m$$

$m=2$: τετραγωνική
$m=3$: κυβική

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$x_k \ne \bar{x}$ Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{k+1}-\bar{x}}{(x_k-\bar{x})^m} = l \ne 0$

τότε η τάξη σύγκλιση είναι ΑΚΡΙΒΩΣ m

Π.χ.
Στο προηγούμενο παράδειγμα: $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{k+1}-\bar{x}}{x_k-\bar{x}} = \frac{3}{4}(\bar{x})^2 \ne 0$

Άρα έχουμε τάξη σύγκλισης ΑΚΡΙΒΩΣ 1 (Ένα)

Παράδειγμα (που αναδεικνύει τη συσχέτιση μεταξύ των σχέσεων αυτών και της ταχύτητας σύγκλισης)

Η ακολουθία $x_k = 1 + (1/2)^k$ συγκλίνει στο $\bar{x} = 1$ γραμμικά

$$\varepsilon_{k+1} = |x_{k+1} - \bar{x}| = |1 + (1/2)^{k+1} - 1| = |(1/2)^{k+1}| = \frac{1}{2}|(1/2)^k|$$

$$= \frac{1}{2}|1 + (1/2)^k - 1| = \frac{1}{2}|x_k - \bar{x}|$$

δηλ. $|x_{k+1} - \bar{x}| = \frac{1}{2}|x_k - \bar{x}|$

Άρα έχουμε τάξη σύγκλισης τουλάχιστον 1, $(c = 1/2)$

$x_0 = 2$	
$x_1 = 1.5$	$x_4 = 1.0625$
$x_2 = 1.25$	$x_5 = 1.03125$
$x_3 = 1.125$	$x_6 = 1.015625$

Η ακολουθία $y_k = 1 + (1/2)^{2^k}$ συγκλίνει στο $\bar{x} = 1$

Μπορείτε να δείξετε ότι συγκλίνει τετραγωνικά, γιατί

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = |x_k - \bar{x}|^2$$

$y_0 = 3/2 = 1.5$

$y_1 = 1.25$

$y_2 = 1.0625$

$y_3 = 1.00390625$

$y_4 = 1.00001525 9$

$y_5 = 1.0000000000233$

Βλέπουμε ότι η ακολουθία y_k συγκλίνει στο $1 = \bar{x}$ πολύ πιο γρήγορα από την x_k

• Έστω g συνάρτηση που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του

Θ2 στο $[a,b]$ ($g:[a,b]\to[a,b]$, g συστολή στο $[a,b]$)

$x_{k+1} = g(x_k)$, $k=0,1,2,\dots$, συγκλίνει στο $\bar{x}$ (μοναδικό σταθερό) $\forall x_0 \in [a,b]$

$$|x_{k+1}-\bar{x}| = |g(x_k)-g(\bar{x})| \underset{(L<1)}{\overset{(\text{συστολή})}{\leq}} L|x_k-\bar{x}|$$

$\boxed{\text{δηλ. } |x_{k+1}-\bar{x}| \leq L\cdot|x_k-\bar{x}|, \text{ η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον } 1}$

Αν επιπλέον η g είναι και συνεχώς παραγωγίσιμη:

$$x_{k+1}-\bar{x} = g(x_k)-g(\bar{x}) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} g'(\theta_k)(x_k-\bar{x}), \quad \theta_k \in (x_k,\bar{x}) \text{ ή } (\bar{x},x_k)$$

οπότε $\theta_k \to \bar{x}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-\bar{x}}{x_k-\bar{x}} = \lim_{k\to\infty} g'(\theta_k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-\bar{x}}{x_k-\bar{x}} = g'(\bar{x})}$$

Αν $g'(\bar{x}) \neq 0$ τότε η τάξη σύγκλισης είναι <u>ακριβώς 1</u>.

Άρα αν θέλουμε επαναληπτικές μεθόδους με τάξη σύγκλισης >1, θα πρέπει να κατασκευάσουμε μεθόδους $g'(\bar{x})=0$ (Την επόμενη φορά)

(Βλέπε Διάλεξη 6, Δευτέρα 21.3, Στο παράδειγμα έχουμε $|g'(\bar{x})| = \frac{1}{3}$

& $|g_1'(\bar{x})| = 0$, ← πολύ γρηγορότερη σύγκλιση)