Σχολη ΗΜ&ΜΥ, ΕΜΠ

ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Καθ. Πετρος Μαραγκος

Βασικα Σηματα (ΔΧ, ΣΧ)
Κρουστικη (Dirac) συναρτηση
Μιγαδικα Ημιτονοειδη/Εκθετικα, Phasors
Απλες πραξεις σηματων

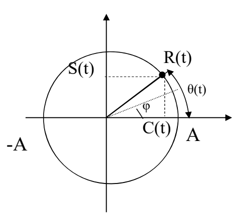
1

Βασικα Σηματα

- Πραγματικα Ημιτονοειδη, Εκθετικα
- Βηματικη, Κρουστικη συναρτηση
- Συνεχους Χρονου (ΣΧ)
- Διακριτου Χρονου (ΔΧ)

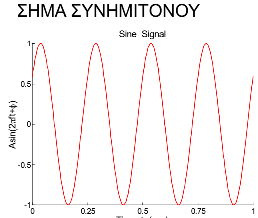
2

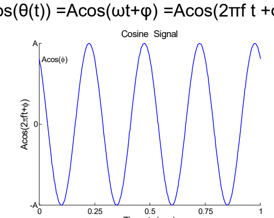
ΣΗΜΑ ΗΜΙΤΟΝΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ



R(t) = θέση σημείου κινούμενου επί κύκλου ακτίνας A
με σταθερή ταχύτητα
C(t) = προβολή σημείου R(t) στον οριζόντιο άξονα
S(t) = προβολή σημείου R(t) στον κατακόρυφο άξονα
θ(t) = ΓΩΝΙΑ = ωt+φ = γωνία σε ακτίνια του σημείου R
φ = ΦΑΣΗ = αρχική γωνία του σημείου R = θ(0)
ω = ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ / ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ = 2πf =
$= \dfrac{\text{διαγραφόμενη γωνία εντός } [t_1,t_2]}{t_2-t_1}$ (rad/sec)

ΣΗΜΑ ΗΜΙΤΟΝΟΥ = S(t) = Asin(θ(t)) = Asin(ωt+φ) = Asin(2πf t +φ)
ΣΗΜΑ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ = C(t) = Acos(θ(t)) =Acos(ωt+φ) =Acos(2πf t +φ)



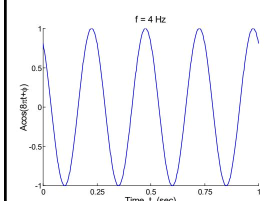


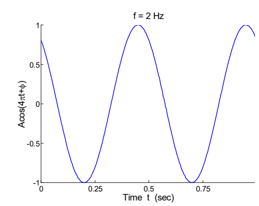
3

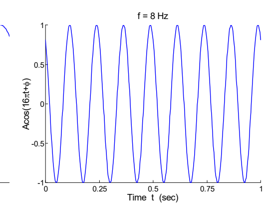
ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΗΜΑΤΑ : x(t) = Acos(2πf t + φ)

Μοντελοποιούν αποκρίσεις συστημάτων ελεύθερης ταλάντωσης χωρίς απόσβεση

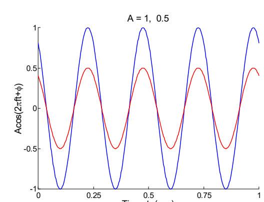
- Μεταβολή Συχνότητας f = ω/2π



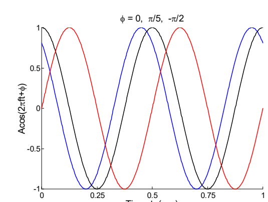




- Μεταβολή Πλάτους A



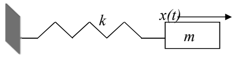
- Μεταβολή Φάσης φ



4

ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

- **Μηχανικό Σύστημα**



m = μάζα

k = stiffness (δυσκαμψία)

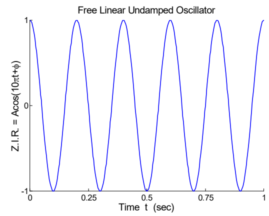
1/k = C = compliance (ευκαμψία)

- **Εξίσωση Κίνησης**: (Μάζα x ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ) + (Δυσκαμψία x ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ) = 0

Δύναμη Αδράνειας — Δύναμη Ελατηρίου

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) \quad + \quad kx(t) \; = \; 0$$

- **ΣΗΜΑ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ** : x(t) = A cos(2πf_0 t + φ)



- Σταθερές συστήματος (m, k) → ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ταλάντωσης = f_0 = $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{mC}}$ (Hz)

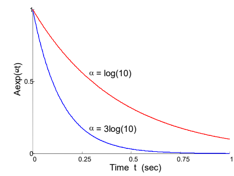
- Αρχικές Συνθήκες $\begin{pmatrix} x(0) = A\cos\varphi \\ x'(0) = -A\omega_0 \sin\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{A = ΠΛΑΤΟΣ ταλάντωσης} \\ \text{φ = ΦΑΣΗ ταλάντωσης} \end{cases}$

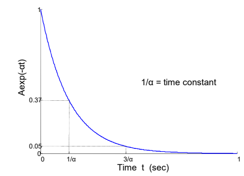
5

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ : x(t) = Aexp(-αt)

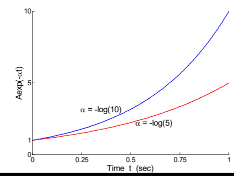
Μοντελοποιούν αποκρίσεις x(t) από συστήματα των οποίων ο ρυθμός χρονικής μεταβολής (dx/dt) είναι ανάλογος της στιγμιαίας τιμής της απόκρισης: dx/dt = -αx(t)

- α > 0 ⇒ εκθετική μείωση (απόσβεση)

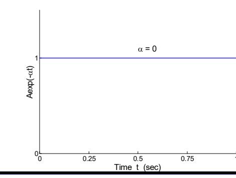




- α < 0 ⇒ εκθετική αύξηση



- α = 0 ⇒ σταθερό σήμα



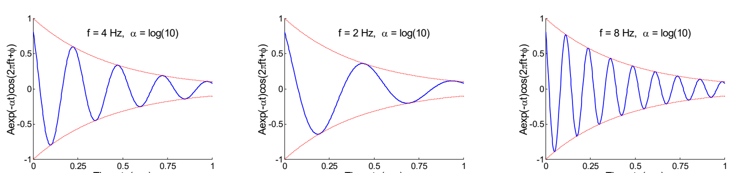
6

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

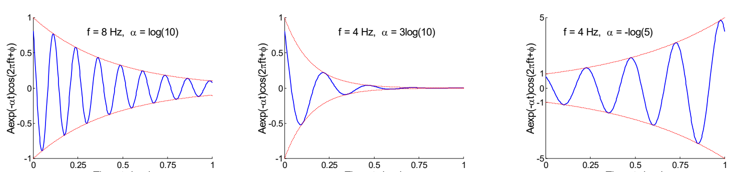
x(t) = Aexp(-αt)cos(2πf t + φ)

