ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 16

Διάλεξη: 18 Νοεμβρίου 2020

Προηγούμενα επεισόδια: Λύση Γραμμικών ΔΕ 2ης Τάξης με Δυναμοσειρές

$y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x)$ Γεν. λύση: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_\mu(x)$

Αν $p(x), q(x), r(x)$ αναλυτικές στο $x = 0 \Rightarrow y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ (με $R>0$)

ΔΕ του Legendre: $(1-x^2) y'' - 2xy' + \nu(\nu+1) y = 0$ $(\nu \in \mathbb{R})$

$$y(x) = a_0 \left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2!} x^2 + \frac{(\nu-2)\nu(\nu+1)(\nu+3)}{4!} x^4 - \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!} x^3 + \frac{(\nu-3)(\nu-1)(\nu+2)(\nu+4)}{5!} - \dots \right]$$

Συγκλίνουν για $|x|<1$ Δεν συγκλίνουν για $x = \pm 1$

Για $\nu = n =$ ακέραιος η μια λύση είναι το $P_n(x)$ (πολυώνυμο Legendre)

$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ...

Ισχύει ότι $P_n(1) = 1$ $\forall n$

ΔΕ του Legendre: $(1-x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0 \quad (\nu \in \mathbb{R})$

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2!}x^2 + \frac{(\nu-2)\nu(\nu+1)(\nu+3)}{4!}x^4 - \dots\right] + a_1\left[x - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!}x^3 + \frac{(\nu-3)(\nu-1)(\nu+2)(\nu+4)}{5!} - \dots\right]$$

Παράδειγμα 1: Λύστε $y'' = \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{12}{1-x^2}y$ $\quad y(1) =$ πεπερασμένο (όχι άπειρο)

$y'(0) = 2$

Λύση: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = \emptyset$ Legendre γιά $\nu = 3$

$$y(x) = C_1\left[1 - \frac{3\,4}{2}x^2 + \frac{1\,3\,4\,6}{4!}x^4 - \dots\right] + C_2 P_3(x) =$$

$$= C_1\left[1 - 6x^2 + \dots\right] + C_2 P_3(x)$$

($\nu(\nu+1) = 12 \Rightarrow \nu^2 + \nu - 12 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \nu_1 = 3$, $\nu_2 = -4$ Τι γίνεται αν διαλέξετε $\nu = -4$;)

Για $x = 1$ $\quad y(1) = C_1 \infty + C_2 1$ Για να μην απειρίζεται $C_1 = 0$ $\quad y(x) = C_2 P_3(x)$

$y(x) = C_2 P_3(x)$ $\qquad$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$y'(x) = C_2 \frac{1}{2}(15x^2 - 3)$ $\qquad$ $y'(0) = 2 \Rightarrow C_2 \frac{1}{2}(-3) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2 = -\frac{4}{3}$

$$\boxed{y(x) = -\frac{4}{3} P_3(x)}$$

4.1 Άλλες ιδιότητες των $P_n(x)$

1. Τύπος του Rodriguez : $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$

2. Ορθογωνιότητα: $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \forall m \neq n$

$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1}$

Παράδειγμα: Γενική λύση της $y'' + \underbrace{x^2}_{q(x)} y = 0$. Σειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) \underline{x^{n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underline{x^{n+2}} = 0$$

$n-2 = k+2 \rightarrow k = n-4$

$n = k+4$

$$\sum_{k=-4}^{\infty} a_{k+4} (k+4)(k+3) x^{k+2} \xrightarrow[\substack{\text{ονόματος} \\ k \to n}]{\text{Αλλαγή}} \sum_{\underline{n=-4}}^{\infty} a_{n+4} (n+3)(n+4) \underline{x^{n+2}}$$

$$\sum_{m=-4}^{\infty} a_{m+4}(m+3)(m+4)x^{m+2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+2} = 0$$

$$a_0 \cancel{(-1)\,0}\xrightarrow{}0\; x^{-2} + \cancel{0}\xrightarrow{}0 + a_2\, 1\, 2\, x^{0} + a_3\, 2\, 3\, x +$$

$$+ \sum_{\underline{m=0}}^{\infty} a_{m+4}(m+3)(m+4)\underline{x^{m+2}} + \sum_{\underline{m=0}}^{\infty} a_m \underline{x^{m+2}} = 0 \to$$

$$\to \underline{2a_2} + \underline{6a_3 x} + \sum_{m=0}^{\infty}\left[a_{m+4}(m+3)(m+4)+a_m\right]x^{m+2} = 0$$

$$[\ ]x^{2} + [\ ]x^{3} + \dots$$

$$\to \boxed{a_2=0} \quad \boxed{a_3=0} \qquad a_{m+4}(m+3)(m+4)+a_m=0 \quad m=0,1,2,\dots$$

$$\boxed{a_{m+4} = -\frac{a_m}{(m+3)(m+4)} \qquad m=0,1,2\dots}$$

$$y'' + x^2 y = 0 \qquad \underline{a_2 = 0} \quad a_3 = 0 \qquad a_{n+4} = -\frac{1}{(n+3)(n+4)}\,a_n \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Για $n=0$ $\quad a_4 = -\dfrac{1}{3\;4}\,a_0 = -\dfrac{1}{12}\,a_0$

Για $n=1$ $\quad a_5 = -\dfrac{1}{4\;5}\,a_1 = -\dfrac{1}{20}\,a_1$

Για $n=2$ $\quad a_6 = -\dfrac{1}{5\;6}\,a_2 = 0 \qquad n=3 \quad a_7 = \dfrac{-1}{6\;7}\,a_3 = 0$

Για $n=4$ $\quad a_8 = -\dfrac{1}{7\;8}\,a_4 = +\dfrac{1}{672}\,a_0 \qquad a_9 = +\dfrac{1}{1440}\,a_1 \quad \cdots$

$$y(x) = \underline{a_0} + a_1 x \underline{- \frac{1}{12} a_0 x^4} - \frac{1}{20} a_1 x^5 \underline{+ \frac{1}{672} a_0 x^8} + \frac{1}{1440} a_1 x^9 - \cdots$$

$$= a_0\left[1 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 - \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{1440}x^9 - \cdots\right]$$

Παράδειγμα: $\dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} = 6$ Γενική λύση (γραμμική 3ης τάξης μη ομογενής)

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$

$y''' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

Αντικατάσταση

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\underline{x^{n-3}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n \underline{x^n} = 6$$

$\Big\downarrow$ $k = n-3$, $n = k+3$

$k \to n$

$$\sum_{\cancel{n=-3}\; n=0}^{\infty} a_{n+3} \underline{(n+3)}\,\underline{(n+2)}\,\underline{(n+1)}\,\underline{x^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n \underline{x^n} = 6$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n+3}(n+1)(n+2)(n+3)+n\,a_n\right]x^n = 6 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{\left[a_3\,1\,2\,3+0a_0-6\right]}_{(6a_3-6)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n+3}(n+1)(n+2)(n+3)+n\,a_n\right]x^n = 0$$

$[\ ]x+[\ ]x^2+\dots$

$[\ ]=0$

$$\boxed{a_3=1}$$

$$\boxed{a_{n+3}=-\frac{n\,a_n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad n=1,2,3,}$$

Προσπαθούμε να φθάσουμε σέ: $\underline{a_0}+a_1x+a_2x^2+\dots=0 \quad \forall x$

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 4

18 Νοεμβρίου 2020

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(α) (12 μονάδες) Βρείτε την γενική λύση της: $$\frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών βρίσκοντας τον κατάλληλο αναδρομικό τύπο.

(β) (3 μονάδες) Βρείτε την ειδική λύση για: $y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$