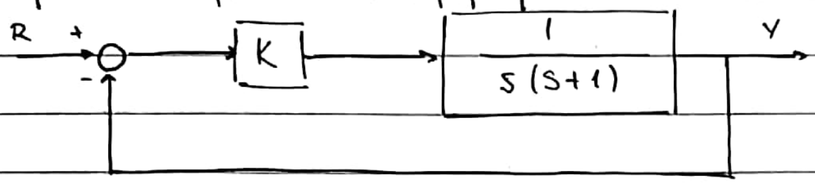
Δευτέρα, 31/10/2022

BIBO Ευστάθεια

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Μπορεί να έχουμε κάποια παράμετρο



Για ποιες τιμές του K έχω ευστάθεια

Σ.Μ. κλειστού βρόχου: $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1+\frac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2+s+K}$

Θ. Stodola

Έστω πολυώνυμο $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$.
Αν όλες οι ρίζες του $P(s)=0$ βρίσκονται στο αρ. μιγαδικό ημιεπίπεδο, τότε τα a_i ομόσημα.

$$P(s) = a_n\Big(s^n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}}_{\beta_{n-1}} s^{n-1} + \ldots + \underbrace{\frac{a_0}{a_n}}_{\beta_0}\Big)$$

Πρέπει $\beta_i > 0$

$$\bar{P}(s) = \prod_{i=1}^{n_1}(s-\lambda_i)\prod_{j=1}^{n_2}(s^2 + 2\underset{>0}{\zeta_j\omega_j} s + \underset{>0}{\omega_j^2}), \quad n_1 + 2n_2 = n.$$

$\lambda_i > 0$

$(s-\lambda_j)(s-\bar{\lambda}_j) =$

$= s^2 - (\lambda_j + \bar{\lambda}_j)s + |\lambda_i|^2$

$\psi(s) = s^3+s^2+2s+8 = (s+2)(s^2-s+4)$

↳ Θ. Stodola ⇒ ασταθές

$p_1=-2<0$, $p_{2,3} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{15}}{2}$

$P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_0$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & \ldots \\
s^{n-2} & A_{31} & A_{32} & \ldots & \\
\vdots & & & & \\
s^{i-1} & A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & & \\
s^{i} & A_{i,1} & A_{i,2} & & \\
\vdots & & & & \\
s^1 & & & & \\
s^0 & & & &
\end{array}$$

$\leftrightarrow A_{1,1} \quad A_{1,2} \quad A_{1,3}$

$A_{21} \quad A_{22} \quad A_{23}$

$$A_{31} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix} = a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$A_{32} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix} = a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$A_{33} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7}\end{vmatrix} = a_{n-6} - \frac{a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$A_{i+1,1} = -\frac{1}{A_{i,1}}\begin{vmatrix} A_{i-1,1} & A_{i-1,2} \\ A_{i,1} & A_{i,2}\end{vmatrix} = A_{i-1,2} - \frac{A_{i-1,1} A_{i,2}}{A_{i,1}}$$

$$A_{i+1,k} = -\frac{1}{A_{i,1}}\begin{vmatrix} A_{i-1,1} & A_{i-1,k} \\ A_{i,1} & A_{i,k}\end{vmatrix} = A_{i-1,k} - \frac{A_{i-1,1} A_{i}}{A_{i,1}}$$

Θ. Routh: Ο αριθμός των ριζών του P(s) με θετικό πραγματικό μέρος είναι ίσος με τον αριθμό των εναλλαγών προσήμου στην 1η στήλη του πίνακα Routh.

$\psi(s) = s^3+s^2+2s+8$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 1 & 8 \\
s^1 & -6 & 0 \\
s^0 & 8 &
\end{array}$$

2 εναλλαγές προσήμου ⇒ 2 ασταθείς ρίζες

Scanned with CamScanner

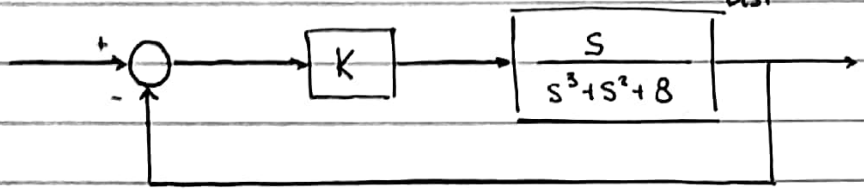
s^2+s+k

s^2	1	K	Για Κ θετικό, οι ρίζες στο αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.
s^1	1	0	Για $K>0$ ευσταθές
s^0	K		Για $K<0$ ασταθές

↳ για $K=0$ $s(s+1)$

↳ ασταθές γιατί $s=0$.

$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$



Για ποιες τιμές του Κ είναι ευσταθή;

$1+KG(s)=0 \Rightarrow 1+K\frac{G(s)}{N(s)}=0 \Rightarrow D(s)+KN(s)=0 \Rightarrow s^3+s^2+K\cdot s+8=0$

s^3	1	K
s^2	1	8
s^1	K-8	
s^0	8	

- $K>8$ καμία εναλλαγή προσήμου ⇒ ευσταθές
- $K<8$ 2 εναλλαγές προσήμου ⇒ 2 ασταθείς πόλοι

Περίπτωση 1: Αν το 1ο στοιχείο μιας γραμμής μηδενίζεται κ' στην ίδια γραμμή ∃ μη μηδενικά στοιχεία τότε το 1ο στοιχείο το αντικαθιστούμε με παράμετρο ε (ομόσημο με το 1ο στοιχείο της παραπάνω γραμμής) κ' συνεχίζουμε το Routh. Υπολογίζουμε τον αριθμό εναλλαγών για $\varepsilon \to 0$.

$\phi(s)=s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10$

ε>0 πολύ μικρό

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	~~0~~ ε	6	0
s^2	$\cancel{4}-\frac{12}{\varepsilon}$	10	
s^1	6	0	
s^0	10		

$6-\frac{10\varepsilon}{-12/\varepsilon}=6+\frac{10}{12}\varepsilon^2$

Scanned with CamScanner

Περίπτωση 2: Αν μια ολόκληρη γραμμή είναι μηδέν
(έστω s^k)

$$\begin{array}{c|ccc} \vdots & & & \\ s^{k+1} & A_1 & A_2 & \dots \\ s^k & & & \\ \vdots & & & \end{array}$$

$\psi(s) = B(s)\,\pi(s)$

$$B(s) = A_1 s^{k+1} + A_2 s^{k-1} + A_3 s^{k-3} + \dots$$

1) Αν το $B(s)$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα εκτός του φανταστικού άξονα, τότε είναι ασταθές.

Αν το k είναι άρτιο έχει ρίζα $s=0$, ασταθές.

Αν το k είναι περιττό, η γραμμή s^k αντικαθίσταται με τους συντελεστές του $\frac{dB}{ds}$ κ' συνεχίζω το Routh

i) Αν έχω εναλλαγή προσήμου, ασταθές.

ii) Αν όχι, όλες πάνω στον φανταστικό άξονα.

(α) αν οι φανταστικές ρίζες είναι απλές, τότε έχουμε οριακή ευστάθεια

(β) αν $\exists$ φαντ. ρίζες πολ/τας $\mu_i \geq 1$, έχω οριακή ευστάθεια, αν $\text{rank}(j\omega_i \mathbb{I} - A) = n - \mu_i \quad \forall i$.

$\psi(s) = s^5 + s^4 + (1+k)s^3 + (1+k)s^2 + ks + k = (s+1)(s^4 + (1+k)s^2 + k)$

s^5	1	$1+k$	k
s^4	1	$1+k$	k
~~s^3~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
s^3	2	$1+k$	
s^2	$\frac{1+k}{2}$	k	
s^1	$A = \frac{(1-k)^2}{k+1}$	0	
s^0	k		

$B(s) = s^4 + (1+k)s^2 + k$

$\frac{dB}{dt} = 4s^3 + 2(1+k)s$

$A = 1+k - \frac{2k}{\frac{k+1}{2}} = 1+k - \frac{4k}{k+1} = \frac{(1-k)^2}{k+1}$

$k > -1$ κ' $k \neq 1$ κ' $k > 0$ $\}$ $\Rightarrow$ $k > 0,\ k \neq 1$: οριακή ευστάθεια

$k = 1$: $B_2(s) = s^2 + 1$ $\quad p_{1,2} = \pm j$ $\Rightarrow$ οριακή ευστάθεια

$\frac{dB_2}{ds} = 2s$

s^2	1	1
s^1	2	0
s^0	2	

Scanned with CamScanner