Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

Λύσεις Θεμάτων

Ιωάννης (Χουάν) Τσαντήλας
03120883
Github-Repo

Contents

Κανονική 24

Θέμα 1

α. Τρία μηνύματα $M_i(i = 1,2,3)$ μεταδίδονται μέσω τριών σημάτων s(t), (0), -s(t) αντίστοιχα για κάθε T δευτερόλεπτα. Το κανάλι είναι AWGN με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $\sqrt{N_0/2}$. Έστω E η ενέργεια των σημάτων $\pm s(t)$ και $K_i(i = 1,2)$ τα δύο κατώφλια απόφασης.

  i. Αφού σχεδιάστε και δείξτε τις περιοχές απόφασης, υπολογίστε τη μέση πιθανότητα λάθους μηνύματος συναρτήσει των E και των $K_i(i = 1,2)$ έχοντας βρει και την τυπική απόκλιση του θορύβου λήψης αν οι a priori πιθανότητες είναι $P(M_1) = P(M_3) = 0{,}25$.

  ii. Βρείτε τα $K_i(i = 1,2)$ που ελαχιστοποιούν την πιθανότητα λάθους αν τα μηνύματα είναι ισοπίθανα και εξηγήστε.

β. Θεωρούμε μετάδοση με κανάλι AWGN (μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση σ) με χρήση των δύο κυματομορφών: $x_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}, 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ και $x_2(t) = \sqrt{\frac{1}{T}}, 0 \leq t \leq T$.

  i. Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για τα $x_1(t)$,$x_2(t)$ με τη μέθοδο Gram-Schmidt.

  ii. Υπολογίστε τη μέση ενέργεια αν εκπέμπονται με την ίδια πιθανότητα και σχεδιάστε το βέλτιστο δέκτη με χρήση προσαρμοσμένων φίλτρων.

  iii. Υπολογίστε την πιθανότητα λάθους εσφαλμένου ψηφίου.

Ερώτημα Α

Περιοχές Απόφασης

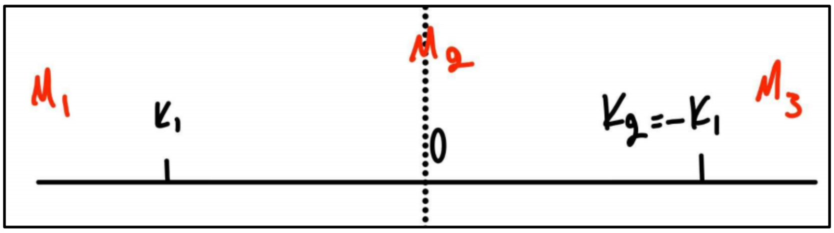
Οι περιοχές απόφασης βασίζονται στο λαμβανόμενο σήμα $r(t)$, το οποίο είναι το μεταδιδόμενο σήμα συν το θόρυβο:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

όπου n(t) είναι ο θόρυβος, ο οποίος ακολουθεί μια κατανομή Gauss με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$. Οι περιοχές απόφασης ορίζονται από τα κατώφλια K_1 και K_2, τα οποία αποτελούν όρια στις πιθανές τιμές του $r(t)$. Έστω χ.β.γ. ότι $K_1 < K_2$.

- Εάν $r(t) > K_2$, ο δέκτης αποφασίζει M_1 (το s(t) στάλθηκε).
- Εάν $K_1 \leq r(t) \leq K_2$, ο δέκτης αποφασίζει M_2 (το (0) στάλθηκε).
- Εάν $r(t) < K_1$, ο δέκτης αποφασίζει M_3 (το -s(t) στάλθηκε).

Οι περιοχές απόφασης μπορούν να απεικονιστούν σε μια γραμμή:



Μέση Πιθανότητα Σφάλματος

Έστω P_e η πιθανότητα σφάλματος. Για κάθε μήνυμα έχουμε:

- **M_1 αποστέλλεται (σήμα s(t))**: Η πιθανότητα σφάλματος εμφανίζεται όταν $r(t) \leq K_2 \to s(t) + n(t) \leq K_2$. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Q:

$$P_e(M_1) = P(r(t) \leq K_2 | M_1) = Q\left(\frac{E - K_2}{\sigma}\right)$$

- $\boldsymbol{M_2}$ **αποστέλλεται (σήμα 0)**: Η πιθανότητα σφάλματος εμφανίζεται όταν $r(t) < K_1$ ή $r(t) < K_2$. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Q:

$$P_e(M_2) = P(r(t) < K_1 | M_2) + P(r(t) > K_2 | M_2) = Q\left(\frac{K_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{-K_2}{\sigma}\right)$$

- $\boldsymbol{M_3}$ **αποστέλλεται (σήμα -s(t))**: Η πιθανότητα σφάλματος εμφανίζεται όταν $r(t) \geq K_1$. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Q:

$$P_e(M_3) = P(r(t) \geq K_1 | M_3) = Q\left(\frac{E + K_1}{\sigma}\right)$$

Έχουμε πως: $P(M_1) = P(M_3) = 0{,}25$, άρα $P(M_2) = 0{,}5$. Η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι:

$$\begin{aligned} \overline{P_e} &= P(M_1) \cdot P_e(M_1) + P(M_2) \cdot P_e(M_2) + P(M_3) \cdot P_e(M_3) = \\ &= 0{,}25 \cdot P_e(M_1) + 0{,}5 \cdot P_e(M_2) + 0{,}25 \cdot P_e(M_3) = \\ &= 0{,}25 \cdot Q\left(\frac{E - K_2}{\sigma}\right) + 0{,}5 \cdot Q\left(\frac{K_1}{\sigma}\right) + 0{,}5 \cdot Q\left(\frac{-K_2}{\sigma}\right) + 0{,}25 \cdot Q\left(\frac{E + K_1}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση Πιθανότητας Σφάλματος

Δεδομένου ότι τα σήματα είναι ισοδύναμα (δηλαδή έχουν την ίδια ενέργεια), χρειαζόμαστε συμμετρία στις περιοχές απόφασης. Άρα, $K_1 = -K_2$.

Ερώτημα Β

Εύρεση Ορθοκανονικής Βάσης

- **Συνάρτηση 1ης βάσης** $\boldsymbol{\varphi_1(t)}$

Κανονικοποιώντας την $x_1(t)$ έχουμε την $\varphi_1(t) = \frac{x_1(t)}{\|x_1(t)\|}$. Η ενέργεια του $x_1(t)$:

$$\|x_1(t)\| = \sqrt{\int_0^{T/2} \left(\sqrt{\frac{2}{T}}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = 1$$

Άρα:

$$\varphi_1(t) = x_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}, \qquad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

- **Συνάρτηση 2ης βάσης** $\boldsymbol{\varphi_2(t)}$

Ισχύει $\varphi_2(t) = \frac{u_2(t)}{\|u_2(t)\|}$, με:

$$u_2(t) = x_2(t) - proj_{\varphi_1} x_2(t)$$

Η προβολή του x_2 στην φ_1 (μόνο για $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$, εκτός είναι 0):

$$proj_{\varphi_1} x_2(t) = \left(\int_0^{\frac{T}{2}} x_2(t) \cdot \varphi_1(t)\, dt \right) \cdot \varphi_1(t) =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sqrt{\frac{1}{T}} \cdot \sqrt{\frac{2}{T}}\, dt \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} = \sqrt{\frac{1}{T}} \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \frac{T}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

Άρα:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{T}}, & \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

Η ενέργεια του u_2:

$$\|u_2(t)\| = \sqrt{\int_{T/2}^{T} \left(\sqrt{\frac{1}{T}} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άρα:

$$\varphi_2(t) = \frac{u_2(t)}{\|u_2(t)\|} = \sqrt{\frac{2}{T}}, \qquad \frac{T}{2} \le t \le T$$

Έτσι, η ορθοκανονική βάση είναι:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}, \qquad 0 \le t \le \frac{T}{2}$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}, \qquad \frac{T}{2} \le t \le T$$

Υπολογισμός Μέσης Ενέργειας

Υπολογίζουμε αρχικά την ενέργεια κάθε κυματομορφής:

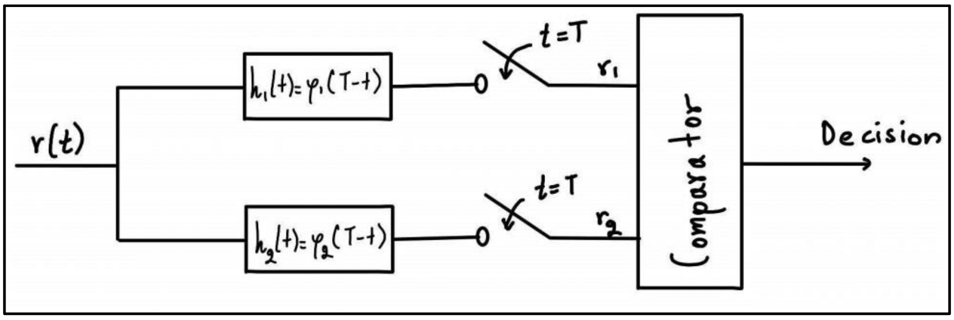
$$E_1 = \int_0^{T/2} \left(\sqrt{\frac{2}{T}} \right)^2 dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2} = 1$$

$$E_2 = \int_0^{T} \left(\sqrt{\frac{1}{T}} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \cdot T = 1$$

Εφόσον οι πιθανότητες εκπομπής είναι ίσες, η μέση ενέργεια είναι:

$$E_{avg} = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Σχεδιασμός Βέλτιστου Δέκτη



Υπολογισμός Πιθανότητας Σφάλματος Εσφαλμένου Ψηφίου

Η πιθανότητα σφάλματος καθορίζεται από την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημάτων. Ελέγχουμε εάν τα $x_1(t), x_2(t)$ είναι ορθογώνια:

$$\langle x_1(t), x_2(t)\rangle = \int_0^T x_1(t)\cdot x_2(t)\,dt = \int_0^{\frac{T}{2}} x_1(t)\cdot x_2(t)\,dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\sqrt{\frac{1}{T}}dt = \sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\sqrt{\frac{1}{T}}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Δεν είναι ορθογώνια. Τα $x_1(t), x_2(t)$ μπορούν να αναπαρασταθούν ως:

$$x_1(t) = a_{11}\varphi_1 + \alpha_{12}\varphi_2$$

$$x_2(t) = a_{21}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2$$

Και η απόσταση d μεταξύ τους είναι:

$$d = \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{21})^2 + (\alpha_{12} - \alpha_{22})^2}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές:

$$\alpha_{11} = \langle x_1(t), \varphi_1(t)\rangle = \int_0^T x_1(t)\cdot\varphi_1(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\frac{T}{2} = 1$$

$$\alpha_{12} = \langle x_1(t), \varphi_2(t)\rangle = \int_0^T x_1(t)\cdot\varphi_2(t)\,dt = 0$$

$$\alpha_{21} = \langle x_2(t), \varphi_1(t)\rangle = \int_0^T x_2(t)\cdot\varphi_1(t)\,dt = \sqrt{\frac{1}{T}}\cdot\sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_{22} = \langle x_2(t), \varphi_2(t)\rangle = \int_0^T x_2(t)\cdot\varphi_2(t)\,dt = \sqrt{\frac{1}{T}}\cdot\sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Επομένως, η απόσταση d:

$$d = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \sqrt{2}}$$

Για ένα κανάλι AWGN με τυπική απόκλιση θορύβου σ, η πιθανότητα σφάλματος P_e δίνεται από:

$$P_e = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Θέμα 2

α. Έστω δυαδικό σύστημα επικοινωνιών χρησιμοποιεί δύο ισοπίθανα σήματα $s_1(t), s_2(t)$ τα οποία ορίζονται:

$$s_1(t) = A, \qquad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s_2(t) = -A, \qquad 0 \leq t \leq \lambda T_b$$

Με $0 \leq \lambda \leq 1$. Για ποιες τιμές του λ η πιθανότητα λάθους είναι τουλάχιστον 10^{-3} για υπηρεσίες φωνής αν ο λόγος ενέργειας ψηφίου προς θόρυβο είναι $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 1\left[\frac{AM+2}{2}\right]dB$. Το AM είναι ο τελευταίος αριθμός του μητρώου σας, π.χ. αν $AM = 1, \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 11{,}5dB$.

β. Σήμα πληροφορίας διαμορφώνει ένα σήμα συχνότητας 100kHz και παράγει ένα σήμα FM στενής ζώνης $\varphi_{NBFM}(t) = 5\cos(2\pi \cdot 10^5 t + 0.0050\sin(2\pi \cdot 10^4 t))$. Σχεδιάστε το block διάγραμμα που παράγει το σήμα FM wideband σε συχνότητα 12(AM) MHz (AM ο τελευταίος αριθμός του μητρώου σας π.χ. AM=6, 126MHz) και μέγιστη απόκλιση συχνότητας 100kHz. Υποθέστε πως διαθέτετε ό,τι χρειάζεστε από εξοπλισμό. Στη σχεδίαση πρέπει να φαίνονται καθαρά οι συχνότητες φέροντος, οι αποκλίσεις συχνότητας και το εύρος των φίλτρων που θα χρησιμοποιήσετε.

Έστω $AM = 0$.

