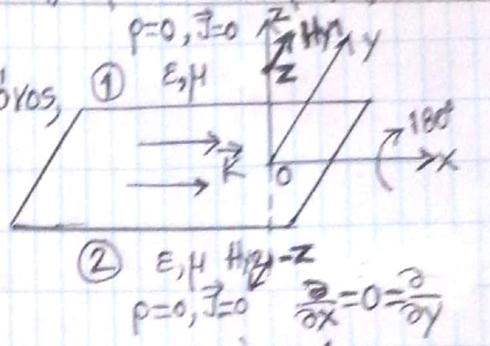
Οδεύοντα επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά (ΗΜ) κύματα (TEM)
TEM: Transverse ElectroMagnetic (Εγκάρσια Ηλεκτρομαγνητικά)

Επιφανειακό ρεύμα $\vec{K}=\hat{x}K_x(t)$, όπου t ο χρόνος, ρέει στο απέραντο επίπεδο με $z=0$ (Σχ. 1). Ζητείται το διεγειρόμενο ηλεκτρομαγνητικό (ΗΜ) πεδίο $\vec{E}$, $\vec{H}$.



Σχήμα 1

Θα είναι

$\vec{E}=\vec{E}(z,t)$ και $\vec{H}=\vec{H}(z,t)$. (1)

Για τον υπολογισμό των $\vec{E}$ και $\vec{H}$ θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τις ανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell και τις ανεξάρτητες οριακές συνθήκες.

Για $z=0$ ισχύουν οι οριακές συνθήκες:

$$\hat{z}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} E_{x1}=E_{x2} & (\alpha) \\ E_{y1}=E_{y2} & (\beta) \end{cases} \quad (2)$$

$$\hat{z}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{K} \Rightarrow \begin{cases} H_{x1}=H_{x2} & (\alpha) \\ H_{y2}-H_{y1}=K_x(t) & (\beta) \end{cases} \quad (3)$$

Για $z>0$ και για $z<0$ ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z}=\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} & (\alpha) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} & (\beta) \\ 0=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} & (\gamma) \end{cases} \quad (4) \text{ (Νόμος Maxwell–Faraday)}$$

$(\gamma) \Rightarrow H_z=$ σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου $\Rightarrow$

$\Rightarrow H_z=0$, διότι δεν μπορεί να διεγείρεται χρονοσταθερό πεδίο από πηγή που μεταβάλλεται με τον χρόνο, όπως η $\vec{K}(t)$.

Επίσης για $z>0$ και για $z<0$ ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} & (\alpha) \\ \frac{\partial H_x}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} & (\beta) \\ 0=\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} & (\gamma) \end{cases} \quad (5) \text{ (Νόμος Maxwell–Ampere)}$$

$(\gamma) \Rightarrow E_z=$ σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου $\Rightarrow$

$\Rightarrow E_z=0$, με την ίδια αιτιολόγηση όπως και για το H_z.

Το σύστημα των εξισώσεων (2β), (3α), (4α) και (5β) με αγνώστους τα E_y και H_x είναι ομογενές, δηλ. δεν συνδέεται με την πηγή $K_x(t)$. Προφανής λύση

είναι η $E_y=0$ και $H_x=0$,
η οποία είναι και η μοναδική, διότι ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος (θεώρημα μοναδικότητας).

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (5α) ως προς z έχουμε

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} \qquad (6)$$

και με χρήση της (4β) η (6) γίνεται

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0}, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} \qquad (7)$$

Η (7) είναι η <u>κυματική εξίσωση</u> για το H_y, διότι η λύση της εκφράζει <u>ηλεκτρομαγνητικά κύματα.</u>

Θέτοντας το βαθμωτό μέγεθος $\Phi(z,t)$ στη θέση του $H_y(z,t)$, η (7) γράφεται:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (8)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (8) είναι:

$$\Phi(z,t) = f\left(t-\frac{z}{c}\right) + g\left(t+\frac{z}{c}\right), \qquad (9)$$

όπου f και g δύο οποιεσδήποτε βαθμωτές συναρτήσεις, με ορίσματα $t-z/c$ και $t+z/c$, αντίστοιχα.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε πολύ εύκολα ότι η (9) ικανοποιεί την (8):

$$(9) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial z} = f'\left(t-\frac{z}{c}\right)\left(-\frac{1}{c}\right) + g'\left(t+\frac{z}{c}\right)\frac{1}{c} \qquad (10)$$

Στη (10) με τόνο παριστάνουμε την παράγωγο ως προς όλο το όρισμα.

$$(10) \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = f''\left(t-\frac{z}{c}\right)\frac{1}{c^2} + g''\left(t+\frac{z}{c}\right)\frac{1}{c^2} \qquad (11)$$

Στην (11) με δύο τόνους παριστάνουμε τη 2η παράγωγο ως προς όλο το όρισμα.

