Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

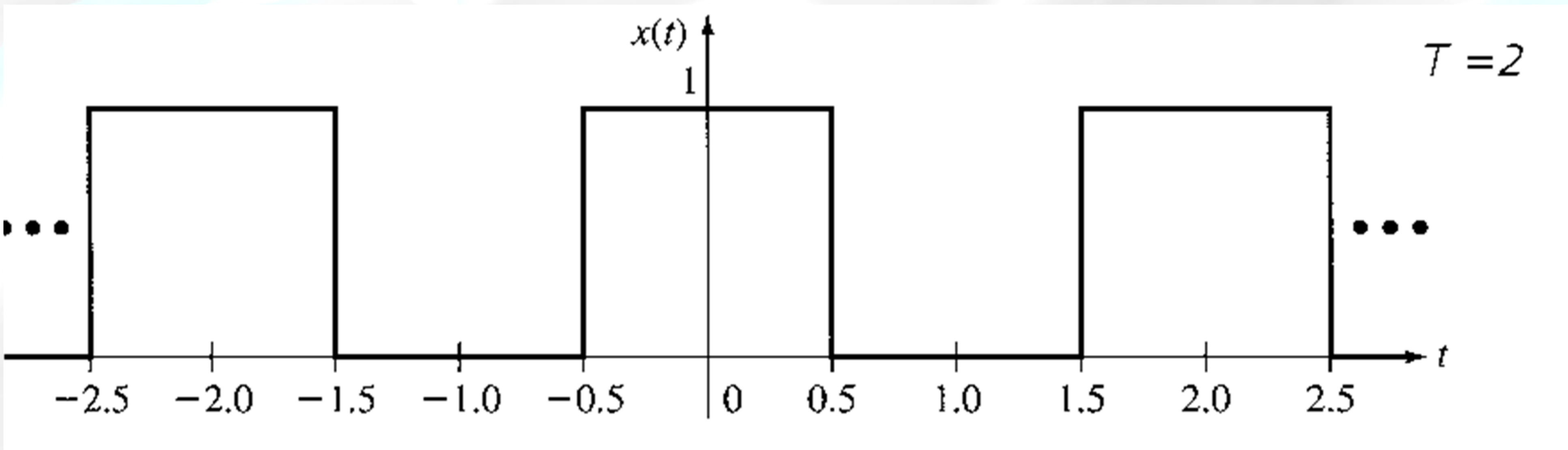
Σειρές Fourier
Μετασχηματισμός Fourier
Παλμοσειρά/Παλμός

Αθανάσιος Δ. Παναγόπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

Σειρές Fourier Περιοδικών Σημάτων

- Έστω $x(t)$ ένα συνεχές περιοδικό σήμα με περίοδο T,
- Παράδειγμα η παλμοσειρά

$$x(t+T)=x(t), \quad \forall t \in R$$



Συνθήκες Dirichlet

- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, περιγράφεται με τις Σειρές Fourier εάν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο σε κάθε περίοδο δηλαδή:
$$\int_{a}^{a+T} |x(t)|\, dt < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$
2. $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων μέσα σε μια περίοδο
3. $x(t)$ έχει μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών μέσα σε μια περίοδο

Σειρές Fourier

- Το $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

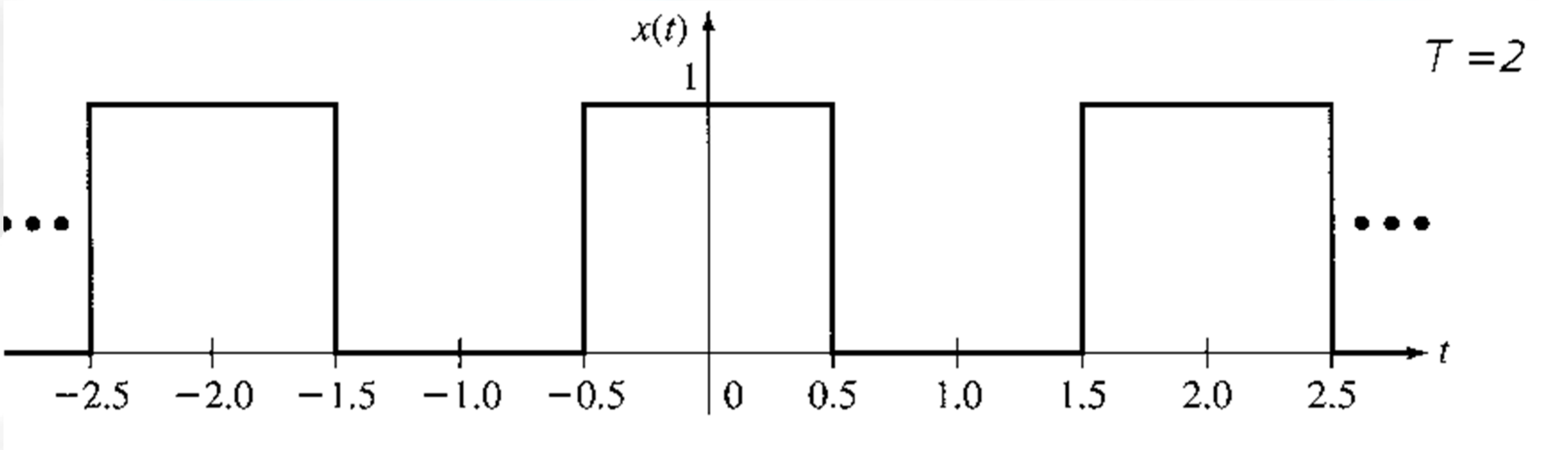
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

όπου $\omega_0 = 2\pi / T$ είναι η θεμελιώδης συχνότητα (*rad/sec*) του σήματος και

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

c_0 καλείται σταθερά του σήματος ή η DC συνιστώσα του $x(t)$

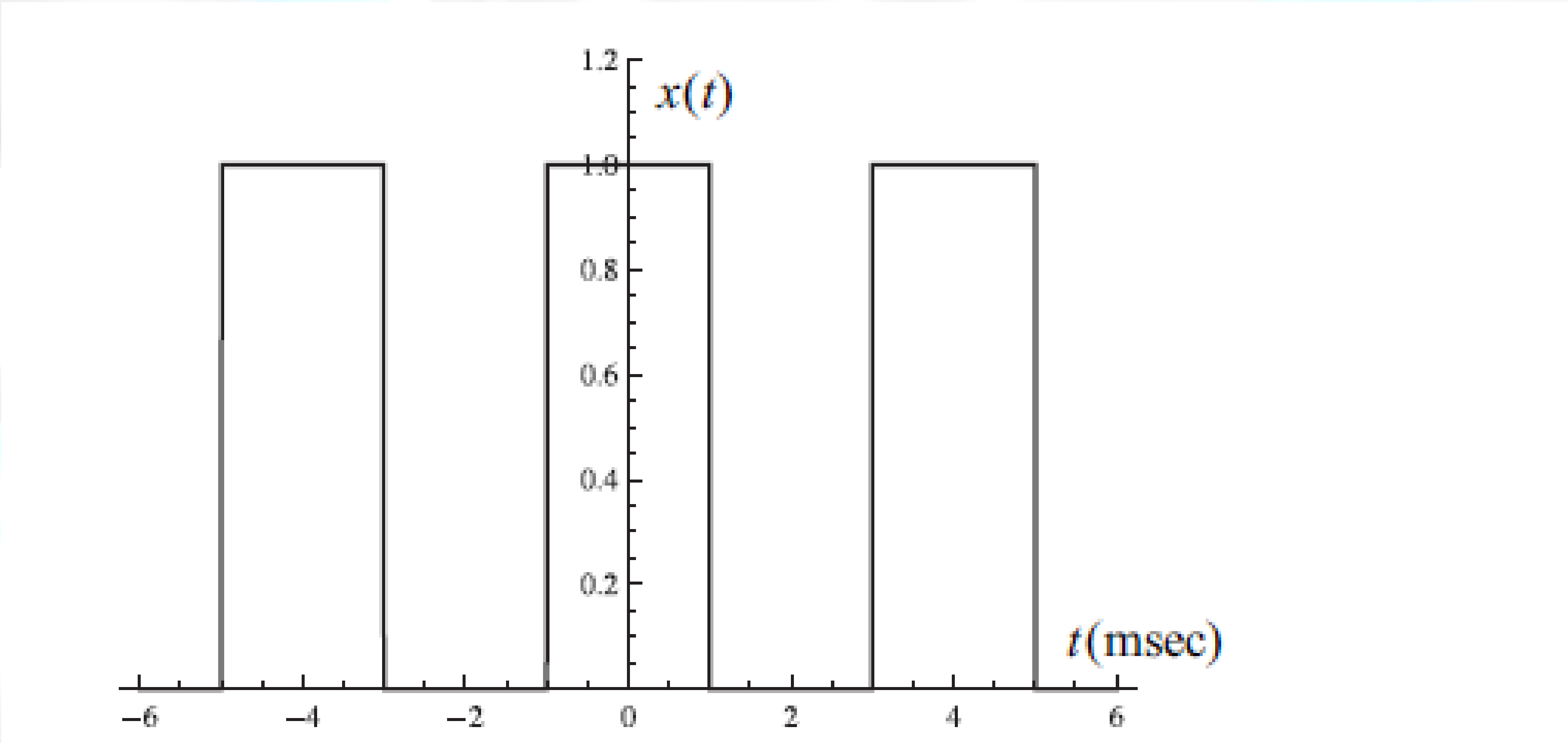
Παράδειγμα: Παλμοσειρά



$$T = 2 \qquad \omega_0 = 2\pi / 2 = \pi$$

Προφανώς το $x(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet και μπορεί να αναπαρασταθεί με σειρές Fourier

Παράδειγμα: Παλμοσειρά



$T_0 = 4\text{msec}$ $f_0 = 250\text{Hz}$.

Παράδειγμα: Παλμοσειρά

$$x_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos 2\pi k f_0 t dt - j\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \sin 2\pi k f_0 t dt$$

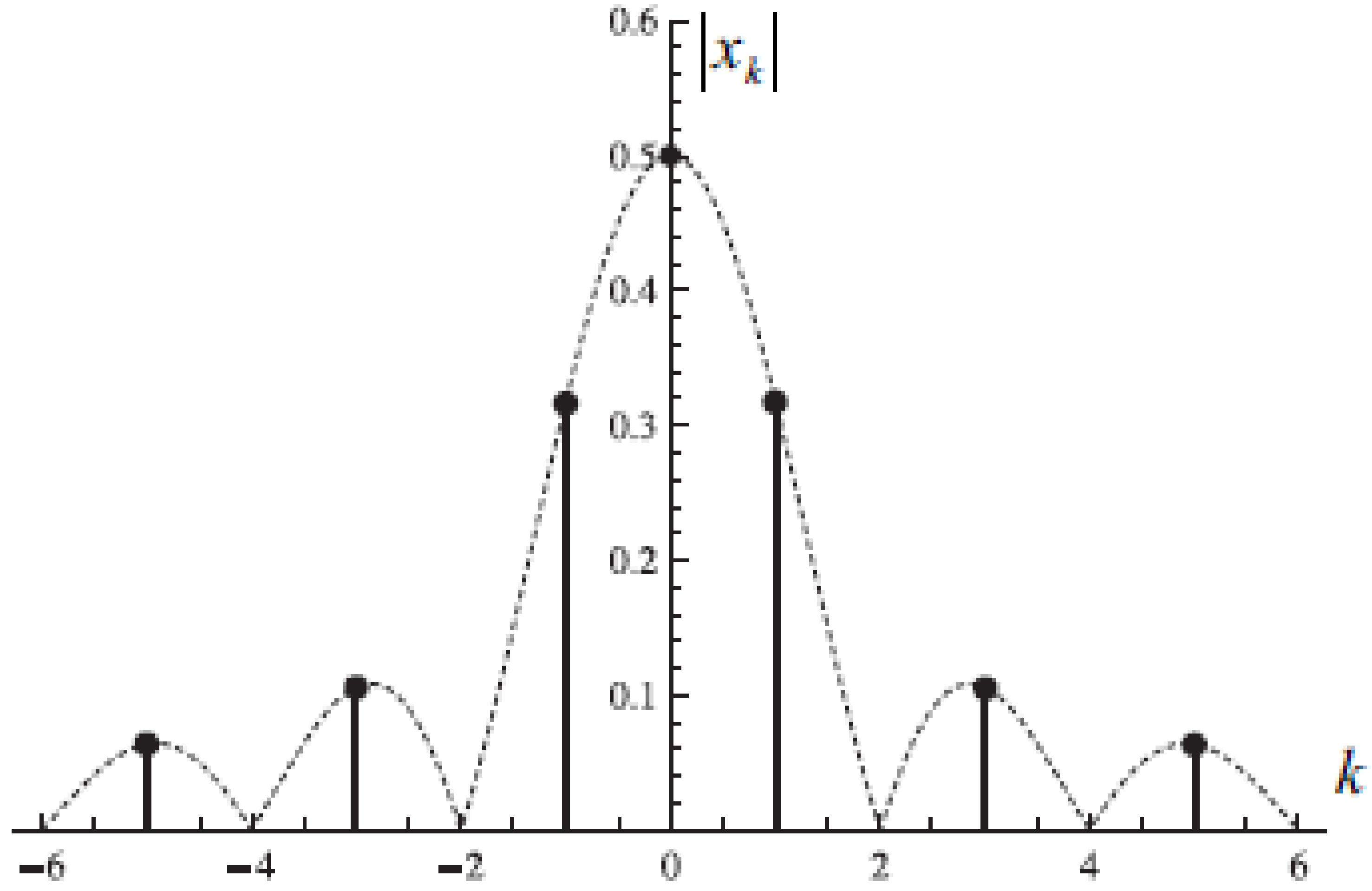
$$= \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k\pi} - 0 = \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k\pi}.$$

$$\mathrm{sinc} y = \frac{\sin \pi y}{\pi y}$$

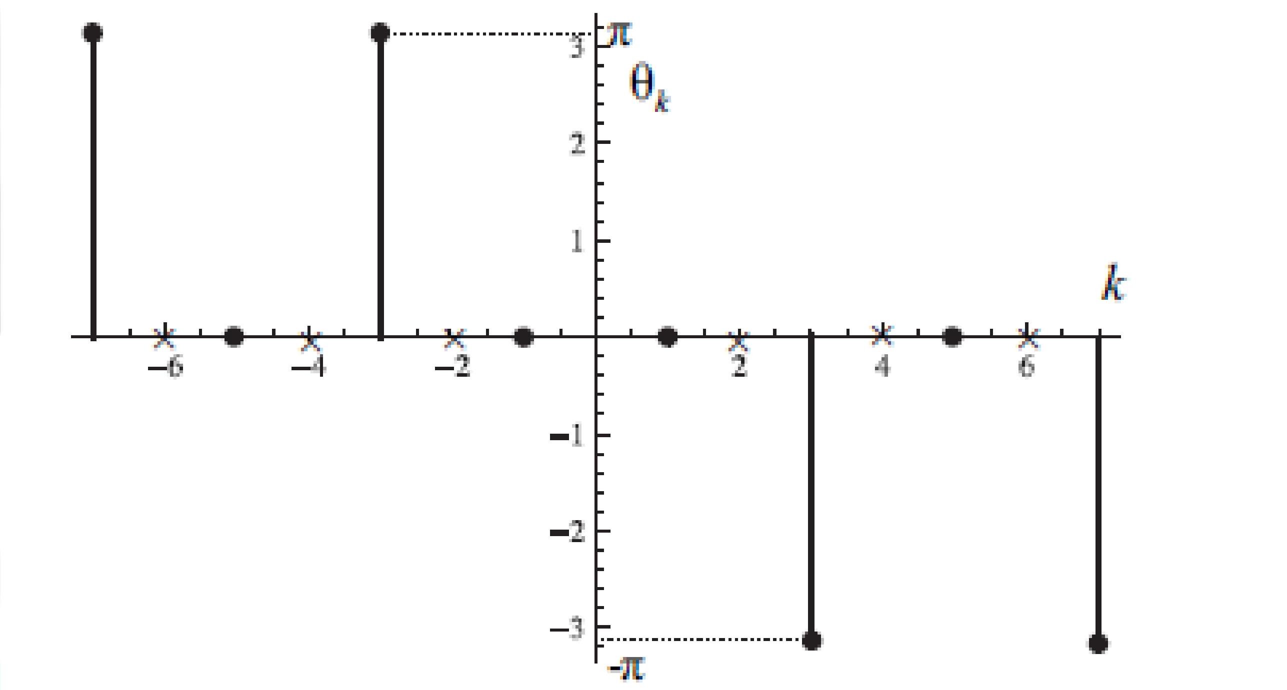
$$x_k = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\frac{k}{2}.$$

- Το $x(t)$ έχει φασματικό περιεχόμενο στις διακριτές τιμές συχνοτήτων kf_0. Ένα τέτοιο φάσμα ονομάζεται *διακριτό*.
- Η τιμή DC του $x(t)$ είναι 0.5.
- Το γράφημα του $|x_k|$ είναι συμμετρικό ως προς k ενώ το αντίστοιχο του θ_k είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων.
- Οι τιμές της θ_k δεν ορίζονται (σημειώνονται με το σύμβολο x) για $k = \pm 2, \pm 4, \ldots$, αφού το $|x_k|$ είναι μηδέν για τις τιμές αυτές.

Παράδειγμα: Παλμοσειρά

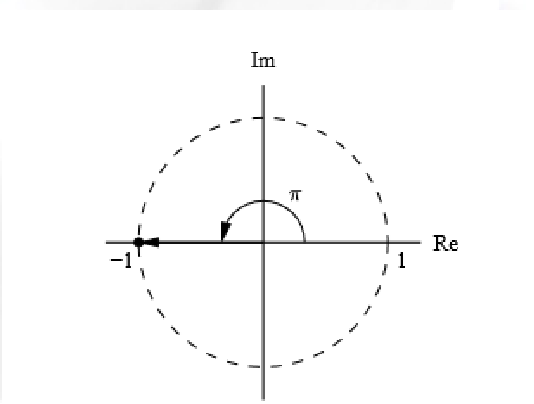


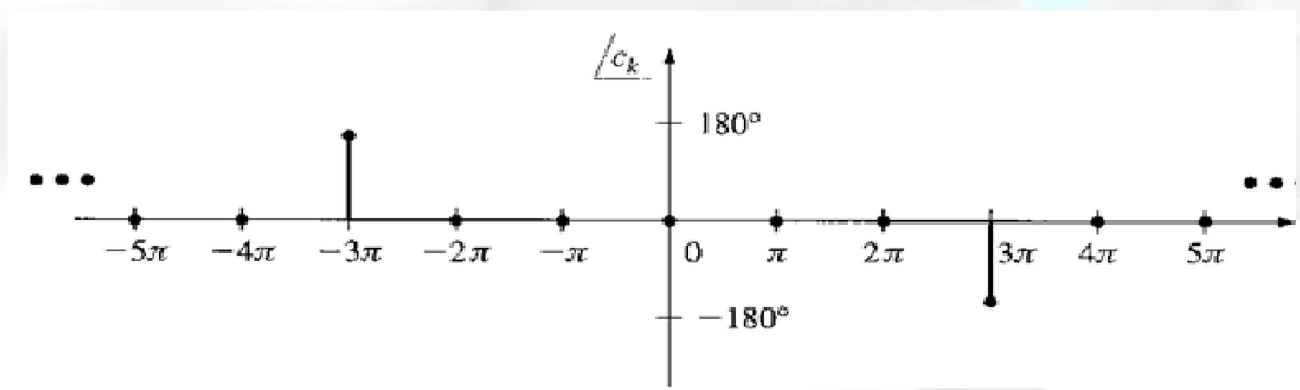
Παράδειγμα: Παλμοσειρά



$$1e^{j\pi} = -1$$

$$1e^{-j\pi} = -1$$





Παράδειγμα: Παλμοσειρά

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα τότε

$$x_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = x_k^*$$

όπου x_k^* είναι το μιγαδικό συζυγές του x_k.

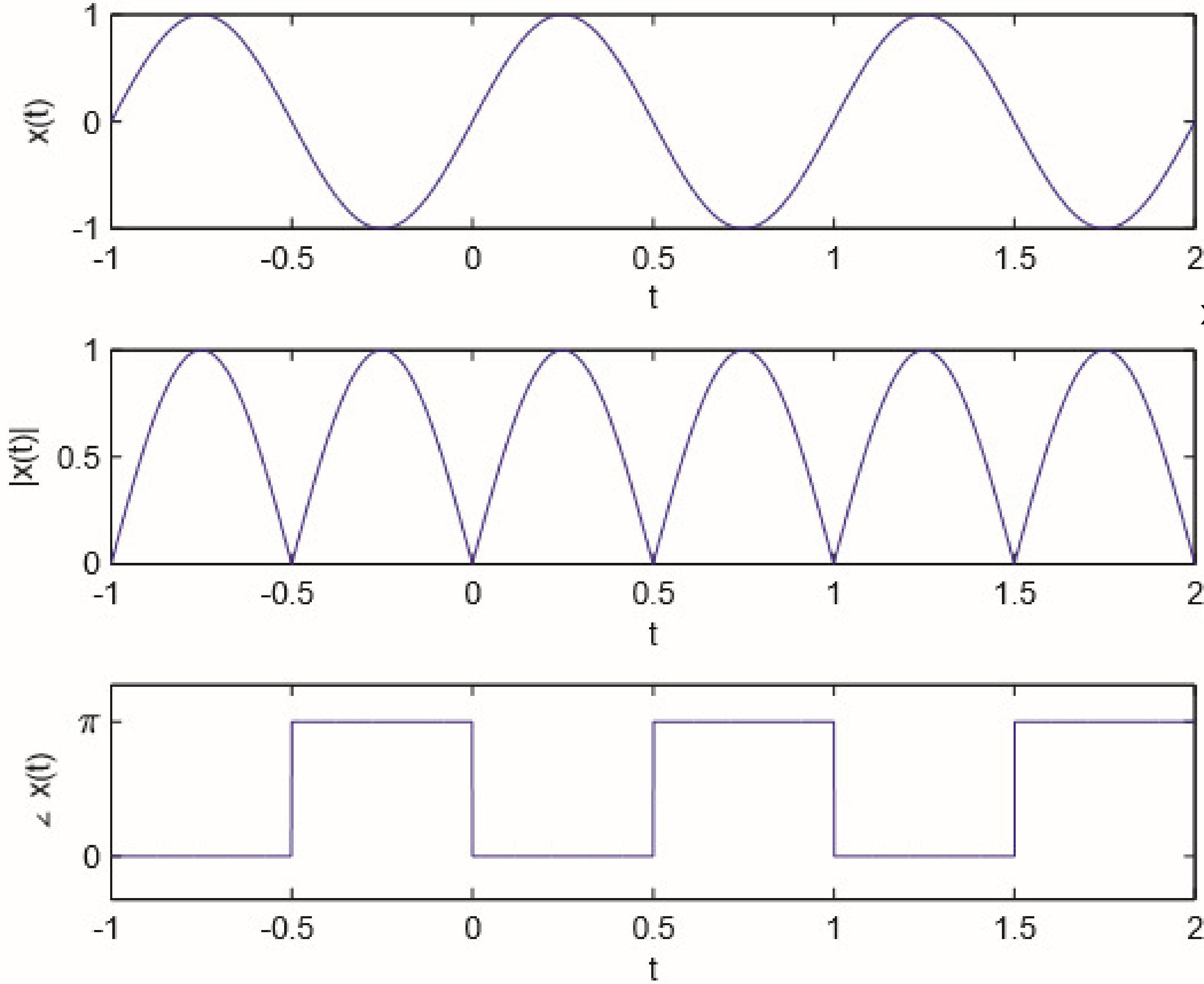
Έτσι ισχύει

$$|x_{-k}| = |x_k|, \; \theta_{-k} = -\theta_k.$$

Αν το $x(t)$ είναι άρτιο περιοδικό σήμα τότε οι σταθερές x_k είναι πραγματικοί αριθμοί και άρτιοι ως προς k, δηλαδή $x_{-k} = x_k$.

Αν το $x(t)$ είναι περιττό περιοδικό σήμα, τότε οι σταθερές x_k είναι φανταστικοί αριθμοί και περιττοί ως προς k, δηλαδή ισχύει $x_{-k} = -x_k$.

Παράδειγμα: Παλμοσειρά



$x(t) = \sin(2\pi t)$,

Τριγωνομετρικές Σειρές Fourier

- Χρησιμοποιώντας τη Formula του Euler μπορούμε να

σαν
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = \underset{\text{dc συνιστώσα}}{c_0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|\cos(k\omega_0 t + \angle x_k)}_{k\text{-th αρμονική}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

αρκεί το $x(t)$ να είναι πραγματικό σήμα.

- Αυτή η έκφραση καλείται τριγωνομετρικές σειρές Fourier $x(t)$

Τριγωνομετρικές Σειρές Fourier

- Η έκφραση

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Μπορεί να γραφτεί ως

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττός}}}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \cos\left(k\pi t + \left[(-1)^{(k-1)/2} - 1 \right] \frac{\pi}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Φαινόμενο Gibbs

- Δεδομένου ένα θετικό περιττό ακέραιο *N*, ορίζουμε το *N*-th μερικό άθροισμα

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\ \text{περιττός}}}^{N} \frac{2}{k\pi} \cos\left(k\pi t + \left[(-1)^{(k-1)/2} - 1 \right] \frac{\pi}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

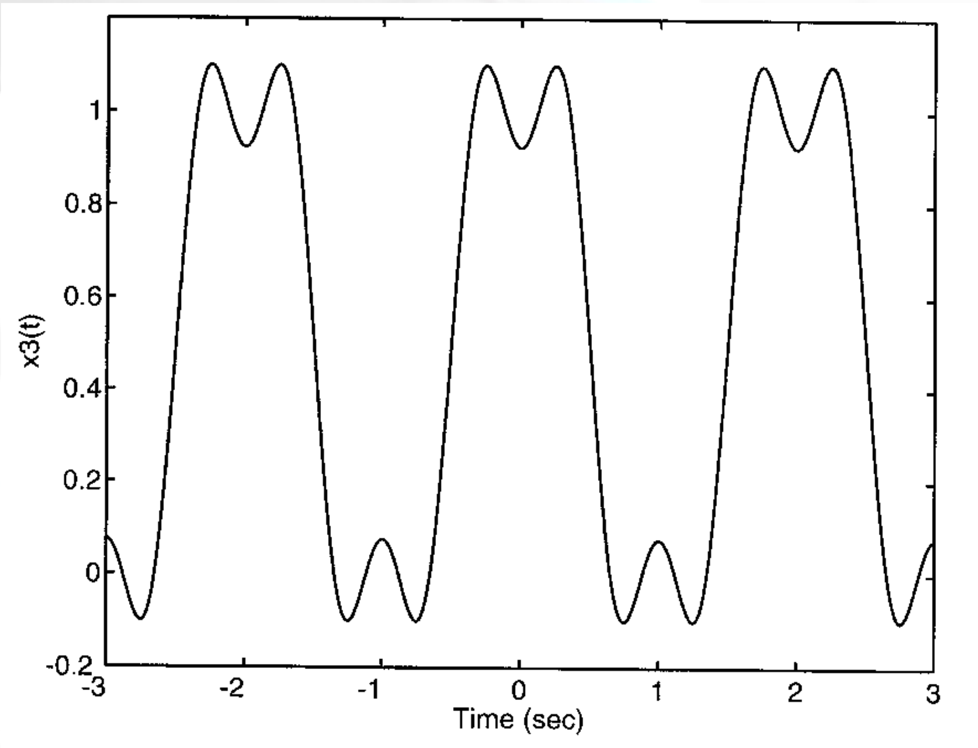
- Σύμφωνα με το Fourier πρέπει:

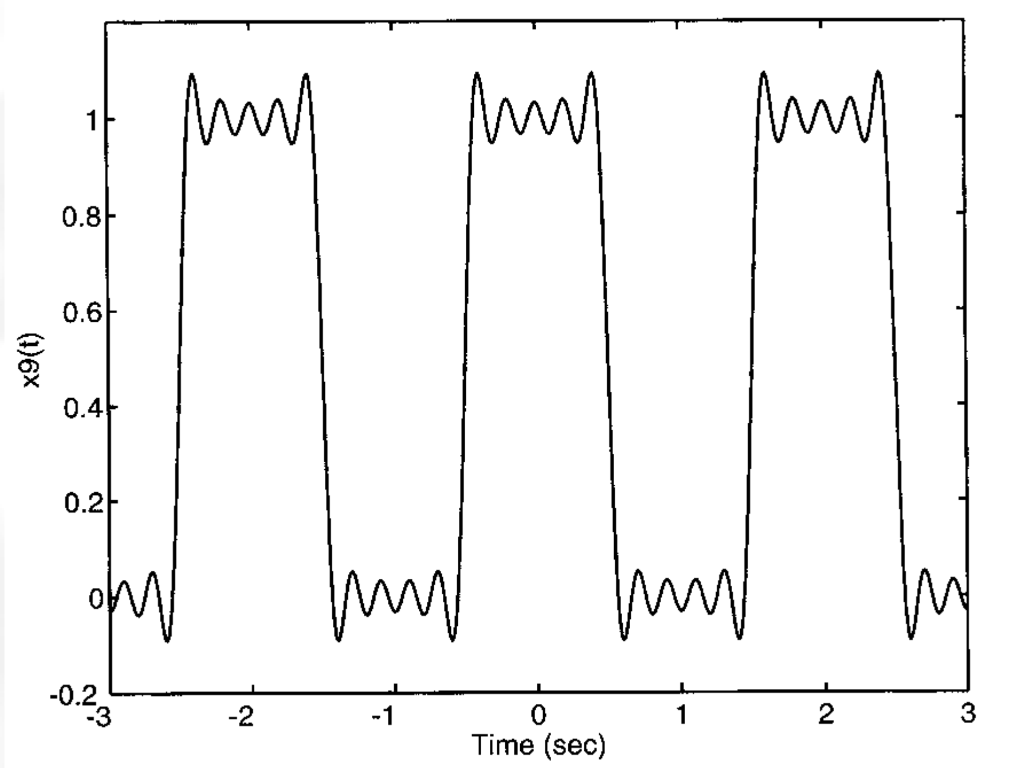
$$\lim_{N \to \infty} | x_N(t) - x(t) | = 0$$

Φαινόμενο Gibbs

$x_3(t)$

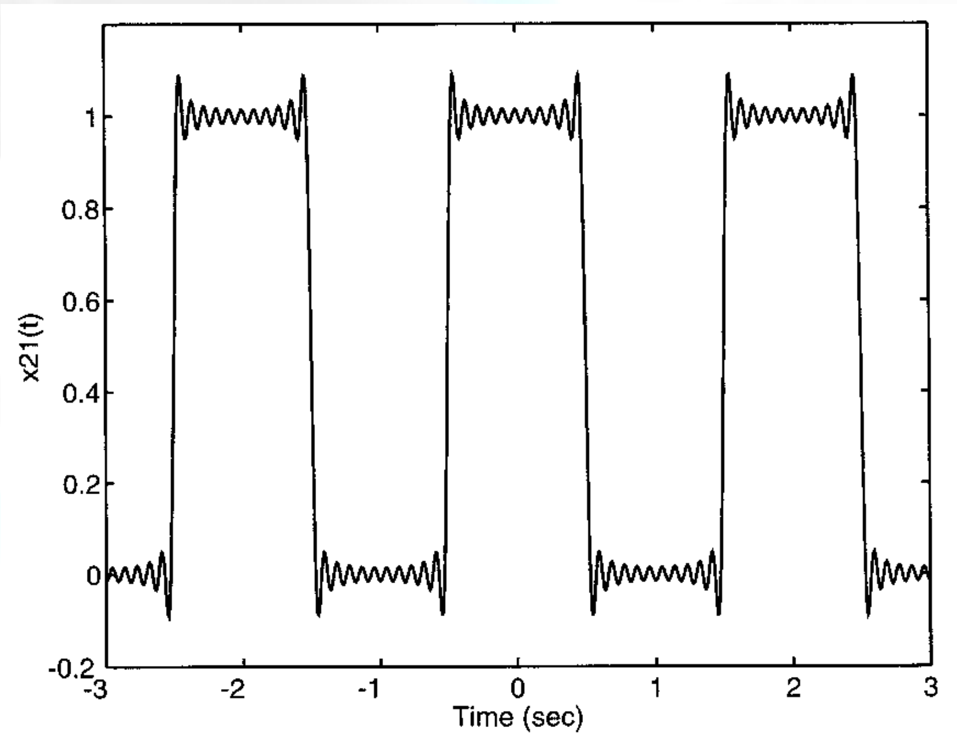
$x_9(t)$



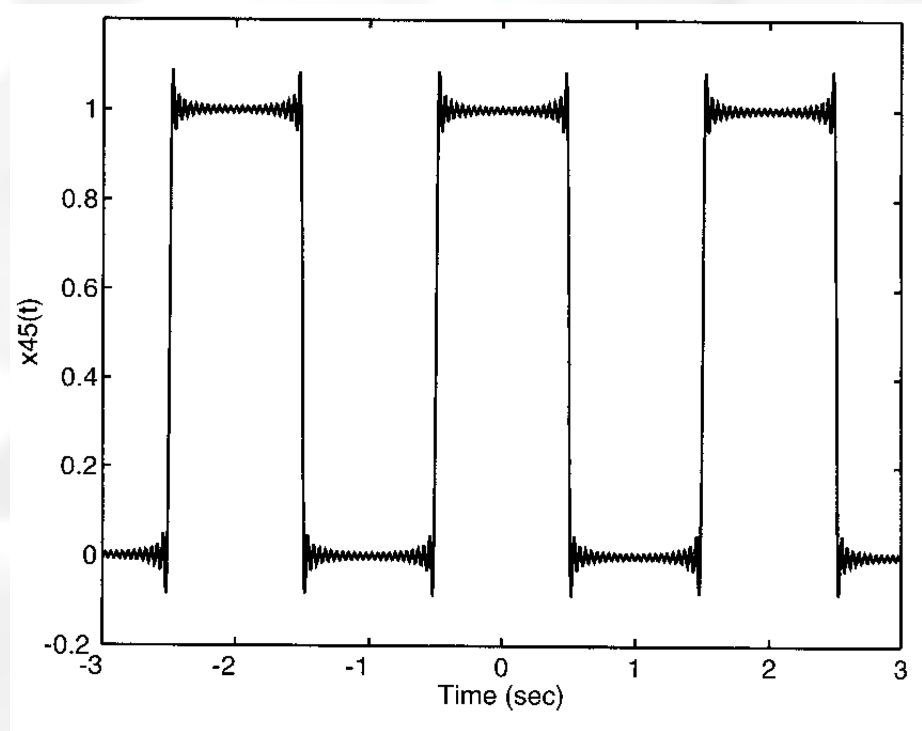


Φαινόμενο Gibbs

$x_{21}(t)$



$x_{45}(t)$



Υπάρχει μια κυμάτωση 9 % σε σχέση με το μέγιστο πλάτος τους σήματος

Θεώρημα του Parseval

- Έστω $x(t)$ ένα περιοδικο σήμα με περίοδο T_0
- Η μέση ισχύς *average power* P του σήματος ορίζεται:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t)\,dt$$

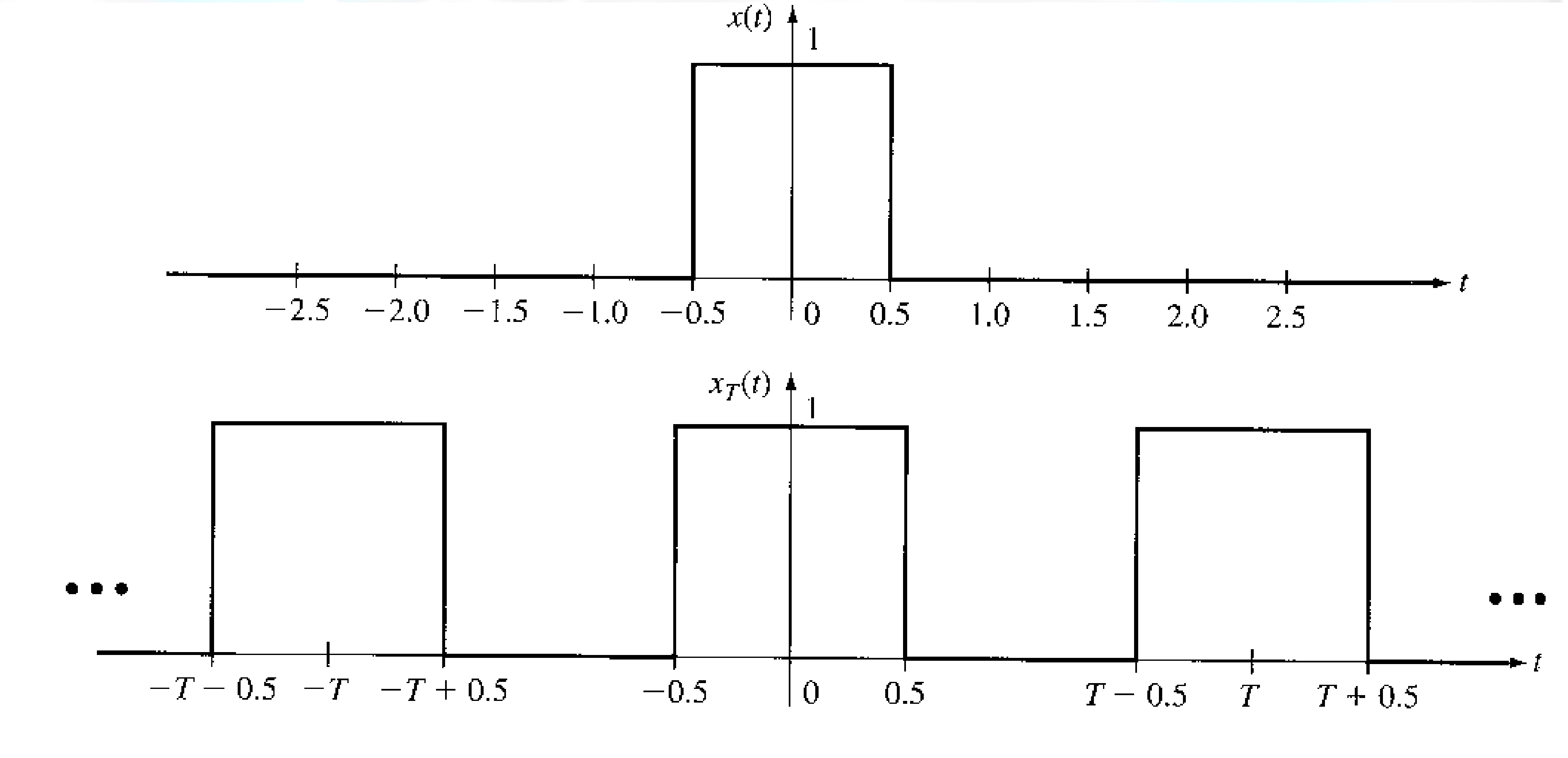
- Αν χρησιμοποιήσουμε το $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2$$

Παλμός και Παλμοσειρά

$x(t)$

$x_T(t)$



$$x(t) = \lim_{T \to \infty} x_T(t)$$

Παλμός και Παλμοσειρά

- Εφόσον $x_T(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο *T*, μπορούμε να γράψουμε :

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

όπου

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Παλμός και Παλμοσειρά

- Τι γίνεται για το $x_T(t)$ όταν $T \to \infty$?
- Για $k = 0$: $c_0 = 1/T$
- Για $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$c_k = \frac{2}{k\omega_0 T}\sin\left(\frac{k\omega_0}{2}\right) = \frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{k\omega_0}{2}\right)$$

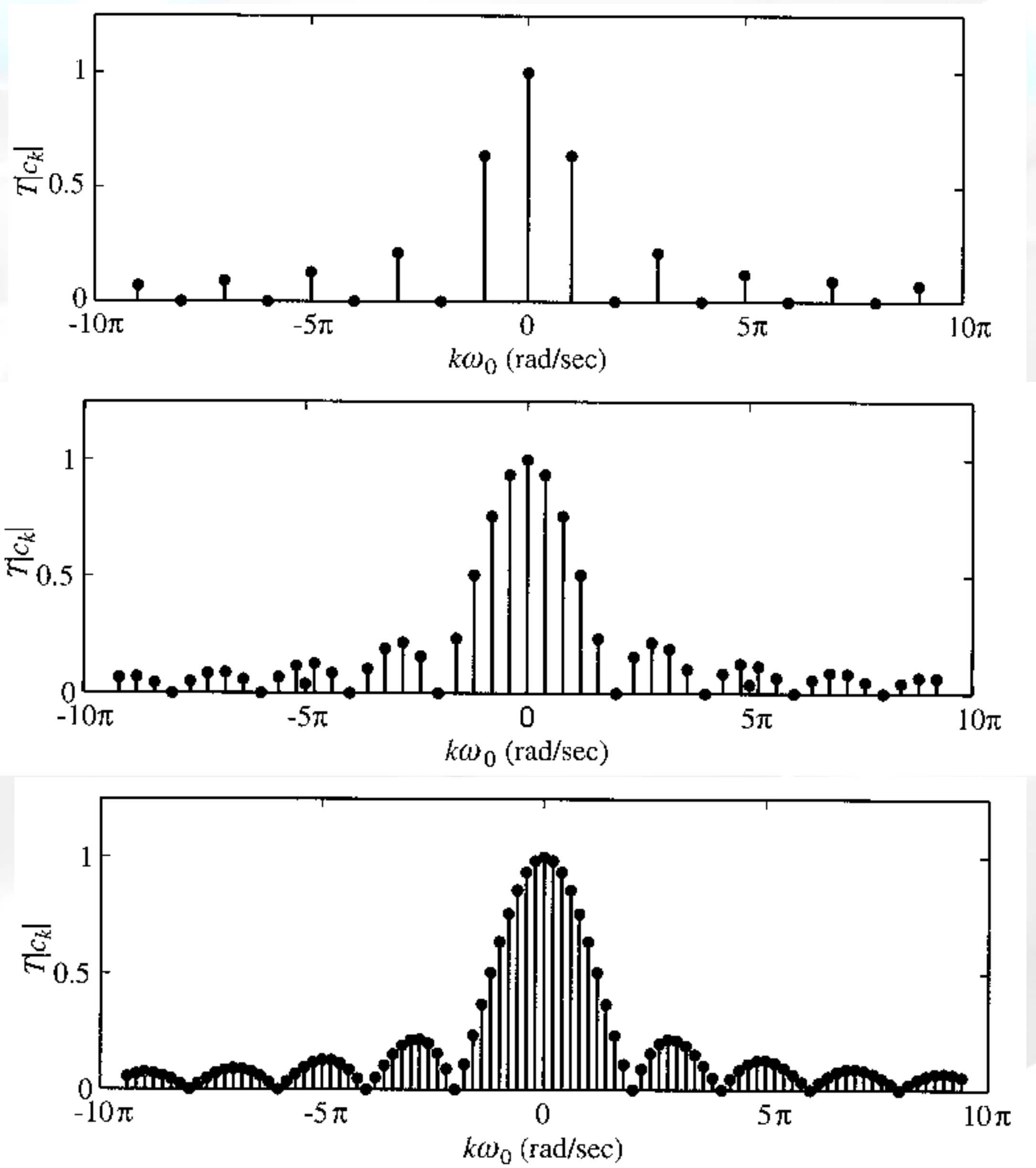
$\omega_0 = 2\pi / T$

Παλμός και Παλμοσειρά

Διαγράμματα $T\,|\,c_k\,|$

$$\omega = k\omega_0$$

$$T = 2,5,10$$

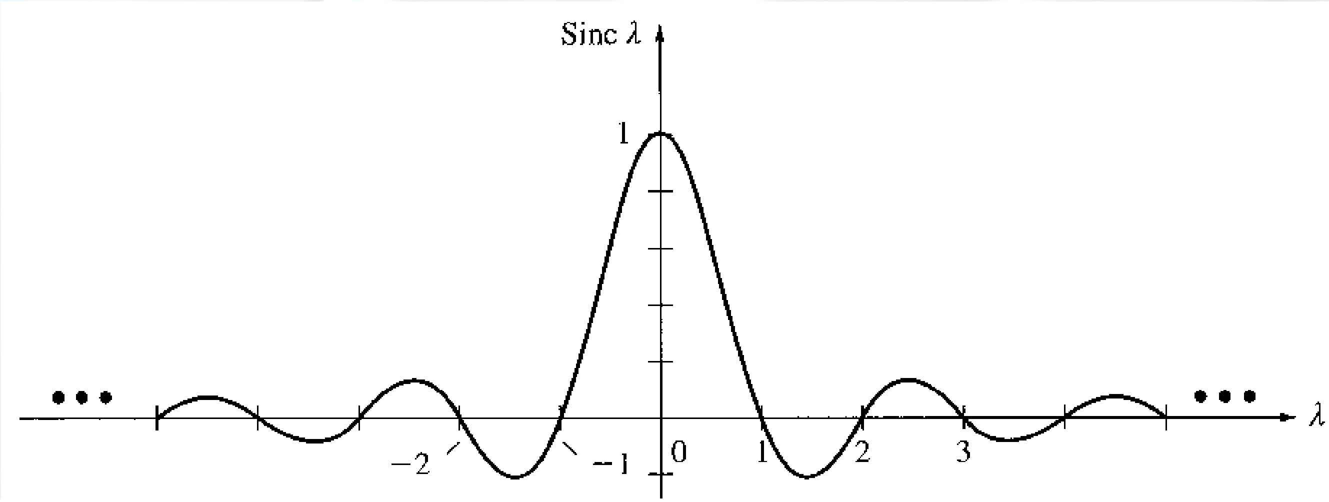


Παλμός και Παλμοσειρά

Αποδεικνύεται εύκολα:

$$\lim_{T\to\infty} T \cdot c_k = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

όπου $\operatorname{sinc}(\lambda) \doteq \dfrac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}$



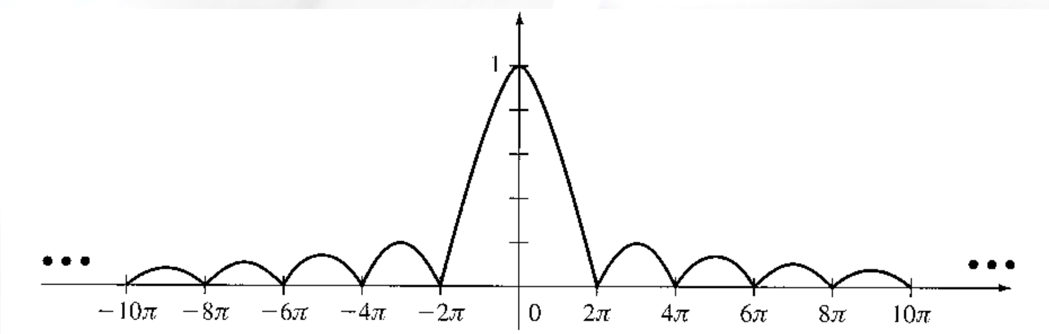
Παλμός και Παλμοσειρά

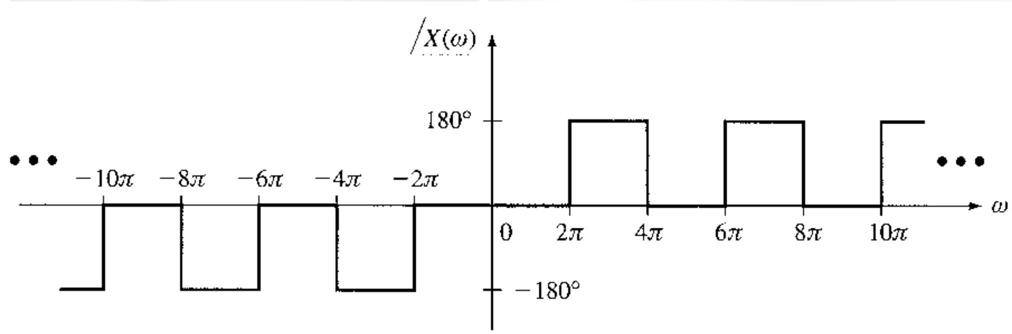
- Ο Μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παλμού για είναι όριο του Tc_k για $T \to \infty$

$$X(\omega) = \lim_{T \to \infty} Tc_k = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

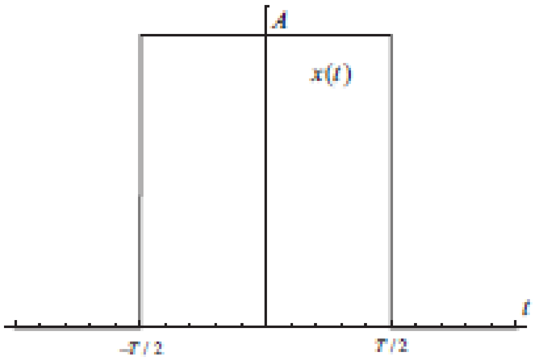
$|X(\omega)|$

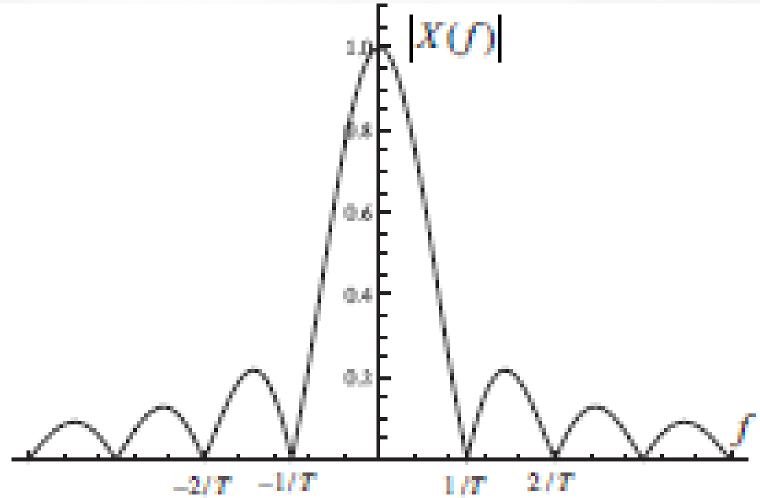
$\arg(X(\omega))$

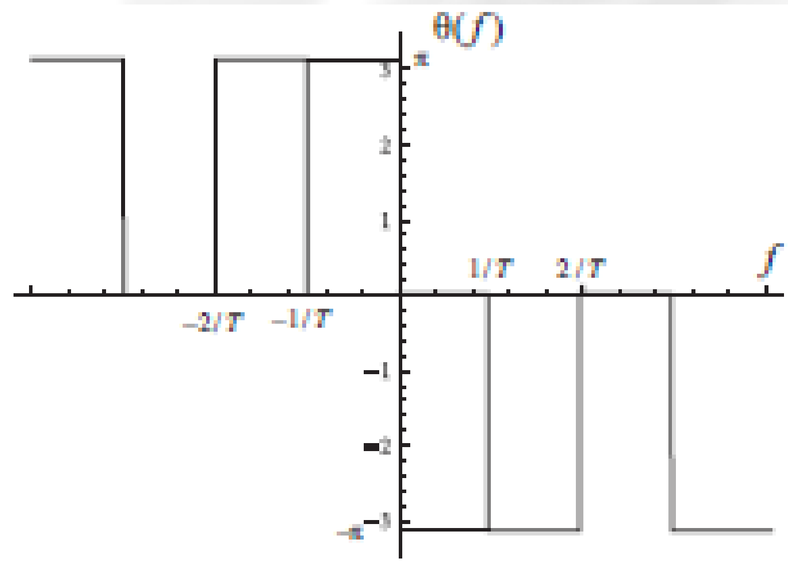




Παλμός και Παλμοσειρά







Μετασχηματισμός Fourier

- Για ένα σήμα $x(t)$, ο μετασχηματισμός *Fourier* $X(\omega)$ ορίζεται ως:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

- Ένα σήματα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό *Fourier* εάν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Μετασχηματισμός Fourier

- Το ολοκλήρωμα συγκλίνει εάν:

  - Το σήμα $x(t)$ έχει “καλή συμπεριφορά”
  - Το σήμα $x(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο δηλαδή,

$$\int_{-\infty}^{\infty} | x(t) | \, dt < \infty$$

- Η καλή συμπεριφορά σημαίνει πεπερασμένος αριθμός ασυνεχειών, μέγιστα και ελάχιστα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Παράδειγμα: DC/ Σταθερό Σήμα

- Έστω ένα σήμα: $x(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}$
- Προφανώς δεν ικανοποιεί τις απαιτήσεις αφού:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt = \infty$$

- Το σταθερό σήμα δεν έχει Μ/Σ Fourier στη συνηθισμένη έννοια.

- Διαθέτει Μ/Σ Fourier με τη γενική έννοια.

Παράδειγμα : Εκθετικό σήμα

- Έστω το σήμα $x(t)=e^{-bt}u(t), \quad b\in\mathbb{R}$
- Ο Μ/Σ Fourier δίνεται από

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt}u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-(b+j\omega)t}dt=-\frac{1}{b+j\omega}\Big[e^{-(b+j\omega)t}\Big]_{t=0}^{t=\infty}$$

Παράδειγμα : Εκθετικό σήμα

- Εάν $b<0$, το $X(\omega)$ δεν υπάρχει.
- Εάν $b=0$ $x(t)=u(t)$ τότε $X(\omega)$ δεν υπάρχει με την συνηθισμένη έννοια.
- Εάν $b>0$:

$$X(\omega)=\frac{1}{b+j\omega}$$

Φάσμα Πλάτους

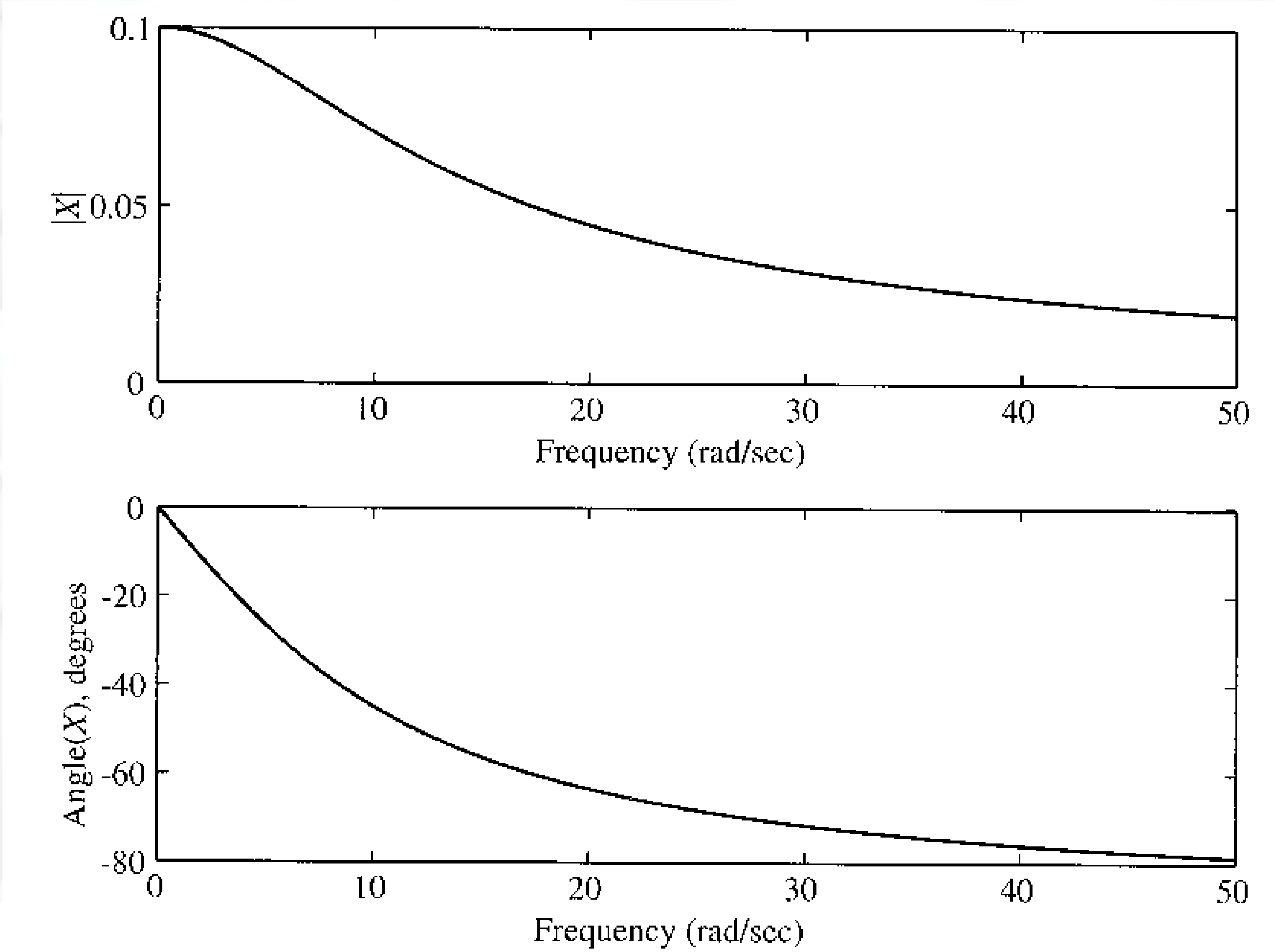
$$|X(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{b^2+\omega^2}}$$

Φάσμα Φάσης

$$\arg(X(\omega))=-\arctan\left(\frac{\omega}{b}\right)$$

Παράδειγμα : Εκθετικό σήμα

$$x(t) = e^{-10t}u(t)$$



Μετασχηματισμός Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

- Εφόσον $X(\omega)$ είναι εν γένει μιγαδικός και χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler.

$$X(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t) dt}_{R(\omega)} + j \underbrace{\left(-\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t) dt \right)}_{I(\omega)}$$

$$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

Πολική μορφή του Μ/Σ Fourier

$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ μπορεί να εκφραστεί:

όπου $$X(\omega) = |X(\omega)| \exp(j \arg(X(\omega)))$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

$$\arg(X(\omega)) = \arctan\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right)$$

M/Σ Fourier Πραγματικών Σημάτων

- Εάν $x(t)$ παίρνει πραγματικές τιμές $X(-\omega) = X^*(\omega)$

Ερμιτιανή

- Δηλαδή:

Συμμετρία

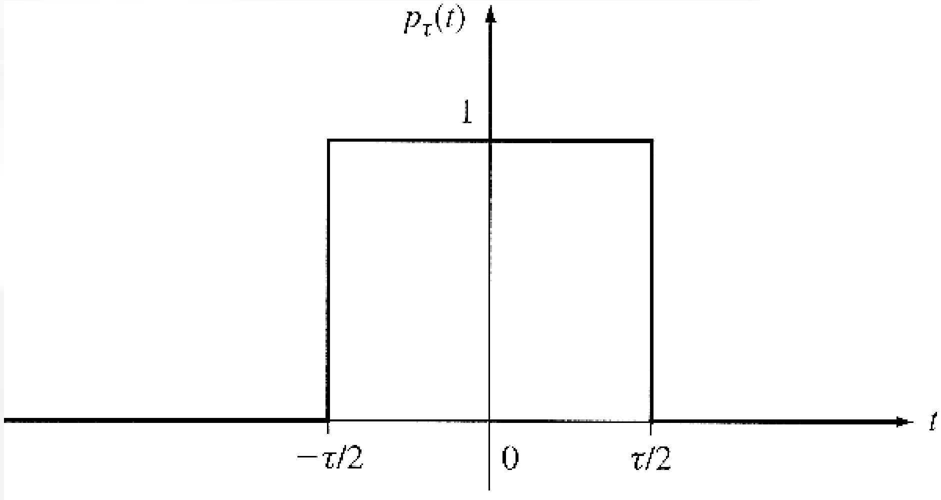
$$X^*(\omega) = |X(\omega)| \exp(-j \arg(X(\omega)))$$

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|$$

$$\arg(X(-\omega)) = -\arg(X(\omega))$$

Παλμός και Παλμοσειρά

- Έστω το άρτιο σήμα:

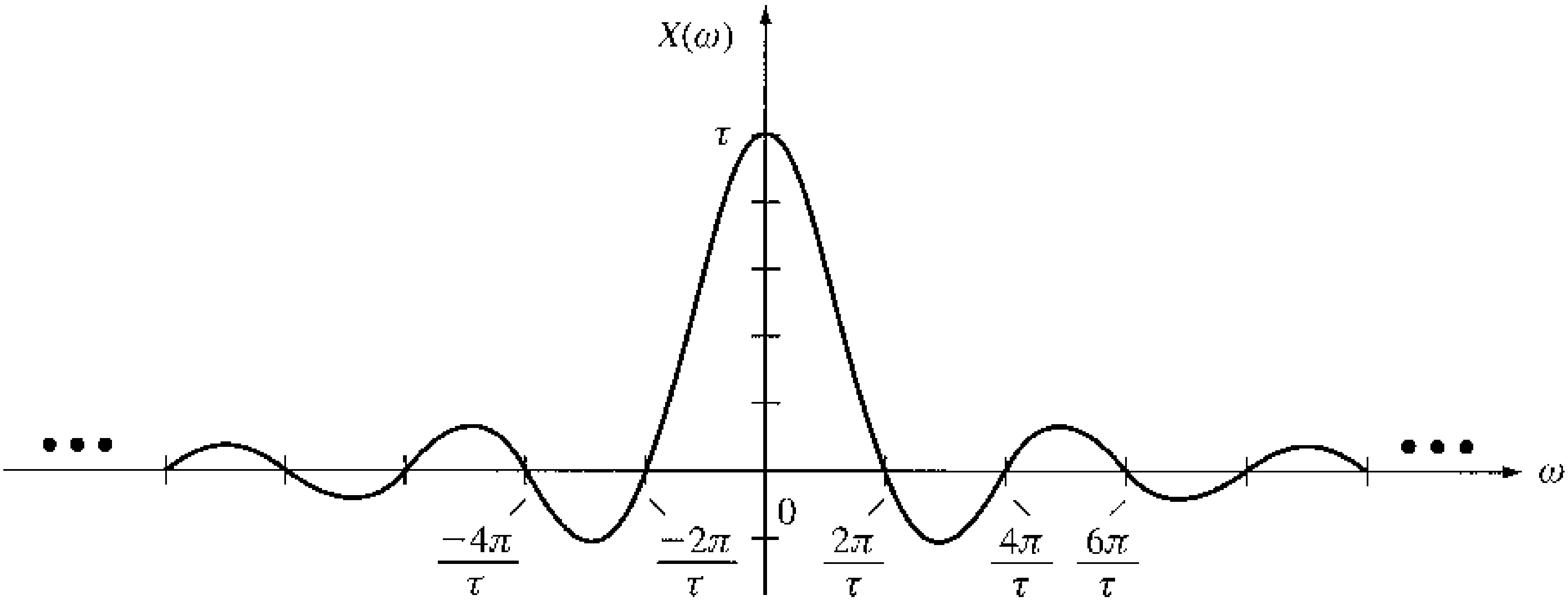


$$X(\omega) = 2\int_0^{\tau/2} (1)\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{\omega}\left[\sin(\omega t)\right]_{t=0}^{t=\tau/2} = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$= \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Παλμός και Παλμοσειρά

$$X(\omega) = \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$



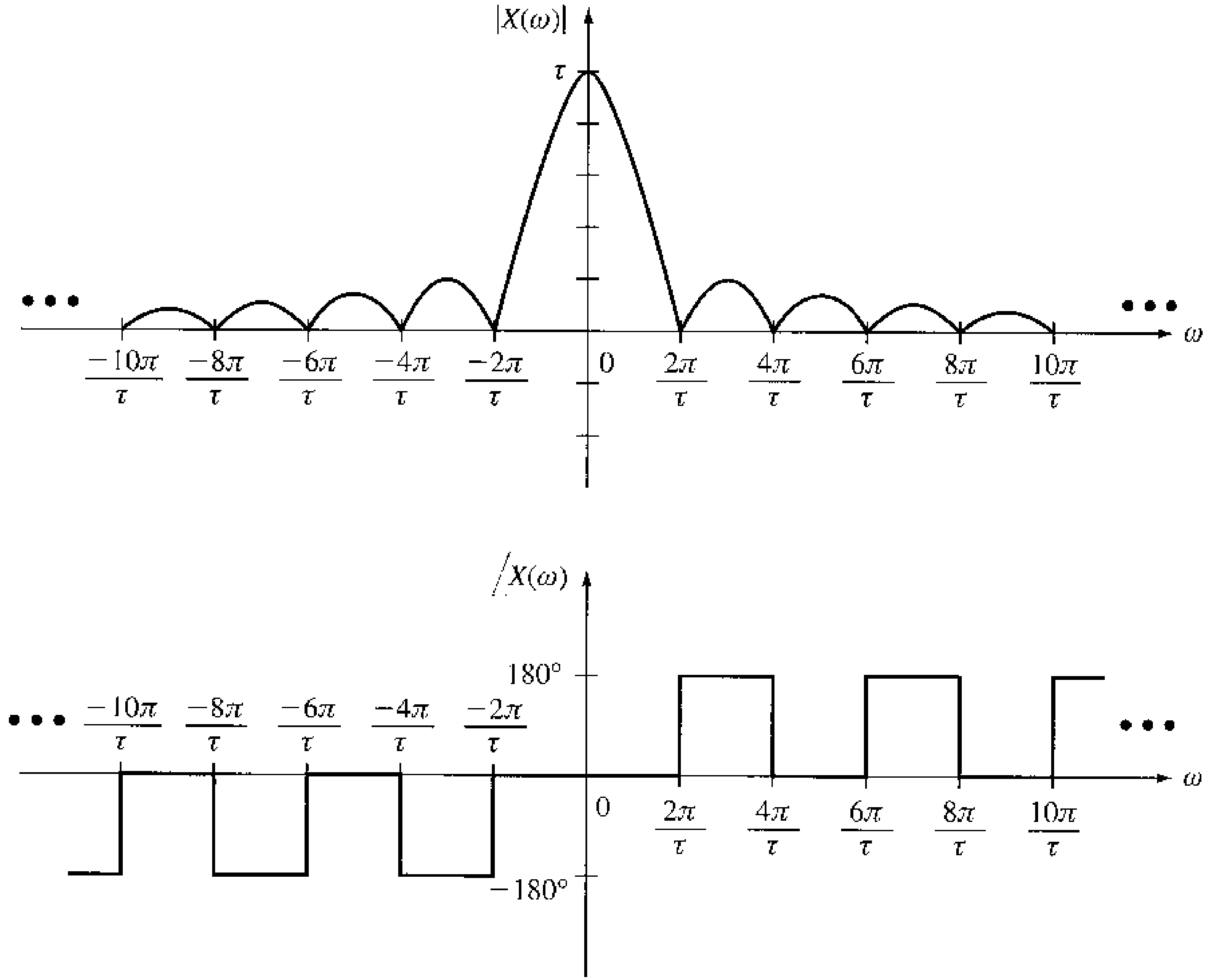
Παλμός και Παλμοσειρά

Φάσμα

Πλάτους

Φάσμα

Φάσης



Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

- Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται περιορισμένου εύρους ζώνης εάν ο Μ/Σ Fourier $X(\omega)$ για $\omega > B$ είναι μηδέν όπου το B ονομάζεται εύρος ζώνης του σήματος.

- Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης έχει άπειρη διάρκεια στο χρόνο, που αυτό σημαίνει ότι τα σήματα πεπερασμένου εύρους ζώνης δεν μπορεί να είναι περιορισμένα στο χρόνο.

Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

- Εάν ένα σήμα $x(t)$ δεν έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης, αναφέρεται ότι έχει άπειρο εύρος ζώνης ή άπειρο φάσμα.

- Περιορισμένα στο χρόνο σήματα δεν μπορεί να είναι πεπερασμένου εύρους ζώνης και για αυτό τα σήματα πεπερασμένου χρόνου έχουν άπειρο εύρος ζώνης.

- Παρόλα αυτά για ένα σήμα $x(t)$ με καλή συμπεριφορά μπορεί να αποδειχθεί ότι $$\lim_{\omega\to\infty} X(\omega) = 0$$

  δηλαδή $$|X(\omega)| \approx 0 \quad \forall \omega > B$$

  B είναι ένας μεγάλος αριθμός

Αντίστροφος Μ/Σ Fourier

- Ένα σήμα $x(t)$ με Μ/Σ Fourier $X(\omega)$ μπορεί να επαναϋπολογιστεί με εφαρμογή του αντίστροφου Μ/Σ Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Ζεύγος Μ/Σ Fourier

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Ιδιότητες Μ/Σ Fourier

- *Γραμμικότητα :* $x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$$

- *Χρονική Ολίσθηση:*

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

- *Χρονική Κλιμάκωση :*

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ιδιότητες Μ/Σ Fourier

- *Χρονική Αναστροφή :*

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$$

- *Πολλαπλασιασμός με δύναμη του t:*

$$t^n x(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$$

- *Πολλαπλασιασμός με μιγαδικό εκθετικό :*

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Ιδιότητες Μ/Σ Fourier

- *Πολλαπλασιασμό με ημίτονο /συνημίτονο (Διαμόρφωση):*

$$x(t)\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{j}{2}\left[X(\omega+\omega_0)-X(\omega-\omega_0)\right]$$

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)\right]$$

- *Διαφόριση/Παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου :*

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

Ιδιότητες Μ/Σ Fourier

- *Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου:*

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- *Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου:*

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$$

- *Πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου:*

$$x(t)\,y(t) \leftrightarrow X(\omega) * Y(\omega)$$

Ιδιότητες Μ/Σ Fourier

- *Θεώρημα Parseval:*

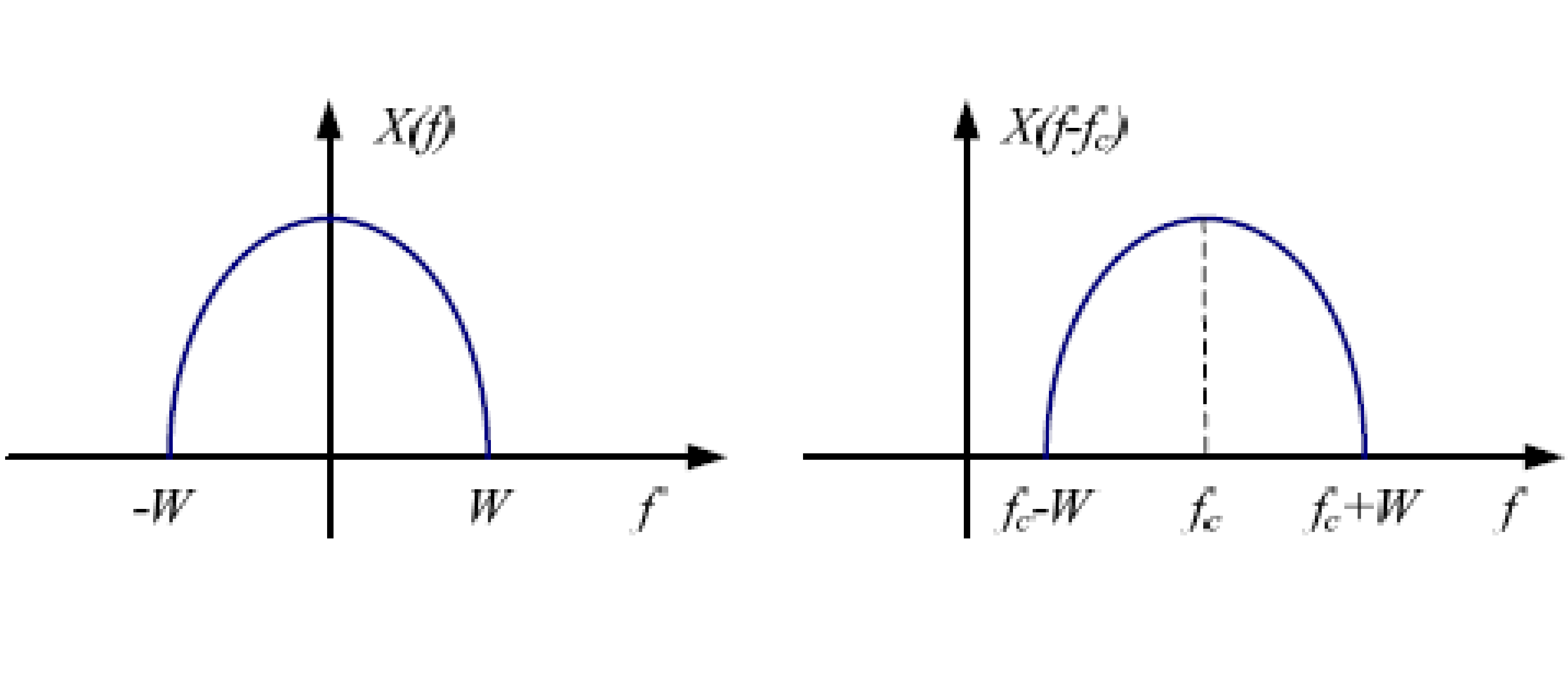
$$\int_{\mathbb{R}} x(t)\,y(t)\,dt \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} X^{*}(\omega)Y(\omega)\,d\omega$$

$$\text{εάν } y(t) = x(t) \qquad \int_{\mathbb{R}} |\,x(t)\,|^{2}\,dt \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\,X(\omega)\,|^{2}\,d\omega$$

- *Δυαδικότητα :*

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

Ιδιότητα Ολίσθησης

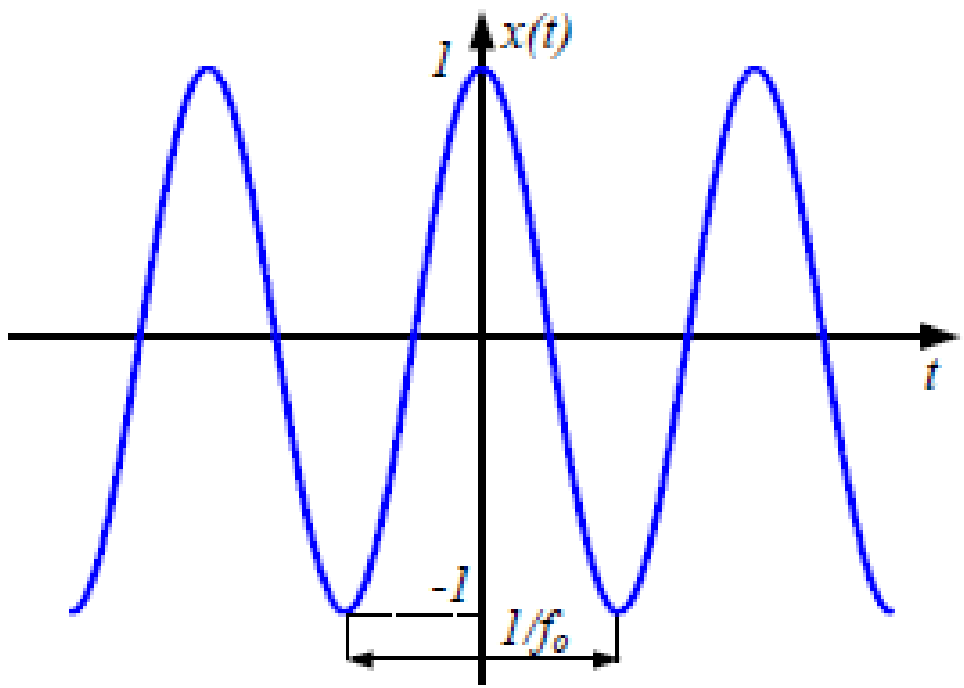


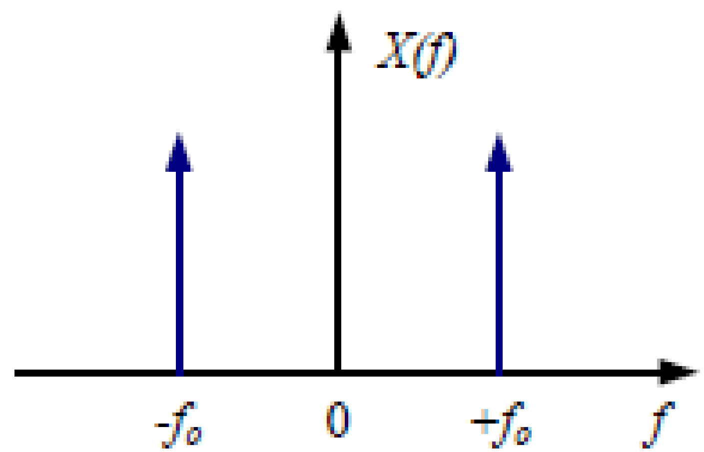
Μ/Σ Fourier Συνημιτόνου

$$x(t) = \cos(2\pi f_o t)$$

$$\mathfrak{F}\left[\cos(2\pi f_o t)\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{F}\left[e^{j2\pi f_o t}\right] + \frac{1}{2}\mathfrak{F}\left[e^{-j2\pi f_o t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_o) + \delta(f + f_o)\right]$$

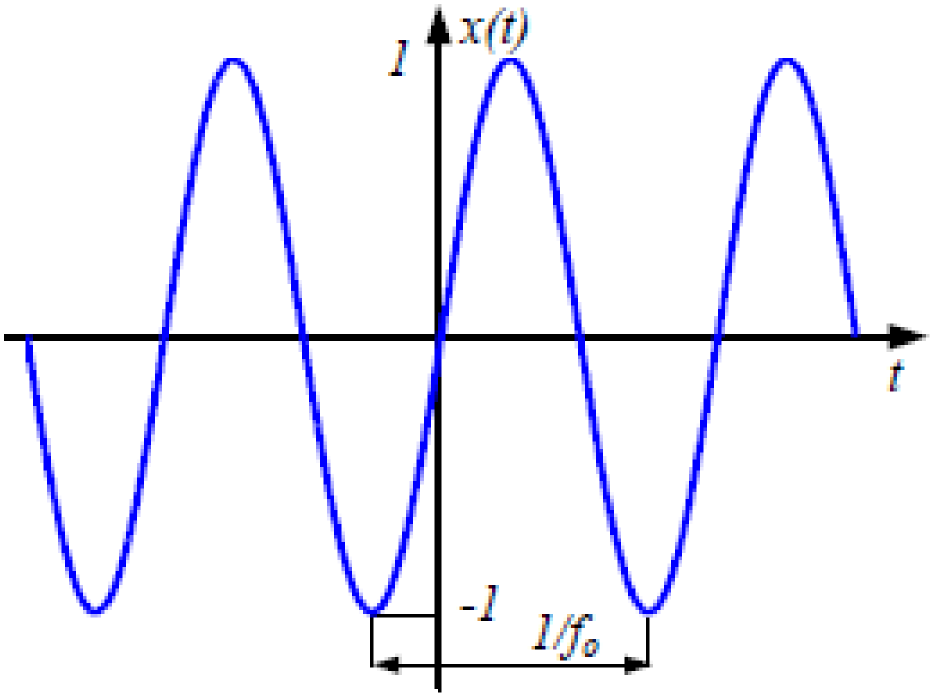


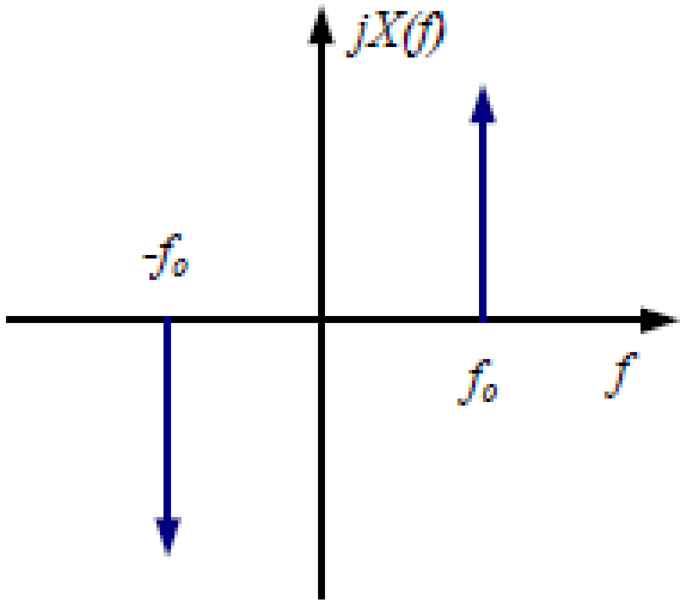


Μ/Σ Fourier Ημιτόνου

$$x(t)=\sin(2\pi f_o t) \qquad \mathfrak{F}\left[\sin(2\pi f_o t)\right]=\mathfrak{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_o t}-e^{-j2\pi f_o t}}{2j}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_o)-\delta(f+f_o)\right]$$



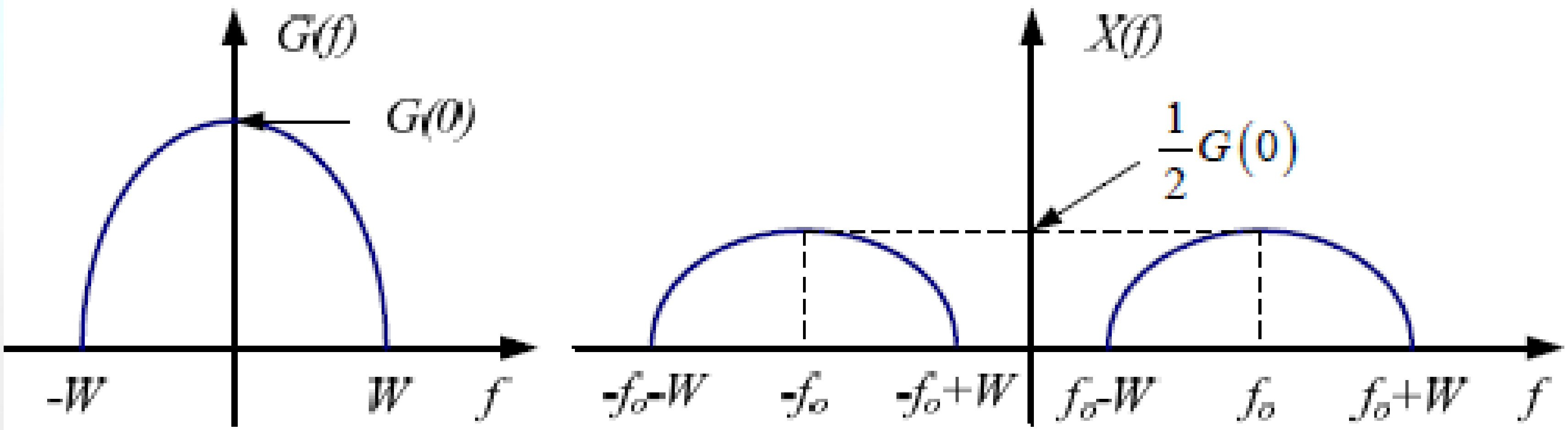


Πολλαπλασιασμός με Συνημίτονο

$$x(t) = g(t)\cos(2\pi f_o t) \qquad \mathfrak{F}[x(t)] = \mathfrak{F}[g(t)\cos(2\pi f_o t)]$$

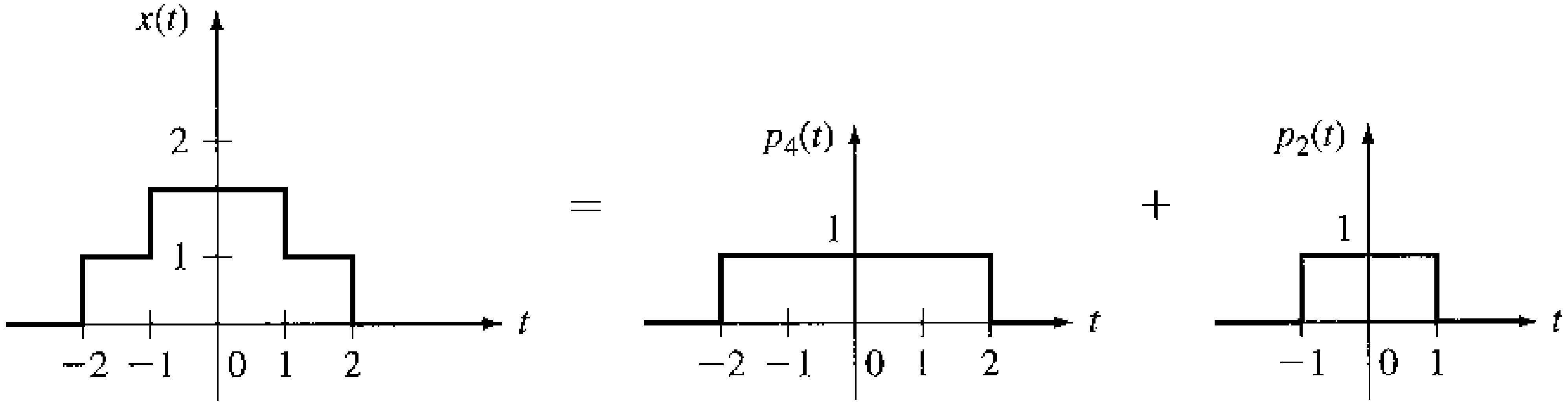
$$= \mathfrak{F}\left[g(t)\frac{e^{j2\pi f_o t} + e^{-j2\pi f_o t}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[G(f - f_o) + G(f + f_o)\right]$$



Γραμμικότητα

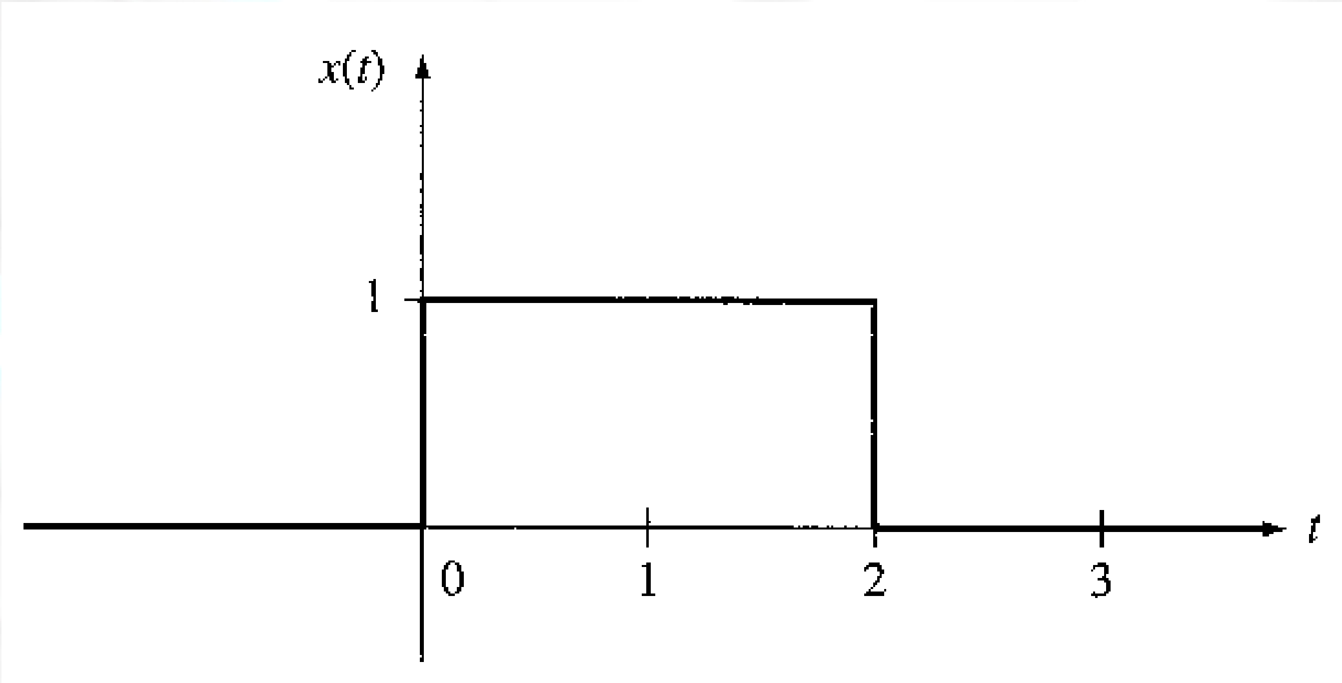
$$x(t) = p_4(t) + p_2(t)$$



$$X(\omega) = 4\operatorname{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right) + 2\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

Χρονική Ολίσθηση

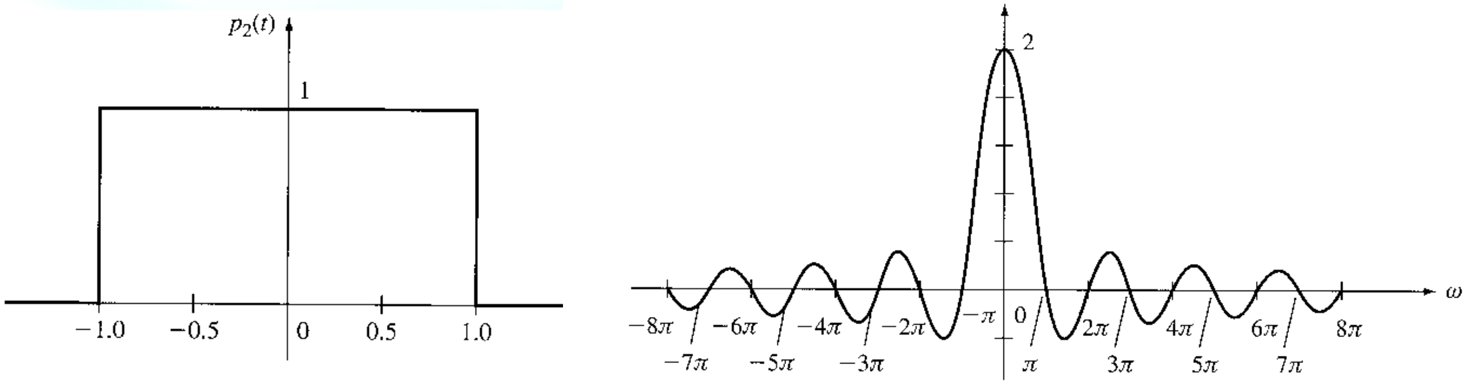
$$x(t) = p_2(t-1)$$



$$X(\omega) = 2\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)e^{-j\omega}$$

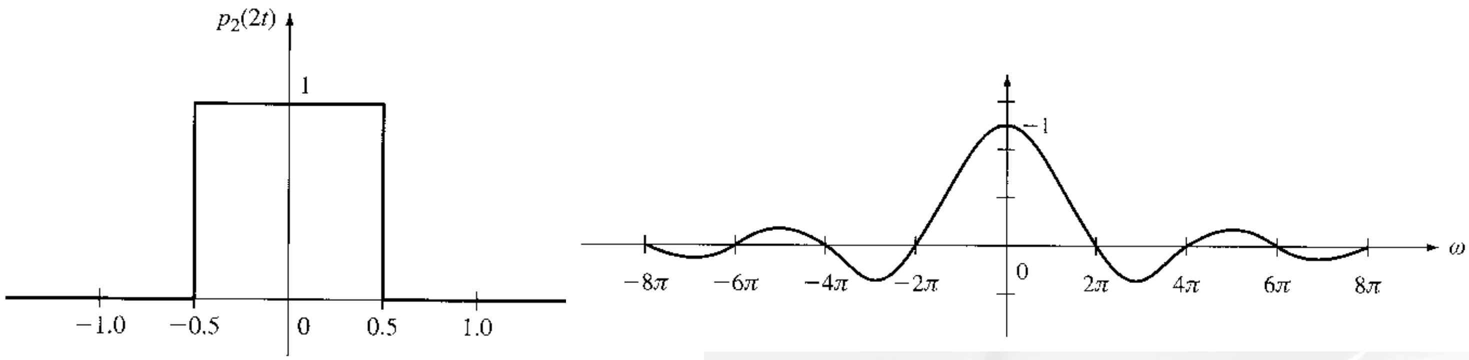
Χρονική Κλιμάκωση

$p_2(t)$



$$2\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$p_2(2t)$



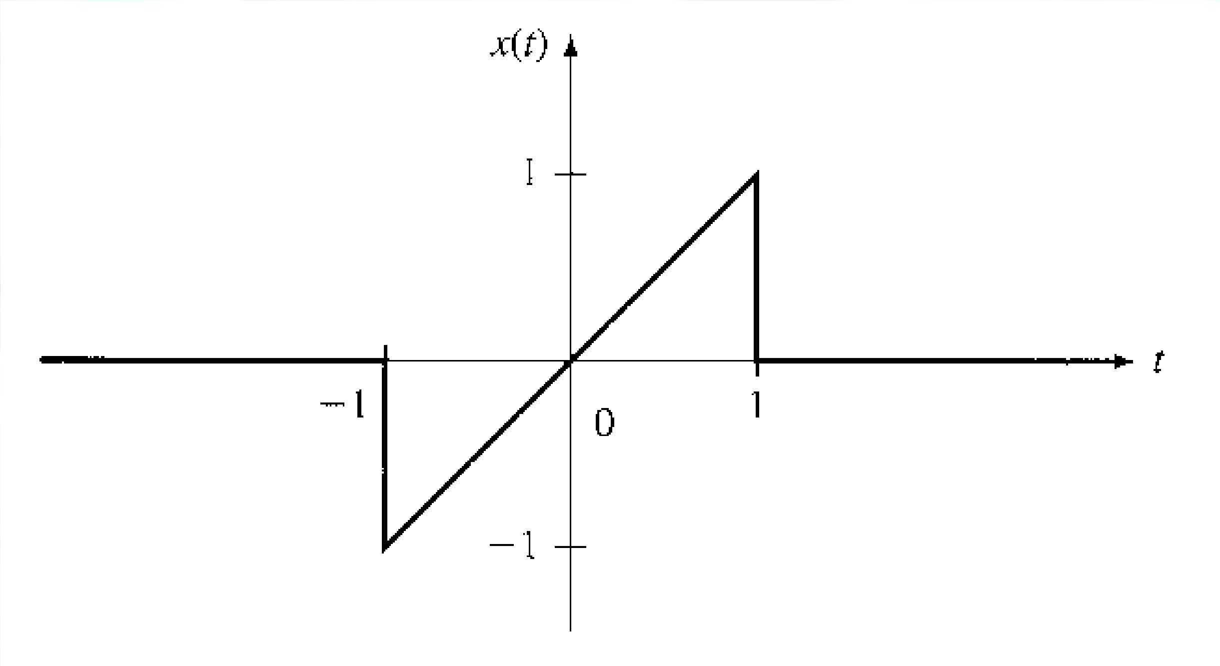
$$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$a > 1$ Χρονική συμπίεση $\leftrightarrow$ Συχνοτική εξάπλωση

$0 < a < 1$ Χρονική εξάπλωση $\leftrightarrow$ Συχνοτική συμπίεση

Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

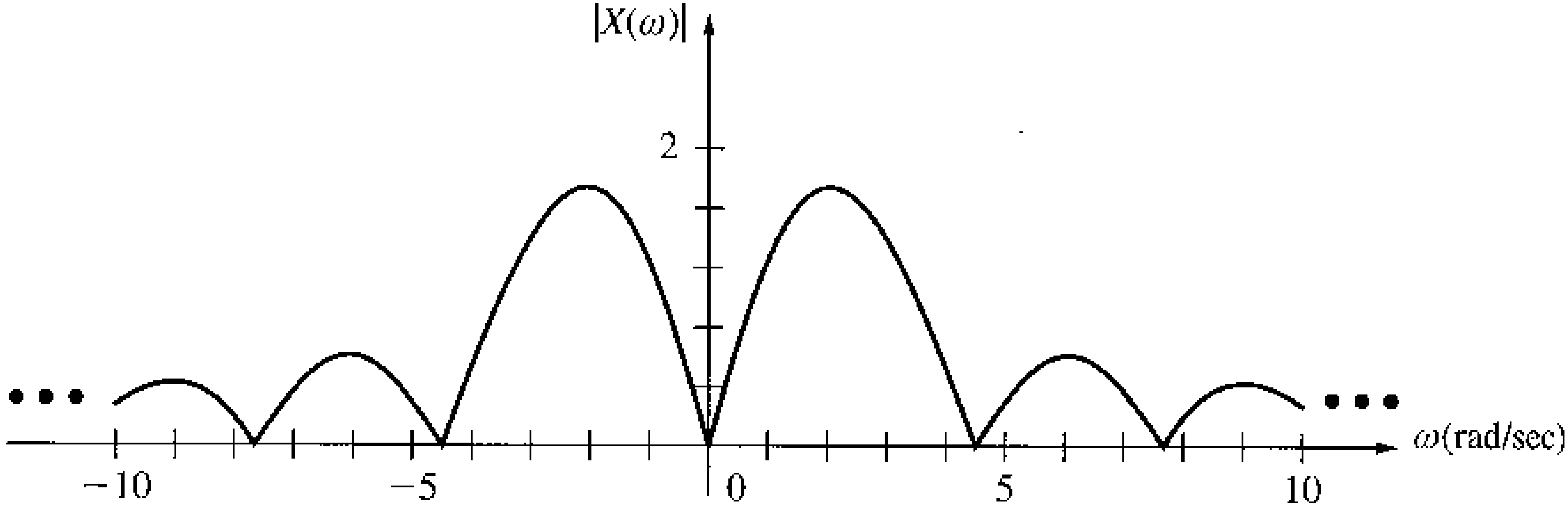
$$x(t) = tp_2(t)$$



$$X(\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(2\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right) = j2\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right) = j2\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2}$$

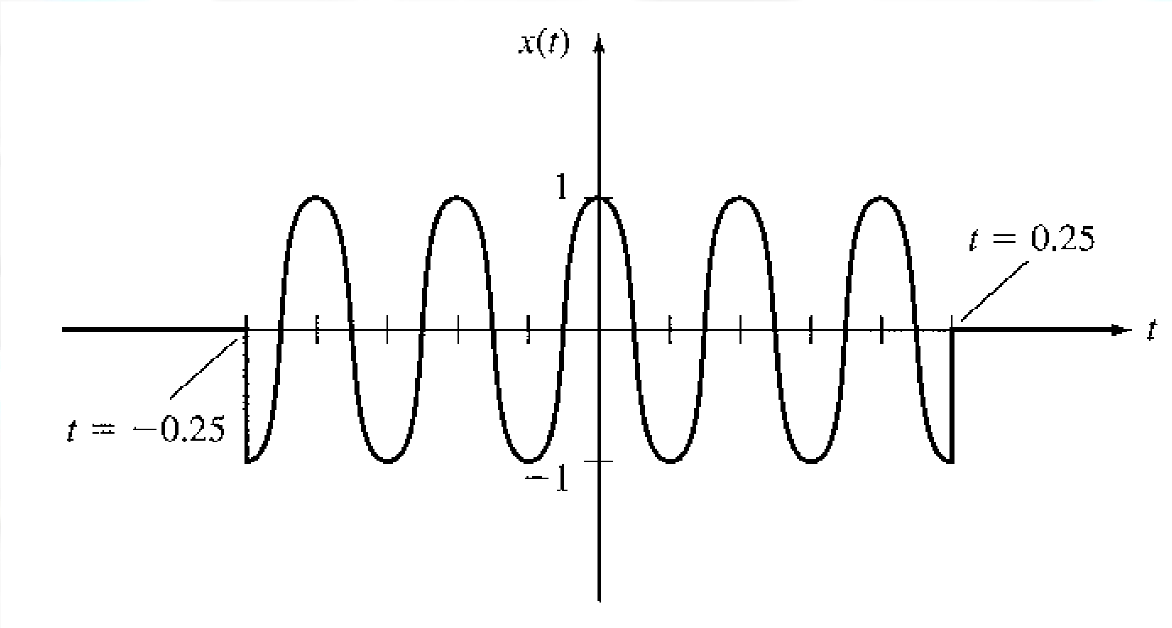
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

$$X(\omega) = j2\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2}$$

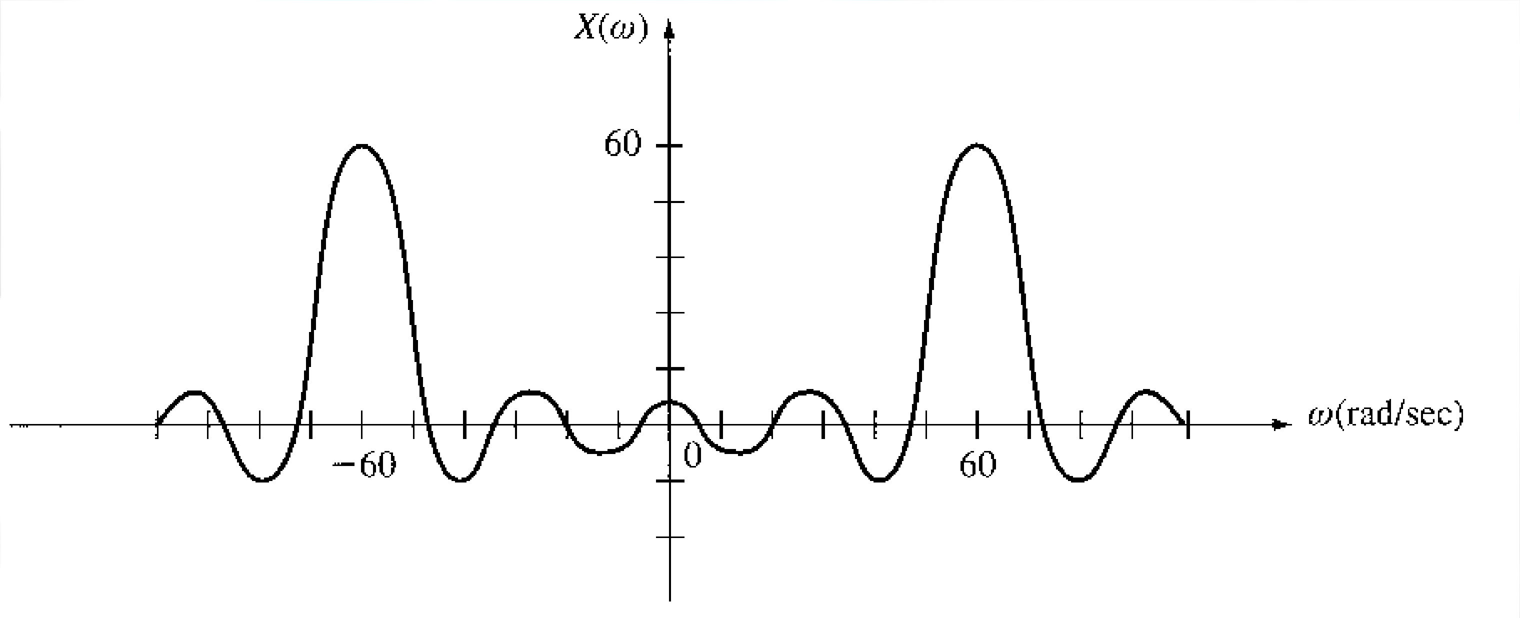


Πολλαπλασιασμός με συνημίτονο

$$x(t) = p_\tau(t)\cos(\omega_0 t)$$



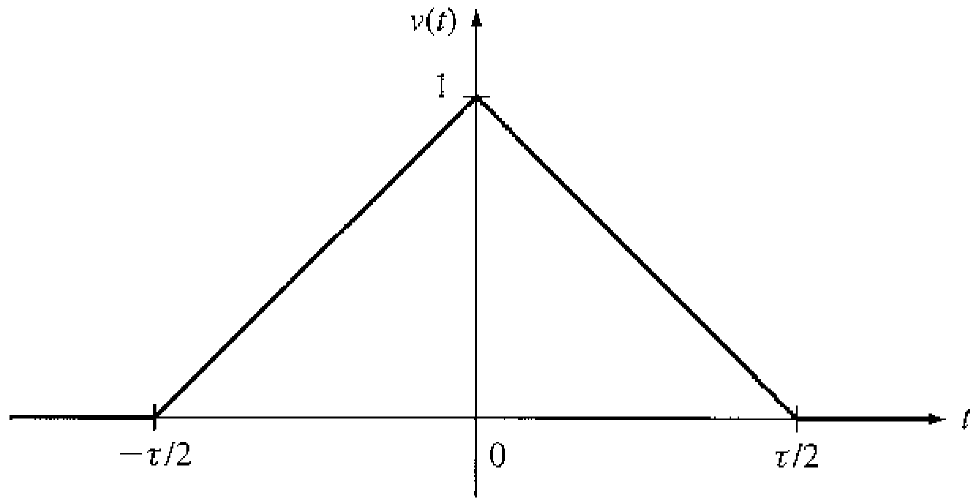
Πολλαπλασιασμός με συνημίτονο



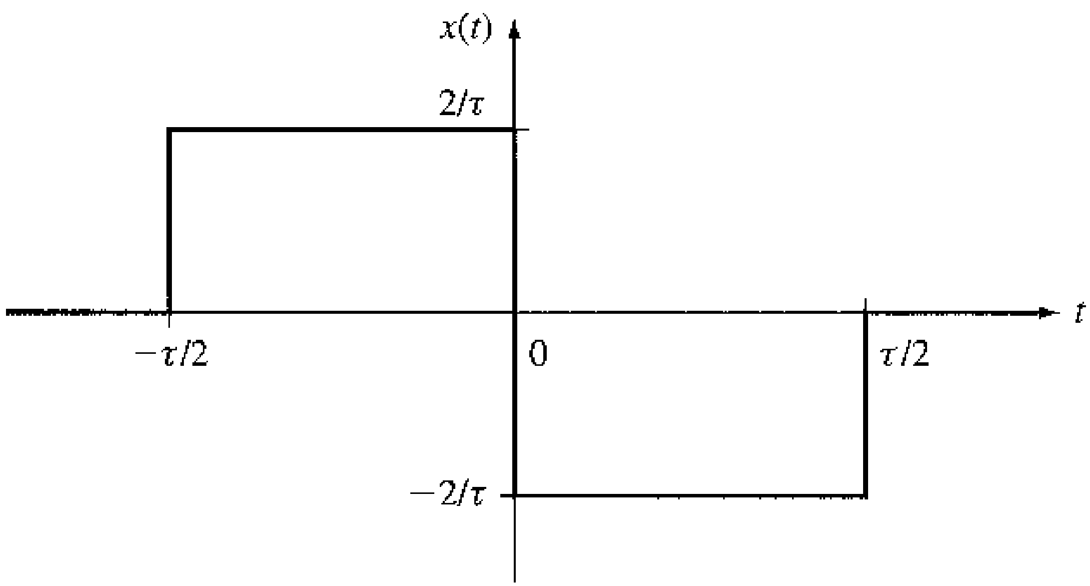
$$\begin{cases} \omega_0 = 60\ rad/\sec \\ \tau = 0.5 \end{cases}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\left[\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau(\omega+\omega_0)}{2\pi}\right) + \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau(\omega-\omega_0)}{2\pi}\right)\right]$$

Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου



$$v(t) = \left(1 - \frac{2\,|\,t\,|}{\tau}\right) p_{\tau}(t)$$



$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

- Ο Μ/Σ Fourier του $x(t)$:

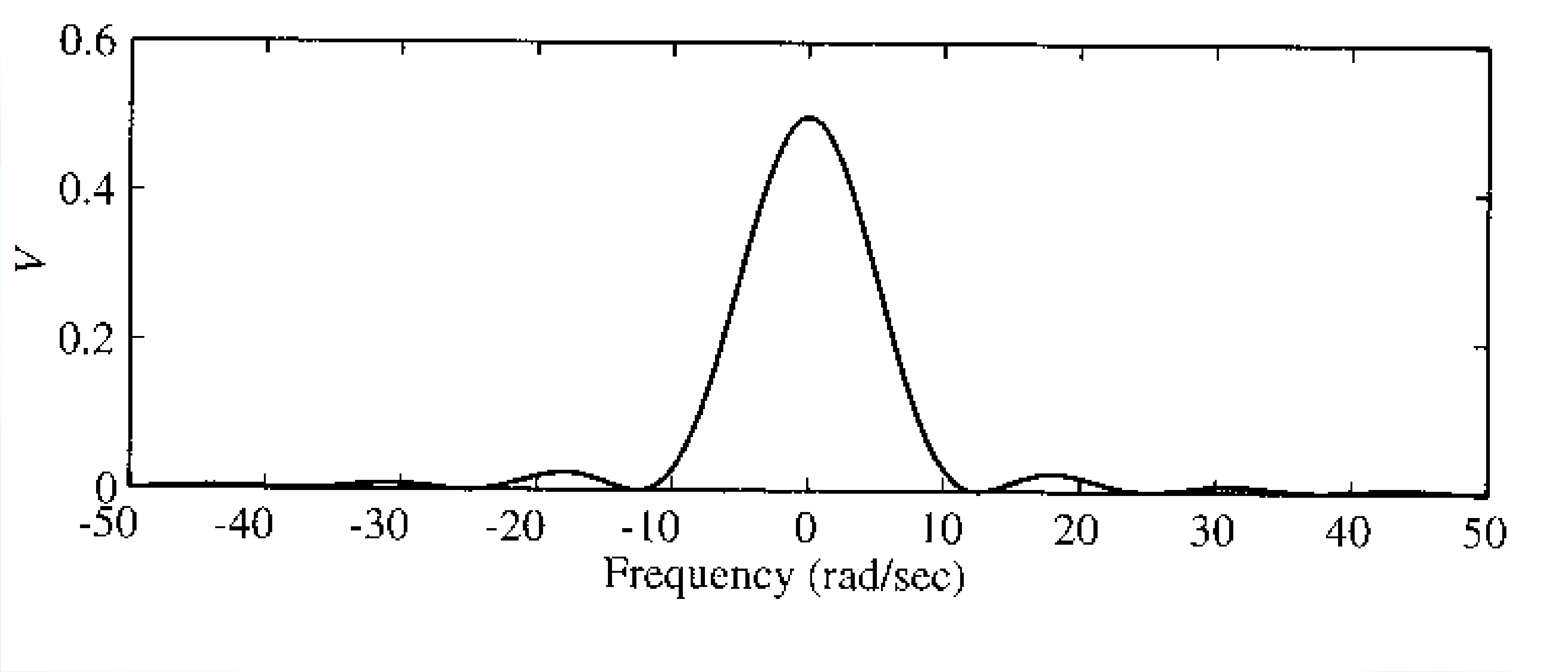
$$X(\omega) = \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{\tau\omega}{4\pi} \right) \right) \left(j2\sin\left(\frac{\tau\omega}{4} \right) \right)$$

- Χρησιμοποιώντας τη ολοκλήρωση:

$$V(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) = \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau\omega}{4\pi} \right)$$

Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

$$V(\omega) = \frac{\tau}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\tau\omega}{4\pi}\right)$$



Γενικευμένος Μ/Σ Fourier

- Μ/Σ Fourier $\delta(t)$

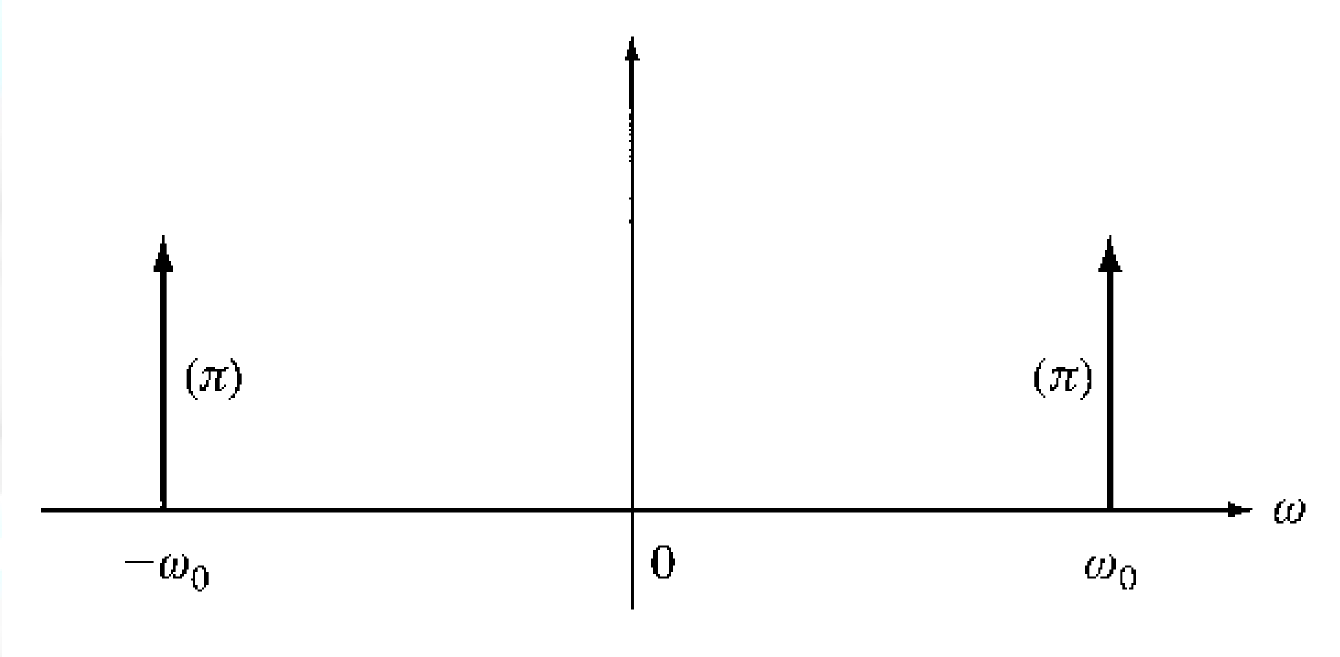
$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta(t) \leftrightarrow 1$$

- Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της δυαδικότητας:

$$x(t) = 1,\, t \in \mathbb{R} \leftrightarrow \underbrace{2\pi\delta(\omega)}$$

Γενικευμένος Μ/Σ Fourier του σταθερού σήματος $x(t) = 1,\, t \in \mathbb{R}$

Γενικευμένος Μ/Σ Fourier Τριγωνομετρικών Σημάτων



$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων

- Έστω ένα περιοδικό σήμα *x*(*t*) με περίοδο *T:*
- Όμως $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ $\omega_0 = 2\pi / T$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Μ/Σ Fourier Βηματικής Συνάρτησης

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολοκλήρωσης

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Ερωτήσεις ?

Επικοινωνία

thpanag@cc.ece.ntua.gr

Τηλ. 210 772 3842