Κανονική - Φεβουάριος 2010

Θεμα 1ο

Να συγκρίνετε τα παρακάτω σύνολα με απόδειξη του ισχυρισμού σας και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα Venn.

$\Omega(n^{(log^2 n)}), o(n^{(log^2 n)}), \Theta(2^{nlogm}), \omega(2^{nlogn}), \Theta(log(n!)), \mathcal{O}(\lceil logn \rceil !)$

Θέμα 2ο

Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (ή ισοδύναμα με ανοιχτά προβλήματα). Ζητουσε και μια μικρή αιτιολόγηση.

- Ο χρόνος εκτέλεσης της quicksort είναι $\mathcal{O}(nlogn)$ στη χειρότερη περίπτωση.
- Μπορεί να υπάρξει αλγόριθμος κατασκευής σωρού με χρόνο χειρότερης περίπτωσης $o(n)$ (n το πλήθος των στοιχείων.)
- Όλοι οι αλγόριθμοι δυναμικού προγραμματισμού έχουν ψευδοπολυωνυμικό χρόνο.
- Υπάρχει αλγόριθμος γραμμικού χρονου που να υπολογίζει το μονοπάτι μέγιστου μήκος σε ακυκλικά κατευθυνόμενα γραφήματα
- Ο αλγόρθμος του dijkstra υπολογίζει σωστά δέντρα συντομότερων μονοπατιών σε γραφήματα με αρνητικά βάρη χωρίς κύκλους αρνητικού μήκος
- Αν σε κάθε ακμή προσθέσουμε το ίδιο θετικό G, ο αλγόριθμος του Prim υπολογίζει το ίδιο ελάχιστο συνδετιό δέντρο.
- Αν$P \neq NP$, τότε κανένα NP πρόβλημα δε μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Έστω P_1, P_2 ανήκουν στο NP και το P_1 ανάγεται πολυωνυμικά στο Π_2. Αν το P_1 ανήκει στο P, τότε και το P_2 ανήκει στο P

Θέμα 3ο

α)Έστω συνεκτικό μη κατευνόμενο γράφημα G(V,E,w) με όλα τα βάρη w θετικά και διαφορετικά μεταξύ τους. Είναι δυνατόν ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο και ένα δέντρο συντομότερων μονοπατιών να μην έχουν καμία κοινή ακμή. Αν ναι, δώστε ένα παράδειγμα αλλιώς αιτιολογήστε γιατί).

β) Δινόταν ένα γράφημα και ζητούσε ελάχιστο συνδετιό δέντρο με Prim και Kruskal, ποιο είναι το βάρος του, και ποιες ακμές και με ποια σειρά μπαίνουν στο δέντρο σε κάθε αλγόριθμο.

Θέμα 4ο

Ένα οδικό δίκτυο αναπαρίσταται με γράφημα G(V,E,w) με m ακμές. Κάθε ακμή του γραφήματος ($e \in E$) συνδέει 2 πόλεις με απόσταση w(e) χιλιόμετρα, ενώ σταθμοί καυσίμων υπάρχουν σε καθε πόλη/κορυφή αλλά όχι στις ακμές. Θέλουμε να πάμε από την πόλη s στην πόλη t με αυτοκινητο με L αυτονομία καυσίμου.

α) Να κατασκευάσετε αλγόριθμο που να υπολογίζει αν αυτό είναι εφικτό. Ποια η χρονική πολυπλοκότητα του;

β) Να κατασκευάσετε αλγόριθμο πολυπλοκότητας $\mathcal{O}(mlogm)$ που να υπολογίζει την ελάχιστη αυτονομία καυσίμου για την διαδρομή s->t

bonus: ένα γραμμικό αλγόριθμο για το β

Θέμα 5ο

Στα πλαίσα ενός προγράμματος ανάκλησης, οι κάτοχοι n αυτοκινήτων πρέπει να επισκευτούν κάποιο από τα k εξουσιοδοτημένα συνεργεία. Οι κάτοικοι κατοικούν σε διάφορα σημεία και δε δέχονται να πάνε σε συνεργεία με απόσταση μεγαλύτερη των 5 km. Έτσι κάθε κάτοικος έχει λίστα L_i με ποια συνεργεία δέχεται να πάει. Επιπλέον κάθε συνεργείο δέχεται το πολύ C_j αυτοκίνητα. Να δώσετε αλγόριθμο με είσοδο τις λίστες L_i, και C_j που να υπολογίζει πλάνο επισκέψεων των κατόχων στα συνεργεία (ή να διαπιστώνει οτί δεν υπάρχει). Αιτιολογήστε την ορθότητα και τη χρονική πολυπλοκότητα.

Θέμα 6ο

Έστω μηχανή και ένα σύνολο n εργασιών $A = a_1, a_2, \ldots a_n$ υποψήφιες προς εκτέλεση. Σε κάθε a_j αντιστοιχεί χρόνος t_j, κέρδος p_j και προθεσμία d_j η οποία είναι θετική και πάντα μεγαλύτερη η ίση από έναν αριθμό B. Η μηχανή εκτελεί μια διεργασία τη φορά και η a_j εκτελείται χωρίς διακοπή για t_j χρονικές μονάδες. Αν ολοκληρωθεί εντός d_j τότε έχουμε κέρδος p_j αλλιώς 0. Ένα σύνολο εργασιών $F \subseteq A$ είναι εφικτό αν οι εργασίες του F μπορούν να δρομολογηθούν όλες ώστε να ολοκληρώθούν εντός της προθεσμίας .

α) Να δείξετε ότι για κάθε εφικτό σύνολο F, η δρομολόγηση σε αύξουσα σειρά προθεσμιών είναι μια μέθοδος που εξασφαλίζει οτί όλες οι εργασίες του F ολοκληρώνονται εντός της προθεσμία τους.

β) Να κατασκευάσετε αλγόριθμο που να υπολογίζει το σύνολο εφικτών εργασιών F με το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος. Ποια οι χρονική πολυπλοκότητα του;

Θέμα 7ο

Στο πρόβλημα του μακρύτερου μονοπατιού δίνεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V,E) και ένας φυσικός αριθμός k, $1 \leq k \leq V - 1$ και ζητείται να διαπιστώσουμε αν το G έχει (απλό) μονοπάτι μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του k. Να δείξετε ότι είναι NP-πλήρες

Θέματα Εξεταστικής Φεβρουαρίου 2011

(Τα γράφω από μνήμης οπότε όποιος μπορεί ας ρίξει μια ματιά για λάθη. Επίσης λείπει ένα Σ/Λ)
(Δε θυμάμαι ακριβώς μονάδες αλλά τα θέματα ήταν περίπου ισοδύναμα, 10-16 βαθμούς για το καθένα. Συνολικά 80 βαθμοί)

Θέμα 1ο:

Να πείτε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Αληθείς ή Ψευδείς: (Σωστή απάντηση: 1 βαθμός, Λάθος απάντηση: -0,5 βαθμοί, Καμία απάντηση: 0 βαθμοί).

1) Έστω γράφημα G(V,E,w) με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του, περισσότερες από |V|-1 ακμές και μοναδική ακμή μέγιστου βάρους. Τότε η ακμή του G μέγιστου βάρους δεν ανήκει σε κανένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο.

2) Έστω αναδρομική σχέση της μορφής $T(n) = 9T(n/3) + n^2 log^2 n, T(1) = O(1)$. Τότε $T(n) = o(n^2 log^2 n)$.

3) Έστω αναδρομική σχέση της μορφής T(n)=5T(n/4)+nlogn, T(1)=O(1). Τότε T(n)=ω(nlogn).

4) Έστω ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα G(V,E,w) με (πιθανώς αρνητικά) βάρη στις ακμές του. Τότε υπάρχει αλγόριθμος χρονικής πολυπλοκότητας O(|V|+|E|) που υπολογίζει τα συντομότερα μονοπάτια από μια (κάθε;) κορυφή του G.

5) Έστω γράφημα G(V,E,w) με (πιθανώς αρνητικά) βάρη στις ακμές του και |E|=O(|V|log|V|). Τότε υπάρχει αλγόριθμος χρονικής πολυπλοκότητας $O(|V|^2 log|V|)$ που υπολογίζει τα συντομότερα μονοπάτια από όλες τις κορυφές του G.
6) Αν $P \neq NP$, κανένα πρόβλημα της κλάσης NP δε λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
7) $O(n^2)(tomi)\Omega(n^3) = \emptyset$.
8) Σε ένα δίκτυο ροής, αν αυξήσουμε την χωρητικότητα μιας ακμή που ανήκει στην ελάχιστη τομή κατά δ>0, τότε η μέγιστη ροή αυξάνεται επίσης κατά δ.
9) Έστω γράφημα G με διαφορετικό βάρος σε κάθε ακμή του. Τότε το δέντρο συντομότερων μονοπατιών από μια κορυφή του s είναι μοναδικό
10) Σε έναν σωρό μεγίστου (max heap) με n στοιχεία, η διαγραφή του μέγιστου στοιχείου γίνεται σε χρόνο χειρότερης περίπτωσης O(logn).
11) Υπάρχει αλγόριθμος χρονικής πολυπλοκότητας o(n) που βρίσκει το μέγιστο μιας ακολουθίας n στοιχείων.
12)

Θέμα 2ο

Δίνεται ένα γράφημα (σε σχήμα), να βρεθεί ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του με (α) τον αλγόριθμο του Prim, (β) τον αλγόριθμο του Kruskal. Να δοθεί η σειρά με την οποία προσθέτει ακμές στο δέντρο ο κάθε αλγόριθμος. Ποιο είναι το βάρος του Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου;

Θέμα 3ο

Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V,E,w) με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του. Ονομάζουμε r-περιορισμένο s-t μονοπάτι στο G ένα μονοπάτι που χρησιμοποιεί μόνο ακμές βάρους <=r.
(α) Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που να βρίσκει αν υπάρχει r-περιορισμένο s-t μονοπάτι στο G για δύο κορυφές s,t (και δεδομένο r).
(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει r-περιορισμένο s-t μονοπάτι στο G, αν και μόνο αν το μοναδικό s-t μονοπάτι κάθε Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου T του G είναι r-περιορισμένο.
(γ) Να διατυπώσετε αλγόριθμο χρονικής πολυπλοκότητας O(|E|log|E|) που να βρίσκει το ελάχιστο r για το οποίο υπάρχει r-περιορισμένο s-t μονοπάτι στο G.

Θέμα 4ο

Δίνεται γράφημα G(V,E) με μοναδιαία βάρη στις ακμές του και δύο κορυφές του s,t. Να διατυπωθεί αλγόριθμος *γραμμικού* χρόνου που να επιστρέφει το πλήθος των συντομότερων μονοπατιών από την s στην t. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Θέμα 5ο

Δίνεται εκδοχή του διακριτού Knapsack όπου όλα τα αντικείμενα έχουν μοναδιαία αξία: έστω δηλαδή n αντικείμενα με μεγέθη $s_1, s_2, \dots, s_n$ και αξία 1, καθώς και σακίδιο χωρητικότητας B. Να βρεθεί αλγόριθμος πολυπλοκότητας O(n) που να βρίσκει το σύνολο αντικειμένων μέγιστης αξίας που μπορεί να χωρέσει στο σακίδιο. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Θέμα 6ο

Ένας σύμβουλος έχει την έδρα του κάθε μήνα είτε στην Αθήνα είτε στη Θεσσαλονίκη. Θέλει να καταστρώσει βέλτιστο πλάνο για τους επόμενους n μήνες με βάση το κόστος λειτουργίας του

γραφείου του. Κάθε πόλη έχει ένα μηνιαίο κόστος για έξοδα γραφείου, διαφορετικό κάθε μήνα, που για το μήνα i δίνεται από τους αριθμούς a_i για την Αθήνα και θ_i για τη Θεσσαλονίκη. Επίσης, η μετακόμιση από τη μία πόλη στην άλλη έχει ένα κόστος M.
(Έδινε και ένα παράδειγμα στιγμιότυπου)
(α) Δώστε ένα παράδειγμα όπου ο άπληστος αλγόριθμος που για κάθε μήνα δίνει την πόλη με τα ελάχιστα έξοδα γραφείου για αυτόν το μήνα αποτυγχάνει να υπολογίσει βέλτιστη λύση.
(β) Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που να υπολογίζει το σύνολο ελάχιστου κόστους για το παραπάνω πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.
(γ) Να διατυπώσετε αλγόριθμο για γη γενίκευση του παραπάνω προβλήματος με m πόλεις, όπου τα κόστη γραφείου δίνονται από τους $c_k(i)$ για την πόλη k και το μήνα i. Επίσης το κόστος μετακόμισης από την πόλη i στην πόλη j δίνεται από το M(i,j). Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σε αυτήν την περίπτωση;

