



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

Εαρινό Εξάμηνο 2023-2024

ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΥΠΗΡΕΣΙΩΝ

Λύσεις Θεμάτων

Ιωάννης Τσαντήλας
03120883

Contents

Κανονική 23	2
Θέμα 1.....	2
Θέμα 2.....	4
Θέμα 3.....	7
Κανονική 22	9
Θέμα 1.....	9
Θέμα 2.....	11
Θέμα 3.....	14
Επαναληπτική 22	17
Θέμα 1.....	17
Θέμα 2.....	19
Θέμα 3.....	22
Κανονική 20	25
Θέμα 1.....	25
Θέμα 2.....	27
Θέμα 3.....	29
Θέμα 4.....	32
Κανονική 17	34
Θέμα 1.....	34
Θέμα 2.....	36
Θέμα 3.....	39
Θέμα 4.....	42

Κανονική 23

Θέμα 1

Η εταιρεία MEDICENTER A.E. παρασκευάζει 2 φαρμακευτικά σκευάσματα, το PHARM-A και το PHARM-B, καθώς και ένα τρίτο φάρμακο, το PHARM-AB, το οποίο είναι συνδυασμός των PHARM-A, PHARM-B. Για την παραγωγή των PHARM-A και PHARM-B, η εταιρεία κάνει χρήση 2 διαφορετικών διεργασιών Δ1 και Δ2. Κάθε φορά που εκτελείται η διεργασία Δ1 παράγονται 4 γραμμάρια PHARM-A και 5 γραμμάρια από το PHARM-B, ενώ απαιτείται η χρήση του αντιδραστήρα για 1 ώρα και της συσκευής ανάμιξης για μισή ώρα. Αντίστοιχα, η εκτέλεση της διεργασίας Δ2 παράγει 6 γραμμάρια PHARM-A και 3 γραμμάρια PHARM-B, απαιτώντας 1 ώρα και ένα τέταρτο στον αντιδραστήρα και 24 λεπτά της ώρας στη συσκευή ανάμιξης.

Για την παρασκευή κάθε γραμμαρίου από το PHARM-AB χρησιμοποιείται η διεργασία Δ3, για την οποία απαιτούνται 48 λεπτά της ώρας για την ανάμιξη των υλικών PHARM-A και PHARM-B σε αναλογίες 0.7 γραμμάρια και 0.3 γραμμάρια αντίστοιχα. Επισημαίνεται ότι κατά την παρασκευή του PHARM-AB δεν χρησιμοποιείται ο αντιδραστήρας.

Με βάση το εβδομαδιαίο πρόγραμμα παραγωγής της εταιρείας, οι μέγιστοι χρόνοι λειτουργίας του αντιδραστήρα και της συσκευής ανάμιξης είναι 150 και 160 ώρες ανά εβδομάδα αντίστοιχα. Σύμφωνα με υπολογισμούς της εταιρείας, κάθε φορά που εκτελείται η Δ1 στοιχίζει 52€, η Δ2 στοιχίζει 48€ και η Δ3 1.7€. Οι τιμές πώλησης ανά γραμμάριο προϊόντος είναι 27€, 19€ και 26€ για τα PHARM-A, PHARM-B και PHARM-AB αντίστοιχα και δεν υπάρχουν καθόλου περιορισμοί στη ζήτηση των προϊόντων.

Καταστρώστε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο μεγιστοποιεί τα εβδομαδιαία κέρδη της επιχείρησης.

Λύση

Θα πρέπει να ορίσουμε Παραμέτρους, Μεταβλητές Απόφασης, Περιορισμούς, Αντικειμενική Συνάρτηση και Στόχο.

Παράμετροι

<i>Procedure</i>	<i>grams_A</i>	<i>grams_B</i>	<i>grams_{AB}</i>	<i>reactor_{time}</i>	<i>mixture_{time}</i>	<i>cost</i>
1	4	5	-	60	30	52
2	6	3	-	75	24	48
3	0.7	0.3	1	-	48	1.7

Επίσης, έχουμε πως τα έσοδα από κάθε γραμμάριο φαρμάκου είναι αντίστοιχα:

$$price_A = 27€, price_B = 19€, price_{AB} = 26€$$

Ενώ η μέγιστη εβδομαδιαία λειτουργία των μηχανών (σε λεπτά της ώρας) είναι αντίστοιχα:

$$reactor_{cap} = 150 \cdot 60 = 9000, mixture_{cap} = 160 \cdot 60 = 9600$$

Μεταβλητές Απόφασης

- q_1, q_2, q_3 (quantity): πόσες φορές θα τρέξουμε τις διεργασίες 1, 2 και 3 αντίστοιχα.

Περιορισμοί

- Λεπτά λειτουργίας αντιδραστήρα:

$$q_1 \cdot 60 + q_2 \cdot 75 \leq reactor_{cap} \rightarrow q_1 \cdot 60 + q_2 \cdot 75 \leq 9000$$

- Λεπτά λειτουργίας μηχανής ανάμειξης:

$$q_1 \cdot 30 + q_2 \cdot 24 + q_3 \cdot 48 \leq mixture_{cap} \rightarrow q_1 \cdot 30 + q_2 \cdot 24 + q_3 \cdot 48 \leq 9600$$

- Πρέπει επίσης να διασφαλίσουμε πως έχουμε αρκετά γραμμάρια από A και B για να φτιάχνουμε AB:

$$4 \cdot q_1 + 6 \cdot q_2 \geq 0.7 \cdot q_3$$

$$5 \cdot q_1 + 3 \cdot q_2 \geq 0.3 \cdot q_3$$

- Φυσικές ποσότητες:

$$q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

Πρόκειται για τα έσοδα (revenue) r :

$$r = q_1 \cdot (4 \cdot 27 + 5 \cdot 19 - 52) + q_2 \cdot (6 \cdot 27 + 3 \cdot 19 - 48) + q_3 \cdot (1 \cdot 26 - 1.7)$$

Σκοπός

Μεγιστοποίηση των εσόδων, δηλαδή:

$$\max(r)$$

Θέμα 2

Μία βιομηχανική επιχείρηση παράγει το προϊόν X, ο πίνακας υλικών του οποίου φαίνεται παρακάτω:

Εξάρτημα	Χρόνος Υστέρησης	Αρχικό Απόθεμα	Μέγεθος Παρτίδας	Εξαρτήσεις
X	1	800	50	1 A, 2 B
A	1	400	50	1 D
B	2	200	50	2 C
C	2	2000	100	1 D
D	3	1000	100	-

Οι μικτές απαιτήσεις για το X είναι:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Μικτές Απαιτήσεις	200	240	260	310	320	340	340	320	300	270	250

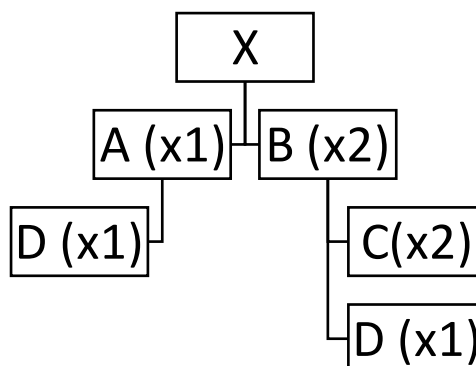
Οι προγραμματισμένες παραλαβές ανά εξάρτημα και εβδομάδα είναι:

Εξάρτημα	Παραλαβές	Εβδομάδα
X	800	6
A	400	5, 8
B	200	6
C	2500	6

Το επίπεδο ασφαλείας για το εξάρτημα D είναι στις 100 μονάδες. Να βρείτε το πρόγραμμα παραγωγής κάθε εξαρτήματος, σύμφωνα με τη μέθοδο Προγραμματισμού Απαιτήσεων Υλικών (MRP).

Λύση

Ο πίνακας υλικών (BOM) του X είναι:



Ορίζω τα μεγέθη:

- **Closing Stock** = Initial Stock + Scheduled Receipts – Gross Requirements
- **Net Requirements** = max(0, - Closing Stock)
- **Production Program** = ceiling ((Net Requirements + Safety Stock)/ Lot Size, 1) * Lot Size

- **Shifted Production Program:** οι προγραμματιζόμενες παραλαβές μετατοπισμένες κατά τον χρόνο υστέρησης (time lead).
- **Final Stock:**

$$Final\ Stock = \begin{cases} Closing\ Stock, & Closing\ Stock > 0 \\ Production\ Program - Net\ Requirements, & otherwise \end{cases}$$

- Gross Requirements_A = 1·Shifted Production Program_X
- Gross Requirements_B = 2·Shifted Production Program_X
- Gross Requirements_C = 2·Shifted Production Program_B
- Gross Requirements_D = 1·Shifted Production Program_A + 1·Shifted Production Program_C

Όπως φαίνεται και από τις τύπους, δεν είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των Προγραμματισμένων Αποδεσμεύσεων Εντολών Παραγωγής του D, επομένως ο χρόνος υστέρησης του δεν παίζει ρόλο.

Εξάρτημα X

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	200	800	0	600	0	0	0	600
2	240	600	0	360	0	0	0	360
3	260	360	0	100	0	0	250	100
4	310	100	0	-210	210	250	300	40
5	320	40	0	-280	280	300	0	20
6	340	20	800	480	0	0	0	480
7	340	480	0	40	0	0	300	40
8	320	40	0	-280	280	300	300	20
9	300	20	0	-280	280	300	250	20
10	270	20	0	-250	250	250	250	0
11	250	0	0	-250	250	250	0	0

Εξάρτημα A

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	0	400	0	400	0	0	0	400
2	0	400	0	400	0	0	0	400
3	250	400	0	150	0	0	150	150
4	300	150	0	-150	150	150	0	0
5	0	0	400	400	0	0	0	400
6	0	400	0	400	0	0	0	400
7	300	400	0	100	0	0	0	100
8	300	100	400	200	0	0	50	200
9	250	200	0	-50	50	50	250	0
10	250	0	0	-250	250	250	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα Β

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+2)	Final Stock
1	0	200	0	200	0	0	300	200
2	0	200	0	200	0	0	600	200
3	500	200	0	-300	300	300	0	0
4	600	0	0	-600	600	600	0	0
5	0	0	0	0	0	0	400	0
6	0	0	200	200	0	0	600	0
7	600	200	0	-400	400	400	500	0
8	600	0	0	-600	600	600	500	0
9	500	0	0	-500	500	500	0	0
10	500	0	0	-500	500	500	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα C

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+2)	Final Stock
1	600	2000	0	1400	0	0	0	1400
2	1200	1400	0	200	0	0	0	200
3	0	200	0	200	0	0	400	200
4	0	200	0	200	0	0	0	200
5	800	200	0	-400	400	400	0	0
6	1200	0	2500	1300	0	0	700	1300
7	1000	1300	0	300	0	0	0	300
8	1000	300	0	-700	700	700	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα D

Week	S.P.P. A	S.P.P. C	Gross Req.	Init. Stock	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Final Stock
1	0	0	0	1000	1000	0	0	1000
2	0	0	0	1000	1000	0	0	1000
3	150	400	550	1000	450	0	0	450
4	0	0	0	450	450	0	0	450
5	0	0	0	450	450	0	0	450
6	0	700	700	450	-250	250	400	150
7	0	0	0	150	150	0	0	150
8	50	0	50	150	100	0	0	100
9	250	0	250	100	-150	150	300	150
10	0	0	0	150	150	0	0	150
11	0	0	0	150	150	0	0	150

Θέμα 3

Ερώτημα Α: Έστω προμηθευόμενη πρώτη ύλη με μοναδιαίο κόστος αγοράς 5€. Η συνολική ποσότητα αποθέματος που απαιτείται ετησίως για αυτή είναι 190.000 μονάδες. Το κόστος τοποθέτησης μίας παραγγελίας είναι 7€, ενώ το κόστος διατήρησης σε απόθεμα μίας μονάδας για ένα χρόνο είναι 8€.

- Ποια είναι η οικονομική ποσότητα παραγγελίας;
- Ποιος είναι ο βέλτιστος αριθμός παραγγελιών ανά έτος;
- Ποιο είναι το βέλτιστο ετήσιο ολικό κόστος αποθέματος;
- Έστω ότι το ο προμηθευτής της πρώτης ύλης παρέχει έκπτωση 10% στο κόστος αγοράς κάθε μονάδας, με την προϋπόθεση ότι η παραγγελία είναι ίση ή μεγαλύτερη των 1.000 μονάδων. Θα επιλέγατε τη προσφορά αυτή αντί της στρατηγικής που προέκυψε από τα προηγούμενα 3 ερωτήματα;

Ερώτημα Β: Σε μία άλλη επιχείρηση, η μέση ζήτηση στο χρόνο υστέρησης για την εξυπηρέτηση μιας παραγγελίας είναι 60 τεμάχια, με τυπική απόκλιση ίση με 16. Το σύστημα ελέγχου των αποθεμάτων που χρησιμοποιείται είναι αυτό της συνεχούς παρακολούθησης με απόθεμα ασφαλείας. Αν θεωρήσουμε ότι η ζήτηση ακολουθεί κανονική κατανομή, ποιο πρέπει να είναι το σημείο αναπαραγγελίας ούτως ώστε να υπάρχει μόνο 4% πιθανότητα εξάντλησης του αποθέματος πριν την επόμενη αναπλήρωση του; Ποιο το απαιτούμενο επίπεδο ασφάλειας;

Λύση

Ερώτημα Α

- Η **οικονομική ποσότητα παραγγελίας** (Economic Order Quantity – EOQ) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 190,000 \cdot 7}{8}} = 576.62812 \sim 577$$

Όπου:

- D είναι η ετήσια ζήτηση (190.000 μονάδες)
- S είναι το κόστος παραγγελίας ανά παραγγελία (7€)
- H είναι το κόστος διατήρησης σε απόθεμα ανά μονάδα ανά έτος (8€)

- Ο **βέλτιστος αριθμός παραγγελιών ανά έτος** (N) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$N = \frac{D}{EOQ} = \frac{190,000}{576.62812} = 329.50179 \sim 330$$

- Το **βέλτιστο ετήσιο συνολικό κόστος** αποθεμάτων περιλαμβάνει το κόστος παραγγελίας και το κόστος διατήρησης ως απόθεμα. Υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Total Cost} = \left(\frac{D}{EOQ} \cdot S \right) + \left(\frac{EOQ}{2} \cdot H \right) + D \cdot P =$$

$$= \left(\frac{190,000}{576.62812} \cdot 7 \right) + \left(\frac{576.62812}{2} \cdot 8 \right) + 190,000 \cdot 5 =$$

$$= 954,613.02503 \sim 954,613\text{€}$$

- iv. Εάν ο προμηθευτής **προσφέρει έκπτωση 10%** στο κόστος αγοράς κάθε μονάδας για παραγγελίες 1.000 μονάδων ή περισσότερο, το νέο κόστος αγοράς ανά μονάδα είναι: $5\text{€} \cdot 0.9 = 4.5\text{€}$.

$$\text{Total Cost} = \left(\frac{D}{EOQ} \cdot S \right) + \left(\frac{EOQ}{2} \cdot H \right) + D \cdot P =$$

$$= \left(\frac{190,000}{1,000} \cdot 7 \right) + \left(\frac{1,000}{2} \cdot 8 \right) + 190,000 \cdot 4.5 =$$

$$= 860.330\text{€}$$

Συγκρίνοντας αυτό με τα δύο συνολικά κόστη:

$$954,613\text{€} > 860,330\text{€}$$

Το συνολικό κόστος με την έκπτωση είναι σημαντικά χαμηλότερο. Επομένως, συμφέρει να αποδεχθούμε την προσφορά έκπτωσης 10% και να παραγγέλνουμε 1.000 μονάδες κάθε φορά.

Ερώτημα Β

Για να βρούμε το σημείο αναπαραγγελίας (Reorder Point – ROP) με πιθανότητα 4% εξάντλησης του αποθέματος, πρέπει να το προσδιορίσουμε λαμβάνοντας υπόψη το απόθεμα ασφαλείας.

- Μέση ζήτηση στο χρόνο υστέρησης: $\mu_L = 60 \text{ units}$.
- Τυπική απόκλιση ζήτησης στο χρόνο υστέρησης: $\sigma_L = 16 \text{ units}$.
- Μια πιθανότητα έλλειψης αποθεμάτων 4% αντιστοιχεί σε επίπεδο εξυπηρέτησης 96%.

Χρησιμοποιώντας τον τυπικό πίνακα κανονικής κατανομής, το **z-score** για ένα επίπεδο εξυπηρέτησης 96% είναι περίπου 1.75:

z	1.75	1.76
$\Phi(z)$	0.95994	0.96080

- Απόθεμα Ασφάλειας: $S.S. = Z \cdot \sigma_L = 1.75 \cdot 16 = 28 \text{ units}$.
- Σημείο Αναπαραγγελίας: $ROP = \mu_L + S.S. = 60 + 28 = 88 \text{ units}$.

Κανονική 22

Θέμα 1

Ένα φορτηγό πλοίο, του οποίου αναζητείται ο βέλτιστος τρόπος φόρτωσης για ένα συγκεκριμένο δρομολόγιο, διαθέτει 3 αμπάρια (πλώρη, μέσο, πρύμνη) με χωρητικότητες σε βάρος και όγκο που δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αμπάρια	Μέγιστο Βάρος (t)	Μέγιστος Όγκος (f³)
Πλώρη	3,000	100,000
Μέσο	4,500	150,000
Πρύμνη	2,500	70,000

Για λόγους ασφαλείας, που αφορούν στην ισορροπία του πλοίου, η φόρτωση οφείλει να ικανοποιεί τους παρακάτω περιορισμούς:

- Το συνολικό μεταφερόμενο βάρος της πλώρης πρέπει να υπερβαίνει το αντίστοιχο της πρύμνης κατά 20% ακριβώς.
- Το συνολικό βάρος του φορτίου του μέσου πρέπει να είναι τουλάχιστον 40% μεγαλύτερο από αυτό της πρύμνης, τουλάχιστον 30% μεγαλύτερο από αυτό της πλώρης, αλλά το πολύ ίσο με το 90% του συνολικού μεταφερόμενου φορτίου.
- Τα χαρακτηριστικά των 4 υπό φόρτωση προϊόντων (Α, Β, Γ, Δ) παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Προϊόν	Ποσότητα υπό φόρτωση (t)	Όγκος ενός τόνου (f³)	Κέρδος/Τόνο (€)
Α	6,000	60	10
Β	4,000	50	12
Γ	4,500	40	10
Δ	5,000	50	9

Η αρμόδια ναυτιλιακή εταιρεία αναζητεί ένα βέλτιστο τρόπο φόρτωσης του πλοίου ώστε να μεγιστοποιούνται τα συνολικά κέρδη από τις μεταφερόμενες ποσότητες των 4 προϊόντων. Προτείνετε ένα κατάλληλο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Σημειώνεται ότι η εταιρεία δεν είναι υποχρεωμένη να φορτώσει στο πλοίο όλες τις διαθέσιμες ποσότητες των 4 προϊόντων.

Λύση

Θα πρέπει να ορίσουμε Μεταβλητές Απόφασης, Περιορισμούς, Αντικειμενική Συνάρτηση και Στόχο. Για απλότητα, θεωρώ την εξής αντιστοίχιση: πλώρη: 1, μέσο: 2, πρύμνη: 3.

Μεταβλητές Απόφασης

- Επιλεγόμενη ποσότητα (σε τόνους) από κάθε προϊόν, για κάθε μέρος του πλοίου: $q_{A1}, q_{B1}, q_{C1}, q_{D1}, q_{A2}, q_{B2}, q_{C2}, q_{D2}, q_{A3}, q_{B3}, q_{C3}, q_{D3}$.

Περιορισμοί

- Το βάρος σε κάθε μέρος του πλοίου να μην υπερβαίνει το όριο του:

$$q_{A1} + q_{B1} + q_{C1} + q_{D1} \leq 3,000$$

$$q_{A2} + q_{B2} + q_{C2} + q_{D2} \leq 4,500$$

$$q_{A3} + q_{B3} + q_{C3} + q_{D3} \leq 2,500$$

- Ο όγκος σε κάθε μέρος του πλοίου να μην υπερβαίνει το όριο του:

$$60 \cdot q_{A1} + 50 \cdot q_{B1} + 40 \cdot q_{C1} + 50 \cdot q_{D1} \leq 100,000$$

$$60 \cdot q_{A2} + 50 \cdot q_{B2} + 40 \cdot q_{C2} + 50 \cdot q_{D2} \leq 150,000$$

$$60 \cdot q_{A3} + 50 \cdot q_{B3} + 40 \cdot q_{C3} + 50 \cdot q_{D3} \leq 70,500$$

- Η επιλεγόμενη ποσότητα κάθε προϊόντος να μην υπερβαίνει τη μέγιστη διαθέσιμη:

$$q_{A1} + q_{A2} + q_{A3} \leq 6,000$$

$$q_{B1} + q_{B2} + q_{B3} \leq 4,000$$

$$q_{C1} + q_{C2} + q_{C3} \leq 4,500$$

$$q_{D1} + q_{D2} + q_{D3} \leq 5,000$$

- Το βάρος της πλήρης πρέπει να υπερβαίνει το αντίστοιχο της πρύμνης κατά 20% ακριβώς:

$$q_{A1} + q_{B1} + q_{C1} + q_{D1} = q_{A3} + q_{B3} + q_{C3} + q_{D3}$$

- Το βάρος του μέσου πρέπει να είναι τουλάχιστον 40% μεγαλύτερο από αυτό της πρύμνης:

$$q_{A2} + q_{B2} + q_{C2} + q_{D2} \geq 1.4 \cdot (q_{A3} + q_{B3} + q_{C3} + q_{D3})$$

- Το βάρος του μέσου πρέπει να είναι τουλάχιστον 30% μεγαλύτερο από αυτό της πλήρης:

$$q_{A2} + q_{B2} + q_{C2} + q_{D2} \geq 1.3(q_{A1} + q_{B1} + q_{C1} + q_{D1})$$

- Το βάρος του μέσου πρέπει να είναι το πολύ ίσο με το 90% του συνολικού μεταφερόμενου φορτίου:

$$q_{A2} + q_{B2} + q_{C2} + q_{D2} \leq 0.9(q_{A1} + q_{B1} + q_{C1} + q_{D1} + q_{A2} + q_{B2} + q_{C2} + q_{D2} + q_{A3} + q_{B3} + q_{C3} + q_{D3})$$

- Φυσικές Ποσότητες:

$$q_{A1}, q_{B1}, q_{C1}, q_{D1}, q_{A2}, q_{B2}, q_{C2}, q_{D2}, q_{A3}, q_{B3}, q_{C3}, q_{D3} \in \mathbb{N}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

Το συνολικό κέρδος, profit, p:

$$p = 10 \cdot (q_{A1} + q_{A2} + q_{A3}) + 12 \cdot (q_{B1} + q_{B2} + q_{B3}) + 10 \cdot (q_{C1} + q_{C2} + q_{C3}) + 9 \cdot (q_{D1} + q_{D2} + q_{D3})$$

Στόχος

Μεγιστοποίηση του κέρδους:

$$\text{maximize}(p)$$

Θέμα 2

Μία βιομηχανία εξαρτημάτων παράγει ένα τελικό προϊόν X το οποίο αποτελείται από τα A, B, C με τις εξαρτήσεις που φαίνονται (μεταξύ άλλων) στον ακόλουθο πίνακα:

Εξάρτημα	Χρόνος Υστέρησης	Αρχικό Απόθεμα	Μέγεθος Παρτίδας	Εξαρτήσεις
X	0	200	200	1 A, 2 B
A	1	100	100	4 C
B	2	400	400	4 C
C	1	2800	-	-

Οι μικτές απαιτήσεις για το X είναι:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8
Μικτές Απαιτήσεις	100	150	200	400	300	350	300	200

Οι προγραμματισμένες παραλαβές και τα αποθέματα ασφαλείας ανά εξάρτημα και εβδομάδα είναι:

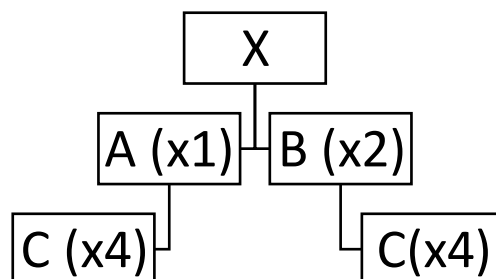
Εξάρτημα	Προγραμματισμένες Παραλαβές	Εβδομάδα	Απόθεμα Ασφαλείας
X	400	5	-
A	-	-	-
B	550	5	-
C	2000	3	200

Ερώτημα 1: Σχεδιάστε τον πίνακα υλικών του X με βάσει τις δοθείσες εξαρτήσεις.

Ερώτημα 2: Βρείτε το πρόγραμμα παραγωγής κάθε εξαρτήματος, σύμφωνα με τη μέθοδο Προγραμματισμού Υλικών (MRP).

Λύση

Ο πίνακας υλικών (BOM) του X είναι:



Ορίζω τα μεγέθη:

- **Closing Stock** = Initial Stock + Scheduled Receipts – Gross Requirements
- **Net Requirements** = max(0, - Closing Stock)
- **Production Program** = ceiling ((Net Requirements + Safety Stock)/ Lot Size, 1) * Lot Size

- **Shifted Production Program:** οι προγραμματιζόμενες παραλαβές μετατοπισμένες κατά τον χρόνο υστέρησης (time lead).
- **Final Stock:**

$$Final\ Stock = \begin{cases} Closing\ Stock, & Closing\ Stock > 0 \\ Production\ Program - Net\ Requirements, & otherwise \end{cases}$$

- $Gross\ Requirements_A = 1 \cdot Shifted\ Production\ Program_X$
- $Gross\ Requirements_B = 2 \cdot Shifted\ Production\ Program_X$
- $Gross\ Requirements_C = 4 \cdot Shifted\ Production\ Program_A + 4 \cdot Shifted\ Production\ Program_B$

Όπως φαίνεται και από τις τύπους, δεν είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των Προγραμματισμένων Αποδεσμεύσεων Εντολών Παραγωγής του C, επομένως ο χρόνος υστέρησης του δεν παίζει ρόλο.

Εξάρτημα X

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+0)	Final Stock
1	100	200	0	100	0	0	0	100
2	150	100	0	-50	50	200	200	150
3	200	150	0	-50	50	200	200	150
4	400	150	0	-250	250	400	400	150
5	300	150	400	250	0	0	0	250
6	350	250	0	-100	100	200	200	100
7	300	100	0	-200	200	200	200	200
8	200	200	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα A

Week	Gross Req.	Init. Stock	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	0	100	100	0	0	100	100
2	200	100	-100	100	100	200	0
3	200	0	-200	200	200	400	0
4	400	0	-400	400	400	0	0
5	0	0	0	0	0	200	0
6	200	0	-200	200	200	200	0
7	200	0	-200	200	200	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα B

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+2)	Final Stock
1	0	400	0	400	0	0	400	400
2	400	400	0	0	0	0	400	0
3	400	0	0	-400	400	400	800	0
4	800	400	0	-400	400	400	200	0
5	0	0	550	-550	550	800	400	220
6	400	220	0	-180	180	200	400	20
7	400	20	0	-380	380	400	0	20
8	0	20	0	-20	20	400	0	380

Εξάρτημα C

Week	S.P.P. A	S.P.P. B	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Final Stock
1	100	400	2000	2800	0	800	0	0	800
2	200	400	2400	800	0	-1600	1600	1800	200
3	400	800	4800	200	2000	-2600	2600	2800	200
4	0	200	800	200	0	-600	600	800	200
5	200	400	2400	200	0	-2200	2200	2400	200
6	200	400	2400	200	0	-2200	2200	2400	200
7	0	0	0	200	0	200	0	0	200
8	0	0	0	200	0	200	0	0	200

Θέμα 3

Ο έλεγχος μίας διαδικασίας διακρίνεται σε 2 φάσεις. Η 1^η φάση ελέγχου έχει σκοπό να **καταστρώσει** το **μόνιμο** διάγραμμα ποιοτικού ελέγχου (όρια UCL, LCL και κεντρική γραμμή) της διαδικασίας. Στη 2^η φάση ελέγχου το καταστρωμένο διάγραμμα χρησιμοποιείται ανά φάσεις προκειμένου να διαπιστώνεται αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου.

- i. **Φάση 1:** Ο υπεύθυνος ποιοτικού ελέγχου μιας διαδικασίας εμφιάλωσης λαδιού σε γυάλινα μπουκάλια πήρε 400 δείγματα με 4 μετρήσεις ανά δείγμα για το βάρος σε γραμμάρια του κάθε μπουκαλιού. Κατέληξε ανά δείγμα για το βάρος σε γραμμάρια του κάθε μπουκαλιού. Κατέληξε σε μέση τιμή και τυπική απόκλιση του δείγματος όλων των μετρήσεων στα 210g και 5g αντίστοιχα. **Καταστρώστε** το διάγραμμα ελέγχου της διαδικασίας βάσει των μετρήσεων αυτών για 3 τυπικές αποκλίσεις.
- ii. **Φάση 2:** Μετά από 1 μήνα από την κατάστρωση του διαγράμματος πραγματοποιείται παρακολούθηση μέσω δειγματοληψίας της διαδικασίας (10 δείγματα με 4 μετρήσεις ανά δείγμα) με χρήση του διαγράμματος ελέγχου. Οι μετρήσεις που λαμβάνονται είναι οι εξής:

Δείγμα / Μέτρηση	1	2	3	4	Μέση Τιμή
1	203	198	204	207	203
2	208	209	212	199	207
3	215	202	209	210	209
4	214	212	217	215	214.5
5	213	214	213	215	213.8
6	222	214	217	219	218
7	222	218	221	214	218.8
8	222	220	217	219	219.5
9	222	218	224	214	219.5
10	228	217	225	231	225.3

Σχεδιάστε το διάγραμμα ελέγχου της διαδικασίας και να σχολιάσετε σύντομα αν βρίσκεται (ή όχι) υπό έλεγχο και για ποιους λόγους.

- iii. Ένας πελάτης έχει την απαίτηση για εμφιάλωση λαδιού σε μπουκάλια προδιαγραφών 250 ± 50 g, Υποθέτοντας ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της διαδικασίας ταυτίζονται με τις εκτιμήσεις του υπεύθυνου στη φάση 1 να εξηγήσετε αν η παραγωγική διαδικασία είναι ικανή να συμμορφωθεί με τις προδιαγραφές του πελάτη.

Λύση

Φάση 1

Έχουμε από εκφώνηση:

- Μέση τιμή όλων των μετρήσεων: $\bar{x} = 210$ grams
- Τυπική απόκλιση: $\sigma = 5$ grams
- Μέγεθος δείγματος $n = 4$
- Αριθμός δειγμάτων = 400

- Όρια ελέγχου σε 3 τυπικές αποκλίσεις

Τα όρια ελέγχου για το διάγραμμα ελέγχου της διεργασίας υπολογίζονται ως εξής:

$$UCL = \bar{x} + 3 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$LCL = \bar{x} - 3 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\text{Center Line} = \bar{x}$$

Αντικαθιστώντας τις δεδομένες τιμές:

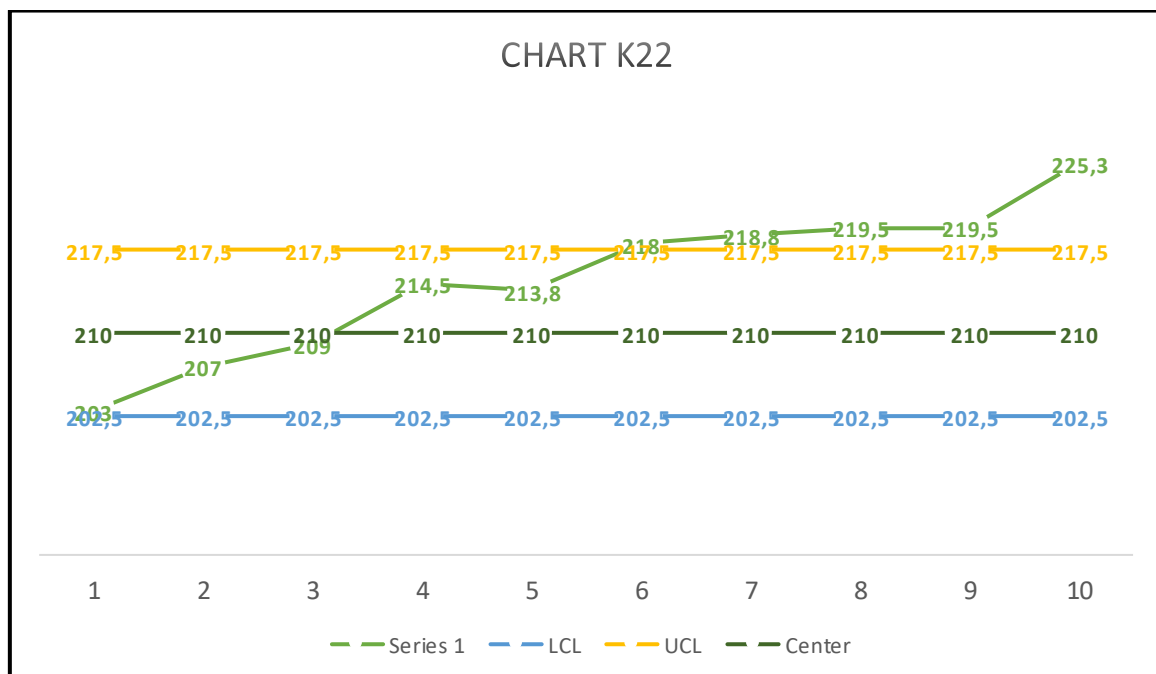
$$UCL = 210 + 3 \left(\frac{5}{\sqrt{4}} \right) = 210 + 3 \left(\frac{5}{2} \right) = 210 + 7.5 = 217.5$$

$$LCL = 210 - 3 \left(\frac{5}{\sqrt{4}} \right) = 210 - 3 \left(\frac{5}{2} \right) = 210 - 7.5 = 202.5$$

$$\text{Center Line} = 210$$

Φάση 2

Προσέθεσα στον πίνακα της εκφώνησης μία 5^η στήλη, με τις μέσες τιμές των μετρήσεων κάθε δείγματος. Παραθέτω παρακάτω ένα διάγραμμα αυτών:



- **Υπό έλεγχο:** Εάν όλοι οι μέσοι όροι των δειγμάτων βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου (202,5 έως 217,5 γραμμάρια) και δεν παρουσιάζουν μοτίβα που να υποδηλώνουν μη τυχαία διακύμανση.
- **Εκτός ελέγχου:** Εάν οι μέσοι όροι των δειγμάτων βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου ή παρουσιάζουν μη τυχαίο μοτίβο.

Παρατηρούμε πως τα δείγματα 6 έως και 10 υπερβαίνουν το ανώτερο όριο ελέγχου ($UCL = 217,5$ γραμμάρια), υποδεικνύοντας ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου. Η διεργασία πρέπει να διερευνηθεί για πιθανά προβλήματα που προκαλούν αυτή την απόκλιση.

Αίτημα Πελάτη

Οι προδιαγραφές που μας δίνονται:

- Βάρος-στόχος: 250 γραμμάρια
- Όρια προδιαγραφών: 250 ± 50 γραμμάρια (200 έως 300 γραμμάρια)

Δεδομένες παράμετροι διεργασίας:

- Μέση τιμή: $\mu = 210 \text{ grams}$
- Τυπική απόκλιση $\sigma = 5 \text{ grams}$

Ο δείκτης ικανότητας διεργασίας (Cpk) δίνεται από την εξίσωση:

$$Cpk = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right)$$

Όπου:

- USL (ανώτερο όριο προδιαγραφών) = 300 γραμμάρια
- LSL (κατώτερο όριο προδιαγραφών) = 200 γραμμάρια

Άρα:

$$Cpk = \min\left(\frac{300 - 210}{3 \cdot 5}, \frac{210 - 200}{3 \cdot 5}\right) = \min\left(\frac{90}{15}, \frac{10}{15}\right) = \min(6, 0.67) = 0.67 < 1$$

Ένα Cpk μικρότερο του 1 υποδηλώνει ότι η διεργασία δεν είναι ικανή να παράγει με συνέπεια φιάλες εντός των ορίων των προδιαγραφών. Επομένως, η τρέχουσα διαδικασία παραγωγής, με μέσο όρο 210 γραμμάρια και τυπική απόκλιση 5 γραμμάρια, δεν είναι ικανή να συμμορφωθεί με τις προδιαγραφές του πελάτη για 250 ± 50 γραμμάρια.

Επαναληπτική 22

Θέμα 1

Είστε υπεύθυνος παραγωγής για το εργοστάσιο της εταιρίας MediaCenter Ε.Π.Ε. η οποία παράγει ηλεκτρονικές συσκευές. Το εργοστάσιο διαθέτει 3 ανεξάρτητες γραμμές παραγωγής (Γ1, Γ2, Γ3), ενώ παράγει 4 διαφορετικά είδη ηλεκτρονικών συσκευών (Ε1, Ε2, Ε3, Ε4). Στους παρακάτω πίνακες φαίνεται ο μέγιστος αριθμός ηλεκτρονικών συσκευών που μπορεί να παράγει ανά ώρα κάθε γραμμή παραγωγής και αντίστοιχα το ωριαίο κόστος παραγωγής κάθε τύπου ηλεκτρονικής συσκευής ανά γραμμή παραγωγής.

	Ωριαία Παραγωγή (τεμάχια)			Κόστος Παραγωγής (€/hr)		
	Γ1	Γ2	Γ3	Γ1	Γ2	Γ3
Ε1	47	52	50	77	78	80
Ε2	36	39	48	63	75	64
Ε3	42	35	37	92	93	90
Ε4	40	44	36	73	76	69

Δίνεται ως δεδομένο ότι ο μήνας διαθέτει 400 εργάσιμες ώρες, ενώ η κάθε γραμμή παραγωγής χρειάζεται τους ακόλουθους χρόνους συντήρησης (ώρες κατά τις οποίες δεν μπορεί να λειτουργήσει):

Γ1	Γ2	Γ3
36 (hrs/month)	90 (hrs/month)	75 (hrs/month)

Η ηλεκτρονική συσκευή Ε1 πωλείται 200€, ενώ οι υπόλοιπες 350€. Ο ελάχιστος αριθμός συσκευών που πρέπει οπωσδήποτε να παραχθούν μηνιαίως ανά τύπο είναι:

Ε1	Ε2	Ε3	Ε4
2500 τεμ.	2000 τεμ.	1500 τεμ.	1000 τεμ.

Καταστρώστε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μαζί με όλους τους απαιτούμενους περιορισμούς, το οποίο θα παράγει ένα βέλτιστο πλάνο παραγωγής (αριθμό ηλεκτρονικών συσκευών από κάθε τύπο που θα παραχθεί σε κάθε μία από τις γραμμές παραγωγής) για τη μεγιστοποίηση του μηνιαίου κέρδους του εργοστασίου.

Λύση

Μεταβλητές Απόφασης

x_{ij} : είναι ο αριθμός των συσκευών τύπου E_i που παράγονται στη γραμμή C_j ανά μήνα, $i \in [1,4], j \in [1,3]$.

Περιορισμοί

Κάθε γραμμή παραγωγής έχει ένα μέγιστο αριθμό ωρών λειτουργίας ανά μήνα, λαμβάνοντας υπόψη τη συντήρηση:

$$400 - 36 = 364 \text{ hrs for } C1$$

$$400 - 90 = 310 \text{ hrs for } C2$$

$$400 - 75 = 325 \text{ hrs for } C3$$

Οι περιορισμοί παραγωγικής ικανότητας για κάθε συσκευή σε κάθε γραμμή παραγωγής είναι οι εξής:

$$\frac{x_{11}}{47} + \frac{x_{21}}{36} + \frac{x_{31}}{42} + \frac{x_{41}}{40} \leq 364$$

$$\frac{x_{12}}{52} + \frac{x_{22}}{39} + \frac{x_{32}}{35} + \frac{x_{42}}{44} \leq 310$$

$$\frac{x_{13}}{50} + \frac{x_{23}}{48} + \frac{x_{33}}{37} + \frac{x_{43}}{36} \leq 325$$

Ο ελάχιστος αριθμός συσκευών που πρέπει να παράγονται ανά μήνα ανά τύπο:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 2500$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 2000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 1500$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 1000$$

Περιορισμοί μη αρνητικότητας:

$$x_{ij} \geq 0$$

Αντικειμενική συνάρτηση

$$Revenue = 200 \cdot (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 350 \cdot ((x_{21} + x_{22} + x_{23}) + (x_{31} + x_{32} + x_{33}) + (x_{41} + x_{42} + x_{43}))$$

$$Cost = 77x_{11} + 78x_{12} + 80x_{13} + 63x_{21} + 75x_{22} + 64x_{23} + 92x_{31} + 93x_{32} + 90x_{33} + 73x_{41} + 76x_{42} + 69x_{43}$$

$$Profit = R - C$$

Στόχος

Μεγιστοποίηση κέρδους:

$$maximize(P)$$

Θέμα 2

Μία βιομηχανία παράγει το προϊόν Χ, ο πίνακας υλικών του οποίου φαίνεται παρακάτω:

Εξάρτημα	Χρόνος Υστέρησης	Αρχικό Απόθεμα	Μέγεθος Παρτίδας	Εξαρτήσεις	Απόθεμα Ασφαλείας	Προγραμματισμένες Παραλαβές	
						Τεμάχια	Εβδομάδα
X	1	400	100	2 A, 2 B	-	400	6
A	1	120	50	1 D, 1 C	-	200	5, 8
B	2	250	25	2 C	-	100	4
C	1	1500	200	1 D	-	1800	5
D	1	2500	-	-	500	-	-

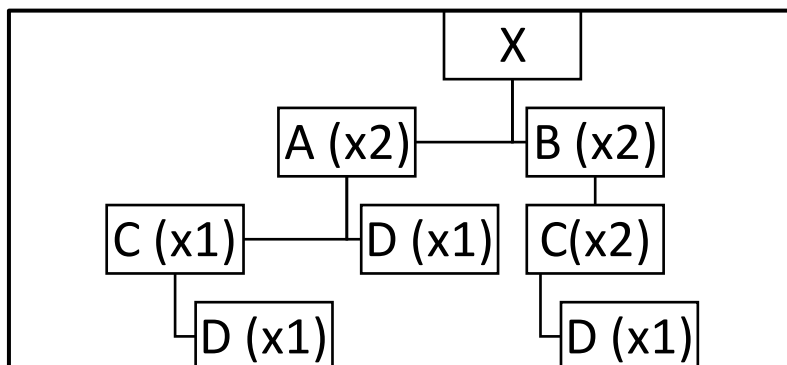
Οι μικτές απαιτήσεις για το Χ είναι:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Μικτές Απαιτήσεις	200	250	200	155	180	170	170	300	400	135	140

Σχεδιάστε τον πίνακα υλικών του προϊόντος Χ και βρείτε το πρόγραμμα παραγωγής κάθε εξαρτήματος, σύμφωνα με τη μέθοδο Προγραμματισμού Απαιτήσεων Υλικών (MRP).

Λύση

Ο πίνακας υλικών (BOM) του Χ είναι:



Ορίζω τα μεγέθη:

- **Closing Stock** = Initial Stock + Scheduled Receipts – Gross Requirements
- **Net Requirements** = max(0, - Closing Stock)
- **Production Program** = ceiling ((Net Requirements + Safety Stock)/ Lot Size, 1) * Lot Size
- **Shifted Production Program**: οι προγραμματιζόμενες παραλαβές μετατοπισμένες κατά τον χρόνο υστέρησης (time lead).
- **Final Stock**:

$$Final\ Stock = \begin{cases} Closing\ Stock, & Closing\ Stock > 0 \\ Production\ Program - Net\ Requirements, & otherwise \end{cases}$$

- $\text{Gross Requirements}_A = 2 \cdot \text{Shifted Production Program}_X$
- $\text{Gross Requirements}_B = 2 \cdot \text{Shifted Production Program}_X$
- $\text{Gross Requirements}_C = 1 \cdot \text{Shifted Production Program}_A + 2 \cdot \text{Shifted Production Program}_B$
- $\text{Gross Requirements}_D = 1 \cdot \text{Shifted Production Program}_A + 2 \cdot \text{Shifted Production Program}_C$

Όπως φαίνεται και από τους τύπους, δεν είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των Προγραμματισμένων Αποδεσμεύσεων Εντολών Παραγωγής του D, επομένως ο χρόνος υστέρησης του δεν παίζει ρόλο.

Εξάρτημα Χ

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	200	400	0	200	0	0	0	200
2	250	200	0	0	0	0	200	0
3	200	0	0	-200	200	200	200	0
4	155	0	0	-155	155	200	200	45
5	180	45	0	-135	135	200	0	65
6	170	65	400	295	0	0	0	295
7	170	295	0	125	0	0	200	125
8	300	125	0	-175	175	200	400	25
9	400	25	0	-375	375	400	200	25
10	135	25	0	-110	110	200	100	90
11	140	90	0	-50	50	100	0	50

Εξάρτημα Α

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	0	120	0	120	0	0	300	120
2	400	120	0	-280	280	300	400	20
3	400	20	0	-380	380	400	400	20
4	400	20	0	-380	380	400	0	20
5	0	20	200	220	0	0	0	220
6	0	220	0	220	0	0	200	220
7	400	220	0	-180	180	200	600	20
8	800	20	200	-580	580	600	400	20
9	400	20	0	-380	380	400	200	20
10	200	20	0	-180	180	200	0	20
11	0	20	0	20	0	0	0	20

Εξάρτημα Β

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+2)	Final Stock
1	0	250	0	250	0	0	400	250
2	400	250	0	-150	150	150	300	0
3	400	0	0	-400	400	400	0	0
4	400	0	100	-300	300	300	0	0
5	0	0	0	0	0	0	400	0
6	0	0	0	0	0	0	800	0
7	400	0	0	-400	400	400	400	0
8	800	0	0	-800	800	800	200	0
9	400		0	-400	400	400	0	0
10	200	0	0	-200	200	200	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα C

Week	S.P.P. A	S.P.P. B	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	300	800	1100	1500	0	400	0	0	600	400
2	400	600	1000	400	0	-600	600	600	400	0
3	400	0	400	0	0	-400	400	400	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	800	800	0	1800	1000	0	0	800	1000
6	200	1600	1800	1000	0	-800	800	800	1400	0
7	600	800	1400	0	0	-1400	1400	1400	800	0
8	400	400	800	0	0	-800	800	800	200	0
9	200	0	200	0	0	-200	200	200	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα D

Week	S.P.P. A	S.P.P. C	Gross Req.	Init. Stock	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Final Stock
1	300	1200	1500	2500	1000	0	0	1000
2	400	800	1200	1000	-200	200	300	500
3	400	0	400	500	100	0	400	500
4	0	0	0	500	500	0	0	500
5	0	1600	1600	500	-1100	1100	1600	500
6	200	2800	3000	500	-2500	2500	3000	500
7	600	1600	2200	500	-1700	1700	2200	500
8	400	400	800	500	-300	300	800	500
9	200	0	200	500	300	0	200	500
10	0	0	0	500	500	0	0	500
11	0	0	0	500	500	0	0	500

Θέμα 3

Ερώτημα 1: Μια εταιρία χρησιμοποιεί σύστημα σταθερής ποσότητας παραγγελίας. Η εβδομαδιαία ζήτηση του προϊόντος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 160 και τυπική απόκλιση 30 μονάδες προϊόντος. Αν το κόστος τοποθέτησης κάθε παραγγελίας είναι 280€ και το ετήσιο κόστος διατήρησης μιας μονάδας αποθέματος είναι 10€, ποια είναι η οικονομικότερη ποσότητα παραγγελίας Q (Θεωρείστε ότι ένα έτος έχει 52 εβδομάδες);

Ερώτημα 2: Ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που η εταιρία τοποθετεί μία παραγγελία αναπλήρωσης του αποθέματος της μέχρι τη στιγμή της παραλαβής της είναι 1 εβδομάδα. Ποιο πρέπει να είναι το επίπεδο αναπαραγγελίας R ώστε η πιθανότητα υποαποθέματος να είναι κάθε στιγμή μικρότερη ή ίση με 5%;

Ερώτημα 3: Έστω ότι η ίδια εταιρεία αποφασίζει να εφαρμόσει σύστημα σταθερής περιόδου παραγγελίας. Ποια πρέπει να είναι η βέλτιστη πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων της πορείας εταιρείας ώστε η πιθανότητα υποαποθέματος να είναι κάθε στιγμή μικρότερη ή ίση με 5%;

Λύση

Ερώτημα 1

Η οικονομική ποσότητα παραγγελίας (Economic Order Quantity - EOQ) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Όπου:

- D είναι η ετήσια ζήτηση.
- S είναι το κόστος παραγγελίας ανά παραγγελία (280 ευρώ).
- H είναι το κόστος διατήρησης ανά μονάδα ανά έτος (€10).

Έχουμε από την εκφώνηση:

- Εβδομαδιαία ζήτηση $\mu = 160 \text{ units}$
- Εβδομάδες ανά έτος = 52

Η ετήσια ζήτηση:

$$D = \mu \cdot \text{Weeks per year} = 160 \cdot 52 = 8320$$

Αντικαθιστώντας τις δεδομένες τιμές στον τύπο EOQ:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \cdot 8320 \cdot 280}{10}} = \sqrt{\frac{4662400}{10}} = \sqrt{466240} \approx 682.81 \approx 683 \text{ units}$$

Ερώτημα 2

Έχουμε από την εκφώνηση:

- Ο χρόνος παραγγελίας είναι 1:
- Μέση εβδομαδιαία ζήτηση $\mu = 160$ units.
- Τυπική απόκλιση της εβδομαδιαίας ζήτησης $\sigma = 30$ units.
- Χρόνος παράδοσης $L = 1$ week.

Η μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου παράδοσης:

$$\mu_L = \mu \cdot L = 160$$

Η τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου παράδοσης:

$$\sigma_L = \sigma \cdot \sqrt{L} = 30$$

Μια πιθανότητα έλλειψης αποθεμάτων 5% αντιστοιχεί σε επίπεδο εξυπηρέτησης 95%.

Χρησιμοποιώντας τον τυπικό πίνακα κανονικής κατανομής, το **z-score** για ένα επίπεδο εξυπηρέτησης 95% είναι περίπου 1.64:

z	1.64	1.65
$\Phi(z)$	0.94950	0.95053

Το σημείο αναπαραγγελίας (Reorder Point – ROP):

$$ROP = \mu_L + z \cdot \sigma_L = 160 + 1.645 \cdot 30 = 160 + 49.35 = 209.35 \sim 209 \text{ units}$$

Ερώτημα 3

Σε ένα σύστημα σταθερής περιόδου παραγγελίας, το επίπεδο αποθεμάτων επανεξετάζεται σε σταθερά χρονικά διαστήματα και η ποσότητα παραγγελίας προσαρμόζεται ώστε να ανταποκρίνεται στο επίπεδο εξυπηρέτησης-στόχο. Το κλειδί είναι να προσδιοριστεί το επίπεδο αποθέματος-στόχος T που εξασφαλίζει επίπεδο εξυπηρέτησης 95%.

Έχουμε από την εκφώνηση:

- Μέση εβδομαδιαία ζήτηση $\mu = 160$ units.
- Τυπική απόκλιση της εβδομαδιαίας ζήτησης $\sigma = 30$ units.
- Χρόνος αναθεώρησης $P = 1$ week.
- Χρόνος παράδοσης $L = 1$ week.

Η συνολική χρονική περίοδος T που λαμβάνεται υπόψη για το απόθεμα ασφαλείας είναι η περίοδος αναθεώρησης συν τον χρόνο παράδοσης:

$$T = P + L = 1 + 1 = 2 \text{ weeks}$$

Η μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου:

$$\mu_{PL} = \mu \cdot (P + L) = 160 \cdot 2 = 320$$

Η τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά τη διάρκεια της περιόδου:

$$\sigma_{PL} = \sigma \cdot \sqrt{P + L} = 30 \cdot \sqrt{2} = 30 \cdot 1.414 \approx 42.43$$

Για να επιτύχουμε επίπεδο εξυπηρέτησης 95%, χρησιμοποιούμε την τιμή $z = 1.645$. Έτσι, το επίπεδο απογραφής στόχου:

$$T = \mu_{PL} + z \cdot \sigma_{PL} = 320 + 1.645 \cdot 42.43 = 320 + 69.76 \approx 389.76 \approx 390 \text{ units}$$

Κανονική 20

Θέμα 1

Μία επιχείρηση παράγει 2 εξαρτήματα για αυτοκίνητα. Ο πίνακας που ακολουθεί αποτυπώνει τη μηνιαία ζήτηση για κάθε εξάρτημα, για τους επόμενους 3 μήνες.

<i>Demand</i>	Μήνας 1	Μήνας 2	Μήνας 3
Εξάρτημα A	1200	2000	4000
Εξάρτημα B	1000	700	2000

Η παραγωγή του εξαρτήματος A κοστίζει στην επιχείρηση 15€ ανά τεμάχιο, και του εξαρτήματος B 10€ ανά τεμάχιο. Το μηνιαίο κόστος διατήρησης σε απόθεμα ενός τεμαχίου (ανεξαρτήτως εξαρτήματος) είναι ίσο με το 1.5% του κόστους του.

Η επιχείρηση εκτιμά ότι το κόστος που προκύπτει από την αύξηση του επιπέδου παραγωγής (συνολικά και για τα δύο εξαρτήματα) είναι 0.5€ ανά τεμάχιο, ενώ το κόστος από τη μείωση του επιπέδου παραγωγής 0.3€ ανά τεμάχιο. Το αρχικό απόθεμα για το εξάρτημα A είναι 500 τεμάχια, και για το B είναι 300. Επιπλέον, η επιχείρηση έχει ορίσει ως ελάχιστο επιθυμητό απόθεμα στο τέλος των 3 μηνών τα 500 τεμάχια για το A και 400 τεμάχια για το B. Τα επίπεδα παραγωγής κατά τον τρέχοντα μήνα είναι 1500 τεμάχια A και 1000 τεμάχια B.

Τέλος, οι ακόλουθοι δύο πίνακες δίνουν: α) τις υπάρχουσες δυναμικότητες και β) τις απαιτήσεις σε δυναμικότητα για την παραγωγή ενός τεμαχίου A και B αντίστοιχα.

<i>Max_Cap</i>	Μηχανών (hrs)	Εργασίας (hrs)	Αποθηκευτική (m ²)
Μήνας 1	400	300	10000
Μήνας 2	500	200	10000
Μήνας 3	600	300	10000

<i>Req_Cap</i>	Μηχανές (hrs/pkg)	Εργασία (hrs/pkg)	Χώρος (m ² /pkg)
Εξάρτημα A	0.10	0.05	2
Εξάρτημα B	0.08	0.07	3

Καταστρώστε το πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού που επιτυγχάνει την κάλυψη της ζήτησης με το ελάχιστο συνολικό κόστος.

Λύση

Μεταβλητές Απόφασης

- $p_{A,B}$ (production): παραγωγή του A ή B.
- $s_{A,B}$ (stock): απόθεμα του A ή B.
- $m_{A,B}$ (machine hours): ώρες λειτουργίας μηχανών για την παραγωγή A ή B.
- $h_{A,B}$ (human hours): ώρες ανθρώπινης εργασίας για την παραγωγή A ή B.

- **incr** (increase): binary για την αύξηση τουλάχιστον μίας εκ των 2 παραγωγών, $incr = \begin{cases} 1, & p_i < p_{i+1} \\ 0, & p_i \geq p_{i+1} \end{cases}$
- **decr** (decrease): ομοίως, $decr = \begin{cases} 1, & p_i > p_{i+1} \\ 0, & p_i \leq p_{i+1} \end{cases}$

Παράμετροι

- **$D_{A,B}$** (demand): ζήτηση για A ή B.
- **$req_mc_{A,B}$** (machine capability): απαιτούμενη δυναμικότητα μηχανών για A ή B.
- **$req_hc_{A,B}$** (human capability): απαιτούμενη δυναμικότητα εργασίας για A ή B.
- **$req_sc_{A,B}$** (storage capability): απαιτούμενη αποθηκευτική δυναμικότητα για A ή B.
- **mc_{max}** : μέγιστη δυναμικότητα μηχανών.
- **hc_{max}** : μέγιστη δυναμικότητα εργασίας.
- **sc_{max}** : μέγιστη αποθηκευτική δυναμικότητα.

Περιορισμοί

- Για το απόθεμα:
 - $s_{A_i} = s_{A_{i-1}} + p_{A_i} - D_{A_i}$
 - $s_{B_i} = s_{B_{i-1}} + p_{B_i} - D_{B_i}$
 - $s_{A_0} = 500$
 - $s_{B_0} = 300$
 - $s_{A_3} \geq 500$
 - $s_{B_3} \geq 400$
- Για την παραγωγή:
 - $p_{A_0} = 1500$
 - $p_{B_0} = 1000$
 - $-1,000,000 \cdot decr \leq p_{A_i} - p_{A_{i-1}} + p_{B_i} - p_{B_{i-1}} \leq 1,000,000 \cdot incr$
- Για τη δυναμικότητα:
 - $p_{A_i} \cdot req_mc_A + p_{B_i} \cdot req_mc_B \leq mc_{max} \rightarrow p_{A_i} \cdot 0.1 + p_{B_i} \cdot 0.8 \leq mc_{max}$
 - $p_{A_i} \cdot req_hc_A + p_{B_i} \cdot req_hc_B \leq hc_{max} \rightarrow p_{A_i} \cdot 0.05 + p_{B_i} \cdot 0.07 \leq hc_{max}$
 - $s_{A_i} \cdot req_sc_A + s_{B_i} \cdot req_sc_B \leq sc_{max} \rightarrow s_{A_i} \cdot 2 + s_{B_i} \cdot 3 \leq sc_{max}$

Αντικειμενική Συνάρτηση και Στόχος

$$TC = \sum_{i=1}^3 \left(15 \cdot p_{A_i} + 10 \cdot p_{B_i} + 0.5 \cdot incr \cdot (p_{A_i} - p_{A_{i-1}} + p_{B_i} - p_{B_{i-1}}) + 0.3 \cdot decr \cdot (p_{A_{i-1}} - p_{A_i} + p_{B_{i-1}} - p_{B_i}) \right) + 0.015 \cdot (15 \cdot s_{A_i} + 10 \cdot s_{B_i})$$

$minimize(TC)$

Θέμα 2

Η φαρμακευτική εταιρία PharmaCester χειρίζεται μία ποικιλία προϊόντων υγείας και ομορφιάς. Μία συγκεκριμένη κρέμα που διαθέτει κοστίζει στην εταιρία 3€/μονάδα προϊόντος. Το ετήσιο κόστος διατήρησης μίας μονάδας κρέμας είναι 15% του κόστους της. Ο χρόνος υστέρησης για την παραλαβή μίας παραγγελίας είναι 2 εβδομάδες, ενώ η ζήτηση του προϊόντος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 150 μονάδες την εβδομάδα και απόκλιση 40 μονάδες ανά εβδομάδα.

Ερώτημα Α: (i) Ποιο είναι το σημείο αναπαραγγελίας εάν η εταιρία είναι διατεθειμένη να ανεχτεί 1% πιθανότητα υποαποθέματος (stockout) κατά τη διάρκεια ενός κύκλου παραγγελίας. (ii) Ποιο είναι το απόθεμα ασφάλειας (safety stock) και ποιο το ετήσιο κόστος της διατήρησης αποθεμάτων ασφαλείας;

Ερώτημα Β: Η εταιρία εξετάζει το ενδεχόμενο μετάβασης σε σύστημα σταθερής περιόδου παραγγελίας σε μια προσπάθεια συντονισμού των παραγγελιών ορισμένων προϊόντων της. Η περίοδος επιθεώρησης αποθεμάτων και αναπαραγγελίας θα είναι 2 εβδομάδες ενώ ο χρόνος υστέρησης παραμένει 2 εβδομάδες. Ποια είναι η μέγιστη στάθμη αποθέματος που θα χρειαζόταν για να διασφαλιστεί το ίδιο 1% κινδύνου υποαποθέματος (stockout);

Λύση

Ερώτημα Α

Η μέση τιμή και η διασπορά της ζήτησης στην μία εβδομάδα είναι $\mu = 140, \sigma = 40$. Επομένως, στις 2 εβδομάδες θα είναι $\mu' = 2 \cdot 150 = 300, \sigma' = \sqrt{2} \cdot 40 = 56.5685$.

Έστω το σημείο αναπαραγγελίας (restock) R . Θέλουμε:

$$\mathbb{P}(\text{demand} > R) \leq 0.01 \rightarrow \mathbb{P}(\text{demand} < R) \geq 0.99$$

Έστω η τυχαία μεταβλητή \mathbb{X} :

$$\mathbb{X} = \frac{R - \mu}{\sigma} \rightarrow \mathbb{X} \sim \Phi(0,1)$$

Δηλαδή ψάχνω \mathbb{X} τέτοιο ώστε:

$$\Phi(\mathbb{X}) \geq 0.99 \rightarrow \Phi_{min}(\mathbb{X}_{min}) = 0.99 \rightarrow \mathbb{X}_{min} = 2.33$$

Άρα:

$$\mathbb{X} = \frac{R - \mu}{\sigma} \rightarrow 2.33 = \frac{R - 300}{56.5685} \rightarrow R = 131.804605 \sim 132$$

Όσον αφορά το safety stock $\text{safety_Stock} = R - \mu' = 132$ και το κόστος $c = 132 \cdot 0.15 \cdot 3 = 59.4\text{€}$

Ερώτημα Β

Σκοπός είναι να εξασφαλίσουμε ότι σε κάθε διάστημα 2 εβδομάδων μεταξύ ανεφοδιασμών θα έχουμε stockout με $Prob \leq 1\%$. Όπως σε κάθε νέο διάστημα 2 εβδομάδων που ελέγχουμε το απόθεμα και παραλαμβάνουμε προϊόντα, πρέπει στην έναρξη του να έχουμε $stock \geq R$.

Με το σύστημα αυτό που περιγράφεται όμως, εφόσον δεν γνωρίζουμε την επικείμενη ζήτηση του διαστήματος των 2 εβδομάδων, θα πρέπει να δεσμεύσουμε διαθέσιμη ποσότητα ίση με R για αυτό και να υπολογίζουμε να έχουμε επίσης R στην έναρξη του επομένου. Οπότε η **μέγιστη** στάθμη θα είναι ίση με $2R$, την οποία θα φτάνουμε αν τύχει σε ένα διάστημα 2 εβδομάδων να τύχει να έχουμε μηδενική ζήτηση).

Θέμα 3

Μία βιομηχανική επιχείρηση παράγει το προϊόν X, ο πίνακας του οποίου φαίνεται παρακάτω:

Εξάρτημα	Χρόνος Υστέρησης	Αρχικό Απόθεμα	Μέγεθος Παρτίδας	Εξαρτήσεις
X	1	2000	-	1 A, 2 B
A	1	1000	-	1 C
B	2	400	-	2 C
C	2	4000	-	-

Οι μικρές απαιτήσεις για το X είναι:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Μικτές Απαιτήσεις	400	500	500	600	600	700	700	600	600	600	500

Οι προγραμματισμένες παραλαβές ανά εξάρτημα και εβδομάδα είναι:

Εξάρτημα	Παραλαβές	Εβδομάδα
X	1000	6
A	400	5
	400	8
B	600	6

Βρείτε το πρόγραμμα παραγωγής κάθε εξαρτήματος, σύμφωνα με τη μέθοδο Προγραμματισμού Απαιτήσεων Υλικών (MRP).

Λύση

Ορίζω τα μεγέθη:

- **Closing Stock** = Initial Stock + Scheduled Receipts – Gross Requirements
- **Net Requirements** = max(0, - Closing Stock)
- **Production Program** = ceiling ((Net Requirements + Safety Stock)/ Lot Size, 1) * Lot Size
- **Shifted Production Program**: οι προγραμματιζόμενες παραλαβές μετατοπισμένες κατά τον χρόνο υστέρησης (time lead).
- **Final Stock**:

$$Final\ Stock = \begin{cases} Closing\ Stock, & Closing\ Stock > 0 \\ Production\ Program - Net\ Requirements, & otherwise \end{cases}$$

- Gross Requirements_A = 1·Shifted Production Program_X
- Gross Requirements_B = 2·Shifted Production Program_X
- Gross Requirements_C = 1·Shifted Production Program_A + 2·Shifted Production Program_B

Όπως φαίνεται και από τους τύπους, δεν είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των Προγραμματισμένων Αποδεσμεύσεων Εντολών Παραγωγής του Γ, επομένως ο χρόνος υστέρησης του δεν παίζει ρόλο.

Εξάρτημα X

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	400	2000	0	1600	0	0	0	1600
2	500	1600	0	1100	0	0	0	1100
3	500	1100	0	600	0	0	0	600
4	600	600	0	0	0	0	600	0
5	600	0	0	-600	600	600	0	0
6	700	0	1000	300	0	0	400	300
7	700	300	0	-400	400	400	600	0
8	600	0	0	-600	600	600	600	0
9	600	0	0	-600	600	600	600	0
10	600	0	0	-600	600	600	500	0
11	500	0	0	-500	500	500	0	0

Εξάρτημα Α

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	0	1000	0	1000	0	0	0	1000
2	0	1000	0	1000	0	0	0	1000
3	0	1000	0	1000	0	0	0	1000
4	600	1000	0	400	0	0	0	400
5	0	400	400	800	0	0	0	800
6	400	800	0	400	0	0	200	400
7	600	400	0	-200	200	200	200	0
8	600	0	400	-200	200	200	500	0
9	600	0	0	-500	500	500	500	0
10	500	0	0	-500	500	500	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα Β

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+2)	Final Stock
1	0	400	0	400	0	0	0	400
2	0	400	0	400	0	0	800	400
3	0	400	0	400	0	0	0	400
4	1200	400	0	-800	800	800	200	0
5	0	0	0	0	0	0	1200	0
6	800	0	600	-200	200	200	1200	0
7	1200	0	0	-1200	1200	1200	1200	0
8	1200	0	0	-1200	1200	1200	1000	0
9	1200	0	0	-1200	1200	1200	0	0
10	1000	0	0	-1000	1000	1000	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα C

Week	Shifted P.P. A	Shifted P.P. B	Gross Req.	Init. Stock	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Final Stock
1	0	0	0	4000	4000	0	0	4000

2	0	1600	1600	4000	2400	0	0	2400
3	0	0	0	2400	2400	0	0	2400
4	0	400	400	2400	2000	0	0	2000
5	0	2400	2400	2000	-400	400	400	0
6	200	2400	2600	0	-2600	2600	2600	0
7	200	2400	2600	0	-2600	2600	2600	0
8	500	2000	2500	0	-2500	2500	2500	0
9	500	0	500	0	-500	500	500	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Θέμα 4

Ο υπεύθυνος ποιότητας σε μια βιομηχανία παραγωγής αξόνων παρακολουθεί την ποιότητα της διαδικασίας παραγωγής. Οι προδιαγραφές για τη διάμετρο ενός τύπου άξονα είναι 8.00 και 0.30 cm. Ο υπεύθυνος συνέλεξε τα ακόλουθα στοιχεία κατά τη λειτουργία της διαδικασίας.

A/A Δείγματος	1	2	3	4
1	8.40	8.11	7.90	7.78
2	7.97	8.10	8.20	7.81
3	7.91	8.00	8.04	7.92
4	8.20	8.21	7.93	7.95
5	7.87	8.21	7.93	7.95
6	7.43	7.49	7.55	7.92
7	8.43	8.21	7.99	8.00
8	7.50	7.92	8.12	8.02
9	8.13	8.21	8.05	8.01
10	7.68	8.43	8.20	7.97
Μέση Τιμή	7.952	8.089	8.032	7.981

Δίνεται η τυπική απόκλιση του δείγματος όλων των μετρήσεων ίση με 0.25. Θεωρείστε και για τα 2 ερωτήματα ότι το μέσο της μεταβλητότητας της διαδικασίας και το μέσο του εύρους των προδιαγραφών συμπίπτουν.

Ερώτημα 1: Αν η τυπική απόκλιση της διαδικασίας παραγωγής του συγκεκριμένου τύπου άξονα είναι 0.20 cm, καταστρώστε το διάγραμμα ποιοτικού ελέγχου για 3 τυπικές αποκλίσεις.

Ερώτημα 2: Είναι η προαναφερθείσα παραγωγική διαδικασία ικανή να συμμορφωθεί με τις προδιαγραφές που έχουν τεθεί για αυτή;

Λύση

Ερώτημα 1

Η τυπική απόκλιση του δείγματος όλων των μετρήσεων (δίνεται από εκφώνηση):

$$\sigma_{\text{μετρ}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0.25$$

Η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών των δειγμάτων:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\text{μετρ}}}{\sqrt{n}} = \frac{0.25}{\sqrt{10}} = 0.07905$$

Upper & Lower Control Limits (με $\bar{\bar{x}}$: μ.ο. των μέσων τιμών, z : τυπικές αποκλίσεις):

$$UCL = \bar{\bar{x}} + z \cdot \sigma_{\bar{x}} = 8.01275 + 3 \cdot 0.07905 = 8.2499$$

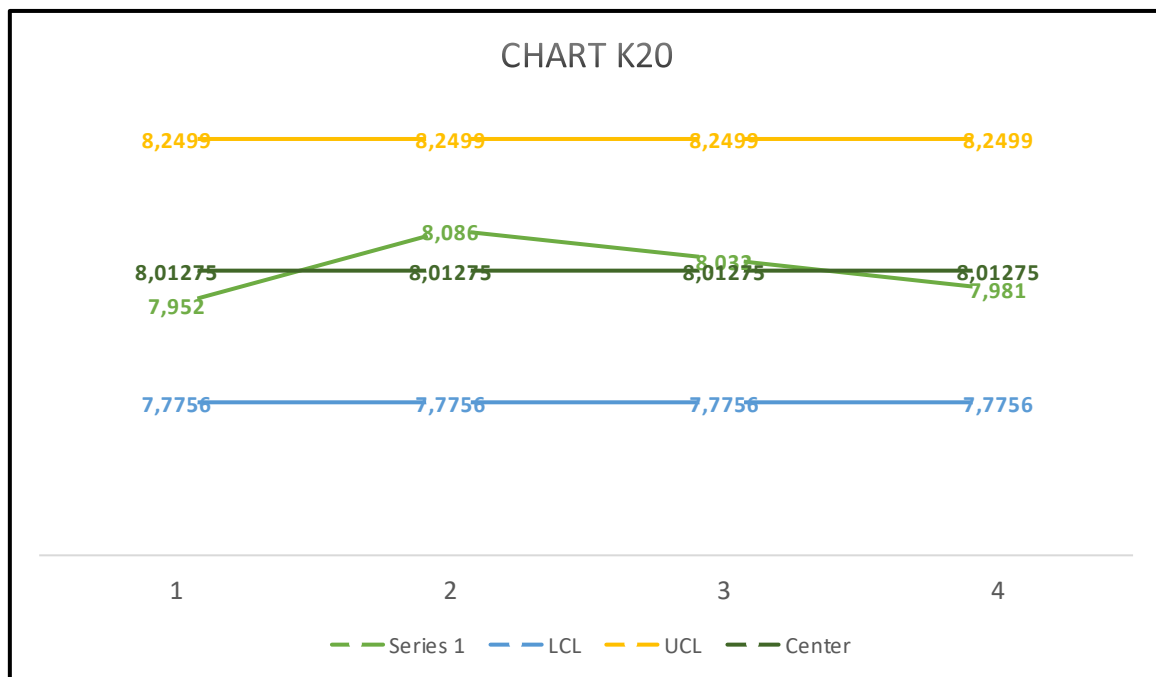
$$LCL = \bar{\bar{x}} - z \cdot \sigma_{\bar{x}} = 8.01275 - 3 \cdot 0.07905 = 7.7756$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{7.952 + 8.086 + 8.032 + 7.981}{4} = 8.01275$$

Το μέσο των δύο γραμμών, UCL και LCL, είναι η ευθεία:

$$y = \frac{8.2499 + 7.7756}{2} = 8.01275$$

Η γραφική θα έχει 4 σημεία: (1,7.952), (2,8.086), (3,8.032), (4,7.981).



Ερώτημα 2

Από εκφώνηση, έχουμε πως τα USL, LSL (Upper & Lower Specification Limits) είναι ίσα με τα UCL, LCL. Η ικανότητα μιας διαδικασίας υπολογίζεται με το δείκτη δυνατότητας:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6 \cdot \sigma} = \frac{8.2499 - 7.7756}{6 \cdot 0.2} = \frac{0.4743}{1.2} = 0.39525 < 1$$

Η διαδικασία δεν μπορεί να παράγει συστηματικά προϊόντα με ανοχές σύμφωνα με τα όρια των προδιαγραφών. Η διαδικασία πρέπει να βελτιωθεί.

Κανονική 17

Θέμα 1

Μία εταιρεία παράγει ένα προϊόν το οποίο απαιτεί, στο τελικό στάδιο συναρμολόγησης, τρία μέρη. Αυτά τα τρία μέρη μπορούν να παραχθούν από 2 διαφορετικά τμήματα, όπως περιγράφεται παρακάτω:

	Μέρος 1	Μέρος 2	Μέρος 3	Κόστος (€/hr)
Τμήμα 1	7	6	9	25
Τμήμα 2	6	11	5	12.5

Μέσα σε μία εβδομάδα απαιτούνται 1050 τελικά (συναρμολογημένα) προϊόντα (άλλα μπορούν να παραχθούν μέχρι 1200 εάν είναι απαραίτητο). Το τμήμα 1 διαθέτει 100 ώρες λειτουργίας και το τμήμα 2 110 λειτουργίας. Παράλληλα ο αποθηκευτικός χώρος της εταιρείας είναι περιορισμένος που σημαίνει ότι δεν μπορούν να αποθηκευτούν περισσότερα από 200 μη συναρμολογημένα μέρη (όλων των τύπων) στο τέλος της εβδομάδας.

Καταστρώστε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής των τελικών (συναρμολογημένων) προϊόντων για μία εβδομάδα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Σημειώνεται ότι κάθε ώρα λειτουργίας των τμημάτων παράγει υποχρεωτικά και τα τρία μέρη στις ποσότητες που αναγράφονται στον πίνακα. Για παράδειγμα, μία ώρα εργασίας στο τμήμα 1 παράγει υποχρεωτικά 7 μέρη τύπου 1, 6 μέρη τύπου 2 και 9 μέρη τύπου 3.

Λύση

Μεταβλητές απόφασης

- x_1 : ώρες λειτουργίας στο τμήμα 1.
- x_2 : ώρες λειτουργίας στο τμήμα 2.

Περιορισμοί

Για να ικανοποιήσουμε την απαίτηση 1050 συναρμολογημένων προϊόντων, χρειαζόμαστε τουλάχιστον 1050 εξαρτήματα από κάθε τύπο. Κάθε ώρα λειτουργίας στο τμήμα 1 παράγει 7 μέρη του τύπου 1, 6 μέρη του τύπου 2 και 9 μέρη του τύπου 3. Κάθε ώρα λειτουργίας στο τμήμα 2 παράγει 6 μέρη του τύπου 1, 11 μέρη του τύπου 2 και 5 μέρη του τύπου 3.

$$7x_1 + 6x_2 \geq 1050$$

$$6x_1 + 11x_2 \geq 1050$$

$$9x_1 + 5x_2 \geq 1050$$

Το τμήμα 1 έχει μέγιστο όριο 100 ώρες λειτουργίας.

$$x_1 \leq 100$$

Το τμήμα 2 έχει μέγιστο αριθμό ωρών λειτουργίας 110.

$$x_2 \leq 110$$

Στο τέλος της εβδομάδας, δεν μπορούν να αποθηκευτούν περισσότερα από 200 μη συναρμολογημένα εξαρτήματα (όλων των τύπων). Το σύνολο των παραγόμενων εξαρτημάτων μείον τα εξαρτήματα που απαιτούνται για τη συναρμολόγηση δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 200. Έστω S ο περιορισμός αποθήκευσης ($S \leq 200$).

$$(7x_1 + 6x_2 - 1050) + (6x_1 + 11x_2 - 1050) + (9x_1 + 5x_2 - 1050) \leq 200$$

Απλοποιώντας:

$$22x_1 + 22x_2 - 3150 \leq 200$$

$$22(x_1 + x_2) \leq 3350$$

$$x_1 + x_2 \leq \frac{3350}{22}$$

$$x_1 + x_2 \leq 152.27$$

Περιορισμοί μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Αντικειμενική συνάρτηση

$$\text{Total Cost} = 25x_1 + 12.5x_2$$

Στόχος

Ελαχιστοποίηση του κόστους:

$$\text{minimize}(TC)$$

Θέμα 2

Μία βιομηχανική επιχείρηση παράγει το προϊόν X, ο πίνακας υλικών του οποίου φαίνεται παρακάτω:

Εξάρτημα	Χρόνος Υστέρησης	Αρχικό Απόθεμα	Μέγεθος Παρτίδας	Εξαρτήσεις
X	1	400	25	1 A, 2 B
A	1	200	25	1 D
B	2	100	25	2 C
C	2	1000	50	1 D
D	3	500	50	-

Οι μικρές απαιτήσεις του X είναι:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Μικτές Απαιτήσεις	100	120	130	150	160	170	170	160	150	130	120

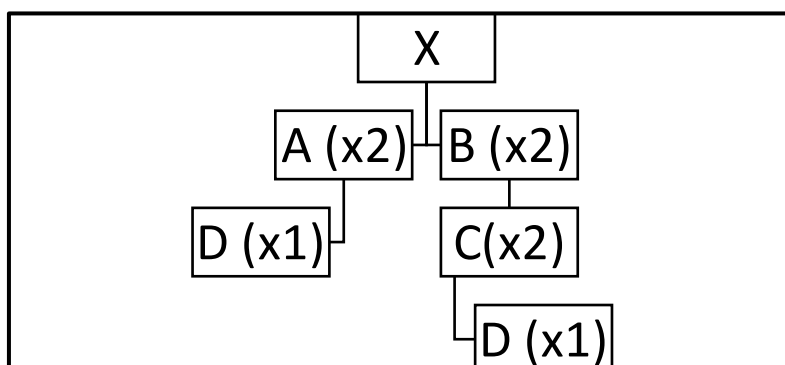
Οι προγραμματισμένες παραλαβές ανά εξάρτημα και εβδομάδα είναι:

Εξάρτημα	Παραλαβές	Εβδομάδα
X	400	6
A	200	5
	100	8
B	100	6
C	1300	6

Βρείτε το πρόγραμμα παραγωγής κάθε εξαρτήματος, σύμφωνα με τη μέθοδο Προγραμματισμού Απαιτήσεων Υλικών (MRP).

Λύση

Ο πίνακας υλικών (BOM) του X είναι:



Ορίζω τα μεγέθη:

- **Closing Stock** = Initial Stock + Scheduled Receipts – Gross Requirements
- **Net Requirements** = max(0, - Closing Stock)

- **Production Program** = ceiling $((\text{Net Requirements} + \text{Safety Stock}) / \text{Lot Size}, 1) * \text{Lot Size}$
- **Shifted Production Program**: οι προγραμματιζόμενες παραλαβές μετατοπισμένες κατά τον χρόνο υστέρησης (time lead).
- **Final Stock**:

$$\text{Final Stock} = \begin{cases} \text{Closing Stock}, & \text{Closing Stock} > 0 \\ \text{Production Program} - \text{Net Requirements}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $\text{Gross Requirements}_A = 2 \cdot \text{Shifted Production Program}_X$
- $\text{Gross Requirements}_B = 2 \cdot \text{Shifted Production Program}_X$
- $\text{Gross Requirements}_C = 2 \cdot \text{Shifted Production Program}_B$
- $\text{Gross Requirements}_D = 1 \cdot \text{Shifted Production Program}_A + 2 \cdot \text{Shifted Production Program}_C$

Όπως φαίνεται και από τους τύπους, δεν είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των Προγραμματισμένων Αποδεσμεύσεων Εντολών Παραγωγής του D, επομένως ο χρόνος υστέρησης του δεν παίζει ρόλο.

Εξάρτημα X

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	100	400	0	300	0	0	0	300
2	120	300	0	180	0	0	0	180
3	130	180	0	50	0	0	100	50
4	150	50	0	-100	100	100	175	0
5	160	0	0	-160	160	175	0	15
6	170	15	400	245	0	0	0	245
7	170	245	0	75	0	0	100	75
8	160	75	0	-85	85	100	150	15
9	150	15	0	-135	135	150	125	15
10	130	15	0	-115	115	125	125	10
11	120	10	0	-110	110	125	0	15

Εξάρτημα A

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+1)	Final Stock
1	0	200	0	200	0	0	0	200
2	0	200	0	200	0	0	0	200
3	200	200	0	0	0	0	350	0
4	350	0	0	-350	350	350	0	0
5	0	0	200	200	0	0	0	0
6	0	200	0	200	0	0	0	200
7	200	200	0	0	0	0	200	0
8	300	0	100	-200	200	200	250	0
9	250	0	0	-250	250	250	250	0
10	250	0	0	-250	250	250	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα Β

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+2)	Final Stock
1	0	100	0	100	0	0	100	100
2	0	100	0	100	0	0	350	100
3	200	100	0	-100	100	100	0	0
4	350	0	0	-350	350	350	0	0
5	0	0	0	0	0	0	100	0
6	0	0	100	100	0	0	300	100
7	200	100	0	-100	100	100	250	0
8	300	0	0	-300	300	300	250	0
9	250	0	0	-250	250	250	0	0
10	250	0	0	-250	250	250	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα C

Week	Gross Req.	Init. Stock	Sched. Rec.	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Shifted P.P. (+2)	Final Stock
1	200	1000	0	800	0	0	0	800
2	700	800	0	100	0	0	0	100
3	0	100	0	100	0	0	100	100
4	0	100	0	100	0	0	0	100
5	200	100	0	-100	100	100	0	0
6	600	0	1300	700	0	0	300	700
7	500	700	0	200	0	0	0	200
8	500	200	0	-300	300	300	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξάρτημα D

Week	S.P.P. A	S.P.P. C	Gross Req.	Init. Stock	Closing Stock	Net Req.	Prod. Progr.	Final Stock
1	0	0	0	500	500	0	0	500
2	0	0	0	500	500	0	0	500
3	350	200	550	500	-50	50	50	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	600	600	0	-600	600	600	0
7	200	0	200	0	-200	200	200	0
8	250	0	250	0	-250	250	250	0
9	250	0	250	0	-250	250	250	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

Θέμα 3

Ένας προμηθευτής μπαταριών αυτοκινήτου πουλάει μπαταρίες σε μηχανικούς αυτοκινήτων. Η ετήσια ζήτηση των μπαταριών είναι περίπου 1200 μονάδες. Ο προμηθευτής πληρώνει 28€ για κάθε μπαταρία και υπολογίζει ότι το κόστος διατήρησης σε απόθεμα μίας μονάδας για ένα χρόνο είναι 30% της αξίας της μπαταρίας. Παράλληλα, υπολογίζει ότι του κοστίζει περίπου 20€ η τοποθέτηση μιας παραγγελίας. Ο προμηθευτής στην παρούσα φάση παραγγέλνει 100 μπαταρίες το μήνα.

Ερώτημα 1

- Ποιο είναι το ολικό κόστος αποθέματος για την τρέχουσα ποσότητα παραγγελίας;
- Ποια είναι η οικονομική ποσότητα παραγγελίας και πόσες παραγγελίες πραγματοποιούνται κάθε χρόνο για αυτή τη ποσότητα;
- Πόσο θα κερδίσει ο προμηθευτής μέσα σε ένα χρόνο αν αποφασίσει να αλλάξει την ποσότητα παραγγελίας από 100 μπαταρίες στην οικονομική ποσότητα παραγγελίας;

Ερώτημα 2: Με μία πιο προσεκτική εξέταση, ο προμηθευτής διαπιστώνει ότι η ζήτηση για τις μπαταρίες ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 4 μπαταρίες την ημέρα και τυπική απόκλιση 3 μπαταρίες την ημέρα (θεωρείστε ότι ο προμηθευτής είναι ανοιχτός 300 μέρες το χρόνο). Υπολογίζεται ότι συνήθως χρειάζονται 4 μέρες για να λάβει μία παραγγελία από το εργοστάσιο.

- Ποιο είναι το σημείο αναπαραγγελίας (R) ώστε το επίπεδο εξυπηρέτησης να είναι 98% (δηλαδή η πιθανότητα υποαποθέματος να είναι κάθε στιγμή μικρότερη ή ίση του 2%);
- Ποιο είναι το επίπεδο ασφαλείας (safety stock);

Λύση

Ερώτημα 1

Ερώτημα (i)

Έχουμε από εκφώνηση:

- $D = 1200 \text{ units}$
- Κόστος ανά μπαταρία: $C = 28\text{€}$
- Κόστος διατήρησης ανά μονάδα ανά έτος: $H = 0.3 \cdot 28\text{€} = 8.4\text{€}$
- Κόστος παραγγελίας: $S = 20\text{€/order}$
- Τρέχουσα ποσότητα παραγγελίας $Q = 100 \text{ units}$

Ο αριθμός των παραγγελιών ανά έτος:

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{1200}{100} = 12 \text{ orders}$$

Το συνολικό κόστος παραγγελίας:

$$\text{Total Order Cost} = N \cdot S = 12 \cdot 20 = 240\text{€}$$

Το μέσο επίπεδο αποθεμάτων:

$$\bar{S} = \frac{Q}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ units}$$

Το συνολικό κόστος διατήρησης:

$$\text{Total Holding Cost} = \bar{S} \cdot H = 50 \cdot 8.4 = 420\text{€}$$

Το συνολικό κόστος αποθέματος:

$$S_{total} = \text{Total Order Cost} + \text{Total Holding Cost} = 240 + 420 = 660\text{€}$$

Ερώτημα (ii)

Η οικονομική ποσότητα παραγγελίας (Economic Order Quantity -EOQ):

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \times 1200 \times 20}{8.4}} = \sqrt{\frac{48000}{8.4}} = \sqrt{5714.29} \approx 75.6$$

Δηλαδή, 76 μονάδες. Ο αριθμός των παραγγελιών ανά έτος για το EOQ:

$$N = \frac{D}{EOQ} = \frac{1200}{76} \approx 15.79 \text{ orders}$$

Ερώτημα (iii)

Ο νέος αριθμός παραγγελιών ανά έτος:

$$N = \frac{1200}{76} \approx 15.79 \text{ orders}$$

Το νέο συνολικό κόστος παραγγελίας:

$$\text{Total Order Cost} = N \cdot S = 15.79 \cdot 20 = 315.80\text{€}$$

Το νέο μέσο απόθεμα:

$$\bar{S} = \frac{EOQ}{2} = \frac{76}{2} = 38 \text{ units}$$

Το νέο συνολικό κόστος διατήρησης:

$$\text{Total Holding Cost} = \bar{S} \cdot H = 38 \cdot 8.4 = 319.20\text{€}$$

Το νέο συνολικό κόστος αποθεμάτων:

$$S_{total} = \text{Total Order Cost} + \text{Total Holding Cost} = 315.80 + 319.20 = 635\text{€}$$

Τα κέρδη του προμηθευτή:

$$\text{Savings} = \text{Total Inventory Cost (Current)} - \text{Total Inventory Cost (EOQ)} = 660 - 635 = 25\text{€}$$

Ερώτημα 2

Ερώτημα (i)

Έχουμε από την εκφώνηση:

- Μέση ημερήσια ζήτηση $\mu = 4 \text{ batteries/day}$

- Τυπική απόκλιση της ημερήσιας ζήτησης $\sigma = 3 \text{ batteries/day}$
- Χρόνος παράδοσης $L = 4 \text{ days}$
- Μια πιθανότητα έλλειψης αποθεμάτων 2% αντιστοιχεί σε επίπεδο εξυπηρέτησης 98%.

Χρησιμοποιώντας τον τυπικό πίνακα κανονικής κατανομής, το **z-score** για ένα επίπεδο εξυπηρέτησης 98% είναι περίπου 2.05:

z	2.05	2.06
$\Phi(z)$	0.97982	0.98030

Η μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου παράδοσης:

$$\mu_L = \mu \cdot L = 4 \cdot 4 = 16 \text{ batteries}$$

Η τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου παράδοσης:

$$\sigma_L = \sigma \cdot \sqrt{L} = 3 \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ batteries}$$

Το **σημείο αναπαραγγελίας** (Reorder Point - ROP) υπολογίζεται ως εξής:

$$R = \mu_L + z \cdot \sigma_L = 16 + 2.05 \cdot 6 = 16 + 12.3 = 28.3 \cong 29 \text{ batteries}$$

Ερώτημα (ii)

Το **απόθεμα ασφαλείας**:

$$\text{Safety Stock} = z \cdot \sigma_L = 2.05 \cdot 6 = 12.3 \cong 13 \text{ batteries}$$

Θέμα 4

Μια βιοτεχνία εργοστασιακού εξοπλισμού αναλαμβάνει τη συναρμολόγηση και βαφή 6 μηχανημάτων μιας μεγάλης βιομηχανίας. Η απαίτηση του πελάτη είναι τα μηχανήματα να είναι έτοιμα το αργότερο σε 4 εβδομάδες. Δεδομένου ότι:

- Η συναρμολόγηση προηγείται υποχρεωτικά της βαφής
- Η βιοτεχνία έχει τη δυνατότητα να λειτουργήσει και τις 7 ημέρες της εβδομάδας
- Ο παρακάτω πίνακας δίνει τους απαιτούμενους χρόνους συναρμολόγησης και βαφής:

Μηχάνημα	Χρόνος Συναρμολόγησης	Χρόνος Βαφής
A	6	3
B	3	2
C	5	2
D	8	6
E	4	1
F	0	4

1. Να καταστρωθεί πλάνο δρομολόγησης των εργασιών συναρμολόγησης / βαφής που να εξασφαλίζει τον ελάχιστο χρόνο εκτέλεσης τους. Με βάση το πλάνο αυτό, είναι δυνατή η ολοκλήρωση όλων των εργασιών σε λιγότερο από 4 εβδομάδες;
2. Το παραπάνω πλάνο γίνεται αποδεκτό και η εφαρμογή του αρχίζει την 1^η Μαρτίου. Πότε το νωρίτερο θα είναι έτοιμο το μηχανήμα B;
3. Στις 4 Μαρτίου, λόγω μιας παράκλησης ενός φίλου και συνεργάτη τίθεται ερώτημα που καλείστε να απαντήσετε: «Είναι δυνατόν, χωρίς να μεταβάλλουμε το πλάνο να παρεμβάλουμε μια έκτακτη εργασία βαφής, διάρκεια 3 ημερών, ώστε να ολοκληρωθεί πριν τις 10 του Μαρτίου;»

Λύση

Ερώτημα 1

Μηχάνημα	Χρόνος Συναρμολόγησης	Χρόνος Βαφής
A	6	3
B	3	2
C	5	2
D	8	6
E	4	1
F	0	4

Διάγραμμα Gantt για τη συναρμολόγηση και τη βαφή:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Assembly D	D	D	D	D	D	D	D	D								
Paint D									D	D	D	D	D	D		
Assembly A									A	A	A	A	A	A		
Paint A															A	A
Assembly B															B	B

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Paint A	A											
Assembly B	B											
Paint B		B	B									
Assembly E		E	E	E	E							
Paint E						E						
Assembly C						C	C	C	C	C		
Paint C											C	C
Paint F				F								

- Είναι δυνατή η ολοκλήρωση όλων των εργασιών σε λιγότερο από 4 εβδομάδες.
- Το μηχάνημα B θα είναι έτοιμο την 19^η ημέρα.
- Ναι, τις ημέρες 23 έως και 26 (4 ημέρες), η μηχανή βαφής δεν χρησιμοποιείται.