Μιγαδική Ανάλυση

• Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Στον $\mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2=-1$ δεν έχει ρίζα

Θα κατασκευάσουμε σώμα $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η παραπάνω εξίσωση να έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

Ορίζουμε:

→ Πρόσθεση: $(a,b)+(\gamma,\delta) = (a+\gamma, b+\delta)$

→ Πολλαπλασιασμός: $(a,b)\cdot(\gamma,\delta) = (a\gamma - b\delta, a\delta + b\gamma)$

Μονάδα πολλαπλασιασμού $= (1,0) \equiv 1$

Πράγματι $(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)$

Θέτουμε $i=(0,1)$

$i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -(1,0) = -1$

$\Rightarrow$ i: ρίζα της εξίσωσης $x^2=-1$

$\forall a \in \mathbb{R}$, δεχόμαστε την ταύτιση $(a,0) \equiv a$

Τότε $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a\cdot 1 + bi \equiv a+bi$

$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$ "$\subseteq$" $\mathbb{C}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \equiv (a,0) \equiv a+0i \in \mathbb{C}$

Το $\mathbb{C}$ λέγεται σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Το $\mathbb{C}$ εφοδιασμένο με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ είναι σώμα

π.χ. ύπαρξη αντιστρόφου

Έστω $a+bi \neq 0 \Leftrightarrow$ κάποιο από τα $a,b \neq 0$

$\frac{1}{a+bi} \in \mathbb{C}$?

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i$$

Σχόλια

(i) Οι πράξεις μιγαδικών γίνονται εύκολα αρκεί να θυμόμαστε ότι $i^2=-1$ και ότι το $\mathbb{C}$ είναι σώμα

π.χ. $(1+i)\cdot(2+3i) = 2+3i+2i+i3i = 2+5i-3 = -1+5i$

(ii) Όλες οι ταυτότητες επεκτείνονται από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$

π.χ. εάν $z,w \in \mathbb{C}$ τότε $(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2$

$(z^n - w^n) = (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1})$

$(n+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k \cdot w^{n-k}$

(iii) Εάν $z^2+w^2=0 \not\Rightarrow z=w=0$

$z=i$, $w=1$

$i^2+1=0$, $i\neq 0$, $1\neq 0$

Εάν $z = a+bi \in \mathbb{C}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a = Re(z)$ = πραγματικό μέρος του z

$b = Im(z)$ = φανταστικό μέρος του z

Εάν $z,w \in \mathbb{C}$

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(w) \\ Im(z) = Im(w) \end{cases}$$

Εάν $Re(z)=0$ δηλ. $z = bi$ $(b\in\mathbb{R})$, το z λέγεται φανταστικός αριθμός $I = \{bi \mid b\in\mathbb{R}\}$

Άρα z φανταστικός εάν $Re(z)=0$

$\forall z \in \mathbb{C}$ ισχύουν

$\rightarrow z\in\mathbb{R}$ αν $Im(z)=0$

• Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

Ορισμός 1: Εάν $z = a + \beta i \in \mathbb{C}$

Ο συζυγής του z είναι ο $\bar{z} = a - \beta i$

π.χ. $\bar{i} = -i$ $\qquad \overline{5+7i} = 5-7i$

Ιδιότητες

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $\bar{\bar{z}} = z$

(ii) αν $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

αν $z \in \mathbb{C}$ (φανταστικός) $\Rightarrow \bar{z} = -z$

(iii) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

(iv) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Απόδειξη

$z = a + \beta i$, $\quad w = \gamma + \delta i$

$z \cdot w = a\gamma - \beta\delta + (a\delta + \beta\gamma) i$

Άρα $\overline{z \cdot w} = (a\gamma - \beta\delta) - (a\delta + \beta\gamma) i = a\gamma - \beta\delta - a\delta i - \beta\gamma i =$

$= a(\gamma - \delta i) - \beta(\delta + \gamma i) = (\gamma - \delta i)(a - \beta i) = \bar{w} \cdot \bar{z}$

(v) Εάν $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{\gamma + \delta i} = \frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} + \left(\frac{-\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\right) i$$

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$$

$$\frac{1}{\bar{w}} = \frac{1}{\gamma - \delta i} = \frac{\gamma + \delta i}{(\gamma - \delta i)(\gamma + \delta i)} = \frac{\gamma + \delta i}{\gamma^2 + \delta^2} = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} \overset{(iv)}{=} \bar{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \bar{z} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

(vi) $z+\bar{z} = 2Re(z)$, $z-\bar{z} = 2\,Im(z)$

• Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Ορισμός: Εαν $z = a+bi \in \mathbb{C}$ το μέτρο του z είναι

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in [0,+\infty)$

μέτρο του διανύσματος (a,b)

π.χ. $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

Ιδιότητες

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$ $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

(ii) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

(iii) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Απόδειξη (ii)

$|z\cdot w|^2 \overset{(i)}{=} (z\cdot w)(\overline{z\cdot w}) = z\cdot w\cdot \bar{z}\cdot\bar{w} = (z\cdot\bar{z})(w\cdot\bar{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z\cdot w|)^2$

$\Rightarrow |z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

(iv) $|\bar{z}| = |z|$

(v) $|z+w|^2 = |z|^2+|w|^2+2Re(z\bar{w})$

Απόδειξη

$|z+w|^2 \overset{(i)}{=} (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = \bar{z}z + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} =$

$= |z|^2+|w|^2+ z\bar{w}+\bar{z}w$, όμως $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}\,\bar{\bar{w}} = \bar{z}w$

$z\bar{w}+\bar{z}w = z\bar{w}+\overline{z\bar{w}} = 2Re(z\bar{w})$

(vi) $|z+w| \leq |z|+|w|$

$|z+w| \geq |z|-|w|$

Απόδειξη $(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 \overset{(v)}{=} |z|^2+|w|^2+2|z||w| - (|z|^2+|w|^2+2Re(z\bar{w})) =$

$= 2\left[|z||w| - Re(z\bar{w})\right] \geq 0$

$|Re(z\bar{w})| \leq |z\bar{w}| = |z||\bar{w}| = |z||w|$

Άσκηση $zw \neq 0$ τότε $|z+w| = |z|+|w|$ Αν υπάρχει $t>0$ / $w=tz$