Δευτέρα 21/3/22 6η Διάλεξη: Κοκκίνης 3η

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Μέθοδος διχοτόμησης
2. Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης
3. Γενική επαναληπτική μέθοδος

$f(x)=0 \quad (1)$

Ισχυρίζομαι ότι η (1) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα σε μορφή $\boxed{x=g(x)}$ (2)

$$
\begin{aligned}
0 &= f(x)\\
+\; x &= x\\
\hline
x &= \underbrace{f(x)+x}_{g(x)}
\end{aligned}
$$

* Δεν θα είναι όλοι αναγκαστικά της μορφής $x=x+cf(x)$

Δεκτό, αλλά όχι μοναδικό, αφού:

$f(x)=0$

$cf(x)=0$, $c\neq 0$ σταθερά

$x=\underbrace{x+cf(x)}_{g(x)}$

Άρα μπορεί να γραφτεί με άπειρους τρόπους *

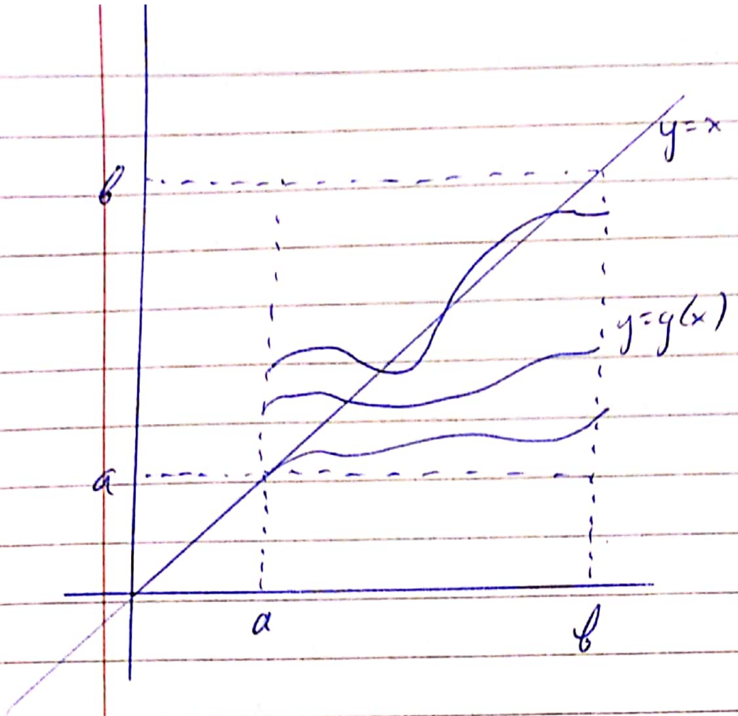
Ορισμός 1: Ένα σημείο $\bar{x}$ του π.ο. της g ονομάζεται σταθερό σημείο της g αν $g(\bar{x})=\bar{x}$

π.χ.: $g(x)=x^3$, σταθερά σημεία: $-1, 0, 1$

$g(x)=x$, άπειρα

$g(x)=x+1$, κανένα

Πρόταση 1: Κάθε συνεχής συνάρτηση $g:[a,b]\to[a,b]$ έχει στο διάστημα $[a,b]$ τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.



Απόδειξη

Αν $g(b)=a$ η $g(b)=b$ τότε η πρόταση ισχύει

Αν $g(a)\neq a$ & $g(b)\neq b$ ορίζουμε
$h(x):=g(x)-x,\quad x\in[a,b]$

h συνεχής στο $[a,b]$,

$$h(a)h(b)=(g(a)-a)(g(b)-b)<0 \rightsquigarrow \exists\, \bar{x}\in[a,b]: \quad h(\bar{x})=0 \text{ ή } g(\bar{x})=\bar{x} \quad //$$

Θεωρώ αρχική τιμή x_0 (δοθέν)

Υπολογίζω: $x_1=g(x_0)$
$x_2=g(x_1)$
$\vdots$
$x_{k+1}=g(x_k)$
$\vdots$

Αν $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{x}$ και g συνεχής:

$$\bar{x}=\lim_{x\to+\infty} x_{k+1}=\lim_{x\to+\infty} g(x_k)=g(\bar{x}), \quad \text{δηλ. } \bar{x}=g(\bar{x})$$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Γενική Επαναληπτική Μέθοδος ή Μέθοδος σταθερού σημείου.

Εφόσον έχω άπειρες (2) που να αντιστοιχούν στην (1), έχω και άπειρες τέτοιες μεθόδους.

(fixed point iteration)

$$\boxed{\begin{array}{c} x_{k+1}=g(x_k),\quad k=0,1,2 \\ x_0 \text{ δοθέν} \end{array}} \quad (3)$$

Παράδειγμα: Για την προσέγγιση της θετικής ρίζας $\bar{x}=3$ της εξίσωσης $f(x)=x^2-2x-3=0$ θεωρούμε τις εξής 3 γενικές επαναληπτικές μεθόδους:

I) $x=g_1(x)=\sqrt{2x+3}$ (κρατάω τη θετική)

II) $x=g_2(x)=\frac{x^3-3}{2}$

III) $x=g_3(x)=x-\frac{1}{4}(x^2-2x-3)$

I) $x_{k+1}=g_1(x_k)=\sqrt{2x_k+3}$, $k=0,1,2$

Διαλέγω $x_0=4$ (για όλες) (Θα συζητήσουμε αργότερα την επιλογή του x_0)

$x_1=g_1(x_0)=\sqrt{11}\simeq 3.316$

$x_2=g_1(x_1)=\sqrt{2\sqrt{11}+3}\simeq\sqrt{2\sqrt{3.316}+3}\simeq 3.104$

$x_3=g_1(x_2)=3.034$

$x_4=3.011$

Φαίνεται διαισθητικά ότι $k\to\infty \Rightarrow \bar{x}=3$, Σύγκλιση

II) $x=g_2(x)=\frac{x^2-3}{2}$,

$x_{k+1}=g_2(x_k)=\frac{x_k^2-3}{2}$, $k=0,1,2$

$x_1=g_2(x_0)=\frac{4^2-3}{2}=6.5$

$x_2=g_2(x_1)=19.625$

$x_3=g_2(x_2)=191.07$

Φαίνεται διαισθητικά, απόκλιση

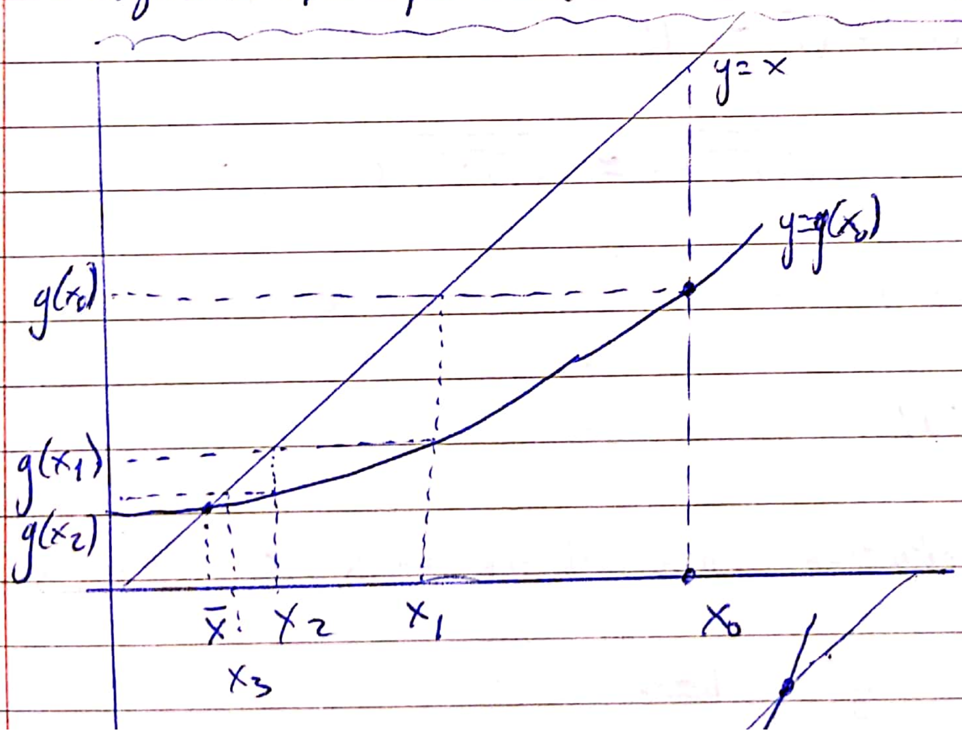
III) $x_{k+1} = g_3(x_k), \quad k=0,1,2$

