



**Тюнин Николай Николаевич**

**Анализ и решение задач оптимизации направленности  
фазированных антенных решеток коротковолнового  
диапазона**

Специальность 05.13.18 —  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ»

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук».

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, доцент  
**Еремеев Антон Валентинович**

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Использование ФАР широко распространено в диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ), поскольку к достоинствам данного диапазона относятся малые размеры антенн и более широкая абсолютная полоса частот. Однако, радиосистемы СВЧ диапазона характеризуются малой дальностью действия. ФАР высокочастотного диапазона (ВЧ), также называемого коротковолновым (КВ), менее распространены ввиду больших габаритов, однако, возможность увеличения дальности действия привлекает к ним особый интерес [1—3].

Рассматриваемая в статье задача состоит в максимизации направленности излучения ФАР за счет выбора фаз и амплитуд в каждом излучателе. Задача осложняется за счет взаимного влияния излучателей друг на друга. В СВЧ диапазоне такое влияние можно нивелировать с помощью дополнительных устройств (см. [4], § 6.7), после чего задача существенно упрощается [5]. В случае же с ВЧ диапазоном, в котором используются иначе спроектированные излучатели, такое допущение невозможно.

**Целью** данной работы является исследование методов математического программирования для оптимизации направленного излучения ФАР КВ диапазона.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи:**

1. Разработать реализации алгоритмов для решения задачи оптимизации направленности ФАР КВ диапазона и сравнить их результаты с результатами коммерческих решателей.
2. Исследовать целесообразность учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона.
3. Разработать программный комплекс для построения и решения задач математического программирования.

**Научная новизна:**

1. Разработаны методы решения задачи оптимизации направленности ФАР КВ диапазона с учетом взаимного влияния излучателей при ограничениях на мощность по каждому входу антенной системы.

**Практическая значимость.** ФАР КВ диапазона не так широко распространены ввиду невозможности нивелировать взаимное влияние излучателей, что существенно осложняет оптимизацию их направленности. В рамках данной работы были получены важные практические результаты, обосновывающие необходимость учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР. Кроме того, в работе демонстрируются подходы и техники,

позволяющие оптимизировать направленность антенной системы с учетом взаимного влияния излучателей, а также разработан программный комплекс, позволяющий производить все необходимые расчеты.

**Методология и методы исследования..** В данной работе мы рассматриваем подход к решению задачи максимизации направленности излучения ФАР в заданном направлении при ограничениях, накладываемых на мощность, подаваемую на каждый из излучателей. Такая задача может быть решена только численными методами [6]. Для использования градиентного метода задача сводится к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций. Выбор градиентного алгоритма связан с тем, что отыскание даже локального оптимума в задаче невыпуклого квадратичного программирования может представлять собой NP-трудную задачу, и одним из методов, уместных в таких случаях, является градиентный алгоритм [7]. Согласно [8], использование метода сопряженных градиентов для решения данной задачи не будет приводить к существенным улучшениям по сравнению с простым градиентным подъемом. Данное утверждение нашло согласие с результатами предварительных вычислительных экспериментов, проведенных нами для некоторых из рассматриваемых задач.

Для оценки качества результатов градиентного алгоритма производим их сравнение с решениями, полученными с помощью решателя BARON в пакете GAMS. BARON использует алгоритмы метода ветвей и границ, усиленные различными методами распространения ограничений и двойственности для уменьшения диапазонов переменных в ходе работы алгоритма [9]. Его использование также представляет альтернативный подход к решению данной задачи, но, поскольку BARON является коммерческим решателем, производство расчетов требует приобретения лицензии, что не всегда приемлемо.

Еще одним эффективным подходом к решению невыпуклых задач квадратичного программирования являются генетические алгоритмы, и, в частности, методы дифференциальной эволюции (ДЭ) [10; 11]. Использование методов ДЭ требует больше времени, чем использование градиентного подъема, однако, в отличие от градиентных методов, не требует вычисления производных и не подвержен преждевременному завершению в точках стационарности. Таким образом, методы ДЭ также могут быть применены при исследовании структуры локальных оптимумов задачи невыпуклого квадратичного программирования.

Вообще говоря, при использовании метода градиентного подъема не гарантируется получение глобального оптимума. Приблизиться к глобальному оптимуму позволяет многократный запуск алгоритма из случайным образом сгенерированных точек. Кроме того, многократный запуск позволяет оценить количество локальных оптимумов, что является некоторым критерием сложности

индивидуальной задачи [12]. Анализ структуры локальных оптимумов позволяет также выявить наличие нетривиальных симметрий.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Предложен алгоритм решения задачи оптимизации фазированных решеток в случае питания разных входов антенной системы от разных усилителей.
2. Исследованы множества локальных оптимумов квадратных решеток широкополосных вертикальных излучателей и широкополосных вертикальных диполей, состоящих из 4-х и 9-и элементов, квадратных решеток вертикальных диполей, состоящих из 4-х, 9-и и 25 элементов, кольцевых решеток широкополосных вертикальных излучателей, состоящих из 8 и 16 элементов.
3. Исследованы радиочастотные зависимости коэффициента усиления, а также зависимости коэффициента усиления от густоты сетки противовесов ФАР кольцевой структуры, элементами которой являются ШВИ. При этом был получен важный практический результат – учет взаимного влияния излучателей друг на друга может оказать существенное влияние на результирующее излучение.
4. Проведены сравнения эффективности разработанных в рамках решения текущей проблемы алгоритмов с вычислительным комплексом «BARON».
5. Предложен алгоритм проверки необходимых условий локальной оптимальности как критерий качества рассматриваемой реализации решающего алгоритма. Для полученных множеств допустимых решений был применен алгоритм проверки необходимых условий локальной оптимальности.
6. Реализован алгоритм дифференциальной эволюции с возможностью запуска на GPU для улучшения процедуры локального поиска и определения оптимальных параметров градиентного спуска.
7. Проведены вычислительные эксперименты, выявляющие наличие непрерывных групп симметрий допустимых решений. Для всех рассмотренных задач выявлено наличие только фазовой симметрии.
8. Исследована целесообразность учета взаимного влияния излучателей при оптимизации ФАР КВ диапазона.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается их соответствием с результатами коммерческих решателей.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

1. VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения» - Омск, июль 2018.
2. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций» - Екатеринбург, июль 2019.
3. V Международной научно-технической конференции «Радиотехника, электроника и связь» - Омск, октябрь 2019.

4. Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций» - Иркутск, июль 2022.

**Личный вклад.** Автор принимал активное участие в разработке программного комплекса и реализаций алгоритмов, проведении вычислительных экспериментов, анализе и интерпретации их результатов.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 4 — в тезисах докладов.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы. В последующих главах сначала дается обзор литературы по тематике работы, вводятся термины и обозначения, выводится постановка задачи математического программирования из физических соображений, приводятся приемы и техники, способствующие улучшению качества решения и анализу полученных результатов. Затем приводится исследование структуры локальных оптимумов с помощью различных алгоритмов оптимизации. Описываются исследования возможностей ФАР в различных условиях.

**Первая глава** посвящена обзору имеющейся литературы и постановке задачи математического программирования. Здесь рассматриваются источники, позволяющие сформулировать постановку задачи [4; 6], приводится анализ похожих исследований [13].

Задачей данной работы является максимизация излучения антенной решетки в заданном направлении при ограничениях на мощность, подводимую к каждому излучателю. В терминах комплексных токов, подводимых к излучателям, эта задача сформулирована в работах [6; 14]. Пусть  $l$  - индекс компоненты вектора направления:  $l = 1$  для азимутального и  $l = 2$  для полярного угла. Расстояние до приемника принимается во много раз превышающим размеры ФАР, поэтому индекс  $l$  итерирует только эти два значения. Суммарное электромагнитное поле  $f_{\Sigma}^{(l)}$ , выраженное в комплексных единицах, вводится как

$$f_{\Sigma}^{(l)} = \sum_{i=1}^N I_i \tilde{f}_i^{(l)}, \quad (1)$$

где  $N$  - число точек питания антенной системы,  $I_i$  - комплексный ток в  $i$ -й точке питания;  $\tilde{f}_i^{(l)}$  - парциальное поле, то есть поле, которое излучается при подаче единичного тока на  $i$ -ю точку питания излучающей системы, в то время, как

ток в других точках питания равен нулю. В качестве количественной меры оценки электромагнитного поля используется напряженность электрического поля. Отметим, что из определения парциального поля следует, что  $\tilde{f}_i^{(l)}$  имеет размерность поля, нормированного к току. Справедливость выражения (1) следует из линейности уравнений Максвелла (более подробно см. [6]). Таким образом, суммарное поле  $f_\Sigma^{(l)}$  является суперпозицией парциальных полей от каждой точки питания излучающей системы.

Значения  $f_i^{(l)}$  и  $f_\Sigma^{(l)}$  - функции направления и частоты, которые могут быть вычислены с помощью некоторой программы моделирования антенн (здесь мы используем NEC-2 [15]).

За  $\bar{f}$  обозначим комплексное сопряжение к  $f$ . Как было упомянуто выше, цель - максимизация направленности излучения. В качестве количественной меры оценки направленности излучения понимается плотность мощности поля в заданном направлении, обозначаемая через  $F$ . Через компоненты электромагнитного поля  $F$  выражается по формуле (2)

$$F = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_\Sigma^{(l)} f_\Sigma^{(l)} \quad (2)$$

и является целевой функцией задачи. При максимизации  $F$  необходимо учитывать ограничения на активную мощность, которую способны выдавать усилители, питающие антенную систему. В силу закона Ома такие ограничения могут быть выражены в терминах только токов или только напряжений. Чтобы найти мощность  $i$ -го источника, мы вводим соответствующие комплексные напряжения  $U_i$  следующим образом:

$$U_i = \sum_{j=1}^N z_{ij} I_j, \quad (3)$$

где  $z_{ij}$  - элементы матрицы сопротивлений  $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ , имеющей размерность  $N \times N$ .

В некоторых случаях более удобно использовать матричную нотацию. В рамках данной нотации мы вводим вектор-столбец токов  $\mathbf{i}$  и вектор-столбец напряжений  $\mathbf{u}$ , состоящие из  $N$  элементов. Целевая функция в таком случае формулируется следующим образом:

$$F = \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i}, \quad (4)$$

где верхний индекс  $+$  означает эрмитово сопряжение,  $A = (a_{ij})$ ,

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_i^{(l)} f_j^{(l)}. \quad (5)$$

Соответственно, соотношение между токами и напряжениями записывается следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{i}. \quad (6)$$

Существуют различные формы ограничений, которые соответствуют различным антенным системам. Например, можно ограничить суммарную мощность  $P$  по всем точкам питания. В этом случае задача оптимизации формулируется так:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ \mathbf{i}^+ \mathbf{B} \mathbf{i} = 1, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4P} (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^+). \quad (8)$$

Такая задача может быть решена аналитически [6].

