

Συνοπτική παρουσίαση επιλεγμένων τμημάτων της ενότητας 8 της ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ
(σελ. 27-38) του βιβλίου:

I. Τσαλαμέγκα – I. Ρουμελιώτη, “Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία – Τόμος Α”

I. Τσαλαμέγκας – I. Ρουμελιώτης

Μάρτιος 2020

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κυλινδρικό και Σφαιρικό σύστημα συντεταγαμένων

A. Κυλινδρικό σύστημα συντεταγαμένων (r,φ,z)

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

με $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

- Αντίστροφος μετασχηματισμός

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}(y/x)$$

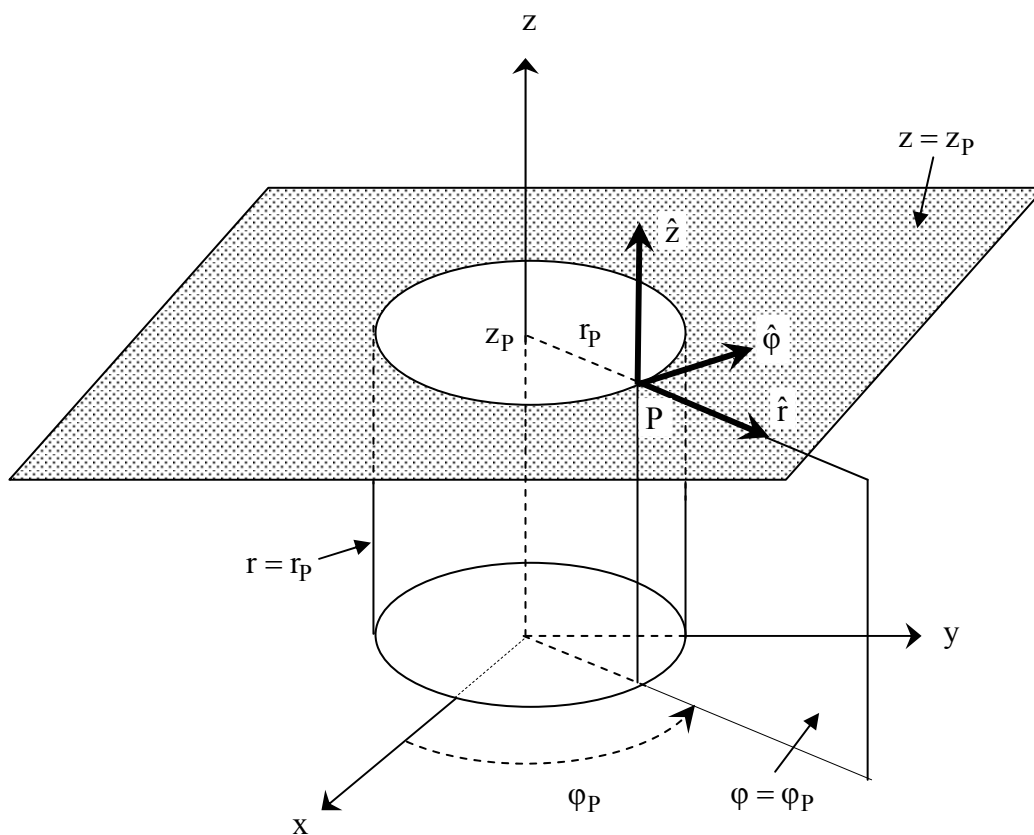
$$z = z.$$

- Συντεταγμένες επιφάνειες (Σχ.1)

S_r (με εξίσωση $r = r_p = \text{σταθ}$): Κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r .

S_φ (με εξίσωση $\varphi = \varphi_p = \text{σταθ}$): Ημιεπίπεδο.

S_z (με εξίσωση $z = z_p = \text{σταθ}$): Επίπεδο.



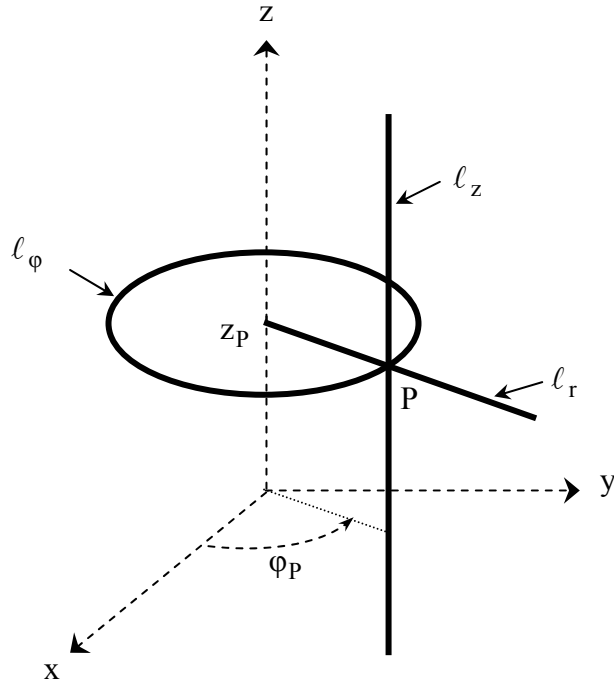
Σχήμα 1

• Συντεταγμένες καμπύλες (Σχ.2)

ℓ_r (καμπύλη των r) : $\varphi = \varphi_p = \sigma\tau\alpha\theta$, $\theta = \theta_p = \sigma\tau\alpha\theta$, $0 \leq r < \infty$.

ℓ_φ (καμπύλη των φ) : $r = r_p = \sigma\tau\alpha\theta$, $z = z_p = \sigma\tau\alpha\theta$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,

ℓ_z (καμπύλη των z) : $r = r_p = \sigma\tau\alpha\theta$, $\varphi = \varphi_p = \sigma\tau\alpha\theta$, $-\infty < z < \infty$.



Σχήμα 4

• Μοναδιαία διανύσματα- Μετρικοί συντελεστές (Σχ.1)

Με τη βοήθεια της σχέσεως

$$\bar{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = \hat{x}r \cos \varphi + \hat{y}r \sin \varphi + \hat{z}z ,$$

παίρνουμε

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) , \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) , \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

και

$$h_r \equiv \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} \right| = 1 , \quad h_\varphi \equiv \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \right| = r , \quad h_z \equiv \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \right| = 1 \quad (\text{μετρικοί συντελεστές}). \quad (1)$$

Επομένως,

$$\hat{r} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi , \quad (2\alpha)$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi , \quad (2\beta)$$

$$\hat{z} = \hat{z} . \quad (\text{Ίδιο με του καρτεσιανού συστήματος}). \quad (2\gamma)$$

(Σημείωση: Η (1α) προκύπτει άμεσα και πιο απλά από τη σχέση $\hat{r} = \bar{r} / r$).

- Στοιχεία μήκους

$$d\ell_r = h_r dr = dr, \quad d\ell_\varphi = h_\varphi d\varphi = r d\varphi, \quad d\ell_z = dz \quad (3)$$

- Στοιχεία επιφάνειας

$$dS_r = (d\ell_z)(d\ell_\varphi) = r d\varphi dz \quad (4\alpha)$$

$$dS_\varphi = (d\ell_z)(d\ell_r) = dr dz \quad (4\beta)$$

$$dS_z = (d\ell_r)(d\ell_\varphi) = r dr d\varphi. \quad (4\gamma)$$

- Στοιχείο όγκου

$$dV = (d\ell_r)(d\ell_\varphi)(d\ell_z) = r dr d\varphi dz. \quad (5)$$

Εφαρμογή: Εύρεση καρτεσιανών συνιστωσών διανύσματος από τις κυλινδρικές συνιστώσες

Δίνεται η έκφραση

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z}$$

ενός διανύσματος \vec{A} μέσω των κυλινδρικών συνιστωσών του. Να βρεθεί η έκφρασή του

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}.$$

Λύση

$$A_x = \vec{A} \cdot \hat{x} = (A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z}) \cdot \hat{x} = A_r \hat{r} \cdot \hat{x} + A_\varphi \hat{\varphi} \cdot \hat{x} + A_z \hat{z} \cdot \hat{x} \stackrel{(2)}{=} A_r \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi.$$

Ομοίως

$$A_y = \vec{A} \cdot \hat{y} = (A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z}) \cdot \hat{y} = A_r \hat{r} \cdot \hat{y} + A_\varphi \hat{\varphi} \cdot \hat{y} + A_z \hat{z} \cdot \hat{y} \stackrel{(2)}{=} A_r \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi.$$

Η συνιστώσα A_z δεν μεταβάλλεται κατά τον παραπάνω μετασχηματισμό.

Σε μητρική μορφή,

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix}$$

B. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r,θ,φ)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\text{με } 0 < r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

- Αντίστροφος μετασχηματισμός

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$

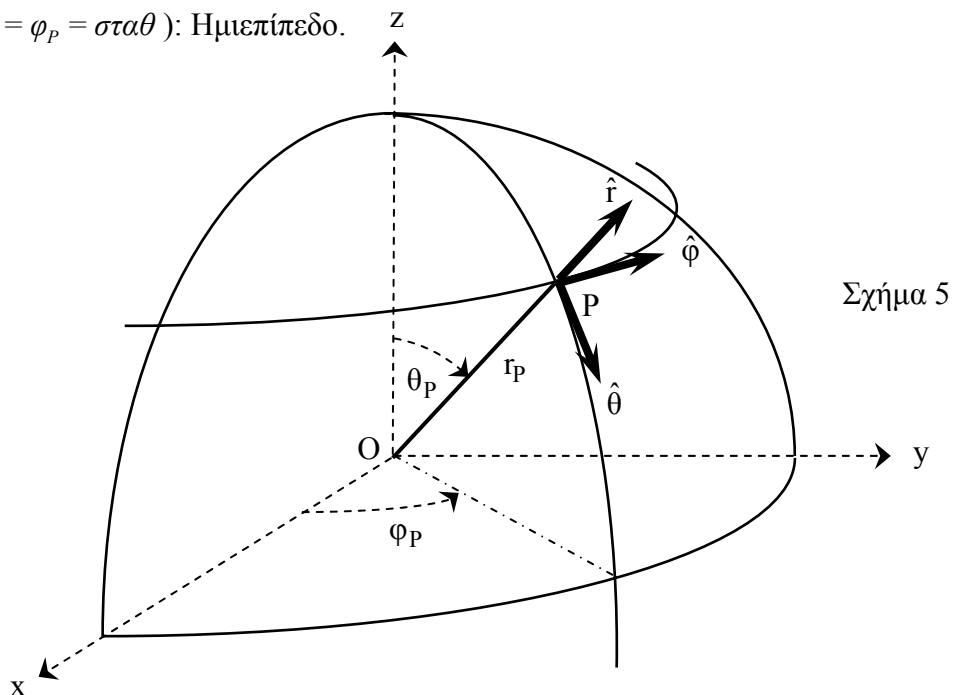
$$\varphi = \tan^{-1}(y/x).$$

• Συντεταγμένες επιφάνειες (Σχ.5)

S_r (με εξίσωση $r = r_p = \text{σταθ}$): Σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r .

S_θ (με εξίσωση $\theta = \theta_p = \text{σταθ}$): Κώνος με άξονα Oz και γενέτειρα OP.

S_φ (με εξίσωση $\varphi = \varphi_p = \text{σταθ}$): Ημιεπίπεδο.



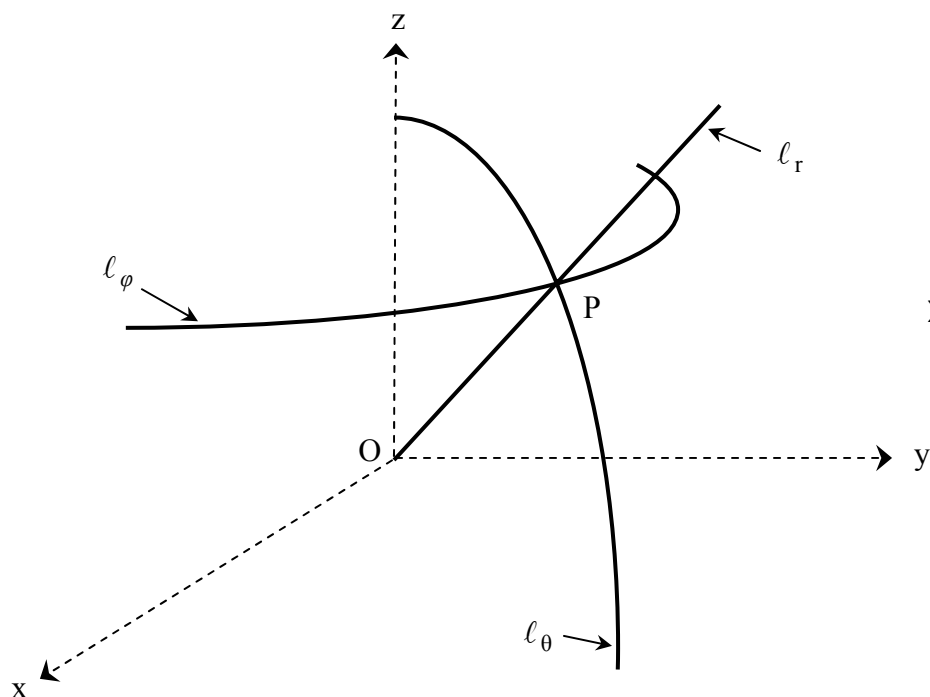
Σχήμα 5

• Συντεταγμένες καμπύλες (Σχ.6)

ℓ_r (καμπύλη των r): $\varphi = \varphi_p = \text{σταθ}$, $\theta = \theta_p = \text{σταθ}$, $0 \leq r < \infty$.

ℓ_θ (καμπύλη των θ): $r = r_p = \text{σταθ}$, $\varphi = \varphi_p = \text{σταθ}$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

ℓ_φ (καμπύλη των φ): $r = r_p = \text{σταθ}$, $\theta = \theta_p = \text{σταθ}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.



Σχήμα 6

- Μοναδιαία διανύσματα-μετρικοί συντελεστές

Με τη βοήθεια της σχέσεως

$$\vec{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) = \hat{x}r \sin \theta \cos \varphi + \hat{y}r \sin \theta \sin \varphi + \hat{z}r \cos \theta$$

προκύπτει

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

και

$$h_r \equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad h_\theta \equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r, \quad h_\varphi \equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \theta \quad (\text{μετρικοί συντελεστές}). \quad (6)$$

Επομένως,

$$\hat{r} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta \quad (7\alpha)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta, \quad (7\beta)$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \quad (\text{ίδιο με του κυλινδρικού συστήματος}). \quad (7\gamma)$$

(**Σημείωση:** Η (7α) προκύπτει άμεσα και πιο απλά από τη σχέση $\hat{r} = \vec{r} / r$).

- Στοιχεία μήκους

$$d\ell_r = h_r dr = dr, \quad d\ell_\theta = h_\theta d\theta = r d\theta, \quad d\ell_\varphi = h_\varphi d\varphi = r \sin \theta d\varphi. \quad (8)$$

- Στοιχεία επιφάνειας

$$dS_r = (d\ell_\theta)(d\ell_\varphi) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (9\alpha)$$

$$dS_\theta = (d\ell_\varphi)(d\ell_r) = r \sin \theta dr d\varphi \quad (9\beta)$$

$$dS_\varphi = (d\ell_r)(d\ell_\theta) = r dr d\theta \quad (9\gamma)$$

- Στοιχείο όγκου

$$dV = (d\ell_r)(d\ell_\theta)(d\ell_\varphi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (10)$$

(Σημείωση: Εναλλακτικά, από τον τύπο για τον όγκο σφαίρας ακτίνας r , $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, προκύπτει

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

Αυτό το στοιχείο όγκου είναι πιο εύχρηστο για ολοκληρώματα της μορφής $\int_V f(r)dV$. Για ολοκληρώματα της μορφής $\int_V f(r, \theta, \phi)dV$ πρέπει να χρησιμοποιηθεί το στοιχείο όγκου της εξίσωσης (10).)

Εφαρμογή: Εύρεση καρτεσιανών συνιστωσών διανύσματος από τις σφαιρικές του συνιστώσες

Δίνεται η έκφραση

$$\bar{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

ενός διανύσματος \bar{A} μέσω των σφαιρικών συνιστωσών του. Να βρεθεί η έκφρασή του

$$\bar{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}.$$

Λύση: Έχουμε:

$$A_x = (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}) \cdot \hat{x} = A_r \hat{r} \cdot \hat{x} + A_\theta \hat{\theta} \cdot \hat{x} + A_\phi \hat{\phi} \cdot \hat{x} \stackrel{(7)}{=} A_r \sin \theta \cos \phi + A_\theta \cos \theta \cos \phi - A_\phi \sin \phi$$

Ομοίως,

$$A_y = (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}) \cdot \hat{y} = A_r \hat{r} \cdot \hat{y} + A_\theta \hat{\theta} \cdot \hat{y} + A_\phi \hat{\phi} \cdot \hat{y} \stackrel{(7)}{=} A_r \sin \theta \sin \phi + A_\theta \cos \theta \sin \phi + A_\phi \cos \phi,$$

$$A_z = (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}) \cdot \hat{z} = A_r \hat{r} \cdot \hat{z} + A_\theta \hat{\theta} \cdot \hat{z} + A_\phi \hat{\phi} \cdot \hat{z} \stackrel{(7)}{=} A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta$$

Συνοπτική παρουσίαση επιλεγμένων τμημάτων των ενοτήτων 1-3 του ΚΑΦΑΛΑΙΟΥ 1
(σελ. 49-88) του βιβλίου:

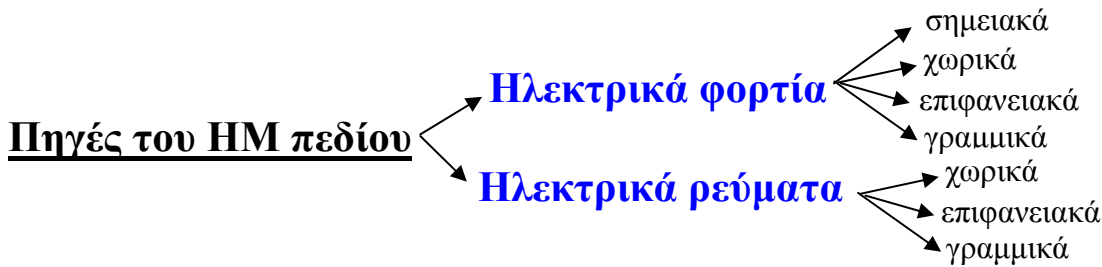
I. Τσαλαμέγκα – I. Ρουμελιώτη, “Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία – Τόμος Α”

I. Τσαλαμέγκας – I. Ρουμελιώτης

Μάρτιος 2020

ΠΗΓΕΣ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Πηγές του ΗΜ πεδίου είναι τα ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα. Ηλεκτρικά ρεύματα προκύπτουν από την διατεγμένη κίνηση ηλεκτρικού φορτίου στον χώρο, σε μία επιφάνεια, ή σε μία γραμμή.



1. Ηλεκτρικό φορτίο και πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου

1.1. Ηλεκτρικό Φορτίο (Σύμβολα q, Q . Διαστάσεις: [C])

Παραδοχές:

α. Ύπαρξη του ηλεκτρικού φορτίου

Υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικών φορτίων, τα θετικά και τα αρνητικά. Φορείς των αρνητικών φορτίων είναι τα ηλεκτρόνια, ενώ φορείς των θετικών φορτίων είναι τα πρωτόνια, καθώς και οι οπές στην περίπτωση των ημιαγωγών. Αντίθετα, τα νετρόνια είναι ηλεκτρικώς ουδέτερα (αφόρτιστα).

β. Κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου

Κάθε ηλεκτρόνιο φέρει αρνητικό φορτίο $-e$ και κάθε πρωτόνιο ή οπή φέρει φορτίο $+e$, όπου $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$. Επομένως, όλα τα φορτία που απαντώνται στη φύση είναι ακέραια πολλαπλάσια του στοιχειώδους φορτίου e .

γ. Αναλλοίωτο του ηλεκτρικού φορτίου

Το ηλεκτρικό φορτίο θεωρείται ανεξάρτητο από την θέση και την ταχύτητα των φορέων του, καθώς και από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή είναι αναλλοίωτο μέγεθος.

δ. Διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου

Σε κάθε κλειστό (απομονωμένο) σύστημα, το αλγεβρικό άθροισμα των θετικών και των αρνητικών φορτίων παραμένει σταθερό. [Κλειστό σύστημα είναι ένα σύνολο που απαρτίζεται από διάφορα μέρη, το οποίο δεν συνδέεται με πηγές με το εξωτερικό περιβάλλον]. Επομένως, το συνολικό φορτίο μιας περιοχής του χώρου, στην οποία δεν υπάρχουν πηγές, μπορεί να αυξηθεί μόνο με την εισροή θετικών φορτίων από τον περιβάλλοντα χώρο ή την εκροή αρνητικών φορτίων στον περιβάλλοντα χώρο δια μέσου του συνόρου της περιοχής. Η αρχή διατήρησης του φορτίου διατυπώνεται μαθηματικά μέσω της εξίσωσης συνεχείας (ενότητα 3).

1.2 Χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου. (Σύμβολο $\rho(\vec{r}, t)$. Διαστάσεις $[C/m^3]$)

Εδώ θεωρούμε την περίπτωση όπου το ηλεκτρικό φορτίο είναι κατανομημένο στο εσωτερικό μιας περιοχής V του χώρου. Το φορτίο αποτελείται στην πραγματικότητα από πάρα πολλά στοιχειώδη φορτία q_1, q_2, \dots, q_N , θεωρούμενα ως σημειακά, τοποθετημένα στις θέσεις $\vec{r}_1', \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_N'$ των φορέων τους (Σχ.1). Επειδή για μεγάλα N αυτό το διακριτό μοντέλο δεν είναι λειτουργικό, χρησιμοποιούμε ισοδύναμες συνεχείς μακροσκοπικές κατανομές φορτίου θεωρώντας ότι το φορτίο κατανέμεται συνεχώς σε ολόκληρο τον χώρο V . (Όπως ξέρουμε, κάτι εντελώς ανάλογο ισχύει στην μηχανική σχετικά με την μάζα και την έννοια της πυκνότητας μάζας).

1.3 Επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου. (Σύμβολο σ . Διαστάσεις $[C/m^2]$.)

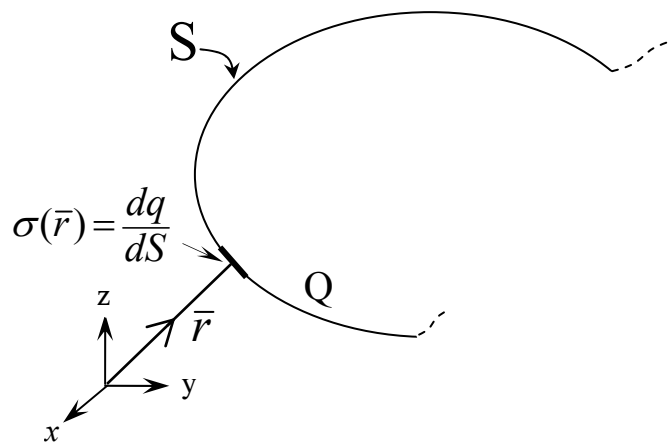
Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου το ηλεκτρικό φορτίο είναι κατανομημένο σε μια επιφάνεια S (Σχ.3).

Ορισμός: Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στη θέση $\vec{r} \in S$ τη χρονική στιγμή t ονομάζουμε το μέγεθος

$$\sigma(\vec{r}, t) = \frac{dq}{dS} \quad (3)$$

όπου dq είναι το φορτίο εντός “στοιχειώδους” επιφάνειας dS με κεντροειδές το σημείο \vec{r} , κατά τη χρονική στιγμή t (Σχ.3). Το συνολικό φορτίο της επιφάνειας S τη χρονική στιγμή t ισούται με

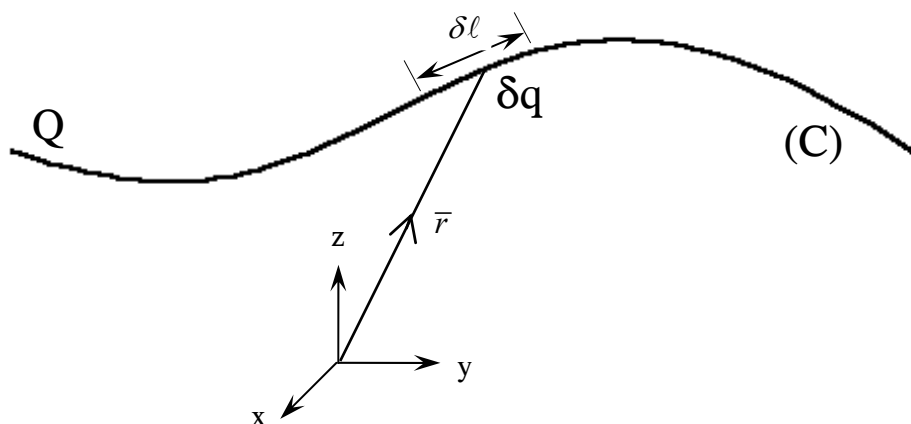
$$Q(t) = \int_S \sigma(\vec{r}, t) dS. \quad (4)$$



Σχήμα 3

1.4 Γραμμική πυκνότητα φορτίου (σύμβολο λ , διαστάσεις $[C/m]$).

Όταν το ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται κατά μήκος ενός νηματοειδούς δρόμου C (Σχ.4),



Σχήμα 4

για την περιγραφή της κατανομής του χρησιμοποιείται το μέγεθος *γραμμική πυκνότητα φορτίου* (σύμβολο λ , διαστάσεις [C/m]), που ορίζεται με τη σχέση

$$\lambda(\vec{r}, t) = \lim_{\delta\ell \rightarrow 0} \frac{\delta q}{\delta\ell} = \frac{dq}{d\ell}, \quad (5)$$

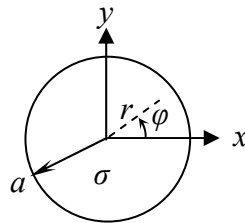
όπου δq είναι το φορτίο εντός στοιχείου μήκους $\delta\ell$ με κεντροειδές το σημείο \vec{r} , κατά τη χρονική στιγμή t .

Το συνολικό φορτίο της γραμμής ισούται με

$$Q(t) = \int_C \lambda(\vec{r}, t) d\ell. \quad (6)$$

1.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Ο κυκλικός δίσκος ακτίνας a που δείχνει το Σχ.5 φέρει επιφανειακό φορτίο με πυκνότητα $\sigma = \sigma_0 (r/a)^2 \cos^2 \varphi$ ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Να βρεθεί το ολικό φορτίο του δίσκου.

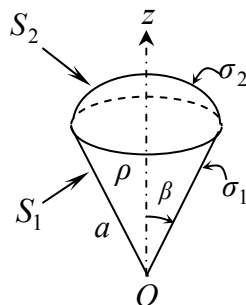


Σχήμα 5

Λύση: Το ολικό φορτίο είναι

$$Q = \int \sigma dS = \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\sigma_0 \frac{r^2}{a^2} \cos^2 \varphi \right) r dr d\varphi = \frac{\sigma_0}{a^2} \int_{r=0}^a r^3 dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \sigma_0 \frac{a^2}{4} \pi.$$

Παράδειγμα 2: Η σφαιροκωνική διάταξη που δείχνει το Σχ.6 περιλαμβάνει α) την κωνική επιφάνεια S_1 με $0 \leq r \leq a$, $\theta = \beta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, η οποία φέρει επιφανειακό φορτίο $\sigma_1 = \sigma_0 e^{-r^2/a^2} \sin^2 \varphi$, και β) το σφαιρικό τόξο S_2 με $r = a$, $0 \leq \theta \leq \beta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ το οποίο φέρει επιφανειακό φορτίο $\sigma_2 = \sigma_0 \sin \theta \cos^2 \varphi$, όπου σ_0 σταθερά. Στο εσωτερικό της διάταξης υπάρχει χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho = \rho_0 \frac{r^2}{a^2} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi$, όπου ρ_0 σταθερά. Να υπολογιστεί το ολικό φορτίο της διάταξης.



Σχήμα 6

Λύση: Το ολικό φορτίο είναι

$$\begin{aligned}
Q &= \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 + \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 + \int \rho dV = \\
&= \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_1 \underbrace{r \sin \beta d\varphi dr}_{dS_1} + \int_{\theta=0}^{\beta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_2 \underbrace{a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}_{dS_2} + \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\beta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \underbrace{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}_{dV} = \\
&= \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_0 e^{-\frac{r^2}{a^2}} r \sin^2 \varphi \sin \beta d\varphi dr + \int_{\theta=0}^{\beta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_0 a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi + \\
&+ \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\beta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 \frac{r^4}{a^2} \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi dr d\theta d\varphi = \\
&= \sigma_0 \pi \sin \beta \int_{r=0}^a e^{-\frac{r^2}{a^2}} r dr + \pi \sigma_0 a^2 \int_{\theta=0}^{\beta} \sin^2 \theta d\theta + \frac{\rho_0}{a^2} \frac{a^5}{5} \pi \int_{\theta=0}^{\beta} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \\
&= \sigma_0 \pi \frac{a^2 (e-1)}{2e} \sin \beta + \frac{\pi \sigma_0 a^2}{4} (2\beta - \sin 2\beta) + \frac{\pi \rho_0 a^3}{15} (1 - \cos^3 \beta).
\end{aligned}$$

2. Ηλεκτρικό ρεύμα: Ένταση και πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

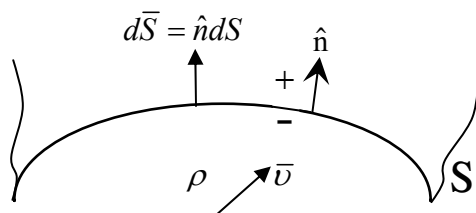
Οι ειδικές περιπτώσεις όπου το ηλεκτρικό φορτίο μπορεί να θεωρηθεί ότι ευρίσκεται σε στατιστική ηρεμία δεν έχουν πρακτικό ενδιαφέρον. (Πραγματική ηρεμία είναι αδύνατη σε κάθε περίπτωση λόγω της θερμικής κίνησης των ηλεκτρονίων, των πρωτονίων και των οπών.)

Κάθε διατεταγμένη κίνηση χωρικού ηλεκτρικού φορτίου ρ σε μια περιοχή V του χώρου, επιφανειακού ηλεκτρικού φορτίου σ σε μια επιφάνεια S , ή γραμμικού ηλεκτρικού φορτίου σε μια γραμμή C , παράγει ηλεκτρικό ρεύμα που χαρακτηρίζεται ως χωρικό, επιφανειακό ή γραμμικό, αντίστοιχα. Για την ποσοτική περιγραφή του ηλεκτρικού ρεύματος χρησιμοποιείται α) η έντασή του (βαθμωτό, ολοκληρωτικό μέγεθος) και β) η πυκνότητά του (διανυσματικό, σημειακό μέγεθος).

2.1 Χωρικό ηλεκτρικό ρεύμα

2.1.A. Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (σύμβολα: $i(t)$, I . Διαστάσεις $[A]$)

Θεωρούμε (Σχ.1) προσανατολισμένη επιφάνεια S , φυσική ή νοητή, σε χώρο όπου χωρικό ηλεκτρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(\vec{r}, t)$ κινείται με ταχύτητα $\vec{v}(\vec{r}, t)$ παράγοντας χωρικό ηλεκτρικό ρεύμα. Η επιφάνεια S μπορεί να είναι είτε ανοικτή, όπως στο Σχ.1, είτε κλειστή. Ο προσανατολισμός της γίνεται με βάση το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \hat{n} .



Σχήμα 1

Ορισμός: Ένταση χωρικού ηλεκτρικού ρεύματος που διαπερνά την επιφάνεια S ονομάζουμε το μέγεθος

$$i(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\delta t} \quad (1)$$

όπου δQ είναι το φορτίο που διέρχεται κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t)$ από την επιφάνεια αυτή κατά τη θετική φορά (δηλαδή με κατεύθυνση από την αρνητική προς τη θετική όψη της S).

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος αναφέρεται σε ολόκληρη την επιφάνεια S , δηλαδή είναι ολοκληρωτικό μέγεθος.

2.1.B. Χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος (σύμβολο $\bar{J}(\vec{r}, t)$). Διαστάσεις [A/m^2])

Ένα σημειακό μέγεθος, το οποίο επίσης περιγράφει τη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος, είναι η χωρική του πυκνότητα, η οποία συμβολίζεται με $\bar{J}(\vec{r}, t)$ και ορίζεται με τη σχέση

$$\bar{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \bar{v}(\vec{r}, t), \quad (2)$$

όπου $\bar{v}(\vec{r}, t)$ είναι η ταχύτητα του φορτίου $dq = \rho(\vec{r}, t) dV$ στη θέση \vec{r} τη χρονική στιγμή t . [Εξ ορισμού, επομένως, η χωρική πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος έχει την διεύθυνση και την φορά της ταχύτητας στην περίπτωση θετικών φορτίων. Αν το φορτίο είναι αρνητικό, τα διανύσματα της πυκνότητας \bar{J} και της ταχύτητας \bar{v} είναι αντίρροπα.]

Ο τύπος (2) ισχύει για αμιγώς θετικά ή για αμιγώς αρνητικά φορτία. Αν στο ηλεκτρικό ρεύμα συμμετέχουν συγχρόνως αρνητικά και θετικά φορτία (π.χ., θετικά και αρνητικά ιόντα σε ηλεκτρολυτικά διαλύματα, ηλεκτρόνια και οπές σε ημιαγωγούς κ.λ.π) με μακροσκοπική πυκνότητα ρ^+ και ρ^- και μέση ταχύτητα \bar{v}^+ και \bar{v}^- , αντίστοιχα, τότε η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος είναι

$$\bar{J} = \rho^+ \bar{v}^+ + \rho^- \bar{v}^-.$$

Παρατήρηση 1

Αξίζει να τονιστεί ότι, γενικά, η ρευματική πυκνότητα \bar{J} δεν ισούται με το γινόμενο της μέσης πυκνότητας $\rho = \rho^+ + \rho^-$ επί κάποια μέση ταχύτητα. Μάλιστα είναι δυνατό να έχουμε $\rho=0$ αλλά $\bar{J} \neq 0$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των αγωγών έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα που οφείλεται αποκλειστικά στην μέση κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων ($\bar{v}_e \neq 0$, η οποία γίνεται παρουσία ενός πλέγματος από ακίνητα πρωτόνια ($\bar{v}_p = 0$), όπου, λόγω της ηλεκτρικής ουδετερότητας του αγωγού, ισχύει η σχέση $\rho_e = -\rho_p$, δηλαδή έχουμε $\rho = \rho_e + \rho_p = 0$. Στην περίπτωση αυτή,

$$\bar{J} = \rho_p \bar{v}_p + \rho_e \bar{v}_e = \rho_e \bar{v}_e \neq 0$$

μολονότι $\rho = 0$.

2.1.G. Αλληλοσυσχέτιση της έντασης I και της χωρικής πυκνότητας \bar{J}

Στην ενότητα αυτή θα βρούμε τη σχέση που συνδέει την ένταση I με τη χωρική πυκνότητα \bar{J} .

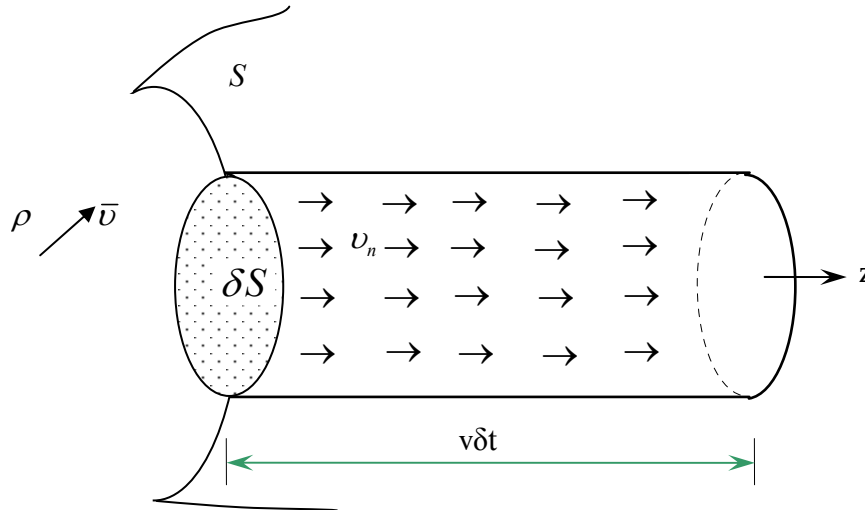
Στο Σχ.2 ξαναδείχνουμε την επιφάνεια S του Σχ.1, καθώς και ένα στοιχείο δS αυτής. Το φορτίο $[\delta Q]_{\delta S}$ που διαπερνά την δS στο χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t)$ ισούται με το φορτίο που εμπεριέχεται στον κύλινδρο βάσεως δS και μήκους $v_n \delta t$, δηλαδή

$$[\delta Q]_{\delta S} = \underbrace{\rho(\delta S) v_n \delta t}_{\text{ογκος}} \quad (3)$$

όπου v_n είναι η κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα της ταχύτητας. Επομένως, σύμφωνα με τον

ορισμό (1), η ένταση $[dI]_{\delta S}$ του ηλεκτρικού ρεύματος που διέρχεται δια μέσου της δS από την αρνητική προς τη θετική της όψη είναι

$$[dI]_{\delta S} = \frac{[\delta Q]_{\delta S}}{\delta t} \stackrel{(3)}{=} \rho v_n dS \stackrel{(2)}{=} J_n dS = \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \vec{J} \cdot d\vec{S} . \quad (4)$$



Σχήμα 2

Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει ολόκληρη την S βρίσκεται από την (4) με ολοκλήρωση:

$$I = \int_S J_n dS = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} . \quad (5)$$

Παρατήρηση: Αν $J_n = \text{σταθ.}$ (ομοιόμορφη ροή ηλεκτρικού ρεύματος), η (5) δίνει

$$I = J_n S . \quad (6)$$

2.2. Επιφανειακό ηλεκτρικό ρεύμα

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου επιφανειακό ηλεκτρικό φορτίο, καταμετρημένο σε μια επιφάνεια S με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma(\vec{r}, t)$ (Σχ.3), κινείται στην επιφάνεια αυτή με ταχύτητα $\vec{v}(\vec{r}, t)$ παράγοντας ηλεκτρικό ρεύμα. Για την ποσοτική περιγραφή του ηλεκτρικού ρεύματος χρησιμοποιείται α) η ένταση I (βαθμωτό, ολοκληρωτικό μέγεθος) και η επιφανειακή πυκνότητα \vec{K} (διανυσματικό, σημειακό μέγεθος).

2.2.A. Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (σύμβολα: $i(t)$, I . Διαστάσεις $[A]$)

Θεωρούμε (Σχ.3) καμπύλη C , φυσική ή νοητή, επάνω στην επιφάνεια S . Το στοιχείο μήκους της καμπύλης συμβολίζεται με $d\ell$ και το κάθετο στην καμπύλη μοναδιαίο διάνυσμα με \hat{n}_\perp . (Το \hat{n}_\perp είναι εφαπτομενικό στην επιφάνεια S .)

Ορισμός: Ένταση του επιφανειακού ηλεκτρικού ρεύματος που διαπερνά την καμπύλη C ονομάζουμε το μέγεθος

$$i(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\delta t} \quad (7)$$

όπου δQ είναι το φορτίο που διέρχεται κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t)$ από την καμπύλη.

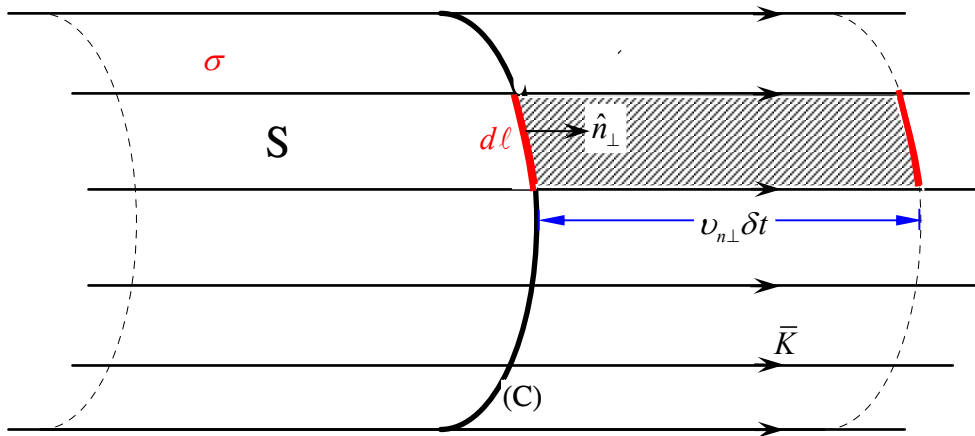
Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος αναφέρεται σε ολόκληρη την καμπύλη C , δηλαδή είναι ολοκληρωτικό μέγεθος.

2.2.B. Επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος (σύμβολο $\bar{K}(\bar{r}, t)$). Διαστάσεις $[A/m]$

Εναλλακτικά, η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος επάνω στην επιφάνεια S μπορεί να περιγραφεί με την επιφανειακή του πυκνότητα, η οποία συμβολίζεται με $\bar{K}(\bar{r}, t)$ και ορίζεται με τη σχέση

$$\bar{K}(\bar{r}, t) = \sigma(\bar{r}, t) \bar{v}(\bar{r}, t), \quad (8)$$

όπου $\bar{v}(\bar{r}, t)$ είναι η ταχύτητα του φορτίου $dq = \sigma(\bar{r}, t) dS$ στη θέση \bar{r} τη χρονική στιγμή t .



Σχήμα 3

2.2.Γ. Αλληλοσυσχέτιση της έντασης I και της επιφανειακής πυκνότητας \bar{K} .

Θα βρούμε τώρα τη σχέση που συνδέει την ένταση I με τη επιφανειακή πυκνότητα \bar{K} .

Το φορτίο $[\delta Q]_{d\ell}$ που διαπερνά το στοιχείο μήκους $d\ell$ της C στο χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t)$ ισούται με το φορτίο που εμπεριέχεται στην ταινία πλάτους $d\ell$ και μήκους $v_{n\perp} \delta t$ (Σχ.3), δηλαδή

$$[\delta Q]_{d\ell} = \underbrace{\sigma(d\ell) v_{n\perp} \delta t}_{\text{εμβαδο ταινίας}}, \quad (9)$$

όπου $v_{n\perp} = \hat{n}_{\perp} \cdot \bar{v}$ είναι η κάθετη στην C συνιστώσα της ταχύτητας. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό (7), η ένταση $[dI]_{d\ell}$ του ηλεκτρικού ρεύματος που διέρχεται δια μέσου του $d\ell$ είναι

$$[dI]_{d\ell} = \frac{[\delta Q]_{d\ell}}{\delta t} \stackrel{(9)}{=} \sigma v_{n\perp} d\ell \stackrel{(8)}{=} K_{n\perp} d\ell, \quad (10)$$

όπου $K_{n\perp} = \hat{n}_{\perp} \cdot \bar{K}$ είναι η κάθετη στην καμπύλη συνιστώσα της επιφανειακής πυκνότητας \bar{K} .

Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει ολόκληρη την C βρίσκεται από την (10) με ολοκλήρωση:

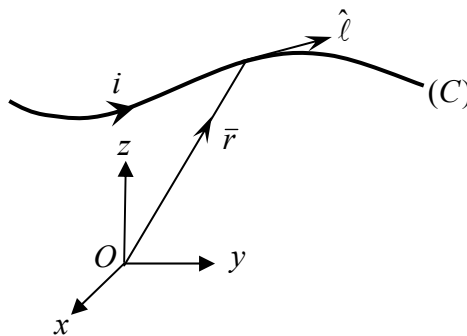
$$I = \int_C K_{n\perp} d\ell. \quad (11)$$

Παρατήρηση: Αν $K_{n\perp} = \text{σταθ.}$ (ομοιόμορφη ροή ηλεκτρικού ρεύματος), η (11) δίνει

$$I = K_{n\perp} \ell. \quad (12)$$

2.3. Γραμμικό ηλεκτρικό ρεύμα (σύμβολο i , διαστάσεις $[A]$).

Όταν η ροή του ρεύματος γίνεται κατά μήκος μίας καμπύλης C (Σχ.4), τότε η ρευματική πηγή χαρακτηρίζεται ως γραμμική. Η περιγραφή της γίνεται με το μέγεθος $i(\vec{r}, t) \hat{\ell}$, όπου $i(\vec{r}, t)$ είναι η ένταση του ρεύματος στη θέση \vec{r} την χρονική στιγμή t και $\hat{\ell}$ το εφαπτομενικό στη γραμμή, στη θέση \vec{r} , μοναδιαίο διάνυσμα.



Σχήμα 4

3. Συσχέτιση των πυκνοτήτων φορτίου και ρεύματος: Εξίσωση συνέχειας

Οι χωρικές πυκνότητες του ηλεκτρικού φορτίου και του ηλεκτρικού ρεύματος αλληλοσυνδέονται μέσω της εξίσωσης συνέχειας. Η εξίσωση συνέχειας αποτελεί την μαθηματική διατύπωση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Θεωρούμε όγκο V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S (Σχ.1), ο οποίος φέρει ηλεκτρικά φορτία και ηλεκτρικά ρεύματα (γραμμικά, επιφανειακά, χωρικά ή συνδυασμό αυτών). Έστω $Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}(t)$ το ολικό φορτίο εντός του όγκου V την χρονική στιγμή t . Το $Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$ μεταβάλλεται με τον χρόνο επειδή είναι δυνατό να έχουμε εκροή φορτίου στον περιβάλλοντα χώρο (ή εισροή φορτίου από τον περιβάλλοντα χώρο). Ο ρυθμός (ή, αλλιώς, η ταχύτητα) μεταβολής του φορτίου $Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$ ισούται με

$$\frac{d}{dt} Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}(t).$$

Έστω $Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}(0) = Q_0$ το ολικό φορτίο στον όγκο V την χρονική στιγμή $t = 0$. Σύμφωνα με την αρχή διατηρήσεως του φορτίου, η διαφορά

$$\Delta Q = Q_0 - Q_{\varepsilon\sigma\omega\tau}(t) = Q_{\varepsilon\xi}(t) \quad (1)$$

ισούται με το φορτίο το οποίο εξέρρευσε¹ από τον όγκο V κατά το χρονικό διάστημα $(0, t)$ διαμέσου της επιφάνειας S .

¹ Εφ' όσον $\Delta Q > 0$. Αν $\Delta Q < 0$, το φορτίο στην πραγματικότητα εισέρρευσε στον όγκο V .

Με παραγωγή ως προς τον χρόνο, από την (1) προκύπτει

$$\frac{dQ_{\varepsilon_s}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[Q(0) - Q_{\varepsilon\omega\tau}(t)] = -\frac{dQ_{\varepsilon\omega\tau}(t)}{dt}. \quad (2)$$

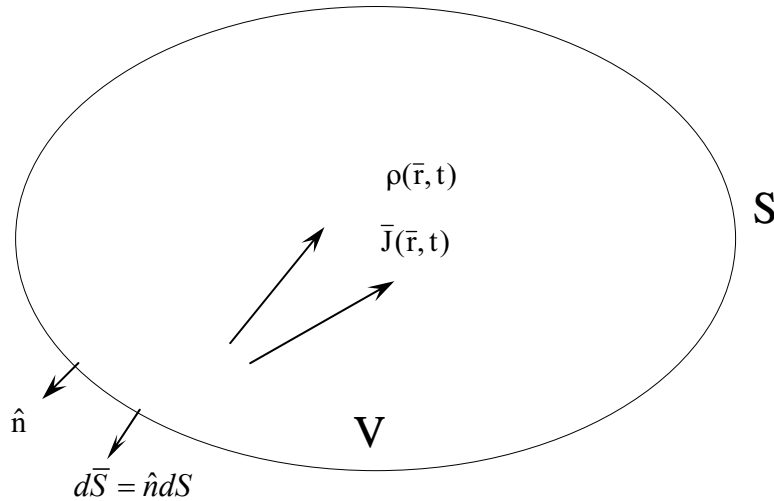
Η ποσότητα $dQ_{\varepsilon_s}(t)/dt$ στο αριστερό μέλος της (2) ισούται, εξ ορισμού, με την ένταση $I(t)$ του ρεύματος δια μέσου της S κατά τη χρονική στιγμή t , δηλαδή

$$\frac{dQ_{\varepsilon_s}(t)}{dt} = I(t). \quad (3)$$

Με αντικατάσταση από την (2) στην (3), παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$I = -\frac{dQ_{\varepsilon\omega\tau}(t)}{dt}. \quad (4)$$

Η σχέση (4) αποτελεί την πιο γενική διατύπωση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου. Τα εμπλεκόμενα σε αυτή φορτία και ρεύματα μπορεί να είναι οποιασδήποτε μορφής (χωρικά επιφανειακά κ.λ.π.).



Σχήμα 1

3.1. Εξίσωση συνέχειας σε ολοκληρωτική μορφή

Αν τα ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα στον όγκο V είναι χωρικά με πυκνότητες $\rho(\vec{r}, t)$ και $\vec{J}(\vec{r}, t)$, αντίστοιχα, τότε

$$Q_{\varepsilon\omega\tau}(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV, \quad I = \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}. \quad (5)$$

Επομένως,

$$\frac{dQ_{\varepsilon\omega\tau}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV. \quad (6)$$

[Η εναλλαγή των τελεστών $\frac{d}{dt}$ και \int_V κατά το τελευταίο βήμα στην (6) επιτρέπεται λόγω της υποθεθείσης συνεχείας της ρ .] Με αντικατάσταση από τις (5) και (6) στην (4) προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\oint_S \bar{J}(\bar{r}, t) \cdot d\bar{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\bar{r}, t) dV \quad (\text{ολοκληρωτική μορφή εξίσωσης συνεχείας}), \quad (7)$$

το οποίο αποτελεί την υπό ολοκληρωτική μορφή διατύπωση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου. Η (7) ισχύει για οποιαδήποτε εκλογή του όγκου V .

3.2. Εξίσωση συνεχείας σε διαφορική (σημειακή) μορφή

Με χρήση του θεωρήματος της αποκλίσεως (Gauss) της διανυσματικής ανάλυσης,

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = \int_V (\nabla \cdot \bar{J}) dV, \quad (8)$$

η (7) γράφεται διαδοχικά ως εξής;

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{J}) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\bar{r}, t) dV = -\int_V \frac{\partial \rho(\bar{r}, t)}{\partial t} dV \Rightarrow \int_V \left(\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (9)$$

Επειδή ο όγκος V είναι αυθαίρετος, η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (9) -**υπό την προϋπόθεση ότι είναι συνεχής**- πρέπει να μηδενίζεται παντού. [**Απόδειξη:** Αν, αντιθέτως, θεωρηθεί ότι, π.χ.,

$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ σε κάποιο σημείο P , τότε, λόγω της υποθεθείσης συνεχείας της ολοκληρωτέας συναρτήσεως, υπάρχει περιοχή V_P του σημείου P τέτοια ώστε $\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ σε κάθε σημείο της. Για την περιοχή αυτή, επομένως, ισχύει η σχέση

$$\int_{V_P} \left(\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV > 0,$$

η οποία αντίκειται στην (9)]. Συνεπώς,

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\text{διαφορική μορφή εξίσωσης συνεχείας}). \quad (10)$$

Το αποτέλεσμα (10) αποτελεί την σημειακή μορφή της αρχής διατηρήσεως του φορτίου. Η (10) (καθώς και η ολοκληρωτική της εκδοχή, εξ.(7)) ονομάζεται **εξίσωση συνεχείας** όπως είδαμε, η εξαγωγή της στηρίχθηκε στην αρχή διατηρήσεως του φορτίου.

Σημείωση: Η απόκλιση, $\nabla \cdot \bar{J}$, του διανύσματος

$$\bar{J} = J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z} = J_r \hat{r} + J_\phi \hat{\phi} + J_z \hat{z} = J_r \hat{r} + J_\theta \hat{\theta} + J_\phi \hat{\phi}$$

δίνεται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{J} &= \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r J_r)}{\partial r} + \frac{\partial J_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 J_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (J_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial J_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (11)$$

στο καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Ένας ισοδύναμος ορισμός,

ανεξάρτητος από σύστημα συντεταγμένων, είναι ο εξής:

$$\nabla \cdot \bar{J}(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{J} \cdot d\vec{S}}{V}, \quad (12)$$

όπου ο όγκος V , με σύνορο την επιφάνεια S , τείνει στο μηδέν έχοντας συνεχώς στο εσωτερικό του το σημείο $\vec{r}(x, y, z)$ στο οποίο υπολογίζουμε την απόκλιση.

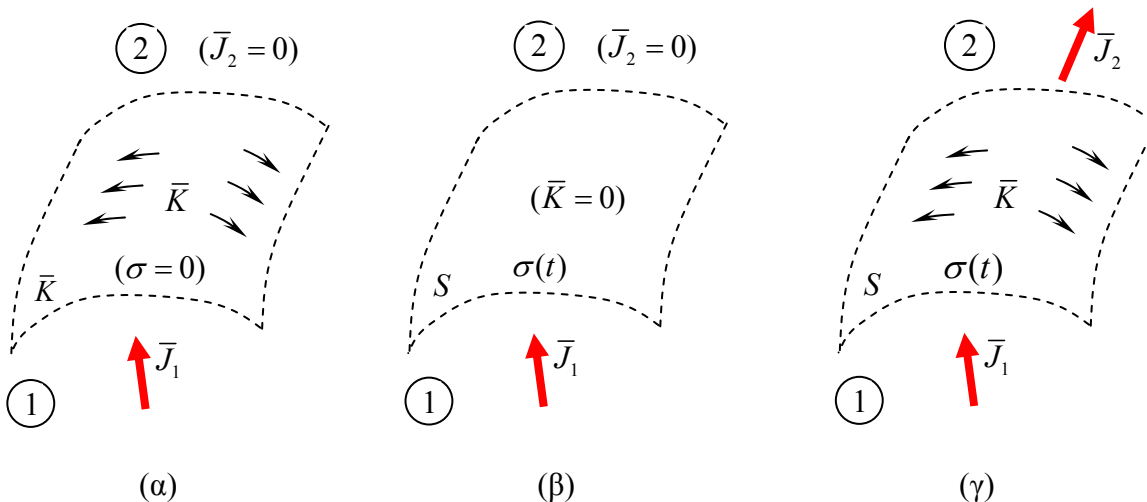
Σχόλια-παρατηρήσεις

Η διαφορική μορφή, εξ. (10), της εξίσωσης συνεχείας ισχύει μόνο σε σημεία όπου η χωρική συνάρτηση \bar{J} είναι συνεχής. Αντίθετα, σε σημεία ασυνέχειας της \bar{J} , κάποιες από τις παραγώγους που απαντώνται στις (11) δεν υπάρχουν, οπότε η απόκλιση $\nabla \cdot \bar{J}$ δεν ορίζεται σε αυτά τα σημεία. Παραδείγματα ασυνέχειας στην \bar{J} δείχνουμε στις διατάξεις του Σχ.2.

Στην περίπτωση του Σχ.2(α), στην περιοχή 1 ρέει χωρικό ρεύμα \bar{J}_1 . Όταν φθάσει στην επιφάνεια S που διαχωρίζει την περιοχή 1 από την περιοχή 2, το ρεύμα αυτό μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε επιφανειακό ρεύμα \bar{K} . Επομένως, η χωρική πυκνότητα του ρεύματος είναι \bar{J}_1 στα σημεία της κάτω όψεως της S και μηδενική ($\bar{J}_2 = 0$) στα σημεία της επάνω όψεως, δηλαδή ασυνεχής (μη παραγωγίσιμη).

Στην περίπτωση του Σχ.2(β), το χωρικό ρεύμα \bar{J}_1 της περιοχής 1, αντί να μετατραπεί σε επιφανειακό, αποθέτει στην διαχωριστική επιφάνεια S το φορτίο που μεταφέρει, το οποίο τώρα γίνεται επιφανειακό $\sigma(t)$, συνεχώς αυξανόμενο με την πάροδο του χρόνου. Επομένως, και πάλι η χωρική πυκνότητα του ρεύματος είναι \bar{J}_1 στα σημεία της κάτω όψεως της S και μηδενική ($\bar{J}_2 = 0$) στα σημεία της επάνω όψεως, δηλαδή ασυνεχής (μη παραγωγίσιμη).

Στο Σχ.2(γ) έχουμε συνδυασμό των περιπτώσεων (α) και (β). Τώρα ένα μέρος του χωρικού ρεύματος \bar{J}_1 μετατρέπεται σε επιφανειακό ρεύμα \bar{K} , ένα άλλο μέρος αποθέτει στην επιφάνεια S συνεχώς αυξανόμενο επιφανειακό φορτίο $\sigma(t)$, ενώ το υπόλοιπο μέρος του ρεύματος συνεχίζει την πορεία του ως χωρικό, \bar{J}_2 , στην περιοχή 2. Είναι φανερό ότι $\bar{J}_1 \neq \bar{J}_2$ στα σημεία των δύο όψεων της S , δηλαδή η χωρική πυκνότητα του ρεύματος είναι και τώρα ασυνεχής (μη παραγωγίσιμη).



Σχήμα 2. (α) Το χωρικό ρεύμα \bar{J}_1 μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε επιφανειακό ρεύμα \bar{K} στην επιφάνεια S . Στην S δεν έχουμε συσσώρευση φορτίου ($\sigma = 0$). Στην περιοχή 2 είναι $\bar{J}_2 = 0$. (β) Το \bar{J}_1 αποθέτει το φορτίο του στην S , οπότε $\sigma = \sigma(t)$. Στην S δεν έχουμε επιφανειακό ρεύμα ($\bar{K} = 0$). Στην περιοχή 2 είναι $\bar{J}_2 = 0$. (γ) Το \bar{J}_1 διαιρείται στο επιφανειακό ρεύμα \bar{K} και στο χωρικό ρεύμα \bar{J}_2 , ενώ μέρος του φορτίου του συσσωρεύεται στην S ($\sigma = \sigma(t)$).

3.3. Οριακή συνθήκη της εξίσωσης συνεχείας

Σε περιπτώσεις όπως αυτές του Σχ. 2, η διαφορική μορφή της εξίσωσης συνεχείας δεν ισχύει στα σημεία της επιφάνειας S , λόγω της παρουσίας επιφανειακών φορτίων και ρευμάτων και της επακόλουθης ασυνέχειας της \bar{J} στα σημεία της. Στα σημεία μιας τέτοιας επιφάνειας, η εξίσωση συνεχείας ισοδυναμεί με την οριακή συνθήκη

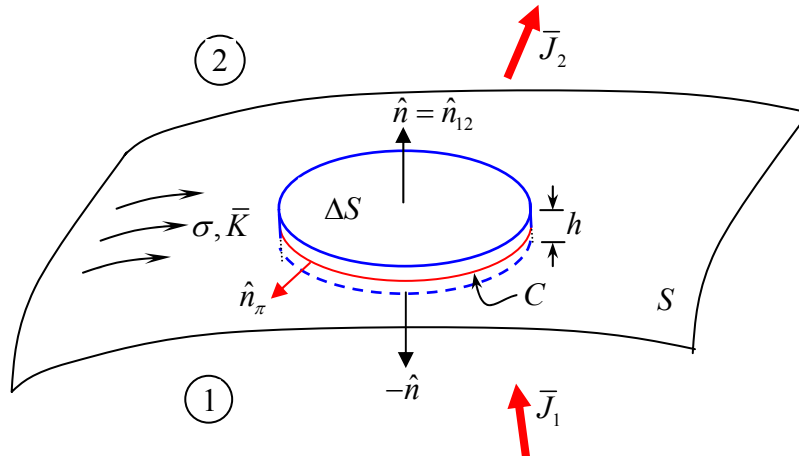
$$\hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\nabla \cdot \bar{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (13)$$

η οποία δείχνει πως σχετίζεται η ασυνέχεια που εμφανίζει η \bar{J} στα σημεία της S με τις επιφανειακές πηγές \bar{K} και $\sigma(t)$ που υπάρχουν εκεί. Στην (13), \hat{n} είναι το κάθετο στην S μοναδιαίο διάνυσμα με φορά από την όψη 1 προς την όψη 2, \bar{J}_1 και \bar{J}_2 είναι οι χωρικές πυκνότητες ρεύματος στα σημεία των δύο όψεων της S και $\nabla \cdot \bar{K}$ είναι η επιφανειακή απόκλιση του \bar{K} .

Για την απόδειξη της (13), εφαρμόζουμε τη γενική εξίσωση (4),

$$I = -\frac{dQ_{\text{εσωτ}}(t)}{dt}, \quad (4)$$

επιλέγοντας ως όγκο V μια κυλινδρική περιοχή σε μορφή νομίσματος με βάσεις, εμβαδού ΔS , τη μία βάση στην περιοχή 1 κάτω από την επιφάνεια S και την άλλη στην περιοχή 2 επάνω από την S , σε πολύ μικρή απόσταση h μεταξύ τους ($h \rightarrow 0$) (Σχ.3).



Σχήμα 3

Στην (4), I είναι το συνολικό ρεύμα που διαπερνά την κλειστή επιφάνεια του κυλίνδρου, το οποίο ισούται με

$$I = I_{\text{χωρ}} + I_{\text{επιφ}} \quad (14)$$

όπου

$$\begin{aligned} I_{\text{χωρ}} &= \oint_{S_{\text{κυλ}}} \bar{J} \cdot d\bar{S} = \int_{\text{επάνω βση}} \bar{J}_2 \cdot d\bar{S} + \int_{\text{κάτω βση}} \bar{J}_1 \cdot d\bar{S} + \int_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} \bar{J} \cdot d\bar{S} \\ &= \int_{\text{επάνω βση}} \bar{J}_2 \cdot \hat{n} dS + \int_{\text{κάτω βση}} \bar{J}_1 \cdot (-\hat{n}) dS + \int_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} \bar{J} \cdot d\bar{S} \\ &= \hat{n} \cdot \bar{J}_2(\bar{r}_2, t) \Delta S + (-\hat{n}) \cdot \bar{J}_1(\bar{r}_1, t) \Delta S + \int_{\text{παράπλευρη επιφάνεια}} \bar{J} \cdot d\bar{S}. \end{aligned} \quad (15)$$

Στο τελευταίο βήμα στην (15) εφαρμόσαμε το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα στην επάνω βάση και την κάτω βάση, όπου \bar{r}_1 και \bar{r}_2 είναι κατάλληλα σημεία των βάσεων αυτών, αντίστοιχα. (Τα \bar{r}_1 και \bar{r}_2 δεν παίζουν κανένα ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα και δεν χρειάζεται να τα προσδιορίσουμε). Το ολοκλήρωμα στην παράπλευρη επιφάνεια, με εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού, προκύπτει ότι είναι ανάλογο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας, η οποία με τη σειρά της είναι ανάλογη του h . Επομένως, για $h \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα αυτό μηδενίζεται. Συνεπώς,

$$I_{\chi\omega\rho} = \hat{n} \cdot \bar{J}_2(\bar{r}_2, t) \Delta S + (-\hat{n}) \cdot \bar{J}_1(\bar{r}_1, t) \Delta S \quad (16)$$

Για το επιφανειακό ρεύμα $I_{\epsilon\pi\iota\phi}$ που διαπερνά την επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε

$$I_{\epsilon\pi\iota\phi} = \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell = \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell, \quad (17)$$

όπου C είναι η περίμετρος της κυκλικής τομής του κυλίνδρου με την S και όπου \hat{n}_π είναι το κάθετο στην C , εφαπτομενικό στην S , μοναδιαίο διάνυσμα. Με αντικατάσταση από τις (16) και (17) στην (14) παίρνουμε

$$I = \hat{n} \cdot \bar{J}_2(\bar{r}_2, t) \Delta S + (-\hat{n}) \cdot \bar{J}_1(\bar{r}_1, t) \Delta S + \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell \quad (18)$$

Από το άλλο μέρος, το ολικό φορτίο $Q_{\epsilon\sigma\omega\tau}$ που εμπεριέχεται στον κύλινδρο ισούται με

$$Q_{\epsilon\sigma\omega\tau} = Q_{\chi\omega\rho} + Q_{\epsilon\pi\iota\phi} \quad (19)$$

όπου

$$Q_{\chi\omega\rho} = \int_{V_{\text{κυλ}}} \rho(\bar{r}, t) dV = \rho(\bar{r}_\kappa, t) V_{\text{κυλ}} = \rho(\bar{r}_\kappa, t) h \Delta S \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (20)$$

Κατά το δεύτερο βήμα στην (20), έγινε εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για το χωρικό ολοκλήρωμα, με \bar{r}_κ κατάλληλο σημείο στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Τέλος, το εμπεριεχόμενο επιφανειακό φορτίο $Q_{\epsilon\pi\iota\phi}$ ισούται με

$$Q_{\epsilon\pi\iota\phi} = \int_{\Delta S} \sigma(\bar{r}, t) dS = \sigma(\bar{r}_0, t) \Delta S \quad (21)$$

όπου $\sigma(\bar{r}_0, t)$ είναι η τιμή της σ σε κατάλληλα επιλεγμένο σημείο \bar{r}_0 της ΔS (θεώρημα μέσης τιμής).

Αντικαθιστώντας πρώτα από τις (20) και (21) στην (19), ύστερα από την (19) και την (18) στην (4) και, τέλος, διαιρώντας και τα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης με ΔS παίρνουμε τη σχέση

$$\hat{n} \cdot [\bar{J}_2(\bar{r}_2, t) - \bar{J}_1(\bar{r}_1, t)] + \frac{1}{\Delta S} \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell = - \frac{\partial \sigma(\bar{r}_0, t)}{\partial t} \quad (22)$$

Στο όριο όπου $\Delta S \rightarrow 0$, τα σημεία \bar{r}_1 , \bar{r}_2 και \bar{r}_0 ταυτίζονται. Επιπλέον, κατ' αναλογία προς τον γενικό ορισμό (12) της χωρικής απόκλισης $\nabla \cdot \bar{J}$, ισχύει η σχέση

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_\pi d\ell}{\Delta S} \equiv \nabla_S \cdot \bar{K}, \quad (23)$$

όπου το βαθμωτό μέγεθος $\nabla_S \cdot \bar{K}$ ονομάζεται επιφανειακή απόκλιση της \bar{K} .

Αντικαθιστώντας την (23) στην (22) προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση (13).

