Δευτέρα 14/3/22 4η Διάλεξη Κόκκινης 2η

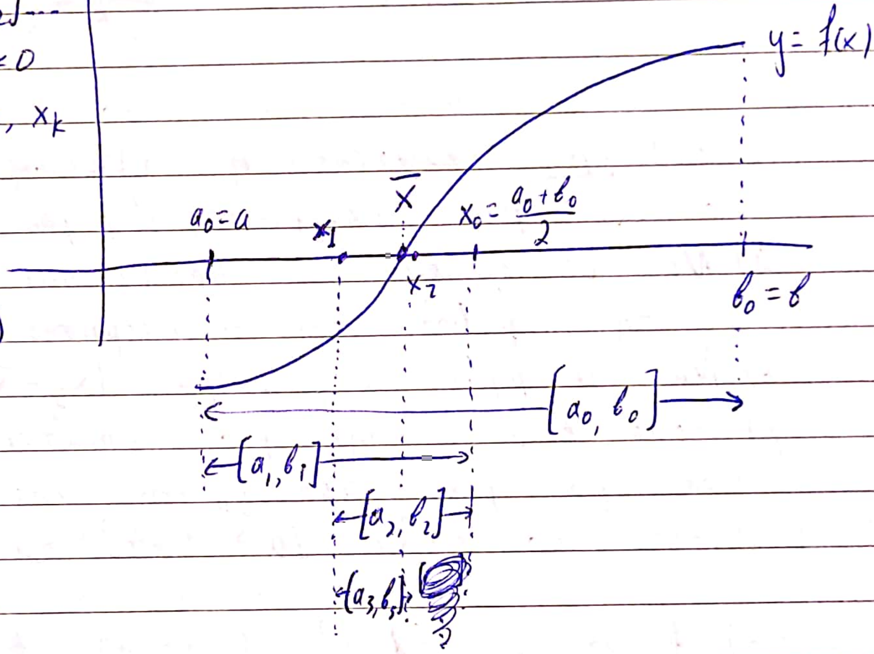
Η Μέθοδος της Διχοτόμησης (συνέχεια)

$f(x)=0$, f συνεχής $[a,b]$, $f(a)f(b)<0$

Η μέθοδος μας δίνει

- $[a_0,b_0], [a_1,b_1], [a_2,b_2] \dots$ με $f(a_k)\cdot f(b_k)<0$
- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$

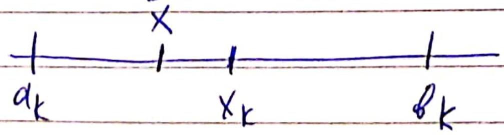
  $$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$$
- $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0-a_0)$



Η ακολουθία (x_k) μας δίνει στο άπειρο τη ρίζα.
Εμείς κρατάμε το x_k για $k\in\mathbb{N}$ ως προσέγγιση του $\bar{x}$

Εκτίμηση Σφάλματος

$|x_k - \bar{x}| = ?$ Προφανώς αν $\bar{x}$ άγνωστο δε γνωρίζουμε ακριβώς τη ποσότητα, οπότε προσπαθούμε να εκτιμήσουμε πόσο μεγάλη μπορεί να είναι



$$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$$

Άρα $|x_k - \bar{x}| \le \frac{b_k-a_k}{2} = \frac{\frac{1}{2^k}(b_0-a_0)}{2}$,

δηλ. $\boxed{|x_k - \bar{x}| \le \frac{b_0-a_0}{2^{k+1}}}$ $\quad a_0 = a$, $b_0 = b$

Note: εφόσον με βάση τη μέθοδο, $a_k, b_k \neq 0$, (δεν είναι ρίζες, αλλιώς θα είχαμε σταματήσει), θα ~~προ~~ μπορούσαμε να γράφουμε αυστηρή ανισότητα, ωστόσο έτσι το βρίσκουμε συχνότερα στη βιβλιογραφία.

