ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

(σημειώσεις διδασκαλίας)

Ν.Γ. ΜΑΡΑΤΟΣ

Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο

— Εισαγωγή
— Μοντελοποίηση
— Εξισώσεις κατάστασης
— Χρονική απόκριση συστήματος
— Ευστάθεια
— Ελεγξιμότητα και παρατηρησιμότητα
— Αρμονική απόκριση συστήματος
— Γεωμετρικός τόπος ριζών
Παράρτημα: μετασχηματισμοί Laplace και Z.

Επανάληψη

1) Γραμμική άλγεβρα: πράξεις διανυσμάτων ή πινάκων
γραμμική ανεξαρτησία, βαθμός πίνακα
υπολογισμός ορίζουσας
αντιστροφή πίνακα

2) Μετασχηματισμοί Laplace και Z: ορισμοί και ιδιότητες

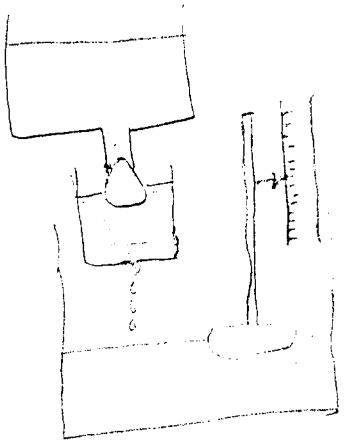
Βιβλιογραφία

[1] R. Dorf, R. Bishop, "Σύγχρονα συστήματα αυτομάτου ελέγχου", Εκδ. Τζιόλα
[2] J. Distefano, A. Stubberud, I. Williams, "Συστήματα αυτομάτου ελέγχου", Εκδ. Τζιόλα
[3] Τ.Γ. Κουσιουρής, "Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο", Συμμετρία
[4] Σ. Τζαφέστας, "Αυτόματος Έλεγχος", Αθήνα
[5] Π. Παρασκευόπουλος, "Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου", Αθήνα
[6] Β. Πετρίδης, " —//— —//— —//— ", Θεσσαλονίκη
[7] Ν. Κρικέλης, " —//— —//— —//— ", Αθήνα

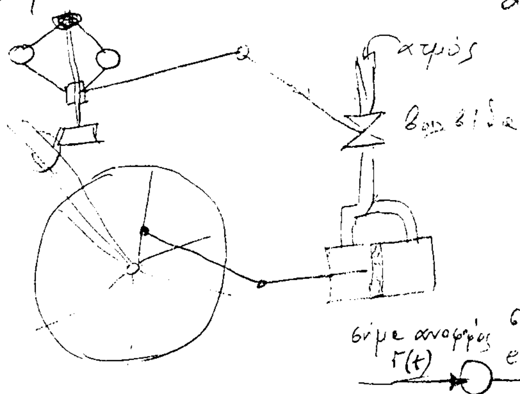
1. Εισαγωγή

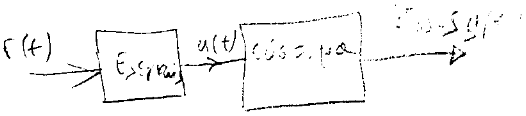
300 π.Χ. υδραυλικό ρολόι του Κτησίβιου :

100 μ.Χ. Ήρων ο Αλεξανδρεύς
(υδραυλικά κ πνευματικά συστ. ελέγχου)

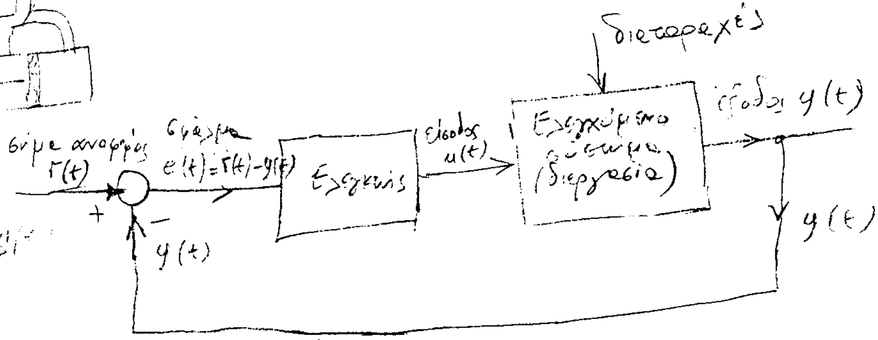


1769 μ.Χ. James Watt ρυθμιστής ταχύτητας ατμομηχανής





Σ.Ε. ανοικτού βρόχου



Σ.Ε. κλειστού βρόχου

19ος αι.: J. Maxwell θεωρία ρυθμιστή Watt, Vyshnegradskii θεωρία ρυθμιστών, ...

αρχές 20ού αι.: Bode, Nyquist πεδίο συχνοτήτων, Lyapunov θεωρία ευστάθειας (πεδίο χρόνου)

μετά τον 2ο παγκ. πόλεμο : Θεωρία γραμμικών συστημάτων, εξισώσεις κατάστασης, βέλτιστος έλεγχος

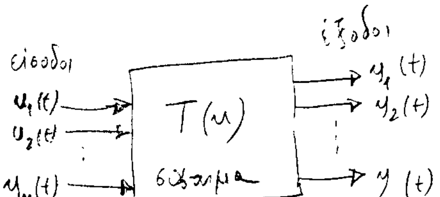
1970 : Έλεγχος μέσω Η/Υ, προηγμένη θεωρία ελέγχου (στοχαστικός, προσαρμοστικός)

1980 : Εύρωστος έλεγχος, ρομποτική

Άλλες λειτουργίες αυτοματισμού εκτός του αυτομάτου ελέγχου.

- λογικός και ακολουθιακός έλεγχος : αλληλουχίες ενεργειών και συναγερμοί, αβαρίας κ κακής λειτουργίας
  παραδοσιακά με ηλεκτρονόμους (ρελαί), τώρα με PLC (programmable logic controllers)
- υπολογισμός βέλτιστων σημείων λειτουργίας και σημάτων αναφοράς (off-line)
- Βοηθητικές λειτουργίες : παρακολούθηση επίδοσης, ανίχνευση βλαβών, επίπεδα αποθεμάτων και παραγόμενων προϊόντων, προγραμματισμός παραγωγής κ.α.

Σε σύγχρονες μεγάλες εγκαταστάσεις : δίκτυο Η/Υ.



Σύστημα = τελεστής T τ.ω. $y(t) = T(u(t))$

Σύστημα = τελεστής T τ.ω. $y(t) = T(u(t), t, x_0)$ αρχικές συνθ.

όπου $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$, $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix}$ διανύσματα εισόδων κ εξόδων συστήματος

Το πρόβλημα του αυτομάτου ελέγχου.

Ανάλυση: Αν δοθούν προς έλεγχο σύστημα και ελεγκτής να ευρεθούν οι έξοδοι για κάθε σήμα αναφοράς.

Σχεδίαση: Αν δοθεί προς έλεγχο σύστημα να ευρεθεί ελεγκτής τέτοιος ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου (αντισταθμισμένο σύστημα ή σύστημα ελέγχου) να έχει επιθυμητή συμπεριφορά.

Βασικές απαιτήσεις από συστήματα ελέγχου.

1) Ευστάθεια: όλα τα σήματα (συναρτήσεις $y(t)$, $\cancel{u(t)}$, $e(t)$) να συγκλίνουν όταν $t \to \infty$ ή τουλάχιστον να είναι φραγμένα όταν $t \to \infty$.

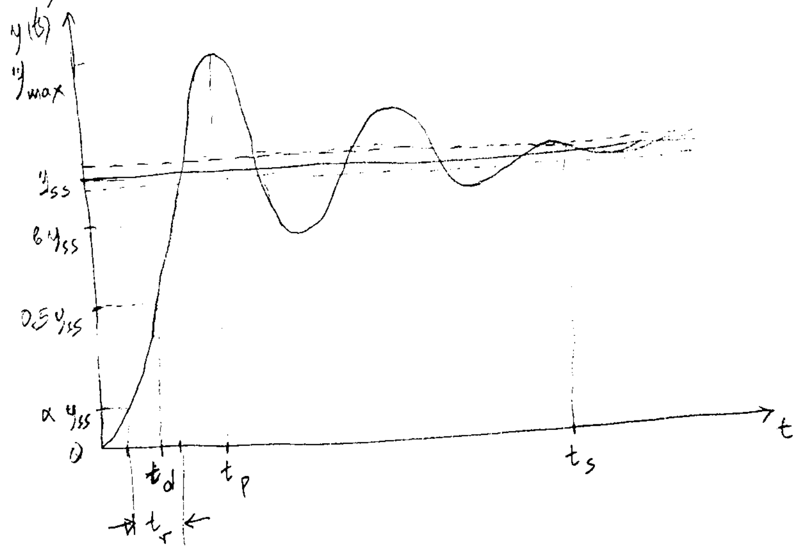
Εύρωστος ή ρωμαλέος έλεγχος: ο ελεγκτής εξασφαλίζει ευστάθεια όταν το σύστημα έχει αβεβαιότητα.

2) Ικανότητα παρακολούθησης: Το διάνυσμα εξόδων $y(t)$ πρέπει να ακολουθεί το διάνυσμα αναφοράς $r(t)$ το οποίο περιέχει τις επιθυμητές αποκρίσεις του συστήματος κλ. βρ.

Αν $r(t)$ ανεξάρτητο του χρόνου: πρόβλημα ρύθμισης (regulation)
π.χ. θερμοκρασία χώρου, στάθμη υγρού, ταχύτητα τρένου κλπ.

Αν $r(t)$ εξαρτάται από τον χρόνο: πρόβλημα παρακολούθησης (tracking)
π.χ. παρακολούθηση στόχου από ραντάρ, δορυφόρου από κεραία κλπ.

Η ικανότητα παρακολούθησης αξιολογείται με βάση την βηματική απόκριση $y(t)$ του συστήματος κλειστού βρόχου. Προδιαγράφονται οι εξής παράμετροι:



- χρόνος καθυστέρησης t_d: $y(t_d) = 0.5\, y_{ss}$

- χρόνος ανόδου t_r: $y(t_1) = \alpha y_{ss}$, $y(t_2) = b\, y_{ss}$, $t_r = t_2 - t_1$, συνήθως $\alpha = 0.1$, $b = 0.9$

- χρόνος κορυφής t_p: $y(t_p) = y_{max} \triangleq \max_t \{y(t)\}$

- μέγιστη % υπερπήδηση $M_p \triangleq \dfrac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \cdot 100\ \%$

- χρόνος αποκατάστασης t_s: ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει και να παραμένει η $y(t)$ σε μία περιοχή της τελικής τιμής y_{ss}:

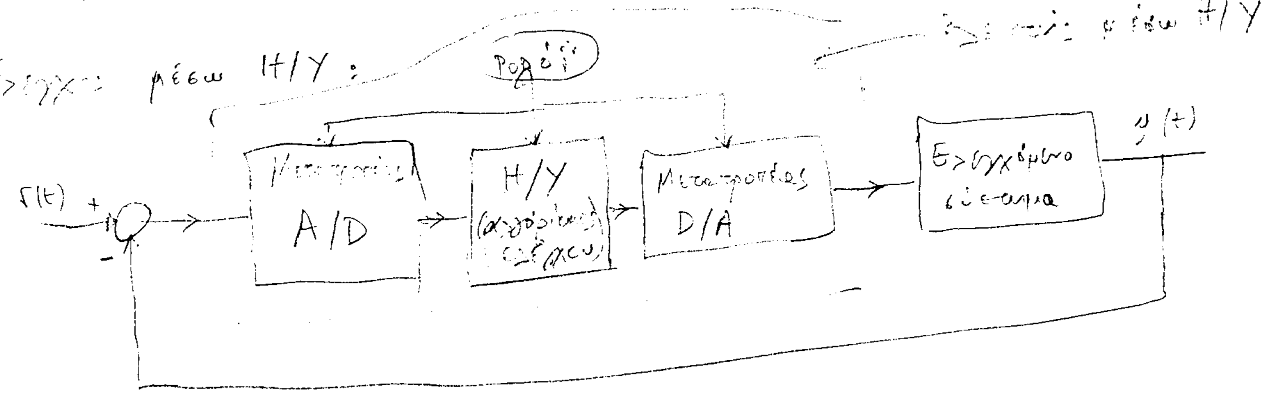
$$|y(t) - y_{ss}| \le \gamma y_{ss} \quad \forall\ t \ge t_s$$ (συνήθως $\gamma = 5\%$ ή 2%)

- σφάλμα μόνιμης κατάστασης e_{ss}: $e_{ss} \triangleq \lim_{t \to \infty} \{r(t) - y(t)\}$

3. Απόρριψη διαταραχών: Οι διαταραχές είναι τυχαία σήματα εισόδου στο προς έλεγχο σύστημα (π.χ. άνεμος σε ραντάρ) που επηρεάζουν τις εξόδους. Είναι επιθυμητό στο αντισταθμισμένο σύστημα η επίδρασή τους να είναι μικρή ή μηδενική.

4. Αποσύζευξη εισόδων-εξόδων. Η μεταβολή μιας συνιστώσας του διανύσματος αναφοράς $r(t)$ είναι επιθυμητό να επηρεάζει την αντίστοιχη συνιστώσα του διανύσματος εξόδου $y(t)$ και λίγο ή καθόλου τις άλλες συνιστώσες του $y(t)$. Π.χ. αεροπλάνο.

Έλεγχος μέσω Η/Υ:



Αλγόριθμος ελέγχου: σύστημα διακριτού χρόνου

αυτό που "τρέχει" ο Η/Υ: —//— —//— —//—

2. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

2.1 Ορισμοί

Διασυνδεδεμένο φυσικό σύστημα: συλλογή φυσικών αντικειμένων (μαζών, ελατηρίων, αποσβεστήρων, πυκνωτών, αντιστάσεων, σωλήνων, δοχείων αποθήκευσης κ.λπ.) διασυνδεδεμένων μεταξύ τους.

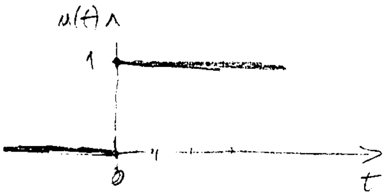
Περιβάλλον: ό,τι $\notin$ στο σύστημα.

Σήμα: συνάρτηση του χρόνου ή/και άλλων μεταβλητών που έχει φυσική υπόσταση (π.χ. τάση, ταχύτητα, πίεση κλπ.)

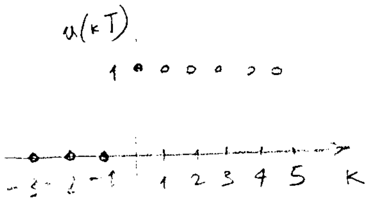
Διάκριση σημάτων ως προς το πεδίο ορισμού: συνεχούς χρόνου (σ.χ.), διακριτού χρόνου (δ.χ.)

συνεχούς χρόνου (σ.χ.) → ορίζεται $\forall t \in \mathbb{R}$

διακριτού χρόνου (δ.χ.) → ορίζεται μόνο για t_k, $k \in N$ (συνήθως $t_k = kT$, $k \in N$)



βηματική συνάρτηση σ.χ. $u(t)$

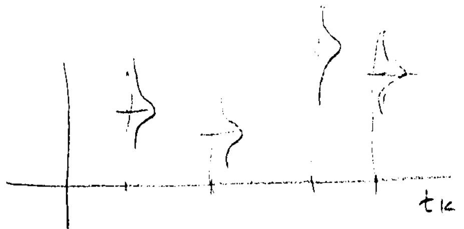


βηματική συνάρτηση δ.χ. $u(kT)$

Διάκριση σημάτων ως προς το πεδίο τιμών: ντετερμινιστικά, στοχαστικά

ντετερμινιστικά → $f(t) \in \mathbb{R}$ ή $f(kT) \in \mathbb{R}$,

στοχαστικά → $f(t)$ ή $f(kT)$ μία τυχαία μεταβλητή (κατανομή πιθανότητας για τις διάφορες περιοχές τιμών του σήματος)



στοχαστικό σήμα διακριτού χρόνου

Σύστημα – περιβάλλον: επικοινωνούν με σήματα.

Ακροδέκτης συστήματος: σημείο του συστήματος διασύνδεσης στο περιβάλλον.

Είσοδοι ή διεγέρσεις: σήματα που προέρχονται από το περιβάλλον και εισάγονται στο σύστημα χωρίς να επηρεάζονται από αυτό.

Έξοδοι ή αποκρίσεις: σήματα που παράγονται από το σύστημα (σαν αποκρίσεις στις διεγέρσεις που δέχεται) και επικοινωνούνται προς το περιβάλλον.

Διάνυσμα εισόδων: $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$, $u(t_k) = \begin{bmatrix} u_1(t_k) \\ u_2(t_k) \\ \vdots \\ u_m(t_k) \end{bmatrix}$

Διάνυσμα εξόδων: $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$, $y(t_k) = \begin{bmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \\ \vdots \\ y_q(t_k) \end{bmatrix}$

Μαθηματικό μοντέλο φυσικού συστήματος : μαθηματική περιγραφή των νόμων της φύσης εφαρμοσμένων πάνω στο φυσικό σύστημα.

Μοντελοποίηση : διαδικασία εύρεσης μαθηματικού μοντέλου

Μετά τη μοντελοποίηση "σύστημα" $\equiv$ μαθηματικό μοντέλο.

Διακρίσεις συστημάτων :

α) ηλεκτρικά, μηχανικά γραμμικά, μηχανικά περιστροφικά, υδραυλικά/πνευματικά, θερμικά, μικτά

β) συνεχούς χρόνου, διακριτού χρόνου

γ) γραμμικά, μη-γραμμικά

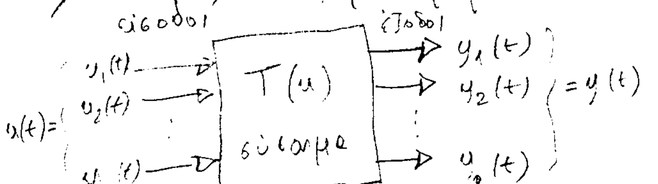
δ) χρονικά σταθερά, χρονικά μεταβαλλόμενα

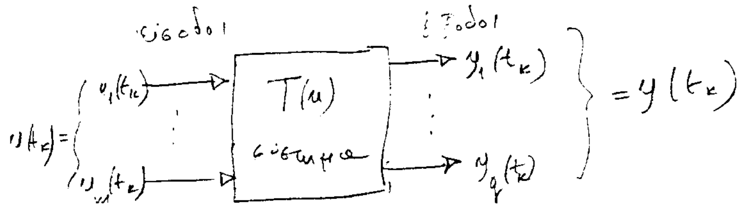
ε) μιας ή πολλών εισόδων, μιας ή πολλών εξόδων

στ) ντετερμινιστικά, στοχαστικά.

2.2 Τρόποι περιγραφής συστημάτων

1) Με τελεστή μεταφοράς εισόδων-εξόδων





$y(t) = T(u(t), t, x_0)$, $\forall t \geq t_0$

συνεχούς χρόνου

$y(t_k) = T(u(t_k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

διακριτού χρόνου

2) Με διαφορικές εξισώσεις (εξισώσεις διαφορών) εισόδων-εξόδων

συνεχούς χρόνου : $F\left(y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \ldots, y^{(n)}(t), u(t), u^{(1)}(t), \ldots, u^{(p)}(t), t\right) = 0$

όπου $y^{(k)}(t) = \dfrac{d^k y(t)}{dt^k}$

διακριτού χρόνου : $F\left(y(t_k), y(t_{k+1}), y(t_{k+2}), \ldots, y(t_{k+n}), u(t_k), u(t_{k+1}), \ldots, u(t_{k+p})\right) = 0$

F : διανυσματική συνάρτηση με πεδίο τιμών $\subset \mathbb{R}^q$

Χρονικά σταθερό αν F δεν εξαρτάται από t ή k

Γραμμικό αν F γραμμική

χρονικά σταθερό αν $y(t-\tau) = T(u(t-\tau))$ $\forall \tau$ ή $y(t_{k-\sigma}) = T(u(t_{k-\sigma}))$ $\forall \sigma$

γραμμικό αν $T(\alpha \bar{u}(t) + \beta \tilde{u}(t)) = \alpha T(\bar{u}(t)) + \beta T(\tilde{u}(t))$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3) Με εξισώσεις κατάστασης:

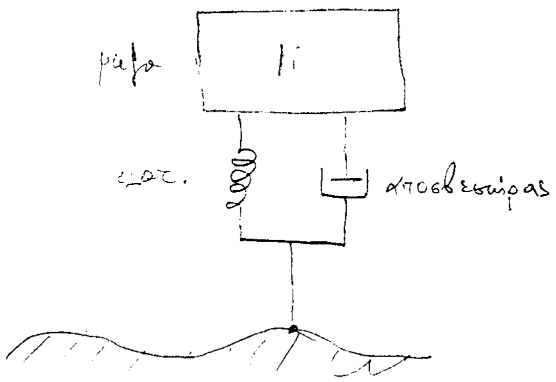
συνεχούς χρόνου		διακριτού χρόνου
$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t)$ $y(t)=g(x(t),u(t),t)$	μη-γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο	$x(t_{k+1})=f(x(t_k),u(t_k),k)$ $y(t_k)=g(x(t_k),u(t_k),k)$
$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t))$ $y(t)=g(x(t),u(t))$	μη-γραμμικό χρονικά αμετάβλητο	$x(t_{k+1})=f(x(t_k),u(t_k))$ $y(t_k)=g(x(t_k),u(t_k))$
$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)$ $y(t)=C(t)\,x(t)+D(t)\,u(t)$	γραμμικό χρονικά μεταβαλλ.	$x(t_{k+1})=A_k\,x(t_k)+B_k\,u(t_k)$ $y(t_{k+1})=C_k\,x(t_k)+D_k\,u(t_k)$
$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ $y(t)=Cx(t)+Du(t)$	γραμμικό χρονικά αμεταβλ.	$x(t_{k+1})=Ax(t_k)+Bu(t_k)$ $y(t_{k+1})=Cx(t_k)+Du(t_k)$

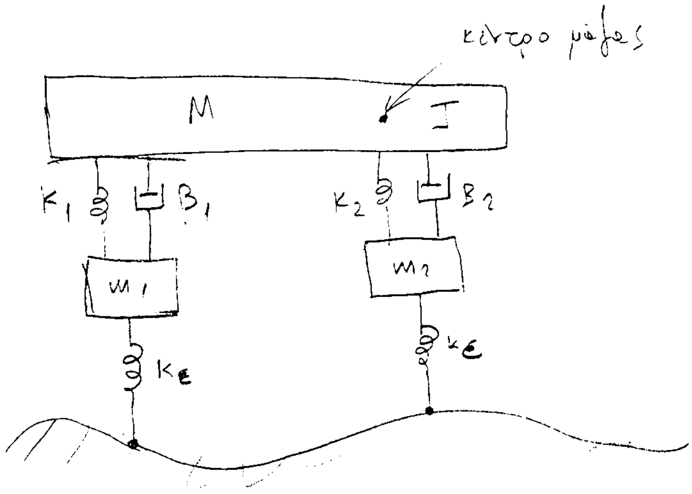
$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix},\quad x(t_k)=\begin{bmatrix}x_1(t_k)\\ x_2(t_k)\\ \vdots\\ x_n(t_k)\end{bmatrix}$$ ← διάνυσμα καταστάσεων.

(απαιτείται να είναι ελάχιστα και πλήρη)

Διαδικασία μοντελοποίησης ⇒ εξισώσεις συστήματος που εμπεριέχουν συνήθως και άλλες μεταβλητές εκτός των $u(t), y(t), x(t)$

∴ απαιτούνται απαλοιφές





σύστημα ανάρτησης αυτοκινήτου

2.3 Βασικές αρχές μοντελοποίησης

Διασυνδεδεμένο σύστημα: αποτελείται από (ενδεχομένως) μεγάλο αριθμό απλών (υπο)συστημάτων (πρότυπων στοιχείων) διασυνδεδεμένων μεταξύ τους.

Πρότυπα ή ιδανικά στοιχεία: – τα απλούστερα δυνατά συστήματα
– τα διαφορετικά είδη στοιχείων είναι λίγα
– η λειτουργία τους βασίζεται σε απλά φυσικά φαινόμενα

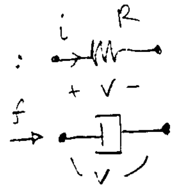
Τοπολογία συστήματος: – ο τρόπος αλληλοσύνδεσης των στοιχείων
– μπορεί να είναι πολύπλοκη

Εξισώσεις φυσικού συστήματος:

(i) Περιγραφικές σχέσεις στοιχείων (Π.Σ.Σ.)
- 1 ή 2 για κάθε στοιχείο
- εξαρτώνται από το είδος του στοιχείου
- είναι αλγεβρικές ή διαφορικές εξισώσεις γραμμικές ή μη-γραμμικές

(ii) Σχέσεις αλληλοσύνδεσης
- είναι γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις
- δεν εξαρτώνται από το είδος των στοιχείων που εμπλέκονται
- εκφράζουν βασικούς νόμους της φύσης του συστήματος (π.χ. νόμοι Kirchhoff)

∃ ομοιότητα των Π.Σ.Σ. στα διάφορα φυσικά συστήματα:



$v = Ri$

$v = \frac{1}{B} f$

$\Rightarrow$ ∃ αναλογίες μεταξύ στοιχείων διαφόρων φ.σ.

$\Rightarrow$ ∃ γενικευμένη περιγραφή συστημάτων (εν πολλοίς) ανεξάρτητη των φυσικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα.

Βάση για την γενικευμένη περιγραφή: ένα ζευγάρι μεταβλητών $v(t)$, $i(t)$

$i(t)$: Γενικευμένη Μεταβλητή Έντασης (ΓΜΕ)
- Διαπερνά το στοιχείο, ~~δεν εκτείνεται στο χώ~~ρο, δεν χρειάζεται σημείο αναφοράς
- ένταση ρεύματος i, δύναμη f, ροπή T, παροχή ρευστού Q, παροχή θερμότητας

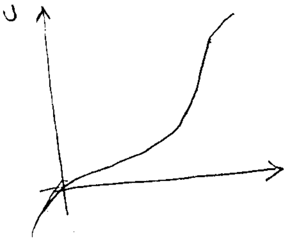
$v(t)$: Γενικευμένη Μεταβλητή Τάσης (ΓΜΤ)
- βρίσκεται κατά μήκος του στοιχείου, απαιτείται σημείο αναφοράς
- τάση v, ταχύτητα u, γωνιακή ταχύτητα ω, διαφορά πίεσης ΔP, διαφορά θερμοκρασίας $\Delta\theta$

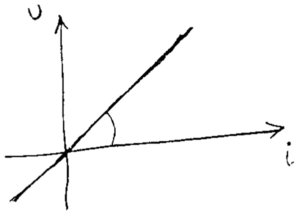
$P(t) = v(t)\, i(t)$ ← ισχύς σε κάθε φ.σ. εκτός θερμικών

$\Rightarrow$ [illegible] συστημάτων:

2.4 Περιγραφή πρότυπων στοιχείων

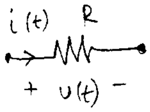
(α) Γενικευμένη αντίσταση.





χαρακτηριστική υ–i

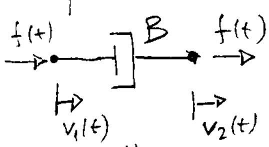
ωμική αντίσταση



$$\upsilon(t) = R\,i(t)$$

$$V(s) = R\,I(s)$$

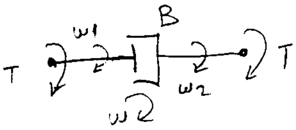
γραμμικός τριβέας



$$v(t) = v_1(t) - v_2(t) = \frac{1}{B} f(t)$$

$$V(s) = \frac{1}{B} F(s)$$

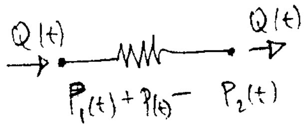
περιστροφικός τριβέας



$$\omega(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t) = \frac{1}{B} T(t)$$

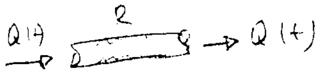
$$\Omega(s) = \frac{1}{B} T(s)$$

υδραυλική αντίσταση (μη-τυρβώδης ροή)



$$P(t) = P_1(t) - P_2(t) = R\,Q(t)$$

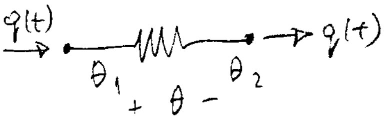
$$P(s) = R\,Q(s)$$



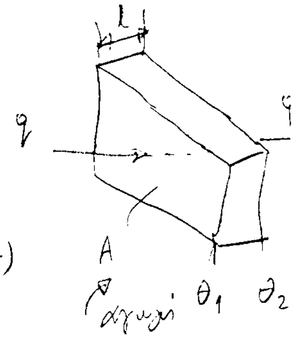
υδραυλική αντίσταση (τυρβώδης ροή, γωνίες, στενώσεις, προεκτάσεις)

$$P(t) = P_1(t) - P_2(t) = R_T\big(Q(t)\big)^2$$

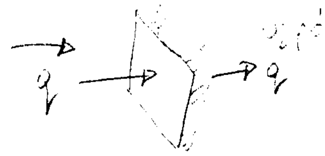
Θερμική αντίσταση (μετάδοση θερμότητας με αγωγή ή μεταφορά)



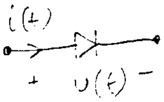
$$q(t) = \frac{1}{R}\big(\theta_1(t) - \theta_2(t)\big) = \frac{1}{R}\,\Theta(t)$$



μεταφορά

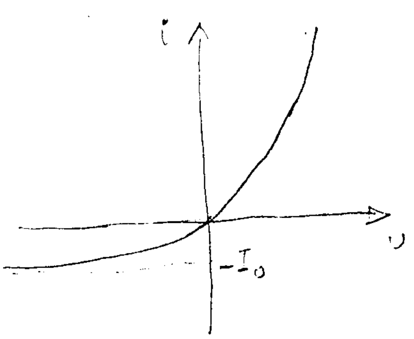


Δίοδος:



$$i(t) = f\big(\upsilon(t)\big)$$

$$i(t) = I_o\left(e^{\alpha \upsilon(t)} - 1\right)$$

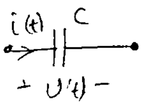


(β) Γενικευμένη χωρητικότητα.

$q(t) \triangleq \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$ ← γενικευμένο φορτίο (ορμή, στροφορμή)

χαρακτηριστική q-υ

Πυκνωτής

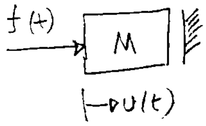


$v(t) = \frac{1}{C} q(t)$

$\Leftrightarrow \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$

$I(s) = sCV(s) - Cv(0)$

Μάζα

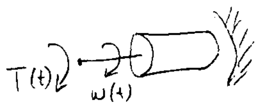


$\upsilon(t) = \frac{1}{M} q(t)$

$\Leftrightarrow \quad f(t) = M \frac{d\upsilon(t)}{dt}$

$F(s) = sMV(s) - M\upsilon(0)$

Ροπή αδράνειας



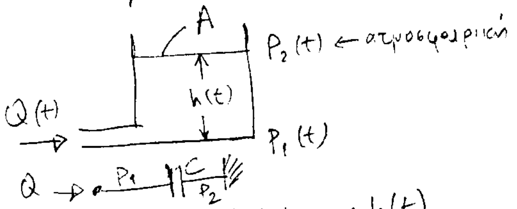
$\omega(t) = \frac{1}{J} q(t)$

$\Leftrightarrow \quad T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$

$T(s) = sJ\Omega(s) - J\omega(0)$

Υδραυλική/πνευματική χωρητικότητα

πνευματική ελαστικότητα



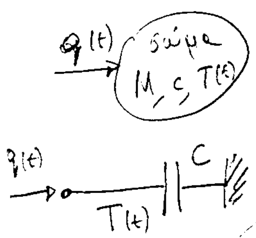
$P(t) = P_1(t) - P_2(t) = \rho g h(t)$

$Q(t) = A \frac{dh(t)}{dt} = \frac{A}{\rho g} \frac{dP(t)}{dt}$

$Q(t) = C \frac{dP(t)}{dt}, \quad C = \frac{A}{\rho g}$

$Q(s) = sCP(s) - Cp(0)$

Θερμική χωρητικότητα



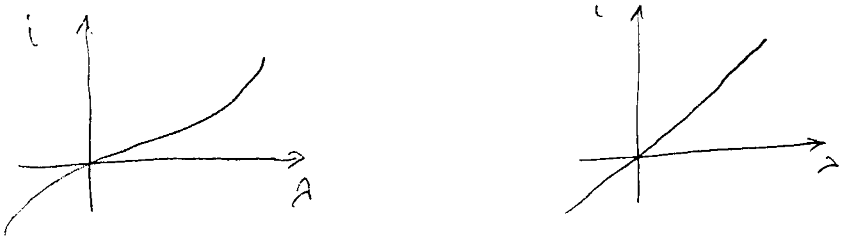
ειδική θερμότητα

$q(t) = Mc \frac{dT(t)}{dt} = C \frac{dT(t)}{dt}$

$Q(s) = sC\,T(s) - C\,T(0)$

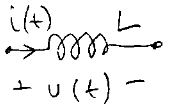
(γ) Γενικευμένη επαγωγή

$$\lambda(t) \triangleq \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau$$ ← γενικευμένη πεπλεγμένη ροή (διάστημα, γωνία στροφής)



χαρακτηριστική λ - i

πηνίο αυτεπαγωγή

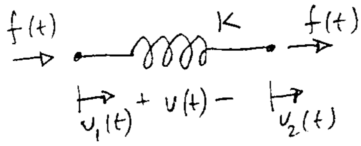


$$i(t) = \frac{1}{L}\lambda(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$V(s) = sL\,I(s) - L\,i(0)$$

ελατήριο

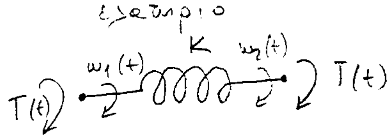


$$f(t) = K\,x(t)$$ ← επιμήκυνση

$$\Rightarrow u(t) = u_1(t) - u_2(t) = \frac{1}{K}\frac{df(t)}{dt}$$

$$V(s) = \frac{1}{K}sF(s) - \frac{1}{K}f(0)$$

περιστροφικό ελατήριο



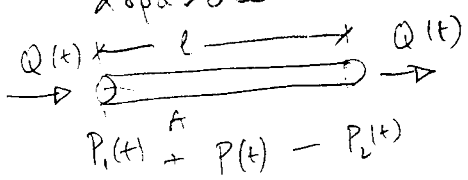
$$T(t) = K\,\theta(t)$$

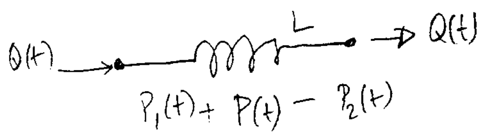
$$\Rightarrow \omega(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t) = \frac{1}{K}\frac{dT(t)}{dt}$$

$$\Omega(s) = \frac{sT(s)}{K} - \frac{T(0)}{K}$$

Θερμικό $\nexists$

Υδραυλική/πνευματική αδράνεια





επιτάχυνση του ρευστού: $f(t) = m\,\gamma(t)$

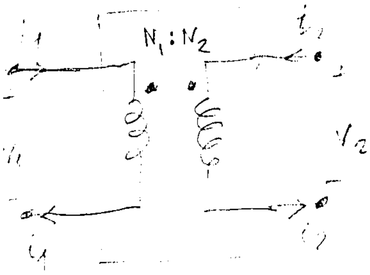
$$\Rightarrow P(t)A = \rho A \ell \frac{du(t)}{dt} = \rho \ell \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow P(t) = L\frac{dQ(t)}{dt}, \quad L = \frac{\rho \ell}{A}$$

$$P(s) = sL\,Q(s) - L\,Q(0)$$

(δ) Γενικευμένος ιδανικός μετασχηματιστής

ιδανικός Μ/Σ



$$v_1(t) = \sigma \frac{N_1}{N_2} v_2(t)$$

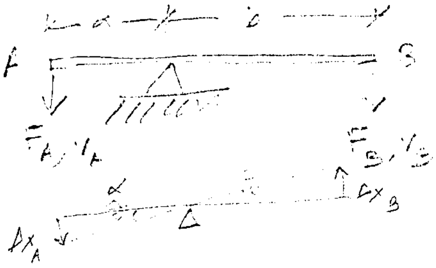
$$i_2(t) = -\sigma \frac{N_1}{N_2} i_1(t)$$

$$\sigma = \pm 1$$

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = -\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = \sigma \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{V_1(s)}{V_2(s)} = -\frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \sigma \frac{N_1}{N_2}$$

μοχλός



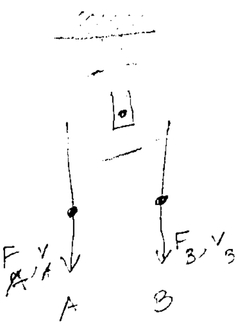
$$F_A \alpha - F_B b = 0$$

$$\Delta x_A = \alpha \theta, \quad \Delta x_B = -b\theta$$

$$v_A = \alpha \omega, \quad v_B = -b\omega$$

$$\frac{v_A(t)}{v_B(t)} = -\frac{F_B(t)}{F_A(t)} = -\frac{\alpha}{b} = \sigma \frac{\alpha}{b}$$

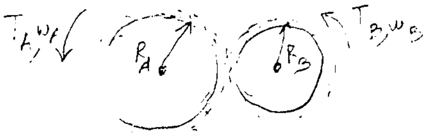
τροχαλίες

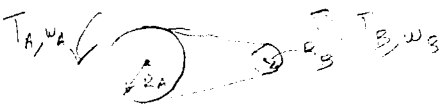


$$\frac{v_A(t)}{v_B(t)} = -\frac{F_B(t)}{F_A(t)} = -1 = \sigma$$

Λόγος οδοντωτών τροχών

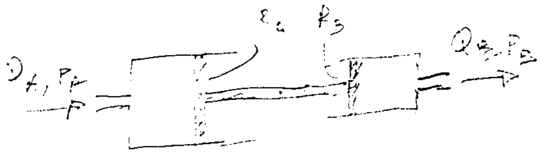
[illegible]



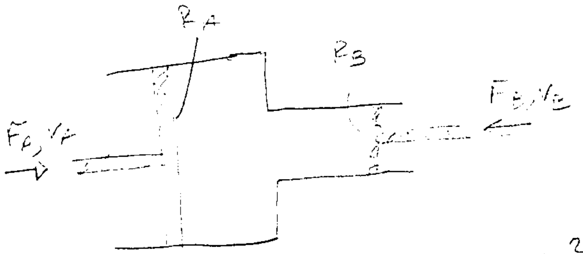


$$\frac{\omega_A(t)}{\omega_B(t)} = -\frac{T_B(t)}{T_A(t)} = \sigma \frac{R_A}{R_B}$$

Συνδεδεμένα δοχεία

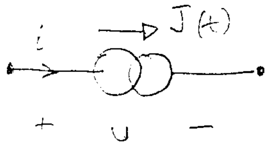


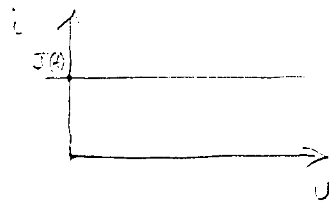
$$\frac{P_A(t)}{P_B(t)} = -\frac{Q_B(t)}{Q_A(t)} = \frac{R_B^2}{R_A^2}$$



$$\frac{v_A(t)}{v_B(t)} = -\frac{F_B(t)}{F_A(t)} = -\frac{R_B^2}{R_A^2}$$

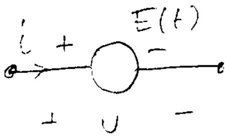
(ε) Ανεξάρτητες πηγές Γ.Μ.Ε και Γ.Μ.Τ.

