ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σχολη ΗΜ&ΜΥ, ΕΜΠ
Καθηγητης Πετρος Μαραγκος

Γραμμικα Συστηματα Διακριτου Χρονου

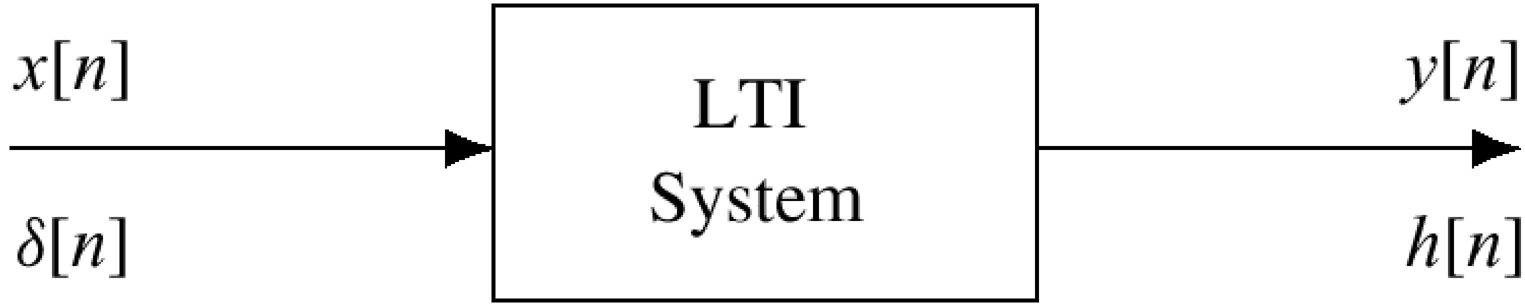
Εξισωσεις Διαφορων

Αποκριση Συχνοτητας

Ψηφιακη Υλοποιηση Αναλογικων Συστηματων

Ζ Μετ/σμος

ΓΧΑ Συστηματα Διακριτου Χρονου



- ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΖΟΝΤΑΙ ΠΛΗΡΩΣ από την ***h[n]***:

Το σημα εξοδου *y[n]* είναι η **συνελιξη** του σηματος εισοδου *x[n]* με την κρουστικη αποκριση *h[n]*:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Ιδιοτητες ΔΧ ΓΧΑ Συστηματων απο Περιορισμους Κρουστικης Αποκρισης h[n]

$$\text{ΜΝΗΜΗ} \quad \Leftrightarrow \quad h[n] = h[0]\delta[n]$$

$$\text{ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ} \quad \Leftrightarrow \quad h[n] = 0 \ \ \forall n < 0$$

$$\text{ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ (BIBO)} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, h[n] \,| < \infty$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ περιγραφομενα με ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$

Απλο Γραμμικο Μοντελο Εξαπλωσης Πανδημιας

$$\boxed{\text{Εξισωση Διαφορων}: \quad y[n] = \rho y[n-1] + x[n]}$$

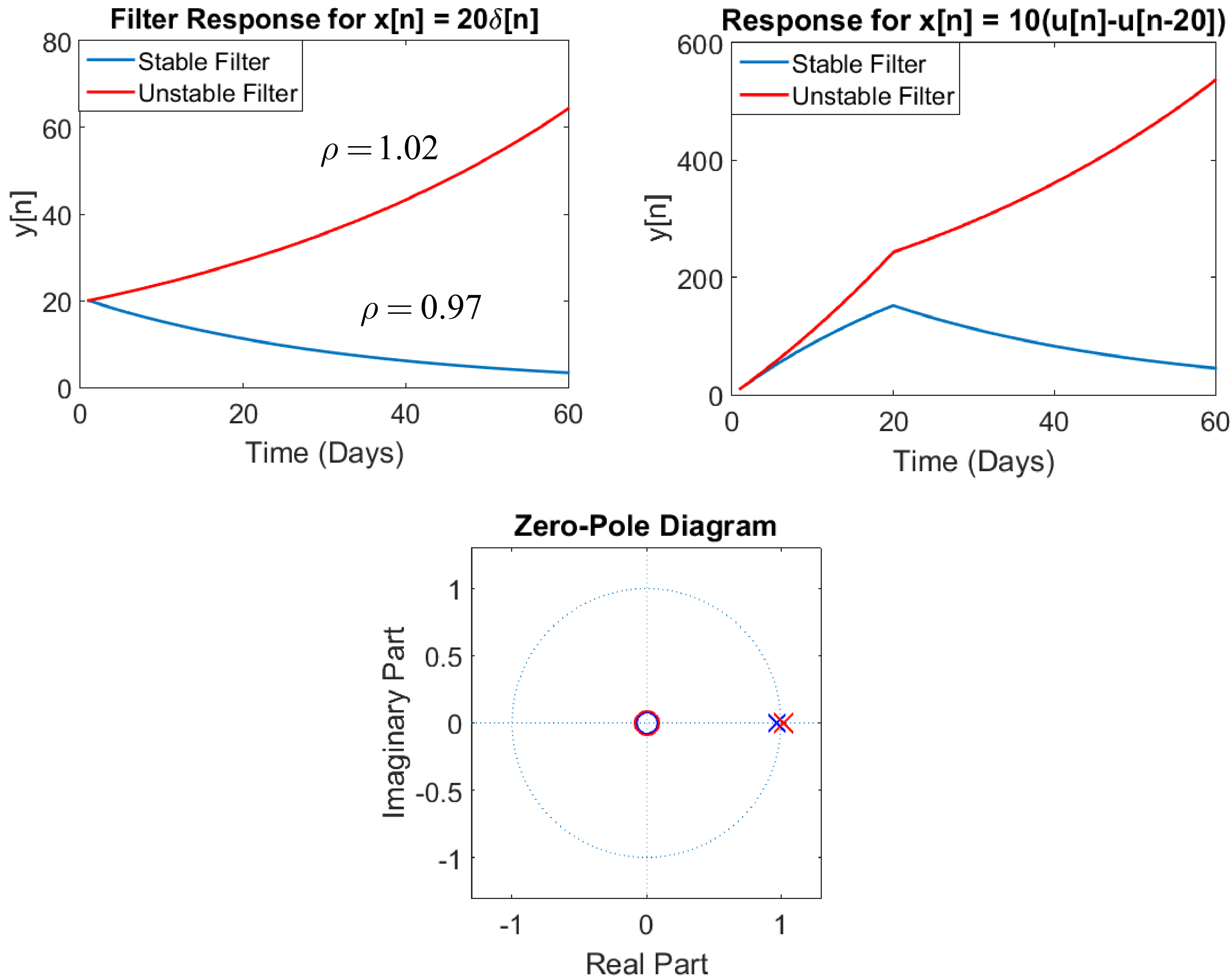
Υπολογισμος Εξοδου (στον χρονο) : $\quad y[n] = x[n] * h[n]$

Κρουστικη Αποκριση : $\quad h[n] = \rho^n u[n]$

Z μετασχηματισμος : $\quad Y(z) = \sum_n y[n] z^{-n} = H(z)X(z)$

Συναρτηση Μεταφορας : $\quad H(z) = \dfrac{1}{1-\rho z^{-1}} = \dfrac{z}{z-\rho}$

Αποκριση Συχνοτητας : $\quad H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = \text{DTFT}\{h[n]\} = \dfrac{1}{1-\rho e^{-j\Omega}}$



Filter Response for x[n] = 20δ[n]
Stable Filter
Unstable Filter
ρ = 1.02
ρ = 0.97
y[n]
Time (Days)
Response for x[n] = 10(u[n]-u[n-20])
Stable Filter
Unstable Filter
y[n]
Time (Days)
Zero-Pole Diagram
Imaginary Part
Real Part

Μοντελοποιηση Ακολουθιας Αριθμων Fibonacci και Lucas με Γραμμικη Εξισωση Διαφορων

Εξισωση Διαφορων: $y[n] = y[n-1] + y[n-2]$

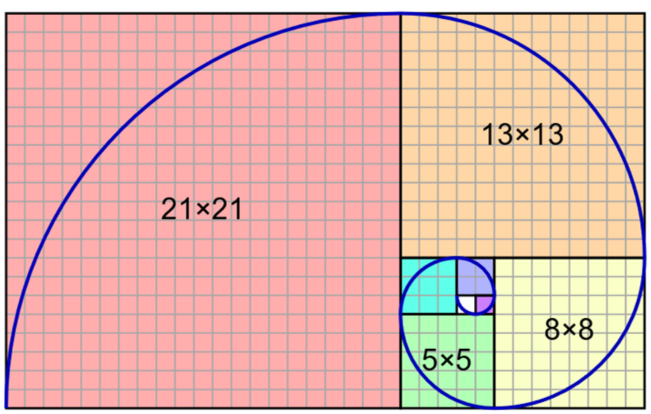
Αρχικες Συνθηκες: $y[0] = y[1] = 1 \Rightarrow$ Fibonacci

$n = 0,1,2,3,\ldots \Rightarrow y[n] = 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$

