ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

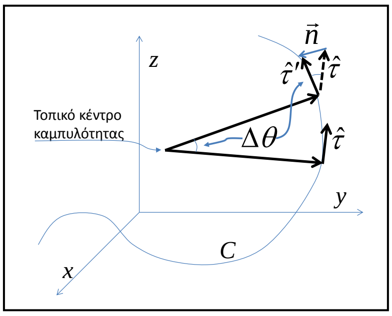
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος «Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)» της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2020

Εφαπτομενική και ακτινική συνιστώσα επιτάχυνσης σε καμπυλόγραμμη τροχιά



Όταν ένα κινητό εκτελεί κίνηση κατά μήκος μίας καμπύλης C, με τυχαία μεταβαλλόμενη ταχύτητα, κατά μέτρο και διεύθυνση, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η επιτάχυνσή της μπορεί να επιμεριστεί, τοπικά, σε δύο χαρακτηριστικές συνιστώσες, μία εφαπτομενική της τροχιάς και μία ακτινική (κατά μήκος της τοπικής ακτίνας καμπυλότητας). Η ανάλυση αυτή υποδηλώνει ότι μελετάμε τοπικά την κίνηση, σε ένα τμήμα της τροχιάς, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί επίπεδη καμπύλη, ώστε να μπορεί να ορισθεί η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της και το τοπικό κέντρο καμπυλότητας (ως σημείο τομής των καθέτων σε δύο γειτονικές εφαπτόμενες) στο τμηματικώς επίπεδο τμήμα της τροχιάς.

Στην ανάλυση που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε, για οικονομία συμβόλων, την σύμβαση $(df/dt) \equiv \dot{f}$ για κάθε συνάρτηση $f = f(t)$.

Αν $\vec{\upsilon}$ και $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ είναι η ταχύτητα και το μέτρο της ταχύτητας, αντίστοιχα, σε κάποιο σημείο της τροχιάς, οπότε $\hat{\tau} = \vec{\upsilon}/\upsilon$ είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην τροχιά, τότε για την επιτάχυνση μπορούμε να γράψουμε $\vec{a} = \dfrac{d(\upsilon\hat{\tau})}{dt} = \dot{\upsilon}\hat{\tau} + \upsilon\dot{\hat{\tau}}$ (1), δεδομένου ότι και το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\tau}$, παρ' ότι διατηρεί το μέτρο του, μεταβάλλει την διεύθυνσή του.

Για να υπολογίσουμε την χρονική παράγωγο $\dot{\hat{\tau}} = \dfrac{d\hat{\tau}}{dt}$, υπολογίζουμε την ταχύτητα σε δύο γειτονικές θέσεις, που απέχουν χρονικά κατά Δt, καθώς και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\tau}$ και $\hat{\tau}'$. Με αναφορά το τοπικό κέντρο καμπυλότητας (βλ. ανωτέρω) οι δύο αυτές θέσεις διαφέρουν γωνιακά κατά $d\theta = \dfrac{ds}{\rho}$, όπου ds το αντίστοιχο διαφορικό μήκος τόξου και ρ η τοπική ακτίνα καμπυλότητας. Την ίδια γωνιακή διαφορά έχουν και τα δύο μοναδιαία εφαπτομενικά διανύσματα $\hat{\tau}$ και $\hat{\tau}'$.

Επομένως: $$\dot{\hat{\tau}} = \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{\hat{n}|\hat{\tau}|d\theta}{dt} = \hat{n}\frac{d\theta}{dt} = \hat{n}\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \hat{n}\frac{1}{\rho}\upsilon \Rightarrow \dot{\hat{\tau}} = \hat{n}\frac{\upsilon}{\rho}.$$

[Η διαφορική γωνία $d\theta$, που ξεκινάει από το τοπικό κέντρο καμπυλότητας, είναι ίση με την $d\theta$ που σχηματίσουν τα $\hat{\tau}$ και $\hat{\tau}'$, διότι έχουν κάθετες τις αντίστοιχες πλευρές τους].

Όσον αφορά στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$, είναι παράλληλο στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου που οι δύο άλλες πλευρές του είναι τα μοναδιαία $\hat{\tau}$ και $\hat{\tau}'$. Καθώς το $d\theta$ τείνει προς το μηδέν, οι δύο παρά την βάση γωνίες αυτού του ισοσκελούς τριγώνου τείνουν στις 90^o, άρα το μοναδιαίο $\hat{n}$ είναι κάθετο στην τοπική εφαπτομένη και, επομένως, είναι παράλληλο προς την τοπική ακτίνα καμπυλότητας με κατεύθυνση προς το τοπικό κέντρο καμπυλότητας, δηλ., $\hat{n} \perp \hat{\tau}$. Επομένως, η παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος $\dot{\hat{\tau}}$ γράφεται $\dot{\hat{\tau}} = \dfrac{d\hat{\tau}}{d\theta}\dfrac{\upsilon}{\rho} = \hat{n}\dfrac{\upsilon}{\rho}$. Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή, για την παράγωγο του μοναδιαίου διανύσματος, στην αρχική σχέση (1). έχουμε τελικά: $\vec{a} = \dot{\upsilon}\hat{\tau} + \upsilon\dot{\hat{\tau}} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dot{\upsilon}\hat{\tau} + \dfrac{\upsilon^2}{\rho}\hat{n}}$

Άρα, *κατά την γενική καμπυλόγραμμη κίνηση, σε κάθε σημείο της τροχιάς έχουμε μία επιτρόχια (ή, εφαπτομενική) συνιστώσα επιτάχυνσης, ίση με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας* $(\dot{\upsilon}\hat{\tau})$, *και μια ακτινική (ή, εγκάρσια) συνιστώσα επιτάχυνσης, που είναι η τοπική κεντρομόλος επιτάχυνση* (υ^2/ρ).

