Πέμπτη, 19/01/2023

Ένα σύστημα έχει χαρ. πολυώνυμο: $s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + K(s+2)$

Για $K=3$ το χ.π. έχει ρίζες $-5, -4, -3, -1$

Επιθυμούμε όλες οι ρίζες να ανήκουν στο $Re(s_i) < -1$

Πρέπει να αυξήσουμε ή να μειώσουμε το $K$ για να το επιτύχουμε;

Για $K=3$: $s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = (s+5)(s+4)(s+3)(s+1)$

$$= s^4 + 13s^3 + \underbrace{(5+4+3+12+15+20)}_{59} s^2 + \underbrace{(12+15+20+60)}_{107} s + 60$$

$a_3 = 13,\ a_2 = 59,$

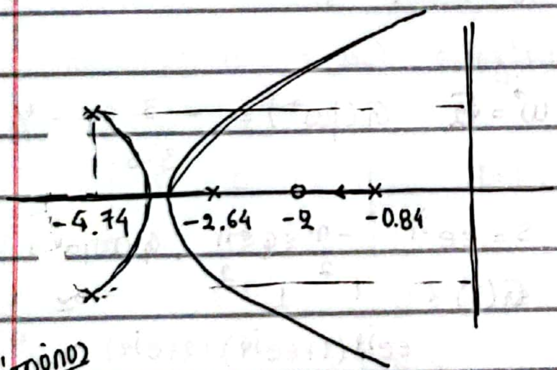
$a_1 + 3 = 107 \Rightarrow a_1 = 104$

$a_0 + 6 = 60 \Rightarrow a_0 = 54$

$$\boxed{s^4 + 13s^3 + 59s^2 + 104s + 54 + K(s+2) = 0}$$

α' τρόπος

$$1 + K \cdot \frac{s+2}{s^4 + 13s^3 + 59s^2 + 104s + 54} = 0$$




β' τρόπος

$s^4 + 13s^3 + 59s^2 + 104s + 54 + K(s+2) = 0$

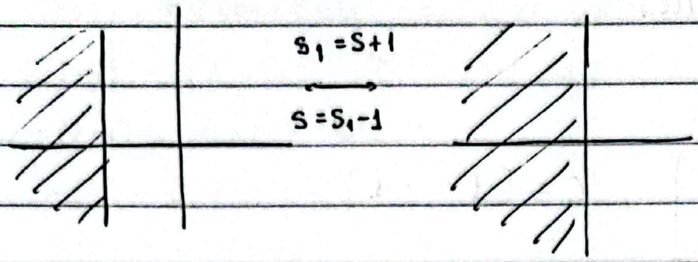
$$(4s^3 + 3a_0 s^2 + 2a_2 s + a_1)\frac{ds}{dK} + (s+2) + K\frac{ds}{dK} = 0$$

$$\left.\frac{ds}{dK}\right|_{\substack{K=3\\ s=-1}} = -\left.\frac{s+2}{4s^3 + 3a_1 s^2 + 2a_2 s + a_1 + K}\right|_{\substack{s=-1\\ K=2}} = -0.04 < 0$$

Αν $K\uparrow$ τότε $Re(s_i) < -1$.

γ' τρόπος

$Re(s) \leq -1$




$$(s_1-1)^4 + a_3(s_1-1)^3 + a_2(s_1-1)^2 + a_1(s_1-1) + a_0 + K(s_1-1+2) = 0$$

$$s_1^4 - 4s_1^3 + 6s_1^2 - 4s_1 + 1 + a_3(s_1^3 - 3s_1^2 + 3s_1 - 1) + a_2(s_1^2 - 2s_1 + 1) + a_1(s_1 - 1) + a_0 + K(s_1+1) = 0$$

$$\Rightarrow s_1^4 + (a_3 - 4)s_1^3 + (6 - 3a_3 + a_2)s_1^2 + (-4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 \overset{+K}{)}s_1 + (1 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 + K) = 0$$

$$s_1^4 + 9s_1^3 + 26s_1^2 + (K+21)s_1 + (K-3) = 0$$

Θ. Stodola $\rightarrow$ $K>3$, πρέπει $K\uparrow$

2017

$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k)$

$x_2(k+1) = a x_1(k) + x_2(k) + u(k)$

$y(k) = x_1(k) - x_2(k)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A) Ελεγξιμότητα: $\mathcal{C} = [B \ \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$

$\det(\mathcal{C}) = a+1-2 = a-1$, $a \neq 1$ ελέγξιμο

Παρατηρησιμότητα: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1-a & 0 \end{bmatrix}$

$\det \mathcal{O} = 1-a$, $a \neq 1$ παρατηρήσιμο

$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + (1-a) = 0$, $\Delta = 4 - 4(1-a)$

$\hookrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 2$, $\exists \lambda_i \ Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ BIBO-ασταθές

B) $u(k) = -k\,x(k)$

$a \neq 1$, ελέγξιμο $\det[\lambda I - (A - BK)] = \lambda^2$

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = (A-BK)\,x(k)$

$K = [k_1 \ \ k_2]$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ \ k_2] = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 \\ a-k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix}$$

χαρ. πολυώνυμο: $\lambda^2 + 2(k_1 - 1)\lambda + (1 - \cancel{k_1} - k_2 + \cancel{k_1 k_2} - a + a k_2 + \cancel{k_1} - \cancel{k_1 k_2}) = 0$

$\lambda^2 + (k_1 + k_2 - 2)\lambda + (1-a)(1-k_2) = \lambda^2$

Για $a=1$ η μη ελέγξιμη ιδιοτιμή βρίσκεται στο 0.

$k_1 + k_2 = 2$

$a \neq 1$, $k_2 = 1$, $k_1 = 1$

Γ) $u(t) = -K\hat{x}(t)$ , $K_e$ : κέρδος παρατηρητή

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K_e\big(y(k) - C\hat{x}(k)\big)$$

$$\hat{x}(k+1) = (A - K_eC)\hat{x}(k) + K_eCx(k) + Bu(k)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$e(k) = \hat{x}(k) - x(k)$$

$$e(k+1) = (A - K_eC)\hat{x}(k) - Ax(k) + K_eCx(k)$$

$$= (A - K_eC)e(k)$$

$$\det\big(\lambda I - (A - K_eC)\big) = \lambda^2 \Rightarrow$$

$$K_eC = \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{e1} & -K_{e1} \\ K_{e2} & -K_{e2} \end{bmatrix}$$

$$A - K_eC = \begin{bmatrix} 1 - K_{e1} & 1 + K_{e1} \\ a - K_{e2} & 1 + K_{e2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (K_{e1} - K_{e2} + 2)\lambda + (1 - K_{e1} + K_{e2} - \cancel{K_{e1}K_{e2}} - a - aK_{e1} + K_{e2} + \cancel{K_{e1}K_{e2}}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (K_{e2} - K_{e1} + 2)\lambda + \big(2K_{e2} - (a+1)K_{e1} + (1-\alpha)\big) = 0$$

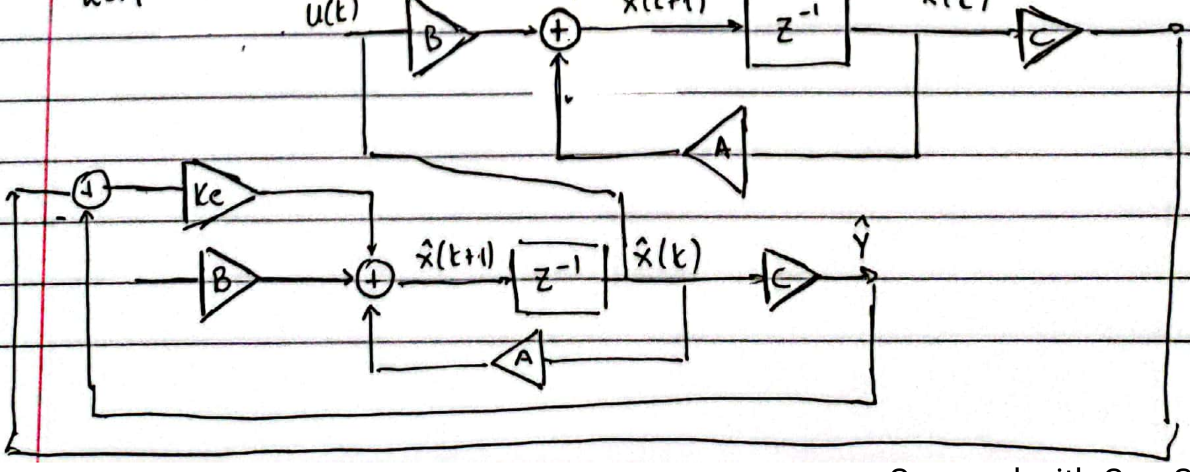
$$K_{e1} - K_{e2} = 2 \quad , \quad (a+1)K_{e1} - 2K_{e2} = 1 - a$$

Για $a=1$: η μη παρατηρήσιμη τιμή δεν είναι στο 0.

$$K_{e1} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1-\alpha & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \alpha+1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-3-a}{a-1} \quad , \quad K_{e2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha+1 & 1-\alpha \end{vmatrix}}{\alpha - 1} = \frac{-1-3\alpha}{a-1}$$

$$K = K_e = [1 \;\; 1]$$

$$\lim_{\alpha \to 1} K_e = \infty$$



$a=0,\ u(t)=0,\ x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ x_1(2023)=;$

$$\begin{bmatrix}x_1(2023)\\x_2(2023)\end{bmatrix}=A^{2023}x(0)$$

Jordan Block $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

$$A^k=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$$

Για $a=0$ $\quad x_2(t+1)=x_2(t)$

$$x_1(t+1)=x_1(t)+\cancel{x_2(t)}^{0}=x_1(0)=1$$

ή

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=(\mathbb{I}+N)^2=\mathbb{I}+2N,\quad N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Επαγωγικά: $A^k=\mathbb{I}+kN$