Σημειώσεις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Γκαρούτσος

by Juan.

Κεφάλαιο 1°: Εισαγωγή στις ΔΕ

Ορισμός και χαρακτηριστικά μιας δε.

η $y(x)$ δεν είναι παράγωγος (μηδενική)

Έστω οι μεταβλητές x, y, με $y = y(x)$. Μία σχέση των x, y στην οποία εμφανίζεται τουλάχιστον μια παράγωγος της $y = y(x)$, είναι μια σδε.

Η τάξη της μεγιστοβάθμιας παραγώγου που εμφανίζεται στη σδε αποτελεί την τάξη της σδε.

Παραδείγματα

i) Η δε: $y''(x) + x \cdot \cos y'(x) + \cos y(x) = 0$ είναι $2^{ης}$ τάξης

ii) Η δε: $xy^2 + y' + y^{(4)} = 0$ είναι $4^{ης}$ τάξης

iii) Η $x^2 y^4 + xe^y + 2x + y = 0$ δεν είναι δε.

Ορισμός:

Μια σδε είναι γραμμική όταν σε οποιοδήποτε όρο της εμφανίζεται ως παράγοντας το πολύ μία από τις $y, y', y'', \dots$. Έτσι, η γενική μορφή μιας γδε είναι:

$$f_n(x)\, y^{(n)} + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + f_0(x)\, y + g(x) = 0.$$

Η μεταβλητή x (ανεξάρτητη) στην γδε μπορεί να εμφανίζεται με οποιοδήποτε τρόπο.

Παραδείγματα

i) Η γδε $2^{ης}$ τάξης: $y'' + e^x y' + (x^2 + \cos^2 x)y + x^2 e^{-x} + x + 1 = 0$

ii) Η $y'' + xe^y + 2x^2 y y' + x = 0$ δεν είναι γδε (μη γραμμική)

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

Θεωρούμε μια δε. οποιασδήποτε τάξης. Μια συνάρτηση $y = y(x)$ είναι λύση της δ.ε. όταν η συνάρτηση αυτή την επαληθεύει.

Η πιο γενική μορφή συνάρτησης που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση αποτελεί γενική λύση της δε. Σε αυτή εμφανίζονται τόσες αυθαίρετες σταθερές, όση και η τάξη της δε.

Από τη γενική λύση, για ορισμένες τιμές των σταθερών, προκύπτει μία μερική (ειδική) λύση της δε.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $y = e^{x^2}$ επαληθεύει την $y'' - 2xy' - 2y = 0$ (με εύρεση των παραγώγων και αντικατάσταση όπως έδει δείξαι)

Η εύρεση της δε όταν είναι δοσμένη η γενική λύση της

Έστω ότι δίνεται μια συνάρτηση $y = y(x)$ στον τύπο της οποίας εμφανίζονται κάποιες αυθαίρετες σταθερές $c_1, \ldots, c_n$ και ζητείται η εύρεση της δ.ε. η οποία έχει ως γενική λύση την $y = y(x)$. Τότε:

α) Παραγωγίζουμε την $y = y(x)$ τόσες φορές όσες και οι αυθαίρετες μεταβλητές

β) Από τις παραγώγους της y και την ίδια την y απαλείφουμε τις σταθερές και προκύπτει η δε. Η τάξη της είναι ίση με το πλήθος των σταθερών.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η δε που ικανοποιεί η $y = cx^2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = cx^2 \\ y' = 2cx \Rightarrow cx = \dfrac{y'}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{y'}{2} \cdot x \Rightarrow y = \frac{y'x}{2}$$

Η αλλαγή μεταβλητών σε μια δε.

Έστω μία σδε, με x την ανεξάρτητη και y την εξαρτημένη μεταβλητή. Με αλλαγή μεταβλητής, μπορεί να προκύψει απλούστερη δε. Τότε:

α) Καθορίζουμε τη νέα ανεξάρτητη μεταβλητή και την νέα εξαρτ. μετ.

β) Εκφράζουμε τις αρχικές μετ. ως συναρτήσεις των νέων μετ. και αντικαθιστούμε.

γ) Με τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζουμε τις παραγώγους: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ και αντικαθιστούμε.

Κεφάλαιο 2: ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης

Μια δε $1^{ης}$ τάξης είναι μία σχέση μεταξύ της συνάρτησης y, της ανεξ. μετ. x κα
της y'. Οι μορφές της μπορεί να είναι:

$y' = f(x,y)$ (I)

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (II)

Η επίλυση της δε σημαίνει εύρεση της γενικής λύσης (με σταθερά).

Παράδειγμα

Η $y' = \dfrac{y^2+2x}{x^2+y^2}$ είναι στην μορφή (I) ενώ αν $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+2x}{x^2+y^2}$ (χιαστί)

$(y^2+2x)dx - (x^2+y^2)dy = 0$ είναι στην μορφή (II).

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (πατ)

Στο πρόβλημα έχουμε δεδομένα: μια δε και μια συνθήκη της μορφής $y(a)=b$.
Για την εύρεση της λύσης του πατ:

α) Βρίσκουμε την γενική λύση της δε (με αυθαίρετη σταθερά c)

β) Στην γλ (γενική λύση) θέτουμε $x=a$ και $y=b$ οπότε προκύπτει μια αλγεβρική εξίσωση, την οποία λύνουμε για να βρούμε το c.

γ) Αντικαθιστούμε το c στην γλ.

Παρατήρηση

Η λύση του πατ είναι μια μερική/ειδική λύση του πατ αφού προκύπτει από την γλ για μια συγκεκριμένη τιμή του c.

Διαφορικές εξισώσεις "χωριζομένων μεταβλητών"

Μία διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης είναι χωριζομένων μεταβλητών, όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή: $f(x)dx = g(y)dy$, δηλαδή όταν η μία μετ. μπορεί να εμφανίζεται μόνον στο ένα μέλος και η άλλη μόνον στο άλλο.

Η επίλυση της δ.ε. χωρ. μετ. γίνεται με απλή ολοκλήρωση, οπότε προκύπτει η γενική λύση στην πλεγμένη μορφή:

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy + c$$

↳ Ράπτης flashbacks ...

Οι "ομογενείς" δε $1^{ης}$ τάξης

Οι "ομογενείς" δε $1^{ης}$ τάξης έχουν τη μορφή: $y' = f(x,y)$, όπου η $f(x,y)$ ικανοποιεί τη συνθήκη $f(tx, ty) = f(x,y)$ $\forall t > 0$. Για να τη λύσουμε:

α) Θεωρούμε την αντικατάσταση $y = u \cdot x$, όπου $u = u(x)$ είναι συνάρτηση του x. Έτσι, η δε $y' = f(x,y)$ γίνεται:

$$(ux)' = f(x, ux) \Rightarrow u'x + u = f(x, ux)$$

β) Μετά από πράξεις, οι δε καταλήγει σε δε χωρ. μετ., την οποία επιλύουμε (προηγούμενη παράγραφος) και βρίσκουμε την γενική λύση της στη μορφή:

$$y(u) = h(x) + c$$

γ) Αντικαθιστούμε $u = \dfrac{y}{x}$, οπότε προκύπτει η γενική λύση της δε.

Παράδειγμα

Η δε $1^{ης}$ τάξης: $y' = \dfrac{x+2y}{x-y}$ (1) είναι ομογενής αφού:

αν $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x-y}$, $f(tx, ty) = \dfrac{tx + 2ty}{tx - ty} = \dots = \dfrac{x-2y}{x-y} = f(x,y)$

Έτσι, για την επίλυση της θεωρούμε $y = u \cdot x \Rightarrow y' = u'x + u$ άρα η (1) γράφεται: $u'x + u = \dfrac{x + 2u \cdot x}{x - ux} = \dfrac{1+2u}{1-u} \Rightarrow$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+2u}{1-u} - u = \frac{1+u+u^2}{1-u} \Rightarrow \left(\frac{1-u}{1+u+u^2}\right)\cdot du = \left(\frac{1}{x}\right)dx$$

, η οποία με ολοκλήρωση και αντικατάσταση $u = \frac{y}{x}$ καταλήγει στην γενική λύση της δε.

ΔΕ που ανάγονται σε ομογενείς

Αυτές έχουν τη μορφή: $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, όπου a, b, c είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ τότε θεωρούμε τις αλλαγές:

$$u = a_1x + b_1y + c_1 \quad \text{και} \quad w = a_2x + b_2y + c_2$$

Οπότε η δοσμένη δε μετασχηματίζεται σε ομογενή με μετ. u, w η οποία λύνεται "τετριμμένα".

β) Αν $D = 0$ και $b_1 \neq 0$ τότε θεωρούμε την αλλαγή: $u = a_1x + b_1y \Rightarrow y = \frac{1}{b_1}u - \frac{a_1}{b_1}x$ και η δε μετασχηματίζεται σε δε χωρ. μετ.

