Καμπύλες κόστους

Αντώνης Παπαβασιλείου, ΕΜΠ

Βασισμένο στον Varian [1]

Περιεχόμενα

- Μέσο κόστος
- Οριακό κόστος
- Οριακό κόστος και μεταβλητό κόστος
- Μακροπρόθεσμο κόστος
- Διακριτά επίπεδα εγκαταστάσεων
- Μακροπρόθεσμο οριακό κόστος
- Παράρτημα

Καμπύλες κόστος

- Οι **καμπύλες κόστους** αναπαριστούν γραφικά τη συνάρτηση κόστους μιας επιχείρησης
- Είναι σημαντικές στον καθορισμό της επιλογής βέλτιστης εκροής της επιχείρησης

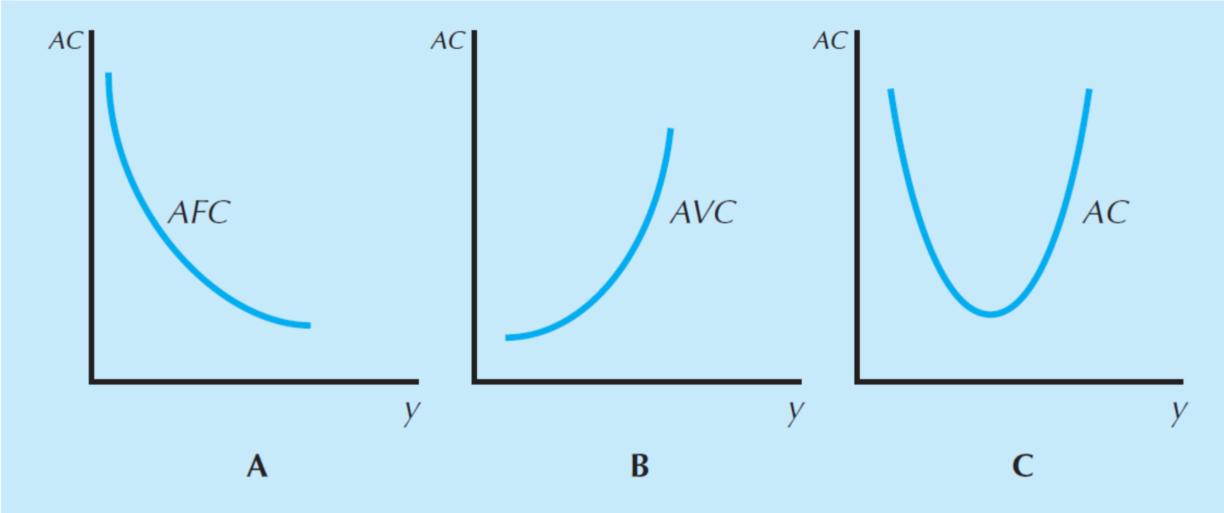
Μέσο κόστος

Συναρτήσεις μέσου κόστους

- Έχουμε δει ότι η συνάρτηση $c(w_1, w_2, y)$ περιγράφει το ελάχιστο κόστος στο οποίο η επιχείρηση μπορεί να παράγει εκροή y όταν οι τιμές των συντελεστών παραγωγής είναι (w_1, w_2)
- Μετέπειτα θα θεωρήσουμε τις τιμές των εισροών αμετάβλητες, οπότε θα γράφουμε τη συνάρτηση κόστους ως $c(y)$
- Το σταθερό κόστος F είναι το κόστος που πληρώνεται ανεξαρτήτως επιπέδου παραγωγής
- Το μεταβλητό κόστος $c_v(y)$ είναι το κόστος που εξαρτάται από το επίπεδο της παραγωγής
- Το συνολικό κόστος είναι το άθροισμα του σταθερού και μεταβλητού κόστους:
$$c(y) = c_v(y) + F$$
- Η **συνάρτηση μέσου κόστους** $AC(y)$ μετρά το κόστος ανά μονάδα εκροής
- Η **συνάρτηση μέσου μεταβλητού κόστους** $AVC(y)$ μετρά το μεταβλητό κόστος ανά μονάδα εκροής
- Η **συνάρτηση μέσου σταθερού κόστους** $AFC(y)$ μετρά το σταθερό κόστος ανά μονάδα εκροής
$$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{c_v(y)}{y} + \frac{F}{y} = AVC(y) + AFC(y)$$

Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων μέσου κόστους

- Η συνάρτηση μέσου σταθερού κόστους (Α) είναι άπειρο για $y = 0$ και τείνει στο 0 όσο το y αυξάνεται
- Η συνάρτηση μέσου μεταβλητού κόστους (Β) αυξάνεται όσο το y αυξάνεται (γιατί όταν εξαντλούνται οι σταθεροί συντελεστές παραγωγής το κόστος εκτοξεύεται)
- Η συνάρτηση μέσου κόστους (C) που είναι το άθροισμα έχει μορφή U



Οριακό κόστος

Καμπύλη οριακού κόστους

- Η **καμπύλη οριακού κόστους** μετρά τη μεταβολή στο κόστος για μοναδιαία αλλαγή στην εκροή

$$MC(y) = \frac{\Delta c(y)}{\Delta y} = \frac{c(y + \Delta y) - c(y)}{\Delta y}$$

- Μπορούμε να ορίσουμε την καμπύλη οριακού κόστους και ως προς το μεταβλητό κόστος:

$$MC(y) = \frac{\Delta c_v\,(y)}{\Delta y} = \frac{c_v(y + \Delta y) - c_v(y)}{\Delta y}$$

Ορισμένες ιδιότητες της συνάρτησης οριακού κόστους

1. Για την πρώτη μονάδα εκροής έχουμε:

$$MC(1) = \frac{c_v(1) + F - c_v(0) - F}{1} = \frac{c_v(1) - c_v(0)}{1} = AVC(1)$$

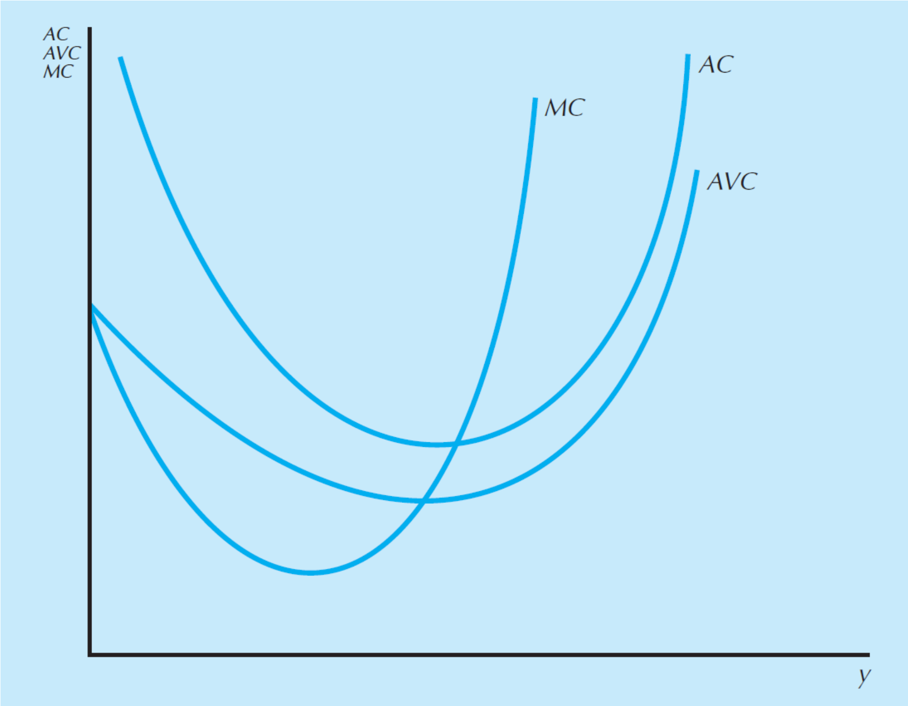
2. Η καμπύλη οριακού κόστους περνά από το ελάχιστο της καμπύλης μέσου μεταβλητού κόστους
    - Όσο η καμπύλη μέσου μεταβλητού κόστους μειώνεται, απαραιτήτως το οριακό κόστος είναι μικρότερο (αλλιώς δεν μπορεί να πέφτει ο μέσος όρος του οριακού κόστους, που είναι το μέσο μεταβλητό κόστος)
    - Και όσο η καμπύλη μέσου μεταβλητού κόστους αυξάνεται, απαραιτήτως το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο (αλλιώς δεν μπορεί να αυξάνεται ο μέσος όρος του οριακού κόστους, που είναι το μέσο μεταβλητό κόστος)
    - Άρα το οριακό κόστος περνά από το ελάχιστο του μέσου μεταβλητού κόστους

3. Η καμπύλη οριακού κόστους περνά από το ελάχιστο της καμπύλης μέσου κόστους
    - Ακριβώς το ίδιο επιχείρημα με το μέσο μεταβλητό κόστος

Γραφική αναπαράσταση καμπύλης μέσου κόστους

Συνοψίζουμε τις μέχρι τώρα παρατηρήσεις:

- Η καμπύλη μεταβλητού κόστους ενδέχεται να έχει αρχικά αρνητική κλίση (αλλά όχι απαραίτητα), αλλά κάποια στιγμή θα αυξηθεί λόγω εξάντλησης των σταθερών συντελεστών
- Η καμπύλη μέσου μεταβλητού κόστους αρχικά θα μειώνεται, μετά θα αυξάνεται
- Το οριακό κόστος και το μέσο μεταβλητό κόστος θα είναι ίσα στην πρώτη μονάδα παραγωγής
- Η καμπύλη οριακού κόστους περνά από το ελάχιστο τόσο της καμπύλης μέσου μεταβλητού κόστους όσο και της καμπύλης μέσου κόστους



Ερώτηση 22.1

Ποια από τα ακόλουθα είναι σωστά/λάθος:

1. Το μέσο σταθερό κόστος ποτέ δεν αυξάνεται με την εκροή
2. Το μέσο συνολικό κόστος είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο από το μέσο μεταβλητό κόστος
3. Το μέσο κόστος ποτέ δεν μπορεί να αυξάνεται όταν το οριακό κόστος μειώνεται

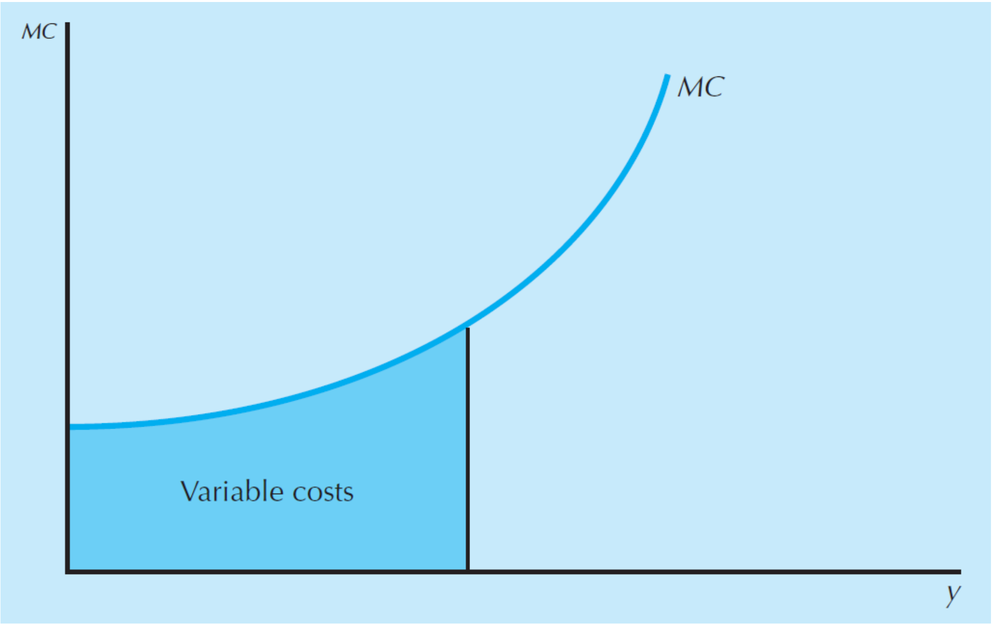
Απάντηση στην ερώτηση 22.1

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Λάθος

Οριακό κόστος και μεταβλητό κόστος

Οριακό κόστος και μεταβλητό κόστος

- Εφόσον το οριακό κόστος είναι η παράγωγος του μεταβλητού κόστους, η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη οριακού κόστους είναι το μεταβλητό κόστος

