

# ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ (μεταπτυχιακό)

Διδάσκοντες: Ευστάθιος Ζάχος, Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου, Θανάσης Λιανέας  
Κανονική Εξέταση, Φεβρουάριος 2021  
Σύνολο μονάδων: 80

## Θέμα 1° (8+8 μονάδες)

Ένα οδικό δίκτυο αναπαρίσταται από συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E, w)$  με  $m$  ακμές. Κάθε οδική αρτηρία  $e \in E$  συνδέει δύο πόλεις και έχει μήκος  $w(e)$  χιλιόμετρα, ενώ σταθμοί καυσίμων υπάρχουν σε κάθε πόλη / κορυφή του γραφήματος, αλλά όχι στις οδικές αρτηρίες / ακμές μεταξύ τους. Θέλουμε να ταξιδεύσουμε από μια πόλη  $s$  σε μια πόλη  $t$  χρησιμοποιώντας αυτοκίνητο που διαθέτει αυτονομία καυσίμου για  $L$  χιλιόμετρα.

**α)** Να διατυπώσετε έναν όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό. Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

**β)** Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης  $O(m \log m)$  που υπολογίζει την ελάχιστη αυτονομία καυσίμου (σε χιλιόμετρα) που απαιτείται για το ταξίδι από την πόλη  $s$  στην πόλη  $t$ .  
(5 μονάδες επιπλέον αν βρείτε αλγόριθμο με γραμμικό χρόνο εκτέλεσης.)

## Θέμα 2° (5+8+5 μονάδες)

Στην πίστα ποδηλάτων που έχετε φτιάξει με τους φίλους σας, υπάρχουν  $n$  σημεία που θέλετε να κατασκευάσετε κάποια “διασκεδαστικά κομμάτια”, όπως άλματα, απότομες στροφές, στενές γεφυρούλες κλπ. Το διασκεδαστικό κομμάτι  $k$  απαιτεί χρόνο  $t_k$  για την απαιτούμενη προεργασία (σκάψιμο κλπ.) και χρόνο  $f_k$  για την τελική διαμόρφωση. Προεργασία μπορείτε να κάνετε μόνο σε ένα σημείο τη φορά, καθώς διαθέτετε μόνο ένα κατάλληλο μηχάνημα, ενώ οι διαμορφώσεις μπορούν να γίνουν ακόμη και σε όλα τα σημεία ταυτόχρονα (είστε πολλά εργατικά χέρια). Δεδομένων των ζευγών  $(t_k, f_k)$  των  $n$  σημείων:

**α)** Δώστε ένα κάτω φράγμα του χρόνου που απαιτείται για την ολοκλήρωση όλων των κομματιών.

**β)** Δώστε αλγόριθμο που επιστρέφει την σειρά με την οποία πρέπει να φτιαχτούν τα κομμάτια ώστε να ελαχιστοποιείται ο χρόνος ολοκλήρωσης όλων των κομματιών. Θεωρήστε ότι το μηχάνημα για την προεργασία απαιτεί αμελητέο χρόνο για την μετακίνησή του από σημείο σε σημείο. Αιτιολογήστε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

**γ)** Τι αλλάζει από άποψη χρονικής πολυπλοκότητας αν το μηχάνημα για την προεργασία απαιτεί μη αμελητέο χρόνο για την μετακίνησή του από σημείο σε σημείο?