Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

Μετάδοση Ψηφιακών Δεδομένων

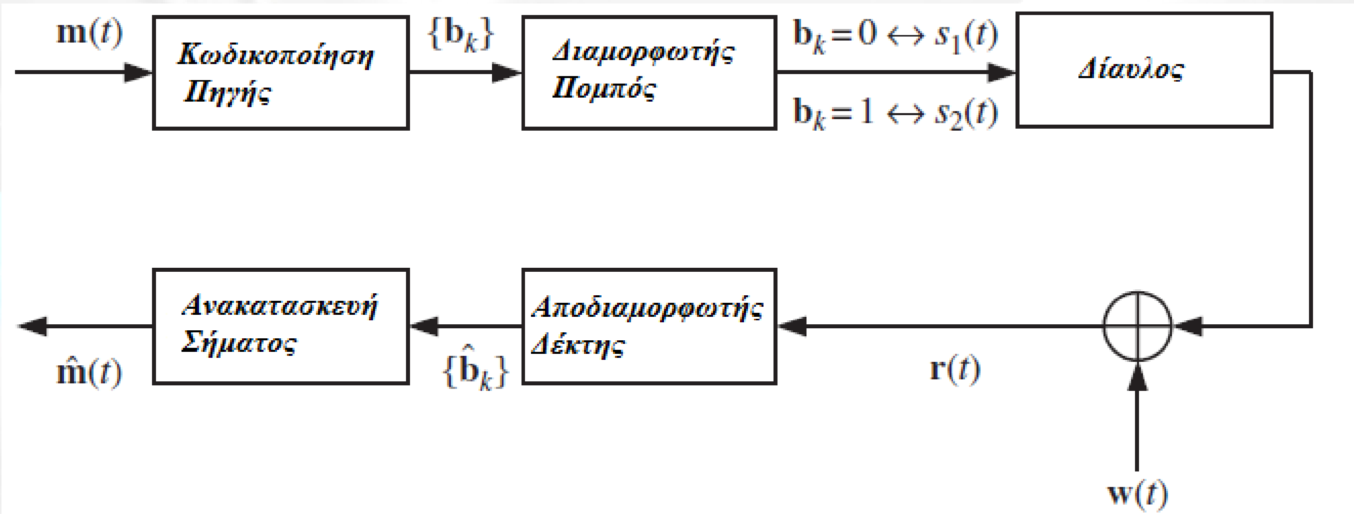
Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων
Βέλτιστος Δέκτης
Προσαρμοσμένο Φίλτρο/Συσχέτισης
Υπολογισμός Πιθανότητα Λάθους

Αθανάσιος Δ. Παναγόπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

Εισαγωγή

Σε αυτή τη σειρά διαφανειών θα μελετηθεί ο *Βέλτιστος Δέκτης (optimum* receiver) για ένα δυαδικό ψηφιακό σύστημα επικοινωνιών

(*binary* digital communication system)

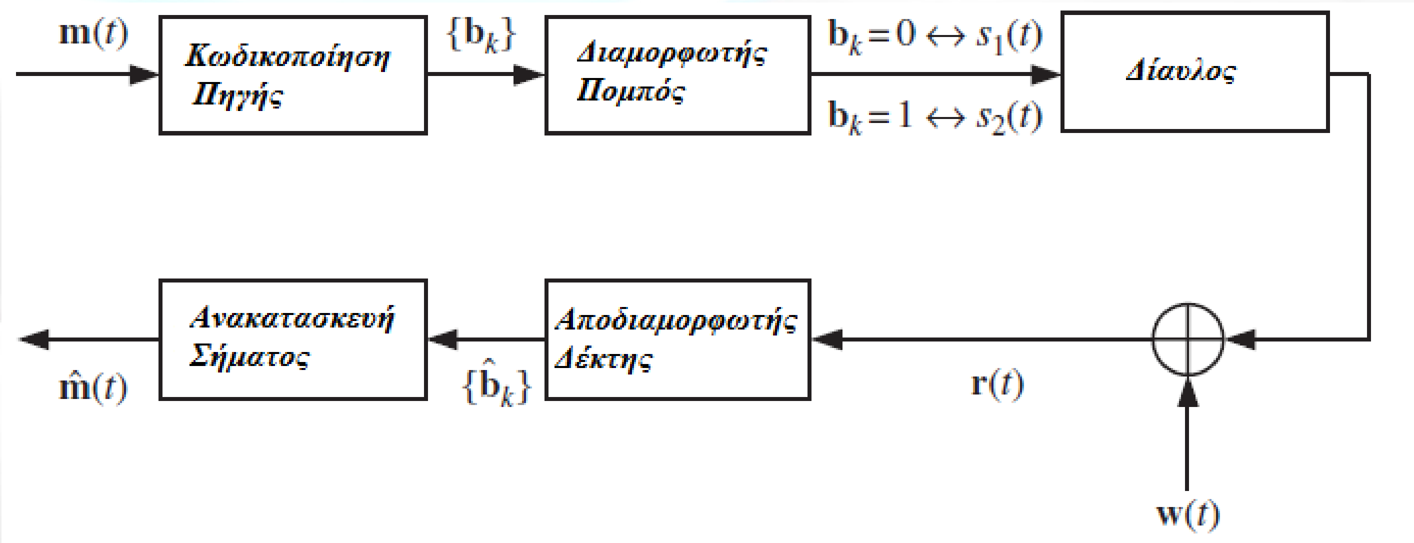


Η διάρκεια του bit του b_k είναι T_b sec.

Ρυθμός Bits: $R_b = 1/T_b$

Πιο συγκεκριμένα θα υπολογιστεί η πιθανότητα λάθους.
Για Μοντελοποίηση καναλιού θεωρούμε AWGN.

Block Διάγραμμα Δυαδικού Ψηφιακού Συστήματος Επικοινωνιών



Τα Bits σε δύο διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι στατιστικά ανεξάρτητα.

$$P[\mathrm{b}_k = 0] = P_1,\ P[\mathrm{b}_k = 1] = P_2.$$

$$\mathrm{b}_k = 0 \leftrightarrow s_1(t)$$
$$\mathrm{b}_k = 1 \leftrightarrow s_2(t)$$

$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\mathrm{d}t \text{ (joules)}, \quad E_1 < \infty,$$
$$E_2 = \int_0^{T_b} s_2^2(t)\mathrm{d}t \text{ (joules)}, \quad E_2 < \infty.$$

$$E\{\mathrm{w}(t)\} = 0, \quad E\{\mathrm{w}(t)\mathrm{w}(t+\tau)\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Οι κυματομορφές είναι τυχαίες άλλα γνωστές στο δέκτη. Ο δίαυλος είναι αρκετά ευρυζωνικός ώστε να περάσουν τα σήματα χωρίς παραμόρφωση. Δεν υπάρχει διασυμβολική παρεμβολή μεταξύ των ψηφίων.

Βέλτιστος Δέκτης για Μετάδοση Δυαδικών Δεδομένων

Το διάστημα που στέλνουμε το bit b_k είναι: $\left[\left(k-1\right)T_b,\, kT_b\right]$

Το λαμβανόμενο σήμα στο χρονικό διάστημα $\left[\left(k-1\right)T_b,\, kT_b\right]$

$$r(t) = s_i\left(t-\left(k-1\right)T_b\right)+w\left(t\right), \quad \left(k-1\right)T_b \le t \le kT_b$$

Ο στόχος είναι να σχεδιαστεί ένας δέκτης (αποδιαμορφωτής) έτσι ώστε παρατηρώντας το σήμα η πιθανότητα να γίνει λάθος στην αναγνώριση ψηφίου ελαχιστοποιείται.

Για να γίνει αυτό πρέπει να οδηγήσουμε το πρόβλημα από την παρατήρηση στο χρόνο μιας μιας κυματομορφής ---- στην παρατήρηση ενός συνόλου αριθμών τυχαίων μεταβλητών. (sufficient statistics)

Μεθοδολογία Λύσης:

Γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων $s_1(t)$, $s_2(t)$, $w(t)$.
Σχέση μεταξύ ενέργειας σήματος, απόσταση μεταξύ σημάτων και πιθανότητα λάθους.

Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων

Επιθυμούμε να αναπαραστήσουμε 2 τυχαία σήματα $s_1(t)$ & $s_2(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό δυο ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης $\varphi_1(t)$ & $\varphi_2(t)$.

Μια βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\}$ ενός υπόχωρου V του $\mathbb{R}^\nu$, θα λέμε ότι είναι *ορθογώνια βάση* , αν τα διανύσματά της είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, εάν δηλαδή

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ όταν $i \neq j$.

Εάν τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ είναι επιπλέον μοναδιαία , τότε η βάση ονομάζεται *ορθοκανονική* .

$$\int_0^{T_b} \phi_1(t)\phi_2(t)\mathrm{d}t = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_0^{T_b} \phi_1^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T_b} \phi_2^2(t)\mathrm{d}t = 1$$

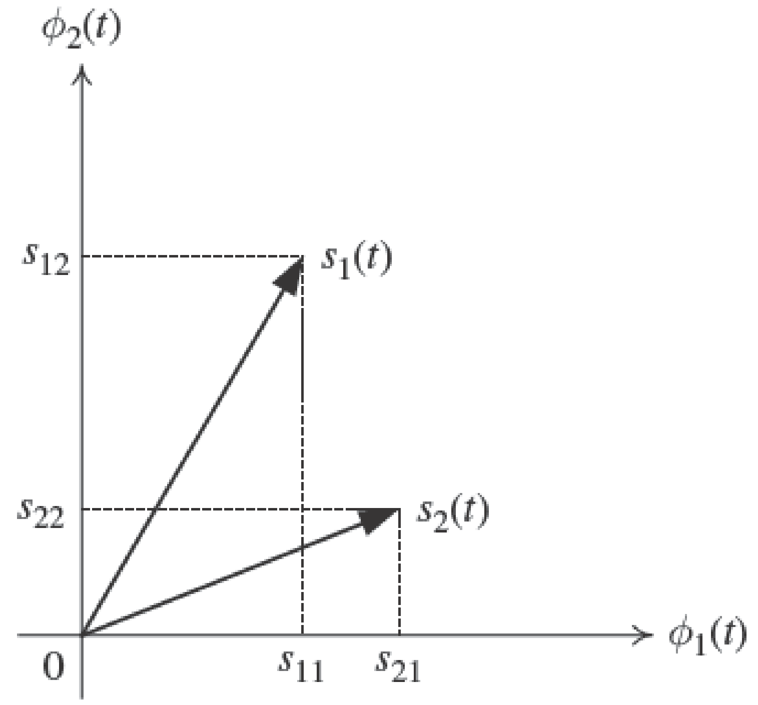
Κανονικοποίηση

$\phi_1(t) \qquad \phi_2(t)$

Ορθοκανονική Βάση

Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων

$$s_1(t) = s_{11}\phi_1(t) + s_{12}\phi_2(t),$$
$$s_2(t) = s_{21}\phi_1(t) + s_{22}\phi_2(t).$$



$$s_{ij} = \int_0^{T_b} s_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t, \quad i,j \in \{1,2\},$$

$\int_0^{T_b} s_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t$ projection $s_i(t)$ $\phi_j(t)$

Προβολή

Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων
Μέθοδος Gram- Schmidt (Γενικό)

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο M πεπερασμένων ενεργειακά κυματομορφών $\left\{s_i(t), i=1,2,...,M\right\}$ και θέλουμε να φτιάξουμε ένα σύνολο ορθοκανονικών κυματομορφών που μπορούν να αναπαραστήσουν ακριβώς $\left\{s_i(t), i=1,2,...,M\right\}$.

Η πρώτη ορθοκανονική συνάρτηση μπορεί να βρεθεί :

$$\varphi_1(t)=\frac{s_1(t)}{\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t)dt}}$$

Οι επόμενες κυματομορφές βρίσκονται ως : $\varphi_i(t)=\dfrac{\varphi_i'(t)}{\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\varphi_i'(t)\right)^2 dt}}$, $i=2,3,....,N$

όπου $\varphi_i'(t)=\dfrac{s_i(t)}{\sqrt{E_i}}-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\rho_{ij}\varphi_j(t)$ και $\rho_{ij}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{s_i(t)}{\sqrt{E_i}}\varphi_j(t)$ για $j=1,2,...,i-1$.

Μέθοδος Gram- Schmidt (Γενικό)

Εν γένει ο αριθμός των ορθοκανονικών συναρτήσεων N είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό των δεδομένων κυματομορφών Μ και έχουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Εάν οι κυματομορφές ˙$\{s_i(t), i = 1, 2, . . . ,M\}$ σχηματίζουν ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων συναρτήσεων τότε
$N = M$.

(ii) Εάν οι κυματομορφές $s_i(t), i = 1, 2, . . . ,M\}$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες τότε $N < M$.

Μέθοδος Gram- Schmidt (βήμα προς βήμα)

$$\phi_1(t) \equiv \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \qquad s_{11} = \sqrt{E_1} \qquad s_{12} = 0$$

Πρόβαλε $s_2'(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}}$ ο *φ₁(t)* για να πάρουμε τον συντελεστή συσχέτισης

(correlation coefficient) *ρ*:

$$\rho = \int_0^{T_b} \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}} \phi_1(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_0^{T_b} s_1(t) s_2(t) \mathrm{d}t$$

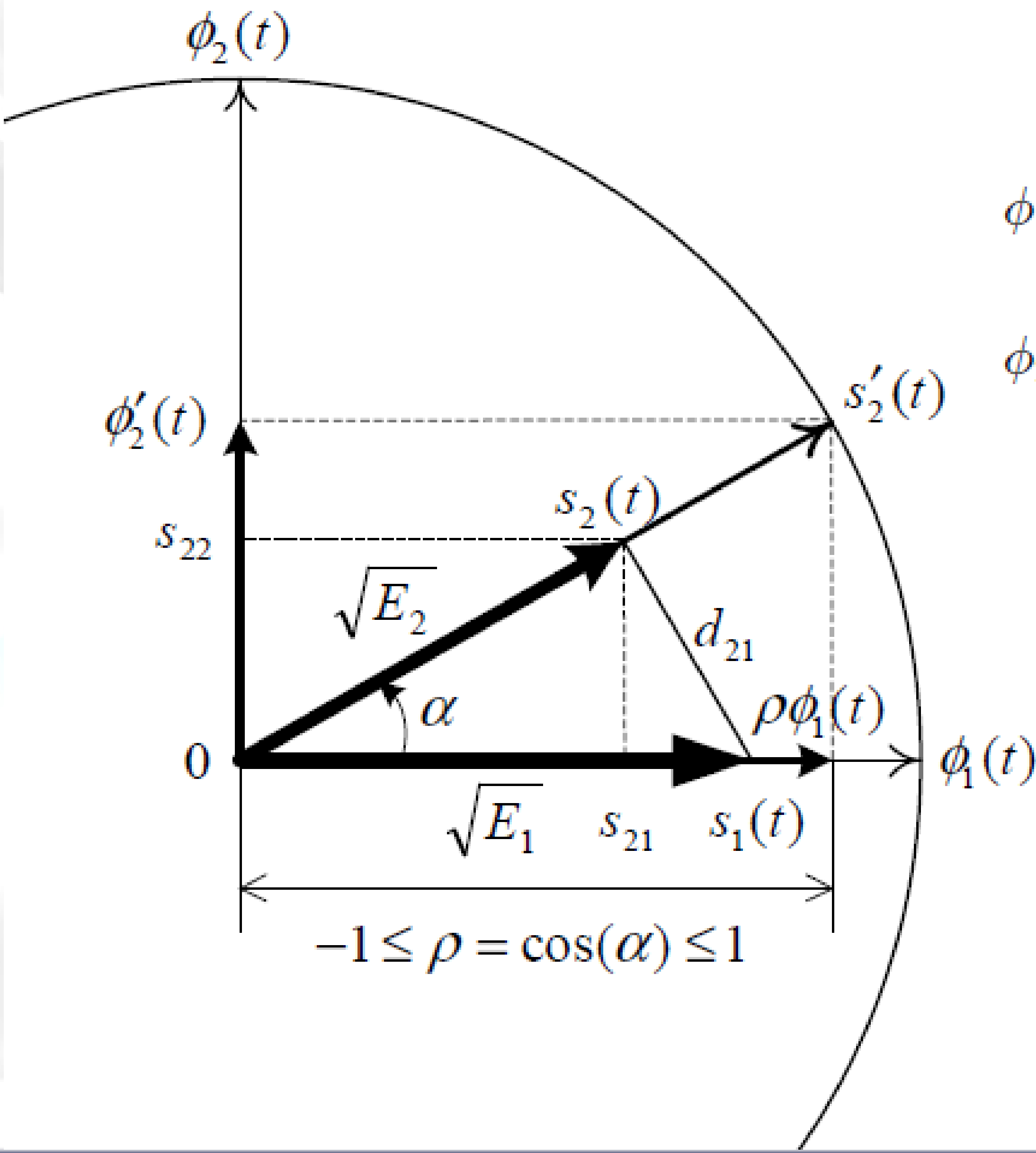
Αφαίρεση της προβολής

$$\phi_2'(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}} - \rho\phi_1(t)$$

Κανονικοποίηση

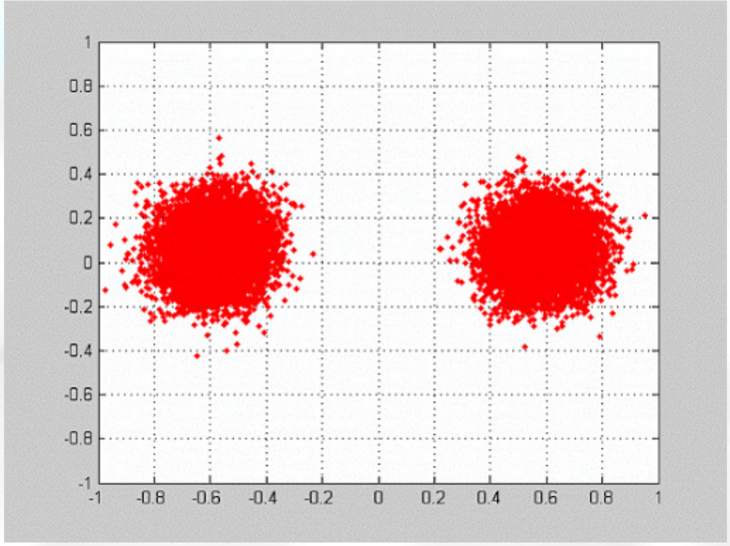
$$\begin{aligned} \phi_2(t) &= \frac{\phi_2'(t)}{\sqrt{\int_0^{T_b} \left[\phi_2'(t)\right]^2 \mathrm{d}t}} = \frac{\phi_2'(t)}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}} - \frac{\rho s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \right]. \end{aligned}$$

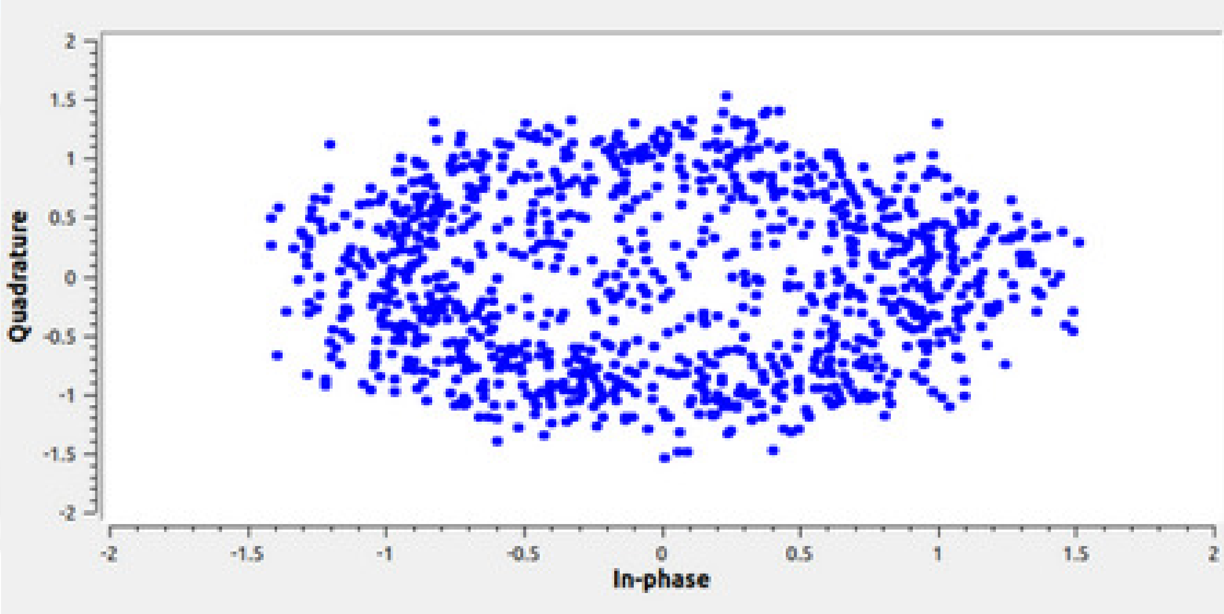
Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων
Μέθοδος Gram- Schmidt



$$
\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}, \\
\phi_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}} - \frac{\rho s_1(t)}{\sqrt{E_1}}\right], \\
s_{21} &= \int_0^{T_b} s_2(t)\phi_1(t)\mathrm{d}t = \rho\sqrt{E_2}, \\
s_{22} &= \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\sqrt{E_2}, \\
d_{21} &= \sqrt{\int_0^{T_b} [s_2(t) - s_1(t)]^2 \mathrm{d}t} \\
&= E_1 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2} + E_2.
\end{aligned}
$$

Constellation BPSK with noise





Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων

Μια σημαντική γεωμετρική ερμηνεία που προκύπτει είναι:

Η απόσταση οποιουδήποτε ενός σημείου/σήματος από την αρχή είναι η τετραγωνική ρίζα της Ενέργειας του σήματος

Για παράδειγμα:

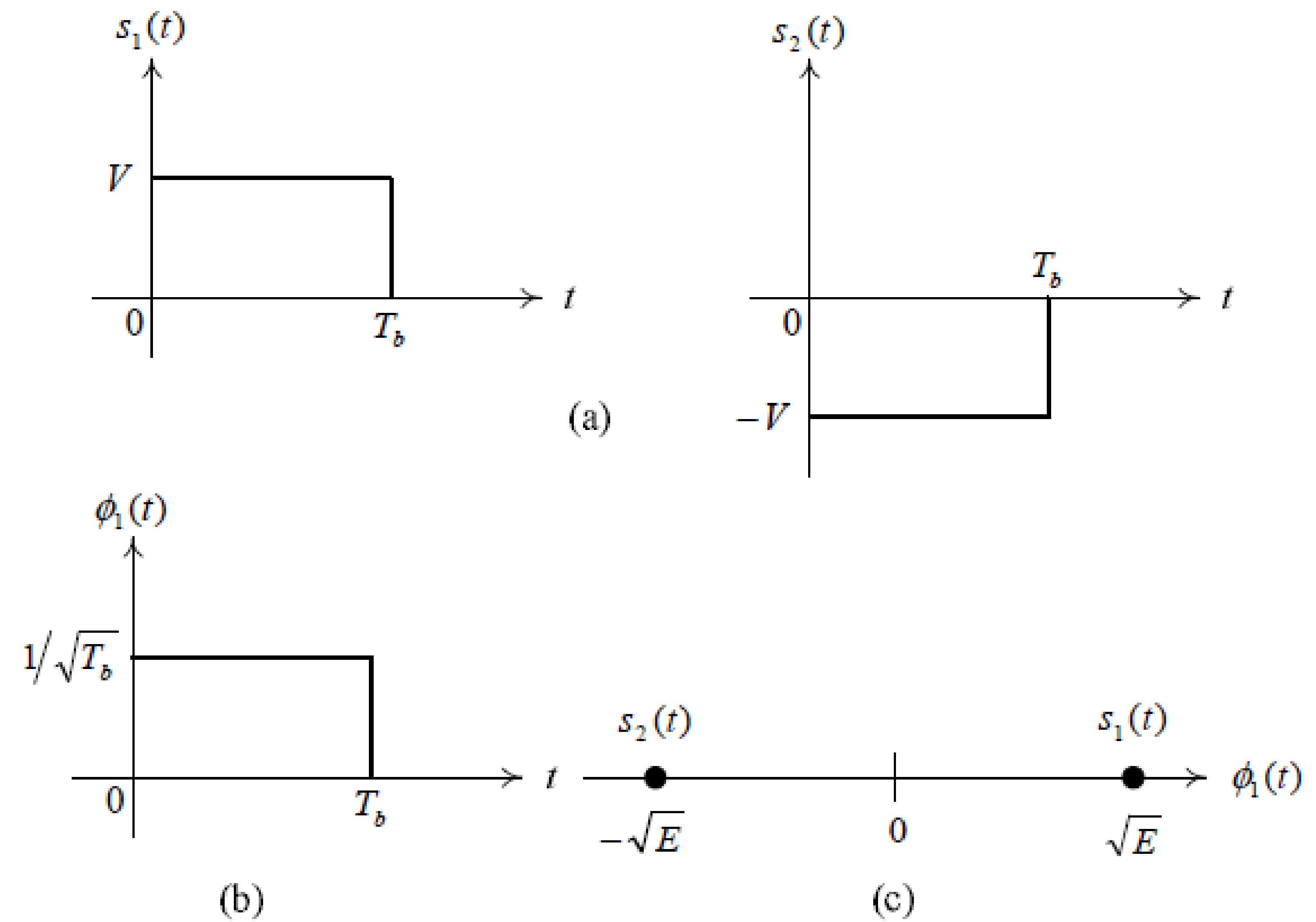
Για το σήμα $s_2(t)$ *η απόσταση είναι:*

$$απόσταση = \sqrt{s_{21}^2 + s_{22}^2} = \sqrt{E_2}$$

Η Γενική Πρόταση είναι:

