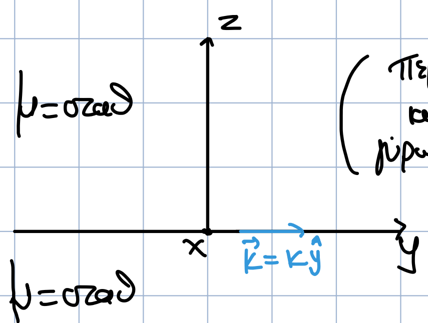
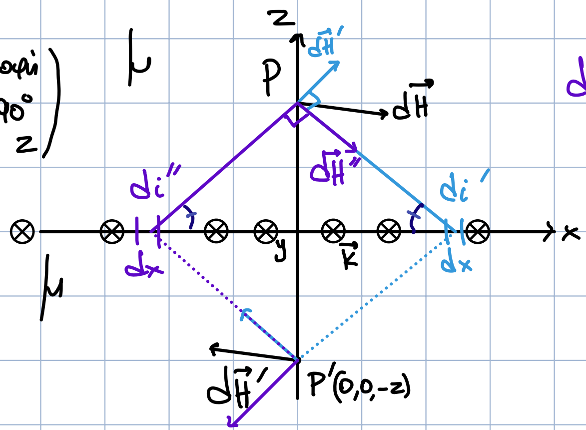
6. Μαγνητοστατικό πεδίο απέραντων επίπεδων ρευματικών κατανομών (Σελίδα 349)

Παράδειγμα $\vec{H} = ;$ $\quad \frac{\partial}{\partial x} = 0 = \frac{\partial}{\partial y}$ $\quad$ Είναι $\vec{H}(z)$

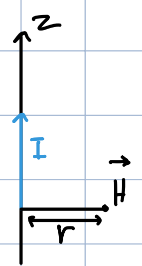


(Περιστροφή κατά 90° γύρω από z)



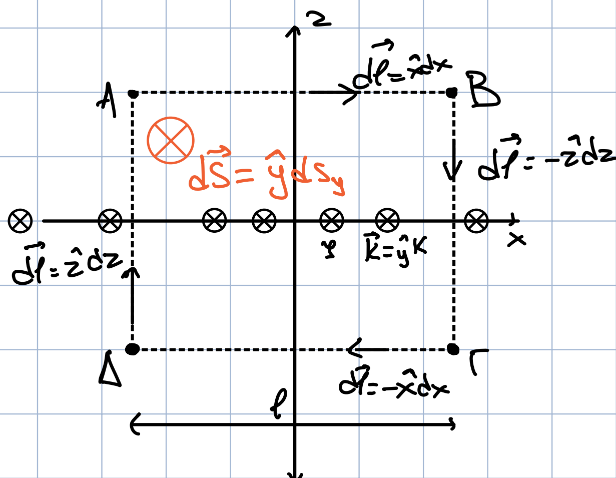
$d\vec{H}_z'' = d\vec{H}_z'$

Σε παλαιότερο μάθημα



∃ μόνο $H_z(z)$,

Ισχύει ότι $H_x(z) = -H_x(-z)$ (1) (συνθήκη αντισυμμετρίας)



$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_c = \int_S \vec{J} d\vec{S}$$

$$\underbrace{H_x(z)\cdot l}_{AB} + \underbrace{0}_{B\Gamma} - \underbrace{H_x(-z)\, l}_{\Gamma\Delta} + \underbrace{0}_{\Delta A} = K\cdot l$$

$\rightsquigarrow$ $2H_x(z) = K$

$$H_x(z) = K/2 = -H_x(-z)$$

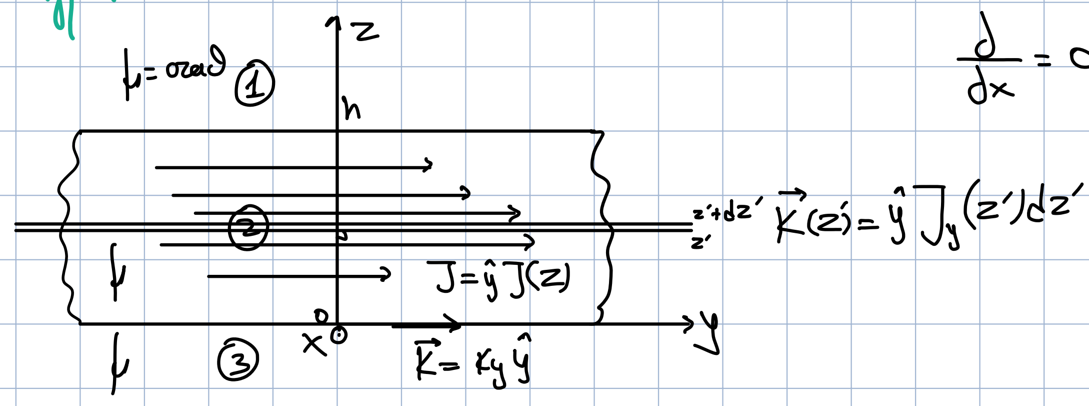
$$\vec{H} = \hat{x}\frac{K}{2}\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \hat{x}\frac{K}{2}, & z>0 \\ -\hat{x}\frac{K}{2}, & z<0 \end{cases}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Γενικότερα $\vec{H} = \dfrac{\vec{K}\times\hat{z}}{2}\operatorname{sgn}(z)$

Παράδειγμα

$H = ;$

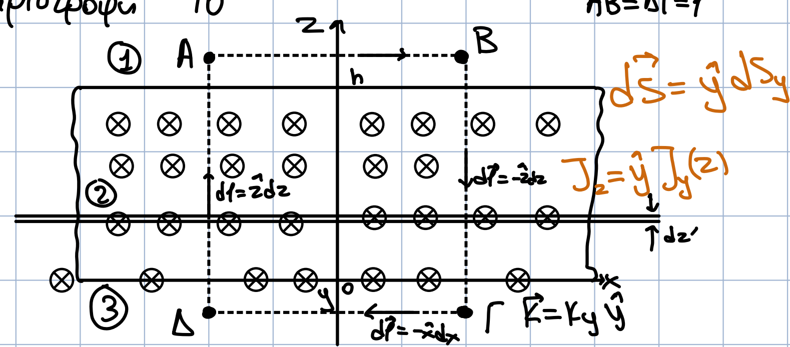
$$\frac{d}{dx} = 0 = \frac{d}{dy}$$



Ισχύει ότι $H_{x_1} = -H_{x_3}$ (3) (συνθήκη αντισυμμετρίας)

Περιστροφή 90°

$AB = \Delta\Gamma = l$



Α. Λύση με ολοκληρωτικές εξισώσεις

Ν. Ampere $\oint_C \vec H d\vec l = I_c = \int_S \vec J d\vec S$

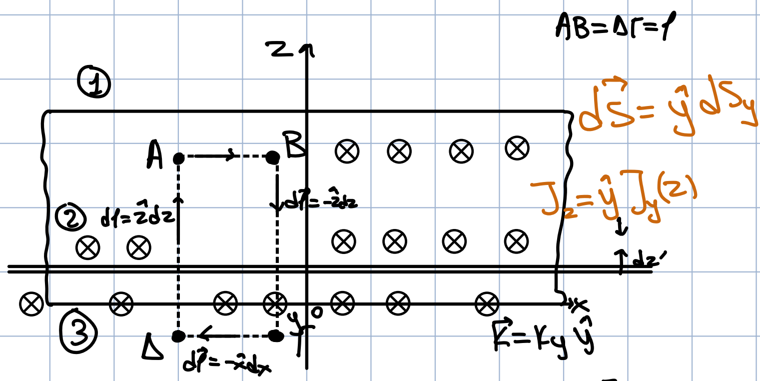
$$\underbrace{H_{x_1}\cdot \cancel{l}}_{AB} + \underbrace{0}_{B\Gamma} \underbrace{- H_{x_3}\cdot\cancel{l}}_{\Gamma A} \underbrace{+0}_{\Delta A} = K_y\cancel{l} + \int_0^h J_y(z')\cancel{l}dz'$$

$$2H_{x_1} = K_y + \int_0^h J_y(z')dz'$$

$$H_{x_1} = \frac{1}{2}\left[K_y + \int_{z=0}^{h} J_y(z')dz'\right] = -H_{x_3}$$

Τώρα πρέπει να βρούμε και στο (2)

Επανάληψη σχήματος, εύρεση H_{x_2}



$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} d\vec{S}$$

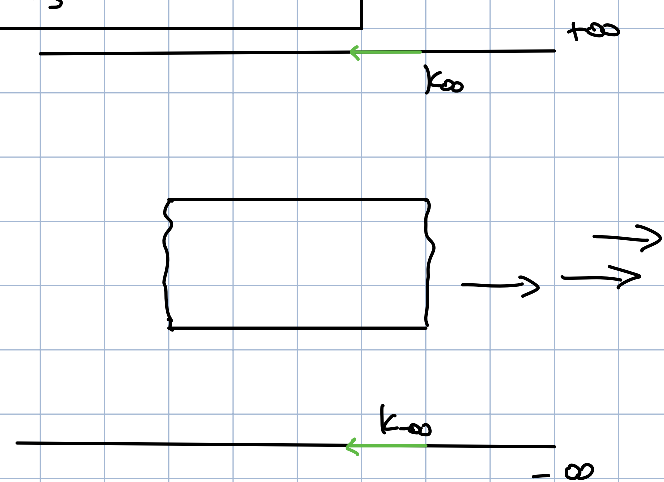
$$\underbrace{H_{x_2}(z)\ell}_{AB} + \underbrace{0}_{B\Gamma} - \underbrace{H_{x_3}\ell}_{\Gamma\Delta} + \underbrace{0}_{A\Delta} = K_y \ell + \int_0^z J_y(z')\ell dz'$$

$$H_{x_2}(z) = H_{x_3} + K_y + \int_0^z J_y(z')dz'$$

$$H_{x_2}(z) = -\frac{K_y}{2} - \frac{1}{2}\int_0^h J_y(z')dz + \int_0^z J_y(z')dz' + K_y$$

$$H_{x_2}(z) = +\frac{K_y}{2} - \frac{1}{2}\int_0^z J_y(z')dz - \frac{1}{2}\int_z^h J_y(z')dz + \int_0^z J_y(z')dz'$$

$$\boxed{\begin{aligned} H_{x_2}(z) &= \frac{K_y}{2} + \frac{1}{2}\int_0^z J_y(z')dz - \frac{1}{2}\int_z^h J_y(z')dz' \\ H_{x_1} &= \frac{1}{2}\left[K_y + \int_{z'=0}^h J_y(z')dz'\right] = -H_{x_3} \end{aligned}}$$

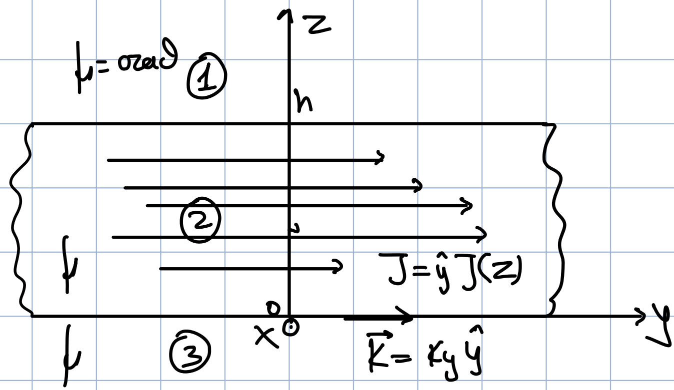


$$\vec{K}_{+\infty} = \vec{K}_{-\infty} = -\hat{y}\frac{1}{2}\left[K_y + \int_0^h J_y(z')dz'\right]$$

(σε εμάς αυτό θα ισχύει·
που είναι η συνθήκη ασυμμετρίας)

(το γράφω έτσι γιατί μπορεί
να μην ισχύει μπορεί πχ $K_\infty = 0$
άρα $K_{-\infty} = K_y + \int_0^h J_y(z')dz'$)

Β. Λύση με χρήση των εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή



$H = ;$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 = \frac{\partial}{\partial y}$$

έχουμε μου $J = \hat{y} J(z)$

άρα $J_x = J_z = 0$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}}^{0} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x = 0 \Rightarrow \frac{d H_y}{dz} = 0 \quad (1') \qquad H_{y_i} = C_i, \; i = 1,2,3 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}}^{0} = J_y \Rightarrow \frac{d H_x}{dz} = J_y(z) \quad (1) \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}}^{0} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}}^{0} = J_z = 0 \Rightarrow (0=0) \text{ ταυτότητα} \end{cases}$$

Οριακές συνθήκες   Για $z = h$ $\hat{z} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \Rightarrow$ $H_{x_1} = H_{x_2}$ (2α), $H_{y_1} = H_{y_2}$ (2β)

$z = h$ $\hat{z}(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \Rightarrow B_{z_1} = B_{z_2}$ (3)

$Z = 0$ $\hat{z} \times (H_2 - H_3) = \vec{K}$ → $H_{x_2} - H_{x_3} = K_y$ (4α), → $H_{y_2} = H_{y_3}$ (4β)

(σελίδα 356 σχ. 25)

$Z = 0$ $B_{z_2} = B_{z_3}$ (5)

Έχουμε επίσης $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial x}}^{0} + \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial y}}^{0} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ $\Bigg\}$ $\frac{d B_z}{dz} = 0$ (6)

$B_{z_i} = d_i$ (7)

$i = 1,2,3$

Το σύστημα των εξισώσεων (1'), (2β), (3), (4β), (5), (6)
είναι ομογενές, δεν συνδέεται με τις πηγές

άρα $H_y = 0$, $B_y = 0$, $H_z = 0$, $B_z = 0$ (Θεώρημα μοναδικής λύσης)

2ος τρόπος

(1') $H_{y_1} = c_1$, $H_{y_2} = c_2$, $H_{y_3} = c_3$ (8)

(7) $\Rightarrow$ $B_{z_1} = d_1$, $B_{z_2} = d_2$, $B_{z_3} = d_3$ (9)

$H_{y_1 \to \infty^+} = H_{y_1 \to \infty^-}$

αφού $H_{y_1 \to \infty^+} = 0$ (αφού δεν υπάρχει πεδίο έξω από το ∞)

άρα $H_{y_1} = 0$ και (2β), (4β), (8) για $\vec{H}$

(3), (5), (9), αφού $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

άρα είναι όλα 0.

Εύρεση $H_x(z)$

από την (1) $H_x = \int J_y(z)\,dz + a$

$H_{x_1} = a_1$ (10)

$H_{x_2} = \int_{z'=0}^{z} J_y(z')\,dz' + a_2$ (11)

$H_{x_3} = a_3$ (12)

από (2a), (10), (11) $\overset{\text{για } z=h}{\Rightarrow}$ $H_{x_1} \Rightarrow a_1 = \int_{z'=0}^{h} J_y(z')dz' + a_2$

(4a), (11), (12) $\overset{\text{για } z=0}{\Rightarrow}$ $a_2 - a_3 = K_y$

$H_{x_1} = -H_{x_3}$ (αντισυμμετρία), άρα
$a_1 = -a_3$

$$H_{x_1} = \left[\frac{K}{2} + \int_{z'=0}^{h} J_y(z')dz'\right] = -H_{x_3}$$

$$H_{x_2} = \int_{z'=0}^{z} J_y(z')dz' + a_2$$

με $\quad a_2 = \frac{K_y}{2} - \frac{1}{2}\int_{z'=0}^{h} J_y(z')dz'$

άρα $\quad H_{x_2} = \frac{K_y}{2} + \frac{1}{2}\int_{0}^{z} J_y(z')dz - \frac{1}{2}\int_{z}^{h} J_y(z')dz'$