Задача усложняется, когда ограничение на мощность накладывается по каждой точке питания. В этом случае задача формулируется в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \mathbf{i} \in \mathbb{C}^N \end{cases} \quad (9)$$

где  $\mathbb{C}$  - поле комплексных чисел,  $n$  - число точек питания, на которые накладываются ограничения (в общем случае  $n$  может быть не равно  $N$ ),

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{4P_{max}^{(k)}} (\mathbf{Z}^+ \mathcal{P}^{(k)} + \mathcal{P}^{(k)} \mathbf{Z}), \quad (10)$$

$P_{max}^{(k)}$  - максимально допустимая мощность в  $k$ -й точке питания,  $\mathcal{P}^{(k)}$  - матрицы-проекторы имеющие единственный ненулевой элемент  $\mathcal{P}_{kk}^{(k)} = 1$ . Матрицы-проекторы имеют размерность  $N \times N$ .

Доказано [6], что:

1. Все матрицы  $\mathbf{B}^{(k)}$  имеют не больше чем два ненулевых собственных значения. Одно из собственных значений положительно, остальные отрицательные или нулевые.
2. Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}^{(k)}$  эрмитово-самосопряженные, то есть  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$  для всех  $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}$ .
3. Матрица  $\mathbf{A}$  положительно полуопределена.



4. Кроме того, из физических соображений вытекает, что матрица  $\mathbf{B}_\Sigma := \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^{(k)}$  положительно определена, так как суммарная активная мощность, поглощаемая пассивной цепью, не может быть отрицательной либо нулем, поскольку, часть энергии обязательно излучится [6].

Следует отметить, что задача (9), сформулированная в комплексных числах, имеет симметрию относительно преобразования  $\mathbf{i} \rightarrow e^{j\phi} \mathbf{i}$  всех комплексных координат (по произвольному углу  $\phi$ ). За  $j$  здесь обозначена мнимая единица. В качестве доказательства рассмотрим некоторую квадратичную форму, определенную матрицей  $\mathbf{M}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} e^{j\phi})^+ \mathbf{M} (\mathbf{v} e^{j\phi}) &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N |v_k| |v_l| m_{kl} e^{j(\phi_l + \phi - \phi_k - \phi)} = \\ &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N |v_k| |v_l| m_{kl} e^{j(\phi_l - \phi_k)}. \end{aligned}$$

Отмеченная симметрия может найти применение для уменьшения размерности области поиска на единицу. Например, фиксируя  $Im(y_N) = 0$ , что эквивалентно добавлению ограничения  $x_{2N} = 0$  к задаче (13).

Для разработки алгоритма решения задачи удобно переформулировать ее в вещественных числах. Обозначим соответствующие матрицы:  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$  для целевой функции и  $\mathbf{H}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$ ;  $k = \overline{1, N}$  для ограничений. Пусть  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N^2}$ , и пусть  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$  - вектор, где первые  $N$  компонент являются вещественными частями соответствующих компонент вектора  $\mathbf{y}$ , в то время, как остальные компоненты соответствуют мнимым, то есть:

$$\mathbf{y}_i \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{N+i}), \quad \mathbf{x}_i = Re(\mathbf{y}_i), \quad \mathbf{x}_{N+i} = Im(\mathbf{y}_i) \quad i = \overline{1, N}.$$

Через  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$  обозначим матрицу следующего вида:

$$\left( \begin{array}{c|c} Re(\mathbf{A}) & -Im(\mathbf{A}) \\ \hline Im(\mathbf{A}) & Re(\mathbf{A}) \end{array} \right). \quad (11)$$

Легко проверить, что

$$\left( \begin{array}{c} Re(\mathbf{A}\mathbf{y}) \\ Im(\mathbf{A}\mathbf{y}) \end{array} \right) = \mathbf{G} \left( \begin{array}{c} Re(\mathbf{y}) \\ Im(\mathbf{y}) \end{array} \right). \quad (12)$$

Из того, что матрица  $\mathbf{A}$  эрмитово-самосопряженная, следует, что матрица  $\mathbf{G}$  симметричная. Действительно, так как матрица  $\mathbf{A}$  эрмитово-самосопряжена, следует симметричность  $Re(\mathbf{A})$  и кососимметричность  $Im(\mathbf{A})$ . Это значит, что

$$\mathbf{G}^T = \left( \begin{array}{c|c} Re(\mathbf{A}) & (Im(\mathbf{A}))^T \\ \hline (-Im(\mathbf{A}))^T & Re(\mathbf{A}) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} Re(\mathbf{A}) & -Im(\mathbf{A}) \\ \hline Im(\mathbf{A}) & Re(\mathbf{A}) \end{array} \right) = \mathbf{G}.$$

Таким образом,  $\mathbf{G}$  является симметрической матрицей. То же самое применимо к матрицам ограничений  $\mathbf{H}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$ ;  $k = \overline{1, n}$ . В вещественных числах задача (9) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (13)$$

Задача (13) имеет целевую функцию, заданную квадратичной формой с положительно полуопределенной матрицей  $\mathbf{G}$ . Каждое ограничение формулируется квадратичной формой, определенной симметричной матрицей  $\mathbf{H}^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$  с двумя парами идентичных собственных значений, два из которых положительны, а другие два отрицательны или равны нулю, все остальные собственные числа равны нулю.

Для данной задачи существует преобразование, позволяющее привести к допустимой области решение  $\mathbf{x}$ , которое нарушает только ограничивающие неравенства задачи (13) вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ :

$$\mathbf{x}' := \alpha(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad (14)$$

где  $\alpha(\mathbf{x}) := \max_{k=\overline{1, n}} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}$ . Поскольку как целевая функция, так и ограничения представлены квадратичными формами, применение такой операции приведет к пропорциональному уменьшению в  $\alpha(\mathbf{x})$  раз значений каждой из квадратичных форм. Другими словами, если в некоторой точке  $\mathbf{x}$  значения каждой из квадратичных форм, задающих ограничения, больше 0, причем значения некоторых из них больше 1, то по формуле (14) можно определить множитель, умножение которого на вектор  $\mathbf{x}$  ведет к тому, что наибольшее из значений квадратичных форм, задающих ограничения, будет равно 1. Данная процедура применяется для выбора начального решения, а также для масштабирования итогового решения.

В вычислительных экспериментах бывает полезно ограничить множество допустимых решений задачи шаром или параллелепипедом, так как это позволяет более обоснованно выбрать начальное решение для итерационных методов с мультистартом или сократить перебор в методе ветвей и границ. Отметим, что если  $\mathbf{x}$  удовлетворяет всем ограничениям задачи (13), то

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq N.$$

Обозначим  $\mathbf{H}_\Sigma := \sum_{k=1}^n \mathbf{H}^{(k)}$ . Отметим, что из положительной определенности  $\mathbf{V}_\Sigma$  следует положительная определенность  $\mathbf{H}_\Sigma$ . Отсюда мы можем предположить, что наименьшее собственное число матрицы  $\mathbf{H}_\Sigma$  (обозначим  $\lambda_{\min}$ )

положительно. Тогда, принимая во внимание тот факт, что

$$\min\{\mathbf{z}^T \mathbf{H}_{\Sigma} \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N}, \|\mathbf{z}\| = 1\} = \lambda_{\min},$$

(см. например [16], глава 1, § 1.0.2), мы получаем

$$\mathbf{x}^T \mathbf{H}_{\text{sum}} \mathbf{x} \geq \|\mathbf{x}\|^2 \lambda_{\min}$$

и

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}. \quad (15)$$

Глобально-оптимальное решение задачи невыпуклого математического программирования вида (13) может быть найдено методом ветвей и границ [17; 18] или с использованием методов DC программирования [19; 20]. Локально-оптимальное решение задачи может быть найдено средствами градиентной оптимизации или методом Ньютона [21]. В случае большой размерности могут быть применены различные метаэвристики (см. [10; 22]).

**Вторая глава** посвящена исследованию структуры локальных оптимумов с помощью различных алгоритмов оптимизации. Процедура решения задачи оптимизации ФАР при ограничении мощности по каждой точке питания состоит в следующем:

1. Для каждого излучателя в решетке рассчитать парциальные компоненты полей  $f_i^{(l)}, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, 2}$ .
2. Вычислить матрицы  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{H}^{(k)}, k = \overline{1, n}$ .
3. Оценить радиус допустимой области.
4. Решить задачу (13) с дополнительными ограничениями  $x_N = 0, \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$ .

Данный подход может гарантировать нахождение как локального, так и глобального оптимума, в зависимости от решателя, используемого на шаге 4. Как один из базовых оптимизационных методов, мы рассматриваем метод градиентной оптимизации (максимизационный вариант) с алгоритмом одномерного поиска Дэвиса, Свенна и Кэмпби (ДСК) [21]. Далее целевая функция задачи (13) будет обозначаться символом  $\tilde{F}$ .

В нашей работе от задачи условной оптимизации мы переходим к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций, а именно - методом внешней точки [23; 24]:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n \left( \min \left( 0, \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) + \min \left( 0, 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) \right)^4 \rightarrow \max, \quad (16)$$

где  $r$  - достаточно большой штрафной параметр. Глобально-оптимальное решение для задачи (16) может не быть допустимым для изначальной задачи (13), но увеличение штрафного параметра  $r$  уменьшает нарушение ограничений. Кроме

того, имея решение  $\mathbf{x}$ , которое нарушает в задаче (13) только неравенства вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ , мы будем ссылаться на результаты градиентной оптимизации с использованием восстановления допустимости (14) после срабатывания критерия остановки. Алгоритм градиентной оптимизации повторяется многократно, при этом используется случайно сгенерированный вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$  в качестве стартовой точки. Для каждого найденного решения выполняется проверка на удовлетворение необходимым условиям локальной оптимальности путем решения задачи (17). Затем, решение линейаризованной задачи, удовлетворяющее необходимым условиям локальной оптимальности, снова подается на вход алгоритма градиентной оптимизации, остальные решения отсеиваются. Последний шаг применяется, поскольку решение задачи (17) может оказаться за пределами допустимой области задачи (13). В этом случае данный этап показывает, как далеко решение линейаризованной задачи находится от решения, найденного градиентным алгоритмом.