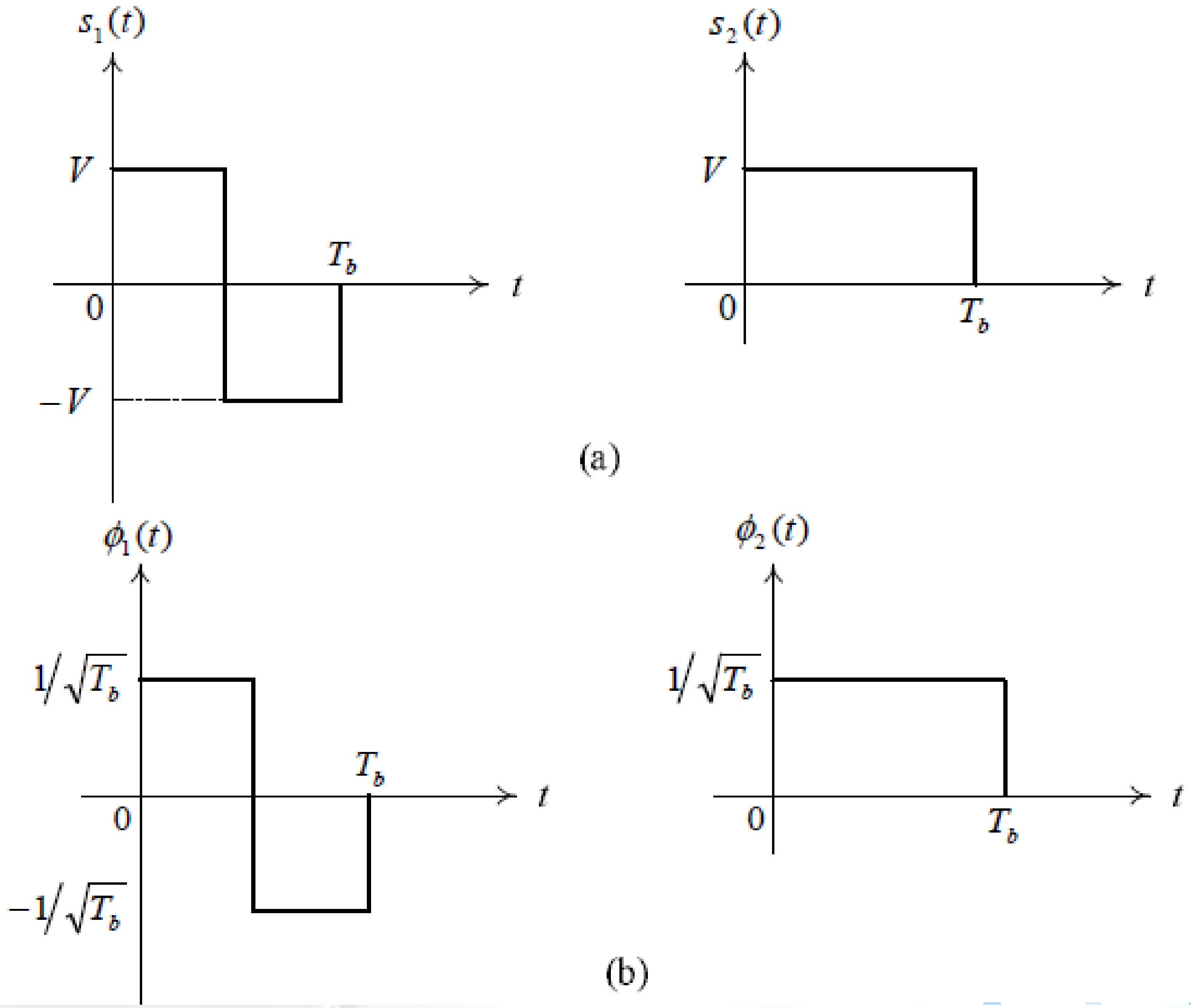
Εάν ένα σήμα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός ορθοκανονικών συναρτήσεων τότε η απόσταση του από την αρχή των αξόνων είναι πάντα ίση με τη τετραγωνική ρίζα της Ενέργειας του σήματος.

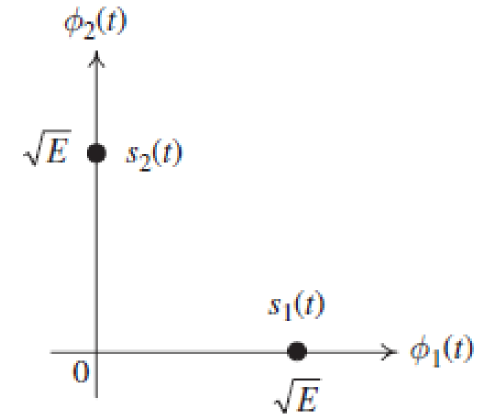
Παράδειγμα 1



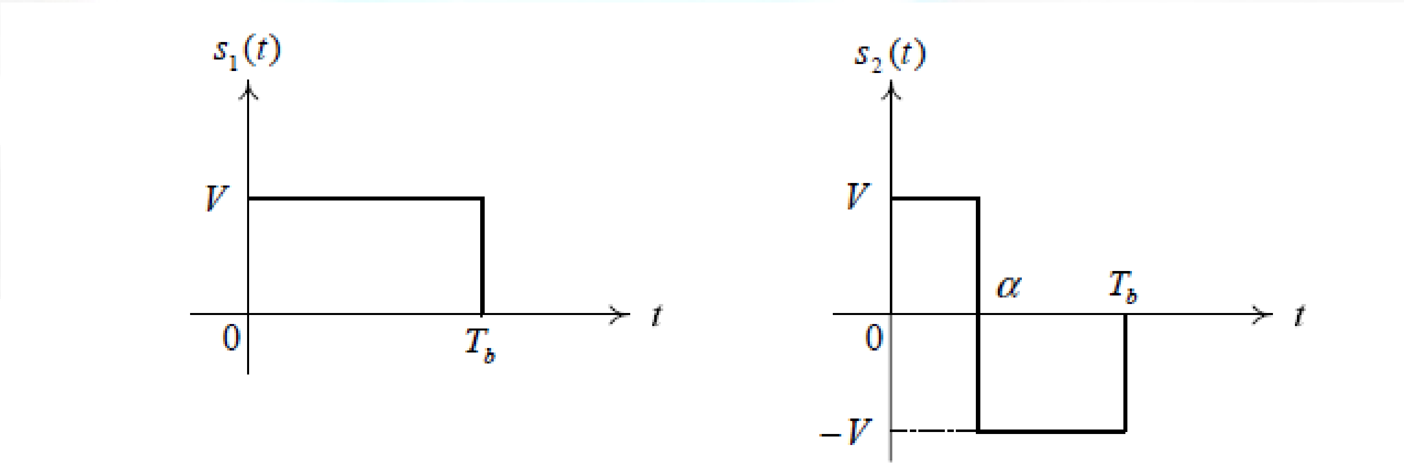
(a) Σήματα (b) Ορθοκανονική Συνάρτηση (c) Αναπαράσταση στο χώρο.

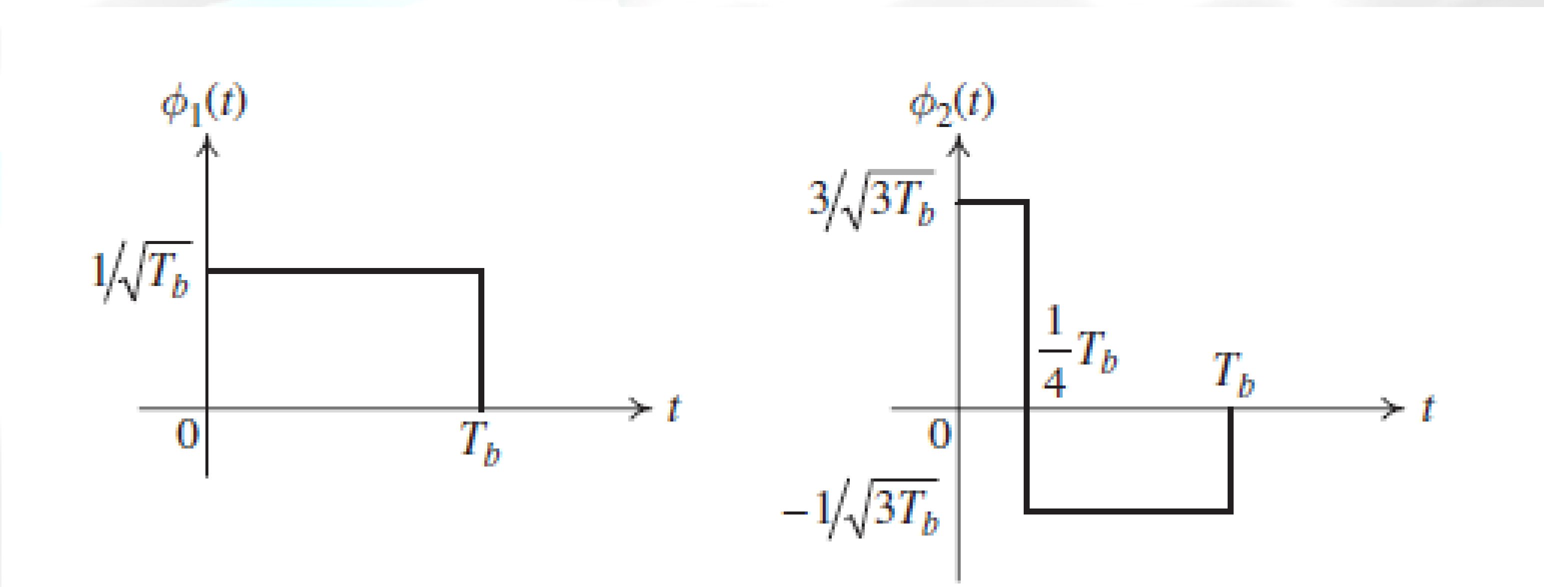
Παράδειγμα 2



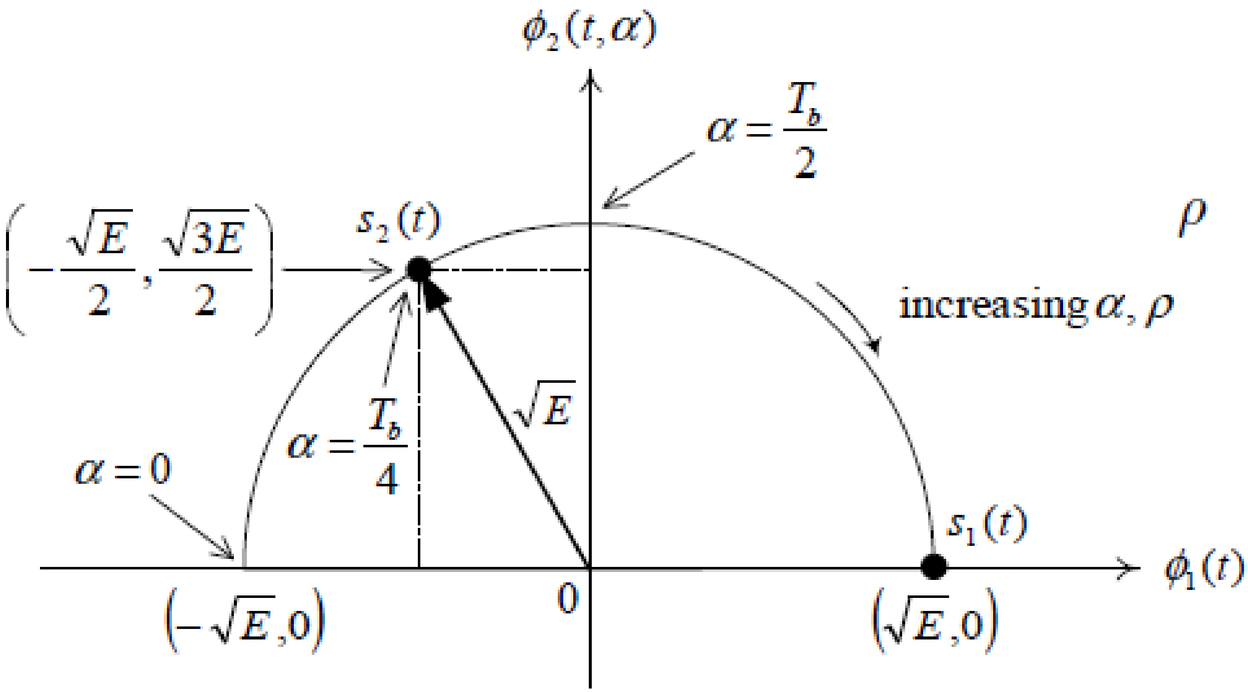


Παράδειγμα 3





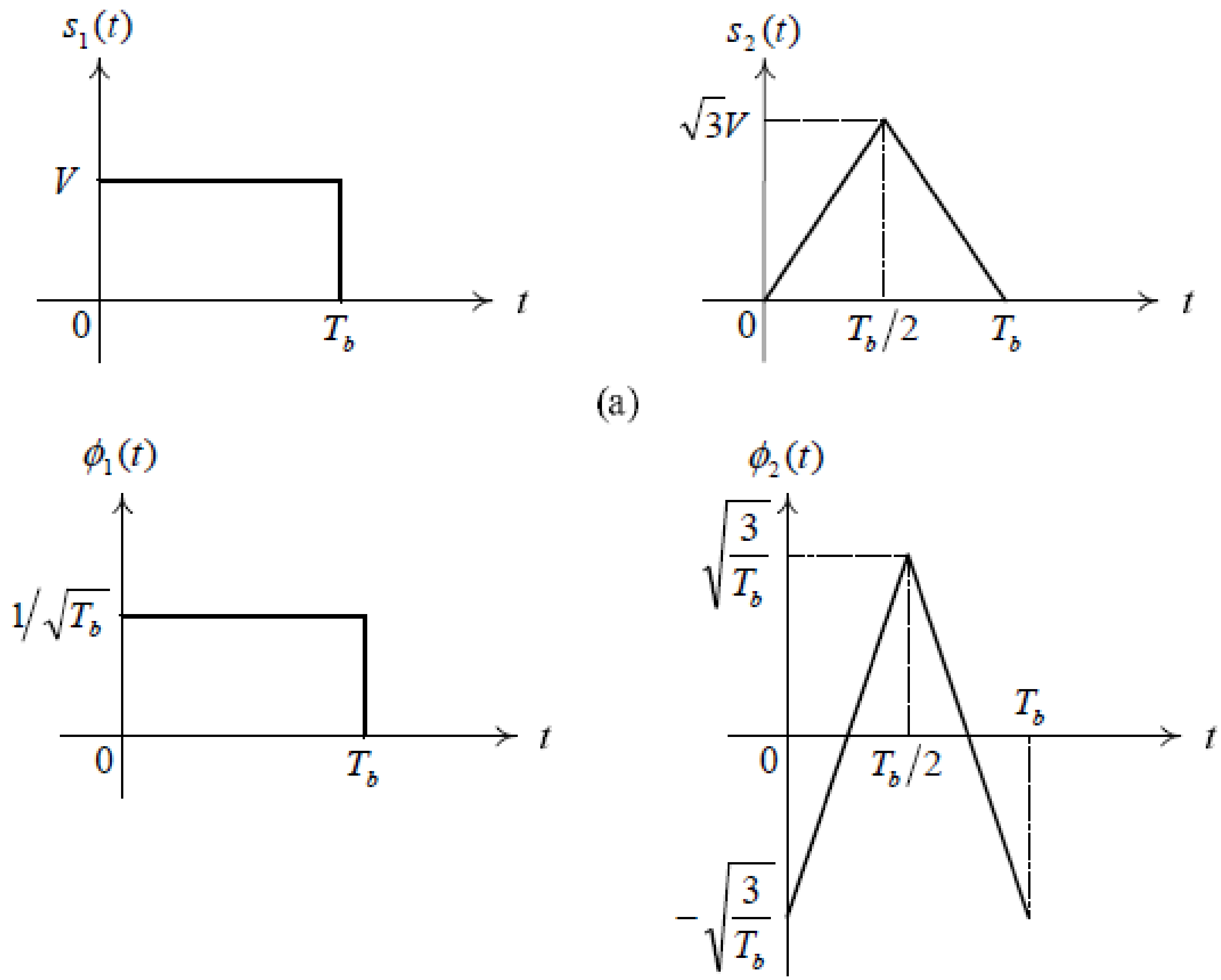
Παράδειγμα 3



$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{E}\int_0^{T_b} s_2(t)s_1(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{V^2T_b}\left[V^2\alpha - V^2(T_b-\alpha)\right] \\
&= \frac{2\alpha}{T_b} - 1
\end{aligned}
$$

Όσο μεγαλώνει το *α* , *αυξάνει ο συντελεστής συσχέτισης ρ* και η απόσταση μεταξύ των δύο σημάτων μειώνεται.

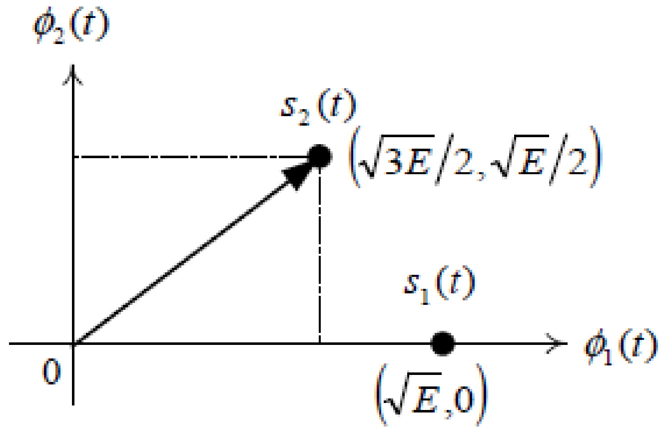
Παράδειγμα 4



(a)

(b)

Παράδειγμα 4



$E = V^2 T_b$ joules

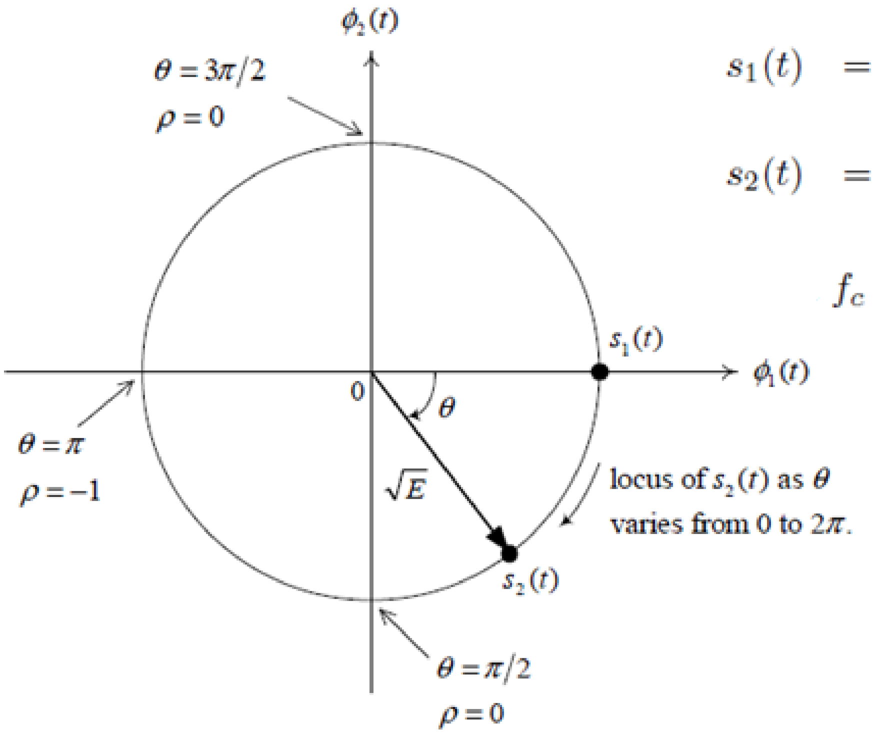
$$\rho = \frac{1}{E}\int_0^{T_b} s_2(t)s_1(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{E}\int_0^{T_b/2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{T_b}Vt\right)V\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{s_2(t)}{\sqrt{E}} - \rho\frac{s_1(t)}{\sqrt{E}}\right] = \frac{2}{\sqrt{E}}\left[s_2(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}s_1(t)\right],$$

$$s_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{E}, \quad s_{22} = \frac{1}{2}\sqrt{E}.$$

$$d_{21} = \left[\int_0^{T_b}[s_2(t) - s_1(t)]^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)E}.$$

Παράδειγμα 5



$$s_1(t) = \sqrt{E}\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_c t),$$
$$s_2(t) = \sqrt{E}\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_c t + \theta).$$

$$f_c = \frac{k}{2T_b},\ k \text{ an integer.}$$

$$E_1 = E\int_0^{T_b}\frac{2}{T_b}\cos^2(2\pi f_c t)\mathrm{d}t = E,$$
$$E_2 = E\int_0^{T_b}\frac{2}{T_b}\cos^2(2\pi f_c t + \theta)\mathrm{d}t = E.$$

$\cos(2\pi f_c t)$, $\sin(2\pi f_c t)$
ορθογώνια
σε διάρκεια T_b

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E}} = \sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_c t).$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

$$s_2(t) = \left(\sqrt{E}\cos\theta\right)\left[\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_c t)\right] + \left(-\sqrt{E}\sin\theta\right)\left[\sqrt{\frac{2}{T_b}}\sin(2\pi f_c t)\right]$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}}\sin(2\pi f_c t).$$

$$s_2(t) = s_{21}\phi_1(t) + s_{22}\phi_2(t)$$
$$s_{21} = \sqrt{E}\cos\theta, \quad s_{22} = -\sqrt{E}\sin\theta.$$

Αστερισμός (Constellation)

Ένα σύνολο M διανυσμάτων (σημάτων) που ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο ονομάζεται Αστερισμός.

Ιδιότητες:

1. Κάθε σήμα αναπαρίσταται σε ένα σημείο του αστερισμού και αντιστοιχεί σε μια διαφορετική κυματομορφή/σύμβολο. Όλες οι κυματομορφές ανήκουν στην ίδια ορθοκανονική βάση.
2. Μέση ενέργεια συμβόλου:

$$E_s = \sum_{i=1}^{M} \left\| s_i \right\|^2 \cdot P_r\left(s_i\right), \quad \left\| s_i \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(s_{ij}\right)^2 \qquad P_r\left(s_i\right) = \text{πιθανότητα μετάδοσης συμβόλου, } s_{ij} = \sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau\acute{\omega}\sigma\alpha$$

Η Ελαχιστοποίηση της E_s με σκοπό την Εξοικονόμηση Ενέργειας Εκπομπής απαιτεί την τοποθέτηση των σημείων κοντά στο 0.

Μικραίνουν οι Ευκλείδειες Αποστάσεις μεταξύ των Συμβόλων –

Αυξάνεται η Πιθανότητα Λάθους

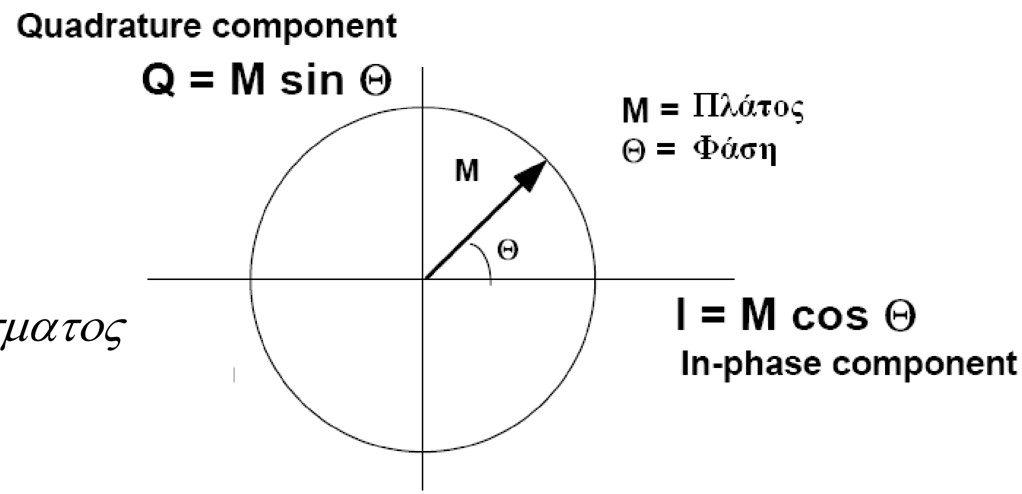
I- Q αναπαράσταση

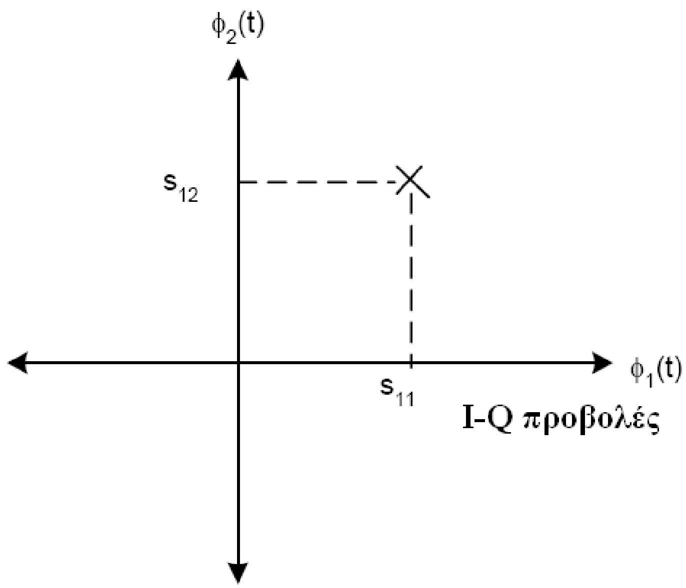
I – in phase συνιστώσα

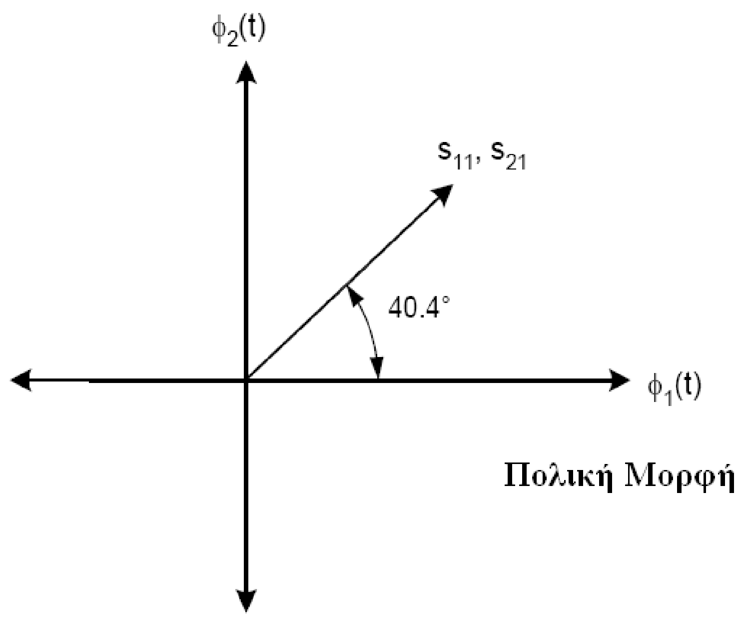
Q- quadrature συνιστώσα
(μετατοπισμένη κατά 90deg)

$$M = \sqrt{I^2 + Q^2} \quad \textit{πλάτος σήματος / διάνυσματος}$$

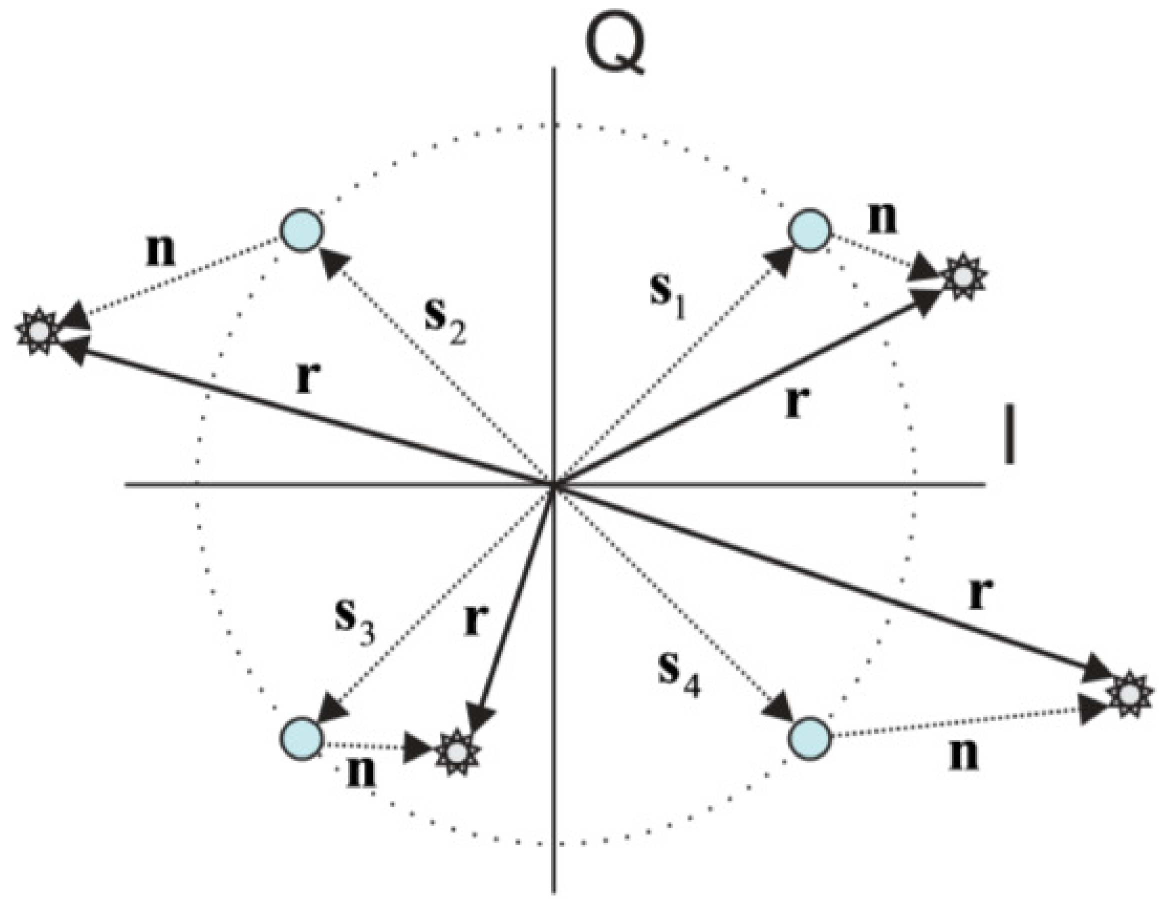
$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{I}{Q}\right) \quad \textit{φάση σήματος}$$





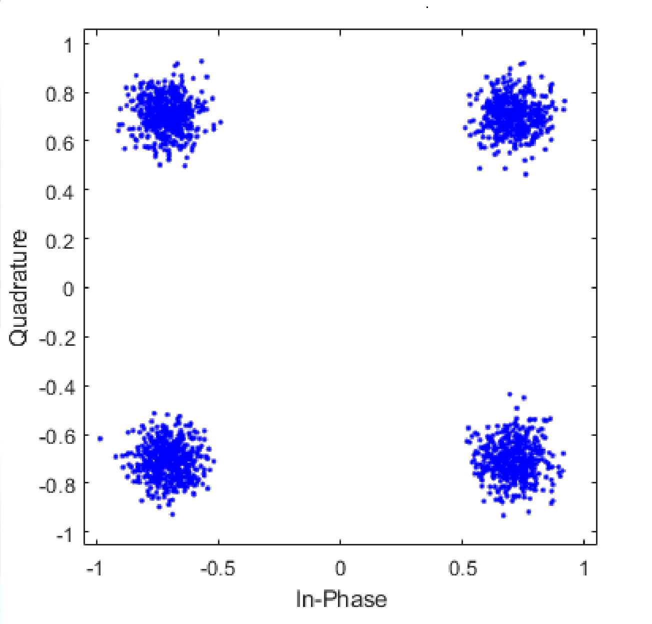


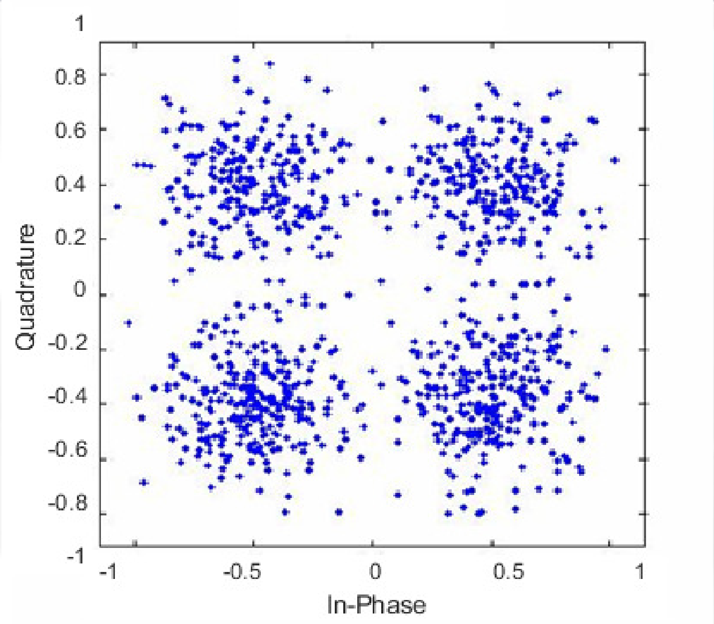
Επίδραση Θορύβου στον Αστερισμό

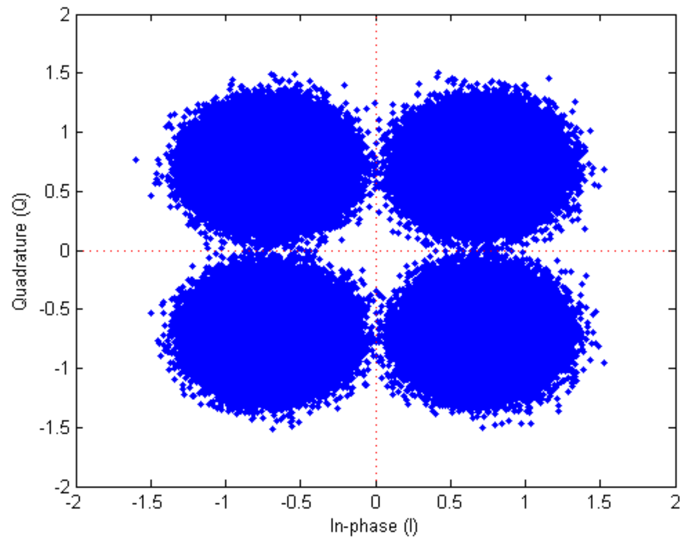


Επίδραση του θορύβου σε σύμβολα του αστερισμού QPSK

Constellation-Noise Example







Αναπαράσταση του Θορύβου

Όπως είδαμε το σύνολο των σημάτων $\{s_1(t), s_2(t)\}$ χρησιμοποιείται για να μεταδοθούν δυαδικά δεδομένα και χρειάζονται 2 ορθοκανονικές συναρτήσεις για να αναπαρασταθούν ακριβώς.

Σε αντίθεση για να αναπαραστήσουμε ένα τυχαίο σήμα θορύβου $\mathbf{w}(t)$, στο χρονικό διάστημα

$[(k-1)Tb, kTb]$ το διάστημα ενός bit $\mathbf{b}_k$)

Χρειαζόμαστε ένα **πλήρες ορθοκανονικό σύνολο από ντετερμινιστικές συναρτήσεις.**

Η αναπαράσταση του θορύβου δίνεται από την παρακάτω σειρά:

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{w}_i \phi_i(t),$$

$$\mathbf{w}_i = \int_0^{T_b} \mathbf{w}(t)\phi_i(t)\mathrm{d}t$$

Οι συντελεστές w_i είναι τυχαίες μεταβλητές και το να καταλάβουμε τις στατιστικές ιδιότητες τους είναι απολύτως απαραίτητο για να αναπτύξουμε τον βέλτιστο δέκτη.

Αναπαράσταση του Θορύβου

Όταν ο θόρυβος w(t) είναι μηδενικής μέσης τιμής τότε ισχύουν :

$$E\{\mathrm{w}_i\} = E\left\{\int_0^{T_b} \mathrm{w}(t)\phi_i(t)\mathrm{d}t\right\} = \int_0^{T_b} E\{\mathrm{w}(t)\}\phi_i(t)\mathrm{d}t = 0.$$

$$E\{\mathrm{w}_i\mathrm{w}_j\} = E\left\{\int_0^{T_b} \mathrm{d}\lambda \mathrm{w}(\lambda)\phi_i(\lambda) \int_0^{T_b} \mathrm{d}\tau \mathrm{w}(\tau)\phi_j(\tau)\right\} =$$

$$\begin{cases} \frac{N_0}{2}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Οι $\{w_1, w_2, \ldots\}$ **είναι τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής και ασυσχέτιστες.**

Εάν ο θόρυβος w(t) είναι και Gaussian εκτός από μηδενικής τιμής και λευκός ⇒

Τότε οι $\{w_1, w_2, \ldots\}$ τυχαίες μεταβλητές είναι Gaussian και στατιστικά ανεξάρτητες.

Οι παραπάνω ιδιότητες δεν εξαρτώνται με το πώς επιλέγονται οι $\{\phi_i(t), i = 1, 2, \ldots\}$.

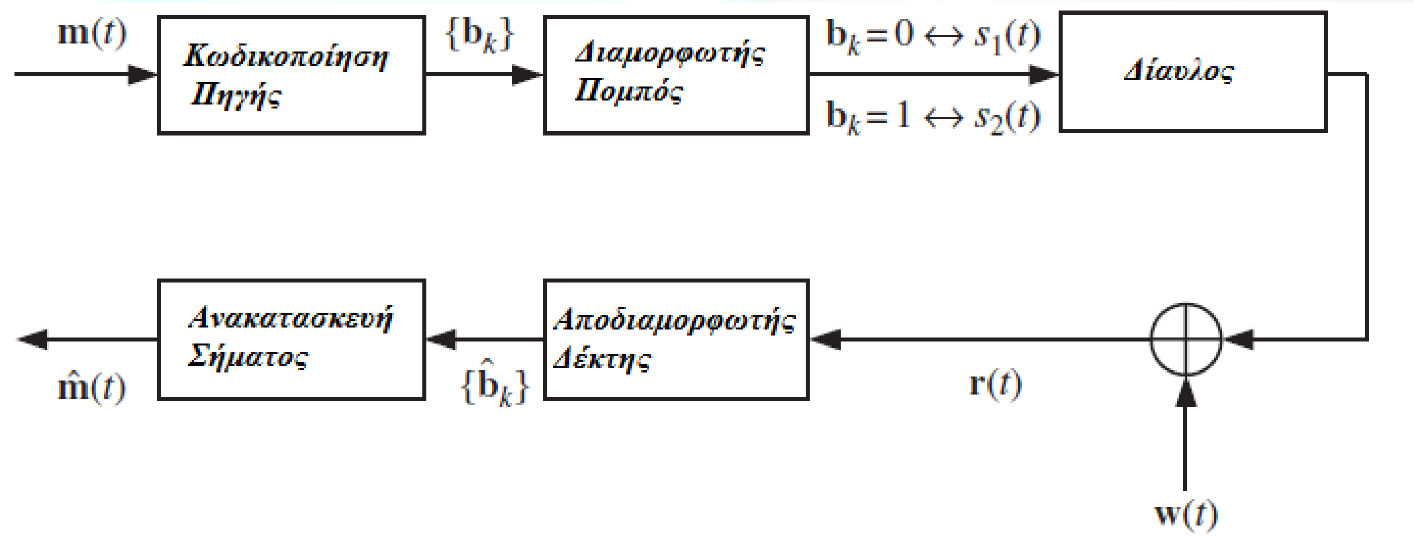
Επιλέγουμε τις δύο πρώτες συναρτήσεις $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ για να αναπαραστήσουμε τα σήματα $s_1(t)$, $s_2(t)$ ακριβώς.

Οι υπόλοιπες συναρτήσεις π.χ. $\phi_3(t)$, $\phi_4(t)$, . . . , απλώς επιλέγονται για να συμπληρώσουν το σύνολο. αλλά δεν χρειάζονται να βρεθούν.

Ανεξαρτησια και συσχετιση

- Δυο στοχαστικές διαδικασίες X(t) και Y(t) είναι **ανεξάρτητες** αν για όλα τα ζεύγη t_1 και t_2, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_1)$ και $Y(t_2)$ είναι **ανεξάρτητες.** Ομοίως ορίζονται και οι **ασυσχέτιστες σ.δ.**
- Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι **ανεξάρτητες** αν $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, και
- **ασυσχέτιστες** αν $COV(X,Y) = E[XY]-m_X m_Y = 0$
- **Παρατήρηση**: αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες δηλαδή έχουν COV(X,Y) =0.
- Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γενεί πάρα μόνο για Gaussian r.v

Block Διάγραμμα Δυαδικού Ψηφιακού Συστήματος Επικοινωνιών



Τα Bits σε δύο διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι στατιστικά ανεξάρτητα.

$$P[\mathrm{b}_k = 0] = P_1, \; P[\mathrm{b}_k = 1] = P_2.$$

$$\mathrm{b}_k = 0 \leftrightarrow s_1(t)$$
$$\mathrm{b}_k = 1 \leftrightarrow s_2(t)$$

$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\mathrm{d}t \text{ (joules)}, \quad E_1 < \infty,$$
$$E_2 = \int_0^{T_b} s_2^2(t)\mathrm{d}t \text{ (joules)}, \quad E_2 < \infty.$$

$$E\{\mathrm{w}(t)\} = 0, \quad E\{\mathrm{w}(t)\mathrm{w}(t+\tau)\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Οι κυματομορφές είναι τυχαίες άλλα γνωστές στο δέκτη. Ο δίαυλος είναι αρκετά ευρυζωνικός ώστε να περάσουν τα σήματα χωρίς παραμόρφωση. Δεν υπάρχει διασυμβολική παρεμβολή μεταξύ των ψηφίων.

Βέλτιστος Δέκτης I

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= s_i(t) + \mathbf{w}(t), \quad 0 \le t \le T_b \\
&= \begin{cases} s_1(t) + \mathbf{w}(t), & \text{if a "0" is transmitted} \\ s_2(t) + \mathbf{w}(t), & \text{if a "1" is transmitted} \end{cases} . \\
&= \underbrace{[s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t)]}_{s_i(t)} \\
&\quad + \underbrace{[\mathbf{w}_1\phi_1(t) + \mathbf{w}_2\phi_2(t) + \mathbf{w}_3\phi_3(t) + \mathbf{w}_4\phi_4(t) + \cdots]}_{\mathbf{w}(t)} \\
&= (s_{i1} + \mathbf{w}_1)\phi_1(t) + (s_{i2} + \mathbf{w}_2)\phi_2(t) + \mathbf{w}_3\phi_3(t) + \mathbf{w}_4\phi_4(t) + \cdots \\
&= \mathbf{r}_1\phi_1(t) + \mathbf{r}_2\phi_2(t) + \mathbf{r}_3\phi_3(t) + \mathbf{r}_4\phi_4(t) + \cdots
\end{aligned}
$$

Ξέρουμε ακριβώς ποτέ το χρονικό διάστημα ξεκινάει
Ο Δέκτης είναι ΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΕΝΟΣ Με τον Πομπό.

$$
\mathbf{r}_j = \int_0^{T_b} \mathbf{r}(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t, \qquad
\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= s_{i1} + \mathbf{w}_1 \\
\mathbf{r}_2 &= s_{i2} + \mathbf{w}_2 \\
\mathbf{r}_3 &= \mathbf{w}_3 \\
\mathbf{r}_4 &= \mathbf{w}_4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Τα r_j, για j = 3, 4, 5, . . .,δεν εξαρτώνται από το σύμβολο που μεταδόθηκε.

Η απόφαση μπορεί να βασιστεί σε παρατήρηση των r_1, r_2, r_3, r_4, ...

Ο στόχος είναι minimize (ελαχιστοποιήσουμε)
Την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου
Bit error probability (BEP).

Βέλτιστος Δέκτης Ι.1

- **Στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε) την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου**

Bit Error probability (BEP).

- Η πιθανότητα να κάνω λάθος μπορεί να εκφραστεί:

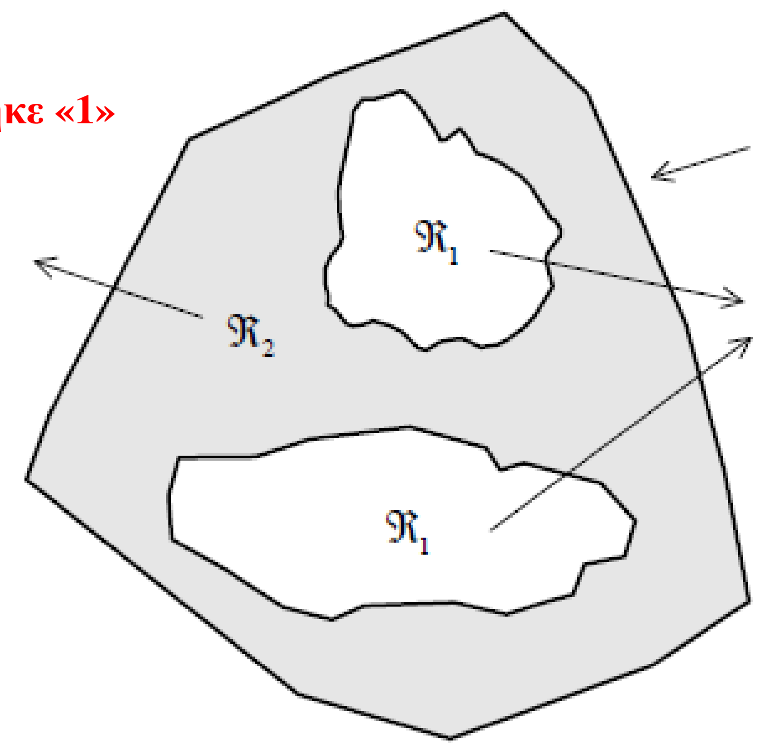
$$P[Error] = P\Big[\big(\text{"0"}\, decided \;\text{ AND }\; \text{"1"}\; transmitted\big) \;\text{ OR }\; \big(\text{"1"}\, decided \;\text{ AND }\; \text{"0"}\; transmitted\big)\Big]$$

Βέλτιστος Δέκτης ΙΙ

Θεωρούμε τους πρώτους n όρους ~r = {r1, r2, . . . , rn} ⇒ μπορεί να είναι μεγάλος αριθμός n.

Πρέπει να διαχωριστεί ο χώρος n σε περιοχές απόφασης.

Αποφασίζω ότι **μεταδόθηκε «1»** εάν το **r πέφτει μέσα στην περιοχή R_2**



Χώρος Παρατήρησης – Observation Space

Αποφασίζω ότι **μεταδόθηκε «0»** εάν το **r πέφτει μέσα στην περιοχή R_1.**

$$P[0_D|1_T] = \int_{\Re_1} f(\vec{r}|1_T)\mathrm{d}\vec{r}$$

Βέλτιστος Δέκτης III

$$
\begin{aligned}
P[\text{error}] &= P[(\text{“0” decided and “1” transmitted}) \cup \\
&\quad (\text{“1” decided and “0” transmitted})]. \\
&= P[0_D, 1_T] + P[1_D, 0_T] \\
&= P[0_D|1_T]P[1_T] + P[1_D|0_T]P[0_T] \\
&= P_2 \int_{\Re_1} f(\vec{r}|1_T)\mathrm{d}\vec{r} + P_1 \int_{\Re_2} f(\vec{r}|0_T)\mathrm{d}\vec{r} \\
&= P_2 \int_{\Re-\Re_2} f(\vec{r}|1_T)\mathrm{d}\vec{r} + P_1 \int_{\Re_2} f(\vec{r}|0_T)\mathrm{d}\vec{r} \\
&= P_2 \int_{\Re} f(\vec{r}|1_T)\mathrm{d}\vec{r} + \int_{\Re_2} [P_1 f(\vec{r}|0_T) - P_2 f(\vec{r}|1_T)]\mathrm{d}\vec{r} \\
&= P_2 + \int_{\Re_2} [P_1 f(\vec{r}|0_T) - P_2 f(\vec{r}|1_T)]\,\mathrm{d}\vec{r}.
\end{aligned}
$$

Αλληλοαποκλειόμενα Ενδεχόμενα

Bayes/Conditional Probability

$$P[0_T] = P_1 \quad P[1_T] = P_2$$

Περιοχή R_2: Decide **«1»**

στην περιοχή **R_1**
στην περιοχή **R_2**

$$
\begin{cases}
P_1 f(\vec{r}|0_T) - P_2 f(\vec{r}|1_T) \geq 0 & \Rightarrow \quad \text{decide “0” } (0_D) \\
P_1 f(\vec{r}|0_T) - P_2 f(\vec{r}|1_T) < 0 & \Rightarrow \quad \text{decide “1” } (1_D)
\end{cases}
$$

Βέλτιστος Δέκτης IV

Το λάθος εξαρτάται προφανώς από το πώς χωρίζονται οι περιοχές παρατήρησης.

Ο κανόνας που κάνει minimum την πιθανότητα λάθους μπορεί να εκφραστεί ως εξής: ¨

$$\begin{cases} P_1 f(\vec{r}|0_T) - P_2 f(\vec{r}|1_T) \geq 0 & \Rightarrow \quad \text{decide "0" } (0_D) \\ P_1 f(\vec{r}|0_T) - P_2 f(\vec{r}|1_T) < 0 & \Rightarrow \quad \text{decide "1" } (1_D) \end{cases}$$

Ισοδύναμα :

$$\frac{f(\vec{r}|1_T)}{f(\vec{r}|0_T)} \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} \frac{P_1}{P_2}.$$

$$P[0_T] = P_1 \quad P[1_T] = P_2$$

Η έκφραση $\frac{f(\vec{r}|1_T)}{f(\vec{r}|0_T)}$ ονομάζεται **Λόγος Πιθανοφάνειας Likelihood Ratio.**

Σημείωση: Δεν καθορίσαμε ακόμα καθόλου τις στατιστικές παραμέτρους της διαδικασίας του θορύβου.

Βέλτιστος Δέκτης V

Ο Δέκτης **πραγματοποιεί τη διαδικασία υπολογισμού** και συγκρίνει με το αποτέλεσμα με

ένα κατώφλι **που έχει a priori υπολογισμένες τις πιθανότητες.**

Ο κανόνας απόφασης μπορεί να απλοποιηθεί θεωρώντας θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής, λευκό και Gaussian. Σε αυτή την περίπτωση οι μετρούμενες

τιμές r_i είναι ανεξάρτητες Γκαυσσιανές τυχαίες μεταβλητές.

Οι υπό συνθήκες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι τα γινόμενα των επιμέρους pdfs.

$$f(\vec{r}|1_T) = f(r_1|1_T)f(r_2|1_T)f(r_3|1_T)\cdots f(r_j|1_T)\cdots,$$

$$f(\vec{r}|0_T) = f(r_1|0_T)f(r_2|0_T)f(r_3|0_T)\cdots f(r_j|0_T)\cdots$$

$$f(\vec{r}|1_T) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left[-\frac{(r_1-s_{21})^2}{N_0}\right]\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left[-\frac{(r_2-s_{22})^2}{N_0}\right] \times f(r_3|1_T)\cdots$$

$$f(\vec{r}|0_T) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left[-\frac{(r_1-s_{11})^2}{N_0}\right]\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left[-\frac{(r_2-s_{12})^2}{N_0}\right] \times f(r_3|0_T)\cdots$$

Οι μέσες τιμές ή προσδοκητές των δύο coefficients $\mathbf{r}_1$ & $\mathbf{r}_2$ είναι

(s_{11}, s_{12})

(s_{21}, s_{22}).

Βέλτιστος Δέκτης VI

Ο Κανόνας απόφασης γίνεται¨

$$\frac{\exp\left[-(r_1-s_{21})^2/N_0\right]\exp\left[-(r_2-s_{22})^2/N_0\right]}{\exp\left[-(r_1-s_{11})^2/N_0\right]\exp\left[-(r_2-s_{12})^2/N_0\right]} \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} \frac{P_1}{P_2}.$$

$$b_k = 0 \leftrightarrow s_1(t)$$

$$b_k = 1 \leftrightarrow s_2(t)$$

$$(r_1-s_{11})^2+(r_2-s_{12})^2 \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} (r_1-s_{21})^2+(r_2-s_{22})^2+N_0\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

Ο κανόνας έχει μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική εξήγηση :
Η ποσότητα $(r_1-s_{11})^2+(r_2-s_{12})^2$ είναι η απόσταση στο τετράγωνο από την προβολή (r_1, r_2) του ληφθέντος σήματος σε αυτό που μεταδόθηκε $s_1(t)$.
Ομοίως $(r_1-s_{21})^2+(r_2-s_{22})^2$ είναι η απόσταση στο τετράγωνο του (r_1, r_2) από το $s_2(t)$.

Για την ειδική περίπτωση όπου $P_1 = P_2$ (τα σήματα είναι ισοπίθανα) τότε:

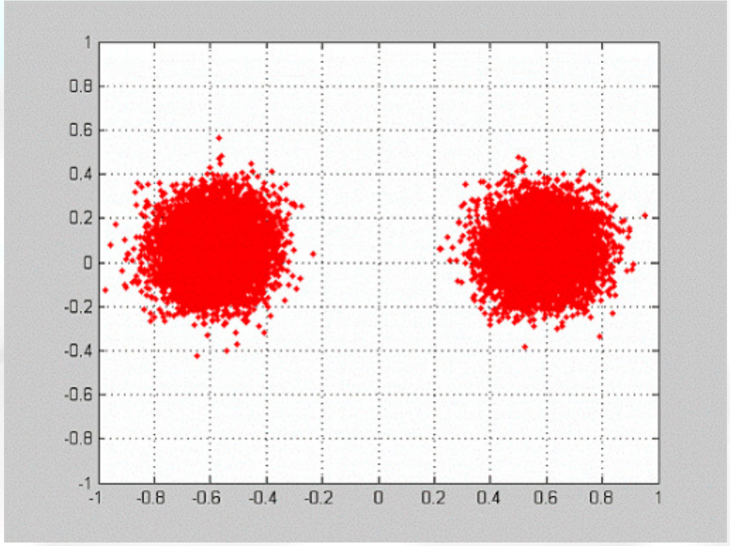
$$(r_1-s_{11})^2+(r_2-s_{12})^2 \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} (r_1-s_{21})^2+(r_2-s_{22})^2.$$

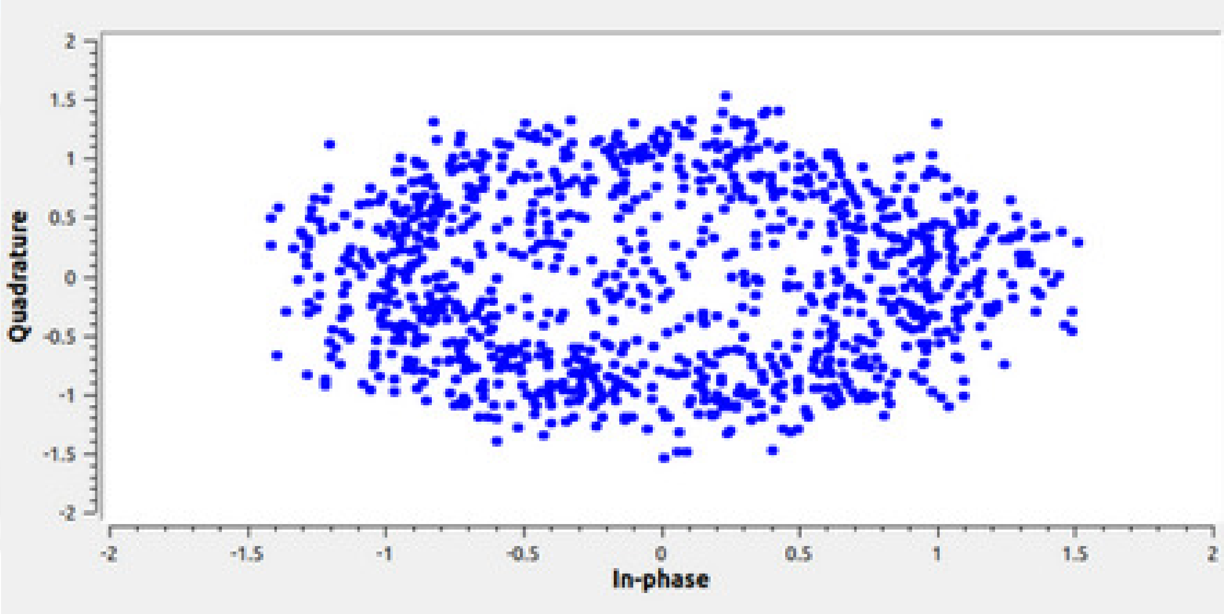
$\Rightarrow$ *minimum-distance* receiver!

Δέκτης Ελάχιστης Απόστασης

Στην ουσία ο κανόνας λέει ότι ο βέλτιστος δέκτης χρειάζεται να καθορίσει την απόσταση του r(t)
Και από τις δύο κυματομορφές $s_1(t)$ και $s_2(t)$ και να επιλέξει το σήμα που είναι πιο κοντά στο r(t).

Constellation BPSK with noise





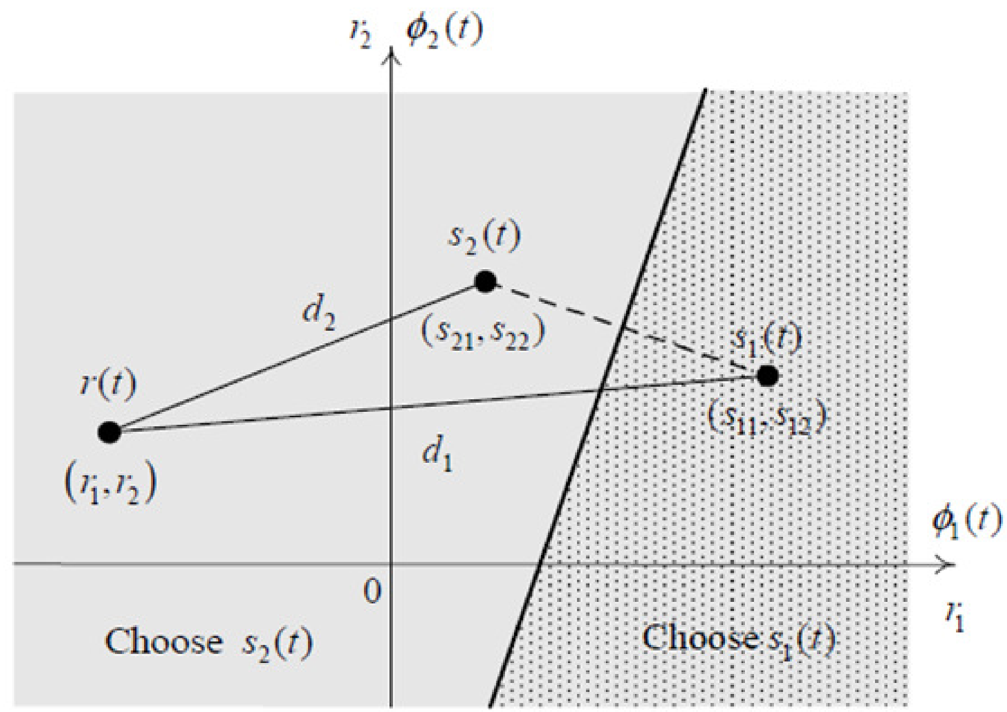
Βέλτιστος Δέκτης VII

$P_1 \neq P_2$

$$P[0_T] = P_1 \quad P[1_T] = P_2$$

$b_k = 0 \leftrightarrow s_1(t)$

$b_k = 1 \leftrightarrow s_2(t)$



Οι περιοχές απόφασης
Καθορίζονται από μια γραμμή
κάθετη στη γραμμή που ενώνει
τα δύο σήματα
$\{s_1(t), s_2(t)\}$,

Η γραμμή ολισθαίνει

- **προς $s_2(t)$ εάν $P1 > P2$)**

Μεγαλύτερη πιθανότητα για 0 → $s_1(t)$
Άρα επειδή θέλω να μειώσω το BEP
Αυξάνω την περιοχή επιλογής του 0
Πάω πιο κοντά στο 1 → $s_2(t)$
ή

- **προς $s_1(t)$ (εάν $P1 < P2$).**

Μεγαλύτερη πιθανότητα για 1

$$P[Error] = P_1 \cdot P_{e0} + P_2 P_{e1}$$

Κανόνας Απόφασης Μέγιστης μέτα-πιθανότητας MAP (Maximum a-posteriory Probability)

- Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\{\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\dots,\mathbf{s}_M\}$ με τα οποία μεταδίδονται τα M διαφορετικά σύμβολα, εκπέμπονται με πιθανότητες $\{p_1, p_2,\dots,p_M\}$ αντίστοιχα, και ότι λαμβάνεται το διάνυσμα **r.**

- Η πιθανότητα σφάλματος ενός συμβόλου **ελαχιστοποιείται** αν στον δεκτή η εκτίμηση $\hat{\mathbf{s}}$ είναι το διάνυσμα $\mathbf{s}_m$ για το οποίο ισχύει:

$$\Pr[\mathbf{s}_m \,|\mathbf{r}] \geq \Pr[\mathbf{s}_i \,|\mathbf{r}],\ \forall m\neq i$$

(MAP receiver)

- Ισοδύναμα (Bayes)

$$\frac{p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)\Pr(\mathbf{s}_m)}{p(\mathbf{r})} \geq \frac{p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i)\Pr(\mathbf{s}_i)}{p(\mathbf{r})}, \forall m \neq i$$

$$\acute{\eta} \quad p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)\Pr(\mathbf{s}_m) \geq p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i)\Pr(\mathbf{s}_i), \forall m \neq i$$

Κανόνας Απόφασης Μεγίστης Πιθανοφάνειας ML (Maximum Likelihood)

- Αν $p_1=p_2=\ldots=p_m=1/M$, ή αν οι πιθανότητες εκπομπής των συμβολών είναι άγνωστες (οπότε υποτίθεται ίσες), τότε ο κανόνας MAP ισοδυναμεί με τον ML

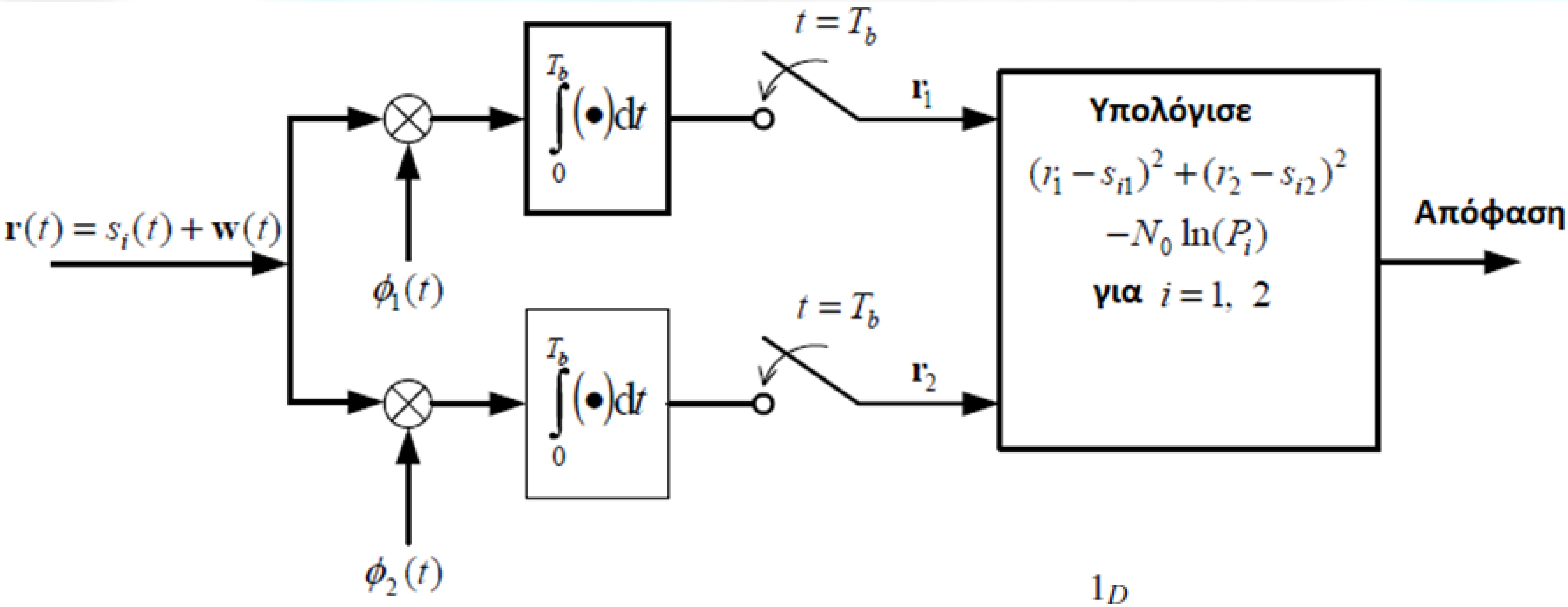
- Η πιθανότητα σφάλματος ενός συμβόλου **ελαχιστοποιείται** αν επιλέξουμε ως εκπεμπόμενο σύμβολο το $\mathbf{s}_m$ το οποίο ικανοποιεί την σχέση :

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) \geq p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i),\ \forall m \neq i.$$

(Maximum Likelihood Receiver)

Βέλτιστος Δέκτης VIII

Υλοποίηση Δέκτη Συσχέτισης



$$\begin{matrix} (r_1 - s_{11})^2 + (r_2 - s_{12})^2 \\ -N_0 \ln P_1 \end{matrix} \quad \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} \quad \begin{matrix} (r_1 - s_{21})^2 + (r_2 - s_{22})^2 \\ -N_0 \ln P_2 \end{matrix}$$

Η διαδικασία πολλαπλασιασμού του r(t) με το φ(t) και η ολοκλήρωση στη διάρκεια του bit είναι η διαδικασία της συσχέτισης.

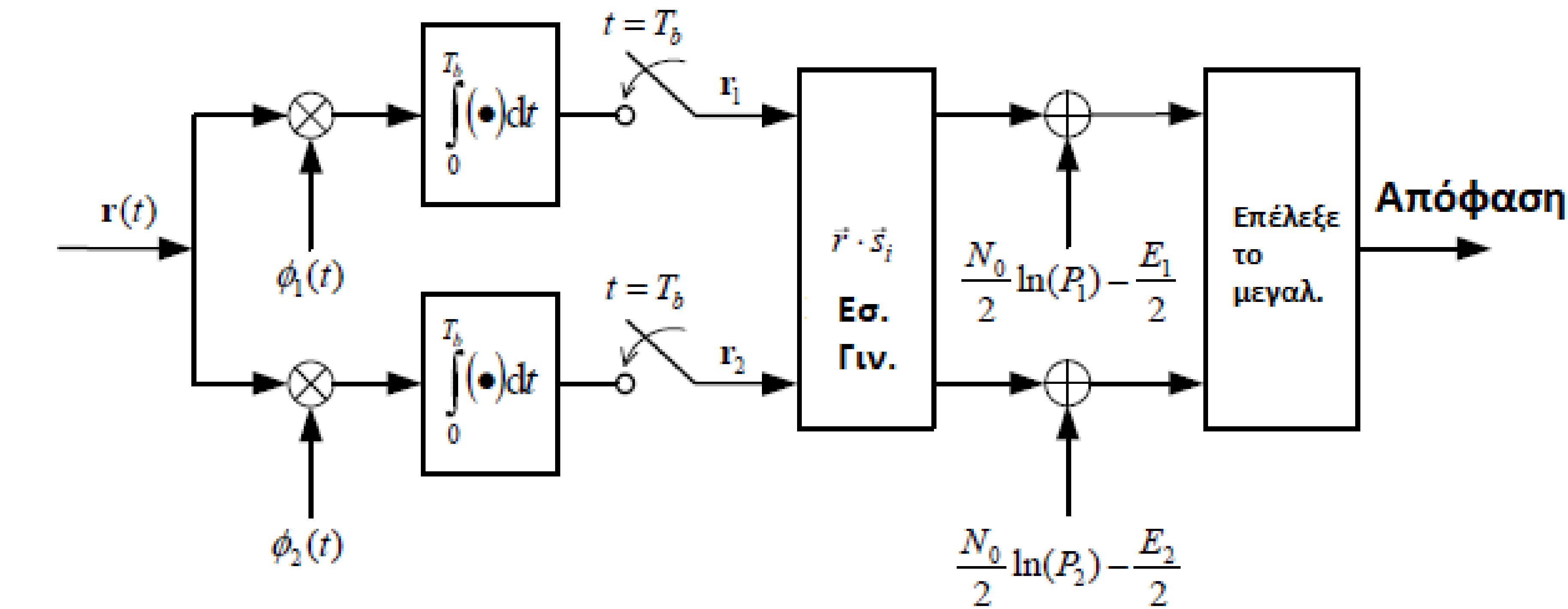
Βέλτιστος Δέκτης IX

$$r_1^2 - 2r_1 s_{11} + s_{11}^2 + r_2^2 - 2r_2 s_{12} + s_{12}^2 - N_0 \ln P_1 \overset{1_D}{\underset{0_D}{\gtrless}} r_1^2 - 2r_1 s_{21} + s_{21}^2 + r_2^2 - 2r_2 s_{22} + s_{22}^2 - N_0 \ln P_2.$$

$$E_1 = s_{11}^2 + s_{12}^2,\ E_2 = s_{21}^2 + s_{22}^2$$

$$r_1 s_{21} + r_2 s_{22} - \frac{E_2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_2 \overset{1_D}{\underset{0_D}{\gtrless}} r_1 s_{11} + r_2 s_{12} - \frac{E_1}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_1.$$

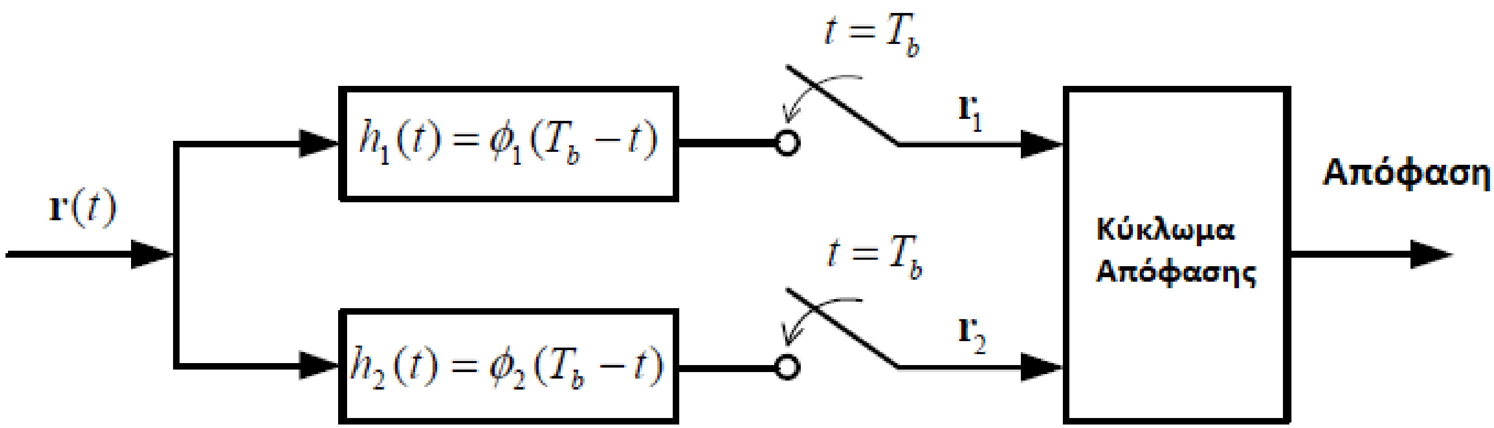
$$r_1 s_{i1} + r_2 s_{i2} = (r_1, r_2)\begin{pmatrix} s_{i2} \\ s_{i1} \end{pmatrix}$$



Βέλτιστος Δέκτης Χ

Η συσχέτιση στο βέλτιστο δέκτη συμπεριλαμβάνει ένα πολλαπλασιαστή και έναν ολοκληρωτή. Οι πολλαπλασιαστές είναι δύσκολο να υλοποιηθούν. Είναι πολύπλοκα κυκλώματα.

Σαν εναλλακτική, ο Συσχετιστής μπορεί υλοποιηθεί με την κρουστική απόκριση ενός φίλτρου **(Προσαρμοσμένο Φίλτρο)- Matched Filter**



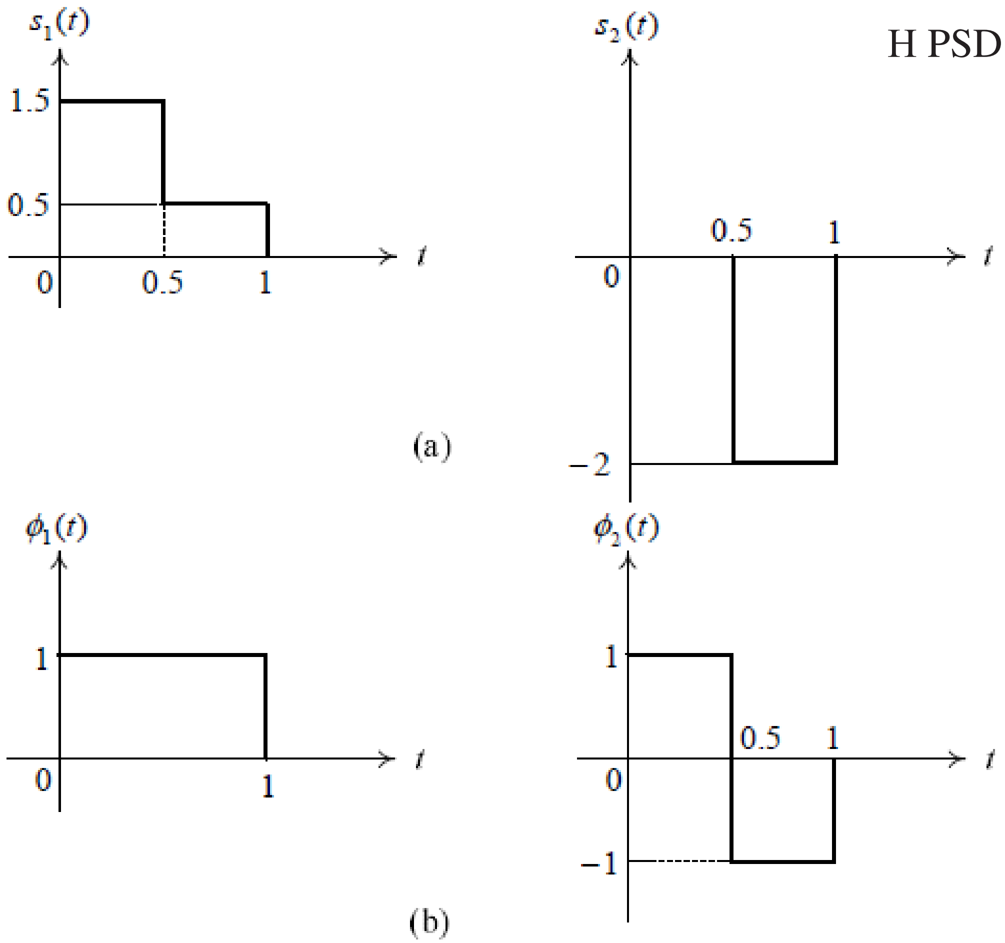
Το προσαρμοσμένο φίλτρο ορίζεται ως το φίλτρο το οποίο έχει κρουστική απόκριση το ίδιο το σήμα καθυστερημένο κατά τη διάρκεια του bit. ***$h(t)=\varphi(T_b-t)$.***

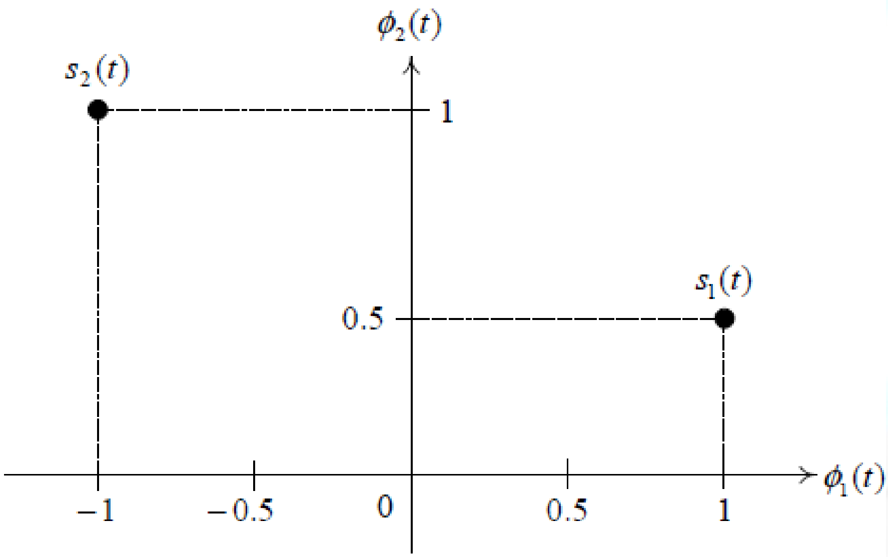
Η έξοδος του φίλτρου είναι η συνέλιξη της εισόδου με τη κρουστική απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου.

Παραδείγματα Ι

Εδώ τα σήματα δεν έχουν την ίδια ενέργεια.

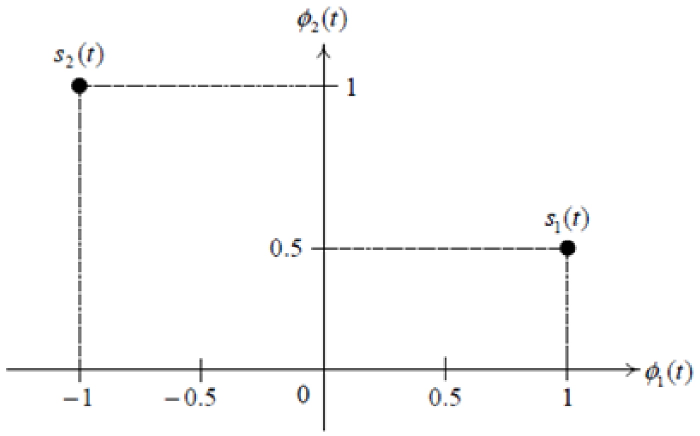
Η PSD του AWGN είναι $N_0/2 = 0.5$ (watts/hertz).





$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= \phi_1(t) + \frac{1}{2}\phi_2(t), \\
s_2(t) &= -\phi_1(t) + \phi_2(t).
\end{aligned}
$$

Παραδείγματα Ι



$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\mathrm{d}t = 1.25 \text{ (joules)}, \quad E_2 = \int_0^{T_b} s_2^2(t)\mathrm{d}t = 2 \text{ (joules)}.$$

$$(r_1 - 1)^2 + (r_2 - \tfrac{1}{2})^2 \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} (r_1 + 1)^2 + (r_2 - 1)^2 + \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$-4r_1 + r_2 - \left(\frac{3}{4} + \ln\frac{P_1}{P_2}\right) \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} 0.$$

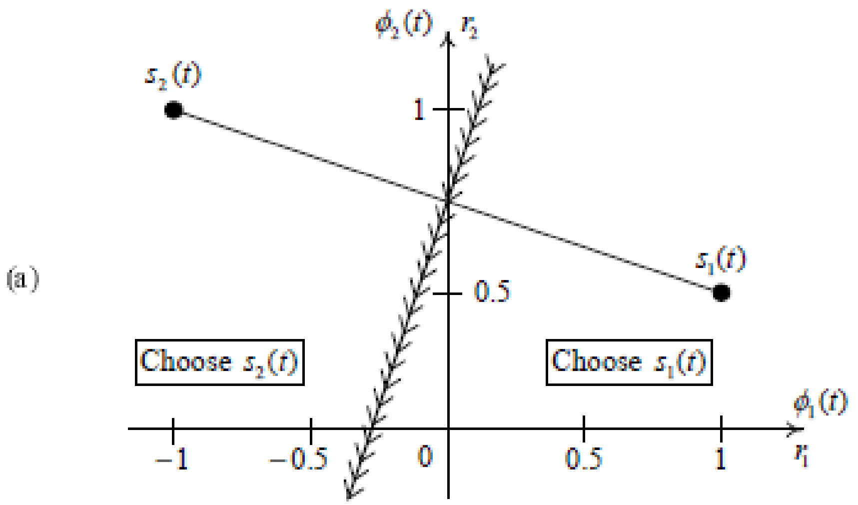
$$4r_1 - r_2 + \left(\frac{3}{4} + \ln\frac{P_1}{P_2}\right) = 0,$$

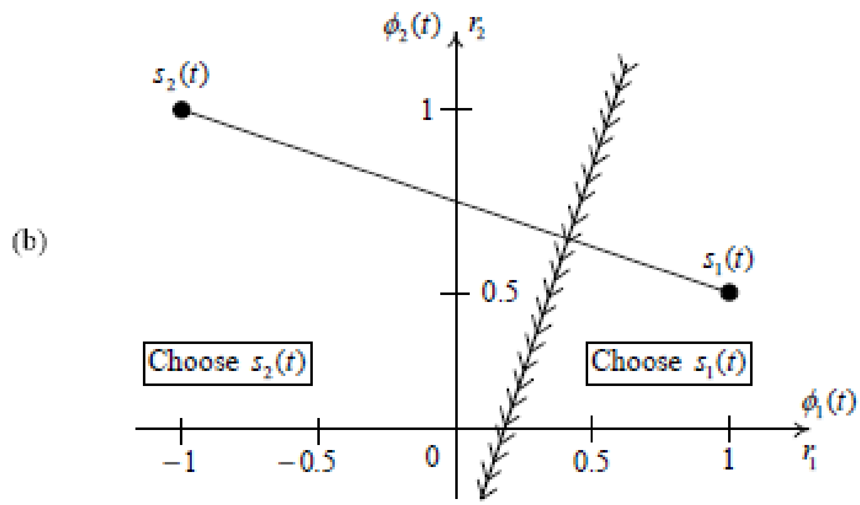
ΟΡΙΟ ΠΕΡΙΟΧΩΝ

Ευθεία που ενώνει το s_1 και το s_2

$$\frac{r_2 - s_{12}}{s_{22} - s_{12}} = \frac{r_1 - s_{11}}{s_{21} - s_{11}}, \qquad r_2 = -\frac{1}{4}r_1 + \frac{3}{4}.$$

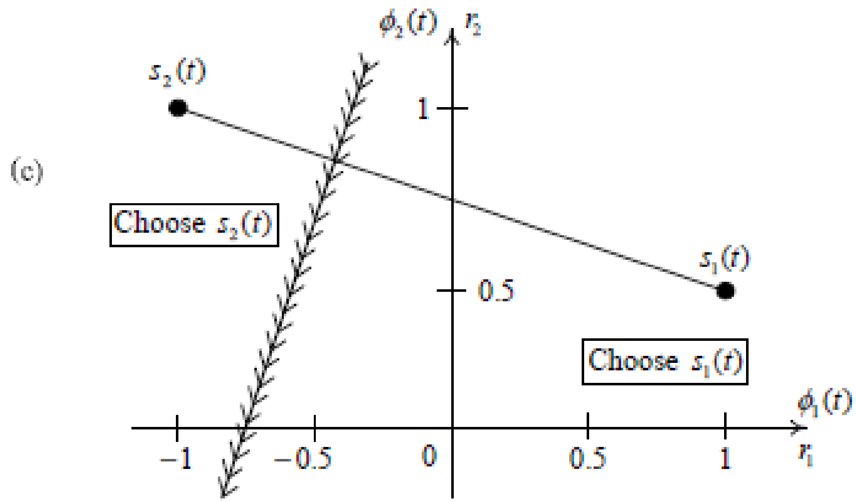
Παραδείγματα Ι





$b_k = 0 \leftrightarrow s_1(t)$

$b_k = 1 \leftrightarrow s_2(t)$



Η γραμμή ολισθαίνει

- **προς $s_2(t)$ εάν $P1 > P2$)**

Μεγαλύτερη πιθανότητα για 0 → $s_1(t)$

Άρα επειδή θέλω να μειώσω το BEP

Αυξάνω την περιοχή επιλογής του 0

Πάω πιο κοντά στο 1 → $s_2(t)$

ή

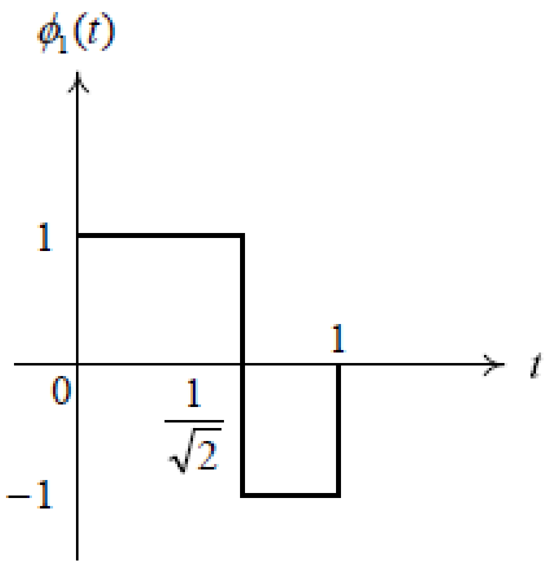
- **προς $s_1(t)$ (εάν $P1 < P2$).**

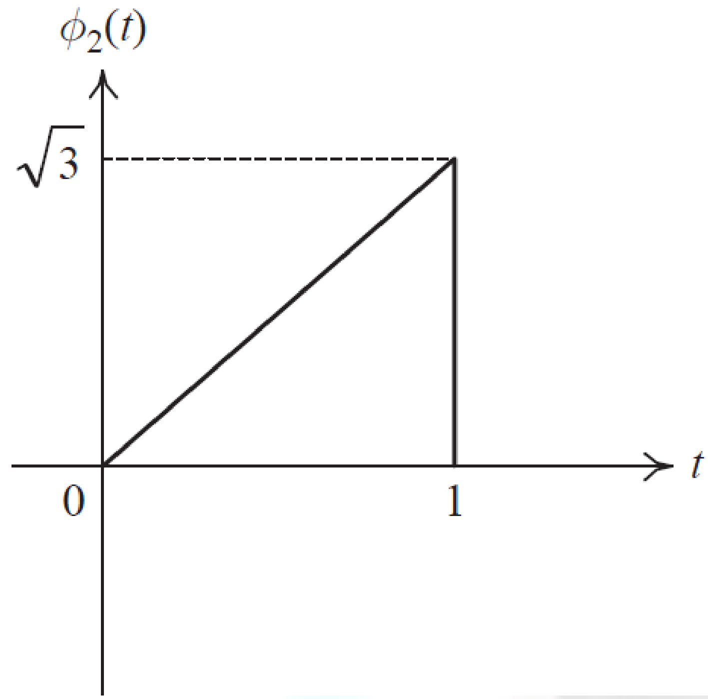
Μεγαλύτερη πιθανότητα για 1

(a) $P_1 = P_2 = 0.5$, (b) $P_1 = 0.25$, $P_2 = 0.75$. (c) $P_1 = 0.75$, $P_2 = 0.25$.

Παραδείγματα ΙΙ

$$s_2(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t),$$
$$s_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t).$$





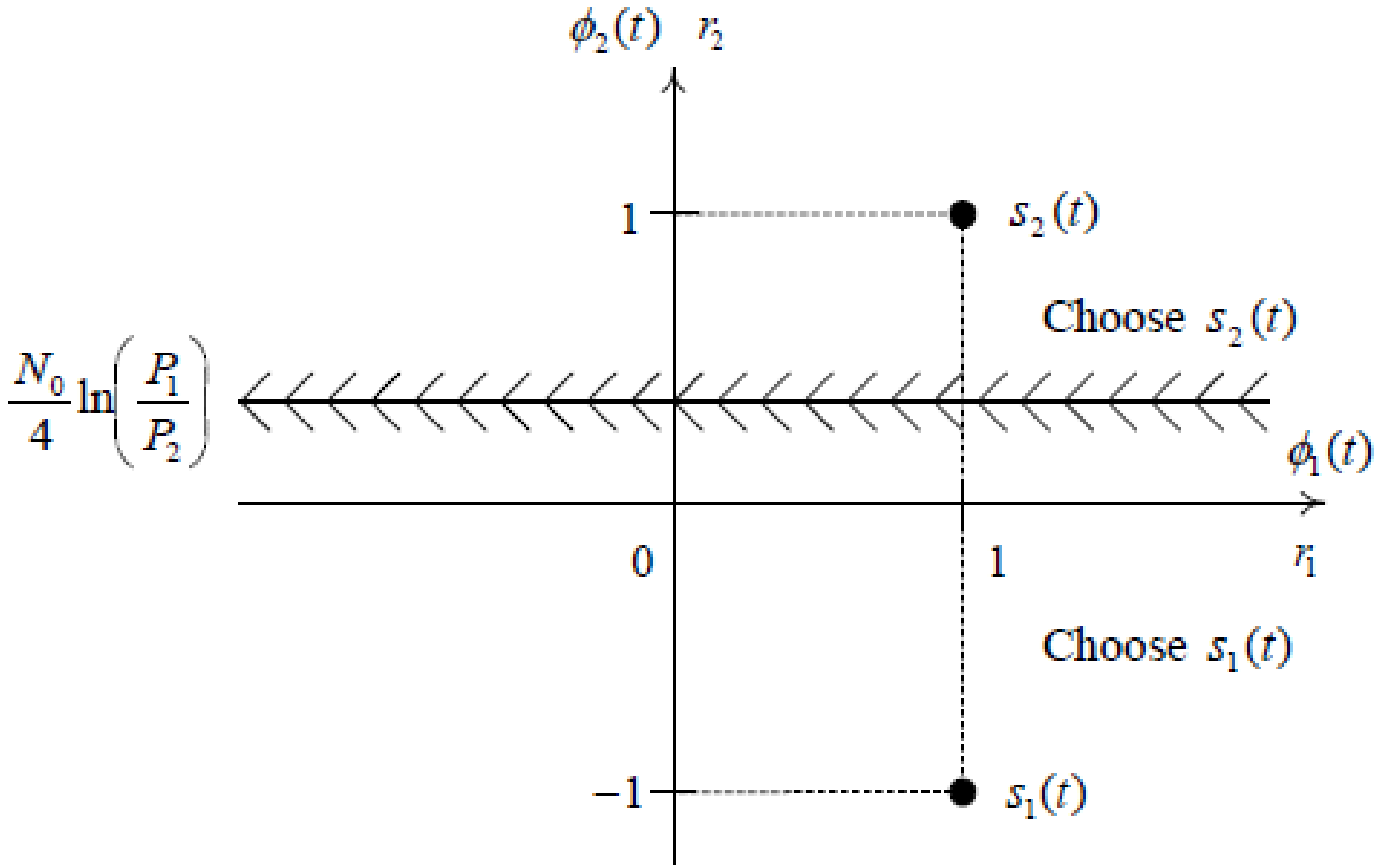
Παραδείγματα ΙΙ

$$(r_1-1)^2+(r_2+1)^2-N_0\ln P_1 \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} (r_1-1)^2+(r_2-1)^2-N_0\ln P_2.$$

$$r_2 \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} \frac{N_0}{4}\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

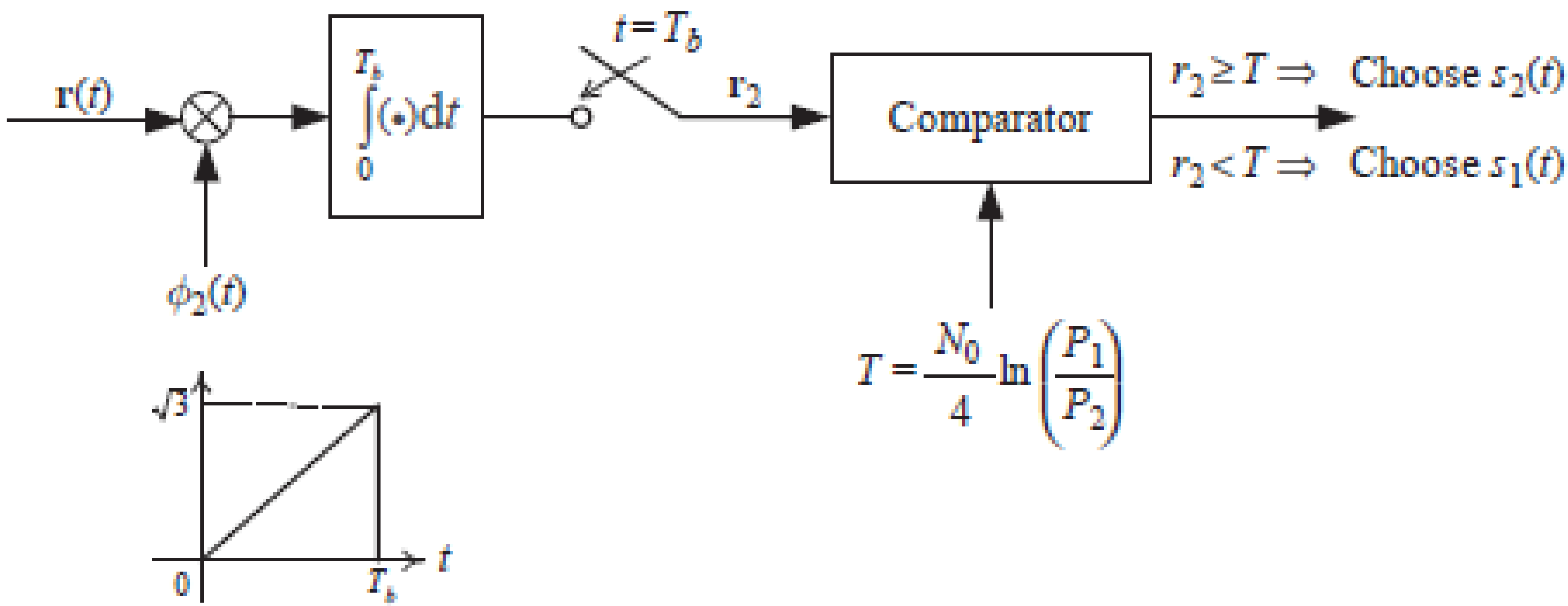
ΟΡΙΟ ΠΕΡΙΟΧΩΝ

Παραδείγματα ΙΙ



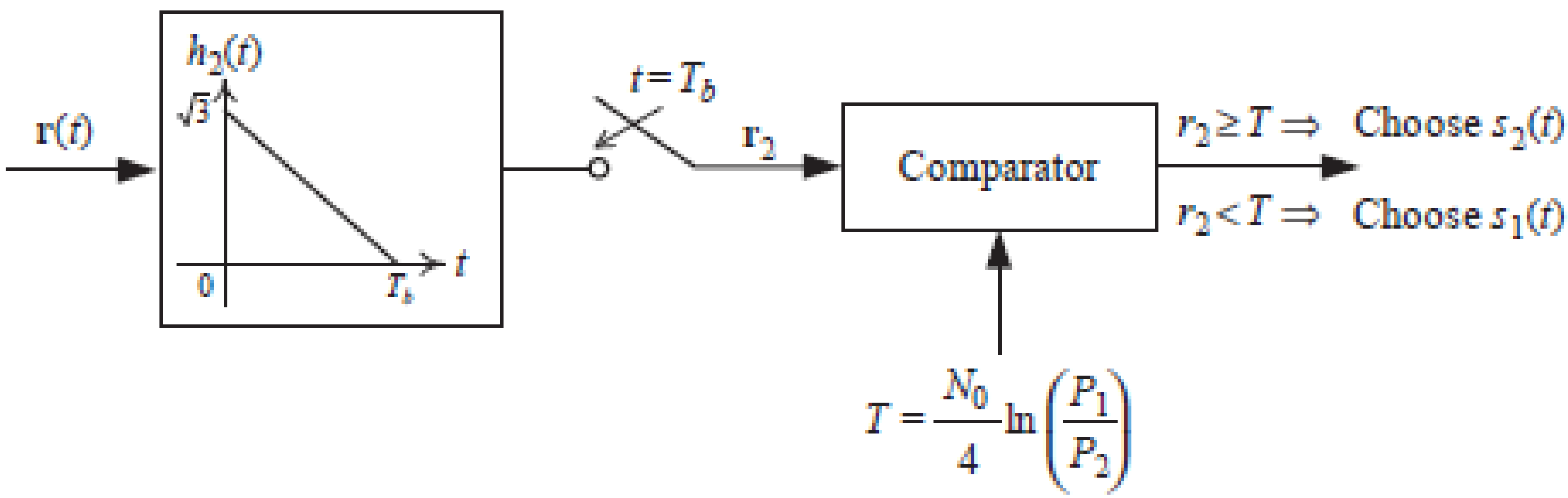
Παραδείγματα ΙΙ

Correlator Receiver/ Συσχετιστής Δέκτης



Παραδείγματα II

Matched Filter Receiver/ Δέκτης Προσαρμοσμένου Φίλτρου

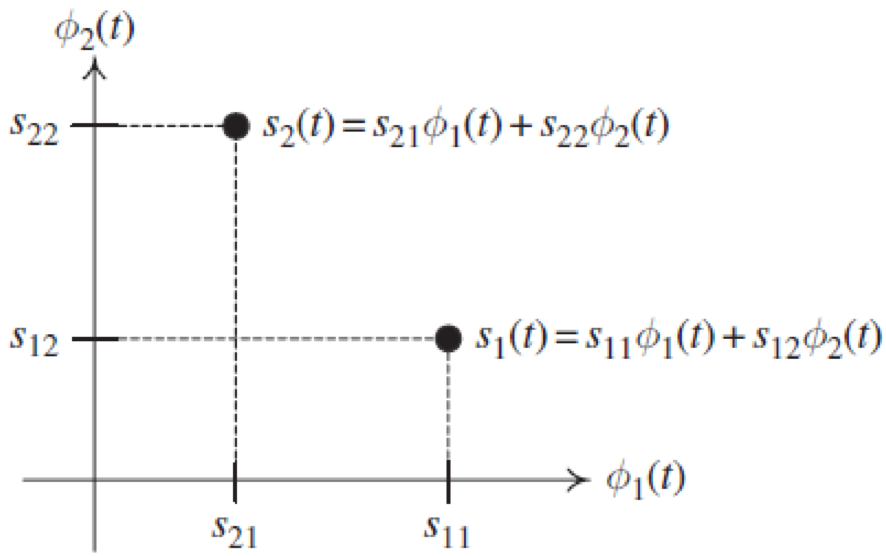


Υλοποίηση Δέκτη με Ένα Συσχετιστή ή Ένα Προσαρμοσμένο Φίλτρο

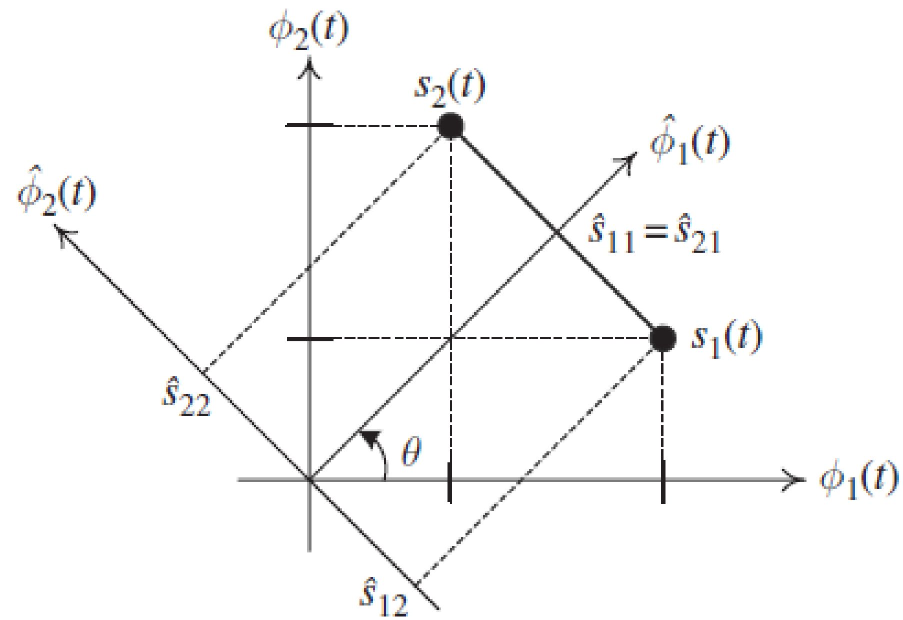
Γενικά 2 τυχαία σήματα $s_1(t)$ & $s_2(t)$ χρειαζόμαστε την προβολή του ληφθέντος σήματος **r**(t) σε 2 συναρτήσεις βάσης. Αυτό σημαίνει ότι ο δέκτης θα υλοποιηθεί

2 συσχετιστές ή 2 προσαρμοσμένα φίλτρα.

Για **μετάδοση Δυαδικών Δεδομένων** όπου το μεταδιδόμενο σύμβολο αναπαρίσταται με 1 ή 2 σήματα, αυτή η απλοποίηση είναι **ΠΑΝΤΑ δυνατή** με μια συνετή επιλογή της ορθοκανονικής βάσης.



(a)



(b)

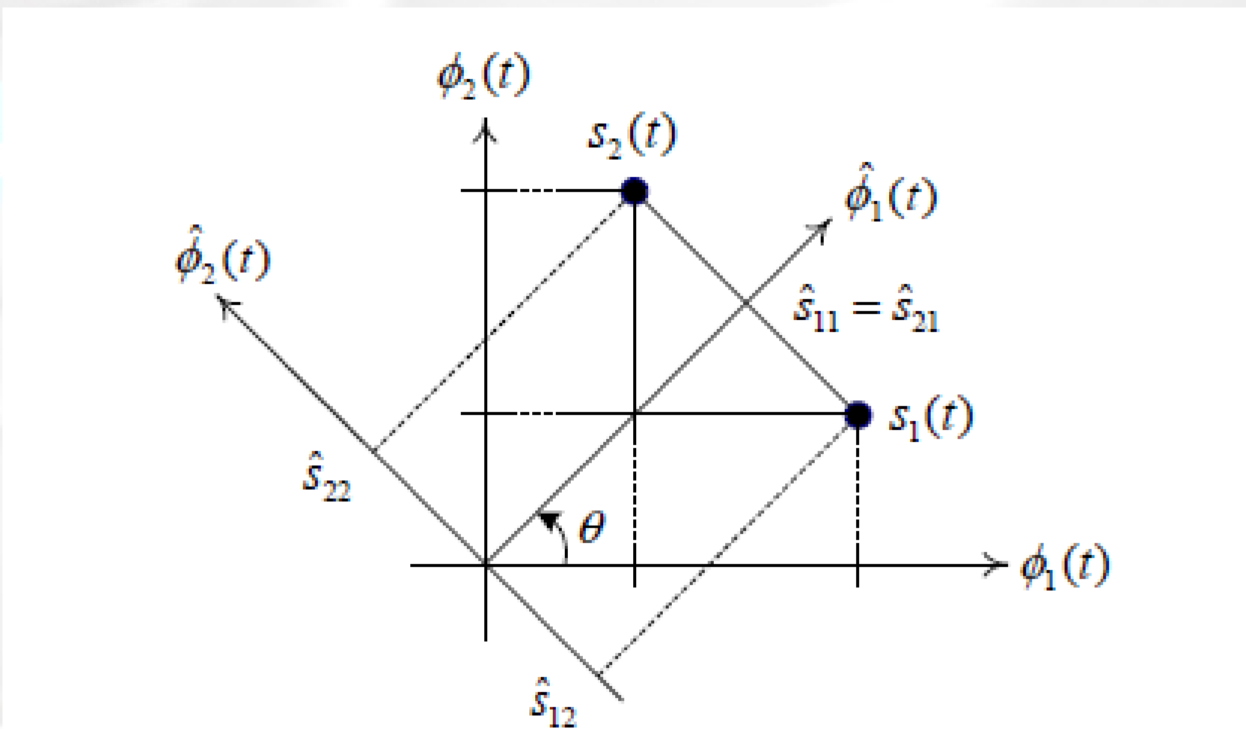
$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1(t) \\ \hat{\phi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix}$$

Υλοποίηση Δέκτη με Ένα Συσχετιστή ή Ένα Προσαρμοσμένο Φίλτρο

Προβάλλουμε το ληφθέν σήμα **r**(t) = $s_i(t)$ + **w**(t) πάνω στις ορθοκανονικές συναρτήσεις

βάσης $\hat{\phi}_1(t)$ και $\hat{\phi}_2(t)$ $\hat{s}_{11} = \hat{s}_{21}$ $\hat{\phi}_1(t)$

Οι προβολές των θορύβων είναι πάλι στατιστικά ανεξάρτητες μηδενικής μέσης τιμής υχαίας μεταβλητής Gauss με τυπική απόκλιση $N_0/2$.



Υλοποίηση Δέκτη με Ένα Συσχετιστή ή Ένα Προσαρμοσμένο Φίλτρο

Λόγος Πιθανοφάνειας:

$$\frac{f(\hat{r}_1,\hat{r}_2,\hat{r}_3,\ldots,|1_T)}{f(\hat{r}_1,\hat{r}_2,\hat{r}_3,\ldots,|0_T)} = \frac{f(\hat{s}_{21}+\hat{w}_1)f(\hat{s}_{22}+\hat{w}_2)f(\hat{w}_3)\cdots}{f(\hat{s}_{11}+\hat{w}_1)f(\hat{s}_{12}+\hat{w}_2)f(\hat{w}_3)\cdots} \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} \frac{P_1}{P_2},$$

$$\frac{f(\hat{r}_2|1_T)}{f(\hat{r}_2|0_T)} = \frac{f(\hat{s}_{22}+\hat{w}_2)}{f(\hat{s}_{12}+\hat{w}_2)} \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} \frac{P_1}{P_2}.$$

$$\hat{s}_{11} = \hat{s}_{21}$$

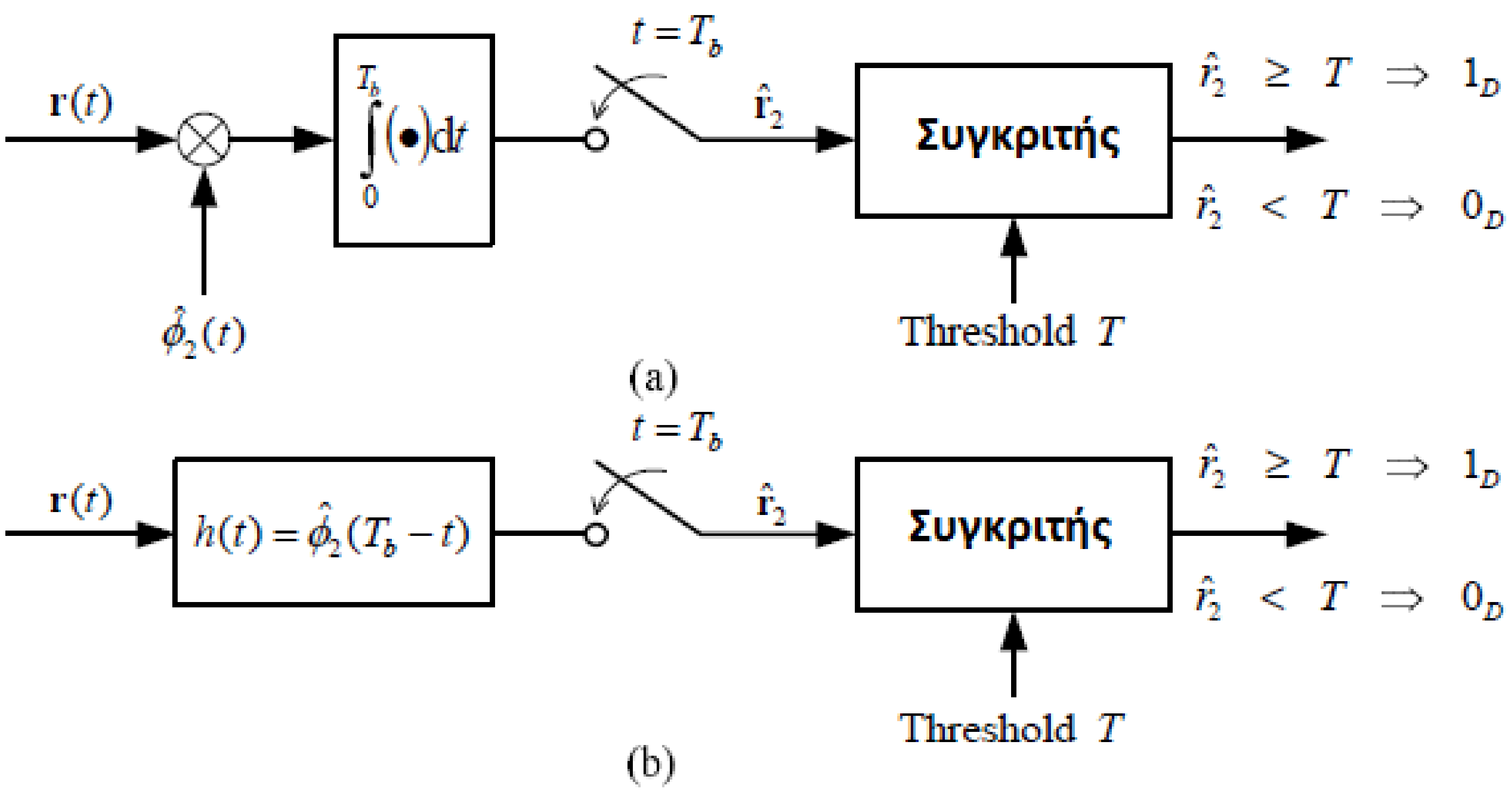
$$\frac{(\pi N_0)^{-1/2}\exp[-(\hat{r}_2-\hat{s}_{22})^2/N_0]}{(\pi N_0)^{-1/2}\exp[-(\hat{r}_2-\hat{s}_{12})^2/N_0]} \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} \frac{P_1}{P_2}.$$

$$\hat{r}_2 \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} \frac{\hat{s}_{22}+\hat{s}_{12}}{2} + \left(\frac{N_0/2}{\hat{s}_{22}-\hat{s}_{12}}\right)\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

$$\text{Threshold} \equiv \frac{\hat{s}_{22}+\hat{s}_{12}}{2} + \left(\frac{N_0/2}{\hat{s}_{22}-\hat{s}_{12}}\right)\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

Υλοποίηση Δέκτη με Ένα Συσχετιστή ή Ένα Προσαρμοσμένο Φίλτρο

$$\hat{\phi}_2(t) = \frac{s_2(t) - s_1(t)}{\left(E_2 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2} + E_1\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad T \equiv \frac{\hat{s}_{22} + \hat{s}_{12}}{2} + \left(\frac{N_0/2}{\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12}}\right) \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

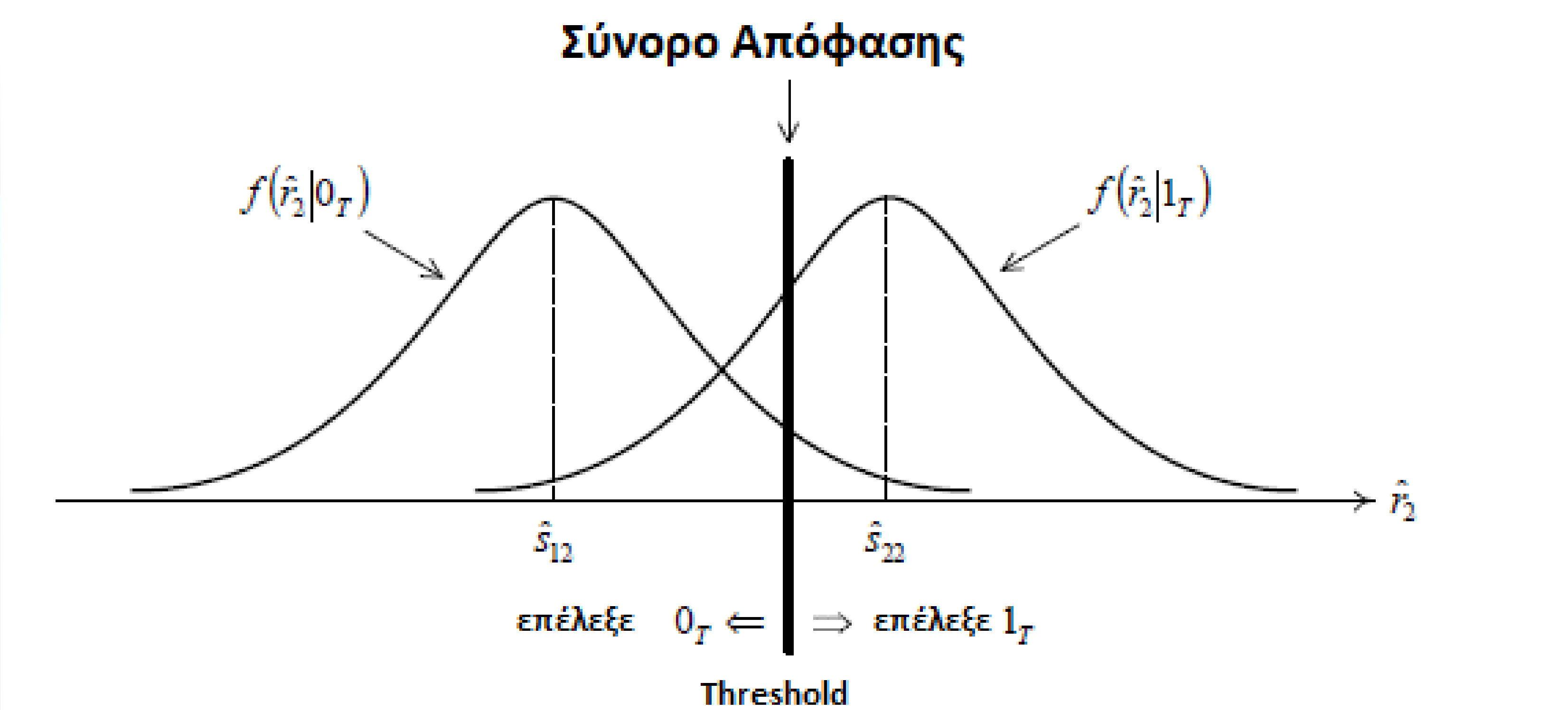


Επίδοση Βέλτιστου Δέκτη

Για να αναγνωρίσεις το b_k, σύγκρινε το αποτέλεσμα της συσχέτισης:

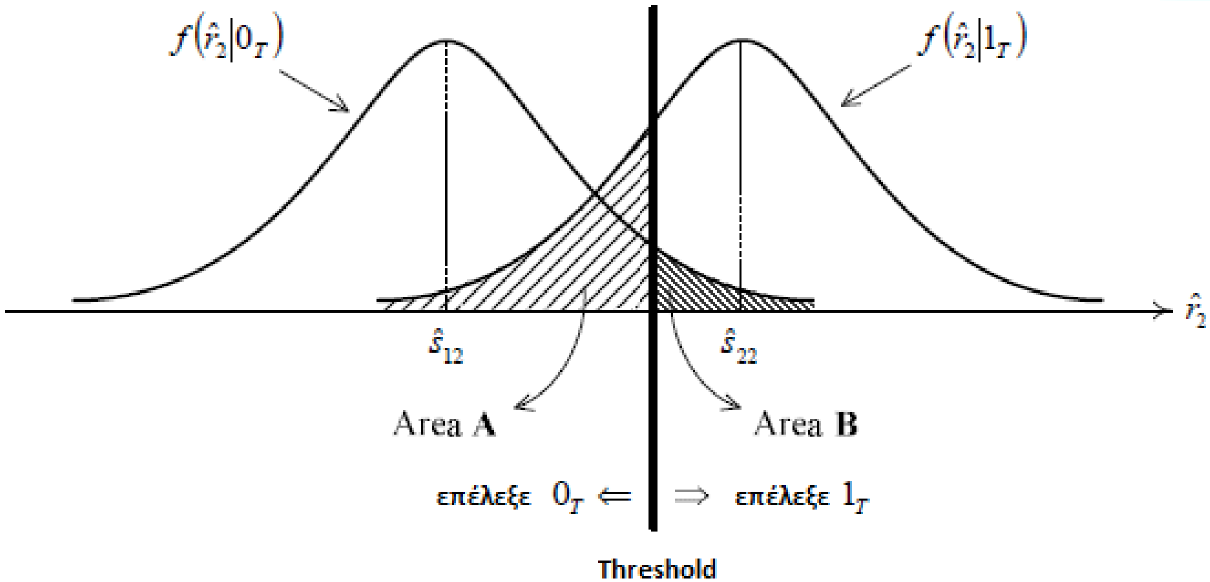
$$\hat{\mathrm{r}}_2 = \int_{(k-1)T_b}^{kT_b} \mathrm{r}(t)\hat{\phi}_2(t)\mathrm{d}t$$

$$\textbf{Threshold} = \frac{\hat{s}_{12}+\hat{s}_{22}}{2} + \frac{N_0}{2(\hat{s}_{22}-\hat{s}_{12})}\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$



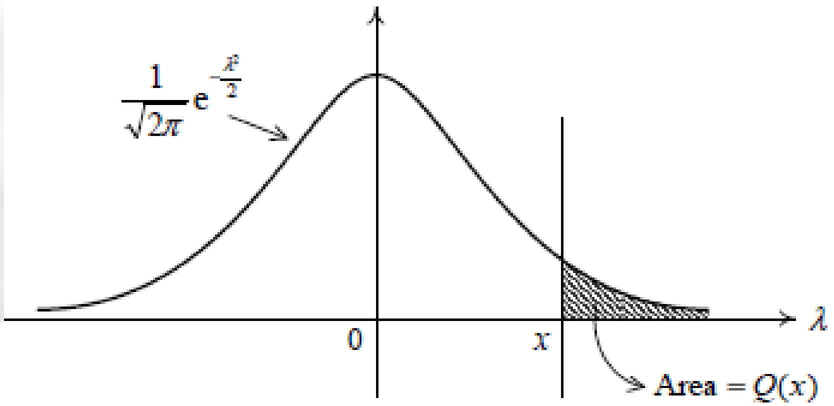
Επίδοση Βέλτιστου Δέκτη

$$\begin{aligned} P[\text{error}] &= P[(0 \text{ transmitted and } 1 \text{ decided}) \text{ or } (1 \text{ transmitted and } 0 \text{ decided})] \\ &= P[(0_T, 1_D) \text{ or } (1_T, 0_D)]. \end{aligned}$$

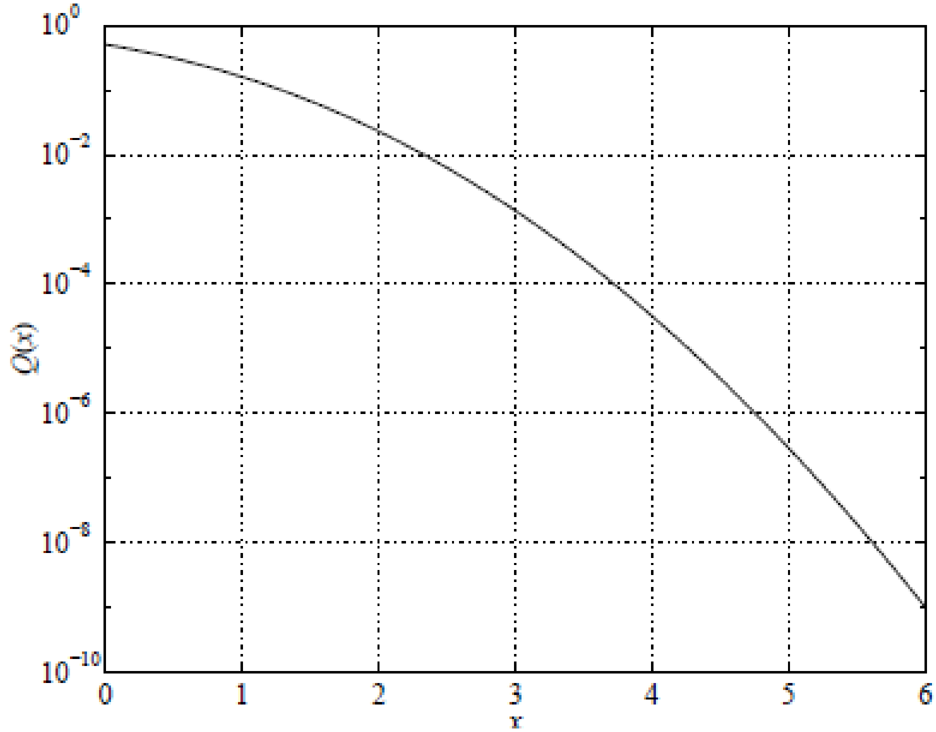


$$\begin{aligned} P[\text{error}] &= P[0_T, 1_D] + P[1_T, 0_D] = P[1_D|0_T]P[0_T] + P[0_D|1_T]P[1_T] \\ &= \underbrace{P_1 \int_T^{\infty} f(\hat{r}_2|0_T)\mathrm{d}\hat{r}_2}_{\text{Area B}} + \underbrace{P_2 \int_{-\infty}^{T} f(\hat{r}_2|1_T)\mathrm{d}\hat{r}_2}_{\text{Area A}} \\ &= P_1 Q\left(\frac{T - \hat{s}_{12}}{\sqrt{N_0/2}}\right) + P_2\left[1 - Q\left(\frac{T - \hat{s}_{22}}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Q Function



$$Q(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) \mathrm{d}\lambda.$$



Επίδοση Βέλτιστου Δέκτη

$$\text{Threshold} = \frac{\hat{s}_{12}+\hat{s}_{22}}{2} + \frac{N_0}{2(\hat{s}_{22}-\hat{s}_{12})} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$P_1 = P_2$

$$\text{Threshold} = \frac{\hat{s}_{12}+\hat{s}_{22}}{2}$$

$$P[\text{error}] = Q\left(\frac{\hat{s}_{22}-\hat{s}_{12}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

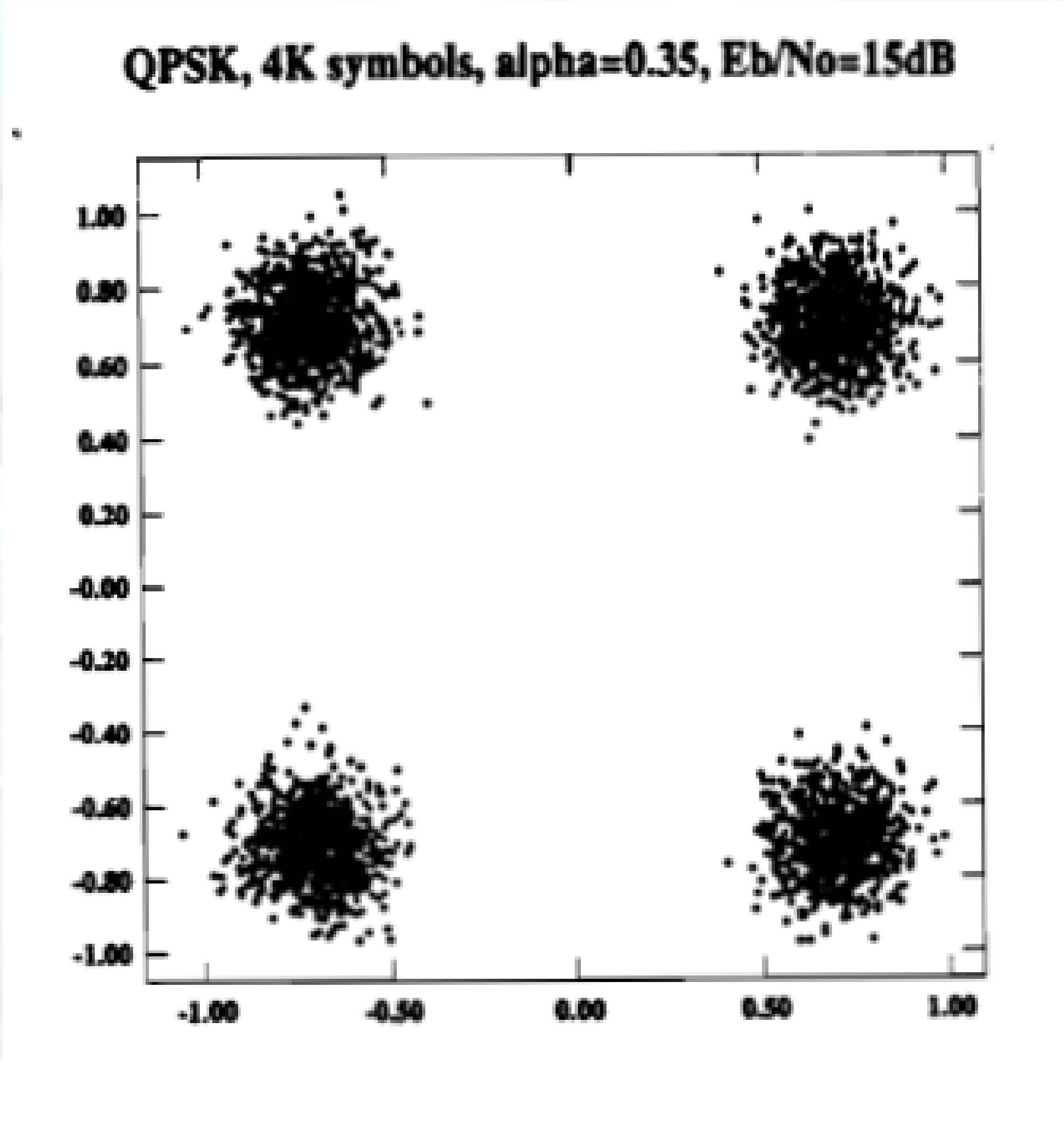
$$P[\text{error}] = Q\left(\frac{\text{απόσταση μεταξύ των σημάτων}}{2 \times \text{noise RMS value}}\right)$$

Η πιθανότητα λάθους μικραίνει είτε αν τα δύο σήματα είναι πιο διαφορετικά (αυξάνεται η απόσταση μεταξύ τους) ή επίδραση του θορύβου γίνεται μικρότερη.

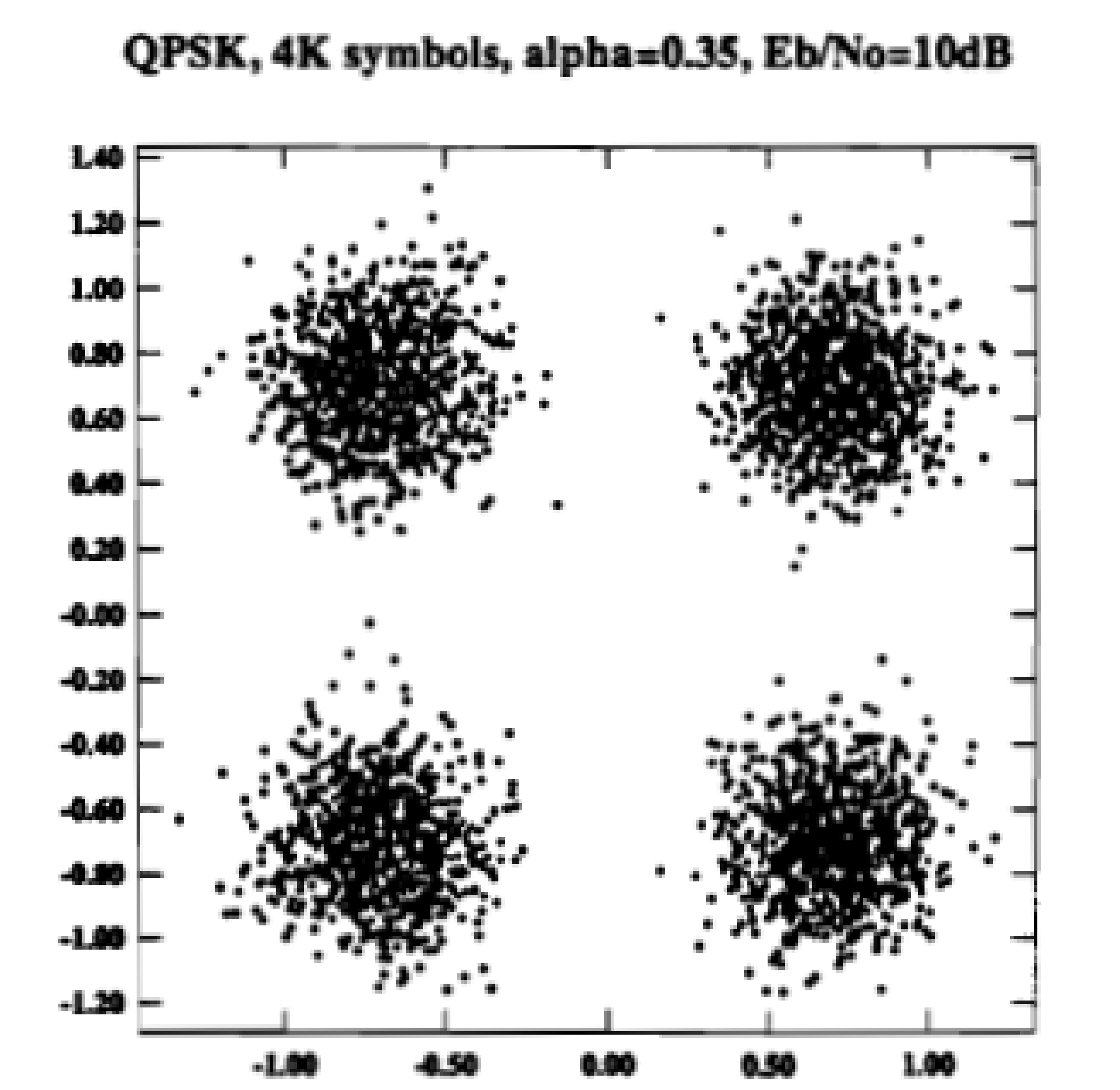
Για να μεγιστοποιήσουμε την απόσταση μεταξύ των δύο σημάτων τα τοποθετούμε με διαφορά 180 μοίρες $s_2(t) = -s_1(t)$, antipodal signaling.

Η πιθανότητα λάθος δεν εξαρτάται από το σχήμα των σημάτων αλλά μόνο από τη σχετική τους απόσταση.

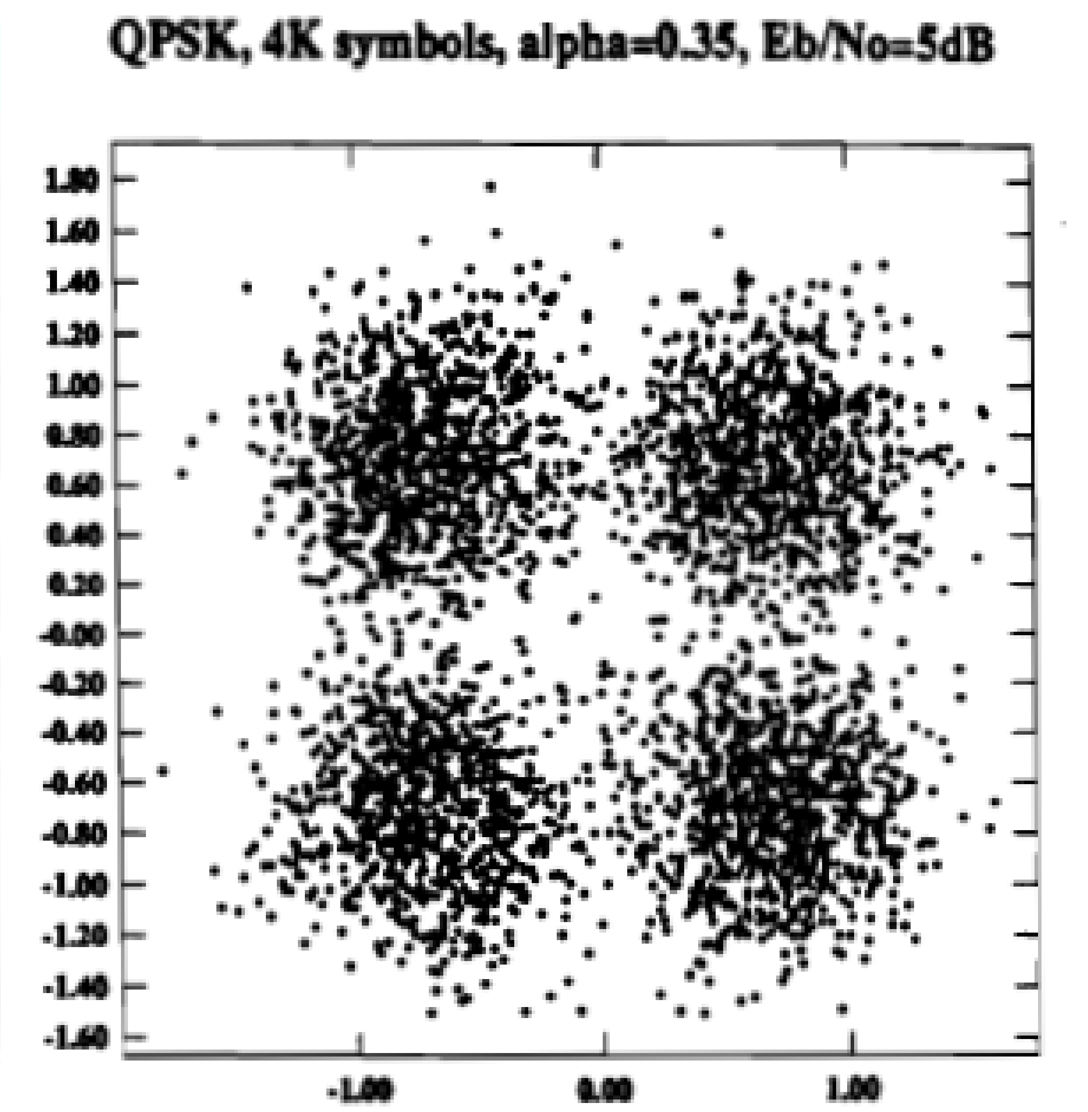
BEP Performance



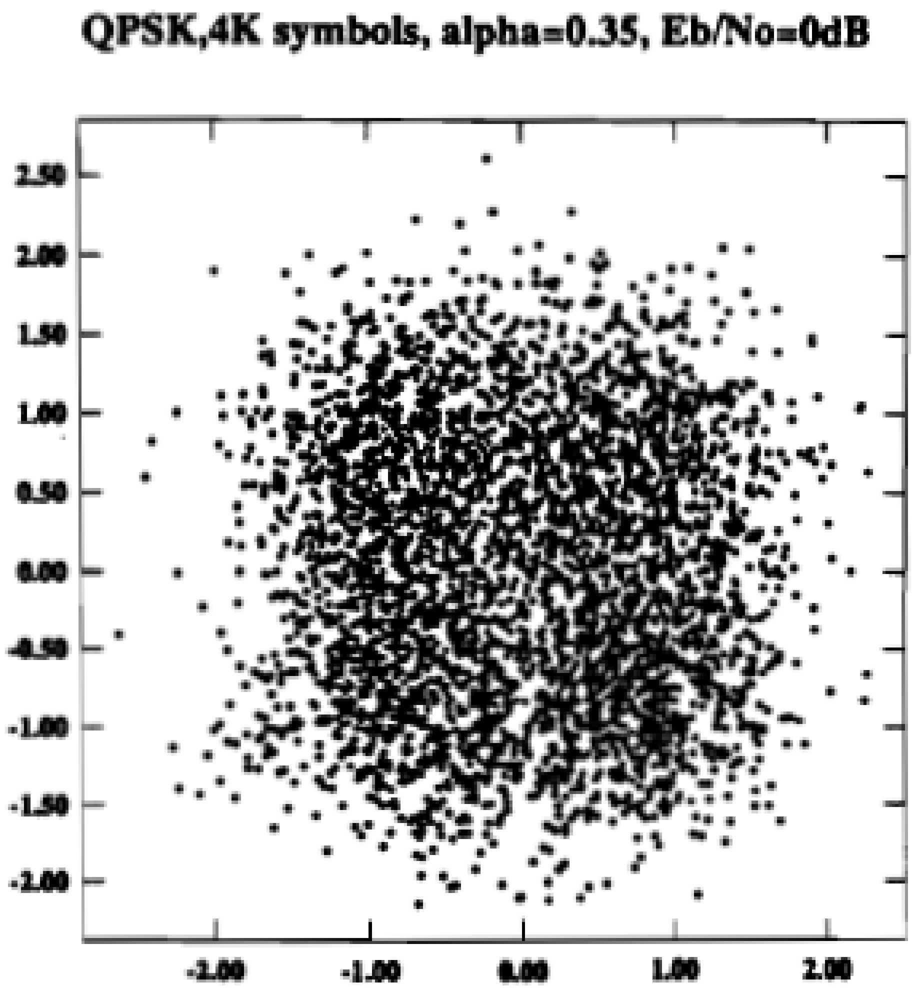
BEP Performance



BEP Performance



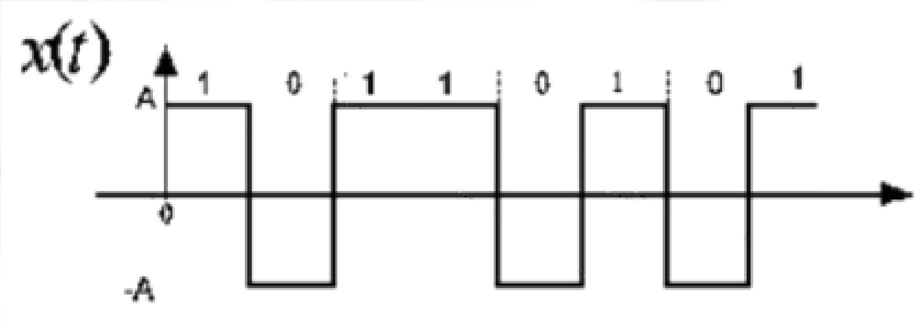
BEP Performance



Πιθανότητα Λάθους/Ψηφιακές Επικοινωνίες

Σύμφωνη Αποδιαμόρφωση/ Χρήση Συσχετιστή ή Προσαρμοσμένου Φίλτρου Παρουσία Θορύβου

Έστω ένα σήμα βασικής ζώνης 2-PAM ή, ισοδύναμα, ένα δυαδικό NRZ:



Θεωρούμε $s_0(t) = -s(t)$ & $s_1(t) = s(t)$, όπου $s(t)$ ένας παλμός διάρκειας T_s και πλάτους A.
Τότε, το σήμα λήψης σε κανάλι AWGN δίνεται από τη σχέση:

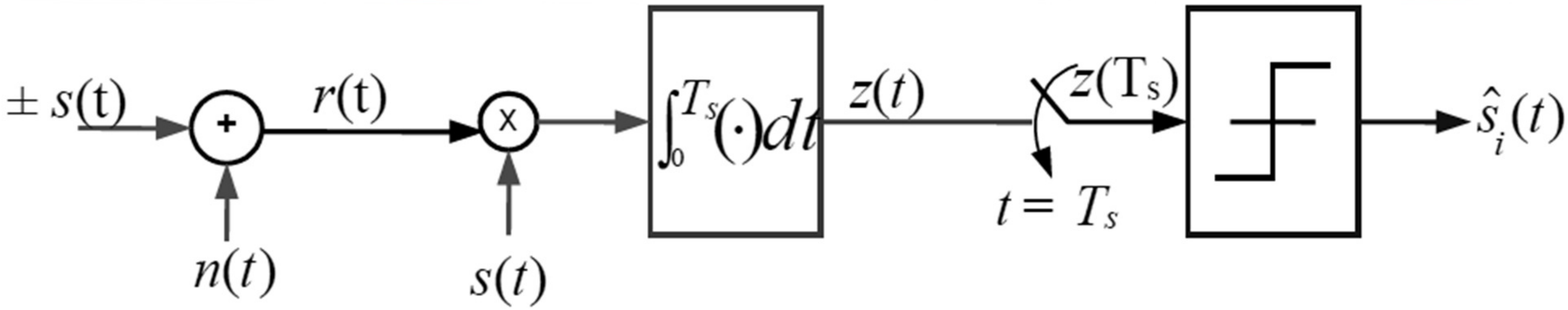
$$\boldsymbol{r(t) = \pm\, s(t) + n(t)}$$

Η εκπεμπόμενη ενέργεια είναι ίδια και για τα δύο σήματα εκπομπής, και δίνεται από τη σχέση:

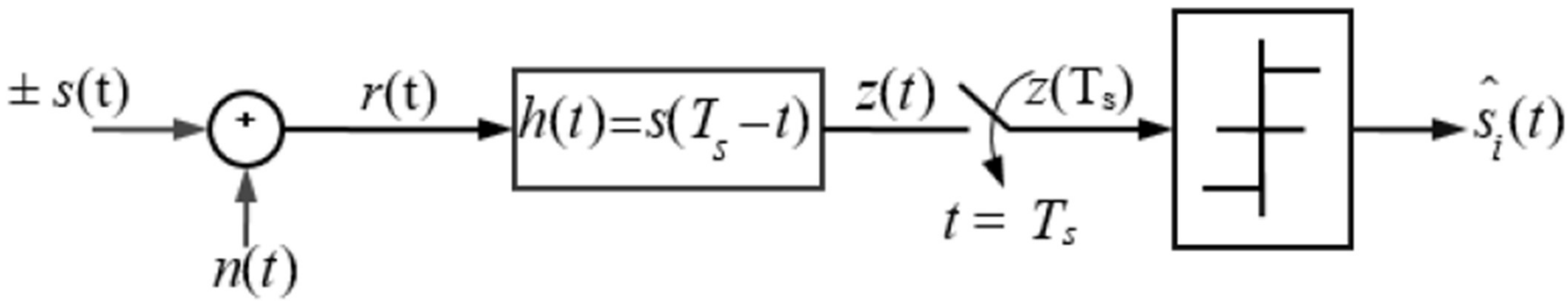
$$E_s = \int_0^{T_s} \left[s_0(t) \right]^2 dt = \int_0^{T_s} \left[s_1(t) \right]^2 dt = A^2 T_s$$

Πιθανότητα Λάθους/Ψηφιακές Επικοινωνίες

Δέκτης Συσχετιστή



Δέκτης με Προσαρμοσμένο Φίλτρο



Πιθανότητα Λάθους/Ψηφιακές Επικοινωνίες

Έστω ότι στέλνεται το $s_1(t)$. Τότε, έχουμε

$$z(T_s) = \int_0^{T_s} \left[r(\tau) s(\tau) d\tau \right] = \int_0^{T_s} \left[A + n(\tau) \right] \mathrm{A} d\tau$$

$$= \mathrm{A}^2 \mathrm{T}_s + \int_0^{T_s} n(\tau)\, \mathrm{A} d\tau = A^2 T_s + n(T_s) = E_s + n(T_s)$$

Επειδή η τυχαία διαδικασία του θορύβου $n(t)$ έχει Γκαουσιανή κατανομή, με μέση τιμή μηδέν, προκύπτει ότι $E[n(T_s)] = 0$. Η διακύμανση της συνιστώσας του θορύβου στη στατιστική $z(T_s)$ είναι:

$$\sigma_n^2 = E\left[n^2(T_s) \right] = \int^{T_s} \int^{T_s} E\left[n(\tau) n(t) \right] A^2 dt d\tau$$

$$= \frac{\mathrm{N}_0}{2} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \delta(t - \tau) A^2 dt d\tau = \frac{\mathrm{N}_0}{2} \int_0^{T_s} \mathrm{A}^2 dt$$

$$= \frac{N_0}{2} A^2 T_s = \frac{N_0}{2} E_s$$

Το ***z*(*Ts*)** θα έχει Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή E_s, όταν εκπέμπεται το $s_1(t)$, και διακύμανση $(N_0/2) \cdot E_s$.

Πιθανότητα Λάθους/Ψηφιακές Επικοινωνίες

Αν εστάλει το $s_1(t)$ η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (conditional PDF) θα είναι:

$$p(z \mid s_1 \text{ εστάλει}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z - E_s)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

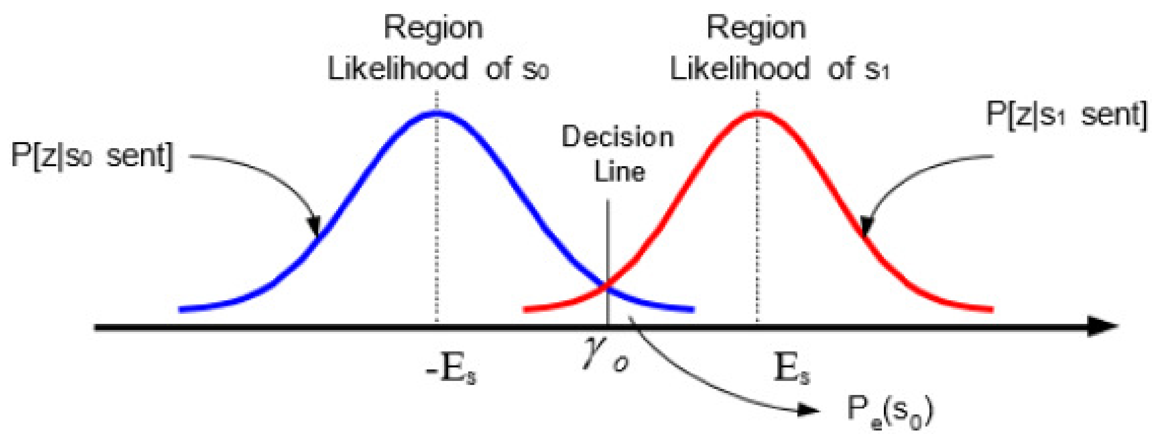
ενώ, αν εστάλει το $s_0(t)$, θα είναι:

$$p(z \mid s_0 \text{ εστάλει}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z + E_s)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

Έχουμε ανιχνευτή (detector) ή κύκλωμα απόφασης (decision circuit), το οποίο συγκρίνει το $z(T_s)$ με κάποιο κατώφλι (threshold) γ_0.

Για διαμόρφωση 2-PAM, το κατώφλι είναι το 0 (ανάμεσα στο $-E_s$ και το E_s).

Πιθανότητα Λάθους/Ψηφιακές Επικοινωνίες



Έστω ότι εκπέμπεται το σύμβολο $s_1(t) = s(t)$. Τότε, η πιθανότητα λάθους ισούται με τη πιθανότητα $z(Ts) < 0$

$$P\left[error \mid s_1(t)\right] = P\left[z\left(T_s\right) < 0\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\left(r-E_s\right)^2}{2\sigma_n^2}} dr$$

$$\left(y = \frac{r-E_s}{\sigma_n}\right) \qquad = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-E_s/\sigma_n} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\left(dy = \frac{1}{\sigma_n} dr\right) \qquad = 1 - Q\left(-\frac{E_s}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{E_s}{\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Πιθανότητα Λάθους/Ψηφιακές Επικοινωνίες

Ομοίως:

$$P\left[error \mid s_0(t)\right] = Q\left(\sqrt{2E_s / N_0}\right)$$

$$P_s = P\left[s_0(t)\right]P\left[error \mid s_0(t)\right] + P\left[s_1(t)\right]P\left[error \mid s_1(t)\right]$$
$$= \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$
$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Σύμβολο= bit

Πιθανότητα Λάθους – Μη Σύμφωνη Αποδιαμόρφωση

Εδώ ενδιαφερόμαστε για την κατανομή της περιβάλλουσας του σήματος εισόδου –αφού αυτή συγκρίνεται την κατάλληλη χρονική στιγμή με το κατώφλι για να ληφθεί η απόφαση:

$$x(t_o) = A\cos(\omega_c t_0 + \theta) + n(t_0) \quad \text{πιθανή εκμποµπή } 1$$

$$x(t_o) = n(t_0) \qquad \text{πιθανή εκπομπή } 0$$

$$x_1(t_o) = [A + n_c(t_0)]\cos(\omega_c t_0 + \theta) - n_s(t_0)\sin(\omega_c t_0 + \theta)$$

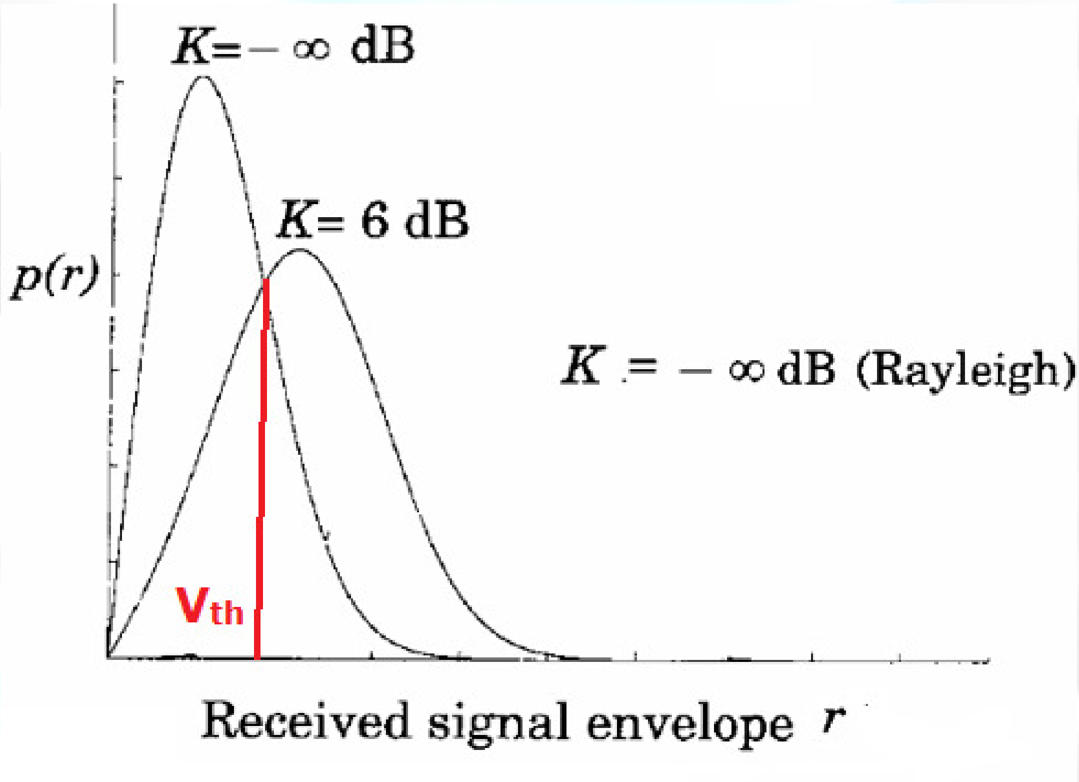
$$x_0(t_o) = n_c(t_0)\cos(\omega_c t_0 + \theta) - n_s(t_0)\sin(\omega_c t_0 + \theta)$$

Οι περιβάλλουσες των δύο εκδοχών ακολουθούν τις κατανομές Rice & Rayleigh αντίστοιχα:

$$p_1(R) = \frac{R}{N}\exp\left(-\frac{R^2 + A^2}{2N}\right) I_0\left(\frac{AR}{N}\right), \; N = E\{n_c^2(t)\} = E\{n_s^2(t)\}, \; R >= 0 \quad \textbf{Rician}$$

$$p_0(R) = \frac{R}{N}\exp\left(-\frac{R^2}{2N}\right), \; R >= 0 \quad \textbf{Rayleigh}$$

Πιθανότητα Λάθους – Μη Σύμφωνη Αποδιαμόρφωση



$$P_{e0} = \int_{V_{th}}^{\infty} p_0(\mathrm{R})\,\mathrm{dR}$$

$$P_{e1} = \int_{0}^{V_{th}} p_1(\mathrm{R})\,\mathrm{dR}$$

$$BEP = 0.5\left[\int_{V_{th}}^{\infty} p_0(\mathrm{R})\,\mathrm{dR} + \int_{0}^{V_{th}} p_1(\mathrm{R})\,\mathrm{dR}\right]$$

$$\min BEP$$

$$I_0\left(\frac{V_{th}\cdot A}{N}\right) = \exp\left(\frac{A^2}{2N}\right)$$

$$V_{th} = \frac{A}{2}\left(1+\frac{8N}{A^2}\right)^{1/2}$$

Σημαντικό μειονέκτημα της μη σύμφωνης αποκωδικοποίησης είναι η εξάρτηση του κατωφλίου από το θόρυβο.

Κριτήριο Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Maximum Likelihood Ratio Test --- Maximum Likelihood Detector/MLD

$$L(z)=\frac{p(z|s_1)}{p(z|s_0)} \underset{<}{\geq} 1$$

Αν $L(z) > 1$, αποφασίζουμε ότι στάλθηκε το s_1 αφού $\boldsymbol{p(z \mid s_1) > p(z \mid s_0)}$,

Αν $L(z) < 1$, αποφασίζουμε ότι στάλθηκε το s_0.

$$L(z) = \frac{p(z \mid s_1)}{p(z \mid s_0)} \underset{<}{\geq} 1 \Rightarrow \frac{\dfrac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_n^2}(z-E_b)^2\right]}{\dfrac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_n^2}(z+E_b)^2\right]} \underset{<}{\geq} 1$$

Κριτήριο Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Maximum Likelihood Ratio Test --- Maximum Likelihood Detector/MLD

Αποδεικνύουμε ότι ο MLD είναι ισοδύναμος με τον κανόνα απόφασης με βάση τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση.

$$\log(L(z)) = \log\left(\exp\left[-\frac{(z-E_b)^2}{2\sigma_n^2} + \frac{(z+E_b)^2}{2\sigma_n^2}\right]\right) \underset{<}{\geq} \log(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(z-E_b)^2}{2\sigma_n^2} + \frac{(z+E_b)^2}{2\sigma_n^2} \underset{<}{\geq} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z-E_b)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{(z+E_b)^2}{2\sigma_n^2} \underset{>}{\leq} 0 \Leftrightarrow (z-E_b)^2 \underset{>}{\leq} (z+E_b)^2 \Leftrightarrow |z-E_b| \underset{>}{\leq} |z+E_b|$$

$|z - E_b| < |z + E_b|$ τότε $L(z) > 1$,

$|z - E_b| > |z + E_b|$ τότε $L(z) < 1$,

$$(z-E_b)^2 - (z+E_b)^2 \underset{>}{\leq} 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2zE_b + E_b^2 - z^2 - 2zE_b - E_b^2 \underset{>}{\leq} 0 \Leftrightarrow -4zE_b \underset{>}{\leq} 0$$

$$\Leftrightarrow z \underset{<}{\geq} 0$$

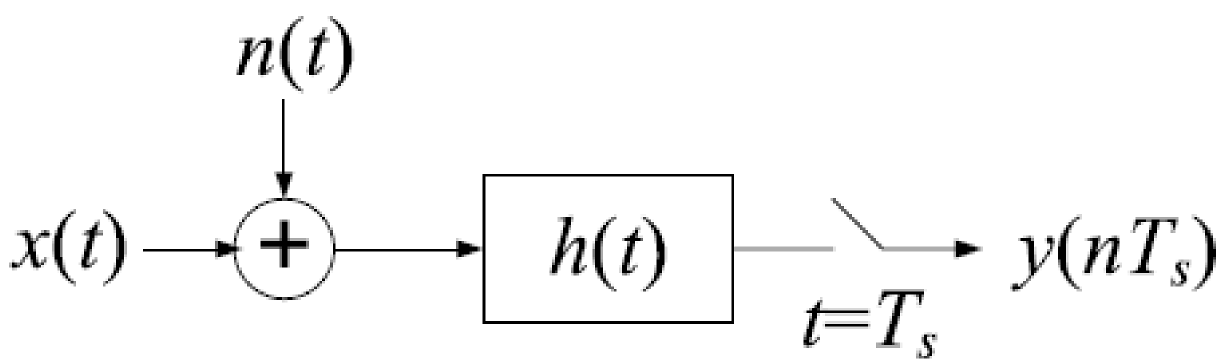
Προσαρμοσμένο Φίλτρο/Δέκτης

Λόγος Σήματος προς Θόρυβο στο Δέκτη (Receiver SNR)

- SNR στο δέκτη:

$$\text{SNR} = \frac{\text{μέση ενέργεια διαμορφωμένου σήματος}}{\text{μέση τετραγωνική τιμή θορύβου}}.$$

- Στο δέκτη του σχήματος θέλουμε να βρούμε το φίλτρο $h(t)$ που μεγιστοποιεί τον SNR στην έξοδο τη χρονική στιγμή T_s κατά την οποία γίνεται η δειγματοληψία. Ο θόρυβος είναι AWGN.
- Εδώ θεωρούμε ντετερμινιστικό $x(t)$ (θα γενικεύσουμε αργότερα).



Προσαρμοσμένο Φίλτρο/Δέκτης

Μεγιστοποίηση SNR του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο

- Ενέργεια σήματος τη χρονική στιγμή T_s:

$$|y(T_s)|^2 = |x(t) * h(t)|_{t=T_s}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau|_{t=T_s} \right|^2$$
$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(T_s-\tau)d\tau \right|^2 = |\langle x(t), h^*(T_s-t)\rangle|^2$$

- Μέση ενέργεια θορύβου στην έξοδο του $h(t)$:

$$\mathbb{E}[|\tilde{n}(T_s)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau)h(T_s-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} n^*(\tau')h^*(T_s-\tau')d\tau' \right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}\delta(\tau-\tau')h(T_s-\tau)h^*(T_s-\tau')d\tau d\tau' \right]$$
$$= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(T_s-\tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2}\langle h(t), h(t)\rangle = \frac{N_0}{2}\|\mathbf{h}\|^2.$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο/Δέκτης

Μεγιστοποίηση SNR του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο (2)

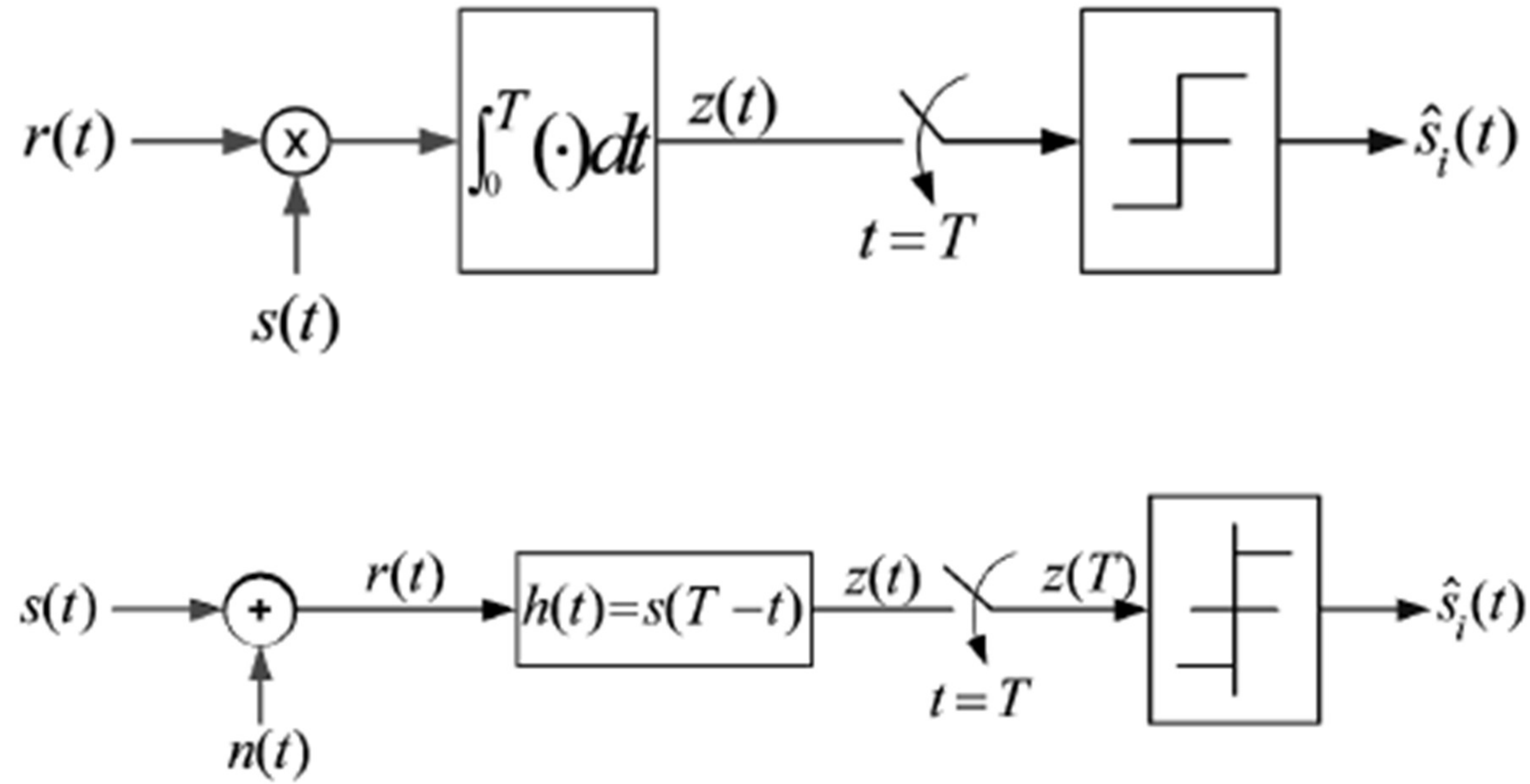
- Επομένως, SNR $= \frac{2}{\mathcal{N}_0} \frac{|\langle x(t), h^*(T_s - t)\rangle|^2}{\|\mathbf{h}\|^2}$.
- Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $|\langle x(t), h^*(T_s - t)\rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{h}\|^2$, με $=$ εάν και μόνο εάν $x(t) = kh^*(T_s - t)$ ή, ισοδύναμα, $h(t) = Kx^*(t - T_s)$. (γιατί $\langle h(T_s - t), h(T_s - t)\rangle = \langle h(t), h(t)\rangle$;)
- Συνεπώς, SNR$\,\max = \frac{2}{\mathcal{N}_0} \frac{K^2\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}\|^2}{K^2\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{2}{\mathcal{N}_0}\|\mathbf{x}\|^2$, όταν το φίλτρο $h(t)$ είναι <u>προσαρμοσμένο</u> στο σήμα $x(t)$.
- Η πιθανότητα σφάλματος P_e στο δέκτη εξαρτάται από το λόγο $d_{\min}/\sigma$ και, επομένως, από τον SNR. Επομένως, με χρήση δέκτη προσαρμοσμένων φίλτρων βελτιστοποιούμε την απόδοση του συστήματος.
- Το προσαρμοσμένο φίλτρο μας λέει, στην ουσία, ότι όταν ξέρουμε ότι κάποιο διάνυσμα βρίσκεται πάνω σε μια κατεύθυνση (στη συγκεκριμένη περίπτωση $\mathbf{h}$) το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να "κοιτάξουμε" σε εκείνη την κατεύθυνση.

Προσαρμοσμένο Φίλτρο/Δέκτης

Μεγιστοποίηση SNR του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο (3)

- Έστω, τώρα, ότι το σήμα $X(t)$ είναι τυχαίο. Αν χρησιμοποιούμε γραμμική διαμόρφωση, οποιοδήποτε $X(t)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $X(t) = \sum_{n=1}^{N} X_n \phi_n(t)$.
- Για να μεγιστοποιήσουμε τον SNR σε κάθε διάσταση, n, πρέπει να χρησιμο-ποιήσουμε το προσαρμοσμένο φίλτρο $\phi_n^*(-t)$.
- Συνεπώς, ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων μεγιστοποιεί τον SNR ανά διάσταση και, επομένως, και το συνολικό SNR.
- Επίσης, όπως αναφέραμε, με χρήση του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένων φίλτρων διατηρείται όλη η πληροφορία που απαιτείται για την ανίχνευση του $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_N]$. Δηλαδή, δεν υπάρχει απώλεια επίδοσης του δέκτη όσον αφορά την εκτίμηση του $\mathbf{x}$.

Ισοδυναμία Correlator/Matched Filter – 2-PAM/NRZ-Polar



Ισοδυναμία Correlator/Matched Filter

Για το δέκτη συσχετιστή:

$$z(t) = \int_0^t r(\tau)s(\tau)\,d\tau$$

Τη χρονική στιγμή δειγματοληψίας, το δείγμα που εισέρχεται στον ανιχνευτή είναι:

$$z(T) = z(t)\big|_{t=T} = \int_0^T r(\tau)s(\tau)\,d\tau$$

Για το δέκτη με προσαρμοσμένο φίλτρο:

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = s(T-t) \Rightarrow h(t-\tau) = s\left[T-(t-\tau)\right] = s(T+\tau-t)$$

$$z(t) = \int_0^t r(\tau)s(T+\tau-t)\,d\tau$$

Ισοδυναμία Correlator/Matched Filter -2-PAM

Τη χρονική στιγμή δειγματοληψίας, το δείγμα από το προσαρμοσμένο φίλτρο που εισέρχεται στον ανιχνευτή είναι:

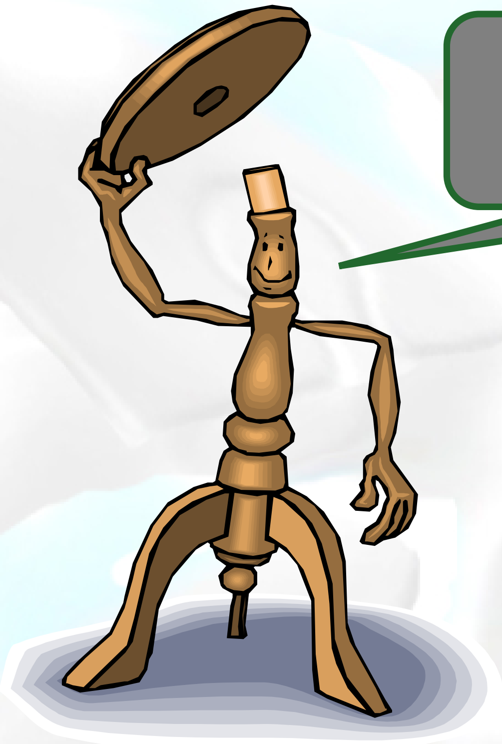
Matched Filter:

$$z(T) = z(t)\big|_{t=T} = \int_0^T r(\tau)s(T+\tau-T)\,d\tau = \int_0^T r(\tau)s(\tau)\,d\tau$$

Correlator:

$$z(T) = z(t)\big|_{t=T} = \int_0^T r(\tau)s(\tau)\,d\tau$$

Q&A



Ευχαριστώ για την προσοχή σας !!!

E-mail: thpanag@ece.ntua.gr
Παλ. Κτίρια Ηλ/γων Γρ. 3.2.9
Τηλ.: 2107723842