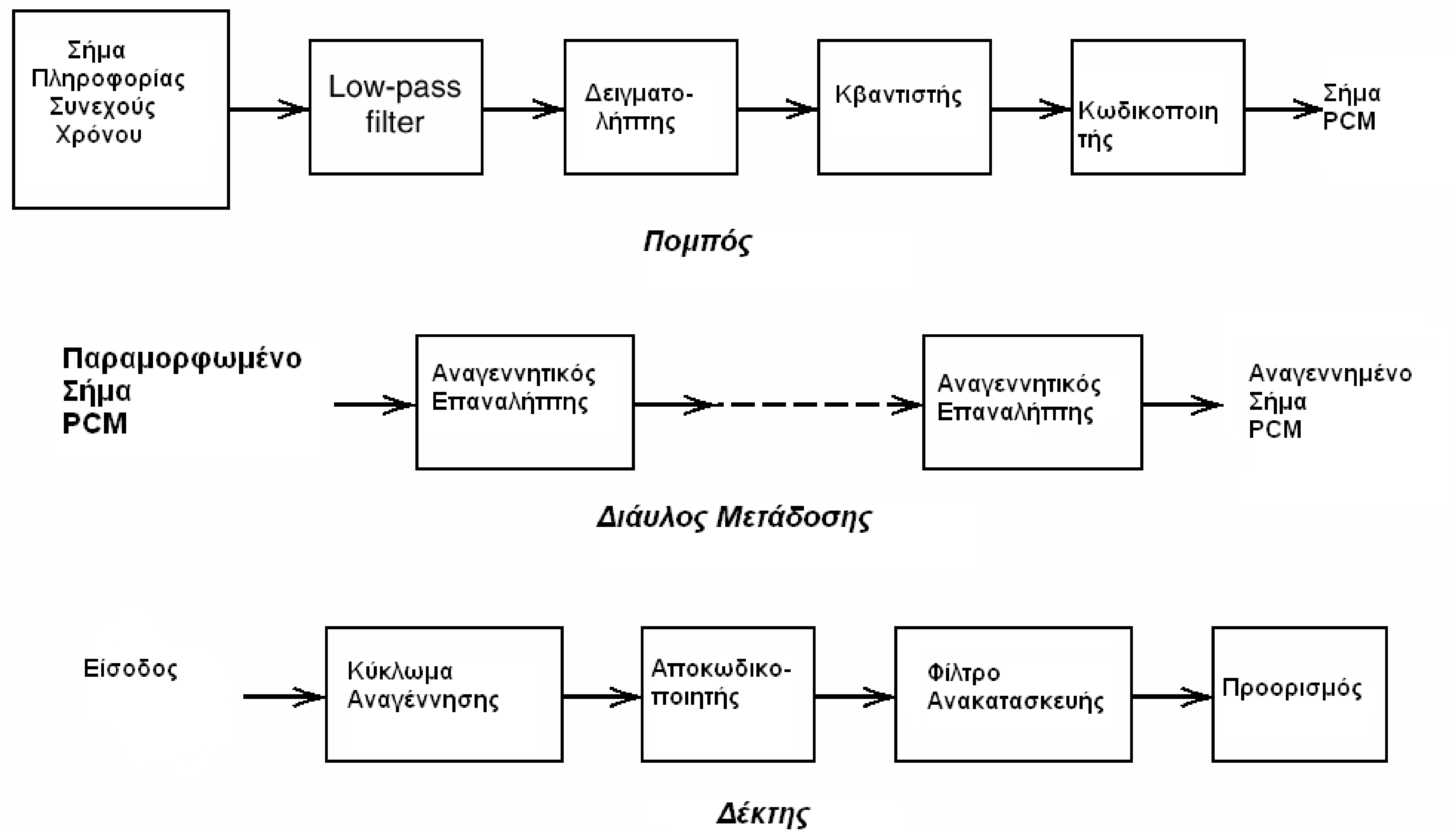
Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό

Δειγματοληψία
Μη Ιδανική Δειγματοληψία
PAM/PWM/PPM
Κβάντιση (ομοιόμορφη)
PCM / Κίνητρο για Μη Ομοιόμορφη Κβάντιση

Αθανάσιος Δ. Παναγόπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

Βασικά Στοιχεία Συστήματος PCM



Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)

- Η παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM) θεωρείται μια διαδικασία μετατροπής αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Κβαντισμένη PAM.

- Όπως και σε κάθε άλλη τεχνική διαμόρφωσης παλμών ο ρυθμός της δειγματοληψίας πρέπει να είναι σύμφωνος με το ρυθμό Nyquist.

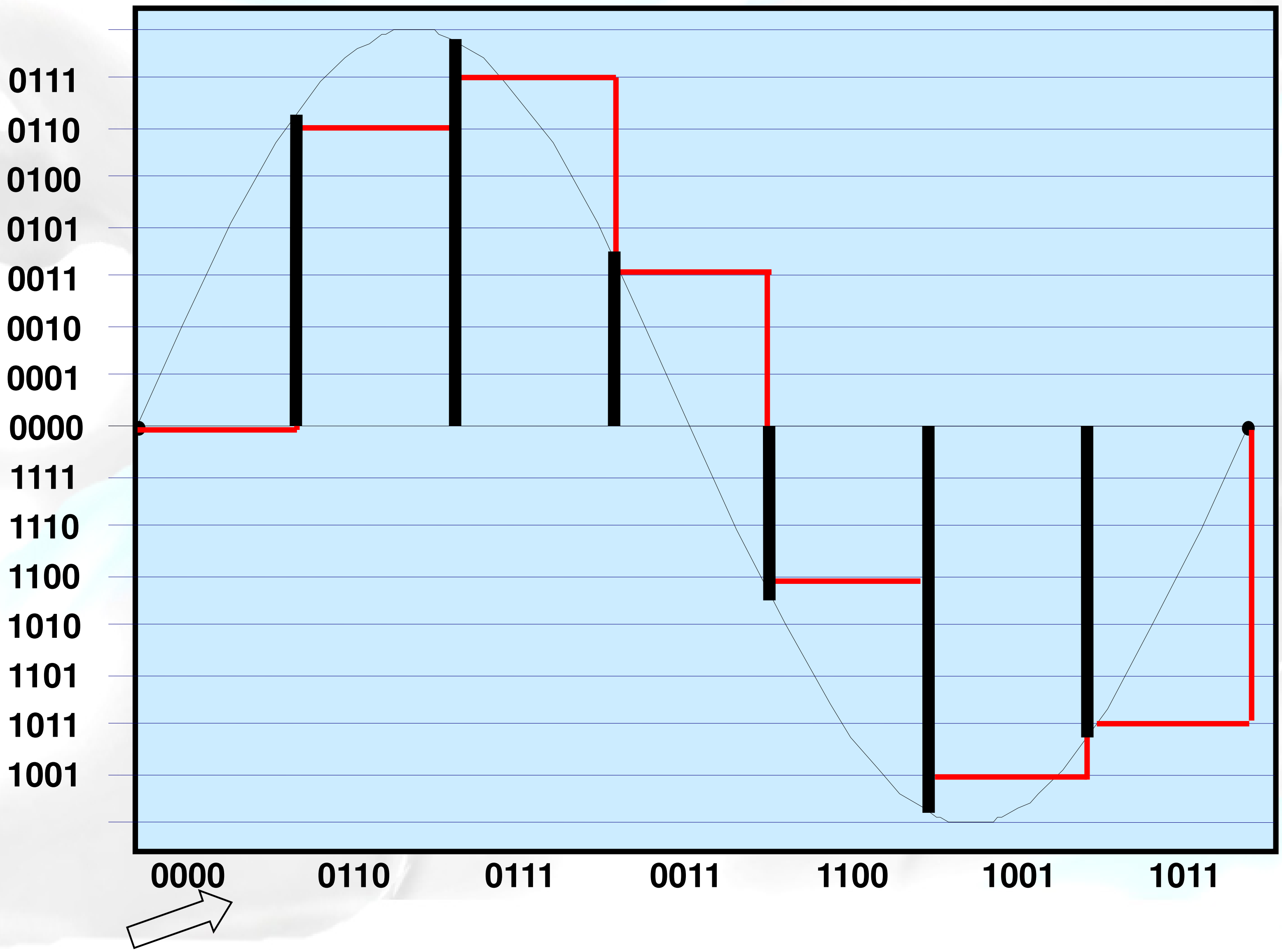
- Ο ρυθμός δειγματοληψίας πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του αναλογικού σήματος.

$$f_s > 2f_A(\max)$$

- Telegraph time-division multiplex (TDM) μεταδόθηκε το 1853, by ένα Αμερικάνο Εφευρέτη και από έναν Ηλ/γο Μηχανικό W.M. Miner το 1903.
- Το PCM εφευρέθηκε από ένα Βρετανό Μηχανικό τον Alec Reeves το 1937 στη Γαλλία.

- Το 1943 οι μηχανικοί των Bell Labs χρησιμοποίησαν την PCM δυαδική κωδικοποίηση όπως αυτό προτάθηκε από τον Alec Reeves.

PCM



Αριθμοί που πέρασαν από τον μετατροπέα ADC ώστε να παριστάνουν αναλογική τάση.

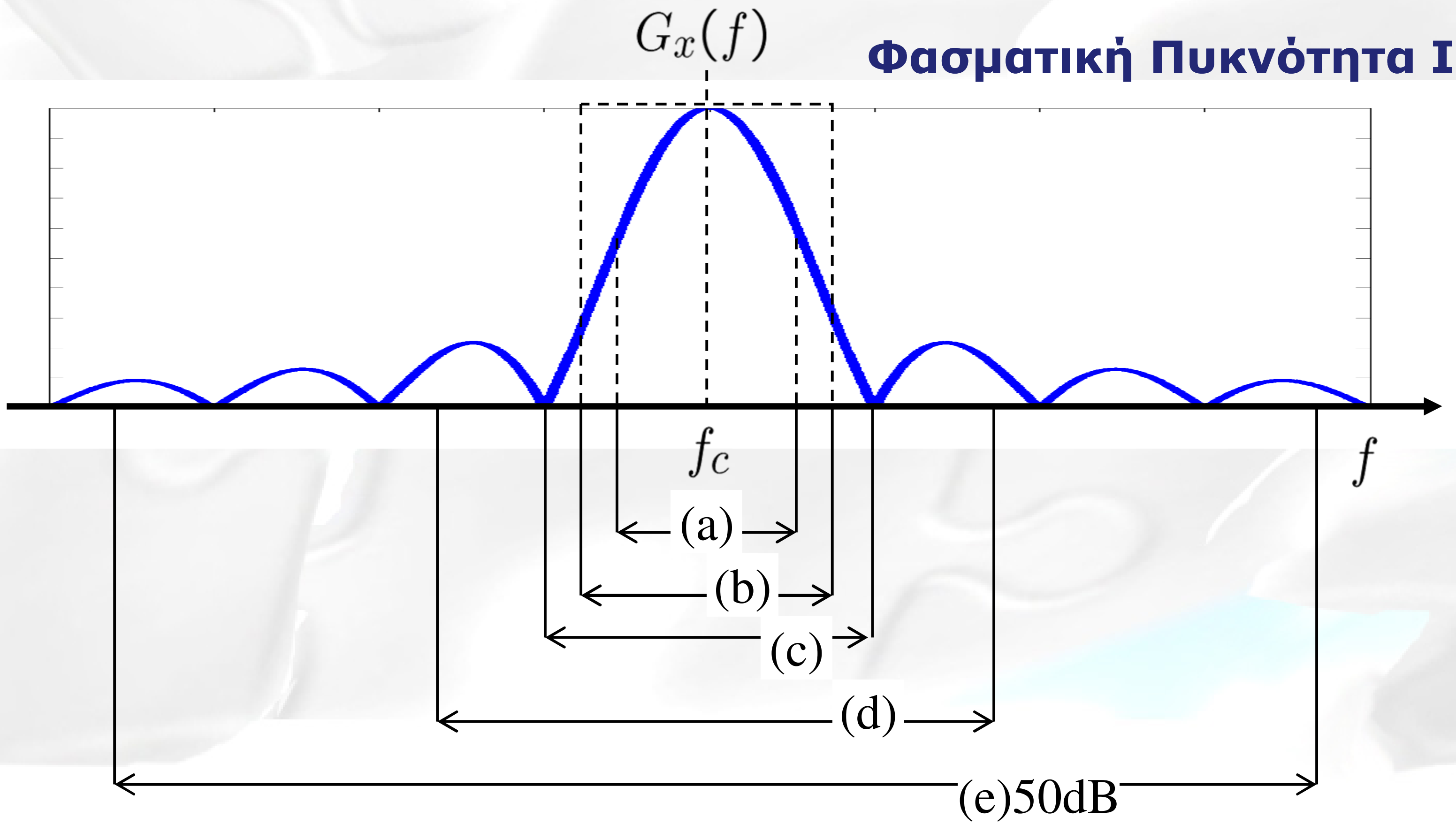
Εύρος Ζώνης Σήματος

Διαφορετικοί Ορισμοί του Εύρους Ζώνης :

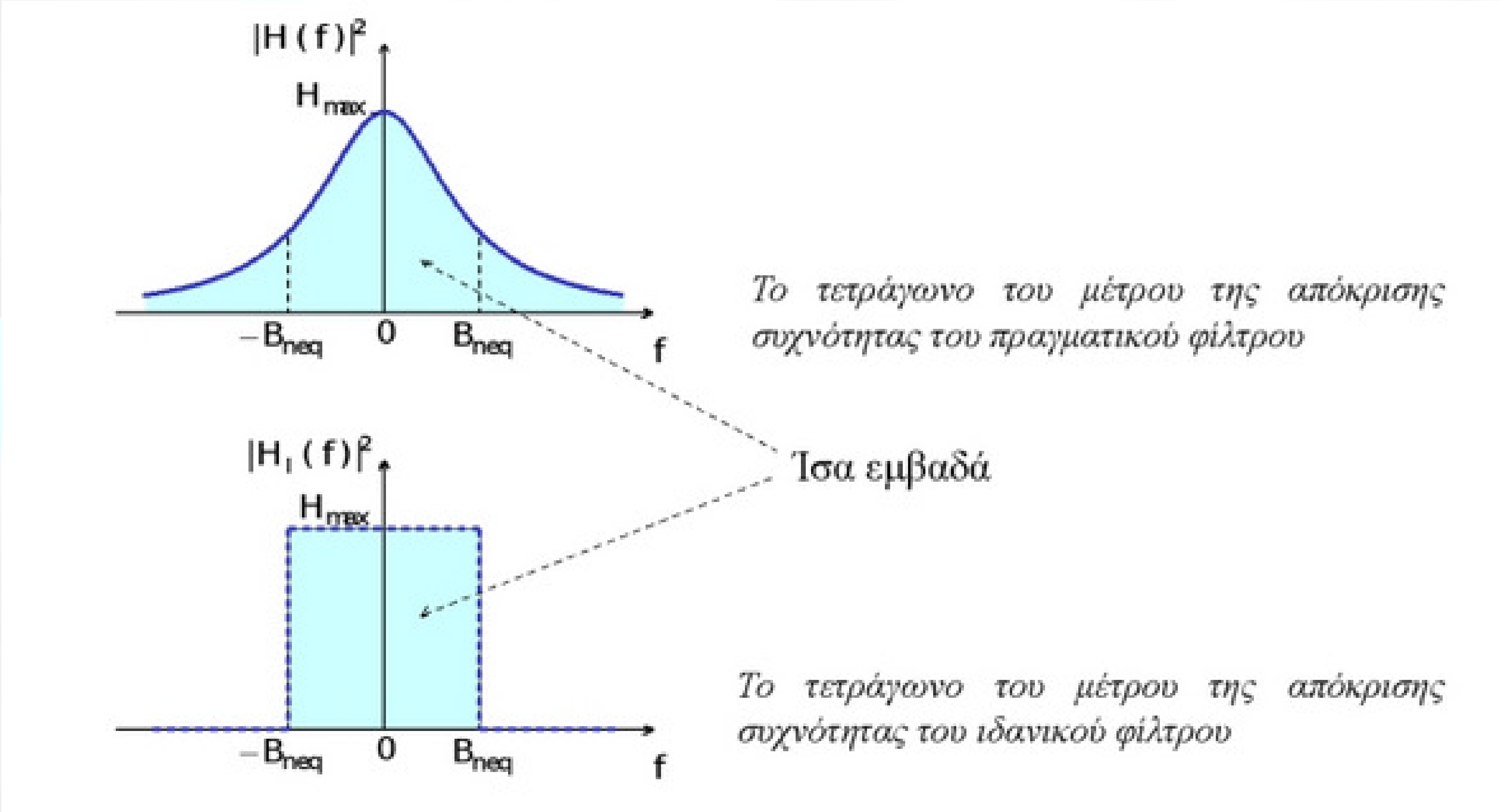
a). Εύρος Ζώνης Μισής Ισχύος
b). Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης
c). Από μηδέν σε μηδέν εύρος ζώνης.

d) Κλασματικό περιεχόμενο ισχύος εύρους ζώνης
e) Φραγμένη φασματική πυκνότητα ισχύος e.g. >50dB
f) Απόλυτο εύρος ζώνης → 0

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος



Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης



Δειγματοληψία

- Αν λαμβάνουμε δείγματα από ένα σήμα x(t) στιγμιαία και με ομοιόμορφο ρυθμό μια φορά κάθε T_S δευτερόλεπτα και τα συμβολίζουμε

$\{x(nT_s)\}$ n (ακέραιος)

- T_s : περίοδος δειγματοληψίας (sampling period)
- $1/T_s$: ρυθμός δειγματοληψίας (sampling rate)

