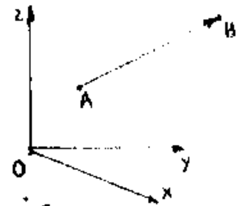
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Διανυσματικός λογισμός.

Θεωρούμε τα σημεία $A(x_A, y_A, z_A)$ και $B(x_B, y_B, z_B)$. Το διάνυσμα $\vec{AB}$ (ή $\underset{\sim}{AB}$) έχει συντεταγμένες:



$$\underset{\sim}{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) \qquad (1.1.1)$$

Δηλαδή τις συντεταγμένες του πέρατος μείον τις αντίστοιχες συντεταγμένες της αρχής.
Ορίζεται το μέτρο του διανύσματος:

$$|\underset{\sim}{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \qquad (1.1.2)$$

Ορίζεται το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα του $\underset{\sim}{AB}$:

$$\hat{n} = \frac{\underset{\sim}{AB}}{|\underset{\sim}{AB}|} \qquad (1.1.3)$$

όπου προφανώς είναι $|\hat{n}| = 1$. Υπάρχουν άπειρα μοναδιαία διανύσματα. Ορίζονται τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ στους τρεις άξονες συντεταγμένων, με φορά προς τα θετικά του αντίστοιχου άξονα και είναι τα γνωστά $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$: $\hat{x} \equiv \underset{\sim}{i}$, $\hat{y} \equiv \underset{\sim}{j}$, $\hat{z} \equiv \underset{\sim}{k}$

Ένα διάνυσμα $\underset{\sim}{a} = (a_x, a_y, a_z)$ γράφεται:

$$\underset{\sim}{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

Εσωτερικό γινόμενο: Αν είναι

$$\underset{\sim}{a} = (a_x, a_y, a_z) \qquad \underset{\sim}{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

δυο διανύσματα, το εσωτερικό τους γινόμενο είναι

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (1.1.4)$$

Αν $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ είναι τα μέτρα των διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ και φ είναι η μεταξύ τους γωνία, τότε:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi \qquad (1.1.5)$$

απ' όπου παρατηρούμε, ότι είναι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ όταν τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι κάθετα. Προφανώς έχουμε:

$$\hat{n}\cdot\hat{n} = |\hat{n}||\hat{n}|\cos 0^\circ = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

οπότε είναι:

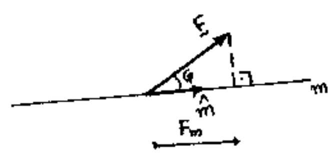
$$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1, \quad \hat{y}\cdot\hat{y} = 1, \quad \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$

και επειδή τα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι ανά δύο κάθετα, είναι:

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0, \quad \hat{y}\cdot\hat{z} = 0, \quad \hat{x}\cdot\hat{z} = 0.$$

Προβολή διανύσματος σε άξονα: Ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{m}$ ορίζει διεύθυνση, θετική φορά, μονάδα μέτρησης, δηλαδή ένα άξονα. Αν $\mathbf{F}$ είναι τυχαίο διάνυσμα τότε είναι:

$$\mathbf{F}\cdot\hat{m} = |\mathbf{F}||\hat{m}|\cos\varphi = |\mathbf{F}|\cdot 1\cdot\cos\varphi = F_m$$



όπου $|\mathbf{F}|\cos\varphi$ είναι η προβολή F_m του διανύσματος $\mathbf{F}$ πάνω στον άξονα m που ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{m}$.

Εξωτερικό γινόμενο: Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, ορίζεται το εξωτερικό γινόμενό τους:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

δηλαδή διάνυσμα $\underset{\sim}{c}$. Το διάνυσμα $\underset{\sim}{c}$ είναι κάθετο σε καθένα από τα διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$.
Αν φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ ισχύει

$$|\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}| = |\underset{\sim}{a}|\,|\underset{\sim}{b}| \sin\varphi \qquad (1.1.6)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι αν $\sin\varphi = 0$, δηλαδή τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ είναι παράλληλα, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο είναι μηδενικό.

Φορά του διανύσματος $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$: Αν ο αντίχειρας του δεξιού χεριού τοποθετηθεί ώστε να δείχνει το διάνυσμα $\underset{\sim}{a}$ και ο δείκτης του ίδιου χεριού το $\underset{\sim}{b}$ τότε ο μεσαίος δείχνει το $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$ (όταν τα τρία αυτά δάκτυλα είναι ανοικτά και τα υπόλοιπα δύο μαζεμένα).

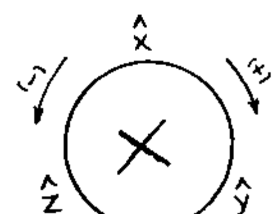
Προφανώς είναι:

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0 \qquad \hat{y} \times \hat{y} = 0 \qquad \hat{z} \times \hat{z} = 0 \qquad (\text{παράλληλα})$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \qquad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \qquad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

$$\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y} \qquad \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \qquad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

Μνημονικός κανόνας γι' αυτά τ' αποτελέσματα είναι το κυκλικό σχήμα: Όταν πολλαπλασιάζουμε διανύσματα κατά την ωρολογιακή φορά, προκύπτει πρόσημο (+), ενώ κατά την αντιωρολογιακή (−).



Αν είναι: $\underset{\sim}{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\underset{\sim}{b} = (b_x, b_y, b_z)$ τότε:

$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.1.7)$$

Το γινόμενο μπορεί να υπολογισθεί και με άλλο τρόπο κάνοντας επιμεριστικά τις πράξεις: (βοηθά το κυκλικό σχήμα):

$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}) \times (b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z}) =$$

$$= a_x b_x \cdot \underset{\sim}{0} + a_x b_y \hat{z} - a_x b_z \hat{y} -$$

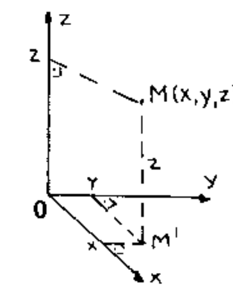
$$- a_y b_x \hat{z} + a_y b_y \underset{\sim}{0} + a_y b_z \hat{x} +$$

$$+ a_z b_x \hat{y} - a_z b_y \hat{x} + a_z b_z \underset{\sim}{0} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{z}$$

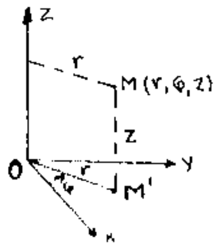
1.2 Συστήματα συντεταγμένων.

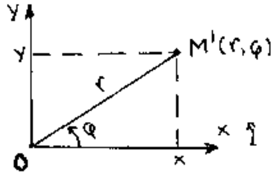
Για τον καθορισμό της θέσης ενός τυχαίου σημείου M στο χώρο, απαιτούνται τρεις μεταβλητές. Ανάλογα με την επιλογή των μεταβλητών έχουμε τα συστήματα συντεταγμένων:



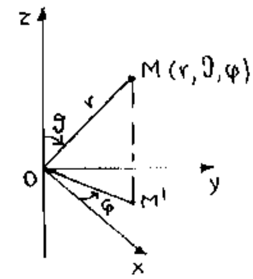
(a) Καρτεσιανό σύστημα: Εδώ χρησιμοποιούμε σα μεταβλητές θέσης τις προβολές x, y, z του σημείου M πάνω στους άξονες x, y, z αντίστοιχα. Μάλιστα, για τις προβολές x,y στους άξονες x,y, συνήθως προβάλλουμε το σημείο M στο σημείο M' του επιπέδου Oxy και κατόπιν το M' στους άξονες x,y. Τα σημεία M, M' έχουν ίδιες συντεταγμένες x, y.

(b) Κυλινδρικές συντεταγμένες. Εδώ έχουμε τη μεταβλητή z κοινή με τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Διαφέρουν





όμως οι μεταβλητές θέσης της προβολής M' στο επίπεδο Oxy. Εδώ χρησιμοποιούμε την απόσταση r του σημείου M' από την αρχή (που προφανώς είναι ίση με την απόσταση r του M από τον άξονα z) και τη γωνία φ που σχηματίζει η ακτίνα OM' με τον άξονα $+Ox$ (Η γωνία φ μετριέται με αρχή το θετικό ημιάξονα $+Ox$ και θετική φορά από το θετικό ημιάξον $+Ox$ προς τον $+Oy$). Είναι πάντοτε: $r \geq 0$ (απόσταση) και $0 \leq \varphi < 2\pi$. Οι r, φ είναι γνωστές σαν πολικές συντεταγμένες του σημείου M'. Είναι λοιπόν $M(r, \varphi, z)$



(c) Σφαιρικές συντεταγμένες. Εδώ έχουμε μεταβλητές: (i) Τη γωνία φ (ίδια με τις κυλινδρικές συντεταγμένες (ii) Την απόσταση r του σημείου M από την αρχή των αξόνων και (iii) τη γωνία ϑ που σχηματίζει η ακτίνα OM με το θετικό ημιάξονα $+Oz$.

Είναι $r \geq 0$ και $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Είναι $\vartheta = 0$ στον $+Oz$ και $\vartheta = \pi$ στον $-Oz$. Όλα τα σημεία του επιπέδου Oxy έχουν $\vartheta = \pi/2$.

1.3 Επιφάνειες στον τρισδιάστατο χώρο.

Μία εξίσωση $z = z(x,y)$ ή $F(x,y,z) = 0$ παριστάνει(*) μία επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο. Ενδιαφέρον εδώ παρουσιάζουν:

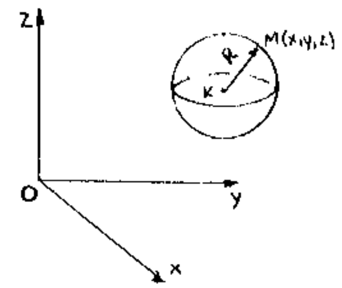
(a) Η επίπεδη επιφάνεια:

$$z = Ax + By + \Gamma \qquad \text{ή} \qquad ax + by + cz + h = 0$$

όπου A, B, Γ ή a, b, c, h σταθερές. Παρατηρούμε ότι τα x, y, z εμφανίζονται σε πρώτη δύναμη. Η μία μορφή μπορεί εύκολα να μετατραπεί στην άλλη. Το διάνυ

(*) ΒΛΕΠΕ ΙΩΑΝΝΗ ΤΣΑΡΟΥΧΑ "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ" σμα (a,b,c) είναι κάθετο στο επίπεδο $ax+by+cz+h=0$. Για τη σχεδίασή του αρκούν τρία σημεία. Δίνουμε αυθαίρετες τιμές στα x,y και βρίσκουμε το αντίστοιχο z από την εξίσωση του επιπέδου.

(b) Σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το σημείο $K(a,b,c)$ και ακτίνα R. Έχει εξίσωση



$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Κάθε σημείο της $M(x,y,z)$ απέχει από το σταθερό σημείο $K(a,b,c)$ σταθερή απόσταση ίση με R, οπότε κάθε σημείο μέσα στη σφαιρική επιφάνεια ικανοποιεί την ανισότητα:

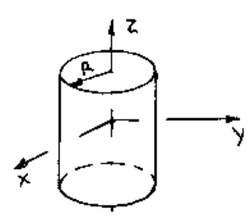
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<R^2$$

ενώ κάθε σημείο έξω από την επιφάνεια ικανοποιεί την

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>R^2$$

Ειδικά αν η σφαιρική επιφάνεια έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, τότε αυτή έχει εξίσωση:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



(c) Η κυλινδρική επιφάνεια:

$$x^2+y^2=R^2$$

Η εξίσωση αυτή, αν ήταν $z=0$, θα παρίστανε μία περιφέρεια στο επίπεδο Oxy με κέντρο την αρχή και ακτίνα R. Εδώ όμως το z είναι ελεύθερο. Έτσι για κάθε τυχαία τιμή $z=c_1$ έχουμε περιφέρεια στο επίπεδο $z=c_1$ (παράλληλο στο επίπεδο $z=0$). Όλες αυτές οι περιφέρειες αν σχεδιασθούν για υάθε τιμή του z αποτελούν την (υυυλιυή) υυλινδριυή επιφάνεια. Τα σημεία που ιυανοποιούν τη σχέση:

$$x^2+y^2 < R^2$$

βρίσυονται μέσα στην επιφάνεια, ενώ ευείνα που ιυανοποιούν την:

$$x^2+y^2 > R^2$$

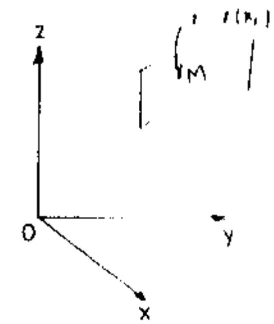
βρίσυονται έξω απ' αυτήν.

Παραμετριυή παράσταση επιφάνειας.

Από την εξίσωση μιας επιφάνειας:

$$z = z(x,y) = f(x,y)$$

φαίνεται ότι υπάρχουν δύο "ελεύθερες" μεταβλητές x,y. Το τυχαίο σημείο της επιφάνειας έχει συντεταγμένες x, y, z, με $z=f(x,y)$. Το διάνυσμα $\underset{\sim}{r}=\underset{\sim}{OM}$ έχει συντεταγμένες αυτές του σημείου M, αφού οι συντεταγμένες του σημείου O είναι μηδενιυές. Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται διάνυσμα θέσης του σημείου M υαι είναι:



$$\underset{\sim}{r} = (x, y, f(x,y)) \implies \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}(x,y)$$

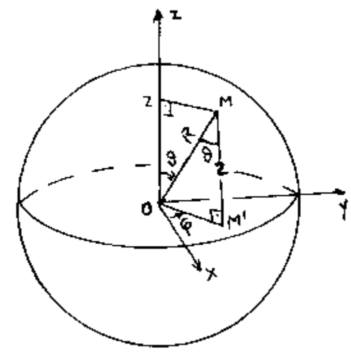
Αν τα (x,y) υινούνται σε υάποιο σύνολο, τότε προυύπτουν αντίστοιχα σημεία της επιφάνειας. Γενιυά, αν u,v είναι δύο παράμετροι τότε η εξίσωση

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}(u,v)$$

παριστάνει μια επιφάνεια, αφού σε υάθε ζευγάρι u κων (u,v) αντιστοιχεί ένα σημείο της επιφάνειας.

Παράδειγμα 1. Η σφαιρική επιφάνεια. (με κέντρο την αρχή και ακτίνα R)

Αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο της σφαιρικής επιφάνειας, έχουμε



$$|\underset{\sim}{OM}| = R\,, \quad |OM'| = R\sin\vartheta$$

Επομένως:

$$x = |OM'|\cos\varphi = R\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$y = |OM'|\sin\varphi = R\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$z = R\cos\vartheta$$

Το διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r}$ του σημείου M είναι:

$$\underset{\sim}{r} = (x,y,z) = (R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{r}(\vartheta,\varphi) = (R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta) \qquad (1.3.1)$$

Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα είναι:

$$\hat{r} = \frac{\underset{\sim}{r}}{|\underset{\sim}{r}|} = \frac{(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta)}{\sqrt{R^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + R^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + R^2\cos^2\vartheta}} \Longrightarrow$$

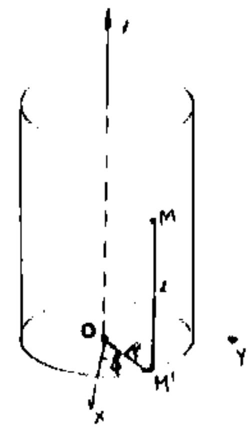
$$\hat{r} = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta) \qquad (1.3.2)$$

ή $$\hat{r} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\vartheta\,\hat{z} \qquad (1.3.3)$$

Το $\hat{r}$ έχει την ίδια φορά με το $\underset{\sim}{r}$ $(=\underset{\sim}{OM})$ είναι δηλαδή κάθετο στη σφαιρική επιφάνεια και έχει φορά προς τα έξω.

Παράδειγμα 2. Η (κυκλική) κυλινδρική επιφά-

νεια (με άξονα z και ακτίνα R)



Αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο της κυλινδρικής επιφάνειας, έχουμε:

$$x = (OM')\cos\varphi = R\cos\varphi$$

$$y = (OM')\sin\varphi = R\sin\varphi$$

όπου M' είναι η προβολή του M στο επίπεδο Oxy
Το διάνυσμα θέσης του σημείου M είναι:

$$\underset{\sim}{r} = O\underset{\sim}{M} = (x,y,z) = (R\cos\varphi,\ R\sin\varphi,\ z) \implies$$

$$\underset{\sim}{r}(\varphi,z) = (R\cos\varphi,\ R\sin\varphi,\ z) \tag{1.3.4}$$

Το διάνυσμα $O\underset{\sim}{M}'$ είναι προφανώς κάθετο στην κυλινδρική επιφάνεια με φορά προς τα έξω. Είναι:

$$O\underset{\sim}{M}' = (R\cos\varphi,\ R\sin\varphi,\ 0)$$

Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα είναι:

$$\hat{n} = \frac{O\underset{\sim}{M}'}{|O\underset{\sim}{M}|} = \frac{(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi,\ 0)}{\sqrt{R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi + 0^2}} \implies$$

$$\hat{n} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0) \tag{1.3.5}$$

ή $$\hat{n} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y} \tag{1.3.6}$$

Το $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην κυλινδρική επιφάνεια με φορά προς τα έξω.

Παρατήρηση: Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα το εσωτερικό σημείο της κάθε επιφάνειας είναι:
(α) Για τη σφαιρική: Ένα σημείο (x,y,z) μέσα στη σφαίρα απέχει $r(<R)$ από το κέντρο και έχει:

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = r\cos\vartheta \qquad (0 \le r < R)$ —

(b) Για την κυλινδρική: Ένα σημείο (x,y,z) μέσα στον κύλινδρο απέχει $r(<R)$ από τον άξονα z και έχει:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z \qquad (0 \le r < R)$$

1.4 Καμπύλες στον τρισδιάστατο χώρο.

Αν έχουμε τις επιφάνειες:

$$F(x,y,z) = 0, \quad G(x,y,z) = 0$$

τότε τα σημεία τομής τους (αν υπάρχουν) ορίζουν μία καμπύλη (γενικά). Η εξίσωση της καμπύλης: Παραθέτουμε απλά τις εξισώσεις των επιφανειών, αφού τα σημεία της καμπύλης πρέπει ταυτόχρονα να είναι σημεία των δύο επιφανειών. Άρα η καμπύλη περιγράφεται από το σύστημα:

$$\{F(x,y,z) = 0 \;,\quad G(x,y,z) = 0\}$$

Όμως, είναι φανερό ότι γενικά οι εξισώσεις δίνουν δύο από τους x,y,z συναρτήσει του τρίτου. Δηλαδή υπάρχει μία παράμετρος t γενικά, συναρτήσει της οποίας εκφράζονται οι x,y,z:

$$x = x(t)\;,\; y = y(t)\;,\; z = z(t)$$

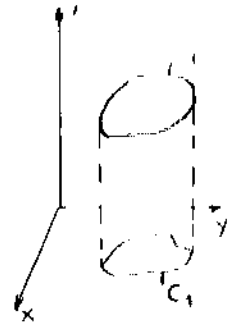
Το τυχαίο σημείο $M(x,y,z)$ της καμπύλης έχει διάνυσμα θέσης:

$$\underset{\sim}{r}(t) = (x(t),\; y(t),\; z(t)) \qquad (1.4.1)$$

Προβολή καμπύλης σε επίπεδο. Έστω οι επιφάνειες με εξισώσεις $G(x,y,z) = 0$, $H(x,y,z) = 0$. Η τομή των επιφανειών είναι: (παραθέτουμε απλά τις εξισώσεις των επιφανειών) η καμπύλη C

$$\{G(x,y,z)=0 \qquad H(x,y,z)=0\}$$

Η προβολή της καμπύλης στο επίπεδο Oxy είναι η καμπύλη C_1:



$$\{z=0 \qquad F(x,y)=0\}$$

όπου η $F(x,y)=0$ προκύπτει με απαλειφή του z από τις εξισώσεις $G(x,y,z)=0$, $H(x,y,z)=0$ (Λύνουμε μία απ' αυτές ως προς z και αντικαθιστούμε στην άλλη).

Αντίστοιχα προκύπτει η προβολή C_2 της καμπύλης C στο επίπεδο yz:

$$\{x=0, \quad \Delta(y,z)=0\}$$

όπου η εξίσωση $\Delta(y,z)=0$ προκύπτει με απαλειφή του x από τις εξισώσεις $G(x,y,z)=0$, $H(x,y,z)=0$

Όμοια η προβολή C_3 της καμπύλης C στο επίπεδο xz είναι:

$$\{y=0, \quad L(x,z)=0\}$$

όπου η $L(x,z)=0$ προκύπτει με απαλειφή του y από τις εξισώσεις $G(x,y,z)=0$, $H(x,y,z)=0$.

1.5 Αξιοσημείωτα αόριστα Ολοκληρώματα.

(i) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad (a \in \mathbb{R}-\{1\}, \ a \text{ σταθερή})$

(ii) $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

(iii) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(iv) $\int \sin x\, dx \quad \cos x + c$

(v) $\int e^x dx = e^x + c$

(vi) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

(vii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

(viii) $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

(ix) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

(x) $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/2} dx^2 = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/2} d(1-x^2)$

$= -\frac{1}{2}\, \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, (1-x^2)^{\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + c$

(xi) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2-x^2)^{-1/2} d(a^2-x^2) =$

$= -\frac{1}{2}\, \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\, (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}+1} = -\sqrt{a^2-x^2} + c$

(xii) $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\, d(-\cos x) =$

$= \int \cos^2 x\, d(\cos x) - \int d(\cos x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$

(xiii) $\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\, d(\sin x) =$

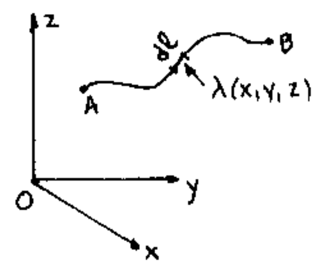
$\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

Κεφάλαιο 2

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

2.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους

Θα γνωρίσουμε τη σημαντική έννοια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πρώτου είδους χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα από τη Φυσική:



Θεωρούμε το νήμα του σχήματος το οποίο έχει άκρα τα σημεία A και B και είναι ηλεκτρικά φορτισμένο σ' όλο το μήκος του. Έτσι, αν θεωρήσουμε στοιχειώδες τμήμα μήκους dl (από το νήμα), τότε σ' αυτό υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο dq. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

Επειδή, γενικά, το νήμα δεν είναι ομοιόμορφα φορτισμένο, η γραμμική πυκνότητα φορτίου αλλάζει από θέση σε θέση: Είναι μία συνάρτηση των x, y, z:

$$\lambda = \lambda(x,y,z) = \frac{dq}{dl}$$

Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε:

$$dq = \lambda(x,y,z)\, dl$$

Το ολικό φορτίο του νήματος είναι ίσο με το άθροισμα όλων των στοιχειωδών φορτίων dq, δηλαδή με το ολοκλήρωμα:

$$Q = \int_{(AB)} \lambda(x,y,z)\, dl \qquad (2.1.1)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\lambda(x,y,z)$ πάνω στην καμπύλη AB (δηλαδή πάνω στό σύρμα) α' είδους.

Τίθεται τώρα, βέβαια, το πρόβλημα υπολογισμού του ολοκληρώματος (2.1.1), αν είναι δοσμένη η συνάρτηση $\lambda(x,y,z)$ και η καμπύλη AB. Για το σκοπό αυτό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

α) Γράφουμε την εξίσωση της καμπύλης σε παραμετρική μορφή: Αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο πάνω στην καμπύλη μπορούμε να γράψουμε:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

δηλαδή οι συντεταγμένες θέσης του σημείου είναι συναρτήσεις της παραμέτρου t, ώστε σε κάθε τιμή της παραμέτρου t, να αντιστοιχεί ένα σημείο πάνω στην καμπύλη. Έτσι μπορούμε να βρούμε τις τιμές t_A t_B που αντιστοιχούν στα άκρα A, B της καμπύλης. Αρκεί γιαυτό μία από τις σχέσεις

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \qquad (t_A \le t \le t_B)$$

Προτιμάμε φυσικά την απλούστερη απ' αυτές.

(β) Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad \dot{y}=\frac{dy}{dt}\quad \dot{z}=\frac{dz}{dt}$$

και την συνάρτηση $\lambda(x(t),y(t),z(t))$.

(γ) Ισχύει:

$$\int_{AB}\lambda(x,y,z)\,d\ell=\int_{t_A}^{t_B}\lambda(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \qquad (2.1.2)$$

(δ) Υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα του β' μέλους της προηγούμενης σχέσης, οπότε έχουμε το ζητούμενο. Τονίζουμε ότι πρέπει $t_A < t_B$.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους μετατρέπεται σε ορισμένο ολοκλήρωμα. Έτσι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους έχει ανάλογες ιδιότητες με το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,d\ell$$

που είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z)$ πάνω στην καμπύλη ΑΒ. Είναι δοσμένη η συνάρτηση

$$f(x,y,z) = x + yz^2$$

και η παραμετρική μορφή της καμπύλης ΑΒ:

$$x = t, \quad y = 2t \quad z = -t$$

με $t_A = 1, \quad t_B = 2$

Με δοσμένη την παραμετρική παράσταση της ΑΒ βρίσκουμε:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 2, \quad \dot{z} = -1$$

$$f(x(t), y(t), z(t)) = x(t) + y(t)\,z^2(t) = t + 2t\,(-t)^2 = t + 2t^3$$

και επομένως

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$

Έτσι έχουμε:

$$\int_A^B (x+yz^2)\,d\ell = \int_1^2 (t+2t^3)\sqrt{6}\,dt = \sqrt{6}\int_1^2 (t+2t^3)\,dt =$$

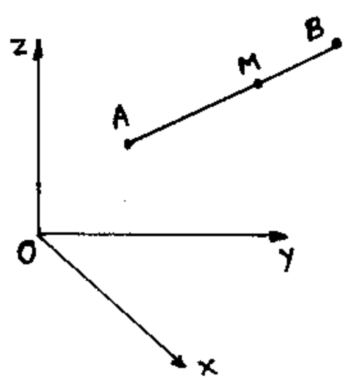
$$= \sqrt{6}\int_1^2 t\,dt + 2\sqrt{6}\int_1^2 t^3 dt = \sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_1^2 + 2\sqrt{6}\,\frac{1}{4}t^4\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}(2^2-1) + \frac{2\sqrt{6}}{4}(2^4-1^4) = 9\sqrt{6}$$

Στο παράδειγμα αυτό ήταν δοσμένη η παραμετρική παράσταση της καμπύλης AB και τα t_A, t_B. Σε πολλές όμως περιπτώσεις η καμπύλη AB δίνεται σε άλλη μορφή. Για να βρούμε την παραμετρική μορφή, είναι χρήσιμες οι ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) Παραμετρική παράσταση ευθύγραμμου τμήματος AB με άκρα:

$A(a_1, a_2, a_3)$ $\qquad B(b_1, b_2, b_3)$



Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $M(x,y,z)$ ανάμεσα στα A, B. Επειδή τα διανύσματα $\underset{\sim}{AM}$, $\underset{\sim}{AB}$ είναι προφανώς συγγραμμικά, υπάρχει $t \in \mathbb{R}$:

$$\underset{\sim}{AM} = t\,\underset{\sim}{AB} \qquad (1)$$

Έτσι για κάθε σημείο M αντιστοιχεί μία τιμή του t, από τη σχέση (1). Όμως

$$\underset{\sim}{AM} = (x,y,z) - (a_1,a_2,a_3) = (x-a_1, y-a_2, z-a_3)$$

όπου οι συντεταγμένες του διανύσματος $\underset{\sim}{AM}$ προκύπτουν αν από τις συντεταγμένες (x,y,z) του πέρατος αφαιρέσουμε τις αντίστοιχες (a_1,a_2,a_3) της αρχής. Όμοια:

$$\underset{\sim}{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$$

και η σχέση (1) γράφεται:

$$(x-a_1,\ y-a_2,\ z-a_3)=t\,(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3) \implies$$

$$\big(x-a_1,\ y-a_2,\ z-a_3\big)=\Big(t\,(b_1-a_1),\ t\,(b_2-a_2),\ t\,(b_3-a_3)\Big)$$

απ' όπου προκύπτουν:

$$x-a_1=t\,(b_1-a_1) \implies x=a_1+t\,(b_1-a_1) \qquad (2)$$

$$y-a_2=t\,(b_2-a_2) \implies y=a_2+t\,(b_2-a_2) \qquad (3)$$

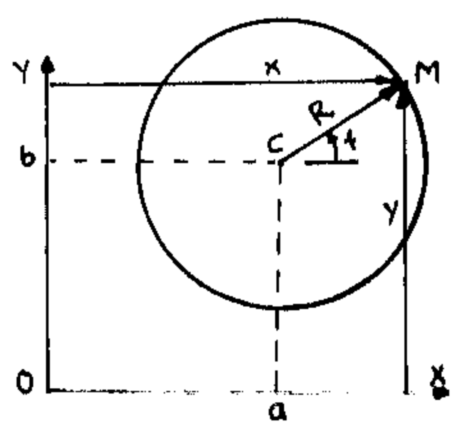
$$z-a_3=t\,(b_3-a_3) \implies z=a_3+t\,(b_3-a_3) \qquad (4)$$

Οι (2), (3), (4) αποτελούν την παραμετρική παράσταση του τμήματος AB.

Θεωρούμε τώρα μία απ' αυτές, π.χ. τη (2). Για $x=x_A=a_1$ δίνει $t_A=0$ ενώ για $x=x_B=b_1$ δίνει $t_B=1$. Έτσι βρήκαμε τα t_A, t_B. Θα μπορούσαμε να βρούμε (τα ίδια) t_A, t_B θεωρώντας τις σχέσεις (3) ή (4) αντί της (2).

(β) Παραμετρική παράσταση τόξου κύκλου, που βρίσκεται στο επίπεδο Oxy.

Υποθέτουμε ότι ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο C(a,b) και ακτίνα R. Το τυχαίο σημείο M(x,y) της περιφέρειας έχει:



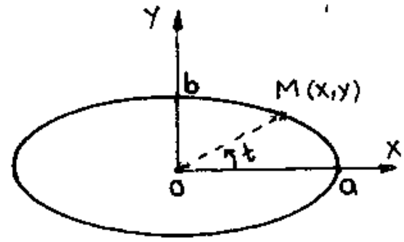
$$x=a+R\cos t\ ,\quad y=b+R\sin t$$

όπου t είναι η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα CM με το θετικό ημιάξονα $+Ox$. Θετική φορά της γωνίας t είναι η αντιωρολογιακή. Στην ειδική περίπτωση που ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, είναι:

$$x = R\cos t \quad , \quad y = R\sin t$$

(c) Παραμετρική παράσταση τόξου έλλειψης, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ημιάξονες a, b. Το τυχαίο σημείο $M(x,y)$ έχει:

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$$



όπου η γωνία t έχει θετική φορά την αντιωρολογιακή, ενώ είναι $t=0$ στο θετικό ημιάξονα $+Ox$.

(d) Τυχαία καμπύλη που έχει εξίσωση:

$$\left\{ F(x,y,z) = 0 \qquad G(x,y,z) = 0 \right\}$$

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε ένα από τους x, y, z ίσο με t, ώστε αν επιλύσουμε τις σχέσεις βρίσκουμε τους δύο άλλους συναρτήσει του t. Για παράδειγμα, αν έχουμε την καμπύλη:

$$x + e^y - z = 0 \quad , \quad x\cos y + z = 0,$$

συμφέρει να τεθεί $y = t$ για να επιλύσουμε (εύκολα) ως προς y, z, οπότε έχουμε:

$$x = -\frac{e^t}{1+\cos t} \qquad y = t \qquad z = \frac{e^t\cos t}{1+\cos t}$$

Οι παραπάνω περιπτώσεις είναι αυτές που συναντώνται πιο συχνά στην πράξη. Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση, να είναι δοσμένη απ' ευθείας η παραμετρική παράσταση.

Άσκηση 1

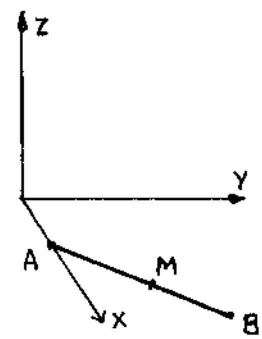
Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_A^B (2xyz + z^2)\,d\ell, \qquad A(1,0,0) \qquad B(2,2,-1)$$

πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα A, B.

Λύση

Βρίσκουμε αρχικά την παραμετρική παράσταση. Αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο πάνω στο AB, τότε:



$$\underset{\sim}{AM} = t\,\underset{\sim}{AB} \implies$$

$$(x-1,\ y-0,\ z-0) = t\,(2-1,\ 2-0,\ -1-0) \implies$$

$$(x-1,\ y,\ z) = (t,\ 2t,\ -t)$$

Από την τελευταία βρίσκουμε:

$$\{x-1 = t,\quad y = 2t,\quad z = -t\} \implies$$

$$x = 1+t,\quad y = 2t,\quad z = -t$$

και είναι η ζητούμενη παραμετρική παράσταση. Υπολογίζουμε τα t_A, t_B θεωρώντας μια από τις τελευταίες ισότητες, π.χ. την $y = 2t$. Έχουμε

$$y_A = 0 \implies 0 = 2t_A \implies t_A = 0$$

$$y_B = 2 \Rightarrow 2 = 2t_B \Rightarrow t_B = 1$$

Από τις παραμετρικές εξισώσεις βρίσκουμε:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 1, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -1$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\int_A^B (2xyz + z^2)\,d\ell = \int_{t_A}^{t_B} \Big(2x(t)\cdot y(t)\cdot z(t) + z^2(t)\Big)\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\;dt =$$

$$= \int_0^1 \Big(2(1+t)\cdot 2t(-t) + (-t)^2\Big)\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\;dt =$$

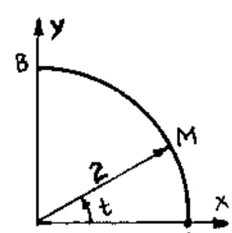
$$= \sqrt{6}\int_0^1 \Big(-4t^2(1+t) + t^2\Big)dt = \sqrt{6}\int_0^1 \Big(-3t^2 - 4t^3\Big)dt =$$

$$= -3\sqrt{6}\int_0^1 t^2 dt - 4\sqrt{6}\int_0^1 t^3 dt = -3\sqrt{6}\,\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 - 4\sqrt{6}\,\frac{1}{4}t^4\Big|_0^1 =$$

$$= -\sqrt{6}(1^3 - 0^3) - \sqrt{6}(1^4 - 0^4) = -2\sqrt{6}$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:



$$I = \int_A^B x\,d\ell$$

πάνω στο τεταρτοκύκλιο του σχήματος, με ακτίνα ίση με 2.

Λύση

Για την παραμετρική παράσταση του τεταρτοκυκλίου παρατηρούμε ότι το τυχαίο σημείο του $M(x,y)$ έχει:

$$x=2\cos t \qquad y=2\sin t$$

όπου t η γωνία που φαίνεται στο σχήμα. Προφανώς το σημείο A αντιστοιχεί στο $t_A=0$ ενώ το B για $t_B=\pi/2$. Αυτό προκύπτει από το σχήμα, ή από μία από τις

$$x=2\cos t \qquad y=2\sin t$$

αν αντικαταστήσουμε $x_A=2$, $y_A=0$, $x_B=0$, $y_B=2$. Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει:

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=-2\sin t \qquad \dot{y}=\frac{dy}{dt}=2\cos t$$

Μπορούμε λοιπόν τώρα να γράψουμε:

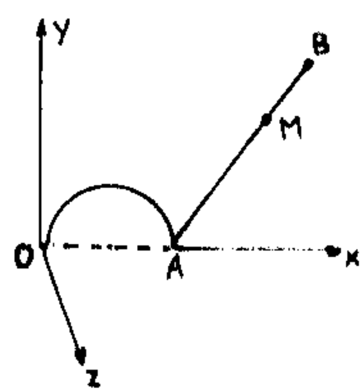
$$\int_A^B x\,d\ell=\int_{t_A}^{t_B} x(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_0^{\pi/2} 2\cos t\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi/2} 2\cos t\sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt=4\sin t\Big|_0^{\pi/2}=4$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x,y,z)=x^2+zy$$



πάνω στην καμπύλη OAB του σχήματος. Το τμήμα OA είναι ημιπεριφέρεια στο επίπεδο Oxy με διάμετρο OA. Δίνονται:

$$A(4,0,0) \qquad B(6,8,10)$$

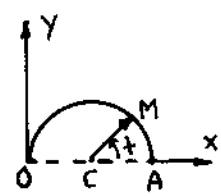
Λύση

Η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι σύνθετη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_{OAB}(x^2+yz)d\ell = \int_{OA}(x^2+yz)d\ell + \int_{AB}(x^2+yz)d\ell \qquad (1)$$

όπου το α΄ ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους υπολογίζεται πάνω στην ημιπεριφέρεια OA, ενώ το β΄ ολοκλήρωμα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Θα υπολογίσουμε χωριστά τα δύο αυτά ολοκληρώματα:

(α) Για το $\int_{OA}(x^2+yz)d\ell$ γράφουμε μία παραμετρική παράσταση του τόξου ημιπεριφέρειας OA· παρατηρούμε ότι αυτή έχει κέντρο το (2,0) και ακτίνα 2. Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι η παράμετρος t οφείλει να είναι αύξουσα κατά μήκος της καμπύλης, δηλαδή το πάνω πάνω όριο (ως προς t) μεγαλύτερο του κάτω. Ακόμη πρέπει να τονίσουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α΄ είδους είναι ανεξάρτητο της φοράς της διαδρομής, αν πάμε δηλαδή από το O προς το A ή από το A προς το O. Το μόνο που πρέπει να προσέχουμε εδώ είναι ότι πρέπει η παράμετρος t να είναι οπωσδήποτε αύξουσα όπως προαναφέραμε. Το τυχαίο σημείο M(x,y) της OA έχει:



$$x = 2+2\cos t \qquad y = 2\sin t \qquad z = 0$$

και είναι προφανές ότι $t_A = 0$, $t_B = \pi$. Ακόμη έχουμε:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -2\sin t \qquad \dot{y} = 2\cos t \qquad \dot{z} = 0$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\int_{OA}(x^2+yz)d\ell = \int_0^{\pi}\left((2+2\cos t)^2+2\sin t\cdot 0\right)\sqrt{(2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(2+2\cos t)^2\sqrt{4}\,dt = 8\int_0^{\pi}(1+\cos t)^2 dt =$$

$$=8\int_0^{\pi}(1+2\cos t+\cos^2 t)dt = 8\int_0^{\pi}dt + 16\int_0^{\pi}\cos t\,dt + 8\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt$$

Υπολογίζουμε τα (απλά) ορισμένα ολοκληρώματα. Για το τρίτο χρησιμοποιούμε τον τύπο του διπλασίου τόξου και βρίσκουμε:

$$\int_0^{\pi}dt = t\Big|_0^{\pi} = \pi, \qquad \int_0^{\pi}\cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{\pi} = \sin\pi-\sin 0 = 0$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}dt + \int_0^{\pi}\frac{\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$=\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2t\,d(2t) = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Η τιμή του ολοκληρώματος βρίσκεται:

$$\int_O^A (x^2+yz)d\ell = 12\pi \qquad (2)$$

(β) Για το ολοκλήρωμα $\int_{AB}(x^2+yz)d\ell$ γράφουμε μία παραμετρική παράσταση του ευθυγράμμου τμήματος AB. Αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο, έχουμε:

$$\underset{\sim}{AM} = t\,\underset{\sim}{AB} \implies (x-4,\ y-0,\ z-0) = t\cdot(6-4,\ 8-0,\ 10-0) \Rightarrow$$

$$x = 4+2t \qquad y = 8t \qquad z = 10t$$

Η μία απ' αυτές (π.χ. η πρώτη) για $x_A = 4$ δίνει $t_A = 0$ ενώ για $x_B = 4$ δίνει $t_B = 1$. Ακόμη:

$$\dot{x} = 2 \qquad \dot{y} = 8 \qquad \dot{z} = 10$$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_{AB} (x^2+yz)d\ell = \int_0^1 \Big((4+2t)^2 + 8t\cdot 10t\Big)\sqrt{2^2+8^2+10^2}\ dt =$$

$$=\sqrt{168}\int_0^1 (16+4t^2+16t+80t^2)\,dt = \sqrt{168}\left(\int_0^1 16dt + \int_0^1 84t^2dt + \int_0^1 16tdt\right) =$$

$$= \sqrt{168}\left(16\,t + 84\,\frac{1}{3}\,t^3 + 16\,\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{168}\cdot(52)$$

Λόγω και της σχέσης (2) έχουμε:

$$\int_{OAB} (x^2+yz)d\ell = 12\pi + \sqrt{168}\cdot(52)$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z)$ κατά μήκος της καμπύλης:

$$x+y^2-z = 0 \qquad x+y^3+z-4 = 0$$

με άκρα τα σημεία: $A(1,1,2)$, $B(2,-1,3)$, αν $f = \left(\frac{9}{2}y^4 + 2(z-x)+1\right)^{-1/2}$

Λύση

Η καμπύλη δίνεται στη μορφή:

$$F(x,y,z)=0 \qquad G(x,y,z)=0$$

Στην περίπτωση αυτή, ένας από τους x,y,z τίθεται ίσος με t και μάλιστα εκείνος, ως προς τον οποίο είναι δύσκολη η επίλυση. Εδώ η επίλυση είναι δύσκολη ως προς y. Θέτουμε λοιπόν $y=t$:

$$x+t^2-z=0 \qquad x+t^3+z-4=0$$

Επιλύουμε ως προς x,z οπότε έχουμε την παραμετρική παράσταση:

$$x=2-\frac{t^2+t^3}{2} \qquad y=t \qquad z=2+\frac{t^2-t^3}{2}$$

Από τη σχέση $y=t$ για $y_A=1$ προκύπτει $t_A=1$ ενώ για $y_B=-1$ βρίσκουμε $t_B=-1$. Ακόμη έχουμε:

$$\dot{x}=-\frac{2t+3t^2}{2} \qquad \dot{y}=1 \qquad \dot{z}=\frac{2t-3t^2}{2}$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\int_{AB}\left(\frac{9y^4}{2}+2(z-x)+1\right)^{-\frac{1}{2}}dl=$$

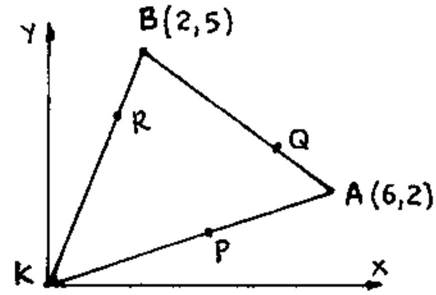
$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{2}t^4+2\left(2+\frac{t^2-t^3}{2}\right)-2\left(2-\frac{t^2+t^3}{2}\right)+1\right)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\;dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{2}t^4+2t^2+1\right)^{-1/2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{2t+3t^2}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{2t-3t^2}{2}\right)^2}\;dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}dt=2$$

Να τονίσουμε εδώ ότι το κάτω άκρο του ορισμένου ολοκληρώματος ως προς t πρέπει να είναι μικρότερο από το πάνω, όπως συμβαίνει πάντα στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους.

Άσκηση 5



Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{KABK} 2xy\,d\ell \qquad (1)$$

όπου KABK είναι η περίμετρος του τριγώνου του σχήματος.

Λύση

Προφανώς μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_{KABK} 2xy\,d\ell = \int_{KA} 2xy\,d\ell + \int_{AB} 2xy\,d\ell + \int_{BK} 2xy\,d\ell \qquad (2)$$

οπότε αρκεί να υπολογίσουμε χωριστά καθένα από τα τρία ολοκληρώματα του β' μέλους:

(α) Για το πρώτο ολοκλήρωμα θεωρούμε μία παραμετρική παράσταση του ευθ. τμήματος KA. Αν $P(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο του, έχουμε:

$$\underset{\sim}{KP} = t\,\underset{\sim}{KA} \implies (x-0,\ y-0) = t\,(6-0,\ 2-0) \implies$$

$$x = 6t \qquad y = 2t$$

Από την πρώτη, με $x_K = 0$ βρίσκουμε $t_K = 0$, ενώ με $x_A = 6$ βρίσκουμε $t_K = 1$. Με παραγώγιση προκύπτει:

$\dot{x} = 6 \qquad \dot{y} = 2$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\int_{AK} 2xy\,d\ell = \int_0^1 2\cdot 6t\cdot 2t\,\sqrt{6^2+2^2}\,dt = 24\sqrt{40}\int_0^1 t^2 dt = \frac{24\sqrt{40}}{3}\,t^3\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\int_{AK} 2xy\,d\ell = 8\sqrt{40} \qquad (3)$$

(β) Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, αν $Q(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της AB, έχουμε:

$$\underset{\sim}{AQ} = t\,\underset{\sim}{AB} \Rightarrow (x-6, y-2) = t(2-6, 5-2) \Rightarrow$$

$$x = 6-4t \qquad y = 2+3t$$

Από την πρώτη απ' αυτές, με $x_A = 6$ βρίσκουμε $t_A = 0$, ενώ με $x_B = 2$ βρίσκουμε $t_B = 1$. Ακόμη:

$$\dot{x} = -4 \qquad \dot{y} = 3$$

οπότε έχουμε:

$$\int_{AB} 2xy\,d\ell = \int_0^1 2(6-4t)(2+3t)\sqrt{(-4)^2+3^2}\,dt = 10\int_0^1 (-12t^2+10t+12)dt$$

$$= -120\int_0^1 t^2 dt + 100\int_0^1 t\,dt + 120\int_0^1 dt = -\frac{120}{3}\,t^3\Big|_0^1 + \frac{100}{2}\,t^2\Big|_0^1 + 120 \Rightarrow$$

$$\int_{AB} 2xy\,d\ell = 130 \qquad (4)$$

(γ) Για το τρίτο ολοκλήρωμα, αν $R(x,y)$ τυχαίο ση μείο της BK έχουμε:

$$\underset{\sim}{BR} = t\,\underset{\sim}{BK} \implies (x-2,\ y-5) = t(0-2,\ 0-5) \implies$$

$$x = 2-2t \qquad y = 5-5t$$

Η πρώτη απ' αυτές δίνει: Για $x_B = 2$ το $t_B = 0$ ενώ για $x_K = 0$ το $t_K = 1$. Ακόμη

$$\dot{x} = -2 \qquad \dot{y} = -5$$

Έχουμε:

$$\int_{BK} 2xy\,d\ell = \int_0^1 2(2-2t)(5-5t)\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{29}\int_0^1 (10t^2-20t+10)\,dt = \frac{20\sqrt{29}}{3}t^3\Big|_0^1 - \frac{40\sqrt{29}}{2}t^2\Big|_0^1 + 20\sqrt{29}\,t\Big|_0^1 \implies$$

$$\int_{BK} 2xy\,d\ell = \frac{20\sqrt{29}}{3} \qquad (5)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) προκύπτει η τιμή του I:

$$I = 8\sqrt{40} + 130 + \frac{20\sqrt{29}}{3}$$

Παρατήρηση: Προφανώς ισχύει:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,d\ell = \int_{BA} f(x,y,z)\,d\ell$$

για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους. Προσέχουμε όμως το άνω άκρο του ορισμένου ολοκληρώματος ως προς t να είναι πάντα μεγαλύτερο του κάτω

Παρατηρούμε ακόμη ότι στην άσκηση αυτή η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι κλειστή. Για το λόγο αυτό συμβολίζουμε:

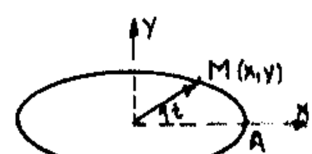
$$\int_{KABK} 2xy\,d\ell = \oint_C 2xy\,d\ell \qquad (C \equiv KABK)$$

Είναι προφανές ακόμη, ότι όταν η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι κλειστή, μπορούμε να θεωρήσουμε αρχή (και πέρας συμπίπτουν) ένα οποιοδήποτε σημείο.

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_C \frac{1}{(x^2+16y^2)^{1/2}}\,d\ell$$



όπου C είναι η έλλειψη

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Λύση

Η έλλειψη έχει ημιάξονες 4 (οριζόντιο) και 2 (κάθετο). Η παραμετρική παράσταση είναι:

$$x = 4\cos t \qquad y = 2\sin t$$

Για να διανυθεί η έλλειψη, αρχίζοντας από ένα σημείο της (π.χ. το σημείο A) πρέπει το t να κάνει τη διαδρομή από $t_1 = 0$ (σημείο A) μέχρι $t_2 = 2\pi$, οπότε ξαναφτάνουμε στο A. Ακόμη έχουμε:

$\dot{x} = -4\sin t \qquad \dot{y} = 2\cos t$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

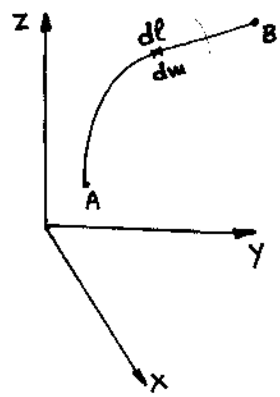
$$\oint_C \frac{1}{(x^2+16y^2)^{1/2}}\,d\ell = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(16\cos^2 t + 16\cdot 4\sin^2 t)^{1/2}} \sqrt{(-4\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{1}{(x^2+16y^2)^{1/2}} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{16\sin^2 t + 4\cos^2 t}}{\sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi$$

(γίνεται απλοποίηση στα ριζικά)

2.2 Εφαρμογές του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πρώτου είδους στη Φυσική και τη Γεωμετρία.

Υποθέτουμε στα επόμενα ότι η συνάρτηση $f(x,y,z)$ παριστάνει τη μάζα ανά μονάδα μήκους ενός σύρματος:



$$f(x,y,z) = \frac{dm}{d\ell}$$

όπου dm είναι η στοιχειώδης μάζα του τμήματος $d\ell$ που βρίσκεται στη θέση (x,y,z). Η $f(x,y,z)$ είναι γνωστή και σαν γραμμική πυκνότητα μάζας.

Εφαρμογή 1. Η συνολική μάζα του σύρματος, που είναι ίση με το άθροισμα των στοιχειωδών μαζών:

$$M = \int_{AB} dm \quad \Longrightarrow \quad M = \int_{AB} f(x,y,z)\,d\ell \qquad (2.2.1)$$

Εφαρμογή 2. Το κέντρο μάζας ενός σώματος είναι ένα σημείο C με συντεταγμένες:

$$x_c = \frac{1}{M}\int_{\Sigma} x\,dm \qquad y_c = \frac{1}{M}\int_{\Sigma} y\,dm \qquad z_c = \frac{1}{M}\int_{\Sigma} z\,dm$$

όπου M είναι η συνολική μάζα του σώματος και το σύμβολο Σ σημαίνει ότι η ολοκλήρωση γίνεται σ' όλο το σώμα (Σ). Εδώ έχουμε:

$$f(x,y,z) = \frac{dm}{d\ell} \Longrightarrow dm = f(x,y,z)\,d\ell$$

οπότε οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας C είναι:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M}\int_{AB} x\,f(x,y,z)\,d\ell \\ y_c &= \frac{1}{M}\int_{AB} y\,f(x,y,z)\,d\ell \\ z_c &= \frac{1}{M}\int_{AB} z\,f(x,y,z)\,d\ell \end{aligned}\right\} \quad (2.2.2)$$

Εφαρμογή 3. Ροπή αδράνειας σύρματος:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int_{AB} (y^2+z^2)\,f(x,y,z)\,d\ell \quad \text{(ως προς x)} \\ I_y &= \int_{AB} (x^2+z^2)\,f(x,y,z)\,d\ell \quad \text{(ως προς y)} \\ I_z &= \int_{AB} (x^2+y^2)\,f(x,y,z)\,d\ell \quad \text{(ως προς z)} \end{aligned}\right\} \quad (2.2.3)$$

και ως προς την αρχή των αξόνων:

$$I_o = \int_{AB} (x^2+y^2+z^2)\, f(x,y,z)\, d\ell \qquad (2.2.4)$$

Εφαρμογή 4 Μήκος τόξου:

$$L = \int_{AB} d\ell \qquad (2.2.5)$$

όπου εδώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ίση με 1.

Άσκηση 7

Δίνεται το σύρμα (υλικό τόξο) AB με παραμετρική παράσταση:

$$x = t \;,\; y = t^2 \quad z = t^3 \qquad (t_A = 0,\; t_B = 1)$$

και γραμμική πυκνότητα

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{1+4y+9zx}}$$

Να υπολογισθεί η μάζα του και το κέντρο μάζας του.

Λύση

Η μάζα του τόξου είναι: (σχέση (2.2.1))

$$m = \int_{AB} f(x,y,z)\, d\ell \Rightarrow m = \int_{AB} \frac{xyz}{\sqrt{1+4y+9xz}}\, d\ell \qquad (1)$$

Από την παραμετρική παράσταση του τόξου βρίσκουμε:

$$\dot{x} = 1 \quad \dot{y} = 2t \quad \dot{z} = 3t^2$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$m=\int_0^1 \frac{t\cdot t^2\cdot t^3}{\sqrt{1+4t^2+9tt^3}}\cdot\sqrt{1^2+(2t)^2+(3t)^3}\,dl=\int_0^1 t^6\,dt=\frac{1}{7}t^7\Big|_0^1=\frac{1}{7}$$

Το κέντρο μάζας του τόξου έχει συντεταγμένες:

$$x_c=\frac{1}{m}\int_{AB} x\,f(x,y,z)\,d\ell=\frac{1}{\frac{1}{7}}\int_{AB} x\,\frac{xyz}{\sqrt{1+4y+9xz}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=$$

$$=7\int_0^1 t\,\frac{t\,t^2t^3}{\sqrt{1+4t^2+9tt^3}}\sqrt{1+(2t)^2+(3t)^3}\,dt=7\int_0^1 t^7dt=\frac{7}{8}$$

$$y_c=\frac{1}{m}\int_{AB} y\,f(x,y,z)\,d\ell=\frac{1}{\frac{1}{7}}\int_{AB} y\,\frac{xyz}{\sqrt{1+4y+9xz}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=$$

$$=7\int_0^1 t^2\,\frac{t\cdot t^2t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t\cdot t^3}}\sqrt{1+(2t)^2+(3t)^2}\,dt=7\int_0^1 t^8dt=\frac{7}{9}$$

$$z_c=\frac{1}{m}\int_{AB} z\,f(x,y,z)\,d\ell=\frac{1}{\frac{1}{7}}\int_0^1 z\,\frac{xyz}{\sqrt{1+4y+9xz}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=$$

$$=7\int_0^1 t^3\,\frac{t\,t^2t^3}{\sqrt{1+4t^2+9tt^3}}\sqrt{1+(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt=7\int_0^1 t^9dt=\frac{7}{10}$$

Προκύπτει λοιπόν η θέση του $C:(7/8,\ 7/9,\ 7/10)$

Άσκηση 8

Το υλικό τόξο AB είναι ομογενές, με παραμετρικές εξισώσεις:

$x = 2\cos t \quad y = 2\sin t \quad$, [illegible]

και $t_A = 0$, $t_B = 2\pi$. Να υπολογισθεί το μήκος του ℓ και οι ροπές αδράνειας ως προς καθένα από τους άξονες x, y, z. Η γραμμική πυκνότητα είναι ίση με λ.

Λύση

Το μήκος του τόξου ℓ δίνεται από τη σχέση:

$$\ell = \int_{AB} d\ell \implies \ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt \qquad (1)$$

Όμως, από τις δοσμένες παραμετρικές εξισώσεις βρίσκουμε:

$$\dot{x} = -2\sin t \qquad \dot{y} = 2\cos t \qquad \dot{z} = 1$$

οπότε υπολογίζουμε:

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2^2 + 1} \implies$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{5} \qquad (2)$$

Έτσι η σχέση (1) γράφεται:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\, dt \implies \ell = 2\pi\sqrt{5}$$

Για τον υπολογισμό των ροπών αδράνειας εφαρμόζουμε τις σχέσεις (2.2.3) με σταθερή τη γραμμική πυκνότητα $f(x,y,z) = \lambda$, αφού το τοξο είναι ομογενές. Έχουμε:

$$I_x = \int_{AB} (y^2 + z^2)\lambda\, d\ell = \lambda \int_0^{2\pi} \left(y^2(t) + z^2(t)\right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

Η τελευταία, με χρήση των παραμετρικών εξισώσεων και της σχέσης (2) γράφεται:

$$I_x = \lambda \int_0^{2\pi} (4\sin^2 t + t^2)\sqrt{5}\,dt = 4\lambda\sqrt{5}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt + \lambda\sqrt{5}\int_0^{2\pi} t^2 dt$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου από τα ορισμένα ολοκληρώματα εκφράζουμε το $\sin^2 t$ συναρτήσει του διπλάσιου τόξου:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}dt - \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}2\pi - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2t\,d(2t) = \pi - \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$I_x = 4\lambda\sqrt{5}\pi + \lambda\sqrt{5}\,\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{2\pi} = 4\lambda\sqrt{5}\pi + 8\lambda\sqrt{5}\,\frac{\pi^3}{3}$$

Όμοια για το I_y:

$$I_y = \int_{AB} (x^2+z^2)\lambda\,d\ell = \int_0^{2\pi} \lambda\,(x^2(t) + z^2(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt =$$

$$= \lambda\int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + t^2)\sqrt{5}\,dt = 4\lambda\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt + \lambda\sqrt{5}\int_0^{2\pi} t^2 dt$$

Εκφράζουμε το $\cos^2 t$ συναρτήσει του διπλάσιου τόξου και βρίσκουμε:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}dt + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos(2t)\,d(2t) = \pi + \frac{1}{4}\cos 2t \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$I_y = 4\lambda\sqrt{5}\pi + \lambda\sqrt{5}\,\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{2\pi} = 4\lambda\sqrt{5}\pi + \lambda\sqrt{5}\,\frac{8\pi^3}{3}$$

Τέλος υπολογίζουμε το I_z:

$$I_z = \int_{AB} (x^2+y^2)\,\lambda\, d\ell = \lambda\int_0^{2\pi} \left(x^2(t)+y^2(t)\right)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt =$$

$$= \lambda\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t + 4\sin^2 t\right)\sqrt{5}\,dt = 4\lambda\sqrt{5}\int_0^{2\pi} dt = 8\pi\lambda\sqrt{5}$$

Παρατήρηση: Από τα προηγούμενα, είναι φανερό ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους δεν εξαρτάται από τον τρόπο που γίνεται η παραμετροποίηση της καμπύλης. Αν δηλαδή μία καμπύλη έχει πολλές παραμετρικές παραστάσεις, μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε απ' αυτές για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Προσοχή όμως χρειάζεται ώστε το πάνω άκρο ολοκλήρωσης (ως προς t) να είναι μεγαλύτερο από το κάτω.

