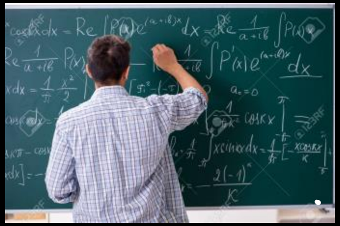
ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 26

Διάλεξη: 10 Δεκεμβρίου 2020

Προηγούμενα επεισόδια: Μετασχηματισμός Laplace και λύση ΔΕ



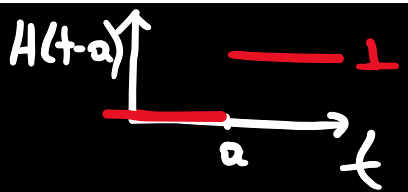
$$f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$f(t)$	1	t	t^n	e^{at}	$\sin(wt)$	$\cos(wt)$	$\sinh(at)$	$\cosh(at)$	$e^{at}\sin(wt)$	$e^{at}\cos(wt)$
$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$

- $af(t)+bg(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} aF(s)+bG(s)$
- $e^{at}f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F(s-a)$
- $f'(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} sF(s)-f(0)$
- $f''(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

$\int_0^t f(z)\,dz \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \frac{1}{s}F(s)$

✓ $H(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t>a \end{cases}$



$H(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \frac{e^{-as}}{s}$ ✓

$f(t)\,H(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as}\,L[f(t+a)]$

$f(t-a)\,H(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as}F(s)$

✓ $\delta(t-a) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} e^{-as}$ ✓

$\delta(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} 1$

ΤΕΣΤ 6 **(1)** (6 μονάδες) Λύστε το παρακάτω πρόβλημα <u>στον χώρο του Laplace:</u>

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-7) \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$$

$$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=-1} + 2sY(s) - 2\underbrace{y(0)}_{=1} + 2Y(s) = e^{-7s}$$

$$\underline{s^2Y(s)} - s + 1 + \underline{2sY(s)} - 2 + \underline{2Y(s)} = e^{-7s}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{e^{-7s} + s + 1}{s^2 + 2s + 2}}$$

(Αντιστροφή δύσκολη $s^2+2s+2=0 \rightarrow$ μιγαδικές ρίζες

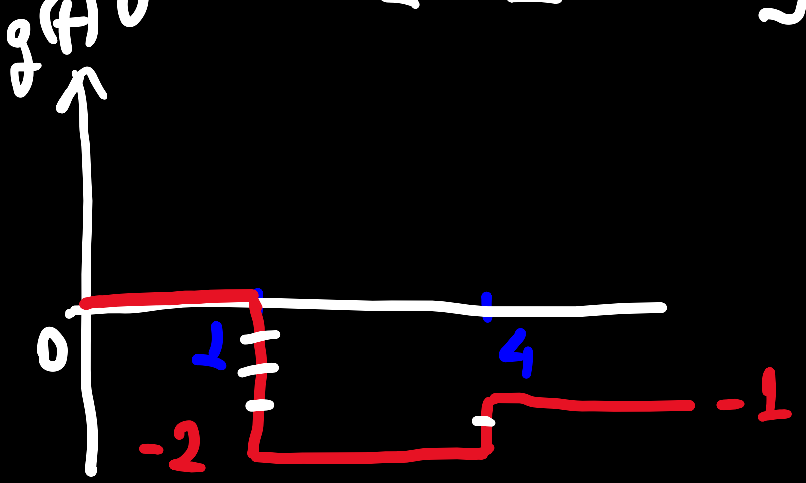
<u>Υπόδειξη</u>: $e^{at}\sin(wt) \rightleftarrows \dfrac{w}{(s-a)^2+w^2}$)

(2) (4 μονάδες) Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$G(s) = \frac{e^{-4s}}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}$$

και κάνετε το διάγραμμα της $g(t)$.

$$g(t) = L^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s}\right] - 2L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right] = \boxed{H(t-4) - 2H(t-1)}$$



Για $0<t<1$ $\quad g(t) = 0 - 2\,0 = 0$

Για $1<t<4$ $\quad g(t) = 0 - 2\,1 = -2$

Για $t>4$ $\quad g(t) = 1 - 2\,1 = -1$

(Για το σπίτι δοκιμάστε τα διαγράμματα του προηγούμενου παραδείγματος)

5. Διαφόριση μετασχηματισμών

1. $t\,f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} -F'(s)$

2. $\dfrac{f(t)}{t} \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \displaystyle\int_s^{\infty} F(z)\,dz$

<u>Παρατήρηση:</u> ~~Η~~ 1. χρήσιμη για μετασχ. ΔΕ

Η 2. χρήσιμη στην αντιστροφή.

Παράδειγμα $L^{-1}\left[\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right] = ;$
για σπίτι!

<u>Ιδέα:</u> Ποιάς συνάρτησης F(s) είναι ολοκλήρωμα αυτός ο λογάριθμος.

<u>Λύση</u>

$\frac{2}{t} - \frac{2}{t}\cos(\omega t)$

6. Λύση ΔΕ χωρίς σταθερούς συντελεστές

Edmont Laguerre
(1834-1886)

Παράδειγμα: ΔΕ του Laguerre

$$t y'' + (1-t) y' + n y = 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

(Λύνεται με δυναμοσειρές → Frobenius). Εδώ με Laplace.

Συνθήκες;

$$L[ty''] + L[y'] - L[ty'] + nL[y] = 0$$

$$L[ty'] = -\frac{d}{ds}\left[sY(s) - y(0)\right] = -Y(s) - s\frac{dY(s)}{ds}$$

$$L[ty''] = -\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] = -2sY(s) - s^2\frac{dY(s)}{ds} + y(0)$$

Αντικατάσταση

$$-2sY(s) - s^2\frac{dY(s)}{ds} + \cancel{y(0)} + sY(s) - \cancel{y(0)} + Y(s) + s\frac{dY(s)}{ds} + nY(s) = 0$$

$$\boxed{(s-s^2)\frac{dY(s)}{ds} + (n-s+1)Y(s) = 0}$$

ΔΕ Laguerre στον πλανήτη του Laplace
1ης τάξης, χωριζομένων μεταβλητών.

$$(s-s^2)\frac{dY}{ds} = -(n+1-s)Y \Rightarrow$$

μερικά κλάσματα

$$\Rightarrow \int \frac{dY}{Y} = -\int \frac{n+1-s}{s-s^2}\,ds + K \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln Y(s) = n\ln(s-1) - (n+1)\ln s + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln Y(s) = \ln(s-1)^n - \ln s^{n+1} + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln Y(s) = \ln\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} + k \Rightarrow \boxed{Y(s) = Q\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}}$$

$Q = e^k$

Βρήκαμε μόνο μια λύση!