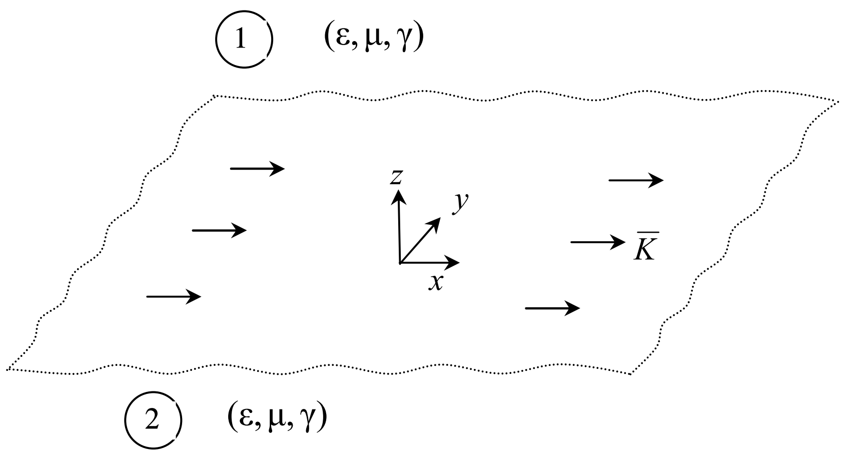
7. Διάδοση επιπέδων κυμάτων σε αγωγούς- Επιδερμικό φαινόμενο-Κυματομάδες

7.1 Γενικά

Με αναφορά στο Σχ.1, θεωρούμε και πάλι ότι η ρευματική κατανομή $\overline{K} = \hat{x}K(t) = \hat{x}K_0 \cos(\omega t)$ δρα στον απεριόριστο χώρο. Τώρα, σε αντίθεση με την αντίστοιχη διάταξη του Σχ.5-1 της ενότητας 5, υποθέτουμε ότι το μέσο που πληροί τον χώρο έχει ειδική αγωγιμότητα γ, δηλαδή είναι ένας αγωγός που περιγράφεται με τις παραμέτρους (ε,μ,γ). Ζητάμε να βρούμε το διεγειρόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.



Σχήμα 1

Λύση: Θα εργαστούμε στο πεδίο της συχνότητας. Πριν προχωρήσουμε στη λύση, είναι εποικοδομητικό να τονίσουμε τις διαφορές, αλλά και τις αναλογίες, που παρουσιάζει το παρόν πρόβλημα σε σχέση με το αντίστοιχο πρόβλημα της ενότητας 5.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Χώρος χωρίς αγωγιμότητα ($\gamma = 0$)	Χώρος με αγωγιμότητα ($\gamma \neq 0$)
$\nabla \times \dot{\overline{E}} = -j\omega\mu\dot{\overline{H}}$	$\nabla \times \dot{\overline{E}} = -j\omega\mu\dot{\overline{H}}$
$\nabla \times \dot{\overline{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\overline{E}}$	$\left\{\begin{array}{l}\nabla\times\dot{\overline{H}} = \dot{\overline{J}}_c + j\omega\varepsilon\dot{\overline{E}} \\ \dot{\overline{J}}_c = \gamma\dot{\overline{E}}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\nabla\times\dot{\overline{H}} = \gamma\dot{\overline{E}} + j\omega\varepsilon\dot{\overline{E}} = j\omega\varepsilon'\dot{\overline{E}} \\ \varepsilon' = \varepsilon + \dfrac{\gamma}{j\omega}\end{array}\right.$
$(\nabla^2 + k^2)\dot{\overline{E}} = 0$ $(\nabla^2 + k^2)\dot{\overline{H}} = 0$ $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$	$(\nabla^2 + k^2)\dot{\overline{E}} = 0$ $(\nabla^2 + k^2)\dot{\overline{H}} = 0$ $k^2 = \omega^2\varepsilon'\mu = \omega^2\mu(\varepsilon + \dfrac{\gamma}{j\omega}) = \omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\gamma$

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω Πίνακα 1, η διαφορά στις εξισώσεις Maxwell που περιγράφουν τα δύο προβλήματα έγκειται στην παρουσία του όρου $\bar{J}_c$ των ρευμάτων αγωγιμότητας (επαγόμενα χωρικά ρεύματα στο εσωτερικό του αγωγού), τα οποία δημιουργούνται δευτερογενώς λόγω της υπάρξεως ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού. Τα ρεύματα αυτά δίνονται από τον μικροσκοπικό νόμο του Ohm, $\dot{\bar{J}}_c = \gamma\dot{\bar{E}}$.

Η διαφορά αυτή είναι σημαντική από την άποψη της φυσικής συμπεριφοράς των διατάξεων, όπως θα δούμε παρακάτω. Από μαθηματικής όμως απόψεως πρόκειται για επουσιώδη διαφορά. Αυτό γίνεται αμέσως αντιληπτό, αν παρατηρήσουμε ότι ο νόμος Maxwell–Ampere (στον οποίο εντοπίζεται η διαφορά) μετά την αντικατάσταση του $\bar{J}_c$ από τον νόμο του Ohm παίρνει τη μορφή

$$\nabla \times \dot{\bar{H}} = \gamma\dot{\bar{E}} + j\omega\varepsilon\dot{\bar{E}} = j\omega\varepsilon'\dot{\bar{E}} , \tag{1}$$

όπου ε' είναι το μιγαδικό μέγεθος (ονομαζόμενο ***μιγαδική διηλεκτρική σταθερά*** του αγώγιμου μέσου)

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} . \tag{2}$$

Συμπέρασμα 1: Αν θεωρήσουμε το αγώγιμο μέσο σαν ένα μέσο που περιγράφεται από τη μαγνητική διαπερατότητα μ και από τη μιγαδική διηλεκτρική σταθερά ε', τότε οι εξισώσεις που περιγράφουν τα δύο προβλήματα (εξισώσεις Maxwell, εξισώσεις Helmholtz, κλπ) έχουν την ίδια ακριβώς μαθηματική μορφή ***στο πεδίο της συχνότητας***.

Συμπέρασμα 2: Η λύση του παρόντος προβλήματος ***στο πεδίο της συχνότητας*** μπορεί να προκύψει από τη λύση που βρήκαμε στην ενότητα 5 για μέσο χωρίς αγωγιμότητα, αρκεί στην τελευταία να αντικαταστήσουμε τη διηλεκτρική σταθερά ε με ε' παντού. Αυτό σημαίνει ότι θα κάνουμε τις αντικαστάσεις που δείχνει ο παρακάτω Πίνακας 2:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Χώρος χωρίς αγωγιμότητα ($\gamma = 0$)	Χώρος με αγωγιμότητα ($\gamma \neq 0$)
$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} = \mathrm{Z}e^{j\theta}$
$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$ $jk = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$	$k^2 = \omega^2\varepsilon'\mu = \omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\gamma$ $jk = j\omega\sqrt{\varepsilon'\mu} = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu\gamma} = \alpha + j\beta$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$

Τελικά αποτελέσματα

$$\dot{E}_x^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}}\dot{H}_y^{(1)}(z) = -\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}}\frac{\mathrm{K}_0}{2}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \tag{3}$$

$$\dot{E}_x^{(2)}(z) = -\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}}\dot{H}_y^{(2)}(z) = -\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}}\frac{\mathrm{K}_0}{2}e^{\alpha z}e^{j\beta z} \tag{4}$$

Στο πεδίο του χρόνου οι σχέσεις αυτές γράφονται ως εξής:

$$E_x^{(1)}(z,t) = -Z\frac{K_0}{2}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \theta),\quad H_y^{(1)}(z,t) = -\frac{K_0}{2}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{5}$$

$$E_x^{(2)}(z,t) = -Z\frac{K_0}{2}e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \theta),\quad H_y^{(2)}(z,t) = \frac{K_0}{2}e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \tag{6}$$

Φυσική σημασία των αποτελεσμάτων

Ο όρος $e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \sigma\tau\alpha\theta)$ παριστάνει επίπεδο κύμα το οποίο διαδίδεται κατά την κατεύθυνση $\hat{z}$ με σταθερά διαδόσεως β. Το πλάτος του κύματος αυτού φθίνει εκθετικά με την απόσταση z από την πηγή. Η εξασθένηση του κύματος γίνεται με σταθερά αποσβέσεως ίση με α. Ομοίως, ο όρος $e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \sigma\tau\alpha\theta)$ παριστάνει κύμα το οποίο διαδίδεται κατά την κατεύθυνση $-\hat{z}$ με σταθερά διαδόσεως β. Το πλάτος του κύματος αυτού φθίνει εκθετικά, όσο μεγαλώνει η απόσταση $|z|$ από την πηγή, με σταθερά αποσβέσεως ίση με α. Επομένως το πεδίο που διεγείρεται στη διάταξη είναι επίπεδο κύμα οδεύον προς το άπειρο (απερχόμενο κύμα) με ταυτόχρονη εξασθένηση του πλάτους του (αποσβενύμενο επίπεδο κύμα).

Σύμφωνα με τα παραπάνω η σταθερά εξασθενήσεως α καθορίζει το πόσο γρήγορα φθίνει το πλάτος του πεδίου. Το αντίστροφο του μεγέθους αυτού,

$$\delta = \frac{1}{\alpha}, \tag{7}$$

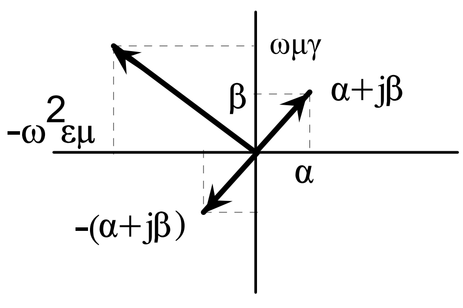
ονομάζεται ***βάθος διεισδύσεως*** ή ***επιδερμικό βάθος*** (*depth of penetration* ή *skin depth*) και μετράει την απόσταση που πρέπει να διατρέξει το κύμα (μετρούμενη με αρχή οποιοδήποτε σημείο του αγωγίμου μέσου) ώστε το πλάτος του να πέσει στο 1/e της τιμής που είχε στο σημείο εκκινήσεως. Με άλλα λόγια, όταν το κύμα διατρέχει απόσταση ίση με δ, τότε τό πλάτος του μειώνεται κατά 63% περίπου.

7.2 Εκφράσεις της σταθεράς διαδόσεως β και της σταθεράς αποσβέσεως α

Ο μιγαδικός αριθμός α+jβ ορίστηκε παραπάνω ως η ρίζα

$$\alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu\gamma} \qquad \textbf{με } \alpha>0,\ \beta>0. \tag{8}$$

Σημείωση: Ο μιγαδικός αριθμός $-\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu\gamma$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου (Σχ.2). Επομένως, η μία ρίζα του βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και η αντίθετή της στο τρίτο. Ο παραπάνω ορισμός του α+jβ, επομένως, αντιστοιχεί στην εκλογή της ρίζας που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.



Σχήμα 2

Οι εκφράσεις των α και β συναρτήσει των (ε,μ,γ) βρίσκονται με βάση την (8), από την οποία αμέσως συνάγεται ότι

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \varepsilon\mu, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(\omega^2\varepsilon\mu)^2 + (\omega\mu\gamma)^2}\ . \tag{9}$$

Από τις δυο αυτές σχέσεις προκύπτουν αμέσως οι ζητούμενες εκφράσεις

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{-1+\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}} \tag{10α}$$

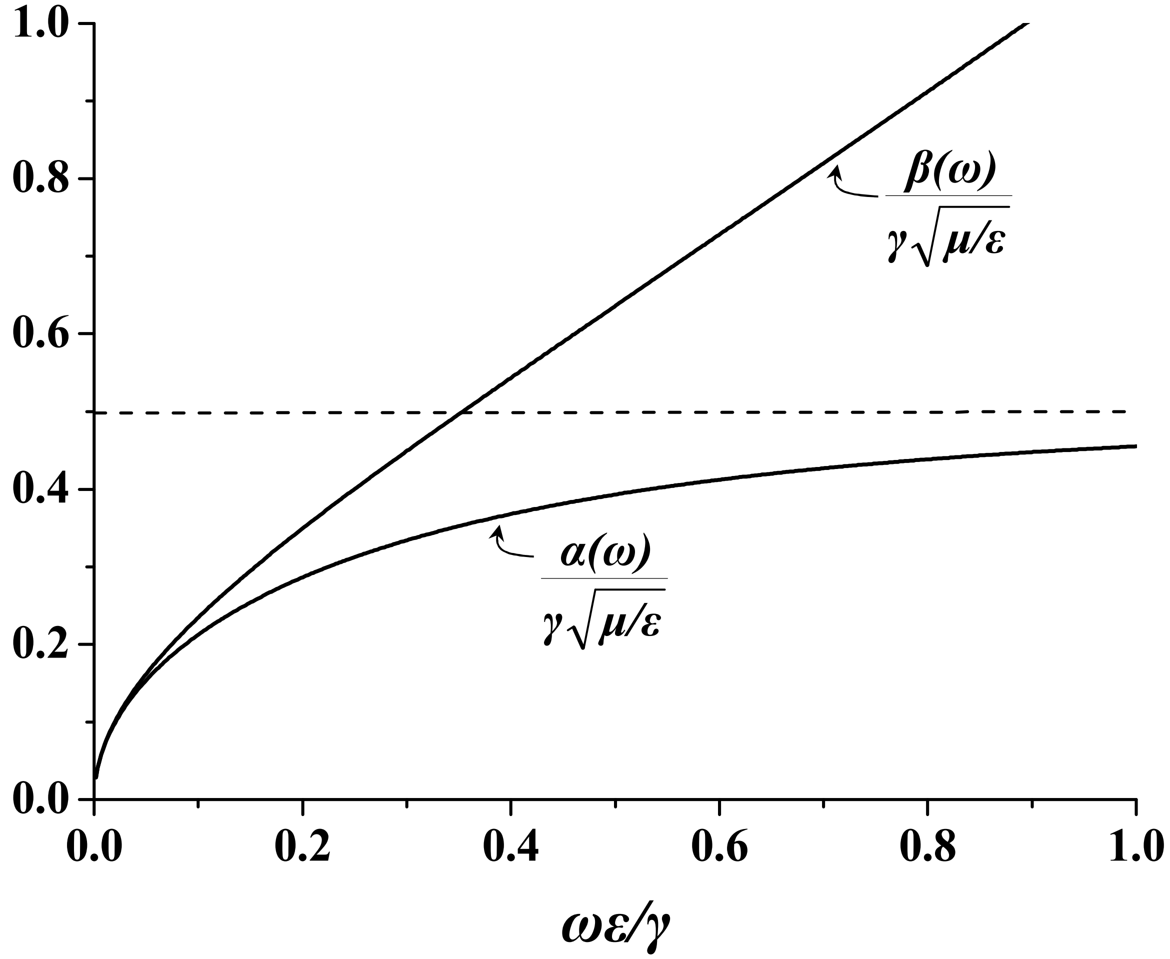
$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}\ . \tag{10β}$$

Η εξάρτηση των α και β από την συχνότητα είναι μη γραμμική και απεικονίζεται στο Σχ.3.

Σημείωση: Ως γνωστόν, $\dot{\bar{J}}_c = \gamma\dot{\bar{E}}$ είναι η πυκνότητα του ρεύματος αγωγιμότητας στον αγωγό και $\dot{\bar{J}}_D = j\omega\varepsilon\dot{\bar{E}}$ είναι η πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης. Συνεπώς, το πηλίκο $\gamma/(\omega\varepsilon) = |\dot{\bar{J}}_c| / |\dot{\bar{J}}_D|$ αποτελεί ένα μέτρο του σχετικού μεγέθους των δύο αυτών ρευμάτων. Συνήθως το πηλίκο αυτό τίθεται ίσο με

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \equiv \tan\delta_e \tag{11}$$

και για τούτο ονομάζεται *εφαπτομένη απωλειών* του αγωγού. Η γωνία $\delta_e = \tan^{-1}[\gamma/(\omega\varepsilon)]$ ονομάζεται *γωνία απωλειών*.



Σχήμα 3

Ειδικές περιπτώσεις

Υλικά μέσα των οποίων οι συντακτικές παράμετροι υπακούουν στη σχέση $(\gamma/\omega\varepsilon)^2 << 1$ χαρακτηρίζονται ως καλά διηλεκτρικά ή μονωτές. Αντίθετα, όταν ισχύει η σχέση $(\gamma/\omega\varepsilon)^2 >> 1$**,** τότε το υλικό χαρακτηρίζεται ως καλός αγωγός. Επομένως, η διάκριση σε καλούς και κακούς αγωγούς είναι σχετική, καθώς δεν εξαρτάται μόνο από την ηλεκτρομαγνητική υφή του αγωγού (παράμετροι ε,μ,γ) αλλά εν γένει και από τη συχνότητα λειτουργίας.

1. Καλά διηλεκτρικά (μονωτές): $(\gamma/\omega\varepsilon)^2 << 1$

Αναπτύσοντας την ποσότητα $\sqrt{1+(\gamma/\omega\varepsilon)^2}$ με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος

$\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2/2 - x^4/8 + \dots,$

η ακριβής έκφραση (10α) για την a παίρνει τη μορφή

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^4+\ldots\right)-1} \quad (12)$$

Στην προκειμένη περίπτωση, όπου $(\gamma/\omega\varepsilon)^2 << 1$, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι για καλά διηλεκτρικά ισχύει η προσεγγιστική έκφραση

$$\alpha \cong \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\frac{\gamma}{\sqrt{2}\omega\varepsilon} = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (13)$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε για τη σταθερά διαδόσεως β την προσεγγιστική έκφραση

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right] \quad (14\alpha)$$

$$\approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (14\beta)$$

Αντίστοιχα, οι εκφράσεις για την κυματική αντίσταση του μέσου και για το βάθος διεισδύσεως είναι

$$\zeta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1+\gamma/(j\omega\varepsilon)}} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (15)$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \cong \frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (16)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η έκφραση του δ είναι ανεξάρτητη από την κυκλική συχνότητα ω.

2. Καλοί αγωγοί: $(\gamma/\omega\varepsilon)^2 >> 1$

Στην περίπτωση αυτή, από τις (10) παίρνουμε τις προσεγγιστικές έκφρασεις

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \quad (17\alpha)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \alpha\,. \quad (17\beta)$$

Οι αντίστοιχες εκφράσεις για την κυματική αντίσταση του μέσου και για το βάθος διεισδύσεως είναι

$$\zeta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1+\gamma/(j\omega\varepsilon)}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}(1+j) \quad (18)$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \cong \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \overset{\omega=2\pi f}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\gamma}} \quad (19)$$

Παρατηρήσεις

1. Από τις (5), (6) και (17), (18) προκύπτει ότι στην περίπτωση ενός καλού αγωγού ισχύουν οι σχέσεις

$$E_x^{(1)}(z,t) = -\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\frac{K_0}{2}e^{-z\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}}\cos(\omega t - \beta z + \pi/4), H_y^{(1)}(z,t) = -\frac{K_0}{2}e^{-z\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}}\cos(\omega t - \beta z) \quad (20\alpha)$$

$$E_x^{(2)}(z,t) = -\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\frac{K_0}{2}e^{z\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}}\cos(\omega t + \beta z + \pi/4), \; H_y^{(2)}(z,t) = \frac{K_0}{2}e^{z\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}}\cos(\omega t + \beta z) \quad (20\beta)$$

Επομένως, λόγω της σχετικά μεγάλης τιμής της ειδικής αγωγιμότητας γ, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παίρνει εξαιρετικά μικρές τιμές, ακόμα και στη γειτονιά της επιφάνειας με $z = 0$.

2. Καθώς $\omega \to 0$, το βάθος διεισδύσεως δ για καλούς αγωγούς γίνεται άπειρο. Με βάση αυτή την παρατήρηση εξηγείται το γεγονός ότι σε ένα κυλινδρικό αγωγό, ο οποίος διαρρέεται από συνεχές ρεύμα, το ρεύμα αυτό (και το ηλεκτρικό πεδίο $\overline{E}$) κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλο των όγκο του αγωγού.

Το ίδιο ισχύει, κατά προσέγγιση, στην περίπτωση χρονικώς μεταβαλλομένων ρευμάτων χαμηλής συχνότητας (π.χ. 50Hz). Αντίθετα, σε υψηλές συχνότητες λειτουργίας το βάθος διεισδύσεως δ καλών αγωγών παίρνει πολύ μικρές τιμές, όπως δείχνει ο παρακάτω Πίνακας 3 που δίνει ενδεικτικές τιμές του δ για διάφορες περιπτώσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

Βάθος διεισδύσεως δ στη συχνότητα f				
Υλικό	f=60Hz	f=10kHz	f=1MHz	f=10GHz
Άργυρος	8.25mm	0.64mm	0.064mm	0.64μm
Αλουμίνιο	10.7mm	0.83mm	0.083mm	0.83μm
Θαλάσσιο νερό	32m	2.5m	0.25m	2.5mm

Για τον άργυρο, π.χ., με ειδική αγωγιμότητα $\gamma = 6.2 \times 10^7 [S/m]$, το βάθος διεισδύσεως στους 10GHz είναι

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{(2\pi\times 10^{10})(6.2\times 10^{7})(4\pi\times 10^{-7})}} = 0.64\mu\text{m},$$

δηλαδή πολύ μικρό. Επομένως, από φυσικής απόψεως, ένας συμπαγής κυλινδρικός αγωγός από άργυρο και ένας οποιοσδήποτε άλλος φτωχός αγωγός του οποίου η επιφάνεια έχει επαργυρωθεί, θα έχουν την ίδια συμπεριφορά όταν βρεθούν μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του οποίου η συχνότητα βρίσκεται στην μικροκυματική περιοχή. Η πρακτική σημασία του συμπεράσματος αυτού είναι προφανής, αφού η δεύτερη διάταξη (του επαργυρωμένου αγωγού) έχει ασύγκριτα χαμηλότερο κόστος.

Ο όρος ***επιδερμικό φαινόμενο*** χρησιμοποιείται ακριβώς για να αποδόσει το γεγονός ότι χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία και ρεύματα υψηλών συχνοτήτων σε έναν καλό αγωγό εντοπίζονται μόνο σε ένα λεπτό στρώμα στην επιφάνεια του αγωγού. Το πάχος του στρώματος αυτού είναι περίπου 0.64μm στην περίπτωση ενός αγωγού από άργυρο στους 10GHz, όπως είδαμε παραπάνω.

3. Στην περίπτωση του θαλάσσιου νερού, με $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}[\mathrm{H/m}]$ και $\gamma \cong 4[S/m]$, από τη σχέση $\omega = 2/(\gamma\mu\delta^2)$ προκύπτει ότι αν, π.χ., θέλουμε βάθος διεισδύσεως $\delta = 1\mathrm{m}$ πρέπει να διαλέξουμε πολύ χαμηλή συχνότητα, $f \approx 63\,\mathrm{kHz}$. Στην περίπτωση αυτή, σε βάθος 5δ=5m από την επιφάνεια της θαλάσσης έχουμε μόνο το 1% της αρχικής εντάσεως του πεδίου (και μόνο το 0.01% της προσπίπτουσας ισχύος). Τα αποτελέσματα αυτά εξηγούν γιατί οι υποβρύχιες επικοινωνίες γίνονται στην περιοχή των εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων (ELF).