Ερώτημα A

Οι ενέργειες των σημάτων είναι:

$$E_1 = \int_0^{T_b} (A)^2 dt = A^2 \cdot T_b$$

$$E_2 = \int_0^{\lambda T_b} (-A)^2 dt = A^2 \cdot \lambda T_b$$

Και εφόσον είναι ισοπίθανα, η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_b = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{A^2 \cdot T_b \cdot (\lambda + 1)}{2}$$

Έχουμε:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 11dB \to \frac{E_b}{N_0} = 12{,}589 \to \frac{A^2 \cdot T_b \cdot (\lambda+1)}{2N_0} = 12{,}589 \to \frac{A^2 \cdot T_b}{N_0} = \frac{25{,}178}{\lambda + 1}$$

Αλλά θέλουμε:

$$P_e \geq 10^{-3} = Q(3) \to Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b_2}}{N_0}}\right) \geq Q(3) \to \sqrt{\frac{2E_{b_2}}{N_0}} \leq 3 \to \frac{E_{b_2}}{N_0} \leq 4{,}5 \to \frac{A^2 \cdot \lambda T_b}{N_0} \leq 4{,}5 \to$$

$$\lambda \frac{25{,}178}{\lambda + 1} \leq 4{,}5 \to \lambda \leq 0{,}217$$

Ερώτημα Β

Θέμα 3

Σε μια ασύρματη ζεύξη σημείου προς σημείου (Point to Point wireless link), η θερμοκρασία θορύβου της κεραίας λήψης είναι 80K, ενώ η 1η βαθμίδα του συστήματος λήψης (ΣΛ) είναι ενισχυτής LNA με θερμοκρασία θορύβου 100K και συμβάλλει κατά 25% στη συνολική ισοδύναμη θερμοκρασία θορύβου μέχρι την είσοδο του αποδιαμορφωτή του ΣΛ.

Κατά την αρχική λειτουργία της ασύρματης αυτής ζεύξης υπάρχει υπέρβαση του κατωφλίου SNR στην είσοδο του αποδιαμορφωτή του ΣΛ κατά 0,1dB.

Για ρυθμιστικούς λόγους, αποφασίζεται να αυξηθεί το περιθώριο ισχύος εξόδου του ενισχυτή του συστήματος εκπομπής (ΣΕ) της ασύρματης αυτής ζεύξης κατά 0,4dB. Προς εξασφάλιση της οριακά αποδεκτής λειτουργίας της συγκεκριμένης ζεύξης, αποφασίζεται η αντικατάσταση του ενισχυτή LNA με άλλον της ίδιας θερμοκρασίας θορύβου αλλά υψηλότερου κέρδους ισχύος.

Κατά πόσα dB υψηλότερο πρέπει να είναι το κέρδος του νέου ενισχυτή LNA που θα αντικαταστήσει τον αρχικό;

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η απάντηση σας πρέπει να προκύψει με κατάλληλη επεξεργασία ορθά επιλεγμένων μαθηματικών σχέσεων.

Λύση

Creds.: Γ. Γκριμπογιάννης

Το δίκτυο έχει την εξής μορφή:

Είσοδος (Κεραία) — LNA — Υπόλοιπο — Έξοδος

$$T_K = 80K, \qquad T_{LNA} = 100K$$

Ο ενισχυτής LNA συμβάλλει κατά 25% στη συνολική ισοδύναμη θερμοκρασία, άρα:

$$T_{ισ} = 4 \cdot T_{LNA} = 400 \to T_{LNA} + \frac{T_{υπολ}}{G_{LNA}} = 400 \to \frac{T_{υπολ}}{G_{LNA}} = 300$$

Υπάρχει υπέρβαση του κατωφλίου SNR στην είσοδο του αποδιαμορφωτή του ΣΛ κατά 0,1dB, άρα:

$$SNR_{out} = SNR_T + 0{,}1dB \to 10\log_{10}\left(\frac{SNR_{out}}{SNR_T}\right) = 0{,}1 \to$$

$$\frac{SNR_{out}}{SNR_T} = 1{,}023$$

Θέλουμε να εξασφαλίσουμε την οριακά αποδεκτή λειτουργία, άρα:

$$SNR'_{out} = SNR_T$$

Επομένως:

$$\frac{SNR_{out}}{SNR'_{out}} = 1{,}023, \qquad (1)$$

Αυξάνουμε το περιθώριο ισχύος εξόδου του ενισχυτή του ΣΕ κατά 0,4dB, άρα:

$$SNR'_{in} = SNR_{in} - 0{,}4dB \to 10\log_{10}\left(\frac{SNR'_{in}}{SNR_{in}}\right) = -0{,}4 \to$$

$$\frac{SNR'_{in}}{SNR_{in}} = 0{,}912, \qquad (2)$$

Ισχύει:

$$\left\{\begin{matrix} SNR_{in} = \dfrac{S_{in}}{kT_\kappa B_N} \\ SNR_{out} = \dfrac{S_{in}}{k(T_\kappa + T_{\iota\sigma})B_N} \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \frac{T_\kappa + T_{\iota\sigma}}{T_\kappa} \rightarrow \frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = \frac{T_\kappa}{T_\kappa + T_{\iota\sigma}}\ , \qquad (3)$$

Ομοίως:

$$\frac{SNR'_{in}}{SNR'_{out}} = \frac{T_\kappa + T'_{\iota\sigma}}{T_\kappa}, \qquad (4)$$

Με τις (1), (2):

$$\frac{SNR_{out}}{SNR'_{out}} \cdot \frac{SNR'_{in}}{SNR_{in}} = 1{,}023 \cdot 0{,}912 = 0{,}932$$

Με τις (3), (4):

$$\frac{SNR'_{in}}{SNR'_{out}} \cdot \frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = \frac{T_\kappa + T'_{\iota\sigma}}{T_\kappa} \cdot \frac{T_\kappa}{T_\kappa + T_{\iota\sigma}} = \frac{80 + T'_{\iota\sigma}}{80 + 400} \rightarrow$$

$$0{,}932 = \frac{80 + T'_{\iota\sigma}}{80 + 400} \rightarrow \cdots \rightarrow T'_{\iota\sigma} = 367{,}828K \rightarrow$$

$$T_{LNA} + \frac{T_{\upsilon\pi o\lambda}}{G'_{LNA}} = 367{,}828 \rightarrow \frac{T_{\upsilon\pi o\lambda}}{G'_{LNA}} = 267{,}828$$

Τελικά:

$$\frac{T_{\upsilon\pi o\lambda}}{G_{LNA}} \cdot \frac{G'_{LNA}}{T_{\upsilon\pi o\lambda}} = 300 \cdot \frac{1}{267{,}828} \rightarrow \frac{G'_{LNA}}{G_{LNA}} = 1{,}12 \rightarrow 10\log_{10}\left(\frac{G'_{LNA}}{G_{LNA}}\right) = 10\log_{10}(1{,}12) \rightarrow$$

$$\left(\frac{G'_{LNA}}{G_{LNA}}\right)_{db} = 0{,}492dB$$

Θέμα 4

Η ισχύς εκπομπής ενός Σταθμού Βάσης (ΣΒ) Κινητής Τηλεφωνίας ρυθμίζει να αυξηθεί κατά 2dB. Ποια αναμένεται να είναι η ποσοστιαία μεταβολή της εμβέλειας του ΣΒ;

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η απάντηση σας πρέπει να προκύψει με κατάλληλη επεξεργασία ορθά επιλεγμένων μαθηματικών σχέσεων.

Λύση

Για απόσβεση ισχύος $L = \frac{1}{G}$ και ισοδύναμη θερμότητα αντίστασης: T_g, η ισχύς θορύβου εξόδου σε παθητικό δίκτυο:

$$N = \frac{k(T_g + T_e)B}{L} \sim kT_g B$$

Επίσης:

$$N' = N + 2dB \rightarrow 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{N'}{N}\right) = 2 \rightarrow \frac{N'}{N} = 1{,}585 \rightarrow \frac{kT_g B'}{kT_g B} = 1{,}585 \rightarrow B' = 1{,}585 \cdot B$$

Επαναληπτική 23

Θέμα 1

Δίνονται οι κυματομορφές:

$$\psi_1(t) = cos(2\pi f \cdot t + \varphi_1), 0 \le t \le T = 1/f$$

$$\psi_2(t) = cos(2\pi f \cdot t + \varphi_2), 0 \le t \le T = 1/f$$

Όπου $\varphi_1 = \pi/6, \varphi_2 = \pi/4$.

α. Είναι οι κυματομορφές ορθογώνιες; Βρείτε μία ορθοκανονική βάση που ανήκουν οι ψ_1, ψ_2 και να τις εκφράσετε συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης.
β. Τι είδους διαμόρφωση έχουμε;
γ. Ποια είναι η ενέργεια συμβόλου αν $N_0 = (AM + 1)W/Hz$ για να έχουμε πιθανότητα λάθους συμβόλου τουλάχιστον 10^{-5}, όπου ΑΜ ο τελευταίος αριθμός του Αριθμού Μητρώου σας.
δ. Ποια είναι η ενέργεια ψηφίου για την παραπάνω πιθανότητα λάθους συμβόλου;
ε. Σχεδιάστε τον πομπό και τον δέκτη με χρήση προσαρμοσμένων φίλτρων.

Δίνεται $Q^{-1}(10^{-5}) = 4{,}2649$.

Ερώτημα Α

Για να βρούμε εάν οι κυματομορφές είναι ορθογώνιες:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_0^T \psi_1(t) \cdot \psi_2(t)\, dt = \int_0^T cos\left(2\pi f \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \cdot cos\left(2\pi f \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) dt$$

Θα αξιοποιήσουμε την ιδιότητα:

$$cosA \cdot cosB = \frac{1}{2}(\cos(A - B) + \cos(A + B))$$

Άρα:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2}\int_0^T cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + cos\left(4\pi f \cdot t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) dt = \cdots = \frac{1}{2} T \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \neq 0$$

Άρα **δεν** είναι ορθογώνιες. Αφού είναι και τα δύο συνημίτονα με την ίδια συχνότητα αλλά διαφορετικές φάσεις, είναι γραμμικοί συνδυασμοί ορθογώνιων συναρτήσεων βάσης $cos(2\pi f t)$ και $sin(2\pi f t)$:

$$\beta_1(t) = cos(2\pi f t)$$

$$\beta_2(t) = sin(2\pi f t)$$

$$\psi_1(t) = cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) cos(2\pi f t) - sin\left(\frac{\pi}{6}\right) sin(2\pi f t)$$

$$\psi_2(t) = cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) cos(2\pi f t) - sin\left(\frac{\pi}{4}\right) sin(2\pi f t)$$

Ερώτημα Β

Οι κυματομορφές ανήκουν σε ένα δισδιάστατο χώρο σημάτων, όπου τα διανύσματα βάσης είναι $cos(2\pi f t)$ και $sin(2\pi f t)$. Η διαμόρφωση είναι ένας αστερισμός μετατόπισης φάσης (phase shift keying - PSK).

Ερώτημα Γ

Έχοντας PSK, η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου P_s είναι:

$$\mathrm{P}_s = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Θέλουμε:

$$P_s \leq 10^{-5} \rightarrow \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} = 4{,}2649 \rightarrow E_s = 9{,}094 \cdot (AM+1)J$$

Αντικατάσταση ΑΜ.

Ερώτημα Δ

Έχοντας PSK, η ενέργεια ψηφίου E_b (ενέργεια ανά bit) σχετίζεται με την ενέργεια συμβόλου E_s ως εξής:

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

Με Binary Phase Shift Keying (BPSK), M=2, οπότε:

$$E_b = E_s = 9{,}094 \cdot (AM+1)J$$

Αντικατάσταση ΑΜ.

Ερώτημα Ε

Θέμα 2

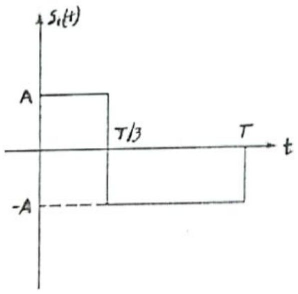
α. Ένα σύστημα ψηφιακών επικοινωνιών μεταδίδει ένα από τα τρία μηνύματα m_1, m_2, m_3 χρησιμοποιώντας τα σήματα $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$. Το σήμα $s_3(t) = 0$ και τα σήματα $s_1(t), s_2(t)$ φαίνονται παρακάτω στο Σχήμα. Αν θεωρήσουμε πως το κανάλι του θορύβου είναι AWGN με φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$:

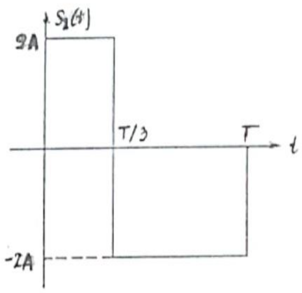
i. Καθορίστε μία ορθοκανονική βάση για αυτό το σύνολο των σημάτων και δείξτε τον αστερισμό των σημάτων.

ii. Αν τα μηνύματα είναι ισοπίθανα, ποιοι είναι οι βέλτιστοι κανόνες απόφασης για αυτό το σύστημα; Σχεδιάστε τις περιοχές απόφασης στον αστερισμό.

iii. Εκφράστε την πιθανότητα λάθους του βέλτιστου δέκτη συναρτήσει του μέσου SNR ανά ψηφίο.

iv. Αν υποθέσουμε πως το σύστημα μεταδίδει 5000 σύμβολα το δευτερόλεπτο, ποιος είναι ο ρυθμός μετάδοσης σε bits per sec;





β. Για την μετάδοση ακουστικού σήματος 20kHz με διαμόρφωση FM έχει αποδοθεί εύρος ζώνης 200kHz με αρχική συχνότητα 200MHz στο φάσμα.

i. Ποιος είναι ο δείκτης διαμόρφωσης FM;

ii. Σχεδιάστε κύκλωμα μέσω του οποίου τετραπλασιάζεται η φέρουσα συχνότητα του εν λόγω διαμορφωμένου FM σήματος. Να εξηγήστε σύντομα και πλήρως τη λειτουργία των βαθμίδων του κυκλώματος που προτείνετε.

