

Тюнин Николай Николаевич

**АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ  
НАПРАВЛЕННОСТИ ФАЗИРОВАННЫХ АНТЕННЫХ  
РЕШЕТОК КОРОТКОВОЛНОВОГО ДИАПАЗОНА**

2.3.1 — Системный анализ, управление и обработка информации,  
статистика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Работа выполнена в Омском филиале Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ОФ ИМ СО РАН).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент  
**Еремеев Антон Валентинович**

Официальные оппоненты: **Картак Вадим Михайлович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Уфимский государственный авиационный техни-  
ческий университет,  
заведующий кафедрой

**Груздева Татьяна Владимировна**,  
кандидат физико-математических наук,  
Институт динамики систем и теории управления  
имени В.М. Магросова Сибирского отделения Рос-  
сийской академии наук,  
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образо-  
вательное учреждение высшего образования «Ом-  
ский государственный технический университет»

Защита состоится ” \_\_\_\_ ” \_\_\_\_ 2022 г. в \_\_\_\_ часов на заседании дис-  
сертационного совета Д 24.2.403.01 созданного на базе ФГБОУ ВО «Сибирский  
государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решет-  
нева» по адресу: 660037 г. Красноярск, проспект имени газеты «Красноярский  
рабочий», 31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Си-  
бирский государственный университет науки и технологий имени академика  
М.Ф. Решетнева» и на сайте <https://www.sibsau.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учрежде-  
ния, просьба направлять по адресу: 660037 г. Красноярск, проспект имени  
газеты «Красноярский рабочий», 31, ученому секретарю диссертационного со-  
вета Д 24.2.403.01.

Автореферат разослан ” \_\_\_\_ ” \_\_\_\_ 2022 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 24.2.403.01,  
кандидат технических наук, доцент  
Панфилов Илья Александрович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В настоящее время разработка и анализ эффективных систем радиосвязи имеет большое значение для народного хозяйства. Одной из актуальных задач в этой области является задача оптимизации направленности фазированных антенных решеток (ФАР), представляющих собой антенные системы, распределение фаз и амплитуд на элементах которых позволяет получать направленное излучение. Будучи собранными в антенную систему, излучатели формируют диаграмму направленности, которая зависит от их расположения и конструкции, а также выбора фаз и амплитуд сигналов, подаваемых на вход излучателей. Возможность формирования направленного излучения позволяет достичь увеличения дальности радиосвязи или уменьшить затраты ресурсов (энергии, площади, занимаемой антеннами, стоимости оборудования и др.).

В диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) задачи оптимизации фаз и амплитуд излучателей, как правило, решаются с использованием некоторых упрощающих предположений (Indenbom M., Izhuikin V., Shagarov A., at al., 2018, Щелкунов С.А., Фрис Г., 1955, Фаняев И.А., Кудин В.П., 2017). Однако в диапазоне высоких частот (ВЧ) задача оптимизации направленности ФАР оказывается более сложной и потому менее изучена (Фаняев И.А., Кулин В.П., 2014, Юрков А.С., 2016). При ограничении суммарной мощности, подаваемой на антенную систему, задача выбора фаз и амплитуд на излучателях может быть решена аналитически (Юрков А.С., 2014). Однако при ограничении на мощность по каждому входу антенной системы требуется решение невыпуклых задач квадратичного программирования, которые, вообще говоря, являются NP-трудными (Murtu K., 1987). Для решения таких задач могут применяться методы ветвей и границ (Нечаева М.С., Хамисов О.В., 2000), отсечений (Horst R., Pardalos P.M., 2013), DC-программирования (Стрекаловский А.С., 2003), полупределенной релаксации (Fuchs B., 2014), эволюционных вычислений (Boriskin A.V., Balaban M.V., Galan O.Yu. at al., 2010, Rao A., Sagma N., 2017), локального поиска (Кочетов Ю.А., 2008) и др.

**Целью** данной работы является создание алгоритмов оптимизации направленности излучения ФАР и исследование области применимости различных методов решения этой задачи.

Для достижения указанной цели были решены следующие **задачи**:

1. Изучить структуру множества локальных оптимумов и наличие симметрий в рассматриваемой задаче.
2. Разработать алгоритмы решения задачи, учитывающие структуру множества локальных оптимумов и использующие известные методы математической оптимизации.
3. Сравнить в вычислительных экспериментах предложенные алгоритмы с известными.

4. Исследовать на основе вычислительных экспериментов влияние расположения излучателей и используемой радиочастоты на эффективность работы алгоритмов оптимизации.
5. Сравнить коэффициент усиления ФАР при оптимизации направленности излучения с учетом взаимного влияния излучателей и без учета этого фактора.

#### **Научная новизна:**

1. Предложенный гибридный алгоритм дифференциальной эволюции отличается от известных ранее наличием процедуры адаптации штрафа, в которой учитывается возврат в допустимую область посредством масштабирования решения, что приводит к сокращению потребности получаемых решений.
2. Ранее при решении задач оптимизации направленности ФАР, как правило, не использовалась инвариантность основных свойств решений относительно равного сдвига фаз во всех излучателях. Однако как показано в настоящей работе, учет такой инвариантности позволяет снизить размерность задачи и сократить среднее время счета решателя, основанного на методе ветвей и границ и локальном спуске.
3. Впервые для задачи оптимизации направленности ФАР показано наличие кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции и не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.
4. Впервые обоснована целесообразность учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона.

**Практическая значимость.** Разработанные алгоритмы оптимизации возбуждения ФАР могут применяться в системах связи коротковолнового диапазона для увеличения дальности радиосвязи. Созданное программное обеспечение позволяет производить необходимые для этого расчеты. Полученное обоснование необходимости учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР, а также результаты вычислительных экспериментов для различных вариантов ФАР могут быть полезны при проектировании новых антенных систем. Практическая значимость результатов исследования при выполнении работ по антенной тематике подтверждена в АО «Омский научно-исследовательский институт приборостроения».

**Теоретическая значимость.** Осуществленный в работе переход от задачи оптимизации направленности ФАР в комплексных числах к задаче математического программирования позволил переформулировать в терминах математического программирования известные физические свойства задачи, в частности, инвариантность относительно сдвига фаз и закон сохранения энергии. Благодаря такому переносу в работе (Егемев, А. Уайков А., 2020) представленные в диссертации примеры симметрий были теоретически обобщены на более широкий класс задач квадратичного программирования с использованием теории групп Ли. Предложенная процедура возврата в допустимую область с помощью

*Тюнин Николай Николаевич*

Анализ и решение задач оптимизации направленности фазированных антенных решеток  
коротковолнового диапазона

Авгореф. дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук

5. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Комплекс моделирования и решения задач оптимизации направленности ФАР КВ диапазона «Ехри»* [Текст] / Н. Н. Тюнин. — № 2022666016 ; заявл. 05.07.2022 ; опубл. 24.08.2022, 2022662647 (Рос. Федерация).

#### Прочие публикации в журналах

6. *Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С.* Об оптимизации направленности коротковолновых фазированных антенных решеток кольцевой структуры [Текст] // Научно-технический сборник «Техника радиосвязи». — 2022. — Т. 54, № 3. — С. 41—52.

#### В материалах конференций

7. *Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С.* Исследование одной задачи квадратичного программирования в оптимизации коротковолновых антенных решеток [Текст] // Радиотехника, электроника и связь. Сборник докладов V Международной научно-технической конференции. — 2019. — С. 171—174.
8. *Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С.* О структуре множества локальных оптимумов задачи оптимизации фазированных антенных решеток [Текст] // Сборник тезисов VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения». — 2018. — С. 53.
9. *Тюнин Н. Н.* Невыпуклые задачи квадратичного программирования в оптимизации коротковолновых антенных решеток [Текст] // ФМХ ОмГУ 2019: Сборник статей VII Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике, математике и химии. — 2020. — С. 48—52.

масштабирования вектора решения, а также построенная верхняя оценка эвклидовой нормы допустимых решений могут быть использованы при разработке новых методов решения задач, аналогичных рассмотренной в работе. Результаты диссертации используются в учебном процессе в ФГАОУ ВО «Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского» в составе лекционного курса «Эволюционные алгоритмы».

**Методология и методы исследования.** Методы градиентной оптимизации, эволюционные алгоритмы, проведение вычислительного эксперимента, методы математической статистики, использование линейных симметрий задачи.

#### Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для большинства рассмотренных конфигураций ФАР задача имеет несколько кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции, не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.
2. Непрерывная подгруппа симметрий рассматриваемой задачи одномерна и ее элементы соответствуют сдвигу фаз во всех излучателях на равную величину, что позволяет снизить размерность задачи на одну переменную и сократить время счета.
3. Использование метода ДЭ в комбинации с градиентным подъемом позволяет достичь конкурентоспособных решений по сравнению с коммерческим решателем BARON в задаче оптимизации фаз и амплитуд ФАР, особенно на задачах большой размерности.
4. Имеется интервал параметров кольцевых ФАР, в котором учет взаимного влияния излучателей ведет к существенному увеличению коэффициента усиления в заданном направлении.
5. Коэффициент усиления, соответствующий решению задачи оптимизации направленности ФАР, может быть существенно больше по сравнению с коэффициентом усиления, получаемым стандартным методом фазирования без учета взаимного влияния (имеются случаи, когда отличие составляет 5 дБ).

**Соответствие научной специальности.** Работа соответствует научной специальности 2.3.1 по п. 4. — Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта; по п. 5. — Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта; по п. 9. — Разработка проблемно-ориентированных систем управления, принятия решений и оптимизации технических объектов; по п. 15. — Теоретический анализ и экспериментальное исследование функционирования элементов

систем управления в нормальных и специальных условиях с целью улучшения технико-экономических и эксплуатационных характеристик.

**Достоверность** научных положений, выводов и практических рекомендаций, полученных в диссертации, подтверждается точной формулировкой задач и критериев, достаточным количеством численных экспериментов и исследованиями адекватности модели с точки зрения физических принципов. Методика проведения численных экспериментов подробно описана, что позволяет воспроизвести полученные результаты.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

1. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций (МОТОР)» - Петрозаводск, июль, 2022.
2. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций (МОТОР)» - Иркутск, июль 2021.
3. Семинаре «Современные проблемы радиофизики и радиотехники», ОмГУ им. Ф.М. Достоевского, Омск, 2021.
4. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций (МОТОР)» - Екатеринбург, июль 2019.
5. V Международной научно-технической конференции «Радиотехника, электроника и связь» - Омск, октябрь 2019.
6. VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения» - Омск, июль 2018.
7. Семинаре «Математическое моделирование и дискретная оптимизация», ОФ ИМ СО РАН, Омск, 2018 — 2022.
8. Семинаре «Перспективы развития радиосвязи и приборостроения», АО «ОНИИП», Омск, 2018.

