• Πολυωνυμικές εξισώσεις

I: $az^2+bz+\gamma=0$, $a,b,\gamma\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

Εάν $\Delta=b^2-4a\gamma<0$ ρίζες είναι $z_{1,2}=\dfrac{b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

π.χ. $z^2+z+1=0$

$z_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ $<$ $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

! Οι ρίζες είναι συζυγείς

II: Πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού ≥ 2 με συντελεστές $\in\mathbb{R}$

Έστω $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$, $a_k\in\mathbb{R}$, $0\leq k\leq n$

<u>Πρόταση 1</u> Αν $z_0\in\mathbb{C}$ ρίζα το P τότε <u>και</u> ο $\bar{z}_0$ είναι ρίζα του P

Απόδειξη: $P(\bar{z}_0)=\sum_{k=0}^{n}a_k\bar{z}_0^k=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\bar{z}_0^{\,k}=\overline{\sum_{k=0}^{n}a_kz_0^k}=\overline{P(z_0)}=0$

Πόρισμα: Εάν $z_0\in\mathbb{C}-\{\mathbb{R}\}$ ρίζα του P, τότε το P διαιρείται με το $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)=$

$=z^2-(z_0+\bar{z}_0)z+|z_0|^2=z^2-2Re(z_0)z+|z_0|^2$

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί η $P(z)=0$, όπου $P(z)=z^4-z^3+2z^2-z+1$

Δίνεται ότι $P(i)=0$

Λύση: Από το πόρισμα $\Rightarrow$ το $P(z)$ διαιρείται με το z^2+1

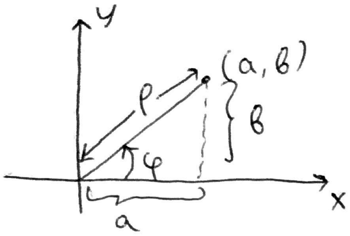
$$\begin{array}{l|l} z^4-z^3+2z^2-z+1 & z^2+1 \\ \hline 0 & \Pi(z)=z^2-z+1 \end{array}$$

Λύνω την $z^2-z+1=0 \Rightarrow z_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Τελικά οι ρίζες είναι: $\pm i$, $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

• Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Έστω $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ δηλαδή $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$



$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \rho\cos\varphi \\ \beta &= \rho\sin\varphi \\ \rho &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |z| \end{aligned}\right\} \begin{aligned} z &= \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi \\ z &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (1) \end{aligned}$$

Η (1) είναι μία τριγωνομετρική μορφή του z

Σχόλιο: Εάν η φ ικανοποιεί την (1), τότε και η $2k\pi+\varphi$ ικανοποιεί την (1), $\forall k \in \mathbb{Z}$

Για δοσμένο $z \neq 0$, ένα οποιοδήποτε $\varphi \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται όρισμα του z

<u>Παράδειγμα</u>: $z = \sqrt{3} - i$

$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ $\qquad z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

Άρα το $-\frac{\pi}{6}$ είναι ένα όρισμα του z

<u>Πρόταση 2</u>: Εαν $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$ δύο ορίσματα του $z (z \neq 0)$, τότε $\varphi_1 = \varphi_2$

Απόδειξη: Έχουμε $\left.\begin{aligned} z &= |z|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \\ z &= |z|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 &= \sin\varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$

επιπλέον $\left.\begin{aligned} -\pi < \varphi_1 \leq \pi \\ -\pi < \varphi_2 \leq \pi \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Leftrightarrow \\ &\cdot(-1) \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} -\pi &< \varphi_1 \leq \pi \\ -\pi &\leq -\varphi_2 < \pi \quad (+) \end{aligned}$

$$-2\pi < \varphi_1 - \varphi_2 < 2\pi \Rightarrow -2\pi < 2k\pi < 2\pi \Rightarrow -1 < k < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k = 0$ επομένως $\varphi_1 = \varphi_2$

<u>Ορισμός 1</u>: Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Το μοναδικό όρισμα του z που ανήκει στο $(-\pi, \pi]$ ονομάζεται πρωτεύον όρισμα του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}(z)$ π.χ. $\mathrm{Arg}(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$

• Εκθετική συνάρτηση: e^z, $z\in\mathbb{C}$

<u>Κίνητρο</u>: $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $\quad e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\dots$

Άτυπα θέτουμε όπου x το βi, $\beta\in\mathbb{R}$ και παίρνουμε

$$e^{\beta i} = 1+\frac{\beta}{1!}\cdot i-\frac{\beta^2}{2!}-\frac{\beta^3}{3!}i+\frac{\beta^4}{4!}+\frac{\beta^5}{5!}i-\frac{\beta^6}{6!}+\dots=$$

$i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^5=i$, $i^6=-1$

$$=\left(1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^6}{6!}+\dots\right)+i\left(\beta-\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^5}{5!}-\dots\right)=$$

$$=\cos\beta+i\sin\beta$$

<u>Ορισμός 2</u>: $\forall\,\beta\in\mathbb{R}$, ορίζουμε $e^{\beta i}=\cos\beta+i\sin\beta$

π.χ. $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Ορισμός 3</u>: Εάν $z=a+\beta i\in\mathbb{C}$, $a,\beta\in\mathbb{R}$

ορίζουμε $e^z=e^a\cdot e^{\beta i}=e^a(\cos\beta+i\sin\beta)$

π.χ. $e^{1+i\frac{\pi}{4}}=e^1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Σχόλιο: $|e^z|=e^a$, το β είναι όρισμα του e^z

<u>Ιδιότητες</u>

(α) $|e^{i\beta}|=1$, $\forall\,\beta\in\mathbb{R}$ (Δεν υπάρχει $e^z>0$)

(β) $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $|e^z|=e^{Re(z)}$ και $e^z\neq 0$

(γ) $\forall\, z,w\in\mathbb{C}$, $e^{z+w}=e^z\cdot e^w$ [Για την απόδειξη θέτουμε $z=a+\beta i$, $w=\gamma+\delta i$ και χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$]

(δ) $(e^z)^k=e^{kz}$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$

(ε) $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$

(στ) Η $z\longmapsto e^z$ είναι $2\pi i$-περιοδική δηλαδή $e^{z+2k\pi i}=e^z$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$

Πράγματι αν $z=a+\beta i$, $z+2k\pi i=a+(\beta+2k\pi)i$

$$e^{z+2k\pi i}=e^a[\cos(\beta+2k\pi)+i\sin(\beta+2k\pi)]=e^a(\cos\beta+i\sin\beta)=e^z$$

Πρόταση 3:

Εαν $z, w \in \mathbb{C}$ τότε $e^z = e^w \iff [\exists k \in \mathbb{Z} : z - w = 2k\pi i]$

Απόδειξη: Έστω $z = a + bi$, $w = \gamma + \delta i$

$e^z = e^w \Rightarrow e^a(\cos b + i\sin b) = e^\gamma(\cos\delta + i\sin\delta)$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι τριγωνομετρικές μορφές του ίδιου αριθμού

$$\Rightarrow \begin{cases} e^a = e^\gamma \Rightarrow a = \gamma \\ b - \delta = 2k\pi, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Τελικά $z - w = (a + bi) - (\gamma + \delta i) = (b - \delta)i = 2k\pi i$

Η ανάποδη κατεύθυνση έχει ήδη αποδειχθεί

π.χ. Να λυθεί η εξίσωση $e^z = -2 = 2e^{i\pi} = e^{\ln 2} e^{i\pi} = e^{\ln 2 + i\pi}$

$\Rightarrow z = \ln 2 + i\pi + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow z = \ln 2 + \pi i(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$