С целью отыскания глобального оптимума задачи (13) посредством решателя BARON [18], основанного на методе ветвей и границ с использованием локальной оптимизации для поиска начального приближения, необходимо предоставить ограничивающий параллелепипед или верхнюю оценку евклидовой нормы допустимых решений. Для этого может быть использовано неравенство (15). Для всех решаемых в этом эксперименте задач была рассмотрена возможность применения процедуры сужения допустимой области.

Как уже было отмечено, нахождение даже локального оптимума в случае решения задачи невыпуклого квадратичного программирования, вообще говоря, является NP-трудным. В связи с этим, применительно к градиентному подъему, можно ожидать ситуаций, в которых при поиске локального оптимума потребуются чрезмерно большое число итераций или произойдет преждевременная остановка вдалеке от локального оптимума. Из этого следует, что имеет смысл предусмотреть процедуру, позволяющую определить случаи, когда полученное решение не является локальным оптимумом. Для этого была применена процедура проверки необходимых условий локальной оптимальности [7]. Суть данной проверки в том, что мы линейаризуем задачу вблизи точки остановки градиентного алгоритма. Для этого в окрестности решения  $\mathbf{x}_0$  вводим малое приращение  $\mathbf{y}$ . При этом, каждая квадратичная форма, представленная симметричной матрицей  $\mathbf{M}$ , преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}.$$

Учитывая симметричность каждой квадратичной формы и пренебрегая квадратичными по  $\mathbf{y}$  слагаемыми, получаем для задачи (13):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0^T \mathbf{G} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{G} \mathbf{y} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{y} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{y} \leq 1, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (17)$$

В случае локальной оптимальности решения  $\mathbf{x}_0$  модуль  $|\mathbf{y}^T \mathbf{G} \mathbf{y}|$  должен быть равен нулю.

Следует отметить, что решение задачи (17) не подтверждает локальную оптимальность, а лишь предоставляет вспомогательную процедуру, благодаря которой из всего множества решений, найденных в результате многократного запуска из случайно сгенерированной точки градиентного подъема, можно исключить решения, заведомо не являющиеся локальными оптимумами. Такие решения могут быть получены в результате преждевременного завершения работы градиентного метода по точности, если значения целевой функции слабо меняются за итерацию алгоритма или текущее решение оказалось в стационарной точке, не являющейся локальным оптимумом (последнее случается крайне редко).

Вычислительный эксперимент был поставлен для задач, построенных на основе четырех типов ФАР: широкополосных вертикальных излучателей, широкополосных вертикальных диполей и симметричных вертикальных диполей. При моделировании полей был использован пакет NEC2, для которого были предоставлены соответствующие геометрические конфигурации антенных систем. В качестве рабочей частоты было выбрано 5МГц. Рассмотрены квадратные ФАР конфигурации 2x2, 3x3 и 5x5. Заранее отметим, что конфигурация 5x5 была рассмотрена только для решеток СВД, поскольку NEC2 не смог обработать 5x5 ШВИ и 5x5 ШВД из-за высокой сложности этих моделей. В случае с ФАР кольцевой структуры были рассмотрены решетки, состоящие из 8 и 16 излучателей.

Решетки ШВИ смоделированы расположенными на высоте 0.2 метра над поверхностью земли (проводимость земли равна 0.01 См/м, относительная диэлектрическая проницаемость 10). Решетки ШВИ и СВД размещены в свободном пространстве. В случае ШВЕ и ШВД, расстояние между соседними излучателями равно 20 метров. Высота каждого излучателя ШВИ равна 15 метров. Расстояния между концами каждого излучателя ШВД равно 30 метров. В случае СВД, были рассмотрены два типа излучателя: с длинами излучателя 10 и 30 метров и расстояниями между соседними излучателями 5 и 10 метров соответственно. СВД с длиной излучателя равной 10 метрам в исследовании помечены штрихом (СВД'). Система противовесов ФАР кольцевой структуры поднята над землей на 2 м. для того, чтобы ослабить влияние потерь в земле. Расстояние между соседними излучателями в этих ФАР равно 8 м. В качестве направления максимизации излучения выбраны: азимутальный угол  $45^\circ$ , полярный угол  $70^\circ$ .

Здесь сравниваются результаты работы градиентного метода и решателя BARON в его режиме по умолчанию. Во всех экспериментах, описанных ниже, было установлено ограничение по времени 1000с. Все эксперименты проводились на ЭВМ с процессором Intel i7 (тактовая частота: 2.8ГГц), ОЗУ: 16Гб. В случае сходимости градиентного метода (завершение по минимально допустимому приращению целевой функции  $10^{-4}$ ), алгоритм перезапускается заново до истечения запаса времени.

Для каждой задачи была применена процедура получения верхней оценки нормы допустимых решений. При выполнении этой процедуры для многих задач получались близкие к нулю (или даже нулевые) собственные числа, что делало невозможным их дальнейшее использование для оценки нормы  $\sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$ . В таблице 1 такие оценки задачи отмечены прочерком в соответствующем столбце. Так как из физических соображений собственные числа должны быть строго больше 0, проблемы с вычислением верхней оценки нормы допустимых решений свидетельствуют о допущенной погрешности при вычислении матриц, определяющих квадратичные формы задачи (13). В частности, одной из таких проблем является несимметричный вид вещественных матриц. В таком случае, их следует привести к симметричному виду путем усреднения симметричных относительно главной диагонали компонент.

Во время каждой инициализации градиентного метода стартовая точка  $\mathbf{x}$  выбирается независимо с равномерным распределением в кубе  $[-5000, 5000]^{2N}$ . Такой выбор оказался достаточным для всех задач, кроме СВД 2х2, чтобы получить решение, по целевой функции соответствующее решению, предоставляемому решателем BARON. Лучшее из найденных таким образом решений принимается за конечный результат. Параметр штрафа  $r$  в методе градиентной оптимизации установлен равным  $10^6$  на всех запусках. Такое значение было определено эмпирически. В таблице 1 приводятся результаты вычислительно-го эксперимента. Значения целевой функции “ $F$ ” точке, полученной алгоритмом градиентного подъема, приводятся после процедуры масштабирования (14). Для решателя BARON версии 18.5.8 было выбрано то же самое ограничение сверху на процессорное время, что и для градиентного метода (группа колонок “BARON”), и 50000с. для проверки глобальной оптимальности. Во всех таблицах, колонка “ $t$ ” содержит время до получения лучшего найденного решения или до установления глобальной оптимальности. Во всех запусках градиентного метода были получены решения, где активными оказались все ограничения вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ .

Из таблицы 1 видно, что на всех видах решеток, кроме решеток СВД конфигураций 3х3 и 5х5, а также СВД’ конфигураций 2х2 и 3х3, разница в значениях целевой функции не превосходит 1%. Для решеток СВД конфигураций 3х3 и 5х5, а также СВД’ конфигураций 2х2 и 3х3 градиентный алгоритм существенно уступает по качеству найденного решения. Более детальное исследование для СВД’ конфигураций 2х2 и 3х3 показало, что BARON предоставляет

Тип	$\lambda_{min}$	$\sqrt{\frac{N}{\lambda_{min}}}$	Град.		BARON	
			$\tilde{F}$	t, с	$\tilde{F}$	t, с
ШВИ 2x2	0.0215	13.6	138.2	<b>0.054</b>	<b>139.2</b>	0.12
ШВИ 3x3	0.0177	70	575.7	0.93	<b>580.6</b>	<b>0.34</b>
ШВД 2x2	0.009	21	459.7	<b>0.13</b>	<b>463.6</b>	0.27
ШВД 3x3	0.0013	6767	915	24.4	<b>925</b>	<b>0.34</b>
СВД 2x2	$2 \cdot 10^{-3}$	44	357	1.9	<b>361</b>	<b>0.16</b>
СВД 3x3	$5.6 \cdot 10^{-9}$	$8.4 \cdot 10^5$	1138	25.6	<b>1261</b>	<b>0.38</b>
СВД 5x5	-	-	5318	1000	<b>6716</b>	1000
СВД' 2x2	$7.76 \cdot 10^{-9}$	$22 \cdot 10^3$	233	2.52	<b>253</b>	<b>0.25</b>
СВД' 3x3	0.0008	$1 \cdot 10^4$	664	71	<b>1153</b>	<b>1.48</b>
СВД' 5x5	-	-	<b>1382.7</b>	1000	33.5	<b>217.94</b>
Кольц. 8	$3 \cdot 10^{-3}$	154	217	8.06	<b>218</b>	<b>0.23</b>
Кольц. 16	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^6$	727	90.9	<b>734</b>	<b>1.37</b>

Таблица 1 — Результаты оптимизации, полученные с помощью градиентного подъема и решателя BARON.

решение с очень малой областью притяжения. Суть такого исследования заключалась в том, что к решению, полученному с помощью решателя BARON добавлялось некоторое возмущение, после чего модифицированная точка подавалась на вход градиентного алгоритма. Очень малые возмущения (до 0.5% относительно нормы решения) исходной точки не мешали градиентному алгоритму найти точку, лежащую в окрестности решения, найденного с помощью решателя BARON. Однако, принимая на вход возмущенное порядка 0.5% относительно нормы решение решателя BARON, градиентный подъем приводил к решению со значением целевой функции  $\tilde{F} = 233$  в случае СВД' 2x2. При этом, используемая нами процедура проверки локальной оптимальности не дала опровержения локальной оптимальности решения со значением целевой функции  $\tilde{F} = 253$ , предоставленного решателем BARON. Аналогичные результаты были получены как для СВД, так и для СВД' конфигурации 3x3. Особое внимание привлекают решетки СВД и СВД' конфигурации 5x5, поскольку за предоставленный временной промежуток градиентный подъем так и не достиг критерия остановки. BARON в случае СВД' 5x5 за это же время достиг решения, значительно хуже по целевой функции. Вероятно, как BARON, так и градиентный подъем сошлись бы к более качественному решению, если бы не были ограничены по времени. Кроме решеток ШВИ и ШВД конфигурации 2x2 BARON демонстрирует лучшее время счета. Однако, следует отметить, что для обоих алгоритмов время, затраченное на поиск решения, было либо существенно меньше, либо сравнимо со временем, затраченным на построение исходных данных пакетом моделирования NEC, что делает оба подхода равноценными по времени работы с практической точки зрения. Важным результатом, не приведенным в таблице 1, является то, что для ФАР конфигураций ШВИ 2x2, ШВД 2x2 и ШВИ 3x3 была доказана глобальная оптимальность найденного решателем BARON решения.

В качестве иллюстрации физических свойств полученных решений, на рис. 1 приведен горизонтальный план диаграммы направленности ФАР для решений, найденных с помощью метода градиентной оптимизации. Под диаграммой направленности понимается графическое представление зависимости коэффициента усиления антенны от ее направления в заданной плоскости. Такая диаграмма позволяет наглядно оценить, на какое направление приходится максимум излучения, и провести качественную оценку работы алгоритма. На рис. 1 изображена диаграмма направленности для решетки ШВИ размера 2x2 (пунктирная линия) и ШВИ 3x3 (сплошная линия). Для решений, полученных с помощью решателя BARON для этих задач, диаграммы аналогичны. Еще раз отметим, что при эксперименте направление оптимизации было представлено углами в полярных координатах: азимутальный угол был принят равным  $45^\circ$ , полярный угол -  $70^\circ$ . Как видно из горизонтального плана диаграммы направленности при значении полярного угла  $70^\circ$ , максимальному излучению соответствует направление оптимизации  $45^\circ$ . Сравнение диаграмм показывает, что использование решеток с большим числом излучателей позволяет уменьшить излучение в других направлениях.

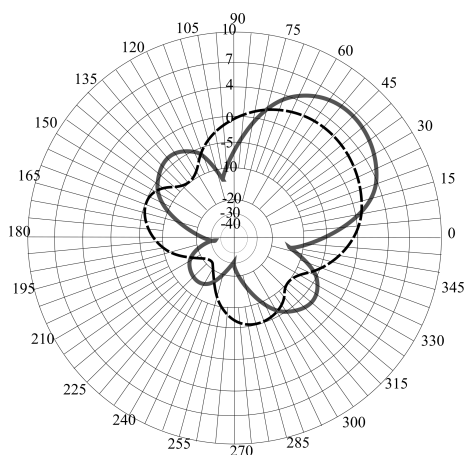


Рис. 1 — Горизонтальный план диаграммы направленности для решетки ШВИ 2x2 (пунктир) и ШВИ 3x3 (сплошная)

Для оценки общего числа локальных оптимумов использовался метод переписи Шнабеля. Данный метод имеет применение в экологии и заключается в выводе статистических оценок численности популяции на основе числа особей, помеченных в результате эксперимента, из популяции с неизменным составом, где каждая особь имеет константную вероятность отлова. В [12] предлагается адаптация такого метода для оценки числа локальных оптимумов. В таблице 2 приводится статистика по числу различных точек остановки (в пределах



ФАР	$M$	$M_{ne}$	$M_f$	$\mathcal{B}_{M_f}$	$\mathcal{L}_{M_f}$	$M_{y \approx 0}$	$\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$	$\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$
ШВИ 2x2	18368	4	1	1	1	4	4	4
ШВД 2x2	7678	4	1	1	1	4	4	4
СВД 2x2	523	1	1	1	1	1	1	1
СВД 3x3	39	9	2	2	2	5	5	5
СВД' 2x2	396	370	3	3	3	338	1000	1213
СВД' 3x3	14	14	3	3	3	1	1	1
ШВИ 3x3	1070	3	1	1	1	3	3	3
ШВД 3x3	41	4	4	4	4	1	1	1
Кольц. 8	124	9	2	2	2	9	9	9
Кольц. 16	11	6	1	1	1	6	6	6

Таблица 2 — Структура локальных оптимумов.

заданной точности) процедуры мультистарта в течение 1000 с. процессорного времени. Для каждого решения была применена процедура линеаризации задачи и проверки необходимых условий локальной оптимальности. Приемлемыми считались отличия целевой функции линеаризованной задачи от значения целевой функции, найденного градиентным методом менее чем на 1%. Здесь  $M$  - число выполненных запусков за отведенное время,  $M_{ne}$  - число групп решений, отличающихся не более чем на 10% по каждой из координат,  $M_f$  - число групп значений целевой функции у таких неэквивалентных решений (с точностью до 10%, приведенных в таблице 1).  $M_{y \approx 0}$  - число групп решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности.  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{L}$  - оценка нижней границы и оценка максимального правдоподобия числа локальных оптимумов, рассчитанные по методу переписи Шнабеля. Доверительная вероятность для данного метода была выбрана равной 95%. Оценки для числа решений с различными значениями целевой функции обозначены  $\mathcal{B}_{M_f}$  и  $\mathcal{L}_{M_f}$ . Оценки для числа решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, обозначены  $\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$  и  $\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$ . В случае СВД и СВД' конфигурации 5x5 в течение 1000 с градиентный метод не достиг решения, удовлетворяющего условию остановки, поэтому данный результат не включен в таблицу 2.

Как видно из таблицы, во всех экспериментах в некоторых запусках были найдены неразличимые с практической точки зрения решения. Для квадратных решеток ШВИ и ШВД было найдено по одному такому решению. Решетки кольцевой структуры и СВД' 2x2 имеют значительное разнообразие как по найденным векторам решений, так и по значениям целевой функции. Относительно решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, можно сказать, что с большой вероятностью для задачи СВД' 2x2, были найдены далеко не все возможные решения. О решетке СВД' 3x3 известно, что градиентный подъем был остановлен в точке, не лежащей в окрестности решения, предоставляемого решателем BARON.

На рис. 2 приведены диаграммы локальных оптимумов, где по оси ординат отложены значения целевой функции, а по оси абсцисс - расстояние до лучшего

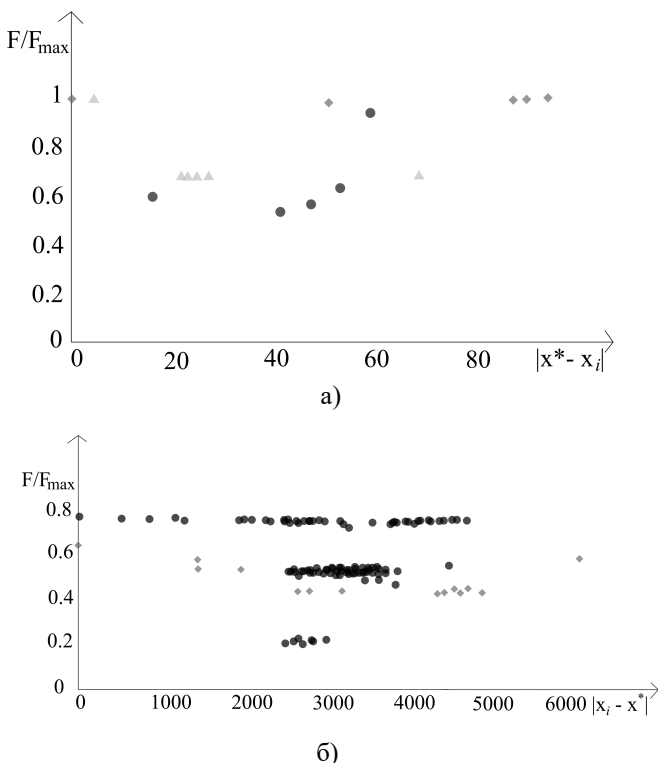


Рис. 2 — Структура множества найденных решений для задач ШВИ, ШВД, СВД (а) и СВД' (б)

известного решения. В случае а) точками обозначены результаты для кольцевых решеток, состоящих из 8 излучателей, ромбами - для кольцевых решеток, состоящих из 16 излучателей, пятиугольниками - для СВД 3х3. В случае б) точками обозначены результаты для СВД' 2х2, ромбами - для СВД' 3х3. Диаграмма показывает, что значения, соответствующие одному и тому же значению целевой функции, могут находиться достаточно далеко друг от друга, что позволяет сделать предположение о наличии неучтенных симметрий задачи (о множестве линейных симметрий задачи см. в [25]).

При анализе структуры локальных оптимумов может возникнуть вопрос об устойчивости решения по аргументу. В данной работе было проведено исследование изменения значения целевой функции при изменении оптимизируемого направления на малый угол. В рассмотрение принималось также изменение значения целевой функции при подстановки в исходную задачу решения, найденного для нового направления (для удобства вывода результата такая подстановка обозначена за P1), и наоборот - при подстановке в задачу для измененного направления решения, полученного для исходного направления

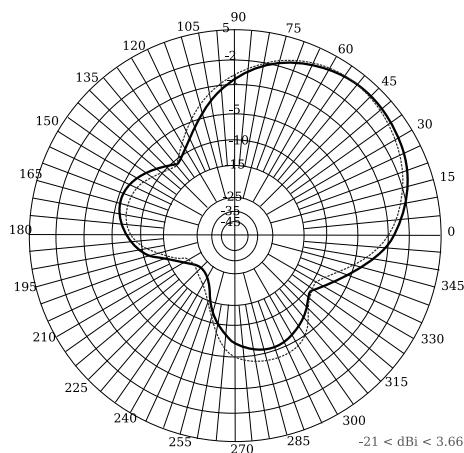


Рис. 3 — Диаграммы направленности для ШВИ 2х2 при оптимизации в направлении 70:45 (сплошная линия) и 70:50 (пунктир)

(обозначается P2). Исследование проводилось на квадратных решетках, состоящих из 4-х и 9-и излучателей. Азимутальный и полярный угол менялись на  $5^\circ$ . Результаты приведены в таблице 3

ФАР	Подстановка	70:45	75:45	65:45	70:50	75:40	65:50
ШВИ 2х2	-		125	138	137	137	125
	P1	138	138	138	137	137	137
	P2		125	138	136	136	123
ШВИ 3х3	-		532	565	574	533	564
	P1	575	574	572	560	558	557
	P2		530	562	559	517	546
ШВД 2х2	-		518	454	454	512	389
	P1	459	458	459	457	456	389
	P2		518	392	452	510	386
ШВД 3х3	-		1817	872	1015	1196	1198
	P1	1501	1506	1047	1000	1004	1448
	P2		1774	1203	1450	1713	1162
СВД 2х2	-		417	315	365	412	312
	P1	369	368	369	367	366	367
	P2		417	315	363	410	310
СВД 3х3	-		1789	1176	1459	1162	1753
	P1	1484	1475	1472	1446	1428	1444
	P2		1782	1164	1427	1120	1713

Таблица 3 — Значения целевой функции при изменении оптимизируемого направления на малый угол.

Результаты исследования показывают (см. Рис.3), что изменение направления оптимизации на малый угол соответствуют повороту исходной диаграммы направленности на этот угол.

Наличие большого количества решений, соответствующих одному и тому же значению целевой функции, приводит нас к исследованию групп симметрий. В [25] показано, что любой элемент группы непрерывных симметрий задачи 13 может быть описан в виде 18.

$$Q = e^{\sum_n a_n G_n}. \quad (18)$$

где  $a_n$  - вещественные числа,  $G_n$  - генераторы. В качестве генераторов можно выбрать косо-симметричные матрицы, которые содержат над главной диагональю один единичный элемент, симметричный ему противоположный элемент и остальные нули. Введем матрицу:  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$ , которая может быть представлена в виде конгруэнтного преобразования диагональной матрицы  $D$ :

$$\mathbf{H}_\Sigma = S^T D S,$$

Нахождение непрерывных групп симметрий сводится к решению задачи 19.

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_i \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{H}}_i, \\ \tilde{\mathbf{G}} \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{G}}. \end{cases} \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = (S^{-1})^T \mathbf{A} S^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = (S^{-1})^T \mathbf{B}_i S^{-1}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (20)$$

Вычислительный эксперимент состоит из следующих этапов:

1. Обработка. На этом этапе возможная неточность данных нивелируется усреднением симметричных компонент матриц (матрицы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  должны быть симметричны).
2. Преобразование  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$  к канонической форме используя метод Лагранжа для вычисления матриц  $S$  и  $S^{-1}$ .
3. Применение метода Гаусса к системе линейных (19) для вычисления генераторов  $\hat{G}_n$ .

Следует отметить, что входные данные могут содержать некоторые погрешности, связанные с несимметричностью матриц  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$ , что может существенно повлиять на поиск непрерывных групп симметрий. Таким образом, на этапе 1, мы используем известные свойства задачи чтобы нивелировать влияние погрешности. Также, в методе Гаусса на шаге 3, любые значения принимаются за 0 если их абсолютное значение меньше определенного порогового значения  $\Delta$ , который является параметром алгоритма. Причина в том, что последовательное

исключение переменных из уравнений, выполняемое методом Лагранжа с представлением вещественных чисел с плавающей запятой, не может гарантировать идеальную точность. В результате некоторые линейно зависимые строки матрицы не могут быть исключены, что может привести к неверному результату. Большое значение порога  $\Delta$  может привести к вырожденности задачи, тогда как слишком малое значение  $\Delta$  не позволит выявить линейные зависимости. В данном эксперименте,  $\Delta$  изменялось от  $10^{-4}$  до  $10^{-12}$ . В данном диапазоне для каждого рассмотренного частного случая задачи, не было получено различий в полученных решениях.

Описанная процедура нахождения непрерывных групп симметрий применяется к примерам, описанным во второй главе. Для всех рассмотренных задач было выявлено только наличие фазовой симметрии. Возможно, множественность решений объясняется наличием дискретных симметрий. Выявление дискретных симметрий является объектом дальнейших исследований.

Как было показано выше, градиентный метод может предоставить решение, не являющийся локальным оптимумом, если целевая функция слабо изменяется в окрестности текущей точки. Алгоритм дифференциальной эволюции не подвержен такому поведению. Эксперименты показывают, что в целом эволюция популяции соответствует динамике случайного облака точек, движущегося как целое вдоль рельефа оптимизируемой функции, повторяя его характерные особенности. В случае попадания в овраг «облако» принимает форму этого оврага и распределение точек становится таким, что математическое ожидание разности двух случайных векторов оказывается направленным вдоль длинной стороны оврага. Это обеспечивает быстрое движение вдоль узких вытянутых оврагов, тогда как для градиентных методов в аналогичных условиях характерно колебательная динамика «от стенки к стенке». Приведенные эвристические соображения иллюстрируют наиболее важную и привлекательную особенность алгоритма ДЭ — способность динамически моделировать особенности рельефа оптимизируемой функции. Именно этим объясняется замечательная способность алгоритма быстро проходить сложные овраги, обеспечивая эффективность даже в случае сложного рельефа.

Кратко опишем идею алгоритма ДЭ. В начале происходит генерация популяции. Если нет дополнительной информации, такая популяция особи популяции генерируются случайным образом с равномерным распределением. Затем, пока все особи не сойдутся в одной точке, каждая особь подвергается мутации путем присваивания ей признаков другой особи. Процедура, определяющая, в какой степени признаки других особей участвуют в эволюции конкретной особи является параметром алгоритма. Далее происходит сравнение значений целевой функции мутировавшей особи со значением целевой функции исходной особи. Выживает особь с лучшим значением целевой функции.

Данный алгоритм хорошо поддается модификации для запуска в параллельных потоках. В этом случае, на очередной итерации алгоритма выбирается некоторый набор особей, эволюция каждой из которых на данной итерации

происходит независимо от эволюции другой. В данной работе был предложен вариант реализации алгоритма дифференциальной эволюции, адаптированный для запуска на графическом устройстве. Использование алгоритма ДЭ позволило достичь решения с целевой функцией  $\tilde{F} = 253$  для задачи СВД' 2х2.

**Третья глава** посвящена исследованию ФАР в различных условиях.

На практике использование высоко симметричных ФАР вызывает особый интерес из следующих соображений: измерение матрицы сопротивлений является тривиальной задачей, в то время как измерение парциальных полей требует большое количество приемников для всех возможных направлений излучения. Использование высокосимметричных ФАР позволяет выполнить расчеты для одного направления и затем легко адаптировать их для других симметричных направлений. Другой особенностью, влияющей на результаты моделирования является наличие потерь в земле (см. [26]). Чтобы ослабить этот эффект, антенные системы с противовесами подняты над землей на 2 м.

В данной главе мы изучаем, как изменяется общий коэффициент усиления с ростом радиочастоты и плотности системы противовесов. Общий коэффициент усиления является суммой частичных коэффициентов усиления в двух ортогональных поляризациях. Плотность системы противовесов определяется числом продольных и поперечных проводов, относящихся к одному и тому же излучателю. Частота изменяется от 5 до 30 МГц. Вычисления производились на решетках ШВИ, состоящих из 8 излучателей. Для расчета матрицы сопротивлений и матрицы излучений использовался пакет моделирования антенных систем NEC2 [15].

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS, поскольку, в основном он деонстрирует лучшие результаты по сравнению с градиентным подъемом. Результаты оптимизации направленности решетки сравниваются с коэффициентом усиления одиночного излучателя, установленного в центре такой же системы противовесов. Плотность системы противовесов обозначается в формате *long : trans*, где *long* - число продольных проводов, относящихся к одному излучателю, а *trans* - поперечных. Высота каждого ШВИ - 15м. В качестве направления оптимизации выбирается 70° полярного угла и 45° азимутального угла в сферических координатах.

На рис. 4 показано, как изменяется коэффициент усиления с ростом радиочастоты. Мы можем наблюдать, что при значениях частоты 5 и 30 МГц решетка оптимизируется довольно плохо. Также можно увидеть, что, в основном, увеличение плотности системы противовесов приводит к росту коэффициента усиления. Единственное исключение - решетка с плотностью системы противовесов 6 : 9 на частоте 15МГц, где наблюдается неожиданное падение коэффициента усиления. Такое поведение может быть объяснено тем, что BARON не достиг глобального оптимума.

На рис. 5 показано, как изменяется разница коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя с ростом частоты. Заметным результатом здесь является то, что на частоте 25МГц усиление ФАР существенно больше усиления

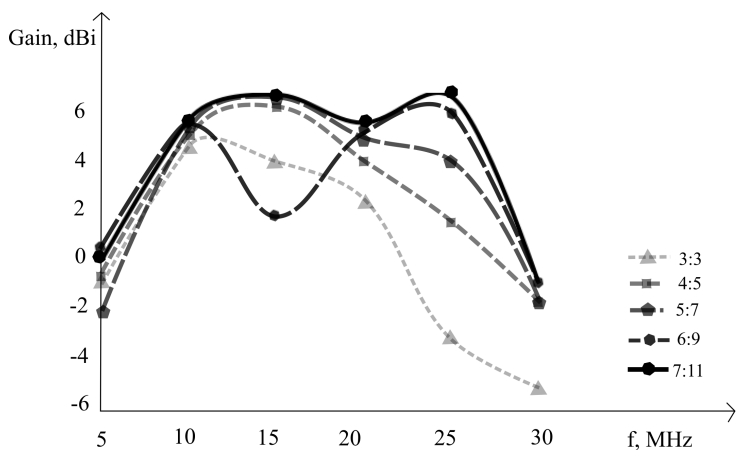


Рис. 4 — Зависимость от частоты общего коэффициента усиления ФАР при оптимизации в направлении 70:45

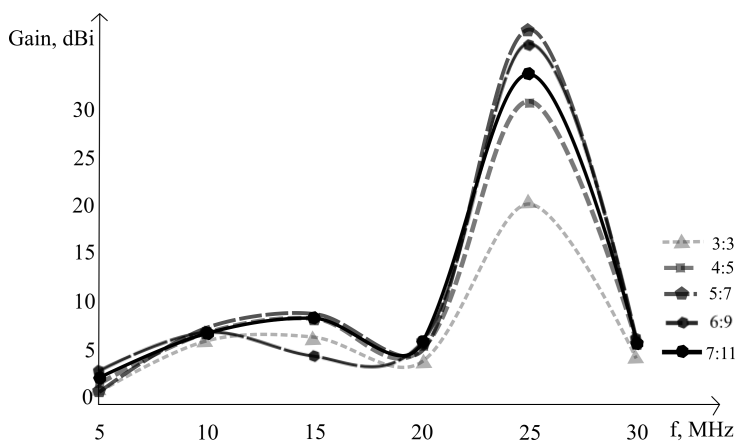


Рис. 5 — Сравнение коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя

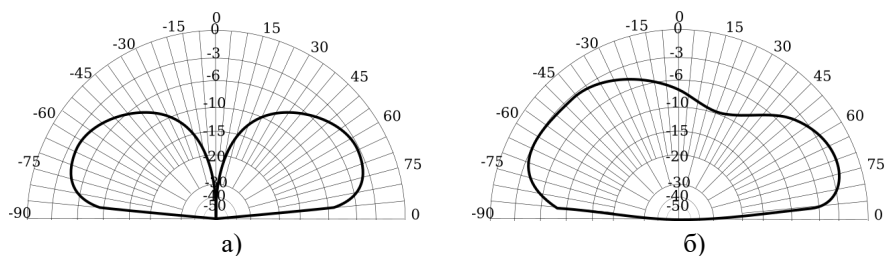


Рис. 6 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 5МГц

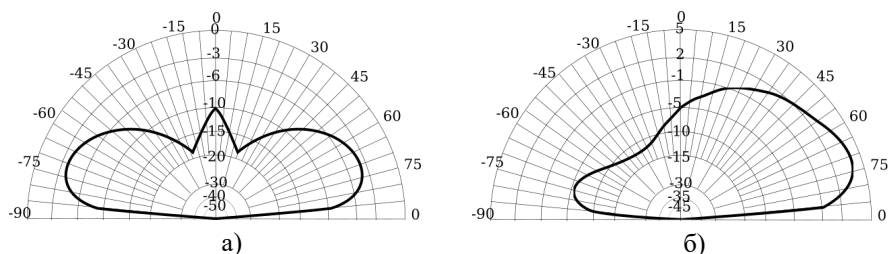


Рис. 7 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 10МГц

одиночного излучателя. Объяснение этого эффекта будет приведено далее при сравнении диаграмм направленности. При 5МГц усиление ФАР существенно не превосходит усиление одиночного излучателя, однако, уже на 10МГц разница возрастает до 7.53дБ. Даже при 30МГц, где ФАР не оптимизируется хорошо, разница с одиночным излучателем составляет 6.63дБ в лучшем случае и 4.84дБ в худшем.

