

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

### **ΕΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL**

#### **1. Σύνοψη των νόμων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου**

##### **1.1 Εξίσωση συνέχειας (αρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου)**

Πηγές του ΗΜ πεδίου είναι τα ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα, τα οποία περιγράφονται με τις μακροσκοπικές τους πυκνότητες  $\rho(\vec{r}, t)$  και  $\vec{J}(\vec{r}, t)$ . Τα μεγέθη αυτά, τα οποία ορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπόκεινται στην εξίσωση συνέχειας

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (I)$$

Η σχέση (I) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση της αρχής διατηρήσεως του φορτίου.

**Υπόθεση:** Στα επόμενα, τα μεγέθη  $\rho$  και  $\vec{J}$  θα θεωρούνται ως συναρτήσεις της θέσεως και του χρόνου, οι οποίες είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε ομαλά σημεία (δηλαδή σε σημεία στο εσωτερικό συνεχών μέσων, στη γειτονιά των οποίων οι φυσικές ιδιότητες του μέσου είναι συνεχείς).

##### **1.2 Εξίσωση του Lorentz για την ΗΜ δύναμη-Πεδιακά μεγέθη $\vec{E}$ και $\vec{B}$**

Αποτέλεσμα της υπάρξεως των πηγών είναι η διέγερση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (συνάρτηση της θέσεως και του χρόνου) τόσο στο εσωτερικό τους όσο και στον περιβάλλοντα χώρο. Η ύπαρξη του πεδίου αυτού αποκαλύπτεται μέσω των μηχανικών αποτελεσμάτων του επί δοκιμαστικών ή άλλων ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων. Πιο συγκεκριμένα, βρίσκεται πειραματικά ότι ηλεκτρικό φορτίο  $q$ , το οποίο εισάγεται με ταχύτητα  $\vec{v}$  στη θέση  $\vec{r}$  εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, υπόκειται σε ηλεκτρομαγνητική δύναμη ίση με

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{εξίσωση του Lorentz για την ΗΜ δύναμη}). \quad (II)$$

Η αξιωματική αυτή σχέση χρησιμεύει για τον τελεστικό ορισμό των πεδιακών μεγεθών  $\vec{E}$  (ένταση του ηλεκτρικού πεδίου) και  $\vec{B}$  (μαγνητική επαγωγή ή πυκνότητα μαγνητικής ροής) ως εξής:

α) Από την (II) προκύπτει αμέσως ότι

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Big|_{\vec{v}=0}. \quad (1)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1), για τον καθορισμό της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση  $\vec{r}$  εισάγεται στη θέση αυτή δοκιμαστικό φορτίο  $q$ , το οποίο στη συνέχεια κρατείται ακίνητο ( $\vec{v}=0$ ), και μετρείται η επ' αυτού ασκούμενη δύναμη  $\vec{F}$  κατά τη χρονική στιγμή  $t$ . Το πηλίκο  $\vec{F}/q$  προσδιορίζει την ένταση  $\vec{E}$  του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση  $\vec{r}$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Υποτίθεται ότι το δοκιμαστικό φορτίο είναι κατάλληλα μικρό ώστε η παρουσία του να μη διαταράσσει την κατανομή των πηγών  $\rho$  και  $\vec{J}$ .

β) Έχοντας ορίσει το μέγεθος  $\vec{E}$ , στη συνέχεια μετράμε τη δύναμη  $\vec{F}$  που ασκείται σε δοκιμαστικό φορτίο  $q$  κινούμενο με ταχύτητα  $\vec{v}$ . Η σχέση

$$q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{F} - q\vec{E} = \delta\vec{F} \quad (2)$$

$[\delta\vec{F}]$  γνωστό, επειδή η ένταση  $\vec{E}$  είναι ήδη γνωστή από το προηγούμενο πείραμα που οδήγησε στη σχέση (1)] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον τελεστικό ορισμό της μαγνητικής επαγωγής  $\vec{B}$ .

## Παρατηρήσεις

1. Για τον πλήρη προσδιορισμό του διανύσματος  $\vec{B}$  απαιτούνται δυο ανεξάρτητα πειράματα, κατά τα οποία δίδεται στο φορτίο  $q$  ταχύτητα  $\vec{v} = \hat{x}v_x$  και  $\vec{v} = \hat{y}v_y$  (ή  $\vec{v} = \hat{z}v_z$ ) αντίστοιχα. Από το προκύπτον γραμμικό αλγεβρικό σύστημα

$$qv_x(\hat{z}B_y - \hat{y}B_z) = \delta\vec{F}_1, \quad qv_y(\hat{x}B_z - \hat{z}B_x) = \delta\vec{F}_2, \quad (3)$$

προσδιορίζονται οι τιμές των τριών συνιστωσών  $B_x, B_y, B_z$  μέσω των ενδείξεων  $\delta\vec{F}_1, \delta\vec{F}_2$  που αντιστοιχούν στα δύο αυτά πειράματα. Υποτίθεται και πάλι ότι το μέγεθος και η ταχύτητα του φορτίου  $q$  είναι κατάλληλα μικρά ώστε να μη διαταράσσεται το υπό μέτρηση πεδίο.

2. Ο τρόπος μετρήσεως των πεδιακών μεγεθών  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$ , που υποδεικνύουν οι σχέσεις ορισμού (1) και (2), είναι πρακτικά χρήσιμος μόνο σε περιπτώσεις στατικών ή βραδέως μεταβαλλομένων πεδίων. Σε υψηλές συχνότητες λειτουργίας (ταχέως μεταβαλλόμενα πεδία), οπότε οι παραπάνω ορισμοί καθίστανται μη λειτουργικοί, η μέτρηση των πεδίων στηρίζεται σε άλλα μετρητικά σχήματα τα οποία χρησιμοποιούν μεθόδους και έννοιες της θεωρίας κυκλωμάτων.

### 1.3 Πεδιακά μεγέθη $\vec{D}$ και $\vec{H}$

Οι ποσότητες  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  θεωρούνται ως τα **θεμελιώδη** μεγέθη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου επειδή τα μεγέθη αυτά, μαζί με τις ποσότητες  $\rho$  και  $\vec{J}$ , επαρκούν για την περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο κενό.

Όταν οι πρωτογενείς πηγές δεν δρουν στον απεριόριστο κενό χώρο, αλλά βρίσκονται στη γειτονιά υλικών σωμάτων, η περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων περιπλέκεται. Οι δυνάμεις που δέχονται τώρα τα δοκιμαστικά φορτία, κατά τις μετρήσεις που περιγράψαμε παραπάνω, διαφέρουν εν γένει από αυτές στον κενό χώρο. Οι αλλαγές αυτές αποδίδονται σε πηγές που **επάγονται** στην επιφάνεια και στο εσωτερικό των υλικών σωμάτων και οι οποίες δρουν ως δευτερογενείς πηγές πεδίων. Φορείς των επαγομένων πηγών είναι τα θεμελιώδη συστατικά των ατόμων και των μορίων, τα οποία τίθενται σε κίνηση, αναδιατάσσονται, διαχωρίζονται, ή επαναπροσανατολίζονται και τελικώς οδηγούν σε μη μηδενικές μακροσκοπικές κατανομές ηλεκτρικών διπόλων και μαγνητικών διπόλων (στοιχειωδών ρευματοφόρων βρόχων) στο εσωτερικό των υλικών. Οι κατανομές αυτές περιγράφονται με την χωρική πυκνότητα ηλεκτρικής διπολικής ροπής (ή ηλεκτρική πόλωση)  $\vec{P}(x, y, z; t)$  και την χωρική πυκνότητα μαγνητικής διπολικής ροπής (ή μαγνητική πόλωση)  $\vec{M}(x, y, z; t)$ ,

$$\vec{P}(x, y, z; t) = \frac{\sum_{i=1}^{N(\delta v)} \vec{p}_i}{\delta v}, \quad \vec{M}(x, y, z; t) = \frac{\sum_{i=1}^{N(\delta v)} \vec{m}_i}{\delta v} \quad (4)$$

αντίστοιχα, όπου  $\vec{p}_i / \vec{m}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) είναι τα επαγόμενα στοιχειώδη ηλεκτρικά/μαγνητικά δίπολα τη χρονική στιγμή  $t$  στο εσωτερικό του στοιχειώδους όγκου  $\delta v$  με κεντροειδές το σημείο  $(x, y, z)$ . Αμφότερες οι κατανομές  $\vec{P}$  και  $\vec{M}$  θεωρείται ότι βρίσκονται στον κενό χώρο, επειδή μεταξύ των φορέων τους (ατόμων και μορίων) παρεμβάλλεται το κενό.

Το συνολικό πεδίο στη διάταξη προκύπτει από την υπέρθεση των πεδίων που διεγείρουν οι πρωτογενείς πηγές  $(\vec{J}, \rho)$ , αφενός, και οι δευτερογενείς πηγές  $\vec{P}$  και  $\vec{M}$  αφετέρου, όπως σημειώσαμε νωρίτερα: το σύνολο των πηγών, πρωτογενών και δευτερογενών, θεωρείται ότι δρα στον απεριόριστο κενό χώρο. Συνεπώς τα μεγέθη  $\vec{P}$  και  $\vec{M}$  από κοινού με τις πρωτογενείς πηγές  $(\vec{J}, \rho)$  επαρκούν για μια περιγραφή του πεδίου βασισμένη στα θεμελιώδη μεγέθη  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  και στις εξισώσεις Maxwell για το κενό.

Παρ' όλα αυτά, για την περιγραφή του πεδίου στο εσωτερικό ή στη γειτονιά υλικών μέσων είναι πλεονεκτική η χρήση δυο άλλων πεδιακών μεγεθών αντί των  $\vec{P}$  και  $\vec{M}$ : της πυκνότητας ηλεκτρικής

ροής (ή διηλεκτρικής μετατοπίσεως)  $\bar{D}$  και της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου  $\bar{H}$ , τα οποία ορίστηκαν στο κεφάλαιο 1 μέσω των σχέσεων

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}, \quad \bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad (5)$$

όπου  $\epsilon_0$  (επιτρεπτότητα του κενού) και  $\mu_0$  (μαγνητική διαπερατότητα του κενού) είναι δύο παγκόσμιες σταθερές. Με τη βοήθεια των μεγεθών αυτών οδηγούμαστε σε μια γενικευμένη διατύπωση των βασικών νόμων του ηλεκτρομαγνητισμού (εξισώσεις Maxwell), η οποία ισχύει υπό τελείως γενικές συνθήκες και ανεξαρτήτως της φύσεως του μέσου εντός του οποίου διεγείρεται το πεδίο και είναι απαλλαγμένη από την παρουσία των αγνώστων επαγομένων πηγών  $\bar{P}$  και  $\bar{M}$ . Η επίδραση των επαγομένων πηγών στη διαμόρφωση του πεδίου λαμβάνεται υπόψιν μέσω καταλλήλων **συντακτικών σχέσεων** μεταξύ των πεδιακών μεγεθών, οι οποίες στηρίζονται στις (5) και παρουσιάζονται στην ενότητα 6.

## 1.4 Εξισώσεις Maxwell

### A. Νόμος των Maxwell-Faraday

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν, η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος του κλειστού συνόρου C μιας ανοικτής επιφάνειας S (Σχ.1) ισούται με την ταχύτητα ελαττώσεως της μαγνητικής ροής η οποία διαπερνά την επιφάνεια αυτή.

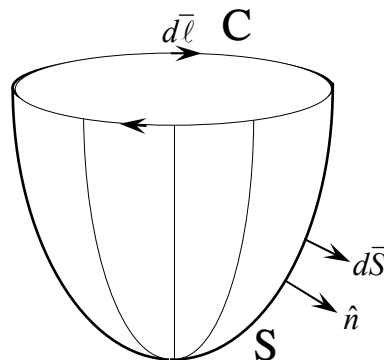
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος ενός τμηματικά λείου δρόμου C έχει οριστεί με τη σχέση

$$\mathcal{V}_e \equiv \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell}.$$

[Αν ο δρόμος C συντίθεται από τα μέρη AB, ΒΓ, ΓΔ, ..., η ηλεκτρεγερτική δύναμη  $\mathcal{V}_e$  κατά μήκος του ισούται με το άθροισμα  $\mathcal{V}_{AB} + \mathcal{V}_{BG} + \mathcal{V}_{GD} + \dots$  των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων στα τμήματα αυτά. Αν τα τμήματα είναι απειροστά, η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος ενός τυπικού στοιχείου είναι  $\bar{E} \cdot d\bar{\ell} = E_i d\ell$  ( $E_i$  είναι η εφαπτομενική συνιστώσα του  $\bar{E}$  στην καμπύλη C)]. Έτσι ο παραπάνω νόμος διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$\mathcal{V}_e = -\frac{d\psi_m}{dt} \Leftrightarrow \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} \quad (III)$$

**Παρατήρηση:** Ο δρόμος C μπορεί να είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία κλειστή καμπύλη, αυθαίρετα εκτεινόμενη στο χώρο, με φορά διαγραφής είτε τη θετική είτε την αρνητική, αυθαίρετα επιλεγόμενη. Ο προσανατολισμός της αντίστοιχης επιφάνειας S, η οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία ανοικτή επιφάνεια με σύνορο τον C, γίνεται έτσι ώστε, σε συνδυασμό με την επιλεγείσα φορά του δρόμου C, να οδηγεί στο θετικό προσανατολισμό του χώρου (κανόνας του δεξιόστροφου κοχλίου) σύμφωνα με το Σχ.1.



Σχήμα 1

## B. Νόμος των Maxwell-Ampere

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν, η μαγνητογενετική δύναμη κατά μήκος του κλειστού συνόρου C μιας ανοικτής επιφάνειας S ισούται με το άθροισμα του ρεύματος που διαπερνά την S και της ταχύτητας αυξήσεως της ηλεκτρικής ροής δια μέσου της επιφάνειας S.

Ο νόμος αυτός διατυπώνεται μαθηματικά με την εξίσωση

$$\mathcal{V}_m = I + \frac{d\psi_e}{dt} \Leftrightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (IV)$$

όπου, κατ' αναλογία προς τον ορισμό  $\mathcal{V}_e \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  της ηλεκτρογενετικής δυνάμεως, το μέγεθος

$$\mathcal{V}_m \equiv \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

ονομάζεται **μαγνητογενετική δύναμη** κατά μήκος του δρόμου C. Για την εκλογή και τον προσανατολισμό του δρόμου C και της επιφάνειας S ισχύει η προηγούμενη παρατήρηση.

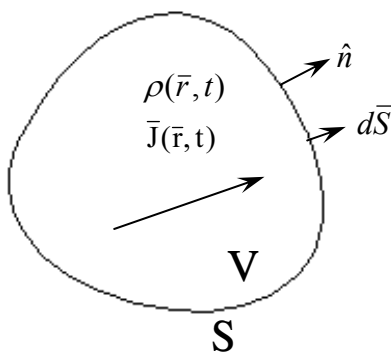
**Σημείωση:** Ο όρος  $(d/dt) \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$  στην (IV), ο οποίος προφανώς έχει διαστάσεις εντάσεως ρεύματος, ονομάζεται **ρεύμα μετατόπισης**.

## Γ. Νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν, η ηλεκτρική ροή, η οποία εξέρχεται από περιοχή του χώρου V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S δια μέσου της S, ισούται με το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που εμπερικλείεται στον όγκο αυτό, δηλαδή

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (V)$$

Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος, η κλειστή επιφάνεια S θεωρείται ότι είναι προσανατολισμένη κατά τη θετική της φορά (Σχ.2).



Σχήμα 2.

## Δ. Νόμος του Gauss για το μαγνητισμό

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν η μαγνητική ροή, η οποία εξέρχεται από περιοχή του χώρου V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια S (Σχ.2) δια μέσου της S, ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (VI)$$

**Παρατήρηση:** Όπως κάθε φυσικός νόμος, οι εξισώσεις Maxwell ισχύουν ανεξάρτητα από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων.

## 2. Αλληλεξάρτηση των εξισώσεων Maxwell

### A. Χρονοσταθερά πεδία

Σε χρονοσταθερές διατάξεις, όπου τόσο οι πηγές  $(\rho, \bar{J})$  όσο και οι αποκρίσεις  $(\bar{E}, \bar{D}; \bar{B}, \bar{H})$  είναι ανεξάρτητες του χρόνου, οι χρονικές παράγωγοι (όροι συζεύξεως) που εμπλέκονται στις εξισώσεις Maxwell μηδενίζονται. Οι προκύπτουσες εξισώσεις

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = 0 \quad (1\alpha)$$

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \quad (2\alpha)$$

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_V \rho dV \quad (1\beta)$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (2\beta)$$

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (2\gamma)$$

είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι εξισώσεις (1α) και (1β) περιγράφουν ηλεκτροστατικά προβλήματα με πηγές τις χρονοσταθερές κατανομές φορτίου  $\rho$ , ενώ οι εξισώσεις (2α)-(2γ) προσιδιάζουν σε μαγνητοστατικά προβλήματα με πηγές τις χρονοσταθερές, σωληνοειδείς ρευματικές κατανομές  $\bar{J}$ .

### B. Χρονομεταβλητά πεδία

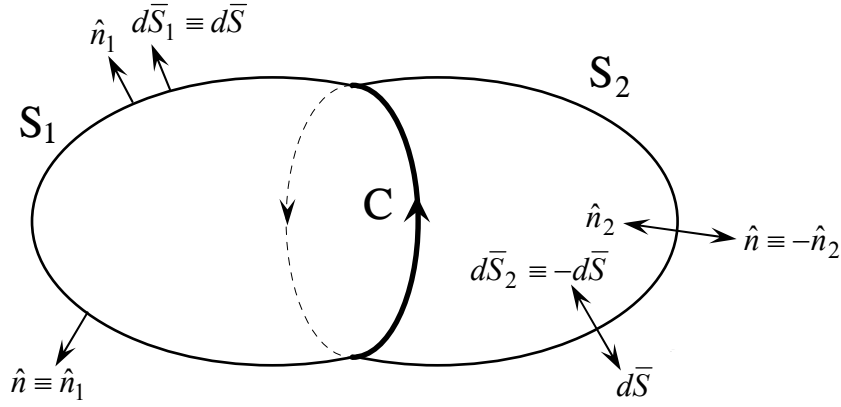
Σε προβλήματα, όπου οι πηγές (επομένως και οι αποκρίσεις) είναι συναρτήσεις και του χρόνου, οι πεδιακές εξισώσεις (I), (III)-(VI) -αν και είναι πάντοτε συμβιβαστές- δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, θα δείξουμε στη συνέχεια ότι οι δυο νόμοι του Gauss μπορούν να προκύψουν από τους νόμους Maxwell-Faraday και Maxwell-Ampere, αντίστοιχα, αν δεχθούμε την ισχύ της εξισώσεως συνεχειας.

#### Απόδειξη

A. Όπως τονίστηκε παραπάνω, η εκλογή του δρόμου C κατά την εφαρμογή των (III) και (IV) είναι αυθαίρετη, ενώ το ίδιο ισχύει και για την εκλογή των αντιστοίχων επιφανειών S. Αν δυο διαφορετικές επιφάνειες  $S_1$  και  $S_2$  έχουν ως σύνορο την ίδια κλειστή καμπύλη C ώστε να σχηματίζουν την κλειστή επιφάνεια  $S = S_1 + S_2$  (Σχ.1), τότε από την (III) προκύπτει ότι

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} &= -\frac{d}{dt} \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S}_1 \\ \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} &= -\frac{d}{dt} \int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{S}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S}_1 = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{S}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (3)$$

όπου στο τελευταίο βήμα θεωρήσαμε ότι η κλειστή επιφάνεια S είναι θετικά προσανατολισμένη (δηλαδή  $d\bar{S} = \hat{n}dS$ , με το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα  $\hat{n}$  να εξέρχεται από την επιφάνεια αυτή).



**Σχήμα 1:** Οι ανοικτές επιφάνειες  $S_1$  και  $S_2$ , με σύνορο τον προσανατολισμένο δρόμο  $C$ , είναι προσανατολισμένες με τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα  $\hat{n}_1$  και  $\hat{n}_2$ , αντίστοιχα (κανόνας δεξιοστροφικού κοχλίου). Η κλειστή επιφάνεια  $S = S_1 + S_2$  είναι προσανατολισμένη με το εξερχόμενο κάθετο διάνυσμα  $\hat{n}$  [ $\hat{n} \equiv \hat{n}_1|_{S_1}$ ,  $\hat{n} \equiv -\hat{n}_2|_{S_2}$ ].

Από την (3) συνάγεται ότι

$$\oint_S \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = c \quad (4)$$

όπου  $c$  είναι ανεξάρτητη του χρόνου σταθερά. Η τιμή της σταθεράς αυτής λαμβάνεται ίση με μηδέν, με βάση το συλλογισμό ότι το πεδίο δημιουργήθηκε από τις πηγές του τη χρονική στιγμή  $t_0$  και έκτοτε μεταβάλλεται συνεχώς. Επομένως,  $\bar{\mathbf{B}} = 0$  για  $t < t_0 \Rightarrow c = 0$ .

B. Με εντελώς ανάλογο τρόπο, από την (IV) παίρνουμε τη σχέση

$$\oint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \frac{d}{dt} \oint_S \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = 0, \quad (5)$$

η οποία μέσω της (I) οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{d}{dt} \left[ \oint_S \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} - \int_V \rho dV \right] = 0 \Rightarrow \oint_S \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} - \int_V \rho dV = d \quad (6)$$

( $V$  είναι ο όγκος που περικλείεται από την  $S$ ), όπου  $d$  είναι ανεξάρτητη του χρόνου σταθερά. Η τιμή της σταθεράς αυτής λαμβάνεται ίση με μηδέν, με βάση τον ίδιο συλλογισμό που οδήγησε στο μηδενισμό της σταθεράς  $c$  στην προηγούμενη περίπτωση.

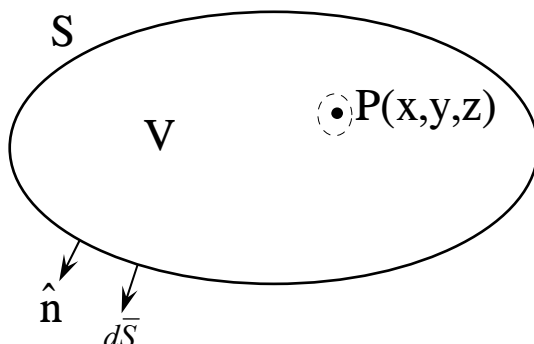
**Συμπέρασμα:** Για το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, οι νόμοι του Gauss για τον μαγνητισμό και τον ηλεκτρισμό δεν αποτελούν ανεξάρτητες εξισώσεις, αλλά επέχουν θέση αρχικών συνθηκών (ισοδυνάμων προς τις αρχικές συνθήκες  $\bar{\mathbf{B}} = 0$  για  $t < t_0$ ,  $\bar{\mathbf{D}} = 0$  για  $t < t_0$ ).

### 3. Διαφορική μορφή των εξισώσεων Maxwell

**Υπόθεση:** Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι τα πεδιακά μεγέθη  $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{B}}$  είναι συνεχείς συναρτήσεις της θέσεως και του χρόνου και έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους σε σημεία στο εσωτερικό συνεχών μέσων. Για τέτοια σημεία οι πεδιακές εξισώσεις (I), (III)-(VI) μπορούν να τεθούν ισοδύναμα υπό διαφορική μορφή ως εξής:

## A. Νόμοι του Gauss

Με αναφορά στο Σχ.1, θεωρούμε ότι ο όγκος  $V$  με σύνορο τη λεία (ή τμηματικά λεία) επιφάνεια  $S$  ανήκει στο εσωτερικό ενός συνεχούς μέσου.



Σχήμα 1

Από τον νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (1)$$

προκύπτει η σχέση

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \rho(\eta, \xi, \zeta; t)V, \quad (\eta, \xi, \zeta) \in V \quad (2)$$

με εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής για το χωρικό ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της (1).

Στο όριο όπου ο όγκος  $V$ , συστελλόμενος, συρρικνώνεται στο σημείο  $P(x,y,z)$  (Σχ.1), από την (2) παίρνουμε τη σχέση

$$\rho(x, y, z; t) = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{V} \quad (3)$$

όπου το σύμβολο  $\lim_{V \rightarrow P}$  υποδηλώνει το πέρασμα στο παραπάνω όριο.

Από το άλλο μέρος, από τη διανυσματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι η απόκλιση της διανυσματικής συναρτήσεως  $\vec{D}$  στο σημείο  $P(x,y,z)$  ορίζεται από τη σχέση

$$\nabla \cdot \vec{D} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{V}. \quad (4)$$

Ο ορισμός (4) είναι, προφανώς, ανεξάρτητος από το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων.

Συνδυάζοντας τις (3) και (4) παίρνουμε τη σχέση

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (5)$$

που αποτελεί την διατύπωση του νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό υπό διαφορική μορφή.

Εντελώς ανάλογα, από την εξίσωση (VI) προκύπτει η σχέση

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0, \quad (6)$$

που αποτελεί την υπό διαφορική μορφή διατύπωση του νόμου του Gauss για τον μαγνητισμό.

### Σημείωση

Υπό την παραπάνω προϋπόθεση συνεχείας των μεγεθών  $\bar{\mathbf{D}}$  και  $\bar{\mathbf{B}}$  και των παραγώγων τους, η εξαγωγή των (5) και (6) μπορεί, εναλλακτικά, να στηριχθεί στο γνωστό από τη διανυσματική ανάλυση θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό ισχύει η σχέση

$$\oint_S \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_V (\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}}) dV, \quad (7)$$

οπότε η (1) παίρνει τη μορφή

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} - \rho) dV = 0. \quad (8)$$

Επειδή η τελευταία σχέση πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε εκλογή του όγκου  $V$ , προκύπτει η σχέση (5),  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} - \rho = 0$ , λαμβάνοντας υπόψιν την συνέχεια της ολοκληρωτέας συναρτήσεως στο εσωτερικό του  $V$ .

Η απόδειξη της (6) είναι εντελώς ανάλογη.

### B. Εξίσωση συνεχείας

Με τον ίδιο τρόπο η εξίσωση συνεχείας τίθεται υπό την διαφορική μορφή

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

όπως ήδη αποδείξαμε στο κεφάλαιο 1 (ενότητα 3.4).

### Γ. Νόμοι των Maxwell-Faraday και Maxwell-Ampere

Με αναφορά σε χρονοσταθερή (ακίνητη) επιφάνεια  $S$  με σύνορο τον τμηματικά λείο βρόχο  $C$ , η οποία υποτίθεται ότι ανήκει στο εσωτερικό ενός συνεχούς μέσου, εφαρμόζοντας τον νόμο των Maxwell-Faraday παίρνουμε

$$\oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (10\alpha)$$

$$= -\int_S \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \quad (10\beta)$$

όπου  $d\bar{\mathbf{S}} = \hat{n} dS$ ,  $\hat{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα προσανατολισμού της  $S$  ( $\hat{n} \perp S$ ) και  $B_n = \hat{n} \cdot \bar{\mathbf{B}}$  είναι η κάθετη στην επιφάνεια  $S$  συνιστώσα του διανύσματος  $\bar{\mathbf{B}}$ . Η εναλλαγή των τελεστών  $d/dt$  και  $\int_S$  κατά το δεύτερο βήμα επιτρέπεται λόγω της υποθεθείσης χρονοσταθερότητας της  $S$ .

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής για το τελευταίο επιφανειακό ολοκλήρωμα στην (10β), παίρνουμε τη σχέση



$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{\partial B_n(\eta, \xi, \zeta; t)}{\partial t} S; \quad (\eta, \xi, \zeta) \in S. \quad (11)$$

Στο όριο όπου η επιφάνεια  $S$ , συστελλόμενη, συρρικνώνεται στο σημείο  $P(x, y, z)$ , από την (11) προκύπτει ότι

$$-\frac{\partial B_n(x, y, z; t)}{\partial t} = \lim_{S \rightarrow P} \frac{\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell}}{S}. \quad (12)$$

Εξ' άλλου, από τη διανυσματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι η περιστροφή της διανυσματικής συναρτήσεως  $\bar{E}$  στο σημείο  $P(x, y, z)$  (διανυσματικό μέγεθος συμβολιζόμενο με  $\nabla \times \bar{E}$ ) ορίζεται από τη σχέση

$$(\nabla \times \bar{E})_n = \lim_{S \rightarrow P} \frac{\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell}}{S} \quad (13)$$

όπου  $(\nabla \times \bar{E})_n = \hat{n} \cdot (\nabla \times \bar{E})$  είναι η συνιστώσα του διανύσματος της περιστροφής κατά την κατεύθυνση  $\hat{n}$ . Ο ορισμός (13) είναι, προφανώς, ανεξάρτητος από το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων.

Συνδυάζοντας τις (12) και (13) παίρνουμε τη σχέση

$$(\nabla \times \bar{E})_n = -\frac{\partial B_n}{\partial t} \Leftrightarrow \hat{n} \cdot (\nabla \times \bar{E}) = -\hat{n} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \hat{n} \cdot (\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}) = 0. \quad (14)$$

Επειδή η θέση της επιφάνειας  $S$  στο χώρο (άρα και η κατεύθυνση  $\hat{n}$ ) μπορεί να είναι αυθαίρετη, από την (14) προκύπτει η σχέση

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \quad (15)$$

Η εξίσωση (15) αποτελεί την υπό διαφορική μορφή διατύπωση του νόμου των Maxwell-Faraday.

Με τον ίδιο τρόπο, από τον νόμο των Maxwell-Ampere

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} + \frac{d}{dt} \int_S \bar{D} \cdot d\bar{S} \quad (16\alpha)$$

$$= \int_S \left( \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{S} = \int_S \left( J_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS \quad (16\beta)$$

παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση, ανάλογη της (11)

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \left( J_n(\eta, \xi, \zeta; t) + \frac{\partial D_n(\eta, \xi, \zeta; t)}{\partial t} \right) S; \quad (\eta, \xi, \zeta) \in S. \quad (17)$$

Από την (17), περνώντας στο όριο όπου  $S \rightarrow P(x, y, z)$ , προκύπτει-κατ' αναλογία προς την (15)- η εξίσωση

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (18)$$

που αποτελεί τη διατύπωση του νόμου των Maxwell-Ampere υπό διαφορική μορφή.

Ο όρος  $\partial \bar{D} / \partial t$  στην (18), ο οποίος προφανώς έχει διαστάσεις πυκνότητας ρεύματος, ονομάζεται *πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης*

### Σημείωση

Εναλλακτικά, υπό τις τεθείσες στην αρχή της παρούσας ενότητας συνθήκες συνεχείας των πεδιακών μεγεθών και των παραγώγων τους σε ομαλά σημεία, η εξαγωγή των (15) και (18) μπορεί να γίνει με βάση το γνωστό από τη διανυσματική ανάλυση θεώρημα του Stokes. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, ισχύει η σχέση

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = \int_S (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{S}, \quad (19)$$

οπότε η (10) γίνεται

$$\int_S (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} \Rightarrow \int_S (\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}) \cdot d\bar{S} = 0 \quad . \quad (20)$$

Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε δυνατή επιλογή της  $S$ , έπεται ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι μηδέν, οδηγώντας αμέσως στην (15). Η εξαγωγή της (18) γίνεται με τον ίδιο τρόπο.

## 4. Αλληλεξάρτηση των εξισώσεων Maxwell

Τα συμπεράσματα για την αλληλεξάρτηση των πεδιακών εξισώσεων, στα οποία καταλήξαμε με βάση την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων αυτών, προκύπτουν ευκολότερα με χρήση της διαφορικής τους μορφής [λαμβάνομένων υπόψιν των περιορισμών (συνέχεια και παραγωγισιμότητα των πεδίων) στους οποίους υπόκεινται οι διαφορικές αυτές εξισώσεις] ως εξής:

### A. Χρονοσταθερά πεδία

Σε χρονοσταθερές διατάξεις, όπου τόσο οι πηγές  $(\rho, \bar{J})$  όσο και οι αποκρίσεις  $(\bar{E}, \bar{D}; \bar{B}, \bar{H})$  είναι ανεξάρτητες του χρόνου, οι χρονικές παράγωγοι (όροι συζεύξεως) στις εξισώσεις (3.9), (3.15) και (3.18) μηδενίζονται. Οι προκύπτουσες εξισώσεις

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (1\alpha) \qquad \qquad \qquad \nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (2\alpha)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (1\beta) \qquad \qquad \qquad \nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2\beta)$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0 \quad (2\gamma)$$

είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι εξισώσεις (1α) και (1β) περιγράφουν ηλεκτροστατικά προβλήματα (με πηγές τις χρονοσταθερές κατανομές φορτίου  $\rho$ ) ενώ οι εξισώσεις (2α)-(2β) προσιδιάζουν σε μαγνητοστατικά προβλήματα (με πηγές τις χρονοσταθερές, σωληνοειδείς ρευματικές κατανομές  $\bar{J}$ ).

### B. Χρονομεταβλητά πεδία

Σε προβλήματα όπου οι πηγές (άρα και οι αποκρίσεις) είναι συναρτήσεις του χρόνου, οι εξισώσεις (3.5), (3.6), (3.9), (3.15) και (3.18) - αν και είναι πάντοτε συμβιβάστες - δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, οι δυο νόμοι του Gauss [Εξ.(3.5)-(3.6)] μπορούν να προκύψουν από τους νόμους Maxwell-Faraday [Εξ.(3.15)] και Maxwell-Ampere [Εξ.(3.18)], αντίστοιχα, αν δεχθούμε την ισχύ της εξισώσεως συνεχείας [Εξ.(3.9)], ως εξής:

1. Από την εξίσωση (3.15), παίρνοντας την απόκλιση των δυο μελών της, προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{E}) = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{B}) \quad (3)$$

(η εναλλαγή των τελεστών  $\partial/\partial t$  και  $\nabla \cdot$  επιτρέπεται λόγω της υποθεθείσης συνεχείας του  $\bar{B}$  και των παραγώγων του σε ομαλά σημεία).

Όμως, σύμφωνα με γνωστή διανυσματική ταυτότητα, ισχύει η σχέση

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{E}) = 0 \quad (4)$$

και επομένως από την (3) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{B} = c(x, y, z) \quad (5)$$

όπου  $c$  είναι συνάρτηση ανεξάρτητη του χρόνου. Όπως είναι φυσικό, θα υποθέσουμε ότι το πεδίο δημιουργήθηκε από τις πηγές του τη χρονική στιγμή  $t_0$  και έκτοτε μεταβάλλεται συνεχώς. Επομένως, με  $\bar{B} = 0$  για  $t < t_0$ , έπεται ότι  $c=0$ , οπότε προκύπτει ο νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο,

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0.$$

2. Ομοίως, από την εξίσωση (3.18) προκύπτει διαδοχικά ότι

$$0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho - \nabla \cdot \bar{D}) \quad (6)$$

όπου στο προτελευταίο βήμα στην (6) χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση συνεχείας  $\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Επομένως

$$\nabla \cdot \bar{D} - \rho = d(x, y, z) \quad (7)$$

όπου η  $d$  μπορεί να είναι συνάρτηση της θέσεως, όχι όμως και του χρόνου. Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο δημιουργήθηκε από τις πηγές του τη χρονική στιγμή  $t_0$  και έκτοτε μεταβάλλεται συνεχώς, τότε, με  $\{\rho=0, \bar{D}=0\}$  για  $t < t_0$ , έπεται ότι  $d=0$ , οπότε προκύπτει ο νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο,

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho.$$

Συμπεραίνουμε και πάλι ότι στο χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο οι νόμοι του Gauss για τον μαγνητισμό και τον ηλεκτρισμό δεν αποτελούν ανεξάρτητες εξισώσεις, αλλά επέχουν θέση αρχικών συνθηκών.

### Παρατήρηση

Αποδείξαμε παραπάνω ότι στην περίπτωση χρονομεταβλητών πεδίων ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό προκύπτει ως συνέπεια του νόμου Maxwell-Ampere, υπό την προϋπόθεση της ισχύος της αρχής διατηρήσεως του φορτίου (εξισώσεως συνεχείας). Θα δείξουμε τώρα ότι, αν ως ανεξάρτητες εξισώσεις ληφθούν ο νόμος Maxwell-Ampere και ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό, τότε η εξίσωση συνεχείας προκύπτει ως άμεση συνέπεια. Πράγματι, από την (3.18) παίρνουμε διαδοχικά, όπως στην περίπτωση της (6), τις σχέσεις

$$0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) \quad (8a)$$

με κατάληξη την εξίσωση συνεχείας

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (8\beta)$$

Κατά τη μετάβαση από την (8α) στην (8β) χρησιμοποιήσαμε τον νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο,  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \rho$ .

### 5. Σχόλια πάνω στις εξισώσεις Maxwell

1. Επειδή οι ορισμοί

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\oint \bar{\mathbf{A}} \cdot d\bar{\mathbf{S}}}{V}, \quad (\nabla \times \bar{\mathbf{A}})_n = \lim_{S \rightarrow P} \frac{\oint \bar{\mathbf{A}} \cdot d\bar{\boldsymbol{\ell}}}{S} \quad (1)$$

της αποκλίσεως και της περιστροφής μιας διανυσματικής συναρτήσεως  $\bar{\mathbf{A}}$  είναι ανεξάρτητοι από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων, έπεται ότι και οι εξισώσεις Maxwell είναι ανεξάρτητες του εκάστοτε χρησιμοποιούμενου συστήματος.

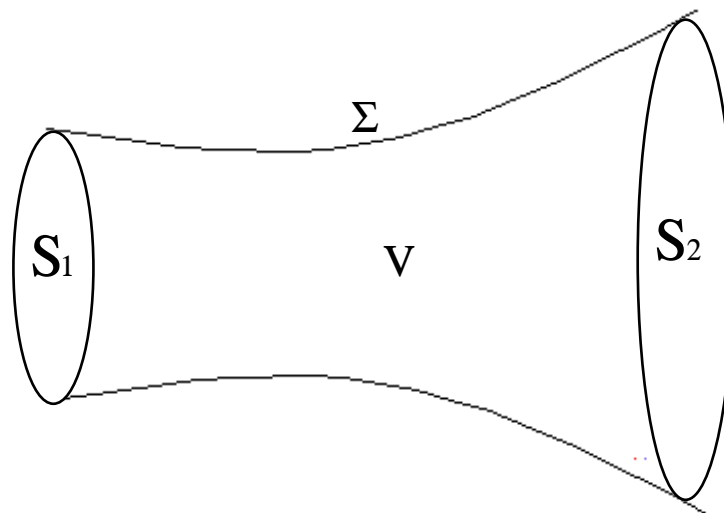
2. Η γραμμικότητα των εξισώσεων Maxwell προκύπτει από τη γραμμικότητα των τελεστών ( $\nabla \cdot$  και  $\nabla \times$ ) που εμπλέκονται σε αυτές.

3. Το πεδίο  $\bar{\mathbf{B}}$ , όπως κάθε πεδίο μηδενικής αποκλίσεως, χαρακτηρίζεται ως **σωληνοειδές πεδίο**. Ο χαρακτηρισμός αυτός δικαιολογείται ως εξής:

Ορίζουμε ως πεδιακές γραμμές του διανυσματικού πεδίου  $\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{r}}, t)$  τις γραμμές που η εφαπτομένη σε κάθε σημείο τους  $\bar{\mathbf{r}}$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{r}}, t)$ . Εντελώς ανάλογα, θα ονομάζουμε πεδιακή επιφάνεια του πεδίου  $\bar{\mathbf{B}}$  κάθε επιφάνεια που αποτελείται από πεδιακές γραμμές (ακριβέστερα, κάθε επιφάνεια με την ιδιότητα: σε κάθε σημείο της  $\bar{\mathbf{r}}$ , το αντίστοιχο διάνυσμα του πεδίου  $\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{r}}, t)$  κείται επί του επιπέδου που είναι εφαπτομενικό της επιφανείας στο σημείο αυτό).

Αν εντός του πεδίου θεωρήσουμε μια γραμμή, η οποία δεν είναι πεδιακή, και από κάθε σημείο της φέρουμε την αντίστοιχη πεδιακή γραμμή, τότε έχουμε μια πεδιακή επιφάνεια. Ειδικώς, αν η γραμμή αυτή είναι κλειστή, λέμε ότι έχουμε έναν πεδιακό σωλήνα.

Θεωρούμε τώρα τον όγκο  $V$  που περικλείεται από έναν πεδιακό σωλήνα  $\Sigma$  και από δυο διατομές  $S_1$  και  $S_2$  του σωλήνα αυτού (Σχ.1).



Σχήμα 1

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss για το μαγνητικό πεδίο, έχουμε:

$$0 = \oint_{(\Sigma+S_1+S_2)^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

[ως θετική φορά προσανατολισμού για όλες της επιφάνειες  $(\Sigma, S_1, S_2)$  στην (2) λαμβάνεται αυτή για την οποία το αντίστοιχο κάθετο διάνυσμα εξέρχεται από τον όγκο V]. Όμως

$$\int_{\Sigma^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3)$$

λόγω της καθετότητας των  $\vec{B}$  και  $d\vec{S}$  στα σημεία της πεδιακής επιφάνειας  $\Sigma$ . Άρα

$$\int_{S_1^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow - \int_{S_1^-} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{S_1^-} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (4)$$

δηλαδή η εξερχόμενη από την  $S_2$  ροή ισούται με την εισερχόμενη στην  $S_1$ .

Επειδή ο ρόλος που παίζει το παραπάνω σχήμα είναι ρόλος σωλήνα, το πεδίο  $\vec{B}$  λέγεται σωληνοειδές πεδίο.

4. Στην περίπτωση του πεδίου  $\vec{D}$ , με εφαρμογή του νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό παίρνουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$Q = \oint_{(\Sigma+S_1+S_2)^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1^-} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2^+} \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (5)$$

όπου Q είναι το συνολικό φορτίο εντός του όγκου V.

Αν υποθέσουμε ότι  $Q > 0$ , τότε από την (5) προκύπτει ότι

$$\int_{S_1^-} \vec{D} \cdot d\vec{S} < \int_{S_2^+} \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (6)$$

Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση αυτή ( $Q > 0$ ), η εισερχόμενη ροή υπολείπεται της εξερχόμενης κατά το μέγεθος Q, δηλαδή το θετικό φορτίο Q συμπεριφέρεται σαν πηγή ηλεκτρικής ροής.

Αντιστρόφως, αν  $Q < 0$ , τότε

$$\int_{S_1^-} \vec{D} \cdot d\vec{S} > \int_{S_2^+} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (7)$$

δηλαδή η εξερχόμενη ροή είναι μικρότερη της εισερχόμενης κατά το μέγεθος Q. Επομένως, αρνητικό φορτίο Q συμπεριφέρεται σαν καταβόθρα ηλεκτρικής ροής.

Δυο ισοδύναμες διατυπώσεις των παραπάνω είναι οι εξής:

α. Τα θετικά και τα αρνητικά φορτία είναι θέσεις στις οποίες πηγάζει ή, αντίστοιχα, τερματίζεται η ηλεκτρική ροή.

β. Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου έχουν την αρχή τους σε θέσεις θετικών φορτίων και καταλήγουν σε θέσεις που κατέχονται από αρνητικά φορτία.

Ερμηνεύοντας κατ' αναλογία την εξίσωση (4), καταλήγουμε στην παρακάτω ισοδύναμη διατύπωση της εξίσωσης αυτής: Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου δεν έχουν ούτε αρχή ούτε τέλος, δηλαδή είναι κλειστές (γεγονός που, όπως αντιλαμβανόμαστε, οφείλεται στο ότι το δεύτερο μέλος του νόμου του Gauss για τον μαγνητισμό είναι μηδενικό, με άλλα λόγια στο ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα μαγνητικά φορτία στη φύση).

## 6. Συντακτικές σχέσεις

Η αναγκαιότητα εισαγωγής των συντακτικών σχέσεων στο ηλεκτρομαγνητικό πρότυπο δικαιολογείται ως εξής: Αν υποθέσουμε ότι οι πηγές  $\rho$  και  $\vec{J}$  είναι δεδομένες [οι συναρτήσεις  $\rho$  και  $\vec{J}$  πρέπει φυσικά να ικανοποιούν την εξίσωση συνεχείας (3.9)], τότε οι εξισώσεις Maxwell (3.5), (3.6), (3.15) και (3.18) ισοδυναμούν με οκτώ βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους ως προς αγνώστους τις δώδεκα συνιστώσες των πεδιακών μεγεθών  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ . Όμως, όπως δείξαμε παραπάνω, από τις οκτώ αυτές βαθμωτές εξισώσεις γραμμικά ανεξάρτητες είναι μόνο έξι, αφού οι νόμοι του Gauss είναι παραγόμενες εξισώσεις. Επομένως χρειαζόμαστε έξι επί πλέον βαθμωτές εξισώσεις. Τις εξισώσεις αυτές μας δίνουν οι συντακτικές σχέσεις.

Οι συντακτικές σχέσεις είναι σχέσεις της μορφής  $\vec{D} = f(\vec{E}), \vec{H} = g(\vec{B})$  ή, γενικότερα,  $\vec{D} = f(\vec{E}, \vec{B}), \vec{H} = g(\vec{E}, \vec{B})$ , στις οποίες εκτός των πεδιακών μεγεθών είναι δυνατόν να εμπλέκονται οι χωρικές μεταβλητές, ο χρόνος, καθώς και διάφορες φυσικές παράμετροι (όπως θερμοδυναμικές σταθερές κ.λ.π.).

Παρακάτω περιγράφουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις αμέσου πρακτικού ενδιαφέροντος, στις οποίες οι συντακτικές σχέσεις λαμβάνουν σχετικά απλή μορφή.

### A. Κενός χώρος.

Οι συντακτικές σχέσεις για τον κενό χώρο έχουν τη μορφή

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1)$$

όπου  $\epsilon_0$  (επιτρεπτότητα του κενού) και  $\mu_0$  (μαγνητική διαπερατότητα του κενού) είναι βαθμωτές σταθερές με την ιδιότητα

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1 / c_0^2 \quad (2)$$

( $c_0$  είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό). Οι τιμές και διαστάσεις των δυο αυτών σταθερών εξαρτώνται από το χρησιμοποιούμενο σύστημα μονάδων. Με αναφορά στο κανονικοποιημένο διεθνές σύστημα μονάδων (SI), η ακριβής τιμή της σταθεράς  $\mu_0$  είναι

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]} \quad (3)$$

οπότε

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \cong \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ [F/m]}. \quad (4)$$

### B. Ισοτροπικά μέσα

Ισοτροπικά ονομάζονται τα υλικά των οποίων οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες σε οποιοδήποτε εσωτερικό τους σημείο είναι οι ίδιες ως προς κάθε κατεύθυνση. Στα ισοτροπικά υλικά, το διάνυσμα  $\vec{P}$  της ηλεκτρικής πολώσεως (δηλαδή το αποτέλεσμα της παρουσίας του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του υλικού) είναι ανάλογο προς το αίτιο που το προκάλεσε, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (5)$$

όπου  $\chi_e$  αδιάστατος συντελεστής που ονομάζεται ηλεκτρική δεκτικότητα του υλικού. Ομοίως, για το διάνυσμα  $\vec{M}$  της μαγνητικής πολώσεως (αποτέλεσμα της παρουσίας του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του υλικού) ισχύει η σχέση

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6)$$

όπου  $\chi_m$  αδιάστατος συντελεστής που ονομάζεται μαγνητική δεκτικότητα του υλικού. Με αντικατάσταση των (5) και (6) στις (1.5) (σχέσεις ορισμού των  $\bar{D}$  και  $\bar{H}$ ) προκύπτει ότι για τα υλικά αυτά ισχύουν οι σχέσεις

$$\bar{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \bar{E}(\vec{r}, t) \quad (7\alpha)$$

$$\bar{B}(\vec{r}, t) = \mu \bar{H}(\vec{r}, t) \quad (7\beta)$$

όπου  $\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e)$  και  $\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$  είναι βαθμωτά μεγέθη ονομαζόμενα, αντίστοιχα, *επιτρεπτότητα* (ή *διηλεκτρική σταθερά*) και *μαγνητική διαπερατότητα* του μέσου. Τα μεγέθη  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  και  $\mu_r = 1 + \chi_m$  ονομάζονται *σχετική διηλεκτρική σταθερά* και, αντίστοιχα, *σχετική μαγνητική διαπερατότητα* του μέσου.

Διαπιστώνεται πειραματικά ότι οι σχέσεις (7) ισχύουν στις περιπτώσεις πλείστων αερίων και υγρών, υπό την προϋπόθεση ότι η ένταση του πεδίου δεν είναι υπερβολικά μεγάλη.

Τα στερεά έχουν, γενικά, κρυσταλλική δομή και για τούτο δεν είναι ισοτροπικά σε ατομική κλίμακα. Μεγαλύτερα όμως τμήματα τέτοιων υλικών αποτελούνται από τυχαίως προσανατολισμένες στοιχειώδεις κρυσταλλικές περιοχές και μπορεί να θεωρηθεί ότι σε μακροσκοπική κλίμακα επιδεικνύουν ισοτροπική συμπεριφορά.

Για τη σχετική διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$  ισχύει η σχέση  $\epsilon_r \geq 1$ . Στα αέρια διαφέρει από τη μονάδα κατά μια μικρή ποσότητα, παίρνοντας την τιμή 1.0006 στον αέρα. Στα στερεά η  $\epsilon_r$  κυμαίνεται συνήθως στην περιοχή  $2 \div 10$  (π.χ.,  $\epsilon_r \approx 6$  για την πορσελάνη). Στα υγρά η σχετική διηλεκτρική σταθερά κυμαίνεται εντός ευρείας περιοχής τιμών ( $\epsilon_r = 2$  για το πετρέλαιο,  $\epsilon_r = 81$  για το νερό).

Από το άλλο μέρος, η σχετική μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_r = \mu / \mu_0$  μπορεί να λάβει τιμές είτε μικρότερες είτε μεγαλύτερες της μονάδας. Όταν  $\mu_r > 1$  ή  $\mu_r < 1$ , το υλικό χαρακτηρίζεται ως παραμαγνητικό ή, αντίστοιχα, διαμαγνητικό. Πλείστα παραμαγνητικά και διαμαγνητικά υλικά έχουν  $\mu_r \approx 1$  (π.χ.,  $\mu_r = 1.00002$  για το αλουμίνιο και  $\mu_r = 0.9999991$  για τον χαλκό).

Γενικά οι συντακτικές παράμετροι  $\epsilon$  και  $\mu$  μεταβάλλονται υπό την επίδραση διαφόρων παραγόντων όπως είναι η θερμοκρασία και η συχνότητα λειτουργίας (π.χ., η τιμή  $\epsilon_r = 81$  για το νερό ισχύει για πολύ χαμηλές συχνότητες, ενώ στην ορατή περιοχή του φάσματος συχνοτήτων η τιμή αυτή γίνεται  $\epsilon_r \approx 1.8$ ). Αυτές οι μεταβολές συνήθως αμελούνται, αφού η χρησιμοποίηση μιας μέσης τιμής επαρκεί σε πολλές περιπτώσεις.

### Παρατήρηση

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι οι συντακτικές σχέσεις υπό τη μορφή των εξισώσεων (7), με  $\epsilon$  και  $\mu$  σταθερές ποσότητες, ισχύουν ακριβώς μόνο στη στατική περίπτωση και, κατά προσέγγιση, για βραδέως μεταβαλλόμενα πεδία. Αντίθετα, για ταχέως μεταβαλλόμενα πεδία η τιμή του  $\bar{D}$  κατά τη χρονική στιγμή  $t$  καθορίζεται, όχι μόνο από την τιμή της εντάσεως  $\bar{E}$  κατά τη στιγμή  $t$ , αλλά και από τις τιμές της κατά τις προηγούμενες χρονικές στιγμές. (Η ίδια αυτή παρατήρηση ισχύει και για την εξάρτηση του  $\bar{B}$  από το  $\bar{H}$ ). Το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζεται ως *χρονική διασπορά*. Υπάρχουν επίσης μέσα, στα οποία παρατηρείται το φαινόμενο η τιμή του  $\bar{D}$  (ή του  $\bar{B}$ ) στη θέση  $\vec{r}(x, y, z)$  να εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της εντάσεως  $\bar{E}$  (ή, αντίστοιχα, της  $\bar{H}$ ) στη θέση αυτή, αλλά και από τις τιμές της στα γειτονικά σημεία. Το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζεται ως *χωρική διασπορά*. Υπάρχει βέβαια η δυνατότητα ένα μέσο να εμφανίζει συγχρόνως χρονική και χωρική διασπορά.

Η κατάστροψη ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων σε μέσα με διασπορά γίνεται ευκολότερα στο πεδίο της συχνότητας, όπως εξηγούμε στην ενότητα 10.6 του παρόντος κεφαλαίου· εκεί δίνουμε επίσης την ακριβή μορφή των συντακτικών σχέσεων στο πεδίο του χρόνου, όπως ισχύουν σε τέτοια μέσα.

### Γ. Ανισοτροπικά μέσα

Στα ανισοτροπικά μέσα οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες είναι συναρτήσεις της κατευθύνσεως.

Υλικά που εμφανίζουν *ηλεκτρική ανισοτροπία*, όπως είναι διάφοροι κρύσταλλοι, περιγράφονται με σχέσεις της μορφής

$$\begin{aligned}
D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \\
D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z \\
D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z
\end{aligned} \tag{8}$$

Υπό τανυστική μορφή, οι σχέσεις αυτές γράφονται συνοπτικά ως εξής<sup>1</sup>:

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\overline{\varepsilon}} \overline{\mathbf{E}} \tag{9}$$

όπου  $\overline{\overline{\varepsilon}}$  είναι ο τανυστής  $\overline{\overline{\varepsilon}} = (\varepsilon_{ij})$  ( $i, j \equiv x, y, z$ ). Αποδεικνύεται ότι ο τανυστής  $\overline{\overline{\varepsilon}}$  είναι συμμετρικός.

Παρατηρούμε ότι σε ηλεκτρικώς ανισότροπα μέσα τα διανύσματα  $\overline{\mathbf{D}}$  και  $\overline{\mathbf{E}}$  έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.

Ανάλογες σχέσεις, της μορφής

$$\begin{aligned}
B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\
B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\
B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z
\end{aligned} \Leftrightarrow \overline{\mathbf{B}} = \overline{\overline{\mu}} \overline{\mathbf{H}}, \tag{10}$$

ισχύουν σε **μαγνητικώς ανισότροπα** μέσα<sup>2</sup>, όπως είναι οι φερρίτες (είδος κεραμικών υλικών) παρουσία ενός εξωτερικά επιβαλλόμενου στατικού μαγνητικού πεδίου (πεδίου πολώσεως). Τα φερριτικά αυτά υλικά έχουν, μεταξύ άλλων, ιδιαίτερη σημασία στον σχεδιασμό πλείστων μικροκυματικών στοιχείων και εφαρμογών.

Σημειώνουμε ότι ένα μέσο μπορεί να είναι ταυτόχρονα ηλεκτρικώς και μαγνητικώς ανισότροπο.

#### **Α. Δις-ανισοτροπικά μέσα**

Πρόκειται για μέσα που περιγράφονται με συντακτικές σχέσεις της μορφής

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{D}} &= \overline{\overline{\varepsilon}} \overline{\mathbf{E}} + \overline{\overline{\xi}} \overline{\mathbf{H}} \\
\overline{\mathbf{B}} &= \overline{\overline{\zeta}} \overline{\mathbf{E}} + \overline{\overline{\mu}} \overline{\mathbf{H}}
\end{aligned} \tag{11}$$

όπου  $\overline{\overline{\xi}}$  και  $\overline{\overline{\zeta}}$  είναι οι λεγόμενοι **μαγνητο-ηλεκτρικοί τανυστές**. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν ορισμένα σύνθετα υλικά με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον, καθώς και όλα τα κινούμενα ισοτροπικά μέσα.

Προφανώς τα ανισοτροπικά υλικά μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις δις-ανισοτροπικών μέσων.

<sup>1</sup> Για ηλεκτρικώς ανισότροπα μέσα, η σχέση (5) έχει τη μορφή  $\overline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_e \overline{\mathbf{E}}$  όπου ο συντελεστής  $\overline{\overline{\chi}}_e$  (ηλεκτρική δεκτικότητα του υλικού) είναι τώρα τανυστής. Οι τανυστές  $\overline{\overline{\chi}}_e$  και  $\overline{\overline{\varepsilon}}$  αλληλοσυνδέονται με τη σχέση  $\overline{\overline{\varepsilon}} = \varepsilon_0 (\overline{\overline{I}}_2 + \overline{\overline{\chi}}_e)$  όπου  $\overline{\overline{I}}_2$  είναι ο  $2 \times 2$  ταυτοτικός τανυστής.

<sup>2</sup> Για μαγνητικώς ανισότροπα μέσα, η σχέση (6) έχει τη μορφή  $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\overline{\chi}}_m \overline{\mathbf{H}}$  όπου ο συντελεστής  $\overline{\overline{\chi}}_m$  (μαγνητική δεκτικότητα του υλικού) είναι τώρα τανυστής. Οι τανυστές  $\overline{\overline{\chi}}_m$  και  $\overline{\overline{\mu}}$  αλληλοσυνδέονται με τη σχέση  $\overline{\overline{\mu}} = \mu_0 (\overline{\overline{I}}_2 + \overline{\overline{\chi}}_m)$ .



## ***E. Δις-ισοτροπικά μέσα***

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν ορισμένα σύνθετα υλικά, τα οποία περιγράφονται με συντακτικές σχέσεις της μορφής

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \epsilon \bar{E} + \xi \bar{H} \\ \bar{B} &= \zeta \bar{E} + \mu \bar{H}\end{aligned}\tag{12}$$

όπου  $\epsilon, \mu, \zeta, \xi$  είναι βαθμωτές σταθερές.

## ***ΣΤ. Χειρότροπα μέσα***

Τα χειρότροπα μέσα (chiral media) είναι ειδικές περιπτώσεις δις-ισοτροπικών μέσων με την ιδιότητα

$$\zeta = \xi$$

(π.χ., ζάχαρη), δηλαδή περιγράφονται ηλεκτρομαγνητικώς με τρεις παραμέτρους ( $\epsilon, \mu, \xi$ ). Το ενδιαφέρον για τη μελέτη και σχεδίαση πρακτικών διατάξεων που εμπλέκουν τέτοια μέσα έχει αναζωπυρωθεί κατά την τελευταία δεκαετία λόγω των ιδιαίτερα ελκυστικών χαρακτηριστικών και δυνατοτήτων που παρουσιάζουν.

## ***Z. Μεταϋλικά***

Πρόκειται για νέα, πολλά υποσχόμενα, τεχνητά υλικά, παραγόμενα με την προσεκτική –κατά περιοδικό τρόπο– εισαγωγή μεταλλικών, διηλεκτρικών, ή άλλου τύπου εμφυτεύσεων σε ένα σύνθετο υλικό (υλικό υποδοχής). Το ιδιάζον γνώρισμα των μεταϋλικών, το οποίο τα καθιστά μοναδικά, είναι ότι μπορεί να έχουν αρνητική επιτρεπτότητα, αρνητική μαγνητική διαπερατότητα, και αρνητικό δείκτη διάθλασης. Ως αποτέλεσμα, παρουσιάζουν καινοφανείς ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες, ολότελα διαφορετικές από κάθε ουσία που απαντάται στη φύση.

Πέρα από την ποικιλία των εντελώς καινούργιων φυσικών φαινομένων που σχετίζονται με τα υλικά αυτά, εντυπωσιακές εμφανίζονται και οι δυνητικές εφαρμογές τους στην τεχνολογία. Για παράδειγμα, το ότι τα μεταϋλικά μπορεί να έχουν αρνητικό δείκτη διάθλασης, σημαίνει ότι διαθλούν το φως (και γενικά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα) με τελείως νέο τρόπο. Μια πλάκα από υλικό αρνητικού δείκτη διάθλασης είναι δυνατόν να δρα ως υπερφακός, ικανός να ξεπερνά με διαφορά σε επίδοση τους σημερινούς φακούς, οι οποίοι έχουν θετικό δείκτη διάθλασης. Ένας τέτοιος υπερφακός θα μπορούσε να δημιουργεί είδωλα που θα περιείχαν λεπτομέρειες πολύ μεγαλύτερες από εκείνες που επιτρέπει το όριο περίθλασης, το οποίο περιορίζει τις επιδόσεις όλων των οπτικών στοιχείων με θετικό δείκτη διάθλασης.

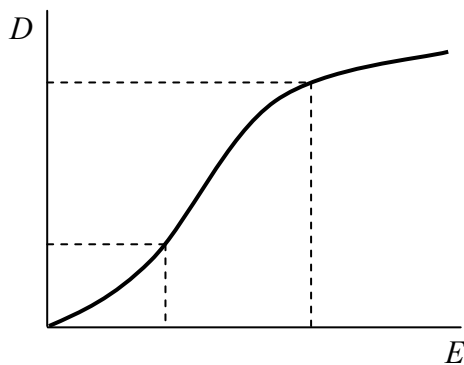
Τα μεταϋλικά μπορεί να είναι είτε ισοτροπικά είτε ανισοτροπικά.

### ***6.1 Ομοιογενή και ανομοιογενή μέσα***

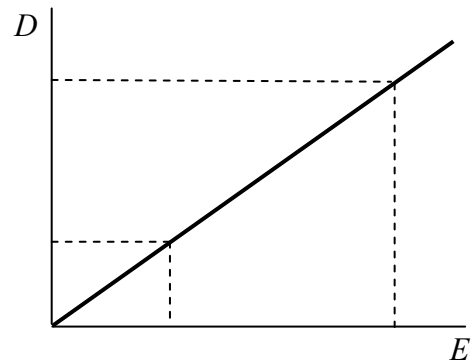
Όταν οι τιμές των συντακτικών παραμέτρων  $\epsilon$  και  $\mu$  (γενικότερα των  $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}$ ) είναι οι ίδιες σε όλα τα σημεία του υλικού, τότε το υλικό αυτό ονομάζεται ομοιογενές (ή ομογενές). Στην αντίθετη περίπτωση, όπου κάποια από τις τέσσερις συντακτικές παραμέτρους είναι συνάρτηση της θέσεως, το υλικό χαρακτηρίζεται ως μη ομοιογενές ή ανομοιογενές. Στις περιπτώσεις ισοτροπικών ομοιογενών υλικών, η επιτρεπτότητα  $\epsilon$  ονομάζεται και διηλεκτρική σταθερά, αν και συχνά, αλλά καταχρηστικά, ο όρος αυτός χρησιμοποιείται και στις περιπτώσεις μη ομοιογενών μέσων.

### ***6.2 Γραμμικά και μη γραμμικά μέσα***

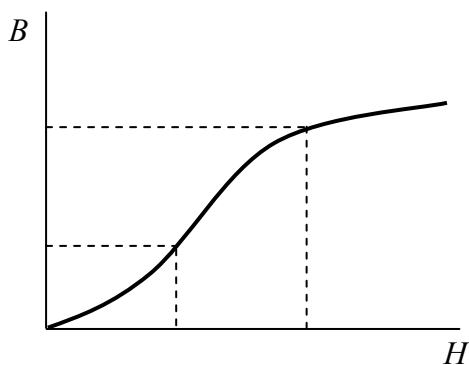
Όταν μία (ή και περισσότερες) από τις συντακτικές παραμέτρους ( $\epsilon, \mu$ ) ή γενικότερα ( $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}$ ) είναι συνάρτηση των πεδιακών μεγεθών, το αντίστοιχο μέσο χαρακτηρίζεται ως μη γραμμικό (Σχ.1α, Σχ.1γ). Στην αντίθετη περίπτωση το μέσο ονομάζεται γραμμικό (Σχ.1β, Σχ.1δ).



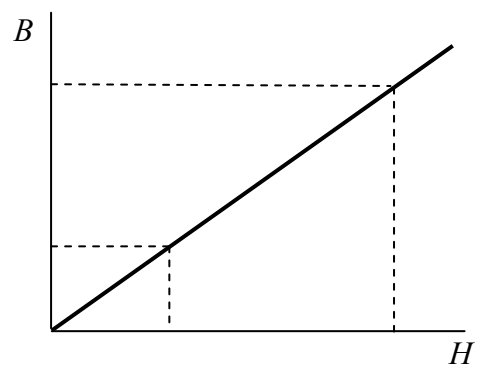
(α)



(β)



(γ)



(δ)

**Σχήμα 1:** (α) Το πηλίκο  $D/E$ , δηλαδή η διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon$ , μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται το πεδίο (ηλεκτρικώς μη γραμμικό μέσο). (β) Το πηλίκο  $D/E$ , δηλαδή η διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon$ , είναι σταθερό, ανεξάρτητο του πεδίου (ηλεκτρικώς γραμμικό μέσο). (γ) Το πηλίκο  $B/H$ , δηλαδή η μαγνητική διαπερατότητα  $\mu$ , μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται το πεδίο (μαγνητικώς μη γραμμικό μέσο). (δ) Το πηλίκο  $B/H$  είναι σταθερό, ανεξάρτητο του πεδίου (μαγνητικώς γραμμικό μέσο).

Μη γραμμικά είναι, π.χ., τα σιδηρομαγνητικά υλικά τα οποία βρίσκουν εκτεταμένη εφαρμογή στο σχεδιασμό μαγνητικών κυκλωμάτων (πυρήνες μετασχηματιστών, ηλεκτρικές μηχανές) και στην κατασκευή μαγνητικών μνημών.

### 6.3 Αγωγοί-Συντακτική σχέση για αγωγούς.

Όταν ένα υλικό μέσο, το οποίο εμφανίζει αγωγιμότητα, βρεθεί εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, τότε οι ελεύθεροι φορείς που διατίθενται στον όγκο του υλικού θα κινηθούν υπό την επίδραση των επ' αυτών ασκούμενων ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων. Το ηλεκτρικό ρεύμα που προκαλείται με τον μηχανισμό αυτό ονομάζεται **ρεύμα αγωγιμότητας**, περιγράφεται με το μέγεθος  $\vec{J}_c$  (πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας), και συμβάλλει δευτερογενώς στη διαμόρφωση του διεγειρομένου στη διάταξη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου από κοινού με τις πρωτογενείς (επιβαλλόμενες) ρευματικές πηγές.

Επομένως, σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα στα οποία εμπλέκονται και αγωγίμες περιοχές, ο όρος  $\bar{J}$  των ελευθέρων πηγών που υπάρχει στις εξισώσεις Maxwell είναι άθροισμα δυο όρων (αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν ρεύματα μεταφοράς):

$$\bar{J} = \bar{J}_\pi + \bar{J}_c. \quad (13)$$

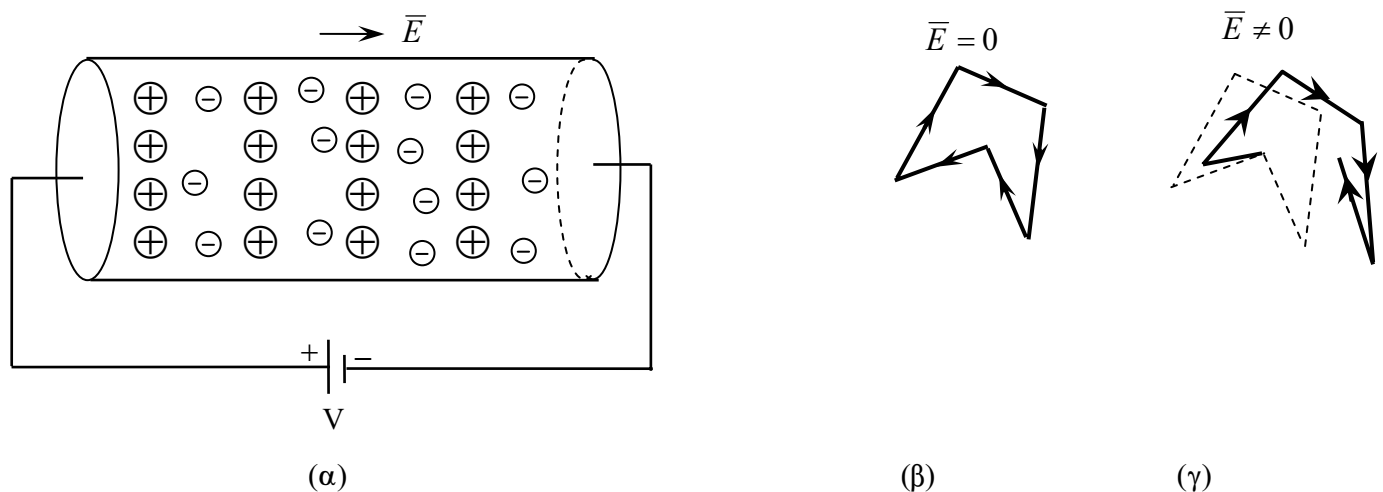
Στην (13),  $\bar{J}_\pi(\bar{r}, t)$  είναι η πυκνότητα των επιβαλλομένων (πρωτογενών) πηγών (δεδομένη συνάρτηση της θέσεως και του χρόνου), οι οποίες θεωρούνται ανεξάρτητες του περιβάλλοντος στο οποίο δρουν (ακριβώς όπως οι ιδανικές πηγές της θεωρίας κυκλωμάτων θεωρούνται ανεξάρτητες του κυκλώματος στο οποίο επιβάλλονται). Αντίθετα, η πυκνότητα των επαγομένων (δευτερογενών) πηγών  $\bar{J}_c$  είναι συνάρτηση του αιτίου (δηλαδή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου) που την προκάλεσε. Επομένως, ισχύει μια σχέση της μορφής

$$\bar{J}_c = \bar{J}_c(\bar{E}, \bar{H}), \quad (14)$$

την ακριβή μορφή της οποίας είναι ανάγκη να γνωρίζουμε κατά την κατάστροψη ενός ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος (αλλιώς, το μέγεθος  $\bar{J}_c$  θα αποτελεί ένα επί πλέον άγνωστο, δηλαδή ο αριθμός των ανεξαρτήτων εξισώσεων θα υπολείπεται κατά ένα του αριθμού των αγνώστων).

### Συντακτική σχέση για απλούς αγωγούς-μικροσκοπικός νόμος του Ohm

Ένας μεταλλικός αγωγός μπορεί να προσομοιωθεί (Σχ.2α) με ένα πλέγμα θετικών ιόντων μεταξύ των οποίων κινούνται τα ηλεκτρόνια σθένους (ελεύθερα ηλεκτρόνια).



Σχήμα 2

Απουσία εξωτερικώς επιβαλλομένων πεδίων, η κίνηση αυτή των ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι τυχαία, διακοπτομένη μετά από κάθε ελαστική ή μη ελαστική σύγκρουσή τους με τα θετικά ιόντα (καθώς και μεταξύ τους). Λόγω του είδους των συγκρούσεων, οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων σθένους προσανατολίζονται κατά τυχαίο τρόπο και κατά συνέπεια η μακροσκοπική πυκνότητα ρεύματος είναι μηδενική (Σχ.2β).

Υποθέτουμε τώρα ότι στον αγωγό επιβάλλεται εξωτερικά ένα **σταθερής εντάσεως** ηλεκτρικό (δηλαδή ηλεκτροστατικό) πεδίο  $\bar{E}$  (Σχ.2γ). Τότε σε κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητα των ηλεκτρονίων σθένους θα δίνεται από τη σχέση

$$\bar{v} = \bar{v}_c - \frac{e\bar{E}}{m} \tau \quad (15)$$

όπου  $-e, m$  είναι το φορτίο, αντίστοιχα η μάζα του ηλεκτρονίου,  $\tau$  είναι ο χρόνος που παρήλθε από τη στιγμή της τελευταίας συγκρούσεως και  $\bar{v}_c$  είναι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου αμέσως μετά τη σύγκρουση αυτή. Επομένως, από την κίνηση των ηλεκτρονίων σθένους θα προκληθεί ηλεκτρικό ρεύμα με πυκνότητα

$$\bar{J}_c = \rho \langle \bar{v} \rangle = \frac{\delta q}{\delta v} \langle \bar{v} \rangle = -ne \langle \bar{v} \rangle \quad (16)$$

όπου  $n$  είναι η χωρική πυκνότητα ελευθέρων ηλεκτρονίων (αριθμός ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου) και  $\langle \bar{v} \rangle$  η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων αυτών. Επειδή η  $\bar{v}_c$  έχει τυχαίο προσανατολισμό, έπεται ότι  $\langle \bar{v}_c \rangle = 0$ , οπότε από την (15) προκύπτει ότι

$$\langle \bar{v} \rangle = -\frac{e\bar{E}}{m} \langle \tau \rangle = -\frac{e\bar{E}}{m} \frac{1}{v} \quad (17)$$

όπου  $\langle \tau \rangle$  είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων και

$$v = 1 / \langle \tau \rangle \quad (18)$$

είναι η μέση συχνότητα συγκρούσεων. Μέσω των (16) και (17) καταλήγουμε στη σχέση

$$\bar{J}_c = \gamma \bar{E} \quad (19)$$

όπου το μέγεθος

$$\gamma = \frac{ne^2}{mv} \quad (20)$$

ονομάζεται **ειδική αγωγιμότητα** του αγωγού<sup>3</sup>. Ιδιαίτερα εύχρηστο είναι επίσης το μέγεθος

$$\rho = \frac{1}{\gamma}$$

το οποίο ονομάζεται **ειδική αντίσταση** του αγωγού.

Η εξίσωση (19), που αποτελεί τη συντακτική σχέση ενός αγωγού, είναι γνωστή ως **μικροσκοπικός νόμος του Ohm**.

### **Ένας εναλλακτικός τρόπος εξαγωγής της συντακτικής σχέσεως (19)**

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε τη συντακτική σχέση (19) με βάση την εξίσωση που περιγράφει την κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων, ως εξής:

Υπό την επίδραση της ηλεκτροστατικής δυνάμεως  $-e\bar{E}$ , τα ηλεκτρόνια αποκτούν επιτάχυνση  $\bar{a} = -e\bar{E}/m$ . Επομένως, αν η ηλεκτροστατική αυτή δύναμη ήταν η μόνη ασκουμένη στα ηλεκτρόνια, θα έπρεπε αυτά να αποκτούν όλο και μεγαλύτερη ταχύτητα  $\bar{v}$  με την πάροδο του χρόνου ( $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t$ ,  $\bar{v}_0$ =αρχική ταχύτητα). Αυτό θα είχε ως συνέπεια την απεριόριστη αύξηση της εντάσεως του ρεύματος στον αγωγό (λόγω της σχέσεως  $\bar{J}_c = \rho \bar{v}$ ). Κάτι τέτοιο όμως δεν παρατηρείται. Αντίθετα, αυτό που παρατηρείται σε έναν αγωγό που υπόκειται σε σταθερής εντάσεως ηλεκτροστατικό πεδίο είναι ένα

<sup>3</sup> Μονάδα μετρήσεως της ειδικής αγωγιμότητας στο SI είναι το 1S/m. Το 1 mhos/m είναι διαφορετικός συμβολισμός της ίδιας αυτής μονάδας.

σταθερής εντάσεως ηλεκτρικό ρεύμα. Αυτό σημαίνει ότι η μέση ταχύτης των ηλεκτρονίων είναι σταθερή. Συνεπώς θα πρέπει τα ηλεκτρόνια να υπόκεινται στην επίδραση και άλλης -πλὴν της ηλεκτροστατικής- δυνάμεως. Η δύναμη αυτή είναι η δύναμη τριβής που ασκείται στα ηλεκτρόνια λόγω των συγκρούσεών τους με τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος. Αυτή η δύναμη τριβής μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη της ταχύτητας<sup>4</sup>, δηλαδή

$$\bar{F}_{\tau\rho} = -\nu m \bar{v} \quad (21)$$

όπου  $\nu$  συντελεστής αναλογίας με διαστάσεις συχνότητας (μέση συχνότητα συγκρούσεων). Επομένως η εξίσωση της μέσης κινήσεως των ηλεκτρονίων γράφεται ως εξής:

$$-e\bar{E} - \nu m \bar{v} = \bar{F}_{ολική} = m \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (22)$$

Με  $\bar{v}$ =σταθερό, η τελευταία σχέση δίνει

$$-e\bar{E} - \nu m \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = -\frac{e}{\nu m} \bar{E} \quad (23)$$

και επομένως

$$\bar{J}_c = \rho_e \bar{v} = -ne\bar{v} \Rightarrow \bar{J}_c = \gamma \bar{E}$$

με  $\gamma = ne^2 / (m\nu)$ , όπως και πριν.

Αγωγιμότητα εμφανίζουν όλα τα υλικά μέσα. Στον παρακάτω Πίνακα I, όπου δίδονται ενδεικτικές τιμές της ειδικής αγωγιμότητας διαφόρων υλικών, βλέπουμε ότι η αγωγιμότητα μεταβάλλεται εντός μιας ευρύτατης περιοχής τιμών. Σε καλά μονωτικά η τιμή της είναι τόσο μικρή ώστε συνήθως αμελείται. Αντίθετα, στους καλούς αγωγούς η αγωγιμότητα είναι τόσο μεγάλη, ώστε σε πολλές πρακτικές εφαρμογές να μπορούμε να θεωρήσουμε, με αμελητέο σφάλμα στα αποτελέσματα, ότι η ειδική αγωγιμότητα είναι άπειρη. Αγωγοί με άπειρη αγωγιμότητα χαρακτηρίζονται ως **τέλειοι αγωγοί**.

**Πίνακας I: Ειδική αγωγιμότητα διαφόρων υλικών**

<u>ΥΛΙΚΟ</u>	<u>ΕΙΔΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ <math>\gamma</math> [S/m]</u>
Άργυρος	$6.17 \times 10^7$
Χαλκός	$5.80 \times 10^7$
Χρυσός	$4.10 \times 10^7$
Αλουμίνιο	$3.54 \times 10^7$
Σίδηρος	$10^7$
Θαλάσσιο νερό	4
Πόσιμο νερό	$10^{-3}$
Απεσταγμένο νερό	$2 \times 10^{-4}$
Υγρό έδαφος	$10^{-5}$
Έλαιο μετασχηματιστών	$10^{-11}$
Γυαλί	$10^{-12}$
Πορσελάνη	$2 \times 10^{-13}$
Καουτσούκ	$10^{-15}$

### ***Παρατηρήσεις πάνω στον νόμο του Ohm***

<sup>4</sup>κατ' αναλογία προς την περίπτωση της δυνάμεως τριβής που ασκείται σε σώμα που κινείται με σταθερή ταχύτητα εντός ρευστού

1. Για να εκτιμήσουμε τη σημασία της σχέσεως (17), η οποία προέκυψε υποθέτοντας σταθερό ηλεκτρικό πεδίο στον αγωγό, αναφερόμαστε στο παράδειγμα του χαλκού. Γνωρίζοντας την πυκνότητα μάζας ( $8.9 \text{ g/cm}^3$ ) και το ατομικό του βάρος (63.6), βρίσκουμε ότι ο χαλκός διαθέτει  $6,022 \times 10^{23} / 63.6$  άτομα ανά γραμμάριο. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι κάθε άτομο δίνει ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, η πυκνότητα ελευθέρων ηλεκτρονίων στο χαλκό ισούται με

$$n = 6,022 \times 10^{23} / (63.6 \times 8.9 \times 10^{-6}) \cong 10^{29} \text{ ηλεκτρόνια / m}^3.$$

Λεδομένου ότι η ειδική αγωγιμότητα του χαλκού είναι  $\gamma \cong 6 \times 10^7 \text{ S/m}$  και ότι  $e^2 / m \cong 3 \times 10^{-8} \text{ C}^2 / \text{Kg}$ , η (20) δίνει:

$$\nu \cong 0.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

οπότε από την (18) προκύπτει ότι ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων είναι της τάξεως του

$$\langle \tau \rangle = 1/\nu \cong 2 \times 10^{-14} \text{ s}.$$

Αν υποθέσουμε περαιτέρω ότι ένας χάλκινος αγωγός, κυλινδρικής μορφής και διατομής  $1 \text{ mm}^2$ , διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως  $4 \text{ A}$  (οπότε  $J = 4 \text{ A/mm}^2$ ), τότε από την (17) παίρνουμε

$$\langle \bar{v} \rangle \cong 3 \times 10^{-4} \text{ m/s}.$$

Όπως παρατηρούμε, η μέση ταχύτητα ολισθήσεως των ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρότερη της ταχύτητας που αυτά έχουν λόγω της θερμικής τους κινήσεως, η οποία είναι της τάξεως των  $10^5 \text{ m/s}$ .

Λόγω της μεγάλης τιμής που έχει η συχνότητα συγκρούσεων  $\nu$ , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η παραπάνω απλή θεωρία, που οδήγησε στην έκφραση (19) του μικροσκοπικού νόμου του Ohm, θα ισχύει και όταν το επιβαλλόμενο πεδίο δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται χρονικά, με συχνότητα όμως πολύ μικρότερη της παραπάνω τιμής <sup>5</sup>.

2. Η τιμή της ειδικής αγωγιμότητας είναι συνάρτηση διαφόρων παραμέτρων, όπως είναι η θερμοκρασία, η συχνότητα κλπ. Η εξάρτηση από τη θερμοκρασία εξηγείται εύκολα με βάση τη σχέση (20) και την παρατήρηση ότι με την άνοδο της θερμοκρασίας ο μέσος χρόνος  $\langle \tau \rangle = 1/\nu$  μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων μειώνεται. [Η μείωση αυτή οφείλεται στη θερμική κίνηση των ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος, η οποία γίνεται εντονότερη με την άνοδο της θερμοκρασίας].

Η εξάρτηση της ειδικής αντιστάσεως από τη θερμοκρασία είναι γενικά γραμμική για μια περιοχή μερικών εκατοντάδων βαθμών. Υπάρχουν όμως ορισμένα μέταλλα (όπως ο μόλυβδος, ο υδράργυρος, ο κασίτερος) που παρουσιάζουν ραγδαία αύξηση της αγωγιμότητας σε θερμοκρασίες της τάξεως των  $5^\circ \text{ K}$  έτσι ώστε ηλεκτρικά ρεύματα που διεγείρονται στα μέταλλα αυτά να συντηρούνται επί μακρόν. Τα μέταλλα αυτά χαρακτηρίζονται ως υπεραγωγοί.

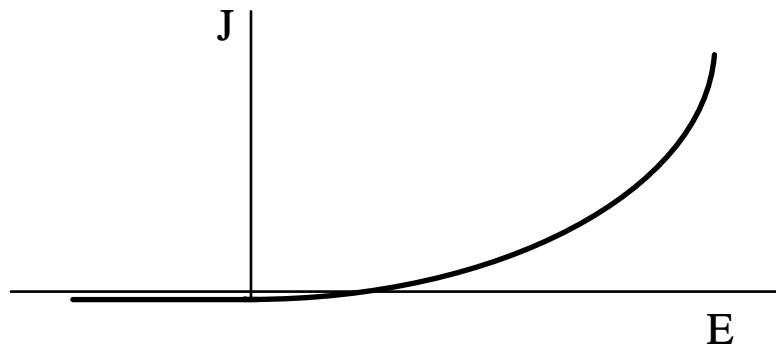
3. Υπενθυμίζεται ότι η αγωγή του ηλεκτρικού ρεύματος συνεπάγεται τη μετατροπή ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμότητα. Η εκλυόμενη θερμότητα, με τη σειρά της, οδηγεί σε αύξηση της θερμοκρασίας στο υλικό και συνεπώς σε μεταβολή της αγωγιμότητας  $\gamma$ . Έτσι, όταν στον αγωγό επιβάλλεται ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, το ηλεκτρικό ρεύμα που διεγείρεται δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται συνεχώς μέχρι την αποκατάσταση συνθηκών θερμικής ισορροπίας. Μέχρι να αποκατασταθεί θερμική ισορροπία, επομένως, η σχέση της τάσεως με το ρεύμα σε ένα αγωγό είναι **μη γραμμική**. Από τη στιγμή που αποκαθίσταται η ισορροπία και μετά, η τιμή της ειδικής αγωγιμότητας  $\gamma$  παραμένει σταθερή.

<sup>5</sup> Η συντακτική σχέση για απλούς αγωγούς στην περίπτωση ημιτονικής χρονικής μεταβολής των πεδίων εξάγεται στην ενότητα 10.6

4. Ο νόμος του Ohm υπό τη μορφή της εξίσωσης (19) ισχύει για ισотροπικούς αγωγούς. Στις περιπτώσεις ανισοτροπικών αγωγών, η συντακτική αυτή σχέση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} J_{cx} &= \gamma_{xx}E_x + \gamma_{xy}E_y + \gamma_{xz}E_z \\ J_{cy} &= \gamma_{yx}E_x + \gamma_{yy}E_y + \gamma_{yz}E_z \\ J_{cz} &= \gamma_{zx}E_x + \gamma_{zy}E_y + \gamma_{zz}E_z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{J}_c = \bar{\gamma} \bar{E} \quad (24)$$

5. Σε ορισμένες περιπτώσεις υλικών, η ειδική αγωγιμότητα  $\gamma$  είναι συνάρτηση του πεδίου, δηλαδή  $\gamma = \gamma(\bar{E})$ , οπότε ο αγωγός είναι **μη γραμμικός**. Στην περίπτωση της ενώσεως p-n, για παράδειγμα, η σχέση αυτή έχει τη μορφή που δείχνει η καμπύλη στο Σχ.3 (γνωστή ως “*χαρακτηριστική της διόδου*”).



Σχήμα 3

### Εφαρμογή: Ηλεκτρική χαλάρωση

Θα αποδείξουμε ότι στο εσωτερικό ενός ομοιογενούς αγωγού, σταθερής ειδικής αγωγιμότητας  $\gamma$  και διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon$ , στον οποίο έχει τοποθετηθεί χωρικό φορτίο με πυκνότητα  $\rho_0(x,y,z)$  τη χρονική στιγμή  $t=0$ , δεν μπορεί να συντηρηθεί μονίμως χωρική κατανομή φορτίου.

**Απόδειξη:** Ισχύει η σχέση

$$\rho = \nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot (\epsilon \bar{E}) = \epsilon \nabla \cdot \bar{E} \quad (25)$$

ενώ από την εξίσωση συνεχείας προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \stackrel{(19)}{\Rightarrow} \nabla \cdot (\gamma \bar{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \gamma \nabla \cdot \bar{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (26)$$

Συνδυάζοντας τις (25) και (26) προκύπτει ότι η χωρική πυκνότητα  $\rho$  ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0. \quad (27)$$

Η εξίσωση (27) ολοκληρούμενη δίνει το αποτέλεσμα

$$\rho(x,y,z;t) = \rho_0(x,y,z) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon} t} \quad (28)$$

όπου  $\rho_0(x,y,z)$  είναι η τιμή της πυκνότητας  $\rho$  τη χρονική στιγμή  $t=0$ .

Παρατηρούμε ότι αν η πυκνότητα τη χρονική στιγμή  $t=0$  είναι μηδενική (δηλαδή, αν  $\rho_0=0$ ), τότε η πυκνότητα  $\rho$  παραμένει ίση με μηδέν σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Από το άλλο μέρος, αν  $\rho_0 \neq 0$  τότε για  $t \rightarrow \infty$  (δηλαδή στη μόνιμη κατάσταση) προκύπτει ότι  $\rho \rightarrow 0$ .

Από την (28) προκύπτει ότι το μέγεθος

$$\tau = \varepsilon / \gamma \quad (29)$$

έχει διαστάσεις χρόνου. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται **χρονική σταθερά χαλαρώσεως** του μέσου και αποτελεί ένα μέτρο του πόσο γρήγορα ένα αγωγίμο μέσο προσεγγίζει την ηλεκτροστατική ισορροπία. Πιο συγκεκριμένα, η σταθερά  $\tau$  ισούται με το χρόνο που απαιτείται ώστε το χωρικό φορτίο μιας αγωγίμης περιοχής να ελατωθεί στο  $1/e$  της αρχικής του τιμής.

Τα διηλεκτρικά χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές του  $\tau$ . Για παράδειγμα, για το διηλεκτρικό υλικό mica, με  $\gamma \cong 10^{-15} S/m$  και  $\varepsilon = 6\varepsilon_0$ , βρίσκουμε ότι  $\tau=10h$ . Επομένως στα καλά διηλεκτρικά (μονωτικά) μέσα το χωρικό φορτίο φθίνει τόσο βραδέως ώστε να μπορούμε πρακτικά να θεωρήσουμε ότι παραμένει στη θέση όπου τοποθετήθηκε.

Αντίθετα στους καλούς αγωγούς η σταθερά χαλαρώσεως παίρνει πολύ μικρές τιμές. Στον χαλκό, π.χ., με  $\gamma \cong 6 \times 10^7 S/m$  και  $\varepsilon \cong \varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\pi) F/m$  από την (29) βρίσκουμε ότι  $\tau \cong 10^{-19} s$ . Αυτό σημαίνει ότι μετά την παρέλευση βραχυτάτου χρονικού διαστήματος η πλειονότητα του χωρικού φορτίου έχει μεταφερθεί στην επιφάνεια του αγωγού. (Στο παράδειγμα του χαλκού, μετά την πάροδο χρόνου ίσου με  $10\tau=10^{-18} s$  έχει μεταφερθεί το 99.995 % του φορτίου.) Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι τόσο μικρές τιμές, όπως η τιμή  $\tau \cong 10^{-19} s$  που βρήκαμε παραπάνω για τον χαλκό, δεν είναι φυσικώς αποδεκτές, επειδή, μεταξύ άλλων, είναι κατά πολύ μικρότερες από τον μέσο χρόνο μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων ( $\cong 2 \times 10^{-14} s$  για τον χαλκό, όπως βρήκαμε νωρίτερα). Με άλλα λόγια, για πολύ καλούς αγωγούς, σε αυτή την χρονική κλίμακα δεν ισχύει ο νόμος του Ohm,  $\vec{J}_c = \gamma \vec{E}$ , στον οποίο στηρίχθηκε η (29)<sup>6</sup>.

### Παράδειγμα (ηλεκτρική χαλάρωση)

Αγωγίμο σφαιρικό κέλυφος (Σχ.4) έχει εσωτερική ακτίνα  $a$  και εξωτερική ακτίνα  $b$ . Το υλικό του είναι ομοιογενές με επιτρεπτότητα  $\varepsilon$  και ειδική αγωγιμότητα  $\gamma$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  υπάρχουν επιφανειακά φορτία με σταθερές πυκνότητες  $\sigma_a(0)$  και  $\sigma_b(0)$ , τοποθετημένα στην εσωτερική επιφάνεια με  $r=a$  και στην εξωτερική επιφάνεια με  $r=b$ , αντίστοιχα, του αγωγίμου κελύφους, καθώς και χωρικό φορτίο με πυκνότητα  $\rho(r,0) = \rho_0 r^2 / a^2$ , τοποθετημένο στο εσωτερικό του αγωγού ( $a < r < b$ ). Να υπολογιστούν:

α) Οι πυκνότητες των ηλεκτρικών φορτίων  $\sigma_a(t)$  (για  $r=a$ ),  $\rho(r,t)$  (για  $a < r < b$ ) και  $\sigma_b(t)$  (για  $r=b$ ), για  $t \geq 0$ , καθώς και η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε όλο το χώρο, για  $t \geq 0$ .

<sup>6</sup> Για εναλλακτικές θεωρήσεις, οι οποίες οδηγούν σε εκλογικευμένες τιμές του χρόνου χαλάρωσης –συμβατές με τον νόμο του Ohm–, στην περίπτωση καλών αγωγών, δείτε τις παρακάτω αναφορές:

(\*) H. Mott, W.D. Ruburn, and W.E. Webb, “Charge density in a conducting medium”, IEEE Proceedings, pp.899-900, July 1972.

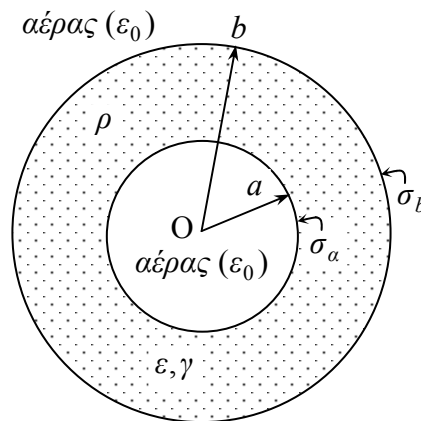
(\*\*) N.Ashby, “Relaxation of charge imbalances in conductors”, Am. J. Phys., vol.43, no.6, pp. 553-555, June 1975.

(\*\*\*) H.C.Ohanian, “On the approach to electro-and magneto-static equilibrium”, Am. J. Phys., vol.51, no.11, pp. 1020-1022, Nov. 1983.

(\*\*\*\*) E.J. Bochove and J.F.Walkup, “A communication on electrical charge relaxation in metals”, Am. J. Phys., vol.58, no.2, pp. 131-134, Feb 1990.



β) Η κατανομή των φορτίων, η πυκνότητα του ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη μόνιμη κατάσταση ( $t \rightarrow \infty$ ). Να δοθεί φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 4

### Λύση

α) Η διάταξη παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, δηλαδή ανεξαρτησία από τις σφαιρικές συντεταγμένες  $\theta$  και  $\varphi$  και επομένως εξάρτηση μόνο από την συντεταγμένη  $r$ .

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου [εξ. 1(I)] σε μια σφαίρα με ακτίνα  $r$ , όπου  $a < r < b$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (30)$$

Στην (29),  $Q$  είναι το συνολικό φορτίο το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας  $r$ . Χρησιμοποιώντας τις συντακτικές σχέσεις (7α) και (19), η (30) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \gamma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\gamma}{\varepsilon} Q = -\frac{dQ}{dt} \quad (31)$$

Στην (31) χρησιμοποιήσαμε τον νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό με τη μορφή

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

Το  $Q$  ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon} Q = 0 \quad (32)$$

της οποίας η λύση είναι

$$Q = Q(r, t) = Q(r, 0)e^{-t/\tau} \quad (33)$$

με  $\tau = \varepsilon/\gamma$  την χρονική σταθερά χαλάρωσης και  $Q(r, 0)$  την τιμή του συνολικού φορτίου στο

εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας  $r$ , κατά την χρονική στιγμή  $t=0$ . Παρατηρούμε ότι το  $Q(r,t)$  ελαττώνεται συνεχώς από την αρχική τιμή  $Q(r,0)$ , έως ότου μηδενιστεί στη μόνιμη κατάσταση ( $t \rightarrow \infty$ ).

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας της διάταξης, η πυκνότητα του ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα έχουν μόνο  $r$ -συνιστώσες. Χρήση των (33) και (29) δίνει

$$J_r(r,t)4\pi r^2 = \frac{Q(r,0)}{\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow J_r(r,t) = \frac{Q(r,0)}{4\pi r^2 \tau} e^{-t/\tau} \quad (34)$$

Όμως,

$$Q(r,0) = \sigma_a(0)4\pi a^2 + \int_a^r \rho(r',0)4\pi r'^2 dr' = \sigma_a(0)4\pi a^2 + \frac{4\pi\rho_0}{a^2} \frac{r^5 - a^5}{5} \quad (35)$$

Χρησιμοποιώντας την (35) στην (34) βρίσκουμε

$$J_r(r,t) = \left( \frac{\sigma_a(0)}{\tau} \frac{a^2}{r^2} + \frac{\rho_0}{5\tau} \frac{r^5 - a^5}{a^2 r^2} \right) e^{-t/\tau} \quad (a < r < b) \quad (36)$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο αγωγίμο κέλυφος είναι

$$E_r(r,t) = \frac{J_r(r,t)}{\gamma} = \left( \frac{\sigma_a(0)}{\varepsilon} \frac{a^2}{r^2} + \frac{\rho_0}{5\varepsilon} \frac{r^5 - a^5}{a^2 r^2} \right) e^{-t/\tau} \quad (a < r < b) \quad (37)$$

Για το φορτίο  $Q(r,t)$  ισχύει, αντίστοιχα με την (35), η σχέση

$$Q(r,t) = \sigma_a(t)4\pi a^2 + \int_a^r \rho(r',t)4\pi r'^2 dr' \quad (38)$$

Με χρήση των (35) και (38) στην (33) προκύπτει ότι

$$\sigma_a(t) = \sigma_a(0)e^{-t/\tau} \quad (39)$$

και

$$\rho(r,t) = \rho(r,0)e^{-t/\tau} = \rho_0 \frac{r^2}{a^2} e^{-t/\tau} \quad (a < r < b) \quad (40)$$

Οι σχέσεις (39) και (40) δείχνουν ότι τόσο τα επιφανειακά φορτία για  $r=a$ , όσο και τα χωρικά για  $a < r < b$  ελαττώνονται (αραιώνουν) συνεχώς, με συνέπεια την ελάττωση του συνολικού φορτίου  $Q(r,t)$  στην (33), το οποίο περιέχεται στην σφαίρα ακτίνας  $r$  ( $a < r < b$ ). Επομένως, φορτία βγαίνουν συνεχώς έξω από τη σφαίρα ακτίνας  $r$ , προκαλώντας ροή ρεύματος με πυκνότητα  $J_r(r,t)$  στο αγωγίμο κέλυφος [εξ.(36)]. Που καταλήγουν τελικά τα φορτία αυτά; Προφανώς στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγίμου κελύφους, με ακτίνα  $r=b$ , αφού δεν μπορούν απομακρυνθούν περισσότερο, διότι έξω από το κέλυφος υπάρχει αέρας ( $\gamma_{\alpha\epsilon\rho\alpha} = 0$ ). Έτσι, την χρονική στιγμή  $t \geq 0$ , στην επιφάνεια με  $r=b$ , εκτός από το φορτίο  $\sigma_b(0)4\pi b^2$ , που υπήρχε εκεί την χρονική στιγμή  $t=0$ , έχει έλθει και φορτίο  $\Delta Q(r=b-,t) = Q(r=b-,0) - Q(r=b-,t) = Q(r=b-,0)(1 - e^{-t/\tau})$ . Δηλαδή θα είναι

$$\sigma_b(t)4\pi b^2 = \sigma_b(0)4\pi b^2 + Q(r=b-,0)(1-e^{-t/\tau})$$

και επομένως

$$\sigma_b(t) = \sigma_b(0) + \frac{Q(r=b-,0)}{4\pi b^2}(1-e^{-t/\tau})$$

Με αντικατάσταση από την (35) για  $r=b-$  προκύπτει ότι

$$\sigma_b(t) = \sigma_b(0) + \left[ \sigma_a(0)\frac{a^2}{b^2} + \rho_0 \frac{b^5 - a^5}{5a^2b^2} \right] (1-e^{-t/\tau}) \quad (41)$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για  $r < a$  βρίσκεται με χρήση του νόμου του Gauss (31) σε μια σφαίρα με ακτίνα  $r < a$ . Είναι

$$D_r(r,t)4\pi r^2 = 0 \Rightarrow D_r(r,t) = 0 \Rightarrow E_r(r,t) = \frac{D_r(r,t)}{\epsilon_0} = 0 \quad (r < a, t \geq 0) \quad (42)$$

διότι  $Q(r,t) = 0$  για  $r < a$ , εφόσον δεν υπάρχουν φορτία εκεί σε καμμία χρονική στιγμή.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για  $r > b$  προκύπτει πάλι από την (31). Τώρα το  $Q(r,t)$  είναι το συνολικό φορτίο της διάταξης, το οποίο περικλείεται από κάθε σφαίρα με ακτίνα  $r > b$  και είναι σταθερό, ανεξάρτητο του χρόνου, δηλαδή  $Q(r,t) = Q(r,0)$  διότι εκείνο που συμβαίνει είναι ότι με την πάροδο του χρόνου απλά μετακινούνται φορτία μέσω του αγωγού από την επιφάνεια με  $r=a$  και την αγωγίμη περιοχή με  $a < r < b$  προς την εξωτερική επιφάνεια του κελύφους με  $r=b$ , όπου και συσσωρεύονται. Συνεπώς ισχύει ότι

$$D_r(r,t)4\pi r^2 = Q(r=b-,0) + \sigma_b(0)4\pi b^2 = \sigma_a(0)4\pi a^2 + \frac{4\pi\rho_0}{a^2} \frac{b^5 - a^5}{5} + \sigma_b(0)4\pi b^2$$

δηλαδή

$$D_r(r,t) = \left[ \sigma_a(0)a^2 + \rho_0 \frac{b^5 - a^5}{5a^2} + \sigma_b(0)b^2 \right] \frac{1}{r^2} \Rightarrow E_r(r,t) = \frac{D_r(r,t)}{\epsilon_0}, \quad (r > b, t \geq 0) \quad (43)$$

Στις (42) και (43) πήραμε υπόψη ότι, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας της διάταξης, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $r$ -συνιστώσα.

Τέλος, η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στις περιοχές με  $0 < r < a$  και  $r > b$ , όπου υπάρχει αέρας, είναι μηδενική, διότι εκεί  $J_r = \gamma_{αέρα} E_r$  και  $\gamma_{αέρα} = 0$ .

β) Στην μόνιμη κατάσταση ( $t \rightarrow \infty$ ) είναι φανερό από τις (39)-(41) ότι

$$\sigma_a(\infty) = 0, \quad \rho(r, \infty) = 0, \quad \sigma_b(\infty) = \sigma_b(0) + \sigma_a(0)\frac{a^2}{b^2} + \rho_0 \frac{b^5 - a^5}{5a^2b^2} \quad (44)$$

δηλαδή έχουν φύγει όλα τα ηλεκτρικά φορτία από την εσωτερική επιφάνεια του κελύφους με  $r=a$ , καθώς και από όλη την υπόλοιπη αγωγίμη περιοχή του με  $a < r < b$  και έχουν συγκεντρωθεί στην εξωτερική επιφάνεια με  $r=b$ , με επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma_b(\infty)$ , που δίνεται από την (44). Η

πυκνότητα του ρεύματος στο αγωγίμο κέλυφος μηδενίζεται, δηλαδή  $J_r(r, \infty) = 0$ , όπως διαπιστώνεται από την (36), διότι δεν υπάρχουν πλέον άλλα φορτία για να μετακινηθούν μέσω του αγωγού προς την εξωτερική επιφάνεια με  $r = b$ . Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο αγωγίμο κέλυφος επίσης μηδενίζεται, δηλαδή  $E_r(r, \infty) = 0$ , όπως φαίνεται από την (37) και όπως προκύπτει επίσης από τον νόμο του Gauss (31) όπου  $Q(r, \infty) = 0$  για  $a < r < b$ .

Για  $0 < r < a$  τόσο η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος όσο και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παραμένουν μηδενικές σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , όπου  $0 \leq t < \infty$ . Τέλος, για  $r > b$  είναι  $J_r(r, t) = 0$ , ενώ η  $E_r(r, t)$  δίνεται από την (43), δηλαδή και οι δυο παραμένουν σταθερές για  $0 \leq t < \infty$ .

**Παρατήρηση:** Η σχέση (40) μπορεί να προκύψει απευθείας με χρήση της εξίσωσης (28) της εφαρμογής για την ηλεκτρική χαλάρωση, η οποία προηγείται του παρόντος παραδείγματος. Επίσης η σχέση (39) μπορεί να προκύψει και ως εξής: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου (29) σε μία σφαίρα με ακτίνα  $r = a +$ . Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} J_r(r = a+, t)4\pi a^2 &= -\frac{d}{dt}[\sigma_a(t)4\pi a^2] \Rightarrow \gamma E_r(r = a+, t)4\pi a^2 = \frac{\gamma}{\varepsilon} D_r(r = a+, t)4\pi a^2 = -\frac{d\sigma_a(t)}{dt}4\pi a^2 \stackrel{(31)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \frac{\gamma}{\varepsilon} \sigma_a(t)4\pi a^2 &= -\frac{d\sigma_a(t)}{dt}4\pi a^2, \text{ δηλαδή} \\ \frac{d\sigma_a(t)}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon} \sigma_a(t) &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Η διαφορική εξίσωση (45) έχει ίδια μορφή με την (32) και η λύση της είναι

$$\sigma_a(t) = \sigma_a(0)e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (46)$$

δηλαδή η (39).

## 7. Οριακές συνθήκες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

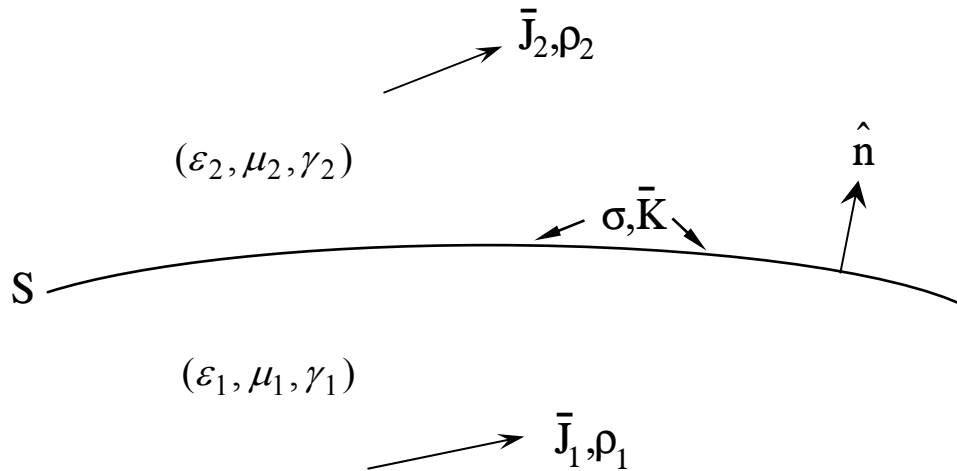
Όπως προαναφέραμε, υπό την ολοκληρωτική τους διατύπωση οι εξισώσεις Maxwell [Εξ. (1.I), (1.III)-(1.VI)] ισχύουν για οποιαδήποτε εκλογή των δρόμων, των επιφανειών και των όγκων, όπου εκτείνονται οι διάφορες ολοκληρώσεις που σημειώνονται σε αυτές.

Για σημεία στο εσωτερικό συνεχών μέσων βρήκαμε ότι οι εξισώσεις Maxwell ισοδυναμούν με ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων [Εξ. (3.5), (3.6), (3.9), (3.15) και (3.18)]. Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις δεν ισχύουν σε σημεία διαχωριστικών επιφανειών μεταξύ διαφορετικών μέσων. Αυτό γίνεται αμέσως φανερό ως εξής: Υπό το πρίσμα των συντακτικών σχέσεων προκύπτει ότι σε τέτοια σημεία τα πεδιακά μεγέθη  $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{J})$  είναι εν γένει ασυνεχείς<sup>7</sup> (δηλαδή μη παραγωγίσιμες) συναρτήσεις της θέσεως και επομένως οι διαφορικοί τελεστές που υπάρχουν στις υπό διαφορική μορφή εξισώσεις Maxwell δεν ορίζονται.

Σε σημεία τέτοιων συνοριακών επιφανειών οι εξισώσεις Maxwell ισοδυναμούν με ένα σύνολο **οριακών συνθηκών**, οι οποίες δείχνουν πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{J}$  κατά την μετάβαση από την μια όψη της συνοριακής επιφάνειας στην άλλη. Για την εξαγωγή των οριακών

<sup>7</sup> Υπό το πρίσμα, π.χ., των συντακτικών σχέσεων  $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$  και  $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$  για τα μέσα 1 και 2 γίνεται αμέσως φανερό ότι, αν υποθεθεί ότι κάποια από τις συνιστώσες του  $\vec{E}$  είναι συνεχής στα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ των μέσων αυτών, τότε η αντίστοιχη συνιστώσα του  $\vec{D}$  είναι κατ' ανάγκην ασυνεχής εφόσον  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ .

αυτών συνθηκών θα στηριχθούμε και πάλι στην ολοκληρωτική μορφή των νόμων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (η οποία, όπως σημειώσαμε, είναι εντελώς γενική, ισχύουσα ανεξαρτήτως της φύσεως των εμπλεκόμενων υλικών σωμάτων).

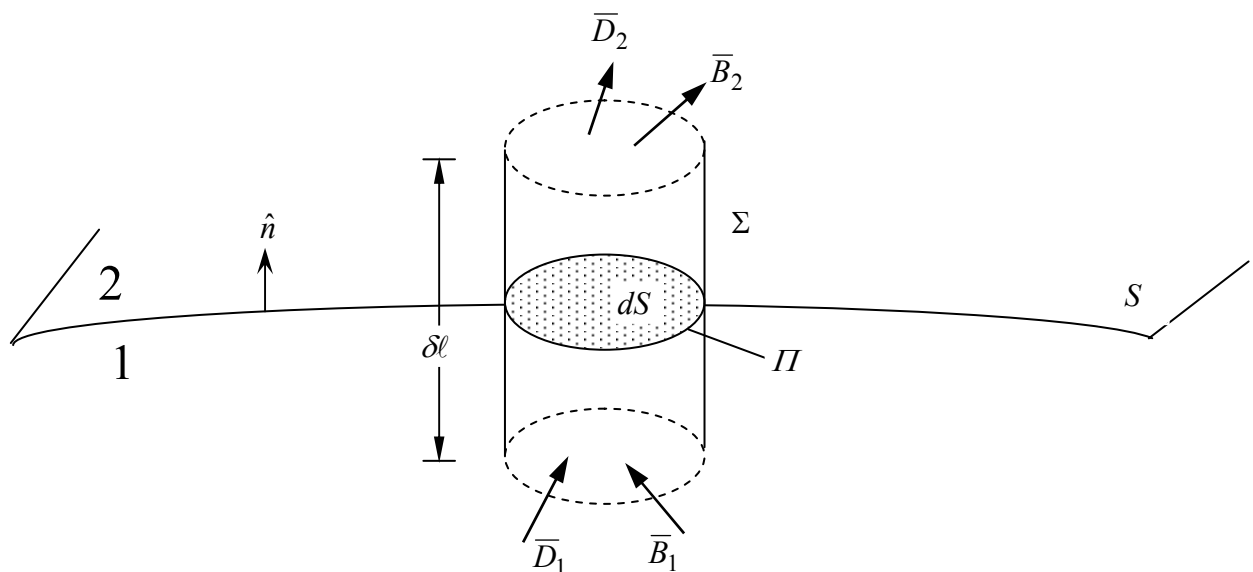


Σχήμα 1

Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια  $S$  που διαχωρίζει τα μέσα 1 και 2 είναι **λεία** (Σχ.1). Για λόγους γενικότητας θεωρούμε επίσης ότι, επί πλέον των χωρικών κατανομών  $\rho$  και  $\bar{\mathbf{J}}$  που ενδεχομένως υπάρχουν στα σημεία των ανοικτών περιοχών 1 και 2, στην επιφάνεια  $S$  υπάρχουν επιφανειακές κατανομές φορτίου και ρεύματος με πυκνότητες  $\sigma$  και  $\bar{\mathbf{K}}$ , αντίστοιχα, οι οποίες είναι συναρτήσεις της θέσεως και του χρόνου.

### 7.1 Οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του $\bar{\mathbf{D}}$

Επειδή η  $S$  υποτέθηκε λεία, το στοιχείο  $dS$  της επιφανείας αυτής μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά ως επίπεδο. Για την εφαρμογή των ολοκληρωτικών νόμων του Gauss, επιλέγουμε ως κλειστή επιφάνεια ένα βραχύ κύλινδρο  $\Sigma$  με γενέτειρες κάθετες στην  $dS$  (Σχ.2). Οι δυο βάσεις του κυλίνδρου τοποθετούνται εντός των μέσων 1 και 2, αντίστοιχα, εκάστη σε απόσταση  $\delta\ell/2$  από την  $dS$ , όπου το μήκος  $\delta\ell$  μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρό. Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι το  $\delta\ell$  επιλέγεται έτσι ώστε να είναι αμελητέο συγκρινόμενο με τον λόγο του εμβαδού προς την περίμετρο της στοιχειώδους επιφανείας  $dS$ .



Σχήμα 2

Με εφαρμογή του νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό,

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{ολικό} = \int_V \rho dV + \int_{dS} \sigma dS, \quad (1)$$

και χρήση του θεωρήματος της μέσης τιμής για καθένα από τα ολοκληρώματα στην (1), παίρνουμε τη σχέση

$$-\vec{D}_1 \cdot \hat{n} dS + \vec{D}_2 \cdot \hat{n} dS + A = \sigma dS + \rho_1 \left( \frac{1}{2} dS \delta \ell \right) + \rho_2 \left( \frac{1}{2} dS \delta \ell \right). \quad (2)$$

Στην (2),  $\hat{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στην  $dS$  **με φορά από το μέσο 1 προς το μέσο 2**,  $\sigma$  είναι η τιμή της επιφανειακής πυκνότητας στα σημεία της  $dS$ ,  $\vec{D}_1 \setminus \vec{D}_2$  είναι η τιμή του πεδίου στην κάτω/πάνω βάση του κυλίνδρου, ενώ  $\rho_1 \setminus \rho_2$  είναι η μέση τιμή της χωρικής πυκνότητας φορτίου στην περιοχή 1\2 εντός του κυλίνδρου. Τέλος η ποσότητα  $A$  αντιστοιχεί στη συμβολή, η οποία προέρχεται από την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, στο επιφανειακό ολοκλήρωμα που υπάρχει στο πρώτο μέλος της (1). Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, η ποσότητα αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$A = D'_1 \left( \frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) + D'_2 \left( \frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) \quad (3)$$

όπου  $\Pi$  είναι η περίμετρος της διατομής  $dS$  και  $D'_1$  και  $D'_2$  είναι οι μέσες τιμές των καθέτων συνιστωσών του πεδίου στα τμήματα 1 και 2 της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου.

Περνώντας στο όριο όπου  $\delta \ell \rightarrow 0$ , τότε τόσο η ποσότητα  $A$  όσο και οι όροι οι ανάλογοι του  $\delta \ell$  στην (2) μηδενίζονται, παίρνουμε

$$-\hat{n} \cdot \vec{D}_1 dS + \hat{n} \cdot \vec{D}_2 dS = \sigma dS \quad (4)$$

οπότε

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma. \quad (5)$$

ή, ισοδύναμα,

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (6)$$

Στην (6), με  $D_{1n}$  και  $D_{2n}$  συμβολίζουμε, ως συνήθως, τις συνιστώσες των  $\vec{D}_1$  και  $\vec{D}_2$  κατά την κατεύθυνση  $\hat{n}$ , δηλαδή τις συνιστώσες που είναι κάθετες στη διαχωριστική επιφάνεια.

Επομένως, η κάθετη συνιστώσα του διανύσματος  $\vec{D}$  παρουσιάζει πεπερασμένη ασυνέχεια στα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας δύο μέσων, ίση με την τιμή της επιφανειακής πυκνότητας των ελεύθερων φορτίων που, ενδεχομένως, υπάρχουν στα σημεία της επιφάνειας αυτής. Προφανώς, αν δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία στη διαχωριστική επιφάνεια, τότε η κάθετη συνιστώσα του  $\vec{D}$  είναι συνεχής.

## 7.2 Οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του $\vec{B}$

Με αναφορά στο Σχ.2, από τον νόμο του Gauss για το μαγνητισμό,

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (7)$$

παίρνουμε διαδοχικά τις παρακάτω σχέσεις -ανάλογες των (2) και (3),

$$-\vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS + \vec{B}_2 \cdot \hat{n} dS + A = 0 \quad (8)$$

$$A = B'_1 \left( \frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) + B'_2 \left( \frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) \quad (9)$$

όπου  $\Pi$  είναι και πάλι η περίμετρος της στοιχειώδους επιφάνειας  $dS$ , ενώ  $B'_1$  και  $B'_2$  είναι οι μέσες τιμές των καθέτων συνιστωσών του πεδίου  $\bar{B}$  στα τμήματα 1 και 2 της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου.

Περνώντας στο όριο όπου  $\delta \ell \rightarrow 0$ , οπότε η ποσότητα  $A$  μηδενίζεται, παίρνουμε

$$-\hat{n} \cdot \bar{B}_1 dS + \hat{n} \cdot \bar{B}_2 dS = 0. \quad (10)$$

Επομένως

$$\hat{n} \cdot (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) dS = 0 \Leftrightarrow B_{2n} = B_{1n}. \quad (11)$$

Άρα, η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσα του διανύσματος  $\bar{B}$  είναι παντού συνεχής.

### 7.3 Οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του $\bar{J}$

Με εφαρμογή της εξισώσεως συνεχείας (αναφορά: Σχ.3),

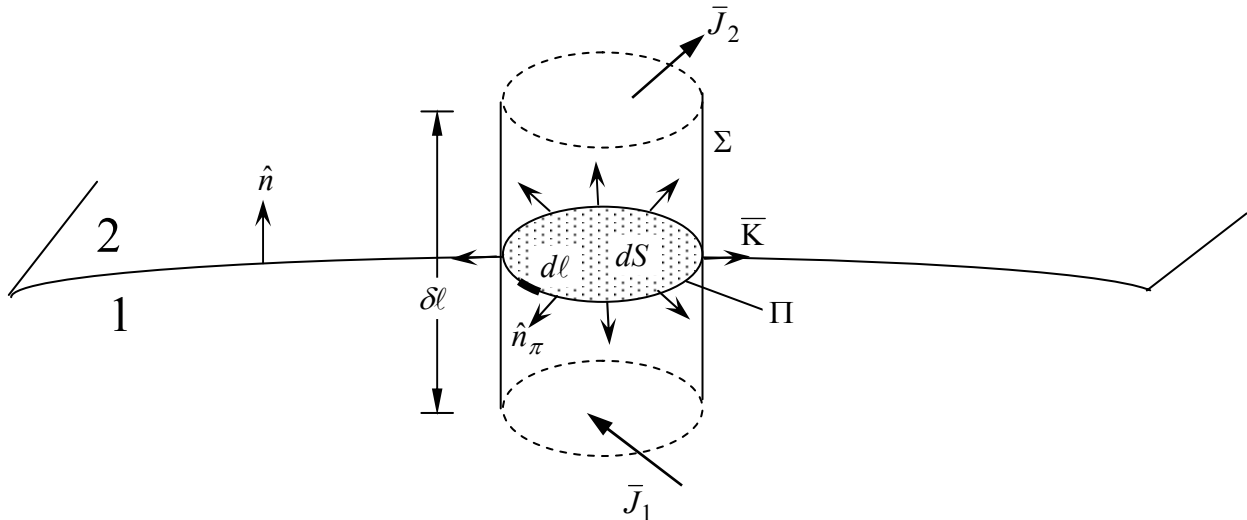
$$\oint_{\Sigma} \bar{J} \cdot d\bar{S} = -\frac{dQ_{ολικό}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV - \frac{d}{dt} \int_{dS} \sigma dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV - \int_{dS} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS, \quad (12)$$

παίρνουμε διαδοχικά τις παρακάτω σχέσεις -ανάλογες των (2) και (3):

$$-\hat{n} \cdot \bar{J}_1 dS + \hat{n} \cdot \bar{J}_2 dS + A = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \left( \frac{1}{2} dS \delta \ell \right) - \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \left( \frac{1}{2} dS \delta \ell \right) - \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS \quad (13)$$

$$A = J_{1\pi} \left( \frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) + J_{2\pi} \left( \frac{1}{2} \Pi \delta \ell \right) + \oint_C \bar{K} \cdot \hat{n}_{\pi} d\ell \quad (14)$$

όπου  $\Pi$  είναι η περίμετρος της στοιχειώδους επιφάνειας  $dS$ ,  $J_{1\pi}$  και  $J_{2\pi}$  είναι οι μέσες τιμές των καθέτων συνιστωσών της ρευματικής πυκνότητας  $\bar{J}$  στα τμήματα 1 και 2 της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου, ενώ  $\hat{n}_{\pi}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που βρίσκεται στο επίπεδο της στοιχειώδους επιφάνειας  $dS$  και διευθύνεται κάθετα στο περίγραμμα  $\Pi$  με φορά προς τα έξω (Σχ.3). Προφανώς, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση εκφράζει την συμβολή του επιφανειακού ρεύματος στο ηλεκτρικό ρεύμα που εξέρχεται από την κλειστή επιφάνεια  $\Sigma$ .



Σχήμα 3.

Περνώντας στο όριο όπου  $\delta\ell \rightarrow 0$ , οπότε όλοι οι όροι οι ανάλογοι του  $\delta\ell$  μηδενίζονται, παίρνουμε τη σχέση

$$-\hat{n} \cdot \bar{J}_1 dS + \hat{n} \cdot \bar{J}_2 dS + \oint_{\gamma} \bar{K} \cdot \hat{n}_{\pi} d\ell = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} dS. \quad (15)$$

Από τη σχέση αυτή, στο όριο όπου  $dS \rightarrow 0$ , προκύπτει ότι

$$\hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{1}{dS} \oint_{\gamma} \bar{K} \cdot \hat{n}_{\pi} d\ell \Rightarrow \hat{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla_S \cdot \bar{K} \quad (16)$$

όπου κατά το τελευταίο βήμα στην (16) χρησιμοποιήσαμε τη σχέση ορισμού

$$\nabla_S \cdot \bar{K} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{1}{dS} \oint_{\gamma} \bar{K} \cdot \hat{n}_{\pi} d\ell \quad (17)$$

της διδιάστατης αποκλίσεως του διανύσματος  $\bar{K}$ .

**Σημείωση:** Στην ειδική περίπτωση, όπου η επιφάνεια  $S$  ταυτίζεται με κάποια από τις συντεταγμένες επιφάνειες ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, το μέγεθος  $\nabla_S \cdot \bar{K}$  έχει την έκφραση της τριδιάστατης αποκλίσεως,  $\nabla \cdot \bar{K}$ , στην οποία ο αντίστοιχος της σταθερής συντεταγμένης όρος παραλείπεται. Έτσι, π.χ., όταν η επιφάνεια  $S$  είναι το επίπεδο  $xy$ , τότε

$$\nabla_S \cdot \bar{K} \equiv \nabla_{xy} \cdot \bar{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y}.$$

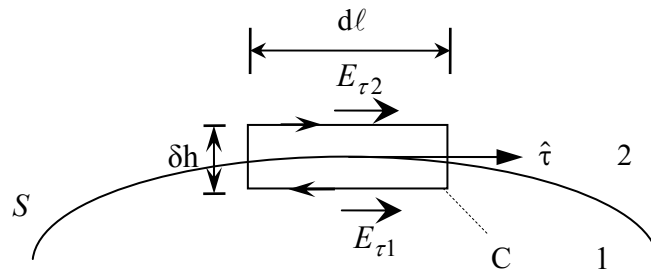
Ομοίως, στην περίπτωση της κυλινδρικής επιφάνειας με εξίσωση  $r = \text{σταθερό}$ , έχουμε το αποτέλεσμα

$$\nabla_S \cdot \bar{K} \equiv \nabla_{\varphi z} \cdot \bar{K} = \frac{1}{r} \frac{\partial K_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial K_z}{\partial z}.$$

Η οριακή συνθήκη (16) φανερώνει ότι η κάθετη συνιστώσα της ρευματικής πυκνότητας  $\bar{J}$  σε σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας δυο μέσων είναι γενικά ασυνεχής, με όρο ασυνέχειας την ποσότητα  $-\partial \sigma / \partial t - \nabla_S \cdot \bar{K}$ .

#### 7.4 Οριακή συνθήκη για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του $\bar{E}$

Η συμπεριφορά των εφαπτομενικών συνιστωσών του  $\bar{E}$  στα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας  $S$  μεταξύ των μέσων 1 και 2 (Σχ.4) βρίσκεται ως εξής:



(α)





επιφάνειας δύο μέσων. Υπό διανυσματική μορφή, η (20) γράφεται ισοδύναμα και ανεξάρτητα της επιλογής της εφαπτομενικής διεύθυνσης  $\hat{\tau}$  ως εξής:

$$\hat{n} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = 0 \quad (21)$$

όπου  $\hat{n}$  είναι και πάλι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια με φορά από το μέσο 1 προς το μέσο 2.

### 7.5 Οριακή συνθήκη για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του $\bar{H}$

Εφαρμογή του νόμου των Maxwell-Ampere,

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \int_{\Sigma} \bar{J} \cdot d\bar{S} + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{S}, \quad (22)$$

με αναφορά στον ορθογωνικό βρόχο C του Σχ.4β, οδηγεί στη σχέση -ανάλογη της (19)

$$\begin{aligned} H_{\tau 2} d\ell - H_{\tau 1} d\ell + H_{AB} \delta h - H_{\Gamma \Delta} \delta h = \\ = \frac{1}{2} (\delta h)(d\ell) J_{s1} + \frac{1}{2} (\delta h)(d\ell) J_{s2} + K_s d\ell + \frac{1}{2} (\delta h)(d\ell) \frac{\partial D_{s1}}{\partial t} + \frac{1}{2} (\delta h)(d\ell) \frac{\partial D_{s2}}{\partial t} \end{aligned} \quad (23)$$

Από την (23), στο όριο όπου  $\delta h \rightarrow 0$ , προκύπτει ότι

$$H_{\tau 2} d\ell - H_{\tau 1} d\ell = K_s d\ell.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} H_{\tau 2} - H_{\tau 1} = K_s \Leftrightarrow \hat{\tau} \cdot (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K} \cdot \hat{s} \Leftrightarrow -(\hat{n} \times \hat{s}) \cdot (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K} \cdot \hat{s} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1)] \cdot \hat{s} = \bar{K} \cdot \hat{s}. \end{aligned} \quad (24)$$

Η σχέση (24), επειδή ισχύει για οποιαδήποτε εφαπτομενική κατεύθυνση  $\hat{s}$ , υποδηλώνει ότι

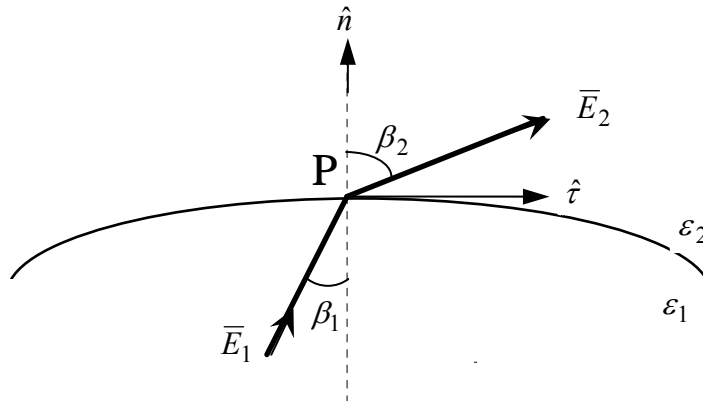
$$\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K}. \quad (25)$$

Επομένως οι εφαπτομενικές συνιστώσες του  $\bar{H}$  είναι ασυνεχείς στα σημεία συνοριακών επιφανειών, η δε ασυνέχεια είναι ανάλογη της τιμής της πυκνότητας των ελευθέρων επιφανειακών ρευμάτων.

### Παράδειγμα 1: Διάθλαση δυναμικών γραμμών σε διηλεκτρικά

Η παρακάτω διάταξη (Σχ.5) περιλαμβάνει δυο διηλεκτρικά μέσα με διηλεκτρικές σταθερές  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ , αντίστοιχα. Επιφανειακά φορτία δεν υπάρχουν. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου  $\bar{E}_1$  στο μέσο 1 στο σημείο P της διαχωριστικής επιφάνειας έχει μέτρο  $E_1$  και σχηματίζει γωνία  $\beta_1$  με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια, όπως στο σχήμα. Να βρεθούν τα αντίστοιχα μεγέθη  $E_2$  και  $\beta_2$  για την ένταση  $\bar{E}_2$  του ηλεκτρικού πεδίου στο μέσο 2, στο σημείο P.

**Λύση**



Σχήμα 5

Αναλύουμε την ένταση του πεδίου σε συνιστώσες κάθετες και εφαπτομενικές στην επιφάνεια:

$$\bar{E}_1(P) = E_{1\tau} \hat{\tau} + E_{1n} \hat{n}, \quad \bar{E}_2(P) = E_{2\tau} \hat{\tau} + E_{2n} \hat{n}.$$

Από τις οριακές συνθήκες για τις κάθετες συνιστώσες του  $\bar{D}$  και για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του  $\bar{E}$  προκύπτει ότι

- $\hat{n} \cdot [\bar{D}_2(P) - \bar{D}_1(P)] (= \sigma) = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n} \Rightarrow \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} \Rightarrow \epsilon_2 E_2 \cos \beta_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \beta_1,$
- $E_{2\tau} = E_{1\tau} \Rightarrow E_2 \sin \beta_2 = E_1 \sin \beta_1.$

Με διαίρεση κατά μέλη των τελευταίων δύο εξισώσεων παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

από την οποία προσδιορίζεται η άγνωστη γωνία  $\beta_2$ . Τέλος, το άγνωστο μέτρο  $E_2$  βρίσκεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \sin \beta_2)^2 + (E_2 \cos \beta_2)^2} = \sqrt{(E_1 \sin \beta_1)^2 + \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \beta_1 \right)^2} = \\ &= E_1 \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos \beta_1 \right)^2} \end{aligned}$$

## 7.6 Αλληλεξάρτηση των οριακών συνθηκών

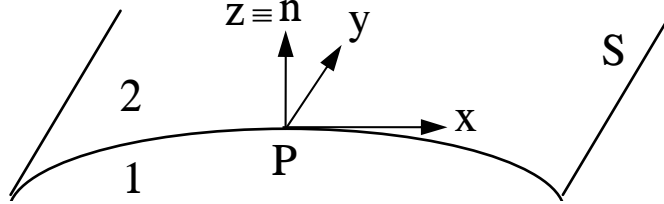
### A. Χρονοσταθερά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία

Σε περιπτώσεις χρονοσταθερών πεδίων, οι παραπάνω πέντε οριακές συνθήκες [Εξ. (5), (11), (16), (21), (25)] είναι όλες γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, λόγω της ανεξαρτησίας των παραγουσών εξισώσεων (2.1α), (2.1β), (2.2α), (2.2β), (2.2γ) της ενότητας 2.

## B. Χρονικά μεταβαλλόμενα (ηλεκτρομαγνητικά) πεδία

Για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ισχύουν τα εξής:

A. Όπως αποδείξαμε στην ενότητα 2, ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό [εξ.(7)] δεν αποτελεί ανεξάρτητη αλλά παράγωγο εξίσωση, δυναμένη να προκύψει από τον νόμο των Maxwell-Faraday [εξ.(18)]. Επομένως είναι λογικό να αναμένουμε ότι η οριακή συνθήκη (11), η οποία προέκυψε από την (7), δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητη της οριακής συνθήκης (21), η οποία στηρίζεται στην (18).



Σχήμα 6

Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί και κατά τρόπο άμεσο με αναφορά στο Σχ.6, όπου θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα συνταταγμένων  $P(x,y,n)$  με την αρχή του τοποθετημένη στο σημείο P της διαχωριστικής επιφάνειας S. Οι άξονες Px και Py είναι εφαπτομενικοί στην S, ενώ ο άξονας  $Pz \equiv Pn$  είναι κάθετος στην επιφάνεια αυτή. Από τη διαφορική μορφή του νόμου Maxwell-Faraday,

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (26)$$

εξισώνοντας τις z- (ή **n**-) συνιστώσες των δυο μελών της, προκύπτει η ισότητα

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_n}{\partial t}. \quad (27)$$

Η συνέχεια -σύμφωνα με την οριακή συνθήκη (20) [ή (21)]- των εφαπτομενικών συνιστωσών  $E_x$  και  $E_y$  στο σημείο P της διαχωριστικής επιφάνειας S εξασφαλίζει τη συνέχεια των μερικών παραγώγων  $\partial E_y / \partial x$  και  $\partial E_x / \partial y$  κατά την κατεύθυνση οποιουδήποτε **εφαπτομενικού** διανύσματος  $\hat{t}$ . Επομένως οι μερικές παράγωγοι  $\partial E_y / \partial x$  και  $\partial E_x / \partial y$  (κατά τις εφαπτομενικές κατευθύνσεις  $\hat{x}$  και  $\hat{y}$ , αντίστοιχα) είναι συνεχείς οπότε, λόγω της (27), και η χρονική παράγωγος  $\partial B_n / \partial t$  είναι επίσης συνεχής. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η κάθετη συνιστώσα  $B_n$  είναι συνεχής συνάρτηση της θέσεως για τα σημεία της συνοριακής επιφάνειας, δηλαδή καταλήγουμε και πάλι στην οριακή συνθήκη (11).

B. Όπως επίσης αποδείξαμε στην ενότητα 2, ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό [εξ.(1)] προκύπτει ως άμεση συνέπεια, αν δεχθούμε ως ανεξάρτητες εξισώσεις τον νόμο Maxwell-Ampere και την εξίσωση συνεχείας. Αυτό σημαίνει ότι, αν δεχθούμε ότι ισχύουν οι οριακές συνθήκες (25) και (16), τότε η οριακή συνθήκη (5) για τις κάθετες συνιστώσες του  $\bar{D}$  προκύπτει ως άμεση συνέπεια. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί και κατά τρόπο άμεσο, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

### Συμπέρασμα

Κατά την κατάστρωση και επίλυση προβλημάτων οριακών συνθηκών του χρονικά μεταβαλλόμενου (δηλαδή του **ηλεκτρομαγνητικού**) πεδίου **αρκεί η εφαρμογή των οριακών συνθηκών (21) και (25) για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του  $\bar{E}$  και του  $\bar{H}$** . Πλήρωση των συνθηκών αυτών εξασφαλίζει

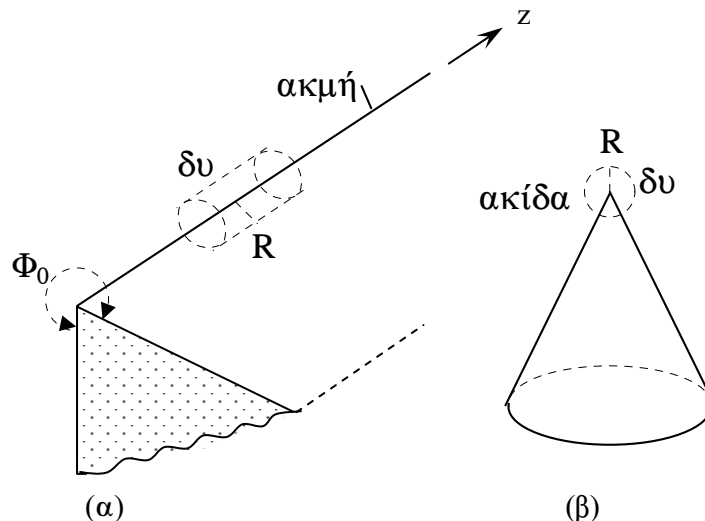
την ικανοποίηση και των οριακών συνθηκών (5) και (11). (Εξυπακούεται ότι και η οριακή συνθήκη (16), που αλληλοσυνδέει τις πηγές μεταξύ τους, θα ικανοποιείται εφόσον οι πηγές είναι σωστά ορισμένες).

### Παρατήρηση

Οι παραπάνω οριακές συνθήκες (5), (11), (16), (21) και (25) είναι τελείως γενικές, ισχύουσες ανεξάρτητα από την φύση και τις ιδιότητες των μέσων 1 και 2 (ισοτροπικά-ανισοτροπικά, γραμμικά-μη γραμμικά, κ.λ.π. μέσα).

### 7.7 Οριακές συνθήκες σε ιδιόμορφα σημεία διαχωριστικών επιφανειών

Σε ιδιόμορφα σημεία συνοριακών επιφανειών, όπως π.χ. κατά μήκος ακμών (Σχ.7α) ή σε ακίδες (Σχ.7β), οι παραπάνω οριακές συνθήκες δεν ισχύουν. Αυτό συμβαίνει διότι, α) η επιφάνεια  $S$  δεν είναι ομαλή σε τέτοια σημεία, οπότε το διάνυσμα  $\hat{n}$  που υπεισέρχεται στις οριακές συνθήκες δεν ορίζεται για τα σημεία αυτά, και β) είναι δυνατόν ορισμένες από τις συνιστώσες του πεδίου στη γειτονιά τέτοιων ιδιομορφιών να πάρουν άπειρη τιμή. (Υπενθυμίζεται σχετικά ότι, π.χ., για την εξαγωγή της οριακής συνθήκης (20) χρειάστηκε να υποθέσουμε ότι οι εμπλεκόμενες σε αυτή πεδιακές συνιστώσες είναι πεπερασμένες).



Σχήμα 7

Στις περιπτώσεις αυτές ισχύουν άλλες οριακές συνθήκες, γνωστές ως **συνθήκες των άκρων ή συνθήκες ακμών (edge conditions)**. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που βρίσκεται ενταμιευμένη στη γειτονιά ιδιομόρφων σημείων πρέπει να είναι **πεπερασμένη**. Στην περίπτωση ενός απλού μέσου με παραμέτρους  $(\epsilon, \mu)$ , τη μαθηματική έκφραση της συνθήκης των άκρων αποτελεί η εξίσωση

$$\frac{1}{2} \int_{\delta V} (\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dV = \text{πεπερασμένο} \quad (28)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε πεπερασμένη περιοχή  $\delta V$  που περιβάλλει το ιδιόμορφο σημείο.

[**Σημείωση:** Το ολοκλήρωμα στο πρώτο σκέλος της (28) αποτελεί την έκφραση της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας που είναι ενταμιευμένη στον όγκο  $\delta V$ , όπως θα δείξουμε στο κεφάλαιο 5].

### Φυσική σημασία της συνθήκης των άκρων

Η φυσική σημασία της συνθήκης των άκρων γίνεται φανερή αν επικαλεστούμε το γεγονός ότι η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που είναι ενταμιευμένη σε πεπερασμένη περιοχή του χώρου, η οποία περιλαμβάνει οποιεσδήποτε φυσικές (πραγματοποιησιμες) πηγές, πρέπει να είναι πεπερασμένη.

Με αναφορά στο Σχ.7, ας υποθέσουμε για απλότητα ότι η σφήνα (Σχ.7α) ή ο κώνος (Σχ.7β) είναι τέλειοι αγωγοί. Οι πρωτογενείς πηγές του πεδίου βρίσκονται κάπου στον περιβάλλοντα χώρο (δεν δείχνονται στο σχήμα).

Τα ιδιόμορφα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, που διεγείρονται στη γειτονιά των παραπάνω ιδιομόρφων σημείων, οφείλονται σε επιφανειακά ρεύματα που επάγονται στην επιφάνεια του αγωγού. Φυσικά, η ενέργεια των επαγομένων αυτών ρευμάτων δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια των πραγματικών (επιβαλλομένων) πηγών. Έτσι εύλογα τίθεται η απαίτηση, που διατυπώνεται με την σχέση (28), σύμφωνα με την οποία η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που αποθηκεύεται στη γειτονιά των ιδιομόρφων γεωμετρικών σημείων της διατάξεως οφείλει να είναι πεπερασμένη.

### **Συνέπειες της συνθήκης των άκρων**

Όπως προαναφέρθηκε, ορισμένες από τις συνιστώσες του πεδίου είναι δυνατόν, υπό προϋποθέσεις, να τείνουν στο άπειρο καθώς το σημείο παρατηρήσεως προσεγγίζει κάποιο ιδιόμορφο σημείο. (Στην περίπτωση της διατάξεως του Σχ.7α, π.χ., η δυνατότητα αυτή εξαρτάται από την τιμή που έχει το γωνιακό άνοιγμα  $\Phi_0$  της σφήνας).

Η συνθήκη των άκρων θέτει περιορισμούς στον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτός ο απειρισμός του πεδίου, ο οποίος δεν μπορεί επομένως να είναι αυθαίρετος. Στην περίπτωση της τέλεια αγωγίμης σφήνας, θεωρούμε μια στοιχειώδη κυλινδρική περιοχή  $\delta V$  με άξονα την ακμή και ακτίνα  $R$ . Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \varphi, z)$  το στοιχείο όγκου ισούται με  $r dr d\varphi dz$ . Αν υποθέσουμε<sup>8</sup> ότι οι πεδιακές συνιστώσες έχουν εκφράσεις της μορφής  $f(r)\Psi(\varphi, z)$  καθώς  $r \rightarrow 0$ , όπου  $\Psi(\varphi, z)$  είναι ομαλή συνάρτηση των  $(\varphi, z)$ , τότε η συνθήκη (28) οδηγεί στη σχέση

$$\int_0^R |f(r)|^2 r dr = \text{πεπερασμένο}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $|f(r)|^2$  δεν μπορεί να τείνει στο άπειρο ταχύτερα από  $r^{-2(1-a)}$  καθώς  $r \rightarrow 0$ , όπου  $a$  είναι αυθαίρετα μικρή θετική ποσότητα. Επομένως καμιά συνιστώσα του πεδίου δεν μπορεί να αυξηθεί ταχύτερα από  $r^{-1+a}$  ( $a > 0$ ) καθώς  $r \rightarrow 0$ .

Στην περίπτωση του κώνου του σχήματος 7β, θεωρούμε μια στοιχειώδη σφαιρική περιοχή  $\delta V$  με κέντρο την κορυφή του κώνου και ακτίνα  $R$ . Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$  το στοιχείο όγκου ισούται με  $r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ . Αν υποθέσουμε ότι η πεδιακή συνιστώσα που μας ενδιαφέρει έχει μια έκφραση της μορφής  $f(r)\Psi(\theta, \varphi)$  καθώς  $r \rightarrow 0$ , όπου  $\Psi(\theta, \varphi)$  είναι ομαλή συνάρτηση των  $(\theta, \varphi)$ , τότε η συνθήκη (28) οδηγεί στη σχέση

$$\int_0^R |f(r)|^2 r^2 dr = \text{πεπερασμένο}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $|f(r)|^2$  δεν μπορεί να τείνει στο άπειρο ταχύτερα από  $r^{-3+2a}$  καθώς  $r \rightarrow 0$ , όπου  $a$  είναι αυθαίρετα μικρή θετική ποσότητα. Επομένως καμιά συνιστώσα του πεδίου δεν μπορεί να αυξηθεί ταχύτερα από  $r^{-(3/2)+a}$  ( $a > 0$ ) καθώς  $r \rightarrow 0$ .

### **8. Θεώρημα μοναδικότητας των λύσεων των προβλημάτων οριακών συνθηκών του ΗΜ πεδίου**

Το θεώρημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Σε ομογενή, γραμμικά και ισοτροπικά μέσα, μια λύση των εξισώσεων Maxwell που ικανοποιεί δεδομένες οριακές και αρχικές συνθήκες είναι μοναδική.

#### **Απόδειξη**

Θεωρούμε πεπερασμένη περιοχή  $V$  του χώρου με σύνορο την κλειστή επιφάνεια  $S$  (Σχ.1). Το μέρος των πηγών που ενδεχομένως βρίσκεται στον όγκο αυτό συμβολίζουμε παρακάτω με τις χωρικές πυκνότητες  $\rho, \vec{J}$ . Το μέσο που πληροί τον όγκο  $V$  περιγράφεται με συντακτικές σχέσεις της μορφής

<sup>8</sup>Αυτό πράγματι συμβαίνει όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο

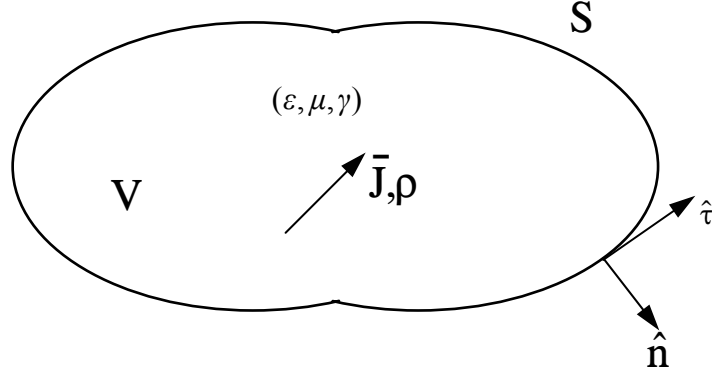
$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \bar{B} = \mu \bar{H}, \bar{J}_c = \gamma \bar{E} \quad (1)$$

όπου  $\varepsilon > 0, \mu > 0, \gamma > 0$ .

Η πυκνότητα των πηγών  $\bar{J}$  είναι γενικώς το άθροισμα

$$\bar{J} = \bar{J}_\pi(\bar{r}, t) + \bar{J}_c(\bar{r}, t), \quad (2)$$

όπου  $\bar{J}_\pi$  είναι η πυκνότητα των επιβαλλομένων πηγών και  $\bar{J}_c$  η πυκνότητα των ρευμάτων αγωγιμότητας (επαγόμενες πηγές).



Σχήμα 1

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, υποθέτοντας ότι υπάρχουν δυο λύσεις (συμβολιζόμενες παρακάτω με τους δείκτες 1 και 2, αντιστοίχα). Αμφότερες οι λύσεις αυτές ικανοποιούν:

**A. τις εξισώσεις Maxwell με πηγές  $\rho, \bar{J}$ :**

$$\nabla \times \bar{E}_{1,2} = -\frac{\partial \bar{B}_{1,2}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \bar{H}_{1,2} = \bar{J}_\pi + \bar{J}_{c1,2} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}_{1,2}}{\partial t} = \bar{J}_\pi + \gamma \bar{E}_{1,2} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}_{1,2}}{\partial t} \quad (4)$$

**B. τις δεδομένες οριακές συνθήκες.**

Οι συνθήκες αυτές αναφέρονται στις εφαπτομενικές συνιστώσες  $\bar{E}_\tau$  και  $\bar{H}_\tau$  στα σημεία της επιφάνειας S (βλέπε το **Συμπέρασμα** στο τέλος της ενότητας 7.6) και μπορεί να έχουν οποιαδήποτε από τις παρακάτω τρεις μορφές (βλέπε Σχ.2α, Σχ.2β, Σχ.2γ, αντίστοιχα):

- $\bar{E}_{\tau 1,2}(\bar{r}, t) = \bar{f}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in S$  (5)

ή

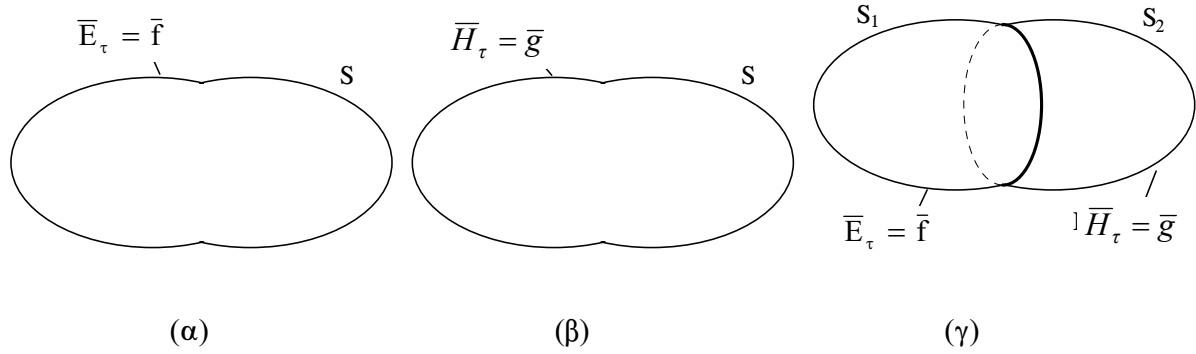
- $\bar{H}_{\tau 1,2}(\bar{r}, t) = \bar{g}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in S$  (6)

ή

- $\bar{E}_{\tau 1,2}(\bar{r}, t) = \bar{f}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in S_1 \quad \text{και} \quad \bar{H}_{\tau 1,2}(\bar{r}, t) = \bar{g}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} \in S_2, \quad (7)$

όπου  $S_1 + S_2 = S$

( $\bar{f}, \bar{g}$  είναι δεδομένες διανυσματικές συναρτήσεις της θέσεως πάνω στην επιφάνεια, καθώς και του χρόνου).



Σχήμα 2

**Γ. τις αρχικές συνθήκες:**

$$\bar{E}_{1,2}(\bar{r}, t_0) = \bar{w}(\bar{r}, t_0), \quad (8)$$

$$\bar{H}_{1,2}(\bar{r}; t_0) = \bar{u}(\bar{r}; t_0) \quad (9)$$

όπου  $\bar{w}, \bar{u}$  είναι, επίσης, δεδομένες διανυσματικές συναρτήσεις.

Επειδή, λόγω της γραμμικότητας, ισχύει η αρχή της υπερθέσεως των λύσεων, τα διανυσματικά πεδία  $\bar{E} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$  και  $\bar{H} = \bar{H}_1 - \bar{H}_2$  ικανοποιούν:

**A' τις σχέσεις:**

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \gamma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (11)$$

**B' κάποια από τις παρακάτω τρεις οριακές συνθήκες για τις εφαπτομενικές συνιστώσες:**

- $\bar{E}_{\tau}(\bar{r}, t) = 0, \quad \bar{r} \in S \quad (12)$

ή

- $\bar{H}_{\tau}(\bar{r}, t) = 0, \quad \bar{r} \in S \quad (13)$



ή

$$\bullet \quad \bar{E}_\tau(\bar{r}, t) = 0, \quad \bar{r} \in S_1 \quad \text{και} \quad \bar{H}_\tau(\bar{r}, t) = 0, \quad \bar{r} \in S_2, \quad (14)$$

*Γ' τις αρχικές συνθήκες:*

$$\bar{E}(\bar{r}, t_0) = 0, \quad (15)$$

$$\bar{H}(\bar{r}, t_0) = 0. \quad (16)$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τις (10) και (11) με  $\bar{\mathbf{H}}$  και  $\bar{\mathbf{E}}$ , αντίστοιχα, αφαιρώντας κατά μέλη τις προκύπτουσες εξισώσεις και χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα:

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) = \bar{\mathbf{H}} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) - \bar{\mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) \quad (17)$$

προκύπτει η σχέση

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) + \bar{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} + \gamma \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0. \quad (18)$$

Ολοκληρώνοντας την (18) στον όγκο V και χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα

$$\int_V \nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) dV = \oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (19)$$

καθώς και τις σχέσεις

$$\bar{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}}), \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \quad (21)$$

προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) dV + \gamma \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV = 0, \quad (22)$$

το οποίο λόγω των οριακών συνθηκών (12)-(14) γίνεται

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) dV + \gamma \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV = 0. \quad (23)$$

Ολοκληρώνοντας την (23) ως προς τον χρόνο, από  $t_0$  μέχρι την αυθαίρετη χρονική στιγμή  $t$ , προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_t dV - \frac{1}{2} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_{t_0} dV + \gamma \int_{t_0}^t dt \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV = 0. \quad (24)$$

[οι δείκτες  $t$  και  $t_0$  στις ολοκληρωτέες συναρτήσεις των δυο πρώτων ολοκληρωμάτων στην (24) χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν την χρονική στιγμή ( $t$  ή αντίστοιχα  $t_0$ ) για την οποία υπολογίζονται οι ολοκληρωτέες αυτές συναρτήσεις]. Από την (24), μέσω των αρχικών συνθηκών (15) και (16), προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\frac{1}{2} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}})_t dV = -\gamma \int_{t_0}^t dt \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV \Rightarrow \frac{1}{2} \int_V (\epsilon |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \mu |\bar{\mathbf{H}}|^2)_t dV = -\gamma \int_{t_0}^t dt \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV \quad (25)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκαν οι συντακτικές σχέσεις (1).

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της τελευταίας σχέσεως είναι μονίμως θετικό, ενώ το δεύτερο μέλος είναι μονίμως αρνητικό, οπότε πρέπει να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις

$$\gamma |\bar{\mathbf{E}}|^2 = 0, \quad (26\alpha)$$

$$\epsilon |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \mu |\bar{\mathbf{H}}|^2 = 0. \quad (26\beta)$$

Από τις (26) προκύπτει ότι

$$\bar{\mathbf{E}} = 0, \bar{\mathbf{H}} = 0. \quad (27)$$

Επομένως  $\bar{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{E}}_2$  και  $\bar{\mathbf{H}}_1 = \bar{\mathbf{H}}_2$ , δηλαδή η λύση είναι μοναδική.

### Παρατηρήσεις

A. Όταν η περιοχή  $V$  δεν είναι περιορισμένη, αλλά εκτείνεται μέχρι του απείρου, η μοναδικότητα της λύσεως εξαρτάται από τη συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων στο όριο όπου  $r \rightarrow \infty$ . Η συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων αυτών εξαρτάται, με τη σειρά της, από την συμπεριφορά των πεδίων  $\bar{\mathbf{E}}$  και  $\bar{\mathbf{H}}$  για  $r \rightarrow \infty$ . Αποδεικνύεται σχετικά ότι, όταν οι πηγές είναι εντοπισμένες σε πεπερασμένη περιοχή του χώρου και είτε α) οι οριακές συνθήκες στο άπειρο αντιστοιχούν στη λεγόμενη **συνθήκη ακτινοβολίας**, είτε β) οι πεδιακές συνιστώσες μηδενίζονται στο άπειρο, τότε οι λύσεις των εξισώσεων Maxwell είναι και πάλι μοναδικές.

Η συνθήκη ακτινοβολίας, διατυπωθείσα αρχικά από τον Sommerfeld, συνίσταται στην εξής απαίτηση η οποία υπαγορεύεται από καθαρά φυσικούς λόγους: σε περιοχές του χώρου οι οποίες εκτείνονται μέχρι του απείρου, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια πρέπει να μεταδίδεται απομακρυνόμενη από τις πηγές. Με άλλα λόγια, για να είναι φυσικώς αποδεκτές, οι πεδιακές λύσεις πρέπει να παριστάνουν κύματα τα οποία οδεύουν με κατεύθυνση από τις πηγές προς το άπειρο (εξερχόμενα κύματα)

B. Το θεώρημα της μοναδικότητας επεκτείνεται στις περιπτώσεις μέσω χωρίς απώλειες ( $\gamma=0$ ) και σε περιπτώσεις ανισοτροπικών μέσων.

Γ. Στην περίπτωση που η επιφάνεια  $S$  περιλαμβάνει και ανώμαλα σημεία, για την εξασφάλιση της μοναδικότητας της λύσεως απαιτείται επί πλέον η ικανοποίηση της συνθήκης των άκρων για τα σημεία αυτά.

### 9. Η κυματική φύση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων

Άμεση συνέπεια των εξισώσεων Maxwell είναι το γεγονός ότι τα χρονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία διαδίδονται στον περιβάλλοντα χώρο ως κύματα, με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός. Για τον λόγο αυτό τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία αναφέρονται συχνά ως ηλεκτρομαγνητικά κύματα.