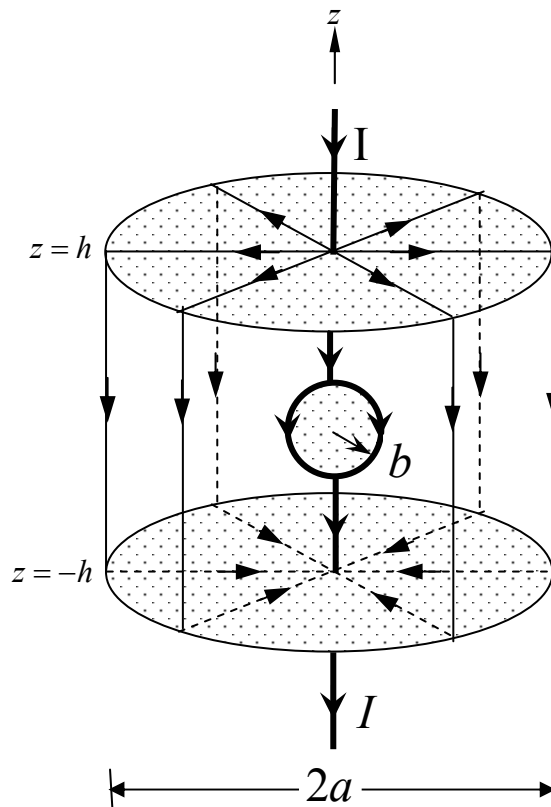
Σημείωση: Για μία επίπεδη επιφάνεια στο επίπεδο xy με $\bar{K} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y}$, ισχύει η σχέση

$$\nabla_s \cdot \bar{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y}.$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για την $\nabla_s \cdot \bar{K}$ πάνω σε κυλινδρικές, σφαιρικές, κωνικές ή άλλες επιφάνειες.

4. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Στη διάταξη του Σχ.1, κατά μήκος του ημιάξονα $h < z < +\infty$ ρέει ρεύμα εντάσεως I κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$. Μετά την προσαγωγή του στη θέση $z=h$, το ρεύμα αυτό διακλαδίζεται. Έτσι, ένα μέρος του ρεύματος, εντάσεως I_1 , διαρρέει διαδοχικά και συμμετρικά την βάση $z=h$ της κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας a κατά την κατεύθυνση \hat{r} (αναφορά: το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με άξονα τον άξονα του κυλίνδρου), την παράπλευρη επιφάνεια κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$ και την κάτω βάση κατά την κατεύθυνση $-\hat{r}$. Το υπόλοιπο του ρεύματος, εντάσεως $I_2 = I - I_1$, ρέει κατά μήκος του άξονα των z κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$, αφού ενδιάμεσως διατρέξει συμμετρικά όλη την επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας b κατά την κατεύθυνση $\hat{\theta}$ (αναφορά: το σφαιρικό σύστημα με αρχή το κέντρο της σφαίρας). Ο ημιάξονας $z < -h$ διαρρέεται από το συνολικό ρεύμα I . Ζητείται να βρεθεί η έκφραση της επιφανειακής πυκνότητας του ρεύματος σε κάθε επιφάνεια της διατάξεως.



Σχήμα 1

Λύση: Για τον υπολογισμό της πυκνότητας \bar{K} επιλέγουμε κατάλληλες γραμμές C κάθετες στη ροή του ρεύματος, όπως στο Σχ.2, και εφαρμόζουμε τη σχέση (2.12). Έτσι βρίσκουμε:

α. Πάνω βάση ($z=h$): Η γραμμή C είναι κύκλος ακτίνας r και

$$\bar{K} = \bar{K}(r) = \hat{r} \frac{I_1}{2\pi r} \quad (1)$$

β. Παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια: Εδώ η C είναι κύκλος ακτίνας a , οπότε

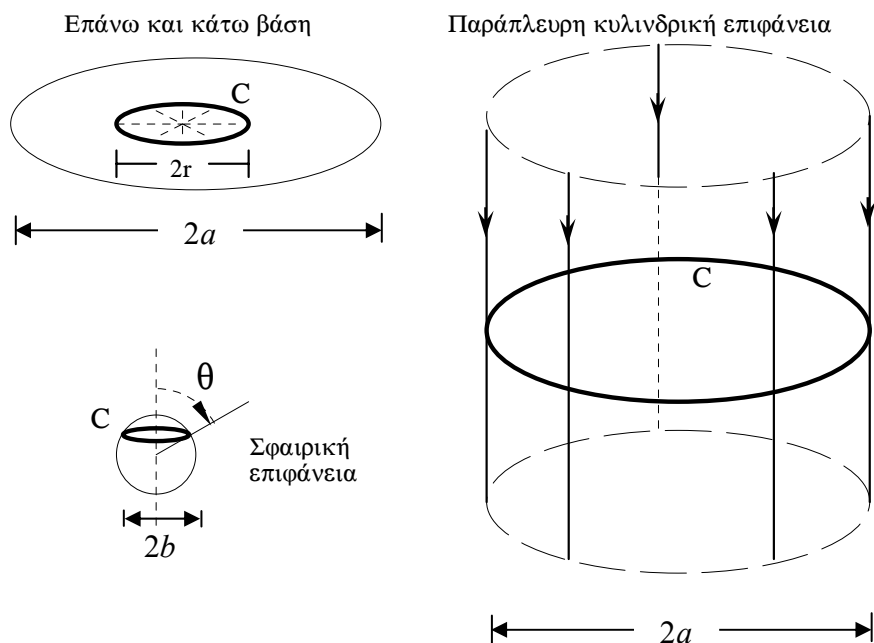
$$\bar{K} = -\frac{I_1}{2\pi a} \hat{z} \quad (2)$$

γ. Κάτω βάση ($z=-h$): Κατ' αναλογία προς την (1),

$$\bar{K} = \bar{K}(r) = -\hat{r} \frac{I_1}{2\pi r} \quad (3)$$

δ. Επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας b : C είναι τώρα ο παράλληλος κύκλος, ακτίνας $b \sin \theta$, ο οποίος διέρχεται από το σημείο της επιφάνειας της σφαίρας όπου θέλουμε να βρούμε την \bar{K} . Είναι

$$\bar{K} = \bar{K}(\theta) = \hat{\theta} \frac{I_2}{2\pi(b \sin \theta)} \quad (4)$$

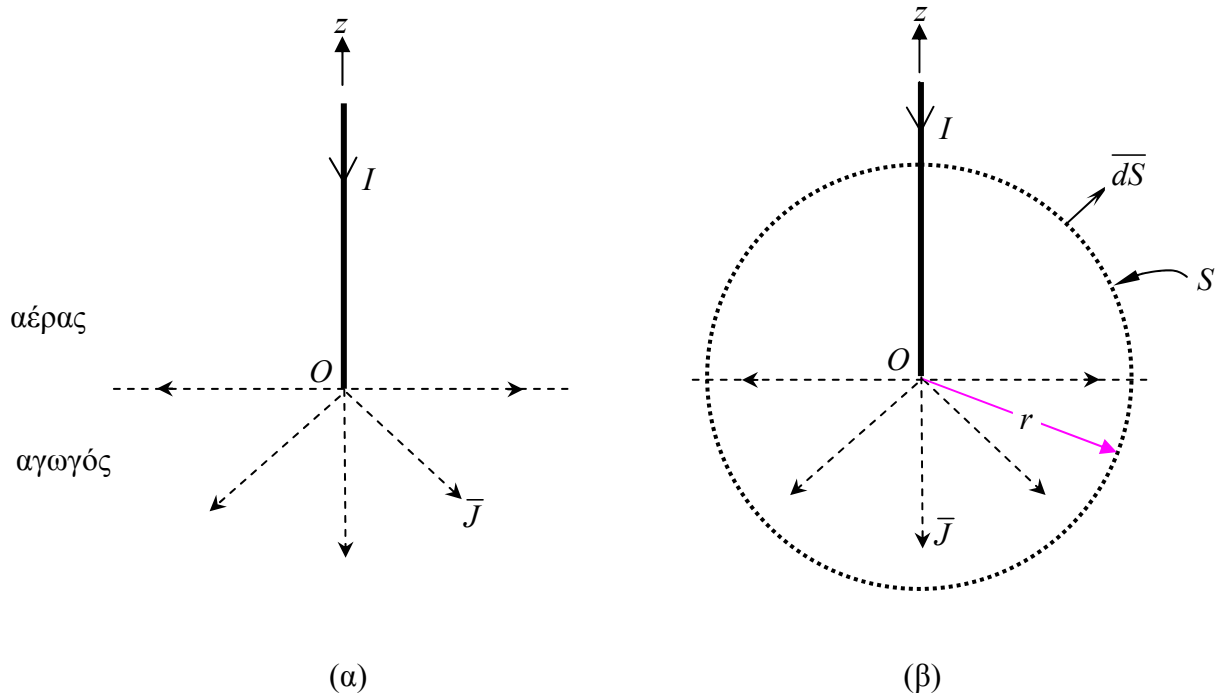


Σχήμα 2

Παράδειγμα 2: Στη διάταξη του Σχ.3(α), ο ημιχώρος $z > 0$ πληρούται με αέρα ενώ ο ημιχώρος $z < 0$ είναι αγωγός. Χρονοσταθερό ηλεκτρικό ρεύμα εντάσεως I προσάγεται στην αρχή O του συστήματος συντεταγμένων μέσω ημιαπείρου νηματοειδούς αγωγού, ο οποίος εκτείνεται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα των z . Ακολουθώντας, το ρεύμα διαχέεται ακτινικά και ομοιόμορφα στον αγωγίμο ημιχώρο $z < 0$. (Η επιστροφή του ρεύματος γίνεται μέσω της επιφάνειας της σφαίρας άπειρης ακτίνας). Να βρεθεί η χωρική πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στον αγωγό.

Λύση: Επειδή το ρεύμα διαχέεται ακτινικά και ομοιόμορφα, η χωρική του πυκνότητα σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\bar{J} = \hat{r} J(r). \quad (1)$$



Σχήμα 3

Για τη σφαίρα ακτίνας r , που δείχνει το Σχ.3(β), εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας

$$I_{ολ} = -\frac{dQ_{εσωτ}}{dt} = 0 \quad (2)$$

(η παράγωγος $dQ_{εσωτ}/dt$ είναι μηδενική επειδή, λόγω χρονοσταθερότητας των μεγεθών στη διάταξη, δεν έχουμε πουθενά συσσώρευση φορτίου). Στην (2),

$$I_{ολ} = -I + \oint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \quad (3)$$

είναι η ένταση του ρεύματος (γραμμικού και χωρικού, συνολικά) που διαπερνά την επιφάνεια S της σφαίρας και $Q_{εσωτ}$ είναι το συνολικό φορτίο στο εσωτερικό της σφαίρας. Επομένως,

$$-I + \oint_S \hat{r} J(r) \cdot \hat{r} dS = 0 \Rightarrow -I + \oint_S J(r) dS = 0 \Rightarrow -I + J(r) \frac{4\pi r^2}{2} = 0 \Rightarrow J(r) = \frac{I}{2\pi r^2}. \quad (4)$$

Παράδειγμα 3: Να επαναληφθεί το παράδειγμα 2 στην περίπτωση όπου η χωρική πυκνότητα, αντί να είναι ομοιόμορφη, έχει τη μορφή

$$\vec{J} = \hat{r} J_0(r) \sin \theta \quad (1)$$

Λύση: Ισχύει πάλι η σχέση

$$-I + \oint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = 0, \quad (2)$$

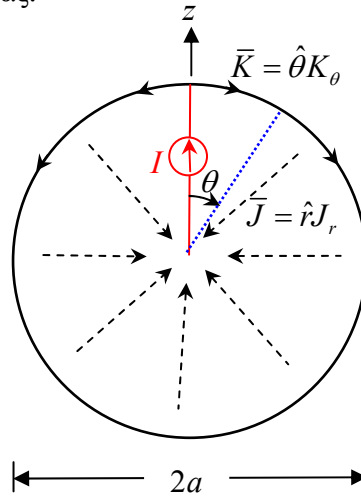
η οποία γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
-I + \oint_S \hat{r} J \cdot \hat{r} dS &= 0 \Rightarrow \\
-I + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} J_0(r) \sin \theta \underbrace{\hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}_{dS} &= 0 \Rightarrow \\
-I + r^2 J_0(r) 2\pi \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta &= 0 \Rightarrow \\
-I + r^2 J_0(r) 2\pi \frac{\pi}{4} = 0 &\Rightarrow J_0(r) = \frac{2I}{\pi^2 r^2}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\bar{J} = \hat{r} \frac{2I \sin \theta}{\pi^2 r^2}. \quad (3)$$

Παράδειγμα 4: Χρονοσταθερή πηγή ηλεκτρικού ρεύματος εντάσεως I προσάγει ηλεκτρικό ρεύμα στον βόρειο πόλο τέλεια αγωγίμης σφαιρικής επιφάνειας, ακτίνας a , το εσωτερικό της οποίας πληρούται με αγωγίμο υλικό (Σχ.4). Ακολουθώντας, το ρεύμα αυτό διατρέχει την επιφάνεια της σφαίρας ακολουθώντας όλους τους μεσημβρινούς κύκλους, συγχρόνως όμως διαρρέει στο εσωτερικό της σφαίρας κατά την ακτινική κατεύθυνση και συλλέγεται στο κέντρο της, για να επαναλάβει την πορεία του προς τον βόρειο πόλο μέσω της πηγής. Αν το χωρικό ρεύμα έχει τη μορφή $\bar{J} = \hat{r} J_0(r) \sin \theta$, να βρεθεί η $J_0(r)$. Να βρεθεί, επίσης, η επιφανειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στην επιφάνεια της σφαίρας.



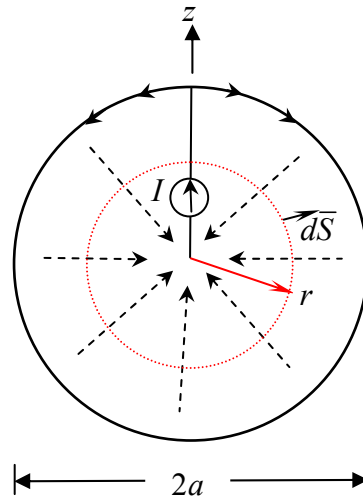
Σχήμα 4

Λύση: Για την εύρεση της χωρικής πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος στο εσωτερικό της αγωγίμης σφαίρας, θεωρούμε σφαίρα ακτίνας r με $0 < r < a$ (Σχ.5) και εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας, όπως ακριβώς στο παράδειγμα 4. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I + \oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} &= 0 \Rightarrow I + \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \hat{r} J_0(r) \sin \theta \cdot \underbrace{\hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}_{dS} = 0 \Rightarrow I + r^2 J_0(r) 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow I + r^2 J_0(r) 2\pi \frac{\pi}{2} &= 0 \Rightarrow J_0(r) = -\frac{I}{\pi^2 r^2}.
\end{aligned} \quad (1)$$

Επομένως,

$$\bar{J} = \hat{r} J_0(r) \sin \theta = -\hat{r} \frac{I \sin \theta}{\pi^2 r^2} \quad (0 < r < a). \quad (2)$$



Σχήμα 5

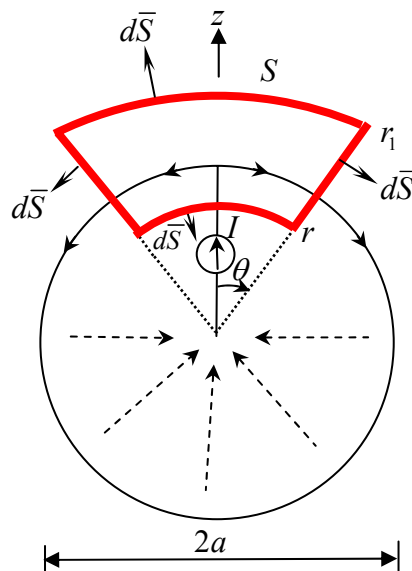
Για την εύρεση της επιφανειακής πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος

$$\bar{K} = \hat{\theta} K_{\theta}(\theta) \quad (3)$$

στο σημείο (a, θ, ϕ) της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας a , εφαρμόζουμε και πάλι την γενική εξίσωση

$$I_{ol} = -\frac{dQ_{εσωτ}}{dt} = 0,$$

τόρα στην σφαιροκωνική περιοχή που δείχνει σε τομή το Σχ.13 (με κόκκινο χρώμα). Η περιοχή αυτή έχει ως σύνορο τα σφαιρικά τόξα ακτίνων r (με $r < a$) και r_1 (με $r_1 > a$), αντίστοιχα, καθώς και την κωνική επιφάνεια με ημιγωνία κορυφής θ . Προκύπτει έτσι η σχέση



Σχήμα 6

$$-I + \oint_S \bar{J} \cdot \bar{dS} + K_{\theta}(\theta)(2\pi a \sin \theta) = 0. \quad (4)$$

Στο επιφανειακό ολοκλήρωμα στην (4) συμβάλλει μόνο το σφαιρικό τόξο ακτίνας r . [Στο σφαιρικό

τόξο ακτίνας r_1 είναι $\bar{J}=0$, ενώ στην κωνική επιφάνεια είναι $d\bar{S}=\hat{\theta}dS$, δηλαδή $d\bar{S}\perp\bar{J}$. Επομένως,

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = \int_{\theta'=0}^{\theta} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \hat{r} J_0(r) \sin \theta' \cdot \underbrace{(-\hat{r}) r^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'}_{d\bar{S}} = -r^2 J_0(r) 2\pi \int_{\theta'=0}^{\theta} \sin^2 \theta' d\theta' =$$

$$= -r^2 J_0(r) \pi \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) = \frac{I}{\pi} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right). \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$K_{\theta}(\theta) = \frac{I}{4\pi^2 a} \frac{2(\pi - \theta) + \sin 2\theta}{\sin \theta}. \quad (6)$$

2^{ος} τρόπος εύρεσης της $K_{\theta}(\theta)$.

Εναλλακτικά, για την εύρεση της $K_{\theta}(\theta)$ μπορούμε να εργαστούμε με βάση την οριακή συνθήκη (3.13):

$$\hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\nabla \cdot \bar{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας με $r=a$, όπου

$$\hat{n} \equiv \hat{r},$$

$$\bar{J}_2 \equiv \bar{J}(r=a+) = 0,$$

$$\bar{J}_1 \equiv \bar{J}(r=a-) = -\hat{r} \frac{I \sin \theta}{(\pi a)^2},$$

$\partial \sigma / \partial t = 0$ (χρονική ανεξαρτησία, άρα δεν έχουμε συσσώρευση φορτίου)

και

$$\nabla \cdot \bar{K} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (K_{\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_{\phi}}{\partial \phi} \right)_{r=a} = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{d(K_{\theta} \sin \theta)}{d\theta}.$$

Προκύπτει έτσι η διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{a \sin \theta} \frac{d(K_{\theta} \sin \theta)}{d\theta} = -\frac{I \sin \theta}{(\pi a)^2} \Rightarrow \frac{d(K_{\theta} \sin \theta)}{d\theta} = -\frac{I \sin^2 \theta}{\pi^2 a}, \quad (7)$$

από την οποία με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$K_{\theta}(\theta) \sin \theta = -\frac{I}{\pi^2 a} \int \sin^2 \theta d\theta = -\frac{I}{\pi^2 a} \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + c, \quad (8)$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσεως ανεξάρτητη του θ . Για την εύρεση της σταθεράς c , παρατηρούμε πρώτα ότι ο παράλληλος κύκλος της σφαιρικής επιφάνειας $r=a$, ο οποίος διέρχεται από το σημείο όπου θέλουμε να υπολογίσουμε την K_{θ} (η ακτίνα του κύκλου αυτού ισούται με $a \sin \theta$), διαρρέεται από επιφανειακό ρεύμα με ένταση (βλέπ. εξ. (2.12))

$$K_{\theta}(\theta) \times \text{μήκος του κύκλου} = K_{\theta}(\theta) 2\pi a \sin \theta.$$

Για $\theta \rightarrow 0$, οπότε ο παράλληλος κύκλος συρρικνώνεται στον βόρειο πόλο της σφαίρας, από το Σχ.4 γίνεται φανερό ότι η παραπάνω ένταση ισούται με I (όση είναι η ένταση του ρεύματος που προσάγει

η πηγή), δηλαδή

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} [K_\theta(\theta) 2\pi a \sin \theta] = I \stackrel{(8)}{\Rightarrow} 2\pi a c = I \Rightarrow c = \frac{I}{2\pi a}. \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας την (9) στην (8) παίρνουμε πάλι την (6).

Παράδειγμα 5 (Άσκηση 1.12 ελαφρώς παραλλαγμένη).

Στο εσωτερικό αγωγίμης σφαίρας ακτίνας a , η οποία περιβάλλεται από αέρα, τοποθετούμε την χρονική στιγμή $t=0$ χωρικό φορτίο πυκνότητας $\rho(r, t=0) = \rho_0 \frac{r}{a}$ ($0 \leq r \leq a$) (Σχ.7(α)). Άλλα φορτία δεν υπάρχουν πια για $t=0$. Για $t>0$, το διεγειρόμενο στη διάταξη ηλεκτρικό πεδίο ασκεί ηλεκτρικές δυνάμεις στο φορτίο, το οποίο κινείται πλέον ακτινικά και ομοιόμορφα, προκαλώντας χωρικό ηλεκτρικό ρεύμα με (άγνωστη) χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{r} J_r(r, t)$ (Σχ.7(β)). Με τα ρεύματα αυτά το χωρικό φορτίο μεταφέρεται και αποτίθεται στην επιφάνεια του αγωγού και, έτσι, το χωρικό φορτίο μειώνεται βαθμιαία με την πάροδο του χρόνου. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μάθουμε ότι την χρονική στιγμή $t>0$ η χωρική πυκνότητα στο εσωτερικό της σφαίρας ισούται με

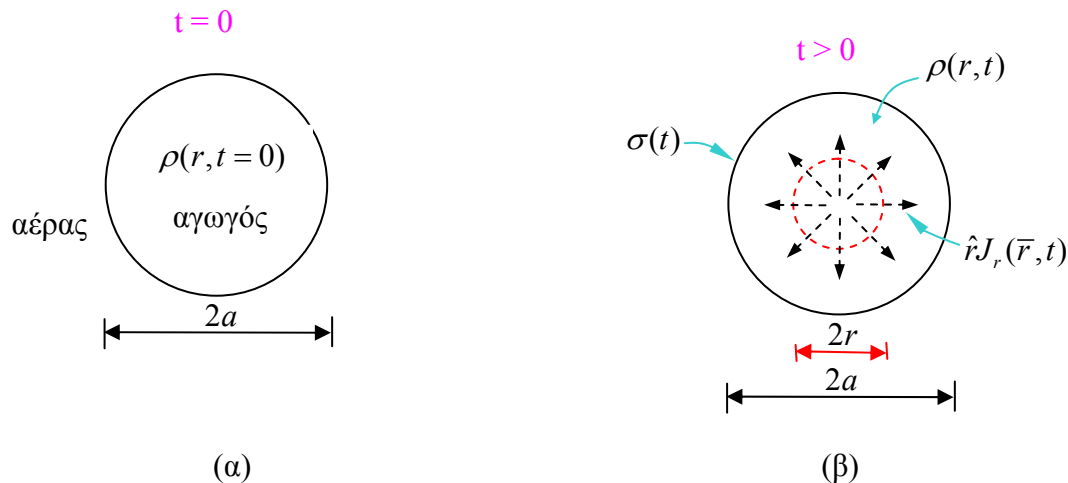
$\rho(r, t) = \rho(r, t=0)e^{-t/\tau}$ (μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο), δηλαδή στην περίπτωση μας έχουμε

$$\rho(r, t) = \rho_0 \frac{r}{a} e^{-t/\tau} \quad (0 \leq r \leq a, t \geq 0),$$

όπου τ γνωστή χρονική σταθερά (ίση, όπως θα μάθουμε, με το πηλίκο ε/γ , όπου ε είναι η διηλεκτρική σταθερά και γ η ειδική αγωγιμότητα του αγωγού). Ζητούνται:

- Η ένταση i και η πυκνότητα $J_r(r, t)$ του ηλεκτρικού ρεύματος την χρονική στιγμή t .
- Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια της σφαίρας την χρονική στιγμή t .

Λύση



Σχήμα 7

1^{ος} τρόπος: Χρήση της εξίσωσης συνεχείας σε ολοκληρωτική μορφή

α) Εφαρμόζουμε την εξίσωση συνεχείας σε ολοκληρωτική μορφή (εξ. (3.7)) σε σφαίρα ακτίνας r με $r < a$ (Σχ.7 (β)). Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{J}(r,t) \cdot d\vec{S} &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho(r,t) dV \Rightarrow \int_S \hat{r} J_r(r,t) \cdot \hat{r} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_0 \frac{r}{a} e^{-t/\tau} dV \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_S J_r(r,t) dS &= -\left(\frac{d}{dt} e^{-t/\tau} \right) \int_V \rho_0 \frac{r}{a} dV \Rightarrow \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} J_r(r,t) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\left(\frac{d}{dt} e^{-t/\tau} \right) \int_V \rho_0 \frac{r}{a} dV \Rightarrow \\
\left(\text{με τη χρήση και της } V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr \right) \\
\Rightarrow J_r(r,t) r^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi &= -\left(\frac{d}{dt} e^{-t/\tau} \right) \int_{r'=0}^r \rho_0 \frac{r'}{a} 4\pi r'^2 dr' \Rightarrow \\
\Rightarrow 4\pi r^2 J_r(r,t) &= -\left(-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right) \frac{\rho_0}{a} 4\pi \left(\frac{r'^4}{4} \right)_{r'=0}^r = e^{-t/\tau} \frac{\rho_0}{a\tau} \pi r^4 \Rightarrow J_r(r,t) = \frac{\rho_0}{4a\tau} r^2 e^{-t/\tau}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ένταση του ρεύματος: Λόγω της ομοιομορφίας της ροής ρεύματος ισχύει η σχέση (2.6):

$$i(r,t) = J_r(r,t) S = J_r(r,t) 4\pi r^2 = \frac{\pi \rho_0}{a\tau} r^4 e^{-t/\tau}. \tag{2}$$

β) Το ολικό χωρικό φορτίο της σφαίρας την χρονική στιγμή t είναι

$$Q(t) = \int_V \rho(r,t) dV = \int_V \rho_0 \frac{r}{a} e^{-t/\tau} dV = e^{-t/\tau} \int_0^a \rho_0 \frac{r}{a} 4\pi r^2 dr = e^{-t/\tau} \pi a^3 \rho_0,$$

ενώ το ολικό χωρικό φορτίο της σφαίρας την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

$$Q(0) = \pi a^3 \rho_0.$$

Ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned}
\underbrace{Q(0)}_{\text{ολικό φορτίο για } t=0} &= \underbrace{Q(t)}_{\text{ολικό χωρικό φορτίο τη στιγμή } t} + \underbrace{\sigma(t) 4\pi a^2}_{\text{ολικό επιφανειακό φορτίο τη στιγμή } t} \Rightarrow \pi a^3 \rho_0 = e^{-t/\tau} \pi a^3 \rho_0 + \sigma(t) 4\pi a^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow \sigma(t) &= \frac{\rho_0 a}{4} (1 - e^{-t/\tau}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Παρατήρηση: Για $t \rightarrow \infty$, $Q(t \rightarrow \infty) = 0$ και $Q^{\text{επιφ}}(t \rightarrow \infty) = \pi a^3 \rho_0 = Q(t=0)$. Δηλαδή, στο τέλος του μεταβατικού φαινομένου (για $t \rightarrow \infty$), το χωρικό φορτίο της σφαίρας μηδενίζεται έχοντας εν τω μεταξύ μεταφερθεί ολόκληρο στην επιφάνεια της σφαίρας. Για $t \rightarrow \infty$, δηλαδή με το τέλος του μεταβατικού φαινομένου, μηδενίζεται και το χωρικό ρεύμα ($J_r(r, t \rightarrow \infty) = 0$), όπως είναι αναμενόμενο.

2^{ος} τρόπος: Χρήση της εξίσωσης συνεχείας σε σημειακή μορφή

α) Στο εσωτερικό της σφαίρας έχουμε:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \xRightarrow{(3.11)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 J_r(r,t))}{\partial r} = -\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} = \rho_0 \frac{r}{a\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{\partial (r^2 J_r(r,t))}{\partial r} = \rho_0 \frac{r^3}{a\tau} e^{-t/\tau}.$$

Με ολοκλήρωση ως προς r , παίρνουμε:

$$r^2 J_r(r,t) = \rho_0 \frac{r^4}{4a\tau} e^{-t/\tau} + c, \tag{4}$$

όπου c “σταθερά” ολοκληρώσεως (ανεξάρτητη του r). Για να βρούμε την c , θεωρούμε μια πολύ μικρή σφαίρα ακτίνας r ($r \rightarrow 0$). Επειδή το φορτίο μιας τέτοιας σφαίρας τείνει στο μηδέν, περιμένουμε η ένταση $4\pi r^2 J_r(r, t)$ του ρεύματος που περνάει από την επιφάνειά της να τείνει και αυτή στο μηδέν (βλ. ορισμό της εντάσεως χωρικού ρεύματος). Δηλαδή,

$$\lim_{r \rightarrow 0} [4\pi r^2 J_r(r, t)] = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [4\pi \rho_0 \frac{r^4}{4a\tau} e^{-t/\tau} + 4\pi c] = 0 \Rightarrow 0 + 4\pi c = 0 \Rightarrow c = 0. \quad (5)$$

Με αντικατάσταση του c στην (4) και διαίρεση με r^2 προκύπτει πάλι η (1).

β) Στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας με $r = a$ ισχύει η οριακή συνθήκη (3.13):

$$\hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\nabla \cdot \bar{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (6)$$

όπου

$$\hat{n} \equiv \hat{r},$$

$$\bar{J}_2 \equiv \bar{J}(r = a+) = 0,$$

$$\bar{J}_1 \equiv \bar{J}(r = a-, t) = \hat{r} \frac{\rho_0}{4\tau} a e^{-t/\tau}, \text{ και}$$

$\bar{K} = 0$ (το φορτίο απλά αποτίθεται στην επιφάνεια της σφαίρας και συσσωρεύεται, δηλαδή δεν μετακινείται και επομένως δεν προκύπτει επιφανειακό ρεύμα). Με αντικατάσταση στην (6) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{\rho_0}{4\tau} a e^{-t/\tau}. \quad (7)$$

Από την (7) με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\sigma(t) = -\frac{\rho_0}{4} a e^{-t/\tau} + d, \quad (8)$$

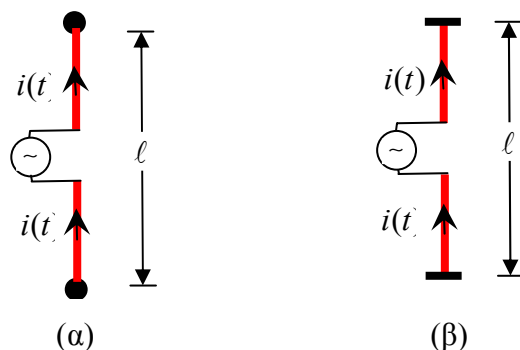
όπου d σταθερά ολοκληρώσεως. Για $t = 0$, είναι $\sigma = 0$, οπότε

$$0 = -\frac{\rho_0}{4} a + d \Rightarrow d = \frac{\rho_0}{4} a.$$

Αντικαθιστώντας την d στην (7), προκύπτει πάλι η (3).

Άσκηση 1.13.

Διπολική κεραία², με μήκος $\ell \ll \lambda$ (βραχύ δίπολο ή δίπολο του Hertz) όπου λ είναι το μήκος κύματος του ακτινοβολούμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, τροφοδοτείται με ρεύμα $i(t) = I_{\max} \cos(\omega t)$, όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα της πηγής. Στα άκρα της κεραίας υπάρχουν μικρές αγώγιμες σφαίρες (Σχ.8(α)) ή αγώγιμοι δίσκοι (Σχ.8(β)) για την εναπόθεση ηλεκτρικών φορτίων, έτσι ώστε το ρεύμα της κεραίας να είναι ομοιόμορφο. Να υπολογιστούν αυτά τα φορτία.



Σχήμα 8

² Βλέπετε Σημείωση παρακάτω.

Λύση

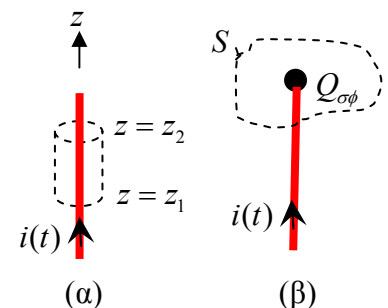
Παρατήρηση: Αν υπάρχει φορτίο στα ευθύγραμμα τμήματα της κεραίας, αυτό είναι χρονοσταθερό. Για την απόδειξη, εφαρμόζουμε την εξίσωση συνεχείας στη γενικότερη μορφή,

$$I_{ολ} = -\frac{dQ_{εσωτ}}{dt}, \quad (1)$$

για τον κύλινδρο του Σχ.9(α), ο οποίος εκτείνεται από $z = z_1$ μέχρι $z = z_2$. Στην εξίσωση αυτή, $I_{ολ}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων που διαπερνούν τον κύλινδρο και $Q_{εσωτ}$ το εμπεριεχόμενο φορτίο. Προκύπτει ότι

$$\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \text{εισερχόμενο} \quad \text{εξερχόμενο} \\ \text{ρεύμα} \quad \text{ρεύμα} \end{array} \quad -i(t) + i(t) = -\frac{dQ_{εσωτ}}{dt} \Rightarrow \frac{dQ_{εσωτ}}{dt} = 0 \Rightarrow Q_{εσωτ} = \text{σταθ}.$$

Για την εύρεση του φορτίου του επάνω σφαιριδίου, εφαρμόζουμε πάλι την (1), τώρα για την διάταξη του Σχ. 9(β), θεωρώντας κλειστή επιφάνεια S περιβάλλουσα το σφαιρίδιο. Παίρνοντας υπόψη και το αποτέλεσμα (2), προκύπτει ότι



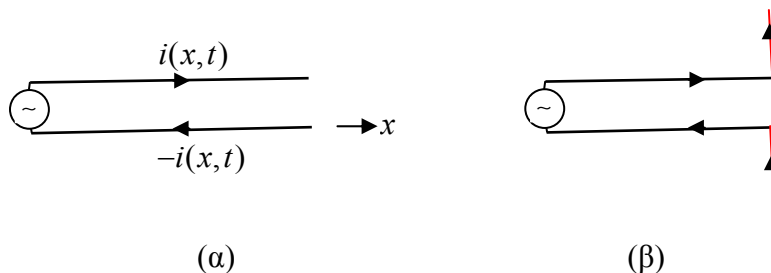
Σχήμα 9

$$-i(t) = -\frac{dQ_{σφ}}{dt} \Rightarrow \frac{dQ_{σφ}}{dt} = I_{\max} \cos(\omega t) \Rightarrow Q_{σφ}(t) = \frac{I_{\max}}{\omega} \sin(\omega t) + c, \quad (3)$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσεως ανεξάρτητη του t . Για την εύρεση της c αρκεί να γνωρίζουμε το φορτίο κάποια χρονική στιγμή. Π.χ., αν υποθέσουμε ότι αρχικά η σφαίρα ήταν αφόρτιστη οπότε $Q_{σφ}(0) = 0$, προκύπτει $c = 0$.

Το φορτίο στο κάτω σφαιρίδιο βρίσκεται με τον ίδιο τρόπο.

Σημείωση: (Πως υλοποιείται η διπολική κεραία.) Στο Σχ.10(α) δείχνουμε μία δυσύρματη γραμμή μεταφοράς. Στην αρχή της γραμμής βρίσκεται η πηγή, ενώ το τέρμα της είναι ανοικτοκυκλωμένο. Τα ρεύματα στους δύο αγωγούς της γραμμής (συναρτήσεις της θέσεως και του χρόνου) είναι $i(x, t)$ και $-i(x, t)$, αντίστοιχα. Αν παραμορφώσουμε (λυγίσουμε) τους αγωγούς της γραμμής, όπως στο Σχ.10(β), προκύπτει η διπολική κεραία του Σχ. 8. Δύο αγώγιμα σφαιρίδια (ή πλακίδια) στα άκρα βοηθούν ώστε το ρεύμα στην κεραία (κατακόρυφα τμήματα με κόκκινο χρώμα) να έχει σταθερό πλάτος.



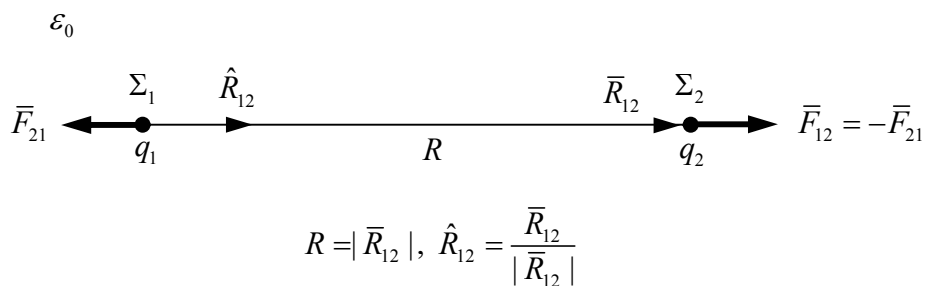
Σχήμα 10

Συνοπτική παρουσίαση επιλεγμένων τμημάτων των ενότητων 5-9 του κεφαλαίου 1 (σελ. 89-190)
του βιβλίου: Ι. Τσαλαμέγκας – Ι. Ρουμελιώτης, “Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία – Τόμος Α”

Ι. Τσαλαμέγκας – Ι. Ρουμελιώτης

Μάρτιος 2017

NΟΜΟΣ COULOMB (1785)

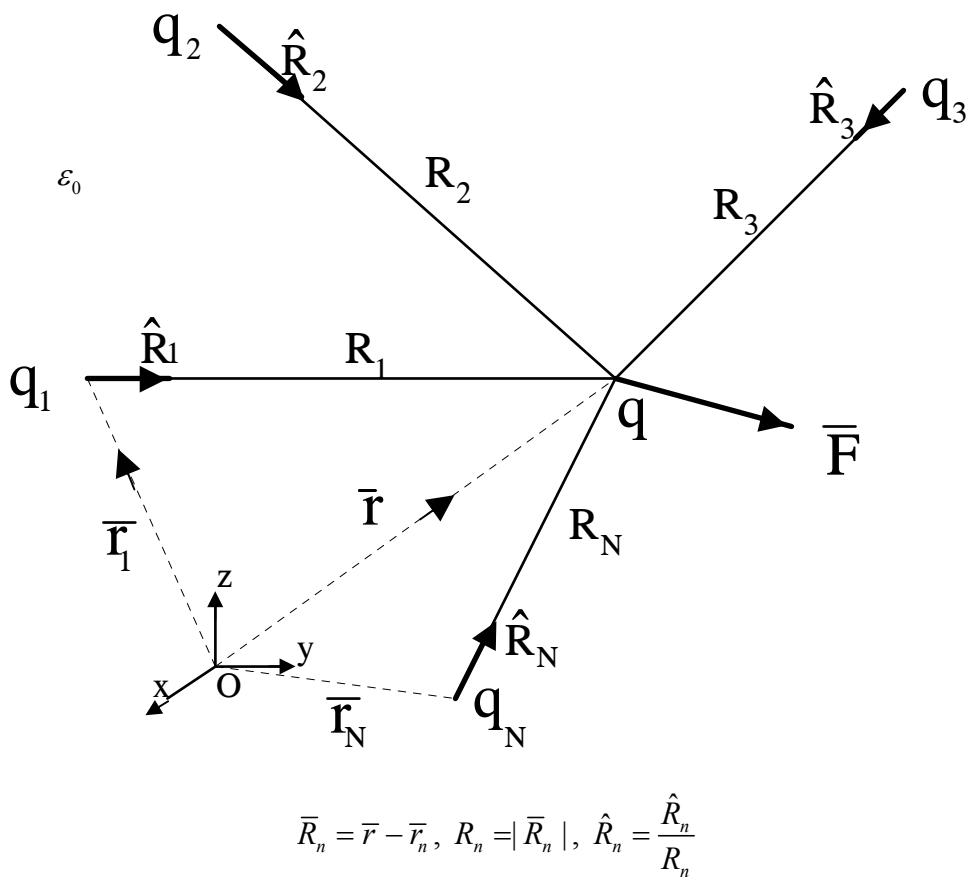


Σχ. 1

$$\bar{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{R}_{12} \quad (\text{βλ. Σχ.1}) \quad (1)$$

όπου τα q_1 και q_2 είναι ακίνητα και $\epsilon_0 = 8.8542 \text{ pF/m}$ είναι η επιτρεπτότητα ή διηλεκτρική σταθερά του κενού (αέρα). Ισχύει από μικροσκοπικές R της τάξης 10^{-14} m έως αστρονομικές αποστάσεις. Έχει ίδια ακριβώς μορφή με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης.

Επαλληλία (αποδεικνύεται πειραματικά).



Σχ. 2

Ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο q (Σχ.2):

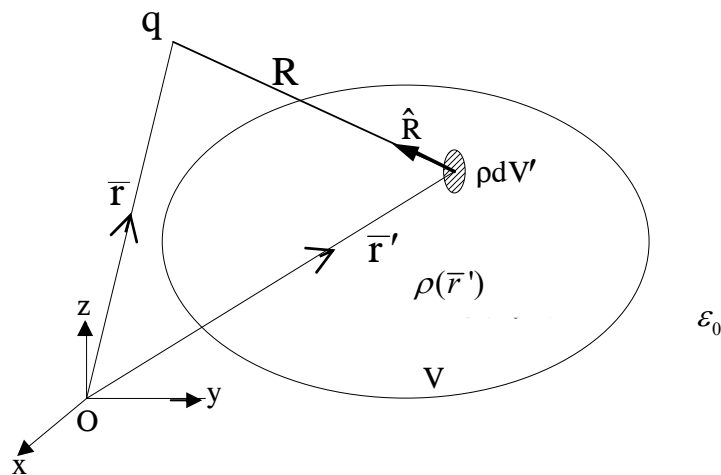
$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n \hat{R}_n}{R_n^2}. \quad (2)$$

Η (2) ισχύει για q ακίνητο, έως και q κινούμενο ακόμη και με σχετικιστικές ταχύτητες (με q_n ακίνητα).

Κατανομή φορτίων

Η (2) γενικεύεται αν αντί των q_n υπάρχει μακροσκοπική κατανομή στατικών φορτίων $\rho(\vec{r}')$ στον όγκο V (Σχ.3):

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R^2} \hat{R} \quad (3)$$



$$dV' = dx' dy' dz' \text{ (σε καρτεσιανές συντεταγμένες), } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \hat{R} = \vec{R} / R.$$

Σχ. 3

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου

Έστω δq δοκιμαστικό φορτίο στη θέση του q , αρκούντως μικρό ($\delta q \rightarrow 0$), ώστε η παρουσία του (ή η απουσία του) να μη διαταράσσει την κατανομή ρ . Στο δq ασκείται δύναμη $\delta \vec{F}$.

$$(3) \Rightarrow \delta \vec{F} = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R^2} \hat{R}. \quad (4)$$

Το πηλίκο

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\delta \vec{F}}{\delta q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R^2} \hat{R} \quad (5)$$

είναι ανεξάρτητο του δq , εξαρτώμενο από το $\rho(\vec{r}')$ και τη θέση \vec{r} του σημείου παρατήρησης, αποκλειστικά, και ονομάζεται ένταση του ηλεκτρικού πεδίου της κατανομής ρ στη θέση \vec{r} , με μονάδα μέτρησης στο SI το 1 V/m .

Γνωρίζοντας την ένταση $\vec{E}(\vec{r})$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται σε οποιοδήποτε σημειακό φορτίο q' , τοποθετημένο στη θέση \vec{r} , από τη σχέση

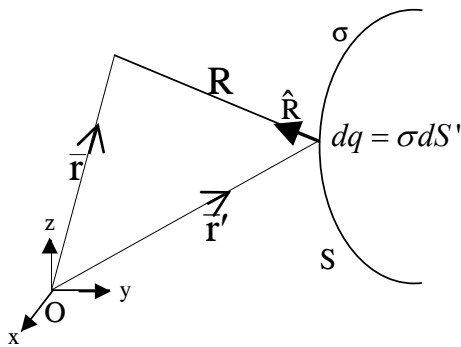
$$\vec{F} = q' \vec{E}(\vec{r}). \quad (6)$$

Υποτίθεται ότι με την εισαγωγή του φορτίου q' δεν αλλάζει η μορφή του ρ , δηλ. δεν προκαλείται ανακατανομή των φορτίων στο χώρο.

Ειδικές περιπτώσεις (προκύπτουν από την (5))

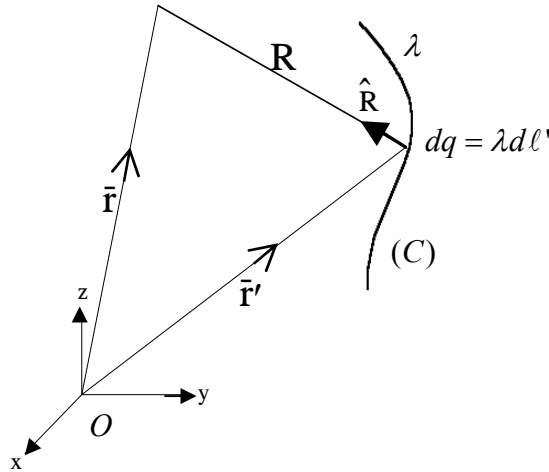
A. Επιφανειακά φορτία (σ)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS' \hat{R}}{R^2} \quad (7)$$

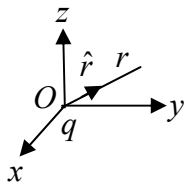


B. Γραμμικά φορτία (λ)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') d\ell' \hat{R}}{R^2} \quad (8)$$



Γ. Σημειακό φορτίο q στην αρχή O.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (9)$$

Δ. Συστοιχία σημειακών φορτίων, όπως στο Σχ. 2.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n \hat{R}_n}{R_n^2} \quad (10)$$

Αναλυτικές ιδιότητες του πεδίου \vec{E} αυθαίρετης χωρικής κατανομής [εξ. (5)]

Υποθέτουμε ότι η $\rho(\vec{r}')$ είναι συνεχής και αρκούντως ομαλή συνάρτηση της θέσης. Τότε με αναφορά στην εξ. (5) ισχύουν τα εξής:

1η ιδιότητα: Για σημεία παρατήρησης στο εξωτερικό της περιοχής των πηγών, $\bar{r} \notin V$, η $\bar{E}(\bar{r})$ έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης.

2η ιδιότητα: Για σημεία παρατήρησης στο εσωτερικό της περιοχής των πηγών, $\bar{r} \in V$, το ολοκλήρωμα στην (5) είναι γενικευμένο αλλά συγκλίνει. [Η ιδιομορφία που υπάρχει για $R=0$ ($\bar{r}' \equiv \bar{r}$) αίρεται αν θεωρήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες (R, θ, φ) με αρχή το σημείο \bar{r} , οπότε $dV' = R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi \Rightarrow dV' / R^2 = \text{πεπερασμένο}$]. Επομένως η $\bar{E}(\bar{r})$ παραμένει πεπερασμένη.

3η ιδιότητα: Αν \bar{r} είναι τυχούσα κατεύθυνση στο χώρο τότε

$$\frac{\partial}{\partial p} \bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial p} \int_V \frac{\rho(\bar{r}') dV'}{R^2} \hat{R} \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\rho(\bar{r}')}{R^2} \hat{R} \right] dV', \quad \bar{r} \in V \quad (11)$$

δηλ. δεν επιτρέπεται η εναλλαγή των τελεστών $\partial / \partial p$ και \int_V όταν $\bar{r} \in V$, διότι το 2^ο ολοκλήρωμα της (11) αποκλίνει. Αντίθετα, αν $\bar{r} \notin V$ η εναλλαγή των τελεστών επιτρέπεται και οδηγεί σε συγκλίνοντα ολοκληρώματα.

Νόμοι του ηλεκτροστατικού πεδίου

A. Νόμος του αστροβίλου

Με χρήση της σχέσης

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} \quad (12)$$

στην (5), παίρνουμε

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\bar{r}') \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV' = -\nabla \int_V \frac{\rho(\bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 R} dV' = -\nabla \Phi(\bar{r}). \quad (13)$$

όπου

$$\Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\bar{r}')}{R} dV'. \quad (14)$$

Η βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(\bar{r})$ ονομάζεται βαθμωτό ηλεκτρικό (ηλεκτροστατικό) δυναμικό και έχει μονάδα μέτρησης το *Volt* (*V*). Μπορεί να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα στην (14) συγκλίνει για $\forall \bar{r}$ είτε στο εσωτερικό είτε στο εξωτερικό του V .

Ειδικές περιπτώσεις

$$\Phi(\bar{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\bar{r}')}{R} dS', \quad \Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\bar{r}')}{R} d\ell', \quad (15)$$

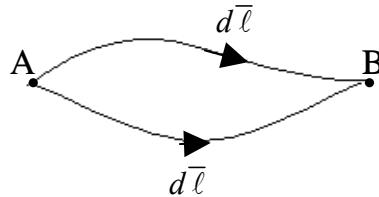
για σημειακό φορτίο q στην αρχή των αξόνων, για επιφανειακό φορτίο σ σε πεπερασμένη επιφάνεια S και για γραμμικό φορτίο λ σε πεπερασμένη γραμμή C , αντίστοιχα.

Από την (13) προκύπτει ότι

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}) \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \Phi(A) - \Phi(B), \quad (16)$$

δηλαδή

1. Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι **αστροβίλο** ($\nabla \times \vec{E} = 0$) και
2. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $V_{AB} \equiv \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ είναι ανεξάρτητο της μορφής του δρόμου ολοκλήρωσης, εξαρτώμενο μόνο από την αρχή A και το τέλος B (Σχ.4). Η τιμή $V_{AB} = \Phi(A) - \Phi(B)$ ονομάζεται διαφορά δυναμικού ή ηλεκτρική τάση μεταξύ των σημείων A και B (σε Volt).



Σχ.4

Από την (16) όταν $A \equiv B$ προκύπτει ότι

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (17)$$

δηλ. το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό.

B. Ο νόμος του Gauss

Εισάγουμε το διανυσματικό μέγεθος

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (18)$$

το οποίο ονομάζεται πυκνότητα ηλεκτρικής ροής ή διηλεκτρική μετατόπιση (με μονάδα μέτρησης C/m^2) στο κενό. Το ολοκληρωτικό μέγεθος

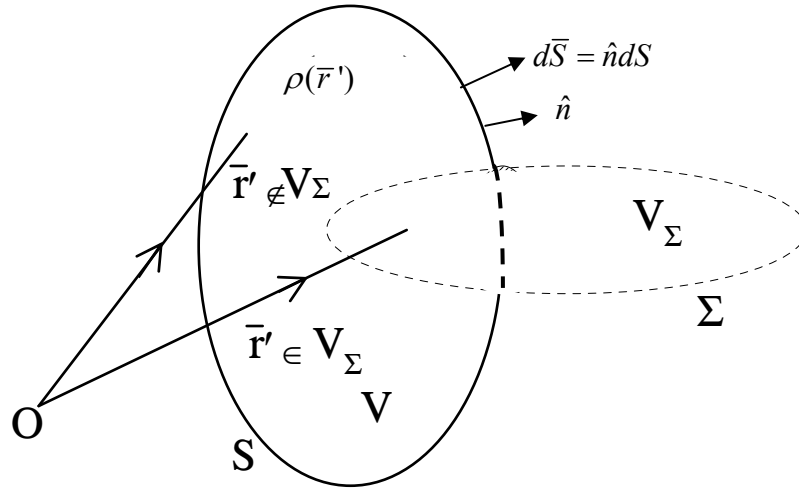
$$\Psi_e \equiv \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}, \quad (19)$$

όπου S είναι οποιαδήποτε ανοικτή ή κλειστή προσανατολισμένη επιφάνεια, ονομάζεται ηλεκτρική ροή δια μέσου της S και έχει μονάδα μέτρησης το C.

Έστω Σ αυθαίρετη κλειστή επιφάνεια (Σχ.5). Υποθέτουμε ότι οι πηγές του πεδίου είναι εντοπισμένες στον όγκο V, με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S . Η επιφάνεια Σ μπορεί να εμπλέκει και σημεία της περιοχής V, όπως στο Σχ.5, ή να βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εξωτερικό του όγκου V. Με χρήση της (5) παίρνουμε

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left(\int_V \rho(\vec{r}') \frac{\hat{R}}{R^2} dV' \right) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \int_V \rho(\vec{r}') \left(\oint_{\Sigma} \frac{\hat{R} \cdot d\vec{S}}{R^2} \right) dV', \quad (20)$$

[αποδεικνύεται ότι η εναλλαγή των τελεστών \int_V και \oint_Σ είναι πάντοτε επιτρεπτή (ακόμα και όταν η επιφάνεια Σ εμπλέκει σημεία της περιοχής V των πηγών)].



Σχ. 5

Από την (20) με τη βοήθεια της σχέσης (Παράρτημα 2, σελ. 188-190 του βιβλίου)

$$\oint_\Sigma \frac{\hat{R} \cdot d\vec{S}}{R^2} = \oint_\Sigma \frac{\vec{R} \cdot d\vec{S}}{R^3} = \oint_\Sigma \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS = \begin{cases} 0, & \vec{r}' \notin V_\Sigma \\ 4\pi, & \vec{r}' \in V_\Sigma \end{cases} \quad (21)$$

όπου V_Σ είναι η περιοχή του χώρου που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια Σ , προκύπτει η σχέση

$$\oint_\Sigma \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{V_\Sigma} \rho(\vec{r}') dV' = Q_\Sigma \quad (22)$$

όπου Q_Σ είναι το συνολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια Σ . Η εξίσωση (22) αποτελεί την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss.

Από την (22) με εφαρμογή του γνωστού από τη διανυσματική ανάλυση θεωρήματος της αποκλίσεως (Gauss) $\oint_\Sigma \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{V_\Sigma} (\nabla \cdot \vec{D}) dV'$, παίρνουμε την εξίσωση

$$\int_{V_\Sigma} (\nabla \cdot \vec{D}) dV' = \int_{V_\Sigma} \rho(\vec{r}') dV' \Rightarrow \int_{V_\Sigma} (\nabla \cdot \vec{D} - \rho) dV' = 0 \quad (23)$$

η οποία, επειδή πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή της Σ , οδηγεί στη σχέση

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (24)$$

γνωστή ως διαφορική μορφή του νόμου του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο.

Εναλλακτικός τρόπος εξαγωγής του N. Gauss

Ισχύει ότι

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{R}) = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') = 4\pi \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'). \quad (25)$$

Από τις (5) και (25) προκύπτει:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x', y', z') 4\pi \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') dx' dy' dz' = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}. \quad (26)$$

Από την (26), ολοκληρώνοντας στον όγκο V των πηγών, παίρνουμε τη σχέση

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \xRightarrow{\Theta.Gauss} \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q. \quad (27)$$

Διαφορική εξίσωση για το δυναμικό (εξίσωση Poisson)

Με αντικατάσταση από τις (18) και (13) στην (24) προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E}) = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\nabla \Phi) = -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi = \rho,$$

δηλ. η συνάρτηση δυναμικού Φ συνδέεται με τις πηγές με τη σχέση

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (28)$$

που είναι γνωστή σαν εξίσωση του Poisson.

ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

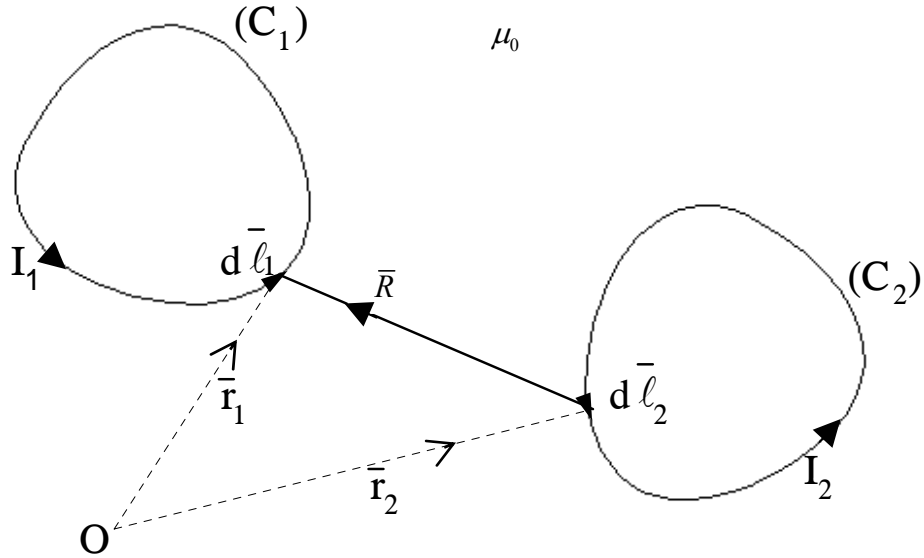
Το μαγνητοστατικό πεδίο έχει ως πηγές χρονοσταθερά ($\partial/\partial t = 0$) ηλεκτρικά ρεύματα πυκνότητας \bar{J} . Για $\partial/\partial t = 0$ η εξίσωση συνέχειας, $\nabla \cdot \bar{J} + \partial\rho/\partial t = 0$, οδηγεί στη σχέση

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0 \quad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πηγές ενός μαγνητοστατικού πεδίου, εκτός από χρονοσταθερές, είναι και σωληνοειδείς, δηλαδή η ροή του ρεύματος γίνεται σε κλειστούς σωλήνες ροής.

Θεωρούμε (Σχ.1) δύο κλειστούς βρόχους C_1 και C_2 στον αέρα, διαρρεόμενους από χρονοσταθερά ρεύματα I_1 και I_2 , αντίστοιχα. Διαπιστώνεται πειραματικά ότι μεταξύ των δύο αυτών βρόχων ασκούνται μαγνητικές δυνάμεις. Η δύναμη $\delta\bar{F}_{12}$ που ασκεί ο βρόχος 2 στο στοιχειώδες ρεύμα $I_1 d\vec{\ell}_1$ του βρόχου 1 είναι πάντοτε κάθετη στο στοιχειώδες αυτό ρεύμα, σύμφωνα με τα πορίσματα των πειραμάτων των Biot-Savart. Αυτό μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά με τη σχέση

$$\delta\bar{F}_{12} = I_1 d\vec{\ell}_1 \times \bar{B}_2(\vec{r}_1). \quad (2)$$



Σχ. 1

Το διανυσματικό μέγεθος $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$, το οποίο ορίζεται μέσω της (2), αποτελεί αυτό που σήμερα ονομάζεται διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής (ή πυκνότητα μαγνητικής ροής) του μαγνητικού πεδίου, το οποίο διεγείρεται από το ρεύμα του βρόχου 2, στη θέση \vec{r}_1 του στοιχείου $d\vec{\ell}_1$. Η μονάδα μέτρησής του είναι το $1\text{T}=1\text{Wb/m}^2$. Το μέγεθος αυτό καθορίζεται πλήρως από τη γεωμετρία και την ένταση του ρεύματος της πηγής του. Η έκφρασή του δόθηκε από τους Biot και Savart και μπορεί να τεθεί υπό τη μορφή

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{R}}{R^2} \quad (\text{νόμος των Biot-Savart}). \quad (3)$$

όπου $\hat{R} \equiv \vec{R} / R$, $R \equiv |\vec{R}|$, $\vec{R} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Η σταθερά μ_0 ονομάζεται μαγνητική διαπερατότητα του κενού (αέρα). Η ακριβής τιμή της στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) είναι $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H / m}$.

Με αναφορά στις (2)-(3), το μέγεθος

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{\ell}_1 \times (I_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{R})}{R^2} \quad (4)$$

είναι εύλογο να θεωρηθεί ως η δύναμη που ασκείται από το ρευματικό στοιχείο $I_2 d\vec{\ell}_2$ στο ρευματικό στοιχείο $I_1 d\vec{\ell}_1$. Η δύναμη $d\vec{F}_{21}$ που ασκείται από το στοιχειώδες ρεύμα $I_1 d\vec{\ell}_1$ στο στοιχειώδες ρεύμα $I_2 d\vec{\ell}_2$ βρίσκεται με εναλλαγή των δεικτών 1 και 2 στην παραπάνω σχέση.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, εν γένει, οι $d\vec{F}_{12}$ και $d\vec{F}_{21}$ έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Επομένως, $d\vec{F}_{12} + d\vec{F}_{21} \neq 0$, δηλαδή δεν ισχύει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα για τις μαγνητικές δυνάμεις μεταξύ δυο στοιχειωδών ρευμάτων. Αντίθετα, ο νόμος αυτός ισχύει για τις συνολικές δυνάμεις μεταξύ δύο κλειστών βρόχων, όπως θα δούμε λίγο παρακάτω.

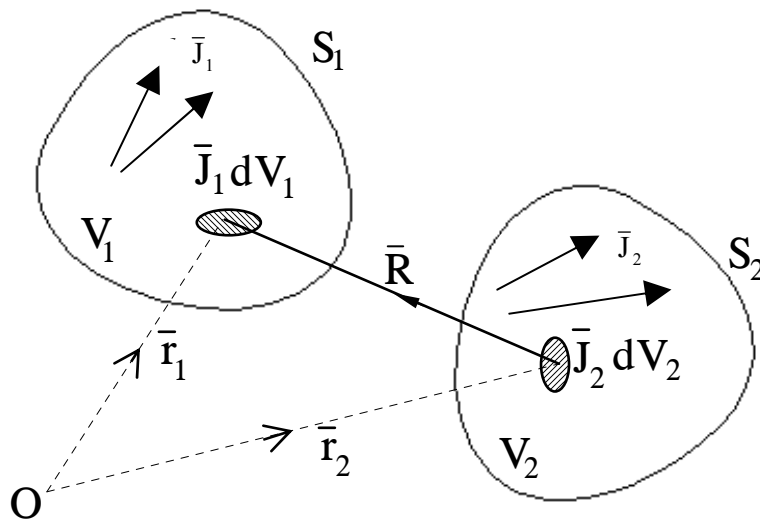
Η συνολική δύναμη που ασκεί ο βρόχος 2 στον βρόχο 1 είναι

$$\vec{F}_{12} = \oint_{C_1} d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{I_1 d\vec{\ell}_1 \times (I_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{R})}{R^2} \quad (\text{νόμος του Ampere}). \quad (5)$$

Η δύναμη \bar{F}_{21} που ασκεί ο βρόχος 1 στον βρόχο 2 προκύπτει από την παραπάνω σχέση με εναλλαγή των δεικτών 1 και 2.

Γενικεύσεις

1. Βρίσκεται πειραματικά ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας για τις μαγνητικές δυνάμεις, σύμφωνα με την οποία η συνολική δύναμη που ασκείται στον ρευματοφόρο βρόχο 1, όταν αυτός βρίσκεται υπό την επίδραση των ρευματοφόρων βρόχων 2,3,...,N, ισούται με το άθροισμα $\bar{F}_{12} + \bar{F}_{13} + \dots + \bar{F}_{1N}$.
2. Αν τα ρεύματα I_1 και I_2 δεν είναι νηματοειδή, αλλά κατανέμονται στις πεπερασμένες περιοχές V_1 και V_2 (Σχ.2) με χωρικές πυκνότητες \bar{J}_1 και \bar{J}_2 , οι (2)-(5) παίρνουν τη μορφή, αντίστοιχα:



Σχ. 2

- $$\delta \bar{F}_{12} = (\bar{J}_1 dV_1) \times \bar{B}_2(\bar{r}_1) \quad (6)$$

(μαγνητική δύναμη ασκούμενη στο στοιχείο $\bar{J}_1(\bar{r}_1)dV_1$ της κατανομής 1 από ολόκληρη την κατανομή 2)

- $$\bar{B}_2(\bar{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\bar{J}_2(\bar{r}_2) \times \hat{R}}{R^2} dV_2 \quad (7)$$

(μαγνητική επαγωγή η οποία διεγείρεται στη θέση \bar{r}_1 λόγω της κατανομής 2)

- $$d\bar{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{J}_1 dV_1 \times (\bar{J}_2 dV_2 \times \hat{R})}{R^2} \quad (8)$$

(μαγνητική δύναμη ασκούμενη στο στοιχείο $\bar{J}_1(\bar{r}_1)dV_1$ από το $\bar{J}_2(\bar{r}_2)dV_2$)

$$\bullet \quad \bar{F}_{12} = \int_{V_1} d\bar{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\bar{J}_1 \times (\bar{J}_2 \times \hat{R})}{R^2} dV_1 dV_2 \quad (9)$$

(συνολική μαγνητική δύναμη ασκούμενη στην κατανομή 1 από την κατανομή 2. Η συνολική δύναμη \bar{F}_{21} που ασκείται στην κατανομή 2 από το πεδίο της κατανομής 1 προκύπτει με εναλλαγή των δεικτών 1 και 2 στην (9)).

Αποδεικνύεται ότι για τις συνολικές δυνάμεις ισχύει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα,

$$\bar{F}_{12} + \bar{F}_{21} = 0. \quad (10)$$

Πράγματι, με κατάλληλους μαθηματικούς χειρισμούς η (9) καταλήγει στην

$$\bar{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} (\bar{J}_1 \cdot \bar{J}_2) \frac{\hat{R}}{R^2} dV_1 dV_2. \quad (11)$$

Λόγω της συμμετρικής μορφής της (11), με εναλλαγή των δεικτών 1 και 2 σε αυτή συνάγεται ότι $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$, δηλαδή προκύπτει η (10).

Στην ειδική περίπτωση όπου $\bar{J}_1 \equiv \bar{J}_2$ προκύπτει ότι $\bar{F}_{11} = -\bar{F}_{11} \Rightarrow \bar{F}_{11} = 0$. Επομένως η συνολική μαγνητική δύναμη που ασκεί μια ρευματική κατανομή στον εαυτό της είναι μηδενική.

Παρατηρήσεις

1. Με επισκόπηση της (11) θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η δύναμη που ασκείται μεταξύ των ρευματικών στοιχείων $\bar{J}_1(\bar{r}_1)dV_1$ και $\bar{J}_2(\bar{r}_2)dV_2$ ισούται με

$$d\bar{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\bar{J}_1 \cdot \bar{J}_2) \frac{\hat{R}}{R^2} dV_1 dV_2. \quad (12)$$

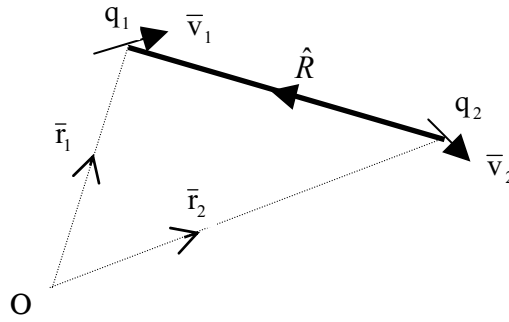
Η σχέση όμως αυτή, παρ' ότι μέσω της (11) οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα για τη συνολική δύναμη μεταξύ των ρευματικών κατανομών 1 και 2, δεν συμφωνεί με την (8), που επίσης οδηγεί, μέσω της (9), στο ίδιο αποτέλεσμα. Η ασυμφωνία είναι προφανής, αφού η $d\bar{F}_{12}$ της (12) α) έχει διεύθυνση την ευθεία που ενώνει τα δυο ρευματικά στοιχεία και β) ικανοποιεί τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα ($d\bar{F}_{12} + d\bar{F}_{21} = 0$), σε αντίθεση με την $d\bar{F}_{12}$ της (8).

Το παραπάνω δίλημμα, αναφορικά με την έκφραση της δύναμης μεταξύ δυο στοιχειωδών ρευμάτων, λύνεται σήμερα με προσφυγή στην πειραματική μαρτυρία. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την περίπτωση όπου σημειακό φορτίο q_1 κινείται με ταχύτητα \bar{v}_1 εντός μαγνητικού πεδίου \bar{B}_2 (Σχ.3). Στο κινούμενο αυτό φορτίο, το οποίο συνιστά στοιχειώδες ρεύμα $\bar{J}_1 dV_1 = q_1 \bar{v}_1$, ασκείται η μαγνητική δύναμη

$$\bar{F}_{12} = q_1 \bar{v}_1 \times \bar{B}_2, \quad (13)$$

κατ' αναλογία προς την (6) που εξακολουθεί να ισχύει και εδώ. Στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο \bar{B}_2 οφείλεται στην κίνηση φορτίου q_2 με ταχύτητα \bar{v}_2 (δηλ. σε στοιχειώδες ρεύμα $\bar{J}_2 dV_2 = q_2 \bar{v}_2$), βρίσκεται πειραματικά ότι

$$\bar{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 \bar{v}_2 \times \hat{R}}{R^2} \quad (14)$$



Σχ. 3

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι, επειδή το πεδίο ενός κινουμένου φορτίου είναι χρονομεταβλητό, η (14) –σε αντίθεση με όλες τις άλλες εξισώσεις αυτής της ενότητας– δεν είναι ακριβής, αλλά ισχύει μόνο κατά προσέγγιση και υπό την προϋπόθεση ότι $v_2 / c \ll 1$, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός.

Με αυτή την παρατήρηση υπόψη, συνδυασμένη εφαρμογή των (13) και (14) οδηγεί στη σχέση

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \frac{\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \hat{R})}{R^2} \quad (15)$$

η οποία δείχνει ότι η έκφραση (8) είναι η σωστή.

2. Η συνολική δύναμη που ασκείται σε φορτίο q , το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{v} εντός ΗΜ πεδίου (\vec{E}, \vec{B}) , ισούται με το άθροισμα της ηλεκτρικής και της μαγνητικής δύναμης, δηλαδή

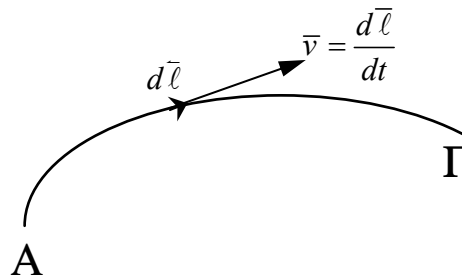
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (16)$$

Η σημαντική αυτή σχέση ονομάζεται εξίσωση του Lorentz και αποτελεί έναν από τους βασικούς νόμους που συνθέτουν το ΗΜ πρότυπο. Όπως ο νόμος Coulomb, έτσι και η (16) αποτελεί αξίωμα της ΗΜ θεωρίας, του οποίου η αποδοχή στηρίζεται στην πειραματική μαρτυρία αποκλειστικά.

Σημείωση:

Υποθέτουμε ότι δικιμαστικό φορτίο q εισάγεται στη θέση Α εντός ΗΜ πεδίου (\vec{E}, \vec{B}) και αφήνεται να κινηθεί μέχρι το σημείο Γ, υπό την επίδραση των ασκούμενων ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων (Σχ.4). Το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση αυτή ισούται με

$$W = q \int_A^\Gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = q \int_A^\Gamma (\vec{E} + \frac{d\vec{\ell}}{dt} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = q \int_A^\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad (17)$$



Σχ. 4

λαμβάνοντας υπόψη κατά το τελευταίο βήμα ότι

$$\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} = \frac{d\bar{\ell}}{dt} \times \bar{\mathbf{B}}, \text{ δηλ. } \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} \perp d\bar{\ell}.$$

Συμπέρασμα: Κατά τη μετακίνηση φορτίων εντός ΗΜ πεδίων, οι μαγνητικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο.

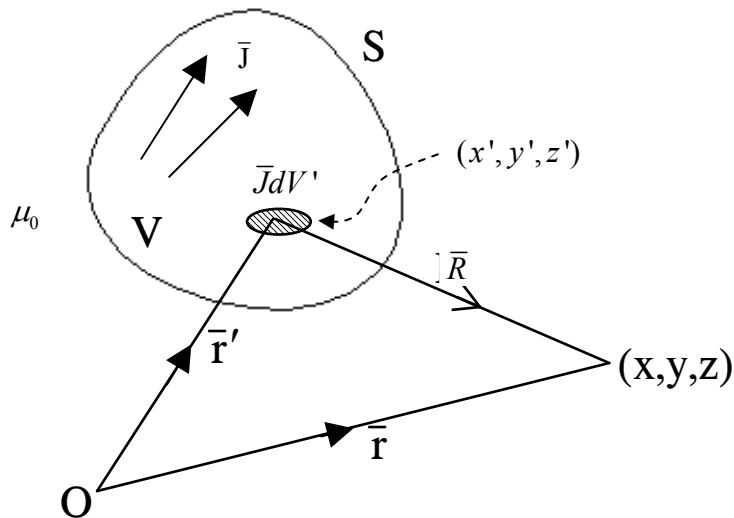
3. Το ολοκλήρωμα (7) για $\bar{\mathbf{r}}_1 \notin V_2$ (σημείο παρατήρησης εκτός του όγκου των πηγών) παριστάνει συνάρτηση του $\bar{\mathbf{r}}_1(x_1, y_1, z_1)$ η οποία έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης ως προς x_1, y_1, z_1 . Για $\bar{\mathbf{r}}_1 \in V_2$ το ολοκλήρωμα αυτό είναι γενικευμένο αλλά σγκλίνει. Επομένως το μαγνητικό πεδίο ορίζεται τόσο εκτός όσο και εντός του όγκου των πηγών του.

Νόμοι του μαγνητοστατικού πεδίου.

Θεωρούμε το μαγνητικό πεδίο

$$\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}') \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dV' \quad (18)$$

($R = |\bar{\mathbf{R}}|$, $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'$, $\hat{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}/R$), το οποίο έχει ως πηγή την χρονοσταθερή, σωληνοειδή ρευματική κατανομή $\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}')$, $\bar{\mathbf{r}}' \in V$ (Σχ.5). Θα βρούμε την απόκλιση $\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}$ και την περιστροφή $\nabla \times \bar{\mathbf{B}}$ του πεδίου συναρτήσει των πηγών του.



Σχ. 5

A. Απόκλιση του μαγνητικού πεδίου-νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο-διανυσματικό δυναμικό

Με χρήση των ταυτοτήτων

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (19)$$

$$\nabla \times \left[\frac{\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}')}{R} \right] = \frac{1}{R} \nabla \times \bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}') - \bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \quad (20)$$

[είναι $\nabla \times \bar{J}(\bar{r}') = 0$, διότι ο τελεστής $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ εφαρμόζεται στις συντεταγμένες του σημείου παρατήρησης $\bar{r}(x, y, z)$, ενώ η $\bar{J}(\bar{r}') = \bar{J}(x', y', z')$ -συνάρτηση των συντεταγμένων (x', y', z') του σημείου ολοκλήρωσης εντός της περιοχής των πηγών- είναι ανεξάρτητη των x, y, z], ο νόμος των Biot-Savart (18) γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\bar{B}(\bar{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \bar{J}(\bar{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} \right] dV' = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} dV' \right] = \nabla \times \bar{A}(\bar{r}) \quad (21)$$

όπου \bar{A} είναι το διανυσματικό μέγεθος

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} dV' \quad (22)$$

που ονομάζεται διανυσματικό δυναμικό.

Από την (21), με τη βοήθεια της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$, προκύπτει αμέσως ότι

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (\text{νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο}). \quad (23)$$

Επομένως, το μαγνητικό πεδίο είναι σωληνοειδές.

Η σχέση (23) -όπου το δεξιό μέλος είναι μηδέν, σε αντιπαραβολή με τον νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο, $\nabla \cdot \bar{E} = \rho / \epsilon_0$ - υποδηλώνει την ανυπαρξία ελευθέρων μαγνητικών φορτίων στη φύση.

Με εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss από τη διανυσματική ανάλυση,

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{B}) dV = \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S},$$

σε όγκο V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S προκύπτει ότι

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (\text{ολοκληρωτική μορφή του N. Gauss για το μαγνητικό πεδίο}). \quad (24)$$

Δύο ιδιότητες του διανυσματικού δυναμικού

1η ιδιότητα

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0 \quad (25)$$

Απόδειξη

Με $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ και τους τελεστές $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ και $\nabla' = (\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})$ να εφαρμόζονται, αντίστοιχα, στις συντεταγμένες (x, y, z) και (x', y', z') , βρίσκουμε ότι

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right). \quad (26)$$

Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\nabla \cdot \left[\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} \right] = \frac{1}{R} \nabla \cdot \bar{J}(\bar{r}') + \bar{J}(\bar{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \quad (27\alpha)$$

όπου $\nabla \cdot \bar{J}(\bar{r}') = 0$, παίρνουμε

$$\nabla \cdot \left[\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} \right] = \bar{J}(\bar{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \stackrel{(26)}{=} -\bar{J}(\bar{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R} \nabla' \cdot \bar{J}(\bar{r}') - \bar{J}(\bar{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \cdot \left[\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} \right]. \quad (27\beta)$$

Κατά το προτελευταίο βήμα στην (27β) προσθέσαμε τον μηδενικό όρο $-\frac{1}{R} \nabla' \cdot \bar{J}(\bar{r}')$ ($\nabla' \cdot \bar{J}(\bar{r}') = 0$, σωληνοειδές ρεύμα), ενώ κατά το τελευταίο βήμα ξαναχρησιμοποιήσαμε την (27α). Από τις (22) και (27β) προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot \bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} \right) dV' \stackrel{(27\beta)}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} \right] dV' \stackrel{\Theta.Gauss}{=} \oint_S \frac{\bar{J}(\bar{r}') \cdot d\bar{S}'}{R} = 0. \quad (28)$$

Το αποτέλεσμα στην (28) είναι μηδενικό, διότι το $\bar{J}(\bar{r}')$ είναι εντοπισμένο στον όγκο V και επομένως δεν έχει συνιστώσα κάθετη στην S.

2η ιδιότητα

$$\nabla^2 \bar{A} \equiv \hat{x} \nabla^2 A_x + \hat{y} \nabla^2 A_y + \hat{z} \nabla^2 A_z = -\mu_0 \bar{J} \quad (29)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με την (22) η συνιστώσα A_p ($p \equiv x, y, z$) του \bar{A} ισούται με

$$A_p(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_p(\bar{r}')}{R} dV'. \quad (30)$$

Η σχέση αυτή έχει ακριβώς την ίδια μορφή με τη σχέση (14) της σελίδας 5:

$$\Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\bar{r}')}{R} dV' \quad (31)$$

για το ΗΣ δυναμικό Φ . Επειδή $\nabla^2 \Phi = -\rho / \epsilon_0$ [Εξ. (28), σελ. 8], για το A_p ισχύει κατ' αναλογία η σχέση

$$\nabla^2 A_p = -\mu_0 J_p, \quad (32)$$

με χρήση της οποίας προκύπτει αμέσως η (29).

B. Περιστροφή του μαγνητικού πεδίου-Νόμος του Ampere.

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} \quad (33)$$

και τις παραπάνω δύο ιδιότητες του \bar{A} , παίρνουμε τη σχέση

$$\nabla \times \bar{B} = \nabla \times \nabla \times \bar{A} = -\nabla^2 \bar{A} = \mu_0 \bar{J}. \quad (34)$$

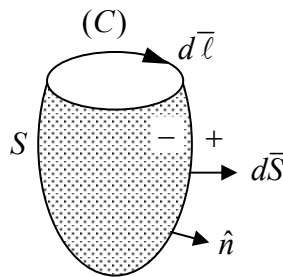
Με τον ορισμό της έντασης \bar{H} του μαγνητικού πεδίου (μονάδα μέτρησης A/m) στο κενό:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0}, \quad (35)$$

από την (34) προκύπτει η σχέση

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (\text{διαφορική μορφή του νόμου του Ampere}). \quad (36)$$

Με αναφορά σε οποιαδήποτε ανοικτή προσανατολισμένη επιφάνεια S , η οποία έχει σύνορο την κλειστή καμπύλη C (Σχ.6) [η C είναι έτσι προσανατολισμένη ώστε, σε συνδυασμό με τον προσανατολισμό της S , να προκύπτει ο θετικός προσανατολισμός του χώρου (κανόνας του δεξιόστροφου κοχλίου)], εφαρμογή του θεωρήματος Stokes $\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S (\nabla \times \bar{H}) \cdot d\bar{S}$ οδηγεί στο αποτέλεσμα:



Σχ. 6

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \equiv I \quad (\text{ολοκληρωτική μορφή του νόμου Ampere}) \quad (37)$$

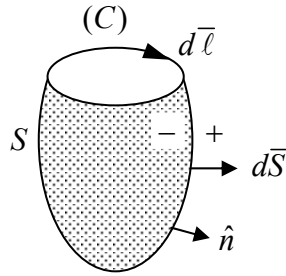
όπου I είναι το συνολικό ρεύμα που διαπερνά την επιφάνεια S κατά τη θετική της φορά.

ΝΟΜΟΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥ FARADAY

Τα πειράματα του Faraday τον οδήγησαν το 1831 στην ανακάλυψη του νόμου ο οποίος φέρει το όνομά του και διατυπώθηκε μαθηματικά από τον Maxwell με την εξίσωση

$$V_e = -\frac{d\psi_m}{dt} \Leftrightarrow \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} \quad (\text{Νόμος Faraday- Maxwell}). \quad (1\alpha)$$

Στην (1α), $V_e = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell}$ σε Volt είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C , ενώ $\psi_m = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$ σε Wb είναι η μαγνητική ροή που διαπερνά οποιαδήποτε ανοικτή επιφάνεια S η οποία καταλήγει στην καμπύλη C (Σχ. 1). Αν η καμπύλη C είναι ένα λεπτό αγωγίμο σύρμα, η V_e αποτελεί την πηγή του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος.



Σχ. 1

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν, η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος του κλειστού συνόρου C μιας ανοικτής επιφάνειας S ισούται με την ταχύτητα ελάττωσης της μαγνητικής ροής η οποία διαπερνά την επιφάνεια αυτή.

Παρατήρηση: Η καμπύλη C μπορεί να είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία κλειστή καμπύλη, αυθαίρετα εκτεινόμενη στον χώρο, με φορά διαγραφής αυθαίρετα επιλεγόμενη. Ο προσανατολισμός της επιφάνειας S , η οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία ανοικτή επιφάνεια με σύνορο την C , γίνεται έτσι ώστε, σε συνδυασμό με την επιλεγείσα φορά της C , να οδηγεί σε θετικό προσανατολισμό του χώρου (κανόνας του δεξιόστροφου κοχλίου), σύμφωνα με το Σχ.1.

Η (1α) έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (37) της σελ. 16. Επομένως, με συλλογισμούς αντίστροφους αυτών που μας οδήγησαν από την (36) στην (37) της σελ. 16, από την (1α) προκύπτει η διαφορική μορφή του νόμου Faraday –Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1\beta)$$

Από την (1β) συνάγεται ότι ένα χρονομεταβλητό μαγνητικό πεδίο επάγει πάντοτε ένα ηλεκτρικό πεδίο.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΝΟΜΟΥ AMPERE. ΝΟΜΟΣ AMPERE -MAXWELL

Ο νόμος του Ampere της μαγνητοστατικής [Εξ. (36) και (37), σελ. 16]

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{διαφορική μορφή}) \quad (2\alpha)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{ολοκληρωτική μορφή}) \quad (2\beta)$$

δεν ισχύει για χρονικά μεταβαλλόμενες πηγές $\vec{J}(\vec{r}, t)$, διότι παραβιάζει τον νόμο διατήρησης του φορτίου (εξίσωση συνέχειας) $[\nabla \cdot \vec{J} = -\partial \rho / \partial t \text{ και } \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV]$. Πράγματι, από την (2α) έχουμε

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3\alpha)$$

και από την (2β), συρρικνώνοντας την C ώστε να καταλήγει σε σημείο, έχουμε

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3\beta)$$

διότι στην περίπτωση αυτή η S γίνεται κλειστή επιφάνεια. Ο Maxwell, δεχόμενος ότι ο νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο, $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$, εξακολουθεί να ισχύει και για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία, συμπλήρωσε την (2α) ως εξής:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (\text{διαφορική μορφή νόμου Ampere-Maxwell}) \quad (4a)$$

$$[\text{H (4α) δίνει } \nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = 0 = \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ (εξ. συνέχειας)}]$$

και

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} + \frac{d}{dt} \int_S \bar{D} \cdot d\bar{S} \quad (\text{ολοκληρωτική μορφή νόμου Ampere-Maxwell}). \quad (4\beta)$$

Με συρρίκνωση της C σε σημείο, έχουμε από την (4β):

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = -\frac{d}{dt} \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} \stackrel{\Theta. Gauss}{=} -\frac{d}{dt} \int_V (\nabla \cdot \bar{D}) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

Για $d/dt = 0$ οι (4α) και (4β) ανάγονται στις (2α) και (2β), αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

1. Σύνοψη των νόμων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

1.1 Εξίσωση συνέχειας (αρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου)

Πηγές του ΗΜ πεδίου είναι τα ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα, τα οποία περιγράφονται με τις μακροσκοπικές τους πυκνότητες $\rho(\vec{r},t)$ και $\vec{J}(\vec{r},t)$. Τα μεγέθη αυτά, τα οποία ορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπόκεινται στην εξίσωση συνέχειας

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (I)$$

Η σχέση (I) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου.

Υπόθεση: Στα επόμενα, τα μεγέθη ρ και \vec{J} θα θεωρούνται ως συναρτήσεις της θέσεως και του χρόνου, οι οποίες είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε ομαλά σημεία (δηλαδή σε σημεία στο εσωτερικό συνεχών μέσων, στη γειτονιά των οποίων οι φυσικές ιδιότητες του μέσου είναι συνεχείς).

1.2 Εξίσωση του Lorentz για την ΗΜ δύναμη-Πεδιακά μεγέθη \vec{E} και \vec{B}

Αποτέλεσμα της υπάρξεως των πηγών είναι η διέγερση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (συνάρτηση της θέσεως και του χρόνου) τόσο στο εσωτερικό τους όσο και στον περιβάλλοντα χώρο. Η ύπαρξη του πεδίου αυτού αποκαλύπτεται μέσω των μηχανικών αποτελεσμάτων του επί δοκιμαστικών ή άλλων ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων. Πιο συγκεκριμένα, βρίσκεται πειραματικά ότι ηλεκτρικό φορτίο q , το οποίο εισάγεται με ταχύτητα \vec{v} στη θέση \vec{r} εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, υπόκειται σε ηλεκτρομαγνητική δύναμη ίση με

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{εξίσωση του Lorentz για την ΗΜ δύναμη}). \quad (II)$$

Η αξιωματική αυτή σχέση χρησιμεύει για τον τελεστικό ορισμό των πεδιακών μεγεθών \vec{E} (ένταση του ηλεκτρικού πεδίου) και \vec{B} (μαγνητική επαγωγή ή πυκνότητα μαγνητικής ροής) ως εξής:

α) Από την (II) προκύπτει αμέσως ότι

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Big|_{\vec{v}=0}. \quad (1)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1), για τον καθορισμό της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση \vec{r} εισάγεται στη θέση αυτή δοκιμαστικό φορτίο q , το οποίο στη συνέχεια κρατείται ακίνητο ($\vec{v}=0$), και μετρείται η επ' αυτού ασκούμενη δύναμη \vec{F} κατά τη χρονική στιγμή t . Το πηλίκο \vec{F}/q προσδιορίζει την ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση \vec{r} τη χρονική στιγμή t . Υποτίθεται ότι το δοκιμαστικό φορτίο είναι κατάλληλα μικρό ώστε η παρουσία του να μη διαταράσσει την κατανομή των πηγών ρ και \vec{J} .

β) Έχοντας ορίσει το μέγεθος \vec{E} , στη συνέχεια μετράμε τη δύναμη \vec{F} που ασκείται σε δοκιμαστικό φορτίο q κινούμενο με ταχύτητα \vec{v} . Η σχέση

$$q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{F} - q\vec{E} = \delta\vec{F} \quad (2)$$

$[\delta\vec{F}]$ γνωστό, επειδή η ένταση \vec{E} είναι ήδη γνωστή από το προηγούμενο πείραμα που οδήγησε στη σχέση (1)] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον τελεστικό ορισμό της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} .

Παρατηρήσεις

1. Για τον πλήρη προσδιορισμό του διανύσματος \vec{B} απαιτούνται δυο ανεξάρτητα πειράματα, κατά τα οποία δίδεται στο φορτίο q ταχύτητα $\vec{v} = \hat{x}v_x$ και $\vec{v} = \hat{y}v_y$ (ή $\vec{v} = \hat{z}v_z$) αντίστοιχα. Από το προκύπτον γραμμικό αλγεβρικό σύστημα

$$qv_x(\hat{z}B_y - \hat{y}B_z) = \delta\vec{F}_1, \quad qv_y(\hat{x}B_z - \hat{z}B_x) = \delta\vec{F}_2, \quad (3)$$

προσδιορίζονται οι τιμές των τριών συνιστωσών B_x, B_y, B_z μέσω των ενδείξεων $\delta\vec{F}_1, \delta\vec{F}_2$ που αντιστοιχούν στα δύο αυτά πειράματα. Υποτίθεται και πάλι ότι το μέγεθος και η ταχύτητα του φορτίου q είναι κατάλληλα μικρά ώστε να μη διαταράσσεται το υπό μέτρηση πεδίο.

2. Ο τρόπος μετρήσεως των πεδιακών μεγεθών \vec{E} και \vec{B} , που υποδεικνύουν οι σχέσεις ορισμού (1) και (2), είναι πρακτικά χρήσιμος μόνο σε περιπτώσεις στατικών ή βραδέως μεταβαλλομένων πεδίων. Σε υψηλές συχνότητες λειτουργίας (ταχέως μεταβαλλόμενα πεδία), οπότε οι παραπάνω ορισμοί καθίστανται μη λειτουργικοί, η μέτρηση των πεδίων στηρίζεται σε άλλα μετρητικά σχήματα τα οποία χρησιμοποιούν μεθόδους και έννοιες της θεωρίας κυκλωμάτων.

1.3 Πεδιακά μεγέθη \vec{D} και \vec{H}

Οι ποσότητες \vec{E} και \vec{B} θεωρούνται ως τα **θεμελιώδη** μεγέθη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου επειδή τα μεγέθη αυτά, μαζί με τις ποσότητες ρ και \vec{J} , επαρκούν για την περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο κενό.

Όταν οι πρωτογενείς πηγές δεν δρουν στον απεριόριστο κενό χώρο, αλλά βρίσκονται στη γειτονιά υλικών σωμάτων, η περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων περιπλέκεται. Οι δυνάμεις που δέχονται τώρα τα δοκιμαστικά φορτία, κατά τις μετρήσεις που περιγράψαμε παραπάνω, διαφέρουν εν γένει από αυτές στον κενό χώρο. Οι αλλαγές αυτές αποδίδονται σε πηγές που **επάγονται** στην επιφάνεια και στο εσωτερικό των υλικών σωμάτων και οι οποίες δρουν ως δευτερογενείς πηγές πεδίων. Φορείς των επαγομένων πηγών είναι τα θεμελιώδη συστατικά των ατόμων και των μορίων, τα οποία τίθενται σε κίνηση, αναδιατάσσονται, διαχωρίζονται, ή επαναπροσανατολίζονται και τελικώς οδηγούν σε μη μηδενικές μακροσκοπικές κατανομές ηλεκτρικών διπόλων και μαγνητικών διπόλων (στοιχειωδών ρευματοφόρων βρόχων) στο εσωτερικό των υλικών. Οι κατανομές αυτές περιγράφονται με την χωρική πυκνότητα ηλεκτρικής διπολικής ροπής (ή ηλεκτρική πόλωση) $\vec{P}(x, y, z; t)$ και την χωρική πυκνότητα μαγνητικής διπολικής ροπής (ή μαγνητική πόλωση) $\vec{M}(x, y, z; t)$,

$$\vec{P}(x, y, z; t) = \frac{\sum_{i=1}^{N(\delta v)} \vec{p}_i}{\delta v}, \quad \vec{M}(x, y, z; t) = \frac{\sum_{i=1}^{N(\delta v)} \vec{m}_i}{\delta v} \quad (4)$$

αντίστοιχα, όπου \vec{p}_i / \vec{m}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) είναι τα επαγόμενα στοιχειώδη ηλεκτρικά/μαγνητικά δίπολα τη χρονική στιγμή t στο εσωτερικό του στοιχειώδους όγκου δv με κεντροειδές το σημείο (x, y, z) . Αμφότερες οι κατανομές \vec{P} και \vec{M} θεωρείται ότι βρίσκονται στον κενό χώρο, επειδή μεταξύ των φορέων τους (ατόμων και μορίων) παρεμβάλλεται το κενό.

Το συνολικό πεδίο στη διάταξη προκύπτει από την υπέρθεση των πεδίων που διεγείρουν οι πρωτογενείς πηγές (\vec{J}, ρ) , αφενός, και οι δευτερογενείς πηγές \vec{P} και \vec{M} αφετέρου, όπως σημειώσαμε νωρίτερα: το σύνολο των πηγών, πρωτογενών και δευτερογενών, θεωρείται ότι δρα στον απεριόριστο κενό χώρο. Συνεπώς τα μεγέθη \vec{P} και \vec{M} από κοινού με τις πρωτογενείς πηγές (\vec{J}, ρ) επαρκούν για μια περιγραφή του πεδίου βασισμένη στα θεμελιώδη μεγέθη \vec{E} και \vec{B} και στις εξισώσεις Maxwell για το κενό.

Παρ' όλα αυτά, για την περιγραφή του πεδίου στο εσωτερικό ή στη γειτονιά υλικών μέσων είναι πλεονεκτική η χρήση δυο άλλων πεδιακών μεγεθών αντί των \vec{P} και \vec{M} : της πυκνότητας ηλεκτρικής

ροής (ή διηλεκτρικής μετατοπίσεως) \bar{D} και της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου \bar{H} , τα οποία ορίστηκαν στο κεφάλαιο 1 μέσω των σχέσεων

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}, \quad \bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad (5)$$

όπου ϵ_0 (επιτρεπτότητα του κενού) και μ_0 (μαγνητική διαπερατότητα του κενού) είναι δύο παγκόσμιες σταθερές. Με τη βοήθεια των μεγεθών αυτών οδηγούμαστε σε μια γενικευμένη διατύπωση των βασικών νόμων του ηλεκτρομαγνητισμού (εξισώσεις Maxwell), η οποία ισχύει υπό τελείως γενικές συνθήκες και ανεξαρτήτως της φύσεως του μέσου εντός του οποίου διεγείρεται το πεδίο και είναι απαλλαγμένη από την παρουσία των αγνώστων επαγομένων πηγών \bar{P} και \bar{M} . Η επίδραση των επαγομένων πηγών στη διαμόρφωση του πεδίου λαμβάνεται υπόψιν μέσω καταλλήλων **συντακτικών σχέσεων** μεταξύ των πεδιακών μεγεθών, οι οποίες στηρίζονται στις (5) και παρουσιάζονται στην ενότητα 6.

1.4 Εξισώσεις Maxwell

A. Νόμος των Maxwell-Faraday

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν, η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος του κλειστού συνόρου C μιας ανοικτής επιφάνειας S (Σχ.1) ισούται με την ταχύτητα ελαττώσεως της μαγνητικής ροής η οποία διαπερνά την επιφάνεια αυτή.

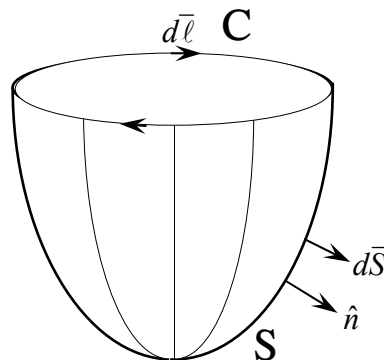
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος ενός τμηματικά λείου δρόμου C έχει οριστεί με τη σχέση

$$\mathcal{V}_e \equiv \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell}.$$

[Αν ο δρόμος C συντίθεται από τα μέρη AB, ΒΓ, ΓΔ, ..., η ηλεκτρεγερτική δύναμη \mathcal{V}_e κατά μήκος του ισούται με το άθροισμα $\mathcal{V}_{AB} + \mathcal{V}_{BG} + \mathcal{V}_{GD} + \dots$ των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων στα τμήματα αυτά. Αν τα τμήματα είναι απειροστά, η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος ενός τυπικού στοιχείου είναι $\bar{E} \cdot d\bar{\ell} = E_i d\ell$ (E_i είναι η εφαπτομενική συνιστώσα του \bar{E} στην καμπύλη C)]. Έτσι ο παραπάνω νόμος διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$\mathcal{V}_e = -\frac{d\psi_m}{dt} \Leftrightarrow \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} \quad (III)$$

Παρατήρηση: Ο δρόμος C μπορεί να είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία κλειστή καμπύλη, αυθαίρετα εκτεινόμενη στο χώρο, με φορά διαγραφής είτε τη θετική είτε την αρνητική, αυθαίρετα επιλεγόμενη. Ο προσανατολισμός της αντίστοιχης επιφάνειας S, η οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία ανοικτή επιφάνεια με σύνορο τον C, γίνεται έτσι ώστε, σε συνδυασμό με την επιλεγείσα φορά του δρόμου C, να οδηγεί στο θετικό προσανατολισμό του χώρου (κανόνας του δεξιόστροφου κοχλίου) σύμφωνα με το Σχ.1.



Σχήμα 1

B. Νόμος των Maxwell-Ampere

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν, η μαγνητεγερτική δύναμη κατά μήκος του κλειστού συνόρου C μιας ανοικτής επιφάνειας S ισούται με το άθροισμα του ρεύματος που διαπερνά την S και της ταχύτητας αυξήσεως της ηλεκτρικής ροής δια μέσου της επιφάνειας S.

Ο νόμος αυτός διατυπώνεται μαθηματικά με την εξίσωση

$$\mathcal{V}_m = I + \frac{d\psi_e}{dt} \Leftrightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (IV)$$

όπου, κατ' αναλογία προς τον ορισμό $\mathcal{V}_e \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ της ηλεκτρεγερτικής δυνάμεως, το μέγεθος

$$\mathcal{V}_m \equiv \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

ονομάζεται **μαγνητεγερτική δύναμη** κατά μήκος του δρόμου C. Για την εκλογή και τον προσανατολισμό του δρόμου C και της επιφάνειας S ισχύει η προηγούμενη παρατήρηση.

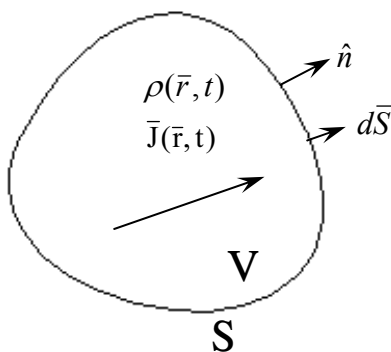
Σημείωση: Ο όρος $(d/dt) \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ στην (IV), ο οποίος προφανώς έχει διαστάσεις εντάσεως ρεύματος, ονομάζεται **ρεύμα μετατόπισης**.

Γ. Νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν, η ηλεκτρική ροή, η οποία εξέρχεται από περιοχή του χώρου V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S δια μέσου της S, ισούται με το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που εμπερικλείεται στον όγκο αυτό, δηλαδή

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (V)$$

Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος, η κλειστή επιφάνεια S θεωρείται ότι είναι προσανατολισμένη κατά τη θετική της φορά (Σχ.2).



Σχήμα 2.

Δ. Νόμος του Gauss για το μαγνητισμό

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν η μαγνητική ροή, η οποία εξέρχεται από περιοχή του χώρου V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S (Σχ.2) δια μέσου της S, ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (VI)$$

Παρατήρηση: Όπως κάθε φυσικός νόμος, οι εξισώσεις Maxwell ισχύουν ανεξάρτητα από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων.

2. Αλληλεξάρτηση των εξισώσεων Maxwell

A. Χρονοσταθερά πεδία

Σε χρονοσταθερές διατάξεις, όπου τόσο οι πηγές (ρ, \bar{J}) όσο και οι αποκρίσεις $(\bar{E}, \bar{D}; \bar{B}, \bar{H})$ είναι ανεξάρτητες του χρόνου, οι χρονικές παράγωγοι (όροι συζεύξεως) που εμπλέκονται στις εξισώσεις Maxwell μηδενίζονται. Οι προκύπτουσες εξισώσεις

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = 0 \quad (1\alpha)$$

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \quad (2\alpha)$$

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_V \rho dV \quad (1\beta)$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (2\beta)$$

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (2\gamma)$$

είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι εξισώσεις (1α) και (1β) περιγράφουν ηλεκτροστατικά προβλήματα με πηγές τις χρονοσταθερές κατανομές φορτίου ρ , ενώ οι εξισώσεις (2α)-(2γ) προσιδιάζουν σε μαγνητοστατικά προβλήματα με πηγές τις χρονοσταθερές, σωληνοειδείς ρευματικές κατανομές \bar{J} .

B. Χρονομεταβλητά πεδία

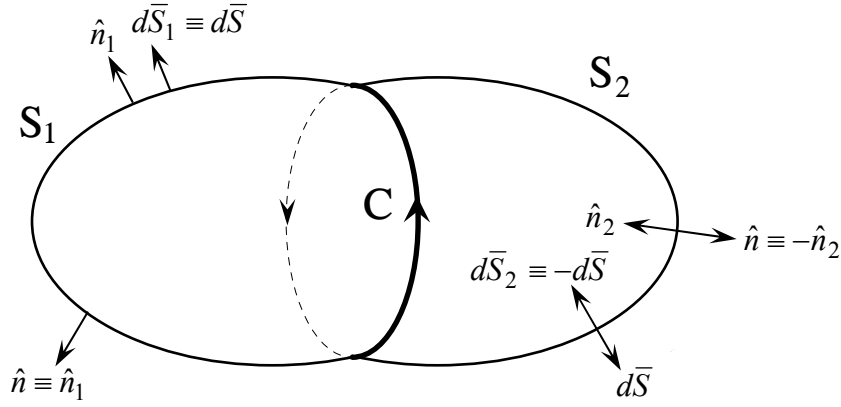
Σε προβλήματα, όπου οι πηγές (επομένως και οι αποκρίσεις) είναι συναρτήσεις και του χρόνου, οι πεδιακές εξισώσεις (I), (III)-(VI) -αν και είναι πάντοτε συμβιβαστές- δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, θα δείξουμε στη συνέχεια ότι οι δυο νόμοι του Gauss μπορούν να προκύψουν από τους νόμους Maxwell-Faraday και Maxwell-Ampere, αντίστοιχα, αν δεχθούμε την ισχύ της εξισώσεως συνεχειας.

Απόδειξη

A. Όπως τονίστηκε παραπάνω, η εκλογή του δρόμου C κατά την εφαρμογή των (III) και (IV) είναι αυθαίρετη, ενώ το ίδιο ισχύει και για την εκλογή των αντιστοίχων επιφανειών S. Αν δυο διαφορετικές επιφάνειες S_1 και S_2 έχουν ως σύνορο την ίδια κλειστή καμπύλη C ώστε να σχηματίζουν την κλειστή επιφάνεια $S = S_1 + S_2$ (Σχ.1), τότε από την (III) προκύπτει ότι

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} &= -\frac{d}{dt} \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S}_1 \\ \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} &= -\frac{d}{dt} \int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{S}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S}_1 = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{S}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (3)$$

όπου στο τελευταίο βήμα θεωρήσαμε ότι η κλειστή επιφάνεια S είναι θετικά προσανατολισμένη (δηλαδή $d\bar{S} = \hat{n}dS$, με το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα \hat{n} να εξέρχεται από την επιφάνεια αυτή).



Σχήμα 1: Οι ανοικτές επιφάνειες S_1 και S_2 , με σύνορο τον προσανατολισμένο δρόμο C , είναι προσανατολισμένες με τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα \hat{n}_1 και \hat{n}_2 , αντίστοιχα (κανόνας δεξιόστροφου κοχλίου). Η κλειστή επιφάνεια $S = S_1 + S_2$ είναι προσανατολισμένη με το εξερχόμενο κάθετο διάνυσμα \hat{n} [$\hat{n} \equiv \hat{n}_1|_{S_1}$, $\hat{n} \equiv -\hat{n}_2|_{S_2}$].

Από την (3) συνάγεται ότι

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = c \quad (4)$$

όπου c είναι ανεξάρτητη του χρόνου σταθερά. Η τιμή της σταθεράς αυτής λαμβάνεται ίση με μηδέν, με βάση το συλλογισμό ότι το πεδίο δημιουργήθηκε από τις πηγές του τη χρονική στιγμή t_0 και έκτοτε μεταβάλλεται συνεχώς. Επομένως, $\bar{B} = 0$ για $t < t_0 \Rightarrow c = 0$.

B. Με εντελώς ανάλογο τρόπο, από την (IV) παίρνουμε τη σχέση

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} + \frac{d}{dt} \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = 0, \quad (5)$$

η οποία μέσω της (I) οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{d}{dt} \left[\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} - \int_V \rho dV \right] = 0 \Rightarrow \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} - \int_V \rho dV = d \quad (6)$$

(V είναι ο όγκος που περικλείεται από την S), όπου d είναι ανεξάρτητη του χρόνου σταθερά. Η τιμή της σταθεράς αυτής λαμβάνεται ίση με μηδέν, με βάση τον ίδιο συλλογισμό που οδήγησε στο μηδενισμό της σταθεράς c στην προηγούμενη περίπτωση.

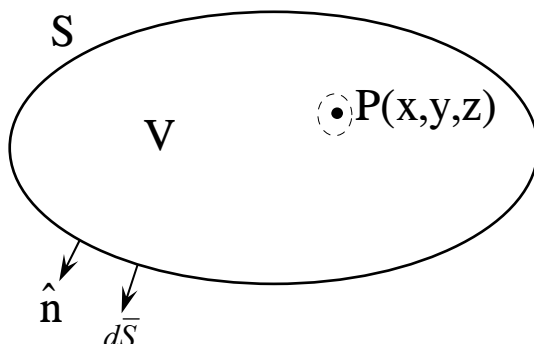
Συμπέρασμα: Για το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, οι νόμοι του Gauss για τον μαγνητισμό και τον ηλεκτρισμό δεν αποτελούν ανεξάρτητες εξισώσεις, αλλά επέχουν θέση αρχικών συνθηκών (ισοδυνάμων προς τις αρχικές συνθήκες $\bar{B} = 0$ για $t < t_0$, $\bar{D} = 0$ για $t < t_0$).

3. Διαφορική μορφή των εξισώσεων Maxwell

Υπόθεση: Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι τα πεδιακά μεγέθη $\bar{E}, \bar{D}, \bar{H}, \bar{B}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της θέσεως και του χρόνου και έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους σε σημεία στο εσωτερικό συνεχών μέσων. Για τέτοια σημεία οι πεδιακές εξισώσεις (I), (III)-(VI) μπορούν να τεθούν ισοδύναμα υπό διαφορική μορφή ως εξής:

A. Νόμοι του Gauss

Με αναφορά στο Σχ.1, θεωρούμε ότι ο όγκος V με σύνορο τη λεία (ή τμηματικά λεία) επιφάνεια S ανήκει στο εσωτερικό ενός συνεχούς μέσου.



Σχήμα 1

Από τον νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (1)$$

προκύπτει η σχέση

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \rho(\eta, \xi, \zeta; t)V, \quad (\eta, \xi, \zeta) \in V \quad (2)$$

με εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής για το χωρικό ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της (1).

Στο όριο όπου ο όγκος V , συστέλλόμενος, συρρικνώνεται στο σημείο $P(x,y,z)$ (Σχ.1), από την (2) παίρνουμε τη σχέση

$$\rho(x, y, z; t) = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{V} \quad (3)$$

όπου το σύμβολο $\lim_{V \rightarrow P}$ υποδηλώνει το πέρασμα στο παραπάνω όριο.

Από το άλλο μέρος, από τη διανυσματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι η απόκλιση της διανυσματικής συναρτήσεως \vec{D} στο σημείο $P(x,y,z)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\nabla \cdot \vec{D} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{V}. \quad (4)$$

Ο ορισμός (4) είναι, προφανώς, ανεξάρτητος από το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων.

Συνδυάζοντας τις (3) και (4) παίρνουμε τη σχέση

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (5)$$

που αποτελεί την διατύπωση του νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό υπό διαφορική μορφή.

Εντελώς ανάλογα, από την εξίσωση (VI) προκύπτει η σχέση

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0, \quad (6)$$

που αποτελεί την υπό διαφορική μορφή διατύπωση του νόμου του Gauss για τον μαγνητισμό.

Σημείωση

Υπό την παραπάνω προϋπόθεση συνεχείας των μεγεθών $\bar{\mathbf{D}}$ και $\bar{\mathbf{B}}$ και των παραγώγων τους, η εξαγωγή των (5) και (6) μπορεί, εναλλακτικά, να στηριχθεί στο γνωστό από τη διανυσματική ανάλυση θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό ισχύει η σχέση

$$\oint_S \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_V (\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}}) dV, \quad (7)$$

οπότε η (1) παίρνει τη μορφή

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} - \rho) dV = 0. \quad (8)$$

Επειδή η τελευταία σχέση πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε εκλογή του όγκου V , προκύπτει η σχέση (5), $\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} - \rho = 0$, λαμβάνοντας υπόψιν την συνέχεια της ολοκληρωτέας συναρτήσεως στο εσωτερικό του V .

Η απόδειξη της (6) είναι εντελώς ανάλογη.

B. Εξίσωση συνεχείας

Με τον ίδιο τρόπο η εξίσωση συνεχείας τίθεται υπό την διαφορική μορφή

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

όπως ήδη αποδείξαμε στο κεφάλαιο 1 (ενότητα 3.4).

Γ. Νόμοι των Maxwell-Faraday και Maxwell-Ampere

Με αναφορά σε χρονοσταθερή (ακίνητη) επιφάνεια S με σύνορο τον τμηματικά λείο βρόχο C , η οποία υποτίθεται ότι ανήκει στο εσωτερικό ενός συνεχούς μέσου, εφαρμόζοντας τον νόμο των Maxwell-Faraday παίρνουμε

$$\oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (10\alpha)$$

$$= -\int_S \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \quad (10\beta)$$

όπου $d\bar{\mathbf{S}} = \hat{n} dS$, \hat{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα προσανατολισμού της S ($\hat{n} \perp S$) και $B_n = \hat{n} \cdot \bar{\mathbf{B}}$ είναι η κάθετη στην επιφάνεια S συνιστώσα του διανύσματος $\bar{\mathbf{B}}$. Η εναλλαγή των τελεστών d/dt και \int_S κατά το δεύτερο βήμα επιτρέπεται λόγω της υποθεθείσης χρονοσταθερότητας της S .

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής για το τελευταίο επιφανειακό ολοκλήρωμα στην (10β), παίρνουμε τη σχέση

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{\partial B_n(\eta, \xi, \zeta; t)}{\partial t} S; \quad (\eta, \xi, \zeta) \in S. \quad (11)$$

Στο όριο όπου η επιφάνεια S , συστελλόμενη, συρρικνώνεται στο σημείο $P(x, y, z)$, από την (11) προκύπτει ότι

$$-\frac{\partial B_n(x, y, z; t)}{\partial t} = \lim_{S \rightarrow P} \frac{\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell}}{S}. \quad (12)$$

Εξ' άλλου, από τη διανυσματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι η περιστροφή της διανυσματικής συναρτήσεως \bar{E} στο σημείο $P(x, y, z)$ (διανυσματικό μέγεθος συμβολιζόμενο με $\nabla \times \bar{E}$) ορίζεται από τη σχέση

$$(\nabla \times \bar{E})_n = \lim_{S \rightarrow P} \frac{\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell}}{S} \quad (13)$$

όπου $(\nabla \times \bar{E})_n = \hat{n} \cdot (\nabla \times \bar{E})$ είναι η συνιστώσα του διανύσματος της περιστροφής κατά την κατεύθυνση \hat{n} . Ο ορισμός (13) είναι, προφανώς, ανεξάρτητος από το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων.

Συνδυάζοντας τις (12) και (13) παίρνουμε τη σχέση

$$(\nabla \times \bar{E})_n = -\frac{\partial B_n}{\partial t} \Leftrightarrow \hat{n} \cdot (\nabla \times \bar{E}) = -\hat{n} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \hat{n} \cdot (\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}) = 0. \quad (14)$$

Επειδή η θέση της επιφάνειας S στο χώρο (άρα και η κατεύθυνση \hat{n}) μπορεί να είναι αυθαίρετη, από την (14) προκύπτει η σχέση

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \quad (15)$$

Η εξίσωση (15) αποτελεί την υπό διαφορική μορφή διατύπωση του νόμου των Maxwell-Faraday.

Με τον ίδιο τρόπο, από τον νόμο των Maxwell-Ampere

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} + \frac{d}{dt} \int_S \bar{D} \cdot d\bar{S} \quad (16\alpha)$$

$$= \int_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{S} = \int_S \left(J_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS \quad (16\beta)$$

παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση, ανάλογη της (11)

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \left(J_n(\eta, \xi, \zeta; t) + \frac{\partial D_n(\eta, \xi, \zeta; t)}{\partial t} \right) S; \quad (\eta, \xi, \zeta) \in S. \quad (17)$$

Από την (17), περνώντας στο όριο όπου $S \rightarrow P(x, y, z)$, προκύπτει-κατ' αναλογία προς την (15)- η εξίσωση

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (18)$$

που αποτελεί τη διατύπωση του νόμου των Maxwell-Ampere υπό διαφορική μορφή.

Ο όρος $\partial \bar{D} / \partial t$ στην (18), ο οποίος προφανώς έχει διαστάσεις πυκνότητας ρεύματος, ονομάζεται *πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης*

Σημείωση

Εναλλακτικά, υπό τις τεθείσες στην αρχή της παρούσας ενότητας συνθήκες συνεχείας των πεδιακών μεγεθών και των παραγώγων τους σε ομαλά σημεία, η εξαγωγή των (15) και (18) μπορεί να γίνει με βάση το γνωστό από τη διανυσματική ανάλυση θεώρημα του Stokes. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, ισχύει η σχέση

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = \int_S (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{S}, \quad (19)$$

οπότε η (10) γίνεται

$$\int_S (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} \Rightarrow \int_S (\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}) \cdot d\bar{S} = 0 \quad . \quad (20)$$

Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε δυνατή επιλογή της S , έπεται ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι μηδέν, οδηγώντας αμέσως στην (15). Η εξαγωγή της (18) γίνεται με τον ίδιο τρόπο.

4. Αλληλεξάρτηση των εξισώσεων Maxwell

Τα συμπεράσματα για την αλληλεξάρτηση των πεδιακών εξισώσεων, στα οποία καταλήξαμε με βάση την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων αυτών, προκύπτουν ευκολότερα με χρήση της διαφορικής τους μορφής [λαμβάνομένων υπόψιν των περιορισμών (συνέχεια και παραγωγισιμότητα των πεδίων) στους οποίους υπόκεινται οι διαφορικές αυτές εξισώσεις] ως εξής:

A. Χρονοσταθερά πεδία

Σε χρονοσταθερές διατάξεις, όπου τόσο οι πηγές (ρ, \bar{J}) όσο και οι αποκρίσεις $(\bar{E}, \bar{D}; \bar{B}, \bar{H})$ είναι ανεξάρτητες του χρόνου, οι χρονικές παράγωγοι (όροι συζεύξεως) στις εξισώσεις (3.9), (3.15) και (3.18) μηδενίζονται. Οι προκύπτουσες εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (1\alpha) \qquad \nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (2\alpha)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (1\beta) \qquad \nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2\beta)$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0 \quad (2\gamma)$$

είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι εξισώσεις (1α) και (1β) περιγράφουν ηλεκτροστατικά προβλήματα (με πηγές τις χρονοσταθερές κατανομές φορτίου ρ) ενώ οι εξισώσεις (2α)-(2β) προσιδιάζουν σε μαγνητοστατικά προβλήματα (με πηγές τις χρονοσταθερές, σωληνοειδείς ρευματικές κατανομές \bar{J}).

B. Χρονομεταβλητά πεδία

Σε προβλήματα όπου οι πηγές (άρα και οι αποκρίσεις) είναι συναρτήσεις του χρόνου, οι εξισώσεις (3.5), (3.6), (3.9), (3.15) και (3.18) - αν και είναι πάντοτε συμβιβάστες - δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, οι δυο νόμοι του Gauss [Εξ.(3.5)-(3.6)] μπορούν να προκύψουν από τους νόμους Maxwell-Faraday [Εξ.(3.15)] και Maxwell-Ampere [Εξ.(3.18)], αντίστοιχα, αν δεχθούμε την ισχύ της εξισώσεως συνεχείας [Εξ.(3.9)], ως εξής:

1. Από την εξίσωση (3.15), παίρνοντας την απόκλιση των δυο μελών της, προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{B}) \quad (3)$$

(η εναλλαγή των τελεστών $\partial/\partial t$ και $\nabla \cdot$ επιτρέπεται λόγω της υποθεσίας συνεχείας του \bar{B} και των παραγώγων του σε ομαλά σημεία).

Όμως, σύμφωνα με γνωστή διανυσματική ταυτότητα, ισχύει η σχέση

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{E}) = 0 \quad (4)$$

και επομένως από την (3) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{B} = c(x, y, z) \quad (5)$$

όπου c είναι συνάρτηση ανεξάρτητη του χρόνου. Όπως είναι φυσικό, θα υποθέσουμε ότι το πεδίο δημιουργήθηκε από τις πηγές του τη χρονική στιγμή t_0 και έκτοτε μεταβάλλεται συνεχώς. Επομένως, με $\bar{B} = 0$ για $t < t_0$, έπεται ότι $c=0$, οπότε προκύπτει ο νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο,

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0.$$

2. Ομοίως, από την εξίσωση (3.18) προκύπτει διαδοχικά ότι

$$0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho - \nabla \cdot \bar{D}) \quad (6)$$

όπου στο προτελευταίο βήμα στην (6) χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση συνεχείας $\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Επομένως

$$\nabla \cdot \bar{D} - \rho = d(x, y, z) \quad (7)$$

όπου η d μπορεί να είναι συνάρτηση της θέσεως, όχι όμως και του χρόνου. Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο δημιουργήθηκε από τις πηγές του τη χρονική στιγμή t_0 και έκτοτε μεταβάλλεται συνεχώς, τότε, με $\{\rho=0, \bar{D}=0\}$ για $t < t_0$, έπεται ότι $d=0$, οπότε προκύπτει ο νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο,

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho.$$

Συμπεραίνουμε και πάλι ότι στο χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο οι νόμοι του Gauss για τον μαγνητισμό και τον ηλεκτρισμό δεν αποτελούν ανεξάρτητες εξισώσεις, αλλά επέχουν θέση αρχικών συνθηκών.

Παρατήρηση

Αποδείξαμε παραπάνω ότι στην περίπτωση χρονομεταβλητών πεδίων ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό προκύπτει ως συνέπεια του νόμου Maxwell-Ampere, υπό την προϋπόθεση της ισχύος της αρχής διατηρήσεως του φορτίου (εξισώσεως συνεχείας). Θα δείξουμε τώρα ότι, αν ως ανεξάρτητες εξισώσεις ληφθούν ο νόμος Maxwell-Ampere και ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό, τότε η εξίσωση συνεχείας προκύπτει ως άμεση συνέπεια. Πράγματι, από την (3.18) παίρνουμε διαδοχικά, όπως στην περίπτωση της (6), τις σχέσεις

$$0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) \quad (8a)$$

με κατάληξη την εξίσωση συνεχείας

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (8\beta)$$

Κατά τη μετάβαση από την (8α) στην (8β) χρησιμοποιήσαμε τον νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο, $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$.

5. Σχόλια πάνω στις εξισώσεις Maxwell

1. Επειδή οι ορισμοί

$$\nabla \cdot \bar{A} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\oint \bar{A} \cdot d\bar{S}}{V}, \quad (\nabla \times \bar{A})_n = \lim_{S \rightarrow P} \frac{\oint \bar{A} \cdot d\bar{\ell}}{S} \quad (1)$$

της αποκλίσεως και της περιστροφής μιας διανυσματικής συναρτήσεως \bar{A} είναι ανεξάρτητοι από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων, έπεται ότι και οι εξισώσεις Maxwell είναι ανεξάρτητες του εκάστοτε χρησιμοποιούμενου συστήματος.

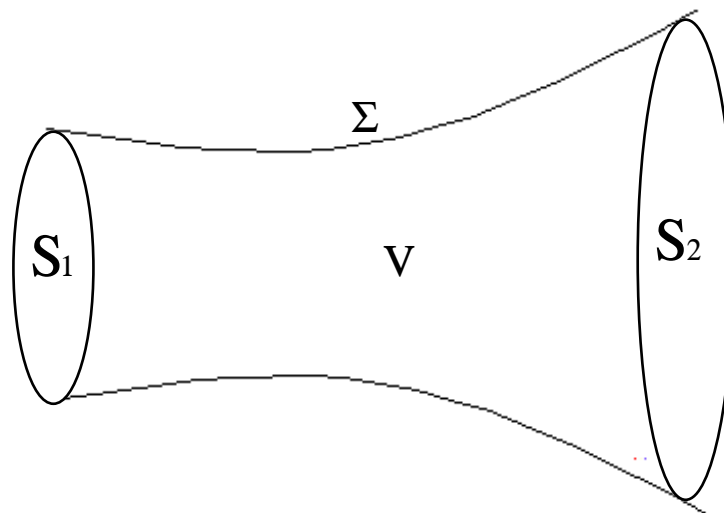
2. Η γραμμικότητα των εξισώσεων Maxwell προκύπτει από τη γραμμικότητα των τελεστών ($\nabla \cdot$ και $\nabla \times$) που εμπλέκονται σε αυτές.

3. Το πεδίο \bar{B} , όπως κάθε πεδίο μηδενικής αποκλίσεως, χαρακτηρίζεται ως **σωληνοειδές πεδίο**. Ο χαρακτηρισμός αυτός δικαιολογείται ως εξής:

Ορίζουμε ως πεδιακές γραμμές του διανυσματικού πεδίου $\bar{B}(\bar{r}, t)$ τις γραμμές που η εφαπτομένη σε κάθε σημείο τους \bar{r} είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\bar{B}(\bar{r}, t)$. Εντελώς ανάλογα, θα ονομάζουμε πεδιακή επιφάνεια του πεδίου \bar{B} κάθε επιφάνεια που αποτελείται από πεδιακές γραμμές (ακριβέστερα, κάθε επιφάνεια με την ιδιότητα: σε κάθε σημείο της \bar{r} , το αντίστοιχο διάνυσμα του πεδίου $\bar{B}(\bar{r}, t)$ κείται επί του επιπέδου που είναι εφαπτομενικό της επιφανείας στο σημείο αυτό).

Αν εντός του πεδίου θεωρήσουμε μια γραμμή, η οποία δεν είναι πεδιακή, και από κάθε σημείο της φέρουμε την αντίστοιχη πεδιακή γραμμή, τότε έχουμε μια πεδιακή επιφάνεια. Ειδικώς, αν η γραμμή αυτή είναι κλειστή, λέμε ότι έχουμε έναν πεδιακό σωλήνα.

Θεωρούμε τώρα τον όγκο V που περικλείεται από έναν πεδιακό σωλήνα Σ και από δυο διατομές S_1 και S_2 του σωλήνα αυτού (Σχ.1).



Σχήμα 1

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss για το μαγνητικό πεδίο, έχουμε:

$$0 = \oint_{(\Sigma+S_1+S_2)^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

[ως θετική φορά προσανατολισμού για όλες της επιφάνειες (Σ, S_1, S_2) στην (2) λαμβάνεται αυτή για την οποία το αντίστοιχο κάθετο διάνυσμα εξέρχεται από τον όγκο V]. Όμως

$$\int_{\Sigma^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3)$$

λόγω της καθετότητας των \vec{B} και $d\vec{S}$ στα σημεία της πεδιακής επιφάνειας Σ . Άρα

$$\int_{S_1^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow - \int_{S_1^-} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{S_1^-} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (4)$$

δηλαδή η εξερχόμενη από την S_2 ροή ισούται με την εισερχόμενη στην S_1 .

Επειδή ο ρόλος που παίζει το παραπάνω σχήμα είναι ρόλος σωλήνα, το πεδίο \vec{B} λέγεται σωληνοειδές πεδίο.

4. Στην περίπτωση του πεδίου \vec{D} , με εφαρμογή του νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό παίρνουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$Q = \oint_{(\Sigma+S_1+S_2)^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1^-} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (5)$$

όπου Q είναι το συνολικό φορτίο εντός του όγκου V.

Αν υποθέσουμε ότι $Q > 0$, τότε από την (5) προκύπτει ότι

$$\int_{S_1^-} \vec{D} \cdot d\vec{S} < \int_{S_2^+} \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (6)$$

Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση αυτή ($Q > 0$), η εισερχόμενη ροή υπολείπεται της εξερχόμενης κατά το μέγεθος Q, δηλαδή το θετικό φορτίο Q συμπεριφέρεται σαν πηγή ηλεκτρικής ροής.

Αντιστρόφως, αν $Q < 0$, τότε

$$\int_{S_1^-} \vec{D} \cdot d\vec{S} > \int_{S_2^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (7)$$

δηλαδή η εξερχόμενη ροή είναι μικρότερη της εισερχόμενης κατά το μέγεθος Q. Επομένως, αρνητικό φορτίο Q συμπεριφέρεται σαν καταβόθρα ηλεκτρικής ροής.

Δυο ισοδύναμες διατυπώσεις των παραπάνω είναι οι εξής:

α. Τα θετικά και τα αρνητικά φορτία είναι θέσεις στις οποίες πηγάζει ή, αντίστοιχα, τερματίζεται η ηλεκτρική ροή.

β. Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου έχουν την αρχή τους σε θέσεις θετικών φορτίων και καταλήγουν σε θέσεις που κατέχονται από αρνητικά φορτία.

Ερμηνεύοντας κατ' αναλογία την εξίσωση (4), καταλήγουμε στην παρακάτω ισοδύναμη διατύπωση της εξίσωσης αυτής: Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου δεν έχουν ούτε αρχή ούτε τέλος, δηλαδή είναι κλειστές (γεγονός που, όπως αντιλαμβανόμαστε, οφείλεται στο ότι το δεύτερο μέλος του νόμου του Gauss για τον μαγνητισμό είναι μηδενικό, με άλλα λόγια στο ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα μαγνητικά φορτία στη φύση).

6. Συντακτικές σχέσεις

Η αναγκαιότητα εισαγωγής των συντακτικών σχέσεων στο ηλεκτρομαγνητικό πρότυπο δικαιολογείται ως εξής: Αν υποθέσουμε ότι οι πηγές ρ και \vec{J} είναι δεδομένες [οι συναρτήσεις ρ και \vec{J} πρέπει φυσικά να ικανοποιούν την εξίσωση συνεχείας (3.9)], τότε οι εξισώσεις Maxwell (3.5), (3.6), (3.15) και (3.18) ισοδυναμούν με οκτώ βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους ως προς αγνώστους τις δώδεκα συνιστώσες των πεδιακών μεγεθών $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$. Όμως, όπως δείξαμε παραπάνω, από τις οκτώ αυτές βαθμωτές εξισώσεις γραμμικά ανεξάρτητες είναι μόνο έξι, αφού οι νόμοι του Gauss είναι παραγόμενες εξισώσεις. Επομένως χρειαζόμαστε έξι επί πλέον βαθμωτές εξισώσεις. Τις εξισώσεις αυτές μας δίνουν οι συντακτικές σχέσεις.

Οι συντακτικές σχέσεις είναι σχέσεις της μορφής $\vec{D} = f(\vec{E}), \vec{H} = g(\vec{B})$ ή, γενικότερα, $\vec{D} = f(\vec{E}, \vec{B}), \vec{H} = g(\vec{E}, \vec{B})$, στις οποίες εκτός των πεδιακών μεγεθών είναι δυνατόν να εμπλέκονται οι χωρικές μεταβλητές, ο χρόνος, καθώς και διάφορες φυσικές παράμετροι (όπως θερμοδυναμικές σταθερές κ.λ.π.).

Παρακάτω περιγράφουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις αμέσου πρακτικού ενδιαφέροντος, στις οποίες οι συντακτικές σχέσεις λαμβάνουν σχετικά απλή μορφή.

A. Κενός χώρος.

Οι συντακτικές σχέσεις για τον κενό χώρο έχουν τη μορφή

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1)$$

όπου ϵ_0 (επιτρεπτότητα του κενού) και μ_0 (μαγνητική διαπερατότητα του κενού) είναι βαθμωτές σταθερές με την ιδιότητα

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1 / c_0^2 \quad (2)$$

(c_0 είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό). Οι τιμές και διαστάσεις των δυο αυτών σταθερών εξαρτώνται από το χρησιμοποιούμενο σύστημα μονάδων. Με αναφορά στο κανονικοποιημένο διεθνές σύστημα μονάδων (SI), η ακριβής τιμή της σταθεράς μ_0 είναι

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]} \quad (3)$$

οπότε

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \cong \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ [F/m]}. \quad (4)$$

B. Ισοτροπικά μέσα

Ισοτροπικά ονομάζονται τα υλικά των οποίων οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες σε οποιοδήποτε εσωτερικό τους σημείο είναι οι ίδιες ως προς κάθε κατεύθυνση. Στα ισοτροπικά υλικά, το διάνυσμα \vec{P} της ηλεκτρικής πολώσεως (δηλαδή το αποτέλεσμα της παρουσίας του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του υλικού) είναι ανάλογο προς το αίτιο που το προκάλεσε, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (5)$$

όπου χ_e αδιάστατος συντελεστής που ονομάζεται ηλεκτρική δεκτικότητα του υλικού. Ομοίως, για το διάνυσμα \vec{M} της μαγνητικής πολώσεως (αποτέλεσμα της παρουσίας του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του υλικού) ισχύει η σχέση

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6)$$

όπου χ_m αδιάστατος συντελεστής που ονομάζεται μαγνητική δεκτικότητα του υλικού. Με αντικατάσταση των (5) και (6) στις (1.5) (σχέσεις ορισμού των \bar{D} και \bar{H}) προκύπτει ότι για τα υλικά αυτά ισχύουν οι σχέσεις

$$\bar{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \bar{E}(\vec{r}, t) \quad (7\alpha)$$

$$\bar{B}(\vec{r}, t) = \mu \bar{H}(\vec{r}, t) \quad (7\beta)$$

όπου $\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e)$ και $\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$ είναι βαθμωτά μεγέθη ονομαζόμενα, αντίστοιχα, *επιτρεπτότητα* (ή *διηλεκτρική σταθερά*) και *μαγνητική διαπερατότητα* του μέσου. Τα μεγέθη $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ και $\mu_r = 1 + \chi_m$ ονομάζονται *σχετική διηλεκτρική σταθερά* και, αντίστοιχα, *σχετική μαγνητική διαπερατότητα* του μέσου.

Διαπιστώνεται πειραματικά ότι οι σχέσεις (7) ισχύουν στις περιπτώσεις πλείστων αερίων και υγρών, υπό την προϋπόθεση ότι η ένταση του πεδίου δεν είναι υπερβολικά μεγάλη.

Τα στερεά έχουν, γενικά, κρυσταλλική δομή και για τούτο δεν είναι ισοτροπικά σε ατομική κλίμακα. Μεγαλύτερα όμως τμήματα τέτοιων υλικών αποτελούνται από τυχαίως προσανατολισμένες στοιχειώδεις κρυσταλλικές περιοχές και μπορεί να θεωρηθεί ότι σε μακροσκοπική κλίμακα επιδεικνύουν ισοτροπική συμπεριφορά.

Για τη σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ ισχύει η σχέση $\epsilon_r \geq 1$. Στα αέρια διαφέρει από τη μονάδα κατά μια μικρή ποσότητα, παίρνοντας την τιμή 1.0006 στον αέρα. Στα στερεά η ϵ_r κυμαίνεται συνήθως στην περιοχή $2 \div 10$ (π.χ., $\epsilon_r \approx 6$ για την πορσελάνη). Στα υγρά η σχετική διηλεκτρική σταθερά κυμαίνεται εντός ευρείας περιοχής τιμών ($\epsilon_r = 2$ για το πετρέλαιο, $\epsilon_r = 81$ για το νερό).

Από το άλλο μέρος, η σχετική μαγνητική διαπερατότητα $\mu_r = \mu / \mu_0$ μπορεί να λάβει τιμές είτε μικρότερες είτε μεγαλύτερες της μονάδας. Όταν $\mu_r > 1$ ή $\mu_r < 1$, το υλικό χαρακτηρίζεται ως παραμαγνητικό ή, αντίστοιχα, διαμαγνητικό. Πλείστα παραμαγνητικά και διαμαγνητικά υλικά έχουν $\mu_r \approx 1$ (π.χ., $\mu_r = 1.00002$ για το αλουμίνιο και $\mu_r = 0.9999991$ για τον χαλκό).

Γενικά οι συντακτικές παράμετροι ϵ και μ μεταβάλλονται υπό την επίδραση διαφόρων παραγόντων όπως είναι η θερμοκρασία και η συχνότητα λειτουργίας (π.χ., η τιμή $\epsilon_r = 81$ για το νερό ισχύει για πολύ χαμηλές συχνότητες, ενώ στην ορατή περιοχή του φάσματος συχνοτήτων η τιμή αυτή γίνεται $\epsilon_r \approx 1.8$). Αυτές οι μεταβολές συνήθως αμελούνται, αφού η χρησιμοποίηση μιας μέσης τιμής επαρκεί σε πολλές περιπτώσεις.

Παρατήρηση

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι οι συντακτικές σχέσεις υπό τη μορφή των εξισώσεων (7), με ϵ και μ σταθερές ποσότητες, ισχύουν ακριβώς μόνο στη στατική περίπτωση και, κατά προσέγγιση, για βραδέως μεταβαλλόμενα πεδία. Αντίθετα, για ταχέως μεταβαλλόμενα πεδία η τιμή του \bar{D} κατά τη χρονική στιγμή t καθορίζεται, όχι μόνο από την τιμή της εντάσεως \bar{E} κατά τη στιγμή t , αλλά και από τις τιμές της κατά τις προηγούμενες χρονικές στιγμές. (Η ίδια αυτή παρατήρηση ισχύει και για την εξάρτηση του \bar{B} από το \bar{H}). Το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζεται ως *χρονική διασπορά*. Υπάρχουν επίσης μέσα, στα οποία παρατηρείται το φαινόμενο η τιμή του \bar{D} (ή του \bar{B}) στη θέση $\vec{r}(x, y, z)$ να εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της εντάσεως \bar{E} (ή, αντίστοιχα, της \bar{H}) στη θέση αυτή, αλλά και από τις τιμές της στα γειτονικά σημεία. Το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζεται ως *χωρική διασπορά*. Υπάρχει βέβαια η δυνατότητα ένα μέσο να εμφανίζει συγχρόνως χρονική και χωρική διασπορά.

Η κατάστροψη ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων σε μέσα με διασπορά γίνεται ευκολότερα στο πεδίο της συχνότητας, όπως εξηγούμε στην ενότητα 10.6 του παρόντος κεφαλαίου· εκεί δίνουμε επίσης την ακριβή μορφή των συντακτικών σχέσεων στο πεδίο του χρόνου, όπως ισχύουν σε τέτοια μέσα.

Γ. Ανισοτροπικά μέσα

Στα ανισοτροπικά μέσα οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες είναι συναρτήσεις της κατευθύνσεως.

Υλικά που εμφανίζουν *ηλεκτρική ανισοτροπία*, όπως είναι διάφοροι κρύσταλλοι, περιγράφονται με σχέσεις της μορφής

$$\begin{aligned}
D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \\
D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z \\
D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z
\end{aligned} \tag{8}$$

Υπό τανυστική μορφή, οι σχέσεις αυτές γράφονται συνοπτικά ως εξής¹:

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\overline{\varepsilon}} \overline{\mathbf{E}} \tag{9}$$

όπου $\overline{\overline{\varepsilon}}$ είναι ο τανυστής $\overline{\overline{\varepsilon}} = (\varepsilon_{ij})$ ($i, j \equiv x, y, z$). Αποδεικνύεται ότι ο τανυστής $\overline{\overline{\varepsilon}}$ είναι συμμετρικός.

Παρατηρούμε ότι σε ηλεκτρικώς ανισότροπα μέσα τα διανύσματα $\overline{\mathbf{D}}$ και $\overline{\mathbf{E}}$ έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.

Ανάλογες σχέσεις, της μορφής

$$\begin{aligned}
B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\
B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\
B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z
\end{aligned} \Leftrightarrow \overline{\mathbf{B}} = \overline{\overline{\mu}} \overline{\mathbf{H}}, \tag{10}$$

ισχύουν σε **μαγνητικώς ανισότροπα** μέσα², όπως είναι οι φερρίτες (είδος κεραμικών υλικών) παρουσία ενός εξωτερικά επιβαλλόμενου στατικού μαγνητικού πεδίου (πεδίου πολώσεως). Τα φερριτικά αυτά υλικά έχουν, μεταξύ άλλων, ιδιαίτερη σημασία στον σχεδιασμό πλείστων μικροκυματικών στοιχείων και εφαρμογών.

Σημειώνουμε ότι ένα μέσο μπορεί να είναι ταυτόχρονα ηλεκτρικώς και μαγνητικώς ανισότροπο.

Α. Δις-ανισοτροπικά μέσα

Πρόκειται για μέσα που περιγράφονται με συντακτικές σχέσεις της μορφής

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{D}} &= \overline{\overline{\varepsilon}} \overline{\mathbf{E}} + \overline{\overline{\xi}} \overline{\mathbf{H}} \\
\overline{\mathbf{B}} &= \overline{\overline{\zeta}} \overline{\mathbf{E}} + \overline{\overline{\mu}} \overline{\mathbf{H}}
\end{aligned} \tag{11}$$

όπου $\overline{\overline{\xi}}$ και $\overline{\overline{\zeta}}$ είναι οι λεγόμενοι **μαγνητο-ηλεκτρικοί τανυστές**. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν ορισμένα σύνθετα υλικά με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον, καθώς και όλα τα κινούμενα ισοτροπικά μέσα.

Προφανώς τα ανισοτροπικά υλικά μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις δις-ανισοτροπικών μέσων.

¹ Για ηλεκτρικώς ανισότροπα μέσα, η σχέση (5) έχει τη μορφή $\overline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_e \overline{\mathbf{E}}$ όπου ο συντελεστής $\overline{\overline{\chi}}_e$ (ηλεκτρική δεκτικότητα του υλικού) είναι τώρα τανυστής. Οι τανυστές $\overline{\overline{\chi}}_e$ και $\overline{\overline{\varepsilon}}$ αλληλοσυνδέονται με τη σχέση $\overline{\overline{\varepsilon}} = \varepsilon_0 (\overline{\overline{I}}_2 + \overline{\overline{\chi}}_e)$ όπου $\overline{\overline{I}}_2$ είναι ο 2×2 ταυτοτικός τανυστής.

² Για μαγνητικώς ανισότροπα μέσα, η σχέση (6) έχει τη μορφή $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\overline{\chi}}_m \overline{\mathbf{H}}$ όπου ο συντελεστής $\overline{\overline{\chi}}_m$ (μαγνητική δεκτικότητα του υλικού) είναι τώρα τανυστής. Οι τανυστές $\overline{\overline{\chi}}_m$ και $\overline{\overline{\mu}}$ αλληλοσυνδέονται με τη σχέση $\overline{\overline{\mu}} = \mu_0 (\overline{\overline{I}}_2 + \overline{\overline{\chi}}_m)$.

E. Δις-ισοτροπικά μέσα

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν ορισμένα σύνθετα υλικά, τα οποία περιγράφονται με συντακτικές σχέσεις της μορφής

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \epsilon \bar{E} + \xi \bar{H} \\ \bar{B} &= \zeta \bar{E} + \mu \bar{H}\end{aligned}\tag{12}$$

όπου $\epsilon, \mu, \zeta, \xi$ είναι βαθμωτές σταθερές.

ΣΤ. Χειρότροπα μέσα

Τα χειρότροπα μέσα (chiral media) είναι ειδικές περιπτώσεις δις-ισοτροπικών μέσων με την ιδιότητα

$$\zeta = \xi$$

(π.χ., ζάχαρη), δηλαδή περιγράφονται ηλεκτρομαγνητικώς με τρεις παραμέτρους (ϵ, μ, ξ). Το ενδιαφέρον για τη μελέτη και σχεδίαση πρακτικών διατάξεων που εμπλέκουν τέτοια μέσα έχει αναζωπυρωθεί κατά την τελευταία δεκαετία λόγω των ιδιαίτερα ελκυστικών χαρακτηριστικών και δυνατοτήτων που παρουσιάζουν.

Z. Μεταϋλικά

Πρόκειται για νέα, πολλά υποσχόμενα, τεχνητά υλικά, παραγόμενα με την προσεκτική –κατά περιοδικό τρόπο– εισαγωγή μεταλλικών, διηλεκτρικών, ή άλλου τύπου εμφυτεύσεων σε ένα σύνθετο υλικό (υλικό υποδοχής). Το ιδιαίτερο γνώρισμα των μεταϋλικών, το οποίο τα καθιστά μοναδικά, είναι ότι μπορεί να έχουν αρνητική επιτρεπτότητα, αρνητική μαγνητική διαπερατότητα, και αρνητικό δείκτη διάθλασης. Ως αποτέλεσμα, παρουσιάζουν καινοφανείς ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες, ολότελα διαφορετικές από κάθε ουσία που απαντάται στη φύση.

Πέρα από την ποικιλία των εντελώς καινούργιων φυσικών φαινομένων που σχετίζονται με τα υλικά αυτά, εντυπωσιακές εμφανίζονται και οι δυνητικές εφαρμογές τους στην τεχνολογία. Για παράδειγμα, το ότι τα μεταϋλικά μπορεί να έχουν αρνητικό δείκτη διάθλασης, σημαίνει ότι διαθλούν το φως (και γενικά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα) με τελείως νέο τρόπο. Μια πλάκα από υλικό αρνητικού δείκτη διάθλασης είναι δυνατόν να δρα ως υπερφακός, ικανός να ξεπερνά με διαφορά σε επίδοση τους σημερινούς φακούς, οι οποίοι έχουν θετικό δείκτη διάθλασης. Ένας τέτοιος υπερφακός θα μπορούσε να δημιουργεί είδωλα που θα περιείχαν λεπτομέρειες πολύ μεγαλύτερες από εκείνες που επιτρέπει το όριο περίθλασης, το οποίο περιορίζει τις επιδόσεις όλων των οπτικών στοιχείων με θετικό δείκτη διάθλασης.

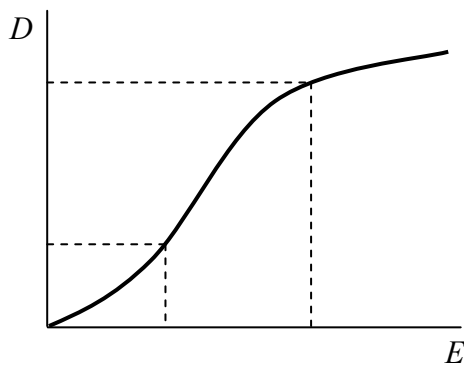
Τα μεταϋλικά μπορεί να είναι είτε ισοτροπικά είτε ανισοτροπικά.

6.1 Ομοιογενή και ανομοιογενή μέσα

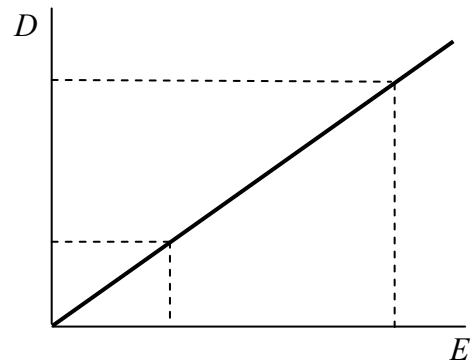
Όταν οι τιμές των συντακτικών παραμέτρων ϵ και μ (γενικότερα των $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}$) είναι οι ίδιες σε όλα τα σημεία του υλικού, τότε το υλικό αυτό ονομάζεται ομοιογενές (ή ομογενές). Στην αντίθετη περίπτωση, όπου κάποια από τις τέσσερις συντακτικές παραμέτρους είναι συνάρτηση της θέσεως, το υλικό χαρακτηρίζεται ως μη ομοιογενές ή ανομοιογενές. Στις περιπτώσεις ισοτροπικών ομοιογενών υλικών, η επιτρεπτότητα ϵ ονομάζεται και διηλεκτρική σταθερά, αν και συχνά, αλλά καταχρηστικά, ο όρος αυτός χρησιμοποιείται και στις περιπτώσεις μη ομοιογενών μέσων.

6.2 Γραμμικά και μη γραμμικά μέσα

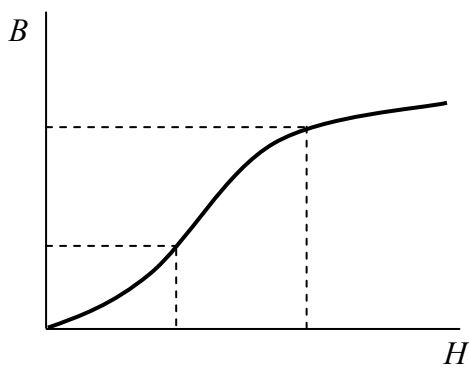
Όταν μία (ή και περισσότερες) από τις συντακτικές παραμέτρους (ϵ, μ) ή γενικότερα ($\bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}$) είναι συνάρτηση των πεδιακών μεγεθών, το αντίστοιχο μέσο χαρακτηρίζεται ως μη γραμμικό (Σχ.1α, Σχ.1γ). Στην αντίθετη περίπτωση το μέσο ονομάζεται γραμμικό (Σχ.1β, Σχ.1δ).



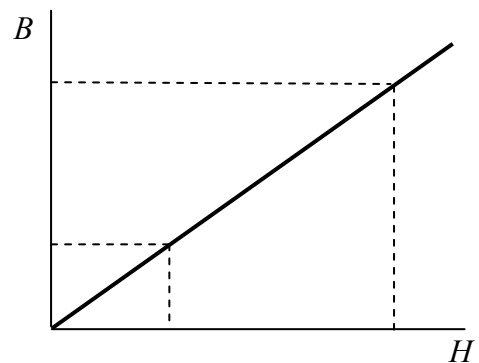
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 1: (α) Το πηλίκο D/E , δηλαδή η διηλεκτρική σταθερά ϵ , μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται το πεδίο (ηλεκτρικώς μη γραμμικό μέσο). (β) Το πηλίκο D/E , δηλαδή η διηλεκτρική σταθερά ϵ , είναι σταθερό, ανεξάρτητο του πεδίου (ηλεκτρικώς γραμμικό μέσο). (γ) Το πηλίκο B/H , δηλαδή η μαγνητική διαπερατότητα μ , μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται το πεδίο (μαγνητικώς μη γραμμικό μέσο). (δ) Το πηλίκο B/H είναι σταθερό, ανεξάρτητο του πεδίου (μαγνητικώς γραμμικό μέσο).

Μη γραμμικά είναι, π.χ., τα σιδηρομαγνητικά υλικά τα οποία βρίσκουν εκτεταμένη εφαρμογή στο σχεδιασμό μαγνητικών κυκλωμάτων (πυρήνες μετασχηματιστών, ηλεκτρικές μηχανές) και στην κατασκευή μαγνητικών μνημών.

6.3 Αγωγοί-Συντακτική σχέση για αγωγούς.

Όταν ένα υλικό μέσο, το οποίο εμφανίζει αγωγιμότητα, βρεθεί εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, τότε οι ελεύθεροι φορείς που διατίθενται στον όγκο του υλικού θα κινηθούν υπό την επίδραση των επ' αυτών ασκούμενων ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων. Το ηλεκτρικό ρεύμα που προκαλείται με τον μηχανισμό αυτό ονομάζεται **ρεύμα αγωγιμότητας**, περιγράφεται με το μέγεθος \vec{J}_c (πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας), και συμβάλλει δευτερογενώς στη διαμόρφωση του διεγειρομένου στη διάταξη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου από κοινού με τις πρωτογενείς (επιβαλλόμενες) ρευματικές πηγές.

Επομένως, σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα στα οποία εμπλέκονται και αγωγίμες περιοχές, ο όρος \bar{J} των ελευθέρων πηγών που υπάρχει στις εξισώσεις Maxwell είναι άθροισμα δυο όρων (αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν ρεύματα μεταφοράς):

$$\bar{J} = \bar{J}_\pi + \bar{J}_c. \quad (13)$$

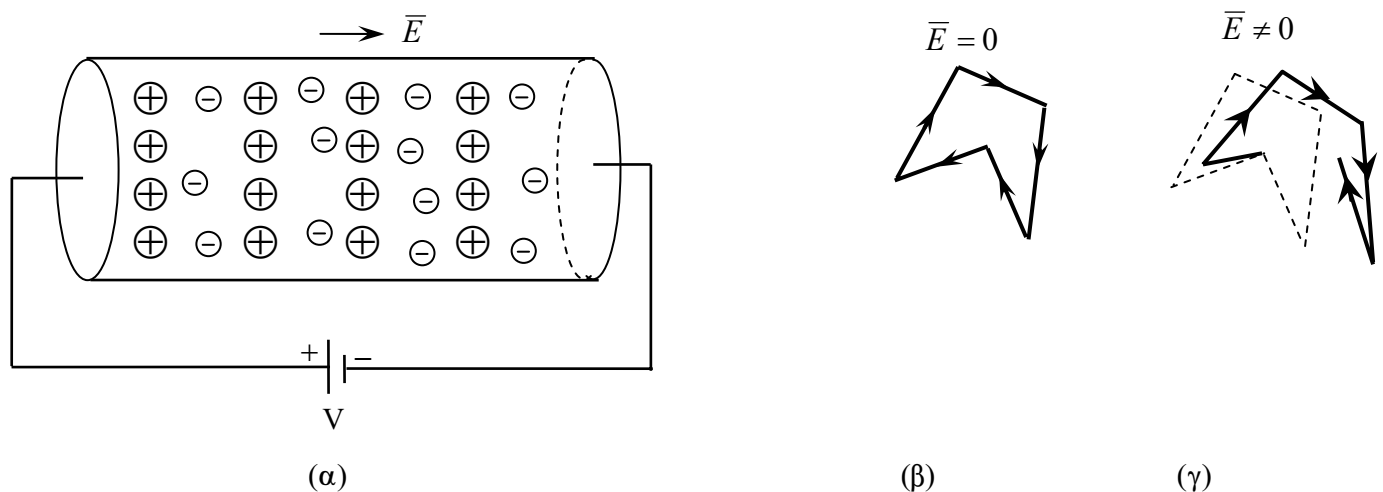
Στην (13), $\bar{J}_\pi(\bar{r}, t)$ είναι η πυκνότητα των επιβαλλομένων (πρωτογενών) πηγών (δεδομένη συνάρτηση της θέσεως και του χρόνου), οι οποίες θεωρούνται ανεξάρτητες του περιβάλλοντος στο οποίο δρουν (ακριβώς όπως οι ιδανικές πηγές της θεωρίας κυκλωμάτων θεωρούνται ανεξάρτητες του κυκλώματος στο οποίο επιβάλλονται). Αντίθετα, η πυκνότητα των επαγομένων (δευτερογενών) πηγών \bar{J}_c είναι συνάρτηση του αιτίου (δηλαδή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου) που την προκάλεσε. Επομένως, ισχύει μια σχέση της μορφής

$$\bar{J}_c = \bar{J}_c(\bar{E}, \bar{H}), \quad (14)$$

την ακριβή μορφή της οποίας είναι ανάγκη να γνωρίζουμε κατά την κατάστροψη ενός ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος (αλλιώς, το μέγεθος \bar{J}_c θα αποτελεί ένα επί πλέον άγνωστο, δηλαδή ο αριθμός των ανεξαρτήτων εξισώσεων θα υπολείπεται κατά ένα του αριθμού των αγνώστων).

Συντακτική σχέση για απλούς αγωγούς-μικροσκοπικός νόμος του Ohm

Ένας μεταλλικός αγωγός μπορεί να προσομοιωθεί (Σχ.2α) με ένα πλέγμα θετικών ιόντων μεταξύ των οποίων κινούνται τα ηλεκτρόνια σθένους (ελεύθερα ηλεκτρόνια).



Σχήμα 2

Απουσία εξωτερικώς επιβαλλομένων πεδίων, η κίνηση αυτή των ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι τυχαία, διακοπτομένη μετά από κάθε ελαστική ή μη ελαστική σύγκρουσή τους με τα θετικά ιόντα (καθώς και μεταξύ τους). Λόγω του είδους των συγκρούσεων, οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων σθένους προσανατολίζονται κατά τυχαίο τρόπο και κατά συνέπεια η μακροσκοπική πυκνότητα ρεύματος είναι μηδενική (Σχ.2β).

Υποθέτουμε τώρα ότι στον αγωγό επιβάλλεται εξωτερικά ένα **σταθερής εντάσεως** ηλεκτρικό (δηλαδή ηλεκτροστατικό) πεδίο \bar{E} (Σχ.2γ). Τότε σε κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητα των ηλεκτρονίων σθένους θα δίνεται από τη σχέση

$$\bar{v} = \bar{v}_c - \frac{e\bar{E}}{m} \tau \quad (15)$$

όπου $-e, m$ είναι το φορτίο, αντίστοιχα η μάζα του ηλεκτρονίου, τ είναι ο χρόνος που παρήλθε από τη στιγμή της τελευταίας συγκρούσεως και \bar{v}_c είναι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου αμέσως μετά τη σύγκρουση αυτή. Επομένως, από την κίνηση των ηλεκτρονίων σθένους θα προκληθεί ηλεκτρικό ρεύμα με πυκνότητα

$$\bar{J}_c = \rho \langle \bar{v} \rangle = \frac{\delta q}{\delta v} \langle \bar{v} \rangle = -ne \langle \bar{v} \rangle \quad (16)$$

όπου n είναι η χωρική πυκνότητα ελευθέρων ηλεκτρονίων (αριθμός ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου) και $\langle \bar{v} \rangle$ η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων αυτών. Επειδή η \bar{v}_c έχει τυχαίο προσανατολισμό, έπεται ότι $\langle \bar{v}_c \rangle = 0$, οπότε από την (15) προκύπτει ότι

$$\langle \bar{v} \rangle = -\frac{e\bar{E}}{m} \langle \tau \rangle = -\frac{e\bar{E}}{m} \frac{1}{v} \quad (17)$$

όπου $\langle \tau \rangle$ είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων και

$$v = 1 / \langle \tau \rangle \quad (18)$$

είναι η μέση συχνότητα συγκρούσεων. Μέσω των (16) και (17) καταλήγουμε στη σχέση

$$\bar{J}_c = \gamma \bar{E} \quad (19)$$

όπου το μέγεθος

$$\gamma = \frac{ne^2}{mv} \quad (20)$$

ονομάζεται **ειδική αγωγιμότητα** του αγωγού³. Ιδιαίτερα εύχρηστο είναι επίσης το μέγεθος

$$\rho = \frac{1}{\gamma}$$

το οποίο ονομάζεται **ειδική αντίσταση** του αγωγού.

Η εξίσωση (19), που αποτελεί τη συντακτική σχέση ενός αγωγού, είναι γνωστή ως **μικροσκοπικός νόμος του Ohm**.

Ένας εναλλακτικός τρόπος εξαγωγής της συντακτικής σχέσεως (19)

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε τη συντακτική σχέση (19) με βάση την εξίσωση που περιγράφει την κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων, ως εξής:

Υπό την επίδραση της ηλεκτροστατικής δυνάμεως $-e\bar{E}$, τα ηλεκτρόνια αποκτούν επιτάχυνση $\bar{a} = -e\bar{E}/m$. Επομένως, αν η ηλεκτροστατική αυτή δύναμη ήταν η μόνη ασκούμενη στα ηλεκτρόνια, θα έπρεπε αυτά να αποκτούν όλο και μεγαλύτερη ταχύτητα \bar{v} με την πάροδο του χρόνου ($\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t$, \bar{v}_0 =αρχική ταχύτητα). Αυτό θα είχε ως συνέπεια την απεριόριστη αύξηση της εντάσεως του ρεύματος στον αγωγό (λόγω της σχέσεως $\bar{J}_c = \rho \bar{v}$). Κάτι τέτοιο όμως δεν παρατηρείται. Αντίθετα, αυτό που παρατηρείται σε έναν αγωγό που υπόκειται σε σταθερής εντάσεως ηλεκτροστατικό πεδίο είναι ένα

³ Μονάδα μετρήσεως της ειδικής αγωγιμότητας στο SI είναι το 1S/m. Το 1 mhos/m είναι διαφορετικός συμβολισμός της ίδιας αυτής μονάδας.

σταθερής εντάσεως ηλεκτρικό ρεύμα. Αυτό σημαίνει ότι η μέση ταχύτης των ηλεκτρονίων είναι σταθερή. Συνεπώς θα πρέπει τα ηλεκτρόνια να υπόκεινται στην επίδραση και άλλης -πλὴν της ηλεκτροστατικής- δυνάμεως. Η δύναμη αυτή είναι η δύναμη τριβής που ασκείται στα ηλεκτρόνια λόγω των συγκρούσεών τους με τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος. Αυτή η δύναμη τριβής μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη της ταχύτητας⁴, δηλαδή

$$\bar{F}_{\tau\rho} = -\nu m \bar{v} \quad (21)$$

όπου ν συντελεστής αναλογίας με διαστάσεις συχνότητας (μέση συχνότητα συγκρούσεων). Επομένως η εξίσωση της μέσης κινήσεως των ηλεκτρονίων γράφεται ως εξής:

$$-e\bar{E} - \nu m \bar{v} = \bar{F}_{ολική} = m \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (22)$$

Με \bar{v} =σταθερό, η τελευταία σχέση δίνει

$$-e\bar{E} - \nu m \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = -\frac{e}{\nu m} \bar{E} \quad (23)$$

και επομένως

$$\bar{J}_c = \rho_e \bar{v} = -ne\bar{v} \Rightarrow \bar{J}_c = \gamma \bar{E}$$

με $\gamma = ne^2 / (m\nu)$, όπως και πριν.

Αγωγιμότητα εμφανίζουν όλα τα υλικά μέσα. Στον παρακάτω Πίνακα I, όπου δίδονται ενδεικτικές τιμές της ειδικής αγωγιμότητας διαφόρων υλικών, βλέπουμε ότι η αγωγιμότητα μεταβάλλεται εντός μιας ευρύτατης περιοχής τιμών. Σε καλά μονωτικά η τιμή της είναι τόσο μικρή ώστε συνήθως αμελείται. Αντίθετα, στους καλούς αγωγούς η αγωγιμότητα είναι τόσο μεγάλη, ώστε σε πολλές πρακτικές εφαρμογές να μπορούμε να θεωρήσουμε, με αμελητέο σφάλμα στα αποτελέσματα, ότι η ειδική αγωγιμότητα είναι άπειρη. Αγωγοί με άπειρη αγωγιμότητα χαρακτηρίζονται ως **τέλειοι αγωγοί**.

Πίνακας I: Ειδική αγωγιμότητα διαφόρων υλικών

| <u>ΥΛΙΚΟ</u> | <u>ΕΙΔΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ γ [S/m]</u> |
|-----------------------|---|
| Άργυρος | 6.17×10^7 |
| Χαλκός | 5.80×10^7 |
| Χρυσός | 4.10×10^7 |
| Αλουμίνιο | 3.54×10^7 |
| Σίδηρος | 10^7 |
| Θαλάσσιο νερό | 4 |
| Πόσιμο νερό | 10^{-3} |
| Απεσταγμένο νερό | 2×10^{-4} |
| Υγρό έδαφος | 10^{-5} |
| Έλαιο μετασχηματιστών | 10^{-11} |
| Γυαλί | 10^{-12} |
| Πορσελάνη | 2×10^{-13} |
| Καουτσούκ | 10^{-15} |

Παρατηρήσεις πάνω στον νόμο του Ohm

⁴κατ' αναλογία προς την περίπτωση της δυνάμεως τριβής που ασκείται σε σώμα που κινείται με σταθερή ταχύτητα εντός ρευστού

1. Για να εκτιμήσουμε τη σημασία της σχέσεως (17), η οποία προέκυψε υποθέτοντας σταθερό ηλεκτρικό πεδίο στον αγωγό, αναφερόμαστε στο παράδειγμα του χαλκού. Γνωρίζοντας την πυκνότητα μάζας (8.9 g/cm^3) και το ατομικό του βάρος (63.6), βρίσκουμε ότι ο χαλκός διαθέτει $6,022 \times 10^{23} / 63.6$ άτομα ανά γραμμάριο. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι κάθε άτομο δίνει ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, η πυκνότητα ελευθέρων ηλεκτρονίων στο χαλκό ισούται με

$$n = 6,022 \times 10^{23} / (63.6 \times 8.9 \times 10^{-6}) \cong 10^{29} \text{ ηλεκτρόνια / m}^3.$$

Λεδομένου ότι η ειδική αγωγιμότητα του χαλκού είναι $\gamma \cong 6 \times 10^7 \text{ S/m}$ και ότι $e^2 / m \cong 3 \times 10^{-8} \text{ C}^2 / \text{Kg}$, η (20) δίνει:

$$\nu \cong 0.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

οπότε από την (18) προκύπτει ότι ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων είναι της τάξεως του

$$\langle \tau \rangle = 1/\nu \cong 2 \times 10^{-14} \text{ s}.$$

Αν υποθέσουμε περαιτέρω ότι ένας χάλκινος αγωγός, κυλινδρικής μορφής και διατομής 1 mm^2 , διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως 4 A (οπότε $J = 4 \text{ A/mm}^2$), τότε από την (17) παίρνουμε

$$\langle \bar{v} \rangle \cong 3 \times 10^{-4} \text{ m/s}.$$

Όπως παρατηρούμε, η μέση ταχύτητα ολισθήσεως των ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρότερη της ταχύτητας που αυτά έχουν λόγω της θερμικής τους κινήσεως, η οποία είναι της τάξεως των 10^5 m/s .

Λόγω της μεγάλης τιμής που έχει η συχνότητα συγκρούσεων ν , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η παραπάνω απλή θεωρία, που οδήγησε στην έκφραση (19) του μικροσκοπικού νόμου του Ohm, θα ισχύει και όταν το επιβαλλόμενο πεδίο δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται χρονικά, με συχνότητα όμως πολύ μικρότερη της παραπάνω τιμής ⁵.

2. Η τιμή της ειδικής αγωγιμότητας είναι συνάρτηση διαφόρων παραμέτρων, όπως είναι η θερμοκρασία, η συχνότητα κλπ. Η εξάρτηση από τη θερμοκρασία εξηγείται εύκολα με βάση τη σχέση (20) και την παρατήρηση ότι με την άνοδο της θερμοκρασίας ο μέσος χρόνος $\langle \tau \rangle = 1/\nu$ μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων μειώνεται. [Η μείωση αυτή οφείλεται στη θερμική κίνηση των ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος, η οποία γίνεται εντονότερη με την άνοδο της θερμοκρασίας].

Η εξάρτηση της ειδικής αντιστάσεως από τη θερμοκρασία είναι γενικά γραμμική για μια περιοχή μερικών εκατοντάδων βαθμών. Υπάρχουν όμως ορισμένα μέταλλα (όπως ο μόλυβδος, ο υδράργυρος, ο κασίτερος) που παρουσιάζουν ραγδαία αύξηση της αγωγιμότητας σε θερμοκρασίες της τάξεως των 5° K έτσι ώστε ηλεκτρικά ρεύματα που διεγείρονται στα μέταλλα αυτά να συντηρούνται επί μακρόν. Τα μέταλλα αυτά χαρακτηρίζονται ως υπεραγωγοί.

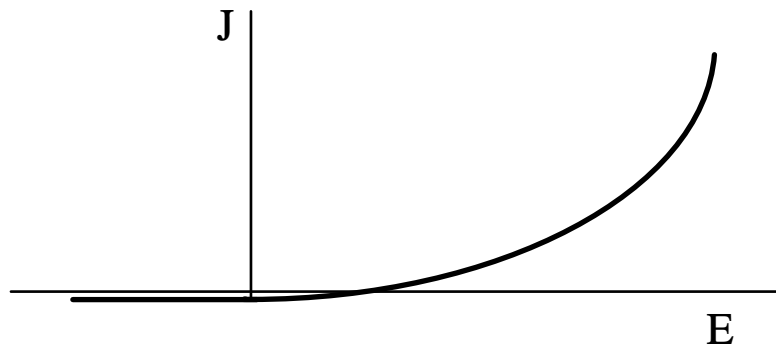
3. Υπενθυμίζεται ότι η αγωγή του ηλεκτρικού ρεύματος συνεπάγεται τη μετατροπή ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμότητα. Η εκλυόμενη θερμότητα, με τη σειρά της, οδηγεί σε αύξηση της θερμοκρασίας στο υλικό και συνεπώς σε μεταβολή της αγωγιμότητας γ . Έτσι, όταν στον αγωγό επιβάλλεται ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, το ηλεκτρικό ρεύμα που διεγείρεται δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται συνεχώς μέχρι την αποκατάσταση συνθηκών θερμικής ισορροπίας. Μέχρι να αποκατασταθεί θερμική ισορροπία, επομένως, η σχέση της τάσεως με το ρεύμα σε ένα αγωγό είναι **μη γραμμική**. Από τη στιγμή που αποκαθίσταται η ισορροπία και μετά, η τιμή της ειδικής αγωγιμότητας γ παραμένει σταθερή.

⁵ Η συντακτική σχέση για απλούς αγωγούς στην περίπτωση ημιτονικής χρονικής μεταβολής των πεδίων εξάγεται στην ενότητα 10.6

4. Ο νόμος του Ohm υπό τη μορφή της εξίσωσης (19) ισχύει για ιστροπικούς αγωγούς. Στις περιπτώσεις ανισοτροπικών αγωγών, η συντακτική αυτή σχέση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} J_{cx} &= \gamma_{xx}E_x + \gamma_{xy}E_y + \gamma_{xz}E_z \\ J_{cy} &= \gamma_{yx}E_x + \gamma_{yy}E_y + \gamma_{yz}E_z \\ J_{cz} &= \gamma_{zx}E_x + \gamma_{zy}E_y + \gamma_{zz}E_z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{J}_c = \bar{\gamma} \bar{E} \quad (24)$$

5. Σε ορισμένες περιπτώσεις υλικών, η ειδική αγωγιμότητα γ είναι συνάρτηση του πεδίου, δηλαδή $\gamma = \gamma(\bar{E})$, οπότε ο αγωγός είναι **μη γραμμικός**. Στην περίπτωση της ενώσεως p-n, για παράδειγμα, η σχέση αυτή έχει τη μορφή που δείχνει η καμπύλη στο Σχ.3 (γνωστή ως “*χαρακτηριστική της διόδου*”).



Σχήμα 3

Εφαρμογή: Ηλεκτρική χαλάρωση

Θα αποδείξουμε ότι στο εσωτερικό ενός ομοιογενούς αγωγού, σταθερής ειδικής αγωγιμότητας γ και διηλεκτρικής σταθεράς ϵ , στον οποίο έχει τοποθετηθεί χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho_0(x,y,z)$ τη χρονική στιγμή $t=0$, δεν μπορεί να συντηρηθεί μονίμως χωρική κατανομή φορτίου.

Απόδειξη: Ισχύει η σχέση

$$\rho = \nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot (\epsilon \bar{E}) = \epsilon \nabla \cdot \bar{E} \quad (25)$$

ενώ από την εξίσωση συνεχείας προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \stackrel{(19)}{\Rightarrow} \nabla \cdot (\gamma \bar{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \gamma \nabla \cdot \bar{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (26)$$

Συνδυάζοντας τις (25) και (26) προκύπτει ότι η χωρική πυκνότητα ρ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0. \quad (27)$$

Η εξίσωση (27) ολοκληρούμενη δίνει το αποτέλεσμα

$$\rho(x,y,z;t) = \rho_0(x,y,z) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon} t} \quad (28)$$

όπου $\rho_0(x,y,z)$ είναι η τιμή της πυκνότητας ρ τη χρονική στιγμή $t=0$.

Παρατηρούμε ότι αν η πυκνότητα τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι μηδενική (δηλαδή, αν $\rho_0=0$), τότε η πυκνότητα ρ παραμένει ίση με μηδέν σε κάθε χρονική στιγμή t . Από το άλλο μέρος, αν $\rho_0 \neq 0$ τότε για $t \rightarrow \infty$ (δηλαδή στη μόνιμη κατάσταση) προκύπτει ότι $\rho \rightarrow 0$.

Από την (28) προκύπτει ότι το μέγεθος

$$\tau = \varepsilon / \gamma \quad (29)$$

έχει διαστάσεις χρόνου. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται **χρονική σταθερά χαλαρώσεως** του μέσου και αποτελεί ένα μέτρο του πόσο γρήγορα ένα αγωγίμο μέσο προσεγγίζει την ηλεκτροστατική ισορροπία. Πιο συγκεκριμένα, η σταθερά τ ισούται με το χρόνο που απαιτείται ώστε το χωρικό φορτίο μιας αγωγίμης περιοχής να ελατωθεί στο $1/e$ της αρχικής του τιμής.

Τα διηλεκτρικά χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές του τ . Για παράδειγμα, για το διηλεκτρικό υλικό mica, με $\gamma \cong 10^{-15} S/m$ και $\varepsilon = 6\varepsilon_0$, βρίσκουμε ότι $\tau=10h$. Επομένως στα καλά διηλεκτρικά (μονωτικά) μέσα το χωρικό φορτίο φθίνει τόσο βραδέως ώστε να μπορούμε πρακτικά να θεωρήσουμε ότι παραμένει στη θέση όπου τοποθετήθηκε.

Αντίθετα στους καλούς αγωγούς η σταθερά χαλαρώσεως παίρνει πολύ μικρές τιμές. Στον χαλκό, π.χ., με $\gamma \cong 6 \times 10^7 S/m$ και $\varepsilon \cong \varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\pi) F/m$ από την (29) βρίσκουμε ότι $\tau \cong 10^{-19} s$. Αυτό σημαίνει ότι μετά την παρέλευση βραχυτάτου χρονικού διαστήματος η πλειονότητα του χωρικού φορτίου έχει μεταφερθεί στην επιφάνεια του αγωγού. (Στο παράδειγμα του χαλκού, μετά την πάροδο χρόνου ίσου με $10\tau=10^{-18} s$ έχει μεταφερθεί το 99.995 % του φορτίου.) Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι τόσο μικρές τιμές, όπως η τιμή $\tau \cong 10^{-19} s$ που βρήκαμε παραπάνω για τον χαλκό, δεν είναι φυσικώς αποδεκτές, επειδή, μεταξύ άλλων, είναι κατά πολύ μικρότερες από τον μέσο χρόνο μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων ($\cong 2 \times 10^{-14} s$ για τον χαλκό, όπως βρήκαμε νωρίτερα). Με άλλα λόγια, για πολύ καλούς αγωγούς, σε αυτή την χρονική κλίμακα δεν ισχύει ο νόμος του Ohm, $\vec{J}_c = \gamma \vec{E}$, στον οποίο στηρίχθηκε η (29)⁶.

Παράδειγμα (ηλεκτρική χαλάρωση)

Αγωγίμο σφαιρικό κέλυφος (Σχ.4) έχει εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b . Το υλικό του είναι ομοιογενές με επιτρεπτότητα ε και ειδική αγωγιμότητα γ . Τη χρονική στιγμή $t=0$ υπάρχουν επιφανειακά φορτία με σταθερές πυκνότητες $\sigma_a(0)$ και $\sigma_b(0)$, τοποθετημένα στην εσωτερική επιφάνεια με $r=a$ και στην εξωτερική επιφάνεια με $r=b$, αντίστοιχα, του αγωγίμου κελύφους, καθώς και χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(r,0) = \rho_0 r^2 / a^2$, τοποθετημένο στο εσωτερικό του αγωγού ($a < r < b$). Να υπολογιστούν:

α) Οι πυκνότητες των ηλεκτρικών φορτίων $\sigma_a(t)$ (για $r=a$), $\rho(r,t)$ (για $a < r < b$) και $\sigma_b(t)$ (για $r=b$), για $t \geq 0$, καθώς και η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε όλο το χώρο, για $t \geq 0$.

⁶ Για εναλλακτικές θεωρήσεις, οι οποίες οδηγούν σε εκλογικευμένες τιμές του χρόνου χαλάρωσης –συμβατές με τον νόμο του Ohm, στην περίπτωση καλών αγωγών, δείτε τις παρακάτω αναφορές:

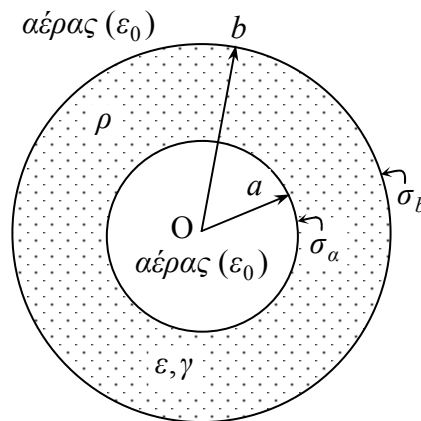
(*) H. Mott, W.D. Ruburn, and W.E. Webb, “Charge density in a conducting medium”, IEEE Proceedings, pp.899-900, July 1972.

(**) N.Ashby, “Relaxation of charge imbalances in conductors”, Am. J. Phys., vol.43, no.6, pp. 553-555, June 1975.

(***) H.C.Ohanian, “On the approach to electro-and magneto-static equilibrium”, Am. J. Phys., vol.51, no.11, pp. 1020-1022, Nov. 1983.

(****) E.J. Bochove and J.F.Walkup, “A communication on electrical charge relaxation in metals”, Am. J. Phys., vol.58, no.2, pp. 131-134, Feb 1990.

β) Η κατανομή των φορτίων, η πυκνότητα του ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη μόνιμη κατάσταση ($t \rightarrow \infty$). Να δοθεί φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 4

Λύση

α) Η διάταξη παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, δηλαδή ανεξαρτησία από τις σφαιρικές συντεταγμένες θ και φ και επομένως εξάρτηση μόνο από την συντεταγμένη r .

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου [εξ. 1(I)] σε μια σφαίρα με ακτίνα r , όπου $a < r < b$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (30)$$

Στην (29), Q είναι το συνολικό φορτίο το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας r . Χρησιμοποιώντας τις συντακτικές σχέσεις (7α) και (19), η (30) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \gamma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\gamma}{\varepsilon} Q = -\frac{dQ}{dt} \quad (31)$$

Στην (31) χρησιμοποιήσαμε τον νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό με τη μορφή

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

Το Q ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon} Q = 0 \quad (32)$$

της οποίας η λύση είναι

$$Q = Q(r, t) = Q(r, 0)e^{-t/\tau} \quad (33)$$

με $\tau = \varepsilon/\gamma$ την χρονική σταθερά χαλάρωσης και $Q(r, 0)$ την τιμή του συνολικού φορτίου στο

εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας r , κατά την χρονική στιγμή $t=0$. Παρατηρούμε ότι το $Q(r,t)$ ελαττώνεται συνεχώς από την αρχική τιμή $Q(r,0)$, έως ότου μηδενιστεί στη μόνιμη κατάσταση ($t \rightarrow \infty$).

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας της διάταξης, η πυκνότητα του ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα έχουν μόνο r -συνιστώσες. Χρήση των (33) και (29) δίνει

$$J_r(r,t)4\pi r^2 = \frac{Q(r,0)}{\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow J_r(r,t) = \frac{Q(r,0)}{4\pi r^2 \tau} e^{-t/\tau} \quad (34)$$

Όμως,

$$Q(r,0) = \sigma_a(0)4\pi a^2 + \int_a^r \rho(r',0)4\pi r'^2 dr' = \sigma_a(0)4\pi a^2 + \frac{4\pi\rho_0}{a^2} \frac{r^5 - a^5}{5} \quad (35)$$

Χρησιμοποιώντας την (35) στην (34) βρίσκουμε

$$J_r(r,t) = \left(\frac{\sigma_a(0)}{\tau} \frac{a^2}{r^2} + \frac{\rho_0}{5\tau} \frac{r^5 - a^5}{a^2 r^2} \right) e^{-t/\tau} \quad (a < r < b) \quad (36)$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο αγωγίμο κέλυφος είναι

$$E_r(r,t) = \frac{J_r(r,t)}{\gamma} = \left(\frac{\sigma_a(0)}{\varepsilon} \frac{a^2}{r^2} + \frac{\rho_0}{5\varepsilon} \frac{r^5 - a^5}{a^2 r^2} \right) e^{-t/\tau} \quad (a < r < b) \quad (37)$$

Για το φορτίο $Q(r,t)$ ισχύει, αντίστοιχα με την (35), η σχέση

$$Q(r,t) = \sigma_a(t)4\pi a^2 + \int_a^r \rho(r',t)4\pi r'^2 dr' \quad (38)$$

Με χρήση των (35) και (38) στην (33) προκύπτει ότι

$$\sigma_a(t) = \sigma_a(0)e^{-t/\tau} \quad (39)$$

και

$$\rho(r,t) = \rho(r,0)e^{-t/\tau} = \rho_0 \frac{r^2}{a^2} e^{-t/\tau} \quad (a < r < b) \quad (40)$$

Οι σχέσεις (39) και (40) δείχνουν ότι τόσο τα επιφανειακά φορτία για $r=a$, όσο και τα χωρικά για $a < r < b$ ελαττώνονται (αραιώνουν) συνεχώς, με συνέπεια την ελάττωση του συνολικού φορτίου $Q(r,t)$ στην (33), το οποίο περιέχεται στην σφαίρα ακτίνας r ($a < r < b$). Επομένως, φορτία βγαίνουν συνεχώς έξω από τη σφαίρα ακτίνας r , προκαλώντας ροή ρεύματος με πυκνότητα $J_r(r,t)$ στο αγωγίμο κέλυφος [εξ.(36)]. Που καταλήγουν τελικά τα φορτία αυτά; Προφανώς στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγίμου κελύφους, με ακτίνα $r=b$, αφού δεν μπορούν απομακρυνθούν περισσότερο, διότι έξω από το κέλυφος υπάρχει αέρας ($\gamma_{\alpha\epsilon\rho\alpha} = 0$). Έτσι, την χρονική στιγμή $t \geq 0$, στην επιφάνεια με $r=b$, εκτός από το φορτίο $\sigma_b(0)4\pi b^2$, που υπήρχε εκεί την χρονική στιγμή $t=0$, έχει έλθει και φορτίο $\Delta Q(r=b-,t) = Q(r=b-,0) - Q(r=b-,t) = Q(r=b-,0)(1 - e^{-t/\tau})$. Δηλαδή θα είναι

$$\sigma_b(t)4\pi b^2 = \sigma_b(0)4\pi b^2 + Q(r=b-,0)(1-e^{-t/\tau})$$

και επομένως

$$\sigma_b(t) = \sigma_b(0) + \frac{Q(r=b-,0)}{4\pi b^2}(1-e^{-t/\tau})$$

Με αντικατάσταση από την (35) για $r=b-$ προκύπτει ότι

$$\sigma_b(t) = \sigma_b(0) + \left[\sigma_a(0)\frac{a^2}{b^2} + \rho_0 \frac{b^5 - a^5}{5a^2b^2} \right] (1-e^{-t/\tau}) \quad (41)$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για $r < a$ βρίσκεται με χρήση του νόμου του Gauss (31) σε μια σφαίρα με ακτίνα $r < a$. Είναι

$$D_r(r,t)4\pi r^2 = 0 \Rightarrow D_r(r,t) = 0 \Rightarrow E_r(r,t) = \frac{D_r(r,t)}{\epsilon_0} = 0 \quad (r < a, t \geq 0) \quad (42)$$

διότι $Q(r,t) = 0$ για $r < a$, εφόσον δεν υπάρχουν φορτία εκεί σε καμμία χρονική στιγμή.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για $r > b$ προκύπτει πάλι από την (31). Τώρα το $Q(r,t)$ είναι το συνολικό φορτίο της διάταξης, το οποίο περικλείεται από κάθε σφαίρα με ακτίνα $r > b$ και είναι σταθερό, ανεξάρτητο του χρόνου, δηλαδή $Q(r,t) = Q(r,0)$ διότι εκείνο που συμβαίνει είναι ότι με την πάροδο του χρόνου απλά μετακινούνται φορτία μέσω του αγωγού από την επιφάνεια με $r=a$ και την αγωγή με $a < r < b$ προς την εξωτερική επιφάνεια του κελύφους με $r=b$, όπου και συσσωρεύονται. Συνεπώς ισχύει ότι

$$D_r(r,t)4\pi r^2 = Q(r=b-,0) + \sigma_b(0)4\pi b^2 = \sigma_a(0)4\pi a^2 + \frac{4\pi\rho_0}{a^2} \frac{b^5 - a^5}{5} + \sigma_b(0)4\pi b^2$$

δηλαδή

$$D_r(r,t) = \left[\sigma_a(0)a^2 + \rho_0 \frac{b^5 - a^5}{5a^2} + \sigma_b(0)b^2 \right] \frac{1}{r^2} \Rightarrow E_r(r,t) = \frac{D_r(r,t)}{\epsilon_0}, \quad (r > b, t \geq 0) \quad (43)$$

Στις (42) και (43) πήραμε υπόψη ότι, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας της διάταξης, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο r -συνιστώσα.

Τέλος, η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στις περιοχές με $0 < r < a$ και $r > b$, όπου υπάρχει αέρας, είναι μηδενική, διότι εκεί $J_r = \gamma_{αέρα} E_r$ και $\gamma_{αέρα} = 0$.

β) Στην μόνιμη κατάσταση ($t \rightarrow \infty$) είναι φανερό από τις (39)-(41) ότι

$$\sigma_a(\infty) = 0, \quad \rho(r, \infty) = 0, \quad \sigma_b(\infty) = \sigma_b(0) + \sigma_a(0)\frac{a^2}{b^2} + \rho_0 \frac{b^5 - a^5}{5a^2b^2} \quad (44)$$

δηλαδή έχουν φύγει όλα τα ηλεκτρικά φορτία από την εσωτερική επιφάνεια του κελύφους με $r=a$, καθώς και από όλη την υπόλοιπη αγωγή με $a < r < b$ και έχουν συγκεντρωθεί στην εξωτερική επιφάνεια με $r=b$, με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma_b(\infty)$, που δίνεται από την (44). Η

πυκνότητα του ρεύματος στο αγωγίμο κέλυφος μηδενίζεται, δηλαδή $J_r(r, \infty) = 0$, όπως διαπιστώνεται από την (36), διότι δεν υπάρχουν πλέον άλλα φορτία για να μετακινηθούν μέσω του αγωγού προς την εξωτερική επιφάνεια με $r = b$. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο αγωγίμο κέλυφος επίσης μηδενίζεται, δηλαδή $E_r(r, \infty) = 0$, όπως φαίνεται από την (37) και όπως προκύπτει επίσης από τον νόμο του Gauss (31) όπου $Q(r, \infty) = 0$ για $a < r < b$.

Για $0 < r < a$ τόσο η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος όσο και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παραμένουν μηδενικές σε κάθε χρονική στιγμή t , όπου $0 \leq t < \infty$. Τέλος, για $r > b$ είναι $J_r(r, t) = 0$, ενώ η $E_r(r, t)$ δίνεται από την (43), δηλαδή και οι δυο παραμένουν σταθερές για $0 \leq t < \infty$.

Παρατήρηση: Η σχέση (40) μπορεί να προκύψει απευθείας με χρήση της εξίσωσης (28) της εφαρμογής για την ηλεκτρική χαλάρωση, η οποία προηγείται του παρόντος παραδείγματος. Επίσης η σχέση (39) μπορεί να προκύψει και ως εξής: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου (29) σε μία σφαίρα με ακτίνα $r = a +$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} J_r(r = a+, t)4\pi a^2 &= -\frac{d}{dt}[\sigma_a(t)4\pi a^2] \Rightarrow \gamma E_r(r = a+, t)4\pi a^2 = \frac{\gamma}{\varepsilon} D_r(r = a+, t)4\pi a^2 = -\frac{d\sigma_a(t)}{dt}4\pi a^2 \stackrel{(31)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \frac{\gamma}{\varepsilon} \sigma_a(t)4\pi a^2 &= -\frac{d\sigma_a(t)}{dt}4\pi a^2, \text{ δηλαδή} \\ \frac{d\sigma_a(t)}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon} \sigma_a(t) &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Η διαφορική εξίσωση (45) έχει ίδια μορφή με την (32) και η λύση της είναι

$$\sigma_a(t) = \sigma_a(0)e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (46)$$

δηλαδή η (39).

7. Οριακές συνθήκες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

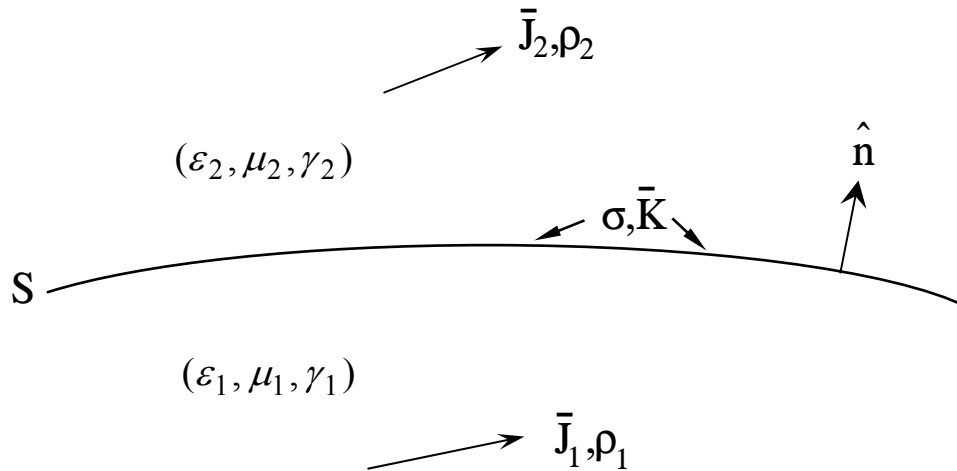
Όπως προαναφέραμε, υπό την ολοκληρωτική τους διατύπωση οι εξισώσεις Maxwell [Εξ. (1.I), (1.III)-(1.VI)] ισχύουν για οποιαδήποτε εκλογή των δρόμων, των επιφανειών και των όγκων, όπου εκτείνονται οι διάφορες ολοκληρώσεις που σημειώνονται σε αυτές.

Για σημεία στο εσωτερικό συνεχών μέσων βρήκαμε ότι οι εξισώσεις Maxwell ισοδυναμούν με ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων [Εξ. (3.5), (3.6), (3.9), (3.15) και (3.18)]. Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις δεν ισχύουν σε σημεία διαχωριστικών επιφανειών μεταξύ διαφορετικών μέσων. Αυτό γίνεται αμέσως φανερό ως εξής: Υπό το πρίσμα των συντακτικών σχέσεων προκύπτει ότι σε τέτοια σημεία τα πεδιακά μεγέθη $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{J})$ είναι εν γένει ασυνεχείς⁷ (δηλαδή μη παραγωγίσιμες) συναρτήσεις της θέσεως και επομένως οι διαφορικοί τελεστές που υπάρχουν στις υπό διαφορική μορφή εξισώσεις Maxwell δεν ορίζονται.

Σε σημεία τέτοιων συνοριακών επιφανειών οι εξισώσεις Maxwell ισοδυναμούν με ένα σύνολο **οριακών συνθηκών**, οι οποίες δείχνουν πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} , \vec{J} κατά την μετάβαση από την μια όψη της συνοριακής επιφάνειας στην άλλη. Για την εξαγωγή των οριακών

⁷ Υπό το πρίσμα, π.χ., των συντακτικών σχέσεων $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$ και $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$ για τα μέσα 1 και 2 γίνεται αμέσως φανερό ότι, αν υποθεθεί ότι κάποια από τις συνιστώσες του \vec{E} είναι συνεχής στα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ των μέσων αυτών, τότε η αντίστοιχη συνιστώσα του \vec{D} είναι κατ' ανάγκην ασυνεχής εφόσον $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

αυτών συνθηκών θα στηριχθούμε και πάλι στην ολοκληρωτική μορφή των νόμων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (η οποία, όπως σημειώσαμε, είναι εντελώς γενική, ισχύουσα ανεξαρτήτως της φύσεως των εμπλεκόμενων υλικών σωμάτων).

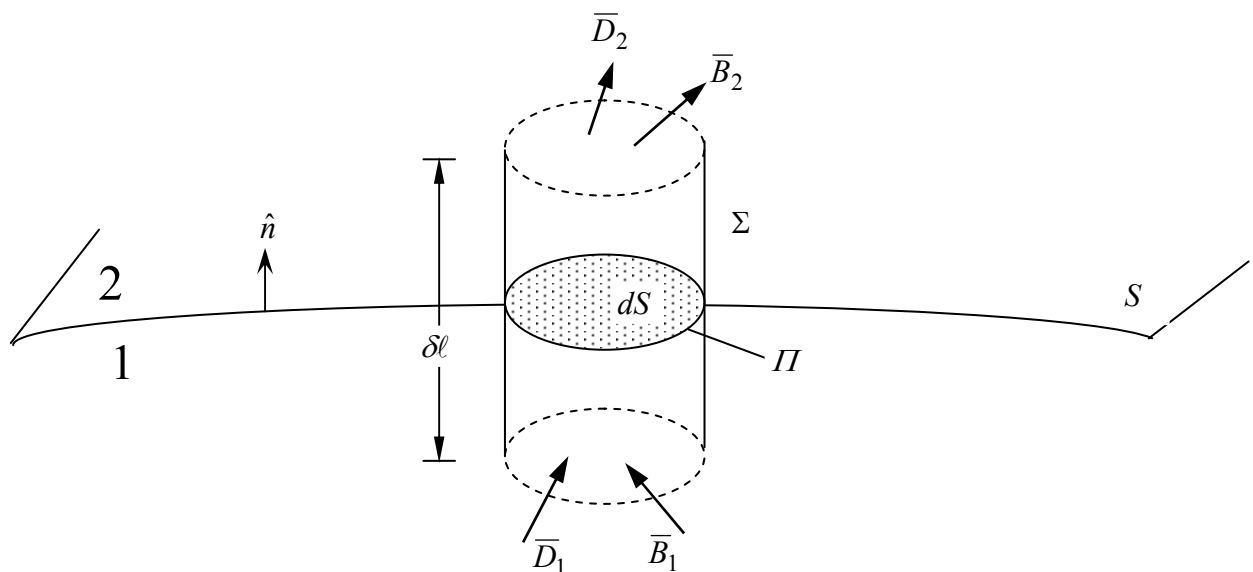


Σχήμα 1

Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια S που διαχωρίζει τα μέσα 1 και 2 είναι **λεία** (Σχ.1). Για λόγους γενικότητας θεωρούμε επίσης ότι, επί πλέον των χωρικών κατανομών ρ και $\bar{\mathbf{J}}$ που ενδεχομένως υπάρχουν στα σημεία των ανοικτών περιοχών 1 και 2, στην επιφάνεια S υπάρχουν επιφανειακές κατανομές φορτίου και ρεύματος με πυκνότητες σ και $\bar{\mathbf{K}}$, αντίστοιχα, οι οποίες είναι συναρτήσεις της θέσεως και του χρόνου.

7.1 Οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του $\bar{\mathbf{D}}$

Επειδή η S υποτέθηκε λεία, το στοιχείο dS της επιφανείας αυτής μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά ως επίπεδο. Για την εφαρμογή των ολοκληρωτικών νόμων του Gauss, επιλέγουμε ως κλειστή επιφάνεια ένα βραχύ κύλινδρο Σ με γενέτειρες κάθετες στην dS (Σχ.2). Οι δυο βάσεις του κυλίνδρου τοποθετούνται εντός των μέσων 1 και 2, αντίστοιχα, εκάστη σε απόσταση $\delta\ell/2$ από την dS , όπου το μήκος $\delta\ell$ μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρό. Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι το $\delta\ell$ επιλέγεται έτσι ώστε να είναι αμελητέο συγκρινόμενο με τον λόγο του εμβαδού προς την περίμετρο της στοιχειώδους επιφανείας dS .



Σχήμα 2

Με εφαρμογή του νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό,

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{ολικό} = \int_V \rho dV + \int_{dS} \sigma dS, \quad (1)$$

και χρήση του θεωρήματος της μέσης τιμής για καθένα από τα ολοκληρώματα στην (1), παίρνουμε τη σχέση

$$-\vec{D}_1 \cdot \hat{n} dS + \vec{D}_2 \cdot \hat{n} dS + A = \sigma dS + \rho_1 \left(\frac{1}{2} dS \delta \ell \right) + \rho_2 \left(\frac{1}{2} dS \delta \ell \right). \quad (2)$$

Στην (2), \hat{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στην dS **με φορά από το μέσο 1 προς το μέσο 2**, σ είναι η τιμή της επιφανειακής πυκνότητας στα σημεία της dS , $\vec{D}_1 \setminus \vec{D}_2$ είναι η τιμή του πεδίου στην κάτω/πάνω βάση του κυλίνδρου, ενώ $\rho_1 \setminus \rho_2$ είναι η μέση τιμή της χωρικής πυκνότητας φορτίου στην περιοχή 1\2 εντός του κυλίνδρου. Τέλος η ποσότητα A αντιστοιχεί στη συμβολή, η οποία προέρχεται από την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, στο επιφανειακό ολοκλήρωμα που υπάρχει στο πρώτο μέλος της (1). Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, η ποσότητα αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$A = D'_1 \left(\frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) + D'_2 \left(\frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) \quad (3)$$

όπου Π είναι η περίμετρος της διατομής dS και D'_1 και D'_2 είναι οι μέσες τιμές των καθέτων συνιστωσών του πεδίου στα τμήματα 1 και 2 της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου.

Περνώντας στο όριο όπου $\delta \ell \rightarrow 0$, οπότε τόσο η ποσότητα A όσο και οι όροι οι ανάλογοι του $\delta \ell$ στην (2) μηδενίζονται, παίρνουμε

$$-\hat{n} \cdot \vec{D}_1 dS + \hat{n} \cdot \vec{D}_2 dS = \sigma dS \quad (4)$$

οπότε

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma. \quad (5)$$

ή, ισοδύναμα,

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (6)$$

Στην (6), με D_{1n} και D_{2n} συμβολίζουμε, ως συνήθως, τις συνιστώσες των \vec{D}_1 και \vec{D}_2 κατά την κατεύθυνση \hat{n} , δηλαδή τις συνιστώσες που είναι κάθετες στη διαχωριστική επιφάνεια.

Επομένως, η κάθετη συνιστώσα του διανύσματος \vec{D} παρουσιάζει πεπερασμένη ασυνέχεια στα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας δύο μέσων, ίση με την τιμή της επιφανειακής πυκνότητας των ελεύθερων φορτίων που, ενδεχομένως, υπάρχουν στα σημεία της επιφάνειας αυτής. Προφανώς, αν δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία στη διαχωριστική επιφάνεια, τότε η κάθετη συνιστώσα του \vec{D} είναι συνεχής.

7.2 Οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του \vec{B}

Με αναφορά στο Σχ.2, από τον νόμο του Gauss για το μαγνητισμό,

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (7)$$

παίρνουμε διαδοχικά τις παρακάτω σχέσεις -ανάλογες των (2) και (3),

$$-\vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS + \vec{B}_2 \cdot \hat{n} dS + A = 0 \quad (8)$$

$$A = B'_1 \left(\frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) + B'_2 \left(\frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) \quad (9)$$

όπου Π είναι και πάλι η περίμετρος της στοιχειώδους επιφάνειας dS , ενώ B'_1 και B'_2 είναι οι μέσες τιμές των καθέτων συνιστωσών του πεδίου \bar{B} στα τμήματα 1 και 2 της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου.

Περνώντας στο όριο όπου $\delta \ell \rightarrow 0$, οπότε η ποσότητα A μηδενίζεται, παίρνουμε

$$-\hat{n} \cdot \bar{B}_1 dS + \hat{n} \cdot \bar{B}_2 dS = 0. \quad (10)$$

Επομένως

$$\hat{n} \cdot (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) dS = 0 \Leftrightarrow B_{2n} = B_{1n}. \quad (11)$$

Άρα, η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσα του διανύσματος \bar{B} είναι παντού συνεχής.

7.3 Οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του \bar{J}

Με εφαρμογή της εξισώσεως συνεχείας (αναφορά: Σχ.3),

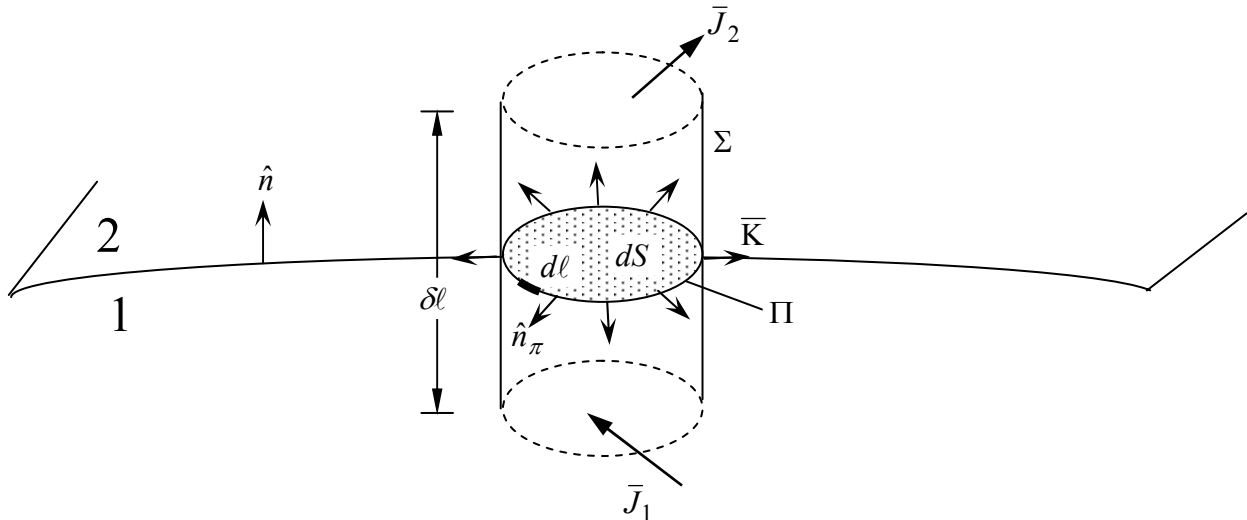
$$\oint_{\Sigma} \bar{J} \cdot d\bar{S} = -\frac{dQ_{ολικό}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV - \frac{d}{dt} \int_{dS} \sigma dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV - \int_{dS} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS, \quad (12)$$

παίρνουμε διαδοχικά τις παρακάτω σχέσεις -ανάλογες των (2) και (3):

$$-\hat{n} \cdot \bar{J}_1 dS + \hat{n} \cdot \bar{J}_2 dS + A = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \left(\frac{1}{2} dS \delta \ell \right) - \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \left(\frac{1}{2} dS \delta \ell \right) - \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS \quad (13)$$

$$A = J_{1\pi} \left(\frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) + J_{2\pi} \left(\frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) + \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_{\pi} d\ell \quad (14)$$

όπου Π είναι η περίμετρος της στοιχειώδους επιφάνειας dS , $J_{1\pi}$ και $J_{2\pi}$ είναι οι μέσες τιμές των καθέτων συνιστωσών της ρευματικής πυκνότητας \bar{J} στα τμήματα 1 και 2 της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου, ενώ \hat{n}_{π} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που βρίσκεται στο επίπεδο της στοιχειώδους επιφάνειας dS και διευθύνεται κάθετα στο περίγραμμα Π με φορά προς τα έξω (Σχ.3). Προφανώς, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση εκφράζει την συμβολή του επιφανειακού ρεύματος στο ηλεκτρικό ρεύμα που εξέρχεται από την κλειστή επιφάνεια Σ .



Σχήμα 3.

Περνώντας στο όριο όπου $\delta\ell \rightarrow 0$, οπότε όλοι οι όροι οι ανάλογοι του $\delta\ell$ μηδενίζονται, παίρνουμε τη σχέση

$$-\hat{n} \cdot \bar{J}_1 dS + \hat{n} \cdot \bar{J}_2 dS + \oint_{\gamma} \bar{K} \cdot \hat{n}_{\pi} d\ell = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} dS. \quad (15)$$

Από τη σχέση αυτή, στο όριο όπου $dS \rightarrow 0$, προκύπτει ότι

$$\hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{1}{dS} \oint_{\gamma} \bar{K} \cdot \hat{n}_{\pi} d\ell \Rightarrow \hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla_S \cdot \bar{K} \quad (16)$$

όπου κατά το τελευταίο βήμα στην (16) χρησιμοποιήσαμε τη σχέση ορισμού

$$\nabla_S \cdot \bar{K} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{1}{dS} \oint_{\gamma} \bar{K} \cdot \hat{n}_{\pi} d\ell \quad (17)$$

της διδιάστατης αποκλίσεως του διανύσματος \bar{K} .