Θέμα 7ο
Έστω γράφημα G(V,E). Λέμε ότι ένα υποσύνολο V' του V είναι Σύνολο Κορυφών Ανάδρασης (feedback vertex set) αν, αφαιρώντας τις όλες τις κορυφές του V' (και όλες τις προσπίπτουσες σε αυτές ακμές) από το G, προκύπτει γράφημα χωρίς κύκλους. Στο αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει Σύνολο Κορυφών Ανάδρασης του G με το πολύ k στοιχεία για έναν φυσικό k.
(α) Να αποδείξετε ότι η εκδοχή του παραπάνω προβλήματος με G κατευθυνόμενο είναι NP-complete.
(β) Να αποδείξετε ότι ακόμα και η υποπερίπτωση του (α) με G μη κατευθυνόμενο είναι επίσης NP-complete.
(Υπόδειξη: δοκιμάστε αναγωγές από την Κάλυψη Κορυφών)
(Σημείωση: αφού το (α) είναι γενίκευση του (β), όποιος ήθελε μπορούσε να δείξει απευθείας το (β).
)

Οκτωβριος 2011

Θεμα 1ο : Σ η Λ

Θεμα 2ο : στεγνή εφαρμογη Ντικστρα

Θεμα 3ο : να βρεθει αλγοριθμος O(V^2) που να βρισκει το μηκος του ελαχιστου κυκλου σε διμερες απλο γραφημα

Θεμα 4ο : Εστω κατευθυντο γραφημα με θετικα βαρη, Βρειτε διαμεριση των κομβων , ωστε η ελαχιστη αποσταση μεταξυ των δυο διαμερισεων , να
μεγιστοποιειται

Θεμα 5ο : δινεται συνολο απο ν Φυσικους αριθμους Α={ α1,..αν} και αριθμος κ
να βρεθει αν υπαρχουν δυο υποσυνολα του Α, ωστε [Αθροισμαστοιχειωνυποσυνολου1-

Αθροισμαστοιχειωνυποσυνολου2 = κ]

Θεμα 6ο : ιδιο με συνεργεια και αυτοκινητα οπως Φεβρ 2010

Θεμα 7ο : αποδειξη οτι [k-degree constrained Spaning Tree] ειναι Npcomplete

Φεβρουάριος 2012.

Θέμα 1

Σ-Λ:

1. $T(n) = 6T(n/6) + nlogn, T(1) = O(1)$, τότε T(n)=Θ$(nlogn)$

2. $2^{(}log^2n) = w(nlog^2n)$

3. Το TSP λύνεται σε ψευδοπολυωνυμικό χρόνο.

4. $T(n) = T(n-1) + J(1), T(1) = O(1)$ τότε T(n)=Θ(n^2)

5. Όλες οι λειτουργίες σε UNION-FIND βεβαρημένης ένωσης έχουν χρόνο εκτέλεσης O(logn)

Θέμα 2

Prim και Kruskal για MST.

Θέμα 3

Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος G(V,E,W) και αποστάσεις di, "υποτίθεται" οι αποστάσεις των κορυφών ui από την u1.

α) Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που να διαπιστώνει αν όντως οι αποστάσεις αυτές αντιστοιχούν στις σωστές αποστάσεις μεταξύ των κορυφών ui-u1 και αν ναι, να επιστρέφει ένα ΔΣΜ.

β) Διάμετρος D σε γράφο ορίζεται ως εξής: (u,v)EV : max{ d(u,v) }. Ποιόν αλγόριθμο γνωρίζεται που να μπορεί να υπολογίσει τη διάμετρο; Να βρείτε σημαντικά αποδοτικότερο αλγόριθμο που να υπολογίζει την διάμετρο με λόγο 2, δηλαδή να βρίσκει $D/2 <= D <= D$.

Θέμα 4.

3-Διαμέριση:

Έστω σύνολο W=(w1,..wn), για το οποίο γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων του είναι πολλαπλάσιο του 3. Να διατυπώσετε αλγόριθμο ψευδοπολυωνυμικού χρόνου που να αποφασίζει αν υπάρχει διαμέριση του W σε 3 σύνολα ώστε αυτά να έχουν το ίδιο άθροισμα.

Θέμα 5.

Έστω γράφος G(V,E,w) και δεδομένη ροή f σε αυτόν.

α) Να διατυπώσετε αλγόριθμο (γραμμικού χρόνου νμζ) που να διαπιστώνει αν η ροή είναι όντως μέγιστη.

β) Έστω ότι διαπιστώνουμε ότι η ροή είναι όντως μέγιστη. Αν τελικά η χωρητικότητα μας κορυφής μειωθεί από ce σε ce'=ce-k, να διατυπώσετε αλγόριθμο που να τροποποιεί κατάλληλα την ροή αν αυτό είναι απαραίτητο. Ο αλγόριθμος πρέπει να είναι σημαντικά αποδοτικότερος από τον υπολογισμό της ροής από την αρχή.

Θέμα 6.
Να πείτε και να αιτιολογήσετε αν τα παρακάτω προβλήματα είναι NP-πλήρη ή όχι.
α) Δοθέντος γράφου G(V,E,w) και συνόλου κορυφών L, αν υπάρχει spanning tree του G, ώστε τα στοιχεία του L να είναι φύλλα του T.
β) Έστω σύνολο U=(w1,..wn) και υποσύνολα S1,...Sm του U. Να βρείτε αν υπάρχει σύνολο k στοιχείων του U που να τέμνει όλα τα Sj.
γ) Το πρόβλημα της 3-Διαμέρισης όπως αυτό παρουσιάστηκε νωρίτερα.

Φεβρουάριος 2015

1) Σ/Λ
- Αν T(n) = 2T(n/2) + n(logn)^3, T(1)=Θ(1), τότε T(n) = Ω(n(logn)^3).
- Αν T(n) = T(n/2) + T(n/3) + n, T(1)=Θ(1), τότε T(n) = Θ(nlogn).
- Αν T(n) = 3T(n/3) + nlogn, T(1)=Θ(1), τότε T(n) = O(nlogn).
- Το max flow διατυπωμένο ως πρόβλημα απόφασης ανήκει στην κλάση NP.
- Στο max flow αν αυξήσω τη χωρητικότητα 2 ακμών της μέγιστης τομής κατά k την καθεμία αυξάνεται η μέγιστη ροή κατά 2k.
- Ο γρηγορότερος συγκριτικός αλγόριθμος για κατασκευή σωρού είναι O(nlogn).
- Το DFS με n κορυφές και n^3/2 ακμές θέλει O(n^2) αν αναπαρίσταται με πίνακα γειτνίασης.
- Στον Dijkstra αν διαλέγω κάθε φορά αντί για το μικρότερο το μεγαλύτερο βρίσκω longest paths.
- Στον Kruskal αν έχω ταξινομημένες τις ακμές σε φθίνουσα σειρά, βρίσκω το μέγιστο συνδετικό δέντρο.
- Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου των Ford-Fulkerson είναι πιθανό σε κάποιο βήμα η ροή κάποιας ακμής να μειωθεί.
- Το πρόβλημα της μέγιστης ροής σε ένα δίκτυο, εκφρασμένο ως πρόβλημα απόφασης ανήκει στο NP.
- Έστω ένα πρόβλημα για το οποίο για κάθε στιγμιότυπο υπάρχει CNF λογική πρόταση φ (η οποία κατασκευάζεται σε πολυωνυμικό χρόνο), για την οποία το στιγμιότυπο είναι αποδεκτό αν και μόνο αν η φ είναι ικανοποιήσιμη. Τότε το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο.

2) α) Kruskal και Prim
β) Αν υπάρχει r-περιορισμένο μονοπάτι μεταξύ $s - t$ να δειχθεί ότι κάθε ΕΣΔ έχει r-περιορισμένο μονοπάτι μεταξύ $s - t$ (όπου r-περιορισμένο εννοείται ότι κάθε ακμή του μονοπατιού έχει βάρος το πολύ r)

3) Θέλουμε να πάμε ένα ταξίδι το οποίο θα διαρκέσει k >= 2 μέρες, κι έχουμε επιλέξει ένα σύνολο n > k ενδιάμεσων σταθμών με αποστάσεις d1, d2, ..., dn μεταξύ τους (η απόσταση του 1ου σταθμού από την αφετηρία είναι d1, η απόσταση του 2ου σταθμού από τον 1ο είναι d2, κοκ). Οι αποστάσεις είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.
Θέλουμε να βρούμε αποδοτικό αλγόριθμο που να υπολογίζει ποιες στάσεις θα πρέπει να κάνουμε κάθε μέρα ώστε η μέγιστη απόσταση που θα διανύσουμε για κάθε μέρα να ελαχιστοποιείται.
(Οι αποστάσεις μπορούσαν να διανύονται μόνο στο ακέραιο.)

4) Ακολουθία $p(1), p(2), \dots, p(n)$ και ζητείται
α) Για κάθε διάστημα $[x, y]$ το $P[x, y] = max_{x \leq i < j \leq y}(p(j) - p(i))$

β) Η βέλτιστη επιλογή το πολύ k μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων $[s_i, b_i]$ έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το άθροισμα των $p(b_i) - p(s_i)$
(Η ακολουθία παρουσιαζόταν ως τιμές μιας μετοχής την εκάστοτε μέρα και το $p[j] - p[i]$ (χτύπημα) αντιστοιχεί στην αγορά της τάδε μετοχής την i-οστή μέρα και στην πώληση της τη j-οστή μέρα, οπότε ζητούταν η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους με το πολύ k χτυπήματα.)

5) Δίνεται γράφος $G(V, E, w)$ όπου κάθε ακμή έχει μοναδιαίο μήκος και κάποιο βάρος $w(e)$ και ζητείται
α) Για κάθε κόμβο u η ελαχίστου βάρους με το μικρότερο μήκος διαδρομή. (Δηλαδή αν δύο μονοπάτια είναι ισοβαρή, αυτό με τις λιγότερες ακμές.)
β) Το ίδιο, αλλά μόνο για τα μονοπάτια περιττού μήκους. Δηλαδή από κάθε $s - u$ μονοπάτι περιττού μήκους αυτό που έχει το ελάχιστο βάρος και σε περίπτωση ισοπαλίας αυτό με τις λιγότερες ακμές.

6) Αν $P \neq NP$ να ελεγχθεί αν τα παρακάτω είναι NP-complete ή ανήκουν στο P:
α) Δοθέντος γράφου $G(V, E)$ αν υπάρχει υποσύνολο του V μεγέθους 2015 το οποίο να είναι ανεξάρτητο.
β) 3-partition
γ) Δοθέντος γράφου όπου οι ακμές έχουν αξία και βάρος, υπάρχει συνδετικό δέντρο με συνολικά αξία τουλάχιστον P και συνολικό βάρος το πολύ W;

Θέματα επί πτυχίω εξεταστικής Ιούλιος 2015, όπως τα είχα σημειώσει πρόχειρα:

Θέμα 1ο (4+7 βαθμοί)

α) Να γράψεις την πολυπλοκότητα 4 αναδρομικών σχέσεων (μόνος σου, όχι σωστό λάθος)
β) Να γράψεις την πολυπλοκότητα: Dijkstra, DFS, create heap, dynamic programming TSP, Bellman - Ford (και κάτι άλλο)

Θέμα 2ο (8 βαθμοί)

Εκτέλεση Prim + Kruskal

Θέμα 3 (10 βαθμοί)

Δίνονται τιμές p1... pn (τιμή ανά ημέρα μήλου). Μια οικογένεια χρειάζεται 2 κιλά μήλα ανά ημέρα, και τα μήλα κρατάνε 10 μέρες. Βρείτε αλγόριθμο ελαχιστοποίησης κόστους, και γράψτε και την πολυπλοκότητα και αποδείξτε την ορθότητα του.

Θέμα 4ο (8+10 βαθμοί)
α) Αν α1..αn μήκη λέξεων, k>=2 γραμμές, βρες αλγόριθμο που να υπολογίζει το ελάχιστο πλάτος γραμμής. (σαν τη Ασκ 5 Σειρά 1 2015)
β) Πάλι δεδομένων α1...αn , θέλω να ελαχιστοποιήσω το άθροισμα των κύβων των γραμμάτων μιας

γραμμής για να έχω ομοιομορφία. Βρείτε αλγόριθμο, πολυπλοκότητα και ορθότητα.

<u>Θέμα 5ο (10+8 βαθμοί)</u>

Σου έλεγε κρίσιμες και σχεδόν κρίσιμες ακμές απο S -> X.
α) Βρες απλό αναγκαίο και ικανό κριτήριο για να είναι μια ακμή ι) κρίσιμη , ιι) σχεδόν κρίσιμη.
Αν μια ακμή είναι κρίσιμη => ότι είναι και σχεδόν κρίσιμη? Το αντίστροφο ισχύει?
β) Να βρείτε αποδοτικό αλγόριθμο που να υπολογίζει κρίσιμες και σχεδόν κρίσιμες ακμές γράφου. Γράψτε και πολυπλοκότητα και ορθότητα.

<u>Θέμα 6ο (5 + 5 + 5 βαθμοί)</u>

Τρεις αναγωγές, δεν έχω σημειώσει ποιες. Νομίζω (τουλάχιστον) μία ήταν από τα θέματα του Φεβρουαρίου 2015.

ΘΕΜΑΤΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017

1)
Σ-Λ με αρνητικη βαθμολογηση πανω σε master theorem, πολυπλοκοτητες, και διαφορα που αναφερει στιγμιαια στο μαθημα
(12 μοναδες)

2)
a)Εδινε ενα γραφο και επρεπε να τρεξεις dijkstra
b)Να βρεθει η ελαχιστη αποσταση καθε κομβου u απο μια αρχικη κορυφη s σε γραφημα, με το μικροτερο αριθμο ακμων στο s-u μονοπατι
(7+7=14 μοναδες)

3)
Εστω πινακας a με φυσικους αριθμους. Γραψε συναρτηση που α επιστρεφει εναν πινακα b , οπου b(i)= # (a(j)>a(i), με j>i)
(9 μοναδες)

4)
Εστω πινακας θετικων ακεραιων a μηκους n και αρίθμος S.
a)Να βρειτε αν μπορει να υπαρχει sum(a)=S, δινωντας τυχαια προσημα στα στοιχεια οταν κανεις το αθροισμα
b)Να βρειτε αν μπορουν να γινουν μεταθεσεις στον πινακα a και στο τελος να καταληξουμε στον αριθμο S. Δηλαδη, κανωντας για καποιο i ,
a(i)<--a(i)-a(i+1), μεχρι να μεινει ενα στοιχειο στον πινακα, και αυτο το στοιχειο ειναι το S
(7+7=14 μοναδες)

5)
Εστω μη-κατευθυνομενο γραφημα και το MST του. Μια ακμη e λεγεται "απαραιτητη" για το MST αν βγαζωντας την απ το γραφημα αυξανεται το βαρος του MST.
a)Να δειξετε οτι μια ακμη e ειναι απαραιτητη ΑΝΝ καθε σε καθε κυκλο C που την περιλαμβανει, δεν αποτελει την ακμη μεγιστου βαρους του C
b)Με βαση το (a), να βρειτε αλγοριθμο γραμμικου χρονου που , δοθεντος ενος γραφηματος G και μιας ακμης e, επιστρεφει αν η e ειναι "απαραιτητη".
(8+8=16 μοναδες)

6)
a)υπαρχει 4-διαμεριση ενος συνολου αριθμων A={α1,α2,...,αν}?

και αλλες 2 αναγωγες που δε τις θυμαμαι
(5+5+5=15 μοναδες)

Θέμα 2 νομίζω ήταν 8+8.
Θέμα 6, οι άλλες δύο ήταν
Spanning Tree ύψους >= k και
Hamiltonian Cycle κατά προσέγγιση.

Θεματα Κανονικης εξεταστικης 2017-18 απο μνημης μαζι με ενδεικτικες λυσεις.

Πολύ καλή δουλεία, ευχαριστούμε, κάποιες μικρές διορθώσεις μόνο:

Θέμα 1ο:

6) Είναι αληθές αφού μπορούμε να ελέγξουμε αν ο γράφος είναι διμερής σε γραμμικό χρόνο.

Θέμα 2ο:

β) όντως υπολογίζει MST, η απόδειξη ίσως να προκύπτει πιο εύκολα αν δείξουμε ότι το αποτέλεσμα είναι ακριβώς ό,τι κάνει ο Kruskal απλά σε "reverse". Η πολυπλοκότητα όμως είναι Θ(VE + ElogE) αφού για να ελέγξουμε αν αποσυνδέεται ο γράφος χρειαζόμαστε γραμμικό χρόνο, στα πλαίσια του μαθήματος τουλάχιστον.

Θέμα 4ο:

δ) Δουλεύουμε με δυναμικό προγραμματισμό όπως και στο παραπάνω ερώτημα. Λύνουμε το ισοδύναμο πρόβλημα όπου κάθε αριθμό είτε τον αγνοούμε, είτε τον προσθέτουμε είτε τον αφαιρούμε από το συνολικό άθροισμα. Παρατηρούμε πως έχουμε δυο σύνολα με ίδιο άθροισμα ανν μπορούμε να σχηματίσουμε άθροισμα 0, επομένως έχουμε:

dp[v, i] -> μπορούμε με τα πρώτα i αντικείμενα να προκύψει άθροισμα v;
dp[v, i] = dp[v + a_i, i - 1] or dp[v - a_i, i - 1] or dp[v, i - 1]

Η πολυπλοκότητα είναι ακριβώς η ίδια.

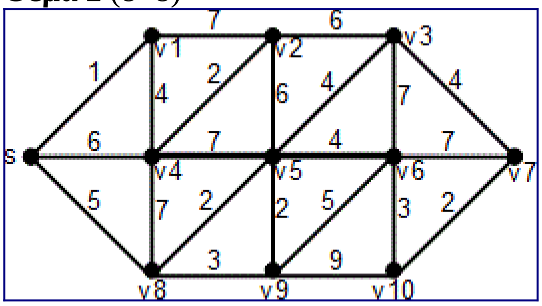
Μερικά θέματα **Επαναληπτικής 2019** (27/8/2019) από μνήμης με επιφύλαξη. Διάρκεια 2:30 (με παράταση περίπου 15 λεπτών)

Θέμα 1 (12)
Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ). Δεν απαιτείται αιτιολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση παίρνει 1 μονάδα, κάθε λάθος απάντηση αφαιρεί 0,5 μονάδα (αρνητική βαθμολογία). Κενές ή άκυρες απαντήσεις δεν προσθέτουν ούτε αφαιρούν μονάδες. Για τις απαντήσεις σας, να υποθέσετε ότι $P \neq NP$ αν αυτό χρειάζεται.

☐ Η αναδρομική σχέση $T(n) = 2T(n/8) + n^{1/3}$, με $T(1) = \Theta(1)$ έχει λύση $T(n) = \Theta(n^{1/3})$
☐ Η αναδρομική σχέση $T(n) = T(n/2) + T(n/4) + n$, με $T(1) = \Theta(1)$ έχει λύση

