Παρασκευή 27/5/22 19η Διάλεξη: Κολέτσος 10

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Γιατί Α.Ο?

1) Τύποι ολοκληρωμάτων σε κλειστή μορφή συχνά δεν είναι γνωστοί.

2) Πολλά ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται αναλυτικά, π.χ. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

3) ~~Ακόμα~~ Κάποια ολοκληρώματα ακόμα και αν υπολογίζονται αναλυτικά, οι τύποι είναι πολύπλοκοι, π.χ.

$$\int \frac{1}{5-x^3}dx = \frac{1}{\sqrt[3]{5}\cdot 6}\log\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}x+x^3}{(\sqrt[3]{5}-x)^2}$$

$$+\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}}\right)+C$$

Ακόμα και αν τα εφαρμόσω τα σφάλματα στρογγύλευσης μπορεί να είναι τόσα ώστε να μου βγει άχρηστο.

Έστω f μια συνάρτηση και p_n το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange της f σε $(n+1)$ σημεία, $\{x_i\}_{i=0}^n$ του $[a,b]$

$f(x)=p_n(x)+e_n(x)$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx + \int_a^b e_n(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n l_i(x)f(x_i)\right)dx + E_n(f)$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b l_i(x)dx\right)f(x_i) + E_n(f)$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n c_i f(x_i), \text{ όπου } c_i = \int_a^b l_i(x)dx$$

Προσοχή: συντελεστής ανεξάρτητος από την f

$$E_n(f) = \int_a^b \frac{f^{n+1}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}\,dx$$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω x_i ισαπέχοντα σημεία το $[a,b]$

I) Αν n = περιττός και $f \in C^{n+1}[a,b]$

τότε $\exists \mu \in [a,b]$:

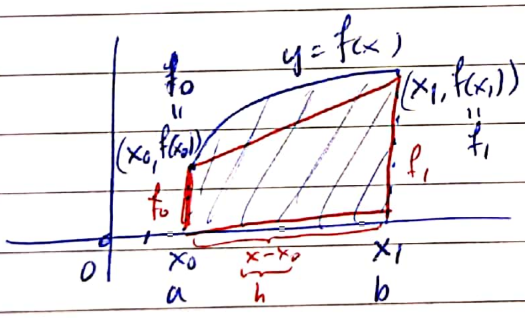
$$E_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx$$

II) Αν n = άρτιος και $f \in C^{n+2}[a,b]$ τότε $\exists \mu \in [a,b]$:

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\mu)}{(n+2)!} \int_a^b x \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx$$

<u>Βασικοί τύποι Α.Ο.:</u>

α) Τύπος τραπεζίου: $n=1$ $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1)$ $\boxed{-\frac{h^3}{12} f''(\mu)}$ σφάλμα



E τραπεζίου $= \frac{f_0+f_1}{2} \cdot h$

<u>Προσοχή</u>: $f_0 = f(x_0)$
$f_1 = f(x_1)$

β) Τύπος Simpson: $n=2$ $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)$

x_0 — h — x_1 — h — x_2
a b

$\boxed{-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)}$ σφάλμα

γ) Τύπος 3/8: $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$ $\boxed{-\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\mu)}$

a b
x_0 x_1 x_2 x_3

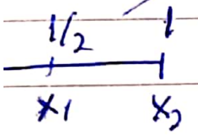
Για τις εξετάσεις να ξέρουμε απ' έξω τον τύπο τραπεζίου και το τύπο Simpson, χωρίς τους όρους σφάλματος

<u>Παράδειγμα</u>

$$I_T = \int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1) = \frac{1}{2}\left(e^{-x_0^2}+e^{-x_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-0^2}+e^{-1^2}\right) = 0{,}68394$$

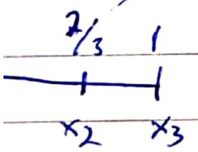
$$I_S = \int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2) = \frac{1/2}{3}\left(e^{-0^2}+4e^{-(1/2)^2}+e^{-1^2}\right)$$



$$= 0{,}74718$$

$$I_{3/8} = \int_0^1 e^{-x^2}dx \overset{n=3}{=} \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$$

$$= \frac{3\cdot(1/3)}{8}\left(e^{-0^2}+3e^{-1/9}+3e^{-4/9}+e^{-1}\right)$$



$$= 0{,}74699$$

Προσέγγιση με 5 σημαντικά ψηφία: $I = 0{,}74682$

Κατασκευή του τύπου τραπεζίου

$n=1 \quad h=\frac{b-a}{n}=b-a, \quad f_i = f(x_i), \quad a=x_0, \quad b=x_1$

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{1} l_i(x)f(x_i) = l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\underbrace{f(x_0)}_{=f_0} + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\underbrace{f(x_1)}_{=f_1}$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)\,dx$$

$$= \left(\int_{x_0}^{x_1} l_0(x)dx\right)f_0 + \left(\int_{x_0}^{x_1} l_1(x)dx\right)f_1 = c_0f_0+c_1f_1$$

$$c_0 = \int_{x_0}^{x_1} l_0(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx = \frac{1}{x_0-x_1}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_1)\,dx$$

$$= -\frac{1}{h}\left[\frac{(x-x_1)^2}{2}\right]_{x_0}^{x_1} = -\frac{1}{h}\left[0-\frac{(x_0-x_1)^2}{2}\right] = -\frac{1}{h}\left(-\frac{h^2}{2}\right) = \frac{h}{2}$$

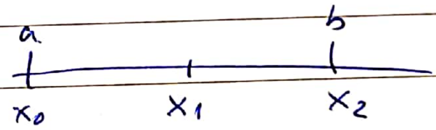
$$c_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,dx = \frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)\,dx = \frac{1}{h}\left[\frac{(x-x_0)^2}{2}\right]_{x_0}^{x_1} = \frac{1}{h}\frac{(x_1-x_0)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}$$

$$I_T = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \simeq c_0 f_0 + c_1 f_1 = \frac{h}{2} f_0 + \frac{h}{2} f_1$$

Κατασκευη του τυπου Α.Ο. Simpson

$n=2, \quad a = x_0, \quad b = x_2$



$$h = \frac{b-a}{(n=2)}$$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) f(x_i) = l_0(x)\underbrace{f(x_0)}_{=f_0} + l_1(x)\underbrace{f(x_1)}_{=f_1} + l_2(x)\underbrace{f(x_2)}_{=f_2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,dx = \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x_2} l_0(x)\,dx\right)}_{c_0} f_0 + \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x_2} l_1(x)\,dx\right)}_{c_1} f_1 + \left(\int_{x_0}^{x_2} l_2(x)\,dx\right) f_2$$

$$c_0 = \int_{x_0}^{x_2} l_0(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx \qquad (t = x - x_0)$$

$x - x_1 = t - h$

$x - x_2 = t - 2h$

$$= \int_0^{2h} \frac{(t-h)(t-2h)}{(-h)(-2h)}\,dt = \frac{1}{2h^2}\int_0^{2h}(t^2 - 3ht + 2h^2)\,dt = \frac{1}{2h^2}\left[\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2}h + 2h^2 t\right]_0^{2h}$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{8h^3}{3} - 3\frac{4h^2}{2}\cdot h + 2h^2\cdot 2h\right] = \frac{1}{2h^2}\cdot\frac{2h^3}{3} = \frac{h}{3}$$

$$c_1 = \int_{x_0}^{x_2} l_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,dx \quad \underline{\underline{\text{αλλαγή}}} \quad \text{μεταβλητής}$$

$$= \int_0^{2h} \frac{t(t-2h)}{h(-h)}\,dt = -\frac{1}{h^2}\int_0^{2h}(t^2-2th)\,dt = -\frac{1}{h^2}\left[\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2}h\right]_0^{2h}$$

$$= \frac{4h}{3}$$

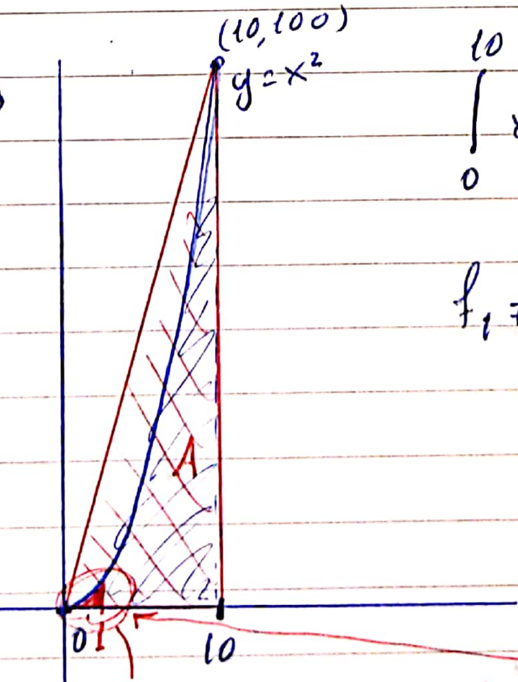
$$c_2 = \int_{x_0}^{x_2} l_2(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,dx \quad \underline{\underline{\text{αλλαγή}}} \quad \text{μεταβλητής}$$

$$= \int_0^{2h} \frac{t(t-h)}{2h\cdot h}\,dt = \frac{1}{2h^2}\int_0^{2h}(t^2-th)\,dt = \frac{h}{3}$$

$$I_S = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}f_0 + \frac{4h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_2 = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$\boxed{\text{S.O.S:} \quad f_i = f(x_i) \neq f(i)}$$

Παράδειγμα του λάθους $\Longrightarrow$



$$\int_0^{10} x^2\,dx = \frac{h}{2}(\underset{0^2}{\underset{\shortparallel}{f_0}} + \underset{1^2}{\underset{\nparallel}{f_1}})$$

$f_1 \neq f(1)$ προσοχή

$f_1 = f(x_1) = 100$

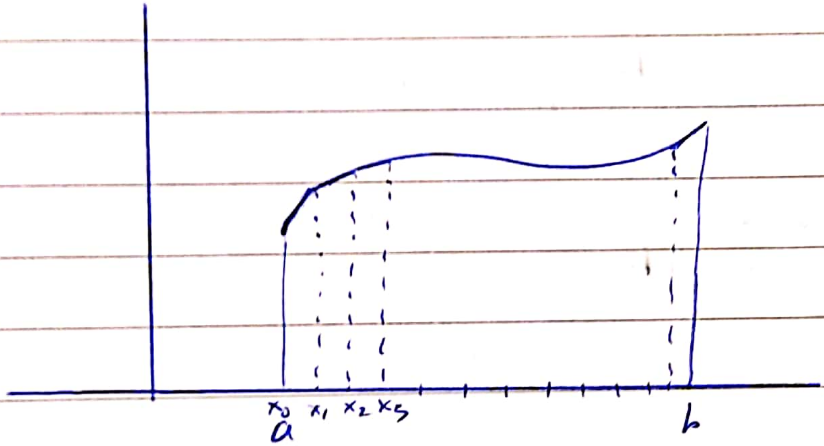
Το υπολογίζεις το A να είναι τόσο, πολύ μικρό

Γενικά

Έχω μεγάλο σφάλμα

Θέλω να αυξήσω τα σημεία για καλύτερη ακρίβεια χωρίς να αυξάνεται ο βαθμός του πολυωνύμου (και προκύψει το "καρδιογράφημα" που είχαμε δει)

I) Σύνθετος τύπος τραπεζίου



Έστω $f \in C^2[a,b]$, $\{x_i\}_{i=0}^{N}$, $N+1$ ισαπέχοντα σημεία

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) - \frac{h^3}{12} f''(\mu_i) \right)$$

$$I_{\Sigma.T.} = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \frac{h}{2}(f_2 + f_3) + \dots + \frac{h}{2}(f_{N-1} + f_N)$$

$$- \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{N} f''(\mu_i)$$

σφάλμα

$$= \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{N} f''(\mu_i)$$

$$|E_N(f)| = \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{N} f''(\mu_i) \le \frac{h^3}{12} \cdot N \max_{a \le x \le b} f''(x)$$

Άρα $|E_N(f)| \le \frac{h^3}{12}\frac{b-a}{h} M = \frac{h^2}{12}(b-a) M$

όπου $M = \max_{a \le x \le b} f''(x)$

Δυνατό Θέμα: Βάση του απλού τύπου:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\mu)$$

Να κατασκευαστεί ο σύνθετος τύπος (μπορεί να ~~έχει~~ ζητάει ή να μην ~~έχει~~ ζητάει το σφάλμα)