Βηματική απόκριση συστημάτων $2^{ης}$ τάξης

i) χωρίς μηδενικό: $G(s)=\frac{K}{s^2+as+b}=\frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$,

$a>0,\ b>0,\ \omega_n=\sqrt{b},\ \zeta=\frac{a}{2\sqrt{b}}$

διακρίνουσα: $\Delta=a^2-4b=4\omega_n^2(\zeta^2-1)$

α) αν $\Delta>0$, δηλαδή αν $\zeta>1$ (2 πραγματικοί πόλοι αρνητικοί)

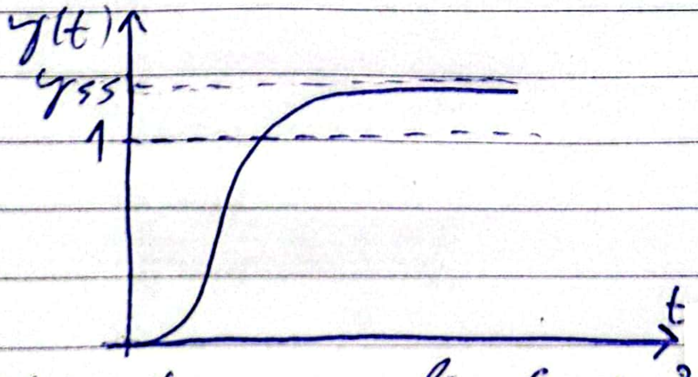
$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{K}{s(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2)}=$$

$$=\frac{K}{\omega_n^2 s}+\frac{K}{p_1(-\sqrt{\Delta})(s-p_1)}+\frac{K}{p_2\sqrt{\Delta}(s-p_2)}$$

όπου $p_1=-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})$

$p_2=-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{K}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{p_2 t}}{p_2}-\frac{e^{p_1 t}}{p_1}\right]+\frac{K}{\omega_n^2},\ \forall t\geq 0$$



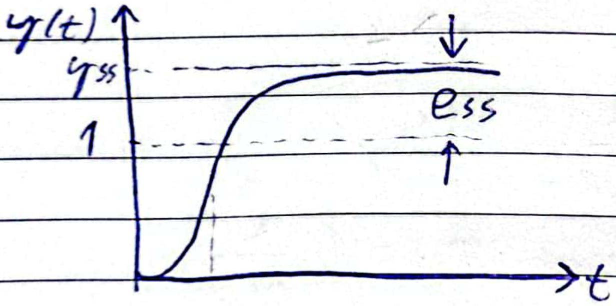
τελική τιμή: $y_{ss}=\lim_{t\to\infty}\{y(t)\}=K/\omega_n^2$

σφάλμα μόνιμης κατάστασης: $e_{ss}=\lim_{t\to\infty}(u(t)-y(t))=1-y_{ss}=1-\frac{K}{\omega_n^2}$

β) αν $\Delta=0$, δηλ. αν $\zeta=1$ (διπλός πραγματικός πόλος αρνητικός)

$$Y(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{K}{s(s^2+2\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{K}{s(s+\omega_n)^2}=$$

$$=\frac{K}{\omega_n^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right]\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y(t)=\frac{K}{\omega_n^2}\left[1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right],\ \forall t\geq 0$$



τελ. τιμή: $y_{ss}=\frac{K}{\omega_n^2}$

σφ. μον. κατάστασης: $e_{ss}=1-\frac{K}{\omega_n^2}$

Χρόνος καθυστέρησης: $t_d=\frac{1{,}68}{\omega_n}$

-//- αποκατάστασης: $t_s(5\%)=\frac{4{,}75}{\omega_n}$

$t_s(2\%)=\frac{5{,}8}{\omega_n}$

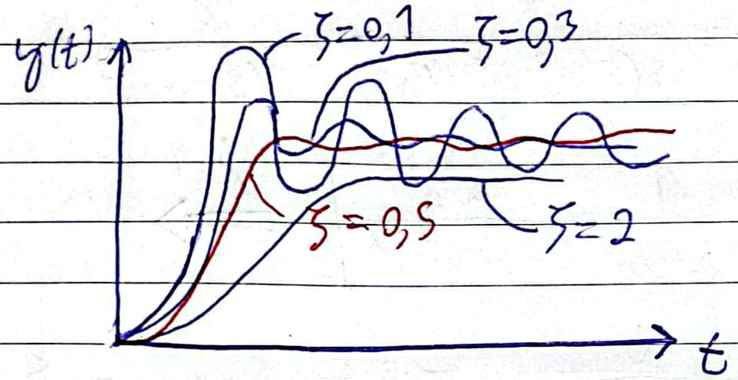
γ) αν $\Delta<0$, δηλαδή: $\Delta<0$, δηλαδή αν $0<\zeta<1$
(συζυγείς μιγαδικοί πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο)

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{K}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

Πόλοι: $p_1=-\omega_n\zeta-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$p_2=-\omega_n\zeta+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} y(t) = \frac{K}{\omega_n^2}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left[(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]\right]$$



$\uparrow\zeta \rightarrow \downarrow$ διακύμανση

τελική τιμή: $y_{ss} = \frac{K}{\omega_n^2}$

σφάλμα σ.μον. κατάστασης: $e_{ss} = 1 - \frac{K}{\omega_n^2}$

χρόνος μεγίστων κ' ελαχίστων: $\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{K\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, $K = 1, 2, \ldots$

χρόνος κορυφής: $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

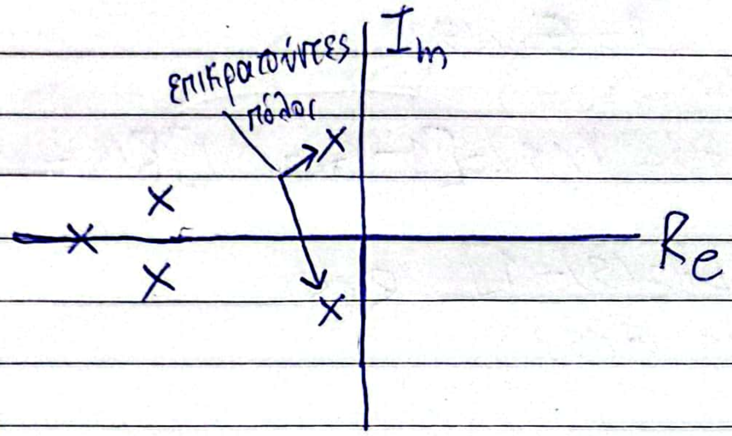
μέγιστη υπερύψωση: $M_p = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \cdot 100\%$

περιβάλλουσα της $y(t)$: $y_{περ}(t) = 1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

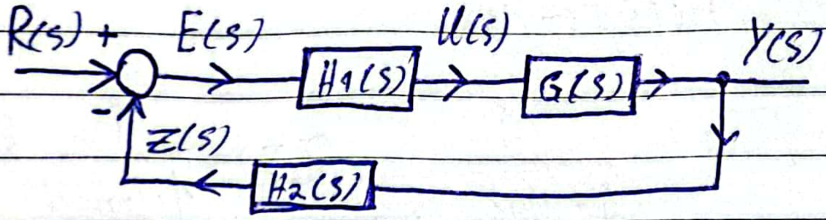
Βηματική απόκριση συστημάτων $2^{ης}$ τάξης

Σύστημα $2^{ης}$ τάξης με ένα μηδενικό:

$$G(s)=\frac{K(s+z)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow Y(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{K(s+z)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$



Σφάλματα στη μόνιμη κατάσταση



σφάλμα: $e(t)=r(t)-y(t)$

συνήθης σκοπός του ελέγχου: $\lim_{t\to\infty}\left(\hat{e}(t)\right)=0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty} r(t)$

Συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου: $G_{αν}(s)=\frac{Z(s)}{E(s)}=H_1(s)H_2(s)G(s)$

-//- κλειστού βρόχου: $G_{κλ}(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{Y(s)}{Z(s)}\frac{Z(s)}{R(s)}=\frac{G_{αν}(s)}{H_2(s)[1+G_{αν}(s)]}$

Επειδή: (πίσω) $\longrightarrow$

$\hat{E}(s) = R(s) - Y(s)$, $E(s) = R(s) - Z(s)$
$U(s) = H_1(s)E(s)$, $Y(s) = G(s)U(s) = G(s)H_1(s)E(s)$
$Z(s) = H_2(s)Y(s) = H_1(s)H_2(s)G(s)E(s) =$
$= G_{\alpha\nu}(s)E(s) = G_{\alpha\nu}(R(s) - Z(s)) \Longleftrightarrow$
$(1 + G_{\alpha\nu}(s))Z(s) = G_{\alpha\nu}(s)R(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Z(s) = \frac{G_{\alpha\nu}(s)}{1 + G_{\alpha\nu}(s)} R(s)$$

- $\hat{E}(s) = R(s) - Y(s) = [1 - G_{\kappa\lambda}(s)]R(s) =$

$$= \frac{1 + H_1(s)G(s)[H_2(s) - 1]}{1 + H_1(s)H_2(s)G(s)} R(s)$$

Πολλές φορές: $H_2(s) = 1$ οπότε $Z(s) = Y(s)$,

$G_{\alpha\nu}(s) = H_1(s)G(s)$

$$\hat{E}(s) = E(s) = \frac{1}{1 + H_1(s)G(s)} R(s) = \frac{1}{1 + G_{\alpha\nu}(s)} R(s)$$

δηλ. $G_{\kappa\lambda}(s) = \frac{1}{1 + G_{\alpha\nu}(s)}$

- σφάλμα μόνιμης κατάστασης: $e_{ss} = \lim\limits_{t\to\infty}\{\hat{e}(t)\}$

Θεώρημα τελικής τιμής μ/σ Laplace:

αν υπάρχουν τα όρια τότε: $e_{ss} = \lim\limits_{t\to\infty}\{\hat{e}(t)\} =$

$$= \lim_{s\to 0}\{s\hat{E}(s)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{sR(s)}{1 + G_{\alpha\nu}(s)}\right\}$$

Ας είναι $G_{av}(s) = \hat{K}\dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$, όπου $z_1, z_2, \dots, z_m$ τα μηδενικά της G_{av}

$p_1, p_2, \dots, p_n$ οι πόλοι -//- -//-

Έστω τα $p_1 = 0$. Τότε $G_{av}(s) = \hat{K}\dfrac{\prod(s-z_i)}{s\prod_{j=2}^{n}(s-p_j)} = \hat{K}\dfrac{a(s)}{\pi(s)}$

και $e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{\dfrac{sR(s)}{1+\hat{K}\frac{a(s)}{\pi(s)}}\right\} = \lim_{s\to 0}\left\{\dfrac{sR(s)\pi(s)}{\pi(s)+\hat{K}a(s)}\right\} = 0$