**Личный вклад.** Автор адаптировал метод градиентного подъема и алгоритм дифференциальной эволюции к специфике расматриваемой задачи, осуществил переход к задаче квадратичного программирования, исходя из постановки в комплексных числах, исследовал наличие непрерывных симметрий, проводил вычислительные эксперименты, исследовал устойчивость решений к возмущению исходных данных, формулировал выводы. Основные результаты диссертационного исследования получены в ходе выполнения гранта РФФИ № 19-37-90066 по конкурсу «Аспиранты» в 2019-2021 гг. в Омском филиале Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК или приравненных к ним, 3 — в тезисах докладов. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ.

2. Установлено, что непрерывная подгруппа линейных симметрий для расматриваемых задач оптимизации направленности фазированной антенной решетки одномерна и ее элементы соответствуют сдвигу фаз во всех излучателях на равную величину, что позволяет снизить размерность задачи на одну переменную и сократить время счета коммерческого решателя BARON.
3. Предложена модификация алгоритма дифференциальной эволюции в комбинации с градиентным алгоритмом, учитывающая специфику задачи оптимизации направленности фазированной антенной решетки и показавшая свою конкурентоспособность по сравнению с коммерческим решателем BARON с преимуществом на задачах большей размерности.
4. В результате вычислительного эксперимента по исследованию влияния расположения излучателей и используемой радиочастоты на эффективность работы алгоритмов оптимизации было обнаружено, что имеются конфигурации, при которых усиление ФАР существенно превосходит усиление одиночного излучателя.
5. Выявлены ситуации, в которых коэффициент усиления, соответствующий решению задачи квадратичной оптимизации, имеет существенное преимущество (до 5 дБ) перед коэффициентом усиления, получаемым стандартным методом фазирования без учета взаимного влияния.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### В изданиях из списка ВАК РФ или приравненных к ним

1. Еремеев А. В., Тюнин Н. Н. Алгоритм дифференциальной эволюции для оптимизации направленности фазированных антенных решеток [Текст] // Математические структуры и моделирование. — 2022. — Т. 62, № 3. — С. 57—68. — (ВАК).
2. Тюнин Н. Н. Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решеток [Текст] // Дискретный анализ и исследование операций. — 2021. — Т. 28, № 3. — С. 20—44. — (ВАК).
3. Eremeev A. V., Tyunin N. N., Yurkov A. S. Non-Convex Quadratic Programming Problems in Short Wave Antenna Array Optimization [Text] // Khachau, M., Kochetov, Y., Ravalos, P. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. МОТОР 2019. Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — Vol. 11548. — P. 34—45. — (ВАК).
4. Tyunin N. N. On mutual influence of emitters in directivity optimization of short-wave phased antenna arrays [Text] // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1901, no. 1. — P. 012053. — (ВАК).

### Зарегистрированные программы для ЭВМ

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы, приводится структура и содержание.

**Первая глава** посвящена обзору литературы и постановке задачи в виде задачи математического программирования. Здесь рассматриваются источники, позволяющие сформулировать постановку задачи (Сазонов Д.М., 1988, Юрков А.С., 2014), приводится анализ аналогичных исследований (Luo Z., 2009, Fuchs B., 2014, Indenbom M., 2018). Также в рамках этого раздела производится сравнение результатов работы различных методов решения поставленной задачи.

В рассматриваемой в данной работе задаче требуется максимизировать излучение антенной решетки в заданном направлении при ограничениях на мощность, подводимую к каждому излучателю. В терминах комплексных токов, подводимых к излучателям, эта задача сформулирована в работах (Юрков А.С., 2016, 2014). Целевая функция задачи оптимизации определяется следующим образом:

$$F = \mathbf{u}^+ \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (1)$$

где верхний индекс + означает эрмитово сопряжение,  $\mathbf{u}$  – вектор-столбец комплексных напряжений, подаваемых на излучатели системы,  $A = (a_{ij})$ ,

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_i^{(l)} f_j^{(l)}. \quad (2)$$

Здесь  $f_i^{(l)}$  – парциальное поле, то есть поле, которое излучается при подаче единичного тока на  $i$ -ю точку питания излучающей системы, в то время как ток в других точках питания равен нулю.

В данной работе рассматривается случай, когда ограничение на мощность накладывается по каждой точке питания, т.е. учитываются ограниченные возможности усилителей, питающих излучатели (Юрков А.С., 2014, гл. 8). В случае ограничения суммарной мощности, подаваемой на всю антенную систему, задача может быть решена аналитически (Юрков А.С., 2014, гл. 5). В других постановках ограничения накладываются не на мощность, а на излучение (Fuchs B., 2014). В рассматриваемом здесь случае задача формулируется

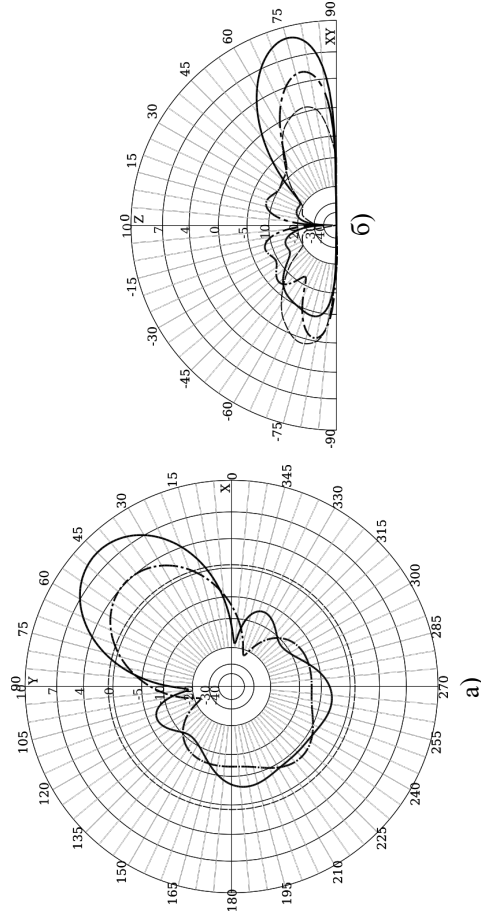


Рис. 4 — Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 20м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – фазирование решетки без учета взаимного влияния, сплошной – решение задачи макс. мат. программирования.

Для ШВД производилось исследование диаграмм направленности при варьировании расстояния центров излучателей до центра решетки от 5 до 50 м. В большинстве случаев использование решения задачи математического программирования не давало существенного преимущества перед простым фазированием. Тем не менее, при расстоянии между центром излучателя и центром решетки равным 20м это различие составило около 4 дБ (см. Рис. 4).

Аналогичные результаты были получены и для решеток СВД. При оптимизации в направлении полярного угла, равном 70°, при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 35 до 37 м различие между коэффициентами усиления решения задачи математического программирования и усилением простого фазирования также достигало 4 дБ. При оптимизации в направлении полярного угла равном 85°, при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 25 до 29 м эта разница достигала 5 дБ.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. В ходе вычислительного эксперимента показано, что задача оптимизации направленности фазированной антенной решетки имеет многочисленные локальные оптимумы, большое число из которых совпадают по целевой функции, однако не эквивалентны между собой относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.

в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^+ \mathbf{A} \mathbf{u} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{u}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{u} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{u}^+ \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{u} \leq 1, \\ \mathbf{u} \in \mathbb{C}^N \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mathbb{C}$  – поле комплексных чисел,  $n$  – число точек питания, на которые накладываются ограничения (в общем случае  $n$  может быть не равно  $N$ ),

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{4P_{max}^{(k)}} (\mathbf{Y}^+ \mathcal{P}^{(k)} + \mathcal{P}^{(k)} \mathbf{Y}), \quad (4)$$

$P_{max}^{(k)}$  – максимальная мощность в  $k$ -й точке питания,  $\mathcal{P}^{(k)}$  – матрицы-проекторы, имеющие единственный ненулевой элемент  $\mathcal{P}_{kk}^{(k)} = 1$ . Матрицы-проекторы имеют размерность  $N \times N$ . Поскольку аргументом целевой функции является вектор комплексных токов, задачу оптимизации направленности ФАР КВ диапазона также можно назвать задачей оптимизации фаз и амплитуд. За  $\mathbf{U}$  обозначается матрица проводимостей.

Следует отметить, что задача (3), сформулированная в комплексных числах, имеет симметрично относительно преобразования  $\mathbf{u} \rightarrow e^{j\theta} \mathbf{u}$  всех комплексных координат (по произвольному углу  $\theta$ ). За  $j$  здесь обозначена мнимая единица. Данная симметрия может найти применение для уменьшения размерности области поиска на единицу. Например, фиксируя  $Im(y_N) = 0$ , что эквивалентно добавлению ограничения  $x_{2N} = 0$  к задаче (5).

Для разработки алгоритма решения задачи удобно переформулировать ее в вещественных числах. В вещественных числах задача (3) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (5)$$

Задача (5) имеет целевую функцию, заданную квадратичной формой с положительно полуопределенной матрицей  $\mathbf{G}$ . Каждое ограничение формулируется квадратичной формой, определенной симметричной матрицей  $\mathbf{H}^{(k)}$ ,  $k = 1, n$  с двумя парами идентичных собственных значений, два из которых положительные, а другие два отрицательны или равны нулю, все остальные собственные числа равны нулю.

Для задачи (5) существует преобразование, позволяющее привести к допустимой области решение  $\mathbf{x}$ , которое нарушает только ограничивающие неравенства задачи (5) вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ :

производились на решетках ШВИ, состоящих из 8 излучателей. Для расчета матрицы сопротивлений и матрицы излучений использовался пакет моделирования антенных систем NEC2.

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS. Результаты оптимизации направленности решетки сравнивались с коэффициентом усиления одиночного излучателя, установленного в центре такой же системы противососов. В качестве направления оптимизации выбирается  $70^\circ$  полярного угла и  $45^\circ$  азимутального угла в сферических координатах. Было выявлено, что при значениях частоты 5 и 30 МГц решетка оптимизируется малоэффективно. Также было обнаружено, что, в основном, увеличение плотности системы противососов приводит к росту коэффициента усиления.

При исследовании изменения соотношения коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя с ростом частоты было обнаружено, что на частоте 25 МГц усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. При более детальном исследовании этого эффекта было выявлено, что на частоте 25 МГц (см Рис. 3) одиночный излучатель довольно мало излучает в направлении оптимизации, тогда как ФАР имеет максимум излучения в этом направлении. Было предположено, что такой эффект был получен вследствие учета взаимного влияния. Согласно (2), если пренебречь взаимным влиянием излучателей, плотность мощности  $I$  будет максимальна, когда поля будут синфазны. Для проверки гипотезы о необходимости учета взаимного влияния произведено сравнение диаграмм направленности решеток разных конфигураций после математической оптимизации их направленности в заданном направлении согласно модели (5) с соответствующими диаграммами одиночного излучателя и со учетом фазирования решетки без учета взаимного влияния.

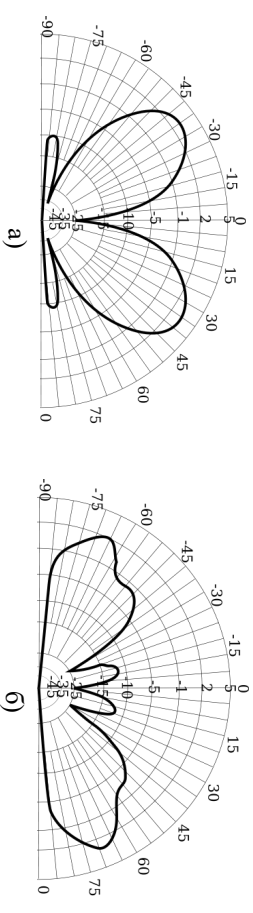


Рис. 3 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 25 МГц

Направление оптимизации по умолчанию было установлено на  $70^\circ$  полярного угла и  $45^\circ$  азимутального угла в сферических координатах. Для некоторых экспериментов было проведено дополнительное исследование при  $85^\circ$  полярного угла.



масштабирования решения. Как показал вычислительный эксперимент, предложенная процедура адаптации штрафа приводит к сокращению погрешности получаемых решений.

Таблица 3 — Результаты градиентного подъема, гибридного алгоритма ДЭ и BARON, полученные для кольцевых решеток.

Тип	Град. $\tilde{F}$	ДЭ $\tilde{F}$	BARON $\tilde{F}$	t, с
ШВИК 8-15(2:3)	1536	<b>1664</b>	-	14.62
ШВДК 8-20	1454	1454	1455	2.78
ШВДК 8-30	2422	2422	2422	1.47
СВДК 8-25	740	740	740	0.23
СВДК 8-37	1487	1487	1487	0.23

Гибридный алгоритм ДЭ сравнивался с решателем BARON на всех задачах из гл. 2 и на пяти задачах из гл. 4 (см. таблицу 3) в тех же условиях, что описаны выше. Гибридный алгоритм ДЭ на всех примерах нашел допустимые решения, а решатель BARON – только в четырех примерах. На этих примерах результаты ДЭ отличались не более чем на 1% по целевой функции от решений BARON. С точки зрения практики радиосвязи KB диапазона такое отклонение пренебрежимо мало. Как правило, время, потребовавшееся для нахождения рекордного значения с помощью ДЭ, отличалось незначительно от выбранного временного ограничения. Из проведенных экспериментов можно сделать вывод о том, что разработанный гибридный вариант ДЭ показывает конкурентоспособные результаты в сравнении с коммерческим решателем BARON в режиме его настроек по умолчанию, при этом преимущество ДЭ наблюдается на задачах с наибольшей размерностью.

**Четвертая глава** посвящена исследованию возможности оптимизации возбуждения ФАР в различных условиях.

На практике использование высокосимметричных ФАР вызывает особый интерес, так как позволяет выполнить расчеты для одного направления и затем легко адаптировать их для других симметричных направлений. Другой особенностью, влияющей на результаты моделирования, является наличие потерь в земле (Юрков А.С., 2014). Чтобы ослабить этот эффект, антенные системы с противовесами подняты над землей на 2 м.

В данной главе изучается, как изменяется общий коэффициент усиления кольцевой ФАР с ростом радиочастоты и плотности системы противовесов. Общий коэффициент усиления является суммой частичных коэффициентов усиления в двух ортогональных поляризациях. Плотность системы противовесов определяется числом продольных и поперечных проводов, относящихся к одному и тому же излучателю. Частота изменяется от 5 до 30 МГц. Вычисления

$$\mathbf{x}' := \alpha(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad (6)$$

где  $\alpha(\mathbf{x}) := \max_{k=\overline{1,n}} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}$ . Данная процедура применяется для выбора начального решения, а также для масштабирования итогового решения градиентного подъема и может использоваться в метаэвристиках.

В вычислительных экспериментах бывает полезно ограничить множество допустимых решений задачи шаром или параллелепипедом, так как это позволяет более обоснованно выбрать начальное решение для итерационных методов с мультистартом или сократить перебор в методе ветвей и границ. Отметим, что если вектор  $\mathbf{x}$  удовлетворяет всем ограничениям задачи (5), то

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}. \quad (7)$$

Глобально-оптимальное решение задачи невыпуклого математического программирования вида (5) может быть найдено методом ветвей и границ (Horst R., Tuy H., 2013, Tawarmalani M., Sahinidis N.V., 2004) или с использованием методов DC программирования (Horst R., Pardalos P.M., 2013, Strekalovsky A.C., 2007). Локально-оптимальное решение задачи может быть найдено средними градиентной оптимизации или методом Ньютона. В случае большой размерности могут быть применены различные метаэвристики (см. (Eberhart R., Kennedy J., 1995., Storn R., Price K., 1997)).

Процедура решения задачи оптимизации ФАР при ограничении мощности по каждой точке питания состоит в следующем:

1. Для каждого излучателя в решетке рассчитать парциальные компоненты полей  $f_i^{(l)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $l = \overline{1, 2}$ .
2. Вычислить матрицы  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{H}^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .
3. Оценить радиус допустимой области.
4. Решить задачу (5) с дополнительными ограничениями  $x_N = 0$ ,  $\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$ .

Данный подход может гарантировать нахождение как локального, так и глобального оптимума в зависимости от решателя, используемого на шаге 4. Как один из базовых оптимизационных методов в главе 1 рассматривается метод градиентной оптимизации (максимизационный вариант) с алгоритмом одномерного поиска Дэвиса, Свенна и Кэмпи (ДСК). Далее целевая функция задачи (5) будет обозначаться символом  $\tilde{F}$ .

От задачи условной оптимизации производится переход к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций, а именно - методом внешней точки (Еремин В.В., Астафьев Н.Н., 1976, Aoki M., 1971):

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n \left( \min \left( 0, \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) + \min \left( 0, 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) \right)^4 \rightarrow \max, \quad (8)$$

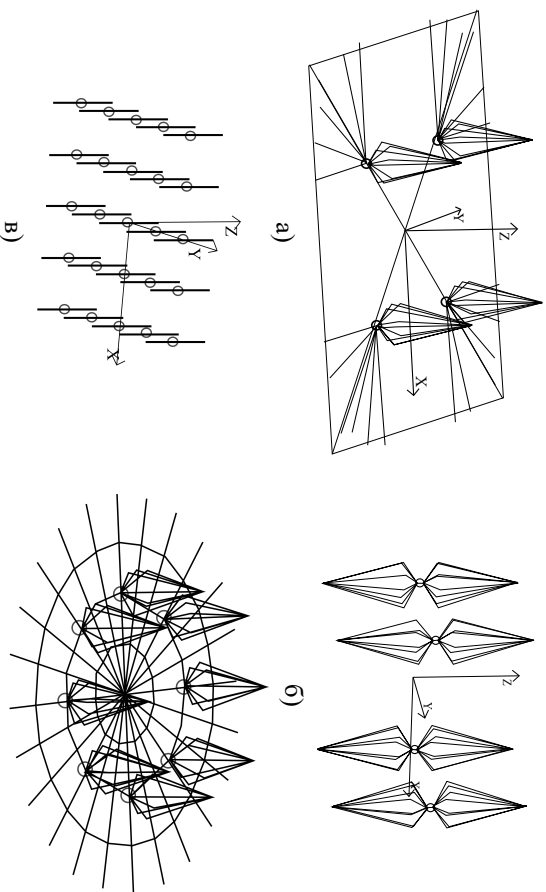


Рис. 1 — ФАР различных конфигураций

где  $r$  - достаточно большой штрафной параметр. Алгоритм градиентной оптимизации повторяется многократно, при этом используется случайно сгенерированный вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$  в качестве стартовой точки.

**Вторая глава** посвящена исследованию структуры множества локальных оптимумов с помощью различных алгоритмов оптимизации, производится анализ непрерывных групп линейных симметрий задачи.

Для организации вычислительных экспериментов был разработан программный комплекс «Ехри», зарегистрированный в государственном реестре программ для ЭВМ [5]. Вычислительный эксперимент был поставлен для задач, построенных на основе следующих типов ФАР, выпускаемых серийно и представляющих интерес для промышленности: широкополосных вертикальных излучателей (ШВИ), широкополосных вертикальных диполей (ШВД) и симметричных вертикальных диполей (СВД). При моделировании полей был использован пакет NEC2, для которого были предоставлены соответствующие геометрические конфигурации антенных систем. В качестве рабочей частоты было выбрано 5MHz. Рассмотрены квадратные ФАР конфигурации 2x2, 3x3 и 5x5. Конфигурация 5x5 была рассмотрена только для решеток СВД, поскольку NEC2 не смог обработать 5x5 ШВИ и 5x5 ШВД из-за высокой сложности этих моделей. В случае с ФАР кольцевой структуры были рассмотрены решетки, состоящие из 8 и 16 излучателей. Также в рассмотрение были приняты укороченные СВД с длиной плеча 5м. (СВД'). В качестве направления максимизации излучения выбраны: азимутальный угол  $45^\circ$ , полярный угол  $70^\circ$ .

1. Предварительная обработка. Возможная неточность данных нивелируется усреднением симметричных компонент матриц (матрицы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  должны быть симметричны).
2. Преобразование  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$  к канонической форме, используя метод Лагранжа для вычисления матриц  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}^{-1}$ .
3. Применение метода Гаусса к системе линейных уравнений (10) для вычисления генераторов  $\hat{G}_n$ .

Описанная процедура нахождения непрерывных групп симметрий примениется к примерам, описанным выше. Для всех рассмотренных задач было выявлено только наличие фазовой симметрии.

Учет данной симметрии при решении поставленной задачи оптимизации может быть реализован фиксацией в ноль одной из переменных задачи, например,  $x_1 = 0$ . В результате проведенных экспериментов было выявлено, что в большинстве случаев фиксация переменной привела к ускорению работы решателя BARON, что говорит о целесообразности фиксации в ноль одной из переменных при использовании решателя.

В **третьей главе** производится исследование возможности решения поставленной задачи методами дифференциальной эволюции (ДЭ).

Очевидным недостатком градиентного подхода является невозможность выйти из окрестности локального оптимума. Таким образом, данный алгоритм хорошо подходит лишь для работы в режиме мулыгистарта или же для уточнения некоторого заданного решения. Такое решение может быть получено, например, алгоритмом дифференциальной эволюции, который демонстрирует хорошие результаты на различных задачах (Casillo J., Segura C., 2021; Das S., Suganthan P.N., 2011; Stanovov V., Akhmedova S., Semekin E., 2022) и в комбинации с градиентным алгоритмом может рассматриваться как альтернатива мулыгистарта.

