Ιωάννης Τσαντήλας

Γ' Σειρά Ασκήσεων 2020
1ου Εξαμήνου
Φυσική

— o —

1. α) $U'(x) = \dfrac{-A(b^2+x^2)+2Ax^2}{(b^2+x^2)^2} = \dfrac{A(x^2-b^2)}{(b^2+x^2)^2}$

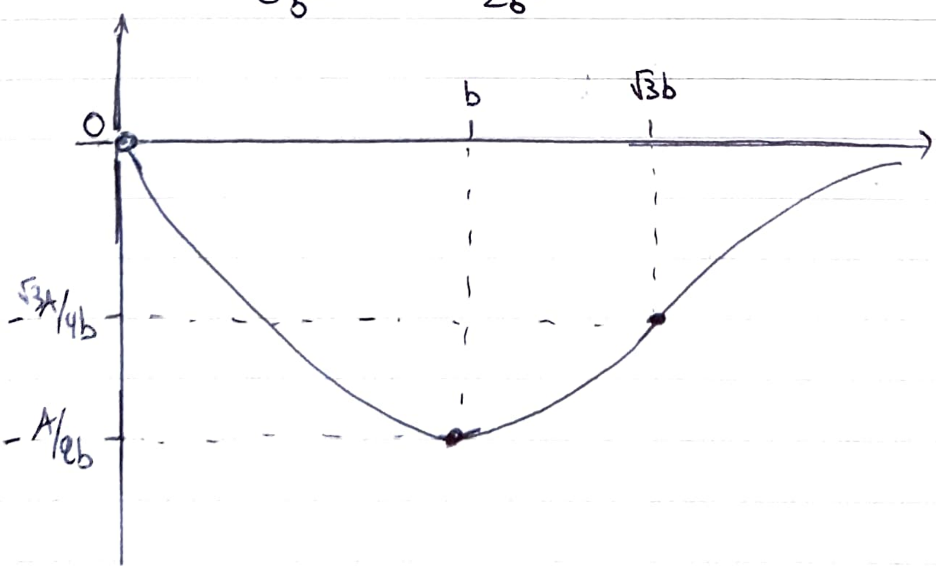
$F(x) = -U'(x) = \dfrac{A(b^2-x^2)}{(b^2+x^2)^2}$

$F(x) = 0 \overset{x>0}{\iff} \boxed{x=b}$

$U''(x) = \dfrac{2Ax(b^2+x^2)^2 - A(x^2-b^2)\cdot 2(b^2+x^2)\cdot 2x}{(b^2+x^2)^4} =$

$= \dfrac{2Ax(3b^2-x^2)}{(b^2+x^2)^3}$

$U''(b) = \dfrac{2Ab\cdot 2b^2}{8b^6} = \dfrac{A}{2b^3} > 0 \Rightarrow$ η ισορροπία είναι ευσταθής.



β) Το ανάπτυγμα Taylor για την F είναι:

$F(x) = \dfrac{F(b)}{0!} + \dfrac{F'(b)}{1!}(x-b) + \dfrac{F''(b)}{2!}(x-b)^2 + \ldots \approx \dfrac{F(b)}{0!} + \dfrac{F'(b)}{1!}(x-b) =$

$= 0 - \dfrac{A}{2b^3}x = -\dfrac{A}{2b^3}x$

Αν $F_{\tau\alpha\lambda} = -kx$, $F(x) \simeq -\frac{A}{2b^3}x$ } το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με $k = \frac{A}{2b^3} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{A}{2mb^3}}}$

γ) $K_{max} = |U_{max}| = |U(b)| = \frac{A}{2b} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\kappa\rho}^2 = \frac{A}{2b} \Rightarrow \boxed{v_{\kappa\rho} = \sqrt{\frac{A}{mb}}}$

δ) $v_{max} = A_{\tau\alpha\lambda\alpha\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma} \cdot \omega = A_{\tau\alpha\lambda} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{v_{\kappa\rho}}{2} = A_{\tau\alpha\lambda}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{mb}} = A_{\tau\alpha\lambda}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{A}{mb} = A_{\tau\alpha\lambda}^2 \frac{k}{m} \Rightarrow$

$A_{\tau\alpha\lambda}^2 = \frac{A}{4bk} = \frac{A}{4b \cdot \frac{A}{2b^3}} = \frac{A \cdot 2b^3}{4b \cdot A} = \frac{b^2}{2} \Rightarrow A_{\tau\alpha\lambda} = \frac{b}{\sqrt{2}}$

Και αφού $x_{\iota\sigma} = b$:

$\boxed{x_1 = b + \frac{b}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{x_2 = b - \frac{b}{\sqrt{2}}}$

2\. α) $U_r = U_{A\Gamma} + U_{\Gamma B} = -\dfrac{GM_A m}{r} - \dfrac{GM_B m}{9R_A - r} =$

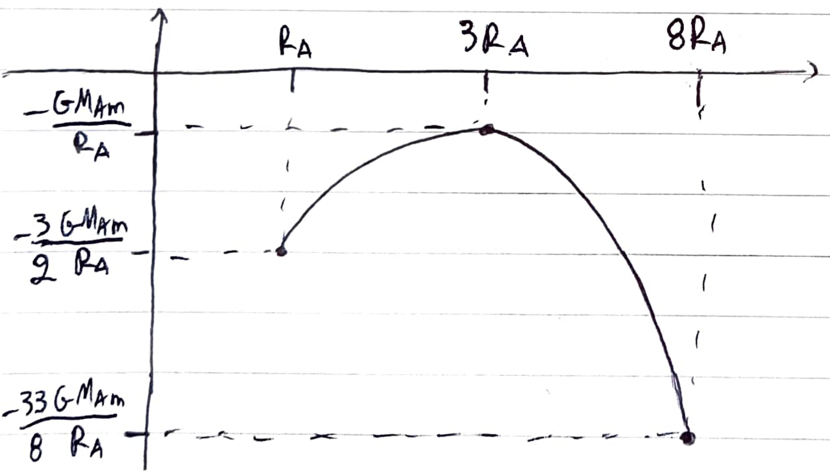
$-\dfrac{GM_A m}{r} - \dfrac{G4M_A m}{9R_A - r} = -GM_A m\left[\dfrac{1}{r} + \dfrac{4}{9R_A - r}\right]$

β) $U'(r) = -GM_A m\left[-\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{4}{(9R_A - r)^2}\right]$

$U'(r) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{4}{(9R_A - r)^2} \overset{r>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{r} = \dfrac{2}{9R_A - r} \Leftrightarrow r = 3R_A$

$U''(r) = -GM_A m\left[\dfrac{2}{r^3} + \dfrac{8}{(9R_A - r)^3}\right] = -2GM_A m\left[\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{6}{(9R_A - r)^3}\right] < 0$

για κάθε $r > 0$. Άρα:



γ) ΑΔΜΕ (A→B): $K_A + U_A = \cancel{K_B}^{0} + U_B \Rightarrow K_A = U_B - U_A \Rightarrow$

$K_A = -\dfrac{4GM_A m}{R_A} - \dfrac{GM_A m}{8R_A} + \dfrac{GM_A m}{R_A} + \dfrac{GM_A m}{2R_A} \Rightarrow$

$K_A = -\dfrac{3GM_A m}{R_A} + \dfrac{3GM_A m}{8R_A} = \boxed{-\dfrac{21GM_A m}{8R_A}\ J}$

δ) Αφού στο σώμα προσδίδουμε την μισή κινητική ενέργεια που απαιτείται για να φτάσει στην επιφάνεια του Β, το σώμα θα φτάσει μέχρι μια θέση Γ, αρχικά επιταχυνόμενα μέχρι το $r=3R_A$ (με μειούμενη επιτάχυνση) και έπειτα επιβραδυνόμενα (με αύξουσα επιβράδυνση) μέχρι να σταματήσει.

Έπειτα, θα εκτελέσει ταλάντωση γύρω από το $r=3R_A$, ανάμεσα στην επιφάνεια του Α και τη θέση Γ.

3) α) $\hat{\nabla} \times \hat{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\hat{x} \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(-Cx - Dy)}{\partial x} - \frac{\partial(-Ax - By)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-C + B = 0 \Leftrightarrow \boxed{C = B}$$

β) $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +Ax + By$, αν $\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = \int (Ax + By) dx \Rightarrow$

$U(P) = +\frac{A}{2}x^2 + Bxy + c_1$ (1)

$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = Bx + Dy$, αν $\int \frac{\partial U}{\partial y} dy = \int (Bx + Dy) dy \Rightarrow$

$U(P) = Bxy + \frac{D y^2}{2} + c_2$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \frac{A}{2}x^2 + Bxy + C_1 = Bxy + \frac{Dy^2}{2} + c_2 \Rightarrow \frac{A}{2}x^2 + c_1 = \frac{Dy^2}{2} + c_2$

Το c_1 είναι σε εξάρτηση με το y άρα $c_1 = \frac{Dy^2}{2}$. Ομοίως $c_2 = \frac{Ax^2}{2}$.

Επομένως $U(P) = \frac{A}{2}x^2 + \frac{D}{2}y^2 + Byx + c$

β1) Αν $A(-1,-1)$, $O(0,0)$ $B(1,1)$

ΑΔΜΕ $(A \to O)$: $K_A + U_A = K_O + U_O \Rightarrow K_O - K_A = U_A - U_O \xrightarrow[\text{από ΘΜΚΕ}]{\Delta K = \Delta W_1}$

$\Delta W_1 = \frac{A}{2} + \frac{D}{2} + B + c - c = \frac{A}{2} + \frac{D}{2} + B$

ΑΔΜΕ $(O \to B)$: $K_O + U_O = K_B + U_B \Rightarrow K_B - K_O = U_O - U_B \xrightarrow[\text{από ΘΜΚΕ}]{\Delta K = K_B - K_O = \Delta W}$

$$\Delta W_2 = C - \frac{A}{2} - B - \frac{D}{2} - C = -\frac{A}{2} - B - \frac{D}{2}$$

$$\boxed{\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = 0\ J}$$

β2) Αν $A(1,-1)$ και $B(1,1)$

ΑΔΜΕ $(A \to B)$: $K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow K_B - K_A = U_A - U_B \xrightarrow[\text{από ΘΜΚΕ}]{\Delta K = K_B - K_A = \Delta W}$

$$\Delta W = U_A - U_B = \frac{A}{2} - B + \frac{D}{2} + C - \frac{A}{2} + B - \frac{D}{2} - C = \boxed{0\ J}$$

Επειδή η δύναμη είναι διατηρητική, δεν παράγει ούτε καταναλώνει έργο, επομένως το συνολικό έργο που παράχθηκε / καταναλώθηκε είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και ίσο με 0.

γ) Από το ερώτημα (β) και αφού $U(O) = 0$, $[O(0,0)]$:

$U(O) = C = 0 \Rightarrow$

$$U(P) = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{D}{2}y^2 \quad , [P(x,y)]$$

4) Αν Α η θέση για $t=0$ και Γ η θέση την στιγμή που το m φτάνει στο τέλος του τεταρτοκυκλίου τότε:

ΑΔΜΕ$(A \to \Gamma)$: $\cancel{K_A}^{0} + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow$

$$mgR + U_M = \frac{1}{2} m v_\Gamma^2 + \frac{1}{2} M v_\Gamma^2 + \cancel{U_{m(0)}}^{0} + U_M \Rightarrow$$

$$mgR = \frac{1}{2} m v_\Gamma^2 + \frac{1}{2} M v_\Gamma^2 \quad (2)$$

ΑΔΟ$(A \to \Gamma)$: $\cancel{P_A}^{0} = P_\Gamma \Rightarrow 0 = m v_\Gamma - M v \Rightarrow$

$$V = \frac{m}{M} v_\Gamma \quad (1)$$

Από (1), (2): $mgR = \frac{1}{2} m v_\Gamma^2 + \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} v_\Gamma^2 \Rightarrow$

$$2gR = v_\Gamma^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Rightarrow \boxed{v_\Gamma = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}\ m/s}$$

Αν $M \to +\infty$:

$$\lim_{M\to+\infty} v_\Gamma = \lim_{M\to+\infty} \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}} = \boxed{\sqrt{2gR}\ m/s}$$

Αν $M \to 0$:

$$\lim_{M\to 0} v_\Gamma = \lim_{M\to 0} \sqrt{\frac{2gRM}{M+m}} = \boxed{0\ m/s}$$

Αν $M = m$:

$$\boxed{v_\Gamma = \sqrt{gR}\ m/s}$$

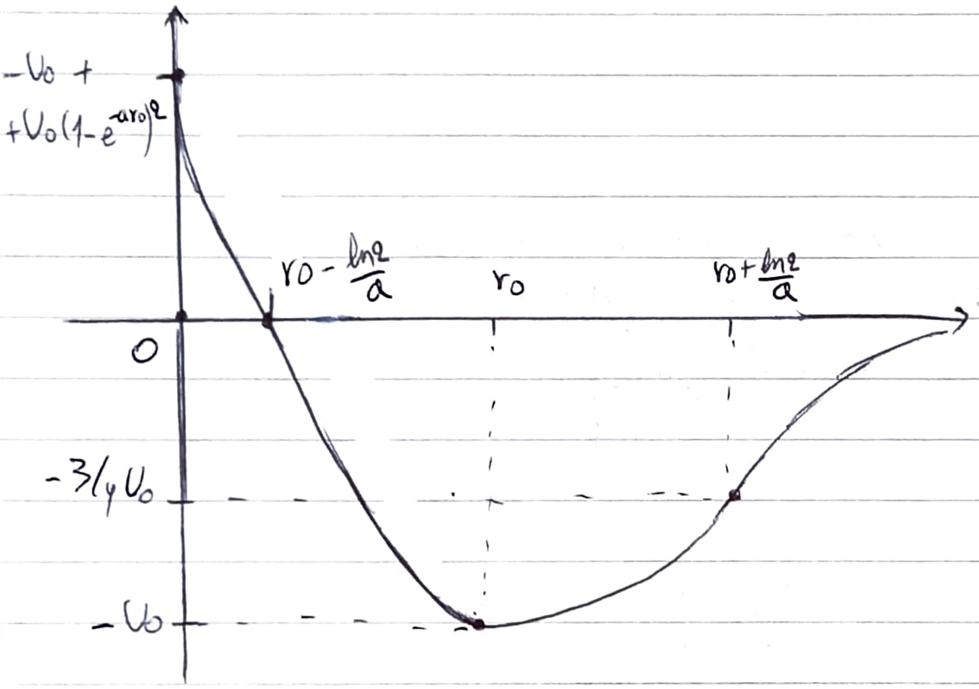
⑤ α) $U'(r) = 2U_0 \left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)\left(-e^{-a(r-r_0)}\right)(-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow U'(r) = 2aU_0 e^{-a(r-r_0)}\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)$

$U'(r) = 0 \Leftrightarrow r = r_0$

$U''(r) = -2a^2 U_0 e^{-a(r-r_0)}\left(1 - 2e^{-a(r-r_0)}\right)$

$U''(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 2}{a} + r_0$



β) $F = -\frac{dU}{dt} = -U'(r) = -2aU_0 e^{-a(r-r_0)}\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)$

$F(r) = 0 \Leftrightarrow r = r_0$
$F(r) > 0 \Leftrightarrow r \in [0, r_0)$ (απωστική)
$F(r) < 0 \Leftrightarrow r \in (r_0, +\infty)$ (ελκτική)

γ) Το σώμα θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια όταν αποκτήσει ελάχιστη δυναμική ενέργεια δηλαδή $U_{min} = -U_0$, $r_{min} = r_0$. Άρα:

⑤ (συνέχεια)

γ) ΑΔΜΕ: $\cancel{K_{αρχ}}^{0} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$

$$-U_0 + U_0\left(1 - e^{-ar_0/2}\right)^2 = K_{max} - U_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{2U_0}{m}} \cdot \left(1 - e^{-ar_0/2}\right)\ m/s}$$

δ) Από την γραφική παράσταση συμπεραίνουμε πως για $r = r_0 - \frac{\ln 2}{a}$ το άτομο φτάνει στο του με $U(r) \approx 0$. Επομένως, η απαιτούμενη απόσταση είναι $\boxed{d = r_0 - \frac{\ln 2}{a}}$

6) α) $x(0) = A \Rightarrow \boxed{A = x_0}$

$x'(t) = v(t) = B e^{-\gamma t} + (A+Bt) e^{-\gamma t}(-\gamma) \Rightarrow$

$v(0) = B - A\gamma \Rightarrow \boxed{B = v_0 + \gamma x_0}$

β) $x(t_0) = 0 \Rightarrow A + B t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = \dfrac{-A}{B} = \dfrac{-x_0}{v_0 + \gamma x_0} \Leftrightarrow$

$t_0 = \dfrac{-x_0}{-2\omega_0 x_0 + \gamma x_0} = \dfrac{1}{-\gamma + 2\omega_0} \xrightarrow{\gamma = \omega_0} \boxed{t_0 = \dfrac{1}{\omega_0}}$

Επομένως, αφού βρήκαμε μια χρονική στιγμή τέτοια ώστε $x(t) = 0$. Άρα το σύστημα διέρχεται από την θέση ισορροπίας μια μόνο φορά.

$v(t) = B e^{-\gamma t} + (A + Bt) e^{-\gamma t} \xrightarrow[A = x_0,\ \gamma = \omega_0]{B = v_0 + \omega_0 x_0}$

$v(t) = (v_0 + \omega_0 x_0) e^{-\omega_0 t} + (x_0 + (v_0 + \omega_0 x_0) t) e^{-\omega_0 t}$

$v(t_0) = (v_0 + \omega_0 x_0) e^{-1} - \dfrac{\left(x_0 + (v_0 + \omega_0 x_0)\dfrac{1}{\omega_0}\right) e^{-1}}{\omega_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow v(t_0) = \dfrac{-2\omega_0 x_0 + \omega_0 x_0}{e} - \dfrac{(2x_0 + v_0/\omega_0)}{e \cdot \omega_0} \Rightarrow$

$v(t_0) = \dfrac{-\omega_0 x_0}{e} - \dfrac{\left(2x_0 - \dfrac{2\omega_0 x_0}{\omega_0}\right)}{e \cdot \omega_0} \Rightarrow \boxed{v(t_0) = \dfrac{-\omega_0 x_0}{e}}$

γ) $\gamma' = \dfrac{r'}{2m} = \dfrac{\sqrt{5m}}{4m} = \dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{m}}$, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma'^2} = \dfrac{\sqrt{15}s}{4\sqrt{m}}$

$\boxed{f' = \dfrac{\omega'}{2\pi} = \dfrac{\sqrt{15}s}{8\pi\sqrt{m}}}$, $\boxed{Q = \dfrac{\omega'}{2\gamma'} = \dfrac{\frac{\sqrt{15}s}{4\sqrt{m}}}{\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{m}} \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}}$