Παρασκευή 15/4/22 12η Διάλεξη: Κολίτσος 6

Επαναληπτικές Μέθοδοι για επίλυση Γραμ. Συστημάτων

(Ένα θέμα εξετάσεων θα είναι από το σημερινό μάθημα.
Στο επόμενο μάθημα (μετά το Πάσχα) φέρτε calculator)

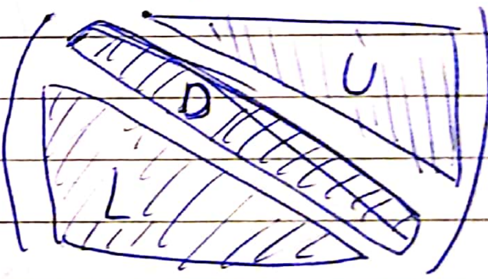
$Ax=b$ Μέθοδος Jacobi

(Σημαντική διάκριση μεταξύ επ. μεθόδων για επίλυση
μη γραμμικών εξισώσεων (π.χ Newton Raphson)
και για επίλυση γραμμικών συστημάτων.
ΕΙΝΑΙ ΑΛΛΟ ΠΡΑΓΜΑ)

$$(1)\ \boxed{Ax=b} \Rightarrow (L+D+U)\cdot x = b$$

$$\Rightarrow Dx = -(L+U)x + b$$

D διαγώνιος πίνακας



$$\Rightarrow x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B}\, x + \underbrace{D^{-1}\cdot b}$$

Άρα $\boxed{x = B\cdot x + c}$

Αν για x αληθεύει απόλυτα το $Ax=b$ τότε
αληθεύει απόλυτα το $x=B\cdot x+c$, όχι στο περίπου

$$x = Bx + c \Rightarrow \begin{cases} x^{(0)} \text{ δοθέν} \\ x^{(k+1)} = B\cdot x^{(k)} + c \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Θεώρημα από προηγούμενη φορά:

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0 \Leftrightarrow (x^{(k)}) \to x \text{ λύση του } (1)\ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Πόρισμα Αν για κάποια φυσική νόρμα $\|B\|<1$ τότε η επαν. συγκλίνει φασματική ακτίνα

<u>Πόρισμα</u> $\rho(B)<1 \Leftrightarrow x$ λύση του (1) $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

<u>Άσκηση Jacobi</u>

$$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 17$$
$$x_1 + 8x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 - 3x_2 + 20x_3 = -21$$

$$\left(\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}$$

(ισχύει αυτό για διαγώνιους πίνακες, οι όροι του αντιστρόφου είναι οι αντίστροφοι)

Επαναληπτικός Πίνακας

$$B = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & -1/10 \\ 1/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 3/20 & 0 \end{bmatrix}$$

Τώρα θα αποφασίσω αν η μέθοδος συγκλίνει

(A) Κριτήριο σύγκλισης: $\|B\|_\infty = \|B\|_r$ ~~= max~~

$$= \max\{|1/5| + |-1/10|, |1/8| + |-1/8|, |1/8| + |3/20|\}$$

$$= \max\{3/10, 0{,}25, 0{,}2\} = \underline{0{,}3 < 1}$$

Άρα η μέθοδος Jacobi συγκλίνει

Αν αποτύχαινε και είχαμε $\|B\|_\infty \geq 1$ δε γνωρίζω αν έχουμε σύγκλιση, μπορώ να δώσω ευκαιρία στην άλλη εύκολη φυσική νόρμα, την $\|B\|_1$

(B) Κριτήριο σύγκλισης

$$\|B\|_1 = \|B\|_2 = \max\{|-1/8| + |-1/20|, |1/5| + |3/20|, |-1/10| + |-1/8|\}$$

$$= \max\{0.175, 0.35, 0.225\} = 0.35 < 1$$

Άρα, πάλι, η επαναληπτική μέθοδος Jacobi συγκλίνει.

Αν αποτύχουν τα (A), (B): (προφανώς σε μία άσκηση στο 1° που πετύχει σταματάμε τους ελέγχους)

(Γ) Κριτήριο σύγκλισης:

Θα υπολογίσω τη φασματική ακτίνα του B:

$$\rho(B) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|, \quad \lambda_i \text{ ιδιοτιμές του } B$$

$|\lambda_i| \to$ μέτρο, αφού το λ_i μπορεί να είναι Complex

$$|B - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & +2/10 & -1/10 \\ -1/8 & -\lambda & -1/8 \\ -1/20 & 3/20 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1/8 \\ 3/20 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{2}{10}\begin{vmatrix} -1/8 & -1/8 \\ -1/20 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1/10)\begin{vmatrix} -1/8 & -\lambda \\ -1/20 & 3/20 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{3}{160}\right) - \frac{2}{10}\left(\frac{\lambda}{8} - \frac{1}{160}\right) - \frac{1}{10}\left(-\frac{3}{160} - \frac{\lambda}{20}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -1600\lambda^3 - 62\lambda + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0.0712 \quad \lambda_{2,3} = -0.035 \pm 0.206i$$

$$\rho(B) = \max|\lambda_i| = \max\{0.0712, 0.209\} = 0{,}209 < 1$$

Άρα η μέθοδος Jacobi συγκλίνει

Τρόπος εργασίας στις ασκήσεις:

i) Υπολογίζω τον επαναληπτικό πίνακα

$$B = -D^{-1}(L+U)$$

ii) Αν $\|B\|_\infty = \|B\|_r < 1$ η μέθοδος Jacobi συγκλίνει

Αν όχι,

αν $\|B\|_1 = \|B\|_c < 1$, η μέθοδος Jacobi συγκλίνει

Αν όχι,

αν $\rho(B) < 1$ η μέθοδος Jacobi συγκλίνει

αλλιώς η μέθοδος Jacobi αποκλίνει

ΤΕΛΟΣ

Παρατηρήσεις:

i) Θα μπορούσα να ελέγξω πρώτα το $\|B\|_1$ και μετά το $\|B\|_\infty$

ii) Αν ένα κριτήριο σύγκλισης πετύχει, δεν υπάρχει λόγος να ελέγξω τα υπόλοιπα κριτήρια.

~~Άσκηση Jacobi~~

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 17 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 - 3x_2 + 20x_3 &= -21 \end{aligned}$$

Μέχρι τώρα

Επαναληπτικές Εξισώσεις

$$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + c$$

$$B = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 2/10 & -1/10 \\ -1/8 & 0 & -1/8 \\ -1/20 & 3/20 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή $\|B\|_\infty < 1$ η μέθοδος Jacobi συγκλίνει

Υπολογίζω $c = D^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ -21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/10 \\ 9/8 \\ -21/20 \end{bmatrix}$

Επαναληπτικές Εξισώσεις:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/10 & -1/10 \\ -1/8 & 0 & -1/8 \\ -1/20 & 3/20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17/10 \\ 9/8 \\ -21/20 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{2}{10} x_2^{(k)} - \frac{1}{10} x_3^{(k)} + \frac{17}{10} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{8} x_1^{(k)} - \frac{1}{8} x_3^{(k)} + \frac{9}{8} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{20} x_1^{(k)} + \frac{3}{20} x_2^{(k)} + \left(-\frac{21}{20}\right) \end{cases}}$$

Θεωρώ αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, να βρεθεί μια προσέγγιση της λύσης $x^{(k)}$ ώστε

$$\|x - x^{(k)}\| \leq 5 \cdot 10^{-2} = 0{,}05$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	$17/10 = 1{,}7$	$9/8 = 1{,}125$	$-21/20 = -1{,}05$ *
2	2.03	1.04375	$-0{,}96625$ **
3	2.005375	0,99203125	$-0{,}9949375$

* Εκτίμηση Σφάλματος στην 1η επανάληψη:

- $\|x - x^{(1)}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}3} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1{,}7 \\ 1{,}125 \\ -1{,}05 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$

$= \frac{0{,}3}{0{,}7} \cdot \max\{|1{,}7|, |1{,}125|, |-1{,}05|\} = \frac{0{,}3}{0{,}7} \cdot 1{,}7 = 0{,}729$

Δεν ικανοποιήθηκε το κριτήριο διακοπής

** Εκτίμηση Σφάλματος στη 2η Επανάληψη

$$\|x - x^{(2)}\|_\infty \le \frac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} \cdot \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty$$

$$= \frac{0,3}{0,7} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.03 - 1,7 \\ 1.04375 - 1,125 \\ -0,96625 + 1,05 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{0,3}{0,7} \cdot \max\{0,33,\ 0,08125,\ 0.08375\} = 0,141$$

Δεν ικανοποιήθηκε το κριτήριο διακοπής, συνεχίζω

Εκτίμηση Σφάλματος στη 3η Επανάληψη

$$\|x - x^{(3)}\|_\infty \le \frac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty$$

$$= \frac{0,3}{1-0,3} \|x^{(3)} - x^{(2)}\| = 0,0222 < 0,05 \quad \checkmark$$

Ικανοποιήθηκε το κριτήριο σύγκλισης. STOP

<u>Πιθανές Εκφωνήσεις</u>

- Να βρεθεί μια προσέγγιση με ακρίβεια ε (δοσμένη)
- Να γίνουν 3 επαναλήψεις και να δωθεί μια (καλή) εκτίμηση σφάλματος στη 3η επανάληψη
  (Χρησιμοποιούμε την 6, όχι την 7, βλέπε προηγούμενη διάλεξη (8.4.22))
- Πόσες επαναλήψεις απαιτούνται ώστε $\|x - x^{(k)}\|_\infty \le 10^{-4}$?
  $$\|x - x^{(k)}\|_\infty \le \frac{\|B\|_\infty^k}{1-\|B\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

Συχνά ρωτάται πόση ακρίβεια θέλουμε στις ενδιάμεσες πράξεις. Κάνουμε με λίγα παραπάνω δεκαδικά από αυτά που έχουμε στην ακρίβεια, για να μη χαθούμε από στρογγύλευση. Αλλιώς, σε calculator με κουμπί (ans) τα κρατάμε όλα.

Άρα: $\frac{\|B\|_\infty^k}{1-\|B\|_\infty}\|x^{(1)}-x^{(0)}\| \le 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{0{,}3^k}{0{,}7}\cdot 1{,}7 \le 10^{-4}$

$\Rightarrow 0{,}3^k \le \frac{7}{17}\cdot 10^{-4} \Rightarrow k\cdot \log 0{,}3 \le \log 7 - \log 17 + (-4)$

$\Rightarrow k \ge \frac{\log 7 - \log 17 - 4}{\log 0{,}3}$

$\Rightarrow k \ge 8{,}39$

$\boxed{k = 9 \text{ βήματα}}$

Θέλουμε να λύνουμε τέτοιες ασκήσεις σε <10 λεπτά χαλαρά.

Στο επόμενο μάθημα θα δούμε πως.

KΑΛΟ ΠΑΣΧΑ!