

**Φυσική IV (Κβαντομηχανική I)**  
**Πρόχειρες σημειώσεις του μαθήματος**

**Γ. Ε. Κουτσούμπας, Κ. Ν. Φαράκος**

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



<b>1</b>	<b>Αρχές της Κβαντομηχανικής</b>	<b>1</b>
1.1	Λίγη Ιστορία . . . . .	1
1.2	Ηλεκτρομαγνητική θεωρία και φως . . . . .	1
1.3	Το Μέλαν Σώμα . . . . .	3
1.3.1	Διαστατική ανάλυση - Απόπειρα κλασικής ερμηνείας . . . . .	9
1.3.2	Κβαντική ερμηνεία . . . . .	10
1.3.3	Υπόθεση του Planck και υπολογισμός βάσει Στατιστικής Φυσικής . . . . .	11
1.4	Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο . . . . .	14
1.5	Φαινόμενο Compton- Διατήρηση της ορμής . . . . .	18
1.6	Και τα σωματίδια είναι κύματα . . . . .	23
1.6.1	Σταθερότητα των ατόμων . . . . .	23
1.6.2	Ατομικά φάσματα. Τύπος του Balmer . . . . .	25
1.6.3	Το άτομο του Bohr . . . . .	26
1.6.4	Γενική συνθήκη κβάντωσης των Wilson και Sommerfeld . . . . .	29
1.6.5	Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός: de Broglie . . . . .	29
1.7	Προβλήματα προς λύση . . . . .	32



## 1.1 Λίγη Ιστορία

Στο τέλος του δέκατου ένατου αιώνα οι επιστήμονες πίστευαν ότι τα βασικά προβλήματα της Φυσικής είχαν επιλυθεί και ότι το μόνο που απέμενε ήταν η ακριβέστερη μέτρηση ορισμένων σταθερών ή άλλες βελτιώσεις τέτοιου τύπου, χωρίς ριζοσπαστικές αλλαγές. Βέβαια, οι οξυδερκέστεροι ερευνητές, όπως ο λόρδος Kelvin, είχαν εντοπίσει δύο σύννεφα στο κατά τ' άλλα τέλει οικοδόμημα της κλασικής Φυσικής: τα αποτελέσματα του πειράματος των Michelson και Morley και τα προβλήματα με την ακτινοβολία του Μέλανος Σώματος. Και οι δύο υποψίες ήταν εύστοχες, γιατί η λύση του πρώτου προβλήματος οδήγησε στη διατύπωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, ενώ για το δεύτερο στη δημιουργία της Κβαντικής Μηχανικής.

## 1.2 Ηλεκτρομαγνητική θεωρία και φως

Στην παράγραφο αυτή κάνουμε μια σύντομη επανάληψη της κλασικής ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, γιατί θα είναι χρήσιμη στη συνέχεια.

Η Ηλεκτρομαγνητική θεωρία διατυπώθηκε από τον James Clerk Maxwell (1831-1879) και περιέχεται στις τέσσερις γνωστές εξισώσεις:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Στις εξισώσεις αυτές το  $\rho$  συμβολίζει την πυκνότητα φορτίου, το  $\vec{J}$  την πυκνότητα ρεύματος, τα  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα και τα  $\epsilon_0$  και  $\mu_0$  είναι σταθερές, που χρειάζονται για να γράψουμε τις εξισώσεις στο διεθνές σύστημα μονάδων, το SI.

Αν θεωρήσουμε αυτές τις εξισώσεις στο κενό, όπου  $\rho = 0$  και  $\vec{J} = \vec{0}$ , κατάλληλος συνδυασμός τους (με τη βοήθεια και της διανυσματικής ταυτότητας  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$ ) θα δώσει τις

εξισώσεις

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.5)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.6)$$

που διέπουν την διάδοση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο κενό, δηλαδή τελικά τη διάδοση της ακτινοβολίας. Οι εξισώσεις είναι προφανές ότι έχουν τη μορφή της κυματικής εξίσωσης και συνεπάγονται ότι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό θα δίνεται από τη σχέση:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (1.7)$$

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία παράγονται από ταλαντευόμενα και γενικότερα επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία.

Η ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας εκφράζεται μέσω του διανύσματος του Poynting:

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (1.8)$$

που δίνει ποσοτικά την ενέργεια που μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανά μονάδα επιφάνειας και μονάδα χρόνου στην κατεύθυνση που ορίζεται από το διάνυσμα αυτό.

Η πυκνότητα ενέργειας (δηλαδή η συνολική ενέργεια που αποθηκεύεται ανά μονάδα όγκου σε μια περιοχή, όπου υπάρχει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) δίνεται από τη σχέση:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2. \quad (1.9)$$

Μια απλή λύση της κυματικής εξίσωσης είναι ένα επίπεδο κύμα της μορφής:

$$\vec{E} = E_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t) \quad (1.10)$$

όπου

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \lambda f \quad (1.11)$$

οι παράμετροι  $c$ ,  $T$ ,  $f$ ,  $\lambda$  συμβολίζουν την ταχύτητα, την περίοδο, την συχνότητα και το μήκος κύματος της λύσης. Το συγκεκριμένο κύμα είναι πολωμένο κατά τον άξονα των  $y$  και διαδίδεται κατά τον άξονα των  $x$  με ταχύτητα  $c$ . Αυτό το ηλεκτρικό κύμα υποχρεωτικά θα συνοδεύεται από ένα μαγνητικό κύμα της μορφής:

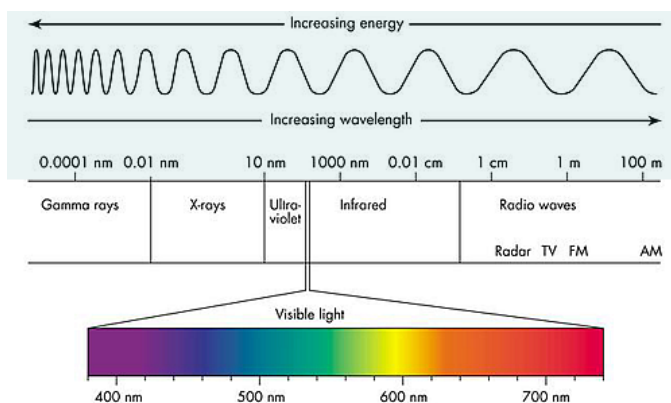
$$\vec{B} = B_0 \hat{z} \sin(kx - \omega t), \quad B_0 = \frac{E_0}{c}. \quad (1.12)$$

Με βάση αυτά τα κύματα μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα του Poynting:

$$\vec{S} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin^2(kx - \omega t) \hat{x} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin^2(kx - \omega t) \hat{x}. \quad (1.13)$$

Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell ήταν εντυπωσιακή, όμως για να πεισθεί η επιστημονική κοινότητα του δέκατου ένατου αιώνα ήταν απαραίτητη η πειραματική επιβεβαίωση της ύπαρξης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Αυτό επιτεύχθηκε με λαμπρό τρόπο από τον Heinrich Hertz (1857-1894), που παρήγαγε και ανίχνευσε ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας  $f \simeq 10^9$  Hz, μια συχνότητα που το τοποθετεί στην περιοχή των ραδιοκυμάτων.

Γενικότερα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα χαρακτηρίζονται από τη συχνότητά τους, την οποία, αν αυξάνει κανείς από σχετικά χαμηλές τιμές, θα περάσει διαδοχικά από τα ραδιοκύματα στα κύματα του Radar, από εκεί στο υπέρυθρο φως, μετά στο ορατό, στη συνέχεια στο υπεριώδες για να καταλήξει στις ακτίνες  $X$  και στις ακτίνες  $\gamma$ . Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα απεικονίζεται στο Σχήμα 1.1. Το ορατό φως δεν είναι παρά ηλεκτρομαγνητικά κύματα με συχνότητα στο σχετικά στενό διάστημα από  $4000\text{\AA}$  μέχρι  $7500\text{\AA}$ , όπου για τη μονάδα Ångstrom ισχύει:  $1\text{\AA} \leftrightarrow 10^{-10}\text{ m}$ .



Σχήμα 1.1: Ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

### 1.3 Το Μέλαν Σώμα

Κάθε σώμα εκπέμπει θερμική ακτινοβολία, της οποίας το μήκος κύματος, ή, ισοδύναμα, η συχνότητα, εξαρτάται από την απόλυτη θερμοκρασία του σώματος.

Αν παρατηρήσει κανείς έναν φούρνο σ' ένα υαλουργείο ή ένα χυτήριο μετάλλων, θα διαπιστώσει ότι τα γυάλινα σκεύη (και ο ίδιος ο φούρνος!) ακτινοβολούν με τον ίδιο τρόπο και έχουν όμοιο χρώμα σε τέτοιο βαθμό, που δύσκολα ξεχωρίζει κανείς το ένα από το άλλο. Τα σώματα αυτά βρίσκονται σε θερμική ισορροπία. Ο τρόπος που ακτινοβολούν τα διάφορα σώματα ως συνάρτηση της συχνότητας είναι ανεξάρτητος από τη χημική σύσταση των αντικειμένων, που δεν φαίνεται να παίζει κάποιον πρωτεύοντα ρόλο.

Δηλαδή: *Όλα τα πυρακτωμένα αντικείμενα με την ίδια θερμοκρασία εκπέμπουν την ίδια ακριβώς ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, ανεξάρτητα από τη χημική τους σύσταση ή άλλες διαφορές στις φυσικές τους ιδιότητες.*

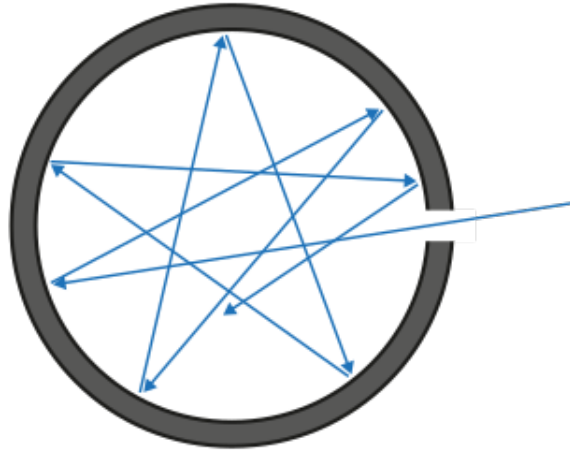
Παρατηρούμε ότι, όταν η θερμοκρασία είναι σχετικά χαμηλή (π.χ.  $2000^\circ\text{C}$ ), τα αντικείμενα φαίνονται κόκκινα και, όταν η θερμοκρασία αυξηθεί, θα δείξουν κίτρινα και μετά λευκά. Δηλαδή ένα σημαντικό στοιχείο της ακτινοβολίας είναι σε ποιο μέρος του φάσματος εκπέμπεται το κύριο μέρος της ακτινοβολίας και αυτό το χαρακτηριστικό λέγεται φασματική κατανομή.

Το Μέλαν Σώμα είναι ένα **εξιδανικευμένο φυσικό σύστημα** που απορροφά πλήρως οποιαδήποτε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία προσπέσει πάνω του. Είναι σημαντικό γιατί έχει τρεις αξιοσημείωτες ιδιότητες:

(α) Είναι ένας ιδανικός εκπομπός ακτινοβολίας, με την έννοια ότι, αν θερμανθεί, εκπέμπει ίση ή περισσότερη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από οποιοδήποτε άλλο σώμα με την ίδια θερμοκρασία.

(β) Η εκπεμπόμενη ακτινοβολία εκπέμπεται ισοτροπικά, δηλαδή ανεξάρτητα από τη διεύθυνση.

(γ) Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και τη συχνότητα της ακτινοβολίας.



**Σχήμα 1.2:** Μια συσκευή προσεγγιστικής πραγμάτωσης του μέλανος σώματος.

Μπορούμε να πραγματώσουμε πειραματικά ένα Μέλαν Σώμα κατασκευάζοντας ένα μεταλλικό κουτί με θερμαινόμενα τοιχώματα, κλειστό από παντού, εκτός από ένα σημείο, όπου έχει ένα πολύ μικρό άνοιγμα. Είναι προφανές ότι η ακτινοβολία που θα εισέλθει από το άνοιγμα θα ανακλαστεί πολλές φορές στα εσωτερικά τοιχώματα, μέχρις ότου θα απορροφηθεί και είναι απίθανο να ξαναβγεί. Αν η κοιλότητα θερμανθεί, από το άνοιγμα θα εξέλθει η θερμική ακτινοβολία που οφείλεται στη θέρμανση των τοιχωμάτων της κοιλότητας. Η ακτινοβολία αυτή δημιουργείται από τις θερμικές ταλαντώσεις των φορτίων στα τοιχώματα της κοιλότητας, έχει αλληλεπιδράσει πολλές φορές με το υλικό πριν εξέλθει από το άνοιγμα και έχει έρθει σε θερμική ισορροπία με το θερμό υλικό. Στην κατάσταση ισορροπίας η ενέργεια που βγαίνει από το άνοιγμα της κοιλότητας ταυτίζεται με την ενέργεια που ακτινοβολούν τα τοιχώματα της κοιλότητας.

Ένα χρήσιμο μέγεθος είναι η **φασματική κατανομή**  $J(f, T)$  αυτής της ακτινοβολίας

$$J = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t \Delta f}, \quad (1.14)$$

όπου το  $\Delta E$  είναι η ενέργεια που διασχίζει το εμβαδό  $\Delta S$  του ανοίγματος σε χρόνο  $\Delta t$  και στην περιοχή συχνοτήτων από  $f$  μέχρι  $f + \Delta f$ . Φυσικά, οι ποσότητες που σημειώνονται με  $\Delta$  είναι πολύ μικρές και μπορεί κανείς να τις θεωρήσει απειροστές. Επίσης ενδιαφέρον μέγεθος είναι η **συνολική ένταση της ακτινοβολίας** για όλες τις συχνότητες:

$$I(T) = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \int_0^{+\infty} J(f, T) df. \quad (1.15)$$

Οι μονάδες των δύο ποσοτήτων είναι, όπως είναι φυσικό,  $[J] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{Hz}}$  και  $[I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ . Χρήσιμη, τέλος, είναι η πυκνότητα ενέργειας  $U_T(f)$  ανά μονάδα όγκου και συχνότητας: η ποσότητα  $U_T(f) df$  είναι η πυκνότητα ενέργειας στο διάστημα  $(f, f + df)$ . Η φασματική κατανομή σχετίζεται με την πυκνότητα ενέργειας μέσω της σχέσης

$$J(f, T) = U_T(f) \frac{c}{4}. \quad (1.16)$$



Οι πειραματικοί νόμοι για την θερμική ακτινοβολία που ήταν γνωστοί στο τέλος του δέκατου ένατου αιώνα (μερικοί είχαν και θεωρητική τεκμηρίωση) ήταν οι εξής:

(α) Παγκοσμιότητα. Τα χαρακτηριστικά της ακτινοβολίας είναι ανεξάρτητα από τα φυσικά χαρακτηριστικά του ακτινοβολούντος υλικού, αρκεί να είναι μέλαν σώμα.

(β) Νόμος των Stefan (1879) και Stefan-Boltzmann (1884). Η συνολική ένταση  $I(T)$  της ακτινοβολίας συνδέεται με την απόλυτη θερμοκρασία του μέλανος σώματος βάσει της σχέσης:

$$I(T) = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}, \quad (1.17)$$

όπου η απόλυτη θερμοκρασία μετράται σε βαθμούς Kelvin.

(γ) Νόμος της μετατόπισης του Wien (1896). Ο νόμος του Wien για την πυκνότητα ενέργειας  $\tilde{U}_T(\lambda)$  συναρτήσει του μήκους κύματος είναι:

$$\tilde{U}_T(\lambda) = \frac{F(\lambda T)}{\lambda^5},$$

όπου η  $F$  είναι (μη προσδιορισμένη) συνάρτηση του  $\lambda T$ . Συνεπώς το κλάσμα  $\frac{\tilde{U}_T(\lambda)}{T^5}$  είναι συνάρτηση μόνο του γινομένου  $\lambda T$  και η γραφική του παράσταση συναρτήσει του γινομένου  $\lambda T$  είναι η ίδια για όλες τις απόλυτες θερμοκρασίες  $T$ . Συμπεραίνουμε ότι, όποιο ακρότατο υπάρχει, θα αναφέρεται στη μεταβλητή  $\lambda T$ , οπότε το σχετικό μήκος κύματος θα ισούται με κάποια σταθερά διά την απόλυτη θερμοκρασία.

Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται νόμος της μετατόπισης του Wien. Η ακριβής διατύπωσή του είναι η εξής: Το μήκος κύματος  $\lambda_{max}$  (σε εκατοστά), στο οποίο η φασματική κατανομή  $\tilde{J}(\lambda, T)$  ως συνάρτηση της θερμοκρασίας  $T$  και του μήκους κύματος  $\lambda$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της σχετίζεται με την απόλυτη θερμοκρασία (σε βαθμούς Kelvin) μέσω της σχέσης:

$$\lambda_{max}(\text{cm}) \approx \frac{0.29}{T(\text{K})}. \quad (1.18)$$

Σημειώνουμε ότι η φασματική κατανομή θα ισούται με:

$$\tilde{J}(\lambda, T) = \tilde{U}_T(\lambda) \frac{c}{4} = \frac{cF(\lambda T)}{4\lambda^5}.$$

(δ) Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της φασματικής κατανομής για μεγάλες συχνότητες είναι:

$$J(f, T) \xrightarrow{f \rightarrow +\infty} f^3 \exp\left(-\frac{\alpha f}{kT}\right), \quad (1.19)$$

όπου  $\alpha$  μία σταθερά που προσδιορίζεται από τα πειραματικά δεδομένα για μεγάλες συχνότητες.

Μια πράγματι αυτοσυνεπής απόπειρα θεωρητικού υπολογισμού έγινε από τους Rayleigh και Jeans στις αρχές του εικοστού αιώνα. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, θα αναφέρουμε τις βασικές φυσικές ιδέες στις οποίες στηρίχτηκε η ερμηνεία τους. Τα ηλεκτρόνια ταλαντεύονται και εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με συνεχή τρόπο με αποτέλεσμα να δημιουργούνται στάσιμα κύματα. Ένα σημαντικό γεγονός είναι ότι τα στάσιμα κύματα που παράγονται θα έχουν την ίδια συχνότητα για πολλές, διαφορετικές μεταξύ τους, προβολές του (διανυσματικού) κυματικού αριθμού στους τρεις ορθογώνιους άξονες  $x$ ,  $y$ , και  $z$ , δηλαδή για διαφορετικές κατευθύνσεις διάδοσης. Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός των στάσιμων κυμάτων με συχνότητα μεταξύ  $f$  και  $f + df$  ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{N(f)df}{V} \equiv \frac{8\pi f^2}{c^3} df.$$

Εξ άλλου μπορεί να αποδειχθεί ότι η αναμενόμενη τιμή  $\langle E \rangle$  της ενέργειας για κάθε στάσιμο κύμα που βρίσκεται σε ισορροπία με δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας  $T$  θα ισούται με  $kT$ , όπου  $k$  είναι η σταθερά του Boltzmann. Η ενέργεια, λοιπόν, ανά μονάδα όγκου στο διάστημα συχνοτήτων  $(f, f + df)$  σε ισορροπία με θερμοκρασία  $T$  θα ισούται με:

$$U_T(f)df = \left( \frac{8\pi f^2}{c^3} df \right) (kT) = \frac{8\pi f^2 kT}{c^3} df \Rightarrow U_T(f) = \frac{8\pi f^2 kT}{c^3}. \quad (1.20)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης

$$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow df = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda,$$

μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\tilde{U}_T(\lambda)d\lambda = -U_T(f)df = U_T\left(\frac{c}{\lambda}\right)\frac{c}{\lambda^2}d\lambda.$$

Μπορούμε, λοιπόν, να εκφράσουμε την (1.20) και συναρτήσει του μήκους κύματος:

$$\tilde{U}_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi f^2 kT}{c^3} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} (k\lambda T) d\lambda.$$

Η αντίστοιχη φασματική κατανομή δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{J} = \tilde{U}_T(\lambda) \frac{c}{4} = \frac{2\pi}{c\lambda^5} (k\lambda T).$$

Διαπιστώνουμε ότι αυτή η έκφραση είναι της μορφής του νόμου του Wien. Όμως το αποτέλεσμα γενικά δεν συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα, παρά το γεγονός ότι υπάρχει συμφωνία για τα μεγάλα μήκη κύματος. Εξ άλλου, καθώς  $\lambda \rightarrow 0$ , πυκνότητα ενέργειας προβλέπεται άπειρη, που σημαίνει και αποτυχία επί της αρχής. Όμως η επιχειρηματολογία των Rayleigh και Jeans ήταν το καλύτερο που θα μπορούσε να γίνει με βάση τις αρχές της κλασικής Φυσικής. Αυτό σήμαινε ότι υπήρχε κάποιο λάθος στα θεμέλια της ίδιας της κλασικής Φυσικής.

Στη συνέχεια ο Planck (1900) επινόησε έναν εμπειρικό τύπο που περιέγραφε τους πειραματικούς νόμους σ' όλο το φάσμα των συχνοτήτων, τον εξής:

$$J(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}, \quad (1.21)$$

όπου το  $k$  είναι η σταθερά του Boltzmann,

$$k = 1.381 \times 10^{-23} \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2 \text{K}}, \quad (1.22)$$

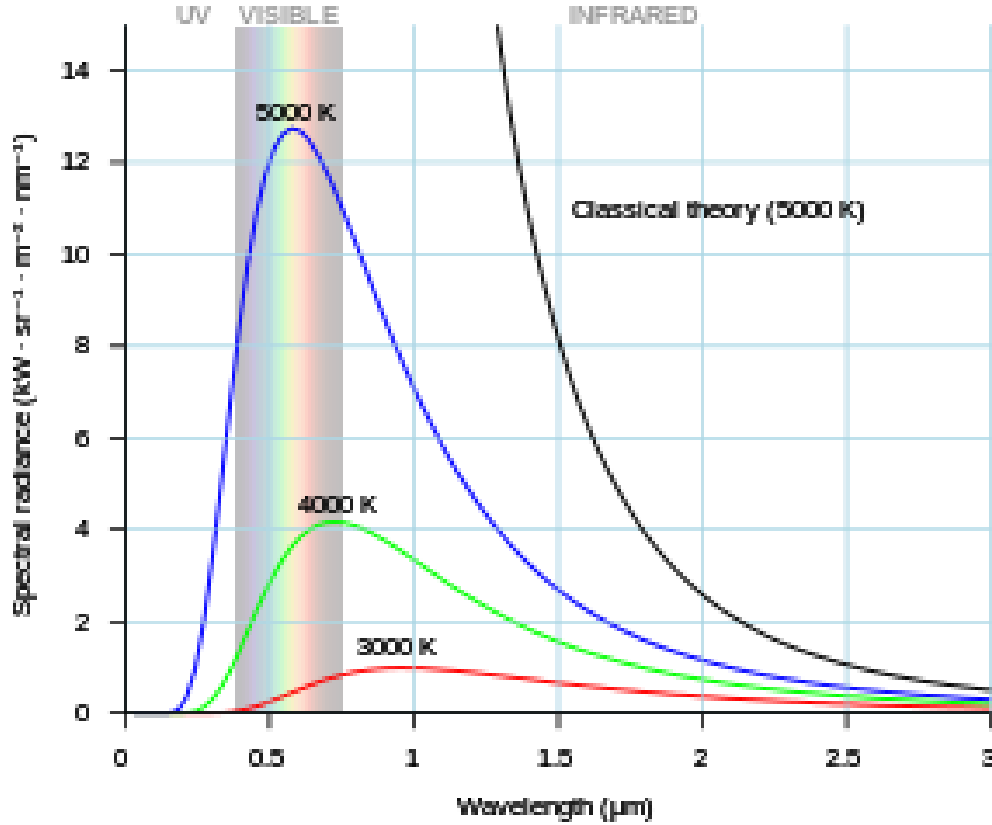
το  $c$  είναι η ταχύτητα του φωτός,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , και τέλος η νέα σταθερά

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (1.23)$$

πρωτοέκανε την εμφάνισή της σ' αυτόν τον τύπο και είναι η περίφημη σταθερά του Planck, που αποτελεί το σήμα κατατεθέν της Κβαντικής Μηχανικής.

Μπορούμε να δούμε ότι ο τύπος του Planck ικανοποιεί την απαίτηση (α) της παγκοσμιότητας. Επίσης ικανοποιεί τον νόμο (β) των Stefan-Boltzmann:

$$I(T) = \int_0^{+\infty} J(f, T) df = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{+\infty} \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1} df = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{kT}{h} \right) \frac{\left( \frac{kT}{h} \right)^3 x^3}{\exp(x) - 1} dx$$



**Σχήμα 1.3:** Καμπύλη του Planck για την ακτινοβολία του μέλανος σώματος συναρτήσει του μήκους κύματος για τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες. Επί πλέον δίνεται η καμπύλη της κλασικής θεωρίας των Rayleigh και Jeans, ώστε να φανεί η απόκλιση, που δεν υπάρχει για στην καμπύλη του Planck.

$$= \frac{2\pi h}{c^2} \left( \frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \frac{2\pi h}{c^2} \left( \frac{kT}{h} \right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \left( \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} \right) T^4. \quad (1.24)$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την αλλαγή μεταβλητής:  $x \equiv \frac{hf}{kT}$  καθώς και το αποτέλεσμα:

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{x^3}{\exp(x) - 1} = \frac{\pi^4}{15}. \quad (1.25)$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση (1.24) με την (1.17) βρίσκουμε ότι η σταθερά των Stefan και Boltzmann δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}.$$

Για τον νόμο της μετατόπισης ( $\gamma$ ), πρέπει να εκφράσουμε τη σχέση του Planck συναρτήσει του μήκους κύματος  $\lambda$ : Όπου  $I(T) = \int_{f=0}^{+\infty} J(f, T) df$  θα χρησιμοποιήσουμε την

$$I(T) = \int_{\lambda=+\infty}^0 \tilde{J}(\lambda, T) \left( -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \right), \quad (1.26)$$

όπου  $\tilde{J}(\lambda, T)$  είναι η έκφραση που προκύπτει, αν στην  $J(f, T)$  αντικαταστήσουμε όπου  $f$  το ίσο του  $c/\lambda$ :

$$J(f, T) \rightarrow \tilde{J}(\lambda, T) = \frac{2\pi h c}{\lambda^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k T}\right) - 1}, \quad f = \frac{c}{\lambda}. \quad (1.27)$$

Επομένως προκύπτει για την ένταση :

$$I(T) = \int_0^{+\infty} \frac{2\pi hc}{\lambda^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1} \left(\frac{c}{\lambda^2} d\lambda\right) = \int_0^{+\infty} \left[ \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1} \right] d\lambda$$

$$= \int_0^{+\infty} [A(\lambda) g(\lambda, T)] d\lambda, \quad (1.28)$$

όπου :

$$A(\lambda) \equiv \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}$$

και

$$g(\lambda, T) \equiv \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1}.$$

Η θέση μέγιστης συνεισφοράς στο ολοκλήρωμα προκύπτει από τη σχέση :

$$\left. \frac{d}{d\lambda} [A(\lambda) g(\lambda, T)] \right|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0, \quad (1.29)$$

δηλαδή :

$$\frac{10\pi hc^2}{\lambda^6} \left[ \frac{y}{5} \frac{e^y}{e^y - 1} - 1 \right] \Big|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0, \quad (1.30)$$

όπου

$$y \equiv \frac{hc}{k\lambda T}. \quad (1.31)$$

Ο μηδενισμός συμβαίνει όταν  $e^{-y} = 1 - \frac{y}{5}$ . Στο Σχήμα 1.4 λύνουμε γραφικά την εξίσωση και το αποτέλεσμα είναι

$$y \approx 5 \Rightarrow \frac{hc}{k\lambda_{max}T} \approx 5,$$

δηλαδή :

$$\lambda_{max} \approx \frac{hc}{5kT}.$$

Είναι πια θέμα αντικατάστασης των αριθμητικών τιμών σε κατάλληλο σύστημα μονάδων η αναπαγωγή της σχέσης της μετατόπισης του Wien:

$$\lambda_{max}(\text{cm}) \approx \frac{0.29}{T(\text{K})}.$$

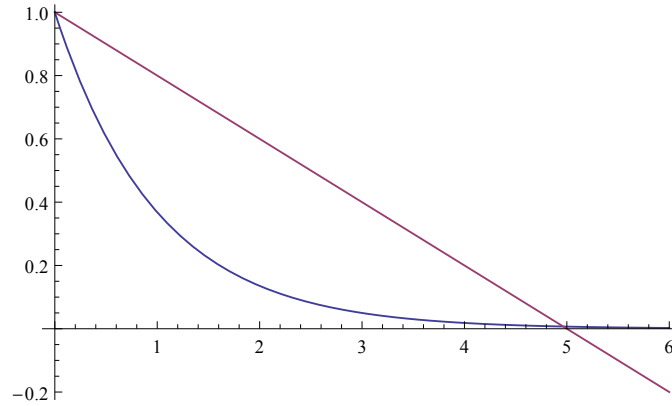
Τέλος η ασυμπτωτική συμπεριφορά (δ) αναπαράγεται μ' έναν προφανή τρόπο και  $\alpha \equiv h$ .

Ο τύπος του Planck συμπεριφέρεται καλά στις μεγάλες συχνότητες, δηλαδή αποφεύγει τους απειρισμούς της πρότασης των Rayleigh και Jeans. Από την άλλη, η πρόταση των Rayleigh και Jeans ήταν πολύ πετυχημένη στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων, οπότε η νέα πρόταση πρέπει να μεταπίπτει σ' αυτήν όταν η  $f$  είναι μικρή. Πράγματι, αυτό συμβαίνει :

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\left[ 1 + \frac{hf}{kT} + \frac{1}{2!} \left(\frac{hf}{kT}\right)^2 + \dots \right] - 1}$$

$$\approx \lim_{f \rightarrow 0} \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\left[ \frac{hf}{kT} + \dots \right]} = \frac{2\pi}{c^2} f^2 kT,$$

δηλαδή αναπαράγεται πλήρως ο τύπος των Rayleigh και Jeans, οπότε διασφαλίζεται ότι ο τύπος του Planck περιέχει και όλες τις πετυχημένες προβλέψεις της προηγούμενης θεωρίας, χωρίς να έχει τα προβλήματά της.



**Σχήμα 1.4:** Για την εύρεση του  $\lambda_{max}$ . Γραφικές παραστάσεις των  $e^{-y}$  και  $1 - \frac{y}{5}$  συναρτήσεων του  $y$ .

### 1.3.1 Διαστατική ανάλυση - Απόπειρα κλασικής ερμηνείας

Οι Rayleigh και Jeans πρότειναν την σχέση

$$J(f, T) = \frac{2\pi}{c^2} f^2 kT. \quad (1.32)$$

Έχουμε συμβολίσει με  $T$  την απόλυτη θερμοκρασία. Θα μπορούσε κανείς να παραγάγει αυτήν τη σχέση χρησιμοποιώντας και διαστατική ανάλυση. Η μέθοδος έχει ως εξής. Έστω ποσότητα  $Q$  που εξαρτάται από τις τρεις ποσότητες  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Αν θέσουμε  $Q(X, Y, Z) = gX^\lambda Y^\mu Z^\nu$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε τους εκθέτες  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  βασιζόμενοι στις διαστάσεις αφ' ενός της  $Q$ , αφ' ετέρου των  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Η παράμετρος  $g$  είναι σταθερά ή, γενικότερα, συνδυασμός αδιάστατων μεταβλητών, που δεν επηρεάζουν τη διαστατική ανάλυση. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα η ποσότητα  $J(f, T)$  περιμένουμε να εξαρτάται, εκτός από τα  $f$  και  $T$ , που εμφανίζονται ως ορίσματα, και από την ταχύτητα του φωτός  $c$ , αφού πρόκειται για ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Προτιμότερο είναι να αντικαταστήσουμε τη θερμοκρασία  $T$  με την ενέργεια  $kT$ , χρησιμοποιώντας τη σταθερά του Boltzmann  $k$  για τη μετατροπή. Τότε:

$$J = J(f, kT, c) = g f^\lambda (kT)^\mu c^\nu,$$

όπου το  $g$  είναι αδιάστατη σταθερά ή συνάρτηση αδιάστατων σταθερών. Όπως έχουμε πει, οι μονάδες της  $J$  είναι:

$$[J] = \frac{[E]}{[\Delta t][\Delta S][\Delta f]} = \frac{\frac{ML^2}{\tau^2}}{\tau L^2 \frac{1}{\tau}} = M\tau^{-2},$$

όπου αντικαταστήσαμε τις μονάδες της ενέργειας με τις μονάδες της κινητικής ενέργειας  $\frac{1}{2}mv^2$ , δηλαδή  $\frac{ML^2}{\tau^2}$ . Χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό  $\tau$  για τις διαστάσεις του χρόνου, αντί για τον πιο καθιερωμένο συμβολισμό  $T$ , για να μη γίνεται σύγχυση με την απόλυτη θερμοκρασία  $T$ . Οι αντικαταστάσεις  $[\Delta t] \rightarrow \tau$ ,  $[\Delta S] \rightarrow L^2$ ,  $[\Delta f] \rightarrow \frac{1}{\tau}$  είναι αυτονόητες. Στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε στο δεύτερο μέλος  $g f^\lambda (kT)^\mu c^\nu$  το  $f^\lambda$  με  $\frac{1}{\tau^\lambda}$ , το  $(kT)^\mu$  με  $\left(\frac{ML^2}{\tau^2}\right)^\mu$  και το  $c^\nu$  με  $\left(\frac{L}{\tau}\right)^\nu$ . Ακολούθως πρέπει να εξισώσουμε το  $M\tau^{-2}$  με το γινόμενο των μονάδων δεξιά:

$$M\tau^{-2} = \frac{1}{\tau^\lambda} \left(\frac{ML^2}{\tau^2}\right)^\mu \left(\frac{L}{\tau}\right)^\nu \Rightarrow M\tau^{-2} = M^\mu L^{2\mu+\nu} \tau^{-\lambda-2\mu-\nu},$$

οπότε:

$$\mu = 1,$$

$$\begin{aligned} 2\mu + \nu &= 0 \Rightarrow \nu = -2, \\ -\lambda - 2\mu - \nu &= -2 \Rightarrow \lambda = 2. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στη σχέση

$$J \propto f^2 kT c^{-2},$$

δηλαδή την πρόταση των Rayleigh και Jeans, εκτός, βέβαια, από τυχόν αδιάστατους παράγοντες.

Όμως η πρόταση είναι προφανώς λανθασμένη (παρά το ότι λειτουργεί καλά για μικρές συχνότητες), γιατί προβλέπει άπειρη εκπεμπόμενη ισχύ για μεγάλες συχνότητες ( $f \rightarrow +\infty$ ). Αυτό σημαίνει ότι η συναρτησιακή εξάρτηση που υποθέσαμε ήταν λανθασμένη. Με την εισαγωγή της σταθεράς  $h$  του Planck, ανακύπτει η δυνατότητα να απαλείψουμε την εξάρτηση από το  $kT$ , αφού μπορεί να απορροφηθεί μέσα στην αδιάστατη μεταβλητή  $\frac{hf}{kT}$ . Δηλαδή περιμένουμε ότι

$$\begin{aligned} [J] &= M\tau^{-2} = gh^\lambda f^\mu c^\nu \Rightarrow M\tau^{-2} = g \left( \frac{ML^2}{\tau^2} \tau \right)^\lambda \tau^{-\mu} L^\nu \tau^{-\nu} \\ \Rightarrow \lambda &= 1, \quad -2 = -\lambda - \mu - \nu, \quad 2\lambda + \nu = 0, \end{aligned} \quad (1.33)$$

οπότε τελικά η λύση είναι:

$$\lambda = 1, \quad \mu = 3, \quad \nu = -2. \quad (1.34)$$

Δηλαδή μ' αυτές τις προϋποθέσεις καταλήγουμε σε σχέση της μορφής:

$$J = g \frac{hf^3}{c^2},$$

όπου το  $g$  μπορεί να είναι οποιαδήποτε αδιάστατη σταθερά ή συνάρτηση του  $\frac{hf}{kT}$ . Πράγματι, η σχέση

$$J(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1},$$

που προτάθηκε από τον Planck είναι ακριβώς αυτής της μορφής. Φυσικά η διαστατική ανάλυση δεν μπορεί να προβλέψει τη μορφή των αδιάστατων συναρτήσεων, πάντως μπορούμε να προβλέψουμε ότι η συνάρτηση  $g$  πρέπει να είναι τέτοια που να διορθώνει (τουλάχιστον) το πρόβλημα στις μεγάλες συχνότητες, όπως πράγματι συμβαίνει με την έκφραση  $g = \frac{2\pi}{\exp(\frac{hf}{kT}) - 1}$  του Planck.

### 1.3.2 Κβαντική ερμηνεία

Υπενθυμίζουμε τον τύπο (1.21) του Planck. Τον επεξεργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned} J(f, T) &= \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3 \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right)} \\ &= \frac{2\pi h f^3}{c^2} \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right) \left[ 1 + \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right) + \exp\left(-2\frac{hf}{kT}\right) + \dots \right] \\ &= \frac{2\pi h f^3}{c^2} \left[ \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right) + \exp\left(-2\frac{hf}{kT}\right) + \exp\left(-3\frac{hf}{kT}\right) + \dots \right] \\ &= \frac{2\pi h f^3}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right). \end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο θα υπενθυμίσουμε τη σχέση του Maxwell  $P(n) = N e^{-\frac{E_n}{kT}}$ , όπου το  $N$  είναι μια παράσταση που διασφαλίζει ότι το άθροισμα όλων των  $P(n)$  θα ισούται με τη μονάδα και το  $E_n$  είναι

η ενέργεια της κατάστασης  $n$  ενός στατιστικού συστήματος. Το  $P(n)$  εκφράζει την πιθανότητα ένα στατιστικό σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση  $n$  που έχει ενέργεια  $E_n$ . Η πιθανότητα θα εξαρτάται από τη θερμοκρασία  $T$  του συστήματος.

Αν συγκρίνουμε τη σχέση του Maxwell με τους όρους  $e^{-nhf/(kT)}$ , διαπιστώνουμε ότι, αν ταυτίσουμε την ενέργεια  $E_n$  με την παράσταση  $nhf$ , οι δύο εκφράσεις είναι ίδιες. Αυτή η παρατήρηση υποβάλλει την ιδέα ότι **η ενέργεια που εκπέμπεται από ένα μέλαν σώμα πρέπει να είναι κβαντισμένη**, ότι δηλαδή μπορεί να παίρνει τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας ποσότητας  $hf$ , που εξαρτάται αποκλειστικά από τη συχνότητα της ακτινοβολίας. Αυτή η ιδέα ήταν (και είναι!) εντελώς αναπάντεχη και ακατανόητη από την πλευρά της Κλασικής Φυσικής, η οποία ως επί το πλείστον εκφράζει την καθημερινή μας εμπειρία.

### 1.3.3 Υπόθεση του Planck και υπολογισμός βάσει Στατιστικής Φυσικής

Ο Planck υπέθεσε ότι η ενέργεια της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα μέλαν σώμα είναι κβαντισμένη: οι επιτρεπτές τιμές της ενέργειας είναι πολλαπλάσια της ποσότητας  $hf$ .

Όπως το διατυπώνει ο ίδιος στην πρωτότυπη εργασία του:

«Κάθε φυσικό μέγεθος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δεν μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ολικής ενέργειας, αλλά μόνο ορισμένες διακριτές τιμές  $E_n = nhf$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , εάν η συχνότητα είναι  $f$ .»

Άρα τα ηλεκτρόνια, καθώς ταλαντεύονται γύρω από τη θέση ισορροπίας τους, δηλαδή συμπεριφέρονται ως απλοί αρμονικοί ταλαντωτές με συχνότητα  $f$ , η ολική ενέργειά τους παίρνει μόνο ορισμένες τιμές  $E_n = nhf$  και όταν εκπέμπουν ή απορροφούν ακτινοβολία, η ενέργεια της ακτινοβολίας αυτής είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του γινομένου  $hf$ .

Σύμφωνα με τη Στατιστική Φυσική η πιθανότητα ένα σύστημα (σε θερμοκρασία  $T$ ) να βρίσκεται σε κατάσταση με ενέργεια  $E_n = nhf$  ισούται με:

$$P(E_n) \equiv P(n) = \frac{\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right)} \equiv \frac{\exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right)}{Z}.$$

Με βάση αυτήν τη στατιστική κατανομή η μέση τιμή της ενέργειας θα δίνεται από τη σχέση:

$$\langle E(f) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n P(E_n) = hf \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right)}{Z}. \quad (1.35)$$

Αλλά παρατηρούμε ότι: (α)

$$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right) = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right)} \quad (1.36)$$

και (β)

$$\frac{\partial Z}{\partial f} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nh}{kT} \exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n \exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right) = -\frac{kT}{h} \frac{\partial Z}{\partial f}.$$

Άρα, τελικά:

$$\langle E(f) \rangle = -\frac{kT}{hZ} \frac{\partial Z}{\partial f} = \frac{hf \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right)}. \quad (1.37)$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε (χωρίς απόδειξη) τα αποτελέσματα ότι ο αριθμός  $N(f)df$  των στάσιμων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα σε μια κοιλότητα ανά μονάδα όγκου στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων  $(f, f + df)$  ισούται με  $\frac{8\pi}{c^3} f^2 df$  καθώς και ότι η φασματική ικανότητα συνδέεται με τη φασματική πυκνότητα ενέργειας  $U_T(f) = \frac{N(f)}{V} \langle E(f) \rangle$  μέσω της σχέσης:  $J = U_T(f) \frac{c}{4}$ . Καταλήγουμε, λοιπόν, στο αποτέλεσμα:

$$J(f, T)df = \left( \frac{8\pi}{c^3} f^2 df \right) \frac{hf \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right) c}{1 - \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right) 4} \Rightarrow J(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\exp\left(+\frac{hf}{kT}\right) - 1}.$$

Στην εξίσωση (1.37) παρατηρούμε ότι η μέση τιμή της ενέργειας τείνει στο μηδέν για τις πολύ μεγάλες συχνότητες και μ' αυτόν τον τρόπο αποφεύγονται οι απειρισμοί της πρότασης των Rayleigh και Jeans. Ο φυσικός λόγος είναι ότι η πιθανότητα να προκύψει ενέργεια  $nhf$ , που είναι ανάλογη του παράγοντα  $\exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right)$  τείνει στο μηδέν για μεγάλες συχνότητες, ήδη για  $n = 1$ .

### Πρόβλημα 1: Μέση τιμή της ενέργειας

Χρησιμοποιώντας την κατανομή Maxwell-Boltzmann:

$$P(E) = N \exp(-E/kT) = N e^{-E/kT}$$

για την ενέργεια  $E$  σε θερμοκρασία  $T$  δείξτε ότι η μέση τιμή  $\langle E \rangle$  της ενέργειας στην κλασική φυσική είναι ίση με  $kT$  ενώ στην κβαντική φυσική βρίσκουμε:

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

Η σταθερά  $N$  είναι μία σταθερά κανονικοποίησης που πρέπει να υπολογιστεί.

Λύση:

Ως εισαγωγή υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς  $a$  βρίσκουμε:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}, \quad a > 0.$$

Για την κλασική Φυσική πρέπει  $\int_0^{+\infty} N e^{-E/kT} dE = 1$ , που, με τη βοήθεια του πρώτου μας ολοκληρώματος συνεπάγεται:  $N = 1/(kT)$ .

Η αναμενόμενη τιμή της ενέργειας σύμφωνα με την κλασική Φυσική θα ισούται με:

$$\langle E \rangle = \int_0^{+\infty} N E e^{-E/kT} dE = \frac{1}{kT} \int_0^{+\infty} E e^{-E/kT} dE = \frac{1}{kT} k^2 T^2 = kT,$$

όπου στους υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε το δεύτερο ολοκλήρωμα.

Για το δεύτερο μέρος θα χρειαστούμε το άθροισμα της γεωμετρικής προόδου:

$$\sum_0^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1.$$



Αν θέσουμε  $r = e^{-x}$ ,  $x > 0$ , θα προκύψει:

$$\sum_0^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}. \quad (1.38)$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $x$  και τα δύο μέλη βρίσκουμε το άθροισμα:

$$\sum_0^{\infty} n e^{-nx} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Θα απαιτήσουμε την ισότητα

$$N \sum_0^{\infty} e^{-E_n/kT} = 1 \Rightarrow N \sum_0^{\infty} e^{-nhf/kT} = 1,$$

απ' όπου, με βάση το πρώτο άθροισμα βρίσκουμε:

$$N = 1 - e^{-hf/kT}.$$

Άρα για την κβαντική Φυσική:

$$\langle E \rangle = N \sum_0^{\infty} E_n e^{-E_n/kT} = (1 - e^{-hf/kT}) \sum_0^{\infty} n h f e^{-nhf/kT}$$

και χρησιμοποιώντας το δεύτερο άθροισμα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

.

### **Πρόβλημα 2: Εφαρμογή του νόμου των Stefan-Boltzmann**

Λαμπτήρας κενού με νήμα βολφραμίου έχει ισχύ 60 W. Εάν το νήμα βολφραμίου βρίσκεται σε θερμοκρασία 2800 K να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του νήματος.

Λύση:

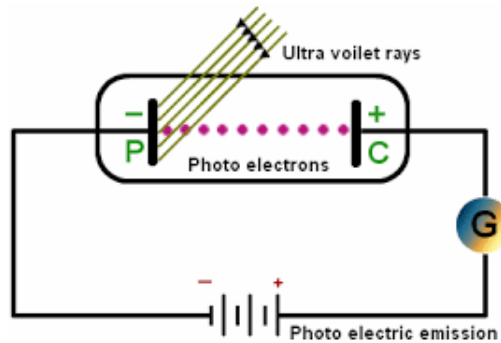
Σύμφωνα με την έκφραση (1.24):

$$I(T) = \left( \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} \right) T^4 = \sigma T^4.$$

Αυτή είναι η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και εμβαδού που εκπέμπεται από την επιφάνεια (αγνώστου) εμβαδού  $A$  του νήματος, άρα η ολική εκπεμπόμενη ισχύς  $P$  θα προκύπτει από τη σχέση:

$$P = I(T)A \Rightarrow A = \frac{P}{I(T)}.$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές  $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $T = 2800^\circ \text{ K}$ ,  $P = 60 \text{ W}$  βρίσκουμε το αποτέλεσμα  $A = 17.3 \text{ mm}^2$ .



Σχήμα 1.5: Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

#### 1.4 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Πρόκειται για την εκπομπή ηλεκτρονίων από μεταλλικές επιφάνειες που φωτίζονται με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Μία σχηματική πειραματική διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 1.5. Πρόκειται για μια άνοδο και μια κάθοδο που φωτίζονται από υπεριώδη ακτινοβολία μέσα σε αερόκενο σωλήνα. Η τάση επιταχύνει τα (φωτο)ηλεκτρόνια που παράγονται προς την άνοδο. Τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται δημιουργούν ηλεκτρικό ρεύμα με ένταση  $I$ . Αν αντιστρέψουμε την πολικότητα της πηγής και αυξήσουμε την τάση σε μια τιμή  $V_0$ , για την οποία κανένα ηλεκτρόνιο να μη φτάνει στην άνοδο, το ρεύμα μηδενίζεται και μ' αυτή τη μέθοδο μετράμε την μέγιστη κινητική ενέργεια  $K$  των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο:  $K = eV_0$ . Η τιμή της τάσης  $V_0$  λέγεται **δυναμικό αποκοπής**.

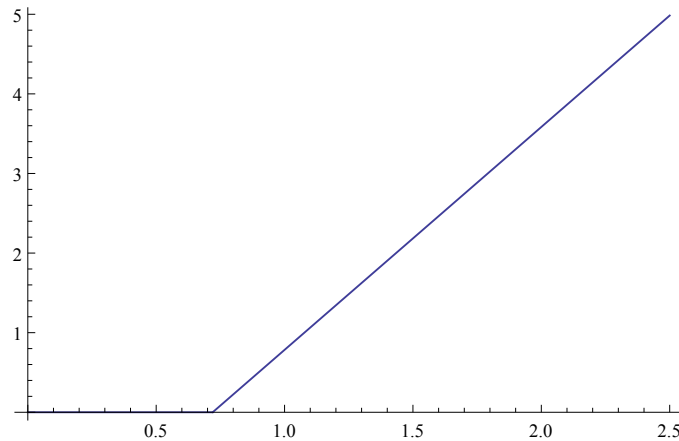
Πρώτος ο Hertz, το 1899, μελέτησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και έδωσε την ερμηνεία ότι εξάγονται φορτία από μέταλλα με την πρόσπτωση υπεριώδους φωτός. Ο Thomson απέδειξε ότι τα εκπεμπόμενα φορτία είναι ηλεκτρόνια. Οι πειραματικοί νόμοι που διέπουν το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο έχουν ως εξής:

- (α) Το ρεύμα  $I$  αυξάνει με την ένταση της δέσμης του φωτός.
- (β) Υπάρχει ρεύμα μόνο όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας είναι από κάποια συχνότητα  $f_0$  και πάνω. Η  $f_0$  λέγεται **συχνότητα αποκοπής** ή **συχνότητα κατωφλίου**.
- (γ) Η μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων εξαρτάται γραμμικά από την συχνότητα  $f$  της ακτινοβολίας, αλλά όχι από την έντασή της! Η εξάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 1.6.
- (δ) Δεν υπάρχει χρονική υστέρηση, δηλαδή το ρεύμα εμφανίζεται αμέσως μόλις η επιφάνεια φωτιστεί.

Η κλασική Φυσική θα έδινε την ακόλουθη ερμηνεία στο φαινόμενο, η οποία αποδεικνύεται ανεπαρκής:

- (1) Τα ηλεκτρόνια είναι δέσμια μέσα στο μέταλλο και για να βγουν χρειάζονται μια ενέργεια  $W$ , χαρακτηριστική για κάθε μέταλλο, που λέγεται **έργο εξαγωγής**.
- (2) Το κύμα περιέχει ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο ασκεί περιοδική δύναμη στα ηλεκτρόνια των ατόμων του μετάλλου. Τα ηλεκτρόνια σιγά-σιγά συσσωρεύουν κινητική ενέργεια, η οποία κάποια στιγμή υπερνικά τις δυνάμεις συνοχής και το ηλεκτρόνιο ξεφεύγει από το μέταλλο.

Αυτή η ερμηνεία θα εξηγούσε τον νόμο (α) με το σκεπτικό ότι μεγάλη ένταση της δέσμης συνεπάγεται μεγάλο ηλεκτρικό πεδίο, άρα μεγάλη ασκούμενη δύναμη, άρα μεγάλο ρεύμα. Σχετικά με τον νόμο (β), όμως, υπάρχει πρόβλημα, γιατί κατά την κλασική αντίληψη η συχνότητα δεν παίζει κάποιον ιδιαίτερο ρόλο, ούτε υπάρχει συχνότητα αποκοπής. Παρόμοια η κινητική ενέργεια στον νόμο (γ) θα έ-



**Σχήμα 1.6:** Μέγιστη κινητική ενέργεια φωτοηλεκτρονίου συναρτήσει της συχνότητας. Οι συχνότητες στον οριζόντιο άξονα μετρώνται σε μονάδες  $10^{15}$  Hz, ενώ οι κινητικές ενέργειες σε eV. Το έργο εξαγωγής ισούται με  $W = 3$  eV και η συχνότητα αποκοπής ισούται με  $f_0 = 0.72 \times 10^{15}$  Hz.

πρεπε να εξαρτάται από την ένταση και όχι από την συχνότητα. Τέλος, αναφορικά με το (δ), θα έπρεπε να υπάρχει χρονική υστέρηση, γιατί χρειάζεται χρόνος μέχρι να χτιστεί η αναγκαία κινητική ενέργεια.

Οι Meyer και Gerlach επινόησαν το 1914 πείραμα για τη μέτρηση του ελάχιστου χρόνου που απαιτείται για την εκπομπή ηλεκτρονίων μ' αυτόν το μηχανισμό. Η θεωρητική πρόβλεψη, με βάση την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία, ήταν ότι χρειαζόταν χρόνος της τάξης δευτερολέπτων για να αρχίσει η φωτοηλεκτρική εκπομπή ηλεκτρονίων, ενώ πειραματικά διαπίστωσαν ότι η εκπομπή άρχιζε αμέσως, άρα η κλασική ερμηνεία αποδεικνυόταν ανεπαρκής.

Ο Einstein πρότεινε το 1905 ότι η κβάντωση της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε μονάδες ενέργειας  $hf$  είναι εγγενής ιδιότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και όχι απλά μια ιδιομορφία της αλληλεπίδρασης της ακτινοβολίας με την ύλη, όπως πίστευε ο Planck και εισήγαγε την έννοια του φωτονίου.

Ο Einstein διατύπωσε τελικά την **υπόθεση των φωτονίων**:

**Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από πακέτα ενέργειας, τα φωτόνια, με ενέργειες  $E = hf$ , όπου  $h$  η σταθερά του Planck και  $f$  η συχνότητα του κύματος. Ένα φωτόνιο απορροφάται από ένα ηλεκτρόνιο ακαριαία μεταβιβάζοντάς του όλη του την ενέργεια.**

Η κβαντική ερμηνεία του Einstein βασίζεται στο γεγονός ότι το βασικό μέγεθος είναι η συχνότητα και ότι το κύμα αποτελείται από φωτόνια με ενέργεια  $hf$ . Τότε, αν  $W$  είναι το έργο που χρειάζεται να δοθεί στο ηλεκτρόνιο, ώστε να αποσπαστεί από το μέταλλο, θα ισχύει:

$$hf = W + \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.39)$$

δηλαδή η επί πλέον ενέργεια γίνεται κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου. Υπάρχει και η οριακή περίπτωση της συχνότητας  $f_0$ , όπου η ενέργεια της ακτινοβολίας είναι μόλις αρκετή για να βγει το ηλεκτρόνιο από το μέταλλο (χωρίς κινητική ενέργεια):  $hf_0 = W$ . Κάτω από αυτήν την συχνότητα δεν εξάγονται ηλεκτρόνια και η  $f_0$  είναι η συχνότητα αποκοπής του νόμου (β). Ο νόμος (α) εξηγείται στη βάση ότι αυξημένη ένταση σημαίνει πιο πολλά φωτόνια, άρα εξάγονται πιο πολλά ηλεκτρόνια. Για τον νόμο (γ) αρκεί να γράψουμε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας με τη μορφή:

$$\frac{1}{2}mv^2 = hf - W = h(f - f_0), \quad (1.40)$$

αφού  $W = hf_0$ . Άρα προκύπτει αβίαστα η γραμμική εξάρτηση της κινητικής ενέργειας. Τέλος, αφού το φαινόμενο είναι στην ουσία ένα φαινόμενο κρούσης ενός φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο, η εξαγωγή είναι ακαριαία, καθώς δεν απαιτείται χρόνος για να χτιστεί κινητική ενέργεια, όπως στην κλασική ερμηνεία.

Πρέπει εδώ να επισημανθεί ότι η ύπαρξη της συχνότητας αποκοπής είναι πολύ σημαντική για την σταθερότητα της ύλης. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο καταδεικνύει ότι η χημική δραστηριότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας εξαρτάται άμεσα από τη φωτονική της δομή: η ενέργεια παραδίδεται από την ακτινοβολία στην ύλη σε πακέτα μεγέθους  $hf$  και η συχνότητα  $f$  δεν μπορεί παρά να είναι μεγαλύτερη κάποιας συχνότητας αποκοπής  $f_0$ . Αν δεν ίσχυε αυτό, η ύλη θα προσλάμβανε ενέργεια όχι μόνο από το ορατό φως, τις ακτίνες X και άλλες ενεργειακά πλούσιες μορφές ακτινοβολίας, αλλά και από τα μικροκύματα ή τα ραδιοκύματα. Αυτή η μετάδοση θα γινόταν σωρευτικά, μέχρι να συγκεντρωθεί αρκετή ενέργεια για την οποιαδήποτε αντίδραση. Αυτό θα σήμαινε ότι τελικά καμμία χημική ένωση δεν θα ήταν σταθερή, αφού πάντα θα μπορούσε να συγκεντρωθεί αρκετή ενέργεια για τη διάσπαση οποιουδήποτε μορίου.

Επισημαίνουμε ακόμη ότι το ορατό φως (και κατά μείζονα λόγο τα ραδιοκύματα ή άλλες μορφές ακτινοβολίας με ακόμα μικρότερες συχνότητες) δεν έχει αρκετή ενέργεια, ώστε να προκαλέσει χημικές αντιδράσεις, όπως, π.χ., ιοντισμό. Αντιθέτως, η υπεριώδης συνιστώσα της ηλιακής ακτινοβολίας έχουν τη δυνατότητα να προκαλέσουν χημικές αντιδράσεις.

Ας θεωρήσουμε ορατό φως με μήκος κύματος  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ . Τα φωτόνια έχουν ενέργεια

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} \approx 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \frac{3,0 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6000 \times 10^{-10} \text{ s}} = 3,31 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,068 \text{ eV},$$

αφού  $1 \text{ eV} \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

Για διευκόλυνση στις πράξεις σημειώνουμε ότι:  $hc \approx 12400 \text{ eV} \cdot \text{\AA}$ , επίσης:  $1 \text{ KeV} = 10^3 \text{ eV}$ ,  $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ .

Για τις ακτίνες X :  $\lambda \approx 10 \text{ \AA} \approx 10^{-9} \text{ m}$ , οπότε  $E = hf = \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{12400 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{10 \text{ \AA}} = 1240 \text{ eV} \approx 1,2 \text{ keV}$ .

Παρόμοια ένα μήκος κύματος  $\lambda \approx 1 \text{ \AA}$  δίνει ενέργεια  $E \approx 12 \text{ keV}$ .

### Πρόβλημα 3

Λυχνία ατμών Νατρίου εκπέμπει ενέργεια 5 joule ανά δευτερόλεπτο υπό μορφή H/M ακτινοβολίας. Εάν η ενέργεια που εκπέμπεται έχει μήκη κύματος στην περιοχή των 5900  $\text{\AA}$  (Ångstrom,  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ) βρείτε τον μέσο αριθμό φωτονίων που εκπέμπονται ανά δευτερόλεπτο.

Λύση:

Η ενέργεια  $E_\gamma$  ενός φωτονίου ισούται με:  $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12400 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{5900 \text{ \AA}} \approx 2,1 \text{ eV}$ . Η ενέργεια  $E_{\alpha\kappa\tau}$ , που εκπέμπεται, ισούται με  $E_{\alpha\kappa\tau} = N_\gamma E_\gamma$ , όπου  $N_\gamma$  είναι ο αριθμός των φωτονίων που εκπέμπονται.

Σημειώνουμε ότι:  $1 \text{ joule} = \frac{1}{1,6} \times 10^{19} \text{ eV} = 0,625 \times 10^{19} \text{ eV}$ , οπότε  $E_{\alpha\kappa\tau} \approx 5 \times 0,625 \times 10^{19} \text{ eV} = 3,125 \times 10^{19} \text{ eV}$ .

Συνεπώς:

$$N_\gamma = \frac{E_{\alpha\kappa\tau}}{E_\gamma} = \frac{3,125 \times 10^{19} \text{ eV}}{2,1 \text{ eV}} \approx 1,49 \times 10^{19} \text{ φωτόνια}.$$

**Πρόβλημα 4**

Ακτινοβολία με  $\lambda = 2000 \text{ \AA}$  προσπίπτει σε μέταλλο με έργο εξαγωγής  $W = 2 \text{ eV}$ . Υπολογίστε την μέγιστη ταχύτητα των φωτοηλεκτρονίων που θα προκύψουν.

Λύση:

Διατήρηση ενέργειας:

$$hf = W + \frac{1}{2}m_e v^2 \Rightarrow m_e v^2 = 2 \left( \frac{hc}{\lambda} - W \right) = 2 \left( \frac{12400 \text{ eV \AA}}{2000 \text{ \AA}} - 2 \text{ eV} \right) = 8 \text{ eV}.$$

Σημειώνουμε ότι:  $m_e c^2 = 0.5 \text{ MeV} = 0,5 \times 10^6 \text{ eV}$ , οπότε:

$$m_e c^2 \frac{v^2}{c^2} = 8 \text{ eV} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{8 \text{ eV}}{0,5 \times 10^6 \text{ eV}}} = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow v = 4 \times 10^{-3} c.$$

**Πρόβλημα 5**

Άτομο με ακτίνα  $R = 0,5 \text{ \AA}$  δέχεται την ακτινοβολία λάμπας με ισχύ  $P = 100 \text{ Watt}$  από απόσταση  $L = 1 \text{ m}$ . Υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται για να πάρει ένα ηλεκτρόνιο του ατόμου ενέργεια ίση με το έργο ionτισμού, το οποίο ισούται (έστω) με  $W = 1 \text{ eV}$ .

Λύση:

Η ένταση (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και εμβαδού) της ακτινοβολίας σε απόσταση  $L = 1 \text{ m}$  ισούται με  $I = \frac{P}{4\pi L^2}$ . Το άτομο δέχεται σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$  ενέργεια

$$\Delta E = I \pi R^2 \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta E}{I \pi R^2} = \frac{\Delta E}{\frac{P}{4\pi L^2} \pi R^2} = \frac{4L^2 W}{PR^2}.$$

Υποθέσαμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του ατόμου είναι  $\pi R^2$ . Μπορούμε πλέον να αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές:

$$\Delta t = \frac{4(1 \text{ m})^2(1 \text{ eV})}{100 \frac{\text{J}}{\text{s}}(0,5 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = \frac{4(1 \text{ m})^2(1,6 \times 10^{-19} \text{ J})}{100 \frac{\text{J}}{\text{s}}(0,5 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = 2,56 \text{ s}.$$

Διαπιστώνουμε ότι σύμφωνα με τις κλασικές αντιλήψεις χρειάζονται δύομιση δευτερόλεπτα για να επιτευχθεί ionτισμός, ενώ το πείραμα δίνει ακαριαία έναρξη του ionτισμού, σε συμφωνία με τις κβαντικές προβλέψεις, εάν η συχνότητα των εκπεμπόμενων φωτονίων από την λάμπα είναι μεγαλύτερη από  $f_0 = W/h$ . Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $W = 1 \text{ eV}$  και ότι  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = \frac{6,62}{1,6} \times 10^{19} \times 10^{-34} \text{ eV} \cdot \text{s} = 4,13 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ , βρίσκουμε ότι  $f_0 = 0,24 \times 10^{15} \text{ Hz}$ .

**Πρόβλημα 6**

Ελεύθερο ηλεκτρόνιο δέχεται δύναμη  $F = -e\mathcal{E}_0 \cos \omega t$  από ηλεκτρικό πεδίο που προσπίπτει στην επιφάνεια του μετάλλου. Βρείτε την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά από χρόνο  $t$ . Η αρχική συνθήκη είναι:  $v(t=0) = 0$ .

Λύση:

Ξεκινάμε από τον νόμο του Νεύτωνα:

$$F = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m} \cos \omega t \Rightarrow v = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m} \int_0^t \cos \omega t' dt' = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega} \sin \omega t.$$

Είμαστε επομένως σε θέση να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου και τη μέση τιμή της:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2\mathcal{E}_0^2}{m^2\omega^2}\sin^2\omega t \Rightarrow \langle K \rangle = \frac{e^2\mathcal{E}_0^2}{m^2\omega^2} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2\omega t dt \right] = \frac{e^2\mathcal{E}_0^2}{2m^2\omega^2},$$

αφού  $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2\omega t dt = \frac{1}{2}$ .

Αν η  $\langle K \rangle$  είναι μεγαλύτερη από το  $W$ , θα έχουμε εξαγωγή του ηλεκτρονίου, ανεξάρτητα από την τιμή της κυκλικής συχνότητας  $\omega = 2\pi f$  του ηλεκτρικού πεδίου.

### Πρόβλημα 7

Ακτινοβολία μήκους κύματος  $\lambda = 1000 \text{ \AA}$  πέφτει πάνω σε ένα μέταλλο με έργο εξαγωγής  $W = 3 \text{ eV}$ . Υπολογίστε:

(α) Την κινητική ενέργεια και την ταχύτητα των φωτοηλεκτρονίων.

(β) Το δυναμικό αποκοπής  $V_0$ . Δίνεται  $hc = 12400 \text{ eV \AA}$  και  $m_e c^2 = 0,5 \text{ MeV}$ .

Λύση:

(α) Η κινητική ενέργεια θα ισούται με  $K = \frac{hc}{\lambda} - W = \frac{12400}{1000} \text{ eV} - 3 \text{ eV} = 9.4 \text{ eV}$ , και αυτή η έκφραση σχετίζεται με την ταχύτητα μέσω της σχέσης

$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}m_e c^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2K}{m_e c^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.4}{0,5 \times 10^6}} = 0.0061$$

$$\Rightarrow v = 0.0061 c = 1,84 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(β) Το δυναμικό αποκοπής  $V_0$  έχει την τιμή της κινητικής ενέργειας,  $9.4 \text{ eV}$ , για να έχει τη δυνατότητα να την αντισταθμίσει πλήρως και να μηδενίσει το ρεύμα.

## 1.5 Φαινόμενο Compton - Διατήρηση της ορμής

Το φαινόμενο Compton αφορά τη σκέδαση ακτίνων X σε υλικά. Το πρώτο υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν ο γραφίτης. Οι ακτίνες X έχουν τόσο μικρό μήκος κύματος, δηλαδή τόσο μεγάλη ενέργεια, που ελάχιστη σημασία έχει το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια είναι δεσμευμένα. Για παράδειγμα, αν το μήκος κύματος βρίσκεται στο  $1 \text{ \AA}$ , η αντίστοιχη ενέργεια των φωτονίων θα είναι  $12400 \text{ eV}$ .

Αυτή είναι και η βασική διαφορά από το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο: ότι σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε σκέδαση φωτονίων από σχεδόν ελεύθερα ηλεκτρόνια, άρα παίζει πια σημαντικό ρόλο και η διατήρηση της ορμής. Εκτός αυτού και η διατήρηση της ενέργειας γίνεται πολύ πιο καθαρή, με την έννοια ότι δεν εμφανίζεται η κάπως ασαφής ποσότητα του έργου εξαγωγής  $W$ , αλλά μόνο οι ενέργειες των σωματιδίων πριν και μετά τη σκέδαση.

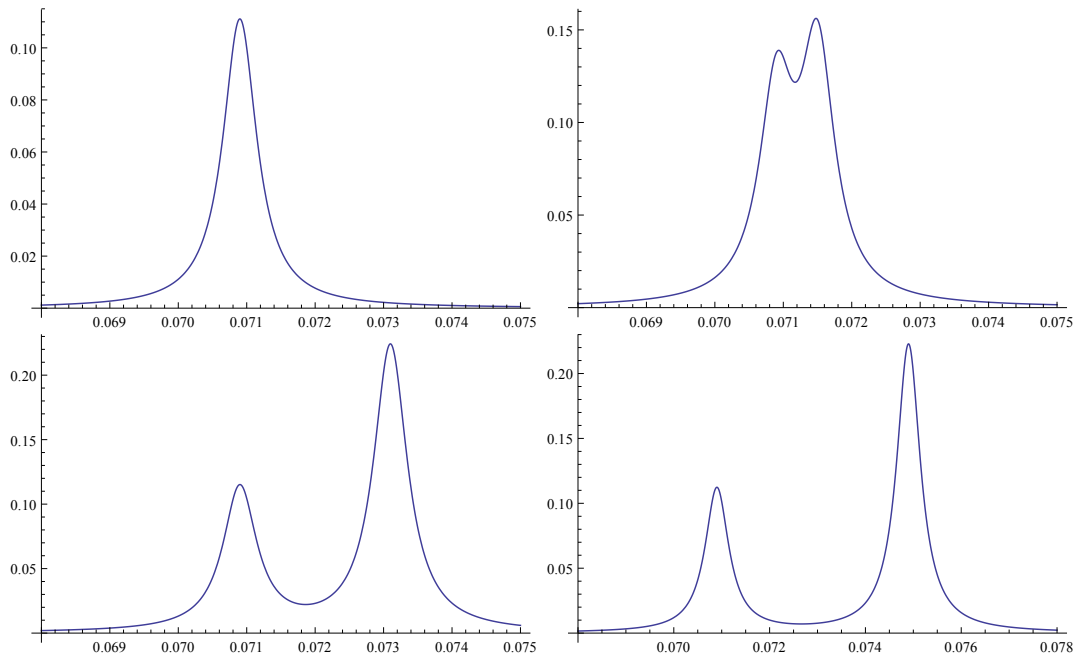
Η προσπίπτουσα ακτινοβολία είχε μήκος κύματος  $\lambda$  και εκείνο που μετρούσε το πείραμα ήταν η ένταση της ακτινοβολίας της σκεδαζόμενης δέσμης. Εκείνο που είχε παρατηρηθεί πειραματικά ήταν ότι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας μεγάλωνε μετά τη σκέδαση και η μεταβολή ήταν συνάρτηση της γωνίας σκέδασης  $\theta$ . Η κλασική ερμηνεία του φαινομένου ήταν ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα θέτει σε κίνηση το ηλεκτρόνιο το οποίο, αφού ταλαντώνεται, εκπέμπει ακτινοβολία. Μόνο που η ακτινοβολία

που εκπέμπεται θα έπρεπε, σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό, να έχει την ίδια συχνότητα και το ίδιο μήκος κύματος με την αρχική ακτινοβολία, πράγμα που δεν συμφωνεί με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Στο Σχήμα 1.7 φαίνονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων της έντασης της ακτινοβολίας που σκεδάστηκε προς διάφορες γωνίες σχετικά με την προσπίπτουσα δέσμη. Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται μέγιστα της έντασης σε δύο τιμές του μήκους κύματος:

(α) Για  $\lambda' > \lambda$ , που σχετίζεται με τη **σκέδαση Compton** της ακτινοβολίας από σχεδόν ελεύθερα ηλεκτρόνια με μάζα  $m_e c^2 \approx 0.5 \text{ MeV}$ .

(β) Για  $\lambda' = \lambda$ , οπότε η ακτινοβολία σκεδάστηκε από εσωτερικά, ισχυρά συνδεδεμένα, ηλεκτρόνια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η σκέδαση να γίνεται όχι απλά από το ηλεκτρόνιο, αλλά από ολόκληρο το άτομο, του οποίου η μάζα ισούται περίπου με  $A m_p$ , όπου  $A$  είναι ο μαζικός αριθμός (αριθμός πρωτονίων και νετρονίων μαζί) και  $m_p$  η μάζα του πρωτονίου. Αυτή η μάζα (τουλάχιστον 2000 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου) μειώνει δραστικά την αλλαγή του μήκους κύματος. Η σκέδαση αυτή ονομάζεται **σκέδαση Thomson**.



**Σχήμα 1.7:** Ένταση σκεδαζόμενης δέσμης Compton συναρτήσει του μήκους κύματος (α) σε  $0^\circ$ , (β) σε  $45^\circ$ , (γ) σε  $90^\circ$ , (δ) σε  $135^\circ$ . Οι μονάδες του κατακόρυφου άξονα είναι αυθαίρετες. Το αρχικό μήκος κύματος ισούται με  $\lambda = 0.709 \text{ \AA}$  ενώ το μήκος κύματος  $\lambda'$  παίρνει τις τιμές  $0.0715 \text{ \AA}$ ,  $0.731 \text{ \AA}$ ,  $0.749 \text{ \AA}$ .

Η κβαντική ερμηνεία χρησιμοποιεί την έννοια του φωτονίου ως σωματιδίου του φωτός (το οποίο κινείται με ταχύτητα  $c$ ) και μελετά τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής κατά τη σκέδαση του φωτονίου με το ηλεκτρόνιο. Θα μας χρειαστεί η ορμή του φωτονίου. Υπενθυμίζουμε τις σχετικιστικές εκφράσεις για την ενέργεια και την ορμή σωματιδίου μάζας  $m$  που κινείται ελεύθερα με ταχύτητα  $\vec{v}$ :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.41)$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο προκύπτει:

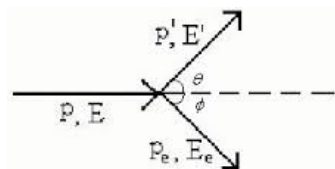
$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4. \quad (1.42)$$

Αυτή η σχέση είναι γενικότερη από τις προηγούμενες, με την έννοια ότι ισχύει και για άμαζα σωματίδια ( $m = 0$ ). Αν το σωματίδιο είναι άμαζο ( $m = 0$ ), όπως πράγματι συμβαίνει με το φωτόνιο, η

τελευταία σχέση δίνει:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Δηλαδή εμφανίζεται και πάλι η σχέση του Einstein που συνδέει μια κυματικού τύπου ιδιότητα του φωτονίου, όπως το μήκος κύματος με μια σωματιδιακού τύπου ιδιότητά του, όπως η ορμή.



**Σχήμα 1.8:** Γεωμετρία σκέδασης Compton

Στο Σχήμα 1.8 φαίνεται η γεωμετρία της σκέδασης. Η αρχική ενέργεια  $E = hf$  και η αρχική ορμή  $p = \frac{hf}{c}$  του φωτονίου θα δώσουν μετά τη σκέδαση την τελική ενέργεια  $E' = hf'$  και την τελική ορμή  $p' = \frac{hf'}{c}$  του φωτονίου, η οποία σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την αρχική διεύθυνση του φωτονίου. Παρόμοια η αρχική ενέργεια  $E_{e,0} = m_e c^2$  και η αρχική ορμή  $p_{e,0} = 0$  του ηλεκτρονίου θα γεννήσουν την τελική ενέργεια  $E_e$  και την τελική ορμή  $p_e$ , η οποία σχηματίζει γωνία  $\phi$  με την αρχική διεύθυνση του φωτονίου. Θεωρούμε ότι η κρούση είναι ελαστική, όπως κάνουμε συνήθως στις σχετικιστικές κρούσεις. Η διατήρηση της ενέργειας δίνει τη σχέση:

$$hf + m_e c^2 = hf' + E_e. \quad (1.43)$$

Η διατήρηση της ορμής κατά την κατεύθυνση του αρχικού φωτονίου δίνει:

$$\frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi, \quad (1.44)$$

ενώ κατά την εγκάρσια κατεύθυνση:

$$0 + 0 = \frac{hf'}{c} \sin \theta - p_e \sin \phi. \quad (1.45)$$

Οι δύο σχέσεις για τη διατήρηση της ορμής μπορούν να συνδυαστούν με τη βοήθεια της σχέσης  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  και να δώσουν τη σχέση

$$c^2 p_e^2 = h^2 (f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta). \quad (1.46)$$

Εξ άλλου ο συνδυασμός της σχέσης διατήρησης της ενέργειας  $E_e - m_e c^2 = h(f - f')$  με τη σχέση  $E_e^2 - c^2 p_e^2 = m_e^2 c^4$ , που μας δίνει η θεωρία της σχετικότητας, και την (1.46) δίνει:

$$\begin{aligned} [h(f - f') + m_e c^2]^2 - h^2 (f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta) &= m_e^2 c^4 \\ \frac{1}{f'} - \frac{1}{f} &= \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (1.47)$$

η οποία μπορεί εναλλακτικά να γραφτεί με τη μορφή:

$$\Delta \lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (1.48)$$

Η παράσταση  $\frac{h}{m_e c}$  λέγεται **μήκος κύματος Compton**  $\lambda_C$  για το συγκεκριμένο σωματίδιο και εξαρτάται αποκλειστικά από τη μάζα του. Για ηλεκτρόνια

$$\frac{h}{m_e c} = 2.4 \times 10^{-2} \text{ \AA}. \quad (1.49)$$



Παρατηρούμε ότι η μέγιστη δυνατή μεταβολή του μήκους κύματος συμβαίνει για γωνία σκέδασης περίπου  $180^\circ$ , δηλαδή κατά την οπισθοσκέδαση του φωτονίου, οπότε:  $\Delta\lambda \simeq 2\lambda_C$ .

Η σχετική μετατόπιση

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_C}{\lambda}(1 - \cos\theta)$$

του μήκους κύματος είναι αμελητέα για το ορατό φως, όπου το μήκος κύματος κυμαίνεται από  $3800 \text{ \AA}$  μέχρι  $7500 \text{ \AA}$ , οπότε το πηλίκο είναι αμελητέο, ενώ γίνεται σημαντικό για ακτίνες  $X$ , όπου το μήκος κύματος είναι μικρότερο από  $100 \text{ \AA}$ . Ακόμα διαπιστώνουμε ότι η μετατόπιση του μήκους κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι όλο και μικρότερη, όσο μεγαλώνει η μάζα του σωματιδίου. Για πρωτόνια η μετατόπιση θα είναι περί τις 2000 φορές μικρότερη απ' ό,τι για ηλεκτρόνια. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίον το πείραμα με τον γραφίτη είχε κυρίως να κάνει με τα ηλεκτρόνια του υλικού και όχι, π.χ., με τους πυρήνες. Η σκέδαση Thomson, που αναφέρθηκε προηγουμένως, έχει γωνία σκέδασης  $\theta \simeq 0$  και σχεδόν μηδενική αλλαγή στο μήκος κύματος:  $\lambda' \simeq \lambda$ .

Αν εφαρμόσουμε τη σχέση  $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$  για τη σκέδαση Thomson, δηλαδή για μάζα  $m = M_A > 2000 m_e$ , προκύπτει ότι:  $\Delta\lambda < \frac{h}{2000 m_e c}(1 - \cos\theta) \approx 10^{-3} \times 0.012(1 - \cos\theta) \text{ \AA}$ , δηλαδή περίπου μηδέν και  $\lambda' \approx \lambda$ .

Το φαινόμενο είναι αντίστοιχο με τη σκέδαση μιας σφαίρας, έστω της Α, πάνω σε μια άλλη ακίνητη, έστω την Β. Αν η μάζα της Β είναι συγκρίσιμη με της Α, τότε η κινητική ενέργεια της Α θα μοιραστεί μεταξύ των δύο, γιατί θα έχουμε ανάκρουση της Β, οπότε η ταχύτητα της Α μετά την κρούση θα είναι μικρότερη από την αρχική, ενώ, όσο η μάζα της Β μεγαλώνει, μπορεί να θεωρηθεί περίπου ακίνητη και μετά την κρούση, οπότε η ταχύτητα της Α είναι περίπου η ίδια με την αρχική και απλώς αλλάζει κατεύθυνση. (Υπενθυμίζουμε ότι η ταχύτητα σχετίζεται με το αντίστροφο του μήκους κύματος μέσω των σχέσεων  $p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda}$ ).

### Πρόβλημα 8

Έστω ότι η προσπίπτουσα ακτινοβολία έχει μήκος κύματος  $\lambda = \frac{\lambda_C}{2}$  και ότι εξετάζουμε την ακτινοβολία σε γωνία  $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ .

(α) Να προσδιοριστούν οι ποσότητες:  $\lambda'$ ,  $E'$ ,  $p'$ .

(β) Να ευρεθεί η γωνία σκέδασης  $\phi$  του ηλεκτρονίου.

Λύση:

(α) Αφετηρία είναι η σχέση:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda' - \frac{\lambda_C}{2} = \lambda_C \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \lambda' = \lambda_C.$$

Άρα για το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχουμε:  $p' = \frac{h}{\lambda'} = \frac{h}{\lambda_C} = m_e c$  και  $E'_e = hf' = h\frac{c}{\lambda'} = h\frac{c}{\lambda_C} = m_e c^2$ . Σημειώνουμε ακόμα ότι, αφού  $hf' = m_e c^2$ , και  $f = 2f'$ , προκύπτει ότι:  $hf = 2m_e c^2$ .

(β) Η διατήρηση της ενέργειας συνεπάγεται:

$$E'_e = hf - hf' + m_e c^2 = 2m_e c^2 - m_e c^2 + m_e c^2 = 2m_e c^2 \Rightarrow E'_e = 4m_e^2 c^4.$$

Αυτό το αποτέλεσμα μαζί με την  $E'_e = c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4$  δίνει:  $p_e = m_e c \sqrt{3}$ . Οι σχέσεις διατήρησης της ορμής γράφονται:

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c} \cos\theta + p_e \cos\phi \Rightarrow 2m_e c = m_e c \frac{1}{2} + m_e c \sqrt{3} \cos\phi,$$

$$\frac{hf'}{c} \sin \theta = p_e \sin \phi \Rightarrow m_e c \frac{\sqrt{3}}{2} = m_e c \sqrt{3} \sin \phi.$$

Οι σχέσεις αυτές δίνουν:  $\cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \phi = \frac{1}{2}$ , δηλαδή  $\phi = \frac{\pi}{6}$ .

### Πρόβλημα 9

Δέσμη φωτονίων μήκους κύματος  $\lambda = \lambda_C$  ( $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ ) προσπίπτουν σε ακίνητο ηλεκτρόνιο.

(α) Να βρεθεί το μήκος κύματος σκεδαζόμενου φωτονίου σε γωνία  $\theta = 45^\circ$  ως προς την προσπίπτουσα δέσμη καθώς επίσης η ορμή και η ενέργειά του.

(β) Βρείτε την γωνία σκέδασης του ηλεκτρονίου και την ενέργειά του.

(γ) Επαναλάβετε για γωνία  $\theta = 120^\circ$ .

Λύση:

(α) Από την σχέση

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \lambda' = \lambda + \lambda_C (1 - \cos \theta),$$

αν  $\lambda = \lambda_C$ , προκύπτει:  $\lambda' = \lambda_C (2 - \cos \theta)$ . Αν, τώρα,  $\theta = 45^\circ \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , λαμβάνουμε υπόψιν ότι, για ηλεκτρόνια,  $\lambda_C = 2,4 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ , και καταλήγουμε στην σχέση:  $\lambda' = 0,031 \text{ \AA}$ .

Επίσης:  $E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{12400 \text{ eV \AA}}{0,031 \text{ \AA}} = 0,4 \text{ MeV}$ ,  $p' = \frac{E'}{c} = 0,4 \frac{\text{MeV}}{c}$ .

(β) Από τη σχέση διατήρησης της ενέργειας:  $E_e = h(f - f') + m_e c^2 = 0,6 \text{ MeV}$  προκύπτει για την ορμή:

$$cp_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} = \sqrt{0,11} \text{ MeV} \approx 0,33 \text{ MeV}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία σκέδασης  $\phi$  του ηλεκτρονίου μέσω της σχέσης διατήρησης της ορμής κατά τον κατακόρυφο άξονα:

$$\frac{hf'}{c} \sin \theta = p_e \sin \phi \Rightarrow \sin \phi = \frac{\frac{hf'}{c} \sin \theta}{p_e} = \frac{hf' \sin \theta}{cp_e} \approx 0,85.$$

Άρα  $\phi \approx 58^\circ$ .

(γ) Επαναλαμβάνουμε τις πράξεις για το ερώτημα (α):  $\lambda' = \lambda_C (2 - \cos \theta) = 2,4 \times 10^{-2} (2 + \frac{1}{2}) = 0,144 \text{ \AA}$  και  $E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{12400 \text{ eV \AA}}{0,144 \text{ \AA}} = 0,086 \text{ MeV}$ ,  $p' = \frac{E'}{c} = 0,086 \frac{\text{MeV}}{c}$ .

### Πρόβλημα 10

Δείξτε πως όταν ένα φωτόνιο συχνότητας  $f$  συγκρουστεί με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο σε ηρεμία δεν είναι δυνατόν να του μεταφέρει ολόκληρη την ενέργειά του.

Λύση:

Το πρόβλημα θα λυθεί διά της εις άτοπον απαγωγής. Θεωρούμε ότι ένα φωτόνιο με ορμή  $k$  προσπίπτει σε ακίνητο ηλεκτρόνιο και του μεταδίδει πλήρως την ενέργειά του, δηλαδή η τελική κατάσταση περιλαμβάνει μόνο το ηλεκτρόνιο, με ενέργεια  $E_e$  και ορμή  $p_e$ . Το πρόβλημα είναι προφανώς μονοδιάστατο, οπότε δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε άξονες για το σύστημα αναφοράς. Η διατήρηση της ενέργειας είναι  $m_e c^2 + ck = E_e$ , ενώ η διατήρηση της ορμής δίνει:  $k = p_e$ . Ισχύει επίσης η σχέση  $(m_e c^2)^2 = E_e^2 - p_e^2 c^2$ , η οποία γράφεται:

$$(m_e c^2)^2 = (m_e c^2 + ck)^2 - k^2 c^2 \Rightarrow (m_e c^2)^2 = (m_e c^2)^2 + c^2 k^2 + 2m_e c^3 k - k^2 c^2 \Rightarrow 2m_e c^3 k = 0,$$

που είναι αδύνατον, άρα αυτή η διαδικασία είναι αδύνατον να πραγματοποιηθεί.

**Πρόβλημα 11**

Ένα διεγερμένο άτομο υδρογόνου αποδιεγείρεται και μεταπίπτει στην βασική του κατάσταση εκπέμποντας ένα φωτόνιο. Η διαθέσιμη ενέργεια είναι 10,2 eV.

(α) Βρείτε την ενέργεια ανάκρουσης του ατόμου μετά την αποδιέγερση και την ενέργεια του φωτονίου.

(β) Υπολογίστε το μήκος κύματος του εκπεμπόμενου φωτονίου.

**1.6 Και τα σωματίδια είναι κύματα**

Μέχρι στιγμής περιγράψαμε την πορεία συνειδητοποίησης ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν και σωματιδιακά χαρακτηριστικά. Μετά και τα αποτελέσματα της σκέδασης Compton οι επιστήμονες πείστηκαν ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από φωτόνια, τα οποία μοιάζουν με σωματίδια με ενέργεια  $hf$ , όπου το  $f$  είναι η συχνότητα του κύματος. Παράλληλα εξελισσόταν η διαδικασία που θα οδηγούσε στην κατανόηση ότι και αυτό που συνήθως κατανοούμε ως σωματίδιο έχει και κυματικές ιδιότητες.

**1.6.1 Σταθερότητα των ατόμων**

Η όλη ιστορία ξεκίνησε από την αναβίωση της ατομικής θεωρίας στις αρχές του δέκατου ένατου αιώνα και ιδιαίτερα με την ανακάλυψη του ηλεκτρονίου από τον Thomson λίγο πριν τις αρχές του εικοστού. Έγινε σαφές ότι το άτομο έπρεπε να αποτελείται από ηλεκτρόνια και κάποια ύλη με φορτίο αντίθετο από των ηλεκτρονίων, δηλαδή θετικό. Το ερώτημα ήταν ποιά μορφή έπαιρνε αυτό το θετικά φορτισμένο υλικό. Ο ίδιος ο Thomson πρότεινε το λεγόμενο μοντέλο του σταφιδόψωμου, που έλεγε ότι υπήρχε μια θετικά φορτισμένη ουσία, μέσα στην οποία ήταν τοποθετημένα τα ηλεκτρόνια, ακριβώς σαν τις σταφίδες μέσα σ' ένα σταφιδόψωμο. Άλλοι ειδικοί, όπως ο Nagaoka, είχαν προτείνει κάποια πρώιμη μορφή του πλανητικού μοντέλου που βελτιώθηκε και επικράτησε αργότερα. Τη λύση έδωσε, φυσικά, το πείραμα.

Η πειραματική διαδικασία, που πραγματοποίησαν οι Geiger και Marsden υπό την καθοδήγηση του Rutherford, ήταν να βομβαρδιστούν λεπτά φύλλα χρυσού με πυρήνες ηλίου, που λέγονται και σωματίδια α και που σήμερα ξέρουμε ότι αποτελούνται από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια. Ο χρυσός επελέγη, γιατί μπορεί να δώσει πολύ λεπτά φύλλα, με αποτέλεσμα οι πολλαπλές σκεδάσεις μέσα στο υλικό να είναι λιγότερες και η πειραματική εικόνα καθαρότερη. Σημειώνουμε τα στοιχεία των συγκρουομένων σωματιδίων:  $A_{Au} = 197$ ,  $Z_{Au} = 79$ ,  $A_{\alpha} = 4$ ,  $Z_{\alpha} = 2$ . Μετά τη σκέδαση ανιχνεύονταν τα τελικά σωματίδια α.

Σύμφωνα με το μοντέλο του σταφιδόψωμου, αναμενόταν πολύ μικρή απόκλιση από την κατεύθυνση της αρχικής δέσμης, αλλά το αποτέλεσμα ήταν εντυπωσιακά αντίθετο: παρατηρούνταν και πολύ μεγάλες αποκλίσεις, πράγμα που μπορούσε να γίνει κατανοητό μόνο με την υπόθεση ότι το θετικό φορτίο του ατόμου ήταν συγκεντρωμένο σε μια εξαιρετικά μικρή περιοχή, αυτήν που σήμερα λέμε πυρήνα. Η όλη ανάλυση των αποτελεσμάτων του πειράματος έγινε το 1911 από τον Rutherford χρησιμοποιώντας την κλασική μηχανική για να υπολογίσει τη γωνιακή κατανομή των σκεδαζομένων σωματιδίων. Οι υπολογισμοί έδειξαν ότι ο πυρήνας του ατόμου έπρεπε να έχει διαστάσεις της τάξης των  $10^{-15}m$ .

Επομένως άνοιγε ο δρόμος για να αναβιώσει το πλανητικό μοντέλο, με τον πυρήνα στο κέντρο και τα ηλεκτρόνια να περιστρέφονται γύρω του. Υπήρχε, βέβαια, πάντα το πρόβλημα ότι αυτά θα ακτινοβολούσαν και η δομή θα ήταν εξαιρετικά βραχύβια, αλλά θα μπορούσε κανείς να το αγνοήσει

προσωρινά, ελπίζοντας ότι θα βρισκόταν αργότερα κάποιος μηχανισμός που θα απαγόρευε την ακτινοβολία.

Όμως το μοντέλο έπρεπε να δώσει ερμηνεία και στο μεγάλο ζήτημα της σταθερότητας και της μοναδικότητας των ατόμων. Φαντάζεται κανείς ότι το άτομο πρέπει να είναι σταθερό, αφού και το πρότυπό του, το πλανητικό σύστημα, είναι σταθερό, αλλά αυτή η ιδέα είναι εντελώς απατηλή. Το πλανητικό σύστημα βρίσκεται μόνο του κάπου στο σύμπαν και δεν αλληλεπιδρά με άλλα πλανητικά συστήματα. Αντίθετα, τα άτομα, π.χ., ενός αερίου συγκρούονται μεταξύ τους δισεκατομμύρια φορές το δευτερόλεπτο και παρ' όλ' αυτά δεν αλλοιώνονται. Επίσης, αν, με κάποιον τρόπο ιοντιστεί ένα άτομο και μετά συλλάβει από το περιβάλλον ηλεκτρόνια και ξαναγίνει ουδέτερο, το άτομο που θα προκύψει θα είναι απaráλλακτο με κάποιο άλλο που δεν έχει υποστεί ιοντισμό.

Ασφαλώς θα ήταν εντελώς αδιανόητο να αφαιρεθούν οι πλανήτες από ένα πλανητικό σύστημα και μετά το κεντρικό αστέρι να αιχμαλωτίσει πλανήτες από το περιβάλλον (αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν) και να ξαναδημιουργηθεί το πλανητικό σύστημα με τις ίδιες ακριβώς τροχιές των πλανητών (ίδιες ταχύτητες, ίδιες εκκεντρότητες κλπ). Οι τροχιές των πλανητών εξαρτώνται άμεσα από τις αρχικές συνθήκες κατά την ένταξή τους στο πλανητικό σύστημα, ενώ για τα ηλεκτρόνια κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

### Πρόβλημα

Ας δεχθούμε ότι τα μόρια του αέρα είναι σφαιρίδια με διάμετρο  $d = 1\text{\AA}$  και ότι η αριθμητική πυκνότητα του αέρα ισούται με  $n = 10^{20} \frac{\text{μορία}}{\text{cm}^3}$ . Πόσο είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των διαδοχικών συγκρούσεων ενός μορίου κατά μέσον όρο σε θερμοκρασία δωματίου ( $T = 300\text{K}$ );

Λύση:

Αν η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι  $l$ , ο όγκος  $V_\mu$  που σαρώνει ένα μόριο χωρίς να συγκρουστεί είναι:  $V_\mu = Sl$ ,  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ . Όταν υπάρχουν  $n$  μόρια ανά κυβικό εκατοστό, ο διαθέσιμος χώρος για κάθε μόριο έχει όγκο:  $V_\mu = 1 \frac{\text{cm}^3}{n}$ , οπότε:  $Sl = 1 \frac{\text{cm}^3}{n} \Rightarrow nSl = 1 \text{cm}^3$ , δηλαδή:  $l = \frac{1}{nS}$  σε εκατοστά, με αριθμητική τιμή:  $l = \frac{1}{10^{20} \frac{\pi (1\text{\AA})^2}{4}} \simeq 10^{-4} \text{cm} = 10^{-6} \text{m}$ . Για να βρούμε σε πόσο χρόνο αντιστοιχεί αυτή

η μέση ελεύθερη διαδρομή, χρειαζόμαστε την μέση (θερμική) ταχύτητα:  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3kT}{2}$ . Για  $T = 300\text{K}$  βρίσκουμε ότι  $kT = \frac{1}{40} \text{eV}$ . Αν θεωρήσουμε ότι η μάζα των μορίων του αέρα είναι ίση με τη μάζα των μορίων του αζώτου:  $mc^2 = 30m_\pi c^2 = 30 \times 10^9 \text{eV}$  βρίσκουμε:  $mv^2 = 3kT \Rightarrow v \approx 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Άρα το χρονικό διάστημα μεταξύ των συγκρούσεων είναι:  $\tau = \frac{l}{v} \approx 10^{-9} \text{s}$ .

Επί πλέον, όπως ήδη αναφέραμε, ένα φορτισμένο σωματίδιο που επιταχύνεται ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητική ενέργεια με τη μορφή κυμάτων. Τα ηλεκτρόνια του πλανητικού μοντέλου για το άτομο έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, άρα ακτινοβολεί και η ενέργειά του μειώνεται συνεχώς και τελικώς πέφτουν στον πυρήνα. Όμως τα άτομα είναι σταθερά και επί πλέον στην συνηθισμένη τους κατάσταση δεν ακτινοβολούν.

### Πρόβλημα

Ένα επιταχυνόμενο φορτισμένο σωματίδιο ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητικά κύματα με ισχύ (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) που δίνεται από τη σχέση:  $P = K \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$ , όπου  $a$  η επιτάχυνση του φορτίου. Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο ένα ηλεκτρόνιο που περιφέρεται στο άτομο του Rutherford (ισχύει και για το άτομο του Bohr) στην απόσταση  $r = a_0 \approx 0.5\text{\AA}$  θα πέσει στον πυρήνα ( $r = 0$ ) για το υδρογόνο. Υποθέστε ότι το ηλεκτρόνιο έχει σπειροειδή τροχιά η οποία μπορεί στιγμιαία να θεωρηθεί κυκλική για απλοποίηση των πράξεων.

Λύση:

Το ηλεκτρόνιο χάνει ενέργεια:  $\frac{dE}{dt} = -P$ . Όμως  $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Kq^2}{r}$  και  $\frac{mv^2}{r} = \frac{Kq^2}{r^2} \Rightarrow a \equiv \frac{v^2}{r} = \frac{Kq^2}{mr^2}$ , όπου  $q = |e^-|$ ,  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ . Η  $a = \frac{Kq^2}{mr^2}$  δίνει την:  $\frac{dE}{dt} = -P = -K\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}a^2 = -K\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\frac{K^2q^4}{m^2r^4}$ . Επίσης βρίσκουμε, συνδυάζοντας:  $E = -\frac{1}{2}\frac{Kq^2}{r}$ , οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{Kq^2}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 2 \frac{r^2}{Kq^2} \frac{dE}{dt} = -2 \frac{r^2}{Kq^2} \left( K \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{K^2 q^4}{m^2 r^4} \right) = -\frac{4}{3} \frac{K^2 q^4}{m^2 c^3 r^2} \\ \Rightarrow \int_{a_0}^0 dr r^2 &= -\frac{4K^2 q^4}{3m^2 c^3} \int_0^\tau dt \Rightarrow \frac{a_0^3}{3} = \frac{4K^2 q^4}{3m^2 c^3} \tau \Rightarrow \tau = \frac{m^2 c^3 a_0^3}{4K^2 q^4}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές βρίσκουμε:  $\tau \approx 1,6 \times 10^{-11} s$ . Δηλαδή η κλασική Φυσική προβλέπει ότι τα άτομα αυτού του τύπου έχουν απειροελάχιστο χρόνο ζωής!

### 1.6.2 Ατομικά φάσματα. Τύπος του Balmer

Η φασματοσκοπία ήταν αντικείμενο έντονης επιστημονικής δραστηριότητας κατά το τέλος του δέκατου ένατου αιώνα. Τα φάσματα των διαφόρων υλικών περιλάμβαναν ενδιαφέρουσες γραμμές, αλλά η δομή τους φαινόταν τελείως χαοτική και τους έλειπε κάποια ενιαία περιγραφή. Το φως που εκπέμπεται από διεγερμένα άτομα περιέχει μόνο συγκεκριμένες διακριτές συχνότητες, δηλαδή το φάσμα εκπομπής είναι διακριτό. Το ίδιο ισχύει και για το φάσμα απορρόφησης. Τα φάσματα εκπομπής και απορρόφησης διαφέρουν σημαντικά από άτομο σε άτομο και χαρακτηρίζουν το χημικό στοιχείο. Τα φάσματα όλων των ατόμων ενός στοιχείου είναι τα ίδια και δεν αλλάζουν στο χρόνο.

Ένα σημαντικό βήμα έγινε από τον Balmer, ο οποίος μελέτησε διεξοδικά τις φασματικές γραμμές του ατόμου του υδρογόνου και πρότεινε έναν εμπειρικό τύπο που περιέγραφε με μεγάλη επιτυχία αυτές τις γραμμές. Σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις αυτός ο τύπος περιγράφει τις συχνότητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που προκύπτουν λόγω της αποδιέγερσης από υψηλές στάθμες διέγερσης του ατόμου του υδρογόνου προς την πρώτη διεγερμένη στάθμη, που αντιστοιχεί στον κύριο κβαντικό αριθμό  $n = 2$ .

Αυτός ο τύπος, γενικευμένος από τον Rydberg και για άλλες διεγερμένες στάθμες, δίνει τις συχνότητες των διαφόρων φασματικών γραμμών και είναι ο εξής:

$$f = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = f_m - f_n, \quad (1.50)$$

όπου το  $R$  λέγεται σταθερά του Rydberg ( $R = 3,27 \times 10^{15} s^{-1}$ ),  $f$  η παρατηρούμενη συχνότητα της ακτινοβολίας, ενώ τα  $m$  και  $n$  είναι ακέραιοι αριθμοί. Διαπιστώθηκε ακόμα ότι οι φασματικές γραμμές όλων των στοιχείων μπορούν να φραφούν με τη μορφή:  $f_m - f_n$ , όπου  $f_1, f_2, f_3, \dots$  μια κατάλληλη ακολουθία φασματικών όρων, διαφορετική για κάθε στοιχείο (για το άτομο του υδρογόνου:  $f_m = \frac{R}{m^2}$ ). Οι φασματικοί όροι δεν περιλαμβάνονται στις συχνότητες των φασματικών γραμμών.

Ο τύπος δείχνει πολύ απλός και ίσως αναρωτηθεί κάποιος γιατί λέμε ότι ήταν σοβαρή πρόοδος. Αν υποθέσουμε ότι ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από τις συχνότητες  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , μπορούν να σχηματιστούν  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  διαφορές. Για παράδειγμα, αν  $n = 20$ , θα έχουμε 190 διαφορές. Αν σκεφτούμε ότι δεν έχουμε κάποια ερμηνευτική αρχή, αλλά κάποιος μας δίνει τη χαώδη εικόνα των 190 φασματικών γραμμών, είναι σαφές ότι ο τύπος του Balmer αντιπροσωπεύει μια αποφασιστική πρόοδο.

Οι πειραματικές παρατηρήσεις συνοψίζονται στην λεγόμενη **συνδυαστική αρχή**: Το φάσμα κάθε στοιχείου χαρακτηρίζεται πλήρως από μια ακολουθία φασματικών όρων. Οι παρατηρούμενες συχνότητες σ' ένα διακριτό φάσμα μπορούν πάντα να γραφτούν ως διαφορά δύο φασματικών όρων. Το άθροισμα ή η διαφορά δύο παρατηρούμενων συχνοτήτων είναι επίσης παρατηρούμενη συχνότητα.

Πρέπει να πούμε ότι η Κλασική Φυσική αποτυγχάνει να δώσει μια ερμηνεία στα φάσματα. Αν τα ηλεκτρόνια κινούνται περιοδικά (όχι, όμως, υποχρεωτικά με ημιτονικό τρόπο) με συχνότητα  $f$ , θα περιμέναμε (λόγω της ύπαρξης των αρμονικών του Fourier) να εμφανιστούν στο φάσμα, εκτός από τη συχνότητα  $f$ , και οι αρμονικές  $2f$ ,  $3f$ , ..., πράγμα που δεν επαληθεύεται. Φυσικά υπάρχει και το πρόβλημα ότι ηλεκτρόνια που περιστρέφονται επιταχύνονται, άρα ακτινοβολούν και το σύστημα έχει πολύ μικρό χρόνο ζωής.

### 1.6.3 Το άτομο του Bohr

Και τότε, το 1913, ο Bohr πρότεινε το μοντέλο ατόμου, που αποδείχτηκε πολύ πετυχημένο και βασίστηκε σε δύο αρχές:

(1) Οι ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου είναι κβαντισμένες και είναι οι φασματικοί όροι  $f_n$  που αναφέραμε προηγουμένως πολλαπλασιασμένοι με τη σταθερά του Planck:  $E_n = -hf_n$ . Δεν υπάρχει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από τα άτομα, παρά μόνο όταν υπάρξει μεταπήδηση από κάποια ενεργειακή στάθμη  $E_m$  σε κάποια άλλη, χαμηλότερης ενέργειας,  $E_n$ . Η συχνότητα της ακτινοβολίας θα ισούται με  $f = \frac{E_n - E_m}{h}$ .

(2) Τα ηλεκτρόνια διαγράφουν κυκλικές τροχιές του πυρήνα γύρω από τον πυρήνα (κάτω από την επίδραση της ελκτικής του δύναμης), των οποίων η στροφορμή δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη, αλλά μόνο ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας  $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ .

Το μοντέλο του Bohr αναφερόταν στο άτομο του υδρογόνου, ή και σε άτομα με  $Z$  πρωτόνια στον πυρήνα αλλά με ένα μόνο ηλεκτρόνιο, ώστε η δύναμη που ασκείται να είναι δύναμη του Coulomb.

Υπενθυμίζουμε στη συνέχεια τις βασικές σχέσεις για το άτομο του Bohr: η πρώτη εξίσωση εκφράζει την συνθήκη (1) που περιγράψαμε προηγουμένως, ενώ η δεύτερη εκφράζει το γεγονός ότι η δύναμη Coulomb από τον πυρήνα θα λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη:

$$m_e v_n r_n = n\hbar, \quad (1.51)$$

$$\frac{KZe^2}{r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}. \quad (1.52)$$

Το  $K$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τις μονάδες. Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να θέσουμε  $K = 1$  ή  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Οι δύο εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς  $v_n$  και  $r_n$ :

$$v_n = \frac{KZe^2}{\hbar n}, \quad r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{K m_e Z e^2}. \quad (1.53)$$

Πολύ χρήσιμες ποσότητες είναι η σταθερά λεπτής υφής  $\alpha$  και η ακτίνα του Bohr  $a_0$ :

$$\alpha \equiv \frac{Ke^2}{\hbar c} = 7,297 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137}, \quad a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{K m_e e^2} = \frac{\hbar}{m_e c \alpha} \approx 0,529 \times 10^{-10} m \approx 0.5 \text{ \AA}. \quad (1.54)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\alpha a_0 = \frac{\hbar}{m_e c}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις δύο ποσότητες (τις  $\alpha$  και  $a_0$ ) για να εκφράσουμε τα  $v_n$  και  $r_n$ , δεν θα έχουμε πλέον διλήμματα αναφορικά με την επιλογή του συστήματος μονάδων. Οι εκφράσεις αυτές για τα  $v_n$  και  $r_n$  είναι:

$$v_n = \frac{Z\alpha c}{n}, \quad r_n = \frac{\hbar}{m_e Z \alpha c} n^2. \quad (1.55)$$

Παρατηρούμε ότι, για ανώτερες στάθμες διέγερσης, δηλαδή μεγαλύτερο  $n$ , η ταχύτητα μειώνεται σύμφωνα με το  $\frac{1}{n}$ , ενώ η απόσταση από τον πυρήνα αυξάνεται σε αναλογία με το  $n^2$ . Επίσης η ταχύτητα μεγαλώνει σε ευθεία αναλογία με τον ατομικό αριθμό  $Z$ , γιατί η έλξη του πυρήνα μεγαλώνει και μπορεί να υποστηρίξει μεγαλύτερες ταχύτητες, ενώ η απόσταση από τον πυρήνα μειώνεται σύμφωνα με την έκφραση  $\frac{1}{Z}$ , λόγω και πάλι της ισχυρότερης έλξης, που τείνει να φέρει το ηλεκτρόνιο πιο κοντά.

	$Z$	$n$	$\frac{R_Z}{R_1}$	$\frac{n^2}{Z}$
<i>H</i>	1	1	1.00	1.00
<i>He</i>	2	1	0.58	0.50
<i>Li</i>	3	2	3.15	1.33
<i>Be</i>	4	2	2.11	1.00
<i>B</i>	5	2	1.64	0.80
<i>C</i>	6	2	1.26	0.66
<i>N</i>	7	2	1.06	0.57
<i>O</i>	8	2	0.91	0.50
<i>F</i>	9	2	0.79	0.44
<i>Ne</i>	10	2	0.72	0.40
<i>Na</i>	11	3	3.58	0.82
<i>Mg</i>	12	3	2.74	0.75
<i>Al</i>	13	3	2.23	0.69
<i>Si</i>	14	3	2.09	0.64
<i>P</i>	15	3	1.85	0.60
<i>S</i>	16	3	1.66	0.56
<i>Cl</i>	17	3	1.49	0.53
<i>Ar</i>	18	3	1.34	0.50

Στον πίνακα δείχνουμε δεδομένα για τα πρώτα δεκαοκτώ στοιχεία του περιοδικού πίνακα. Η πρώτη στήλη περιέχει το όνομα του στοιχείου, ενώ η δεύτερη τον ατομικό αριθμό  $Z$ , δηλαδή τον αριθμό των πρωτονίων του πυρήνα. Στην τρίτη στήλη έχουμε σημειώσει τον αριθμό  $n$  του φλοιού στον οποίο βρίσκονται τα εξωτερικά ηλεκτρόνια, δανειζόμενοι τη μεταγενέστερη γνώση ότι η στάθμη  $n = 1$  μπορεί να φιλοξενήσει μέχρι δύο ηλεκτρόνια, η στάθμη  $n = 2$  μέχρι οκτώ και η στάθμη  $n = 3$  μέχρι δεκαοκτώ. Άρα, από τα στοιχεία που εξετάζουμε, τα πρώτα δύο ( $Z = 1, 2$ ) αντιστοιχούν σε  $n = 1$ , τα ( $Z = 3, \dots, 10$ ) σε  $n = 2$  και τα ( $Z = 11, \dots, 18$ ) σε  $n = 3$ . Η στάθμη  $n = 3$  έχει δυνατότητα να φιλοξενήσει δέκα ακόμα ηλεκτρόνια, αλλά δεν εξετάζουμε εδώ αυτά τα στοιχεία. Στην τέταρτη στήλη δίνουμε, για κάθε στοιχείο, μια εκτίμηση της ατομικής ακτίνας που πηγάζει από ερευνητική μελέτη, δημοσιευμένη στο περιοδικό J. Chem. Phys. 47: 1300: ακριβέστερα δίνουμε τα πηλίκια  $\frac{R_Z}{R_1}$  της εκάστοτε ατομικής ακτίνας με την ατομική ακτίνα του υδρογόνου, για το οποίο  $Z = 1$ ,  $n = 1$ . Στην πέμπτη στήλη δίνουμε το αντίστοιχο πηλίκιο, όπως προκύπτει από τους τύπους του Bohr:  $\frac{r_n}{r_1} = \frac{\frac{\hbar}{m_e \alpha c} n^2}{\frac{\hbar}{m_e \alpha c}} = \frac{n^2}{Z}$ . Η σύγκριση των δύο τελευταίων στηλών έχει ενδιαφέρον: για ( $Z = 1, 2$ ) η σύγκριση είναι ικανοποιητική, για  $Z = 3, \dots, 10$  η ακριβέστερη μελέτη προβλέπει ακτίνες σε γενικές γραμμές διπλάσιες από τις προβλέψεις του Bohr, ενώ για ( $Z = 11, \dots, 18$ ) προβλέπει τριπλάσιες ακτίνες. Η εξήγηση σε ποιοτικό επίπεδο είναι απλή: όσο μεγαλώνει το  $Z$ , το άτομο έχει επίσης όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια, τα οποία εμποδίζουν τα εξωτερικά ηλεκτρόνια να νοιώσουν ολόκληρο το φορτίο του πυρήνα. Φαίνεται ότι, για  $Z = 3, \dots, 10$ , το φορτίο που αντιλαμβάνονται τα εξωτερικά

ηλεκτρόνια αντιστοιχεί περίπου στο  $\frac{Z}{2}$ , οπότε, σύμφωνα με τον τύπο  $\frac{h}{m_e Z a c} n^2$ , η ακτίνα θα γίνει διπλάσια. Όταν  $Z = 11, \dots, 18$ , έχει συμπληρωθεί ένας εσωτερικός φλοιός, ο  $n = 2$ , και περνάμε στον  $n = 3$ , οπότε το φορτίο του πυρήνα που απομένει να δράσει είναι ακόμα μικρότερο, περίπου  $\frac{Z}{3}$ , και η ακτίνα γίνεται περίπου τριπλάσια. Επομένως το πρότυπο του Bohr, αν εμπλουτιστεί με κάποιες νεώτερες γνώσεις, δίνει αρκετά ικανοποιητικά τις ακτίνες των ατόμων, παρά το ότι ήταν απλά μια πρώτη προσπάθεια.

Η ενέργεια ισούται με:  $E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{K Z e^2}{r_n}$ , και λόγω της  $\frac{K Z e^2}{r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}$  γράφεται εναλλακτικά:  $E_n = -\frac{K Z e^2}{2 r_n} = -\frac{Z E_1}{n^2}$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ , οπότε:  $E_n = \frac{Z E_1}{n^2}$ . Η στροφορμή του ηλεκτρονίου είναι ίση με:  $L_n = m_e r_n v_n = K Z e^2 \sqrt{\frac{m_e}{2 \epsilon}} n = L n$ . Η στροφορμή, δηλαδή, είναι κβαντισμένη. Υπολογίζουμε την ποσότητα  $L$ :

$$L = K e^2 \sqrt{\frac{m_e c^2}{2 \epsilon c^2}} = \frac{K e^2}{c} \sqrt{\frac{m_e c^2}{2 \epsilon}} = \frac{8,98 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{3 \times 10^8} \sqrt{\frac{0,5 \times 10^6 \text{ eV}}{2 \times 13,6 \text{ eV}}} \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι  $h \approx 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , οπότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:  $L \approx \frac{h}{2\pi} \equiv \hbar$ . Δηλαδή φτάνουμε σε αποτέλεσμα συμβατό με την υπόθεση του Bohr ότι η στροφορμή είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\hbar$ , όπως θα έπρεπε.

Εξειδικεύοντας στο άτομο του υδρογόνου:  $E_n = -h f_n = -\frac{h R}{n^2} = -\frac{\epsilon}{n^2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  μπορούμε να προσδιορίσουμε το  $\epsilon$ :

$$\epsilon = h R = (6,62 \times 10^{-34}) \times (3,27 \times 10^{15}) \text{ Joule} = \frac{(6,62 \times 10^{-34}) \times (3,27 \times 10^{15}) \text{ Joule}}{1,6 \times 10^{-19} \frac{\text{Joule}}{\text{eV}}} \approx 13,6 \text{ eV}.$$

Δηλαδή οι ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου δίνονται από την έκφραση:  $E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$ . Η θεμελιώδης στάθμη είναι η  $E_1 = -13,6 \text{ eV}$  και η πρώτη διεγερμένη η  $E_2 = -3,4 \text{ eV}$ . Κατά τη μετάπτωση από την πρώτη διεγερμένη στη θεμελιώδη θα ισχύει, για τη συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, η σχέση:  $h f = E_2 - E_1 = 10,2 \text{ eV}$ , και το αντίστοιχο μήκος κύματος είναι:  $\lambda \approx 1215 \text{ \AA}$ .

Χρησιμοποιήσαμε το απλό πρότυπο του Bohr για το άτομο, αλλά τα αποτελέσματα για τις ενεργειακές στάθμες είναι ακριβώς ίδια με εκείνα που προκύπτουν από τη λύση του πλήρους κβαντικού προβλήματος.

Ένα πολύ σημαντικό γεγονός είναι ότι **η κβάντωση συνεπάγεται τη σταθερότητα των ατόμων**. Για να ιοντιστεί το άτομο του υδρογόνου χρειάζεται να του προσφερθεί ενέργεια τουλάχιστον ίση με  $|E_1| = 13,6 \text{ eV}$ . Στην συνήθη θερμοκρασία περιβάλλοντος,  $T \approx 300 \text{ K}$ , η μέση ενέργεια των ατόμων είναι περίπου ίση με  $kT \approx \frac{1}{40} \text{ eV}$ , ενώ για  $T \approx 12000 \text{ K}$ , η μέση ενέργεια γίνεται  $kT \approx 1 \text{ eV}$ . Άρα ακόμα και σ' αυτήν την υψηλή θερμοκρασία δεν υπάρχει αρκετή ενέργεια για να διασπαστούν τα άτομα.

## Εφαρμογή

Ποιά είναι η ενέργεια (πρώτου) ιοντισμού του ατόμου του Ηλίου, ώστε το άτομο  $He$  να μετατραπεί σε ιόν  $He^+$ ;

Λύση:

Για το Ηλιο  $Z = 2$ , δηλαδή το φορτίο του πυρήνα είναι διπλάσιο από του υδρογόνου και οι  $m_e v_n r_n = n \hbar$ ,  $\frac{K Z e^2}{r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}$  δίνουν  $E_1(Z) = Z^2 E_1(Z = 1) \Rightarrow E_1(He^+) = Z^2 E_1(H^+) = -4 \times$



$13,6\text{eV} = 54,4\text{eV}$ . Σκοτεινές φασματικές γραμμές στο φάσμα απορρόφησης του Ηλίου δείχνουν την παρουσία ιόντων  $\text{He}^+$  στον Ήλιο.

### Πρόβλημα

Έστω ότι, αντί για το δυναμικό Coulomb, η ελκτική δύναμη περιγράφεται από τη δυναμική ενέργεια  $V = \frac{1}{2}kr^2$  για κίνηση σε τρεις διαστάσεις. Ποιές είναι οι ακτίνες των επιτρεπόμενων τροχιών και οι επιτρεπόμενες ενέργειες σ' αυτήν την περίπτωση;

Λύση:

Η ενέργεια θα δίνεται από τη σχέση:  $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2$ , οπότε οι εξισώσεις θα γίνουν:  $\frac{mv^2}{r} = kr$ ,  $mvr = n\hbar$ . Η πρώτη δίνει:  $v^2 = \frac{k}{m}r^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}r = \omega r$ , όπου  $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Από τη δεύτερη βρίσκουμε:  $m\omega r^2 = n\hbar \Rightarrow r = \sqrt{\frac{n\hbar}{m\omega}} \Rightarrow v = \omega r = \sqrt{\frac{n\hbar\omega}{m}}$ . Είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε την ενέργεια:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}m\frac{n\hbar\omega}{m} + \frac{1}{2}(m\omega^2)\frac{n\hbar}{m\omega} = \frac{1}{2}n\hbar\omega + \frac{1}{2}n\hbar\omega = n\hbar\omega.$$

#### 1.6.4 Γενική συνθήκη κβάντωσης των Wilson και Sommerfeld

Οι Wilson και Sommerfeld πρότειναν το 1915-16 μια γενική συνθήκη κβάντωσης για συστήματα που εκτελούν περιοδική κίνηση, την εξής:

$$\oint pdq = nh, \quad (1.56)$$

όπου τα  $q$  συμβολίζουν τις συντεταγμένες του συστήματος, τα  $p$  τις αντίστοιχες ορμές, το  $h$  η σταθερά του Planck και το  $n$  είναι ακέραιος αριθμός. Η ολοκλήρωση εκτείνεται σε μία περίοδο. Για παράδειγμα, αν το σύστημα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η συντεταγμένη  $q$  είναι το μήκος τόξου,  $dq = r d\phi$ , η ορμή έχει σταθερό μέτρο,  $p = mv$ , επομένως βγαίνει έξω από την ολοκλήρωση, οπότε η συνθήκη κβάντωσης δίνει:

$$(mv) \oint r d\phi = nh \Rightarrow (mv)(2\pi r) = nh \Rightarrow mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \quad (1.57)$$

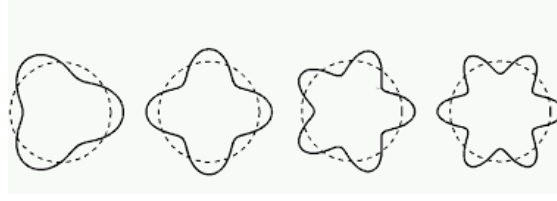
δηλαδή αναπαράγεται η συνθήκη του Bohr.

#### 1.6.5 Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός: de Broglie

Η αλήθεια είναι ότι η απαίτηση η στροφορμή να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\hbar$  δεν είναι θεμελιωμένη σε κάποια βασική αρχή και δείχνει αυθαίρετη. Πράγματι, δημιουργήθηκε κάπως από σκοπού για να σώσει τα φαινόμενα, δηλαδή να εκδιάσει μια ερμηνεία των πειραμάτων. Ήταν ώριμες οι συνθήκες για να διατυπωθεί η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού. Υπενθυμίζουμε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία θεωρούνται γενικώς κύματα, αλλά είδαμε ότι έχουν και σωματιδιακά χαρακτηριστικά: ενέργεια  $E = hf$  και ορμή  $p = \frac{h}{\lambda}$ , που είναι απαραίτητα για την κατανόηση της αντινοβολίας του μέλανος σώματος, του φωτοηλεκτρικού φαινομένου και της σκέδασης Compton. Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί γιατί, αφού το κύμα μπορεί να συμπεριφέρεται και ως σωματίδιο, το σωματίδιο να μη μπορεί να συμπεριφερθεί και ως κύμα. Το βήμα έγινε από τον de Broglie, ο οποίος διατύπωσε την **αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού**:

Όλα τα φυσικά σωματίδια έχουν και κυματική συμπεριφορά, παράλληλα με τη σωματιδιακή. Οι σχέσεις που συνδέουν τις δύο όψεις τους είναι οι:

$$f = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}, \quad (1.58)$$



Σχήμα 1.9: Άτομο του Bohr και αρχή του de Broglie

που ταυτίζονται με τις σχέσεις των Planck και Einstein, μόνο που τώρα μας μεταφέρουν από τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά  $(E, p)$  προς τα κυματικά  $(f, \lambda)$ , ενώ με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα η μεταφορά γινόταν προς την αντίστροφη κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι ο πανάρχαιος διαχωρισμός μεταξύ σωματιδίου και κύματος εγκαταλείπεται.

**Για τα υλικά σωματίδια πιστεύουμε σήμερα ότι είναι σωματίδια ως προς τη σύστασή τους, αλλά κύματα ως προς την περιγραφή της κίνησής τους. Η ιδιότητα αυτή λέγεται κυματοσωματιδιακός δυϊσμός.**

Είναι ενδιαφέρον να διαπιστώσει κανείς ότι η συνθήκη του Bohr μπορεί να προκύψει ως συνέπεια του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού, δηλαδή της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων. Πράγματι, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.9, το μήκος κύματος de Broglie πρέπει να είναι τέτοιο ώστε τα ακέραια πολλαπλάσιά του να είναι ακριβώς ίσα με το μήκος της περιφέρειας της τροχιάς, ώστε να σχηματίζονται στάσιμα κύματα. Προκύπτει, λοιπόν, η συνθήκη:

$$2\pi r = n\lambda \Rightarrow 2\pi r = n \frac{h}{p} \Rightarrow pr = n \frac{h}{2\pi} \Rightarrow L = n\hbar,$$

αφού εξ ορισμού  $pr = L$  και  $\frac{h}{2\pi} \equiv \hbar$ .

Έχουν επίσης ενδιαφέρον κάποια αριθμητικά παραδείγματα. Εκφράζουμε το μήκος κύματος de Broglie ενός σωματιδίου συναρτήσει της ενέργειάς του:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}} = \frac{12400eV\text{\AA}}{\sqrt{10^6eVE(eV)}} = \frac{12.4eV}{\sqrt{E(eV)}}\text{\AA},$$

αν μιλάμε για ηλεκτρόνιο. Προφανώς ηλεκτρόνια ενέργειας μερικών  $eV$  έχουν μήκος κύματος μερικών  $\text{\AA}$ . Για φωτόνια η αντίστοιχη σχέση είναι:  $\lambda = \frac{12000}{E(eV)}\text{\AA}$ . Διαπιστώνουμε ότι, για να έχουμε μήκος κύματος φωτονίων της τάξης μερικών  $\text{\AA}$ , η ενέργειά τους πρέπει να είναι της τάξης των χιλιάδων  $eV$  και όχι μερικών  $eV$ , όπως στην περίπτωση των ηλεκτρονίων. Δηλαδή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ακτίνες X, που καλό θα ήταν να αποφεύγονται. Η παρατήρηση αυτή βρίσκεται στη βάση του **ηλεκτρονικού μικροσκοπίου**. Το μήκος κύματος πρέπει να είναι της τάξης της διακριτικής ικανότητας που θέλουμε να πετύχουμε. Επιταχύνοντας ηλεκτρόνια σε σχετικά μέτριες ενέργειες, μπορούμε να πετύχουμε διακριτικές ικανότητες πολύ μεγάλες συγκριτικά με τις δυνατότητες των φωτονίων.

Για λόγους πληρότητας θα υπολογίσουμε το μήκος κύματος de Broglie ενός μη σχετικιστικού πρωτονίου ή νετρονίου (έχουν την ίδια περίπου μάζα:  $M_p \approx M_n \approx 1836m_e$ ). Προκύπτει:

$$\lambda_p = \frac{hc}{\sqrt{2M_p c^2 E}} = \sqrt{\frac{m_e}{M_p}} \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 E}} = \sqrt{\frac{m_e}{M_p}} \frac{12.4}{\sqrt{E(eV)}}\text{\AA}.$$

Αλλά  $\sqrt{\frac{m_e}{M_p}} \approx \sqrt{\frac{1}{1836}} \approx 0.023 \approx \frac{1}{43}$ , οπότε, αντικαθιστώντας:  $\lambda_p \approx \frac{0.3}{\sqrt{E(eV)}}\text{\AA}$ . Βλέπουμε ότι αρκούν πρωτόνια με ενέργειας μικρότερης από  $1eV$  για να προκύψει μήκος κύματος μερικών  $\text{\AA}$ . Παρατη-

ρούμε ακόμη ότι, για να εντοπίζονται μέσα στον πυρήνα πρωτόνια και νετρόνια, τα αντίστοιχα μήκη κύματος πρέπει να είναι μικρότερα ή περίπου ίσα με το μέγεθος του πυρήνα, που είναι  $10^{-15}m$  ή  $10^{-5}\text{\AA}$ . Θα πρέπει, λοιπόν να έχουν ενέργεια:  $E \simeq \frac{0.09}{\lambda_p^2} \frac{0.09}{(10^{-5}\text{\AA})^2} eV \simeq 10^9 eV \simeq 10^3 MeV$ , που είναι η τυπική κλίμακα των πυρηνικών αλληλεπιδράσεων.

Η ιδέα του de Broglie φαινόταν πολλά υποσχόμενη, αλλά ήταν τόσο ριζοσπαστική, που χρειαζόταν οπωσδήποτε πειραματική στήριξη για να γίνει αποδεκτή. Έτσι σχεδιάστηκε το πείραμα των Davisson και Germer, που συνίσταται στην περίθλαση ηλεκτρονίων πάνω σε κρύσταλλο νικελίου με απόσταση  $d = 2.15\text{\AA}$  μεταξύ δύο γειτονικών ατόμων. Τα ηλεκτρόνια είχαν ενέργεια  $54eV$ , άρα το μήκος κύματος de Broglie ήταν  $\lambda = \frac{12.4}{\sqrt{54}}\text{\AA} = 1.68\text{\AA}$ . Η συνθήκη για ενισχυτική σκέδαση  $d \sin \theta_n = n\lambda$  έδινε  $\sin \theta_n = 0.78n$ , με μόνη δυνατή λύση την  $\sin \theta_1 = 0.78$ , δηλαδή  $\theta_1 = 51^\circ$ , που ήταν και η παρατηρημένη γωνία απόκλισης. Με το πείραμα αυτό η τολμηρή πρόταση του de Broglie βρήκε την πειραματική της επαλήθευση.

### Πρόβλημα

- (α) Εφαρμόστε την συνθήκη κβάντωσης του Bohr για να υπολογίσετε τις ενεργειακές στάθμες ενός σωματιδίου μάζας  $M$  που κινείται υπό την επίδραση της κεντρικής ελκτικής δύναμης  $\mathbf{F} = -b\hat{r}$ .  
 (β) Υπολογίστε την άγνωστη παράμετρο  $b$  εάν το σωματίδιο μάζας  $M = 1 \text{ GeV}$  είναι περιορισμένο να κινείται μέσα στον πυρήνα ενός ατόμου με ακτίνα  $R = 10^{-15} \text{ m}$ . Σε αυτή την περίπτωση υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του σωματιδίου σε MeV.  
 (γ) Εφαρμόζοντας την υπόθεση de Broglie για τα υλικά κύματα βρείτε την κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου μάζας  $M = 1 \text{ GeV}$  που βρίσκεται παγιδευμένο μέσα στον πυρήνα. Να συγκρίνεται την κινητική ενέργεια που βρήκατε με τις ενεργειακές στάθμες του ερωτήματος (β).

Λύση:

- (α) Από τις  $Mv_n r_n = n\hbar$  και  $\frac{Mv_n^2}{r_n} = b$  βρίσκουμε:  $r_n = \left(\frac{n^2 \hbar^2}{Mb}\right)^{1/3}$ ,  $v_n = \left(\frac{n\hbar b}{M^2}\right)^{1/3}$ . Το δυναμικό από το οποίο απορρέει η δύναμη είναι, προφανώς, το  $V = br$ , οπότε:

$$E_n = \frac{1}{2}Mv_n^2 + V(r_n) = \frac{1}{2}M \left(\frac{n\hbar b}{M^2}\right)^{2/3} + b \left(\frac{n^2 \hbar^2}{Mb}\right)^{1/3} = \frac{3}{2} \left(\frac{n^2 \hbar^2 b^2}{M}\right)^{1/3}.$$

(β)

### Πρόβλημα

(α) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του de Broglie που συνδέουν τις κυματικές ιδιότητες ενός σωματιδίου με την ενέργεια και την ορμή του να βρείτε την σχέση διασποράς  $\omega = \omega(k)$  και να δείξετε ότι η ταχύτητα του σωματιδίου κλασσικά ισούται με την ταχύτητα ομάδας  $v_g$  του αντίστοιχου κύματος κατά de Broglie.

(β) Όταν το σωματίδιο είναι σχετικιστικό να δείξετε ότι μεταξύ ταχύτητας ομάδας  $v_g$  και φασικής ταχύτητας  $v_{ph}$  ισχύει  $v_g v_{ph} = c^2$ , όπου  $c$  η ταχύτητα που έχει το φως.

Παρατήρηση, η ταχύτητα ομάδας είναι  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  ενώ η φασική ταχύτητα  $v_{ph}$  δίνεται από την σχέση  $v_{ph} = \omega/k$ .

Λύση:

**Πρόβλημα**

Δέσμη ηλεκτρονίων ενέργειας  $E$  προσπίπτει σε λεπτή σχισμή εύρους  $4 \text{ \AA}$ . Τα ηλεκτρόνια που διέρχονται από την σχισμή προσπίπτουν σε κατάλληλη φωτογραφική πλάκα σε απόσταση  $30 \text{ cm}$  από την σχισμή και δημιουργείται μία εικόνα περίθλασης. Εάν η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά μέγιστα της εικόνας περίθλασης είναι  $2,7 \text{ cm}$  να βρείτε την ενέργεια  $E$  των ηλεκτρονίων της προσπίπουσας δέσμης.

Λύση:

**1.7 Προβλήματα προς λύση****Πρόβλημα 1**

Η θερμοκρασία που προκαλεί ένας κεραυνός είναι της τάξης των  $10^4 \text{ K}$ , ενώ για μία πυρηνική έκρηξη είναι της τάξης των  $10^7 \text{ K}$  αντίστοιχα.

(α) Γράψτε την συνάρτηση φασματικής κατανομής  $J$  (ή φασματικής έντασης ισοδύναμα) του μέλανος σώματος ως συνάρτηση του μήκους κύματος  $\lambda$  της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας,  $J = J(\lambda, T)$ .

(β) Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Wien για να βρείτε τον λόγο του πλάτους των παραγόμενων φωτονίων με την μεγαλύτερη ένταση από αυτές τις πηγές.

(γ) Σε ποιες περιοχές του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος θα περιμένετε να ακτινοβολούν ισχυρότερα;

**Πρόβλημα 2**

Φωτόνια μήκους κύματος  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  προσπίπτουν σε μεταλλική επιφάνεια και εκπέμπονται φωτοηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται εισέρχονται σε μία περιοχή με μαγνητικό πεδίο έντασης  $B = 3 \times 10^{-5} \text{ T}$ . Εάν τα ηλεκτρόνια με την μεγαλύτερη κινητική ενέργεια κάνουν κυκλική τροχιά ακτίνας  $15 \text{ cm}$  να βρείτε το έργο εξαγωγής του μετάλλου.

**Πρόβλημα 3**

Το έργο ιονισμού του ατόμου του υδρογόνου είναι ίσο με  $13,6 \text{ eV}$ . Άτομα υδρογόνου δέχονται την ακτινοβολία ισχυρής φωτεινής πηγής ισχύος  $120 \text{ W}$  που βρίσκεται σε απόσταση  $L = 1 \text{ m}$  να βρείτε τον χρόνο ιονισμού εάν ίσχυε η κλασσική φυσική. Υποθέστε ότι το άτομο του υδρογόνου έχει ακτίνα  $r = 0,5 \text{ \AA}$ .

**Πρόβλημα 4**

Φωτόνιο ενέργειας  $10^5 \text{ eV}$  σκεδάζεται σε γωνία  $\theta = 90^\circ$  από ελεύθερο ηλεκτρόνιο σε ηρεμία. Βρείτε τις συνιστώσες της ορμής του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου.

**Πρόβλημα 5**

Ένα φωτόνιο που υφίσταται σκέδαση Compton έχει πριν την σκέδαση ενέργεια  $E = m_e c^2$  και σκεδάζεται σε κατεύθυνση κάθετη στην διεύθυνση πρόσπτωσης.

(α) Υπολογίστε το μήκος κύματος, την ορμή και την ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου.

(β) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου.

**Πρόβλημα 6**

(α) Βρείτε τις ενεργειακές στάθμες ενός μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή εφαρμόζοντας τις γενικές συνθήκες κβάντωσης των Wilson-Sommerfeld.

(β) Ομοίως βρείτε τις ενεργειακές στάθμες ενός σωματιδίου μάζας  $m$  που κινείται σε μονοδιάστατο δυναμικό της μορφής:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < L \\ \infty, & x > L \end{cases}$$

(γ) Χρησιμοποιήστε την συνθήκη δημιουργίας στάσιμων κυμάτων σε συνδυασμό με την σχέση ορμής-μήκος κύματος του de Broglie για να υπολογίσετε τις επιτρεπόμενες ενέργειες ενός σωματιδίου μάζας  $m$  που είναι υποχρεωμένο να κινείται μέσα σε έναν κλειστό σωλήνα μήκους  $L$ . Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με το ερώτημα (β).

**Πρόβλημα 7**

Φορτισμένο σωματίδιο μάζας  $m$  κινείται σε κυκλική τροχιά υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού της μορφής

$$V(r) = br^3.$$

(α) Χρησιμοποιήστε την συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής του Bohr για να βρείτε την ολική ενέργεια της  $n$ -οστής στάθμης του σωματιδίου.

(β) Έστω ότι το σωματίδιο αποδιεγείρεται και μεταπίπτει από μια αρχική κατάσταση  $n_1$  σε μία χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση  $n_2$  εκπέμποντας ένα φωτόνιο. Να υπολογίσετε την συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος.

**Πρόβλημα 8**

Ηλεκτρόνιο στο άτομο του Υδρογόνου μεταπίπτει από μία αρχική κατάσταση με  $n_1 = 6$  στην κατάσταση με  $n_2 = 4$ . Υπολογίστε την ενέργεια του φωτονίου που εκπέμπεται χρησιμοποιώντας τους κανόνες κβάντωσης κατά Bohr. Να συγκρίνεται την συχνότητα του φωτονίου που εκπέμπεται με τις συχνότητες περιστροφής του ηλεκτρονίου στις δύο τροχιές.

**Πρόβλημα 9**

(α) Υπολογίστε το μήκος κύματος κατά de Broglie ενός ηλεκτρονίου με κινητική ενέργεια 100 eV και με κινητική ενέργεια 100 KeV.

(β) Πόσο είναι το αντίστοιχο μήκος κύματος για μία μπάλα μάζας 100 gr που κινείται με ταχύτητα 10 km/h;

**Πρόβλημα 10**

Υποθέτουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται στην πρώτη στοιβάδα ( $n = 1$ ) του ατόμου του Υδρογόνου έχει μήκος κύματος κατά de Broglie ίσο με την διάμετρο του ατόμου. Πόση κινητική ενέργεια θα έχει το ηλεκτρόνιο, πως συγκρίνεται με την ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου;

**Πρόβλημα 11**

Το ηλεκτρόνιο στο άτομο του Υδρογόνου εκτός από το δυναμικό Coulomb έχει και μία επιπλέον δυναμική ενέργεια ανάλογη του  $1/r^3$  που οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο που βλέπει το ηλεκτρόνιο λόγω της κίνησής του γύρω από τον φορτισμένο πυρήνα του ατόμου και της εσωτερικής μαγνητικής διπολικής ροπής  $\mu_S$  του ηλεκτρονίου. Η δυναμική αυτή ενέργεια δίνεται από την σχέση:

$$V_B = \frac{B}{r^3}, \quad B = \frac{\mu_L \cdot \mu_S}{4\pi\epsilon_0 c^2}$$

όπου  $\mu_L$  η μαγνητική διπολική ροπή του ηλεκτρονίου λόγω της περιστροφής του γύρω από τον πυρήνα του ατόμου. Βρείτε την διόρθωση στην ενέργεια του ηλεκτρονίου στην πρώτη διεγερμένη στάθμη εάν υποθέσουμε ότι ισχύει  $\mu_L \cdot \mu_S = \frac{e^2 \hbar^2}{2m_e^2}$ .