ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Κυματική και Κβαντική Φυσική»
της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα
2020

Η εξίσωση κύματος σε 3-διαστάσεις

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε τις εξισώσεις κύματος σε 1-, και, 2-διαστάσεις $\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2}$, και $\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2}$, αντίστοιχα, όπου οι συναρτήσεις $\eta_1 \equiv y(x,t)$ και $\eta_2 \equiv z(x,y,t)$, ήταν η εγκάρσια απομάκρυνση (από την κατάσταση ισορροπίας) κάθετα στη χορδή ή στην μεμβράνη, αντίστοιχα, οπότε αναφερόμαστε σε ***εγκάρσια κύματα***. Στην περίπτωση όμως της ταλάντωσης σε μία χαλύβδινη ράβδο, η οποία διεγείρεται παράλληλα στον άξονά της, ή των ηχητικών κυμάτων σε στήλη αέρα, η συνάρτηση η ήταν η διαμήκης απομάκρυνση (από την κατάσταση ισορροπίας) παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Όταν μεταβούμε σε ένα ελαστικό μέσο το οποίο εκτείνεται στις 3-διαστάσεις, τότε το μέγεθος το οποίο κυμαίνεται ως συνάρτηση της θέσης, $\vec{r} = (x,y,z)$, και του χρόνου, t, θα δούμε ότι μπορεί να είναι είτε ένα βαθμωτό μέγεθος, είτε ένα διανυσματικό μέγεθος, (σε πιο σύνθετες περιπτώσεις μπορεί να είναι και ένα τανυστικό μέγεθος). Ως παραδείγματα, θα μπορούσαν να αναφερθούν, π.χ., κατά την διάδοση ηχητικών κυμάτων στον αέρα, η μεταβολή της πίεσης του αέρα $p = p(x,y,z,t)$, ή η προσανατολισμένη ταχύτητα $\vec{u}_p = \vec{u}_p(x,y,z,t)$ των μορίων του αέρα, η οποία προκαλείται από την προηγούμενη μεταβολή της πίεσης λόγω του ήχου και προκύπτει απο τη συνολική ταχύτητα $\vec{u}_{tot} = \vec{u}_{tot}(x,y,z,t)$ των μορίων του αέρα όταν αφαιρεθεί η θερμική συνιστώσα που οφείλεται στην πεπερασμένη θερμοκρασία και πίεση των μορίων του αέρα $\vec{u}_p(\vec{r},t) = \vec{u}_{tot}(\vec{r},t) - \vec{u}_{therm}(\vec{r},t)$. Επίσης, θα δειχθεί ότι, στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό, είναι τα διανυσματικά μεγέθη της έντασης του Ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$ και της έντασης του Μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$ τα οποία κυμαίνονται ως συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου.

Ανεξάρτητα από το αν αναφερόμαστε στην διακύμανση βαθμωτού ή διανυσματικού μεγέθους, η μετάβαση από τη 1-διάσταση, στις 2-διαστάσεις, προμηνύει ότι η περαιτέρω μετάβαση στις 3-διαστάσεις θα οδηγήσει σε μια κυματική εξίσωση της μορφής

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \eta = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}},$$

όπου η συνάρτηση $\eta = \eta(\vec{r},t)$ μπορεί να είναι είτε μία βαθμωτή συνάρτηση είτε συνιστώσα μίας διανυσματικής συνάρτησης, (από την ανάλυση σε συνιστώσες της διανυσματικής έκφρασης $\nabla^2 \vec{\eta} \equiv \hat{x}\nabla^2 \eta_x + \hat{y}\nabla^2 \eta_y + \hat{z}\nabla^2 \eta_z = \hat{x}\frac{\partial^2 \eta_x}{\partial t^2} + \hat{y}\frac{\partial^2 \eta_y}{\partial t^2} + \hat{z}\frac{\partial^2 \eta_z}{\partial t^2}$).

Στη συνέχεια, θα υποδειχθεί πως προκύπτει αυτή η κυματική εξίσωση σε 3-διαστάσεις, για δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπως είναι η διάδοση του ήχου στον αέρα και η διάδοση Ηλεκτρο-Μαγνητικών κυμάτων στο κενό,

Κυματική εξίσωση διαδοσης του ήχου σε 3-διαστάσεις

Θα παρουσιασθεί μία γενίκευση σε 3-διαστάσεις, της ανάλυσης που έγινε στις σελς. 4-5 της Ενότητας 03-1 των σημειώσεων, και αφορούσε το ηχητικό κύμα σε 1-διάσταση. Ορίζουμε ως P_0 και ρ_0, την πίεση και την πυκνότητα του αέρα σε συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας, τα μεγέθη αυτά είναι εντατικά (μη-αθροιστικά, εν αντιθέσει με τον όγκο) και (όταν ο αέρας βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, σε θερμοκρασία π.χ. T_0, χωρίς διαταραχή από τη διάδοση κύματος) έχουν ίδια τιμή σε όλο τον όγκο του αέρα.