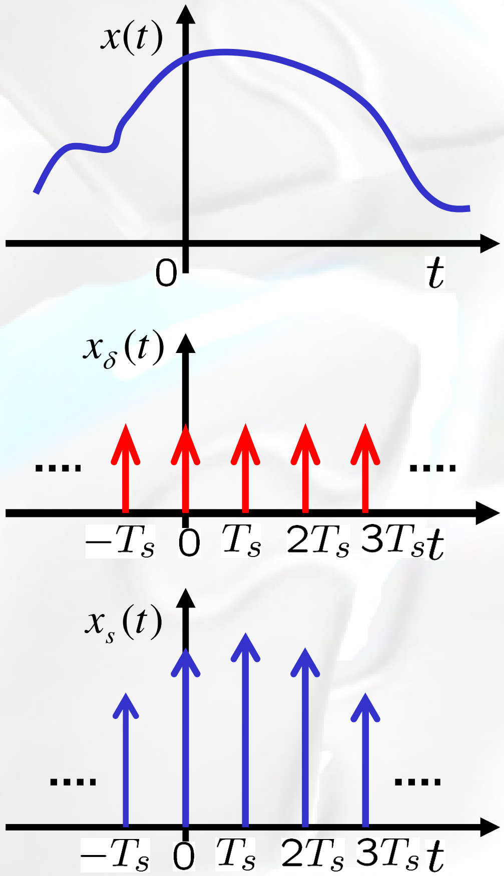
Η ιδανική δειγματοληψία ονομάζεται :

στιγμιαία δειγματοληψία
instantaneous sampling

Δειγματοληψία I

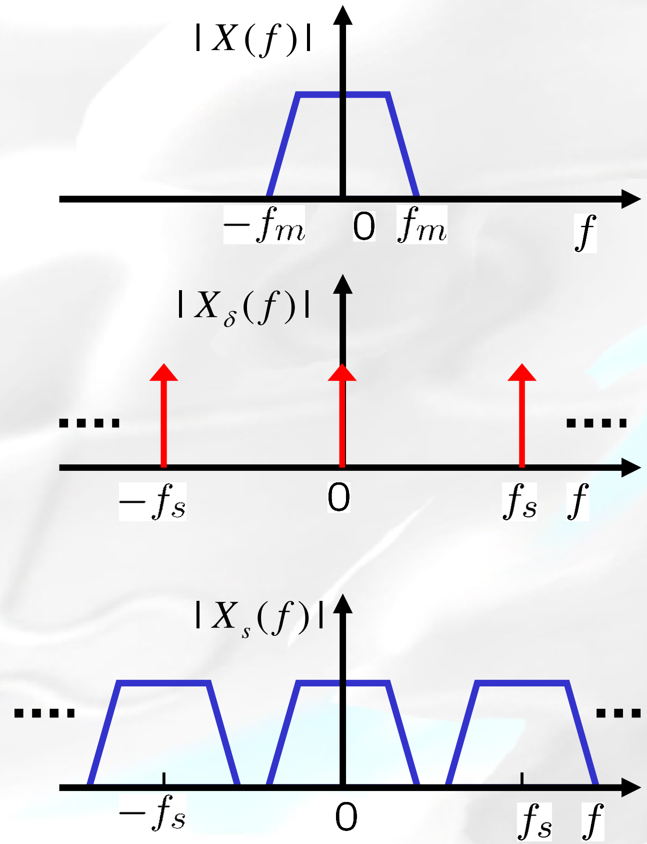
Πεδίο Χρόνου/Time domain

$$x_s(t) = x_\delta(t) \times x(t)$$



Πεδίο Συχνότητας/Frequency domain

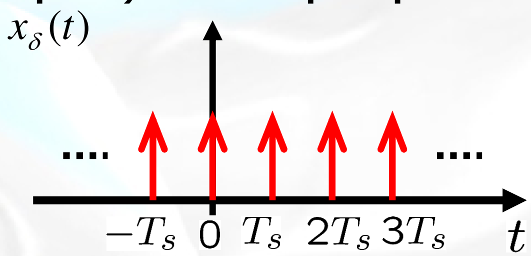
$$X_s(f) = X_\delta(f) * X(f)$$



Δειγματοληψία ΙΙ

Μ/Σ Fourier της Σειράς Συναρτήσεων Δέλτα

$$x_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_s\right)$$



Περιοδικό σήμα με περίοδο T_s

Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων

Έστω ένα περιοδικό σήμα *f(t)* με περίοδο T_s

$$f\left(t+\mathrm{T}_s\right)=f(t)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n\cdot\exp\left(\frac{j2\pi n\cdot t}{T_s}\right)$$

$$f_n=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}f(t)\exp\left(-\frac{j2\pi n\cdot t}{T_s}\right)\cdot dt$$

Έστω:

$$g(t)=\begin{cases}f(t), & -\mathrm{T}_s/2\le t\le\mathrm{T}_s/2\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}g\left(t-mT_s\right)$$

$$f_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\exp\left(-\frac{j2\pi\cdot t\cdot n}{T_s}\right)\cdot dt=\frac{1}{T_s}G\left(\frac{n}{T_s}\right)$$

όπου $G(n/T_s)$ είναι ο Μ/Σ Fourier της g(t)

Δειγματοληψία III

Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (συνέχεια)

$$f(t) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G\left(\frac{n}{T_s}\right)\exp\left(\frac{j2\pi n\cdot t}{T_s}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g\left(t-mT_s\right)$$

Επίσης ισχύει η ιδιότητα του Μ/Σ Fourier : $\exp\left(j2\pi f_c t\right) \Leftrightarrow \delta\left(f-f_c\right)$

Άρα τελικά :

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g\left(t-mT_s\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G\left(\frac{n}{T_s}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

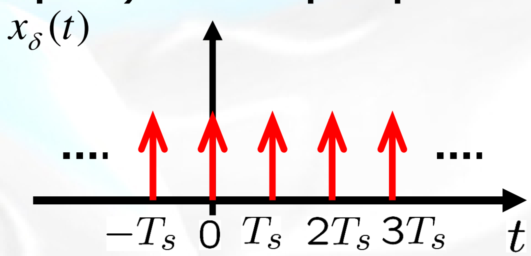
όπου καταλήγουμε ότι ο Μ/Σ Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης αποτελείται από συναρτήσεις δ( ) που εμφανίζονται σε ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας 1/T_s .

Η περιοδικότητα στο πεδίο του χρόνου οδηγεί σε διακριτή περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας σε ακέραια πολλαπλάσια του αντιστρόφου της περιόδου.

Δειγματοληψία IV

Μ/Σ Fourier της Σειράς Συναρτήσεων Δέλτα

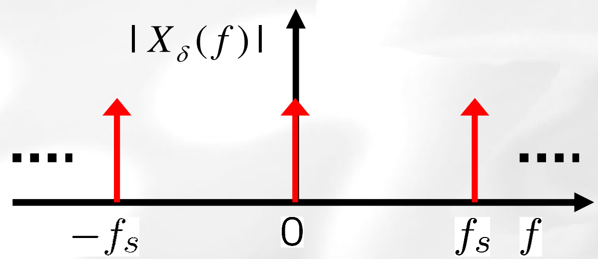
$$x_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_s\right)$$



Περιοδικό σήμα με περίοδο T_s

Η γεννήτρια συνάρτηση είναι η συνάρτηση δέλτα. Ο Μ/Σ Fourier της δέλτα είναι 1.

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-mT_s\right)\Leftrightarrow\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$



$$f_s=\frac{1}{T_s}$$

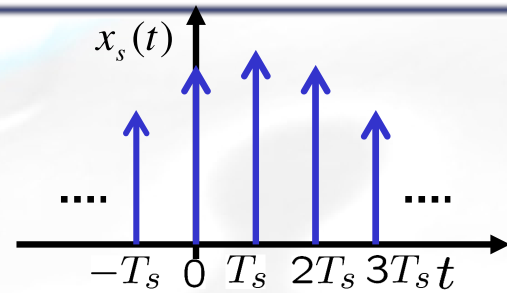
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-mT_s\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{j2\pi n\cdot t}{T_s}\right)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\left(j2\pi\cdot m\cdot f\cdot T_s\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

Δυαδικό

Δειγματοληψία V

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\cdot\delta(t-nT_s)$$



Με x_s *(t)* με περίοδο T_s συμβολίζουμε το σήμα που λαμβάνεται πολλαπλασιάζοντας την ακολουθία των αριθμών $\{x(nT_s)\}$.
Ισοδύναμα μπορούμε να το εκφράσουμε και ως εξής:

$$x_s(t)=x(t)\cdot x_\delta(t)=x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$$

Για να υπολογίσουμε το Μ/Σ Fourier του $x_s(t)$ πραγματοποιούμε τη συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας των Μ/Σ Fourier του x(t) και της ιδανικής συνάρτησης δειγματοληψίας.

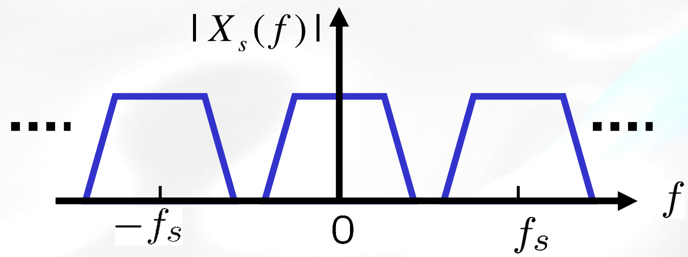
$$X_s(f)=X(f)*X_\delta(f)=$$

$$=X(f)*\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f)*\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

Αντίγραφα του *X(f)* μετατοπισμένα σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας.

Δειγματοληψία VI

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$



Η διαδικασία ομοιόμορφης δειγματοληψίας ενός σήματος στο πεδίο του χρόνου δίνει σαν αποτέλεσμα ένα περιοδικό φάσμα στο πεδίο της συχνότητας με περίοδο ίση με το ρυθμό δειγματοληψίας.

Χρήσιμες Εκφράσεις

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\cdot\delta(t - nT_s) \overset{\text{Μ/Σ } Fourier}{\Leftrightarrow}$$

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\exp(-j2\pi n\cdot f\cdot T_s)$$

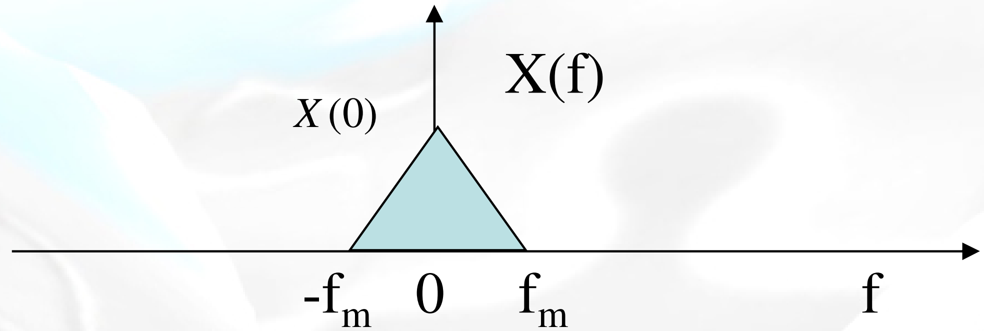
Ανάπτυξη της περιοδικής συνάρτησης συχνότητας σε μιγαδική σειρά Fourier.

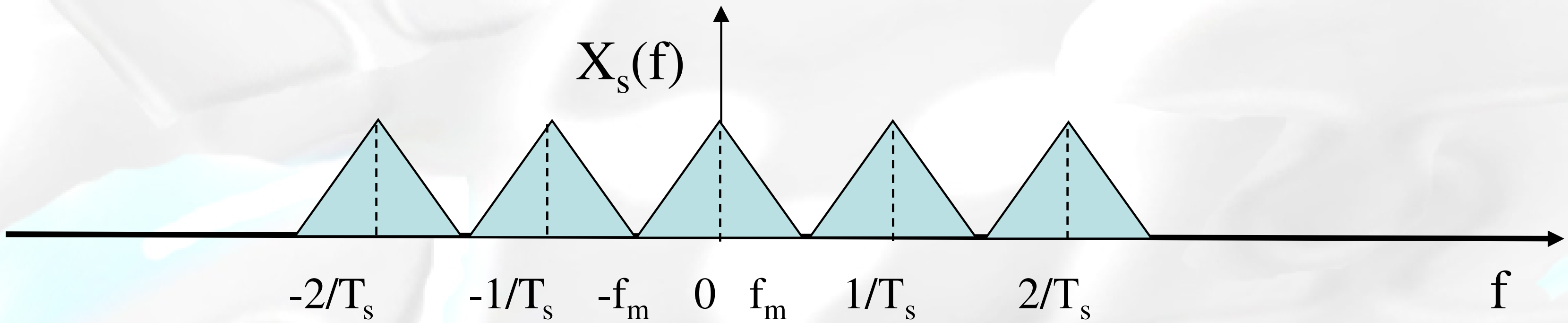
$$x(nT_s) = T_s\int_0^{1/T_s} X_s(f)\exp(j2\pi n\cdot f\cdot T_s)\,df$$

Εναλλαγή χρόνου και συχνότητας.

Δειγματοληψία VII

$$X(f)=\begin{cases} X(f) & \\ 0 & |f|>f_m \end{cases}$$





$$f_s=\frac{1}{T_s}=2f_m$$

$$X_s(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2f_m}\right)\cdot\exp\left(-j\frac{\pi n f}{f_m}\right)$$

Δειγματοληψία VIII

$$X(f) = \frac{1}{2f_m} X_s(f) \qquad -f_m \le f \le f_m$$

$$X(f) = \frac{1}{2f_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2f_m}\right) \cdot \exp\left(-j\frac{\pi n f}{f_m}\right) \qquad -f_m \le f \le f_m$$

Οι τιμές των δειγμάτων $x(n/2f_m)$ ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή τότε και ο μετασχηματισμός Fourier X(f) ορίζεται με την παραπάνω σχέση μονοσήμαντα.

Επειδή η x(t) συνδέεται με τη X(f) με τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier καταλήγουμε στο σημαντικό συμπέρασμα ότι και το ίδιο το σήμα x(t) ορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές των δειγμάτων $x(n/2f_m)$.

Η ακολουθία τιμών $\{x(n/2f_m)\}$ περιέχει όλη την πληροφορία για το x(t) .

Ανακατασκευή Σήματος

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\exp\left(j2\pi ft\right)df$$

$$X(f) = \frac{1}{2f_m}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2f_m}\right)\cdot\exp\left(-j\frac{\pi nf}{f_m}\right) \xRightarrow{\text{Αντίστροφος Μ/Σ Fourier}}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2f_m}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2f_m}\right)\cdot\exp\left(-j\frac{\pi nf}{f_m}\right)\exp\left(j2\pi ft\right)df \Rightarrow \; -f_m \le f \le f_m$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2f_m}\right)\frac{1}{2f_m}\int_{-f_m}^{f_m} \exp\left(j2\pi nf\left(t-\frac{n}{2f_m}\right)\right)df \Rightarrow$$

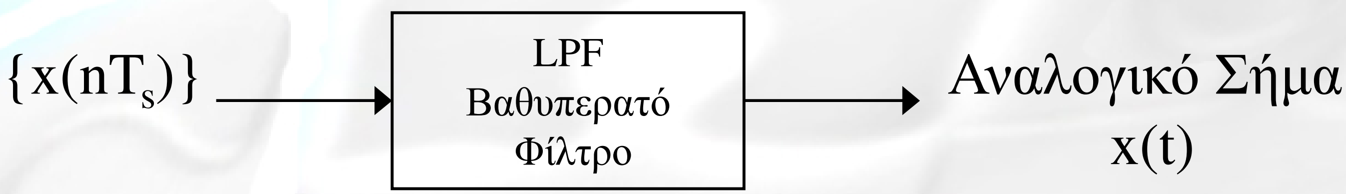
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2f_m}\right)\frac{\sin\left(2\pi f_m t - n\pi\right)}{\left(2\pi f_m t - n\pi\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2f_m}\right)\operatorname{sinc}\left(2\pi f_m t - n\pi\right)$$

Κάθε δείγμα πολλαπλασιάζεται με μια καθυστερούμενη (delayed) μορφή της συνάρτησης sinc
Και ότι προκύπτει προστίθεται.