$T(n) = \Theta(n)$
☐ Η αναδρομική σχέση $T(n) = T(n/3) + \log n$, με $T(1) = \Theta(1)$ έχει λύση $T(n) = \Theta(\log n)$
☐ Έστω 4 ταξινομημένοι πίνακες n στοιχείων ο καθένας. Για να ταξινομήσουμε τους πίνακες, τους ενώνουμε σε έναν πίνακα $4n$ στοιχείων. Ο πιο αποδοτικός συγκριτικός αλγόριθμος που ταξινομεί τον ενιαίο πίνακα έχει χρονική πολυπλοκότητα $\Theta(n \log n)$
☐ Έστω ο παρακάτω αλγόριθμος για τον υπολογισμό του median ενός πίνακα n στοιχείων: Χωρίζουμε τα στοιχεία σε 3 ομάδες, υπολογίζουμε τον median κάθε ομάδας, υπολογίζουμε αναδρομικά τον median των medians, τον θέτουμε ως διαχωριστικό στοιχείο και υπολογίζουμε αναδρομικά τον median όλου του πίνακα. Ο αλγόριθμος εκτελείται σε χρόνο $\Theta(n)$
☐ Στο διακριτό πρόβλημα σακιδίου, η βέλτιστη λύση περιλαμβάνει πάντα το αντικείμενο με τη μέγιστη αναλογία της αξίας προς το μέγεθός του
☐ Ο αλγόριθμος Prim σε γράφημα που αναπαρίσταται με πίνακα γειτνίασης χρειάζεται χρόνο $\Theta(n^2)$
☐ Στον αλγόριθμο Kruskal αν ταξινομήσουμε τις ακμές σε φθίνουσα σειρά βρίσκουμε ένα συνδετικό δέντρο μέγιστου βάρους.
☐ ? (σχετικό με αλγόριθμο Kruskal)
☐ Σε ένα $s-t$ δίκτυο αν αυξήσουμε το βάρος μιας ακμής της μέγιστης τομής κατά k, τότε η μέγιστη ροή αυξάνεται κατά k.
☐ Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με μέγιστο βαθμό κορυφής 26 και φυσικός $k \geq 1$. Είναι NP-πλήρες να αποφασίσουμε αν το G έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον k κορυφές
☐ Αν η κλάση P ταυτίζεται με την κλάση NP, τότε κάθε πρόβλημα της NP είναι πλήρες για την P

Θέμα 2 (8+8)



i) Για το γράφημα του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε ένα ΕΣΔ χρησιμοποιώντας **(α)** τον αλγόριθμο Prim με αρχική κορυφή την s και **(β)** τον αλγόριθμο Kruskal. Ποιο είναι το βάρος του ΕΣΔ; Ποιές ακμές και με ποια σειρά προστίθενται στο ΕΣΔ;

ii) Δίνεται μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη στις ακμές, $s, t \in V$ και κάποιο $r > 0$. Ένα $s-t$ μονοπάτι P είναι r-περιορίσιμο αν για κάθε ακμή e του P, $w(e) \leq r$. Να δείξετε ότι αν ένα $s-t$ μονοπάτι του G είναι r-περιορίσιμο, τότε κάθε $s-t$ μονοπάτι σε ΕΣΔ του G είναι r-περιορίσιμο.

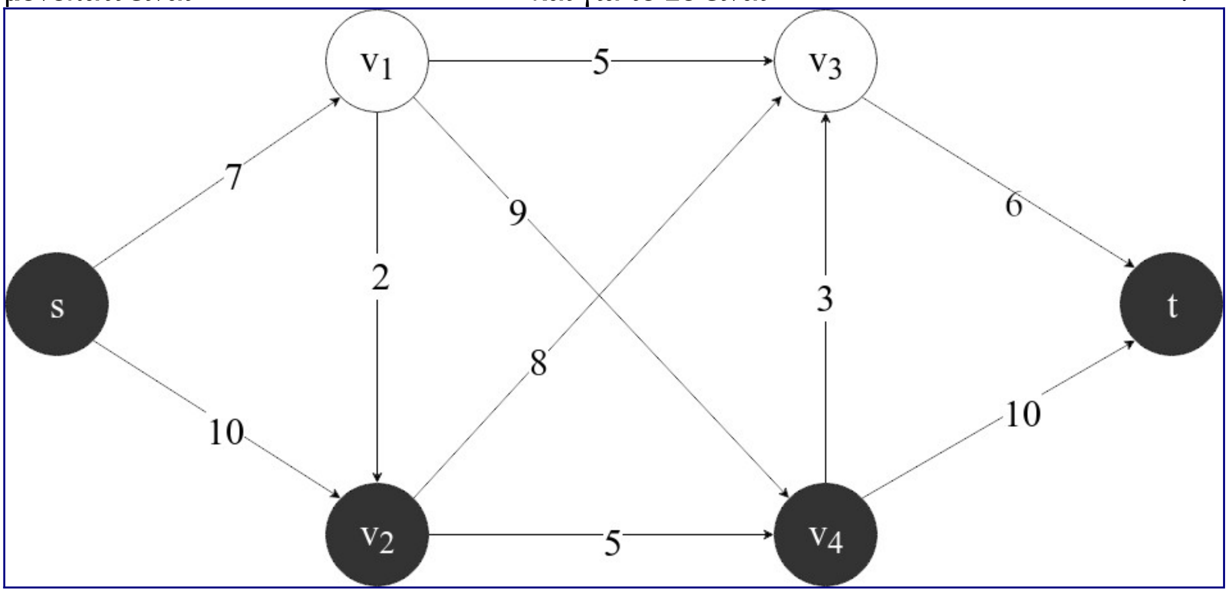
Θέμα 3 (8) (βλ. 1η σειρά γραπτών ασκήσεων, άσκηση 3, ερωτήματα β και γ)
Δίνονται m ταξινομημένοι πίνακες ακεραίων $A_1[1 \ldots n_1], A_2[1 \ldots n_2], \ldots, A_m[1 \ldots n_m]$. Να υπολογίσετε θέσεις $i_1, i_2, \ldots, i_m$ στους πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ώστε να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά

$$\max\{A_1[i_1], \ldots, A_m[i_m]\} - \min\{A_1[i_1], \ldots, A_m[i_m]\}$$

Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O((n_1 + \ldots + n_m) \log m)$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Σημείωση: δίνεται το 50% της βαθμολογίας για αλγόριθμο με χρόνο $O((n_1 + \ldots + n_m)m)$.

Θέμα 2ο - γράφημα.odg

Θέμα 4 (7+9)
Δίνεται πίνακας θετικών ακέραιων και ένας θετικός ακέραιος $k \geq 1$. Ζητείται να βρούμε διαμέριση του πίνακα σε k υποπίνακες (με συνεχόμενα στοιχεία) ώστε να ελαχιστοποιείται:
α) το μέγιστο απόλυτο κόστος, που είναι το μέγιστο από τα αθροίσματα των στοιχείων των υποπινάκων
β) το συνολικό σχετικό κόστος, που είναι το συνολικό άθροισμα των διαφορών κάθε στοιχείου ενός υποπίνακα από το μικρότερο στοιχείο του υποπίνακα.
Παράδειγμα: για τον πίνακα $[47539812]$, για το (α) η βέλτιστη διαμέριση είναι $[475][39][812]$ και δίνει μέγιστο απόλυτο κόστος $\max\{4+7+5, 3+9, 8+1+2\} = 16$, ενώ για το (β) η βέλτιστη διαμέριση είναι $[4753][98][12]$ και δίνει συνολικό σχετικό κόστος $((4-3)+(7-3)+(5-3)+(3-3))+((9-8)+(8-8))+((1-1)+(2-1)) = 9$.

