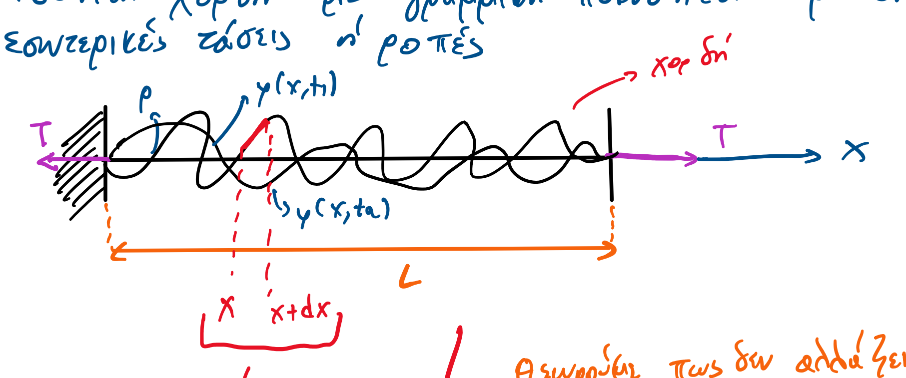
01.03.22

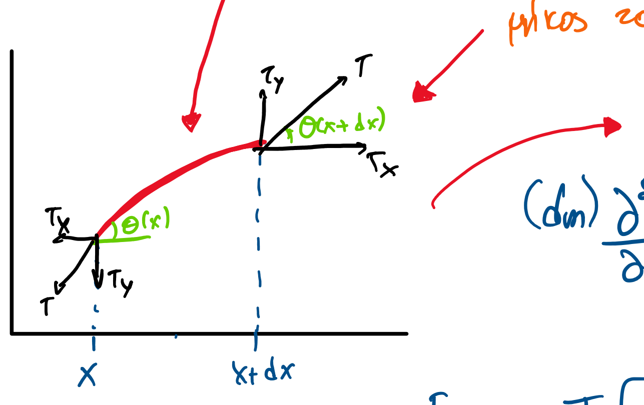
Tuesday, 1 March 2022 11:03 AM

Ενότητα 1η: Εξίσωση κύματος σε μια διάσταση

- "Ιδανική" χορδή με γραμμική πυκνότητα $\rho = dm/dl$ γνωστή ΑΛΛΑ χωρίς εσωτερικές τάσεις ή ροπές



Θεωρούμε πως δεν αλλάζει αισθητά το μήκος άρα ούτε η πυκνότητα ρ (η ταλάντωση είναι μικρή κατά μήκος του x'x)



Εφαρμόζουμε την προσέγγιση των μικρών γωνιών: $\tan\theta \simeq \sin\theta \simeq \theta$

$$(dm)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_{o\lambda,y} = T\sin\theta(x+dx) - T\sin(x) \simeq$$

$$\simeq T\tan\theta(x+dx) - T\tan(\theta) \quad (1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{o\lambda,y} = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \xRightarrow{\frac{\partial y}{\partial x} = g(x,t)}$$

$$\Rightarrow F_{o\lambda,y} = T\left[g(x+dx) - g(x)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{o\lambda,y} = T\cdot dg_x = T\frac{dg}{dx}dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (\rho\, dx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \Rightarrow \boxed{y(x,t) = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad (3)$$

Εξίσωση κυματικής σε 1-διάσταση

Ισοδύναμα η (3) $\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $\qquad c = \sqrt{T/\rho} \rightarrow$ διαστάσεις ταχύτητας!

$c \neq \frac{\partial y}{\partial t}$ = ταχύτητα ταλάντωσης του κύματος

Θέτουμε $\xi = \pm ct \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$(x, +ct)$
$(x, -ct)$ $\rightarrow y = f_1(x-ct) \pm f_2(x+ct)$

→ **Απόδειξη**

Θδο $f_1(x-ct)$ λύση της ΔΕΚ

$x - ct = \xi_1$

- $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = (-c)\frac{\partial y}{\partial \xi}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = (-c)^2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1^2}$$

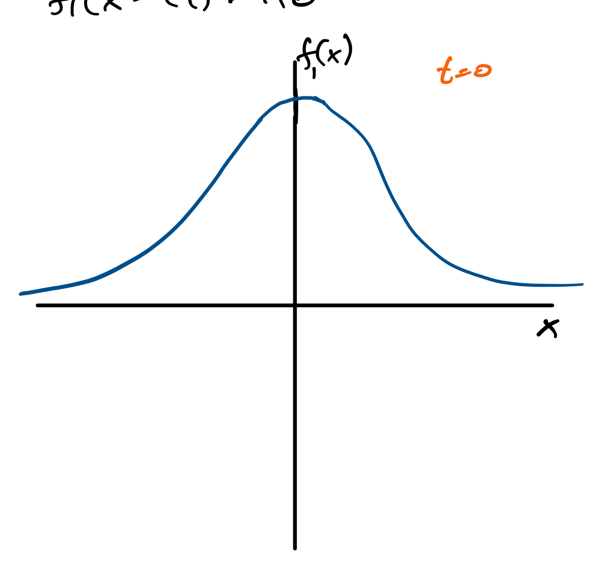
- $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi_1}$

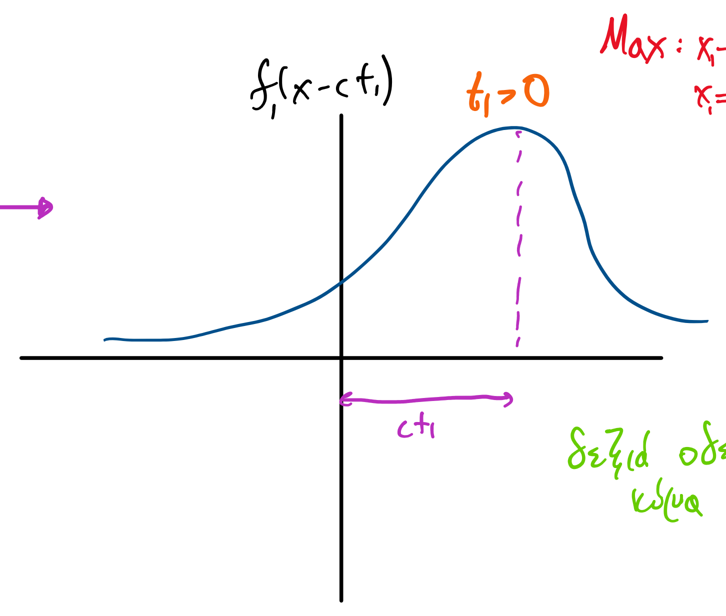
$$\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1^2}$$

→ με αντικατάσταση στην ΔΕΚ, επαληθεύεται

→ **Παράδειγμα**

$f_1(x-ct) = Ae^{\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2}$

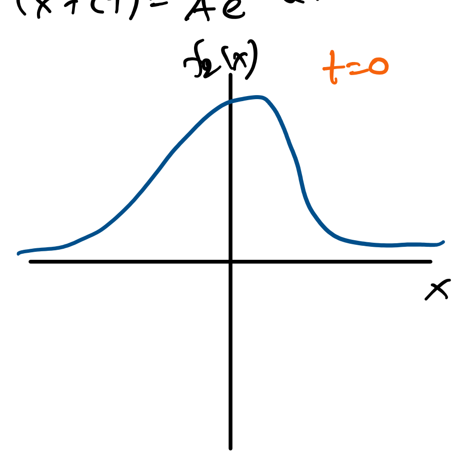


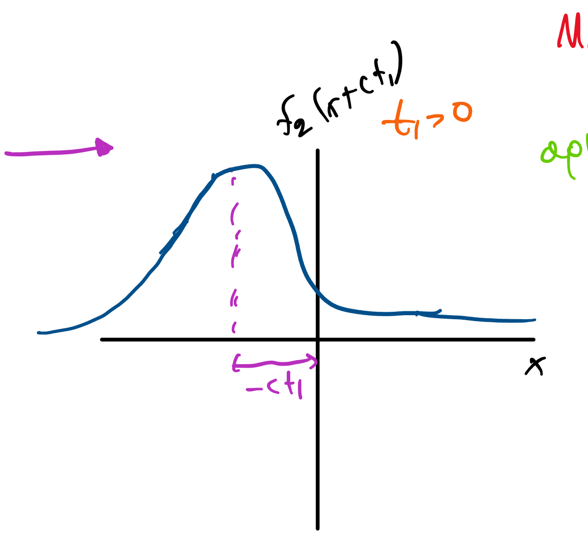


Max: $x_1 - ct_1 = 0$
$x_1 = ct_1 > 0$

δεξιά οδεύον κύμα

Αν $f_2(x+ct) = Ae^{\left(\frac{x+ct}{a}\right)^2}$





Max: $x_1 + ct_1 = 0 \Rightarrow$
$x_1 = -ct_1 < 0$

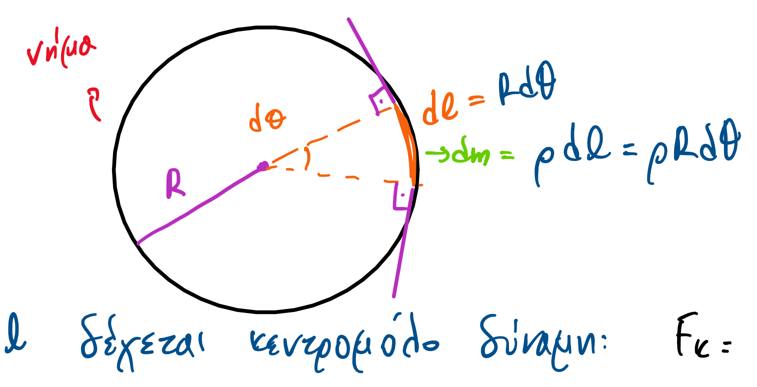
αριστερά οδεύον κύμα

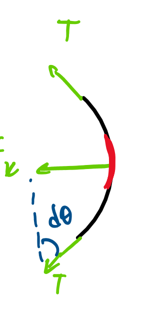
→ **Παράδειγμα**

Κυκλικό νήμα με γραμμική πυκνότητα ρ περιστρέφεται με ταχύτητα V.

α) Τάση;

β) Διάδοση κύματος;





$d\theta = \frac{F_\kappa}{T}$

Το dl δέχεται κεντρομόλο δύναμη: $F_\kappa = dm\cdot\frac{v^2}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\rho R d\theta^2)\frac{v^2}{R} = T d\theta \Rightarrow \boxed{T = \rho v^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = c \;!!$$

→ Έχοντας την $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, υπάρχουν κανονικοί τρόποι ταλάντωσης;

$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$

Να υπάρχει $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi)$ που να την επαληθεύει;

Αποδ.

Αντικαθιστώ: $-\frac{\omega^2}{c^2}f(x)\cos(\omega t+\varphi) = \frac{d^2 f}{dx^2}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow$

$$f''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = B\sin(kx+\theta) \text{ με } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

κυματαριθμός

Άρα υπάρχουν ΚΤΤ με την συνθήκη όμως τα άκρα ταλάντωσης να είναι στάσιμα.

Συνοριακές συνθήκες: Ακλόνητα άκρα

$y(x=0,t) = 0 \Longrightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 0}$

$y(x=L,t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$

$$\boxed{\omega_1 = ck_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\,n\frac{\pi}{L} = n\sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{\pi}{L}}$$

ω_0: Θεμελιώδη συχνότητα