Κεφ1

Sunday, 13 February 2022 6:48 PM

Κεφάλαιο 1: Δειγματικός Χώρος και Πιθανότητα

- Ιδιότητες των Πιθανοτήτων
  - $P(A) \geq 0$
  - $P(A \cup B) + P(AB) = P(A) + P(B)$ $\quad (P(A\cup B) \leq P(A) + P(B))$
  - $P(AB) = 0 \Leftrightarrow AB = \emptyset$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
  - $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
  - $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A'B) + P(A'B'C)$

- Δεσμευμένη πιθανότητα:
  - $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{|AB|}{|B|}$
  - $P(\Omega|B) = 1$
  - $P(B|\Omega) = P(B)$

- Θεώρημα Συνολικής Πιθανότητας:
  - Αν $A_1, \dots, A_n$ ξένα μεταξύ τους, με $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $P(A_i) > 0$, τότε $\forall B$:

$$P(B) = P(A_1B) + \dots + P(A_nB) = $$
$$= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots + P(A_n)\, P(B|A_n)$$

- Κανόνας του Bayes:
  - Αν $A_1, \dots, A_n$ ξένα μεταξύ τους, με $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $P(A_i) > 0$, τότε $\forall B$ με $P(B) > 0$:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{P(B)} \overset{\text{ΘΣΠ}}{=} \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1)\,P(B|A_1) + \dots + P(A_n)\,P(B|A_n)}$$

- Ανεξαρτησία:
  - A ανεξάρτητο του B $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$

    αν $P(B) > 0$

- Ανεξαρτησία υπό δέσμευση:
  - Δεδομένου του C, A ανεξάρτητο του $B \Leftrightarrow P(AB|C) = P(A|C)\,P(B|C) \Leftrightarrow$

    $\Leftrightarrow P(A|BC) = P(A|C) \longrightarrow$ αν $P(BC) > 0$

- Ανεξαρτησία πολλών γεγονότων:
  - $A_1, \dots, A_n$ ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\bigcap A_i) = \prod P(A_i)$

- Αρχή της Απαρίθμησης:
  - Έστω διαδικασία με r στάδια. Εάν για κάθε στάδιο i υπάρχουν n_i αποτελέσματα και για κάθε τέτοιο αποτέλεσμα υπάρχουν n_{i+1} αποτελέσματα (στάδιο $i+1$). Τα συνολικά αποτελέσματα είναι $n_1 \cdot \ldots \cdot n_r$.

  - Έστω n αντικείμενα και επιλέγω τα k. Εάν η σειρά επιλογής έχει σημασία τότε έχουμε k-μεταθέσεις, με $\frac{n!}{(n-k)!}$ τρόπους. Εάν όχι, τότε έχουμε συνδυασμούς, με $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ τρόπους. $\Rightarrow = \binom{n}{k}$

  - Διαμέριση n στοιχείων σε r ομάδες όπου η i-ομάδα θα έχει n_i στοιχεία (με $n_1 + \dots + n_r = n$) τότε το συνολικό πλήθος των τρόπων είναι: $\binom{n}{n_1, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}$