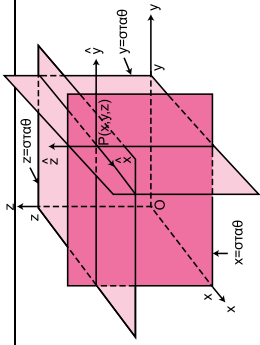
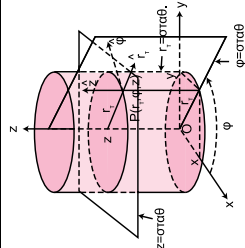
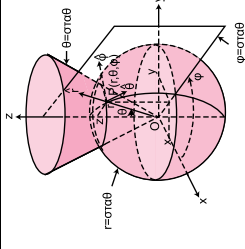


Πίνακας 1: Καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

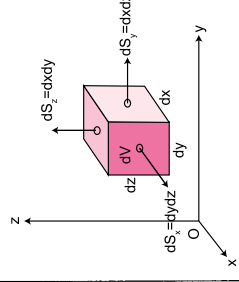
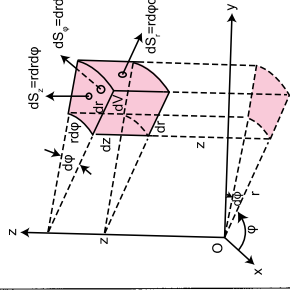
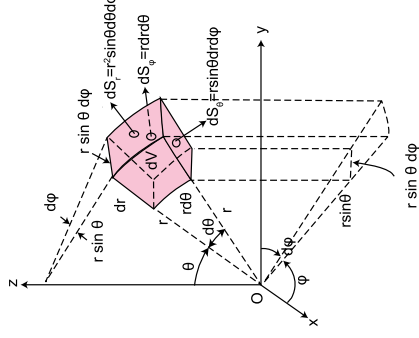
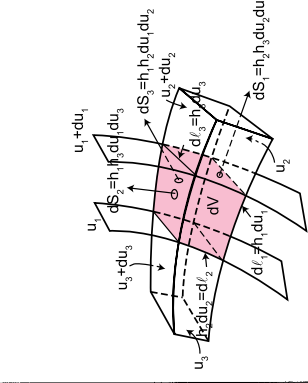
| | Καρτεσιανές συντεταγμένες | Κυλινδρικές συντεταγμένες | Σφαιρικές συντεταγμένες | Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες |
|----------------------------------|--|---|---|-----------------------------------|
| |  |  |  | |
| Συντεταγμένες | $x, (-\infty < x < \infty)$ $y, (-\infty < y < \infty)$ $z, (-\infty < z < \infty)$ | $r_T, (0 \leq r_T < \infty)$ $\varphi, (0 \leq \varphi < 2\pi)$ $z, (-\infty < z < \infty)$ (*) | $r, (0 \leq r < \infty)$ $\theta, (0 \leq \theta \leq \pi)$ $\varphi, (0 \leq \varphi < 2\pi)$ | u_1, u_2, u_3 |
| Σήμα επιφάνειας | $x = \text{σταθ} : \text{επίπεδο}$ $y = \text{σταθ} : \text{επίπεδο}$ $z = \text{σταθ} : \text{επίπεδο}$ | $r_T = \text{σταθ} : \text{κύλινδρος}$ $\varphi = \text{σταθ} : \text{ημιεπίπεδο}$ $z = \text{σταθ} : \text{επίπεδο}$ | $r = \text{σταθ} : \text{σφαίρα}$ $\theta = \text{σταθ} : \text{κώνος}$ $\varphi = \text{σταθ} : \text{ημιεπίπεδο}$ | |
| Μοναδιαία διανύσματα | $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ | $\hat{r}_T, \hat{\varphi}, \hat{z}$ | $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ | $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ |
| Σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων | x | $r_T \cos \varphi$ | $r \sin \theta \cos \varphi$ | |
| | y | $r_T \sin \varphi$ | $r \sin \theta \sin \varphi$ | |
| | z | z | $r \cos \theta$ | |
| | $\sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan^{-1}(y/x)$ z | r_T φ z | $r \sin \theta$ φ $r \cos \theta$ | |
| Σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων | $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ | $\sqrt{r_T^2 + z^2}$ | r | |
| | $\tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2} / z)$ | $\tan^{-1}(r_T / z)$ | θ | |
| | $\tan^{-1}(y/x)$ | φ | φ | |
| | | | | |

| | Καρτεσιανές συντεταγμένες | Κυλινδρικές συντεταγμένες | Σφαρμικές συντεταγμένες | Κομπολόγραμμες συντεταγμένες |
|---|---|--|--|------------------------------|
| Σχέσεις μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων | \hat{x} | $\hat{r}_T \cos \varphi - \hat{\phi} \sin \varphi$ | $\hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\phi} \sin \varphi$ | |
| | \hat{y} | $\hat{r}_T \sin \varphi + \hat{\phi} \cos \varphi$ | $\hat{r} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \hat{\phi} \cos \varphi$ | |
| | \hat{z} | \hat{z} | $\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$ | |
| Σχέσεις μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων | $\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$ | \hat{r}_T | $\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta$ | |
| | $-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$ | $\hat{\phi}$ | $\hat{\phi}$ | |
| | \hat{z} | \hat{z} | $\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$ | |
| Παρατηρήσεις | $\hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta$ | $\hat{r}_T \sin \theta + \hat{z} \cos \theta$ | \hat{r} | |
| | $\hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta$ | $\hat{r}_T \cos \theta - \hat{z} \sin \theta$ | $\hat{\theta}$ | |
| | $-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$ | $\hat{\phi}$ | $\hat{\phi}$ | |
| | | Στα σημεία του άξονα z είναι $r_T = 0$. Δεν ορίζονται σ' αυτά η γωνία φ , το \hat{r}_T και το $\hat{\phi}$. (*) Στον πίνακα αυτόν η κυλινδρική συντεταγμένη r παριστάνεται με r_T (T=Transverse) για να μην υπάρχει σύγχυση με τη σφαρμική συντεταγμένη r . | Στην αρχή των αξόνων (σημείο O) είναι $r = 0$. Δεν ορίζονται εκεί οι γωνίες θ και φ και τα μοναδιαία διανύσματα \hat{r} , $\hat{\theta}$ και $\hat{\phi}$. Στα σημεία του θετικού (αρνητικού) ημιάξονα z είναι $\theta = 0$ ($\theta = \pi$). Δεν ορίζονται εκεί η γωνία φ και τα $\hat{\theta}$ και $\hat{\phi}$. | |


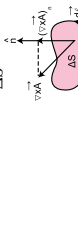
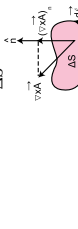
Πίνακας 2: Στοιχειώδη μήκη, εμβαδά και όγκοι σε ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων

| | Καρτεσιανές συντεταγμένες | Κυλινδρικές συντεταγμένες | Σφαιρικές συντεταγμένες | Ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες |
|---------------------------------|---|---|--|--|
| Διάνυσμα θέσης | $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ | $\vec{r} = r\hat{r}_r + z\hat{z}$ (*) | $\vec{r} = r\hat{r}$ | |
| Μικροί στοιχειώδεις συντελεστές | $h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$ | $h_r = 1, h_\phi = r, h_z = 1$ | $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta$ | $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}, i = 1, 2, 3$ |
| Στοιχειώδης μετατόπιση | $d\vec{l} = d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ | $d\vec{l} = d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$ | $d\vec{l} = d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin \theta d\phi\hat{\phi}$ | $d\vec{l} = d\vec{r} = h_1 du_1\hat{u}_1 + h_2 du_2\hat{u}_2 + h_3 du_3\hat{u}_3$ |
| Στοιχειώδη μήκη | $d\ell_x = dx, d\ell_y = dy, d\ell_z = dz$ | $d\ell_r = dr, d\ell_\phi = r d\phi, d\ell_z = dz$ | $d\ell_r = dr, d\ell_\theta = r d\theta, d\ell_\phi = r \sin \theta d\phi$ | $d\ell_1 = h_1 du_1, d\ell_2 = h_2 du_2, d\ell_3 = h_3 du_3$ |
| Στοιχειώδη εμβαδά | $dS_x = dydz, dS_y = dx dz, dS_z = dx dy$ | $dS_r = d\ell_\phi d\ell_z = r d\phi dz$ $dS_\phi = d\ell_r d\ell_z = dr dz$ $dS_z = d\ell_r d\ell_\phi = r dr d\phi$ | $dS_r = d\ell_\theta d\ell_\phi = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ $dS_\theta = d\ell_r d\ell_\phi = r \sin \theta dr d\phi$ $dS_\phi = d\ell_r d\ell_\theta = r dr d\theta$ | $dS_1 = d\ell_2 d\ell_3 = h_2 h_3 du_2 du_3$ $dS_2 = d\ell_1 d\ell_3 = h_1 h_3 du_1 du_3$ $dS_3 = d\ell_1 d\ell_2 = h_1 h_2 du_1 du_2$ |
| Στοιχειώδεις όγκοι | $dV = d\ell_x d\ell_y d\ell_z = dx dy dz$ | $dV = d\ell_r d\ell_\phi d\ell_z = r dr d\phi dz$ | $dV = d\ell_r d\ell_\theta d\ell_\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ | $dV = d\ell_1 d\ell_2 d\ell_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ |

(*) Εδώ η κυλινδρική συντεταγμένη r παριστάνεται με r_r , για να μην υπάρξει σύγχυση με τη σφαιρική συντεταγμένη r .



Πίνακας 3: Εκφράσεις των διαφορικών τελεστών στα τρία βασικά συστήματα συντεταγμένων

| Ονομασία - Τελεστής | Ορισμός | Καρτεσιανές συντεταγμένες | Κυλινδρικές συντεταγμένες | Σφαιρικές συντεταγμένες |
|---|---|---|--|--|
| Κλίση: $\nabla\Phi = grad\Phi$ | <div>$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n}\hat{n}$<p>(\hat{n} = μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στις επιφάνειες με Φ σταθερό, με φορά προς τα αυξανόμενα Φ).</p></div> | $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$ | $\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$ | $\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$ |
| Απόκλιση: $\nabla \cdot \vec{A} = div\vec{A}$ | <div>$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$</div> | $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ | $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ | $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ |
| Περιστροφή: $\nabla \times \vec{A} = rot\vec{A} = cur\vec{A}$ | <div>$(\nabla \times \vec{A})_i = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S}$</div> | $\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$ | $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{\varphi} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(rA_\theta)\right]\hat{\theta} + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(rA_\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\hat{\varphi}$ | $\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(rA_\theta)\right]\hat{\theta} + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(rA_\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\hat{\varphi}$ |
| Λαπλάσιανή βαθμωτής συνάρτησης: $\nabla^2\Phi$ | $\nabla^2\Phi \equiv \nabla \cdot (\nabla\Phi)$ | $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ | $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ | $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$ |
| *Λαπλάσιανή διανυσματικής συνάρτησης: $\nabla^2\vec{A}$ | $\nabla^2\vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$ | $\nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$ | $\left(\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\hat{r} + \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_r}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\hat{\theta} + \left(\nabla^2 A_z + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{A_z}{r^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{z}$ | $\left(\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{r} + \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_r}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{\theta} + \left(\nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\hat{\varphi}$ |

*Οι Λαπλάσιανες $\nabla^2\vec{A}_r$ (καρτεσιανές συντεταγμένες), $\nabla^2\vec{A}_\theta$ (κυλινδρικές συντεταγμένες) και $\nabla^2\vec{A}_\varphi$ (σφαιρικές συντεταγμένες) βρίσκονται από τις εκφράσεις της $\nabla^2\Phi$ με A_r στη θέση του Φ , όπου η αντίστοιχη συντεταγμένη στο οξείο ερμηνεύεται η A_r .