Далее будут рассмотрены диаграммы направленности ФАР с плотностью противовесов 5 : 7 как один из наиболее типичных результатов.

При частоте 5МГц (см Рис. 6) мы можем наблюдать, что максимум усиления в случае ФАР приходится на  $70^\circ$  и превосходит соответствующее значение одиночного излучателя на 1.33 дБ. Использование ФАР с плотностью системы противовесов 6:9 позволяет увеличить этот параметр до 3.14 дБ.

Результат оптимизации более заметен при частоте 10МГц (см Рис. 7): задний лепесток существенно меньше и разница усиления к одиночному излучателю достигает примерно 8 дБ. Похожие результаты наблюдаются при частоте 15МГц.

При 20МГц мы можем наблюдать, что как в случае одиночного излучателя, так и в случае ФАР, коэффициент усиления падает по отношению к результату при 15МГц (см Рис. 4). Диаграмма направленности изображена на рис. 8.



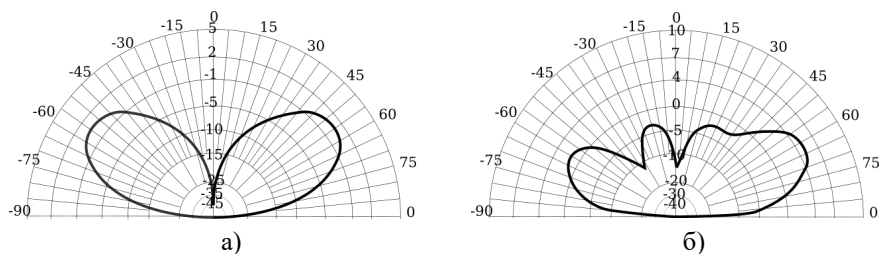


Рис. 8 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 20 МГц

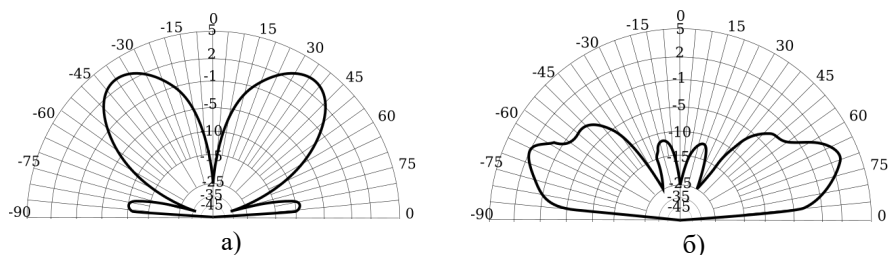


Рис. 9 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 25 МГц

Интересный результат наблюдается при 25 МГц (см Рис. 9), где усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. Сравнение их диаграмм направленности показывает, что одиночный излучатель довольно плохо излучает в направлении оптимизации, тогда как ФАР имеет максимум излучения в этом направлении. Предположительно, такой эффект был получен вследствие учета взаимного влияния. Согласно (5), если пренебречь взаимным влиянием излучателей, плотность мощности  $F$  будет максимальна тогда, когда комплексные амплитуды парциальных полей будут синфазны. Для проверки гипотезы о необходимости учета взаимного влияния в данной работе производилось сравнение диаграмм направленности решеток разных конфигураций после математической оптимизации их направленности в заданном направлении согласно модели (13) с соответствующими диаграммами одиночного излучателя и со случаем фазирования решетки без учета взаимного влияния (далее – простое фазирование).

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS, поскольку, как правило, он обеспечивает большую точность решений по сравнению с градиентным подъемом [A1]. Высота каждого ШВИ равна 15 м. Длина плеча симметричных излучателей также равна 15 м. Направление оптимизации по умолчанию было установлено на  $70^\circ$  полярного угла и  $45^\circ$  азимутального угла в сферических координатах. Для некоторых экспериментов было проведено дополнительное исследование при  $85^\circ$  полярного угла.

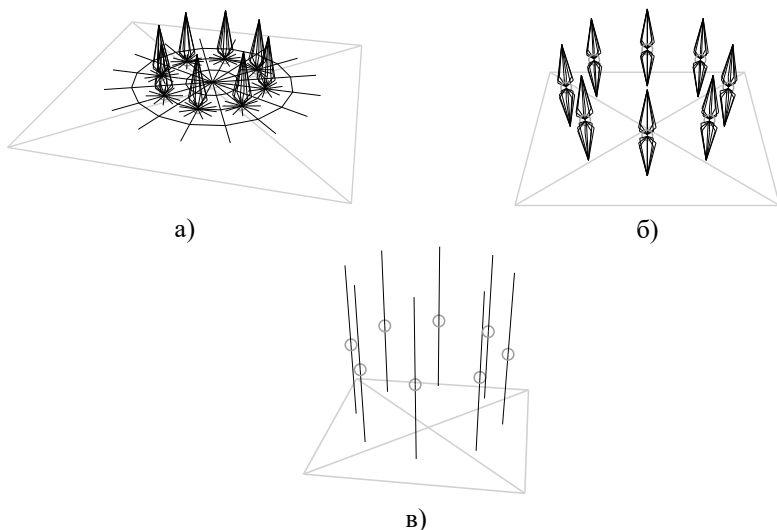


Рис. 10 — ФАР кольцевой структуры: ШВИ (а) ШВД (б) и СВД (в)

Для решеток ШВИ (см. Рис. 10, а.) производилось сравнение диаграмм направленности при варьировании расстояния центра излучателя до центра решетки (от 7 до 80 м.), длины радиальных противовесов (от 3 до 20 м.) и присутствия или отсутствия общей системы противовесов. Диаграммы направленности при этом имели различную форму, однако, качественно различие между коэффициентами усиления всегда сохранялось (см. Рис. 11): результат оптимизации не дает значимого преимущества перед простым фазированием.

Для ШВД (см. Рис. 10, б.) производилось исследование диаграмм направленности при варьировании расстояния центра излучателя до центра решетки от 5 до 50 м. В большинстве случаев, использование решения задачи математического программирования не давало существенного преимущества перед простым фазированием (см. Рис. 12). Тем не менее, при расстоянии между центром излучателя и центром решетки равным 20 м. это различие составило около 4 дБ (см. Рис. 13).

Аналогичные результаты были получены и для решетки (см. Рис. 10, в.). При оптимизации в направлении полярного угла равном  $70^\circ$  при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 35 до 37 м. разница между коэффициентом усиления решения задачи математического программирования и усилением простого фазирования также достигала 4 дБ (см. Рис. 14). При оптимизации в направлении полярного угла равном  $85^\circ$  при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 25 до 29 м. эта разница достигала 5 дБ (см. Рис. 15).

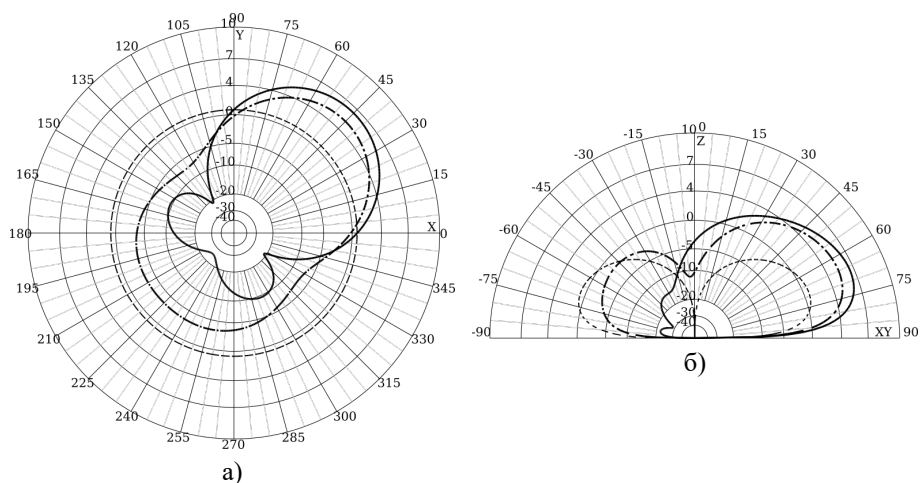


Рис. 11 — Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности ШВИ при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 15 м. и длиной радиальных противовесов 5 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.

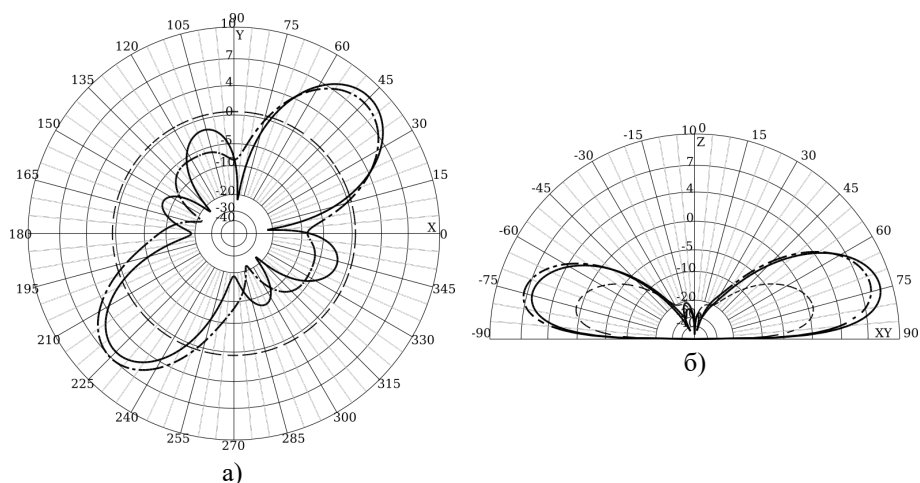
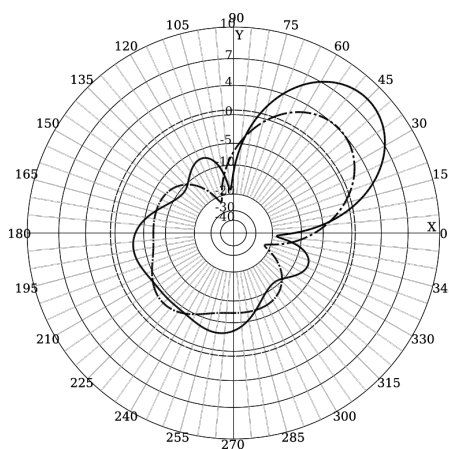
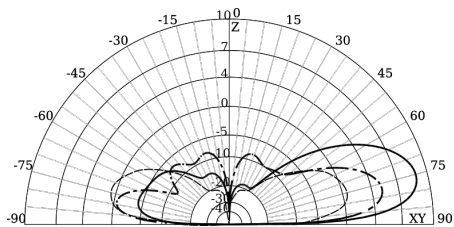


Рис. 12 — Рис. 3. Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 30 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.

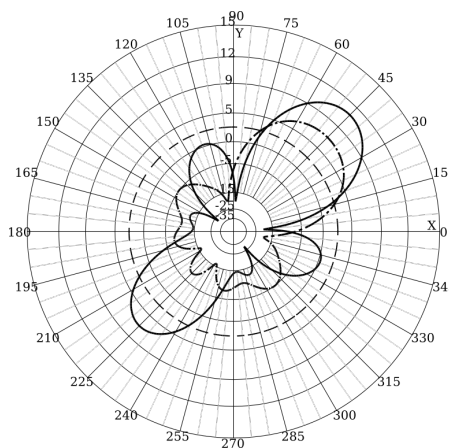


а)

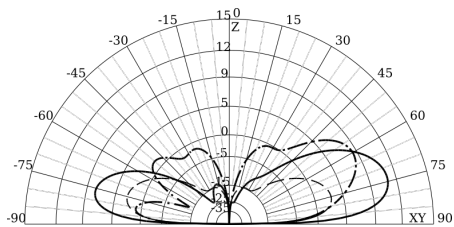


б)

Рис. 13 — Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 20 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.



а)



б)

Рис. 14 — Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности СВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 37 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.

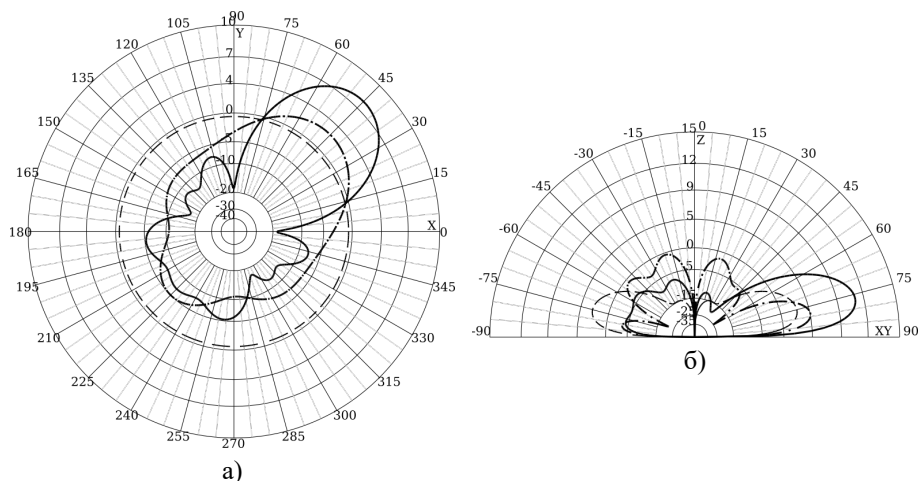


Рис. 15 — Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности СВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 25 м, полученные для  $85^\circ$  полярного угла. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.

В четвертой главе приведено разработанного программного комплекса. Для проведения вычислительных экспериментов был разработан интерпретатор «Expi» и его графическая оболочка «ExpiIDE».

Формат языка «Expi» позволяет в декларативной форме объявлять правила построения моделей и задавать параметры запуска экспериментов. Например, рассмотрим проведение эксперимента по исследованию эффекта взаимного влияния для кольцевых ШВД. Для этого потребуются описать «каплеобразный» излучатель, который состоит из 8-ми «колен». Для построения «колена» нужно провести проводник через три точки.

```
def knees = 8
def height = 15
def kneeWidth = 2.5

def Drop {
  def step = 2 * pi / knees
  for angle from 0 to 2 * pi by step {
    rotate around z by angle
    (0, 0, 0) ->
    (kneeWidth, 0, kneeWidth) ->
    (0, 0, height)
  }
}
```

В приведенном листинге с помощью команды `def varName = value` объявляются переменные. Здесь объявляются следующие переменные:

```
def knees = 8: количество колен в излучателе,  
def height = 15: высота «каплеобразного» излучателя,  
def kneeWidth = 2.5: расстояние, на которое выносятся «колена» излучателя.  
Команда def GroupName {} позволяет объявлять группы инструкций для их последующего использования. Внутри группы Drop вычисляется угол между двумя соседними «коленами» и запускается цикл по кругу: for angle from 0 to 2 * pi by step {}. Внутри цикла объявляется поворот всех последующих инструкций на заданный угол: rotate around z by angle и проводится провод через три точки колена: (0, 0, 0) -> (kneeWidth, 0, kneeWidth) -> (0, 0, height).
```

Далее требуется сформировать излучатель ШВД, который представляет собой два противоположно направленных «каплеобразных» излучателя, соединенных коротким проводом к которому подключен генератор.

```
def base = 0.5  
  
def BVD {  
    (0, 0, -base / 2) ~lv~ (0, 0, base / 2)  
    translate z to base / 2  
    Drop  
    rotate around x by pi  
    Drop  
}
```

Для подключения генератора в сегмент провода нужно вместо инструкции `->` указать `~voltageOrCurrent~`. В качестве единицы измерения можно указывать как вольты, так и амперы, причем как в вещественной, так и в комплексной форме. Итак, мы провели короткий проводник с подключенным генератором: `(0, 0, -base / 2) ~lv~ (0, 0, base / 2)`. Теперь поднимем все последующие инструкции так, чтобы начало координат приходилось на конец этого проводника: `translate z to base / 2` и установим туда «каплеобразный» излучатель: `Drop`. Теперь развернем последующие инструкции на  $180^\circ$ : `rotate around x by pi` и установим излучатель в противоположном направлении: `Drop`.

Остается только установить излучатели в решетку.

```
def count = 8  
  
def PAA {  
    def step = 2 * pi / count  
    for angle from 0 to 2 * pi by step {  
        rotate around z by angle  
        translate x to radius
```

```

    BVD
  }
}

```

Переменная `radius` является динамической и будет задана в настройках эксперимента. Все остальные языковые конструкции, приведенные в данном листинге уже описаны выше.

Для проведения вычислительного эксперимента требуется экспортировать требуемые инструкции в формат NEC.

```

def ExportPAA {
  export nec (n: 'r_bvd_${radius}.nec', f: 5, g: 'real') {
    PAA
  }
}

```

При этом, команде `nec` требуется передать имя файла, частоту и пресет параметров земли. Обратите внимание, что имя файла может быть параметризовано, что позволит генерировать файлы с отличающимися именами в серии экспериментов. Для проведения серии экспериментов достаточно запустить цикл с варьированием требуемого параметра, экспортировать `nec` файл и выполнить команду `solve paa`.

```

for radius from 3 to 50 by 2 {
  ExportPAA
  solve paa (
    theta: 70, phi: 45,
    nec: 'r_bvd_${radius}.nec',
    compare: 'bvd-1.nec',
    package: 'GAMS', solver: 'QCP=BARON'
  )
}

```

Данная команда принимает направление оптимизации в параметрах `theta` и `phi`, имя `nec` файла, содержащего модель решетки, имя `nec` файла, содержащего модель антенны, с которой требуется произвести сравнение диаграмм, название оптимизационного пакета и решателя. В «Exri» уже встроен интерфейс для работы с пакетом GAMS. Однако, для его правильной работы, требуется установить путь до исполняемого пакета в переменных среды операционной системы. Имеется возможность использования любого пользовательского пакета. Для этого, исполняемый файл пакета должен реализовывать следующий вызов из командной строки:

```
package solver --input problem.bin --output solution.bin
```

В файле `problem.bin` должны находиться входные данные задачи оптимизации в бинарном формате, в файл `solution.bin` должно выводиться полученное

решение в бинарном формате. Исполняемый файл пакета можно расположить в директории исполняемого файла «Expri» или же указать путь в переменных среды операционной системы.

Графическая оболочка «ExpriIDE» представляет собой файловый инспектор с возможностью редактировать и запускать файлы экспериментов exp, просматривать и экспортировать диаграммы направленности и геометрию антенных систем (см. Рис. 16).

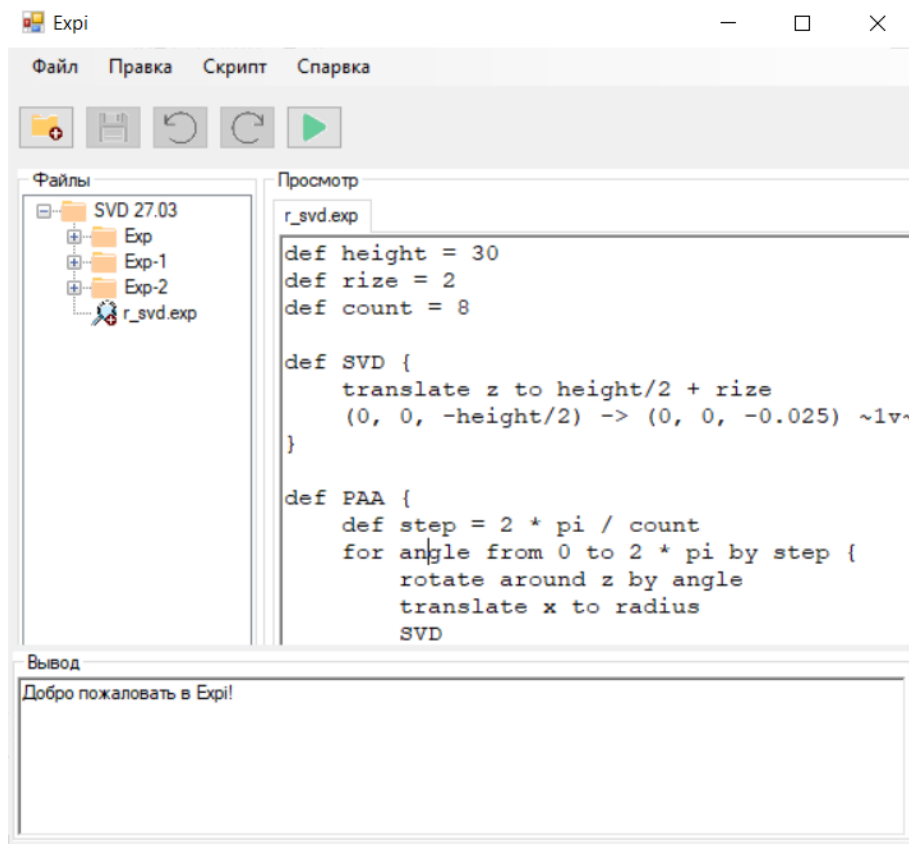


Рис. 16 — Графический интерфейс ExpriIDE

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. В текущей работе была рассмотрена проблема оптимизации направленности излучения фазированных антенных решеток при ограничении



мощности по каждой точке питания. Для данной задачи была составлена модель квадратичного программирования в вещественных числах. Поскольку такая проблема не может быть решена аналитически, мы используем численные методы, а именно, BARON и градиентный алгоритм. Произведено сравнение результатов работы пакета BARON и градиентного алгоритма в вычислительном эксперименте. Исследованы свойства задачи невыпуклого квадратичного программирования. Было выявлено, что в примерах, составленных на моделях, имеющих практическую значимость (ШВИ и ШВД различных конфигураций), разница в качестве найденных решений не превосходит 1%. Время работы для таких задач в случае обоих методов существенно меньше времени, затраченного на генерацию входных данных. Кроме того, при исследовании структуры локальных оптимумов было выявлено, что не во всех рассмотренных примерах локальные оптимумы уникальны, при том, что значения целевой функции во многих решениях принимают одинаковое значение.

2. Проведены вычислительные эксперименты, выявляющие наличие непрерывных групп симметрий допустимых решений. Для всех рассмотренных задач выявлено наличие только фазовой симметрии.
3. В рамках данного исследования было выявлено наличие ситуаций, в которых коэффициент усиления, соответствующий решению задачи математического программирования, имеет существенное преимущество перед коэффициентом усиления простого фазирования. Например, при оптимизации в направлении  $(70^\circ, 45^\circ)$  в случае ШВД при расстоянии излучателя до центра решетки равно 20 м. и СВД при расстоянии излучателя до центра решетки равно 37 м. разница составляет порядка 4 дБ. При оптимизации в направлении  $(85^\circ, 45^\circ)$  в случае СВД при расстоянии излучателя до центра решетки равно 25 м. эта разница достигает 5 дБ. Следовательно, при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона целесообразны расчеты с учетом взаимного влияния излучателей. В то же время, отмечены случаи, когда результат решения задачи математического программирования не дает существенного прироста усиления по сравнению с фазированием без учета взаимного влияния.
4. Для проведения вычислительных экспериментов были разработаны интерпретатор «Expi» и его графическая оболочка «ExpiIDE».

## Публикации автора по теме диссертации

- A1. Тюнин, Н. Н. Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решеток [Текст] / Н. Н. Тюнин // Дискретный анализ и исследование операций. — 2021. — Т. 28, № 3. — С. 20—44. — (BAK, Scopus, WoS).

- A2. *Tyunin, N. N.* On mutual influence of emitters in directivity optimization of shortwave phased antenna arrays [Text] / N. N. Tyunin // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1901, no. 012053. — P. 1–8. — (BAK, Scopus, WoS).
- A3. *Eremeev, A. V.* Non-Convex Quadratic Programming Problems in Short Wave Antenna Array Optimization [Text] / A. V. Eremeev, N. N. Tyunin, A. S. Yurkov // Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019. Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — P. 34–45.
- A4. *Еремеев, А. В.* О структуре множества локальных оптимумов задачи оптимизации фазированных антенных решеток [Текст] / А. В. Еремеев, Н. Н. Тюнин, А. С. Юрков // Сборник тезисов VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения». — 2018.
- A5. *Еремеев, А. В.* Исследование одной задачи квадратичного программирования в оптимизации коротковолновых антенных решеток [Текст] / А. В. Еремеев, Н. Н. Тюнин, А. С. Юрков // Радиотехника, электроника и связь. Сборник докладов V Международной научно-технической конференции. — 2019. — С. 171–174.
- A6. *Тюнин, Н. Н.* Невыпуклые задачи квадратичного программирования в оптимизации коротковолновых антенных решеток [Текст] / Н. Н. Тюнин // ФМХ ОмГУ - 2019. Сборник статей VII Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике, математике и химии. — 2020. — С. 48–52.

## Список литературы

1. *Kudzin, V. P.* The compact linear antenna array system of the short-wave band consisting of “butterfly” radiators [Text] / V. P. Kudzin, V. N. Lozovsky, N. I. Shlyk // 2013 IX International Conference on Antenna Theory and Techniques. IEEE. — 2013. — P. 252–253.
2. *Wilensky, R.* High-power, broad-bandwidth HF dipole curtain array with extensive vertical and azimuthal beam control [Text] / R. Wilensky // IEEE transactions on broadcasting. IEEE. — 1988. — Vol. 34, no. 2. — P. 201–209.
3. *Yin, Y.* Design of Short Wave Communication System with Phased Array Antenna [Текст] / Y. Yin, J. Deng // Electronic Engineer. — 2007. — Т. 33, № 9. — С. 31–33.
4. *Сазонов, Д. М.* Антенны и устройства СВЧ [Текст] / Д. М. Сазонов. — М:Высш.шк., 1988.
5. Synthesis of Conical Phased Antenna Arrays Optimization of Amplitude Distribution Parameters [Text] / M. Indenbom [et al.] // IX International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2018). — 2018. — P. 273–285.

6. *Юрков, А. С.* Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн [Текст] / А. С. Юрков. — ОННПП, 2014.
7. *Murty, K.* Some NP-complete Problems in Quadratic and Nonlinear Programming [Text] / K. Murty // Mathematical Programming. North Holland. — 1987. — Vol. 39. — P. 117–129.
8. *Нестеров, Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию [Текст] / Ю. Е. Нестеров. — М:МЦНМО, 2010. — 70 с.
9. *Ryoo, H. S.* Global Optimization of Nonconvex NLPs and MINLPs with Applications in Process Design [Text] / H. S. Ryoo, N. V. Sahinidis // Computers and Chem. Engng. Pergamon. — 1995. — Vol. 19, no. 5. — P. 551–566.
10. *Storn, R.* Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces [Text] / R. Storn, K. Price // Journal of global optimization. Springer. — 1997. — Vol. 11, no. 4. — P. 341–359.
11. *Noguchi, H.* Parallel Differential Evolution Applied to Interleaving Generation with Precedence Evaluation of Tentative Solutions [Text] / H. Noguchi, H. Tomohiro, R. Thawonmas // 2021 Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO '21). — 2021.
12. *Еремеев, А. В.* О доверительных интервалах для числа локальных оптимумов [Текст] / А. В. Еремеев, К. Р. Ривс // Математические структуры и моделирование. — 2017. — Т. 41. — С. 55–74.
13. *Luo, Z.* SDP relaxation of homogeneous quadratic optimization: approximation-bounds and applications [Text] / Z. Luo, T. Chang // Convex Optimization in Signal Processing and Communications. — 2009. — P. 117–165.
14. *Юрков, А. С.* Максимизация направленности фазированных антенных решеток коротковолнового диапазона [Текст] / А. С. Юрков // Техника радиосвязи. ОННПП. — 2016. — № 2. — С. 46–53.
15. *Burke, J. J.* Numerical Electromagnetics Code [Electronic Resource] / J. J. Burke, A. J. Poggio. — URL: <https://www.nec2.org/> (visited on 04/26/2022).
16. *Horn, R. A.* Matrix analysis [Text] / R. A. Horn, C. R. Johnson. — Cambridge University Press, 1990.
17. *Horst, R.* Global optimization: Deterministic approaches [Text] / R. Horst, H. Tyu. — Springer Science & Business Media, 2013. — P. 551–566.
18. *Tawarmalani, M.* Global optimization of mixed-integer nonlinear programs: A theoretical and computational study [Text] / M. Tawarmalani, N. V. Sahinidis // Mathematical programming. Springer. — 2004. — Vol. 99, no. 3. — P. 563–591.
19. *Horst, R.* Handbook of global optimization [Text]. Vol. 2 / R. Horst, P. M. Pardalos. — Springer Science & Business Media, 2013.

20. *Strekalovsky, A. S.* Global optimality conditions in nonconvex optimization [Text] / A. S. Strekalovsky // Journal of Optimization Theory and Applications. Springer. — 2007. — Vol. 173, no. 3. — P. 770—792.
21. *Himmelblau, D. M.* Applied nonlinear programming [Text] / D. M. Himmelblau. — McGraw-Hill Companies, 1972.
22. *Eberhart, R.* Particle swarm optimization [Text] / R. Eberhart, J. Kennedy // Proceedings of the IEEE international conference on neural networks. Vol. 4. — IEEE, 1995. — P. 1942—1948.
23. *Еремин, В. В.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования [Текст] / В. В. Еремин, А. Н. Н. — Наука, 1976. — 192 с.
24. *Aoki, M.* Introduction to optimization techniques. Fundamentals and applications of nonlinear programming [Text] / M. Aoki. — California Univ Los Angeles dept of system science, 1971.
25. *Eremeev, A. V.* On Symmetry Groups of Some Quadratic Programming Problems [Text] / A. V. Eremeev, Y. A. S. // MOTOR 2020. Shpringer. — 2020. — Vol. 12095.
26. *Юрков, А. С.* О влиянии потерь в земле на работу четырехэлементной ФАР КВ диапазона [Текст] / А. С. Юрков // Техника радиосвязи. ОНИИП. — 2014. — № 1. — С. 78—81.

*Тюнин Николай Николаевич*

Анализ и решение задач оптимизации направленности фазированных антенных решеток  
коротковолнового диапазона

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук

