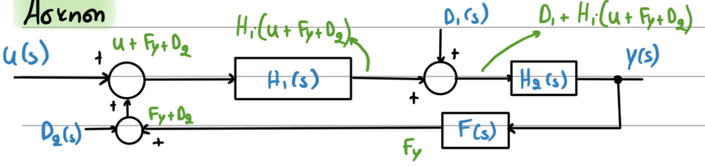
παλαιό θέμα!

Άσκηση



όπου: $H_1(s)=\dfrac{1}{s+2}$, $H_2(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$, $F(s)=\dfrac{a(s)}{\pi(s)}$, $d_1(t)=d_2(t)=\delta(t)$

Να ευρεθεί ρυθμιστής $F(s)$ ώστε η επίδραση των θορύβων $d_{1,2}(t)$ στην έξοδο να εξουδετερώνεται καθώς $t\to\infty$ και επίσης να ισχύει $\lim_{t\to\infty}\{y(t)-u(t)\}=0$, $\forall u(t)$.

- $y(s)=H_2(s)\left[D_1(s)+H_1(s)\left(D_2(s)+U(s)+F(s)y(s)\right)\right] \Rightarrow \left[1-H_2(s)H_1(s)F(s)\right]y(s)=H_2(s)\left[D_1(s)+H_1(s)D_2(s)+H_1(s)u(s)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(s)=\frac{H_2D_1+H_1H_2(D_2+U)}{1-H_1H_2F}$$

- $G_1(s)=\dfrac{y(s)}{D_1(s)}=\dfrac{H_2}{1-H_1H_2F}=\dots=\dfrac{(s+2)\,\pi(s)}{(s+2)(s^2+s+1)\pi(s)-a(s)}$

- $G_2(s)=\dfrac{y(s)}{D_2(s)}=\dfrac{H_1\cdot H_2}{1-H_1H_2F}=\dots=\dfrac{\pi(s)}{(s+2)(s^2+s+1)\pi(s)-a(s)}=\dfrac{y(s)}{u(s)}$

- $d_{1,2}(t)=\delta(t) \Rightarrow D_{1,2}(s)=1$

- $y(s)=G_2(s)\cdot U(s)+G_1(s)+G_2(s)$

- Αν $\exists$ τα όρια τότε $\lim_{t\to\infty}\{y(t)\}=\lim_{s\to 0}\{s\,y(s)\}=\lim_{s\to 0}\{s\cdot G_2(s)\cdot U(s)\}+\lim_{s\to 0}\{s(G_1(s)+G_2(s))\}$

↳ Θα πρέπει: • $\lim_{s\to 0}\{s(G_1(s)+G_2(s))\}=0=\lim_{s\to 0}\dfrac{s\,(s+3)\,\pi(s)}{(s+2)(s^2+s+1)\pi(s)-a(s)}=\lim_{s\to 0}\dfrac{s\cdot 3\cdot\pi(0)}{2\cdot 1\cdot\pi(0)-a(0)}=0$

(Σωστό αν $\pi(0), a(0)$ πεπερασμένα και $a(0)\neq 2\pi(0)$)

• $\lim_{t\to\infty}\{y(t)-u(t)\}=0=\lim_{s\to 0}\{y(s)-u(s)\}=\lim_{s\to 0}\{s\,(G_2(s)-1)\,u(s)\}=0$, $\forall u(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow G_2(s)=1,\ \forall s \Rightarrow \dfrac{\pi(s)}{(s+2)(s^2+s+1)\pi(s)-a(s)}=0 \Rightarrow \pi(s)=(s+2)(s^2+s+1)\pi(s)-a(s) \Rightarrow a(s)=\left[(s+2)(s^2+s+1)-1\right]\cdot\pi(s)$

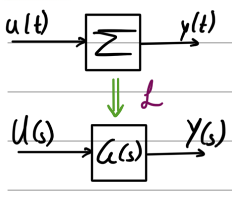
$$\Rightarrow F(s)=\frac{\pi(s)}{a(s)}=\boxed{\frac{1}{(s+2)(s^2+s+1)-1}}$$

Ευστάθεια Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Εξόδου (ΦΕΦΕ) // Bounded Input - Bounded Output (BIBO) Stability

- Ένα σύστημα λέγεται ευσταθές ΦΕΦΕ αν οι έξοδοι παραμένουν φραγμένες για οποιεσδήποτε φραγμένες εισόδους.
- Ισοδύναμα: {ευστάθεια ΦΕΦΕ} $\Rightarrow$ {ασυμπτωτική ευστάθεια} $\Rightarrow$ {όλοι οι πόλοι στο αριστερό ημιπεδο αυστηρά}

↳ για γραμμ. συστ.

Άσκηση



Για το Σ με μηδενικές αρχικές συνθήκες δίδεται ότι αν $u(t)=2\sin t$ τότε $y(t)=t\cos t$. Να μελετηθεί η ευστάθεια ΦΕΦΕ.

$\mathcal{L}\{\sin t\}=\dfrac{1}{s^2+1}$, $\mathcal{L}\{\cos t\}=\dfrac{s}{s^2+1}$

$U(s)=\mathcal{L}\{2\sin t\}=\frac{2}{s^2+1}$, $Y(s)=\mathcal{L}\{1-\cos t\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s(s^2+1)}$

$Y(s)=G(s)\cdot U(s)\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{s(s^2+1)}}{\frac{2}{s^2+1}}=\frac{1}{2s}\Rightarrow$ $\boxed{\text{δεν είναι ευσταθές ΦΕΦΕ}}$

(π.χ. αν $U(s)=1/s$ τότε $y(s)=1/2s^2\Rightarrow y(t)=t/2$)

Άσκηση

$x(k+1)=A\cdot x(k-1)+B\cdot u(k)$ (1), $x(k)\in R^n$, $u(k)\in R^m$. Αρχ. συνθ. $x(0), x(1)$. Αν το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο (δηλ. αν $W=[B\ AB\ A^2B\ \dots\ A^{n-1}B]$ έχει βαθμό n) να αποδειχθεί ότι το (1) ελέγξιμο.

• Ας είναι $\bar{x}(k+1)=\begin{bmatrix}x(k+1)\\x(k)\end{bmatrix}\in R^{2n}$. Τότε $\bar{x}(1)=\begin{bmatrix}x(1)\\x(0)\end{bmatrix}$, $\bar{x}(k)=\begin{bmatrix}x(k)\\x(k-1)\end{bmatrix}$, $k\in N^*$

και $\bar{x}(k+1)=\begin{bmatrix}x(k+1)\\x(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Ax(k-1)+Bu(k)\\x(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Ax(k-1)\\x(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Bu(k)\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&A\\I&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\x(k-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}u(k)=$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}0&A\\I&0\end{bmatrix}}_{\bar{A}}\bar{x}(k)+\underbrace{\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}}_{\bar{B}}u(k)\quad (2)$$

δηλ.: $\bar{x}(k+1)=\bar{A}\bar{x}(k)+\bar{B}u(k)$, $k\in N$

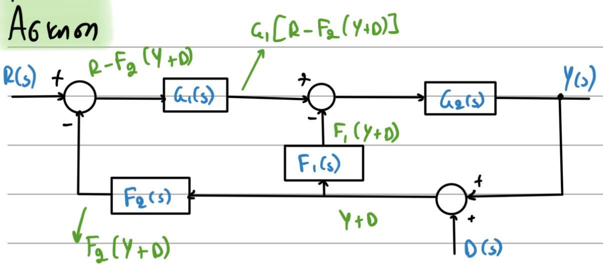
• $\bar{W}=[\bar{B}\ \bar{A}\bar{B}\ \bar{A}^2\bar{B}\ \dots\ \bar{A}^{2n-1}\bar{B}]=\begin{bmatrix}B&0&AB&0&A^2B&\dots&A^{n-1}B&0\\0&B&0&AB&0&\dots&0&A^{n-1}B\end{bmatrix}$

$\bar{A}\bar{B}=\begin{bmatrix}0&A\\I&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\B\end{bmatrix}$, $\bar{A}^2\bar{B}=\begin{bmatrix}0&A\\I&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AB\\0\end{bmatrix}$, $\bar{A}^3\bar{B}=\begin{bmatrix}0&A\\I&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}AB\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\AB\end{bmatrix}$

• $\text{rank}(\bar{W})=\text{rank}\begin{bmatrix}B&AB&A^2B&A^3B&\dots&A^{n-1}B&0&0&0&\dots&0\\0&0&0&0&\dots&0&B&AB&A^2B&\dots&A^{n-1}B\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}W&0\\0&W\end{bmatrix}=2n\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{(1) ελέγξιμο}}$

Άσκηση



α) Να ευρεθούν $\frac{Y(s)}{D(s)}$ και $\frac{Y(s)}{R(s)}$

$Y(s)=G_2[G_1(R-F_2(Y+D))+F_1(Y-D)]=$

$=G_1G_2R-G_1G_2F_2(Y+D)-G_2F_1(Y+D)\Rightarrow$

$\Rightarrow(1+G_1G_2F_2+G_2F_1)Y=G_1G_2R-G_2[G_1F_2+G_2F_1]D\Rightarrow$

$\Rightarrow\bar{G}_1=\frac{Y}{D}=\frac{G_2(G_1F_2+F_1)}{1+G_2(G_1F_2+F_1)}$, $\bar{G}_2=\frac{Y}{R}=\frac{G_2G_1}{1+G_2(G_1F_2+F_1)}$