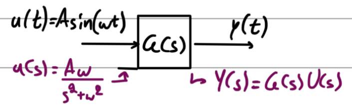
# Κεφ. 7 Αρμονική Απόκριση

- Ημιτονική μόνιμη κατάσταση




- Είσοδος: $u(t) = A\sin(\omega t) \Rightarrow u(s) = A\omega/(s^2+\omega^2)$
- Απόκριση: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\, A\omega/(s^2+\omega^2)\}$

Ας είναι: $p_1, \dots, p_n$ οι πόλοι της $G(s)$ τω: $Re\{p_i\} < 0$, $i = 1, \dots, n$

- $Y(s) = G(s)\dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \dfrac{K_o}{s-j\omega} + \dfrac{\overline{K_o}}{s+j\omega} + \sum_{i=1}^{n}\dfrac{K_i}{s-p_i} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = K_o e^{j\omega t} + \overline{K_o}e^{-j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot e^{p_i t}$

$\Rightarrow$ στην μόνιμη κατάσταση $\lim_{t\to\infty}\{y(t)\} = y_{ss}(t) = K_o e^{j\omega t} + \overline{K_o}e^{-j\omega t} = \dfrac{A}{2j}\left(G(j\omega)e^{j\omega t} + G(-j\omega)e^{-j\omega t}\right) =$

- $K_o = \dfrac{A\omega\, G(s)}{s+j\omega}\Big|_{s=j\omega} = \dfrac{A\, G(j\omega)}{2j}$
- $\overline{K_o} = \dfrac{A\omega\, G(s)}{s-j\omega}\Big|_{s=-j\omega} = -\dfrac{A\, G(-j\omega)}{2j}$

- $G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j\varphi}$ όπου: $\varphi = \arg\{G(j\omega)\}$
- $G(-j\omega) = |G(-j\omega)|\, e^{-j\varphi} = |G(j\omega)|\, e^{-j\varphi}$

$\Rightarrow = A|G(j\omega)|\left[\dfrac{e^{j(\omega t+\varphi)}}{2j} - \dfrac{e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}\right]$

Άρα: $\boxed{y_{ss}(t) = A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \varphi)}$ όπου $\varphi = \arg\{G(j\omega)\}$

↳ steady state

## Αποκρίσεις συχνότητας της G(s) ή αρμονικές αποκρίσεις της G(s)

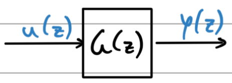
$G(j\omega)$: μιγαδική συνάρτηση της πραγμ. μεταβλητής

- Ορισμοί:
  - Συνάρτηση πλάτους της $G(s)$: $M(\omega) = |G(j\omega)|$ $(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$
  - Συνάρτηση φάσης της $G(s)$: $\varphi(\omega) = \arg\{G(j\omega)\}$
  - Συναρτήσεις κέρδους της $G(s)$: α) $K(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ (db)
    β) $a(\omega) = \ln|G(j\omega)|$ (Neper – np)
  - Συνάρτηση πραγμ. μέρους της $G(s)$: $R(\omega) = Re\{G(j\omega)\}$
  - Συνάρτηση φανταστ. μέρους της $G(s)$: $X(\omega) = Im\{G(j\omega)\}$

Ισχύουν: $X(\omega) = \dfrac{2\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{R(\sigma)}{\sigma^2+\omega^2}\,d\sigma$

$y_u(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{R(\omega)}{\omega}\sin(\omega t)\,d\omega$

## Συστήματα Διακριτού Χρόνου




- Είσοδος: $u(kT) = A\sin(k\omega T) \xrightarrow{Z} U(z) = \dfrac{A\, z\sin(\omega T)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})}$
- Απόκριση: $Y(z) = G(z)\, U(z) = \dfrac{A\, z\sin(\omega T)\; G(z)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})}$

Ας είναι: $p_1, \dots, p_n$ οι πόλοι της $G(s)$ τω: $Re\{p_i\} < 0$, $i = 1, \dots, n$

τότε: $y(kT) = Z^{-1}\{Y(z)\} = K_o \cdot e^{j\omega kT} + \overline{K_o}\, e^{-j\omega kT} + \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot p_i^{k}$

Στη μόνιμη κατάσταση: $y_{ss}(kT) = \lim_{k\to\infty} y(kT) = A\,|G(e^{j\omega T})|\sin\left(k\omega T + \arg\{G(e^{j\omega T})\}\right)$

- Συνάρτηση πλάτους της $G(z)$: $M_d(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$
- Συνάρτηση φάσης της $G(z)$: $\varphi_d(\omega) = \arg\{G(e^{j\omega T})\}$
- Συνάρτηση κέρδους της $G(z)$: $K_d(\omega) = 20\log_{10}|G(e^{j\omega T})|$ (db)

## Απεικονίσεις αρμονικών αποκρίσεων

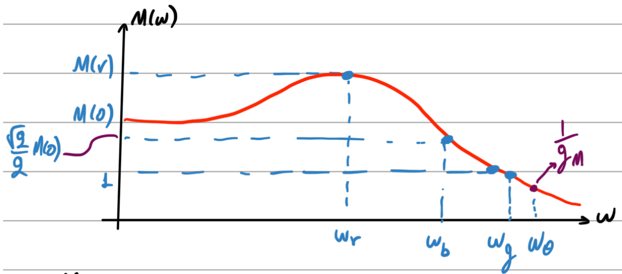
α) Διαγράμματα μέτρου κ' φάσης: $M(\omega)$ και $\varphi(\omega)$ συναρτήσει του $\omega$

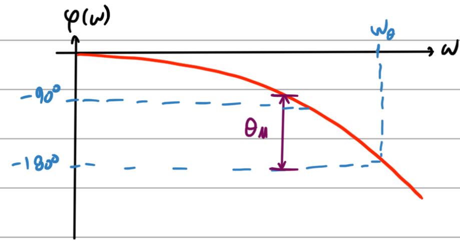
β) Διαγράμματα Bode: $K(\omega)$ και $\varphi(\omega)$ συναρτήσει του $\log_{10}(\omega)$ $(\omega>0)$

γ) Πολικό διάγραμμα: Απεικονίζεται ο μιγάδας $G(j\omega)$ με παράμετρο το $\omega\in\mathbb{R}$

δ) Διάγραμμα Nyquist: Απεικονίζεται ο μιγάδας $G(s)$ για μια ειδική τροχιά της παραμέτρου $s\in\mathbb{C}$

## Προδιαγραφές στο πεδίο της συχνότητας



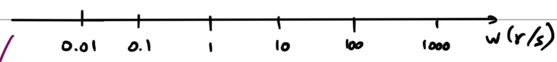




- Μέγιστο πλάτος με συντονισμό: $M_r = \max_{\omega}\{M(\omega)\}$
- Κυκλική συχνότητα συντονισμού: $\omega_r$ τω $M(\omega_r) = M_r$
- Κυκλική συχνότητα αποκοπής: $\omega_b$ τω $M(\omega_b) = \frac{\sqrt{2}}{2}M(0)$
- Περιθώριο κέρδους: $g_M = \frac{1}{M(\omega_\theta)}$ όπου $\omega_\theta$ τω $\varphi(\omega_\theta) = -180^\circ$
- Περιθώριο φάσης: $\theta_M = 180^\circ + \varphi(\omega_g)$ όπου $\omega_g$ τω $M(\omega_g) = 1$

## Διαγράμματα Bode

Κέρδους: άξονες: $\omega$ (rad/sec) σε λογαριθμική κλίμακα

$K(\omega)$ (db) σε γραμμική κλίμακα




το μηδέν είναι στο "-∞"

Φάση: άξονες: $\omega$ (rad/sec) σε λογαριθμική κλίμακα

$\varphi(\omega)$ (°) σε γραμμική κλίμακα

Για την χάραξη των διαγραμμάτων Bode της $G(s)$:

α) Παραγοντοποιούνται οι παρονομαστής κ' αριθμητής της $G(s)$

β) Η $G(s)$ τίθεται στη μορφή:

$$G(s) = K\,\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(1+s\tilde{T}_i)\cdot\prod_{k=1}^{m_2}\left[1+2\frac{\tilde{\zeta}_k}{\tilde{\omega}_k}s+\left(\frac{s}{\tilde{\omega}_k}\right)^2\right]}{\prod_{i=1}^{n_1}(1+sT_i)\cdot\prod_{k=1}^{n_2}\left[1+2\frac{\zeta_k}{\omega_k}s+\left(\frac{s}{\omega_k}\right)^2\right]}$$

η περισπωμένη είναι απλά για διαφοροποίηση με αυτά του παρονομαστή

όπου: $as^2+\beta s+\gamma = \gamma\left(1+\frac{\beta}{\gamma}s+\frac{a}{\gamma}s^2\right) = \gamma\left(1+\frac{\beta}{\gamma}s+\frac{s}{\sqrt{\frac{\gamma}{a}}}\right)^2$ δηλ. $\omega_k = \sqrt{\frac{\gamma}{a}}$ (ή $\tilde{\omega}_k$) (1)

και $\frac{\beta}{\gamma} = 2\frac{\zeta_k}{\omega_k} = 2\frac{\zeta_k}{\sqrt{\frac{\gamma}{a}}} \Rightarrow \zeta_k = \frac{\beta}{2\sqrt{a\gamma}} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \gamma\left(1+2\frac{\zeta_k}{\omega_k}s+\left(\frac{s}{\omega_k}\right)^2\right)$

Για μιγαδικές ρίζες πρέπει: $\zeta_k<1$