Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

Ανάλυση Συστημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

Αθανάσιος Δ. Παναγόπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

Βασικές Ιδιότητες Γραμμικού Συστήματος

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

Προσθετική Ιδιότητα

$$ax(t) \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow ay(t)$$

Ομογενές

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

Γραμμική Ιδιότητα

Συνεχούς Χρόνου (CT Systems) – Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα (LTI Systems)

- Έστω το CT, LTI σύστημα:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

- Υπόθεση: η κρουστική απόκριση $h(t)$ is απολύτως ολοκληρώσιμη,

$$\int_{\mathbb{R}} | h(t) | \, dt < \infty$$

(ευστάθεια συστήματος)

Συνάρτηση Μεταφοράς

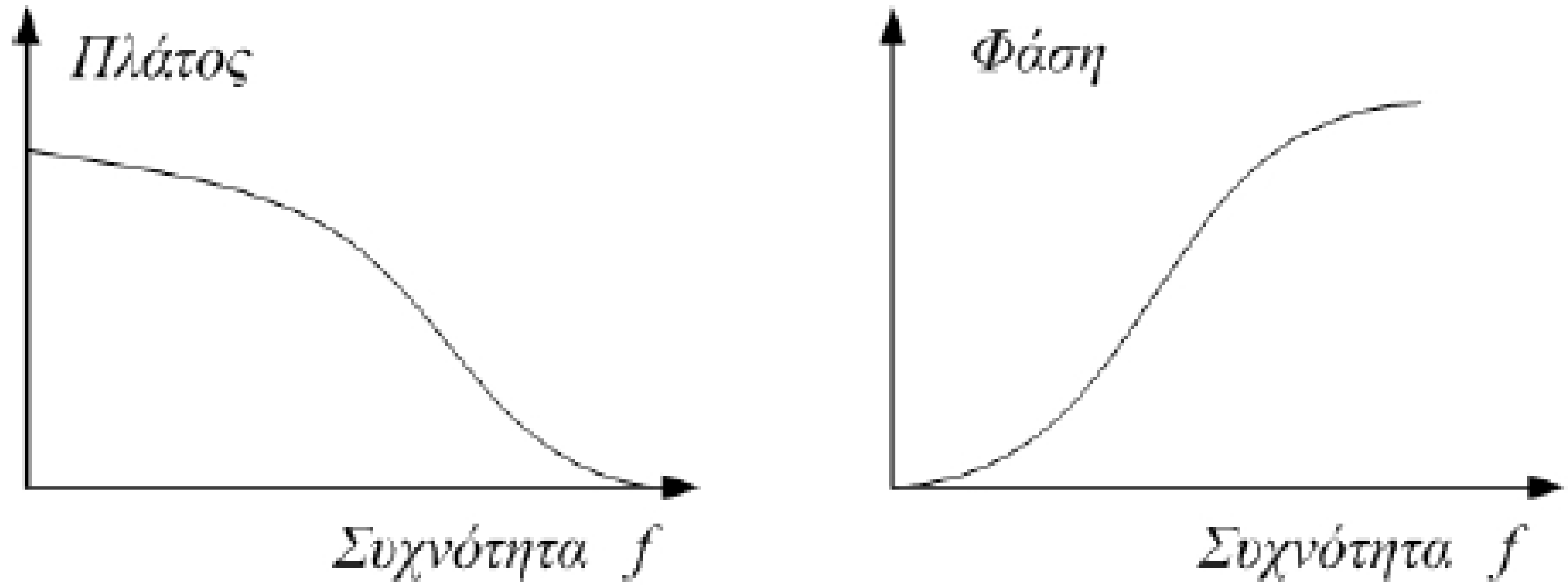
- Περιγράφοντας ένα σήμα με το φάσμα του, ουσιαστικά προσδιορίζουμε το πλάτος και τη φάση του συναρτήσει της συχνότητας.

- Στα συστήματα πολύ σημαντική είναι η *συνάρτηση μεταφοράς*, δηλαδή μια έκφραση στο πεδίο της συχνότητας που περιγράφει τη σχέση εξόδου-εισόδου.

- Με τη συνάρτηση μεταφοράς προσδιορίζουμε την επίδραση που έχει το σύστημα στο φασματικό περιεχόμενο του σήματος εισόδου.

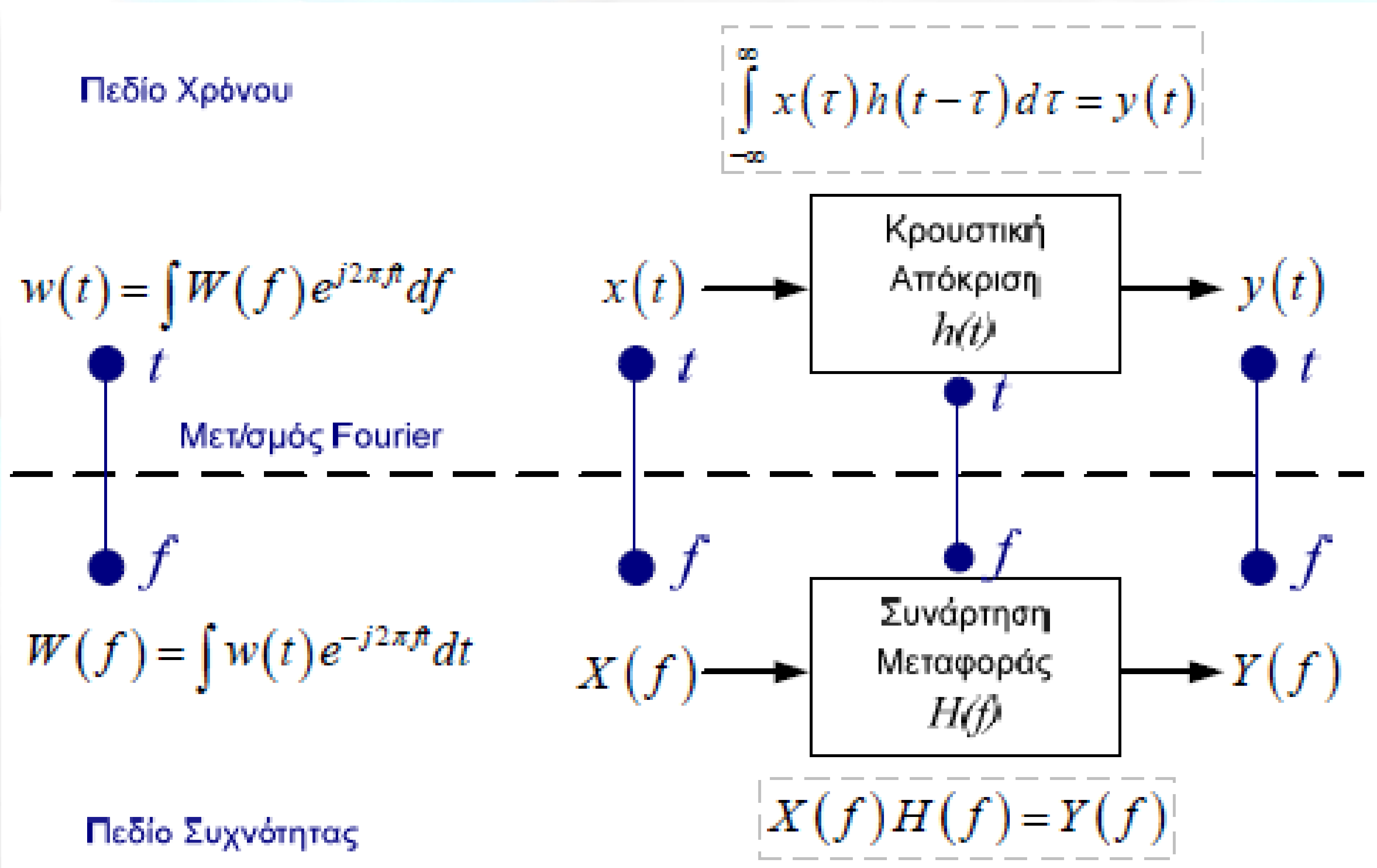
Υποδεικνύει δηλαδή την επίδραση του συστήματος στα στοιχειώδη σήματα εισόδου.

Συνάρτηση Μεταφοράς



$$H(f) = \left|H(f)\right| e^{j\angle H(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Συνάρτηση Μεταφοράς



Απόκριση CT, LTI Συστήματος σε Ημιτονική Είσοδο

- Ποια είναι η απόκριση $y(t)$ με είσοδο:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta), \; t \in \mathbb{R} \quad ?$$

- Αρχικά βρίσκουμε την απόκριση $y_c(t)$ του ίδιου συστήματος σε είσοδο:

$$x_c(t) = e^{j\omega_0 t} \quad t \in \mathbb{R}$$

Απόκριση CT, LTI Συστήματος σε Μιγαδική Εκθετική Είσοδο

- Η έξοδος βρίσκεται μέσω συνέλιξης:

$$y_c(t) = h(t) * x_c(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) x_c(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{j\omega_0 (t-\tau)} d\tau =$$

$$= \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{x_c(t)} \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau =$$

$$= x_c(t) \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

Απόκριση CT, LTI Συστήματος

- Ορίζοντας την κρουστική απόκριση:

$$H(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$H(\omega)$ είναι φασματική απόκριση ενός CT, LTI συστήματος = Μ/Σ Fourier της $h(t)$

$$y_c(t) = H(\omega_0) x_c(t) =$$

$$= H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Η απόκριση ενός LTI συστήματος σε ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα με την ίδια συχνότητα ω_0

Απόκριση CT, LTI Συστήματος

- Επειδή $H(\omega_0)$ είναι εν γένει μια μιγαδική ποσότητα μπορούμε να γράψουμε:

$$
\begin{aligned}
y_c(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} &= \\
&= |H(\omega_0)|e^{j\arg H(\omega_0)}e^{j\omega_0 t} = \\
&= \underbrace{|H(\omega_0)|}_{\text{Πλάτος σήματος εξόδου}}e^{j\overbrace{(\omega_0 t+\arg H(\omega_0))}^{\text{Φάση σήματος εξόδου}}}
\end{aligned}
$$

Απόκριση CT, LTI Συστήματος σε Ημιτονική Είσοδο

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Euler το x(t) δίνεται:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{j(\omega_0 t+\theta)} + e^{-j(\omega_0 t+\theta)}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t}$$

Η απόκριση τότε γίνεται:

$$y(t) = \tfrac{1}{2} e^{j\theta} H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2} e^{-j\theta} H(-\omega_0) e^{-j\omega_0 t}$$

Απόκριση CT, LTI Συστήματος σε Ημιτονική Είσοδο

- Εάν h(t) είναι πραγματική , τότε $H(-\omega) = H^*(\omega)$

$$H(\omega_0) = |H(\omega_0)| e^{j \arg H(\omega_0)}$$

$$H(-\omega_0) = |H(\omega_0)| e^{-j \arg H(\omega_0)}$$

- Τότε y(t):

$$y(t) = \frac{1}{2} |H(\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \theta + \arg H(\omega_0))} + \frac{1}{2} |H(\omega_0)| e^{-j(\omega_0 t + \theta + \arg H(\omega_0))}$$

$$= |H(\omega_0)| \cos\left(\omega_0 t + \theta + \arg H(\omega_0)\right)$$

Απόκριση CT, LTI Συστήματος σε Ημιτονική Είσοδο

- Η απόκριση στο σήμα $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

είναι $y(t) = A\,|H(\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t + \theta + \arg H(\omega_0)\right)$

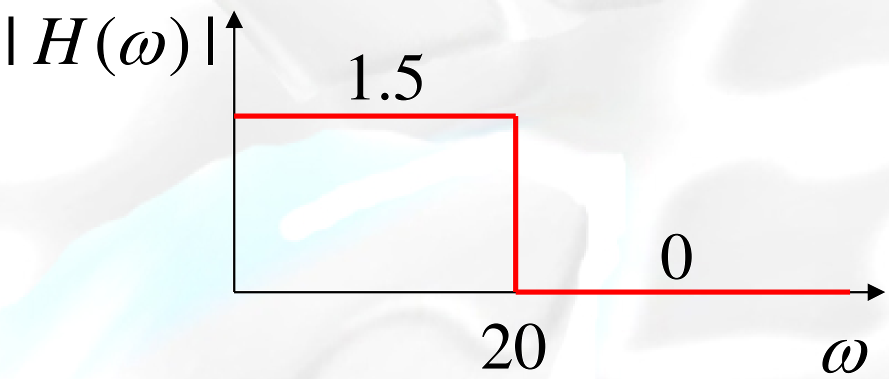
που είναι επίσης ένα σήμα ημιτονικής μορφής με την ίδια συχνότητα: ω_0

με πλάτος κλιμακούμενο με ένα παράγοντα: $|H(\omega_0)|$

και μια ολίσθηση στη φάση: $\arg H(\omega_0)$

Απόκριση CT, LTI Συστήματος σε Ημιτονική Είσοδο

Παράδειγμα: Έστω ένα σύστημα με κρουστική απόκριση:



$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1.5, & 0 \le \omega \le 20, \\ 0, & \omega > 20, \end{cases}$$

$$\arg H(\omega) = -60^\circ, \forall \omega$$

Απόκριση CT, LTI Συστήματος σε Ημιτονική Είσοδο

- Αν έχουμε είσοδο:

$$x(t) = 2\cos\left(10t + 90^\circ\right) + 5\cos\left(25t + 120^\circ\right)$$

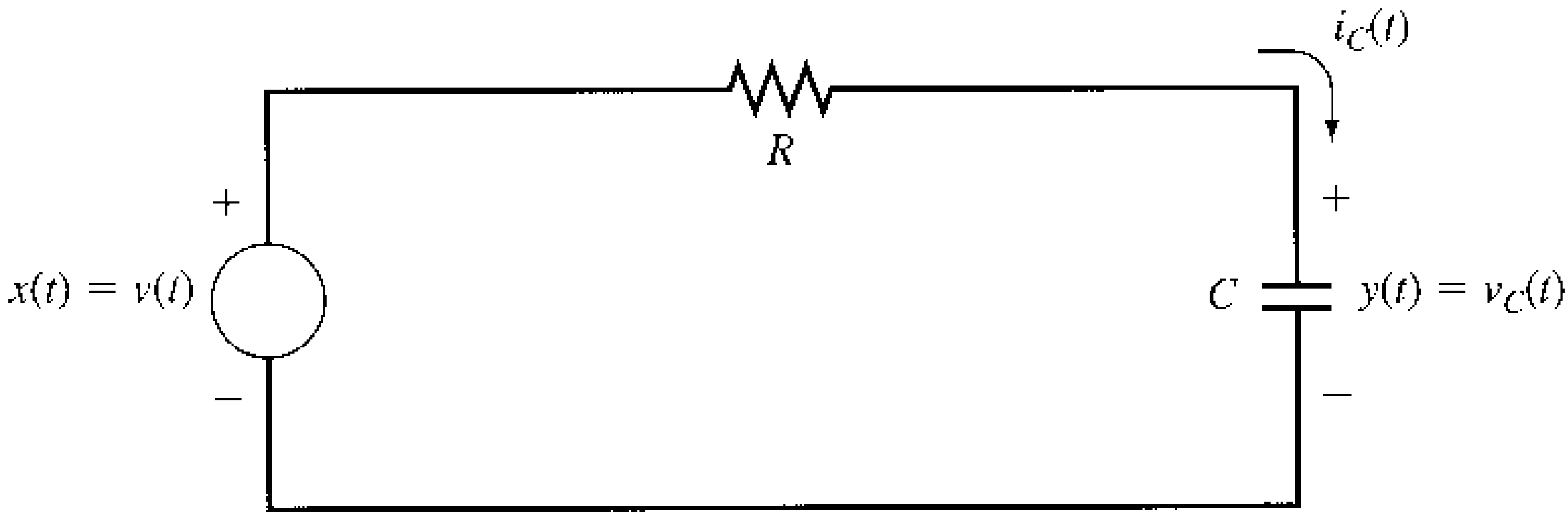
- Τότε η έξοδος είναι:

$$y(t) = 2\,|H(10)|\cos\left(10t + 90^\circ + \arg H(10)\right) +$$

$$+5\,|H(25)|\cos\left(25t + 120^\circ + \arg H(25)\right) =$$

$$= 3\cos(10t + 30^\circ)$$

Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος



Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος

$$x_c(t) = e^{j\omega t} \qquad Z_C = 1/\ j\omega C$$

$$y_c(t) = \frac{1/\ j\omega C}{R + 1/\ j\omega C} e^{j\omega t}$$

$$= \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} e^{j\omega t}$$

Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος

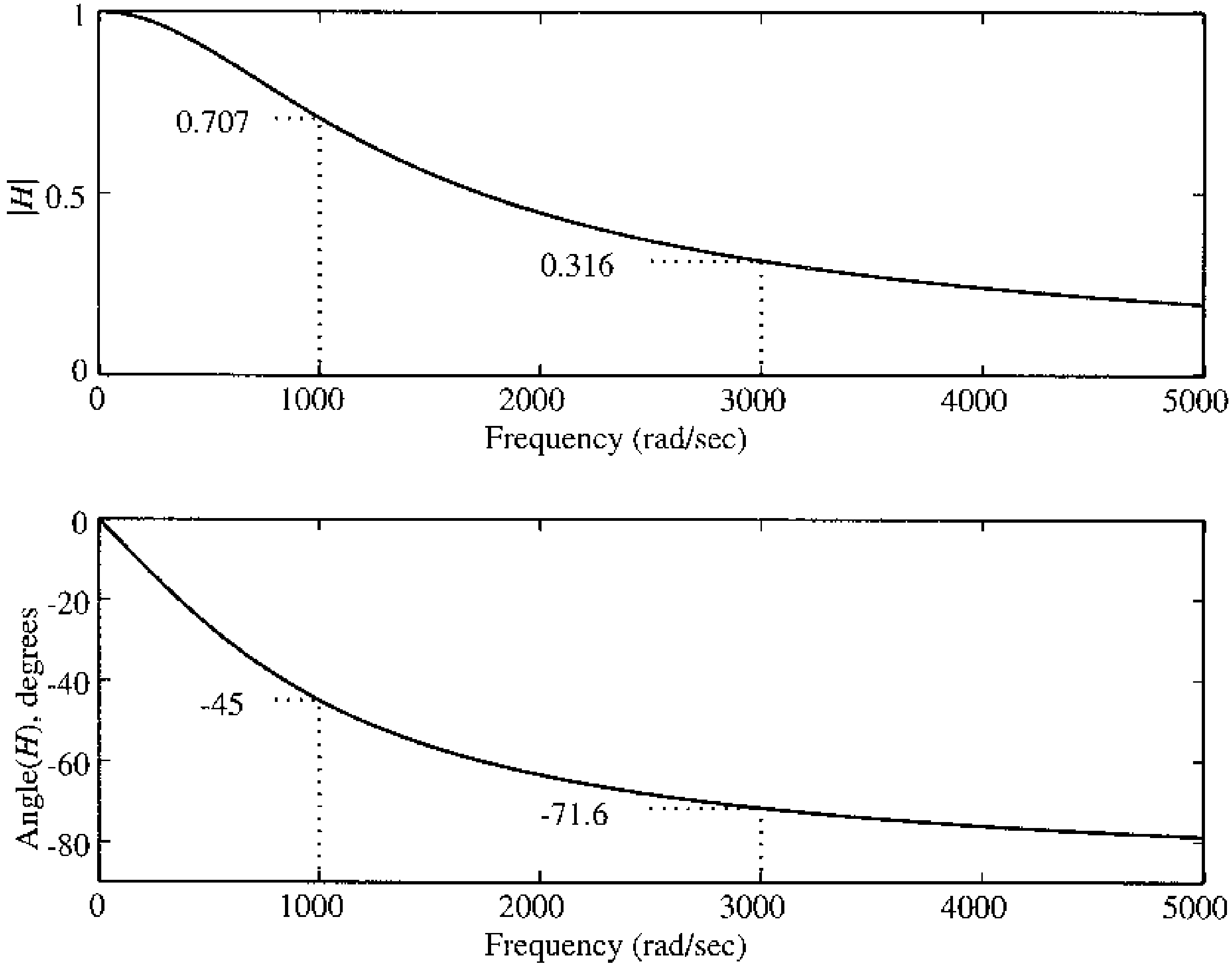
- Θέτοντας $\omega = \omega_0$, είναι $x_c(t) = e^{j\omega_0 t}$

τότε $y_c(t) = H(\omega_0) x_c(t)$

$$y_c(t) = \frac{1/RC}{j\omega_0 + 1/RC} e^{j\omega_0 t}$$

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος



$$|H(\omega)| = \frac{1/RC}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}$$

$$\arg H(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

$$1/RC = 1000$$

Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος

Η γνώση της κρουστικής απόκρισης (συνάρτησης μεταφοράς) $H(\omega)$

μας επιτρέπει να βρούμε την έξοδο του συστήματος για κάθε τριγωνομετρική μορφή του σήματος εισόδου:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$y(t) = A\,|H(\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t + \theta + \arg H(\omega_0)\right)$$

Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος

- Έστω $1/RC = 1000$

$$x(t) = \cos(100t) + \cos(3000t)$$

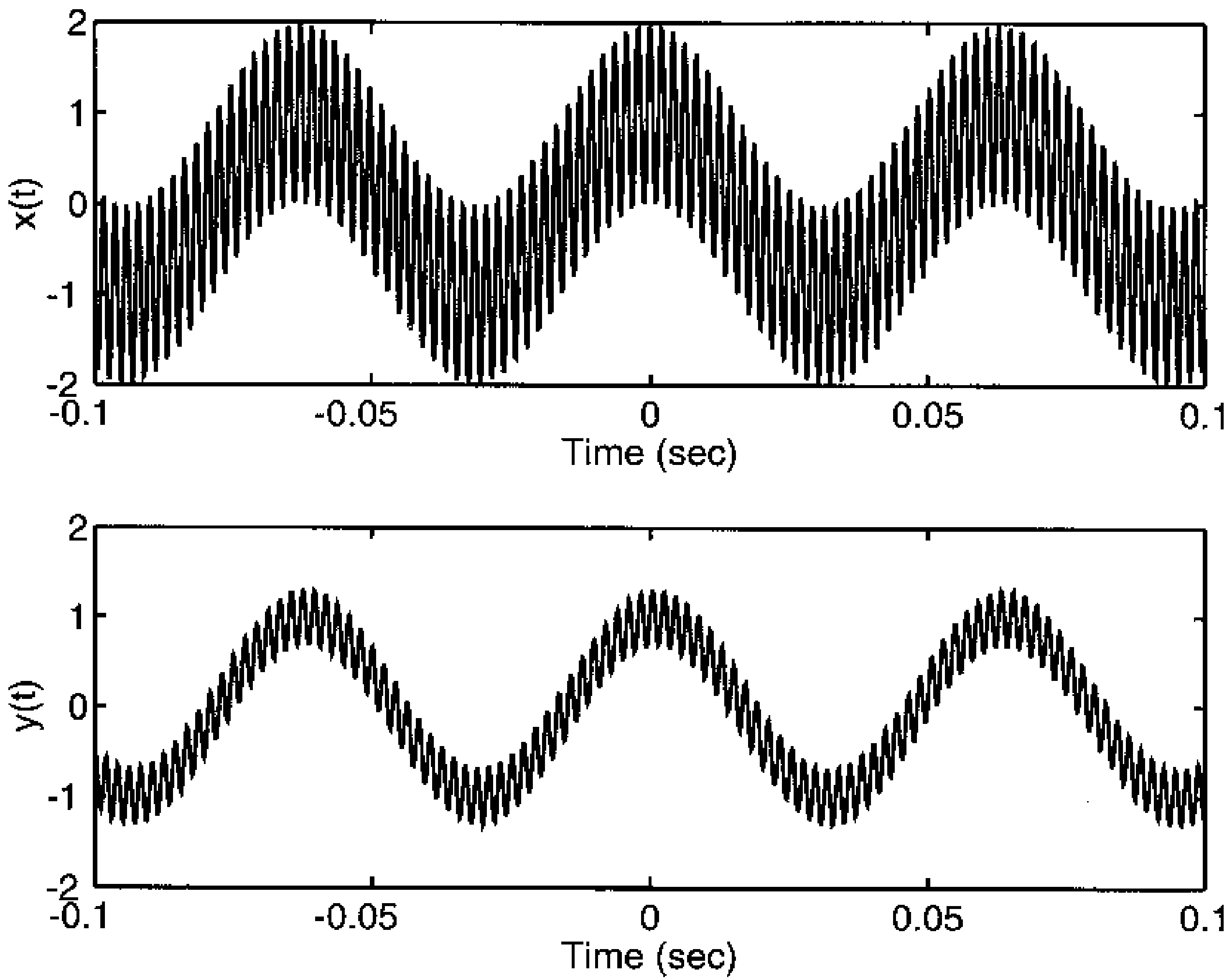
- Τότε η έξοδος είναι:

$$y(t) = |H(100)|\cos(100t + \arg H(100)) +$$

$$+ |H(3000)|\cos(3000t + \arg H(3000)) =$$

$$= 0.9950\cos(100t - 5.71^\circ) + 0.3162\cos(3000t - 71.56^\circ)$$

Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος



$x(t)$

$y(t)$

Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος

Έστω:

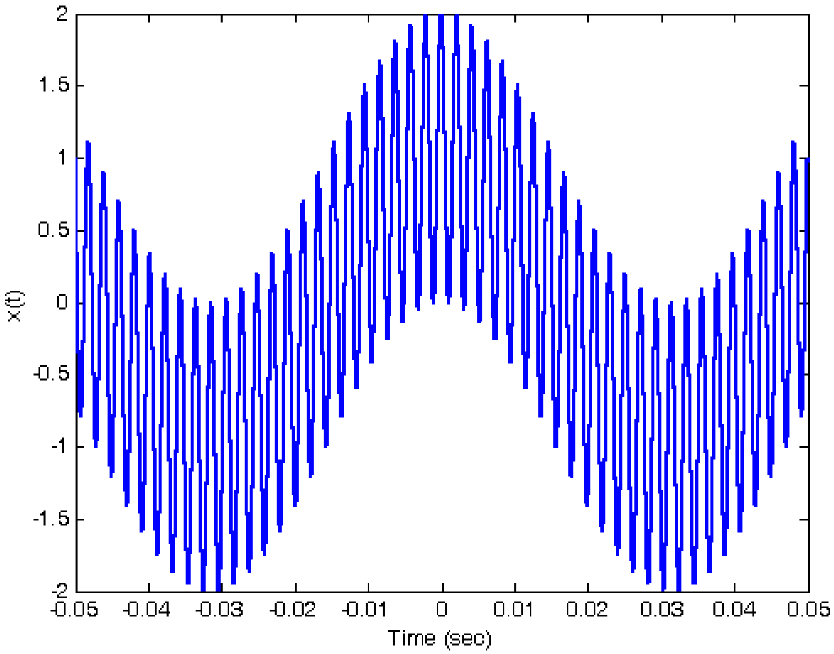
$$x(t) = \cos(100t) + \cos(50.000t)$$

- Τότε η έξοδος είναι:

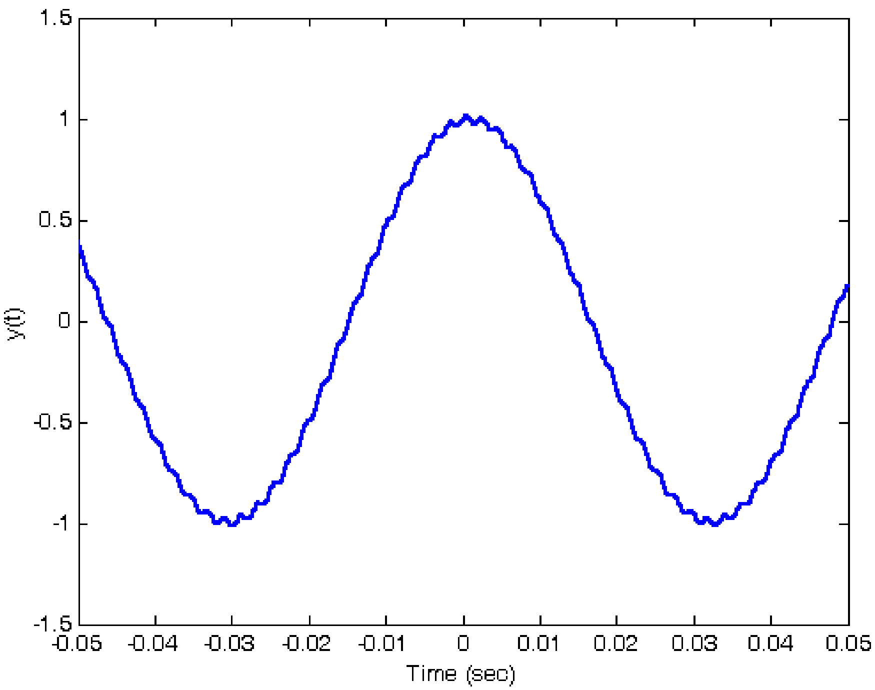
$$y(t) = |H(100)|\cos(100t + \arg H(100)) +$$
$$+ |H(50,000)|\cos(50,000t + \arg H(50,000)) =$$
$$= 0.9950\cos(100t - 5.71^\circ) + 0.0200\cos(50,000t - 88.85^\circ)$$

Συχνοτική Απόκριση ενός RC κυκλώματος

$x(t)$



$y(t)$



Το κύκλωμα RC με έξοδο στον πυκνωτή είναι ένα βαθυπερατό φίλτρο που επιτρέπει τη διέλευση χαμηλών συχνοτήτων και εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες .

Συχνοτική Απόκριση ενός Περιοδικού Σήματος

- Έστω ότι έχουμε σαν είσοδο ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T
- Με χρήση των Σειρών Fourier είναι:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x e^{jk\omega_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

όπου

$$c_k^x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

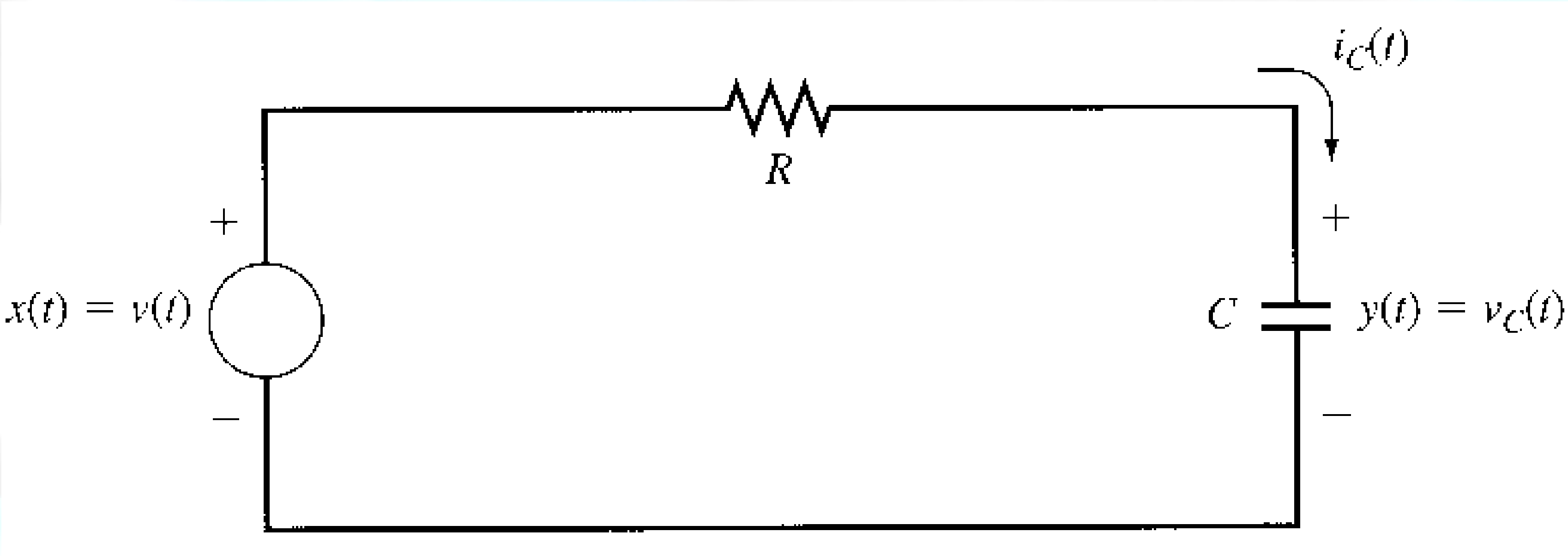
Συχνοτική Απόκριση ενός Περιοδικού Σήματος

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\omega_0) c_k^x e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|H(k\omega_0)||c_k^x|}_{|c_k^y|} e^{j\overbrace{}^{}\underbrace{(k\omega_0 t + \arg(c_k^x) + \arg H(k\omega_0))}_{\arg c_k^y}} =$$

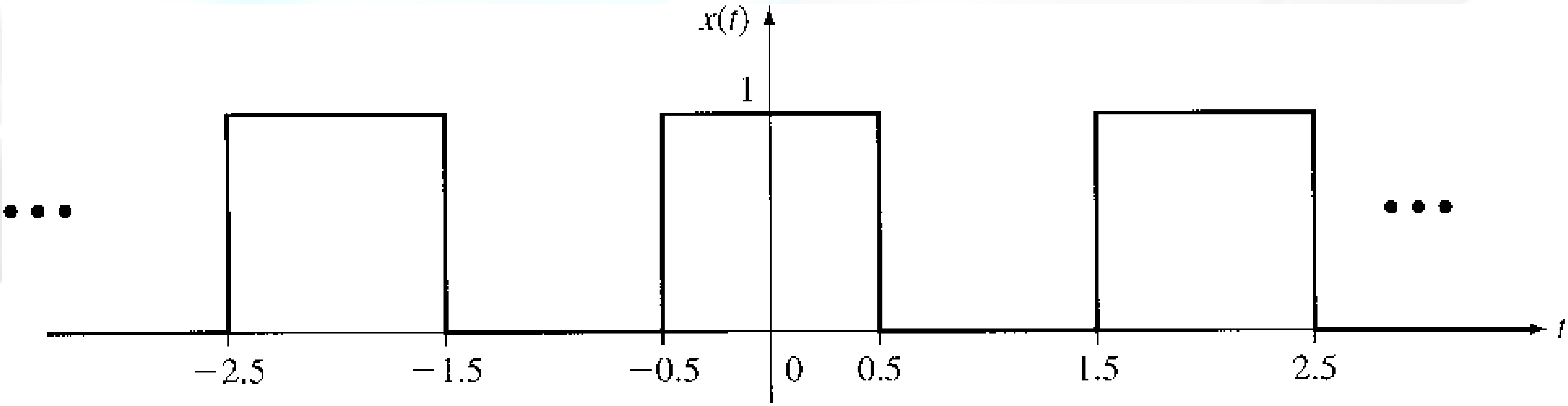
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k^y| e^{j(k\omega_0 t + \arg(c_k^y))} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^y e^{jk\omega_0 t}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Συχνοτική Απόκριση Παλμοσειράς



$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{rect}(t - 2n)$$

Συχνοτική Απόκριση Παλμοσειράς



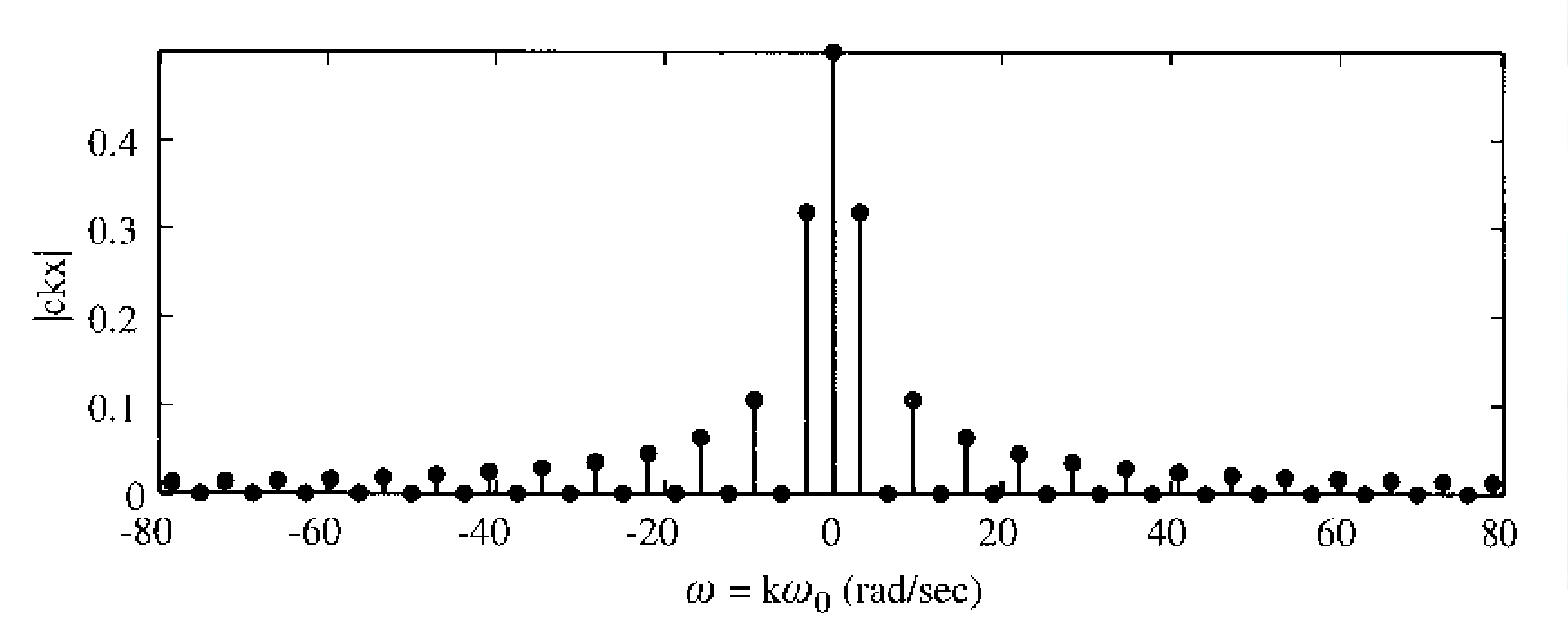
$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}(t-2n)$$

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^x e^{jk\pi t}, \quad t\in\mathbb{R}$$

$$c_k^x = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

Συχνοτική Απόκριση Παλμοσειράς

- Φάσμα πλάτους $|c_k^x|$ ενός σήματος εισόδου $x(t)$



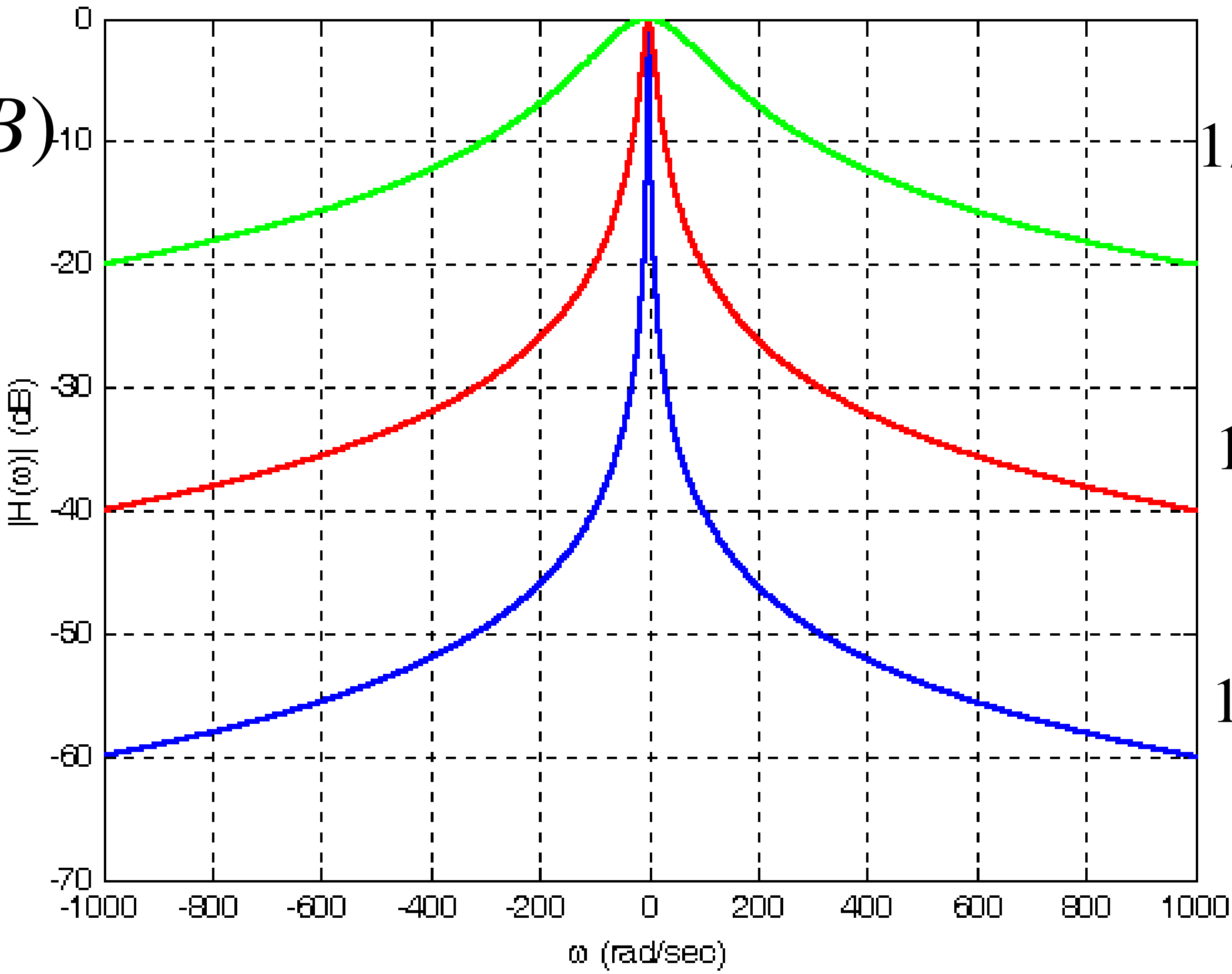
Συχνοτική Απόκριση Παλμοσειράς

- Η κρουστική απόκριση: $$H(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

- Η σειρά Fourier του σήματος εξόδου

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\omega_0) c_k^x e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^y e^{jk\omega_0 t}$$

Συχνοτική Απόκριση Παλμοσειράς



$|H(\omega)|(dB)$

$1/RC = 100$

$1/RC = 10$

$1/RC = 1$

πιο επιλεκτικό

Φίλτρο

ω

Συχνοτική Απόκριση Παλμοσειράς

$1/RC = 1$

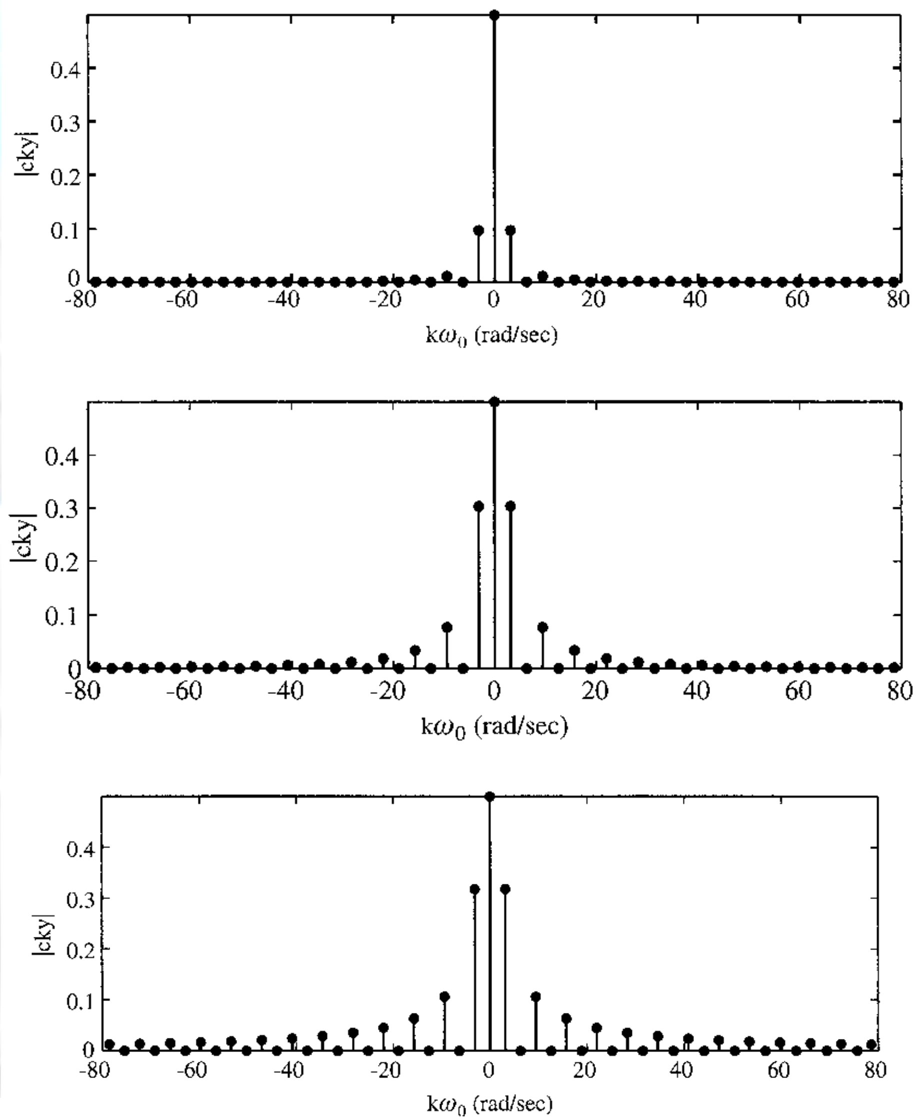
$|c_k^y|$

$|c_k^y|$

$1/RC = 10$

$|c_k^y|$

$1/RC = 100$



πιο επιλεκτικό φίλτρο

Συχνοτική Απόκριση Παλμοσειράς

$y(t)$

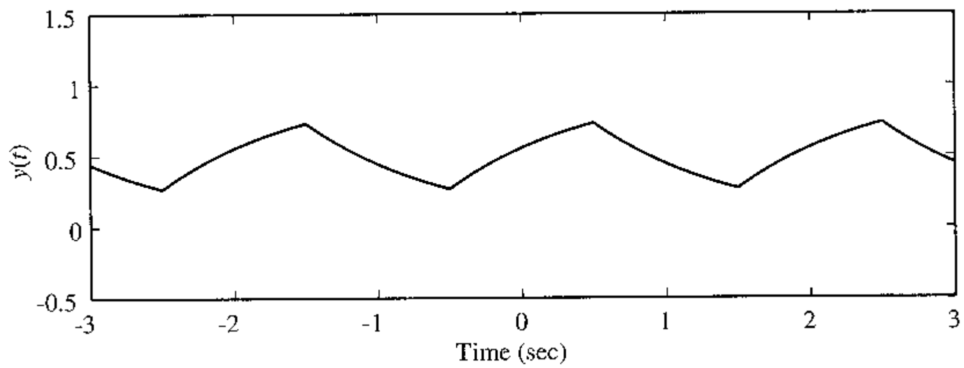
$1/RC = 1$

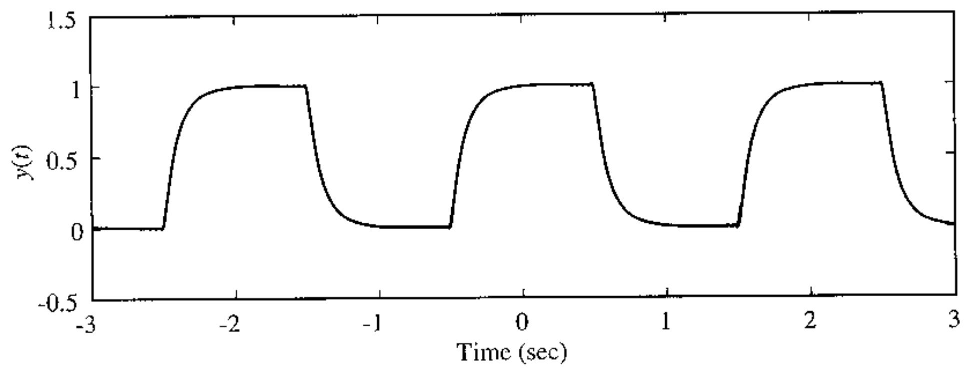
$y(t)$

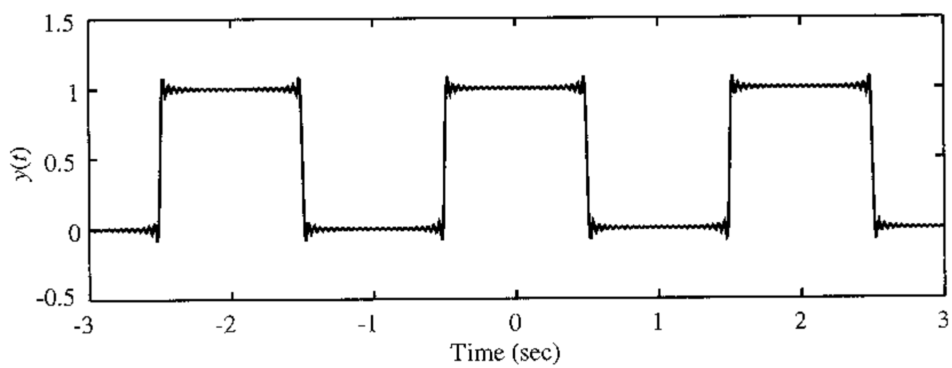
$1/RC = 10$

$y(t)$

$1/RC = 100$







πιο επιλεκτικό φίλτρο

Συχνοτική Απόκριση Μη-περιοδικού σήματος

- Έστω το CT, LTI σύστημα:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

- Η σχέση εισόδου/εξόδου

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

στο πεδίο της συχνότητας becomes

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Συχνοτική Απόκριση Μη-περιοδικού σήματος

Από τη σχέση $Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$

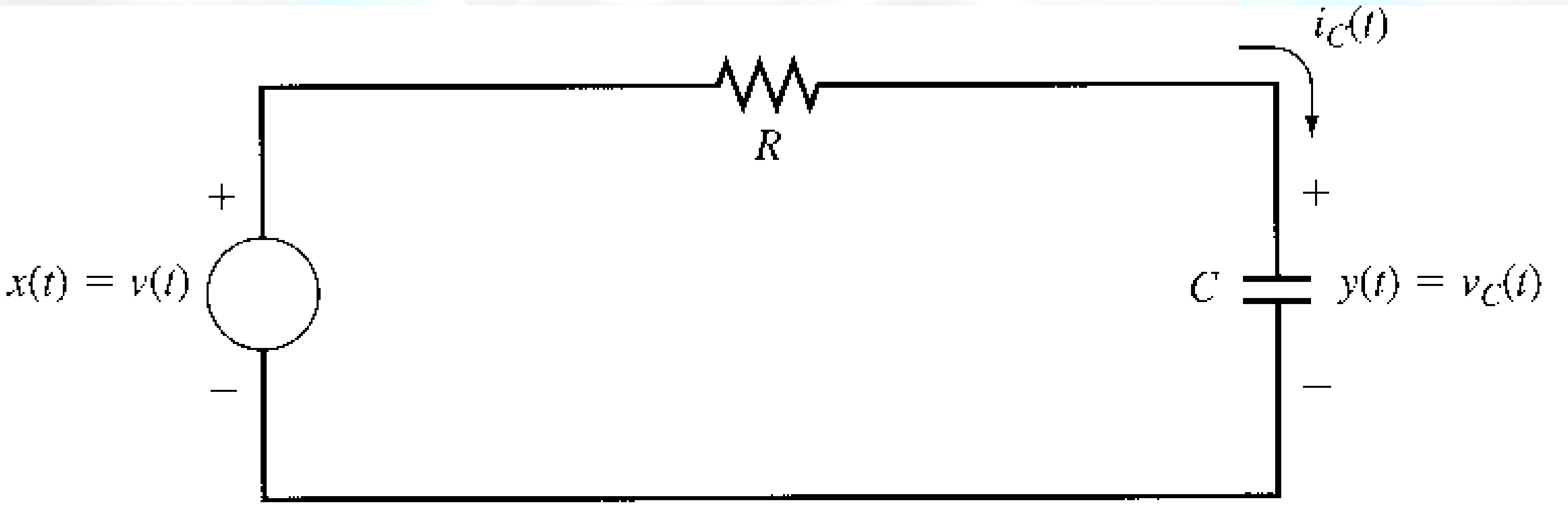
το πλάτος του φάσματος το σήμα εξόδου $y(t)$ δίνεται:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| |X(\omega)|$$

και η φάση δίνεται:

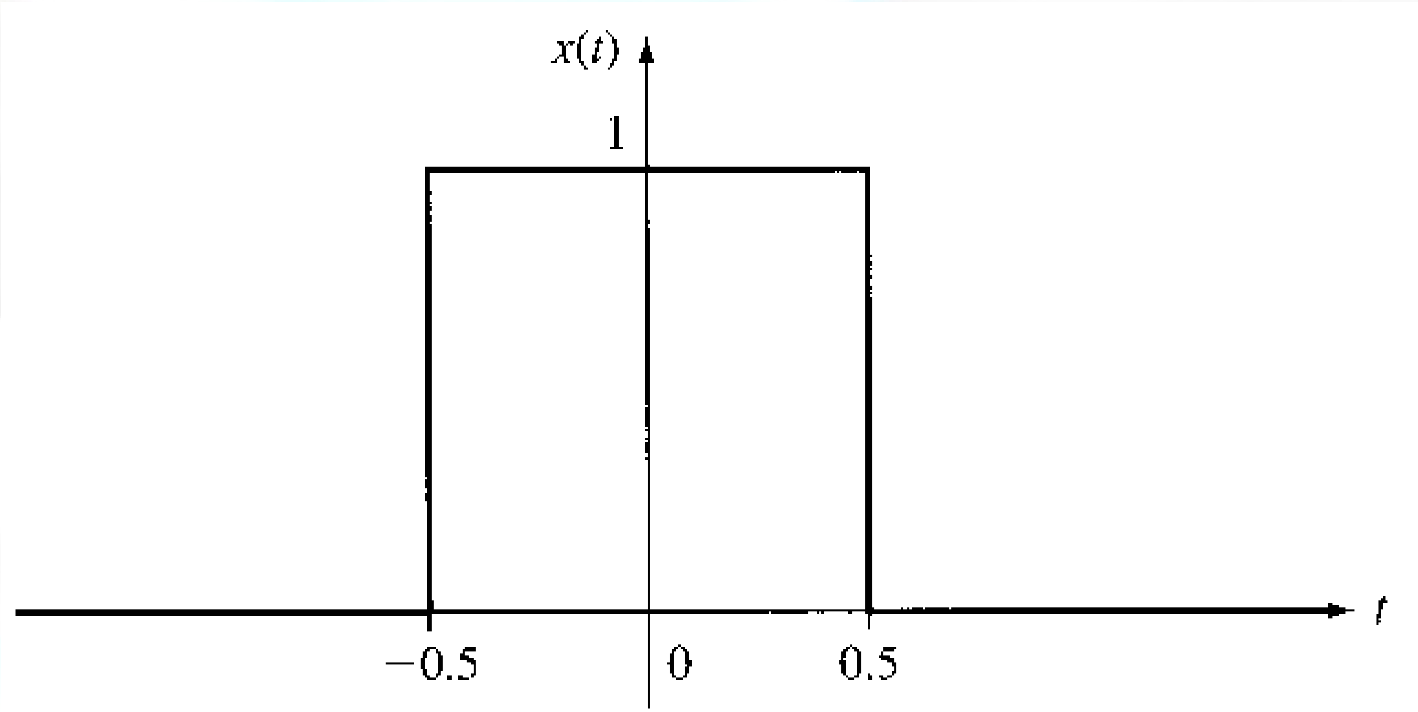
$$\arg Y(\omega) = \arg H(\omega) + \arg X(\omega)$$

Συχνοτική Απόκριση ενός παλμού από κύκλωμα RC



$$x(t) = \mathrm{rect}(t)$$

Συχνοτική Απόκριση ενός παλμού από κύκλωμα RC



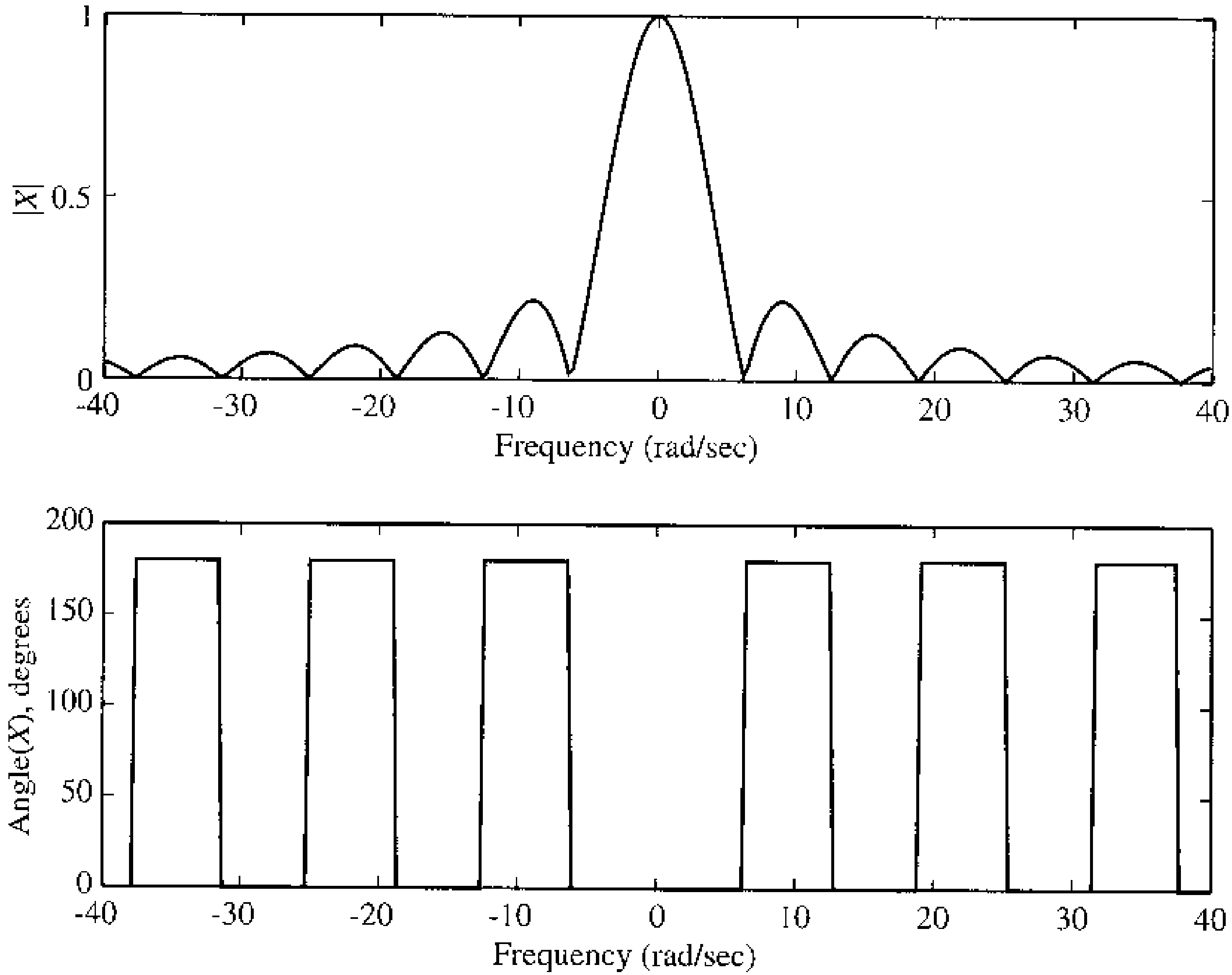
$$x(t) = \mathrm{rect}(t)$$

$$X(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Συχνοτική Απόκριση ενός παλμού από κύκλωμα RC

$|X(\omega)|$

$\arg X(\omega)$

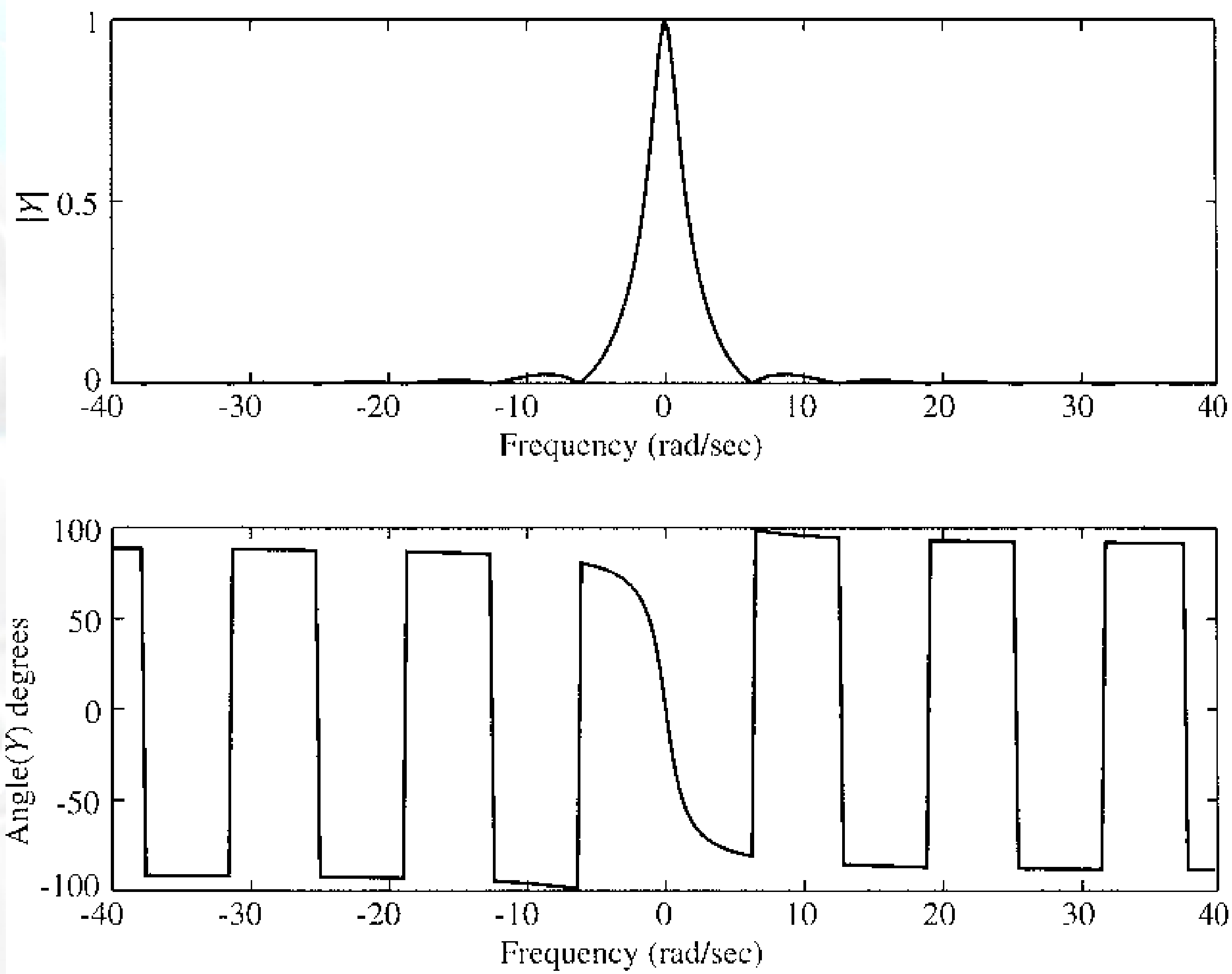


Συχνοτική Απόκριση ενός παλμού από κύκλωμα RC

$$1/RC = 1$$

$|Y(\omega)|$

$\arg Y(\omega)$

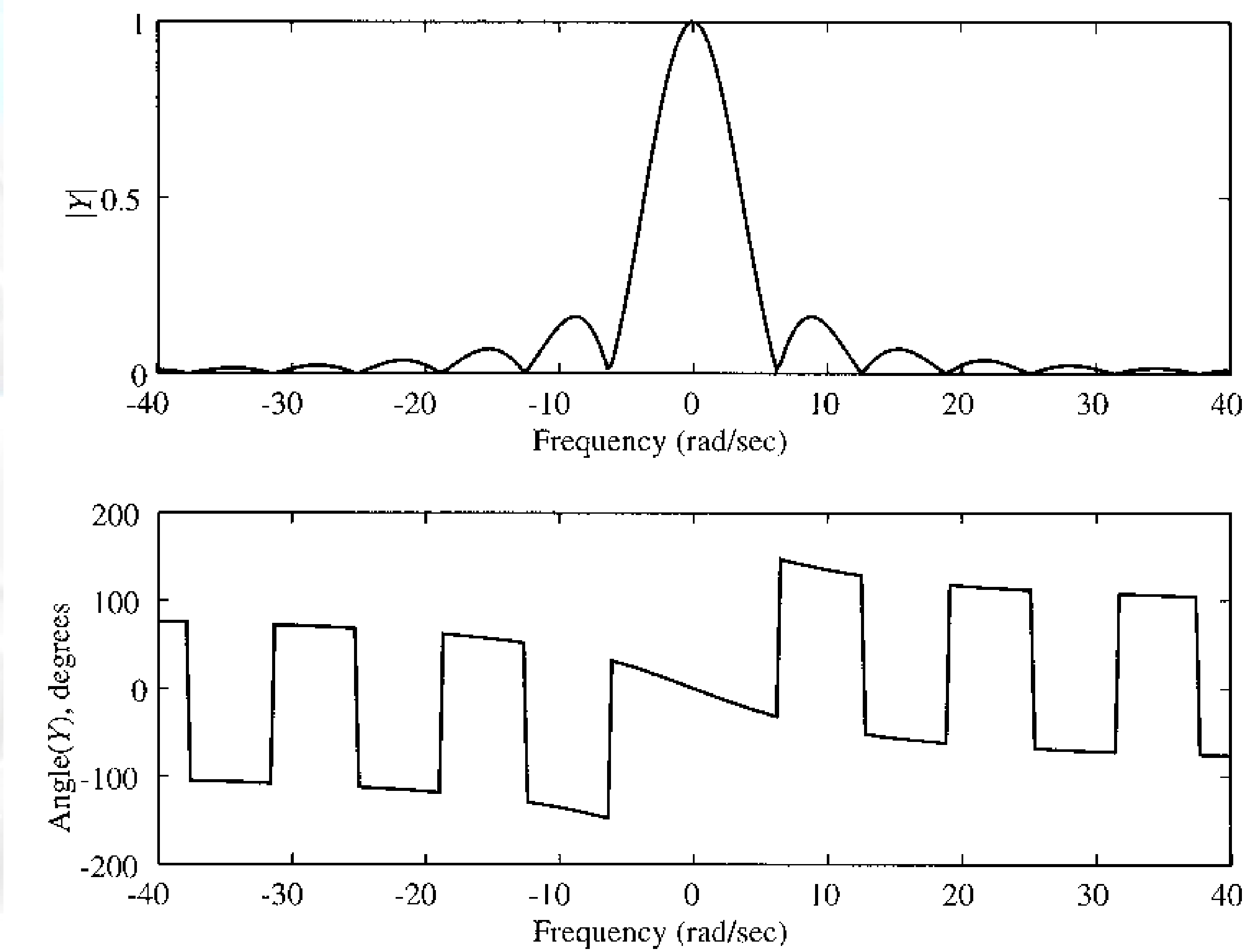


Συχνοτική Απόκριση ενός παλμού από κύκλωμα RC

$1/RC = 10$

$|Y(\omega)|$

$\arg Y(\omega)$

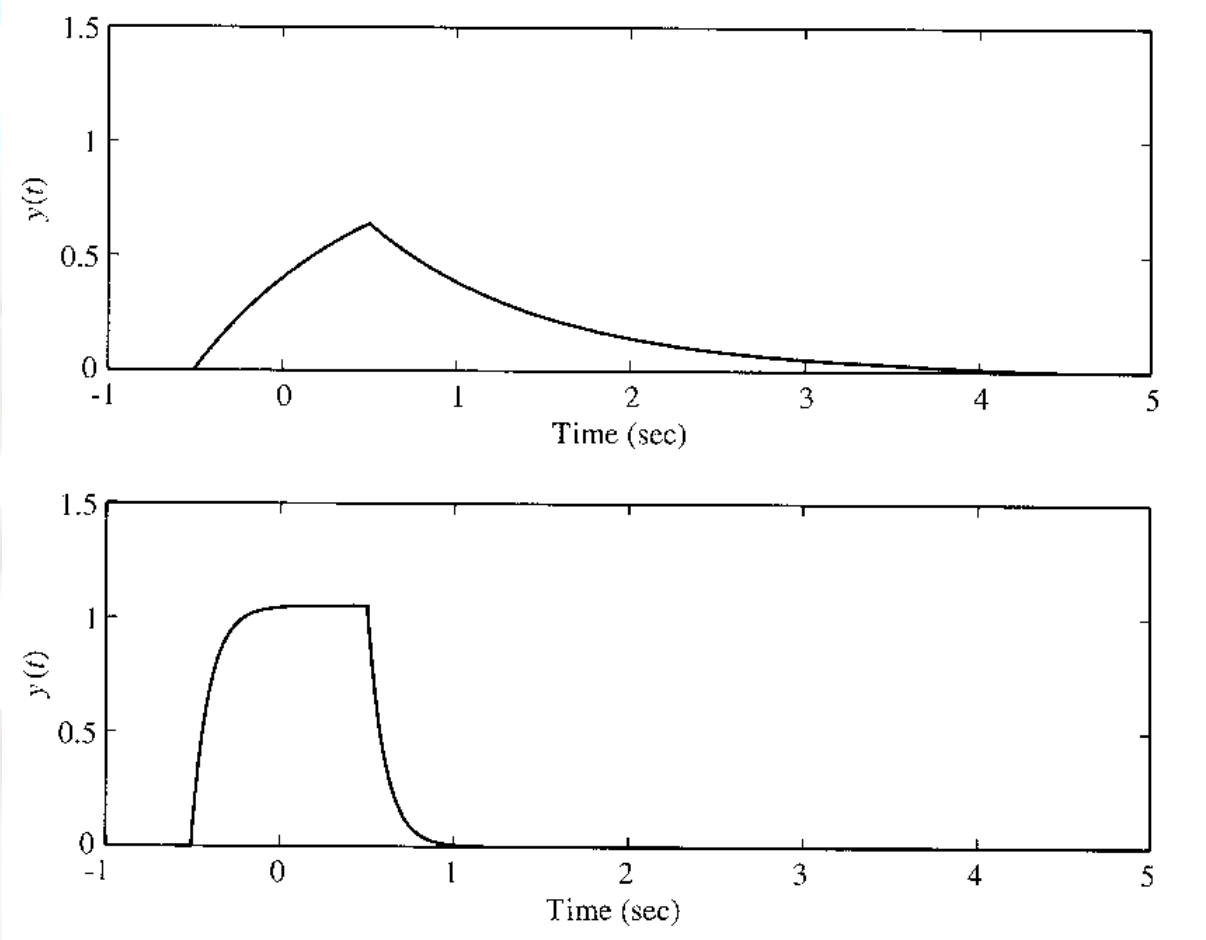


Χρονική Απόκριση ενός παλμού από κύκλωμα RC

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$h(t) = (1/RC)e^{-(1/RC)t}u(t)$$

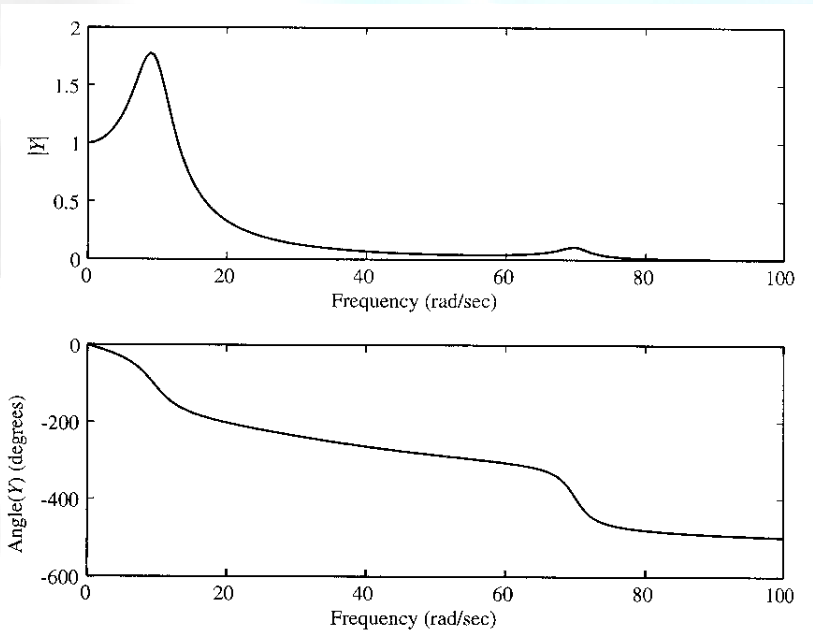
$$x(t) = \mathrm{rect}(t)$$

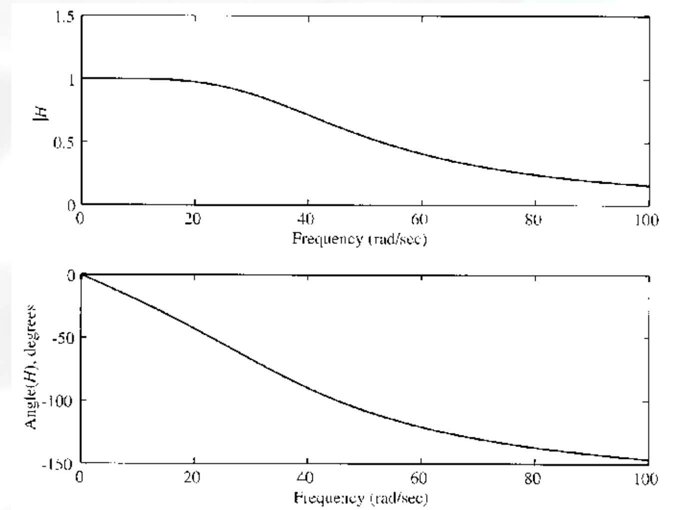


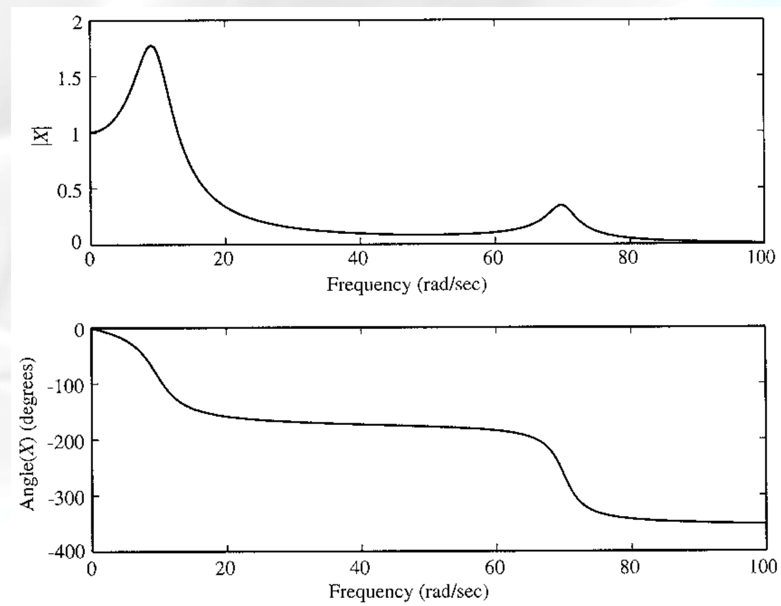
πιο επιλεκτικό φίλτρο

$1/RC = 10$

Συχνοτική Απόκριση ενός παλμού από κύκλωμα RC





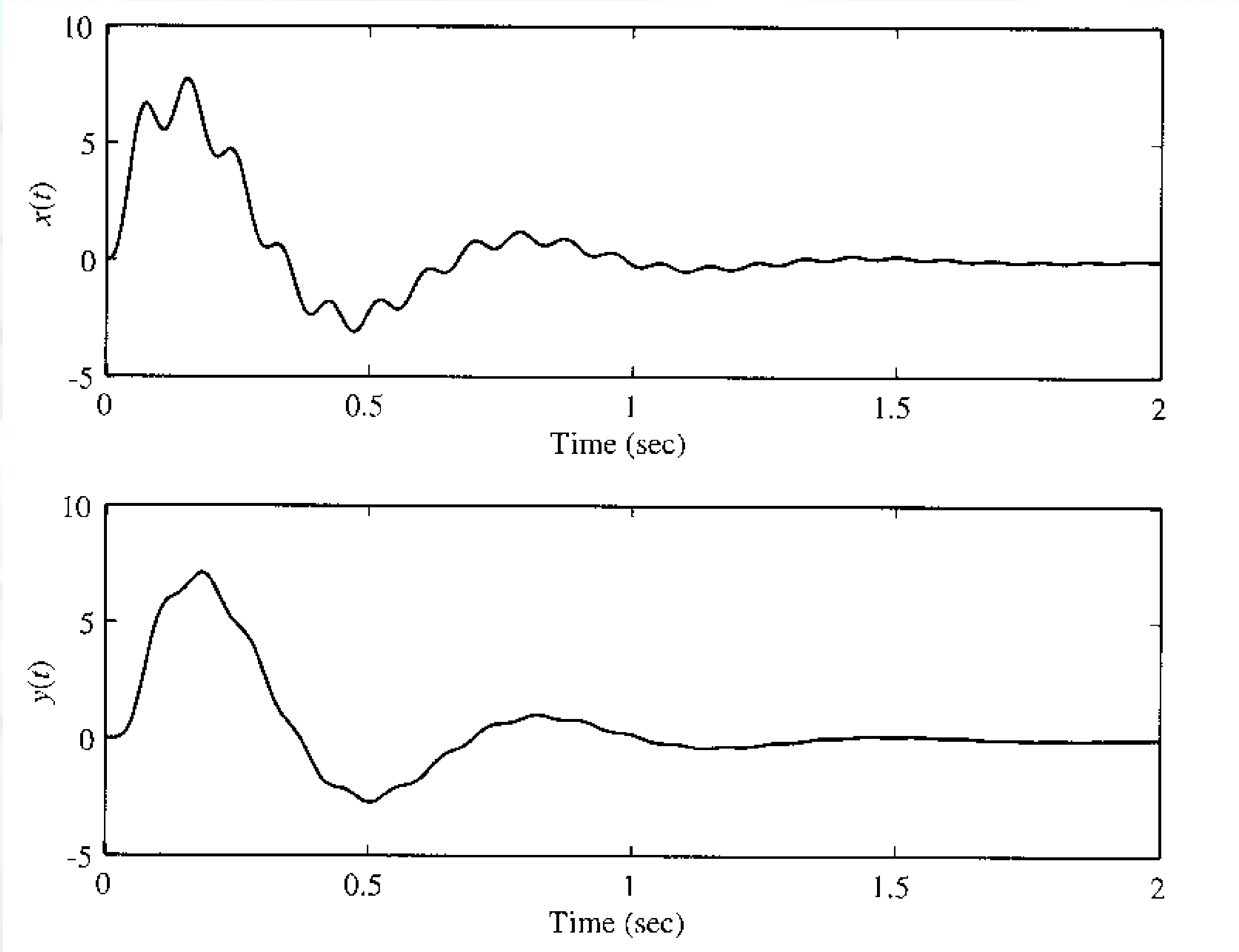


$$Y(\omega) = H(\omega) \times X(\omega)$$

Συχνοτική Απόκριση ενός παλμού από κύκλωμα RC

$x(t)$

$y(t)$



Φιλτράρισμα Σημάτων

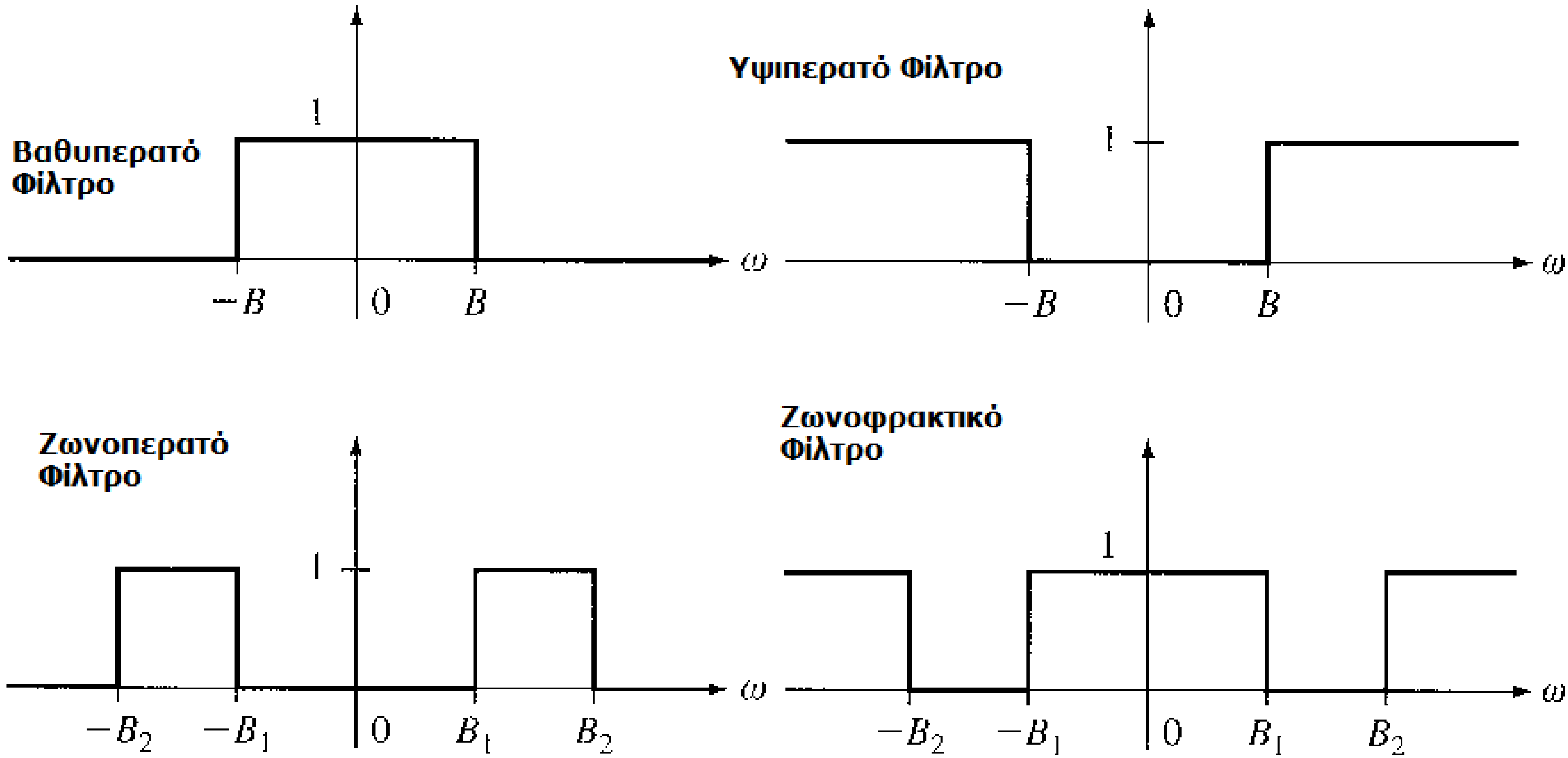
- Η απόκριση ενός CT, LTI συστήματος $H(\omega)$ σε ημιτονικό σήμα $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

$$y(t) = A\,|H(\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t + \theta + \arg H(\omega_0)\right)$$

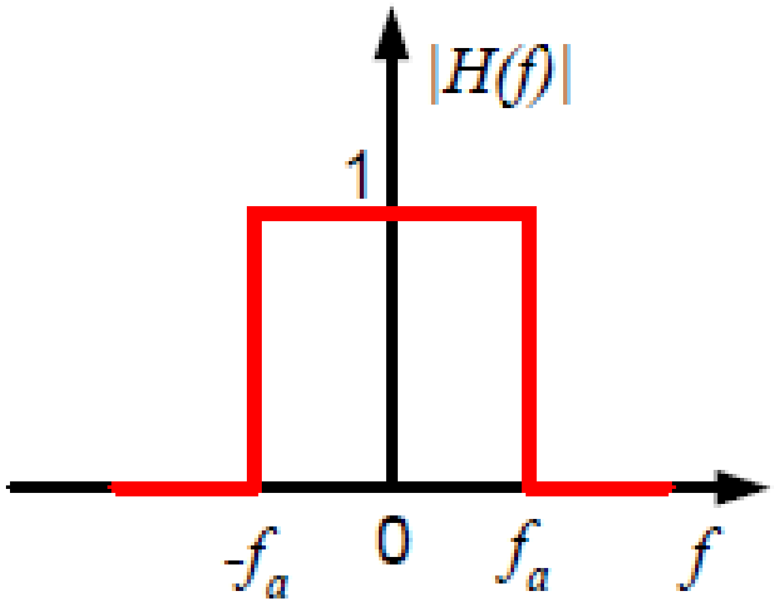
$$|H(\omega_0)| = 0 \qquad |H(\omega_0)| \approx 0$$

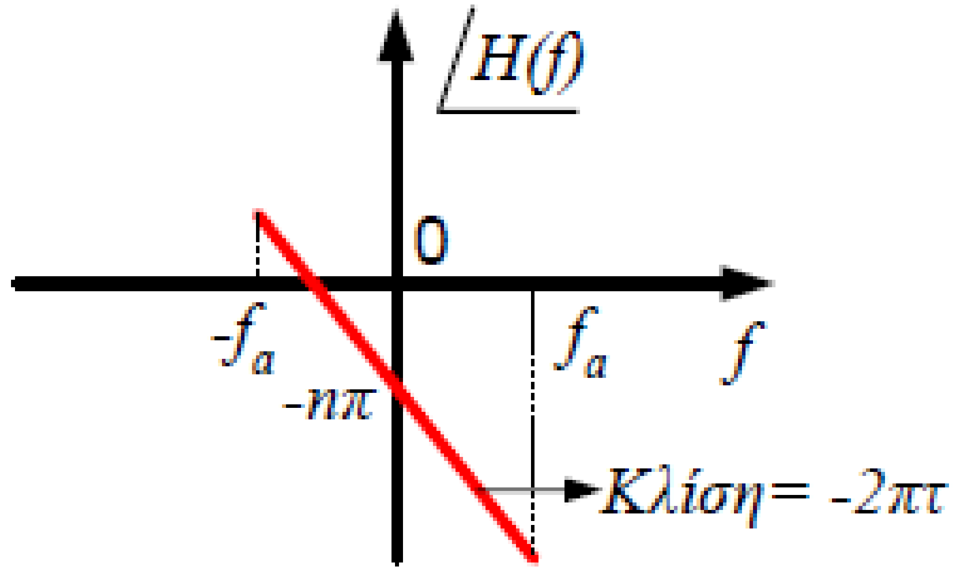
$$y(t) = 0 \qquad y(t) \approx 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Είδη Φίλτρων



Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο (Low Pass Filter)

