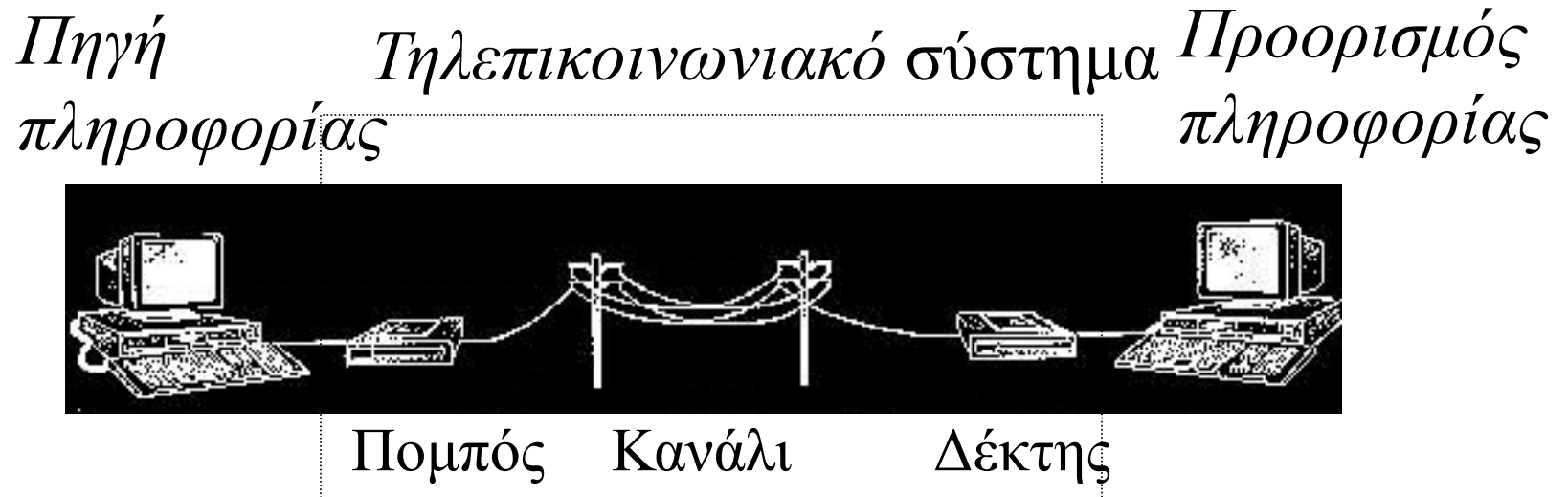


ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

- Αντίστροφη Σχέση Χρόνου/Συχνότητας
- Συνάρτηση Dirac – Δέλτα
- Μετασχηματισμός Περιοδικών Σημάτων – Σειρές Fourier
- Μετάδοση μέσω Γραμμικών Συστημάτων
- Φίλτρα

11 Μαρτίου, 2022

Το μοντέλο του τηλεπικοινωνιακού συστήματος

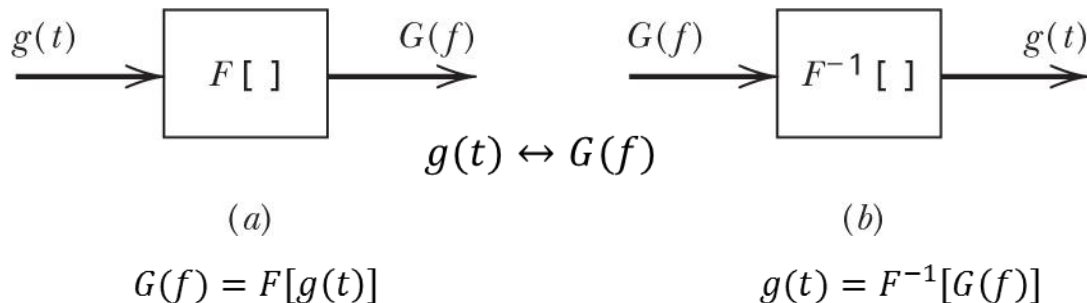


Πομπός/δέκτης: Διαμόρφωση/αποδιαμόρφωση

Κανάλι: Εύρος ζώνης, θόρυβος

Μετασχηματισμός Fourier (FT) (Επανάληψη)

