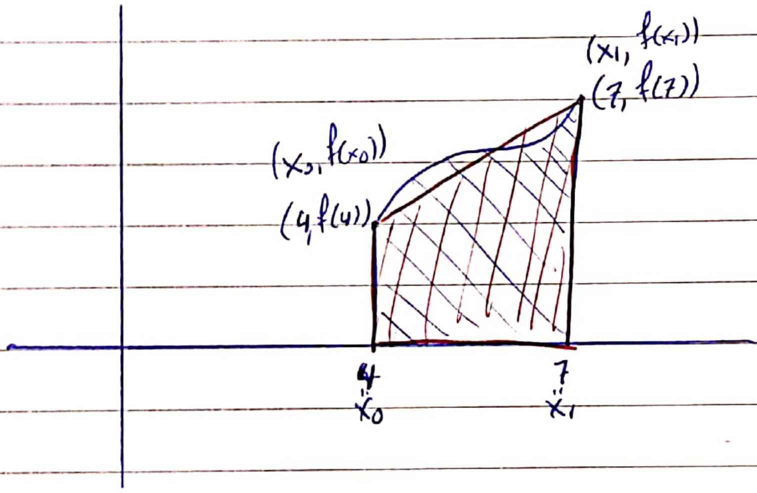
Παρασκευή 3/6/22 21η Διάλεξη: Κεφάλαιο 11

Τύποι Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

1) $n=1$ Τραπεζίου

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1) - \frac{h^3}{12}f''(\mu) \quad \text{όπου } \mu \in [x_0, x_1]$$

$\{S.O.S: \ f_0 = f(x_0)\}$



$$\int_4^7 f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_0+f_1)$$

$$= \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))$$

$$= \frac{7-4}{2}(f(4)+f(7))$$

2) $n=2$ Simpson

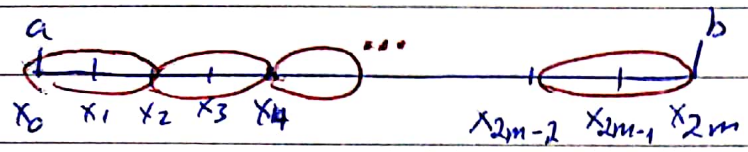
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\mu), \quad \text{όπου } \mu \in (a,b)$$

• Έτσι Α.Ο θεωρεί ότι τα σημεία είναι ισαπέχοντα, σε αντίθεση με τα πολυώνυμα παρεμβολής όπου δεν είναι ούτε ισαπέχοντα ούτε και διατεταγμένα αναγκαστικά

3) $n=3$ Τύπος 3/8

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3) - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\mu)$$

Σύνθετος τύπος Α.Ο. Simpson: Έστω $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n=2m$ (άρτια) μια διαμέριση από $n+1$ ισαπέχοντα σημεία $[a,b]$ με $h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m}\frac{h}{3}\left(f_{2i-2}+4f_{2i-1}+f_{2i}\right) - \sum_{i=1}^{m}\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\mu_i),$$

$f_{2i} = f(x_{2i})$

όπου $\mu_i \in [x_{2i-2}, x_{2i}]$

Άρα $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\dots+4f_{2m-1}+f_{2m}\right)+E(f)$

Αν θεωρήσω $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$

$$|E(f)| \le \frac{h^5}{90}m\cdot M$$

$|x+y|\le|x|+|y|$ τριγωνική ανισότητα

Στις εξετάσεις θα γράφουμε $|E(f)| \le \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m}|f^{(4)}(\mu_i)|$

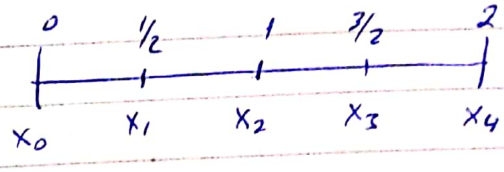
$$\le \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m}M$$

$$\le \frac{h^5}{90}m\cdot M = \frac{h^5}{90}\frac{b-a}{2h}M = \frac{h^4}{180}M$$

Πάλι, πιθανό θέμα να δίνεται ο απλός τύπος και να χτισθεί ο σύνθετος

Άσκηση $I=\int_0^2 x e^x \, dx$, Σύνθετο Simpson

α) $n=4$, $h=\frac{b-a}{4}=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$



$$I_S=\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(f(0)+4f(1/2)+2f(1)+4f(3/2)+f(2)\right)=8{,}4000376$$

β) $n=8$, $h=\frac{b-a}{8}=0{,}25=1/4$

$$I_S=\frac{1/4}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+4f_5+2f_6+4f_7+f_8\right)$$
$$=8{,}389785$$

Άσκηση Να βρεθεί το n ώστε ο σύνθετος τύπος τραπεζίου να δίνει την τιμή του $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ με σφάλμα μικρότερο από $5\cdot10^{-6}$

Λύση $|E(f)|\le\frac{h^2}{12}(b-a)M$, $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$, $a=0$, $b=1$, $h=\frac{1}{n}$

$f(x)=e^{-x^2}$

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=e^{-x^2}(4x^2-2)$

$f'''(x)=e^{-x^2}4x(3-2x^2)$

$f'''(0)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=\pm\sqrt{3/2}\notin[0,1]$

$$\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|=\max\{\underbrace{|f''(0)|}_{\text{ρίζα 3ης παραγώγου}},\ \underbrace{|f''(0)|}_{\text{άκρο}},\ \underbrace{|f''(1)|}_{\text{άκρο}}\}$$

$$=\max\{2,\tfrac{2}{e}\}=2$$

$$|E(f)|\le 5\cdot10^{-6}\Rightarrow\frac{1}{n^2\cdot 12}(1-0)\cdot 2\le 5\cdot10^{-6}\Rightarrow n^2\ge\frac{10^6}{30}$$
$$\Rightarrow \boxed{n>182{,}57}$$

Άρα $n=183$

Προσοχή Αν είχαμε Simpson θα θέλαμε άρτιο n,
άρα $n = 184$

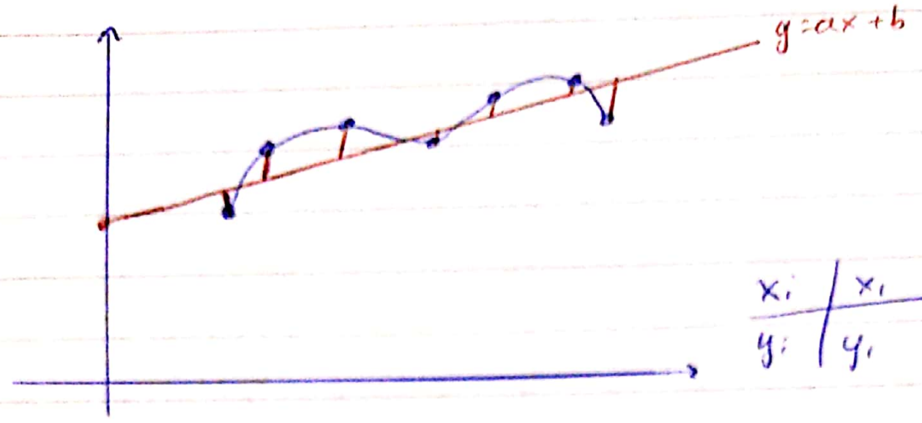
	$h=1$	1	3	2	2	2	1/2	1/2	1/2	1/2	
x_i	0	1	2	5	7	9	11	11.5	12	12.5	13
f_i	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}

$$\int_0^{13} f(x)dx = \underbrace{\int_0^2 f(x)dx}_{\text{από Simpson}} + \underbrace{\int_2^5 f(x)dx}_{\text{από τραπεζίου}} + \underbrace{\int_5^{11} f(x)dx}_{\text{από } 3/8} + \underbrace{\int_{11}^{13} f(x)dx}_{\text{σύνθετο Simpson}}$$

$$= \frac{1}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{3}{2}(f_2 + f_3) + \frac{3\cdot 2}{8}(f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6)$$

$$+ \frac{1/2}{3}(f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + f_{10})$$

Προσέγγιση



x_i	x_1	x_2	x_m
y_i	y_1	y_2	y_m

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - y(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (ax_i + b))^2$$

$$\frac{\partial}{\partial b} E(a,b) = 2\sum_{i=1}^{m} (y_i - ax_i - b)(-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i - a\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{mb + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) a = \sum_{i=1}^{m} y_i} \quad (1)$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m} (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{m} x_i y_i + a\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{m} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \cdot b + \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i)^2\right) a = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i} \quad (2)$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να λύσει

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma y_i & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i - \Sigma x_i \Sigma x_i y_i}{m\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{\begin{vmatrix} m & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma y_i x_i \end{vmatrix}}{|\ D\ |} = \frac{m\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{m\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

Οι (1),(2) λέγονται κανονικές εξισώσεις

Θα μπορούσαν τα δεδομένα να ταιριάζουν καλύτερα όχι σε ευθεία, αλλά σε 2ου ή 3ου βαθμού πολυώνυμο

$P_1(x) = b + ax$

$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$n a_0 + (\Sigma x_i) a_1 + (\Sigma x_i^2) a_2 + (\Sigma x_i^3) a_3 = \Sigma y_i$$

$$(\Sigma x_i) a_0 + (\Sigma x_i^2) a_1 + (\Sigma x_i^3) a_2 + (\Sigma x_i^4) a_3 = \Sigma x_i y_i$$

$$(\Sigma x_i^2) a_0 + (\Sigma x_i^3) a_1 + (\Sigma x_i^4) a_2 + (\Sigma x_i^5) a_3 = \Sigma x_i^2 y_i$$

$$(\Sigma x_i^3) a_0 + (\Sigma x_i^4) a_1 + (\Sigma x_i^5) a_2 + (\Sigma x_i^6) a_3 = \Sigma x_i^3 y_i$$

$$y = a e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + \ln e^{bx} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\ln y}}^{Y} = \ln a + bx$$

$$\boxed{Y_i = b x_i + A}, \quad A = \ln a$$