ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 17

Διάλεξη: 19 Νοεμβρίου 2020

Προηγούμενα επεισόδια: Λύση Γραμμικών ΔΕ $2^{ης}$ Τάξης με Δυναμοσειρές

$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ Γεν. λύση: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_\mu(x)$

Αν $p(x), q(x), r(x)$ αναλυτικές στο $x=0 \Rightarrow y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ (με $R>0$)

δηλαδή $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

ΔΕ του Legendre

Τεστ 4 : $a_{m+2} = -\frac{1}{m+1} a_m \quad m = 0, 1, 2, \dots$

$$y(x) = a_0\left(1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 - \dots\right)$$

$y(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \qquad y'(0) = 2 \Rightarrow a_1 = 2$

$$y(x) = 2x - x^3 + \frac{1}{4}x^5 - \dots$$

Παράδειγμα: $\dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} = 6 \rightarrow a_3 = 1$ $\quad a_{m+3} = -\dfrac{m\, a_m}{(m+1)(m+2)(m+3)}$ $\quad \underline{m = 1, 2, \ldots}$

Για $m=1$ $\quad a_4 = -\dfrac{a_1}{4!}$

Για $m=2$ $\quad a_5 = -\dfrac{2a_2}{345} = -\dfrac{4}{5!}a_2$

Για $m=3$ $\quad a_6 = -\dfrac{3a_3^{=1}}{456} = -\dfrac{18}{6!}$

$$y(x) = a_0 + \overset{1 = y_1(x)}{a_0} + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 - \underline{\frac{a_1}{4!}x^4} - \frac{4}{5!}a_2 x^5 - \frac{18}{6!}x^6 + \ldots =$$

$$= \overbrace{a_0}^{1 = y_1(x)} + a_1\underbrace{\left(x - \frac{1}{4!}x^4 + \ldots\right)}_{y_2(x)} + a_2\underbrace{\left(x^2 - \frac{4}{5!}x^5 + \ldots\right)}_{y_3(x)} + \underbrace{\left(x^3 - \frac{18}{6!}x^6 + \ldots\right)}_{y_\mu(x)} \leftarrow$$

Γεν. λύση: $y(x) = C_1\underline{y_1(x)} + C_2\underline{y_2}(x) + C_3\underline{y_3}(x) + y_\mu(x)$

Τα y_1, y_2, y_3 λύσεις της $\quad y''' + xy' = 0$

5. Μέθοδος του Frobenius (~1900)

Σημαντικές ΔΕs (πχ Bessel) $y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{x^2-\nu^2}{x^2}}_{q(x)} y = 0$

δεν έχουν λύση της μορφής $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ γιατί το $p(x), q(x)$ απειρίζονται στο $x=0$ (όχι αναλυτικές στο $x=0$)

<u>Θεώρημα:</u> κάθε ΔΕ της μορφής: $y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0$

με τα $b(x)$ και $c(x)$ αναλυτικές στο $x=0$ έχουν

<u>τουλάχιστον μια</u> λύση της μορφής

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots$$

όπου το r οποιοσδήποτε αριθμός και $a_0 \neq 0$.

Ιδέα του Frobenius:

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0 \rightarrow x^2 y'' + x\, b(x)\, y' + c(x)\, y = 0$$

Τα $b(x)$, $c(x)$ αναλυτικά στο $x=0$ $\longrightarrow$ σειρές γύρω από το $x=0$

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \qquad c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \qquad y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+r) x^{m+r-1} \qquad y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+r)(m+r-1) x^{m+r-2}$$

$x \qquad x^2$

Αντικατάσταση

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+r)(m+r-1) x^{m+r} + (b_0 + b_1 x + \dots) \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+r) x^{m+r} + (c_0 + c_1 x + \dots) \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

$$(a_0 r x^r + a_1 (r+1) x^{r+1} + \dots) \qquad a_0 x^r + \dots$$

$$\underline{a_0 r (r-1) x^r} + \underline{b_0 a_0 r x^r} + \underline{c_0 a_0 x^r}$$

$$+ [\ ]\, x^{r+1} + [\ \dots]\, x^{r+1} + [\ ]\, x^{r+1} = 0$$

$$+ [\ ]\, x^{r+2} + [\ \dots]\, x^{r+2} \quad [\ ]\, x^{r+2}$$

Απο τους συντελεστές του x^r

$$\cancel{a_0} r(r-1) + b_0 \cancel{a_0} r + c_0 \cancel{a_0} = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0}$$

$$r^2 - r + b_0 r + c_0 = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{r^2 + (b_0 - 1) r + c_0 = 0}$$

Εξίσωση ενδετών

Indicial equation

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0$$

Οπου $b(x) = \underline{b_0} + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$

$c(x) = \underline{c_0} + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

Παρατηρείστε ότι το $b_0 = b(0)$ $c_0 = c(0)$

Θα βρίσκουμε τα r_1 και r_2 $\longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \\ y_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \end{aligned}\right\}$$

πχ $y'' + 1y' + \frac{1}{x}y = 0$ $b(x) = ;$ $c(x) = ;$

Θέλουμε $y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0$

$1 = \frac{x}{x}$ $x \leftarrow b(x)$ $b(x) = x$ $b_0 = b(0) = 0$

$\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2}$ $c(x) = x$ $c_0 = c(0) = 0$

Περιπλοκές: $r_1 = r_2$ και r_1, r_2 μιγαδικοί

και να διαφέρουν κατά ακέραιο.