Πολυωνυμικές Εξισώσεις

I. $az^2+\beta z+\gamma=0$, $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

Αν $\Delta=\beta^2-4a\gamma<0$ οι ρίζες είναι $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

πχ $z^2+z+1=0$, $\Delta=-3$

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{cases}$$

II. Γενικότερα, πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού ≥ 2 με <u>πραγματικούς</u> συντελεστές. Έστω $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$, $a_k\in\mathbb{R}$, $0\leq k\leq n$

<u>Πρόταση 1</u>: Εάν $z_0\in\mathbb{C}$ ρίζα του P τότε και ο συζυγής $\bar{z}_0$ είναι ρίζα του P.

<u>Απόδειξη</u>: $P(\bar{z}_0)=\sum_{k=0}^{n}a_k\bar{z}_0^k=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\bar{z}_0^k=\overline{\sum_{k=0}^{n}a_kz_0^k}=\overline{P(z_0)}=0$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ρίζα του P τότε το P διαιρείται με $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)$
$=z^2-(z_0+\bar{z}_0)z+|z_0|^2=z^2-2\mathrm{Re}(z_0)z+|z_0|^2$

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί η εξίσωση $P(z)=0$, όπου $P(z)=z^4-z^3+2z^2-z+1$
Δίνεται $P(i)=0$

Πόρισμα $\Rightarrow$ το $P(z)$ διαιρείται από το z^2+1

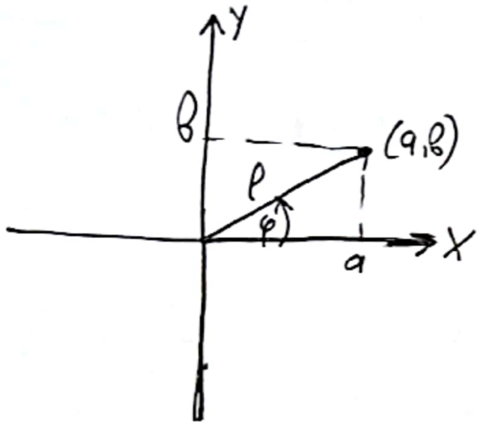
$$z^4-z^3+2z^2-z+1 \;\Big|\; z^2+1$$

$\Pi(z)=z^2-z+1 \Longrightarrow z^2-z+1=0 \Rightarrow z_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Ρίζες του P: $\pm i$, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού:

Έστω $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ δηλ $(a,b) \neq (0,0)$



$a = \rho\cos\varphi$
$\beta = \rho\sin\varphi$
$\rho = \sqrt{a^2+\beta^2}$
$\Rightarrow z = \rho\cos\varphi + i\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (1)

Η (1) είναι μία τριγωνομετρική μορφή του z.

Σχόλιο: Εάν η φ ικανοποιεί την (1), τότε και η $2k\pi + \varphi$ ικανοποιεί την (1) $\forall k \in \mathbb{Z}$

Για δοσμένο $z \neq 0$, ένα οποιοδήποτε $\varphi \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται όρισμα του z.

Παράδειγμα: $z = \sqrt{3} - i$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$$

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right),$$ $-\frac{\pi}{6}$ όρισμα του z.

Πρόταση 2 Αν $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$ δύο ορίσματα του z $(z \neq 0)$, τότε $\varphi_1 = \varphi_2$.

Απόδειξη: $z = |z|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 \end{array}\right\} \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$$

Επιπλέον: $\begin{cases} -\pi < \varphi_1 \leq \pi \\ -\pi < \varphi_2 \leq \pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\pi < \varphi_1 \leq \pi \\ -\pi \leq -\varphi_2 < \pi \end{cases}$ (+)

$$-2\pi < \varphi_1 - \varphi_2 < 2\pi \Leftrightarrow -2\pi < 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -1 < k < 1 \overset{k \in \mathbb{Z}}{\Longleftrightarrow} \boxed{k = 0} \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2}$$

<u>Ορισμός 1</u>: Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Το <u>μοναδικό</u> όρισμα του z που ε στο $(-\pi, \pi]$ ονομάζεται <u>πρωτεύον όρισμα</u> του z και συμβολίζεται $\mathrm{Arg}(z)$.

<u>πχ</u> $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$

<u>Εκθετική συνάρτηση: e^z, $z \in \mathbb{C}$</u>

<u>Κίνητρο</u>: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

<u>Άτυπα</u> θέτουμε όπου x το βi, $\beta \in \mathbb{R}$ και παίρνουμε

$$e^{\beta i} = 1 + \frac{\beta}{1!} i - \frac{\beta^2}{2!} - \frac{\beta^3}{3!} i + \frac{\beta^4}{4!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \cos\beta + i \sin\beta$$

<u>Ορισμός 2</u>: $\forall \beta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $e^{\beta i} = \cos\beta + i\sin\beta$

πχ $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Ορισμός 3</u>: Αν $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $e^z = e^\alpha e^{\beta i} = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta)$

<u>πχ</u> $e^{1+i\frac{\pi}{4}} = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

<u>Σχόλιο</u>: $|e^z| = e^\alpha$, β όρισμα του e^z

Ιδιότητες:

α) $|e^{i\beta}| = 1 \ \forall \beta \in \mathbb{R}$

β) $\forall z \in \mathbb{C}, |e^{z}| = e^{Re(z)}$ και $e^{z} \neq 0$

γ) $\forall z, w \in \mathbb{C}, e^{z+w} = e^{z} \cdot e^{w}$

Για την απόδειξη θέτουμε $z = a + \beta i$, $w = \gamma + \delta i$ και χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες: $\left\{ \begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x \end{array} \right\}$

δ) $(e^{z})^{k} = e^{zk}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}$

ε) $\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$

στ) Η $z \to e^{z}$ είναι $2\pi i$ περιοδική

Δηλ. $e^{z+2\pi k i} = e^{z} \ \forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}$, διότι αν $z = a + \beta i \Rightarrow$

$z + 2k\pi i = a + (\beta + 2k\pi) i \Rightarrow e^{z+2k\pi i} = e^{a}(\cos(\beta + 2k\pi) + i\sin(\beta + 2k\pi)) =$

$= e^{a}(\cos\beta + i\sin\beta) = e^{z}$

Πρόταση 3: Αν $z, w \in \mathbb{C}$, τότε $e^{z} = e^{w} \Leftrightarrow [\exists k \in \mathbb{Z} : z - w = 2k\pi i]$

Απόδειξη ($\Longrightarrow$): $z = a + \beta i$, $w = \gamma + \delta i$

$e^{z} = e^{w} \Rightarrow e^{a}(\cos\beta + i\sin\beta) = e^{\gamma}(\cos\delta + i\sin\delta)$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι τριγωνομετρικές μορφές του ίδιου μιγαδικού

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |e^{z}| = |e^{w}| = e^{a} = e^{\gamma} \Rightarrow a = \gamma \\ \beta - \delta = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Τελικά $z - w = (a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\beta - \delta) i = 2k\pi i$

Η ($\Longleftarrow$) έχει ήδη αποδειχθεί (στ).

πχ Να λυθεί η $e^{z} = -2 = 2e^{i\pi} = \ln 2 \, e^{i\pi} = e^{\ln 2 + i\pi} \Rightarrow$

$z = \ln 2 + i\pi + 2k\pi i = \ln 2 + (2k+1)\pi i$