Μοντελοποιούν αποκρίσεις συστημάτων ελεύθερης ταλάντωσης με απόσβεση

- Μεταβολή Συχνότητας f



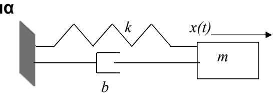
- Μεταβολή Απόσβεσης α



7

ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

- **Μηχανικό Σύστημα**



m = μάζα

k = δυσκαμψία ελατηρίου

b = συντελεστής τριβής

x(t) = μετατόπιση

- **Εξίσωση Κίνησης**

(Μάζα x ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ)+(Συντελ.Τριβής x ΤΑΧΥΤΗΤΑ)+(Δυσκαμψία x ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)=0

Δύναμη Αδράνειας — Δύναμη Τριβής — Δύναμη Ελατηρίου

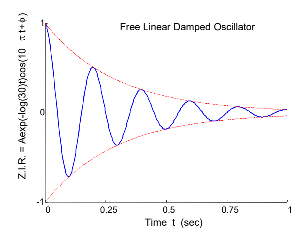
$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) \quad + \quad b\frac{dx}{dt}(t) \quad + \quad kx(t) \quad = 0$$

- Συχνότητα ταλάντωσης χωρίς απόσβεση: $\omega_0 = \sqrt{k/m},\ f_0 = \omega_0 / 2\pi$ (Hz)

- Σταθερά Απόσβεσης = α = b/2m

- Συντελεστής Ποιότητας = Q = ω_0/2α = πf_0/α

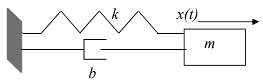
ΣΗΜΑ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ : x(t) = A exp(-αt) cos(2πf_dt+φ)



8

ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

- **Μηχανικό Σύστημα**



m = μάζα
k = δυσκαμψία ελατηρίου
b = συντελεστής τριβής
x(t) = μετατόπιση

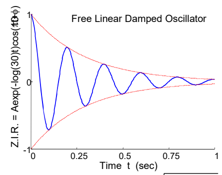
- **Εξίσωση Κίνησης**

(Μάζα x ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ)+(Συντελ.Τριβής x ΤΑΧΥΤΗΤΑ)+(Δυσκαμψία x ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)=0

Δύναμη Αδράνειας, Δύναμη Τριβής, Δύναμη Ελατηρίου

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}(t) + b\frac{dx}{dt}(t) + kx(t) = 0}$$

- Συχνότητα ταλάντωσης χωρίς απόσβεση:
  $\omega_0 = \sqrt{k/m},\ f_0 = \omega_0/2\pi$
- Σταθερά Απόσβεσης = α = b/2m
- Συντελεστής Ποιότητας = Q = ω_0/2α = πf_0/α



ΣΗΜΑ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ : x(t) = Aexp(-αt)cos(2πf_dt+φ)

- Παράμετροι συστήματος (m,b, k) →
- Αρχικές Συνθήκες $\left(x(0), \frac{dx}{dt}(0)\right)$ →

Συχνότητα Ταλάντωσης = f_d = $f_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$
Σταθερά Απόσβεσης = α (↔ Q)
Μέγιστο Πλάτος = A
Φάση = φ

9

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ x(t)

- ΑΠΕΙΡΟ ΜΗΚΟΣ
  - ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ: (t = χρόνος σε secs)
  - ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ
  - ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΑ, π.χ. , για t>0
    - ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΒΗΜΑ : u(t)
- ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΜΗΚΟΥΣ
  - ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΣ ΠΑΛΜΟΣ
- ΣΗΜΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΟΥ ΠΑΛΜΟΥ: δ(t)

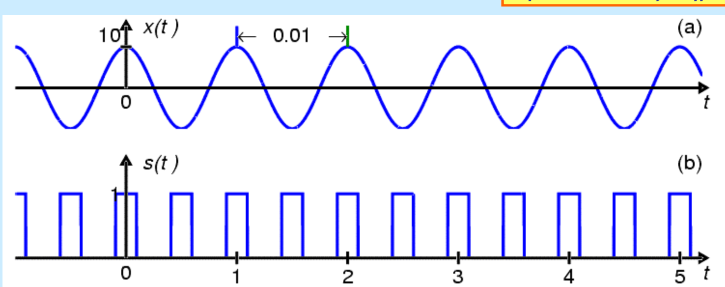
10

10

Σήματα Συνεχούς Χρόνου: ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

$x(t) = 10\cos(200\pi t)$

Ημιτονοειδές Σήμα



ΑΠΕΙΡΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Τετραγωνικό Κύμα

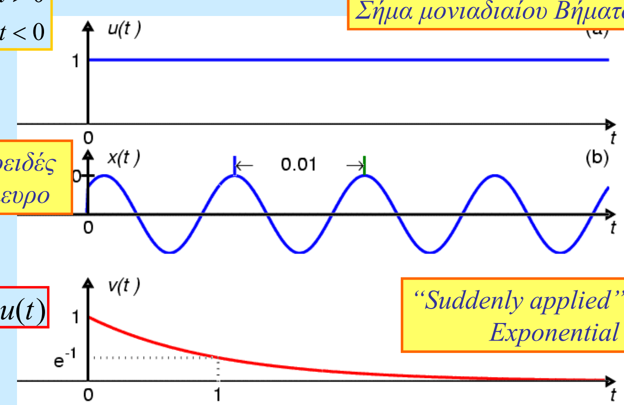
11

11

Σήματα Συνεχούς Χρόνου: Μονόπλευρα

$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Σήμα μοναδιαίου Βήματος



Ημιτονοειδές Μονόπλευρο

$v(t) = e^{-t}u(t)$

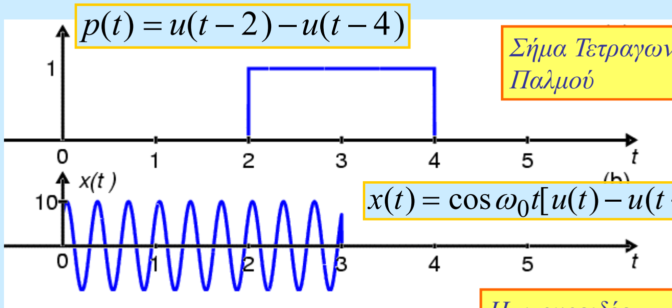
"Suddenly applied" Exponential

12

Σήματα Συνεχούς Χρόνου: ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΜΗΚΟΣ

$p(t) = u(t-2) - u(t-4)$

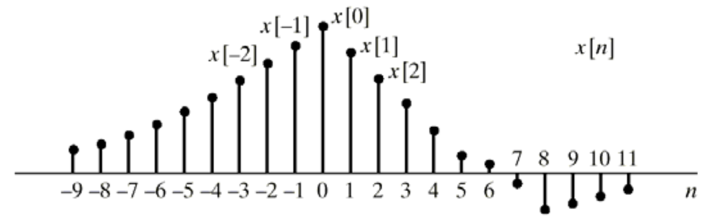
Σήμα Τετραγωνικού Παλμού



$x(t) = \cos\omega_0 t[u(t) - u(t-3)]$

Ημιτονοειδές πολλαπλασιασμένο με τετραγωνικό παλμό

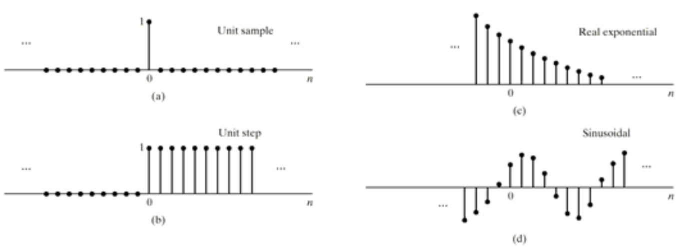
Σηματα Διακριτου Χρονου ειναι αριθμητικες Ακολουθιες



Βασικα Σηματα Διακριτου Χρονου

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

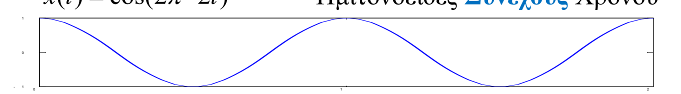
$$x[n] = \alpha^n$$



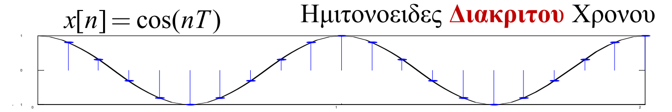
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \varphi)$$

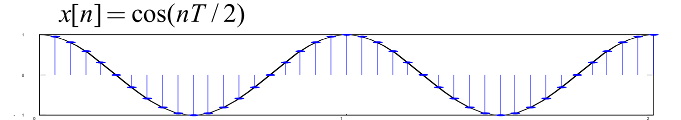
$x(t) = \cos(2\pi \cdot 2t)$ Ημιτονοειδες **Συνεχους** Χρονου



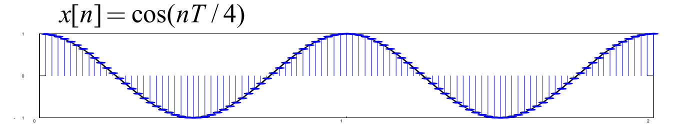
$x[n] = \cos(nT)$ Ημιτονοειδες **Διακριτου** Χρονου



$x[n] = \cos(nT/2)$



$x[n] = \cos(nT/4)$



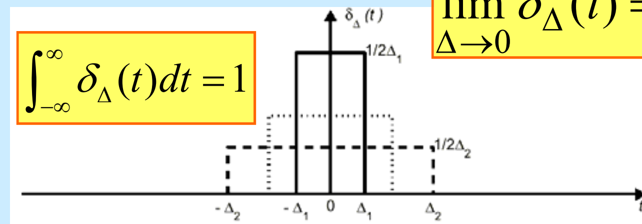
Dirac-Κρουστικη Συναρτηση

Τι είναι ένας κρουστικός παλμός; (η συνάρτηση Dirac)

- Ένα σήμα (μια κατανομή) συγκεντρωμένο(η) σε ένα σημείο

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta}(t)dt = 1$$



Ορισμός του Κρουστικού Παλμού

- Υποθέτουμε ότι οι ιδιότητες εφαρμόζονται στο όριο:

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

- Ένας "**ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΟΣ**" ορισμός είναι:

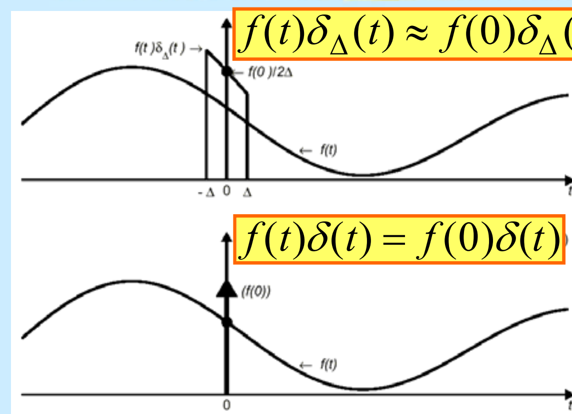
$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$ *Συγκεντρωμενος στο t=0*

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1$ *Μοναδιαιο εμβαδον*

Ιδιότητα Δειγματοληψίας

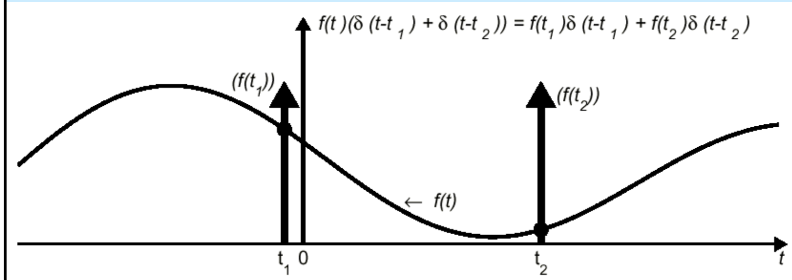
$$f(t)\delta_{\Delta}(t) \approx f(0)\delta_{\Delta}(t)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$



Γενική Ιδιότητα Δειγματοληψίας

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$



21

21

Ιδιότητες του Κρουστικού Παλμού

$$\delta(t)=0, \quad t \neq 0$$

Συγκεντρωμένος στο t=0

$$f(t)\delta(t-t_0)= f(t_0)\delta(t-t_0)$$

Ιδιότητα Δειγματοληψίας

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1$$

Μοναδιαία Επιφάνεια

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση είναι το ολοκλήρωμά του

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

Παράγωγος της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

22

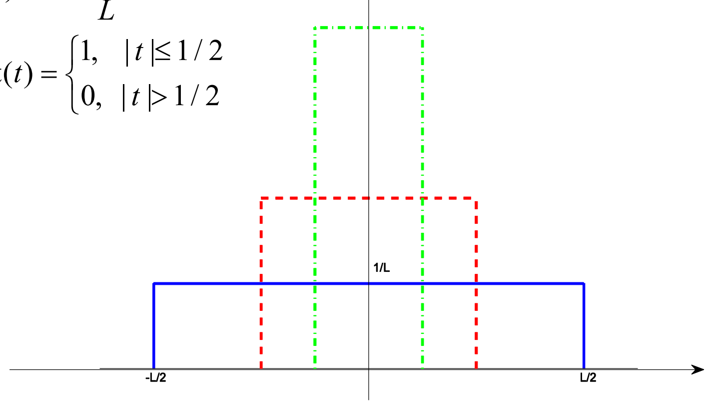
22

Dirac Συναρτηση: Ακολουθια Τετραγωνικων Παλμων

$$\delta_L(t) = \frac{\mathrm{rect}(t/L)}{L}$$

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$$

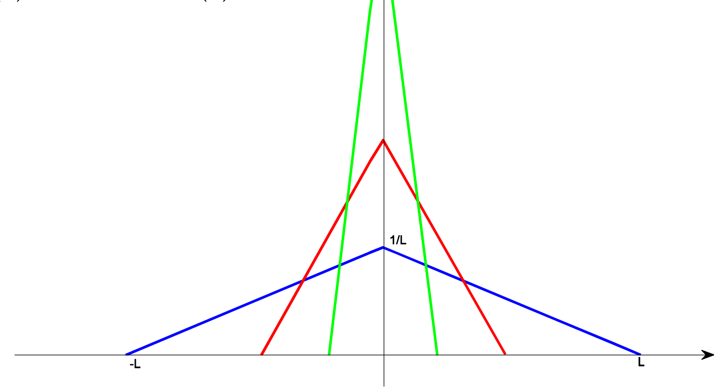
$$\delta(t) = \lim_{L\to 0} \delta_L(t)$$



23

Dirac Συναρτηση: Ακολουθια Τριγωνικων Παλμων

$$\delta(t) = \lim_{L\to 0} \delta_L(t)$$

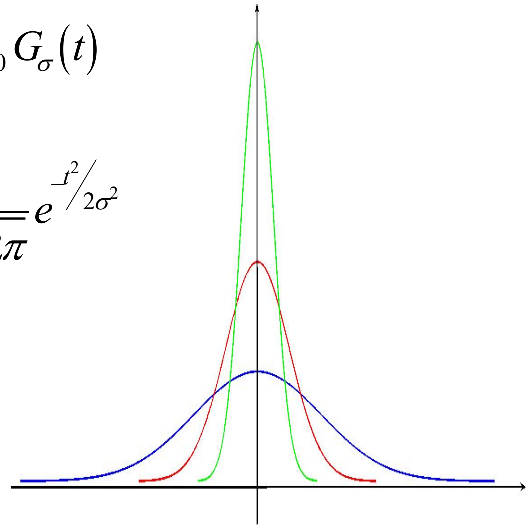


24

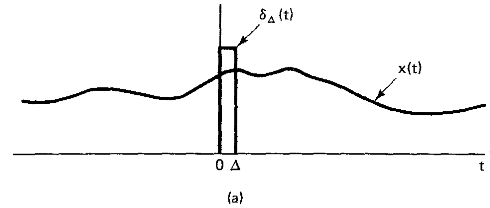
Dirac Συναρτηση: Ακολουθια Gaussian Κατανομων

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} G_\sigma(t)$$

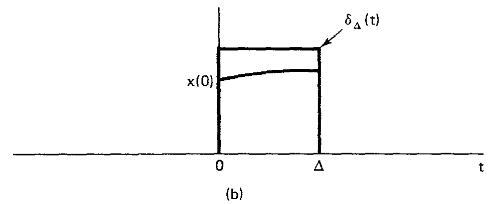
$$G_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$$



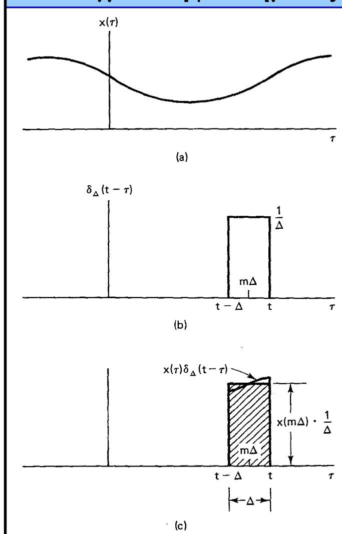
Δειγματοληψια Σηματος σε σημειο *t=0* με Dirac-Κρουστικη



$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$



Δειγματοληψια Σηματος σε σημειο *t=τ* με Dirac-Κρουστικη



$$x(\tau)\delta(t-\tau) = x(t)\delta(t-\tau)$$

Αναπαρασταση Σηματος με Dirac-Κρουστικες

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

- Ολοκληρωση γινομενου σηματος με κρουστικη = τιμη σηματος στο κεντρο της κρουστικης
- Αναπαρασταση σηματος ως γραμμικος συνδυασμος από σταθμισμενες & μετατοπισμενες κρουστικες.

Ιδιοτητες Dirac-Κρουστικης

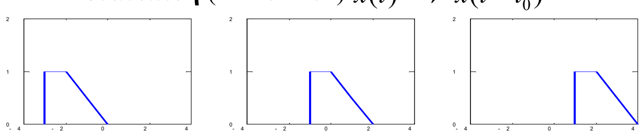
- **Εμβαδον**: $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$
- **Τιμες εκτος κεντρου**: $$\delta(t-t_0) = 0 \quad \forall t \neq t_0$$
- **Αρτια**: $$\delta(-t) = \delta(t)$$
- **Δειγματοληψια**: $$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

29

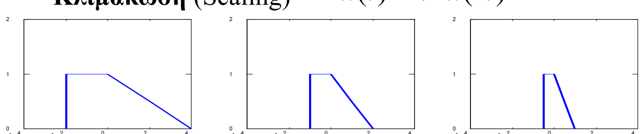
Στοιχειωδεις Μετατροπες & Πραξεις Σηματων

30

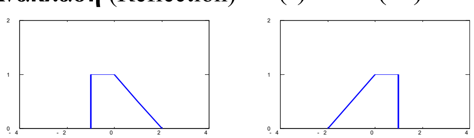
Μετατόπιση (Translation) $x(t) \;\rightarrow\; x(t-t_0)$



Κλιμάκωση (Scaling) $x(t) \;\rightarrow\; x(rt)$



Ανάκλαση (Reflection) $x(t) \;\rightarrow\; x(-t)$



31

Γραμμική μετατροπή Πλάτους

$$x(t) \;\rightarrow\; a \cdot x(t)$$

Αφινική μετατροπή Πλάτους

$$x(t) \;\rightarrow\; a \cdot x(t) + b$$

Αφινική μετατροπή Πλάτους και Χρόνου

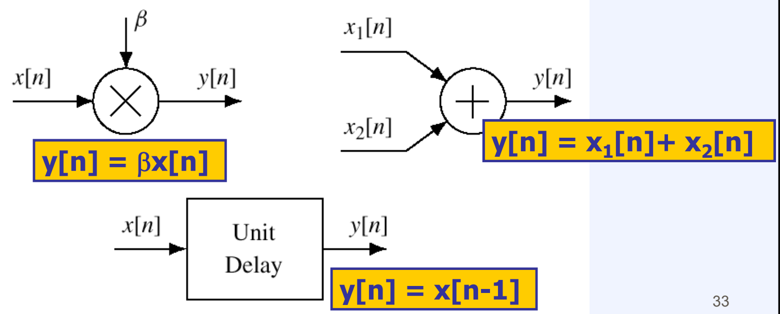
$$\boxed{x(t) \;\rightarrow\; a \cdot x(r \cdot t - \tau) + b}$$

32

HARDWARE ‘ΑΤΟΜΑ’

- Πρόσθεση, Πολλαπλασιασμός, Μετατόπιση

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

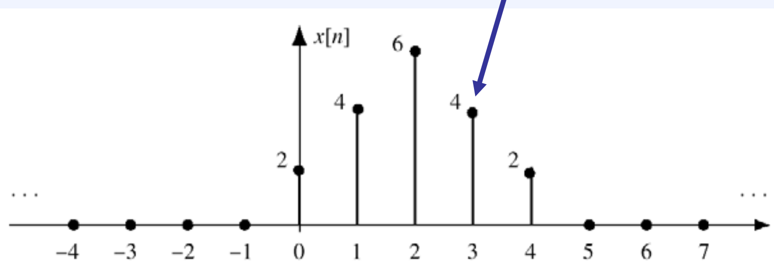


Αναπαρασταση Σηματων ως Γραμμικος Συνδυασμος Μοναδιαιων/Κρουστικων Παλμων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ για το x[n]

- Χρησιμοποιούμε ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΟΥΣ ΠΑΛΜΟΥΣ για να γράψουμε το x[n]

$$x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 2\delta[n-4]$$



ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΩΝ ΠΑΛΜΩΝ

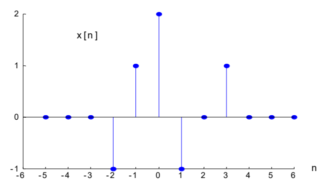
n	...	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...
$2\delta[n]$	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
$4\delta[n-1]$	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0
$6\delta[n-2]$	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0
$4\delta[n-3]$	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
$2\delta[n-4]$	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
$x[n]$	0	0	0	2	4	6	4	2	0	0	0

$$x[n] = \sum_k x[k]\delta[n-k]$$

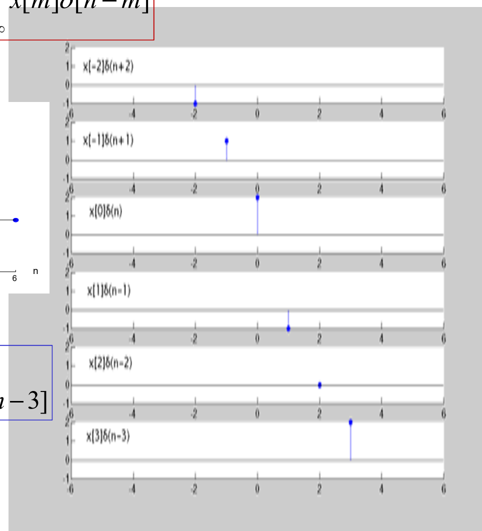
Αυτός ο τύπος ισχύει ΠΑΝΤΑ

$$= \ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \ldots$$

Γενικος τυπος: $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]$



$$x[n] = -\delta[n+2] + \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-3]$$



37

Αναπαρασταση Σηματος με Dirac-Κρουστικες

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

- Ολοκληρωση γινομενου σηματος με κρουστικη = τιμη σηματος στο κεντρο της κρουστικης
- Αναπαρασταση σηματος ως γραμμικος συνδυασμος από σταθμισμενες & μετατοπισμενες κρουστικες.

38

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚ. ΜΗΧ. & ΜΗΧ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
“ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ”

ΜΕΤΑΦΡΑΣΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:
“INTRODUCTION TO SIGNAL PROCESSING”
School of ECE, Georgia Tech
Prof. R. W. Schafer and Prof. J. H. McClellan
Μετάφραση:
Καθ. Πέτρος Μαραγκός και Καθ. Ιάσων Κόκκινος

39

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Βασικά Σήματα
- **Ημιτονοειδή**
- **Μιγαδικά Εκθετικά**
- **Σχέση Euler**
- **Phasors**

40

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΣΗΜΑ

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- **ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ** $\boxed{\omega}$
  - Radians/sec
  - Hertz (cycles/sec)

$$\omega = (2\pi) f$$

- **ΠΕΡΙΟΔΟΣ** (σε sec)

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

- **ΠΛΑΤΟΣ** $\boxed{A}$
  - Μέγεθος
- **ΦΑΣΗ** $\boxed{\varphi}$

41

41

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ από τον ΤΥΠΟ

$$5\cos(0.3\pi t + 1.2\pi)$$

- Καθορίζουμε την **περίοδο**:

$$\boxed{T = 2\pi / \omega = 2\pi / 0.3\pi = 20/3}$$

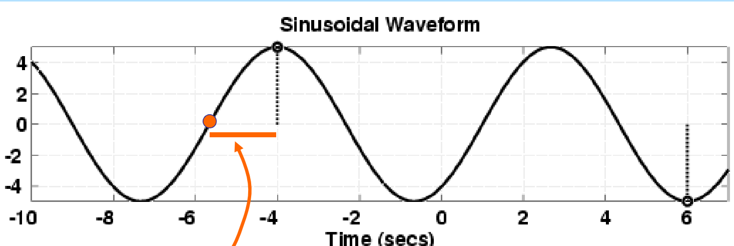
- Καθορίζουμε την τοποθεσία μίας **κορυφής** λύνοντας: $\boxed{(\omega t + \varphi) = 0}$
- **Η διάσχιση του μηδενός** είναι T/4 πριν ή μετά.
- Θετικές & Αρνητικές κορυφές απέχουν κατά T/2.

42

42

ΑΠΑΝΤΗΣΗ για το ΓΡΑΦΗΜΑ

$$5\cos(0.3\pi t + 1.2\pi)$$



$T/4 = (20/3)/4 = 5/3$

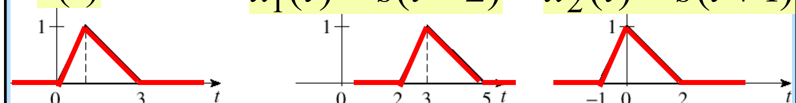
43

43

ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

- Σε μαθηματική συνάρτηση αντικατάστησε το t με t-t_d $\quad x(t) = s(t - t_d)$

$s(t)$ $\qquad x_1(t) = s(t-2)$ $\qquad x_2(t) = s(t+1)$



- Τώρα σε ένα σήμα συνημιτόνου:

$$x(t - t_d) = A\cos(\omega(t - t_d))$$

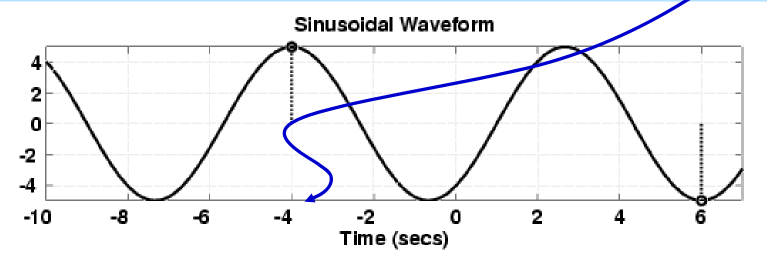
44

44

ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΟ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ

- Το σημείο $t=0$ μετακινείται στο $t=t_d$

$$x(t+4)=5\cos(0.3\pi(t+4))=5\cos(0.3\pi(t-(-4)))$$



ΦΑΣΗ <--> ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

- Εξισώνουμε τους τύπους:

$$A\cos(\omega(t-t_d)) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

- και παίρνουμε: $\boxed{-\omega t_d = \varphi}$
- ή, $\boxed{t_d = \frac{-\varphi}{\omega}}$

Παράδειγμα: Χρονική Μετατόπιση από τη Φάση

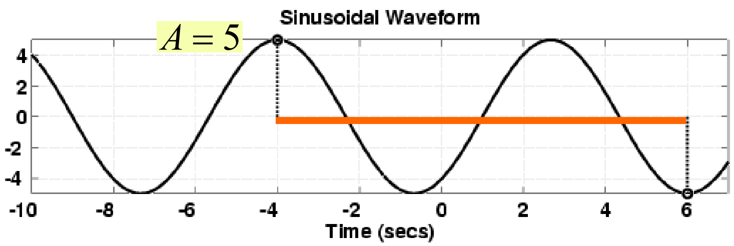
- Συχνότητα: $\omega = 0.3\pi$ rad/s
- Φάση: $\phi = 1.2\pi$ radians
- Ποιά είναι η χρονική μετατόπιση;
  - Επίσης καλείται "χρονική καθυστέρηση"
  - $t_d = -\phi/\omega = -(1.2\pi)/0.3\pi$
  - **t_d = -4 sec.**
  - Σημείωση: Τ = 2π/ω (περίοδος)

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ από ένα ΓΡΑΦΗΜΑ

- Μετράμε την περίοδο, T
  - Μεταξύ των κορυφών ή διασχίσεων του μηδενός
  - Υπολογίζουμε την συχνότητα: $\omega = 2\pi/T$
- Μετράμε τον χρόνο της κορυφής: t_d
  - Υπολογίζουμε την φάση: $\phi = -\omega\, t_d$
- Μετράμε το ύψος της θετικής κορυφής: A

3 βήματα

(A, ω, ϕ) από ένα ΓΡΑΦΗΜΑ



$T = 10/(1.5) = 20/3 \rightarrow \omega = 2\pi/T = 0.3\pi$

$t_d = -4 \rightarrow \phi = -(-4)(0.3\pi) = 1.2\pi$

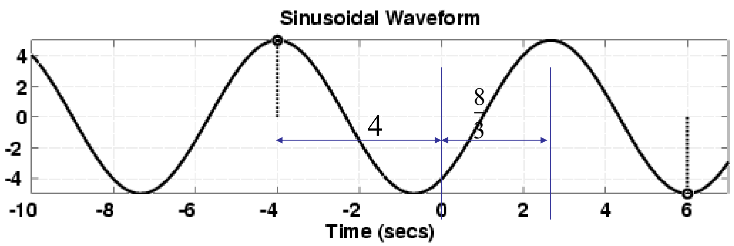
Η ΦΑΣΗ είναι ΠΛΕΙΟΤΙΜΗ

- Το συνημιτονοειδές σήμα είναι περιοδικό
  - Η περίοδος είναι 2π

$$A\cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

  - Η πρόσθεση ενός πολλαπλάσιου του 2π αφήνει το $x(t)$ αμετάβλητο
  - $$\alpha\nu\ t_d = \frac{-\varphi}{\omega},\ \tau o\tau\varepsilon$$
    $$t_{d_2} = \frac{-(\varphi+2\pi)}{\omega} = \frac{-\varphi}{\omega} - \frac{2\pi}{\omega} = t_m - T$$

Κατάδειξη της πλειοτιμίας της φάσης



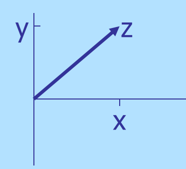
$$x(t) = 5\cos[.3\pi(t+4)] = 5\cos(.3\pi t + 1.2\pi)$$

$$x(t) = 5\cos(.3\pi t + 1.2\pi - 2\pi) = 5\cos(.3\pi t - .8\pi)$$

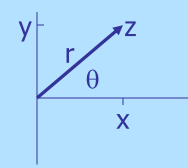
$$x(t) = 5\cos[.3\pi(t - \frac{.8\pi}{.3\pi})] = 5\cos[.3\pi(t - \frac{8}{3})]$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- Για να λύσουμε: $z^2 = -1$
  - z = ***j***
  - Στα Μαθηματικά και στη Φυσική χρησιμοποιείται z = ***i***
- Μιγαδικός αριθμός: z = (x,y) = x + ***j*** y



Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων



Πολικό Σύστημα Συντεταγμένων

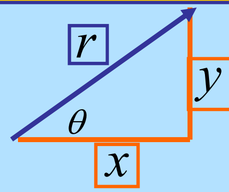
ΠΟΛΙΚΗ <--> ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΜΟΡΦΗ

- Συσχετίζουμε (x,y) με το (r,θ)

$$r^2 = x^2 + y^2$$

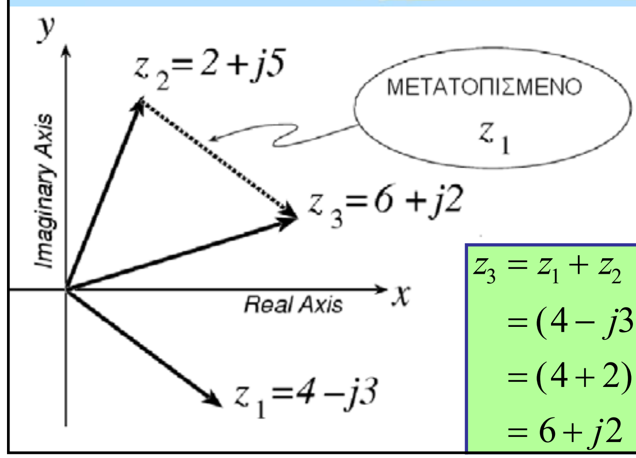
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = x + jy = re^{j\theta}$$



$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta)$$

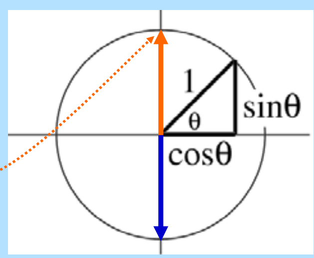
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗ= ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + z_2 \\ &= (4 - j3) + (2 + j5) \\ &= (4+2) + j(-3+5) \\ &= 6 + j2 \end{aligned}$$

*** ΠΟΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ***

- Διανυσματική Μορφή
  - Μήκος =1
  - Γωνία = θ



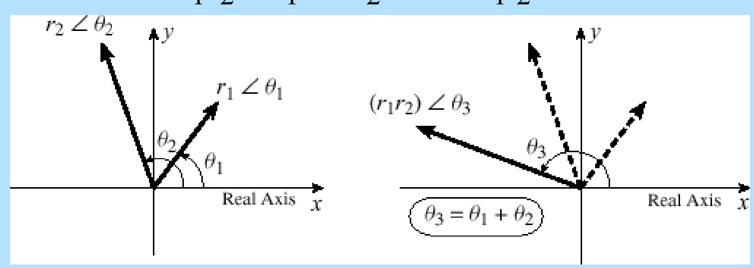
- Κοινές Τιμές
  - Το **j** έχει γωνία 0.5π
  - Το –1 έχει γωνία π
  - Το –**j** έχει γωνία 1.5π
    - Επίσης, η γωνία του είναι –0.5π = 1.5π –2π
    - Πλειότιμη φάση

Μιγαδικος ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

- Η πολική μορφή λειτουργεί καλύτερα για τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

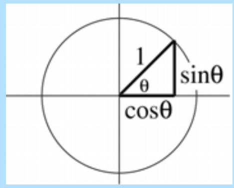
$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1} \qquad z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$



ΤΥΠΟΣ του Euler

- Μιγαδικό Εκθετικό
  - Το πραγματικό μέρος είναι συνημίτονο
  - Το φανταστικό μέρος είναι ημίτονο
  - Το πλάτος είναι μονάδα



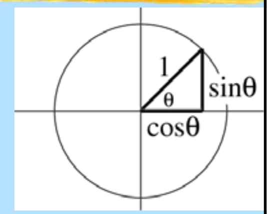
$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$re^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$$

Εφαρμογη του Τυπου του Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

- Ποιά είναι η έκφραση για το $\cos(\theta_1+\theta_2)$?
- Χρησιμοποιούμε το πραγματικό μέρος του $e^{j(\theta_1+\theta_2)}$:



$$e^{j(\theta_1+\theta_2)} = e^{j\theta_1} e^{j\theta_2}$$

$$= (\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

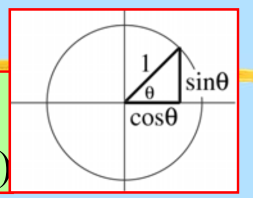
$$= \boxed{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2} + j(\ldots)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΚΘΕΤΙΚΟ ΣΗΜΑ

Euler's formula

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$



$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

- **Περιστρεφόμενο Διάνυσμα**
  - Η γωνία μεταβάλλεται με το χρόνο
  - $\theta = \omega t$
  - π.χ.: $\omega = 10\pi$
  - Κάνει μία περιστροφή (2π) σε 0.2 secs

Cos =ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Το Πραγματικό Μέρος του Euler

$$\cos(\omega t) = \Re e\left\{e^{j\omega t}\right\}$$

Γενικό Ημιτονοειδές

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Έτσι,

$$A\cos(\omega t + \varphi) = \Re e\left\{Ae^{j(\omega t+\varphi)}\right\}$$

$$= \Re e\left\{Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}\right\}$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ: ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΠΛΑΤΟΣ

$$z(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + jA\sin(\omega t+\varphi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) = \Re e\left\{Ae^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \Re e\left\{Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}\right\}$$

Ημιτονοειδές **x** = ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ του **z**=$(Ae^{j\phi})e^{j\omega t}$

$$x(t) = \Re e\left\{Xe^{j\omega t}\right\} = \Re e\{z(t)\}$$

Μιγαδικό ΠΛΑΤΟΣ = X = "Phasor" (ΦΑΣΙΘΕΤΗΣ)

$$z(t) = Xe^{j\omega t} \qquad X = Ae^{j\varphi}$$

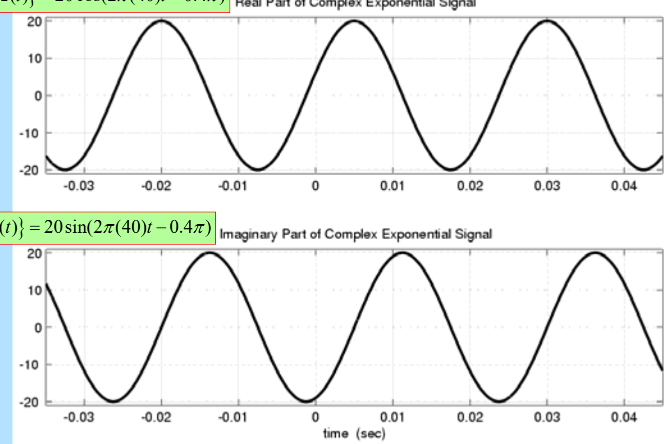
61

Γραφικές Πραγματικού και Φανταστικού Μέρους

$$z(t) = 20e^{-j0.4\pi}e^{j2\pi(40)t}$$

$\Re e\{z(t)\} = 20\cos(2\pi(40)t - 0.4\pi)$

$\Im m\{z(t)\} = 20\sin(2\pi(40)t - 0.4\pi)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Βρείτε το Μιγαδικό Πλάτος

- Βρείτε το ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΠΛΑΤΟΣ για το:

$$x(t) = \sqrt{3}\cos(77\pi t + 0.5\pi)$$

- Χρησιμοποιούμε τον τύπο του EULER:

$$x(t) = \Re e\left\{\sqrt{3}e^{j(77\pi t+0.5\pi)}\right\}$$
$$= \Re e\left\{\sqrt{3}e^{j0.5\pi}e^{j77\pi t}\right\}$$

$$X = \sqrt{3}e^{j0.5\pi}$$

63

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΩΝ

- Phasor = Μιγαδικό Πλάτος
  - Οι Μιγαδικοί Αριθμοί **αναπαριστούν** ημιτονοειδή

$$z(t) = Xe^{j\omega t} = (Ae^{j\varphi})e^{j\omega t}$$

Ανάπτυξη της Εννοιας:

Πρόσθεση Ημιτονοειδών = Πρόσθεση Μιγαδικών

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΟΣΘΕΣΗ PHASORS

64

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΩΝ

- ΟΛΑ ΤΑ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
- ΠΩΣ ΘΑ ΠΑΡΟΥΜΕ {Πλάτος , Φάση} του ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ;

$$x_1(t) = 1.7\cos(2\pi(10)t + 70\pi/180)$$

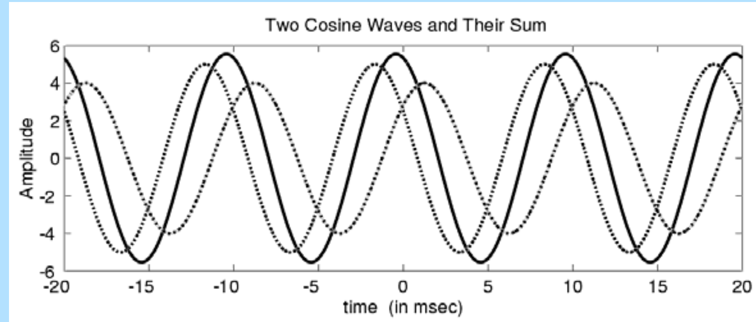
$$x_2(t) = 1.9\cos(2\pi(10)t + 200\pi/180)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= 1.532\cos(2\pi(10)t + 141.79\pi/180)$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΩΝ

- Το Άθροισμα Ημιτονοειδών έχει την **ΙΔΙΑ** Συχνότητα



ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΘΡΟΙΣΗΣ των PHASORs

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k)$$

$$= A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Παίρνουμε το νέο μιγαδικό πλάτος του αθροίσματος μέσω της μιγαδικής άθροισης των ξεχωριστών phasors

$$\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k} = Ae^{j\phi}$$

Απόδειξη Άθροισης Phasors

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) = \sum_{k=1}^{N} \Re e\left\{A_k e^{j(\omega_0 t + \phi_k)}\right\}$$

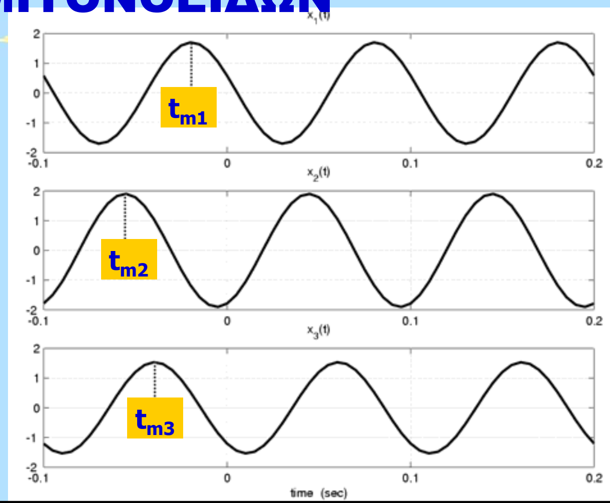
$$= \Re e\left\{\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k} e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$= \Re e\left\{\left(\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k}\right) e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$= \Re e\left\{\left(Ae^{j\phi}\right) e^{j\omega_0 t}\right\} = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Re του αθροίσματο είναι το Re των μερών

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΩΝ



Άθροιση δύο Ημιτονοειδών χρησιμοποιώντας phasors

- Μετρούμε τους χρόνους κορυφής:
  - t_{m1}=-0.0194, t_{m2}=-0.0556
- Μετατρέπουμε σε φάση (T=0.1)
  - $\phi_1=-\omega t_{m1}=-2\pi(t_{m1}/T)=70\pi/180$,
  - $\phi_2= 200\pi/180$
- Προσδιορίζουμε τα πλάτη
  - A_1=1.7, A_2=1.9

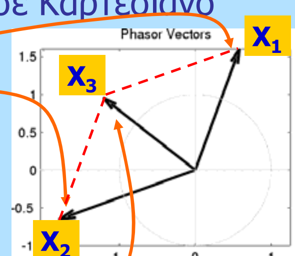
Αναπαράσταση Phasor

$$X_1 = 1.7e^{j70\pi/180}$$

$$X_2 = 1.9e^{j200\pi/180}$$

Πρόσθεση Phasors: Αριθμητικό Παράδειγμα

- Μετατρέπουμε το Πολικό σε Καρτεσιανό
  - X_1 = 0.5814 + j1.597
  - X_2 = -1.785 - j0.6498
  - X_3 = -1.204 + j0.9476
- Μετατρέπουμε ξανά σε Πολικό
  - X_3 = 1.532 σε γωνία 141.79π/180
  - Αυτό είναι το άθροισμα



ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΩΝ

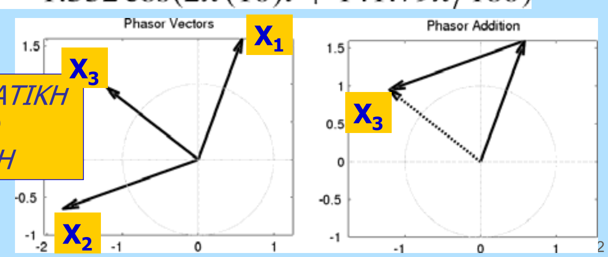
$$x_1(t) = 1.7\cos(2\pi(10)t + 70\pi/180)$$

$$x_2(t) = 1.9\cos(2\pi(10)t + 200\pi/180)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= 1.532\cos(2\pi(10)t + 141.79\pi/180)$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ (PHASOR) ΠΡΟΣΘΕΣΗ



Μετασχηματισμος Fourier και Μιγαδικα Ημιτονα

Ευθυς Fourier μετ/σμος : $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

Αντιστροφος Fourier μετ/σμος :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

= Υπερθεση Μιγαδικων Ημιτονων

με διαφορετικες συχνοτητες και

μιγαδικα πλατη που ειναι συναρτηση της συχνοτητας