Note: Σε κάποια βιβλία η αρίθμηση ξεκινά από το **1**, άρα

$$|x_k - \bar{x}| = \cancel{a_1} \frac{b_1 - a_1}{2^k}$$, είναι το ίδιο

Παράδειγμα: Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^5 - x - 2 = 0$ που έχει μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$

α) Να υπολογιστούν οι προσεγγίσεις x_0, x_1, x_2, x_3 με τη μέθοδο της διχοτόμησης

β) Να εκτιμηθεί το σφάλμα $|x_3 - \bar{x}|$

γ) Πόσα βήματα της μ.δ. απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης της ρίζας $\bar{x}$ που απέχει το πολύ 10^{-5} από τη ρίζα;

α) f συνεχής $[1, 2]$, $f(1) = \underset{<0}{-2}$, $f(2) = 28 > 0$

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1^-	2^+	1.5^+	4.0938
1	1^-	1.5^+	1.25^-	−0.1982
2	1.25^-	1.5^+	1.375^+	1.53
3	1.25^-	1.375^+	1.3125	

2^+: σημαίνει ότι $f(2) > 0$

β) $|x_3 - \bar{x}| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{3+1}} = \frac{1}{16} = 0.0625$

γ) $|x_k - \bar{x}| \le \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \le \varepsilon = 10^{-5}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^{k+1}} \le 10^{-5} \Rightarrow \log 2^{-(k+1)} \le \log 10^{-5}$

$\Rightarrow -(k+1)\log 2 \le -5 \Rightarrow k \ge 15.6$, άρα $k = 16$

x_{16}

Note: μπορώ να χρησιμοποιήσω όποιον λογάριθμο με βολεύει για τις πράξεις.

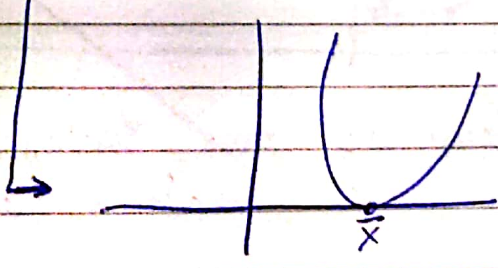
Note: Είναι δυνατό να πετύχω μεγαλύτερη ακρίβεια σε λιγότερες επαναλήψεις, αλλά δεν έχουμε εγγύηση για αυτό (π.χ. στο προηγούμενο $|x_2 - \bar{x}| < |x_3 - \bar{x}|$)

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

1. Η f συνεχής $[a,b]$, $f(a)f(b)<0$ τότε υπολογίζεται πάντα μία ρίζα
2. Απαιτεί μόνο συνέχεια της f
3. Ένας υπολογισμός τιμής f ανά βήμα.
4. Εκ των προτέρων εκτίμηση σφάλματος (π.χ το (γ) στο παράδειγμα)

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

1. Αργή μέθοδος σε σχέση με άλλες (χρησιμοποιείται σαν μέθοδος εντοπισμού αρχικών τιμών)
2. Δεν μπορεί να εφαρμοστεί για τη προσέγγιση διπλών ριζών (γενικότερα, άρτιας πολλαπλότητας



Άσκηση: Δίνεται η εξίσωση $f(x) = (x-1)(x-2)(x-4) = 0$
Σε ποιά ρίζα της εξίσωσης συγκλίνει η μέθοδος της διχοτόμησης αν εφαρμοστεί με αρχικό διάστημα $[a_0, b_0] = [0, 5]$;

α) 1
β) 2
γ) 4
δ) Δε συγκλίνει

$f(0) < 0$, $f(5) > 0$, $f(2,5) < 0$
άρα εστιάζω στο $[2,5, 5]$,
όπου έχω ρίζα την 4.

Μ.Δ. Αλγόριθμος:

Δεδομένα: f, a, b (με $f(a)f(b) < 0$), ε, k_{max}

ακρίβεια

μέγιστος αριθμός ~~επαν~~ επαναλήψεων

Για $k = 0, 1, \dots, k_{max}$
$x = \frac{a+b}{2}$

Αν $f(x) = 0$ ή $\boxed{b - x = \frac{b-a}{2} < \varepsilon}$ ΣΤΑΜΑΤΑΜΕ (ΡΙΖΑ Χ)
Αν $f(a) \cdot f(x) > 0$
$a = x$
Διαφορετικά
$b = x$

κριτήριο διακοπής

Έστω ότι έχω Υπολογιστή που κρατάει 3 ψηφία, τα υπόλοιπα φεύγουν με αποκοπή

$a = 0,982$
$b = 0,987$
$a + b = 1,969 \rightarrow 1,96$
$\frac{a+b}{2} = 0,980 \notin [a, b]$
πρόβλημα

Αν χρησιμοποιηθεί ο ισοδύναμος $x = a + \frac{b-a}{2}$:
$b - a = 0,005$
$\frac{b-a}{2} = 0,0025$
$x = 0,982 + 0,0025 = 0,9845 \rightarrow 0,984$
αξιοπρεπής

Μπορεί επίσης να αποτύχει λόγω κακού υπολογισμού του $f(a) \cdot f(x)$, αφού τα δύο πλησιάζουν μεταξύ τους.
Γι' αυτό αντί για το γινόμενο, ελέγχουμε:

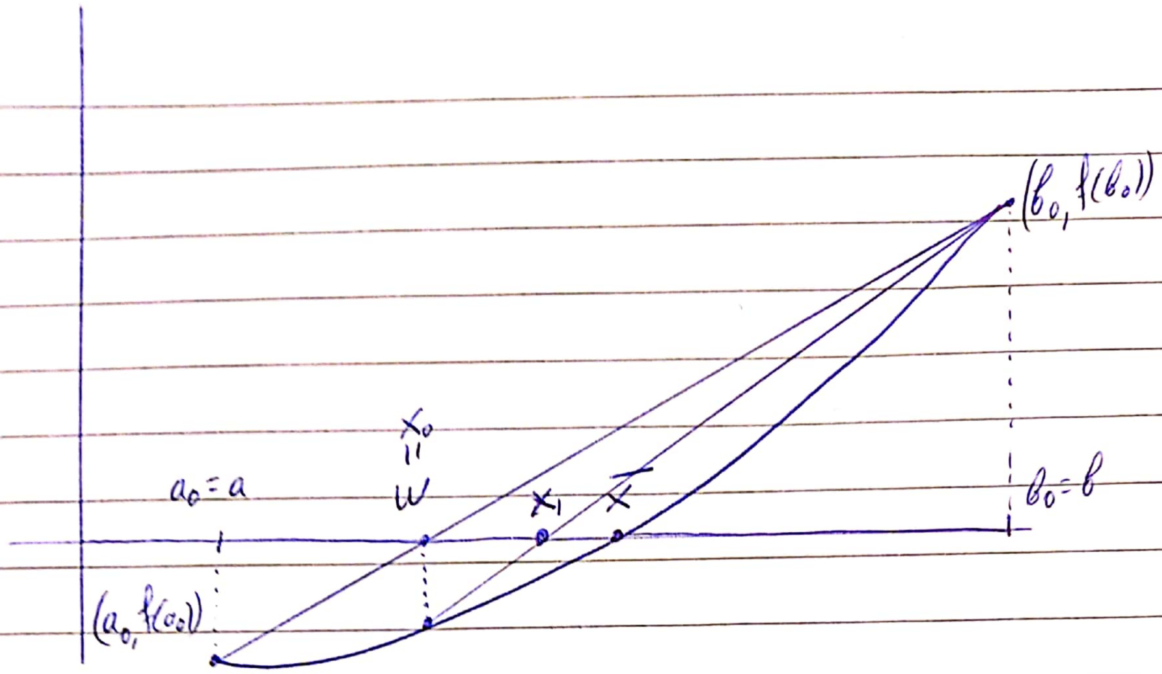
$$\boxed{\text{πρόσημο}(f(a)) = \text{πρόσημο}(f(x))}$$

Η Μέθοδος της Εσφαλμένης Θέσης (Regular False)

$f(x)=0$, f συνεχής $[a,b]$, $f(a)f(b)<0$

Αρχικά θέτουμε $a_0=a$, $b_0=b$ $\qquad k=0,1,2\ldots$
Αντί να χρησιμοποιήσουμε το μέσο x_k του $[a_k, b_k]$, χρησιμοποιούμε το:

$$x_k = \frac{f(b_k)\,a_k - f(a_k)\,b_k}{f(b_k) - f(a_k)}$$



Εξίσωση ευθείας:

$$y - f(a_0) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}(x - a_0)$$

$$y = 0 \rightarrow \quad w = \frac{f(b_0)\,a_0 - f(a_0)\,b_0}{f(b_0) - f(a_0)}$$

<u>Κριτήριο Διακοπής?</u> *

πιθανό: $|f(x_k)| < \varepsilon$

* Το προηγούμενο κριτήριο, $\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \leq \varepsilon$, δεν κάνει, αφού π.χ. στο παραπάνω παράδειγμα το διάστημα δε γίνεται ποτέ μικρότερο από το $[\bar{x}, b_0]$