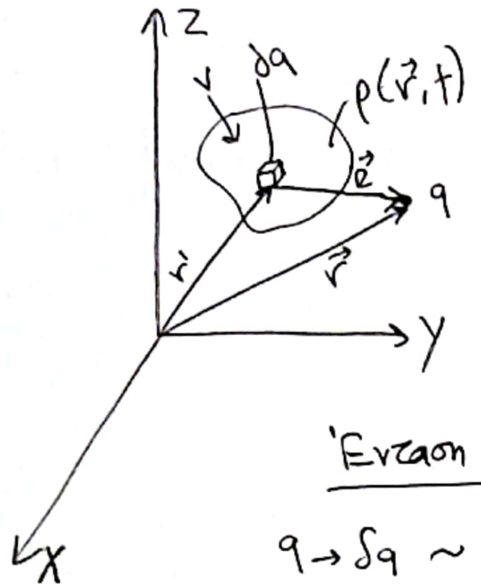
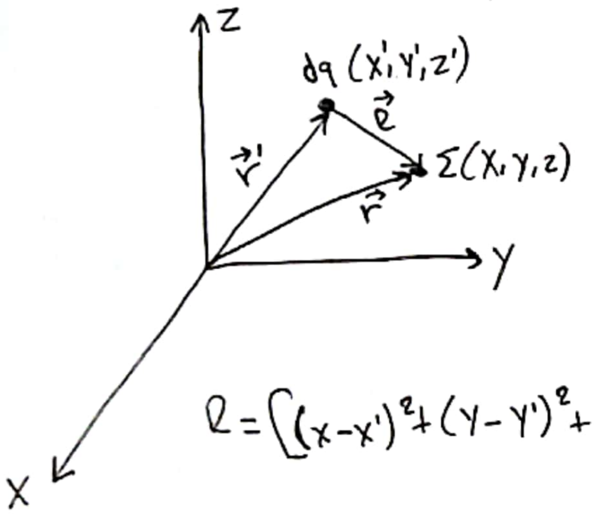


$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dq}{R^2}\hat{i}_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dV}{R^2}\hat{i}_R$$

Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου : $\vec{E}$

$$q \to \delta q \sim \delta\vec{F} = \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dV}{R^2}\hat{i}_R \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\delta\vec{F}}{\delta q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dV}{R^2}\hat{i}_R}$$

Νόμος του Αστρόβιλου



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x-x')\hat{i}_x + (y-y')\hat{i}_y + (z-z')\hat{i}_z$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\hat{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)\hat{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)\hat{i}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{R^2}\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{R} = -\frac{x-x'}{R^3}$$

$$R = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$$

Επομένως: $\vec{\nabla}(1/R) = -\dfrac{\hat{i}_R}{R^2}$

Από τον ορισμό του ηλ. πεδίου $\vec{E}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dV}{R^2}\hat{i}_R = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_V}_{\text{ολοκλήρωση ως προς } x',y',z'} \rho\, dV' \overbrace{\vec{\nabla}}^{\vec{\nabla}(\text{ως προς } x,y,z)}\left(\frac{1}{R}\right) = -\vec{\nabla}\underbrace{\left[\int_V \frac{\rho\, dV'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R}\right]}_{\text{Ηλ. δυναμικό σε Volts}} = -\vec{\nabla}\Phi$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε το βαθμωτό δυναμικό: $\boxed{\Phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \frac{\rho\, dV'}{R}}$

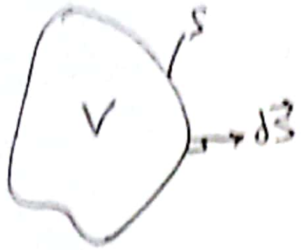
Εφόσον: $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$ $\rightsquigarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{dl} = -\vec{\nabla}\Phi\cdot\hat{i}_l\, dl$

$$= -\frac{d\Phi}{dl}\,dl = -d\Phi$$

$$\boxed{\Phi = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}}$$

Νόμος Gauss :