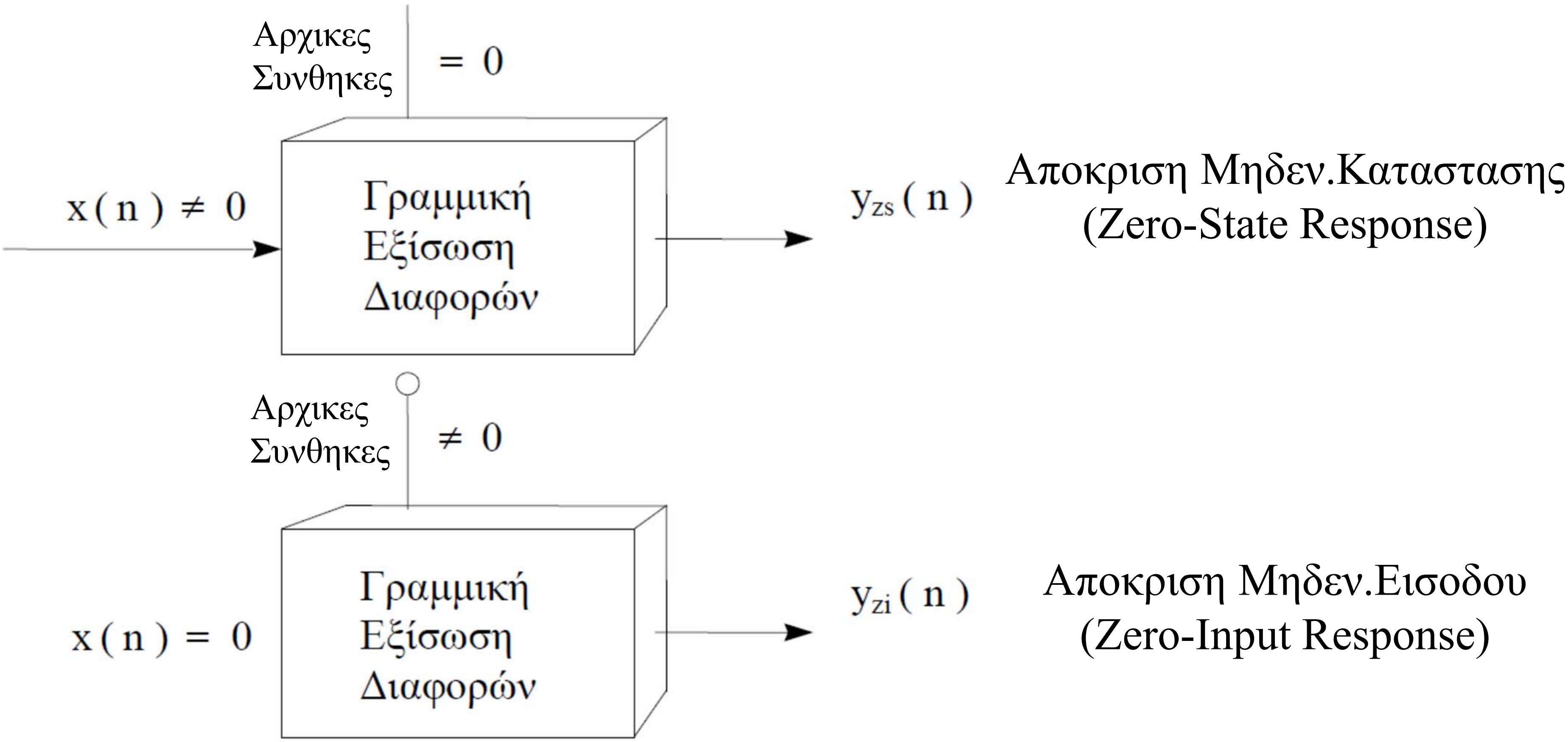
Αρχικες Συνθηκες: $y[0] = 2,\ y[1] = 1 \Rightarrow$ Lucas

$n = 0,1,2,3,\ldots \Rightarrow y[n] = 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ \ldots$

Χρυση Τομη ($\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$): $\forall\ y[0], y[1] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{y[n]}{y[n-1]} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$



$$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$



$$\boxed{y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)}$$

Επιλυση Ομογενους Γραμμικης Εξισωσης Διαφορων - Ι: Θεωρια

Θεώρημα: *Εστω η ομογενής γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές*

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = 0$$

Αν η χαρακτηριστική της εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{p} a_k z^{p-k} = a_0 z^p + a_0 z^{p-1} + \ldots + a_p = 0$$

έχει p διακριτές ρίζες $z_1, z_2, \ldots, z_p$, τότε *λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι*

$$y_{\text{zi}}[n] = \sum_{k=1}^{p} c_k (z_k)^n$$

όπου οι σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_p$ *προσδιορίζονται από τις βοηθητικές συνθήκες.*

Αν μια χαρακτηριστική ρίζα z_1 *έχει πολλαπλότητα m, τότε η αντίστοιχη ομογενής λύση είναι*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k n^{m-k} (z_1)^n = (c_1 n^{m-1} + c_2 n^{m-2} + \ldots + c_m) z_1^n$$

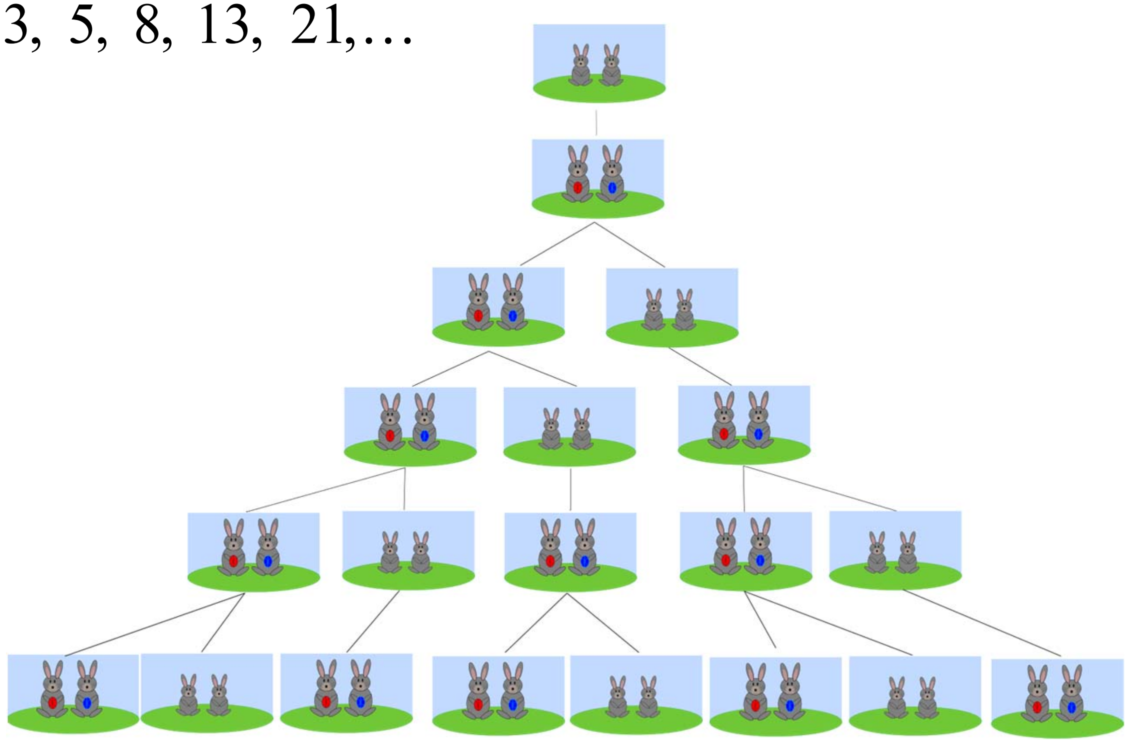
Επιλυση Ομογενους Γραμμικης Εξισωσης Διαφορων - ΙΙ: Παραδειγμα

Εξισωση Διαφορων: $y[n] = y[n-1] + y[n-2],$ Α.Σ.: $y[0] = y[1] = 1$

Χαρακτηριστικη εξισωση: $z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow$ ριζες $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Λυση ομογενους εξισωσης: $$y[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \quad n \geq 0$$

Fibonacci: $y[n] = 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots$



Ευρεση Ειδικης Λυσης Γραμμικης Εξισωσης Διαφορων - Ι: Θεωρια

Θεώρημα: *Εστω η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές*

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = x[n]$$

Αν η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = (f_1 n^d + f_2 n^{d-1} + \ldots + f_d n + f_{d+1})\beta^n$$

όπου το β δεν είναι χαρακτηριστική ρίζα της εξίσωσης διαφορών, τότε η αντίστοιχη ειδική λύση είναι της μορφής

$$y_{\text{particular}}[n] = (k_1 n^d + k_2 n^{d-1} + \ldots + k_d n + k_{d+1})\beta^n \qquad (*)$$

όπου οι σταθερές $k_1, k_2, \ldots, k_{d+1}$ προσδιορίζονται εφαρμόζοντας την ανωτέρω λύση στην εξίσωση διαφορών.

Αν το β είναι μια χαρακτηριστική ρίζα πολλαπλότητας m και η είσοδος είναι της μορφής (*), τότε η αντίστοιχη ειδική λύση είναι

$$y_{\text{particular}}[n] = n^m (k_1 n^d + k_2 n^{d-1} + \ldots + k_d n + k_{d+1})\beta^n$$

Ευρεση Ειδικης Λυσης Γραμμικης Εξισωσης Διαφορων - ΙΙ: Παραδειγμα

Εξισωση Διαφορων: $y[n]-3y[n-1]=2n\beta^n \quad (*)$

Αν β=5, **Ειδικη Λυση**:

$$y_{\text{part}}[n]=(k_1 n+k_2)5^n \quad (1)$$

Απο αντικαταστaση της (1) στην (*):

$$k_1=5, \quad k_2=-15/2$$

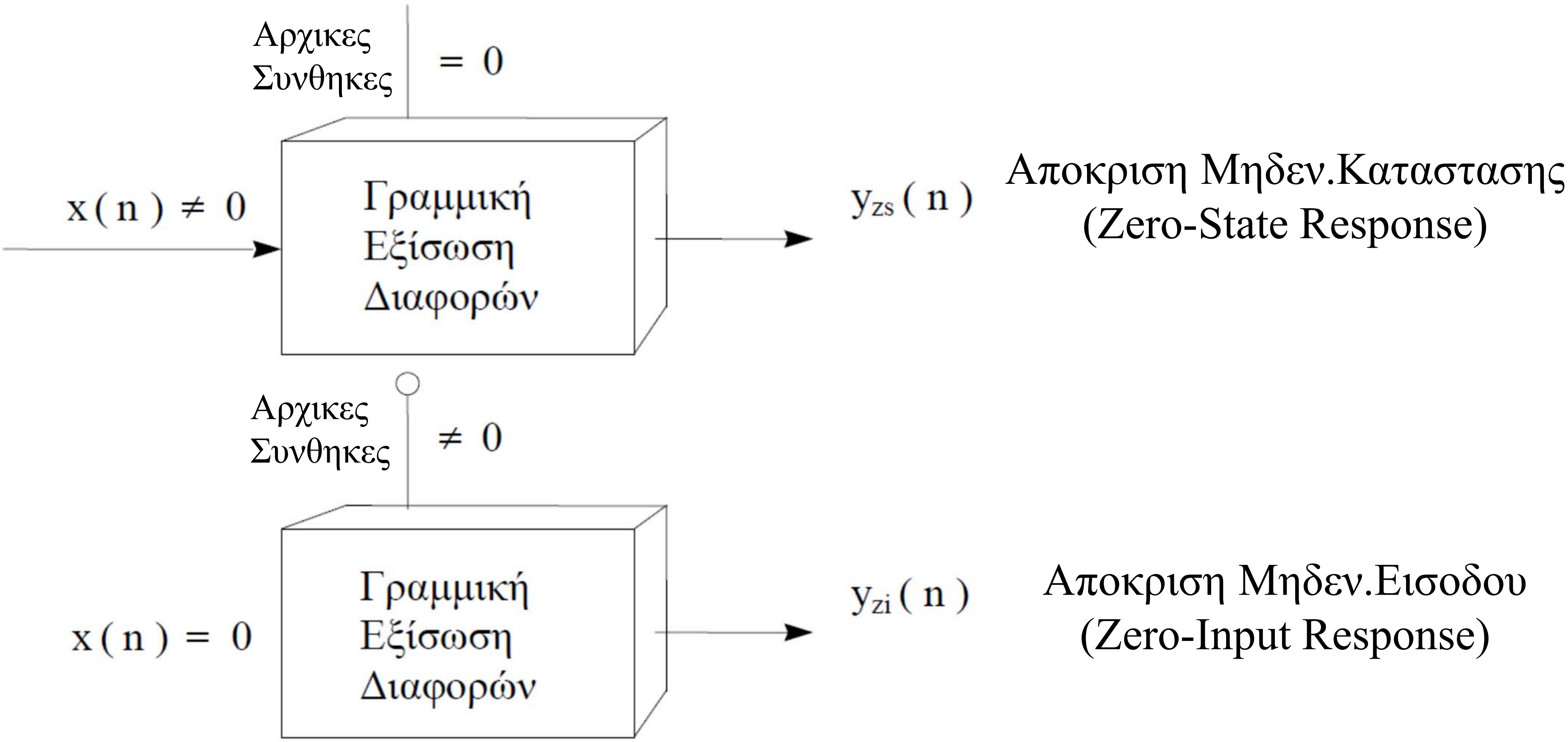
Αν β=3, **Ειδικη Λυση**:

$$y_{\text{part}}[n]=n(k_1 n+k_2)3^n \quad (2)$$

Απο αντικαταστaση της (2) στην (*):

$$k_1=k_2=1$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$



$$\boxed{y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)}$$

Παραδειγμα Επιλυση Εξισωσης Διαφορων στον Χρονο: ΑΜΕ + ΑΜΚ

Εξισωση Διαφορων: $y[n]-ay[n-1]=x[n]=K\cos(\Omega_0 n)u[n]$, Α.Σ.: $y[-1]$

Ομογενης λυση: **Αποκριση Μηδεν. Εισοδου** (ΑΜΕ): $y_{\mathrm{zi}}[n]=Aa^n \quad \forall n$

Ειδικη λυση: $y_{\mathrm{part}}[n]=M\cos(\Omega_0 n-\theta), \quad n\ge 0$

$$M=\frac{K}{\sqrt{1+a^2-2a\cos(\Omega_0)}}, \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{a\sin(\Omega_0)}{1-a\cos(\Omega_0)}\right)$$

Ειδικη λυση: **Αποκρισης Μηδεν. Καταστασης** (ΑΜΚ) για $n\ge 0$ με $y_{\mathrm{zs}}[0]=K$:

$$y_{\mathrm{zs}}[n]=[M\cos(\Omega_0 n-\theta)+Ca^n]u[n] \;\Rightarrow\; y_{\mathrm{zs}}[0]=K=M\cos(\theta)+C$$

Ολικη λυση για $n<0$:

$$y[n]=y_{\mathrm{zi}}[n]=y[-1]a^{n+1}$$

Ολικη Εξοδος για $\forall n$:

$$y[n]=\underbrace{y[-1]a^{n+1}}_{\substack{\text{zero-input response}\\ =y_{\mathrm{zi}}[n]}}+\underbrace{\left\{[K-M\cos(\theta)]a^n+M\cos(\Omega_0 n-\theta)\right\}u[n]}_{\text{zero-state response }=y_{\mathrm{zs}}[n]}$$

$$=\underbrace{y[-1]a^{n+1}+[K-M\cos(\theta)]a^n u[n]}_{\text{transient response}}+\underbrace{M\cos(\Omega_0 n-\theta)u[n]}_{\text{steady-state response}}$$

Ισοδυναμία Γραμ. Εξισ. Διαφορών με ΓΧΑ Σύστημα

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]}$$

Θεώρημα: *Η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές ισοδυναμεί με ένα αιτιατό γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα διακριτού χρόνου εάν ισχύει η* ***συνθήκη αρχικής ηρεμίας***

$$x[n]=0 \;\; \forall n \le n_0 \quad \Rightarrow \quad y[n]=0 \;\; \forall n \le n_0$$

για αυθαίρετο n_0 *και ταυτόχρονα έχουμε* ***μηδενικές αρχικές συνθήκες*** *για* $n = n_0$ *:*

$$y[n_0] = y[n_0 - 1] = \ldots = y[n_0 - p + 1] = 0$$

Τότε η συνέλιξη εισόδου και κρουστικής απόκρισης συμπίπτει με την απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

Παραδειγμα Επιλυσης Γραμ. Εξισωσης Διαφορων στον Χρονο με Αρχικες Συνθηκες ή/και Υποθεση Αρχικης Ηρεμιας

Εξισωση Διαφορων: $y[n]-0.5y[n-1]=x[n]$

Αν $x[n]=Ku[n]$ και Αρχικη Συνθηκη $y[-1]$

Εξοδος: $y[n]=\underbrace{y[-1](1/2)^{n+1}}_{y_{\mathrm{zi}}[n]}+\underbrace{K(2-(1/2)^{n})u[n]}_{y_{\mathrm{zs}}[n]}$

ΓΡΑΜΜΙΚΟ $\Leftrightarrow$ $y[-1]=0$

ΑΙΤΙΑΤΟ? Εστω δυο εισοδοι: $x_1[n]=0,\ \ x_2[n]=u[n+1]$

Αν επιβαλομε $y_2[0]=0$, τοτε γινεται μη-αιτιατο γιατι προκυπτουν εξοδοι

$$y_1[n]=0 \quad \text{και} \quad y_2[n]=\begin{cases} 2-(1/2)^{n-1}, & n\geq -1 \\ -(1/2)^{n}, & n<-1 \end{cases}$$

Αν υποθεσομε **Αρχικη Ηρεμια**, τοτε ειναι αιτιατο γιατι προκυπτουν εξοδοι

$$y_1[n]=0 \quad \text{και} \quad y_2[n]=\begin{cases} 2-(1/2)^{n+1}, & n\geq -1 \\ 0, & n<-1 \end{cases}$$

ΔΧ: Μιγαδικα Ημιτονοειδη = Ιδιοσηματα για ΓΧΑ Συστηματα

$$x[n] = e^{j\Omega_1 n} \longrightarrow \boxed{\mathbf{h[n]}} \longrightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] e^{j\Omega_1 (n-m)}$$

$$= e^{j\Omega_1 n} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] e^{-j\Omega_1 m} \right)$$

$$\boxed{H(\Omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} = \mathrm{DTFT}\{h[n]\}}$$

Αποκριση Συχνοτητας

(2π – περιοδικη)

$$y[n] = \underbrace{H(\Omega_1)}_{\text{ιδιοτιμη}} \cdot \underbrace{e^{j\Omega_1 n}}_{\text{ιδιοδιανυσμα}} = \underbrace{|H(\Omega_1)| e^{j\angle H(\Omega_1)}}_{\text{μιγαδικο πλατος } H(\Omega_1)} e^{j\Omega_1 n}$$

Αποκριση ΓΧΑ Συστηματος για Εισοδο = Γραμμικο Συνδυασμο Ημιτονοειδων

$$x[n] = \sum_k c_k e^{j\Omega_k n} \longrightarrow \boxed{\mathbf{h[n]}} \longrightarrow y[n] = \sum_k c_k H(\Omega_k) e^{j\Omega_k n}$$

$$\boxed{H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n}}$$

Εφαρμογη: Ημιτονοειδης Αποκριση ΓΧΑ Συστηματος με πραγματικο h[n]:

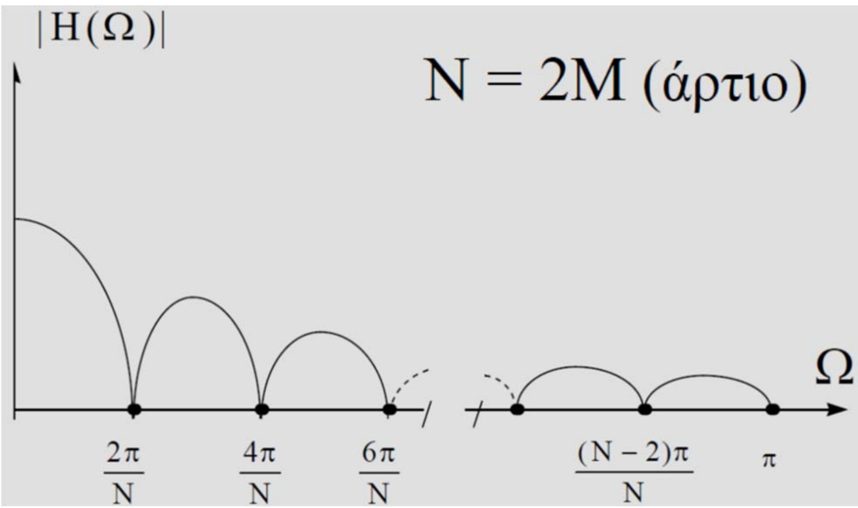
$$x[n] = A\cos(\Omega_1 n + \phi) \longrightarrow \boxed{\mathbf{h[n]}} \longrightarrow$$

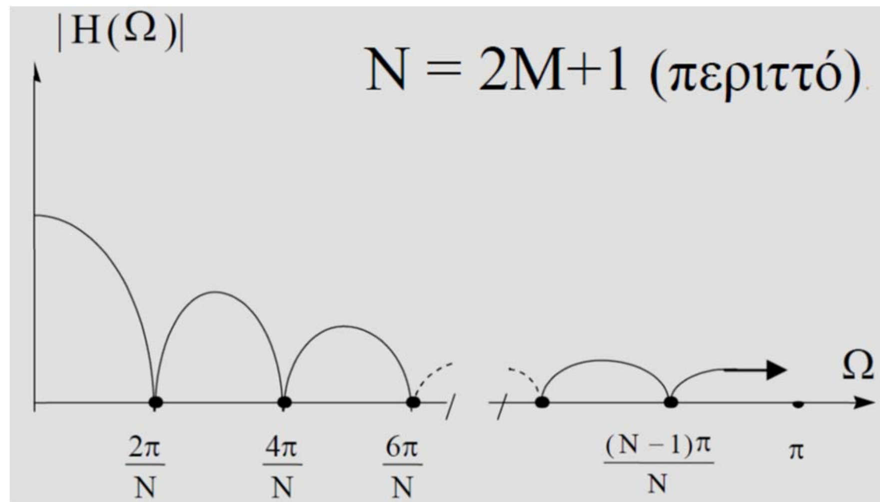
$$y[n] = A\,|H(\Omega_1)|\cos(\Omega_1 n + \phi + \measuredangle H(\Omega_1))$$

Παραδειγμα Αποκρισης Συχνοτητας: ΔΧ Φιλτρο Κινουμενου Μεσου Ορου

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$$





Αποκριση Συχνοτητας Συστηματων Περιγραφομενων με Εξισ. Διαφορων

Εξισωση Διαφορων: $$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$

Ιδιοτητα DTFT: $$x[n-k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\Omega k} X(\Omega)$$

Αποκριση Συχνοτητας: $$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k e^{-j\Omega k}}$$

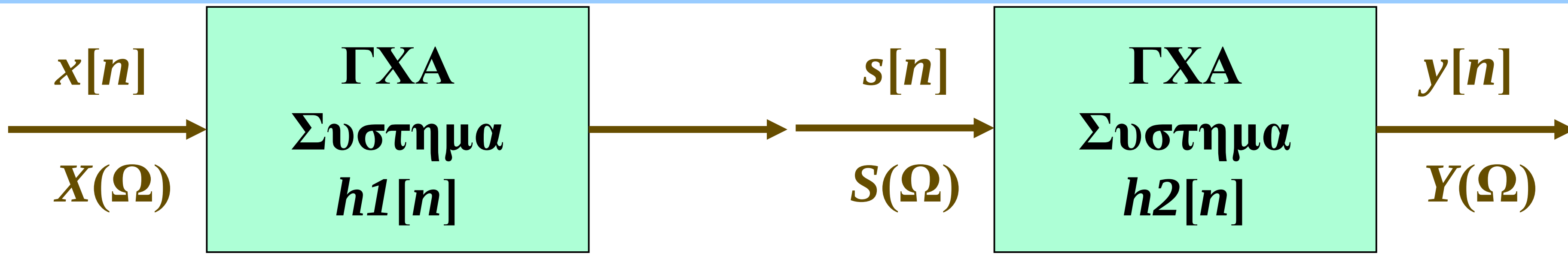
Επιλυσης Συστηματος Περιγραφομενου απο Εξισωση Διαφορων (με Α.Σ.=0) στο πεδιο Συχνοτητας μεσω DTFT και Αποκριση Συχνοτητας

Εξισωση Διαφορων: $$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$

Αποκριση Συχνοτητας: $$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k e^{-j\Omega k}}$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\mathrm{DTFT}} \rightarrow X(\Omega) \rightarrow \underset{}{\overset{S}{\boxed{H(\Omega)}}} \rightarrow X(\Omega)\mathrm{H}(\Omega) \rightarrow \boxed{\mathrm{DTFT}^{-1}} \rightarrow S(x[n])$$

Παραδειγμα Επιλυσης Συστηματος Περιγραφομενου με Εξισωση Διαφορων στο πεδιο Συχνοτητας μεσω DTFT και Αποκριση Συχνοτητας



Δυο συστηματα εν σειρα: Το 1ο με κρουστικη αποκριση $h_1[n]=(1/4)^n u[n]$

Το 2ο με εισοδο-εξοδο: $s[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]\mapsto y[n]=10\delta[n]-\delta[n-1]$

Αποκριση Συχνοτητας συνολικου συστηματος $x[n]\mapsto y[n]$:

$$H(\Omega)=H_1(\Omega)H_2(\Omega)=\frac{1}{1-(1/4)e^{-j\Omega}}\cdot\frac{10-e^{-j\Omega}}{1+(1/2)e^{-j\Omega}}$$

Εξισωση Διαφορων (Α.Σ.=0): $y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=10x[n]-x[n-1]$

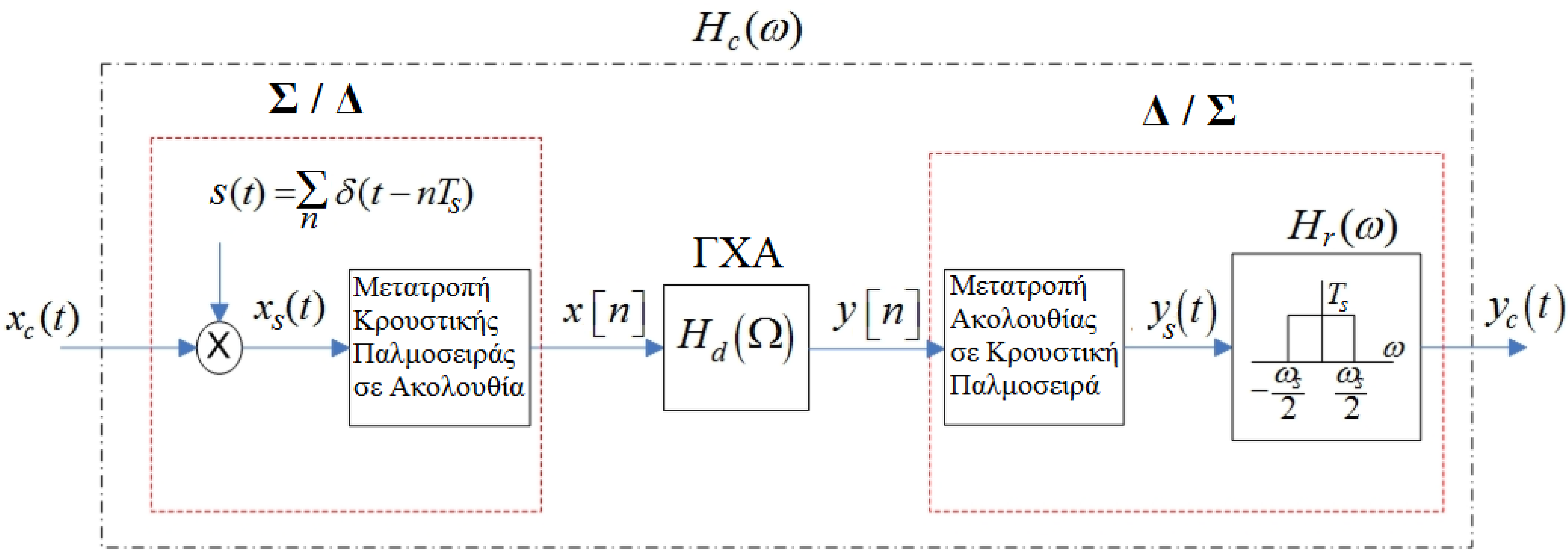
Κρουστικη Αποκριση συνολικου συστηματος:

$$h[n]=\left\{3(1/4)^n+8(-1/2)^n\right\}u[n]$$

Εξοδος συνολικου συστηματος οταν $x[n]=(1/3)^n u[n]$:

$$y[n]=\left\{-6(1/4)^n+(56/5)(1/3)^n+(24/5)(-1/2)^n\right\}u[n]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Αναλογικών Σημάτων



$$H_c(\omega)=\begin{cases} H_d(\omega T_s), & |\omega|\le \pi/T_s \\ 0, & |\omega|>\pi/T_s \end{cases}$$

- Υλοποιηση ΓΧΑ Αναλογικου Βαθυπερατου Φιλτρου *μεταβαλλομενης συχνοτητας αποκοπης* $\omega_c = \Omega_c / T_s$ απο Ψηφιακο Βαθυπερατο με συχνοτητας αποκοπης Ω_c.

- Υλοποιηση Ιδανικου *Αναλογικου Διαφοριστη* $y_c(t) = dx_c / dt$ για Band-limited σηματα.

- Ευρεση Κρουστικης Αποκρισης $h_d[n]$ ισοδυναμου ΓΧΑ Ψηφιακου Φιλτρου απο την κρουστικη αποκριση $h_c(t)$ του Αναλογικου Φιλτρου (μεθοδος Impulse Invariance).

Αντιστρεψιμοτητα ΔΧ ΓΧΑ Συστηματων

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow \boxed{g(n)} \longrightarrow x(n)$$

$$\boxed{h(n) * g(n) = \delta(n)} \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)g(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)h(n-k) = \delta(n)$$

Για αιτιατά συστήματα $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty} h(k)g(n-k) = \delta(n), \quad n = 0,1,..,N-1,...$

$$\begin{bmatrix} h(0) & & & & \\ h(1) & h(0) & & & \\ h(2) & h(1) & h(0) & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ h(N-1) & h(N-2) & \cdots & h(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ \vdots \\ g(N-1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ευρεση Κρουστικης Αποκρισης απο Επιλυση Εξισ. Διαφορων στον Χρονο

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} \alpha_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k)}$$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\boxed{h(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k \delta(n-k) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k h(n-k)}$$

n=0,1,...,q

$$h(0) = b_0$$

$$h(1) = b_1 - \alpha_1 h(0)$$

$$h(2) = b_2 - \alpha_1 h(1) - \alpha_2 h(0)$$

$$\vdots$$

$$h(q) = b_q - \alpha_1 h(q-1) - \ldots - \alpha_p h(q-p)$$

$n>q$

$$h(n) = -\sum_{k=1}^{p} \alpha_k h(n-k)$$

Z Μετασχηματισμος

Αμφιπλευρος & Μονοπλευρος Μετ/σμος Z

Αμφιπλευρος Z μετ / σμος: $X^{\alpha}(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

Περιοχη Συγκλισης (**ΠΣ**): $\{z \in \mathbb{C} : \ |X(z)| < \infty\}$

Σχεση με Discrete-Time Fourier Transform (DTFT):

Αν Μοναδιαιος κυκλος $\subseteq$ ΠΣ $\Rightarrow$

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]\} = X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

Μονοπλευρος Z μετ / σμος: $X(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$

Αιτιατο σημα $x[n] \Rightarrow$ Μονοπλευρος Z = Αμφιπλευρος

Ιδιοτητες & Παραδειγματα Μετ/σμου Z (1)

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

$\Pi\Sigma =$

$\text{DTFT}\{a^n u[n]\} = ?$

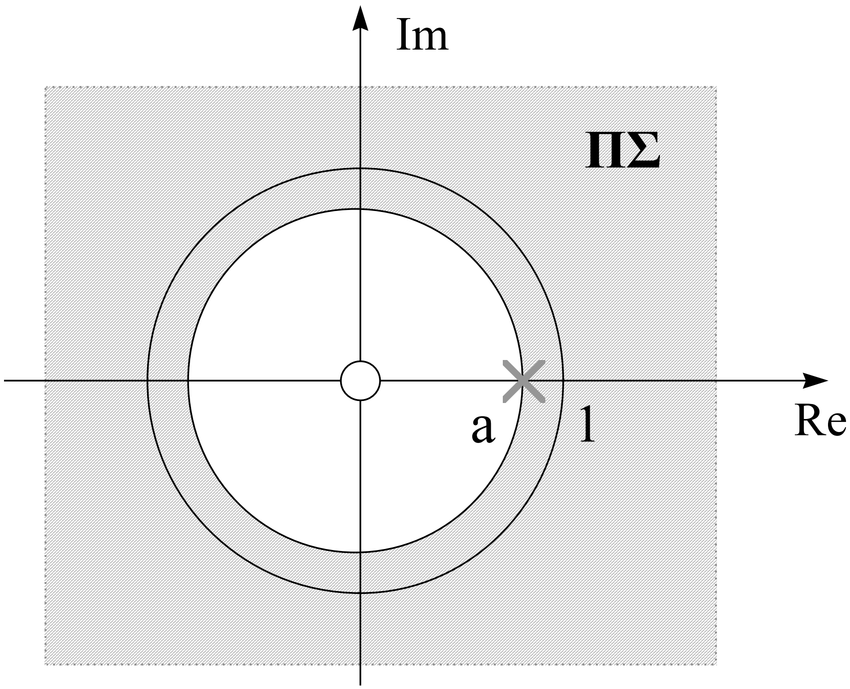
$$x[n] = -a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

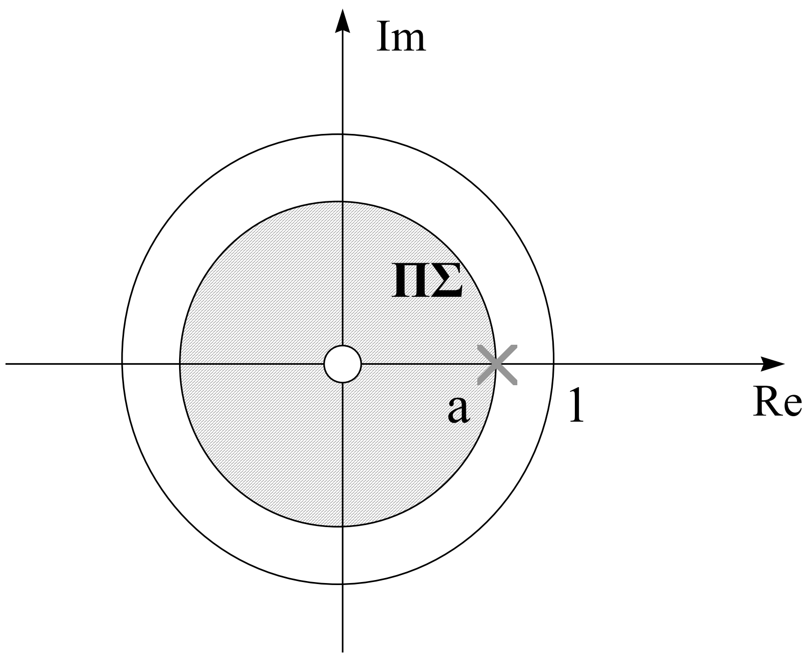
$\Pi\Sigma =$

$\text{DTFT}\{-a^n u[-n-1]\} = ?$

Περιοχές Σύγκλισης Δεξίπλευρου και Αριστερόπλευρου σήματος

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$





$x[n] = a^n u[n], \quad |a|<1$

$x[n] = -a^n u[-n-1]$

Ιδιοτητες & Παραδειγματα Μετ/σμου Z (2)

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z|>|a|$$

$$u[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\text{DTFT}\{u[n]\} = ?$$

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) = \frac{1-\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\text{DTFT}\{\cos(\Omega_0 n)u[n]\} = ?$$

$$y[n] = r^n \cos(\Omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} Y(z) =$$

$$\text{DTFT}\{r^n \cos(\Omega_0 n)u[n]\} = ?$$

Μερικες Ιδιοτητες Αμφιπλευρου Μετ/σμου Z (1)

1. Γραμμικοτητα: $c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z)$

2. Χρονικη Αντιστροφη: $x[-n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z^{-1})$

3. Κλιμακωση στο πεδιο Z: $y[n] = a^n x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} Y(z) = X(a^{-1}z)$

   $\Pi\Sigma_y =$

4. Παραγωγιση στο πεδιο Z: $n \cdot x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

5. Εφαρμογη της (4): $x[n] = na^n u[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}}$

   $\Pi\Sigma =$

Μερικες Ιδιοτητες Αμφιπλευρου Μετ/σμου Z (2)

Χρονικη Μετατοπιση: $x[n-k] \xleftrightarrow{\text{ZT}} z^{-k} X(z)$

Συνελιξη : $y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} Y(z) = X(z) H(z)$

$\Pi\Sigma =$

Μερικες Ιδιοτητες Μονοπλευρου Μετ/σμου Ζ

Ισχυουν για Αμφιπλευρο και Μονοπλευρο Ζ μετ/σμο

Γραμμικοτητα: $c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z)$

Κλιμακωση στο πεδιο Ζ: $a^n x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(a^{-1}z)$

Παραγωγιση στο πεδιο Ζ: $n \cdot x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

Συνελιξη: $y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} Y(z) = X(z)H(z)$

Χρονικη Μετατοπιση

Αμφιπλευρος: $x[n-m] \xleftrightarrow{\text{2-sided ZT}} z^{-m}X(z)$

Μονοπλευρος : $x[n-m] \xleftrightarrow{\text{1-sided ZT}} z^{-m}X(z) + \text{Polynomial}(z, \text{Α.Σ.})$

$$x[n-1] \xleftrightarrow{\text{1-sided ZT}} z^{-1}X(z) + x[-1]$$

$$x[n-2] \xleftrightarrow{\text{1-sided ZT}} z^{-2}X(z) + x[-1]z^{-1} + x[-2]$$

ΔΧ: Μιγαδικα Εκθετικα = Ιδιοσηματα για ΓΧΑ Συστηματα

$$x[n] = z_1^{\,n} \longrightarrow \boxed{\mathbf{h[n]}} \longrightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m](z_1)^{n-m}$$

$$= z_1^{\,n}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m](z_1)^{-m}\right)$$

$$\boxed{H(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n](z_1)^{-n} = \mathrm{ZT}\{h[n]\}}$$

Συναρτηση Μεταφορας

= Αμφιπλευρος Ζ μετ/σμος Κρουστικης Αποκρισης

$$y[n] = \underbrace{H(z_1)}_{\text{ιδιοτιμη}} \cdot \underbrace{z_1^{\,n}}_{\text{ιδιοδιανυσμα}}$$

Επιλυση Εξισωσης Διαφορων στην Συχνοτητα με Z μετ/σμο

$$y[n] = -\sum_{i=1}^{p} a_i y[n-i] + \sum_{i=0}^{q} b_i x[n-i]$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_q z^{-q}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_p z^{-p}} = \frac{\sum_{i=0}^{q} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{p} a_i z^{-i}}$$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{B(z)}{A(z)} X(z)}_{\mathrm{ZT}\{y_{zs}[n]\}} \underbrace{- \frac{1}{A(z)} \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{k=1}^{i} y[-k] z^{-i+k}}_{\mathrm{ZT}\{y_{zi}[n]\}}$$

$$y[n] = \text{Inverse ZT}\{Y(z)\} = y_{zs}[n] + y_{zi}[n]$$

Μεθοδοι Αντιστροφης Μετ/σμου Ζ

- Cauchy (Residue) Θεωρημα
- Μακρα Διαιρεση
- Αναπτυξη σε Μερικα Κλασματα
- Ιδιοτητες μετ/σμου Ζ

Παραδειγμα Επιλυση Εξισωσης Διαφορων στην Συχνοτητα (z)

Εξισωση Διαφορων: $y[n] - ay[n-1] = x[n] = K\cos(\Omega_0 n)u[n]$, Α.Σ.: $y[-1]$

Z μετ / σμος: $Y(z) - ay[-1] - az^{-1}Y(z) = \dfrac{K(1-\cos\Omega_0 z^{-1})}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \underbrace{\frac{ay[-1]}{1-az^{-1}}}_{Y_{zi}(z)} + \underbrace{\frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{K(1-\cos\Omega_0 z^{-1})}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1} + z^{-2}}}_{\text{ZT(zero-state response)}=Y_{zs}(z)}$$

Ολικη Εξοδος: $y[n] = \underbrace{y[-1]a^{n+1}}_{\substack{\text{zero-input response} \\ = y_{zi}[n]}} + \underbrace{[(K - M\cos\theta)a^n + M\cos(\Omega_0 n - \theta)]u[n]}_{\text{zero-state response } = y_{zs}[n]}$

$$M = \frac{K}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\Omega_0}}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a\sin(\Omega_0)}{1-a\cos(\Omega_0)}\right)$$

Κρουστικη Αποκριση: $h[n] = a^n u[n]$ (Ευσταθες ?)

Συναρτηση Μεταφορας: $H(z) = 1/(1-az^{-1})$ (Αποκριση Συχνοτητας ?)

Ψηφιακα Συστηματα με Ρητη Συναρτηση Αναφορας

Εξισωση Διαφορων

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Συναρτηση Μεταφορας

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})}$$

IIR (N>0)

(αναπτυξη σε μερικα κλασματα

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

$$h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^{N} A_k d_k^n u[n]$$

FIR (N=0)

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

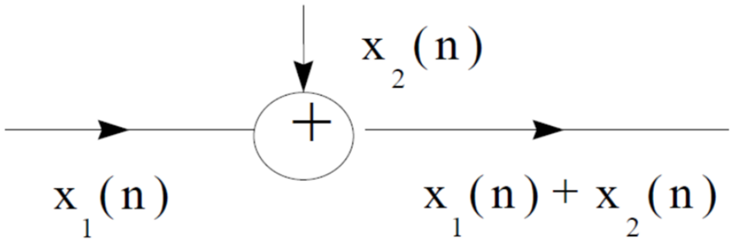
Γενικα περι Εξισωσεων Διαφορων (ΕΔ)

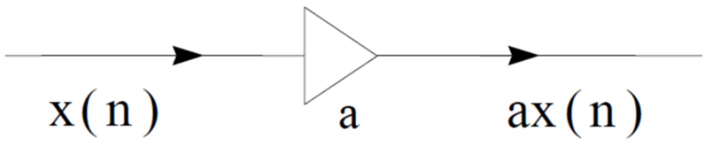
- **Μεθοδοι Επιλυσης ΕΔ**: ευρεση σηματος εξοδου για συγκεκριμενη εισοδο και αρχικες συνθηκες (Α.Σ.)
  - Πεδιο Χρονου:
    - Μαθηματικα: συνολικη λυση = λυση ομογενους + ειδικη λυση.
    - Σ&Σ: y[n] = Αποκριση Μηδεν. Εισοδου (Zero Input Resp.) +
      + Αποκριση Μηδεν. Καταστασης (Zero State Response).
  - Πεδιο Συχνοτητας: Y(z) = ZT{Total Output} = ZT{ZIR} + ZT{ZSR}
    y[n] = Inverse ZT{Y(z)} = ZIR + ZSR
- **Αναλυση ΕΔ ως Συστημα**:
  - Ευρεση Κρουστικης Αποκρισης h[n]: Για FIR με απλη επισκοπηση της ΕΔ. Για IIR:
    - Πεδιο Χρονου: Επαγωγικα (για χαμηλοβαθμες ΕΔ)
      [ή Διαχωρισμος σε δυο συστηματα εν σειρά.]
    - Πεδιο Συχνοτητας: με Αντιστροφο Μετ/σμο της Αποκρισης Συχνοτητας / Συναρτησης Μεταφορας.
  - Ευρεση Αποκρισης Συχνοτητας / Συναρτησης Μεταφορας:
    - Απο ΕΔ με ZT → Συναρτηση Μεταφορας H(z)
    - Απο H(z) για z=exp(jΩ) → Αποκριση Συχνοτητας H(Ω)
    - Απο ΕΔ με DTFT → Αποκριση Συχνοτητας H(Ω)
    - Απο h[n] με DTFT / ZT

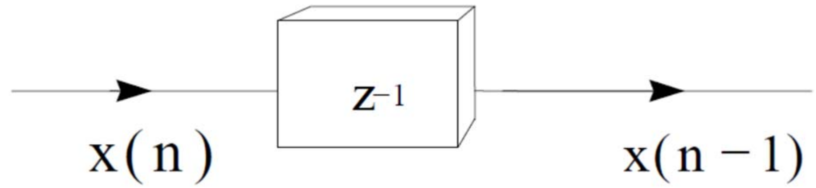
Διαγραμματικες Παραστασεις Συστηματων

Διαγραμματικες Παραστασεις ΓΧΑ Συστηματων που Περιγραφονται με Εξισωσεις Διαφορων

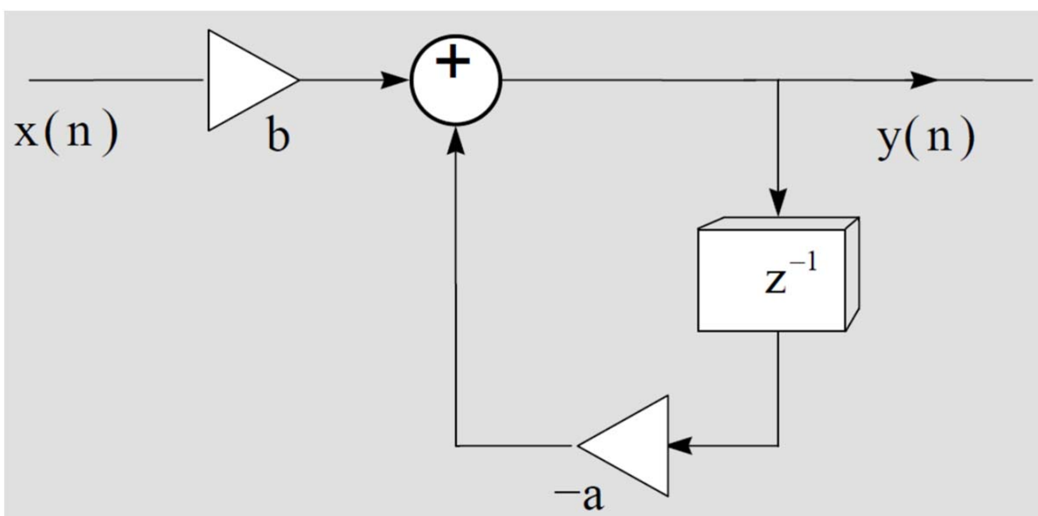
Βασικα Συμβολα / Δομικα Στοιχεια







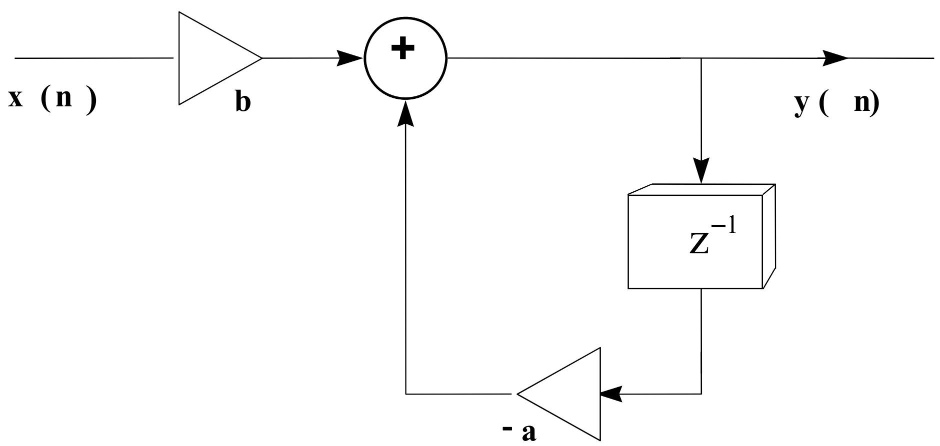
Διαγραμματικη Παρασταση της Εξισωσης $y(n)+ay(n-1)=bx(n)$

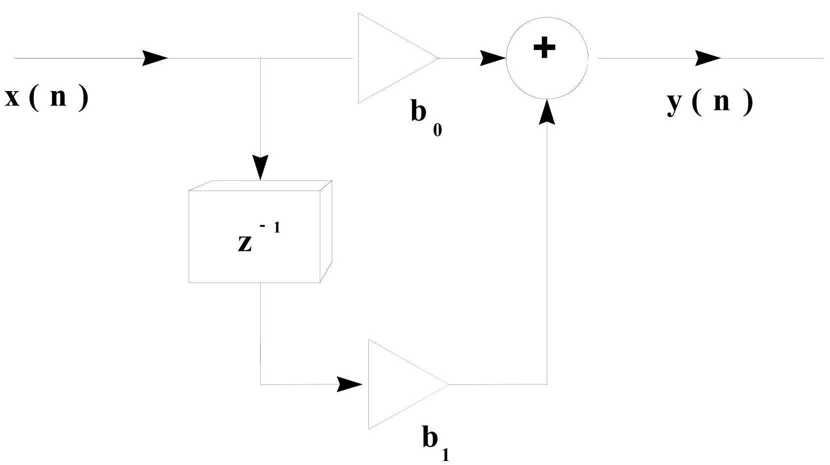


Διαγραμματική Αναπαράσταση Εξισώσεων 1ου βαθμού

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

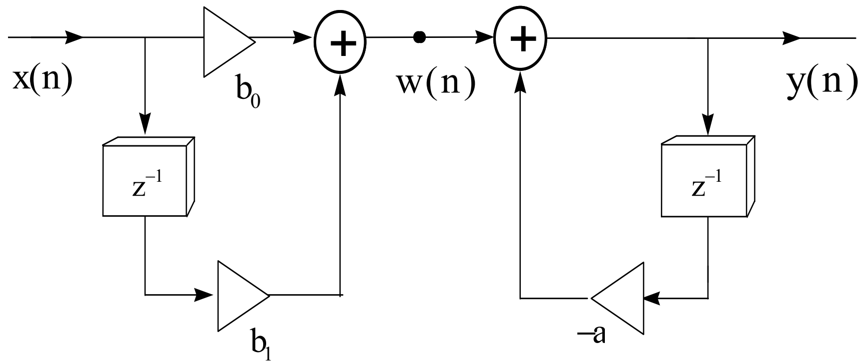
$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$



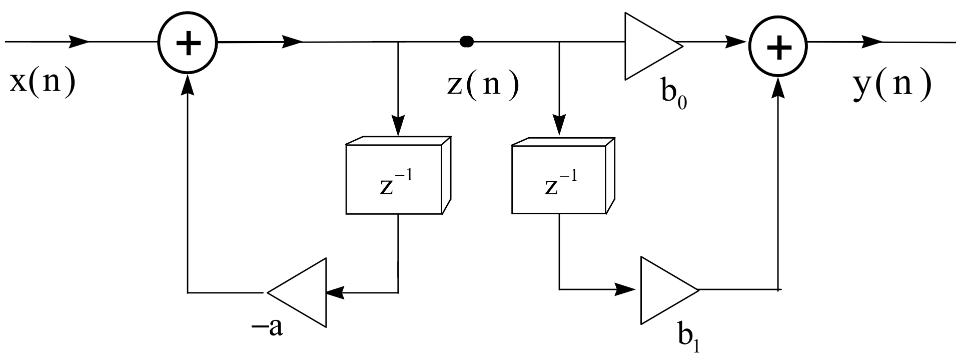


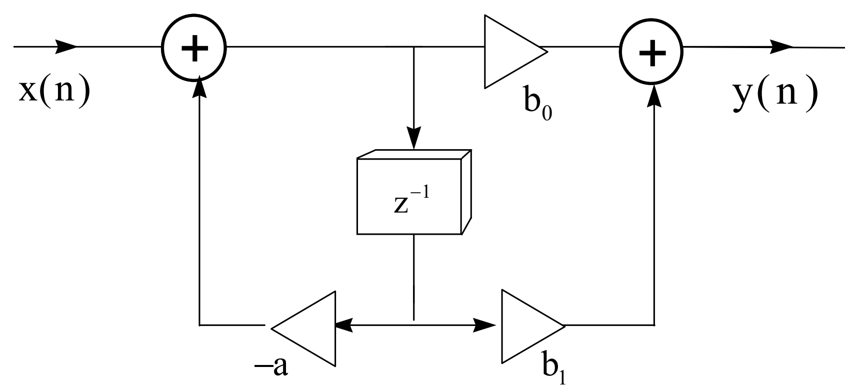
Εναλλακτικές Υλοποιήσεις

$$\underbrace{y[n]+ay[n-1]}_{=w[n]}=b_0x[n]+b_1x[n-1]$$



Direct form I

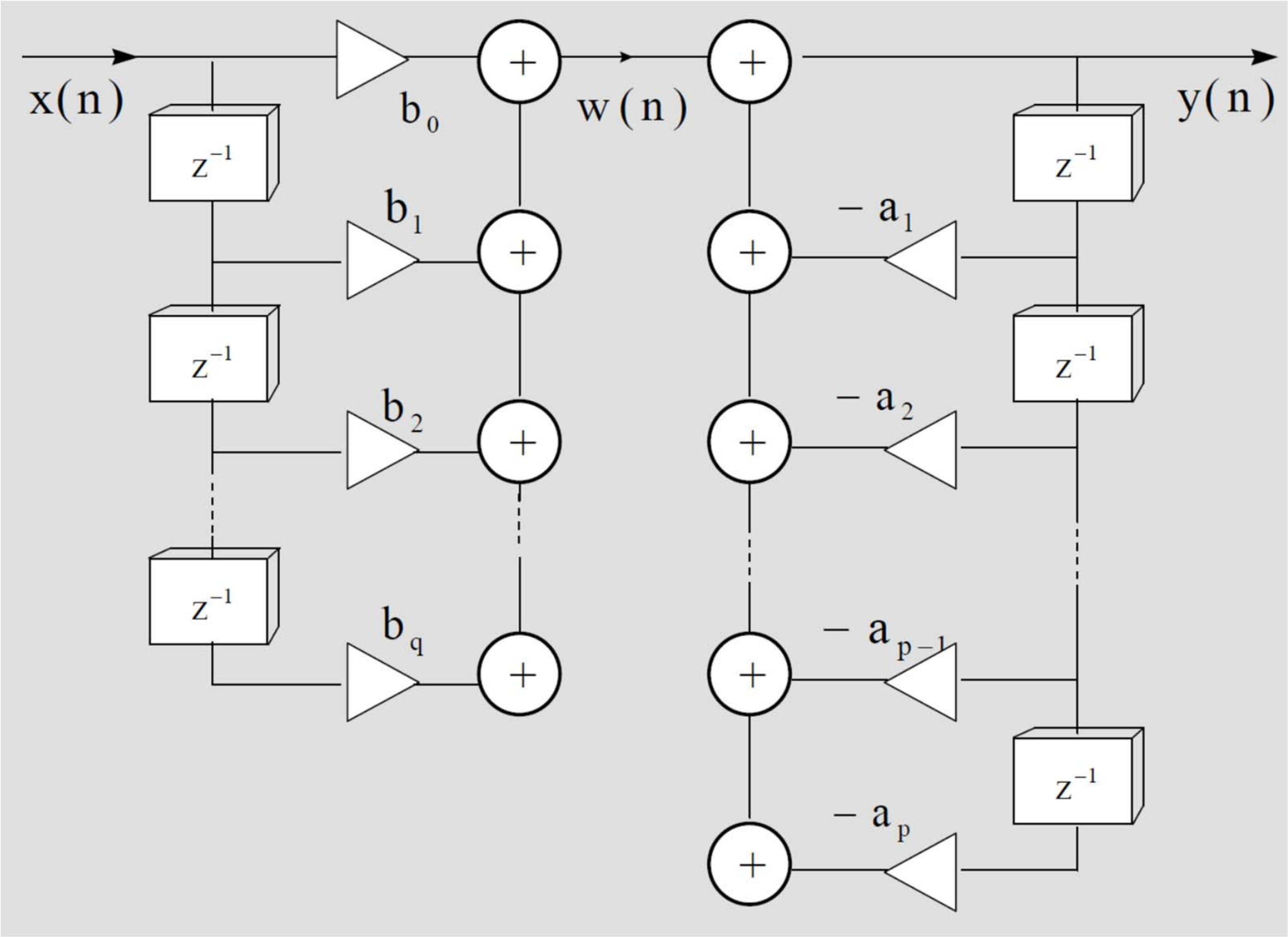




Direct form II

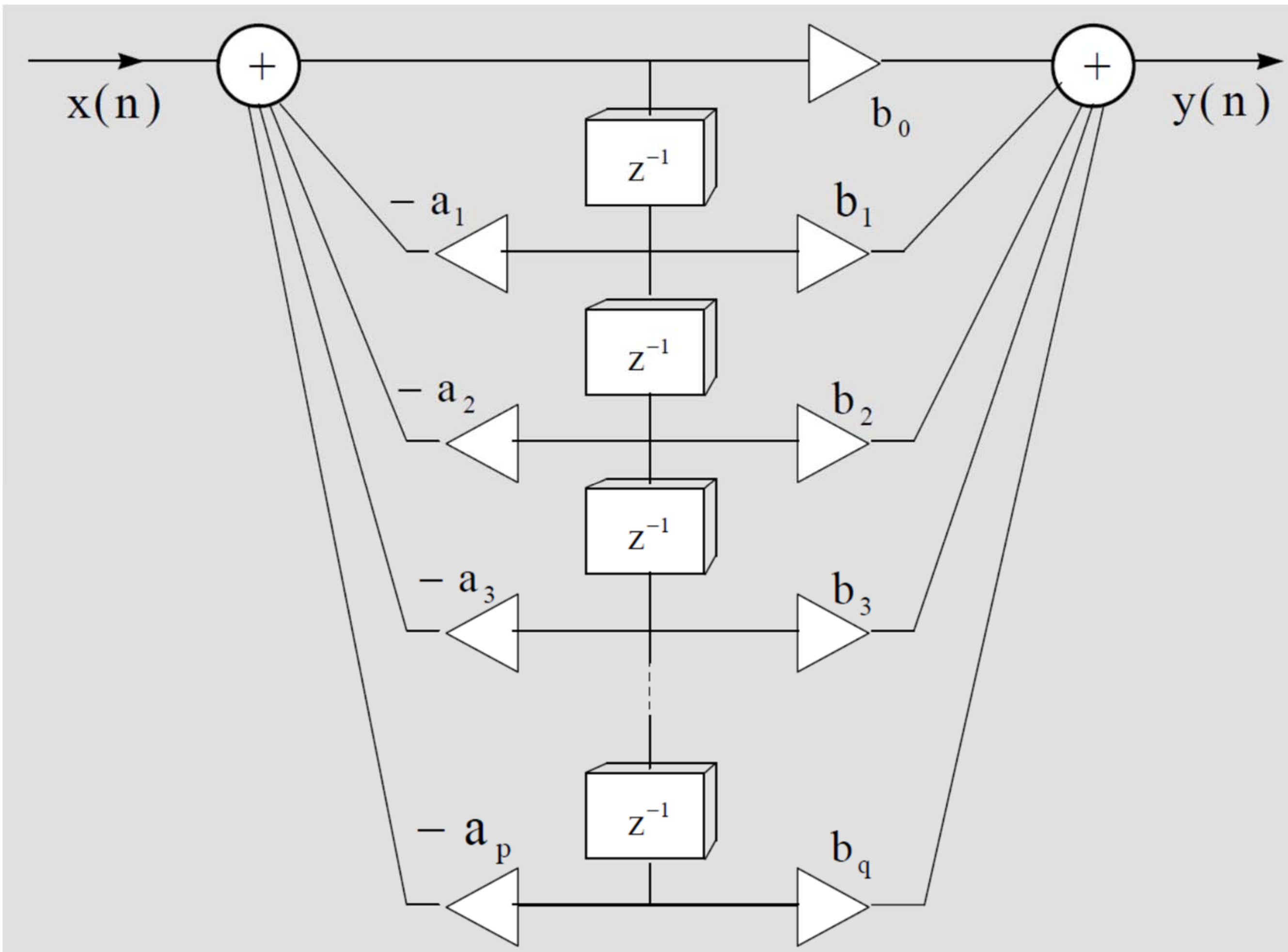
Διαγραμματικες Παραστασεις ΓΧΑ Συστηματων που Περιγραφονται με Εξισ. Διαφορων: Απευθείας μορφή Ι

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$



Διαγραμματικες Παραστασεις ΓΧΑ Συστηματων που Περιγραφονται με Εξισ. Διαφορων: Απευθείας μορφή ΙΙ (*p*=*q*)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k]$$



Βιβλιογραφια

- Γ. Καραγιάννης και Π. Μαραγκός, *Βασικές Αρχές Σημάτων και Συστημάτων*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2010.

- A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-time Signal Processing,* 1999 (Prentice-Hall), 2010 (Pearson).