ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 5

Διάλεξη: 15 Οκτωβρίου 2020

Περίληψη προηγουμένου επεισοδίου

ΣΔΕs 1ης τάξης : $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ $\quad y(x) = ;$

1. Χωριζομένων μεταβλητών $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow \int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx + K$

2. Ακριβείς $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ με $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Λύση: $u(x,y) = K$ όπου $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$

3. Γραμμικές $\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = q(t)$

Λύση: ολοκ. παράγων $\exp\left[\int p(t)\,dt\right]$

4. Ειδικές μορφές Verhulst, Bernoulli;

1.5 Ομοιογενείς ΔΕs 1ης τάξης (Ομογενείς, homogeneous)

Ορισμός: Η $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ λέγεται ομοιογενής όταν $f(ax,ay) = f(x,y)$

π.χ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = f(x,y)$ $\quad f(ax,ay) = \frac{\cancel{a^2}y^2 - \cancel{a^2}x^2}{2\cancel{a}x\cancel{a}y} = \frac{y^2-x^2}{2xy} = f(x,y)$

Ομοιογενής

Λύση: Οι ομοιογενείς ΔΕ 1ης τάξης με το μετασχηματισμό $\boxed{u = \frac{y}{x}}$ μετατρέπονται σε χωρισμένων μεταβλητών

Παρατήρηση Την παραπάνω ΔΕ την λύσαμε σ της χωρισμένων μεταβλητών

Παράδειγμα 1: Γεν. λύση της $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$

$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ $\quad f(ax,ay) = \frac{\cancel{a}x + \cancel{a}y}{\cancel{a}x - \cancel{a}y} = \frac{x+y}{x-y}$ Ομοιογενής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \qquad \underline{u = \frac{y}{x}} \Rightarrow y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = u + x\frac{du}{dx}$$

Χωρισ. μεταβλητών

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{\cancel{x} + u\cancel{x}}{\cancel{x} - u\cancel{x}} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u} - u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1+\cancel{u}-\cancel{u}+u^2}{1-u}$$

$$\Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2}\,du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{1+u^2}\,du - \int \frac{u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dx}{x} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}(u) - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln x + K \Rightarrow \boxed{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = \ln x + K}$$

Λύση σε κλειστή μορφή.

1.6 Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ

Εύρεση ολοκ. παράγοντα - Πολ/στής του Euler

(π, Σ, e, $e^{i\pi}=-1$)

Leonhard Euler
(1707-1783)

Ας υποθέσουμε ότι η: $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

η οποία δεν είναι ακριβής: $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Θέλουμε να βρούμε ένα ολοκ. παράγοντα $\mu(x,y)$ που την κάνει ακριβή

Πολ/ζω με $\mu(x,y)$: $\underbrace{M(x,y)\mu(x,y)}_{\text{"M"}}\,dx + \underbrace{N(x,y)\mu(x,y)}_{\text{"N"}}\,dy = 0$

Αφού το μ την κάνει ακριβή $\rightarrow$ $\dfrac{\partial(M(x,y)\,\mu(x,y))}{\partial y} = \dfrac{\partial(N(x,y)\,\mu(x,y))}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \Rightarrow \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \Rightarrow$$

1

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\mu(x,y)}\left[N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

Δεν την έλυσε ο Euler. Δεν έχει λυθεί από κανένα.