Κεφ2

Sunday, 13 February 2022 8:23 PM

Κεφάλαιο 2: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

- Τυχαία μεταβλητή:
  - Basically, συνδέει το αποτέλεσμα ενός πειράματος με έναν πραγματικό αριθμό (ένα είδους συνάρτησης).
  - Διακριτή ΤΜ είναι αυτές με πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο σύνολο τιμών.
    - χαρακτηρίζονται από
  - Συνάρτηση μάζας πιθανότητας μιας δτμ είναι η πιθανότητα η X να πάρει τη τιμή k: $p_X(k) = P(\{X = k\})$
    - "πιο κατανοητό": πόσο πιθανό είναι η X να ισούται με k;
  - $\sum_k p_X(k) = 1$
- ΤΜ Bernoulli: μια τμ με τιμές 0 (αποτυχία πειράματος) και 1 (επιτυχία πειράματος), όπου η επιτυχία έχει πιθανότητα p να συμβεί.
  και η αποτυχία $1-p$

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k=1 \\ 1-p, & k=0 \end{cases}$$

- Διωνυμική ΤΜ: έστω n επαναλήψεις ενός πειράματος, με πιθ. επιτυχίας p και k επιτυχίες. Η διων (n,p) έχει σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n.$$

- Γεωμετρική ΤΜ: έστω επαναλήψεις πειράματος με πιθ. επιτυχίας p, και η πρώτη επιτυχία είναι στην k-επανάληψη. Η γεω(p) έχει σμπ:

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k \in N^*$$

- ΤΜ Poisson: η poi(λ) έχει σμπ:

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in N$$

  - Αν $\lambda = np$, με $n \gg 1$, $p \ll 1$ τότε: $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \approx \binom{n}{k} p^k (1-p)^{k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$

- Μέση τιμή: έστω δτμ X, με σμπ $p_X(k)$. Τότε:

$$E[X] = \sum_k k\, p_X(k) \xrightarrow{\text{αριθμός!}} = m_1$$

Basically, είναι το "κέντρο βάρους" της X, μία "υποτιθέμενη" τιμή της X γύρω από την οποία απλώνεται η X.

  - i-ροπή της X: είναι η μέση τιμή της X^i, $E(X^i) = m_i$.

- Διασπορά: η μέση τιμή της $[X - E(X)]^2 = (X - m)^2$

$$\mathrm{var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_k (k - E(X))^2 p_X(k) = E(X^2) - E^2(X) = m_2 - m_1^2$$

Basically, αν m η μτ της X, η διασπορά συμβολίζει το πόσο "συγκεντρωμένες" είναι οι τιμές της X γύρω από την μέση τιμή της.

  - Τυπική απόκλιση: $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$
  - Αν $Y = aX + b$: $E(Y) = aE(X) + b$, $\mathrm{var}(Y) = a^2 \mathrm{var}(X)$

- Από κοινού σμπ: έστω οι δτμ X, Y, που συνδέονται στο ίδιο πείραμα. Η από κοινού σμπ τους:

$$p_{X,Y}(x,y) = P[X = x, Y = y]$$

  - οριακή σμπ:

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

- Δεσμευμένη σμπ:
  - ΤΜ - γεγονός: αν X τμ, A γεγονός:
    - $p_{X|A}(x) = P[X = x \mid A] = \dfrac{P[\{X = x\} \cap A]}{P[A]}$
    - $E[X \mid A] = \sum_x x\, p_{X|A}(x)$
  - ΤΜ - ΤΜ: αν X, Y τμ:
    - $p_{X|Y}(x|y) = P[X = x \mid Y = y] = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$, $p_Y(y) > 0$
    - $E[X \mid Y = y] = \sum_x x\, p_{X|Y}(x|y)$

- Ανεξαρτησία:
  - ΤΜ - γεγονός: η τμ X ανεξάρτητη του A ανν: $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
  - ΤΜ - ΤΜ: η τμ X ανεξάρτητη της τμ Y ανν: $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$, $\forall x, y$
    - τότε:
    - $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$
    - $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

- Ειδικές ΤΜ:
  - Διακριτή ομοιόμορφη $X \sim \{a, b\}$:
    - $p_X(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1}, & k \in \{a, a+1, \dots, b\} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
    - $E = \dfrac{a+b}{2}$ • $\mathrm{var} = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
  - Bernoulli (p):
    - $p_X(k) = \begin{cases} p, & k=1 \\ 1-p, & k=0 \end{cases}$ • $E = p$ • $\mathrm{var} = p(1-p)$
  - Γεω (p):
    - $p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \in N^*$ • $E = \dfrac{1}{p}$ • $\mathrm{var} = \dfrac{1-p}{p^2}$
  - Διων (n,p):
    - $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$ • $E = np$ • $\mathrm{var} = np(1-p)$
  - Pois(λ):
    - $p_X(k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k \in N$ • $E = \mathrm{var} = \lambda$