Δευτέρα 30/5/22 20η Διάλεξη: Κοκκίνης 10

Π.Α.Τ $\left\| \begin{array}{l} y' = f(x, y(x)), \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{array} \right.$

- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ομοιόμορφη διαμέριση
  $h = \frac{b-a}{n}$
- $y_k \cong y(x_k)$

Μονοβηματικές | Πολυβηματικές

1. Euler ✓
2. Βελτιωμένη Euler ✓
3. Μέθοδοι Taylor τάξης m
   $m=1 \rightarrow$ Euler
   $m=2 \rightarrow$ Taylor τάξης 2 ✓
4. Μέθοδοι Runge-Kutta

- ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1ης τάξης
- ΠΑΤ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

- 3. Μέθοδοι Taylor (συνέχεια)

$m=2$:

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f\right)_k, \quad k=0,1,\dots,n-1$$

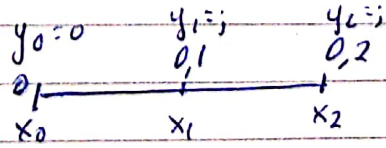
Παράδειγμα Δίνεται το Π.Α.Τ $\left\| \begin{array}{l} y' = -y + e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Taylor τάξης 2 με βήμα $h=0,1$ να βρεθεί μία προσέγγιση της λύσης στο $x=0,2$

$f(x,y) = -y + e^{-x}$

$a = x_0 = 0$

$y_0 = 0$



$y_{k+1} = y_k + h(-y_k + e^{-x_k}) + \frac{h^2}{2}\left[-e^{-x_k} + (-1)(-y_k + e^{-x_k})\right], \quad k=0,1$

$y_{k+1} = y_k + h(-y_k + e^{-x_k}) + \frac{h^2}{2}\left[y_k - 2e^{-x_k}\right], \quad k=0,1$

$y_1 = y_0 + h(-y_0 + e^{-x_0}) + \frac{h^2}{2}\left[y_0 - 2e^{-x_0}\right],$

$\boxed{y_1 = 0,09}$

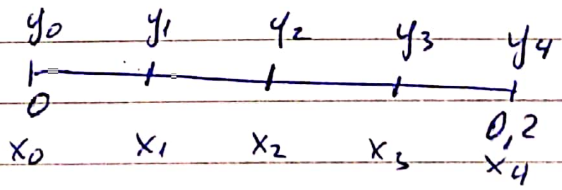
$y_2 = y_1 + h(-y_1 + e^{-x_1}) + \frac{h^2}{2}(y_1 - 2e^{-x_1})$

$\boxed{y_2 = 0,16288536} \cong y(0,2)$

Αν η ακριβής λύση είναι η $y(x) = xe^{-x}$ ποιο το ολικό σφάλμα στο 0,2;

$y_2 - y(0,2) = -0,0008608$

Αν ήταν $h=0,05$:




Το σφάλμα θα ήταν περίπου το 1/4, αφού έχουμε 1/2 βήμα από πριν, και η μέθοδος είναι τάξης 2.

Πράγματι, $y_4 - y(0,2) = -0,00020633$

$\underline{m=3}$ $\quad y_{k+1} = y_k + h\underbrace{y_k'}_{f(x_k,y_k)} + \frac{h^2}{2!}y_k'' + \frac{h^3}{3!}\underbrace{y_k'''}_{\text{περίπλοκος όρος}}$

## 4. Μέθοδοι Runge-Kutta

Επινοήθηκαν ώστε να πετυχαίνουν μεγάλη ακρίβεια αποφεύγοντας υπολογισμό παραγώγων της $f$

• Ένα παράδειγμα μεθόδου Runge-Kutta $2^{ης}$ τάξης

$$K_1 = f(x_k, y_k)$$
$$K_2 = f(x_k + h, y_k + hK_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

• Ένα παράδειγμα μεθόδου Runge-Kutta $4^{ης}$ τάξης (κλασική $4^{ης}$ τάξης)

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3) \end{cases}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

• Ένα παράδειγμα μεθόδου R-K πεπλεγμένης

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + h, y_k + h(K_1 + K_2)) \end{cases}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

$y_1' = f_1(x, y_1, \dots y_n), \quad y_1(a) = y_{10}$

$y_2' = f_2(x, y_1, \dots y_n), \quad y_2(a) = y_{20}$

$y_3' = f_3(x, y_1, \dots y_n), \quad y_3(a) = y_{30}$

$\vdots$

$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n), \quad y_n(a) = y_{n0}$

ή

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \end{array} \right. , \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

Οι ~~απρ~~ αριθμητικές μέθοδοι που περιγράψαμε γενικεύονται εύκολα για συστήματα διαφ. εξ

π.χ. η μέθοδος Euler: $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), \; k = 0, 1, \dots n-1$

$y_k, y_{k+1} \in \mathbb{R}^n, \quad f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

**Παράδειγμα:** $y_1' = y_1 + y_2, \quad y_1(0) = 1$

$y_2' = y_1 + y_2, \quad y_2(0) = 0$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler με βήμα $h=0,1$ να υπολογίσετε μια προσέγγιση της λύσης στο σημείο $x = 0,2$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0,1 & 0,2 \\ \| & \| & \| \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{array}$$

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$$

Euler

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)} \longrightarrow \begin{aligned} y_{1,k+1} &= y_{1,k} + h(y_{1,k} + 4y_{2,k}) \\ y_{2,k+1} &= y_{2,k} + h(y_{2,k} + 4y_{1,k}) \end{aligned} \quad k = 0,1$$

$$y_{11} = y_{10} + h(y_{1,0} + 4y_{20}) = 1,1$$

$$y_{2,1} = y_{20} + h(y_{20} + 4y_{10}) = 0,1$$

$$y_{12} = y_{11} + h(y_{11} + 4y_{21}) = \boxed{1,25}$$

$$y_{22} = y_{21} + h(y_{21} + 4y_{11}) = \boxed{0,22}$$

Σε συστήματα και σε Δ.Ε ανώτερης τάξης θα ζητηθεί μόνο Euler

# Προβλήματα Αρχικών Τιμών Ανώτερης Τάξης

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad a \le x \le b$$

$$y^{(i-1)}(a) = y_{i0}, \quad i = 1, \dots, m$$

$\downarrow$

$y(a) = y_{10}$

$y'(a) = \dots$

$y''(a) = \dots$

$y^{(m-1)}(a) = \dots$

Θέτουμε $y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad y_m = y^{(m-1)}$

$$y_1' = y_2, \quad y_1(a) = y_{10}$$
$$y_2' = y_3, \quad y_2(a) = y_{20}$$
$$\vdots$$
$$y_m' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad y_m(a) = y_{m0}$$

**Παράδειγμα:** $y''' = -xy$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

Χρησιμοποιώντας Euler με $h = 0,2$ να υπολογίσετε με προσέγγιση τις λύσεις στο $x = 0,4$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0,2 | 0,4 |
| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y_1' &= y_2, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2'' &= y_3, \quad y_2(0) = 0 \\ y_3' &= -x\, y_1, \quad y_3(0) = 1 \end{aligned}\right.$$

Euler:

$$\left.\begin{aligned} y_{1,k+1} &= y_{1,k} + h y_{2,k} \\ y_{2,k+1} &= y_{2,k} + h y_{3,k} \\ y_{3,k+1} &= y_{3,k} + h(-x_k \cdot y_{1,k}) \end{aligned}\right| \; k=0,1$$

$y_{1,1} = 1$ $\qquad$ $y_{1,2} = 1{,}04 \cong y_1(x_2) = y(x_2)$

$y_{2,1} = 0{,}2$ $\qquad$ $y_{2,2} = 0{,}4$

$y_{3,1} = 1$ $\qquad$ $y_{3,2} = 0{,}96$ $\qquad$ δε χρειάζονται