Άσκηση 9

Ένα σύρμα είναι ομογενές και έχει σχήμα τόξου κύκλου ακτίνας R και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας a. Να βρεθεί η θέση του κέντρου μάζας του.

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα αξόνων Kxy έτσι ώστε το κέντρο K του τόξου να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Αν M(x,y) τυχαίο σημείο του τόξου και t η γωνία του σχήματος, είναι:

$$x = R\cos t \qquad y = R\sin t$$

Για $x_A = R$ είναι $t_A = 0$ ενώ για $x_B = R\cos a$ είναι $t_B = a$. Ακόμη με παραγώγιση έχουμε:

$$\dot{x} = -R\sin t \qquad \dot{y} = R\cos t$$

Αρχικά βρίσκουμε τη μάζα του τόξου. Επειδή αυτό είναι ομογενές, η γραμμική του πυκνότητα είναι σταθερή· έστω λ. Έτσι η μάζα του M είναι:

$$M = \int_{AB} \lambda d\ell = \lambda \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \quad \Longrightarrow$$

$$M = \lambda \int_0^a R\, dt = \lambda R a \quad \Longrightarrow \quad M = \lambda R a. \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τώρα τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας C του τόξου:

$$x_c = \frac{1}{M} \int_{AB} x \lambda d\ell = \frac{1}{M} \lambda \int_{AB} x d\ell$$

και λόγω της σχέσης (1):

$$x_c = \frac{\lambda}{\lambda R a} \int_{AB} x d\ell = \frac{1}{Ra} \int_0^a x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \quad \Longrightarrow$$

$$x_c = \frac{1}{Ra} \int_0^a R\cos t\, R\, dt = \frac{R}{a} \int_0^a \cos t\, dt = \frac{R}{a} \sin t \Big|_0^a \quad \Longrightarrow$$

$$x_c = \frac{R}{a}\sin a \qquad (2)$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το y_c:

$$y_c = \frac{1}{M}\int_{AB} y\lambda\, d\ell = \frac{\lambda}{\lambda R a}\int_{AB} d\ell \implies$$

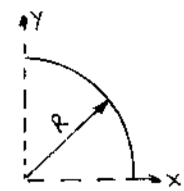
$$y_c = \frac{1}{Ra}\int_0^a y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \frac{1}{Ra}\int_0^a R\sin t\, R\,dt \implies$$

$$y_c = \frac{R}{a}\int_0^a \sin t\,dt = \frac{R}{a}(-\cos t)\Big|_0^a \implies y_c = \frac{R}{a}(1-\cos a) \qquad (3)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

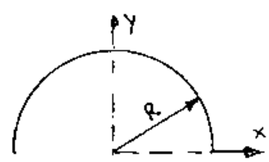
(α) Για $a=\frac{\pi}{2}$ (τεταρτο περιφέρειας) οι (2), (3) δίνουν:

$$x_c = \frac{2R}{\pi} \qquad y_c = \frac{2R}{\pi}$$

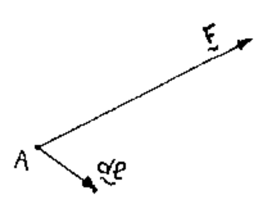


(b) Για $a=\pi$ (ημιπεριφέρεια) έχουμε:

$$x_c = 0 \qquad y_c = \frac{2R}{\pi}$$



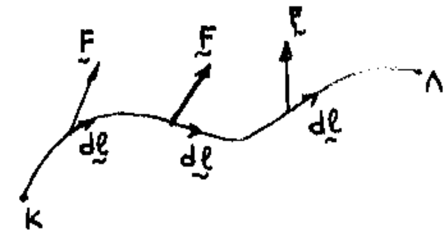
2.3 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης.



Υποθέτουμε ότι μία δύναμη $\underset{\sim}{F}$ ασκείται στο σημείο Α. Το Α μετατοπίζεται κατά $d\underset{\sim}{\ell}$ (στοιχειώδης μετατόπιση). Το έργο της δύναμης $\underset{\sim}{F}$, όπως είναι γνωστό από τη Φυσική, δίνεται από τη σχέση:

$$dW = \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{\ell} \qquad (2.3.1)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η δύναμη $\underset{\sim}{F}$ μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από τη θέση Κ μέχρι τη θέση Λ, πάνω σε μία καμπύλη C. Το συνολικό παραγόμενο έργο είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχειωδών έργων, δηλαδή το ολοκλήρωμα:



$$W_{K \to \Lambda} = \int_{K}^{\Lambda} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{\ell} \qquad (2.3.2)$$

Η δύναμη $\underset{\sim}{F}$ μπορεί βέβαια να είναι μεταβλητή κατά μήκος της καμπύλης εξαρτώμενη από την εκάστοτε θέση (x,y,z): $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(x,y,z)$. Γράφουμε:

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = \Big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\Big) \qquad (2.3.3)$$

δηλαδή η $\underset{\sim}{F}$ είναι ένα διάνυσμα - συνάρτηση αφού οι συντεταγμένες της είναι συναρτήσεις. Η $\underset{\sim}{F}(x,y,z)$ λέμε ότι είναι μία διανυσματική συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.3.2) είναι ένα ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης.

Μπορούμε πάντα να γράφουμε:

$$d\underset{\sim}{\ell} = (dx, dy, dz) \qquad (2.3.4)$$

όπου dx, dy, dz είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $d\underset{\sim}{\ell}$ στις διευθύνσεις x, y, z. Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο κατά τα γνωστά:

$$\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{\ell} = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης γράφεται:

$$\int_K^\Lambda \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell} = \int_K^\Lambda \left(P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\right) \quad (2.3.5)$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού στηρίζεται σε μία (οποιαδήποτε) παραμετροποίηση της καμπύλης:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

Αν το σημείο K αντιστοιχεί στην τιμή t_K της παραμέτρου t, ενώ το Λ στην τιμή t_Λ και επειδή ισχύουν:

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \dot{x}(t)\,dt \qquad dy = \frac{dy}{dt}dt = \dot{y}(t)dt$$

$$dz = \frac{dz}{dt}dt = \dot{z}(t)dt$$

το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.3.5) μετατρέπεται σε ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_K^\Lambda \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell} = \int_{t_K}^{t_\Lambda}\Big(P(x(t),y(t),z(t))\,\dot{x}(t)dt + Q(x(t),y(t),z(t))\,\dot{y}(t)dt + R(x(t),y(t),z(t))\,\dot{z}(t)dt\Big)$$

$$(2.3.6)$$

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι το t_K που αντιστοιχεί στην αφετηρία της μετακίνησης είναι υποχρεωτικά το κάτω άκρο ολοκληρώσεως, ενώ το t_Λ που αντιστοιχεί στο τέρμα είναι το άνω άκρο. Η καμπύλη θεωρείται προσανατολισμένη με θετική φορά τη φορά της μετακίνησης (εδώ από K προς Λ) δηλαδή τη φορά του $d\underset{\sim}{\ell}$.

Παρατήρηση 1. Ενώ στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ά γενικώς είναι πάντα το κάτω άκρο μικρότερο του πάνω, εδώ αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει. Όμως είναι απαραίτητο το κάτω άκρο l_K να αντιστοιχεί στην αφετηρία και το πάνω l_Λ στο πέρας της καμπύλης.

2. Το β' μέλος της (2.3.5) περιέχει τα ολοκληρώματα.

$$\int_K^\Lambda P(x,y,z)dx \qquad \int_K^\Lambda Q(x,y,z)dy \qquad \int_K^\Lambda R(x,y,z)dz$$

Το πρώτο απ' αυτά ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $P(x,y,z)$, δεύτερου είδους ως προς x και αντίστοιχα τα υπόλοιπα.

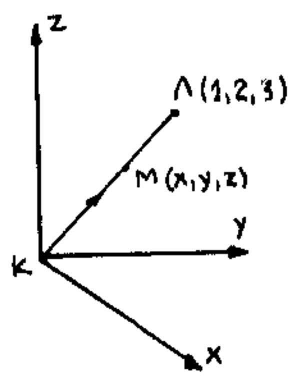
Άσκηση 10

Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης

$$F(x,y,z) = (y, z, x)$$

για τη μετακίνηση από το σημείο $K(0,0,0)$, ευθύγραμμα, στο σημείο $\Lambda(1,2,3)$.

Λύση



Το ζητούμενο έργο είναι ίσο με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$W_{K\to\Lambda} = \int_K^\Lambda \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} \qquad (1)$$

Όμως είναι:

$$\underset{\sim}{F} = (y,z,x) \qquad d\underset{\sim}{\ell} = (dx,dy,dz)$$

$$\underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} = ydx + zdy + xdz \qquad (2)$$

Βρίσκουμε τώρα μία παραμετρική παράσταση του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ. Αν $M(x,y,z)$ τυχαίο σημείο του, είναι:

$$\underset{\sim}{KM} = t\,\underset{\sim}{K\Lambda} \Longrightarrow (x-0,\ y-0,\ z-0) = t\,(1-0, 2-0, 3-0) \Longrightarrow$$

$$x = t \quad y = 2t \quad z = 3t$$

Στην αρχή Κ έχω $x_K = 0$, άρα $t_K = 0$. Στο πέρας Λ είναι $x_\Lambda = 1$, άρα $t_\Lambda = 1$. Ακόμη από τις παραμετρικές εξισώσεις βρίσκουμε:

$$dx = dt \qquad dy = 2dt \qquad dz = 3dt$$

Η (1) λόγω της (2) και των παραμετρικών εξισώσεων δίνει:

$$W_{K\to\Lambda} = \int_0^1 (2t\,dt + 3t\,2dt + t\,3dt) = 11\int_0^1 t\,dt = \frac{11}{2}$$

Άσκηση 11

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_A^B \left[(xy+z)dx + (x^2-y^2)dy + 7z^2x\,dz\right]$$

κατά μήκος της καμπύλης:

$$x = t \quad y = 2t \quad z = t^2\ , \quad A(0,0,0) \quad B(2,4,4)$$

και να δοθεί μία φυσική ερμηνεία του.

Λύση

Από τη δοσμένη παραμετρική παράσταση, με $x_A = 0$ βρίσκουμε $t_A = 0$, ενώ με $x_B = 2$ προκύπτει $t_B = 2$.

Λυόμη έχουμε:

$$dx = dt \qquad dy = 2dt \qquad dz = 2t\,dt$$

Με βάση τα παραπάνω, το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int_0^2 \Big[(t2t+t^2)dt + (t^2-4t^2)2dt + 7t^4 t\,2t\,dt\Big] =$$

$$= \int_0^2 \left(14t^6 - 3t^2\right)dt = 14\int_0^2 t^6 dt - 3\int_0^2 t^2 dt = \frac{14}{7}t^7\Big|_0^2 - \frac{3}{3}t^3\Big|_0^2 =$$

$$= 2\cdot 2^7 - 2^3 = 248$$

Αν θεωρήσουμε τη δύναμη:

$$\underset{\sim}{F} = \left(xy+z,\ x^2-y^2,\ 7z^2x\right)$$

προφανώς είναι

$$\int_A^B \underset{\sim}{F}d\underset{\sim}{\ell} = \int_A^B (xy+z,\ x^2-y^2,\ 7z^2x)\,(dx,dy,dz) =$$

$$= \int_A^B (xy+z)dx + (x^2-y^2)dy + 7z^2x\,dz = I \quad \Rightarrow I = \int_A^B \underset{\sim}{F}d\underset{\sim}{\ell}$$

Άρα το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το έργο της δυνάμεως $\underset{\sim}{F}$ για μετακίνηση από το σημείο Α μέχρι το Β κατά μήκος της καμπύλης:

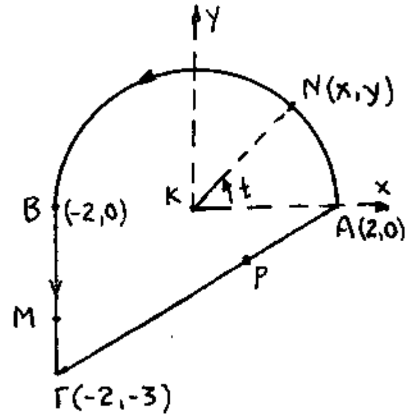
$$x = t \qquad y = 2t \qquad z = t^2$$

Άσκηση 12

Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης $\underset{\sim}{F}$ κατά μήκος της διαδρομής ΑΒΓΑ του σχήματος. Είναι

$$\underset{\sim}{F} = (2y,\ y+2x)$$

Λύση



Προφανώς το ζητούμενο έργο δίνεται:

$$W = \int_A^B \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} + \int_B^\Gamma \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} + \int_\Gamma^A \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε χωριστά καθένα από τα ολοκληρώματα αυτά.

Το πρώτο ολοκλήρωμα: Αν N είναι τυχαίο σημείο της ημιπεριφέρειας ΑΒ, το N έχει (βλ. σχήμα):

$$x = 2\cos t \qquad y = 2\sin t$$

Για $x_A = 2$ έχουμε $t_A = 0$ ενώ για $x_B = -2$ είναι $t_B = \pi$. Ακόμη έχουμε:

$$dx = -2\sin t\, dt \qquad dy = 2\cos t\, dt$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\int_A^B \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \int_A^B (2y,\ y+2x)(dx, dy) = \int_A^B \Big(2y\,dx + (y+2x)dy\Big) =$$

$$= \int_0^\pi \Big(2\cdot 2\sin t\,(-2\sin t)dt + (2\sin t + 4\cos t)2\cos t\, dt\Big) =$$

$$\int_0^\pi (\,8\sin^2 t + 8\cos^2 t + 4\sin t\cos t)dt =$$

$$=\int_0^{\pi} 8(\cos^2 t-\sin^2 t)dt+\int_0^{\pi} 2\cdot 2\sin t\cos t\,dt = 8\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt + 2\int_0^{\pi}\sin 2t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi}\cos 2t\,d(2t) + \int_0^{\pi}\sin 2t\,d(2t) = 4\sin 2t\Big|_0^{\pi} - \cos 2t\Big|_0^{\pi} = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t\,, \qquad 2\sin t\cos t=\sin 2t$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα: Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της ΒΓ έχουμε:

$$\underset{\sim}{BM}=t\,\underset{\sim}{B\Gamma} \implies (x-(-2),\, y-0)=t\left(-2-(-2),\, -3-0\right) \implies$$

$$(x+2,\, y)=t\,(0,-3) \implies x=-2 \qquad y=-3t\,,\ dx=0,\ dy=-3$$

Για $y=y_B=0$ βρίσκουμε από τη δεύτερη $t_B=0$ ενώ για $y=y_\Gamma=-3$ βρίσκουμε $t_\Gamma=1$. Άρα έχουμε:

$$\int_B^{\Gamma}\underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = \int_B^{\Gamma}\Big(2y\,dx+(y+2x)dy\Big) = \int_{t_B=0}^{t_\Gamma=1}\Big(2(-3t)\cdot 0+(-3t-4)(-3dt)\Big) =$$

$$=\int_0^1 3(3t+4)dt = 9\int_0^1 t\,dt + 12\int_0^1 dt = \frac{9}{2}+12 = \frac{33}{2}$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα: Αν $P(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της ΓΑ έχουμε:

$$\underset{\sim}{\Gamma P}=t\,\underset{\sim}{\Gamma A} \implies \left(x-(-2),\, y-(-3)\right)=t\left(2-(-2),\, 0-(-3)\right) \implies$$

$$x=-2+4t\,, \qquad y=-3+3t$$

Για $x=x_\Gamma=-2$ έχουμε $t_\Gamma=0$ ενώ για $x=x_A=2$ προκύ και $t_A = 1$. Άμεσα βρίσκουμε $dx = 4dt$, $dy = 3dt$. Άρ

$$\int_B^A \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell} = \int_1^A \left(2y\,dx + (y+2x)dy\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(2(-3+3t)4dt + \left(-3+3t+2(-2+4t)\right)3dt\right) = \int_0^1 (-39+45t$$

Με αντικατάσταση, η σχέση (1) δίνει:

$$W = 0 + \frac{33}{2} - \frac{33}{2} = 0$$

Παρατήρηση 1. Η διαδρομή εδώ είναι κλειστή τελικά φτάνουμε στο σημείο απ' όπου ξεκιν Στις κλειστές διαδρομές το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητα από το σημείο εκκίνησης. Η φορ πρέπει να διατηρείται. Αν έχουμε κλειστή διαδ γράφουμε:

$$W = \oint_C \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell} \quad \text{ή} \quad W = \oint_C \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell}$$

ανάλογα με τη φορά κίνησης, που όμως εί δομένη.

2. Ισχύει:

$$\int_A^B \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell} = -\int_B^A \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell} \quad , \quad \oint_C \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell} = -\oint_C \underset{\sim}{E}\,d\underset{\sim}{\ell}$$

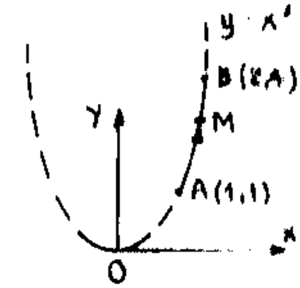
δηλαδή αλλαγή της φοράς κίνησης συνεπάγ πωσδήποτε αλλαγή προσήμου.

Άσκηση 13

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμ

τερου είδους ως προς x της συνάρτησης $\varphi(x,y)=x^3y$ κατά μήκος της καμπύλης (του επιπέδου Oxy) $y=x^2$ από το σημείο A(1,1) μέχρι το B(2,4)

Λύση



Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_A^B x^3y\,dx \qquad (1)$$

πάνω στη διαδρομή $y=x^2$ από το σημείο A(1,1) μέχρι το B(2,4). Για την παραμετροποίηση της καμπύλης θέτουμε $x=t$, οπότε είναι:

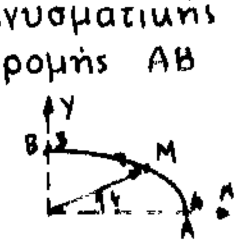
$$x=t\,,\quad y=t^2$$

Για $x_A=1$ προκύπτει $t_A=1$ ενώ για $x_B=2$ είναι $t_B=2$. Με $dx=dt$ η (1) γράφεται:

$$I=\int_1^2 t^3(t^2)\,dt=\int_1^2 t^5dt=\frac{1}{6}t^6\Big|_1^2=\frac{1}{6}(2^6-1)=\frac{63}{6}$$

Άσκηση 14

Να υπολογισθεί η "κυκλοφορία" της διανυσματικής συνάρτησης $(y+1,-x)$ κατά μήκος της διαδρομής AB (τέταρτο έλλειψης) του σχήματος.



Λύση

Η έννοια της "κυκλοφορίας" διανυσματικής συνάρτησης είναι ταυτόσημη με την έννοια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Θα υπολογίσουμε το:

$$I=\int_A^B\big((y+1)dx+(-x)dy\big) \qquad (1)$$

Η παραμετρική παράσταση της έλλειψης με ημιάξονες 4 κατά x και 3 κατά y είναι:

$$x = 4\cos t \qquad y = 3\sin t$$

Το σημείο A αντιστοιχεί στο $t_A = 0$ ενώ το B για $t_B = \pi/2$. Λυόμη έχουμε:

$$dx = -4\sin t dt \qquad dy = 3\cos t dt$$

Η σχέση (1) γράφεται:

$$I = \int_0^{\pi/2} \Big((3\sin t + 1)\cdot(-4\sin t)dt - 4\cos t\, 3\cos t\, dt \Big) \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(-12(\sin^2 t + \cos^2 t) - 4\sin t \right) dt = -12\int_0^{\pi/2} dt - 4\int_0^{\pi/2} \sin t dt =$$

$$= -12t \Big|_0^{\pi/2} + 4\cos t \Big|_0^{\pi/2} = -6\pi - 4$$

2.4 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης που είναι ανεξάρτητο της διαδρομής ολοκλήρωσης.

Θεωρούμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z) \big)$$

Η ποσότητα (διάνυσμα)

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{z} = \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F} \quad (2.4.1)$$

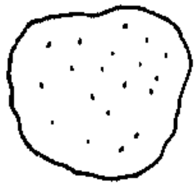
όπου $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y, z, είναι γνωστή σαν περιστροφή ή στροβιλισμός της διανυσματικής συνάρτησης $\underset{\sim}{F}(x,y,z)$. Άλλοι συμβολισμοί της είναι:

$$\mathrm{curl}\,\underset{\sim}{F} \quad \text{ή} \quad \nabla \times \underset{\sim}{F}$$

όπου το σύμβολο ∇ (ανάδελτα) είναι:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} , \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Ορισμός: Ένα σημειοσύνολο (στο επίπεδο ή στο χώρο) ονομάζεται χωρίο απλής συνοχής όταν στο εσωτερικό του δεν υπάρχουν οπές.



(α)

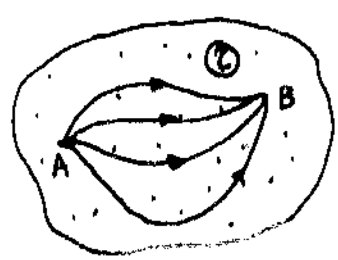
(β)

Για παράδειγμα, το (α) είναι απλής συνοχής ενώ το (β) δεν είναι.

Θεώρημα: Υποθέτουμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις $P(x,y,z)$ $Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο σημειοσύνολο (τ) που είναι απλής συνοχής και ότι:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (\Sigma)$$

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_A^B F d\underset{\sim}{\ell}$ δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, εφόσον αυτή βρίσκεται μέσα στο τ.



Παρατήρηση: Η συνθήκη (Σ) γράφεται ισοδύναμα:

$$\text{rot}\,\underset{\sim}{F} = 0 \qquad (2.4.2)$$

Λέμε ότι στην περίπτωση αυτή το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι α-στρόβιλο.

Ισοδύναμα με το θεώρημα αυτό ισχύουν:

(1) Το ολοκλήρωμα (κυκλοφορία) της $\underset{\sim}{F}$ σε κλειστή καμπύλη C (που βρίσκεται ολόκληρη στο χωρίο απλής συνοχής) είναι ίσο με μηδέν:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = 0 \qquad (2.4.3)$$

(2) Η ποσότητα(*):

$$\underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad (2.4.4)$$

είναι τέλειο διαφορικό.

(3) Υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$:

$$\underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \Longleftrightarrow \underset{\sim}{F} = \text{grad}\,\Phi \qquad (2.4.5)$$

Η $\Phi(x,y,z)$ είναι γνωστή σαν "<u>δυναμική συνάρτηση</u>" ενώ η <u>$-\Phi(x,y,z)$</u> ονομάζεται <u>δυναμικό</u>. Λέμε τότε ότι το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ προέρχεται από δυναμικό.

(4) Αν $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ τότε

$$\boxed{\int_A^B \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = \Phi(x_B,y_B,z_B) - \Phi(x_A,y_A,z_A)} \qquad (2.4.6)$$

(*) Βλέπε: Γ. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ"

Παρατήρηση 1. Η δυναμική συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$d\Phi = Pdx + Qdy + Rdz = \underset{\sim}{E}d\underset{\sim}{l}$$

Παρατήρηση 2. Ορίζεται το σύμβολο ∇ (ανάδελτα):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (2.4.7)$$

οπότε έχουμε:

$$\text{grad}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = \nabla\Phi$$

και όπως γνωρίζουμε:

$$\text{rot}\underset{\sim}{E} = \nabla \times \underset{\sim}{E}$$

Άσκηση 15

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\underset{\sim}{E}(x,y) = \left(y^2+2x,\ 2xy\right)$$

(α) Να δειχθεί ότι είναι αστρόβιλο.
(β) Να βρεθεί η δυναμική συνάρτηση.
(γ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_A^B \underset{\sim}{E}d\underset{\sim}{l} \quad , \quad A(1,2) \quad B(3,-1)$$

Λύση

(α) Πρόκειται για διδιάστατο πεδίο όπου $R=0$ και δεν υπάρχει η μεταβλητή z. Στην περίπτωση αυτή η έκφραση της περιστροφής ($\text{rot}\underset{\sim}{E}$) απλοποιείται. Η (2.4.1) γράφεται:

$$\text{rot}\underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{z} \qquad (1)$$

Εδώ δίνεται:

$$P(x,y) = y^2+2x \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$Q(x,y) = 2xy \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

Αντικατάσταση στη σχέση (1) δίνει αμέσως: $\text{rot}\underset{\sim}{F} = 0$. Άρα το πεδίο είναι αστρόβιλο.

(β) Επειδή το πεδίο είναι αστρόβιλο, υπάρχει δυναμική συνάρτηση $U(x,y,z)$:

$$\underset{\sim}{F} = \text{grad}U \implies \underset{\sim}{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} \implies$$

$$(y^2+2x)\hat{x} + 2xy\hat{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2+2x \quad (2) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy \quad (3)$$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση (3) μερικά ως προς y (αντίστροφη πράξη της μερικής παραγώγισης) κρατώντας το x σταθερό. Έτσι το x βγαίνει από το ολοκλήρωμα, ενώ εμφανίζεται και στη σταθερή ολοκλήρωσης:

$$U(x,y) = \int 2xy\,dy + c(x) = 2x\int y\,dy + c(x) \implies$$

$$U(x,y) = xy^2 + c(x) \qquad (4)$$

Η έκφραση (4) πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση (2). Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2+c(x)) = y^2+2x \Rightarrow y^2+c'(x) = y^2+2x \Rightarrow c'(x) = 2x$$

Απλή ολοκλήρωση δίνει $c(x) = x^2+k$, όπου k είναι μία αυθαίρετη σταθερή. Η (4) τώρα γράφεται:

$$U(x,y) = xy^2+x^2+k$$

(γ) Το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Επειδή έχει βρεθεί η δυναμική συνάρτηση, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση (2.4.6) που στην περίπτωση αυτή γράφεται:

$$\int_A^B \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = U(x_B,y_B) - U(x_A,y_A) \Rightarrow$$

$$\int_A^B \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = U(3,-1) - U(1,2) = 3(-1)^2+3^2+k-(1\cdot 2^2+1^2+k) = 7$$

Άσκηση 16

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο:

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = (2xz^3+6y)\hat{x} + (6x-2yz)\hat{y} + (3x^2z^2-y^2)\hat{z}$$

(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ τέτοια ώστε: $\underset{\sim}{F} = \nabla\Phi$. Να βρεθεί μία τέτοια συνάρτηση.

(β) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_A^B \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell}$ πάνω σε μία διαδρομή που συνδέει τα σημεία Α, Β. Δίνονται: Α(1,-1,1), Β(2,1,-1). Ο υπολογισμός να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Λύση

(α) Για να δείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$: $\underset{\sim}{F} = \nabla\Phi$ αρκεί να δείξουμε ισοδύναμα ότι το πεδίο είναι αστρόβιλο: $\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F} = 0$. Γενικά είναι:

$$\mathrm{rot}\underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{z} \qquad (1)$$

Όμως είναι:

$$P = 2xz^3 + 6y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 6 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 6xz^2$$

$$Q = 6x - 2yz \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6 \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2y$$

$$R = 3x^2z^2 - y^2 \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = 6xz^2 \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -2y$$

Αντικατάσταση στη σχέση (1) δίνει $\mathrm{rot}\underset{\sim}{F} = 0$. Άρα υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$: $\underset{\sim}{F} = \nabla\Phi$ δηλαδή:

$$\underset{\sim}{F} = \mathrm{grad}\Phi \implies \underset{\sim}{F} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z} \qquad (2)$$

Ανάλυση στους τρεις άξονες δίνει:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P \implies \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2xz^3 + 6y \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q \implies \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 6x - 2yz \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = R \implies \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2 \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3), (4), (5) προσδιορίζουμε(*) τη συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$: Ολοκληρώνουμε τη σχέση (3) μερικά ως προς x, κρατώντας τα y, z σταθερά(αντίστροφη πράξη της μερικής παραγώγισης). Τα y, z μπορεί να εμφανίζονται στη σταθερή ολοκλήρωσης:

$$\Phi(x,y,z) = \int (2xz^3 + 6y)dx + c(y,z). \implies$$

(*) Βλέπε: Γ. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ".

$$\Phi(x,y,z) = 2z^3\int x\,dx + 6y\int dx + c(y,z) \implies$$

$$\Phi(x,y,z) = z^3x^2 + 6yx + c_1(y,z) \qquad (6)$$

Η έκφραση (6) πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση (4):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^3x^2 + 6yx + c_1(y,z)\right) = 6x - 2yz \implies 6x + \frac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} = 6x - 2yz$$

$$\implies \frac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} = -2yz \qquad (7)$$

Ολοκλήρωση αυτής ως προς y δίνει: (κρατώντας το z σταθερό, οπότε αυτό εμφανίζεται στη σταθερή ολοκλήρωσης)

$$c_1(y,z) = -2\int yz\,dy + c_2(z) = -2z\int y\,dy + c_2(z) \implies$$

$$c_1(y,z) = -zy^2 + c_2(z) \qquad (8)$$

Η σχέση (6) λόγω της (8) γράφεται:

$$\Phi(x,y,z) = z^3x^2 + 6yx - zy^2 + c_2(z) \qquad (9)$$

Τέλος η έκφραση αυτή πρέπει να ικανοποιεί την (5):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2 \implies \frac{\partial}{\partial z}\left(z^3x^2 + 6yx - zy^2 + c_2(z)\right) = 3x^2z^2 - y^2 \implies$$

$$3z^2x^2 - y^2 + \frac{dc_2(z)}{dz} = 3x^2z^2 - y^2 \implies \frac{dc_2(z)}{dz} = 0$$

Η τελευταία με απλή ολοκλήρωση δίνει $c_2(z) = k$ (σταθερό) οπότε η (9) δίνει τελικά:

$$\Phi(x,y,z) = z^3x^2 + 6yx - zy^2 + k \qquad (10)$$

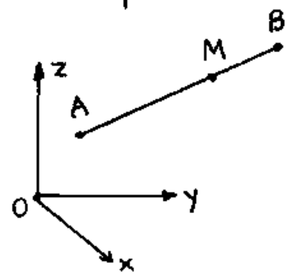
(γ) Επειδή έχει βρεθεί η συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ (δυναμική συνάρτηση) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$\int_A^B E\,d\ell = \Phi(x_B,y_B,z_B) - \Phi(x_A,y_A,z_A) \implies$$

$$\int_A^B \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \Phi(2,1,-1) - \Phi(1,-1,1) = (-1)^3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1^2 + k$$

$$- \left(1^3 \cdot 1^2 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1)^2 + k \right) = 15$$

Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού είναι ο ακόλουθος: Επειδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής ($\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F} = 0$ και οι P, Q, R και οι παράγωγοί των είναι συνεχείς) μπορούμε να το υπολογίσουμε κατά μήκος όποιας διαδρομής επιθυμούμε που να έχει αρχή το $A(1,-1,1)$ και πέρας το $B(2,1,-1)$. Θεωρούμε την ευθεία. Αν $M(x,y,z)$ τυχαίο σημείο της έχουμε:



$$\underset{\sim}{AM} = t\, \underset{\sim}{AB} \implies$$

$$(x-1,\ y+1,\ z-1) = t\,(2-1,\ 1+1,\ -1-1) \implies$$

$$x = 1 + t \qquad y = -1 + 2t \qquad z = 1 - 2t$$

Η πρώτη απ' αυτές, για $x_A = 1$ δίνει $t_A = 0$ ενώ για $x_B = 2$ δίνει $t_B = 1$. Ακόμη έχουμε:

$$dx = dt \qquad dy = 2dt \qquad dz = -2dt$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κατά μήκος της ευθείας διαδρομής:

$$\int_A^B \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \int_A^B \Big((2xz^3 + 6y)\,dx + (6x - 2yz)\,dy + (3x^2 z^2 - y^2)\,dz \Big) =$$

$$= \int_0^1 \Big[\Big(2(1+t)(1-2t)^3 + 6(-1+2t) \Big) dt + \Big(6(1+t) - 2(-1+2t)(1-2t) \Big) 2dt +$$

$$+ \Big(3(1+t)^2 (1-2t)^2 - (-1+2t)^2 \Big)(-2\,dt) \Big] = \int_0^1 (-40t^4 - 16t^3 + 52t^2 + 2t + 8)\,dt =$$

$$= -\frac{40}{5} t^5 - \frac{16}{4} t^4 + \frac{54}{3} t^3 + \frac{2}{2} t^2 + 8t \Big|_0^1 = 15 \quad \text{(ίδιο αποτέλεσμα!)}$$

Άσκηση 17

(α) Να δειχθεί ότι για κάθε συνάρτηση $f(x,y,z)$ που είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ισχύει:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0 \qquad (1)$$

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_A^B \mathrm{grad}(x^2yz+z^3)\,d\ell$

όπου $A(1,2,-1)$, $B(4,0,-2)$

Λύση

(α) Είναι:

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad (2)$$

Έστω ότι είναι:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad R = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Έχουμε:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \mathrm{rot}(P,Q,R) \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{z} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) \quad (3$$

Όμως:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

αφού για τη συνάρτηση $f(x,y,z)$, που είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ισχύει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι και η δύο άλλες παρενθέσεις του α μέλους της σχέσης (5) είναι μηδενικές. Άρα:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) \equiv 0 \quad \text{ή} \quad \nabla\times(\nabla f) \equiv 0$$

β) Έστω

$$\underset{\sim}{F} = \mathrm{grad} f = \mathrm{grad}(x^2yz + z^3) \implies$$

$$\underset{\sim}{F} = 2xyz\,\hat{x} + x^2z\,\hat{y} + (x^2y + 3z^2)\,\hat{z}$$

όπου προφανώς η $\underset{\sim}{F}$ προέρχεται από τη δυναμική συνάρτηση

$$f(x,y,z) = x^2yz + z^3$$

Έτσι το ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_A^B \mathrm{grad}(x^2yz + z^3)\,d\underset{\sim}{\ell} = \int_A^B \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A) =$$

$$= f(4,0,2) - f(1,2,-1) = 4^2\cdot 0\cdot 2 + 2^3 - \left(1^2\,2(-1) + (-1)^3\right) = 11$$

Άσκηση 18

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_A^B (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)$$

πάνω σε τυχαία καμπύλη που έχει αρχή το σημείο Α(ι,2,2) και πέρας το (1,4,-2)

Λύση

Παρατηρούμε ότι το I γράφεται:

$$I = \int_A^B \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} \qquad (1)$$

όπου:

$$\underset{\sim}{F} = (yz,\ xz,\ xy) \qquad d\underset{\sim}{\ell} = (dx, dy, dz)$$

Επειδή δεν δίνεται συγκεκριμένη γραμμή, πάνω στην οποία να ολοκληρώσουμε, υποπτευόμεθα ότι το πεδίο πρέπει να είναι αστρόβιλο, δηλαδή το ολοκλήρωμα ανεξάρτητο της διαδρομής που συνδέει τα A, B. Υπολογίζουμε το $rot\underset{\sim}{F}$:

$$rot\underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{z} \qquad (2)$$

Όμως εδώ είναι:

$$P = yz \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = z \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = y$$

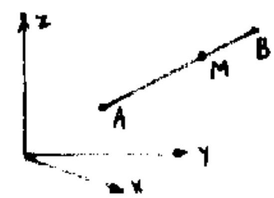
$$Q = xz \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = x$$

$$R = xy \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = x$$

Αντικατάσταση στη στη σχέση (2) δίνει:

$$rot\underset{\sim}{F} = (x - x)\hat{x} + (y - y)\hat{y} + (z - z)\hat{z} = 0$$

δηλαδή το πεδίο είναι αστρόβιλο. Επειδή οι συναρτήσεις P, Q, R και οι μερικές των παράγωγοι είναι ακέραια πολυώνυμα, είναι παντού συνεχείς. Άρα το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε όποια διαδρομή θέλουμε που να συνδέει τα σημεία A(2,2,2) και B(1,4,-2). Θεωρούμε την ευθεία. Το τυχαίο σημείο M(x,y,z) είναι:



$$\underset{\sim}{AM} = t\,\underset{\sim}{AB} \Longrightarrow$$

$$(x-2,\ y-2,\ z-2) = t(1-2,\ 4-2,\ -2-2) \Longrightarrow$$

$x = 2 - t \qquad y = 2 + 2t \qquad z = 2 - 4t$

Η πρώτη απ' αυτές, με $x_A = 2$ δίνει $t_A = 0$ ενώ με $x_B = 1$ δίνει $t_B = 1$. Ακόμη έχουμε:

$$dx = -dt, \quad dy = 2dt \quad dz = -4dt$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την τιμή του I:

$$I = \int_0^1 \Big((2+2t)(2-4t)(-dt) + (2-t)(2-4t)2dt + (2-t)(2+2t)(-4dt) \Big) =$$

$$= \int_0^1 (24t^2 - 24t - 12)\,dt = \frac{24}{3}t^3 - \frac{24}{2}t^2 - 12t \Big|_0^1 = -16$$

Παρατήρηση: Όταν έχουμε να υπολογίσουμε το $\int_C \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{r}$ είναι χρήσιμο να ελέγξουμε αν ισχύει: $\text{rot}\underset{\sim}{F} \equiv 0$. Αν ισχύει αυτό τότε: α) Αν η καμπύλη C είναι κλειστή, το ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν. β) Αν η καμπύλη έχει άκρα $A \neq B$ (ανοικτή) και δεν είναι δεδομένη ή είναι δεδομένη, αλλά είναι πολύπλοκη τότε το υπολογίζουμε πάνω σε οποιαδήποτε καμπύλη μας διευκολύνει ή βρίσκουμε τη δυναμική συνάρτηση U ώστε $\underset{\sim}{F} = \nabla U = \text{grad}U$, οπότε:

$$\int_A^B \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{r} = U(B) - U(A)$$

Ασκηση 19

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = \left(ze^x,\ z,\ y + e^x \right)$$

α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_A^B \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell}$ όπου $A(0,1,1)$ και $B(3,2,1)$

β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell}$ όπου C η περιφέρεια $\{x^2+y^2=4\ ,\ z=6\}$

Λύση

α) Επειδή δεν δίνεται καμπύλη ολοκλήρωσης υποψιαζόμαστε ότι πρέπει να είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Υπολογίζουμε το rot$\underline{F}$:

$$\mathrm{rot}\underline{F}=\hat{x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\hat{y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

όπου εδώ είναι

$$P=ze^x\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=e^x$$

$$Q=z\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=1$$

$$R=y+e^x\ ,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=e^x \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=1$$

και με αντικατάσταση η σχέση (1) δίνει:

$$\mathrm{rot}\underline{F}=\hat{x}(1-1)+\hat{y}(e^x-e^x)+\hat{z}(0-0)=0 \implies \mathrm{rot}\underline{F}=0$$

Αρα το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Μπορούμε να το υπολογίσουμε κατά μήκος όποιας διαδρομής θέλουμε με άκρα τα Α,Β (π.χ. κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τα Α,Β) ή να βρούμε τη δυναμική συνάρτηση $U(x,y,z)$:

$$\underline{F}=\mathrm{grad}U \qquad (2)$$

Θα εργασθούμε με το δεύτερο τρόπο εδώ. Απο τη σχέση (2) προκύπτει

$$(ze^x,\ z,\ y+e^x)=\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right) \implies$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = ze^{x} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = z \qquad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = y + e^{x} \qquad (5)$$

Ολουληρωση της (4) ως προς y (υρατώντας x, z σταθερά δίνει

$$U(x,y,z) = \int z\,dy + c_1(x,z) \qquad (6)$$

όπου τα x, z ως σταθερά εμφανίζονται υαι στη σταθερή ολουλήρωσης υαι παίρνουμε

$$U(x,y,z) = zy + c_1(x,z) \qquad (7)$$

Η ευφραση αυτή ιυανοποιεί την (3), οπότε

$$\frac{\partial}{\partial x}(zy + c_1(x,z)) = ze^{x} \Longrightarrow \frac{\partial c_1(x,z)}{\partial x} = ze^{x}$$

υαι ολουλήρωση αυτής ως προς x (με z σταθερό) δίνει:

$$c_1(x,z) = \int ze^{x}dx + c_2(z) = z\int e^{x}dx + c_2(z) \Longrightarrow$$

$$c_1(x,z) = ze^{x} + c_2(z)$$

υαι η σχέση (7) γράφεται:

$$U(x,y,z) = zy + ze^{x} + c_2(z) \qquad (8)$$

Η ευφραση αυτή πρέπει να ιυανοποιεί υαι την (5), οπότε βρίσυουμε:

$$\frac{\partial}{\partial z}(zy + ze^{x} + c_2(z)) = y + e^{x} \Longrightarrow$$

$$y + e^{x} + c_2'(z) = y + e^{x} \Longrightarrow c_2'(z) = 0 \Longrightarrow c_2(z) = k$$

όπου k είναι αυθαίρετη σταθερή (ανεξάρτητη των x,y,z). Η σχέση (8) γράφεται τελικά:

$$U(x,y,z) = zy + ze^x + k$$

και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται:

$$\int_A^B \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} = U(B) - U(A) = U(3,2,1) - U(0,1,1) =$$

$$= 1\cdot 2 + 1\cdot e^3 + k - (1\cdot 1 + 1\cdot e^0 + k) = e^3$$

β) Εδώ η καμπύλη είναι κλειστή και επειδή $\mathrm{rot}\underset{\sim}{F} = 0$ είναι

$$\oint_C \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} = 0$$

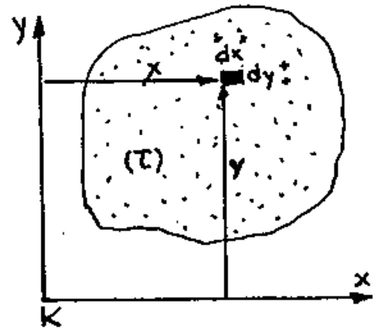
Για περισσότερες ασκήσεις, αλλά και θέματα εξετάσεων προηγουμένων ετών, προτείνουμε στον αναγνώστη το βιβλίο μας: "ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ" το οποίο κυκλοφορεί από τις εκδόσεις ↑SPIN↓.

Κεφάλαιο 3

Διπλά ολοκληρώματα

3.1 Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος - βασικοί τρόποι υπολογισμού

Θα δώσουμε την έννοια του διπλού ολοκληρώματος με τη βοήθεια ενός φυσικού παραδείγματος. Θεωρούμε το επίπεδο τμήμα (τ) του σχήματος που είναι φορτισμένο με ηλεκτρικό φορτίο q. Το φορτίο είναι κατανεμημένο στο τμήμα (τ). Έτσι το στοιχειώδες ορθογώνιο του σχήματος, με πλευρές dx, dy και εμβαδό dS = dxdy φέρει φορτίο dq. Το πηλίκο:



$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

(φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας) ονομάζεται επιφανειακή πυκνότητα φορτίου και είναι συνάρτηση της θέσης (x,y): $\sigma = \sigma(x,y)$. Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε:

$$dq = \sigma dS \quad \Longrightarrow \quad dq = \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

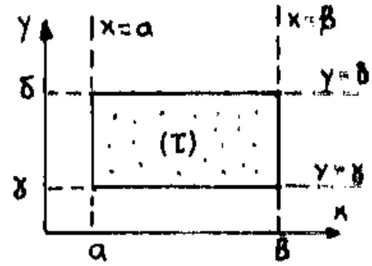
Για να βρούμε το συνολικό φορτίο, προσθέτουμε τα στοιχειώδη φορτία, δηλαδή ολοκληρώνουμε στον τόπο (τ):

$$q = \iint_{(\tau)} \sigma(x,y)\,dx\,dy \qquad (3.1.1)$$

Το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους είναι ένα διπλό ολοκλήρωμα αφού γίνεται ολοκλήρωση ως προς τις μεταβλητές x, y.

Το βασικό πρόβλημα εδώ είναι ο τρόπος υπολογισμού του διπλού ολοκληρώματος. Ανάλογα με το σχήμα του (τ) διακρίνουμε:

(α) Ο τόπος (τ) είναι ορθογωνικός με σύνορα παράλληλα στους άξονες x,y. Τότε αυτός περικλείεται από τα ζεύγη των ευθειών: $\{x=\alpha,\ x=\beta\}$, $\{y=\gamma,\ y=\delta\}$
Ισχύει:



$$\iint_{\tau}\sigma(x,y)\,dx\,dy=\int_{\alpha}^{\beta}dx\int_{\gamma}^{\delta}\sigma(x,y)\,dy \iff$$

$$\iint_{(\tau)}\sigma(x,y)\,dx\,dy=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta}\sigma(x,y)\,dy\right)dx \qquad (3.1.2)$$

Υπολογίζουμε δηλαδή πρώτα το ολοκλήρωμα της παρένθεσης με μεταβλητή ολοκλήρωσης την y και όρια γ,δ. Κατα την ολοκλήρωση αυτή το x παραμένει σταθερό. Έτσι το ολοκλήρωμα της παρένθεσης είναι μία συνάρτηση μόνο του x, αφού μετά τον υπολογισμό, το y αντικαθίσταται με γ, δ. Κατόπιν υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα από x=α μέχρι x=β της συνάρτησης του x που προέκυψε και έχουμε το τελικό αποτέλεσμα.

Ανάλογα έχουμε:

$$\iint_{(\tau)}\sigma(x,y)\,dx\,dy=\int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x,y)\,dx\right)dy \qquad (3.1.3)$$

Εδώ υπολογίζουμε πάλι πρώτα την παρένθεση. Κατά την ολοκλήρωση αυτή, όπου το y παραμένει σταθερό, προκύπτει συνάρτηση του y, την οποία ολοκληρώνουμε από y=γ έως y=δ.

Από τους δύο τρόπους επιλέγουμε εκείνο που οδηγεί πιό σύντομα στο αποτέλεσμα (και είναι ο πιο εύκολος).

Στην ειδική περίπτωση που η ολοκληρωτέα συνάρτη ση γράφεται σαν γινόμενο των συναρτήσεων $f(x)$, $\varphi(y)$

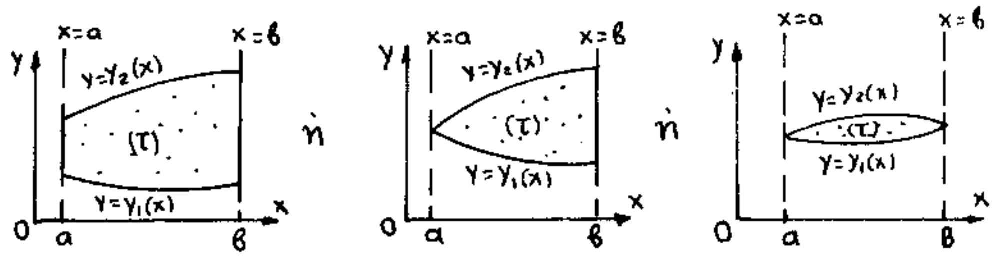
$$\sigma(x,y) = f(x)\varphi(y)$$

τότε είναι:

$$\iint\limits_{\tau} \sigma(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^\beta f(x)dx\right)\cdot\left(\int_\gamma^\delta g(y)dy\right) \qquad (3.1.4)$$

δηλαδή γινόμενο ολοκληρωμάτων μιας μεταβλητής.

β. Ο τόπος τ είναι "κανονικός ως προς x" δηλαδή περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και τις $y_1(x)$, $y_2(x)$ όπως φαίνεται σε καθένα από τα σχήματα.[*]

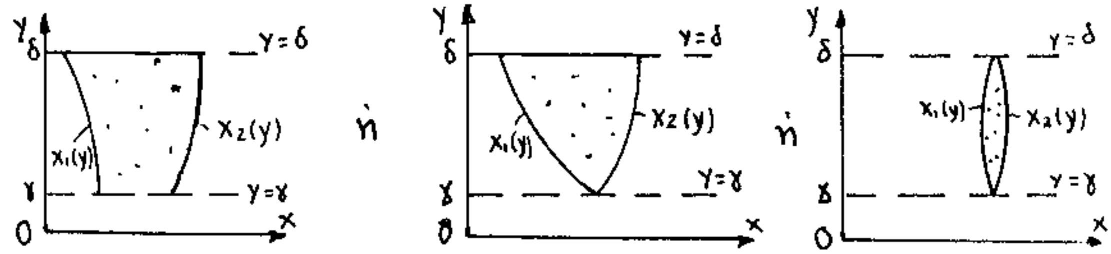


Ισχύει: ($y_1(x)$ το κάτω σύνορο και $y_2(x)$ το πάνω).

$$\iint\limits_{(\tau)} \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_a^\beta\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^\beta dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x,y)\,dy \qquad (3.1.5)$$

Υπολογίζουμε δηλαδή πρώτα το ολοκλήρωμα της παρένθεσης κρατώντας το x σταθερό και με όρια $y_1(x)$, $y_2(x)$. Την συνάρτηση ως προς x που προκύπτει ολοκληρώνουμε με όρια a, β.

Ανάλογα, για καθένα από τους τόπους: (κανονικοί ως προς y)



*Ακριβέστερα: κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα y τέμνει το σύνορο του (τ) το πολύ σε δύο σημεία.

Έχουμε:

$$\iint_{(\tau)} \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \sigma(x,y)\,dx\right)dy \qquad (3.1.6)$$

όπου $x_1(y)$ το αριστερά σύνορο και $x_2(y)$ το δεξιά.

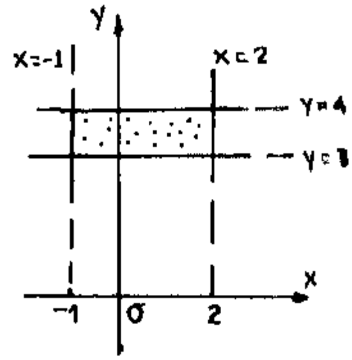
Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα: $\iint_{(\tau)}(x+e^y)\,dx\,dy$

όπου (τ) ο τόπος του επιπέδου που περικλείεται από τις ευθείες: $x=-1$, $x=2$, $y=3$, $y=4$.

Λύση

Η ευθεία $x=a$ είναι κάθετη στον άξονα x στο $x=a$, ενώ η ευθεία $y=b$ είναι κάθετη στον άξονα y στη θέση $y=b$. Έτσι σχεδιάζουμε τον τόπο (τ) όπως φαίνεται στο σχήμα, που είναι ορθογωνικός με σύνορα παράλληλα στους άξονες. Άρα εφαρμόζουμε μία από τις σχέσεις (3.1.2) ή (3.1.3), π.χ. την πρώτη:



$$\iint_{(\tau)}(x+e^y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2}\left(\int_{3}^{4}(x+e^y)\,dy\right)dx \quad (1)$$

Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα ως προς y (κρατώντας σταθερό το x):

$$\int_3^4 (x+e^y)\,dy = \int_3^4 x\,dy + \int_3^4 e^y\,dy = x\int_3^4 dy + \int_3^4 e^y\,dy \Longrightarrow$$

$$\int_3^4 (x+e^y)\,dy = x(4-3) + e^4 - e^3 = x + e^4 - e^3$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\iint_{(\tau)} (x+e^y)dy = \int_{-1}^{2}(x+e^4-e^3)dx = \int_{-1}^{2} x\,dx + \int_{-1}^{2}(e^4-e^3)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2} + (e^4-e^3)\,x\Big|_{-1}^{2} = \frac{3}{2} + (e^4-e^3)3$$

Άσκηση 2

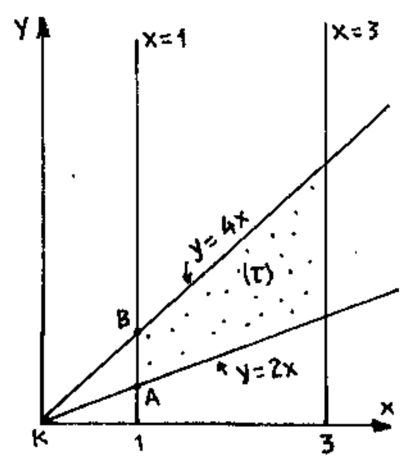
Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης yx^2+y^2 στον τόπο (τ) που περικλείεται από τις γραμμές:

$$\{x=1,\quad x=3,\quad y=2x,\quad y=4x\}$$

Λύση

Αρχικά σχεδιάζουμε τον τόπο (τ): Η ευθεία $x=a$ είναι κάθετη στον άξονα x στη θέση $x=a$. Έτσι σχεδιάζουμε τις ευθείες $x=1$, $x=3$. Για την ευθεία $y=2x$ αρκεί να βρούμε δύο σημεία. Δίνουμε δύο (αυθαίρετες) τιμές στο x και βρίσκουμε αντίστοιχα y: Για $x=0$ είναι $y=0$, ενώ για $x=1$ βρίσκουμε $y=2$. Έτσι η ευθεία $y=2x$ καθορίζεται από τα σημεία K(0,0), A(1,2). Όμοια, η ευθεία $y=4x$ καθορίζεται από τα σημεία K(0,0), B(1,4).

Ο τόπος είναι "κανονικός ως προς x", αφού έχει σύνορα τις ευθείες $x=1$, $x=3$, κάθετες στον άξονα x. Κλείνει πάνω από την $y_2(x)=4x$ και κάτω από την $y_1(x)=2x$. Εφαρμόζουμε τη σχέση (3.1.5):



$$\iint_{(\tau)}(yx^2+y^2)dxdy = \int_{1}^{3}\left(\int_{2x}^{4x}(yx^2+y^2)dy\right)dx \quad (1)$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της

παρένθεσης (το x σταθερό):

$$\int_{2x}^{4x}(yx^2+y^2)dy = \int_{2x}^{4x} yx^2dy + \int_{2x}^{4x} y^2dy = x^2\int_{2x}^{4x} ydy + \int_{2x}^{4x} y^2dy =$$

$$= x^2\,\frac{1}{2}\,y^2\Big|_{y=2x}^{y=4x} + \frac{1}{3}\,y^3\Big|_{y=2x}^{y=4x} = \frac{1}{2}\,x^2\left((4x)^2-(2x)^2\right) + \frac{1}{3}\left((4x)^3-(2x)^3\right) \Rightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x}(yx^2+y^2)dy = 6x^4 + \frac{56}{3}x^3$$

Η σχέση (1) γράφεται τώρα:

$$\iint_{(\tau)}(yx^2+y^2)\,dxdy = \int_1^3\left(6x^4+\frac{56}{3}x^3\right)dx = \int_1^3 6x^4dx + \int_1^3\frac{56}{3}x^3dx =$$

$$= 6\,\frac{1}{5}x^5\Big|_1^3 + \frac{56}{3}\,\frac{1}{4}\,x^4\Big|_1^3 = 290{,}4 + \frac{1120}{3} = 663{,}73$$

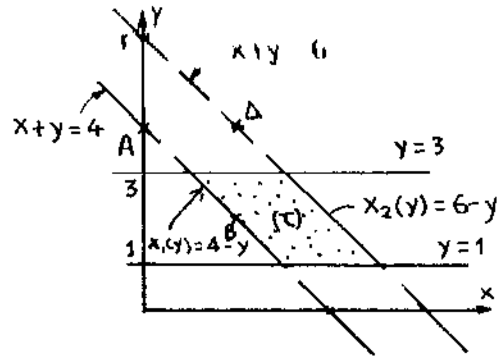
Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $2xy^3$ στον τόπο (τ) που περικλείεται από τις γραμμές:

$$\{\,y=1,\quad y=3,\quad x+y=4,\quad x+y=6\,\}$$

Λύση

Σχεδίαση του τόπου (τ): Η ευθεία $y=k$ είναι κάθετη στον άξονα y στη θέση $y=k$. Έτσι σχεδιάζουμε τις ευθείες $y=1$, $y=3$, κάθετες στον άξονα y στις θέσεις $y=1$, $y=3$ αντίστοιχα. Για τη σχεδίαση της ευθείας $x+y=4$ αρκούν δύο σημεία. Δίνουμε δύο (αυθαίρετες) τιμές στο x και βρίσκουμε τα αντίστοιχα y. Για $x=0$ βρίσκουμε $y=4$ ενώ για $x=2$ βρίσκουμε $y=2$. Άρα λοιπόν, τα σημεία $A(0,4)$, $B(2,2)$ ορίζουν την ευθεία $x+y=4$. Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι τα σημεία Γ(0,6), Δ(2,4) ορίζουν την ευθεία $x+y=6$. Ο τόπος φαίνεται στο σχήμα και είναι "κανονικός ως προς y", και έχει σύνορα τις ευθείες $y=1$, $y=3$ κάθετες στον άξονα y. Τα δύο άλλα σύνορα γράφουμε στη μορφή $x=x(y)$:



$$x+y=4 \implies x=4-y$$

$$x+y=6 \implies x=6-y$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (3.1.6):

$$\iint_{(\tau)} 2xy^3\,dx\,dy = \int_1^3\left(\int_{4-y}^{6-y} 2xy^3\,dx\right)dy \qquad (1)$$

Με σταθερό το y, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{4-y}^{6-y} 2xy^3\,dx = 2y^3\int_{4-y}^{6-y} x\,dx = 2y^3\,\frac{1}{2}x^2\Big|_{4-y}^{6-y} = y^3\left((6-y)^2-(4-y)^2\right) \implies$$

$$\int_{4-y}^{6-y} 2xy^3\,dx = 20y^3-4y^4 \qquad (2)$$

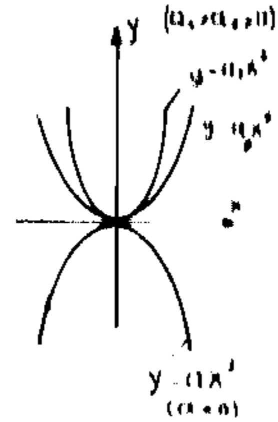
Η σχέση (1), λόγω της (2) δίνει:

$$\iint_{\tau} 2xy^3\,dx\,dy = \int_1^3 (20y^3-4y^4)\,dy = 20\int_1^3 y^3\,dy - 4\int_1^3 y^4\,dy = 206{,}4$$

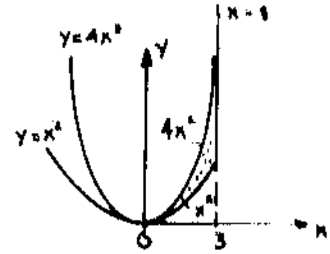
Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα: $\iint_{(\tau)} xy\,dx\,dy$ όπου (τ) είναι ο τόπος με σύνορα: $\{\, y=x^2,\ y=4x^2,\ x=3 \,\}$.

Λύση



Σχεδίαση του τόπου (τ). Γενικά, η καμπύλη $y=ax^2$ έχει τη μορφή του παραπλεύρως σχήματος, για διάφορες τιμές του σταθερού α. Παρατηρούμε ότι για $a>0$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ για $a<0$ προς τα κάτω. Ακόμη για $a_1>a_2$ η $y=a_1x^2$ είναι πιο "απότομη" από την $y=a_2x^2$. Έτσι οι καμπύλες $y=x^2$, $y=4x^2$ στρέφουν τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ η δεύτερη είναι πιο "απότομη" από την πρώτη. Η $x=3$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα x στο σημείο $x=3$. Ο τόπος φαίνεται στο σχήμα και μπορεί να θεωρηθεί "κανονικός ως προς x, ενώ περιέχεται από τις ευθείες $x=3$, $x=0$ (άξονα y) που είναι κάθετες στον άξονα x. Το κάτω σύνορο του τόπου είναι η $y_1=x^2$, ενώ το άνω η $y_2=4x^2$. Είναι λοιπόν:



$$\iint_{(\tau)} xy\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_{x^2}^{4x^2} xy\,dy \right) dx = \int_0^3 \left(x \int_{x^2}^{4x^2} y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x\, \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{4x^2} \right) dx = \int_0^3 \left(x\, \frac{1}{2} \left((4x^2)^2 - (x^2)^2 \right) \right) dx = \int_0^3 \frac{15}{2} x^5\,dx = 911{,}25$$

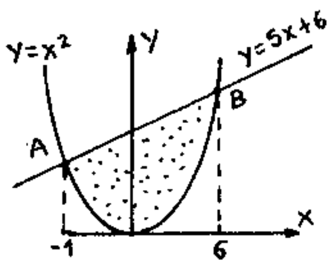
Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y)=yx^2$ στον τόπο (τ) που ορίζεται από τις ανισότητες

$$\{\, y \le 5x+6 \;,\quad y \ge x^2 \,\}$$

Λύση

Εδώ ο τόπος τ ορίζεται με τη βοήθεια ανισοτικών σχέ σεων. Γενικά, αν σχεδιάσουμε τη γραμμή $y=g(x)$, τότε η ανισότητα $y>g(x)$ παριστάνει το μέρος του επιπέδου το οποίο βρίσκεται πάνω από τη γραμμή, ενώ η $y<g(x)$ το μέρος που βρίσκεται κάτω απ' αυτή. Εδώ σχεδιάζουμε τις γραμμές $y=5x+6$, $y=x^2$. Η ανισότητα $y\leq 5x+6$ παριστάνει το μέρος του επιπέδου που βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=5x+6$, ενώ η $y\geq x^2$ το μέρος που βρίσκεται πάνω από την παραβολή $y=x^2$. Άρα ο τόπος (τ) είναι το μέρος του επιπέδου που βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=5x+6$ και πάνω από την παραβολή $y=x^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τα σημεία τομής A, B βρίσκονται από τη λύση του συστήματος:

$$\{\, y=5x+6, \quad y=x^2 \,\}$$

αφού τα A, B ανήκουν και στις δύο αυτές γραμμές. Προκύπτουν: $A(-1,1)$, $B(6,36)$. Ο τόπος είναι "κανονικός ως προς x" και βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x=-1$, $x=6$. Ο τόπος αυτός περιορίζεται κάτω από την $y_1=x^2$ και πάνω από την $y_2=5x+6$. Άρα έχουμε:

$$\iint\limits_{(\tau)} yx^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{6}\left(\int_{x^2}^{5x+6} yx^2\,dy\right)dx = \int_{-1}^{6}\left(x^2\int_{x^2}^{5x+6} y\,dy\right)dx =$$

$$=\int_{-1}^{6}\left(x^2\,\frac{1}{2}\,y^2\Big|_{x^2}^{5x+6}\right)dx = \int_{-1}^{6}\frac{1}{2}x^2\left((5x+6)^2-(x^2)^2\right)dx =$$

$$=\int_{-1}^{6}\left(-\frac{1}{2}x^6+\frac{25}{2}x^4+30x^3+18x^2\right)dx = -\frac{1}{14}x^7+\frac{25}{10}x^5+\frac{30}{4}x^4+\frac{18}{3}x^3\Big|_{-1}^{6} =$$

$$=10476{,}57$$

Άσκηση 6

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

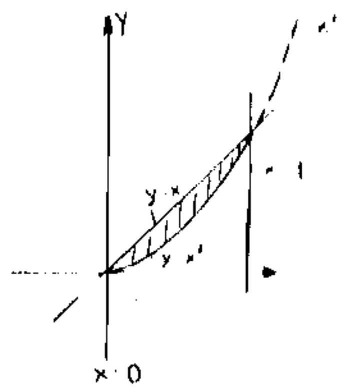
$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} 2y\,dy \right) dx \left(= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} 2y\,dy \right) \qquad (1)$$

α. Να σχεδιασθεί ο τόπος ολοκλήρωσης.
β. Να υπολογισθεί η τιμή του.
γ. Να δειχθεί ότι:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y}^{\sqrt{y}} 2y\,dx \right) dy \left(= \int_0^1 dy \int_{y}^{\sqrt{y}} 2y\,dx \right) \qquad (2)$$

Λύση

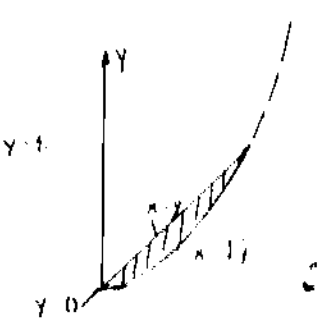
α. Προηγείται η ολοκλήρωση ως προς y (καθώς φαίνεται από την (1)) και ακολουθεί ολοκλήρωση ως προς x με σταθερά άκρα. Πρόκειται δηλαδή για διπλό ολοκλήρωμα σε τόπο (τ) που είναι "κανονικός ως προς x" με σύνορα τις ευθείες $x=0$, $x=1$. Ο τόπος κλείνει πάνω με την γραμμή $y=x$ και κάτω με την $y=x^2$, όπως φαίνεται από τη σχέση (1). Προκύπτει ο τόπος που φαίνεται στο σχήμα.



β. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται κατά τα γνωστά:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} 2y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(y^2 \Big|_{x^2}^{x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$



(γ) Παρατηρούμε ότι ο τόπος (τ) είναι και "κανονικός ως προς y". Περιορίζεται από τις ευθείες $y=0$, $y=1$. Τις εξισώσεις των δύο άλλων συνόρων λύνουμε ως προς x, οπότε βρίσκουμε $x=y$, $x=\sqrt{y}$. Άρα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y}^{\sqrt{y}} 2y\,dx \right) dy = \int_0^1 dy \int_{y}^{\sqrt{y}} 2y\,dx$$

3.2 Αλλαγή μεταβλητών στα διπλά ολοκληρώματα.

Είναι γνωστό ότι σ' ένα ορισμένο ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^b f(x)dx$ μπορούμε να κάνουμε αλλαγή της μεταβλητής, με κύριο σκοπό τον ευκολώτερο υπολογισμό του. Τότε αλλάζουν γενικά και τα όρια ολοκλήρωσης, δηλαδή το διάστημα ολοκλήρωσης.

Στα διπλά ολοκληρώματα ισχύουν ανάλογα. Κάνουμε αλλαγή των μεταβλητών με διπλό σκοπό: Απλούστευση της ολοκληρωτέας συνάρτησης και ταυτόχρονη απλούστευση του τόπου ολοκλήρωσης. Ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος: $\iint_{(\tau)} f(x,y)dxdy$ όπου (τ) είναι τόπος του επιπέδου Oxy.

Βήμα 1º Επιλέγουμε συναρτήσεις μετασχηματισμού:

$$x = x(u,\upsilon) \qquad y = y(u,\upsilon)$$

κατάλληλα. Η επιλογή εξαρτάται τόσο από την ολοκληρωτέα συνάρτηση, όσο και από τον τόπο ολοκλήρωσης (τ). Μπορεί οι σχέσεις μετασχηματισμού να είναι δοσμένες.

Βήμα 2º Υπολογίζουμε συναρτήσει των νέων μεταβλητών u,υ τις ποσότητες:

$$g(u,\upsilon) = f(x(u,\upsilon), y(u,\upsilon))$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \upsilon} - \frac{\partial x}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad (*)$$

Βήμα 3. Σχεδιάζουμε στο επίπεδο με άξονες u,υ

(*) ΒΛΕΠΕ: Γ. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ" τις εικόνες των συνόρων του τόπου (τ), οπότε προκύπτει ο τόπος D στο επίπεδο uυ.

Βήμα 4. Εφαρμόζουμε τη σχέση:

$$\iint_{(\tau)} f(x,y)\,dxdy = \iint_{(D)} g(u,\upsilon)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\right| du\,d\upsilon \qquad (3.2.1)$$

και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους.

Ένα βασικό πρόβλημα στην αλλαγή μεταβλητών είναι η επιλογή του μετασχηματισμού, δηλαδή των σχέσεων

$x = x(u,\upsilon) \qquad y = y(u,\upsilon)$

Η επιλογή αυτή γίνεται συνήθως με βάση τις παρακάτω παρατηρήσεις, όταν βέβαια δεν δίνεται ο μετασχηματισμός.

1. Όταν ο τόπος (τ) είναι κυκλικός δίσκος, θεωρούμε

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$

όπου r, φ οι γνωστές μας πολικές συντεταγμένες

2. Όταν ο τόπος (τ) είναι ελλειπτικός δίσκος, θεωρούμε

$x = a\rho\cos\varphi \qquad y = b\rho\sin\varphi$

όπου a, b ημιάξονες της έλλειψης κατά x, y αντίστοιχα

3. Όταν ο τόπος (τ) του επιπέδου Oxy έχει σύνορο που δίνεται σε "πολική μορφή": $r = r(\varphi)$ τότε πάλι θεωρούμε πολικές συντεταγμένες.

4. Όταν στο σύνορο του τόπου τ μία παράσταση των x, y εμφανίζεται δύο φορές, θέτουμε αυτή ίση με u

5. Όταν μία παράσταση των x,y εμφανίζεται στην ολοκληρωτέα συνάρτηση και ταυτόχρονα στο σύνορο (εξίσωση συνόρου) του τόπου (τ) θέτουμε αυτή ίση με u.

Άσκηση 7

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό:

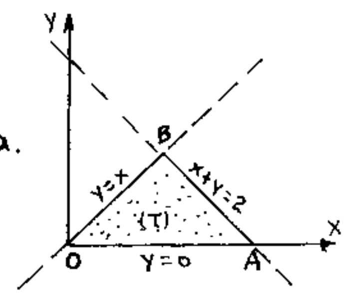
$$u = x+y \qquad \upsilon = x-y$$

να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\iint_{\tau} e^{(x+y)^2}\,dxdy$

όπου (τ) είναι ο τόπος που περικλείεται από τις γραμμές:

$$y = x \qquad x+y = 2 \qquad y = 0$$

Λύση



Ο τόπος (τ) φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο μετασχηματισμός είναι δοσμένος:

$$u = x+y \qquad \upsilon = x-y$$

Μπορούμε να επιλύσουμε ως προς x,y:

$$x = \frac{u+\upsilon}{2} \qquad y = \frac{u-\upsilon}{2}$$

και υπολογίζουμε:

$$e^{(x+y)^2} = e^{u^2} \implies g(u,\upsilon) = e^{u^2}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \upsilon} - \frac{\partial x}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \implies$$

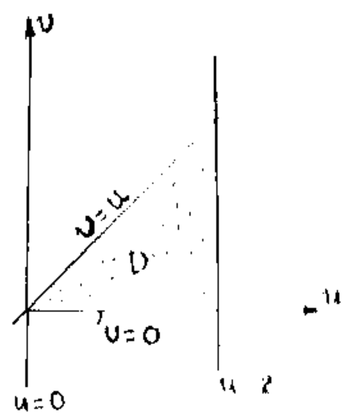
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\right| = \frac{1}{2}$$

Σχεδιάζουμε τώρα στο επίπεδο uυ την εικόνα του συνόρου του τόπου τ με βάση το δοσμένο μετασχηματισμό, απαλείφοντας σε κάθε περίπτωση τα x, y.

Σύνορο $y=x$: Είναι

$$u=x+y\ ,\quad \upsilon=x-y\ ,\quad y=x$$

Προκύπτει: $\upsilon=0$ (με απαλειφή των x, y). Άρα η εικόνα της $y=x$ είναι η ευθεία $\upsilon=0$ δηλαδή ο άξονας u.



Σύνορο $x+y=2$. Είναι $u=x+y$, $\upsilon=x-y$. Με απαλειφή των x, y από τις τρείς αυτές σχέσεις βρίσκουμε $u=2$ δηλαδή ευθεία κάθετη στον άξονα u στη θέση $u=2$.

Σύνορο $y=0$. Είναι $u=x+y$, $\upsilon=x-y$. Με απαλειφή απ' αυτές των x, y βρίσκουμε $u=\upsilon$ (ευθεία).

Έτσι προκύπτει ο τόπος D στο επίπεδο uυ που είναι η εικόνα του (τ) δια μέσου του δοσμένου μετασχηματισμού. Ο τόπος D είναι κανονικός ως προς u (ευθείες $u=2$, $u=0$) ενώ κλείνει πάνω από την $\upsilon=u$ και κάτω από τη $\upsilon=0$. Έχουμε, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.1)

$$\iint\limits_{(\tau)} e^{(x+y)^2}dx\,dy=\iint\limits_{(D)} e^{u^2}\frac{1}{2}\,du\,d\upsilon \qquad (1)$$

Όμως, επειδή ο (D) θεωρείται κανονικός ως προς u είναι

$$\iint\limits_{D} e^{u^2}\frac{1}{2}\,du\,d\upsilon=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_0^u e^{u^2}d\upsilon\right)du=\frac{1}{2}\int_0^2\left(e^{u^2}\int_0^u d\upsilon\right)du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{u^2}u\,du=\frac{1}{4}\int_0^2 e^{u^2}du^2=\frac{1}{4}e^{u^2}\Big|_0^2=\frac{1}{4}(e^4-1)$$

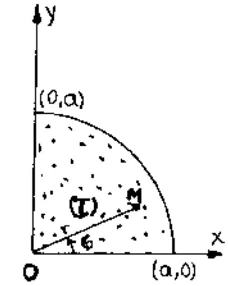
Παρατήρηση: Για να βρούμε την εικόνα μιας γραμμής του τόπου (τ), απαλείφουμε τα x, y από την εξίσωση τις γραμμής και τις εξισώσεις μετασχηματισμού.

'Ασκηση 13

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\cos(x^2+y^2)$ στον τόπο τ.

$$\{x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq a^2\}$$

Λύση



Ο τόπος (τ) ορίζεται με ανισοτικές σχέσεις. Θεωρούμε τις αντίστοιχες ισότητες:

$x=0$ (άξονας y) $\qquad$ $y=0$ (άξονας x)

$x^2+y^2=a^2$ (περιφέρεια κύκλου ακτίνας a)

Για $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2+y^2 \leq a^2$ προκύπτει ο τόπος τ του σχήματος. (Γενικά η ανισότητα $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq R^2$ παριστάνει το εσωτερικό περιφέρειας κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας R ενώ η $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 > R^2$ το εξωτερικό)

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος είναι μέρος κυκλικού δίσκου, θεωρούμε το μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες: Το τυχαίο σημείο του τόπου είναι:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad (r>0)$$

Είναι:

$$\cos(x^2+y^2) = \cos r^2$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\, r\cos\varphi - (-r\sin\varphi)\sin\varphi \implies$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$$

Θα βρούμε τώρα την εικόνα (D) του τόπου Τ στο επίπεδο $r\varphi$. Κατ' αρχήν, επειδή $r \geq 0$, ένα σύνορο του τόπου (D) είναι ο άξονας φ ($r=0$)

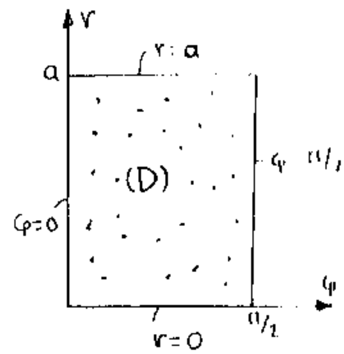
Σύνορο $x=0$. Η πρώτη από τις σχέσεις μετασχηματισμού δίνει $\varphi = \pi/2$

Σύνορο $y=0$. Η δεύτερη από τις σχέσεις μετασχηματισμού δίνει $\varphi = 0$

Σύνορο $x^2+y^2=a^2$. Απ' αυτή και τις σχέσεις μετασχηματισμού, με απαλειφή των x,y βρίσκουμε $r=a$. Ο

Ο τόπος D φαίνεται στο σχήμα και είναι ορθογωνικός. Εφαρμόζουμε τη σχέση (3.2.1):

$$\iint_T \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_D (\cos r^2)\cdot r \cdot dr\,d\varphi =$$



$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a r\cos r^2\,dr\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\int_0^a \cos r^2\,dr^2\right)d\varphi =$$

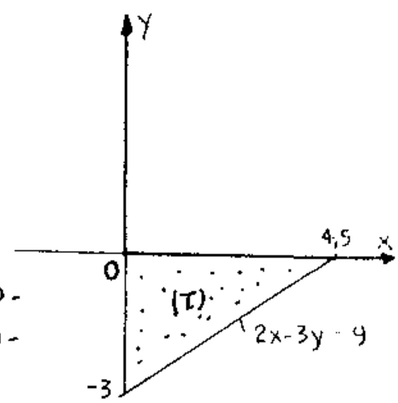
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin r^2\Big|_0^a\right)d\varphi = \frac{1}{2}\sin a^2\int_0^{\pi/2}d\varphi = \frac{\pi}{4}\sin a^2$$

Άσκηση 9

Αν (τ) είναι το χωρίο με σύνορα τις ευθείες $2x-3y=9$, $x=0$, $y=0$, να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_{(\tau)} \cos\left(\frac{3x+2y}{2x-3y}\right)dx\,dy$$

Λύση



Το χωρίο (τ) φαίνεται στο σχήμα, είναι κανονικό ως προς x, (και ως προς y) αλλά η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι δύσκολο να ολοκληρωθεί. Απαιτείται μετασχηματισμός.

Για να απλουστευθεί η ολοκληρωτέα συνάρτηση, θεωρούμε:

$$u = \frac{3x+2y}{2x-3y} \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση $2x-3y$ εμφανίζεται στο σύνορο και στην ολοκληρωτέα συνάρτηση. Αυτό μας οδηγεί να θέσουμε:

$$\upsilon = 2x-3y \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) επιλύονται ως προς x, y:

$$x = \frac{3u\upsilon+2\upsilon}{13} \qquad y = \frac{2u\upsilon-3\upsilon}{13}$$

Έχουμε:

$$\cos\frac{3x+2y}{2x-3y} = \cos u$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \upsilon} - \frac{\partial x}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{3\upsilon}{13}\cdot\frac{2u-3}{13} - \frac{3u+2}{13}\cdot\frac{2\upsilon}{13} = -\frac{\upsilon}{13}$$

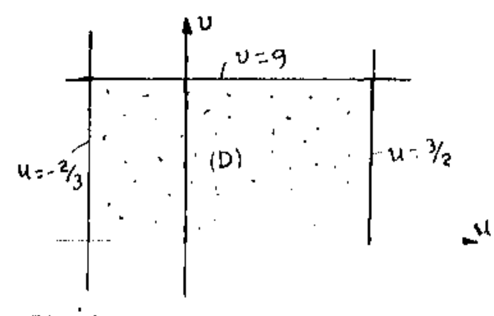
Θα προσδιορίσουμε τώρα την εικόνα (D) του τόπου [illegible] δια μέσου του μετασχηματισμού που ορίζουν οι σχέσεις (1), (2).

Το κατακόρυφο σύνορο $x=0$. Με $x=0$ οι (1), (2) δίνουν: $u=-2/3$, $\upsilon=-3y$. Η $u=-2/3$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα u.

Το οριζόντιο σύνορο $y=0$. Με $y=0$ οι (1), (2) δίνουν: $u=3/2$, $\upsilon=2x$.

Το σύνορο $2x-3y=9$. Από τις (1), (2) βρίσκουμε εύκολα [illegible]

Στο σημείο $x=y=0$ ο μετασχηματισμός δεν είναι αμφιμονοσήμαντος και δίνει [illegible] Ο τόπος (D) φαίνεται στο σχήμα



Εφαρμόζουμε τη σχέση (3.2.1): (Με $|-v/_{13}| = v/_{13}$ αφού $v \geq 0$)

$$\iint_{(\tau)} \cos\frac{3x+2y}{2x-3y}\,dx\,dy = \iint_{D} \cos u \left|-\frac{v}{13}\right| du\,dv = \int_{-2/3}^{3/2}\left(\frac{1}{13}\int_{0}^{9} \cos u\, v\,dv\right)du$$

$$= \frac{1}{13}\int_{-2/3}^{3/2}\left(\cos u\int_{0}^{9} v\,dv\right)du = \frac{1}{13}\int_{-2/3}^{3/2}\frac{9^2}{2}\cos u\,du = \frac{9^2}{26}\sin u\Big|_{-2/3}^{3/2} = \frac{81}{26}\left(\sin 3/2 + \sin 2/3\right)$$

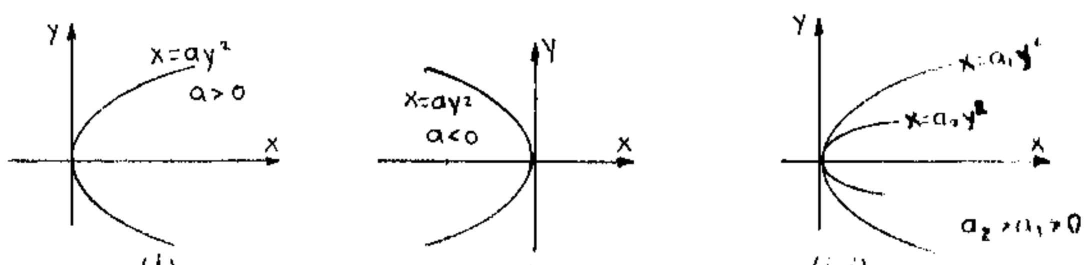
Άσκηση 10

Ο τόπος (τ) του επιπέδου xy περικλείεται από τις γραμμές: $x = y^2$, $4x = y^2$, $xy = 2$, $xy = 5$. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_{(\tau)} dx\,dy$$

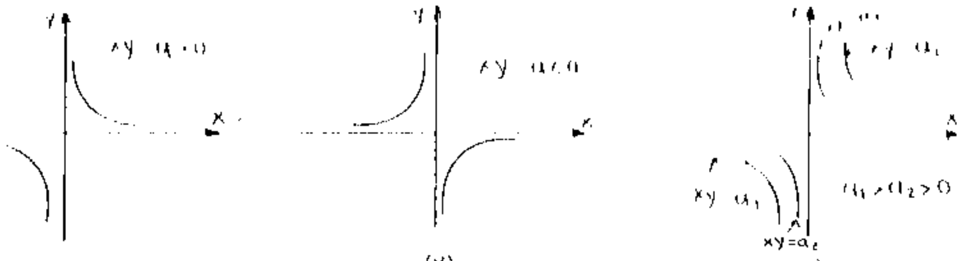
Λύση

Για τη σχεδίαση του τόπου (τ) πρέπει να γνωρίζουμε ότι η καμπύλη $x = ay^2$ έχει τη μορφή που φαίνεται στο (i) όταν $a > 0$ και τη μορφή (ii) για $a < 0$. Η καμπύλη αυτή "πλησιάζει" πιο πολύ τον άξονα x όσο το $|a|$ έχει μεγαλύτερη τιμή, όπως φαίνεται στο σχήμα (iii).



(i) (ii) (iii)

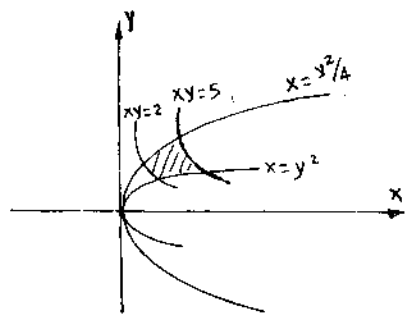
Η καμπύλη $xy = a$ έχει τη μορφή του σχήματος (iv) για $a > 0$, ενώ για $a < 0$ έχει τη μορφή του σχήματος (v). Η καμπύλη "απομακρύνεται" από την αρχή των αξόνων καθώς το $|a|$ έχει μεγαλύτερη τιμή (σχήμα vi)



(IV) (V) (VI)

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ο τόπος (τ) που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έχει σύνορα τις καμπύλες:

$$x=y^2\ ,\quad x=y^2/4\ ,\quad xy=2\ ,\quad xy=5$$



Όπως φαίνεται και στο σχήμα ο τόπος (τ) είναι αρκετά πολύπλοκος. Θα κάνουμε μετασχηματισμό. Επειδή οι παραστάσεις xy, y^2/x παίρνουν σταθερές τιμές στο σύνορο του τόπου (τ), θέτουμε:

$$u=xy\ ,\qquad v=y^2/x$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο πρόβλημα αυτό είναι ίση με 1. Υπολογίζουμε την ποσότητα:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

Όμως δεν είναι εύκολη η επίλυση των σχέσεων μετασχηματισμού ως προς x,y. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε τη γνωστή(*) ιδιότητα:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\qquad(1)$$

Βλέπε: ΠΑΝ. ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ".

Όμως είναι:

$$\frac{\partial(u,\upsilon)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις μετασχηματισμού υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2} \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 2\frac{y}{x}$$

οπότε η (2) γράφεται:

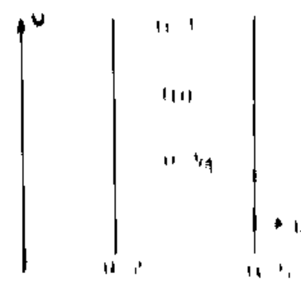
$$\frac{\partial(u,\upsilon)}{\partial(x,y)} = y\cdot\frac{2y}{x} - x\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = 3\frac{y^2}{x} = 3\upsilon$$

Η σχέση (1) τελικά δίνει:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)} = \frac{1}{3\upsilon} \qquad (3)$$

Θα βρούμε τώρα το μετασχηματισμένο τόπο D στο επίπεδο uυ, δια μέσου των σχέσεων:

$$u = xy \qquad \upsilon = y^2/x$$



Σύνορο $xy=2$. Η πρώτη από τις σχέσεις μετασχηματισμού δίνει $u=2$.
Σύνορο $xy=5$. Όμοια βρίσκουμε $u=5$
Σύνορο $x=y^2$ ή $y^2/x=1$. Η δεύτερη από τις σχέσεις μετασχηματισμού δίνει $\upsilon=1$
Σύνορο $x=4y^2$ ή $y^2/x=1/4$. Η δεύτερη από τις σχέσεις μετασχηματισμού δίνει $\upsilon=1/4$. Προκύπτει ο ορθογώνιος τόπος D που φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμόζουμε τώρα τη σχέση (3.2.1):

$$\iint_{(T)} 1\cdot dx\,dy = \iint_D 1\cdot\left|\frac{1}{3\upsilon}\right| du\,d\upsilon \overset{\upsilon>0}{\Longrightarrow}$$

$$\iint_{(T)} dx\,dy = \iint_D \frac{1}{3\upsilon}\,du\,d\upsilon = \frac{1}{3}\int_2^5\left(\int_{1/4}^1 \frac{1}{\upsilon}\,d\upsilon\right)du = \frac{1}{3}\int_2^5\left(\ln|\upsilon|\Big|_{1/4}^1\right)du =$$

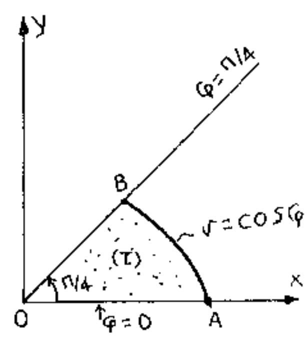
$$= \frac{1}{3}\int_2^5 \left(\ln 1 - \ln\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) du = \frac{\ln 4}{3}\int_2^5 du = \ln 4$$

Άσκηση 11

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y)=x$ στον τόπο του επιπέδου xy που περικλείεται από τις γραμμές: $\varphi=\pi/4$, $\varphi=0$, $r=\cos\varphi$.

Λύση

Εδώ το σύνορο του τόπου (τ) του επιπέδου xy δίνεται σε πολική μορφή: $r=r(\varphi)$. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να γνωρίζουμε ότι r,φ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου: r είναι η απόσταση από την αρχή και φ είναι η γωνία. Έτσι η $\varphi=\pi/4$ παριστάνει ημιευθεία από την αρχή, όλα τα σημεία της οποίας έχουν γωνία $\pi/4$, ως προς το θετικό ημιάξονα $+Ox$, όπου με συμφωνία δεχόμαστε $\varphi=0$. Η γραμμή $r=\cos\varphi$ (έχει νόημα μόνο για $r>0$) χαράσσεται αν για τις διάφορες τιμές της γωνίας φ υπολογίσουμε την απόσταση r που αντιστοιχεί από την αρχή. Έτσι για $\varphi=0$ βρίσκουμε $r=\cos 0=1$ (σημείο A: $OA=1$) Για $\varphi=\pi/4$ βρίσκουμε $r=\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}/2$ (σημείο B: $OB=\sqrt{2}/2$). Προκύπτει ο τόπος (τ) του σχήματος.



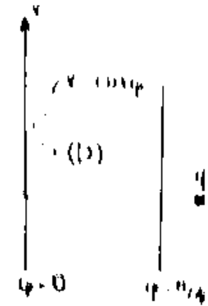
Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος (τ) έχει σύνορα δοσμένα σε πολική μορφή, χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$x=r\cos\varphi \qquad y=r\sin\varphi$$

Έχουμε: $f(x,y)=x=r\cos\varphi$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\cdot r\cos\varphi - (-r\sin\varphi)\sin\varphi = r$$

Βρισκουμε τώρα τον τόπο D στο επίπεδο με άξονες r,φ
Οι εικόνες των διαφόρων τμημάτων του συνόρου του τε
που (τ) βρίσκονται άμεσα:



$\varphi=\frac{\pi}{4}$: ευθεία κάθετη στον άξονα φ

$\varphi=0$: " " " " φ

$r=\cos\varphi$ (καμπύλη όπως στο σχήμα, $r>0$)

Εφαρμόζουμε τη σχέση (3.2.1):

$$\iint_{(\tau)} x\,dx\,dy = \iint_{D} r\cos\varphi\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi \qquad (1)$$

Όμως ο τόπος D είναι "κανονικός" ως προς φ. Άρα:

$$\iint_{D} r^2\cos\varphi\, dr\, d\varphi = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\cos\varphi} r^2\cos\varphi\, dr\right)d\varphi = \int_0^{\pi/4}\left(\cos\varphi\int_0^{\cos\varphi} r^2 dr\right)d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/4}\left(\cos\varphi\ \frac{1}{3}r^3\Big|_0^{\cos\varphi}\right)d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{32}+\frac{1}{12}$$

(Το τελευταίο ορισμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται(*) με την αντικατάσταση $\tan\varphi=t$ ή αν εκφράσουμε το $\cos^2\varphi$ συναρτή σει του διπλασίου τόξου)

Άσκηση 12

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_{(\tau)} (x^2+y^2)^{-2}dx\,dy$

όπου (τ) είναι ο τόπος που περικλείεται από τις:

$x^2+y^2=2x,\quad x^2+y^2=4x,\quad x^2+y^2=2y,\quad x^2+y^2=6y$

Λύση

(*) Βλέπε: "ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι"

Όταν δίνεται μία καμπύλη δεύτερου βαθμού, όπου οι συντελεστές των x^2, y^2 είναι ομόσημοι, περνάμε όλους τους όρους στο ίδιο μέλος και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε τέλεια τετράγωνα, για να βρούμε το είδος της.

Το σύνορο: $x^2+y^2=2x$ γράφεται:

$$x^2+y^2-2x=0 \implies x^2-2x+y^2=0 \implies x^2-2x+1-1+y^2=0 \implies$$

$$(x-1)^2+y^2=1 \iff (x-1)^2+(y-0)^2=1^2$$

δηλαδή κύκλος κέντρου $A(1,0)$ και ακτίνας 1, αφού γενικά, η εξίσωση:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

παριστάνει περιφέρεια κύκλου με κέντρο (a,b) και ακτίνα ίση με R. Όμοια:

Το σύνορο: $x^2+y^2=4x$ γράφεται:

$$x^2+y^2-4x=0 \implies x^2-4x+2^2-2^2+y^2=0 \implies$$

$$(x-2)^2+y^2=2^2$$ (κύκλος κέντρου $B(2,0)$ και ακτίνας 2)

Το σύνορο $x^2+y^2=2y$ γράφεται:

$$x^2+y^2-2y=0 \iff x^2+y^2-2y+1-1=0 \implies x^2+(y-1)^2=1^2$$

(περιφέρεια κύκλου κέντρου $\Gamma(0,1)$ και ακτίνας 1)

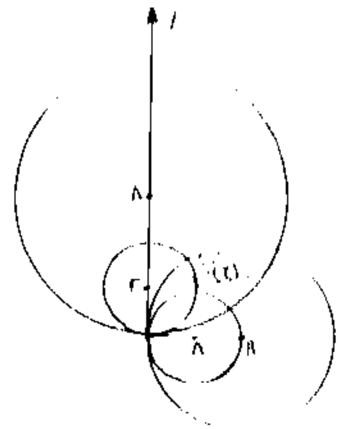
Τέλος, το σύνορο $x^2+y^2=6y$ γράφεται:

$$x^2+y^2-6y=0 \implies x^2+y^2-2\cdot y\cdot 3=0 \implies$$

$$x^2+y^2-2\cdot y\cdot 3+3^2-3^2=0 \implies x^2+(y-3)^2=3^2$$

(περιφέρεια κύκλου κέντρου $\Delta(0,3)$ και ακτίνας 3). Ο τόπος (τ) φαίνεται στο σχήμα.

Το σύνορο του τόπου (τ) γράφεται:



$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{6}$$

δηλαδή οι παραστάσεις

$$\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{y}{x^2+y^2}$$

παίρνουν σταθερές τιμές στο σύνορο του (τ). Θεωρούμε λοιπόν την αλλαγή:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \quad (1) \qquad v = \frac{y}{x^2+y^2} \quad (2)$$

Έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

οπότε βρίσκουμε:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

και επομένως:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -(x^2+y^2)^2 \implies \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = (x^2+y^2)^2 \qquad (3)$$

Βρίσκουμε τώρα τον τόπο D του επιπέδου uv. Το σύνορο $x^2+y^2=2x$ δίνει $u=1/2$. Το σύνορο $x^2+y^2=4x$ δίνει $u=1/4$. Το σύνορο $x^2+y^2=2y$ δίνει $v=1/2$, ενώ το σύνορο $x^2+y^2=6y$ δίνει $v=1/6$. Ο τόπος D φαίνεται στο σχήμα και είναι ορθογωνικός.

Υπολογίζουμε τώρα την παράσταση:

$$f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = (x^2+y^2)^{-2}(x^2+y^2)^2 = 1$$

(Συμφέρει μερικές φορές να μην εκφράζουμε αμέσως την ολοκληρωτέα συνάρτηση συναρτήσει των νέων μεταβλητών αλλά μετά τον πολλαπλασιασμό της επί τη συναρτησιακή ορίζουσα). Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα:

$$\iint_{(\tau)}(x^2+y^2)^{-2}dxdy = \iint_D du\,dv = \int_{1/4}^{1/2}\left(\int_{1/6}^{1/2}dv\right)du = \int_{1/4}^{1/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)du = \frac{1}{12}$$

Ασκηση 13

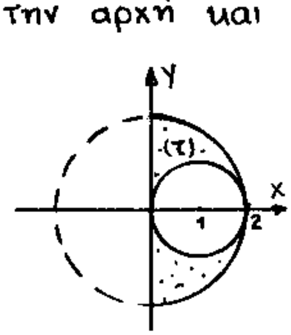
Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_{(\tau)}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ όπου (τ) είναι ο τόπος του επιπέδου $xy: \{2x \le x^2+y^2 \le 4,\ x>0\}$

Λύση

Ο τόπος (τ) είναι: $\{2x \le x^2+y^2,\ x^2+y^2 \le 4,\ x>0\}$. Η πρώτη ανισότητα μπορεί να γραφεί ακόμη:

$$0 \le x^2+y^2-2x \iff 0 \le x^2-2x+1-1+y^2 \iff 1 \le (x-1)^2+y^2$$

που είναι το εξωτερικό της περιφέρειας που έχει κέντρο το $(1,0)$ και ακτίνα 1. Η δεύτερη ανισότητα παριστάνει το εσωτερικό της περιφέρειας που έχει κέντρο την αρχή και ακτίνα ίση με 2. Η τρίτη ανισότητα $x>0$ είναι το δεξιό ημιεπίπεδο και ο τόπος (τ) φαίνεται στο σχήμα.



Επειδή υπάρχουν κυκλικά σύνορα, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών (πολικές συντεταγμένες):

$$x = r\cos\varphi\ ,\quad y = r\sin\varphi$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στις νέες μεταβλητές r, φ γίνεται

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$$

και η συναρτησιακή ορίζουσα

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

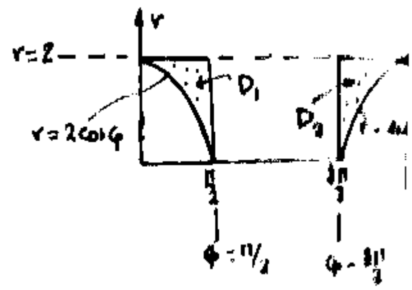
Σχεδιάζουμε τώρα το μετασχηματισμένο τόπο D σε άξον r, φ. Το σύνορο $x^2+y^2=4$ έχει εικόνα:

$$x^2+y^2=4 \implies r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4 \implies r=2$$

Το σύνορο $x^2+y^2=2x$ έχει εικόνα

$$x^2+y^2=2x \implies r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi = 2r\cos\varphi \implies r=2\cos\varphi$$

Επειδή είναι $x>0$ έχουμε $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Ο τόπος D φαίνεται στο σχήμα.



Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα: ($D \equiv D_1 \cup D_2$)

$$\iint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_D r\cdot r\cdot dr\,d\varphi =$$

$$= \iint_{D_1} r^2\,dr\,d\varphi + \iint_{D_2} r^2\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\Big(\int_{2\cos\varphi}^{2} r^2\,dr\Big)d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\Big(\int_{2\cos\varphi}^{2} r^2\,dr\Big)d\varphi = \int_0^{\pi/2}(8-8\cos^3\varphi)\,d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi}(8-8\cos^3\varphi)$$

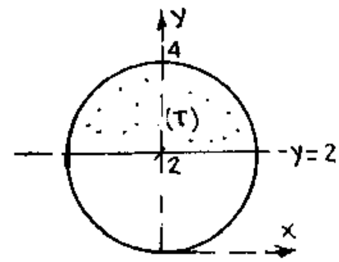
$$=\Big(8\varphi - 8\sin\varphi + \frac{8}{3}\sin^3\varphi\Big)\Big|_0^{\pi/2} + \Big(8\varphi - 8\sin\varphi + \frac{8}{3}\sin^3\varphi\Big)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = 8\pi$$

Ασκηση 14

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{(\tau)} \frac{y\,dx\,dy}{x^2+y^2}$

όπου (τ) είναι ο τόπος $\{ y \geq 2,\ x^2+y^2 \leq 2y \}$

Λύση



Το ένα σύνορο του τόπου είναι η ευθεία $y=2$ και το άλλο η γραμμή $x^2+y^2=4y$ που γράφεται $x^2+y^2-4y=0$ ή ισοδύναμα $x^2+y^2-4y+4=4$ ή τελικά $x^2+(y-2)^2=4$ που είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο το (0,2) και ακτίνα ίση με 2.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών (πολικές συντεταγμένες):

$$x=r\cos\varphi \qquad y=r\sin\varphi$$

Η συναρτησιακή ορίζουσα είναι

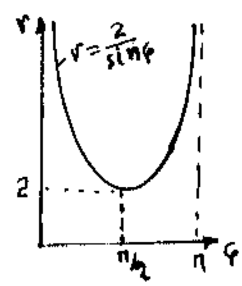
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = r$$

και η ολοκληρωτέα συνάρτηση στις νέες μεταβλητές r,φ είναι

$$\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \frac{r\sin\varphi}{r^2}\,r = \sin\varphi$$

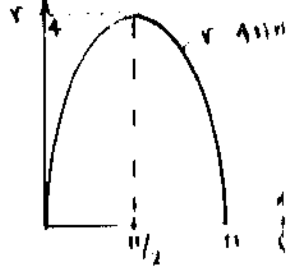
Θα προσδιορίσουμε τώρα το μετασχηματισμένο τόπο D σε άξονες r,φ: Το σύνορο $y=2$ μετασχηματίζεται στη γραμμή

$$r\sin\varphi=2 \implies r=\frac{2}{\sin\varphi}$$



όπως προκύπτει από απαλειφή των x, y από τις σχέσεις $y=2$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Η καμπύλη αυτή (που είναι περιοδική) φαίνεται σχεδιασμένη στο διπλανό σχήμα για $0<\varphi<\pi$. Επειδή για $\varphi \to 0$, $\varphi \to \pi$, η συνάρτηση $\sin\varphi \to 0$, η συνάρτηση $2/\sin\varphi$ απειρίζεται (ασύμπτωτες). Επειδή για $\varphi = \pi/2$ είναι $\sin\varphi = \max$ η $2/\sin\varphi$ παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με 2.

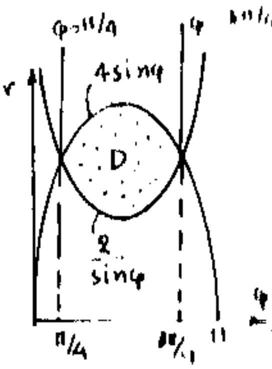
Το άλλο σύνορο του τόπου $x^2+y^2=4y$ με την αλλαγή μεταβλητών $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (απαλειφή των x,y) δίνει



$$r = 4\sin\varphi$$

που είναι η γνωστή ημιτονοειδής καμπύλη που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν σχεδιάσουμε τις καμπύλες μαζί προκύπτει ο τόπος D_1 που είναι η εικόνα του τόπου T σε άξονες r, φ. Τα σημεία τομής των καμπυλών είναι εκεί όπου



$$\frac{2}{\sin\varphi} = 4\sin\varphi \implies \sin^2\varphi = \frac{1}{2} \implies \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

και επειδή $0<\varphi<\pi$ είναι $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$

Ο τόπος D είναι κανονικός ως προς φ, μεταξύ των ευθειών $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ενώ κλείνει κάτω από την $r = 2/\sin\varphi$ και πάνω από την $r = 4\sin\varphi$. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται:

$$\iint_{(T)} \frac{y\,dx\,dy}{x^2+y^2} = \iint_{(D)} \sin\varphi\, dr\, d\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{2/\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \sin\varphi\, dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\varphi \left(4\sin\varphi - \frac{2}{\sin\varphi} \right) d\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 4\sin^2\varphi\, d\varphi - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\, d\varphi =$$

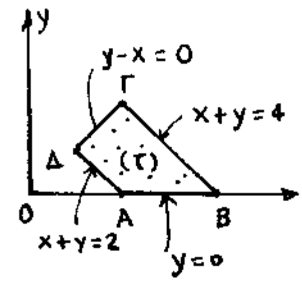
$$= 4\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi - 2\,\frac{\pi}{2} = 2\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) =$$

$$= -\sin 2\varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = 2$$

Ασκηση 15

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{(\tau)} (x+y)^2 dxdy$ όπου (τ) είναι το εσωτερικό του τετραπλεύρου με κορυφές τα σημεία $A(2,0)$, $B(4,0)$, $\Gamma(2,2)$, $\Delta(1,1)$

Λύση



Βρίσκουμε πρώτα τις εξισώσεις των ορίων του τόπου. Το σύνορο AB έχει εξίσωση $y=0$. Εστω $y=a_1x+b_1$ η εξίσωση του ΒΓ. Επειδή επαληθεύεται από τα σημεία $B(4,0)$, $\Gamma(2,2)$ έχουμε:

$$\{0=a_1\cdot 4+b_1 \;,\; 2=a_1\cdot 2+b_1\} \Longrightarrow a_1=-1 \quad b_1=4$$

Αρα η εξίσωση του ΒΓ είναι $y=-x+4$ ή $y+x=4$
Ομοια βρίσκουμε ότι η εξίσωση του ΓΔ είναι $y-x=0$ και του ΔΑ είναι $y+x=2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε αλλαγή μεταβλητών για να απλουστευθεί ο τόπος (τ), αλλά και η ολοκληρωτέα συνάρτηση. Η παράσταση $x+y$ που εμφανίζεται στην ολοκληρωτέα συνάρτηση αλλά και στα σύνορα πρέπει να τεθεί ίση με u. Μία άλλη μεταβλητή θα ληφθεί η $v=y-x$ (Η παράσταση εμφανίζεται στο σύνορο). Αρα είναι

$$y+x=u \qquad y-x=v$$

και με επίλυση ως προς x,y βρίσκουμε εύκολα:

$$y=\frac{u+v}{2} \qquad x=\frac{u-v}{2}$$

Υπολογίζουμε τη συναρτησιακή ορίζουσα:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

και η ολοκληρωτέα συνάρτηση:

$$(x+y)^{-1} = u^{-1}$$

Βρίσκουμε τώρα την εικόνα (D) του τόπου (τ) σε άξονες u,υ: Σύνορο $y=0$. Από τις σχέσεις

$$y=0\,,\quad y=\frac{u+\upsilon}{2}\,,\quad x=\frac{u-\upsilon}{2}$$

με απαλειφή των x,y προκύπτει: $u=-\upsilon$.
Σύνορο $x+y=4$. Από τις σχέσεις

$$x+y=4\,,\quad y=\frac{u+\upsilon}{2}\,,\quad x=\frac{u-\upsilon}{2}$$

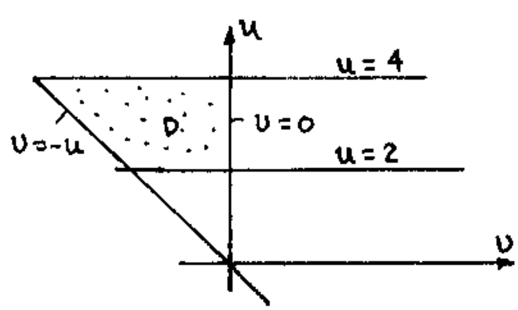
προκύπτει με απαλειφή των x,y: $u=4$
Σύνορο $y-x=0$. Απο τις σχέσεις

$$y-x=0,\quad y=\frac{u+\upsilon}{2}\,,\quad x=\frac{u-\upsilon}{2}$$

προκύπτει με απαλειφή των x,y: $\upsilon=0$
Σύνορο $x+y=2$. Από τις σχέσεις

$$x+y=2,\quad y=\frac{u+\upsilon}{2}\,,\quad x=\frac{u-\upsilon}{2}$$

με απαλειφή των x,y βρίσκουμε $u=2$
Ετσι σχεδιάζουμε τον τόπο (D) σε άξονες u,υ, που έχει σύνορα $u=-\upsilon$, $u=4$, $\upsilon=0$, $u=2$ και φαίνεται στο σχήμα.



Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα:

$$\iint\limits_{(\tau)} (x+y)^{-1}\,dx\,dy = \iint\limits_{(D)} u^{-1}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\iint\limits_{D} u^{-1}\,du\,dv$$

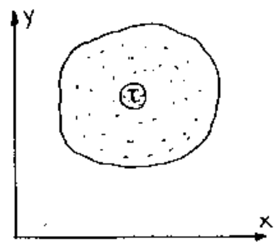
Όμως ο τόπος (D) είναι κανονικός ως προς u και κλείνει αριστερά από τη $v=-u$ και δεξιά από τη $v=0$. Άρα

$$\iint\limits_{(\tau)} (x+y)^{-1}dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{2}^{4}\Big(\int_{-u}^{0} u^{-1}dv\Big)du = \frac{1}{2}\int_{2}^{4} u^{-1}\Big(\int_{-u}^{0}dv\Big)du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2}^{4} u^{-1}\cdot u\,du = \frac{1}{2}\int_{2}^{4}du = 1$$

3.3 Εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος.

Στα επόμενα υποθέτουμε ότι (τ) είναι ένα χωρίο στο επίπεδο xy και ότι $\delta(x,y)$ είναι η επιφανειακή πυκνότητα μάζας, η μάζα, δηλαδή, ανά μονάδα επιφάνειας.



Εφαρμογή 1. Το εμβαδό του τόπου (τ) δίνεται από τη σχέση:

$$E = \iint\limits_{(\tau)} dx\,dy \qquad (3.3.1)$$

Εφαρμογή 2. Η μάζα του τόπου (τ) δίνεται από τη σχέση:

$$M = \iint\limits_{(\tau)} \delta(x,y)\,dx\,dy \qquad (3.3.2)$$

Εφαρμογή 3. Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας C του τόπου (τ) είναι:

$$x_1 = \frac{1}{M}\iint\limits_{(\tau)} x\,\delta(x,y)\,dx\,dy \qquad (3.3.3)$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iint\limits_{(\tau)} y\delta(x,y)\,dx\,dy \qquad (3.3.4)$$

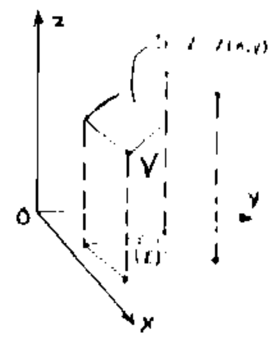
Εφαρμογή 4. Ροπές αδράνειας του (τ). Ως προς τους άξονες:

$$I_x = \iint\limits_{(\tau)} y^2\delta(x,y)\,dx\,dy \qquad I_y = \iint\limits_{(\tau)} x^2\delta(x,y)\,dx\,dy \qquad (3.3.5)$$

Ως προς την αρχή O των αξόνων (πολική ροπή αδράνειας)

$$I_0 = \iint\limits_{(\tau)} (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dx\,dy \qquad (3.3.6)$$

Εφαρμογή 6. Αν (τ) είναι η προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο Oxy τότε ο όγκος V ανάμεσα στην επιφάνεια S και την προβολή της (τ) στο επίπεδο Oxy είναι:



$$V = \iint\limits_{(\tau)} |z(x,y)|\,dx\,dy \qquad (3.3.7)$$

όπου $z = z(x,y)$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας.

Εφαρμογή 7. Αν (τ) είναι η προβολή στο επίπεδο xy της επιφάνειας S με εξίσωση $z=z(x,y)$, τότε το εμβαδό της S είναι:

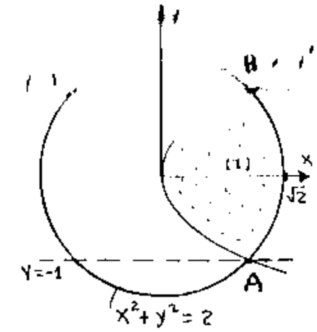
$$E_S = \iint\limits_{(\tau)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \qquad (3.3.8)$$

Άσκηση 16

Να υπολογισθεί το εμβαδό του τόπου (τ) που βρίσκεται ανάμεσα στις καμπύλες: $(x \geq 0)$

$x^2+y^2 = 2$, $x = y^2$. Δίνεται: $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$

Λύση



Σχεδιάζουμε πρώτα τις καμπύλες-σύνορα του τόπου (τ). Η $x^2+y^2=2$ είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο (0,0) και ακτίνα $\sqrt{2}$. Η $x=y^2$ είναι παραβολή. Επειδή $x \geq 0$ ο τόπος (τ) είναι αυτός που φαίνεται στο σχήμα. Τα σημεία τομής των καμπυλών, επειδή ανήκουν και στις δύο καμπύλες, ικανοποιούν:

$$x^2+y^2=2, \quad x=y^2 \quad \Longrightarrow \quad A(1,-1) \qquad B(1,1)$$

Ο τόπος (τ) είναι "κανονικός ως προς y" και περικλείεται από τις $y=-1$, $y=1$, αριστερά από την $x=y^2$ και δεξιά από την περιφέρεια $x^2+y^2=2$, που αν λυθεί ως προς x δίνει: $x=+\sqrt{2-y^2}$ (κρατήσαμε το (+) αφού είναι $x>0$). Το ζητούμενο εμβαδό υπολογίζεται:

$$E=\iint_{\tau} dx\,dy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} dx\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-y^2}-y^2\right)dy \Longrightarrow$$

$$E=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-y^2}\,dy-\int_{-1}^{1}y^2\,dy$$

Χρησιμοποιώντας και το δοσμένο ολοκλήρωμα βρίσκουμε:

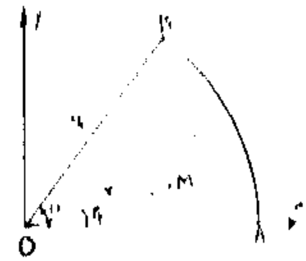
$$E=\frac{1}{2}\left(y\sqrt{(\sqrt{2})^2-y^2}+(\sqrt{2})^2\arcsin\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}$$

Άσκηση 17

Να βρεθεί το εμβαδό, η μάζα και το κέντρο μάζας ομογενούς κυκλικού τομέα (επιφανειακή πυκνότητα δ σταθερή) με ακτίνα ίση με R και γωνία α. Ποια η πολική ροπή αδράνειας;

Λύση

Θεωρούμε τον κυκλικό τομέα που φαίνεται στο σχήμαμα το εμβαδό του δίνεται από τη σχέση:



$$E = \iint_{T} dx\,dy \qquad (1)$$

Επειδή ο τόπος ολοκλήρωσης είναι μέρος ενός κύκλου θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad r \geq 0, \qquad 0 \leq \varphi \leq a.$$

Είναι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = r$$

Θα προσδιορίσουμε το μετασχηματισμένο τόπο D στο επίπεδο $r\varphi$ (με άξονες r,φ).

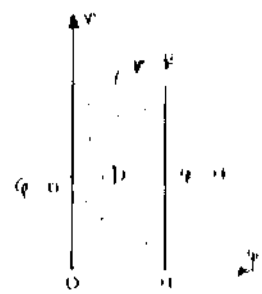
Σύνορο OA: Είναι $\varphi = 0$ (ευθεία κάθετη στον άξονα φ)

Σύνορο OB: Είναι $\varphi = a$ (" " " " ")

Σύνορο AB: Είναι $r = R$ (" " " " r)

Επειδή $r \geq 0$, ο τόπος D είναι αυτός που φαίνεται στο σχήμα.

Η σχέση (1) με βάση τη σχέση (2.1.3) δίνει:



$$E = \iint_{D} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi = \iint_{D} r\,dr\,d\varphi$$

Όμως ο τόπος D είναι ορθογωνικός. Άρα:

$$E = \iint_{D} r\,dr\,d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^R r\,dr\right)d\varphi = \int_0^a \frac{1}{2}R^2\,d\varphi = \frac{1}{2}R^2 a$$

Η μάζα του τομέα είναι (σχέση (3.3.2)):

$$M = \iint_{(T)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \delta\iint_{(T)} dx\,dy = \delta E \implies M = \frac{1}{2}\delta R^2 a \qquad (2)$$

αφού το δ είναι σταθερό.

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας C δίνονται από τη σχέσεις (5.5.3), (5.5.4). Είναι:

$$x_c = \frac{1}{M}\iint\limits_{(\tau)} x\,\delta\,dx\,dy = \frac{\delta}{M}\iint\limits_{(\tau)} x\,dx\,dy = \frac{\delta}{M}\iint\limits_{D} r\cos\varphi\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{\delta}{M}\int_0^a\left(\int_0^R r^2\cos\varphi\,dr\right)d\varphi = \frac{\delta}{M}\int_0^a\left(\cos\varphi\int_0^R r^2\,dr\right)d\varphi = \frac{\delta}{M}\int_0^a\left(\cos\varphi\,\frac{1}{3}R^3\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{\delta R^3}{3M}\int_0^a \cos\varphi\,d\varphi \Longrightarrow \quad x_c = \frac{\delta R^3}{3M}\sin a \qquad (3)$$

όπου για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιήσαμε το μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες και ολοκληρώσαμε στον τόπο D του επιπέδου $r\varphi$.

Για το y_c έχουμε:

$$y_c = \frac{1}{M}\iint\limits_{(\tau)} y\,\delta\,dx\,dy = \frac{\delta}{M}\iint\limits_{(\tau)} y\,dx\,dy = \frac{\delta}{M}\iint\limits_{D} r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{\delta}{M}\int_0^a\left(\int_0^R r^2\sin\varphi\,dr\right)d\varphi = \frac{\delta}{M}\int_0^a\left(\sin\varphi\int_0^R r^2\,dr\right)d\varphi = \frac{\delta}{M}\int_0^a \sin\varphi\,\frac{1}{3}R^3\,d\varphi =$$

$$= \frac{\delta R^3}{3M}\int_0^a \sin\varphi\,d\varphi = \frac{\delta R^3}{3M}\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^a \Rightarrow \quad y_c = \frac{\delta R^3}{3M}(1-\cos a) \qquad (4)$$

Οι σχέσεις (3), (4) λόγω της (2) μπορούν να γραφούν:

$$x_c = \frac{2R}{3a}\sin a \qquad\qquad y_c = \frac{2R}{3a}(1-\cos a)$$

Παρατήρηση. Αν $a=\pi/2$ ο τομέας είναι τέταρτο κύκλου οπότε οι παραπάνω σχέσεις για $a=\pi/2$ γίνονται:

$$x_c = \frac{4R}{3\pi} \qquad\qquad y_c = \frac{4R}{3\pi}$$

Αν $a=\pi$ (μισός δίσκος) τότε για $a=\pi$:

$$x_c = 0 \qquad\qquad y_c = \frac{4R}{3\pi}$$

Η πολική ροπή αδρανείας είναι (σχέση 5.5.6)

$$I_0 = \iint_{(\tau)} (x^2+y^2)\,\delta\, dx\,dy = \delta \iint_{(\tau)} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \delta \iint_{D} (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$\Longrightarrow I_0 = \delta \iint_D r^3\, dr\, d\varphi = \delta \int_0^a \left(\int_0^R r^3\, dr \right) d\varphi = \delta \int_0^a \frac{1}{4} R^4\, d\varphi = \delta \frac{R^4}{4} \int_0^a d\varphi \Rightarrow$$

$$I_0 = \frac{a\delta R^4}{4} \qquad (5)$$

όπου πάλι, υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες. Για $a = 2\pi$ (πλήρης δίσκος) η σχέση (5) γράφεται:

$$I_0 = \frac{\pi}{2}\delta R^4 \qquad (6)$$

Άσκηση 18

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z = y\cos 2x$ και την προβολή της (τ) στο επίπεδο, όπου (τ):

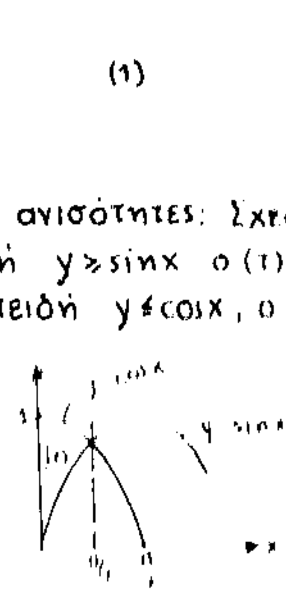
$$y \geq \sin x, \qquad y \leq \cos x, \qquad 0 \leq x \leq \pi/4$$

Λύση

Ο ζητούμενος όγκος, σύμφωνα με τη σχέση (3.3.7) είναι $(z \geq 0)$

$$V = \iint_{(\tau)} |z(x,y)|\, dx\,dy \Longrightarrow V = \iint_{(\tau)} y\cos 2x\, dx\,dy \qquad (1)$$

Σχεδιάζουμε τον τόπο (τ) που δίνεται με ανισότητες: Σχεδιάζουμε τις γραμμές $y=\sin x$, $y=\cos x$. Επειδή $y \geq \sin x$ ο (τ) βρίσκεται πάνω από την $y=\sin x$ και επειδή $y \leq \cos x$, ο (τ) βρίσκεται κάτω από την $y=\cos x$.



Επειδή $0 \leq x \leq \pi/4$, ο τόπος περιορίζεται αριστερά από τη $x=0$ και δεξιά από τη $x=\pi/4$, όπου οι $y=\sin x$, $y=\cos x$ συναντώνται. Επειδή ο τόπος (τ) είναι κανονικός ως προς x, έχουμε:

$$V=\iint_{(\tau)} y\cos 2x\,dx\,dy=\int_0^{\pi/4}\left(\int_{\sin x}^{\cos x} y\cos 2x\,dy\right)dx$$

αφού ο τόπος περιέχεται κάτω από την $y=\sin x$ και πάνω από την $y=\cos x$. Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα:

$$V=\int_0^{\pi/4}\left(\cos 2x\int_{\sin x}^{\cos x} y\,dy\right)dx=\int_0^{\pi/4}\left(\cos 2x\,\frac{1}{2}y^2\Big|_{\sin x}^{\cos x}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,\frac{1}{2}(\cos^2x-\sin^2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2 2x\,dx$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$. Με βάση τώρα την ταυτότητα $\cos^2u=$ $=\frac{1+\cos 2u}{2}$ βρίσκουμε:

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}dx+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\cos 4x\,dx=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{16}\int_0^{\pi/4}\cos 4x\,d(4x)$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{16}$$

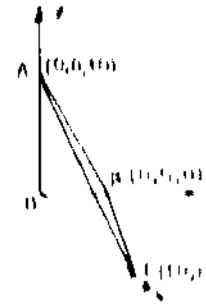
Άσκηση 19

Δίνεται το επίπεδο $x+2y+z=10$. Ένα τμήμα του επιπέδου αυτού έχει προβολή στο επίπεδο το χωρίο (τ) που έχει σύνορο την έλλειψη $x^2+(y/2)^2=1$. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το τμήμα αυτό του επιπέδου και την προβολή του (τ) στο επίπεδο. Ποιο το εμβαδό του τμήματος αυτού του επιπέδου $x+2y+z=10$;

Λύση

Σχεδιάζουμε πρώτα το επίπεδο βρίσκοντας τα σημεία τομής με τους συντεταγμένους άξονες: Για $x=y=0$ βρίσκουμε $z=10$ από την εξίσωση του επιπέδου. Για $x=z=0$ βρίσκουμε

$y=5$. Για $y=0$ βρίσκουμε $x=10$. Άρα το επίπεδο ορίζεται από τα σημεία $A(0,0,10)$, $B(0,5,0)$, $\Gamma(10,0,0)$. Σχεδιάζουμε τώρα και την έλλειψη που έχει ημιάξονες 1, 2 κατά x, y αντίστοιχα. Το επίπεδο βρίσκεται πάνω από την έλλειψη και δεν την τέμνει όπως μπορεί πολύ εύκολα να δειχθεί αφού το σύστημα:



$$x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1, \quad x+2y+z=10 \quad , \; z=0$$

δεν έχει λύσεις, δεν υπάρχουν δηλαδή σημεία που ν' ανήκουν ταυτόχρονα και στο επίπεδο $x+2y+z=10$ και στη έλλειψη. Η εξίσωση του επιπέδου γράφεται:

$$z=10-x-2y$$

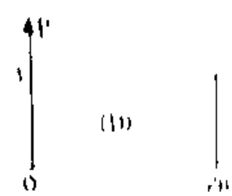
και ο ζητούμενος όγκος είναι:

$$V=\iint_{(\tau)}(10-x-2y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

όπου (τ) είναι το εσωτερικό της έλλειψης. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θεωρούμε το μετασχηματισμό:

$$x=1\cdot\rho\cdot\cos\varphi \qquad y=2\cdot\rho\cdot\sin\varphi \qquad (0<\rho<1)$$

σύμφωνα με το γνωστό μετασχηματισμό. Εδώ $a=1$, $b=2$. Ο D στο επίπεδο ρφ προσδιορίζεται από τις ευθείες: $\rho=0$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$. Υπολογίζουμε:



$$10-x-2y=10-\rho\cos\varphi-4\rho\sin\varphi$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=\frac{\partial x}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=$$

$$=\cos\varphi\, 2\rho\cos\varphi-(-\rho\sin\varphi)2\sin\varphi=2\rho$$

Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε:

$$V = \iint_D (10-\rho\cos\varphi - 4\rho\sin\varphi)\, 2\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \iint_D 10\cdot 2\rho\, d\rho\, d\varphi - \iint_D 2\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi - \iint_D 8\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 20\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\, d\rho\right)d\varphi - 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^2\cos\varphi\, d\rho\right)d\varphi - 8\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^2\sin\varphi\, d\rho\right)d\varphi =$$

$$= 20\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}\rho^2\Big|_0^1\right)d\varphi - 2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\left(\tfrac{1}{3}\rho^3\Big|_0^1\right)d\varphi - 8\int_0^{2\pi}\sin\varphi\left(\tfrac{1}{3}\rho^3\Big|_0^1\right)d\varphi =$$

$$10\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi - \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 20\pi$$

Το εμβαδό του τμήματος του επιπέδου $x+2y+z=10$ που έχει προβολή το εσωτερικό της έλλειψης στο επίπεδο xy είναι σύμφωνα με τη σχέση (3.3.8):

$$E_s = \iint_{(\tau)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \qquad (2)$$

Εδώ είναι:

$$x+2y+z=10 \implies z = 10-x-2y, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2$$

οπότε η (2) γράφεται:

$$E = \iint_{(\tau)} \sqrt{1+(-1)^2+(-2)^2}\, dx\, dy = \sqrt{6}\iint_{\tau} dx\, dy$$

Με τον προηγούμενο μετασχηματισμό βρίσκουμε:

$$E = \sqrt{6}\iint_D 2\rho\, d\rho\, d\varphi = 2\sqrt{6}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\, d\rho\right)d\varphi = \sqrt{6}\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\sqrt{6}$$

Άσκηση 20

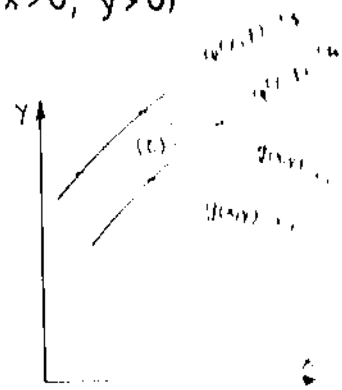
Να υπολογισθεί το εμβαδό του τόπου (τ) του επιπέδου Oxy που περικλείεται από τις γραμμές:

$$g(x,y)=c_1,\quad g(x,y)=c_2\ ,\quad \varphi(x,y)=c_3,\quad \varphi(x,y)=c_4$$

Στη συνέχεια, να βρεθεί το εμβαδό του τόπου του επιπέδου Oxy με σύνορο

$$x^2+2y^2=1,\quad x^2+2y^2=4\ ,\quad y=2x,\quad y=5x\qquad (x>0,\ y>0)$$

Λύση



Προφανώς οι γραμμές $g(x,y)=c_1$, $g(x,y)=c_2$ δεν τέμνονται. Επίσης οι $\varphi(x,y)=c_3$, $\varphi(x,y)=c_4$ δεν τέμνονται. Έτσι ο τόπος (τ) έχει τη μορφή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το εμβαδό δίνεται από τη σχέση:

$$E=\iint\limits_{(\tau)} dx\,dy \qquad (1)$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό:

$$g(x,y)=u\ ,\quad \varphi(x,y)=\upsilon \qquad (2)$$

Αν είναι εύκολη η επίλυση ως προς x, y των σχέσεων (2), επιλύουμε ως προς x,y και υπολογίζουμε την:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \upsilon}-\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\,\frac{\partial y}{\partial u}$$

διαφορετικά υπολογίζουμε την:

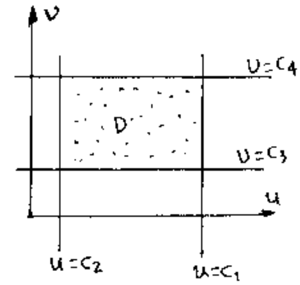
$$\frac{\partial(u,\upsilon)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

οπότε είναι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,\upsilon)}{\partial(x,y)}}$$

και εκφράζουμε το αποτέλεσμα συναρτήσει των u,υ.

Βρίσκουμε το μετασχηματισμένο τόπο στο επίπεδο $u\upsilon$: Λόγω των σχέσεων (2), οι γραμμές $g(x,y)=c_1$, $g(x,y)=c_2$, μετασχηματίζονται στις ευθείες $u=c_1$, $u=c_2$ (κάθετες στον άξονα u). Οι γραμμές $\varphi(x,y)=c_3$, $\varphi(x,y)=c_4$ μετασχηματίζονται στις ευθείες $\upsilon=c_3$, $\upsilon=c_4$ (κάθετες στον άξονα υ. Ο τόπος D φαίνεται στο σχήμα.



Το ολοκλήρωμα της σχέσης (1) υπολογίζεται:

$$\iint_{(\tau)} dx\,dy = \iint_{D} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)} \right| du\,d\upsilon$$

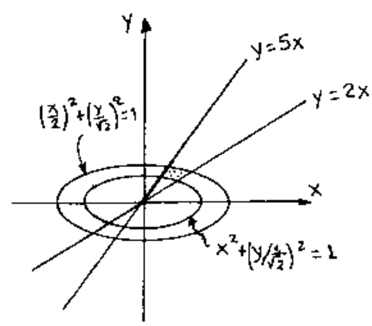
Παρατήρηση: Η σχεδίαση του τόπου (τ) δεν είναι απαραίτητη.

Θα υπολογίσουμε τώρα το εμβαδό του τόπου (τ) του επιπέδου Oxy με σύνορο:

$$x^2+2y^2=1, \quad x^2+2y^2=4, \quad y=2x, \quad y=5x \quad (x>0,\ y>0)$$

Στις δύο πρώτες καμπύλες, τα x^2, y^2 έχουν θετικούς και διαφορετικούς συντελεστές. Άρα έχουμε ελλείψεις:

$$x^2+\left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2=1, \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$



Οι δύο άλλες γραμμές είναι ευθείες αφού τα x,y είναι σε πρώτη δύναμη.

Το εμβαδό του τόπου (τ) είναι:

$$E=\iint_{(\tau)} dx\,dy \qquad (3)$$

Οι εξισώσεις του συνόρου είναι:

$$x^2+2y^2=1, \quad x^2+2y^2=4, \quad y/x=2, \quad y/x=5$$

Θεωρούμε λοιπόν το μετασχηματισμό

$$x^2+2y^2=u \qquad \frac{y}{x}=v \qquad (4)$$

και έχουμε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

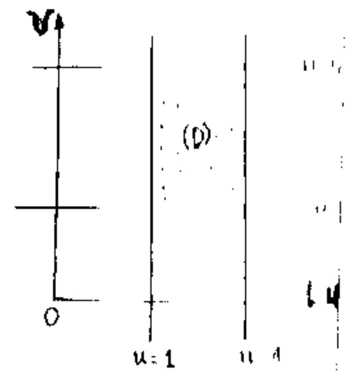
όπου είναι:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\cdot\frac{1}{x} - 4y\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = 2+4\frac{y^2}{x^2}, \quad \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}$$

αφού $y/x = v$. Έτσι είναι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2+4v^2}$$

Με βάση το μετασχηματισμό (4), τα σύνορα $x^2+2y^2=1$, $x^2+2y^2=4$ μετασχηματίζονται στις ευθείες $u=1$, $u=4$ αντίστοιχα, ενώ τα σύνορα $y/x=2$, $y/x=5$ στις $v=2$, $v=5$. Ο τόπος D φαίνεται στο σχήμα.



Υπολογίζουμε τώρα το εμβαδό:

$$E = \iint_{(\tau)} dx\,dy = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv =$$

$$= \iint_D \frac{1}{2+4v^2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^4\left(\int_2^5 \frac{dv}{1+2v^2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt2}\int_1^4\left(\int_2^5 \frac{d(\sqrt2 v)}{1+(\sqrt2 v)^2}\right)du = \frac{1}{2\sqrt2}\int_1^4\left(\arctan(\sqrt2\cdot5)-\arctan(\sqrt2\cdot2)\right)du$$

$$= \frac{3}{\sqrt2}\left(\arctan(5\sqrt2)-\arctan(2\sqrt2)\right)$$

(Χρησιμοποιήσαμε το γνωστό ολοκλήρωμα:

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\,)$$

Άσκηση 21

(α) Ο τόπος (τ) <u>του επιπέδου Οxy</u> έχει σύνορο που δίνεται σε πολικές συντεταγμένες: $r=r(\varphi)$. Να υπολογισθεί το εμβαδό του.

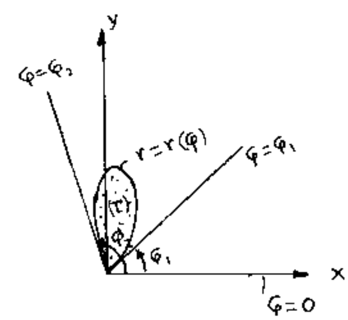
(β) Να υπολογισθεί το εμβαδό του τόπου (τ) του επιπέδου Οxy με σύνορο την καμπύλη $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$

Λύση

(α) Επειδή $r \geq 0$, βρίσκουμε πρώτα για ποιά φ έχει νόημα η εξίσωση $r=r(\varphi)$. Είναι: (Το φ: $0 \leq \varphi < 2\pi$)

$$r(\varphi) \geqslant 0 \implies \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

όπου $r(\varphi_1) = r(\varphi_2) = 0$. Φέρουμε ημιευθείες $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ οπότε η γραμμή $r=r(\varphi)$ εφάπτεται σ' αυτές. Σχεδιάζουμε ανάμεσα στις $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ την καμπύλη: απόσταση r συναρτήσει της γωνίας φ. (Αν η σχεδίαση είναι δύσκολη δίνουμε μερικές τιμές: Ενδιαφέρει μόνο η μορφή της)

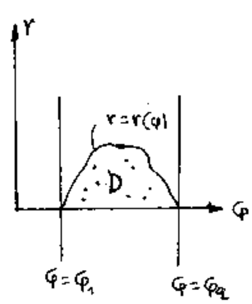


Το εμβαδό του τόπου (τ) είναι:

$$E = \iint_{(\tau)} dx\,dy \tag{1}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{2}$$



και σχεδιάζουμε στο επίπεδο $r\varphi$ (άξονες r, φ) τον τόπο D που περικλείεται από την $r=r(\varphi)$ και $r=0$ αφού $r>0$. Είναι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$$

Ο τόπος D είναι "κανονικός ως προς φ" και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται:

$$\iint_{(\tau)} dx\,dy = \iint_{(D)} r\cdot dr\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_{0}^{r(\varphi)} r\,dr\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Σημείωση: Η παραπάνω μεθοδολογία, όπως και η μεθοδολογία της άσκησης 17 εφαρμόζονται για τον υπολογισμό όχι μόνο του εμβαδού ενός τόπου, όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ίση με 1, αλλά οποιουδήποτε διπλού ολοκληρώματος, αν ο τόπος (τ) του επιπέδου xy έχει την αντίστοιχη μορφή. Η σχεδίαση του τόπου (τ) και εδώ δεν είναι απαραίτητη.

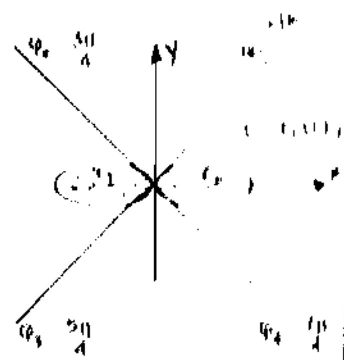
(β) Είναι $r \geq 0$. Πρέπει $\sqrt{\cos 2\varphi} \geq 0$. Αυτό ισχύει όταν η υπόρριζη ποσότητα είναι μη αρνητική. Επειδή $0 \leq \varphi < 2\pi$, εύκολα βλέπουμε ότι αυτό ισχύει:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}, \qquad \frac{7\pi}{4} \leq \varphi < 2\pi$$

Στο επίπεδο Oxy φέρουμε τις ημιευθείες:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{4} \quad \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$$

και σχεδιάζουμε τον τόπο (τ).
(Οι $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ συμπίπτουν) Ο τόπος (τ) φαίνεται στο σχήμα.



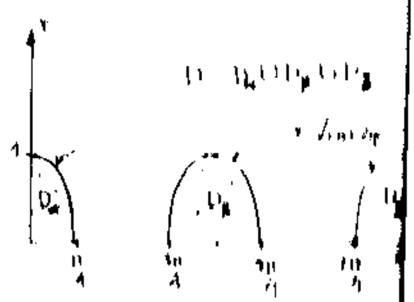
Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Είναι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$$

Ο μετασχηματισμένος τόπος D, στο επίπεδο rφ (άξονες r, φ) φαίνεται στο σχήμα.



Το εμβαδό του τόπου (τ) του επιπέδου xy είναι

$$E = \iint_{(\tau)} dxdy = \iint_{(D)} r dr d\varphi = \iint_{D_1} r dr d\varphi + \iint_{D_2} r dr d\varphi + \iint_{D_3} r dr d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr \right) d\varphi + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr \right) d\varphi + \int_{7\pi/4}^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) d\varphi + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) d\varphi + \int_{7\pi/4}^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos 2\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2} \int_{7\pi/4}^{2\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi = 1$$

Παρατήρηση: Λόγω της συμμετρίας, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το μισό του εμβαδού του (τ) και να διπλασιάσουμε.

Άσκηση 22

Να υπολογισθεί το εμβαδό του τόπου (τ) με σύνορο:

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2) \qquad \text{(λημνίσκος Bernulli)}$$

Λύση

Η εξίσωση του συνόρου του τόπου (τ) είναι πολύπλοκη. Θεωρούμε αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Η εξίσωση του συνόρου γράφεται:

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi \Longrightarrow$$

$$(r^2)^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Longrightarrow r^2 = \cos 2\varphi$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ταυτότητα:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

Επειδή $r>0$ η εξίσωση του συνόρου γράφεται:

$$r = \sqrt{\cos 2\varphi}$$

Όμως ο τόπος αυτός έχει εμβαδό ίσο με 1, όπως βρέθη στην προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 23

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_{(\tau)} (x^2+y^2)\,dx\,dy$ όπου (τ) είναι ο τόπος που έχει σύνορο: $x^2+y^2-4x=0$. Ν δοθεί φυσική ερμηνεία.

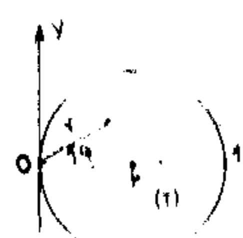
Λύση

Στην εξίσωση του τόπου τα x^2, y^2 έχουν ίδιο συντε στή. Το σύνορο πρέπει να είναι περιφέρεια. Γράφεται:

$$x^2+y^2-4x=0 \Rightarrow x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow x^2-4x+2^2-2^2+y^2=0$$

$$(x-2)^2+y^2=2^2$$

δηλ. πράγματι είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο Κ(και ακτίνα ίση με 2. Έτσι θεωρούμε αλλαγή μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες:



$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι:

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$$

και η ποσότητα:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$$

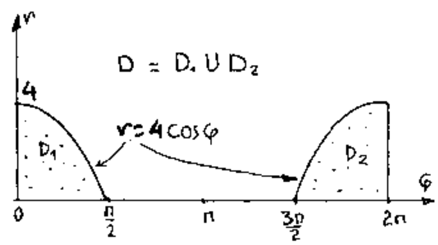
Σχεδιάζουμε την εικόνα (D) του τόπου (τ) σε άξονες r,φ (επίπεδο rφ). Η εξίσωση του συνόρου γράφεται:

$$x^2+y^2-4x=0 \implies r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 4r\cos\varphi = 0 \implies$$

$$r^2-4r\cos\varphi = 0 \implies r = 4\cos\varphi$$

Επειδή $r>0$, η εξίσωση έχει νόημα μόνο για:

$$0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{3\pi}{2} \le \varphi < 2\pi$$



και ο τόπος (D) φαίνεται στο σχήμα.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα:

$$\iint\limits_{(\tau)} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{(D)} r^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi = \iint\limits_{(D)} r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{(D_1)} r^3\,dr\,d\varphi + \iint\limits_{(D_2)} r^3\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{4\cos\varphi} r^3\,dr\right)d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(\int_0^{4\cos\varphi} r^3\,dr\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{4^4}{4}\cos^4\varphi\,d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{4^4}{4}\cos^4\varphi\,d\varphi = 48\pi$$

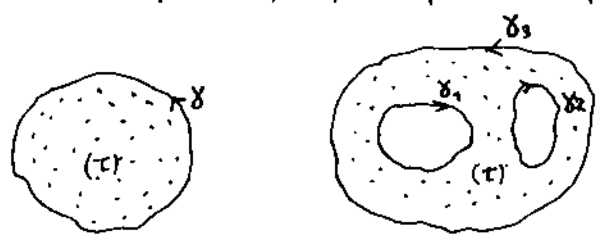
Μπορούμε να δώσουμε πολλές φυσικές ερμηνείες στο αποτέλεσμα, ανάλογα με το τι παριστάνει η ολοκληρωτέα συνάρτηση:

(α) Η x^2+y^2 είναι η "επιφανειακή" πυκνότητα μάζας του τόπου (τ). Το ολοκλήρωμα είναι η μάζα του τόπου, σύμφωνα με τη σχέση (3.3.2) (β) Η $z = x^2 + y^2$ είναι μία επιφάνεια. Το ολοκλήρωμα παριστάνει τον όγκο μεταξύ του τόπου (τ) και του τμήματος της επιφάνειας που προβάλλεται στον (τ), όπως φαίνεται από τη σχέση (3.3.7)

(γ) Αν ο τόπος (τ) έχει επιφανειακή πυκνότητα $\delta(x,y) = 1$, τότε σύμφωνα με τη σχέση (3.3.6), το ολοκλήρωμα παριστάνει την πολική ροπή αδράνειας του (τ), ως προς O.

3.4 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και διπλού ολοκληρώματος.

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη γ που είναι σύνορο του επίπεδου τόπου (τ). Την καμπύλη γ μπορούμε να προσανατολίσουμε (να ορίσουμε θετική φορά) με δύο τρόπους. Ορίζεται θετική φορά εκείνη, κατά την οποία όταν κινούμεθα πάνω στην καμπύλη, αφήνουμε στ' αριστερά τον τόπο (τ)



(α) (β)

Η θετική φορά των καμπυλών $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ φαίνεται στο σχήμα. Το χωρίο (α), χωρίς οπές, λέγεται απλής συνοχής, ενώ το (β), με οπές, λέγεται πολλαπλής συνοχής, όπως ορίσθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα Green στο επίπεδο. Υποθέτουμε ότι το χωρίο απλής συνοχής (τ) έχει σύνορο την καμπύλη (γ) θετικά προσανατολισμένη. Αν οι συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι συνεχείς πάνω στο σύνορο γ, ενώ οι μερικές παράγωγοι $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στον (τ) τότε ισχύει:

$$\oint_{\gamma} \left(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right) = \iint_{(\tau)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (3.4.1)$$

ή ισοδύναμα:

$$\oint_{\gamma}(Pdx+Qdy)=\iint_{(\tau)}(Q_x-P_y)dx\,dy \qquad (3.4.2)$$

όπου $Q_x=\partial Q/\partial x$, $P_y=\partial P/\partial y$. Το βέλος στο σύμβολο του ολοκληρώματος του ά μέλους, σημαίνει ότι η καμπύλη γ είναι θετικά προσανατολισμένη. Συχνά γράφουμε γ^+ αντί γ.

Παρατήρηση: Το θεώρημα ισχύει και για χωρίο (τ) που είναι πολλαπλής συνοχής. Εδώ γ^+ είναι όλο το σύνορο θετικά προσανατολισμένο.

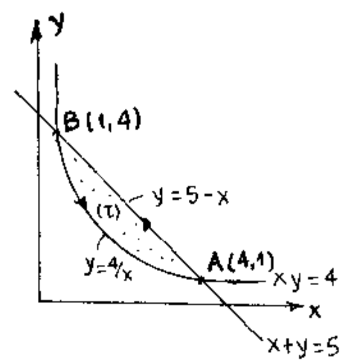
Άσκηση 24

Να επαληθευθεί ο τύπος του Green με $Q_x-P_y=2$ στον τοπο (τ): $xy\geq 4$, $x+y\leq 5$.

Λύση

Ο τόπος (τ) καθορίζεται με ανισοτικές σχέσεις που γράφονται:

$$y\geq \frac{4}{x} \qquad y\leq 5-x$$



Σχεδιάζουμε τις χραμμές που αντιστοιχούν στις αντίστοιχες ισότητες:

Η $x+y=5$ είναι ευθεία, ενώ η $xy=4$ είναι της μορφής $xy=a$. Ο τόπος (τ) φαίνεται στο σχήμα και βρίσκεται κάτω από την ευθεία, αφού $y\leq 5-x$ και πάνω από την $xy=4$ αφού $y\geq 4/x$. Οι συντεταγμένες των σημείων τομής A, B βρίσκονται από τη λύση του παρακάτω συστήματος, αφού τα A, B ανήκουν ταυτόχρονα στην ευθεία και την καμπύλη:

$$xy=4\,,\quad x+y=5 \implies A(4,1),\quad B(1,4)$$

Θεωρούμε τον προσανατολισμό του συνόρου που φαίνεται στο σχήμα. Αυτός είναι θετικός αφού όταν κινούμεθα στο σύνορο κατά τη φορά αυτή αφήνουμε τον τόπο (τ) στ' αριστερό μας χέρι.

Θα δείξουμε ότι:

$$\int_A^B (Pdx + Qdy) + \int_B^A (Pdx + Qdy) = \iint_{(\tau)} (Q_x - P_y)\,dxdy \qquad (1)$$

Τις συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ευλέγουμε ώστε $Q_x - P_y = 2$. Μία επιλογή είναι

$$P = 0 \;, \quad Q = 2x$$

που προφανώς ικανοποιεί την $Q_x - P_y = 2$. Η (1) γράφεται τώρα:

$$\int_A^B 2x\,dy + \int_B^A 2x\,dy = 2\iint_\tau dxdy \qquad (2)$$

Θα υπολογίσουμε καθένα από τα ολοκληρώματα αυτά και θα επαληθεύσουμε τη σχέση (2).

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζουμε κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB. Με $x=t$ είναι $y=5-t$. Για $x_A = 4$ είναι $t_A = 4$. Για $x_B = 1$ είναι $t_B = 1$. Είναι:

$$\int_A^B 2x\,dy = \int_{t_A}^{t_B} 2t\,d(5-t) = -2\int_4^1 t\,dt = -2\,\frac{1}{2}t^2\Big|_4^1 = 15$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος της καμπύλης BA. Με $x=t$ είναι $y=4/t$. Για $x_B = 1$ είναι $t_B = 1$. Για $x_A = 4$ είναι $t_A = 4$. Είναι:

$$\int_B^A 2x\,dy = \int_{t_B}^{t_A} 2t\,d\left(\frac{4}{t}\right) = -8\int_1^4 t\,\frac{dt}{t^2} = -8\int_1^4 \frac{dt}{t} = -8\ln 4$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, πα ρατηρούμε ότι ο τόπος (τ) μπορεί να θεωρηθεί κανονικός ως προς x και περικλείεται από τις ευθείες $x=1$, $x=4$. Άρα:

$$\iint_{(\tau)} dxdy = \int_1^4 \left(\int_{4/x}^{5-x} dy \right) dx = \int_1^4 \left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx = 5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x \Big|_1^4 \Longrightarrow$$

$$\iint_{(\tau)} dxdy = \frac{15}{2} - 4\ln 4$$

Με αντικατάσταση των τιμών των ολοκληρωμάτων στη (2) παρατηρούμε ότι αυτή επαληθεύεται.

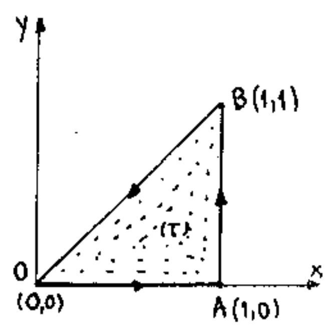
Άσκηση 25

Με χρήση του θεωρήματος Green να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_{C^+} \left((x^2-y)dx + (x+y^2)dy \right)$$

όπου C είναι η περίμετρος του τριγώνου OAB με κορυφές O(0,0), A(1,0), B(1,1) θετικά προσανατολισμένη.

Λύση



Εδώ είναι:

$$P(x,y) = x^2-y, \qquad Q(x,y) = x+y^2$$

$$Q_x = 1 \qquad P_y = -1$$

Οι συναρτήσεις P, Q, Q_x, P_y είναι συνεχείς σ' όλο το επίπεδο. Άρα οι P, Q είναι συνεχείς στο σύνορο C και οι Q_x, P_y συνεχείς στον τόπο (τ). Ισχύει λοιπόν ο τύπος Green:

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_{(\tau)} (Q_x - P_y)dxdy \Longrightarrow$$

$$\oint\limits_{C^+}\left((x^2-y)dx + (x+y^2)dy\right) = \iint\limits_{(\tau)}(1-(-1))\,dx\,dy = 2\iint\limits_{(\tau)}dx\,dy$$

Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα στον τόπο (τ) που είναι κανονικός ως προς x και περιέχεται από τις ευθείες $x=0$, $x=1$. Ο τόπος περικλείεται κάτω από την $y=0$ και πάνω από την OB. Αν $y=ax+b$ είναι η εξίσωση της OB, τα (0,0), (1,1) την επαληθεύουν:

$$0=a\cdot 0+b\ ,\quad 1=a\cdot 1+b \quad\Longrightarrow\quad a=1,\ b=0$$

οπότε η εξίσωση της OB είναι $y=x$. Άρα:

$$\iint\limits_{(\tau)}dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^x dy\right)dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Με αντικατάσταση, βρίσκουμε $I=1$

Άσκηση 26

(α) Να δειχθεί ότι ο τύπος του Green γράφεται:

$$\oint\limits_C \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = \iint\limits_{(\tau)}(\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F})\hat{z}\,dx\,dy$$

(β) Να δειχθεί ότι το εμβαδό ενός επιπέδου τόπου (τ) δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$E = \oint \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell}$$

όπου όμως η $\underset{\sim}{F}$ έχει $(\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F})\hat{z}=1$ Να δοθούν τρεις απλές τέτοιες φράσεις.

Λύση

(α) Έστω $\underset{\sim}{F}=(P,Q)$ είναι $d\underset{\sim}{\ell}=(dx,dy)$ στο επίπεδο. Άρα

$\underset{\sim}{E} d\underset{\sim}{\ell} = (P,Q)\cdot(dx,dy) = Pdx + Qdy \Rightarrow$

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \oint_{C^+} \underset{\sim}{E} d\underset{\sim}{\ell} \qquad (1)$$

Είναι γενικά:

$$\text{rot}\,\underset{\sim}{E} = \hat{x}(R_y - Q_z) + \hat{y}(P_z - R_x) + \hat{z}(Q_x - P_y)$$

όμως $R = 0$, και δεν υπάρχει μεταβλητή z. Άρα:

$$\text{rot}\,\underset{\sim}{E} = (Q_x - P_y)\hat{z} \implies (\text{rot}\,\underset{\sim}{E})\hat{z} = Q_x - P_y$$

αφού $\hat{z}\cdot\hat{z} = 1$. Άρα:

$$\iint_{(\tau)} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint_{(\tau)} (\text{rot}\,\underset{\sim}{E})\cdot\hat{z}\,dx\,dy \qquad (2)$$

Ο τύπος του Green, λόγω των (1), (2) γράφεται:

$$\oint_{C^+} \underset{\sim}{E}\cdot d\underset{\sim}{\ell} = \iint_{(\tau)} (\text{rot}\,\underset{\sim}{E})\cdot\hat{z}\,dx\,dy \qquad (3)$$

(β) Αν $(\text{rot}\,\underset{\sim}{E})\hat{z} = 1$ δηλ. $Q_x - P_y = 1$ η (3) γράφεται:

$$\oint_{C^+} \underset{\sim}{E} d\underset{\sim}{\ell} = \iint_{(\tau)} dx\,dy \qquad (4)$$

Όμως το δεύτερο μέλος της σχέσης (4) είναι ίσο με το εμβαδό του τόπου (τ). Άρα

$$E = \oint_{C^+} \underset{\sim}{E} d\underset{\sim}{\ell} = \oint_{C^+} Pdx + Qdy \quad \text{αν} \quad Q_x - P_y = 1.$$

Μπορούμε να δώσουμε απλές εκφράσεις:

(α) Αν $P = 0$, $Q = x$ οπότε $Q_x - P_y = 1$, έχουμε

$$E = \oint_{C^+} x\,dy \qquad (5)$$

(β) Αν $P = -y$, $Q = 0$, οπότε $Q_x - P_y = 1$, έχουμε:

$$I = \oint_{C^+} -y\,dx \qquad (6)$$

(γ) Αν $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$, οπότε $Q_x - P_y = 1$, είναι:

$$E = \oint_{C^+} \left(-\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy\right) \qquad (7)$$

3.5 Η περίπτωση $Q_x = P_y$

Αν στο επίπεδο χωρίο οι Q_x, P_y είναι συνεχείς και οι P, Q είναι συνεχείς στο σύνορο γ^+ (θετικά προσανατολισμένο) ισχύει ο τύπος Green, που για $Q_x = P_y$ δίνει:

$$\oint_{\gamma^+} P\,dx + Q\,dy = 0 \qquad (3.5.1)$$

Αυτά ισχύουν για χωρίο απλής ή πολλαπλής συνοχής

Αν C_1, C_2 είναι κλειστές καμπύλες καθεμία από τις οποίες δεν έχει κανα σημεία με τον εαυτό της και περικλείουν την οπή (με την ίδια φορά) τότε με τις παραπάνω προϋποθέσεις είναι:

$$\oint_{C_1} (P\,dx + Q\,dy) = \oint_{C_2} (P\,dx + Q\,dy) \qquad (3.5.2)$$

Οι C_1, C_2 βρίσκονται βέβαια μέσα στον τόπο (τ).

Άσκηση 27

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_{C^+} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

στις περιπτώσεις:

(α) C είναι η καμπύλη $(x-2)^2+y^2=1$ (θετική φορά)

(β) C είναι η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(-1,-1)$ $\Delta(-1,1)$.

Λύση

Εδώ έχουμε:

$$P=\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad P_y=\frac{x^2(x^2+y^2)^2-x^2y\,2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$Q=-\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad Q_x=-\frac{3x^2(x^2+y^2)^2-x^3\,2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}$$

Οι P, Q, Q_x, P_y είναι συνεχείς συναρτήσεις στο επίπεδο xy εκτός από τη θέση που μηδενίζεται ο παρονομαστής:

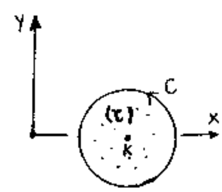
$$x^2+y^2=0 \implies x=0,\ y=0$$

δηλαδή το $(0,0)$. Εξετάζουμε αν ισχύει $Q_x=P_y$:

$$\iff x^2(x^2+y^2)^2-4x^2y^2(x^2+y^2)=-3x^2(x^2+y^2)^2+4x^4(x^2+y^2) \iff$$

$$x^4+x^2y^2-4x^2y^2=-3x^4-3x^2y^2+4x^4 \iff 0=0 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

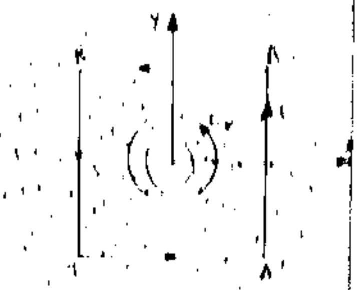
(α) Η καμπύλη $(x-2)^2+y^2=1$ είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο $K(2,0)$ και ακτίνα ίση με 1. Προφανώς, το $(0,0)$ βρίσκεται εκτός της περιφέρειας C. Έτσι οι P, Q είναι συνεχείς στην C και οι Q_x, P_y συνεχείς στον τόπο (τ). Ο τύπος Green δίνει:



$$\oint_C (Pdx+Qdy)=\iint_{(\tau)}(Q_x-P_y)\,dx\,dy=0$$

αφού $Q_x=P_y$

(β) Η περίμετρος του τετραγώνου περιμλείει το (0,0). Θεωρούμε στην περίπτωση αυτή μία οπή μέσα στην ο ποία βρίσκεται το σημείο (0,0). Η οπή είναι αυθαίρετα μικρή. Σ' όλο το επίπεδο xy, εκτός της οπής, οι P, Q, Q_x, P_y είναι συνεχείς και ισχύει $Q_x = P_y$. Άρα το ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή σε κάθε κλειστή καμπύλη, που δεν έχει σημεία τομής με τον εαυτό της και περικλείει την τομή.



Έτσι αντί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στην περίμετρο του τετραγώνου, πράγμα σχετικά περίπλοκο, μπορού[illegible]με να επιλέξουμε μία απλούστερη καμπύλη. Στις περιπτώσεις αυτές επιλέγουμε κλειστή καμπύλη, ώστε ο παρονομαστής των P, Q, Q_x, P_y να είναι σταθερός. (Γενικά οι παρονομαστές κάνουν πιο δύσκολα τα ολοκληρώματα). Θεωρούμε λοιπόν εδώ την περιφέρεια $C_1: x^2+y^2 = R^2$. Είναι

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \oint_{C_1} (Pdx + Qdy) \qquad (1)$$

Η ακτίνα R είναι οποιαδήποτε ώστε η C_1 να περικλείει τη[illegible] οπή (με την ίδια φορά όπως και η C). Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του β' μέλους της σχέσης (1).

Η παραμετρική παράσταση της περιφέρειας C_1 είναι

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t, \qquad dx = -R\sin t\,dt, \; dy = R\cos t\,dt$$

και $0 \to t \to 2\pi$. Άρα έχουμε:

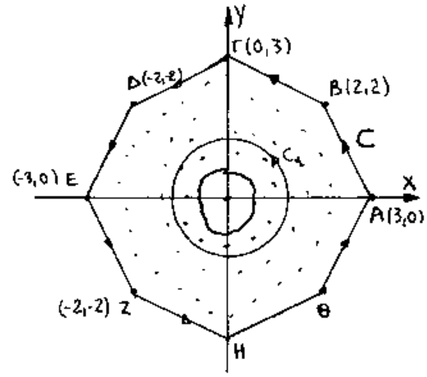
$$\oint_{C_1} (Pdx + Qdy) = \oint_{C_1} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}dx - \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2\cos^2 t\, R\sin t}{R^4}(-R\sin t\,dt) - \frac{R^3\cos^3 t}{R^4} R\cos t\,dt \right)$$

$$= -\int_0^{2\pi}(\cos^2 t\sin^2 t + \cos^4 t)\,dt = -\int_0^{2\pi}\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = -\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2} = -\pi \implies I = -\pi.$$

Άσκηση 28



Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_{C^+}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\right)$$

όπου C είναι η καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα, με θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση

Η καμπύλη είναι κλειστή και πολύπλοκη. Το ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να υπολογισθεί άμεσα. Είναι:

$$P = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad P_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad Q_x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Οι P, Q, Q_x, P_y είναι συνεχείς σ' όλο το επίπεδο, εκτός από το σημείο (0,0) που μηδενίζεται ο καθε παρονομαστής. Θεωρούμε οπή που περιέχει το (0,0). Επειδή $Q_x = P_y$, το ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή σε κάθε καμπύλη που δεν έχει κοινά σημεία με τον εαυτό της και περικλείει την οπή με την ίδια φορά όπως η C.

Θεωρούμε την C_1: $x^2+y^2=R^2$ (για να γίνει ο παρονομαστής σταθερός) με R τέτοιο ώστε η C_1 να περικλείει την οπή:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (1). Η παραμετρική παράσταση της C_1 είναι:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad dx = -R\sin t\,dt, \quad dy = R\cos t\,dt$$

με $0 \to t \to 2\pi$. Άρα

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_1}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{R\cos t}{R^2}(-R\sin t)\,dt + \frac{R\sin t}{R^2}R\cos t\,dt = 0 \Rightarrow I = 0\right.$$

Άσκηση 29

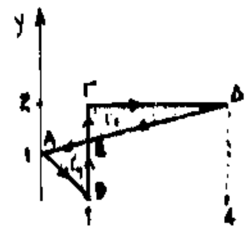
Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_C \frac{(x-2)\,dy - (y+1)\,dx}{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

στις περιπτώσεις:

(a) C είναι η γραμμή του σχ.1.

(b) C είναι η γραμμή του σχ.2.

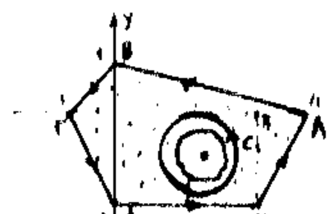


Σχ.1

Λύση

Το ολοκλήρωμα είναι της μορφής:

$$I = \oint_C (P\,dx + Q\,dy)$$



Σχ.2

όπου

$$P = \frac{-(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2} \qquad Q = \frac{x-2}{(x-2)^2+(y+1)^2} \Rightarrow$$

$$P_y = \frac{-(x-2)^2-(y+1)^2+(y+1)2(y+1)}{\left[(x-2)^2+(y+1)^2\right]^2} \qquad Q_x = \frac{(x-2)^2+(y+1)^2-(x-2)2(x}{\left[(x-2)^2+(y+1)^2\right]^2}$$

Οι P, Q, Q_x, P_y είναι παντού συνεχείς στο επίπεδο, εκτός από το σημείο (2,-1) που μηδενίζεται ο παρονομαστής

(α) Στην καμπύλη C του σχήματος (1), που έχει κοινό σημείο με τον εαυτό της, έχουμε:

$$\oint_C (Pdx+Qdy) = \int_{ABEA} (Pdx+Qdy) + \int_{E\Gamma\Delta E} (Pdx+Qdy) \qquad (1)$$

Η καμπύλη ABEA είναι θετικά προσανατολισμένη και περικλείει τον τόπο (τ_1). Επειδή $Q_x = P_y$, και το σημείο (2,-1) δεν ανήκει στον τ_1 (δεν το περικλείει η καμπύλη) έχουμε

$$\int_{ABEA} (Pdx+Qdy) = 0$$

Η καμπύλη ΕΓΔΕ είναι αρνητικά προσανατολισμένη. Μπορούμε όμως να γράψουμε:

$$\int_{E\Gamma\Delta E} (Pdx+Qdy) = -\int_{E\Delta\Gamma E} (Pdx+Qdy) = 0$$

όπου αλλάξαμε τη φορά και η ΕΔΓΕ είναι θετικά προσανατολισμένη. Το ολοκλήρωμα είναι πάλι ίσο με μηδέν, αφού το σημείο (2,-1) είναι εκτός του (τ_2). Άρα η (1) δίνει

$$\oint_C (Pdx+Qdy) = 0$$

(β) Η καμπύλη ΑΒΓΔΚΑ του σχήματος (2) περικλείει το σημείο (2,-1). Θεωρούμε την οπή που περιέχει το (2,-1). Το ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή σε κάθε κλειστή καμπύλη που δεν έχει κοινά σημεία με τον εαυτό της και περικλείει την οπή. Λόγω της μορφής του παρονομαστή, θεωρούμε την C_1: περιφέρεια κύκλου:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = R^2$$

που έχει την ίδια φορά με τη C είναι:

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \oint_{C_1} (Pdx + Qdy) \qquad (2)$$

θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του β' μέλους. Η παραμετρική παράσταση του κύκλου είναι:

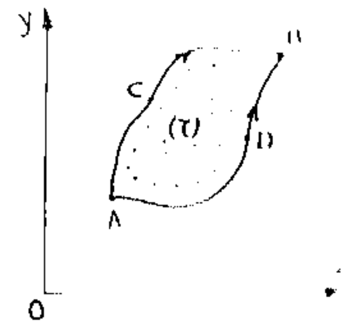
$$x = 2 + R\cos t \;,\quad y = -1 + R\sin t \;,\quad dx = -R\sin t dt \;,\quad dy = R\cos t dt$$

με $0 \to t \to 2\pi$. 'Ετσι, με αντικατάσταση έχουμε:

$$\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{R\cos t \, R\cos t dt}{R^2} - \frac{R\sin t(-R\sin t)dt}{R^2} \right) = 2\pi$$

'Αρα θα είναι λόγω της (2): $I = 2\pi$.

'Ασκηση 30



Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις P, Q είναι συνεχείς πάνω στις καμπύλες ACB, ADB, και ότι έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στον τόπο (τ) που έχει σύνορο τις παραπάνω καμπύλες. Να δειχθεί ότι αν $Q_x = P_y$, τότε

$$\int_{ADB} (Pdx + Qdy) = \int_{ACB} (Pdx + Qdy) \qquad (1)$$

Λύση

Το σύνορο ADBCA του τόπου (τ) είναι θετικά προσανατολισμένο. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Green

$$\oint_{ADBCA} (Pdx + Qdy) = \iint_{(\tau)} (Q_x - P_y)\,dxdy \qquad (2)$$

Επειδή $Q_x = P_y$, η (2) γίνεται:

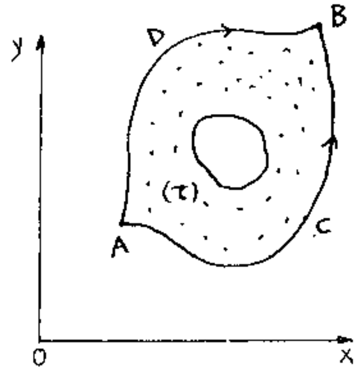
$$\oint_{ADBCA}(Pdx+Qdy)=0 \Rightarrow \int_{ADB}(Pdx+Qdy)+\int_{BCA}(Pdx+Qdy)=0 \quad (3)$$

Αν αλλάξουμε τη φορά στο δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (3) βρίσκουμε: (το ολοκλήρωμα αλλάζει πρόσημο).

$$\int_{ADB}(Pdx+Qdy)-\int_{ACB}(Pdx+Qdy)=0 \Rightarrow$$

$$\int_{ADB}(Pdx+Qdy)=\int_{ACB}(Pdx+Qdy) \quad (4)$$

Άσκηση 31



Υποθέτουμε ότι η καμπύλη ACBDA περικλείει οπή. Αν οι συναρτήσεις P, Q είναι συνεχείς πάνω στην καμπύλη ACBDA, ενώ οι Q_x, P_y είναι συνεχείς στον τόπο (τ) και ισχύει $Q_x = P_y$, τότε:

$$\int_{ACB}(Pdx+Qdy)-\int_{ADB}(Pdx+Qdy)=c_1 \quad \text{(σταθερή)}$$

Λύση

Προφανώς, το ολοκλήρωμα $\oint_{ACBDA}(Pdx+Qdy)$ έχει σταθερή τιμή, ίδια σε κάθε καμπύλη του τόπου (τ) που περικλείει την οπή και δεν έχει κοινά σημεία με τον εαυτό της. Έστω c_1 η τιμή αυτή:

$$\oint_{ACBDA}(Pdx+Qdy)=c_1 \Rightarrow \int_{ACB}(Pdx+Qdy)+\int_{BDA}(Pdx+Qdy)=c_1$$

Αλλάζοντας τη φορά ολοκληρώσεως στην τελευταία σχέση, (στο β' ολοκλήρωμα) βρίσκουμε:

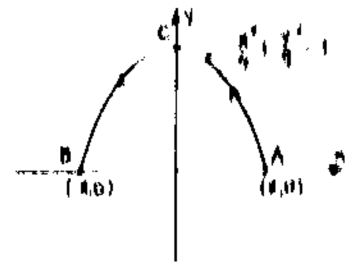
$$\int_{ACB}(Pdx+Qdy)-\int_{ADB}(Pdx+Qdy)=C_1$$

Παρατήρηση: Με βάση τις δύο τελευταίες ασκήσεις διευκολύνεται ο υπολογισμός επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων επιλέγοντας την εκάστοτε βολική καμπύλη.

Άσκηση 32

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_A^B \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+4y^2} \qquad (1)$$



πάνω στο τόξο AB της έλλειψης $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, με αρχή το A (2,0) και πέρας το B(-2,0).

Λύση

Το ολοκλήρωμα έχει τη μορφή $\int_A^B Pdx+Qdy$ όπου

$$P=\frac{-y}{x^2+4y^2} \qquad Q=\frac{x}{x^2+4y^2}$$

Είναι:

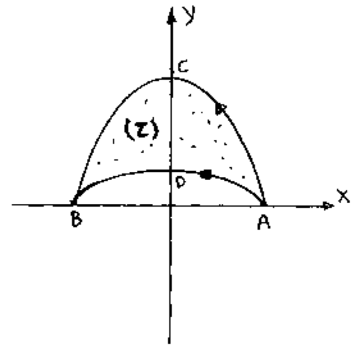
$$P_y=\frac{-x^2-4y^2+y\,8y}{(x^2+4y^2)^2} \qquad Q_x=\frac{x^2+4y^2-2x^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

Οι P, Q, Q_x, P_y είναι συνεχείς σ' όλο το επίπεδο xy, εκτός από το σημείο (0,0) που μηδενίζεται ο παρονομαστής, ενώ ισχύει $Q_x=P_y$. Θεωρούμε οπή στο (0,0) αυθαίρετα μικρή. Επειδή η δοσμένη καμπύλη δεν είναι βολική για τον υπο λογισμό του ολοκληρώματος, θεωρούμε άλλη με αρχή το A και πέρας το B, ώστε ο παρονομαστής να είναι σταθερός:

$$x^2+4y^2=k \qquad (k \text{ σταθερή})$$

Επειδή αυτή πρέπει να περνά από τα σημεία A(2,0), B (-2,0) βρίσκουμε k=4:

$$(\pm 2)^2+0^2=k \Rightarrow k=4$$



Άρα επιλέγουμε το τόξο:

$$x^2+4y^2=4 \Longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1$$

από το σημείο A μέχρι το B. Επειδή οι P, Q είναι συνεχείς πάνω στις ACB, ADB, ενώ οι Q_x, P_y συνεχείς στον (τ), ενώ $Q_x=P_y$ έχουμε:

$$\int_{ADBCA}(Pdx+Qdy)=0 \Longrightarrow \int_{ADB}(Pdx+Qdy)+\int_{BCA}(Pdx+Qdy)=0 \Longrightarrow$$

$$\int_{ADB}(Pdx+Qdy)-\int_{ACB}(Pdx+Qdy)=0 \Longrightarrow$$

$$\int_{ACB}(Pdx+Qdy)=\int_{ADB}(Pdx+Qdy) \qquad (2)$$

Θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της σχέσης (2). Η παραμετρική παράσταση της καμπύλης ADB (έλλειψη με ημιάξονες 2,1) είναι:

$$x=2\cos t \qquad y=\sin t\ , \ dx=-2\sin t\,dt\ , \ dy=\cos t\,dt\ , \quad (0\rightarrow t\rightarrow \pi).$$

Αντικαθιστούμε:

$$\int_{ADB}(Pdx+Qdy)=\int_A^B \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+4y^2}=\int_0^{\pi}\frac{-\sin t(-2\sin t)dt+2\cos t\cos t\,dt}{4\cos^2 t+4\sin^2 t}=$$

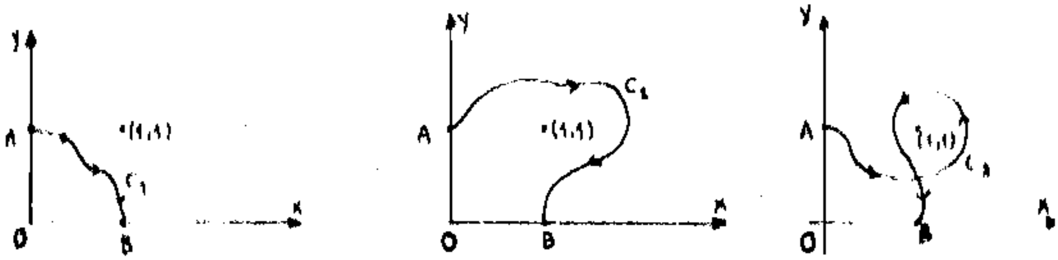
$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Άσκηση 33

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_A^B \frac{-(y-1)\,dx + (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \qquad A(0,1)\ ,\ \ B(1,0)$$

κατά μήκος καθεμίας από τις παρακάτω καμπύλες που συνδέουν τα A, B.



(α) (β) (γ)

Λύση

Το ολοκλήρωμα έχει τη μορφή $\int_A^B P dx + Q dy$, όπου:

$$P = \frac{-(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \qquad\qquad Q = \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

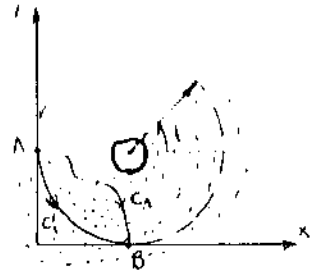
όπου

$$Q_x = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - (x-1)\,2(x-1)}{\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right)^2}$$

$$P_y = \frac{-(x-1)^2 - (y-1)^2 + (y-1)\,2(y-1)}{\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right)^2}$$

Οι συναρτήσεις P, Q και οι μερικές παράγωγοι Q_x, P_y είνα παντού συνεχείς στο επίπεδο xy, εκτός από τη θέση (1,1 όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής. Ισχύει $Q_x = P_y$. Θεωρούμ οπή στη θέση (1,1) αυθαίρετα μικρή

Περίπτωση (α) Αν θεωρήσουμε καμπύλη C_1', ώστε η οπή να μη βρίσκεται ανάμεσα στις C_1, C_1', είναι κατά τα γνωστά (ισχύουν οι προυποθέσεις):



$$\int_{C_1}(Pdx + Qdy) = \int_{C_1'}(Pdx + Qdy) \qquad (1)$$

Επιλέγουμε τη C_1' ώστε ο παρονομαστής να είναι σταθερός: πάνω στη C_1':

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = k$$

και επειδή η C_1' περνά από τα σημεία $A(0,1), B(1,0)$, αυτά την ικανοποιούν άρα $k=1$ και η C_1' είναι τόξο περιφέρειας κύκλου με κέντρο $(1,1)$ και ακτίνα ίση με 1. Η παραμετρική παράσταση είναι:

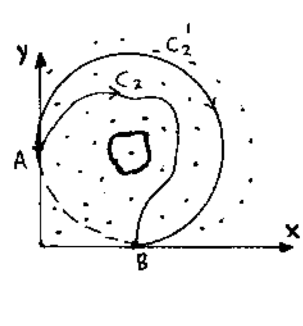
$$x = 1 + \cos t \qquad y = 1 + \sin t \qquad \left(\pi \to t \to \frac{3\pi}{2}\right)$$

Το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (1) υπολογίζεται:

$$\int_{C_1'} \frac{-(y-1)dx + (x-1)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{-\sin t(-\sin t\,dt) + \cos t \cos t\,dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} =$$

$$= \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \int_{\pi}^{3\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad I_a = \pi/2 .$$

Περίπτωση (β) Αν θεωρήσουμε καμπύλη C_2', ώστε η οπή να μή βρίσκεται ανάμεσα στις C_2, C_2', ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις ώστε να ισχύει:



$$\int_{C_2}(Pdx + Qdy) = \int_{C_2'}(Pdx + Qdy) \qquad (2)$$

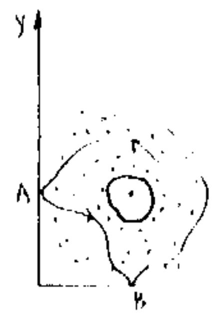
Επιλέγουμε τη C_2'

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

ώστε να περνά από τα Α,Β και ο παρονομαστής να είναι σταθερός. Η παραμετρική παράσταση είναι ίδια με τη(ν) αλλά τα όρια είναι: $\pi \to t \to 0$, $2\pi \to t \to \frac{3\pi}{2}$.

$$I_B = \int_{\pi}^{0} dt + \int_{2\pi}^{3\pi/2} dt \Longrightarrow I_B = -\frac{3\pi}{2}$$

Παρατήρηση: Είναι $I_a - I_B = 2\pi$, όπως απαιτείται. Αν αλλάζουμε τη φορά της C_2, το I_B αλλάζει πρόσημο και προκύπτει το ολοκλήρωμα στην κλειστή καμπύλη του σχήματος που περικλείει την οπή:

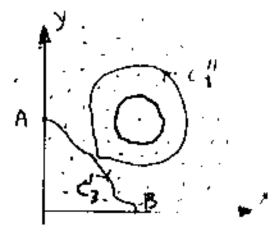


$$I = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) \Longrightarrow I = 2\pi$$

Περίπτωση (γ) Χωρίζουμε την καμπύλη C_3 στις C_3' που συνδέει τα Α,Β και C_3'' που περικλείει την οπή. Είναι:

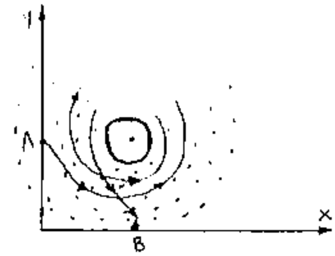
$$I_\gamma = \int_{C_3} (Pdx + Qdy) = \int_{C_3'} (Pdx + Qdy) + \int_{C_3''} (Pdx + Qdy)$$

Το ολοκλήρωμα στη C_3' έχει βρεθεί στο (α) ίσο με $+\pi/2$ (όσο στη C_1) ενώ το ολοκλήρωμα στη C_3'' έχει βρεθεί στην παρατήρηση του (β) ίσο με 2π. Άρα



$$I_\gamma = \frac{\pi}{2} + 2\pi \Longrightarrow I_\gamma = \frac{5\pi}{2}$$

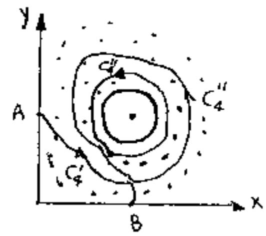
Παρατήρηση: Αν θεωρήσουμε την καμπύλη C_4 του σχήματος που έχει αρχή το Α, πέρας το Β και περικλείει δύο φορές την οπή τότε είναι:



$$I_4 = \frac{\pi}{2} + 2\pi + 2\pi$$

Πράγματι η C_4 μπορεί να χωρισθεί στις C_4', C_4'', C_4''' όπως φαίνεται στο τελευταίο σχήμα.

Αν τώρα, η καμπύλη με αρχή το A και πέρας το B περικλείει n φορές την οπή, τότε προφανώς η τιμή του ολοκληρώματος είναι ίση με $\pi/2 + n \cdot 2\pi$



Καλό είναι ο αναγνώστης να μελετήσει τις ασκήσεις στο κεφάλαιο αυτό από το βιβλίο μας: "ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ„ Στο βιβλίο αυτό περιέχονται θέματα εξετάσεων παρελθόντων ετών.

Κεφάλαιο 4

Τριπλά Ολοκληρώματα

4.1 Η έννοια του τριπλού ολοκληρώματος - Υπολογισμός.

Για την εισαγωγή στην έννοια του τριπλού ολοκληρώματος, θα χρησιμοποιήσουμε το γνώριμο παράδειγμα από τη Φυσική: Θεωρούμε το στερεό σώμα (Σ) ηλεκτρικά φορτισμένο. Έτσι στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο με ακμές dx, dy, dz και όγκο dx·dy·dz, που βρίσκεται στη θέση (x,y,z) έχουμε ηλεκτρικό φορτίο dq. Ορίζεται η χωρική π
κνότητα φορτίου ρ στη θέση (x,y,z):

$$\rho(x,y,z) = \frac{dq}{dxdydz}$$

Η ρ είναι προφανώς μια συνάρτηση των (x,y,z) αφού η πυκνότητα φορτίου μπορεί να αλλάζει από θέση σε θ
ση. Το στοιχειώδες φορτίο dq είναι σύμφωνα με την πα
πάνω σχέση:

$$dq = \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

Το ολικό φορτίο q του στερεού (Σ) βρίσκεται με πρόσ
ση των στοιχειωδών dq όλου του στερεού, δηλαδή ολ
κλήρωση σ' όλο το στερεό:

$$q = \iiint_{(\Sigma)} \rho(x,y,z)\,dxdydz \qquad (4.1.1)$$

Έχουμε τρεις μεταβλητές ολοκλήρωσης και τρία σύμβολ
ολοκλήρωσης ανάλογα με το διπλό ολοκλήρωμα. Το ο
κλήρωμα αυτό είναι ένα τριπλό ολοκλήρωμα, με κλασ

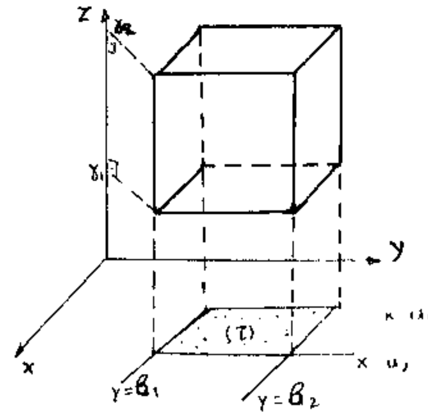
ρωτεία συνάρτηση τη $\rho(x,y,z)$ (γενικά τριων μεταβλητών)

Το πρόβλημα που τίθεται τώρα, είναι πως υπολογίζεται το τριπλό ολοκλήρωμα. Ανάλογα με το διπλό ολοκλήρωμα, έχουμε τις περιπτώσεις:

(I) Ο τόπος ολοκλήρωσης είναι παραλληλεπίπεδο (ορθογώνιο) με ακμές παράλληλες στους άξονες. Αν είναι:

$a_1 \le x \le a_2$, $\quad \beta_1 \le y \le \beta_2$,

$\gamma_1 \le z \le \gamma_2$,



τότε το ολοκλήρωμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\iiint\limits_{(\tau)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2}\left[\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\rho(x,y,z)\,dz\right)dy\right]dx \qquad (4.1.2)$$

Υπολογίζουμε δηλαδή πρώτα το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\rho(x,y,z)\,dz$

κρατώντας τα x,y σταθερά, οπότε βρίσκουμε μία συνάρτηση των x,y. Υπολογίζουμε κατόπιν το

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\rho(x,y,z)\,dz\right)dy$$

κρατώντας το x σταθερό και τέλος το ολοκλήρωμα του β' μέλους της (4.1.2)

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης x^2yz στο παραλληλεπίπεδο με σύνορα: $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, $z=0$, $z=4$.

Είναι:

$$I = \int_1^2 \left[\int_3^5 \left(\int_0^4 x^2 y z\,dz \right) dy \right] dx \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα: (με x,y σταθερά)

$$\int_0^4 x^2 y z\,dz = x^2 y \int_0^4 z\,dz = x^2 y \left(\frac{1}{2} z^2 \Big|_0^4 \right) = 8x^2 y$$

Η (1) γράφεται (συνεχίζουμε όπως στο διπλό ολοκλήρωμα)

$$I = \int_1^2 \left[\int_3^5 8x^2 y\,dy \right] dx = \int_1^2 \left[8x^2 \int_3^5 y\,dy \right] dx = \int_1^2 \left[8x^2 \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_3^5 \right] dx$$

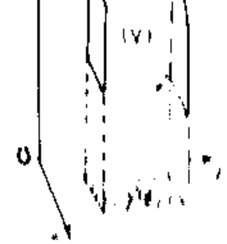
$$= \int_1^2 8x^2 \cdot 8\,dx = 64 \int_1^2 x^2 dx = \frac{64}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{448}{3}$$

Παρατήρηση 1. Είναι προφανές ότι η σειρά ολοκλήρωσης μ-
ρεί να είναι οποιαδήποτε στην περίπτωση αυτή. Π.χ. να ο-
κληρώσουμε πρώτα ως προς x (κρατώντας σταθερά τα y, z)
μετά ως προς z (με σταθερό y) και τέλος ως προς y.

Παρατήρηση 2. Η σχέση (4.1.2) γράφεται συνήθως:

$$\iiint_{(\Sigma)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\beta_1}^{\beta_2} dy \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \rho(x,y,z)\,dz$$

με την ίδια σημασία όπως και η (4.1.2) δηλ. ολοκληρώνου-
πρώτα ως προς z με x,y σταθερά, μετά ως προς y, με x
θερό και τέλος ως προς x.



II Ο τόπος ολοκλήρωσης κλείνει κάτω α-
πό την επιφάνεια $z = z_1(x,y)$, πάνω από την
$z = z_1(x,y)$, όπου οι επιφάνειες έχουν κοινή
προβολή στο επίπεδο Oxy τον τόπο (Σ_1).
Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\tau_1}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \rho(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy \qquad (4.1.3)$$

Ολοκληρώνουμε δηλαδή πρώτα ως προς z (με σταθερά τα x, y) και στη συνέχεια υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης που προκύπτει στον τόπο (τ_1) του επιπέδου xy.

Η σχέση (4.1.3) ισχύει κυκλικά: Αν (τ_2) είναι η κοινή προβολή των επιφανειών $x_1(y,z)$, $x_2(y,z)$ στο επίπεδο yz, ισχύει:

$$\iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\tau_2)}\left(\int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} \rho(x,y,z)\,dx\right)dy\,dz \qquad (4.1.4)$$

Ανάλογα ισχύει:

$$\iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\tau_3)}\left(\int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} \rho(x,y,z)\,dy\right)dx\,dz \qquad (4.1.5)$$

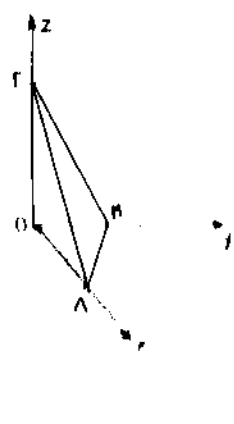
Οι ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος είναι ανάλογες με αυτές των απλών και διπλών ολοκληρωμάτων.

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z)=xyz$ στον τόπο που περικλείεται από τα επίπεδα:

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0\ ,\ 2x+3y+z=6$$

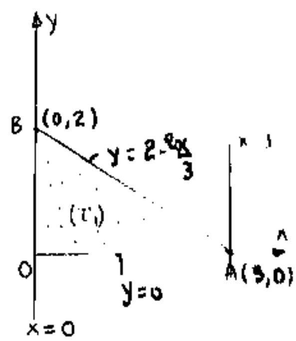
Λύση



Εξετάζουμε το σύνορο του τόπου: Το επίπεδο $x=0$ είναι κάθετο στον άξονα x και θέση $x=0$ δηλ. είναι το επίπεδο yz. Όμοια το $y=0$ είναι το επίπεδο xz και το $z=0$ είναι το xy. Για τη σχεδίαση του $2x+3y+z=6$ βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες. Για $y=x=0$

βρίσκουμε $z=6$, δηλ. το σημείο $\Gamma(0,0,6)$. Όμοια για $x=z=0$ κι ναι $y=2$, από την εξίσωση του επιπέδου, δηλ. το $B(0,2,0)$. Τέλος για $y=z=0$ βρίσκουμε $x=3$ δηλ. το $A(3,0,0)$.

Παρατηρούμε ότι ο τόπος ολοκλήρωσης περικλείεται πάνω από το επίπεδο $2x+3y+z=6$ δηλ. $z=6-2x-3y$ και κάτω από το $z=0$, με κοινή προβολή στο επίπεδο Oxy το τρίγωνο OAB. Με $z_1(x,y)=0$, $z_2(x,y)=6-2x-3y$ και τ_1 το τρίγωνο OAB, η (4.1.3) δίνει:



$$\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz = \iint_{(\tau_1)}\left(\int_0^{6-2x-3y} xyz\,dz\right)dx\,dy \qquad (1)$$

Με σταθερά x,y υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{6-2x-3y} xyz\,dz = xy\int_0^{6-2x-3y} z\,dz = xy\left(\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{6-2x-3y}\right) = \frac{1}{2}xy(6-2x-3y)^2$$

και η (1) γράφεται:

$$\iiint_{(V)} xyz\,dx\,dy\,dz = \iint_{(\tau_1)} \frac{1}{2}xy(6-2x-3y)^2\,dx\,dy \qquad (2)$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, παρατηρούμε ότι ο τόπος (τ_1) μπορεί να θεωρηθεί "κανονικός" ως προς x, ενώ περικλείεται από τις ευθείες $x=0$, $x=3$. Κλείνει κάτω από την $y=0$. Πάνω κλείνει από την AB, τομή των επιπέδων $2x+3y+z=6$ και $z=0$, δηλ την $2x+3y=6$. (Γενικά η τομή μιας επιφάνειας με το επίπεδο $z=0$ είναι γραμμή με εξίσωση που προκύπτει αν στην εξίσωση της επιφάνειας θέσουμε $z=0$). Η $2x+3y=6$ γράφεται $y=2-2x/3$. Έτσι έχουμε:

$$\iint_{(\tau_1)} \frac{1}{2}xy(6-2x-3y)^2\,dx\,dy = \int_0^3\left(\int_0^{2-2x/3}\frac{1}{2}xy(6-2x-3y)^2\,dy\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3\left(\int_0^{2-2x/3}(36xy+4x^3y+9y^3x-2x^2y-36xy^2+12x^2y^2)\,dy\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^3\left(\int_0^{2-2x/3}(36x+4x^3-2x^2)y\,dy+\int_0^{2-2x/3}(12x^2-36x)y^2dy+\int_0^{2-2x/3}9xy^3dy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left((36x+4x^3-2x^2)\int_0^{2-2x/3}y\,dy+(12x^2-36x)\int_0^{2-2x/3}y^2dy+9x\int_0^{2-2x/3}y^3dy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left((36x+4x^3-2x^2)\frac{1}{2}(2-2x/3)^2+(12x^2-36x)\frac{1}{3}\left(2-2\frac{x}{3}\right)^3+9x\,\frac{1}{4}\left(2-2\frac{x}{3}\right)^4\right)dx=$$

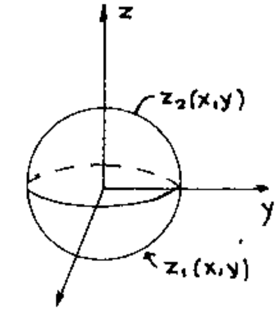
$$=23,4$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ στον τόπο $x^2+y^2+z^2\leqq 1$

Λύση

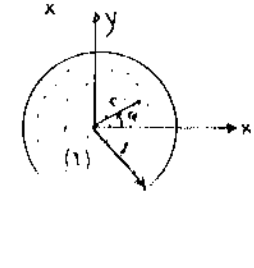
Ο τόπος ολοκλήρωσης δίνεται με ανισοτική σχέση. Θεωρούμε την αντίστοιχη ισότητα : $x^2+y^2+z^2=1$ που είναι επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα ίση με 1. (Γενικά η εξίσωση $x^2+y^2+z^2=R^2$ παριστάνει σφαιρική επιφάνεια με κέντρο (0,0,0) και ακτίνα ίση με R). Το κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας είναι το σημείο (0,0,0). Η δοσμένη ανισότητα παριστάνει το εσωτερικό της σφαίρας με κέντρο (0,0,0) και ακτίνα ίση με 1. Η εξίσωση της σφαιρικής επιφάνειας, όταν επιλυθεί ως προς z δίνει:



$$z_2=\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad z>0$$

$$z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad z<0$$

Ο τόπος ολοκλήρωσης περικλείεται κάτω από την επιφάνεια $z_1(x,y)$ και πάνω από τη $z_2(x,y)$. Οι $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ έχουν κοινή προβολή στο επίπεδο xy τον τόπο (τ) που είναι κυκλικός δίσκος με ακτίνα



ίση με 1. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\iiint_{V} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \iint_{\tau} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} (x^2+y^2+z^2)\,dz \right) dxdy \qquad (1)$$

Με σταθερά x,y υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα που ναι μέσα στην παρένθεση:

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} (x^2+y^2+z^2)\,dz = x^2\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz + y^2\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz + \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} z^2 dz = x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}$$

$$= x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \Big|_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3$$

Η σχέση (1) γράφεται:

$$\iiint_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \iint_{(\tau)} \left(2(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3 \right) dxdy \qquad (1'$$

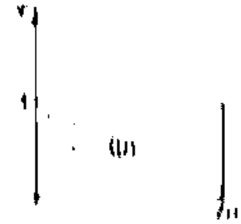
Επειδή ο τόπος ολοκλήρωσης, στο διπλό ολοκλήρωμα, είν κυκλικός δίσκος, θεωρούμε αλλαγή μεταβλητών σε πολικ συντεταγμένες:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r, \quad 0 \to r \to 1, \quad 0 \to \varphi \to 2\pi$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμ

$$\iint_{(\tau)} \left(2(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3 \right) dxdy = \iint_{(D)} \left(2r^2\sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3 \right) r$$

όπου (D) είναι ο μετασχηματισμένος τόπος στο επίπεδο με άξονες r,φ, που φαίνεται στο σχήμα.



Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα:

$$\iint_{(D)} \left(2r^2\sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3 \right) r\,dr\,d\varphi =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(2r^2\sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3\right) r\,d\varphi \right) dr$$

$$= \int_0^1 \left(\left(2r^2\sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3\right) r \int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^1 \left(2r^2\sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3\right) r\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\sqrt{1-r^2} + \frac{4}{3} r^2 \sqrt{1-r^2} \right) r\,dr = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr + \frac{8\pi}{3} \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,dr^2 + \frac{4\pi}{3} \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr^2 =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \int_0^1 (1-r^2)^{1/2} d(1-r^2) + \frac{4\pi}{3} \int_0^1 (r^2-1+1)\sqrt{1-r^2}\,dr^2 =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \int_0^1 (1-r^2)^{1/2} d(1-r^2) - \frac{4\pi}{3} \int_0^1 (r^2-1)\sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2) - \frac{4\pi}{3} \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2) =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \int_0^1 (1-r^2)^{1/2} d(1-r^2) + \frac{4\pi}{3} \int_0^1 (1-r^2)^{3/2} d(1-r^2) - \frac{4\pi}{3} \int_0^1 (1-r^2)^{1/2} d(1-r^2)$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (1-r^2)^{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1 + \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\frac{3}{2}+1} (1-r^2)^{\frac{3}{2}+1}\Big|_0^1 - \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (1-r^2)^{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1 =$$

$$= 4\pi/5$$

Η τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\iiint_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = 4\pi/5$$

Άσκηση 3

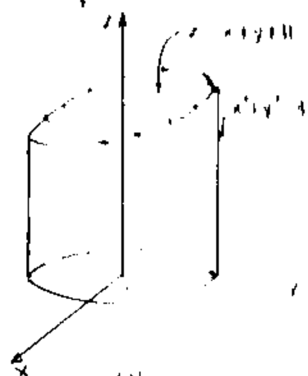
Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z) = z$ στον όγκο V με σύνορο: $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z = x+y+8$

Λύση

Σχεδιάζουμε πρώτα τον τόπο ολοκλήρωσης. Καθεμία από τις εξισώσεις παριστάνει μία επιφάνεια στον τριδιάστατο χώρο. Για τη σχεδίαση της επιφάνειας $x^2+y^2=4$, πρέπει να γνωρίζουμε ότι αν απουσιάζει η μεταβλητή z από την εξίσωση μίας επιφάνειας, τότε η επιφάνεια είναι κυλινδρική με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z. Έτσι λοιπόν, η $x^2+y^2=4$ είναι κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z, αφού η μεταβλητή z δεν εμφανίζεται στην εξίσωση της επιφάνειας. Η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο Oxy είναι το σύνολο των σημείων που ανήκουν ταυτόχρονα στην επιφάνεια και στο επίπεδο Oxy (z=0) δηλ.

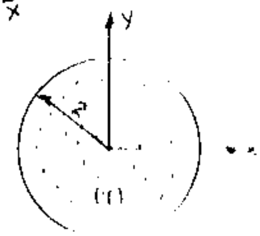
$$x^2+y^2=4 \qquad z=0$$

δηλαδή περιφέρεια κύκλου. Έχουμε λοιπόν επιφάνεια κυκλικού κυλίνδρου. Τα δύο άλλα σύνορα είναι τα επίπεδα $z=0$, $z=x+y+8$. Μπορούμε λοιπόν να σχεδιάσουμε τον τόπο ολοκλήρωσης. Το επίπεδο $z=x+y+8$ δεν τέμνει τον κύκλο $\{x^2+y^2=4,\ z=0\}$, αφού το σύστημα:



$$z=x+y+8, \quad x^2+y^2=4, \quad z=0$$

Δεν έχει (πραγματικές) λύσεις. Ο τόπος V κλείνεται λοιπόν πάνω από την επίπεδη επιφάνεια $z_2(x,y)=x+y+8$, κάτω από την $z_1(x,y)=0$ που έχουν κοινή προβολή στο επίπεδο Oxy τον κυκλικό δίσκο (τ). Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

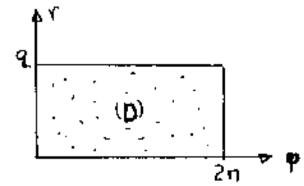


$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\tau)} \left(\int_0^{x+y+8} z\,dz \right) = \iint\limits_{(\tau)} \frac{1}{2}(x+y+8)^2 dx\,dy$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος (τ) είναι κυκλικός διότι θέτουμε μετασχηματισμό από σε πολικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$$

Σχεδιάζουμε το μετασχηματισμένο τόπο D σε άξονες r,φ και έχουμε:



$$\iint\limits_{(\tau)} \frac{1}{2}(x+y+8)^2\,dx\,dy = \iint\limits_{D} \frac{1}{2}(r\cos\varphi + r\sin\varphi + 8)^2\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D} (r^2 + 64 + 16r\cos\varphi + 16r\sin\varphi + 2r^2\sin\varphi\cos\varphi)\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D} r^3\,dr\,d\varphi + \frac{1}{2}\iint\limits_{D} 64r\,dr\,d\varphi + \frac{1}{2}\iint\limits_{D} 16r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi + \frac{1}{2}\iint\limits_{D} 16r^2\sin\varphi\,d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_{D} r^3\sin 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r^3\,d\varphi\right)dr + 32\int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\right)dr + 8\int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r^2\cos\varphi\,d\varphi\right)dr +$$

$$+ 8\int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin\varphi\,d\varphi\right)dr + \frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r^3\sin 2\varphi\,d\varphi\right)dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 2\pi r^3\,dr + 32\int_0^2 2\pi r\,dr + 0 + 0 + 0 = 132\pi$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2 z$ στον όγκο V με σύνορο: $z=1$, $z=2$, $x^2+2y^2=1$.

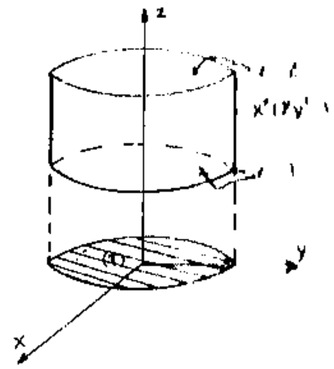
Λύση

Σχεδιάζουμε πρώτα τον τόπο ολοκλήρωσης. Οι $z=1$, $z=2$ παριστάνουν επίπεδα κάθετα στον άξονα z στις θέσεις $z=1$, $z=2$ αντίστοιχα. Η εξίσωση $x^2+2y^2=1$, παρατηρούμε ότι δεν περιέχει τη μεταβλητή z. Άρα αυτή παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z. Η τομή της κυλινδρικής αυτής επιφάνειας με το επίπεδο Oxy είναι:

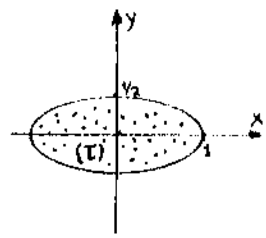
$$\{x^2+2y^2=1 \quad z=0\} \iff \left\{x^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2=1 \ , \ z=0\right\}$$

δηλ. έλλειψη. Λέμε ότι έχουμε ελλειπτικοκυλινδρική επιφάνεια.

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε τον τόπο ολοκλήρωσης, που κλείνει κάτω από το επίπεδο $z_1=1$, πάνω από το $z_2=2$, με κοινή προβολή στο επίπεδο Oxy τον τόπο (τ) που είναι το εσωτερικό της έλλειψης:



$$\left\{x^2+\left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2=1, \ z=0\right\}$$



Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 z\,dxdydz = \iint\limits_{(\tau)}\left(\int_1^2 x^2 z\,dz\right)dxdy \implies$$

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 z\,dxdydz = \iint\limits_{(\tau)}\left(x^2\int_1^2 z\,dz\right)dxdy \implies$$

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 z\,dxdydz = \frac{3}{2}\iint\limits_{(\tau)} x^2\,dxdy \qquad (1)$$

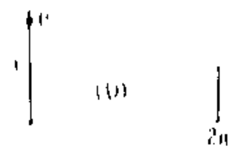
Επειδή ο τόπος ολοκλήρωσης είναι έλλειψη με ημιάξονες 1, $1/\sqrt{2}$ (κατά x, y αντίστοιχα), για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος θεωρούμε το μετασχηματισμό:

$$x=\rho\cos\varphi \qquad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\varphi \qquad (0\le\rho\le1)$$

οπότε έχουμε:

$$x^2=\rho^2\cos^2\varphi \ , \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho$$

και ο μετασχηματισμένος τόπος (D) σε άξονες ρ, φ φαίνεται στο σχήμα. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε:



$$\frac{3}{2}\iint_{(T)} x^2 dx dy = \frac{3}{2}\iint_{(D)} \rho^2 \cos^2\varphi \frac{\rho}{\sqrt{2}} d\rho d\varphi = \frac{3}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \cos^2\varphi d\varphi\right) d\rho =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\rho^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi\right) d\rho = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$$

3.2 Αλλαγή μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα

Για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος

$$I = \iiint_{(V)} f(x,y,z) dx dy dz$$

μπορούμε να θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w) \quad z = z(u,v,w)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις αυτές στην ολοκληρωτέα συνάρτηση, προκύπτει:

$$f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) = \varphi(u,v,w)$$

Εξ άλλου, με βάση το μετασχηματισμό, ο δοσμένος τόπος (V) στον τριδιάστατο χώρο Oxyz μετασχηματίζεται στον τόπο (U) σε άξονες u,v,w.

Υπολογίζουμε(*) την ορίζουσα

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

(*) βλ. "ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ"

Ισχύει

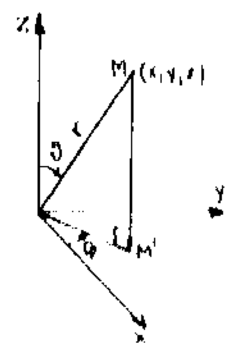
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(U)} g(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \quad (3.2.1)$$

Η αλλαγή μεταβλητών είναι κατάλληλη, ώστε η ολοκληρωτέα συνάρτηση να γίνεται απλούστερη, καθώς και ο τόπος ολοκλήρωσης (U) να είναι απλούστερος.

Το πρόβλημα βέβαια που τίθεται εδώ είναι η επιλογή του μετασχηματισμού όταν αυτός δεν δίνεται. Υπάρχουν οι περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό:

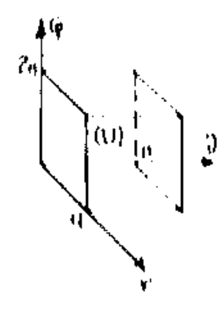
(I) Όταν ο τόπος ολοκλήρωσης (V) είναι σφαίρα, τότε:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = r\cos\vartheta$$



όπου οι μεταβλητές r, ϑ, φ φαίνονται στο σχήμα και είναι γνωστές σαν σφαιρικές συντεταγμένες. Αν a είναι η ακτίνα της σφαίρας, η μεταβλητή r κινείται μεταξύ των τιμών $r=0$, $r=a$. Η γωνία ϑ παίρνει τιμές από $\vartheta=0$ (στο θετικό ημιάξονα z) μέχρι $\vartheta=\pi$ (στον αρνητικό ημιάξονα z). Τέλος η γωνία φ παίρνει τιμές από $\varphi=0$ μέχρι $\varphi=2\pi$. (είναι $\varphi=0$ στο θετικό ημιάξονα Ox και η θετική φορά της φ φαίνεται στο σχήμα). Ο τόπος (U) σε άξονες r, ϑ, φ περιορίζεται από τα (επίπεδα κάθετα στους άξονες) $r=0$, $r=a$, $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$, είναι δηλ. παραλληλεπίπεδο. Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\vartheta & x_\varphi \\ y_r & y_\vartheta & y_\varphi \\ z_r & z_\vartheta & z_\varphi \end{vmatrix}$$



όπου είναι:

$x_r = \frac{\partial x}{\partial r} = \sin\vartheta\cos\varphi \qquad x_\vartheta = r\cos\vartheta\cos\varphi \qquad x_\varphi = -r\sin\vartheta\sin\varphi$

$y_r = \sin\vartheta\sin\varphi \qquad y_\vartheta = r\cos\vartheta\sin\varphi \qquad y_\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi$

$z_r = \cos\vartheta \qquad z_\vartheta = -r\sin\vartheta \qquad z_\varphi = 0$

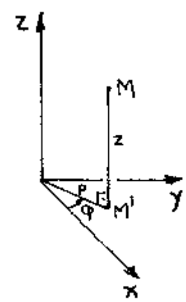
Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = r^2\sin\vartheta$$

που μάλιστα είναι θετική αφού το ϑ παίρνει τιμές από $\vartheta=0$, μέχρι $\vartheta=\pi$.

II. Όταν ο τόπος ολοκλήρωσης (V) είναι κύλινδρος (κυλινδρικός) με ακτίνα a τότε:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$$



όπου οι μεταβλητές ρ,φ,z φαίνονται στο σχήμα. Η μεταβλητή ρ κινείται μεταξύ $\rho=0$, $\rho=a$, η μεταβλητή φ μεταξύ $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ και η z μεταξύ $z=0$, $z=h$ όπου $z=0$, $z=h$ είναι οι βάσεις του κυλίνδρου. Ο τόπος (V) σε άξονες ρ,φ,z είναι προφανώς παραλληλεπίπεδο και η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \rho$$

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα

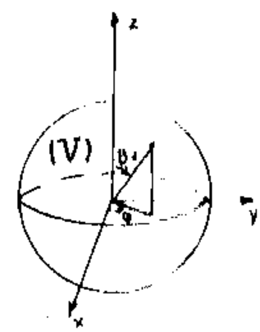
$$I = \iiint\limits_{(V)} \frac{z}{x^2+y^2+z^2+5}\,dxdydz$$

όπου (V) είναι ο τόπος: $x^2+y^2+z^2 \le 9$

Λύση

Ο τόπος ολοκλήρωσης δίνεται εδώ σε μορφή ανισότητας. Το σύνορο του τόπου έχει εξίσωση $x^2+y^2+z^2=3^2$, δηλ. είναι σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα ίση με 3. Έτσι η ανισότητα $x^2+y^2+z^2\le 3^2$ παριστάνει τη σφαίρα με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα ίση με 3. Θεωρούμε λοιπόν αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες:

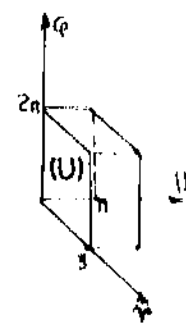
$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y=r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z=r\cos\vartheta$$



Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}=r^2\sin\vartheta$$

και ο τόπος ολοκλήρωσης (U) σε άξονες r,ϑ,φ είναι παραλληλεπίπεδο με έδρες: $r=0$, $r=3$, $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση γίνεται:



$$\frac{z}{x^2+y^2+z^2+5}=\frac{r\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi+r^2\cos^2\vartheta+5}=$$

$$\frac{r\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^2\cos^2\vartheta+5}=$$

$$\frac{r\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta+r^2\cos^2\vartheta+5}=\frac{r\cos\vartheta}{r^2+5}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη σχέση (3.2.1):

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{z}{x^2+y^2+z^2+5}\,dxdydz=\iiint\limits_{U}\frac{r\cos\vartheta}{r^2+5}\cdot r^2\sin\vartheta\,drd\vartheta d\varphi \Longrightarrow$$

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{z}{x^2+y^2+z^2+5}\,dxdydz=\iiint\limits_{(U)}\frac{r^3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^2+5}\,drd\vartheta d\varphi$$

Επειδή ο τόπος U είναι παραλληλεπίπεδο, με ακμές παράλληλες στους άξονες r,ϑ,φ, σύμφωνα με τη σχέση (4.12) έχουμε:

$$\iiint\limits_{(U)} \frac{r^3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^2+5}\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \int_0^3\left[\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{r^3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^2+5}\,d\varphi\right)d\vartheta\right]dr =$$

$$=\int_0^3\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{r^3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^2+5}\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\,d\vartheta\right]dr = \int_0^3\left[\int_0^{\pi}\frac{r^3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^2+5}2\pi\,d\vartheta\right]dr =$$

$$=\int_0^3\left[\frac{r^3}{r^2+5}\;2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\vartheta}{4}\,d(2\vartheta)\right]dr$$

Άρα η τιμή του ολοκληρώματος είναι ίση με 0 διότι:

$$\int_0^{\pi}\sin(2\vartheta)\,d(2\vartheta) = -\cos(2\vartheta)\Big|_0^{\pi} = 0$$

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$ στον όγκο (V):

$$x^2+y^2 \le 4\,,\qquad z \geqslant 0,\qquad z \le 6$$

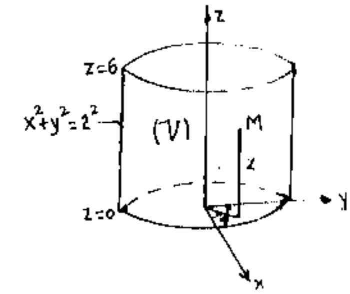
Λύση

Ο τόπος ολοκλήρωσης (V) καθορίζεται με ανισότητες. Θεωρούμε τις αντίστοιχες ισότητες: Η $x^2+y^2=4$ (δεν εμφανίζεται η μεταβλητή z) είναι επιφάνεια κυλίνδρου με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z. Η τομή με το επίπεδο xy είναι:

$$\{x^2+y^2=4\;\;,\;\;z=0\}$$

δηλαδή περιφέρεια κύκλου. Έχουμε λοιπόν κυκλική κυλινδρική επιφάνεια. Η $z=0$ είναι το επίπεδο xy και η $z=6$ είναι επίπεδο κάθετο στον άξονα z στη θέση $z=6$. Με βάση την ανισότητα $x^2+y^2\leq 4$, ο τόπος (V) βρίσκεται μέσα στην κυλινδρική επιφάνεια $x^2+y^2=4$ ενώ με βάση τις $z\geq 0$, $z\leq 6$, ο τόπος βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z=0$ και κάτω από το $z=6$. Είναι λοιπόν κύλινδρος με ακτίνα 2 και βάσεις $z=0$, $z=6$.

Επειδή ο τόπος ολοκλήρωσης (V) είναι κύλινδρος, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών:



$$x=\rho\cos\varphi \qquad y=\rho\sin\varphi \qquad z=6$$

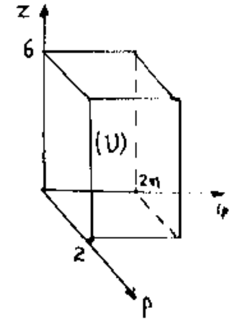
Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}=\rho$$

και ο τόπος (U) σε άξονες ρ,φ,z είναι παραλληλεπίπεδο με έδρες $\rho=0$, $\rho=2$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$, $z=0$, $z=6$. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+z=\rho^2+z$$

οπότε έχουμε:



$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(U)}(\rho^2+z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int_0^6\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2(\rho^2+z)\rho\,d\rho\right)d\varphi\right]dz=$$

$$\int_0^6\left[\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{\rho^4}{4}+z\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^2\right)d\varphi\right]dz=\int_0^6\left[\int_0^{2\pi}(4+2z)\,d\varphi\right]dz=\int_0^6\left((4+2z)\int_0^{2\pi}d\varphi\right)dz$$

$$\int_0^6(4+2z)2\pi\,dz=4\pi\int_0^6(2+z)dz=4\pi\left(2z+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^6=120\pi$$

Άσκηση 1

Με χρήση του μετασχηματισμού:

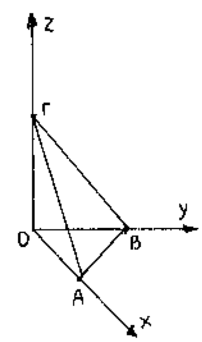
$$x+y+z=u, \qquad y+z=uv \;, \quad z=uvw$$

να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I \iiint_{(V)} \exp\left\{-(x+y+z)^3\right\} dx\,dy\,dz \qquad\qquad (\exp x = e^x)$$

όπου (V) ο τόπος με σύνορα $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Λύση



Σχεδιάζουμε πρώτα τον όγκο (V). Τα σύνορα $x=0$, $y=0$, $z=0$ είναι τα τρία "συντεταγμένα" επίπεδα Ozy, Oxz, Oxy. Το σύνορο $x+y+z=1$ είναι επίπεδο. Τα σημεία τομής του με τους άξονες είναι: Για $y=z=0$ είναι $x=1$, άρα $A(0,0,1)$. Για $x=z=0$ είναι $y=1$, άρα $B(0,1,0)$ και τέλος για $x=y=0$ βρίσκουμε $z=1$, άρα $\Gamma(0,0,1)$. Ο τόπος (V) είναι το τετράεδρο $OAB\Gamma$.

Οι σχέσεις μετασχηματισμού μπορούν να επιλυθούν ως προς x, y, z:

$$x = u-uv \qquad y = uv-uvw \qquad z=uvw$$

και η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = u^2 v$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι $e^{-(x+y+z)^3} = e^{-u^3}$

Βρίσκουμε τώρα το μετασχηματισμένο τόπο (U). Κατ' αρχήν, επειδή x,y,z είναι θετικά, πρέπει u,v,w θετικά όπως φαίνεται πολύ εύκολα από το δοσμένο μετασχηματισμό.

Το επίπεδο $x+y+z=1$ μετασχηματίζεται στο $u=1$, όπως εύκολα φαίνεται από την πρώτη από τις δοσμένες σχέσεις μετασχηματισμού.

Το επίπεδο $x=0$ (y,z τυχαία) δίνει:

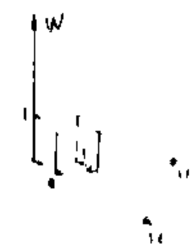
$$0=u-uv\,,\quad y=uv-uvw\,,\quad z=uvw$$

και επειδή z τυχαίο είναι $u\neq 0$ άρα $v=1$ δηλ. αυτό μετασχηματίζεται στο $z=1$.

Το επίπεδο $y=0$ (x,z τυχαία) δίνει:

$$x=u-uv\,,\quad 0=uv-uvw\,,\quad z=uvw$$

και επειδή z τυχαίο, είναι $uv\neq 0$, άρα $w=1$. Τελικά δηλ. ο τόπος (U) είναι παραλληλεπίπεδο που περιορίζεται από τα $u=0$, $u=1$, $v=0$, $v=1$, $w=0$, $w=1$, δηλ. κύβος στους άξονες u,v,w.



Μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα:

$$\iiint\limits_{(V)} \exp\{-(x+y+z)^3\}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(U)} e^{-u^3}u^2 v\,du\,dv\,dw$$

$$= I = \int_0^1\left[\int_0^1\left(\int_0^1 e^{-u^3}u^2 v\,dw\right)dv\right]du = \int_0^1\left[\int_0^1\left(e^{-u^3}u^2 v\left(\int_0^1 dw\right)\right)dv\right]du =$$

$$\int_0^1\left[\int_0^1 e^{-u^3}u^2 v\,dv\right]du = \int_0^1 e^{-u^3}u^2\left(\int_0^1 v\,dv\right)du = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-u^3}u^2\,du =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-u^3}\,d(-u^3) = -\frac{1}{6}e^{-u^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\left(1-e^{-1}\right)$$

4.3 Εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος

Εφαρμογή 1. Ο όγκος Ω ενός τόπου (V) είναι:

$$\Omega = \iiint_{(V)} dxdydz \tag{4.3.1}$$

Αν dm είναι η μάζα ενός στοιχειώδους όγκου $d\Omega$ ενός στερεού σώματος, ορίζεται η πυκνότητα μάζας (χωρική)

$$\delta = \frac{dm}{d\Omega}$$

Γενικά είναι $\delta = \delta(x,y,z)$. Αν το σώμα είναι ομογενές, η πυκνότητα μάζας δ είναι σταθερή (ανεξάρτητη των x,y,z).

Εφαρμογή 2. Η μάζα m ενός τόπου (V) είναι:

$$m = \iiint_{(V)} \delta(x,y,z)\,dxdydz \tag{4.3.2}$$

Εφαρμογή 3. Το κέντρο μάζας C ενός τόπου (V) είναι:

$$\left.\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{m}\iiint_{(V)} x\,\delta(x,y,z)\,dxdydz \\
y_c &= \frac{1}{m}\iiint_{(V)} y\,\delta(x,y,z)\,dxdydz \\
z_c &= \frac{1}{m}\iiint_{(V)} z\,\delta(x,y,z)\,dxdydz
\end{aligned}\right\} \tag{4.3.3}$$

Εφαρμογή 4. Οι ροπές αδράνειας ενός τόπου (V) με πυκνότητα (χωρική) μάζας $\delta(x,y,z)$ είναι:

Ως προς τον άξονα x:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad (4.3.4)$$

Ως προς τον άξονα y:

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad (4.3.5)$$

Ως προς z:

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad (4.3.6)$$

Πολική ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων:

$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad (4.3.7)$$

Άσκηση 8

Να υπολογισθεί ο όγκος του κυλίνδρου με βάση:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1, \quad z=0 \qquad (a, b \text{ θετικοί})$$

και γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z, ενώ περιορίζεται άνω από το επίπεδο $z = Ax+By+\Gamma$ (που δεν τέμνει τη βάση).

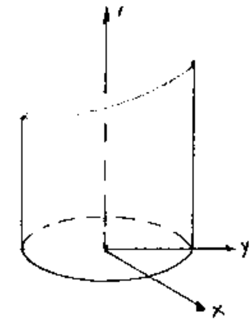
Λύση

Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση (4.3.1):

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz \qquad (1)$$

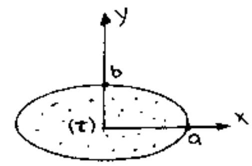
όπου (V) είναι ο τόπος με βάση την έλλειψη $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1$

που έχει ημιάξονες a, b, ενώ κλείνει πάνω από το επίπεδο $z = Ax+By+\Gamma$, δηλ. ο χώρος V κλείνει κάτω από το επίπεδο $z_1 = 0$ και πάνω από το $z_2 = Ax+By+\Gamma$ που έχουν κοινή προβολή στο επίπεδο την έλλειψη (τ):



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \qquad z = 0$$

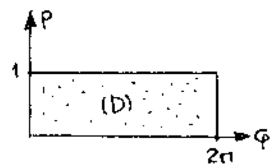
Το ολοκλήρωμα μπορεί λοιπόν να γραφεί:



$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\tau)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(\tau)} (Ax + By + \Gamma)\, dx\,dy$$

Για τον υπολογισμό του διπλού αυτού ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος ολοκλήρωσης (τ) είναι ελλειπτικός, θεωρούμε το μετασχηματισμό:



$$x = a\rho\cos\varphi \qquad y = b\rho\sin\varphi$$

όπου a, b είναι οι ημιάξονες της έλλειψης, το ρ κινείται (μεταβάλλεται) από $\rho = 0$ μέχρι $\rho = 1$ και η γωνία φ από $\varphi = 0$ μέχρι $\varphi = 2\pi$. Ο μετασχηματισμένος τόπος (D) φαίνεται στο σχήμα.

Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho > 0$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση σε μεταβλητές ρ, φ είναι:

$$Ax + By + \Gamma = Aa\rho\cos\varphi + Bb\rho\sin\varphi + \Gamma$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\iint\limits_{(I)} (Ax+By+\Gamma)\,dx\,dy = \iint\limits_{(D)} (Aa\rho\cos\varphi + Bb\rho\sin\varphi + \Gamma)\,ab\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \iint\limits_{(D)} Aa^2b\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi + \iint\limits_{(D)} Bb^2a\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi + \iint\limits_{(D)} \Gamma ab\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= Aa^2b\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\rho^2\cos\varphi\,d\varphi\right)d\rho + Bb^2a\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\rho^2\sin\varphi\,d\varphi\right)d\rho + \Gamma ab\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\rho\,d\varphi\right)d\rho$$

$$= Aa^2b\int_0^1\left(\rho^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\right)d\rho + Bb^2a\int_0^1\left(\rho^2\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)d\rho + \Gamma ab\int_0^1\left(\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\right)d\rho$$

$$= \Gamma ab\,2\pi\int_0^1 \rho\,d\rho = \pi\Gamma ab \quad\Longrightarrow\quad \Omega = \pi\Gamma ab$$

$$\left(\text{Είναι}: \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0\right)$$

Άσκηση 9

Να υπολογισθεί η μάζα και η θέση του κέντρου μάζας του στερεού (V):

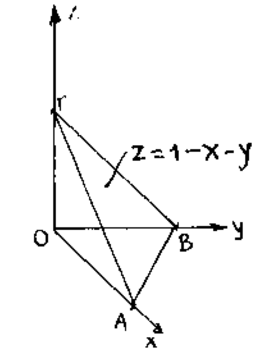
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad x+y+z \leq 1.$$

που έχει πυκνότητα μάζας $\delta(x,y,z) = x+y+2z$

Λύση

Ο τόπος (V) προσδιορίζεται με ανισότητες. Θεωρούμε τις αντίστοιχες ισότητες, οπότε παρατηρούμε ότι ο τόπος έχει σύνορα τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$ που είναι αντίστοιχα τα επίπεδα yz, xz, xy και το επίπεδο $x+y+z=1$. Το επίπεδο αυτό έχει σημεία τομής με τους άξονες x, y, z τα

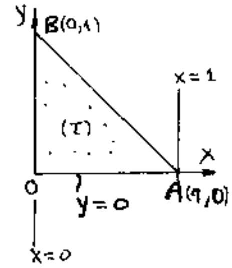
Α, Β, Γ αντίστοιχα. Για $y=z=0$ βρίσκουμε $x=1$. Άρα $A(1,0,1)$. Για $x=z=0$ προκύπτει $y=1$. Άρα $B(0,1,0)$. Για $x=y=0$ είναι $z=1$. Άρα $\Gamma(0,0,1)$.



Ο τόπος (V) κλείνει κάτω από το επίπεδο $z=0$, πάνω από το $z=1-x-y$, ενώ η προβολή του τόπου στο επίπεδο είναι το εσωτερικό (τ) του τριγώνου ΟΑΒ.

Η μάζα του στερεού είναι:

$$m=\iiint\limits_{(V)} \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V)}(x+y+2z)\,dx\,dy\,dz$$



$$\Rightarrow\ m=\iint\limits_{(\tau)}\left(\int_0^{1-x-y}(x+y+2z)\,dz\right)dx\,dy\ \Rightarrow$$

$$m=\iint\limits_{\tau}\left(xz+yz+z^2\Big|_0^{1-x-y}\right)dx\,dy\ \Rightarrow$$

$$m=\iint\limits_{(\tau)}\left(x(1-x-y)+y(1-x-y)+(1-x-y)^2\right)dx\,dy=\iint\limits_{(\tau)}(1-x-y)\,dx\,dy$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, παρατηρούμε ότι ο τόπος (τ) είναι "κανονικός ως προς x" και περικλείεται από τις ευθείες $x=0$, $x=1$. Κάτω σύνορό του είναι η ΟΑ όπου $y=0$, ενώ πάνω σύνορό του η ΑΒ που είναι τομή των επιπέδων $x+y+z=1$, $z=0$ δηλ. έχει εξίσωση $x+y=1$ ή $y=1-x$ όπως προκύπτει με αντικατάσταση του $z=0$ στην πρώτη. Έτσι έχουμε:

$$m=\iint\limits_{\tau}(1-x-y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left((1-x)-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\,dx=\frac{1}{6}$$

Για τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας C εφαρμόζουμε τις σχέσεις (4.3.3) με $m=\frac{1}{6}$:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint_{(V)} x\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 6\iiint_{(V)} x\,(x+y+2z)\,dx\,dy\,dz \Rightarrow$$

$$x_c = 6\iint_{(T)}\left(\int_0^{1-x-y} x\,(x+y+2z)\,dz\right)dx\,dy = 6\iint_{(T)}\left(x\int_0^{1-x-y}(x+y+2z)\,dz\right)dx\,dy =$$

$$= 6\iint_{(T)}\left(x\,(xz+yz+z^2)\Big|_0^{1-x-y}\right)dx\,dy = 6\iint_{(T)} x\,(1-x-y)\,dx\,dy =$$

$$= 6\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x-x^2-xy)\,dy\right)dx = 6\int_0^1\left(xy-x^2y-\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^{1-x}dx =$$

$$= 6\int_0^1\left(x(1-x)-x^2(1-x)-\frac{1}{2}x(1-x)^2\right)dx = 6\int_0^1\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)dx = \frac{1}{4}$$

Όμοια για τη δεύτερη συντεταγμένη:

$$y_c = \frac{1}{m}\iiint_{(V)} y\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 6\iiint_{(V)} y\,(x+y+2z)\,dx\,dy\,dz \Rightarrow$$

$$y_c = 6\iint_{(T)}\left(\int_0^{1-x-y} y\,(x+y+2z)\,dz\right)dx\,dy = 6\iint_{(T)}\left(y\,(xz+yz+z^2)\Big|_0^{1-x-y}\right)dx\,dy$$

$$= 6\iint_{(T)}(y-xy-y^2)\,dx\,dy = 6\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(y-xy-y^2)\,dy\right)dx =$$

$$= 6\int_0^1\left(\frac{1}{2}(1-x)^2-\frac{1}{2}x(1-x)^2-\frac{1}{3}(1-x)^3\right)dx = 6\int_0^1\frac{1}{6}(1-x)^3\,dx = \frac{1}{4}$$

Όμοια για το z_c:

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint_{(V)} z\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 6\iiint_{(V)} z\,(x+y+2z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= 6\iint_{(T)}\left(\int_0^{1-x-y} z\,(x+y+2z)\,dz\right)dx\,dy = 6\iint_{(T)}\left(x\frac{z^2}{2}+y\frac{z^2}{2}+\frac{2}{3}z^3\right)\Big|_0^{1-x-y}dx\,dy$$

$$6\iint\limits_{(t)} (1-x-y)^2\,\frac{1}{6}\,(x+y+3)\,dx\,dy = \iint\limits_{(t)} (1-x-y)^2(x+y+3)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(3-5x-5y+x^2+y^2+2xy+x^3+y^3+3x^2y+3xy^2)\,dy\right)dx =$$

$$=\int_0^1\Big(3(1-x)-5x(1-x)-\frac{5}{2}(1-x)^2+x^2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^3+x(1-x)^2+x^3(1-x)+$$

$$+\frac{1}{4}(1-x)^4+\frac{3}{2}x^2(1-x)^2+x(1-x)^3\Big)\,dx =$$

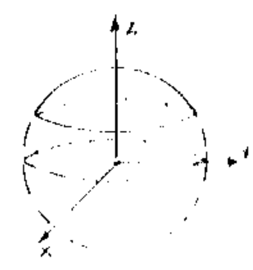
Άσκηση 10

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού:

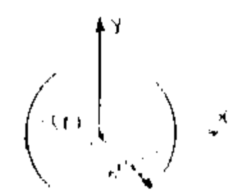
$$x^2+y^2+z^2\le 25 \quad , \quad z\ge 3$$

Λύση

Ο τόπος ορίζεται με ανισότητες. Θεωρούμε τις αντίστοιχες ισότητες, οπότε παρατηρούμε ότι έχουμε σφαιρική επιφάνεια με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα ίση με 5 και επίπεδο κάθετο στον άξονα z στη θέση $z=3$. Έτσι η πρώτη ανισότητα παριστάνει τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας, ενώ η δεύτερη τα σημεία πάνω από το επίπεδο $z=3$. Ο ζητούμενος όγκος περιορίζεται κάτω από το επίπεδο $z=3$ και πάνω από τη σφαιρική επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=5^2$, δηλ. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$



Για να βρούμε την προβολή του τόπου (V) στο επίπεδο Oxy, εργαζόμαστε ως εξής:



Βρίσκουμε πρώτα την τομή των δύο επιφανειών, που είναι τα σημεία εκείνα τα οποία ανήκουν συγχρόνως στις δύο επιφάνειες, δηλαδή η τομή είναι η καμπύλη:

$x^2+y^2+z^2=25$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε την προβολή της καμπύλης στο επίπεδο Oxy. Αυτό γίνεται αν απαλείψουμε το z από τις εξισώσεις της καμπύλης. Βρίσκουμε:

$$x^2+y^2+3^2=25 \implies x^2+y^2=16$$

Δηλαδή η προβολή της καμπύλης στο επίπεδο Oxy είναι η περιφέρεια κύκλου ακτίνας 4 με κέντρο το (0,0). Άρα ο τόπος (V) προβάλλεται στο εσωτερικό της περιφέρειας. Ο ζητούμενος όγκος είναι:

$$\Omega = \iiint_{(V)} dx\,dy\,dz = \iint_{(T)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\right)dx\,dy$$

Όπου είναι $z_1(x,y)=3$, $z_2(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$. Άρα

$$\Omega = \iint_{(T)} \left(\sqrt{25-x^2-y^2}-3\right)dx\,dy$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος (T) είναι κυκλικός δίσκος, θεωρούμε τη γνωστή αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες r,φ και έχουμε

$$\Omega = \iint_{(T)}\left(\sqrt{25-x^2-y^2}-3\right)dx\,dy = \iint_{(D)}\left(\sqrt{25-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}-3\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi$$

$$= \iint_{(D)}\left(\sqrt{25-r^2}-3\right)r\,dr\,d\varphi = \int_0^4\left(\int_0^{2\pi} r\left(\sqrt{25-r^2}-3\right)d\varphi\right)dr =$$

$$\int_0^4\left(\left(\sqrt{25-r^2}-3\right)r\int_0^{2\pi}d\varphi\right)dr = 2\pi\int_0^4\left(\sqrt{25-r^2}-3\right)r\,dr =$$

$$2\pi\int_0^4 r\sqrt{25-r^2}\,dr - 6\pi\int_0^4 r\,dr = \pi\int_4^0 (25-r^2)^{1/2}\,d(25-r^2) - 48\pi$$

$$= -\pi \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(25-r^2)^{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^4 - 48\pi = \frac{52\pi}{3}$$

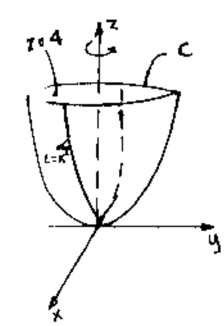
Άσκηση 11

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που έχει σύνορα τις επιφάνειες: $z=x^2+y^2$, $z=4$

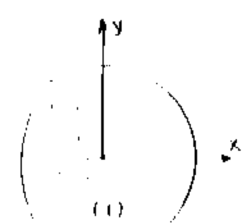
Λύση

Θα σχεδιάσουμε πρώτα τον τόπο. Για τη σχεδίαση της επιφάνειας $z=x^2+y^2$ είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $z=f(x^2+y^2)$ (δηλ. το z συνάρτηση της ποσότητας x^2+y^2) παριστάνει επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα z. Για τη σχεδίασή της βάζουμε $y=0$ οπότε προκύπτει μία καμπύλη στο επίπεδο xz. Σχεδιάζουμε την καμπύλη αυτή, οπότε περιστρέφοντάς την περί τον άξονα z προκύπτει η επιφάνεια.

Εδώ, αν θέσουμε $y=0$ προκύπτει η παραβολή $z=x^2$ στο επίπεδο xz, που σχεδιάζεται κατά τα γνωστά. Με περιστροφή περί τον z βρίσκουμε την επιφάνεια (παραβολοειδές). Η επιφάνεια $z=4$ είναι ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα z στη θέση $z=4$. Ο τόπος (V) περιορίζεται κάτω από το "παραβολοειδές" $z=x^2+y^2$ και πάνω από το επίπεδο $z=4$. Η τομή των δύο επιφανειών είναι η καμπύλη C τα σημεία της οποίας επαληθεύουν:



$$z=x^2+y^2 \qquad z=4$$



Η προβολή της C στο επίπεδο Oxy μπορεί να βρεθεί αν μεταξύ αυτών απαλείψουμε το z. Προκύπτει:

$$x^2+y^2=4$$

δηλαδή περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα ίση με 2. Άρα ο τόπος (V) προβάλλεται στο δίσκο (τ). Ο ζητούμενος όγκος είναι:

$$\Omega = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\tau)} \Big(\int_{x^2+y^2}^{4} dz \Big) dx\,dy = \iint\limits_{(\tau)} (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

και με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε:

$$\Omega = \iint\limits_{(D)} (4 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| dr\,d\varphi = \iint\limits_{(D)} (4-r^2)\, r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} (4-r^2)\, r\,d\varphi \Big) dr = \int_0^2 \Big((4-r^2)\, r \int_0^{2\pi} d\varphi \Big) dr = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3)\,dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{4}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^2 = 2\pi (8-4) = 8\pi$$

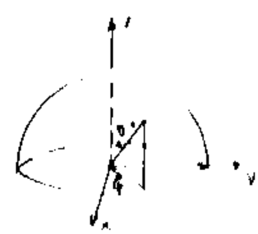
Άσκηση 12

Να υπολογισθεί η θέση του κέντρου μάζας και η πολική ροπή αδράνειας του ημισφαιρίου

$$x^2+y^2+z^2 \le R^2 \qquad z \geq 0$$

που έχει σταθερή (χωρική) πυκνότητα μάζας ίση με δ.

Λύση



Πρόκειται για το πάνω ημισφαίριο της σφαίρας με κέντρο την αρχή και ακτίνα ίση με R. Υπολογίζουμε πρώτα τη μάζα m του ημισφαιρίου.

$$m = \iiint\limits_{(V)} \delta\, dx\,dy\,dz = \delta \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz$$

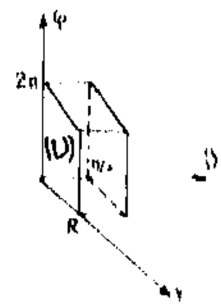
Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος είναι σφαιρικός, θεωρούμε το μετασχηματισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$$

Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = r^2\sin\vartheta$$

και προφανώς, το r μεταβάλλεται από $r=0$ μέχρι $r=R$, το ϑ από $\vartheta=0$ μέχρι $\vartheta=\pi/2$ ενώ το φ από $\varphi=0$ μέχρι $\varphi=2\pi$ (Χρειάζεται προσοχή στη μεταβολή της ϑ: Είναι $\vartheta=0$ στον ημιάξονα $+z$, ενώ όλα τα σημεία του επιπέδου $z=0$ έχουν $\vartheta=\frac{\pi}{2}$). Ο μετασχηματισμένος τόπος σε άξονες r,ϑ, φ είναι παραλληλεπίπεδο και φαίνεται στο σχήμα.



Μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα:

$$m = \delta\iiint\limits_{(V)} dxdydz = \delta\iiint\limits_{(U)} r^2\sin\vartheta\, drd\vartheta d\varphi =$$

$$= \delta\int_0^R\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin\vartheta d\varphi\right)d\vartheta\right)dr = \delta\int_0^R\left(\int_0^{\pi/2} r^2\sin\vartheta\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)d\vartheta\right)dr =$$

$$= 2\pi\delta\int_0^R\left(\int_0^{\pi/2} r^2\sin\vartheta d\vartheta\right)dr = 2\pi\delta\int_0^R r^2\left(\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\, d\vartheta\right)dr = 2\pi\delta\int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi\delta R^3}{3}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες x_c, y_c, z_c του κέντρου μάζας C:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} x\,\delta\, dxdydz = \frac{3\delta}{2\pi\delta R^3}\iiint\limits_{(V)} x dxdydz$$

και με αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x_c = \frac{3}{2\pi R^3} \iiint\limits_{(V)} r\sin\vartheta\cos\varphi \cdot r^2\sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\vartheta \cos\varphi \, d\varphi \right) d\vartheta \right) dr =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \sin^2\vartheta \left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \right) d\vartheta \right) dr = 0$$

Με τον ίδιο τρόπο:

$$y_c = \frac{3\delta}{2\pi\delta R^3} \iiint\limits_{(V)} y\, dx\, dy\, dz = \frac{3}{2\pi R^3} \iiint\limits_{(V)} r\sin\vartheta\sin\varphi \cdot r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \sin^2\vartheta \left(\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \right) d\vartheta \right) dr = 0$$

και για το z_c:

$$z_c = \frac{3\delta}{2\pi\delta R^3} \iiint\limits_{(V)} z\, dx\, dy\, dz = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \sin\vartheta\cos\vartheta \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\vartheta \right) dr$$

$$\frac{3}{2R^3} \int_0^R \left(r^3 \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta \right) dr = \frac{3}{2R^3} \int_0^R r^3 \left(\int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \, d\sin\vartheta \right) dr =$$

$$\frac{3}{4R^3} \int_0^R r^3 dr = 3R/8$$

Η πολική ροπή αδράνειας είναι:

$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\, \delta\, dx\, dy\, dz = \delta \iiint\limits_{(V)} r^2\, r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$\delta \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr = \delta \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} r^4 \sin\theta \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\theta \right) dr$$

$$2\pi\delta \int_0^R r^4 \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \right) dr = 2\pi\delta \int_0^R r^4 dr = \frac{2\pi\delta R^5}{5}$$

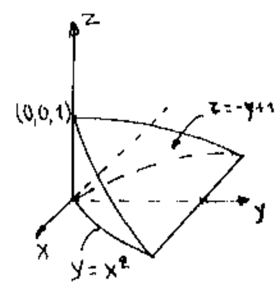
Άσκηση 13

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού με σύνορα:

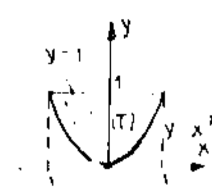
$z = 0, \quad z = -y+1, \quad y = x^2$

Λύση

Για τη σχεδίαση του τόπου ολοκλήρωσης (V), παρατηρούμε ότι η εξίσωση $y=x^2$ δεν περιέχει το z. Άρα αυτή είναι κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z. Η τομή της με το επίπεδο Oxy είναι η παραβολή $y=x^2$. Ονομάζεται παραβολικός κύλινδρος. Το επίπεδο $z=0$ είναι το επίπεδο Oxy. Η εξίσωση $z=-y+1$ παριστάνει (επίπεδη) κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα x (αφού η εξίσωση δεν περιέχει το x) δηλαδή επίπεδο παράλληλο στον άξονα x. Για $y=0$ είναι $z=1$ ενώ για $z=0$ είναι $y=1$. Η προβολή του τόπου (V) στο επίπεδο Oxy είναι ο τόπος (τ). Ο τόπος (V) περιορίζεται πάνω από την επίπεδη επιφάνεια $z=-y+1$ και κάτω από το επίπεδο $z=0$ με κοινή προβολή στο επίπεδο Oxy τον τόπο (τ). Άρα:



$$\Omega = \iiint_{(V)} dx\,dy\,dz = \iint_{(\tau)} \left(\int_0^{-y+1} dz \right) dx\,dy =$$



$$\iint_{(\tau)} (1-y)\,dx\,dy$$

Ο τόπος (τ) που είναι "κανονικός" ως προς x περιορίζεται από τις $x=-1$, $x=1$, ενώ κλείνει κάτω από την $y=x^2$ και πάνω από την $y=1$. Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα. Άρα

$$\Omega=\iint_{(T)}(1-y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}(1-y)\,dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(y-\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1^2}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=8/15$$

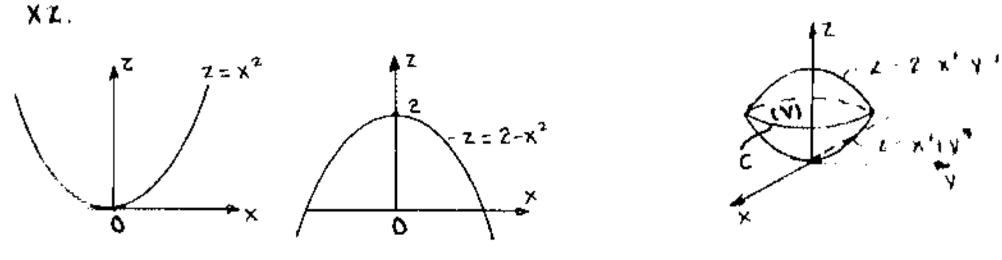
Άσκηση 14

Να υπολογισθεί ο όγκος του χωρίου που περικλείεται από τις επιφάνειες:

$$z=x^2+y^2\,,\qquad z=2-x^2-y^2$$

Λύση

Για τη σχεδίαση του τόπου, παρατηρούμε ότι οι επιφάνειες έχουν τη μορφή $z=f(x^2+y^2)$. Άρα πρόκειται για επιφάνειες εκ περιστροφής περί τον άξονα z. Αν θέσουμε $y=0$, προκύπτουν οι καμπύλες $z=x^2$, $z=2-x^2$ του επιπέδου xz.

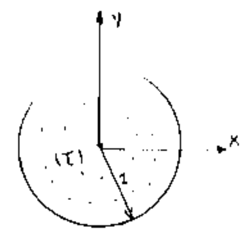


Η παραβολή $z=x^2$ είναι γνωστή. Η παραβολή $z=2-x^2$ σχεδιάζεται όπως η $z=-x^2$, αλλά είναι μετατοπισμένη κατά 2 πάνω στον z. Έτσι, αντί να έχει κορυφή στο $z=0$ έχει στο $z=2$. Με περιστροφή περί τον άξονα z προκύπτουν οι επιφάνειες $z=2-x^2-y^2$, $z=x^2+y^2$ που περικλείουν τον τόπο (V).

Οι επιφάνειες τέμνονται κατά την καμπύλη c

$z = x^2+y^2, \quad z = 2-x^2-y^2$

Με απαλειφή του z προυύπτει:



$$x^2+y^2 = 2-x^2-y^2 \iff x^2+y^2=1$$

που είναι η προβολή της C στο επιπεδο Oxy. Έτσι, η προβολή του τόπου (V) στο επίπεδο Oxy είναι ο δίσυος με υέντρο (0,0) υαι αυτίνα ίση με 1. Επειδή ο τόπος (V) περιορίζεται υάτω από τη $z_1(x,y) = x^2+y^2$ υαι πάνω από τη $z_2(x,y) = 2-x^2-y^2$ έχουμε:

$$\Omega = \iiint_{(V)} dx\,dy\,dz = \iint_{(\tau)} \left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz \right) dx\,dy = \iint_{(\tau)} (2-x^2-y^2-x^2-y^2)\,dx\,dy \Longrightarrow$$

$$\Omega = 2\iint_{(\tau)} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy \qquad (1)$$

Επειδή ο τόπος (τ) είναι υυυλιυός δίσυος, χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό σε πολιυές συντεταγμένες:

$$\Omega = 2\iint_{(D)} (1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)\, r\,dr\,d\varphi = 2\iint_{(D)} (1-r^2)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r^2)\,r\,d\varphi \right) dr = 2\int_0^1 (1-r^2)\,r \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 4\pi\int_0^1 (r-r^3)\,dr = \pi$$

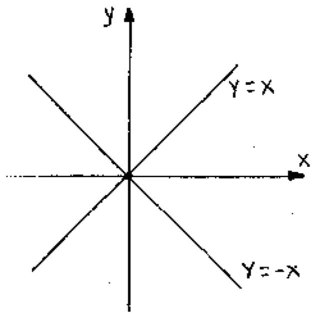
Άσυηση 15

Να βρεθεί ο όγυος του στερεού που περιυλείεται από τις επιφάνειες:

$$z^2 = x^2+y^2 \quad , \quad z=0 \quad , \quad z=1$$

Λύση

Η επιφάνεια $z^2=x^2+y^2$ είναι μια επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα z, αφού έχει τη μορφή $z=f(x^2+y^2)$. Για $y=0$ έχουμε $z^2=x^2$ δηλ. $z=\pm x$, που είναι ευθείες του επιπέδου xz. Με περιστροφή περί τον άξονα z προκύπτει



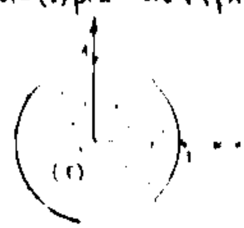
κωνική επιφάνεια. Τα επίπεδα z=0, z=1 είναι κάθετα στον άξονα z στις θέσεις z=0, z=1. Ο ζητούμενος όγκος περικλείεται από τα επίπεδα z=0, z=1 και την $z=(x^2+y^2)^{1/2}$ αφού είναι $z>0$.

Η τομή του επιπέδου z=1 και της κωνικής επιφάνειας $z^2=x^2+y^2$ είναι η καμπύλη C:

$$C:\quad z=1\,,\quad z^2=x^2+y^2$$

Με απαλειφή του z προκύπτει η προβολή στο επίπεδο Oxy που είναι $x^2+y^2=1$ δηλ. περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα ίση με 1. Άρα ο τόπος (V) έχει προβολή στο επίπεδο Oxy τον κυκλικό δίσκο(T)με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα ίση με 1.

Υπολογίζουμε τώρα τον όγκο Ω του τόπου (V):



$$\Omega=\iiint_{(V)}dxdydz=\iint_{(T)}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}dz\right)dxdy \implies$$

$$\Omega=\iint_{(T)}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$\Omega = \iint\limits_{(D)} (1-r)\, r\, dr\, d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r)\, r\, d\varphi \right) dr = \int_0^1 (1-r)\, r \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1-r)\, r\, dr = 2\pi \, \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Άσκηση 16

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού:

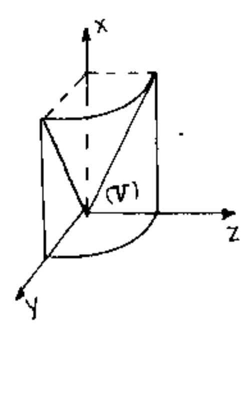
$$y^2+z^2 \leq 1, \qquad y^2+z^2 \geq x^2, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

Λύση

Ο τόπος καθορίζεται με ανισοτικές σχέσεις. Αρχίζουμε τη μελέτη από τις πιό πολύπλοκες. Θεωρούμε την αντίστοιχη ισότητα. Η πρώτη είναι $y^2+z^2=1$. Παρατηρούμε ότι δεν εμφανίζεται η μεταβλητή x. Άρα αυτή παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα x. Η ανισότητα $y^2+z^2 \leq 1$ παριστάνει το εσωτερικό της κυλινδρικής επιφάνειας, που έχει τομή με το επίπεδο yz την περιφέρεια $y^2+z^2=1$.

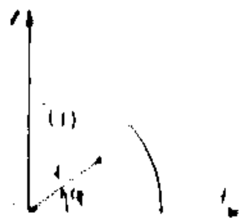
Η δεύτερη είναι $y^2+z^2=x^2$ και είναι της μορφής $x=f(y^2+z^2)$. Πρόκειται λοιπόν για επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα x. Για $z=0$ είναι $x=y$ (αφού $x \geq 0$, $y \geq 0$) που είναι ευθεία στο επίπεδο xy. Με περιστροφή της ευθείας περί τον άξονα x προκύπτει κωνική επιφάνεια: $x^2=y^2+z^2$. Σχεδιάζουμε τον άξονα x προς τα πάνω. Η ανισότητα $y^2+z^2 \geq x^2$ που με $x \geq 0$ γράφεται $\sqrt{y^2+z^2} \geq x$ παριστάνει το χώρο κάτω από την κωνική επιφάνεια.

Ο ζητούμενος τόπος λοιπόν βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο και έξω από τον κώνο. Περιοριζόμεθα στο πρώτο ογδοημόριο, αφού είναι $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Ο τόπος περιορίζεται κάτω από το επίπεδο $x=0$, πάνω από την κωνική



επιφάνεια $x=\sqrt{y^2+z^2}$, η προβολή του τόπου στο ε-πίπεδο yz είναι ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 1.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον όγκο που ζητείται:



$$\Omega = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\tau)} \left(\int_0^{\sqrt{y^2+z^2}} dx \right) dy\,dz \Longrightarrow$$

$$\Omega = \iint\limits_{(\tau)} \sqrt{y^2+z^2}\; dy\,dz \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος (τ) είναι κυκλικός τομέας, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες:

$$y = r\cos\varphi \qquad z = r\sin\varphi \qquad (0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2)$$

αφού ο τόπος βρίσκεται στο επίπεδο yz. Είναι:

$$\sqrt{y^2+z^2} = r$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\varphi)} = y_r z_\varphi - y_\varphi z_r = \cos\varphi\, r\cos\varphi - (-r\sin\varphi)\sin\varphi = r$$

Η σχέση (1) δίνει:

$$\Omega = \iint\limits_{(D)} r \cdot r\, dr\, d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r^2 d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_0^1 r^2 \left(\int_0^{\pi/2} d\varphi \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{6}$$

Παρατήρηση 1. Όταν σ' ένα τόπο έχουμε άξονα περιστρο-φής (μίας επιφάνειας εκ περιστροφής) τον x ή τον y αντί του z που έχουμε συνήθως σχεδιάζουμε τον άξονα περιστροφής κατακόρυφο. Όμοια, όταν έχουμε κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα x ή το y, σχεδιάζουμε αυτόν κατακόρυφο

Παρατήρηση 2. Τις πολικές συντεταγμένες μπορούμε να ορίσουμε στο επίπεδο yz:

$$y = r\cos\varphi \qquad z = r\sin\varphi$$

ή στο επίπεδο zx:

$$z = r\cos\varphi \qquad x = r\sin\varphi$$

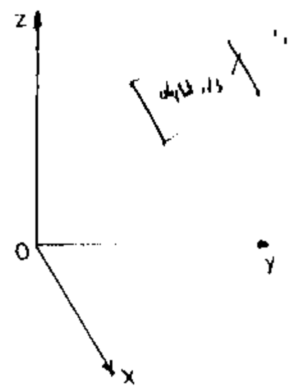
δηλαδή κυκλικά.

Κεφάλαιο 5

Επιφανειακά ολοκληρώματα

5.1 Επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συναρτησης (α' είδους)

Θα δώσουμε την έννοια του επιφανειακού ολοκληρώματος βαθμωτής συνάρτησης χρησιμοποιώντας το γνωστό παράδειγμα από τη Φυσική. Θεωρούμε την επιφάνεια S που είναι ηλεκτρικά φορτισμένη, με επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου σ:



$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

όπου dq είναι το ηλεκτρικό φορτίο σε στοιχειώδες τμήμα με εμβαδό dS. Γενικά είναι $\sigma = \sigma(x,y,z)$, δηλαδή η επιφανειακή πυκνότητα μπορεί ν' αλλάζει από θέση σε θέση πάνω στην επιφάνεια. Έτσι το ηλεκτρικό φορτίο σε στοιχειώδες τμήμα εμβαδού dS που βρίσκεται στη θέση (x,y,z) είναι:

$$dq = \sigma(x,y,z)\,dS$$

και (με πρόσθεση των στοιχειωδών φορτίων) προκύπτει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο q της επιφάνειας:

$$q = \iint_{(S)} \sigma(x,y,z)\,dS \qquad (5.1.1)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\sigma(x,y,z)$ πάνω στην επιφάνεια S ή επιφανειακό ολοκλήρωμα πρώτου είδους της συνάρτη σης $\sigma(x,y,z)$ πάνω στην επιφάνεια S

Η διαφορά με το διπλό ολοκλήρωμα είναι ότι εδώ η επιφάνεια δεν είναι αναγκαστικά επίπεδη και βέβαια δεν βρίσκεται πάνω σε κάποιο από τα συντεταγμένα επίπεδα, όπως συμβαίνει στα διπλά ολοκληρώματα.

Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος μιας βαθμωτής συνάρτησης διακρίνουμε περιπτώσεις, ανάλογα με τον τρόπο που δίνεται η επιφάνεια.

Αν η επιφάνεια δίνεται με εξίσωση $z=z(x,y)$ και τ_{xy} είναι η προβολή της στο επίπεδο Oxy, τότε ισχύει:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\tau_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy \qquad (5.1.2)$$

δηλαδή ανάγεται στον υπολογισμό ενός διπλού ολοκληρώματος. Στη συνάρτηση $f(x,y,z)$ το z έχει αντικατασταθεί με την έκφραση του συναρτήσει των x,y από την εξίσωση της επιφάνειας.

Η σχέση (5.1.2) ισχύει κυκλικά: Αν $y=y(x,z)$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας και τ_{xz} είναι η προβολή της στο επίπεδο Oxz τότε:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\tau_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz \qquad (5.1.3)$$

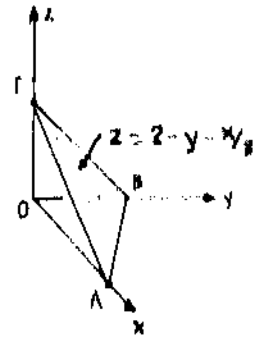
και όμοια, αν $x=x(y,z)$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας και τ_{yz} είναι η προβολή της στο επίπεδο Oyz τότε:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\tau_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz \qquad (5.1.4)$$

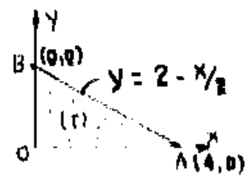
Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα (ά εί δους) της συνάρτησης x^2y+z στο τμήμα της επίπεδης επιφάνειας S: $x+2y+2z=4$ που βρίσκεται στο ογδοημόριο $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Λύση



Σχεδιάζουμε πρώτα την επιφάνεια. Βρίσκουμε τα σημεία τομής του επιπέδου $x+2y+2z=4$ με τους άξονες: Για $y=z=0$ είναι $x=4$. Για $x=z=0$ είναι $y=2$ ενώ για $x=y=0$ είναι $z=2$. Άρα έχουμε τα σημεία $A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$, $\Gamma(0,0,2)$. Η επιφάνεια S είναι το τρίγωνο ΑΒΓ, που έχει προβολή στο επίπεδο Oxy το τρίγωνο OAB. Η ευθεία AB του επιπέδου Oxy έχει:



$$x+2y+2z=4 \quad z=0$$

δηλ. είναι $x+2y=4$ ή $y=2-x/2$.

Η εξίσωση της επιφάνειας S επιλυμένη ως προς z είναι:

$$z=2-y-\frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad z_x=-\frac{1}{2}, \quad z_y=-1$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\iint\limits_{(S)}(x^2y+z)\,dS=\iint\limits_{(T)}\left(x^2y+2-y-\frac{x}{2}\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy \qquad (1)$$

όπου αντικαταστήσαμε το z στην ολοκληρωτέα συνάρτηση με την έκφρασή του από την εξίσωση της επιφάνειας. Με αντικατάσταση των z_x, z_y, η (1) γράφεται:

$$\iint\limits_{(S)}(x^2y+z)\,dS=\iint\limits_{(T)}\left(x^2y+2-y-\frac{x}{2}\right)\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}\,dx\,dy=$$

$$= \sqrt{\tfrac{9}{4}} \iint\limits_{(\tau)} (x^2y + 2 - y - \tfrac{x}{2})\,dx\,dy$$

Το διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα, αφού ο τόπος (τ) μπορεί να θεωρηθεί "κανονικός" ως προς x:

$$\iint\limits_{(\tau)} (x^2y+2-y-\tfrac{x}{2})\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\int_0^{2-\frac{x}{2}} (x^2y+2-y-\tfrac{x}{2})\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^4 \left(x^2\frac{y^2}{2} + 2y - y^2/_2 - \frac{x}{2}\,y \Big|_0^{2-\frac{x}{2}} \right) dx =$$

$$= \int_0^4 \left(x^2\,\tfrac{1}{2}(2-\tfrac{x}{2})^2 + 2(2-\tfrac{x}{2}) - \tfrac{1}{2}(2-\tfrac{x}{2})^2 - \tfrac{x}{2}(2-\tfrac{x}{2}) \right) dx = \frac{20{,}8}{3}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{(S)} (x^2y+z)\,dS = \frac{20{,}8}{3}\sqrt{\frac{9}{4}} = 10{,}4$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης

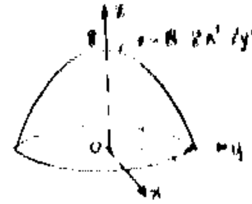
$$f(x,y,z) = z\sqrt{1+16x^2+16y^2}$$

στην επιφάνεια S: $z = 8-2x^2-2y^2$, $z \geq 0$.

Λύση

Σχεδιάζουμε πρώτα την επιφάνεια $z=8-2x^2-2y^2$ που είναι της μορφής $z=f(x^2+y^2)$, αφού γράφεται $z=8-2(x^2+y^2)$. Άρα πρόκειται για επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα z. Για $y=0$ έχουμε την καμπύλη $z=8-2x^2$ του επιπέδου xz. Αυτή είναι η $z=-2x^2$ μετατοπισμένη κατα 8 πάνω στον άξονα z, δηλ. έχει την κορυφή της στο $z=8$ (και όχι στο $z=0$) αφού για $x=0$ είναι $z=8$.

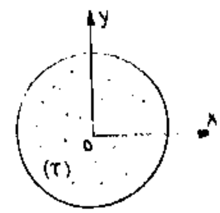
Η επιφάνεια S φαίνεται στο σχήμα και είναι το τμήμα της $z = 8-2x^2-2y^2$ που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z=0$, αφού $z \geq 0$. Η τομή της S με το επίπεδο Oxy είναι:



$$\{z = 8-2x^2-2y^2 \, , \ z=0\} \implies \{x^2+y^2=4 \, , \ z=0\}$$

δηλαδή η περιφέρεια κύκλου με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ίση με 2. Έτσι, η προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο Oxy είναι ο κυκλικός δίσκος (τ) με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ίση με 2.

Έχουμε:



$$\iint_{(S)} z\sqrt{1+16x^2+16y^2}\, dS =$$

$$= \iint_{(\tau)} z(x,y)\sqrt{1+16x^2+16y^2}\,\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy \qquad (1)$$

όπου $z(x,y)$ είναι η έκφραση του z συναρτήσει των x, y από την εξίσωση της επιφάνειας:

$$z(x,y) = 8-2x^2-2y^2 \qquad z_x = -4x \, , \quad z_y = -4y$$

Με αντικατάσταση, η σχέση (1) γράφεται:

$$\iint_{(S)} z\sqrt{1+16x^2+16y^2}\, dS = \iint_{(\tau)} (8-2x^2-2y^2)\sqrt{1+16x^2+16y^2}\,\sqrt{1+16x^2+16y^2}\, dxdy$$

$$\to \iint_{(S)} z\sqrt{1+16x^2+16y^2}\, dS = \iint_{(\tau)} (8-2x^2-2y^2)(1+16x^2+16y^2)\, dxdy \qquad (2)$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, θεωρούμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$

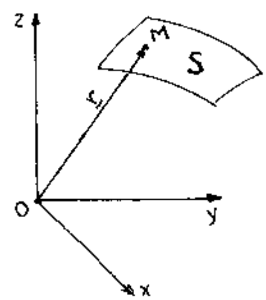
Η σχέση (2) γράφεται:

$$\iint_{(S)} z\sqrt{1+16x^2+16y^2}\,dS = \iint_{(D)} (8-2r^2)(1+16r^2)\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^2\left(\int_0^{2\pi}(8-2r^2)(1+16r^2)r\,d\varphi\right)dr = \int_0^2 (8-2r^2)(1+16r^2)\,r\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)dr =$$

$$= 2\pi\int_0^2 (8-2r^2)(1+16r^2)\,r\,dr = 2\pi\int_0^2 (8r+126r^3-32r^5)\,dr = 357{,}33\pi$$

5.2 Η επιφάνεια δίνεται σε παραμετρική παράσταση: $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}(u,\upsilon)$



Υποθέτουμε ότι $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο της επιφάνειας S. Το διάνυσμα θέσης του $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{OM}$ είναι:

$$\underset{\sim}{r} = (x, y, z)$$

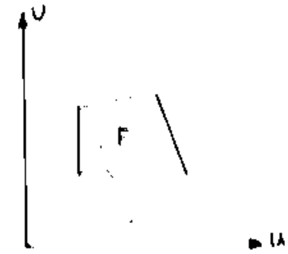
Αν u,υ είναι παράμετροι, οι συντεταγμένες x, y, z είναι συναρτήσεις των παραμέτρων u,υ:

$$x = x(u,\upsilon) \qquad y = y(u,\upsilon) \qquad z = z(u,\upsilon)$$

Λέμε ότι έχουμε μία παραμετρική παράσταση της επιφάνειας. Βέβαια, από τις τρεις σχέσεις μπορούμε να απαλείψουμε τις δύο μεταβλητές u,υ, οπότε προκύπτει εξίσωση της μορφής $F(x,y,z)=0$, που είναι η εξίσωση της επιφάνειας σε μη παραμετρική μορφή. (Μπορούμε να θυμίσουμε εδώ ότι αν τα x, y, z είναι συναρτήσεις μίας μεταβλητής t τότε έχουμε καμπύλη σε παραμετρική μορφή) Σε κάθε ζευγάρι των παραμέτρων u,v αντιστοιχεί ένα σημείο M της επιφάνειας.

Αν η επιφάνεια έχει τη μορφή $z = z(x,y)$, μπορούμε να θέσουμε $x = u$, $y = v$ οπότε $z = z(u,v)$ και επομένως το τυχαίο σημείο της επιφάνειας είναι:

$$(x,y,z) = (u,v,z(u,v)) = \underset{\sim}{r}(u,v)$$



Επειδή σε κάθε ζευγάρι (u,v) αντιστοιχεί ένα σημείο της επιφάνειας, μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε σημείο του επιπέδου uv αντιστοιχεί ένα σημείο της επιφάνειας. Άρα η επιφάνεια S είναι τα σημεία που αντιστοιχούν στα σημεία του τόπου F του επιπέδου uv. Αν

$$\underset{\sim}{r}_u = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u) \qquad \underset{\sim}{r}_v = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$$

είναι οι μερικές παράγωγοι του διανύσματος $\underset{\sim}{r}$ ως προς u, v, δηλ. καθεμιάς συντεταγμένης του χωριστά, τότε:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\, dS = \iint_{F} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, |\underset{\sim}{r}_u \times \underset{\sim}{r}_v|\, du\, dv \qquad (5.2.1)$$

Η παραμετρική παράσταση και ο τόπος F θα δίνονται. Ειδικά αν η επιφάνεια ολοκλήρωσης S είναι σφαιρική ή τμήμα σφαιρικής επιφάνειας με ακτίνα ίση με R, τότε είναι

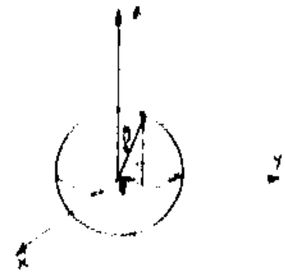
$$x = R\sin\theta\cos\varphi \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi \qquad z = R\cos\theta$$

δηλαδή έχουμε παραμέτρους θ, φ. Εδώ είναι:

$$x_\theta = R\cos\theta\cos\varphi \qquad y_\theta = R\cos\theta\sin\varphi \qquad z_\theta = -R\sin\theta$$

$$x_\varphi = -R\sin\theta\sin\varphi \qquad y_\varphi = R\sin\theta\cos\varphi \qquad z_\varphi = 0$$

Είναι:



$\underset{\sim}{r} = (R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta)$

$\underset{\sim}{r}_\vartheta = (R\cos\vartheta\cos\varphi,\ R\cos\vartheta\sin\varphi,\ -R\sin\vartheta)$

$\underset{\sim}{r}_\varphi = (-R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\sin\vartheta\cos\varphi,\ 0)$

$\underset{\sim}{r}_\vartheta \times \underset{\sim}{r}_\varphi = (R\cos\vartheta\cos\varphi\,\hat{x} + R\cos\vartheta\sin\varphi\,\hat{y} - R\sin\vartheta\,\hat{z}) \times$

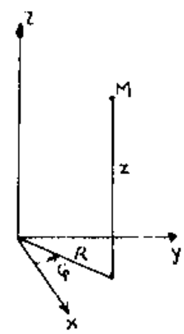
$\times (-R\sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{x} + R\sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{y}) =$

$= R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\hat{z} + R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\,\hat{y} + R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\,\hat{x} \implies$

$|\underset{\sim}{r}_\vartheta \times \underset{\sim}{r}_\varphi| = R^2\sin\vartheta$

Αν η επιφάνεια ολοκλήρωσης είναι κυλινδρική (κυκλική) με ακτίνα R, τότε:

$x = R\cos\varphi \qquad y = R\sin\varphi \qquad z = z$.



οπότε:

$\underset{\sim}{r} = (R\cos\varphi\ ,\ R\sin\varphi,\ z)$

$\dfrac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial\varphi} = (-R\sin\varphi,\ R\cos\varphi,\ 0) \qquad \dfrac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial z} = (0,0,1)$

$\underset{\sim}{r}_\varphi \times \underset{\sim}{r}_z = (-R\sin\varphi\,\hat{x} + R\cos\varphi\,\hat{y}) \times \hat{z} = R\sin\varphi\,\hat{y} + R\cos\varphi\,\hat{x} \implies$

$|\underset{\sim}{r}_\varphi \times \underset{\sim}{r}_z| = R$

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $(1+x^2+y^2)^{1/2}z$ στην επιφάνεια S:

$$x=u\cos\upsilon\ ,\quad y=u\sin\upsilon,\quad z=\upsilon\qquad (0\le u\le 4,\quad 0\le \upsilon\le \pi/2)$$

Λύση

Η επιφάνεια S δίνεται σε παραμετρική μορφή. Είναι:

$$x_u=\cos\upsilon\qquad y_u=\sin\upsilon\qquad z_u=0$$

$$x_\upsilon=-u\sin\upsilon\qquad y_\upsilon=u\cos\upsilon\qquad z_\upsilon=1$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε, με το γνωστό τρόπο, το εξωτερικό γινόμενο:

$$\underline{r}_u\times\underline{r}_\upsilon=(\cos\upsilon\hat{x}+\sin\upsilon\hat{y})\times(-u\sin\upsilon\hat{x}+u\cos\upsilon\hat{y}+\hat{z})=$$

$$u\cos^2\upsilon\hat{z}-\cos\upsilon\hat{y}+u\sin^2\upsilon\hat{z}+\sin\upsilon\hat{x}\implies$$

$$\underline{r}_u\times\underline{r}_\upsilon=\sin\upsilon\hat{x}-\cos\upsilon\hat{y}+u\hat{z}\implies|\underline{r}_u\times\underline{r}_\upsilon|=(1+u^2)^{1/2}$$

Υπολογίζουμε τώρα την ολοκληρωτέα συνάρτηση, συναρτήσει των u,υ:

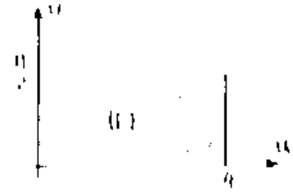
$$(1+x^2+y^2)^{1/2}z=(1+u^2\cos^2\upsilon+u^2\sin^2\upsilon)^{1/2}\cdot\upsilon=(1+u^2)^{1/2}\cdot\upsilon$$

Υπολογίζουμε λοιπόν το επιφανειακό ολοκλήρωμα σύμφωνα με τη σχέση (5.2.1):

$$\iint_{(S)}(1+x^2+y^2)^{1/2}z\,dS=\iint_{(F)}(1+u^2)^{1/2}\cdot\upsilon\cdot(1+u^2)^{1/2}du\,d\upsilon\implies$$

$$\iint_{(S)}(1+x^2+y^2)^{1/2}z\,dS=\iint_{(F)}(1+u^2)\,\upsilon\,du\,d\upsilon\qquad(1)$$

όπου ο τόπος (D) ορθογώνιος και είναι δεδομένος που φαίνεται στο σχήμα. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα.
Η σχέση (1) γράφεται:



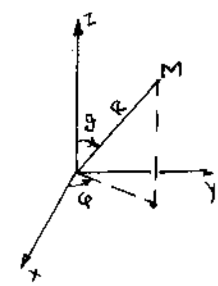
$$\iint_{(S)} (1+x^2+y^2)^{1/2} \cdot z \, dS = \int_0^4 \left(\int_0^{\pi/2} (1+u^2) v \, dv \right) du =$$

$$= \int_0^4 (1+u^2) \left(\int_0^{\pi/2} v \, dv \right) du = \int_0^4 (1+u^2) \left(\frac{v^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) du = \frac{\pi^2}{8} \int_0^4 (1+u^2) du = \frac{19\pi^2}{6}$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2+z$ στη σφαιρική επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Λύση



Επειδή ο τόπος ολοκλήρωσης είναι επιφάνεια σφαίρας, θα χρησιμοποιήσουμε την παραμετρική παράσταση της επιφάνειας σφαίρας με ακτίνα R:

$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi \quad , \quad y = R\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = R\cos\vartheta \quad (0 \le \varphi < 2\pi, \ 0 \le \vartheta \le \pi)$$

Είναι:

$$x_\vartheta = R\cos\vartheta\cos\varphi \qquad y_\vartheta = R\cos\vartheta\sin\varphi \qquad z_\vartheta = -R\sin\vartheta$$

$$x_\varphi = -R\sin\vartheta\sin\varphi \qquad y_\varphi = R\sin\vartheta\cos\varphi \qquad z_\varphi = 0$$

Υπολογίζουμε με το γνωστό τρόπο το εξωτερικό γινόμενο:

$$\underset{\sim}{r}_\vartheta \times \underset{\sim}{r}_\varphi = (x_\vartheta \hat{x} + y_\vartheta \hat{y} + z_\vartheta \hat{z}) \times (x_\varphi \hat{x} + y_\varphi \hat{y} + z_\varphi \hat{z}) =$$

$$= (R\cos\vartheta\cos\varphi \, \hat{x} + R\cos\vartheta\sin\varphi \, \hat{y} - R\sin\vartheta \, \hat{z}) \times (-R\sin\vartheta\sin\varphi \, \hat{x} + R\sin\vartheta\cos\varphi \, \hat{y}) =$$

$R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi\hat{z} + R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi\hat{z} + R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\hat{y} + R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\hat{x}$

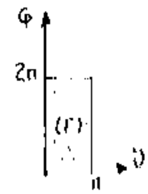
$R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\hat{x} + R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\hat{y} + R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\hat{z} \Rightarrow$

$|r_\vartheta \times r_\varphi| = R^2\sin\vartheta$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση, συναρτήσει των παραμέτρων ϑ,φ γράφεται:

$$x^2 + z = R^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + R\cos\vartheta$$

Ο τόπος ολοκλήρωσης (F) σε άξονες (ϑ,φ) είναι δοσμένος $0\le\vartheta\le\pi$, $0\le\varphi<2\pi$. Εφαρμόζουμε τη σχέση (5.2.1):



$$\iint_{(S)}(x^2+z)\,dS = \iint_{(F)}(R^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + R\cos\vartheta)R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= \iint_{(F)} R^4\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\,d\vartheta\,d\varphi + \iint_{(F)} R^3\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} R^4\cos^2\varphi\left(\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta\right)d\varphi + \int_0^{2\pi} R^3\left(\int_0^{\pi}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}R^4\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi + \int_0^{2\pi} R^3\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d(\sin\vartheta)\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4R^4}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^4$$

Παρατήρηση: Είναι:

$$\int\sin^3\vartheta\,d\vartheta = \int\sin^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = -\int(1-\cos^2\vartheta)\,d(\cos\vartheta) = \frac{1}{3}\cos^3\vartheta - \cos\vartheta$$

5.3 Εφαρμογές του επιφανειακού ολοκληρώματος πρώτου είδους.

Εφαρμογή 1. Εμβαδό επιφάνειας:

$$E = \iint_{(S)} dS \qquad (5.3.1)$$

Εφαρμογή 2. Αν $f(x,y,z)$ είναι η επιφανειακή πυκνότητα μάζας μιας (υλικής) επιφάνειας, τότε η μάζα της είναι:

$$m = \iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS \qquad (5.3.2)$$

Εφαρμογή 3. Το κέντρο μάζας C μιας (υλικής) επιφάνειας είναι:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m}\iint_{(S)} x\,f(x,y,z)\,dS \\ y_c &= \frac{1}{m}\iint_{(S)} y\,f(x,y,z)\,dS \\ z_c &= \frac{1}{m}\iint_{(S)} z\,f(x,y,z)\,dS \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.3)$$

Εφαρμογή 4. Οι ροπές αδράνειας μιας (υλικής) επιφάνειας είναι:

$$I_x = \iint_{(S)} (y^2+z^2)\,f(x,y,z)\,dS \quad \text{(ως προς τον άξονα } x) \qquad (5.3.4)$$

$$I_y = \iint_{(S)} (x^2+z^2)\,f(x,y,z)\,dS \quad \text{(ως προς τον άξονα } y) \qquad (5.3.5)$$

$$I_z = \iint_{(S)} (x^2+y^2)\,f(x,y,z)\,dS \quad \text{(ως προς τον άξονα } z) \qquad (5.3.6)$$

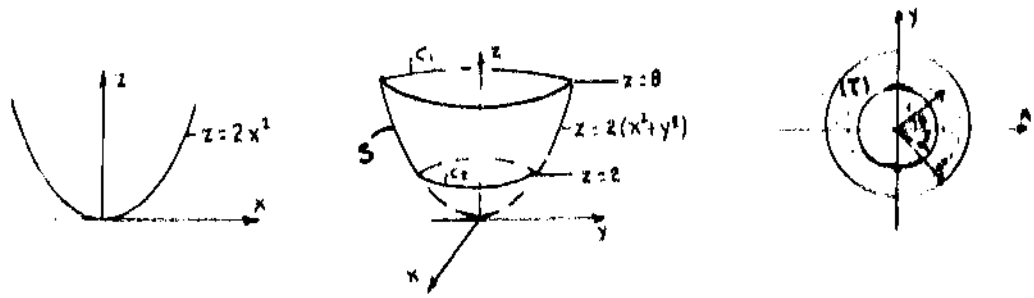
$$I_0 = \iint_{(S)} (x^2+y^2+z^2)\, f(x,y,z)\, dS \quad \text{(πολική ροπή αδράνειας)} \quad (8.5\,?)$$

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το εμβαδό της επιφάνειας $z=2(x^2+y^2)$ που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z=2$, $z=8$.

Λύση

Η επιφάνεια $z=2(x^2+y^2)$ είναι μία επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα z, αφού είναι της μορφής $z=f(x^2+y^2)$. Για $y=0$ έχουμε την καμπύλη $z=2x^2$ του επιπέδου Oxz. Με περιστροφή της περί τον άξονα z προκύπτει η επιφάνεια



$z=2(x^2+y^2)$. Τα επίπεδα $z=2$, $z=8$ είναι κάθετα στον άξονα z στις θέσεις $z=2$, $z=8$ αντίστοιχα. Η τομή της $z=2(x^2+y^2)$ με το επίπεδο $z=8$ είναι η καμπύλη C_1:

$$C_1:\ z=2(x^2+y^2) \qquad z=8$$

Με απαλειφή του z προκύπτει η προβολή της C_1 στο επίπεδο Oxy που είναι: $x^2+y^2=4$ δηλ. περιφέρεια κύκλου με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα ίση με 2. Η τομή της $z=2(x^2+y^2)$ με το επίπεδο $z=2$ είναι η καμπύλη C_2:

$$C_2:\ z=2(x^2+y^2) \qquad z=2$$

Με απαλειφή του z προκύπτει η προβολή της C_2 στο επίπεδο Oxy που είναι: $x^2+y^2=1$ δηλ. περιφέρεια κύκλου με κέντρο (0,0) και ακτίνα ίση με 1

Είναι προφανές ότι η επιφάνεια S της οποίας ζητείται το εμβαδό, προβάλλεται στο επίπεδο στον τόπο (τ) που είναι κυκλικός δακτύλιος με εσωτερική ακτίνα 1 και εξωτερική ίση με 2. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \iint\limits_{(S)} dS \quad \Longrightarrow \quad E = \iint\limits_{(\tau)} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx dy \qquad (1)$$

Από την εξίσωση της επιφάνειας βρίσκουμε:

$$z_x = 4x \qquad z_y = 4y$$

οπότε η (1) γράφεται:

$$E = \iint\limits_{(\tau)} \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}\, dx dy \qquad (2)$$

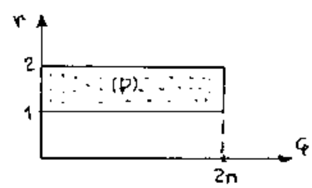
Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, θεωρούμε το μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r \ , \ (1 \le r \le 2) \ , \ (0 \le \varphi < 2\pi)$$

Η σχέση (2) γράφεται:

$$E = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + 16r^2\cos^2\varphi + 16r^2\sin^2\varphi}\;\, r\, dr\, d\varphi \Longrightarrow$$

$$E = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + 16r^2}\;\, r\, dr\, d\varphi \qquad (3)$$



Ο τόπος (D) σε άξονες r, φ φαίνεται στο σχήμα, όπου $1 \le r \le 2$ αφού έχουμε δακτύλιο με εσωτερική ακτίνα ίση με 1 και εξωτερική ίση με 2. Η σχέση (3) γράφεται:

$$E = \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+16r^2}\, d\varphi \right) dr = \int_1^2 r\sqrt{1+16r^2} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_1^2 r\sqrt{1+16r^2}\, dr =$$

$$= \pi \int_1^2 (1+16r^4)^{1/2} dr^2 = \frac{\pi}{16} \int_1^2 (1+16r^4)^{1/2} d(16r^4) = \frac{\pi}{16} \int_1^2 (1+16r^4)^{1/2} d(1+16r^4) =$$

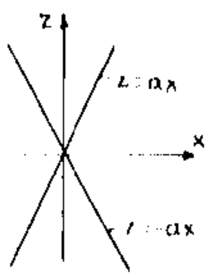
$$= \frac{\pi}{16} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (1+16r^4)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{24} \left((\sqrt{65})^3 - (\sqrt{17})^3\right)$$

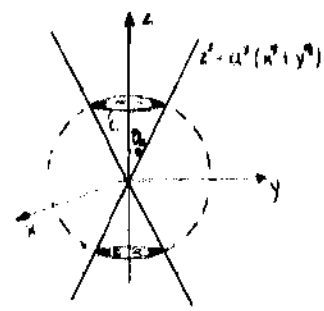
Άσκηση 6

Να βρεθεί το εμβαδό του τμήματος της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=1$ που βρίσκεται μέσα στην (κωνική) επιφάνεια $z^2=a^2(x^2+y^2)$. Είναι $a>0$.

Λύση

Η σφαιρική επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=1$ έχει κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα ίση με 1. Η επιφάνεια $z^2=a^2(x^2+y^2)$ είναι της μορφής $z=f(x^2+y^2)$ δηλ. επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα z. Για $y=0$ δίνει $z=\pm ax$ δηλ. ευθείες στο επίπεδο xz. Με περιστροφή περί τον άξονα z προκύπτει κωνική επιφάνεια.





Παρατηρούμε ότι μέσα στην κωνική επιφάνεια βρίσκονται δύο τμήματα της σφαιρικής επιφάνειας που όμως έχουν ίσα εμβαδά, λόγω της συμμετρίας. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό του πάνω : $z>0$. Είναι:

$$E = \iint_{(S)} dS \qquad (1)$$

Η τομή των δύο επιφανειών είναι η καμπύλη C:

$$C: \ x^2+y^2+z^2=1 \ , \quad z^2=a^2(x^2+y^2)$$

Η προβολή της C στο επίπεδο xy είναι η περιφέρεια του επιπέδου Oxy που προκύπτει με απαλοιφή του z:

$$x^2+y^2+a^2(x^2+y^2)=1 \Longrightarrow x^2+y^2=\frac{1}{1+a^2}$$

δηλαδή περιφέρεια κύκλου με κέντρο (0,0) και ακτίνα ίση με $1/\sqrt{1+a^2}$. Η εξίσωση της επιφάνειας που ζητείται το εμβαδό είναι (με $z>0$)

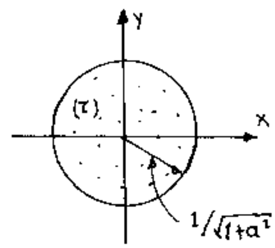
$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad (2)$$

Η επιφάνεια προβάλλεται στον τόπο (τ) του επιπέδου Oxy που είναι εσωτερικό του κύκλου κέντρου (0,0) και ακτίνας $1/\sqrt{1+a^2}$. Η σχέση (1) γράφεται:

$$E=\iint_{(\tau)} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy \qquad (3)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad z_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$



οπότε η (3) γράφεται:

$$E=\iint_{(\tau)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy \qquad (4)$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, θεωρούμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$x=r\cos\varphi \quad y=r\sin\varphi \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=r \quad 0\le r\le 1/\sqrt{1+a^2}\ ,\ 0\le\varphi<2\pi$$

Η σχέση (4) γράφεται:

$$E=\iint_{\tau} \frac{1}{\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}}\,r\,dr\,d\varphi=\iint_{(D)} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{1+a^2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{1+a^2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = -\pi \int_0^{1/\sqrt{1+a^2}} (1-r^2)^{-1/2} d(1-r^2)$$

$$= -\frac{\pi}{-\frac{1}{2}+1} (1-r^2)^{-\frac{1}{2}+1} \Big|_0^{1/\sqrt{1+a^2}} = -2\pi \sqrt{1-r^2} \Big|_0^{1/\sqrt{1+a^2}} = 2\pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right)$$

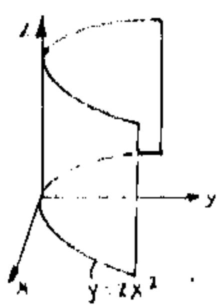
Με διπλασιασμό υπολογίζουμε το συνολικό εμβαδό της σφαιρικής επιφάνειας που βρίσκεται μέσα στην κωνική.

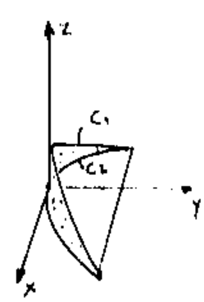
Άσκηση 7

Μία μεταλλική επιφάνεια έχει εξίσωση $y=2x^2$ και (επιφανειακή) πυκνότητα μάζας $f(x,y,z)=\sqrt{1+16x^2}$. Να βρεθεί η μάζα της επιφάνειας που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z=0$, $z=1-y$. Να υπολογισθούν επίσης οι ροπές αδράνειας του τμήματος αυτού ως προς τους άξονες x, y.

Λύση

Παρατηρούμε ότι απουσιάζει η μεταβλητή z από την εξίσωση της δοσμένης επιφάνειας, οπότε αυτή παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z, ενώ η τομή της με το επίπεδο xy είναι η καμπύλη $y=2x^2$. Το





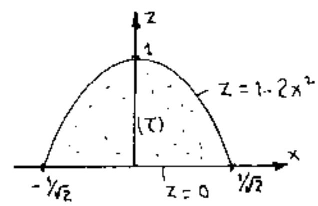
επίπεδο $z=1-y \iff z+y=1$ είναι παράλληλο στον άξονα x (απουσιάζει η μεταβλητή x) και τέμνει τους y, z στα σημεία $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ αντίστοιχα. Το τμήμα της κυλινδρικής επιφάνειας $y=2x^2$ που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z=1-y$, $z=0$ φαίνεται στο σχήμα. Επειδή η εξίσωση της επιφάνειας έχει τη μορφή $y=y(x,z)$ (δεν επιλύεται ως προς z) θα προβάλλουμε την επιφάνεια στο επίπεδο xz. Η καμπύλη C_1, τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $z=1-y$ είναι:

$$C_1: \quad y=2x^2 \qquad z=1-y$$

Με απαλειφή της y προκύπτει $z=1-2x^2$ που είναι η προβολή της C_1 στο επίπεδο xz. Η καμπύλη C_2, τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $z=0$ είναι:

$$C_2: \quad y=2x^2 \quad , \quad z=0$$

Με απαλειφή του y (είναι αυτόματη αφού η μία εξίσωση δεν περιέχει το y) είναι $z=0$, που είναι η προβολή της C_2 στο επίπεδο xz.



Η προβολή (τ) της επιφάνειας στο επίπεδο xz είναι ο τόπος που περικλείεται από τις $z=1-2x^2$, $z=0$.

Υπολογίζουμε τώρα τη μάζα της επιφάνειας:

$$m=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{(S)}\sqrt{1+16x^2}\,dS=\iint\limits_{(\tau)}\sqrt{1+16x^2}\,\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dx\,dz$$

Όμως $y=2x^2$, άρα $y_x=4x$, $y_z=0$, οπότε:

$$m=\iint\limits_{(\tau)}\sqrt{1+16x^2}\,\sqrt{1+16x^2}\,dx\,dz \implies m=\iint\limits_{(\tau)}(1+16x^2)\,dx\,dz$$

Ο τόπος (τ) μπορεί να θεωρηθεί "κανονικός" ως προς x και περιορίζεται από τις ευθείες $x=-1/\sqrt{2}$, $x=1/\sqrt{2}$ ενώ κλείνει κάτω από τη $z=0$ και πάνω από τη $z=1-2x^2$. Έτσι, μπορεί να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα:

$$m=\iint\limits_{(\tau)}(1+16x^2)\,dx\,dz=\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}(1+16x^2)\left(\int_0^{1-2x^2}dz\right)dx=\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}(1+16x^2)(1-2x^2)\,dx=\frac{47}{30}\sqrt{2}$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x είναι

$$I_x = \iint\limits_{(S)} (y^2+z^2)\, f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_{(T)} (y^2+z^2) \sqrt{1+16x^2}\, \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\, dx\, dz = \dots$$

$$I_x = \iint\limits_{(T)} (4x^4+z^2)(1+16x^2)\, dx\, dz = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\int_0^{1-2x^2} (4x^4+z^2)(1+16x^2)\, dz \right) dx =$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1+16x^2) \left(\int_0^{1-2x^2} (4x^4+z^2)\, dz \right) dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1+16x^2) \left(4x^4 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{1-2x^2} dx$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1+16x^2) \left(4x^4 (1-2x^2) + \frac{1}{3}(1-2x^2)^3 \right) dx =$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας I_y:

$$I_y = \iint\limits_{(S)} (x^2+z^2)\, f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_{(T)} (x^2+z^2)(1+16x^2)\, dx\, dz =$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\int_0^{1-2x^2} (x^2+z^2)(1+16x^2)\, dz \right) dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1+16x^2) \left(\int_0^{1-2x^2} (x^2+z^2)\, dz \right) dx =$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1+16x^2) \left(x^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{1-2x^2} dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1+16x^2) \left(x^2(1-2x^2) + \frac{1}{3}(1-2x^2)^3 \right) dx$$

$$=$$

Άσκηση 8

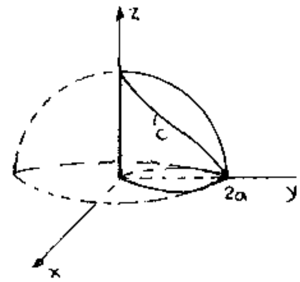
Να υπολογισθεί το εμβαδό της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=4a^2$ που βρίσκεται μέσα στην κυλινδρική επιφάνεια: $x^2+y^2-2ax=0$, $z>0$.

Λύση

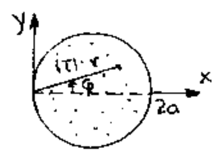
Η σφαιρική επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=4a^2$ έχει κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα $2a$. Η εξίσωση $x^2+y^2-2ax=0$ γράφεται:

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0 \iff x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + y^2 = 0 \iff (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια (δεν εμφανίζεται η μεταβλητή z) με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z. Η τομή της με το επίπεδο Oxy είναι η περιφέρεια κύκλου $(x-a)^2+y^2=a^2$ που έχει κέντρο το $(a,0)$ και ακτίνα ίση με a. Η διάμετρος της κυλινδρικής επιφάνειας είναι ίση με την ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειας.



Η τομή της κυλινδρικής με τη σφαιρική επιφάνεια είναι η καμπύλη:



$$C:\ x^2+y^2+z^2=4a^2\ , \quad (x-a)^2+y^2=a^2$$

Με απαλειφή του z (είναι αυτόματη) προκύπτει η προβολή της C στο επίπεδο Oxy:

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

Το τμήμα S της σφαιρικής επιφάνειας που βρίσκεται μέσα στην κυλινδρική, έχει προβολή στο επίπεδο Oxy τον τόπο (τ) που είναι το εσωτερικό της περιφέρειας $(x-a)^2+y^2=a^2$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\iint_{(S)} dS=\iint_{(\tau)}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ dxdy$$

Όμως η εξίσωση του τμήματος της σφαιρικής επιφάνειας είναι (κρατάμε πρόσημο (+) στη ρίζα αφού $z>0$):

$$z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2} \implies z_x=\frac{-x}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} \qquad z_y=\frac{-y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \iint\limits_{(\tau)} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \iint\limits_{(\tau)} \frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος (τ) είναι κυκλικός δίσκος, θεωρούμε το μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$$

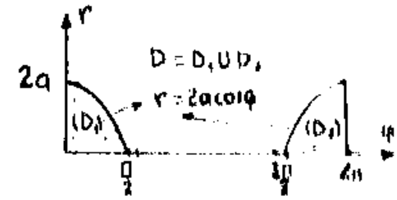
Είναι $r>0$. Η εξίσωση του συνόρου σε συντεταγμένες r,φ είναι:

$$x^2+y^2-2ax = 0 \Longrightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2ar\cos\varphi = 0 \Longrightarrow$$

$$r^2-2ar\cos\varphi = 0 \Longrightarrow r = 2a\cos\varphi$$

Επειδή $r>0$, η εξίσωση $r=2a\cos\varphi$ έχει νόημα μόνο για $\cos\varphi>0$ δηλ. $0\leq\varphi<\pi/2$, $\frac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi$. Προκύπτει ο τόπος (D) του επιπέδου με άξονες r,φ.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα:



$$E = \iint\limits_{(\tau)} \frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,rdrd\varphi = \iint\limits_{(D_1)} \frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,rdrd\varphi + \iint\limits_{(D_2)} \frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,rdrd\varphi \Longrightarrow$$

$$E = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\varphi} \frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,rdr\right)d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left(\int_0^{2a\cos\varphi} \frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,rdr\right)d\varphi \qquad (1)$$

Όμως είναι:

$$\int_0^{2a\cos\varphi} \frac{a\,2r\,dr}{\sqrt{4a^2-r^2}} = -a\int_0^{2a\cos\varphi} \frac{d(-r^2)}{\sqrt{4a^2-r^2}} = -a\int_0^{2a\cos\varphi} (4a^2-r^2)^{-1/2}\,d(4a^2-r^2) =$$

$$= -\frac{a}{-\frac{1}{2}+1}(4a^2-r^2)^{-\frac{1}{2}+1}\Big|_0^{2a\cos\varphi} = -2a\,(4a^2-r^2)^{1/2}\Big|_0^{2a\cos\varphi} =$$

$$= -2a\left(\sqrt{4a^2-4a^2\cos^2\varphi}-\sqrt{4a^2}\right) = -2a\left(\sqrt{4a^2\sin^2\varphi}-2a\right) =$$

$$= -2a\left(2a|\sin\varphi|-2a\right) = 4a^2(1-|\sin\varphi|)$$

Το πρώτο από τα ολοκληρώματα της σχέσης (1) (Είναι $\sin\varphi>0$ για $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$) γράφεται τώρα:

$$E_1=\int_0^{\pi/2}4a^2(1-\sin\varphi)\,d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\varphi)\,d\varphi = 4a^2\,(\varphi+\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} \Rightarrow$$

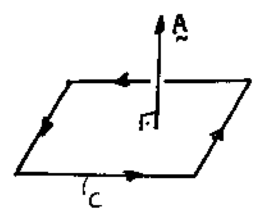
$$E_1 = 4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

Με $\sin\varphi<0$, δηλ. $|\sin\varphi|=-\sin\varphi$ υπολογίζουμε και το δεύτερο ολοκλήρωμα της (1). Προκύπτει:

$$E_2 = 4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

Άρα $\quad E = 4a^2(\pi-2)$

5.4 Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης.



Θεωρούμε την επίπεδη επιφάνεια που έχει σύνορο την καμπύλη C και εμβαδό ίσο με A. Την επίπεδη αυτή επιφάνεια παριστάνουμε με το διάνυσμα $\underset{\sim}{A}$, που έχει μέτρο όσο το εμβαδό της επιφάνειας (αριθμητικά) και είναι κάθετο στην επιφάνεια. Η φορά του $\underset{\sim}{A}$ μπορεί να είναι προς τη μία ή την άλλη πλευρά της επιφάνειας, ανάλογα πως θα την ορίσουμε.

Αν όμως έχει ορισθεί θετική φορά στην καμπύλη C, τότε η φορά του διανύσματος $\underset{\sim}{A}$ ορίζεται: Αν τα δάκτυλα του δεξιού χεριού δείχνουν τη φορά της καμπύλης C, τότε ο αντίχειρας του ίδιου χεριού δείχνει τη φορά του διανύσματος $\underset{\sim}{\hat{n}}$ (και αντίστροφα).

Αν θεωρήσουμε τώρα την τυχαία (καμπύλη) επιφάνεια S, με σύνορο την καμπύλη C (κλειστή) τότε ένα στοιχειώδες τμήμα με εμβαδό dS μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο, οπότε μπορεί να παρασταθεί με διάνυσμα $d\underset{\sim}{S}$. Το διάνυσμα $d\underset{\sim}{S}$ είναι κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα dS και γράφεται στη μορφή μέτρο επί αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα:

$$d\underset{\sim}{S} = dS\,\hat{n} \qquad (5.4.1)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το στοιχειώδες τμήμα $d\underset{\sim}{S}$ είναι τοποθετημένο στη θέση (x,y,z) ενός διανυσματικού πεδίου, όπου το διάνυσμα του πεδίου $\underset{\sim}{F}$ είναι:

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\hat{x} + Q(x,y,z)\,\hat{y} + R(x,y,z)\,\hat{z}$$

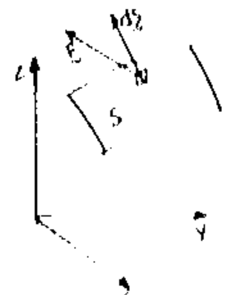
Ορίζεται η ροή του διανυσματικού πεδίου $\underset{\sim}{F}$ από την επιφάνεια $d\underset{\sim}{S}$:

$$d\Phi = \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{S} \qquad (5.4.2)$$

δηλαδή ίση με το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\underset{\sim}{F}, d\underset{\sim}{S}$.

Αν S είναι μία επιφάνεια, μέσα στο πεδίο, η ροή του πεδίου $\underset{\sim}{F}$ από την επιφάνεια μπορεί να προκύψει με άθροιση των στοιχειωδών ροών, δηλαδή ολοκλήρωση:

$$\Phi = \iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} \qquad (5.4.3)$$



Λόγω της (5.4.1) γράφεται:

$$\Phi = \iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\cdot\hat{n}\, dS \qquad (5.4.4)$$

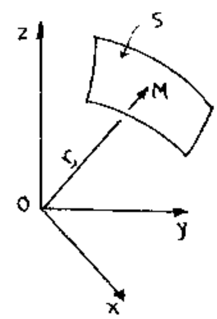
Το ολοκλήρωμα της σχέσης αυτής (ή της προηγούμενης) ονομάζεται επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\underset{\sim}{F}(x,y,z)$ στην επιφάνεια S.

Η ποσότητα $\underset{\sim}{F}\cdot\hat{n}$ (εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\underset{\sim}{F}$, $\hat{n}$) είναι μία βαθμωτή συνάρτηση. Σύμφωνα λοιπόν με την προηγούμενη σχέση, το επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\underset{\sim}{F}$ στην επιφάνεια S, είναι ίσο με το επιφανειακό ολοκλήρωμα (πρώτου είδους) της βαθμωτής συνάρτησης $\underset{\sim}{F}\cdot\hat{n}$.

Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος της διανυσματικής συνάρτησης $\underset{\sim}{F}(x,y,z)$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(I) Η εξίσωση της επιφάνειας είναι δοσμένη σε παραμετρική μορφή με παραμέτρους u,υ:

$$x = x(u,\upsilon) \qquad y = y(u,\upsilon) \qquad z = z(u,\upsilon)$$



Το τυχαίο σημείο M της επιφάνειας έχει διάνυσμα θέσης:

$$\underset{\sim}{r} = (x,y,z) = \big(x(u,\upsilon),\ y(u,\upsilon),\ z(u,\upsilon)\big)$$

Είναι:

$$\underset{\sim}{r}_u = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u) \qquad \underset{\sim}{r}_\upsilon = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \upsilon} = (x_\upsilon, y_\upsilon, z_\upsilon)$$

Ισχύει (D είναι ο τόπος ολοκλήρωσης σε άξονες u,υ):

$$\iint\limits_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint\limits_{(D)} \underset{\sim}{F}\big(x(u,\upsilon), y(u,\upsilon), z(u,\upsilon)\big) \cdot \big(\underset{\sim}{r}_u \times \underset{\sim}{r}_\upsilon\big)\, du\, d\upsilon \qquad (5.4.5)$$

Στον τύπο αυτό ισχύει το πρόσημο (+) αν τα διανύσματα $d\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{r}_u \times \underset{\sim}{r}_\upsilon$ είναι ομόρροπα ή ισοδύναμα αν τα $\hat{n}$, $\underset{\sim}{r}_u \times \underset{\sim}{r}_\upsilon$ είναι ομόρροπα, αφού το $d\underset{\sim}{S} = dS\hat{n}$. Αυτό ισχύει όταν το εσωτερικό γινόμενο $\hat{n}$ επί $\underset{\sim}{r}_u \times \underset{\sim}{r}_\upsilon$ είναι θετικό. Διαφορε-

[illegible] ( )

(+) αν $\hat{n}\cdot(\underset{\sim}{r}_u \times \underset{\sim}{r}_v) > 0$

(−) " $\hat{n}\cdot(\underset{\sim}{r}_u \times \underset{\sim}{r}_v) < 0$

Το $\hat{n}$ θα είναι βέβαια δοσμένο.

(ΙΙΙ) Η εξίσωση της επιφάνειας είναι $z = z(x,y)$. Αν τ_{xy} είναι η προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο Oxy, τότε:

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{\tau_{xy}} (-Pz_x - Qz_y + R)\, dx\,dy \qquad (5.4.6)$$

Το πρόσημο εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας. Κρατάμε το (+) αν $\hat{n}\cdot\hat{z} > 0$ και (−) αν $\hat{n}\cdot\hat{z} < 0$.

Η σχέση (5.4.6) ισχύει κυκλικά: Αν $y = y(x,z)$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας και τ_{xz} η προβολή της στο επίπεδο Oxz, τότε:

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{\tau_{xz}} (-Ry_z - Py_x + Q)\, dx\,dz \qquad (5.4.7)$$

όπου εδώ κρατάμε το (+) αν $\hat{n}\cdot\hat{y} > 0$ και το (−) αν $\hat{n}\cdot\hat{y} < 0$.
Τέλος, αν $x = x(y,z)$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας και τ_{yz} είναι η προβολή της στο επίπεδο Oyz τότε:

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{\tau_{yz}} (-Qx_y - Rx_z + P)\, dy\,dz \qquad (5.4.8)$$

όπου εδώ είναι (+) αν $\hat{n}\cdot\hat{x} > 0$, και (−) αν $\hat{n}\cdot\hat{x} < 0$.

Παρατήρηση: Αν $\hat{n}, \hat{m}$ είναι δύο μοναδιαία διανύσματα ($|\hat{n}| = |\hat{m}| = 1$) και φ είναι η μεταξύ τους γωνία, τότε:

$$\hat{n}\cdot\hat{m} = |\hat{n}|\cdot|\hat{m}|\cos\varphi = \cos\varphi$$

Αν λοιπόν η γωνία φ είναι οξεία, τότε $\cos\varphi > 0$, άρα $\hat{n}\hat{m} > 0$
Αν είναι αμβλεία τότε $\hat{n}\hat{m} < 0$

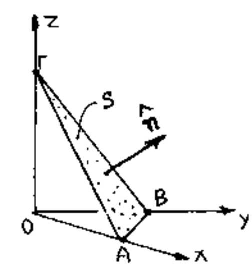
Άσκηση 9

Να υπολογισθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου:

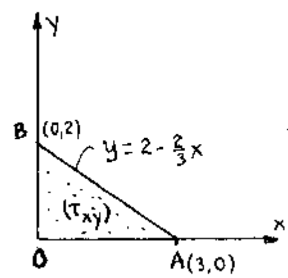
$F = (x, -z, y)$

από το τμήμα του επιπέδου $2x+3y+z=6$, $x>0, y>0, z>0$ αν ο προσανατολισμός είναι: $\hat{n}\cdot\hat{z}>0$

Λύση



Σχεδιάζουμε πρώτα την επιφάνεια S. Για $y=z=0$ είναι $x=3$. Άρα $A(3,0,0)$. Για $x=z=0$ είναι $y=2$. Άρα $B(0,2,0)$. Για $x=y=0$ είναι $z=6$. Άρα $\Gamma(0,0,6)$. Το επίπεδο με εξίσωση $2x+3y+z=6$ έχει λοιπόν σημεία τομής με τους άξονες τα $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $\Gamma(0,0,6)$. Επειδή $\hat{n}\cdot\hat{z}>0$, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε τυχαίο σημείο της επιφάνειας σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα z. Άρα έχει τη φορά του σχήματος (προς τα πάνω). Λέμε ότι θετική όψη της επιφάνειας είναι η πάνω. Η εξίσωση της επιφάνειας γράφεται:



$$z = 6-2x-3y \qquad (1)$$

Η ροή που ζητείται υπολογίζεται: ($\hat{n}\cdot\hat{z}>0$, κρατάμε (+))

$$\iint_{(S)} F\cdot dS = + \iint_{(T_{xy})} (-Pz_x - Qz_y + R)\,dxdy \qquad (2)$$

Από τη δοσμένη διανυσματική συνάρτηση έχουμε:

$$F = (x, -z, y) = (P, Q, R) \Rightarrow P = x,\ Q = -z,\ R = y$$

Από τη σχέση (1) με μερικές παραγωγίσεις έχουμε:

$$z_x = -2, \quad z_y = -3$$

Ο τόπος τ_{xy} (προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο Oxy) είναι το τρίγωνο $\hat{OAB}$. Η σχέση (2) γράφεται:

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = +\iint_{(\tau_{xy})} \left(-x\cdot(-2) - (-z)\cdot(-3) + y\right) dxdy \implies$$

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint_{(\tau_{xy})} (2x - 3z + y)\, dxdy \qquad (3)$$

όπου το z αντικαθίσταται με την έκφρασή του $z = z(x,y)$ από την επιφάνεια, δηλ. $z = 6 - 2x - 3y$, οπότε η (3) γράφεται:

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint_{(\tau_{xy})} (2x - 3(6-2x-3y) + y)\, dxdy \implies$$

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint_{(\tau_{xy})} (8x + 10y - 18)\, dxdy \qquad (4)$$

Ο τόπος (τ_{xy}) είναι κανονικός ως προς x, ανάμεσα στις ευθείες $x = 0$, $x = 3$. Κλείνει κάτω από την $y = 0$ και πάνω από την AB. Η AB (τομή των επιπέδων $2x + 3y + z = 6$, $z = 0$) έχει εξίσωση:

$$(2x + 3y + z = 6,\ z = 0) \iff (2x + 3y = 6,\ z = 0) \iff$$

$$\left(y = 2 - \tfrac{2}{3}x,\ \ z = 0\right)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της σχέσης (4).

$$\iint_{(\tau_{xy})} (8x + 10y - 18)\, dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^{2 - \frac{2}{3}x} (8x + 10y - 18)\, dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(8xy + 10\frac{y^2}{2} - 18y\right)\Big|_0^{2-\frac{?}{}x} dx = \int_0^1 \left(8x(2-\tfrac{?}{3}x) + 5(2-\tfrac{?}{3}x)^2 - 18(2-\tfrac{?}{3}x)\right) dx$$

$$= -56 \quad \Longrightarrow \quad \iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = -56$$

Άσκηση 10

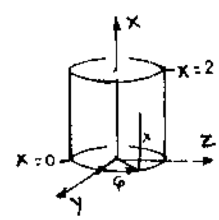
Να υπολογισθεί η ροή της διανυσματικής συνάρτησης:

$$\underset{\sim}{F} = (y, z, -x)$$

από το τμήμα της επιφάνειας $y^2+z^2=1$ που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $x=0$, $x=2$. Θετική φορά προς τα έξω.

Λύση

Σχεδιάζουμε πρώτα την επιφάνεια S. Παρατηρούμε ότι από την εξίσωση $y^2+z^2=1$ απουσιάζει η μεταβλητή x. Άρα αυτή παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα // στον άξονα x. Το επίπεδο yz $(x=0)$ τέμνει την επιφάνεια κατά την περιφέρεια $y^2+z^2=1$. Τα επίπεδο $x=2$ είναι κάθετο στον άξονα x στη θέση $x=2$. Προκύπτει η κυλινδρική επιφάνεια του σχήματος.



Επειδή η επιφάνεια ολοκλήρωσης είναι κυκλική κυλινδρική (με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα x) χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητών όπως και στα επιφανειακά ολοκληρώματα α' είδους. Εδώ είναι:

$$y = 1\cdot\cos\varphi \qquad z = 1\cdot\sin\varphi \qquad x = x \qquad (0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le x \le 2)$$

Το τυχαίο σημείο της επιφάνειας έχει διάνυσμα θέσης:

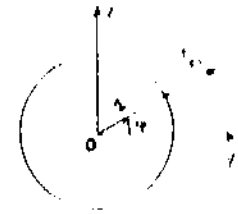
$$\underset{\sim}{r} = (x, y, z) \Rightarrow \underset{\sim}{r} = (x, \cos\varphi, \sin\varphi)$$

Είναι

$$\underset{\sim}{r}_x = \frac{\partial r}{\partial x} = (1,0,0) \qquad r_\varphi = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (0, \sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$\underset{\sim}{r}_x \times \underset{\sim}{r}_\varphi = \hat{x} \times (\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\varphi\,\hat{z}) = \sin\varphi\,\hat{z} - \cos\varphi\,\hat{y} = (0, -\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Η θετική φορά του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος $\hat{n}$ στην επιφάνεια είναι προς τα έξω, όπως φαίνεται στο δίπλα σχήμα. Είναι λοιπόν:



$$\hat{n} = |\hat{n}|\cos\varphi\,\hat{y} + |\hat{n}|\sin\varphi\,\hat{z} \implies \hat{n} = \cos\varphi\,\hat{y} + \sin\varphi\,\hat{z} = (0, \cos\varphi, \sin\varphi)$$

αφού $|\hat{n}| = 1$.

Η διανυσματική συνάρτηση γράφεται:

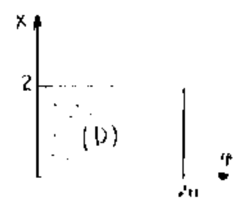
$$\underset{\sim}{F} = (y, z, -x) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -x)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (5.4.5):

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{D} (\cos\varphi, \sin\varphi, -x)\cdot(0, -\cos\varphi, -\sin\varphi)\,d\varphi\,dx \implies$$

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{(D)} (-\sin\varphi\cos\varphi + x\sin\varphi)\,d\varphi\,dx \qquad (1)$$

όπου D είναι ο τόπος ολοκλήρωσης σε άξονες x, φ: $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le x \le 2$. Για να βρούμε το πρόσημο που θα επιλέξουμε, σχηματίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:



$$\hat{n}\cdot(\underset{\sim}{r}_x \times \underset{\sim}{r}_\varphi) = (0, \cos\varphi, \sin\varphi)\cdot(0, -\cos\varphi, -\sin\varphi) =$$

$$= -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1 < 0$$

Θα επιλέξουμε το πρόσημο (−) οπότε η (1) γράφεται:

$$\iint\limits_{(S)} \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = \iint\limits_{(D)} (\sin\varphi\cos\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi\,dx =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,dx - \iint\limits_{(D)} x\sin\varphi\,d\varphi\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \sin\varphi\cos\varphi\,dx\right)d\varphi - \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 x\sin\varphi\,dx\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\sin\varphi\cos\varphi\left(\int_0^2 dx\right)\right)d\varphi - \int_0^{2\pi}\left(\sin\varphi\int_0^2 x\,dx\right)d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi - 2\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d(\sin\varphi) - 0 = 0$$

Άσκηση 11

Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\underset{\sim}{F} = (2x, 1, 0)$ στη σφαιρική επιφάνεια (θετική φορά προς τα έξω) $x^2+y^2+z^2=4$.

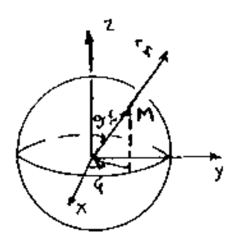
Λύση

Επειδή η επιφάνεια ολοκλήρωσης είναι σφαιρική, θεωρούμε την παραμετρική παράσταση: (ακτίνα ίση με 2)

$$x = 2\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = 2\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = 2\cos\vartheta$$

Έτσι, το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου M της σφαιρικής επιφάνειας είναι:

$$\underset{\sim}{r} = (2\sin\vartheta\cos\varphi,\ 2\sin\vartheta\sin\varphi,\ 2\cos\vartheta)$$



και δείχνει από το 0 προς το M. Άρα το αντίστοιχο μοναδιαίο δείχνει προς τα έξω:

$$\hat{r} = \frac{\underset{\sim}{r}}{|\underset{\sim}{r}|} = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta)$$

Είναι:

$$\underset{\sim}{r}_\theta = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{d\theta} (2\cos\theta\cos\varphi,\ 2\cos\theta\sin\varphi,\ -2\sin\theta)$$

$$\underset{\sim}{r}_\varphi = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{d\varphi} = (-2\sin\theta\sin\varphi,\ 2\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

και το εξωτερικό γινόμενο υπολογίζεται με το γνωστό κανόνα:

$$\underset{\sim}{r}_\theta \times \underset{\sim}{r}_\varphi = (2\cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + 2\cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - 2\sin\theta\,\hat{z}) \times$$

$$\times (-2\sin\theta\sin\varphi\,\hat{x} + 2\sin\theta\cos\varphi\,\hat{y}) =$$

$$= 4\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\,\hat{z} + 4\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\,\hat{z} + 4\sin^2\theta\sin\varphi\,\hat{y} + 4\sin^2\theta\cos\varphi\,\hat{x} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{r}_\theta \times \underset{\sim}{r}_\varphi = 4\sin^2\theta\cos\varphi\,\hat{x} + 4\sin^2\theta\sin\varphi\,\hat{y} + 4\sin\theta\cos\theta\,\hat{z}$$

Η διανυσματική συνάρτηση είναι:

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = (2x, z, y) = (4\sin\theta\cos\varphi,\ 1,\ 0)$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι: (σχέση 5.4.1)

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{(D)} (4\sin\theta\cos\varphi,\ 1,\ 0)\cdot(\underset{\sim}{r}_\theta \times \underset{\sim}{r}_\varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{(D)} (4\sin\theta\cos\varphi, 1, 0)\cdot(4\sin^2\theta\cos\varphi,\ 4\sin^2\theta\sin\varphi,\ 4\sin\theta\cos\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Longrightarrow \iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{(D)} (16\sin^3\theta\cos^2\varphi + 4\sin^2\theta\sin\varphi)\, d\theta\, d\varphi \qquad (1)$$

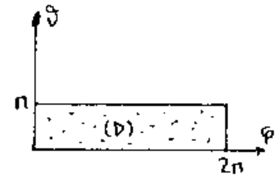
Για την επιλογή του προσήμου υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\hat{n} = \hat{r}$ (κάθετο προς τα έξω) και του $\underset{\sim}{r}_\theta \times \underset{\sim}{r}_\varphi$:

$$\hat{r}\cdot(\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$\cdot(4\sin^2\theta\cos\varphi,\ 4\sin^2\theta\sin\varphi,\ 4\sin\theta\cos\theta)$$

$$4\sin^3\theta\cos^2\varphi + 4\sin^3\theta\sin^2\varphi + 4\sin\theta\cos^2\theta = 4\sin\theta$$

Επειδή $0\le\theta\le\pi$ είναι $\sin\theta\geq 0$ Άρα κρατάμε το σημείο (+)
Ο τόπος (D) σε άξονες θ,φ φαίνεται στο σχήμα. Η σχέση (1) γράφεται:



$$\iint_{(S)} \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}(16\sin^3\theta\cos^2\varphi + 4\sin^2\theta\sin\varphi)\,d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(16\sin^3\theta\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right)\right)d\theta + \int_0^{\pi}\left(4\sin^2\theta\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)\right)d\theta =$$

$$= 16\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta = 16\pi\,\frac{4}{3} = \frac{64\pi}{3}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin2\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi$

(β) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = -\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0$

(γ) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta = \int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\,d(-\cos\theta) = \left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$

Κεφάλαιο 6

Διανυσματική ανάλυση

6.1 Οι διαφορικοί τελεστές.

Θεωρούμε τον τόπο (V_1) του χώρου $\mathbb{R}^3$, όπου έχουμε κατανεμημένο ένα βαθμωτό μέγεθος. Ο χώρος αυτός αποτελεί ένα βαθμωτό πεδίο. Το μέγεθος είναι συνάρτηση της θέσης. Για παράδειγμα, αν το μέγεθος είναι η θερμοκρασία T, έχουμε:

$$T = T(x,y,z)$$

Έχουμε γνωρίσει(*) την κλίση ή βαθμίδα μιας βαθμωτής συνάρτησης (ενός βαθμωτού πεδίου) που είναι:

$$\operatorname{grad}T(x,y,z) = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z} \qquad (6.1.1)$$

ή σύμφωνα με το γνωστό συμβολισμό των μερικών παραγώγων:

$$\operatorname{grad}T(x,y,z) = T_x\hat{x} + T_y\hat{y} + T_z\hat{z} \qquad (6.1.2)$$

Η κλίση λοιπόν μίας βαθμωτής συνάρτησης είναι μία διανυσματική συνάρτηση.

Με την εισαγωγή του συμβόλου "ανάδελτα" ∇:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης T γράφεται:

$$\operatorname{grad}T = \nabla T \qquad (6.1.3)$$

(*) ΒΛΕΠΕ: "ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ"

Θεωρούμε τώρα το χώρο (V_1) μέσα στον οποίο είναι κατανεμημένο ένα διανυσματικό μέγεθος. Ο χώρος αυτός είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Το διανυσματικό μέγεθος είναι συνάρτηση της θέσης. Για παράδειγμα, το πεδίο μιας δύναμης $\underset{\sim}{F}$:

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\hat{x} + Q(x,y,z)\,\hat{y} + R(x,y,z)\,\hat{z}$$

Έχει ορισθεί η περιστροφή ή στροβιλισμός του πεδίου:

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F} = \mathrm{curl}\,\underset{\sim}{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

ή με το συμβολισμό των μερικών παραγώγων:

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F} = \hat{x}\,(R_y - Q_z) + \hat{y}\,(P_z - R_x) + \hat{z}\,(Q_x - P_y) \qquad (6.1.4)$$

Όπως φαίνεται, η περιστροφή μίας διανυσματικής συνάρτησης είναι μία (νέα) διανυσματική συνάρτηση.
Με τη χρήση του συμβόλου ανάδελτα: ∇, η περιστροφή γράφεται:

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F} = \nabla \times \underset{\sim}{F} \qquad (6.1.5)$$

Το διανυσματικό πεδίο $\underset{\sim}{F} = (P,Q,R)$ ορίζεται και η "απόκλιση" $\mathrm{div}\,\underset{\sim}{F}$ που είναι ίση με:

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad (6.1.5)$$

Όπως φαίνεται, η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου είναι μια βαθμωτή ποσότητα (αριθμός).
Με χρήση του συμβόλου ανάδελτα: ∇, η απόκλιση είναι δυνατό να γραφεί:

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{F} = \nabla \cdot \underset{\sim}{F} \qquad (6.1.6)$$

Στη σχέση αυτή το $\nabla \cdot \underset{\sim}{F}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των "διανυσμάτων" $\nabla, \underset{\sim}{F}$ και έχει σαν αποτέλεσμα αριθκό (βαθμωτή συνάρτηση). Στη σχέση όμως (6.16) το $\nabla \times \underset{\sim}{F}$ είναι το εξωτερικό γινόμενο του "διανύσματος" ∇ επί το διάνυσμα $\underset{\sim}{F}$ και, βέβαια, έχει σαν αποτέλεσμα διανυσματικό μέγεθος.

Έχει δειχθεί στο Κεφάλαιο 2 η ταυτότητα:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \times (\nabla f) = 0.$$

(για κάθε βαθμωτή συνάρτηση $f(x,y,z)$). Μπορεί με τον ίδιο τρόπο να δειχθεί ότι:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \underset{\sim}{F}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla \times \underset{\sim}{F}) = 0.$$

(για κάθε διανυσματική συνάρτηση $\underset{\sim}{F}$).

Άσκηση 1

Αν η βαθμωτή συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει μερικές παραγώγους ως προς x, y, z και η διανυσματική συνάρτηση $\underset{\sim}{F} = (P, Q, R)$ έχει συντεταγμένες με μερικές παραγώγους P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z, R_x, R_y, R_z να δειχθεί ότι:

(α) $\operatorname{div}(f\underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{F} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \underset{\sim}{F}$ (1)

(β) $\operatorname{rot}(f\underset{\sim}{F}) = f \operatorname{rot} \underset{\sim}{F} + \operatorname{grad} f \times \underset{\sim}{F}$ (2)

Λύση

Έχουμε:

$$\operatorname{grad} f = f_x \hat{x} + f_y \hat{y} + f_z \hat{z} \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{F} = P_x + Q_y + R_z \tag{4}$$

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = \hat{x}(R_y - Q_z) + \hat{y}(P_z - R_x) + \hat{z}(Q_x - P_y) \tag{5}$$

(α) Για την απόδειξη της (1) θεωρούμε την ποσότητα

$$f\underset{\sim}{F} = (fP, fQ, fR)$$

Έχουμε:

$$\operatorname{div}(f\underset{\sim}{F}) = \operatorname{div}(fP, fQ, fR) = \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} + \frac{\partial(fR)}{\partial z} \Longrightarrow$$

$$\operatorname{div}(f\underset{\sim}{F}) = f_x P + f P_x + f_y Q + f Q_y + f_z R + f R_z \qquad (6)$$

Λόγω των σχέσεων (3), (4) έχουμε:

$$\underset{\sim}{F}\operatorname{grad}f + f\operatorname{div}\underset{\sim}{F} = (P, Q, R)\cdot(f_x, f_y, f_z) + f\cdot(P_x + Q_y + R_z) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{F}\operatorname{grad}f + f\operatorname{div}\underset{\sim}{F} = Pf_x + Qf_y + Rf_z + fP_x + fQ_y + fR_z \qquad (7)$$

Τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (6), (7) είναι ίσα. Άρα είναι και τα πρώτα, οπότε προκύπτει η ισχύς της (1).

(β) Θεωρούμε την ποσότητα:

$$f\underset{\sim}{F} = (fP, fQ, fR)$$

οπότε είναι:

$$\operatorname{rot}(f\underset{\sim}{F}) = \hat{x}\left(\frac{\partial(fR)}{\partial y} - \frac{\partial(fQ)}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial(fP)}{\partial z} - \frac{\partial(fR)}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial(fQ)}{\partial x} - \frac{\partial(fP)}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot}(f\underset{\sim}{F}) = \hat{x}\left(f_y R + f R_y - f_z Q - f Q_z\right) + \hat{y}\left(f_z P + f P_z - f_x R - f R_x\right) +$$

$$+ \hat{z}\left(f_x Q + f Q_x - f_y P - f P_y\right) \qquad (8)$$

Λόγω των σχέσεων (3), (5) έχουμε:

$$f\operatorname{rot}\underset{\sim}{F} = \hat{x}(fR_y - fQ_z) + \hat{y}(fP_z - fR_x) + \hat{z}(fQ_x - fP_y) \qquad (9)$$

$$\operatorname{grad}f \times \underset{\sim}{F} = (f_x\hat{x} + f_y\hat{y} + f_z\hat{z}) \times (P\hat{x} + Q\hat{y} + R\hat{z}) =$$

$$f_x Q\hat{z} - f_x R\hat{y} - f_y P\hat{z} + f_y R\hat{x} + f_z P\hat{y} - f_z Q\hat{x} \quad .$$

$$\operatorname{grad} f \times F = \hat{x}(Rf_y - Qf_z) + \hat{y}(Pf_z - Rf_x) + \hat{z}(Qf_x - Pf_y) \qquad (10)$$

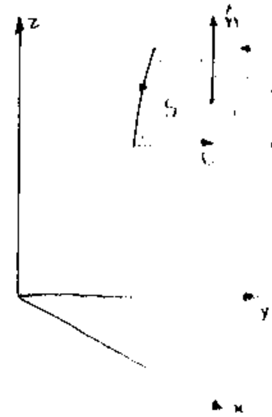
Με πρόσθεση κατά μέλη των (9), (10) και λόγω της (8) προκύπτει η ισχύς της (2)

Παρατήρηση: Με χρήση του συμβόλου "ανάδελτα" οι σχέσεις (1), (2) γράφονται αντίστοιχα:

$$\nabla (f\underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{F} \cdot (\nabla f) + f \cdot (\nabla \underset{\sim}{F})$$

$$\nabla \times (f\underset{\sim}{F}) = f \cdot (\nabla \times \underset{\sim}{F}) + (\nabla f) \times \underset{\sim}{F}$$

6.2 Το θεώρημα Stokes



Υποθέτουμε ότι μία επιφάνεια S έχει σύνορο την κλειστή καμπύλη C. Η επιφάνεια S και η καμπύλη C είναι σχετικά προσανατολισμένες: Αν τοποθετήσουμε το δεξί χέρι ώστε ο αντίχειρας να δείχνει τη φορά του $\hat{n}$ (προσανατολισμό της επιφάνειας S) τότε τα υπόλοιπα δάκτυλα δείχνουν τη φορά της C (προσανατολισμό της C).

Υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες της διανυσματικής συνάρτησης

$$\underset{\sim}{F} = (P, Q, R)$$

έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στην επιφάνεια S. Με την προϋπόθεση αυτή ισχύει:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \iint_S \operatorname{rot} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} \qquad (6.2.1)$$

με τους προσανατολισμούς που αναφέρθηκαν.

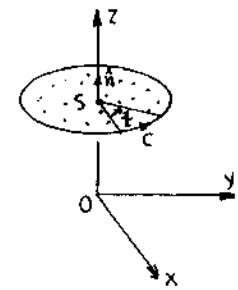
Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό σαν θεώρημα Stokes και έχει μεγάλη σπουδαιότητα στις Φυσικές Επιστήμες.

Παρατήρηση: Αν το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλ. $\text{rot}\underset{\sim}{F}=0$ τότε η "κυκλοφορία" είναι μηδενική πάνω στην κλειστή καμπύλη C.

Άσκηση 2

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\underset{\sim}{F}=(x-z,\ z\ ,\ x+y)$. Να επαληθευθεί το θεώρημα Stokes στον κυκλικό δίσκο $x^2+y^2\le 1$, $z=4$.

Λύση



Η επιφάνεια S είναι κυκλικός δίσκος στο επίπεδο $z=4$ με κέντρο $(0,0,4)$ και ακτίνα ίση με 1. Θεωρούμε τον προσανατολισμό της καμπύλης C που φαίνεται στο σχήμα οπότε ο προσανατολισμός της επιφάνειας S του δίσκου είναι προς τα πάνω: $\hat{n}=\hat{z}$ (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού).

Θα δείξουμε ότι:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}d\underset{\sim}{\ell}=\iint_{(S)}\text{rot}\underset{\sim}{F}d\underset{\sim}{S} \tag{1}$$

αφού υπολογίσουμε χωριστά τα δύο ολοκληρώματα:

(α) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα: Είναι:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}d\underset{\sim}{\ell}=\oint_C\Big((x-z)dx+zdy+(x+y)dz\Big) \tag{2}$$

Μία παραμετρική παράσταση της καμπύλης C είναι:

$$x=\cos t \qquad y=\sin t \qquad z=4 \qquad (0\le t<2\pi)$$

οπότε

$$dx = -\sin t\,dt, \quad dy = \cos t\,dt, \quad dz = 0$$

και η σχέση (2) γράφεται:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = \int_0^{2\pi}\Big((\cos t-4)(-\sin t\,dt) + 4\cos t\,dt + (\sin t+\cos t)\cdot 0\Big) =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-\sin t\cos t + 4\sin t + 4\cos t)\,dt = -\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt + 4\int_0^{2\pi}\sin t\,dt + 4\int_0^{2\pi}\cos t\,dt$$

$$\Rightarrow \oint_C \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = -\int_0^{2\pi}\sin t\,d(\sin t) + 4(-\cos t)\Big|_0^{2\pi} + 4\sin t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \oint_C \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = 0 \qquad (3)$$

(β) Το επιφανειακό ολοκλήρωμα:
Υπολογίζουμε πρώτα το $\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F}$:

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial(x-z)}{\partial z} - \frac{\partial(x+y)}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial(x-z)}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F} = -2\hat{y} = (0, -2, 0)$$

Η ολοκληρωτέα (διανυσματική) συνάρτηση στο επιφανειακό ολοκλήρωμα που είναι η $\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F}$ έχει:

$$P = 0, \quad Q = -2, \quad R = 0$$

Η επιφάνεια S έχει εξίσωση $z = z(x,y)$: $z = 4$. Προβάλλεται στο επίπεδο Oxy στον τόπο τ_{xy} που προφανώς είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο (0,0) και ακτίνα ίση με 1. Είναι:

$$\iint_{(S)} \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = +\iint_{\tau_{xy}} (-0\cdot z_x - (-2)\,z_y + 0)\,dx\,dy \qquad (4)$$

όπου κρατήσαμε το πρόσημο (+) αφού $\hat{n}\cdot\hat{k} = 1 > 0$. Όμως η εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$z = 4 \implies z_x = 0, \quad z_y = 0$$

και η σχέση (4) δίνει:

$$\iint_{(S)} \operatorname{rot} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = 0 \qquad (5)$$

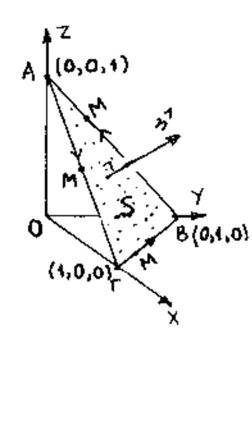
Με βάση τις (3), (5), το θεώρημα έχει επαληθευθεί.

Άσκηση 3

Να επαληθευθεί το θεώρημα Stokes αν $\underset{\sim}{F} = (z, x, 2y)$ πάνω στην επιφάνεια : $x+y+z=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Λύση

Η επιφάνεια S είναι το τμήμα του επιπέδου $x+y+z=1$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο : $x>0$, $y>0$, $z>0$. Για $x=y=0$ η εξίσωση του επιπέδου δίνει $z=1$. Άρα το σημείο τομής του επιπέδου με τον άξονα z είναι το $A(0,0,1)$. Για $x=z=0$ βρίσκουμε $y=1$, άρα το σημείο τομής με τον άξονα y είναι το $B(0,1,0)$. Για $y=z=0$ είναι $x=1$, οπότε το σημείο τομής με τον άξονα x είναι το $\Gamma(1,0,0)$. Η επιφάνεια S είναι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με εξίσωση $x+y+z=1$ ή $z=1-x-y$.



Ορίζουμε θετική φορά για το σύνορο C της επιφάνειας την $B \to A \to \Gamma \to B$ (περίμετρο του τριγώνου) οπότε σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού προκύπτει η φορά του διανύσματος $\hat{n}$ που προσανατολίζει την επιφάνεια S. Με τις φορές αυτές, θα δείξουμε ότι:

$$\oint_{C} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \iint_{(S)} \operatorname{rot} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} \qquad (1)$$

(α) Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

Είναι:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \int_A^\Gamma \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} + \int_\Gamma^B \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} + \int_B^A \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} \qquad (2)$$

Στη <u>διαδρομή Α→Γ:</u>

$$\int_A^\Gamma \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \int_A^\Gamma (z, x, 2y)(dx, dy, dz) = \int_A^\Gamma (z\,dx + x\,dy + 2y\,dz)$$

Παραμετρική παράσταση: Αν $M(x,y,z)$ τυχαίο σημείο επί ΑΓ, έχουμε:

$$\underset{\sim}{AM} \parallel \underset{\sim}{A\Gamma} \Longrightarrow \underset{\sim}{AM} = t\,\underset{\sim}{A\Gamma} \Longrightarrow (x-0, y-0, z-1) = t(1-0, 0-0, 0-1) \Longrightarrow$$

$$x = t,\quad y = 0,\quad z = 1-t, \qquad dx = dt,\ dy = 0,\ dz = -dt$$

Για $x_A = 0 \Rightarrow t_A = 0$ ενώ για $x_\Gamma = 1$ είναι $t_\Gamma = 1$. Έχουμε:

$$\int_A^\Gamma \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \int_A^\Gamma z\,dx + x\,dy + 2y\,dz = \int_{t_A=0}^{t_\Gamma=1} \big((1-t)dt + t\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot(-dt)\big) = \int_0^1 (1-t)\,dt =$$

Στη <u>διαδρομή ΓΒ</u>, αν $M(x,y,z)$ τυχαίο σημείο, έχουμε

$$\underset{\sim}{\Gamma M} = t\,\underset{\sim}{\Gamma B} \Longrightarrow (x-1, y-0, z-0) = t(0-1, 1-0, 0-0) \Longrightarrow$$

$$x = 1-t,\quad y = t,\quad z = 0,\quad dx = -dt,\ dy = dt,\ dz = 0$$

Για $x_\Gamma = 1$ είναι $t_\Gamma = 0$ ενώ για $x_B = 0$ είναι $t_B = 1$. Άρα:

$$\int_\Gamma^B \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{\ell} = \int_\Gamma^B (z\,dx + x\,dy + 2y\,dz) = \int_{t_\Gamma=0}^{t_B=1} \big(0\cdot(-dt) + (1-t)dt + 2t\cdot 0\big) =$$

$$\int_0^1 (1-t)\,dt = t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Στη <u>διαδρομή ΒΑ</u>, αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο, έχουμε

$$\underset{\sim}{BM} = t\,\underset{\sim}{BA} \Rightarrow (x-0,\, y-1,\, z-0) = t(0-0,\, 0-1,\, 1-0) \Longrightarrow$$

$$x=0,\quad y=1-t,\quad z=t,\quad dx=0,\quad dy=-dt,\quad dz=dt$$

Για $y_B=1$ είναι $t_B=0$, ενώ για $y_A=0$ είναι $t_A=1$. Είναι:

$$\int_B^A \underset{\sim}{E}\, d\underset{\sim}{\ell} = \int_B^A (z\,dx + x\,dy + 2y\,dz) = \int_0^1 \big(t\cdot 0 + 0\cdot(-dt) + 2(1-t)\,dt = $$

$$= \int_0^1 2(1-t)\,dt = 2t - t^2\Big|_0^1 = 1$$

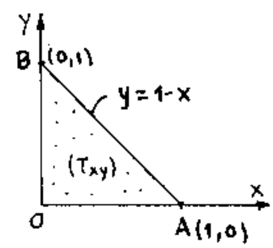
(β) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος.
Η επιφάνεια S δίνεται στη μορφή $z=z(x,y)$:

$$z = 1-x-y\ ,\quad z_x=-1,\quad z_y=-1$$

και έχει προβολή στο επίπεδο Oxy το τρίγωνο OAB.
Υπολογίζουμε το $\mathrm{rot}\underset{\sim}{F}$:

$$\mathrm{rot}\underset{\sim}{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial 2y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial 2y}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{rot}\underset{\sim}{F} = \hat{x}\,2 + \hat{y} + \hat{z} = P\hat{x} + Q\hat{y} + R\hat{z}$$



Είναι

$$\iint_{(S)} \mathrm{rot}\underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = +\iint_{T_{xy}} (-2z_x - 1z_y + 1)\,dx\,dy \qquad (3)$$

όπου κρατήσαμε το πρόσημο (+) αφού $\hat{n}\cdot\hat{z}>0$ (τα $\hat{n}, \hat{z}$, όπως φαίνεται στο σχήμα, σχηματίζουν οξεία γωνία). Άρα:

$$\iint_{(S)} \mathrm{rot}\underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint_{T_{xy}} (-2\cdot(-1) - 1\cdot(-1) + 1)\,dx\,dy = 4\iint_{T_{xy}} dx\,dy =$$

$$= 4\int_0^1\left(\int_0^{1-x} dy\right)dx = 4\int_0^1 (1-x)\,dx = 2$$

(γ) Αντικατάσταση στη σχέση (1):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=2$$

δηλαδή το θεώρημα επαληθεύεται.

Άσκηση 4

Να επαληθευθεί το θεώρημα Stokes για τη διανυσματική συνάρτηση

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z)=(2x-y)\hat{x}-yz^2\hat{y}-y^2z\hat{z}$$

στο πάνω μισό της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=1$

Λύση

Η επιφάνεια S του άνω ημισφαιρίου έχει σύνορο την περιφέρεια κύκλου C. Αν θεωρήσουμε τη φορά της καμπύλης C του σχήματος, προκύπτει φορά (κανόνας δεξιού χεριού) για το $\hat{n}$ στην επιφάνεια S, αυτή του σχήματος, που δείχνει και τον προσανατολισμό της επιφάνειας S. Με τις φορές αυτές, θα δείξουμε ότι:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell}=\iint_{(S)} \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} \qquad (1)$$

(α) Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell}=\oint_C (2x-y)dx-yz^2dy-y^2zdz \qquad (2)$$

Η περιφέρεια κύκλου C έχει ακτίνα ίση με 1, βρίσκεται στο επίπεδο Oxy και έχει παραμετρική παράσταση:

$$x=\cos t \qquad y=\sin t \qquad z=0 \qquad (0\le t<2\pi)$$

Άρα είναι:

$$dx=-\sin t\,dt, \quad dy=\cos t\,dt, \quad dz=0$$

Η σχέση (2) γράφεται:

$$\oint_C \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{\ell} = \int_0^{2\pi}(2\cos t-\sin t)(-\sin t)\,dt = -2\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\,dt + \int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\cos t\,d(\cos t) + \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

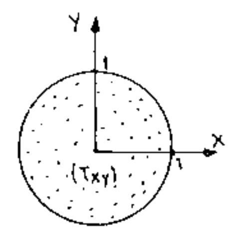
(β) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος:

Επειδή $z>0$, η εξίσωση της επιφάνειας μπορεί να τεθεί στη μορφή $z=z(x,y)$:

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \Longrightarrow \quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad z_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Η προβολή τ_{xy} της επιφάνειας στο επίπεδο Oxy είναι ο δίσκος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα ίση με 1.

Υπολογίζουμε το $\text{rot}\underset{\sim}{F}$:



$$\text{rot}\underset{\sim}{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial(-y^2z)}{\partial y}-\frac{\partial(-yz^2)}{\partial z}\right)+$$

$$+\hat{y}\left(\frac{\partial(2x-y)}{\partial z}-\frac{\partial(-y^2z)}{\partial x}\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial(-yz^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2x-y)}{\partial y}\right)\Longrightarrow$$

$$\text{rot}\underset{\sim}{F} = \hat{x}(-2yz+2yz)+\hat{y}(0+0)+\hat{z}(0+1)=\hat{z}=P\hat{x}+Q\hat{y}+R\hat{z}$$

όπου $P=0$, $Q=0$, $R=1$. Έχουμε:

$$\iint_{(S)}\text{rot}\underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = +\iint_{(\tau_{xy})}(-0\cdot z_x-0\cdot z_y+1)\,dxdy = \iint_{\tau_{xy}}dxdy$$

όπου θέσαμε το σημείο (+), αφού τα διανύσματα $\hat{n}$, $\hat{z}$ σχημιαζουν οξεία γωνία, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, επειδή ο τόπος τ_{xy} είναι κυκλικός δίσκος, θεωρούμε το μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$\iint\limits_{\tau_{xy}} dxdy = \iint\limits_{D} r dr d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r d\varphi \right) dr = \int_0^1 r \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^1 r dr = \pi$$

(γ) Είναι προφανής η ισχύς της σχέσης (1): $\pi = \pi$.

<u>Παρατήρηση</u>: Επειδή η επιφάνεια είναι σφαιρική, μπορεί να τεθεί σε παραμετρική μορφή:

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi \quad y = \sin\vartheta\sin\varphi \quad z = \cos\vartheta \quad \left(0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi < 2\pi \right)$$

δηλαδή το επιφανειακό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί και με δεύτερο τρόπο:

Το τυχαίο σημείο της σφαιρικής επιφάνειας έχει διάνυσμα θέσης:

$$\underset{\sim}{r} = \sin\vartheta\cos\varphi\hat{x} + \sin\vartheta\sin\varphi\hat{y} + \cos\vartheta\hat{z}$$

$$\underset{\sim}{r}_\vartheta = \cos\vartheta\cos\varphi\hat{x} + \cos\vartheta\sin\varphi\hat{y} - \sin\vartheta\hat{z}$$

$$\underset{\sim}{r}_\varphi = -\sin\vartheta\sin\varphi\hat{x} + \sin\vartheta\cos\varphi\hat{y}$$

Έχουμε:

$$\underset{\sim}{r}_\vartheta \times \underset{\sim}{r}_\varphi = (\cos\vartheta\cos\varphi\hat{x} + \cos\vartheta\sin\varphi\hat{y} - \sin\vartheta\hat{z}) \times (-\sin\vartheta\sin\varphi\hat{x} + \sin\vartheta\cos\varphi\hat{y})$$

$$\Longrightarrow \underset{\sim}{r}_\vartheta \times \underset{\sim}{r}_\varphi = \sin^2\vartheta\cos\varphi\hat{x} + \sin^2\vartheta\sin\varphi\hat{y} + \sin\vartheta\cos\vartheta\hat{z} \qquad (3)$$

και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα:

$$\hat{n} = \hat{r} = \frac{\underset{\sim}{r}}{|\underset{\sim}{r}|} = \sin\vartheta\cos\varphi\hat{x} + \sin\vartheta\sin\varphi\hat{y} + \cos\vartheta\hat{z}$$

Είναι:

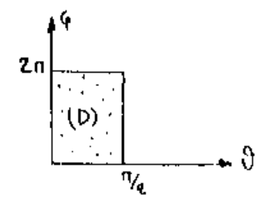
$$\underset{\sim}{r}\cdot(r_\theta \times r_\varphi) = \sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta = \sin\theta > 0$$

άρα κρατάμε το σημείο (1)

Η διανυσματική συνάρτηση $\operatorname{rot}\underset{\sim}{F}$ είναι:

$$\operatorname{rot}\underset{\sim}{F} = (0,0,1)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα υπολογίζεται:



$$\iint_{(S)} \operatorname{rot}\underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint_{(D)} (\operatorname{rot}\underset{\sim}{F})\cdot(\underset{\sim}{r_\theta} \times r_\varphi)\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \iint_{(D)} (0,0,1)\cdot(\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta)\, d\theta\, d\varphi =$$

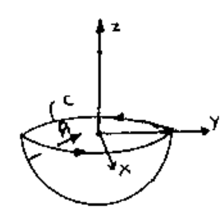
$$= \iint_{(D)} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left(\sin\theta\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\right) d\theta = \pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d(\sin\theta) = \pi$$

(προέκυψε το ίδιο αποτέλεσμα).

Άσκηση 5

Να επαληθευθεί το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\underset{\sim}{F} = (2y, -x, z)$ και την επιφάνεια S της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=4$ που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z=0$.

Λύση



Η επιφάνεια S έχει σύνορο την καμπύλη C, που είναι περιφέρεια κύκλου στο επίπεδο Oxy με κέντρο (0,0) και ακτίνα ίση με 2. Αν ορίσουμε θετική φορά της καμπύλης C αυτή που φαίνεται στο σχήμα, προκύπτει θετική φορά (για τον προσανατολισμό) της επιφάνειας αυτή του σχήματος, όπως προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Με τις φορές αυτές θα δείξουμε ότι:

$$\oint_C \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} = \iint_{(S)} \text{rot}\underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} \qquad (1)$$

(α) Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

$$\oint_C \underset{\sim}{E} d\underset{\sim}{\ell} = \oint_C (2y dx - x dy + z dz) \qquad (2)$$

Η παραμετρική παράσταση της περιφέρειας C είναι:

$$x = 2\cos t \qquad y = 2\sin t \qquad z = 0 \qquad (0 \le t < 2\pi)$$

οπότε βρίσκουμε:

$$dx = -2\sin t\, dt \qquad dy = 2\cos t\, dt \qquad dz = 0$$

Η σχέση (2) γράφεται:

$$\oint_C \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} = \int_0^{2\pi} (2 \cdot 2\sin t(-2\sin t\, dt) - 2\cos t\, 2\cos t\, dt) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8\sin^2 t\, dt - 4\cos^2 t\, dt) = -8\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt - 4\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \quad \text{κ.} \ldots$$

(β) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος.

Επειδή τα σημεία της επιφάνειας έχουν $z<0$, η εξίσωση της επιφάνειας S μπορεί να τεθεί στη μορφή:

$$z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \implies z_x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad z_y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

και η προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο Oxy είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο (0,0) και ακτίνα ίση με ...

Υπολογίζουμε το rot$\underset{\sim}{F}$:

$$\text{rot}\underset{\sim}{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial 2y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(-2y)}{\partial y}\right) = -3\hat{z}$$

$$\text{rot}\underset{\sim}{F} = P\hat{x} + Q\hat{y} + R\hat{z} = -3\hat{z}$$

Είναι:

$$\iint_{(S)} \text{rot}\,\underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = +\iint_{T_{xy}} (-Pz_x - Qz_y + R)\,dxdy = -\iint_{T_{xy}} 3\,dxdy$$

όπου κρατήσαμε το πρόσημο (+), αφού τα διανύσματα $\hat{n}$, $\hat{k}$ σχηματίζουν οξεία γωνία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Με χρήση πολικών συντεταγμένων, προκύπτει:

$$\iint_{(S)} \text{rot}\,\underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = -3\int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\right)dr = -3\int_0^2 r\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)dr = -6\pi\int_0^2 r\,dr = -12\pi$$

και, προφανώς, το θεώρημα επαληθεύθηκε.

Παρατήρηση: Το επιφανειακό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί και με δεύτερο τρόπο, χρησιμοποιώντας την παραμετρική παράσταση της σφαιρικής επιφάνειας:

$$x = 2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = 2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = 2\cos\vartheta \quad \left(\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \pi, \ 0 \le \varphi < 2\pi\right)$$

όπως στην προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 6

Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes στην επιφάνεια $S: z = 2(x^2+y^2)$, $z \le 2$, αν $\underset{\sim}{F} = (y, -x, y^2z)$

Λύση

Η επιφάνεια $z = 2(x^2+y^2)$ είναι της μορφής $z = f(x^2+y^2)$. Άρα είναι μια επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα z. Για $y = 0$ προκύπτει $z = 2x^2$ που είναι παραβολή στο επίπεδο xz. Περιστροφή της περί τον άξονα z δίνει την επιφάνεια $z = 2(x^2+y^2)$. Η $z \le 2$ είναι τα σημεία που βρίσκονται κάτω από το επίπεδο $z = 2$. Έτσι, η επιφάνεια S είναι το τμήμα της $z = 2(x^2+y^2)$ που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z = 2$. Προφανώς, το σύνορο της επιφάνειας S είναι η καμπύλη C: $z = 2(x^2+y^2)$, $z = 2$, που ισοδύναμα γράφεται:

$$C: \quad x^2+y^2=1 \;, \; z=2$$

δηλαδή είναι περιφέρεια κύκλου στο επίπεδο $z=2$. Αν ορίσουμε θετική φορά της καμπύλης C αυτή του σχήματος προκύπτει (κανόνας δεξιού χεριού) η φορά του $\hat{n}$, δηλαδή ο προσανατολισμός της επιφάνειας S. Με τις φορές αυτές, θα δείξουμε ότι:

$$\oint_{(C)} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} = \iint_{(S)} \text{rot}\underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{S} \qquad (1)$$

(α) Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.
Είναι:

$$\oint_{(C)} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} = \oint_{(C)} (y, -x, y^2 z)(dx, dy, dz) = \oint_{C} (y dx - x dy + y^2 z dz)$$

Η παραμετρική παράσταση της περιφέρειας C είναι:

$$x=\cos t \quad y=\sin t \quad z=2 \qquad (0 \le t < 2\pi)$$

οπότε έχουμε:

$$dx=-\sin t dt \quad dy=\cos t dt \quad dz=0$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\oint_{C} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{\ell} = \int_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t dt) - \cos t \cos t dt + 0) = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

(β) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος:
Είναι

$$\text{rot}\underset{\sim}{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial(y^2 z)}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial(y)}{\partial z} - \frac{\partial(y^2 z)}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right) \Longrightarrow$$

$$\text{rot}\,\underset{\sim}{F} = 2yz\,\hat{x} + 2\hat{z} = P\hat{x} + Q\hat{y} + R\hat{z}$$

$$P = 2yz \qquad Q = 0 \qquad R = 2$$

Επειδή η επιφάνεια S προβάλλεται στο επίπεδο Oxy μέσα στον κυκλικό δίσκο κέντρου (0,0) και ακτίνας 1, έχουμε:

$$\iint\limits_{(S)} \text{rot}\,\underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = + \iint\limits_{(T_{xy})} (-Pz_x - Qz_y + R)\,dxdy \qquad (2)$$

όπου κρατήσαμε το (+) αφού το $\hat{n}$ σχηματίζει οξεία γωνία με το $\hat{z}$. Από την εξίσωση της επιφάνειας έχουμε:

$$z = 2(x^2+y^2) \implies z_x = 4x \qquad z_y = 4y$$

και η σχέση (2) γράφεται:

$$\iint\limits_{(S)} \text{rot}\,\underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint\limits_{(T_{xy})} (-2yz \cdot 4x - 0 - 2)\,dxdy$$

όπου το z αντικαθίσταται με την έκφραση της επιφάνειας, οπότε βρίσκουμε:

$$\iint\limits_{(S)} \text{rot}\,\underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint\limits_{(T_{xy})} (-8xy\, 2(x^2+y^2) - 2)\,dxdy$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος μετασχηματίζουμε σε πολικές συντεταγμένες:

$$\iint\limits_{(S)} \text{rot}\,\underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint\limits_{(D)} (-8r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, 2r^2 - 2)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$\iint\limits_{(D)} -16r^5\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi - 2\iint\limits_{(D)} r\,dr\,d\varphi =$$

$$16\int_0^1 r^5\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)dr - 2\int_0^1 r\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)dr$$

$$16\int_0^1 r^5\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d(\sin\varphi)\right)dr - 4\pi\int_0^1 r\,dr = -2\pi$$

Η επαλήθευση του θεωρήματος είναι προφανής.

6.3 Το θεώρημα της απόκλισης (Gauss - Ostrogradsky)

Υποθέτουμε ότι η κλειστή επιφάνεια S έχει θετική φορά προς τα έξω (φορά του $\hat{n}$) και περικλείει τον όγκο (V). Η διανυσματική συνάρτηση $\underset{\sim}{F} = (P, Q, R)$ έχει συνεχείς συνιστώσες P, Q, R με συνεχείς μερικές παραγώγους στον τόπο (V). Ισχύει:

$$\oiint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iiint_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\, dx\,dy\,dz \qquad (6.3.1)$$

Το θεώρημα αυτό, είναι γνωστό σα θεώρημα της απόκλισης ή θεώρημα Gauss - Ostrogradsky.

Παρατήρηση: Όταν μέσα στον τόπο (V) είναι $\operatorname{div}\underset{\sim}{F} = 0$, τότε η σχέση (6.3.1) δίνει:

$$\oiint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = 0$$

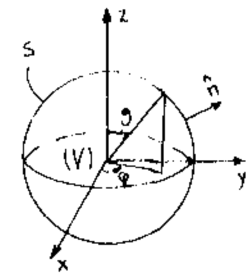
δηλαδή η ροή από την κλειστή επιφάνεια είναι ίση με μηδέν. Το πεδίο αυτό, με $\operatorname{div}\underset{\sim}{F} = 0$ ονομάζεται σωληνοειδές ή πεδίο μηδενικής αποκλίσεως.

Άσκηση 7

Να επαληθευθεί το θεώρημα της απόκλισης στη σφαιρική επιφάνεια S με F

$$S: \; x^2+y^2+z^2=4 \qquad \underset{\sim}{F} \; (x, z, -y)$$

Λύση



Με θετικό προσανατολισμό της σφαιρικής επιφάνειας S προς τα έξω (φορά του $\hat{n}$) θα δείξουμε ότι:

$$\oiint_S \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, dx\,dy\,dz \qquad (1)$$

(α) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος στην επιφάνεια (κλειστή) S, που είναι σφαιρική με ακτίνα ίση με 2. Θα χρησιμοποιήσουμε την παραμετρική παράσταση:

$$x=2\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y=2\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z=2\cos\vartheta \quad (0\le\vartheta\le\pi\,,\; 0\le\varphi<2\pi)$$

Το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου της σφαιρικής επιφάνειας είναι:

$$\underset{\sim}{r} = (2\sin\vartheta\cos\varphi\,,\; 2\sin\vartheta\sin\varphi,\; 2\cos\vartheta)$$

οπότε βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\underset{\sim}{r_\vartheta} = (2\cos\vartheta\cos\varphi,\; 2\cos\vartheta\sin\varphi,\; -2\sin\vartheta)$$

$$\underset{\sim}{r_\varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi,\; 2\sin\vartheta\cos\varphi,\; 0)$$

$$\underset{\sim}{r_\vartheta} \times \underset{\sim}{r_\varphi} = (2\cos\vartheta\cos\varphi\,\hat{x} + 2\cos\vartheta\sin\varphi\,\hat{y} - 2\sin\vartheta\,\hat{z}) \times$$

$$\times\, (-2\sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{x} + 2\sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{y}) \implies$$

$$\underset{\sim}{r_\vartheta} \times \underset{\sim}{r_\varphi} = 4\sin^2\vartheta\cos\varphi\,\hat{x} + 4\sin^2\vartheta\sin\varphi\,\hat{y} + 4\sin\vartheta\cos\vartheta\,\hat{z}$$

Η έκφραση της διανυσματικής συνάρτησης $\underset{\sim}{F}$, συνάρτηση των ϑ, φ είναι

$$\underset{\sim}{F} = (x, z, -y) = (2\sin\vartheta\cos\varphi\ ,\ 2\cos\vartheta\ ,\ -2\sin\vartheta\cdot\sin\varphi)$$

Η σχέση (5.4.5) δίνει:

$$\oiint\limits_{(S)} \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{S} = \pm \iint\limits_{(D)} (2\sin\vartheta\cos\varphi,\ 2\cos\vartheta,\ -2\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot(\underset{\sim}{r}_\vartheta \times \underset{\sim}{r}_\varphi)\, d\vartheta d\varphi \Rightarrow$$

$$\oiint\limits_{S} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{S} = \pm \iint\limits_{(D)} (8\sin^3\vartheta\cos^2\varphi + 8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi - 8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi)\, d\vartheta d\varphi \quad (2)$$

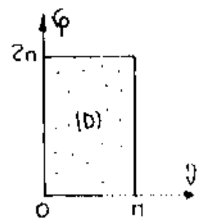
Για την επιλογή του προσήμου έχουμε:

$$\hat{n} = \hat{r} = \frac{\underset{\sim}{r}}{|\underset{\sim}{r}|} = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta)$$

οπότε:

$$\hat{n}\cdot(\underset{\sim}{r}_\vartheta \times \underset{\sim}{r}_\varphi) = 4\sin\vartheta > 0 \qquad (0 \le \vartheta \le \pi)$$

Έτσι επιλέγουμε το πρόσημο (+) και η (2) γράφεται:



$$\oiint\limits_{S} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{S} = \iint\limits_{(D)} 8\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\, d\vartheta d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} 8\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\, d\varphi\right) d\vartheta =$$

$$= 8\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi\right) d\vartheta = \frac{32\pi}{3}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \pi$$

$$\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = -\int_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\, d(\cos\vartheta) = \frac{4}{3}$$

(β) Υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος στο σφαιρικό τόπο (V):

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\, dv = \iiint_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\, dxdydz \qquad (3)$$

Είναι :

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial(-y)}{\partial z} = 1+0-0 = 1$$

Για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος μετασχηματίζουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = r\cos\vartheta$$

όπου είναι $0 \le r \le 2$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$ και:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = r^2\sin\vartheta$$

Η σχέση (3) γράφεται:

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\, dv = \iiint_{(V)} dxdydz = \int_0^2\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin\vartheta\, d\varphi\right)d\vartheta\right)dr =$$

$$= 4\pi\int_0^2 r^2\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\, d\vartheta\right)dr = 4\pi\int_0^2 r^2 dr = 4\pi\,\frac{1}{3}\,2^3 = \frac{32\pi}{3}$$

Η επαλήθευση του θεωρήματος είναι προφανής.

Άσκηση 8

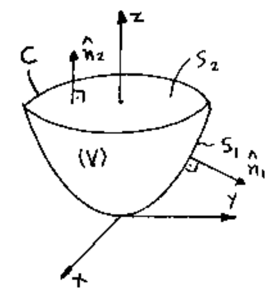
Να επαληθευθεί το θεώρημα Gauss-Ostrogradsky στον τόπο (V) $z \ge 2(x^2+y^2)$, $z \le 2$ με διανυσματική συ ναρτηση | (x+y, ...

Λύση

Ο τόπος (V) καθορίζεται με ανισότητες. Το σύνορό του καθορίζεται από τις αντίστοιχες ισότητες: Η $z=2(x^2+y^2)$ έχει τη μορφή $z=f(x^2+y^2)$, οπότε είναι επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα z. Για $y=0$ προκύπτει η παραβολή $z=2x^2$ του επιπέδου xz. Περιστροφή της περί τον άξονα z δίνει την επιφάνεια $z=2(x^2+y^2)$ (παραβολοειδές). Η επιφάνεια $z=2$ είναι επίπεδο κάθετο στον άξονα z στη θέση $z=2$. Επειδή $z \geq 2(x^2+y^2)$, $z \leq 2$ ο τόπος (V) βρίσκεται πάνω από το παραβολοειδές $z=2(x^2+y^2)$ και κάτω από το επίπεδο $z=2$.

Με θετικό προσανατολισμό της επιφάνειας προς τα έξω, θα δείξουμε ότι:

$$\oiint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iiint_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\; dxdydz \qquad (1)$$



(α) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος:

Η κλειστή επιφάνεια S αποτελείται από το καμπύλο τμήμα S_1 (επιφάνεια του παραβολοειδούς) και το επίπεδο τμήμα S_2: $S=S_1 \cup S_2$. Είναι:

$$\oiint_{(S)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} + \iint_{(S_2)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} \qquad (2)$$

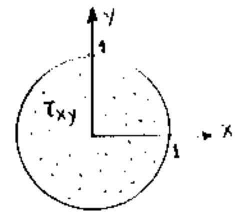
Η επιφάνεια (S_1) έχει εξίσωση $z=2(x^2+y^2)$. Βρίσκουμε την προβολή της στο επίπεδο Oxy: Η καμπύλη C (τομή του επιπέδου $z=2$ και του παραβολοειδούς) είναι:

$$z=2 \;,\quad z=2(x^2+y^2)$$

Με απαλειφή του z προκύπτει η προβολή της στο επίπεδο Oxy: $x^2+y^2=1$. Άρα η επιφάνεια S_1 (και η S_2) προβάλλονται στο εσωτερικό (T_{xy}) της περιφέρειας $x^2+y^2=1$.

Άρα είναι

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint\limits_{(T_{xy})} (-P z_x - Q z_y + R)\, dx\, dy \qquad (3)$$



όπου $\underset{\sim}{F} = (P, Q, R)$ δηλαδή:

$$P = x+y, \quad Q = y+z, \quad R = z$$

Εδώ κρατάμε το πρόσημο (-) στο ολοκλήρωμα αφού $\hat{n} \cdot \hat{z} < 0$ (τα $\hat{n}, \hat{z}$ σχηματίζουν αμβλεία γωνία). Με αντικατάσταση, η (3) γράφεται:

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = - \iint\limits_{(T_{xy})} \Big(-(x+y)\cdot 4x - (y+z)4y + z \Big)\, dx\, dy \qquad (4)$$

όπου είναι $z_x = 4x$, $z_y = 4y$ από την εξίσωση της (S_1). Στην έκφραση (4), το z αντικαθίσταται από την εξίσωση της επιφάνειας; οπότε η (4) γίνεται:

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = - \iint\limits_{(T_{xy})} \Big(-(x+y)4x - \big(y + 2(x^2+y^2)\big)4y + 2(x^2+y^2) \Big)\, dx\, dy \Longrightarrow$$

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = 2 \iint\limits_{(T_{xy})} \Big(2xy + x^2+y^2 + 4y(x^2+y^2) \Big)\, dx\, dy$$

και με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε:

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = 2 \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} (2r^2 \cos\varphi \sin\varphi + r^2 + 4r\sin\varphi\, r^2) r\, d\varphi \Big)\, dr =$$

$$= 4\int_0^1 r^3 \Big(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \Big) dr + 2\int_0^1 r^3 \Big(\int_0^{2\pi} d\varphi \Big) dr + 8\int_0^1 r^4 \Big(\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \Big) dr \Longrightarrow$$

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pi \qquad (5)$$

Η επιφάνεια (S_2) με εξίσωση $z=2$ προβάλλεται στον ίδιο τόπο T_{xy} με την (S_1). Είναι:

$$\iint_{(S_2)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{(T_{xy})} (-P z_x - Q z_y + R)\, dx\, dy \qquad (6)$$

Εδώ είναι $\hat{n}_2 \cdot \hat{z} = 1 > 0$ (όπως δείχνει το σχήμα), άρα κρατάμε (+). Ακόμη, από την εξίσωση της επιφάνειας, είναι

$$z = 2, \quad z_x = 0, \quad z_y = 0$$

Με $P = x+y$, $Q = y+z$, $R = z$, η (6) γίνεται

$$\iint_{(S_2)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = + \iint_{(T_{xy})} z\, dx\, dy$$

όπου το z αντικαθίσταται από την εξίσωση της επιφάνειας $z=2$. Άρα είναι:

$$\iint_{(S_2)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint_{(T_{xy})} 2\, dx\, dy = 2 \iint_{(T_{xy})} dx\, dy = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r\, d\varphi \right) dr = 2\pi$$

Λόγω και της (5), η σχέση (2) δίνει:

$$\oiint_{S} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \pi + 2\pi = 3\pi$$

(β) Υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος:

Έχουμε:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{F} = \frac{\partial (x+y)}{\partial x} + \frac{\partial (y+z)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

οπότε:

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{(V)} 3\, dx\, dy\, dz$$

Ο τόπος (V) κλείνει πάνω από τμήμα του επιπέδου $z=2$, κάτω από τμήμα του παραβολοειδούς $z=2(x^2+y^2)$ που έχουν κοινή προβολή στο επίπεδο Oxy τον κυκλικό δίσκο (τ_{xy}). Άρα:

$$\iiint\limits_{(V)} 3dxdydz = 3\iint\limits_{(\tau_{xy})}\left(\int_{2(x^2+y^2)}^{2} dz\right)dxdy = 3\iint\limits_{(\tau_{xy})}(2-2x^2-2y^2)dxdy$$

και με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε:

$$\iiint\limits_{(V)} 3dxdydz = 3\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(2-2r^2)r\,d\varphi\right)dr = 6\pi\int_0^1(2r-2r^3)dr = 3\pi$$

Το θεώρημα προφανώς επαληθεύεται.

Άσκηση 9

Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα: $\iint\limits_{(S)} \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{S}$

όπου S είναι η σφαιρική επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=a^2$ και $\underset{\sim}{F}=(x^3, y^3, z^3)$.

Λύση

Οι συνιστώσες $P=x^3$, $Q=y^3$, $R=z^3$ είναι συνεχείς συναρτήσεις (ακέραια πολυώνυμα) $\forall (x,y,z)$, όπως και οι μερικές τους παράγωγοι. Στην (κλειστή) σφαιρική επιφάνεια S ισχύει το θεώρημα Gauss - Ostrogradsky:

$$\oiint\limits_{(S)} \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{S} = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\,dxdydz \qquad (1)$$

Μπορούμε δηλαδή αντί για το επιφανειακό ολοκλήρωμα να υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα. Είναι:

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{F} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3x^2+3y^2+3z^2$$

οπότε έχουμε:

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\,dxdydz = 3\iiint_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz \qquad (2)$$

Επειδή ο τόπος ολοκλήρωσης είναι σφαιρικός, θεωρούμε αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = r\cos\vartheta$$

όπου $(0 \le r \le R, \quad 0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi)$ και

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = r^2\sin\vartheta$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι:

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta = r^2$$

και έχουμε:

$$\iiint_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi} r^4\sin\vartheta d\varphi\right)d\vartheta\right)dr = 2\pi\int_0^a\left(\int_0^\pi r^4\sin\vartheta d\vartheta\right)dr$$

$$= 2\pi\int_0^a r^4\left(\int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta\right)dr = 4\pi\int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi a^5}{5}$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι:

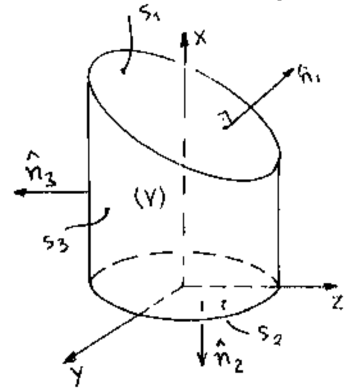
$$\oiint_S \underset{\sim}{F}d\underset{\sim}{S} = \frac{12\pi a^3}{5}$$

Άσκηση 10

Να επαληθεύσετε το θεώρημα της απόκλισης για τη διανυσματική συνάρτηση $\underset{\sim}{F}(x,y,z) = (-2x, 3y, z)$ και το χωρίο (V) με σύνορα:

$$y^2+z^2 = 4, \quad x = 0, \quad x+y+z = 3.$$

Για τη σχεδίαση του χωρίου, παρατηρούμε ότι η εξίσωση $y^2+z^2=4$ δεν περιέχει τη μεταβλητή x. Άρα παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα x. Η τομή της με το επίπεδο yz είναι ο κύκλος $x^2+y^2=4$. Άρα έχουμε κυκλική κυλινδρική επιφάνεια. Η εξίσωση $x=0$ παριστάνει το επίπεδο yz, ενώ η $x+y+z=3$ παριστάνει επίσης επίπεδο. Ο τόπος φαίνεται στο σχήμα, όπου αντί z είναι ο x κατακόρυφος.



Το σύνορο S του τόπου αποτελείται από τις επίπεδες επιφάνειες S_1, S_2 με μοναδιαία κάθετα διανύσματα (προς τα έξω) τα $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$ και το καμπύλο τμήμα S_3 με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{n}_3$ (προς τα έξω). Με τις φορές αυτές θα δείξουμε ότι:

$$\oiint\limits_{S} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, dx\,dy\,dz \iff$$

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} + \iint\limits_{(S_2)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} + \iint\limits_{(S_3)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, dx\,dy\,dz \qquad (1)$$

(α) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος στην επιφάνεια (S_1). Η εξίσωση της επιφάνειας είναι: $x=3-y-z$ και προβάλλεται στο επίπεδο yz στον τόπο T_{yz} που είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο (0,0) και ακτίνα ίση με 2. Η σχέση (5.4.8) που προκύπτει με κυκλική εναλλαγή από τη σχέση (5.4.6) δίνει:

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = + \iint\limits_{(T_{yz})} (-Q x_y - R x_z + P)\, dy\,dz \qquad (2)$$

Όμως είναι:

$x = 3 - y - z$, $x_y = -1$, $x_z = -1$

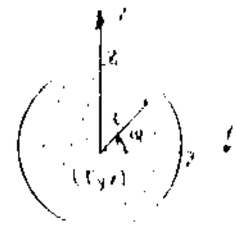
$\underset{\sim}{F} = (P, Q, R) = (-2x, 3y, z) \Longrightarrow P = -2x,\ Q = 3y,\ R = z$

Η σχέση (2) γράφεται:

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint\limits_{(\tau_{yz})} (-3y(-1) - z(-1) - 2x)\, dy\, dz = \iint\limits_{(\tau_{yz})} (3y + z - 2x)\, dy\, dz$$

$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint\limits_{(\tau_{yz})} (-6 + 5y + 3z)\, dy\, dz \qquad (3)$$

όπου αντικαταστήσαμε το x με την έκφρασή του από την επιφάνεια: $x = 3 - y - z$. Ο τόπος τ_{yz} είναι κυκλικός, οπότε με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες, η (3) δίνει:



$$\iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (-6 + 5r\cos\varphi + 3r\sin\varphi)\, r\, d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_0^2 -6r2\pi\, dr = -12\pi \int_0^2 r\, dr = -24\pi \Longrightarrow \iint\limits_{(S_1)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = -24\pi$$

(β) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος στην (S_2): Η (S_2) έχει εξίσωση $x = 0$ και προβάλλεται στον κυκλικό δίσκο (τ_{yz}) όπως και η (S_1). Εδώ είναι $\hat{n}_2 \hat{x} = -1 < 0$ οπότε έχουμε:

$$\iint\limits_{(S_2)} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = -\iint\limits_{(\tau_{yz})} (-Q x_y - R x_z + P)\, dy\, dz \qquad (4)$$

Όμως είναι:

$x = 0$, $\quad x_y = 0$, $\quad x_z = 0$, $\quad P = -2x$, $\quad Q = 3y$, $\quad R = z$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) βρίσκουμε

$$\iint_{(S_2)} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{S} = -\iint_{(T_{yz})} -2x\,dy\,dz$$

Αντικαθιστούμε το x, στη σχέση αυτή, με την έκφραση της επιφάνειας S_2 και βρίσκουμε

$$\iint_{(S_2)} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{S} = -\iint_{(T_{yz})} -2\,0\cdot dy\,dz = 0 \implies \iint_{(S_2)} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{S} = 0$$

(γ) Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος πάνω στην επιφάνεια (S_3). Η (S_3) είναι κυκλική κυλινδρική επιφάνεια με άξονα τον x (γενέτειρα παράλληλη στον x). Θεωρούμε την παραμετρική παράσταση:

$$y = 2\cos\varphi \qquad z = 2\sin\varphi \qquad x = x$$

Το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου της επιφάνειας είναι:

$$\underset{\sim}{R} = y\hat{y} + z\hat{z} + x\hat{x} = 2\cos\varphi\hat{y} + 2\sin\varphi\hat{z} + x\hat{x}$$

$$\underset{\sim}{R}_\varphi = \frac{\partial \underset{\sim}{R}}{\partial\varphi} = -2\sin\varphi\hat{y} + 2\cos\varphi\hat{z} + 0\hat{x} \qquad \underset{\sim}{R}_x = \frac{\partial \underset{\sim}{R}}{\partial x} = \hat{x}$$

$$\underset{\sim}{R}_\varphi \times \underset{\sim}{R}_x = (-2\sin\varphi\hat{y} + 2\cos\varphi\hat{z}) \times \hat{x} = +2\sin\varphi\hat{z} + 2\cos\varphi\hat{y}$$

$$|\underset{\sim}{R}_\varphi \times \underset{\sim}{R}_x| = \sqrt{2^2\sin^2\varphi + 2^2\cos^2\varphi} = 2$$

Η παράμετρος φ κινείται μεταξύ 0, 2π ενώ η x από x = 0 μέχρι x = 3 − y − z δηλαδή $0 \le x \le 3 - 2\cos\varphi - 2\sin\varphi$. Έτσι σχεδιάζουμε τον τόπο (D) σε άξονες φ, x και έχουμε σύμφωνα με τη σχέση (5.4.5):

$$\iint_{(S_3)} \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{S} = + \iint_{(D)} (-2x\hat{x} + 3\cdot 2\cos\varphi\hat{y} + 2\sin\varphi\hat{z})\,(\underset{\sim}{R}_\varphi \times \underset{\sim}{R}_x)\,d\varphi\,dx \qquad (5)$$

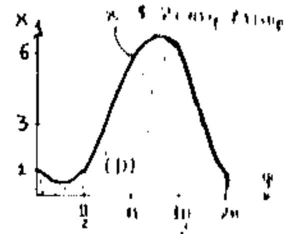
όπου αντικαταστήσαμε την έκφραση της $\underset{\sim}{F}$ συναρτήσει των φ, x

$$\underset{\sim}{F} = (-2x, 3y, z) = -2x\hat{x} + 6\cos\varphi\hat{y} + 2\sin\varphi\hat{z}$$

Η σχέση (5) γράφεται:

$$\iint_{(S_3)} \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{(D)} (-2x\hat{x} + 6\cos\varphi\hat{y} + 2\sin\varphi\hat{z}) \cdot (2\sin\varphi\hat{z} + 2\cos\varphi\hat{y})\,d\varphi\,dx$$

$$\Longrightarrow \iint_{(S_3)} \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{(D)} (12\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi)\,d\varphi\,dx \qquad (6)$$



Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα προς τα έξω στην κυλινδρική επιφάνεια είναι:

$$\hat{n}_3 = \cos\varphi\hat{y} + \sin\varphi\hat{z}$$

και το εσωτερικό γινόμενο:

$$\hat{n}_3 \cdot (\underset{\sim}{R}_\varphi \times \underset{\sim}{R}_x) = (\cos\varphi\hat{y} + \sin\varphi\hat{z}) \cdot (2\cos\varphi\hat{y} + 2\sin\varphi\hat{z}) = 2 > 0$$

άρα κρατάμε το πρόσημο (+) και η σχέση (6) γίνεται:

$$\iint_{(S_3)} \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{3-2\cos\varphi-2\sin\varphi} (12\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi)\,dx \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} (8\cos^2\varphi + 4)(3 - 2\cos\varphi - 2\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 24\cos^2\varphi\,d\varphi - \int_0^{2\pi} 16\cos^3\varphi\,d\varphi - \int_0^{2\pi} 16\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi + 12\int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{2\pi} 8\cos\varphi\,d\varphi - \int_0^{2\pi} 8\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= 24\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi - 16\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d(\sin\varphi) + 16\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\cos\varphi + 24\pi - 0 - 0$$

$$= 24\pi - 16\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2\varphi)\,d\sin\varphi + \frac{16}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{2\pi} + 24\pi = 48\pi$$

(δ) Υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος:

Ο τόπος (V) περιορίζεται κάτω από την επιφάνεια $x=0$, πάνω από το επίπεδο $x = 3-y-z$ με κοινή προβολή στο επίπεδο yz τον τόπο (τ_{yz}). Άρα:

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\, dxdydz = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial(-2x)}{\partial x} + \frac{\partial(3y)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= 2 \iiint\limits_{(V)} dxdydz = 2 \iint\limits_{(\tau_{yz})} \left(\int_0^{3-y-z} dx \right) dydz = 2 \iint\limits_{(\tau_{yz})} (3-y-z)\, dydz$$

και με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\underset{\sim}{F}\, dxdydz = 2 \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (3 - r\sin\varphi - r\cos\varphi) r\, d\varphi \right) dr =$$

$$= 2 \int_0^2 \left(3r \int_0^{2\pi} d\varphi - r \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi - r \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \right) dr = 12\pi \int_0^2 r\, dr = 24\pi$$

(ε) Με αντικατάσταση, παρατηρούμε ότι η σχέση (1) επαληθεύεται.

6.4 Το σωληνοειδές πεδίο – Διανυσματικό δυναμικό.

Ορισμός: Το διανυσματικό πεδίο $\underset{\sim}{F}(x,y,z)$:

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z) \big)$$

ονομάζεται σωληνοειδές όταν ισχύει:

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{F} = 0$$

Το σωληνοειδές πεδίο είναι δηλαδή πεδίο με μηδενική απόκλιση. Ισχύουν:

Ιδιότητα 1. Αν η κλειστή επιφάνεια S περικλείει τον τόπο (V) όπου $\operatorname{div} \underset{\sim}{F} = 0$ (δηλαδή το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι σωληνοειδές) τότε:

$$\oiint_S \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = 0$$

Υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις P, Q, R και οι μερικές των παράγωγοι είναι συνεχείς στον (V).

Ιδιότητα 2. Αν C είναι μία κλειστή καμπύλη, που είναι σύνορο κοινό των επιφανειών S_1, S_2, τότε:

$$\iint_{S_1} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \iint_{S_2} \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S}$$

όταν το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι σωληνοειδές. Η ιδιότητα αυτή λέει απλά ότι το ολοκλήρωμα είναι το ίδιο ανεξάρτητα από την επιφάνεια, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από την επιφάνεια που περικλείει (έχει σύνορο) την καμπύλη C.

Ιδιότητα 3. Υπάρχει διανυσματική συνάρτηση $A(x,y,z)$

$$\underset{\sim}{F} = \operatorname{rot} \underset{\sim}{A} \qquad (6.3.1)$$

Η διανυσματική συνάρτηση $\underset{\sim}{A}(x,y,z)$ ονομάζεται διανυσματικό δυναμικό του σωληνοειδούς πεδίου $\underset{\sim}{F}$

Ιδιότητα 4. Αν η επιφάνεια S έχει σύνορο την καμπύλη C, τότε ισχύει:

$$\iint_S \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{S} = \oint_C \underset{\sim}{A}\, d\underset{\sim}{\ell} \qquad (6.3.2)$$

Ιδιότητα 5. Ένα διανυσματικό δυναμικό του σωληνοειδούς πεδίου $\underset{\sim}{F} = (P, Q, R)$ είναι:

$$\underset{\sim}{A} = \left(\int_{z_0}^{z} a(x,y,t)\,dt,\ \int_{z_0}^{z} P(x,y,t)\,dt + \int_{x_0}^{x} R(t,y,z_0)\,dt,\ 0 \right) \qquad (6.5.5)$$

Παρατήρηση: Το διανυσματικό δυναμικό δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Στην προηγούμενη έκφραση υποθέσαμε ότι το διανυσματικό δυναμικό δεν έχει τρίτη συνιστώσα. Τα x_0 και z_0 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Άσκηση 11

Να ελεγχθεί αν καθένα από τα πεδία $\underset{\sim}{F}$, $\underset{\sim}{G}$ είναι ή όχι σωληνοειδές:

(a) $\underset{\sim}{F} = (3x,\ 2y,\ -5z)$ (b) $\underset{\sim}{G} = (xy,\ -y^2,\ yz)$

Λύση

(a) Υπολογίζουμε την απόκλιση $\mathrm{div}\underset{\sim}{F}$:

$$\mathrm{div}\underset{\sim}{F} = \frac{\partial(3x)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(-5z)}{\partial z} = 3+2-5 = 0$$

Άρα το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι μηδενικής απόκλισης (σωληνοειδές)

(b) Έχουμε:

$$\mathrm{div}\underset{\sim}{G} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = y - 2y + y = 0$$

Άρα και το πεδίο $\underset{\sim}{G}$ είναι μηδενικής απόκλισης.

Άσκηση 12

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\underset{\sim}{F} = (x^2yz,\ xy^2z,\ -2xyz^2)$$

(α) Να δειχθεί ότι είναι σωληνοειδές

(β) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό

Λύση

(α) Υπολογίζουμε την απόκλιση $\mathrm{div}\underset{\sim}{F}$:

$$\mathrm{div}\underset{\sim}{F} = \frac{\partial(x^2yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xy^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(-2xyz^2)}{\partial z} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{div}\underset{\sim}{F} = 2xyz + 2xyz - 4xyz = 0$$

Άρα, πράγματι το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι μηδενικής απόκλισης (σωληνοειδές). Άρα το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ προέρχεται από διανυσματικό δυναμικό.

(β) Υποθέτουμε ότι $\underset{\sim}{A}(x,y,z)$ είναι το διανυσματικό δυναμικό του πεδίου. Σύμφωνα με τη σχέση (6.3.3), με x_0 και z_0 ίσα με μηδέν έχουμε:

$$A(x,y,z) = \left(\int_0^z Q(x,y,t)dt,\ -\int_0^z P(x,y,t)dt + \int_0^x R(t,y,0)dt\ ,\ 0 \right) \qquad (1)$$

Εδώ είναι:

$$P(x,y,z) = x^2yz \quad \Longrightarrow \quad P(x,y,t) = x^2yt$$

$$Q(x,y,z) = xy^2z \quad \Longrightarrow \quad Q(x,y,t) = xy^2t$$

$$R(x,y,z) = -2xyz^2 \quad \Longrightarrow \quad R(t,y,0) = -2ty\,0^2 = 0$$

Η σχέση (1) δίνει:

$$\underset{\sim}{A}(x,y,z) = \left(\int_0^z xy^2t\,dt\ ,\ -\int_0^z x^2yt\,dt + \int_0^x 0\,dt\ ,\ 0 \right) \qquad (2)$$

Κατά τις ολοκληρώσεις, τα x, y, z είναι σταθερά, οπότε έχουμε:

$$\underset{\sim}{A}(x,y,z) = \left(\int_0^z xy^2t\,dt\ ,\ -\int_0^z x^2yt\,dt\ ,\ 0 \right) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{A}(x,y,z)\ \left(xy^2\int_0^1 t\,dt\,,\ \ x^2y\int_0^1 t\,dt\,,\ 0\right) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{A}(x,y,z) = \left(\frac{xy^2z^2}{2}\,,\ -\frac{x^2yz^2}{2}\,,\ 0\right)$$

που είναι το ζητούμενο διανυσματικό δυναμικό.

Άσκηση 13

Υποθέτουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι σωληνοειδές και ότι $\underset{\sim}{A}$ είναι το διανυσματικό δυναμικό από το οποίο προέρχεται, δηλαδή ισχύει:

$$\underset{\sim}{F} = \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{A} \tag{1}$$

Να δειχθεί ότι αν $f(x,y,z)$ είναι μία τυχαία βαθμωτή συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε η παράσταση

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} + \mathrm{grad}f \tag{2}$$

είναι επίσης διανυσματικό δυναμικό του πεδίου $\underset{\sim}{F}$. Η $\underset{\sim}{C}$ είναι η πιό γενική μορφή διανυσματικού δυναμικού του πεδίου $\underset{\sim}{F}$.

Λύση

Έχουμε:

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{C} = \mathrm{rot}(\underset{\sim}{A} + \mathrm{grad}f) = \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{A} + \mathrm{rot}(\mathrm{grad}f)$$

και λόγω της (1) έχουμε $\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{F}$, οπότε:

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F} + \mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) \tag{3}$$

Όμως έχουμε:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) \quad \mathrm{rot}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) +$$

$$+ \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) =$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0 \qquad (\forall f)$$

Η σχέση (3) δίνει:

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{F} = \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{C}$$

δηλαδή η $\underset{\sim}{C}$ είναι επίσης διανυσματικό δυναμικό της $\underset{\sim}{F}$, που είναι η πιο γενική μορφή

Άσκηση 14

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = (4x, -y, -3z)$$

(α) Να δειχθεί ότι αυτό είναι σωληνοειδές
(β) Να βρεθεί ένα διανυσματικό δυναμικό του
(γ) Να βρεθεί η πιο γενική μορφή διανυσματικού δυναμικού από το οποίο προέρχεται το πεδίο $\underset{\sim}{F}$.

Λύση

(α) Υπολογίζουμε την απόκλιση του $\underset{\sim}{F}$:

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{F} = \frac{\partial(4x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial(-3z)}{\partial z} = 4 - 1 - 3 = 0$$

Άρα το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι σωληνοειδές, οπότε προέρχεται α πο διανυσματικό δυναμικό.

(β) Με $x_0 = z_0 = 0$ και

$$P(x,y,t) = 4x, \quad Q(x,y,t) = -y, \quad R(t,y,0) = -3\cdot 0 = 0$$

Η σχέση (6.3.3) δίνει:

$$\underset{\sim}{A}(x,y,z) = \left(\int_0^z -y\,dt,\ -\int_0^z 4x\,dt + \int_0^x 0\cdot dt,\ 0 \right) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{A}(x,y,z) = \left(-y\int_0^z dt,\ -4x\int_0^z dt,\ 0\right) \Longrightarrow$$

$$\underset{\sim}{A}(x,y,z) = (-yz,\ -4xz,\ 0)$$

που είναι ένα διανυσματικό δυναμικό της $\underset{\sim}{F}$

(γ) Η πιο γενική μορφή διανυσματικού δυναμικού από το οποίο προέρχεται η $\underset{\sim}{F}$ είναι:

$$\underset{\sim}{A} + \text{grad}f = (-yz, -4xz, 0) + \text{grad}f$$

όπου $f(x,y,z)$ τυχαία συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους.

Άσκηση 15

Να δειχθεί ότι το πεδίο κλίσεων της συνάρτησης:

$$\varphi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

είναι μηδενικής απόκλισης. Πόση είναι η ροή από μία κλειστή επιφάνεια που δεν περικλείει την αρχή;

Λύση

Λυση

Η κλίση (gradφ) της συνάρτησης φ(x,y,z) είναι:

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z} \implies$$

$$\mathrm{grad}\varphi = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x\,\hat{x} - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2y\hat{y} - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2z\hat{z}$$

δηλαδή προκύπτει το διανυσματικό πεδίο:

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\hat{x} + \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\hat{y} + \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

(Η φ(x,y,z) είναι δυναμική συνάρτηση του πεδίου $\underset{\sim}{F}$)
Η απόκλιση του πεδίου $\underset{\sim}{F}$ είναι:

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2} + x\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2x - (x^2+y^2+z^2)^{3/2} + y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$+ \frac{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2} + z\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2z}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0$$

Άρα το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ είναι μηδενικής απόκλισης.

Οι συνιστώσες του πεδίου $\underset{\sim}{F}$ και οι μερικές των παραγωγοι είναι συνεχείς παντού, εκτός της αρχής των αξόνων (0,0,0) όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής. Αν λοιπόν θεωρήσουμε κλειστή επιφάνεια S που δεν περικλείει την αρχή, ισχύει το θεώρημα της απόκλισης.

$$\oiint_S \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{S} = \iiint_{(V)} \mathrm{div}\,\underset{\sim}{F}\,dxdydz = \iiint_{(V)} 0\cdot dxdydz = 0$$

δηλαδή η ροή είναι ίση με μηδέν.

Ασκηση 16

Αν $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις, και το διάνυσμα $\nabla u\times\nabla v$ είναι σωληνοειδές, να βρεθεί ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν. Οι u, v υποτίθενται επαρκώς παραγωγίσιμες.

Λύση

Προφανώς είναι

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\nabla v = \operatorname{grad} v = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

οπότε υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο:

$$\nabla u\times\nabla v = (u_x\hat{x}+u_y\hat{y}+u_z\hat{z})\times(v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z}) =$$

$$= u_xv_y\hat{z} - u_xv_z\hat{y} - u_yv_x\hat{z} + u_yv_z\hat{x} + u_zv_x\hat{y} - u_zv_y\hat{x} =$$

$$= (u_yv_z - u_zv_y)\hat{x} + (u_zv_x - u_xv_z)\hat{y} + (u_xv_y - u_yv_x)\hat{z}$$

Για να είναι το διάνυσμα $\nabla u\times\nabla v$ σωληνοειδές, πρέπει:

$$\operatorname{div}(\nabla u\times\nabla v) = 0 \iff \nabla\cdot(\nabla u\times\nabla v) = 0 \implies$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_yv_z - u_zv_y) + \frac{\partial}{\partial y}(u_zv_x - u_xv_z) + \frac{\partial}{\partial z}(u_xv_y - u_yv_x) = 0$$

$$\iff u_{yx}v_z + u_yv_{zx} - u_{zx}v_y - u_zv_{yx} +$$

$$+ u_{zy}v_x + u_zv_{xy} - u_{xy}v_z - u_xv_{zy} +$$

$$+ u_{xz}v_y + u_xv_{yz} - u_{yz}v_x - u_yv_{xz} = 0$$

Αν λάβουμε υπ' όψη ότι $f_{xy} = f_{yx}$, και τις απλοποιήσεις βρίσκουμε τη συνθήκη $0=0$ δηλαδή ότι το διάνυσμα $\nabla u \times \nabla \upsilon$ είναι σωληνοειδές $\forall u, \upsilon$, εφόσον βέβαια οι u, υ είναι επαρκώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Ασκηση 17

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\underset{\sim}{F}(x,y,z) = (-x^2y\,,\ -y^2z\,,\ z^2x)$$

α) Να βρεθεί η έκφραση του πεδίου $\underset{\sim}{G}$ αν $\underset{\sim}{G} = \mathrm{rot}\underset{\sim}{F}$. Είναι το πεδίο $\underset{\sim}{G}$ σωληνοειδές; Αν ναι να βρεθεί ένα διανυσματικό δυναμικό από το οποίο προέρχεται.
β) Να υπολογισθεί η ροή του πεδίου $\underset{\sim}{G}$ από το δίσκο:

$$\Delta \{\ x^2+y^2 = 9\ ,\ \ z=1\ \}$$

με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Λύση

(α) Είναι $F_x = -x^2y$, $F_y = -y^2z$, $F_z = z^2x$ και έχουμε:

$$\underset{\sim}{G}(x,y,z) = \mathrm{rot}\underset{\sim}{F} = \nabla\times\underset{\sim}{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$= \hat{x}\left(0+y^2\right) + \hat{y}\left(0-z^2\right) + \hat{z}\left(0+x^2\right) \implies$$

$$\underset{\sim}{G}(x,y,z) = (y^2,\ -z^2,\ x^2) \qquad (1)$$

όπου είναι $G_x = y^2$, $G_y = -z^2$, $G_z = x^2$.
Το πεδίο $\underset{\sim}{G}(x,y,z)$ είναι σωληνοειδές. Αυτό προκύπτει άμεσως από την:

$$\mathrm{div}\underset{\sim}{G} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\underset{\sim}{F}) = 0$$

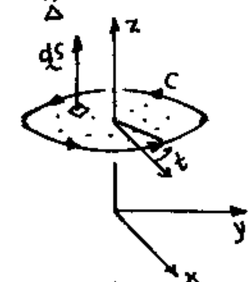
αφού ισχύει ταυτοτικά $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\underset{\sim}{A}) \equiv 0$. Μπορεί βέβαια να επαληθευθεί άμεσα με υπολογισμό:

$$\operatorname{div} G = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = \frac{\partial (y^4)}{\partial x} + \frac{\partial (z^4)}{\partial y} + \frac{\partial (x^4)}{\partial z} = 0+0+0=0$$

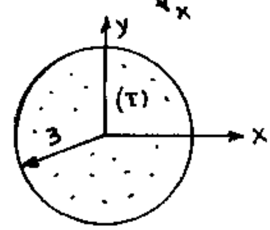
Επειδή είναι $\underset{\sim}{G} = \operatorname{rot} \underset{\sim}{F}$, προφανώς το $\underset{\sim}{F}$ είναι ένα διανυσματικό δυναμικό $\underset{\sim}{A}$ του πεδίου $\underset{\sim}{G}$

$$\underset{\sim}{A}(x,y,z) = \underset{\sim}{F}(x,y,z) = (-x^2y, -y^2z, z^2x)$$

(β) Η ροή του πεδίου $\underset{\sim}{G}$ από το δίσκο Δ είναι $\iint_{\Delta} \underset{\sim}{G} d\underset{\sim}{S}$ και μπορεί να βρεθεί:



i) Με απευθείας υπολογισμό. Θεωρούμε θετική φορά της επιφάνειας προς τα θετικά z, οπότε $\hat{n}\cdot k > 0$. Η προβολή του δίσκου Δ στο επίπεδο xy είναι ο δίσκος $T: x^2+y^2 \le 1$. Άρα έχουμε

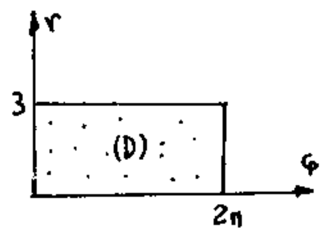


$$\iint_{(\Delta)} \underset{\sim}{G} d\underset{\sim}{S} = \pm \iint_{(T)} (-G_x z_x - G_y z_y + R)\,dx\,dy \qquad (2)$$

Όμως η εξίσωση της επιφάνειας είναι $z=1$, οπότε $z_x = 0$, $z_y = 0$ και επειδή $\hat{n}\cdot\hat{z} > 0$ κρατάμε το πρόσημο (+) και έχουμε

$$\iint_{(\Delta)} \underset{\sim}{G} d\underset{\sim}{S} = \iint_{(T)} R\,dx\,dy = \iint_{(T)} x^2\,dx\,dy$$

και με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε



$$\iint_{(\Delta)} \underset{\sim}{G} d\underset{\sim}{S} = \iint_{(T)} x^2\,dx\,dy = \iint_{(D)} r^2\cos^2\varphi\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^3 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \pi \frac{81}{4}$$

(ii) Επειδή είναι γνωστό το διανυσματικό δυναμικό $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{F}$ έχουμε

$$\iint_{(\Delta)} \underset{\sim}{G} d\underset{\sim}{S} = \iint_{(\Delta)} \operatorname{rot} \underset{\sim}{A} d\underset{\sim}{S} = \oint_C \underset{\sim}{A} d\underset{\sim}{\ell}$$

(σύμφωνα με το θεώρημα Stokes). Έτσι η ζητούμενη ροή του $\underset{\sim}{G}$ από την επιφάνεια (Δ), ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\underset{\sim}{A}$ στην καμπύλη C, με τη συσχετισμένη φορά του σχήματος. Άρα έχουμε

$$\iint_{(\Delta)} \underset{\sim}{G}\, d\underset{\sim}{S} = \oint_C \underset{\sim}{A}\, d\underset{\sim}{\ell} \implies \iint_{(\Delta)} \underset{\sim}{G}\, d\underset{\sim}{S} = \oint_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \implies$$

$$\iint_{(\Delta)} \underset{\sim}{G}\, d\underset{\sim}{S} = \oint_C (-x^2 y dx - y^2 z dy + z^2 x dz) \qquad (3)$$

Με παραμετρική παράσταση της καμπύλης C:

$$x = 3\cos t \qquad y = 3\sin t \qquad z = 1$$

η σχέση (3) δίνει:

$$\iint_{(\Delta)} \underset{\sim}{G}\, d\underset{\sim}{S} = \int_0^{2\pi} \left(-9\cos^2 t \cdot 3\sin t\,(-3\sin t)dt - 9\sin^2 t \cdot 1 \cdot 3\cos t\, dt + 0\right) =$$

$$= 81\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt - 27\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t\, dt = 81\frac{\pi}{4}$$

δηλαδή προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

Επαναληπτικές ασκήσεις

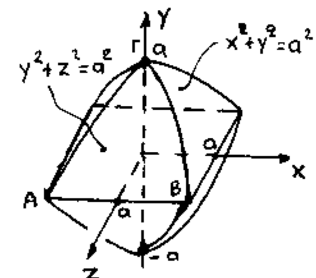
Άσκηση 1

Να βρεθεί ο όγκος που περικλείεται από τις κυλινδρικές επιφάνειες $S_1: x^2+y^2=a^2$ $S_2: y^2+z^2=a^2$

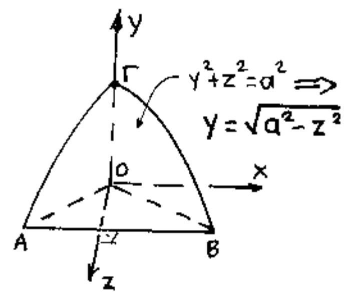
Λύση

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση της S_1 απουσιάζει η μεταβλητή z. Άρα η επιφάνεια S_1 είναι κυλινδρική με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα z. Η τομή της S_1 με το επίπεδο $z=0$ είναι

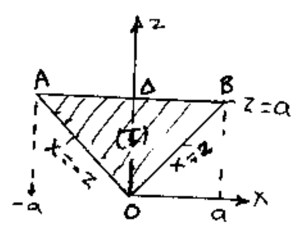
$$\{z=0,\ x^2+y^2=a^2\}$$



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

δηλαδή περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή αξόνων και ακτίνα ίση με a. Άρα η S_1 είναι κυκλική κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα a και άξονα τον z. Όμοια η επιφάνεια S_2 είναι κυκλική κυλινδρική με ακτίνα a και άξονα τον x. Το χωρίο που περικλείουν οι επιφάνειες S_1, S_2 φαίνεται στο σχήμα 1. Αυτό αποτελείται από οκτώ ίσα τμήματα ένα εκ των οποίων είναι το ΟΑΒΓ το οποίο φαίνεται στο σχήμα 2. Αν V είναι ο ζητούμενος όγκος, έχουμε ότι ο όγκος του ΟΑΒΓ είναι ίσος με $V/8$.
Όμως ο όγκος του χωρίου αυτού περικλείεται από το τμήμα ΑΒΓ της επιφάνειας $y=\sqrt{a^2-z^2}$ και την προβολή του ΟΑΒ στο επίπεδο Oxz. Άρα είναι:

$$\frac{V}{8} = \iint_{(T)} \sqrt{a^2 - z^2}\, dx\, dz \implies V = 8 \iint_{(T)} \sqrt{a^2 - z^2}\, dx\, dz \qquad (1)$$

όπου (τ) είναι ο τριγωνικός τόπος OAB του επιπέδου Oxz. Ο τόπος αυτός είναι "κανονικός" ως προς z περικλειόμενοι από τις ευθείες $z=0$, $z=a$ και τις $x=-z$, $x=z$. Άρα η σχέση (1) γράφεται:

$$V = 8 \int_0^a \left(\int_{-z}^{z} \sqrt{a^2-z^2}\, dx \right) dz = 8 \int_0^a \sqrt{a^2-z^2} \left(\int_{-z}^{z} dx \right) dz =$$

$$= 16 \int_0^a z \sqrt{a^2-z^2}\, dz = -8 \int_0^a (a^2-z^2)^{1/2}\, d(a^2-z^2) =$$

$$= -8 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (a^2-z^2)^{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^a = \frac{-16}{3}(-a^3) \implies V = \frac{16a^3}{3}$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_{(T)} e^{x+y} dx dy$

όπου (τ) είναι ο επίπεδος τόπος $|x| + |y| \leq 1$

Λύση

Θα σχεδιάσουμε κατ' αρχήν τον επίπεδο τόπο. Θεωρούμε την εξίσωση $|x| + |y| = 1$ και λόγω των απολύτων διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

(a) $x>0$, $y>0$ (πρώτο τεταρτημόριο). Η εξίσωση γράφεται: $x+y=1$ και είναι η ευθεία ε_1 του σχήματος.

(b) $x<0$, $y>0$ (δεύτερο τεταρτημόριο). Είναι $-x+y=1$ δηλ. η ευθεία ε_2 του σχήματος.

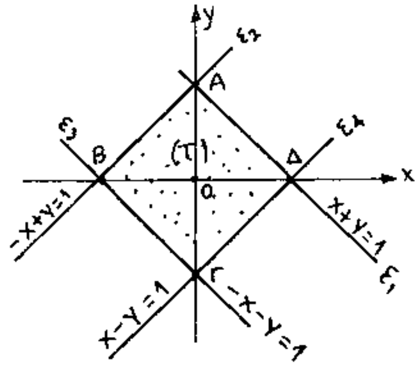
(c) $x<0$, $y<0$ (τρίτο τεταρτημόριο). Είναι $-x-y=1$ δηλ. η ευθεία ε_3

(d) $x>0$, $y<0$ (τέταρτο τεταρτημόριο. Είναι $x-y=1$ και είναι η ευθεία ε_4 του σχήματος.

Είναι προφανές ότι ο τόπος $|x|+|y| \leq 1$ είναι το εσωτερικό του τετραγώνου με πλευρές τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, και ε_4.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, παρατηρούμε ότι η ποσότητα $x+y$ επαναλαμβάνεται στις εξισώσεις του συνόρου και στην ολοκληρωτέα συνάρτηση. Άρα θέτουμε:

$$x+y=u \qquad (1)$$



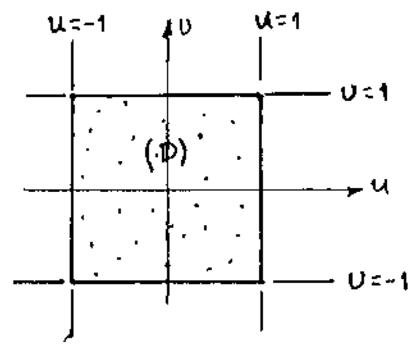
ενώ η ποσότητα $x-y$ επαναλαμβάνεται στις εξισώσεις του συνόρου. Άρα θέτουμε

$$x-y=v \qquad (2)$$

Με βάση την αλλαγή αυτή των μεταβλητών, η ευθεία $x+y=1$ μετασχηματίζεται σε άξονες u,v στην $u=1$, η ευθεία $-x-y=1$ στην $u=-1$, η ευθεία $-x+y=1$ στην $v=-1$ και η ευθεία $x-y=1$ στην $v=1$. Έτσι, ο τόπος (Γ) έχει εικόνα τον τόπο (D) στο επίπεδο uv.

Άπο τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε ότι:

$$x=\frac{u+v}{2} \qquad y=\frac{u-v}{2}$$



και η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$J\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2} \Longrightarrow |J|=1/2$$

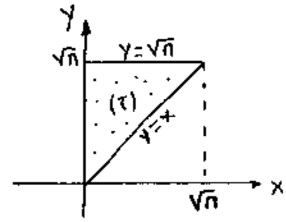
Η ολοκληρωτέα συνάρτηση σε μεταβλητές u,v γίνεται e^u και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται:

$$\iint_{\Gamma} e^{x+y}dx\,dy = \iint_{D} e^{u}\tfrac{1}{2}\,du\,dv = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} e^{u}dv\right)du = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u}\left(\int_{-1}^{1}dv\right)du = e-e^{-1}$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_x^{\sqrt{\pi}} \cos\frac{y^2}{2} dy$

Λύση



Εύκολα βλέπουμε ότι ο τόπος ολοκλήρωσης περιορίζεται από τις ευθείες $x=0$, $x=\sqrt{\pi}$ (όρια του x) και $y=x$, $y=\sqrt{\pi}$ (όρια του y) και είναι σχεδιασμένος στο διπλανό σχήμα.

Ο τόπος είναι κανονικός ως προς x. Το ολοκλήρωμα όμως δεν υπολογίζεται διότι δεν υπάρχει η παράγουσα του $\cos\frac{y^2}{2}$. Παρατηρούμε όμως ότι ο τόπος αυτός μπορεί να θεωρηθεί και κανονικός ως προς y, αφού περιορίζεται από τις ευθείες $y=0$, $y=\sqrt{\pi}$. Με βάση την παρατήρηση αυτή, το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int_{y=0}^{y=\sqrt{\pi}} dy \int_{x=0}^{x=y} \cos\frac{y^2}{2} dx$$

αφού ο τόπος περιορίζεται αριστερά από την $x=0$ και δεξιά από την $x=y$. Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos\frac{y^2}{2} dy \int_0^y dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} y\cos\frac{y^2}{2} dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos\frac{y^2}{2}\, d\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το εμβαδό του επίπεδου τόπου

$$\tau = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x+2y)^2 + 4y^2 \le 1$$

Λύση

Το σύνορο του τόπου έχει εξίσωση:

$$(x+2y)^2+(2y)^2=1 \qquad (1)$$

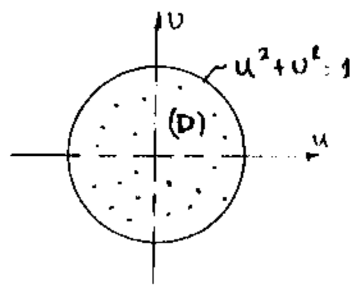
και παριστάνει μία καμπύλη στο επίπεδο. Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και μπορεί να σχεδιασθεί με χρήση της θεωρίας τετραγωνικών μορφών(*). Η σχεδίαση όμως δεν ενδιαφέρει διότι παρατηρώντας τη μορφή της εξίσωσης (1) σκεφτόμαστε ότι η αντικατάσταση:

$$\{x+2y=u\ ,\quad 2y=v\} \qquad (2)$$

μετασχηματίζει την εξίσωση (1) στην εξίσωση:

$$u^2+v^2=1 \qquad (3)$$

η οποία παριστάνει κύκλο σε άξονες u,v με κέντρο την αρχή $(u=0,\ v=0)$ και ακτίνα ίση με 1. Έτσι ο τόπος (τ) με σύνορο την εξίσωση (1) μετασχηματίζεται στον τόπο (D) με σύνορο την (2). Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}=\frac{1}{u_xv_y-u_yv_x}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2-2\cdot 0}=\frac{1}{2}$$

και το εμβαδό του τόπου (τ) υπολογίζεται:

$$E=\iint_{\tau} dx\,dy=\iint_{(D)}|J|\,du\,dv=\iint_{(D)}\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{2}\iint_{(D)}du\,dv=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2$$

(*) Βλέπε: "ΓΙΑΝΝΗΣ ΓΚΑΡΟΥΤΣΟΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ"