• Τύπος De Moivre

Εαν $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z} \quad z^k = |z|^k[\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)]$

Πράγματι $\quad z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow z^k = |z|^k (e^{i\varphi})^k = |z|^k e^{ik\varphi} = |z|^k[\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)]$

<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογίσετε $(\sqrt{3} + i)^{2022} = ?$

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$m = 2022$

$$(\sqrt{3}+i)^m = 2^m\left[\cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{m\pi}{6}\right)\right]$$

Άρα $\cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \cos(2k\pi + \pi) = \cos\pi = -1$

$\sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \sin\pi = 0$

Επομένως $(\sqrt{3}+i)^m = -2^m = -2^{2022}$

$m = 2022 \,|\, 12$, $6 \,|\, 168$

Άρα $m = 12 \cdot 168 + 6$

$\frac{m}{6} = 2\cdot 168 + 1$

$\frac{m\pi}{6} = \underbrace{2\cdot 168\pi}_{2k\pi} + \pi$

• n-οστές ρίζες του 1

$z^n = 1$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Έστω z μια ρίζα της εξίσωσης

$\Rightarrow |z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$

$z = e^{i\varphi}$, όπου φ όρισμα του z

$\Rightarrow (e^{i\varphi})^n = 1 \Rightarrow e^{in\varphi} = e^0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad in\varphi = 2k\pi i$

$\Rightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \varphi = \frac{2\lambda n\pi + 2\upsilon\pi}{n} = 2\lambda\pi + \frac{2\upsilon\pi}{n}$

$k \,|\, n$, $\upsilon \,|\, \lambda$

$0 \leq \upsilon \leq n-1$

$k = \lambda n + \upsilon$

$z = e^{i\varphi} = e^{2\lambda\pi i + \frac{2\upsilon\pi}{n}i} = e^{\frac{2\upsilon\pi}{n}i}$, $\quad \upsilon = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$

Τελικά οι ρίζες της εξίσωσης $z^n = 1$ είναι οι παρακάτω (n στο πλήθος): $z_\upsilon = e^{\frac{2\upsilon\pi}{n}i}$, $\quad \upsilon = 0, 1, 2, \ldots n-1$

Παράδειγμα:

(α) Να λυθεί η εξίσωση $z^5=1$

Σύμφωνα με τον τύπο οι ρίζες είναι $z_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{5}}$, $\nu=0,1,2,3,4$

$z_0=1$, $z_1=e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $z_2=e^{\frac{4\pi i}{5}}$, $z_3=e^{\frac{6\pi i}{5}}$, $z_4=e^{\frac{8\pi i}{5}}$

(β) Να λυθεί η εξίσωση $z^8=1$

Χωρίς τη χρήση του τύπου παρατηρούμε τα εξής

Εάν $\rho\in\mathbb{C}$ ρίζα, τότε $\bar{\rho}, -\rho, -\bar{\rho}$ είναι ρίζες

$i^4=1 \Rightarrow i^8=1$, $\pm i$ ρίζες

$e^{2\pi i}=1 \Rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i}{8}}\right)^8=1 \Rightarrow e^{\pi i/4}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\rho$

$\Rightarrow \rho$ ρίζα $\in\mathbb{C} \Rightarrow \pm\rho, \pm\bar{\rho}$

Επίσης ± 1 ρίζες

Τελικά: $\pm 1, \pm i, \pm\rho, \pm\bar{\rho}$

Έστω $a\in\mathbb{C}-\{0\}$ με $a=|a|e^{i\theta}$, θ όρισμα του a

θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $z^n=a$ $(n\geq 2)$

Αν z n-οστή ρίζα του a, τότε $z^n=|a|e^{i\theta}=$

$$= \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n\cdot\left(e^{i\theta/n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\theta/n}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\theta/n}}\right)^n = 1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{\sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\theta/n}} = e^{\frac{2\nu\pi}{n}i}, \quad 0\leq\nu\leq n-1$$

$$\Rightarrow z=\sqrt[n]{|a|}\cdot e^{\frac{2\nu\pi+\theta}{n}\cdot i}, \quad \nu=0,1,\dots,n-1$$

Παράδειγμα:

(α) $z^3 = i$

Προσοχή! το $z^3 - i$ δεν έχει πραγματικούς συντελεστές άρα οι μιγαδικές ρίζες δεν είναι [redacted] αλληλοσυζυγείς

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{i\pi}{2}} \quad (\theta = \frac{\pi}{2})$

Ρίζες: $z_\nu = \sqrt[3]{|i|} \cdot e^{\frac{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \cdot i}, \quad \nu = 0, 1, 2$

$z_\nu = e^{\left(\frac{2\nu\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)i}, \quad \nu = 0, 1, 2$

$z_0 = e^{\frac{\pi}{6} \cdot i} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad z_1 = e^{\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)i} = e^{\frac{5\pi}{6}i} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$

$z_2 = e^{\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)i} = e^{\frac{9\pi}{6}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

Τελικά οι ρίζες είναι: $\frac{\sqrt{3} + i}{2}, \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, -i$

(β) $z^6 = -1$

Εάν ρ: ρίζα τότε $\pm\rho, \pm\bar{\rho}$ είναι ρίζες

$-1 = e^{\pi i} = \left(e^{\frac{\pi i}{6}}\right)^6$

Άρα $\rho = e^{\frac{\pi i}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

[redacted] $\pm\rho, \pm\bar{\rho}$ ρίζες

$i^2 = -1 \Rightarrow i^6 = (i^2)^3 = -1 \Rightarrow \pm i$ ρίζες

Άρα τελικά: $\pm i, \pm\rho, \pm\bar{\rho}$, όπου $\rho = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

• Τριγωνομετρικές μιγαδικές συναρτήσεις

Υπενθύμιση: $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$"x" \to -x$ $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

Με πρόσθεση-αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ορισμός 1: $\forall z \in \mathbb{C}$

Ορίζουμε $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$

Σχόλια:

(α) Όλες οι τριγωνομετρικές ταυτότητες εξακολουθούν να ισχύουν

π.χ. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$ κτλ

(β) Τριγωνομετρικές εξισώσεις (κάποιες κλασικές έχουν τις ίδιες ρίζες με τις πραγματικές)

π.χ. $\sin z = 1 \Rightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 1 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 2i, \ldots$

(γ) Βασική διαφορά!!

$|\sin z|$, $|\cos z|$ δεν είναι φραγμένες σε όλο το $\mathbb{C}$

$$|\sin(iy)| = \left| \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \right| \overset{(y>0)}{=\!=} \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \xrightarrow{y \to +\infty} +\infty$$

$$|\cos(iy)| = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \xrightarrow{y \to +\infty} +\infty$$