Θέμα 5 (7+7)
Πρόβλημα 2 ερωτημάτων με ένα γράφημα n κορυφών με βάρη στις ακμές που έχει κορυφές s και t και κάποιες ενδιάμεσες. Οι κορυφές αναπαριστούν πόλεις και τα βάρη των ακμών τις μεταξύ τους αποστάσεις. Ένα ηλεκτρικό αυτοκίνητο με αυτονομία α θα ταξιδέψει από το s στο t, μπορεί να φορτιστεί μόνο σε πόλεις που διαθέτουν σταθμό φόρτισης και πρέπει να υπολογίσουμε βέλτιστα δρομολόγια. Στο 1ο ερώτημα η αυτονομία είναι αρκετά μεγάλη ώστε το αυτοκίνητο να μη χρειάζεται φόρτιση, αλλά θέλουμε να περάσουμε από πόλεις με σταθμούς (για να ελέγξουμε αν είναι συμβατοί). Στο 2ο ερώτημα η αυτονομία είναι αρκετά μικρή ώστε να χρειάζεται φορτίσεις. Για παράδειγμα, στο παρακάτω γράφημα οι πόλεις με σταθμό φόρτισης σημειώνονται με μαύρο χρώμα και οι πόλεις χωρίς σταθμό φόρτισης με άσπρο. Για το 1ο ερώτημα το συντομότερο μονοπάτι είναι $s \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow t$ και για το 2ο είναι $s \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow t$.


[Θέμα 5 - γράφημα.png]

Θέμα 6 (5+4+5)
Δεχόμενοι ότι $P \neq NP$, ποια από τα παρακάτω προβλήματα είναι NP-πλήρη (ή NP-δύσκολα) και ποια όχι; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα (και πλήρως) τους ισχυρισμούς σας.

α) Δίνονται σύνολα θετικών φυσικών $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ και $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ και θετικός φυσικός

B. Υπάρχουν μη κενά υποσύνολα $S_1 \subseteq X$ και $S_2 \subseteq Y$, τέτοια ώστε το άθροισμα των στοιχείων του S_1 και το άθροισμα των στοιχείων του S_2 να διαφέρουν (ακριβώς) κατά B?

β) Δίνεται συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και υποσύνολο κορυφών $S \subseteq V$. Ζητείται να βρούμε αν υπάρχει συνδετικό δέντρο του G όπου όλες οι κορυφές του S να είναι φύλλα.

γ) Δίνεται μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$. Ζητείται να βρεθεί κυκλική διαδρομή στο G που να διέρχεται από κάθε κορυφή του τουλάχιστον μία και το πολύ δύο φορές.

Επαναληπτική 2020 - θέματα από μνήμης (εξέταση 90 λεπτών λόγω Κορωνοϊού)

Θέμα 1

Πίνακας θετικών αριθμών $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Το πρόβλημα είναι να τον χωρίσουμε σε k (συνεχόμενα) τμήματα, έτσι ώστε το άθροισμα του μεγαλύτερου (ως προς το άθροισμα) τμήματος να είναι το ελάχιστο δυνατό. Ζητείται και σύντομη επεξήγηση ορθότητας και πολυπλοκότητας.

Θέμα 2

α) Δίνεται μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με θετικά βάρη w στις ακμές. Το ζητούμενο είναι η εύρεση $E' \subseteq E$, ελαχίστου δυνατού βάρους, ώστε, αν αφαιρεθούν οι ακμές αυτές, το γράφημα να γίνει ακυκλικό. Εδώ είχε και μία ερώτηση περίπου του στυλ: εξηγήστε σύντομα τι είναι αυτό που εξασφαλίζει την ορθότητα του αλγορίθμου σας (νομίζω έτσι το έθετε). Πολυπλοκότητα δεν θυμάμαι αν ζήταγε.
β) Εξηγήστε σύντομα γιατί ο παραπάνω αλγόριθμος δεν θα λειτουργούσε αν το γράφημα G είναι κατευθυνόμενο. Στην περίπτωση κατευθυνόμενου γραφήματος, υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να επιλύει το πρόβλημα; Επιχειρηματολογήστε επαρκώς.

Θέμα 3

α) 4η σειρά γραπτών ασκήσεων 2019-2020, Άσκηση 1, ερώτημα (α) (νομίζω ατόφιο, μην ξεχνάς ωστόσο και παραπάνω disclaimer): δεδομένων αριθμών που υποτίθεται ότι είναι τα μήκη των συντομότερων μονοπατιών από κάποια κορυφή προς όλες, ζητούμε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που να ελέγχει αν όντως ισχύει αυτό, και αν ισχύει να βρίσκει και ΔΣΜ.
β) Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, κορυφές $s, t \in V$, αριθμός $B < d(s, t)$. Ζητούμενο: ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ακμών που, μηδενίζοντας τα βάρη τους, μπορώ να ρίξω την απόσταση από την s στην t κάτω (ή ίσα) από B. (+ ορθότητα, πολυπλοκότητα υποθέτω?)

Θέμα 4

Δίνεται ακολουθία - πίνακας αριθμών $a_1, \ldots, a_n$, και ζητείται, από όλες τις γνησίως αύξουσες υπακολουθίες της, αυτή με το μέγιστο δυνατό άθροισμα (το άθροισμα αρκεί, δεν χρειάζεται

και η ίδια η ακολουθία) (+ ορθότητα, πολυπλοκότητα υποθέτω?)
(πολύ όμοιο setting με longest increasing subsequence βασικά, το μόνο που αλλάζει είναι η αντικειμενική συνάρτηση, που δεν είναι πλέον το μήκος, αλλά το άθροισμα)

<u>Θέμα 5</u>

Κλασσικά, δύο προβλήματα για τα οποία καλούμαστε να δείξουμε, κατά βάση με κάποια αναγωγή, αν είναι στο P ή NP - πλήρη.

a) Μη κατευθυνόμενο γράφημα που έχει στις ακμές βάρη w και κόστη c, και δύο αριθμοί W και C. Το πρόβλημα είναι αν υπάρχει συνδετικό δέντρο με βάρος το πολύ W και κόστος το πολύ C.
b) Πλήρες μη κατευθυνόμενο γράφημα με βάρη στις κορυφές, και ένας αριθμός W. Θεωρούμε επίσης ότι κάθε ακμή έχει βάρος που ισούται με το γινόμενο των βαρών των δύο άκρων της. Το πρόβλημα είναι αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ του γραφήματος, για την οποία το άθροισμα των βαρών όλων των ακμών που την διασχίζουν να ισούται με W.

