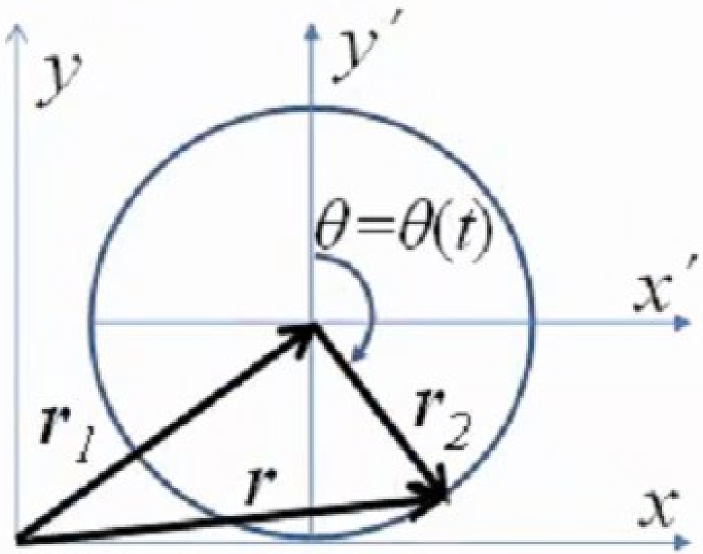
Παράδειγμα. Ας μελετήσουμε την καμπύλη την οποία διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός τροχού ακτίνας R, ο οποίος κυλάει με σταθερή ταχύτητα, παράλληλα στον άξονα-*x*, η οποία είναι γνωστή και ως **κυκλοειδής** τροχιά



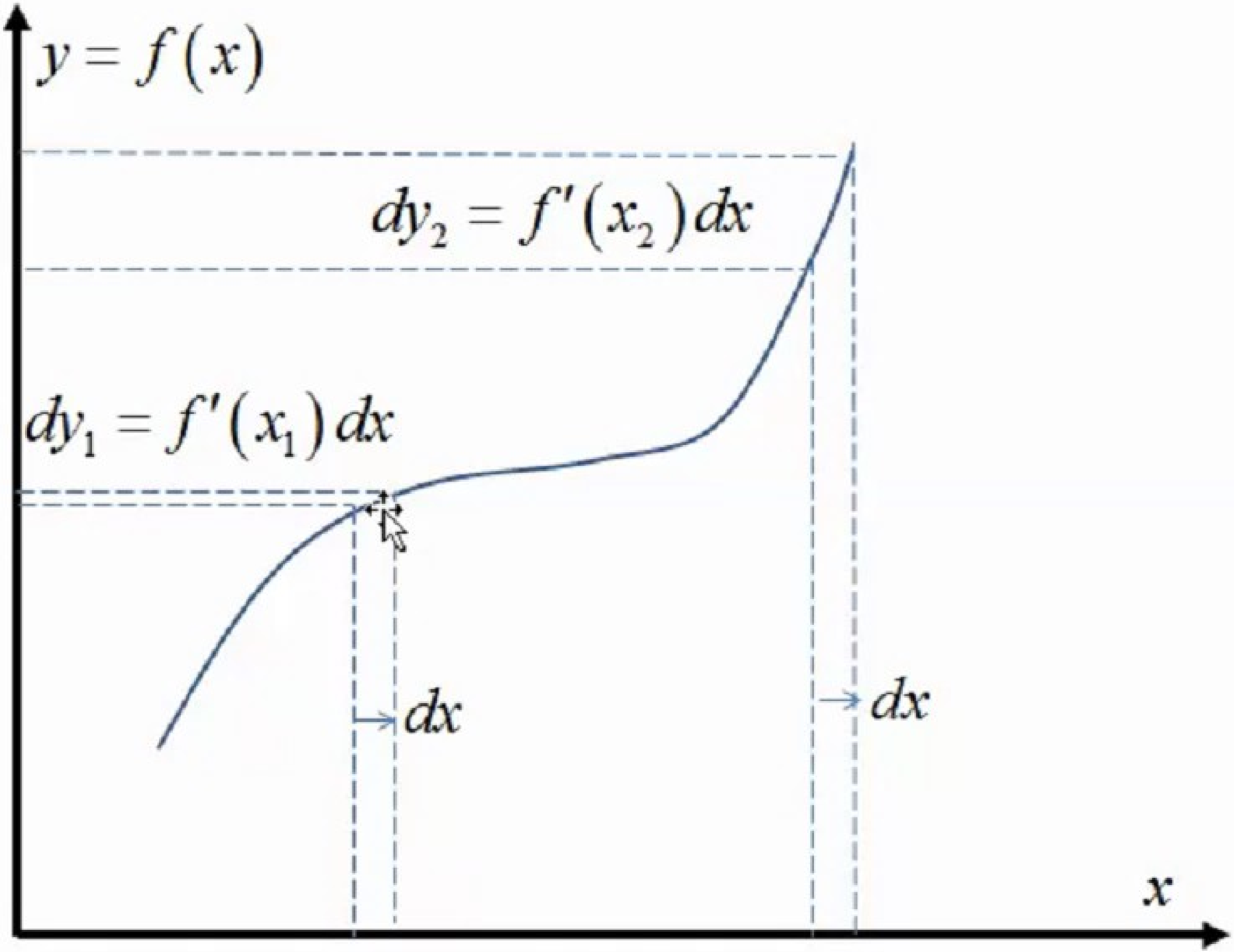
Χρησιμοποιούμε ένα «ακίνητο» σύστημα αναφοράς (x,y) και ένα «κινούμενο» σύστημα αναφοράς , (x′,y′) το οποίο κινείται μαζί με το άξονα του τροχού, αλλά παραμένει παράλληλο προς το (x,y).