Σημείωση: Στην ειδική περίπτωση, όπου η επιφάνεια S ταυτίζεται με κάποια από τις συντεταγμένες επιφάνειες ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, το μέγεθος $\nabla_S \cdot \bar{K}$ έχει την έκφραση της τριδιάστατης αποκλίσεως, $\nabla \cdot \bar{K}$, στην οποία ο αντίστοιχος της σταθερής συντεταγμένης όρος παραλείπεται. Έτσι, π.χ., όταν η επιφάνεια S είναι το επίπεδο xy , τότε

$$\nabla_S \cdot \bar{K} \equiv \nabla_{xy} \cdot \bar{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y}.$$

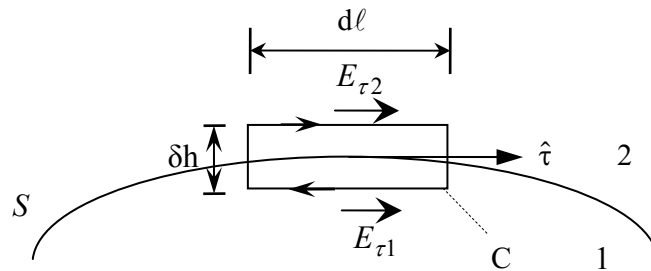
Ομοίως, στην περίπτωση της κυλινδρικής επιφάνειας με εξίσωση $r = \text{σταθερό}$, έχουμε το αποτέλεσμα

$$\nabla_S \cdot \bar{K} \equiv \nabla_{\varphi z} \cdot \bar{K} = \frac{1}{r} \frac{\partial K_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial K_z}{\partial z}.$$

Η οριακή συνθήκη (16) φανερώνει ότι η κάθετη συνιστώσα της ρευματικής πυκνότητας \bar{J} σε σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας δυο μέσων είναι γενικά ασυνεχής, με όρο ασυνέχειας την ποσότητα $-\partial \sigma / \partial t - \nabla_S \cdot \bar{K}$.

7.4 Οριακή συνθήκη για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του \bar{E}

Η συμπεριφορά των εφαπτομενικών συνιστωσών του \bar{E} στα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας S μεταξύ των μέσων 1 και 2 (Σχ.4) βρίσκεται ως εξής:



(α)



επιφάνειας δύο μέσων. Υπό διανυσματική μορφή, η (20) γράφεται ισοδύναμα και ανεξάρτητα της επιλογής της εφαπτομενικής διεύθυνσης $\hat{\tau}$ ως εξής:

$$\hat{n} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = 0 \quad (21)$$

όπου \hat{n} είναι και πάλι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια με φορά από το μέσο 1 προς το μέσο 2.

7.5 Οριακή συνθήκη για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του \bar{H}

Εφαρμογή του νόμου των Maxwell-Ampere,

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_{\Sigma} \bar{J} \cdot d\bar{S} + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{S}, \quad (22)$$

με αναφορά στον ορθογωνικό βρόχο C του Σχ.4β, οδηγεί στη σχέση -ανάλογη της (19)

$$\begin{aligned} H_{\tau 2} d\ell - H_{\tau 1} d\ell + H_{AB} \delta h - H_{\Gamma \Delta} \delta h = \\ = \frac{1}{2} (\delta h)(d\ell) J_{s1} + \frac{1}{2} (\delta h)(d\ell) J_{s2} + K_s d\ell + \frac{1}{2} (\delta h)(d\ell) \frac{\partial D_{s1}}{\partial t} + \frac{1}{2} (\delta h)(d\ell) \frac{\partial D_{s2}}{\partial t} \end{aligned} \quad (23)$$

Από την (23), στο όριο όπου $\delta h \rightarrow 0$, προκύπτει ότι

$$H_{\tau 2} d\ell - H_{\tau 1} d\ell = K_s d\ell.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} H_{\tau 2} - H_{\tau 1} = K_s \Leftrightarrow \hat{\tau} \cdot (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K} \cdot \hat{s} \Leftrightarrow -(\hat{n} \times \hat{s}) \cdot (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K} \cdot \hat{s} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1)] \cdot \hat{s} = \bar{K} \cdot \hat{s}. \end{aligned} \quad (24)$$

Η σχέση (24), επειδή ισχύει για οποιαδήποτε εφαπτομενική κατεύθυνση \hat{s} , υποδηλώνει ότι

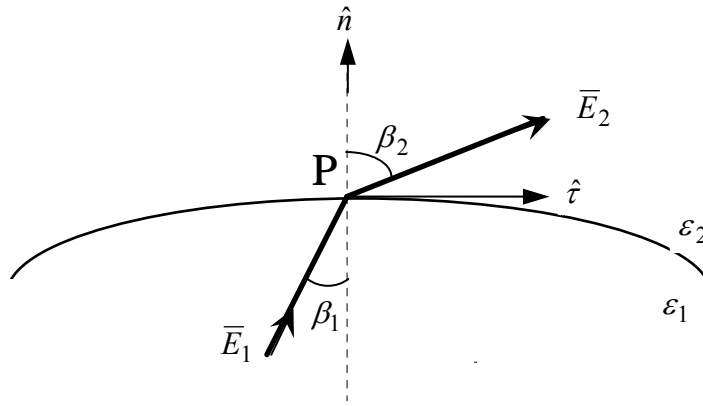
$$\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K}. \quad (25)$$

Επομένως οι εφαπτομενικές συνιστώσες του \bar{H} είναι ασυνεχείς στα σημεία συνοριακών επιφανειών, η δε ασυνέχεια είναι ανάλογη της τιμής της πυκνότητας των ελευθέρων επιφανειακών ρευμάτων.

Παράδειγμα 1: Διάθλαση δυναμικών γραμμών σε διηλεκτρικά

Η παρακάτω διάταξη (Σχ.5) περιλαμβάνει δυο διηλεκτρικά μέσα με διηλεκτρικές σταθερές ϵ_1 και ϵ_2 , αντίστοιχα. Επιφανειακά φορτία δεν υπάρχουν. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \bar{E}_1 στο μέσο 1 στο σημείο P της διαχωριστικής επιφάνειας έχει μέτρο E_1 και σχηματίζει γωνία β_1 με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια, όπως στο σχήμα. Να βρεθούν τα αντίστοιχα μεγέθη E_2 και β_2 για την ένταση \bar{E}_2 του ηλεκτρικού πεδίου στο μέσο 2, στο σημείο P.

Λύση



Σχήμα 5

Αναλύουμε την ένταση του πεδίου σε συνιστώσες κάθετες και εφαπτομενικές στην επιφάνεια:

$$\bar{E}_1(P) = E_{1\tau} \hat{\tau} + E_{1n} \hat{n}, \quad \bar{E}_2(P) = E_{2\tau} \hat{\tau} + E_{2n} \hat{n}.$$

Από τις οριακές συνθήκες για τις κάθετες συνιστώσες του \bar{D} και για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του \bar{E} προκύπτει ότι

- $\hat{n} \cdot [\bar{D}_2(P) - \bar{D}_1(P)] (= \sigma) = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n} \Rightarrow \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} \Rightarrow \epsilon_2 E_2 \cos \beta_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \beta_1,$
- $E_{2\tau} = E_{1\tau} \Rightarrow E_2 \sin \beta_2 = E_1 \sin \beta_1.$

Με διαίρεση κατά μέλη των τελευταίων δύο εξισώσεων παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

από την οποία προσδιορίζεται η άγνωστη γωνία β_2 . Τέλος, το άγνωστο μέτρο E_2 βρίσκεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \sin \beta_2)^2 + (E_2 \cos \beta_2)^2} = \sqrt{(E_1 \sin \beta_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \beta_1 \right)^2} = \\ &= E_1 \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos \beta_1 \right)^2} \end{aligned}$$

7.6 Αλληλεξάρτηση των οριακών συνθηκών

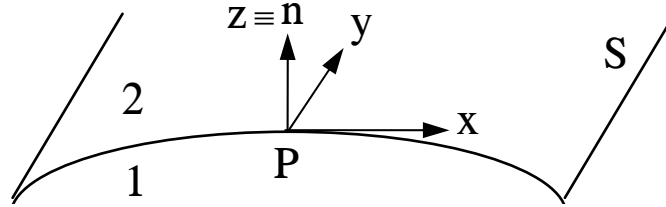
A. Χρονοσταθερά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία

Σε περιπτώσεις χρονοσταθερών πεδίων, οι παραπάνω πέντε οριακές συνθήκες [Εξ. (5), (11), (16), (21), (25)] είναι όλες γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, λόγω της ανεξαρτησίας των παραγουσών εξισώσεων (2.1α), (2.1β), (2.2α), (2.2β), (2.2γ) της ενότητας 2.

B. Χρονικά μεταβαλλόμενα (ηλεκτρομαγνητικά) πεδία

Για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ισχύουν τα εξής:

A. Όπως αποδείξαμε στην ενότητα 2, ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό [εξ.(7)] δεν αποτελεί ανεξάρτητη αλλά παράγωγο εξίσωση, δυναμένη να προκύψει από τον νόμο των Maxwell-Faraday [εξ.(18)]. Επομένως είναι λογικό να αναμένουμε ότι η οριακή συνθήκη (11), η οποία προέκυψε από την (7), δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητη της οριακής συνθήκης (21), η οποία στηρίζεται στην (18).



Σχήμα 6

Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί και κατά τρόπο άμεσο με αναφορά στο Σχ.6, όπου θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα συνταταγμένων $P(x,y,n)$ με την αρχή του τοποθετημένη στο σημείο P της διαχωριστικής επιφάνειας S. Οι άξονες Px και Py είναι εφαπτομενικοί στην S, ενώ ο άξονας $Pz \equiv Pn$ είναι κάθετος στην επιφάνεια αυτή. Από τη διαφορική μορφή του νόμου Maxwell-Faraday,

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (26)$$

εξισώνοντας τις z- (ή n -) συνιστώσες των δυο μελών της, προκύπτει η ισότητα

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_n}{\partial t}. \quad (27)$$

Η συνέχεια -σύμφωνα με την οριακή συνθήκη (20) [ή (21)]- των εφαπτομενικών συνιστωσών E_x και E_y στο σημείο P της διαχωριστικής επιφάνειας S εξασφαλίζει τη συνέχεια των μερικών παραγώγων $\partial E_y / \partial x$ και $\partial E_x / \partial y$ κατά την κατεύθυνση οποιουδήποτε **εφαπτομενικού** διανύσματος \hat{t} . Επομένως οι μερικές παράγωγοι $\partial E_y / \partial x$ και $\partial E_x / \partial y$ (κατά τις εφαπτομενικές κατευθύνσεις \hat{x} και \hat{y} , αντίστοιχα) είναι συνεχείς οπότε, λόγω της (27), και η χρονική παράγωγος $\partial B_n / \partial t$ είναι επίσης συνεχής. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η κάθετη συνιστώσα B_n είναι συνεχής συνάρτηση της θέσεως για τα σημεία της συνοριακής επιφάνειας, δηλαδή καταλήγουμε και πάλι στην οριακή συνθήκη (11).

B. Όπως επίσης αποδείξαμε στην ενότητα 2, ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό [εξ.(1)] προκύπτει ως άμεση συνέπεια, αν δεχθούμε ως ανεξάρτητες εξισώσεις τον νόμο Maxwell-Ampere και την εξίσωση συνεχείας. Αυτό σημαίνει ότι, αν δεχθούμε ότι ισχύουν οι οριακές συνθήκες (25) και (16), τότε η οριακή συνθήκη (5) για τις κάθετες συνιστώσες του \bar{D} προκύπτει ως άμεση συνέπεια. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί και κατά τρόπο άμεσο, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Συμπέρασμα

Κατά την κατάστρωση και επίλυση προβλημάτων οριακών συνθηκών του χρονικά μεταβαλλόμενου (δηλαδή του **ηλεκτρομαγνητικού**) πεδίου **αρκεί η εφαρμογή των οριακών συνθηκών (21) και (25) για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του \bar{E} και του \bar{H}** . Πλήρωση των συνθηκών αυτών εξασφαλίζει

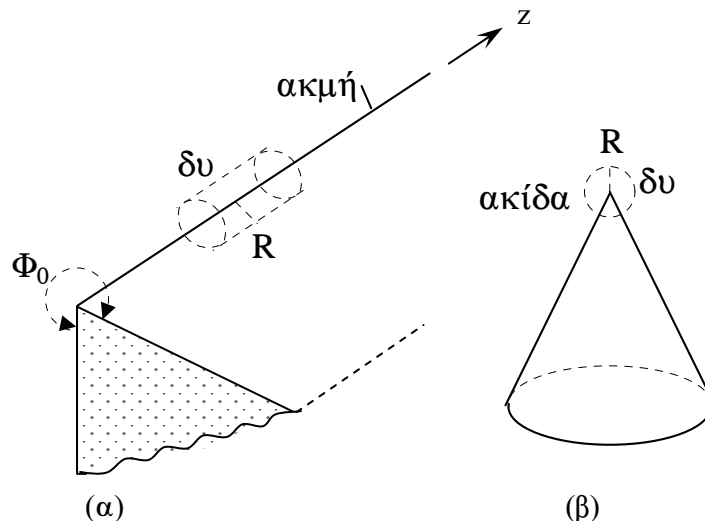
την ικανοποίηση και των οριακών συνθηκών (5) και (11). (Εξυπακούεται ότι και η οριακή συνθήκη (16), που αλληλοσυνδέει τις πηγές μεταξύ τους, θα ικανοποιείται εφόσον οι πηγές είναι σωστά ορισμένες).

Παρατήρηση

Οι παραπάνω οριακές συνθήκες (5), (11), (16), (21) και (25) είναι τελείως γενικές, ισχύουσες ανεξάρτητα από την φύση και τις ιδιότητες των μέσων 1 και 2 (ισοτροπικά-ανισοτροπικά, γραμμικά-μη γραμμικά, κ.λ.π. μέσα).

7.7 Οριακές συνθήκες σε ιδιόμορφα σημεία διαχωριστικών επιφανειών

Σε ιδιόμορφα σημεία συνοριακών επιφανειών, όπως π.χ. κατά μήκος ακμών (Σχ.7α) ή σε ακίδες (Σχ.7β), οι παραπάνω οριακές συνθήκες δεν ισχύουν. Αυτό συμβαίνει διότι, α) η επιφάνεια S δεν είναι ομαλή σε τέτοια σημεία, οπότε το διάνυσμα \hat{n} που υπεισέρχεται στις οριακές συνθήκες δεν ορίζεται για τα σημεία αυτά, και β) είναι δυνατόν ορισμένες από τις συνιστώσες του πεδίου στη γειτονιά τέτοιων ιδιομορφιών να πάρουν άπειρη τιμή. (Υπενθυμίζεται σχετικά ότι, π.χ., για την εξαγωγή της οριακής συνθήκης (20) χρειάστηκε να υποθέσουμε ότι οι εμπλεκόμενες σε αυτή πεδιακές συνιστώσες είναι πεπερασμένες).



Σχήμα 7

Στις περιπτώσεις αυτές ισχύουν άλλες οριακές συνθήκες, γνωστές ως **συνθήκες των άκρων ή συνθήκες ακμών (edge conditions)**. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που βρίσκεται ενταμιευμένη στη γειτονιά ιδιομόρφων σημείων πρέπει να είναι **πεπερασμένη**. Στην περίπτωση ενός απλού μέσου με παραμέτρους (ϵ, μ) , τη μαθηματική έκφραση της συνθήκης των άκρων αποτελεί η εξίσωση

$$\frac{1}{2} \int_{\delta V} (\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dV = \text{πεπερασμένο} \quad (28)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε πεπερασμένη περιοχή δV που περιβάλλει το ιδιόμορφο σημείο.

[**Σημείωση:** Το ολοκλήρωμα στο πρώτο σκέλος της (28) αποτελεί την έκφραση της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας που είναι ενταμιευμένη στον όγκο δV , όπως θα δείξουμε στο κεφάλαιο 5].

Φυσική σημασία της συνθήκης των άκρων

Η φυσική σημασία της συνθήκης των άκρων γίνεται φανερή αν επικαλεστούμε το γεγονός ότι η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που είναι ενταμιευμένη σε πεπερασμένη περιοχή του χώρου, η οποία περιλαμβάνει οποιεσδήποτε φυσικές (πραγματοποιησιμες) πηγές, πρέπει να είναι πεπερασμένη.

Με αναφορά στο Σχ.7, ας υποθέσουμε για απλότητα ότι η σφήνα (Σχ.7α) ή ο κώνος (Σχ.7β) είναι τέλειοι αγωγοί. Οι πρωτογενείς πηγές του πεδίου βρίσκονται κάπου στον περιβάλλοντα χώρο (δεν δείχνονται στο σχήμα).

Τα ιδιόμορφα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, που διεγείρονται στη γειτονιά των παραπάνω ιδιομόρφων σημείων, οφείλονται σε επιφανειακά ρεύματα που επάγονται στην επιφάνεια του αγωγού. Φυσικά, η ενέργεια των επαγομένων αυτών ρευμάτων δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια των πραγματικών (επιβαλλομένων) πηγών. Έτσι εύλογα τίθεται η απαίτηση, που διατυπώνεται με την σχέση (28), σύμφωνα με την οποία η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που αποθηκεύεται στη γειτονιά των ιδιομόρφων γεωμετρικών σημείων της διατάξεως οφείλει να είναι πεπερασμένη.

Συνέπειες της συνθήκης των άκρων

Όπως προαναφέρθηκε, ορισμένες από τις συνιστώσες του πεδίου είναι δυνατόν, υπό προϋποθέσεις, να τείνουν στο άπειρο καθώς το σημείο παρατηρήσεως προσεγγίζει κάποιο ιδιόμορφο σημείο. (Στην περίπτωση της διατάξεως του Σχ.7α, π.χ., η δυνατότητα αυτή εξαρτάται από την τιμή που έχει το γωνιακό άνοιγμα Φ_0 της σφήνας).

Η συνθήκη των άκρων θέτει περιορισμούς στον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτός ο απειρισμός του πεδίου, ο οποίος δεν μπορεί επομένως να είναι αυθαίρετος. Στην περίπτωση της τέλεια αγωγίμης σφήνας, θεωρούμε μια στοιχειώδη κυλινδρική περιοχή δV με άξονα την ακμή και ακτίνα R . Σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, ϕ, z) το στοιχείο όγκου ισούται με $r dr d\phi dz$. Αν υποθέσουμε⁸ ότι οι πεδιακές συνιστώσες έχουν εκφράσεις της μορφής $f(r)\Psi(\phi, z)$ καθώς $r \rightarrow 0$, όπου $\Psi(\phi, z)$ είναι ομαλή συνάρτηση των (ϕ, z) , τότε η συνθήκη (28) οδηγεί στη σχέση

$$\int_0^R |f(r)|^2 r dr = \text{πεπερασμένο}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το $|f(r)|^2$ δεν μπορεί να τείνει στο άπειρο ταχύτερα από $r^{-2(1-a)}$ καθώς $r \rightarrow 0$, όπου a είναι αυθαίρετα μικρή θετική ποσότητα. Επομένως καμιά συνιστώσα του πεδίου δεν μπορεί να αυξηθεί ταχύτερα από r^{-1+a} ($a > 0$) καθώς $r \rightarrow 0$.

Στην περίπτωση του κώνου του σχήματος 7β, θεωρούμε μια στοιχειώδη σφαιρική περιοχή δV με κέντρο την κορυφή του κώνου και ακτίνα R . Σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) το στοιχείο όγκου ισούται με $r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$. Αν υποθέσουμε ότι η πεδιακή συνιστώσα που μας ενδιαφέρει έχει μια έκφραση της μορφής $f(r)\Psi(\theta, \phi)$ καθώς $r \rightarrow 0$, όπου $\Psi(\theta, \phi)$ είναι ομαλή συνάρτηση των (θ, ϕ) , τότε η συνθήκη (28) οδηγεί στη σχέση

$$\int_0^R |f(r)|^2 r^2 dr = \text{πεπερασμένο}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το $|f(r)|^2$ δεν μπορεί να τείνει στο άπειρο ταχύτερα από r^{-3+2a} καθώς $r \rightarrow 0$, όπου a είναι αυθαίρετα μικρή θετική ποσότητα. Επομένως καμιά συνιστώσα του πεδίου δεν μπορεί να αυξηθεί ταχύτερα από $r^{-(3/2)+a}$ ($a > 0$) καθώς $r \rightarrow 0$.

8. Θεώρημα μοναδικότητας των λύσεων των προβλημάτων οριακών συνθηκών του ΗΜ πεδίου

Το θεώρημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Σε ομογενή, γραμμικά και ισοτροπικά μέσα, μια λύση των εξισώσεων Maxwell που ικανοποιεί δεδομένες οριακές και αρχικές συνθήκες είναι μοναδική.

Απόδειξη

Θεωρούμε πεπερασμένη περιοχή V του χώρου με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S (Σχ.1). Το μέρος των πηγών που ενδεχομένως βρίσκεται στον όγκο αυτό συμβολίζουμε παρακάτω με τις χωρικές πυκνότητες ρ, \vec{J} . Το μέσο που πληροί τον όγκο V περιγράφεται με συντακτικές σχέσεις της μορφής

⁸Αυτό πράγματι συμβαίνει όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο

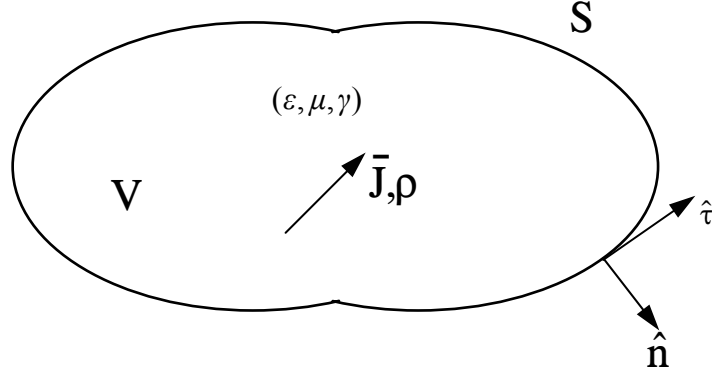
$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \bar{B} = \mu \bar{H}, \bar{J}_c = \gamma \bar{E} \quad (1)$$

όπου $\varepsilon > 0, \mu > 0, \gamma > 0$.

Η πυκνότητα των πηγών \bar{J} είναι γενικώς το άθροισμα

$$\bar{J} = \bar{J}_\pi(\bar{r}, t) + \bar{J}_c(\bar{r}, t), \quad (2)$$

όπου \bar{J}_π είναι η πυκνότητα των επιβαλλομένων πηγών και \bar{J}_c η πυκνότητα των ρευμάτων αγωγιμότητας (επαγόμενες πηγές).



Σχήμα 1

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, υποθέτοντας ότι υπάρχουν δυο λύσεις (συμβολιζόμενες παρακάτω με τους δείκτες 1 και 2, αντιστοίχα). Αμφότερες οι λύσεις αυτές ικανοποιούν:

A. τις εξισώσεις Maxwell με πηγές ρ, \bar{J} :

$$\nabla \times \bar{E}_{1,2} = -\frac{\partial \bar{B}_{1,2}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \bar{H}_{1,2} = \bar{J}_\pi + \bar{J}_{c1,2} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}_{1,2}}{\partial t} = \bar{J}_\pi + \gamma \bar{E}_{1,2} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}_{1,2}}{\partial t} \quad (4)$$

B. τις δεδομένες οριακές συνθήκες.

Οι συνθήκες αυτές αναφέρονται στις εφαπτομενικές συνιστώσες \bar{E}_τ και \bar{H}_τ στα σημεία της επιφάνειας S (βλέπε το **Συμπέρασμα** στο τέλος της ενότητας 7.6) και μπορεί να έχουν οποιαδήποτε από τις παρακάτω τρεις μορφές (βλέπε Σχ.2α, Σχ.2β, Σχ.2γ, αντίστοιχα):

- $\bar{E}_{\tau 1,2}(\bar{r}, t) = \bar{f}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in S$ (5)

ή

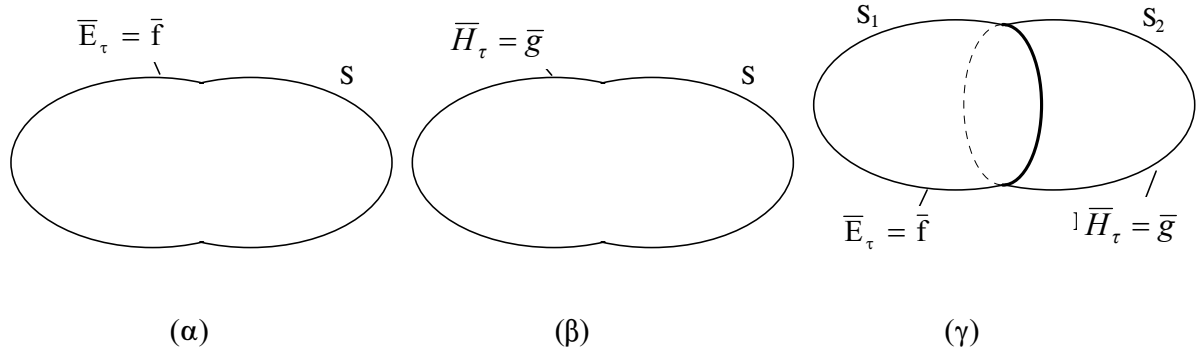
- $\bar{H}_{\tau 1,2}(\bar{r}, t) = \bar{g}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in S$ (6)

ή

$$\bullet \quad \bar{E}_{\tau 1,2}(\bar{r}, t) = \bar{f}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in S_1 \quad \text{και} \quad \bar{H}_{\tau 1,2}(\bar{r}, t) = \bar{g}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in S_2, \quad (7)$$

όπου $S_1 + S_2 = S$

(\bar{f}, \bar{g} είναι δεδομένες διανυσματικές συναρτήσεις της θέσεως πάνω στην επιφάνεια, καθώς και του χρόνου).



Σχήμα 2

Γ. τις αρχικές συνθήκες:

$$\bar{E}_{1,2}(\bar{r}, t_0) = \bar{w}(\bar{r}, t_0), \quad (8)$$

$$\bar{H}_{1,2}(\bar{r}; t_0) = \bar{u}(\bar{r}; t_0) \quad (9)$$

όπου \bar{w}, \bar{u} είναι, επίσης, δεδομένες διανυσματικές συναρτήσεις.

Επειδή, λόγω της γραμμικότητας, ισχύει η αρχή της υπερθέσεως των λύσεων, τα διανυσματικά πεδία $\bar{E} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$ και $\bar{H} = \bar{H}_1 - \bar{H}_2$ ικανοποιούν:

A' τις σχέσεις:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \gamma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (11)$$

B' κάποια από τις παρακάτω τρεις οριακές συνθήκες για τις εφαπτομενικές συνιστώσες:

$$\bullet \quad \bar{E}_\tau(\bar{r}, t) = 0, \quad \bar{r} \in S \quad (12)$$

ή

$$\bullet \quad \bar{H}_\tau(\bar{r}, t) = 0, \quad \bar{r} \in S \quad (13)$$

ή

$$\bullet \quad \bar{E}_\tau(\bar{r}, t) = 0, \quad \bar{r} \in S_1 \quad \text{και} \quad \bar{H}_\tau(\bar{r}, t) = 0, \quad \bar{r} \in S_2, \quad (14)$$

Γ' τις αρχικές συνθήκες:

$$\bar{E}(\bar{r}, t_0) = 0, \quad (15)$$

$$\bar{H}(\bar{r}, t_0) = 0. \quad (16)$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τις (10) και (11) με $\bar{\mathbf{H}}$ και $\bar{\mathbf{E}}$, αντίστοιχα, αφαιρώντας κατά μέλη τις προκύπτουσες εξισώσεις και χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα:

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) = \bar{\mathbf{H}} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) - \bar{\mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) \quad (17)$$

προκύπτει η σχέση

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) + \bar{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} + \gamma \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0. \quad (18)$$

Ολοκληρώνοντας την (18) στον όγκο V και χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα

$$\int_V \nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) dV = \oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (19)$$

καθώς και τις σχέσεις

$$\bar{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}}), \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \quad (21)$$

προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) dV + \gamma \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV = 0, \quad (22)$$

το οποίο λόγω των οριακών συνθηκών (12)-(14) γίνεται

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) dV + \gamma \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV = 0. \quad (23)$$

Ολοκληρώνοντας την (23) ως προς τον χρόνο, από t_0 μέχρι την αυθαίρετη χρονική στιγμή t , προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_t dV - \frac{1}{2} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_{t_0} dV + \gamma \int_{t_0}^t dt \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV = 0. \quad (24)$$

[οι δείκτες t και t_0 στις ολοκληρωτέες συναρτήσεις των δυο πρώτων ολοκληρωμάτων στην (24) χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν την χρονική στιγμή (t ή αντίστοιχα t_0) για την οποία υπολογίζονται οι ολοκληρωτέες αυτές συναρτήσεις]. Από την (24), μέσω των αρχικών συνθηκών (15) και (16), προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\frac{1}{2} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_t dV = -\gamma \int_{t_0}^t dt \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV \Rightarrow \frac{1}{2} \int_V (\epsilon |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \mu |\bar{\mathbf{H}}|^2)_t dV = -\gamma \int_{t_0}^t dt \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV \quad (25)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκαν οι συντακτικές σχέσεις (1).

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της τελευταίας σχέσεως είναι μονίμως θετικό, ενώ το δεύτερο μέλος είναι μονίμως αρνητικό, οπότε πρέπει να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις

$$\gamma |\bar{\mathbf{E}}|^2 = 0, \quad (26\alpha)$$

$$\epsilon |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \mu |\bar{\mathbf{H}}|^2 = 0. \quad (26\beta)$$

Από τις (26) προκύπτει ότι

$$\bar{\mathbf{E}} = 0, \bar{\mathbf{H}} = 0. \quad (27)$$

Επομένως $\bar{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{E}}_2$ και $\bar{\mathbf{H}}_1 = \bar{\mathbf{H}}_2$, δηλαδή η λύση είναι μοναδική.

Παρατηρήσεις

A. Όταν η περιοχή V δεν είναι περιορισμένη, αλλά εκτείνεται μέχρι του απείρου, η μοναδικότητα της λύσεως εξαρτάται από τη συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων στο όριο όπου $r \rightarrow \infty$. Η συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων αυτών εξαρτάται, με τη σειρά της, από την συμπεριφορά των πεδίων $\bar{\mathbf{E}}$ και $\bar{\mathbf{H}}$ για $r \rightarrow \infty$. Αποδεικνύεται σχετικά ότι, όταν οι πηγές είναι εντοπισμένες σε πεπερασμένη περιοχή του χώρου και είτε α) οι οριακές συνθήκες στο άπειρο αντιστοιχούν στη λεγόμενη **συνθήκη ακτινοβολίας**, είτε β) οι πεδιακές συνιστώσες μηδενίζονται στο άπειρο, τότε οι λύσεις των εξισώσεων Maxwell είναι και πάλι μοναδικές.

Η συνθήκη ακτινοβολίας, διατυπωθείσα αρχικά από τον Sommerfeld, συνίσταται στην εξής απαίτηση η οποία υπαγορεύεται από καθαρά φυσικούς λόγους: σε περιοχές του χώρου οι οποίες εκτείνονται μέχρι του απείρου, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια πρέπει να μεταδίδεται απομακρυνόμενη από τις πηγές. Με άλλα λόγια, για να είναι φυσικώς αποδεκτές, οι πεδιακές λύσεις πρέπει να παριστάνουν κύματα τα οποία οδεύουν με κατεύθυνση από τις πηγές προς το άπειρο (εξερχόμενα κύματα)

B. Το θεώρημα της μοναδικότητας επεκτείνεται στις περιπτώσεις μέσω χωρίς απώλειες ($\gamma=0$) και σε περιπτώσεις ανισοτροπικών μέσων.

Γ. Στην περίπτωση που η επιφάνεια S περιλαμβάνει και ανώμαλα σημεία, για την εξασφάλιση της μοναδικότητας της λύσεως απαιτείται επί πλέον η ικανοποίηση της συνθήκης των άκρων για τα σημεία αυτά.

9. Η κυματική φύση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων

Άμεση συνέπεια των εξισώσεων Maxwell είναι το γεγονός ότι τα χρονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία διαδίδονται στον περιβάλλοντα χώρο ως κύματα, με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός. Για τον λόγο αυτό τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία αναφέρονται συχνά ως ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ MAXWELL ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΧΡΟΝΟΣΤΑΘΕΡΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

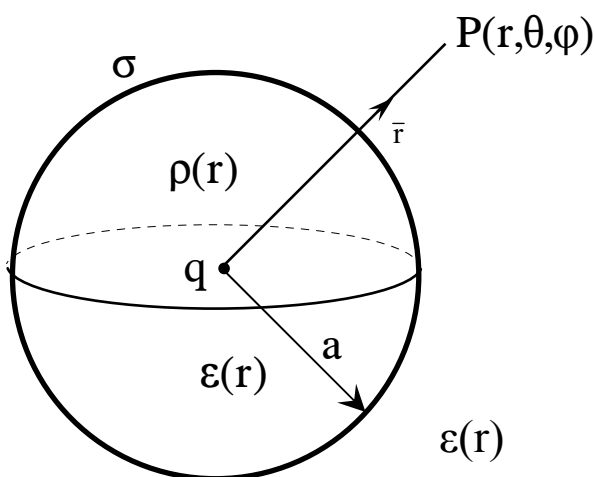
1 Γενικά

Οι εξισώσεις Maxwell υπό την ολοκληρωτική τους μορφή, η οποία αποτελεί την πιο γενική διατύπωση των νόμων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, ισχύουν για οποιαδήποτε συνδυασμένη επιλογή των εμπλεκόμενων δρόμων, επιφανειών και όγκων ολοκληρώσεως. Όμως, παρά τη γενικότητά τους, η χρησιμότητα των ολοκληρωτικών αυτών εξισώσεων στον άμεσο υπολογισμό του πεδίου είναι περιορισμένη και αφορά κυρίως περιπτώσεις χρονοσταθερών πεδίων, όπου τόσο η γεωμετρία της διατάξεως όσο και η κατανομή των πηγών είναι κατάλληλα συμμετρικές. Για τις συμμετρικές αυτές διατάξεις, οι αναφερθέντες ολοκληρωτικοί νόμοι αποτελούν τον ταχύτερο και ευκολότερο τρόπο υπολογισμού του πεδίου, όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Στη γενική περίπτωση, ο υπολογισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στηρίζεται στην επίλυση ενός προβλήματος οριακών συνθηκών, το οποίο περιγράφεται μέσω των σημειακών εξισώσεων Maxwell και των οριακών συνθηκών που διατυπώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η τεχνική επιλύσεως τέτοιων προβλημάτων οριακών συνθηκών αποτελεί το αντικείμενο επομένου κεφαλαίου. Στο παρόν κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τις σημειακές σχέσεις για τον υπολογισμό του πεδίου σε απλές συμμετρικές διατάξεις.

2 Ηλεκτροστατικό πεδίο σφαιρικά συμμετρικών χρονοσταθερών πηγών

Θεωρούμε ότι στη διάταξη του σχήματος 1 δρουν ταυτοχρόνως οι παρακάτω χρονοσταθερές πηγές: α) σημειακό φορτίο q στη θέση $r=0$, β) επιφανειακό φορτίο σταθερής πυκνότητας σ στη θέση $r=a$ και γ) χωρικό φορτίο με σφαιρικά συμμετρική πυκνότητα $\rho(r)$ στην περιοχή $0 < r < a$. Οι ηλεκτρικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με την επιτρεπτότητα ϵ . Υποθέτουμε ότι γενικά $\epsilon=\epsilon(r)$ (ειδική περίπτωση: ομογενής απεριόριστος χώρος, $\epsilon=\text{σταθ.}$). Ζητάμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.



Σχήμα 1: Οι πηγές του πεδίου βρίσκονται στο εσωτερικό και στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας a

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το διεγειρόμενο ηλεκτροστατικό πεδίο θα είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης r του σημείου παρατηρήσεως $P(r, \theta, \phi)$, δηλαδή

$$\vec{E} = \vec{E}(r) \tag{1}$$

Συνιστώσες του πεδίου

Το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα, δηλαδή

$$\vec{E} = \hat{r}E_r(r). \quad (2)$$

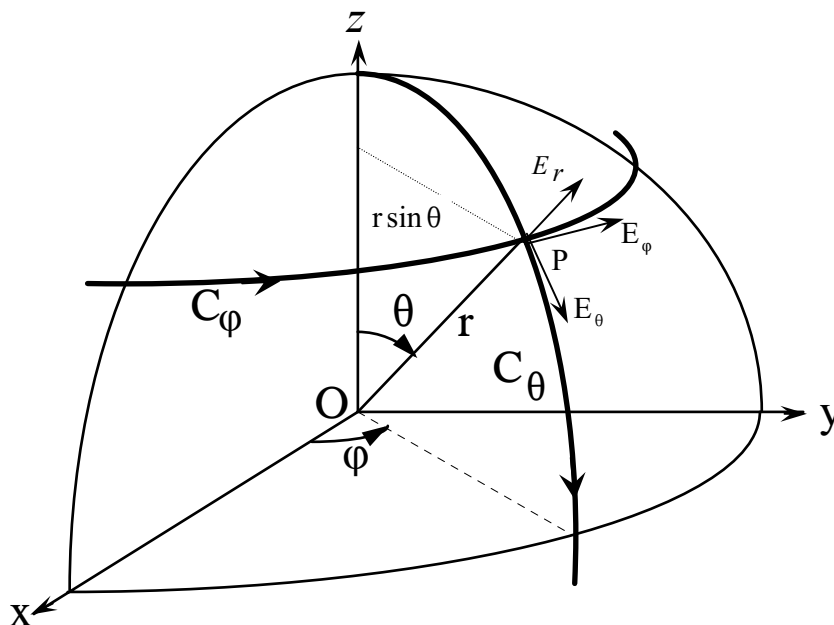
Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί με διαφόρους τρόπους. Εδώ θα εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό νόμο

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0. \quad (3)$$

Επιλέγοντας ως δρόμο ολοκληρώσεως C τον "παράλληλο" κύκλο C_ϕ που διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \theta, \phi)$ (Σχ.2), από την (3) με τη βοήθεια της (1) προκύπτει ότι

$$E_\phi(r)\ell_c = 0 \Rightarrow E_\phi(r) = 0$$

όπου $\ell_c (= 2\pi r \sin \theta) \neq 0$ είναι το μήκος του κύκλου αυτού.



Σχήμα 2

Με τον ίδιο τρόπο, επιλέγοντας ως δρόμο ολοκληρώσεως C τον "μεσημβρινό" κύκλο C_θ που διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως, παίρνουμε με τη βοήθεια των (1) και (3) τη σχέση

$$E_\theta(r)\ell_c = 0 \Rightarrow E_\theta(r) = 0$$

όπου τώρα $\ell_c (= 2\pi r) \neq 0$ είναι το μήκος του κύκλου C_θ .

Εύρεση της $E_r(r)$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου, $E_r(r)$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (4)$$

όπου ως επιφάνεια ολοκληρώσεως επιλέγουμε τη σφαίρα, ακτίνας r , η οποία διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \theta, \phi)$. Το μέγεθος Q στο δεύτερο μέρος της (4) παριστάνει, κατά τα γνωστά, το συνολικό φορτίο που περικλείεται στο εσωτερικό της S , δηλαδή

$$Q = Q(r) = \begin{cases} q + 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', & 0 < r < a \\ q + 4\pi \int_0^a \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi a^2 \sigma, & a < r < \infty \end{cases} \quad (5)$$

Με τη βοήθεια της (2), από την (4) προκύπτει ότι

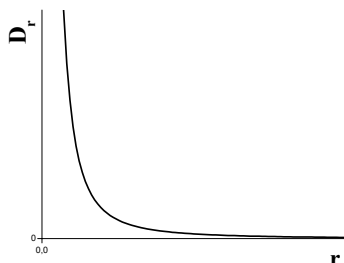
$$4\pi r^2 D_r(r) = Q(r) \Rightarrow D_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi r^2} \Rightarrow E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi r^2 \epsilon(r)} \quad (6)$$

Αξιοσημείωτες ειδικές περιπτώσεις

α. Σημειακή πηγή στη θέση $\vec{r} = 0$ στον απεριόριστο κενό χώρο ϵ_0 :

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r} \quad (0 < r < \infty). \quad (7)$$

Η γραφική παράσταση του D_r συναρτήσεως του r φαίνεται στο Σχ.3. Παρατηρούμε ότι το πεδίο τείνει στο άπειρο καθώς το σημείο παρατήρησης προσεγγίζει τη θέση του σημειακού φορτίου.



Σχήμα 3

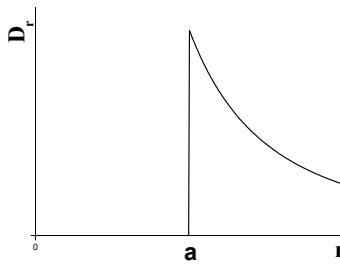
β. Ομοιόμορφη επιφανειακή πηγή πυκνότητας σ στη σφαιρική επιφάνεια $r=a$ στον απεριόριστο κενό χώρο ϵ_0 :

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} = \frac{\sigma a^2}{r^2} \hat{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}, \quad \vec{E} = \vec{D} / \epsilon_0 \quad (8)$$

όπου

$$Q = 4\pi a^2 \sigma$$

είναι το συνολικό φορτίο της σφαίρας. Η γραφική παράσταση του D_r συναρτήσεως του r φαίνεται στο Σχ.4.



Σχήμα 4

Παρατηρούμε τα εξής:

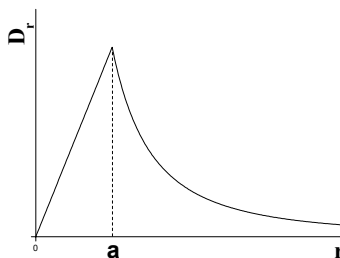
- i) Το πεδίο στο χώρο έξω από μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαιρική επιφάνεια ταυτίζεται με το πεδίο σημειακής πηγής, μεγέθους ίσου με το συνολικό φορτίο της σφαίρας, τοποθετημένης στο κέντρο της σφαίρας. Αντίθετα, το πεδίο στο εσωτερικό μιας τέτοιας σφαίρας είναι μηδενικό.
- ii) Το πεδίο είναι παντού πεπερασμένο.
- iii) Στα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας το πεδίο είναι ασυνεχές: $D_r(a-) = 0$, $D_r(a+) = \sigma$. Ικανοποιείται, προφανώς, η οριακή συνθήκη $\hat{r} \cdot [\bar{D}(a+) - \bar{D}(a-)] = \sigma$.

γ. Ομοιόμορφη χωρική κατανομή στο εσωτερικό σφαίρας

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο η σταθερή χωρική πηγή $\rho(r) = \rho_0 = \text{σταθ.}$ ($0 < r < a$), από την (6) παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$D_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3} & (0 < r < a) \\ \frac{\rho_0 a^3}{3r^2} & (r > a) \end{cases} . \quad (9)$$

Επομένως, ότι το πεδίο που οφείλεται σε χωρικό φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο στο εσωτερικό μιας σφαίρας είναι ομαλή συνάρτηση του r , τόσο στο εξωτερικό όσο και στο εσωτερικό των πηγών. Η γραφική παράσταση του D_r συναρτήσεως του r φαίνεται στο Σχ.5



Σχήμα 5

Γενικές παρατηρήσεις πάνω στις (5)-(6)

1. Στα σημεία της επιφανειακής κατανομής σ το πεδίο είναι **ασυνεχές**. Με τη βοήθεια της (6) διαπιστώνουμε ότι η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}+) - \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}-)] = \sigma \quad (10)$$

όπως ακριβώς περιμέναμε να συμβεί..

2. Στη γειτονιά του σημειακού φορτίου, δηλαδή για $\mathbf{r} \rightarrow 0$, επικρατεί η συμβολή που προέρχεται από το σημειακό φορτίο:

$$D_r(r) \underset{r \ll}{=} \frac{q}{4\pi r^2} + c(r)$$

όπου η ποσότητα $c(r)$ είναι φραγμένη. (Αυτό συμβαίνει επειδή η συμβολή που προέρχεται από το επιφανειακό φορτίο είναι μηδενική, ενώ, όπως θα δείξουμε αμέσως, και η συμβολή από το χωρικό φορτίο, ίση με $c(r)$, είναι παντού πεπερασμένη). Συνεπώς,

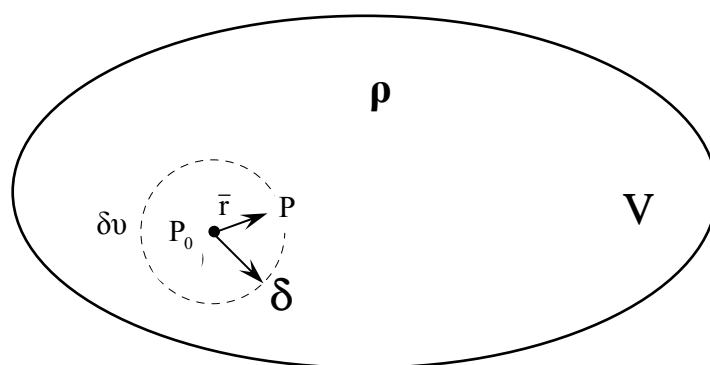
$$\lim_{r \rightarrow 0} [4\pi r^2 D_r(r)] = q \quad (11)$$

Στη θέση του σημειακού φορτίου, $r=0$, το πεδίο είναι, προφανώς, ιδιόμορφο:

$$D_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty.$$

Σημείωση: Η σχέση (11), που καθορίζει τη συμπεριφορά του πεδίου στην άμεση γειτονιά του σημειακού φορτίου q , επέχει θέση **οριακής συνθήκης** [ανάλογης προς την (10)] κατά την επίλυση προβλημάτων με χρήση των σημειακών εξισώσεων Maxwell.

3. Θεωρούμε (Σχ.6) χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(x,y,z)$, το οποίο κατανέμεται στο εσωτερικό μιας περιοχής V αυθαίρετης μορφής. Υποθέτουμε ότι η ρ είναι αρκούντως ομαλή συνάρτηση της θέσεως (x,y,z) .



Σχήμα 6: Το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ βρίσκεται στο κέντρο της (νοητής) σφαιρικής περιοχής δu ακτίνας δ . Το σημείο $P(x, y, z) \in (\delta u)$ βρίσκεται σε απόσταση r από το P_0

Το πεδίο στη θέση $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση δυο όρων:

$$\bar{\mathbf{D}}(x_0, y_0, z_0) = \bar{\mathbf{D}}^>(x_0, y_0, z_0) + \bar{\mathbf{D}}^<(x_0, y_0, z_0). \quad (12)$$

Ο όρος $\overline{D}^<(x_0, y_0, z_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα φορτία που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας μικρής σφαιρικής περιοχής δv , ακτίνας δ , με κέντρο το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Ο όρος $\overline{D}^>(x_0, y_0, z_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα υπόλοιπα φορτία, δηλαδή στα φορτία που βρίσκονται στην περιοχή $V - \delta v$. Επειδή $P(x_0, y_0, z_0) \notin (V - \delta v)$, ο όρος $\overline{D}^>(x_0, y_0, z_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0, z_0) . Από το άλλο μέρος, όταν η ακτίνα δ είναι κατάλληλα μικρή, τότε μπορεί να τεθεί $\rho(x, y, z) = \rho(x_0, y_0, z_0) = \rho_0$ για κάθε σημείο $P(x, y, z) \in \delta v$ και να χρησιμοποιηθεί η (9):

$$\overline{D}^<(x, y, z) = \frac{\rho_0 r}{3} \hat{r} \quad (0 < r < \delta), \quad (13)$$

όπου $r \equiv P_0 P$ και $\hat{r} = \overline{P_0 P} / (P_0 P)$. Επομένως και ο όρος $\overline{D}^<(x_0, y_0, z_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0, z_0) .

Συμπέρασμα: Το πεδίο οποιασδήποτε ομαλής χωρικής κατανομής φορτίου είναι ομαλή συνάρτηση της θέσεως, τόσο στο εξωτερικό όσο και στα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της κατανομής.

4 Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου έχουν τα άκρα τους στα φορτία εντός της δοθείσης κατανομής, απ' ενός, και απ' ετέρου σε ισόποσα φορτία τα οποία επάγονται και κατανέμονται ομοιόμορφα στην επιφάνεια της άπειρης σφαίρας. Η συμβολή των τελευταίων στο πεδίο είναι μηδενική σε κάθε σημείο της περιοχής $0 < r < \infty$, σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω για το πεδίο ομοιομόρφων επιφανειακών κατανομών [βλ. Εξ.(8)].

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Θα στηριχθούμε τώρα στις (ανεξάρτητες μεταξύ τους) διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \overline{E} = 0 \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho \quad (15)$$

και στις (επίσης ανεξάρτητες) οριακές συνθήκες

$$\hat{r} \times [\overline{E}(a+) - \overline{E}(a-)] = 0 \quad (16)$$

$$\hat{r} \cdot [\overline{D}(a+) - \overline{D}(a-)] = \sigma \Leftrightarrow D_r(a+) - D_r(a-) = \sigma. \quad (17)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ τη σχέση (1)

$$\overline{E} = \overline{E}(r)$$

την οποία υπαγορεύει η συμμετρία του προβλήματος.

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε πάλι -τώρα με βάση την (14)- ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, φ) , αναλύουμε την (14) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta E_{\varphi}(r)] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_{\theta}(r)}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial / \partial \varphi = 0}{r} \cot \theta E_{\varphi}(r) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r(r)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial [r E_{\varphi}(r)]}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial / \partial \varphi = 0}{r} \frac{d[r E_{\varphi}(r)]}{dr} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial [r E_{\theta}(r)]}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r(r)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial / \partial \theta = 0}{r} \frac{d[r E_{\theta}(r)]}{dr} = 0. \quad (20)$$

Από το άλλο μέρος, η (15) σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 D_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial [\sin \theta D_{\theta}(r)]}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_{\varphi}(r)}{\partial \varphi} &= \rho(r) \xrightarrow{\partial / \partial \varphi = 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 D_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial [\sin \theta D_{\theta}(r)]}{\partial \theta} = \rho(r) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 D_r(r)]}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r} D_{\theta}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial [D_{\theta}(r)]}{\partial \theta} &= \rho(r) \xrightarrow{\partial / \partial \theta = 0} \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 D_r(r)]}{dr} + \frac{\cot \theta}{r} D_{\theta}(r) &= \rho(r). \end{aligned} \quad (21)$$

Οι (18)-(21) οφείλουν να ισχύουν για κάθε σημείο (r, θ, φ) . Εφαρμόζοντας την (18) για δύο διαφορετικά σημεία (r, θ_1, φ) και (r, θ_2, φ) ($\theta_1 \neq \theta_2$) και αφαιρώντας κατά μέλη τις προκύπτουσες δύο εξισώσεις παίρνουμε:

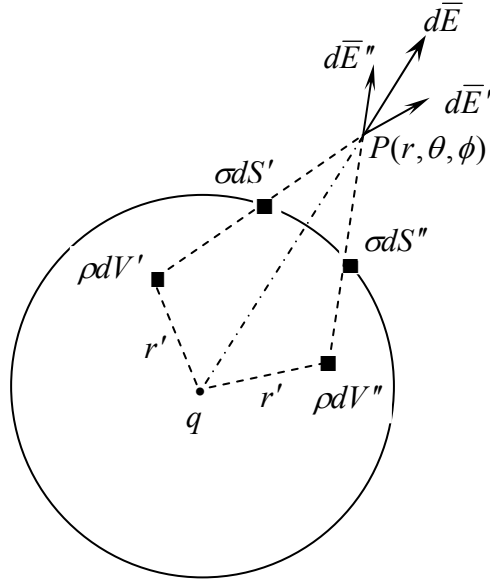
$$\frac{\cot \theta_1 - \cot \theta_2}{r} E_{\varphi}(r) = 0 \xrightarrow{\theta_1 \neq \theta_2} E_{\varphi}(r) = 0. \quad (22)$$

Εντελώς ανάλογα, εφαρμόζοντας την (21) για τα παραπάνω δύο σημεία και αφαιρώντας κατά μέλη τις προκύπτουσες δύο εξισώσεις, παίρνουμε:

$$\frac{\cot \theta_1 - \cot \theta_2}{r} D_{\theta}(r) = 0 \Rightarrow D_{\theta}(r) = 0. \quad (23)$$

Λόγω της (22), η (19) ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ ισχύει και η (20) λόγω της (23).

Εναλλακτικά, στην περίπτωση όπου $\varepsilon(r) = \varepsilon = \text{σταθ}$ θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι $\bar{E} = \hat{r} E_r(r)$ και γεωμετρικά (Σχ.7), θεωρώντας το πεδίο ως υπέρθεση των συμβολών που προέρχονται από το q και από όλα τα στοιχειώδη φορτία ρdV και σdS που συνθέτουν τις κατανομές φορτίου. Για κάθε τέτοιο στοιχειώδες φορτίο που βρίσκεται, π.χ., στη θέση (r', θ', φ') , υπάρχει πάντα ίσο φορτίο στη συμμετρική, ως προς το άξονα της σφαίρας που διέρχεται από το σημείο παρατήρησης $P(r, \theta, \phi)$. Διαπιστώνεται αμέσως ότι η συνισταμένη $d\bar{E}$ των πεδίων $d\bar{E}'$ και $d\bar{E}''$ στη θέση $P(r, \theta, \phi)$, τα οποία οφείλονται σε δυο τέτοια στοιχειώδη φορτία, έχει την ακτινική κατεύθυνση \hat{r} . Επομένως το συνολικό πεδίο σε οποιαδήποτε θέση είναι ακτινικό.



Σχήμα 7

Σημείωση: Ένας εναλλακτικός, άμεσος τρόπος να αποδείξουμε ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα μπορεί να στηριχθεί στη χρήση του συναρτήσεως δυναμικού Φ . Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το δυναμικό αυτό είναι συνάρτηση μόνο του r . Επομένως, από τη σχέση

$$\vec{E} = -\nabla\Phi(r) = -\hat{r} \frac{d\Phi(r)}{dr}. \quad (24)$$

προκύπτει ότι πράγματι το πεδίο έχει μόνο r συνιστώσα.

Εύρεση της $D_r(r)$

Η μοναδική συνιστώσα D_r του πεδίου θα βρεθεί μέσω της (21), η οποία την συνδέει με την διέγερση $\rho(r)$. Λόγω της (23), η σχέση (21) γράφεται ως εξής:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 D_r(r)]}{dr} = \rho(r). \quad (25)$$

Από την (25) με ολοκλήρωση παίρνουμε τη γενική λύση

$$r^2 D_r(r) = \int r^2 \rho(r) dr + c \Rightarrow D_r(r) = \frac{1}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr + \frac{c}{r^2} \quad (26)$$

όπου c είναι σταθερά ολοκληρώσεως.

Για την περιοχή 2 ($a < r < \infty$), όπου $\rho=0$, η (26) δίνει τη σχέση

$$D_r^{(2)}(r) = \frac{c_2}{r^2} \quad (27)$$

ενώ για την περιοχή 1 ($0 < r < a$) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα υπό τη μορφή

$$D_r^{(1)}(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' + \frac{c_1}{r^2}. \quad (28)$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες, ως εξής:

$$\alpha) \quad \lim_{r \rightarrow 0} [4\pi r^2 D_r^{(1)}(r)] = q \Rightarrow 4\pi c_1 = q \Rightarrow c_1 = \frac{q}{4\pi} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \hat{r} \cdot [\bar{D}(a+) - \bar{D}(a-)] &= \sigma \Leftrightarrow D_r(a+) - D_r(a-) = \sigma \Rightarrow \frac{c_2}{a^2} - \frac{1}{a^2} \int_0^a r'^2 \rho(r') dr' - \frac{c_1}{a^2} = \sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow c_2 = \int_0^a r'^2 \rho(r') dr' + \frac{q}{4\pi} + \sigma a^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Το πεδίο προσδιορίζεται πλήρως μέσω των (27)-(30). Όπως αναμέναμε να συμβεί, βρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις με αυτές των (5)-(6).

Σημείωση: Η οριακή συνθήκη για $r \rightarrow 0$ [Εξ.(29)], όπως όλες οι οριακές συνθήκες, προκύπτει με εφαρμογή των εξισώσεων του πεδίου υπό ολοκληρωτική μορφή. Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss,

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q,$$

όπου S είναι η επιφάνεια σφαίρας πολύ μικρής ακτίνας r με κέντρο την αρχή O , παίρνουμε τη σχέση

$$4\pi^2 D_r^{(1)}(r) = q + \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [4\pi^2 D_r^{(1)}(r)] = q$$

[βλέπ. επίσης την παρατήρηση 2, η οποία οδηγεί στην Εξ.(11)].

Παρατήρηση: Ο πρώτος όρος στο δεύτερο μέλος της (28) αποτελεί την έκφραση του πεδίου, το οποίο οφείλεται στην κατανομή $\rho(r)$ αποκλειστικά, σε σημεία στο εσωτερικό της κατανομής αυτής. Το πεδίο αυτό στο εσωτερικό της ρ είναι ομαλή συνάρτηση του r , ακόμα και για $r=0$, για μία ευρυτάτη οικογένεια κατανομών $\rho(r)$. Αυτό γίνεται φανερό με τον παρακάτω συλλογισμό. Αν η $\rho(r)$ είναι ομαλή συνάρτηση, της μορφής

$$\rho(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

τότε

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left(a_0 \frac{r^3}{3} + a_1 \frac{r^4}{4} + a_2 \frac{r^5}{5} + \dots \right) = 0.$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι ακόμα και όταν η $\rho(r)$ εμφανίζει ιδιομορφία (απειρίζεται) στη θέση $r=0$, της μορφής

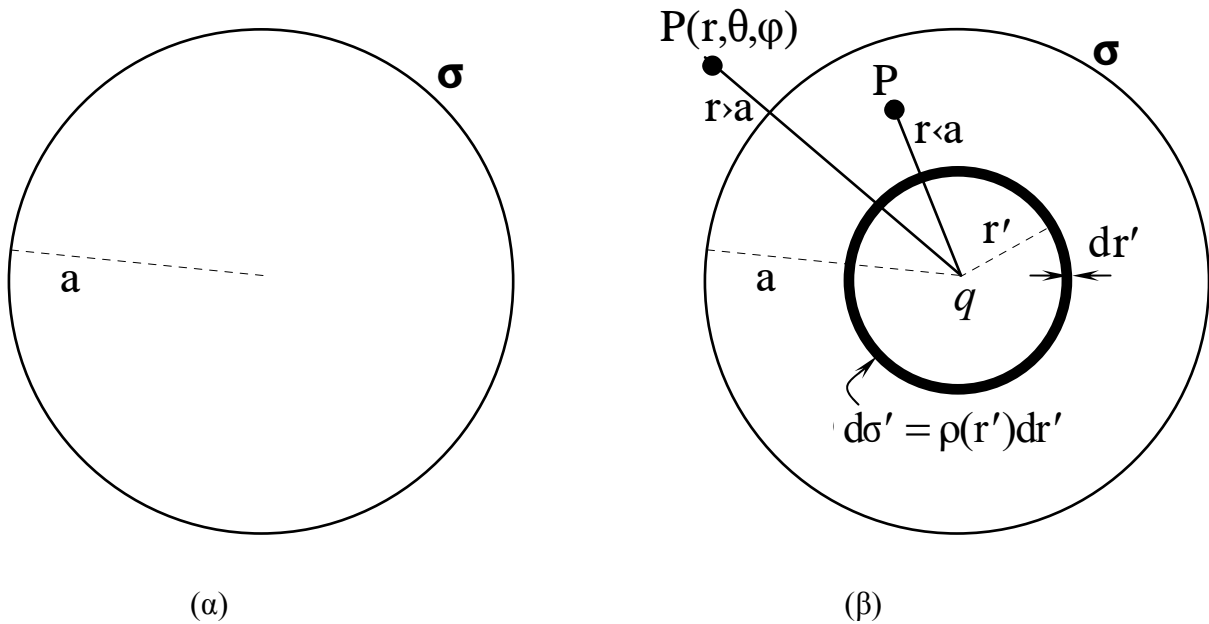
$$\rho(r) = \frac{b_0}{r} + a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

ο παραπάνω όρος εξακολουθεί να είναι ομαλός:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int r^2 \rho(r) dr = b_0 / 2 \text{ (πεπερασμένο)}.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήξαμε νωρίτερα κατά τη λύση με βάση τις ολοκληρωτικές σχέσεις.

Γ. Λύση με επαλληλία



Σχήμα 8

Με βάση το γνωστό αποτέλεσμα

$$\overline{D} = \begin{cases} \sigma \frac{a^2}{r^2} \hat{r}, & r > a \\ 0, & r < a \end{cases} \quad (31)$$

για το πεδίο επιφανειακής κατανομής σ (Σχ.8α), η οποία βρίσκεται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας a , το ζητούμενο πεδίο της διατάξεως του Σχ.1 βρίσκεται εύκολα με επαλληλία ως εξής:

Θεωρούμε την χωρική κατανομή ρ ως μια διαδοχή επαλλήλων επιφανειακών κατανομών $d\sigma' = \rho(r')dr'$, τοποθετημένων σε σφαιρικές επιφάνειες ακτίνας r' , όπου $0 < r' < a$ (Σχ.8β). Το πεδίο στη θέση $P(r, \theta, \phi)$ εκφράζεται τότε ως εξής:

1. Για $r > a$ (σημείο παρατηρήσεως εκτός της σφαιρικής περιοχής ακτίνας a):

$$\overline{D}(r) = \hat{r}(A + B + \Gamma) \quad (32)$$

όπου

$$A = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (33)$$

είναι η συμβολή του σημειακού φορτίου,

$$B = \sigma \frac{a^2}{r^2} \quad (34)$$

οφείλεται στο επιφανειακό φορτίο σ , ενώ

$$\Gamma = \int_{r'=0}^a \rho(r') \frac{r'^2}{r^2} dr' \quad (35)$$

είναι η συμβολή του χωρικού φορτίου στο τελικό αποτέλεσμα.

2. Για $r < a$ (σημείο παρατηρήσεως εντός της σφαιρικής περιοχής ακτίνας a):

$$\bar{D}(r) = \hat{r}(A + B + \Gamma' + \Gamma'') \quad (36)$$

όπου $A = \frac{q}{4\pi r^2}$, όπως προηγουμένως, και $B=0$ (το σημείο παρατηρήσεως είναι στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας a και επομένως η συμβολή της σ είναι τώρα μηδενική). Στην (36), η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $r < r' < a$, συμβολίζεται με Γ' . Για τον ίδιο λόγο που οδήγησε στον μηδενισμό της ποσότητας B , έχουμε $\Gamma' = 0$. Τέλος, η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $0 < r' < r$, συμβολίζεται με Γ'' και ισούται με

$$\Gamma'' = \int_{r'=0}^r \rho(r') \frac{r'^2}{r^2} dr'. \quad (37)$$

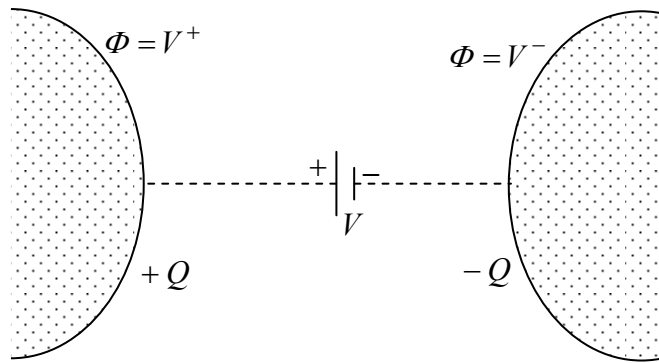
Όπως περιμέναμε να συμβεί, ξαναβρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο.

Εφαρμογή: Πεδίο και χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή

Ο πυκνωτής (Σχ.9) ορίζεται γενικά ως μια διάταξη που περιλαμβάνει δύο αγωγούς (οπλισμοί του πυκνωτή) με φορτία Q και $-Q$, αντίστοιχα. Οι δύο αγωγοί είναι ισοδυναμικοί χώροι με δυναμικά $\Phi = V^+$ και $\Phi = V^-$, αντίστοιχα. Η διαφορά των δυναμικών, $V = V^+ - V^-$, είναι η τάση του πυκνωτή. Τέλος, το μέγεθος

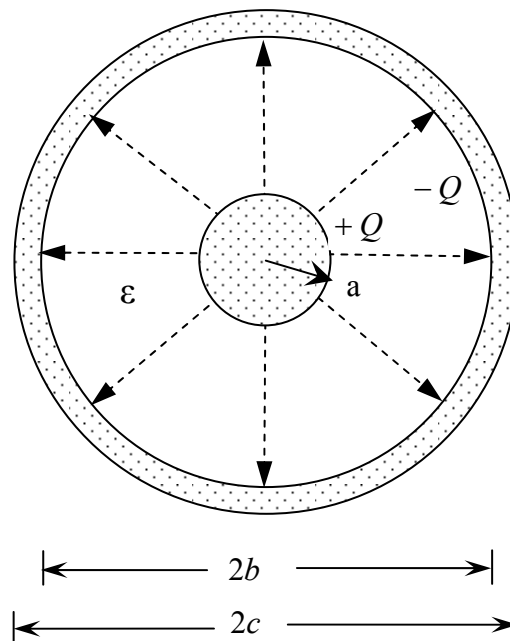
$$C = \frac{Q}{V} \quad (38)$$

ονομάζεται χωρητικότητα του πυκνωτή.



Σχήμα 9

Στην περίπτωση του σφαιρικού πυκνωτή που δείχνει το Σχ.10, οι δύο οπλισμοί είναι η αγωγίμη σφαίρα ακτίνας a και ο αγωγίμος σφαιρικός φλοιός, ο οποίος έχει εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c . Οι δύο αυτοί αγωγοί φέρουν φορτία Q και $-Q$, αντίστοιχα. Τα φορτία αυτά κατανέμονται στις σφαιρικές επιφάνειες $r=a$ και $r=b$, έτσι ώστε οι δυναμικές γραμμές του πεδίου να ξεκινούν από τα φορτία της επιφάνειας $r=a$ και να απολήγουν στα φορτία της επιφάνειας $r=b$. Με άλλα λόγια, το πεδίο εκτείνεται στην περιοχή $a < r < b$. [Επομένως, η εξωτερική ακτίνα c μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ($b < c < \infty$), χωρίς αυτό να έχει καμιά επίδραση στη λειτουργία του πυκνωτή.]



