"ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ" -ΣΗΜΜΥ -Ε.Μ.Π.
10/07/2017

Θέμα 1: (α)(1,5 μ.) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $u(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$ και να βρείτε ακέραια συνάρτηση f ώστε $u = \mathrm{Real} f$ και $f(0) = 2$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό.

(i) (0,5 μ.) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ με $\overline{f} \in \mathcal{H}(A)$, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

(ii)(0,5 μ.) Εάν $f, g \in \mathcal{H}(A)$ και $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in A$, να δείξετε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(z) = g(z) + c, \quad \forall z \in A$.

Θέμα 2: (α)(1,5 μ.) Δίνεται ο δακτύλιος $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 1\}$. Να βρείτε το $\max\limits_{z \in \Delta} \dfrac{|e^z|}{|z|}$, καθώς και τα σημεία του Δ στα οποία η παραπάνω μέγιστη τιμή λαμβάνεται.

(β)(1 μ.) Αναπτύξτε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{3-z}$ γύρω από το 1, στο δακτύλιο $1 < |z-1| < 2$.

Θέμα 3: (α)(1,5 μ.) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **φραγμένη** ολόμορφη συνάρτηση. Να δείξετε ότι για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}, \ t \in [0, 2\pi] \ (R > 0)$. Δείξτε στη συνέχεια ότι η f είναι σταθερή.

(β)(1 μ.) Έστω $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με $\mathrm{Real}(g(z)) \leq \mathrm{Real}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι $g(z) = z + c, \ \forall z \in \mathbb{C}$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$.

Θέμα 4: (α)(1,5 μ.) Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$1 - \cos z = z^2 \varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(0) \neq 0.$$

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma h(z) dz$, όπου

$$h(z) = \frac{1}{1 - \cos z} + z^5 \sin\left(1/z^2\right), \qquad \gamma(t) = e^{it}, \ t \in [0, 2\pi].$$

(β)(1 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

(Παρατηρήστε ότι $(e^{i\pi/4})^4 = -1$.)