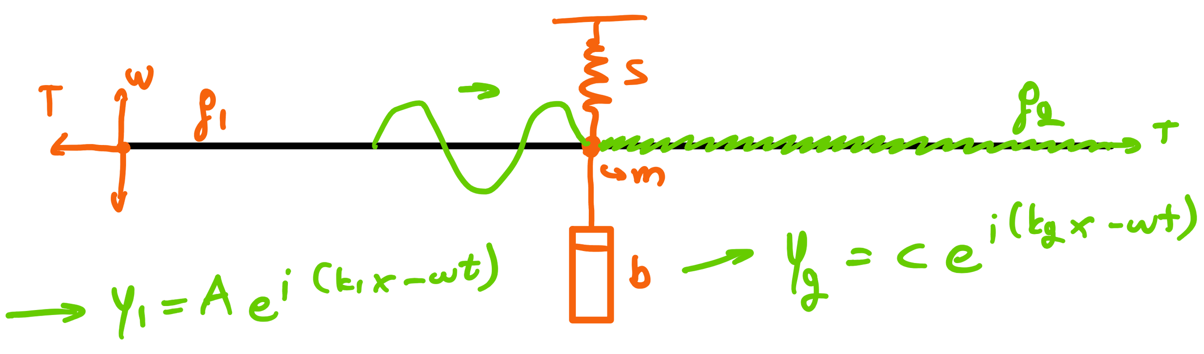
08.03.22

Credits: Γεώργιος Κλεμπετσάνης

Tuesday, 8 March 2022 12:52 PM

Φαινόμενα Διάδοσης - Ανάκλασης οδευόντων κυμάτων σε ασυνέχεια του κυματικού μέσου



$\rightarrow y_1 = A e^{i(k_1 x - \omega t)}$ $\quad \rightarrow y_2 = C e^{i(k_2 x - \omega t)}$

$c_1 = \sqrt{T/\rho_1}$

$c_2 = \sqrt{T/\rho_2}$

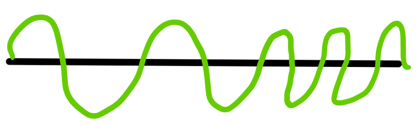
$c = \frac{\omega}{k} \rightarrow k_{1,2} = \frac{\omega}{c_{1,2}}$

