Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

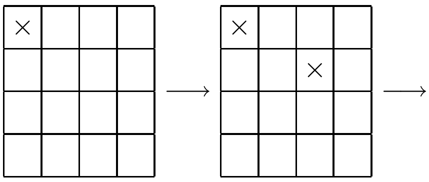
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 23/10/2009

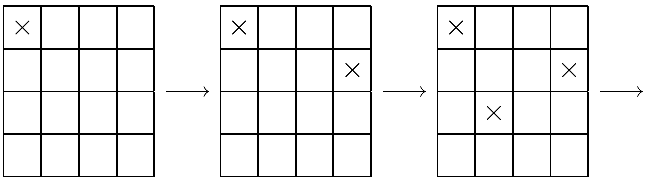
Άσκηση 1: Πρόβλημα Βασιλισσών. Λατινικά και Μαγικά Τετράγωνα.

Καταρχάς, ως 1η γραμμή της σκακιέρας θεωρούμε την πάνω πάνω γραμμή ενώ ως 1η στήλη την αριστερότερη στήλη της. Είναι προφανές ότι σε κάθε γραμμή της σκακιέρας θα υπάρχει ακριβώς μία βασίλισσα. Έτσι, όταν λέμε η 1η βασίλισσα θα εννοούμε τη βασίλισσα της πρώτης γραμμής, κ.ο.κ.

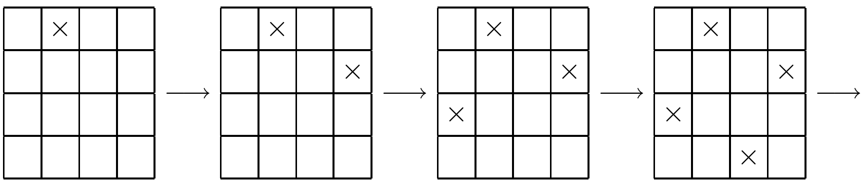
1. Για λόγους συμμετρίας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η 1η βασίλισσα θα τοποθετηθεί είτε στην 1η είτε στη 2η στήλη.

   Για την 1η περίπτωση έχουμε διαδοχικά:

   
   δε μπορεί να οδηγήσει σε λύση

   
   δεν υπάρχει άλλη επιτρεπτή θέση

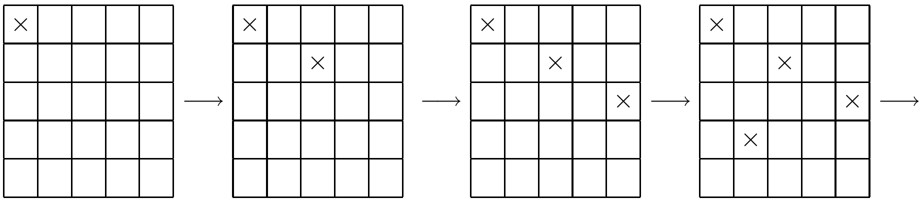
   Για τη 2η περίπτωση:

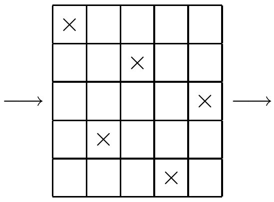
   
   ΔΕΚΤΟ

   Συνεπώς, το πρόβλημα των βασιλισσών για 4×4 σκακιέρα έχει ουσιαστικά μία λύση.

   Επαναλαμβάνουμε για την $5\times$ 5 σκακιέρα: Για λόγους συμμετρίας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η 1η βασίλισσα θα τοποθετηθεί είτε στην 1η, είτε στη 2η, είτε στην 3η στήλη.

