Select(S, k):

Είσοδος: Λίστα αριθμών S και ακέραιος k

Έξοδος: Το k-οστό μικρότερο στοιχείο της S

Διάλεξε τυχαία $v \in S$ (διαχωριστή)

```
for i=1 to |S|
    if S[i] < v: βάλε το S[i] στην S_L
    if S[i] > v: βάλε το S[i] στην S_R
    else βάλε το S[i] στην S_v
if k ≤ |S_L| : return select(S_L, k)
if |S_L| < k ≤ |S_L|+|S_v| : return v
if k > |S_L|+|S_v| : return select(S_R, k-|S_L|-|S_v|)
```

$$T(n) = T(\max\{|S_L|, |S_R|\}) + O(n)$$

- χειρότερη περίπτωση: το max είναι $n-1 \rightsquigarrow O(n^2)$
- καλύτερη περίπτωση: το max είναι $n/2 \rightsquigarrow O(n)$

Διάμεσος: 45, 1, 10, 30, 25

$O(n\log n)$

Πρόβλημα επιλογής:

Είσοδος: Λίστα αριθμών S και k ακέραιος

Έξοδος: Το k-οστό στοιχείο της S

S: 2, 36, 5, 21, 8, 13, 11, 20, 5, 4, 1

Έστω v στοιχείο της S:

S_L: στοιχεία μικρότερα από το v

S_v: στοιχεία ίσα με το v

S_R: στοιχεία μεγαλύτερα από το v

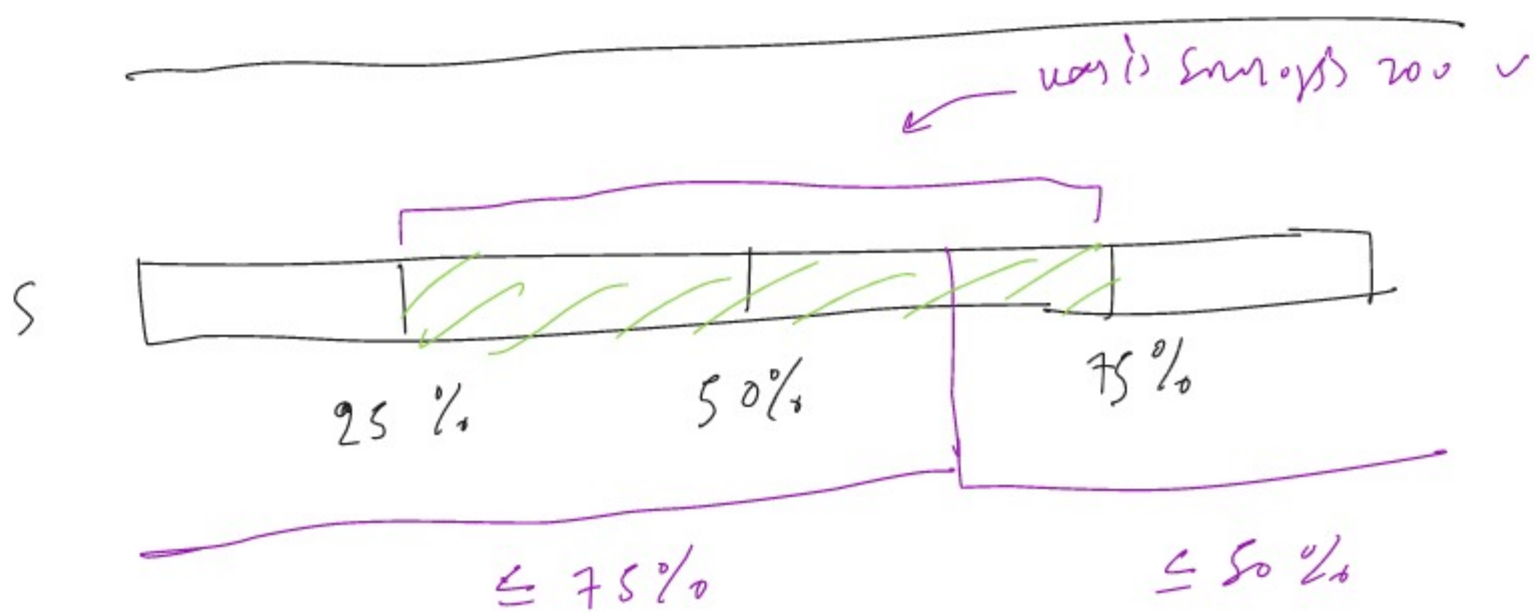
Έστω π.χ. μας ότι $v = 5$ και $k = 8$

S_L: 2, 4, 1

S_5: 5, 5

S_R: 36, 21, 8, 23, 11, 20

$$
\text{select}(S, k) = \begin{cases} \text{select}(S_L, k), & \text{if } k \le |S_L| \\ v, & \text{if } |S_L| < k \le |S_L| + |S_v| \\ \text{select}(S_R, k - |S_L| - |S_v|), & \text{if } k > |S_L| + |S_v| \end{cases}
$$



Θεώρημα: Δοκιμές με πιθανότητα επιτυχίας $0 < p \leq 1$. Ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία είναι $1/p$.

Απόδ.

X: πλήθος δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία

$$\Pr(X=j) = (1-p)^{j-1} \cdot p$$

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \Pr(X=j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot (1-p)^{j-1} p =$$

$$= \ldots\ldots = \frac{1}{p}$$

Ανάλυση του select:

Ο αλγόριθμος βρίσκεται στη φάση j όταν το μέγεθος του πίνακα είναι

$$n\left(\frac{3}{4}\right)^{j+1} < \text{μέγεθος} < n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{j}$$

X: # βημάτων που κάνει ο αλγόριθμος

X_j: Χρόνος που ξοδεύει ο αλγόριθμος στη φάση j

$$X = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots$$

$$X_j = c \cdot n \left(\frac{3}{4}\right)^j$$

$$E[X_j] \le 2 \cdot c n \left(\frac{3}{4}\right)^j$$

$$E[X] \le \sum_{j=0}^{\infty} E[X_j] \le \sum_{j=0}^{\infty} 2 c n \left(\frac{3}{4}\right)^j$$

$$\le 2cn \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 8cn = O(n).$$

fastMultiply (x, y):

Είσοδος: Θετικοί ακέραιοι x, y με n-ψηφία

Έξοδος: το γινόμενό τους

(όταν n μεγαλύτερο από το μήκος λέξης)

if $n=1$ return $(x \cdot y)$

$x_L = \lceil n/2 \rceil$ αριστερότερα ψηφία του x

$y_L =$ —— // —— y

$x_R = \lfloor n/2 \rfloor$ δεξιότερα ψηφία του x

$y_R =$ —— // —— y

$P_1 =$ fastMultiply (x_L, y_L)

$P_2 =$ fastMultiply (x_R, y_R)

$P_3 =$ fastMultiply $(x_L + x_R, y_L + y_R)$

return $P_1 \cdot 2^n + (P_3 - P_1 - P_2) \cdot 2^{n/2} + P_2$

$$T(n) = 3 \cdot T(n/2) + O(n) \quad O(n^{1,59})$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 2 \\ d &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\log_2 3 \simeq 1,585 \simeq 1,59 > 1$

$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (bc+ad)i$ 4 πολ.

$bc + ad = (a+b)\cdot(c+d) - ac - bd$ 3 πολ.

$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$ n-bit (n δύναμη 2)

$20 \mid 19$

$20 \cdot 10^2 + 19 = 2000 + 19 = 2019$

$$X = \underbrace{x_1 x_2 \cdots x_{n/2}}_{X_L}\ \underbrace{x_{n/2+1} \cdots x_n}_{X_R} = 2^{n/2} \cdot X_L + X_R$$

$$Y = \underbrace{y_1 y_2 \cdots y_{n/2}}_{Y_L}\ \underbrace{y_{n/2+1} \cdots y_n}_{Y_R} = 2^{n/2} Y_L - Y_R$$

$$\left(\left. \begin{matrix} X_L, X_R \\ Y_L, Y_R \end{matrix} \right\} n/2 \text{ bit} \right)$$

$$XY = (2^{n/2} X_L + X_R)(2^{n/2} Y_L + Y_R) = 2^n \cdot \underline{X_L \cdot Y_L} + 2^{n/2} \cdot \underline{X_L \cdot Y_R} + 2^{n/2} \cdot \underline{X_R \cdot Y_L} + \underline{X_R \cdot Y_R}$$

$$= 2^n X_L Y_L + 2^{n/2} (X_L Y_R + X_R Y_L) + X_R Y_R$$

$$T(n) = 4\,T(n/2) + O(n)$$

$$\rightsquigarrow O(n^2)$$

Άρκουν οι πολ/σμοί:

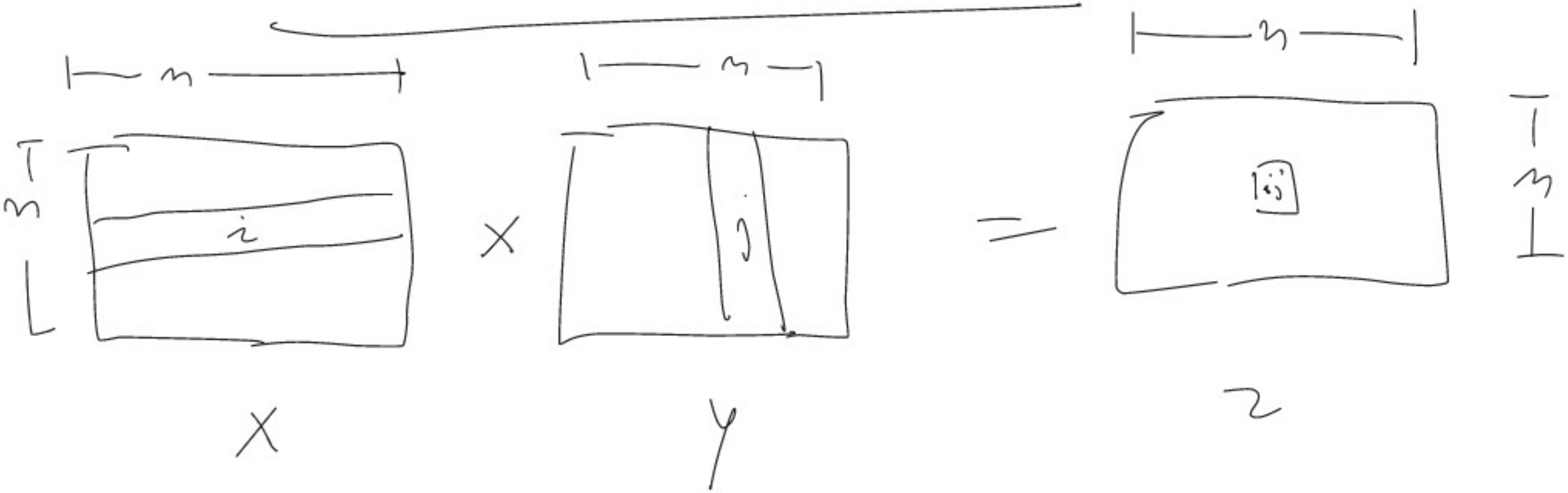
$$X_L Y_L = P_1$$

$$X_R Y_R = P_2$$

$$(X_L + X_R) \cdot (Y_L + Y_R) = P_3$$

$$\left(X_L \cdot Y_R + X_R Y_L = P_3 - P_1 - P_2 \right)$$

Πολ/σμός Πινάκων :



Χρόνος $O(n^3)$

1969 Volker Strassen

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$$XY = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

$$T(n) = 8 \cdot T(n/2) + O(n^2)$$

$$O(n^3)$$

Alheow 7 nozlnhoz.

$$T(n) = 7 \cdot T\left(n/2\right) + O\left(n^2\right)$$

$$O\left(n^{\log_2 7}\right) \simeq O\left(n^{2,81}\right)$$

miro

2020 (Josh Alman
Virginia Vassilevska Williams)

2013!

$O\left(n^{2.3728596}\right)$

$O\left(n^{2.3728639}\right)$

Αλγόριθμος Strassen:

Έστω $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ τότε:

$$XY = \begin{bmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{bmatrix}$$

όπου:

$$P_1 = A(F - H)$$

$$P_2 = (A + B)H$$

$$P_3 = (C + D)E$$

$$P_4 = D(G - E)$$

$$P_5 = (A + D)(E + H)$$

$$P_6 = (B - D)(G + H)$$

$$P_7 = (A - C)(E + F)$$