Σχήμα 10

Με αναφορά στο Σχ.10 βρίσκεται αμέσως ότι το πεδίο του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (a < r < b) \quad (39)$$

οπότε η τάση μεταξύ των οπλισμών ισούται με

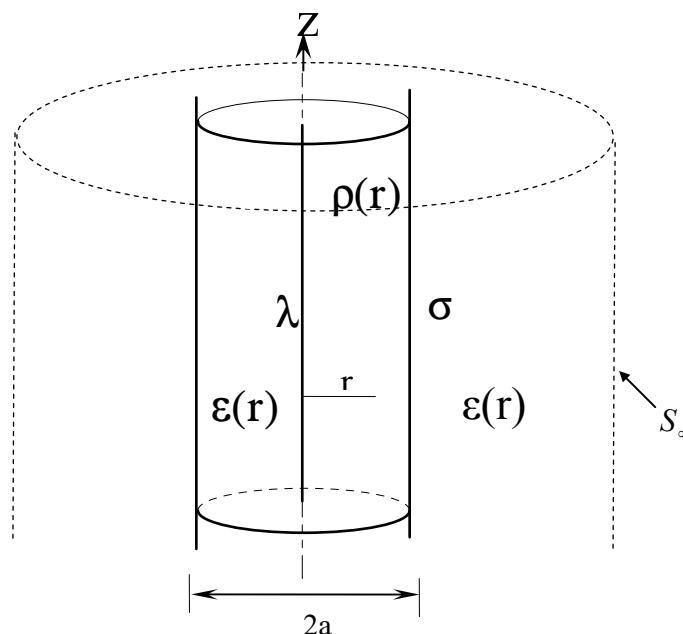
$$V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r=a}^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{b-a}{ab}. \quad (40)$$

Επομένως, η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή είναι

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a}. \quad (41)$$

3. Ηλεκτροστατικό πεδίο κυλινδρικά συμμετρικών χρονοσταθερών πηγών

Θεωρούμε (Σχ.1) ότι δρουν ταυτοχρόνως γραμμικό φορτίο σταθερής πυκνότητας λ κατά μήκος του άξονα $r=0$ του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων, επιφανειακό φορτίο σταθερής πυκνότητας σ στην



Σχήμα 1: Οι πηγές του πεδίου βρίσκονται στο εσωτερικό και στην επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας a . S_{∞} είναι η επιφάνεια του κυλίνδρου άπειρης ακτίνας. Το διεγειρόμενο πεδίο εκτείνεται στην περιοχή $0 < r < \infty$.

επιφάνεια $r=a$, και χωρικό φορτίο με κυλινδρικά συμμετρική πυκνότητα $\rho(r)$ ($0 < r < a$). Οι ηλεκτρικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με την επιτρεπτότητα του ϵ . Υποθέτουμε ότι γενικά $\epsilon=\epsilon(r)$ (ειδική περίπτωση: ομογενής απεριόριστος χώρος, $\epsilon=\text{σταθ.}$). Ζητείται να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το διεγειρόμενο ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης r του σημείου παρατηρήσεως $P(r, \varphi, z)$, δηλαδή

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

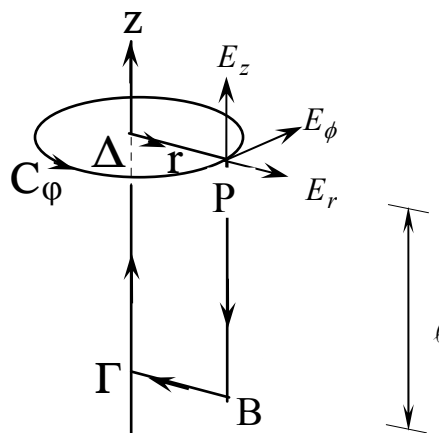
Συνιστώσες του πεδίου

Το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα, δηλαδή

$$\bar{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{r}}E_r(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί με πολλούς τρόπους. Εδώ θα εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό νόμο

$$\oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\ell} = 0. \quad (3)$$



Σχήμα 2

Επιλέγοντας ως δρόμο ολοκληρώσεως τον κύκλο C_ϕ που διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \phi, z)$ και είναι στο επίπεδο το κάθετο στον άξονα των z (Σχ.2), από την (3) με τη βοήθεια της (2) προκύπτει ότι

$$E_\phi(r)\ell_c = 0 \Rightarrow E_\phi(r) = 0$$

όπου $\ell_c (= 2\pi r) \neq 0$ είναι το μήκος του κύκλου αυτού.

Με τον ίδιο τρόπο, επιλέγοντας ως δρόμο ολοκληρώσεως τον ορθογωνικό βρόχο $PB\Gamma\Delta$ του σχήματος 2, παίρνουμε με τη βοήθεια των (2) και (3) τη σχέση

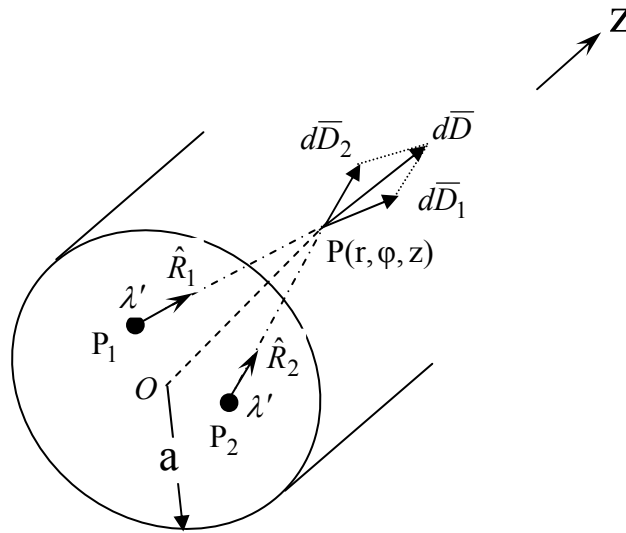
$$\int_{0(\Delta P)}^r E_r(r')dr' + \int_{r(B\Gamma)}^0 E_r(r')dr' + \ell E_z(0) - \ell E_z(r) = 0 \Rightarrow E_z(r) = E_z(0) \Rightarrow E_z(r) = c$$

όπου c σταθερά ανεξάρτητη του r . Λόγω της συνθήκης στο άπειρο,

$$E_z(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

έπεται ότι $c=0$ οπότε $E_z = 0$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε την (2) γεωμετρικά, θεωρώντας ότι οι δοθείσες χωρικές και επιφανειακές κατανομές φορτίου συντίθενται από πλήθος απέραντων γραμμικών πηγών παράλληλων στον άξονα z και υπολογίζοντας το πεδίο σε οποιαδήποτε θέση $P(r, \varphi, z)$ ως υπέρθεση των συμβολών που προέρχονται από όλες αυτές τις γραμμικές πηγές. Για κάθε τέτοιο γραμμικό φορτίο λ' , το οποίο βρίσκεται, π.χ., πάνω στην ευθεία P_1z (παράλληλη στον άξονα z), υπάρχει πάντα ίσο γραμμικό φορτίο λ' ευρισκόμενο επάνω στην ευθεία P_2z , συμμετρική της P_1z ως προς το επίπεδο που ορίζουν η OP και ο άξονας z (Σχ.3). Το O είναι η προβολή του P στον άξονα z . Διαπιστώνεται αμέσως ότι η συνισταμένη των πεδίων $d\vec{D}_1$ και $d\vec{D}_2$ στη θέση P , τα οποία οφείλονται σε δύο τέτοια γραμμικά φορτία, έχει την ακτινική κατεύθυνση \hat{r} , ως εξής:



Σχήμα 3

$$d\vec{D} \equiv d\vec{D}_1 + d\vec{D}_2 = \frac{\lambda'}{2\pi R} (\hat{R}_1 + \hat{R}_2) = \frac{\lambda'}{2\pi R} \left(\frac{\vec{P_1P}}{R} + \frac{\vec{P_2P}}{R} \right) = \frac{\lambda'}{2\pi R^2} (\vec{P_1P} + \vec{P_2P})$$

όπου $R \equiv |\vec{P_1P}| = |\vec{P_2P}|$. Όμως

$$\vec{P_1P} + \vec{P_2P} = (\vec{P_1O} + \vec{OP}) + (\vec{P_2O} + \vec{OP}) = 2\vec{OP} - (\vec{OP_1} + \vec{OP_2}).$$

Προφανώς το άθροισμα $\vec{OP_1} + \vec{OP_2}$, επομένως και το διάνυσμα $d\vec{D}$, έχει διεύθυνση την ευθεία OP . Με επαλληλία προκύπτει ότι το συνολικό πεδίο στη θέση P είναι ακτινικό.

Εύρεση της $E_r(r)$

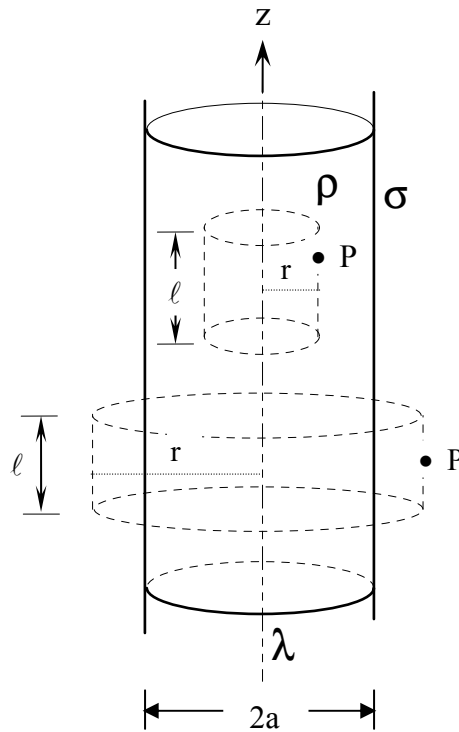
Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου, $E_r(r)$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (4)$$

όπου ως επιφάνεια ολοκλήρωσης επιλέγουμε μία κυλινδρική επιφάνεια, μήκους ℓ και ακτίνας r , η οποία διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \phi, z)$ (Σχ.4).

Το μέγεθος Q στο δεύτερο μέρος της (4) παριστάνει το συνολικό φορτίο που περικλείεται στο εσωτερικό της S , δηλαδή

$$Q = Q(r) = \begin{cases} \lambda \ell + 2\pi \ell \int_0^r r' \rho(r') dr' & (0 < r < a) \\ \lambda \ell + 2\pi \ell \int_0^a r' \rho(r') dr' + 2\pi a \ell \sigma & (a < r < \infty) \end{cases} \quad (5)$$



Σχήμα 4

Με τη βοήθεια της (2), από την (4) προκύπτει η σχέση

$$2\pi r \ell D_r(r) = \ell Q_\mu(r) \Rightarrow D_r(r) = \frac{Q_\mu(r)}{2\pi r} \Rightarrow E_r(r) = \frac{Q_\mu(r)}{2\pi r \epsilon(r)} \quad (6)$$

όπου

$$Q_\mu(r) = \frac{Q(r)}{\ell}$$

είναι το ανά μονάδα μήκους περικλειόμενο από την S φορτίο.

Αξιοσημείωτες ειδικές περιπτώσεις

α. Γραμμική πηγή στον άξονα $r=0$, στον απεριόριστο κενό χώρο:

$$\bar{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}, \quad \bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}. \quad (7)$$

β. Ομοιόμορφη επιφανειακή πηγή πυκνότητας σ στην κυλινδρική επιφάνεια $r=a$ μέσα στον απεριόριστο κενό χώρο:

$$\bar{D} = \begin{cases} \frac{\lambda'}{2\pi r} \hat{r} = \sigma \frac{a}{r} \hat{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}, \quad \bar{E} = \begin{cases} \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \hat{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (8)$$

όπου

$$\lambda' = 2\pi a \sigma$$

είναι το συνολικό φορτίο ανά μονάδα μήκους της κυλινδρικής επιφάνειας.

Παρατηρούμε ότι το πεδίο στον χώρο έξω από μία ομοιόμορφα φορτισμένη κυλινδρική επιφάνεια ταυτίζεται με το πεδίο γραμμικής πηγής, μεγέθους ίσου με το συνολικό φορτίο ανά μονάδα μήκους, τοποθετημένης στον άξονα του κυλίνδρου. Αντίθετα, το πεδίο στο εσωτερικό μίας τέτοιας φορτισμένης επιφάνειας είναι μηδενικό.

Παρατηρήσεις

1. Το πεδίο είναι **ασυνεχές** στα σημεία της επιφανειακής κατανομής σ . Εύκολα διαπιστώνουμε με τη βοήθεια της (6) ότι, όπως περιμέναμε να συμβεί, η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{r} \cdot [\bar{D}(a+) - \bar{D}(a-)] = \sigma. \quad (9)$$

2. Στη γειτονιά του γραμμικού φορτίου, δηλαδή για $r \rightarrow 0$, επικρατεί η συμβολή που προέρχεται από το γραμμικό φορτίο:

$$D_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} + c(r)$$

όπου η ποσότητα $c(r)$ είναι φραγμένη. (Αυτό συμβαίνει επειδή η συμβολή που προέρχεται από το επιφανειακό φορτίο είναι μηδενική, ενώ, όπως θα δείξουμε αμέσως, και η συμβολή από το χωρικό φορτίο, ίση με $c(r)$, είναι παντού πεπερασμένη). Συνεπώς,

$$\lim_{r \rightarrow 0} [2\pi r D_r(r)] = \lambda \quad (10)$$

Στη θέση του γραμμικού φορτίου, $r=0$, το πεδίο είναι, προφανώς, ιδιόμορφο:

$$D_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty.$$

Σημείωση: Η σχέση (10), που καθορίζει τη συμπεριφορά του πεδίου στην άμεση γειτονιά του γραμμικού φορτίου λ , επέχει θέση **οριακής συνθήκης** [ανάλογης προς την (9)] κατά την επίλυση προβλημάτων με χρήση των σημειακών εξισώσεων Maxwell.

3. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο η ομοιόμορφη κατανομή $\rho(r) = \rho_0 = \text{σταθ.}$ ($0 < r < a$), τότε από την (6) παίρνουμε τη σχέση

$$D_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{2} & (0 < r < a) \\ \frac{\rho_0 a^2}{2r} & (r > a) \end{cases} \quad (11)$$

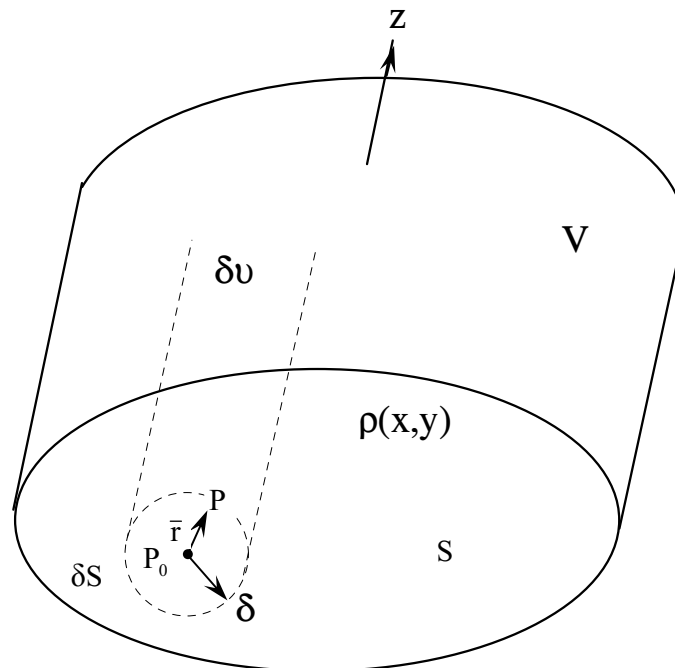
Παρατηρούμε, επομένως, ότι το πεδίο που οφείλεται σε χωρικό φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο στο εσωτερικό ενός κυλίνδρου απείρου μήκους είναι ομαλή συνάρτηση του r τόσο στο εξωτερικό όσο και στο εσωτερικό των πηγών.

4. Θεωρούμε (Σχ.5) χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(x,y)$ το οποίο κατανέμεται στο εσωτερικό της ομοιόμορφης, απείρου μήκους κατά τον άξονα των z , κυλινδρικής περιοχής V (η διατομή S της κυλινδρικής αυτής διατάξεως μπορεί να έχει αυθαίρετη μορφή). Υποθέτουμε ότι η ρ είναι αρκούντως ομαλή συνάρτηση των (x,y) και ανεξάρτητη του z .

Το πεδίο $\bar{D}(x_0, y_0)$ στη θέση $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση δυο όρων:

$$\bar{D}(x_0, y_0) = \bar{D}^>(x_0, y_0) + \bar{D}^<(x_0, y_0).$$

Ο όρος $\bar{D}^<(x_0, y_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα φορτία που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας κυλινδρικής στήλης δv , απείρου μήκους και ακτίνας δ , με άξονα την ευθεία ($x = x_0, y = y_0$), ενώ ο όρος $\bar{D}^>(x_0, y_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα υπόλοιπα φορτία, δηλαδή στα φορτία που βρίσκονται



Σχήμα 5

στην περιοχή $V-\delta\upsilon$. Επειδή $P_0(x_0, y_0, z_0) \notin (V-\delta\upsilon)$, ο όρος $\overline{D}^>(x_0, y_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0) . Από το άλλο μέρος, όταν η ακτίνα δ είναι κατάλληλα μικρή, τότε μπορεί να τεθεί $\rho(x, y) = \rho(x_0, y_0) = \rho_0$ για κάθε σημείο $P(x, y, z) \in \delta\upsilon$ και να χρησιμοποιηθεί ο τύπος (11):

$$\overline{D}^<(x, y) = \frac{\rho_0 r}{2} \hat{r} \quad (0 < r < \delta)$$

όπου r είναι η απόσταση του $P(x, y, z)$ από τον άξονα της κυλινδρικής στήλης $\delta\upsilon$. Επομένως και ο όρος $\overline{D}^<(x_0, y_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0) .

Συμπέρασμα: Το πεδίο οποιασδήποτε ομαλής χωρικής κατανομής φορτίου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός ομοιομόρφου κυλίνδρου απείρου μήκους, είναι ομαλή συνάρτηση της θέσεως τόσο στο εξωτερικό όσο και στα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της κατανομής.

5. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου έχουν τα άκρα τους στα φορτία εντός της δοθείσης κατανομής, αφ' ενός, και σε ισόποσα φορτία τα οποία επάγονται και κατανέμονται ομοιόμορφα στην κυλινδρική επιφάνεια απείρου ακτίνας, αφ' ετέρου. Η συμβολή των τελευταίων στο πεδίο είναι, προφανώς, μηδενική σε κάθε σημείο της περιοχής $0 < r < \infty$, σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω για το πεδίο ομοιόμορφης κυλινδρικής επιφανειακής κατανομής [βλέπε εξ.(8)].

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Θα στηριχθούμε στις (ανεξάρτητες μεταξύ τους) διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \overline{E} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho \quad (13)$$

και στις οριακές συνθήκες

$$\hat{r} \times [\overline{E}(a+) - \overline{E}(a-)] = 0 \quad (14)$$

$$\hat{r} \cdot [\overline{D}(a+) - \overline{D}(a-)] = \sigma \Leftrightarrow D_r(a+) - D_r(a-) = \sigma. \quad (15)$$

Για τον υπολογισμό του πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη σχέση (1)

$$\overline{E} = \overline{E}(r)$$

την οποία υπαγορεύει η συμμετρία του προβλήματος.

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε -τώρα με βάση την (12)- ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, ϕ, z) , αναλύουμε την (12) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = 0 \quad \xRightarrow{\partial/\partial \phi = 0 = \partial/\partial z} 0 = 0 \quad (\text{ταυτότητα})$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0 \quad \xRightarrow{\partial/\partial z = 0} \frac{dE_z(r)}{dr} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial\phi=0} \frac{1}{r} \frac{d[rE_\phi(r)]}{dr} = 0. \quad (17)$$

Ολοκληρώνοντας την (16) παίρνουμε

$$E_z(r) = \begin{cases} c_1 & \text{περιοχή 1: } 0 < r < a \\ c_2 & \text{περιοχή 2: } a < r < \infty \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο¹, $E_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, δίνει $c_2 = 0$, ενώ η συνθήκη συνεχείας $E_z(a+) = E_z(a-)$ οδηγεί στη σχέση $c_1 = c_2 = 0$. Επομένως $E_z(r) = 0$ παντού.

Ομοίως, ολοκληρώνοντας την (17) παίρνουμε

$$E_\phi(r) = \begin{cases} d_1 / r & (0 < r < a) \\ d_2 / r & (a < r < \infty) \end{cases}$$

όπου d_1 και d_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $E_\phi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ η συνθήκη συνεχείας $E_\phi(a+) = E_\phi(a-)$ οδηγεί στη σχέση $d_1 = d_2$. Η οριακή συνθήκη στη θέση $r=0$ δίνει² $d_1 = 0$. Επομένως $E_\phi(r) = 0$ παντού.

Σημείωση: Το ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα μπορεί να αποδειχθεί ακόμα πιο εύκολα με χρήση του δυναμικού. Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το δυναμικό αυτό θα είναι συνάρτηση μόνο του r . Επομένως

$$\vec{E} = -\nabla\Phi(r) = -\hat{r} \frac{d\Phi(r)}{dr}$$

δηλαδή το πεδίο έχει πράγματι μόνο ακτινική συνιστώσα.

Εύρεση της $D_r(r)$

Η μοναδική συνιστώσα του πεδίου θα βρεθεί μέσω της (13), η οποία σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται ως εξής:

¹ Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου τερματίζονται σε φορτία που αναπτύσσονται (επάγονται) στην επιφάνεια S_∞ του κυλίνδρου άπειρης ακτίνας (βλέπ. Σχ.1). Επομένως, αφού έξω από τον κύλινδρο S_∞ είναι $E_z = 0$, θα πρέπει $E_z(r \rightarrow \infty) = 0$, διότι αλλιώς η E_z θα ήταν ασυνεχής στα σημεία της S_∞ .

² Η οριακή συνθήκη για την E_ϕ για $r \rightarrow 0$ προκύπτει από τον νόμο του αστροβίλου

$$\oint_{C_\phi} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

όπου C_ϕ είναι κύκλος πολύ μικρής ακτίνας r , κάθετος στον άξονα των z , με το κέντρο του πάνω στον άξονα των z . Προκύπτει τότε η σχέση:

$$2\pi r E_\phi(r) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [r E_\phi(r)] = 0 \Rightarrow d_1 = 0.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial [rD_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial [D_\varphi(r)]}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(r) \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d[rD_r(r)]}{dr} = \rho(r) \quad (18\alpha)$$

Από την (18α) με ολοκλήρωση προκύπτει η γενική λύση

$$rD_r(r) = \int r\rho(r)dr + c \Rightarrow D_r(r) = \frac{1}{r} \int r\rho(r)dr + \frac{c}{r}. \quad (18\beta)$$

(c είναι σταθερά ολοκληρώσεως).

Για την περιοχή 2 ($r > a$) είναι $\rho(r)=0$ και επομένως από την (18β) παίρνουμε

$$D_r^{(2)}(r) = \frac{c_2}{r}. \quad (19)$$

Για την περιοχή 1 ($0 < r < a$), η (18β) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα υπό τη μορφή

$$D_r^{(1)}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' \rho(r') dr' + \frac{c_1}{r}. \quad (20)$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες ως εξής:

$$\alpha) \quad \lim_{r \rightarrow 0} [2\pi r D_r^{(1)}(r)] = \lambda \Rightarrow 2\pi c_1 = \lambda \Rightarrow c_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \hat{r} \cdot [\bar{D}(a+) - \bar{D}(a-)] &= \sigma \Leftrightarrow D_r(a+) - D_r(a-) = \sigma \Rightarrow \frac{c_2}{a} - \frac{1}{a} \int_0^a r' \rho(r') dr' - \frac{c_1}{a} = \sigma \Rightarrow \\ \Rightarrow c_2 &= \int_0^a r' \rho(r') dr' + \frac{\lambda}{2\pi} + \sigma a. \end{aligned} \quad (22)$$

Μετά την εύρεση των σταθερών c_1 και c_2 , το πεδίο προσδιορίζεται πλήρως μέσω των (19)-(22). Όπως αναμέναμε να συμβεί, βρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις με αυτές των (5)-(6).

Παρατήρηση: Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της (20) αποτελεί το πεδίο που θα έδινε, αν ήταν μόνη της, η χωρική κατανομή $\rho(r)$ σε σημεία στο εσωτερικό της. Το πεδίο αυτό είναι ομαλή συνάρτηση του r (ακόμα και για $r=0$) για μια ευρυτάτη οικογένεια κατανομών $\rho(r)$. Αυτό γίνεται φανερό με τον παρακάτω συλλογισμό: Αν η $\rho(r)$ είναι ομαλή συνάρτηση, της μορφής

$$\rho(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

τότε

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int r \rho(r) dr = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left(a_0 \frac{r^2}{2} + a_1 \frac{r^3}{3} + a_2 \frac{r^4}{4} + \dots \right) = 0.$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι ακόμα και όταν η $\rho(r)$ εμφανίζει ιδιομορφία (απειρίζεται) στη θέση $r=0$, της μορφής

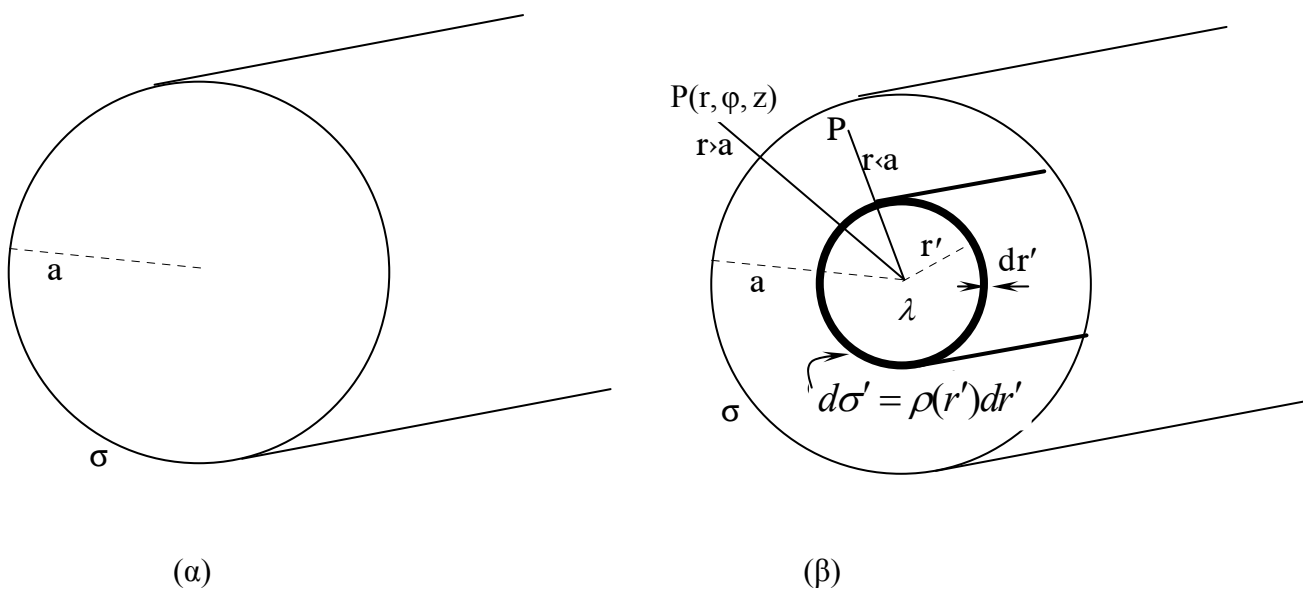
$$\rho(r) = \frac{b_0}{r} + a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

ο παραπάνω όρος εξακολουθεί να είναι ομαλός, αφού

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int r \rho(r) dr = b_0 \text{ (πεπερασμένο).}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήξαμε νωρίτερα κατά τη λύση με βάση τις ολοκληρωτικές σχέσεις

Γ. Λύση με επαλληλία



Σχήμα 6

Με βάση το αποτέλεσμα [βλέπε (8)]

$$\bar{D} = \begin{cases} \sigma \frac{a}{r} \hat{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (23)$$

για το πεδίο επιφανειακής κατανομής σ (Σχ.6), η οποία βρίσκεται στην κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας a , το ζητούμενο πεδίο της διατάξεως του σχήματος 1 βρίσκεται εύκολα με επαλληλία ως εξής:

Θεωρούμε την χωρική κατανομή ρ ως μια διαδοχή επιφανειακών κατανομών $d\sigma' = \rho(r')dr'$, τοποθετημένων σε κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνας r' , όπου $0 < r' < a$ (Σχ.6β). Το πεδίο στη θέση $P(r, \phi, z)$ εκφράζεται τότε ως εξής:

1. Για $r > a$ (σημείο παρατηρήσεως εκτός της κυλινδρικής περιοχής ακτίνας a):

$$\bar{D}(r) = \hat{r}(A + B + \Gamma) \quad (24)$$

όπου

$$A = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (25)$$

είναι η συμβολή του γραμμικού φορτίου,

$$B = \sigma \frac{a}{r} \quad (26)$$

οφείλεται στο επιφανειακό φορτίο σ , ενώ

$$\Gamma = \int_{r'=0}^a \rho(r') \frac{r'}{r} dr' \quad (27)$$

είναι η συμβολή του χωρικού φορτίου.

2. Για $r < a$ (σημείο παρατηρήσεως εντός της κυλινδρικής περιοχής ακτίνας a):

$$\overline{D}(r) = \hat{r}(A + B + \Gamma' + \Gamma'') \quad (28)$$

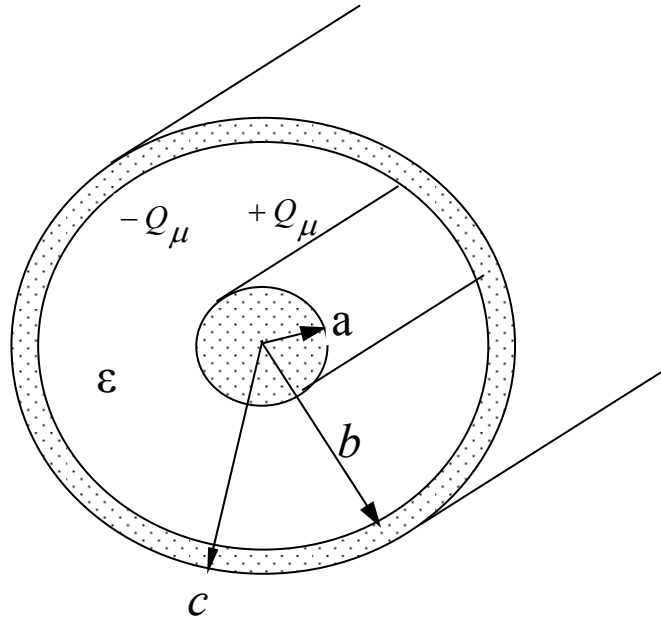
όπου $A = \lambda / (2\pi r)$, όπως προηγουμένως, και $B=0$ (το σημείο παρατηρήσεως είναι στο εσωτερικό του κυλίνδρου ακτίνας a και επομένως η συμβολή της σ είναι τώρα μηδενική). Η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $r < r' < a$, συμβολίζεται με Γ' . Για τον ίδιο λόγο που οδήγησε στον μηδενισμό της ποσότητας B , έχουμε $\Gamma' = 0$. Τέλος, η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $0 < r' < r$, συμβολίζεται με Γ'' και ισούται με

$$\Gamma'' = \int_{r'=0}^r \rho(r') \frac{r'}{r} dr'. \quad (29)$$

Όπως περιμέναμε να συμβεί, ξαναβρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο.

Εφαρμογή: Πεδίο και χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή

Ο κυλινδρικός πυκνωτής, που φαίνεται στο Σχ.7, έχει ως οπλισμούς τον αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας a και τον αγωγίμο κυλινδρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής ακτίνας c . Για απλότητα θεωρούμε ότι η διάταξη έχει άπειρο μήκος και ότι ο χώρος μεταξύ των οπλισμών πληρούται με διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς ϵ .



Σχήμα 7

Ο εσωτερικός οπλισμός φέρει ανά μονάδα μήκους θετικό φορτίο Q_μ [C/m], το οποίο κατανέμεται στην επιφάνειά του $r=a$. Ο εξωτερικός οπλισμός φέρει ισόποσο αρνητικό φορτίο $-Q_\mu$, το οποίο κατανέμεται ολόκληρο στην εσωτερική του επιφάνεια $r=b$. Το διεγειρόμενο ηλεκτρικό πεδίο έχει ακτινική κατεύθυνση, με τις δυναμικές γραμμές να ξεκινούν από τα φορτία της επιφάνειας $r=a$ και να καταλήγουν σε ισόποσα φορτία της επιφάνειας $r=b$. Με άλλα λόγια, το πεδίο αυτό είναι εντοπισμένο στην περιοχή $a < r < b$ και επομένως η τιμή της εξωτερικής ακτίνας c δεν έχει καμμία σημασία για τη λειτουργία του πυκνωτή.

Η έκφραση του πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή είναι

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{Q_\mu}{2\pi\epsilon r} \quad (a < r < b) \quad (30)$$

οπότε η τάση μεταξύ των οπλισμών ισούται με

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q_\mu}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q_\mu}{2\pi\epsilon} [\ln r]_a^b = \frac{Q_\mu}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}. \quad (31)$$

Επειδή οι οπλισμοί έχουν άπειρο μήκος ℓ , το φορτίο $Q = Q_\mu \ell$ είναι άπειρο. Επομένως η χωρητικότητα, όπως ορίστηκε μέσω της σχέσεως $C=Q/V$, απειρίζεται, δηλαδή δεν είναι χρήσιμο μέγεθος. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους,

$$C_\mu = \frac{Q_\mu}{V}, \quad (32)$$

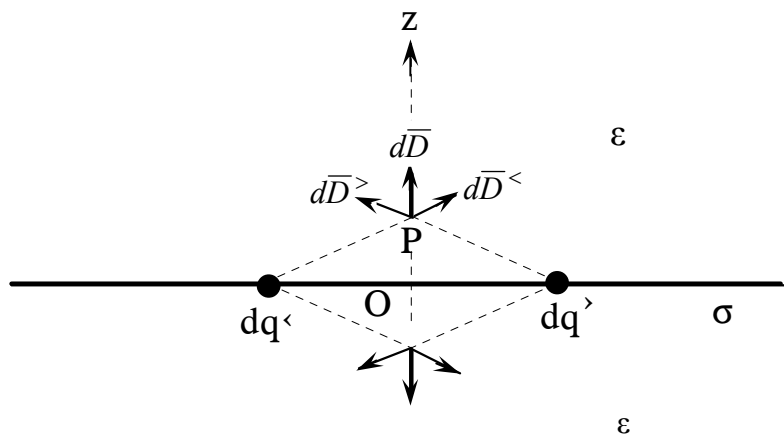
της οποίας η τιμή ισούται με

$$C_{\mu} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (33)$$

4. Ηλεκτροστατικό πεδίο απεράντων επιπέδων κατανομών

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πεδίο απεράντης επίπεδης κατανομής, σταθερής πυκνότητας σ .

Λύση: Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το επιφανειακό φορτίο βρίσκεται στο επίπεδο με $z=0$ (Σχ.1). Θεωρούμε επί πλέον ότι ο περιβάλλων χώρος έχει διηλεκτρική σταθερά ϵ . Το παρόν πρόβλημα λύθηκε στο Κεφ.1 με βάση το ολοκλήρωμα της υπερθέσεως. Εδώ θα δώσουμε μια απλή λύση, βασισμένη στην ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss, για να δείξουμε για μία ακόμα φορά την αξία του νόμου αυτού στην επίλυση προβλημάτων.



Σχήμα 1

Λόγω της ομοιομορφίας της πηγής και του απεράντου της διατάξεως ως προς τις κατευθύνσεις x και y , το πεδίο θα είναι ανεξάρτητο των x και y , δηλαδή

$$\vec{E} = \vec{E}(z), \quad \vec{D} = \vec{D}(z). \quad (1)$$

Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σημείο παρατηρήσεως P βρίσκεται πάνω στον άξονα των z , όπως στο Σχ.1.

Θεωρώντας ότι το πεδίο στη θέση P προκύπτει από την επαλληλία των πεδίων που οφείλονται σε όλα τα στοιχειώδη φορτία $dq^< = \sigma dS$ και $dq^> = \sigma dS$ (Σχ.1), που βρίσκονται σε θέσεις συμμετρικές ως προς την αρχή O^3 , διαπιστώνουμε τα εξής:

1. Το πεδίο έχει κατεύθυνση κάθετη στην επίπεδη κατανομή, δηλαδή

$$\vec{E} = \hat{z}E_z(z), \quad \vec{D} = \hat{z}D_z(z). \quad (2)$$

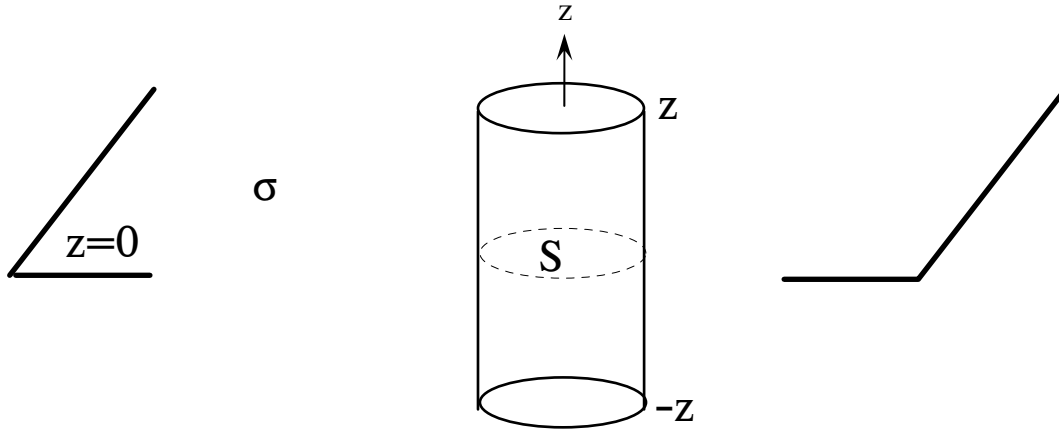
2. Ισχύει η σχέση

³Αυτό είναι πάντοτε δυνατό διότι η κατανομή σ εκτείνεται απεριόριστα στο επίπεδο $z=0$.

$$D_z(z) = -D_z(-z). \quad (3)$$

Για την εύρεση της τιμής του πεδίου θεωρούμε κυλινδρική στήλη διατομής S , με τις δυο βάσεις της στις θέσεις $z > 0$ και $-z$ αντίστοιχα (Σχ.2), και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q. \quad (4)$$



Σχήμα 2

Το μέγεθος Q στο δεύτερο μέρος της (4) παριστάνει, κατά τα γνωστά, το συνολικό φορτίο που περικλείεται από την S , δηλαδή

$$Q = \sigma S. \quad (5)$$

Με τη βοήθεια των (2),(3), από την (4) προκύπτει ότι

$$SD_z(z) - SD_z(-z) = Q \xRightarrow{(3)} 2D_z(z) = \sigma \Rightarrow D_z(z) = \frac{\sigma}{2} \quad (z > 0) \quad (6)$$

έχοντας λάβει επί πλέον υπόψιν ότι η συμβολή της παράπλευρης επιφάνειας στο ολοκλήρωμα στην (4) είναι μηδενική.

Το πεδίο \vec{D}_z στην περιοχή $z < 0$ βρίσκεται με συνδυασμένη εφαρμογή των (3) και (6). Το τελικό αποτέλεσμα για το πεδίο σε κάθε περιοχή του χώρου μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως εξής:

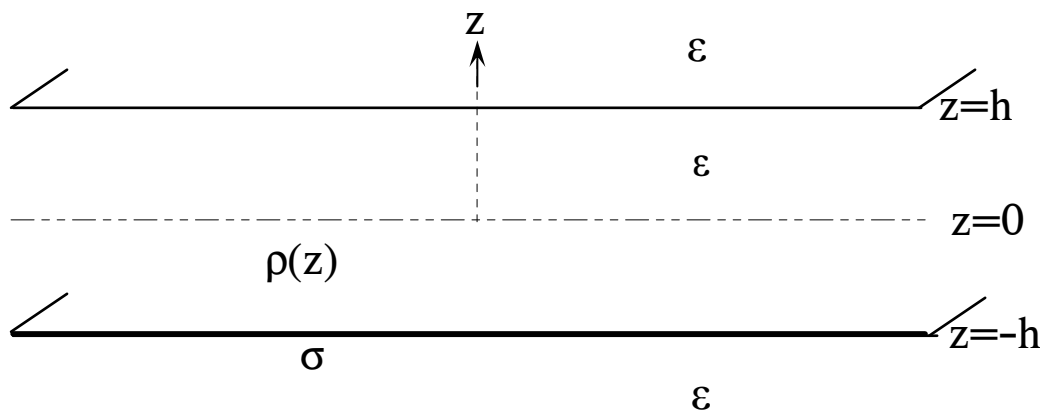
$$\vec{D} = \frac{1}{2} \hat{z} \begin{cases} \sigma, & \text{αν } z > 0 \\ -\sigma, & \text{αν } z < 0 \end{cases} = \hat{z} \frac{\sigma}{2} \text{sgn}(z), \quad \vec{E} = \vec{D} / \epsilon \quad (7)$$

όπου

$$\text{sgn}(z) = \frac{z}{|z|} = \begin{cases} 1, & \text{αν } z > 0 \\ -1, & \text{αν } z < 0 \end{cases}.$$

Γενίκευση: Ηλεκτροστατικό πεδίο απεράντων φορτισμένων επιπέδων πλακών

Θεωρούμε τώρα ότι δρουν ταυτόχρονα (Σχ.3) επιφανειακό φορτίο σταθερής πυκνότητας σ στο επίπεδο $z=-h$ και χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(z)$ στο εσωτερικό της πλάκας $-h < z < h$. Οι ηλεκτρικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με τη διηλεκτρική του επιτρεπτότητα ϵ . Ζητάμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.



Σχήμα 3

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Επειδή α) τόσο η διάταξη όσο και οι πηγές εκτείνονται απεριόριστα ως προς x και y και β) η κατανομή των πηγών είναι ανεξάρτητη από τα x και y , το διεγερόμενο ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της συντεταγμένης z του σημείου παρατηρήσεως $\vec{F}(x, y, z)$, δηλαδή

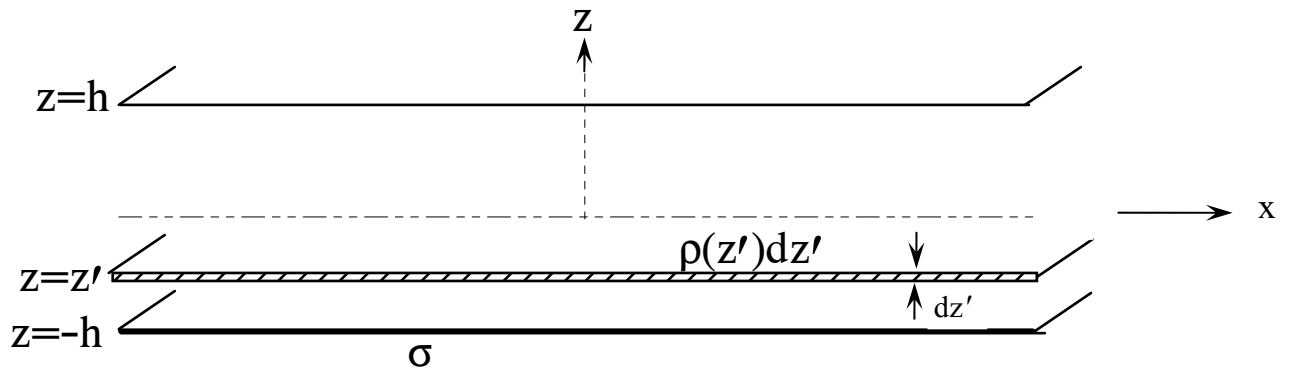
$$\vec{E} = \vec{E}(z), \quad \vec{D} = \vec{D}(z). \quad (8)$$

Συνιστώσες του πεδίου

Το πεδίο έχει μόνο z -συνιστώσα, δηλαδή

$$\vec{E} = \hat{z}E_z(z), \quad \vec{D} = \hat{z}D_z(z). \quad (9)$$

Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί εύκολα, με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, θεωρώντας το πεδίο σε οποιαδήποτε θέση ως υπέρθεση των συμβολών που προέρχονται α) από την επιφανειακή κατανομή σ και β) από επάλληλες επιφανειακές κατανομές $d\sigma(z') = \rho(z')dz'$ ($-h < z' < h$), που συνθέτουν την χωρική κατανομή ρ (Σχ.4).



Σχήμα 4

Η περιγραφείσα παραπάνω διαδικασία πιστοποιεί επίσης, με βάση το αποτέλεσμα (7), ότι σε σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό της επίπεδης πλάκας ισχύει η σχέση

$$D_z(z) = -D_z(-z) \quad (|z| > h) \quad (10)$$

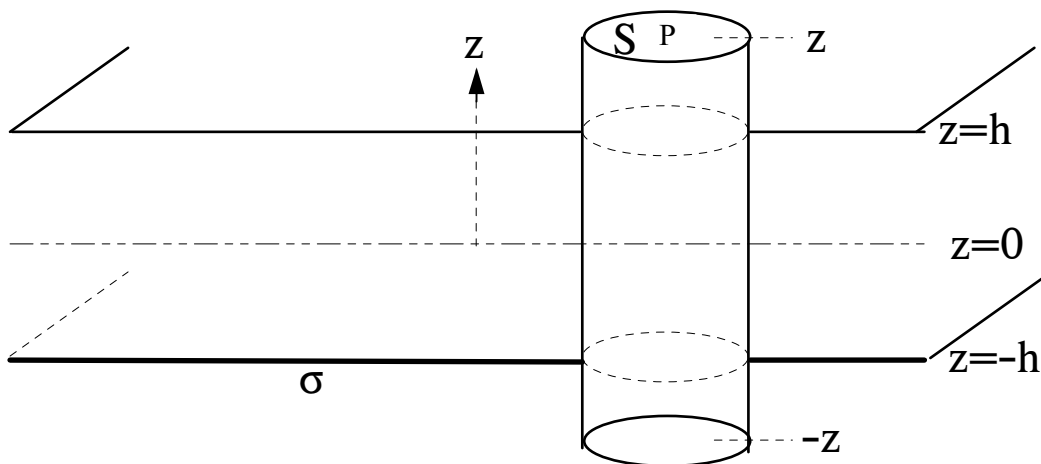
Εύρεση των $E_z(z)$, $D_z(z)$

α. περιοχές $z > h$ και $z < -h$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου $D_z(z)$ στην περιοχή $z > h$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (11)$$

όπου ως επιφάνεια ολοκληρώσεως επιλέγουμε την επιφάνεια ενός ορθού κυλίνδρου, διατομής S , με άξονα τον άξονα των z , ο οποίος έχει τη μία του βάση στη θέση $P(z)$, όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο, και την άλλη του βάση στη συμμετρική θέση $-z$ (Σχ.5).



Σχήμα 5

Το φορτίο Q στο δεύτερο μέρος της (11) ισούται με

$$Q = \sigma S + S \int_{-h}^h \rho(z') dz'$$

οπότε, με τη βοήθεια της (10), από την (11) προκύπτει η σχέση

$$SD_z(z) - SD_z(-z) = Q \stackrel{(10)}{\Rightarrow} D_z(z) = \frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right] \quad (z > h). \quad (12)$$

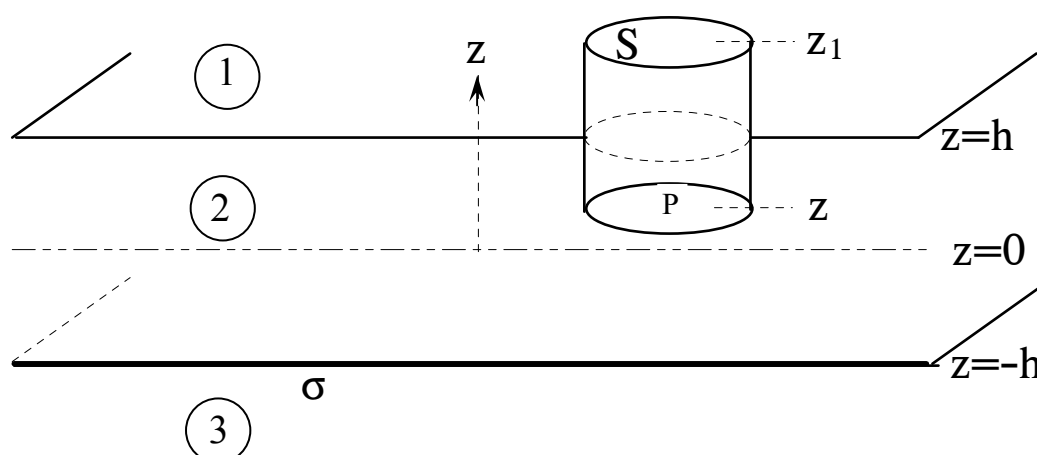
Το πεδίο D_z στην περιοχή $z < -h$ βρίσκεται με συνδυασμένη εφαρμογή των (10) και (12):

$$D_z(z) = -\frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right] \quad (z < -h) \quad (13)$$

Σημείωση: Τα αποτελέσματα (12) και (13) απλώς εκφράζουν το πεδίο στις θέσεις $z > h$ και $z < -h$ ως υπέρθεση των πεδίων που οφείλονται στην κατανομή σ και σε όλες τις επίπεδες κατανομές $\rho(z') dz'$ ($-h < z' < h$) που συνθέτουν την κατανομή ρ .

β. περιοχή $|z| < h$

Για τον υπολογισμό της $D_z(z)$ στην περιοχή $-h < z < h$ εφαρμόζουμε πάλι τον νόμο του Gauss (11). Ως επιφάνεια ολοκληρώσεως επιλέγουμε τώρα την επιφάνεια ενός ορθού κυλίνδρου, διατομής S , με άξονα τον άξονα των z , ο οποίος έχει τη μία του βάση στη θέση $P(z)$ όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο (Σχ.6). Η άλλη βάση τοποθετείται στη θέση $Z_1 > h$, όπου γνωρίζουμε ήδη το πεδίο μέσω της (12) (η επιλογή $Z_1 < -h$ είναι το ίδιο κατάλληλη).



Σχήμα 6

Το μέγεθος Q στο δεύτερο μέρος της (11) (συνολικό φορτίο που εμπερικλείεται στο εσωτερικό της S) ισούται τώρα με

$$Q = S \int_z^h \rho(z') dz'. \quad (14)$$

Με τη βοήθεια των (12) και (14) από την (11) προκύπτει ότι

$$SD_z(z_1) - SD_z(z) = Q \Rightarrow D_z(z) = \frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^z \rho(z') dz' - \int_z^h \rho(z') dz' \right] \quad (-h < z < h). \quad (15)$$

Παρατηρήσεις πάνω στις (12), (13) και (15)

1. Το πεδίο D_z παραμένει σταθερό σε ολόκληρη την περιοχή $z > h$. Το D_z είναι επίσης σταθερό σε ολόκληρη την περιοχή $z < -h$ (με τιμή αντίθετη της αντίστοιχης για την περιοχή $z > h$). Αντίθετα, στην περιοχή των πηγών, $|z| < h$, το πεδίο D_z είναι συνάρτηση της θέσεως z .

2. Το πεδίο D_z είναι **ασυνεχές** στα σημεία της επιφανειακής κατανομής σ . Η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{z} \cdot [\bar{D}(-h+0) - \bar{D}(-h-0)] = \sigma$$

όπως περιμέναμε να συμβεί.

3. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου έχουν τα άκρα τους α) στα φορτία εντός της δοθείσας κατανομής και β) σε φορτία τα οποία επάγονται και κατανέμονται ομοιόμορφα στις επίπεδες επιφάνειες $z = +\infty$ και $z = -\infty$ με την ίδια πυκνότητα

$$\sigma_{+\infty} = \sigma_{-\infty} = -\frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right].$$

Η συμβολή της κατανομής $\sigma_{+\infty}$ στο πεδίο \bar{D} (ίση με $-\hat{z}\sigma_{+\infty}/2$) εξουδετερώνεται από τη συμβολή της $\sigma_{-\infty}$ (ίση με $+\hat{z}\sigma_{-\infty}/2$) για κάθε θέση z ($-\infty < z < \infty$). Επομένως, το συνολικό πεδίο στη διάταξη ισούται με το πεδίο των πρωτογενών πηγών ρ, σ , το οποίο δίδεται από τις σχέσεις (12), (13) και (15).

4. Αν στις επιφάνειες $z = +\infty$ και $z = -\infty$, εκτός από τα επαγόμενα φορτία $\sigma_{+\infty}$ και $\sigma_{-\infty}$, είχαμε επιβάλλει πηγές με πυκνότητες $\tilde{\sigma}_{+\infty}$ και $\tilde{\sigma}_{-\infty}$, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $\tilde{\sigma}_{+\infty} \neq \tilde{\sigma}_{-\infty}$, τότε η συμβολή των δυο αυτών νέων πηγών στο πεδίο D_z στη θέση z θα ήταν ίση με

$$\hat{z} \left(-\frac{\tilde{\sigma}_{+\infty}}{2} + \frac{\tilde{\sigma}_{-\infty}}{2} \right) \neq 0.$$

Η συμβολή αυτή υπερτίθεται στο πεδίο των πηγών ρ και σ , που δίνουν οι εξισώσεις (12), (13) και (15), οπότε πλέον η συνθήκη αντισυμμετρίας (10) παύει να ισχύει για το συνολικό πεδίο. Διατυπωμένη αλλιώς, η παρατήρηση αυτή σημαίνει ότι η συνθήκη (10) μας πληροφορεί για τη μορφή των πηγών που υπάρχουν στο άπειρο (για να ισχύει πρέπει $\sigma_{+\infty}^{\text{ολικό}} = \sigma_{-\infty}^{\text{ολικό}}$) και επέχει θέση **συνοριακής συνθήκης στο άπειρο** για την παρούσα επίπεδη διάταξη.

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Θα στηριχθούμε στις διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (17)$$

και στις οριακές συνθήκες

$$\hat{z} \times [\bar{E}(z+) - \bar{E}(z-)]_{z=\pm h} = 0 \Leftrightarrow \{E_x(z+) = E_x(z-), E_y(z+) = E_y(z-)\}_{z=\pm h} \quad (18)$$

$$D_z(h+) - D_z(h-) = 0, D_z(-h+) - D_z(-h-) = \sigma. \quad (19)$$

καθώς και στην οριακή συνθήκη στο άπειρο, όπως αυτή διατυπώθηκε παραπάνω με τη συνθήκη αντισυμμετρίας (10).

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε, τώρα με βάση την (16), ότι το πεδίο έχει μόνο τη z συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) , αναλύουμε την (16) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial y=0} \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial x=0} \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial x=0=\partial/\partial y} 0 = 0 \text{ (ταυτότητα).}$$

Τέλος η (17) δίνει τη σχέση

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(z) \Rightarrow \frac{dD_z}{dz} = \rho(z). \quad (22)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (18)-(22), που περιγράφουν το πεδίο, χωρίζονται σε δυο οικογένειες εξισώσεων οι οποίες είναι ασύζευκτες μεταξύ τους:

α. Η οικογένεια εξισώσεων $\{(22),(19)\}$ αλληλοσυνδέει την πεδιακή συνιστώσα D_z με τις πηγές ρ, σ . Με βάση τις εξισώσεις αυτές υπολογίζεται η D_z όπως εξηγείται παρακάτω.

β. Οι εξισώσεις $\{(18), (20), (21)\}$ είναι όλες ομογενείς, δηλαδή δεν εμπλέκονται σε αυτές όροι πηγών. Από τις εξισώσεις αυτές συνάγεται ότι $E_x = 0$ και $E_y = 0$ παντού, με βάση τον παρακάτω συλλογισμό: Οι ομογενείς εξισώσεις $\{(18), (20), (21)\}$, στις οποίες εμπλέκονται οι συνιστώσες E_x και E_y αποκλειστικά, ικανοποιούνται όλες από τη λύση $\{E_x = 0, E_y = 0\}$. Επομένως, αν η λύση που επιζητούμε είναι μοναδική, αυτή δεν μπορεί να είναι άλλη από την $E_x = 0, E_y = 0$. Εναλλακτικά, στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με άμεση επίλυση των εξισώσεων $\{(18), (20), (21)\}$ ως εξής:

Οι λύσεις των (20) και (21) για την περιοχή i ($i=1,2,3$) είναι οι

$$E_x^{(i)} = c_i = \text{σταθ.}, \quad E_y^{(i)} = d_i = \text{σταθ.} \quad (i=1,2,3)$$

Οι εξισώσεις συνεχείας (18) συνεπάγονται τις σχέσεις

$$c_1 = c_2 = c_3, \quad d_1 = d_2 = d_3$$

ενώ από τη συνέχεια των E_x και E_y στις επιφάνειες $z=\pm\infty$ των επαγομένων φορτίων παίρνουμε

$$c_1 = 0, c_3 = 0 \text{ και } d_1 = 0, d_3 = 0.$$

Επομένως $E_x = 0$ και $E_y = 0$ παντού.

Σημείωση: Με χρήση της έννοιας του δυναμικού μπορούμε αμέσως να αποδείξουμε ότι το πεδίο έχει μόνο τη z-συνιστώσα, αν παρατηρήσουμε ότι -λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών- το δυναμικό είναι ανεξάρτητο των x και y. Επομένως, με $\Phi = \Phi(z)$, από τη σχέση

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\hat{z} \frac{d\Phi(z)}{dz}$$

προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

Υπολογισμός της $D_z(z)$

Με ολοκλήρωση της (22) προκύπτουν για τις περιοχές 1,2,3 οι σχέσεις:

$$D_z^{(1)}(z) = a_1 \quad (23)$$

$$D_z^{(3)}(z) = a_3 \quad (24)$$

$$D_z^{(2)}(z) = \int_{-h}^z \rho(z') dz' + a_2 \quad (25)$$

όπου a_1, a_2, a_3 προσδιοριστέες σταθερές ολοκληρώσεως.

Μέσω των (23)-(25) οι οριακές συνθήκες (19) δίνουν

$$D_z^{(2)}(h) = D_z^{(1)}(h) \Rightarrow \int_{-h}^h \rho(z') dz' + a_2 = a_1 \quad (26)$$

$$D_z^{(2)}(-h) - D_z^{(3)}(-h) = \sigma \Rightarrow a_2 - a_3 = \sigma. \quad (27)$$

Για τον προσδιορισμό των τριών σταθερών a_1, a_2, a_3 χρειαζόμαστε μια ακόμα συνθήκη. Η συνθήκη αυτή είναι η συνθήκη στο άπειρο, η οποία -απουσία επιβαλλομένων πηγών στις επιφάνειες $z = \pm\infty$ - παίρνει όπως είδαμε παραπάνω την μορφή:

$$D_z^{(1)}(+\infty) = -D_z^{(3)}(-\infty) \Rightarrow a_1 = -a_3. \quad (28)$$

Λύνοντας το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα των (26)-(28) παίρνουμε

$$a_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma - \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right], \quad a_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma + \int_{-h}^h \rho(z') dz' \right] = -a_3. \quad (29)$$

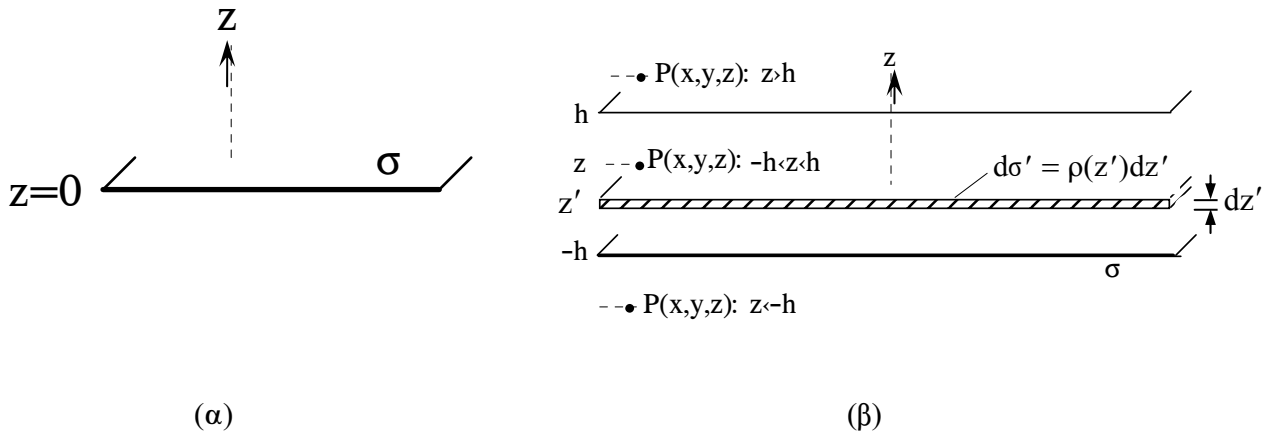
Τέλος, με αντικατάσταση στις (23)-(25) βρίσκουμε τις εκφράσεις για την D_z , οι οποίες είναι ίδιες με τις (12) και (13) όπως περιμένουμε.

Γ. Λύση με επαλληλία

Με βάση το αποτέλεσμα [βλέπε εξ.(7)]

$$\bar{D} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} \hat{z} & (z > 0) \\ -\frac{\sigma}{2} \hat{z} & (z < 0) \end{cases} \quad (30)$$

για το πεδίο επιφανειακής κατανομής σ (Σχ.7α) η οποία βρίσκεται στο επίπεδο $z=0$, το ζητούμενο πεδίο της διατάξεως του σχήματος 3 βρίσκεται εύκολα και με επαλληλία, ως εξής:



Σχήμα 7

Θεωρούμε την χωρική κατανομή ρ ως μια διαδοχή επιφανειακών κατανομών $d\sigma' = \rho(z')dz'$, τοποθετημένων στις επίπεδες επιφάνειες $z = z'$, όπου $-h < z' < h$ (Σχ.7β). Το πεδίο στο σημείο $P(x,y,z)$ εκφράζεται τότε ως εξής:

1. Για $z > h$ (σημείο παρατήρησης πάνω από την περιοχή των πηγών):

$$\bar{D}(z) = \hat{z}(A + \Gamma) \quad (31)$$

όπου

$$A = \frac{\sigma}{2} \quad (32)$$

είναι η συμβολή του επιφανειακού φορτίου σ ,

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_{z'=-h}^h \rho(z') dz' \quad (33)$$

είναι η συμβολή του χωρικού φορτίου..

2. Για $-h < z < h$ (σημείο παρατήρησης εντός της περιοχής των πηγών):

$$\bar{D}(z) = \hat{z}(A + \Gamma' + \Gamma'') \quad (34)$$

όπου $A = \sigma / 2$, όπως προηγουμένως. Η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $-h < z' < z$, συμβολίζεται με Γ' και ισούται με

$$\Gamma' = \frac{1}{2} \int_{z'=-h}^z \rho(z') dz' . \quad (35)$$

Τέλος, η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής ρ , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $z < z' < h$, συμβολίζεται με Γ'' και ισούται με

$$\Gamma'' = -\frac{1}{2} \int_{z'=z}^h \rho(z') dz' . \quad (36)$$

3. Για $z < -h$ (σημείο παρατήρησης κάτω από την περιοχή των πηγών):

$$\bar{D}(z) = \hat{z}(A + \Gamma) \quad (37)$$

όπου

$$A = -\frac{\sigma}{2} \quad (38)$$

είναι η συμβολή του επιφανειακού φορτίου σ και

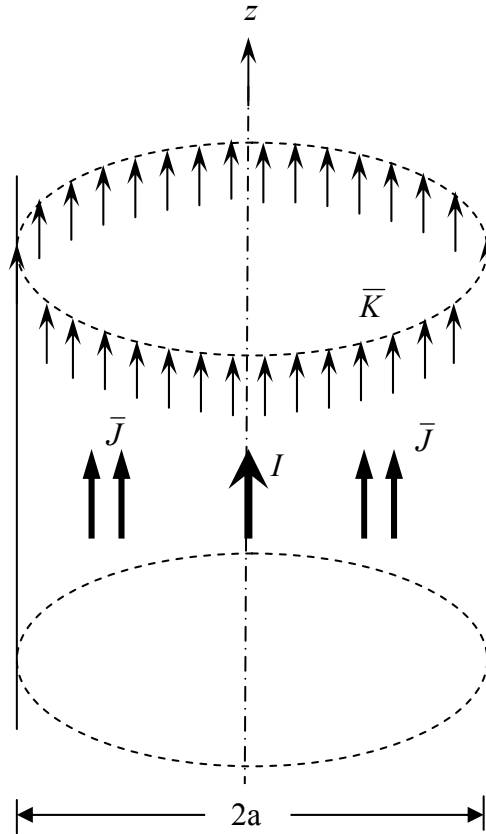
$$\Gamma = -\frac{1}{2} \int_{z'=-h}^h \rho(z') dz' \quad (39)$$

είναι η συμβολή του χωρικού φορτίου..

Όπως περιμέναμε να συμβεί, ξαναβρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο.

5. Μαγνητοστατικό πεδίο κυλινδρικά συμμετρικών χρονοσταθερών ρευμάτων

Θεωρούμε ότι δρουν ταυτοχρόνως (Σχ.1) γραμμικό ρεύμα εντάσεως I στον άξονα $r=0$ του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων, επιφανειακό ρεύμα σταθερής πυκνότητας $\hat{z}K$ στην επιφάνεια $r=a$ και κυλινδρικά συμμετρική χωρική ρευματική κατανομή με πυκνότητα $\hat{z}J_z(r)$ ($0 < r < a$). Οι μαγνητικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με τη μαγνητική του διαπερατότητα μ . Υποθέτουμε ότι γενικά $\mu=\mu(r)$ (ειδική περίπτωση: ομογενής απεριόριστος χώρος, $\mu=\text{σταθ.}$). Ζητάμε να βρούμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.