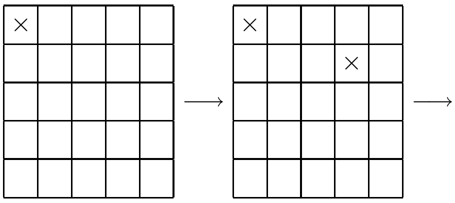
   Για την 1η περίπτωση έχουμε διαδοχικά:



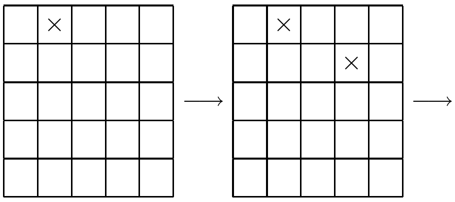
ΔΕΚΤΟ

Εναλλακτικά:



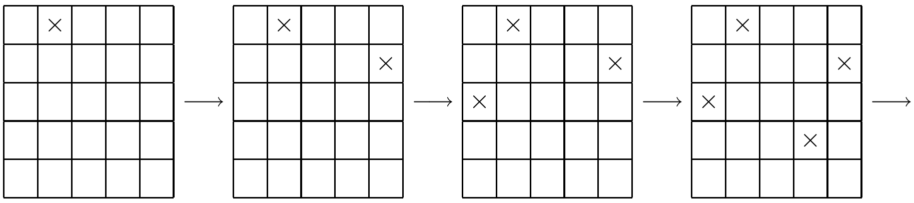
ισοδύναμη λύση
(συμμετρική ως προς
την κύρια διαγώνιο)

Για τη 2η περίπτωση έχουμε διαδοχικά:



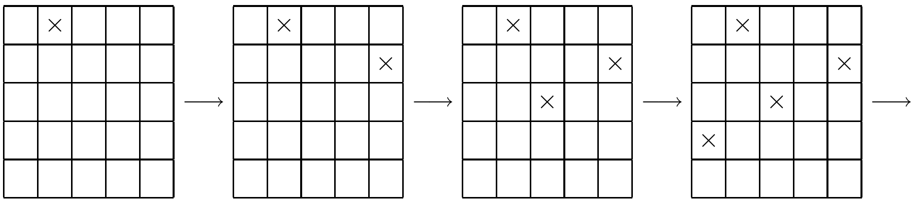
ισοδύναμη λύση
(180^{o} περιστροφή)

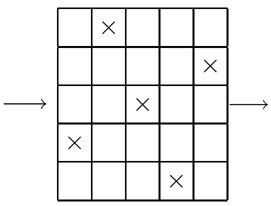
Εναλλακτικά:



δεν υπάρχει άλλη
επιτρεπτή θέση

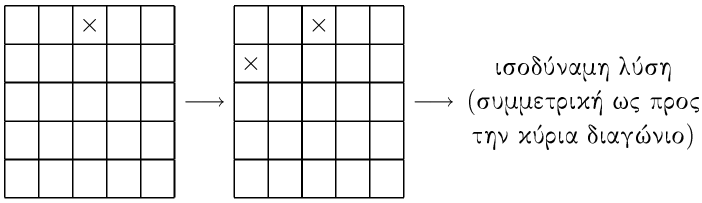
Αλλιώς:





ΔΕΚΤΟ

Τέλος, για την 3η περίπτωση εξετάζουμε μόνο την περίπτωση η 2η βασίλισσα να είναι τοποθετημένη στην 5η στήλη, αφού η περίπτωση να είναι τοποθετημένη στην 1η είναι συμμετρική της ως προς την 3η στήλη.

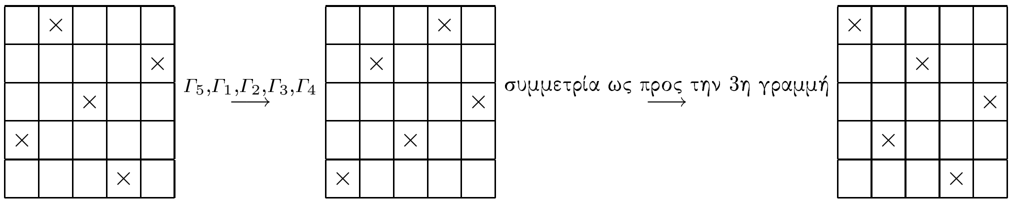


Συνεπώς, το πρόβλημα των βασιλισσών για 5×5 σκακιέρα έχει ουσιαστικά δύο λύσεις.

2. Είναι εύκολο να δούμε ότι η λύση που βρήκαμε για την 4×4 σκακιέρα δεν ικανοποιεί τους τοροειδείς περιορισμούς.

   Αντίθετα, και οι δύο λύσεις που βρήκαμε για την 5×5 σκακιέρα ικανοποιούν τους τοροειδείς περιορισμούς. Ωστόσο, όπως θα δείξουμε, οι δύο λύσεις είναι ισοδύναμες.

   Πράγματι, η τοροειδής σκακιέρα έισάγει μια νέα συμμετρία, αυτή της κυκλικής εναλλαγής των στηλών ή γραμμών, καθώς μια σφαίρα δεν έχει σημασία από ποια πλευρά την κοιτάζουμε. Έτσι, παίρνουμε:



   που αποδεικνύει την τοροειδή ισοδυναμία των δύο λύσεων.

3. Εφαρμόζουμε για κάθε γράμμα τη λύση για το 5×5 τοροειδές πρόβλημα βασιλισσών, μετατοπισμένη κάθε φορά κατά μία στήλη. Έτσι, παίρνουμε την ακόλουθη διάταξη.

a	b	c	d	e
d	e	a	b	c
b	c	d	e	a
e	a	b	c	d
c	d	e	a	b

4. Χρησιμοποιούμε τη λύση του ερωτήματος 3 για να τοποθετήσουμε τους λατινικούς χαρακτήρες και τη συμμετρική της ως προς τη μεσαία στήλη για να τοποθετήσουμε τους ελληνικούς. Αν χρησιμοποιούσαμε την ίδια λύση για τους ελληνικούς χαρακτήρες, θα παίρναμε ίδιους συνδυασμούς γραμμάτων. Έτσι, παίρνουμε την ακόλουθη διάταξη.

$a\epsilon$	$b\delta$	$c\gamma$	$d\beta$	$e\alpha$
$d\gamma$	$e\beta$	$a\alpha$	$b\epsilon$	$c\delta$
$b\alpha$	$c\epsilon$	$d\delta$	$e\gamma$	$a\beta$
$e\delta$	$a\gamma$	$b\beta$	$c\alpha$	$d\epsilon$
$c\beta$	$d\alpha$	$e\epsilon$	$a\delta$	$b\gamma$

5. Κάνοντας το μετασχηματισμό που δίνεται στην εκφώνηση παίρνουμε

4	8	12	16	20
17	21	0	9	13
5	14	18	22	1
23	2	6	10	19
11	15	24	3	7

Για να ελέγξουμε ότι τα αθροίσματα είναι όλα ίσα μεταξύ τους, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι λόγω της κατασκευής του λατινικού τετραγώνου, σε οποιαδήποτε γραμμή, στήλη ή τοροειδή διαγώνιο είναι σαν να προσθέτουμε στο πενταδικό σύστημα το ίδιο σύνολο μονάδων και πεντάδων. Με άλλα λόγια κάθε φορά προσθέτουμε, τόσο για τις μονάδες όσο και τις πεντάδες, τους

$$0_{(5)} + 1_{(5)} + 2_{(5)} + 3_{(5)} + 4_{(5)} = 10$$

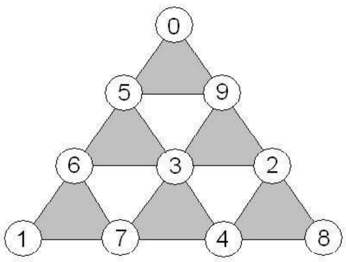
Έτσι, το άθροισμα που προκύπτει κάθε φορά είναι