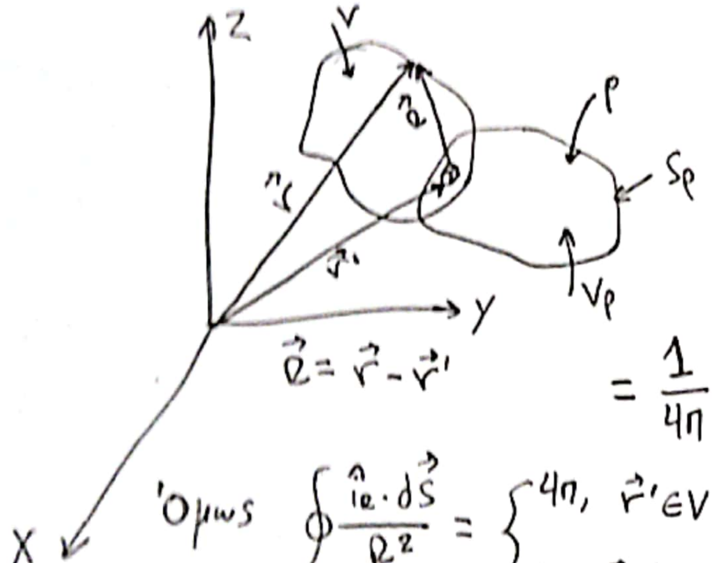
Divergence theorem:



$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV$$

Εισάγεται το διανυσματικό μέγεθος $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ (πυκνότητα ηλ. ροής ή διηλεκτρική μετατόπιση $[C/m^2]$)

Ηλεκτρική Ροή Ψ_e δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας S: $\Psi_e = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$



Ας υπολογίσουμε Ψ_e δια μέσου της S:

$$\Psi_e = \oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V_p} \frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{R^2}\hat{i}_R \right\} d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \int_{V_p} \frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{R^2}\hat{i}_R \right\}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_p} \rho(\vec{r}')\,dV' \oint \frac{\hat{i}_R\cdot d\vec{S}}{R^2}$$

Όμως $\oint \frac{\hat{i}_R\cdot d\vec{S}}{R^2} = \begin{cases} 4\pi, & \vec{r}' \in V \\ 0, & \vec{r}' \notin V \end{cases}$

Επομένως : $\Psi_e = \frac{1}{4\pi}\int_{V_p\cap V} \rho(\vec{r}')\,dV' \, 4\pi = \int_{V_p\cap V} \rho(\vec{r}')\,dV' = Q_{encl}$ = το συνολ. φορτίο πο[υ] ∃ μέσα στον όγκο V

Από το θεώρημα της Απόκλισης:

$$Q_{encl} = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,dV \Rightarrow Q_{encl} = \int_V \rho\, dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$

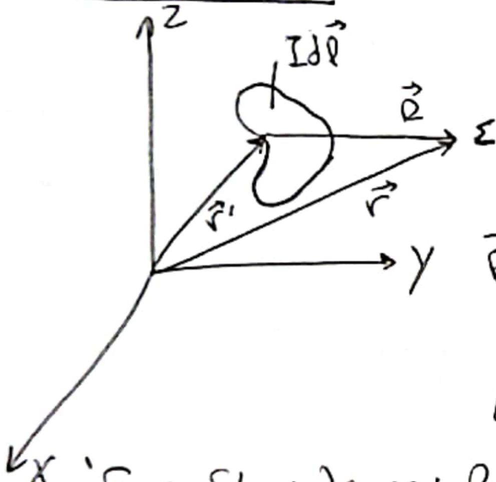
Συνοψίζοντας:

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV = Q_{encl} \quad \text{ή} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho}$$

Μαγνητοστατικά πεδία:

$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ ΝΔΦ: $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ ή $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$ (σωληνοειδής ροή ρεύματος)

Νόμος Biot-Savart:



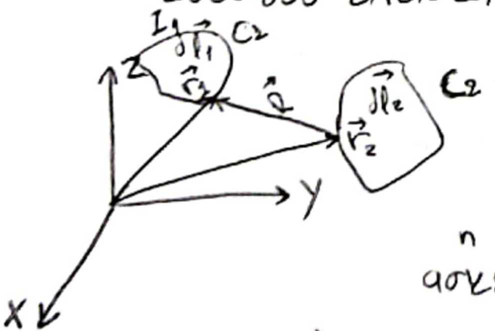
$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

$\vec{B}$ = μαγνητική επαγωγή ή πυκνότητα μαγν. ροής (Tesla $= \frac{V\cdot s}{m^2}$)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I d\vec{l}\times \hat{i}_R}{R^2} \quad \text{ή} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l}\times \hat{i}_R}{R^2}$$

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\, H/m$ (διαπερατότητα του κενού)

Έστω δύο κλειστοί βρόχοι ρεύματος C_1 & C_2:



Από τα πειράματα Biot-Savart:

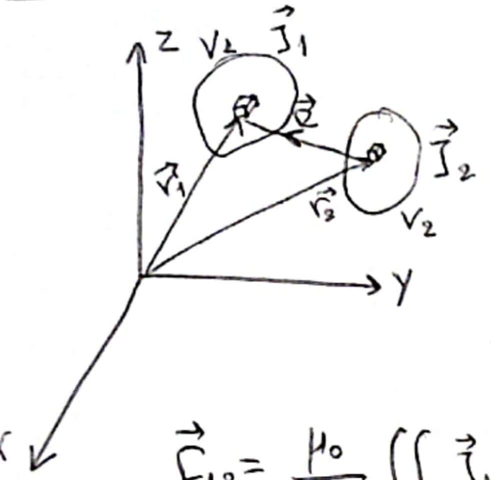
$$\delta\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2 \qquad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \hat{i}_R}{R^2}$$

η δύναμη που ασκεί ο $2 \to 1$

$$d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times \left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{I_2 d\vec{l}_2\times \hat{i}_R}{R^2}\right\} \quad \text{όμοια} \quad d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l}_2 \times \left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{I_1 d\vec{l}_1\times(-\hat{i}_R)}{R^2}\right\}$$

$d\vec{F}_{12} + d\vec{F}_{21} \neq 0$. Όμως η $\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times i_R)}{R^2} = -\vec{F}_{21}$

Γενίκευση:



$$\delta\vec F_{12} = \vec J_1 dV \times \vec B_2(\vec r_1) \qquad \vec R = \vec r_1 - \vec r_2$$

$$\vec B_2(\vec r_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_2}\frac{\vec J_2(\vec r_2)\times \hat i_R}{R^2}\,dV_2$$

Συνολική Δύναμη στον 1 από 2:

$$\vec F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\int_{V_2}\frac{\vec J_1\times(\vec J_2\times\hat i_R)}{R^2}\,dV_1 dV_2 \quad \text{όμως} \quad \vec J_1\times\left(\vec J_2\times\frac{\hat i_R}{R^2}\right) = \frac{1}{R^2}\left[(\vec J_1\cdot\hat i_R)\vec J_2-(\vec J_1\cdot\vec J_2)\hat i_R\right]$$

$$\vec F_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\int_{V_2}(\vec J_1\cdot\vec J_2)\frac{\hat i_R}{R^2}\,dV_1 dV_2 = -\vec F_{21}$$

Έστω τώρα κινούμενο σημειακό φορτίο q_1 με ταχύτητα $\vec\upsilon_1$ εντός μαγνητικού πεδίου $\vec B_2$. Το $\vec B_2$ μπορεί να οφείλεται στην κίνηση q_2 με ταχύτητα $\vec\upsilon_2$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec J_1 dV_1 \rightarrow q_1\vec\upsilon_1 \quad \left[(A/m^2)m^3 = \frac{A}{m} = \frac{C}{s}m = C\frac{m}{s}\right]\\ \vec J_2 dV_2 \rightarrow q_2\vec\upsilon_2\end{array}\right\}\delta\vec F_{12} = q_1\vec\upsilon_1\times\vec B_2 \Rightarrow$$

$$\delta\vec F_{12} = q_1\vec\upsilon_1\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}q_2\vec\upsilon_2\times\frac{\hat i_R}{R^2}\right)\rightarrow \delta\vec F_{12} = \delta\vec F = \underbrace{q(\vec\upsilon\times\vec B)}_{\text{μαγνητική συνιστώσα δύναμης Lorentz}}$$

$$\boxed{\vec F = \delta\vec F = q(\vec E+\vec\upsilon\times\vec B)}$$

Μαγνητοστατικά πεδία

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\,dV' \times \hat{i}_R}{R^2}$$ Γνωρίζουμε ήδη ότι $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{-\hat{i}_R}{R^2}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\hat{i}_R}{R^2}\,dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) dV'$$

Όμως $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{A}) = \varphi\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\varphi \times \vec{A}$. Επιλέγουμε $\varphi = \frac{1}{R}$, $\vec{A} = \vec{J}$

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{J}}{R}\right) = \frac{1}{R}\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{J}}_{\vec{\nabla}\times\vec{J}(r')=0} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{J} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{J}$$

$\vec{\nabla}\times\vec{J}(r')=0$ γιατί ο $\vec{\nabla}$ ενεργεί στα (x,y,z) και <u>όχι</u> στα (x',y',z')

Άρα $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{J}}{R}\right)dV' = \vec{\nabla}\times\underbrace{\left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}}{R}\,dV\right\}}_{\vec{A}} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$\vec{A}$ = διανυσματικό δυναμικό $= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}}{R}\,dV$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ ή $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0}$$

Νόμος Gauss για μαγνητικά πεδία (απουσία μαγνητικών μονοπόλων)