γ) Αν $D = 0$ και $b_2 \neq 0$ τότε θεωρούμε την αλλαγή: $u = a_2x + b_2y \Rightarrow y = \frac{1}{b_2}u - \frac{a_2}{b_2}x$ και η δε μετασχηματίζεται σε δε χωρ. μετ.

δ) Αν $a_2 = b_2 = 0 \neq c_2$ τότε είναι $b_1 \neq 0$ και θεωρούμε: $u = a_1x + b_1y + c_1$

Το χαρακτηριστικό των δε της μορφής αυτής είναι ότι η $f(x,y)$ εξαρτάται από μια πρωτοβάθμια ποσότητα των x, y ή από ένα πηλίκο των x, y.

<u>Παραδείγματα</u>

Οι δε: $y' = (9x+4y+1)^2$, $y' = \dfrac{x-4y-3}{x-8y-5}$, $y' = \dfrac{2}{(x+y-2)^2}$ είναι αναγόμενες σε ομογενείς.

<u>Οι γραμμικές δε 1ης τάξης</u>

Οι γδε 1ης τάξης έχουν την μορφή: $y' + f(x)y = g(x)$, με $f(x), g(x)$ δοσμένες συναρτήσεις. Για την εύρεση της γενικής λύσης της:

α) Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή δε: $y' + f(x)y = 0 \Rightarrow$
$\dfrac{dy}{dx} = -f(x)y \Rightarrow \left(\dfrac{1}{y}\right)dy = -f(x)dx$

Ολοκλήρωση αυτής δίνει τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς: $y_0 = c \cdot u(x)$, όπου c αυθαίρετη σταθερά.

β) Ψάχνουμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση y_μ η οποία ικανοποιεί τη $y_\mu' + f(x)y = g(x)$. Η συνάρτηση θα έχει τη μορφή $y_\mu = c(x) \cdot u(x)$, δηλαδή θα προκύψει από τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς αν όπου c θέσουμε μια (άγνωστη) συνάρτηση $c(x)$. Από την απαίτηση η y_μ να ικανοποιεί τη δε έχουμε:

$y_\mu' + f(x)y_\mu = g(x)$ και αφού $y_\mu = c(x) \cdot u(x)$ μετά από πράξεις έχουμε: $c'(x)u(x) = g(x) \Rightarrow c'(x) = \dfrac{g(x)}{u(x)}$

Με απλή ολοκλήρωση (χωρίς σταθερά c_1) προσδιορίζεται η $c(x)$, επομένως βρίσκουμε τη $y_\mu = c(x) \cdot u(x)$

Η μέθοδος προσδιορισμού της y_μ είναι γνωστή ως μέθοδος μεταβολής των σταθερών. Η y_μ είναι μια μερική (ειδική) λύση της δε.

γ) Η γενική λύση της δε είναι: $y = y_0 + y_\mu$, δηλαδή είναι ίση με το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και μίας μερικής λύσης της δοσμένης δε.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$y = \left[c + \int\left(g(x)\, e^{\int f(x)dx}\right)dx\right] e^{-\int f(x)dx}$$

Το χαρακτηριστικό των γδε $1^{ης}$ τάξης είναι ότι το y εμφανίζεται αποκλειστικά ως παράγοντας (και μόνο σε πρώτη δύναμη), ενώ το x εμφανίζεται με οποιονδήποτε τρόπο.

Παραδείγματα

Οι εξής δε $1^{ης}$ τάξης είναι γραμμικές:

i) $y' + xy = x^2 + 1$

ii) $y' + \dfrac{1}{x^2+1}\, y = e^x$

iii) $y' + 2x^2 y = \sqrt{x}$

iv) $y' + (\cos^2 x)\, y = \sin x$

Ενώ οι $y' + xe^y = x^2$, $y' + \sqrt{y} = x$ δεν είναι γραμμικές.

Η διαφορική εξίσωση Bernoulli

Η δε του Bernoulli έχει τη μορφή: $y' + f(x)\, y = g(x)\, y^a$ $(a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, 1)$ και για την επίλυσή της θεωρούμε την αντικατάσταση: $y = u^{\frac{1}{1-a}}$ όπου $u = u(x)$ αφού είναι $y = y(x)$, μετασχηματίζοντας την σε γδε $1^{ης}$ τάξης. Με επίλυση της, βρίσκεται η $u(x)$ και άρα η $y(x)$.

Το χαρακτηριστικό των δε Bernoulli είναι ότι εμφανίζεται μία μοναδική δύναμη y^a.

Παραδείγματα

Οι δε είναι τύπου Bernoulli:

α) $y' - \frac{2}{x^2} y = \frac{1}{x^2} y^{5/2}$ β) $y' - \frac{1}{x} y = x y^2$

Η διαφορική εξίσωση Riccati

Η δε Riccati έχει τη μορφή: $y' + f(x) y = g(x) y^2 + h(x)$, ενώ είναι δοσμένη και μία μερική λύση της $y_1(x)$ και για την επίλυση της θεωρούμε την αντικατάσταση: $y = y_1 + \frac{1}{u}$, με $u = u(x)$, μετασχηματίζοντας την σε γδε 1ης τάξης. Με επίλυση της, βρίσκεται η $u(x)$ και άρα η $y(x)$.

Το χαρακτηριστικό των δε Riccati είναι ότι υπάρχει ο y^2.

Παραδείγματα

Οι δε είναι τύπου Riccati:

α) $y' + \frac{1}{x} y = -y^2 - \frac{2}{x^2}$ β) $y' + (2x-1)y = (x-1)y^2 + x$

Άμεσα ολοκληρώσιμες δε

Έστω η δε 1ης τάξης: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Αν ισχύει ότι:

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, τότε η δε είναι άμεσα ολοκληρώσιμη ή τέλεια/ακριβής. Για την επίλυση της βρίσκουμε μία συνάρτηση $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$$

οπότε η γλ της δε είναι $f(x,y) = c$

Παράδειγμα

Έστω η δε: $(x^2 + 2xy)dx + (x^2+y)dy = 0$, που είναι άμεσα ολοκληρώσιμη.

Η γλ της είναι η συνάρτηση $f(x,y)$ με:

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=P(x,y)\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^2+2xy \quad (2)\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2+y \quad (3)\end{cases}\right\}$$

Για την λύση, θεωρούμε την απλούστερη από τις δύο εξισώσεις (πχ την (2)) και ολοκληρώνω την δε ως προς x, κρατώντας το y σταθερό.

$$f(x,y)=\int (x^2+2xy)\,dx + c(y) = \ldots = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + c(y) \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας και την (3) έχουμε πως: $(3) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2+y \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$x^2+c'(y) = x^2+y \Leftrightarrow c'(y)=y \Leftrightarrow c(y)=\dfrac{1}{2}y^2+k$ (5), $k\in\mathbb{R}$.

Από (4), (5) έχουμε: ... $f(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2y+\dfrac{1}{2}y^2+k$. Άρα η γλ της δε είναι: $f(x,y)=c_1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{3}+x^2y+\dfrac{y^2}{2}=c_2 \quad (c_2=c_1-k)$

Ο πολλ/στής Euler

Έστω η δε: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy=0$, με $P_y\neq Q_x \left(\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$

άλλά δεν είναι ακριβής. Αναζητώ μια συνάρτηση $\mu(x,y)\neq 0$, έτσι ώστε η δε αν πολλ/στεί με την $\mu(x,y)$ να μετατραπεί σε ακριβή δε.

Η $\mu(x,y)$ ονομάζεται πολλ/στής Euler ή ολοκληρώνων παράγων και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)\,P(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)\,Q(x,y)\right)$$

Για την εύρεση του πολλ/στή Euler, η οποία είναι περίπλοκη, θα γίνει αναφορά στο τέλος του βιβλίου.

Η γεωμετρική ερμηνεία των δε 1ης τάξης - ορθογώνιες τροχιές

Έστω η δε 1ης τάξης: $\frac{x}{2}dx + \frac{y}{2}dy$ (1), η οποία είναι χωρ. μετ.

Ολοκλήρωση της δίνει: $x^2 + y^2 = c$ (2) που είναι η γλ της (1), με $c \geq 0$. Η (2) για $c=1$ παριστάνει κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1, για $c=5$ παριστάνει κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{5}$ κοκ. Λέμε ότι η (2) ή η δε (1) παριστάνει την οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο $(0,0)$.

Γενικά, μια δε 1ης τάξης παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών του επιπέδου Oxy. Έστω τώρα ότι μια δε 1ης τάξης παριστάνει μια οικογένεια καμπυλών (A). Αν στην δε θέσουμε όπου y' το $\frac{-1}{y'}$ προκύπτει η δε της οικογένειας καμπυλών B με την ιδιότητα:
"Κάθε καμπύλη (γ_A) της (A) τέμνει υπό ορθή γωνία κάθε καμπύλη (γ_B) της (B). Έτσι, οι καμπύλες της (B) αποτελούν ορθογώνιες τροχιές της (A)".

Δηλαδή, η δε των ορθογωνίων τροχιών μιας δοσμένης οικογένειας καμπυλών, προκύπτει από τη δε της δοσμένης οικογένειας καμπυλών αν θέσουμε όπου y' το $\frac{-1}{y'}$.

Αν έχουμε ένα πρόβλημα εύρεσης των ορθογωνίων τροχιών μιας δοσμένης μονοπαραμετρικής οικογένειας καμπυλών τότε:

α) Βρίσκουμε την δε που ικανοποιείται από την δοσμένη μονοπαρ. οικ. καμπ.

β) Στην δε θέτουμε όπου y' το $\frac{-1}{y'}$ και λύνουμε την νέα δε.

Κεφάλαιο 3: Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ $2^{ης}$ και Ανώτερης Τάξης.

Μια δ.ε. $2^{ης}$ τάξης είναι ομογενής γραμμική αν κάθε όρος της περιέχει ως παράγοντα ακριβώς ένα από τους y, y', y''. Έτσι, η ομογενής γραμμική δε $2^{ης}$ τάξης έχει μορφή:

$$p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$$

όπου υποχρεωτικά $p(x)\neq 0$. Διαιρώντας με $p(x)$ έχουμε: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

ΟΓΔΕ με σταθερούς συντελεστές

Έχουν τη μορφή: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, με $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Για να την λύσω:

(I) Αντικαθιστώ $y \to 1$, $y' \to \lambda$, $y'' \to \lambda^2$ και προκύπτει: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση της ογδε.

(II) Βρίσκω τα $\lambda_{1,2}$ και:

(II_a) Αν $\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$ με $\lambda_1\neq\lambda_2$ τότε η λύση της δε είναι: $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

(II_b) Αν $\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$ με $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ τότε η λύση της δε είναι: $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

(II_c) Αν $\lambda_1 = a+ib$, $\lambda_2 = a-ib$ τότε η λύση της δε είναι:
$y = e^{ax}(c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx))$

*Όταν έχω ογδε ν-τάξης με σταθερούς συντελεστές, η χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση είναι πολυωνυμική ν-βαθμού και έχω:

(I) Αν $\lambda_k\in\mathbb{R}$ ρίζα της χ.α. με βαθμό πολλ/τας 1, τότε η λύση της δε αντιστοιχεί ο όρος $c_k e^{\lambda_k x}$, με $c_k\in\mathbb{R}$.

(II) Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ ρίζα της χ.α με β.π. $p\geq 2$, στη ρίζα αυτή αντιστοιχούν οι όροι:

$$c_m e^{\lambda x},\ c_{m+1} x e^{\lambda x},\ \dots,\ c_{m+p-1} x^{p-1} e^{\lambda x}$$

(III) Αν $a\pm bi$ ρίζες της χ.α. με β.π. s τότε στις ρίζες αυτές αντι-

*η γενική λύση προκύπτει από το άθροισμα των όρων οτοιχούν οι όροι:

$$e^{ax}\left(c_{n_1}\cos(bx) + c_{n_2}\sin(bx)\right)$$
$$xe^{ax}\left(c_{n_1+1}\cos(bx) + c_{n_2+1}\sin(bx)\right)$$
$$\vdots$$
$$x^{s-1}e^{ax}\left(c_{n_1+s-1}\cos(bx) + c_{n_2+s-1}\sin(bx)\right)$$

, με τα $c \in \mathbb{R}$

Σημείωση: Έστω πολ/μο $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\Delta < 0$. Τότε οι ρίζες του είναι οι: $\dfrac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$ (μιγαδικές)

ΔΕ που μετασχηματίζονται σε άλλες με σταθερούς συντελεστές - η δε Euler

Η δε Euler είναι της μορφής: $(ax+b)^2 y'' + k_1(ax+b)y' + k_2 y = 0$, με $a, b, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Με αντικατάσταση $t = \ln|ax+b|$ στην δε Euler, αυτή μετασχηματίζεται σε άλλη με σταθερούς συντελεστές.

Αν, επιπλέον, $ax+b > 0$ τότε θέτουμε $ax+b = e^t$.

Παράδειγμα

Να λυθεί η δε: $(2x+1)^2 y'' + 6(2x+1)y' + 4y = 0$, $2x+1 > 0$.

Θέτουμε $2x+1 = e^t \Rightarrow x = \dfrac{e^t - 1}{2}$. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε πως:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \dot{y} = y'\cdot\dot{x} = y'\cdot\frac{e^t}{2} \Rightarrow y' = \frac{2\dot{y}}{e^t} \quad (1)$$

Ομοίως, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για την y':

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy'}{dt} = y''\cdot\dot{x} = y''\frac{e^t}{2} \quad (2)$$

Οπότε με παραγώγιση της (1) ως προς t έχουμε: $\dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2\dot{y}}{e^t}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{dy'}{dt} = 2 \cdot \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^t} \quad (3)$$

Από (2), (3): $\quad 2\,\dfrac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^t} = y''\,\dfrac{e^t}{2} \Rightarrow y'' = 4\,\dfrac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^{2t}} \quad (4)$

Αντικαθιστώντας στην δε τις $2x+1 = e^t$, (1) και (4) καταλήγουμε:
$(\dots) \Rightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$.
Η λύση της οποίας είναι η $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$ και αντικαθιστώντας $t = \ln(2x+1)$ έχουμε την γενική λύση της δε.

ΟΓΔΕ 2ης τάξης στην οποία δεν εμφανίζεται η y

Η δε είναι της μορφής: $y'' + P(x)y' = 0$. Με αντικατάσταση $y' = v$ έχω: $v' + P(x)v = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -P(x)v \Rightarrow \dfrac{1}{v}\,dv = -P(x)\,dx$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και με απλή ολοκλήρωση βρίσκω τη $v(x)$ και (αφού $y' = v$) τελικά την y.

ΟΓΔΕ 2ης τάξης με δοσμένη μια μερική λύση y_1

Έστω η δε $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ και y_1 μερική λύση της, τότε:
(I) Θεωρώ $y = u \cdot y_1$, με $u = u(x)$ και η δε μετασχηματίζεται σε $u'' + P(x)u' = 0$ (1)

(II) Λύνω την (1) (δες προηγούμενη παράγραφο) παραλείποντας όμως τις σταθερές ολοκλήρωσης. Η γ.λ. της δε είναι η $y = c_1 y_1 + c_2 (u y_1)$, με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων

Έστω η γδε 2ης τάξης: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ και y_1, y_2 δύο λύσεις της. Θεωρούμε την ορίζουσα:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$, η οποία είναι γνωστή ως ορίζουσα Wronski.

Αν $W \neq 0$, $\forall x \in \Delta$ (ένα οποιοδήποτε διάστημα), τότε οι y_1, y_2 είναι γραμμ. ανεξ. στο Δ. Άρα, οι y_1, y_2 αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων στο Δ και η γενική λύση της δε είναι: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Η W μπορεί να γίνει 3×3, 4×4 κ.ο.κ. για δε 3ης, 4ης κτλπ.

Κεφάλαιο 4: Μη ΟΓΔΕ 2ης και Ανώτερης Τάξης

Οι μη ογδε 2ης τάξης έχουν τη μορφή: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$

Για την λύση της μη ογδε:

(I) Βρίσκω την γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

(II) Βρίσκω μια μερική λύση της μη ομογενούς. Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι το άθροισμα της γενικής της ομογενούς με της μερικής της μη ομογενούς: $y = y_{ομ} + y_{μερ}$

<u>Σημείωση:</u> Αν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της μη ογδε τότε η διαφορά $y_1 - y_2$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών

Έστω η μη ογδε: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι: $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ και y_1, y_2 γραμ. ανεξ. λύσεις της ογδε.

Με δεδομένο ότι ο συντελεστής του y'' είναι 1, η μη ογδε έχει μερική λύση της μορφής: $y_\mu(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$, με $c_1(x), c_2(x)$ άγνωστες συναρτήσεις, ενώ ισχύει η σχέση:

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \quad (1)$$

Με χρήση της μη ογδε και της (1) καταλήγουμε πως:

$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = F(x) \quad (2)$$

Οι (1), (2) αποτελούν γραμμικό αλγεβρικό σύστημα με αγνώστους $c_1'(x), c_2'(x)$. Λύνοντας το βρίσκουμε τις $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ και με απλή ολοκλήρωση έχουμε τα $c_1(x)$, $c_2(x)$ (παραλείποντας σταθερές ολοκλήρωσης). Με αντικατάσταση στην y_μ, έχουμε την μερική λύση της μη ογδε.

