Ασκήσεις

(1) Εάν $a, z \in \mathbb{C}$, $|a|<1$, $|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

και $w=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, ΝΔΟ $|w|=1$

Λύση

$|w|=1$ αν και μόνο αν $w\bar{w}=1$ αν και μόνο αν $\bar{w}=\frac{1}{w}$

Αρκεί ΝΔΟ $\bar{w}=\frac{1}{w}$

$\bar{w}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\overline{1-\bar{a}z}}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}}$ Επειδή $|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

Άρα $\bar{w}=\frac{1/z-\bar{a}}{1-a/z}=\frac{1-\bar{a}z}{z-a}=\frac{1}{w}$ Άρα $|w|=1$

Σημειώνουμε ότι $|\bar{a}z|=\underbrace{|a|<1}_{\text{Υπόθεση}} \Rightarrow 1-\bar{a}z\neq 0$

(2) ΝΔΟ $\left(\frac{1+i\tan\phi}{1-i\tan\phi}\right)^n=\frac{1+i\tan(n\phi)}{1-i\tan(n\phi)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)$

Λύση

$\frac{1+i\tan\phi}{1-i\tan\phi}\overset{\cdot\cos\phi}{\underset{\cdot\cos\phi}{=}}\frac{\cos\phi+i\sin\phi}{\cos\phi-i\sin\phi}=\frac{e^{i\phi}}{e^{-i\phi}}=e^{2i\phi}$

Άρα $\left(\frac{1+i\tan\phi}{1-i\tan\phi}\right)^n=e^{2in\phi}$

η β' μέλος $=\frac{\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)-i\sin(n\phi)}=\frac{e^{in\phi}}{e^{-in\phi}}=e^{2in\phi}$

(3) Να λυθεί η εξίσωση $e^z=1+i$

Λύση

$|1+i|=\sqrt{2}$

$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{\ln\sqrt{2}}\cdot e^{i\pi/4}=e^{\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}}$

Άρα $e^z=1+i \Rightarrow e^z=e^{\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z=\ln\sqrt{2}+\frac{i\pi}{4}+2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow z=\frac{1}{2}\ln 2+\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$

(4) Να λυθεί η εξίσωση $\cos z = 2$

Λύση

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2 \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz}=4$$

Θέτω $w=e^{iz}$

Τότε $w+\frac{1}{w}=4 \Rightarrow w^2-4w+1=0$, $\Delta=12 \Rightarrow w=2\pm\sqrt{3}$

Λύνω τις 2 εξισώσεις $e^{iz}=2+\sqrt{3}$ και $e^{iz}=2-\sqrt{3}$

Άρα $e^{iz}=2\pm\sqrt{3}=e^{\ln(2\pm\sqrt{3})} \Leftrightarrow iz=\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi i \xRightarrow{\cdot(-i)}$

$$\Rightarrow z=2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{Z}$$

(5) (α) Εάν $w\in\mathbb{C}$, $|w|=1$ και $Re(w)\neq 1$ ΝΔΟ $\frac{w+1}{w-1}=i\frac{Im(w)}{Re(w)-1}$

Λύση(α)

$$\frac{w+1}{w-1}=\frac{(w+1)\overline{w-1}}{|w-1|^2}=\frac{(w+1)(\bar{w}-1)}{|w-1|^2}=\frac{w\bar{w}-w+\bar{w}-1}{|w|^2+1-2Re(w)}=\frac{1-w+\bar{w}-1}{2-2Re(w)}=$$

$$=-\frac{w-\bar{w}}{2(1-Re(w))}=-\frac{2iIm(w)}{2(1-Re(w))}=i\frac{Im(w)}{Re(w)-1}$$

Υπενθυμίσεις

$w-\bar{w}=2Im(w)i$

$|w-z|^2=|w|^2+|z|^2-2Re(w\bar{z})$

(β) Να λυθεί η εξίσωση $w^6=-1$

Λύση(β)

Παρατηρώ $-1=e^{i\pi}=(e^{i\pi/6})^6$ Άρα $\rho=e^{i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

Άρα οι $\pm\rho, \pm\bar{\rho}$ είναι ρίζες

Επίσης $i^6=(i^2)^3=(-1)^3=-1$ Άρα $\pm i$ ρίζες

Επομένως ρίζες οι: $\pm\rho, \pm\bar{\rho}, \pm i$, όπου $\rho=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $(z+1)^6+(z-1)^6=0$

Λύση(γ)