$$\vec{r}\left(t\right)=\vec{r}_1\left(t\right)+\vec{r}_2\left(t\right)$$

$$\vec{r}_1\left(t\right)=\hat{x}\left(R\omega t\right)+\hat{y}\left(R\right) \qquad \vec{r}_2\left(t\right)=\hat{x}\left(R\sin(\omega t)\right)+\hat{y}\left(R\cos(\omega t)\right)$$

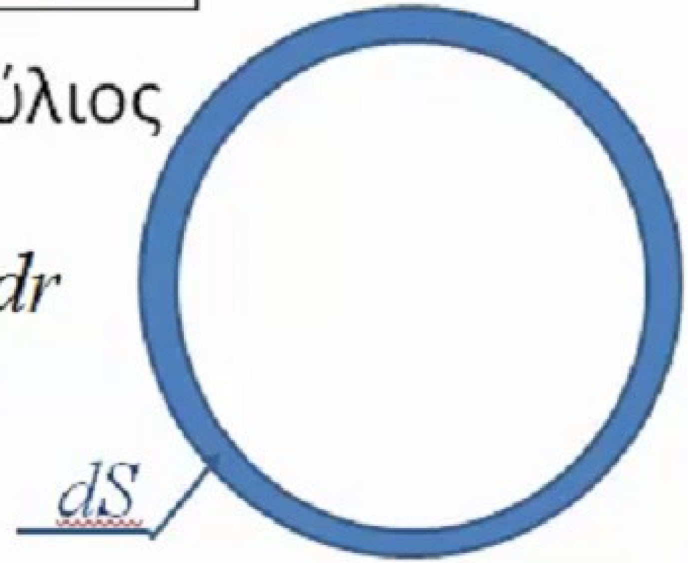
Διαφορικό μίας συνάρτησης

$$y = f(x):\quad dy = f'(x)\,dx$$



$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Διαφορικό μίας συνάρτησης} \\ y = f(x): \quad dy = f'(x)\,dx\end{array}}$$

<u>Παράδειγμα</u>: ΔιαφορικόςΚυκλικός Δακτύλιος



$$S(r) = \pi r^2 \Rightarrow dS = \frac{dS}{dr}dr = \left[\frac{d}{dr}\left(\pi r^2\right)\right]dr$$

$$dS = 2\pi r dr.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Διαφορικός Σφαιρικός φλοιός

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = \frac{dV}{dr}dr = \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\right]dr$$

$$d = 4\pi r^2 dr.$$

Διανυσματικές συναρτήσεις μίας βαθμωτής μεταβλητής

$$\vec{F} = \vec{F}(u) \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \hat{x}\,x(t) + \hat{y}\,y(t) + \hat{z}\,z(t)$$

$$\left\{x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\right\}$$ βαθμωτές συναρτήσεις μίας βαθμωτής μεταβλητής

Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

$$\vec{A}(u) = \left(\hat{i}A_1(u) + \hat{j}A_2(u) + \hat{k}A_3(u)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{d\hat{i}}{du}A_1(u) + \hat{i}\,\frac{dA_1(u)}{du} + \frac{d\hat{j}}{du}A_2(u) +$$

$$+\,\hat{j}\,\frac{dA_2(u)}{du} + \frac{d\hat{k}}{du}A_3(u) + \hat{k}\,\frac{dA_3(u)}{du}$$

Αλλά $\qquad \dfrac{d\hat{i}}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\dfrac{\hat{i}(u+\Delta u) - \hat{i}(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\dfrac{\hat{i}-\hat{i}}{\Delta u} = 0,$

Όμοια $\qquad \dfrac{d\hat{j}}{du} = 0, \qquad \dfrac{d\hat{k}}{du} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{A}(u)}{du} = \hat{i}\,\frac{dA_1(u)}{du} + \hat{j}\,\frac{dA_2(u)}{du} + \hat{k}\,\frac{dA_3(u)}{du}$$

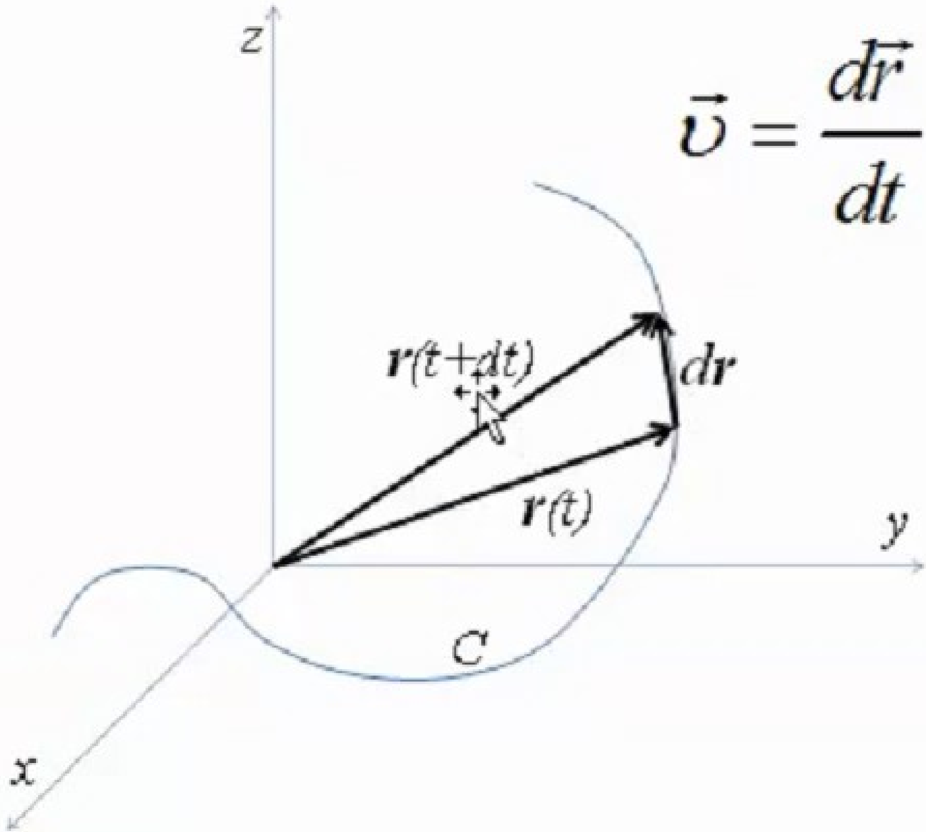
Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων

$$\frac{d\left(\eta\vec{A}\right)}{du}=\frac{d\left(\eta\right)}{du}\vec{A}+\eta\frac{d\left(\vec{A}\right)}{du}$$

$$\frac{d\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)}{du}=\frac{d\left(\vec{A}\right)}{du}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\left(\vec{B}\right)}{du}$$

$$\frac{d\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{du}=\frac{d\left(\vec{A}\right)}{du}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\left(\vec{B}\right)}{du}$$

Διανυσματική ταχύτητα και επιτάχυνση

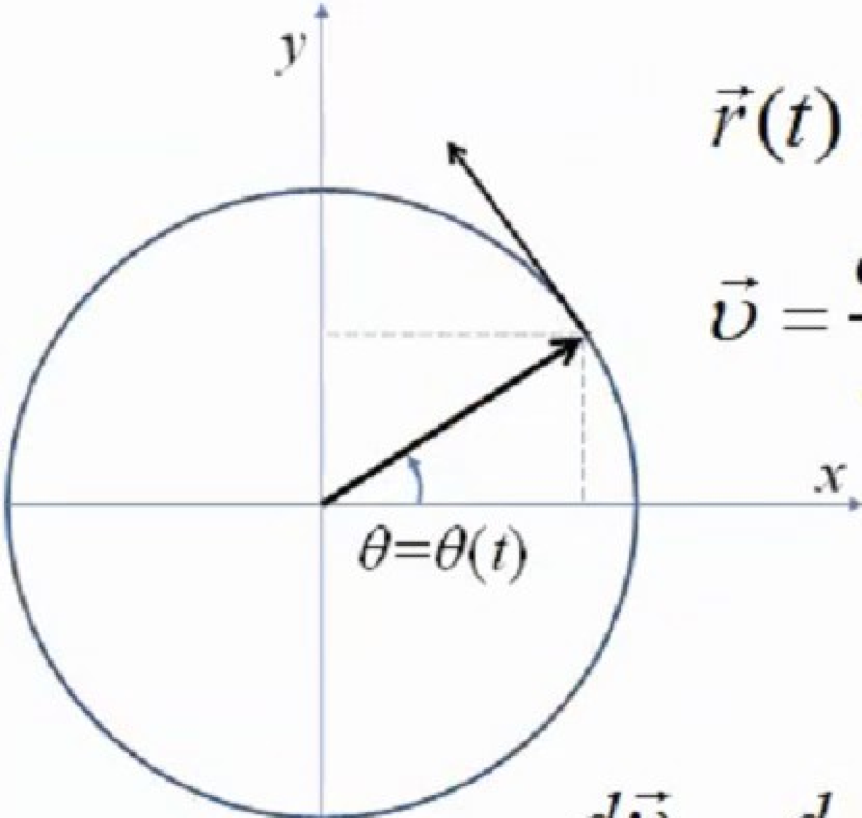


$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\hat{x}\frac{dx}{dt} + \hat{y}\frac{dy}{dt} + \hat{z}\frac{dz}{dt} \right)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\upsilon}(t+dt) - \vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Παράδειγμα. Κυκλική κίνησης, όπου το κινητό κινείται πάνω σε κυκλική τροχιά ακτίνας R έτσι ώστε η γωνιακή του θέση ϑ να είναι συνάρτηση του χρόνου



$$\vec{r}(t) = \hat{x}R\cos(\omega t) + \hat{y}R\sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\hat{x}\omega R\sin(\omega t) + \hat{y}\omega R\cos(\omega t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\hat{x}\omega R\sin(\omega t) + \hat{y}\omega R\cos(\omega t)\right]$$

$$= -\hat{x}\omega^2 R\cos(\omega t) - \hat{y}\omega^2 R\sin(\omega t) = -\omega^2\vec{r}(t)$$