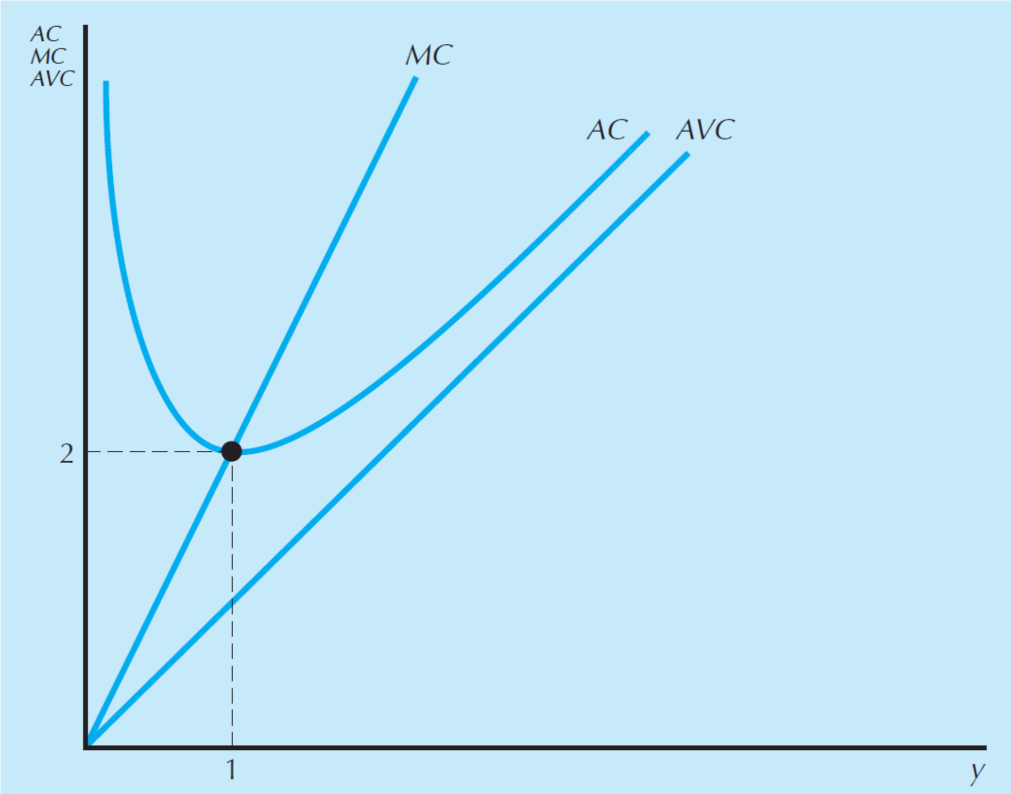


Παράδειγμα: $y^2 + 1$

- Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $c(y) = y^2 + 1$
- Έχουμε τις ακόλουθες καμπύλες κόστους:
  - Μεταβλητό κόστος: $c_v(y) = y^2$
  - Σταθερό κόστος: $c_f(y) = 1$
  - Μέσο μεταβλητό κόστος: $AVC(y) = y^2/y = y$
  - Μέσο σταθερό κόστος: $AFC(y) = 1/y$
  - Μέσο κόστος: $AC(y) = \frac{y^2+1}{y} = y + \frac{1}{y}$
  - Οριακό κόστος: $MC(y) = 2y$

Παράδειγμα: $y^2 + 1$

- Η καμπύλη μέσου μεταβλητού κόστους είναι γραμμική
- Η καμπύλη οριακού κόστους είναι μια γραμμή με κλίση 2
- Η καμπύλη μέσου κόστους είναι ελάχιστη στο σημείο όπου τέμνεται με την καμπύλη οριακού κόστους:
$$y + \frac{1}{y} = 2y$$
- Η λύση είναι $y_{\min} = 1$
- Το μέσο κόστος και το οριακό κόστος στο 1 είναι 2



Παράδειγμα: καμπύλες οριακού κόστους για δύο μονάδες

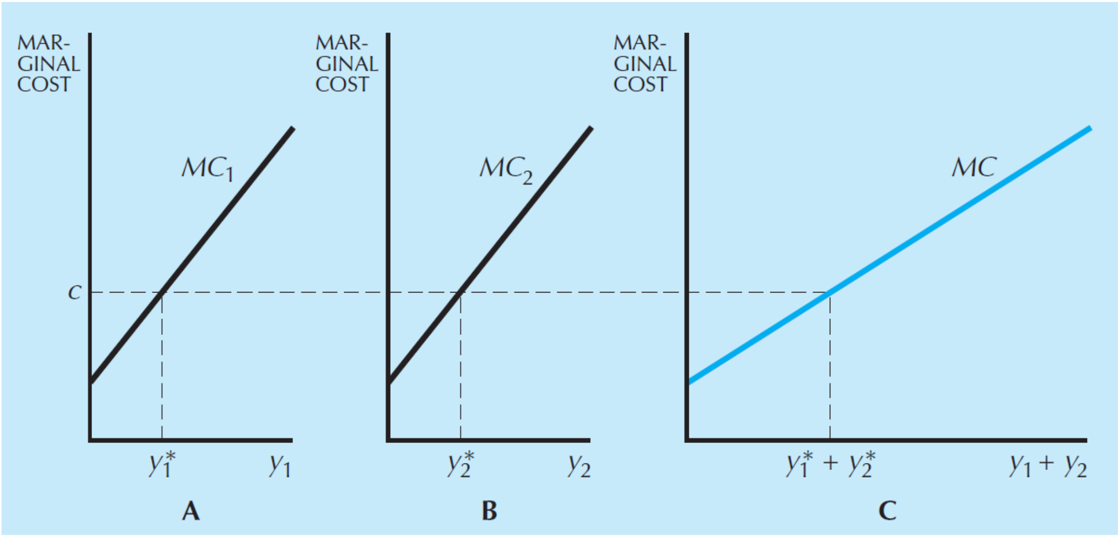
- Έστω δύο μονάδες με συναρτήσεις κόστους $c_1(y_1)$ και $c_2(y_2)$
- Ποιος είναι ο φθηνότερος τρόπος να παράγουμε y μονάδες εκροής και από τις δύο μονάδες
- Πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους:

$$\min_{y_1,y_2} c_1(y_1) + c_2(y_2)$$
$$\text{s.t. } y_1 + y_2 = y$$

- Ο βέλτιστος τρόπος λειτουργίας είναι διαιρώντας την εκροή με τέτοιο τρόπο ώστε τα οριακά κόστη να είναι ίσα
  - Αν δε λειτουργούμε έτσι τις μονάδες, τότε μπορούμε να μειώσουμε το κόστος μεταφέροντας παραγωγή από τη μονάδα με το υψηλότερο οριακό κόστος στη μονάδα με το χαμηλότερο οριακό κόστος

Παράδειγμα: καμπύλες οριακού κόστους για δύο μονάδες

- Το οριακό κόστος των δύο μονάδων είναι το οριζόντιο άθροισμα των καμπυλών οριακού κόστους
- Για οποιοδήποτε επίπεδο οριακού κόστους c, παράγουμε y_1^* και y_2^* ούτως ώστε $MC_1(y_1^*) = MC_2(y_2^*) = c$ και άρα θα έχουμε συνολική εκροή $y_1^* + y_2^*$



Ερώτηση 22.2

- Μια επιχείρηση παράγει πανομοιότυπες εκροές σε δύο διαφορετικές μονάδες
- Αν το οριακό κόστος στην πρώτη μονάδα ξεπερνά το οριακό κόστος στη δεύτερη μονάδα, πώς μπορεί η επιχείρηση να μειώσει το κόστος και να διατηρήσει το ίδιο επίπεδο εκροής;

Απάντηση στην ερώτηση 22.2

- Αυξάνοντας ταυτόχρονα την παραγωγή στη δεύτερη μονάδα και μειώνοντας την παραγωγή στην πρώτη μονάδα, η επιχείρηση μπορεί να ελαττώσει το κόστος

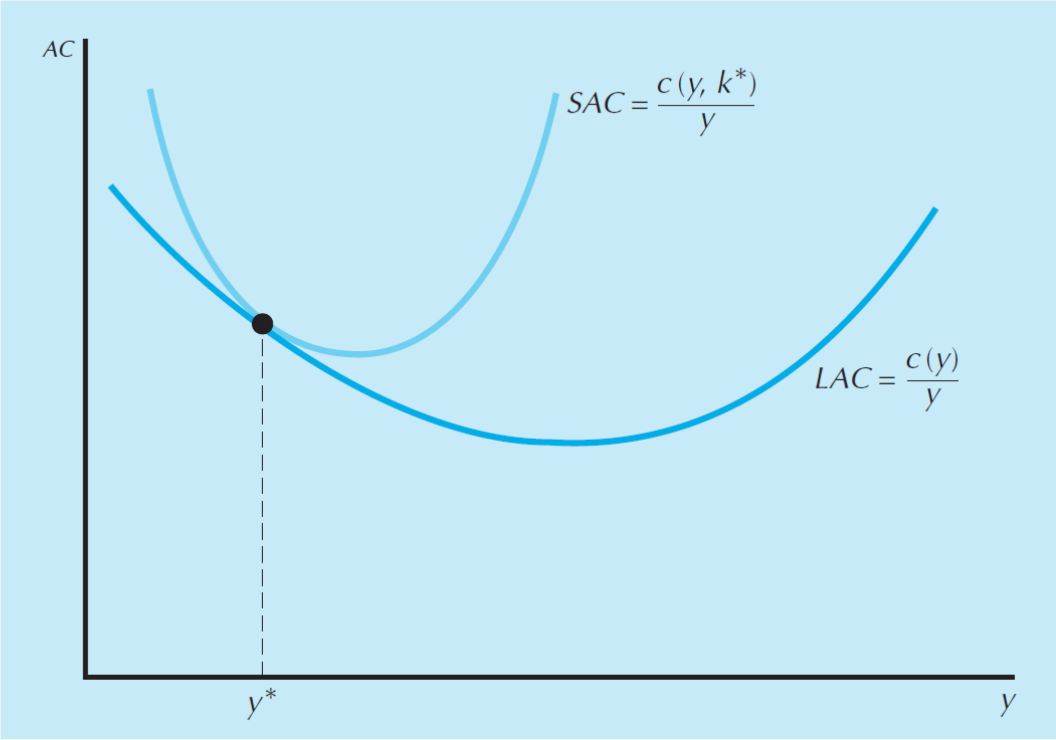
Μακροπρόθεσμο κόστος

Σχέσεις μεταξύ μακροπρόθεσμου και βραχυπρόθεσμου κόστους

- Ας θεωρήσουμε ως σταθερό συντελεστή παραγωγής το μέγεθος ενός εργοστασίου k, το οποίο αντιστοιχεί στο $\bar{x}_2$ του προηγούμενου κεφαλαίου
- Η συνάρτηση βραχυπρόθεσμου κόστους είναι $c_s(y, k)$
- Για κάθε επίπεδο εκροής y, θα υπάρχει ένα βέλτιστο μέγεθος εργοστασίου $k(y)$
- Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μακροπρόθεσμη συνάρτηση κόστους είναι
$$c(y) = c_s(y, k(y))$$
- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα δεδομένο k^*, που είναι το βέλτιστο μέγεθος εργοστασίου για εκροή y^*, δηλαδή $k^* = k(y^*)$:
    - Η μακροπρόθεσμη καμπύλη κόστους $c(y)$ είναι παντού μικρότερη από τη βραχυπρόθεσμη $c_s(y, k^*)$, δηλαδή
    $$c(y) \leq c_s(y, k^*)$$
    γιατί μακροπρόθεσμα η επιχείρηση μπορεί να διαλέξει όχι μόνο μέγεθος εργοστασίου k^* αλλά και κάτι ακόμα καλύτερο
    - Η μακροπρόθεσμη και βραχυπρόθεσμη καμπύλη είναι ίσες στο y^*, λόγω της παραπάνω ισότητας

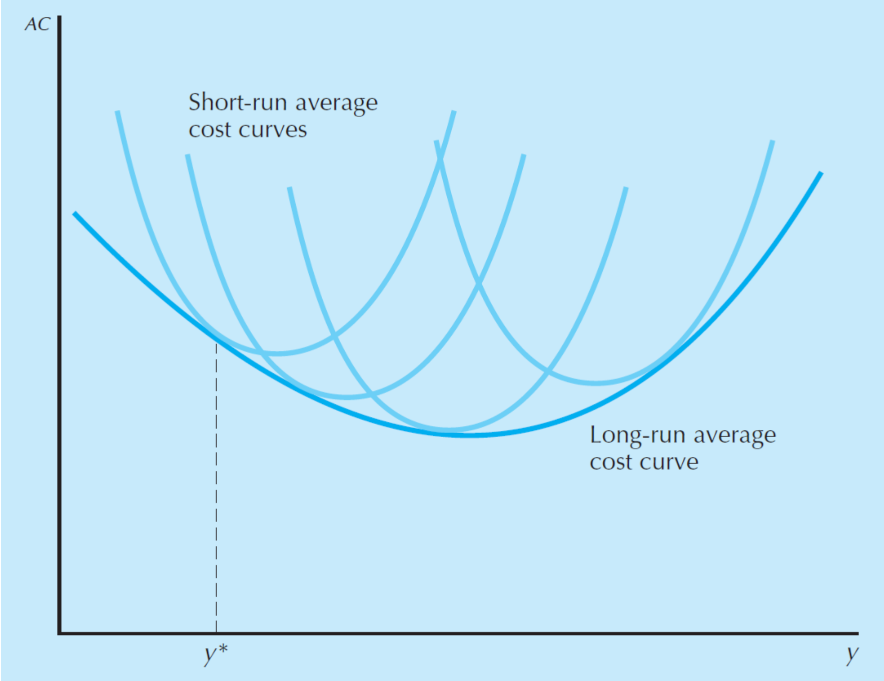
Γραφική αναπαράσταση μακροπρόθεσμου μέσου κόστους

- Αφού το μακροπρόθεσμο κόστος είναι πάντα μικρότερο από το βραχυπρόθεσμο, πρέπει και τα μέσα κόστη να έχουν την ίδια σχέση:
$$AC(y) \leq AC_s(y, k^*)$$
- Και αφού είναι ίσα στο y^*, το ίδιο πρέπει να ισχύει για τα μέσα κόστη:
$$AC(y^*) = AC_s(y^*, k^*)$$
- Άρα οι δύο καμπύλες εφάπτονται σε ένα σημείο, όπως στο γράφημα



Κάτω φάκελος

- Μπορούμε να κάνουμε την ίδια κατασκευή για άλλα επίπεδα εκροής, διαφορετικά από το y^*
- Αν διαλέξουμε επίπεδα εκροής y_1, y_2, …, y_n και $k_1 = k(y_1)$, $k_2 = k(y_2)$, …, $k_n = k(y_n)$
- Τότε έχουμε μια εικόνα όπως του γραφήματος, όπου η μακροπρόθεσμη καμπύλη μέσου κόστους είναι ο κάτω φάκελος των βραχυπρόθεσμων καμπυλών μέσου κόστους



Ερώτηση 22.3

- Σωστό ή λάθος: Μακροπρόθεσμα η επιχείρηση πάντα λειτουργεί στο επίπεδο ελάχιστου μέσου κόστους για το βέλτιστο μέγεθος μονάδας προκειμένου να παράγει ένα δεδομένο επίπεδο εκροής

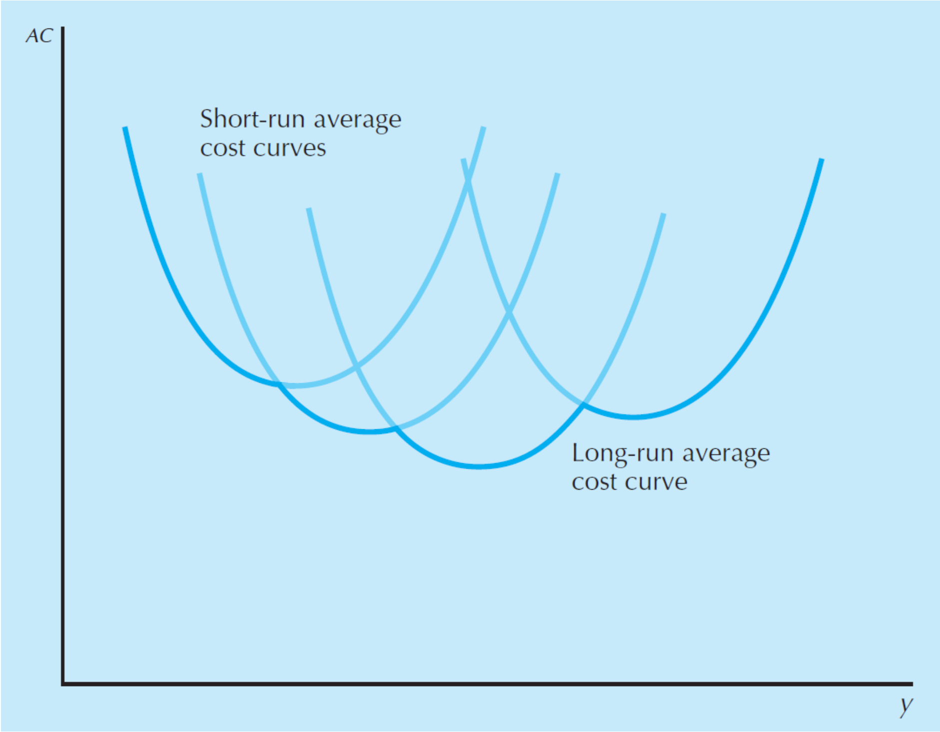
Απάντηση στην ερώτηση 22.3

- Λάθος
- Στο κεφάλαιο αυτό έχουμε μιλήσει όχι για τη βέλτιστη επιλογή του y, απλά πώς η επιχείρηση ελαχιστοποιεί το κόστος για ένα δεδομένο y
- Το επίπεδο εκροής καθορίζεται από την επιθυμία της επιχείρησης να μεγιστοποιήσει το κέρδος της

Διακριτά επίπεδα εγκαταστάσεων

Διακριτά επίπεδα εγκαταστάσεων

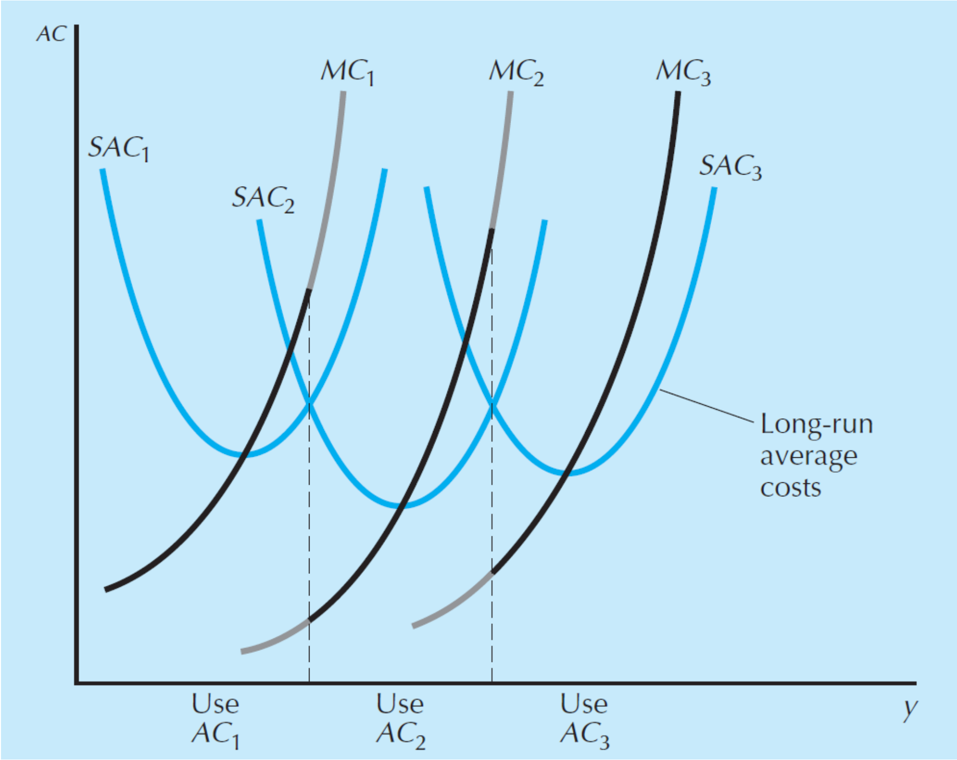
- Έστω ότι μπορούμε να διαλέξουμε μόνο τέσσερα επίπεδα εγκαταστάσεων, k_1, k_2, k_3, k_4
- Πώς υπολογίζουμε την μακροπρόθεσμη καμπύλη μέσου κόστους;
  - Διαλέγουμε το μέγεθος εγκατάστασης με το χαμηλότερο βραχυπρόθεσμο μέσο κόστος
- Όπως και στη συνεχή περίπτωση, το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος είναι χαμηλότερο από το βραχυπρόθεσμο, και είναι ίσα σε επίπεδο εκροής όπου η βέλτιστη μακροπρόθεσμη επιλογή επιπέδου εγκατάστασης συμπίπτει με το μέγεθος εγκατάστασης της αντίστοιχης βραχυπρόθεσμης καμπύλης



Μακροπρόθεσμο οριακό κόστος

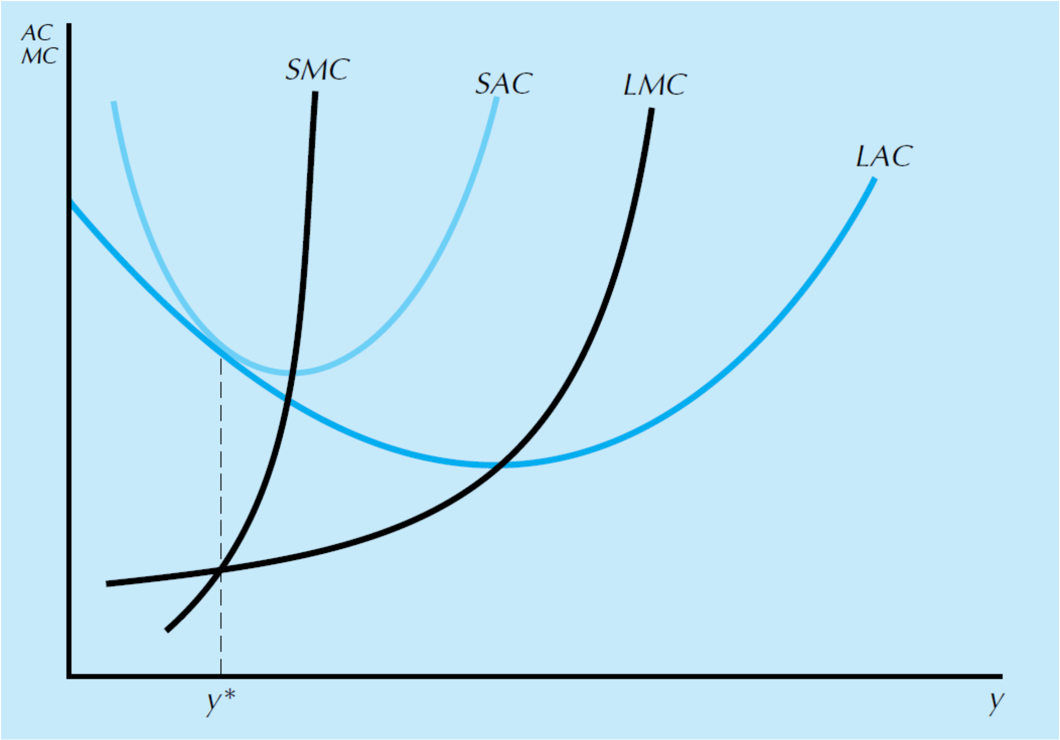
Μακροπρόθεσμο οριακό κόστος για διακριτά επίπεδα εγκατάστασης

- Όταν τα επίπεδα εγκατάστασης είναι διακριτά, η επιχείρηση διαλέγει αυτό με το χαμηλότερο συνολικό κόστος, και η καμπύλη οριακού κόστους ακολουθεί την αντίστοιχη βραχυπρόθεσμη



Μακροπρόθεσμο οριακό κόστος για συνεχή επίπεδα εγκατάστασης

- Το μακροπρόθεσμο οριακό κόστος για οποιοδήποτε επίπεδο εκροής y πρέπει να ισούται με το βραχυπρόθεσμο οριακό κόστος που σχετίζεται με το βέλτιστο μέγεθος εγκατάστασης που απαιτείται για να παραχθεί εκροή y



Παράρτημα

Το οριακό κόστος και το μέσο μεταβλητό κόστος είναι ίσα σε επίπεδο μηδενικής παραγωγής

- Υποστηρίξαμε ότι το μέσο μεταβλητό κόστος ισούται με το οριακό κόστος για την πρώτη μονάδα παραγωγής
- Σε όρους διαφορικού λογισμού:

$$\lim_{y\to 0} \frac{c_v(y)}{y} = \lim_{y\to 0} c'(y)$$

- Το αριστερό όριο υπολογίζεται με τον κανόνα του l’Hôpital

$$\lim_{y\to 0} \frac{c_v(y)}{y} = \frac{\lim_{y\to 0} dc_v(y)/dy}{\lim_{y\to 0} dy/dy} = \frac{c'(0)}{1}$$

- Το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό

Το βραχυπρόθεσμο και μακροπρόθεσμο οριακό κόστος είναι ίσα στο βέλτιστο επίπεδο εκροής

- Εξορισμού έχουμε ότι
$$c(y) = c_s\big(y, k(y)\big)$$
- Παραγωγίζοντας ως προς y
$$\frac{dc(y)}{dy} = \frac{\partial c_s\big(y, k(y)\big)}{\partial y} + \frac{\partial c_s\big(y, k(y)\big)}{\partial k}\frac{\partial k(y)}{\partial y}$$
- Αν υπολογίσουμε την παράγωγο στο βέλτιστο επίπεδο εκροής y^*, και το βέλτιστο μέγεθος εγκατάστασης $k^* = k(y^*)$, έχουμε ότι
$$\frac{\partial c_s(y^*, k^*)}{\partial k} = 0$$

γιατί η συνθήκη πρώτου βαθμού ως προς k^* πρέπει να ισχύει στο επίπεδο y^*, μιας και το μέγεθος εγκατάστασης οδηγεί σε ελάχιστο κόστος για επίπεδο εκροής y^*

- Άρα ισχύει ότι
$$\frac{dc(y^*)}{dy} = \frac{\partial c_s(y^*, k^*)}{\partial y}$$

Βιβλιογραφία

[1] Hal Varian, Μικροοικονομική: μια σύγχρονη προσέγγιση, 3η έκδοση, εκδόσεις Κριτική, 2015