Όμοια βρίσκουμε από την (9) ότι

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = f''\left(t-\frac{z}{c}\right) + g''\left(t+\frac{z}{c}\right) \qquad (12)$$

Αντικατάσταση των (11) και (12) στην (8) δείχνει ότι το $\Phi(z,t)$ στην (9) την επαληθεύει.

Αν περιστρέψουμε τη διάταξη του Σχ.1 κατά 180° γύρω από τον άξονα x το H_{y1} θα πάρει τη θέση του H_{y2} και αντίστροφα, ενώ η διάταξη δεν αλλάζει. Αυτό σημαίνει ότι

$H_{y2}(-z,t) = -H_{y1}(z,t)$, $\forall z>0$ (αντισυμμετρία) (13)

(3β), (13) $\Rightarrow$

$$H_{y2}(z=0_-,t) - H_{y1}(z=0_+,t) = 2H_{y2}(z=0_-,t) = -2H_{y1}(z=0_+,t) = K_x(t) \Rightarrow$$

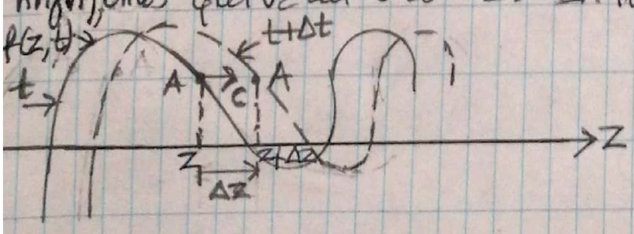
$$\Rightarrow H_{y2}(z=0_-,t) = -H_{y1}(z=0_+,t) = \frac{1}{2}K_x(t) \qquad (14)$$

Η εξίσωση (9) εκφράζει ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως θα δείξουμε παρακάτω. Η συνθήκη ακτινοβολίας ή συνθήκη Sommerfeld υπαγορεύει, από καθαρά φυσικούς λόγους, ότι σε περιοχές του χώρου που εκτείνονται ως το άπειρο, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια πρέπει να μεταδίδεται απομακρυνόμενη από τις πηγές. Δηλαδή, για να είναι φυσικά αποδεκτές, οι πεδιακές λύσεις πρέπει να παριστάνουν κύματα τα οποία οδεύουν (ταξιδεύουν) από τις πηγές προς το άπειρο (εξερχόμενα κύματα).

Εξετάζουμε τη λύση $f(t-\frac{z}{c})$ στην (9) σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t και $t+\Delta t$, με $\Delta t>0$, παρακολουθώντας την κίνηση ενός τυχαίου σημείου Α της καμπύλης $f(z,t)$. Για t και $t+\Delta t$ το σημείο Α θα βρίσκεται στις θέσεις z και $z+\Delta z$, αντίστοιχα. Εφόσον αναφερόμαστε στο ίδιο σημείο θα πρέπει το όρισμα της f να παραμένει σταθερό, δηλ. θα πρέπει να ισχύει ότι

$$t-\frac{z}{c} = t+\Delta t - \frac{z+\Delta z}{c} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta z}{c} \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = c \qquad (15)$$

Επομένως, το σημείο Α μετακινείται κατά $\Delta z>0$ σε χρόνο Δt με ταχύτητα $c=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ και επειδή είναι ένα τυχαίο σημείο, το ίδιο ισχύει για κάθε σημείο της καμπύλης $f(z,t)$. Άρα όλη η καμπύλη $f(z,t)$ μετακινείται, σαν κύμα (ΗΜ κύμα), προς μεγαλύτερα z (απομακρυνόμενη από την πηγή), όπως φαίνεται στο Σχ. 2. Το κύμα αυτό είναι ένα οδεύον κύμα, δηλ. κύμα που ταξιδεύει με ταχύτητα c προς την κατεύθυνση $+\hat{z}$.



Σχήμα 2

Αν εξετάσουμε, αντίστοιχα, τη λύση $g(t+\frac{z}{c})$ στην (9) για t και $t+\Delta t$, με $\Delta t>0$, βρίσκουμε ότι $\Delta t = -\frac{\Delta z}{c} \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = -c$, δηλ. όλη η καμπύλη $g(t+\frac{z}{c})$ μετακινείται, σαν κύμα, προς μικρότερα z, με ταχύτητα c (προς την κατεύθυνση $-\hat{z}$).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $f(t-\frac{z}{c})$ είναι η λύση για την περιοχή 1 ($z>0$) και η $g(t+\frac{z}{c})$ είναι η λύση για την περιοχή 2 ($z<0$). Επομένως θα είναι

$H_{y1}(z,t)=f(t-\frac{z}{c})$, για $z>0$ (16)

και

$H_{y2}(z,t)=g(t+\frac{z}{c})$, για $z<0$ (17)

Από τις (14), (16) και (17) προκύπτει ότι $g(t)=-f(t)=K_x(t)/2$ και συνεπώς

$H_{y1}(z,t)=-\frac{1}{2}K_x(t-\frac{z}{c})$, $z>0$ (18)

$H_{y2}(z,t)=\frac{1}{2}K_x(t+\frac{z}{c})$, $z<0$ (19)

=0 [όπως στις (4γ) και (5γ)]

(5α) $\Rightarrow$ $E_x=-\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{\partial H_y}{\partial z}dt+$ σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου (20)

(18)−(20) $\Rightarrow$

$E_{x1}(z,t)=\frac{1}{2\varepsilon}\int K_x'(t-\frac{z}{c})(-\frac{1}{c})d(t-\frac{z}{c})=\frac{-1}{2\varepsilon c}K_x(t-\frac{z}{c})=-\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\varepsilon}K_x(t-\frac{z}{c})=-\frac{\zeta}{2}K_x(t-\frac{z}{c})$, $z>0$, (21)

$E_{x2}(z,t)=-\frac{1}{2\varepsilon}\int K_x'(t+\frac{z}{c})(\frac{1}{c})d(t+\frac{z}{c})=-\frac{\zeta}{2}K_x(t+\frac{z}{c})$, $z<0$ (22)

όπου

$\zeta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ (Ω) (23)

είναι η κυματική αντίσταση του μέσου στο οποίο διαδίδεται το ΗΜ κύμα. Αν το μέσο είναι το κενό (αέρας) είναι $\zeta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\simeq 120\pi\,\Omega\simeq 377\,\Omega$.

(18), (19), (21) και (22) $\Rightarrow$

$\frac{E_{x1}(z,t)}{H_{y1}(z,t)}=\zeta$, $\frac{E_{x2}(z,t)}{H_{y2}(z,t)}=-\zeta$ (24)

Εφαρμογή

Έστω $K_x(t)=K_0\cos\omega t$ (25)

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα.

Από τις (18), (19), (21), (22) και (25) προκύπτει στην περίπτωση αυτή ότι

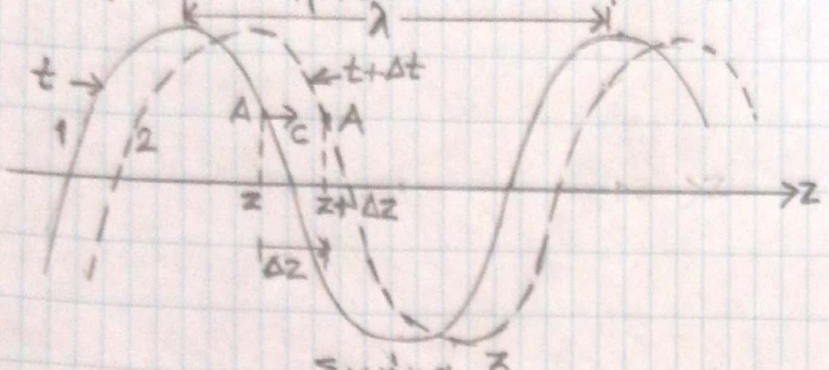
$H_{y1}(z,t)=-\frac{K_0}{2}\cos[\omega(t-\frac{z}{c})]$, $z>0$ (26)

$H_{y2}(z,t)=\frac{K_0}{2}\cos[\omega(t+\frac{z}{c})]$, $z<0$ (27)

$E_{x1}(z,t)=-\frac{\zeta}{2}K_0\cos[\omega(t-\frac{z}{c})]$, $z>0$ (28)

$E_{x2}(z,t)=-\frac{\zeta}{2}K_0\cos[\omega(t+\frac{z}{c})]$, $z<0$ (29)

Αντί των **τυχαίων** καμπυλών του Σχ.2, στην εφαρμογή αυτή έχουμε τις ημιτονοειδείς καμπύλες του Σχ.3. Οι καμπύλες αυτές (κυματομορφές) αποτελούν δύο διαφορετικά στιγμιότυπα του κύματος κατά τις χρονικές στιγμές t και $t+\Delta t$, αντίστοιχα.



Σχήμα 3

Το σημείο A στη θέση z της καμπύλης 1 έχει φάση $\omega t - kz$, όπου $k=\omega/c=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ ο <u>κυματικός αριθμός</u> (wavenumber), ενώ αυτό στη θέση $z+\Delta z$ της καμπύλης 2 έχει φάση $\omega(t+\Delta t)-k(z+\Delta z)$. Εφόσον αναφερόμαστε στο ίδιο σημείο A θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\omega t - kz = \omega(t+\Delta t)-k(z+\Delta z) \Rightarrow \omega\Delta t - k\Delta z = 0 \Rightarrow \Delta z = \frac{\omega}{k}\Delta t \qquad (30)$$

Επειδή $\Delta t>0$, από την (30) προκύπτει ότι $\Delta z>0$. Άρα το τυχαίο σημείο A και επομένως όλη η ημιτονοειδής καμπύλη 1 μετατοπίζεται κατά Δz προς την κατεύθυνση $+\hat{z}$, με ταχύτητα c (οδεύον κύμα).

Φυσικά, αυτό που οδεύει είναι τα σημεία σταθερής στιγμιαίας φάσης της κυματικής συνάρτησης $\cos(\omega t - kz)$. Η ταχύτητα όδευσης των σημείων σταθερής φάσης δίνεται από τη σχέση

$$u_p = \frac{\Delta z}{\Delta t} \overset{(30)}{=} \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c \quad (31)$$ (ταχύτητα φάσης ή φασική ταχύτητα-phase velocity)

Εντελώς ανάλογα για την κυματομορφή $\cos(\omega t + kz)$ συνάγεται ότι παριστάνει οδεύον κύμα το οποίο διαδίδεται κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$.

Αν z_1 και z_2 είναι δύο σημεία του άξονα z και $\theta_1=\omega t-kz_1$, $\theta_2=\omega t-kz_2$ η αντίστοιχη στιγμιαία φάση της κυματομορφής $\cos(\omega t-kz)$ κατά μία χρονική στιγμή t, τότε $\theta_1-\theta_2=k(z_2-z_1)$. Η απόσταση z_2-z_1, για την οποία η αντίστοιχη διαφορά φάσης $\theta_1-\theta_2$ ισούται με 2π, ονομάζεται <u>μήκος κύματος</u> (wavelength) και συμβολίζεται με λ (Σχ.3). Επομένως, ισχύει ότι

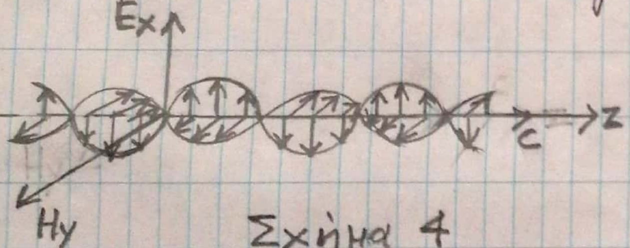
$$2\pi = k\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{2\pi}{2\pi f\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{f} = cT \qquad (32)$$

όπου f και T η συχνότητα και η περίοδος, αντίστοιχα, της κυματομορφής. Άρα το μήκος κύματος λ είναι η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου, όπου η στιγμιαία φάση $\omega t \pm kz$ του κύματος είναι σταθερή, είναι επίπεδα με z=σταθερό, κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης. Για τον λόγο αυτό τα κύματα που περιγράφουν οι (26)-(29) χαρακτηρίζονται ως επίπεδα κύματα. Επειδή το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν το ίδιο πλάτος σε όλα τα σημεία μιας επίπεδης ισοφασικής επιφάνειας, τα παραπάνω επίπεδα κύματα χαρακτηρίζονται ως ομοιόμορφα επίπεδα κύματα.

Αντίστοιχα υπάρχουν ΗΜ κύματα με σταθερή φάση σε κυλινδρικές επιφάνειες (κυλινδρικά κύματα) ή σε σφαιρικές επιφάνειες (σφαιρικά κύματα), κάθετες στην κατεύθυνση διάδοσής τους.

Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο του επίπεδου κύματος είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης z (Σχ.4). Κύματα, όπως τα παραπάνω, των οποίων τόσο το ηλεκτρικό όσο και το μαγνητικό πεδίο δεν έχουν συνιστώσα κατά την κατεύθυνση διάδοσης, χαρακτηρίζονται ως εγκάρσια ηλεκτρομαγνητικά κύματα ή κύματα TEM (Transverse ElectroMagnetic) ως προς την κατεύθυνση αυτή.



Σχήμα 4