Τελικά, η γ.λ. της μη ογδε είναι: $y = y_0 + y_\mu$.

ΓΔΕ με σταθερούς συντελεστές και ειδική μορφή 2ου μέλους.

Έστω γδε οποιασδήποτε τάξης, της οποίας το 2ο μέλος είναι:

(I) Ακέραιο πολυώνυμο (οποιουδήποτε βαθμού) $f(x)$ ή

(II) Τριγωνομετρική συνάρτηση της μορφής:
$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, με $A, B, \omega \in \mathbb{R}$ ή

(III) Εκθετική συνάρτηση της μορφής $De^{\rho x}$, με $D, \rho \in \mathbb{R}$ ή

Γινόμενο αυτών των περιπτώσεων. Αν το 2ο μέλος είναι της μορφής: $f(x)\,(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega x))\,De^{\rho x}$ τότε λέμε πως η δε έχει ειδική μορφή 2ου μέλους. Αν, επιπλέον, η δε είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, τότε μια μερική λύση της βρίσκεται:

(i) Θεωρώ την αντίστοιχη ομογενή και βρίσκω την γ.λ. (ομογενή με σταθερούς συντελεστές.

(ii) Θεωρώ τον μιγαδικό $\rho + i\omega$, άρα:
(iia) αν ο $\rho + i\omega$ δεν είναι ρίζα της χ.α. της αντίστοιχης ομογενούς, η μερική λύση έχει τη μορφή: $y_\mu = (n(x)\cos(\omega x) + \varphi(x)\sin(\omega x))e^{\rho x}$

(iib) αν είναι ρίζα με βαθμό πολ/τας $r = 1, 2 \dots$ τότε η μερική λύση έχει τη μορφή: $y_\mu = x^r\,(n(x)\cos(\omega x) + \varphi(x)\sin(\omega x))\,e^{\rho x}$

Τα $n(x), \varphi(x)$ είναι πολυώνυμα ομοβάθμια του $f(x)$.

(iii) Αντικαθιστώ τη μερική λύση στην δε και προσδιορίζω τα $n(x), \varphi(x)$.
Τελικά, βρίσκω την γενική λύση $y = y_0 + y_\mu$.

ΓΔΕ με 2° μέλος άθροισμα συναρτήσεων

Πρόταση

Αν: y_1 μία μερική λύση της δε: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F_1(x)$ και y_2 μία μερική λύση της δε: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F_2(x)$ τότε η $y_1 + y_2$ είναι μια μ.λ. της δε: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F_1(x) + F_2(x)$

Επομένως, για να βρούμε μια μλ της δε: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F_1(x) + F_2(x)$ χρησιμοποιούμε την πρόταση (βρίσκω y_1, y_2 από κάθε δε και τις προσθέτω).

Κεφάλαιο 5: Λύση ΔΕ με Μετασχηματισμό Laplace, M/L

Ο ορισμός του M/L

Έστω συνάρτηση $f(t)$, με $f(t)=0$ για $t<0$ και ορισμένη για $t\geq 0$. Ορίζεται ο M/L της f, $F(s)$, από τη σχέση:

$$F(s)=\int_0^{+\infty}\left[f(t)\,e^{-st}\right]dt$$

Συμβολίζουμε: $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ή $f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}F(s)$. Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση Heaviside ή unit step function:

$$H(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}, \quad \text{με } h(s)=\frac{1}{s}$$

Οι ιδιότητες του M/L

(I) Γραμμικότητα: $\mathcal{L}\{c\,f(t)\}=c\,F(s)$, (c σταθερό)

$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=F_1(s)+F_2(s)$

(II) Πολλ/σμός της $f(t)$ με e^{at}: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$, (a σταθερό)

(Επομένως, αν μια συνάρτηση έχει e^{at}, βρίσκουμε τον M/L απλά της f και έπειτα αντικαθιστούμε σε αυτόν τον M/L όπου s, το $s-a$)

(III) Μετατόπιση της $f(t)$: $\mathcal{L}\{f(t-a)\}=e^{-as}\,L\{f(t)\}$

(IV) Πολλ/σμός της $f(t)$ με t: $\mathcal{L}\{t\,f(t)\}=-F'(s)$ και στον γενικό κανόνα: $\mathcal{L}\{t^{\nu}f(t)\}=(-1)^{\nu}F^{(\nu)}(s)$

(V) Η αλλαγή κλίμακας: $\mathcal{L}\{f(\lambda t)\}=\frac{1}{\lambda}F(s/\lambda)$, ($\lambda$ σταθερό)

(VI) Πολλ/σμός της $f(t)$ με $1/t$: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}F(u)\,du$

(VII) Θεώρημα αρχικής και τελικής τιμής: Εφόσον υπάρχουν τα όρια:

$$\underbrace{\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to +\infty}(s\,F(s))}_{\text{Θεώρημα Αρχικής Τιμής}} \quad \text{και} \quad \underbrace{\lim_{t\to +\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}(s\,F(s))}_{\text{Θεώρημα Τελικής Τιμής}}$$

(VIII) Παραγώγιση της $f(t)$: $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\mathcal{L}\{\dddot{f}(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - s\dot{f}(0) - \ddot{f}(0)$$

(IX) Συνέλιξη: $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = F(s)\cdot G(s)$

δες πιο κάτω για λεπτομέρειες

Βασικοί M/L

$\mathcal{L}\{H(t)\} = \dfrac{1}{s}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{\cos(at)H(t)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

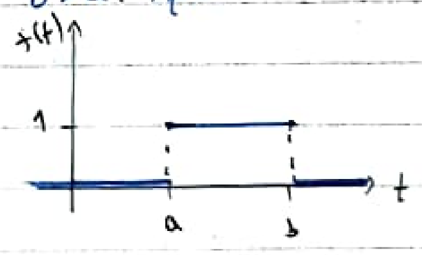
$\mathcal{L}\{e^{at}H(t)\} = \dfrac{1}{s-a}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{\sin(at)H(t)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}\{tH(t)\} = \dfrac{1}{s^2}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{t^nH(t)\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

Ο M/L συνάρτησης η οποία αλλάζει κατά διαστήματα

Έστω η γνωστή συνάρτηση Heaviside: $H(t-a) = \begin{cases} 1, & t>a \\ 0, & t<a \end{cases}$ Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(t) = H(t-a) - H(t-b)$, με $b>a$. Άρα:

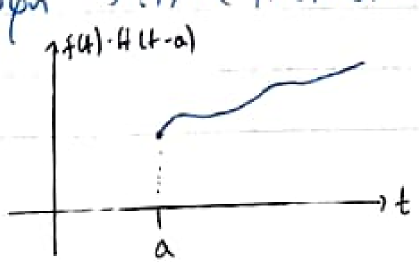
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<a \\ 1, & a<t<b \\ 0, & t>b \end{cases}$$

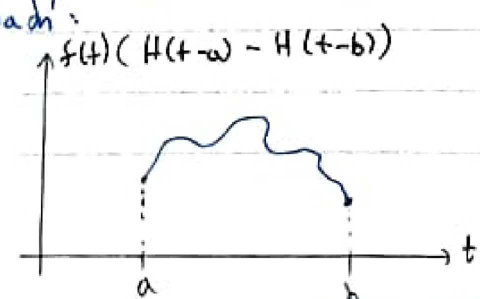


Επομένως, καταδείξουμε πως αν:

(I) Μία συνάρτηση $f(t)$ που είναι μηδενική για $t<a$ γράφεται στη μορφή $f(t)\cdot H(t-a)$

(II) Μία συνάρτηση $f(t)$ που είναι μηδενική για $t<a$, $t>b$, γράφεται στη μορφή $f(t)\,(H(t-a) - H(t-b))$, δηλαδή:





Για την εύρεση του M/L μιας συνάρτησης η οποία αλλάζει τύπο κατά διαστήματα:

(I) Γράφουμε την συνάρτηση σαν άθροισμα όρων τη μορφής: $f(t)\,(H(t-a)-H(t-b))$ για κάθε διάστημα (a,b) στον οποίο η συνάρτηση έχει τύπο $f(t)$.

Αν η συνάρτηση έχει τύπο σε διάστημα $(c,+\infty)$ τότε θα εμφανίζεται και ο όρος $f(t)\,H(t-c)$

(II) Τροποποιούμε το παραπάνω άθροισμα ώστε κάθε όρος του να έχει τη μορφή $\varphi(t-t_0)$.

