Δευτέρα 6/6/22 22η Διάλεξη: Κόκκινης ΙΙ

ΠΟΛΥΒΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

  ισαπέχοντα

  $$h = \frac{b-a}{n}$$

- $y_k \cong y(x_k)$

Υποθέτω $y \in C^3[a, b]$

Αναπτύσσω κατά Taylor: $y(x_k+h) = y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2!} y''(x_k) + O(h^3)$

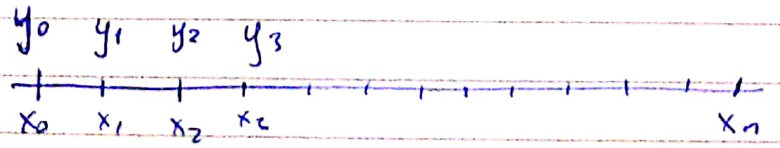
όχι ακριβώς ίδια

$(-)$ $y(x_k-h) = y(x_k) - h y'(x_k) + \frac{h^2}{2!} y''(x_k) + O(h^3)$

$$\underbrace{y(x_k+h)}_{y(x_{k+1})} - \underbrace{y(x_k-h)}_{y(x_{k-1})} = 2h y'(x_k) + O(h^3)$$

$$\boxed{y_{k+1} - y_{k-1} = 2h f(x_k, y_k), \text{ ισχύει για } k = 1, 2, \dots, n-1}$$

ή $\boxed{y_{k+1} = y_{k-1} + 2h f(x_k, y_k), \quad k = 1, 2, n-1}$ Πολυβηματική Μέθοδος



Για $k=1$: $y_2 = y_0 + 2h f(x_1, y_1)$ υπολογίζουμε με (κατάλληλη) μονοβηματική

Γενική Μορφή:

$$y_k = \sum_{i=1}^{r} a_i y_{k-i} + h \sum_{i=0}^{r} b_i f_{k-i}, \quad k=r,\dots,n$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $y_0, y_1, \dots y_{r-1}$ αρχικές τιμές

$f_k = f(x_k, y_k)$

$$\underbrace{b_0 f_k}_{f_0(x_k, f_k)} + b_1 f_{k-1} + \dots + f_{k-r}$$

Αν

- $b_0 = 0$: Άμεση - Ο υπολογισμός του y_k γίνεται με απλή αντικατάσταση γνωστών τιμών

- $b_0 \neq 0$ πεπλεγμένη, γενικά απαιτείται επίλυση μη γραμμικής εξίσωσης

- $y_k = y_{k-1} + h \sum_{i=0}^{r} b_i f_{k-i}$ Μέθοδοι Adams
  - για $b_0 = 0$: Άμεσες: Adams Bashforth
  - για $b_0 \neq 0$: πεπλ.: Adams Moulton

Δε χρειάζεται να ξέρουμε απ'έξω τις πολυβηματικές, μόνο την Euler και την Taylor

$f(x,y) = 1 + y/x$
$a = x_0 = 1$
$y_0 = 1$

Παράδειγμα: $\begin{cases} y' = 1 + y/x, & x \in [1,2] \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Να υπολογιστεί μια προσέγγιση της λύσης στο σημείο $x=2$ χρησιμοποιώντας (με $h=0,5$) τη μέθοδο A-B δύο βημάτων

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}(3f_{k-1} - f_{k-2})$$

(Οι απαιτούμενες αρχικές τιμές να υπολογιστούν με τη μέθοδο Taylor τάξης 2)

x_0	x_1	x_2
1	1,5	2
y_0	y_1	y_2

$k=2$: $y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(3f(x_1,y_1) - f(x_0,y_0))$

Το y_1 θα υπολογιστεί με μέθοδο Taylor τάξης 2

$$y_{k+1} = y_k + h\left(1 + \frac{y_k}{x_k}\right) + \frac{h^2}{2}\left[-\frac{y_k}{x_k^2} + \frac{1}{x_k}\left(1 + \frac{y_k}{x_k}\right)\right]$$

$k=0$: $y_1 = y_0 + h\left(1 + \frac{y_0}{x_0}\right) + \frac{h^2}{2}\left[-\frac{y_0}{x_0^2} + \frac{1}{x_0}\left(1 + \frac{y_0}{x_0}\right)\right] = 2.125$

δηλ. $y_1 = 2.125$

$$y_2 = 2,125 + \frac{0,5}{2}\left(3\left(1 + \frac{2,125}{1,5}\right) - \left(1 + \frac{1}{1}\right)\right] = 3,4375$$

δηλ. $y(2) \simeq y_2 = 3,4375$

CS CamScanner

Εξέταση:

Για Κοινή μας καλύπτουν οι σημειώσεις. Πιθανόν να πέσει Θεωρία, π.χ. ορισμούς, ~~απο~~ διατύπωση, απόδειξη, κατασκευή μεθόδου, ΜΟΝΟ ό,τι έχουμε κάνει στον πίνακα.

• Για Π.Α.Τ Μονοβηματικές - Πολυβηματικές

1. Euler
2. Πεπλεγμένη Euler
3. Taylor $(m=2)$
4. R-K

ό,τι είπαμε σήμερα

• Συστήματα Δ.Ε:

• Π.Α.Τ ανώτερης τάξης

αναγωγή

Μόνο απλή Euler

• Μη Γραμμικές Εξισώσεις   Θεώρημα με απόδειξη

1. Διχοτόμηση (μπορεί: περιγράψετε τη μέθοδο / Αποδείξετε την εκτίμηση σφάλματος)
2. Μέθοδος Εσφαλ. Θέσης
3. Γενική Επαναληπτική Μέθοδος

$$x_{k+1}=g(x_k),\ k=0,\dots$$

Θ1. (τοπική) χωρίς απόδειξη

Θ2. (περιορισμένης) με απόδειξη

ΤΑΞΗ Σύγκλισης

4. Newton-Raphson

Θ1. Σύγκλιση - απλή ρίζα / με απόδειξη

5. Τέμνουσα

Μη Γραμμικά Συστήματα: Newton-Raphson

(αποφυγή $f_x^{-1}(x_k)$)

CamScanner