Η διάδοση μία ηχητικής διαταραχής (π.χ., ενός ακουστικού κύματος), συνιστά απομάκρυνση από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, οπότε η διακύμανση των αντίστοιχων μεγεθών ως προς τις τιμές τους της θερμοδυναμικής ισορροπίας ορίζεται / συμβολίζεται με βάση τις επόμενες σχέσεις ορισμού

$$P(\vec{r}) \equiv P_0 + p(\vec{r}), \qquad \rho(\vec{r}) \equiv \rho_0 + \hat{\rho}(\vec{r}).$$

Θεωρούμε ότι αναφερώμαστε σε στοιχειώδη μάζα αέρα, Δm=*σταθ.*, που καταλαμβάνει ένα στοιχειώδη όγκο V, (παραλείπουμε το σύμβολο «Δ» του «στοιχειώδους» για το ΔV, προκειμένου να αποφύγουμε την σύγχυση που θα μπορούσε να δημιουργηθεί με τη μεταβολή όγκου dV, την οποία προκαλεί η διάδοση της ηχητικής διαταραχής).

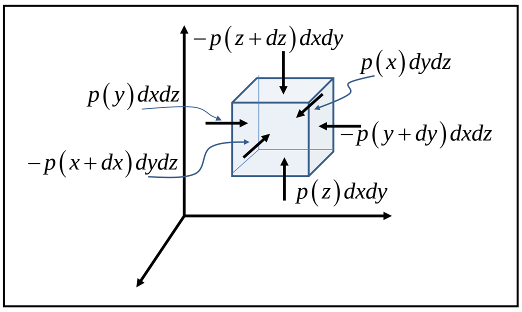
Στην ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιούνται τρία βασικά «εργαλεία»:

(α) Ο νόμος του Νεύτωνα για την επιτάχυνση της μάζας Δm λόγω της βαθμίδας πίεσης που προκαλείται από την διάδοση της ηχητικής διαταραχής.

(β) Η διατήρηση της μάζας, με τη μορφή της εξίσωσης συνέχειας, και

(γ) Η σχέση ορισμού του *μέτρου ελαστικότητας όγκου* (**B**: *Bulk modulus*), το οποίο αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα του κάθε ελαστικού υλικού (στην περίπτωσή μας, του αέρα).

$B \equiv -\dfrac{dP}{dV/V}$: η μεταβολής πίεσης που είναι απαραίτητη, για να προκληθεί ποσοστιαία μεταβολή όγκου 100% (δηλ., dV/V=1), [το αρνητικό πρόσημο αποδίδει θετική τιμή στο B, δεδομένου ότι για dP>0 (συμπίεση), έχουμε dV/V<0 (ελάττωση όγκου)]. Άρα, το μέτρο ελαστικότητας όγκου δίδεται σε μονάδες πίεσης και είναι τόσο μεγαλύτερο όσο πιο δύσκολα συμπιέζεται το αντίστοιχο υλικό.



(α) Ο νόμος του Νεύτωνα, για την επιτάχυνση της μάζας Δm λόγω της βαθμίδας πίεσης που προκαλείται από την διάδοση της ηχητικής διαταραχής, γράφεται κατά συνιστώσες:

$$(\Delta m)\frac{\partial u_x}{\partial t} = (p)_x\, dydz - (p)_{x+dx}\, dydz \quad \Rightarrow$$

$$(\Delta m)\frac{\partial u_x}{\partial t} = (p)dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz \quad \Rightarrow$$

$$(\rho_0 dxdydz)\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz \quad \Rightarrow \quad \rho_0\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

και αντίστοιχα, $\rho_0\dfrac{\partial u_y}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}$, και $\rho_0\dfrac{\partial u_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial z}$, (λαμβάνεται υπόψη ότι η σταθερή δοκιμαστική μάζα αέρα Δm αντιστοιχεί σε όγκο $V = dxdydz$).

Οι τρείς συνιστώσες του νόμου του Νεύτωνα γράφονται διανυσματικά: $\rho_0\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla}p$ (1)

(β) Η διατήρηση της μάζας (στη ρευστομηχανική), όπως και η διατήρηση του φορτίου στην (ηλεκτροδυναμική), διατυπώνονται με τη διαφορική εξίσωση που είναι γνωστή ως εξίσωση συνέχειας $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})$, όπου ο όρος $\vec{j}=\rho\vec{u}$ είναι η λεγόμενη πυκνότητα ρεύματος που (στη ρευστομηχανική) ορίζεται ως η μάζα που διαρρέει, ανά μονάδα χρόνου, μια μοναδιαία επιφάνεια, (στην ηλεκτροδυναμική, αντίστοιχα, ορίζεται ως το φορτίο που διαρρέει, ανά μονάδα χρόνου, μια μοναδιαία επιφάνεια).

Στην περίπτωση που αναλύεται εδώ, $\rho(\vec{r})\equiv\rho_0+\hat{\rho}(\vec{r})$, οπότε:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0+\hat{\rho})=-\vec{\nabla}\cdot\left[(\rho_0+\hat{\rho})\vec{u}\right] \;\Rightarrow\; \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=-\rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{u}-\vec{\nabla}\cdot\left[\hat{\rho}\vec{u}\right]$$

Ο τελευταίος όρος είναι όρος ανώτερης τάξης, σε σχέση με τους δύο προηγούμενους, άρα, σε πρώτη τάξη, μπορεί να παραληφθεί με καλή προσέγγιση, και: $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=-\rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ (2α)

(γ) Επειδή ο νόμος του Νεύτωνα οδήγησε σε μία σχέση (1) μεταξύ των $\vec{u}$ και p, ενώ η διατήρηση μάζας οδήγησε σε μία σχέση (2α) μεταξύ των $\hat{\rho}$ και $\vec{u}$, η συσχέτιση $\hat{\rho}$ και p θα γίνει με τη βοήθεια του μέτρου ελαστικότητας όγκου $B\equiv -V\frac{dP}{dV}$. Σε αυτή την περίπτωση, $dP=p$, $V=\frac{\Delta m}{\rho}\Rightarrow dV=-\frac{\Delta m}{\rho^2}d\rho=-\frac{\Delta m}{(\rho_0+\hat{\rho})^2}\hat{\rho}\simeq-\frac{\Delta m\hat{\rho}}{\rho_0^2}\left(1+\frac{2\hat{\rho}}{\rho_0}\right)^{-1}$, (όπου έχει παραληφθεί ο όρος $\hat{\rho}^2$, στο ανάπτυγμα του παρανομαστή ως δεύτερης τάξης). Η τελευταία σχέση, σε πρώτη τάξη ως προς $\hat{\rho}$, γίνεται: $dV\simeq-\frac{\Delta m\hat{\rho}}{\rho_0^2}$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις για τα dP, V και dV, στη σχέση του μέτρου ελαστικότητας, και κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς το $\hat{\rho}$: $B\equiv -V\frac{dP}{dV}=-\frac{\Delta m}{\rho_0}\frac{p}{(-\Delta m\hat{\rho})}\rho_0^2\Rightarrow\hat{\rho}=\frac{\rho_0}{B}p$ (2β).

Συνδυάζοντας τις (2α) και (2β), προκύπτει: $\frac{\rho_0}{B}\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ (2)

Οι σχέσεις (1) και (2): $\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=-\vec{\nabla}p$ (1), $\frac{1}{B}\frac{\partial p}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ (2),

αποτελούνε τις λεγόμενες ***εξισώσεις πεδίων***, από τις οποίες μπορεί να παραχθεί η κυματική εξίσωση για το βαθμωτό μέγεθος (p), ή για το διανυσματικό μέγεθος $(\vec{u})$.

Πράγματι, παραγωγίζοντας την (1) ως προς το χρόνο, $\rho_0\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=-\vec{\nabla}\frac{\partial p}{\partial t}$, και αντικαθιστώντας από την (2), προκύπτει: $\boxed{\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\frac{B}{\rho_0}\nabla^2\vec{u}}$.

Αντίστοιχα, παραγωγίζοντας την (2) ως προς το χρόνο, $\frac{1}{B}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$, και αντικαθιστώντας απο την (1), προκύπτει: $\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{B}{\rho_0}\nabla^2 p}$. Από τις τελευταίες σχέσεις των πλαισίων προκύπτει ότι τα ηχητικά κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $c=\sqrt{B/\rho_0}$, είτε μελετηθούν ως μεταβολές της (προσανατολισμένης, μη-θερμικής) ταχύτητας των μορίων του αέρα είτε ως μεταβολές της πίεσης του αέρα, ενώ οι ίδιες σχέσεις ικανοποιούνται και από τη μεταβολή της πυκνότητας, αν χρησιμοποιηθεί η σχέση $p=(B/\rho_0)\hat{\rho}$ στην εξίσωση για την πίεση. Κατά τη διάδοση των ηχητικών κυμάτων οι μεταβολές είναι αδιαβατικές (επειδή είναι γρήγορες), άρα $B = \gamma p$ και επομένως $c = \sqrt{\gamma p / \rho_0}$, όπου ο αδιαβατικός εκθέτης γ είναι, κατά περίπτωση, $\gamma = 5/3$ για μονοατομικά μόρια, $\gamma = 1{,}4$ για διατομικά μόρια, και $\gamma \approx 1{,}3$ για τριατομικά μόρια, και ένας κατάλληλος μέσος όρος για αέρια μείγματα.

Οι Εξισώσεις του Maxwell στο κενό, απουσία πηγών, και το Ηλεκτρο-Μαγνητικό Κύμα

Οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell, που φαίνονται στη συνέχεια, περιγράφουν την εξάρτηση του Ηλεκτρικού πεδίου, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, και του Μαγνητικού πεδίου, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$, από τις πηγές (πυκνότητα φορτίου: ρ, και πυκνότητα ρεύματος: $\vec{j}$), καθώς και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (4\alpha) \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (4\beta)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4\gamma) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \qquad (4\delta)$$

Οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell περιγράφουν την απόκλιση και το στροβιλισμό των δύο πεδίων (Ηλεκτρικό και Μαγνητικό), οπότε, αν έχουν δοθεί οι πηγές $(\rho, \vec{j})$ ως συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου, καθώς και κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες, τότε, το Ηλεκτρικό και το Μαγνητικό πεδίο, (σύμφωνα με σχετικό θεώρημα, γνωστό ως του Helmholtz), μπορούν, κατ' αρχήν, να υπολογιστούν.

Το σύνολο των τεσσάρων εξισώσεων (4α-β) είναι μη-συμμετρικό ως προ τα δύο πεδία, λόγω της απουσίας μαγνητικών μονοπόλων στο πλαίσιο της θεωρίας, (οπότε λείπει η πυκνότητα μαγνητικού φορτίου), αλλά και της αντίστοιχης πυκνότητας ρεύματος.
Η συμμετρία μεταξύ των πεδίων $\vec{E}$ και $\vec{B}$ αποκαθίσταται όταν διερευνήσουμε την συμπεριφορά τους μακριά από φορτία και ρεύματα, (στο «κενό», όπου $\{\rho = 0, \quad \vec{j} = 0\}$), οπότε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (5\alpha) \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (5\beta)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5\gamma) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (5\delta)$$

Από το σύνολο αυτών των εξισώσεων μπορεί να δειχθεί ότι, απουσία πηγών, μπορούν να υπάρχουν Ηλεκτρικό και Μαγνητικό πεδίο που διέπονται από την κυματική εξίσωση. Πράγματι, υπολογίζοντας την χρονική παράγωγο της εξίσωσης (5δ) παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Αντικαθιστούμε, στην τελευταία εξίσωση, την χρονική παράγωγο του μαγνητικού πεδίου μέσω τη 3ης εξίσωσης Maxwell (5γ), οπότε

$$\left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E}$ και την πρώτη εξίσωση Maxwell (5α), $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \qquad (6\alpha)$$

Ακολουθώντας αντίστοιχη πορεία με αφετηρία τη χρονική παράγωγο της σχέσης (5γ), παίρνουμε

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \qquad (6\beta)$$

Οι εξισώσεις (6α) και (6β) είναι οι εξισώσεις κύματος για κάθε μία από τις καρτεσιανές συνιστώσες των δύο πεδίων $\left\{\left(E_x, E_y, E_z\right), \left(B_x, B_y, B_z\right)\right\}$, που δηλώνουν την δυνατότητα διάδοσης Η/Μ κύματος στο κενό $\left\{\rho = 0, \quad \vec{j} = 0\right\}$.

Η γεωμετρία των κυμάτων σε 3-διαστάσεις και η σχέση με το πλάτος τους

Σε ένα οδεύον κύμα ονομάζουμε ***μέτωπο του κύματος*** το γεωμετρικό τόπο των σημείων τα οποία χαρακτηρίζονται από κοινή φάση (ισοδύναμα: ***ισοφασική επιφάνεια***). Ανάλογα με τη γεωμετρία της ισοφασικής επιφάνειας, χαρακτηρίζουμε τα κύματα, (σε 3-διαστάσεις), επίπεδα κύματα, κυλινδρικά κύματα, σφαιρικά κύματα, κ.λπ. Η γεωμετρία της ισοφασικής επιφάνειας εξαρτάται από τη ***γεωμετρία των πηγών***, αλλά και από την ***γεωμετρία των συνοριακών επιφανειών*** που ορίζουν τον χώρο μέσα στον οποίον υπάρχει το αντίστοιχο κύμα και επί των οποίων (συνοριακών επιφανειών) το κύμα πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνοριακές συνθήκες (ανάλογα με τη φύση του κύματος και τη φύση των επιφανειών). Το μαθηματικό ισοδύναμο της προηγούμενης πρότασης είναι ότι, ανάλογα με τις ιδιότητες συμμετρίας του συστήματος (Πηγές ή/και Συνοριακές Επιφάνειες), επιλέγουμε να γράψουμε την κυματική εξίσωση χρησιμοποιώντας, για την Λαπλασιανή, αντί του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,
το κατάλληλο, κατά περίπτωση σύστημα συντεταγμένων (σφαιρικό, κυλινδρικό).

Στη συνέχεια θα δειχθεί, με ενεργειακά επιχειρήματα, ότι σε περισσότερες από μία διαστάσεις, το πλάτος των αρμονικών κυμάτων μπορεί να εξαρτάται, ή όχι, από τη θέση του μετώπου κύματος, ανάλογα με τη γεωμετρία του μετώπου. Το βασικό επιχείρημα στηρίζεται στη διατήρηση της «ακτινοβολούμενης» ενέργειας και στο γεγονός ότι η ακτινοβολούμενη ισχύς ενός κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του.

Στις δύο διαστάσεις, δύο περιπτώσεις που έχουν ενδιαφέρον είναι (α) τα κύματα με ευθύγραμμο μέτωπο, και (β) τα κύματα με κυκλικό μέτωπο.

(α) Τα κύματα με ευθύγραμμο μέτωπο διατηρούν την έκταση του μετώπου, καθώς διαδίδονται, και επομένως το πλάτος τους είναι ανεξάρτητο της θέσης, περιγράφονται επομένως, σε μιγαδική αναπαράσταση ως $z\left(x, y, t\right) = z_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} = z_0 e^{i\left(k_x x + k_y y - \omega t\right)}$.

(β) Τα κύματα με κυκλικό μέτωπο μεταβάλλουνν την έκταση του μετώπου, καθώς διαδίδονται, ως $2\pi r$, και επομένως το τετράγωνο του πλάτους πρέπει να είναι αντιστρόφως ανάλογο του r, για να διατηρείται η ενέργεια, άρα το ίδιο το πλάτος θα πρέπει να είναι αντιστρόφως ανάλογο της $\sqrt{r}$, περιγράφονται επομένως, σε μιγαδική αναπαράσταση ως $z\left(x, y, t\right) = \left(z_0 / \sqrt{r}\right) e^{i\left(kr - \omega t\right)} = \left(z_0 / \sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{i\left(k\sqrt{x^2+y^2} - \omega t\right)}$.

Και στις δύο περιπτώσεις, το κυματάνυσμα $\vec{k} = \left(k_x, k_y\right)$ είναι τέτοιο ώστε $\left|\vec{k}\right| = 2\pi / \lambda$.

Στις τρεις διαστάσεις, τρεις περιπτώσεις που έχουν ενδιαφέρον είναι (α) τα κύματα με επίπεδο μέτωπο, (β) τα κύματα με κυλινδρικό μέτωπο, και (γ) τα κύματα με σφαιρικό μέτωπο (α) Τα κύματα με επίπεδο μέτωπο διατηρούν την έκταση του μετώπου, καθώς διαδίδονται, και επομένως το πλάτος τους είναι ανεξάρτητο της θέσης, περιγράφονται επομένως, σε μιγαδική αναπαράσταση ως $p(x,y,z,t)=p_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=p_0 e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}$.

(β) Τα κύματα με κυλινδρικό μέτωπο μεταβάλλουν την έκταση του μετώπου, καθώς διαδίδονται, ως $h2\pi r$, (h: το ύψος του κυλινδρικού μετώπου, κατά μήκος του z-άξονα και επομένως το τετράγωνο του πλάτου πρέπει να είναι αντιστρόφως ανάλογο του r, για να διατηρείται η ενέργεια, άρα το ίδιο το πλάτος θα πρέπει να είναι αντιστρόφως ανάλογο της $\sqrt{r}$, άρα περιγράφονται ως $p(x,y,t)=\left(p_0/\sqrt{r}\right)e^{i(kr-\omega t)}=\left(p_0/\left(x^2+y^2\right)^{1/4}\right)e^{i\left(k\sqrt{x^2+y^2}-\omega t\right)}$.

(β) Τα κύματα με σφαιρικό μέτωπο μεταβάλλουν την έκταση του μετώπου, καθώς διαδίδονται, ως $4\pi r^2$, και επομένως το τετράγωνο του πλάτους πρέπει να είναι αντιστρόφως ανάλογο του r^2, για να διατηρείται η ενέργεια, άρα το ίδιο το πλάτος θα πρέπει να είναι αντιστρόφως ανάλογο του r, άρα περιγράφονται ως

$$p(x,y,t)=\left(p_0/r\right)e^{i(kr-\omega t)}=\left(p_0/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)e^{i\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t\right)}.$$

Και στις τρεις περιπτώσεις, το κυματάνυσμα $\vec{k}=\left(k_x,k_y,k_z\right)$ είναι τέτοιο ώστε $\left|\vec{k}\right|=2\pi/\lambda$.

Το Επίπεδο Η/Μ κύμα και η Πόλωσή του

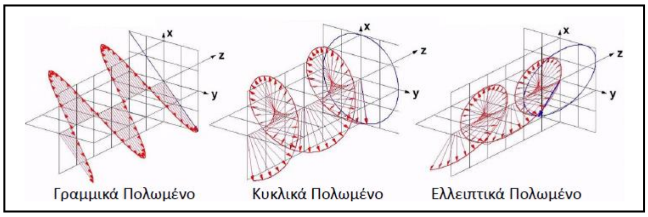
Θεωρούμε ένα επίπεδο Η/Μ κύμα στο κενό, δηλ., ένα κύμα του οποίου η ισοφασική επιφάνεια είναι επίπεδη, άρα το πλάτος του δεν εξαρτάται από τη θέση και, π.χ., η ηλεκτρική του συνιστώσα θα γράφεται $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$.

Από την 1η εξίσωση του Maxwell παίρνουμε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]=0\Rightarrow\left(\vec{k}\cdot\vec{E}_0\right)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=0.$$

Άρα, για το επίπεδο Η/Μ κύμα στο κενό, το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}_0$ είναι κάθετο στο κυματάνυσμα (διάνυσμα διάδοσης) $\vec{k}$. Όμοια, από της 2η Εξ. Maxwell, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, προκύπτει αντίστοιχα $\left(\vec{k}\cdot\vec{B}_0\right)=0$. Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις του Maxwell προκύπτει επίσης η καθετότητα μεταξύ των $\vec{E}$ και $\vec{B}$. Πράγματι, $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow i\vec{k}\times\vec{E}=-(-i\omega)\vec{B}$, ή $\vec{B}=\dfrac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, τα $\left\{\vec{E},\vec{B},\vec{k}\right\}$ αποτελούν ένα δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα διανυσμάτων. Αν αποδώσουμε τον *x*-άξονα στο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και τον *z*-άξονα στο κυματάνυσμα $\vec{k}$, άρα $\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{x}E_o\sin(kz-\omega t)$, τότε, (όπως φαίνεται στο επόμενο Παράδειγμα), σε αυτή την περίπτωση, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο ηλεκτρικό πεδίο και στο κυματάνυσμα διάδοσης. Μάλιστα***, η διεύθυνση ταλάντωσης του Ηλεκτρικού πεδίου του Η/Μ κύματος, έχει ορισθεί ως η διεύθυνση πόλωσης του κύματος***. Ο ορισμός αυτός, πέραν του συμβατικού του χαρακτήρα έχει σχέση και με το γεγονός ότι τα περισσότερα υλικά αλληλεπιδρούν κυρίως με την Ηλεκτρική παρά με τη Μαγνητική συνιστώσα του Η/Μ κύματος (με εξαίρεση τα μαγνητικά υλικά).

Αν το επίπεδο ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου, καθώς αυτό διαδίδεται (δηλ., το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα [$\vec{E},\vec{k}$]), διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε το Η/Μ κύμα λέγεται ***γραμμικά πολωμένο***: $\vec{E}=\left(\hat{x}E_0\cos\theta+\hat{y}E_0\sin\theta\right)\cos(kz-\omega t)$



Αν το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου περιστρέφεται διατηρώντας το μέτρο του, (άρα, διαγράφοντας κύκλο), τότε το Η/Μ κύμα λέγεται ***κυκλικά πολωμένο***

$$\vec{E} = \hat{x}E_0 \cos\left(kz - \omega t\right) + \hat{y}E_0 \sin\left(kz - \omega t\right)$$

Αν το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου περιστρέφεται μεταβάλλοντας το μέτρο του μεταξύ μίας μέγιστης και μίας ελάχιστης τιμής (με τις δύο τιμές να έχουν προσανατολισμό κάθετο μεταξύ τους (άρα, διαγράφοντας έλλειψη), τότε το Η/Μ κύμα λέγεται ***ελλειπτικά πολωμένο***: $\vec{E} = \hat{x}E_{0x} \cos\left(kz - \omega t\right) + \hat{y}E_{0y} \sin\left(kz - \omega t\right)$, $\left[E_{0x} \neq E_{0y}\right]$.

Αν το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου μεταβάλλει προσανατολισμό με τυχαίο τρόπο τότε το Η/Μ κύμα λέγεται ***τυχαίο πολωμένο***, ή απόλωτο, ή φυσικά πολωμένο,

$$\vec{E} = \left(\hat{x}E_0 \cos\varphi\left(t\right) + \hat{y}E_0 \sin\varphi\left(t\right)\right)\cos\left(kz - \omega t\right),$$

όπου η $\varphi\left(t\right)$ είναι μία στοχαστική (τυχαία μεταβαλόμενη) συνάρτηση με το χρόνο.

Πολωτές λέγονται τα στοιχεία τα οποία επιτρέπουν δια μέσου αυτών τη διέλευση Η/Μ κύματος (συνήθως από την περιοχή του οπτικού φάσματος) με επίπεδο πόλωσης παράλληλο σε μία χαρακτηριστική διεύθυνση του στοιχείου που λέγεται άξονας-πόλωσης. Η/Μ κύμα πολωμένο κάθετα στον άξονα-πόλωσης απορροφάται πλήρως από τον πολωτή, ενώ Η/Μ κύμα πλάτους E_0, με επίπεδο πόλωσης υπό γωνία φ ως προς τον άξονα-πόλωσης, προβάλλεται στον άξονα-πόλωσης με την συνιστώσα $E_0 \cos\varphi$, η οποία διέρχεται, και με την συνιστώσα $E_0 \sin\varphi$ κάθετα στον άξονα-πόλωσης, η οποία απορροφάται. Επειδή ένταση του Η/Μ κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του, η διερχόμενη ένταση είναι ίση με: $I\left(\varphi\right) \sim \left(E_0 \cos\varphi\right)^2 = E_0^2 \cos^2\varphi = I_0 \cos^2\varphi$, που είναι γνωστό ως ο Νόμος του *Malus*.

Το διάνυσμα Poynting και η ακτινοβολούμενη ισχύς

Κατά τη διάδοση ενός οδεύοντος Η/Μ κύματος, (όπως, π.χ., το επίπεδο Η.Μ κύμα που έχουμε συζητήσει μέχρι τώρα), περιοχές του χώρου που δεν έχουν Ηλεκτρικό και Μαγνητικό πεδίο, αποκτούν αυτά τα δύο πεδία, όταν διέρχεται το Η/Μ κύμα από αυτές. Αλλά, και το Ηλεκτρικό πεδίο και το Μαγνητικό πεδίο είναι συσχετισμένα με μία πυκνότητα ενέργειας πεδίου, $\rho_{W_E} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E}\right|^2$ και $\rho_{W_B} = \frac{1}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2$, αντίστοιχα, και η διεύθυνση διάδοσης αυτής της ενέργειας συμπίπτει με τη διεύθυνση του κυματανύσματος $\vec{k}$. Αποδεικνύεται ότι το διάνυσμα Poynting, που ορίζεται ως: $\vec{S}\left(t\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\left(t\right) \times \vec{B}\left(t\right)$ έχει μέτρο ίσο με την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου (ισχύ), η οποία διέρχεται από μία μοναδιαία επιφάνεια, που είναι προσανατολισμένη κάθετα στη διεύθυνση του $\vec{S}\left(t\right)$. Η απόδειξη έχει ως εξής: θεωρούμε μία κλειστή επιφάνεια $A_{\kappa\lambda}$ και υπολογίζουμε τη ροή του διανύσματος Poynting από αυτή την επιφάνεια (μετασχηματίζοντας το επιφανειακό ολοκήρωμα σε ολοκλήρωμα όγκου, μέσω του Θεωρήματος του Gauss), $\oint_{A_{\kappa\lambda}} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0}\oint_{A_{\kappa\lambda}} \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0}\oint_{V\left(A_{\kappa\lambda}\right)} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \cdot d^3r$, όπου $V\left(A_{\kappa\lambda}\right)$ είναι ο όγκος που έχει σύνορο την $A_{\kappa\lambda}$.

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=-\vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)+\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\oint_{A_{\kappa\lambda}}\vec{S}\cdot d\vec{A}=\frac{1}{\mu_0}\oint_{V(A_{\kappa\lambda})}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\cdot d^3r=\frac{1}{\mu_0}\oint_{V(A_{\kappa\lambda})}\left[-\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)+\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right]\cdot d^3r$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο σχέσεις στροβιλισμού από τις εξ. Maxwell, παίρνουμε:

$$\oint_{A_{\kappa\lambda}}\vec{S}\cdot d\vec{A}=\frac{1}{\mu_0}\oint_{V(A_{\kappa\lambda})}\left[-\vec{E}\cdot\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)+\vec{B}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\right]\cdot d^3r=-\oint_{V(A_{\kappa\lambda})}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B}\right]\cdot d^3r\,.$$

Άρα, πράγματι, η ροή του διανύσματος Poynting από την κλειστή επιφάνεια είναι ίση με τον αρνητικό ρυθμό μεταβολής της συνολικής Η/Μ ενέργειας στο εσωτερικό της κλειστής επιφάνειας.

Παράδειγμα 4.1.2. Να υπολογιστεί το Μαγνητικό πεδίο που πρέπει να υπάρχει ως συνέπεια της ύπαρξης ενός Ηλεκτρικού πεδίου της μορφής $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\hat{x}E_o\sin\left(kz-\omega t\right)$

Με βάση την εξίσωση (5γ) έχουμε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ E_o\sin\left(kz-\omega t\right) & 0 & 0\end{vmatrix}=-\hat{y}\left(-kE_0\cos\left(kz-\omega t\right)\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Ολοκληρώνοντας, ως προς τον χρόνο, την τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$\vec{B}\left(\vec{r},t\right)=\hat{y}\frac{k}{\omega}E_o\sin\left(kz-\omega t\right)+B_{const}=\hat{y}B_o\sin\left(kz-\omega t\right)+B_{const}$$

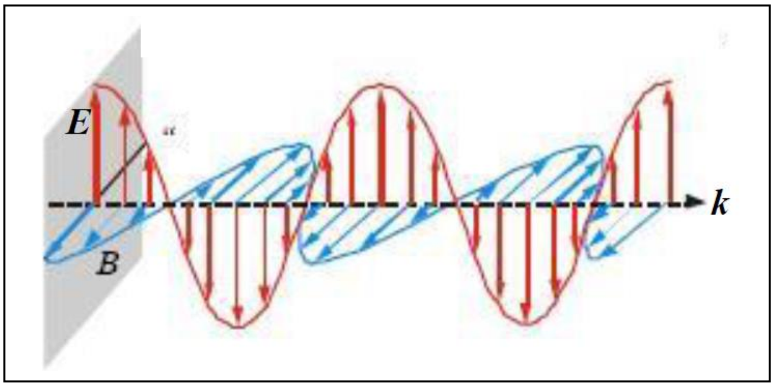
Όπου, $B_0=kE_0/\omega=E_0/c$, το πλάτος του χωρο-χρονο-εξαρτώμενου Μαγνητικού πεδίου, και B_{const} μία αυθαίρετη μαγνητοστατική συνιστώσα. Το αποτέλεσμα είναι ένα επίπεδο Η/Μ κύμα με την ηλεκτρική και τη μαγνητική συνιστώσα να εξελίσσονται εν φάσει, μακριά από τις πηγές φορτίων και ρευμάτων (στις οποίες οφείλουν τη δημιουργία τους, και στην περιοχή των οποίων αλλάζουν τα χαρακτηριστικά των δύο συνιστωσών και η μεταξύ τους φάση) αποτελώντας ένα δεξιά-οδεύον, κατά τον άξονα-z, κύμα, όπως μπορεί να φανεί και από τον υπολογισμό του διανύσματος Poynting.

Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει συνιστώσα σταθερού μαγνητικού πεδίου, τότε το επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, αποδείχτηκε ότι αποτελείται από:

μία ηλεκτρική συνιστώσα $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\hat{x}E_o\sin\left(kz-\omega t\right)$

μία μαγνητική συνιστώσα $\vec{B}\left(\vec{r},t\right)=\hat{y}B_o\sin\left(kz-\omega t\right)$

και διαδίδεται κάθετα και προς τα δύο, κατά μήκος του $\vec{k}=\hat{z}k$, έτσι ώστε τα τρία διανύσματα $\left(\vec{E},\vec{B},\vec{k}\right)$ να αποτελούν ένα τρισ-ορθογώνιο σύστημα.



Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα, το επίπεδο Η/Μ κύμα στο κενό είναι ένα εγκάρσιο κύμα, δεδομένου ότι τα δύο χαρακτηριστικά του πεδία (Ηλεκτρικό και Μαγνητικό) ταλαντώνονται κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης, η οποία συμπίπτει με τη διεύθυνση του κυματανύσματος $\vec{k}$ αλλά και με τη διεύθυνση του διανύσματος Poynting, που περιγράφει τη διάδοση ισχύος, ανα μονάδα επιφάνειας.

Πράγματι, στην περίπτωση που περιγράφεται σε αυτό το παράδειγμα:

$\vec{S}(t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(t)\times\vec{B}(t)$, και αναπτύσσοντας το εξωτερικό γινόμενο, παίρνουμε:

$$\vec{S}(t) = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_o\sin(kz-\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & B_o\sin(kz-\omega t) & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{S}(t) = \frac{\hat{z}}{\mu_0}E_0B_0\sin^2(kz-\omega t)}$$

Αντικαθιστώντας το $B_0 = kE_0/\omega = E_0/c$, παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\vec{S}(t) = \hat{z}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\sin^2(kz-\omega t) = \hat{z}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}B_0^2\sin^2(kz-\omega t)$$

Οι αντίστοιχοι μέσοι χρονικοί όροι δίνουν την ένταση I του Η/Μ κύματος $I = \frac{1}{T}\int_o^T \vec{S}dt = \frac{\hat{z}}{2}c\varepsilon_0E_0^2 = \frac{\hat{z}}{2}c\mu_0B_0^2$, που δηλώνει τη μέση ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στην διεύθυνση διάδοσης του Η/Μ κύματος.