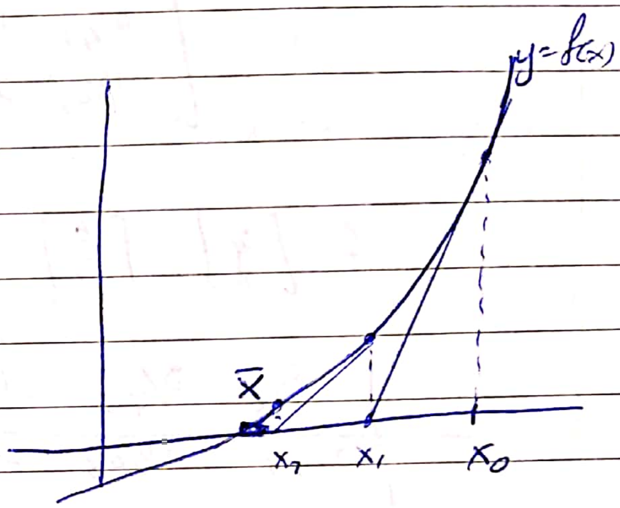
Δευτέρα 9/5/22 14η Διάλεξη: Κοκκίνης 7

ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON RAPHSON

$$f(x)=0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2\ldots$$



x_0 αρχική προσέγγιση

- Επιλογή "καλής" αρχικής προσέγγισης
- Περιπτώσεις αποτυχίας
- Σύγκλιση N-R (περίπτωση απλής ρίζας)

$\downarrow$

τετραγωνική σύγκλιση

- Ρίζες πολλαπλότητας $m>1$

$\bar{x}$ ρίζα πολλαπλότητας m: $f(x)=(x-\bar{x})^m h(x)$, $h(\bar{x})\neq 0$

Αν $\bar{x}$ ρίζα πολλαπλότητας $m>1$ η μέθοδος N-R συγκλίνει στη $\bar{x}$ γραμμικά, για κάθε x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$

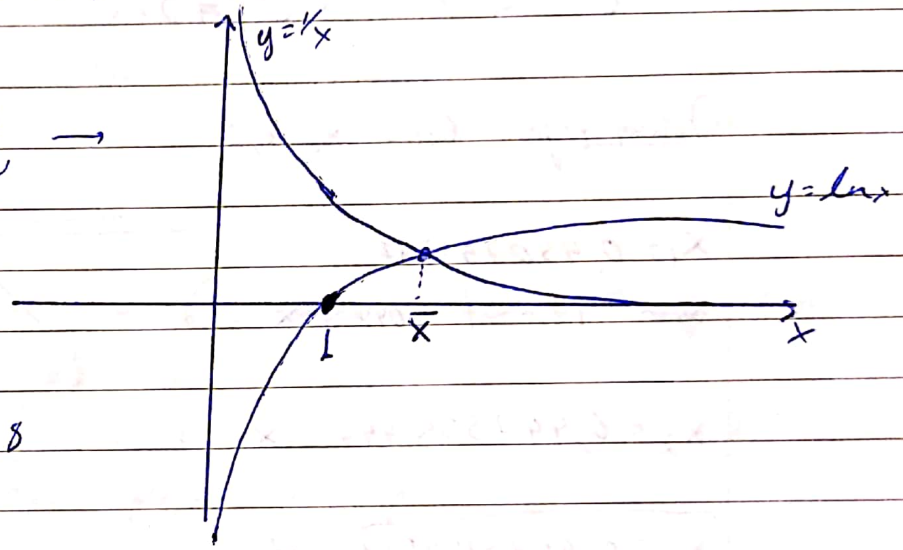
Αν γνωρίζουμε της πολλαπλότητα (m) μιας ρίζας (;) (σπάνια είναι γνωστή) τότε η μέθοδος $x_{k+1}=x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k=0,1,2\ldots$ συγκλίνει <u>τετραγωνικά</u>

Παράδειγμα 1: Δίνεται η εξίσωση $x\ln x - 1 = 0$, $x>0$
Να εφαρμοστεί η μέθοδος Newton-Raphson για την προσέγγιση της ρίζας ή των ριζών της εξίσωσης.

(x_0: γραφικά, $|x_k - x_{k-1}| \le 10^{-4}$)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k \ln x_k - 1}{1+\ln x_k}, \quad k=0,1,2$$

$x\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\ln x}_{f_1} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f_2} \longrightarrow$



Οπότε έστω $x_0 = 1,8$

$x_0 = 1,8$

$x_1 = 1,8 - \frac{1,8\ln 1,8 - 1}{1+\ln 1,8} = 1,763461088$

$|x_1 - x_0| \approx 0,036$ ✗

$x_2 = x_1 - \frac{x_1 \ln x_1 - 1}{1+\ln x_1} = 1,76322845$

$|x_2 - x_1| \approx 0,00023$ ✗

$\boxed{x_3 = 1,763222834}$

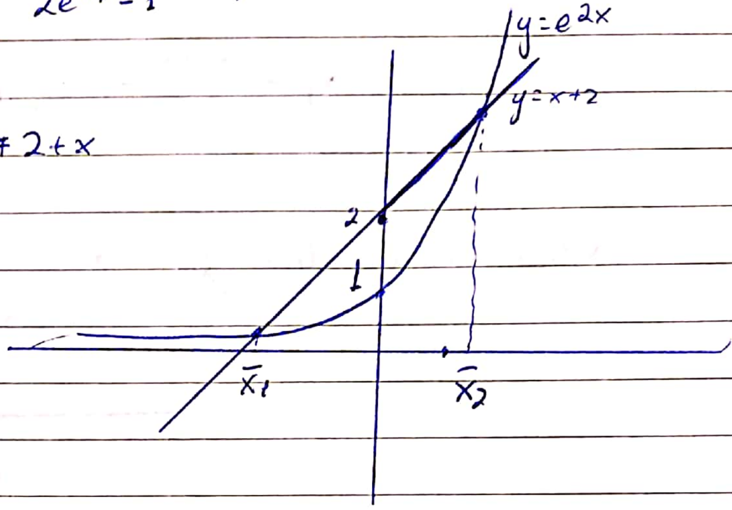
$|x_3 - x_2| \approx 10^{-8}$ ✓

Παράδειγμα 2

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = e^{2x} - x - 2 = 0$

Τα ίδια με το παράδειγμα 1

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{2x_k} - x_k - 2}{2e^{x_k} - 1}, \quad k = 0,1,2\ldots$$



$e^{2x} - x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 + x$

Θετική ρίζα: Έστω $x_0 = 0{,}5$

$x_1 = 0{,}450799347$

$|x_1 - x_0| = 0{,}049$ ✗

$x_2 = 0{,}447555443$ ✗

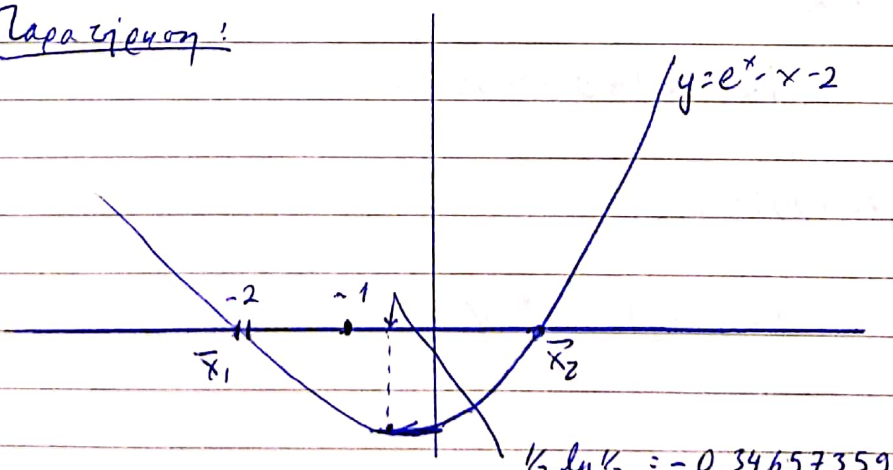
$\boxed{x_3 = 0{,}447542161}$ ✓

Αρνητική ρίζα: Έστω $x_0 = -2$

$x_1 = -1{,}98098792$

$x_2 = -1{,}98097398$ ✓

Παρατήρηση!



$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = -0{,}34657359$

Πάνω στο $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$ η N-R αποτυγχάνει

Για $x_0 > \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$ φτάνει στη θετική ρίζα

Για $x_0 < \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$ φτάνει στην αρνητική ρίζα

Για $x_0 = -0,2$ Θετική ρίζα, 11 επαν

Για $x_0 = -0,34$ Θετική ρίζα, $x_1 = 86,81$, 178 επαν

Για $x_0 = -1$ Αρνητική ρίζα

Για $x_0 = -0,3466$ Αρνητική ρίζα, $x_1 = -21838,08$

$x_2 = -2$

Προκύπτει από το γεγονός ότι για $x < -2$ είναι σχεδόν ευθεία.

ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON RAPHSON

- ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

1. Πολύ γρήγορη Σύγκλιση (x_0 αρκετά κοντά σε μια ρίζα $\bar{x}$ και $\bar{x}$ απλή ρίζα)
2. Γενικεύεται εύκολα για μη γραμμικά συστήματα III και για την προσέγγιση μιγαδικών ριζών I

- ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

1. Η εύρεση x_0 αρκετά κοντά σε μία ρίζα.
2. Χρειάζεται η f' II
3. Περιπτώσεις αποτυχίας ($f'(x_k) = 0$ για κάποιο k, "πηγάδι", κλπ)
4. 2 υπολογισμός τιμών συναρτήσεων σε κάθε βήμα, (της f και της f')

Στα επόμενα μαθήματα θα ασχοληθούμε με τα I II III

Μιγαδική N-R

$$f(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Ο τύπος παραμένει ίδιος $z_{k+1} = z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)}$, $k = 0,1,2$

z_0 = αρχική προσέγγιση

Παραγώγιση μιγαδικών: όπως ~~θ~~ περιμένουμε:

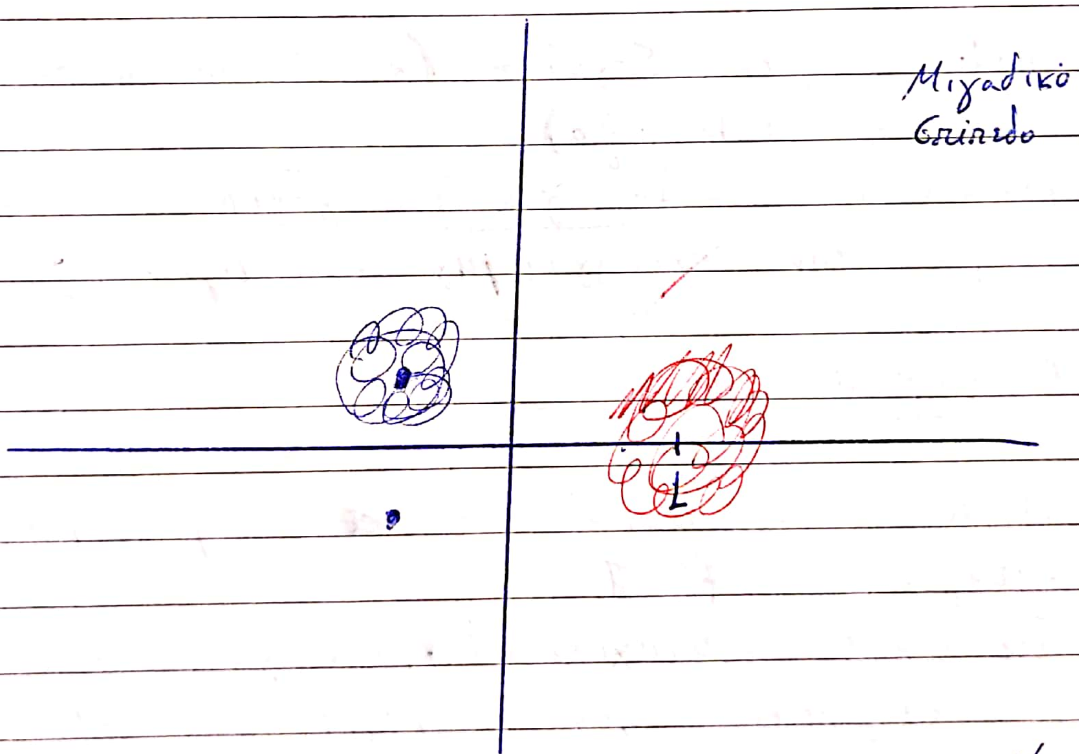
$$f(z) = z^n \longrightarrow f'(z) = n \cdot z^{n-1}$$

$f(z) = z^3 - 1 = 0$

$1, \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z^3 - 1}{3 z_k^2}, \quad k = 0, 1, 2,$$

Ισχύουν αντίστοιχα θεωρήματα.



Ξεκινάω από οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου
και αν το σημείο καταλήγει στην: 1 είναι κόκκινο
$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι μπλε
$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι πράσινο

Το προκύπτον σχήμα είναι αρκετά περίπλοκο στα σύνορα,
~~ονο~~ Τέτοια σχήματα ονομάζονται fractals
Ψάξτε Complex Newton-Raphson για ανάλογα

http://paulbourke.net/fractals/newtonraphson/roots1_s.jpg

Η μέθοδος της τέμνουσας

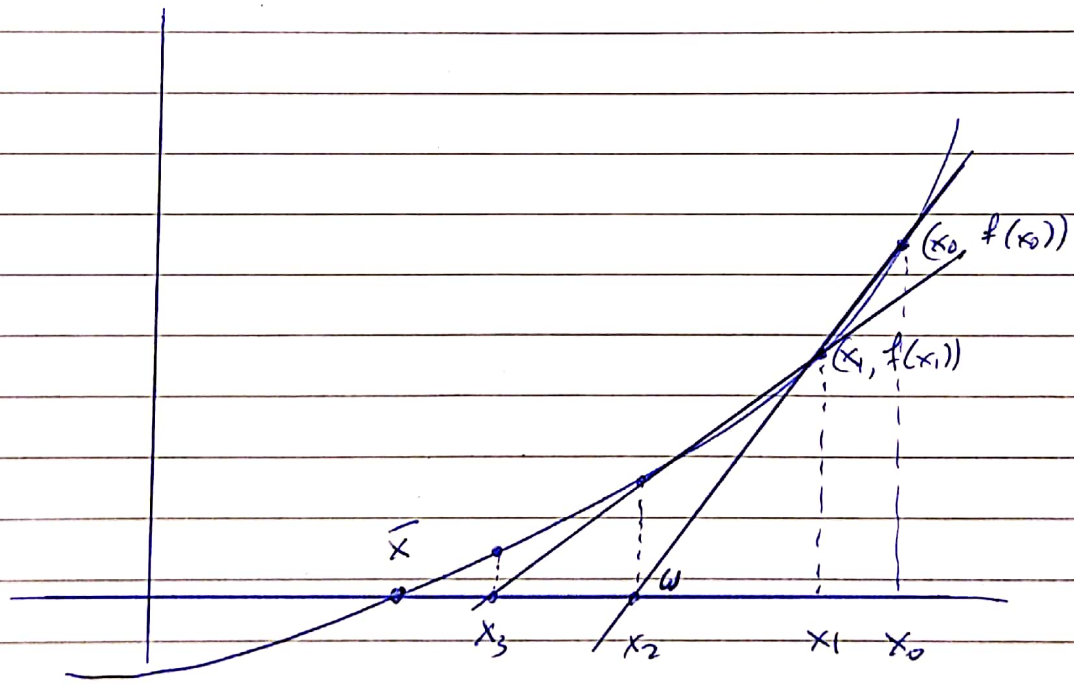
$f(x)=0 \qquad x_1$

Αν στο τύπο της μεθόδου Newton-Raphson προσεγγίσουμε το $f'(x_k)$ με το πηλίκο

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$ προκύπτει η μέθοδος της τέμνουσας

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}, \qquad k=1,2,$$

x_0, x_1 αρχικές προσεγγίσεις μιας ρίζας



$$\omega = x_1 - f(x_1)\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-x_0}$$ δηλ. $\omega = x_2$

<u>Θεώρημα</u> $\bar{x}$ ρίζα της f, f 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κοντά στο $\bar{x}$, $f'(\bar{x})\neq 0$. Τότε για κάθε x_0, x_1 $(x_0\neq x_1)$ επιλεγμένα αρκετά κοντά στο $\bar{x}$, η μέθοδος της τέμνουσας συγκλίνει στο $\bar{x}$ και η τάξη σύγκλισης είναι <u>1.62</u>