Μετ/μος ομοιότητας: $\hat{A} = P^{-1} A P$, $\hat{B} = P^{-1} B$, $\hat{C} = C P$, $\hat{D} = D$

α) Διαγώνια κανονική μορφή

β) Κανονική ελέγξιμη μορφή: $\hat{A} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & & -a_0 \end{bmatrix}$, $\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{c}^T = c^T P = [\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n]$

$$\hat{G}(s) = G(s) = \frac{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 \cdot s + \dots + \hat{c}_n \cdot s^{n-1}}{a_n s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s} + d$$

γ) Κανονική παρατηρήσιμη μορφή: $\tilde{A} = \tilde{P}^{-1} A \tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -a_1 \\ 1 & 0 & \vdots & & & & -a_2 \\ 0 & 0 & \vdots & - & \cdots & & -a_3 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & \cdots & & 1 & -a_n \end{bmatrix}$, $\tilde{b} = \tilde{P}^{-1} b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$

$\tilde{c}^T = c^T \tilde{P} = [0, \dots, 0, 1]$, $\tilde{d} = d$

$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}$, V_n τελευταία στήλη, $\tilde{P} = [V_n, A V_n, \dots, A^{n-1} V_n]$

$$\tilde{G}(s) = G(s) = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 s + \dots + \tilde{b}_{n-1} \cdot s^{n-1}}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} + d$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b} u(t), \quad y(t) = \underbrace{[1\ 0\ 0]}_{c^T} x(t) \quad d = 0$$

$$\varphi(s) = \det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s+8 & -1 & 0 \\ 16 & s & -1 \\ 6 & 0 & s \end{bmatrix} = (s+8)s^2 + 16s + 6 = s^3 + 8s^2 + 16s + 6$$

$$G(s) = c^T [sI - A]^{-1} b + d = \frac{c^T \operatorname{adj}(sI - A) b}{\varphi(s)} + d = \frac{[1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} s^2 & s & 1 \\ -(16+s) & s^2+8s & -s-8 \\ 6s & 6 & s^2+8s+16 \end{bmatrix}}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6} =$$

αφού είναι 00 δε με νοιάζουν οι 2η και 3η γραμμές

$$= \frac{[s^2\ s\ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}$$

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -16 & -8 \end{bmatrix}$, $\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{c}^T = [6\ 8\ 2]$, $\hat{d} = 0$

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\tilde{c}^T = [0\ 0\ 1]$, $\tilde{d} = 0$

δ) Κανονική μορφή Jordan

$\hat{A} = \operatorname{diag}\{J_{\mu_1}, J_{\mu_2}, \dots, J_{\mu_m}\}$, όπου $J_{\mu_k} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \lambda_k & \ddots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$

Jordan Block διαστάσεων $\mu_k \times \mu_k$ και $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma = n$

Γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα, V_{kp} βαθμού ρ, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_k της A:

$(A-\lambda_k I)^{\rho-1}\, V_{kp} \neq 0$

$(A-\lambda_k I)^{\rho}\, V_{kp} = 0$

Τα V_{kp} βρίσκονται ως εξής:

$$(A-\lambda_k I)\,V_{k_1} = 0$$
$$(A-\lambda_k I)\,V_{k_2} = V_{k_1}$$
$$\vdots$$
$$(A-\lambda_k I)\,V_{kp} = V_{k,p-1}$$

και $P = [v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1\mu_1}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2\mu_2}, \dots, v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \dots, v_{\sigma\mu_\sigma}]$

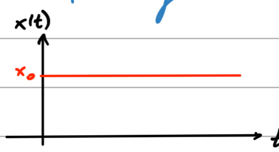
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

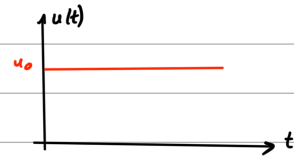
Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.1)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (1.2)$$

Σημείο λειτουργίας ή σημείο ισορροπίας: (x_0, u_0) τω $f(x_0,u_0)=0$

(αν $x(0)=x_0$, $u(t)=0$ $\forall t>0$, τότε $x(t)=x_0$, $\forall t>0$)





$x_k(t) = x_{0k} + \delta x_k(t)$, $k=1,\dots,n$

$u_j(t) = u_{0j} + \delta u_j(t)$, $j=1,\dots,m$

αν $|\delta x_k(t)| \ll x_{0k}$, $\forall t \geq 0$, $k=1,\dots,\mu$

και $|\delta a_j(t)| \ll a_{0j}$, $\forall t \geq 0$, $j=1,\dots,n$

τότε

γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{d(\delta x(t))}{dt} = \left.\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} \delta x(t) + \left.\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} \delta u(t) = A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \\ \delta y(t) = \left.\dfrac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} \delta x(t) + \left.\dfrac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} \delta u(t) \end{cases}$$