Ερώτημα Α

Ορθοκανονική Βάση

Τα σήματα είναι:

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < \frac{T}{3} \\ -A, & \frac{T}{3} < t \le T \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} 9A, & 0 \le t < \frac{T}{3} \\ -2A, & \frac{T}{3} < t \le T \end{cases}$$

Παρατηρούμε πως τα δύο σήματα έχουν παρόμοια συμπεριφορά στα ίδια διαστήματα. Θέλουμε το ϕ_1 να είναι μια σταθερή τιμή στο διάστημα $0 \le t < \frac{T}{3}$ και μηδέν αλλού. Για την κανονικοποίηση, έχουμε:

$$\int_0^{\frac{T}{3}} \varphi_1^2(t) = 1$$

Έστω $\phi_1(t) = C_1$ (σταθερή) στο διάστημα $0 \leq t < \frac{T}{3}$. Άρα:

$$\int_0^{\frac{T}{3}} C_1^2 = 1 \to \cdots \to C_1 = \sqrt{\frac{3}{T}}$$

Άρα:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{T}}, \qquad 0 \leq t < \frac{T}{3}$$

Ομοίως:

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2T}}, \qquad \frac{T}{3} \leq t < T$$

Επομένως:

$$s_1(t) = A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)$$

$$s_3(t) = 2A\varphi_1(t) - 2A\varphi_2(t)$$

$$s_3(t) = 0 \cdot \varphi_1(t) - 0 \cdot \varphi_2(t)$$

Ο αστερισμός είναι

Ερώτημα Β

Θέμα 3

Ασύρματο σύστημα ψηφιακών επικοινωνιών χρησιμοποιεί κωδικοποίηση FEC επιλεγμένη από ένα σύνολο διαθέσιμων σχημάτων κωδικοποίησης FEC με ρυθμούς κώδικα $R_\mu = \frac{\mu+1}{\mu+3}$, με $\mu = 1,2,3,4,5$. Στο σύστημα λήψης, που βρίσκεται σε θερμοκρασία θ(°C), αμέσως μετά την κεραία λήψης συνδέεται ζωνοπερατό φίλτρο με απόσβεση ίσης προς L (dB).

Το ποσοστό λανθασμένων ψηφίων (bit error ratio, BER) για τη συγκεκριμένη ασύρματη ζεύξη υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

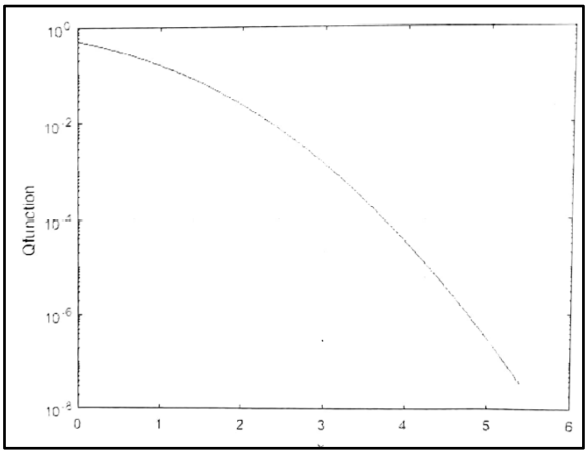
$$BER = F\left(R_\mu, \gamma_s\right)$$

Όπου γ_s ο λόγος ενέργειας συμβόλου προς στάθμη θορύβου στην είσοδο του κυκλώματος απόφασης του αποδιαμορφωτή της μονάδας επεξεργασίας του δέκτη και F γνωστή, εντόνως φθίνουσα συνάρτηση του γ.

1. Θεωρώντας όλα τα χαρακτηριστικά της ζεύξης γνωστά, να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις μέσω των οποίων το γ, και, ακολούθως, το ποσοστό λανθασμένων ψηφίων BER από το L;
2. Η συνάρτηση F αναμένεται να είναι φθίνουσα ή αύξουσα ως προς την παράμετρο μ;
3. Ποιος είναι ο λόγος του μέγιστου προς το ελάχιστο ωφέλιμο ρυθμό μετάδοσης που μπορεί να υποστηρίξει η συγκεκριμένη ζεύξη;

Οι απαντήσεις στα ερωτήματα πρέπει να βασίζονται στην ορθή επιλογή και επεξεργασία κατάλληλης κατά περίπτωση αλληλουχίας σχετικών μαθηματικών σχέσεων και συλλογισμών.

Δίνεται η συνάρτηση Q(x):



Ερώτημα 1

Έστω P_{in} η ισχύς εισόδου στο δέκτη (πριν από το ζωνοπερατό φίλτρο). Η ισχύς μετά το φίλτρο P_{out} θα μειωθεί κατά τον συντελεστή εξασθένησης L (σε dB):

$$P_{out} = P_{in} \cdot 10^{-\frac{L}{10}}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι η ισχύς του θορύβου εξόδου είναι:

$$N_0 \sim kT_g B$$

Επομένως, ο λόγος σήματος προς θόρυβο γ_s:

$$\gamma_s = \frac{P_{out}}{N_0} = \frac{P_{in} \cdot 10^{-\frac{L}{10}}}{kT_g B}$$

Άρα, το γ_s είναι αντιστρόφως ανάλογο του L και αυξάνεται με τη μείωση της θ.

Δεδομένου ότι το BER είναι εντόνως φθίνουσα του γ, η αύξηση του γ (δηλαδή η μείωση του L ή της θερμοκρασίας θ) θα οδηγήσει σε χαμηλότερο BER. Επομένως, το BER είναι φθίνουσα συνάρτηση του L και της θ.

Ερώτημα 2

Ο ρυθμός κωδικοποίησης είναι:

$$R_\mu = \frac{\mu + 1}{\mu + 3}$$

Ο ρυθμός είναι αύξουσα συνάρτηση του μ. Επομένως, για σταθερό γ, όσο αυξάνεται το μ, τόσο αυξάνεται το BER.

Ερώτημα 3

Αφού R_μ αύξουσα, ο μέγιστος και ο ελάχιστος ρυθμός είναι:

$$R_{\mu,min} = \frac{1}{4}, \qquad R_{\mu,max} = \frac{6}{8}$$

Άρα ο λόγος τους:

$$\frac{R_{\mu,max}}{R_{\mu,min}} = 1{,}5$$

Κανονική 23

Θέμα 1

Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για τα παρακάτω χρονικά πεπερασμένα σήματα:

$$s_1(t) = \begin{cases} (AM+1), & 0 \le t < T, \quad 2T \le t < 3T \\ -(AM+1), & T \le t < 2T, \quad 3T \le t \le 4T \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} (AM+1), & 0 \le t < T, \quad 3T \le t \le 4T \\ -(AM+1), & T \le t < 3T \end{cases}$$

$$s_3(t) = \begin{cases} (AM+1), & 0 \le t < 2T \\ -(AM+1), & 2T < t \le 4T \end{cases}$$

Όπου AM ο τελευταίος αριθμός του αριθμού μητρώου σας.

α. Βρείτε και σχεδιάστε λεπτομερώς τις συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης καθώς και τον αστερισμό των σημάτων. Σχεδιάστε τις περιοχές απόφασης επιλογής με ακρίβεια.
β. Βρείτε τη μέση ενέργεια συμβόλου και τη μέση ενέργεια ψηφίου αν $T = 1msec$.
γ. Ποια είναι η μέση πιθανότητα λάθους ενός συμβόλου με τα άλλα δύο σύμβολα αν ο θόρυβος είναι AWGN και $N_0 = 0{,}5W/Hz$.

Έστω $A = AM + 1$.

Ερώτημα Α

Τα σήματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\langle s_1|s_2\rangle = \int_0^{4T} s_1(t)\cdot s_2(t)\,dt = \int_0^{T} A\cdot A\,dt + \int_T^{2T} -A\cdot(-A)\,dt + \int_{2T}^{3T} A\cdot(-A)\,dt + \int_{3T}^{4T} -A\cdot A\,dt = 0$$

$$\langle s_2|s_3\rangle = \int_0^{4T} s_2(t)\cdot s_3(t)\,dt = \int_0^{T} A\cdot A\,dt + \int_T^{2T} -A\cdot A\,dt + \int_{2T}^{3T} -A\cdot(-A)\,dt + \int_{3T}^{4T} A\cdot(-A)\,dt = 0$$

$$\langle s_1|s_3\rangle = \int_0^{4T} s_1(t)\cdot s_3(t)\,dt = \int_0^{T} A\cdot A\,dt + \int_T^{2T} -A\cdot A\,dt + \int_{2T}^{3T} A\cdot(-A)\,dt + \int_{3T}^{4T} -A\cdot(-A)\,dt = 0$$

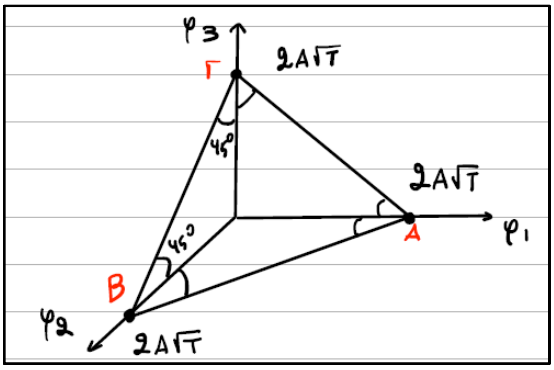
Επομένως χρειαζόμαστε τρεις συναρτήσεις βάσεις:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}, \qquad \varphi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}}, \qquad \varphi_3(t) = \frac{s_3(t)}{\sqrt{E_3}}$$

Οι ενέργειες των σημάτων είναι:

$$E_1 = \int_0^{4T} s_1^2(t)\,dt = 4A^2T = E_2 = E_3 = E$$

Ο αστερισμός είναι:



Σημείωση: Οι περιοχές απόφασης είναι ημιεπίπεδα που τέμνουν στο μισό κάθε ευθύγραμμο τμήμα από τα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ.

Ερώτημα Β

Αφού τα σήματα είναι ισοπίθανα, η μέση ενέργεια συμβόλου είναι:

$$E_{\mu} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{3} = E = 4A^2T =_{T=1msec} 4A^2mJ$$

Επειδή έχουμε 3 συναρτήσεις βάσης, χρειαζόμαστε 2 ψηφία για να τις αναπαραστήσουμε $(00,01,10,11)$, επομένως η μέση ενέργεια ψηφίου είναι:

$$E_{\mu,\psi} = \frac{E_{\mu,\sigma}}{2} = 2A^2mJ$$

Ερώτημα Γ

Η πιθανότητα λάθους του πρώτου σήματος είναι:

$$Prob_{error,1} = \frac{1}{3}Q\left(\frac{D_{12}}{2\sigma}\right) + \frac{1}{3}Q\left(\frac{D_{13}}{2\sigma}\right) = \frac{1}{3}Q\left(\frac{(AB)}{2\sigma}\right) + \frac{1}{3}Q\left(\frac{(A\Gamma)}{2\sigma}\right) = \frac{2}{3}\cdot Q\left(\frac{(AB)}{2\sigma}\right) = \frac{2}{3}\cdot Q\left(\frac{2A\sqrt{2T}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot Q\left(\frac{2A\sqrt{2T}}{2\sqrt{\frac{0,5}{2}}}\right) = \frac{2}{3}\cdot Q\left(2A\sqrt{2T}\right)$$

Θέμα 2

Θεωρήστε το ψηφιακό δυαδικό σύστημα που χρησιμοποιεί το παρακάτω ζευγάρι κυματομορφών: $s_1(t) = u_T(t)$ και $s_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) u_T(t)$, όπου $u_T(t) = u(t) - u(t-T)$ και η $u(t)$ είναι η βηματική συνάρτηση και T η περίοδος του bit.

α. Σχεδιάστε τον αστερισμό και αν είναι ισοπίθανες οι 2 κυματομορφές σχεδιάστε και υπολογίστε τις περιοχές απόφασης με ακρίβεια.
β. Βρείτε τη μέση ενέργεια bit.
γ. Αν είναι ο θόρυβος AWGN με τυπική απόκλιση $\sqrt{N_0/2}$ βρείτε την πιθανότητα λάθους ψηφίου συναρτήσει της μέσης ενέργειας bit.
δ. Ποια είναι η διάρκεια της περιόδου του bit για να πετύχουμε πιθανότητα λάθους ψηφίου 10^{-3} αν $N_0 = 0,(AM+1)W/Hz$ όπου AM ο τελευταίος αριθμός μητρώου σας.

Ερώτημα Α

Αφού:

$$u_T(t) = u(t) - u(t-T) = \begin{cases} 0-0=0, & t<0 \\ 1-0=1, & 0 \le t \le T \\ 1-1=0, & t>T \end{cases}$$

Τα σήματα γράφονται:

$$s_1(t) = 1, \qquad 0 \le t \le T$$

$$s_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \qquad 0 \le t \le T$$

Τα σήματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους, αφού:

$$\langle s_1 | s_2 \rangle = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t)\, dt = \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = 0$$

Μία ορθοκανονική βάση επομένως είναι:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}, \qquad \varphi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

Οι ενέργειες των σημάτων είναι:

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\, dt = T$$

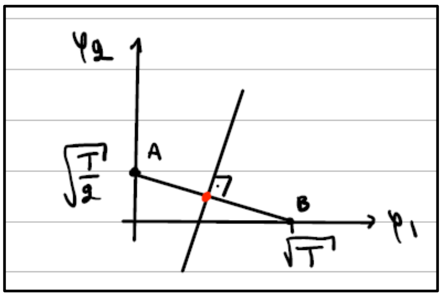
$$E_2 = \int_0^T s_2^2(t)\, dt = \cdots = \frac{T}{2}$$

Ο κανόνας απόφασης είναι:

$$(r_1 - s_{11})^2 + (r_2 - s_{12})^2 \gtrless_{0D}^{1D} (r_1 - s_{21})^2 + (r_2 - s_{22})^2 \rightarrow$$

$$\left(r_1 - \sqrt{T}\right)^2 + r_2^2 \gtrless_{0D}^{1D} r_1^2 + \left(r_2 - \sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2 \rightarrow 2\sqrt{T} r_1 \gtrless_{0D}^{1D} 2\sqrt{\frac{T}{2}} r_2 \rightarrow \sqrt{2} r_1 \gtrless_{0D}^{1D} r_2$$

Και ο αστερισμός είναι:



Ερώτημα Β

Αφού είναι ισοπίθανα, η μέση ενέργεια συμβόλου είναι:

$$E_{\mu,\sigma} = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{3T}{4}$$

Αφού θέλουμε να στείλουμε 2 σήματα, χρειαζόμαστε 1 ψηφίο για να τα αναπαραστήσουμε $(0,1)$, επομένως η μέση ενέργεια ψηφίου ισούται με αυτή του συμβόλου:

$$E_{\mu,\psi} = E_{\mu,\sigma} = \frac{3T}{4}$$

Ερώτημα Γ

Η πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου είναι:

$$Prob_{error} = Q\left(\frac{D}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_{\mu,\sigma}}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\frac{3T}{4}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{3T}{8}\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$$

Ερώτημα Δ

Έχουμε $Q(3{,}7) = 10^{-3}$ άρα:

$$Prob_{error} = Q\left(\frac{3T}{8}\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = Q(3{,}7) \to \frac{3T}{8}\sqrt{\frac{2}{N_0}} = 3{,}7 \to T = 6{,}976 \cdot \sqrt{N_0}$$

Αντικατάσταση ΑΜ.

Θέμα 3

Το σύστημα λήψης (ΣΛ) ασύρματης ζεύξης σημείου προς σημείου λειτουργεί με οριακά αποδεκτή αξιοπιστία. Η θερμοκρασία θορύβου της κεραίας του ΣΛ είναι 100K, ενώ η 1η βαθμίδα του ΣΛ είναι ενισχυτής LNA θερμοκρασίας θορύβου 100K. Μετά από μετρήσεις, η χειροτέρευση του σηματοθορυβικού λόγου από την κεραία μέχρι την είσοδο του κυκλώματος απόφασης του ΣΛ προέκυψε 7dB.

Για ρυθμιστικούς λόγους επιβάλλεται μείωση της ισχύος εκπομπής του συστήματος εκπομπής (ΣΕ) κατά 0,5dB. Προς αντιμετώπιση της μείωσης αυτής, ο LNA του ΣΛ αντικαθίσταται από νέο LNA της ίδιας θερμοκρασίας θορύβου αλλά μεγαλύτερου κέρδους ισχύος.

Να προσδιορισθεί κατά πόσα dB τουλάχιστον πρέπει να είναι αυξημένο το κέρδος του νέου LNA σε σχέση με αυτό του αρχικού ώστε η ασύρματη ζεύξη να ικανοποιεί την προδιαγραφή αξιοπιστίας.

Λύση

Το δίκτυο έχει την εξής μορφή:

Είσοδος (Κεραία) — LNA — Υπόλοιπο — Έξοδος

$$T_K = 100K$$

$$T_{LNA} = 100K$$

$$SNR_{out} = SNR'_{out} = SNR_T$$

$$SNR_{out} - SNR_{in} = -7dB \rightarrow \frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = 10^{-0,7} = 0{,}199, \qquad (1)$$

$$SNR'_{in} = SNR_{in} - 0{,}5dB \rightarrow \frac{SNR'_{in}}{SNR_{in}} = 10^{-0,05} \rightarrow \frac{SNR_{in}}{SNR'_{in}} = 10^{0,05} = 1{,}122, \qquad (2)$$

Από τις (1), (2):

$$\frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} \cdot \frac{SNR_{in}}{SNR'_{in}} = 0{,}199 \cdot 1{,}122 \rightarrow \frac{SNR_{out}}{SNR'_{in}} = 0{,}223$$

Και αφού $SNR_{out} = SNR'_{out}$:

$$\frac{SNR'_{out}}{SNR'_{in}} = 0{,}223, \qquad (3)$$

Ισχύει:

$$\left\{\begin{matrix} SNR_{in} = \dfrac{S_{in}}{kT_\kappa B_N} \\ SNR_{out} = \dfrac{S_{in}}{k(T_\kappa + T_{\iota\sigma})B_N} \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \frac{T_\kappa + T_{\iota\sigma}}{T_\kappa} \rightarrow \frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = \frac{T_\kappa}{T_\kappa + T_{\iota\sigma}}, \qquad (4)$$

Από τις (1), (4):

$$\frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = \frac{T_\kappa}{T_\kappa + T_{\iota\sigma}} \rightarrow 0{,}199 = \frac{100}{100 + T_{\iota\sigma}} \rightarrow T_{\iota\sigma} = 402{,}512K \rightarrow T_{LNA} + \frac{T_{\upsilon\pi}}{G_{LNA}} = 402{,}512 \rightarrow$$

$$\frac{T_{\upsilon\pi}}{G_{LNA}} = 402{,}512K, \qquad (5)$$

Ομοίως:

$$\frac{SNR'_{in}}{SNR'_{out}} = \frac{T_\kappa + T'_{\iota\sigma}}{T_\kappa}, \qquad (6)$$

Από τις (3), (6):

$$\frac{SNR'_{in}}{SNR'_{out}} = \frac{T_\kappa + T'_{\iota\sigma}}{T_\kappa} \to \frac{1}{0{,}223} = \frac{100 + T'_{\iota\sigma}}{100} \to T'_{\iota\sigma} = 348{,}43K \to T_{LNA} + \frac{T_{\upsilon\pi}}{G'_{LNA}} = 348{,}43 \to$$

$$\frac{T_{\upsilon\pi}}{G'_{LNA}} = 248{,}43K \to \frac{G'_{LNA}}{T_{\upsilon\pi}} = \frac{1}{248{,}43}, \qquad (7)$$

Από τις (5), (7):

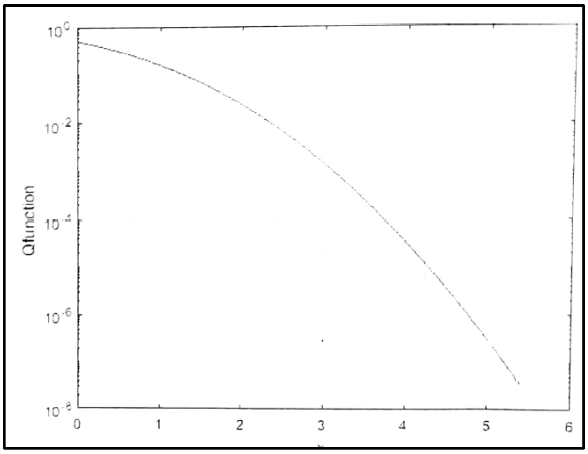
$$\frac{T_{\upsilon\pi}}{G_{LNA}} \cdot \frac{G'_{LNA}}{T_{\upsilon\pi}} = 402{,}512 \cdot \frac{1}{248{,}43} \to \frac{G'_{LNA}}{G_{LNA}} = 1{,}62 \to \left(\frac{G'_{LNA}}{G_{LNA}}\right)_{dB} = 2{,}095dB$$

Θέμα 4

Ο ενισχυτής του Σταθμού Βάσης (ΣΒ) που εξυπηρετεί τα τερματικά συγκεκριμένης περιοχής λειτουργεί με περιθώριο ισχύος εξόδου Α (dB).

α. Πόσο πρέπει να γίνει το περιθώριο ισχύος προκειμένου η εμβέλεια του ΣΒ να αυξηθεί κατά 20%;
β. Ποια είναι η ενδεχόμενη επίπτωση από την αλλαγή αυτή;

Δίνεται η συνάρτηση Q():



Ερώτημα Α

Δεν είμαι σίγουρος

Το περιθώριο ισχύος εξόδου του ενισχυτή είναι το S_{in}.

$$SNR_{in} = \frac{S_{in}}{kT_{\kappa}B}$$

Ερώτημα Β

Οι απώλειες ελεύθερου χώρου δίνονται από τον τύπο:

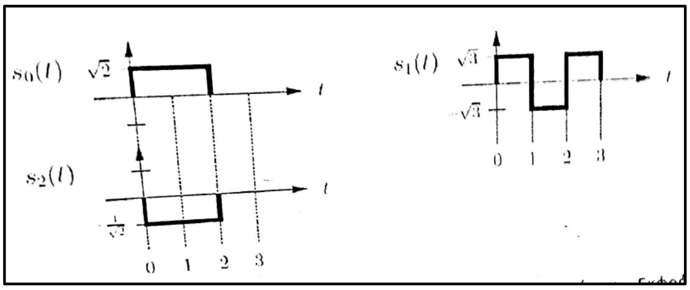
$$L_{fs,dB} = 10\log_{10}\left(\frac{4\pi D}{\lambda}\right)^2 dB$$

$$L'_{fs,dB} = 10\log_{10}\left(\frac{4\pi \cdot 1{,}2D}{\lambda}\right)^2 dB = L_{fs,dB} + 1{,}44dB \rightarrow \frac{L'_{fs}}{L_{fs}} = 1{,}583 \rightarrow L'_{fs} = 1{,}583 \cdot L_{fs}$$

Επαναληπτική 22

Θέμα 1

Ένα ψηφιακό σύστημα μετάδοσης χρησιμοποιεί τις παρακάτω ισοπίθανες κυματομορφές:



α. Καθορίστε μία ορθοκανονική βάση για το δεδομένο σύνολο σημάτων. Εκφράστε τα σήματα συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης και σχεδιάστε τον αστερισμό.

β. Βρες τη μέση ενέργεια συμβόλου. Ποια είναι η μέγιστη ενέργεια συμβόλου; Σχεδίασε τις περιοχές απόφασης για μετάδοση πάνω από κανάλι με AWGN θόρυβο με $N_0 = 1W/Hz$ και υπολογίστε τη πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου s_1 με καθένα από τα άλλα δύο σύμβολα.

Ερώτημα Α

Παρατηρούμε πως $s_0(t) = -2 \cdot s_2(t)$. Επίσης:

$$\langle s_0 | s_1 \rangle = \int_0^3 s_0(t) \cdot s_1(t)\, dt = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot \sqrt{3} = 0$$

Άρα s_0, s_1 κάθετα. Μία ορθοκανονική βάση επομένως είναι:

$$\varphi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{E_0}}, \qquad \varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

Οι ενέργειες των σημάτων είναι:

$$E_0 = \int_0^3 s_0^2(t)\, dt = 2 \cdot 2 = 4$$

$$E_1 = \int_0^3 s_1^2(t)\, dt = 3 \cdot 3 = 9$$

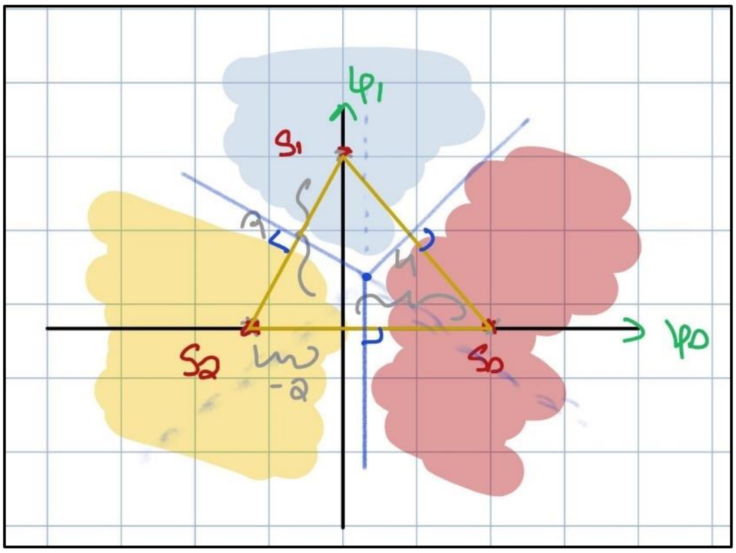
$$E_2 = \int_0^3 s_2^2(t)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Επομένως τα σήματα γράφονται:

$$s_0(t) = 2 \cdot \varphi_0(t)$$

$$s_1(t) = 3 \cdot \varphi_1(t)$$

$$s_2(t) = -\frac{1}{2} \cdot \varphi_0(t)$$



Ερώτημα Β

Αφού τα σήματα είναι ισοπίθανα, η μέση ενέργεια συμβόλου δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\mu} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{3} = \frac{4 + 9 + 1}{3} = 4,\overline{66}$$

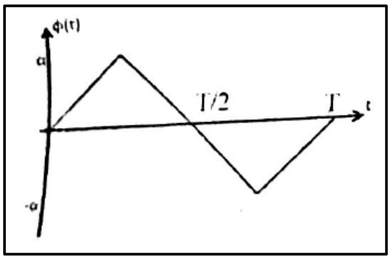
Η μέγιστη ενέργεια συμβόλου είναι η ενέργεια του σήματος s_1. Η πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου s_1 είναι:

$$Prob_{error,1} = \frac{1}{3} Q\left(\frac{d_{10}}{2\sigma}\right) + \frac{1}{3} Q\left(\frac{d_{12}}{2\sigma}\right) = \frac{1}{3} Q\left(\frac{\sqrt{85}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{3} Q\left(\frac{\sqrt{97}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = \cdots = \frac{Q(6{,}519) + Q(6{,}964)}{3}$$

$$\approx \frac{4{,}016 \cdot 10^{-11} + 1{,}8264 \cdot 10^{-12}}{3} = 1{,}399 \cdot 10^{-11}$$

Θέμα 2

Δίνεται δυαδικό ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα στη βασική ζώνη που στέλνει ισοπίθανα το bit 1 με το σύμβολο $s_1(t) = \varphi(t)$ και το σύμβολο $s_2(t) = -\varphi(t)$ για το bit 0 διάρκεια $T = AM + 1$, όπου AM ο τελευταίος αριθμός μητρώου σας.



Η μετάδοση γίνεται σε θόρυβο n(t) AWGN και τυπικής απόκλισης $\sqrt{N_0/2}$.

α. Ποια είναι η ακριβής έκφραση για την πιθανότητα λάθους; Γράψτε τη συναρτήσει του α και του N_0.

β. Αν θέλουμε να επιτύχουμε μία πιθανότητα λάθους 10^{-5}, πόσο πρέπει να είναι το α υποθέτοντας $N_0 = 1W/Hz$;

γ. Αν τα σύμβολα εκπομπής είναι $s_1(t) = \varphi\big((AM+1)\cdot t\big)$ και το σύμβολο $s_2(t) = -\varphi\big((AM+1)\cdot t\big)$ να συγκρίνετε την επίδοση του νέου δυαδικού συστήματος ως προς την πιθανότητα λάθους με το ερώτημα (β).

Έστω $T = AM + 1$ γνωστό.

Ερώτημα Α

Η συνάρτηση φ είναι:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{4a}{T}t, & 0 \le t \le \dfrac{T}{4} \\ -\dfrac{4a}{T}t + 2a, & \dfrac{T}{4} \le t \le \dfrac{3T}{4} \\ \dfrac{4a}{T}t - 4a, & \dfrac{3T}{4} \le t \le T \end{cases}$$

Η ενέργεια των σημάτων:

$$E_1 = E_2 = E = \int_0^T \varphi^2(t)\,dt = \cdots = \frac{a^2T}{12} + \frac{a^2T}{6} + \frac{a^2T}{12} = \frac{a^2T}{3}$$

Η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου δίνεται από το τύπο:

$$Prob_{error} = Q\left(\frac{2\sqrt{E}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{a^2T}{3}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(a\sqrt{\frac{2T}{3N_0}}\right)$$

Ερώτημα Β

Θέλουμε:

$$Prob_{error} = 10^{-5} = Q(4{,}25) \to a\sqrt{\frac{2T}{3N_0}} = 4{,}25 \to a = \frac{5{,}205}{\sqrt{T}}$$

Ερώτημα Γ

Για $T \geq 1$, η $\varphi(Tt)$ «συμπιέζεται». Το νέο σήμα είναι:

$$s_1'(t) = \varphi(Tt) = \begin{cases} 4at, & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ -4at + 2a, & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 4at - 4a, & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Η ενέργεια του:

$$E_1' = \int_0^1 s_1'^2(t)\,dt = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{12} = \frac{11}{48}a^2$$

Παρατηρούμε πως, αφού $T \geq 1$:

$$\frac{E_1}{E_1'} = \frac{\frac{a^2 T}{3}}{\frac{11}{48}a^2} = \frac{16T}{11} > 1 \rightarrow E_1 > E_1' \rightarrow \sqrt{E_1} > \sqrt{E_1'} \rightarrow \frac{\sqrt{E_1}}{2\sigma} > \frac{\sqrt{E_1'}}{2\sigma}$$

Και εφόσον η Q είναι εντόνως φθίνουσα συνάρτηση:

$$Q\left(\frac{\sqrt{E_1}}{2\sigma}\right) < Q\left(\frac{\sqrt{E_1'}}{2\sigma}\right) \rightarrow Prob_{error} < Prob'_{error}$$

Η πιθανότητα λάθους αυξήθηκε. Άρα το νέο σύστημα είναι χειρότερο.

Θέμα 3

i. Στο σύστημα λήψης μιας ασύρματης ζεύξης η βαθμίδα εισόδου συνδέεται απευθείας προς την κεραία λήψης.

   Πώς θα επηρεασθεί η αξιοπιστία της ασύρματης ζεύξης αν το κέρδος ισχύος και η θερμοκρασία θορύβου του ενισχυτή της βαθμίδας εισόδου αυξηθούν κατά 5% και η απόσβεση του ζωνοπερατού φίλτρου της βαθμίδας εισόδου μειωθεί κατά 0,3dB;

   Η απάντηση σας πρέπει να βασίζεται στην επιλογή και ορθή επεξεργασία κατάλληλης αλληλουχίας σχετικών μαθηματικών σχέσεων.

ii. Ασύρματο σύστημα ψηφιακών επικοινωνιών χρησιμοποιεί διαμόρφωση 16QAM επιλεγμένη από το σύνολο σχήματος διαμόρφωσης MQAM $M = 8{,}16{,}32{,}64{,}128{,}256{,}512{,}1024$.

   Αποφασίζεται η χρησιμοποίηση του σχήματος διαμόρφωσης 64QAM.

   Να εξηγήσετε αν και πώς θα επηρεασθούν από την αλλαγή αυτή:

   i. Ο σηματοθορυβικός λόγος στην είσοδο του κυκλώματος απόφασης του συστήματος λήψης.
   ii. Ο ρυθμός μετάδοσης συμβόλων.
   iii. Ο ωφέλιμος ρυθμός μετάδοσης ψηφίων.

Ερώτημα Α

Δεν είμαι σίγουρος.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Friis για το δείκτη θορύβου:

$$F_{total} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}$$

Όπου:

- F_1 είναι ο συντελεστής θορύβου του ενισχυτή.
- F_2 είναι ο συντελεστής θορύβου του ζωνοπερατού φίλτρου.
- G_1 είναι το κέρδος του ενισχυτή.

Ο αρχικός συντελεστής θορύβου του ενισχυτή F_1 σχετίζεται με την θερμοκρασία θορύβου T_1:

$$F_1 = 1 + \frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{T_1}{290}$$

Ο συντελεστής θορύβου για το ζωνοπερατό φίλτρο F_2 είναι ο ίδιος με την εξασθένηση, δεδομένου ότι τα παθητικά στοιχεία δεν παράγουν θόρυβο, αλλά εξασθενούν εξίσου το σήμα και το θόρυβο:

$$F_2 = L_2$$

Μετά τις αλλαγές έχουμε:

$$F_1' = 1 + \frac{1{,}05 \cdot T_1}{290}$$

$$\mathrm{F}_2' = L_2' = 10^{-\frac{0{,}3}{10}} \cdot L_2 = 0{,}93 \cdot L_2$$

$$G_1' = 1{,}05 \cdot G_1$$

Άρα:

$$F'_{total} = 1 + \frac{1{,}05 \cdot T_1}{290} + \frac{0{,}93 \cdot L_2 - 1}{1{,}05 \cdot G_1}$$

Δεν φαίνεται εμφανές εάν αυξήθηκε ή μειώθηκε.

Ερώτημα Β

Σηματοθορυβικός Λόγος Εισόδου

Ο σηματοθορυβικός λόγος στην είσοδο του κυκλώματος δίνεται από τον τύπο: $\left(\frac{E_s}{n_0}\right)_{in} = \frac{E_s}{k(T_\kappa+T_{\iota\sigma})B}$, με $E_s = S_{in} \cdot T_s$ η ενέργεια του συμβόλου λήψης, T_κ η θερμοκρασία θορύβου της κεραίας του συστήματος λήψης και $T_{\iota\sigma}$ η ισοδύναμη θερμοκρασία θορύβου του συστήματος λήψης.

Η αλλαγή του M **<u>δεν</u>** επηρεάζει τον λόγο.

Ρυθμός Μετάδοσης Συμβόλων

Ο ρυθμός μετάδοσης συμβόλων δίνεται από τον τύπο: $R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{B_{RF}}{k_g}$, με B_{RF} το εύρος ζώνης ραδιοσυχνοτήτων και $k_g = 1 + a, 0 < a \leq 1$ παράμετρος.

Η αλλαγή του M **<u>δεν</u>** επηρεάζει τον ρυθμό.

Ωφέλιμος Ρυθμός Μετάδοσης Ψηφίων

Ο ωφέλιμος ρυθμός μετάδοσης ψηφίων δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{R}_u = \log_2 M \cdot S_u = \log_2 M \cdot \frac{100}{100+R_d} \cdot R_c \cdot R_s$, με R_d ο πλεονασμός της πολύπλεξης, R_c ο ρυθμός κώδικα της κωδικοποίησης FEC.

Επομένως, με την αύξηση του M, **<u>αυξάνεται</u>** και ο ρυθμός.

Κανονική 22

Θέμα 1

Τρία σήματα μεταδίδονται $s_i(t) = (i = 1,2,3)$ πάνω από AWGN δίαυλο με τυπική απόκλιση φασματική πυκνότητα ισχύος θορύβου $\sqrt{N_0/2}$:

$$s_1(t) = 1, \qquad 0 \le t \le T$$

$$s_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ -1, & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

$$s_3(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ 1, & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

Όπου $T = AM + 1\ (sec)$ με AM τον τελευταίο αριθμό του αριθμού μητρώου σας.

α. Βρείτε και σχεδιάστε με λεπτομέρεια τις συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης για τα παραπάνω σήματα καθώς και τον αστερισμό. Σχεδιάστε με ακρίβεια τις περιοχές απόφασης επιλογής του βέλτιστου δέκτη.

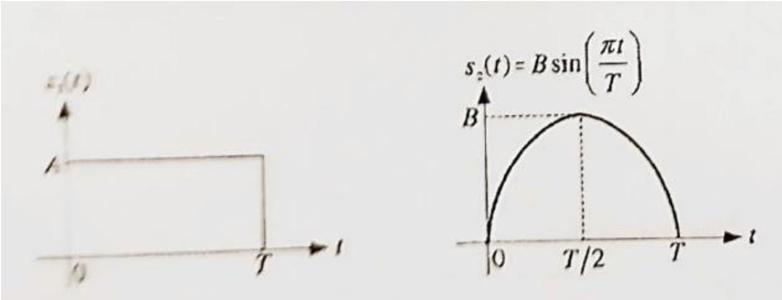
β. Ποιο σήμα είναι πιο ευάλωτο στο θόρυβο και γιατί και ποια η πιθανότητα λάθος αυτού;

Ερώτημα Α

Ερώτημα Β

Θέμα 2

Δίνονται οι δύο παρακάτω χρονικές κυματομορφές $s_1(t), s_2(t)$:



Το καθένα από αυτά χρησιμοποιείται σε δυαδικό σύστημα επικοινωνιών με ισοπίθανα ψηφία με αντιδιαμετρική (antipodal) σηματοδοσία και θόρυβο AWGN δίαυλο με τυπική απόκλιση φασματική πυκνότητα ισχύος θορύβου $\sqrt{N_0/2}$:

α. Ποια είναι η σχέση των παραμέτρων Α και Β ώστε τα δύο συστήματα να έχουν την ίδια πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου;

β. Προτείνετε νέο σύστημα επικοινωνιών που μεταδίδει σύμβολα (2 ψηφίων) χρησιμοποιώντας τις κυματομορφές $s_1(t), s_2(t)$ (με την απάντηση στο (i)). Σχεδιάστε όλες τις κυματομορφές μετάδοσης. Ποιος είναι ο νέος αστερισμός και οι περιοχές βέλτιστης απόφασης;

γ. Βρείτε την πιθανότητα λάθους συμβόλου με ακρίβεια και προσεγγιστικά αν $T = AM + 1$ (sec) και $\frac{N_0}{2} = 2(AM + 1) W/Hz$ με ΑΜ τον τελευταίο αριθμό του αριθμού μητρώου σας.

Ερώτημα Α

Ερώτημα Β

Ερώτημα Γ

Θέμα 3

Μία ασύρματη ζεύξη λειτουργεί ικανοποιώντας οριακά την προδιαγραφή αξιοπιστίας.

Η πρώτη, αμέσως μετά την κεραία λήψης, βαθμίδα του συστήματος λήψης της υπόψη ζεύξης είναι ενισχυτής LNA, ο οποίο συμβάλλει κατά 20% στην ισοδύναμη θερμοκρασία θορύβου του συστήματος λήψης μέχρι την είσοδο του κυκλώματος απόφασης. Επίσης, μετά από μέτρηση, η χειροτέρευση του SNR από την είσοδο του ενισχυτή LNA μέχρι την είσοδο του κυκλώματος απόφασης προέκυψε 5.

Για ρυθμιστικούς λόγους, επιβάλλεται αύξηση κατά 1,5dB του περιθωρίου ισχύος εξόδου του ενισχυτή της βαθμίδας RF του συστήματος εκπομπής.

α. Ποια δυσμενή επίπτωση έχει η αύξηση αυτή επί της λειτουργίας του συστήματος;
β. Με στόχο την αντιστάθμιση της αύξησης αυτής, αποφασίστηκε η αλλαγή του LNA με άλλον της ίδιας θερμοκρασίας θορύβου αλλά μεγαλύτερου κέρδους ισχύος. Ποια είναι σε dB η ελάχιστη απαιτούμενη αύξηση του κέρδους του ενισχυτή LNA;

Ερώτημα Α

Ερώτημα Β

Θέμα 4

α. Γιατί η δορυφορική κεραία VSAT, μέσω της οποίας μια κατοικία λαμβάνει τηλεοπτικές υπηρεσίες απευθείας μέσω δορυφόρου, πρέπει να τοποθετείται όσο το δυνατό πλησιέστερα προς τη θέση όπου είναι εγκατεστημένη η τηλεοπτική συσκευή;

β. Οι ζώνες συχνοτήτων (F-ΔF έως F+ΔF) και (2F-3ΔF έως 2F+3ΔF) είναι υποψήφιες προς χρήση σε μία ασύρματη ζεύξη. Να γίνει σύγκριση τους με κριτήρια:

   i. Το ωφέλιμο ρυθμό μετάδοσης και
   ii. Την αξιοπιστία που επιτυγχάνουν.

Ερώτημα Α

Ερώτημα Β

Επαναληπτική 21

Θέμα 1

Σχεδιάστε ένα βέλτιστο δυαδικό σύστημα επικοινωνιών, καθορίζοντας τις κυματομορφές μετάδοσης, τις συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιώντας ένα προσαρμοσμένο φίλτρο της μορφής:

$$h(t) = \begin{cases} 2(AM+1), & 0 \leq t \leq \dfrac{AM+1}{3} \\ 2(AM+1), & 2\dfrac{AM+1}{3} \leq t \leq AM+1 \end{cases}$$

Όπου AM είναι ο τελευταίος αριθμός του Αριθμού Μητρώου σας. Η διάρκεια του bit είναι $T_b = AM + 1$.

Σχεδιάστε το βέλτιστο δέκτη με δύο τρόπους και υπολογίστε με ακρίβεια την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου AWGN θόρυβο με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $\sqrt{\frac{N_0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{AM+1}}$.

Θέμα 2

α. Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για τα παρακάτω 3 σήματα:

$$s_1(t) = -4, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$s_2(t) = 2, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

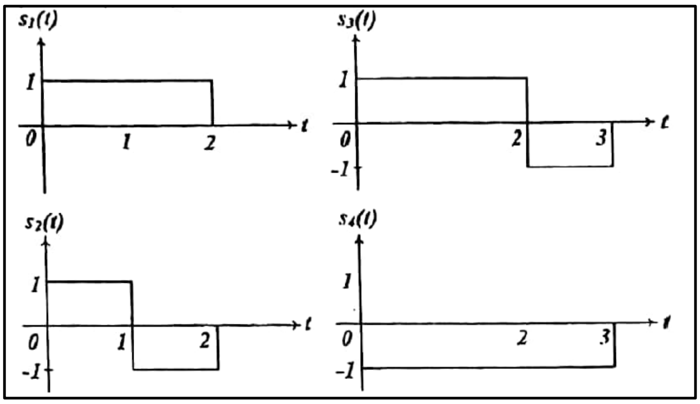
$$s_3(t) = 3, \qquad 0 \leq t \leq 3$$

Σχεδιάστε τις συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης και να γράψετε τα παραπάνω σήματα συναρτήσει αυτών.

β. Ποιο είναι το SNR κβάντισης σε ένα διαμορφωτή Δέλτα αν το βήμα AM+1 όπου AM ο τελευταίος αριθμός του αριθμού μητρώου και η μέση ισχύς του σήματος πριν την κβάντιση είναι $\frac{(AM+1)^2}{2}$.

Επαναληπτική 19

Θέμα 1



Έστω το σύνολο των τεσσάρων χρονοπεριορισμένων κυματομορφών $s_i(t), i = 1, \ldots, 4$. Βρείτε ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων βάσης για τις παραπάνω κυματομορφές. Γράψτε αναλυτικά τις μαθηματικές εκφράσεις τους και να τις σχεδιάσετε.

Λύση

Οι κυματομορφές είναι:

$$s_1(t) = 1, \qquad 0 \le t \le 2$$

$$s_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

$$s_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ -1, & 2 \le t < 3 \end{cases}$$

$$s_4(t) = -1, \qquad 0 \le t \le 3$$

Μία απλή ορθοκανονική βάση είναι η εξής:

$$\varphi_1(t) = 1, \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\varphi_2(t) = 1, \qquad 1 \le t \le 2$$

$$\varphi_3(t) = 1, \qquad 2 \le t \le 3$$

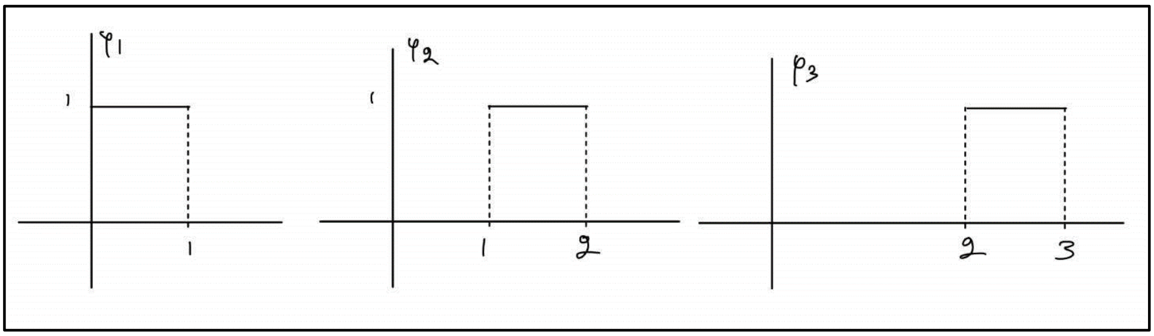
Επομένως:

$$s_1(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \qquad 0 \le t \le 2$$

$$s_2(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t), \qquad 0 \le t \le 2$$

$$s_3(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) - \varphi_3(t), \qquad 0 \le t \le 3$$

$$s_4(t) = -\varphi_1(t) - \varphi_2(t) - \varphi_3(t), \qquad 0 \le t \le 3$$



φ1
1
1
φ2
1
1
2
ρ3
2
3

Θέμα 2

Θεωρούμε μετάδοση δύο σημείων $x_1(t), x_2(t) = -x_1(t)$ πάνω από ένα δίαυλο με AWGN θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης $\sqrt{N_0/2}$. Το $x_1(t)$ χρησιμοποιείται για το bit 0 και το $x_2(t)$ για το bit 1 και είναι ισοπίθανα.

α. Βρείτε την ορθοκανονική βάση, σχεδιάστε τον αστερισμό και γράψτε τον κανόνα απόφασης αν το:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \dfrac{T}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \dfrac{T}{4} < t \leq T \end{cases}$$

β. Αν τώρα στη μετάδοση χρησιμοποιήσουμε τα σήματα $K \cdot x_i(t), i = 1,2, K > 0$, να βρείτε το K που απαιτείται έτσι ώστε η πιθανότητα σφάλματος ψηφίου να ισούται με 10^{-6}. Δίνονται $N_0 = 10^{-12} W/Hz$ και $T = 1\mu sec$. Ποια είναι η μέση ισχύς;

γ. Αν αντί των σημάτων $x_i(t), i = 1,2$ μεταδώσουμε τα σήματα $x_i(t) - E[x_i(t)], i = 1,2$, ποια θα είναι η επίδραση στην πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου;

Ερώτημα Α

Ορίζουμε το διάνυσμα βάσης φ_1 ως:

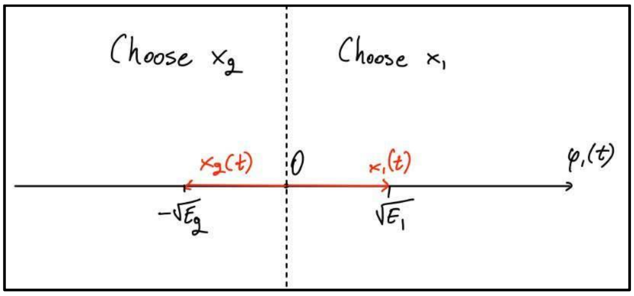
$$\varphi_1(t) = \frac{x_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

Η ενέργεια του x_1:

$$E_1 = \int_0^T x_1^2(t)\,dt = \int_0^{T/4} 1\,dt + \int_{T/4}^T \frac{1}{2} dt = \cdots = \frac{5T}{8}$$

Άρα:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{2}{5T}}, & 0 < t \leq \dfrac{T}{4} \\ -\sqrt{\dfrac{2}{5T}}, & \dfrac{T}{4} < t \leq T \end{cases}$$



Ερώτημα Β

Η πιθανότητα λάθους ψηφίου δίνεται από τον τύπο:

$$Prob_e = Q\left(\sqrt{\frac{2\cdot E_1'}{N_0}}\right) = 10^{-6} = Q(4{,}75) \to \sqrt{\frac{2\cdot E_1'}{10^{-12}}} = 4{,}75 \to E_1' = 11{,}281\cdot 10^{-12} \to$$

$$K^2\cdot E_1 = 11{,}281\cdot 10^{-12} \to K^2\cdot\frac{5T}{8} = 11{,}281\cdot 10^{-12} \to K^2\cdot\frac{5\cdot 10^{-6}}{8} = 11{,}281\cdot 10^{-12} \to$$

$$K = 4{,}248\cdot 10^{-3}$$

Αφού τα σήματα είναι ισοπίθανα, η μέση ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_\mu = \frac{E_1' + E_2'}{2} = \frac{2E_1'}{2} = E_1' = K^2 E_1 = K^2\,\frac{5T}{8}$$

Η μέση ισχύς είναι:

$$P_\mu = \frac{E_\mu}{T} = K^2\,\frac{5}{8} = (4{,}248\cdot 10^{-3})^2\,\frac{5}{8} = 11{,}281\mu W$$

Ερώτημα Γ

Η μέση τιμή του σήματος είναι:

$$E[x_1(t)] = \frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\,dt = \cdots = \frac{1\cdot\frac{T}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\cdot T}{4}}{T} = \frac{2-3\sqrt{2}}{8} = -0{,}28$$

Το νέο σήμα είναι:

$$y_1(t) = x_1(t) + 0{,}28 = \begin{cases} 1{,}28, & 0 < t \le \frac{T}{4} \\ -0{,}427, & \frac{T}{4} < t \le T \end{cases}$$

Επομένως, η ενέργεια του νέου σήματος είναι:

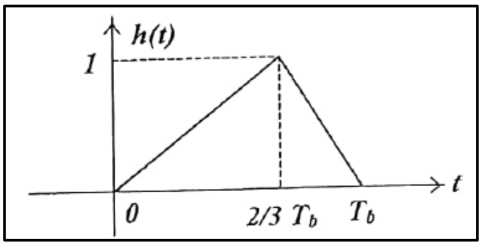
$$E_{y_1} = \int_0^T y_1^2(t)\,dt = (1{,}28)^2\cdot\frac{T}{4} + (0{,}427)^2\,\frac{3T}{4} = \cdots = 0{,}546\cdot T < \frac{5}{8}T = 0{,}625T = E_1$$

Η ενέργεια μειώθηκε. Από τον τύπο:

$$Prob_e = Q\left(\sqrt{\frac{2\cdot E}{N_0}}\right)$$

Και εφόσον η Q είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, αφού μειώθηκε το Ε, αυξάνεται η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου.

Θέμα 3



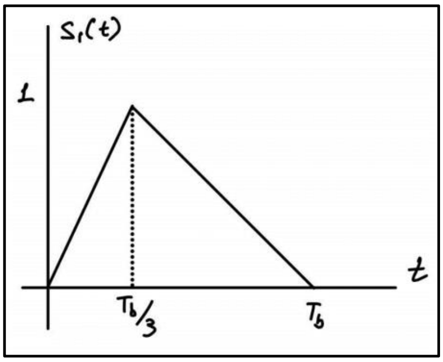
Δίνεται το παραπάνω προσαρμοσμένο φίλτρο με κρουστική απόκριση της μορφής του σχήματος. Σχεδιάστε ένα δυαδικό σύστημα μετάδοσης (δηλαδή να καθορίσετε τις κυματομορφές μετάδοσης που είναι ισοπίθανες, τις συναρτήσεις βάσης και να σχεδιάσετε αναλυτικά τον βέλτιστο δέκτη ενός κλάδου με 2 τρόπους) που να χρησιμοποιούν το παραπάνω προσαρμοσμένο φίλτρο και υπολογίστε αναλυτικά την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου του βέλτιστου δέκτη σε δίαυλο με AWGN θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης $\sqrt{N_0/2}$ (φτιάχνοντας τον κατάλληλο αστερισμό).

Λύση

Στη δυαδική μετάδοση, μεταδίδουμε 1 από 2 σύμβολα, που αντιπροσωπεύουν τα ψηφία 0 και 1. Τα σήματα $\{s_1(t), s_2(t)\}$ που αντιστοιχούν στα ψηφία 0 και 1 είναι αντίθετα, $s_2(t) = -s_1(t)$. Η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{2T_b}t, & 0 \le t \le \dfrac{2}{3}T_b \\ -\dfrac{3}{T_b}t + 3, & \dfrac{2}{3}T_b \le t \le T_b \end{cases}$$

Από ιδιότητα αντιμετάθεσης του σχήματος της h(t):



Άρα το $s_1(t)$ είναι:

$$s_1(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{T_b}t, & 0 \le t \le \dfrac{T_b}{3} \\ -\dfrac{3}{2T_b}t + \dfrac{3}{2}, & \dfrac{T_b}{3} \le t \le T_b \end{cases}$$

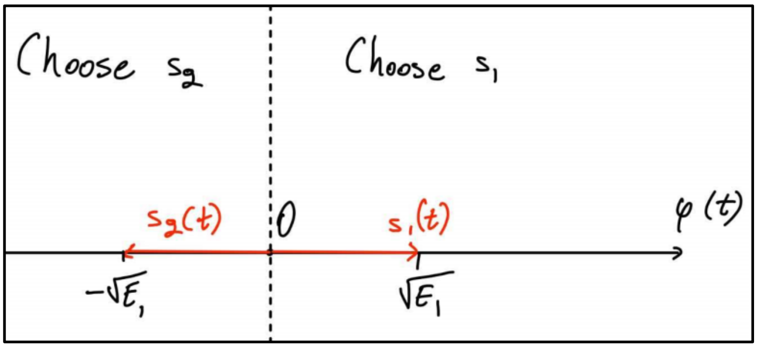
Η ενέργεια του σήματος είναι:

$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\,dt = \cdots = \frac{T_b}{9} + \frac{2T_b}{9} = \frac{T_b}{3} = E_2$$

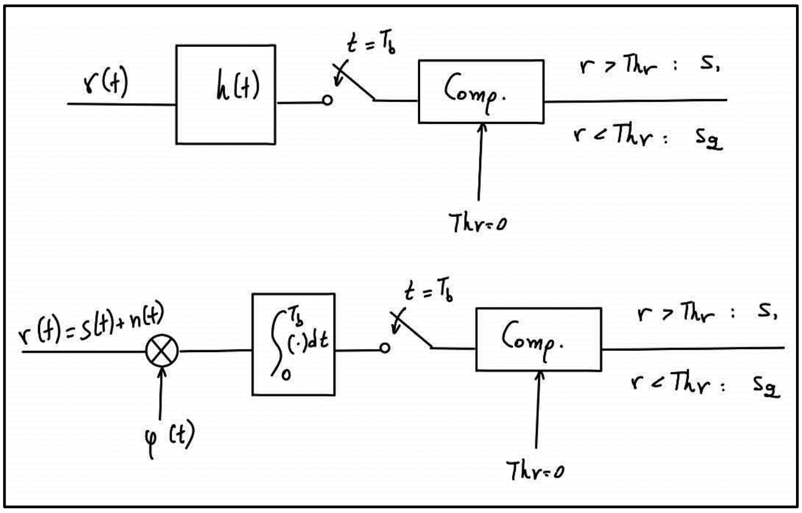
Η συνάρτηση βάσης είναι:

$$\varphi(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \rightarrow s_1(t) = \sqrt{E_1} \cdot \varphi(t)$$

Και αφού $s_1(t) = -s_2(t)$ ο αστερισμός είναι:



Με το σύνορο απόφασης να είναι η μεσοκάθετος της απόστασης τους, αφού τα δύο σήματα είναι ισοπίθανα. Ο βέλτιστος δέκτης μπορεί να σχεδιαστεί είτε με χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου, είτε με συσχετιστή δέκτη (φαίνονται αντίστοιχα παρακάτω):



Αφού τα σήματα είναι ισοπίθανα, η μέση ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_\mu = \frac{E_1 + E_2}{2} = E_1 = \frac{T_b}{3}$$

Ισχύει:

$$Prob_{error} = Q\left(\frac{D}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_\mu}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{T_b}{3}}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2T_b}{3N_0}}\right)$$

Θέμα 4

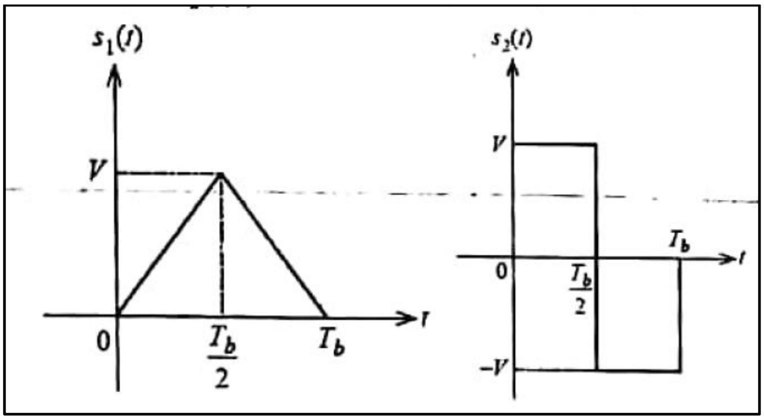
Να δοθεί το κύκλωμα του διακοπτόμενου διαμορφωτή μέσω του οποίου ένα διαμορφωμένο σήμα $c(t)$ εύρους ζώνης 100kHz πολλαπλασιάζεται με συνημίτονο συχνότητας F (σε MHz).

Με χρήση κατάλληλων μαθηματικών σχέσεων, να εξηγηθεί πώς η συνδυαστική λειτουργία των επιμέρους μονάδων του κυκλώματος οδηγεί στην επιθυμητή έξοδο.

Κανονική 19

Θέμα 1

Δίνεται το σύνολο σημάτων που φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 1 για δυαδική μετάδοση πάνω από ένα δίαυλο με AWGN θόρυβο είναι μηδενικής μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης $\sqrt{N_0/2}$. Το $s_1(t)$ χρησιμοποιείται για το bit 0 και το $s_2(t)$ για το bit 1 και είναι ισοπίθανα.



α. Δείξτε αναλυτικά ότι το $s_1(t)$ είναι ορθογώνιο του $s_2(t)$ και βρείτε μια ορθοκανονική βάση $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ για το συγκεκριμένο σύνολο σημάτων.

β. Σχεδιάστε τη γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων, σημειώστε τις περιοχές απόφασης και υπολογίστε με ακρίβεια τη σχέση για τον κανόνα του βέλτιστου δέκτη.

γ. Αν $V = 2Volts$ και $N_0 = 10^{-9} W/Hz$ βρείτε το μέγιστο ρυθμό ψηφίων που μπορούν να μεταδοθούν με πιθανότητα λάθους μικρότερη του 10^{-6} (Δίνεται $Q(10^{-6}) = 4{,}75$).

δ. Αν υποθέσουμε ότι το $s_1(t)$ είναι σταθερό, αλλά μπορούμε να αλλάξουμε το σχήμα αλλά όχι την ενέργεια του $s_2(t)$, τροποποιείστε το $s_2(t)$ ώστε η πιθανότητα λάθους να είναι η μικρότερη δυνατή. Βρείτε τη νέα πιθανότητα λάθους και εξηγήστε την απάντησή σας.

Ερώτημα Α

Τα σήματα είναι:

$$s_1(t) = \begin{cases} \dfrac{2V}{T_b} t, & 0 \le t \le \dfrac{T_b}{2} \\ \dfrac{2V}{T_b}(T_b - t), & \dfrac{T_b}{2} \le t \le T_b \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} V, & 0 \le t \le \dfrac{T_b}{2} \\ -V, & \dfrac{T_b}{2} \le t \le T_b \end{cases}$$

Για να αποδείξουμε ότι τα σήματα είναι ορθογώνια ελέγχουμε εάν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με 0:

$$\langle s_1 | s_2 \rangle = \int_0^{T_b} s_1(t) \cdot s_2(t)\, dt = \frac{2V^2}{T_b} \cdot \left(\int_0^{\frac{T_b}{2}} t\, dt - \int_{\frac{T_b}{2}}^{T_b} (T_b - t)\, dt \right) = \cdots = 0$$

Άρα είναι ορθογώνια. Επομένως, μία ορθοκανονική βάση είναι:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}, \qquad \varphi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

Οι ενέργειες των δύο σημάτων είναι:

$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\,dt = \cdots = \frac{4V^2}{T_b^2} \cdot \frac{T_b^3}{12} = \frac{V^2 T_b}{3}$$

$$E_2 = \int_0^{T_b} s_2^2(t)\,dt = \cdots = T_b$$

Άρα:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3}}{T_b\sqrt{T_b}}t, & 0 \leq t \leq \dfrac{T_b}{2} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{T_b\sqrt{T_b}}(T_b - t), & \dfrac{T_b}{2} \leq t \leq T_b \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{\sqrt{T_b}}, & 0 \leq t \leq \dfrac{T_b}{2} \\ -\dfrac{V}{\sqrt{T_b}}, & \dfrac{T_b}{2} \leq t \leq T_b \end{cases}$$

Ερώτημα Β

Ερώτημα Γ

Αφού τα σήματα είναι ισοπίθανα, η μέση ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_\mu = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{\frac{V^2 T_b}{3} + T_b}{2} = \frac{V^2 T_b + 3T_b}{6}$$

Ισχύει:

$$Prob_{error} = Q\left(\frac{D}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_\mu}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_\mu}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2E_\mu}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Θέλουμε:

$$Prob_{error} \leq 10^{-6} \to \frac{\sqrt{2E_\mu}}{2\sqrt{N_0}} \geq 4{,}75 \to \frac{\sqrt{2E_\mu}}{\sqrt{N_0}} \geq 9{,}5 \to \frac{2E_\mu}{N_0} \geq 90{,}25 \to \frac{2E_\mu}{N_0} \geq 90{,}25 \to E_\mu \geq 45{,}125 \cdot 10^{-9}$$

$$\to \frac{V^2 T_b + 3T_b}{6} \geq 45{,}125 \cdot 10^{-9} \to \frac{4T_b + 3T_b}{6} \geq 45{,}125 \cdot 10^{-9} \to T_b \geq 38{,}678 \cdot 10^{-9} sec$$

$$\to f_b \leq 0{,}0258 \cdot GHz = 25{,}8 MHz$$

Άρα $25{,}8 \cdot 10^6$ ψηφία το δευτερόλεπτο.

Ερώτημα Δ

Ο τύπος της πιθανότητας εσφαλμένου ψηφίου είναι ο εξής:

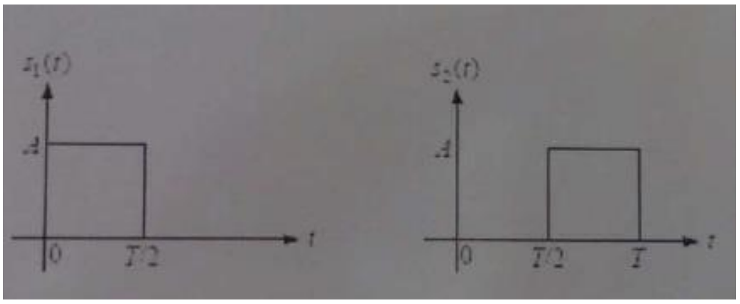
$$Prob_{error} = Q\left(\frac{D}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_\mu}}{2\sigma}\right)$$

Εφόσον η Q είναι εντόνως φθίνουσα, παρατηρούμε πως η πιθανότητα λάθους ελαχιστοποιείται όταν μεγιστοποιούμε την μέση ενέργεια τους, δηλαδή την απόσταση τους. Αυτό συμβαίνει όταν τα δύο σήματα έχουν διαφορά φάσης 180 μοίρες.

Επαναληπτική 18

Θέμα 2

Έστω το σύνολο των σημάτων στο Σχήμα 2 που χρησιμοποιείται για μετάδοση δυαδικών δεδομένων σε κανάλι με λευκό θόρυβο. Ο θόρυβος είναι μηδενικής μέσης τιμής και έχει τυπική απόκλιση $\sqrt{N_0/2}$. Το $s_1(t)$ χρησιμοποιείται για το bit 0 και το $s_2(t)$ για το bit 1 και είναι ισοπίθανα.



α. Βρείτε μια ορθοκανονική βάση για το σύνολο σημάτων $\{s_1(t), s_2(t)\}$.
β. Σχεδιάστε τον αστερισμό των σημάτων και ορίστε με μαθηματική έκφραση τον κανόνα απόφασης.
γ. Καθορίστε 2 διαφορετικές υλοποιήσεις του δέκτη που επιλέγει ψηφίο με το βέλτιστο κανόνα απόφασης (με χρήση 2 κλάδων).
δ. Αν $A = 2Volt$ και $N_0 = 10^{-8} W/Hz$ ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός δεδομένων ώστε η πιθανότητα λάθους να είναι μικρότερη από 10^{-6} (Δίνεται $Q^{-1}(10^{-6}) \approx 4{,}75$).

Ερώτημα Α

Τα σήματα είναι:

$$s_1(t) = A, \qquad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$s_2(t) = A, \qquad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

Τα σήματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους αφού:

$$\langle s_1 | s_2 \rangle = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t)\, dt = 0$$

Μία ορθοκανονική βάση για αυτά τα σήματα είναι:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

Οι ενέργειες των σημάτων:

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\, dt = \frac{A^2 T}{2} = E_2$$

Άρα η ορθοκανονική βάση είναι:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}, \qquad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}, \qquad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

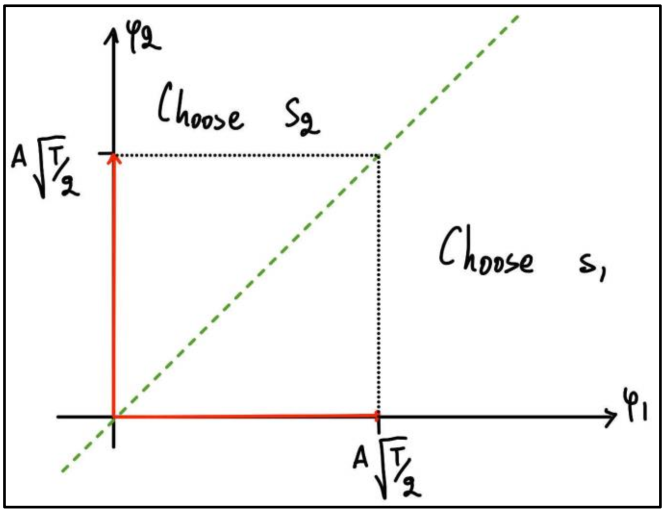
Ερώτημα Β

Τα σήματα γράφονται:

$$s_1(t) = \sqrt{E_1} \cdot \varphi_1(t) = A\sqrt{\frac{T}{2}} \cdot \varphi_1(t)$$

$$s_2(t) = \sqrt{E_2} \cdot \varphi_2(t) = A\sqrt{\frac{T}{2}} \cdot \varphi_2(t)$$

Άρα ο αστερισμός είναι:



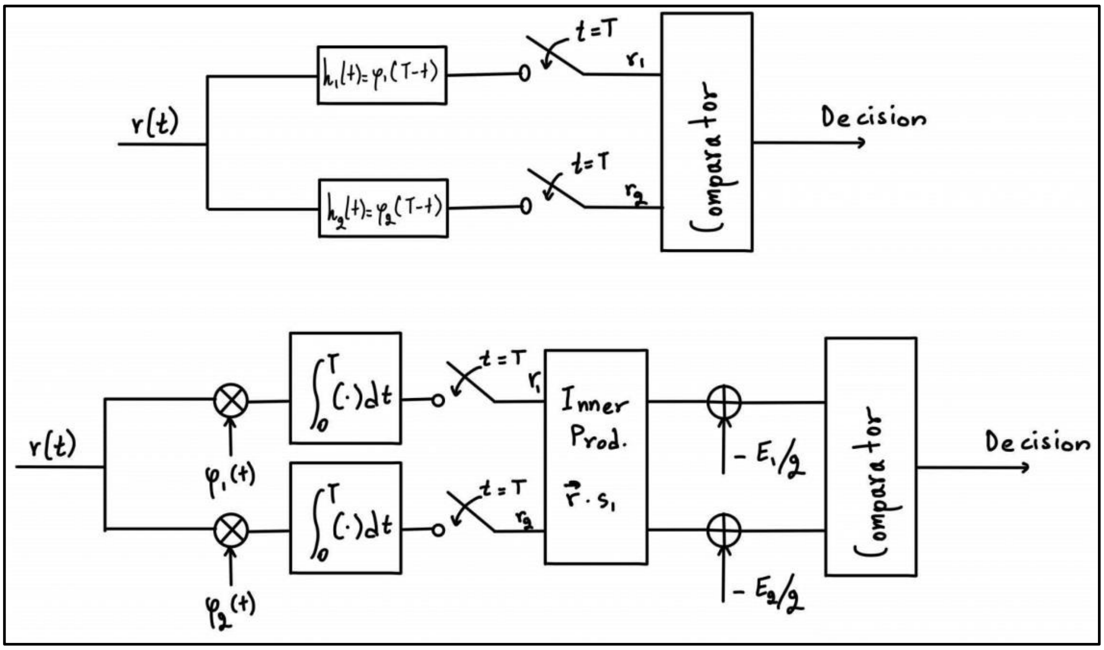
Επειδή είναι ισοπίθανα, το σύνορο απόφασης είναι η μεσοκάθετος της απόστασης τους, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$y = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{T}{2}}x$$

Η μαθηματική έκφραση του κανόνα απόφασης είναι:

$$(r_1 - s_{11})^2 + (r_1 - s_{12})^2 \gtrless_{0D}^{1D} (r_2 - s_{21})^2 + (r_2 - s_{22})^2 \rightarrow \left(r_1 - A\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2 + r_1^2 \gtrless_{0D}^{1D} r_2^2 + \left(r_2 - A\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2$$

Ερώτημα Γ



Ερώτημα Δ

Αφού τα σήματα είναι ισοπίθανα, η μέση ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_\mu = \frac{E_1 + E_2}{2} = E_1 = \frac{A^2 T}{2}$$

Ισχύει:

$$Prob_{error} = Q\left(\frac{D}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_\mu}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_\mu}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2E_\mu}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Θέλουμε:

$$Prob_{error} \leq 10^{-6} \rightarrow \frac{\sqrt{2E_\mu}}{2\sqrt{N_0}} \geq 4{,}75 \rightarrow \frac{\sqrt{2E_\mu}}{\sqrt{N_0}} \geq 9{,}5 \rightarrow \frac{2E_\mu}{N_0} \geq 90{,}25 \rightarrow \frac{2E_\mu}{N_0} \geq 90{,}25 \rightarrow E_\mu \geq 45{,}125 \cdot 10^{-8}$$

$$\rightarrow \frac{A^2 T}{2} \geq 45{,}125 \cdot 10^{-8} \rightarrow (2)^2 \cdot T \geq 90{,}25 \cdot 10^{-8} \rightarrow T \geq 22{,}562 \cdot 10^{-8}$$

$$\rightarrow f \leq 0{,}0443 \cdot 10^{8} \rightarrow f = 4{,}43GHz$$

Κανονική 18

Θέμα 1

Δίνεται το ακόλουθο σύνολο σημάτων για δυαδική μετάδοση δεδομένων σε κανάλι με θόρυβο AWGN:

$$s_1(t) = \sqrt{3} \cdot V_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_b}\right), \qquad 0 \le t \le T_b$$

$$s_2(t) = V_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_b}\right), \qquad 0 \le t \le T_b$$

Ο θόρυβος είναι μηδενικής μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης $\sqrt{N_0/2}$. Το χρησιμοποιείται για το bit 0 και το για το bit 1 και είναι ισοπίθανα. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα σύντομα, με ακρίβεια και τεκμηριωμένα:

α. Βρείτε μια ορθοκανονική βάση $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ για το παραπάνω σύνολο σημάτων. Σχεδιάστε τα σήματα $\{s_1(t), s_2(t)\}, \{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ σε μια περίοδο.

β. Σχεδιάστε τη Γεωμετρική Αναπαράσταση (αστερισμός) των σημάτων και σημειώστε τις περιοχές απόφασης. Βρείτε τη σχέση για τον κανόνα του βέλτιστου δέκτη.

γ. Βρείτε την πιθανότητα λάθος εσφαλμένου ψηφίου συναρτήσει της Q() και των μεγεθών V_0, T_b, N_0.

δ. Σχεδιάστε τον βέλτιστο δέκτη μόνο με ένα προσαρμοσμένο φίλτρο (βρείτε την κρουστική απόκριση του φίλτρου και το κατώφλι απόφασης).

ε. Θεωρώντας ότι η μέση ενέργεια του συνόλου των σημάτων παραμένει σταθερή τροποποιήστε το σύνολο των σημάτων στην ίδια ορθοκανονική βάση ώστε να έχουμε την ελάχιστη πιθανότητα λάθους ψηφίου.

Ερώτημα Α

Τα σήματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους αφού:

$$\langle s_1 | s_2 \rangle = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t)\, dt = 0$$

Μία ορθοκανονική βάση για αυτά τα σήματα είναι:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

Οι ενέργειες των σημάτων:

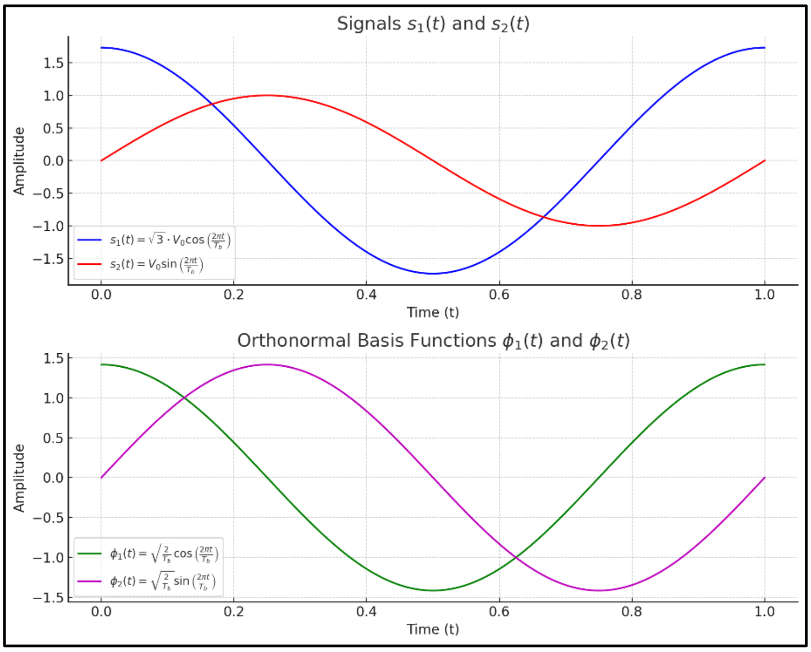
$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\, dt = 3 \cdot V_0^2 \frac{T_b}{2}$$

$$E_2 = \int_0^T s_2^2(t)\, dt = V_0^2 \frac{T_b}{2}$$

Άρα η ορθοκανονική βάση είναι:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_b}\right), \qquad 0 \le t \le T_b$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_b}\right), \qquad 0 \le t \le T_b$$



Ερώτημα Β

Ερώτημα Γ

Αφού τα σήματα είναι ισοπίθανα, η μέση ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_\mu = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{3 \cdot V_0^2 \frac{T_b}{2} + V_0^2 \frac{T_b}{2}}{2} = V_0^2 T_b$$

Ισχύει:

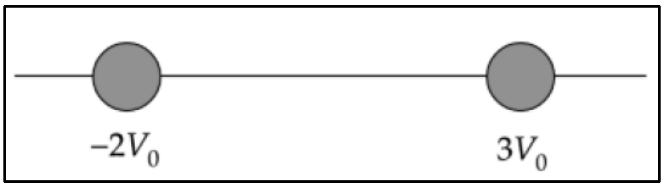
$$Prob_{error} = Q\left(\frac{D}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_\mu}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{V_0^2 T_b}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{V_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{2T_b}{N_0}}\right)$$

Ερώτημα Δ

Ερώτημα Ε

Θέμα 2

Δίνεται ο ακόλουθος αστερισμός:



α. Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του αστερισμού, να σχεδιάσετε τις περιοχές απόφασης και να υπολογίσετε το κατώφλι απόφασης.

β. Να σχεδιάσετε για το συγκεκριμένο αστερισμό το βέλτιστο δέκτη συσχέτισης.

γ. Θεωρώντας AWGN θόρυβο με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση $\sqrt{N_0/2}$ και τα ψηφία μετάδοσης ισοπίθανα να βρείτε την πιθανότητα λάθους εσφαλμένου ψηφίου συναρτήσει του V_0, N_0. Αν $\frac{V_0}{N_0} \gg 1$, τι συμπέρασμα βγάζουμε για τη μετάδοση των σημάτων;

δ. Να βρείτε την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου του υπο-βέλτιστου δέκτη με βάση το πρόσημο.

Ερώτημα Α

Από το σχήμα μπορούμε να συμπεράνουμε πως $E_1 = 4V_0^2, E_2 = 9V_0^2$. Θεωρώντας τα δύο σήματα ισοπίθανα, η μέση ενέργεια είναι:

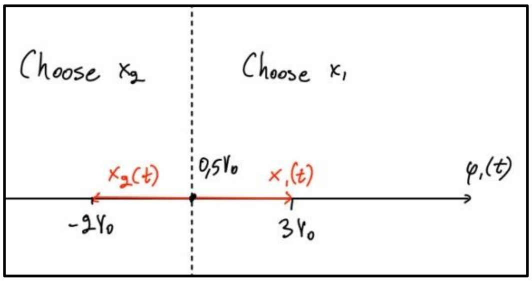
$$E_\mu = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{13}{2} V_0^2$$

Επειδή έχω θεωρήσει ισοπίθανα σήματα, το κατώφλι/σύνορο απόφασης θα είναι το μέσον της απόστασης τους, δηλαδή:

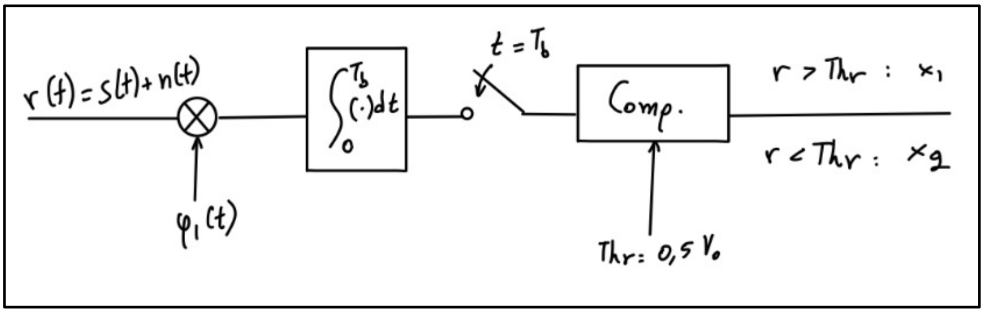
$$D = 3V_0 - (-2V_0) = 5V_0 \rightarrow \frac{D}{2} = 2{,}5V_0$$

$$point: -2V_0 + 2{,}5V_0 = 0{,}5V_0$$

Άρα το σημείο $0{,}5V_0$.



Ερώτημα Β



Ερώτημα Γ

Η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου είναι:

$$Prob_{error} = Q\left(\frac{D}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{5V_0}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Επιπλέον, αφού $1 \ll \frac{V_0}{N_0} \to 1 \ll \sqrt{\frac{V_0}{N_0}} \to 1 \ll \frac{V_0}{\sqrt{N_0}}$, και επειδή η Q είναι εντόνως φθίνουσα, η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου προσεγγίζει το 0.

Ερώτημα Δ

Επειδή το σύνορο δεν είναι στο μέσον την απόστασης, ο τύπος αλλάζει σε:

$$Prob_{error} = Prob_1 \cdot Prob(r < 0 | s = 3V_0) + Prob_2 \cdot Prob(r > 0 | s = -2V_0)$$

Ισχύει:

$$Prob(r < 0 | s = 3V_0) = Prob(s + n < 0 | s = 3V_0) = Prob(n < -3V_0 | s = 3V_0) = Prob(n < -3V_0)$$
$$= Prob(n > 3V_0) = Q\left(\frac{3V_0}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)$$

Ομοίως:

$$Prob(r > 0 | s = -2V_0) = Prob(s + n > 0 | s = -2V_0) = Prob(n > 2V_0 | s = -2V_0) = Prob(n > 2V_0)$$
$$= Q\left(\frac{2V_0}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)$$

Άρα:

$$Prob_{error} = Prob_1 \cdot Q\left(\frac{3V_0}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) + Prob_2 \cdot Q\left(\frac{2V_0}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{3V_0}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{2V_0}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)$$