- $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j2\pi ft) dt$ όπου f : συχνότητα σε *Hertz* (Hz, sec⁻¹), $\omega = 2\pi f$ σε *ακτίνια/sec* (rad/sec)
- $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(j2\pi ft) df$
- Ο Μετασχηματισμός Fourier ή το **φάσμα** $G(f) = |G(f)| \exp[j\theta(f)]$ είναι γενικά μιγαδικός αριθμός με **πλάτος** $|G(f)|$ και **φάση** $\theta(f)$
- Αν η $g(t)$ παίρνει **πραγματικές** τιμές $\Rightarrow G(-f) = G^*(f)$ **συζυγείς μιγαδικές συναρτήσεις** και το πλάτος $|G(f)|$ είναι άρτια συνάρτηση ενώ η φάση $\theta(f)$ περιττή συνάρτηση $|G(-f)| = |G(f)|$, $\theta(-f) = -\theta(f)$
- $g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df$, $G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$

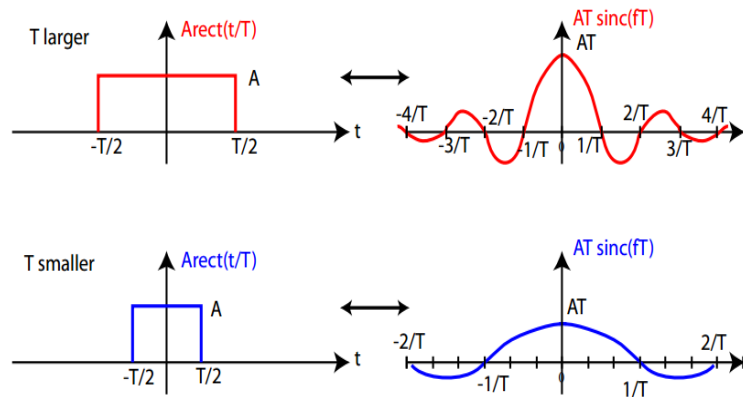


Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier (FT) (Επανάληψη)

Property/Theorem	Time Domain		Frequency Domain
Notation:	$g(t)$	\Leftrightarrow	$G(f)$
	$g_1(t)$	\Leftrightarrow	$G_1(f)$
	$g_2(t)$	\Leftrightarrow	$G_2(f)$
Linearity:	$c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)$	\Leftrightarrow	$c_1 G_1(f) + c_2 G_2(f)$
Dilation: <i>(Time Shifting)</i>	$g(at)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{ a } G\left(\frac{f}{a}\right)$
Conjugation:	$g^*(t)$	\Leftrightarrow	$G^*(-f)$
Duality:	$G(t)$	\Leftrightarrow	$g(-f)$
Time Shifting:	$g(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$G(f) e^{-j2\pi f t_0}$
Frequency Shifting: <i>(Modulation)</i>	$e^{j2\pi f_c t} g(t)$	\Leftrightarrow	$G(f - f_c)$
Area Under $G(f)$:	$g(0)$	$=$	$\int_{-\infty}^{\infty} G(f) df$
Area Under $g(t)$:	$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$	$=$	$G(0)$
Time Differentiation:	$\frac{d}{dt} g(t)$	\Leftrightarrow	$j2\pi f G(f)$
Time Integration :	$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{j2\pi f} G(f)$
Modulation Theorem:	$g_1(t) g_2(t)$	\Leftrightarrow	$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda) G_2(f - \lambda) d\lambda$
Convolution Theorem:	$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t - \tau) d\tau$	\Leftrightarrow	$G_1(f) G_2(f)$
Correlation Theorem:	$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2^*(t - \tau) dt$	\Leftrightarrow	$G_1(f) G_2^*(f)$
Rayleigh's Energy Theorem:	$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) ^2 dt$	$=$	$\int_{-\infty}^{\infty} G(f) ^2 df$

Η Αντίστροφη Σχέση Χρόνου & Συχνότητας

- Ορισμός **Bandwidth BW** (Εύρος Ζώνης Διέλευσης): Ορίζεται σαν το σημαντικό τμήμα (ζώνη) θετικών συχνοτήτων (**φασματική περιοχή**) από πλευράς κατανομής ενέργειας αγνοώντας συχνότητες που δεν μεταφέρουν «σημαντική» ενέργεια
- Η *χρονική διάρκεια σήματος (time duration)* έχει σχέση αντιστρόφως ανάλογη με το εύρος της ζώνης διέλευσης (*bandwidth*).



Περίπτωση **Baseband** (Low-Pass)

Ζώνη Διελεύσεως – Bandwidth

$$BW \cong 1/T$$

Συνάρτηση Dirac (Δέλτα) (1/2)

$$\delta(t) = 0, t \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt = g(t_0)$$

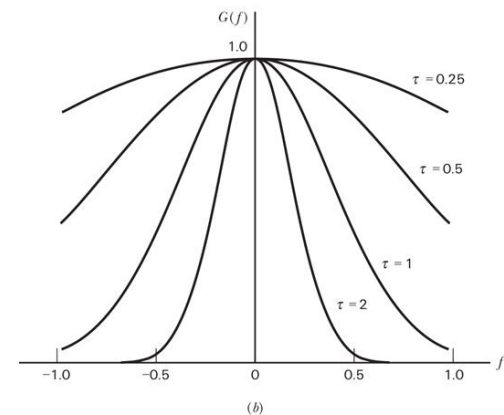
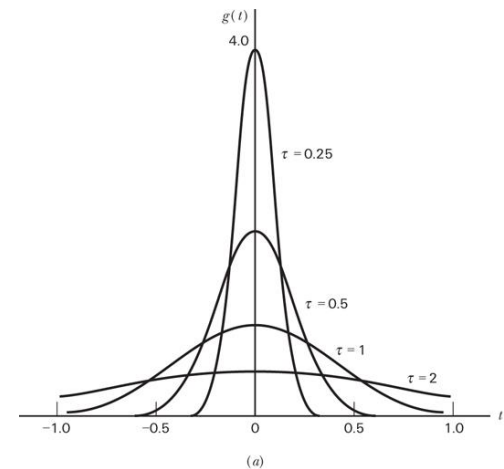
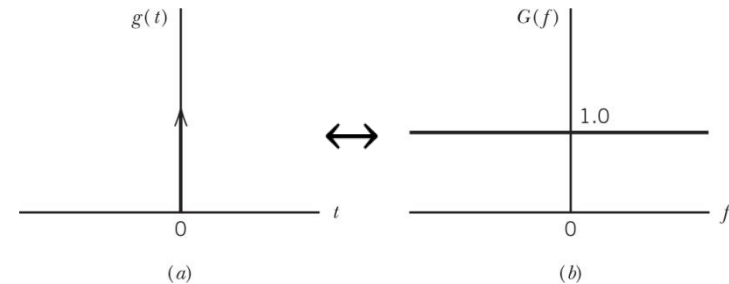
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t) * \delta(t) = g(t)$$

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j2\pi ft) dt = 1$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

Η συνάρτηση $\delta(t)$ σαν όριο παλμού **Gauss** με μοναδιαία επιφάνεια $g(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{\tau^2}\right)$, $G(f) = \exp(-\pi \tau^2 f^2)$

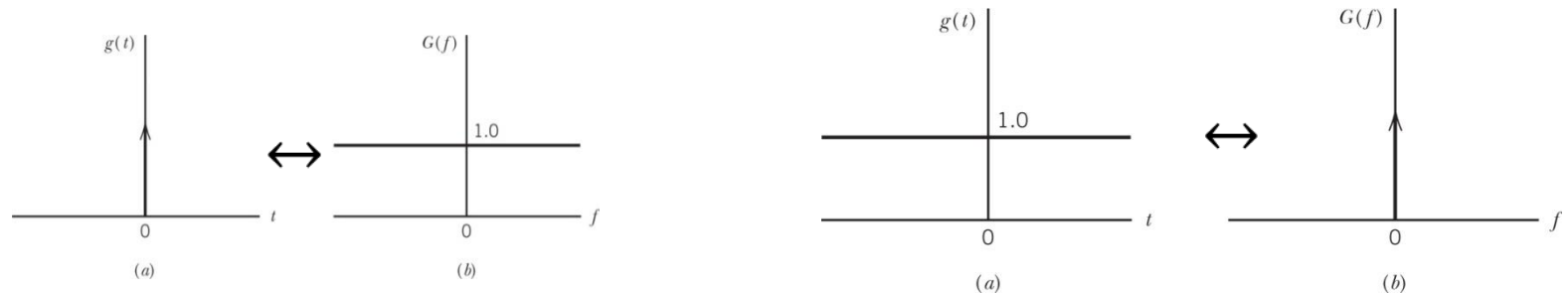
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{\tau^2}\right) \right\}$$



Συνάρτηση Dirac (Δέλτα) (2/2)

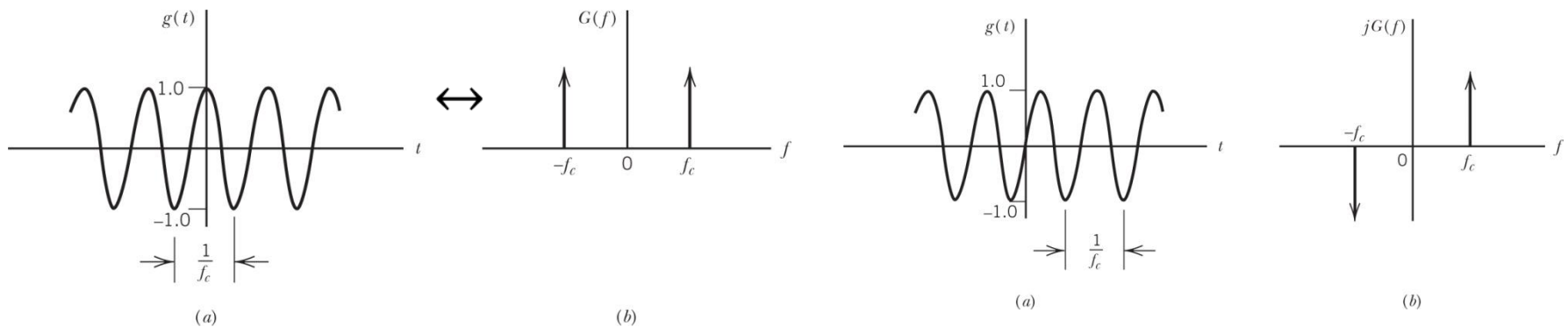
Εφαρμογές της συνάρτησης Dirac

1. $\delta(t) \leftrightarrow 1$ και λόγω διαδικρότητας, *duality*: $1 \leftrightarrow \delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ft) dt$ (συνεχές σήμα, **DC signal**)



2. Λόγω ιδιότητας ολίσθησης συχνότητας, *frequency-shifting*: $\exp(j2\pi f_c t) \leftrightarrow \delta(f - f_c)$

3. $\cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} [\exp(j2\pi f_c t) + \exp(-j2\pi f_c t)] \Rightarrow \cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$



4. $\sin(2\pi f_c t) = \frac{1}{2j} [\exp(j2\pi f_c t) - \exp(-j2\pi f_c t)] \Rightarrow \sin(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$

Περιοδικά Σήματα

- Σειρές Fourier Περιοδικού Σήματος $g_T(t)$ με περίοδο $T = 1/f_0$, f_0 : **βασική συχνότητα**
- Το περιοδικό σήμα μπορεί να θεωρηθεί πως αποτελείται από επαναλήψεις συνάρτησης τύπου παλμού (γεννήτριας συνάρτησης, *generating function*)

$$g(t) = g_T(t), \text{ για } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \text{ και } 0 \text{ εκτός του διαστήματος } (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$$

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_0 t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_T(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt = f_0 G(n f_0) \text{ όπου } g(t) \leftrightarrow G(f)$$

$$g_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n f_0) \exp(j2\pi n f_0 t)$$

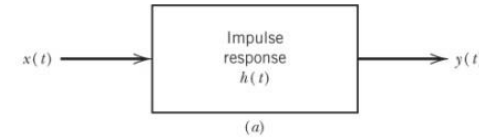
(Poisson Sum Formula)

- Ο «Μετασχηματισμός Fourier» της περιοδική συνάρτησης $g_T(t)$ μπορεί να αποδοθεί σαν:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) \leftrightarrow f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n f_0) \delta(f - n f_0)$$

Μετάδοση Σημάτων μέσω Γραμμικών Συστημάτων

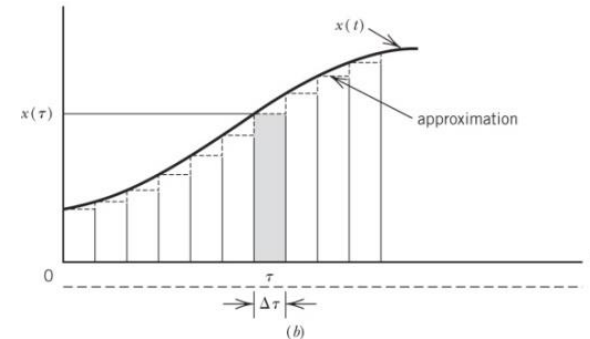
Γραμμική υπέρθεση (*linear superposition*) Εισόδων – Εξόδων σε Γραμμικό Φίλτρο (*Filter*) ή Κανάλι (*Channel*)



Κρουστική Απόκριση - *Impulse Response* Γραμμικού & Χρονικά Αμετάβλητου συστήματος $h(t)$:

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$$

Η απόκριση σε είσοδο δελτα με συντελεστή ή βαρύτητας $x(\tau)\Delta\tau$ που εφαρμόζεται σε $t = \tau$ είναι: $x(\tau)h(t - \tau)\Delta\tau$



Απόκριση Χρόνου Γραμμικών Συστημάτων: Συνέλιξη, Convolution

(Διέγερση, **Excitation**) $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$ (Απόκριση, **Response**)

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

Απόκριση Συχνότητας Γραμμικών Συστημάτων

$$x(t) \leftrightarrow X(f), \quad h(t) \leftrightarrow H(f), \quad y(t) \leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

$H(f)$: Συνάρτηση Μεταφοράς (Transfer Function)

$$H(f) = |H(f)| \exp[j\beta(f)]$$

$|H(f)|$: **amplitude response**, $\beta(f)$: **phase**

Αν $h(t)$ πραγματική (*real*), τότε $|H(f)|$ άρτια (*even*) & $\beta(f)$ περιττή (*odd*)

Φίλτρα

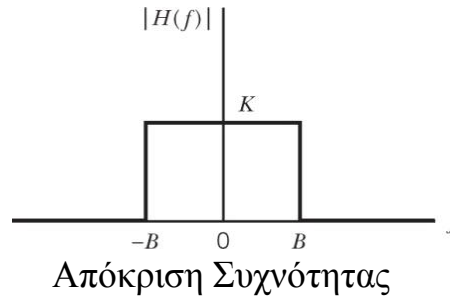
Ορισμοί:

Ζώνη Διέλευσης (*passband*)

Ζώνη Αποκλεισμού (*stopband*)

- Βαθυπερατό (*low-pass*)
- Υψιπερατό (*high-pass*)
- Ζωνοπερατό (*band-pass*)
- Ζωνοφρακτικό (*band-stop*)

Ιδανικό Low-pass Filter



$$h(t) = \int_{-B}^B \exp[j2\pi f(t - t_0)] df = 2 \int_0^B \cos[2\pi f(t - t_0)] df = 2 \frac{\sin[2\pi B(t - t_0)]}{2\pi(t - t_0)} = 2B \text{sinc}[2B(t - t_0)]$$