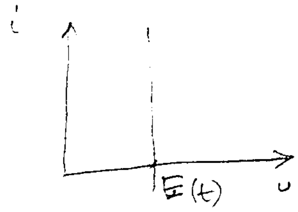




$i(t) = J(t)$

ανεξάρτητη πηγή Γ.Μ.Ε. (έντασης, δύναμης, ροπής, παροχής, παροχ. όγκου)





$u(t) = E(t)$

ανεξάρτητη πηγή Γ.Μ.Τ. (τάσης, ταχύτητας, γων. ταχύτητας, πίεσης, θερμοκρασίας)

2.5 Σχέσεις αλληλοσύνδεσης

- χρονικές αλγεβρικές εξισώσεις
- εξαρτώνται από τρόπο αλληλοσύνδεσης των στοιχείων (τοπολογία)
- δεν εξαρτώνται από το είδος των στοιχείων
- εκφράζουν βασικούς νόμους της φύσης του συστήματος

κόμβος : κοινός ακροδέκτης τουλάχιστον δύο στοιχείων

βρόχος : κλειστή διαδρομή από άκρες.

Πρόταση 1 : Συνέχεια Γ.Μ.Ε.

Το αλγεβρικό άθροισμα των Γ.Μ.Ε. που συρρέουν σε ένα κόμβο $= 0$

Πρόταση 1 $\equiv$ νόμος ρευμάτων Kirkhoff, αρχή D'Alembert, διατήρηση μάζας, 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα (αρχή διατήρησης ενέργειας)

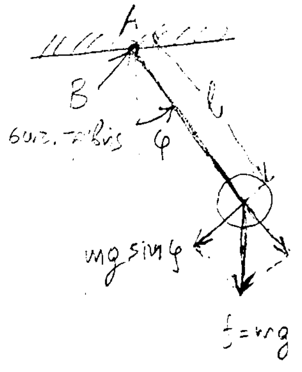
Πρόταση 2 : Συμβιβαστότητα Γ.Μ.Τ.

Το αλγεβρικό άθροισμα των Γ.Μ.Τ. κατά μήκος ενός βρόχου $= 0$

Πρόταση 2 $\equiv$ νόμος τάσεων Kirkhoff, αρχή Γαλιλαίου (σχετικότητα ταχυτήτων), σχετικότητα πιέσεων, σχετικότητα θερμοκρασιών.

Παράδειγμα 1: ράβδος : μήκους l, αμελητέας μάζας

Ροπή αδρανείας ράβδου ως προς A : $J = m l^2$



Ροπή στο A λόγω $f = mg$: $T = l mg \sin\varphi$ (1)

Ροπή λόγω J : $T_J = J \dfrac{d\omega(t)}{dt} = m l^2 \dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$ (2)

Ροπή λόγω B : $T_B = B \dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ (3)

Πρόταση 1 στο A : $-T = T_J + T_B$ (4)

$$\Longrightarrow mgl \sin\varphi + m l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{B}{ml^2}\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = 0 \quad (5)$$

της μορφής $F(\varphi^{(2)}, \varphi^{(1)}, \varphi) = 0$

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

3.1. Τρόποι περιγραφής συστημάτων (...)

(i). Με τελεστή μεταφοράς εισόδων - εξόδων : $y(t) = T(u(t), t; x_0)$

$y(t_k) = T(u(t_k), k; x_0)$

μεταβλητές : είσοδοι $u(t), u(t_k)$, έξοδοι $y(t), y(t_k)$.

(ii). Με διαφορικές εξισώσεις (εξισώσεις διαφορών) εισόδων - εξόδων :

$$F\left(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(p)}(t), t\right) = 0$$

$$F\left(y(t_k), y(t_{k+1}), \dots, y(t_{k+n}), u(t_k), u(t_{k+1}), \dots, u(t_{k+p}), k\right) = 0$$

(iii). Με εξισώσεις κατάστασης :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k), k)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \qquad y(t_k) = g(x(t_k), u(t_k), k)$$

μεταβλητές : είσοδοι $u(t), u(t_k)$, έξοδοι $y(t), y(t_k)$, καταστάσεις $x(t), x(t_k)$

(iv). Με εξισώσεις συστήματος (π.χ.) :

μεταβλητές : Γ.Μ.Τ. στοιχείων $v(t), v(t_k)$, Γ.Μ.Ε. στοιχείων $i(t), i(t_k)$.

(περιλαμβάνουν εισόδους, εξόδους, καταστάσεις),

(α) Π.Σ.Σ. : $\Gamma_j\left(v_j(t), \frac{dv_j(t)}{dt}, i_j(t), \frac{di_j(t)}{dt}\right) = 0$, $j = 1, \dots, b$ ← αριθμ. θυρ.

(β) εξισώσεις συνέχειας Γ.Μ.Ε. : $\alpha_q^T i(t) = 0$, $q = 1, \dots, N$ ← αριθμ. κόμβων

(γ) εξισώσεις συμβιβαστότητας Γ.Μ.Τ. : $b_l^T v(t) = 0$, $l = 1, \dots, L$ ← αριθμ. βρόχων

αλγεβροδιαφορικές εξισώσεις

Παράδειγμα 1 : (α) Π.Σ.Σ. : εξισώσεις (1), (2), (3)

(β) εξ. συνέχειας : (4)

3.2. Μετατροπή περιγραφής (iv) σε (ii) :

(εξισώσεις συστήματος σε δ.ε. εισόδων-εξόδων)

Ορισμοί εισόδων $u(t)$ και εξόδων $y(t)$ παραμέτρων.

Απαλοιφή όλων των άλλων Γ.Μ.Ε, Γ.Μ.Τ. εκτός των εισόδων, εξόδων.

Παράδειγμα 1 : Αντικατάσταση των Π.Σ.Σ. (1), (2), (3) στην (4)

$$\Rightarrow F(\varphi^{(2)}, \varphi^{(1)}, \varphi) = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{\beta}{m l^2}\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad (5)$$

3.3 Μετατροπή περιγραφής (iv) σε (iii)

(εξισώσεις συστήματος σε εξισώσεις κατάστασης)

Ορισμοί $u(t)$, $y(t)$ προφανείς

Ορισμός $x(t)$: Το διάνυσμα $x(t)$ περιέχει :

(α) τις ανεξάρτητες Γ.Ν.Τ. γενικ. χωρητικοτήτων

(β) τις ανεξάρτητες Γ.Ν.Ε. γενικ. επαγωγών

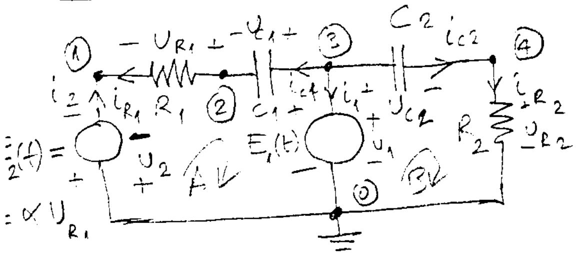
Τα στοιχεία του διανύσματος $x(t)$ πρέπει να είναι ανεξάρτητα δηλ. πρέπει να $\nexists$ αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των καταστάσεων.

Μετατροπή περιγραφής (iv) σε (iii) : Απαλοιφή όλων των άλλων Γ.Ν.Ε. $i(t)$ και Γ.Ν.Τ. $v(t)$ εκτός των εισόδων $u(t)$, εξόδων $y(t)$ και καταστάσεων $x(t)$.

Ανεξάρτητοι γραμμικοί συνδυασμοί καταστάσεων ή καταστάσεων και εισόδων είναι επίσης καταστάσεις (ισοδύναμες περιγραφές)

Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2:



1) Τ.Ε.Σ. :

$$u_{R_1} = R_1 i_{R_1} \quad (1.1)$$

$$u_{R_2} = R_2 i_{R_2} \quad (1.2)$$

$$i_{c_1} = C_1 \frac{du_{c_1}}{dt} \quad (1.3)$$

$$i_{c2} = C_2 \frac{du_{c2}}{dt} \quad (1.4)$$

$$u_1 = E_1(t) \quad (1.5)$$

$$u_2 = \alpha u_{R_1} \quad (1.6)$$

2) Πρόταση 1 (συνεκτικό Γ.Μ.Ε. ⇒ Ν.Ρ.Κ.)

① : $i_{R_1} + i_2 = 0$ (2.1)

② : $i_{c_1} - i_{R_1} = 0$ (2.2)

③ : $i_1 + i_{c_1} + i_{c2} = 0$ (2.3)

④ : $i_{c2} - i_{R_2} = 0$ (2.4)

3) Πρόταση 2 (συμβιβαστότητα Γ.Μ.Τ. ⇒ Ν.Τ.Κ.)

βρόχος A : $u_2 - u_{R_1} - u_{c_1} + u_1 = 0$ (3.1)

βρόχος B : $-u_1 + u_{c_2} + u_{R_2} = 0$ (3.2)

$$(2.2),(1.1),(1.3) \Rightarrow i_{c_1} = C_1 \frac{du_{c1}}{dt} = i_{R_1} = \frac{u_{R_1}}{R_1} \quad (4.1)$$

$$(2.4),(1.2),(1.4) \Rightarrow i_{c2} = C_2 \frac{du_{c2}}{dt} = i_{R_2} = \frac{u_{R2}}{R_2} \quad (4.2)$$

$$(3.2),(1.5) \Rightarrow u_{R_2} = u_1 - u_{c_2} = E_1 - u_{c_2} \quad (4.3)$$

$$(3.1),(1.5),(1.6) \Rightarrow \alpha u_{R_1} - u_{R_1} - u_{c_1} + E_1 = 0 \Rightarrow u_{R_1} = \frac{u_{c_1} - E_1}{(\alpha - 1)} \quad (4.4)$$

$$(4.1),(4.4) \Rightarrow C_1 \frac{du_{c1}}{dt} = \frac{u_{R1}}{R_1} = \frac{u_{c1} - E_1}{(\alpha-1)R_1} \Leftrightarrow \frac{du_{c1}}{dt} = \frac{u_{c1}}{(\alpha-1)C_1R_1} - \frac{E_1}{(\alpha-1)C_1R_1}$$

$$(4.2),(4.3) \Rightarrow C_2 \frac{du_{c2}}{dt} = \frac{u_{R2}}{R_2} = \frac{E_1 - u_{c2}}{R_2} \Leftrightarrow \frac{du_{c2}}{dt} = -\frac{u_{c2}}{C_2R_2} + \frac{E_1}{C_2R_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{du_{c1}(t)}{dt} \\ \frac{du_{c2}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha-1)C_1R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1}(t) \\ u_{c2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-\alpha)C_1R_1} \\ \frac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix} E_1(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

3.4. Μετατροπή περιγραφής (ii) σε (iii)

(δ.ε. εισόδων–εξόδων σε εξισώσεις κατάστασης)

(α) συστήματα μιας εξόδου.

Η δ.ε. εισόδου–εξόδου επιλύεται ως προς $y^{(n)}(t) = \dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$:

$$F\left(y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n)}(t), u(t), t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n)}(t) = \frac{d^n(t)}{dt^n} = \Phi\left(y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), u(t), t\right) \qquad (1)$$

Ορισμός καταστάσεων :

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t) && (2.1)\\
x_2(t) &= y^{(1)}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{x}_1(t) && (2.2)\\
&\vdots && \vdots\\
x_j(t) &= y^{(j-1)}(t) = \frac{d^{j-1}y(t)}{dt^{j-1}} = \dot{x}_{j-1}(t) && (2.j)\\
&\vdots && \vdots\\
x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} = \dot{x}_{n-1}(t) && (2.n)
\end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow \quad \dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = \Phi\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u(t), t\right) \qquad (3)$$

Εξισώσεις κατάστασης : $(2.2) \div (2.n)$ και (3)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t)\\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x(t), u(t), t)
\end{aligned}$$

Δηλαδή
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x(t)) \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix}$$

όπου $f_j(x(t)) = x_{j+1}(t), \quad j = 1, \ldots, n-1$

$$f_n(x(t), u(t), t) = \Phi(x(t), u(t), t)$$

Εξίσωση εξόδου η (2.1) : $y(t) = x_1(t) = [1, 0, \ldots 0]\, x(t) = e_1^T x(t)$

(β) συστήματα πολλών εξόδων.

Εφαρμόζεται η ίδια τεχνική για κάθε έξοδο ξεχωριστά.

Παράδειγμα 1 : $F\left(\varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t)\right) = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{B}{m\ell^2}\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{(2)}(t) = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\frac{B}{m\ell^2}\frac{d\varphi(t)}{dt} - \frac{g}{\ell}\sin\varphi(t) \triangleq \phi\left(\varphi(t), \varphi^{(1)}(t)\right)$$

$$x_1(t) = y(t) = \varphi(t)$$

$$x_2(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{x}_1(t)$$

Εξισώσεις κατάστασης :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{B}{m\ell^2}x_2(t) - \frac{g}{\ell}\sin x_1(t) \end{bmatrix}$$

Εξίσωση εξόδου : $y(t) = \varphi(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

3.5 Εξισώσεις κατάστασης μη-γραμμικών συστημάτων

Συνεχούς χρόνου :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.1)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (1.2) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ t \geq t_0$$

$x(t), x(t_k) \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα καταστάσεων

$u(t), u(t_k) \in \mathbb{R}^p$ —//— εισόδων

$y(t), y(t_k) \in \mathbb{R}^m$ —//— εξόδων

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

Διακριτού χρόνου :

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k), t_k) \quad (2.1)$$
$$y(t_k) = g(x(t_k), u(t_k), t_k) \quad (2.2) \qquad \forall k \in N,\ k \geq k_0$$

συνήθως $t_k = kT$

n = αριθμός καταστάσεων = διάσταση του $x(t)$ ή $x(t_k)$ = τάξη της περιγραφής

Θεώρημα ύπαρξης λύσεων : Γιά τη δ.ε. $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ με α.σ. $x(t_0) = x_0$,

(α) έστω ότι η $f(x,t)$ είναι συνεχής ως προς t σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ (δηλ. είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ εκτός ίσως από ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων $\tilde{t}_i$ στα οποία η $f(x,t)$ έχει αριστερό και δεξιό όριο.)

(β) έστω ότι $\exists$ τμηματικά συνεχής συνάρτηση $k(t)$ τ.ω.

$$\| f(x,t) - f(x',t) \| \leq k(t) \| x - x' \|$$

(δηλ. η f είναι συνεχής κατά Lipschitz ως προς x)

Τότε

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\exists$ μοναδική συνεχής συνάρτηση $x(t)$ που ικανοποιεί

τις $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, $\forall t \geq t_0$, $t \neq \tilde{t}_i$ και $x(t_0) = x_0$.

3.6 Εξισώσεις κατάστασης γραμμικών χρονικά σταθερών συστημάτων -
- συνάρτηση μεταφοράς
- χαρακτηριστικό πολυώνυμο

(α) Συνεχούς χρόνου: $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ (1)

$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$ (2)

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $A: n \times n$, $B: n \times p$, $C: m \times n$, $D: m \times p$

Μετασχηματισμένες κατά Laplace των μεταβλητών:

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

Ιδιότητα μ/σ Laplace: $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\,X(s) - x(0)$

$(1) \xRightarrow{\mathcal{L}} s\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + B\,U(s)$ (3)

$(2) \xRightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$ (4)

$(3) \Rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s) + x(0) \Rightarrow X(s) = [sI-A]^{-1}BU(s) + [sI-A]^{-1}x$

$(4) \Rightarrow Y(s) = \left[C[sI-A]^{-1}B + D\right]U(s) + C[sI-A]^{-1}x(0)$ (5)

Ορισμός: Η $m \times p$ μήτρα $G(s) = C[sI-A]^{-1}B + D$ λέγεται μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς

αλγεβρικό συμπλήρωμα

Ισχύουν: $[sI-A]^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}(sI-A)}{\det(sI-A)}$ και $[\mathrm{Adj}(sI-A)]_{ij} = (-1)^{i+j}\det[sI-A]$

Ορισμός: Το πολυώνυμο $\psi(s) = \det(sI-A)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Το $\psi(s)$ είναι βαθμού n (= τάξη συστήματος = διάσταση $x(t)$)

Ορισμοί: πόλοι = οι ρίζες του $\psi(s)$, μηδενικά οι ρίζες των αριθμητών της $G(s)$.

(β) Διακριτού χρόνου: $x(t_{k+1}) = A\,x(t_k) + B\,u(t_k)$ (1)'

$y(t_k) = C\,x(t_k) + D\,u(t_k)$ (2)'

$x(t_k) \in \mathbb{R}^n$, $u(t_k) \in \mathbb{R}^p$, $y(t_k) \in \mathbb{R}^m$, $A: n \times n$, $B: n \times p$, $C: m \times n$, $D: m \times p$

Μετασχηματισμένες κατά Z των μεταβλητών:

$X(z) = Z(x(t_k))$, $Y(z) = Z(y(t_k))$, $U(z) = Z(u(t_k))$

Ιδιότητα μ/σ Z: $Z(x(t_{k+1})) = z\left(X(z) - x(0)\right)$

$(1') \Rightarrow zX(z) - z\,x(0) = AX(z) + BU(z) \Rightarrow X(z) = [zI-A]^{-1}\left(BU(z) + z\,x(0)\right)$

$(2') \Rightarrow Y(z) = CX(z) + DU(z) = \left[C[zI-A]^{-1}B + D\right]U(z) + z\,C[zI-A]^{-1}x(0)$ (5)'

Ορισμός : Η $m \times p$ μήτρα $G(z) = C[zI-A]^{-1}B+D$ λέγεται μήτρα συνάρτησης μεταφοράς

Ορισμός : Το πολυώνυμο $\psi(z) = \det(zI-A)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Το $\psi(z)$ είναι βαθμού z.

$$G(s) = C\,\frac{Adj(sI-A)}{\det(sI-A)}B+D \quad , \quad G(z) = C\,\frac{Adj(zI-A)}{\det(zI-A)}B+D$$

$Y(s) = G(s)U(s)$ αν $x(0)=0$, $\quad Y(z) = G(z)U(z)$ αν $x(0)=0$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}$ αν $x(0)=0$, $\quad y(t_k) = Z^{-1}\{G(z)U(z)\}$ αν $x(0)=0$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{C(sI-A)^{-1}x(0)\}$$

$$y(t_k) = Z^{-1}\{G(z)U(z)\} + Z^{-1}\{zC(zI-A)^{-1}x(0)\}$$

3.7 Μετασχηματισμός ομοιότητας

γραμμικό σύστημα (A,B,C,D)

$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t) \quad (1.1) \quad x(t)\in\mathbb{R}^n,\ u(t)\in\mathbb{R}^p,\ y(t)\in\mathbb{R}^m$

$y(t) = Cx(t)+Du(t) \quad (1.2) \quad A: n\times n,\ B: n\times p,\ C: m\times n,\ D: m\times p$

Ας είναι P ομαλή (αντιστρέψιμη) $n\times n$ μήτρα.

Αλλαγή βάσης στο χώρο ~~κατάστασης~~ $(\mathbb{R}^n)$ από την I στην P:

$$x = P\hat{x} \iff \hat{x} = P^{-1}x \qquad (2)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = P^{-1}\dot{x}(t) = P^{-1}Ax + P^{-1}Bu = P^{-1}AP\hat{x}+P^{-1}Bu$$

$$\iff \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t)+\hat{B}u(t) \quad \text{όπου } \hat{A} = P^{-1}AP,\ \hat{B} = P^{-1}B$$

$$y(t) = Cx(t)+Du(t) = CP\hat{x}(t)+Du(t) \quad \text{όπου } \hat{C} = CP,\ \hat{D} = D$$

$$\iff y(t) = \hat{C}\hat{x}(t)+\hat{D}u(t)$$

Άρα : $(1.1),(1.2) \iff \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t)+\hat{B}u(t) & (3.1) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t)+\hat{D}u(t) & (3.2) \end{cases}$

όπου $\hat{A} = P^{-1}AP,\ \hat{B} = P^{-1}B,\ \hat{C} = CP,\ \hat{D} = D \qquad (4)$

(4) λέγονται μετασχηματισμός ομοιότητας. Είναι σχέση ισοδυναμίας.

(A,B,C,D) και $(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ λέγονται όμοια αν ισχύει η (4) για κάποια P αντιστρέψιμη $n\times n$

τότε τα (A,B,C,D) και $(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ μπορούν να θεωρηθούν σαν διαφορετικές περιγραφές του ίδιου συστήματος.

Θεώρημα: Αν δύο περιγραφές (A,B,C,D) και $(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ συνδέονται με μετασχηματισμό ομοιότητας (4) τότε:
(α) έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο
(β) έχουν την ίδια μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς.

Απόδειξη:

(α) $$\hat{\psi}(s) = \det(sI-\hat{A}) = \det(sP^{-1}P - P^{-1}AP) = \det[P^{-1}(sI-A)P] =$$
$$= \det P^{-1} \det(sI-A) \det P = \det(sI-A) = \psi(s)$$

(β) $$\hat{G}(s) = \hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}\hat{B}+\hat{D} = CP(sP^{-1}P - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B+D$$
$$= CP[P^{-1}(sI-A)P]^{-1}P^{-1}B+D = CPP^{-1}(sI-A)^{-1}PP^{-1}B+D$$
$$= C(sI-A)^{-1}B+D = G(s)$$

3.8 Κανονικές μορφές της μήτρας A

Ιδιοτιμή λ και ιδιοδιάνυσμα p της μήτρας A: $\quad Ap=\lambda p$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}^n$, $p \neq 0$

Η $n \times n$ μήτρα A έχει n ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, ενδεχομένως πολλαπλές.

(α) Διαγώνια κανονική μορφή

Εστω οτι η A έχει n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2, \dots, p_n$

Τότε $Ap_i = \lambda_i p_i$, $i=1,\dots,n$. Λαμβάνοντας $P=[p_1, p_2, \dots, p_n]$ έχουμε:

$$\hat{A} = P^{-1}AP = P^{-1}[Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n] = P^{-1}[\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n] =$$
$$= P^{-1}P\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Δηλαδή η $\hat{A}$ είναι διαγώνια με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές της A (κ $\hat{A}$)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Πόλοι} \equiv \text{ρίζες του } \psi(s) \\ \psi(s) = \det(sI-A)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{πόλοι} = \text{ιδιοτιμές της } A \ (\text{κ } \hat{A})$$

Αν η A έχει διακριτές ιδιοτιμές (όχι πολλαπλές) τότε έχει n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

(β) Κανονική μορφή Jordan

Αν η nxn μήτρα A έχει πολλαπλές ιδιοτιμές τότε ενδέχεται να μην έχει n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα αλλά λιγότερα.

Τότε δεν μπορεί να διαγωνοποιηθεί με μετασχηματισμό ομοιότητας.

Μπορεί όμως να τεθεί στην σχεδόν διαγώνια μορφή Jordan:

$$\hat{A} = \mathrm{diag}\,[J_{\mu_1}, J_{\mu_2}, \ldots, J_{\mu_\sigma}]$$

όπου
$$J_{\mu_k} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Jordan block

με διαστάσεις $\mu_k \times \mu_k$

και $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\sigma = n$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα: Αν λ_k ιδιοτιμή της A, τότε ένα διάνυσμα $v_{k\rho} \neq 0$ λέγεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της A βαθμού ρ που αντιστοιχεί στην ιδιοτ. λ_k αν ισχύουν:

$$(A - \lambda_k I)^{\rho-1} v_{k\rho} \neq 0$$
$$(A - \lambda_k I)^{\rho} v_{k\rho} = 0$$

Τα $v_{k\rho}$ προσδιορίζονται ως εξής:

$$(A - \lambda_k I) v_{k1} = 0$$
$$(A - \lambda_k I) v_{k2} = v_{k1}$$
$$(A - \lambda_k I) v_{k3} = v_{k2}$$
$$\vdots$$
$$(A - \lambda_k I) v_{k\mu} = v_{k,\mu-1}$$ κ.λ.π. όσο το δυνατόν περισσότερα.

Όμως v_{k1} ενδέχεται να υπάρχουν πολλά.

Αν $\mathrm{rank}(A - \lambda_k I) = n - m$ τότε $\exists$ m ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη λ_k.

Καθένα απ' αυτά λαμβάνεται σαν v_{k1} και δημιουργείται μία αλυσίδα. Τα γενικ. ιδιοδ. που προκύπτουν είναι ανεξάρτητα.

Αν η A έχει σ ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $v_{11}, v_{21}, v_{31}, \ldots, v_{\sigma 1}$, αν με αρχικό καθένα απ' αυτά σχηματισθεί η αντίστοιχη αλυσίδα

$$v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{k\mu_k} \quad , \; k = 1, \ldots, \sigma$$

και αν τεθεί $P = \left[v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1\mu_1}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2\mu_2}, \ldots, v_{\sigma 1}, v_{\sigma 2}, \ldots, v_{\sigma\mu_\sigma}\right]$

τότε η P αντιστρέφεται και μετασχηματίζει την A σε κανονική μορφή Jordan :

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\left[J_{\mu_1}, J_{\mu_2}, \ldots, J_{\mu_\sigma}\right]$$ με σ Jordan blocks.

Παράδειγμα :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(γ) Κανονική ελέγξιμη μορφή

Για απλότητα θεωρούμε συστήματα 1 εισόδου – 1 εξόδου, οπότε $B = b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

και $C = c^T = [c_1, c_2, \dots, c_n]$.

Ας είναι $Q = [b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b]$

Ας είναι v_n^T η τελευταία γραμμή της Q^{-1}

Ας είναι
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} v_n^T \\ v_n^T A \\ v_n^T A^2 \\ \vdots \\ v_n^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Τότε :
$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{c}^T = c^T P = [\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n]$$

κανονική ελέγξιμη μορφή του συστήματος.

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{b}u(t) \iff s\hat{X}(s) = \hat{A}\hat{X}(s) + \hat{b}U(s)$$

$$\iff \begin{cases} s\hat{X}_1(s) = \hat{X}_2(s) \\ s\hat{X}_2(s) = \hat{X}_3(s) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ s\hat{X}_{n-1}(s) = \hat{X}_n(s) \\ s\hat{X}_n(s) = -\alpha_n\hat{X}_1(s) - \alpha_{n-1}\hat{X}_2(s) - \dots - \alpha_1\hat{X}_n(s) + U(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = \hat{c}^T\hat{X}(s) = \hat{c}_1\hat{X}_1(s) + \hat{c}_2\hat{X}_2(s) + \dots + \hat{c}_n\hat{X}_n(s)$$

Απαλείφοντας τα $\hat{X}_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ έχουμε

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 s + \dots + \hat{c}_n s^{n-1}}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

Παράδειγμα :
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = x_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad n = 3$$

$$Q = \left[b, Ab, A^2 b\right] = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 38 \\ 8 & -26 & 116 \\ 6 & -12 & 48 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{5}{6} \\ 13/3 & -\frac{11}{6} & 1 \\ 5/6 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$v_3^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} v_3^T \\ v_3^T A \\ v_3^T A^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -14 & 5 & -2 \\ 44 & -14 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 36 & 38 & 8 \\ 48 & 36 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -16 & -8 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = P^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = c^T P = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{b}u(t) \\ y(t) &= \hat{c}^T \hat{x}(t) \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -16 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ -6\hat{x}_1(t) - 16\hat{x}_2(t) - 8\hat{x}_3(t) + u(t) \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow y(t) = 6\hat{x}_1(t) + 8\hat{x}_2(t) + 2\hat{x}_3(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} s\hat{X}(s) &= \hat{A}\hat{X}(s) + \hat{b}U(s) \\ Y(s) &= \hat{c}^T \hat{X}(s) \end{aligned} \iff \left\{ \begin{aligned} s\hat{X}_1(s) &= \hat{X}_2(s) \\ s\hat{X}_2(s) &= \hat{X}_3(s) \\ s\hat{X}_3(s) &= -6\hat{X}_1(s) - 16\hat{X}_2(s) - 8\hat{X}_3(s) + U(s) \end{aligned} \right.$$
$$\Rightarrow \hat{X}_3(s) = s^2 \hat{X}_1(s) \Big\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow Y(s) = 6\hat{X}_1(s) + 8\hat{X}_2(s) + 2\hat{X}_3(s) = 6\hat{X}_1(s) + 8s\hat{X}_1(s) + 2s^2 \hat{X}_1(s)$$

$$\Rightarrow U(s) = s^3 \hat{X}_1(s) + 6\hat{X}_1(s) + 16s\hat{X}_1(s) + 8s^2 \hat{X}_1(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(6 + 8s + 2s^2)\hat{X}_1(s)}{(s^3 + 6 + 16s + 8s^2)\hat{X}_1(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}$$

3.9 Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \qquad (1.1)$$
$$y(t) = g(x(t),u(t)) \qquad (1.2)$$

Σημείο λειτουργίας ή σημείο ισορροπίας: (x_0,u_0) τ.ω. $f(x_0,u_0)=0$

Αν $x(0)=x_0$, $u(t)=u_0$ $\forall t\geq 0$ τότε $x(t)=x_0$ $\forall t \geq 0$.

Ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης των $f(x,u)$, $g(x,u)$ γύρω από το (x_0,u_0):

$$f(x,u) = f(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}(u-u_0) + \text{υπόλοιπο}$$

$$g(x,u) = g(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}(u-u_0) + \text{υπόλοιπο}$$

Αν $\|u(t)-u_0\|$ και $\|x(t)-x_0\|$ μικρά $\forall t$ (2), τότε

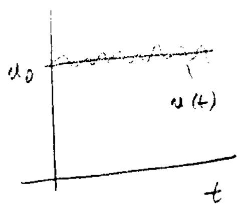
$$\frac{d\,\Delta x(t)}{dt} = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}\Delta x(t) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}\Delta u(t) = A\,\Delta x(t) + B\,\Delta u(t) \qquad (3.1)$$

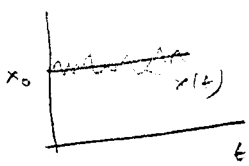
$$\Delta y(t) = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}\Delta x(t) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}\Delta u(t) = C\,\Delta x(t) + D\,\Delta u(t) \qquad (3.2)$$

όπου $\Delta x(t) = x(t)-x_0$, $\Delta u(t) = u(t)-u_0$, $\Delta y(t) = y(t) - g(x_0,u_0)$.

Το (A,B,C,D) όπου $A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}$, $B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}$, $C = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}$, $D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}$ λέγεται γραμμικοποιημένο μοντέλο του (1.1), (1.2) στην περιοχή του σημείου λειτ/ισορρ. (x_0,u_0).

Το (3.1), (3.2) προσεγγίζει ικανοποιητικά το (1.1), (1.2) αν ισχύει η συνθήκη (2).





Πολλές φορές παραλείπονται τα Δ από τις (3.1), (3.2) (κακώς)

Παράδειγμα 1 (εκκρεμές):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{B}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin x_1(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Σημεία ισορροπίας :

$$\left.\begin{matrix} (x_0)_2 = 0 \\ -\frac{B}{ml^2}(x_0)_2 - \frac{g}{l}\sin(x_0)_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \sin(x_0)_1 = 0 \\ (x_0)_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (x_0)_1 = 0 \text{ ή } \pi \\ (x_0)_2 = 0 \end{matrix}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1(x,u) = x_2(t) \Rightarrow \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = 0$$

$$f_2(x,u) = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{B}{ml^2}x_2 \Rightarrow \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2}\right] = \left[-\frac{g}{l}\cos x_1, -\frac{B}{ml^2}\right], \quad \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} =$$

$$g(x,u) = x_1(t) \Rightarrow \frac{\partial g(x,u)}{\partial x} = \left[\frac{\partial g(x,u)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x,u)}{\partial x_2}\right] = [1, 0], \quad \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} = 0$$

στο σημείο ισορροπίας $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1(t) \\ \Delta\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{B}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x(t) = \Delta x_1(t)$$

στο σημείο ισορροπίας $\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1(t) \\ \Delta\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{B}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix}$$

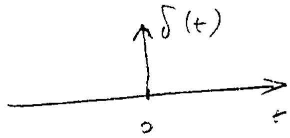
$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x(t) = \Delta x_1(t)$$

4. ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

4.1 Συνήθη σήματα εισόδου

(για την εκτίμηση συμπεριφοράς συστήματος)

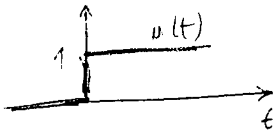
Κρουστική συνάρτηση :



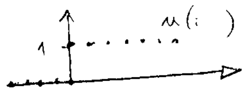
$\delta(t)=0,\ \forall t\neq 0$, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(\tau)d\tau=1,\ \forall \varepsilon>0$

$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1$

Βηματική συνάρτηση :

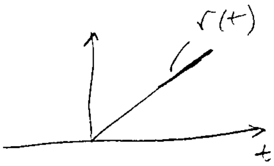


$u(t)=\begin{cases}0 & \forall t<0\\ 1 & \forall t\geq 0\end{cases}$, $\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{1}{s}$



$u(kT)=\begin{cases}0 & \forall k<0\\ 1 & \forall k\geq 0\end{cases}$, $\mathcal{Z}\{u(kT)\}=\frac{z}{z-1}$

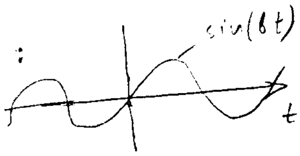
συνάρτηση αναρρίχησης :



$r(t)=t$, $\mathcal{L}\{r(t)\}=\frac{1}{s^2}$

$r(kT)=kT$, $\mathcal{Z}\{r(kT)\}=\frac{Tz}{(z-1)^2}$

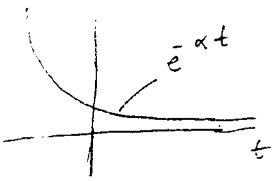
ημιτονική συνάρτηση :



$\sin(bt)$, $\mathcal{L}\{\sin(bt)\}=\frac{b}{s^2+b^2}$

$\sin(kbT)$, $\mathcal{Z}\{\sin(kbT)\}=\frac{z\sin(bT)}{z^2-2z\cos(bT)},$

εκθετική συνάρτηση :



$e^{-\alpha t}$, $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}=\frac{1}{s+\alpha}$

$e^{-k\alpha T}$, $\mathcal{Z}\{e^{-k\alpha T}\}=\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$

4.2 Χρονική απόκριση γραμμικών σταθερών συστημάτων Σ.Χ. (συνεχούς χρόνου

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \qquad (1.1)$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \qquad (1.2)$$

Γενική λύση $x(t)$ της (1.1) : $x(t)=x_p(t)+x_{ομ}(t)$

όπου $x_p(t)$ μία μερική λύση της (1.1) και $x_{ομ}(t)$ η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\dot{x}_{ομ}(t)=A\,x_{ομ}(t) \qquad (2)$$

Είναι γνωστή η αρχική $(t=0)$ τιμή $x(0)$ του $x(t)$, Η λύση της ομογενούς είναι της μορφής: $x_{ομ}(t) = \Phi(t)\,x(0)$

όπου $\Phi(t)$ άγνωστη μήτρα συναρτήσεων του χρόνου.

Ας είναι $\quad \Phi(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \dots + C_k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k$

$x(0) = \Phi(0)\,x(0) \Rightarrow C_0 = I$

Τότε $\quad \dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)\,x(0) = \left[C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + \dots + kC_k t^{k-1} + (k+1)C_{k+1} t^k + \dots\right] x(0)$

και $\quad \dot{x}(t) = A\,x(t) \Rightarrow \left[C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + \dots + kC_k t^{k-1} + \dots\right] x(0) =$

$$= A\left[I + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{k-1} t^{k-1} + \dots\right] x(0), \ \forall t \geq 0, \ \forall x(0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = A \\ C_2 = \frac{1}{2} A C_1 = \frac{1}{2} A^2 \\ C_3 = \frac{1}{3} A C_2 = \frac{1}{2\cdot 3} A^3 = \frac{1}{3!} A^3 \\ C_4 = \frac{1}{4} A C_3 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} A^4 = \frac{1}{4!} A^4 \\ \quad \vdots \\ C_k = \frac{1}{k} A C_{k-1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots k} A^k = \frac{1}{k!} A^k \\ \quad \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \qquad (3)$$

Λόγω ομοιότητας της (3) με την $e^{\alpha t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

ορίζουμε: $\quad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \quad$ μητρική εκθετική συνάρτηση.

<u>Προσοχή</u>: η $n \times n$ μήτρα e^{At} <u>δεν έχει</u> στοιχεία $e^{\alpha_{ij} t}$: $\left(e^{At}\right)_{ij} \neq e^{\alpha_{ij} t}$
(εκτός εάν η A είναι διαγώνια)

Άρα: $\quad x_{ομ}(t) = \Phi(t)\,x(0) = e^{At}\,x(0) \qquad (4)$

Ιδιότητες της e^{At}

1) $e^{At_1}e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$
2) $e^{A0} = e^{At}e^{-At} = I$
3) $\frac{d}{dt}\{e^{At}\} = Ae^{At} = e^{At}A$
4) $\left(e^{At}\right)^n = e^{nAt}$
5) Αν $A = P^{-1}QP$ τότε $e^{At} = P^{-1}e^{Qt}P$
6) Αν $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ τότε $e^{\Lambda t} = diag\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$
7) $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}\}$
8) $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ αν και μόνο αν ισχύει $AB=BA$

Αναζητείται μερική λύση της (1.1) της μορφής

$$x_p(t) = e^{At}p(t), \qquad p(0) = 0$$

όπου $p(t)$ προσδιοριστέα διανυσματική συνάρτηση. Τότε

$$\dot{x}_p(t) = \frac{de^{At}}{dt}p(t) + e^{At}\dot{p}(t) = Ae^{At}p(t) + e^{At}\dot{p}(t) = Ax_p(t) + e^{At}\dot{p}(t)$$

όμως (1.1) $\Rightarrow$ $\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t)$

άρα

$$\dot{p}(t) = \left(e^{At}\right)^{-1}Bu(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\Rightarrow \quad p(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = e^{At}p(t) = e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Επομένως

$$x(t) = x_{o\mu}(t) + x_p(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (5)$$

είναι η γενική λύση της (1.1) με α.σ. $x(0)$.

Τότε (1.2) $\Rightarrow$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \qquad (6)$$

4.3 Τρόποι υπολογισμού της e^{At}

1) Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Ιδιότητα 6): $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}\} \iff \mathcal{L}\{e^{At}\} = [sI-A]^{-1}$

Σύνδεση με μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{At}\}x(0) + \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau\right\}$$

$$= [sI-A]^{-1}x(0) + [sI-A]^{-1}BU(s) \qquad \text{όπου} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

οπότε $\quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}BU(s)\}$

και $\quad y(t) = Cx(t) + Du(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C[sI-A]^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{[\underbrace{C[sI-A]^{-1}B+D}_{G(s)}]U(s)\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{C[sI-A]^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}$$

ή $\quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = C[sI-A]^{-1}x(0) + [C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)$

$$= C[sI-A]^{-1}x(0) + G(s)U(s)$$

2) Με διαγωνοποίηση της A (αν αυτό είναι δυνατό).

Αν η A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2, \dots, p_n$ που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,

τότε $\quad A = P\Lambda P^{-1} \quad$ όπου $\quad P = [p_1, p_2, \dots, p_n] \quad$ και $\quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$,

οπότε (ιδιότητες 5 & 6):

$$e^{At} = e^{P\Lambda P^{-1}t} = Pe^{\Lambda t}P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}P^{-1}$$

3) Με βάση το Θεώρημα Cayley-Hamilton

Θεώρημα Cayley-Hamilton: Αν $\psi(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$

τότε $\quad A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = \psi(A) = 0$

Ευκλείδεια διαίρεση της e^{st} με το $\psi(s)$:

$$e^{st} = \psi(s)\pi(s) + \upsilon(s) = \psi(s)\pi(s) + b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} \qquad (1)$$

Το υπόλοιπο $\upsilon(s)$ (βαθμού $<n$) προσδιορίζεται (χωρίς να πραγματοποιηθεί η διαίρεση)

ως εξής:

(α) αν το $\psi(s)$ έχει n διακριτές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ τότε

$$e^{\lambda_1 t} = \cancelto{0}{\psi(\lambda_1)}\pi(\lambda_1) + b_0 + b_1\lambda_1 + \dots + b_{n-1}\lambda_1^{n-1}$$
$$e^{\lambda_2 t} = \cancelto{0}{\psi(\lambda_2)}\pi(\lambda_2) + b_0 + b_1\lambda_2 + \dots + b_{n-1}\lambda_2^{n-1}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$e^{\lambda_n t} = \cancelto{0}{\psi(\lambda_n)}\pi(\lambda_n) + b_0 + b_1\lambda_n + \dots + b_{n-1}\lambda_n^{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{\uparrow} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

V: Vandermonde μήτρα $\Rightarrow \det V = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

(β) αν το $\psi(s)$ έχει πολλαπλές ρίζες τότε χρησιμοποιούνται παράγωγοι ως προς s της $e^{st}\big|_{s=\lambda_k}$ μέχρι τάξεως όση η πολλαπλότητα της λ

Σε κάθε περίπτωση:

$$\left.\begin{aligned} (1) &\Rightarrow e^{At} = \psi(A)\pi(A) + \upsilon(A) \\ \text{Cayley-Hamilton} &\Rightarrow \psi(A) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{At} = \upsilon(A) = b_0 I + b_1 A + b_2 A^2 + \dots + b_{n-1} A^{n}$$

Παράδειγμα:
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Υπολογισμός της e^{At} και της χρονικής απόκρισης.

1) Με $\mathcal{L}^{-1}$:
$$(sI-A) = \left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & -1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}s+2 & 1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = (s+2)(s+3)-2 = s^2+5s+6-2 = s^2+5s+4 = (s+1)(s+4)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix}s+3 & -1\\ -2 & s+2\end{bmatrix}}{(s+1)(s+4)} = \begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+4)} & -\frac{1}{(s+1)(s+4)}\\ -\frac{2}{(s+1)(s+4)} & \frac{s+2}{(s+1)(s+4)}\end{bmatrix}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα:
$$\frac{s+3}{(s+1)(s+4)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+4} = \frac{k_1(s+4)+k_2(s+1)}{(s+1)(s+4)} \Rightarrow s+3 = k_1(s+4)+k_2(s+1)$$

$$s=-1 : \quad 2 = k_1 3 \Rightarrow k_1 = \frac{2}{3}$$
$$s=-4 : \quad -1 = k_2(-3) \Rightarrow k_2 = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s+4)}\right\} = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}, \quad t>0$$

ομοίως:
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3(s+1)} - \frac{1}{3(s+4)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}, \quad t>0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3(s+1)} + \frac{2}{3(s+4)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}, \quad t>0$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t}\\ -\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t}\end{bmatrix}, \quad t>0$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(0) = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \quad u(t)=0, \quad \forall t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t}\\ -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t}\end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t) = \frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t}$$

Παρατήρηση : $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ [sI-A]^{-1}x(0) + [sI-A]^{-1}B\,U(s) \right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ [sI-A]^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)(s+4)}\\ \frac{s}{(s+1)(s+4)}\end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t}\\ -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t}\end{bmatrix}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ C[sI-A]^{-1}x(0) + C[sI-A]^{-1}B\,U(s) \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ [1 \quad 0]\,[sI-A]^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)(s+4)}\\ \frac{s}{(s+1)(s+4)}\end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s+2}{(s+1)(s+4)} \right\} = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}$$

Αν $u(t) = U(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$ τότε

$$x(t) = e^{At}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}d\tau = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{-t}+2e^{-4t}\\ -e^{-t}+4e^{-4t}\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\int_0^t \begin{bmatrix}-e^{-t+\tau}+e^{4(-t+\tau)}\\ e^{-t+\tau}+2e^{4(-t+\tau)}\end{bmatrix}.d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{-t}+2e^{-4t} + \left[-e^{-t+\tau}+\frac{1}{4}e^{4(-t+\tau)}\right]_0^t\\ -e^{-t}+4e^{-4t} + \left[e^{-t+\tau}+\frac{2}{4}e^{4(-t+\tau)}\right]_0^t\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{-t}+2e^{-4t}+1-e^{-t}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-4t}\\ -e^{-t}+4e^{-4t}+1-e^{-t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4t}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{5}{4}+\frac{7}{4}e^{-4t}\\ \frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{7}{2}e^{-4t}\end{bmatrix}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ [sI-A]^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + [sI-A]^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{s} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)(s+4)} - \frac{1}{s(s+1)(s+4)}\\ \frac{s}{(s+1)(s+4)} + \frac{s+2}{s(s+1)(s+4)}\end{bmatrix} \right\}$$ = (ανάλυση σε απλά κλάσματα κάθε όρου και αντιστροφή)

2) Με διαγωνοποίηση της A:

Ιδιοτιμές της A: $\det(\lambda I - A) = (\lambda+1)(\lambda+4) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$

$$A p_1 = \lambda_1 p_1 \Leftrightarrow (\lambda_1 I - A) p_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow p_{11} = -p_{12}$$

$$A p_2 = \lambda_2 p_2 \Leftrightarrow (\lambda_2 I - A) p_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4+2 & 1 \\ 2 & -4+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\Leftrightarrow p_{22} = 2 p_{21}$$

$$P = [p_1, p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = P \Lambda P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = P e^{\Lambda t} P^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{-4t} & -e^{-t} + e^{-4t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-4t} & e^{-t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

3) Με Θ. Cayley-Hamilton

$$e^{At} = b_0 I + b_1 A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4e^{-t} + e^{-4t} \\ -e^{-t} + e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4e^{-t} + e^{-4t} - 2(-e^{-t} + e^{-4t}) & -(-e^{-t} + e^{-4t}) \\ -2(-e^{-t} + e^{-4t}) & -4e^{-t} + e^{-4t} - 3(-e^{-t} + e^{-4t}) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2e^{-t} - e^{-4t} & e^{-t} - e^{-4t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-4t} & -e^{-t} - 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

4.4 Βηματική απόκριση χρονικά σταθ. συστ. σ.χ. ΜΕΜΕ.

(α) Γενικά

Είσοδος: $u(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \geq 0 \\ 0, & \forall t < 0 \end{cases}$, $\left(\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}\right)$. Αρχικές συνθήκες $x(0) = 0$.

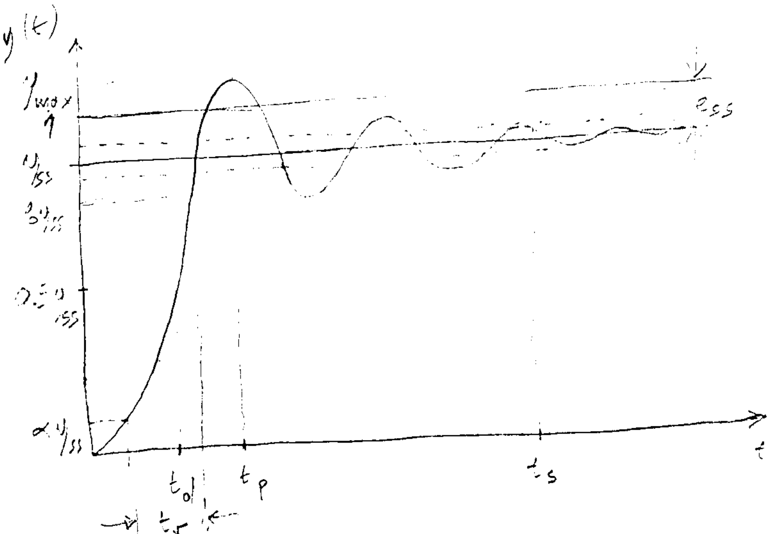
Λύση: $x(t) = e^{At}\cancel{x(0)}^{\,0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cancel{u(\tau)}^{\,1} d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau\, B = e^{At}\int_0^t -\frac{d e^{-A\tau}}{d\tau} d\tau\, A^{-1}B$

$$= e^{At}\left[-e^{-A\tau}\right]_0^t A^{-1}B = e^{At}\left[-e^{-At}+I\right]A^{-1}B = (e^{At}-I)A^{-1}B = A^{-1}(e^{At}-I)B$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}[sI-A]^{-1}B\right\}$$

Έξοδος: $y(t) = Cx(t) + Du(t) = C(e^{At}-I)A^{-1}B + D, \quad t \geq 0$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}C[sI-A]^{-1}B + \frac{D}{s}\right\}$$



- τελική τιμή της $y(t)$: $y_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{y(t)\}$
- χρόνος καθυστέρησης t_d: $y(t_d) = 0.5\, y_{ss}$
- χρόνος ανόδου t_r: $t_r = t_2 - t_1$ όπου $y(t_1) = \alpha y_{ss}$, $y(t_2) = \beta y_{ss}$ (συνήθως $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.9$)
- χρόνος κορυφής t_p: $y(t_p) = y_{max} \triangleq \max_t \{y(t)\}$
- μέγιστη % υπερπήδηση M_p: $M_p = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \cdot 100\%$
- χρόνος αποκατάστασης t_s: $|y(t) - y_{ss}| \leq \gamma y_{ss}, \ \forall t \geq t_s$ (συνήθως $\gamma = 5\% \div 2$
  (ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει και να παραμείνει η $y(t)$ σε μιά περιοχή της y_{ss})
- σφάλμα μόνιμης κατάστασης e_{ss}: $e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{u(t) - y(t)\} = 1 - y_{ss}$

Θεώρημα τελικής τιμής: Αν τα όρια υπάρχουν (αν η $sF(s)$ είναι Hurwitz) τότε

$$\lim_{t\to\infty}\{f(t)\} = \lim_{s\to 0}\{sF(s)\} \quad \text{όπου} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

β) Βηματική απόκριση συστημάτων $1^{ης}$ τάξης

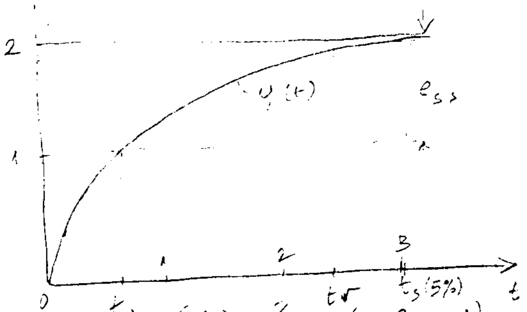
(i) σύστημα $1^{ης}$ τάξης χωρίς μηδενικό

$$\dot{x}(t) = -p\,x(t) + K u(t) \quad , \quad p>0 \ , \ K>0$$
$$y(t) = x(t)$$

$$G(s) = C\,[sI-A]^{-1}B + D = 1\,(s-(-p))^{-1}K + 0 = \frac{K}{s+p}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{K}{s(s+p)} = \frac{K}{ps} - \frac{K}{p(s+p)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{K}{p}\left[1-e^{-pt}\right] \quad , \quad t \geq 0$$



$G(s) = \frac{2}{s+1}$ $(K=2,\ p=1)$

τελική τιμή: $y_{ss} = \lim\limits_{t\to\infty}\{y(t)\} = \lim\limits_{t\to\infty}\left\{\frac{K}{p}(1-e^{-pt})\right\} = \frac{K}{p}$

σφάλμα μ.κ.: $e_{ss} = \lim\limits_{t\to\infty}\{u(t)-y(t)\} = 1 - \frac{K}{p}$

χρόνος καθυστέρησης: $y(t_d) = 0.5\,y_{ss} \Rightarrow \frac{K}{p}\left[1-e^{-pt_d}\right] = \frac{K}{2p}$

$$\Rightarrow e^{-pt_d} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{pt_d} = 2$$

$$\Rightarrow t_d = \frac{\ln(2)}{p} = \frac{0.693}{p}$$

χρόνος ανόδου από το 0% στο 90% της τελικής τιμής: $y(t_r) = 0.9\,y_{ss} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_r = \frac{\ln(0.1)}{-p} = \frac{2.302}{p}$$

χρόνος κορυφής, μέγιστη υπερπήδηση: $\nexists$,

χρόνοι αποκατάστασης 5% και 2%: $t_s(5\%) = \frac{\ln(0.05)}{-p} = \frac{2.995}{p}$

$$t_s(2\%) = \frac{\ln(0.02)}{-p} = \frac{3.912}{p}$$

(ii) σύστημα 1ης τάξης με μηδενικό

$$G(s) = \frac{k(s+z)}{s+p}, \quad p>0,$$

Άσκηση: να βρεθεί περιγραφή (A, B, C, D) με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \dfrac{k(s+z)}{s+p}$.

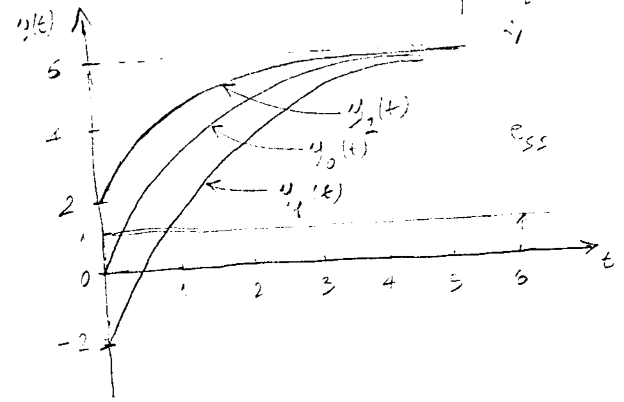
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k(s+z)}{s+p} \Leftrightarrow sY(s) + pY(s) = ksU(s) + kzU(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{y}(t) = -py(t) + k\dot{u}(t) + kzu(t)$$

Ας είναι $x(t) = y(t) - ku(t)$. Τότε $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) - k\dot{u}(t) = -py(t) + kzu(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \dot{x}(t) = -px(t) + k(z-p)u(t) \\ y(t) = x(t) + ku(t) \end{cases}\right\} \Rightarrow A = -p,\ B = k(z-p),\ C = 1,\ D = k$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k(s+z)}{s(s+p)} = \frac{kz}{ps} - \frac{k(z-p)}{p(s+p)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{kz}{ps}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k(z-p)}{p(s+p)}\right\} = \frac{k}{p}\left(z + (p-z)e^{-pt}\right), \quad t \geq 0$$



$y_0(t) \leftrightarrow kz = 6,\ p = 1$, χωρίς μηδενικό

$y_1(t) \leftrightarrow k = 3,\ z = 2,\ p = 1$, μηδενικό αριστερά

$y_2(t) \leftrightarrow k = -3,\ z = -2,\ p = 1$, μηδενικό δεξιά

$y_1(t), y_2(t)$ ασυνεχείς για $t = 0$

μηδενικό αριστερά $\Rightarrow$ επιτάχυνση της απόκρισης

τελική τιμή: $y_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{y(t)\} = \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{k}{p}\left(z + (p-z)e^{-pt}\right)\right\} = \frac{kz}{p}$

σφάλμα μόνιμης κατάστασης: $e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{u(t) - y(t)\} = 1 - \frac{kz}{p}$

χρόνος α: $y(t_\alpha) = \alpha y_{ss} \Rightarrow \frac{k}{p}\left(z + (p-z)e^{-pt_\alpha}\right) = \alpha\frac{kz}{p} \Rightarrow e^{-pt_\alpha} = \frac{(\alpha-1)z}{p-z}$

$$\Rightarrow -pt_\alpha = \ln\left(\frac{(1-\alpha)z}{z-p}\right) \Rightarrow t_\alpha = -\frac{1}{p}\ln\left(\frac{(1-\alpha)z}{z-p}\right) = \frac{1}{p}\ln\left(\frac{z-p}{(1-\alpha)z}\right)$$

$$\Rightarrow t_\alpha = \frac{1}{p}\left[-\ln(1-\alpha) + \ln\left(\frac{z-p}{z}\right)\right]$$

χρόνος καθυστέρησης: $y(t_d) = \frac{1}{2}y_{ss} \Rightarrow t_d = t_{0,5} = \frac{1}{p}\left[-\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{z-p}{z}\right)\right]$

$$\Rightarrow t_d = \frac{1}{p}\left[0{,}693 + \ln\left(1 - \frac{p}{z}\right)\right]$$

χρόνος ανόδου από το 0% στο 90% της τελικής τιμής:

$$y(t_r) = 0.9y_{ss} \Rightarrow t_r = t_{0.9} = \frac{1}{p}\left[-\ln(0.1) + \ln\left(1 - \frac{p}{z}\right)\right] = \frac{1}{p}\left[2.302 + \ln\left(1 - \frac{p}{z}\right)\right]$$

χρόνος κορυφής, μέγιστη υπερπήδηση: $\nexists$

χρόνοι αποκατάστασης 5% και 2%:

$$t_s(5\%) = \frac{1}{p}\left[-\ln(0.05) + \ln\left(1 - \frac{p}{z}\right)\right] = \frac{1}{p}\left[2.995 + \ln\left(1 - \frac{p}{z}\right)\right]$$

$$t_s(2\%) = \frac{1}{p}\left[-\ln(0.02) + \ln\left(1 - \frac{p}{z}\right)\right] = \frac{1}{p}\left[3.912 + \ln\left(1 - \frac{p}{z}\right)\right]$$

(γ) Βηματική απόκριση συστημάτων $2^{ης}$ τάξης

(i) σύστημα $2^{ης}$ τάξης χωρίς μηδενικό

$$G(s)=\frac{K}{s^2+\alpha s+b}=\frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\quad,\ \alpha>0,\ b>0,\quad \omega_n=\sqrt{b},\quad \zeta=\frac{\alpha}{2\sqrt{b}}$$

εξισώσεις κατάστασης : $s^2Y(s)+2\zeta\omega_n sY(s)+\omega_n^2Y(s)=KU(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{y}(t)+2\zeta\omega_n\dot{y}(t)+\omega_n^2 y(t)=Ku(t)$$

$x_1(t)=y(t)$

$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)$

$\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)=-2\zeta\omega_n\dot{y}(t)-\omega_n^2 y(t)+Ku(t)=-2\zeta\omega_n x_2(t)-\omega_n^2 x_1(t)+Ku(t)$ $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ K\end{bmatrix}u(t)$$

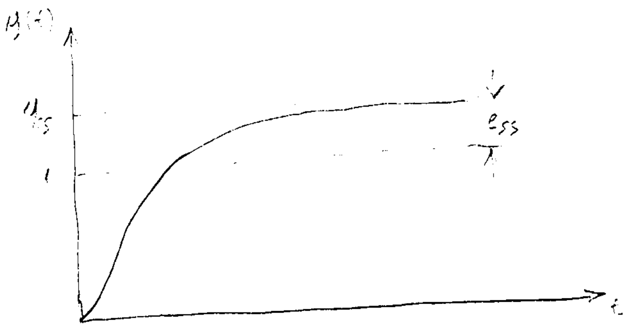
Διακρίνουσα $\psi(s)$: $\Delta=\alpha^2-4b=4\zeta^2\omega_n^2-4\omega_n^2=4\omega_n^2(\zeta^2-1)$

περίπτωση $1^η$: $\Delta>0$, δηλαδή $\zeta>1$ (2 πραγματικοί πόλοι αριστερά)

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{K}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{K}{\omega_n^2 s}+\frac{K}{\rho_1(-\sqrt{\Delta})(s-\rho_1)}+\frac{K}{\rho_2\sqrt{\Delta}(s-\rho_2)}$$

όπου $\rho_1=-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})$ και $\rho_2=-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})$ οι πόλοι.

$$\Longrightarrow\quad y(t)=\frac{K}{\omega_n^2}+\frac{K}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{\rho_2 t}}{\rho_2}-\frac{e^{\rho_1 t}}{\rho_1}\right]\quad,\ t\geq 0$$



τελική τιμή : $y_{ss}=\lim_{t\to\infty}\{y(t)\}=\frac{K}{\omega_n^2}$

σφάλμα μόνιμης κατάστασης :

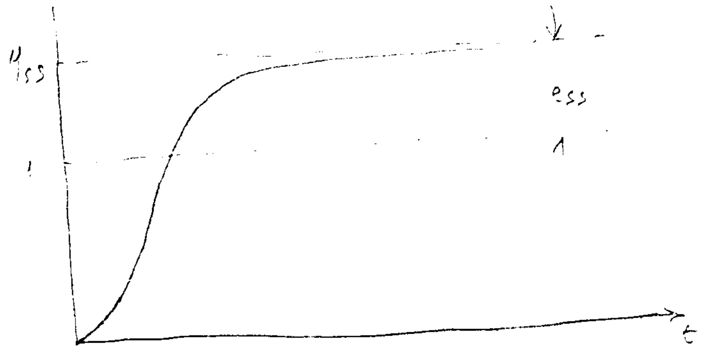
$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}\{u(t)-y(t)\}=1-\frac{K}{\omega_n^2}$$

Αν $\zeta>>1$ τότε η εκθετική $e^{\rho_1 t}$ φθίνει πολύ πιο γρήγορα από την $e^{\rho_2 t}$ οπότε το $2^{ης}$ τάξης σύστημα μπορεί να προσεγγισθεί από σύστημα $1^{ης}$ τάξης με $p=\rho_2$.

περίπτωση $2^η$: $\Delta = 0$, δηλαδή $\zeta = 1$ (διπλός πραγματικός πόλος αρνητικός)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k}{s(s^2+2\omega_n s+\omega_n^2)} = \frac{k}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{k}{\omega_n^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{k}{\omega_n^2}\left[1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right]$$



τελική τιμή : $y_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{y(t)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{k}{s(s+\omega_n)^2}\right\} = \frac{k}{\omega_n^2}$

σφάλμα μόνιμης κατάστασης :

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{u(t) - y(t)\} = 1 - \frac{k}{\omega_n^2}$$

χρόνος α : $y(t_\alpha) = \alpha y_{ss} \Leftrightarrow 1 - e^{-\omega_n t_\alpha}(1+\omega_n t_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow e^{\omega_n t_\alpha} = \frac{1+\omega_n t_\alpha}{1-\alpha}$

χρόνος καθυστέρησης $(\alpha = 0.5)$: $t_d = \frac{1.68}{\omega_n}$

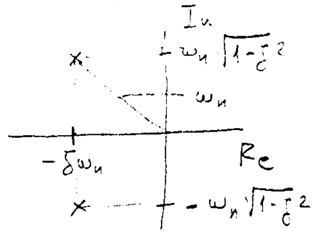
χρόνος ανόδου από 0% ως 90% του y_{ss} $(\alpha = 0.9)$: $t_r = \frac{3.9}{\omega_n}$

χρόνος αποκατάστασης 5% και 2% : $t_s(5\%) = \frac{4.75}{\omega_n}$

$t_s(2\%) = \frac{5.8}{\omega_n}$

χρόνος κορυφής, μέγιστη υπερύψωση : $\nexists$

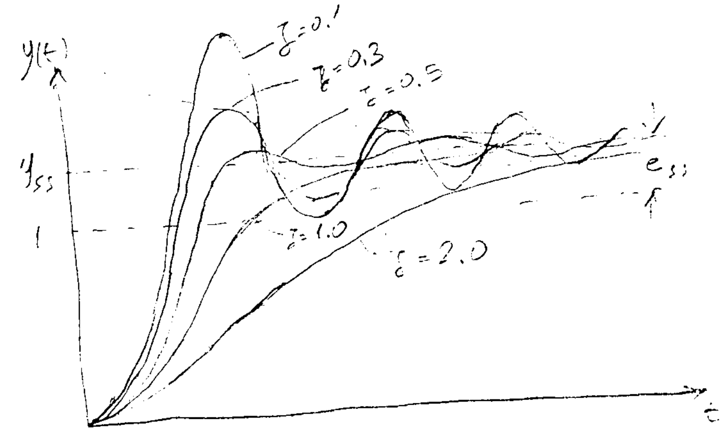
περίπτωση 3η : $\Delta < 0$, δηλαδή $0<\zeta<1$ (συζυγείς μιγαδικοί πόλοι αριστερά)



$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

πόλοι : $p_1 = -\omega_n\zeta - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, $p_2 = -\omega_n\zeta + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{k}{\omega_n^2}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]\right]$$



τελική τιμή y_{ss} :

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{y(t)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{k}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right\}$$

$$\Rightarrow y_{ss} = \frac{k}{\omega_n^2}$$

σφάλμα μόνιμης κατάστασης :

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{u(t)-y(t)\} = 1 - \frac{k}{\omega_n^2}$$

χρόνοι μεγίστου και ελαχίστου : $\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \cdots$

$$\Rightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t_{max} = k\pi,\quad k=0,1,2,\dots$$

χρόνος κορυφής $(k=1)$: $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, $y_{max} = y(t_p) = \frac{k}{\omega_n^2}\left(1+e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

μέγιστη % υπερπήδηση ; $M_p = \frac{y_{max}-y_{ss}}{y_{ss}}100\% = 100\,e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$ %

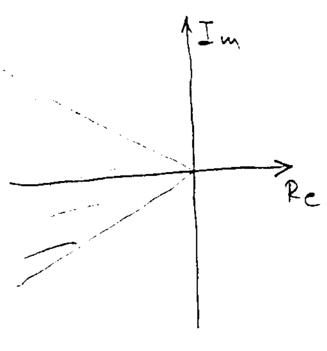
χρόνος ανόδου από 0% στο 100% της y_{ss} : $t_r = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\arctan\left(\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_n}\right)$

περιβάλλουσες της $y(t)$: $y_{1,2}(t) = 1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

χρόνοι αποκατάστασης 5% και 2% ως προς την περιβάλλουσα :

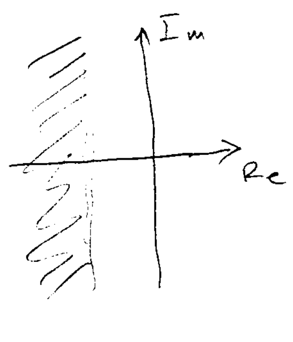
$$t'_s(5\%) = \frac{1}{-\zeta\omega_n}\ln\left(0.05\sqrt{1-\zeta^2}\right) > t_s(5\%) \quad , \quad t_s(5\%) \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad \zeta\in(0,0.$$

$$t'_s(2\%) = -\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\left(0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right) > t_s(2\%) \quad , \quad t_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

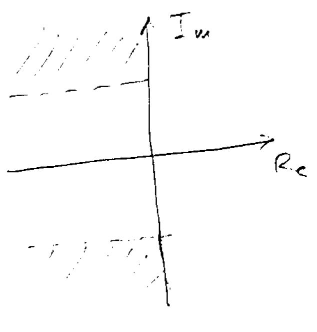


$M_p \leq M_{p,\varepsilon\pi}$

δηλ. $\zeta < \zeta$...

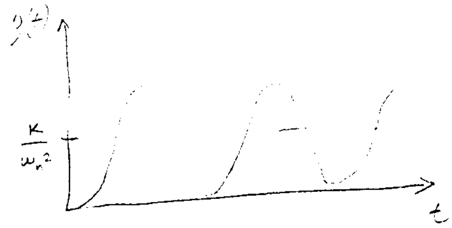


$t_s < t_{s,\varepsilon\pi}$



$t_p < t_{p,\varepsilon\pi}$

αν $\zeta \leq 0$:



$\zeta = 0 \Rightarrow y(t) = \frac{K}{\omega_n^2}\left[1-\cos(\omega_n t)\right]$

φανταστικοί πόλοι

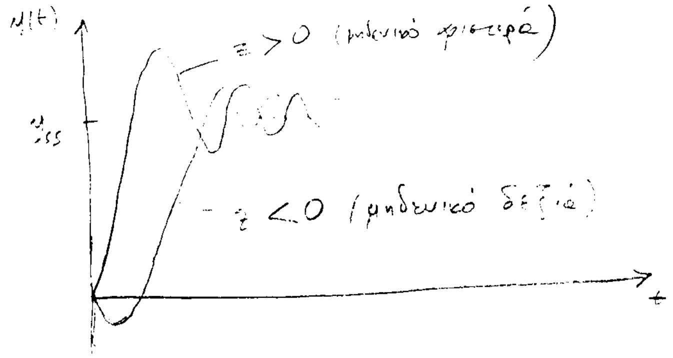
$\zeta < 0$

συζυγείς μιγαδικοί πόλοι δεξιά.

(ii) σύστημα $2^{ης}$ τάξης με ένα μηδενικό

$$G(s) = \frac{K(s+z)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{K(s+z)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

πολλές περιπτώσεις (δεν παρουσιάζονται εδώ).



(δ) Επικρατούντες πόλοι

Γενική περίπτωση : $G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i s^i}{\sum_{j=0}^{n} b_j s^j} = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$ όπου $K = \frac{a_m}{b_n}$

Έστω ότι οι πόλοι είναι απλοί.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{s+p_j}$$ όπου $A_j = \left[Y(s)(s+p_j)\right]_{s=-p_j} = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(z_i-p_j)}{-p_j \prod_{k=1}^{n}(p_k-p_j)}$

$$\Rightarrow y(t) = \left[A_0 + \sum_{j=1}^{n} A_j e^{-p_j t}\right], \quad t \geq 0$$

(1) Ας είναι p_k, p_{k+1} το ζευγάρι μιγαδικών πόλων που βρίσκεται πλησιέστερα στον φανταστικό άξονα. Αν κάποιος πόλος p_λ είναι πολύ πιο απομακρυσμένος:

$$Re\{p_k\} = Re\{p_{k+1}\} < \frac{1}{5} Re\{p_\lambda\}$$

τότε οι όροι $e^{-p_\lambda t}$ φθίνουν πολύ ταχύτερα από τους $e^{-p_k t}, e^{-p_{k+1} t}$ και μπορούν να αγνοηθούν:

$$y(t) \approx A_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\lambda}}^{n} A_j e^{-p_j t}, \quad t \geq 0$$

(2) Αν ένας πόλος p_j έχει πολύ κοντά του ένα μηδενικό z_j τότε A_j πολύ μικρό $\Rightarrow A_j e^{-p_j t}$ μπορεί να αγνοηθεί

3) Αν τα (1) ή (2) ισχύει για κάθε πόλο εκτός των συζυγών p_k, p_{k+1} τότε οι p_k, p_{k+1} λέγονται <u>επικρατούντες πόλοι</u> και ισχύει

$$y(t) \approx A_0 + A_k e^{-p_k t} + A_{k+1} e^{-p_{k+1} t} = \hat{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\hat{G}(s)}{s} \right\}$$

όπου
$$\hat{G}(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k,k+1}}^{n} p_j} \cdot \frac{1}{(s+p_k)(s+p_{k+1})}$$

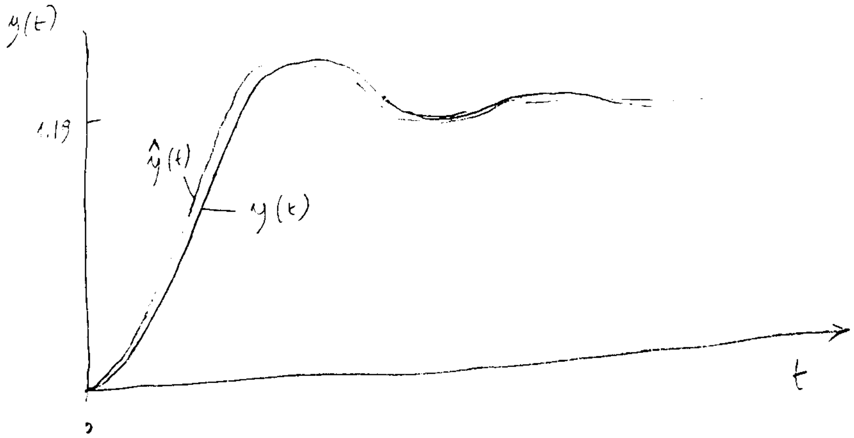
Συνεπώς η βηματική απόκριση της $G(s)$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από αυτήν της δευτεροβάθμιας $\hat{G}(s)$.

Παράδειγμα:
$$G(s) = \frac{50(s+2)}{(s+2.1)(s^2+s+1)(s^2+10s+40)}$$

πόλοι: $-2.1,\ \frac{1}{2}(-1 \pm j\sqrt{3}),\ -5 \pm j\sqrt{15}$, μηδενικό: -2

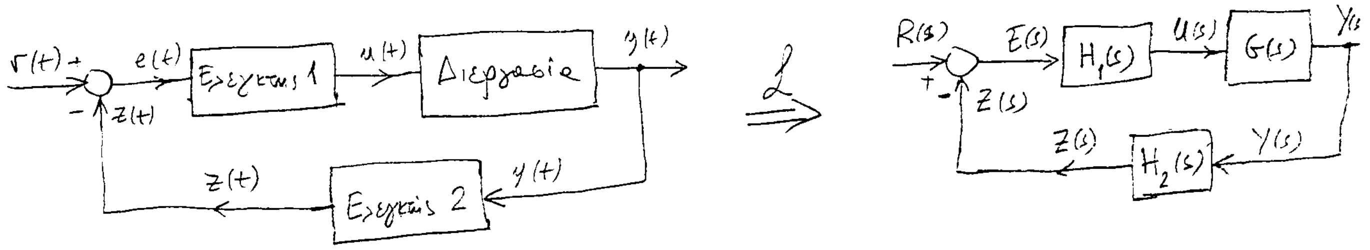
επικρατούντες πόλοι: $\frac{1}{2}(-1 \pm j\sqrt{3})$

$$\hat{G}(s) = 50 \frac{2}{2.1 * 40} \cdot \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1.19}{s^2+s+1}$$



4.5 Σφάλματα στη μόνιμη κατάσταση

(α) Συναρτήσεις μεταφοράς ανοικτού και κλειστού βρόχου



σφάλμα : $\hat{e}(t) = r(t) - y(t)$

συνήθης σκοπός ελέγχου : $\lim_{t\to\infty}\{\hat{e}(t)\} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\{y(t)\} = \lim_{t\to\infty}\{r(t)\}$.

$$\hat{E}(s) = R(s) - Y(s) \qquad (1)$$

$$E(s) = R(s) - Z(s) \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} U(s) &= H_1(s)\,E(s) \\ Y(s) &= G(s)\,U(s) \\ Z(s) &= H_2(s)\,Y(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z(s) = H_2(s)\,G(s)\,H_1(s)\,E(s) \qquad (3)$$

Συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου:

$$G_{\alpha\nu}(s) = \frac{Z(s)}{E(s)} = H_1(s)\,H_2(s)\,G(s) \qquad (4)$$

Συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου: $G_{\kappa\lambda}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$

$$(2),(3) \Rightarrow Z(s) = G_{\alpha\nu}(s)\big(R(s) - Z(s)\big) \Rightarrow Z(s) = \frac{G_{\alpha\nu}(s)}{1+G_{\alpha\nu}(s)}\,R(s)$$

$$G_{\kappa\lambda}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Y(s)}{Z(s)}\,\frac{Z(s)}{R(s)} = \frac{G_{\alpha\nu}(s)}{H_2(s)\left[1+G_{\alpha\nu}(s)\right]} = \frac{H_1(s)\,G(s)}{1+H_1(s)\,H_2(s)\,G(s)} \qquad (5)$$

$$\hat{E}(s) = R(s) - Y(s) = \left[1 - G_{\kappa\lambda}(s)\right]R(s) = \frac{1 + H_1(s)\,G(s)\left[H_2(s) - 1\right]}{1 + H_1(s)\,H_2(s)\,G(s)}\,R(s) \qquad (6)$$

(β) Σφάλματα στη μόνιμη κατάσταση αν $H_2(s) = 1$.

Τότε: $Z(s) = Y(s)$, $G_{\alpha\nu}(s) = H_1(s)\,G(s)$

$$\hat{E}(s) = E(s) = \frac{1}{1 + H_1(s)\,G(s)}\,R(s) = \frac{1}{1+G_{\alpha\nu}(s)}\,R(s) \qquad (7)$$

Σφάλμα μονίμου καταστάσεως : $e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{\hat{e}(t)\}$

Θεώρημα τελικής τιμής μ/σ $\mathcal{L}$: Αν υπάρχουν τα όρια, τότε

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{\hat{e}(t)\} = \lim_{s\to 0}\{s\,\hat{E}(s)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s\,R(s)}{1+G_{\alpha\nu}(s)}\right\} \qquad (8)$$

Ας είναι $G_{\alpha\nu}(s) = \hat{K} \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$, όπου $z_1, z_2, \dots, z_m$ τα μηδενικά της $G_{\alpha\nu}(s)$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ οι πόλοι της $G_{\alpha\nu}(s)$ $(m \leq n)$

Έστω ότι $z_1 = z_2 = \dots = z_\alpha = 0$ και $p_1 = p_2 = \dots = p_b = 0$, $Re\{p_i\} < 0$, $i = b+1, \dots, n$, με $b \geq \alpha$

Τότε $G_{\alpha\nu}(s) = \hat{K} \dfrac{\prod_{i=\alpha+1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=b+1}^{n}(s-p_i)} = \hat{K} \dfrac{\alpha(s)}{s^l \pi(s)}$, όπου $l = b - \alpha \geq 0$

$$\alpha(s) = \prod_{i=\alpha+1}^{m}(s-z_i)$$

$$\pi(s) = \prod_{i=b+1}^{n}(s-p_i)$$

σύστημα <u>τύπου l</u>

$$(8) \Rightarrow \cancel{e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{sR(s)}{1+G_{\alpha\nu}(s)}\right\}} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s^{l+1}\pi(s)R(s)}{s^l\pi(s)+\hat{K}\alpha(s)}\right\} = \begin{cases} \dfrac{\pi(0)}{\pi(0)+\hat{K}\alpha(0)} \lim_{s\to 0}\{sR(s)\}, & \text{αν } l=0 \\ \dfrac{\pi(0)}{\hat{K}\alpha(0)} \lim_{s\to 0}\{s^{l+1}R(s)\}, & \text{αν } l\geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

Σταθερές σφάλματος για χαρακτηριστικές εισόδους $R(s)$:

$$K = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{G_{\alpha\nu}(s)}{sR(s)}\right\} \quad (10)$$

$$(8),(10) \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{sR(s)}{1+G_{\alpha\nu}(s)}\right\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{\frac{1}{sR(s)}+\frac{G_{\alpha\nu}(s)}{sR(s)}}\right\} = \frac{1}{K+\lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{sR(s)}\right\}} \quad (11)$$

(i) Σφάλμα θέσης: $r(t) = u(t) \xRightarrow{L} R(s) = \dfrac{1}{s}$

$$(8) \Rightarrow e_{ss,\theta} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{1+G_{\alpha\nu}(s)}\right\} = \frac{1}{1+G_{\alpha\nu}(0)} = \begin{cases} \dfrac{\pi(0)}{\pi(0)+\hat{K}\alpha(0)} & \text{αν } l=0 \\ 0 & \text{αν } l\geq 1 \end{cases}$$

$$(10) \Rightarrow K_\theta = \lim_{s\to 0}\{G_{\alpha\nu}(s)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\hat{K}\frac{\alpha(s)}{s^l\pi(s)}\right\} = \begin{cases} \hat{K}\dfrac{\alpha(0)}{\pi(0)} & \text{αν } l=0 \\ \infty & \text{αν } l\geq 1 \end{cases}$$

$$(11) \Rightarrow e_{ss,\theta} = \frac{1}{1+K_\theta}$$

(ii) Σφάλμα ταχύτητας: $r(t) = r(t) = t\,u(t) = \begin{cases} t & \text{αν } t\geq 0 \\ 0 & \text{αν } t\leq 0 \end{cases} \xRightarrow{L} R(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$(8) \Rightarrow e_{ss,\tau} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{sG_{\alpha\nu}(s)}\right\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s^{l-1}\pi(s)}{\hat{K}\alpha(s)}\right\} = \begin{cases} \infty & \text{αν } l=0 \\ \dfrac{\pi(0)}{\hat{K}\alpha(0)} & \text{αν } l=1 \\ 0 & \text{αν } l\geq 2 \end{cases}$$

$$(10) \Rightarrow K_\tau = \lim_{s\to 0}\{sG_{\alpha\nu}(s)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{\hat{K}\alpha(s)}{s^{l-1}\pi(s)}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{αν } l=0 \\ \hat{K}\dfrac{\alpha(0)}{\pi(0)} & \text{αν } l=1 \\ \infty & \text{αν } l\geq 2 \end{cases}$$

$$(11) \Rightarrow e_{ss,\tau} = \frac{1}{K_\tau}$$

(iii) Σφάλμα επιτάχυνσης: $r(t) = \frac{t^2}{2}u(t) = \begin{cases} t^2/2 & \text{αν } t \geq 0 \\ 0 & \text{αν } t \leq 0 \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} R(s) = \frac{1}{s^3}$

$$(8) \Rightarrow e_{ss,\varepsilon} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{s^2 G_{\alpha\nu}(s)}\right\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s^{l-2}\pi(s)}{\hat{k}\,\alpha(s)}\right\} = \begin{cases} \infty & \text{αν } l=0,1 \\ \frac{\pi(0)}{\hat{k}\alpha(0)} & \text{αν } l=2 \\ 0 & \text{αν } l\geq 3 \end{cases}$$

$$(10) \Rightarrow K_\varepsilon = \lim_{s\to 0}\left\{s^2 G_{\alpha\nu}(s)\right\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{\hat{k}\,\alpha(s)}{s^{l-2}\pi(s)}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{αν } l=0,1 \\ \hat{k}\frac{\alpha(0)}{\pi(0)} & \text{αν } l=2 \\ \infty & \text{αν } l\geq 3 \end{cases}$$

$$(11) \Rightarrow e_{ss,\varepsilon} = \frac{1}{K_\varepsilon}$$

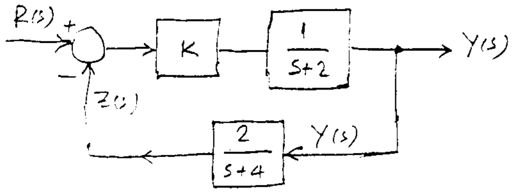
(γ) Σφάλματα στη μόνιμη κατάσταση αν $H_2(s) \neq 1$.

Προκύπτουν από την (6):

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\{\hat{e}(t)\} = \lim_{s\to 0}\{s\hat{E}(s)\} = \lim_{s\to 0}\{[1 - G_{\kappa\lambda}(s)]\, s R(s)\} \qquad (12)$$

όπου
$$G_{\kappa\lambda}(s) = \frac{H_1(s)\,G(s)}{1 + H_1(s)\,H_2(s)\,G(s)} \qquad (5)$$

Παράδειγμα:



$H_1(s) = K, \quad H_2(s) = \frac{2}{s+4}, \quad G(s) = \frac{1}{s+2}$

$$G_{\kappa\lambda}(s) = \frac{\frac{K}{s+2}}{1 + \frac{2K}{(s+2)(s+4)}} = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+4)+2K}$$

σφάλμα θέσης: $e_{ss,\theta} = \lim_{s\to 0}\left\{[1 - G_{\kappa\lambda}(s)]\frac{s}{s}\right\} = 1 - G_{\kappa\lambda}(0) = 1 - \frac{4K}{8+2K} = \frac{4-K}{4+K}$

σφάλμα ταχύτητας: $e_{ss,\tau} = \lim_{s\to 0}\left\{[1 - G_{\kappa\lambda}(s)]\frac{1}{s}\right\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{(s+2-K)(s+4)+2K}{s[(s+2)(s+4)+2K]}\right\} = \infty$

Μηδενισμός σφάλματος θέσης:

$$e_{ss,\theta} = \lim_{s\to 0}\{1 - G_{\kappa\lambda}(s)\} = 1 - G_{\kappa\lambda}(0) \Longrightarrow G_{\kappa\lambda}(0) = 1 \qquad (13)$$

Παράδειγμα: $K = 4$

4.6 Χρονική απόκριση γραμμικών σταθερών συστημάτων Δ.Χ. (διακριτού χρόνου)

$$x((k+1)T) = A\,x(kT) + B\,u(kT) \qquad k=0,1,2,\dots \qquad (1.1)$$
$$y(kT) = C\,x(kT) + D\,u(kT) \qquad k=0,1,2,\dots \qquad (1.2)$$

$(1.1) \Rightarrow$

$$x(T) = A\,x(0) + B\,u(0)$$
$$x(2T) = A\,x(T) + B\,u(T) = A^2 x(0) + AB\,u(0) + B\,u(T)$$
$$x(3T) = A\,x(2T) + B\,u(2T) = A^3 x(0) + A^2 B\,u(0) + AB\,u(T) + B\,u(2T)$$
$$\vdots$$
$$x(kT) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B\,u(iT) \qquad (2.1)$$

$$(1.2) \Rightarrow \quad y(kT) = C\,x(kT) + D\,u(kT) = C A^k x(0) + D\,u(kT) + \sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-i-1} B\,u(iT) \qquad (2.2)$$

Θεώρημα Cayley-Hamilton $\Rightarrow \forall\, k \geq n$ η A^k εκφράζεται συναρτήσει των $A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

Μετασχηματισμός Z: $\quad Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k} = F(z)$

Ιδιότητα μ/σ Z: $\quad Z\{f((k+m)T)\} = z^m \left[F(z) - \sum_{j=0}^{m-1} f(jT)\, z^{-j}\right]$

$$Z\{f((k-m)T\} = z^{-m} F(z)$$

άρα $\quad x((k+1)T) = z\left[X(z) - x(0)\right] \quad$ όπου $\quad X(z) = Z\{x(kT)\}$

οπότε $\quad (1.1) \xRightarrow{Z} \quad z\left[X(z) - x(0)\right] = A\,X(z) + B\,U(z) \quad (3.1)$, όπου $\quad U(z) = Z\{u(kT)\}$

$(1.2) \xRightarrow{Z} \quad Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z) \quad (3.2)$, όπου $\quad Y(s) = Z\{y(kT)\}$

$$(3.1) \Rightarrow \left[zI - A\right] X(z) = z\,x(0) + B\,U(z)$$

$$\Rightarrow \quad X(z) = \left[zI-A\right]^{-1} z\,x(0) + \left[zI-A\right]^{-1} B\,U(z) \qquad (4.1)$$

$$(3.2),(4.1) \Rightarrow \quad Y(s) = \left[C\left[zI-A\right]^{-1} B + D\right] U(z) + C\left[zI-A\right]^{-1} z\,x(0) \qquad (4.2)$$

Μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς:

$$G(z) = C\left[zI-A\right]^{-1} B + D \qquad (5)$$

αν $x(0) = 0$ τότε $\quad Y(z) = G(z)\,U(z) \qquad (6)$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\quad \psi(z) = \det\{zI-A\}$

Πόλοι: οι ρίζες του $\psi(z)$

μηδενικά: οι ρίζες των αριθμητών της $G(z)$

4.7 Βηματική απόκριση γραμμικών σταθερών συστημάτων Δ.Χ.

Είσοδος : $u(kT) = \begin{cases} 1 & \forall k \geq 0 \\ 0 & \forall k < 0 \end{cases} \overset{Z}{\Longrightarrow} U(z) = \dfrac{z}{z-1}$

Αρχικές συνθήκες : $x(0) = 0$

$$(6) \Rightarrow \quad Y(z) = G(z)\,U(z) = G(z)\frac{z}{z-1}$$

Αν $p_1, p_2, \dots, p_n$ οι πόλοι τότε η $\dfrac{Y(z)}{z}$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_0}{z-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z-p_i}$$

οπότε $\quad y(kT) = Z^{-1}\{Y(z)\} = Z^{-1}\left\{ \dfrac{A_0 z}{z-1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{A_i z}{z-p_i} \right\} = \left[A_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i p_i^{k} \right], \quad k \geq 0$

Προφανώς $y(kT)$ είναι σήμα διακριτού χρόνου.

Ας είναι : $\quad s_i = \dfrac{1}{T} \ln\{p_i\}$, δηλαδή $\quad p_i = e^{s_i T} \qquad (1)$

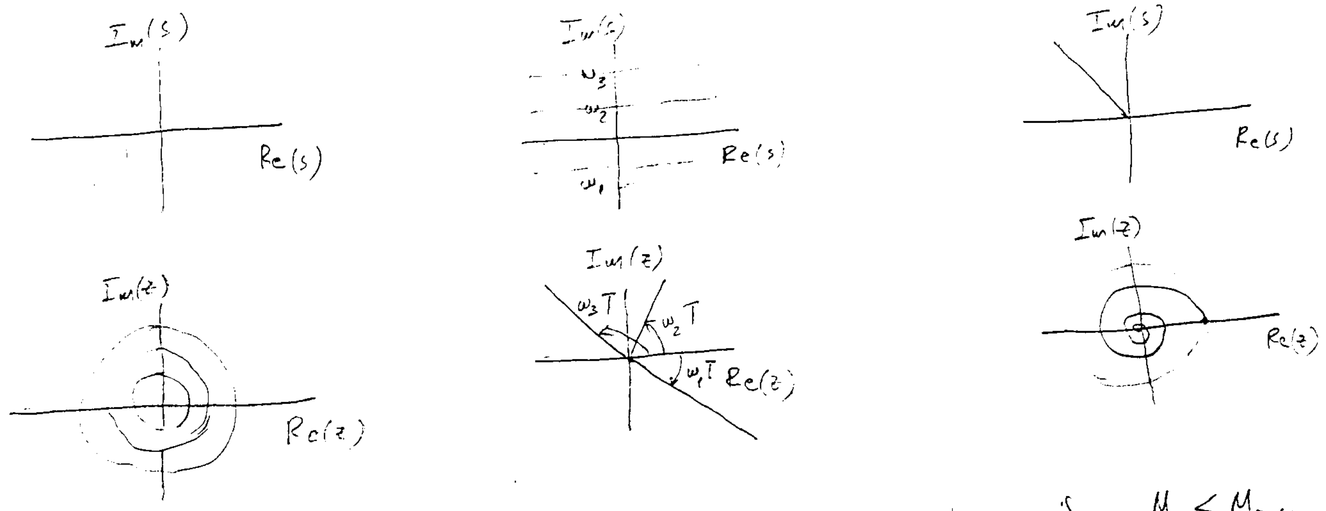
Τότε $\quad y(kT) = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i e^{s_i kT} = \left[A_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t} \right]_{t=kT}$

δηλαδή η $y(kT)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από δειγματοληψία με περίοδο T του σήματος συνεχούς χρόνου : $\quad y(t) = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t}$.

Αν η δειγματοληψία είναι αρκετά πυκνή (π.χ. $T = \frac{1}{10}$ χρόνου ανόδου) τότε οι θέσεις των πόλων s_i του συστήματος σ.χ. μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση των χαρακτηριστικών της $y(kT)$.

Η σχέση (1), δηλαδή $\quad z = e^{sT} \qquad (2)$

απεικονίζει το s-επίπεδο στο z-επίπεδο (και επομένως τις προδιαγραφές) ως εξής



$Re\{s\} \leq \alpha \leftrightarrow$ κύκλοι ακτίνας $\leq e^{\alpha T}$

$\Rightarrow$ χρόνος αποκατάστασης $\leq t_{s,επ}$

$Im\{s\} \leq \bar{\omega} \leftrightarrow$ ευθείες γωνίας $\leq \bar{\omega} T$

$\Rightarrow$ χρόνος κορυφής $\leq t_{p,επ}$

υπερύψωση $M_p \leq M_{p,επ}$

δηλ. $\zeta \leq \zeta_{επ}$

$\leftrightarrow \quad r \leq e^{\zeta\theta/\sqrt{1-\zeta^2}}$

λογαριθμική σπείρα

4.8 Διακριτοποίηση γραμμικών χρονικά σταθερών συστημάτων Σ.Χ.

Δίδεται:
$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \qquad (1.1)$$
$$y(t) = C x(t) + D u(t) \qquad (1.2)$$

Να βρεθούν $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ τ.ω. να ισχύουν:
$$\bar{x}(kT) = x(t)\Big|_{t=kT} \quad , \quad \bar{y}(kT) = y(t)\Big|_{t=kT} \qquad (2)$$

όπου
$$\bar{x}((k+1)T) = \bar{A}\,\bar{x}(kT) + \bar{B}\,u(kT) \qquad (3.1)$$
$$\bar{y}(kT) = \bar{C}\,\bar{x}(kT) + \bar{D}\,u(kT) \qquad (3.2)$$

και
$$u(t) = \underset{\uparrow \text{ σταθερά}}{u(kT)} \quad , \quad \forall t \in [kT, (k+1)T) \qquad (3.3)$$

$$(2) \Rightarrow \bar{x}((k+1)T) = x(t)\Big|_{t=kT} \overset{(1.1)}{=} e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$
$$= e^{AT}\left[e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} B u(\tau) d\tau\right] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} d\tau\, B u(kT)$$
$$= e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A(T-\sigma)} d\sigma\, B u(kT) \qquad (\text{όπου } \sigma = \tau - kT)$$

$\Rightarrow \bar{x}(kT)$ ικανοποιεί (3.1) αν ληφθούν:
$$\bar{A} = e^{AT} \quad , \quad \bar{B} = \int_0^T e^{A(T-\sigma)} d\sigma\, B = A^{-1}\left[e^{AT} - I\right] B \quad (\text{αν } \exists A^{-1})$$

$\Rightarrow \bar{y}(kT)$ ικανοποιεί (3.2) αν ληφθούν:
$$\bar{C} = C, \quad \bar{D} = D$$

Παράδειγμα:
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = e^{AT} = \begin{bmatrix}e^{0.01T} & 0\\ 0 & e^{-10T}\end{bmatrix} \quad , \quad \bar{B} = A^{-1}\left[e^{AT} - I\right]B = \begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{0.01T}-1 & 0\\ 0 & e^{-10T}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1((k+1)T)\\ x_2((k+1)T)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{0.01T} & 0\\ 0 & e^{-10T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}100\,(e^{0.01T}-1)\\ -0.1\,(e^{-10T}-1)\end{bmatrix} u(kT)$$
$$y(kT) = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}$$

5. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

5.1 Εισαγωγή – ορισμοί

Γενικό σύστημα συνεχούς χρόνου :
$$\dot{x}(t) = \hat{f}(x(t), u(t), t) \quad (1.1)$$
$$y(t) = \hat{g}(x(t), u(t), t) \quad (1.2)$$

Γενικό σύστημα διακριτού χρόνου :
$$x((k+1)T) = \hat{f}(x(kT), u(kT), kT) \quad (2.1)$$
$$y(kT) = \hat{g}(x(kT), u(kT), kT) \quad (2.2)$$

Εστω ότι οι είσοδοι $u(t)$ ή $u(kT)$ είναι γνωστές συναρτήσεις του χρόνου ($\pi.\chi.$ $u(t) = u_0$, $\forall t \geq t_0$ / $u(kT) = u_0$, $\forall k \geq k_0$).

Τότε
$$\hat{f}(x(t), u(t), t) = f(x(t), t) \quad \forall t$$
$$\hat{f}(x(kT), u(kT), kT) = f(x(kT), kT) \quad \forall k$$

οπότε :
$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (3)$$
$$x((k+1)T) = f(kT, kT) \quad (4)$$

Ορισμός: Το (3) λέγεται <u>αυτόνομο</u> αν η $f(x(t), t)$ δεν εξαρτάται άμεσα από το t.
Το (4) λέγεται αυτόνομο αν η $f(kT, kT)$ δεν εξαρτάται άμεσα από το k.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) && (5) \\ x((k+1)T) &= f(kT) && (6) \end{aligned}\right\} \text{αυτόνομα.}$$

Ορισμός: Το σημείο x_0 λέγεται <u>σημείο ισορροπίας</u> :

του (3) τη χρονική στιγμή t_0 αν : $f(x_0, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$

του (5) αν : $f(x_0) = 0$

του (4) τη χρονική στιγμή k_0 αν : $f(x_0, kT) = x_0, \quad \forall k \geq k_0$

του (6) αν : $f(x_0) = x_0$

Σε κάθε περίπτωση, αν οι λύσεις των (3), (5) ή (4), (6) είναι μοναδικές και $x(t_0) = x_0$ ή $x(k_0 T) = x_0$, τότε :

$$x(t) = x_0 \quad \forall t \geq x_0 \quad \text{ή} \quad x(kT) = x_0 \quad \forall k \geq k_0 .$$

Βασικό πρόβλημα του ελέγχου: ρύθμιση των εξόδων $y(t)$ ή $y(kT)$, δηλαδή εύρεση κατάλληλων $u(t)$ ή $u(kT)$ ώστε $y(t) = y_0$ ή $y(kT) = y_0$.

Συνήθης περίπτωση: η $\hat{f}$ δεν εξαρτάται άμεσα από το t ή το k,

δηλαδή: $\quad \dot{x}(t) = \hat{f}(x(t), u(t)) \quad$ ή $\quad x((k+1)T) = \hat{f}(x(kT), u(kT))$

Τότε αν ληφθεί $u(t) = u_0,\ \forall t \geq t_0$ ή $u(kT) = u_0,\ \forall k \geq k_0$ προκύπτουν αυτόνομα συστήματα: $\quad \dot{x}(t) = f(x(t)) = \hat{f}(x(t), u_0) \quad$ ή $\quad x((k+1)T) = f(x(kT)) = \hat{f}(x(kT), u_0)$

Αν επιλεγεί σημείο ισορροπίας x_0 (σημείο λειτουργίας (x_0, u_0)) τ.ω.

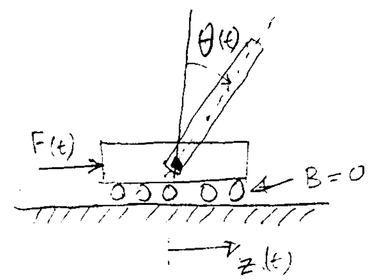
$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = \hat{f}(x_0, u_0) = 0 \\ g(x_0, u_0) = y_0 \end{array}\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{\begin{array}{l} f(x_0) = \hat{f}(x_0, u_0) = x_0 \\ g(x_0, u_0) = y_0 \end{array}\right.$$

και αν $x(t_0) = x_0$ ή $x(k_0 T) = x_0$, τότε: $\quad y(t) = y_0,\ \forall t \geq t_0$
ή $\ y(kT) = y_0,\ \forall k \geq k_0$,

δηλαδή λύθηκε το πρόβλημα ρύθμισης για αρχικό σημείο $x(t_0) = x_0$ (ή $x(k_0T) = x_0$)

Βασικό ερώτημα: τι συμβαίνει αν $x(t_0) \neq x_0$ (ή $x(k_0 T) \neq x_0$) ??

<u>Παράδειγμα:</u> ανεστραμμένο εκκρεμές



είσοδος: $u(t) = F(t)$

έξοδος: $y(t) = \theta(t)$

μάζα ράβδου: m ομοιόμορφα κατανεμημένη

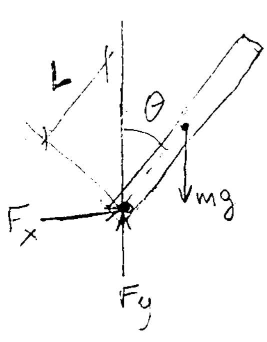
μήκος ράβδου: $2L$

μέσο της ράβδου

ροπή αδρανείας ράβδου ως προς το κέντρο μάζας: J

μάζα φορείου: M

θέση φορείου: $z(t)$



Εξισώσεις συστήματος:

ράβδος:

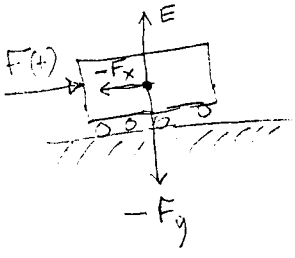
$$F_x = m \frac{d^2}{dt^2}(z + L\sin\theta) \qquad (7.1)$$

$$F_y - mg = m \frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta) \qquad (7.2)$$

δυνάμεις

$$-F_x L\cos\theta + F_y L \sin\theta = J \frac{d^2\theta}{dt} \qquad (7.3)$$

ροπές



φορείο:

$$F(t) - F_x = M \frac{d^2 z}{dt^2} \qquad (7.4)$$

$$E = -F_y \qquad (7.5)$$

Απαλοιφή F_x, F_y από τις (7.1) ÷ (7.4) δίνει (όπου $J_o = J + mL^2$):

$$F(t) = (M+m)\frac{d^2 z}{dt^2} + mL\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin\theta\right) \qquad (7.6)$$

$$J_o \frac{d^2\theta}{dt^2} = mgL\sin\theta - mL\frac{d^2 z}{dt^2}\cos\theta \qquad (7.7)$$

Διάνυσμα καταστάσεων: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ dz(t)/dt \\ \theta(t) \\ d\theta(t)/dt \end{bmatrix}$

Αντικατάσταση στις (7.6), (7.7) και επίλυση ως προς $\dot{x}(t)$ δίνει:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \\ \frac{dx_4(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{1}{q(x_3)}\left[-J_o x_4^2 mL\sin x_3 + m^2L^2 g\cos x_3 \sin x_3 - J_o F\right] \\ x_4(t) \\ \frac{1}{q(x_3)}\left[x_4^2 m^2L^2\cos x_3 \sin x_3 - (M+m)mgL\sin x_3 + (mL\cos x_3)F\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(x,F) \\ \hat{f}_2(x,F) \\ \hat{f}_3(x,F) \\ \hat{f}_4(x,F) \end{bmatrix}$$

(όπου $q(x_3) = -J_o(M+m) + m^2L^2(\cos x_3(t))^2$) (7.8)

$$y(t) = \theta(t) = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]\, x(t). \qquad (7.9)$$

Μη-γραμμικό, χρονικά σταθερό ($\hat{f}$ δεν εξαρτάται άμεσα από t).

Αντίστοιχο αυτόνομο σύστημα λαμβάνεται αν $F(t) = u_o$: $\dot{x}(t) = f(x(t)) = \hat{f}(x(t), u_o)$

Σημείο ισορροπίας $x_o = [x_{o1}, x_{o2}, x_{o3}, x_{o4}]^T$ του αυτόνομου συστήματος:

$$f_1(x_o) = \hat{f}_1(x_o,u_o) = x_{o2} = 0 \qquad (8.1)$$

$$f_3(x_o) = \hat{f}_3(x_o,u_o) = x_{o4} = 0 \qquad (8.2)$$

$$f_2(x_o) = \hat{f}_2(x_o,u_o) = \frac{1}{q(x_{o3})}\left[m^2L^2\cos x_{o3}\sin x_{o3} - J_o u_o\right] = 0 \qquad (8.3)$$

$$f_4(x_o) = \hat{f}_4(x_o,u_o) = \frac{1}{q(x_{o3})}\left[-(M+m)mgL\sin x_{o3} + (mL\cos x_{o3})u_o\right] = 0 \qquad (8.4)$$

$$(8.3) \Rightarrow \quad u_o = \frac{m^2L^2}{J_o}\cos x_{o3}\sin x_{o3} \qquad (8.5)$$

$$(8.4),(8.5) \Rightarrow \left[-(M+m)g + \frac{m^2L^2}{J_o}(\cos x_{o3})^2\right]\sin x_{o3} = 0 \Rightarrow x_{o3} = k\pi \qquad (8.6)$$

οπότε $(8.5) \Rightarrow u_o = 0$ (8.7).

Άρα τα σημεία ισορροπίας: $u_o = 0$, $x_o = \begin{bmatrix} x_{o1} \\ 0 \\ k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$ όπου το x_{o1} αυθαίρετο

Εξασφαλίζουν: $f(x_o) = \hat{f}(x_o,u_o) = 0$ και $y_o = g(x_o,u_o) = k\pi$

Επομένως αν $x(0) = x_o$ τότε $x(t) = x_o$ και $y(t) = y_o = k\pi$ $\forall t \geq 0$. Αν $x(0) \neq x_o$?

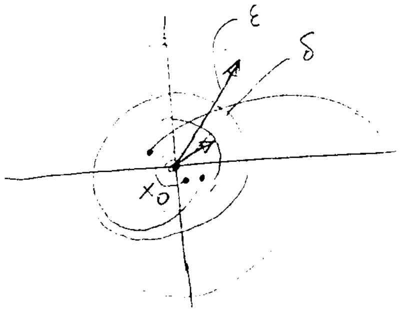
Ορισμός : Μία κατάσταση ισορροπίας x_0 ενός αυτόνομου συστήματος $\dot{x}(t)=f(x(t))$ λέγεται ευσταθής (ή ευσταθής κατά Lyapunov) αν $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ τ.ω.

$$\|x(0)-x_0\|<\delta \ \Rightarrow\ \|x(t)-x_0\|<\varepsilon \quad \forall t\geqslant 0.$$

(δηλαδή $\|x(t)-x_0\|<\varepsilon,\ \forall t>0,\ \forall\, x(0)$ τ.ω. $\|x(0)-x_0\|<\delta$). Το δ μπορεί να εξαρτάται από το ε.

Ορισμός : Μία ευσταθής κατάσταση ισορροπίας x_0 ενός αυτόνομου δυν. συστήματος $\dot{x}(t)=f(x(t))$ λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθής αν $\exists \delta_\alpha>0$ τ.ω.

αν $\|x(0)-x_0\|<\delta_\alpha$, τότε $\lim_{t\to\infty}\{x(t)\}=x_0$.



Ορισμός : Πεδίο έλξης μιας ασυμπτωτικά ευσταθούς κατάστασης ισορροπίας x_0 λέγεται το σύνολο Π των αρχικών σημείων $x(0)$ από τα οποία ξεκινούν λύσεις τροχιές $x(t)$ που συγκλίνουν στο x_0.

Ορισμός : Μία κατάσταση ισορροπίας x_0 λέγεται ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για κάθε αρχική συνθήκη $x(0)$, δηλαδή $\Pi=\mathbb{R}^n$ ή δ_α απεριόριστα μεγάλο.

Ορισμός : Μία κατάσταση ισορροπίας x_0 λέγεται ασταθής αν $\exists\varepsilon>0$ τ.ω. για κανένα $\delta>0$ δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες ευστάθειας.

Αντίστοιχοι ορισμοί για συστήματα διακριτού χρόνου:

Ευστάθεια : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ τ.ω. $\|x(0)-x_0\|<\delta \Rightarrow \|x(kT)-x_0\|<\varepsilon,\ \forall k\geqslant 0$

Ασυμπτωτική ευστάθεια : $\exists\delta_\alpha>0$ τ.ω. $\|x(0)-x_0\|<\delta_\alpha \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\{x(kT)\}=x_0$.

5.2 Η άμεση μέθοδος Lyapunov (2η μέθοδος Lyapunov)

α) Για συστήματα συνεχούς χρόνου

Ικανή συνθήκη ευστάθειας της κατάστασης ισορροπίας $x_0 = 0$ του αυτόνομου δυναμικού συστήματος $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

Αν είναι $x_0 \neq 0$ τότε η αλλαγή μεταβλητών $\hat{x}(t) = x(t) - x_0$ εξασφαλίζει $\hat{x}_0 = 0$ για το $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(\hat{x}(t)) \triangleq f(\hat{x}(t) + x_0)$.

Ορισμοί: Ας είναι $D \subset R^n$ τ.ω. $0 \in D$ και $V: D \to R$ τ.ω. $V(0) = 0$.

Η V λέγεται: θετικά ορισμένη στο D αν $V(x) > 0, \ \forall x \in D - \{0\}$
(αρνητικά) $(<)$

θετικά ημιορισμένη στο D αν $V(x) \geq 0, \ \forall x \in D$ και $\exists \bar{x} \neq 0$ τ.ω. $V(\bar{x}) =$
(αρνητικά) (≤ 0)

Συνάρτηση Lyapunov: οποιαδήποτε συνάρτηση $V(x)$, $V: R^n \to R$ τ.ω. $V(0) = 0$ η οποία υπολογίζεται κατά μήκος της λύσης του αυτόνομου συστήματος $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $f(0) = 0$, δηλαδή $V(x(t))$.

Τότε
$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\right|_{x=x(t)} f_i(x(t)) = \nabla V(x(t))^T f(x(t))$$

Θεώρημα Lyapunov: Ας είναι $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $f(0) = 0$.

Έστω ότι υπάρχει μια συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά ορισμένη στο σύνολο $\Delta \subset R^n$ συνάρτηση Lyapunov $V(x)$ και έστω ότι $\exists k > 0$ τ.ω. για το σύνολο $D = \{x \in R^n : V(x) \leq k\}$ η συνάρτηση $\frac{dV(x)}{dt} = \nabla V(x)^T f(x)$ είναι:

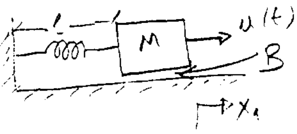
(i) αρνητικά ημιορισμένη στο σύνολο $D \cap \Delta$, τότε $x_0 = 0$ είναι ευσταθής κατ. ισορρ.

(ii) αρνητικά ορισμένη στο $D \cap \Delta$, τότε $x_0 = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής κ. ι.

(iii) —//— —//— —//— $D \cap \Delta$, και $V(x) \to \infty$ καθώς $\|x\| \to \infty$, τότε $x_0 = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής κ. ι.

(X?) (iv) θετικά ορισμένη στο D με $\Delta = R^n$, τότε το $x_0 = 0$ είναι ασταθής κατ. ισορρ.

Παράδειγμα: Μη-γραμμικό ελατήριο με περιγραφική σχέση: $F = k\ell\left(1 - \frac{\ell^2}{4}\right)$.



Εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{K}{M} x_1(t)\left(1 - \frac{(x_1(t))^2}{2}\right) - \frac{B}{M} x_2(t) + \frac{u(t)}{M} \end{bmatrix}$$

Σημεία ισορροπίας x_0 για $u(t) = u_0 = 0$: $x_{02} = 0$

$$x_{01}\left(1 - \frac{x_{01}^2}{2}\right) = 0 \iff x_{01} = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

δηλαδή $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_0' = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $x_0'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Για την ευστάθεια του σ.ι. $x_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, δοκιμάζουμε την εξής συνάρτ. Lyapunov:

$$V(x)=\frac{1}{2}Mx_2^2+\frac{1}{2}kx_1^2\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)$$

Η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη στην περιοχή $\Delta=\{x\in\mathbb{R}^2:\ |x_1|<2\}$

$$\frac{dV(x)}{dt}=\nabla V(x)^T f(x)=\left[kx_1-k\frac{x_1^3}{2},\ \ Mx_2\right]\begin{bmatrix}x_2\\ -\frac{k}{M}x_1\left(1-\frac{x_1^2}{2}\right)-\frac{B}{M}x_2\end{bmatrix}=$$

$$=kx_1x_2\left(1-\frac{x_1^2}{2}\right)-kx_1x_2\left(1-\frac{x_1^2}{2}\right)-Bx_2^2=-Bx_2^2\leq 0\quad\forall (x_1,x_2)$$

άρα $\frac{dV(x)}{dt}$ αρνητικά ημιορισμένη (διότι $\frac{dV(x)}{dt}=0$ αν π.χ. $x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$) στο Δ

άρα $x_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ευσταθές.

β) Για συστήματα διακριτού χρόνου

$$x(k+1)=f(x(k)),\qquad f(0)=0$$

Αντί της παραγώγου $\frac{dV(x)}{dt}$ δοκιμάζεται η ποσότητα $W(x)=V(f(x))-V(x)$.

Θεώρημα. Ας είναι $x(k+1)=f(x(k))$ $f(0)=0$. Έστω ότι υπάρχει μια συνεχής και θετικά ορισμένη στο σύνολο $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ συνάρτηση Lyapunov $V(x)$ και έστω ότι υπάρχει $k>0$ τ.ω. για το σύνολο $D=\{x\in\mathbb{R}^n:\ V(x)\leq k\}$ η συνάρτηση $W(x)=V(f(x))-V(x)$ είναι:

(i) αρνητικά ημιορισμένη στο $D\cap\Delta$, τότε $x_0=0$ είναι ευσταθής κατ. ισορρ.

(ii) αρνητικά ορισμένη στο $D\cap\Delta$, τότε $x_0=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής κ.ι.

(iii) —//— —//— —//— —//— και $V(x)\to\infty$ όταν $\|x\|\to\infty$, τότε $x_0=0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής κ.ι.

(iv) θετικά ορισμένη στο D, με $\Delta=\mathbb{R}^n$ τότε $x_0=0$ είναι ασταθής κατ. ισορρ.

Παράδειγμα:
$$x(k+1)=\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}=\frac{1}{1+x_2^2(k)}\begin{bmatrix}x_2(k)\\x_1(k)\end{bmatrix}=f(x(k))$$

σημείο ισορροπίας:
$$\begin{bmatrix}x_{01}\\x_{02}\end{bmatrix}=\frac{1}{1+x_{02}^2}\begin{bmatrix}x_{02}\\x_{01}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_{01}=\frac{x_{02}}{1+x_{02}^2}\ \xRightarrow{x_{02}=0}\ x_{01}=0\\[4pt] x_{02}=\frac{x_{01}}{1+x_{02}^2}=\frac{x_{02}}{(1+x_{02})^2}\Rightarrow x_{02}=0\end{cases}$$

Ας είναι $V(x)=x_1^2+x_2^2$ θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$.

Τότε
$$W(x)=V(f(x))-V(x)=(f_1(x))^2+(f_2(x))^2-x_1^2-x_2^2=\frac{1}{(1+x_2^2)^2}\left(x_2^2+x_1^2\right)-x_1^2-x_2^2=$$

$$=\left(x_1^2+x_2^2\right)\frac{1-(1+x_2^2)^2}{(1+x_2^2)^2}\leq 0\quad\forall\ x\neq 0$$

$W(x)$ αρνητικά ημιορισμένη $\Rightarrow$ $x_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ευσταθές σημείο ισορροπίας

5.3 Η έμμεση μέθοδος Lyapunov (1η μέθοδος Lyapunov)

Χρησιμοποιείται το γραμμικοποιημένο γύρω από το x_0 σύστημα για τον καθορισμό της ευστάθειας του μη-γραμμικού.

Θεώρημα: Ας είναι $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $f(x_0)=0$. Ας είναι $A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$ και έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $x = x_0$.

(i) αν όλες οι ιδιοτιμές της A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε η κ.ι. x_0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

(ii) αν η A έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος, τότε η κ.ι. x_0 είναι ασταθής.

(iii) αν η A έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος και οι υπόλοιπες έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη τότε κανένα συμπέρασμα δεν προκύπτει για την ευστάθεια ή όχι της κ.ι. x_0.

Παράδειγμα: μη-γραμμικό ελατήριο.

Είναι:
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M}\left(1-\frac{3}{2}x_1^2\right) & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}$$

Γραμμικοποίηση γύρω από το $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: $A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}$

$$\det[\lambda I - A] = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{K}{M} & \lambda+\frac{B}{M} \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda+\frac{B}{M}\right)+\frac{K}{M} = \lambda^2+\frac{B}{M}\lambda+\frac{K}{M} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{B}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M}}\right] = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\frac{B}{M} + \sqrt{\left(\frac{B}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M}}\right] = \lambda_1 \\ -\frac{1}{2}\left[\frac{B}{M} - \sqrt{\left(\frac{B}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M}}\right] = \lambda_2 \end{cases}$$

αν $\left(\frac{B}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M} \geq 0$ τότε $Re\{\lambda_1\} = \lambda_1 < 0$ και $Re\{\lambda_2\} = \lambda_2 < 0$

αν $\left(\frac{B}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M} < 0$ τότε $Re\{\lambda_1\} = Re\{\lambda_2\} = -\frac{1}{2}\frac{B}{M} < 0$

$\Rightarrow$ σε κάθε περίπτωση $Re\{\lambda_1\} < 0$ και $Re\{\lambda_2\} < 0$

$\Rightarrow$ $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής κ.ι.

τι συμβαίνει για τις κ.ι. $x_0' = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ και $x_0'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$;

5.4 Ευστάθεια γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων σ.Χ.

Γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ (1)

Αντίστοιχο αυτόνομο σύστημα για $u(t)=0$: $\dot{x}(t) = Ax(t)$ (2)

Σημεία ισορροπίας $\bar{x}$ του (2) : $A\bar{x} = 0$ (3)

αν $\det A \neq 0$ τότε $\bar{x}=0$ μοναδικό σ.ι.

αν $\det A = 0$ τότε τα σ.ι. είναι : $\bar{x}=0$ και $\bar{x}\neq 0$ τ.ω. $A\bar{x}=0$.

Αρκεί να εξετασθεί η ευστάθεια του $\bar{x}=0$ (αν $\bar{x}'\neq 0$, $A\bar{x}=0$, αλλαγή $x'(t)=x(t)-\bar{x}'$)

(1) ή (2) (ασυμπτωτ.) ευσταθές $\iff$ το σ.ι. $\bar{x}=0$ του (2) είναι (ασυμπτωτικά) ευσταθές

Η ευστάθεια του $\bar{x}$ προκύπτει από την άμεση μέθοδο Lyapunov

με χρήση της συνάρτησης Lyapunov

$$V(x) = x^T P x$$

όπου P είναι κατάλληλη συμμετρική ηχη μήτρα. Δεν παρατίθεται εδώ.

(α) Ευστάθεια από τη θέση των πόλων (ριζών του χ.π., ιδιοτιμών της A)

Χρονική απόκριση του αυτόνομου συστήματος : $\dot{x}(t) = Ax(t)$

$$x(t) = e^{At}x(0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{[sI-A]^{-1}\right\}x(0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{adj}\{sI-A\}}{\det\{sI-A\}}\right\}x(0) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{adj}\{sI-A\}x(0)}{\psi(s)}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad x_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\pi_k(s)}{\psi(s)}\right\}, \quad k=1,\dots,n \qquad (4)$$

όπου $\psi(s) = \det\{sI-A\}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

και $\pi_k(s) = e_k^T \operatorname{adj}\{sI-A\}x(0)$

Ας είναι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές της A (ρίζες του $\psi(s)$, πόλοι συστήματος).

Υποθέτουμε (για απλότητα) ότι είναι απλές.

Ας είναι $\lambda_i = r_i$, $i=1,\dots,n_r$ οι πραγματικοί πόλοι

και $\left.\begin{array}{l}\lambda_i = r_i + j\omega_i \\ \lambda_{i+1} = r_i - j\omega_i\end{array}\right\}$ $i=1,\dots,n_c$ οι μιγαδικοί πόλοι $(n_r + 2n_c = n)$

Τότε $\psi(s) = \prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n_r}(s-r_i)\prod_{i=1}^{n_c}(s-r_i-j\omega_i)(s-r_i+j\omega_i)$

$$\left(= \prod_{i=1}^{n_r}(s-r_i)\prod_{i=1}^{n_c}\left[(s-r_i)^2+\omega_i^2\right] \right)$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα και αντιστροφή του μ/σ Laplace:

$$x_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Pi_k(s)}{\prod_{i=1}^{n_r}(s-r_i)\prod_{i=1}^{n_c}\left[(s-r_i)^2+\omega_i^2\right]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n_r}\frac{\alpha_{k,i}}{s-r_i}+\sum_{i=1}^{n_c}\frac{b_{k,i}s+c_{k,i}}{(s-r_i)^2+\omega_i^2}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_r}\alpha_{k,i}e^{r_i t}+\sum_{i=1}^{n_c}\bar{b}_{k,i}e^{r_i t}\sin(\omega_i t+\theta_i) \qquad \text{όπου } \bar{b}_{k,i}=\sqrt{b_{k,i}^2+\left(\frac{c_{k,i}+b_{k,i}r_i}{\omega_i}\right)^2}$$

$$\theta_i=\arctan\left(\frac{\omega_i b_{k,i}}{c_{k,i}+b_{k,i}r_i}\right)$$

Θεώρημα: Αν $r_i = Re\{\lambda_i\} < 0$, $i=1,\dots,n$ τότε $\lim_{t\to\infty}\{x(t)\} = 0 = \bar{x}$, δηλαδή το σύστημα (1) ή (2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Αν $\exists j \in \{1,\dots,n\}$ τ.ω. $r_j = Re\{\lambda_j\} > 0$, τότε το σύστημα είναι ασταθές.

Αν $r_i = Re\{\lambda_i\} < 0$, $\forall i \in \{1,\dots,n_r\} \cup \{1,\dots,n_c\} - \{j\}$ και οι πόλοι $\lambda_j = r_j + j\omega_j$ και $\lambda_{j+1} = r_j - j\omega_j$ είναι απλοί τότε το σύστημα εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις συχνότητας ω_j (οριακά ευσταθές).

(β) Αλγεβρικά κριτήρια ευστάθειας

Υπολογισμός πόλων (ριζών $\psi(s)$ ή ιδιοτιμών A) αριθμητικά επίπονος.

<u>Όμως</u> $\exists$ κριτήρια ευστάθειας μόνο από τους συντελεστές του χ.π. $\psi(s)$ (δεν απαιτείται υπολογισμός των ριζών).

$$\psi(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = \alpha_n \det[sI - A]$$

Θεώρημα Stodola: Αν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $\psi(s)$ βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο (αν $Re\{\lambda_i\} < 0$, $i=1,\dots,n$) τότε όλοι οι συντελεστές του $\psi(s)$ είναι μη-μηδενικοί και έχουν το ίδιο πρόσημο:

$$\alpha_i > 0, \quad i=0,1,\dots,n \qquad \text{αν } \alpha_n > 0$$
$$\alpha_i < 0, \quad i=0,1,\dots,n \qquad \text{αν } \alpha_n < 0.$$

Αναγκαία συνθήκη, <u>όχι ικανή</u>.

Παράδειγμα: $\psi(s) = s^3+s^2+2s+8 = (s+2)(s^2-s+4)$

πόλοι: $p_1 = -2 < 0$, $p_{2,3} = \frac{1}{2}\left[1 \pm j\sqrt{15}\right] \Rightarrow Re\{p_2\} = Re\{p_3\} = \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow \psi(s)$ ασταθές

Πόρισμα : Αν οι συντελεστές α_i, $i=0,1,\dots,n$ του χ.π. έχουν διαφορετικά πρόσημα ή αν $\alpha_j = 0$ γιά κάποιο $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$ τότε το σύστημα είναι ασταθές.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ευστάθειας δίνει το κριτήριο Routh.

Διάταξη Routh γιά το $\psi(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
s^n & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \dots (\alpha_1 \text{ ή } \alpha_0) & 0 & 0 \\
s^{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \dots (\alpha_0 \text{ ή } \alpha_1) & 0 & 0 \\
s^{n-2} & A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & \\
s^{n-3} & A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & \dots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
s^1 & A_{n,1} & A_{n,2} & 0 & 0 & & \\
s^0 & A_{n+1,1} & 0 & 0 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\longleftrightarrow A_{1,1} \quad A_{1,2} \quad A_{1,3} \ \dots \\
\longleftrightarrow A_{2,1} \quad A_{2,2} \quad A_{2,3} \ \dots
\end{array}
$$

όπου $A_{k+1,i} = -\dfrac{1}{A_{k,1}} \det \begin{bmatrix} A_{k-1,1} & A_{k-1,i+1} \\ A_{k,1} & A_{k,i+1} \end{bmatrix}$

$$A_{k+1,i} = \frac{A_{k,1} A_{k-1,i+1} - A_{k-1,1} A_{k,i+1}}{A_{k,1}} = A_{k-1,i+1} - \frac{A_{k-1,1} A_{k,i+1}}{A_{k,1}}$$

Η k γραμμή αντιστοιχεί στο πολυώνυμο :

$$f_k(s) = A_{k,1} s^{n-k+1} + A_{k,2} s^{n-k-1} + A_{k,3} s^{n-k-3} + \dots$$

Το πολυώνυμο αυτό είναι το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του $f_{k-2}(s)$ με το $f_{k-1}(s)$: $\quad f_{k-2}(s) = f_{k-1}(s)\, \pi_{k-2}(s) - f_k(s)$.

- Θεώρημα Routh: (i) Ο αριθμός των ριζών του $\psi(s)$ που έχουν θετικό πραγματικό μέρος είναι ίσος με τον αριθμό των εναλλαγών προσήμου της $1^{ης}$ στήλης της διάταξης Routh.

Παράδειγμα : $\psi_1(s) = s^3 + s^2 + 2s + 8$:

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^3 & 1 & 2 & 0 \\
s^2 & 1 & 8 & 0 \\
\rightarrow s^1 & -6 & 0 & \\
\rightarrow s^0 & 8 & &
\end{array}
$$

2 εναλλαγές προσήμου $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ασταθές σύστημα

(ii) Αν η διάταξη Routh τερματισθεί κανονικά και τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης είναι ομόσημα τότε όλες οι ρίζες του $\psi(s)$ είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο, άρα το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

Παράδειγμα : $\psi_2(s) = s^3 + s^2 + \kappa s + 8$:

s^3	1	κ	0
s^2	1	8	0
s^1	$\kappa - 8$	0	
s^0	8		

αν $\kappa > 8$ τότε καμμία εναλλαγή προσήμου $\Rightarrow$ ασυμπτωτικά ευσταθές

αν $\kappa < 8$ τότε 2 εναλλαγές προσήμου $\Rightarrow$ ασταθές σύστημα

(iii) Αν ένα από τα στοιχεία της πρώτης στήλης μηδενίζεται και στην ίδια γραμμή υπάρχουν μη-μηδενικά στοιχεία, τότε το στοιχείο που μηδενίζεται αντικαθίσταται από παράμετρο ε (ομόσημη με το στοιχείο που βρίσκεται ακριβώς από πάνω της) και συνεχίζεται η διάταξη Routh συναρτήσει του ε. Υπολογίζεται ο αριθμός εναλλαγών προσήμου καθώς $\varepsilon \to 0$ και ισχύουν τα (α) και (β).

Παράδειγμα : $\psi_3(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$;

s^5	1	2	11	0
s^4	2	4	10	0
s^3	$\cancel{0}\ \varepsilon$	6	0	0
s^2	$-\frac{12}{\varepsilon}$	10	0	
s^1	6	0		
s^0	10			

καθώς $\varepsilon \to 0$ εμφανίζονται 2 εναλλαγές προσήμου

$\Rightarrow$ 2 ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο

$\Rightarrow$ ασταθές σύστημα

$\psi_4(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + \kappa$:

s^4	1	1	κ	0
s^3	1	1	0
s^2	$\cancel{0}\ \varepsilon$	κ	
s^1	$-\frac{\kappa}{\varepsilon}$	0	
s^0	κ		

αν $\kappa > 0$ τότε :

καθώς $\varepsilon \to 0$, $\exists$ 2 εναλλαγές προσήμου

$\Rightarrow$ 2 ρίζες στο δ.η. $\Rightarrow$ ασταθές

αν $\kappa < 0$ τότε :

καθώς $\varepsilon \to 0$, $\exists$ 1 εναλλαγή προσήμου

$\Rightarrow$ 1 ρίζα στο δ.η. $\Rightarrow$ ασταθές.

(iv) Αν μια ολόκληρη γραμμή (έστω η s^k, τάξης κ) μηδενίζεται, τότε θεωρούμε το πολυώνυμο $B(s)$ που αντιστοιχεί στην αμέσως παραπάνω γραμμή τάξης κ+1.

Το $\psi(s)$ διαιρείται ακριβώς από το $B(s)$: $\psi(s) = B(s)\,\pi(s)$.

(A) Αν το $B(s)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα εκτός του φανταστικού άξονα τότε το σύστημα είναι ασταθές.

Επομένως αν το κ είναι άρτιο τότε το σύστημα είναι ασταθές.

(B) Αν κ περιττό τότε οι μηδενικοί συντελεστές της γραμμής τάξης κ αντικαθίστανται από τους συντελεστές του $\frac{dB(s)}{ds}$ και η διάταξη Routh συνεχίζεται κανονικά.

(1) Αν η 1η στήλη έχει εναλλαγές προσήμου, τότε σύστημα ασταθές.

(2) Αν η 1η στήλη δεν έχει -//- -//-, τότε όλες οι ρίζες του $B(s)$ είναι πάνω στον φανταστικό άξονα.

(α) αν όλες οι φανταστικές ρίζες είναι απλές τότε το σύστημα είναι <u>οριακά ευσταθές</u> (ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά) δηλαδή εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις συχνοτήτων που δίδονται από τις ρίζες του $B(s)$.

(β) αν $\exists$ φανταστικές ρίζες $j\omega_i$ πολλαπλότητας $\mu_i > 1$ τότε το σύστημα είναι οριακά ευσταθές μόνο αν ισχύουν

$$\mathrm{rank}\left[j\omega_i I - A\right] = n - \mu_i \quad \forall i$$

αλλιώς είναι ασταθές.

Παράδειγμα 2: $\psi_6(s) = s^5 + s^4 + (1+\kappa)s^3 + (1+\kappa)s^2 + \kappa s + \kappa$

s^5	1	$1+\kappa$	κ	0
s^4	1	$1+\kappa$	κ	0
s^3	0	0	0	
s^3	4	$2(1+\kappa)$	0	
s^2	$\frac{1+\kappa}{2}$	κ		
s^1	$2\frac{(1-\kappa)^2}{1+\kappa}$	0		
s^0	κ			

$B(s) = s^4 + (1+\kappa)s^2 + \kappa$

$1+\kappa - \frac{1+\kappa}{2}$

$2(1+\kappa) - \frac{8\kappa}{1+\kappa}$

$k=3$ περιττό. Η 1η στήλη διατηρεί το πρόσημό της αν

$$\left.\begin{array}{l} 1+k>0 \\ k>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow k>0$$

Για τις τιμές $k=-1$ και $k=0$ μηδενίζονται γραμμές άρτιας τάξης.

Άρα για $k \leq 0$ το σύστημα είναι ασταθές.

Για $k>0$ το $B(s)$ έχει καθαρά φανταστικές ρίζες και $\nexists$ εναλλαγές προσήμου στην 1η στήλη.

Πρέπει να εξετασθεί η πολλαπλότητα των ριζών του $B(s)$.

$$B(s)=0 \Leftrightarrow s^4+(1+k)s^2+k=0$$

$$\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{2}\left[-1-k\pm\sqrt{(1+k)^2-4k}\right]=\frac{1}{2}\left[-1-k\pm\sqrt{(1-k)^2}\right]=\begin{cases}-k\\-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow s=\begin{cases}\pm j\sqrt{k}\\ \pm j\end{cases}$$

Για $k\neq 1$, $k>0$ οι ρίζες είναι απλές οπότε το σύστημα είναι οριακά ευσταθές και εκτελεί ταλαντώσεις με συχνότητες $\sqrt{k}$ και 1.

Για $k=1$ οι ρίζες είναι $\pm j$ πολλαπλότητας 2.

Αν είναι γνωστή η A ελέγχεται κατά πόσον ισχύει

$$\operatorname{rank}\left[jI-A\right]=n-\mu_1=5-2=3 \qquad (1)$$

Αν η (1) ισχύει, το σύστημα είναι οριακά ευσταθές με συχνότητα ταλάντωσης 1.

Αν η (1) δεν ισχύει, το σύστημα είναι ασταθές.

Παράδειγμα 1: $\psi_5(s)=s^3+2s^2+4s+k$:

s^3	1	4	0
s^2	2	k	0
s^1	$\frac{8-k}{2}$	0	
s^0	k		

αν $k>8$ ευσταθές

αν $k<8$ ασταθές

αν $k=8$ τότε

s^3	1	4	0
s^2	2	8	0
~~s^1~~	~~0~~	~~0~~	
s^1	4	0	
s^0	8		

$$B(s)=2s^2+8 \Rightarrow \frac{dB(s)}{ds}=4s$$

$k=1$ περιττή τάξη.

1η στήλη διατηρεί πρόσημο

ρίζες $B(s)$ φανταστικές απλές

οριακή ευστάθεια με συχνότητα ταλάντωσης

$B(s)=0 \Rightarrow 2s^2+8=0 \Rightarrow s=\pm j2 \Rightarrow \omega=2$

5.5 Ευστάθεια γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων δ.χ.

Γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ (1)

Αντίστοιχο αυτόνομο σύστημα ($u(k)=0, \forall k$): $x(k+1) = Ax(k)$ (2)

Σημεία ισορροπίας $\bar{x}$ του (2): $A\bar{x} = \bar{x}$ (3)

αν $\det(A-I) \neq 0$, τότε μοναδικό σ.ι. είναι το $\bar{x}=0$.

(1) ή (2) (ασυμπτωτικά) ευσταθές $\iff$ το σ.ι. $\bar{x}=0$ είναι (ασυμπτωτικά) ευσταθές.

χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\psi(z) = \det(zI-A)$

Πόλοι $\equiv$ οι ρίζες του $\psi(z)$ $\equiv$ οι ιδιοτιμές της A

(α) Ευστάθεια από τη θέση των πόλων.

Χρονική απόκριση του αυτόνομου συστήματος: $x(k+1) = Ax(k)$

$$x(k) = A^k x(0)$$

Υποθέτουμε, για απλότητα, ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ της A είναι απλές.
Τότε η A έχει ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2, \ldots, p_n$ και διαγωνοποιείται ως εξής:

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{όπου} \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$
$$P = [p_1, p_2, \ldots, p_n].$$

Άρα $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$

και $x(k) = P\Lambda^k P^{-1} x(0) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k w_i$

Θεώρημα: Αν $|\lambda_i| < 1$, $i=1,\ldots,n$ τότε $\lim_{k\to\infty}\{x(k)\} = 0 = \bar{x}$,
δηλαδή το σύστημα (1) ή (2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
Αν $\exists j \in \{1,\ldots,n\}$ τ.ω. $|\lambda_j| > 1$, τότε το σύστημα είναι ασταθές.

(β) Αλγεβρικά κριτήρια ευστάθειας.
(χωρίς να απαιτείται εύρεση των πόλων, μόνο από τους συντελεστές του χ.π.)

$$\psi(z) = \det[zI-A] = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \alpha_{n-2}z^{n-2} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

(i) Με χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού και κριτηρίου Routh.

Διγραμμικός μετασχηματισμός: $z = \dfrac{s+1}{s-1}$ ή $s = \dfrac{z+1}{z-1}$ (4)

(αλλαγή μεταβλητής: $z \leftrightarrow s$)

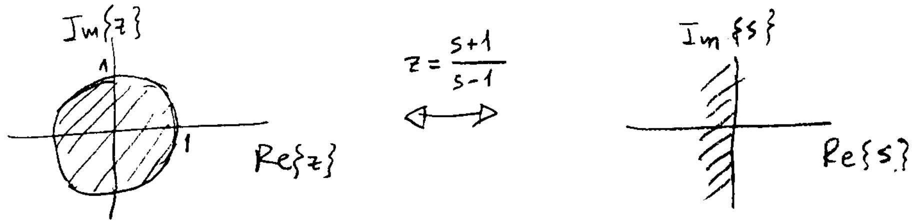
Με βάση το διγραμμικό μ/σ η συνθήκη ευστάθειας δ.χ. $|z|<1$ γράφεται:

$$|z|<1 \iff |s+1|<|s-1| \iff |\sigma+j\omega+1|^2 < |\sigma+j\omega-1|^2$$

$$\iff (\sigma+1)^2+\omega^2 < (\sigma-1)^2+\omega^2 \iff \sigma^2+2\sigma+1 < \sigma^2-2\sigma+1$$

$$\iff \sigma = Re\{s\} < 0$$

δηλαδή το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου μετασχηματίζεται στο αριστερό ημιεπίπ.



Ας είναι $\phi(s) = (s-1)^n \cdot \left[\psi(z)\right]_{z=\frac{s+1}{s-1}} = (s-1)^n \left[\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n + \alpha_{n-1}\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + \dots + \alpha_1\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + \alpha_0\right]$

Τότε $\psi(z)$ ασυμπτωτικά ευσταθές $\iff |\zeta_i|<1$ όπου ζ_i οι ρίζες του $\psi(z)$

$\iff Re\{p_i\}<0$ όπου $p_i = \frac{\zeta_i+1}{\zeta_i-1}$

$\iff \phi(s)$ ασυμπτωτικά ευσταθές σ.χ.

Η ευστάθεια του $\phi(s)$ εξετάζεται π.χ. με το κριτήριο Routh.

Παράδειγμα: $\psi(z) = z^2 + 4.952z + 0.368$

$$\phi(s) = (s-1)^2\left[\psi(z)\right]_{z=\frac{s+1}{s-1}} = (s-1)^2\left[\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 4.952\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 0.368\right] =$$

$$= 6.32\,s^2 + 1.264\,s - 3.584 \longrightarrow$$

s^2	6.32	-3.584
s^1	1.264	0
s^0	-3.584	

πράγματι: $\psi(\zeta)=0 \Rightarrow \zeta_{1,2} = \begin{cases} -0.076 \\ -4.876 \end{cases} \Rightarrow$ ασταθές

(ii) Το κριτήριο Jury.

(ανάλογο του κριτηρίου Routh).

$$\psi(z) = \det[zI - A] = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \alpha_{n-2} z^{n-2} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

Διάταξη Jury:

	z^0	z^1	z^2	$\dots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	$\alpha_0^0 = \alpha_0$	$\alpha_1^0 = \alpha_1$	$\alpha_2^0 = \alpha_2$	$\dots$	$\alpha_{n-2}^0 = \alpha_{n-2}$	$\alpha_{n-1}^0 = \alpha_{n-1}$	$\alpha_n^0 = 1$
2	$\alpha_n^0 = 1$	$\alpha_{n-1}^0 = \alpha_{n-1}$	$\alpha_{n-2}^0 = \alpha_{n-2}$	$\dots$	$\alpha_2^0 = \alpha_2$	$\alpha_1^0 = \alpha_1$	$\alpha_0^0 = \alpha_0$
3	α_0^1	α_1^1	α_2^1	$\dots$	α_{n-2}^1	α_{n-1}^1	
4	α_{n-1}^1	α_{n-2}^1	α_{n-3}^1	$\dots$	α_1^1	α_0^1	
5	α_0^2	α_1^2	α_2^2	$\dots$	α_{n-2}^2		
6	α_{n-2}^2	α_{n-3}^2	α_{n-4}^2	$\dots$	α_0^2		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$2n-3$	α_0^{n-2}	α_1^{n-2}	α_2^{n-2}				
$2n-2$	α_2^{n-2}	α_1^{n-2}	α_0^{n-2}				

όπου
$$\alpha_i^k = \det\begin{bmatrix} \alpha_0^{k-1} & \alpha_{n-k+1-i}^{k-1} \\ \alpha_{n-k+1}^{k-1} & \alpha_i^{k-1} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \quad i = 0, 1, \dots, n-k$$

1η στήλη — δεξιά του στοιχείου

Θεώρημα (Jury-Blanchard): Το $\psi(z)$ έχει ρίζες εντός του μοναδιαίου κύκλου αν και μόνο αν ισχύουν:

$$\psi(1) > 0,$$
$$(-1)^n \psi(-1) > 0$$
$$|\alpha_0^0| < 1$$
$$|\alpha_0^{k-1}| > |\alpha_{n-k+1}^{k-1}|, \quad k = 2, 3, \dots, n-2$$

1η στήλη

$$\alpha_i^1 = \det\begin{bmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_{n-i}^0 \\ \alpha_n^0 & \alpha_i^0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_i^2 = \det\begin{bmatrix} \alpha_0^1 & \alpha_{n-i-1}^1 \\ \alpha_{n-1}^1 & \alpha_i^1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_i^3 = \det\begin{bmatrix} \alpha_0^2 & \alpha_{n-i-2}^2 \\ \alpha_{n-2}^2 & \alpha_i^2 \end{bmatrix}$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$ $\qquad$ $i = 0, 1, \dots, n-2$ $\qquad$ $i = 0, 1, \dots, n-3$

Παράδειγμα : $\psi(z) = z^4 + 0.6z^3 + 0.3z^2 - 0.5z + 0.25$

(i) Διγραμμικός μ/σ – Routh

$$\phi(s) = (s-1)^4\left[\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^4 + 0.6\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 0.3\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 - 0.5\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 0.25\right]$$

$$= (s+1)^4 + 0.6(s+1)^3(s-1) + 0.3(s+1)^2(s-1)^2 - 0.5(s+1)(s-1)^3 + 0.25(s-1)^4$$

$$= (s^2+2s+1)^2 + 0.6(s+1)^2(s^2-1) + 0.3(s^2-1)^2 - 0.5(s^2-1)(s-1)^2 + 0.25(s^2-2s+1)^2$$

$$= s^4 + 4s^2 + 1 + 4s^3 + 2s^2 + 4s + 0.6(s^2+2s+1)(s^2-1) + 0.3(s^4+1-4s^2) -$$

$$- 0.5(s^2-1)(s^2-2s+1) + 0.25(s^4+4s^2+1-4s^3+2s^2-4s)$$

$$= 1.25(s^4+6s^2+1) + 3(s^3+s) + 0.6(s^4+2s^3+\cancel{s^2}-s^2-2s-1) + 0.3(s^4+1-4s^2) -$$

$$- 0.5(s^4-\cancel{s^2}-2s^3+2s+\cancel{s^2}-1)$$

$$= 1.65s^4 + 5.2s^3 + 6.3s^2 + 0.8s + 1.65$$

s^4	1.65	6.3	1.65
s^3	5.2	0.8	0
s^2	6.046	1.65	0
s^1	-0.62	0	
s^0	1.65		

$\Rightarrow$ ασταθές

(ii) Κριτήριο Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	0.25	-0.5	0.3	0.6	1.
2	1	0.6	0.3	-0.5	0.25
3	-0.9375	-0.725	-0.225	0.65	
4	0.65	-0.225	-0.725	-0.9375	
5	0.4654	0.8259	0.6822		
6	0.6822	0.8259	0.4654		

$\psi(1) = 1.65 > 0$ o.k.

$(-1)^4\psi(-1) = 1.45 > 0$ o.k.

$|\alpha_0^0| = 0.25 < 1$ o.k.

$|\alpha_0^1| = 0.9375 > |\alpha_3^1| = 0.65$ o.k.

$|\alpha_0^2| = 0.4654 > |\alpha_2^2| = 0.6822$ ✗

$\uparrow$

δεν ισχύει

$\Downarrow$

ασταθές

6. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $t \geq 0$ (1.1)
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ (1.2)

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, $k \geq 0$ (2.1)
$y(k) = Cx(k) + Du(k)$ (2.2)

6.1 Ελεγξιμότητα

<u>Ορισμός</u> : Το σύστημα (1.1) (ή (2.1)) λέγεται ελέγξιμο αν γιά οποιαδήποτε x_0, x_f, $\exists$ πεπερασμένος χρόνος t_f (ή k_f) και $\exists$ είσοδος $u(t)$, $t \in [0, t_f]$ (ή $\exists$ $u(k)$, $k \in [0, k_f]$) τ.ω. $x(0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$ (ή $x(k_f) = x_f$).

Επιθυμητά x_f : τα σημεία ισορροπίας $\Rightarrow$ επιλύεται το πρόβλημα ρύθμισης.

Γιά το (1.1) : $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$
Cayley-Hamilton $\Rightarrow$ $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t_f) = x_f = e^{At_f}x_0 + \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^{t_f} \alpha_0(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \\ \int_0^{t_f} \alpha_1(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \\ \vdots \\ \int_0^{t_f} \alpha_{n-1}(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \end{bmatrix}$$

Γιά το (2.1) : $x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)$
Cayley-Hamilton $\Rightarrow$ $A^q = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j$, $q = 0, 1, \dots$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(k_f) = x_f = A^{k_f}x_0 + \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$$

<u>Ορισμός</u> : Για σύστημα με n καταστάσεις και r εισόδους, η nxrn μήτρα

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

λέγεται <u>μήτρα ελεγξιμότητας</u>.

<u>Θεώρημα</u> : Το σύστημα (1.1) (ή (2.1)) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}\{\Gamma_c\} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \qquad (3)$$

Ας είναι : $\tilde{\Gamma}_c(\lambda) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\lambda-1}B \end{bmatrix}$. Προφανώς : $\Gamma_c = \tilde{\Gamma}_c(n)$

<u>Ορισμός</u> : Ο ελάχιστος ακέραιος λ γιά τον οποίο ισχύει

$$\operatorname{rank}\{\tilde{\Gamma}_c(\lambda)\} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\lambda-1}B \end{bmatrix} = n \qquad (4)$$

λέγεται <u>δείκτης ελεγξιμότητας</u> του συστήματος (1.1) (ή (2.1)).

Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε : $\lambda \leq n$

Αν $r=1$ (σύστημα μιάς εισόδου) τότε : $\lambda \geq n$

$\Rightarrow$ γιά ελέγξιμο σύστημα μιάς εισόδου ισχύει $\lambda = n$

Αν $r \geq 2$ τότε ενδέχεται να ισχύει $\lambda < n$.

Για ελέγξιμο σύστημα και δεδομένα x_0, x_f ο προσδιορισμός των $u(t)$ (ή $u(t)$) δεν είναι μοναδικός.

Ελεγξιμότητα και μ/σ ομοιότητας.

$$\hat{A} = P^{-1}AP \quad , \quad \hat{B} = P^{-1}B$$

$$\hat{A}^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A\cancel{P}\cancel{P^{-1}}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^kP$$

$$\hat{A}^k\hat{B} = (P^{-1}AP)^kP^{-1}B = P^{-1}A^kPP^{-1}B = P^{-1}A^kB$$

$$\hat{\Gamma}_c = [\hat{B} \ \hat{A}\hat{B} \ \hat{A}^2\hat{B} \ \ldots \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = [P^{-1}B \ P^{-1}AB \ P^{-1}A^2B \ \ldots \ P^{-1}A^{n-1}B]$$

$$= P^{-1}[B \ AB \ A^2B \ \ldots \ A^{n-1}B] = P^{-1}\Gamma_c$$

Θεώρημα : Η ελεγξιμότητα και ο δείκτης ελεγξιμότητας διατηρούνται αναλλοίωτα αν στο σύστημα εφαρμοσθεί μ/σ ομοιότητας.

Θεώρημα : Αν σε σύστημα μιάς εισόδου είναι

$$A = diag\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{και} \quad B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$$

τότε το σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν ισχύουν :

$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad , \forall i \neq j \qquad (5.1)$$

$$\text{και} \quad b_i \neq 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, n . \qquad (5.2)$$

Πράγματι :

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} b_1 & \alpha_1 b_1 & \alpha_1^2 b_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & \alpha_2 b_2 & \alpha_2^2 b_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & \alpha_n b_n & \alpha_n^2 b_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Van-Der-Monde

$$det\{\Gamma_c\} = n \iff (5.1), (5.2)$$

Παράδειγμα :

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\alpha^2 & 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} u(k)$$

$$\Gamma_c = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, A^3B \right] = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\alpha & -\alpha^2 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2\alpha & -\alpha^2 & 2\alpha & -4\alpha^2 & -2\alpha^3+2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\alpha & 1 & -2\alpha & 1-4\alpha^2 \\ 0 & 1 & -2\alpha & 1 & -2\alpha & 1-4\alpha^2 & 2\alpha^3-2\alpha & 1-8\alpha^2 \end{array}\right]$$

$$\qquad\qquad B \qquad AB \qquad A^2B \qquad A^3B$$

$$\det\left\{ \tilde{\Gamma}_c(2) \right\} = \det\left[B \,\vdots\, AB \right] = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\alpha & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot(-1)\,1 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ ελέγξιμο με δείκτη ελεγξιμότητας $\nu = 2$, $\forall \alpha$.

Αν $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλ. αν χρησιμοποιείται μόνο η 1η είσοδος, τότε

$$(\Gamma_c)_1 = \left[B_1 \,|\, AB_1 \,\vdots\, A^2B_1 \,\vdots\, A^3B_1 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\alpha^2 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -4\alpha^2 \\ 0 & 0 & -2\alpha & -2\alpha \\ 0 & -2\alpha & -2\alpha & 2\alpha^3-2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\det(\Gamma_c)_1 = -1\left[\left(-2\alpha\,(2\alpha^3-2\alpha) - 4\alpha^2\right) - \alpha^2(-4\alpha^2) \right] = -\left[-4\alpha^4 + 4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha^4 \right] = 0$$

$\Rightarrow$ μη-ελέγξιμο για οποιοδήποτε α

Αν $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, δηλ. αν χρησιμοποιείται μόνο η 2η είσοδος, τότε

$$(\Gamma_c)_2 = \left[B_2 \,\vdots\, AB_2 \,\vdots\, A^2B_2 \,\vdots\, A^3B_2 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 2\alpha & 2\alpha & -2\alpha^3+2\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 1-4\alpha^2 \\ 1 & 1 & 1-4\alpha^2 & 1-8\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\Gamma_c)_2 = -1\left[-2\alpha\left(2\alpha(\cancel{1}-4\alpha^2) - \cancel{2\alpha}\right) - 4\alpha^4 + \cancel{4\alpha^2} - \cancel{4\alpha^2} \right] = -\left(16\alpha^4 - 4\alpha^4\right) = -12\alpha^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ελέγξιμο} & \text{αν} \quad \alpha \neq 0 \\ \text{μη-ελέγξιμο} & \text{αν} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

6.2 Παρατηρησιμότητα

<u>Ορισμός</u>: Το σύστημα (1.1),(1.2) (ή (2.1),(2.2)) λέγεται παρατηρήσιμο αν δοθέντων των $y(t), u(t), \forall t \in [0, t_f]$ (ή $y(k), u(k), k=0,1,..,k_f$) είναι δυνατόν να προσδιορισθεί (μοναδικά) η αρχική τιμή $x(0)$ του διανύσματος κατάστασης (και επομένως ολόκληρη η λύση $x(t), t\in[0,t_f]$ ή $x(k), k=0,1,..,k_f$).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1.1)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (1.2)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (2.1)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad (2.2)$$

<u>Ορισμός</u>: Για σύστημα με n καταστάσεις και m εξόδους, η $mn \times n$ μήτρα

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

λέγεται <u>μήτρα παρατηρησιμότητας</u>.

<u>Θεώρημα</u>: Το σύστημα (1.1),(1.2) (ή (2.1),(2.2)) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}\{\Gamma_o\} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \qquad (3)$$

Για το (1.1), (1.2) είναι: $y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$$\Rightarrow \quad Ce^{At}x(0) = y(t) - \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = q(t) \in R^m \text{ γνωστό} \quad \Rightarrow$$

Cayley-Hamilton : $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\, CA^k x(0) = \left[\alpha_0(t) I \,\vdots\, \alpha_1(t) I \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \alpha_{n-1}(t) I\right] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = q(t) \qquad (4)$$

Αν δεν ίσχυε η (3) τότε θα υπήρχε $v \in R^n, v \neq 0$ τ.ω. $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} v = 0$, επομένως αν $x(0)$ ικανοποιεί (4) τότε και το $x(0)+v$ θα ικανοποιούσε την (4)

$\Rightarrow$ μη μοναδικός προσδιορισμός του $x(0)$.

Ας είναι : $\tilde{\Gamma}_o(\mu) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\mu-1} \end{bmatrix}$. Προφανώς $\Gamma_o = \tilde{\Gamma}_o(\mu)$.

<u>Ορισμός</u>: Ο ελάχιστος ακέραιος μ γιά τον οποίο ισχύει

$$\operatorname{rank}\{\tilde{\Gamma}_0(\mu)\} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\mu-1}\end{bmatrix} = n \qquad (5)$$

λέγεται <u>δείκτης παρατηρησιμότητας</u> του συστήματος (1.1), (1.2) (ή (2.1), (2.2)).

Αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο τότε : $\mu \leq n$

Αν $m=1$ (σύστημα μιάς εξόδου) τότε : $\mu \geq n$

$\Rightarrow$ $\mu = n$ αν το σύστημα έχει 1 έξοδο και είναι παρατηρήσιμο.

Αν $m \geq 2$ τότε μπορεί να ισχύει $\mu < n$.

Παρατηρησιμότητα και μ/σ ομοιότητας,

$$\hat{A} = P^{-1}AP, \quad \hat{C} = CP$$

$$\hat{C}(\hat{A})^k = CP\,(P^{-1}AP)^k = C\cancel{P}\cancel{P^{-1}}A\cancel{P}\cancel{P^{-1}}A\cancel{P}\cdots\cancel{P^{-1}}AP = CA^kP$$

οπότε $$\hat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \hat{C}\hat{A}^2 \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP \\ CAP \\ CA^2P \\ \vdots \\ CA^{n-1}P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{bmatrix} P = \Gamma_0 P$$

<u>Θεώρημα</u>: Η παρατηρησιμότητα και ο δείκτης παρατηρησιμότητας ενός συστήματος διατηρούνται αναλλοίωτα αν στο σύστημα εφαρμοσθεί μ/σ ομοιότητας.

<u>Θεώρημα</u>: Αν σε σύστημα μιάς εισόδου είναι:

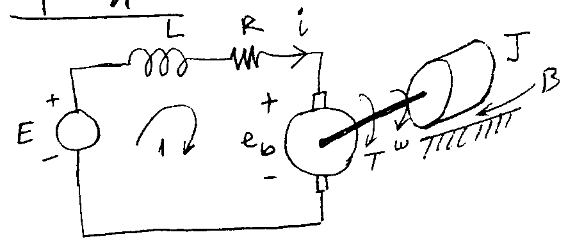
$$A = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \quad C = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$$

τότε το σύστημα είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν ισχύουν:

$$\alpha_i \neq \alpha_j, \quad \forall i \neq j$$

και $\quad c_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n$

Παράδειγμα:



Π.Σ. κινητήρα : $e_b = K\omega$

$T = Ki$

Βρόχος 1 : $L\dfrac{di}{dt} + Ri + e_b - E = 0$

$$\Rightarrow L\frac{di}{dt} = -Ri - K\omega + E \qquad (1)$$

Μηχανικό μέρος : $T = J\dfrac{d\omega}{dt} + B\omega \Rightarrow J\dfrac{d\omega}{dt} = Ki - B\omega \qquad (2)$

Περιγραφή I : διάνυσμα καταστάσεων $x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$, έξοδος $y(t) = \omega(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R/L & -K/L \\ K/J & -B/J \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} E(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad (3)$$

$$y(t) = \omega(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = C\,x(t)$$

Περιγραφή II : διάνυσμα καταστάσεων $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$, έξοδος $y(t) = \theta(t)$ ή $y(t) = \omega(t)$

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{K}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} i(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} E(t) = \hat{A}\,\hat{x}(t) + \hat{B}\,u(t) \qquad (4)$$

$$y(t) = \theta(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{C}_1} \hat{x}(t) \quad \text{ή} \quad y(t) = \omega(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{C}_2} \hat{x}(t)$$

Περιγραφή I: $\Gamma_c^{I} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} \\ 0 & \frac{K}{JL} \end{bmatrix}$, $\text{rank}\{\Gamma_c^{I}\} = 2 = n \Rightarrow$ ελέγξιμη

$\Gamma_o^{I} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}$, $\text{rank}\{\Gamma_o^{I}\} = 2 = n \Rightarrow$ παρατηρήσιμη

Περιγραφή II : $\Gamma_c^{II} = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \hat{A}^2\hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} & \frac{R^2}{L^3} - \frac{K^2}{JL^2} \\ 0 & 0 & \frac{K}{JL} \\ 0 & \frac{K}{JL} & -\frac{KR}{JL^2} - \frac{KB}{J^2L} \end{bmatrix}$

$$\det\{\Gamma_c^{II}\} = \frac{1}{L}\left(-\frac{K^2}{J^2L^2}\right) = -\frac{K^2}{J^2L^3} \neq 0 \Rightarrow \text{ελέγξιμη}$$

$$\left(\Gamma_o^{II}\right)_1 = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1\hat{A} \\ \hat{C}_1\hat{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}, \quad \det\left(\Gamma_o^{II}\right)_1 = -1\left(-\frac{K}{J}\right) = \frac{K}{J} \neq 0$$

$\Rightarrow$ παρατηρήσιμη

$$\left(\Gamma_o^{II}\right)_2 = \begin{bmatrix} \hat{C}_2 \\ \hat{C}_2\hat{A} \\ \hat{C}_2\hat{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \\ -\frac{KR}{JL} - \frac{KB}{J^2} & 0 & -\frac{K^2}{JL} + \frac{B^2}{L^2} \end{bmatrix}, \quad \det\left(\Gamma_o^{II}\right)_2 = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ μη-παρατηρήσιμη

6.3 Αποσύνθεση Kalman

Γραφή εξισώσεων κατάστασης σε ειδική μορφή με χρήση μ/σ ομοιότητας.

Ελέγξιμος υποχώρος: $X_c = \mathcal{R}\{\Gamma_c\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \Gamma_c w\}$

$= $ ο χώρος που εκτείνουν οι στήλες της Γ_c.

Μη-παρατηρήσιμος υποχώρος: $X_{uo} = \mathcal{N}\{\Gamma_o\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \Gamma_o x = 0\}$

$= $ ο χώρος που είναι κάθετος στις γραμμές της Γ_o.

Ο μη-ελέγξιμος υποχώρος X_{uc} και ο παρατηρήσιμος υποχώρος X_o επιλέγονται κατάλληλα ώστε να ισχύουν:

$$X = X_c \oplus X_{uc} = X_o \oplus X_{uo}$$
$$= (X_c \cap X_{uo}) \oplus (X_c \cap X_o) \oplus (X_{uc} \cap X_{uo}) \oplus (X_{uc} \cap X_o)$$

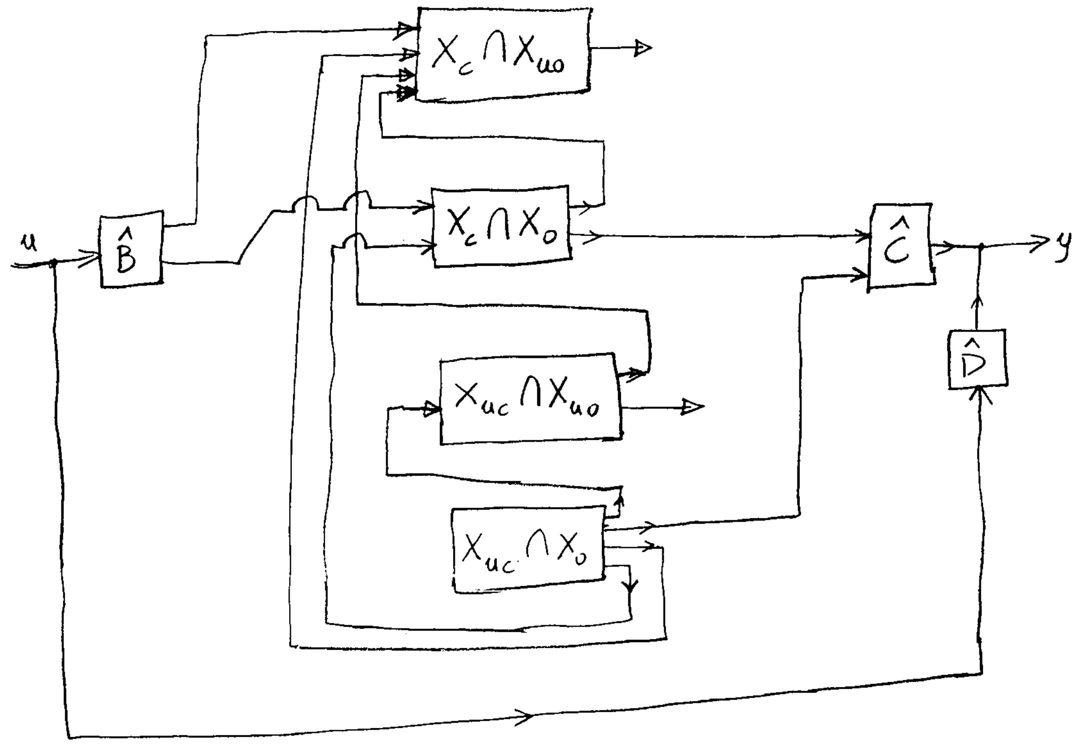
Ας είναι n_1, n_2, n_3, n_4 οι διαστάσεις των $X_c \cap X_{uo}$, $X_c \cap X_o$, $X_{uc} \cap X_{uo}$, $X_{uc} \cap X_o$ αντίστοιχα. Προφανώς $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Θεώρημα (Kalman 1963): Δεδομένου συστήματος (A,B,C,D) ας είναι P μία μήτρα της οποίας τα n_1 πρώτα διανύσματα εκτείνουν τον χώρο $X_c \cap X_{uo}$, τα επόμενα n_2 εκτείνουν τον χώρο $X_c \cap X_o$, τα επόμενα n_3 τον χώρο $X_{uc} \cap X_{uo}$ και τα τελευταία n_4 εκτείνουν τον χώρο $X_{uc} \cap X_o$. Μετασχηματίζοντας το (A,B,C,D) με μ/σ ομοιότητας με βάση τη μήτρα P οι μετασχηματισμένες μήτρες $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ έχουν τη μορφή:

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CP = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix},$$

$$\hat{D} = D$$

όπου οι διαστάσεις των υπομητρών είναι $A_{11}: n_1 \times n_1$, $A_{22}: n_2 \times n_2$, $A_{33}: n_3 \times n_3$, $A_{44}: n_4 \times n_4$ κ.λ.π.



<u>Θεώρημα</u>: Η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς $G(s)$ του συστήματος είναι:

$$G(s) = C\left[sI_n - A\right]^{-1}B + D = C_2\left[sI_{n_2} - A_{22}\right]^{-1}B_2 + D \qquad (*)$$

Παρατηρήσεις:

- στη συνάρτηση μεταφοράς συμμετέχει μόνο το ελέγξιμο κ παρατηρήσιμο υ/σ
- η πραγματοποίηση μιας $G(s)$ επιτυγχάνεται από διάφορα συστήματα διαφόρων τάξεων, όμως ένα μόνο είναι ελέγξιμο κ παρατηρήσιμο και έχει ελάχιστη τάξη (πραγματοποίηση ελάχιστης τάξης).
- οι μη-ελέγξιμοι και οι μη-παρατηρήσιμοι πόλοι του συστήματος απαλείφονται με αντίστοιχα μηδενικά.
- η ευστάθεια ενός συστήματος δεν μπορεί να συναχθεί από την συνάρτηση μεταφοράς εκτός εάν το σύστημα είναι ελέγξιμο κ παρατηρήσιμο
- η γνώση εισόδων και εξόδων δεν αρκεί για την πλήρη αναγνώριση του συστήματος. Η ύπαρξη μη-ελέγξιμων ή μη-παρατηρήσιμων υ/σ δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί ούτε να αντικρουσθεί από την εξωτερική συμπεριφορά του συστήματος. "Φύσις δε καθ' Ηράκλειτον κρύπτεσθαι φιλεί",

Θεμίστιος

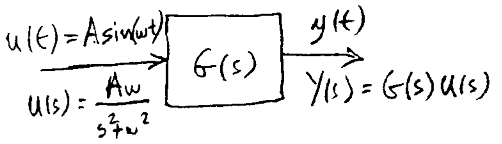
7. ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

Δυναμική συμπεριφορά συστήματος χαρακτηρίζεται

(α) είτε από τη χρονική του απόκριση σε π.χ. βηματική ή κρουστική διέγερση

(β) είτε από την απόκριση μόνιμης κατάστασης σε πολλές (άπειρες) ημιτονικές διεγέρσεις σταθερού πλάτους και πολλών (απείρων) διαφορετικών κυκλικών συχνοτήτων.

7.1 Ημιτονική μόνιμη απόκριση συστημάτων σ.χ.



Διέγερση: $u(t) = A\sin(\omega t) \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} U(s) = \dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

Απόκριση: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ όπου $Y(s) = G(s)U(s) = \dfrac{G(s)\omega A}{s^2+\omega^2}$

Ας είναι $p_1, p_2, \dots, p_n$ οι πόλοι της $G(s)$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{Re}\{p_i\} < 0$, $i = 1, \dots, n$.

Γιά απλότητα υποθέτουμε ότι οι πόλοι είναι απλοί.

Ανάλυση της $Y(s)$ σε απλά κλάσματα:

$$Y(s) = G(s)\frac{\omega A}{s^2+\omega^2} = \frac{K_o}{s-j\omega} + \frac{\bar{K}_o}{s+j\omega} + \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = K_o e^{j\omega t} + \bar{K}_o e^{-j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t}$$

Επειδή $\mathrm{Re}\{p_i\} < 0$ θα είναι $\lim_{t\to\infty}\{k_i e^{p_i t}\} = 0$, οπότε η απόκριση στη μόνιμη κατάσταση (μετά την απόσβεση του μεταβατικού φαινομένου) είναι:

$$y_{ss}(t) = K_o e^{j\omega t} + \bar{K}_o e^{-j\omega t}$$

όπου $K_o = \left.\dfrac{A\omega G(s)}{s+j\omega}\right|_{s=j\omega} = \dfrac{AG(j\omega)}{2j}$,

$$\bar{K}_o = \left.\frac{A\omega G(s)}{s-j\omega}\right|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j} = -\frac{A\overline{G(j\omega)}}{2j} = \overline{\left(\frac{AG(j\omega)}{2j}\right)} = \overline{(K_o)}$$

$$\Longrightarrow \quad y_{ss}(t) = A\,|G(j\omega)|\,\sin\left(\omega t + \arg\{G(j\omega)\}\right) \qquad (1)$$

$$\text{όπου} \quad G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\arg\{G(j\omega)\}} \qquad (2)$$

δηλ. η απόκριση στη μόνιμη κατάσταση είναι ημιτονική συνάρτηση συχνότητας ω, πλάτους $A|G(j\omega)|$ και φάσης $\arg\{G(j\omega)\}$.

7.2 Αποκρίσεις συχνότητας

$G(j\omega)$: μιγαδική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής ω.

Οι ακόλουθες πραγματικές συναρτήσεις του ω λέγονται αποκρίσεις συχνότητας ή αρμονικές αποκρίσεις της $G(s)$.

Ορισμοί:

Συνάρτηση πλάτους της $G(s)$: $M(\omega) = |G(j\omega)|$

Συνάρτηση φάσης της $G(s)$: $\phi(\omega) = \arg\{G(j\omega)\}$

Συναρτήσεις κέρδους της $G(s)$:

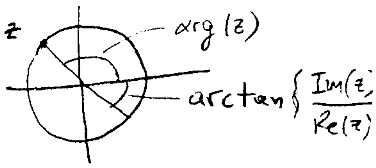
(α) σε db : $K(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ με μονάδα μέτρησης το decibel (db)

(β) σε Np : $a(\omega) = \ln|G(j\omega)|$ με —"— —"— το Neper (Np)

Συνάρτηση πραγματικού μέρους της $G(s)$: $R(\omega) = Re\{G(j\omega)\}$

Συνάρτηση φανταστικού μέρους της $G(s)$: $X(\omega) = Im\{G(j\omega)\}$

Στον ορισμό της $\phi(\omega)$ θεωρούμε ότι η συνάρτηση $\arg\{z\}$ έχει



πεδίο τιμών : $-180° \leq \arg\{z\} < 180°$

επομένως η σχέση : $\arg\{z\} = \arctan\left\{\dfrac{Im(z)}{Re(z)}\right\}$

ισχύει μόνο αν $-90° \leq \arg\{z\} \leq 90°$ (π.χ. $\arg\{k\} = -180°$ αν $k<0$, $k \in \mathbb{R}$)

Υπάρχουν σχέσεις μεταξύ των αποκρίσεων συχνότητας της $G(s)$:

$$R(\omega) = R(\infty) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma X(\sigma)}{\sigma^2-\omega^2}d\sigma, \qquad X(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\sigma)}{\sigma^2-\omega^2}d\sigma$$

$$a(\omega) = a(\infty) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma\phi(\sigma)}{\sigma^2-\omega^2}d\sigma, \qquad \phi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{a(\sigma)}{\sigma^2-\omega^2}d\sigma$$

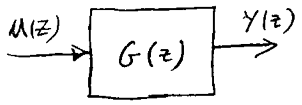
και μεταξύ των αποκρίσεων συχνότητας της $G(s)$ και της βηματικής απόκρισης:

$$R(\omega) = \int_0^\infty \omega\, y_u(t)\sin(\omega t)\,dt, \qquad X(\omega) = \int_0^\infty \omega\, y_u(t)\cos(\omega t)\,dt$$

$$y_u(t) = R(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\omega)}{\omega}\cos(\omega t)\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega}\sin(\omega t)\,d\omega$$

Όχι πολύ χρήσιμες διότι συνήθως είναι γνωστές οι αποκρίσεις συχνότητας σε πεπερασμένο διάστημα $[0, \omega_s]$ και όχι στο $[0, \infty)$.

7.3 Αποκρίσεις συχνότητας συστημάτων δ.χ.



Διέγερση: $u(kT) = A\sin(k\omega T)$

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u(kT)\} = \mathcal{Z}\{A\sin(k\omega T)\} = \frac{A\, z \sin(\omega T)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})}$$

Απόκριση: $$Y(z) = G(z)U(z) = A\sin(\omega T)\frac{z\,G(z)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})}$$

Υποθέτουμε ότι η $G(z)$ έχει πόλους αυστηρά μέσα στο μοναδιαίο κύκλο.

Επίσης (για απλότητα) θεωρούμε ότι η $G(z)$ έχει απλούς πόλους $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Ανάλυση της $\frac{Y(z)}{z}$ σε απλά κλάσματα:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A\sin(\omega T)G(z)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} = \frac{K_0}{z-e^{j\omega T}} + \frac{\bar{K}_0}{z-e^{-j\omega T}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{z-p_i} \Rightarrow Y(z) = \frac{K_0 z}{z-e^{j\omega T}} + \frac{\bar{K}_0 z}{z-e^{-j\omega T}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-p_i}$$

όπου $$K_0 = \left.\frac{A\sin(\omega T)\,G(z)}{z-e^{-j\omega T}}\right|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{A\sin(\omega T)\,G(e^{j\omega T})}{e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}}$$

$$y(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = K_0 e^{j\omega kT} + \bar{K}_0 e^{-j\omega kT} + \sum_{i=1}^{n} K_i (p_i)^k$$

Στη μόνιμη κατάσταση (μετά την απόσβεση του μεταβατικού φαινομένου) θα είναι:

$$y_{ss}(kT) = K_0 e^{j\omega kT} + \bar{K}_0 e^{-j\omega kT}$$
$$= A\left|G(e^{j\omega T})\right| \sin\left(k\omega T + \arg\{G(e^{j\omega T})\}\right)$$

δηλ. η απόκριση στη μόνιμη κατάσταση είναι δείγματα μιας ημιτονικής συνάρτησης ίδιας συχνότητας με τη διέγερση, πλάτους $A\left|G(e^{j\omega T})\right|$ και φάσης $\arg\{G(e^{j\omega T})\}$

Ορισμοί: Οι ακόλουθες πραγματικές συναρτήσεις του ω λέγονται αποκρίσεις συχνότητας ή αρμονικές αποκρίσεις της $G(z)$.

Συνάρτηση πλάτους της $G(z)$: $M_d(\omega) = \left|G(e^{j\omega T})\right|$

Συνάρτηση φάσης της $G(z)$: $\phi_d(\omega) = \arg\{G(e^{j\omega T})\}$

Συνάρτηση κέρδους της $G(z)$ σε db: $K_d(\omega) = 20\log_{10}\left|G(e^{j\omega T})\right|$

7.4 Προδιαγραφές στο πεδίο της συχνότητας

Απεικονίσεις αρμονικών αποκρίσεων:

(α) διαγράμματα μέτρου κ φάσεως: $M(\omega)$ (ή $M_d(\omega)$) και $\phi(\omega)$ (ή $\phi_d(\omega)$) συναρτήσει του ω

(β) —//— Bode: $K(\omega)$ ($K_d(\omega)$) και $\phi(\omega)$ (ή $\phi_d(\omega)$) συναρτήσει του $\log_{10}(\omega)$

(γ) πολικό διάγραμμα: απεικονίζεται ο μιγάδας $G(j\omega)$ (ή $G(e^{j\omega T})$) στο μιγαδικό επίπεδο με παράμετρο το $\omega \in (-\infty, \infty)$.

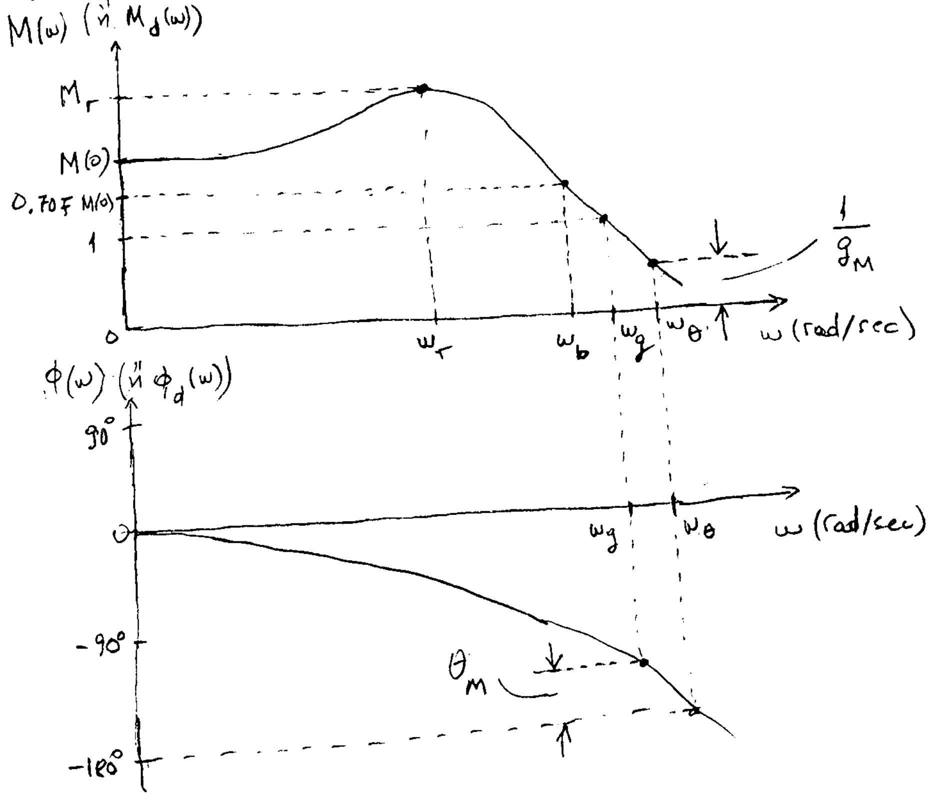
(δ) διάγραμμα Nyquist: όπως στο πολικό διάγραμμα απεικονίζεται ο μιγάδας $G(s)$ (ή $G(z)$) γιά μιά ειδική τροχιά της παραμέτρου s (ή z).

(ε) διάγραμμα μέτρου-φάσης: απεικονίζεται το κέρδος $K(\omega)$ (ή $K_d(\omega)$) συναρτήσει της φάσης $\phi(\omega)$ (ή $\phi_d(\omega)$) με παράμετρο το ω.

(στ) διάγραμμα Nichols: διάγραμμα μέτρου-φάσης όχι της $G(j\omega)$ (ή της $G(e^{j\omega T})$) αλλά μιάς άλλης μιγαδικής συνάρτησης του ω που ορίζεται έμμεσα έτσι ώστε να διατηρείται σταθερή η συνάρτηση

$$\left|\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}\right| \quad ή \quad \left|\frac{G(e^{j\omega T})}{1+G(e^{j\omega T})}\right|$$

Με βάση τα διαγράμματα μέτρου και φάσεως συναρτήσει του ω ορίζονται οι ακόλουθες ποσότητες στις οποίες συχνά επιβάλλονται προδιαγραφές.



$M(\omega) = |G(j\omega)|$

$M_d(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$

$\phi(\omega) = \arg\{G(j\omega)\}$

$\phi_d(\omega) = \arg\{G_d(e^{j\omega t})\}$

Μέγιστο πλάτος σε συντονισμό M_r: η μέγιστη τιμή του μέτρου $M(\omega) = |G(j\omega)|$ (ή $M_d(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$) ως προς την συχνότητα ω.

Κυκλική συχνότητα συντονισμού ω_r: η κυκλ. συχνότητα στην οποία συμβαίνει το παραπάνω μέγιστο, δηλ. $|G(j\omega_r)| = M_r$ (ή $|G(e^{j\omega_r T})| = M_r$)

Κυκλική συχνότητα αποκοπής ω_b: η κυκλ. συχνότητα γιά την οποία ισχύει:
$|G(j\omega_b)| = \frac{\sqrt{2}}{2}|G(j0)|$ (ή $|G(e^{j\omega_b T})| = \frac{\sqrt{2}}{2}|G(1)|$

Περιθώριο κέρδους g_M: είναι το αντίστροφο του κέρδους $|G(j\omega_\theta)|$ (ή $|G(e^{j\omega_\theta T})|$)
στην κυκλική συχνότητα ω_θ για την οποία ισχύει $\phi(\omega_\theta)=-180^\circ$ (ή $\phi_d(\omega_\theta)=-180^\circ$),

δηλαδή: $$g_M = \frac{1}{|G(j\omega_\theta)|} \quad \text{όπου } \omega_\theta \text{ είναι τ.ω. } \arg\{G(j\omega_\theta)\} = -180^\circ$$

(ή $$g_M = \frac{1}{|G(e^{j\omega_\theta T})|} \quad \text{όπου } \omega_\theta \text{ είναι τ.ω. } \arg\{G(e^{j\omega_\theta T})\} = -180^\circ$$)

Αν η συχνότητα ω_θ δεν είναι μοναδική τότε: $g_M = \min\limits_i \left\{ \frac{1}{|G(j\omega_{\theta_i})|} \right\}$

Περιθώριο φάσης θ_M: είναι η γωνία $180^\circ + \phi(\omega_g)$ (ή $180^\circ + \phi_d(\omega_g)$)
στην κυκλική συχνότητα ω_g για την οποία ισχύει $|G(j\omega_g)|=1$ (ή $|G(e^{j\omega_g T})|=1$),

δηλαδή: $$\theta_M = 180^\circ + \arg\{G(j\omega_g)\} \quad \text{όπου } \omega_g \text{ είναι τ.ω. } |G(j\omega_g)| = 1$$

(ή $$\theta_M = 180^\circ + \arg\{G(e^{j\omega_g T})\} \quad \text{όπου } \omega_g \text{ είναι τ.ω. } |G(e^{j\omega_g T})| = 1$$)

Αν η συχνότητα ω_g δεν είναι μοναδική τότε: $\theta_M = 180^\circ + \min\limits_i \{\arg\{G(j\omega_{g_i})\}\}$.

Παράδειγμα: $G(s) = \frac{K}{s+p}$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+p^2}}, \quad \phi(\omega) = \arg\{G(j\omega)\} = \arg\left\{\frac{K}{j\omega+p}\right\} = \arg\left\{\frac{K}{p^2+\omega^2}(p-j\omega)\right\}$$

$$M_r = \max_\omega\{M(\omega)\} = \max_\omega\left\{\frac{K}{\sqrt{\omega^2+p^2}}\right\} = M(0) = \frac{K}{|p|}, \quad \omega_r = 0$$

$$M(\omega_b) = |G(j\omega_b)| = \frac{K}{\sqrt{\omega_b^2+p^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}|G(j0)| = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{K}{|p|} \Longrightarrow 2|p| = \sqrt{2(\omega_b^2+p^2)}$$

$$\Longrightarrow \omega_b^2 + p^2 = 2p^2 \Longrightarrow \omega_b = \pm|p|$$

Περιθώριο κέρδους: $$\phi(\omega) = \arg\left\{\frac{K}{p^2+\omega^2}(p-j\omega)\right\} = \arctan\left\{-\frac{\omega}{p}\right\} \in (-90^\circ, 90^\circ), \forall\omega$$

$$\Longrightarrow \nexists\ \omega_\theta \Longrightarrow g_M = \infty \quad (??)$$

Περιθώριο φάσης: $$M(\omega_g) = |G(j\omega_g)| = \frac{K}{\sqrt{\omega_g^2+p^2}} = 1 \Longrightarrow \sqrt{\omega_g^2+p^2} = K \Longrightarrow \omega_g^2 = K^2 - p^2$$

αν $|K| > |p|$ τότε $\omega_g = \sqrt{K^2-p^2}$,

οπότε $$\theta_M = 180^\circ + \arg\{G(j\omega_g)\} = 180^\circ + \arg\left\{\frac{K}{j\omega_g+p}\right\} =$$

$$= 180^\circ + \arg\left\{\frac{K}{p^2+\omega_g^2}(p-j\omega_g)\right\} = 180^\circ + \arctan\left\{-\frac{\omega_g}{p}\right\}.$$

$$\Longrightarrow \theta_M = 180^\circ - \arctan\left\{\frac{\sqrt{K^2-p^2}}{p}\right\}$$

~~Απεικονίσεις αρμονικών αποκρίσεων~~

~~(α) Διαγράμματα Bode : απεικονίζονται οι $K(\omega)$ και $\phi(\omega)$ συναρτήσει του ω.~~

~~(β) Διάγραμμα Nyquist : απεικονίζεται η $G(j\omega)$ σε πολική μορφή με παράμετρο το ω~~

~~(γ) Διάγραμμα Nichols : απεικονίζεται το $K(\omega)$ συναρτήσει της φάσης $\phi(\omega)$ σε καρτεσιανή μορφή με παράμετρο το ω~~

7.5 Διαγράμματα Bode συστημάτων σ.Χ.

Διάγραμμα Bode κέρδους : απεικονίζει την $K(\omega)$ συναρτήσει του ω για $\omega > 0$.

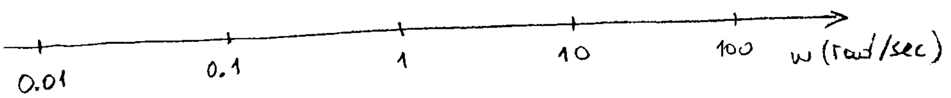
άξονες : ω (rad/sec) σε λογαριθμική κλίμακα

$K(\omega)$ (db) σε γραμμική -//-

Διάγραμμα Bode φάσης : απεικονίζει την $\phi(\omega)$ συναρτήσει του ω για $\omega > 0$.

άξονες : ω (rad/sec) σε λογαριθμική κλίμακα

$\phi(\omega)$ (°) σε γραμμική -//-



Προσοχή : η συχνότητα $\omega = 0$ δεν απεικονίζεται

Για τη χάραξη των διαγραμμάτων Bode απαιτείται :

(α) να παραγοντοποιηθούν ο αριθμητής & ο παρονομαστής της $G(s)$

(β) η $G(s)$ να τεθεί στη μορφή :

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (1+s\tilde{T}_i) \prod_{k=1}^{m_2} \left[1 + 2\frac{\tilde{\delta}_k}{\tilde{\omega}_k} s + \left(\frac{s}{\tilde{\omega}_k}\right)^2\right]}{\prod_{i=1}^{n_1} (1+sT_i) \prod_{k=1}^{n_2} \left[1 + 2\frac{\delta_k}{\omega_k} s + \left(\frac{s}{\omega_k}\right)^2\right]}$$

όπου οι πρωτοβάθμιοι παράγοντες αντιστοιχούν σε πραγματικούς πόλους/μηδενικά

και οι δευτεροβάθμιοι -//- -//- μόνο σε ζεύγη μιγαδικών πόλων/μηδενικών

δηλαδή ισχύει : $\tilde{\delta}_k < 1$, $k = 1,\dots,m_2$

$\delta_k < 1$, $k=1,\dots,n_2$

Αν $\delta_k \geq 1$ ή $\tilde{\delta}_k \geq 1$ ο δευτεροβάθμιος παράγοντας πρέπει να αναλυθεί σε γινόμενο 2 πρωτοβαθμίων.

Είναι : $\alpha s^2 + \beta s + \gamma = \gamma\left(1 + \frac{\beta}{\gamma}s + \frac{\alpha}{\gamma}s^2\right) = \gamma\left(1 + 2\frac{\delta_1}{\omega_1}s + \frac{s^2}{\omega_1^2}\right)$ όπου $\omega_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, $\delta_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$

$$\Delta = 4\frac{\delta_1^2}{\omega_1^2} - 4\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{4}{\omega_1^2}(\delta_1^2 - 1)$$ άρα $\Delta < 0 \Leftrightarrow |\delta_1| < 1$.

Τότε $$G(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^{m_1}(1+j\omega \tilde{T}_i)\ \prod_{k=1}^{m_2}\left[1+2\frac{\tilde{\zeta}_k}{\tilde{\omega}_k}j\omega+\left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_k}\right)^2\right]}{\prod_{i=1}^{n_1}(1+j\omega T_i)\ \prod_{k=1}^{n_2}\left[1+2\frac{\zeta_k}{\omega_k}j\omega+\left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2\right]}$$

Οπότε:

$$K(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left\{|K|\frac{\prod_i|1+j\omega\tilde{T}_i|\ \prod_k\left|1+2\frac{\tilde{\zeta}_k}{\tilde{\omega}_k}(j\omega)+\left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_k}\right)^2\right|}{\prod_i|1+j\omega T_i|\ \prod_k\left|1+2\frac{\zeta_k}{\omega_k}(j\omega)+\left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2\right|}\right\}$$

$$\Rightarrow K(\omega) = \sum_{i=1}^{m_1}20\log_{10}|1+j\omega\tilde{T}_i| + \sum_{k=1}^{m_2}20\log_{10}\left|1+2\frac{\tilde{\zeta}_k}{\tilde{\omega}_k}(j\omega)+\left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_k}\right)^2\right| - \sum_{k=1}^{n_2}20\log_{10}\left|1+2\frac{\zeta_k}{\omega_k}(j\omega)+\left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2\right| + 20\log_{10}|K| - \sum_{i=1}^{n_1}20\log_{10}|1+j\omega T_i|$$

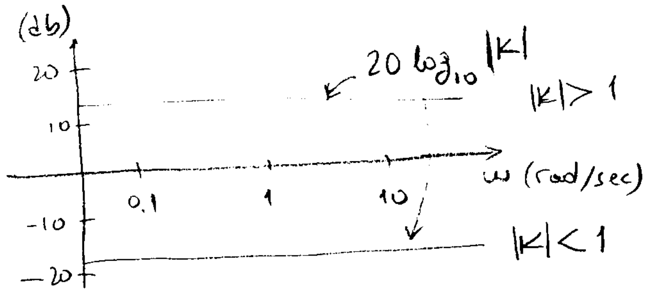
$\Rightarrow$ διάγραμμα Bode κέρδους της $G(s)$ προκύπτει προσθέτοντας διαγρ. Bode κέρδους απλών παραγόντων

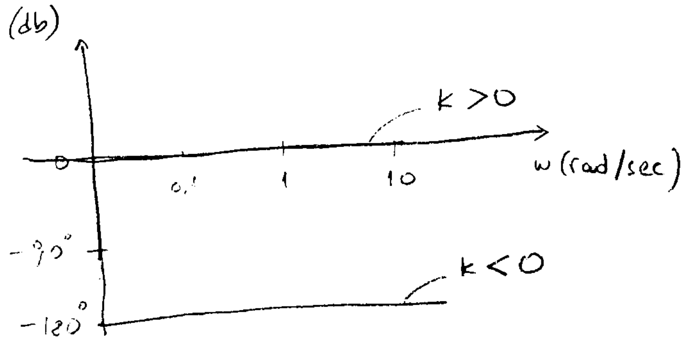
$$\phi(\omega) = \arg\{G(j\omega)\} = \sum_{i=1}^{m_1}\arg(1+j\omega\tilde{T}_i) + \sum_{k=1}^{m_2}\arg\left(1+2\frac{\tilde{\zeta}_k}{\tilde{\omega}_k}(j\omega)+\left(\frac{j\omega}{\tilde{\omega}_k}\right)^2\right) - \sum_{k=1}^{n_2}\arg\left(1+2\frac{\zeta_k}{\omega_k}(j\omega)+\left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2\right) + \arg(K) - \sum_{i=1}^{n_1}\arg(1+j\omega T_i)$$

$\Rightarrow$ διάγραμμα Bode φάσης της $G(s)$ προκύπτει προσθέτοντας διαγρ. Bode φάσης απλών παραγόντων,

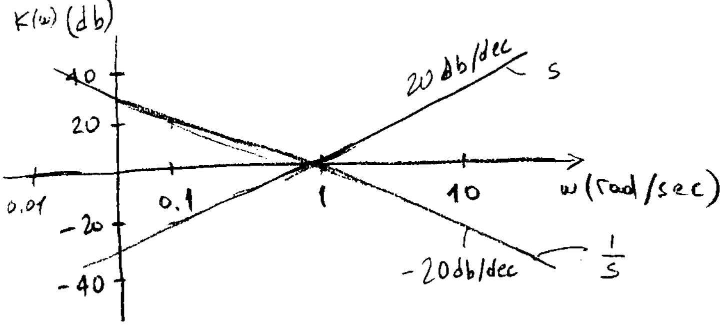
Παράγοντες:
- κέρδος K
- παράγοντες παραγώγισης ή ολοκλήρωσης : $s^{\pm 1}$
- —//— 1ου βαθμού : $(1+sT)^{\pm 1}$
- —//— 2ου βαθμού : $\left[1+2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

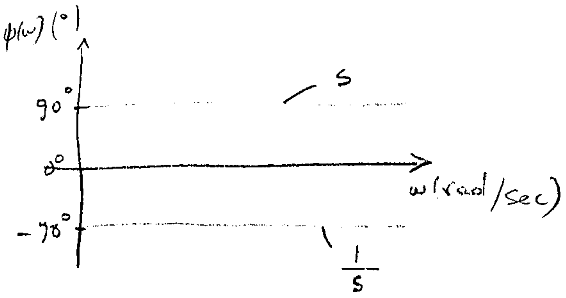
(α) κέρδος K :





(β) παράγοντας ολοκλήρωσης ή παραγώγισης : $\frac{1}{s}$ ή s



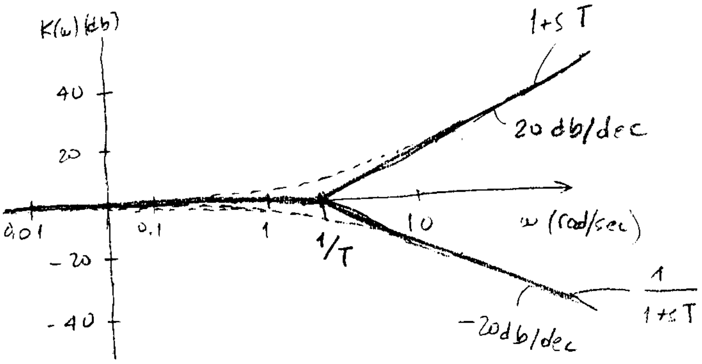


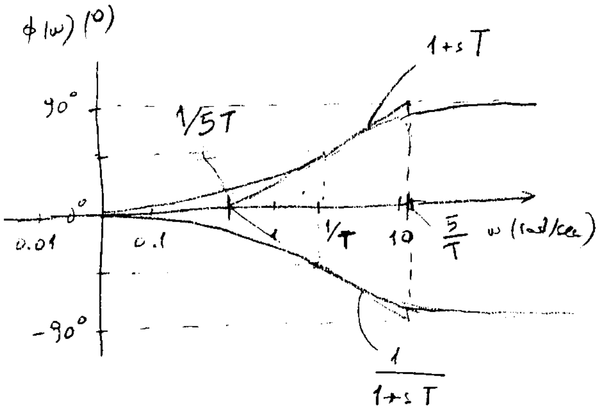
$$K(\omega) = 20\log_{10}\left|\frac{1}{j\omega}\right| = 20\log_{10}\frac{1}{\omega}$$
$$= -20\log_{10}(\omega)$$
$$K(\bar{\omega}) = 0 \Rightarrow \bar{\omega} = 1$$

$$\phi(\omega) = \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = \arg\left(-\frac{j}{\omega}\right) =$$
$$= \arctan\left(-\frac{1/\omega}{0}\right) = -90^\circ$$

(γ) πρωτοβάθμιος παράγοντας : $\frac{1}{1+sT}$ ή $1+sT$

(i) αν $T > 0$:





$$K(\omega) = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

αν $\omega \ll \frac{1}{T}$: $K(\omega) \approx -20\log_{10}(1) = 0 \triangleq K_{\alpha\sigma}(\omega)$

αν $\omega \gg \frac{1}{T}$: $K(\omega) \approx 20\log_{10}(\omega T) \triangleq K_{\alpha\sigma}(\omega)$

συχνότητα θλάσης : $K_{\alpha\sigma}(\omega_\theta) = 0 \Leftrightarrow \omega_\theta = \frac{1}{T}$

$$\phi(\omega) = \arg\left(\frac{1}{1+j\omega T}\right) = -\arctan(\omega T)$$

αν $\omega \to 0$: $\phi(\omega) \approx 0$

αν $\omega \to \infty$: $\phi(\omega) \approx -90^\circ$

$$\phi(\omega_\theta) = -\arctan(1) = -45^\circ$$

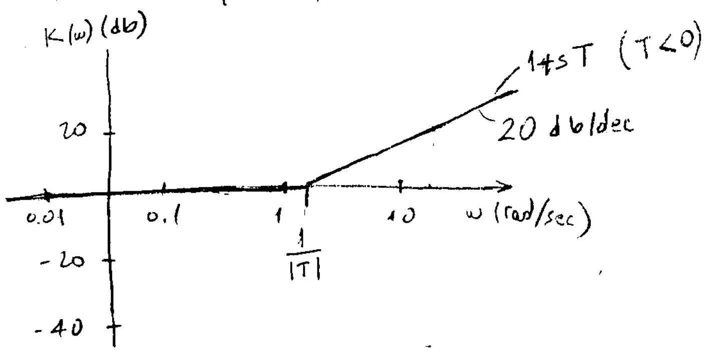
η εφαπτομένη της $\phi(\omega)$ στο $\left(\frac{1}{T}, \pm 45^\circ\right)$ τέμνει τις ασυμπτώτους στις συχνότητες $\frac{1}{5T}$ & $\frac{5}{T}$

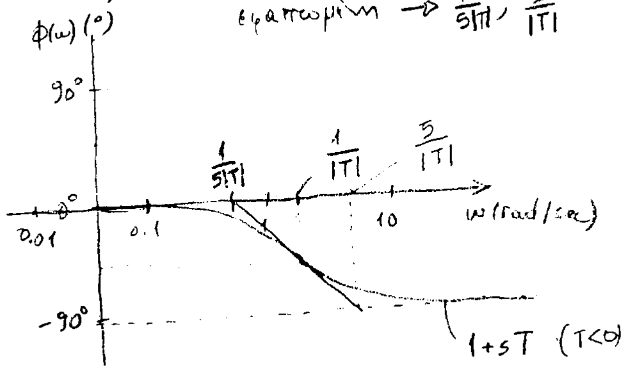
(ii) αν $T < 0$:

$$K(\omega) = 20\log_{10}|1+j\omega T| = -20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2} = -20\log_{10}|1+j\omega|T|| \Rightarrow \omega_\theta = \frac{1}{|T|}$$

$$\phi(\omega) = \arg(1+j\omega T) = \arctan(\omega T) = -\arctan(\omega|T|) \Rightarrow \phi(\omega_\theta) = -\arctan(1) = -45^\circ$$

εφαπτομένη $\rightarrow \frac{1}{5|T|}, \frac{5}{|T|}$

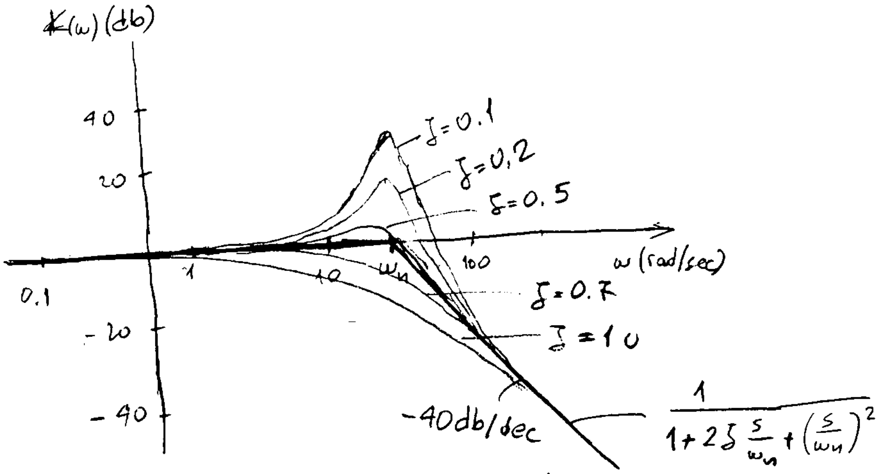


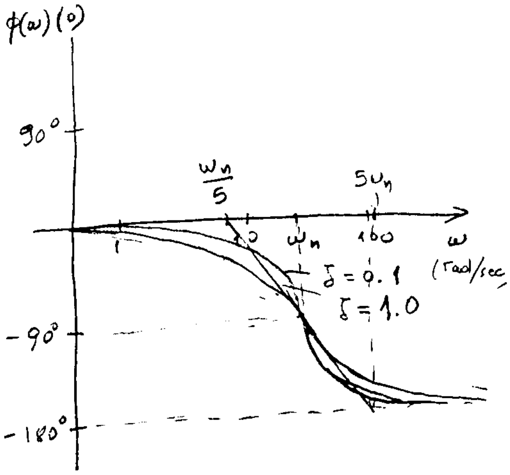


(δ) Δευτεροβάθμιος παράγοντας : $\dfrac{1}{1+2\frac{\zeta}{\omega_n}s+\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$ ή $1+2\frac{\zeta}{\omega_n}s+\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2$

(i) αν $0<\zeta<1$

(αν $\zeta\geq 1$ πρέπει να αναλυθεί σε γινόμενο 2 πρωτοβάθμιων όρων)





$$K(\omega)=20\log_{10}\left|\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right|=$$

$$=-20\log_{10}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi(\omega)=\arg\left(\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

$$=-\arctan\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)$$

αν $\omega\ll\omega_n$: $K(\omega)\approx-20\log_{10}(1)=0\triangleq K_{\alpha\sigma}(\omega)$

αν $\omega\gg\omega_n$: $K(\omega)\approx-20\log_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)=-40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\triangleq K_{\alpha\sigma}(\omega)$

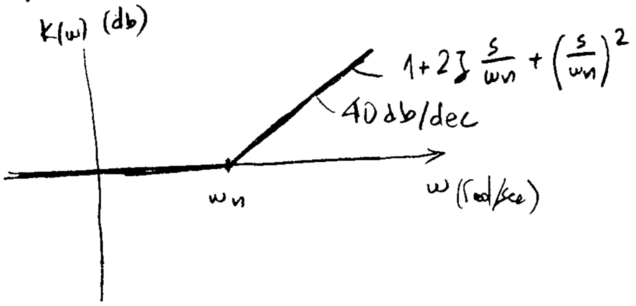
συχνότητα θλάσης : $K_{\alpha\sigma}(\omega_\theta)=0 \iff \omega_\theta=\omega_n$

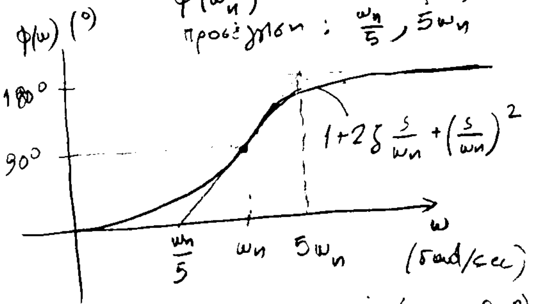
αν $\omega\to 0$: $\phi(\omega)\approx 0^\circ$

αν $\omega\to\infty$: $\phi(\omega)\approx -180^\circ$

$\phi(\omega_n)=-\arctan\{\infty\}=-90^\circ$

προσέγγιση : $\frac{\omega_n}{5}$, $5\omega_n$

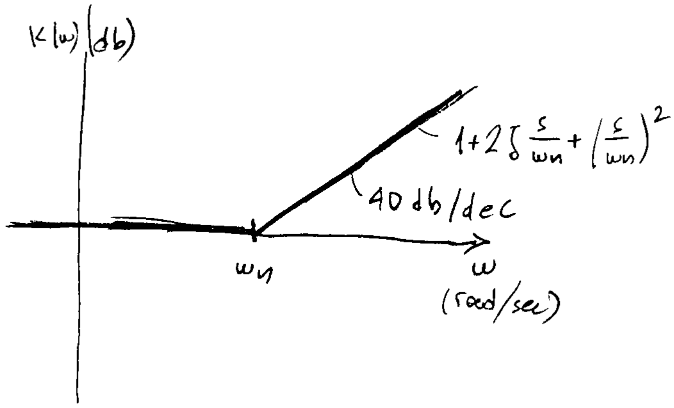


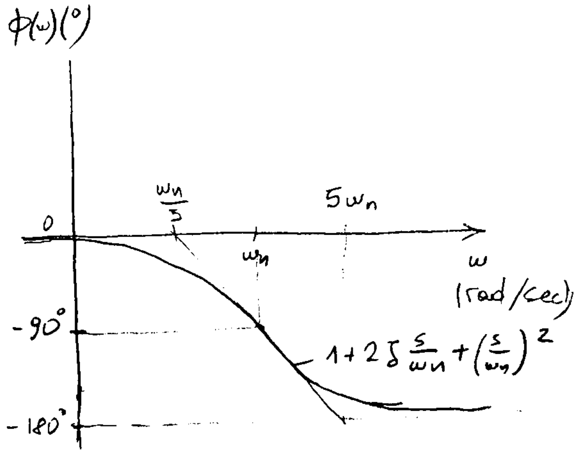


προσέγγιση της $\phi(\omega)$ στο $(\omega_n, \mp 90^\circ)$: τέμνεται ασυμπτώτους στις συχν. $\frac{\omega_n}{5}$ & $5\omega_n$ (είναι εφαπτομένη αν $\zeta=1$)

(ii) αν $-1<\zeta<0$

(αν $\zeta<-1$ πρέπει να αναλυθεί σε γινόμενο 2 πρωτοβάθμιων)





Παράδειγμα: $G(s) = \dfrac{10s-30}{s^4+3s^3+4s^2+2s}$

$$G(s) = \frac{10(s-3)}{s(s^3+3s^2+4s+2)} = \frac{10(s-3)}{s(s+2)(s^2+s+2)} = \frac{-30\left(1-\frac{s}{3}\right)}{4s\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{2}\right)} = \frac{-7.5\left(1+\frac{s}{T_1}\right)}{s\left(1+\frac{s}{T_2}\right)\left(1+2\zeta\frac{s}{\omega_n}+\left(\frac{s}{\omega_n}\right.\right.}$$

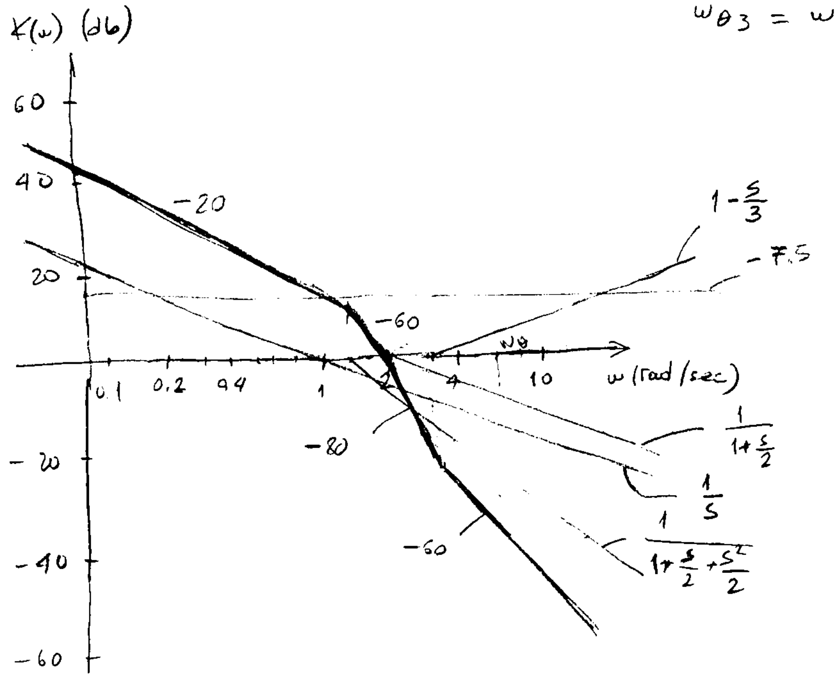
$$\Rightarrow T_1 = -\frac{1}{3}, \quad T_2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_n = \sqrt{2}, \quad 2\frac{\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} < 1 \text{ o.k}$$

συχνότητες θλάσης: αριθμητή: $\omega_{\theta 1} = \dfrac{1}{|T_1|} = 3$, κλίση 20 db/dec

παρονομαστή: $\omega_{\theta 2} = \dfrac{1}{T_2} = 2$, κλίση -20 db/dec

$\omega_{\theta 3} = \omega_n = \sqrt{2}$, κλίση -40 db/dec.

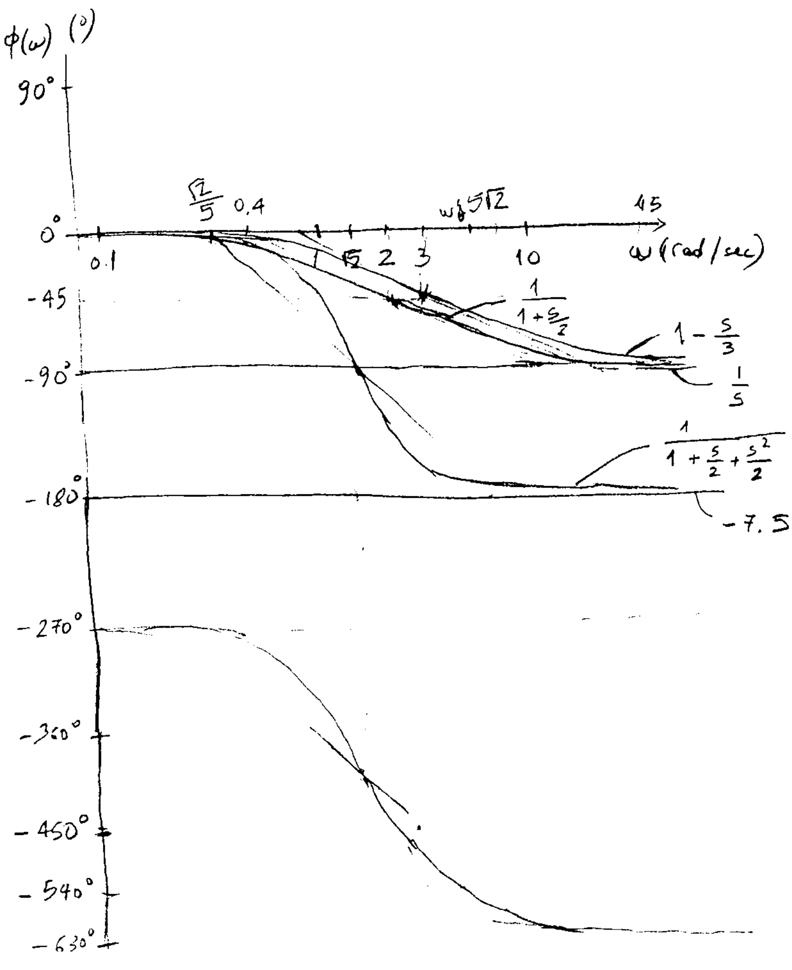
σταθερός όρος: $K = 20\log_{10}|-7.5| =$
$= 17.5$ db



$\omega_g \approx 2$ rad/sec

$\arg\{G(j\omega_g)\} \approx -460^\circ$

$\theta_M \approx (180^\circ - 460^\circ) + 360^\circ$
$= 540^\circ - 460^\circ = 80^\circ$



$\omega_\theta \approx 6$ rad/sec,

$20\log_{10}|G(j\omega_\theta)| \approx -40$ db

$20\log_{10}\{g_M\} = 40$ db

7.6 Διαγράμματα Bode συστημάτων δ.χ.

(α) άμεση χάραξη

Διαγρ. Bode κέρδους της $G(z)$: απεικονίζει την $K(\omega) = 20\log_{10}|G(e^{j\omega T})|$ συναρτήσει του $\omega > 0$ (ω σε λογαριθμική κλίμακα)

Διαγρ. Bode φάσης της $G(z)$: απεικονίζει την $\phi(\omega) = \arg\{G(e^{j\omega T})\}$ συναρτήσει του $\omega > 0$ (ω σε λογαριθμική κλίμακα)

Δεν υπάρχει πλέον η ευκολία σχεδίασης των ασυμπτωτικών διαγραμμάτων.

Παράδειγμα: $G(z) = \dfrac{1}{1+zT_1} \Rightarrow G(e^{j\omega T}) = \dfrac{1}{1+T_1 e^{j\omega T}}$

$e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j\sin(\omega T)$ $\Rightarrow$

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1+T_1\cos(\omega T) + jT_1\sin(\omega T)}$$

$$K(\omega) = 20\log_{10}|G(e^{j\omega T})| = -20\log_{10}|1+T_1\cos(\omega T)+jT_1\sin(\omega T)| =$$

$$= -20\log_{10}\sqrt{1+T_1^2+2T_1\cos(\omega T)} \rightarrow \text{περιοδική}$$

(Ενώ $G(s) = \dfrac{1}{1+sT_1} \Rightarrow K(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)| = -20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T_1^2}$ $\rightarrow 0$ αν $\omega \to 0$, $\rightarrow 20\log_{10}(\omega T_1)$ αν $\omega \to \infty$)

Παρατήρηση: Η $G(e^{j\omega T})$ είναι περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T}$

Πράγματι $e^{j(\omega+k\omega_T)T} = e^{j(\omega+\frac{2\pi k}{T})T} = e^{j\omega T}e^{j2k\pi} = e^{j\omega T} \Rightarrow G(e^{j(\omega+\frac{2k\pi}{T})T}) = G(e^{j\omega T})$

Επομένως τα διαγράμματα Bode αρκεί να σχεδιασθούν στην περιοχή:

$$0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}$$

Επειδή $|e^{j\omega T}| = 1$ $\forall\omega$, η $e^{j\omega T}$ διατρέχει την περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου (για διάφορα ω).

(β) με βάση το διγραμμικό μετασχηματισμό

Διγραμμικός μετασχηματισμός: $z = \dfrac{1+w}{1-w} \Leftrightarrow w = \dfrac{z-1}{z+1}$.

Μετασχηματίζει το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (z) στο αριστερό ημιεπίπεδο (w)

—//— την περιφέρεια —//— —//— —//— (z) στον φανταστικό άξονα (w).

Θέτουμε $\hat{G}(w) \triangleq G(z)\Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = G\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)$

Τότε $G(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \hat{G}(w)\Big|_{w=\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}}$

όμως $w = \dfrac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} = \dfrac{e^{j\omega T/2}\,\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{2j}\,2j}{e^{j\omega T/2}\,\frac{e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}}{2}\,2} = j\,\dfrac{\sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = j\tan\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)$

Επομένως $G(e^{j\omega T}) = \hat{G}(j\Omega)$ όπου $\Omega = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

Τα διαγράμματα Bode της $\hat{G}(w)$ κατασκευάζονται σαν να ήταν η $\hat{G}(w)$ συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος συνεχούς χρόνου ($w \leftrightarrow s$), δηλ. διάγραμμα Bode κέρδους: $K(\Omega) = 20\log_{10}|\hat{G}(j\Omega)|$ συναρτήσει του $\log_{10}\Omega$

— " — — " — φάσης: $\phi(\Omega) = \arg\{\hat{G}(j\Omega)\}$ — " — — " — — " —

Στη συνέχεια μετατρέπονται τα περιθώρια κέρδους κ φάσης με χρήση των

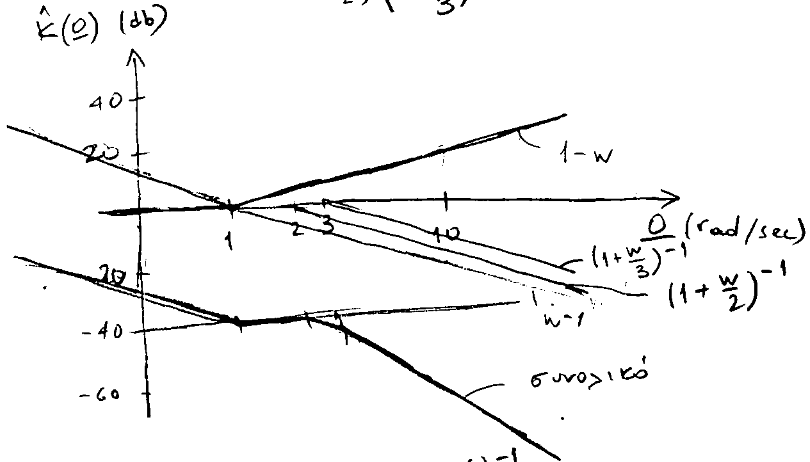
$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right), \quad \omega = \frac{2}{T}\arctan\{\Omega\}$$

Παράδειγμα: $G(z) = \dfrac{(z+1)^2}{100\,(z-1)\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$

$$\hat{G}(w) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{\left(\frac{1+w}{1-w}+1\right)^2}{100\left(\frac{1+w}{1-w}-1\right)\left(\frac{1+w}{1-w}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1+w}{1-w}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{(1-w)(1+\cancel{w}+1-\cancel{w})^2}{\frac{100}{6}(\cancel{1}+w-\cancel{1}+w)(3+3w+1-w)\cdot(2+2w+1-w)}$$

$$= \frac{6\cdot 4\,(1-w)}{100\cdot 2w\cdot(2w+4)(w+3)} = \frac{6}{100}\,\frac{1-w}{w(2+w)(3+w)} \Rightarrow$$

$$\hat{G}(w) = \frac{0.01\,(1-w)}{w\left(1+\frac{w}{2}\right)\left(1+\frac{w}{3}\right)}$$



σταθερές χρόνου κ συχνότητες θλάσης

αριθμητή: $T_1 = -1$, $\Omega_1 = \frac{1}{|T_1|} = 1$

παρονομαστή: $T_2 = \frac{1}{2}$, $\Omega_2 = \frac{1}{T_2} = 2$

$T_3 = \frac{1}{3}$, $\Omega_3 = \frac{1}{T_3} = 3$

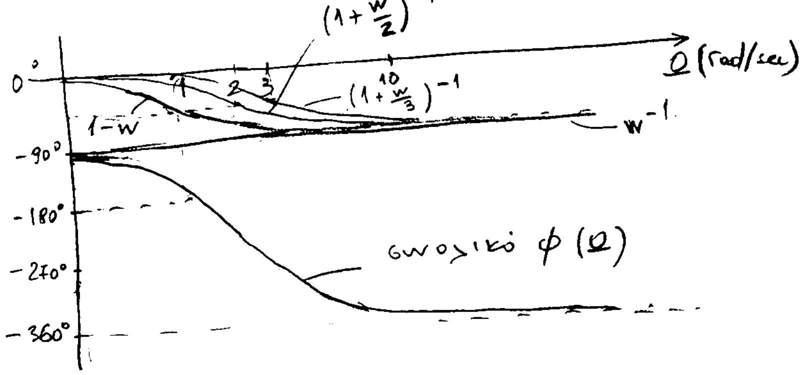
$20\log_{10}(0.01) = -40$ db

Περιθώριο κέρδους:

$\arg\{\hat{G}(j\Omega_\theta)\} = -180^\circ \Rightarrow \Omega_\theta \approx 1$ rad/sec

$20\log_{10}(g_M) = -20\log_{10}|\hat{G}(j\Omega_\theta)| \approx 40$ db

$\omega_\theta = \frac{2}{T}\arctan\{\Omega_\theta\} \approx \frac{1.57}{T}$ rad/sec



Περιθώριο φάσης:

$|\hat{G}(j\Omega_g)| = 1 \Rightarrow \Omega_g \approx 0.01$ rad/sec

$\theta_M = 180^\circ + \arg\{\hat{G}(j\Omega_g)\} \approx 180^\circ + (-90^\circ) = 90^\circ$

$\omega_g = \frac{2}{T}\arctan\{\Omega_\theta\} \approx \frac{0.02}{T}$ rad/sec

7.7 Πολικό διάγραμμα της $G(s)$ (συστήματα σ.χ.)

Απεικονίζει τον μιγάδα $G(j\omega)$ στο μιγαδικό επίπεδο με παράμετρο το $\omega \in (-\infty, \infty)$

$$G(j\omega) = Re\{G(j\omega)\} + j\, Im\{G(j\omega)\} = R(\omega) + j X(\omega)$$
$$= |G(j\omega)| \angle \phi(\omega) = |G(j\omega)| (\cos\phi(\omega) + j \sin\phi(\omega)), \quad \phi(\omega) = \arg\{G(j\omega)\} = \arctan\left\{\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right\}$$

Πολικό διάγραμμα της $G(s)$ = το σύνολο των σημείων $(R(\omega), X(\omega))$ για $\omega \in (-\infty, \infty)$

(ο $G(j\omega)$ σε Καρτεσιανή μορφή: άξονες $R(\omega) = Re\{G(j\omega)\}$ και $X(\omega) = Im\{G(j\omega)\}$)

= το σύνολο των σημείων $|G(j\omega)| \angle \phi(\omega)$ για $\omega \in (-\infty, \infty)$

(ο $G(j\omega)$ σε πολική μορφή: ημιάξονες $\phi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$)

Είναι: $R(\omega)$ άρτια συνάρτηση του ω, $X(\omega)$ περιττή συνάρτηση του ω, άρα

$$G(-j\omega) = Re\{G(-j\omega)\} + j\, Im\{G(-j\omega)\} = R(-\omega) + j X(-\omega) = R(\omega) - j X(\omega) = \overline{G(j\omega)}$$

$\Rightarrow$ το πολικό διάγραμμα για συχνότητες $\omega \in (-\infty, 0]$ είναι το συμμετρικό του διαγράμματος για συχνότητες $\omega \in [0, \infty)$ ως προς τον πραγματικό άξονα.

Έμμεση σχεδίαση του Π.Δ.: προκύπτει ευθέως από τα διαγράμματα μέτρου και φάσης της $G(s)$ ή από τα διαγράμματα Bode της $G(s)$, τα οποία δίνουν τον μιγάδα $G(j\omega)$, $\omega \in (0, \infty)$ σε πολική μορφή.

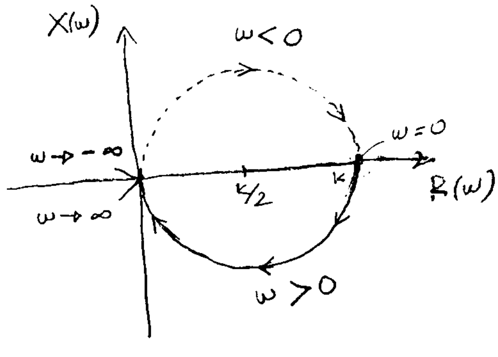
Άμεση σχεδίαση του Π.Δ.:

(α) αρκεί η σχεδίαση στο διάστημα $\omega \in [0, \infty)$. Το υπόλοιπο είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα: $G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}$

(β) σημειώνονται τα σημεία του Π.Δ. που αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικές συχνότητες (π.χ. $\omega = 0$, $\omega \to \infty$) καθώς και η φορά αύξησης του ω.

(γ) δυσκολία στη σχεδίαση όταν η $G(s)$ έχει πόλους $j\hat{\omega}$ πάνω στον φανταστικό άξονα οπότε $\lim_{\omega \to \hat{\omega}} |G(j\omega)| \to \infty$ (βλ. διάγραμμα Nyquist).

Παράδειγμα: $G(s) = \frac{k}{1+sT}$ $\Rightarrow G(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} = \frac{k(1-j\omega T)}{1+\omega^2 T^2} = \frac{k}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1+\omega^2 T^2}$



Πολικό διάγραμμα της $G(s) = \frac{k}{1+sT}$

$\Rightarrow R(\omega) = Re\{G(j\omega)\} = \frac{k}{1+\omega^2 T^2}$, $X(\omega) = Im\{G(j\omega)\} = -\frac{k\omega T}{1+\omega^2 T^2}$

$\omega = 0$: $R(0) = k$, $X(0) = 0$

$\omega \to \infty$: $\lim_{\omega \to \infty}\{R(\omega)\} = 0$, $\lim_{\omega \to \infty}\{X(\omega)\} = \lim_{\omega \to \infty}\left\{-\frac{\frac{kT}{\omega}}{\frac{1}{\omega^2} + T^2}\right\} = 0$

Επιπλέον, $X(\omega) = -\omega T R(\omega) \Rightarrow \omega = -\frac{X(\omega)}{T R(\omega)}$

άρα $R(\omega)\left[1 + \left(\frac{X(\omega)}{T R(\omega)}\right)^2 T^2\right] = k \Rightarrow R^2 + X^2 - kR = 0$

$$\Rightarrow \left(R - \frac{k}{2}\right)^2 + X^2 = \frac{k^2}{4}$$

Εύρεση των σημείων τομής του πολικού διαγράμματος της $G(s)$ με τους άξονες.

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{b(s)} = \frac{\tilde{\alpha}(s^2)+s\,\hat{\alpha}(s^2)}{\tilde{b}(s^2)+s\,\hat{b}(s^2)}$$

όπου $\tilde{\alpha}(s^2)$ και $\tilde{b}(s^2)$ είναι τα άρτια μέρη των $\alpha(s)$, $b(s)$
$s\hat{\alpha}(s^2)$ και $s\hat{b}(s^2)$ —"— —"— περιττά —"— —"— —

$$G(j\omega) = Re\{G(j\omega)\} + j\, Im\{G(j\omega)\} = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}(-\omega^2)+j\omega\,\hat{\alpha}(-\omega^2)}{\tilde{b}(-\omega^2)+j\omega\,\hat{b}(-\omega^2)} = \frac{\left[\tilde{\alpha}(-\omega^2)+j\omega\,\hat{\alpha}(-\omega^2)\right]\left[\tilde{b}(-\omega^2)-j\omega\,\hat{b}(-\omega^2)\right]}{\left(\tilde{b}(-\omega^2)\right)^2+\omega^2\left(\hat{b}(-\omega^2)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{|b(j\omega)|^2}\left[\left(\tilde{\alpha}(-\omega^2)\tilde{b}(-\omega^2)+\omega^2\hat{\alpha}(-\omega^2)\hat{b}(-\omega^2)\right)+j\omega\left(\hat{\alpha}(-\omega^2)\tilde{b}(-\omega^2)-\tilde{\alpha}(-\omega^2)\hat{b}(-\omega^2)\right)\right]$$

σημεία τομής με πραγματικό άξονα: $(R(\hat{\omega}), 0) = (G(j\hat{\omega}), 0)$ (αν $\exists R(\hat{\omega})$)

όπου $\hat{\omega}$ είναι λύση της $X(\hat{\omega})=0$, δηλ. $\hat{\omega}\left[\hat{\alpha}(-\hat{\omega}^2)\tilde{b}(-\hat{\omega}^2)-\tilde{\alpha}(-\hat{\omega}^2)\hat{b}(-\hat{\omega}^2)\right]=0$ (αν ∃

σημεία τομής με φανταστικό άξονα: $(0, X(\tilde{\omega})) = (0, G(j\tilde{\omega}))$

όπου $\tilde{\omega}$ είναι λύση της $R(\tilde{\omega})=0$, δηλ. $\tilde{\alpha}(-\tilde{\omega})^2\tilde{b}(-\tilde{\omega}^2)+\tilde{\omega}^2\hat{\alpha}(-\tilde{\omega}^2)\hat{b}(-\tilde{\omega}^2)=0$ (αν ∃

Παρόμοια για το πολικό διάγραμμα της $G(z)$.

<u>Παράδειγμα</u>: $G(s) = \frac{K}{1+s\tau} \Rightarrow R(\omega) = \frac{K}{1+\omega^2T^2}$, $X(\omega) = -\frac{K\omega T}{1+\omega^2T^2}$

Η $R(\omega)$ δεν μηδενίζεται, άρα ∄ σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα

$X(\hat{\omega})=0 \Leftrightarrow \hat{\omega}=0$, οπότε $R(\hat{\omega})=R(0)=K$

$\Rightarrow$ σημείο τομής με πραγματικό άξονα: $(K, 0)$.

7.8 Πολικό διάγραμμα της $G(z)$ (συστήματα δ.χ.)

Απεικονίζει τον μιγάδα $G(e^{j\omega T})$ στο μιγαδικό επίπεδο με παράμετρο $\omega \in (-\infty, \infty)$ (όπου T = σταθ. είναι η περίοδος δειγματοληψίας).

$$G(e^{j\omega T}) = |G(e^{j\omega T})| \angle \phi_d(\omega) = |G(e^{j\omega T})| e^{j\phi_d(\omega)} = |G(e^{j\omega T})| (\cos\phi_d(\omega) + j\sin\phi_d(\omega))$$

$$= R_d(\omega) + j X_d(\omega)$$

όπου $R_d(\omega) = Re\{G(e^{j\omega T})\} = |G(e^{j\omega T})| \cos\phi_d(\omega)$

$X_d(\omega) = Im\{G(e^{j\omega T})\} = |G(e^{j\omega T})| \sin\phi_d(\omega)$

$\phi_d(\omega) = \arg\{G(e^{j\omega T})\} = \arctan\left\{\frac{X_d(\omega)}{R_d(\omega)}\right\}$

Πολικό διάγραμμα της $G(z)$ = το σύνολο των σημείων $(R_d(\omega), X_d(\omega))$ για $\omega \in (-\infty, \infty)$

($G(e^{j\omega T})$ σε καρτεσιανή μορφή: άξονες $R_d(\omega)$, $X_d(\omega)$)

= το σύνολο των σημείων $|G(e^{j\omega T})| \angle \phi_d(\omega)$ γιά $\omega \in (-\infty, \infty)$

($G(e^{j\omega T})$ σε πολική μορφή)

Όμως: $G(e^{j\omega T}) = G(e^{j(\omega T + 2k\pi)}) = G(e^{j(\omega + \frac{2k\pi}{T})T})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

δηλαδή η $G(e^{j\omega T})$ είναι περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$

άρα αρκεί η σχεδίαση του Π.Δ. στην περιοχή $\omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$.

Επίσης: $e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j\sin(\omega T)$, επομένως

$$G(e^{-j\omega T}) = G(\cos(-\omega T) + j\sin(-\omega T)) = G(\cos(\omega T) - j\sin(\omega T)) = G(\overline{e^{j\omega T}}) = \overline{G(e^{j\omega T})}$$

δηλαδή το Π.Δ. γιά $\omega \in (-\infty, 0]$ είναι το συμμετρικό του Π.Δ. για $\omega \in [0, \infty)$ ως προς τον πραγματικό άξονα.

$\Longrightarrow$ αρκεί η σχεδίαση του Π.Δ. στο διάστημα $\omega \in [0, \frac{\pi}{T}]$ ή $\omega T \in [0, \pi]$.

Το Π.Δ. για $\omega \in [-\frac{\pi}{T}, 0]$ είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα

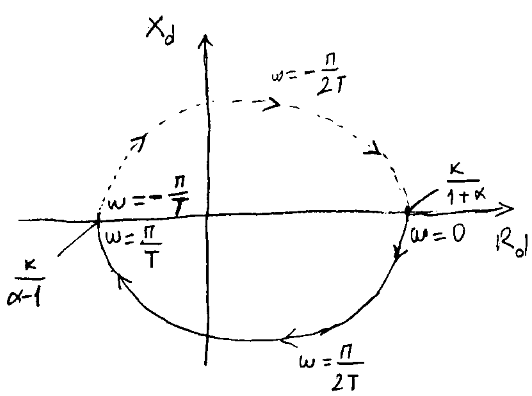
και για $\omega \notin [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ ταυτίζεται με το Π.Δ. γιά $\omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ λόγω περιοδικότητας.

Δυσκολία στη σχεδίαση όταν η $G(z)$ έχει πόλους $\hat{z} = e^{j\hat{\omega}T}$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, οπότε $\lim_{\omega \to \hat{\omega}} |G(e^{j\hat{\omega}T})| \to \infty$ (βλ. διάγραμμα Nyquist).

Παράδειγμα: $G(z) = \frac{k}{z + \alpha}$, $k > 0$, $0 < \alpha < 1$.

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{k}{e^{j\omega T} + \alpha} = \frac{k}{\cos(\omega T) + \alpha + j\sin(\omega T)} = \frac{k(\cos(\omega T) + \alpha - j\sin(\omega T))}{(\cos(\omega T) + \alpha)^2 + \sin^2(\omega T)}$$

$$= \frac{k(\cos(\omega T) + \alpha)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega T)} - j\frac{k\sin(\omega T)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega T)} = R_d(\omega) + jX_d(\omega)$$



$\omega = 0$: $R_d(0) = \frac{k(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2} = \frac{k}{1+\alpha}$, $X_d(0) = 0$

$\omega = \frac{\pi}{2T}$: $R_d(\frac{\pi}{2T}) = \frac{k\alpha}{1+\alpha^2}$, $X_d(\frac{\pi}{2T}) = -\frac{k}{1+\alpha^2}$

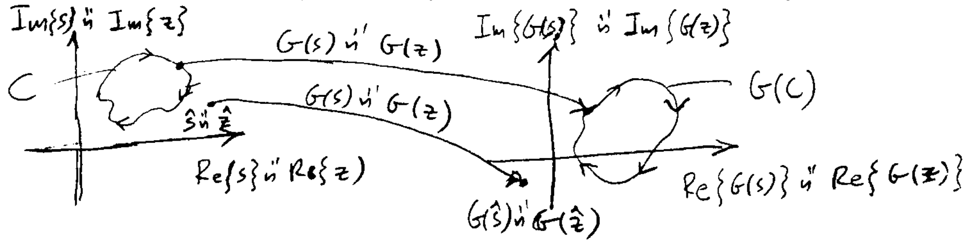
$\omega = \frac{\pi}{T}$: $R_d(\frac{\pi}{T}) = \frac{k(-1+\alpha)}{(1-\alpha)^2} = \frac{k}{\alpha - 1}$, $X_d(\frac{\pi}{T}) = 0$

8. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ NYQUIST – ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ NYQUIST

8.1 Εισαγωγή

Το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$ ή της $G(z)$:

- αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου πολικού διαγράμματος.
- αντιμετωπίζει τις δυσκολίες που προκύπτουν όταν η $G(s)$ έχει πόλους πάνω στον φανταστικό άξονα ή η $G(z)$ έχει πόλους πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.
- εξετάζει την $G(s)$ ή την $G(z)$ σαν απεικονίσεις του μιγαδικού επιπέδου s ή z στο μιγαδικό επίπεδο $G(s)$ ή $G(z)$ αντίστοιχα $(G: \mathbb{C} \to \mathbb{C})$.
- ορίζει μία κλειστή καμπύλη (διαδρομή Nyquist) στο επίπεδο s ή z που αποφεύγει τους πόλους της $G(s)$ ή $G(z)$.
- το διάγραμμα Nyquist είναι η κλειστή καμπύλη που προκύπτει όταν η διαδρομή Nyquist απεικονισθεί μέσω της $G(s)$ ή $G(z)$.



Μία ρητή συνάρτηση $G(s)$ ή $G(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής s ή z έχει τις εξής ιδιότητες:

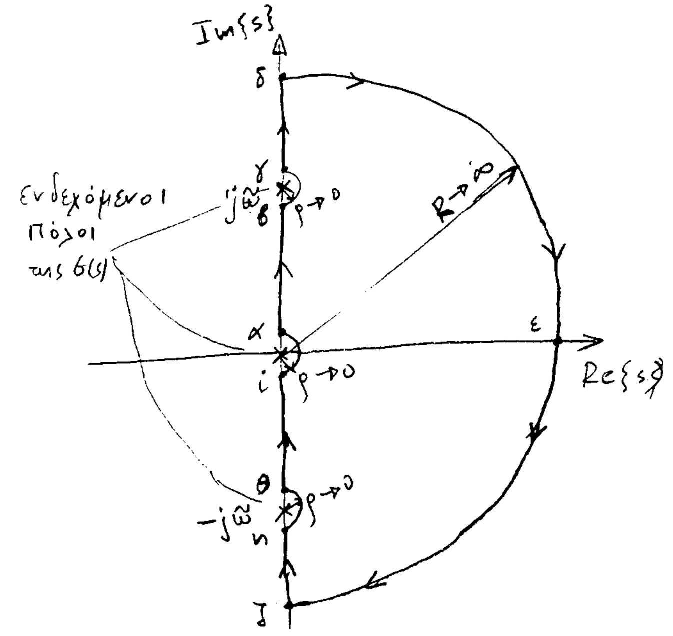
(α) είναι αναλυτική (δηλαδή συνεχώς διαφορίσιμη) σε όλα τα άλλα σημεία του μιγαδικού επιπέδου s ή z εκτός από τους πόλους της (ιδιάζοντα σημεία της G).

(β) απεικονίζει κάθε κλειστή καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου s ή z σε μία κλειστή καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου $G(s)$ ή $G(z)$.

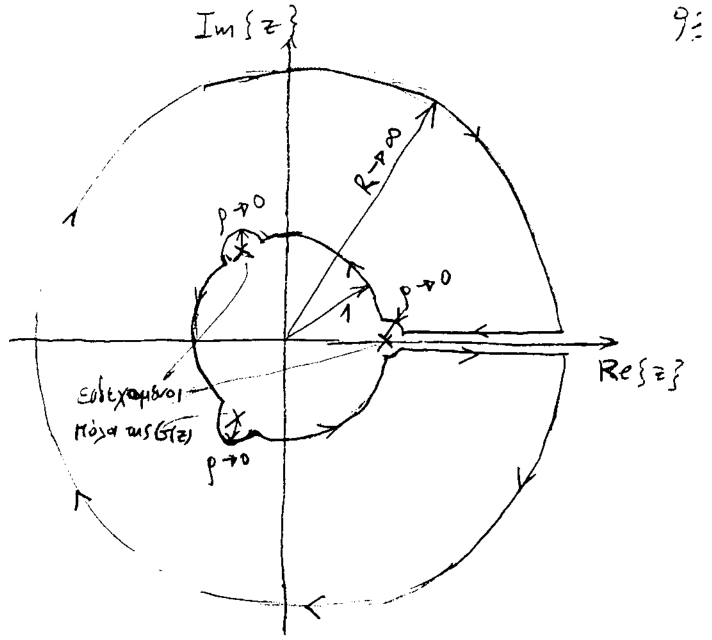
(γ) είναι σύμμορφη απεικόνιση, δηλαδή η γωνία μεταξύ δύο τεμνομένων καμπυλών του επιπέδου s ή z διατηρείται αμετάβλητη κατά την απεικόνιση των καμπυλών στο επίπεδο $G(s)$ ή $G(z)$.

8.2 Η διαδρομή Nyquist

- Για συστήματα σ.χ. είναι κλειστή καμπύλη που περικλείει όλο το δεξιό ημιεπίπεδο μαζί με τον φανταστικό άξονα εκτός ενδεχόμενων πόλων της $G(s)$ πάνω στον φανταστικό άξονα
- Για συστήματα δ.χ. είναι κλειστή καμπύλη που περικλείει όλο το επίπεδο z εκτός του εσωτερικού του μοναδιαίου κύκλου και ενδεχόμενων πόλων της $G(z)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.



διαδρομή Nyquist για συστήματα σ.χ.



διαδρομή Nyquist για συστήματα δ.χ.

τμήμα αβ : $s = j\omega$, $\omega \in (0, \tilde{\omega})$

-॥- βγ : $s = \lim\limits_{\rho \to 0} \{ j\tilde{\omega} + \rho e^{j\theta} \}$, $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

-॥- γδ : $s = j\omega$, $\omega \in (\tilde{\omega}, \infty)$

-॥- δεζ : $s = \lim\limits_{R \to \infty} \{ R e^{(-)j\theta} \}$, $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

-॥- ζη : $s = j\omega$, $\omega \in (-\infty, -\tilde{\omega})$

-॥- ηθ : $s = \lim\limits_{\rho \to 0} \{ -j\tilde{\omega} + \rho e^{j\theta} \}$, $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

-॥- θi : $s = j\omega$, $\omega \in (-\tilde{\omega}, 0)$

-॥- iα : $s = \lim\limits_{\rho \to 0} \{ \rho e^{j\theta} \}$, $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

8.3 Το διάγραμμα Nyquist

Το διάγραμμα Nyquist της G(s) ή της G(z) :

(α) είναι η κλειστή καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου G(s) ή G(z) που προκύπτει απεικονίζοντας την διαδρομή Nyquist μέσω της G(s) ή G(z).

(β) αν το πολικό διάγραμμα της G(s) ή της G(z) είναι κλειστή γραμμή, τότε το διάγραμμα Nyquist ταυτίζεται με το πολικό διάγραμμα.

(γ) αν όχι, τότε το πολικό διάγραμμα συμπληρώνεται με τις εικόνες των τόξων γύρω από τους πόλους του φανταστικού άξονα.

(δ) το επ' άπειρο τόξο συνήθως απεικονίζεται σε ένα σημείο του επιπέδου G(s) ή G(z) το οποίο ταυτίζεται με το επ' άπειρο σημείο του πολικού διαγράμματος.

(ε) αν η G(s) δεν έχει πόλους πάνω στον φανταστικό άξονα τότε το διάγραμμα Nyquist ταυτίζεται με το πολικό διάγραμμα.

8.4 Χάραξη διαγραμμάτων Nyquist συστημάτων σ.χ.

$$G(s)=\frac{\alpha_0+\alpha_1 s+\dots+\alpha_m s^m}{b_0+b_1 s+\dots+b_n s^n},\quad n\geq m \quad\Longrightarrow\quad G(j\omega)=\frac{\alpha_0+\alpha_1(j\omega)+\dots+\alpha_m(j\omega)^m}{b_0+b_1(j\omega)+\dots+b_n(j\omega)^n}$$

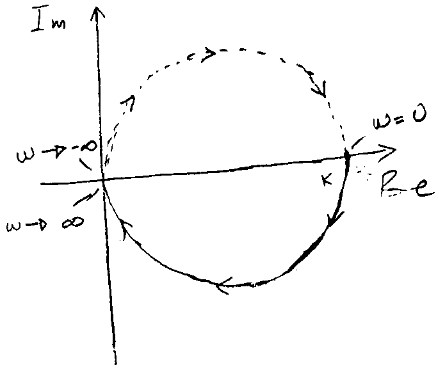
A) Αν το σύστημα δεν έχει πόλους πάνω στον φανταστικό άξονα

$$G(j0)=\frac{\alpha_0}{b_0}$$

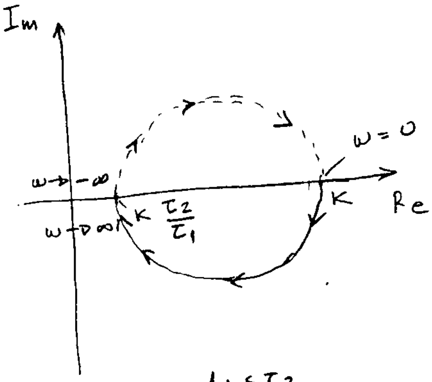
$$\lim_{R\to\infty}\{G(Re^{j\theta})\}=\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{R^{n-m}}\cdot\frac{\frac{\alpha_0}{R^m}+\frac{\alpha_1 e^{j\theta}}{R^{m-1}}+\dots+\frac{\alpha_{m-1}e^{j(m-1)\theta}}{R}+\alpha_m e^{jm\theta}}{\frac{b_0}{R^n}+\frac{b_1 e^{j\theta}}{R^{n-1}}+\dots+\frac{b_{n-1}e^{j(n-1)\theta}}{R}+b_n e^{jn\theta}}\right\}=\begin{cases}0 & \text{αν } n>m\\ \frac{\alpha_n}{b_n} & \text{αν } n=m\end{cases}$$

$\Longrightarrow$ το διάγραμμα Nyquist ταυτίζεται με το πολικό διάγραμμα.

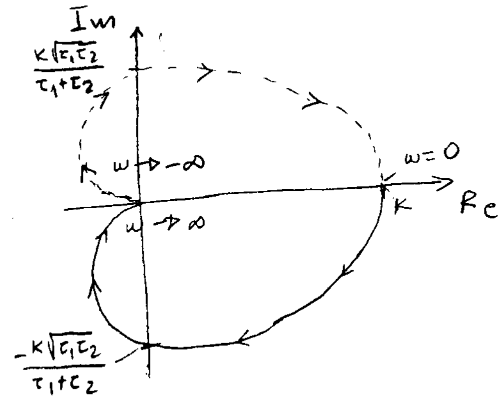
Παραδείγματα: $K>0,\ \tau_i>0,\ i=1,2,\dots$



$$G(s)=\frac{K}{1+s\tau_1}$$



$$G(s)=K\frac{1+s\tau_2}{1+s\tau_1}$$



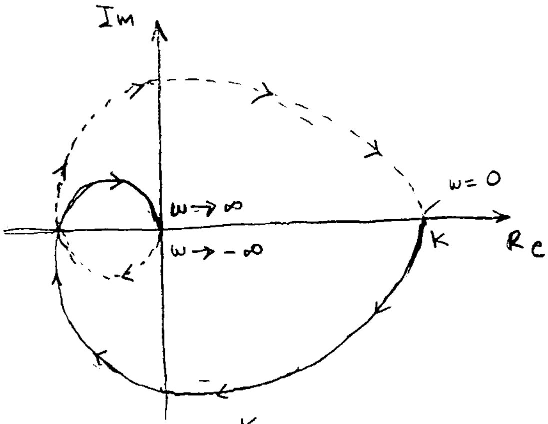
$$G(s)=\frac{K}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}=\frac{K}{1-\omega^2\tau_1\tau_2+j\omega(\tau_1+\tau_2)}=\frac{K\left(1-\omega^2\tau_1\tau_2-j\omega(\tau_1+\tau_2)\right)}{(1-\omega^2\tau_1\tau_2)^2+\omega^2(\tau_1+\tau_2)^2}$$

$$G(j0)=K,\quad \lim_{\omega\to\infty}\{G(j\omega)\}=0$$

$$X(\hat\omega)=0\Rightarrow\hat\omega=0,\quad R(0)=K\Rightarrow (K,0)$$

$$R(\tilde\omega)=0\Rightarrow\tilde\omega=\pm\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}},\quad X(\tilde\omega)=\frac{K\tilde\omega(\tau_1+\tau_2)}{\tilde\omega^2(\tau_1+\tau_2)^2}=\frac{\pm K\sqrt{\tau_1\tau_2}}{\tau_1+\tau_2}$$



$$G(s)=\frac{K}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}$$

$$G(j0)=K,\quad \lim_{\omega\to\infty}\{G(j\omega)\}=0$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{(1-\omega^2\tau_1\tau_2+j\omega(\tau_1+\tau_2))(1+j\omega\tau_3)}=\frac{K}{1-\omega^2(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)+j\omega(\tau_1+\tau_2+\tau_3-\omega^2\tau_1\tau_2\tau_3)}$$

$$X(\hat\omega)=0\Rightarrow\begin{cases}\hat\omega=0, & R(0)=K\\ \hat\omega=\pm\sqrt{\frac{\tau_1+\tau_2+\tau_3}{\tau_1\tau_2\tau_3}}, & R(\hat\omega)=\frac{K\tau_1\tau_2\tau_3}{\tau_1\tau_2\tau_3-(\tau_1+\tau_2+\tau_3)*(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)}\end{cases}$$

$$R(\tilde\omega)=0\Rightarrow\tilde\omega=\pm\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3}},$$

$$X(\tilde\omega)=\dots$$

B) Αν το σύστημα έχει l πόλους στο 0 χωρίς άλλους πόλους στον φανταστικό άξονα.
(σύστημα τύπου l)

$$G(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_m s^m}{s^l (b_l + b_{l+1} s + \dots + b_n s^{n-l})}, \quad \text{δηλαδή} \quad b_0 = b_1 = \dots = b_{l-1} = 0$$

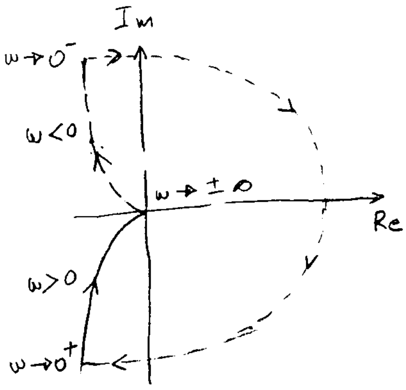
$$\lim_{R \to \infty} \{ G(Re^{j\theta}) \} = \begin{cases} 0 & \text{αν } n > m \\ \dfrac{\alpha_n}{b_n} & \text{αν } n = m \end{cases} \quad \text{(όπως προηγουμένως)}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \{ G(\rho e^{j\theta}) \} = \lim_{\rho \to 0} \left\{ \frac{\alpha_1 + \alpha_1 \rho e^{j\theta} + \dots + \alpha_m \rho^m e^{jm\theta}}{\rho^l e^{jl\theta} (b_l + b_{l+1} \rho e^{j\theta} + \dots + b_n \rho^{n-l} e^{j(n-l)\theta})} \right\} = e^{jl\theta} \infty, \quad \theta \in [-\tfrac{\pi}{2},$$

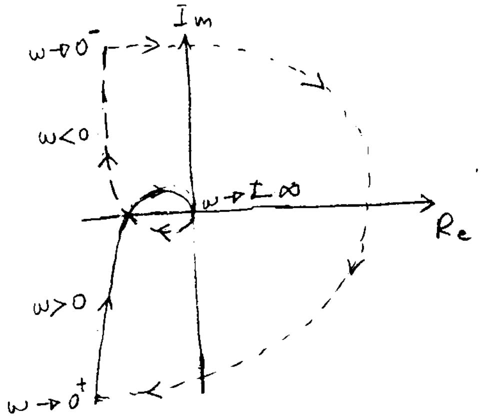
$\Longrightarrow$ διάγραμμα Nyquist $\neq$ πολικό διάγραμμα

διάγραμμα Nyquist $=$ πολικό διάγραμμα $+$ l ημικύκλια άπειρης ακτίνας.

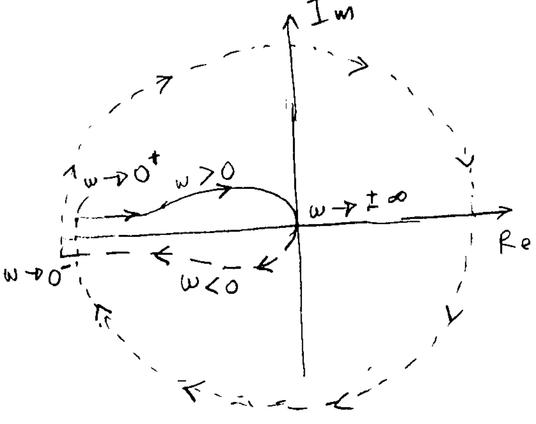
Παραδείγματα: $\kappa > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$



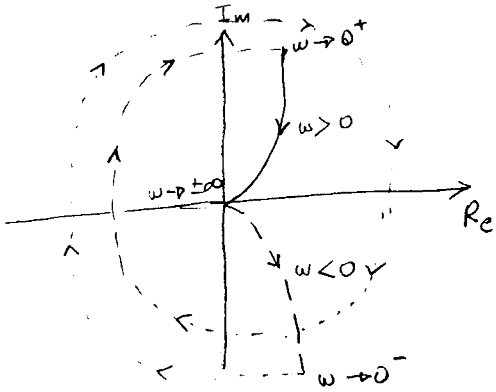
$$G(s) = \frac{\kappa}{s(1+s\tau_1)}$$



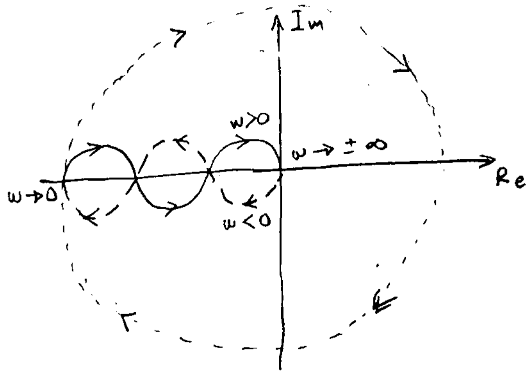
$$G(s) = \frac{\kappa}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$



$$G(s) = \frac{\kappa}{s^2(1+s\tau_1)}$$



$$G(s) = \frac{\kappa}{s^3(1+s\tau_1)}$$

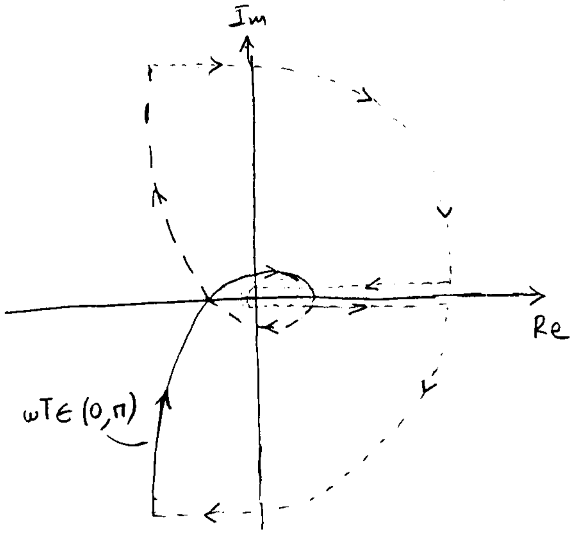


$$G(s) = \frac{\kappa(1+s\tau_4)(1+s\tau_5)}{s^2(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}$$

8.5 Χάραξη διαγραμμάτων Nyquist συστημάτων δ.χ.

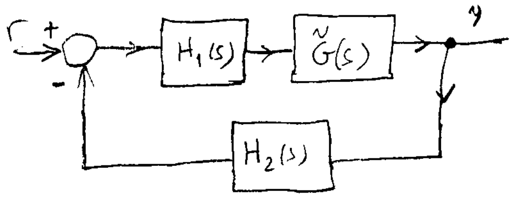
Γίνεται παρόμοια με αυτή των συστημάτων σ.χ. με βάση όμως τη διαδρομή Nyquist δ.χ.

Παράδειγμα: $G(z) = \dfrac{K}{(z-1)(z-q)}$, $q \in (0,1)$



$$G(e^{j\omega T}) = \frac{K}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}-q)}$$

8.6 Κριτήριο ευστάθειας Nyquist



συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου:

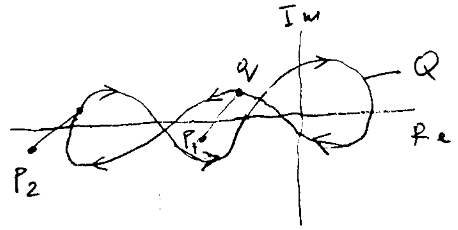
$$y = \tilde{G}(s) H_1(s) \left(r - H_2(s) y\right) \Rightarrow$$

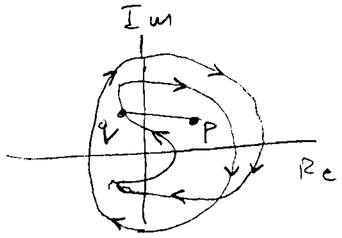
$$G(s) = \frac{y}{r} = \frac{\tilde{G}(s) H_1(s)}{1 + H_1(s) H_2(s) \tilde{G}(s)} = \frac{\tilde{G}(s) H_1(s)}{1 + G_o(s)}$$

συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου: $G_o(s) = H_1(s) H_2(s) \tilde{G}(s)$.

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist: από διάγραμμα Nyquist $G_o(s)$ συνάγει ευστάθεια $G(s)$

<u>Ορισμός</u>: Μια καμπύλη $Q \subset \mathbb{C}$ περιτριγυρίζει N φορές το σημείο $p \in \mathbb{C}$ κατά τη θετική (αρνητική) φορά αν το πέρας επιβατικής ακτίνας από το p μέχρι ένα σημείο $q \in Q$ περιστρέφεται δεξιόστροφα (αριστερόστροφα) κατά 360N μοίρες καθώς το q διαγράφει πλήρως την καμπύλη Q.





αριθμός περιτριγυρισμάτων

του p_1: $N_1 = -1$

του p_2: $N_2 = 0$

$N = 2$

Το κριτήριο ευστάθειας Nyquist βασίζεται στο ακόλουθο θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης

<u>Θεώρημα Cauchy</u>: Αν C είναι μία κλειστή καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου s, αν F(s) είναι μία ρητή συνάρτηση αναλυτική $\forall s \in C$ (δεν έχει πόλους πάνω στην C), και αν η Q περιτριγυρίζει αν Q είναι η εικόνα της C μέσω της F(s), την αρχή των αξόνων N φορές κατά την θετική φορά, τότε ισχύει

$$N = Z_F - P_F$$

όπου: Z_F είναι ο αριθμός των μηδενικών (ριζών) της F(s) μέσα στη C

P_F —''— —''— των πόλων της F(s) μέσα στη C.

<u>Πρόταση</u>: Η εικόνα Q της κλειστής καμπύλης C μέσω της $F(s) = 1 + \kappa W(s)$ περιτριγυρίζει την αρχή των αξόνων N φορές, αν και μόνο αν η εικόνα Q' της C μέσω της W(s) περιτριγυρίζει το σημείο $\left(-\frac{1}{\kappa}, 0\right)$ N φορές.

(Ίδιες διατυπώσεις για συστήματα δ.χ.)

Ας είναι: C η διαδρομή Nyquist συνεχούς ή διακριτού χρόνου

$F(s)$ (ή $F(z)$) ο παρονομαστής της $G(s)$ (ή $G(z)$):

$$F(s) = 1+G_0(s) = 1+H_1(s)H_2(s)\tilde{G}(s)$$

$$\left(\text{ή} \quad F(z) = 1+G_0(z) = 1+H_1(z)H_2(z)\tilde{G}(z)\right)$$

Τότε το Θεώρημα Cauchy $\Rightarrow$

<u>Κριτήριο ευστάθειας Nyquist</u>: Αν το διάγραμμα Nyquist της $G_0(s) = H_1(s)H_2(s)\tilde{G}$ (ή $G_0(z) = H_1(z)H_2(z)\tilde{G}(z)$) περιτριγυρίζει το σημείο $(-1,0)$ N φορές κατά την θετική φορά, τότε ισχύει: $N = Z - P_0$

όπου Z = αριθμός ριζών της $1+G_0(s)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο (ή της $1+G_0(z)$ εκτός του μοναδιαίου κύκλου) $(Z \geq 0)$

P_0 = αριθμός πόλων της $G_0(s)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο (ή της $G_0(z)$ εκτός του μοναδιαίου κύκλου) $(P_0 \geq 0)$

Άρα το σύστημα κλειστού βρόχου είναι "ευσταθές" αν και μόνο αν ισχύει

$Z=0$, δηλαδή $N = -P_0$.

Παρατήρηση 1: Αν είναι $G_0(s) = K\hat{G}(s)$ τότε το κριτήριο ευστάθειας Nyquist ισχύει με N τον αριθμό περιτριγυρισμάτων του σημείου $(-\frac{1}{K}, 0)$ από το διάγραμμα Nyquist της $\hat{G}(s)$.

Παρατήρηση 2: Αν N_0 είναι ο αριθμός περιτριγυρισμάτων του σημείου $(0,0)$ από το διάγραμμα Nyquist της $G_0(s)$, τότε

$$\text{Θ. Cauchy} \Rightarrow N_0 = Z_0 - P_0$$

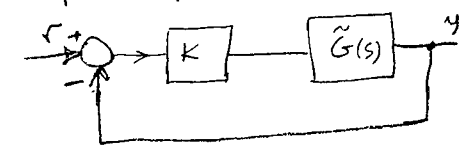
όπου Z_0 είναι ο αριθμός μηδενικών της $G_0(s)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Αν $\bar{N}_0$ είναι ο αριθμός περιτριγυρισμάτων του σημείου $(0,0)$ από το διάγραμμα Nyquist του αριθμητή $\alpha_0(s)$ της $G_0(s)$, τότε

$$\text{Θ. Cauchy} \Rightarrow \bar{N}_0 = Z_0$$

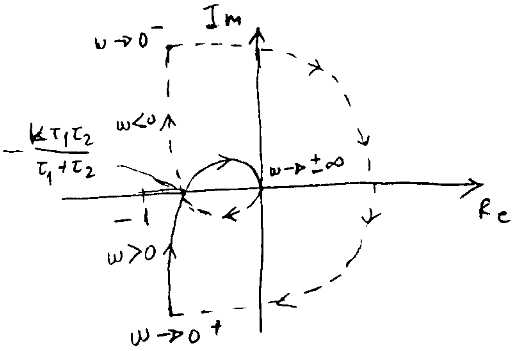
Τελικά: $$P_0 = Z_0 - N_0 = \bar{N}_0 - N_0.$$

Παράδειγμα :



$$\tilde G(s) = \frac{1}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \qquad \left(H_1(s)=K,\ H_2(s)=1\right),\ \tau_1>0, \tau_2>0$$

$$G_0(s) = \frac{K}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$



διάγραμμα Nyquist της $G_0(s)$

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)} = -\frac{Kj}{\omega\left(1-\omega^2\tau_1\tau_2+j\omega(\tau_1+\tau_2)\right)}$$

$$= -\frac{Kj\left(1-\omega^2\tau_1\tau_2-j\omega(\tau_1+\tau_2)\right)}{\omega\left[(1-\omega^2\tau_1\tau_2)^2+\omega^2(\tau_1+\tau_2)^2\right]}$$

$$= \frac{-K\omega(\tau_1+\tau_2) - jK(1-\omega^2\tau_1\tau_2)}{\omega\left[(1-\omega^2\tau_1\tau_2)^2+\omega^2(\tau_1+\tau_2)^2\right]} = R(\omega)+jX(\omega)$$

σημείο τομής του διαγράμματος Nyquist με τον πραγματικό άξονα:

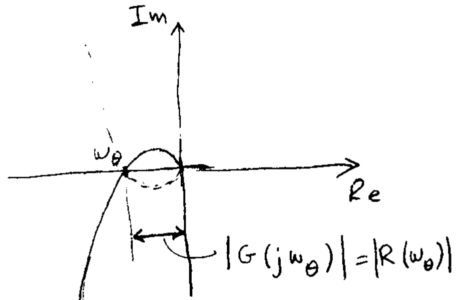
$$X(\hat\omega)=0 \iff \hat\omega^2\tau_1\tau_2=1 \iff \hat\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

$$R(\hat\omega) = \frac{-K\cancel{\hat\omega}(\tau_1+\tau_2)}{\cancel{\hat\omega}\left[(1-\hat\omega^2\tau_1\tau_2)^2+\hat\omega^2(\tau_1+\tau_2)^2\right]} = -\frac{K(\tau_1+\tau_2)}{\frac{(\tau_1+\tau_2)^2}{\tau_1\tau_2}} = -\frac{K\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}.$$

Σύστημα κλειστού βρόχου ευσταθές $\iff N=Z=0$ (διότι $P_0=0$)

$$\iff -1 < -\frac{K\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2} \iff K < \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}$$

8.7 Περιθώριο κέρδους και φάσης



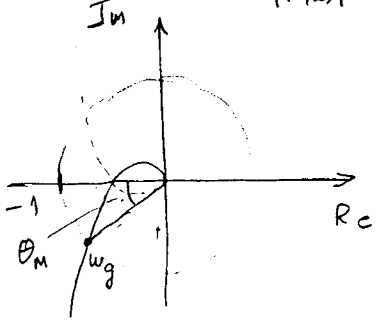
περιθώριο κέρδους :

$$g_M = \frac{1}{|G(j\omega_\theta)|} \qquad \text{όπου } \omega_\theta \text{ τ.ω. } \arg\{G(j\omega_\theta)\} = -180^\circ$$

δηλ. $\mathrm{Im}\{G(j\omega_\theta)\}=0$

άρα $g_M = \dfrac{1}{|R(\omega_\theta)|}$ στο σημείο τομής του διαγράμματος με τον πραγματικό άξονα

(παράδειγμα: $g_M = \dfrac{1}{|R(\hat\omega)|} = \dfrac{\tau_1+\tau_2}{|K|\tau_1\tau_2}$)



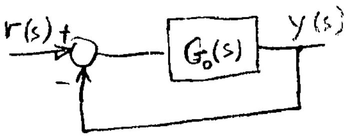
περιθώριο φάσης :

$$\theta_M = 180^\circ + \arg\{G(j\omega_g)\}, \text{ όπου } \omega_g \text{ τ.ω. } |G(j\omega_g)|=1$$

= η γωνία μεταξύ του ημιάξονα $-\mathrm{Re}$ και του σημείου όπου ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα 1 τέμνει το διάγραμμα.

Συστήματα δ.χ. : τα ίδια με $G(e^{j\omega T})$ αντί της $G(j\omega)$.

8.8. Μ-κύκλοι και Ν-κύκλοι



συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου: $G_{κλ}(s) = \dfrac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$

$$\Rightarrow \quad G_{κλ}(j\omega) = |G_{κλ}(j\omega)|\, e^{j\varphi_{κλ}(\omega)},$$

$$|G_{κλ}(j\omega)| = \left|\frac{G_o(j\omega)}{1+G_o(j\omega)}\right|, \quad \varphi_{κλ}(\omega) = \arctan\left\{\frac{Im\{G_{κλ}(j\omega)\}}{Re\{G_{κλ}(j\omega)\}}\right\}$$

όμως $G_o(j\omega) = R_o(\omega) + j X_o(\omega)$

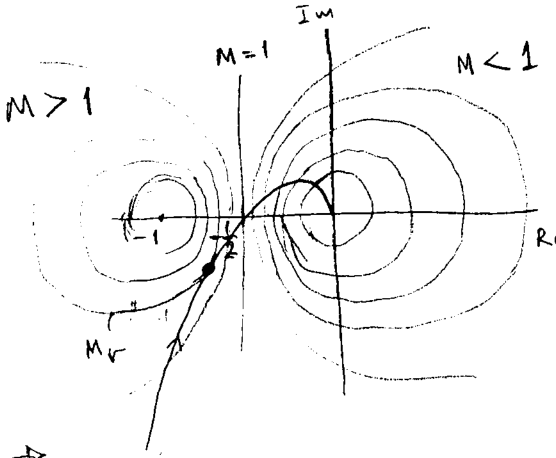
Μ-κύκλος: Γεωμετρικός τόπος σημείων όπου $|G_{κλ}(j\omega)| = M$:

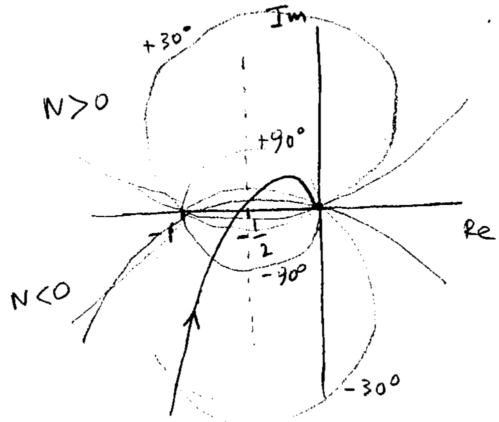
$$|G_{κλ}(j\omega)|^2 = \left|\frac{R_o(\omega)+jX_o(\omega)}{1+R_o(\omega)+jX_o(\omega)}\right|^2 = \frac{R_o^2+X_o^2}{(1+R_o)^2+X_o^2} = M^2 \Leftrightarrow R_o^2 + X_o^2 = M^2(1+R_o^2+2R_o) + M^2X_o^2$$

$$\Leftrightarrow R_o^2(M^2-1) + X_o^2(M^2-1) + 2M^2R_o + M^2 = 0 \Leftrightarrow R_o^2 + 2\frac{M^2}{M^2-1}R_o + X_o^2 + \frac{M^2}{M^2-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(R_o + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + X_o^2 = \frac{M^4}{(M^2-1)^2} - \frac{M^2}{M^2-1} = \frac{M^2}{M^2-1}\left(\frac{M^2}{M^2-1} - 1\right) = \frac{M^2}{M^2-1}\left(\frac{M^2-M^2+1}{M^2-1}\right) = \frac{M^2}{(M^2-1)^2}$$

δηλαδή κύκλος κέντρου $\left(-\dfrac{M^2}{M^2-1}, 0\right)$ και ακτίνας $\left|\dfrac{M}{M^2-1}\right|$





Ν-κύκλος: Γεωμετρικός τόπος σημείων όπου $\dfrac{Im\{G_{κλ}(j\omega)\}}{Re\{G_{κλ}(j\omega)\}} = N$:

$$G_{κλ}(j\omega) = \frac{R_o(\omega)+jX_o(\omega)}{1+R_o(\omega)+jX_o(\omega)} = \frac{(R_o+jX_o)(1+R_o-jX_o)}{(1+R_o)^2+X_o^2} = \frac{R_o(1+R_o)+X_o^2+jX_o(1+\cancel{R_o}-\cancel{R_o})}{(1+R_o)^2+X_o^2} = \frac{R_o^2+R_o+X_o^2+jX_o}{(1+R_o)^2+X_o^2}$$

$$\Rightarrow \frac{X_o}{R_o^2+R_o+X_o^2} = N \Leftrightarrow R_o^2 + R_o + X_o^2 - \frac{X_o}{N} = 0 \Leftrightarrow \left(R_o+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(X_o - \frac{1}{2N}\right)^2 - \frac{1}{4N^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(R_o+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(X_o-\frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{N^2}\right)$$

δηλαδή κύκλος κέντρου $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2N}\right)$ και ακτίνας $\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{N^2}}$

Μέγιστο πλάτος σε συντονισμό M_r = το M του M-κύκλου που εφάπτεται στο πολικό διάγραμμα της $G_o(s)$