ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επεισόδιο 28

Διάλεξη: 16 Δεκεμβρίου 2020

Προηγούμενα επεισόδια: Προβλήματα Sturm-Liouville

ΔΕ: $r(x)y'' + r'(x)y' + q(x)y + \lambda p(x)y = 0$ $\qquad a \leq x \leq b$

Συνθήκες: $k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0$

$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0$

Μη μηδενικές λύσεις μόνο για $\lambda = \underbrace{\lambda_n}_{\text{ιδιοτιμές}}$: $\underbrace{y_n(x)}_{\text{ιδιοσυναρτήσεις}}$

- Ορθογωνιότητα ιδιοσυναρτήσεων: $\int_a^b p(x)\, y_n(x)\, y_m(x) = 0 \quad n \neq m$ ✓

Σταθ. συντελεστές, Legendre, Bessel, $k\lambda\pi$ → S-L ΔEs ✓

Οι λύσεις τους (sin/cos ✓, $P_n(x)$, $J_n(x)$, $k\lambda\pi$) καλά συστήματα συντεταγμένων.

• <u>Παράδειγμα</u>: $y'' - k y = 0 \quad y(0)=0 \quad y(1)=0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{k}$

Για $k>0 \rightarrow$ ~~ευθετικά~~ Για $k=0 \rightarrow$ ~~ευθεία~~

Δεν μπορούν να περάσουν δύο φορές από το μηδέν.

Για $\underline{k=-q^2<0}$ έχουμε sin/cos. Τότε $\lambda = \pm\sqrt{-q^2} = \pm iq$

$$\left(\lambda = \phi + i\omega \rightarrow y(x) = A e^{\phi x}\cos(\omega x) + B e^{\phi x}\sin(\omega x)\right)$$

$$y(x) = A\cos(qx) + B\sin(qx)$$

$$y(0)=0 \Rightarrow A=0 \rightarrow y(x) = B\sin(qx)$$

$$y(1)=0 \Rightarrow B\sin(q)=0 \Rightarrow \cancel{B=0}$$

ή

$$\sin(q)=0 \rightarrow q = n\pi \quad n=\cancel{0},1,2,3\ldots$$

$$\boxed{k_n = -n^2\pi^2 \quad n=1,2,3,\ldots} \quad \text{πχ } \underline{-\pi^2}, \underline{-4\pi^2}, \ldots \quad y_n(x) = \underline{\sin(n\pi x)}$$

Η $y''-ky=0$ $\quad y(0)=0$ $\quad y(1)=0$

έχει μη μηδενικές λύσεις μόνο όταν

$$\int_a^b p(x)\, y_n(x)\, y_m(x)\, dx = 0$$

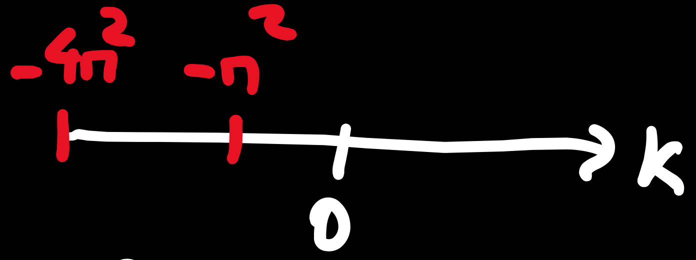
$a=0$ $\quad b=1$ $\quad p(x)=1$

$k_n=-n^2\pi^2$ $\quad n=1,2,3,\ldots$ **Ιδιοτιμές** $\quad k=-\pi^2,-4\pi^2,-9\pi^2,\ldots$

$y_n(x)=\sin(n\pi x)$ **Ιδιοσυναρτήσεις** $\quad \sin(\pi x), \sin(2\pi x), \sin(3\pi x)$ κλπ

Ερώτηση 1: $y''+\pi^2 y=0$ $\quad y(0)=0$ $\quad y(1)=0$

Λύση: $y(x)=\sin(\pi x)$



Ερώτηση 2: $y''+2y=0$ $\quad y(0)=0$ $\quad y(1)=0$

Λύση: Υπάρχει μόνο το $y(x)=0$ γιατί το $k=-2$ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος

Ορθογωνιότητα: $$\int_0^1 \sin(n\pi x)\,\sin(m\pi x)\,dx = 0 \quad \forall n \neq m$$

πχ $$\int_0^1 \sin(132\pi x)\,\sin(754\pi x)\,dx = 0$$

8.1 Μετατροπή ΔΕ σε μορφή S-L

Έστω $\boxed{a(x)y'' + b(x)y' + [c(x) + \underline{\underline{\lambda}} d(x)]y = 0}$

Γενικά $b(x) = a'(x)$. Σχεδόν πάντα μπορούμε να την μετατρέψουμε σε S-L. Πολ/σμός επι $\mu(x)$.

$$\underbrace{a(x)\mu(x)}\, y'' + \underbrace{b(x)\mu(x)}\, y' + [\mu(x)c(x) + \lambda\, \mu(x) d x]\, y = 0$$

Θέλω: $b(x)\mu(x) = [a(x)\mu(x)]'$ ΔΕ 1ης τάξης για το $\mu(x)$

Λύση: $\mu(x) = Q\, \frac{1}{a(x)} \exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right]$

Βάζουμε $Q = 1$

Μετατροπή $\alpha(x)y'' + b(x)y' + [c(x) + \lambda d(x)]y = 0$ **σε μορφή S-L**

Πολ/σμός με $\mu(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)} \exp\left[\int \dfrac{b(x)}{\alpha(x)} dx\right]$

✓

<u>Παράδειγμα</u>: Μετατροπή της ΔΕ του Hermite $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ σε μορφή S-L (Κβαντ. Πολυώνυμα του Hermite → Σειρές → $He_0, He_1, \dots$)

$\alpha(x) = 1 \quad b(x) = -2x \qquad \mu(x) = \frac{1}{1} \exp\left[\int (-2x)\,dx\right] = e^{-2\frac{x^2}{2}} = e^{-x^2}$

$$\boxed{e^{-x^2} y'' - 2x e^{-x^2} y' + e^{-x^2} \lambda y = 0}$$

Μορφή.

Ερώτηση: Γιατί; Ορθογωνιότητα $p(x) = e^{-x^2}$

8.2 Διαστήματα για την ορθογωνιότητα

Γενικά τα a, b στο $\int_a^b \dots dx$ της ορθογωνιότητας έρχονται απο τις συνθήκες

ΕΞΑΙΡΕΣΗ: Όταν το $r(x)$ μηδενίζεται δύο φορές δηλαδή $r(a^*) = 0$ και $r(b^*) = 0$ τότε δεν χρειάζονται οι συνθήκες και το διάστημα είναι πάντα $\int_{a^*}^{b^*} \dots dx$

Παράδειγμα 1: ΔΕ Legendre $\underline{(1-x^2)}y'' - 2xy' + \underline{\nu(\nu+1)}y = 0$

$r(x) = 1 - x^2$ Για $x = 1$ $r(1) = 0$ και το $r(-1) = 0$ άρα

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \quad n \neq m$$

Παράδειγμα 2 : Hermite σε S-L

$$e^{-x^2}y'' - 2x e^{-x^2}y' + \lambda \underline{e^{-x^2}} y = 0$$

$$r(x) = e^{-x^2} \quad \text{Για } x \to \pm\infty \quad r(x) \to 0$$

$$\int_{\underline{-\infty}}^{\underline{+\infty}} \underline{e^{-x^2}} He_n(x)\, He_m(x)\, dx = 0$$

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΤΕΣΤ 7
16 Δεκεμβρίου 2020

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(α) (10 μονάδες) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + ky = 0 \text{ για } 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L} \qquad \text{με } \mathrm{y}'(0)=0 \text{ και } y(\mathrm{L})=0.$$

(β) (5 μονάδες) Βρείτε την σχέση ορθογωνιότητας για τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος.