ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 12

Διάλεξη: 5 Νοεμβρίου 2020

Προηγούμενα επεισόδια: Γραμμικές ΔΕs 2ης τάξης: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

Γενική λύση: $y(x) = y_0(x) + y_\mu(x) = \underbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}_{\text{λύση ομογενούς}} + \underbrace{y_\mu(x)}_{\text{μερική λύση}}$

Lagrange

$y_1(x) \longrightarrow y_2(x) = u(x)\, y_1(x) \quad u(x) = \int U(x)\,dx \quad U(x) = \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int p(x)\,dx\right]$

$y_1(x), y_2(x) \longrightarrow y_\mu(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$

$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\, r(x)}{W(x)}\,dx \quad u_2(x) = +\int \frac{y_1(x)\, r(x)}{W(x)}\,dx \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ ορίζουσα Wronski

Γραμμικές ΔΕs 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές: $y'' + py' + qy = r(x)$

Χαρακτ. εξίσωση: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R \longrightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \longrightarrow y_1 = e^{\lambda x} \quad y_2 = x e^{\lambda x}$
- $\lambda = \phi + i\omega \longrightarrow y_1 = e^{\phi x} \cos(\omega x) \quad y_2 = e^{\phi x} \sin(\omega x)$

$y_\mu(x)$: Η από απροσδιόριστους συντελεστές (πίνακας) ή από μεταβολή παραμέτρων (Lagrange).

ΤΕΣΤ 3

(α) (8 μονάδες) Βρείτε την γενική λύση της: $$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+5y=x+e^x$$

(β) (2 μονάδες) Βρείτε τις λύσεις που ικανοποιούν την συνθήκη y(0)=0.

Ομογενής: $y''-2y'+5y=0$ ✓

$\lambda^2-2\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=1\pm 2i \qquad y_0(x)=C_1e^x\cos(2x)+C_2e^x\sin(2x)$

$y_\mu(x)=\underbrace{a_1x+a_0}+\underbrace{Ce^x} \qquad y_\mu'=a_1+Ce^x \qquad y_\mu''=Ce^x$

$\underline{Ce^x}-2a_1\underline{-2Ce^x}+\underline{\underline{5a_1x}}+5a_0+\underline{5Ce^x}=\underline{\underline{x}}+\underline{e^x} \Rightarrow$

$\underbrace{(4C-1)}e^x+\underbrace{(5a_1-1)}x+\underbrace{(5a_0-2a_1)}=0 \quad \forall x$

$4C-1=0\Rightarrow C=\frac{1}{4}$

$5a_1-1=0\Rightarrow a_1=\frac{1}{5}$

$5a_0-2a_1=0$

$5a_0-\frac{2}{5}=0\Rightarrow a_0=\frac{2}{25}$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{x}\cos(2x) + C_2 e^{x}\sin(2x) + \frac{1}{5}x + \frac{2}{25} + \frac{1}{4}e^{x}}$$

(b) $y(0) = 0 \longrightarrow C_1 = -\frac{33}{100}$

$$\boxed{y(x) = -\frac{33}{100} e^{x}\cos(2x) + C_2 e^{x}\sin(2x) + \frac{1}{5}x + \frac{2}{25} + \frac{1}{4}e^{x}}$$

Παράδειγμα: Γενική λύση της: $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2x$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $1y'' - \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{p(x)} y' + \frac{2}{1+x^2} y = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{r(x)}$

Πως θα βρούμε το $y_1(x) = ;$ $\quad (1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \leftarrow r(x)$

Δοκιμή. $\cancel{y=C}$ $\quad y = x \quad y' = 1 \quad y'' = 0 \quad -2x1 + 2x = 0$ ✓ $\quad \underline{y_1(x) = x}$

$U(x) = \frac{1}{y_1^2} \exp\left[-\int p(x)dx\right] \quad u(x) = \int U(x)dx \quad y_2(x) = u(x) y_1(x)$

$y_1^2 \to x^2$, $\quad y_1(x) \to x$

$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \quad U(x) = \frac{1}{x^2}\exp\left[\int \frac{2x}{1+x^2}dx\right] = \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$

$u(x) = \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2}dx = x - \frac{1}{x} \quad y_2(x) = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1 \Rightarrow \underline{y_2(x) = x^2 - 1}$

$$\boxed{y_0(x) = C_1 x + C_2(x^2-1)}$$

$y_1(x) = x$ ✓ $\qquad y_2(x) = x^2-1 \qquad r(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 + 1 = x^2+1$$

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2\, r}{W}\,dx = -\int \frac{(x^2-1)\;2x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\ln(x^2+1) - \frac{2}{x^2+1}$$ ✓

[Google: Integral Calculator]

$$u_2(x) = +\int \frac{y_1\, r}{W}\,dx = \int \frac{x\;2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \tan^{-1}(x) - \frac{x}{x^2+1}$$ ✓

$$y_p(x) = y_1 u_1 + y_2 u_2 = -x\ln(x^2+1) - \frac{2x}{x^2+1} + (x^2-1)\tan^{-1}(x) - \frac{x(x^2-1)}{x^2+1}$$

$$y(x) = C_1 x + C_2(x^2-1) - x\ln(x^2+1) - \frac{2x}{x^2+1} + (x^2-1)\tan^{-1}(x) - \frac{x(x^2-1)}{x^2+1}$$

Κεφάλαιο 3 Λύση γραμμικών ΔΕ με δυναμοσειρές

Ιδέα της μεθόδου: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Υπέρ: 1. Αρκετά γενική μέθοδος. Πολλές συναρτήσεις μπορούν να γραφούν σαν δυναμοσειρές.

2. Αντί για $y(x)$ τώρα ψάχνουμε τα $a_0, a_1, a_2, \dots$

Κατά: 1. Ψάχνουμε άπειρα a: $a_0, a_1, \dots, a_{100}, \dots, a_{1000}, \dots$

2. Υπολογισμός πχ $y(1) \rightarrow$ πόσους όρους θα πάρουμε;

3. Σε κάποιες περιπτώσεις δεν θα συγκλίνει.

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 3
4 Νοεμβρίου 2020

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(α) (8 μονάδες) Βρείτε την γενική λύση της:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = x + e^x$$

(β) (2 μονάδες) Βρείτε τις λύσεις που ικανοποιούν την συνθήκη y(0)=0.