Επιλογή

Αντώνης Παπαβασιλείου, ΕΜΠ

Βασισμένο στον Varian [1]

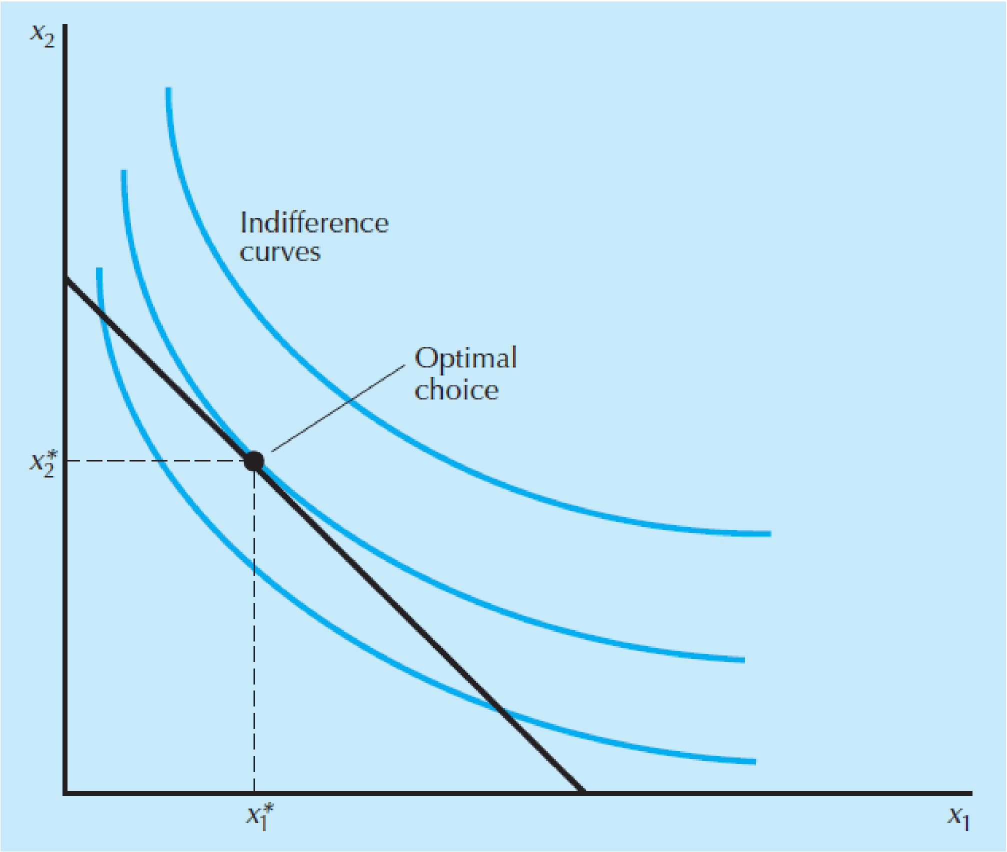
Περιεχόμενα

- Βέλτιστη επιλογή
- Ζήτηση καταναλωτή
- Ορισμένα παραδείγματα
  - Τέλεια υποκατάστατα
  - Τέλεια συμπληρώματα
  - Ουδέτερα και ανεπιθύμητα αγαθά
  - Διακριτά αγαθά
  - Κοίλες προτιμήσεις
  - Προτιμήσεις Cobb-Douglas
- Εκτίμηση συναρτήσεων χρησιμότητας
- Συνέπειες της συνθήκης ΟΛΥ
- Επιλογή φόρων
- Παράρτημα
  - Παράδειγμα: συναρτήσεις ζήτησης Cobb-Douglas

Βέλτιστη επιλογή

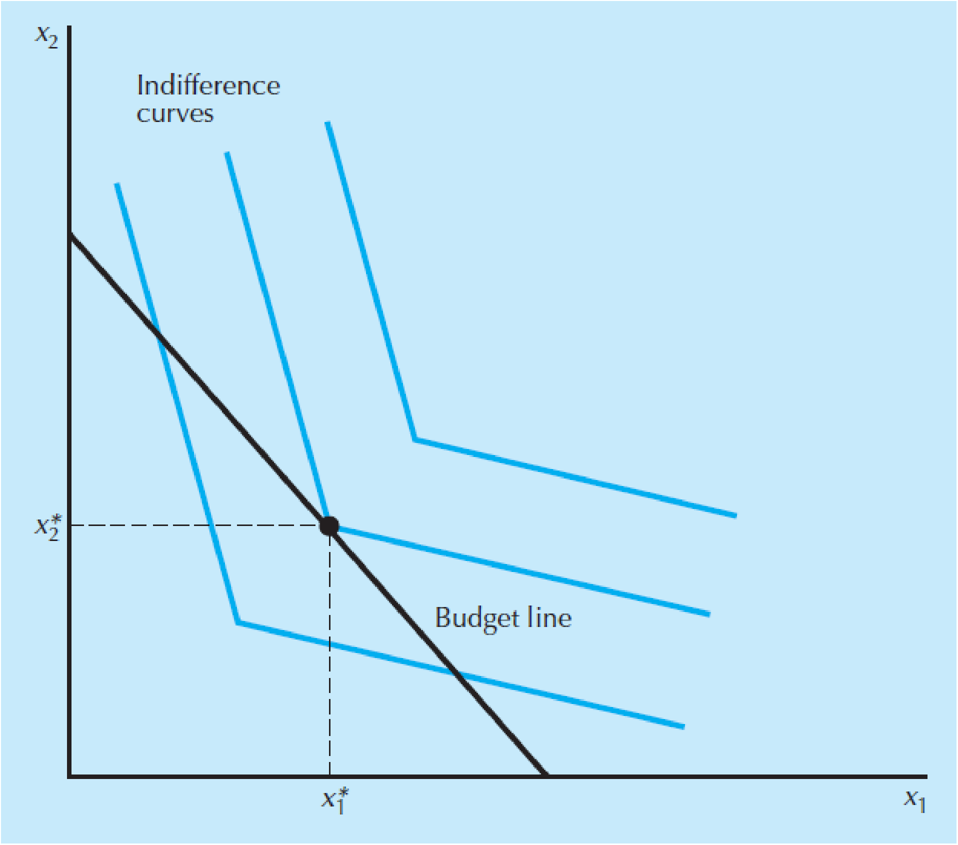
Βέλτιστη επιλογή

- Ας υποθέσουμε προτιμήσεις με "καλή συμπεριφορά", όπου οι συνδυασμοί με περισσότερα αγαθά είναι προτιμότεροι
- Η **βέλτιστη επιλογή** (x_1^*, x_2^*) είναι το σημείο στο οποίο η καμπύλη αδιαφορίας εφάπτεται στη γραμμή περιορισμού εισοδήματος
    - Σημεία κάτω αριστερά από τη γραμμή δε χρησιμοποιούν το εισόδημα στο μέγιστο
    - Σημεία πάνω δεξιά από τη γραμμή είναι ανέφικτα για το δεδομένο εισόδημα



