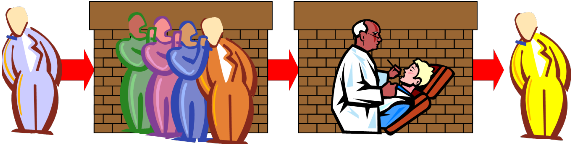
Εισαγωγή στη Θεωρία Αναμονής

Μιλτιάδης Αναγνώστου

25/5/2022

Σύστημα αναμονής



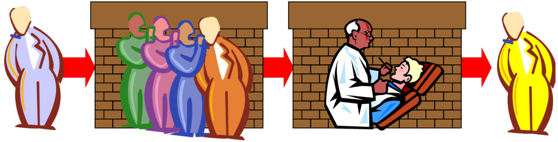
Ένα σύστημα αναμονής προσδιορίζεται όταν δοθούν τα εξής:

- Μια διαδικασία αφίξεων «πελατών».
- Η χωρητικότητα (σε αριθμό πελατών) του χώρου αναμονής (πελάτες που βρίσκουν τον χώρο αναμονής πλήρη απορρίπτονται).
- Μια διευθέτηση για τον τρόπο που φτάνουν οι πελάτες στους εξυπηρετούντες (servers), δηλαδή ποιος πελάτης προηγείται.
- Ένας αριθμός από εξυπηρετούντες (servers).
- Μια διαδικασία εξυπηρέτησης των πελατών από τους εξυπηρετούντες (περιλαμβανομένων και πιθανών διακοπών της εξυπηρέτησης).

Σύστημα αναμονής $A/B/n$

Ένας σύντομος (όχι οπωσδήποτε πλήρης) προσδιορισμός ενός συστήματος αναμονής γίνεται με την κωδικοποίηση $A/B/n$, όπου

- A είναι μια διαδικασία αφίξεων, π.χ. αφίξεις Poisson,
- B είναι μια διαδικασία εξυπηρέτησης, π.χ. ανεξάρτητη εξυπηρέτηση ανά πελάτη με διάρκεια που χαρακτηρίζεται από εκθετική κατανομή,
- n αριθμός των servers.



A: Στατιστική περιγραφή αφίξεων

B: Στατιστική περιγραφή χρόνου εξυπηρέτησης
n: Αριθμός εξυπηρετούντων

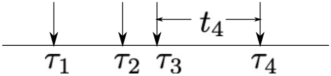
Μεγέθη που θέλουμε να προσδιορίσουμε

Η διαδικασίας ανάλυσης ενός συστήματος αναμονής μέσω της θεωρίας αναμονής έχει στόχο να προσδιορισθούν οι ιδιότητες στοχαστικών διαδικασιών κυρίως για τα εξής μεγέθη:

- Τον χρόνο αναμονής,
- το μήκος της ουράς αναμονής,
- τον χρόνο εξυπηρέτησης,
- τον συνολικό χρόνο που θα δαπανήσει ένας πελάτης στο σύστημα,
- την πιθανότητα απόρριψης πελατών,
- την διάρκεια μιας περιόδου που το σύστημα είναι απασχολημένο,
- την διάρκεια μιας περιόδου που το σύστημα είναι κενό.

Περιγραφή των αφίξεων

- Οι αφίξεις μπορούν να περιγράφονται ως μια διαδικασία σημείων στο χρόνο, όπου τ_n είναι η χρονική στιγμή της άφιξης του n-οστού πελάτη.



- Εναλλακτικά μπορούν να περιγράφονται με τις αποστάσεις ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις, δηλ. $t_n = \tau_n - \tau_{n-1}$.
- Μπορούμε να ορίσουμε την κατανομή του χρόνου μεταξύ αφίξεων ως
$$\Pr\{t_n \leq t\} = A_n(t)$$
- Οι παραπάνω τ.μ. είναι εν γένει εξαρτημένες μεταξύ τους, οπότε η $A_n(t)$ αποτελεί πλήρη περιγραφή των αφίξεων μόνον αν είναι ανεξάρτητες.
- Συχνά υποθέτουμε ότι είναι και της ίδιας κατανομής, οπότε
$$\Pr\{t_n \leq t\} = A(t)$$

Χρόνος εξυπηρέτησης, χρόνος αναμονής

- Τον χρόνο x_n που χρειάζεται για να εξυπηρετηθεί ο πελάτης C_n μπορούμε να τον ορίσουμε μέσω μιας κατανομής, αν οι χρόνοι είναι ανεξάρτητες τ.μ.