Ανακατασκευή Σήματος

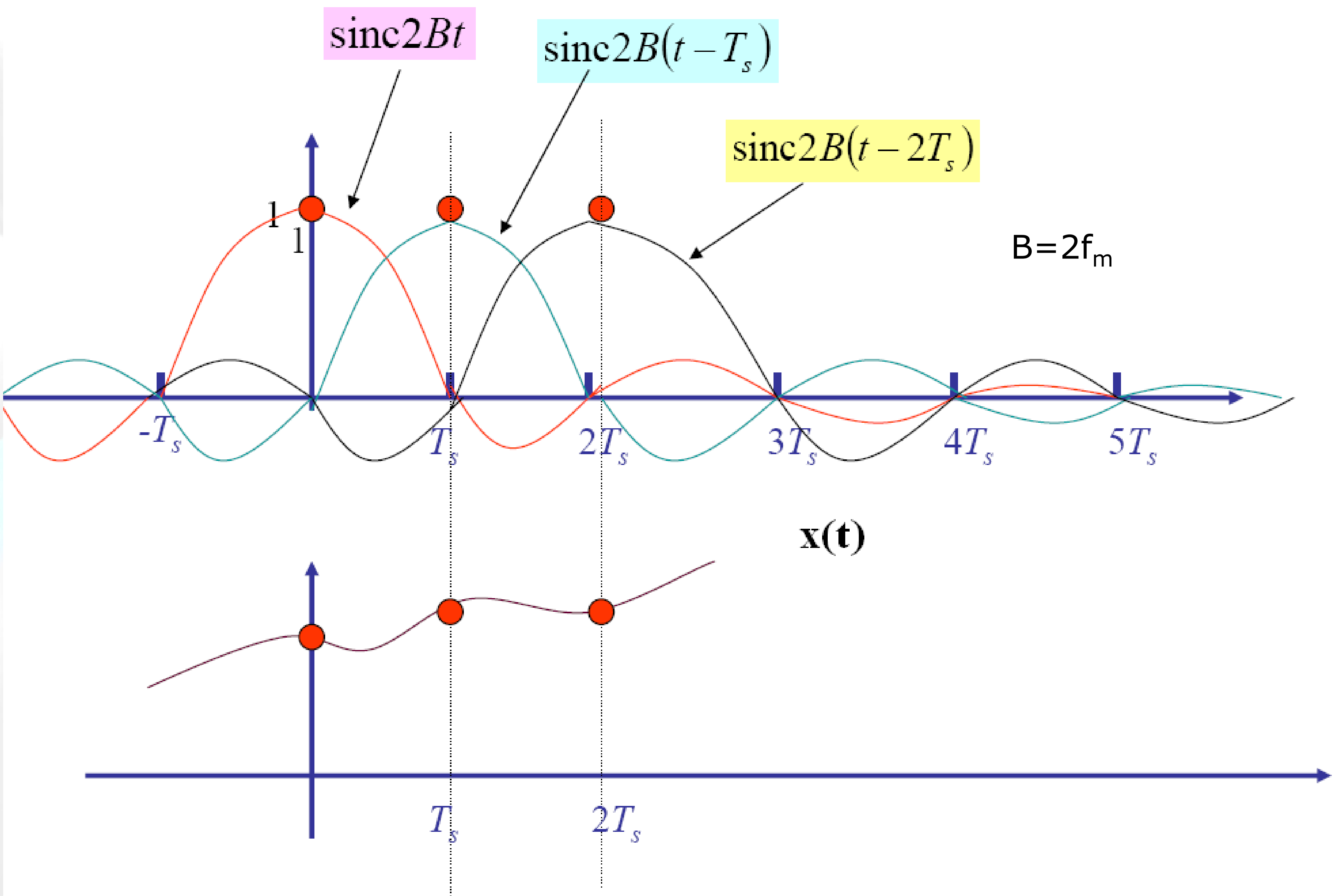
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2f_m}\right)\cdot \operatorname{sinc}\left(2\pi f_m t - n\pi\right)$$

Η εξίσωση ανακατασκευής του σήματος παριστάνει την απόκριση ενός ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με εύρος ζώνης f_m που παράγεται από ένα σήμα εισόδου που με ακολουθία Δειγμάτων $\{x(n/2f_m)\}$.

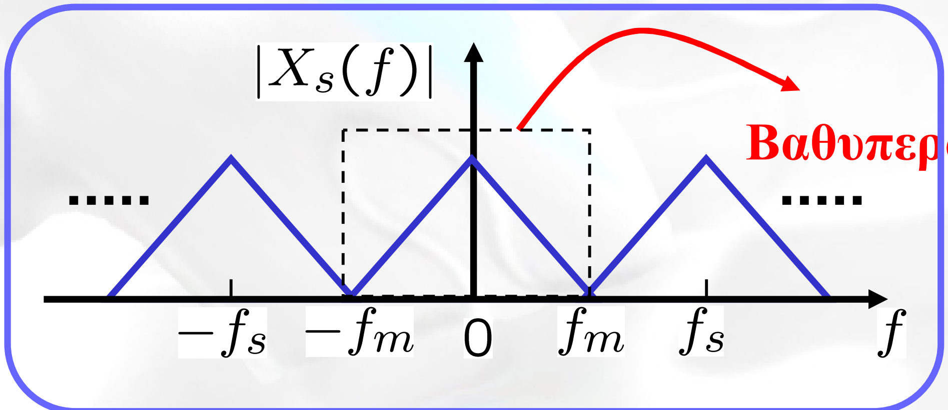


Η συνάρτηση δειγματοληψίας λειτουργεί ως συνάρτηση παρεμβολής μεταξύ των δειγμάτων. Κάθε δείγμα δημιουργεί ένα παλμό **sinc**.

Ανακατασκευή Σήματος



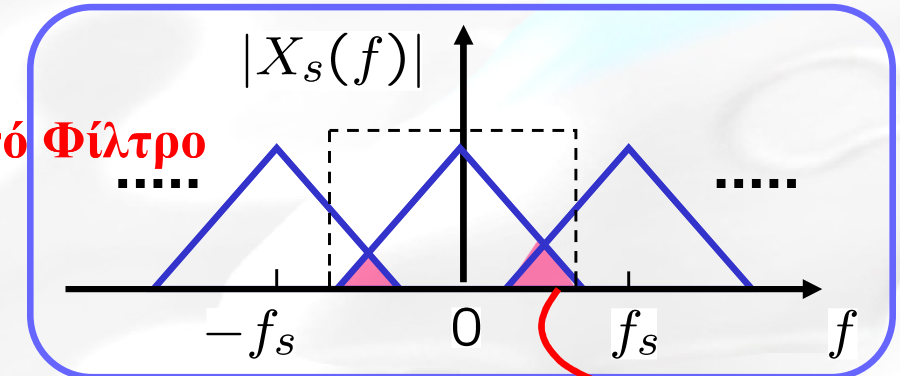
Aliasing (Παραλλαγή) Επίδραση



Βαθυπερατό Φίλτρο

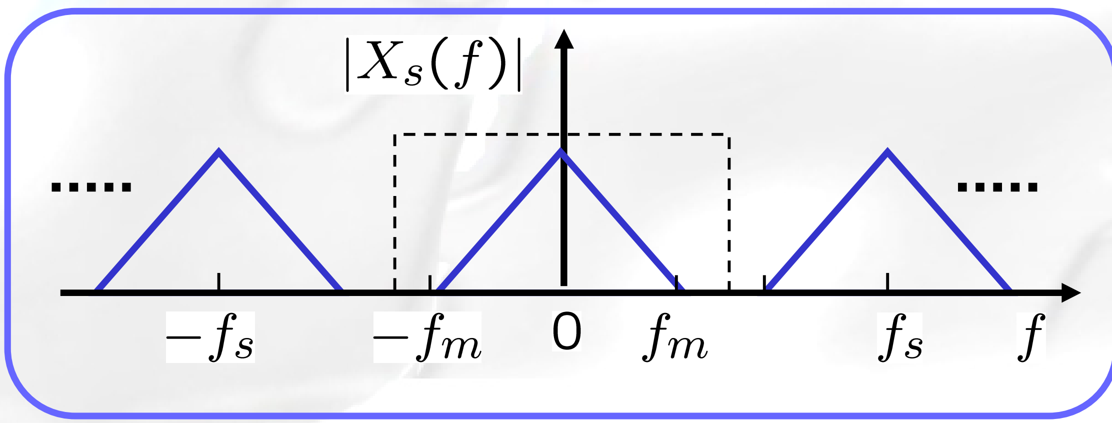
$f_s = 2f_m$

Nyquist ρυθμός



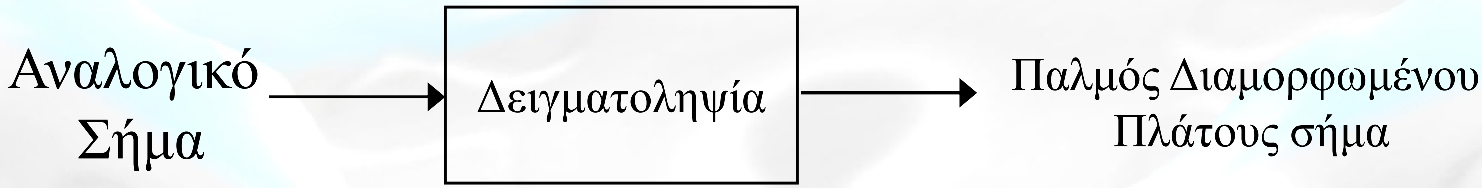
$f_s < 2f_m$

aliasing



$f_s > 2f_m$

Θεώρημα Δειγματοληψίας



Θεώρημα Δειγματοληψίας: Ένα πεπερασμένο σήμα βασικής ζώνης που δεν έχει φασματικό περιεχόμενο πάνω από τη συχνότητα f_m μπορεί μοναδιαία να καθοριστεί αν ληφθούν δείγματα σε ομοιόμορφα χρονικά διαστήματα που απέχουν:

$$T_s \leq \frac{1}{2f_m}$$

Ο ρυθμός Δειγματοληψίας , ονομάζεται ρυθμός Nyquist.

$$\boxed{f_s = \frac{1}{T_s} = 2f_m}$$

Θεώρημα Δειγματοληψίας

- Το Θεώρημα Δειγματοληψίας ισχύει με τη βασική υπόθεση ότι το φάσμα του αναλογικού σήματος περιορίζεται αυστηρά μέσα σε μια φασματική περιοχή. Αυτό μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο αν το χρονικό σήμα έχει άπειρη διάρκεια.

- Για πρακτικούς λόγους θεωρούμε την έννοια του ουσιαστικά περιορισμένου φάσματος σε μια περιοχή με την έννοια ότι οι φασματικές συνιστώσες που είναι μεγαλύτερες από μια περιοχή έχουν αμελητέα επίδραση.

Αντιμετώπιση του Aliasing Effect

- Πριν από την εφαρμογή της Δειγματοληψίας χρησιμοποιείται ένα φίλτρο pre-alias ώστε να εξασθενήσει τις υψηλές συχνότητες του σήματος και στην ουσία να περιορίσει φασματικά το σήμα στη φασματική περιοχή ενδιαφέροντος.

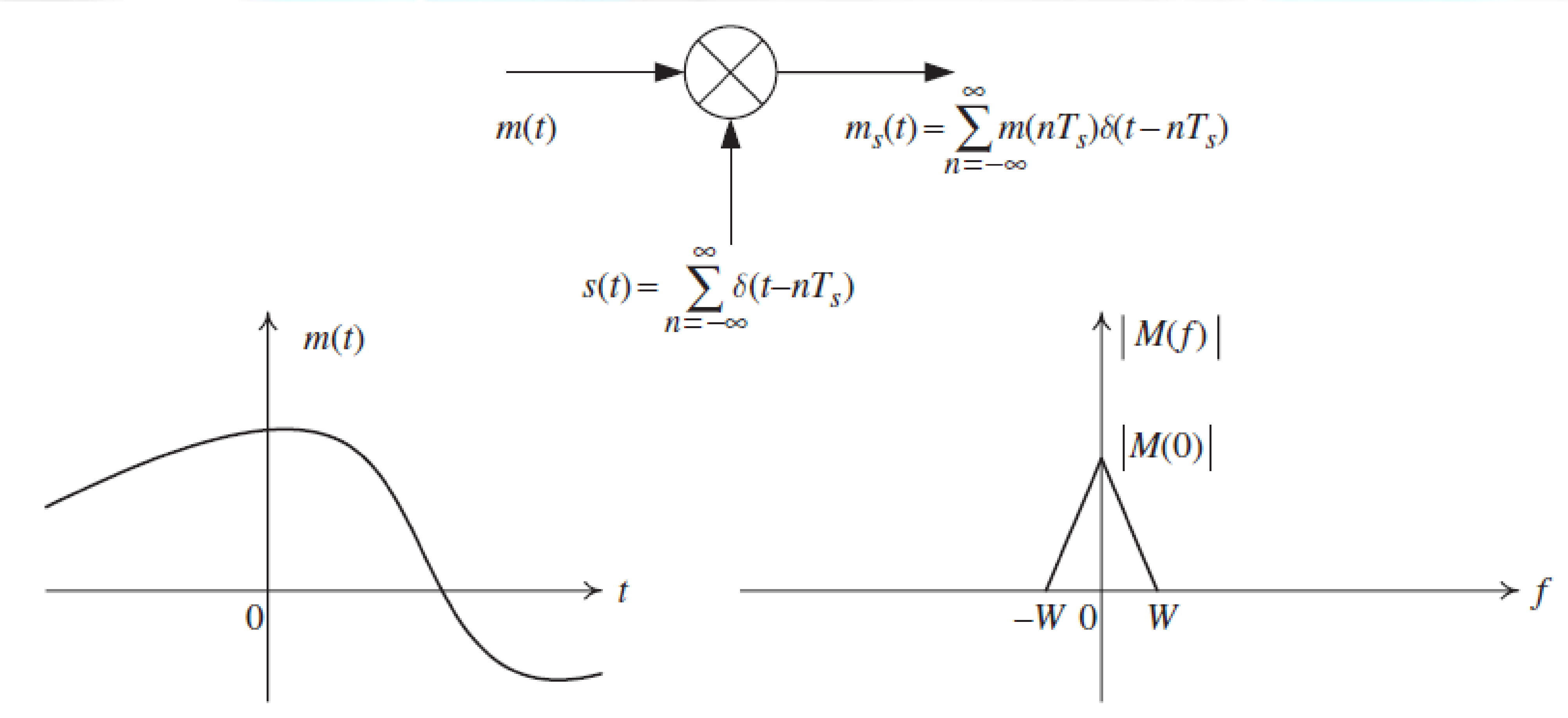
- Πραγματοποιείται δειγματοληψία του φιλτραρισμένου σήματος με ρυθμό λίγο υψηλότερο από το Ρυθμό Nyquist.

Γενικά αν χρησιμοποιήσουμε ρυθμό δειγματοληψίας μεγαλύτερο από το ρυθμό Nyquist $2f_m$ επιτυγχάνουμε ευκολότερα τη σχεδίαση του φίλτρου ανακατασκευής. Μεταξύ των φασμάτων υπάρχουν κενά πλάτους f_s-2f_m.

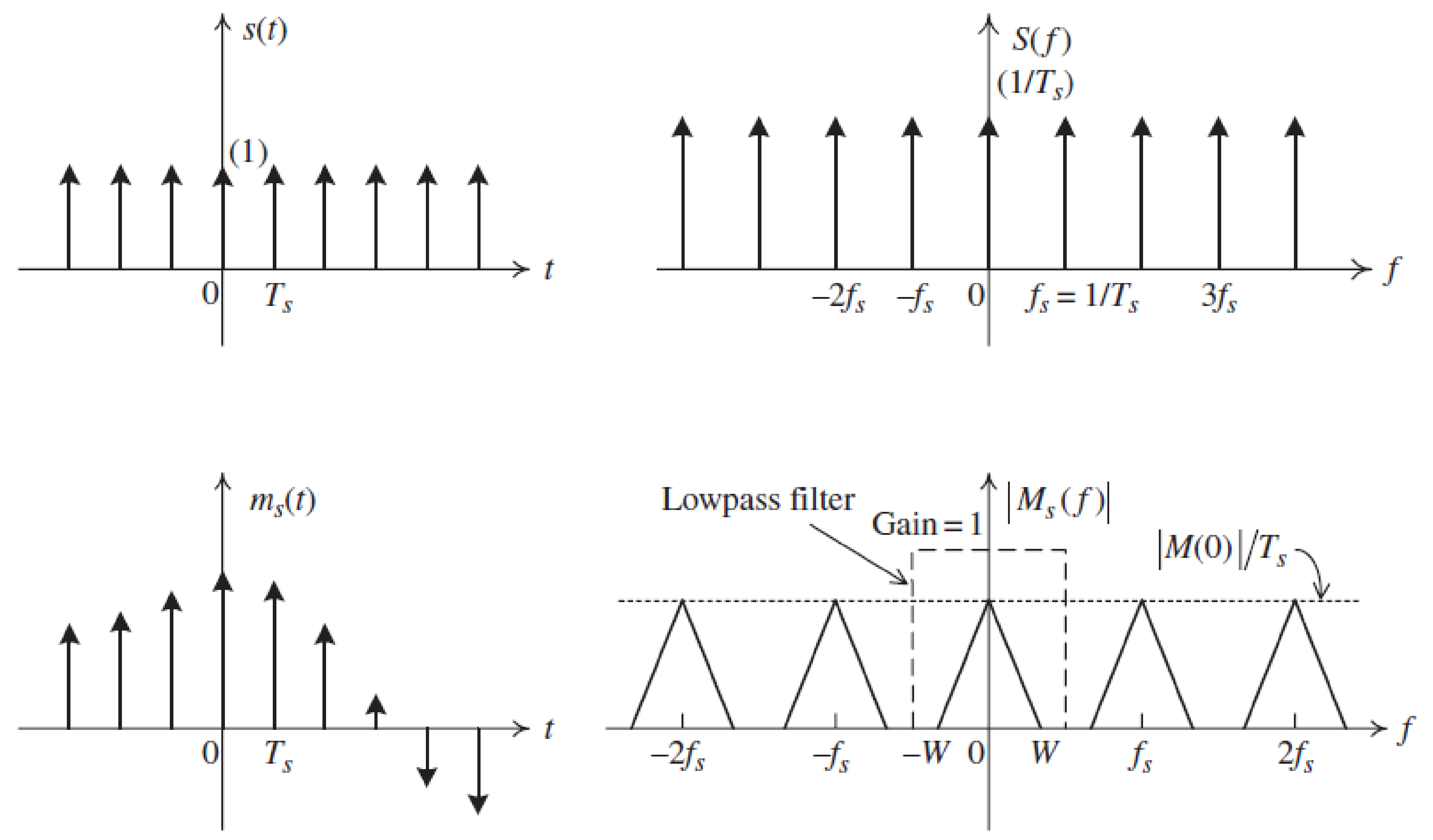
Έτσι το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο μπορεί να επιλεχθεί με εύρος ζώνης B ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$f_m < B < f_s - f_m$$

