ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Κυματική και Κβαντική Φυσική»
της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. του ΕΜΠ
Chapter03-2

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα
2020

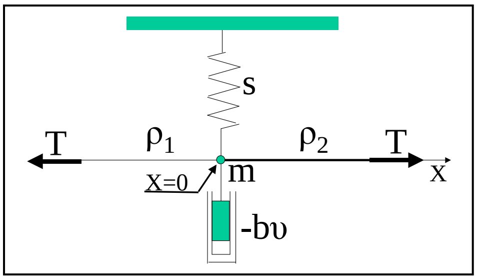
Φαινόμενα ανάκλασης και διάδοσης σε ασυνέχεια του ελαστικού μέσου (δηλ., του μέσου διάδοσης κύματος)

Όταν παρουσιάζεται ασυνέχεια σε ένα ελαστικό μέσο (ασυνεχής μεταβολή του Z), στο οποίο διαδίδεται ένα οδεύον ("μονοχρωματικό" συνήθως, αλλά όχι κατ' ανάγκην) κύμα, τότε έχουμε, επιπλέον του διαδιδόμενου κύματος, και ένα ανακλώμενο κύμα. Αυτό που ενδιαφέρει, σε μία τέτοια περίπτωση, είναι το ποσοστό από την προσπίπτουσα ισχύ το οποίο διέρχεται από την ασυνέχεια (προς το δεύτερο κυματικό μέσο) καθώς και το ποσοστό της ενέργειας το οποίο ανακλάται στην ασυνέχεια (επιστρέφοντας προς το αρχικό κυματικό μέσο). Όπως αποδείχτηκε στην προηγούμενη ενότητα, η μέση ισχύς ενός κύματος εξαρτάται από τη σύνθετη μηχανική αντίσταση (Z) του κυματικού μέσου, καθώς και από τη συχνότητα (ω) και το πλάτος (A) του κύματος. Δεδομένου ότι η συχνότητα ω ενός μονοχρωματικού κύματος παραμένει ίδια και στα δύο κυματικά μέσα, ενώ η αντίσταση Z είναι χαρακτηριστική του μέσου, είναι κρίσιμο να υπολογιστούν τα πλάτη διερχόμενου και ανακλώμενου κύματος, ώστε συνέχειανα υπολογιστεί και η διερχόμενη και η ανακλώμενη ισχύς.

Αν τα πλάτη του προσπίτοντος, ανακλώμενου και διαδιδόμενου κύματος (σε μία ασυνέχεια) είναι : A_i, A_r, A_t, αντίστοιχα, τότε ορίζουμε τους συντελεστές ανάκλασης πλάτους (r) και διάδοσης πλάτους (t), όπως παρακάτω,

$$r \equiv \frac{A_r}{A_i}, \qquad t \equiv \frac{A_t}{A_i},$$

και αποδεικνύεται ότι οι τιμές τους μπορούν να υπολογιστούν με βάση τις συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ισχύουν στο σημείο ασυνέχειας του ελαστικού μέσου. Στη συνέχεια θα μελετηθεί, μέ ένα Παράδειγμα, μία σύνθετη περίπτωση ασυνέχειας που μπορεί να υπάρχει σε ένα ελαστικό μέσο, έτσι ώστε πιο απλές περιπτώσεις να προκύπτουν ως υποπεριπτώσεις της.



Παράδειγμα. Ιδανική χορδή, που αποτελείται από δύο τμήματα άπειρου μήκους, με γραμικές πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα, τείνεται με τάση Τ, κατά μήκος του άξονα x. Τα δύο τμήματα ενώνονται στο σημείο x=0 με τη βοήθεια σημειακής μάζας m, η οποία είναι συνδεδεμένη με ακλόνητο τοίχο μέσω ελατηρίου σταθεράς s. Η μάζα m είναι επίσης συνδεδεμένη με έμβολο, έτσι ώστε, κατά την κίνησή της, να υφίσταται δύναμη τριβής $F_{\tau\rho\beta}=-b\upsilon$, όπου υ η εγκάρσια ταχύτητα της χορδής στο σημείο x=0, και b μία θετική σταθερά. Υποθέστε ότι στο σύστημα, (που βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας), διαδίδεται ένα δεξιά οδεύον εγκάρσιο μονοχρωματικό κύμα συχνότητας ω, το οποίο έρχεται από το x=-∞. α) Γράψτε τη συνθήκη για τη συνέχεια των απομακρύνσεων στο x=0, και τη συνθήκη για την εγκάρσια κίνηση της μάζας m. β) Υπολογίστε τους συντελεστές διάδοσης πλάτους, ($t=y_{o,\delta\iota\varepsilon\rho\chi}/y_{o,\pi\rho o\sigma\pi}$), και ανάκλασης πλάτους, ($r=y_{o,\alpha\nu\alpha\kappa\lambda}/y_{o,\pi\rho o\sigma\pi}$). γ) Μελετήστε τις οριακές συμπεριφορές όταν: i) m=0, s=0, b=0 ii) $m\to\infty$, ή $s\to\infty$, ή $b\to\infty$, ή $\omega\to\infty$, iii) $\omega^2 = s/m$.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