(III) Με χρήση της ιδιότητας της μετατόπισης της $f(t)$ του M/L, βρίσκουμε τον M/L της δοσμένης συνάρτησης.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε ορίζεται ο αντίστροφος MLL είναι: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Γενικά, η εύρεση του M/L^{-1} είναι δύσκολη υπόθεση, επομένως ασχολούμαστε με ειδικές περιπτώσεις:

(I) Η $F(s)$ ή η μορφή της είναι γνωστή (δες "Βασικοί M/L"). Τότε, μπρο, είναι απλά τα πράγματα... Π.χ. $\mathcal{L}^{-1}\{1/s-a\} = e^{at}H(t)$

(II) Η $F(s)$ ρητή με τον βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή να είναι μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή. Τότε την αναλύουμε σε απλά κλάσματα (1ο βάθμιοι παρονομαστές) και βρίσκουμε τον M/L^{-1} κάθε κλάσματος ξεχωριστά, με βάση τους βασικούς M/L.

(III) Η $F(s)$ έχει τη μορφή $\phi(s-a)$. Τότε:

(i) Θέτουμε όπου $s-a$ το s στην $F(s)$.

(ii) Βρίσκουμε τον M/L^{-1} της $\phi(s)$, δηλαδή τον $\varphi(t)$.

(iii) Πολ/ζουμε την $\varphi(t)$ με e^{at} άρα:

$\mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \Phi(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}\varphi(t)\} = \Phi(s-a) = F(s) \Rightarrow$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at}\varphi(t)$

(IV) Η $F(s)$ έχει τη μορφή $e^{-as}G(s)$. Τότε:
(i) Βρίσκουμε τον M/L^{-1} της $G(s)$, δηλαδή: $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$

(ii) Μετατοπίζουμε την $g(t)$ κατά a, από την γνωστή ιδιότητα:
$\mathcal{L}\{g(t-a)\} = e^{-as}G(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}G(s)\} = g(t-a) \Rightarrow$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = g(t-a)$

(V) Η $F(s)$ είναι λογαριθμική ή τόξο εφαπτομένης. Τότε:
(i) Βρίσκουμε την $-F'(s)$ (ρητή) και έπειτα τον M/L^{-1} της.
(ii) Τελικά: $\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s) \Rightarrow t f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-F'(s)\} \Rightarrow$
$f(t) = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{-F'(s)\}$

Λύση ΔΕ με χρήση του M/L (σταθεροί συντελεστές)

Ισχύει πως: $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0)$. Για την επίλυση ΔΕ:
(i) Μετασχηματίζουμε την δε κατά Laplace και επιλύουμε την αλγεβρική εξίσωση που προκύπτει ως προς το $F(s)$ (ο μετασχηματισμός της δε γίνεται με βάση την άνω τέρω, ιδιότητα αλλά και για τις άλλες παραγώγους, δες ιδιότητες M/L).

(ii) Βρίσκουμε τον M/L^{-1} της $F(s)$ που βρέθηκε στο (i), ο οποίος είναι και η λύση της δε.

Παράδειγμα

Εστω η δε: $\dot{y} + 2y = 0$, $y(0) = 1$
$\dot{y} + 2y = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{y} + 2y\} = \mathcal{L}\{0\} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{y}\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 0$ και αφού $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$, $\mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y(0)$ τότε:

$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 0 \Rightarrow (s+2)Y(s) = 1 \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s+2}$. Άρα, και

αφού, $\mathcal{L}^{-1}\{1/s+2\} = e^{-2t}H(t)$: $\quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^{-2t}H(t)$.

Ο Μ/L της συνέλιξης συναρτήσεων

Ορίζουμε την συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f(t), g(t)$ $(t>0)$:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t [f(u) \cdot g(t-u)]\,du$$

και ισχύει: $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$

Κεφάλαιο 6: Γραμμικά Διαφορικά Συστήματα

Ένα γδσ $1^{ης}$ τάξης έχει τη μορφή:

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + f_1(t)$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + f_2(t)$$

Με x_1, x_2 άγνωστες συναρτήσεις και a_{ij}, f_i γνωστές. Με χρήση πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

(Αν τα $f_1(t) = f_2(t) = 0$ τότε είναι ομογενές).

Αν θέσουμε $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$ έχουμε:

$\dot{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}$, (το αντίστοιχο ομογενές: $\dot{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{x}$)

Η λύση γδσ $1^{ης}$ τάξης με την μέθοδο απαλοιφής

Ο σκοπός είναι να απαλείψουμε όλους τους αγνώστους εκτός από έναν, να λύσουμε την δε να προκύπτει βρίσκοντας μια από τις άγνωστες συναρτήσεις και (από το δσ) να βρούμε την άλλη. Έστω, λοιπόν, το γδσ:

$$\dot{x} = a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y + f_1(t) \quad (1)$$
$$\dot{y} = a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y + f_2(t) \quad (2)$$

, τότε:

(I) Παραγωγίζουμε ως προς t την (1) και προκύπτει μια (3)

(II) Στην (1) επιλύουμε ως προς y και αντικαθιστούμε στην (2):

(III) Στην (3), αντικαθιστούμε το $\dot{y}$ από την (2) και προκύπτει δε με άγνωστο το $y = x(t)$

Αντίστροφα, μια δε ν-τάξης μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο δσ $1^{ης}$ τάξης, ν-δε με ν-άγνωστες συναρτήσεις: Πχ, έστω η δε $2^{ης}$ τάξης:

$$\ddot{x} + P(t)\,\dot{x} + Q(t)\,x = R(t)$$

(i) Θέτουμε $\dot{x} = y$ ($1^η$ δε του δσ)

(ii) Παραγωγίζουμε την $\dot{x}=y \Rightarrow \ddot{x}=\dot{y}$ και με αντικατάσταση των $\ddot{x}, \dot{x}$ στην δε προκύπτει η 2η δε του δσ. Έτσι, το δσ είναι:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -Q(t)x - P(t)y + R(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R(t) \end{bmatrix}$$

Λύση ογδσ 1ης τάξης με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών μεγεθών πίνακα

Ένα ογδσ 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$, με a σταθερά και $a \in R$.

Για την εύρεση της γλ του δσ θεωρούμε τον $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ και βρίσκουμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα. Τότε αν:

(I) Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underset{\sim}{r_1}, \underset{\sim}{r_2}$, η γλ είναι: $\underset{\sim}{x} = c_1 \cdot \underset{\sim}{r_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \underset{\sim}{r_2} e^{\lambda_2 t} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_1^{(2)} \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} r_2^{(1)} \\ r_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

(II) Οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι συζυγείς μιγαδικές (δλδ είναι της μορφής $x+iy$ και $x-iy$, ίσα πραγματικά, αντίθετα φανταστικά μέρη). Τότε:

(i) Βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{r_1}$ αντίστοιχο της λ_1 (μιγαδικό)

(ii) Θεωρούμε την ποσότητα: $\underset{\sim}{r_1} e^{\lambda_1 t}$ και αφού: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ γράφουμε με σ τη μορφή: $\underset{\sim}{r_1} e^{\lambda_1 t} = \underset{\sim}{F_1}(t) + i\, F_2(t)$, με $F(t)$ πραγματικά διαν.

(iii) Η γλ είναι: $\underset{\sim}{X} = c_1 \underset{\sim}{F_1}(t) + c_2 \underset{\sim}{F_2}(t)$

(III) Οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι ίσες (και άρα πραγματικές). Τότε:

(i) Βρίσκουμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{r_1}$ που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

(ii) Λύνοντας την $\underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{r_2} - \lambda \cdot \underset{\sim}{r_2} = \underset{\sim}{r_1}$ βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{r_2}$

(iii) Η γλ είναι: $\underset{\sim}{X} = c_1 \underset{\sim}{r_1} e^{\lambda t} + c_2 (\underset{\sim}{r_1} t + \underset{\sim}{r_2}) e^{\lambda t}$

Στην περίπτωση ιδιοτιμής λ με βαθμό πολ/τας 3, βρίσκουμε ένα ιδιοδιάνυσμα

$\underset{\sim}{r_1}$ και λύνοντας την $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{r_2} - \lambda \underset{\sim}{r_2} = \underset{\sim}{r_1}$, βρίσκουμε το $\underset{\sim}{r_2}$. Έπειτα, λύνοντας την $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{r_3} - \lambda \underset{\sim}{r_3} = \underset{\sim}{r_2}$, βρίσκουμε το $\underset{\sim}{r_3}$. Η γλ, τελικά, είναι:

$$\underset{\sim}{x} = c_1 \underset{\sim}{r_1} e^{\lambda t} + c_2 \left(\underset{\sim}{r_1} \frac{t}{1!} + \underset{\sim}{r_2} \right) e^{\lambda t} + c_3 \left(\underset{\sim}{r_1} \frac{t^2}{2!} + \underset{\sim}{r_2} \frac{t}{1!} + \underset{\sim}{r_3} \right) e^{\lambda t}$$

Μη ογδσ 1ης τάξης – μέθοδος μεταβολής των σταθερών

Έστω το μη ογδσ:
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \dot{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}$$

Τότε:

(I) Θεωρούμε το αντίστοιχο ομογενές $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{12}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ και βρίσκουμε τη γενική λύση του:
$$\begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

(II) Βρίσκουμε μια μερική λύση του μη ογδσ:
$$\begin{bmatrix} x_\mu \\ y_\mu \end{bmatrix} = c_1(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$
, η οποία προκύπτει από την γλ του αντίστοιχου ομογενούς, αν θέσουμε όπου c_1, c_2 τις άγνωστες συναρτήσεις $c_1(t), c_2(t)$ (μέθοδος μεταβολής των σταθερών).

