Θ.1.(α)

$$u_x = e^x\cos y - e^y\sin x + y$$
$$u_{xx} = e^x\cos y - e^y\cos x$$
$$u_y = -e^x\sin y + e^y\cos x + x$$
$$u_{yy} = -e^x\cos y + e^y\cos x$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

Έστω $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη.

Από C−R έχουμε

$$v_y = u_x = e^x\cos y - e^y\sin x + y$$

$$\xrightarrow[\text{ως προς } y]{\text{ολοκλ.}} \quad \underline{v = e^x\sin y - e^y\sin x + \frac{y^2}{2} + c(x)} \quad (1)$$

Επίσης, από C−R έχουμε

$$v_x = -u_y = e^x\sin y - e^y\cos x - x$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \cancel{e^x\sin y} - \cancel{e^y\cos x} + c'(x) =$$
$$= \cancel{e^x\sin y} - \cancel{e^y\cos x} - x$$

$$\Longrightarrow \quad c(x) = -x^2/2 + c$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$f(x+iy) = \left(e^x\cos y + e^y\cos x + xy\right) + i\cdot$$
$$\cdot\left(e^x\sin y - e^y\sin x + \frac{y^2 - x^2}{2} + c\right)$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow \quad c = 0 \quad - - -$$

(β) (i) Έστω $f = u + iv \Rightarrow \overline{f} = u - iv$.

C–R για την f: $\begin{cases} u_x = v_y & \text{στο } A \\ u_y = -v_x & \text{" "} \end{cases}$

C–R για την $\overline{f}$: $\begin{cases} u_x = (-v)_y = -v_y & \text{στο } A \\ u_y = -(-v)_x = v_x & \text{" "} \end{cases}$

$\Rightarrow u_x = v_x = 0 \Rightarrow f' = u_x + iv_x = 0$ στο A

$\Rightarrow f =$ σταθερή στο A.

(ii) $\forall z \in A$, $f(z) + \overline{g(z)} = \overline{f(z) + \overline{g(z)}}$

$= \overline{f(z)} + g(z)$

$\Rightarrow f(z) - g(z) = \overline{f(z) - g(z)}$

$\Rightarrow \overline{f-g} \in H(A) \overset{(i)}{\Longrightarrow} f - g = c \in \mathbb{C}$

Αλλά $\overline{c} = c \Rightarrow c \in \mathbb{R}$ - - - -

Θ. 2. (α) Θέτω $f(z) = e^z/z$. Τότε f ολόμορφη στο Δ και όχι σταθερή. Από την αρχή του μεγίστου έχουμε

$$\max_{z \in \Delta} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Delta} |f(z)| \Rightarrow$$

$\longrightarrow$

$$\max_{z\in\Delta}|f(z)| = \max\left\{\max_{|z|=1/2}|f(z)|,\ \max_{|z|=1}|f(z)|\right\}$$

Έστω $R>0$ & $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=R$. Τότε,

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta),\quad \theta\in(-\pi,\pi]$$

$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{|e^z|}{|z|} = \frac{e^{R\cos\theta}}{R}$$

Η μέγιστη τιμή της έκφρασης $e^{R\cos\theta}/R$ είναι e^R/R και λαμβάνεται για

$$\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$$

δηλ. για $z=R$.

Άρα,
$$\max_{|z|=1/2}|f(z)| = \frac{e^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{e},$$

$$\max_{|z|=1}|f(z)| = e.$$

Αλλά $2\sqrt{e} > e \Leftrightarrow 4e > e^2$
$\Leftrightarrow 4 > e$ (ισχύει)

$$\Rightarrow \max_{z\in\Delta}|f(z)| = 2\sqrt{e} = f(1/2).$$

<u>Θ.2(β)</u> • Για $|z-1|>1$, θέτω $w=\frac{1}{z-1}$

οπότε $z=1+\frac{1}{w}$, $|w|<1$

$$\Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{w}{1+w}=w\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

• Για $|z-1|<2$, θέτω $w=\frac{z-1}{2}$

$\Rightarrow z=1+2w$, $|w|<1$

$$\Rightarrow \frac{2}{3-z}=\frac{2}{3-1-2w}=\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$$

Άρα, για $1<|z-1|<2$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}.$$

<u>Θ.3(α)</u> $\forall z\in\gamma_R^*$, $\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|\leq\frac{M}{R^2}$,

όπου $M=\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$ $\xRightarrow{(ML-\text{ανισότητα})}$

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right|\leq 2\pi R\frac{M}{R^2}=\frac{2\pi M}{R}\xrightarrow{R\to+\infty}0.$$

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $\forall R > 0$, από Θ.Τ. Cauchy έχουμε

$$|f'(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right| \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$\Rightarrow f'(z_0) = 0$, $\forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow f =$ σταθερή.

Θ.3(β) Θέτω $f(z) = e^{g(z)-z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Τότε, f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|f(z)| = e^{\mathrm{Real}\,g(z) - \mathrm{Real}(z)} \leq e^0 = 1$$

$\overset{(a)}{\Rightarrow}$ $f =$ σταθερή στο $\mathbb{C}$

$\Rightarrow f'(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow [g'(z) - 1]\,e^{g(z)-z} = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow g'(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow (g(z) - z)' = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists\ c =$ σταθερά $\in \mathbb{C}$ |

$g(z) - z = c$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

. . .

Θ.4. (α) $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$1-\cos z = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)$$

$$= z^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots\right)}_{\varphi(z)}.$$

Προφανώς $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη κ'

$\underline{\varphi(0) = 1/2 \neq 0}$, $\underline{\varphi'(0) = 0}$.

Έπεται ότι το $z_0 = 0$ είναι πόλος τάξης 2 της $\dfrac{1}{1-\cos z}$ οπότε

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1-\cos z}, 0\right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right)'$$

$$= \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{\varphi(z)}\right]' = -\lim_{z \to 0} \frac{\varphi'(z)}{[\varphi(z)]^2}$$

$$= -\frac{\varphi'(0)}{[\varphi(0)]^2} = 0.$$

Επιπλέον, το $z_0 = 0$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της $\dfrac{1}{1-\cos z}$ στο int γ^*

(Ρίζες της $1-\cos z$: $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$)

Άρα, $$\boxed{\int_\gamma \frac{dz}{1-\cos z} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1-\cos z}, 0\right) = 0}$$

Επίσης, $\forall |z|>0$,

$$z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^5\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^6} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^{10}} - \dots\dots\right)$$

$$= z^3 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(z^5\sin\left(\frac{1}{z^2}\right), 0\right) = -1/6$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)dz = -2\pi i/6 = -\pi i/3.}$$

Άρα, $\boxed{\int_\gamma h(z)\,dz = 0 - \pi i/3 = -\pi i/3}$.

Θ.4(β) Θέτω $p = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Τότε, οι ρίζες της $x^4 = -1$ είναι

$\pm p$, $\pm \overline{p}$

δηλ. οι

$$\underbrace{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}_{p}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \underbrace{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}_{-\overline{p}}$$

Άρα, $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = $ $\longrightarrow$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, p \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, -\bar{p} \right) \right]$$

$$= \pi i \left(\frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=p} + \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=-\bar{p}} \right)$$

$$= \frac{\pi i}{4} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\bar{p}} \right) = \frac{\pi i}{4} \; \frac{\bar{p} - p}{|p|^2}$$

$$= \frac{\pi i}{4} \left(-2 \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \, .$$