Δεξία οδεύον (προσπίπτον) κύμα, για x<0 : $y_1 = Ae^{i(k_1x-\omega t)}$

Αριστερά οδεύον (ανακλώμενο) κύμα, για x<0 : $y_1' = Be^{i(-k_1x-\omega t)}$

Δεξία οδεύον (διερχόμενο) κύμα, για x>0 : $y_2 = Ce^{i(k_2x-\omega t)}$

Όλα τα κύματα, (y_1, y_1', y_2), έχουν κοινή συχνότητα ω, (σχέση "ταλαντωτή-διεγέρτη")
Το προσπίτον (y_1) και το ανακλώμενο (y_1') έχουν αντίθετα κυματανύσματα (k_1, $-k_1$) ίδιου μέτρου $|k_1|=\omega/c_1$, αφού οδεύουν σε ελαστικό μέσο που χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα διάδοσης διαταραχών $c_1=\sqrt{T/\rho_1}$. Για το διερχόμενο (y_2), $k_2=\omega/c_2$, όπου $c_2=\sqrt{T/\rho_2}$ Για τον υπολογισμό των συντελεστών ανάκλασης πλάτους, $r=B/A$, και διάδοσης πλάτους, $t=C/A$, εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες, στο σημείο ασυνέχειας της πυκνότητας, (x=0), του ελαστικού μέσου.

α) Συνέχεια της μετατόπισης του ελαστικού μέσου, (τα δύο διαφορετικά τμήματα της χορδής εξακολουθούν να είναι συνδεδεμένα στο x=0 κατά τη διάρκεια της κίνησης):

$$\left.\left(y_1+y_1'\right)\right|_{x=0}=\left.y_2\right|_{x=0}\Rightarrow A+B=C\Rightarrow t-r=1 \qquad (1)$$

β) Νόμος του Newton για τη σημειακή μάζα m στο σημείο ασυνέχειας της πυκνότητας, (x=0), του ελαστικού μέσου:

$$m\left.\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right|_{x=0}=T\left.\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}-\frac{\partial\left(y_1+y_1'\right)}{\partial x}\right)\right|_{x=0}-s\left.y_2\right|_{x=0}-b\left.\frac{\partial y_2}{\partial t}\right|_{x=0}\Rightarrow$$

$$-\omega^2 mC=iT\left(k_2C-k_1\left(A-B\right)\right)-sC-b\left(-i\omega\right)C\Rightarrow$$

$$iTk_1A-iTk_1B+\left(s-ib\omega-iTk_2-\omega^2 m\right)C=0\Rightarrow$$

$$-1+r+\frac{s-\omega^2 m-i\left(b\omega+Tk_2\right)}{-iTk_1}t=0 \qquad (2)$$

(1)+(2)$\Rightarrow$ $t=\dfrac{2k_1}{\left(k_1+k_2\right)+\frac{1}{T}\left[b\omega+i\left(s-m\omega^2\right)\right]}$, (1) $\Rightarrow r=\dfrac{\left(k_1-k_2\right)-\frac{1}{T}\left[b\omega+i\left(s-m\omega^2\right)\right]}{\left(k_1+k_2\right)+\frac{1}{T}\left[b\omega+i\left(s-m\omega^2\right)\right]}$

Μελέτη υπο-περιπτώσεων:

(i) $\left\{\left(m=0,s=0,b=0\right)\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{r=\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2},t=\dfrac{2k_1}{k_1+k_2}\right\}$

Αλλά $k_{1,2}=\dfrac{\omega}{c_{1,2}}=\omega\sqrt{\rho_{1,2}/T}=\dfrac{\omega}{T}\sqrt{T\rho_{1,2}}=\dfrac{\omega}{T}Z_{1,2}$, οπότε οι δύο συντελεστές γράφονται

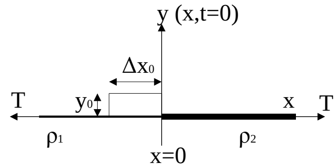
$\boxed{r\equiv\dfrac{A_r}{A_i}=\dfrac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}}$, $\quad\boxed{t\equiv\dfrac{A_t}{A_i}=\dfrac{2Z_1}{Z_1+Z_2}}$, <u>ανεξάρτητα από τη συχνότητα</u>

(ii) $\left\{m\to\infty,\ \ \acute{\eta}\ \ s\to\infty,\ \ \acute{\eta}\ \ b\to\infty,\ \ \acute{\eta}\ \ \omega\to\infty\right\}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ r=-1\end{cases}.$

Οι περιπτώσεις $\left\{m,s,b,Z_2\right\}\to\infty$ σημαίνουν ότι υπάρχει ακλόνητη πρόσδεση στο σημείο ασυνέχειας. Για όλες αυτές τις περιπτώσεις, όπως προκύπτει από τα συμπεράσματα των ερωτημάτων (i) και (ii), το διερχόμενο κύμα μηδενίζεται $\left(t=0\right)$, (αναμενόμενο, αφού μηδενίζεται η δυνατότητα διέγερσης της αφετηρίας του δεύτερου συνεχούς μέσου, είτε για δυναμικούς λόγους, $\left\{s,b\right\}\to\infty$, είτε για λόγους αδράνειας, $m\to\infty$), ενώ το ανακλώμενο έχει ίσο κατά μέτρο και αντίθετο πλάτος $\left(r=-1\right)$, (επίσης αναμενόμενο, αφού μόνο με αυτό τον τρόπο τα εισερχόμενο και το ανακλώμενο μπορούν να επιτύχουν μηδενισμό της ταλάντωσης στο σημείο ασυνέχειας όπου συνυπάρχουν, αφού αυτό το σημείο είναι το τερματικό σημείο του πρώτου ελαστικού μέσου).

Τα ίδια αποτελέσματα $\{t=0, r=-1\}$ προκύπτουν και για την περίπτωση: $\omega \to \infty$, [όταν $(m \neq 0, b \neq 0)$], λόγω της δυσκολίας της σημειακής μάζας ή του μηχανισμού απόσβεσης να παρακολουθήσουν τις υψηλές συχνότητες.

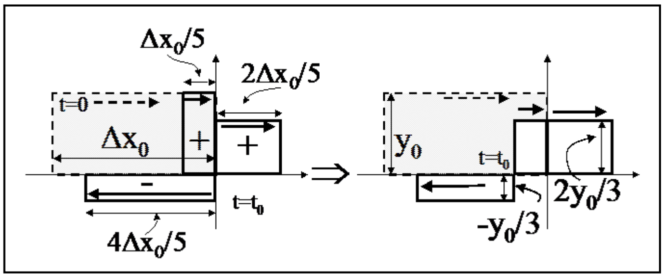
(iii) Επίσης, για $\omega^2 \neq s/m$, οι διαφορές φάσεις (ανάμεσα στα y_1,, y_2, y_3) είναι $\Delta\varphi \neq (0$, ή, $\pi)$, ενώ όταν : $\omega^2 = s/m$, και οι δυο συντελετές είναι πραγματικοί, άρα οι οι διαφορές φάσεις (ανάμεσα στα y_1, y_3) είναι $\Delta\varphi=0$ (ή, π), ανάλογα με το αν $k_1 > (\acute{\eta}, <) k_2 + \dfrac{b}{T}\sqrt{\dfrac{s}{m}}$.



Παράδειγμα. Δύο ημιάπειρες ιδανικές χορδές, με γραμμικές πυκνότητες ρ_1 και $\rho_2=4\rho_1$, συνδέονται στο σημείο x=0 και τείνονται με τάση T. Στην αριστερή ημιχορδή διαδίδεται προς τα δεξιά ένας τετραγωνικός παλμός, ύψους $y_0>0$ και πλάτους Δx_0, του οποίου το δεξιό μέτωπο (έναρξη) φτάνει στο σημείο x=0 τη χρονική στιγμή t=0. Κατά τη χρονική στιγμή : $t_0 = {4\Delta x_0}\Big/{5\left(\sqrt{T/\rho_1}\right)}$, δώστε τις τιμές ύψους και πλάτους, α) του προσπίπτοντος στην ασυνέχεια, β) του ανακλώμενου και γ) του διερχόμενου παλμού, ως συναρτήσεις των y_0, Δx_0, (σχεδιάστε την αντίστοιχη εικόνα διαταραχής των δύο χορδών, για $t=t_0$)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Υπολογίζουμε τις ταχύτητες, στα δύο διαφορετικά ελαστικά μέσα, και τις χαρακτηριστικές σύνθετες αντιστάσεις, με τη βοήθεια των οποίων υπολογίζονται οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης, $c_1 = \sqrt{\dfrac{T}{\rho_1}}$, $\quad c_2 = \sqrt{\dfrac{T}{\rho_2}} = \sqrt{\dfrac{T}{4\rho_1}} = \dfrac{c_1}{2}$, $\quad z_1 = \sqrt{T\rho_1}$, $\; z_2 = \sqrt{T\rho_2} = \sqrt{4T\rho_1} = 2z_1$



Κατά τη χρονική στιγμή t=0, που το μέτωπο έναρξης του προσπίπτωντος παλμού φθάνει στο x=0, το μέτωπο λήξης του προσπίπτωντος παλμού βρίσκεται στο $x=-\Delta x_0$, ενώ την ίδια στιγμή αρχίζουν να δημιουργούνται ο ανακλώμενος και ο διερχόμενος παλμός, με πλάτη

$$y_r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} y_0 = \frac{z_1 - 2z_1}{z_1 + 2z_1} y_0 = -\frac{1}{3} y_0 \qquad y_t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} y_0 = \frac{2z_1}{z_1 + 2z_1} y_0 = \frac{2}{3} y_0$$

Κατά τη χρονική στιγμή $t=t_0=4\Delta x_0/5\sqrt{(T/\rho_1)}=4\Delta x_0/(5c_1)$, το μέτωπο λήξης του παλμού έχει προχωρήσει κατά διάστημα ίσο με $c_1 t_0=4\Delta x_0/5$, οπότε βρίσκεται σε απόσταση $\Delta x_0/5$ από το $x=0$.

Ταυτόχρονα, τα μέτωπα έναρξης του ανακλώμενου και του διερχόμενου παλμού, (των οποίων τα μέτωπα λήξης δεν έχουν σχηματισθεί ακόμη, αφού διαρκεί ακόμη ο προσπίπτων πάλμός), έχουν προχωρήσει, προς τα αριστερά και τα δεξιά, αντίστοιχα, κατά τις αποστάσεις

$$\Delta x_r = c_1 t_0 = c_1 \frac{4\Delta x_0}{5c_1} = \frac{4}{5}\Delta x_0, \qquad \Delta x_t = c_2 t_0 = \frac{c_1}{2}\frac{4\Delta x_0}{5c_1} = \frac{2}{5}\Delta x_0$$

Σημειώστε ότι παρά τον ασυνεχή χαρακτήρα του παλμού (στα μέτωπα έναρξης και λήξης), εντούτοις, στο σημείο x=0, τα πλάτη προσπίπτοντος, ανακλώμενου και διερχόμενου, είναι τέτοια ώστε να διασφαλίζεται η συνέχεια του ελαστικού μέσου, με εξαίρεση, βέβαια, στη συγκεκριμένη περίπτωση, την χρονική στιγμή διέλευσης από το x=0 των μετώπων έναρξης και λήξης των παλμών, (τα οποία έχουν «εγγενείς» ασυνέχειες, από τη φύση του τετραγωνικού παλμού).

Παράδειγμα. Σε εύκαμπτη χορδή που τείνεται με τάση Τ και έχει γραμμική πυκνότητα ρ διαδίδονται δύο τρέχοντα κύματα y_1=Acos(ωt-kz+δ_1) και y_2=Acos(ωt-kz+δ_2). α) Βρείτε τη μέση διαδιδόμενη ισχύ, β) Για ποιά σχέση μεταξύ των δ_1 και δ_2 επιτυγχάνεται η μέγιστη και η ελάχιστη διαδιδόμενη ισχύς.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η μέση διαδιδόμενη ισχύς είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους $y_{o\lambda} = y_1 + y_2$, όπου:

$$y_{o\lambda} = A\left[\cos\left(a+\delta_1\right)+\cos\left(a+\delta_2\right)\right] = 2A\cos\left(\frac{2a+\delta_1+\delta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right),\ \text{με}\ a=\omega t - kz$$

Η ισχύς είναι $P(t) = F\upsilon_y = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = T\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{T}{c}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = Z\upsilon_y^2$

όπου $Z = \left(\frac{T}{c}\right) = \sqrt{T\rho} = \rho c$: η σύνθετη μηχανική αντίσταση

και $\upsilon_y = \frac{\partial y_{o\lambda}}{\partial t} = 2\omega A\sin\left(\frac{2a+\delta_1+\delta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right)$

Επομένως:

$$P(t) = Z\upsilon_y^2 = Z\left(2\omega A\sin\left((\omega t - kz)+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right)\right)^2 =$$

$$= 4\rho c\omega^2 A^2 \sin^2\left((\omega t - kz)+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right)$$

Η μέση (χρονική) ισχύς υπολογίζεται ως μέσος όρος σε μία περίοδο

$$\left\langle P(t)\right\rangle_t = Z\left\langle \upsilon_y^2\right\rangle_t = 4\rho c\omega^2 A^2\cos^2\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right)\left\langle \sin^2\left((\omega t - kz)+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\right\rangle_t = 4\rho c\omega^2 A^2\cos^2\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right)\frac{1}{2}$$

Τελικά: $\left\langle P(t)\right\rangle_t = 2\rho c\omega^2 A^2\cos^2\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right)$,

που μεγιστοποιείται όταν $\cos\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right) = \pm 1$, δηλαδή, $\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right) = \pm\pi \Rightarrow \delta_1-\delta_2 = 2\pi$,

και ελαχιστοποιείται όταν $\cos\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right) = 0$, δηλαδή,

$$\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right) = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta_1-\delta_2 = (2n-1)\pi$$

Συνελεστές ανάκλασης και διέλευσης ισχύος

Έχει αποδειχθεί ότι η ισχύς (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) αρμονικού κύματος, $y = Ae^{i(kx-\omega t}$, που διαδίδεται σε ελαστικό μέσο με μηχανική σύνθετη αντίσταση Z, είναι ίση με $P_{(i,r,t)} = \frac{1}{2} Z_{(i,r,t)} A_{(i,r,t)} \omega^2$. Οι δείκτες (i,r,t) αναφέρονται στο προσπίπτον, το ανακλώμενο και το διερχόμενο κύμα, όπου $Z_1 = Z_i = Z_r \neq Z_t = Z_2$, ενώ οι συχνότητα ω του μονοχρωματικού κύματος παραμένει η ίδια και στα δύο ελαστικά μέσα, εν αντιθέσει με το μήκος κύματος που μεταβάλλεται σύμφωνα με τις σχέσεις

$$c_{(1,2)} = f\lambda_{(1,2)} \Rightarrow \lambda_{(1,2)} = 2\pi c_{(1,2)} / \omega.$$

Αν το ελαστικό μέσο είναι 1-, 2-, ή 3-διαστατο, αλλά η διάδοση γίνεται κατά μήκος μίας ευθείας η οποία είναι κάθετη στη διατομή της ασυνέχειας, τότε η ισχύς αυτή είναι η ισχύς που διέρχεται από την αμελητέα διατομή του 1-διάστατου, ανά μονάδα μήκους του 2-διάστατου, ή ανά μονάδα επιφάνειας του 3-διάστατου μέσου. Με βάση τα ποσοστά ανακλώμενης και διερχόμενης ισχύος, σε σχέση με την προσπίπτουσα ισχύ, ορίζονται αντίστοιχοι συντελεστές ανάκλασης και διέλευσης ισχύος, οι τιμές των οποίων υπολογίζονται, συναρτήσει των μηχανικών σύνθετων αντιστάσεων, ως εξής:

Συντελεστής Ανάκλασης Ισχύος: $R \equiv \frac{Z_1 A_r^2}{Z_1 A_i^2} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$

Συντελεστής Διέλευσης Ισχύος: $T = \frac{Z_2 A_t^2}{Z_1 A_i^2} = \frac{4 Z_1 Z_2}{\left(Z_1 + Z_2\right)^2}$

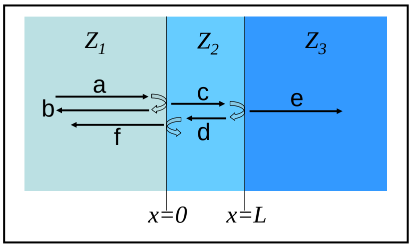
Διατήρηση Ενέργειας: $R + T = 1$

Ενώ οι συντελεστές Ανάκλασης και Διέλευσης Ισχύος, για όλα τα κύματα, είναι αυτοί που φαίνονται στις προηγούμενες σχέσεις, η μορφή της σύνθετης κυματικής αντίστασης (εμπέδησης, Z) και η μορφή των συντελεστών ανάκλασης και διέλευσης πλάτους για διαφορετικούς τύπους κυμάτων και διαφορετικά κυματικά μεγέθη φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

			Συντελεστές Ανάκλασης-Διέλευσης Πλάτους (για τα κυματικά μεγέθη που ακολουθούν)			
Κύμα	Σύνθετη αντίσταση (Εμπέδηση Z)	Συνοριακές συνθήκες στην ασυνέχεια	$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$	$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$	$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$	$t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$
Εγκάρσιο σε χορδή	$\sqrt{T\rho}$	$y_i + y_r = y_t$ $\frac{\partial\left(y_i + y_r\right)}{\partial x} = \frac{\partial y_t}{\partial x}$	$y, \quad \dot{y}$		$-T\frac{\partial y}{\partial x}$	
Διαμήκες ακουστικό	$\sqrt{B_0\rho}$	$\dot{\eta}_i + \dot{\eta}_r = \dot{\eta}_t$ $p_i + p_r = p_t$	$\eta, \quad \dot{\eta}$		p	
Τάση-ρεύμα σε γραμμή μεταφοράς	$\frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$	$I_i + I_r = I_t$ $V_i + V_r = V_t$	I		V	
Ηλεκτρομαγνητικό	$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$H_i + H_r = H_t$ $E_i + E_r = E_t$	H		E	

Όταν, σε ένα ελαστικό μέσο, η μηχανική σύνθετη αντίσταση μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο, τότε δεν παρατηρείται ανάκλαση κατά την διάδοση ενός κύματος σε αυτό το ελαστικό μέσο. Μία εφαρμογή αυτής της διαπίστωσης είναι η χρήση του «τηλεβόα», η μεταβλητή διατομή του οποίου αποτελεί τη σταδιακή μετάβαση από τον πομπό στον ανοικτό αέρα μεσω μεταβλητής σύνθετης αντίστασης, (σε αυτή την περίπτωση επιδιώκεται και η μείωση των φαινομένων περίθλασης μέσω αύξησης της διαμέτρου, όπως θα διαπιστωθεί κατά τη μελέτη των φαινομένων περίθλασης).

Σε ορισμένες περιπτώσεις επιδιώκεται η μετάβαση επό ένα ελαστικό μέσο σε ένα άλλο με τη μεσολάβηση ενός τμήματος από κατάλληλο τρίτο ελαστικό μέσο, του οποίου το μήκος, (κατά την διεύθυνση διάδοσης), και η αντίσταση Z είναι τέτοια ώστε οι ανακλώμενες από τα δύο άκρα του ενδιάμεσου ελαστικού μέσου να συμβάλουν αναιρετικά στην περιοχή του πρώτου ελαστικού μέσου (αντι-ανακλαστική ζεύξη). Τέτοιου είδους αντι-ανακλαστικές επιστρώσεις (anti-reflecting coatings) είναι συνηθισμένες στα οπτικά στοιχεία σύνθετων οπτικών διατάξεων. Η αρχή λειτουργία μίας τέτοιας αντι-ανακλαστικής ζεύξης-επίστρωσης φαίνεται στη συνέχεια.



Παράδειγμα αντι-ανακλαστικής ζεύξης. Δεξιά οδεύον μονοχρωματικό κύμα $y_a = ae^{i(\omega t - k_1 x)}$ διαδίδεται σε ιδανικό ($\omega = ck$) μονοδιάστατο ελαστικό μέσο κατά μήκος της διεύθυνσης *x*. Το μέσον διάδοσης έχει τρεις περιοχές με διαφορετική χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση Z η κάθε μία: $Z(-\infty < x < 0) = Z_1$, $Z(0 < x < L) = Z_2$, $Z(L < x < \infty) = Z_3$, και αντίστοιχες ταχύτητες (c_1, c_2, c_3). Λόγω των ασυνεχειών της σύνθετης αντίστασης στα σημεία $x = 0$ και $x = L$, έχουμε διαδοχικές ανακλάσεις στα ίδια σημεία. Υποθέτουμε ότι ευρισκόμαστε στο όριο της ασθενούς ανάκλασης, σύμφωνα με το οποίο, από τις συνιστώσες που επιστρέφουν στην αρχική περιοχή $(-\infty < x < 0)$, μόνο οι δύο πρώτες συνιστώσες με πλάτη b και f, είναι σημαντικές, ενώ οι υπόλοιπες είναι αμελητέες, και, θεωρώντας ως δεδομένες τις τιμές των Z_1 και Z_3, αναζητούμε κατάλληλες τιμές για το πάχος L και την σύνθετη αντίσταση Z_2 της ενδιάμεσης περιοχής $(0 < x < L)$ ώστε να μηδενίσουμε το αποτέλεσμα της συμβολής των δύο ανακλώμενων δεσμών a και b, («προσαρμογή αντιστάσεων», με παρεμβολή κατάλληλης ενδιάμεσης αντίστασης).

(α) Γράψτε τις μορφές των μονοχρωματικών κυμάτων y_b και y_f,

(β) Γράψτε τις συνθήκες για τα πλάτη και τις φάσεις των y_b και y_f, προκειμένου να έχουμε πάντοτε πλήρη αναιρετική συμβολή των δύο αυτών ανακλώμενων.

(γ) Γράψτε τα πλάτη των y_b και y_f συναρτήσει των Z_1, Z_2, Z_3.

(δ) Συνδυάζοντας τα ερωτήματα (β) και (γ), υπολογίστε το Z_2 συναρτήσει των Z_1, Z_3 και το L, συναρτήσει των ω, c_1, c_2, έτσι ώστε να έχουμε μηδενική ανάκλαση, στο πλαίσιο των παραπάνω προσεγγίσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $y_a = ae^{i(\omega t - k_1 x)}$, $y_b = be^{i(\omega t + k_1 x)}$, $y_f = fe^{i(\omega t + k_1 x - 2k_2 L)}$

(β) Συνθήκες αναιρετικής συμβολής: $b = f$ και $2k_2 L = \pi$

(γ) $\quad b = ar_{12} = a\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad f = at_{12}r_{23}t_{21} = ar_{23}t_{12}t_{21} = a\dfrac{Z_2 - Z_3}{Z_2 - Z_3}t_{12}t_{21}$

Στην προσέγγιση της ασθενούς ανάκλασης, ($r_{12}^2 \approx 0$), λαμβάνοντας, επίσης υπόψη ότι $r_{21} = -r_{12}$, έχουμε:

$$t_{12}t_{21} = (1 + r_{12})(1 + r_{21}) = (1 + r_{12})(1 - r_{12}) = 1 + r_{12} - r_{12} - r_{12}^2 = 1 - r_{12}^2 \approx 1$$

Οπότε, τα δύο πλάτη είναι $\quad b = a\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \;\; f = a\dfrac{Z_2 - Z_3}{Z_2 - Z_3}$

(δ) Με βάση την πρώτη συνθήκη αναιρετικής συμβολής: $\quad b = f \quad \Rightarrow \quad \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \dfrac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}$

$$\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3} \Rightarrow 2Z_1Z_3 = 2Z_2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_2 = \sqrt{Z_1Z_3}}$$

Όσον αφορά στο μήκος L, από την σχέση

$$2k_2L = \pi \Rightarrow L = \frac{\pi}{2k_2} = \frac{\pi\lambda_2}{2 \cdot 2\pi} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\pi}{2}\frac{c_2}{\omega}$$