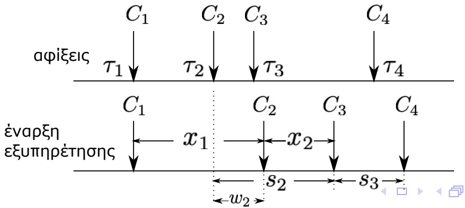
$$\Pr\{x_n \leq x\} = B_n(x)$$

- Συχνά υποθέτουμε ότι είναι και της ίδιας κατανομής, οπότε

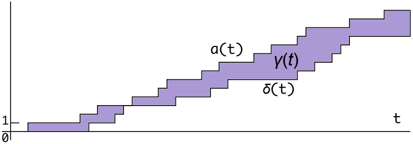
$$\Pr\{x_n \leq x\} = B(x)$$

- Ορίζουμε τον χρόνο αναμονής w_n στην ουρά για τον πελάτη C_n.
- Τότε ο συνολικός χρόνος παραμονής του C_n στο σύστημα είναι

$$s_n = w_n + x_n$$



Νόμος του Little, I



- Έστω $a(t)$ ο αριθμός των αφίξεων σ' ένα σύστημα στο διάστημα $(0, t)$ και $\delta(t)$ ο αριθμός των αναχωρήσεων στο ίδιο διάστημα.
- Ο αριθμός όσων βρίσκονται μέσα στο σύστημα στο χρόνο t είναι

$$N(t) = a(t) - \delta(t)$$

- Έστω λ_t ο μέσος ρυθμός αφίξεων στο διάστημα $(0, t)$, άρα

$$\lambda_t = a(t)/t$$

Νόμος του Little, II

- Έστω S_t ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα για το διάστημα. Αν $\gamma(t)$ είναι το εμβαδό ανάμεσα στις δύο γραμμές (σκιασμένο), αυτό είναι τα συνολικά «πελατο-δευτερόλεπτα». Άρα ο χρόνος ανά πελάτη είναι

$$S_t = \frac{\gamma(t)}{a(t)}$$

- Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$\overline{N(t)} = \frac{\gamma(t)}{t}$$

- Άρα

$$\lambda_t S_t = \frac{a(t)}{t}\frac{\gamma(t)}{a(t)} = \frac{\gamma(t)}{t} = \overline{N(t)}$$

Νόμος του Little, III

- Για $t \to \infty$:

$$\overline{N} = \lambda S$$

Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα είναι ίσος με τον ρυθμό αφίξεων επί το μέσο χρόνο παραμονής (νόμος του Little).

Διάφορες ειδικές διαδικασίες

Markov Μια στοχαστική διαδικασία έχει την ιδιότητα Markov εφόσον ισχύει

$$\begin{aligned} & \Pr\{X(t_{n+1}) = x_{n+1}/X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n\} \\ = & \Pr\{X(t_{n+1}) = x_{n+1}/X(t_n) = x_n\} \end{aligned}$$

όπου $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$.

Γεννήσεων - θανάτων Σε μια διαδικασία γεννήσεων - θανάτων οι τιμές της $X(t)$ είναι ακέραιες και κάθε μεταβολή είναι το πολύ κατά 1 προς τα πάνω ή προς τα κάτω.

Τυχαίος περίπατος Η ακολουθία τ.μ. S_n είναι τυχαίος περίπατος αν $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όπου X_i είναι ανεξάρτητες τ.μ. με την ίδια κατανομή.

Διαδικασία ανανέωσης είναι μια διαδικασία $X(t)$ για την οποία ορίζουμε σημεία στον άξονα του χρόνου έτσι ώστε το n-οστό σημείο να είναι στη θέση $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όπου οι τ.μ. είναι θετικές, ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή. Σε κάθε σημείο η τιμή της διαδικασίας αυξάνεται κατά ένα.

Διακριτές αλυσίδες Markov

- Η ακολουθία τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ σχηματίζει αλυσίδα διακριτού χρόνου αν για κάθε n ($n = 1, 2, \ldots$) ισχύει

$$\begin{aligned} & \Pr\{X_n = i_n | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_{n-1} \\ = \; & i_{n-1}\} = \Pr\{X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}\} \end{aligned} \tag{1}$$

- Αν οι πιθανότητες μετάβασης είναι ανεξάρτητες του n η αλυσίδα λέγεται *ομογενής* και μπορούμε να ορίσουμε την πιθ.

$$p_{ij} = \Pr\{X_n = j | X_{n-1} = i\}$$

καθώς και την πιθ. μετάβασης σε m βήματα

$$p_{ij}^{(m)} = \Pr\{X_{n+m} = j | X_n = i\}$$

- Λόγω της (1) προκύπτει ότι

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}, \quad m = 2, 3, \ldots$$

Ανάγωγη αλυσίδα

Ανάγωγη (irreducible) λέγεται μια αλυσίδα Markov αν κάθε κατάσταση είναι προσιτή από κάθε άλλη κατάσταση (σε ικανό αριθμό βημάτων), δηλαδή για κάθε ζεύγος καταστάσεων i, j υπάρχει ακέραιος m_0 τέτοιος ώστε

$$p_{ij}^{m_0} > 0$$

Κλειστό λέγεται ένα σύνολο καταστάσεων A_1 όταν δεν είναι δυνατή σε ένα βήμα η μετάβαση από οποιαδήποτε κατάσταση $i \in A_1$ σε οποιαδήποτε $j \in A - A_1$, όπου A είναι το σύνολο όλων των καταστάσεων της αλυσίδας. Αν το A είναι μονομελές, δηλ. $A = \{i_0\}$, η i_0 λέγεται *απορροφητική* κατάσταση.

Κατηγορίες καταστάσεων

Πιθανότητα επιστροφής Ορίζεται ως $f_j^{(n)}$ η πιθανότητα πρώτης επιστροφής σε n βήματα στην κατάσταση j ξεκινώντας από την j. Εξ αυτής ορίζεται η πιθανότητα επιστροφής οποτεδήποτε ως

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$$

Επανερχόμενη (recurrent) λέγεται μια κατάσταση j εφόσον $f_j = 1$.

Μεταβατική (transient) λέγεται μια κατάσταση j εφόσον $f_j < 1$.

Περιοδική (transient) λέγεται μια κατάσταση j εφόσον η επιστροφή είναι δυνατή μόνο σε πολλαπλάσια ενός ακεραίου $\gamma > 1$. Αν $\gamma = 1$ λέγεται *απεριοδική*.

Ο μέσος χρόνος επανόδου στην κατάσταση j ορίζεται ως

$$M_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}$$

Επανερχόμενη μηδενική (recurrent null) λέγεται η κατάσταση j αν $M_j = \infty$, ενώ αν $M_j < \infty$ λέγεται *επανερχόμενη μη μηδενική*.

Κατανομή μόνιμης κατάστασης

Έστω $\pi_j^{(n)} = \Pr\{X_n = j\}$ η πιθ. να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση j στο βήμα n.

Θεώρημα 1 Οι καταστάσεις μιας ανάγωγης αλυσίδας Markov είναι είτε όλες μεταβατικές είτε όλες επανερχόμενες μηδενικές είτε όλες μη επανερχόμενες μη μηδενικές. Αν είναι περιοδικές, έχουν όλες την ίδια περίοδο.

Θεώρημα 2 Σε μια ανάγωγη και απεριοδική ομογενή αλυσίδα Markov υπάρχουν πάντοτε οι οριακές πιθανότητες

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$$

και είναι ανεξάρτητες της αρχικής κατανομής. Επί πλέον, είτε

1. όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές ή όλες είναι επανερχόμενες μηδενικές, οπότε $\pi_j = 0$ για όλα τα j και δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή, ή
2. όλες είναι επανερχόμενες μη μηδενικές και $\pi_j > 0$ για όλα τα j, οπότε οι π_j αποτελούν στάσιμη κατανομή και $\pi_j = 1/M_j$ και υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}, \quad \sum_j \pi_j = 1$$

Ρυθμοί γεννήσεων - θανάτων

- Έστω λ_k ο ρυθμός αύξησης όταν ο πληθυσμός είναι k και αντίστοιχα μ_k ο ρυθμός μείωσης.
- Αυτό σημαίνει ότι
  1. η πιθ. ο πληθυσμός να αυξηθεί από k σε $k+1$ σε διάστημα Δt είναι
  $$\lambda_k \Delta t + o(\Delta t),$$
  2. η πιθ. να μειωθεί από $k+1$ σε k σε διάστημα Δt είναι
  $$\mu_k \Delta t + o(\Delta t),$$
  3. η πιθ. να μείνει σταθερός k είναι
  $$[1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t)][1 - \mu_k \Delta t + o(\Delta t)].$$

Εξισώσεις για διαδικασία γεννήσεων - θανάτων

- Θέτουμε $P_k(t) = \Pr\{X(t) = k\}$.
- Σε ένα μικρό διάστημα Δt μόνο μια μεταβολή το πολύ είναι πιθανό να συμβεί, οπότε

$$\begin{aligned} P_k(t+\Delta t) &= P_k(t)[1-\lambda_k\Delta t + o(\Delta t)][1-\mu_k\Delta t + o(\Delta t)] \\ &+ P_{k+1}(t)[\mu_k\Delta t + o(\Delta t)] \\ &+ P_{k-1}(t)[\lambda_k\Delta t + o(\Delta t)] \end{aligned}$$

- Ειδικά για τον μηδενικό πληθυσμό που δεν μπορεί να μειωθεί:

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= P_0(t)[1-\lambda_0\Delta t + o(\Delta t)] \\ &+ P_1(t)[\mu_1\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t)] \end{aligned}$$

- Κάνοντας πράξεις και στέλνοντας το Δt στο μηδέν (καθώς και το $o(\Delta t)/\Delta t$):

$$\begin{aligned} \frac{dP_k(t)}{dt} &= -(\lambda_k+\mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \end{aligned}$$

Μια απλή διαδικασία γεννήσεων

- Για ίδιους ρυθμούς γεννήσεων $\lambda_k = \lambda$ και θανάτων $\mu_k = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dP_k(t)}{dt} &= -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) \quad k = 1, 2, \ldots \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t) \end{aligned}$$

- Με αρχική συνθήκη μηδενικό αρχικό πληθυσμό, $P_0(0) = 1$, η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$P_0 = e^{-\lambda t}$$

- Αντικαθιστώντας το $P_0(t)$ στην πρώτη εξίσωση για $k = 1$:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

- και τέλος με επαγωγή:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad \text{(κατανομή Poisson)}$$

Γεννήτρια διακριτής κατανομής

- Έστω συνάρτηση μάζας πιθανότητας $g_k = \Pr\{K = k\}$ (για την τ.μ. K). Η γεννήτρια συνάρτηση ορίζεται ως

$$G(z) = E\{z^K\} = \sum_k z^k g_k$$

- Αποδεικνύεται εύκολα ότι η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$E\{K\} = G'(1)$$

- και η διασπορά ως

$$\sigma_K^2 = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$$

Μέση τιμή και διασπορά κατανομής Poisson

- Η γεννήτρια της κατανομής Poisson είναι

$$G(z) = E\{z^K\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^k}{k!} = e^{-\lambda t + \lambda t z}$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!$.

- Άρα η μέση τιμή είναι

$$E\{K\} = G'(1) = \lambda t e^{\lambda t(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda t$$

- και η διασπορά είναι

$$\sigma_K^2 = \lambda t e^{\lambda t(z-1)}\Big|_{z=1} + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

Ανεξάρτητες αυξήσεις

Αποδεικνύεται οτι οι αφίξεις Poisson αυξάνονται σε οποιοδήποτε διάστημα ανεξάρτητα από αλλού, δηλαδή αν $X(s, s+t)$ είναι ο αριθμός αφίξεων στο διάστημα $(s, s+t)$, ισχύει ότι

$$\Pr\{X(s, s+t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητος της αρχής του διαστήματος s και εξαρτάται μόνο από το μήκος του t.

Χρόνοι μεταξύ αφίξεων - εκθετική κατανομή

- Έστω I τ.μ. που παριστάνει τον χρόνο ανάμεσα σε δυο διαδοχικές αφίξεις και έχει συνάρτηση κατανομής $A(t)$.
- Για την συν. κατανομής ισχύει

$$A(t) = \Pr\{I \leq t\} = 1 - \Pr\{I > t\}$$

- Όμως η $\Pr\{I > t\}$ είναι η πιθ. να μην υπάρξει καμμιά άφιξη στο οποιοδήποτε διάστημα $(s, s+t)$, δηλ. η $P_0(t) = e^{-\lambda t}$. Άρα

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow a(t) = A'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

  που είναι η εκθετική κατανομή.
- Επομένως αφίξεις Poisson γεννούν εκθετικούς χρόνους μεταξύ αφίξεων. Ισχύει και το αντίστροφο.
- Η μέση τιμή και η διασπορά είναι

$$E\{I\} = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_I^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Έλλειψη μνήμης στους χρόνους αφίξεων

- Αφήνουμε να περάσει χρόνος t_0 και θέτουμε το ερώτημα: «Ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη άφιξη να συμβεί το πολύ σε t δευτερόλεπτα από τώρα;»
- Επομένως υπολογίζουμε την πιθ.

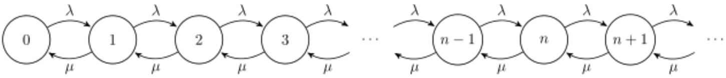
$$
\begin{aligned}
\Pr\{I \le t + t_0 | I > t_0\} &= \frac{\Pr\{t_0 < I \le t + t_0\}}{\Pr\{I > t_0\}} \\
&= \frac{\Pr\{< I \le t + t_0\} - \Pr\{I \le t_0\}}{\Pr\{I > t_0\}} \\
&= \frac{(1 - e^{-\lambda(t+t_0)}) - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} = 1 - e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

- Άρα η πιθανότητα αυτή είναι ανεξάρτητη του χρόνου t_0 που έχει περάσει.

Το σύστημα αναμονής M/M/1: Εξισώσεις

- Το σύστημα M/M/1 έχει αφίξεις Poisson (memoryless) με σταθερό ρυθμό, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης (memoryless) με σταθερό ρυθμό και ένα server.
- Διέπεται από τις εξής εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_k(t)}{dt} &= -(\lambda+\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t) \\
\frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)
\end{aligned}
$$



Μόνιμη κατάσταση

- Οι εξισώσεις στη μόνιμη κατάσταση ($t \to \infty$) γίνονται (με $P_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$):

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda+\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} \\ 0 &= -\lambda P_0 + \mu P_1 \end{aligned}$$

- Από την δεύτερη $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$
- Από την πρώτη για $k = 1$:

$$\mu P2 = (\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\mu}P_0 - \lambda P_0 \Rightarrow P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

- Επαγωγικά:

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- Ισχύει όμως, με $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k P_0 = \frac{1}{1-\rho} P_0 \Rightarrow P_0 = 1 - \rho \Rightarrow P_k = (1-\rho)\rho^k$$

M/M/1: Αριθμός πελατών στο σύστημα

- Η μέση τιμή του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

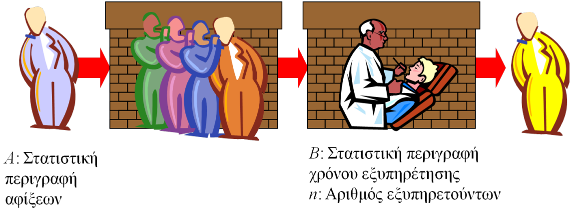
- Η μέση διάρκεια συνολικής παραμονής στο σύστημα T (αναμονή και εξυπηρέτηση) υπολογίζεται από το νόμο του Little:

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

- Επίσης μπορεί να υπολογισθεί η διασπορά του αριθμού πελατών:

$$\sigma_N^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\overline{N})^2 P_k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Ανακεφαλαίωση: Σύστημα αναμονής $M/M/1$

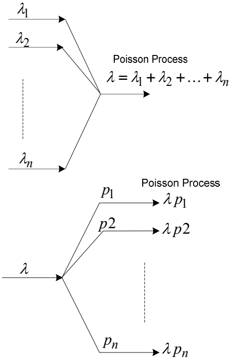


- $A = M$ = αφίξεις Poisson: Η πιθανότητα να εμφανισθούν N αφίξεις σε διάστημα t είναι $\Pr\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, όπου λ είναι ο ρυθμός αφίξεων (δηλ. $E\{N(t)\} = \lambda t$).
- $B = M$ = ο χρόνος εξυπηρέτησης T του πελάτη είναι εκθετικά κατανεμημένος, ήτοι $\Pr\{T \leq \tau\} = 1 - e^{-\mu\tau}$.
- $n = 1$.
- Τότε η μέση καθυστέρηση είναι

$$E\{D\} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Δίκτυα συστημάτων αναμονής

- Οι ροές σε ένα δίκτυο μετατρέπονται σε ροές ανάμεσα σε συστήματα αναμονής, γεγονός που θέτει προβλήματα όπως
  1. ποια είναι η διαδικασία αναχωρήσεων και
  2. ποια είναι η διαδικασία που προκύπτει απο τη σύνθεση ροών;
- Σύνθεση - αποσύνθεση κίνησης Poisson:

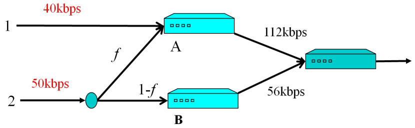


Δίκτυα συστημάτων αναμονής

- Θεώρημα Burke: Ένα σταθερό σύστημα αναμονής M/M/m με αφίξεις ρυθμού λ και εξυπηρέτηση ρυθμού μ παράγει στην έξοδό του διαδικασία Poisson ρυθμού λ.
- Δίκτυο Jackson: Αποτελείται από έναν αριθμό κόμβων M/M/m, που ο καθένας λαμβάνει αφίξεις Poisson από το περιβάλλον και έχει διαφορετικό ρυθμό εξυπηρέτησης. Οι πελάτες δρομολογούνται μεταξύ των κόμβων με έναν σταθερό πίνακα στατιστικής δρομολόγησης. Όλοι οι πελάτες σε κάθε κόμβο ακολουθούν την ίδια κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης και τον ίδιο μηχανισμό δρομολόγησης.
- Θεώρημα Jackson: Κάθε κόμβος συμπεριφέρεται σαν ανεξάρτητο σύστημα M/M/m, με τον ρυθμό εισόδου που προκύπτει από την δρομολόγηση, δηλ. για την από κοινού κατανομή του αριθμού πελατών στους N κόμβους ισχύει

$$p(k_1, k_2, \ldots, k_N) = p(k_1)p(k_2)\ldots p(k_N)$$

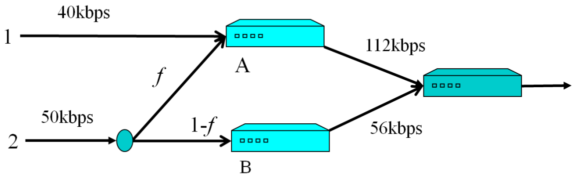
Παράδειγμα: Δικαιοσύνη



Για πακέτα μήκους 1000 bits.

$$\begin{aligned}
E\{D_A\} &= \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} = \frac{1}{112 - (40 + f \times 50)} \\
E\{D_B\} &= \frac{1}{\mu_B - \lambda_B} = \frac{1}{56 - (1-f)50} \\
E\{D_1\} &= E\{D_A\} \\
E\{D_2\} &= fE\{D_A\} + (1-f)E\{D_B\} \\
E\{D_1\} &= E\{D_2\} \Leftrightarrow f = 0{,}66
\end{aligned}$$

Παράδειγμα: Ελαχιστοποίηση της καθυστέρησης



$$
\begin{aligned}
E\{D_A\} &= \frac{1}{112-(40+f\times 50)} \\
E\{D_B\} &= \frac{1}{56-(1-f)50} \\
E\{D\} &= \frac{40}{90}E\{D_1\}+\frac{50}{90}E\{D_2\} \\
\min E\{D\} &\Leftrightarrow f=0{,}46
\end{aligned}
$$

Βιβλιογραφία

- Leonard Kleinrock, “Queueing Systems, Volume I: Theory”, Wiley, 1975.
- Moshe Zukerman, “Introduction to Queueing Theory and Stochastic Teletraffic Models”, arxiv.org, 2020, https://arxiv.org/pdf/1307.2968.pdf.

Τελευταία μεταβολή στις 24 Μαΐου 2022 13:36.