Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 16/12/2010

Άσκηση 1: Ανεφοδιασμός

Ένας οδηγός αποφασίζει να κάνει ένα ταξίδι από την πόλη x στην πόλη y με το αυτοκίνητό του, το οποίο έχει αυτονομία κίνησης ως προς τη βενζίνη που μπορεί να αποθηκεύσει, k χιλιόμετρα. Ο οδηγός διαθέτει χάρτη στον οποίο αναφέρονται όλα τα βενζινάδικα της διαδρομής και οι αποστάσεις μεταξύ τους, και επιθυμεί να υπολογίσει ένα πλάνο ανεφοδιασμού που ελαχιστοποιεί τον συνολικό αριθμό στάσεων για ανεφοδιαμό (δεδομένου βέβαια ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ανεφοδιασμών διανύεται απόσταση που δεν ξεπερνά τα k χιλιόμετρα, ώστε το αυτοκίνητο να μην μείνει χωρίς βενζίνη). Να διατυπώσετε έναν όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα βέλτιστο πλάνο ανεφοδιασμού. Να προσδιορίσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα και να αποδείξετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. *Σημείωση:* Μπορείτε να υποθέσετε ότι δύο διαδοχικά βενζινάδικα απέχουν μεταξύ τους το πολύ k χιλιόμετρα.

Άσκηση 2: Ανεξάρτητα Σύνολα με Βάρη

Έστω $X = (x_1, \dots, x_n)$ μία ακολουθία n θετικών ακεραίων. Το σύνολο δεικτών $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ονομάζεται *ανεξάρτητο* αν για κάθε ζεύγος δεικτών $i, j \in I$, $|i - j| > 1$, δηλαδή το I δεν περιέχει διαδοχικούς δείκτες. Το *βάρος* $W(J)$ ενός συνόλου δεικτών $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ είναι το άθροισμα των αντίστοιχων x_i, δηλ. $W(J) = \sum_{i \in J} x_i$. Το ζητούμενο είναι ο αποδοτικός υπολογισμός ενός ανεξάρτητου συνόλου μέγιστου βάρους για δεδομένη ακολουθία X.

1. Έστω ότι χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο άπληστο αλγόριθμο: αρχικά $I = \emptyset$ και $J = \{1, \dots, n\}$. Ενόσω $J \neq \emptyset$, προσθέτουμε τον δείκτη $j \in J$ με τη μεγαλύτερη τιμή x_j στο I, και αφαιρούμε από το J τους δείκτες $j - 1$, j, και $j + 1$. Το αποτέλεσμα είναι το σύνολο I.
   (α) Βρείτε ένα απλό παράδειγμα για το οποίο ο παραπάνω άπληστος αλγόριθμος αποτυγχάνει να υπολογίσει τη βέλτιστη λύση.
   (β) Να δείξετε ότι το ανεξάρτητο σύνολο I που υπολογίζεται από τον παραπάνω άπληστο αλγόριθμο έχει βάρος τουλάχιστον το μισό του βάρους του βέλτιστου ανεξάρτητου συνόλου.
2. Να δείξετε ότι για τον υπολογισμό ενός ανεξάρτητου συνόλου μέγιστου βάρους ισχύει η αρχή της βελτιστότητας, και να διατυπώσετε αναδρομική σχέση που συνδέει τη βέλτιστη λύση ενός στιγμιότυπου με τη βέλτιστη λύση κατάλληλα επιλεγμένων επιμέρους στιγμιοτύπων του.
3. Να διατυπώσετε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού με χρονική πολυπλοκότητα $\mathrm{O}(n)$ που υπολογίζει ένα ανεξάρτητο σύνολο μέγιστου βάρους.

Άσκηση 3: Sponsored Search Auctions

Σε κάθε ερώτημα, μια μηχανή αναζήτησης (βλ. Google, Yahoo, κλπ.) επιλέγει k από ένα σύνολο n διαφημίσεων, $k < n$, τις ταξινομεί σε μία λίστα k θέσεων, τη μία κάτω από την άλλη, και τις εμφανίζει στα δεξιά των αποτελεσμάτων της αναζήτησης. Οι διαφημιζόμενοι πληρώνουν για να εμφανιστούν σε αυτές τις θέσεις, και σε αυτό οφείλεται το μεγαλύτερο μέρος του τζίρου των μηχανών αναζήτησης.

Η μηχανή αναζήτησης επιλέγει ποιες διαφημίσεις θα εμφανιστούν σε ποιες θέσεις γνωρίζοντας την "αξία" $v_i \in \mathbb{N}$ κάθε διαφήμισης i, την "ποιότητά" της $q_i \in [0,1]$, και την "τάση" $c_i \in [0,1]$ που δημιουργεί στον χρήστη να συνεχίσει με την επόμενη διαφήμιση στη λίστα.

Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι ο χρήστης εξετάζει τη λίστα $(i_1, \ldots, i_k)$ των διαφημίσεων σύμφωνα με το παρακάτω μοντέλο, όπου οι θέσεις της λίστας αριθμούνται από πάνω προς τα κάτω:

1. Ο χρήστης ξεκινάει εξετάζοντας τη διαφήμιση i_1 στην πρώτη θέση.
2. Όταν ο χρήστης εξετάζει τη διαφήμιση i_j στην j θέση της λίστας, συνεχίζει στο site του διαφημιζόμενου (κάνοντας click στη διαφήμιση i_j) με πιθανότητα q_{i_j}. Σε αυτή την περίπτωση, η μηχανή αναζήτησης έχει κέρδος v_{i_j}.
3. Ανεξάρτητα του αν έκανε click στη διαφήμιση i_j ή όχι, ο χρήστης συνεχίζει εξετάζοντας τη διαφήμιση i_{j+1} στη θέση $j+1$ της λίστας με πιθανότητα c_{i_j}. Διαφορετικά (δηλ. με πιθανότητα $1 - c_{i_j}$), ο χρήστης εγκαταλείπει την λίστα.
4. Σε κάθε περίπτωση, ο χρήστης εγκαταλείπει την λίστα όταν έχει εξετάσει τη διαφήμιση i_k στη θέση k.

Με βάση το παραπάνω μοντέλο, η μηχανή αναζήτησης επιλέγει τις διαφημίσεις και τη σειρά που θα εμφανιστούν ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος. Πιο συγκεκριμένα, με βάση το παραπάνω μοντέλο, η πιθανότητα ότι ο χρήστης εξετάζει τη διαφήμιση i_j στη θέση j της λίστας, δεδομένου ότι οι διαφημίσεις $i_1, \ldots, i_{j-1}$ βρίσκονται πριν από την i_j στη λίστα, είναι $q_{i_j} \prod_{\ell=1}^{j-1} c_{i_\ell}$. Έτσι η μηχανή αναζήτησης επιλέγει τη λίστα διαφημίσεων $(i_1, \ldots, i_k)$ που μεγιστοποιεί την ποσότητα:

$$\sum_{j=1}^{k} v_{i_j} q_{i_j} \prod_{\ell=1}^{j-1} c_{i_\ell} ,$$

(α) Να δείξετε ότι η βέλτιστη λύση ταξινομεί τις διαφημίσεις σε φθίνουσα σειρά του λόγου $\frac{vq}{1-c}$. Δηλαδή στη βέλτιστη λύση έχουμε:

$$\frac{v_{i_1} q_{i_1}}{1 - c_{i_1}} \geq \frac{v_{i_2} q_{i_2}}{1 - c_{i_2}} \geq \cdots \geq \frac{v_{i_k} q_{i_k}}{1 - c_{i_k}}$$

(β) Να διατυπώσετε αλγόριθμο που υπολογίζει τη βέλτιστη λύση σε χρόνο $\mathrm{O}(n \log n + nk)$.

Άσκηση 4: Αλυσίδα Εστιατορίων

Ως υπεύθυνος δικτύου μιας αλυσίδας εστιατορίων, πρέπει να επιλέξετε που θα ανοίξουν καταστήματα κατά μήκος της νέας εθνικής οδού. Έχουν προεπιλεγεί n υποψήφιες θέσεις, και για κάθε υποψήφια θέση i, $i = 1, \ldots, n$, έχει υπολογισθεί το αναμενόμενο κέρδος από το κατάστημα στη θέση i με βάση το αν ανοίξουν καταστήματα στις γειτονικές θέσεις. Αν δεν ανοίξει κατάστημα σε καμία από τις θέσεις $i-1$ και $i+1$, το αναμενόμενο κέρδος από το κατάστημα στην θέση i είναι a_i, αν ανοίξει κατάστημα σε μία από τις θέσεις $i-1$ και $i+1$, το αναμενόμενο κέρδος είναι b_i, και αν ανοίξουν καταστήματα σε αμφότερες τις θέσεις $i-1$ και $i+1$, το αναμενόμενο κέρδος είναι c_i (τα c_1 και c_n δεν ορίζονται, και για κάθε θέση i, ισχύει ότι $a_i \geq b_i \geq c_i \geq 0$). Να διατυπώσετε έναν όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμο, που με είσοδο τις τριάδες (a_i, b_i, c_i), $i = 1, \ldots, n$, επιλέγει τις θέσεις όπου θα ανοίξουν καταστήματα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.