3. Μετ/μός ομοιότητας

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1) \qquad x(t)\in R^n,\ u(t)\in R^m,\ y(t)\in R^q$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.2) \qquad A: n\times n,\ B: n\times m,\ C: m\times q,\ D: q\times m$$

Ας είναι $P: n\times n$ αντιστρέψιμη (=ομαλή)
Αλλαγή βάσης του χώρου κατάστασης: $x = P\hat{x} \Leftrightarrow \hat{x} = P^{-1}x$ (2)

$$\rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = P^{-1}\dot{x}(t) = P^{-1}Ax(t) + P^{-1}Bu(t) = \underbrace{P^{-1}AP}_{\hat{A}}\hat{x}(t) + \underbrace{P^{-1}B}_{\hat{B}}u(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (3.1)$$

$$\rightarrow y(t) = Cx(t) + Du(t) = \underbrace{CP}_{\hat{C}}\hat{x}(t) + \underbrace{D}_{\hat{D}}u(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \quad (3.2)$$

Και τα συστήματα (A,B,C,D) και $(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ λέγονται ισοδύναμα

Ιδιότητες:

(α) Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\hat{\varphi}(s)$ του $(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ θα είναι:

$$\hat{\varphi}(s) = \det\{sI-\hat{A}\} \overset{(4)}{=} \det\{sI - P^{-1}AP\} = \det\{sP^{-1}P - P^{-1}AP\} =$$
$$= \det\{P^{-1}[sI-A]P\} = \det\{P^{-1}\}\cdot\det\{sI-A\}\cdot\det\{P\} = \det\{sI-A\} =$$
$$= \varphi(s) \rightsquigarrow \text{χαρ. πολ/μο του } (A,B,C,D)$$

↳ άρα ίδιοι πόλοι!

(β) Συνάρτηση μεταφοράς:

$$\hat{G}(s) = \hat{C}[sI-\hat{A}]^{-1}\hat{B} + \hat{D} \overset{(4)}{=} CP\,[sI - P^{-1}AP]^{-1}P^{-1}B + D =$$
$$= CP\,[P^{-1}(sI-A)P]^{-1}P^{-1}B + D =$$

$$^{*}\ [Q_1Q_2]^{-1} = Q_2^{-1}Q_1^{-1} \quad \text{διότι} \quad I = Q_1Q_2[Q_1Q_2]^{-1} = Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1} \ ^{*}$$

$$= CP\,[P^{-1}(sI-A)^{-1}P]\,P^{-1}B + D = C\cdot(sI-A)^{-1}B + D = G(s) \rightsquigarrow \text{συνάρτηση μεταφοράς του } (A,B,C,D)$$

↳ άρα ίδια μηδενικά

3.8 Κανονικές μορφές της μήτρας A και του συστήματος (A,B,C,D)

α) Διαγώνια κανονική μορφή της A.

Έστω ότι η A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2, \dots, p_n$ και αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ δηλ. $Ap_i = \lambda_i p_i$, $p_i \neq 0$, $i = 1,\dots,n$

Ας είναι $P \triangleq [p_1, p_2, \dots, p_n]$ τότε:

$$\hat{A} = P^{-1}AP = P^{-1}A\,[p_1,\dots,p_n] = P^{-1}[\lambda_1 p_1, \dots, \lambda_n p_n] = P^{-1}\underbrace{[p_1,\dots,p_n]}_{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix} =$$
$$= \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

Αν οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ της A είναι διακριτές (δηλ. $\lambda_i \neq \lambda_k,\ \forall k \neq i$) τότε:
$p_1, \dots, p_n$ είναι γραμμ. ανεξ. $\Longrightarrow$ η A διαγωνοποιείται μέσω μετ/σμός ομοιότητας

(β) Κανονική ελέγξιμη μορφή του (A, B, C, D)

Για απλότητα έστω ότι το (A, B, C, D) είναι ΜΕΜΕ δηλ:
$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ και $C = c^T = [c_1, \dots, c_n]$

→ Ας είναι $Q = [b, Ab, A^2 b, \dots, A^{n-1} b]$: $n \times n$, αντιστρέψιμη.

→ Ας είναι v_n^T η τελευταία γραμμή της Q^{-1}.

→ Ας είναι $P^{-1} = \begin{bmatrix} v_n^T \\ v_n^T \cdot A \\ v_n^T \cdot A^2 \\ \vdots \\ v_n^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$

Τότε:

$$\to \hat{A} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

κανονική ελέγξιμη μορφή του (A, b, c, d)

$$\to \hat{b} = P^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \to \hat{c} = c^T P = [\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n] \qquad \to \hat{d} = d$$

$$\to \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{b}u(t) \xrightarrow[(x(0)=0)]{\mathcal{L}\{\cdot\}} s\hat{X}(s) = \hat{A}\hat{X}(s) + \hat{b}U(s) \Rightarrow \begin{cases} s\hat{X}_1(s) = \hat{X}_2(s) & (5.1) \\ s\hat{X}_2(s) = \hat{X}_3(s) & (5.2) \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ s\hat{X}_{n-1}(s) = \hat{X}_n(s) & \\ s\hat{X}_n(s) = -a_1\hat{X}_1(s) - a_{n-1}\hat{X}_2(s) - \dots - a_1\hat{X}_n(s) + U(s) & (5.n) \end{cases}$$

$$\to y(t) = \hat{c}^T\hat{x}(t) + \hat{d}\,u(t) \xrightarrow[x(0)=0]{\mathcal{L}} Y(s) = \hat{c}^T\hat{X}(s) + \hat{d}\,U(s) \Rightarrow Y(s) = \hat{c}_1\hat{X}_1(s) + \dots + \hat{c}_n\hat{X}_n(s) + \hat{d}\,U(s) \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας τις $(5.i)$ στην (6):

$$(s^n + a_1 s^n + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n) \cdot Y(s) = (\hat{c}_1 + \hat{c}_2 \cdot s + \dots + \hat{c}_n \cdot s^{n-1}) U(s) + d(s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n)\, U(s) \Longrightarrow$$

$$\to G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 \cdot s + \dots + \hat{c}_n \cdot s^{n-1}}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n} + \hat{d} \Rightarrow \boxed{\hat{\varphi}(s) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n}$$