$$= x_k - \frac{1}{4}(x_k^2 - 2x_k + 3)$$

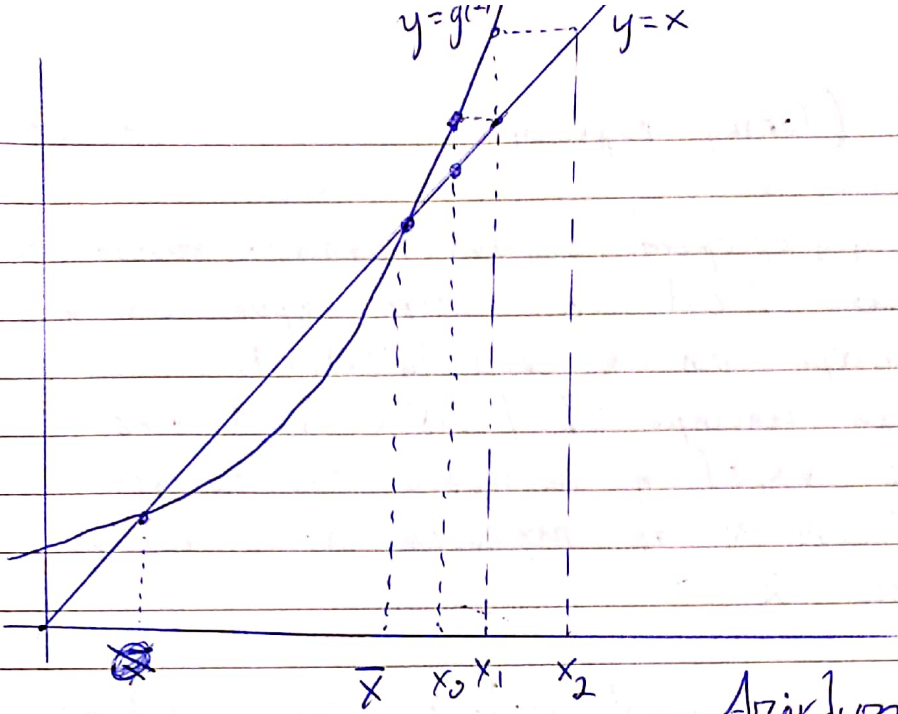
$x_1 = 275$
$x_2 = 2.984375$
$x_3 = 2.999938$
$x_4 = 2.9999999$

Συγκλίνει, και ταχύτερα από την (I)

Συμπεραίνουμε ότι δε συγκλίνουν όλες, και δε συγκλίνουν με την ίδια ταχύτητα.

