Ηλεκτρικό ρεύμα = (φορτίο που διέρχεται από μια επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου)

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta S \Delta x}{\Delta t} = \rho \Delta S\, u_x \Rightarrow \boxed{J_x = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho u_x}$$

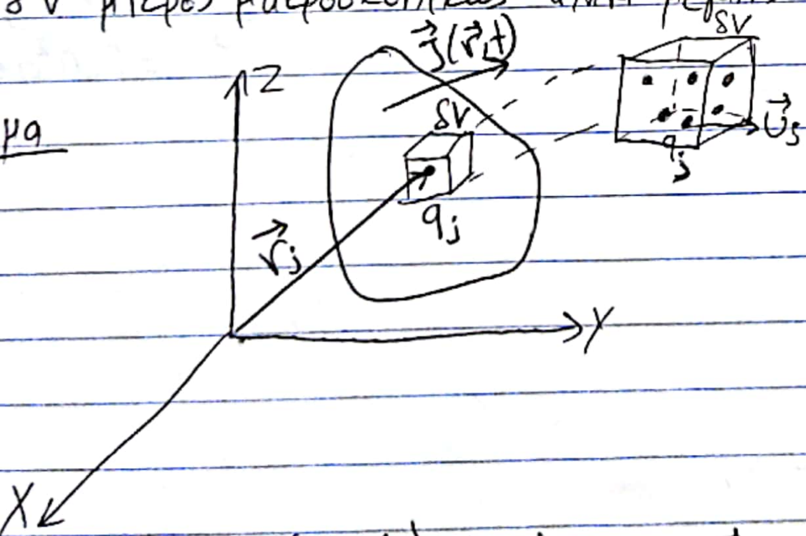
Χωρική πυκνότητα η λ. ρεύματος

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \lim_{\delta V \to 0} \left\{ \frac{1}{\delta V} \sum_{q_j \in \delta V} q_j \vec{u}_j \right\} = \vec{u} \lim_{\delta V \to 0} \left\{ \frac{1}{\delta V} \sum_{q_j \in \delta V} q_j \right\} = \rho \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{J} = \rho \vec{u}} \quad (A/m^2)$$

Ο δV μικρός μακροσκοπικώς αλλά μεγάλος μικροσκοπικώς

Σχήμα

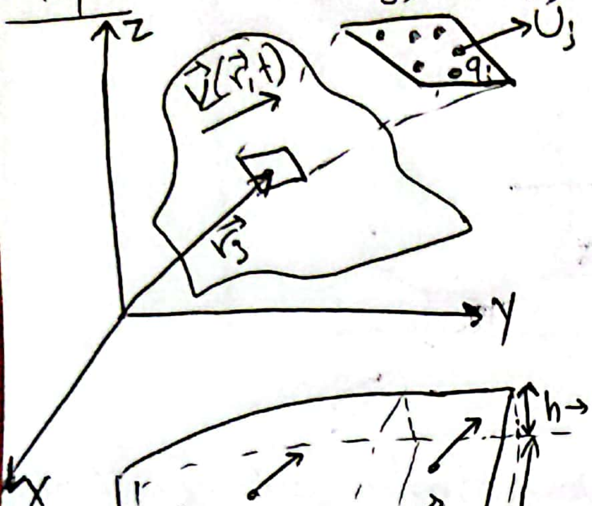


$$\Delta q = \rho \Delta V = \rho (\Delta S\, \hat{i}_n) \vec{u} \Delta t = \rho \vec{u} \Delta \vec{S} \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta t} = \vec{J} \Delta \vec{S} \Rightarrow$$

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S} \Rightarrow \boxed{I = \int_S \vec{J} \Delta \vec{S}}$$

Επιφανειακή πυκνότητα ηλ. ρεύματος

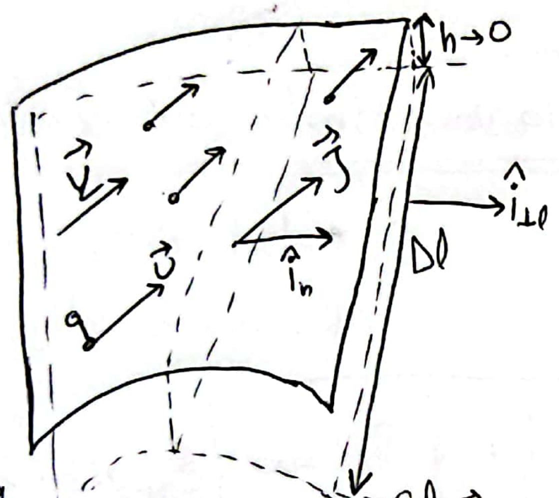
Σχήμα



$$\vec{K}(\vec{r},t)=\lim_{\delta S\to 0}\left\{\frac{1}{\delta S}\sum_{q_j\in\delta S} q_j\vec{U}_j\right\}$$

$$\vec{K}(\vec{r},t)=\vec{U}\lim_{\delta S\to 0}\left\{\frac{1}{\delta S}\sum_{q_j\in\delta S} q_j\right\}=\sigma\vec{U}$$

$$\boxed{\vec{K}=\sigma\vec{U}\,(A/m)}$$

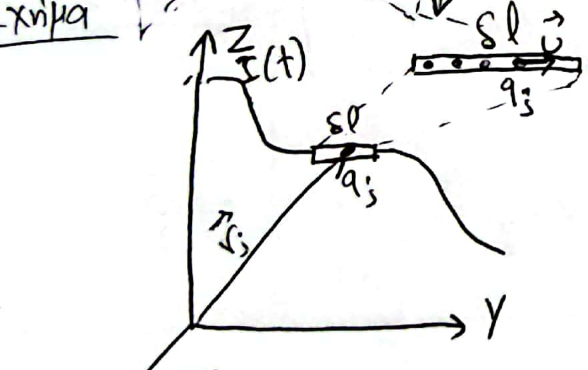


$$\Delta I=\vec{J}\cdot\hat{i}_n\Delta S=\vec{J}\,\hat{i}_n(\Delta\ell h)=(\vec{J}h)\,\hat{i}_n\Delta\ell$$

$$=\vec{K}\,\hat{i}_n\Delta\ell=\vec{K}\,\hat{i}_{\perp\ell}\Delta\ell\Longrightarrow$$

$$\boxed{I=\int_\ell \vec{K}\,\hat{i}_{\perp\ell}\,d\ell}\qquad \vec{K}=\lim_{\substack{h\to 0\\ \vec{J}\to\infty}}\{\vec{J}h\}$$

Σχήμα



Νηματοειδής πυκνότητα Ηλ. Ρεύματος

$$I(t)=\lim_{\delta\ell\to 0}\left\{\frac{1}{\delta\ell}\sum_{q_j\in\delta\ell} q_jU_j\right\}=U\lim_{\delta\ell\to 0}\left\{\frac{1}{\delta\ell}\sum_{q_j\in\delta\ell} q_j\right\}$$

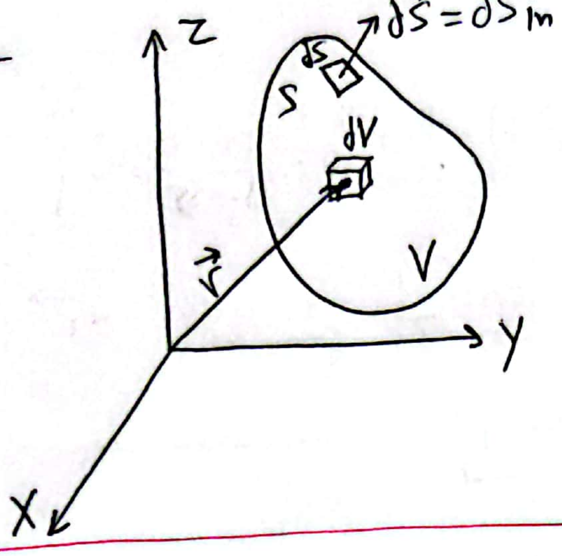
$$\boxed{I(t)=\lambda U}\quad (A)$$

Στοιχειώδες ηλ. ρεύμα

$$\boxed{dI=\left\{\vec{J}\cdot d\vec{S},\ \vec{K}\,\hat{i}_{\perp\ell}\,d\ell,\ I\right\}}$$

Νόμος Διατήρησης Ηλ. φορτίου (ΝΔΦ)

Σχήμα



Το ηλ. φορτίο διατηρείται:

Αύξηση φορτίου σε μια περιοχή = − φορτία που εξήλθαν από την περιοχή

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -I = -\oint_S \vec{J}\cdot\partial\vec{S}}$$

$$\frac{dQ}{\partial t} = -I = -\oint_S \vec{J}\partial\vec{S} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_V \rho\, dV\right\} + \oint_S \vec{J}\partial\vec{S} = 0}$$ Θ. Leibniz

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\, dV + \oint_S \vec{J}\partial\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla}\vec{J} dV = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J} = 0}$$

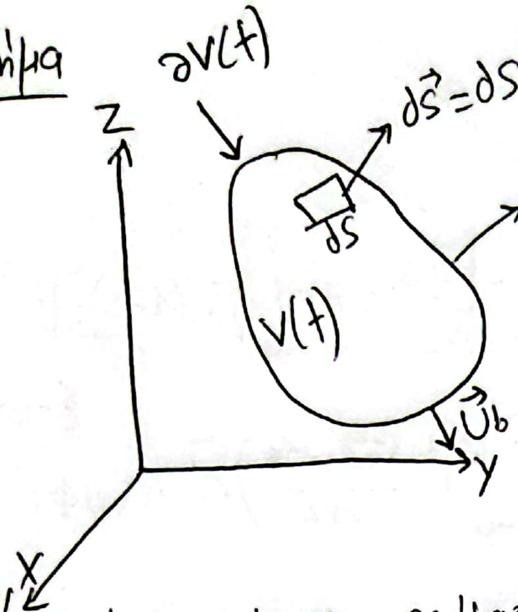
Ο κανόνας του Leibniz

Έστω $F(x) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x,t)\partial t$ όπου $A(x), B(x)$ παραγωγίσιμες ως προς x και $f(x,t), \partial f(x,t)/\partial x$ είναι συνεχείς ως προς x & t.

$$\boxed{\frac{dF}{dx} = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\partial t + f(x,B(x))\frac{dB}{dx} - f(x,A(x))\frac{dA}{dx}}$$

Ο κανόνας του Leibnitz (3D)

Σχήμα



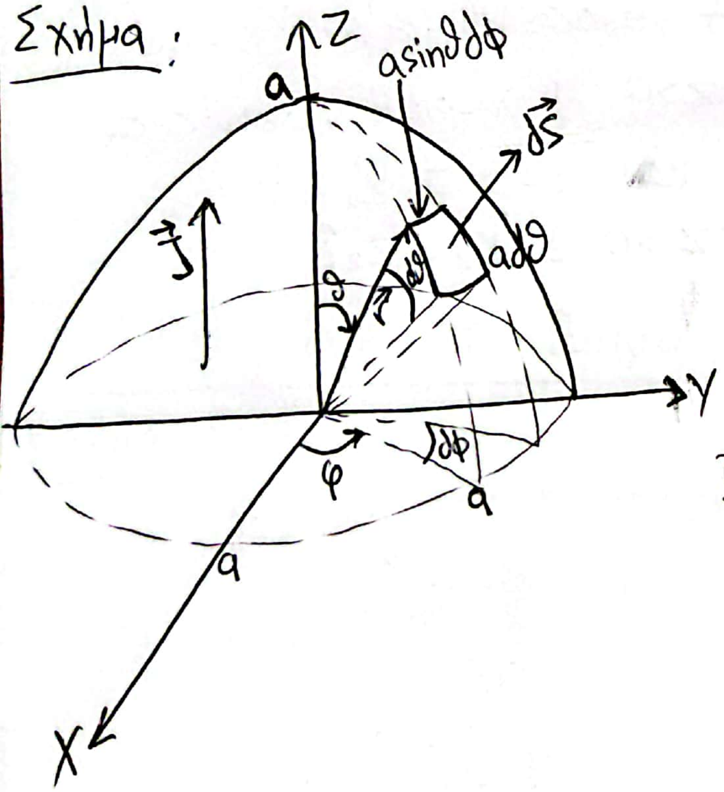
$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{V(t)} F(\vec{r},t)\,dV\right\} = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\,dV + \int_{\partial V(t)} F(\vec{r},t)\,\vec{U}_b\,d\vec{S}$$

Χωρική πυκνότητα ρεύματος & νόμος διατήρησης ηλ. φορτίου - $\boxed{\text{παράδειγμα}}$

Στην περιοχή $|x|<a$ $\exists$ χωρική πυκνότητα ρευμ. $\vec{J} = \hat{i}_z J_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

Να βρεθεί το ολ. ρεύμα που διέρχεται από την ημισφαιρική επιφάνεια $r=a$

Σχήμα:



$$I = \int_S \vec{J}\, d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = \hat{i}_r\, dS = \hat{i}_r a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\hat{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\, \hat{i}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \hat{i}_y + \cos\theta\, \hat{i}_z$$

$$\vec{J}\,d\vec{S} = J_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)(\hat{i}_z \cdot \hat{i}_r)\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= J_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\cos\theta\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} J_0 a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= J_0 a^2 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(1 - \frac{a^2\sin^2\theta\cos^2\phi}{a^2}\right)\cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{3}{4}\pi J_0 a^2}$$

Με χρήση ΝΔΦ:

~~Σχήμα~~ $\oint_S \vec{J}\,d\vec{S}=0$, $S=S_1 \cup S_2$

$$\int_{S_1} \vec{J}\,d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{J}\,d\vec{S}_2 = 0, \quad I=\int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S}_1 = -\int_{S_2} \vec{J}\,d\vec{S}_2 = -\int_{S_2} \left\{ J_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\hat{i}_z \right\}\cdot \left\{-\hat{i}_z r_T dr_T d\phi\right\}$$

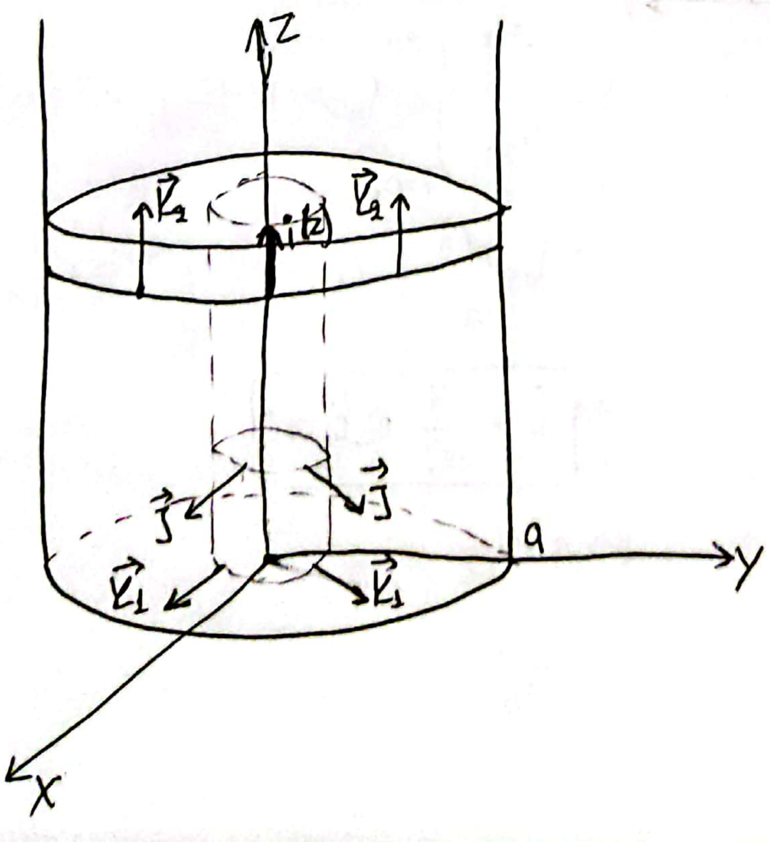
$$I=-\int_{r_T=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi} J_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)(-1)\, r_T dr_T d\phi = J_0\int_{r_T=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(1-\frac{r_T^2\cos^2\phi}{a^2}\right) r_T\, dr_T d\phi$$

$$= J_0\int_{r_T=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi} r_T dr_T d\phi - \frac{J_0}{a^2}\int_{r_T=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi} r_T^3\, dr_T \cos^2\phi\, d\phi = J_0\pi a^2 - \frac{J_0}{a^2}\frac{a^4}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi J_0 a^2.$$

Παράδειγμα

Σε κυλινδρικό σύστημα με άξονα z ∃ νηματοειδές ρεύμα $i(z)=i_0 e^{-z/h}$ για $r_T=0$ και $z>0$. Για $r_T<a$ και $z>0$ ∃ χωρική πυκνότητα $\vec{J}=J_T\hat{i}_{r_T}$. Στον επίπεδο δίσκο $r_T<a$ και $z=0$ ∃ $\vec{K}_1=K_1\hat{i}_{r_T}$. Στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T=a$ και $z>0$ ∃ $\vec{K}_2=K_2\hat{i}_z$

Σχήμα



Με χρήση ΝΔΦ: $\oint_S \vec{J}\,d\vec{S}=0 \Rightarrow i(z)-i(z_0)+\int_{z_0}^{z}\int_{\phi=0}^{2\pi} J_T(r_T,z')r_T\,d\phi\,dz'=0$ ⑫

$$i(z)-i(z_0)+2\pi r_T\int_{z_0}^{z}J_T(r_T,z')dz'=0\Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z}+2\pi r_T J_T(r_T,z)=0$$

$$\boxed{J_T(r_T,z)=-\frac{1}{2\pi r_T}\frac{\partial i}{\partial z}=\frac{i_0}{h}\frac{1}{2\pi r_T}e^{-z/h}}$$

$$\oint \vec{J}\,d\vec{S}=0\Rightarrow i(z)+\int_0^{z}\int_{\phi=0}^{2\pi}J_T(r_T,z')\,r_T\,d\phi\,dz'+\int_\ell K_1\hat{i}_{r_T}\cdot\hat{i}_{\perp\ell}\,d\ell=0\Rightarrow$$

$$i(z)+2\pi r_T\int_0^{z}\frac{i_0}{h}\frac{1}{2\pi r_T}e^{-z'/h}dz'+K_1 2\pi r_T=0\Rightarrow$$

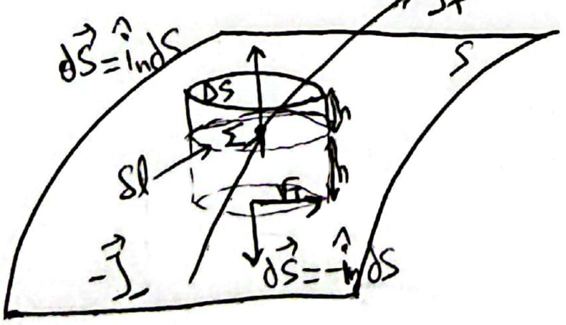
$$i_0e^{-z/h}+i_0(1-e^{-z/h})+K_1 2\pi r_T=0\Rightarrow \boxed{K_1(r_T)=-\frac{i_0}{2\pi r_T}}$$

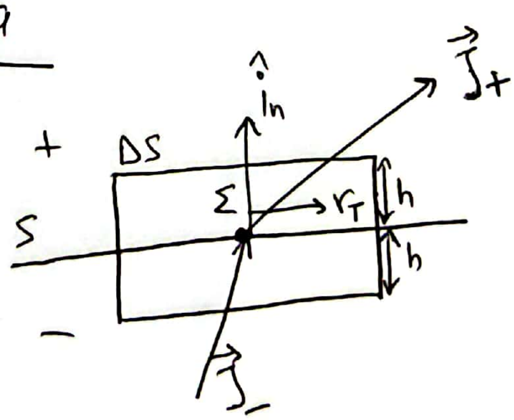
$$\oint_S \vec{J}\,d\vec{S}=0\Rightarrow i(z)+\int_\ell K_2\hat{i}_z\cdot\hat{i}_{\perp\ell}\,d\ell=0\Rightarrow i(z)+2\pi a K_2=0\Rightarrow$$

$$\boxed{K_2=-\frac{i_0}{2\pi a}e^{-z/h}}$$

Νόμος ΔΦ σε Επιφάνεια

Σχήμα





ΝΔΦ $\oint \vec{J}\,d\vec{S}+\frac{dQ}{dt}=0\Rightarrow \hat{i}_n\cdot\vec{J}_+\,\Delta S-\hat{i}_n\cdot\vec{J}_-\,\Delta S+\vec{J}_+\cdot\hat{i}_{r_T}(2\pi r_T h)+\vec{J}_-\cdot\hat{i}_{r_T}(2\pi r_T h)$

$$+\int_{\delta\ell}\vec{K}\cdot\hat{i}_{\perp\ell}\,d\ell+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_+\Delta S h+\rho_-\Delta S h+\sigma\Delta S\right\}=0\Rightarrow$$

$$\hat{i}_n(\vec{J}_+-\vec{J}_-)+\frac{1}{\Delta S}\int_{\delta\ell}\vec{K}\cdot\hat{i}_{\perp\ell}\,d\ell+\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0\Rightarrow \boxed{\hat{i}_n\cdot(\vec{J}_+-\vec{J}_-)=-\vec{\nabla}_s\cdot\vec{K}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}}$$

Διοδιάστατη απόκλιση

Διοδιάστατη απόκλιση $\nabla \cdot \kappa$ εφαπτομενικού διανύσματος $\kappa = i_1 \kappa_1(s_1, s_2) + i_2 \kappa_2(s_1, s_2)$

Καρτεσιανές	Κυλινδρικές	Σφαιρικές
Επίπεδο $x = σταθ$ $\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y + \frac{\partial}{\partial z}\kappa_z$	Κύλινδρος $r_T = σταθ = a$ $\frac{1}{a}\frac{\partial \kappa_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \kappa_z}{\partial z}$	Σφαίρα $r = σταθ = a$ $\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\kappa \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}\kappa_\phi\right)$
Επίπεδο $y = σταθ$ $\frac{\partial}{\partial z}\kappa_z + \frac{\partial}{\partial x}\kappa_x$	Ημιεπίπεδο $\phi = σταθ$ $\frac{\partial}{\partial z}\kappa_z + \frac{\partial}{\partial r_T}\kappa_T$	Κώνος $\theta = σταθ = \theta_0$ $\frac{1}{r\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial \phi}\kappa_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\kappa_r)$
Επίπεδο $z = σταθ$ $\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x + \frac{\partial}{\partial y}\kappa_y$	Επίπεδο $z = σταθ$ $\frac{1}{r_T}\left(\frac{\partial}{\partial r_T}(r_T \kappa_T) + \frac{\partial}{\partial \phi}\kappa_\phi\right)$	Ημιεπίπεδο $\phi = σταθ$ $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\kappa_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}\kappa_\theta\right)$