Ιδανική Δειγματοληψία



Ιδανική Δειγματοληψία



$$m_s(t) = m(t)s(t) \leftrightarrow M_s(f) = M(f) * S(f)$$

$$M_s(f) = M(f) * \underbrace{\left[\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - nf_s)\right]}_{S(f)} = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} M(f - nf_s).$$

Ιδανική Δειγματοληψία

$$m_s(t) = m(t)s(t) \leftrightarrow M_s(f) = M(f) * S(f)$$

$$M_s(f) = M(f) * \underbrace{\left[\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - nf_s)\right]}_{S(f)} = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} M(f - nf_s).$$

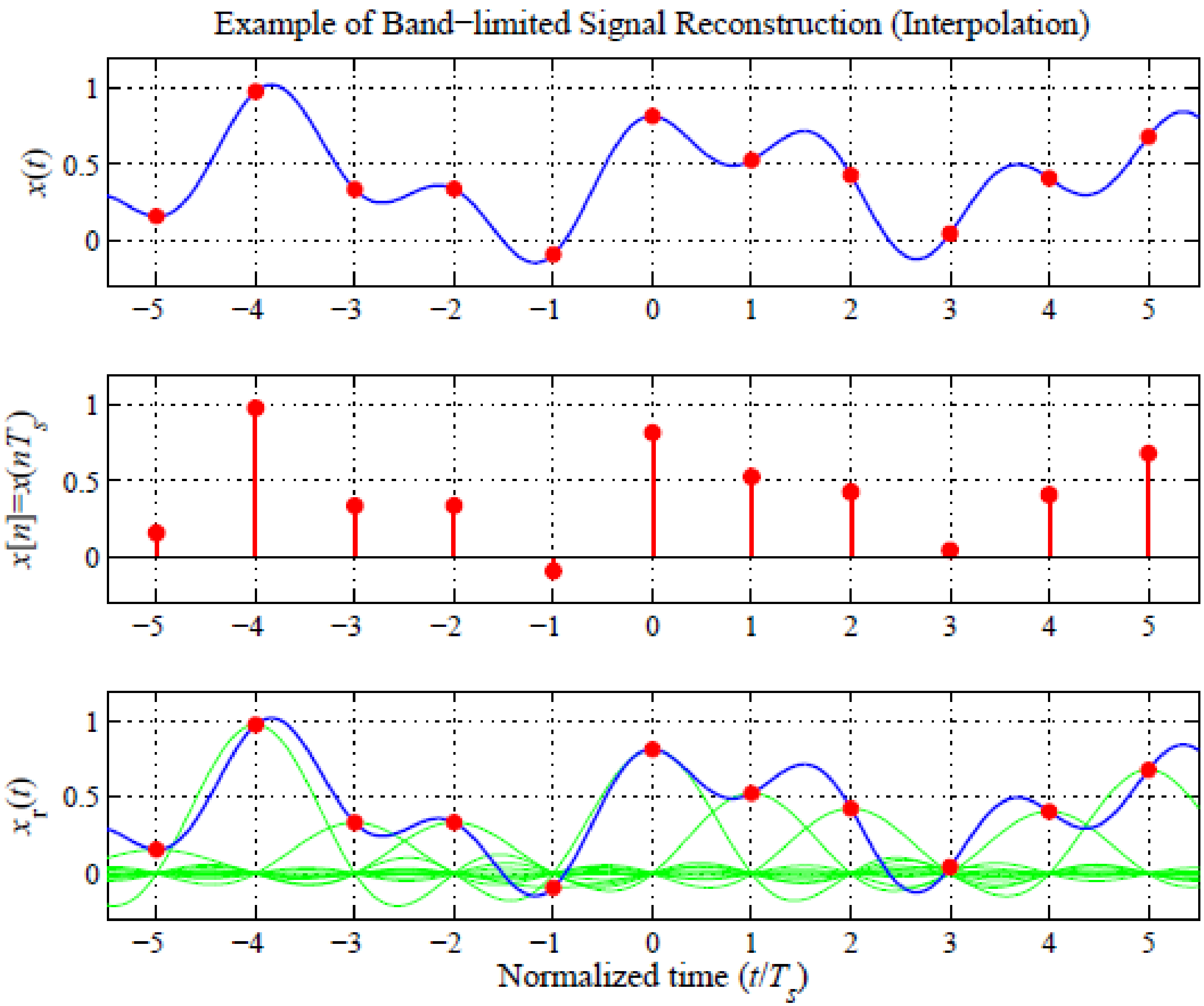
Ανακατασκευή Σήματος/Θεώρημα Δειγματοληψίας

$$M_s(f) = \mathcal{F}\{m_s(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\mathcal{F}\{\delta(t-nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\exp(-j2\pi nfT_s)$$

$$M(f) = \frac{M_s(f)}{f_s} = \frac{1}{f_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\exp(-j2\pi nfT_s), \quad -W \le f \le W.$$

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{M(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} M(f)\exp(j2\pi ft)\mathrm{d}f \\ &= \int_{-W}^{W} \frac{1}{f_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\exp(-j2\pi nfT_s)\exp(j2\pi ft)\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{f_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\int_{-W}^{W}\exp[j2\pi f(t-nT_s)]\mathrm{d}f \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\frac{\sin[2\pi W(t-nT_s)]}{\pi f_s(t-nT_s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m\left(\frac{n}{2W}\right)\mathrm{sinc}(2Wt-n) \end{aligned}$$

Ανακατασκευή Σήματος/Θεώρημα Δειγματοληψίας



Πρακτικές Πλευρές της Δειγματοληψίας

Στην πράξη η δειγματοληψία γίνεται:

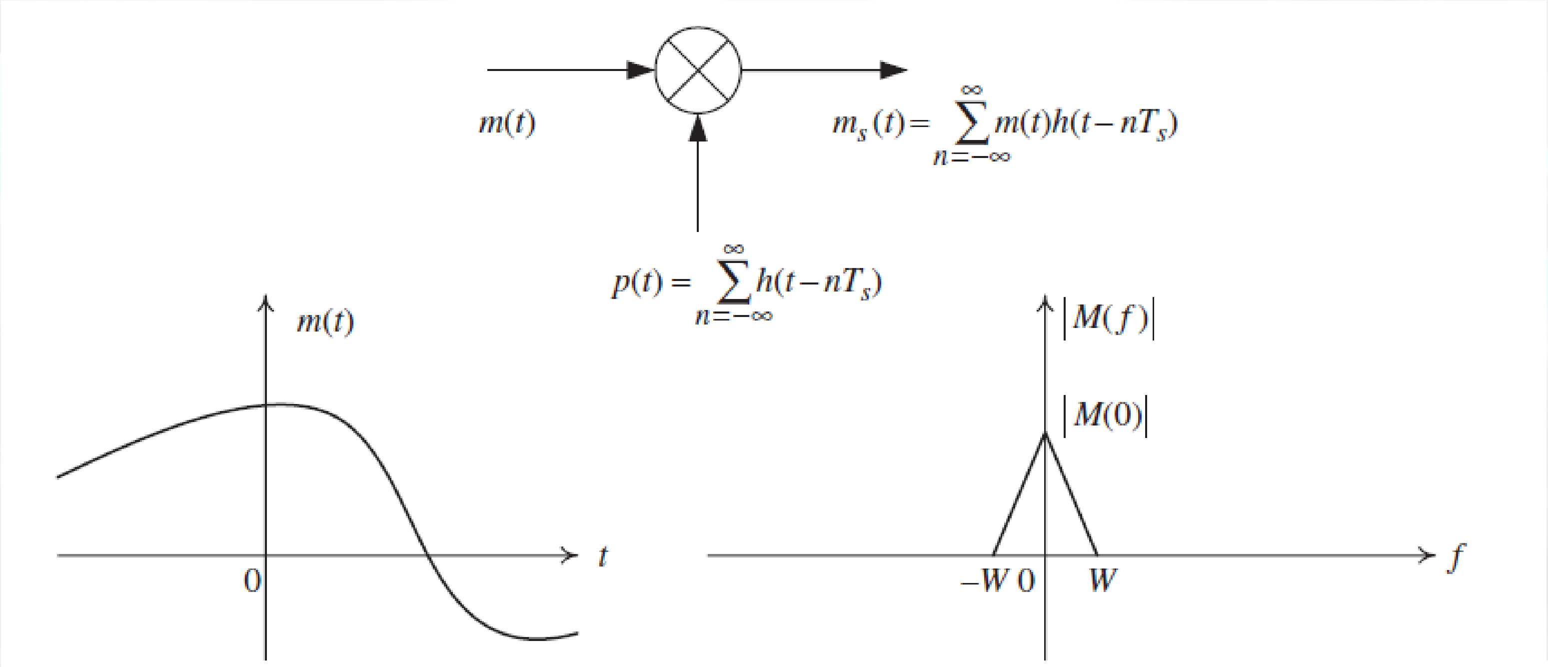
- Με δείγματα πεπερασμένης διαρκείας (αντί για ακολουθία συναρτήσεων delta και χρησιμοποιούνται παλμοί πεπερασμένης διαρκείας)
- Με δείγματα με επίπεδη κορυφή οπού και πάλι χρησιμοποιούνται παλμοί πεπερασμένης διαρκείας με ύψος όσο η τιμή του σήματος κατά την αρχή του παλμού
- Συγκλίνουν στην ιδανική δειγματοληψία όταν η διάρκεια μικραίνει.

Δειγματοληψία Πεπερασμένης Διάρκειας (Φυσική Δειγματοληψία/Natural Sampling)

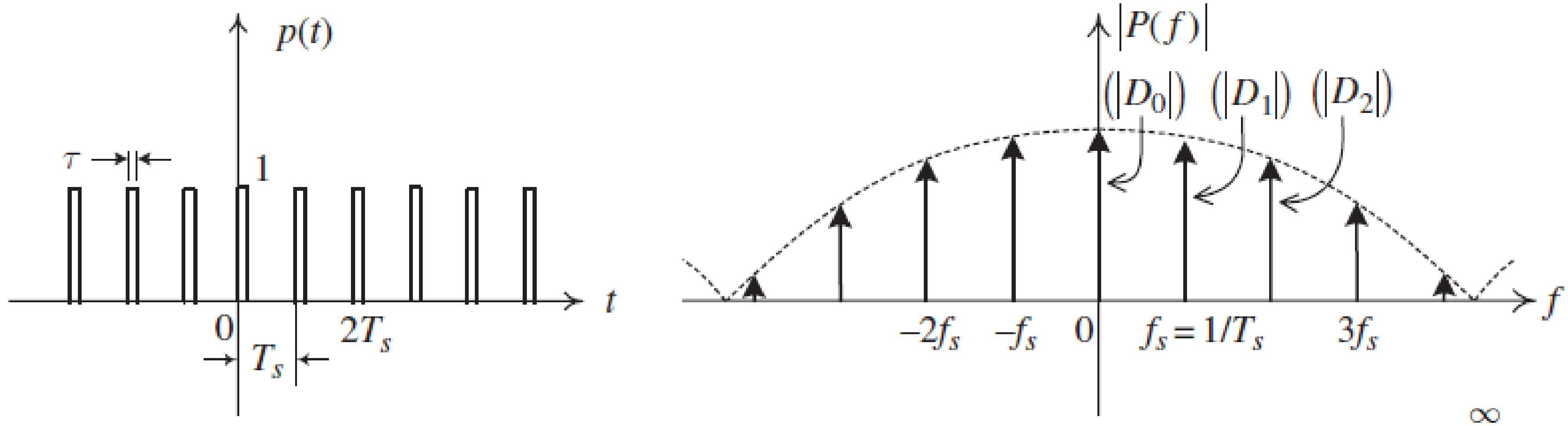
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{h}\left(t-nT_s\right), \qquad h(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le \tau\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \exp\left(j\frac{2\pi nt}{T_s}\right), \quad D_n=\frac{\tau}{T_s}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_s}\right)\exp\left(-j\frac{\pi n\tau}{T_s}\right)$$

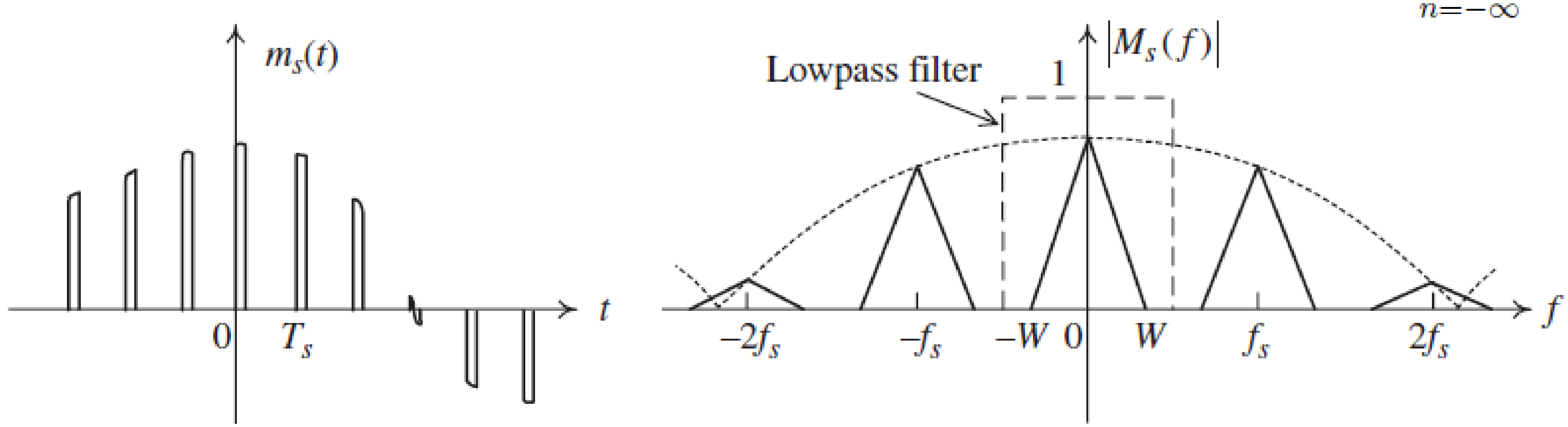
$$m_s(t)=m(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \exp\left(j\frac{2\pi nt}{T_s}\right) \overset{M/\Sigma\ Fourier}{\Leftrightarrow} M_s(f)=\frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_s}\right)\cdot\exp\left(-j\frac{\pi n\tau}{T_s}\right)M\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$



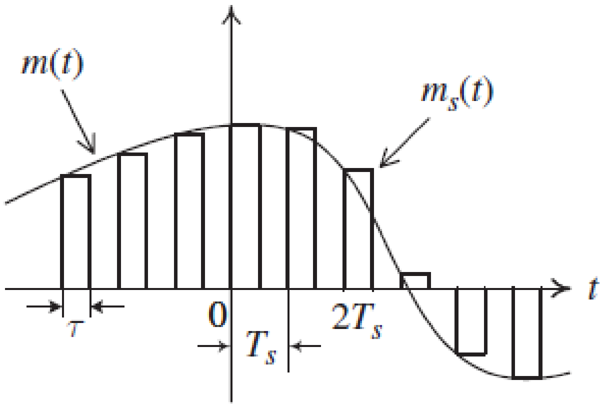
Δείγματα Πεπερασμένης Διάρκειας (Φυσική Δειγματοληψία/Natural Sampling)

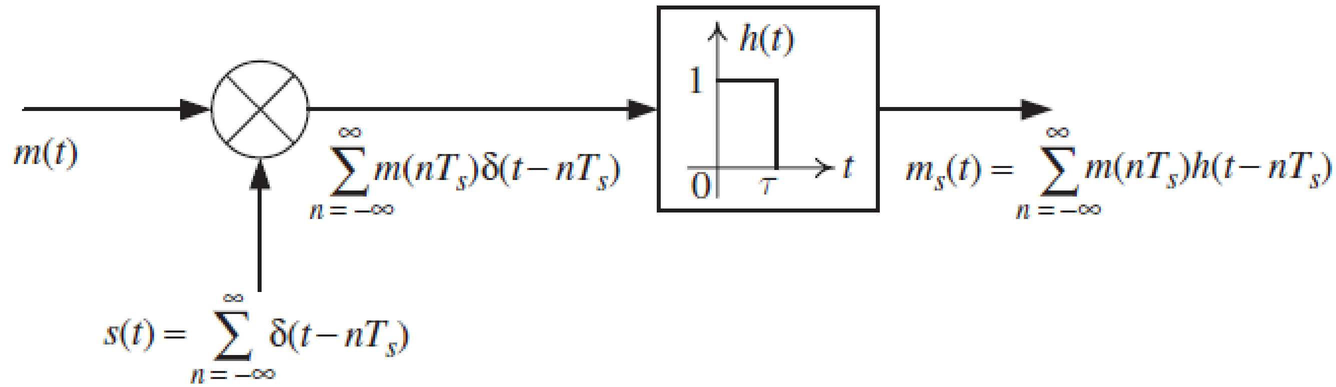


$$M_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n M(f - n f_s)$$



Δειγματοληψία Επίπεδης Κορυφής (Flat-top Sampling)