(III) Η μερική λύση ικανοποιεί το δσ, άρα:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\mu \\ \dot{y}_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\mu \\ y_\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$
και με πράξεις έχουμε:
$$\dot{c}_1(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + \dot{c}_2(t) \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Από τη μορφή αυτή, βρίσκουμε τις $\dot{c}_1(t), \dot{c}_2(t)$ και με απλή ολοκλήρωση (χωρίς σταθερές) βρίσκουμε τις $c_1(t), c_2(t)$. Βρίσκουμε την μερική λύση.

(IV) Η γλ του μη ογδσ είναι:
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_\mu(t) \\ y_\mu(t) \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος του M/L για τη λύση γδσ με σταθ. συντελεστές

Έστω το γδσ 1ης τάξης: $\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t)$, με a σταθερά, f(t)
$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t)$

γνωστές συναρτήσεις και $x_1(0)$, $x_2(0)$ δοσμένες τιμές. Τότε:

(I) Μετασχηματίζουμε τις δε κατά Laplace, άρα έχουμε:
$X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$ και $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$

(II) Λύνουμε το σύστημα των M/L και βρίσκουμε τις $X_1(s)$, $X_2(s)$ και βρίσκουμε τις $x_1(t)$, $x_2(t)$ αφού: $x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\}$ και $x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\}$

Ο πίνακας e^{At}

Έστω ο πίνακας $\underset{\sim}{A}_{\nu\times\nu}$. Ο πίνακας $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}t$ είναι επίσης $\nu\times\nu$ και αν λ ιδιοτιμή του A, τότε λ ιδιοτιμή του $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}t$.

Ο πίνακας $e^{\underset{\sim}{B}} = e^{\underset{\sim}{A}t}$ είναι $\nu\times\nu$ και πολυώνυμο με μεταβλητή $\underset{\sim}{B}$, με βαθμό το πολύ ν-1:

$$e^{B} = c_{\nu-1}B^{\nu-1} + c_{\nu-2}B^{\nu-2} + \dots + c_1\underset{\sim}{B} + c_0\underset{\sim}{I}$$, με c σταθεροί αριθμοί, οι οποίοι υπολογίζονται με βάση τις ιδιοτιμές, αφού κάθε ιδιοτιμή του B επαληθεύει την εξίσωση:

$$e^{\lambda} = c_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + c_{\nu-2}\lambda^{\nu-2} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

Επομένως, αν έχουμε ογδσ 1ης τάξης το οποίο έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$ ή $\underset{\sim}{\dot{X}} = \underset{\sim}{A}\cdot \underset{\sim}{X}$. Η γενική λύση του

είναι $\underset{\sim}{X} = e^{\underset{\sim}{A}t}\cdot\underset{\sim}{C}$ ή $$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$$ → αυθαίρετο διάνυσμα-στήλη.

Κεφάλαιο 7: Η Μέθοδος των Δυναμοσειρών

Η δυναμοσειρά είναι το άθροισμα: $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (x-x_0)^\nu = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_\nu(x-x_0)^\nu + \dots$

Το σημείο x_0 ονομάζεται κέντρο της δυναμοσειράς. Οι συντελεστές $a_0, a_1, \dots$ είναι οι όροι μιας ακολουθίας a_ν. Αν θέσουμε $x - x_0 = t$ τότε έχουμε:
$\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu t^\nu = a_0 + a_1 t + \dots + a_\nu t^\nu + \dots$

Οι τιμές του x για τις οποίες το άθροισμα υπάρχει και είναι πεπερασμένο αποτελούν το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται αναλυτική στο σημείο x_0 όταν αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά κέντρου x_0.

Τα ακέραια πολυώνυμα, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, η εκθετική συνάρτηση καθώς και οι συναρτήσεις οι οποίες προκύπτουν μετά από πράξεις μεταξύ αυτών είναι αναλυτικές.

Έστω τώρα η δε: $p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$, με $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ αναλυτικές στο x_0. Αν:

(αν δεν δίνεται το x_0, τότε παίρνω $x_0 = 0$)

(I) $p(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ομαλό σημείο της δε

(II) $p(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ανώμαλο σημείο της δε

Η περίπτωση του ομαλού σημείου

Αν $p(x_0) \neq 0$ τότε η δε έχει λύση της μορφής $y(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (x-x_0)^\nu$. Επιλέγοντας αόριστα $a_0 = c_1$, $a_1 = c_2$ προκύπτει η γενική λύση της:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Για την εφαρμογή των παραπάνω:

(I) Διαπιστώνω πως $p(x_0) \neq 0$

(II) Θεωρώ $y(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (x-x_0)^\nu = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_\nu (x-x_0)^\nu + \dots$

και βρίσκω τις παραγώγους:

$$y'(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} a_v \cdot v \cdot (x-x_0)^{v-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + a_v \cdot v\,(x-x_0)^{v-1} + \ldots$$

$$y''(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} a_v \cdot v \cdot (v-1)(x-x_0)^{v-2} = 2a_2 + \ldots + a_v \cdot v \cdot (v-1)\,(x-x_0)^{v-2} + \ldots$$

(III) Αντικαθιστώ τα ανωτέρω στην δε και μετά από πράξεις καταλήγω σε μια ισότητα πολυωνύμου με 0.

(IV) Εξισώνω τους συντελεστές του πολυωνύμου με 0 και υποθέτω πως $a_0, a_1 \neq 0$. Έτσι, εκφράζω τους $a_2, a_3, \ldots$ ως συναρτήσεις των $a_0, a_1 \neq 0$.

(V) Αντικαθιστώ τις εκφράσεις αυτές στην $y(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} a_v (x-x_0)^v = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots$ και προκύπτει η γενική λύση της μορφής:

$$y(x) = a_0\, y_1(x) + a_1\, y_2(x).$$

Η περίπτωση του κανονικού ανώμαλου σημείου

Έστω η δε: $p(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = 0$, με $p(x), q(x), r(x)$ αναλυτικές στο x_0, αλλά $p(x_0) = 0$. Τότε για $x \neq x_0$ διαιρώ με $p(x)$ και έχω:

$$y'' + \frac{q(x)}{p(x)}\,y' + \frac{r(x)}{p(x)}\,y = 0 \Leftrightarrow y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

Θεωρώ τις συναρτήσεις $(x-x_0)P(x)$, $(x-x_0)^2 Q(x)$ και αν αυτές είναι αναλυτικές, τότε το x_0 είναι "κανονικό ανώμαλο σημείο" της δε. Εφαρμόζω τη μέθοδο Fröbenius:

(I) Θεωρώ τα όρια:

$$\mu = \lim_{x \to x_0} (x-x_0)P(x), \quad \sigma = \lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 Q(x)$$, τα οποία είναι πραγματικοί αριθμοί

(II) Θεωρώ την εξίσωση: $\theta\cdot(\theta-1)+\mu\cdot\theta+\sigma=0$ (εξίσωση δεικτών ή δείκτρια εξίσωση της δε.

(III) Η δ.ε. έχει λύση της μορφής:

$$y_1(x)=(x-x_0)^{\theta}\sum_{\nu=0}^{+\infty}a_\nu(x-x_0)^{\nu} \quad \text{ή} \quad y_1(x)=\sum_{\nu=0}^{+\infty}a_\nu(x-x_0)^{\nu+\theta}$$

όπου θ είναι ρίζα της δείκτριας εξίσωσης.

(IV) Αντικαθιστώ την y_1 στην δε και προκύπτει ένα πολυώνυμο ίσο με 0. Από τον μηδενισμό των συντελεστών του και με αυτό βρίσκω τους συντελεστές της a_ν.

Για την εύρεση της γενικής λύσης της δε:

(i) Η διαφορά $\theta_1-\theta_2$ (των ριζών της δείκτριας εξίσωσης) ΔΕΝ είναι ακέραιος αριθμός. Τότε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δε είναι:

$$y_1(x)=\sum_{\nu=0}^{+\infty}a_\nu(x-x_0)^{\nu+\theta_1}, \quad y_2(x)=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\beta_\nu(x-x_0)^{\nu+\theta_2}$$

και η γενική λύση είναι $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

(Οι συντελεστές a_ν,β_ν προσδιορίζονται κατά τα γνωστά, όπως παραπάνω)

(ii) Ισχύει $\theta_1=\theta_2=\theta_\lambda$. Τότε:

α) Θεωρώ τη συνάρτηση $y(x)=\sum_{\nu=0}^{+\infty}a_\nu(x-x_0)^{\nu+\theta}$ (χωρίς αντικατάσταση της λύσης θ). και αντικαθιστώ στην δε.

β) Μετά τις πράξεις και την ισότητα του πολυωνύμου με 0, προκύπτουν οι συντελεστές a_ν συναρτήσει του θ: $a_\nu(\theta)$.

γ) Οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι:

$$y_1(x)=y(x)\Big|_{\theta=\theta_\lambda}, \quad y_2(x)=\frac{\partial y(x)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta_\lambda}$$

(iii) Η διαφορά $\theta_1 - \theta_2$ είναι ακέραιος αριθμός. Έστω $\theta_1 > \theta_2$, τότε:

α) Δοκιμάζω μήπως υπάρχουν οι λύσεις:

$$y_1(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (x-x_0)^{\nu+\theta_1} \quad , \quad y_2(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \beta_\nu (x-x_0)^{\nu+\theta_2}$$

όπως στην (i). Αν υπάρχουν, τότε η γενική λύση είναι: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$
Αν όχι, τότε:

β) Θεωρώ την λύση $y(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (x-x_0)^{\nu+\theta}$ και την αντικαθιστώ στην δε και βρίσκω τους $a_\nu(\theta)$.

γ) Οι λύσεις της δε είναι: $y_1(x) = y(x)\Big|_{\theta=\theta_1}$, $y_2(x) = \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_2}$

και η γενική λύση: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς - λύσης της δε

Έστω η δδε: $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ και x_0 ομαλό ή κανονικό ανώμαλο σημείο της. Τότε

(I) Βρίσκω όλες τις ρίζες (πραγματικές και μιγαδικές) της $p(x) = 0$ και τις σχεδιάζω στο μιγαδικό επίπεδο

(II) Εντοπίζω τη ρίζα η οποία βρίσκεται σε μικρότερη απόσταση από το δοσμένο σημείο x_0 και την υπολογίζουμε $d(x_0, \text{λύση}) = d_0$

(III) Η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς - λύσης είναι $R \geq d_0$.

Αν η $p(x) = 0$ δεν έχει λύση (εκτός ίσως του x_0) τότε $R \to +\infty$, άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x.

Κεφάλαιο 8: Ειδικά Θέματα

Πολλαπλασιαστής Euler της μορφής $\mu = \mu(u)$ όπου $u = u(x,y)$ είναι δοσμένη συνάρτηση

Έστω η δε: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ η οποία δεν είναι άμεσα ολοκληρώσιμη ($P_y \neq Q_x$). Πρέπει η δε:

$\mu(u) P\,dx + \mu(u) Q \cdot dy = 0$ να είναι άμεσα ολοκληρώσιμη. Άρα:

$$\frac{\partial(\mu(u)P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(u)Q)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \mu(u)}{\partial y} \cdot P + \mu(u)\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu(u)}{\partial x} \cdot Q + \mu(u)\frac{\partial Q}{\partial x}$$

με $\mu = \mu(u)$ όπου $u = u(x,y)$ δοσμένη συνάρτηση. Ισχύει πως

$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(u)\, u_x$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(u)\, u_y$ και με αντικατάσταση έχουμε:

$$\mu'(u)\, u_y \cdot P + \mu(u) P_y = \mu'(u)\, u_x Q + \mu(u) Q_x \Rightarrow$$

$$\mu'(u) \cdot (P u_y - Q u_x) = \mu(u)(Q_x - P_y) \Rightarrow \frac{\mu'(u)}{\mu(u)} = \frac{Q_x - P_y}{P \cdot u_y - Q u_x}$$

Θα πρέπει να ισχύει $\dfrac{Q_x - P_y}{P \cdot u_y - Q \cdot u_x} = \varphi(u)$, επομένως: $\dfrac{\mu'(u)}{\mu(u)} = \varphi(u) \Rightarrow \dfrac{\frac{d\mu}{du}}{\mu} = \varphi(u)$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(u)\, du.$$

Με απλή ολοκλήρωση βρίσκω το $\mu(u)$ και τον πολ/ζω στην δε, μετατρέποντας την σε ακριβή.

Ιδιάζουσες λύσεις δε $1^{ης}$ τάξης

Η γ.λ. μιας δε $1^{ης}$ τάξης είναι η πιο γενική μορφή συνάρτησης που ικανοποιεί τη δε (με σταθερές). Για τιμές των σταθερών προκύπτουν ειδικές λύσεις. Οι λύσεις που δεν προκύπτουν από την γενική λύση λέγονται ιδιάζου

Για τον προσδιορισμό τους:

(I) Στην δε θέτω $y' = p$ οπότε $F(x,y,y') = 0 \Rightarrow F(x,y,p) = 0$ (1)

(II) Παραγωγίζω μερικά ως προς p: $\dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p} = 0$ (2)

(III) Η ιδ. λύση ορίζεται από τις (1), (2), με παράμετρο p.

Δε $1^{ης}$ τάξης οι οποίες δεν επιλύονται ως προς y'

Θέτω $y' = p$, με $p = p(x)$. Ανάλογα τη μορφή:

(I) Δε Lagrange: με μορφή: $y = x\,g(y') + h(y')$, όπου $g(y') \neq y'$.

Με $y' = p$: $y = x\,g(p) + h(p)$. (1)

Παραγωγίζω ως προς x και αφού $y = y(x)$, $p = p(x)$:

$$y' = g(p) + x\,g'(p)\frac{dp}{dx} + h'(p)\frac{dp}{dx} \xRightarrow{y'=p}$$

$$p = g(p) + x\,g'(p)\frac{dp}{dx} + h'(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{1}{g(p) - p}\,x = \frac{h'(p)}{p - g(p)}$$

Η οποία είναι γδε $1^{ης}$ τάξης με άγνωστη συνάρτηση $x = x(p)$ (2)

Από (1), (2) δίνουν την γεν. λύση της δε με παράμετρο p.

Σημείωση

Αν λ είναι μια ρίζα της $g(z) = z$ τότε η δε Lagrange έχει επιπλέον τη λύση: $y = x\,g(\lambda) + h(\lambda)$

(II) Δε Clairaut: $y = x \cdot y' + \varphi(y')$. Με $y' = p$ και έχουμε:

$y = x \cdot p + \varphi(p)$ (1). Με παραγώγιση ως προς x:

$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}(x+\varphi'(p)) = 0$. Αν:

(i) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ και λόγω της (1) η γενική λύση είναι:

$$y = xc + \varphi(c)$$

(ii) $x + \varphi'(p) = 0 \Rightarrow x = -\varphi'(p)$ (2). Έτσι ορίζεται και δεύτερη λύση σε παραμετρική μορφή από τις (1),(2) με παράμετρο. Αυτή η λύση είναι η ιδιάζουσα

(III) Η δε δεν περιέχει το y, αλλά τα x, p': Θέτω $y' = p$ και:

(i) Λύνω ως προς x, άρα προκύπτει $x = \varphi(p)$ (1). και παραγωγίζω ως προς p: $\frac{dx}{dp} = \varphi'(p) \Rightarrow \varphi'(p)\frac{dp}{dx} = 1$

(ii) Εμφανίζω το y: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot y' \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p$

(iii) $\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx} = 1 \Rightarrow \varphi'(p)\frac{dp}{dy}\cdot p = 1 \Rightarrow dy = p\varphi'(p)\,dp$ (2)

(iv) Με ολοκλήρωση: $y = \int p\varphi'(p)\,dp + c$

Οι (1),(2) ορίζουν την ιδ. λύση.

(IV) Η δε δεν έχει τα x, y: αλλά $F(y') = 0$. Αν λ ρίζα της $F(u) = 0$ τότε είναι $y' = \lambda \overset{\int}{\Rightarrow} y = \lambda x + c \Rightarrow \lambda = \frac{y-c}{x} \underset{F(\lambda)=0}{\Longrightarrow} F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$

Οι ιδιότητες της ορίζουσας Wronski

Έστω γδε $2^{ης}$ τάξης: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, με λύσεις $y_1(x)$, $y_2(x)$ $x \in (a,\beta)$.

Αν P, Q συνεχείς στο (a,β) και $W(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,\beta)$ με

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

τότε οι y_1, y_2 αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δε στο (a,β) και η γεν. λύση της είναι: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Η ορίζουσα Wronski ικανοποιεί τη δε: $W' + P(x)W = 0$ ($1^{ης}$ τάξης γδε)

Για δε $3^{ης}$ τάξης: $y''' + P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ με

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$ ισχύει το αντίστοιχο.

Παt - Θεώρημα Picard

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών - παt είναι η δε $1^{ης}$ τάξης $y' = f(x,y)$ και η αρχική συνθήκη $y(a) = b$.

Θεώρημα Picard

Αν οι συναρτήσεις $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς σε μία περιοχή του σημείου (a,β) τότε το παt: $\{ y' = f(x,y), \ y(a) = b \}$ έχει μοναδική λύση στην περιοχή αυτή, η οποία είναι: $y(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[b + \int_a^x f(t, y_{n-1}(t))\,dt \right]$

με $y_0(t) = b$.

Ο βασικός (Θεμελιώδης) πίνακας ογδσ $1^{ης}$ τάξης

Έστω το ογδ σύστημα $1^{ης}$ τάξης:

$$\dot{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X}$$

το οποίο έχει n-αγνώστους με n-δε. Έστω $\underset{\sim}{X_1}, \dots, \underset{\sim}{X_n}$ οι λύσεις του συστήματος αυτού.

Έστω ο πίνακας $\underset{\sim}{\phi}(t)$ που έχει για στήλες τις λύσεις $\underset{\sim}{X_1}, \dots, \underset{\sim}{X_n}$.
Αν $\forall t \in \Delta$: $\underset{\sim}{\phi}(t) \neq 0 \Rightarrow \underset{\sim}{X_1}, \dots, \underset{\sim}{X_n}$ γραμ. ανεξ. και ο $\underset{\sim}{\phi}$ είναι βασικός πίνακας του ογδσ.

Μια μερική λύση του μη ομογενούς συστήματος $\dot{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{A}(t)\,\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}(t)$ είναι

$$\underset{\sim}{X_\mu} = \underset{\sim}{\phi}(t) \int_{t_0}^{t} \underset{\sim}{\phi}^{-1}(u)\, \underset{\sim}{b}(u)\, du$$

όπου t_0 είναι σταθερό σημείο του διαστήματος Δ.

Επίλυση μη γραμμικών δε $2^{ης}$ τάξης

(I) Δε χωρίς το y: Θεωρώ $y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$ και αντικαθιστώ στη δε, καταλήγοντας σε δε $1^{ης}$ τάξης. Έχοντας την $p(x)$, με ολοκλήρωση, έχω την $y(x)$.

(II) Δε χωρίς το x: Θεωρώ $y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\, p \Rightarrow y'' = p\, \frac{dp}{dy}$

Με αντικατάσταση προκύπτει δε $1^{ης}$ τάξης, κτλ

Η συνάρτηση δ(t) του Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

, με M/L : $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ και ισχύουν οι ιδιότητες του M/L

Η ευστάθεια των λύσεων του γ.δ.σ.

Έστω το γδσ με σταθερούς συντελεστές: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$

Η χαρ. εξίσωση του συστήματος είναι: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

α) Αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ ή $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ με αρνητικό Re τότε οι λύσεις του γδσ χαρακτηρίζονται ασυμπτωματικά ευσταθείς

β) Αν μια τουλάχιστον λύση $\in \mathbb{R}^+$ ή $\in \mathbb{C}$ με θετικό Re τότε οι λύσεις του γδσ είναι ασταθείς

γ) Αν λ_1, λ_2 καθαρά φανταστικές, τότε οι λύσεις του γδσ είναι ευσταθείς.

Τα ανωτέρω ισχύουν και για περισσότερες εξισώσεις.

Αυτόνομα συστήματα – Πορτραίτα φάσεων

Ένα σύστημα λέγεται αυτόνομο, όταν έχει τη μορφή: $\{ \dot{x} = f(x,y) \quad \dot{y} = g(x,y) \}$, δηλ. το 2ο μέλος δεν εξαρτάται από το t. Το σημείο (a,b):

$f(a,b) = 0 = g(a,b)$

είναι σημείο ισορροπίας ή κρίσιμο σημείο.

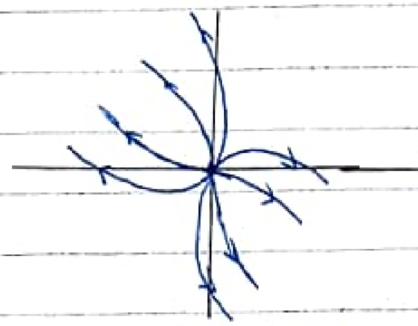
Μια λύση του συστήματος είναι προφανώς η $x(t)=a$, $y(t)=b$, η οποία είναι η "λύση ισορροπίας" ή "κρίσιμη λύση". Αν η λύση αυτή είναι ευσταθής, τότε το σημείο (a,b) καλείται ευσταθές. Αλλιώς, καλείται ασταθές.

Έστω $x=x(t)$, $y=y(t)$ η γενική λύση του συστήματος. Με απαλειφή του t βρίσκουμε $y=y(x)$, με σταθερές. Η $C_{y(x)}$ για τις διάφορες τιμές των σταθερών αποτελεί το πορτραίτο των φάσεων του συστήματος.

Έστω το γδσ $1^{ης}$ τάξης: $\{ \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \ , \ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \}$ με σημείο ισορροπίας το $(0,0)$.

Έστω η εξίσωση: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$, με ρίζες λ_1, λ_2. Αν:

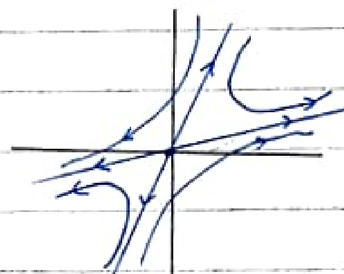
a) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, το $(0,0)$ είναι ασταθής κόμβος



ασταθής κόμβος

β) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, το $(0,0)$ είναι ευσταθής κόμβος. Οι καμπύλες είναι όμοιες του ασταθούς, αλλά αντίθετης φοράς

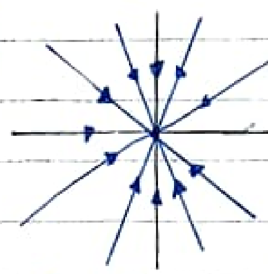
γ) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, το $(0,0)$ είναι ασταθές και ονομάζεται σαγματικό



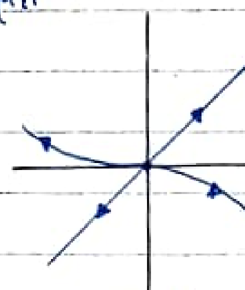
σαγματικό σημείο

δ) $\lambda_1 = \lambda_2$, το $(0,0)$ είναι αστεροειδής κόμβος αν η εξίσωση: $\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \nu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ δεν δίνει σχέση μεταξύ των μ_1, ν_1. Διαφορετικά ο κόμβος είναι εκφυλισμένος.

Αν $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, το $(0,0)$ είναι ασταθής. Αλλιώς, είναι ευσταθής.



αστεροειδής ευσταθής κόμβος

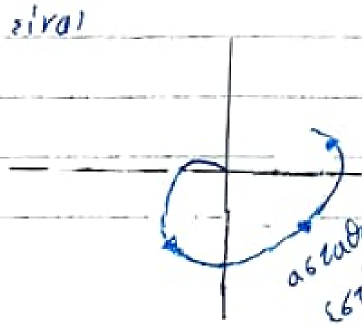


εκφυλισμένος ασταθής κόμβος

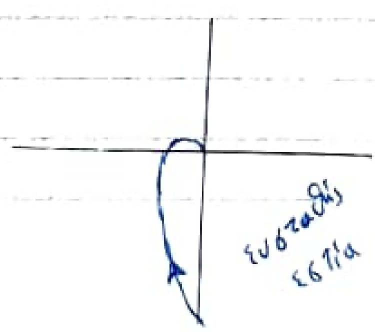
ε) $\lambda_1, \lambda_2 \in C$ με μόνο φανταστικό μέρος, το $(0,0)$ είναι ευσταθές κέντρο.

κέντρο

στ) $\lambda_1, \lambda_2 \in C$ με $Re > 0$, το $(0,0)$ είναι ασταθής εστία. Διαφορετικά είναι ευσταθής εστία



ασταθής εστία



ευσταθής εστία

Μη γραμμικά συστήματα

Έστω το σύστημα: $\{\ \dot{x} = f(x,y)\ ,\ \dot{y} = g(x,y)\ \}$ με το $A(\alpha,\beta)$ να είναι λύση του συστήματος: $\{\ f(x,y)=0\ ,\ g(x,y)\ \}$

Για την ευστάθεια του A:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

, με τις μερικές παραγώγους στο A.

Η εξίσωση: $\begin{vmatrix} \partial f/\partial x - \lambda & \partial f/\partial y \\ & \partial g/\partial y - \lambda \end{vmatrix} = 0$

δίνει ρίζες που καθορίζουν την ευστάθεια

Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως γραμμικοποίηση.