Δευτέρα, 07/11/2022

$\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$

i) (A, B) ελέγξιμο

ii) $W_c(t) = \int_0^t e^{As} B B^T e^{A^T s} ds > 0$

iii) $\text{rank}(\mathcal{C}) = n$, $\underset{n \times nm}{\mathcal{C}} = [B \ \ AB \ \ \dots \ \ A^{n-1}B]$

ii) $\rightarrow$ iii)

διαφορετικά αν $\text{rank}(\mathcal{C}) < n$

$q \in \mathbb{R}^n : q^T \mathcal{C} = 0 \iff q^T [B \ \ AB \ \ \dots \ \ A^{n-1}B] = 0 \iff$

$\iff [q^T B \ \ q^T AB \ \ \dots \ \ q^T A^{n-1} B] = 0$

$\Rightarrow q^T A^i B = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$

$e^{At} = f_0(t)\mathbb{I} + f_1(t) A + \dots + f_{n-1}(t) A^{n-1} \Rightarrow q^T e^{At} B = 0 \quad \forall t \geq 0$

$\Rightarrow q^T W_c(t) = 0$ άτοπο

iii) $\rightarrow$ ii)

$\text{rank}(\mathcal{C}) = n$, διαφορετικά $\exists t^* > 0, q \neq 0$ τ.ω. $q^T W_c(t^*) = 0$

$\iff q^T W_c(t^*) q = 0$

$\iff \int_0^{t^*} \| q^T e^{As} B \|^2 ds = 0$

$g(t) = q^T e^{At} B$, $g(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t^*]$

$g(0) = 0 \Rightarrow q^T B = 0$

$g'(t)\big|_{t=0} = 0 \Rightarrow q^T AB = 0$

$\vdots$

$g^{(n-1)}(t)\big|_{t=0} = 0 \Rightarrow q^T A^{n-1} B = 0$

$\rightarrow q^T \mathcal{C} = 0$

$\hookrightarrow \text{rank}(\mathcal{C}) < n$, άτοπο

iv) Hautus test: $\underset{n\times(n+m)}{\text{rank}}\begin{bmatrix} A-\lambda I & B \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

iii) $\rightarrow$ iv)

$\text{rank}(\mathcal{C}) = n$

διαφορετικά $\exists \lambda \in \mathbb{C},\ q \in \mathbb{C}^n$

$q^H \begin{bmatrix} A-\lambda I & B \end{bmatrix} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} q^H A = \lambda q^H \\ q^H B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow q^H \mathcal{C} = \Big[\, \underset{0}{q^H B} \quad \underbrace{q^H AB}_{\lambda q^H B \,=\, 0} \quad \dots \quad \underbrace{q^H A^{n-1} B}_{\lambda^{n-1} q^H B \,=\, 0} \,\Big]$$

$\Rightarrow \text{rank}(\mathcal{C}) = 0 < n$ άτοπο.

iv) $\rightarrow$ iii) Άσκηση

v) Αν $\forall \lambda$ ιδιοτιμή του A κ' q αριστερό ιδιοδιάνυσμα, τότε

$q^H A = \lambda q^H,\ q^H B \neq 0$

vi) $\exists\ K \in \mathbb{R}^{m\times n}$: οι ιδιοτιμές του $A+BK$ μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα (με τον περιορισμό οι μιγαδικές να περιλαμβάνουν κ' τον συζυγή τους)

$u = Kx$

$\dot{x} = (A+BK)x$

Συστήματα διακριτού χρόνου

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$x(0)$$
$$\downarrow$$
$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$
$$\downarrow$$
$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + Bu(1) + ABu(0)$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$
$$\downarrow$$
$$x(n) = A^n x(0) + Bu(n-1) + ABu(n-2) + \dots + A^{n-1}Bu(0)$$

$$= A^n x(0) + \underbrace{[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(n) = x_F, \quad x(0) = x_0$$

$$x_f = A^n x_0 + \underbrace{\mathcal{C}}_{n\times nm} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\mathcal{C}^T(\mathcal{C}\mathcal{C}^T)^{-1}}_{\mathcal{C}^{\#}\text{: ψευδοαντίστροφος}} [x_f - A^n x_0]$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u(j)$$

$$W_c(k) = \sum_{j=0}^{k} A^j B B^T (A^T)^j \quad > 0 \qquad \forall k \geq n-1$$

Η ιδιοτιμή λ_i του πίνακα A είναι ελέγξιμη αν $v_i^T B \neq 0$ με $v_i^T A = \lambda_i v^T$

(A, B) ελέγξιμο ανν όλες οι ιδιοτιμές είναι ελέγξιμες.

(A, B) σταθεροποιήσιμο (stabilizable)
αν $\text{rank}[A-\lambda I \quad B] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+$

Αν (A, B) σταθεροποιήσιμο, τότε $\exists K$ τ.ω. $\text{Re}(\lambda_i(A+BK)) < 0, \forall i$ (ΣΧ)
$|\lambda_i(A+BK)| < 1, \forall i$ (ΔΧ)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$y \to y^*$ επιθυμητό διαν. εξόδου

Έστω (A,B) σταθεροποιήσιμο

$u = Kx + r$

$\dot{x} = (A+BK)x + Br$

Στο σημείο ισορροπίας: $(A+BK)x^* + Br = 0$

$$\boxed{x^* = -(A+BK)^{-1}Br}$$

$\tilde{x} = x - x^*$

$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \cancel{\dot{x}^*}^{0} = (A+BK)x + Br$

$\hookrightarrow -(A+BK)x^*$

$\dot{\tilde{x}} = (A+BK)\tilde{x} \Rightarrow \tilde{x}(t) = e^{(A+BK)t}\tilde{x}(0) \to 0$

$y \to -C(A+BK)^{-1}Br$

Αν υπάρχει r, τω. $y^* = -C(A+BK)^{-1}Br$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$y = x_1 \to y^*$

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathcal{C}) = -1 \neq 0$

$\Rightarrow (A,B)$ ελέγξιμο

$[K_1 \; K_2]$

$u = Kx + r = K_1x_1 + K_2x_2 + r$

Θέλουμε $\lambda(A+BK) \in \{-1, -2\}$

$\chi_d(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, $\chi_d(\lambda) = \det(\lambda I - (A+BK)) =$

$$BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[K_1 \;\; K_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \qquad = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -K_1 & \lambda - K_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - K_2\lambda - K_1$$

$\Rightarrow K_1 = -2, \; K_2 = -3$

$x^* = -(A+BK)Br$

$x_2^* = 0$

$K_1 x_1^* + \cancel{K_2 x_2^*}^{=0} + r = 0$

$x_1^* = -\frac{r}{K_1} \Rightarrow x_1^* = \frac{r}{2}$

$\boxed{r = y^*/2}$ → η τεχνική αυτή δεν είναι robust
επηρεάζεται από διαταραχές

$\int \rightarrow \frac{1}{s}$

Έστω ότι έχουμε διαταραχές.

$\dot{x}_1 = x_2 + d_1$, d_1, d_2 σταθερές διαταραχές άγνωστες

$\dot{x}_2 = d_2 + u$

$y = x_1$

$u = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_I \underbrace{\int_0^t (y(\tau) - y^*)\, d\tau}_{z(t)}$ → $\dot{z} = y - y^* = x_1 - y^*$

$x_{ag} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix}$, $\dot{x}_{ag} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + d_1 \\ d_2 + K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_I z \\ x_1 - y^* \end{bmatrix} =$

επαυξημένος

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_I \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ -y^* \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_I \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{ag}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{ag}} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_I \end{bmatrix}$$

(A_{ag}, B_{ag}) stabilizable : $\exists K_{ag}$: $Re\{\lambda_i(A_{ag} + B_{ag} K_{ag})\} < 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{C}_{ag} = \begin{bmatrix} B_{ag} & A_{ag}B_{ag} & \underset{A_{ag}(A_{ag}B_{ag})}{A_{ag}^2 B_{ag}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ελέγξιμο}$$

$$x_1^* = y^*$$
$$x_2^* = -d_1$$
$$z^* = -\frac{1}{K_I}\left(d_2 + K_1 y^* - K_2 d_1\right)$$

Γενίκευση

$\dot{x} = Ax + Bu + d$, $d \in \mathbb{R}^n$ άγνωστη σταθερή διαταραχή

$$u = K_p x + K_I \underbrace{\int_0^t (y - y^*)\, d\tau}_{z}$$

$$x_{aug} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + BK_p x + BK_I z + d \\ Cx - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_p & BK_I \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ -y^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A + BK_p & BK_I \\ C & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{A_{aug}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{aug}} \begin{bmatrix} K_p & K_I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{aug} - \lambda I_{n+p} & B_{aug} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \lambda I_n & 0 & B \\ C & -\lambda I_p & 0 \end{bmatrix}$$

(A_{aug}, B_{aug}) σταθεροποιήσιμο $\Leftrightarrow$ (A, B) σταθεροποιήσιμο

$+ \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p$