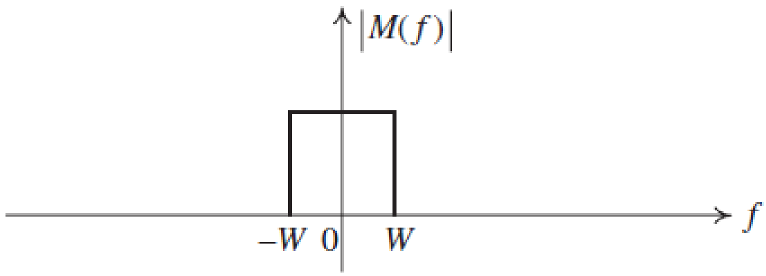


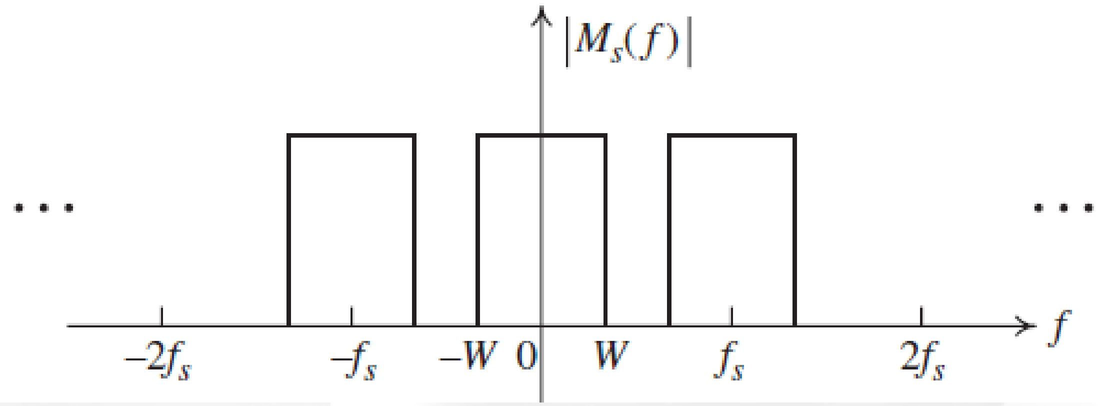


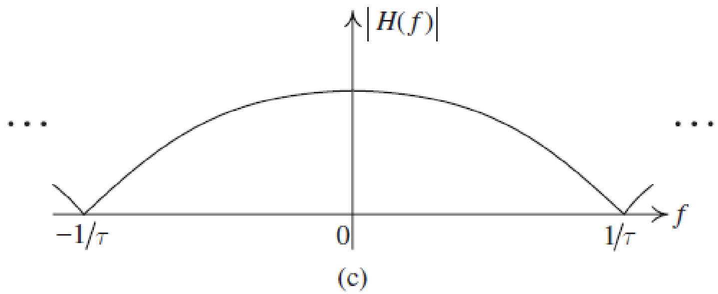
$$m_s(t) = \left[m(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s) \right] \otimes h(t)$$

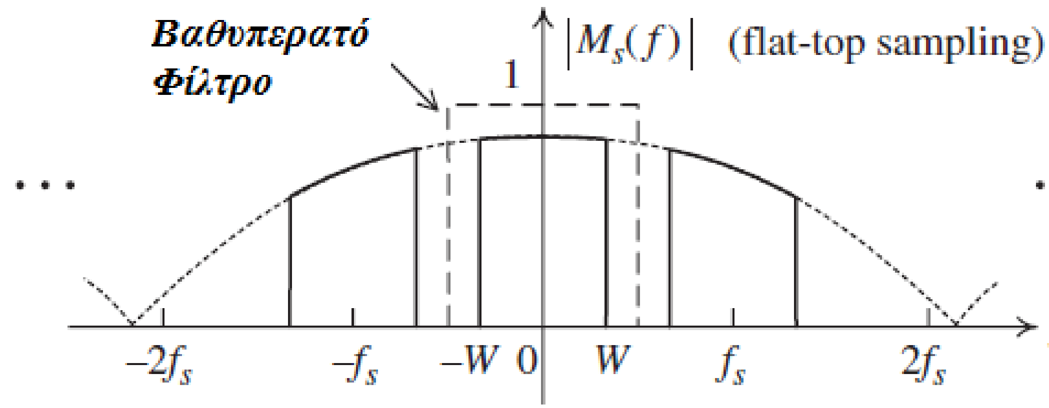
$$M_s(f) = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M\left(f - \frac{n}{T_s} \right), \; H(f) = \tau \operatorname{sinc}(f \cdot \tau) \cdot \exp(-j\pi f \tau)$$

Δειγματοληψία Επίπεδης Κορυφής (Flat-top Sampling)









Με τα δείγματα επίπεδης κορυφής εισάγεται παραμόρφωση πλάτους και καθυστέρηση $T_s/2$.
Αυτή η παραμόρφωση ονομάζεται φαινόμενο ανοίγματος.

Η παραμόρφωση διορθώνεται με χρήση Ισοσταθμιστή (Equalizer)

$$\left|H_{eq}(f)\right| = \left|\frac{T_s}{\tau \sin c(f \cdot \tau)}\right|$$

Διαμόρφωση Παλμών

Αναλογική Διαμόρφωση Παλμών

- Pulse Amplitude (PAM)
- Pulse Width (PWM)
- Pulse Position (PPM)

Ψηφιακή Διαμόρφωση Παλμών

- Pulse Code (PCM)
- Delta (DM)
- Adaptive Delta (ADM)

Διαμόρφωση Παλμών

Αναλογική Διαμόρφωση Παλμών

- Pulse Amplitude (PAM)
- Pulse Width (PWM)
- Pulse Position (PPM)

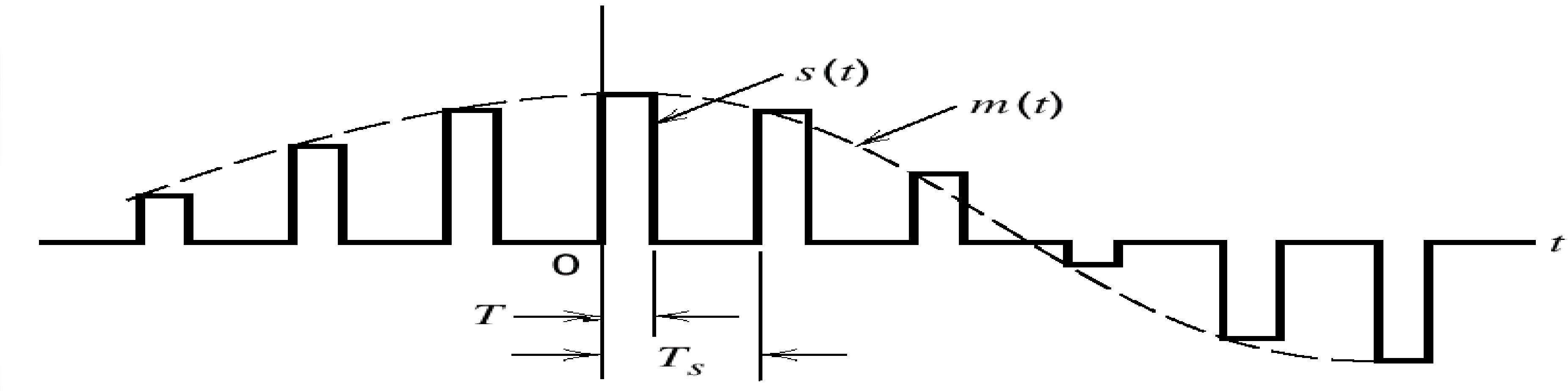
Ψηφιακή Διαμόρφωση Παλμών

- Pulse Code (PCM)
- Delta (DM)
- Adaptive Delta (ADM)

Διαμόρφωση Πλάτους Παλμών (PAM)
Pulse Amplitude Modulation

- Στη διαμόρφωση πλάτους, τα πλάτη ορθογώνιων παλμών μεταβάλλονται σύμφωνα με τις στιγμιαίες τιμές των δειγμάτων ενός συνεχούς σήματος πληροφορίας.

- Ο σκοπός του διαμορφωτή είναι να μετατρέψει διακριτά σειριακά σύμβολά δεδομένου πλάτους σε μια αναλογική έξοδο παλμών οι οποίοι μεταδίδονται πάνω από το δίαυλο. Ο αποδιαμόρφωτης πραγματοποιεί την αντίστροφη διαδικασία.



Διαμόρφωση Πλάτους Παλμών (PAM)
Pulse Amplitude Modulation

Έστω $s(t)$ η ακολουθία από παλμούς επίπεδης κορυφής:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\, h(t - nT_s) \qquad h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Το στιγμιαία δειγματοληπτούμενο σήμα είναι is :

$$m_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$m_\delta(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m_\delta(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(\tau - nT_s) h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT_s) h(t-\tau)\, d\tau$$

Χρησιμοποιώντας την ιδίοτητα της ολίσθησης :

$$m_\delta(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) h(t - nT_s)$$

Διαμόρφωση Πλάτους Παλμών (PAM) Pulse Amplitude Modulation

Το PAM σήμα $s(t)$

$$s(t) = m_\delta(t) * h(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$M/\Sigma \;\; Fourier$$

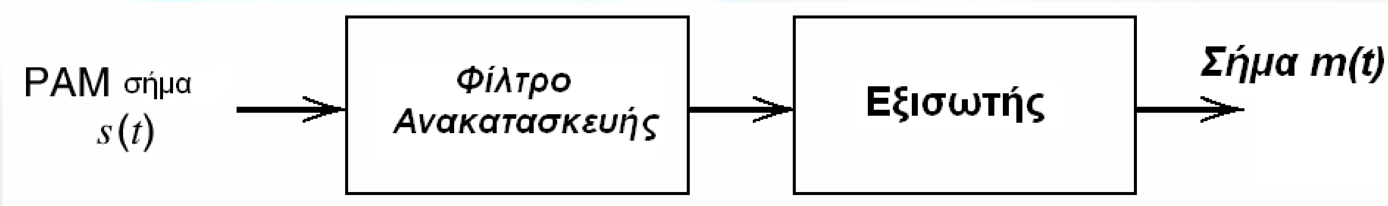
$$\mathrm{S}(f) = M_\delta(f) \cdot H(f)$$

Ως γνωστό $g_\delta(t) \Leftrightarrow f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(f - mf_s\right)$

$$\mathrm{M}_\delta(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - k\, f_s)$$

$$S(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - k\, f_s) \cdot H(f)$$

Διαμόρφωση Πλάτους Παλμών (PAM)
Pulse Amplitude Modulation



Το εύρος ζώνης του φίλτρου είναι W. Η έξοδος του φίλτρου είναι $f_s \cdot M(f) \cdot H(f)$.

Ο Μ/Σ Fourier του of $h(t)$ δίνεται:

$$H(f) = T\,\mathrm{sinc}(f\,T)\exp\left(-j2\pi\,f\,\frac{T}{2}\right)$$

Παραμόρφωση Πλάτους — Καθυστέρηση

amplitude distortion — delay $= T/2$

$\Rightarrow$ Φαινόμενο Ανοίγματος (aparture effect)

Συνάρτηση Μεταφοράς (Εξισωτή)

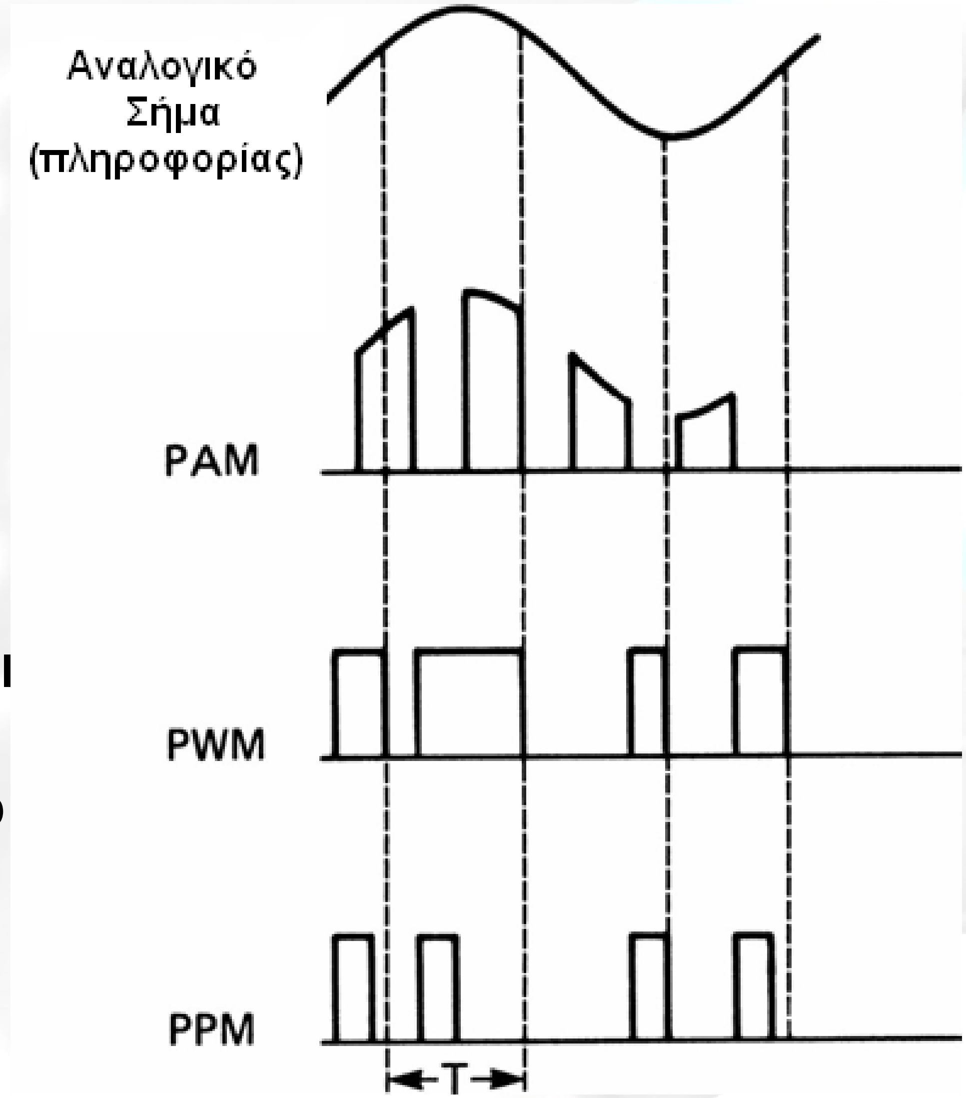
$$\frac{1}{H(f)} = \frac{1}{T\,\mathrm{sinc}(f\,T)} = \frac{\pi\,f}{\sin(\pi\,f\,T)}$$

Τότε ιδανικά το αρχικό σήμα $m(t)$ μπορεί πλήρως να ανακατασκευαστεί.

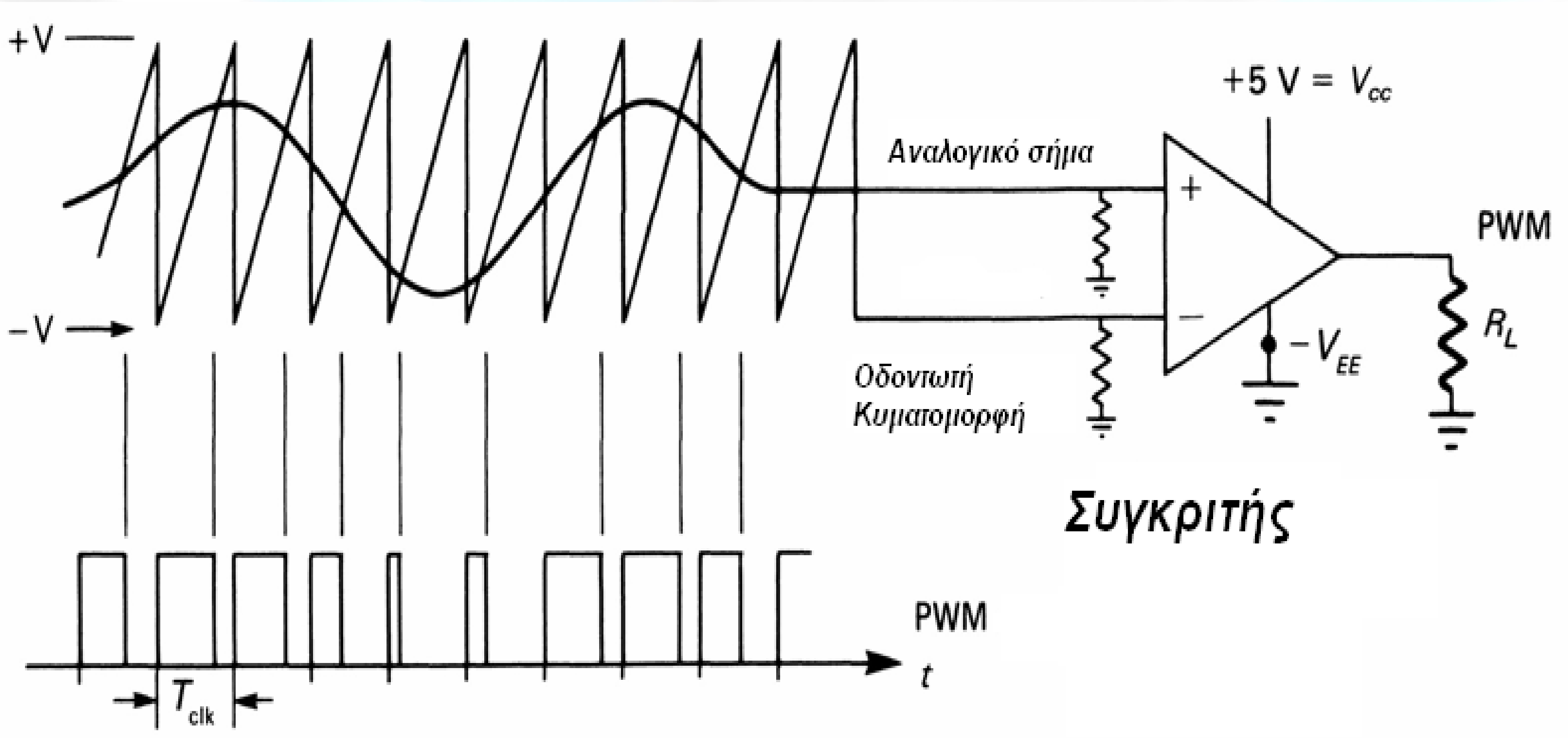
Διαμόρφωση Εύρους Παλμών (PWM)
Διαμόρφωση Θέσης Παλμών (PPM)

- **Στη διαμόρφωση εύρους παλμού (PWM), το εύρος κάθε παλμού είναι κατευθείαν ανάλογο του πλάτους του σήματος πληροφορίας.**

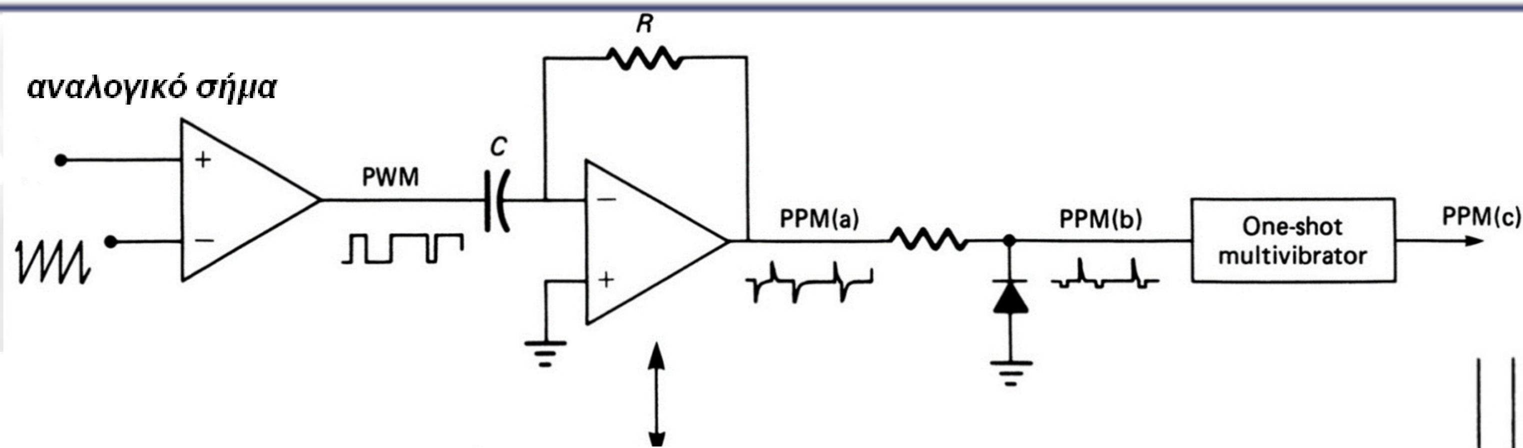
- **Στη διαμόρφωση θέσης παλμών, σταθερή διάρκειας παλμοί χρησιμοποιούνται και η θέση ή ο χρόνος εμφάνισης κάθε παλμού από κάποιο χρόνο αναφοράς είναι ανάλογη με το πλάτος του σήματος πληροφορίας.**

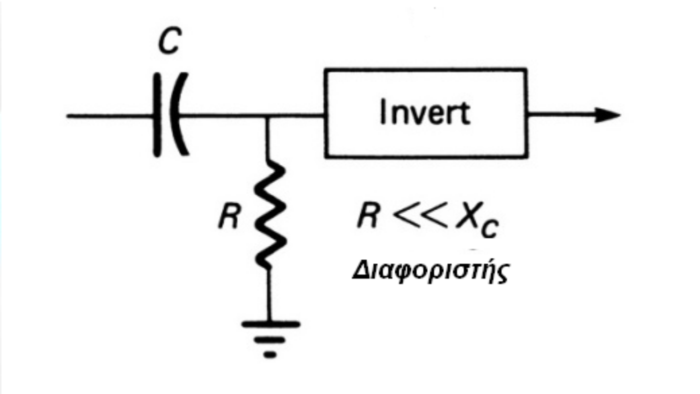


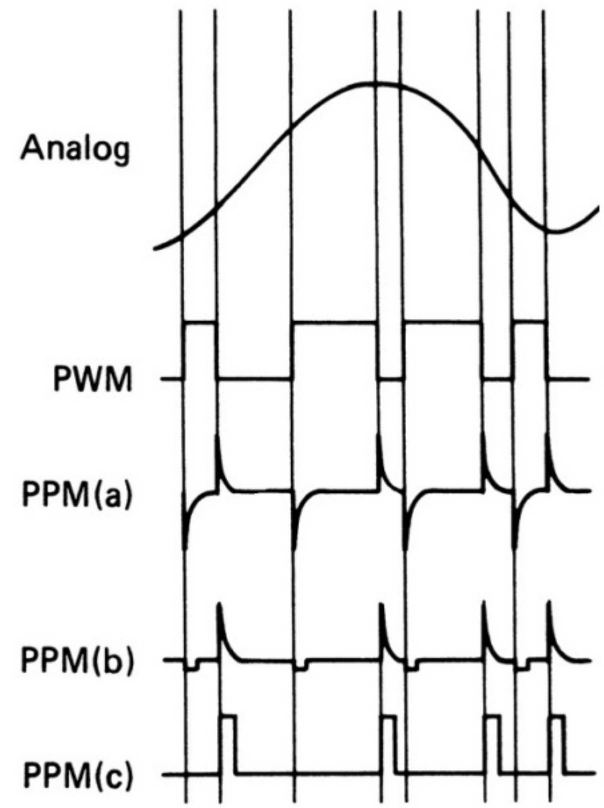
Διαμόρφωση Εύρους Παλμών



Διαμόρφωση Θέσης Παλμών







Διαμόρφωση Πλάτους Παλμών (PAM)
Pulse Amplitude Modulation

Σήμα PAM

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[1 + k_a m(nT_s)\right] h(t - nT_s)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

k_a: Ευαισθησία Πλάτους

$1+k_a m(nT_s)>0$ για όλα τα n

Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)

- Η παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM) θεωρείται μια διαδικασία μετατροπής αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Κβαντισμένη PAM.

- Όπως και σε κάθε άλλη τεχνική διαμόρφωσης παλμών ο ρυθμός της δειγματοληψίας πρέπει να είναι σύμφωνος με το ρυθμό Nyquist.

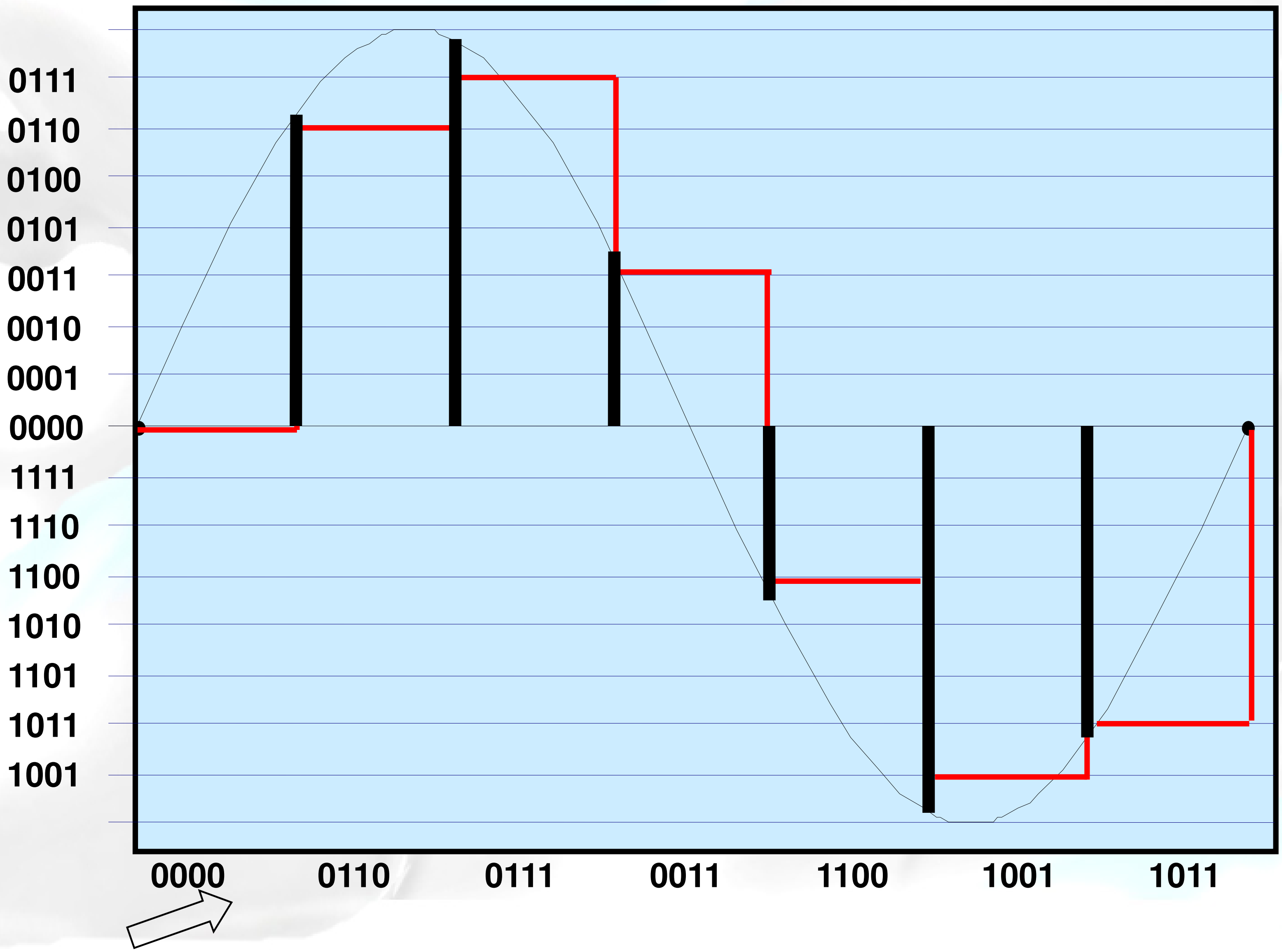
- Ο ρυθμός δειγματοληψίας πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του αναλογικού σήματος.

$$f_s > 2f_A(\max)$$

- Telegraph time-division multiplex (TDM) μεταδόθηκε το 1853, by ένα Αμερικάνο Εφευρέτη και από έναν Ηλ/γο Μηχανικό W.M. Miner το 1903.
- Το PCM εφευρέθηκε από ένα Βρετανό Μηχανικό τον Alec Reeves το 1937 στη Γαλλία.

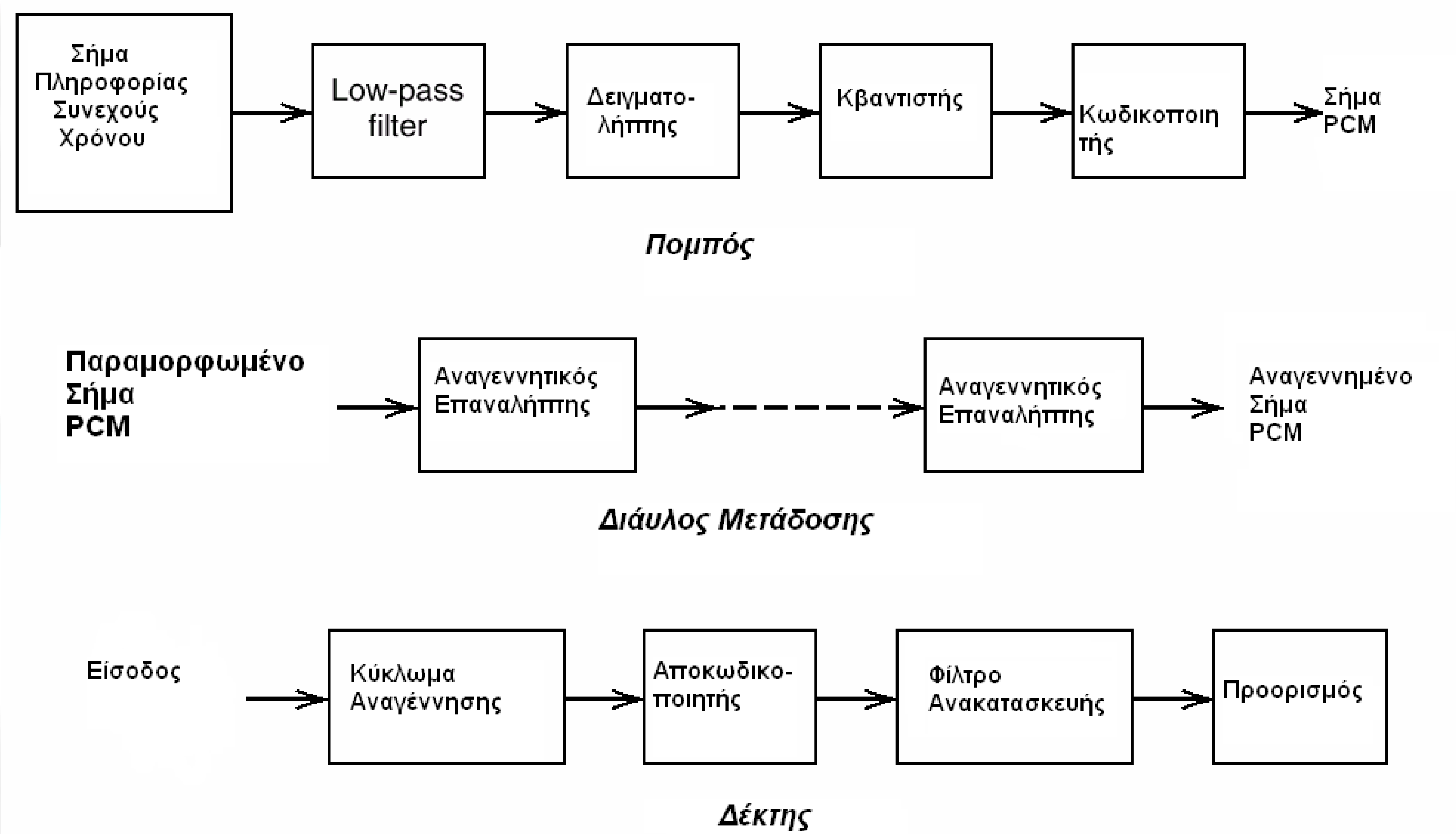
- Το 1943 οι μηχανικοί των Bell Labs χρησιμοποίησαν την PCM δυαδική κωδικοποίηση όπως αυτό προτάθηκε από τον Alec Reeves.

PCM



Αριθμοί που πέρασαν από τον μετατροπέα ADC ώστε να παριστάνουν αναλογική τάση.

Βασικά Στοιχεία Συστήματος PCM



Πλεονεκτήματα PCM

1. Ευρωστία στο θόρυβο και στην παρεμβολή

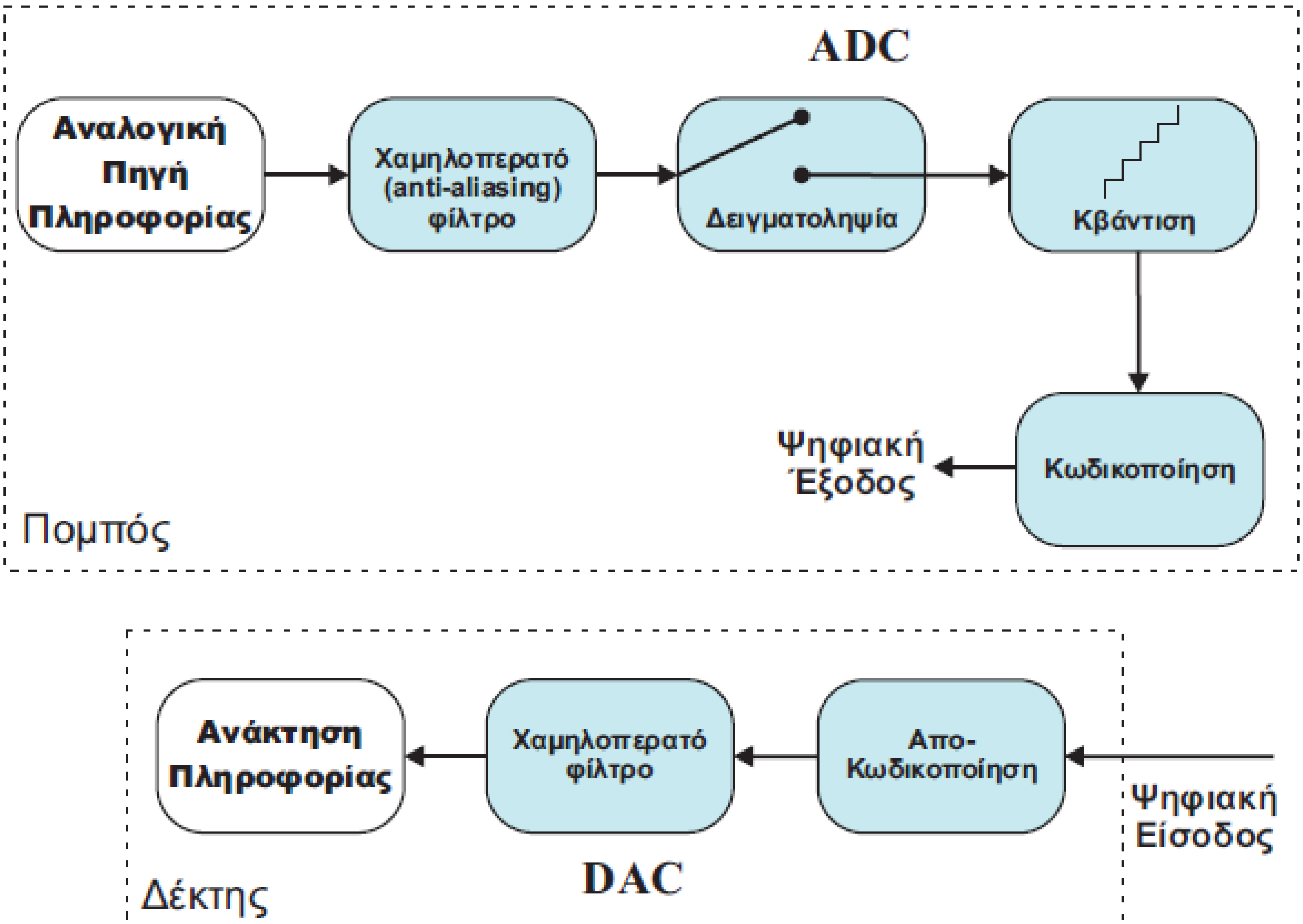
2. Αποδοτική αναγέννηση

3. Απόδοση σε επίπεδο SNR και εύρος ζώνης συμψηφισμός

4. Ομοιομορφία στη μετάδοση

5. Ασφαλές (κρυπτογραφία)

PCM/Review

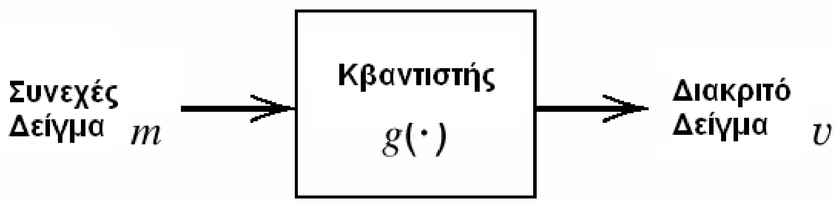


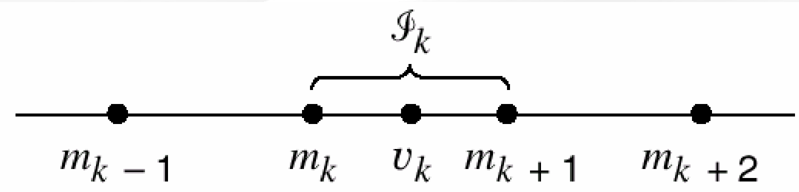
Pulse Code Modulation-PCM

Κβαντισμός (Quantization)

Η μετατροπή ενός αναλογικού/συνεχούς δείγματος του σήματος σε μια ψηφιακή διακριτή μορφή καλείται διαδικασία κβαντοποίησης/κβάντισης. Αυτό σημαίνει ότι μια ευθεία γραμμή που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της εισόδου και εξόδου γίνεται μια κλιμακωτή συνάρτηση.

Η διαφορά μεταξύ δύο γειτονικών τιμών ονομάζεται quantum ή μέγεθος βήματος.





Υπάρχουν δύο είδη κβάντισης:

Βαθμωτή Κβάντιση: κάθε σύμβολο εισόδου (δειγματοληπτούμενο σήμα) το μεταχειριζόμαστε ξεχωριστά ώστε να προκύψει η έξοδος.
(Scalar Quantization)

Διανυσματική Κβάντιση: τα σύμβολα εισόδου ομαδοποιούνται και τα μεταχειριζόμαστε ως διανύσματα για να προκύψει η έξοδος.
(Vector Quantization)

Η ομαδοποίηση των δεδομένων και η μεταχείριση τους ως μια μονάδα βελτιώνει τη βελτιστοποίηση του κβαντιστή αλλά ταυτόχρονα αυξάνει τη πολυπλοκότητα υπολογισμού.

Κβαντισμός (Quantization)

Αν ορίσουμε το διάστημα: $\mathcal{J}_k : \{m_k < m \le m_{k+1}\} \quad , k = 1, 2, \ldots, L$

όπου m_k είναι το επίπεδο απόφασης ή το κατώφλι απόφασης.

Πλάτος Κβάντισης:

Η διαδικασία μετατροπής ενός δείγματος πλάτους $m(nT_s)$ σε ένα διακριτό πλάτος $v(nT_s)$

Εάν $m(t) \in \mathcal{J}_k$ τότε η έξοδος του κβαντιστή είναι v_k όπου v_k , $k = 1,2,\ldots,L$

τα οπόια αποτελούν την επίπεδα αναπαράστασης

και $m_{k+1} - m_k$ είναι το μέγεθος του βήματος.

Η σχέση εισόδου-εξόδου $v = g(m)$ ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση κβαντιστή που είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση.

Κβαντιστής Mid-Tread

Η έξοδος του κβαντιστή μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

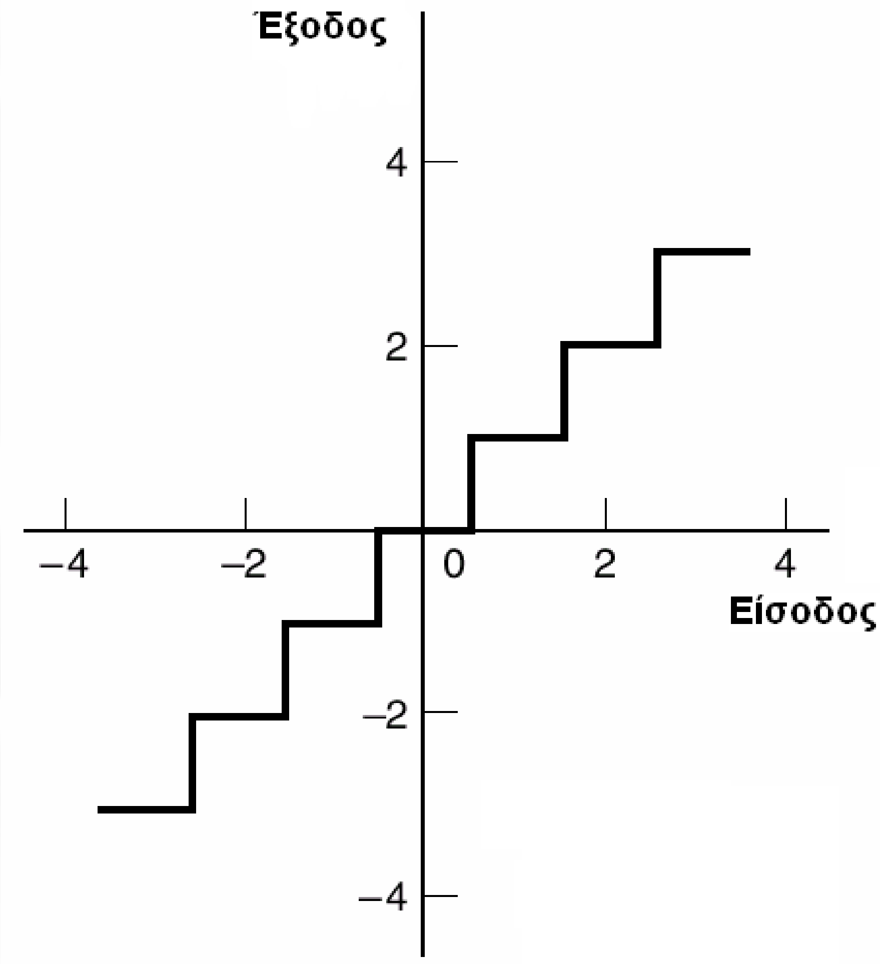
$$g(\cdot) = H_i \cdot \Delta$$

όπου $\pm H_i = 0, 1, 2, 3...$

Δ : Μέγεθος κβάντουμ/βήματος

Το Δ είναι κανονικοποιημένο στην τιμή 1.

Κβαντιστής τύπου μέσου πατήματος (mid-tread)
Η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο μέσο ενός οριζόντιου τμήματος στο κλιμακωτό γράφημα.



Κβαντιστής Mid-Riser

Η έξοδος του κβαντιστή μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

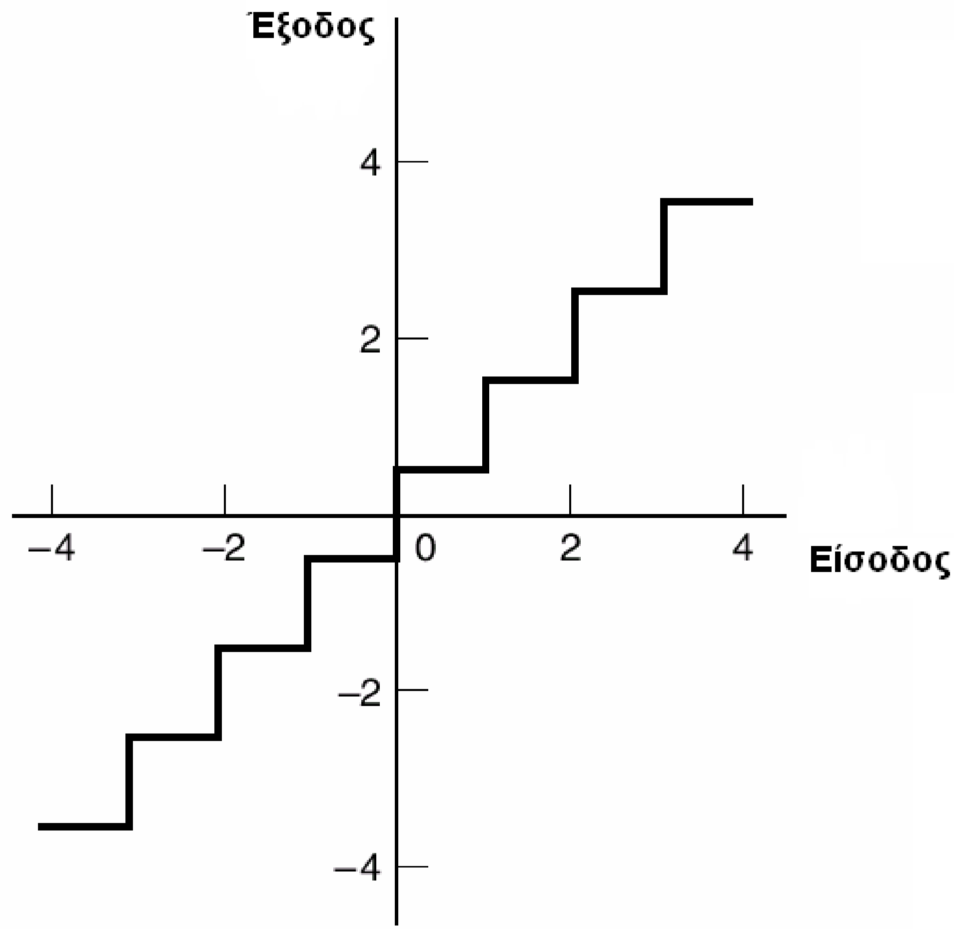
$$g(\cdot) = H_i \cdot (\Delta / 2)$$

$$\text{όπου } \pm H_i = 1, 3, 5 \ldots$$

$$\Delta : \text{Μέγεθος κβάντουμ/βήματος}$$

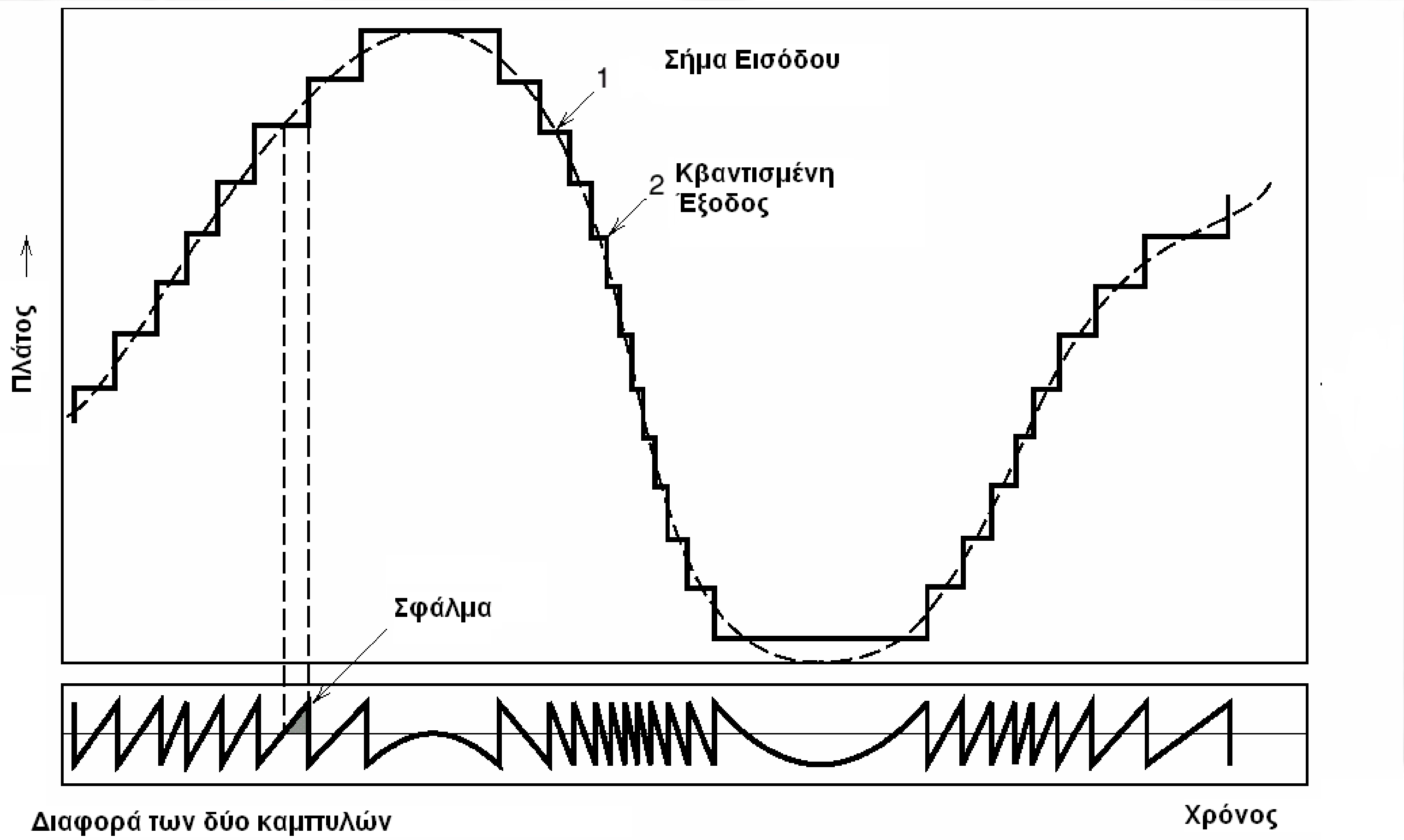
Το Δ είναι κανονικοποιημένο στην τιμή 1.

Κβαντιστής τύπου μέσης ανύψωσης (mid-riser)
Η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο μέσο ενός κατακόρυφου τμήματος στο κλιμακωτό γράφημα.

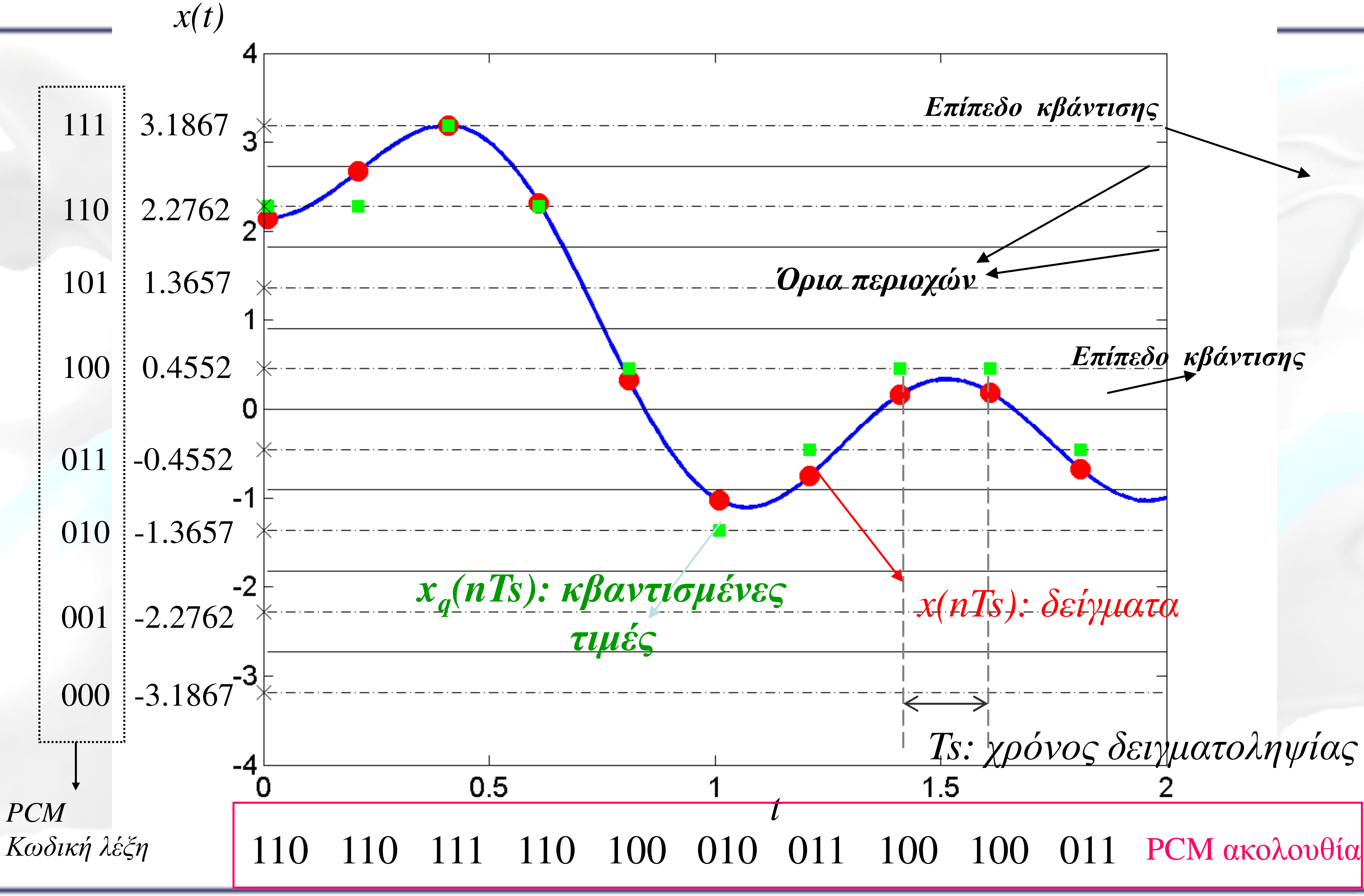


Σφάλμα Κβαντισμού

Το σφάλμα κβαντισμού υπολογίζεται από τη διαφορά μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου του κβαντιστή.
Η μέγιστη στιγμιαία τιμή αυτού του σφάλματος είναι το μισό ενός quantum και το συνολικό εύρος της μεταβολής είναι από –Δ/2 έως και Δ/2.



Παράδειγμα Κβάντισης



Σφάλμα Κβαντισμού

Έστω το σφάλμα κβάντισης συμβολίζεται από την τυχαία μεταβλητή Q της τιμής του σφάλματος q

$$q = m - v$$

$$Q = M - V$$

Έστω ένας ομοιόμορφος κβαντιστής Mid-Riser τύπου:

Το μέγεθος βήματος είναι $\Delta = \dfrac{2m_{\max}}{L}$

$-m_{\max} < m < m_{\max}$, L: ο συνολικός αριθμός των επιπέδων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα Δ.

$$f_Q(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & -\dfrac{\Delta}{2} < q \leq \dfrac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

E(Q)=0

$$\sigma_Q^2 = E[Q^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} q^2 f_Q(q)dq = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} q^2 dq = \frac{\Delta^2}{12}$$

SNR Κβάντισης

Έαν το κβαντισμένο δείγμα εκφράζεται σε δυαδική μορφή:

$L = 2^R$ όπου R είναι ο αριθμός των bits ανά δείγμα $\quad R = \log_2 L$

$$\Delta = \frac{2m_{\max}}{2^R}$$

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{3} m_{\max}^2 \, 2^{-2R}$$

Αν P είναι η μέση ισχύς του $m(t)$ $\Rightarrow$

$$(SNR)_{\mathrm{q}} = \frac{P}{\sigma_Q^2} = \left(\frac{3P}{m_{\max}^2} \right) 2^{2R}$$

$(\mathrm{SNR})_{\mathrm{q}}$ αυξάνει εκθετικά με αύξηση του R (αριθμός των bits).

SNR Κβάντισης

Αν $f_m(m)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του δείγματος του σήματος. Τότε η μέση ισχύς του είναι ίδια με την απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής m.

$$\mathrm{P}=\sigma_m^2 = \int_{-m_{\max}}^{m_{\max}} m^2 f_m(m)\cdot dm \quad \text{-------} \quad P = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(f)\right|^2 df$$

Τότε το SNR γίνεται :

$$(SNR)_{\mathrm{q}} = \left(\frac{3\sigma_m^2}{m_{\max}^2}\right) 2^{2R}$$

Αν ορίσουμε $F = \dfrac{\text{μέγιστη τιμή του σήματος}}{RMS \text{ τιμή του σήματος}} = \dfrac{m_{\max}}{\sigma_m}$

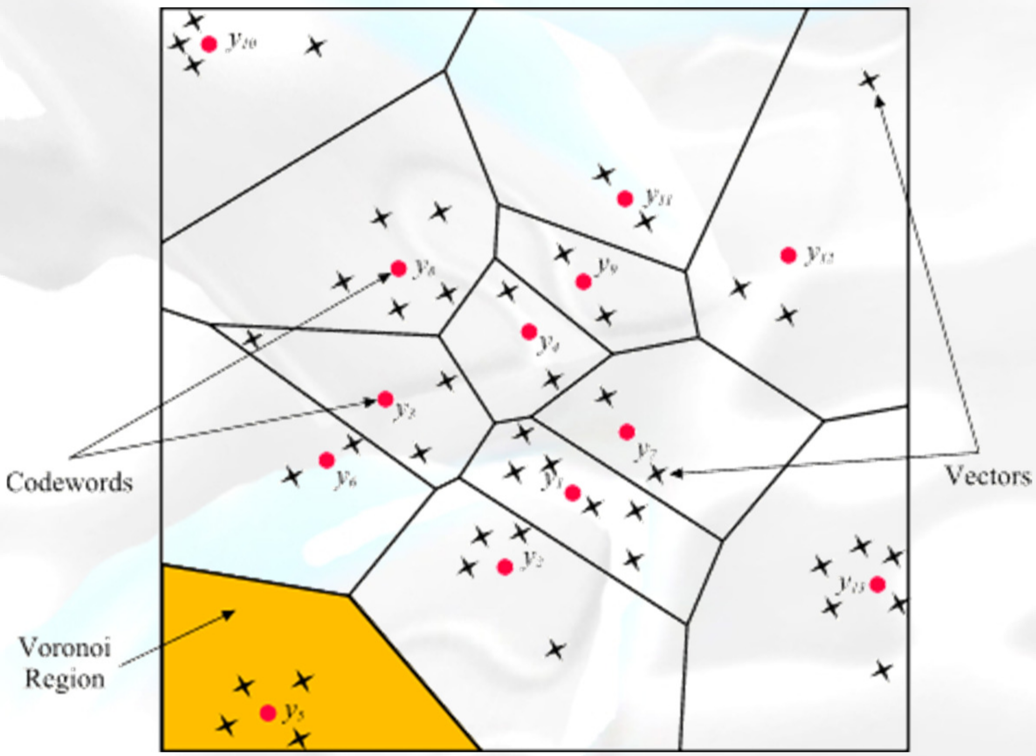
$$\left.\begin{array}{l} (SNR)_{\mathrm{q}} = \left(\frac{3\sigma_m^2}{m_{\max}^2}\right) 2^{2R} \\ F = \frac{m_{\max}}{\sigma_m} \end{array}\right\} (SNR)_{\mathrm{q}} = \frac{3 \cdot 2^{2R}}{F^2}$$

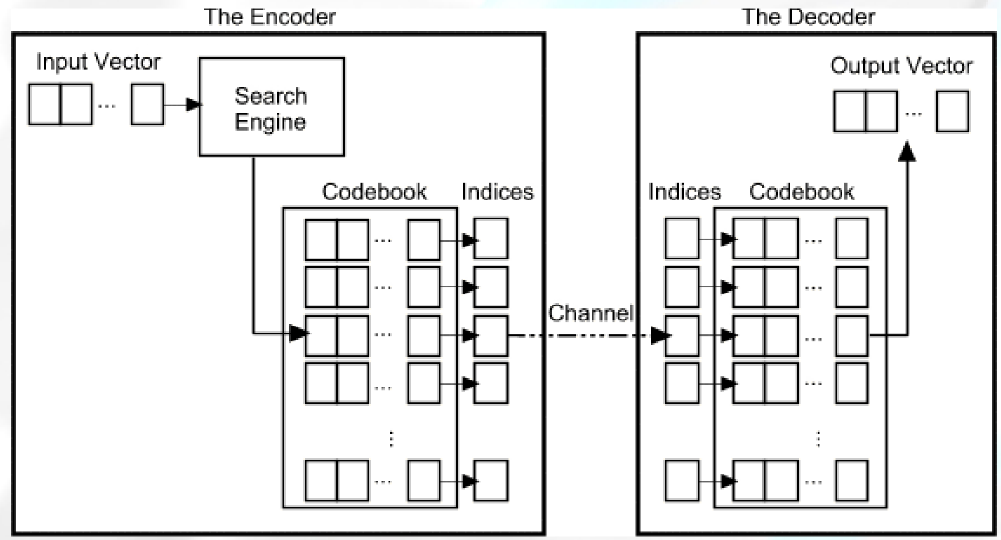
$$10\log(SNR)_{\mathrm{q}} = 6.02R + 10\log\left(\frac{m_{\max}}{\sigma_m}\right)^2 + 4.77 =$$

$$= 6.02R - 20\log F + 4.77.$$

6dB Rule για κάθε ένα έχτρα bit.

Διανυσματικός Κβαντιστής





Συμπίεση εικόνας και φωνής, Αναγνώριση Φωνής
Στατιστική Αναγνώριση Προτύπων
Απεικόνιση όγκου σε διαστατή εικόνα.

Καμπύλες Παραμόρφωσης vs. Ρυθμός

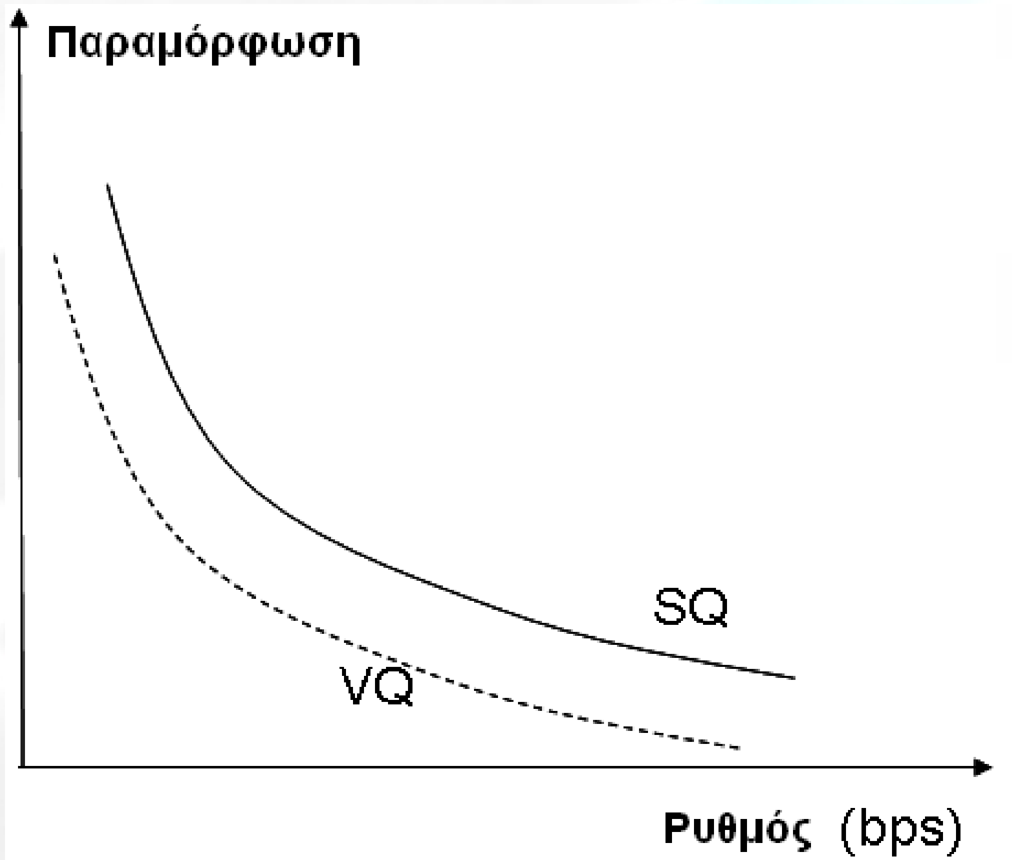
Ρυθμός: Πόσες κώδικες λέξεις (bits) χρησιμοποιούνται?

- π.χ.16-bit audio vs. 8-bit PCM φωνής

Παραμόρφωση: Πόση παραμόρφωση εισάγεται?

- π.χ.: μέση απόλυτη διαφορά (νόρμα L1), μέσο τετραγωνικό σφάλμα (νόρμα L2)

VQ Διανυσματικός Κβαντιστης συνήθως έχει καλύτερη επίδοση από τον SQ Βαθμωτό Κβαντιστή με κόστος της πολυπλοκότητα.



Κβάντιση

- Ομοιόμορφη Κβάντιση : Ομοιόμορφη απόσταση μεταξύ των επίπεδων κβαντισμού.
- Μη ομοιόμορφη Κβάντιση: Μεταβλητή απόσταση μεταξύ των επίπεδων κβαντισμού.

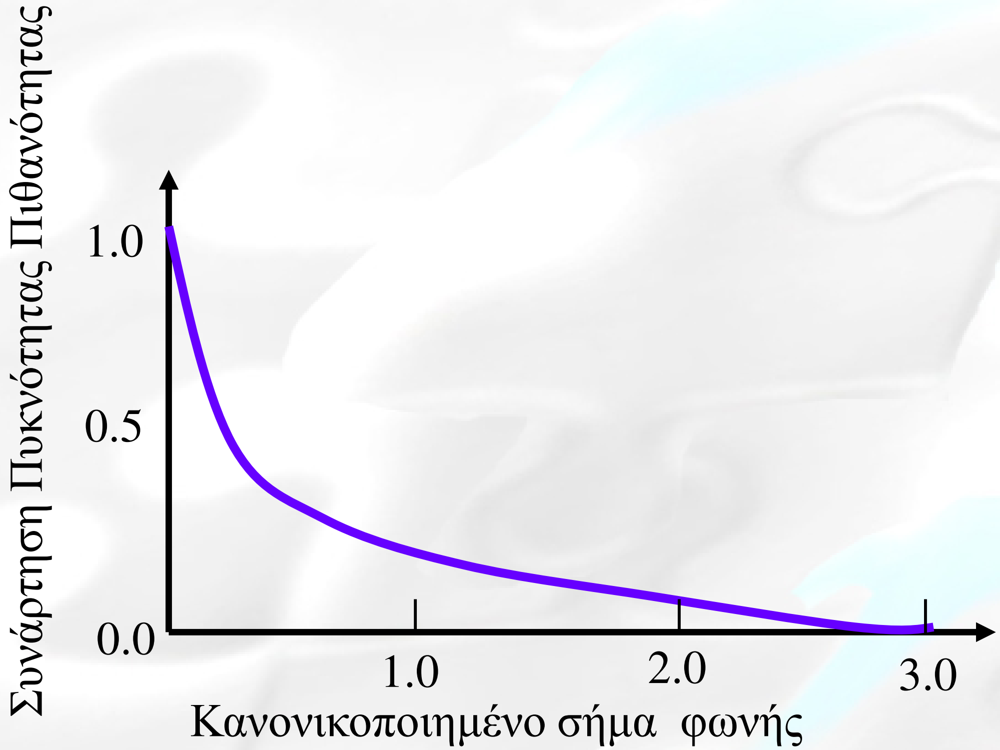
Η περιοχή των τάσεων που καλύπτονται από σήματα φωνής από τα ασθενή σήματα μέχρι τα δυνατά είναι από 1 έως 1000.

Αν χρησιμοποιήσουμε μη-ομοιόμορφο κβαντιστή με το χαρακτηριστικό ότι το μέγεθος του βήματος να αυξάνει καθώς η απόσταση από την αρχή των αξόνων της χαρακτηριστικής αυξάνει. Το τελευταίο βήμα του κβαντιστή μπορεί να συμπεριλάβει όλες τις πιθανές μεταβολές του πλάτους του σήματος φωνής.

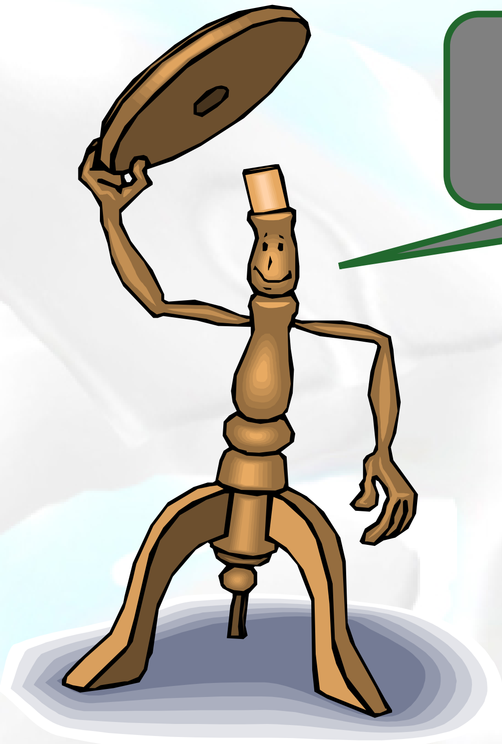
Άρα τα ασθενή σήματα προτιμώνται σε βάρος των ισχυρών. Με αυτό τον τρόπο απαιτούνται λιγότερα βήματα από ότι στην περίπτωση που θα είχαμε ομοιόμορφο κβαντιστή.

Μη ομοιόμορφη Κβάντιση

- Κίνητρο
  - Σήματα Φωνής έχουν το εξής χαρακτηριστικό: ασθενή σήματα (μικρού πλάτους τάσεις) συμβαίνουν πιο συχνά από τα ισχυρά σήματα.
  - Το σύστημα ακοής του ανθρώπου επιδεικνύει λογαριθμική ευαισθησία χαρακτηριστική εισόδου εξόδου.
    - Πιο ευαίσθητο στα ασθενή σήματα (π.χ. το 0.1 ακούγεται διαφορετικά από το 0.2)
    - Λιγότερο ευαίσθητο σε σήματα ισχυρά με μεγάλα πλάτη (π.χ. 0.8 δεν ακούγεται πολύ διαφορετικά από το 0.9)



Q&A



Ευχαριστώ για την προσοχή σας !!!

E-mail: thpanag@ece.ntua.gr
Παλ. Κτίρια Ηλ/γων Γρ. 3.2.9
Τηλ.: 2107723842