Кратко опишем идею алгоритма. В начале происходит генерация популяции. Если нет дополнительной информации, особи популяции генерируются случайным образом с равномерным распределением. Затем каждая особь подвергается мутации путем присваивания ей признаков другой особи. Для этого случайным образом выбираются неравные друг другу особи  $A, B, C$ . Из них формируется новая особь  $C' = C + f(A - B)$ , где  $f$  - параметр алгоритма. Из исходной особи и особи  $C'$  формируется особь новой популяции. Для этого каждый признак исходной особи с заданной вероятностью  $p$  заменяется на соответствующий признак  $C'$ . Выживает особь с лучшим значением целевой функции.

В данной работе предложен гибридный алгоритм, являющийся модификацией алгоритма ДЭ, в которой к особи с лучшим значением целевой функции применяется градиентный алгоритм, когда исчерпано время счета, отведенное на ДЭ. Кроме того, в гибридном алгоритме ДЭ применяется процедура адаптации штрафа, в которой учитывается возврат в допустимую область посредством

Здесь сравниваются результаты работы градиентного метода и решателя BARON в его режиме по умолчанию. Во всех экспериментах, описанных ниже, было установлено ограничение по времени 1000с. Сравнение алгоритмов, представляющих принципиально различные методы, по количеству вычислений целевой функции не является корректным, поэтому в данной работе идет сравнение именно по времени. Все эксперименты проводились на ЭВМ с процессором Intel i7 (тактовая частота: 2.8ГГц), ОЗУ: 16Гб. В случае останова градиентного метода (завершение по минимально допустимому приращению целевой функции  $10^{-4}$ ) алгоритм перезапускается заново до истечения запаса времени.

Во время каждой инициализации градиентного метода в главе 1 стартовая точка  $\mathbf{x}$  выбирается независимо с равномерным распределением в кубе  $[-5000, 5000]^{2N}$ . Лучшее из найденных таким образом решений принимается за конечный результат. Параметр штрафа  $r$  в методе градиентной оптимизации установлен равным  $10^6$  на всех запусках. Такое значение было определено эмпирически. В таблице 1 приводятся результаты вычислительного эксперимента. Значения целевой функции " $\tilde{F}$ " в точке, полученной алгоритмом градиентного подъема, приводятся после процедуры масштабирования (6). Для решателя BARON версии 18.5.8 было выбрано то же самое ограничение сверху на процессорное время, что и для градиентного метода (группа колонок "BARON"). Во всех таблицах колонка " $t$ " содержит время до получения лучшего найденного решения или до установления глобальной оптимальности. Во всех запусках градиентного метода были получены решения, где активными оказались все ограничения вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$  и только они.

Таблица 1 — Результаты оптимизации, полученные с помощью градиентного подъема, решателя BARON и ДЭ.

Тип	$\sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$	Град. $\tilde{F}$ t, с	BARON $\tilde{F}$ t, с	ДЭ $\tilde{F}$
ШВИ 2x2	13.6	138 0.054	139 0.12	139
ШВИ 3x3	22.5	576 0.93	581 0.34	581
ШВД 2x2	21	460 0.13	464 0.27	464
ШВД 3x3	82.2	915 24.4	925 0.34	924
СВД 2x2	44.7	357 1.9	361 0.16	361
СВД 3x3	641.9	1138 25.6	1261 0.38	1163
СВД 5x5	$1.1 \cdot 10^5$	5318 1000	6716 1000	7132
СВД' 2x2	$2.3 \cdot 10^4$	233 2.52	253 0.25	198
СВД' 3x3	$6 \cdot 10^5$	664 71	1153 1.48	834
СВД' 5x5	-	1382 1000	33.5 217.94	2755
Кольц. 8	87	217 8.06	218 0.23	218
Кольц. 16	154	727 90.9	734 1.37	732

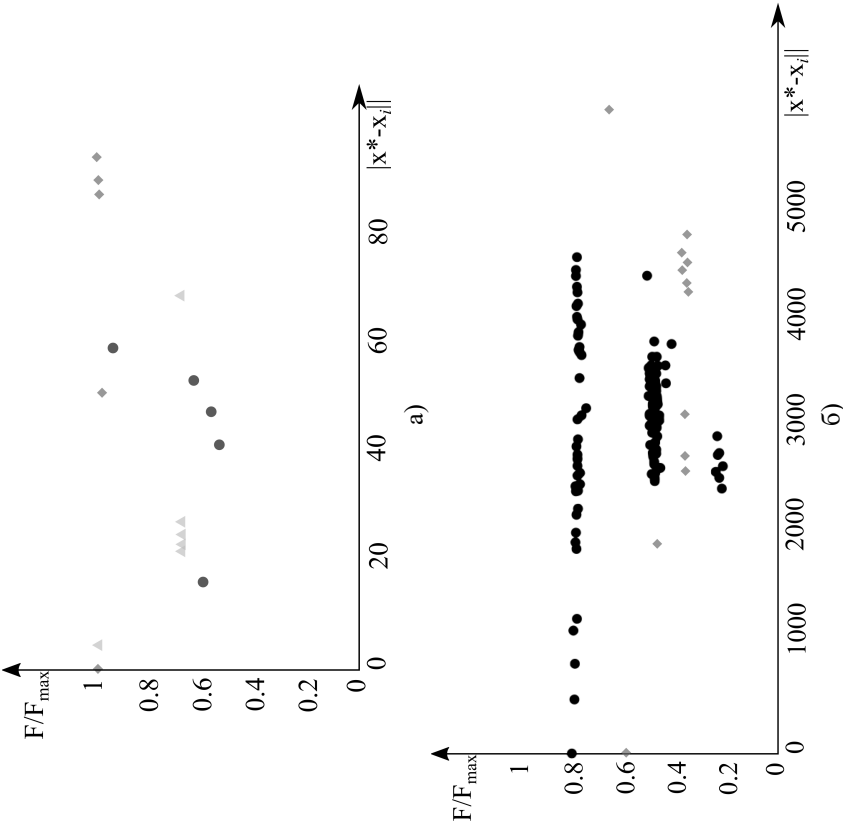


Рис. 2 — Структура множества найденных решений. В случае а) точками обозначены результаты для кольцевых решеток, состоящих из 8 излучателей, ромбами — для кольцевых решеток, состоящих из 16 излучателей, треугольниками — для СВД 3x3. В случае б) точками обозначены результаты для СВД' 2x2, ромбами — для СВД' 3x3



Из таблицы 1 видно, что на всех видах решеток, кроме решеток СВД конфигураций 3х3 и 5х5, а также СВД конфигураций 2х2 и 3х3, разница в значениях целевой функции не превосходит 1%. Для решеток СВД конфигураций 3х3 и 5х5, а также СВД конфигураций 2х2 и 3х3 градиентный алгоритм существенно уступает по качеству найденного решения. Кроме решеток ШВИ и ШВД конфигурации 2х2 BARON демонстрирует лучшее время счета.

Следует отметить, что для обоих алгоритмов время, затраченное на поиск решения, было либо существенно меньше, либо сравнимо со временем, затраченным на построение исходных данных пакетом моделирования NES, что делает оба подхода равноценными по времени работы с практической точки зрения. При увеличении времени счета BARON до 50000с. для ФАР конфигураций ШВИ 2х2, ШВД 2х2 и ШВИ 3х3 была доказана глобальная оптимальность найденного решателем BARON решения из таблицы 1. Решатель ANTI-GONE, разработанный для решения многоэкстремальных задач математической оптимизации, также был опробован в режиме его настроек по умолчанию, но в большинстве тестовых примеров возвращал нулевое решение, которое является стационарной точкой, но не является локальным оптимумом.

Для оценки общего числа локальных оптимумов использовался метод переписи Шнабеля. Данный метод имеет применение в экологии и заключается в выводе статистических оценок численности популяции на основе числа особей, помеченных в результате эксперимента, из популяции с неизменным составом. В (Еремев А.В., Ривс, К.Р., 2017; Еремев С.Р., Егемев А.У., 2004) предлагается адаптация такого метода для оценки числа локальных оптимумов. В таблице 2 приводится статистика по числу различных точек останова (в пределах заданной точности) процедуры мултистарта в течение 1000с процессорного времени. Для каждого решения была применена процедура линеаризации задачи и проверки необходимых условий локальной оптимальности. Здесь  $M$  – число выполненных запусков за отведенное время,  $M_{ne}$  – число групп решений, отличающихся не более чем на 10% по каждой из координат,  $M_f$  – число групп значений целевой функции у таких неэквивалентных решений (с точностью до 10%, приведенных в таблице 1).  $M_{g \approx 0}$  – число групп решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности.  $M_{g \approx 0}$  и  $\mathcal{L}_{M_{g \approx 0}}$ .

На рис. 2 приведены диаграммы найденных локальных оптимумов, где по оси ординат отложены значения целевой функции, а по оси абсцисс – расстояния до лучшего известного решения. Диаграмма показывает, что значения,

Таблица 2 – Структура множества локальных оптимумов.

ФАР	$M$	$M_{ne}$	$M_f$	$B_{M_f}$	$\mathcal{L}_{M_f}$	$M_{g \approx 0}$	$B_{M_{g \approx 0}}$	$\mathcal{L}_{M_{g \approx 0}}$
ШВИ 2х2	18368	4	1	1	1	4	4	4
ШВД 2х2	7678	4	1	1	1	4	4	4
СВД 2х2	523	1	1	1	1	1	1	1
СВД 3х3	39	9	2	2	2	5	5	5
СВД 2х2	396	370	3	3	3	338	1000	1213
СВД 3х3	14	14	3	3	3	1	1	1
ШВИ 3х3	1070	3	1	1	1	3	3	3
ШВД 3х3	41	4	4	4	4	1	1	1
Кольц. 8	124	9	2	2	2	9	9	9
Кольц. 16	11	6	1	1	1	6	6	6

соответствующие одному и тому же значению целевой функции, могут находиться достаточно далеко друг от друга, что позволяет сделать предположение о наличии неучтенных симметрий задачи.

Известно (Егемев А.У., Уликов А.С., 2020), что любой элемент непрерывной подгруппы линейных симметрий задачи (5) может быть описан в виде (9).

$$Q = e^{\sum_n a_n G_n}. \quad (9)$$

Где  $a_n$  – вещественные числа,  $G_n$  – генераторы в теоретико-групповом смысле. В качестве генераторов  $G_n$  можно выбрать косо-симметричные матрицы, которые содержат над главной диагональю один единичный элемент, симметричный ему противоположный элемент и остальные нули. Введем матрицу:  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$ , которая может быть представлена в виде контрэнтного преобразования диагональной матрицы  $D$ :

$$\mathbf{H}_\Sigma = S^T D S,$$

при некоторой матрице  $S$ . Нахождение непрерывных подгрупп симметрий сводится к решению задачи (10).

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_i \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{H}}_i, \\ \tilde{\mathbf{G}} \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{G}}. \end{cases} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = (S^{-1})^T A S^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_i = (S^{-1})^T \mathbf{B}_i S^{-1}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (11)$$

Вычислительный эксперимент по поиску непрерывной подгруппы симметрий состоит из следующих этапов: