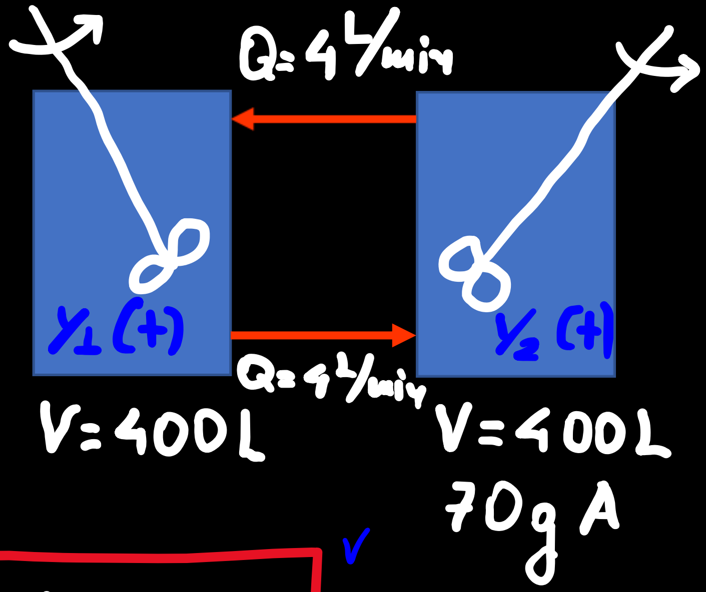
ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 31

Διάλεξη: 23 Δεκεμβρίου 2020

Προηγούμενο επεισόδιο: Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων



$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -0.01\, y_1(t) + 0.01\, y_2(t) \qquad y_1(0)=0$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = 0.01\, y_1(t) - 0.01\, y_2(t) \qquad y_2(0)=70$$

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{y}' = \underline{\underline{A}}\,\bar{y}}$$

Για $\underline{\underline{A}}$ 2x2

αν $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$

$$\boxed{\bar{y} = C_1 \bar{y}^{(1)} + C_2 \bar{y}^{(2)} = C_1 \bar{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t}}$$

όπου λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του $\underline{\underline{A}}$

και $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Αν $\underline{\underline{A}}$ nxn με $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n \in R$ ιδιοτιμές

$$\bar{y} = C_1 \bar{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \bar{x}^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

Παράδειγμα: Γενική λύση του $y_1' = \underset{a_{12}}{\bar{3}} y_2 + \underset{a_{11}}{\bar{2}} y_1$ ✓

$y_2' = \underset{a_{21}}{2} y_1 + \underset{a_{22}}{y_2}$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 4$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$

Ιδιοδιάνυσμα για $\lambda_1 = -1$: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = -x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_2 = -3x_1 \Rightarrow x_2 = -x_1$ $\quad \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ιδιοδιάνυσμα για $\lambda_2 = 4$: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 4x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_2 = 2x_1 \rightarrow$ Για $x_1 = 3$ $\quad \cancel{3}x_2 = 2\cancel{3}$ $\quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ή $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 2/3$ $\quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$)

$\bar{y} = C_1 \bar{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y_1(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{4t}}$ $\quad \boxed{y_2(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}}$

9.3 Λύση για διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$(\bar{y}' = \underline{\underline{A}}\,\bar{y})$

Τότε $\bar{y}^{(1)} = \bar{x} e^{\lambda t}$ $\qquad \bar{y}^{(2)} = ;$

μοναδικό ιδιοδιάνυσμα

ΙΔΕΑ: Πολλ/ζω επι t: $\bar{y}^{(2)} \cancel{= t}\,\bar{x} e^{\lambda t}$

$$(t\bar{x}e^{\lambda t})' = \underline{\underline{A}}\, t \bar{x} e^{\lambda t} \Rightarrow \bar{x}\left(\cancel{e^{\lambda t}} + t\lambda \cancel{e^{\lambda t}}\right) = \underline{\underline{A}}\,\bar{x}\, t \cancel{e^{\lambda t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} + t\lambda\bar{x} = \underline{\underline{A}}\bar{x}\, t \Rightarrow \bar{x} = \underline{\underline{A}}\,\bar{x}\, t - t\lambda\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = t\left[\cancel{\underline{\underline{A}}\bar{x} - \lambda\bar{x}}\right] \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ Συμπέρασμα → Δεν ισχύει → δεν βρήκα την 2η λύση.

αλλά είμαι κοντά.

2η ΙΔΕΑ: $\boxed{\bar{y}^{(2)} = t\bar{x}e^{\lambda t} + \bar{p}\, e^{\lambda t}}$ $\quad (\underline{\bar{p}}$ άγνωστο διάνυσμα)

1

$$\bar{y}^{(2)} = t\bar{x}e^{\lambda t} + \bar{p}e^{\lambda t} \quad (1)$$

Αντικατάσταση στην ΔΕ $\bar{y}' = \underline{\underline{A}}\,\bar{y}$

$$(t\bar{x}e^{\lambda t} + \bar{p}e^{\lambda t})' = \underline{\underline{A}}\,(t\bar{x}e^{\lambda t} + \bar{p}e^{\lambda t}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}(\cancel{e^{\lambda t}} + t\lambda \cancel{e^{\lambda t}}) + \lambda\bar{p}\cancel{e^{\lambda t}} = t\underline{\underline{A}}\,\bar{x}\cancel{e^{\lambda t}} + \underline{\underline{A}}\,\bar{p}\cancel{e^{\lambda t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} + \underbrace{t\lambda\bar{x}} + \lambda\bar{p} = \underbrace{t\underline{\underline{A}}\,\bar{x}} + \underline{\underline{A}}\,\bar{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} + \lambda\bar{p} = t\left[\underline{\underline{A}}\,\bar{x} - \lambda\bar{x}\right] + \underline{\underline{A}}\,\bar{p} \Rightarrow \bar{x} + \lambda\bar{p} = \underline{\underline{A}}\,\bar{p}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\bar{p} - \lambda\bar{p} = \bar{x} \Rightarrow \boxed{\left[\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right]\bar{p} = \bar{x}} \quad (2)$$

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αφαίρεση του λ από την διαγώνιο

άγνωστος

$$\underline{\underline{A}}\,\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

Προηγούμενο επεισόδιο: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ιδιοδιάνυσμα: $\bar{x}$

Πάλι: $\bar{y}^{(1)} = \bar{x} e^{\lambda t}$ ✓ αλλά $\bar{y}^{(2)} = \bar{x} t e^{\lambda t} + \bar{p} e^{\lambda t}$ ✓ $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\bar{p} = \bar{x}$ ✓

Γενική λύση: $\bar{y} = c_1 \bar{y}^{(1)} + c_2 \bar{y}^{(2)}$

Παράδειγμα: Γεν. λύση

$$y_1' = 3y_1 - 18y_2$$
$$y_2' = 2y_1 - 9y_2$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -27 - 3\lambda + 9\lambda + \lambda^2 + 36 = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

Ιδιοδιάνυσμα: $\underline{\underline{A}}\bar{x} = \lambda \bar{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow 3x_1 - 18x_2 = -3x_1$

$$\Rightarrow 6x_1 = 18x_2 \Rightarrow x_1 = 3x_2$$

Για $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 3$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

$\bar{y}^{(1)} = \bar{x} e^{\lambda t}$ αλλά $\bar{y}^{(2)} = \bar{x} t e^{\lambda t} + \bar{p} e^{\lambda t}$ $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\bar{p} = \bar{x}$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lambda = -3$ $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\bar{p} = \bar{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3+3 & -18 \\ 2 & -9+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6p_1 - 18p_2 = 3$ Διαλέγω $p_2 = \varnothing$ $\rightarrow p_1 = 0.5$ $\bar{p} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\cancel{2p_1 - 6p_2 = 1}$ (τα ίδια)

$\bar{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t}$

$\bar{y} = C_1 \bar{y}^{(1)} + C_2 \bar{y}^{(2)} = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t}$

$$\boxed{y_1(t) = 3C_1 e^{-3t} + 3C_2 t e^{-3t} + 0.5 C_2 e^{-3t} \qquad y_2(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}}$$

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 8
23 Δεκεμβρίου 2020

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(α) (9 μονάδες) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος:

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_2 \qquad \frac{dy_2}{dt} = -3y_2 - y_1$$

(β) (3 μονάδες) Βρείτε την ειδική λύση για: $y_1(0)=0$ $\qquad$ $y_2(0)= 1$.

(γ) (3 μονάδες) Τι θα συμβεί στα $y_1(t)$, $y_2(t)$ της ειδικής λύσης μετά από πολύ χρόνο;