Γενικές (τοπικά Ορθογώνιες) Καμπυλόγραμμες Συντεταγμένες

[Η ενότητα αυτή αφιερώνεται σε μερικούς φανατικούς των μαθηματικών χωρίς να είναι απαραίτητη για: Πολικές, Κυλινδρικές, Σφαιρικές συντεταγμένες, που ακολουθούν.]

Ανάλογα με την συγκεκριμένη εφαρμογή και (κυρίως) τα χαρακτηριστικά συμμετρίας ενός προβλήματος, (δηλ., το γεωμετρικό τόπο των σημείων επί των οποίων κάποιο μέγεθος διατηρεί την τιμή του – αν είναι βαθμωτό, ή την τιμή του και το σχετικό του προσανατολισμό ως προς τον γεωμετρικό τόπο – αν είναι διανυσματικό), είναι λογιστικά απλούστερο να επιλέξει κανείς, για την διατύπωση και την επίλυση του προβλήματός του, αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y, z) κάποιες άλλες συντεταγμένες, με τις οποίες μπορεί να εκμεταλλευτεί το πλεονέκτημα της συμμετρίας. Για παράδειγμα, για ένα κινητό που κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου, (ενδεχομένως, με μεταβλητό μέτρο ταχύτητας), θα αρκούσε η γνώση του πως μεταβάλλεται η γωνία θ (ως προς κάποιον άξονα αναφοράς, π.χ. τον x-άξονα) με τον χρόνο, $\theta = \theta(t)$, αντί της περιγραφής μέσω των $\left(x = x(t), y = y(t)\right)$. Επίσης, ένα φορτισμένο σωματίδιο, το οποίο εισέρχεται σε περιοχή με ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \sigma\tau\alpha\theta.$, με τυχαία αρχική ταχύτητα εισόδου, είναι γνωστό ότι εκτελεί ελικοειδή κίνηση, με άξονα της έλικας παράλληλο στο μαγνητικό πεδίο ενώ η τομή της έλικας αποτελεί κύκλο κάθετο στο μαγνητικό πεδίο, οπότε, το σωματίδιο ευρίσκεται μονίμως σε μία κυλινδρική επιφάνεια. Σε αυτή την περίπτωση, είναι επίσης λογιστικά οικονομικότερο να περιγραφεί η κίνηση του φορτίου μέσω μία γωνιακής συντεταγμένης, $\theta = \theta(t)$, και μέσω της συντεταγμένης $z = z(t)$, κατά μήκος του άξονα της ελικοειδούς κίνησης, αντί των τριών καρτεσιανών συντεταγμένων $\left(x = x(t), y = y(t), z = z(t)\right)$.

Θα προταχθεί μία πολύ συνοπτική παρουσίαση του μαθηματικού πλαισίου που ισχύει για τις γενικές (τοπικά ορθογώνιες) καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, [μπορεί να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση], και στη συνέχεια θα δοθούν, ως παραδείγματα, οι πολικές, οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές συντεταγμένες.

Ορίζουμε ως ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, τρεις ανεξάρτητες μεταξύ τους συναρτήσεις, u_1, u_2, u_3, των (x, y, z): $u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z)$ (1)
που είναι συνεχείς, έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, και έχουν μονό-τιμες αντίστροφες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε: $x = f_1(u_1, u_2, u_3), \quad y = f_2(u_1, u_2, u_3), \quad z = f_3(u_1, u_2, u_3),$ (2)
Με αυτή την ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των (x, y, z) και (u_1, u_2, u_3), μπορούμε να ορίζουμε τη θέση ενός σημείου είτε μέσω των καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y, z), είτε μέσω των ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (u_1, u_2, u_3).

[Μαθηματική παρένθεση: Ορίζουμε ως μερική παράγωγο, ως προς μία μεταβλητή x_i, μίας συνάρτησης f πολλών μεταβλητών $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, και την συμβολίζουμε ως $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, το

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, .., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, .., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

Ανατρέχοντας στην παράγωγο διανύσματος, όπως ορίστηκε σε προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να ορίσουμε αντίστοιχα μερικές παραγώγους και διανυσματικών μεγεθών, ως διανυσματικό άθροισμα των μερικών παραγώγων των συνιστωσών τους, όπως αυτές (οι μερικές παράγωγοι των βαθμωτών-συνιστωσών) ορίζονται ανωτέρω]

Από το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \hat{x} f_1(u_1, u_2, u_3) + \hat{y} f_2(u_1, u_2, u_3) + \hat{z} f_3(u_1, u_2, u_3)$, αν προκαλέσουμε στοιχειώδεις μεταβολές των u_1, u_2, u_3 κατά (du_1, du_2, du_3), παίρνουμε μεταβολή $d\vec{r}$:

$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3$. Αν, $h_i=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right|$, ορίζουμε ως *εφαπτομενικά μοναδιαία διανύσματα* (των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων u_1,u_2,u_3), τα $\hat{e}_i=\frac{\partial\vec{r}/\partial u_i}{\left|\partial\vec{r}/\partial u_i\right|}$, οπότε:

$$d\vec{r}=h_1du_1\hat{e}_1+h_2du_2\hat{e}_2+h_3du_3\hat{e}_3$$

Οι ποσότητες (h_1,h_2,h_3) ονομάζονται και *συντελεστές ή παράγοντες κλίμακας.*

Το στοιχειώδες μήκος και ο στοιχειώδης όγκος υπολογίζονται, αντίστοιχα:

$$ds=\sqrt{d\vec{r}\cdot d\vec{r}}=\sqrt{h_1^2du_1^2+h_2^2du_2^2+h_3^2du_3^2}\,,$$

και

$$dV=\left(h_1du_1\hat{e}_1\right)\cdot\left[\left(h_2du_2\hat{e}_2\right)\times\left(h_3du_3\hat{e}_3\right)\right]=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1du_2du_3$$

όπου $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|=\begin{vmatrix}\partial x/\partial u_1 & \partial x/\partial u_2 & \partial x/\partial u_3\\ \partial y/\partial u_1 & \partial y/\partial u_2 & \partial y/\partial u_3\\ \partial z/\partial u_1 & \partial z/\partial u_2 & \partial z/\partial u_3\end{vmatrix}$: η Ιακωβιανή ορίζουσα (*Jacobian determinant*) του μετασχηματισμού των (x,y,z) ως προς τα (u_1,u_2,u_3).

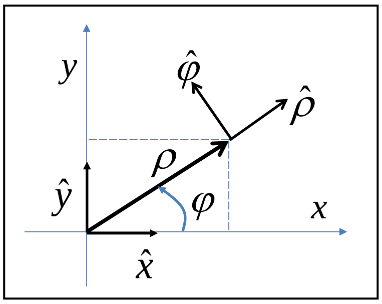
Όσον αφορά στις στοιχειώδεις (διαφορικές) επιφάνειες, όπως και στην περίπτωση των καρτεσιανών συντεταγμένων, (όπου ορίζεται, π.χ., η $d\vec{S}_{(x,y)}=(\hat{x}dx)\times(\hat{y}dy)=\hat{z}(dxdy)$ και κυκλικά οι άλλες δύο, αντίστοιχα), έτσι και στις ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ορίζονται διαφορικές επιφάνειες κάθετα σε κάθε μία από τις καμπύλες-$u_{1,2,3}$, π.χ.,

$d\vec{S}_{(du_1,du_2)}=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1\right)\times\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2\right)=\left(\hat{e}_1\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}\right|du_1\right)\times\left(\hat{e}_2\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}\right|du_2\right)$, και με τη βοήθεια των $h_{1,2,3}$

$d\vec{S}_{(du_1,du_2)}==h_1h_2du_1du_2\left(\hat{e}_1\times\hat{e}_2\right)=\hat{e}_3h_1h_2du_1du_2$, και κυκλικά για τις άλλες δύο.

Με βάση τον φορμαλισμό που αναπτύχθηκε συνοπτικά σε αυτή την παράγραφο, θα μπορούσαν να εξαχθούν όλα τα αποτελέσματα, που θα παρουσιαστούν ως παραδείγματα στις επόμενες παραγράφους. Εν τούτοις, θεωρείται σκόπιμο να παρουσιαστεί και η γεωμετρική παραγωγή αυτών των αποτελεσμάτων, για την διαισθητικά πληρέστερη κατανόησή τους.

Ταχύτητα και Επιτάχυνση σε Επίπεδες Πολικές Συντεταγμένες



Ορίζουμε τις επίπεδες πολικές συντεταγμένες (ρ,φ) και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{\rho},\hat{\varphi})$, ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο (x,y), σύμφωνα με το διπλανό σχήμα και τις σχέσεις

$$\left\{\begin{matrix}x=\rho\cos(\varphi)\\ y=\rho\sin(\varphi)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=\arctan(y/x)\end{matrix}\right\}\quad(1\alpha,\beta)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα που αντιστοιχεί σε μία συντεταγμένη ορίζεται (παράγεται) ως εξής: διατηρούνται σταθερές όλες οι υπόλοιπες συντεταγμένες και μεταβάλλεται η συγκεκριμένη συντεταγμένη, έτσι ώστε η απόσταση ανάμεσα στην τελική και στην αρχική θέση να έχει μοναδιαιο μέτρο. Το διάνυσμα από την αρχική μέχρι την τελική θέση είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη συντεταγμένη.

Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του συστήματος συντεταγμένων, τα μοναδιαία διανύσματα μπορούν να διατηρούν (π.χ., καρτεσιανές συνεταγμένες) ή όχι (π.χ., σφαιρικές συντεταγμένες), τον προσανατολισμό τους. Επίσης, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες, σε ένα σύστημα συντεταγμένων, μερικές διατηρούν τον προσανατολισμό των μοναδιαίων τους διανυσμάτων και μερικές όχι (π.χ., βλ. παρακάτω, κυλινδρικές συντεταγμένες)

Για τα μοναδιαία των καρτεσιανών και των πολικών συντεταγμένων, ισχύουν οι σχέσεις μετασχηματισμού

$$\begin{Bmatrix} \hat{x} = \hat{\rho}\cos(\varphi) - \hat{\varphi}\sin(\varphi) \\ \hat{y} = \hat{\rho}\sin(\varphi) + \hat{\varphi}\cos(\varphi) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \hat{\rho} = \hat{x}\cos(\varphi) + \hat{y}\sin(\varphi) \\ \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin(\varphi) + \hat{y}\cos(\varphi) \end{Bmatrix} \quad (2\alpha,\beta)$$

Ξεκινώντας από το διάνυσμα θέσης γραμμένο σε πολικές συντεταγμένες $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$, υπολογίζουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση με διαδοχικές παραγωγίσεις.

Σημειώνουμε ότι, ενώ στις καρτεσιανές συντεταγμένες, ακόμη και αν $\left(x = x(t), y = y(t)\right)$, τα μοναδιαία $\left(\hat{x}, \hat{y}\right)$ παραμένουν ανεξάρτητα του χρόνου, ως διανύσματα συνολικά, για τις πολικές συντεταγμένες δεν ισχύει το ίδιο. Τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\left(\hat{\rho}, \hat{\varphi}\right)$, ενώ έχουν σταθερό μέτρο ίσο με τη μονάδα, έχουν προσανατολισμός που είναι συνάρτηση των $\left(\rho, \varphi\right)$, άρα αν $\left(\rho = \rho(t), \varphi = \varphi(t)\right)$, τότε και τα μοναδιαία $\left(\hat{\rho}, \hat{\varphi}\right)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου, και αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά τον υπολογισμό των χρονικών παραγώγων. Επομένως, έχουμε: $\vec{r} = \rho\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}}$

$$\begin{Bmatrix} \hat{\rho} = \hat{x}\cos(\varphi) + \hat{y}\sin(\varphi) \\ \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin(\varphi) + \hat{y}\cos(\varphi) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{\hat{\rho}} = -\hat{x}\sin(\varphi)\dot{\varphi} + \hat{y}\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{\hat{\varphi}} = -\hat{x}\cos(\varphi)\dot{\varphi} - \hat{y}\sin(\varphi)\dot{\varphi} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{\hat{\rho}} = \hat{\varphi}\dot{\varphi} \\ \dot{\hat{\varphi}} = -\hat{\rho}\dot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

[Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και με ένα σκεπτικό ανάλογο αυτού που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο: $\dot{\hat{\rho}} = \dfrac{d\hat{\rho}}{dt} = \dfrac{d\hat{\rho}}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\hat{\varphi}\left|\hat{\rho}\right|d\varphi}{d\varphi}\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{\hat{\rho}} = \dot{\varphi}\hat{\varphi}}$]

Άρα, η προηγούμενη σχέση δίνει $\boxed{\dot{\vec{r}} \equiv \vec{\upsilon} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}}$ (ακτινική και γωνιακή συνιστώσα)

Για την επιτάχυνση έχουμε: $\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \left(\ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\hat{\rho}}\right) + \left(\dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + \rho\dot{\varphi}\dot{\hat{\varphi}}\right)$

Με σκεπτικό αντίστοιχο με τα προηγούμενα, υπολογίζουμε την χρονική παράγωγο του μοναδιαίου διανύσματος $\dot{\hat{\varphi}} = \dfrac{d\hat{\varphi}}{dt} = \dfrac{-\hat{\rho}\left|\hat{\varphi}\right|d\varphi}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{\hat{\varphi}} = -\hat{\rho}\dot{\varphi}}$.

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, και ομαδοποιώντας ακτινικές και γωνιακές συνιστώσες, παίρνουμε

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}}$$

Ακτινική επιτάχυνση

Κεντρομόλος

Coriolis

Επιτρόχιος επιτάχυνση

Οι χαρακτηρισμοί, των συνιστωσών της επιτάχυνσης, με τους όρους «ακτινική», «κεντρομόλος», «Coriolis» και «γωνιακή» θα εξηγηθούν πιο αναλυτικά στην ενότητα με τίτλο «Μη-αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς», με αναφορά και στις αντίστοιχες αδρανειακές (ή, ψευδο-) δυνάμεις.
Για την ώρα, μπορούμε να σχολιάσουμε τις επιμέρους συνιστώσες της επιτάχυνσης ως εξής:

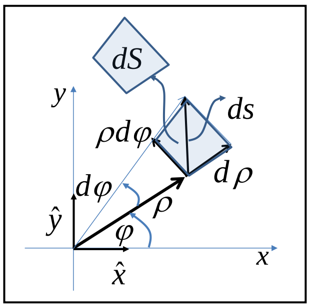
$\boxed{\vec{a}_{ακτ} = (\ddot{\rho})\hat{\rho}}$: έχει τη διεύθυνση της τοπικής ακτίνας καμπυλότητας και είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της ακτινικής ταχύτητας

$\boxed{\vec{a}_{κεντρ} = \left(-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho}}$: έχει τη διεύθυνση της τοπικής ακτίνας καμπυλότητας και είναι η γενίκευση της γνωστής κεντρομόλου επιτάχυνσης $\left(R\omega^2\right)$

$\boxed{\vec{a}_{Coriolis} = (2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi}}$: έχει εφαπτομενική διεύθυνση και είναι ανάλογη της ακτινικής ταχύτητας και του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής συντεταγμένης

$\boxed{\vec{a}_{γωνιακη} = (\rho\ddot{\varphi})\hat{\varphi}}$: έχει εφαπτομενική διεύθυνση και είναι ανάλογη της δεύτερης παραγώγου της γωνιακής συντεταγμένης

Γεωμετρικά μεγέθη (μήκος, επιφάνεια) σε επίπεδες πολικές συνταταγμένες



Όσον αφορά στο στοιχειώδες μήκος ds και στη στοιχειώδη επιφάνεια dS, που αντιστοιχούν στις στοιχειώδεις μετατοπίσεις $(d\rho, d\varphi)$, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, μπορούν να υπολογιστούν με γεωμετρικά επιχειρήματα, ως εξής:

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2}$$

$$dS = (d\rho)(\rho d\varphi) = \rho d\rho d\varphi$$

Τα ίδια αποτελέσματα θα μπορούσαν να προκύψουν μέσω των συντελεστών κλίμακας και της Ιακωβιανής ορίζουσας του μετασχηματισμού (ως άσκηση).

Ταχύτητα και Επιτάχυνση σε Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Ορίζουμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z), και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$, ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο χώρο (x, y, z), σύμφωνα με τις σχέσεις

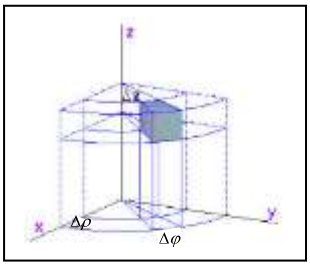
$$\left\{\begin{matrix} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \\ z = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{matrix}\right\} \quad (1α,β)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις γίνεται φανερό ότι η τρίτη συντεταγμένη είναι ταυτόσημη με την αντίστοιχη καρτεσιανή συντεταγμένη, οπότε οι εκφράσεις για τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης, αποτελούν εύκολες γενικεύσεις των αντίστοιχων εκφράσεων των πολικών συντεταγμένων (στο βαθμό, μάλιστα, που η τρίτη συντεταγμένη είναι ανεξάρτητη από τις άλλες δύο).

Άρα: $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \left(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}}\right) + \dot{z}\hat{z}$ (αφού το $\hat{z}$ είναι ανεξάρτητο του χρόνου)

Επομένως: $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{\upsilon} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z}$, και $\vec{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho}+\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}+\ddot{z}\hat{z}$

Το σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων είναι χρήσιμο στις περιπτώσεις προβλημάτων τα οποία παρουσιάζουν κυλινδρική συμμετρία, με αποτέλεσμα να απλοποιούνται εξαιρετικά οι εκφράσεις των κινητικών μεγεθών.



Όσον αφορά στα γεωμετρικά μεγέθη, μήκος και όγκος, τα οποία προκύπτουν από τις στοιχειώδεις μεταβολές $(d\rho, d\varphi, dz)$, εύκολα προκύπτει ότι:

$$ds=\sqrt{(d\rho)^2+(\rho d\varphi)^2+(dz)^2}$$

$$dV=(d\rho)(\rho d\varphi)(dz)=\rho d\rho d\varphi dz$$

Για τις επιφάνειες διακρίνουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις

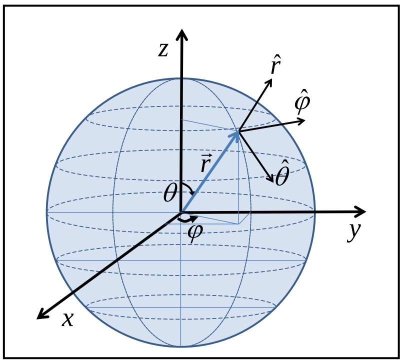
$$dS_{(d\rho,d\varphi)}=(d\rho)(\rho d\varphi)=\rho d\rho d\varphi$$

$$dS_{(d\rho,dz)}=(d\rho)(dz)=d\rho dz$$

$$dS_{(d\varphi,dz)}=(\rho d\varphi)(dz)=\rho d\varphi dz$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν (ως άσκηση) και μέσω των συντελεστών κλίμακας και της Ιακωβιανής ορίζουσας του μετασχηματισμού.

Ταχύτητα και Επιτάχυνση σε Σφαιρικές Συντεταγμένες



Ορίζουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,φ), ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z), σύμφωνα με το διπλανό σχήμα και τις σχέσεις

$$\left\{\begin{array}{l} x=r\sin\theta\cos(\varphi) \\ y=r\sin\theta\sin(\varphi) \\ z=r\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \varphi=\arctan(y/x) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi})$, περιγράφονται, συναρτήσει των μοναδιαίων $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ από τις σχέσεις:

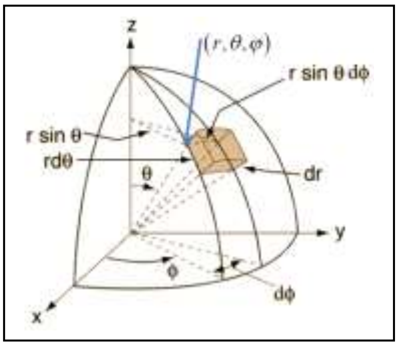
$$\left\{\begin{array}{l} \hat{r}=\hat{x}\sin\theta\cos\varphi+\hat{y}\sin\theta\sin\varphi+\hat{z}\cos\theta \\ \hat{\theta}=\hat{x}\cos\theta\cos\varphi+\hat{y}\cos\theta\sin\varphi-\hat{z}\sin\theta \\ \hat{\varphi}=-\hat{x}\sin\varphi+\hat{y}\cos\varphi \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Ξεκινώντας από τη σχέση $\vec{r}=r\hat{r}$, παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο, (θεωρώντας ότι $r=r(t), \theta=\theta(t), \varphi=\varphi(t)$ είναι γνωστές συναρτήσεις του χρόνου, καθώς και τα αντίστοιχα μοναδιαία, σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις (2)), και ομαδοποιούμε κατάλληλα ως προς τα μοναδιαία διανύσματα, οπότε καταλήγουμε στις εξής σχέσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση, σε σφαιρικές συντεταγμένες:

Ταχύτητα:
$$\dot{\vec{r}} \equiv \vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{\rho} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}, \tag{3}$$

Επιτάχυνση:
$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{\upsilon}} \equiv \vec{a} = &\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \\ &+\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} \\ &+\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\varphi} \end{aligned} \tag{4}$$

Τα γεωμετρικά μεγέθη (μήκη και επιφάνειες) σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορούν να υπολογισθούν με ανάλογο τρόπο

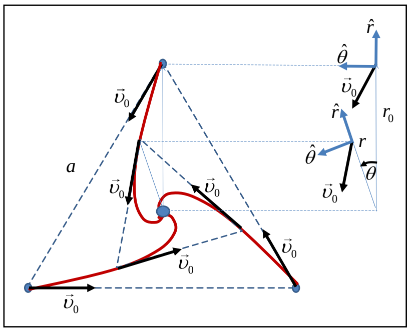


Αν (r,θ,φ): οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου, και προκαλέσουμε διαφορικές μεταβολές: $(dr,d\theta,d\varphi)$, τότε, όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα, οι τρεις στοιχειώδεις μεταβολές $(dr,d\theta,d\varphi)$ δημιουργούν στοιχειώδη μήκη $(dr,rd\theta,r\sin\theta d\varphi)$, τα οποία σχηματίζουν, ανά δύο, αντίστοιχες διαφορικές επιφάνειες, και επίσης έναν στοιχειώδη διαφορικό όγκο.

Υπολογίστε (ως άσκηση), (α) το διαφορικό διάστημα ds, που αντιστοιχεί στη «διαγώνιο» του διαφορικού όγκου, (β) το εμβαδόν των τριών διαφορικών επιφανειών (που ορίζουν, με τις απέναντί τους, τον διαφορικό όγκο), καθώς και (γ) τον διαφορικό όγκο.
[Για φανατικούς: συγκρίνεται με το φορμαλισμό των (h_1,h_2,h_3)].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.3.1 Τρεις μέλισσες βρίσκονται στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά *a*. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινάνε ταυτόχρονα και οι τρεις με ταχύτητα ίδιου μέτρου υ_0, έτσι ώστε η καθεμία να κατευθύνεται προς την επόμενη (αριστερόστροφα). Στη συνέχεια διατηρούν το μέτρο της ταχύτητάς τους αλλά μεταβάλλουν τον προσανατολισμό τους έτσι ώστε, σε κάθε χρονική στιγμή, να εξακολουθεί η καθεμία να κατευθύνεται προς την επόμενη (αριστερόστροφα). (α) Εξηγήστε γιατί, η ταχύτητα της καθεμίας, αν γραφεί σε πολικές συντεταγμένες, έχει σταθερές προβολές στα τοπικά μοναδιαία διανύσματα. (β) Από τη σχέση που προκύπτει από το ερώτημα (α), απαλείψτε το χρόνο και υπολογίστε την εξίσωση τροχιάς, της καθεμίας, σε πολικές συντεταγμένες $r = r(\theta)$. (γ) Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα του (α) με την σταθερότητα του μέτρου της ταχύτητας, ολοκληρώστε την κατάλληλη διαφορική εξίσωση και υπολογίστε τη συνάρτηση $r = r(t)$. (δ) Υπολογίστε τη συνολική διάρκεια της κίνησης μέχρι να συναντηθούν και οι τρεις στο κέντρο βάρους του τριγώνου.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
(α) Με δεδομένο ότι η διάταξη των κινητών είναι αρχικά στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου και ότι η κίνησή τους είναι απόλυτα συμμετρική (διατηρούν το μέτρο της ταχύτητάς τους και, κάθε στιγμή, το κάθε κινητό κινείται προς το αριστερόστροφα επόμενό του), συμπεραίνουμε ότι

θα βρίσκονται πάντα στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου και η ταχύτητα του καθενός θα είναι παράλληλη στην πλευρά του τριγώνου. Επομένως, αν περιγράψουμε την κίνηση ενός από τα κινητά με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων (r,θ), τότε, σε κάθε χρονική στιγμή, η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ θα έχει ίδιο προσανατολισμό ως προς τα τοπικά μοναδιαία διανύσματα $(\hat{r},\hat{\theta})$: $(\upsilon_\theta/\upsilon_r) = -\tan 30^o = -\sqrt{3}/3 = -b$.

(β) Σε πολικές συντεταγμένες, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, επομένως, η σταθερότητα του πηλίκου γράφεται:

$$\frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} = -b \Rightarrow r\frac{d\theta}{dt} = -b\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{-b} \Rightarrow \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} = -\frac{1}{b}\int_0^{\theta} d\theta \Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{\theta}{b} \Rightarrow \boxed{r = r_0 e^{-\theta/b}}$$ Η

καμπύλη $r = r_0 e^{-\theta/b}$ είναι γνωστή ως λογαριθμική έλικα ή σπείρα

(βλ., http://mathworld.wolfram.com/Whirl.html)

(γ) Ταχύτητα σταθερού μέτρου: $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \upsilon_0^2$

Από το ερώτημα (β) έχουμε $r = r_0 e^{-\theta/b} \quad \Rightarrow \dot{r} = -\frac{r_0}{b}e^{-\theta/b}\dot{\theta} = -\frac{r}{b}\dot{\theta} \quad \Rightarrow r\dot{\theta} = -b\dot{r}$

Αντικαθιστώντας το τελευταιο αποτέλεσμα στην προηγούμενη σχέση (ταχύτητα σταθερού μέτρου): $\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \upsilon_0^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 + b^2\dot{r}^2 = \upsilon_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \pm\frac{\upsilon}{\sqrt{1+b^2}}$

[

Αλλά από την προηγούμενη σχέση: $r\dot{\theta} = -b\dot{r} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{r}{b}\frac{d\theta}{dt} < 0$, επομένως επιλέγουμε το αρνητικό πρόσημο στην παράγωγο της ακτίνας, οπότε:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\upsilon}{\sqrt{1+b^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_{r_0}^{r} dr = -\frac{\upsilon}{\sqrt{1+b^2}}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \boxed{r(t) = r_0 - \frac{\upsilon t}{\sqrt{1+b^2}}}$$

Όπου r_0 είναι η αρχική απόσταση της κορυφής από κέντρο βάρους του τριγώνου, δηλ.: $r_0 = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Η συνολική διάρκεια της κίνησης $t_{\max}$ προκύπτει από τη σχέση

$r(t_{\max}) = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\upsilon_0 t_{\max}}{\sqrt{1+b^2}} \Rightarrow t_{\max} = \frac{r_0\sqrt{1+b^2}}{\upsilon_0}$. Αντικαθιστώντας : $\boxed{t_{\max} = \frac{2a}{3\upsilon_0}}$.

Από τις σχέσεις $r = r(\theta)$ και $r = r(t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την $\theta = \theta(t)$, πράγματι:

$$r = r_0 e^{-\theta/b} \Rightarrow \theta = b\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) = b\ln\left(\frac{r_0}{r_0 - \frac{\upsilon_0 t}{\sqrt{1+b^2}}}\right) \Rightarrow \boxed{\theta(t) = b\ln\left(\frac{r_0\sqrt{1+b^2}}{\upsilon_0(t_{\max}-t)}\right)}$$

Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό μήκος της τροχιάς κάθε κινητού

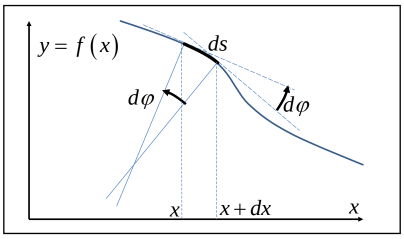
$$s_{\max} = \int_0^{t_{\max}} ds = \int_0^{t_{\max}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^{t_{\max}} \sqrt{(\upsilon_x)^2 + (\upsilon_y)^2}\,dt = \int_0^{t_{\max}} \upsilon\,dt = \upsilon_0 t_{\max} \Rightarrow \boxed{s_{\max} = \frac{2}{3}a}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παρατηρούμε ότι ενώ το μήκος της τροχιάς και ο χρόνος της διαδρομής είναι πεπερασμένος, εντούτοις, η τιμή της συνολικά διαγραφόμενης γωνίας τείνει (λογαριθμικά) στο άπειρο, $\boxed{\theta(t \to t_{\max}) \to \infty}$!!!.

Το αποτέλεσμα αυτο συσχετίζεται και με το γεγονός ότι, στο όριο $r \to 0$, η γωνία δεν είναι καλά ορισμένη. Επίσης από την $\theta = \theta(t)$ προκύπτει ότι $\dot{\theta} = \dfrac{b}{t_{\max} - t}$ και, επομένως, στο όριο $t \to t_{\max}$, και η γωνιακή ταχύτητα (ως κυκλική συχνότητα) τείνει στο άπειρο. Εντούτοις, η γωνιακή ταχύτητα $\upsilon_\theta = r\dot{\theta} = r(t)\dot{\theta}(t) = \dfrac{\upsilon_0 (t_{\max} - t)}{\sqrt{1+b^2}} \dfrac{b}{(t_{\max} - t)} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\theta = \dfrac{\upsilon_0 b}{\sqrt{1+b^2}} = \sigma\tau\alpha\theta.}$, που είναι σε συνέπεια και με το αποτέλεσμα $\upsilon_r = \dot{r} = \dfrac{-\upsilon_0}{\sqrt{1+b^2}}$, οπότε : $\upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2 = \upsilon_0^2$

Παράδειγμα 1.3.2 (α) Επίπεδη καμπύλη-τροχιά περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$. Θεωρήστε ένα στοιχειώδες τόξο ds της τροχιάς, (τα άκρα του οποίου αντιστοιχούν στα σημεία x και x+dx), φέρετε εφαπτόμενες στα άκρα του, χαράξτε σε κάθε εφαπτόμενη κάθετο στο αντίστοιχο σημείο επαφής. Ορίστε το σημείο τομής των δύο καθέτων ως τοπικό κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς και, μέσω της σχέση dφ=ds/ρ, (όπου dφ: η γωνία των δύο καθέτων στα άκρα του ds), δείξτε ότι η τοπική ακτίνα καμπυλότητας είναι $\rho = \dfrac{\left(1+f'^2\right)^{3/2}}{f''}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τόξο

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+f'^2}\,dx$$

Χαράσσοντας εφαπτόμενες στα άκρα του *ds*, υπολογίζουμε την αντίστοιχη στοιχειώδη γωνία *dφ*.
Η τοπική ακτίνα καμπυλότητας ρ ορίζεται από τη σχέση

$$d\varphi = \frac{ds}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1+f'^2}\,dx}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1+f'^2}}{d\varphi / dx},$$

όπου $\varphi = \arctan\{f'\}$.

Επομένως $d\varphi / dx = \left(\arctan\{f'\}\right)' = \dfrac{f''}{(f')^2 + 1}$. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε για την τοπική ακτίνα καμπυλότητας: $\boxed{\rho = \dfrac{\left(1+f'^2\right)^{3/2}}{f''}}$

(β) Αυτοκίνητο ακολουθεί την επίπεδη τροχιά: $y = A\cos kx$, κινούμενο με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ_0. (β1) Αν ο συντελεστής τριβής αυτοκινήτου-τροχιάς είναι μ, υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας υ_0, έτσι ώστε η κίνηση να γίνεται με ασφάλεια (στα σημεία μέγιστης καμπυλότητας, δηλ. στα σημεία ελάχιστης ακτίνας καμπυλότητας). (β2) Υπάρχουν σημεία όπου η ακτίνα καμπυλότητας είναι άπειρη; (τοπικά «ευθύγραμμα τμήματα» μηδενικού μήκους !)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Η κίνηση είναι ασφαλής όσο η μέγιστη τιμή της τριβής είναι επαρκής ως κεντρομόλος δύναμη στα σημεία της τροχιάς με τη μικρότερη τοπική ακτίνα καμπυλότητας:

$$m\frac{\upsilon_0^2}{\rho} = T \le \mu m g \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{0,\min}^2 \le \mu g \rho_{\min} = \mu g \left|\frac{\left(1+f'^2\right)^{3/2}}{f''}\right|_{\min}$$

Για την συγκεκριμένη συνημιτονοειδή τροχιά, η μέγιστη ταχύτητα ασφαλούς πορείας υπολογίζεται

$$\upsilon_{0,\min}^2 \le \mu g \rho_{\min} = \mu g \left| \frac{\left(1+f'^2\right)^{3/2}}{f''} \right|_{\min} = \mu g \left| \frac{\left(1+A^2k^2\sin^2(kx)\right)^{3/2}}{Ak^2\cos(kx)} \right|_{\min}$$

Όπου, στον δεξιό όρο αυτής της παράστασης πρέπει να υπολογιστεί η μικρότερη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας, η οποία λαμβάνεται για την μικρότερη τιμή του αριθμητή και την μεγαλύτερη τιμή του παρονομαστή, οι οποίες λαμβάνονται «ταυτόχρονα», για x_0 τέτοιο ώστε: $kx_0 = 2\pi n \Rightarrow x_{0,n} = 2\pi n / k, \quad n = 0,1,2,...$

Επομένως, η μέγιστη τιμή ασφαλούς ταχύτητας είναι $\boxed{\upsilon_{0,\max}^2 = \mu g / \left(Ak^2\right)}$

(γ) Αυτοκίνητο ακολουθεί την επίπεδη τροχιά: $y = A\cos kx$ έτσι ώστε η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των x να έχει τη σταθερή τιμή υ_0. (γ_1) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του κινητού συναρτήσει του x και των A, k, υ_0. (γ_2) Να γραφεί το ολοκλήρωμα υπολογισμού του μήκους της τροχιάς $s = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+\left(dy/dx\right)^2}\,dx$, και να βρεθούν τα κατάλληλα όρια του ολοκληρώματος προκειμένου το ολοκλήρωμα να αντιστοιχεί στο τμήμα της τροχιάς ανάμεσα στις δύο πρώτες διελεύσεις από τον άξονα των x.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(γ_1) $\upsilon = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^2} = \upsilon_0\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Αντικθιστώντας την y=y(x), παίρνουμε: $\upsilon = \upsilon_0\sqrt{1+\left(Ak\sin kx\right)^2}$

Επίσης: $\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \upsilon_y = \upsilon_x\frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\upsilon_y = -\upsilon_0 Ak\sin kx}$

$$a = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_y}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_y}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^2} = \sqrt{0+\upsilon_0^2\left(\frac{d\upsilon_y}{dx}\right)^2}$$

Τελικά: $a = \upsilon_0\left(\frac{d\upsilon_y}{dx}\right) \Rightarrow \boxed{a = -\upsilon_0^2 Ak^2\cos kx}$

(γ_2) $s = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(dy/dx\right)^2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2k}\sqrt{1+A^2k^2\sin^2(kx)}\,dx$

Αν θέλαμε να υπολογίσουμε τις προβολές της κίνησης του κινητού στους δύο άξονες, έχουμε:

$$\upsilon = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^2} = \upsilon_x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_x = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}}$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}\upsilon_x \Rightarrow \boxed{\upsilon_y = \frac{\upsilon_0\left(dy/dx\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828\,4590\,4523\,4360\,\ldots$$

Don't analyze it !

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\pi = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 3.14159265358979323\,84..$$

....κι όμως : $-\left(e^{i\pi}\right) = 1\,(!!!)$