$\leftarrow y_1' = B e^{i(-k_1 x - \omega t)}$

$1 \rightarrow \lambda_1 = 2\pi / k_1$

$2 \rightarrow \lambda_2 = 2\pi / k_2$

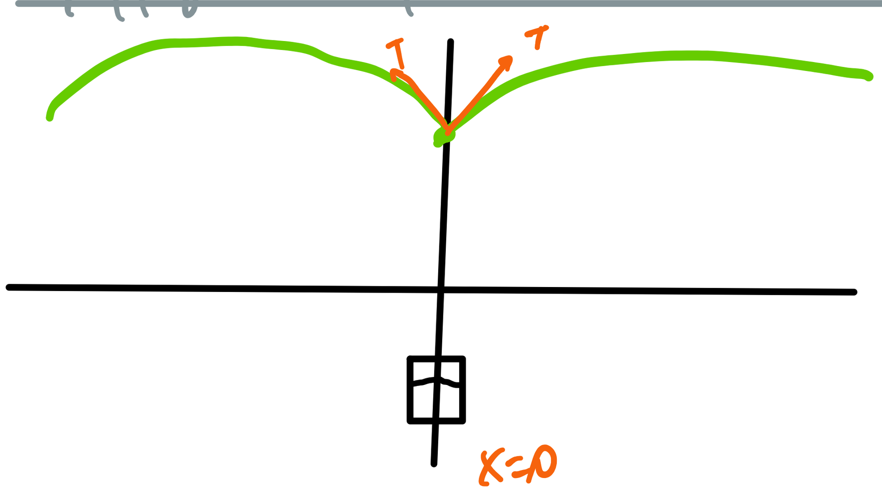
$\rho_2 > \rho_1 \Rightarrow c_2 < c_1$



Συντελεστής ανάκλασης πλάτους: $r = \frac{B}{A} = ?$

Συντελεστής διέλευσης πλάτους: $t = \frac{C}{A} = ?$

Εφαρμογή Συνοριακών Συνθηκών στο σημείο ασυνέχειας



α) $y_1(x=0,t) + y_1'(x=0,t) = y_2(x=0,t)$

β) $m\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right)_{x=0} = T\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0} - T\left(\frac{\partial (y_1+y_1')}{\partial x}\right)_{x=0} - s\, y_2(x=0,t) - b\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_{x=0}$

α) $\Rightarrow A e^{-i\omega t} + B e^{-i\omega t} = C e^{-i\omega t} \Rightarrow \boxed{A + B = C}$ (1)

β) $\Rightarrow m(-\omega^2) C e^{-i\omega t} = T\left[ik_2 C e^{-i\omega t} - ik_1 (A-B) e^{-i\omega t}\right] - s C e^{-i\omega t} - b(-i\omega) C e^{-i\omega t}$

$\boxed{-m\omega^2 C = T[ik_2 C - ik_1(A-B)] - sC + bi\omega C}$ (2)

(1) $\overset{/A}{\Rightarrow} 1 + r = t$ (1α)

(2) $\overset{/A}{\Rightarrow} -\omega^2 m t = iT[k_2 t - k_1(1-r)] - st + i\omega b t$ (2α)

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{k_1 - k_2 - \frac{1}{T}[b\omega + i(s - m\omega^2)]}{k_1 + k_2 + \frac{1}{T}[b\omega + i(s - m\omega^2)]} \\[2ex] t = \dfrac{2k_1}{k_1 + k_2 + \frac{1}{T}[b\omega + i(s - m\omega^2)]} \end{cases}$$

$\tilde{r} = r e^{i\theta_r}$, $\tilde{t} = t e^{i\theta_t}$

$y_1' = B e^{i(-k_1 x - \omega t)} = (rA) e^{i(-k_1 x - \omega t)} = (rA) e^{i(-k_1 x - \omega t + \theta_r)}$

$y_2 = (C) e^{i(k_2 x - \omega t)} = (\tilde{t} A) e^{i(k_2 x - \omega t)} = tA\, e^{i(k_2 x - \omega t + \theta_t)}$

Υποπεριπτώσεις

α) 

$\Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \\ t = \dfrac{2k_1}{k_1 + k_2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} Z_{1,2} = \sqrt{T\rho_{1,2}} \\ k_{1,2} = \dfrac{\omega}{c_{1,2}} \\ c_{1,2} = \sqrt{T/\rho_{1,2}} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$

$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

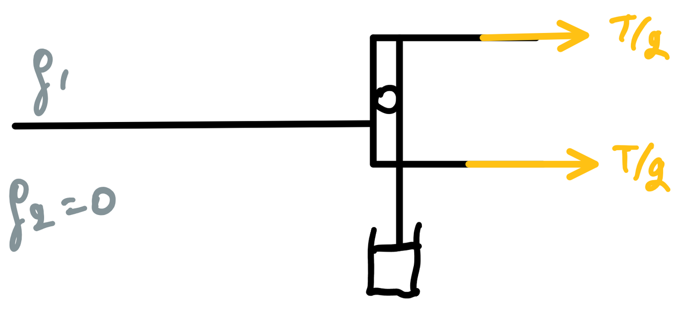
α1) Αν $Z_2 > Z_1 \Rightarrow r < 0$ (Αν κύμα με θετικό πλάτος $\rightarrow$ ανακλώμενο από κάτω)

α2) Αν $Z_2 \rightarrow \infty$ (ακλόνητο σημείο τερματισμού) $\Rightarrow r \approx -\frac{Z_2}{Z_2} = -1$

α3) Αν $Z_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

β) $i(s - m\omega^2) \Rightarrow \theta_{r,t} = \theta(\omega)$

$\theta_{r,t} \rightarrow 0$ όταν $\omega^2 = s/m$

γ) 

$r = \frac{k_1 - \frac{b\omega}{T}}{k_1 + \frac{b\omega}{T}}$ $\quad k_1 = \frac{\omega_1}{c} \Rightarrow$

$r = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{b}{T}\omega}{\frac{\omega}{c} + \frac{b}{T}\omega}$

Για $r = 0 \Rightarrow Z_1 = b$

Παράδειγμα διάδοσης παλμού σε απλή ασυνέχεια (ρ_1, $\rho_2 = 4\rho_1$)

$Z_2 = \sqrt{T\rho_2} = 2Z_1$

Διάρκεια Διέλευσης στο σημείο Ασυνέχειας (Δt_0)

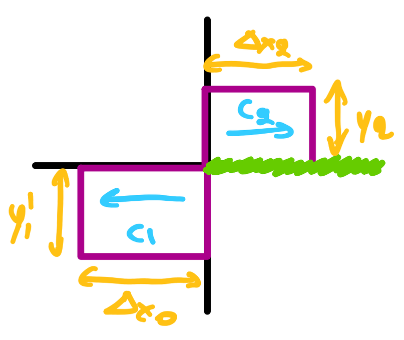
$c_1 = \frac{\Delta x_0}{\Delta t_0} \Rightarrow \Delta t_0 = \frac{\Delta x_0}{c_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{T}}\, \Delta x_0$

Για $t_0 = \Delta t_0$:

$y_1' = y_0 \cdot r$

$y_1' = y_0 \frac{Z_1 - 2Z_1}{Z_1 + 2Z_1}$

$\boxed{y_1' = -\frac{1}{3} y_0}$



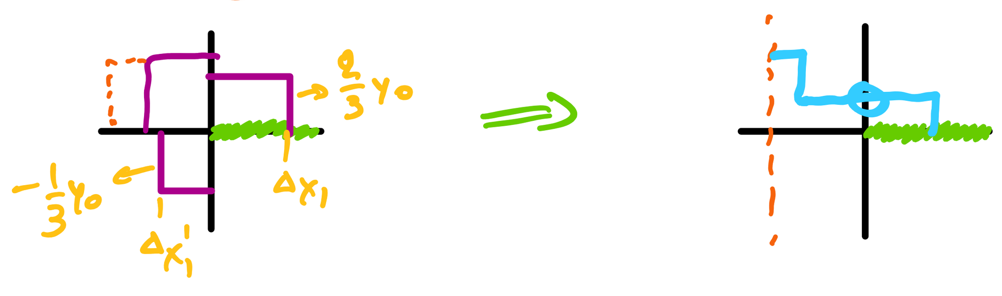
$y_2 = t\, y_0 = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} y_0 = \frac{2Z_1}{Z_1 + 2Z_1} y_0 \Rightarrow$

$\boxed{y_2 = \frac{2}{3} y_0}$

$\Delta x_2 = c_2 \Delta t_0 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{T}}\, \Delta x_0 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, \Delta x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta x_2 = \frac{\Delta x_0}{2}$

- Για $t_1 = \frac{1}{3} \Delta t_0$ $\quad \Delta x_1 = c_2 \frac{1}{3} \Delta t_0$



Προσπίπτουσα ισχύς: $P_{in} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 Z_1$

Ανακλώμενη ισχύς: $P_{refl} = \frac{1}{2} B^2 \omega^2 Z_1$

Διερχόμενη ισχύς: $P_{trans} = \frac{1}{2} C^2 \omega^2 Z_2$

Συντελεστής Ανάκλασης ισχύος: $R = \frac{P_{refl}}{P_{in}} = \left(\frac{B}{A}\right)^2 = r^2$

Συντελεστής Διέλευσης ισχύος: $T = \frac{P_{trans}}{P_{in}} = \left(\frac{C}{A}\right)^2 \frac{Z_2}{Z_1} = t^2 \frac{Z_2}{Z_1}$ $\Rightarrow$

$\boxed{R + T = 1}$