Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Άσκηση 1: Υπολογισιμότητα

α. Έστω στιγμιότυπο εισόδου του προβλήματος Διοφαντικών Εξισώσεων με k άγνωστες μεταβλητές. Καθώς το k είναι πεπερασμένο και το σύνολο $\mathbf{N}^k$ είναι αριθμήσιμα άπειρο, μπορούμε να ορίσουμε διαδικασία επιλογής των στοιχείων του η οποία εγγυάται ότι κάθε ανάθεση των μεταβλητών θα εξεταστεί σε κάποιο βήμα και σε κάθε βήμα να γίνεται έλεγχος εάν η εξίσωση ικανοποιείται. Εάν βρεθεί ανάθεση των μεταβλητών για την οποία η εξίσωση ικανοποιείται, ο αλγόριθμος θα απαντήσει ΝΑΙ. Εάν δεν υπάρχει, δε μπορούμε να το γνωρίζουμε.

β. Δίνεται Διοφαντική Εξίσωση k μεταβλητών και είσοδός της (σύνολο συντελεστών). Έχοντας μια μηχανή Turing που απαντάει στο πρόβλημα τερματισμού ως «μαύρο κουτί», δίνουμε ως είσοδο τη Διοφαντική Εξίσωση και την είσοδό της. Αν η εξίσωση έχει λύση, η μηχανή Turing θα απαντήσει ΝΑΙ. Στην αντίθετη περίπτωση, ο αλγόριθμος του παραπάνω ερωτήματος δε θα τερματίσει, οπότε η μηχανή Turing θα απαντήσει ΟΧΙ.

Άσκηση 2: Πολυπλοκότητα – Αναγωγές

α.

β. Γνωρίζοντας ότι το SAT είναι NP-πλήρες, το συμπληρωματικό του (δίνεται τύπος προτασιακού λογισμού και ζητείται αν είναι αντίφαση) είναι coNP-πλήρες, λόγω της πρότασης α παραπάνω.
Το πρόβλημα Tautology ανήκει στην κλάση coNP, καθώς εάν το εάν δοθεί μια ανάθεση στις μεταβλητές του στιγμιοτύπου εισόδου, μπορεί σε πολυωνυμικό χρόνο να ελεγχθεί εάν η ανάθεση αυτή είναι no-instance. Με άλλα λόγια, το πιστοποιητικό για την απάντηση ΟΧΙ.
Θα δειχθεί ότι το πρόβλημα Tautology είναι coNP-πλήρες, μέσω της αναγωγής Αντίφαση $\leq_p$ Tautology. Έστω ότι δίνεται η πρόταση φ ως στιγμιότυπο εισόδου για το πρόβλημα Αντίφαση. Γνωρίζουμε ότι η φ είναι αντίφαση αν και μόνο αν η συμπληρωματική της φ' είναι ταυτολογία. Οπότε εάν δοθεί ως είσοδος η φ' στο πρόβλημα Tautology, μπορούμε να απαντήσουμε στο πρόβλημα Αντίφαση. Άρα, το πρόβλημα Tautology είναι coNP-πλήρες ως προς την αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $\leq_p$.

γ. Αν ένα πρόβλημα της κλάσης coNP είναι NP-πλήρες (ως προς την αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $\leq P$), κάθε άλλο πρόβλημα της κλάσης NP μπορεί να αναχθεί σε αυτό. Άρα, κάθε πρόβλημα της κλάσης NP ανήκει στην κλάση coNP. Οπότε, NP = coNP.

δ. Το πρόβλημα NAE3SAT ανήκει στην κλάση NP, καθώς αν δοθεί ανάθεση των λογικών μεταβλητών, μπορεί σε πολυωνυμικό χρόνο να ελεγχθεί εάν ο τύπος προτασιακού λογισμού ικανοποιείται, υπό τον περιορισμό ότι σε κάθε όρο ικανοποιούνται είτε μία είτε δύο λογικές μεταβλητές.
Θα δειχθεί ότι το NAE3SAT είναι NP-πλήρες μέσω της αναγωγής 3SAT $\leq_p$ NAE3SAT.
Για κάθε όρο i ενός στιγμιότυπου εισόδου του προβλήματος 3SAT $(x \lor y \lor z)$, ορίζουμε τον μετασχηματισμό $(x \lor y \lor c_i) \land (\neg c_i \lor z)$.

Εάν η απάντηση στο πρόβλημα NAE3SAT είναι ΝΑΙ, τότε κάθε 2άδα όρων θα ικανοποιείται με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

a) είτε μέσω μίας εκ των μεταβλητών x, y και z (αν μία από τις μεταβλητές x, y είναι αληθής θέτουμε c_i = false, αν η z είναι true, θέτουμε c_i = true),
b) είτε μέσω της ανάθεσης x = y = true, z = false, όπου θέτουμε c_i = false,
c) είτε μέσω της x = z = true, y = false, όπου θέτουμε αυθαίρετη τιμή στο c_i
d) είτε μέσω της y = z = true, x = false, ομοίως με παραπάνω, θέτουμε αυθαίρετη τιμή στο c_i,
e) είτε μέσω της x = y = z = true, όπου θέτουμε c_i = false.

Οι παραπάνω τρόποι είναι όλοι οι τρόποι μέσω των οποίων ένας όρος του στιγμιοτύπου 3SAT λαμβάνει την τιμή true.

Αντιθέτως, εάν η απάντηση στο πρόβλημα NAE3SAT είναι ΌΧΙ, τότε x = y = z = false για κάποια 2αδα όρων, όπου η ανάθεση οποιασδήποτε τιμής στη μεταβλητή c_i δε μπορεί να μετατρέψει τη 2αδα όρων σε true. Ομοίως, η παραπάνω ανάθεση είναι η μοναδική μέσω της οποίας κάποιος όρος του στιγμιοτύπου 3SAT λαμβάνει την τιμή false.

Άρα, υπάρχει 1 – 1 αντιστοιχία μεταξύ των στιγμιοτύπων 3SAT και του δημιουργημένου στιγμιοτύπου NAE3SAT. Άρα, το πρόβλημα NAE3SAT είναι NP-πλήρες.

ε. Το πρόβλημα Επιλογής Αντιπροσώπων ανήκει στην κλάση NP, καθώς εάν δοθεί σύνολο αντιπροσώπων, μπορεί σε πολυωνυμικό χρόνο να ελεγχθεί εάν περιέχει το πολύ k αντιπρόσωπους και εάν αντιπροσωπεύονται όλες οι κοινωνικές ομάδες.
Θα δειχθεί ότι το πρόβλημα Επιλογής Αντιπροσώπων είναι NP-πλήρες μέσω της αναγωγής Vertex Cover $\leq_p$ Επιλογή Αντιπροσώπων. Για στιγμιότυπο εισόδου του προβλήματος Vertex Cover (υπάρχει σύνολο το πολύ k κορυφών, οι οποίες καλύπτουν όλες τις ακμές;) μπορούμε για κάθε ακμή να δημιουργήσουμε το σύνολο που αποτελείται από τις κορυφές στα άκρα της. Έστω m το πλήθος των ακμών. Δίνουμε τα m σύνολα 2 στοιχείων που δημιουργούνται μέσω της παραπάνω διαδικασίας ως είσοδο στο πρόβλημα Επιλογής Αντιπροσώπων, καθώς και τον αριθμό k. Εάν υπάρχουν k αντιπρόσωποι των παραπάνω συνόλων, τότε οι αντιπρόσωποι αποτελούν ένα Vertex Cover.
Αυτό συμβαίνει γιατί, το κάθε σύνολο δημιουργήθηκε από μια ακμή, οπότε εφόσον υπάρχει κορυφή-αντιπρόσωπος για το σύνολο, η κορυφή καλύπτει την αντίστοιχη ακμή. Εάν είναι εφικτό να αντιπροσωπεύονται όλα τα σύνολα, είναι εφικτό να καλυφθούν και όλες οι ακμές. Αντιθέτως, αν δεν είναι εφικτό να αντιπροσωπευθούν όλα, δεν υπάρχει Vertex Cover με k κορυφές.
Προφανώς, ισχύει και η αντίστροφη κατεύθυνση, καθώς εάν υπάρχει Vertex Cover k το πολύ στοιχείων, θα υπάρχουν k αντιπρόσωποι και εάν δεν υπάρχει δε μπορεί να δημιουργηθεί στιγμιότυπο της Επιλογής Αντιπροσώπων, το οποίο να απαντάει ΝΑΙ.
Άρα, το πρόβλημα Επιλογής Αντιπροσώπων είναι NP-πλήρες.

Άσκηση 3: Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι - Vertex Cover

1. Ο αλγόριθμος εκτελείται όσο το C δεν είναι vertex cover (**while** C δεν είναι vertex cover) και σε κάθε επανάληψη προσθέτει στο C τουλάχιστον μία κορυφή, η οποία καλύπτει τουλάχιστον μια νέα ακμή. Άρα, στο τέλος το C καλύπτει όλες τις ακμές.
2.
3. Έστω $V_{OPT} \subseteq V$, το σύνολο των κορυφών που ανήκουν στη βέλτιστη λύση. Στο τέλος του αλγορίθμου, για κάθε κορυφή u ισχύει ότι το άθροισμα των c(e) των ακμών οι οποίες προσπίπτουν στη u, είναι το πολύ ίσο με το βάρος της w(u) $\left(\sum_{e(u,v)} c(e) \leq w(u)\right)$. Αυτό συμβαίνει γιατί για κάθε ακμή, ο αλγόριθμος θέτει την ποσότητα c(e) ίση με το ελάχιστο βάρος των κορυφών στα άκρα της και μειώνει το βάρος της άλλης κατά την ποσότητα c(e). Αυτό συμβαίνει προφανώς και για την περίπτωση που ο αλγόριθμος επιλέγει τη βέλτιστη λύση. Άρα,
$$\sum_{e(u,v)} c(e) \leq w(u) \leftrightarrow$$
$$\sum_{e \in E} c(e) + d \leq \sum_{u \in V_{OPT}} w(u)$$
όπου d ≥ 0, πιθανά c(e) ακμών που αθροίστηκαν πολλαπλές φορές.
Από τα παραπάνω,
$$\sum_{e \in E} c(e) \leq \sum_{u \in V_{OPT}} w(u) - d \leq \sum_{u \in V_{OPT}} w(u) \rightarrow$$
$$\sum_{u \in V_{OPT}} w(u) \geq \sum_{e \in E} c(e)$$

Άσκηση 4: Πιθανοτικοί Άλγόριθμοι - Έλεγχος Ταξινόμησης

α. Έστω ταξινομημένος πίνακας A, n στοιχείων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι n mod 2 = 0. Δημιουργούμε πίνακα B, τοποθετώντας τα $\frac{n}{2}$ μεγαλύτερα στοιχεία του A στην αρχή, ακολουθούμενα από τα $\frac{n}{2}$ μικρότερα. Ο πίνακας B προφανώς δεν είναι σχεδόν ταξινομημένος, γιατί χρειάζεται να διαγραφούν $\frac{n}{2}$ στοιχεία προκειμένου τα στοιχεία που απομένουν να είναι ταξινομημένα. Εάν ο αλγόριθμος επιλέξει μια τυχαία θέση του πίνακα B, θα ισχύει ότι $B[a_i - 1] \leq B[a_i] \leq B[a_i + 1]$ για όλα τα στοιχεία εκτός από το μέγιστο, το οποίο βρίσκεται στη θέση $\frac{n}{2}$ και το ελάχιστο, το οποίο βρίσκεται στη θέση $\frac{n}{2} + 1$. Η πιθανότητα λάθους, κατά την επιλογή ενός στοιχείου είναι $p = \frac{n-2}{n}$. Συνεπώς, κατά την επιλογή k στοιχείων, η πιθανότητα γίνεται $p^k = \left(\frac{n-2}{n}\right)^k$. Για να γίνει η πιθανότητα λάθους μικρότερη από 10%, έχουμε:

$$p^k < \frac{1}{10} \leftrightarrow$$
$$klogp < -log10 \xleftrightarrow{logp < 0}$$
$$k > -\frac{log10}{logp}$$

Όμως, $p = \frac{n-2}{n} = 1 - \frac{1}{\frac{n}{2}} \leq e^{-\frac{2}{n}}$.

Άρα,

$$k > -\frac{log10}{loge^{-\frac{2}{n}}} = \frac{log10}{\frac{2}{n}loge} = n\frac{log10}{2loge} = n\frac{ln10}{2} \leftrightarrow$$
$$k = \Omega(n)$$