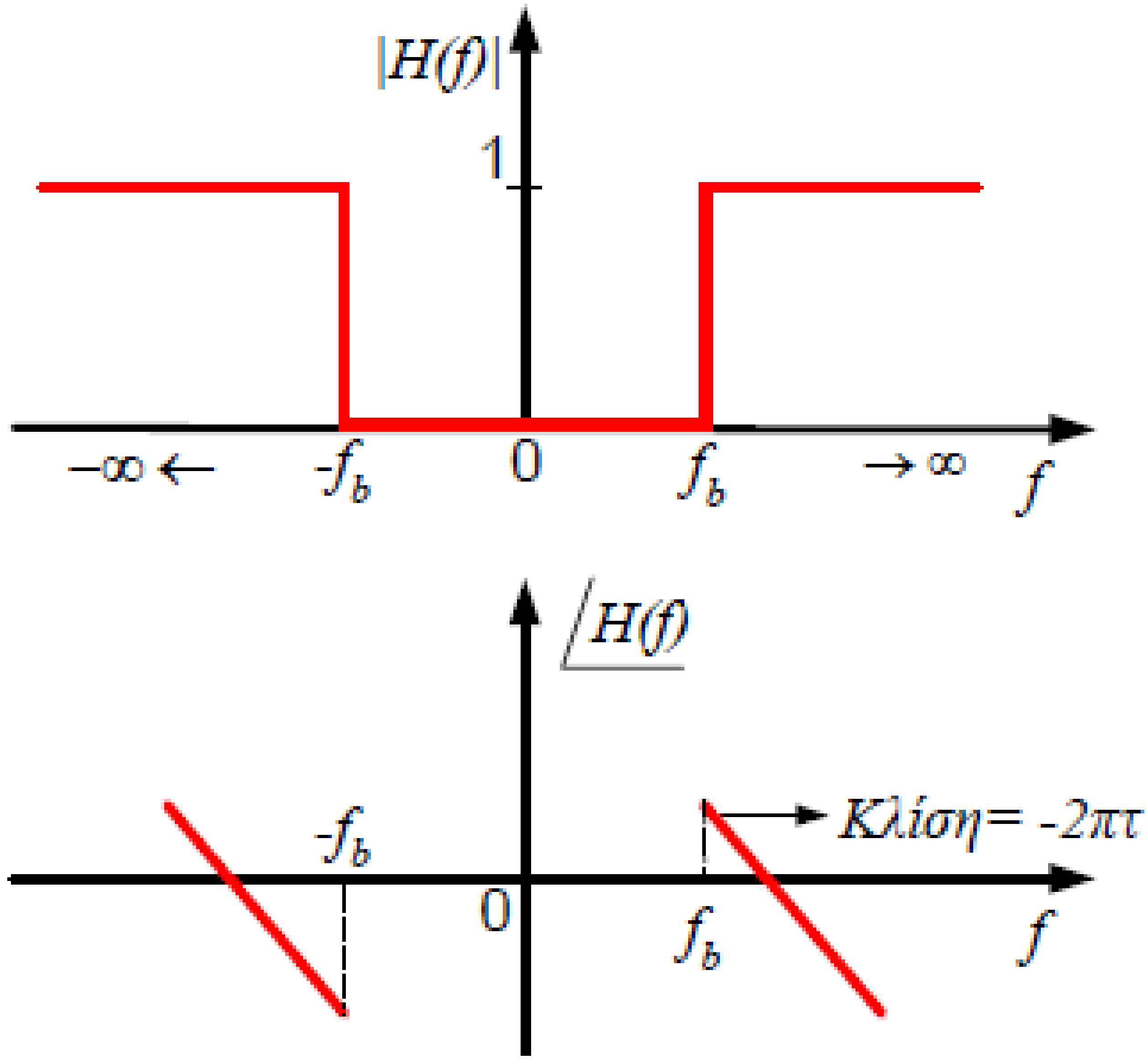




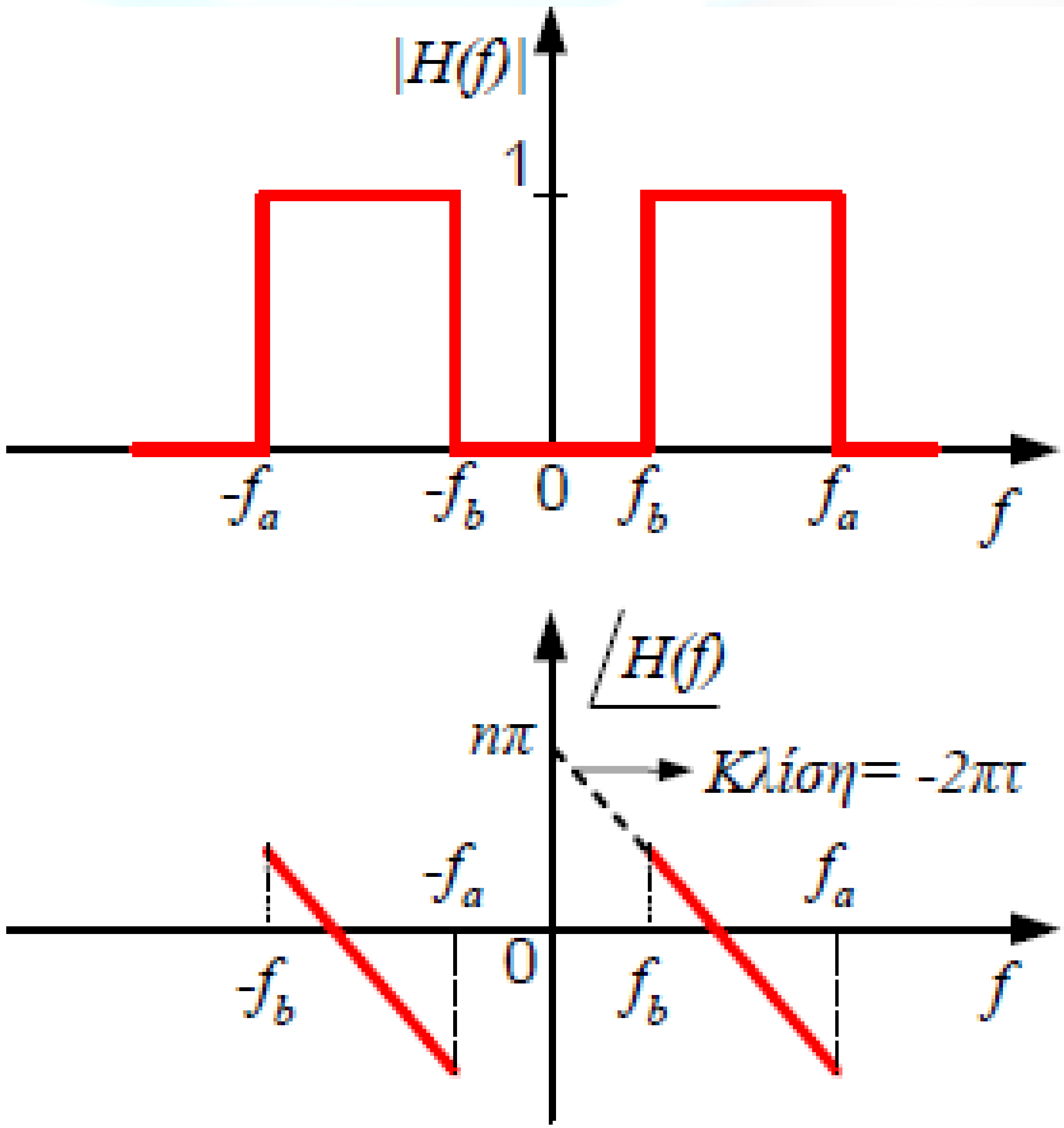
$$H(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f \tau \pm n\pi} & -f_a \le f \le f_a \\ 0 & |f| > f_a \end{cases}$$

Εύρος Ζώνης : $W = f_a$

Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο (High Pass Filter)



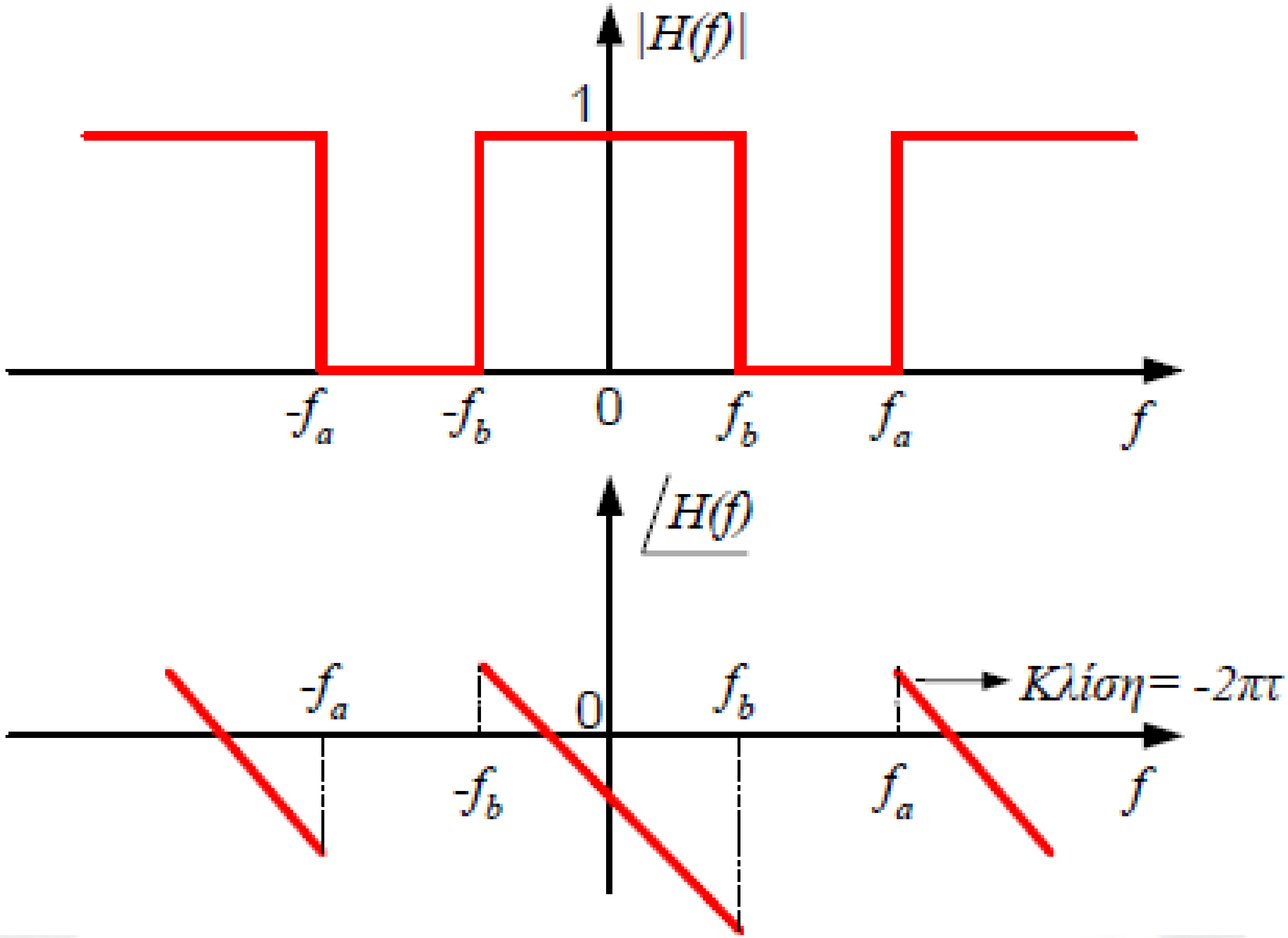
Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (Band Pass Filter)



Εύρος Ζώνης

$W = f_a - f_b$

Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο (Band Stop Filter)



Απόκριση Φάσης Φίλτρων

- Τα φίλτρα συνήθως σχεδιάζονται με βάση την απόκριση πλάτους. $|H(\omega)|$

- Η απόκριση φάσης $\arg H(\omega)$

  πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ώστε να εμποδίζεται η παραμόρφωση του σήματος ,

- Εάν το φίλτρο έχει γραμμική φάση στις ζώνες διάβασης, τότε δεν έχουμε παραμόρφωση στην έξοδο.

Μετάδοση Χωρίς Παραμορφώσεις

- Με τον όρο μετάδοση χωρίς παραμορφώσεις εννοούμε ότι το σήμα εξόδου ενός επικοινωνιακού διαύλου είναι ένα ακριβές αντίγραφο του σήματος εισόδου, εκτός από μια αλλαγή στο πλάτος και/ή μια σταθερή χρονική καθυστέρηση.
- Μαθηματικά αυτή η συνθήκη εκφράζεται:

$$y(t) = Ax(t-\tau)$$

- Όπου η σταθερά A είναι η αλλαγή στο πλάτος και η σταθερά τ η καθυστέρηση μετάδοσης.

Μετάδοση Χωρίς Παραμορφώσεις

- Αν $X(f)$, $Y(f)$ οι μετ/σμοί Fourier των σημάτων εισόδου και εξόδου αντίστοιχα, τότε εφαρμόζοντας μετ/σμό Fourier στην προηγούμενη συνθήκη, προκύπτει η αντίστοιχη συνθήκη στο πεδίο της συχνότητας

$$Y(f) = AX(f)e^{-j2\pi f\tau}$$

- Άρα

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = Ae^{-j2\pi f\tau}$$

- ή πιο γενικά

$$H(f) = Ae^{-j2\pi f\tau \pm m\pi} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Μετάδοση χωρίς Παραμορφώσεις

- Η συνθήκη αυτή υποδεικνύει ότι για να επιτευχθεί μετάδοση ενός σήματος χωρίς παραμορφώσεις, η συνάρτηση μεταφοράς του διαύλου πρέπει να ικανοποιεί δύο συνθήκες

1. Η απόκριση πλάτους να είναι σταθερή για όλες τις συχνότητες του σήματος

$$\left|H(f)\right| = A$$

2. Η φάση να είναι γραμμική με τη συχνότητα και να μηδενίζει (ή να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π) για μηδενική συχνότητα

$$\angle H(f) = \beta(f) = -2\pi f \tau \pm m\pi$$

Μετάδοση Χωρίς Παραμόρφωση

$$y(t) = k \cdot \left(t - t_0\right)$$

- Σταθερή Απόκριση Πλάτους
- Γραμμική Φάση

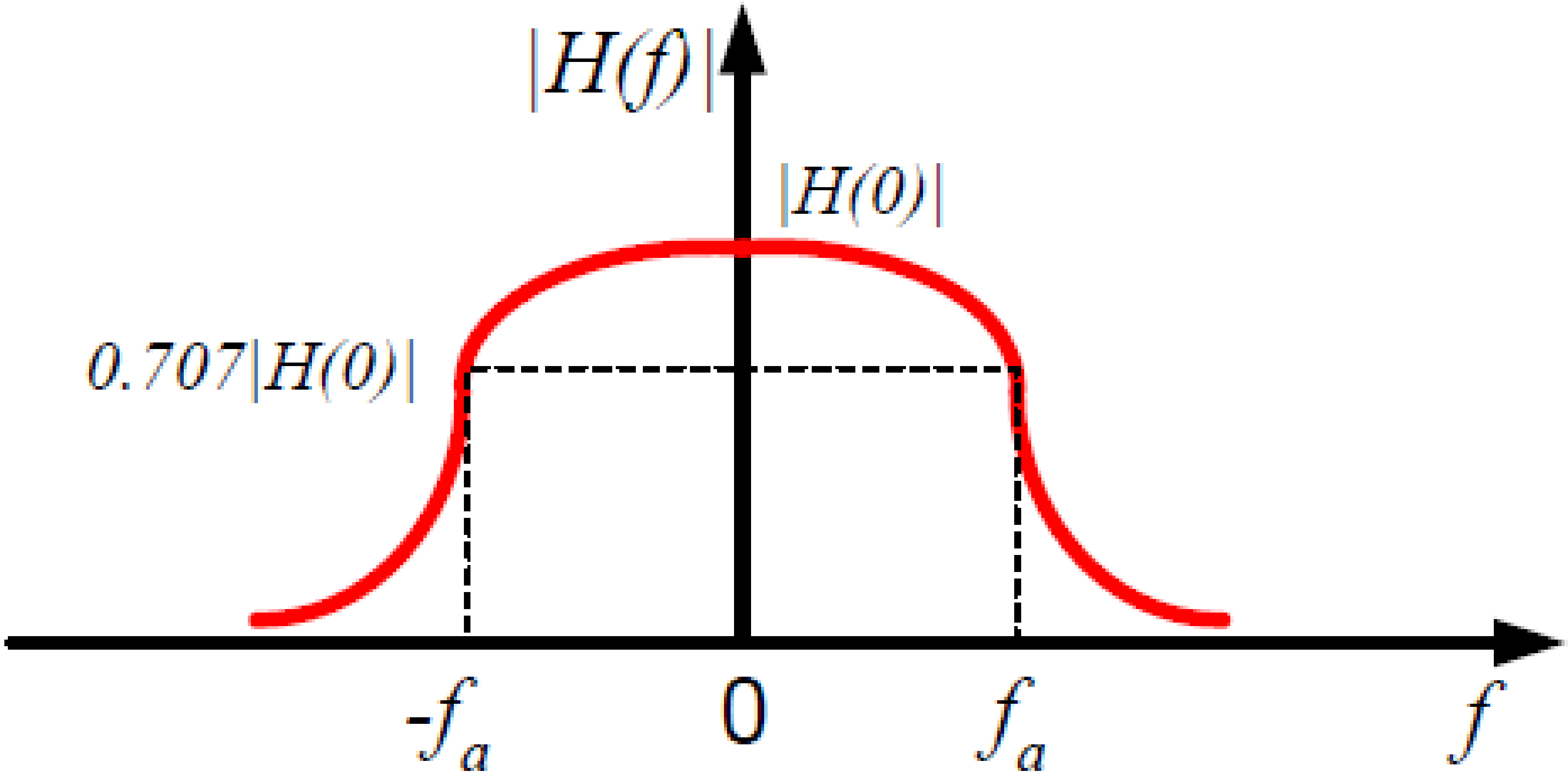
$$H(\omega) = k$$

$$\arg\left(H(\omega)\right) = -\omega \cdot t$$

Μη Ιδανικά Φίλτρα

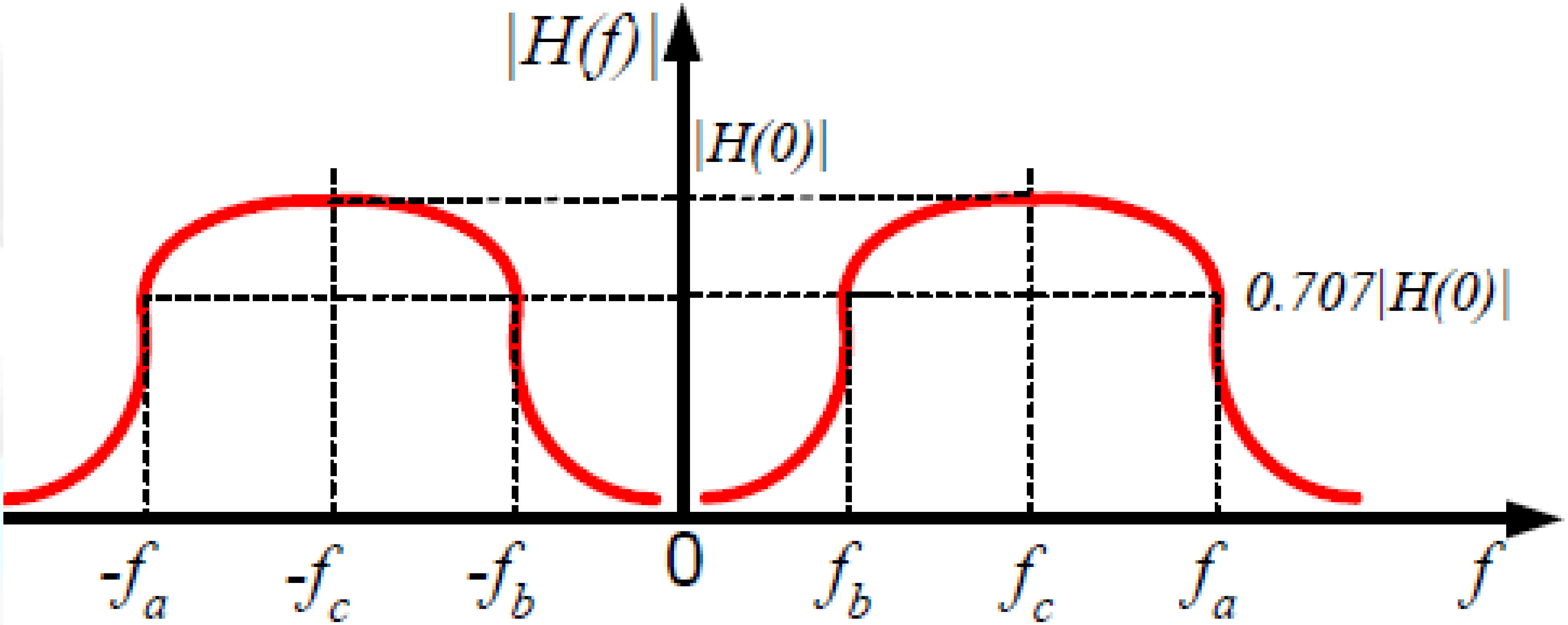
- Στην πράξη τα φίλτρα που προαναφέρθηκαν δεν είναι πραγματοποιήσιμα. Τα πραγματικά φίλτρα έχουν συνάρτηση μεταφοράς διαφορετική.
- Το εύρος ζώνης ορίζεται ως το διάστημα των θετικών συχνοτήτων εντός του οποίου το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το καθορισμένο ποσοστό της μέγιστης τιμής του.
- Αν το όριο που θέτουμε για το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς είναι ένας παράγοντας 0.707, ή το κέρδος ισχύος που ορίζεται ως $20\log_{10}\left(\left|H(f)\right|\right)$ έχει μειωθεί κατά 3dB, τότε το εύρος ζώνης ονομάζεται 3dB.

Μη Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο



Εύρος Ζώνης 3dB : $W=f_a$

Μη Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

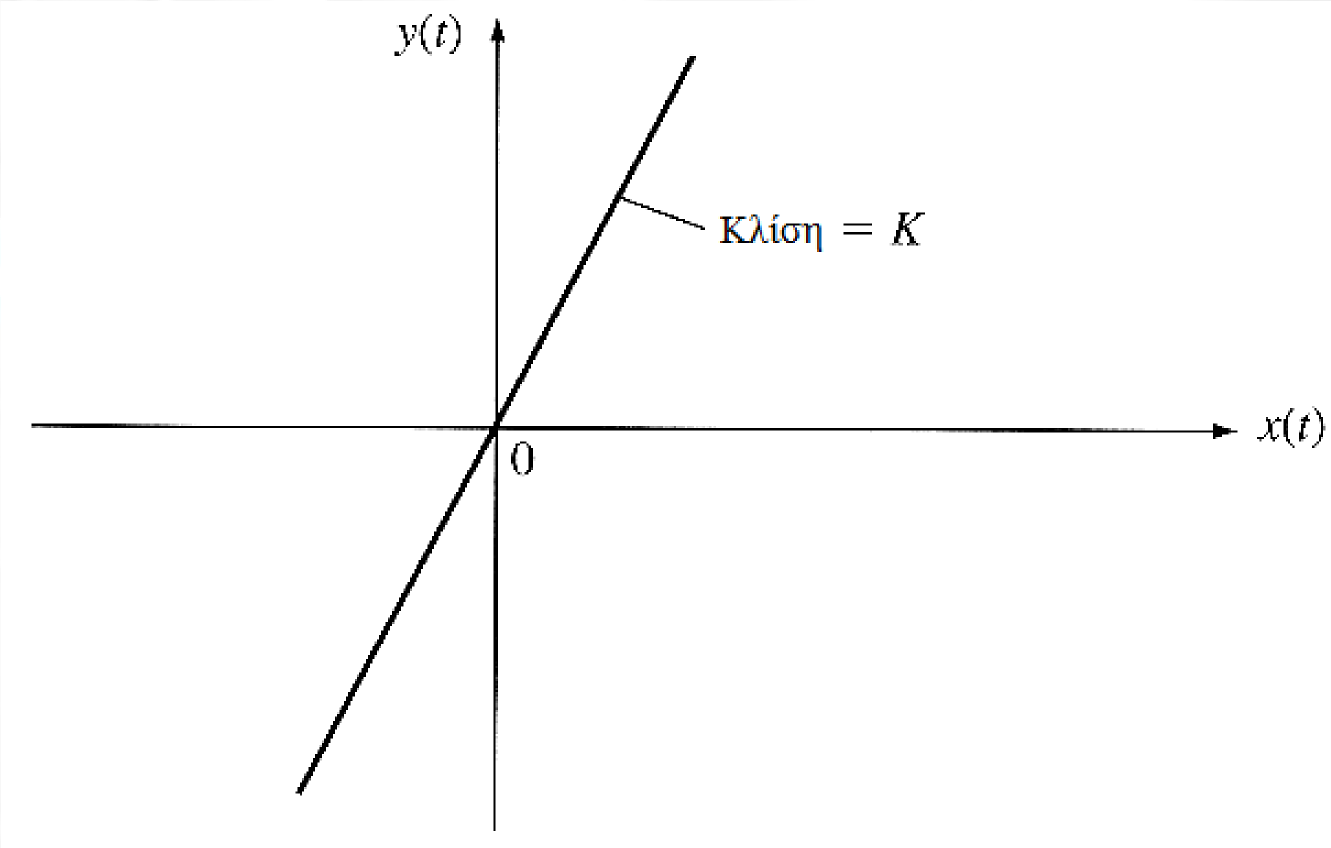


Εύρος Ζώνης 3dB : $W=f_a\text{-}f_b$

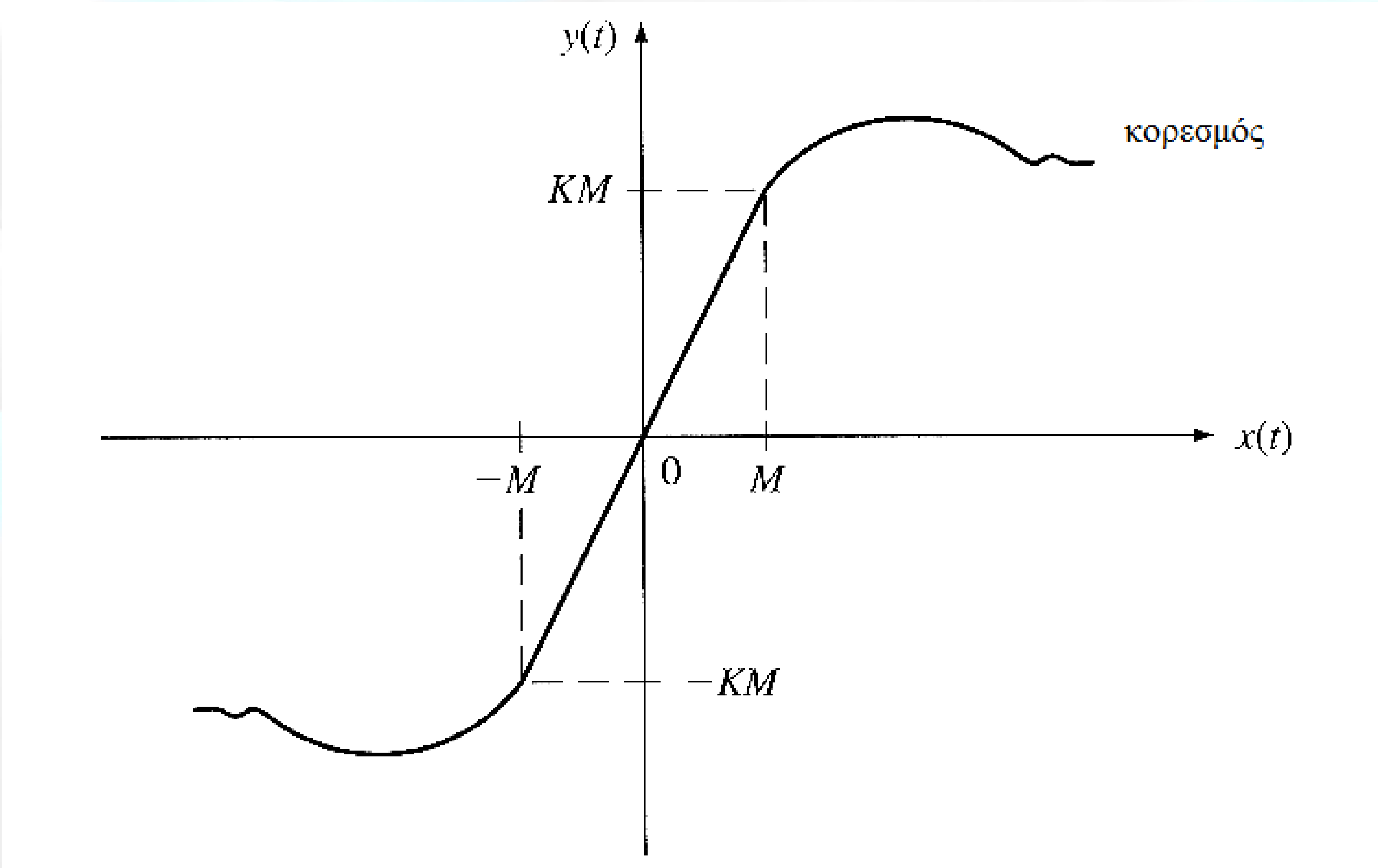
Έχουμε θεωρήσει ότι το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς είναι συμμετρικό ως προς μια κεντρική f_c.

Παράδειγμα Γραμμικού Συστήματος
Ιδανικός Ενισχυτής

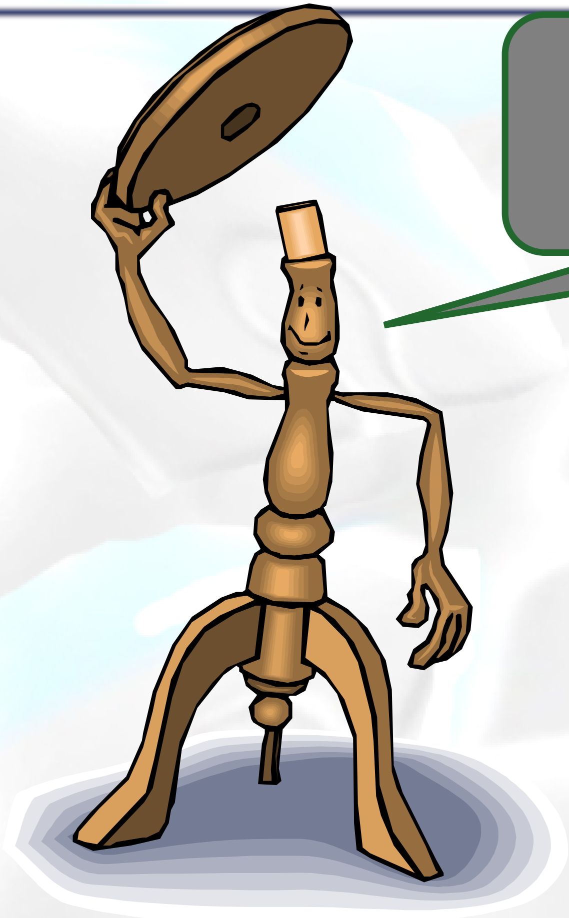
$$y(t) = Kx(t)$$



Παράδειγμα Μη-Γραμμικού Συστήματος



Q&A



Ευχαριστώ για την προσοχή σας !!!

E-mail: thpanag@ece.ntua.gr
Παλ. Κτίρια Ηλ/γων Γρ. 3.2.9