Ανασκόπηση Στοιχείων Γραμμικής Άλγεβρας

Αθανάσιος Ροντογιάννης

Αν. Καθηγητής ΣΗΜΜΥ-ΕΜΠ

Συμβολισμοί (Notation)

- Διανύσματα/πίνακες και ανάστροφοί τους:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_l \end{bmatrix}, \quad B = A^T \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$$

- Ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $a_1, a_2, \dots, a_l$ στη διαγώνιό του θα συμβολίζεται ως $A = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$
- $I = \mathrm{diag}\{1,1, \dots, 1\}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας
- Το ίχνος (άθροισμα διαγώνιων στοιχείων) ενός *τετραγωνικού* πίνακα A συμβολίζεται ως trace$\{A\}$ και η ορίζουσά του ως $|A|$.
- Ακολουθίες αριθμών (διανυσμάτων) συμβολίζονται ως $x_n(\boldsymbol{x}_n)$ ανάλογα με την περίπτωση
- Συμβολισμός συναρτήσεων: $f, f(x), f(\cdot)$
- Τα στοιχεία των διανυσμάτων/πινάκων και οι βαθμωτές ποσότητες που θα χρησιμοποιήσουμε θεωρούνται γενικά πραγματικοί αριθμοί.

Ορισμοί

- *Εσωτερικό γινόμενο* διανυσμάτων $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^l$:

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{l} x_i y_i \equiv \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}$$

- *Γραμμική ανεξαρτησία*: Δοθέντων $m \leq l$ διανυσμάτων $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^l,\ i = 1,2,\dots,m$, θα λέμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν η σχέση:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i = 0$$

ισχύει μόνο για $a_i = 0, i = 1,2,\dots,m$. Αν $m > l$ τα διανύσματα είναι υποχρεωτικά γραμμικά εξαρτημένα.

- *Γραμμικός υπόχωρος* που παράγεται από ένα σύνολο διανυσμάτων $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^l, i = 1,2,\dots,m$:

$$S = \left\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i, \forall a_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\dots,m\right\}$$

$$S = \mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m\} \quad \text{και} \quad S \subseteq \mathbb{R}^l$$

Ορισμοί

- *Βάση* γραμμικού υπόχωρου: Έστω ένα σύνολο διανυσμάτων σε ένα υπόχωρο $V \subseteq \mathbb{R}^l$, δηλαδή $\boldsymbol{e}_i \in V, i = 1,2,..,m$. Θα λέμε ότι τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια βάση του V αν α) είναι γραμμικά ανεξάρτητα και β) $V = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m\}$
- *Τάξη (ή βαθμός)* πίνακα: Έστω ένας $l \times m$ πίνακας A. Τάξη (rank) r του A είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών (ή στηλών) του A. Είναι $r \leq \min(m, l)$. Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός $l \times l$ πίνακας και $r = l$, ο A καλείται πίνακας πλήρους τάξης (full rank).
- *Αντίστροφος* $l \times l$ πίνακα A:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

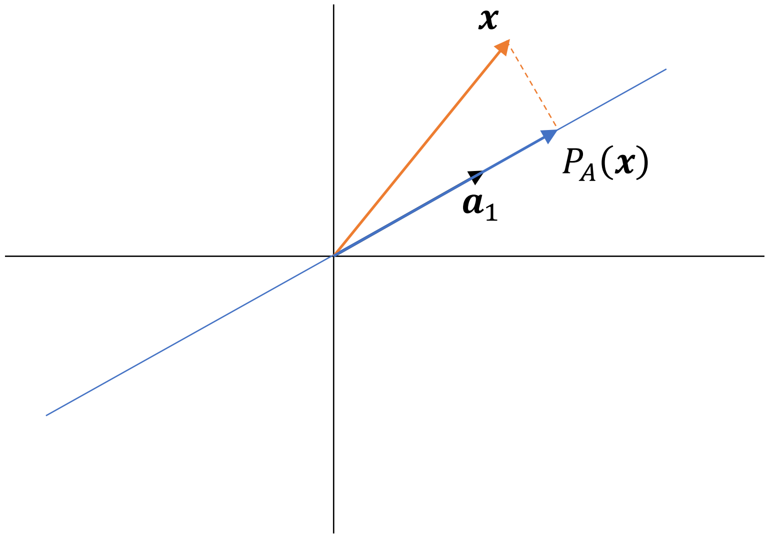
- *Ανάστροφος* ενός τετραγωνικού πίνακα με βάση τις στήλες του:

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_l], \qquad A^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^T \end{bmatrix}$$

Ορισμοί

- *Ορθογώνια προβολή* σε γραμμικό υπόχωρο: Έστω ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^l, i = 1,2,..,m$ με $m \leq l$. Τα διανύσματα αυτά θα παράγουν τον υπόχωρο $\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{2,} \dots, \boldsymbol{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^l$. Θεωρήστε ένα διάνυσμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l$, το οποίο γενικά δε θα ανήκει στον υπόχωρο αυτό. Η ορθογώνια προβολή του διανύσματος αυτού στον υπόχωρο είναι το διάνυσμα:

$$P_A(\boldsymbol{x}) = A(A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{x}, \quad \text{όπου} \quad A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{2,} \dots, \boldsymbol{a}_m]$$



Χρήσιμες σχέσεις

Αν A, B, C πίνακες με κατάλληλες διαστάσεις και ιδιότητες, θα είναι:

- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\mathrm{trace}\{AB\} = \mathrm{trace}\{BA\}$
- $\mathrm{trace}\{ABC\} = \mathrm{trace}\{CAB\} = \mathrm{trace}\{BCA\}$
- Αν $A = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$ (εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$) εύκολα προκύπτει:

$$\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b}$$

- $|AB| = |A||B|$
- $|A^{-1}| = 1/|A|$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Έστω ένας τετραγωνικός $l \times l$ πίνακας A. Αν για το ζεύγος $\left(\lambda \in \mathbb{C}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^l\right)$ ισχύει:

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

το λ ονομάζεται ιδιοτιμή του A και το $\boldsymbol{u}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά του. Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

Οι ιδιοτιμές του A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης:

$$|A - \lambda I| = 0$$

και συμβολίζονται ως $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$. Θα ισχύει:

$$A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i, i = 1,2, \ldots, l \qquad (1)$$

Δύο χρήσιμες ιδιότητες:

$$\text{trace}\{A\} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i , \qquad |\mathrm{A}| = \prod_{i=1}^{l} \lambda_i$$

Συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες

Ένας τετραγωνικός $l \times l$ πίνακας A με πραγματικά στοιχεία ονομάζεται *συμμετρικός* αν $A = A^T$ $\left(a_{ij} = a_{ji}\right)$. Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές (διακριτές) ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους ($\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_j = 0$).

Ένας συμμετρικός $l \times l$ πίνακας A με πραγματικά στοιχεία ονομάζεται *θετικά ορισμένος* αν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l$ ισχύει:

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$$

Οι ιδιοτιμές ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι θετικοί αριθμοί. Από την (1) μπορεί να δειχθεί ότι ένας θετικά ορισμένος πίνακας μπορεί να διαγωνοποιηθεί ως εξής:

$$U^T A U = \Lambda, \qquad \text{όπου}$$

$$U = \left[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,\ldots,} \boldsymbol{u}_l\right] \quad \text{και} \quad \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l\}$$

Επιπλέον: $U^T U = U U^T = I$, δηλαδή $U^{-1} = U^T$.

Ανάδελτα συνάρτησης - Ιδιότητες

Έστω μια συνάρτηση $f(\boldsymbol{x})$ μιας διανυσματικής ποσότητας $\boldsymbol{x}$. Το ανάδελτα ή παράγωγος της f ως προς $\boldsymbol{x}$ ορίζεται ως εξής:

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} f \equiv \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_l} \end{bmatrix}$$

Μπορούν να δειχτούν τα παρακάτω:

- $\frac{\partial \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}$
- $\frac{\partial \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = (A + A^T)\boldsymbol{x}$, που γίνεται $2A\boldsymbol{x}$ αν ο A είναι συμμετρικός.
- $\frac{\partial A\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = A^T$