Παραθέτω *πάρα πολύ σύντομα* τις δικές μου προτάσεις για τις λύσεις, αν τυχόν βοηθούν κάποιον. Σόρι για την ακαταστασία, αλλά δεν έχω πολύ χρόνο αυτές τις μέρες, και είναι αργά αυτή τη στιγμή και νυστάζω Αν βρω λίγο χρόνο, ίσως προσπαθήσω να κάνω κανά edit.

Θέμα 1: νομίζω το έχει πραγματευτεί μέσα στο μάθημα (αν δηλαδή δεν υπάρχει και σε καμιά σειρά ασκήσεων ίσως που δε θυμάμαι), και αυτό που θυμάμαι ως καλύτερη λύση είναι με λογική δυαδικής αναζήτησης. Φτιάχνεις πρώτα μία "υπορουτίνα" check(s), που ελέγχει αν γίνεται να χωριστούν τα k τμήματα με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν μέγιστο άθροισμα μικρότερο ή ίσο του s, ξεκινώντας από τα αριστερά και βάζοντας "διαχωριστικό" κάθε φορά που το τρέχον άθροισμα ξεπερνάει το s (γραμμικός χρόνος δηλαδή). Μετά, αυτό που μένει είναι να κάνεις μία δυαδική αναζήτηση στις πιθανές τιμές του s, που είναι ξέρω γω από 1 έως {άθροισμα όλων}, εκμεταλλευόμενος το γεγονός ότι, ας πούμε, ο πίνακας $[check(1), check(2), \ldots, check(D)]$ (όπου D το άθροισμα όλων των στοιχείων) θα έχει σίγουρα τη μορφή [OXI, OXI, ..., OXI, NAI, NAI, ..., NAI]. Συνολικός χρόνος $O(D \log n)$

Θέμα 2α: αν δεν κάνω λάθος, οι ακμές που μένουν, του $E \setminus E'$, θα πρέπει να είναι μέγιστο

συνδετικό δέντρο, το οποίο νομίζω βρίσκεται απλά θέτοντας αντίθετα βάρη και βρίσκοντας ΕΣΔ.

Θέμα 2β: Βρήκα εκ των υστέρων την αναγωγή εδώ.

Θέμα 3α: κάτι σαν BFS, όπου πρέπει για κάθε ακμή να ελέγχεις ότι δεν βελτιώνει την απόσταση (δείτε και λύσεις της σειράς ασκήσεων βασικά)

Θέμα 3β: no idea yet

Θέμα 4: προσωπικά έγραψα μία τετραγωνική λύση με ΔΠ, που είναι κατά βάση ίδια νομίζω με της μέγιστης αύξουσας υπακολουθίας. Εκ των υστέρων νομίζω εφαρμόζεται κάπως και η άλλη λύση με το n logn, αλλά δεν είμαι σίγουρος.

Θέμα 5α: αναγωγή από partition. Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, με $w(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ άρτιο, η είσοδος του partition. Τότε, το γράφημα που κατασκευάζουμε είναι το ακόλουθο:

2020_sep_5a.jpg

(12.79 KiB) Καμία μεταφόρτωση ακόμη

όπου τα βάρη / κόστη που δε σημειώνω είναι όλα μηδέν. Χωρίς να μπαίνω σε πάρα πολλές λεπτομέρειες, αυτό που εκμεταλλευόμαστε ουσιαστικά είναι απλώς ότι το Α χωρίζεται σε δύο υποσύνολα ίσου βάρους (και ίσου με $w(A)/2$) αν και μόνο αν χωρίζεται σε δύο υποσύνολα $A_1, A_2 (A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cap A_2 = \emptyset)$, τέτοια ώστε $w(A_1) \leq w(A)/2$ και $w(A_2) \leq w(A)/2$.

Τότε, αν στο πρόβλημα του ερωτήματος δώσω σαν είσοδο το παραπάνω γράφημα και

$W = C = w(A)/2$, μπορούμε να δούμε ότι το κατάλληλο συνδετικό δέντρο θα περιέχει υποχρεωτικά μόνο τη μία από τις δύο "κάτω" ακμές του κάθε μικρού τριγώνου. Αν έχει επιλεγεί η μία, σημαίνει ότι το στοιχείο μπαίνει στο ένα σύνολο, ενώ αν έχει επιλεγεί η άλλη, στο άλλο. (σημ: υπάρχει, αρχικά, μια περίπτωση το ΣΔ να περιέχει μόνο τις κάτω ενός τριγώνου και όχι την πάνω, όμως τότε πετώντας την μία από τις κάτω και βάζοντας την πάνω, πάλι έχουμε ένα συνδετικό δέντρο που πληροί τις προδιαγραφές, που αυτό μας ενδιαφέρει στην τελική)

Θέμα 5β: νομίζω το είχε βάλει και στην κανονική (δεν πρέπει να το είχα λύσει βέβαια, αλλά θυμάμαι να μου τριβελίζει το μυαλό μετά). Κατά βάση, αν το σκεφτείς, θυμίζει λίγο subset sum / partition ή κάτι τέτοιο, γιατί το συνολικό βάρος των ακμών που διασχίζει μία οποιαδήποτε τομή προκύπτει με λίγες πραξούλες ότι ισούται με (άθροισμα βαρών κορυφών στο S) επί (άθροισμα βαρών κορυφών στο $V \setminus S$). Επιπλέον, αν W είναι το βάρος όλων των κορυφών και s είναι το βάρος των κορυφών στο S, τότε το γινόμενο αυτό ισούται με $s(W-s) = -s^2 + Ws$, που έχει μοναδικό ολικό μέγιστο στο $W/2$ το $W^2/4$! Οπότε, υπάρχει τομή που να έχει βάρος $W^2/4$ αν και μόνο αν υπάρχει υποσύνολο στοιχείων / κορυφών που να έχει άθροισμα ακριβώς $W/2$

Για μονάδες δεν θυμάμαι δυστυχώς, αλλά έχω την εντύπωση ότι ήταν συνολικά στα 80, με τα θέματα να είναι αρκετά ομοιόμορφα, 14 - 18 μονάδες πρέπει να έπιανε το καθένα.

Επαναληπτική 2022 *από μνήμης*

Λείπει το πρώτο θέμα, που ήταν ερωτήσεις Σ-Λ. Το πρόβλημα 4α έδινε ένα σύνολο ακεραίων με άθροισμα πολλαπλάσιο του 4 και ζητούσε διαμέριση σε 4 υποσύνολα με κάποια ιδιότητα που δεν θυμάμαι ακριβώς. Αν το θυμάται κάποιος ας στείλει να συμπληρωθεί.

(αρχείο 2022Sept.pdf)