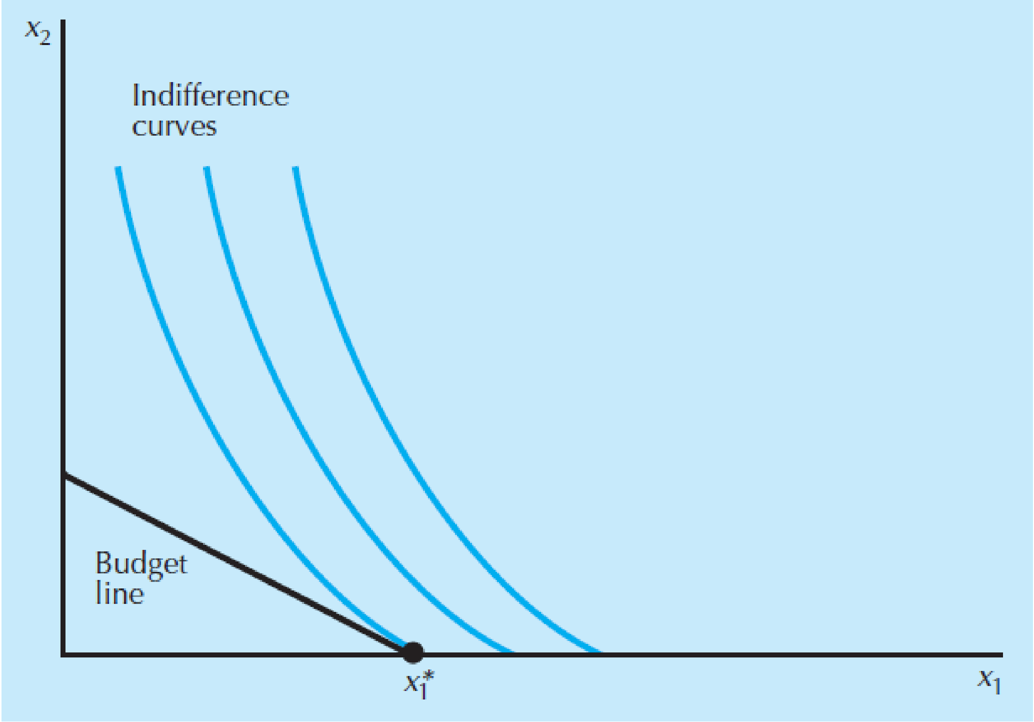
Μη ομαλές προτιμήσεις

- Δεν είναι απαραίτητο να εφάπτεται πάντα η γραμμή εισοδήματος στην καμπύλη αδιαφορίας στη βέλτιση επιλογή
  - Μη ομαλές προτιμήσεις
  - Βέλτιστες λύσεις στο σύνορο
- Αλλά είναι πάντα απαραίτητο να μη διασταυρώνεται η καμπύλη αδιαφορίας με τη γραμμή εισοδηματικού περιορισμού
- Οι μη ομαλές προτιμήσεις, για παράδειγμα, δεν έχουν εφαπτομένη



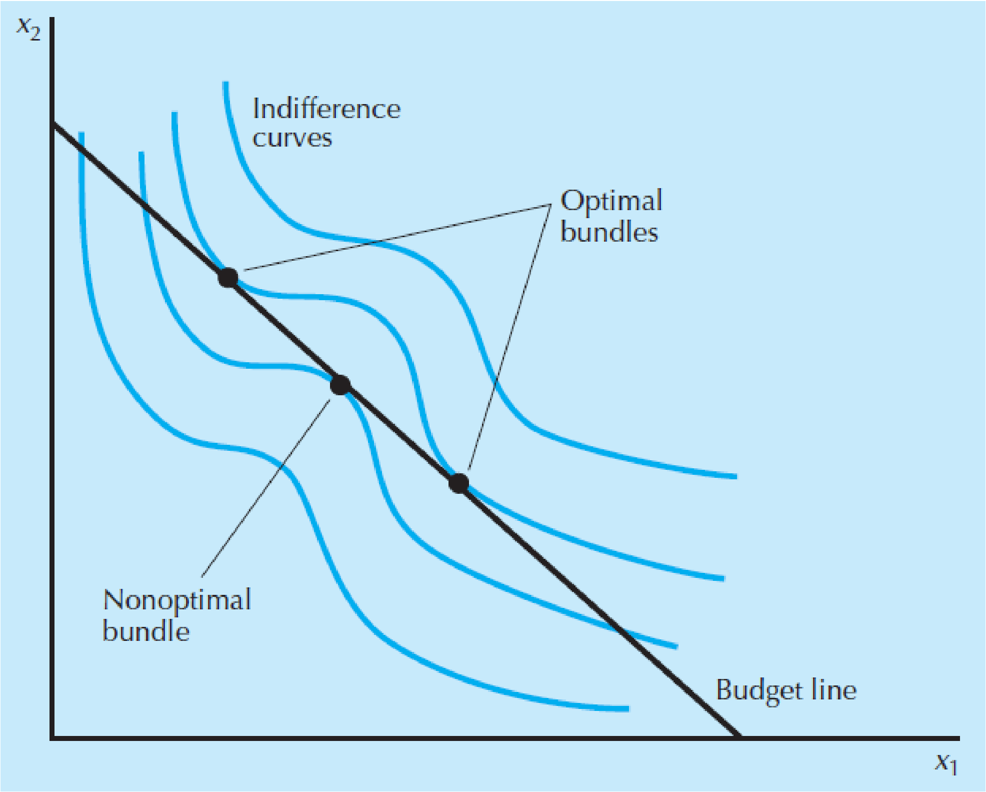
Βέλτιστη επιλογή στο σύνορο του περιορισμού εισοδήματος

- Αν η βέλτιστη λύση είναι στο σύνορο της γραμμής περιορισμού εισοδήματος, τότε η κλίση της γραμμής περιορισμού διαφέρει από την κλίση της καμπύλης αδιαφορίας στη βέλτιστη επιλογή
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε **βέλτιστο συνόρου**
- Στην περίπτωση της διαφάνειας 4 έχουμε **εσωτερικό βέλτιστο**



Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για βέλτιστη επιλογή

- Σε περίπτωση ομαλών προτιμήσεων με εσωτερικό βέλτιστο, *αναγκαία συνθήκη* είναι η καμπύλη αδιαφορίας να εφάπτεται του περιορισμού εισοδήματος
- Αλλά είναι και *ικανή συνθήκη*;
- Το γράφημα δείχνει πως η απάντηση είναι όχι: από τα 3 σημεία που εφάπτονται, μόνο τα δύο είναι βέλτιστες επιλογές
- Αν οι προτιμήσεις είναι κυρτές, τότε η συνθήκη είναι και ικανή
- Αν η καμπύλη αδιαφορίας είναι αυστηρώς κυρτή, τότε υπάρχει μοναδική βέλτιστη επιλογή



Ερμηνεία της συνθήκης βελτίστου

- Η γεωμετρική συνθήκη όπου η καμπύλη αδιαφορίας εφάπτεται του εισοδηματικού περιορισμού εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$\text{ΟΛΥ} = -\frac{p_1}{p_2}$$

- Οικονομική ερμηνεία:
  - Ο ΟΛΥ είναι ο ρυθμός ανταλλαγής των δύο αγαθών στον οποίο ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να μην αλλάξει απόφαση
  - Το $-\frac{p_1}{p_2}$ είναι ο ρυθμός ανταλλαγής που μπορεί να βρει ο καταναλωτής στην αγορά
  - Για να μη θέλει να μετακινηθεί ο καταναλωτής, τα δύο πρέπει να είναι ίσα
- Παράδειγμα: έστω πως ο ΟΛΥ είναι $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{1}{2}$, και ο λόγος τιμών είναι 1
  - Άρα ο καταναλωτής είναι διατεθιμένος να αφήσει δύο μονάδες του αγαθού 1 για να αποκτήσει μία μονάδα του αγαθού 2
  - Αλλά η αγορά του επιτρέπει να αφήσει μία μονάδα του αγαθού 1 για να αποκτήσει μία μονάδα του αγαθού 2
  - Οπότε θα προτιμήσει να μετακινηθεί και να αποκτήσει περισσότερο από το αγαθό 2

Ζήτηση καταναλωτή

Ζήτηση καταναλωτή

- Η βέλτιστη επιλογή των αγαθών 1 και 2 είναι ο **ζητούμενος συνδυασμός αγαθών**
- Η βέλτιστη επιλογή αλλάζει όταν αλλάζουν οι τιμές και το εισόδημα
- Η **συνάρτηση ζήτησης** είναι η συνάρτηση που σχετίζει τη βέλτιστη επιλογή με τις τιμές και το εισόδημα: $x_1(p_1, p_2, m)$ και $x_2(p_1, p_2, m)$
- Διαφορετικές προτιμήσεις οδηγούν σε διαφορετικές συναρτήσεις ζήτησης

Ορισμένα παραδείγματα

Τέλεια υποκατάστατα

Τέλεια συμπληρώματα

Ουδέτερα και ανεπιθύμητα αγαθά

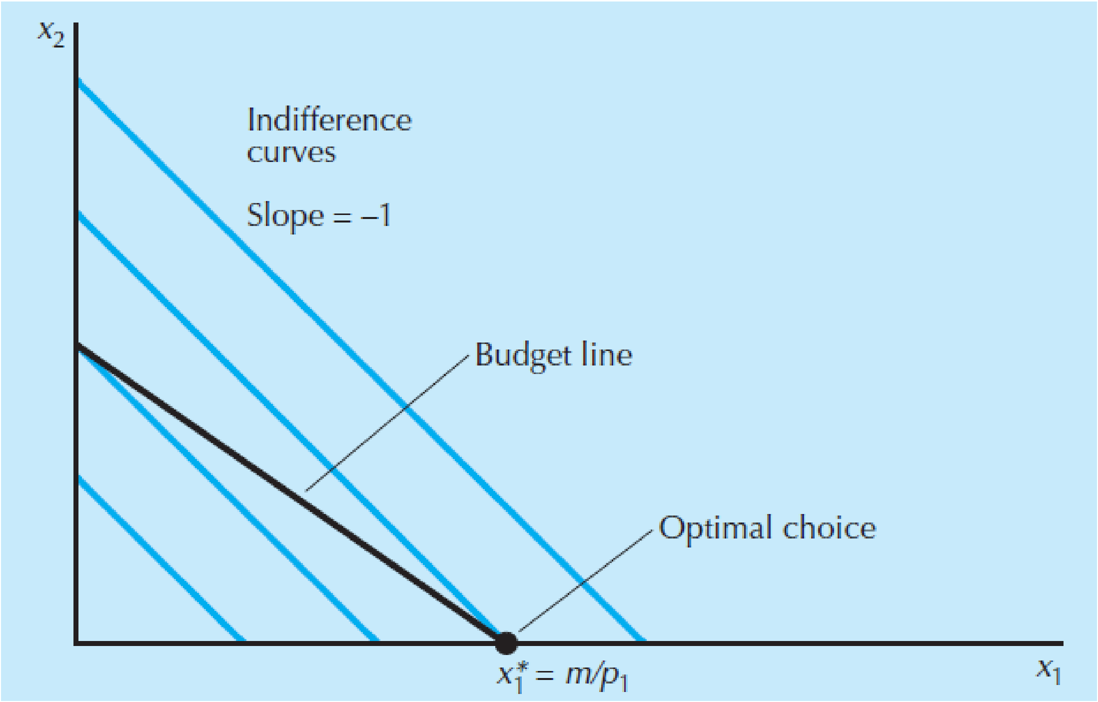
Διακριτά αγαθά

Κοίλες προτιμήσεις

Προτιμήσεις Cobb-Douglas

Τέλεια υποκατάστατα

- Στην περίπτωση τέλειων υποκατάστατων, έχουμε τρεις περιπτώσεις:
  - Αν $p_2 > p_1$, η κλίση της γραμμής εισοδήματος είναι πιο επίπεδη από την καμπύλη αδιαφορίας, οπότε επιλέγουμε μόνο το αγαθό 1
  - Αν $p_1 > p_2$, επιλέγουμε μόνο το αγαθό 2
  - Αν $p_1 = p_2$, οποιοσδήποτε συνδυασμός είναι βέλτιστος



Συνάρτηση ζήτησης για τέλεια υποκατάστατα

- Η συνάρτηση ζήτησης για το αγαθό 1 είναι:

$$x_1 = \begin{cases} \dfrac{m}{p_1}, & \text{όταν } p_1 < p_2 \\ \text{οτιδήποτε μεταξύ } 0 \; \textit{και} \; \dfrac{m}{p_1}, & \text{όταν } p_1 = p_2 \\ 0, & \text{όταν } p_1 > p_2 \end{cases}$$

- Διαίσθηση: αν δύο αγαθά είναι τέλεια υποκατάστατα, ο καταναλωτής θα αγοράσει το φθηνότερο

Ερώτηση 5.1

- Αν δύο αγαθά είναι τέλεια υποκατάστατα, ποια είναι η συνάρτηση ζήτησης για το αγαθό 2;

Απάντηση στην ερώτηση 5.1

- $x_2 = 0$ όταν $p_2 > p_1$
- $x_2 = m/p_2$ όταν $p_1 > p_2$
- Οτιδήποτε μεταξύ 0 και m/p_2 όταν $p_1 = p_2$

Ερώτηση 5.2

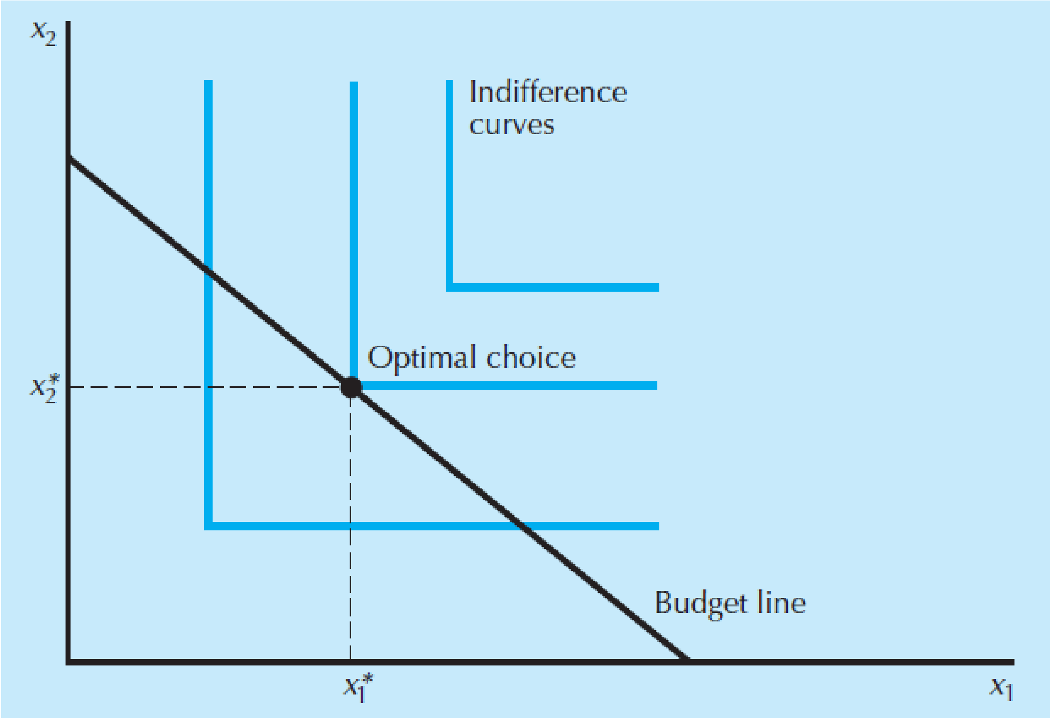
- Ας υποθέσουμε πως οι καμπύλες αδιαφορίας περιγράφονται από ευθείες γραμμές με κλίση $-b$
- Δεδομένων αυθαίρετων τιμών και εισοδήματος p_1, p_2 και m, τι μορφή θα έχουν οι βέλτιστες επιλογές του καταναλωτή;

Απάντηση στην ερώτηση 5.2

- Οι βέλτιστες επιλογές είναι:
  - $x_1 = m/p_1$ και $x_2 = 0$ αν $\frac{p_1}{p_2} < b$
  - $x_1 = 0$ και $x_2 = m/p_2$ αν $\frac{p_1}{p_2} > b$
  - Οποιοδήποτε σημείο πάνω στη γραμμή εισοδηματικού περιορισμού αν $\frac{p_1}{p_2} = b$

Τέλεια συμπληρώματα

- Στην περίπτωση τέλειων συμπληρωμάτων, διαλέγουμε ίσες ποσότητες των δύο αγαθών
- Λύνοντας αλγεβρικά, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη
$$p_1 x + p_2 x = m$$
- Άρα
$$x_1 = x_2 = \frac{m}{p_1 + p_2}$$
- Διαίσθηση: αφού τα αγαθά καταναλώνονται μαζί, είναι σαν να δαπανά ο καταναλωτής το εισόδημα για την αγορά ενός μόνο αγαθού με τιμή $p_1 + p_2$



Ερώτηση 5.3

- Έστω πως ένας καταναλωτής καταναλώνει πάντα 2 κουταλιές ζάχαρη με μία κούπα καφέ
- Αν η τιμή της ζάχαρης είναι p_1 ανά κουταλιά και η τιμή του καφέ είναι p_2 ανά κούπα και ο καταναλωτής έχει m € να ξοδέψει σε καφέ και ζάχαρη, πόσο θα θέλει να αγοράσει;

Απάντηση στην ερώτηση 5.3

- Έστω z ο αριθμός των ποτηριών καφέ που αγοράζει ο καταναλωτής
- Τότε γνωρίζουμε πως $2z$ είναι ο αριθμός των κουταλιών ζάχαρης που αγοράζει
- Πρέπει να ικανοποιήσουμε τον περιορισμό εισοδήματος
$$2p_1 z + p_2 z = m$$
- Λύνοντας για z έχουμε
$$z = \frac{m}{2p_1 + p_2}$$

Ουδέτερα και ανεπιθύμητα αγαθά

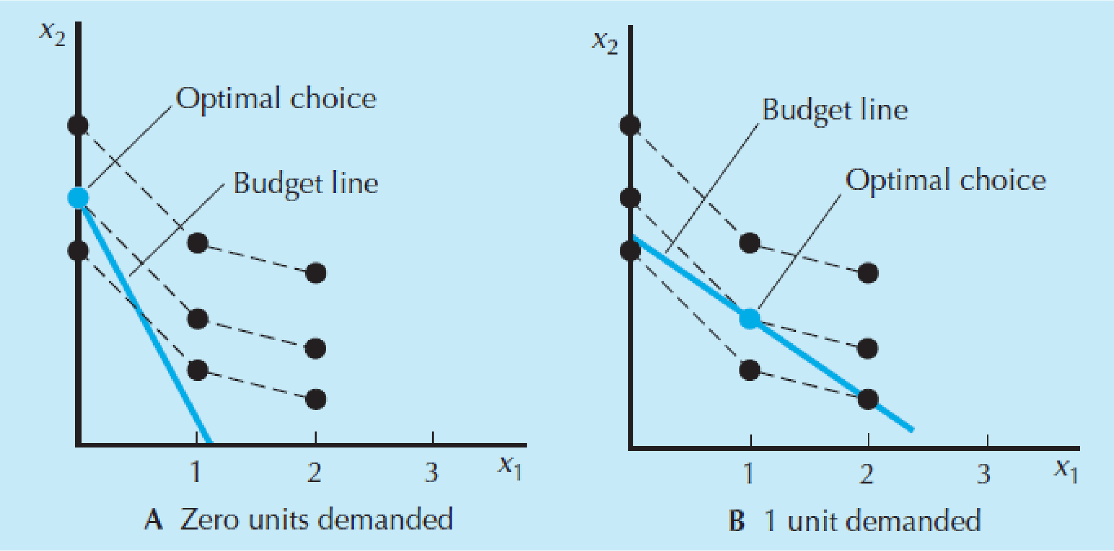
- Στην περίπτωση ουδέτερων ή ανεπιθύμητων αγαθών, ο καταναλωτής ξοδέυει όλο του το εισόδημα στα επιθμητά αγαθά και τίποτα στο ουδέτερο ή ανεπιθύμητο
- Άρα αν το αγαθό 1 είναι επιθυμητό και το αγαθό 2 είναι ανεπιθύμητο τότε οι συναρτήσεις ζήτησης είναι

$$x_1 = \frac{m}{p_1}$$

$$x_2 = 0$$

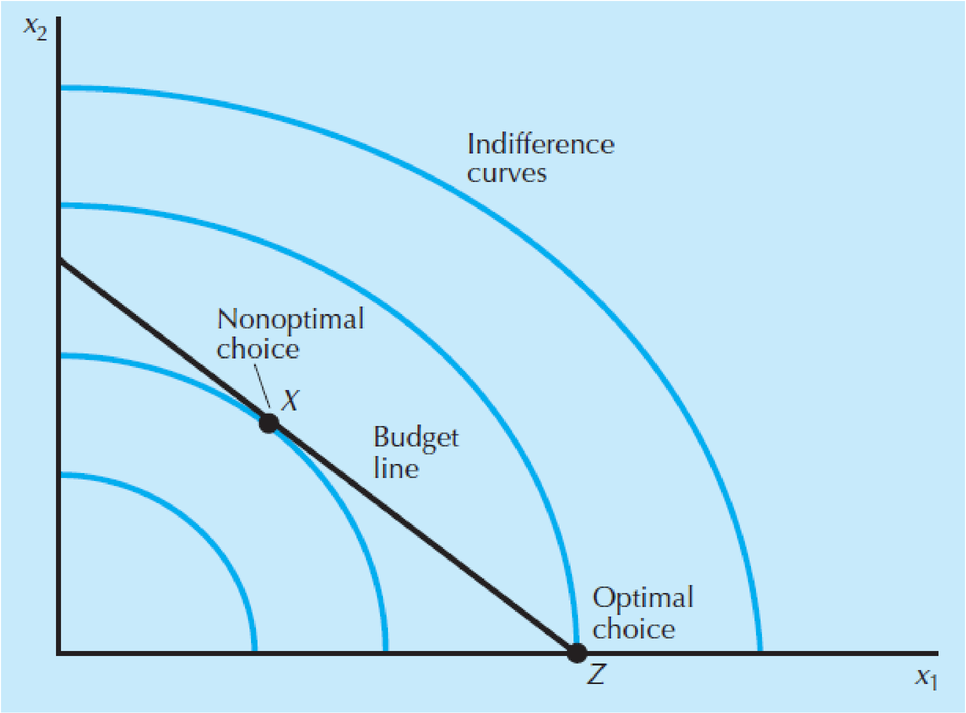
Διακριτά αγαθά

- Έστω ότι το αγαθό 1 είναι διακριτό, ενώ το αγαθό 2 είναι χρήματα σε όλα τα άλλα αγαθά
- Αν ο καταναλωτής διαλέξει 1, 2, 3, … μονάδες του αγαθού 1, επιλέγει ουσιαστικά τους συνδυασμούς αγαθών $(1, m - p_1), (2, m - 2p_1), (3, m - 3p_1), \ldots$
- Συγκρίνουμε τις επιλογές και διαλέγουμε αυτήν με τη μεγαλύτερη χρησιμότητα



Κοίλες προτιμήσεις

- Το X στην προκειμένη περίπτωση δεν είναι βέλτιστη επιλογή!
- Η βέλτιστη επιλογή είναι θα είναι πάντα πάνω στο σύνορο της γραμμής εισοδηματικού περιορισμού, όπως το Z
- Διαίσθηση: αν έχουμε χρήματα να δαπανήσουμε σε ελιές ή παγωτό, αλλά δε μας αρέσει να τα καταναλώνουμε μαζί, θα αγοράσουμε είτε μόνο το ένα αγαθό είτε μόνο το άλλο



Ερώτηση 5.4

- Έστω πως έχετε μη κυρτές προτιμήσεις για παγωτό και ελιές, και έστω ότι αντιμετωπίζετε τιμές p_1, p_2 και έχετε m € να ξοδέψετε
- Απαριθμήστε τις επιλογές για βέλτιστους συνδυασμούς κατανάλωσης

Απάντηση στην ερώτηση 5.4

- Γνωρίζουμε πως θα καταναλώσουμε είτε μόνο παγωτό είτε μόνο ελιές
- Άρα οι δύο επιλογές για βέλτιστους συνδυασμούς είναι
  - $x_1 = m/p_1, x_2 = 0$
  - $x_1 = 0, x_2 = m/p_2$

Προτιμήσεις Cobb-Douglas

- Έστω ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι $u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$
- Οι συναρτήσεις ζήτησης αποδεικνύεται ότι εκφράζονται ως

$$x_1 = \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}$$

$$x_2 = \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}$$

- Το ποσοστό του εισοδήματος που ξοδεύει ο καταναλωτής στο κάθε αγαθό είναι

Αγαθό 1: $\frac{p_1 x_1}{m} = \frac{p_1}{m}\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1} = \frac{c}{c+d}$

Αγαθό 2: $\frac{p_2 x_2}{m} = \frac{p_2}{m}\frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2} = \frac{d}{c+d}$

- Στην περίπτωση που η συνάρτηση χρησιμότητας εκφράζεται με τους εκθέτες να αθροίζονται σε 1, $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$, το ποσοστό που δαπανάται στο αγαθό 1 και 2 είναι a και $1-a$ αντίστοιχα

Ερώτηση 5.5

- Αν ένας καταναλωτής έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^4$, ποιο μέρος του εισοδήματος θα δαπανήσει στο αγαθό 2;

Απάντηση στην ερώτηση 5.5

- Έχουμε μια συνάρτηση χρησιμότητας Cobb-Douglas
- Άρα ο καταναλωτής θα δαπανήσει $4/(1+4) = 4/5$ του εισοδήματος στο αγαθό 2

Εκτίμηση συναρτήσεων χρησιμότητας

Εκτίμηση συνάρτησης χρησιμότητας από ιστορικά δεδομένα

- Έστω ιστορικά δεδομένα για τη συμπεριφορά ενός καταναλωτή ανά τα έτη
- Υπολογίζουμε ως $s_1 = p_1 x_1 / m$ και $s_2 = p_2 x_2 / m$ το μερίδιο εισοδήματος που δαπανάται σε κάθε αγαθό
- Παρατηρούμε ότι το μερίδιο παραμένει σχετικά σταθερό, οπότε μια συνάρτηση χρησιμότητας $u(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$ οδηγεί σε συμπεριφορά που ανταποκρίνεται καλά στα δεδομένα

Year	p_1	p_2	m	x_1	x_2	s_1	s_2	Utility
1	1	1	100	25	75	.25	.75	57.0
2	1	2	100	24	38	.24	.76	33.9
3	2	1	100	13	74	.26	.74	47.9
4	1	2	200	48	76	.24	.76	67.8
5	2	1	200	25	150	.25	.75	95.8
6	1	4	400	100	75	.25	.75	80.6
7	4	1	400	24	304	.24	.76	161.1

Ανάλυση πολιτικής

- Έστω ότι η κυβέρνηση εξετάζει μια φορολογική πολιτική η οποία οδηγεί σε τιμές (2,3) και εισόδημα 200 για τον εν λόγω καταναλωτή
- Αυτό οδηγεί σε κατανάλωση

$$x_1 = \frac{1}{4}\frac{200}{2} = 25$$

$$x_2 = \frac{3}{4}\frac{200}{3} = 50$$

- Εκτιμώμενη χρησιμότητα: $u(x_1, x_2) = 25^{\frac{1}{4}}50^{\frac{3}{4}} \approx 42$
- Άρα η εξεταζόμενη πολιτική μπορεί να βελτιώσει την κατάσταση του καταναλωτή στο έτος 2 αλλά να τη χειροτερεύσει στο έτος 3

Στην πράξη

- Στην πράξη ενδεχομένως να μην έχουμε δεδομένα για ένα συγκεκριμένο καταναλωτή αλλά για μια κλάση καταναλωτών (έφηβοι, οικογένειες μέσης ηλικίας, γηραιός πληθυσμός,...)
- Ενδεχομένως να χρησιμοποιούνται πιο σύνθετες συναρτήσεις χρησιμότητας από την Cobb-Douglas
- Αλλά η βασική ιδέα παραμένει η ίδια

Συνέπειες της συνθήκης ΟΛΥ

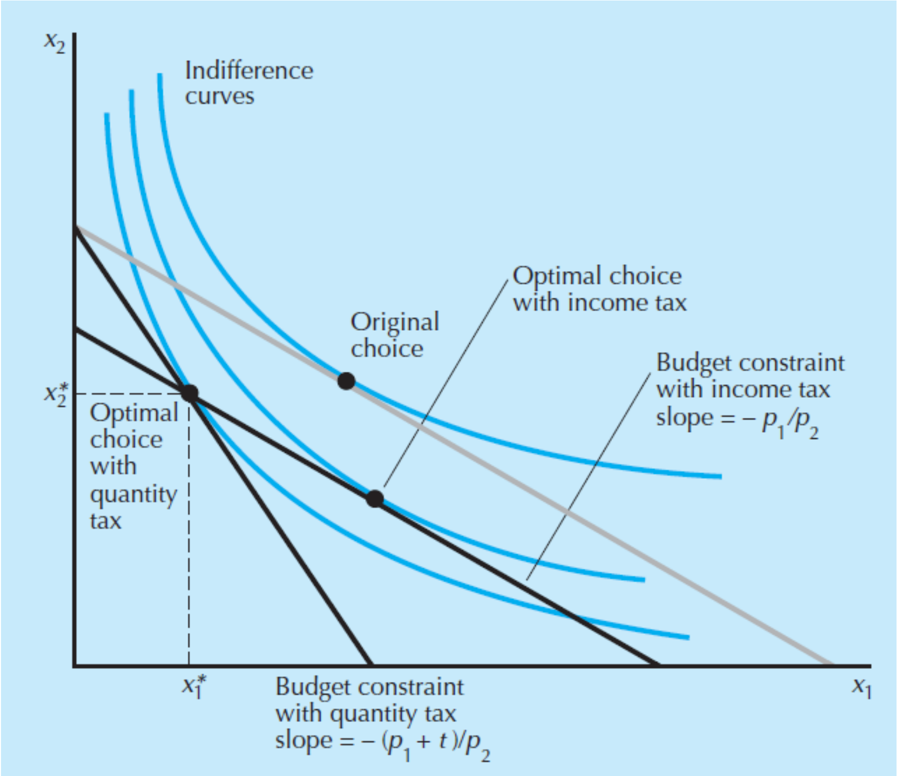
Συνέπειες της συνθήκης ΟΛΥ

- Το γεγονός ότι ο ΟΛΥ ισούται με το λόγο τιμών δύο προϊόντων που καταναλώνεται σημαίνει πως μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τις προτιμήσεις *όλων* των καταναλωτών, ανεξαρτήτως του εισοδήματός τους και του πόσο καταναλώνουν από κάθε αγαθό
- Και αλλαγές στις τιμές μας επιτρέπουν να παρατηρήσουμε τον ΟΛΥ σε διαφορετικά σημεία για *όλους* τους καταναλωτές που καταναλώνουν τα αγαθά, άρα να αντλήσουμε πληροφορία για τις προτιμήσεις τους
- Επίσης μας επιτρέπει να αποτιμήσουμε τεχνολογικές καινοτομίες, π.χ. έστω ότι η τιμή του γάλατος είναι 1 € ανά λίτρο και η τιμή του βουτύρου είναι 2 € ανά 100 γραμμάρια
  - Αν ανακαλυφθεί μια εφεύρεση που μετατρέπει 3 λίτρα γάλατος σε 100 γρ βουτύρου, αξίζει να επενδύσουμε στην εφεύρεση;
  - Αν η εφεύρεση αντιστρέφει τη διαδικασία μετατροπής (δηλαδή μετατρέπει 100 γρ βουτύρου σε 3 λίτρα γάλατος), αξίζει να επενδύσουμε στην εφεύρεση;

Επιλογή φόρων

Φορολόγηση επί της ποσότητας έναντι φορολόγησης επί του εισοδήματος

- Έστω ένας **φόρος επί της ποσότητας** ο οποίος οδηγεί σε έσοδα R^*
- Και έστω ένας **φόρος επί του εισοδήματος** ο οποίος οδηγεί στα ίδια έσοδα
- Ο καταναλωτής είναι σε καλύτερη κατάσταση με το φόρο επί του εισοδήματος, γιατί μπορεί να διαλέξει ένα σημείο σε καμπύλη αδιαφορίας με υψηλότερη χρησιμότητα



Φορολόγηση επί της ποσότητας

- Ας υποθέσουμε πως ο αρχικός περιορισμός εισοδήματος είναι
$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$
- Αν εισάγουμε φόρο επί της ποσότητας στο αγαθό 1, ο εισοδηματικός περιορισμός γίνεται
$$(p_1 + t)x_1 + p_2x_2 = m \quad (5.1)$$
- Στη βέλτιστη επιλογή με φόρο, (x_1^*, x_2^*), ικανοποιείται ακριβώς ο εισοδηματικός περιορισμός
$$(p_1 + t)x_1^* + p_2x_2^* = m \quad (5.2)$$
- Ο φόρος που συλλέγει το κράτος είναι $R^* = tx_1^*$

Φορολόγηση εισοδήματος

- Αν επιβάλλουμε φόρο R^* στο εισόδημα, ο εισοδηματικός περιορισμός γίνεται
$$p_1x_1 + p_2x_2 = m - R^*$$
- Αντικαθιστώντας για το R^*, έχουμε
$$p_1x_1 + p_2x_2 = m - tx_1^*$$
- Η κλίση της γραμμής εισοδηματικού περιορισμού δεν αλλάζει σε σχέση με τη γραμμή προ φόρου, και ισχυριζόμαστε ότι περνάει και από το σημείο (x_1^*, x_2^*), που είναι η βέλτιστη επιλογή με το φόρο επί της ποσότητας
- Για να το διαπιστώσουμε αυτό, παρατηρούμε ότι όντως
$$p_1x_1^* + p_2x_2^* = m - tx_1^*$$

Η φορολόγηση επί του εισοδήματος είναι προτιμότερη για τον καταναλωτή

- Στην περίπτωση φορολόγησης εισοδήματος, η κατανάλωση (x_1^*, x_2^*) είναι εφικτή για τον καταναλωτή
- Αλλά δεν είναι βέλτιστη: στο (x_1^*, x_2^*) ο ΟΛΥ είναι $-(p_1 + t)/p_2$
- Ενώ ο φόρος εισοδήματος αντιστοιχεί σε ΟΛΥ ίσο με $-p_1/p_2$

Κάποιοι περιορισμοί του αποτελέσματος

- Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί σε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα, αλλά ας παρατηρήσουμε κάποιους περιορισμούς στις υποθέσεις μας

1. Η ανάλυση εστιάζει σε ένα μόνο καταναλωτή, και ο φόρος επί του εισοδήματος διαφέρει από καταναλωτή σε καταναλωτή, άρα ένας *ενιαίος* φόρος εισοδήματος δεν είναι απαραίτητα προτιμότερος από έναν ενιαίο φόρο επί της ποσότητας (έστω π.χ. μια κατάσταση όπου κάποιος καταναλωτής δεν καταναλώνει καθόλου από το αγαθό 1, ο καταναλωτής αυτός προτιμά το φόρο επί της ποσότητας)
2. Υποθέσαμε πως όταν επιβάλλουμε φόρο στο εισόδημα, το εισόδημα δεν αλλάζει, αλλά ενδέχεται να μειωθεί γιατί μειώνονται τα κίνητρα των καταναλωτών να δημιουργήσουν εισόδημα
3. Έχουμε αγνοήσει τελείως την αντίδραση της παραγωγής στο φόρο

Ερώτηση 5.6

- Για ποιες προτιμήσεις είναι ο καταναλωτής αδιάφορος μεταξύ ενός φόρου επί της ποσότητας έναντι ενός φόρου επί του εισοδήματος;

Απάντηση στην ερώτηση 5.6

- Για τέλεια συμπληρώματα, όπου η αλλαγή στην τιμή δεν προκαλεί αλλαγή στη ζήτηση

Παράρτημα

Συναρτήσεις ζήτησης Cobb-Douglas

Υολογισμός συναρτήσεων ζήτησης

- Έχουμε τρεις τρόπους να υπολογίσουμε συναρτήσεις ζήτησης από το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας του καταναλωτή:

1. Σχέση ΟΛΥ με τιμές αγοράς
2. Αντικατάσταση του αγαθού 2 ως προς αγαθό 1, και μεγιστοποίηση ως προς αγαθό 1
3. Συνάρτηση Lagrange

Μέθοδος 1: Σχέση ΟΛΥ με τιμές αγοράς

- Γνωρίζουμε από αυτό το κεφάλαιο πως

$$\text{ΟΛΥ}(x_1, x_2) = -\frac{p_1}{p_2} \quad (5.3)$$

- Και γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 4 πως ο ΟΛΥ είναι ίσος με το αρνητικό των μερικών παραγώγων της συνάρτησης χρησιμότητας
- Αντικαθιστώντας στην (5.3), έχουμε

$$\frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \quad (5.4)$$

- Από το κεφάλαιο 2, γνωρίζουμε επίσης πως η βέλτιστη επιλογή πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό εισοδήματος:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (5.5)$$

- Άρα έχουμε δύο εξισώσεις σε δύο αγνώστους

Επιλύοντας το σύστημα δύο εξισώσεων

- Από τον εισοδηματικό περιορισμό, μπορούμε να εκφράσουμε την ποσότητα του αγαθού 2 ως συνάρτηση της ποσότητας του αγαθού 1:

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \quad (5.6)$$

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.4):

$$\frac{\dfrac{\partial u\left(x_1, \dfrac{m}{p_2} - \dfrac{p_1}{p_2} x_1\right)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u\left(x_1, \dfrac{m}{p_2} - \dfrac{p_1}{p_2} x_1\right)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Μπορούμε να λύσουμε την έκφραση αυτή ως προς x_1, ως συνάρτηση των (p_1, p_2, m)
- Και από τον περιορισμό εισοδήματος μπορούμε να εξάγουμε το x_2

Μέθοδος 2: μεγιστοποίηση χωρίς περιορισμούς

- Το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας μπορεί να εκφραστεί ως πρόβλημα μεγιστοποίησης υπό περιορισμούς:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$
$$\text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον περιορισμό εισοδήματος για να εκφράσουμε το x_2 ως συνάρτηση του x_1, $x_2(x_1)$:

$$x_2(x_1) = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \quad (5.7)$$

- Αντικαθιστώντας το $x_2(x_1)$ στο πρόβλημα μεγιστοποίησης, έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης *χωρίς περιορισμούς*:

$$\max_{x_1} u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right)$$

Επίλυση προβλήματος χωρίς περιορισμούς

- Λύνουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χωρίς περιορισμούς θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν:

$$\frac{\partial u\big(x_1, x_2(x_1)\big)}{\partial x_1} + \frac{\partial u\big(x_1, x_2(x_1)\big)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0 \quad (5.8)$$

- Παραγωγίζοντας την (5.7) για να υπολογίσουμε το $\frac{dx_2}{dx_1}$, έχουμε

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

- Και αντικαθιστώντας στην (5.8), έχουμε

$$\frac{\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u\big(x_1^*, x_2^*\big)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Αυτή είναι ακριβώς η πρώτη συνθήκη που εξάγαμε στη μέθοδο 1
- Και ο εισοδηματικός περιορισμός επίσης πρέπει να ισχύει, άρα βρίσκουμε τη λύση όπως στη μέθοδο 1

Μέθοδος 3: συνάρτηση Lagrange

- Η επίλυση με τη χρήση **πολλαπλασιαστών Lagrange** ξεκινά ορίζοντας τη *συνάρτηση Lagrange*:

$$L = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

- Η νέα μεταβλητή λ ονομάζεται **πολλαπλασιαστής Lagrange**
- Βάσει του θεωρήματος του Lagrange, η βέλτιστη λύση (x_1^*, x_2^*) πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες πρώτου βαθμού:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* - m = 0$$

- Έχουμε τρεις εξισώσεις σε τρεις αγνώστους (x_1, x_2 και λ) και θέλουμε να λύσουμε τα x_1, x_2 ως προς p_1, p_2 και m

Απαλείφοντας το λ

- Διαιρώντας την πρώτη συνθήκη με τη δεύτερη, έχουμε

$$\frac{\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Αυτή είναι ακριβώς η συνθήκη που εξάγαμε με τις μεθόδους 1 και 2
- Και έχουμε πάλι πως ισχύει ο εισοδηματικός περιορισμός
- Άρα πάλι έχουμε δύο εξισώσεις σε δύο αγνώστους, που είδαμε προηγουμένως πώς λύνονται

Παράρτημα

Συναρτήσεις ζήτησης Cobb-Douglas

Συνάρτηση χρησιμότητας Cobb-Douglas

- Θυμίζουμε τη συνάρτηση χρησιμότητας Cobb-Douglas:
$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$
- Χρησιμοποιώντας το λογαριθμικό μετασχηματισμό που είναι μονοτονικός, έχουμε τις ίδιες προτιμήσεις να εκφράζονται από τη συνάρτηση χρησιμότητας
$$\ln u(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$
- Ας βρούμε τις συναρτήσεις ζήτησης Cobb-Douglas, λύνοντας το εξής πρόβλημα μεγιστοποίησης:
$$\max_{x_1, x_2} c \ln x_1 + d \ln x_2$$
$$\text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Μέθοδος 1: συνθήκη ΟΛΥ

- Χρησιμοποιώντας την έκφραση ΟΛΥ που υπολογίσαμε στο κεφάλαιο 4, θέλουμε να λύσουμε το εξής σύστημα:

$$\frac{cx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

- Εκφράζοντας το x_2 ως προς x_1 στη δεύτερη εξίσωση και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση:

$$\frac{c(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1)}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Το οποίο ισοδυναμεί με

$$c(m - x_1p_1) = dp_1x_1$$

- Αναδιαρρυθμίζοντας,

$$cm = (c + d)p_1x_1$$

- Και λύνοντας ως προς x_1:

$$x_1 = \frac{c}{c + d}\frac{m}{p_1}$$

Ζήτηση για το αγαθό 2

- Έχουμε εκφράσει τη συνάρτηση ζήτησης για το αγαθό 1
- Αντικαθιστώντας στον εισοδηματικό περιορισμό, έχουμε:

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1} = \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}$$

Μέθοδος 2: πρόβλημα μεγιστοποίησης χωρίς περιορισμούς

- Αντικαθιστώντας τον περιορισμό εισοδήματος στο πρόβλημα μεγιστοποίησης, έχουμε:

$$\max_{x_1} c \ln x_1 + d \ln\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right)$$

- Οι συνθήκες πρώτου βαθμού για το πρόβλημα είναι

$$\frac{c}{x_1} - d \frac{p_2}{m - p_1 x_1} \frac{p_1}{p_2} = 0$$

- Μετά από λίγη άλγεβρα (δείξτε το) έχουμε τη λύση

$$x_1 = \frac{c}{c+d} \frac{m}{p_1}$$

- Και αντικαθιστώντας πίσω στον περιορισμό εισοδήματος έχουμε

$$x_2 = \frac{d}{c+d} \frac{m}{p_2}$$

Μέθοδος 3: συνάρτηση Lagrange

- Η συνάρτηση Lagrange εκφράζεται ως εξής:

$$L = c \ln x_1 + d \ln x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

- Οι τρεις συνθήκες πρώτου βαθμού είναι

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{c}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{d}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x + p_2 x_2 - m = 0$$

Λύνοντας το σύστημα τριών εξισώσεων

- Από τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε

$$c = \lambda p_1 x_1$$
$$d = \lambda p_2 x_2$$

- Προσθέτοντας τις δύο αυτές εξισώσεις:

$$c + d = \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2) = \lambda m$$

- Άρα

$$\lambda = \frac{c + d}{m}$$

- Και αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις, που λύνονται ως προς x_1 και x_2:

$$x_1 = \frac{c}{c + d} \frac{m}{p_1}$$
$$x_2 = \frac{d}{c + d} \frac{m}{p_2}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Hal Varian, Μικροοικονομική: μια σύγχρονη προσέγγιση, 3η έκδοση, εκδόσεις Κριτική, 2015