Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα Ιούλιος 2007

1.(12) Τοποθετήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σε ένα νέο πίνακα έτσι ώστε: δυο συναρτήσεις f(n), g(n) να βρίσκονται στην ίδια γραμμή αν και μόνο αν f(n) = Θ(g(n)) και μια συνάρτηση f(n) να βρίσκεται κάτω από μια συνάρτηση g(n) αν και μόνο αν f(n) = o(g(n))

$\frac{n}{\log n}+\log^3 n^2$	$3^{\log n}$	$\frac{n^{\sqrt{n}}}{200}$	$\frac{n^n}{6^n+1}$	300(n-1)!	$n\log_2\sqrt{n}$	$n\log^2 n$	$n^{\log n}$
$0.3\log n+\frac{\log 8n}{n}$	$\frac{1}{6}\log^8 n^n$	$6^{\sqrt{n}}$	$(\frac{n}{6})^{\frac{n}{8}}$	$\frac{n!}{600}$		log(n!)	2^n

2.(16) Χαρακτηρίστε τις επόμενες προτάσεις ως αληθείς, ψευδής ή ανοικτά προβλήματα. Κάθε λάθος απάντηση μειώνει κατά μια μονάδα την βαθμολογία(με εξήγηση).

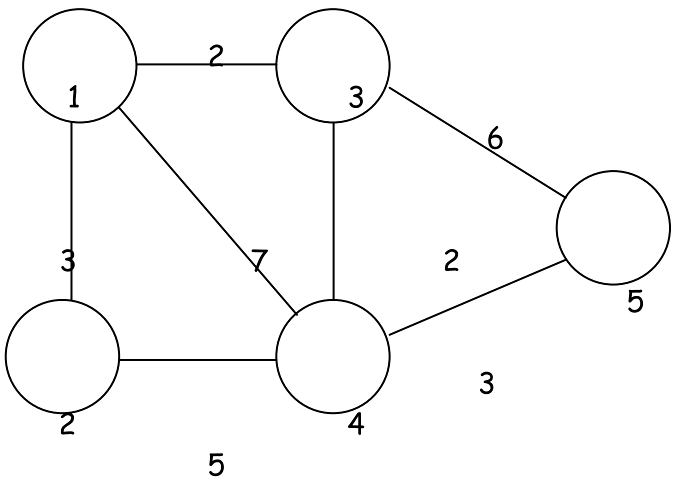
	Το πρόβλημα primarily ανήκει στην κλάση NP
	Υπάρχει πλήρες πρόβλημα για την κλάση P το οποίο ανήκει στην κλάση NP
	Για το πρόβλημα διάσχισης γράφων δεν έχει βρεθεί μέχρι στιγμής πολυωνυμικός αλγόριθμος ως προς το πλήθος των κόμβων
	Αν το συμπλήρωμα ενός συνόλου S είναι αποκρίσιμο τότε το σύνολο S είναι καταγράψιμο.
	Κάθε(όχι απαραιτήτως γνήσια) φθίνουσα ακολουθία ακεραίων είναι σωρός.
	Υπάρχει πρόβλημα το οποίο λύνεται σε $O(n^3)$ βήματα και το οποίο ανάγεται σε πρόβλημα 3SAT.

	Ο αλγόριθμος hipsort χρειάζεται $\Omega(n)$ βήματα για να διατάξει οποιαδήποτε στοιχεία.
	Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί δυναμικό προγραμματισμό χρειάζεται τουλάχιστον εκθετικό χρόνο.

3.(10) Δίνονται δυο πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ βαθμού n το πολύ και θέλουμε να βρούμε το γινόμενο τους $C(x)$.

α. Ποια είναι η πολυπλοκότητα του προφανούς αλγόριθμου;
β. Δώστε ένα αλγόριθμο «Διαίρει και κυρίευε» πολυπλοκότητας $O(n^{\log_2 3})$. Αποδείξτε την ορθότητα του.

4.(10) Για το παρακάτω γράφημα να βρείτε τις ελάχιστες αποστάσεις από την κορυφή 1 προς όλες τις άλλες κορυφές χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra.



5.(10) Δώστε το στιγμιότυπο Vertex Cover που προκύπτει από την εφαρμογή της σχετικής αναγωγής (3SAT on Vertex Cover) στη λογική πρόταση.
(x1 v ¬x2 v x3) ^ (¬x1 v x2 v ¬x4) ^ (x2 v x3 v x4) ^ (x1 v ¬x3 v x4)

6.(10) Να βρεθεί αποδοτικός Αλγόριθμος που βρίσκει διάμετρο ενός δένδρου (μονοπάτι με μέγιστη απόσταση). Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε κόμβο v ενός γράφου, ο w με την μέγιστη απόσταση από τον v είναι άκρο διαμέτρου.

7.(10) Δίνεται ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$ με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του $w(e) \geq 0$ στον οποίο έχουμε υπολογίσει ένα ελάχιστο συνεκτικό δέντρο(minimum spanning tree) και τα συντομότερα μονοπάτια από έναν συγκεκριμένο κόμβο $s \in V$ προς όλους τους κόμβους.
Έστω ότι αυξάνουμε το βάρος κάθε ακμής κατά ένα. Τα νέα βάρη είναι $w'(e) = w(e) + 1$.
α. Αλλάζει το ελάχιστο συνεκτικό δέντρο; Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο αλλάζει ή αποδείξτε ότι δεν αλλάζει.
β. Αλλάζουν τα συντομότερα μονοπάτια? Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο αλλάζουν ή αποδείξτε ότι δεν αλλάζουν.