Θέτω $w=\dfrac{z+1}{z-1}$, $z\neq 1$

Η εξίσωση γίνεται $w^6=-1 \Leftrightarrow |w|=1$

$$\left.\begin{array}{l} w=\dfrac{z+1}{z-1} \Rightarrow z=\dfrac{w+1}{w-1} \end{array}\right\} \xRightarrow{|w|=1} z=i\,\dfrac{Im(w)}{Re(w)-1}$$

Από το ερώτημα (α)

- Αν $w=i$ τότε $z=-i$ Άρα και το i θα είναι ρίζα της αρχικής
- Αν $w=\rho$ δηλαδή $w=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i \Rightarrow z=i\,\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2-1} \Rightarrow z=\dfrac{i}{\sqrt{3}-2}$ Άρα και το $\dfrac{-i}{\sqrt{3}-2}$ είναι ρίζα της αρχικής
- Αν $w=-\rho=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ τότε $z=\dfrac{i}{\sqrt{3}+2}$ Άρα και το $\dfrac{-i}{\sqrt{3}+2}$ είναι ρίζα

Τελικά, οι ρίζες είναι: $\pm i$, $\pm\dfrac{i}{\sqrt{3}-2}$, $\pm\dfrac{i}{\sqrt{3}+2}$

- Πρωτεύων κλάδος μιγαδικού λογαρίθμου

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}-\{0\}$, $f(z)=e^z$

Η f <u>δεν</u> είναι 1-1!!!

$e^{z_1}=e^{z_2} \Rightarrow z_1-z_2=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow Im(z_1-z_2)=2k\pi \Rightarrow Im(z_1)-Im(z_2)=2k\pi$

Θα θέλαμε $k=0$

Αρκεί $-1<k<1$ ή $-2\pi<Im(z_1)-Im(z_2)<2\pi$ ή $\begin{cases} -\pi<Im(z_1)\leq\pi \\ -\pi<Im(z_2)\leq\pi \end{cases}$

Άρα η $f|_A$ είναι 1-1, όπου $A=\{z\in\mathbb{C}: -\pi<Im(z)\leq\pi\}$

Ορίζεται η $(f|_A)^{-1} : f(A) \to A$, $f(A) = ?$

Θα δείξουμε ότι $f(A) = \mathbb{C} - \{0\}$

Έστω $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ θέλω $\phi = Arg(w) \in (-\pi, \pi]$

Τότε $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi) = |w| e^{i\phi} = e^{\ln|w| + i\phi} = e^{z}$, όπου $z = \ln|w| + i\phi, \phi = Arg(w)$

$Im(z) = \phi \in (-\pi, \pi] \Rightarrow z \in A$

Άρα $\left.\begin{array}{l} w = e^{z} \\ z \in A \end{array}\right|$ Άρα $f(A) = \mathbb{C} - \{0\}$ και $(f|_A)^{-1}(w) = \ln|w| + i\,Arg(w)$, $w \neq 0$

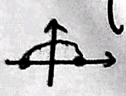
Η $(f|_A)^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \to A$ λέγεται κλάδος του μιγαδικού λογαρίθμου

Συμβολισμός $(f|_A)^{-1} = Log$ δηλαδή $Log(w) = \ln|w| + i\,Arg(w), \forall w \neq 0$

<u>Παραδείγματα:</u>

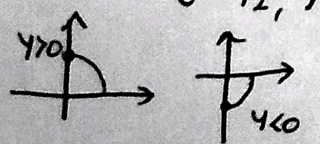
(α) Έστω $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$Arg(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0 \end{cases}$ Άρα $Log(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln|x| + i\pi, & x < 0 \end{cases}$



(β) Έστω $y \in \mathbb{R} - \{0\}$. $Log(iy) = ?$

$Arg(iy) = \begin{cases} \pi/2, & y > 0 \\ -\pi/2, & y < 0 \end{cases}$ Άρα $Log(iy) = \begin{cases} \ln y + i\frac{\pi}{2}, & y > 0 \\ \ln|y| - i\frac{\pi}{2}, & y < 0 \end{cases}$



(γ) $Log(\sqrt{3} + i) = ?$

$|\sqrt{3} + i| = 2$

$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$ Άρα $Arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}$

Άρα $Log(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{6}$

<u>Σχόλιο:</u> $\forall w \neq 0$, $(w \in \mathbb{C})$ $e^{Log(w)} = w$ Αλλά δεν ισχύει πάντα ότι $Log(e^{z}) = z$, ισχύει μόνο αν $-\pi < Im(z) \leq \pi$

π.χ. $Log(e^{2\pi i}) = Log(1) = 0 \neq 2\pi i$