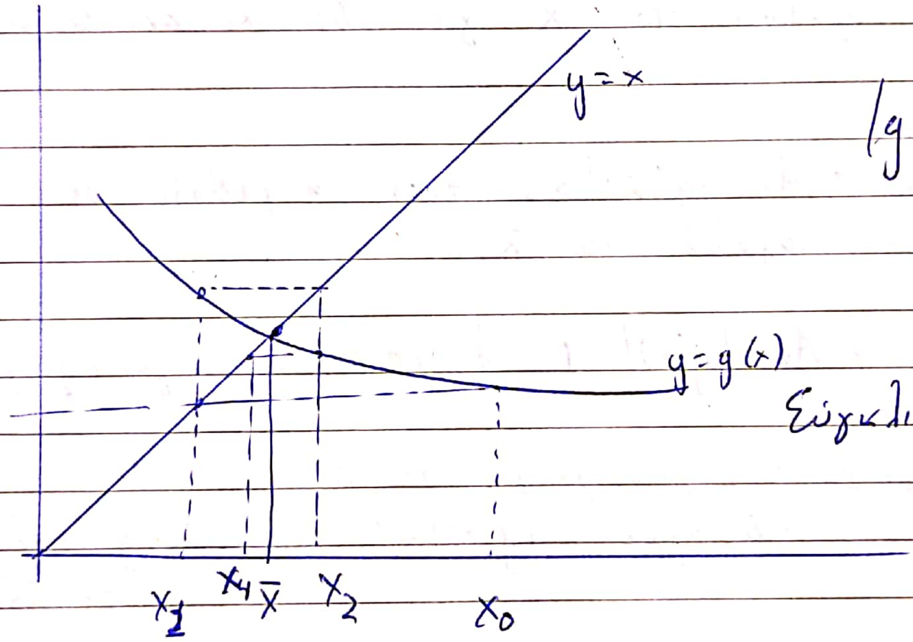


$|g'(\bar{x})| < 1$



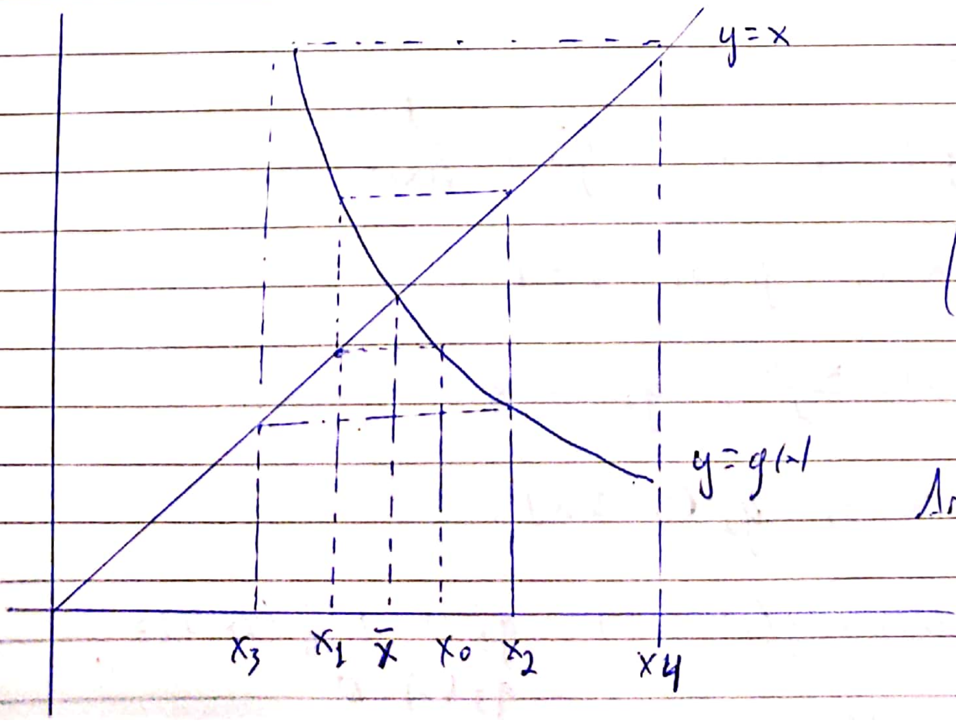
$|g'(x)| > 1$

Αποκλίνει



$|g'(x)| < 1$

Συγκλίνει



$|g'(x)| > 1$

Αποκλίνει

Θεώρημα 1 (Τοπική σύγκλιση)

Θεωρούμε g ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}$. Έστω $\bar{x} \in A$ ένα σταθερό σημείο της g, g παραγωγίσιμη στο $\bar{x}$ και $|g'(\bar{x})| < 1$.
Τότε υπάρχει διάστημα $I = [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \subset A$, $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x_0 \in I$, η ακολουθία που παράγεται από τη Γ.Ε.Μ. (3) να περιέχεται στο I και να συγκλίνει στο $\bar{x}$.

Εναλλακτικά θα γράφουμε: Η ακολουθία της επαναληπτικής μεθόδου συγκλίνει στο $\bar{x}$ για κάθε x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$.

~~Μειονεκτ~~

Παρατήρηση:
- Αν $|g'(\bar{x})| > 1$ τότε η μέθοδος δε συγκλίνει στο $\bar{x}$
- Αν $|g'(x)| = 1$ δε μπορούμε να γνωρίζουμε.

Μειονεκτήματα:
- δε γνωρίζουμε το δ
- Θέλουμε $|g'(\bar{x})| < 1$, ενώ δε γνωρίζουμε το $\bar{x}$.

Παράδειγμα

(I) $g_1(x) = \sqrt{2x+3}$, $g_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

$\bar{x} = 3$, $g_1'(3) = \frac{1}{3} < 1$

(II) $g_2(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$, $g_2'(x) = x$

$\bar{x} = 3$, $g_2'(3) = 3 > 1$

(III) $g_3(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 3)$, $g_3'(x) = 1 - \frac{1}{4}(2x - 2) =$

$g_3'(3) = 0$

Άρα συγκλίνει $\forall x_0$ αρκετά κοντά στο 3.

Άσκηση

Η συνάρτηση $g(x) = x^2 + \frac{4}{25}$ έχει 2 σταθερά σημεία $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$.
Η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2$

α) συγκλίνει στο $\bar{x}_1$ για κάθε x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}_1$

β) -//- στο $\bar{x}_2$ -//- x_0 -//- στο $\bar{x}_2$

γ) Όλα τα παραπάνω

δ) Κανένα από τα παραπάνω.