$$5 \cdot 10 + 10 = 60$$

6. Παρατηρώντας την παραπάνω λύση, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ακόλουθο αλγοριθμικό κανόνα για την κατασκευή του 5×5 μαγικού τόρου.
   - Βάλε 0 στο στοιχείο της 2ης γραμμής και 3ης στήλης.
   - Αν έχεις σημειώσει τον αριθμό k σε ένα τετράγωνο, σημείωσε τον αριθμό $k+1$ στο τετράγωνο που είναι δύο γραμμές δεξιότερα και μία στήλη πιο κάτω (τοροειδώς). Αν στη θέση αυτή υπάρχει ήδη αριθμός τότε σημείωσε τον αριθμό $k+1$ στο τετράγωνο που είναι 2 στήλες πιο κάτω (τοροειδώς).
   - Σταμάτα όταν συμπληρώσεις τον αριθμό 24.

Άσκηση 2: Γραμμοσκιασμένα Τρίγωνα

Μια απάντηση



Άσκηση 3

Η άσκηση βρίσκεται λυμένη στη “Σύντομη Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων”.

Άσκηση 4

Αποτελεί συνέπεια του τύπου του Euler για επίπεδα γραφήματα, ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει αριθμό ακμών $m \leq 3n - 6$ (δείτε τις σημειώσεις στη Θεωρία Γραφημάτων για μια απόδειξή του). Συνεπώς κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχει μία τουλάχιστον κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 5.

Το ζητούμενο αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιώντας το παραπάνω. Ειδικότερα, το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα για γραφήματα με μικρό αριθμό κορυφών (π.χ. όταν $n \leq 6$). Υποθέτουμε επαγωγικά ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές. Αν το γράφημα G έχει $n + 1$ κορυφές, έστω u μια κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 5, και έστω G_u το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση της u και των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή. Από την επαγωγική υπόθεση, οι κορυφές του G_u διαμερίζονται σε 3 σύνολα ώστε τα αντίστοιχα επαγόμενα υπογραφήματα να είναι ακυκλικά. Για κάποιο από αυτά, η u συνδέεται με μία το πολύ κορυφή του. Η προσθήκη της u σε αυτό το σύνολο δεν δημιουργεί κύκλο στο αντίστοιχο επαγόμενο υπογράφημα.

Παρατηρείστε ότι η παραπάνω απόδειξη είναι κατασκευαστική και οδηγεί σε απλό αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό μιας τέτοιας διαμέρισης.

Άσκηση 5

2. Δύο είναι οι βασικές παρατηρήσεις που εκμεταλλευόμαστε για να λύσουμε το πρόβλημα σε $O(n)$ χρόνο:

- Κάθε γράφος μπορεί να έχει το πολύ μία ολική καταβόθρα.
- Αν ένας γράφος έχει ολική καταβόθρα τότε όλα τα μονοπάτια του οδηγούν σε αυτήν.

Η ιδέα είναι η εξής:

Ο αλγόριθμος διαγράφει ένα μονοπάτι στο γράφο. Με αριθμημένες τις κορυφές ξεκινά από την πρώτη κορυφή και πηγαίνει στην αμέσως μεγαλύτερη γειτονική της (αν υπάρχει). Συνεχίζει μέχρι να φτάσει σε κορυφή που δεν έχει εξερχόμενες ακμές προς κορυφές με μεγαλύτερο αριθμό. Αυτή είναι η υποψήφια καταβόθρα. Για να αποφανθεί για την υποψήφια καταβόθρα, ελέγχει αν οι ακμές της είναι μόνο εισερχόμενες και αν προέρχονται από όλες τις κορυφές.

Άσκηση 6

1. Έστω μια διάταξη χτυπημάτων D. Θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ενός χτυπήματος της κορυφής u με ένα χτύπημα της κορυφής v. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η τελική κατάσταση για κάθε κορυφή k θα μείνει αμετάβλητη.
   Θα έχουμε:
   $D = n_1, n_2, \ldots, u, \ldots, v, \ldots$. Αρκεί να αποδείξουμε πως η διάταξη $u, a, b, \cdots, v$ αφήνει το ίδιο αποτέλεσμα με τη διάταξη $v, a, b, \ldots, u$. Για κάθε κορυφή k ο αριθμός των φορών που άλλαξε κατάσταση αν ήταν m·k πριν το swap, θα είναι πάλι m·k μετά το swap (διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν u,v γειτονικές της k ή αν μία από τις 2 ταυτίζεται με το k).
2. Θεωρώντας τη διάταξη $D = n_1, n_2, \ldots, n_m$ όπου m τα χτυπήματα στις κορυφές, από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι ο τελικός χρωματισμός θα είναι ίδιος αν εφαρμόζαμε την εξής διάταξη $D = a, a, a, \ldots, b, b, b, \ldots$ (ταξινομήσαμε ως προς το index των κορυφών. Προφανώς αν χτυπήσω μία κορυφή u και αμέσως μετά την ξαναχτυπήσω, δεν έχω μεταβολή

των χρωμάτων των κορυφών. Συνεπώς το D καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με το D'A και αυτό με τη σειρά του καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με το $D'' = a, b, \ldots$.

3. Έστω n το πλήθος των κορυφών του γράφου. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

   Αλυσίδα

   n=3k Αριθμώντας τις κορυφές από 1 ως ν στην αλυσίδα χτυπάμε όλες τις κορυφές που είναι ισοϋπόλοιπες με 2 mod 3.

   n=3k+1 Αριθμώντας τις κορυφές από 1 ως ν στην αλυσίδα χτυπάμε όλες τις κορυφές που είναι ισοϋπόλοιπες με 1 mod 3.

   n=3k+2 Αριθμώντας τις κορυφές από 1 ως ν στην αλυσίδα χτυπάμε όλες τις κορυφές που είναι ισοϋπόλοιπες με 1 mod 3.

   Κύκλος

   Για τον κύκλο παρατηρούμε πως χτυπώντας όλες τις κορυφές, κάθε κορυφή θα μεταβάλλει το χρώμα της 3 φορές και άρα θα καταλήξουμε στην επιθυμητή κατάσταση.

   Πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,n}$

   Αν n = 2k , προφανώς χτυπώντας όλες τις κορυφές θα έχω n+1 αλλαγές για κάθε κορυφή και άρα περιττό πλήθος αλλαγών οπότε θα καταλήξουμε στην επιθυμητή κατάσταση.

   Αν n = 2k+1 , προφανώς χτυπώντας όλες τις κορυφές του ενός συνόλου του διμερούς γράφου θα έχω 1 αλλαγή για κάθε κορυφή του ίδιου συνόλου και n αλλάγες (που είναι περιττός αριθμός) για κάθε κορυφή του άλλου συνόλου.

4. Έστω d_k η συνάρτηση "χτυπήματος" , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$d_k = \begin{cases} 1 \text{ αν k χτυπήθηκε} \\ 0 \text{ αν k δεν χτυπήθηκε} \end{cases}$$

   Το παιχνίδι έχει λύση αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση χτυπήματος τέτοια ώστε για κάθε κορυφή u $d_u + \sum_{(u,v)\in E} d_v = 2\lambda + 1$, όπου λ φυσικός. Οπότε προκύπτει ότι

$$(A + I_n) \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \mod 2$$

   όπου A ο πίνακας γειτνίασης. Λύνοντας το γραμμικό σύστημα $\mod 2$, βρίσκω τη λύση για το πρόβλημα. Για να λυθεί το σύστημα εφαρμόζουμε απαλοιφή κατά Gauss (γραμμική άλγεβρα) που έχει πολυπλοκότητα $O(n^3)$.