ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

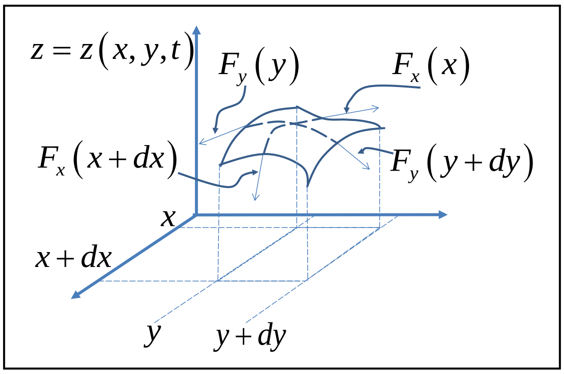
Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Κυματική και Κβαντική Φυσική»
της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. του ΕΜΠ
Chapter04-1

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα
2020

Παραγωγή της κυματικής εξίσωσης για 2-διάστατο συνεχές ελαστικό μέσο

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία μεμβράνη, διαστάσεων $\left(L_x \times L_y\right)$, που εκτείνεται στο επίπεδο (x,y), και η οποία τείνεται με δύναμη ανά μονάδα μήκους, $\frac{F_1}{L_x}=T_1$, κάθετα στον άξονα x, και με δύναμη ανά μονάδα μήκους, $\frac{F_2}{L_y}=T_2$, κάθετα στον άξονα y. Ας υποθέσουμε ότι η μεμβράνη έχει ομοιογενή επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma \equiv \frac{dm}{dxdy}=\sigma\tau\alpha\theta.$ Διαταράσσουμε την μεμβράνη, οπότε η μετατόπιση z είναι συνάρτηση $z=z(x,y,t)$.



Γράφουμε την εξίσωση κίνησης για ένα κομμάτι της μεμβράνης μεταξύ των $(x,x+dx)$ και $(y,y+dy)$, όπως στο διπλανό σχήμα, το οποίο έχει μάζα $dm=\sigma dxdy$. Η κίνηση αυτής της μάζας προσδιορίζεται από τις z-συνιστώσες των δυνάμεων που, ανά ζεύγη, έχουν μέτρα: $F_y(y+dy)=F_y(y)=T_1dx$,

και $F_x(x+dx)=F_x(x)=T_2dy$.

Επομένως:

$$(\sigma dxdy)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=T_1dx\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy}-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y\right]+T_2dy\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x\right]\Rightarrow$$

$$(\sigma dxdy)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=T_1dx\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy+T_2dy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx \quad\Rightarrow \boxed{\sigma\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=T_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+T_2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$$

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις ανά μονάδα μήκους, που τείνουν τη μεμβράνη, είναι ίδιες και για τις δύο διευθύνσεις $\frac{F_1}{L_x}=\frac{F_2}{L_y}=T$, τότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\boxed{\sigma\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)} \qquad (1)$$

Η σχέση (1) είναι η εξίσωση κύματος για ομοιογενές και ισότροπο υλικό 2-διαστάσεων, από την οποία φαίνεται ότι η ταχύτητα κύματος είναι $c=\sqrt{T/\sigma}$, όπου T: η δύναμη ανά μονάδα μήκους, και σ: η επιφανειακή πυκνότητα μάζας.

(α) Οδεύοντα Κύματα σε 2-διάστατο μέσο

Αν $z=z(x,y,t)$ είναι η συνάρτηση που αναζητούμε ως λύση της (8), τότε μπορούμε, κατ' αναλογία των οδευόντων κυμάτων στο 1-διάσατο κυματικό σύστημα, να αναζητήσουμε λύση της μορφής $z=z(x,y,t)=z_0e^{i(k_xx+k_yy-\omega t)}$. Αν αντικατασταθεί στην εξίσωση κύματος, $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, αυτού του είδους το οδεύον κύμα, προκύπτει:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} z_0 e^{i\left(k_x x+k_y y-\omega t\right)} = \left(-k_x^2 - k_y^2\right) z_0 e^{i\left(k_x x+k_y y-\omega t\right)} \Rightarrow \boxed{k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (2).$$

Άρα η $z = z\left(x, y, t\right) = z_0 e^{i\left(k_x x+k_y y-\omega t\right)}$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης με την προϋπόθεση ότι ισχύει $k_x^2 + k_y^2 = \left(\omega / c\right)^2$. Αν ορίσουμε το διάνυσμα 2-διαστάσεων $\vec{k} = \left(k_x, k_y\right)$ ως το «κυματάνυσμα» του κύματος, και λάβουμε υπόψη μας ότι το 2-διάστατο διάνυσμα $\vec{r} = \left(x, y\right)$ προσδιορίζει κάθε σημείο του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αυτό το κύμα, τότε προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

(α) Το οδεύον κύμα μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή: $z = z_0 e^{i\left(k_x x+k_y y-\omega t\right)} = z_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$, η οποία δηλώνεται ως «επίπεδο κύμα» . Η ονομασία αυτή προκύπτει από τη γεωμετρία του γεωμετρικού τόπου των σημείων σταθερής φάσης. Πράγματι, η φάση του κύματος είναι η $\varphi\left(x, y, t\right) = k_x x + k_y y - \omega t$. Αν «παγώσουμε» το χρόνο, $t = t_0$, τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων σταθερής φάσης προσδιορίζεται από τη σχέση, $k_x x + k_y y - \omega t_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$, δηλ., ισοδύναμα, από τη σχέση $k_x x + k_y y = \sigma\tau\alpha\theta.$, που είναι η εξίσωση ευθείας στο επίπεδο x-y, της $y = \sigma\tau\alpha\theta. - \left(k_x / k_y\right) x$, δηλ., μίας ευθείας η οποία είναι κάθετη στο $\vec{k} = \left(k_x, k_y\right)$, άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η τομή μίας «επίπεδης ισοφασικής επιφάνειας με το επίπεδο x-y.

(β)) Η ταχύτητα διάδοσης φάσης προσδιορίζεται ως $\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = c = \sigma\tau\alpha\theta.$, και (για το συγκεκριμένο ιδανικό ελαστικό μέσο) είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα. Αφού το μέσο δεν παρουσιάζει διασπορά, από τη σχέση $\upsilon_{ph} = f\lambda = \omega\lambda / 2\pi$, σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση, έχουμε $\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = \frac{\omega\lambda}{2\pi}$, οπότε η σχέση μήκους κύματος και $\left|\vec{k}\right|$ είναι η εξής: $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}}$ (3).

Παράδειγμα4.1.1 Ιδανική μεμβράνη, η οποία, σε κατάσταση ισορροπίας εκτείνεται κατά μήκος του επιπέδου που ορίζεται από τους άξονες $\left(-\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty\right)$, έχει ομοιογενή επιφανειακή πυκνότητα μάζας: $\sigma \equiv \frac{dm}{dS} = \frac{dm}{dxdy} = \sigma\tau\alpha\theta.$, και τείνεται ισότροπα από όλες τις κατευθύνσεις με σταθερή δύναμη ανά μονάδα μήκους $T = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \sigma\tau\alpha\theta.$ Η πλευρά της μεμβράνης που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x, στο $y = 0$ έχει στερεωθεί έτσι ώστε όλα τα σημεία της $\left(-\infty < x < +\infty, \quad y = 0\right)$ να είναι ακλόνητα. Στην μεμβράνη, και μακριά από την ακλόνητη πλευρά της$\left(-\infty < x < +\infty, \quad y = 0\right)$, διεγείρεται εγκάρσιο οδεύον κύμα, κυκλικής συχνότητας ω, της μορφής $z = Ae^{i\left(k_1 x - k_2 y - \omega t\right)}$, όπου , $k_1 = k_2\sqrt{3} > 0$.

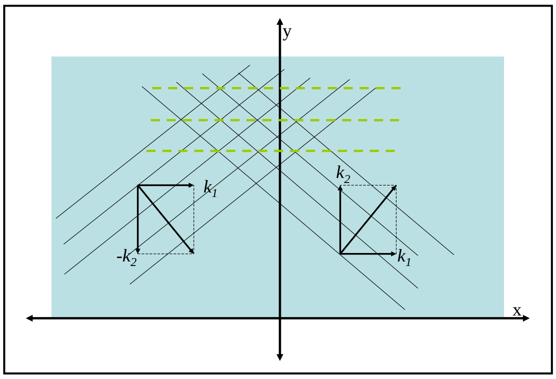
(α) Να προσδιοριστούν οι τιμές των k_1, k_2, συναρτήσει των: $\left(\sigma, T, \omega\right)$.

(β) Να σχεδιαστούν οι ισοφασικές γραμμές της μεμβράνης για ένα τυχαίο στιγμιότυπο, (πριν το κύμα φτάσει τον άξονα x), και να προσδιοριστεί η γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα x.
(γ) Να σχεδιαστεί η μορφή, (κυματάνυσμα και ισοφασικές επιφάνειες), του ανακλώμενου κύματος από την ακλόνητη πλευρά της μεμβράνης.
(δ) Να προσδιοριστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων την μεμβράνης που παραμένουν ακίνητα, όταν συνυπάρχουν σε όλη την έκτασή της το αρχικό και το ανακλώμενο κύμα.

Λύση

(α) Το κυματάνυσμα $\vec{k} = \hat{x}k_1 + \hat{y}(-k_2)$ συνδέεται με την ταχύτητα c μέσω της σχέση $k = \omega/c$, οπότε $\omega/c = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \sqrt{3k_2^2 + k_2^2} = 2k_2 \Rightarrow k_2 = \dfrac{\omega}{2c} = \dfrac{\omega}{2}\sqrt{\dfrac{\sigma}{T}}$, και

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}\omega}{2c} = \frac{\sqrt{3}\omega}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{T}}$$



(β,γ) Το διπλανό σχήμα αποδίδει το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα.
Με τις μαύρες γραμμές αποδίδονται οι ισοφασικές επιφάνειες (κάθετα στα αντίστοιχα κυματοδιανύσματα).

(δ) Όταν συνυπάρχουν, σε όλη την έκταση της μεμβράνης, προσπίπτον και ανακλώμενο κύμα, τότε η συνολική διαταραχή θα είναι $y_{o\lambda} = y_1 + y_2$, δηλ.,

$$y_{o\lambda} = Ae^{i(k_1x - k_2y - \omega t)} + Ae^{i(k_1x + k_2y - \omega t)} = Ae^{i(k_1x - \omega t)}\left[e^{i(-k_2y)} + e^{i(k_2y)}\right] = 2Ae^{i(k_1x - \omega t)}\cos(k_2y)$$

Το αποτέλεσμα είναι ένα οδεύον κύμα στην κατεύθυνση x και ένα στάσιμο κύμα στην κατεύθυνση y. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ακινητούν προκύπτει από την σχέση : $\cos(k_2y) = 0$, οπότε

$$k_2y = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = (2n-1)\frac{\pi}{2k_2} \Rightarrow y_n = (2n-1)\frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

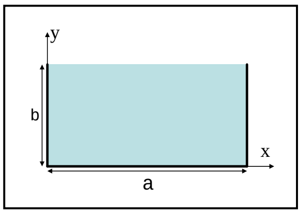
Επομένως, οι «δεσμικές καμπύλες» είναι ισαπέχουσες ευθείες, παράλληλες στον άξονα των x, με y-συντεταγμένες στα σημεία $y_n = (2n-1)\dfrac{\pi}{\omega}\sqrt{\dfrac{T}{\sigma}}$.

(β) Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης (στάσιμα κύματα) σε 2-διάστατο μέσο

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ΚΤΤ) είναι οι κατάλληλες λύσεις για ένα πεπερασμένο 2-διάστατο μέσο. Κατ' αναλογία με τους συζευγμένους ταλαντωτές, αλλά και με το 1-διάστατο συνεχές ελαστικό μέσο, οι ΚΤΤ είναι εκείνοι οι τρόποι κίνησης, κατά τους οποίους όλα τα μέρη κινούνται με την ίδια συχνότητα, αλλά με πλάτος το οποίο είναι συνάρτηση της θέσης. Άρα, για το 2-διάστατο μέσο, οι ΚΤΤ θα πρέπει να αναζητηθούν ως λύσεις της μορφής $z(x,y,t) = f(x,y)\cos(\omega t + \varphi)$. Ως συνάρτηση πλάτους $f(x,y)$ αναζητούμε λύσεις η μορφή των οποίων εξαρτάται από τη γεωμετρία των ορίων. Η χρήση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης στην ανάλυση των πεπερασμένων φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί

Παράδειγμα 4.1.1. Ιδανική μεμβράνη ορθογώνιου σχήματος διαστάσεων $(a \times b)$, όπου $a = 2b$, είναι ομοιογενής (σταθερή επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma \equiv dm/dS$), και τεντωμένη ισότροπα (δύναμη ανά μονάδα μήκους T, ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις). Οι τρεις πλευρές της μεμβράνης (μήκους: b, a, b, αντίστοιχα) είναι ακλόνητες ενώ η τέταρτη είναι ελεύθερη. Να προσδιορισθούν οι 6 χαμηλότερες συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της μορφής $z(x,y,t) = f(x.y)\cos(\omega t) = X(x)Y(y)\cos(\omega t)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Αναζητούμε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης της μορφής

$$z(x,y,t) = f(x.y)\cos(\omega t) = X(x)Y(y)\cos(\omega t)$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

και διαιρώντας κατά μέλη, μετά τις παραγωγίσεις, με την ίδια την συνάρτηση $z(x,y,t) = X(x)Y(y)\cos(\omega t)$, παίρνουμε την σχέση

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\frac{\omega^2}{c^2},$$

στο αριστερό μέρος της οποίας, κάθε προσθετέος είναι συνάρτηση άλλης μεταβλητής, άρα δεν μπορεί παρά, ο καθένας, να είναι μία σταθερή ποσότητα. Θέτουμε:

$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2$, $\quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2$, με $\quad k_x^2 + k_y^2 = \omega^2/c^2$

Οι λύσεις είναι της μορφής: $X = A\sin(k_x x + \theta)$, $Y = B\sin(k_y y + \phi)$

Από τις συνοριακές συνθήκες, παίρνουμε

$X(x=0) = 0 \Rightarrow \theta = 0$, $\quad Y(y=0) = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$X(x=a) = 0 \Rightarrow k_{xn} = n\frac{\pi}{a}$, $\quad \frac{\partial Y}{\partial y}(y=b) = 0 \Rightarrow k_{yn} = (2m-1)\frac{\pi}{2b}$. Επομένως, οι λύσεις είναι

$$z_{nm}(x,y,t) = f_{nm}(x.y)\cos(\omega_{nm} t) = C_{nm}\sin\left(n\frac{\pi}{a}\right)\sin\left((2m-1)\frac{\pi}{2b}\right)\cos(\omega_{nm} t + \varphi_{nm})$$

και $\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \Rightarrow \omega_{nm} = \frac{c\pi}{2b}\sqrt{n^2 + (2m-1)^2}$.

Οπότε, το φάσμα συχνοτήτων ω_{nm}, (σε μονάδες $\frac{c\pi}{2b}$), αναπτύσσεται ως εξής:

$\omega_{11} = \sqrt{2}$, $\omega_{21} = \sqrt{5}$, $\omega_{12} = \omega_{31} = \sqrt{10}$, $\omega_{22} = \sqrt{13}$, $\omega_{41} = \sqrt{17}$, $\omega_{32} = \sqrt{18}$, $\omega_{13} = \omega_{51} = \sqrt{26}$, ...

Παρατηρούμε, ήδη, την εμφάνιση 2 διπλών εκφυλισμών, στους συνδυασμούς δεικτών 12-31, και 13-51, που είναι αποτέλεσμα της σχέσης διαστάσεων $a = 2b$. Αυτό σημαίνει ότι οι σχηματισμοί ταλάντωσης X_1Y_2 και X_3Y_1 έχουν την ίδια συχνότητα ταλάντωσης, παρ' ότι αντιστοιχούν σε διαφερετικό τρόπο παραμόρφωσης. Το ίδιο ισχύει για τος σχηματισμούς ταλάντωσης X_1Y_3 και X_5Y_1.

Στους παρακάτω συνδέσμους, προβάλλονται πειράματα επίδειξης στάσιμων κυμάτων, διαφορετικής συχνότητας, σε πλάκες διαφορετικών σχημάτων.
https://www.youtube.com/watch?v=jhaTULO2Zkc
https://www.youtube.com/watch?v=ChkZ8lSpGkA
https://www.youtube.com/watch?v=CGiiSlMFFlI