Σχήμα 1

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Λόγω της αξονικής (κυλινδρικής) συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, και της ανεξαρτησίας τους από το z , το διεγειρόμενο μαγνητοστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης r του σημείου παρατήρησης $\vec{r}(r, \phi, z)$, δηλαδή

$$\vec{H} = \vec{H}(r) \quad (1)$$

Συνιστώσες του πεδίου

Το πεδίο έχει μόνο ϕ -συνιστώσα, δηλαδή

$$\vec{H} = \hat{\phi} H_{\phi}(r). \quad (2)$$

Ο ισχυρισμός αυτός με χρήση των ολοκληρωτικών νόμων μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

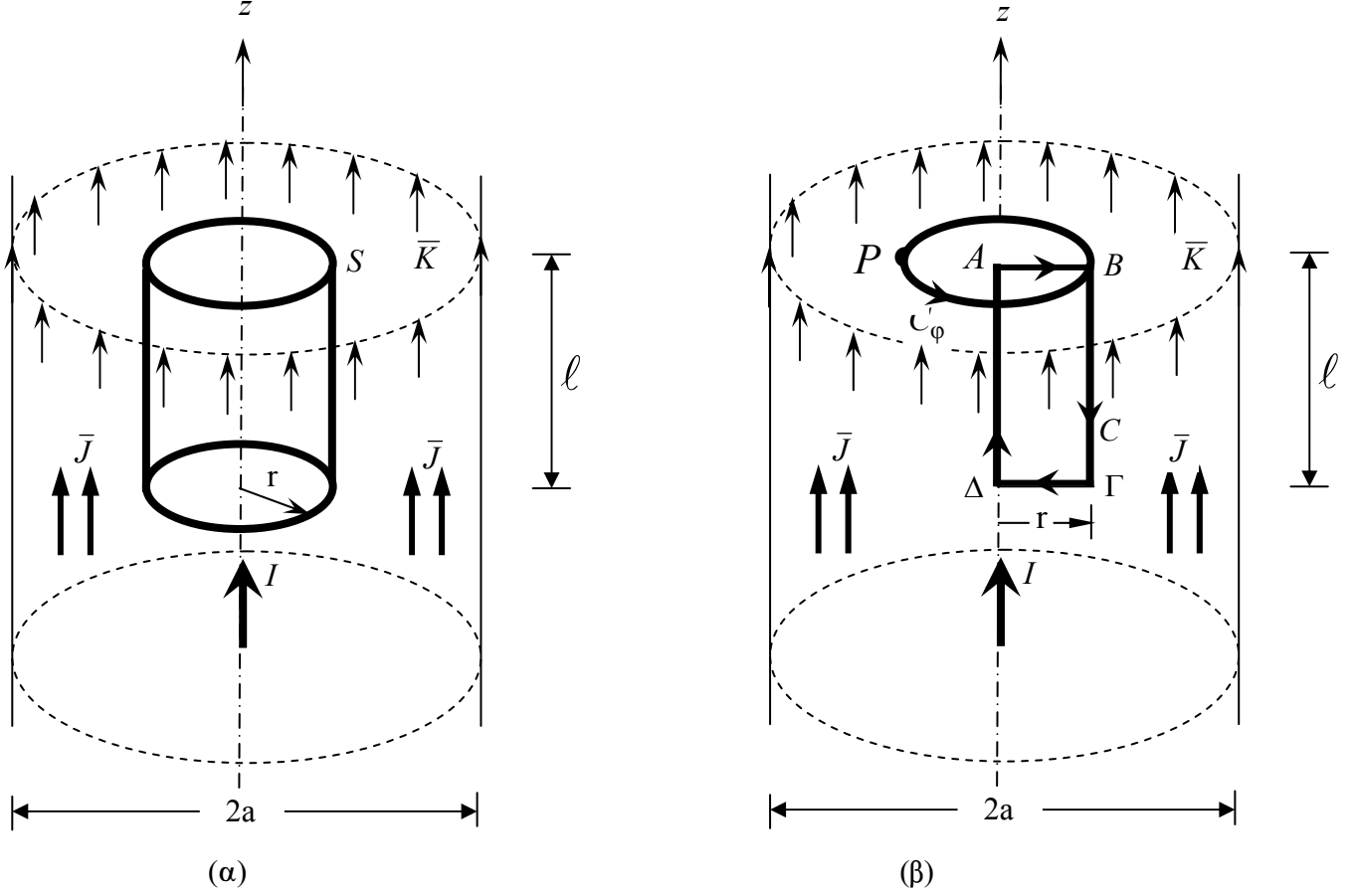
Από τον νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3)$$

επιλέγοντας ως επιφάνεια ολοκληρώσεως S την κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r και μήκους ℓ που δείχνει το Σχ.2α, προκύπτει ότι

$$B_r(r)2\pi r\ell + \int_{r'=0(S^>)}^r B_z(r')2\pi r'dr' - \int_{r'=0(S^<)}^r B_z(r')2\pi r'dr' = 0 \Rightarrow B_r(r)2\pi r\ell = 0 \Rightarrow B_r(r) = 0 \quad (4)$$

(προφανώς, τα δύο ολοκληρώματα στην (4) τα οποία εκτείνονται στην πάνω βάση $S^>$ και την κάτω βάση $S^<$ της κυλινδρικής επιφάνειας S , αντίστοιχα, είναι ίσα μεταξύ τους).



Σχήμα 2

Από τον ολοκληρωτικό νόμο του Ampere,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C, \quad (5)$$

επιλέγοντας ως δρόμο ολοκλήρωσης τον ορθογωνικό βρόχο ΑΒΓΔ που δείχνει το Σχ.2β, παίρνουμε τη σχέση

$$\int_{0(AB)}^r H_r(r')dr' + \int_{r(\Gamma\Delta)}^0 H_r(r')dr' + \ell H_z(0) - \ell H_z(r) = 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} H_z(r) = H_z(0) \Rightarrow H_z(r) = c \quad (6)$$

όπου c σταθερά ανεξάρτητη του r . Λόγω της συνθήκης στο άπειρο,

$$H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

έπεται ότι $c=0$, οπότε $\mathbf{H}_z = 0$ παντού. (**Σημείωση:** Στην εξίσωση (5), I_c συμβολίζει το ρεύμα που διαρρέει την επιφάνεια του δρόμου C. Στην προκειμένη περίπτωση η πυκνότητα του ρεύματος δεν έχει φ-συνιστώσα και επομένως $I_c=0$).

Εύρεση της $\mathbf{H}_\varphi(r)$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου, $\mathbf{H}_\varphi(r)$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere,

$$\oint_C \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\ell} = I_C, \quad (7)$$

όπου ως δρόμο ολοκλήρωσης επιλέγουμε τον κύκλο C_φ ακτίνας r , ο οποίος διέρχεται από το σημείο παρατηρήσεως $P(r, \varphi, z)$ και είναι κάθετος στον άξονα των z (Σχ.2β). Το ρεύμα I_c που εμπλέκει τον βρόχο C_φ ισούται με

$$I_C = I_C(r) = \begin{cases} I + 2\pi \int_0^r J_z(r') r' dr' & (0 < r < a) \\ I + 2\pi \int_0^a J_z(r') r' dr' + 2\pi a K & (a < r < \infty) \end{cases}. \quad (8)$$

Με τη βοήθεια της (2), από την (7) προκύπτει η σχέση

$$2\pi r \mathbf{H}_\varphi(r) = I_C(r) \Rightarrow \mathbf{H}_\varphi(r) = \frac{I_C(r)}{2\pi r} \Rightarrow \mathbf{B}_\varphi(r) = \mu(r) \frac{I_C(r)}{2\pi r}. \quad (9)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

1. Στην περίπτωση γραμμικής πηγής I που ρέει στην ευθεία $r=0$ (άξονα των z) στον απεριόριστο κενό χώρο, παίρνουμε τη σχέση

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (10)$$

(την οποία ξαναβρήκαμε στο Κεφ.1 με εφαρμογή του νόμου των Biot-Savart).

2. Το πεδίο επιφανειακής κατανομής $\bar{\mathbf{K}} = \hat{z}K$, η οποία ρέει σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας a , δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}(r) = \hat{\phi} \begin{cases} K \frac{a}{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (11)$$

Παρατηρήσεις

1. Το πεδίο είναι **ασυνεχές** στα σημεία της επιφανειακής κατανομής $\bar{\mathbf{K}}$. Εύκολα διαπιστώνουμε με τη βοήθεια της (9) ότι η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{r} \times [\bar{\mathbf{H}}(a+) - \bar{\mathbf{H}}(a-)] = \bar{\mathbf{K}} \Leftrightarrow \mathbf{H}_\varphi(a+) - \mathbf{H}_\varphi(a-) = K \quad (12)$$

όπως περιμέναμε να συμβεί..

2. Στη γειτονιά της γραμμικής πηγής, $r \rightarrow 0$, επικρατεί η συμβολή που προέρχεται από το γραμμικό αυτό ρεύμα, δηλαδή

$$H_{\phi}(r) \underset{r \ll}{=} \frac{I}{2\pi r} + c(r),$$

όπου $c(r)$, αντιστοιχούσα στη συμβολή του χωρικού ρεύματος, είναι πεπερασμένη ποσότητα⁴. Συνεπώς, για $r \rightarrow 0$ ισχύει η σχέση

$$\lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r H_{\phi}) = I. \quad (13)$$

Στη θέση του γραμμικού ρεύματος, $r=0$, το πεδίο είναι ιδιόμορφο:

$$H_{\phi} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty.$$

Σημείωση: Η σχέση (13), που καθορίζει τη συμπεριφορά του πεδίου στην άμεση γειτονιά του γραμμικού ρεύματος I , επέχει θέση **οριακής συνθήκης** [ανάλογης προς την (12)] κατά την επίλυση προβλημάτων με χρήση των σημειακών εξισώσεων Maxwell.

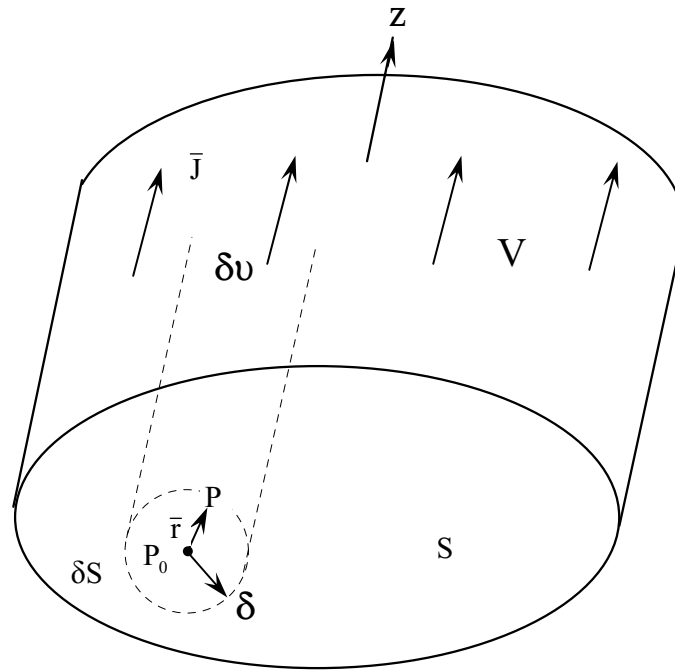
3. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο η ομοιόμορφη κατανομή $\bar{J}(r) = \hat{z}J_0$ =σταθ., από την (9) παίρνουμε τη σχέση

$$H_{\phi}(r) = \begin{cases} J_0 \frac{r}{2} & (0 < r < a) \\ J_0 \frac{a^2}{2r} & (r > a) \end{cases}. \quad (14)$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι το πεδίο που οφείλεται σε χωρικό ρεύμα ομοιόμορφα κατανεμημένο στο εσωτερικό ενός κυλίνδρου απείρου μήκους είναι ομαλή συνάρτηση του r , τόσο στο εξωτερικό όσο και στο εσωτερικό των πηγών.

4. Θεωρούμε χωρικό ρεύμα με πυκνότητα $\hat{z}J(x,y)$, το οποίο κατανέμεται στο εσωτερικό της ομοιόμορφης κυλινδρικής περιοχής V (απείρου μήκους, με διατομή S αυθαίρετης μορφής) (Σχ.3). Υποθέτουμε ότι η J είναι αρκούντως ομαλή συνάρτηση των x και y και ανεξάρτητη του z .

⁴ Βλέπε, σχετικά, παρατήρηση 3 και παρατήρηση 4 παρακάτω.



Σχήμα 3

Το πεδίο $\bar{H}(x_0, y_0)$ στη θέση $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση δύο όρων:

$$\bar{H}(x_0, y_0) = \bar{H}^>(x_0, y_0) + \bar{H}^<(x_0, y_0).$$

Ο όρος $\bar{H}^<(x_0, y_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στο ρεύμα που ρέει στο εσωτερικό μιας κυλινδρικής στήλης δu , απείρου μήκους και ακτίνας δ , με άξονα την ευθεία $(x = x_0, y = y_0)$, ενώ ο όρος $\bar{H}^>(x_0, y_0)$ παριστάνει το πεδίο που οφείλεται στα υπόλοιπα ρεύματα, δηλαδή στα ρεύματα που ρέουν στην περιοχή $V - \delta u$. Επειδή $P_0(x_0, y_0, z_0) \notin (V - \delta u)$, ο όρος $\bar{H}^>(x_0, y_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0) . Από το άλλο μέρος, όταν η ακτίνα δ είναι κατάλληλα μικρή, τότε μπορεί να τεθεί $J(x, y) = J(x_0, y_0) = J_0$ για κάθε σημείο $P(x, y, z) \in \delta u$ και να χρησιμοποιηθεί ο τύπος (14):

$$\bar{H}^<(x, y) = \frac{J_0 r}{2} \hat{\phi} \quad (0 < r < \delta)$$

όπου r είναι η απόσταση του $P(x, y, z)$ από τον άξονα της κυλινδρικής στήλης δu και $\hat{\phi}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του κυλινδρικού συστήματος με άξονα την ευθεία $(x = x_0, y = y_0)$. Επομένως και ο όρος $\bar{H}^<(x_0, y_0)$ είναι ομαλή συνάρτηση του (x_0, y_0) .

Συμπέρασμα: Το πεδίο οποιασδήποτε ομαλής χωρικής ρευματικής κατανομής, που ρέει στο εσωτερικό ενός ομοιομόρφου κυλίνδρου απείρου μήκους, είναι ομαλή συνάρτηση της θέσεως τόσο στο εξωτερικό όσο και στα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της κατανομής.

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Θα στηριχθούμε στις (ανεξάρτητες μεταξύ τους) διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (16)$$

και στις (ανεξάρτητες) οριακές συνθήκες

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{a}+) - \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{a}-)] = \bar{\mathbf{K}} \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{a}+) - \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{a}-)] = 0 \Leftrightarrow B_r(\mathbf{a}+) = B_r(\mathbf{a}-) . \quad (18)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη σχέση (1)

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

την οποία υπαγορεύει η συμμετρία του προβλήματος.

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε –τόρα με βάση την (15) και (16)– ότι το πεδίο έχει μόνο φ-συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, φ, z) , αναλύουμε την (15) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r \xRightarrow{\partial/\partial \varphi=0=\partial/\partial z} 0 = 0 \text{ (ταυτότητα)}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi = 0 \xRightarrow{\partial/\partial z=0} \frac{dH_z(r)}{dr} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z(r) \xRightarrow{\partial/\partial \varphi=0} \frac{1}{r} \frac{d[rH_\varphi(r)]}{dr} = J_z(r). \quad (20)$$

Τέλος από την (16) παίρνουμε

$$\frac{1}{r} \frac{\partial[rB_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial[B_\varphi(r)]}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z(r)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d[rB_r(r)]}{dr} = 0. \quad (21)$$

Ολοκληρώνοντας την (19) έχουμε

$$H_z(r) = \begin{cases} c_1, & 0 < r < a \\ c_2, & a < r < \infty \end{cases} \quad (22)$$

όπου c_1 και c_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, δίνει $c_2 = 0$, ενώ η συνθήκη συνεχείας της H_z στα σημεία της κυλινδρικής επιφάνειας $r = a$, $H_z(a+) = H_z(a-)$, οδηγεί στη σχέση $c_1 = c_2 = 0$. Επομένως $H_z(r) = 0$ παντού.

Ομοίως, με ολοκλήρωση της (21) παίρνουμε

$$B_r(r) = \begin{cases} d_1 / r, & 0 < r < a \\ d_2 / r, & a < r < \infty \end{cases} \quad (23)$$

όπου d_1 και d_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $B_r(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ η συνθήκη συνεχείας της B_r στα σημεία της κυλινδρικής επιφάνειας $r = a$, $B_r(a+) = B_r(a-)$, οδηγεί στη σχέση $d_1 = d_2$. Τέλος, η οριακή συνθήκη στη θέση $r=0$ δίνει⁵ $d_1 = 0$. Επομένως $B_r(r) = 0$ παντού.

Εύρεση της $H_\phi(r)$

Η μοναδική συνιστώσα του πεδίου, $H_\phi(r)$, θα βρεθεί μέσω της (20), η οποία με ολοκλήρωση δίνει τη γενική λύση

$$H_\phi(r) = \frac{1}{r} \int r J_z(r) dr + \frac{c}{r}. \quad (24)$$

Στην περιοχή 2 ($r > a$) $\bar{J} = 0$ και επομένως η (24) δίνει το αποτέλεσμα

$$H_\phi^{(2)}(r) = \frac{c_2}{r}. \quad (25\alpha)$$

Για την περιοχή 1 ($r < a$) η (24) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα υπό τη μορφή

$$H_\phi^{(1)}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' J_z(r') dr' + \frac{c_1}{r}. \quad (25\beta)$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες, ως εξής.

$$\alpha) \quad \lim_{r \rightarrow 0} [2\pi r H_\phi^{(1)}(r)] = I \Rightarrow 2\pi c_1 \Rightarrow I \Rightarrow c_1 = \frac{I}{2\pi} \quad (26)$$

[Σημείωση: Η οριακή συνθήκη για την H_ϕ , για $r \rightarrow 0$, εξάγεται με εφαρμογή του νόμου του Ampere

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$, όταν ως δρόμο C επιλέξουμε κύκλο πολύ μικρής ακτίνας r , ο οποίος έχει το κέντρο του στον άξονα των z

και είναι κάθετος στον άξονα αυτόν. Προκύπτει τότε ότι

$$2\pi H_\phi^{(1)}(r) = I + J_z(0)\pi r^2 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [2\pi H_\phi^{(1)}(r)] = I,$$

δηλαδή προκύπτει η εξίσωση (26). Προφανώς, στην τελευταία σχέση ο όρος $J_z(0)\pi r^2$ εκφράζει την συμβολή του χωρικού ρεύματος στο συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον δρόμο C :

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S J_z dS = (\text{θεώρημα μέσης τιμής}) = J_z(0)\pi r^2.$$

⁵ Η οριακή συνθήκη για την B_r , για $r \rightarrow 0$, μπορεί να βρεθεί από την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, όπου S είναι κύλινδρος, μήκους ℓ και πολύ μικρής ακτίνας r , με άξονα τον άξονα των z . Προκύπτει τότε

ότι $2\pi r \ell B_r(r) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [r B_r(r)] = 0 \Rightarrow d_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \beta) \quad \hat{r} \times [\bar{H}(a+) - \bar{H}(a-)] &= \bar{K} \Rightarrow H_{\varphi}(a+) - H_{\varphi}(a-) = K \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{c_2}{a} - \frac{1}{a} \int_0^a r' J_z(r') dr' - \frac{c_1}{a} &= K \Rightarrow c_2 = \int_0^a r' J_z(r') dr' + \frac{I}{2\pi} + Ka. \end{aligned} \quad (27)$$

Έχοντας βρεί τις σταθερές c_1 και c_2 μέσω των (26) και (27), το πεδίο προσδιορίζεται πλήρως μέσω των (25α)-(25β). Όπως αναμέναμε να συμβεί, βρίσκουμε τις ίδιες εκφράσεις με αυτές των (8),(9).

Παρατήρηση: Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της (25β) παριστάνει το πεδίο, που οφείλεται αποκλειστικά στη χωρική κατανομή $\bar{J}(r)$, σε σημεία στο εσωτερικό της κατανομής αυτής. Το πεδίο αυτό είναι ομαλή συνάρτηση του r (ακόμα και για $r=0$) για μια ευρυτάτη οικογένεια κατανομών $J_z(r)$. Αυτό γίνεται φανερό με τον παρακάτω συλλογισμό. Αν η $J_z(r)$ είναι ομαλή συνάρτηση, της μορφής

$$J_z(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

Τότε, προφανώς,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int r J_z(r) dr = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left[a_0 \frac{r^2}{2} + a_1 \frac{r^3}{3} + a_2 \frac{r^4}{4} + \dots \right] = 0.$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι ακόμα και όταν η $J_z(r)$ εμφανίζει ιδιομορφία (απειρίζεται) στη θέση $r=0$, της μορφής

$$J_z(r) = \frac{b_0}{r} + a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots,$$

ο παραπάνω όρος εξακολουθεί να είναι ομαλός, αφού

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int r J_z(r) dr = b_0 \text{ (πεπερασμένο).}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήξαμε νωρίτερα κατά τη λύση με βάση τις ολοκληρωτικές σχέσεις.

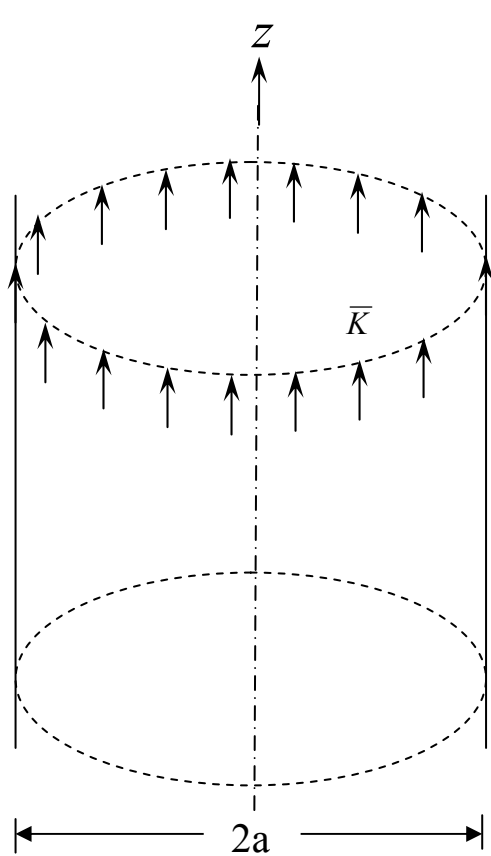
Γ. Λύση με επαλληλία

Με βάση το αποτέλεσμα (11)

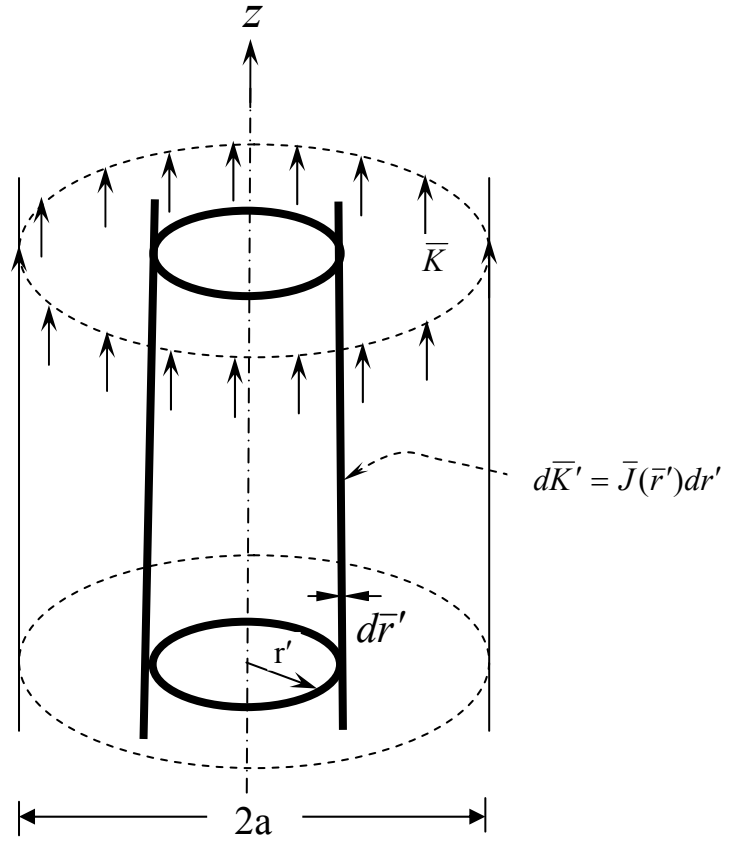
$$\bar{H} = \bar{H}(r) = \hat{\phi} \begin{cases} K \frac{a}{r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (11)$$

για το πεδίο της κυλινδρικής επιφανειακής κατανομής του σχήματος 4(α), το ζητούμενο πεδίο της διατάξεως του σχήματος 1 μπορεί να βρεθεί με επαλληλία ως εξής:

Θεωρούμε την χωρική κατανομή \bar{J} ως μια διαδοχή επιφανειακών ρευματικών κατανομών $d\bar{K}' = \bar{J}(\bar{r}') d\bar{r}'$, τοποθετημένων σε κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνας r' , όπου $0 < r' < a$ (Σχ.4β). Το πεδίο στο σημείο $P(r, \varphi, z)$ εκφράζεται τότε ως εξής:



(α)



(β)

Σχήμα 4

1. Για $r > a$ (σημείο παρατηρήσεως εκτός της περιοχής των πηγών):

$$\bar{H} = \bar{H}(r) = \hat{\phi}(A + \Delta + \Gamma) \quad (28)$$

όπου

$$A = \frac{I}{2\pi r} \quad (29)$$

είναι η συμβολή του γραμμικού ρεύματος I ,

$$\Delta = K \frac{a}{r} \quad (30)$$

είναι η συμβολή του επιφανειακού ρεύματος \bar{K} , και

$$\Gamma = \frac{1}{r} \int_{r'=0}^a r' J_z(r') dr' \quad (31)$$

είναι η συμβολή της χωρικής πυκνότητας \bar{J} .

2. Για $0 < r < a$ (σημείο παρατηρήσεως εντός της περιοχής των πηγών):

$$\bar{H} = \bar{H}(r) = \hat{\phi}(A + \Delta + \Gamma' + \Gamma'') \quad (32)$$

όπου $A = I / (2\pi r)$, όπως προηγουμένως. Η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής \bar{J} , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $0 < r' < r$, συμβολίζεται με Γ' και ισούται με

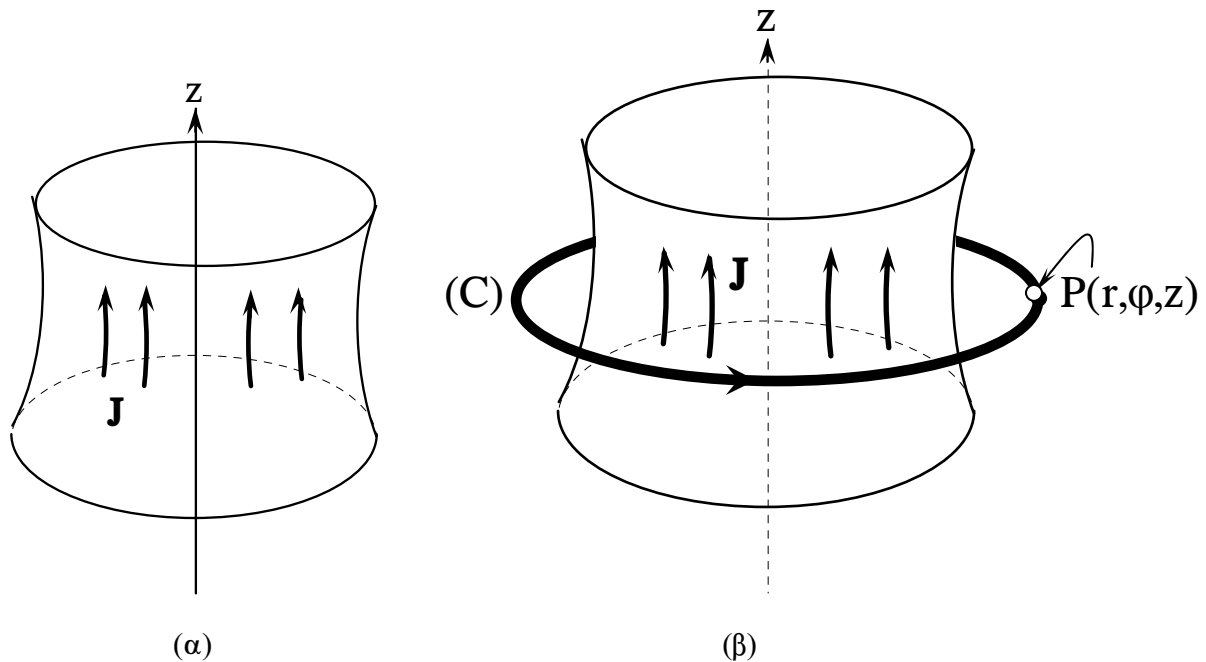
$$\Gamma' = \frac{1}{r} \int_{r'=0}^r r' J_z(r') dr' \quad (33)$$

ενώ η συμβολή που προέρχεται από το μέρος της χωρικής κατανομής \bar{J} , το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $r < r' < a$, συμβολίζεται με Γ'' και ισούται με μηδέν [σύμφωνα με την (11)]. Τέλος, για τον ίδιο λόγο η συμβολή της \bar{K} στο πεδίο είναι τώρα $\Delta=0$. Όπως περιμέναμε, βρίσκουμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

Γενίκευση:

Έστω κυλινδρικά συμμετρική ρευματική κατανομή \bar{J} (Σχ.5α) [όχι κατ' ανάγκην ομοιόμορφη κατά μήκος του άξονα των z], τέτοια ώστε

$$\bar{J} = \hat{r}J_r(r, z) + \hat{z}J_z(r, z). \quad (34)$$



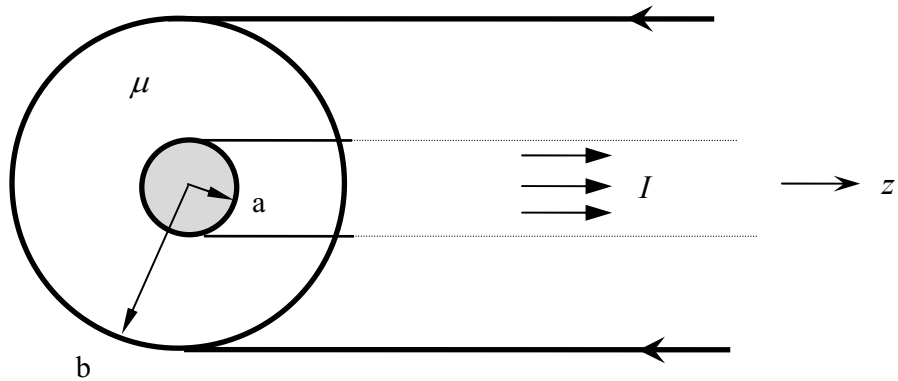
Σχήμα 5

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο έχει μοναδική συνιστώσα την $H_\phi(r, z)$, όπως αποδείξαμε στο Κεφ.1 (ενότητα 6). Η έκφραση της συνιστώσας αυτής βρίσκεται εύκολα με εφαρμογή του νόμου του Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C \Rightarrow 2\pi r H_\phi(r, z) = \int_0^r J_z(r', z) 2\pi r' dr' \Rightarrow H_\phi(r, z) = \frac{1}{r} \int_0^r J_z(r', z) r' dr'. \quad (35)$$

Στην (35), ο δρόμος ολοκλήρωσης C είναι κύκλος κάθετος στον άξονα των z , ο οποίος έχει το κέντρο του πάνω στον άξονα αυτό και διέρχεται από το σημείο παρατήρησης (r, ϕ, z) (Σχ.5β). Παρατηρούμε ότι στη διαμόρφωση του πεδίου συμμετέχει μόνο η z -συνιστώσα του ρεύματος.

Εφαρμογή: Πεδίο και συντελεστής εξωτερικής αυτεπαγωγής κυλινδρικού επαγωγέα



Σχήμα 6

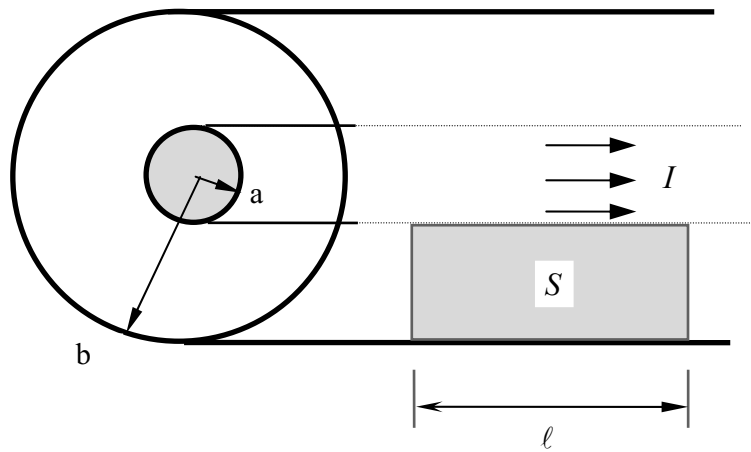
Ο επαγωγέας που δείχνει το Σχ.6 έχει άπειρο μήκος. Ο εσωτερικός αγωγός, ακτίνας a , διαρρέεται από χωρικό ρεύμα εντάσεως I . Η επιστροφή του ρεύματος γίνεται κατά μήκος της επιφάνειας $r=b$ του εξωτερικού αγωγού.

Η πυκνότητα του χωρικού ρεύματος στον εσωτερικό αγωγό ισούται με

$$\vec{J} = \hat{z} \frac{I}{\pi a^2} = \hat{z} J_0 \quad (36)$$

αν υποθέσουμε ότι η ροή του ρεύματος αυτού γίνεται ομοιόμορφα. Επομένως το διεγειρόμενο μαγνητικό πεδίο θα έχει μόνο τη συνιστώσα H_ϕ , η οποία υπολογίζεται ύστερα από εφαρμογή του νόμου του Ampere- από τη σχέση:

$$2\pi r H_\phi(r) = \begin{cases} J_0(\pi r^2), & \text{αν } 0 < r < a \\ I, & \text{αν } a < r < b \end{cases} \Rightarrow H_\phi(r) = \begin{cases} I \frac{r}{2\pi a^2}, & \text{αν } 0 < r < a \\ \frac{I}{2\pi r}, & \text{αν } a < r < b \end{cases} \quad (37)$$



Σχήμα 7

Η μαγνητική ροή που περνάει από την διαγραμμισμένη επιφάνεια S , διαστάσεων $(b-a) \times \ell$, που δείχνει το Σχ.7, ισούται με

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_\phi dS = \int_{r=a}^b B_\phi (\ell dr) = I \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = I L_{\varepsilon\xi}^\mu \quad (38)$$

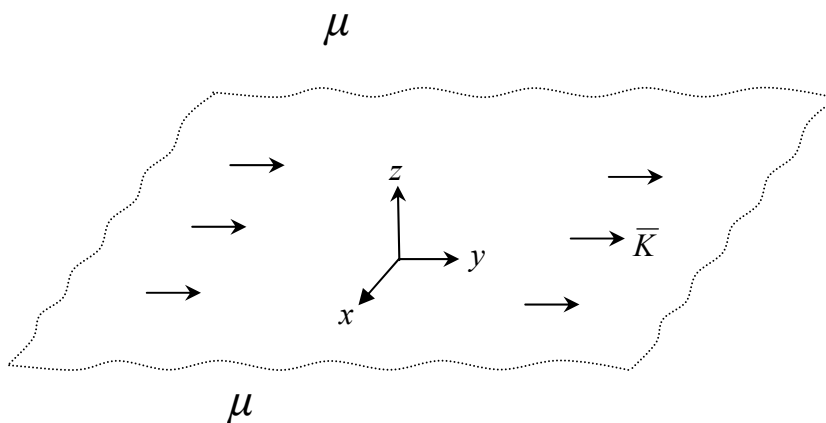
όπου

$$L_{\varepsilon\xi}^\mu = \frac{\psi}{I\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (39)$$

είναι ο ανά μονάδα μήκους συντελεστής εξωτερικής αυτεπαγωγής της διατάξεως.

6. Μαγνητοστατικό πεδίο απείραντων ρευματικών κατανομών

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πεδίο απείραντης επίπεδης ρευματικής κατανομής σταθερής πυκνότητας \vec{K} .



Σχήμα 1

Λύση: Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το επιφανειακό ρεύμα ρέει κατά την κατεύθυνση \hat{y} επάνω στο επίπεδο $z=0$ (Σχ.1), δηλαδή

$$\vec{K} = \hat{y}K. \quad (1)$$

Θεωρούμε επί πλέον ότι ο περιβάλλων χώρος έχει μαγνητική διαπερατότητα μ . Το παρόν πρόβλημα λύθηκε στο Κεφ.1 (ενότητα 6) με βάση τον νόμο των Biot-Savart. Εδώ θα δώσουμε μια λύση βασισμένη στην ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss για τον μαγνητισμό.

Λόγω της ομοιομορφίας της πηγής και του απειράντου της διατάξεως ως προς τις κατευθύνσεις x και y , το πεδίο θα είναι ανεξάρτητο των x και y , δηλαδή

$$\vec{H} = \vec{H}(z). \quad (2)$$

Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σημείο παρατηρήσεως P βρίσκεται πάνω στον άξονα των z όπως στο Σχ.2.

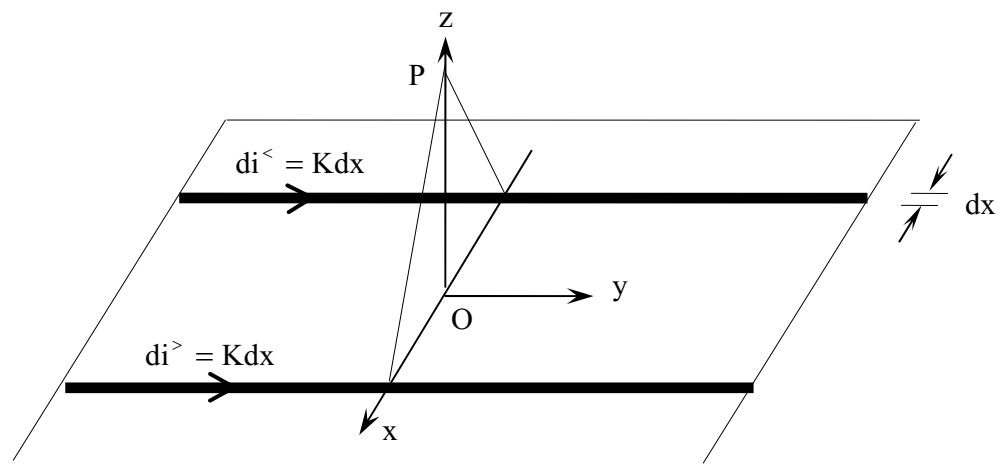
Θεωρώντας ότι το πεδίο στη θέση P προκύπτει από την επαλληλία των πεδίων που οφείλονται σε όλα τα απείραντα ευθύγραμμα νηματοειδή ρεύματα $di^< = Kdx$ και στα ρεύματα $di^> = Kdx$, που ρέουν παράλληλα στον άξονα των y σε ευθείες που είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα Oy ⁶, διαπιστώνουμε τα εξής:

1. Όπως αποδεικνύουμε παρακάτω, το πεδίο έχει κατεύθυνση \hat{x} , δηλαδή

$$\vec{H} = \hat{x}H_x(z). \quad (3)$$

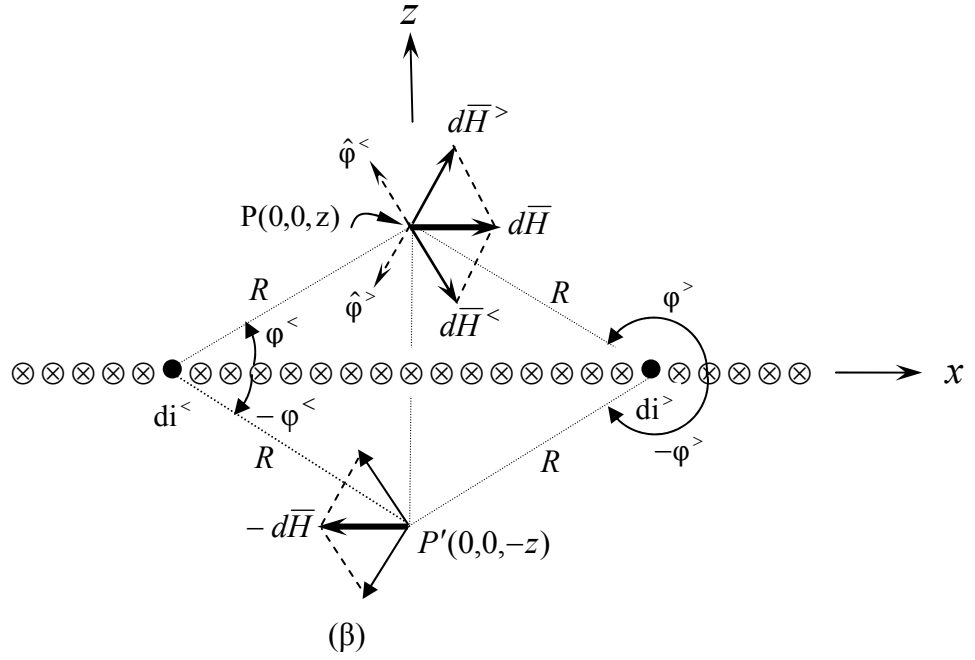
2. Ισχύει η σχέση

$$H_x(z) = -H_x(-z). \quad (4)$$



(α)

⁶Αυτό είναι δυνατό διότι η κατανομή \vec{K} εκτείνεται απειρίοριστα στο επίπεδο $z=0$.



Σχήμα 2: (α) Τα στοιχειώδη ρεύματα di^g και di^g ρέουν σε θέσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα των y .
(β) Η διάταξη του Σχ. 2(α) σε τομή στο επίπεδο xz .

Απόδειξη των (3)-(4)

Η συμβολή των νηματοειδών ρευμάτων di^g και di^g στο συνολικό πεδίο στη θέση $P(0,0,z)$ είναι σύμφωνα με την (5.10) ίση με

$$d\bar{H} = -\frac{di}{2\pi R} \varphi^g - \frac{di}{2\pi R} \varphi^g \quad (di \equiv Kdx) \quad (5)$$

όπου

$$\hat{\varphi}^g = -\sin \varphi^g \hat{x} + \cos \varphi^g \hat{z}, \quad \hat{\varphi}^g = -\sin \varphi^g \hat{x} + \cos \varphi^g \hat{z} \quad (6)$$

είναι μοναδιαία διανύσματα στα κυλινδρικά συστήματα με άξονες τα δυο νηματοειδή ρεύματα di^g και di^g , αντίστοιχα. Ισχύουν οι σχέσεις $\varphi^g + \varphi^g = \pi \Rightarrow \sin \varphi^g = \sin \varphi^g$, $\cos \varphi^g = -\cos \varphi^g$, οπότε

$$d\bar{H}(P) = \hat{x} \frac{di}{\pi R} \sin \varphi^g = \hat{x}(dH). \quad (7)$$

Από την (7) με επαλληλία προκύπτει ότι πράγματι το συνολικό πεδίο σε οποιαδήποτε θέση έχει μόνο x - συνιστώσα.

Παρατηρούμε επί πλέον ότι για το σημείο $P'(0,0,-z)$, συμμετρικό του σημείου παρατηρήσεως $P(0,0,z)$ ως προς το επίπεδο xy , οι πολικές γωνίες είναι $-\varphi^g$ και $-\varphi^g$, αντίστοιχα, οπότε κατ' αναλογία προς την (7) προκύπτει η σχέση

$$d\bar{H}(P') = -\hat{x} \frac{di}{\pi R} \sin\phi^> = -d\bar{H}(P). \quad (8)$$

Από την (8) με επαλληλία προκύπτει η (4).

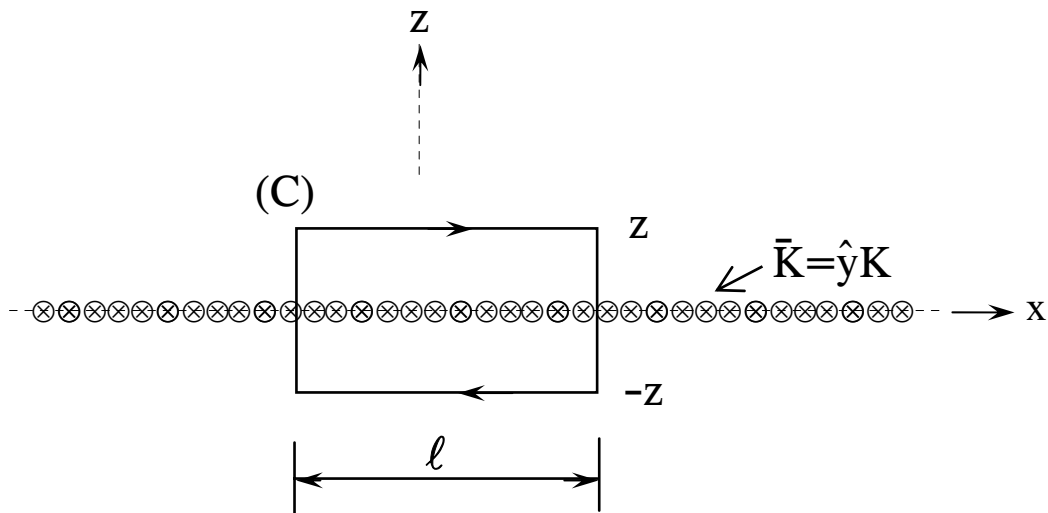
Υπολογισμός της $H_x(z)$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου $H_x(z)$ στη θέση $z > 0$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere

$$\oint_c \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = I_c. \quad (9)$$

Ως δρόμο ολοκληρώσεως επιλέγουμε έναν ορθογωνικό βρόχο στο επίπεδο xz (Σχ.3), με τις δύο οριζόντιες πλευρές του, μήκους ℓ , στις θέσεις z και $-z$ αντίστοιχα, οπότε

$$I_c = K\ell. \quad (10)$$



Σχήμα 3

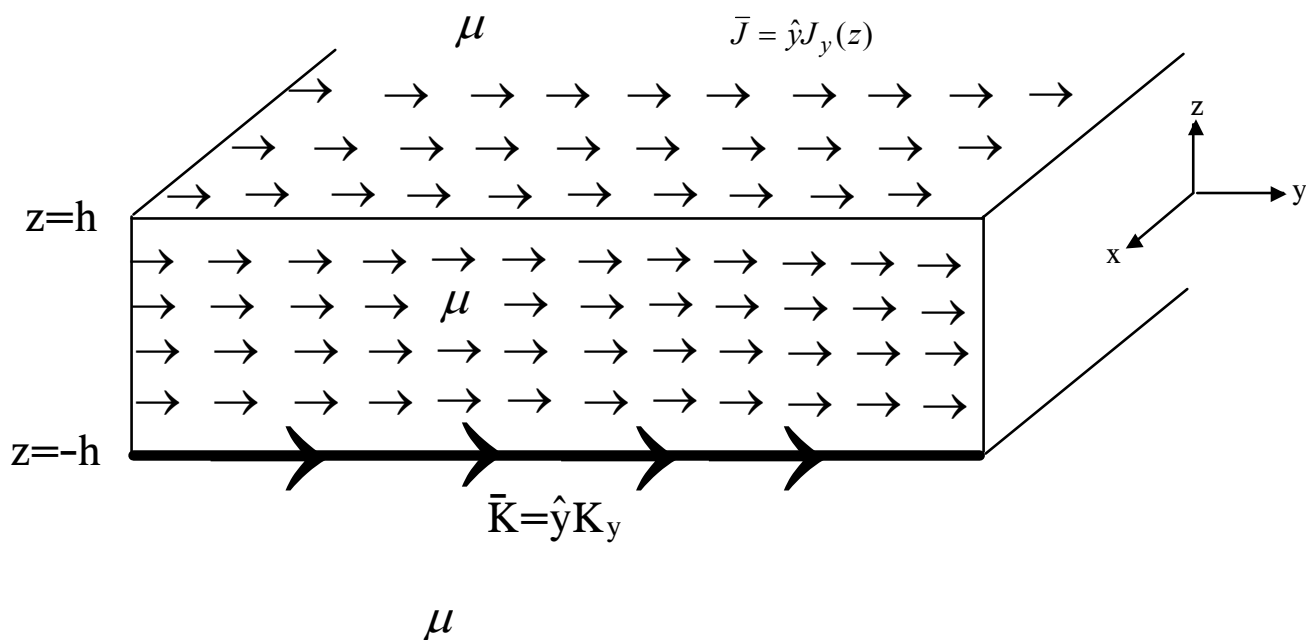
Από την (9) με τη βοήθεια της (10) προκύπτει ότι

$$\ell H_x(z) - \ell H_x(-z) = I_c \stackrel{(4)}{\Rightarrow} H_x(z) = \frac{1}{2} \begin{cases} K & (z > 0) \\ -K & (z < 0) \end{cases} = \frac{K}{2} \text{sgn}(z). \quad (11)$$

Το τελικό αποτέλεσμα για το πεδίο μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$\bar{H} = \frac{\bar{K} \times \hat{z}}{2} \text{sgn}(z) \quad (12)$$

η οποία τελικά ισχύει για οποιαδήποτε σταθερή κατεύθυνση ροής του \bar{K} πάνω στο επίπεδο xy .



Σχήμα 4

Θεωρούμε τώρα ότι δρουν ταυτοχρόνως επιφανειακό ρεύμα σταθερής πυκνότητας $\bar{K} = \hat{y}K_y$ στο επίπεδο $z=-h$ και χωρικό ρεύμα με πυκνότητα $\hat{y}J_y(z)$ στο εσωτερικό της πλάκας $-h < z < h$ (Σχ.4). Οι μαγνητικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται με τη μαγνητική του διαπερατότητα μ . Ζητάμε να βρούμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου, που προκύπτει από τη συνδυασμένη δράση των παραπάνω πηγών, παντού στο χώρο.

Α. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών, το διεγειρόμενο μαγνητοστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της συντεταγμένης z του σημείου παρατηρήσεως $\bar{r}(x, y, z)$, δηλαδή

$$\bar{H} = \bar{H}(z). \quad (13)$$

Συνιστώσες του πεδίου

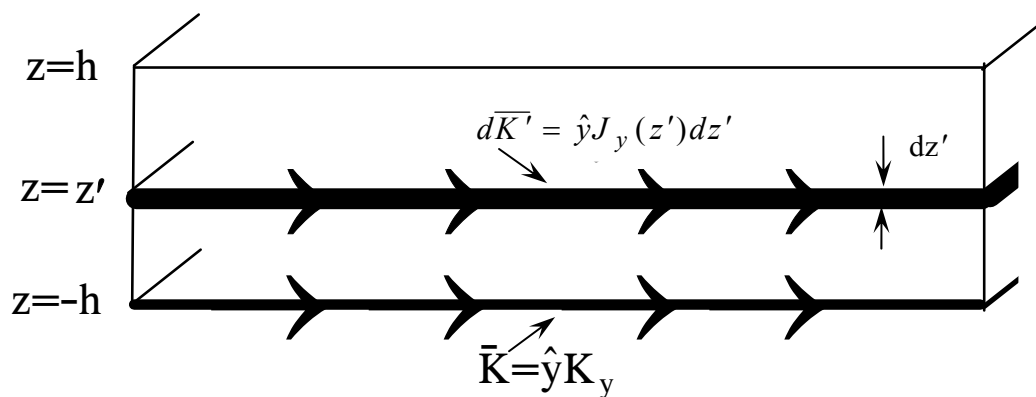
Το πεδίο έχει μόνο \hat{x} συνιστώσα, δηλαδή

$$\bar{H} = \hat{x}H_x(z). \quad (14)$$

Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί εύκολα, με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, θεωρώντας το πεδίο σε οποιαδήποτε θέση ως υπέρθεση των συμβολών που προέρχονται α) από την επιφανειακή κατανομή \bar{K} και β) από επάλληλες επιφανειακές κατανομές $d\bar{K}' = \hat{y}J_y(z')dz'$ ($-h < z' < h$), που συνθέτουν την κατανομή \bar{J} (Σχ.5).

Η περιγραφείσα παραπάνω διαδικασία πιστοποιεί επίσης, με βάση το αποτέλεσμα (11), ότι για τα σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό της επίπεδης πλάκας ισχύει η σχέση

$$H_x(z) = -H_x(-z) \quad (|z| > h). \quad (15)$$



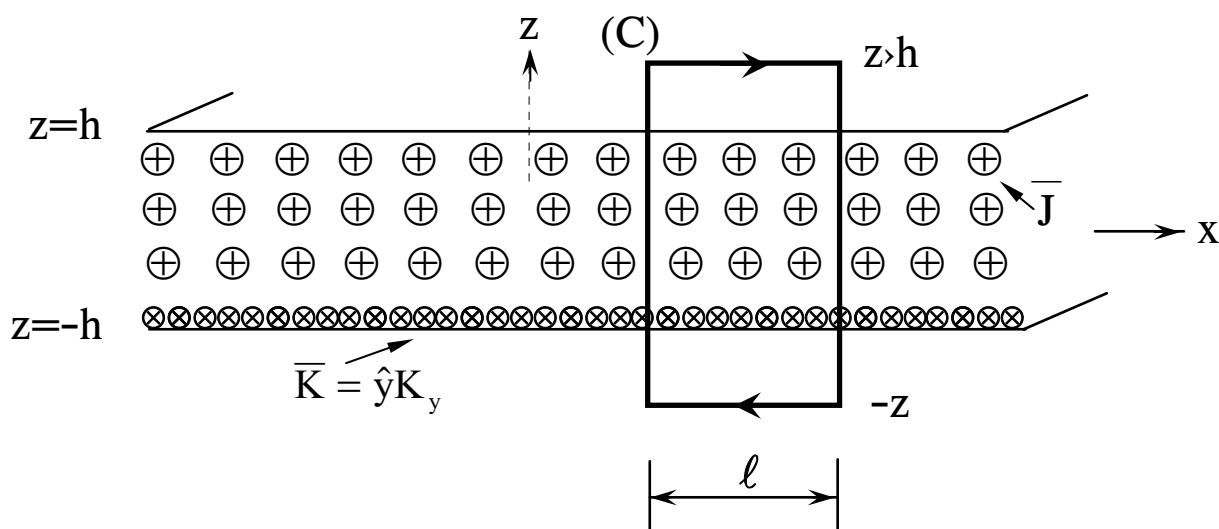
Σχήμα 5

Εύρεση της $H_x(z)$

α. περιοχές $z > h$ και $z < -h$

Για τον υπολογισμό της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου $H_x(z)$ στην περιοχή $z > h$ εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C. \quad (16)$$



Σχήμα 6

Ως δρόμο ολοκλήρωσης στην (16) επιλέγουμε τον ορθογωνικό βρόχο (C) στο επίπεδο xz όπως δείχνει το Σχ.6. Η μία οριζόντια πλευρά του βρόχου αυτού βρίσκεται στη θέση $z > h$, όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο, και η δεύτερη στη θέση $-z$. Επομένως το ρεύμα που διαρρέει τον δρόμο C είναι

$$I_C = K_y \ell + \ell \int_{-h}^h J_y(z') dz' . \quad (17)$$

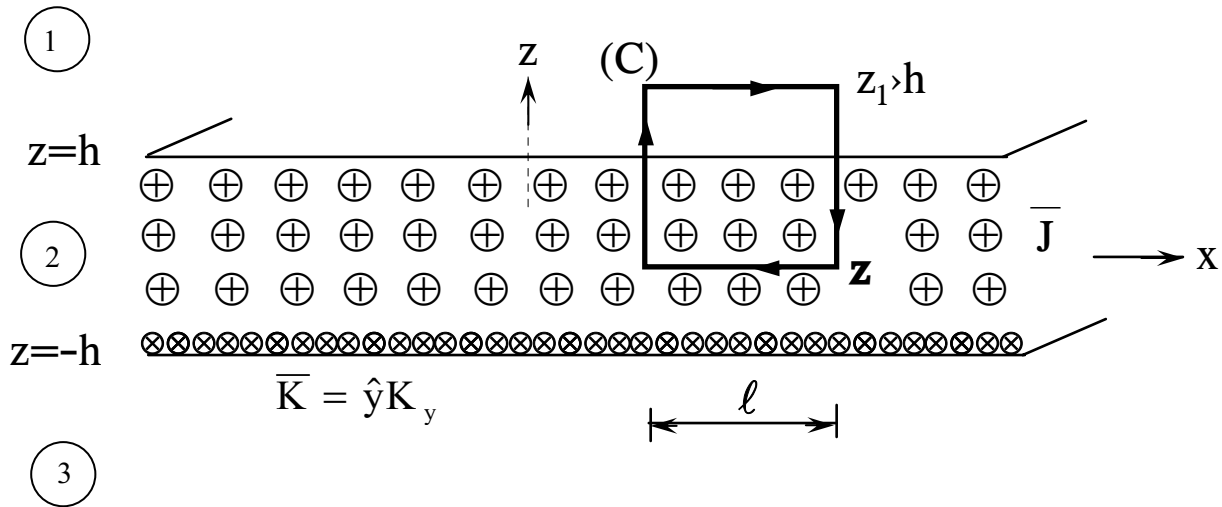
Με τη βοήθεια των (14)-(15) και (17), από την (16) προκύπτει ότι

$$\ell H_x(z) - \ell H_x(-z) = I_C \stackrel{(15)}{\Rightarrow} H_x(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} [K_y + \int_{-h}^h J_y(z') dz'] & (z > h) \\ -\frac{1}{2} [K_y + \int_{-h}^h J_y(z') dz'] & (z < -h) \end{cases} . \quad (18)$$

Σημείωση: Έχοντας υπόψιν το αποτέλεσμα (11), η σχέση (18) απλώς εκφράζει το πεδίο στις θέσεις $z > h$ και $z < -h$ ως υπέρθεση των πεδίων που οφείλονται στην κατανομή \bar{K} και σε όλες τις επίπεδες κατανομές $J_y(z') dz'$ ($-h < z' < h$) που συνθέτουν την κατανομή \bar{J} .

β. περιοχή $|z| < h$

Για τον υπολογισμό της $H_x(z)$ στην περιοχή $-h < z < h$ εφαρμόζουμε πάλι τον νόμο του Ampere (16). Ο ορθογωνικός δρόμος ολοκληρώσεως C (Σχ.7) επιλέγεται τώρα έτσι ώστε η μια οριζόντια πλευρά του να βρίσκεται στη θέση z ($|z| < h$), όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο, ενώ η παράλληλή της τοποθετείται στη θέση $z_1 > h$ όπου γνωρίζουμε ήδη το πεδίο μέσω της (18) (η επιλογή $z_1 < -h$ είναι το ίδιο κατάλληλη).



Σχήμα 7

Το μέγεθος I_C στο δεύτερο μέρος της (16) (συνολικό ρεύμα που εμπλέκει τον βρόχο C) ισούται τώρα με

$$I_C = \ell \int_z^h J_y(z') dz' \quad (19)$$

οπότε από την (16) προκύπτει η σχέση

$$\ell H_x(z_1) - \ell H_x(z) = I_C \stackrel{(18)}{\Rightarrow} H_x(z) = \frac{1}{2} [K_y + \int_{-h}^z J_y(z') dz' - \int_z^h J_y(z') dz'] \quad (-h < z < h). \quad (20)$$

Παρατηρήσεις πάνω στις (18) και (20)

1. Το πεδίο H_x παραμένει σταθερό σε ολόκληρη την περιοχή $z > h$. Το H_x είναι επίσης σταθερό σε ολόκληρη την περιοχή $z < -h$ (με τιμή αντίθετη της αντίστοιχης για την περιοχή $z > h$). Αντίθετα, στην περιοχή των πηγών, $|z| < h$, το πεδίο H_x είναι συνάρτηση της θέσεως z .

2. Το πεδίο H_x είναι **ασυνεχές** στα σημεία της επιφανειακής κατανομής \bar{K} . Όπως εύκολα διαπιστώνουμε με τη βοήθεια των (18) και (20), η ασυνέχεια αυτή υπακούει στην οριακή συνθήκη

$$\hat{z} \times [\bar{H}(-h+0) - \bar{H}(-h-0)] = \bar{K}. \quad (21)$$

3. Η επιστροφή των ρευμάτων \bar{J} και \bar{K} γίνεται μέσω επιφανειακών ρευμάτων τα οποία ρέουν στις επίπεδες επιφάνειες $z = +\infty$ και $z = -\infty$ με την ίδια πυκνότητα

$$-\hat{y}K_y^{+\infty} = -\hat{y}K_y^{-\infty} = -\hat{y}\frac{1}{2}[K_y + \int_{-h}^h J_y(z') dz'].$$

Η συμβολή της $-\hat{y}K_y^{+\infty}$ (ίση με $\hat{x}K_y^{+\infty}/2$) εξουδετερώνεται από τη συμβολή της $-\hat{y}K_y^{-\infty}$ (ίση με $-\hat{x}K_y^{-\infty}/2$) για κάθε θέση z ($-\infty < z < \infty$). Επομένως, το συνολικό πεδίο στη διάταξη ισούται με το πεδίο των πρωτογενών πηγών \bar{J} , \bar{K} , το οποίο δίνεται από τις εξισώσεις (18) και (20).

4. Αν στις επιφάνειες $z = +\infty$ και $z = -\infty$ εκτός από τα ρεύματα επιστροφής $-\hat{y}K_y^{+\infty}$ και $-\hat{y}K_y^{-\infty}$ είχαμε επιβάλλει πηγές με πυκνότητες $\hat{y}\tilde{K}_y^{+\infty}$ και $\hat{y}\tilde{K}_y^{-\infty}$, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $\tilde{K}_y^{+\infty} \neq \tilde{K}_y^{-\infty}$, τότε η συμβολή των δύο αυτών νέων πηγών στο πεδίο H_x θα ήταν σε κάθε θέση ίση με

$$\frac{\tilde{K}_y^{-\infty}}{2} - \frac{\tilde{K}_y^{+\infty}}{2} \neq 0$$

Η συμβολή αυτή υπερτίθεται στο πεδίο των πηγών \bar{K} και \bar{J} , που δίνουν οι εξισώσεις (18) και (20), οπότε πλέον η συνθήκη αντισυμμετρίας (15) για το συνολικό πεδίο παύει να ισχύει. Διατυπωμένη αλλιώς, η παρατήρηση αυτή σημαίνει ότι η συνθήκη (15) μας πληροφορεί για τη μορφή των πηγών που υπάρχουν στο άπειρο (για να ισχύει πρέπει $K_y^{+\infty, \text{ολικό}} = K_y^{-\infty, \text{ολικό}}$) και επέχει θέση **συνοριακής συνθήκης στο άπειρο** για την παρούσα απεριόριστη επίπεδη διάταξη.

B. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή

Για την εύρεση του πεδίου θα στηριχθούμε τώρα στις διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (23)$$

και στις οριακές συνθήκες

$$\hat{z} \cdot [\bar{\mathbf{B}}(z+) - \bar{\mathbf{B}}(z-)]_{z=\pm h} = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{B}_z(z+) = \mathbf{B}_z(z-)]_{z=\pm h} \quad (24)$$

$$\{\hat{z} \times [\bar{\mathbf{H}}(h+) - \bar{\mathbf{H}}(h-)] = 0, \hat{z} \times [\bar{\mathbf{H}}(-h+0) - \bar{\mathbf{H}}(-h-0)] = \bar{\mathbf{K}}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_y(h+) - H_y(h-) = 0, H_y(-h+0) - H_y(-h-0) = 0 \\ H_x(h+0) - H_x(h-0) = 0, H_x(-h+0) - H_x(-h-0) = K_y \end{cases} \quad (25\alpha)$$

$$(25\beta)$$

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε –τώρα με βάση την (22) και (23)– ότι το πεδίο έχει μόνο x-συνιστώσα. Προς τούτο, εργαζόμενοι στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z), αναλύουμε την (22) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial y=0} \frac{dH_y}{dz} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \xRightarrow{\partial/\partial x=0} \frac{dH_x(z)}{dz} = J_y(z) \quad (27)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \xRightarrow{\partial/\partial x=0=\partial/\partial y} 0=0 \text{ (ταυτότητα).}$$

Τέλος η (23) δίνει τη σχέση

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{dB_z(z)}{dz} = 0. \quad (28)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (24)-(28), που περιγράφουν το πεδίο, διαχωρίζονται σε δυο οικογένειες εξισώσεων οι οποίες είναι ασύζευκτες μεταξύ τους:

α. Η ομάδα εξισώσεων {(25β),(27)} αλληλοσυνδέει τις πηγές με την πεδιακή συνιστώσα H_x . Με βάση τις εξισώσεις αυτές υπολογίζεται η H_x όπως εξηγείται παρακάτω.

β. Οι εξισώσεις της οικογένειας {(24),(25α),(26),(28)} είναι όλες ομογενείς (δηλαδή δεν εμπλέκονται σε αυτές όροι πηγών). Από τις εξισώσεις αυτές συνάγεται ότι $H_y = 0$ και $H_z = 0$ παντού, με βάση τον παρακάτω συλλογισμό: Οι παραπάνω ομογενείς εξισώσεις, στις οποίες εμπλέκονται οι συνιστώσες H_y και H_z αποκλειστικά, ικανοποιούνται όλες από τη λύση $\{H_y = 0, H_z = 0\}$. Επομένως, αν η λύση που επιζητούμε είναι μοναδική, αυτή δεν μπορεί να είναι άλλη από την $H_y = 0, H_z = 0$. Εναλλακτικά, στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με άμεση επίλυση των εξισώσεων ως εξής:

Οι λύσεις των (26) και (28) για την περιοχή i (i=1,2,3) είναι οι

$$H_y^{(i)} = c_i = \text{σταθ.}, \quad B_z^{(i)} = d_i = \text{σταθ.} \quad (i=1,2,3).$$

Οι συνθήκες συνεχείας (24) και (25α) συνεπάγονται τις σχέσεις

$$c_1 = c_2 = c_3, \quad d_1 = d_2 = d_3$$

ενώ από τη συνέχεια των H_y και B_z στις τερματικές επιφάνειες $z=\pm\infty$ παίρνουμε

$$c_1 = 0 = c_3, \quad d_1 = 0 = d_3.$$

Επομένως $H_y = 0$ και $B_z = 0 \Rightarrow H_z = 0$ παντού.

Υπολογισμός του $H_x(z)$

Από την (27) με ολοκλήρωση προκύπτει η σχέση

$$H_x = \int J_y(z) dz + a \quad (29)$$

όπου a είναι σταθερά ολοκλήρωσεως. Στις περιοχές 1 και 3 είναι $J_y = 0$, οπότε

$$H_x^{(1)}(z) = a_1 \quad (30a)$$

$$H_x^{(3)}(z) = a_3. \quad (30b)$$

Για την περιοχή 2 η (29) γράφεται ισοδύναμα υπό τη μορφή

$$H_x^{(2)}(z) = \int_{-h}^z J_y(z') dz' + a_2 \quad (31)$$

Στις (30), (31) a_1, a_2, a_3 είναι προσδιοριστέες σταθερές ολοκλήρωσεως.

Μέσω των (30), (31) οι οριακές συνθήκες (25β) δίνουν

$$H_x^{(2)}(h) = H_x^{(1)}(h) \Rightarrow \int_{-h}^h J_y(z') dz' + a_2 = a_1 \quad (32)$$

$$H_x^{(2)}(-h) - H_x^{(3)}(-h) = K_y \Rightarrow a_2 - a_3 = K_y. \quad (33)$$

Για τον προσδιορισμό των τριών σταθερών a_1, a_2, a_3 χρειαζόμαστε μία ακόμα συνθήκη. Η συνθήκη αυτή είναι η συνθήκη στο άπειρο (βλέπε σχετική παρατήρηση παραπάνω) η οποία παίρνει τη μορφή της εξίσωσης (15):

$$H_x^{(1)}(+\infty) = -H_x^{(3)}(-\infty) \Rightarrow a_1 = -a_3. \quad (34)$$

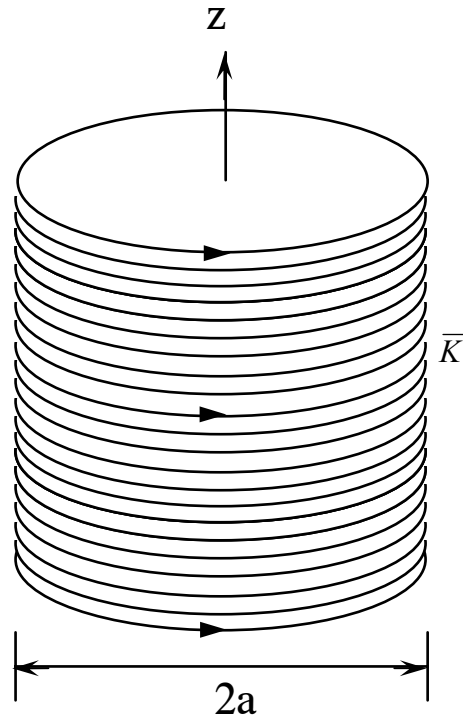
Λύνοντας το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα των (32)-(34) παίρνουμε

$$a_1 = \frac{1}{2} [K_y + \int_{-h}^h J_y(z') dz'] = -a_3, \quad a_2 = \frac{1}{2} [K_y - \int_{-h}^h J_y(z') dz']. \quad (35)$$

Τέλος, με αντικατάσταση από τις (35) στις (30), (31) βρίσκουμε τις τελικές εκφράσεις για την H_x , οι οποίες είναι ίδιες με αυτές των (18) και (20) όπως περιμέναμε.

7. Σωληνοειδές απείρου μήκους

Ομοιόμορφο χρονοσταθερό επιφανειακό ρεύμα $\bar{K} = \hat{\phi} K_0$ ρέει στην επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας a , ο οποίος έχει άπειρο μήκος (Σχ.1). Ζητάμε να βρούμε το διεγερόμενο μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο.



Σχήμα 1

A. Λύση με ολοκληρωτικές σχέσεις

Επειδή τόσο η διάταξη όσο και η πηγή έχουν κυλινδρική συμμετρία και είναι απεριόριστες κατά τον άξονα των z , το πεδίο θα είναι ανεξάρτητο των μεταβλητών ϕ και z , δηλαδή

$$\vec{H} = \vec{H}(r) \quad (1)$$

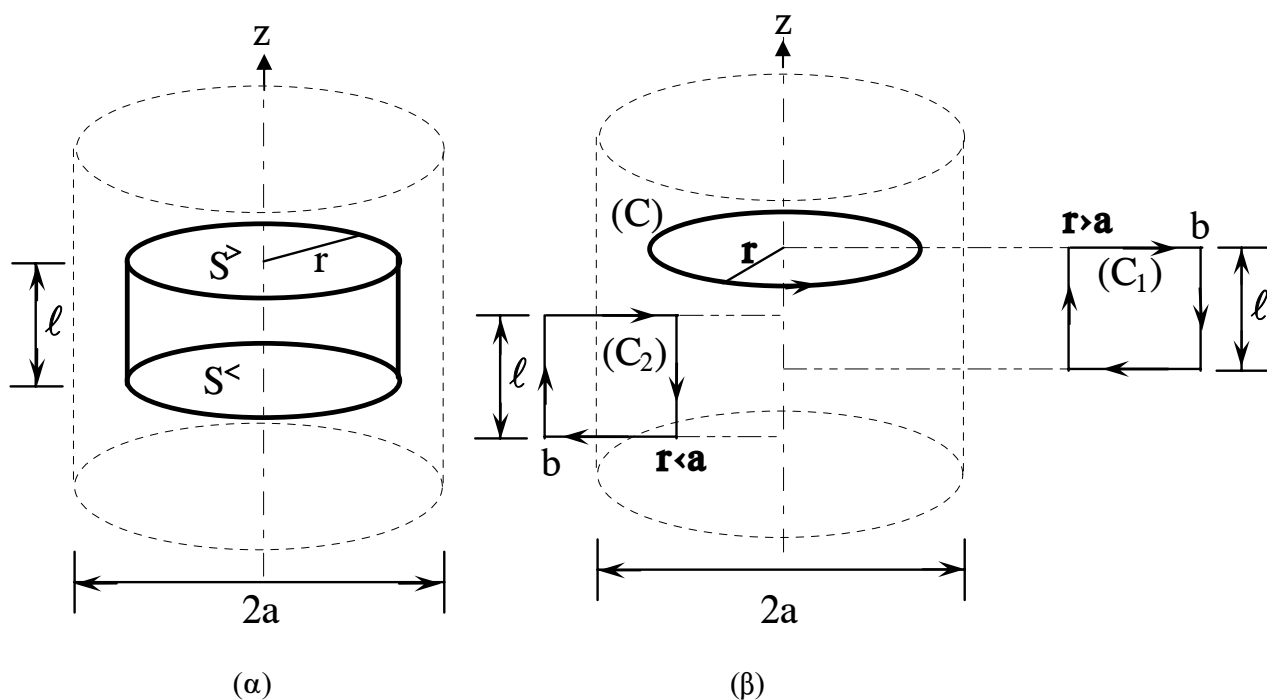
Θα αποδείξουμε τώρα ότι το πεδίο έχει μόνο z -συνιστώσα, ως εξής:

Ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

με επιφάνεια ολοκληρώσεως την κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r και μήκους ℓ που δείχνει το Σχ.2α, δίνει με τη βοήθεια της (1) τη σχέση:

$$B_r(r)2\pi r\ell + \int_{0(S^+)}^r B_z(r')2\pi r'dr' - \int_{0(S^-)}^r B_z(r')2\pi r'dr' = 0 \Rightarrow B_r(r)2\pi r\ell = 0 \Rightarrow B_r(r) = 0. \quad (2)$$



Σχήμα 2

Ο νόμος του Ampere,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C,$$

με δρόμο ολοκληρώσεως τον κυκλικό βρόχο (C) ακτίνας r που δείχνει το Σχ.2β δίνει τη σχέση:

$$H_\varphi(r)2\pi r = 0 \Rightarrow H_\varphi(r) = 0. \quad (3)$$

Για να βρούμε την τιμή της μοναδικής συνιστώσας του πεδίου, H_z , εφαρμόζουμε πρώτα το νόμο του Ampere για τον ορθογωνικό βρόχο (C_1) που δείχνει το Σχ.2β. Ο βρόχος αυτός, που έχει τις κατακόρυφες πλευρές του σε αποστάσεις $r(> a)$ και $b(> a)$ από τον άξονα του κυλίνδρου, βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τον άξονα και εξ ολοκλήρου εκτός του σωληνοειδούς. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η σχέση

$$H_z(r)\ell = H_z(b)\ell \Rightarrow H_z(r) = H_z(b) \Rightarrow H_z(r) = c \quad (r>a) \quad (4)$$

όπου c σταθερά. Λόγω της συνθήκης στο άπειρο, $H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, η τιμή της σταθεράς c είναι μηδενική και επομένως

$$H_z(r) = 0 \quad (r>a). \quad (5)$$

Τέλος, με εφαρμογή του νόμου του Ampere για τον ορθογωνικό βρόχο (C_2) (Σχ.2β), ο οποίος έχει τις κατακόρυφες πλευρές του σε αποστάσεις $r(< a)$ και $b(> a)$ από τον άξονα του κυλίνδρου, με τον οποίο είναι συνεπίπεδος, παίρνουμε τη σχέση

$$-H_z(r)\ell + H_z(b>a)\ell = -K_0\ell \Rightarrow H_z(r) = K_0 \quad (r<a). \quad (6)$$

Επομένως

$$H_z(r) = \begin{cases} K_0 & (0 < r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}. \quad (7)$$

B. Λύση με σημειακές σχέσεις

Το πεδίο περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (9)$$

και τις οριακές συνθήκες

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{H}}(a+) - \bar{\mathbf{H}}(a-)] = \bar{\mathbf{K}} \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\mathbf{B}}(a+) - \bar{\mathbf{B}}(a-)] = 0 \Leftrightarrow B_r(a+) = B_r(a-). \quad (11)$$

Λόγω της συμμετρίας της πηγής και της διατάξεως, ισχύει ότι

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}(r). \quad (12)$$

Συνιστώσες του πεδίου

Θα αποδείξουμε -τώρα με χρήση των σημειακών σχέσεων- ότι το πεδίο έχει μόνο z-συνιστώσα. Προς τούτο αναλύουμε την (8) στις παρακάτω τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = J_r = 0 \quad \xRightarrow{\partial / \partial \phi = 0 = \partial / \partial z} 0 = 0 \quad (\text{ταυτότητα})$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\phi = 0 \quad \xRightarrow{\partial / \partial z = 0} \frac{dH_z(r)}{dr} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = J_z = 0 \quad \xRightarrow{\partial / \partial \phi = 0} \frac{d[rH_\phi(r)]}{dr} = 0. \quad (14)$$

Τέλος από την (9) παροκύπτει ότι

$$\frac{1}{r} \frac{\partial [rB_r(r)]}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial [B_\phi(r)]}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z(r)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d[rB_r(r)]}{dr} = 0. \quad (15)$$

Ολοκληρώνοντας την (14) παίρνουμε

$$H_\phi(r) = \begin{cases} b_1 / r & (0 < r < a) \\ b_2 / r & (a < r < \infty) \end{cases} \quad (16)$$

όπου b_1 και b_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $H_\phi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ η συνθήκη συνέχειας στα σημεία της κυλινδρικής επιφάνειας $r = a$, $H_\phi(a+) = H_\phi(a-)$, οδηγεί στη σχέση $b_1 = b_2$. Η οριακή συνθήκη στη θέση $r=0$ δίνει $b_1 = 0$ (αλλιώς το πεδίο απειρίζεται στα σημεία του άξονα του σωληνοειδούς, κάτι το οποίο είναι αφύσικο αφού δεν υπάρχουν εκεί γραμμικές πηγές). Επομένως $H_\phi(r) = 0$ παντού.

Ομοίως, με ολοκλήρωση της (15) παίρνουμε

$$B_r(r) = \begin{cases} d_1 / r & (0 < r < a) \\ d_2 / r & (a < r < \infty) \end{cases} \quad (17)$$

όπου d_1 και d_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $B_r(r) \rightarrow 0$, ικανοποιείται αυτομάτως, ενώ η συνθήκη συνέχειας $B_r(a+) = B_r(a-)$ οδηγεί στη σχέση $d_1 = d_2$. Η οριακή συνθήκη⁷ στη θέση $r=0$, $\lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r B_r) = 0$, δίνει $d_1 = 0$ (αλλιώς το πεδίο θα απειρίζετο στα σημεία του άξονα του σωληνοειδούς). Επομένως $B_r(r) = 0$ παντού.

Η μοναδική συνιστώσα του πεδίου θα βρεθεί μέσω της (13), η οποία με ολοκλήρωση δίνει για τις περιοχές 1 ($r < a$) και 2 ($r > a$) τη γενική λύση

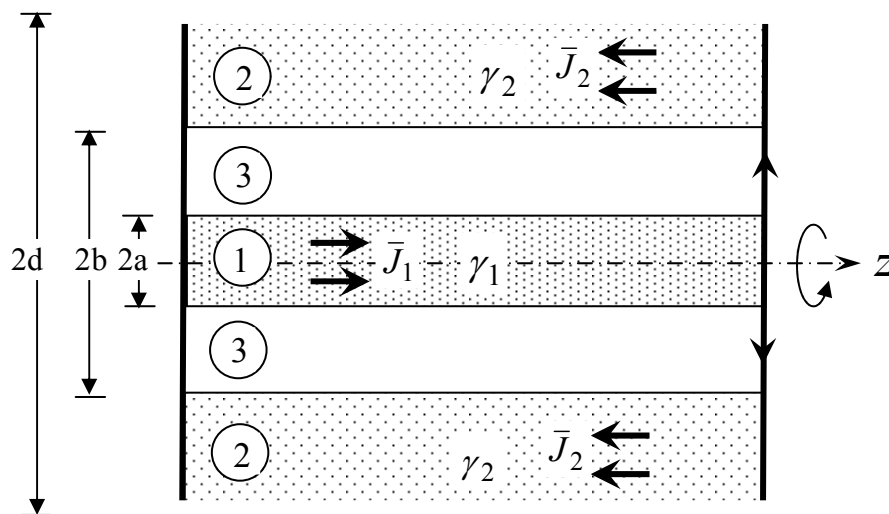
$$H_z(r) = \begin{cases} c_1 & (0 < r < a) \\ c_2 & (a < r < \infty) \end{cases} \quad (18)$$

όπου c_1 και c_2 είναι προσδιοριστέες, με βάση τις οριακές συνθήκες, σταθερές. Η οριακή συνθήκη στο άπειρο, $H_z(r) \rightarrow 0$, δίνει $c_2 = 0$, ενώ η οριακή συνθήκη (10): $H_z(a+) - H_z(a-) = -K_0$ οδηγεί στη σχέση $c_1 = K_0$. Επομένως

$$H_z(r) = \begin{cases} K_0 & (0 < r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}. \quad (19)$$

~~8. Ηλεκτρομαγνητοστατικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού~~

~~Θεωρούμε (Σχ.1) κυλινδρικό αγωγό απείρου μήκους, ακτίνας a και σταθερής ειδικής αγωγιμότητας γ_1 , ο οποίος διαρρέεται από χρονοσταθερό ρεύμα έντασης I . Η επιστροφή του ρεύματος γίνεται μέσω ομοαξονικού κυλινδρικού αγωγού απείρου μήκους και ειδικής αγωγιμότητας γ_2 , ο οποίος έχει εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα d , όπου $d \rightarrow \infty$. Να βρεθούν τα διεγερόμενα στη διάταξη πεδία καθώς και οι πυκνότητες των φορτίων και των ρευμάτων παντού όπου αυτά υπάρχουν. (Η διηλεκτρική σταθερά είναι παντού ϵ).~~



~~Σχήμα 1~~

⁷ Βλέπε υποσημείωση 5.

~~Από την (18) διαπιστώνεται αμέσως ότι το πεδίο \vec{E} είναι αστρόβιλο ($\nabla \times \vec{E} = 0$), οπότε από τον νόμο των Maxwell Faraday,~~

~~$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (19)$$~~

~~συνάγεται ότι $\partial \vec{B} / \partial t = 0$, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο είναι χρονοσταθερό. Το χρονοσταθερό αυτό μαγνητικό πεδίο περιγράφεται με τον νόμο Maxwell Ampere~~

~~$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (20)$$~~

~~για όλα τα σημεία εκτός του θετικού ημιάξονα των z. Ο όρος διεγέρσεως,~~

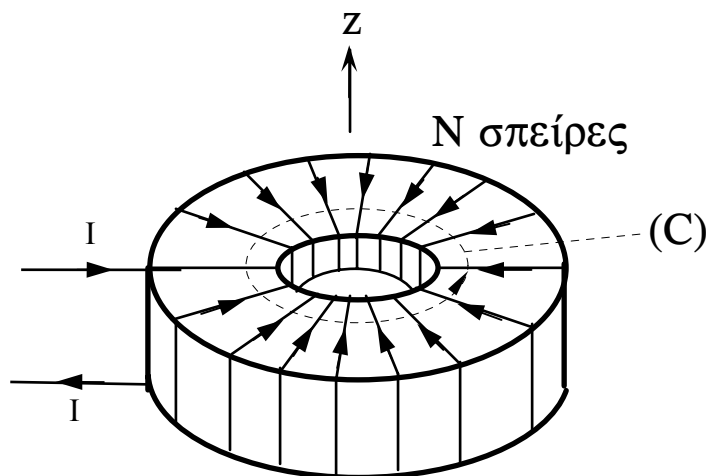
~~$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (21)$$~~

~~(ρεύμα μετατοπίσεως) έχει την ίδια μορφή με τον όρο \vec{J} της (1). Η λύση της (20), που λόγω της (21) παίρνει τη μορφή $\nabla \times \vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}$, δόθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα με κατάληξη τη σχέση (16):~~

~~$$\vec{H}_\varphi = \frac{-I(1 + \cos\theta)}{4\pi r \sin\theta}.$$~~

Παράδειγμα 3. Δακτυλειοδές πηνίο με διατομή αυθαίρετης μορφής

Στο Σχ.4 δείχνουμε ένα δακτύλιο (τοροειδές εκ περιστροφής). Η διατομή του δακτυλίου αυτού μπορεί να είναι οποιασδήποτε μορφής (ορθογωνική, όπως στο σχήμα, κυκλική ή άλλη). Νηματοειδής μονωμένος ρευματοφόρος αγωγός τυλίγεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια του δακτυλίου έτσι ώστε οι διαδοχικές σπείρες να ευρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους. Με αυτές τις προϋποθέσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ρεύμα κυκλοφορεί ως επιφανειακό σε κλειστούς βρόχους και, συνεπώς, μπορούμε να αμελήσουμε τη ρευματική συνιστώσα κατά την κατεύθυνση $\hat{\phi}$. Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο.



Σχήμα 4

Λύση

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε ότι

$$\vec{K} = \hat{r}K_r(r, z) + \hat{z}K_z(r, z) \quad (22)$$

οπότε το διεγειρόμενο στη διάταξη μαγνητικό πεδίο θα έχει μόνο $\hat{\phi}$ συνιστώσα. Το μαγνητικό αυτό πεδίο θα βρεθεί με εφαρμογή του νόμου του Ampere

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C,$$

όπου C είναι ο κύκλος ο οποίος: α) διέρχεται από το σημείο παρατήρησης (r, φ, z), β) έχει το κέντρο του στον άξονα των z και γ) το επίπεδό του είναι κάθετο στον άξονα αυτόν. Το ρεύμα I_C στο δεύτερο μέλος είναι το συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα που εμπλέκει τον κύκλο C. Το τελικό αποτέλεσμα για το πεδίο είναι

$$\vec{H}(r, \phi, z) = \hat{\phi} H_\phi(r) = \begin{cases} -\frac{NI}{2\pi r} \hat{\phi}, & (r, \phi, z) \in V \\ 0, & (r, \phi, z) \notin V \end{cases} \quad (23)$$

όταν το σημείο παρατήρησης (r, φ, z) βρίσκεται στο εσωτερικό (V) του δακτυλίου ή εκτός αυτού, αντίστοιχα. Στην (23), N είναι ο αριθμός των σπειρών του πηνίου.

Στην περίπτωση που το μέσο έχει απώλειες ($\gamma \neq 0$), τα πεδία \vec{E} και \vec{H} ικανοποιούν γενικευμένες κυματικές εξισώσεις, των οποίων η εξαγωγή αφήνεται ως άσκηση.

Παρατήρηση

Οι κυματικές εξισώσεις (8) και (9) αποτελούν συνέπεια των εξισώσεων Maxwell, χωρίς να είναι κατ' ανάγκην ισοδύναμες προς αυτές [επειδή προέκυψαν με περαιτέρω παραγωγή των βασικών εξισώσεων (1) και (2)]. Αυτό σημαίνει ότι, όταν οι (8) και (9) χρησιμοποιούνται για την επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, πρέπει να ελέγχεται κατά πόσο οι λύσεις τους ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell.

10. Εξισώσεις Maxwell για μονοχρωματικά πεδία [ανάλυση στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (ΗΜΚ)]

10.1 Γενικά

Θεωρούμε **γραμμικό** μέσο και υποθέτουμε ότι όλες οι πηγές του πεδίου είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, κυκλικής συχνότητας ω .

Λόγω της γραμμικότητας των εξισώσεων Maxwell και του μέσου, η μόνιμη απόκριση (δηλαδή το διεγερόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, μετά την παρέλευση του μεταβατικού φαινομένου το οποίο αρχίζει τη στιγμή που επιβάλλονται οι πηγές) θα είναι επίσης ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, της ίδιας κυκλικής συχνότητας (ω).

Η παραπάνω υπόθεση για τη μορφή της χρονικής εξαρτήσεως των πηγών (και του πεδίου) γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, η λύση προβλημάτων στα οποία η χρονική εξάρτηση των πηγών είναι περισσότερο πολύπλοκη (όπως, π.χ., παλμοί) μπορεί να γίνει εύκολα αν, α) όλες οι διεγέρσεις αναπαρασταθούν μέσω σειρών (ή ολοκληρωμάτων) Fourier, β) βρεθεί η απόκριση κάθε μιας από τις αρμονικές των σειρών αυτών και γ) προστεθούν (υπερτεθούν) όλες οι επί μέρους αποκρίσεις.

Από μαθηματικής απόψεως, η εξαιρετική σπουδαιότητα των αρμονικών (ημιτονοειδών) διεγέρσεων έγκειται στο ότι οι χρονικές παράγωγοι, που υπάρχουν στις εξισώσεις Maxwell, δίνουν επίσης αρμονικές συναρτήσεις. Το γεγονός αυτό καθιστά δυνατή την απαλοιφή της χρονικής μεταβλητής t από το σύνολο των εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητικού προτύπου, στις οποίες πλέον εμπλέκονται μόνο οι χωρικές μεταβλητές. Το τίμημα για το σημαντικό αυτό πλεονέκτημα είναι ότι τα διάφορα μεγέθη που εμπλέκονται στις μετασχηματισμένες εξισώσεις είναι τώρα μιγαδικές ποσότητες.

10.2 Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί ημιτονοειδώς μεταβαλλομένων μεγεθών

Τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν κάθε ημιτονοειδές μέγεθος, της μορφής

$$a(x, y, z; t) = A(x, y, z) \cos[\omega t + \phi(x, y, z)], \quad (1)$$

είναι το πλάτος του A , η κυκλική συχνότητα ω και η αρχική του φάση ϕ .

Από το άλλο μέρος, αν όλες οι πηγές ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που διεγείρεται σε γραμμικό μέσο έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω , τότε, όπως προαναφέραμε, όλα τα πεδιακά μεγέθη θα μεταβάλλονται επίσης με την κυκλική συχνότητα ω σε κάθε σημείο του πεδίου. Επειδή οι επιβαλλόμενες πηγές είναι δεδομένες, η κυκλική συχνότητα θεωρείται γνωστή.

Σε μια περίπτωση, όπως η παραπάνω, όπου διάφορες ημιτονοειδείς ποσότητες έχουν όλες την ίδια κυκλική συχνότητα ω , τα χαρακτηριστικά που τις διαστέλλουν μεταξύ τους είναι α) το πλάτος και β) η αρχική φάση καθεμιάς. Αυτό, διατυπωμένο αλλιώς, σημαίνει ότι γνώση των δυο μεγεθών $A(x, y, z)$ και $\phi(x, y, z)$ ισοδυναμεί με πλήρη προσδιορισμό του ημιτονοειδούς μεγέθους $a(x, y, z; t)$.

Στην παρατήρηση αυτή θα στηριχθεί παρακάτω η εισαγωγή του **παραστατικού μιγαδικού ή φασιθέτη (phasor)** [σύμβολο $\hat{a}(x, y, z)$], ο οποίος αναπαριστάνει το ημιτονοειδές μέγεθος $a(x, y, z; t)$ και αποτελεί βασικό εργαλείο για την ανάλυση προβλημάτων στην ημιτονική μόνιμη κατάσταση. Η ανάγκη εισαγωγής του μιγαδικού αυτού μεγέθους προέρχεται από το γεγονός ότι η αναπαράσταση (1), παρ' ότι απλή και οικεία, δεν είναι πρόσφορη για το σκοπό αυτό.

Μέσω της σχέσεως

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (2)$$

προκύπτει ότι

$$\cos\theta = \operatorname{Re}\{e^{j\theta}\}, \quad (3)$$

όπου με $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ συμβολίζουμε, ως συνήθως, το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού.

Με χρήση της (3), μια εναλλακτική έκφραση του μεγέθους $\alpha(x,y,z;t)$ στην (1) είναι η

$$\alpha(x,y,z;t) = \operatorname{Re}\{A(x,y,z)e^{j[\omega t + \phi(x,y,z)]}\} = \operatorname{Re}\{[A(x,y,z)e^{j\phi(x,y,z)}]e^{j\omega t}\}. \quad (4)$$

Η μιγαδική ποσότητα

$$\dot{\alpha}(x,y,z) = A(x,y,z)e^{j\phi(x,y,z)}, \quad (5)$$

που υπάρχει στην τελευταία έκφραση της (4), εμπεριέχει και τα δυο μεγέθη (A, ϕ) που χαρακτηρίζουν πλήρως το υπ' αναφορά ημιτονοειδές μέγεθος (η κυκλική συχνότητα ω θεωρείται γνωστή, όπως προαναφέραμε). Πρόκειται για χαρακτηριστική ποσότητα, που ονομάζεται **παραστατικός μιγαδικός** του ημιτονοειδούς μεγέθους $\alpha(x,y,z;t)$. Προφανώς υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των α και $\dot{\alpha}$. Έτσι, αν γνωρίζουμε το πλάτος $A(x,y,z)$ και την φάση $\phi(x,y,z)$ του μιγαδικού $\dot{\alpha}$, προκύπτει αμέσως με αντικατάσταση στην (1) η έκφραση του ημιτονοειδούς μεγέθους $\alpha(x,y,z;t)$ και αντιστρόφως.

10.3 Ιδιότητες του τελεστή $\operatorname{Re}\{\dot{\alpha}e^{j\omega t}\}$

Η χρησιμότητα της παραπάνω εναλλακτικής αναπαράστασης (4)-(5) μιας ημιτονοειδούς συναρτήσεως στηρίζεται στις εξής τρεις ιδιότητες του τελεστή $\operatorname{Re}\{\dot{\alpha}e^{j\omega t}\}$:

$$A. \operatorname{Re}[c_1(\dot{\alpha}_1e^{j\omega t}) + c_2(\dot{\alpha}_2e^{j\omega t})] = c_1 \operatorname{Re}(\dot{\alpha}_1e^{j\omega t}) + c_2 \operatorname{Re}(\dot{\alpha}_2e^{j\omega t}) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \quad (6)$$

$$B. \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\dot{\alpha}_1e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(j\omega \dot{\alpha}_1e^{j\omega t}) \quad (7)$$

$$\Gamma. \operatorname{Re}(\dot{\alpha}_1e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\dot{\alpha}_2e^{j\omega t}) \Leftrightarrow \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 \quad (8)$$

των οποίων η απόδειξη είναι απλή και αφήνεται ως άσκηση.

10.4 Μετασχηματισμός των πεδιακών εξισώσεων με χρήση φασιθετών

Υποθέτουμε ότι

α) όλες οι πηγές είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, κυκλικής συχνότητας ω .

β) Το μέσο είναι γραμμικό.

Υπό τις προϋποθέσεις αυτές, όλες οι συνιστώσες του διεγειρομένου ΗΜ πεδίου θα είναι επίσης ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, κυκλικής συχνότητας ω .

Με χρήση παραστατικών μιγαδικών προκύπτουν οι αναπαράστασεις

$$\rho(x,y,z;t) = \operatorname{Re}[\dot{\rho}(x,y,z)e^{j\omega t}], \quad \bar{J}(x,y,z;t) = \operatorname{Re}[\dot{\bar{J}}(x,y,z)e^{j\omega t}], \quad (9)$$

των πηγών, και

$$\begin{aligned} \bar{G}(x,y,z;t) &\equiv \hat{x}G_x + \hat{y}G_y + \hat{z}G_z = \operatorname{Re}\{[\hat{x}\dot{G}_x(x,y,z) + \hat{y}\dot{G}_y(x,y,z) + \hat{z}\dot{G}_z(x,y,z)]e^{j\omega t}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{\dot{\bar{G}}(x,y,z)e^{j\omega t}\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$(\bar{\mathbf{G}} \equiv \bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{B}})$$

του πεδίου, όπου με $\dot{\bar{\mathbf{G}}}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα

$$\dot{\bar{\mathbf{G}}} = \hat{x}\dot{\bar{G}}_x + \hat{y}\dot{\bar{G}}_y + \hat{z}\dot{\bar{G}}_z. \quad (11)$$

A. Εξισώσεις Maxwell

Με χρήση παραστατικών μιγαδικών ο νόμος Maxwell-Faraday γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla \times \text{Re}(\dot{\bar{\mathbf{E}}}e^{j\omega t}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \text{Re}(\dot{\bar{\mathbf{B}}}e^{j\omega t}) \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \text{Re}[\nabla \times \dot{\bar{\mathbf{E}}}e^{j\omega t}] = \text{Re}(-j\omega \dot{\bar{\mathbf{B}}}e^{j\omega t}) \stackrel{(8)}{\Rightarrow} \\ \nabla \times \dot{\bar{\mathbf{E}}} &= -j\omega \dot{\bar{\mathbf{B}}} \end{aligned} \quad (12)$$

Ομοίως ο νόμος Maxwell-Ampere, οι νόμοι του Gauss και η εξίσωση συνέχειας παίρνουν την παρακάτω μορφή, αντίστοιχα, απαλλαγμένα από τη χρονική μεταβλητή t :

$$\nabla \times \dot{\bar{\mathbf{H}}} = \dot{\bar{\mathbf{J}}} + j\omega \dot{\bar{\mathbf{D}}} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{D}}} = \dot{\rho} \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{B}}} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{J}}} + j\omega \dot{\rho} = 0. \quad (16)$$

B. Οριακές συνθήκες

Με τον ίδιο όπως παραπάνω τρόπο προκύπτει ότι με χρήση παραστατικών μιγαδικών οι οριακές συνθήκες γράφονται υπό τη μορφή:

$$\hat{n} \times (\dot{\bar{\mathbf{E}}}_2 - \dot{\bar{\mathbf{E}}}_1) = 0 \quad (17)$$

$$\hat{n} \cdot (\dot{\bar{\mathbf{D}}}_2 - \dot{\bar{\mathbf{D}}}_1) = \dot{\sigma} \quad (18)$$

$$\hat{n} \times (\dot{\bar{\mathbf{H}}}_2 - \dot{\bar{\mathbf{H}}}_1) = \dot{\bar{\mathbf{K}}} \quad (19)$$

$$\hat{n} \cdot (\dot{\bar{\mathbf{B}}}_2 - \dot{\bar{\mathbf{B}}}_1) = 0 \quad (20)$$

$$\hat{n} \cdot (\dot{\bar{\mathbf{J}}}_2 - \dot{\bar{\mathbf{J}}}_1) = -j\omega \dot{\sigma} - \nabla_s \cdot \dot{\bar{\mathbf{K}}}. \quad (21)$$

Στην εξίσωση (21), ο παράγων $j\omega$ αντικατέστησε την παράγωγο $\partial / \partial t$ που υπάρχει στην αντίστοιχη διατύπωση της οριακής συνθήκης στο πεδίο του χρόνου.

Παρατήρηση: Με βάση την εξίσωση (2) είναι προφανές ότι, κατ' αναλογία με την (3), μπορούμε, ισοδύναμα, να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή $Im(\dots)$ –που εκφράζει το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού– αντί του τελεστή $Re(\dots)$, στις προηγούμενες σχέσεις.

Γ. Κυματικές εξισώσεις

Ομοίως, με χρήση παραστατικών μιγαδικών, οι κυματικές εξισώσεις (9.8) και (9.9) μετασχηματίζονται στις σχέσεις

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = j\omega\mu\dot{\vec{J}} + \frac{\nabla\dot{\rho}}{\varepsilon} = j\omega\mu\dot{\vec{J}} - \frac{\nabla(\nabla\cdot\dot{\vec{J}})}{j\omega\varepsilon} \quad (22)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = -\nabla \times \dot{\vec{J}} \quad (23)$$

όπου

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

είναι ο κυματαριθμός του χώρου (ε, μ). Κατά το τελευταίο βήμα στην (22) χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση συνεχείας, $\nabla \cdot \dot{\vec{J}} + j\omega\dot{\rho} = 0$. Οι σχέσεις (22) και (23) είναι γνωστές ως **διανυσματικές εξισώσεις του Helmholtz**.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Οι εξισώσεις Maxwell στην HMK προκύπτουν από τις αντίστοιχες εκφράσεις των εξισώσεων αυτών στο πεδίο του χρόνου με την αντικατάσταση

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

παντού, και την αντικατάσταση όλων των εμπλεκόμενων μεγεθών με τους αντίστοιχους παραστατικούς μιγαδικούς.

10.5 Γενίκευση: Εξισώσεις Maxwell για αυθαίρετη χρονική μεταβολή- ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας

Όπως προαναφέρθηκε, το ιδιαίτερα σημαντικό πλεονέκτημα που μας προσπορίζει η χρήση των φασιθετών στην ανάλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων για αρμονικά πεδία είναι η δυνατότητα απαλοιφής της χρονικής μεταβλητής t από το σύνολο των εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητικού προτύπου. Τι γίνεται όμως όταν οι πηγές (άρα και τα πεδία) δεν έχουν αρμονική (δηλαδή ημιτονική) χρονική μεταβολή;

Ευτυχώς, με μια ελαφρά τροποποίηση, η παραπάνω ανάλυση γενικεύεται εύκολα ώστε να συμπεριλάβει περιπτώσεις αυθαίρετης χρονικής μεταβολής. Η βασική ιδέα είναι ιδιαίτερα απλή: Αναλύοντας τις πηγές κατά Fourier σε μια σειρά (ή ολοκλήρωμα) αρμονικών συναρτήσεων, βρίσκουμε τις αποκρίσεις (δηλαδή τα πεδία) που διεγείρονται από κάθε τέτοια αρμονική χωριστά. Τελικά με επαλληλία⁹ μπορούμε να βρούμε την πλήρη απόκριση.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι το βασικό εργαλείο για την γενίκευση που επιχειρούμε είναι ο απλός - ως προς τη χρονική μεταβλητή t - μετασχηματισμός Fourier. Ο ευθύς (ως προς t) μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του ορίζονται, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

$$\dot{G}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (24)$$

$$G(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (25)$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα των μετασχηματισμών Fourier είναι η σχέση

⁹ Υποτίθεται ότι το μέσο είναι γραμμικό ώστε να ισχύει η αρχή της επαλληλίας για τις αποκρίσεις.

$$\frac{\partial G(\vec{r}, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \dot{G}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow F\left\{\frac{\partial G(\vec{r}, t)}{\partial t}\right\} = j\omega \dot{G}(\vec{r}, \omega) \quad (26)$$

που δίνει τον μετασχηματισμό της παραγώγου μιας συναρτήσεως.

Με χρήση μετασχηματισμών Fourier, η εξίσωση Maxwell-Faraday, $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla \times \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \xRightarrow{(26)} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega = -\int_{-\infty}^{\infty} j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) + j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r}, \omega)] e^{j\omega t} d\omega = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Αν ο μετασχηματισμός Fourier μιας συναρτήσεως είναι μηδενικός, τότε και η ίδια η συνάρτηση πρέπει να είναι μηδενική. Επομένως, από την (27) προκύπτει η σχέση

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} + j\omega \dot{\vec{B}} = 0.$$

Βλέπουμε ότι οι μετασχηματισμοί Fourier $\dot{\vec{E}}$ και $\dot{\vec{B}}$ ικανοποιούν τη σχέση (12). Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι οι μετασχηματισμοί Fourier των αντίστοιχων μεγεθών ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις (13)-(23) της προηγούμενης ενότητας 10.4.

Σημείωση: Στην περίπτωση μονοχρωματικών πεδίων, οι φασιθέτες αποτελούν στην πραγματικότητα τους μετασχηματισμούς Fourier (ως προς τον χρόνο) των πεδιακών μεγεθών. Με άλλα λόγια, η ανάλυση που παρουσιάσαμε στην ενότητα 10.4 μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση της γενικότερης ανάλυσης που παρουσιάσαμε στην παρούσα ενότητα. Οι φασιθέτες είναι και αυτοί (όπως ακριβώς οι μετασχηματισμοί Fourier) συναρτήσεις της συχνότητας, όπως διαπιστώνεται με επισκόπηση των εξισώσεων (12)-(16) στις οποίες εμπλέκεται άμεσα η συχνότητα ω . Για τούτο όταν καταστρώνουμε και λύνουμε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα χρησιμοποιώντας φασιθέτες, λέμε ότι εργαζόμαστε *στο πεδίο της συχνότητας* (ή, γενικότερα, στο πεδίο των μετασχηματισμών Fourier).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η ανάλυση γραμμικών ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων μπορεί να γίνει με τα ίδια ακριβώς εργαλεία στο πεδίο της συχνότητας, τόσο για αρμονικά πεδία όσο και γενικότερα για πεδία αυθαίρετης χρονικής μεταβολής.

10.6. Συντακτικές σχέσεις

A. Μέσα χωρίς διασπορά

Έστω απλό μέσο με χρονοσταθερές συντακτικές παραμέτρους (ϵ, μ, γ). Οι παράμετροι αυτές είναι δυνατόν να είναι συναρτήσεις της θέσεως (x, y, z), δηλαδή το μέσο μπορεί να είναι ανομοιογενές.

Ξεκινώντας από τη συντακτική σχέση

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

με χρήση των ιδιοτήτων (6)-(8) του τελεστή $\text{Re}\{\cdot\}$ προκύπτει διαδοχικά ότι

$$\text{Re}[\dot{\bar{D}}e^{j\omega t}] = \varepsilon \text{Re}[\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}] \stackrel{(6)}{=} \text{Re}[\varepsilon \dot{\bar{E}}e^{j\omega t}] \stackrel{(8)}{=} \dot{\bar{D}} = \varepsilon \dot{\bar{E}}. \quad (28)$$

(**Σημείωση:** Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν εργαστούμε με βάση τον μετασχηματισμό Fourier σύμφωνα με τα παραπάνω).

Εντελώς ανάλογα, από τις συντακτικές σχέσεις

$$\bar{B} = \mu \bar{H}$$

και

$$\bar{J}_c = \gamma \bar{E}$$

προκύπτουν οι σχέσεις

$$\dot{\bar{B}} = \mu \dot{\bar{H}} \quad (29)$$

$$\dot{\bar{J}}_c = \gamma \dot{\bar{E}}. \quad (30)$$

Παρατηρούμε ότι οι συντακτικές σχέσεις, διατυπωμένες με χρήση των παραστατικών μιγαδικών (ή μετασχηματισμών Fourier) των εμπλεκόμενων μεγεθών, διατηρούν την αρχική τους μορφή αλλά είναι πλέον απαλλαγμένες από τη χρονική μεταβλητή t .

Τα παραπάνω επεκτείνονται αμέσως σε γενικευμένα μέσα χωρίς διασπορά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός δις-ανισοτροπικού μέσου που περιγράφεται με τις χρονοσταθερές συντακτικές παραμέτρους $(\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}, \bar{\xi}, \bar{\zeta})$, οι αντίστοιχες προς τις (28) και (29) σχέσεις έχουν τώρα τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\bar{D}} &= \bar{\varepsilon} \dot{\bar{E}} + \bar{\xi} \dot{\bar{H}} \\ \dot{\bar{B}} &= \bar{\zeta} \dot{\bar{E}} + \bar{\mu} \dot{\bar{H}} \end{aligned} \quad (31)$$

B. Μέσα με χρονική διασπορά

Όταν το μέσο εμφανίζει χρονική διασπορά, οι συντακτικές σχέσεις -γραμμένες στο πεδίο του χρόνου- είναι εξαιρετικά περίπλοκες (βλέπε εξισώσεις (49) και (50) παρακάτω). Αντίθετα, η περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας (με χρήση, δηλαδή, φασισθετών ή μετασχηματισμών Fourier) έχει -εκτός από την ευκολία που παρέχει η απαλοιφή της χρονικής μεταβλητής t - το μεγάλο πλεονέκτημα ότι οι συντακτικές σχέσεις διατηρούν την απλή αλγεβρική μορφή που βρήκαμε στην προηγούμενη ενότητα [εξισώσεις (28)-(31)]. Πιο συγκεκριμένα, για ισοτροπικά μέσα οι συντακτικές σχέσεις στο πεδίο της συχνότητας έχουν τη μορφή

$$\dot{\bar{D}}(\bar{r}; \omega) = \varepsilon(\omega) \dot{\bar{E}}(\bar{r}; \omega) \quad (32)$$

$$\bar{B}(\bar{r}; \omega) = \mu(\omega) \dot{\bar{H}}(\bar{r}; \omega) \quad (33)$$

$$\dot{\bar{J}}_c(\bar{r}; \omega) = \gamma(\omega) \dot{\bar{E}}(\bar{r}; \omega) \quad (34)$$

όπου $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\bar{r}; \omega)$, $\mu(\omega) = \mu(\bar{r}; \omega)$, $\gamma(\omega) = \gamma(\bar{r}; \omega)$ είναι **μιγαδικά** μεγέθη τα οποία είναι συναρτήσεις της κυκλικής συχνότητας ω .

Στη γενικότερη περίπτωση δις-ανιστροπικών μέσων με χρονική διασπορά (τα οποία περιλαμβάνουν ως ειδικές περιπτώσεις τα ανιστροπικά και τα δις-ισοτροπικά μέσα) οι συντακτικές σχέσεις μεταξύ των φασιθετών των πεδιακών μεγεθών έχουν τη μορφή:

$$\dot{\vec{D}}(\vec{r}; \omega) = \bar{\bar{\epsilon}}(\omega) \dot{\vec{E}}(\vec{r}; \omega) + \bar{\bar{\xi}}(\omega) \dot{\vec{H}}(\vec{r}; \omega). \quad (35\alpha)$$

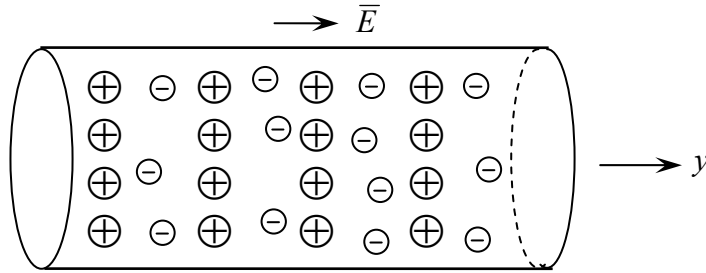
$$\vec{B}(\vec{r}; \omega) = \bar{\bar{\zeta}}(\omega) \dot{\vec{E}}(\vec{r}; \omega) + \bar{\bar{\mu}}(\omega) \dot{\vec{H}}(\vec{r}; \omega). \quad (35\beta)$$

Στο σημείο αυτό παρεκκλίνουμε της πορείας μας για να δόσουμε ένα παράδειγμα εξαγωγής της συντακτικής σχέσεως (34) στην περίπτωση ενός απλού (ισοτροπικού, ομοιογενούς) αγωγού.

Παράδειγμα: Εξαγωγή της συντακτικής σχέσεως (34) για απλούς αγωγούς.

Θεωρούμε ότι ο κυλινδρικός αγωγός που δείχνει το Σχ.1 βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , το οποίο έχει κατεύθυνση \hat{y} και μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο με κυκλική συχνότητα ω , δηλαδή

$$\vec{E} = \hat{y} E_0 \cos(\omega t). \quad (36)$$



Σχήμα 1

Η εξίσωση κινήσεως των ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι -όπως και στη στατική περίπτωση- η

$$-e\vec{E} - m\vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (37)$$

με τη διαφορά ότι τώρα η μέση ταχύτητα \vec{v} δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο. Με την αντικατάσταση

$$\vec{v} = \hat{y} \frac{dy}{dt}, \quad (38)$$

όπου $y(t)$ είναι η μετατόπιση, από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε τη σχέση

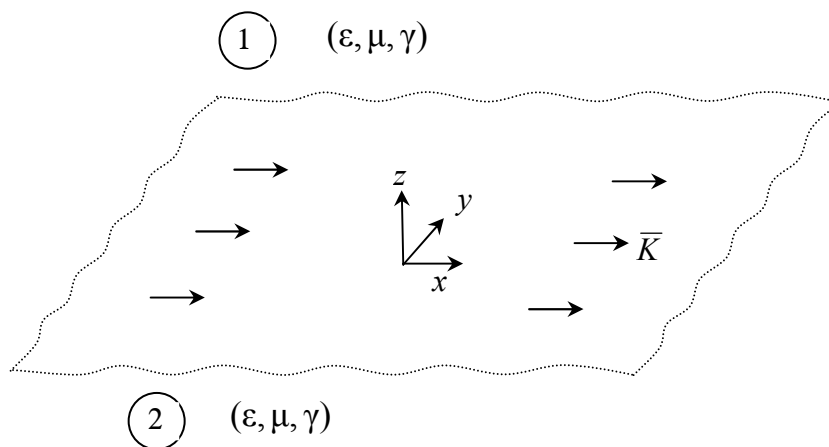
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + v \frac{dy}{dt} = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t). \quad (39)$$

Η δευτέρας τάξεως διαφορική αυτή εξίσωση είναι μη ομογενής και γραμμική, με όρο διεγέρσεως ημιτονοειδή συνάρτηση κυκλικής συχνότητας ω . Άρα η απόκριση $y(t)$ θα είναι και αυτή ημιτονοειδής συνάρτηση της ίδιας κυκλικής συχνότητας (ω). Επομένως, αν αναπαραστήσουμε όλα τα μεγέθη με τους αντίστοιχους παραστατικούς μιγαδικούς,

7. Διάδοση επιπέδων κυμάτων σε αγωγούς- Επιδερμικό φαινόμενο-Κυματομάδες

7.1 Γενικά

Με αναφορά στο Σχ.1, θεωρούμε και πάλι ότι η ρευματική κατανομή $\bar{K} = \hat{x}K(t) = \hat{x}K_0 \cos(\omega t)$ δρα στον απεριόριστο χώρο. Τώρα, σε αντίθεση με την αντίστοιχη διάταξη του Σχ.5-1 της ενότητας 5, υποθέτουμε ότι το μέσο που πληροί τον χώρο έχει ειδική αγωγιμότητα γ , δηλαδή είναι ένας αγωγός που περιγράφεται με τις παραμέτρους (ϵ, μ, γ) . Ζητάμε να βρούμε το διεγερόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.



Σχήμα 1

Λύση: Θα εργαστούμε στο πεδίο της συχνότητας. Πριν προχωρήσουμε στη λύση, είναι εποικοδομητικό να τονίσουμε τις διαφορές, αλλά και τις αναλογίες, που παρουσιάζει το παρόν πρόβλημα σε σχέση με το αντίστοιχο πρόβλημα της ενότητας 5.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

| Χώρος χωρίς αγωγιμότητα ($\gamma = 0$) | Χώρος με αγωγιμότητα ($\gamma \neq 0$) |
|---|---|
| $\nabla \times \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}$ | $\nabla \times \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}$ |
| $\nabla \times \dot{\vec{H}} = j\omega\epsilon\dot{\vec{E}}$ | $\begin{cases} \nabla \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}}_c + j\omega\epsilon\dot{\vec{E}} \\ \dot{\vec{J}}_c = \gamma\dot{\vec{E}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \dot{\vec{H}} = \gamma\dot{\vec{E}} + j\omega\epsilon\dot{\vec{E}} = j\omega\epsilon'\dot{\vec{E}} \\ \epsilon' = \epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \end{cases}$ |
| $(\nabla^2 + k^2)\dot{\vec{E}} = 0$ $(\nabla^2 + k^2)\dot{\vec{H}} = 0$ $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ | $(\nabla^2 + k^2)\dot{\vec{E}} = 0$ $(\nabla^2 + k^2)\dot{\vec{H}} = 0$ $k^2 = \omega^2\epsilon'\mu = \omega^2\mu(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega}) = \omega^2\epsilon\mu - j\omega\mu\gamma$ |

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω Πίνακα 1, η διαφορά στις εξισώσεις Maxwell που περιγράφουν τα δύο προβλήματα έγκειται στην παρουσία του όρου \vec{J}_c των ρευμάτων αγωγιμότητας (επαγόμενα χωρικά ρεύματα στο εσωτερικό του αγωγού), τα οποία δημιουργούνται δευτερογενώς λόγω της υπάρξεως ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού. Τα ρεύματα αυτά δίνονται από τον μικροσκοπικό νόμο του Ohm, $\vec{J}_c = \gamma \vec{E}$.

Η διαφορά αυτή είναι σημαντική από την άποψη της φυσικής συμπεριφοράς των διατάξεων, όπως θα δούμε παρακάτω. Από μαθηματικής όμως απόψεως πρόκειται για επουσιώδη διαφορά. Αυτό γίνεται αμέσως αντιληπτό, αν παρατηρήσουμε ότι ο νόμος Maxwell-Ampere (στον οποίο εντοπίζεται η διαφορά) μετά την αντικατάσταση του \vec{J}_c από τον νόμο του Ohm παίρνει τη μορφή

$$\nabla \times \vec{H} = \gamma \vec{E} + j\omega \varepsilon \vec{E} = j\omega \varepsilon' \vec{E}, \quad (1)$$

όπου ε' είναι το μιγαδικό μέγεθος (ονομαζόμενο **μιγαδική διηλεκτρική σταθερά** του αγωγίμου μέσου)

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}. \quad (2)$$

Συμπέρασμα 1: Αν θεωρήσουμε το αγωγίμο μέσο σαν ένα μέσο που περιγράφεται από τη μαγνητική διαπερατότητα μ και από τη μιγαδική διηλεκτρική σταθερά ε' , τότε οι εξισώσεις που περιγράφουν τα δύο προβλήματα (εξισώσεις Maxwell, εξισώσεις Helmholtz, κλπ) έχουν την ίδια ακριβώς μαθηματική μορφή **στο πεδίο της συχνότητας**.

Συμπέρασμα 2: Η λύση του παρόντος προβλήματος **στο πεδίο της συχνότητας** μπορεί να προκύψει από τη λύση που βρήκαμε στην ενότητα 5 για μέσο χωρίς αγωγιμότητα, αρκεί στην τελευταία να αντικαταστήσουμε τη διηλεκτρική σταθερά ε με ε' παντού. Αυτό σημαίνει ότι θα κάνουμε τις αντικαταστάσεις που δείχνει ο παρακάτω Πίνακας 2:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

| Χώρος χωρίς αγωγιμότητα ($\gamma = 0$) | Χώρος με αγωγιμότητα ($\gamma \neq 0$) |
|---|--|
| $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ | $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} = Ze^{j\theta}$ |
| $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$ $jk = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ | $k^2 = \omega^2\varepsilon'\mu = \omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\gamma$ $jk = j\omega\sqrt{\varepsilon'\mu} = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu\gamma} = \alpha + j\beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) |

Τελικά αποτελέσματα

$$\dot{E}_x^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} \dot{H}_y^{(1)}(z) = -\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} \frac{K_0}{2} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3)$$

$$\dot{E}_x^{(2)}(z) = -\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} \dot{H}_y^{(2)}(z) = -\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} \frac{K_0}{2} e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (4)$$

Στο πεδίο του χρόνου οι σχέσεις αυτές γράφονται ως εξής:

$$E_x^{(1)}(z,t) = -Z \frac{K_0}{2} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta), \quad H_y^{(1)}(z,t) = -\frac{K_0}{2} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (5)$$

$$E_x^{(2)}(z,t) = -Z \frac{K_0}{2} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta), \quad H_y^{(2)}(z,t) = \frac{K_0}{2} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \quad (6)$$

Φυσική σημασία των αποτελεσμάτων

Ο όρος $e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \sigma\alpha\theta)$ παριστάνει επίπεδο κύμα το οποίο διαδίδεται κατά την κατεύθυνση \hat{z} με σταθερά διαδόσεως β . Το πλάτος του κύματος αυτού φθίνει εκθετικά με την απόσταση z από την πηγή. Η εξασθένηση του κύματος γίνεται με σταθερά αποσβέσεως ίση με α . Ομοίως, ο όρος $e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \sigma\alpha\theta)$ παριστάνει κύμα το οποίο διαδίδεται κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$ με σταθερά διαδόσεως β . Το πλάτος του κύματος αυτού φθίνει εκθετικά, όσο μεγαλώνει η απόσταση $|z|$ από την πηγή, με σταθερά αποσβέσεως ίση με α . Επομένως το πεδίο που διεγείρεται στη διάταξη είναι επίπεδο κύμα οδεύον προς το άπειρο (απερχόμενο κύμα) με ταυτόχρονη εξασθένηση του πλάτους του (αποσβεννύμενο επίπεδο κύμα).

Σύμφωνα με τα παραπάνω η σταθερά εξασθενήσεως α καθορίζει το πόσο γρήγορα φθίνει το πλάτος του πεδίου. Το αντίστροφο του μεγέθους αυτού,

$$\delta = \frac{1}{\alpha}, \quad (7)$$

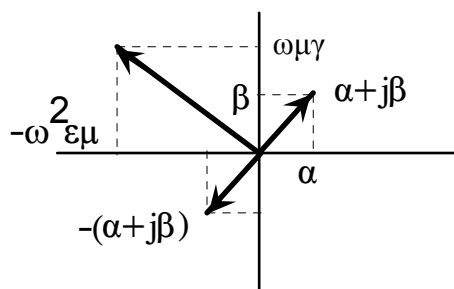
ονομάζεται **βάθος διεισδύσεως** ή **επιδερμικό βάθος** (*depth of penetration* ή *skin depth*) και μετράει την απόσταση που πρέπει να διατρέξει το κύμα (μετρούμενη με αρχή οποιοδήποτε σημείο του αγωγίμου μέσου) ώστε το πλάτος του να πέσει στο $1/e$ της τιμής που είχε στο σημείο εκκινήσεως. Με άλλα λόγια, όταν το κύμα διατρέχει απόσταση ίση με δ , τότε το πλάτος του μειώνεται κατά 63% περίπου.

7.2 Εκφράσεις της σταθεράς διαδόσεως β και της σταθεράς αποσβέσεως α

Ο μιγαδικός αριθμός $\alpha + j\beta$ ορίστηκε παραπάνω ως η ρίζα

$$\alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2 \epsilon \mu + j\omega \mu \gamma} \quad \text{με } \alpha > 0, \beta > 0. \quad (8)$$

Σημείωση: Ο μιγαδικός αριθμός $-\omega^2 \epsilon \mu + j\omega \mu \gamma$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου (Σχ.2). Επομένως, η μία ρίζα του βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και η αντίθετή της στο τρίτο. Ο παραπάνω ορισμός του $\alpha + j\beta$, επομένως, αντιστοιχεί στην εκλογή της ρίζας που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.



Σχήμα 2

Οι εκφράσεις των α και β συναρτήσει των $(\varepsilon, \mu, \gamma)$ βρίσκονται με βάση την (8), από την οποία αμέσως συνάγεται ότι

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \varepsilon \mu, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(\omega^2 \varepsilon \mu)^2 + (\omega \mu \gamma)^2}. \quad (9)$$

Από τις δυο αυτές σχέσεις προκύπτουν αμέσως οι ζητούμενες εκφράσεις

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon}\right)^2}} \quad (10\alpha)$$

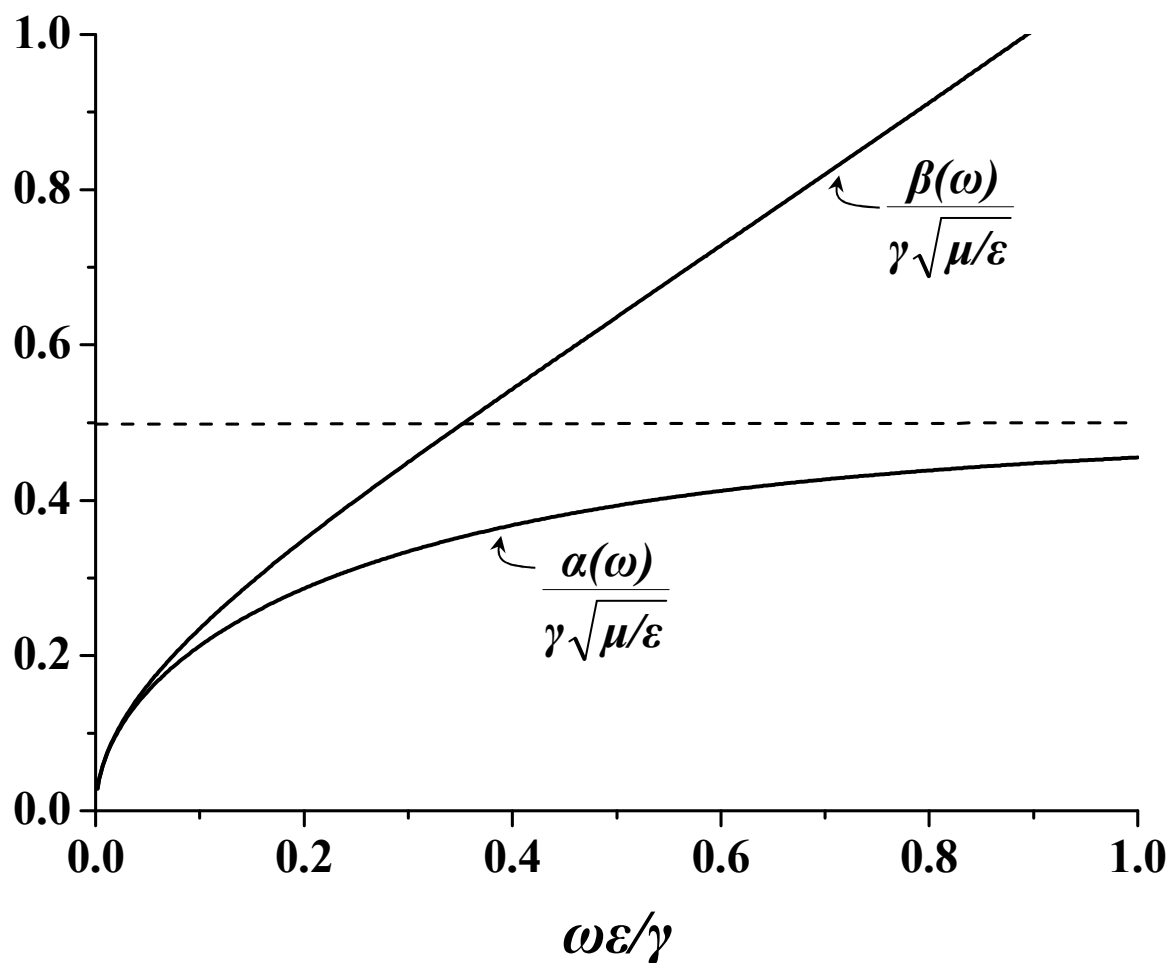
$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon}\right)^2}}. \quad (10\beta)$$

Η εξάρτηση των α και β από την συχνότητα είναι μη γραμμική και απεικονίζεται στο Σχ.3.

Σημείωση: Ως γνωστόν, $\dot{J}_c = \gamma \dot{E}$ είναι η πυκνότητα του ρεύματος αγωγιμότητας στον αγωγό και $\dot{J}_D = j\omega \varepsilon \dot{E}$ είναι η πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης. Συνεπώς, το πηλίκο $\gamma/(\omega \varepsilon) = |\dot{J}_c|/|\dot{J}_D|$ αποτελεί ένα μέτρο του σχετικού μεγέθους των δύο αυτών ρευμάτων. Συνήθως το πηλίκο αυτό τίθεται ίσο με

$$\frac{\gamma}{\omega \varepsilon} \equiv \tan \delta_e \quad (11)$$

και για τούτο ονομάζεται *εφαπτομένη απωλειών* του αγωγού. Η γωνία $\delta_e = \tan^{-1}[\gamma/(\omega \varepsilon)]$ ονομάζεται *γωνία απωλειών*.



Σχήμα 3

Ειδικές περιπτώσεις

Υλικά μέσα των οποίων οι συντακτικές παράμετροι υπακούουν στη σχέση $(\gamma/\omega\epsilon)^2 \ll 1$ χαρακτηρίζονται ως καλά διηλεκτρικά ή μονωτές. Αντίθετα, όταν ισχύει η σχέση $(\gamma/\omega\epsilon)^2 \gg 1$, τότε το υλικό χαρακτηρίζεται ως καλός αγωγός. Επομένως, η διάκριση σε καλούς και κακούς αγωγούς είναι σχετική, καθώς δεν εξαρτάται μόνο από την ηλεκτρομαγνητική υφή του αγωγού (παράμετροι ϵ, μ, γ) αλλά εν γένει και από τη συχνότητα λειτουργίας.

1. Καλά διηλεκτρικά (μονωτές): $(\gamma/\omega\epsilon)^2 \ll 1$

Αναπτύσσοντας την ποσότητα $\sqrt{1 + (\gamma/\omega\epsilon)^2}$ με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2/2 - x^4/8 + \dots,$$

η ακριβής έκφραση (10α) για την a παίρνει τη μορφή

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon}\right)^4 + \dots\right) - 1} \quad (12)$$

Στην προκειμένη περίπτωση, όπου $(\gamma/\omega\varepsilon)^2 \ll 1$, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι για καλά διηλεκτρικά ισχύει η προσεγγιστική έκφραση

$$\alpha \cong \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega\varepsilon}} = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (13)$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε για τη σταθερά διαδόσεως β την προσεγγιστική έκφραση

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon}\right)^2 \right] \quad (14\alpha)$$

$$\approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (14\beta)$$

Αντίστοιχα, οι εκφράσεις για την κυματική αντίσταση του μέσου και για το βάθος διεισδύσεως είναι

$$\zeta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1 + \gamma/(j\omega\varepsilon)}} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (15)$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \cong \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (16)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η έκφραση του δ είναι ανεξάρτητη από την κυκλική συχνότητα ω .

2. Καλοί αγωγοί: $(\gamma/\omega\varepsilon)^2 \gg 1$

Στην περίπτωση αυτή, από τις (10) παίρνουμε τις προσεγγιστικές εκφράσεις

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \quad (17\alpha)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \alpha. \quad (17\beta)$$

Οι αντίστοιχες εκφράσεις για την κυματική αντίσταση του μέσου και για το βάθος διεισδύσεως είναι

$$\zeta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1 + \gamma/(j\omega\varepsilon)}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} (1 + j) \quad (18)$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \cong \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \stackrel{\omega=2\pi f}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}} \quad (19)$$

Παρατηρήσεις

1. Από τις (5), (6) και (17), (18) προκύπτει ότι στην περίπτωση ενός καλού αγωγού ισχύουν οι σχέσεις

$$E_x^{(1)}(z,t) = -\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \frac{K_0}{2} e^{-z\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}} \cos(\omega t - \beta z + \pi/4), H_y^{(1)}(z,t) = -\frac{K_0}{2} e^{-z\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}} \cos(\omega t - \beta z) \quad (20\alpha)$$

$$E_x^{(2)}(z,t) = -\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \frac{K_0}{2} e^{z\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}} \cos(\omega t + \beta z + \pi/4), H_y^{(2)}(z,t) = \frac{K_0}{2} e^{z\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}} \cos(\omega t + \beta z) \quad (20\beta)$$

Επομένως, λόγω της σχετικά μεγάλης τιμής της ειδικής αγωγιμότητας γ , η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παίρνει εξαιρετικά μικρές τιμές, ακόμα και στη γειτονιά της επιφάνειας με $z = 0$.

2. Καθώς $\omega \rightarrow 0$, το βάθος διεισδύσεως δ για καλούς αγωγούς γίνεται άπειρο. Με βάση αυτή την παρατήρηση εξηγείται το γεγονός ότι σε ένα κυλινδρικό αγωγό, ο οποίος διαρρέεται από συνεχές ρεύμα, το ρεύμα αυτό (και το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}) κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλο των όγκο του αγωγού.

Το ίδιο ισχύει, κατά προσέγγιση, στην περίπτωση χρονικώς μεταβαλλομένων ρευμάτων χαμηλής συχνότητας (π.χ. 50Hz). Αντίθετα, σε υψηλές συχνότητες λειτουργίας το βάθος διεισδύσεως δ καλών αγωγών παίρνει πολύ μικρές τιμές, όπως δείχνει ο παρακάτω Πίνακας 3 που δίνει ενδεικτικές τιμές του δ για διάφορες περιπτώσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

| Βάθος διεισδύσεως δ στη συχνότητα f | | | | |
|--|--------|---------|---------|---------|
| Υλικό | f=60Hz | f=10kHz | f=1MHz | f=10GHz |
| Άργυρος | 8.25mm | 0.64mm | 0.064mm | 0.64μm |
| Αλουμίνιο | 10.7mm | 0.83mm | 0.083mm | 0.83μm |
| Θαλάσσιο νερό | 32m | 2.5m | 0.25m | 2.5mm |

Για τον άργυρο, π.χ., με ειδική αγωγιμότητα $\gamma = 6.2 \times 10^7 [S/m]$, το βάθος διεισδύσεως στους 10GHz είναι

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{(2\pi \times 10^{10})(6.2 \times 10^7)(4\pi \times 10^{-7})}} = 0.64\mu m,$$

δηλαδή πολύ μικρό. Επομένως, από φυσικής απόψεως, ένας συμπαγής κυλινδρικός αγωγός από άργυρο και ένας οποιοσδήποτε άλλος φτωχός αγωγός του οποίου η επιφάνεια έχει επαργυρωθεί, θα έχουν την ίδια συμπεριφορά όταν βρεθούν μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του οποίου η συχνότητα βρίσκεται στην μικροκυματική περιοχή. Η πρακτική σημασία του συμπεράσματος αυτού είναι προφανής, αφού η δεύτερη διάταξη (του επαργυρωμένου αγωγού) έχει ασύγκριτα χαμηλότερο κόστος.

Ο όρος **επιδερμικό φαινόμενο** χρησιμοποιείται ακριβώς για να αποδόσει το γεγονός ότι χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία και ρεύματα υψηλών συχνοτήτων σε έναν καλό αγωγό εντοπίζονται μόνο σε ένα λεπτό στρώμα στην επιφάνεια του αγωγού. Το πάχος του στρώματος αυτού είναι περίπου 0.64μm στην περίπτωση ενός αγωγού από άργυρο στους 10GHz, όπως είδαμε παραπάνω.

3. Στην περίπτωση του θαλάσσιου νερού, με $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H} / \text{m}]$ και $\gamma \cong 4[S / \text{m}]$, από τη σχέση $\omega = 2 / (\gamma \mu \delta^2)$ προκύπτει ότι αν, π.χ., θέλουμε βάθος διεισδύσεως $\delta = 1\text{m}$ πρέπει να διαλέξουμε πολύ χαμηλή συχνότητα, $f \approx 63\text{kHz}$. Στην περίπτωση αυτή, σε βάθος $5\delta = 5\text{m}$ από την επιφάνεια της θάλασσας έχουμε μόνο το 1% της αρχικής εντάσεως του πεδίου (και μόνο το 0.01% της προσπίπτουσας ισχύος). Τα αποτελέσματα αυτά εξηγούν γιατί οι υποβρύχιες επικοινωνίες γίνονται στην περιοχή των εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων (ELF).