

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
«ОФ ИМ СО РАН»

На правах рукописи

Тюнин Николай Николаевич

**Анализ и решение задач оптимизации направленности
фазированных антенных решеток коротковолнового диапазона**

Специальность 05.13.01 —
«Системный анализ, управление и обработка информации»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Еремеев Антон Валентинович

Омск — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Оптимизация направленности ФАР: основные понятия, постановка задач, проблемы и методы решения	23
1.1 Основные понятия	23
1.2 Постановка задачи	24
1.3 Методы решения	27
1.4 Формулировка задачи в действительных числах	28
1.5 Другие постановки задачи	30
1.6 Верхняя оценка нормы допустимых решений	30
1.7 Масштабирование произвольного решения в допустимую область .	31
1.8 Проверка необходимых условий локальной оптимальности	31
Глава 2. Анализ структуры локальных оптимумов	33
2.1 Тестовые примеры	34
2.2 Результаты вычислительного эксперимента	35
2.3 Количество локальных оптимумов и их расположение	38
2.4 Экспериментальная проверка устойчивости решений	41
2.5 Исследование непрерывных симметрий	43
2.5.1 Общие положения	43
2.5.2 Нахождение групп непрерывных симметрий	49
2.5.3 Вычислительный эксперимент	52
Глава 3. Исследование возможностей ФАР в разных условиях	53
3.1 Исследование радиочастотных зависимостей	53
3.2 Исследование взаимного влияния излучателей	57
3.2.1 Широкополосные вертикальные излучатели	58
3.2.2 Симметричные излучатели	58
3.2.3 Интерпретация результатов экспериментов по исследованию взаимного влияния излучателей	62
Глава 4. Дифференциальная эволюция	63
Заключение	65

Словарь терминов	66
Список литературы	67

Введение

В настоящее время разработка и анализ эффективных систем радиосвязи имеет большое значение для народного хозяйства. Одной из актуальных задач в этой области является задача оптимизации направленности фазированных антенных решеток (ФАР), представляющих собой антенные системы, распределение фаз и амплитуд на излучателях которых позволяет получать направленное излучение. Будучи собранными в антенную систему и разведенными в пространстве, излучатели формируют диаграмму направленности, которая зависит от расположения и конструкции излучателей, а также выбора фаз и амплитуд сигналов, подаваемых на вход излучателей.

В диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) задачи оптимизации фаз и амплитуд излучателей, как правило, решаются с использованием некоторых упрощающих предположений[1—3]. Однако, в диапазоне высоких частот (ВЧ), также называемом коротковолновым, требуется использовать методы электродинамического моделирования для оценки наведенных токов в каждой паре излучателей и учитывать свойства подстилающей поверхности, в результате задача оптимизации направленности ФАР оказывается более сложной, и потому менее изучена[4; 5]. При ограничении суммарной мощности, подаваемой на антенную систему, задача выбора фаз и амплитуд на излучателях может быть решена аналитически[6]. Однако, при ограничении на мощность по каждому входу антенной системы требуется решение невыпуклых задач квадратичного программирования[7]. Вообще говоря, задачи квадратичного программирования являются NP-трудными[8]. Для решения таких задач могут применяться методы ветвей и границ, отсечений, ДС-программирования, полуопределенной релаксации, эволюционных вычислений, локального поиска и др.[7; 9—15]. Диссертационная работа посвящена исследованию свойств задачи оптимизации направленного излучения ФАР ВЧ диапазона и разработке алгоритмов решения этой задачи с использованием градиентного подъема и эволюционных вычислений.

Целью данной работы является создание алгоритмов оптимизации направленности излучения ФАР и исследовании области применимости различных методов решения этой задачи.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Изучить структуру множества локальных оптимумов и наличие симметрий в рассматриваемой задаче.
2. Разработать алгоритмы решения задачи и сравнить их с известными методами.
3. Исследовать влияние расположения излучателей, их конструкции и используемой радиочастоты на эффективность оптимизации ФАР.
4. Оценить целесообразность учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона.

Научная новизна:

В отличие от многих работ по оптимизации параметров ФАР в СВЧ диапазоне, где для систем радиолокации требуется аппроксимировать заданную диаграмму направленности, в настоящей работе максимизируется излучение в одном заданном направлении, что в наибольшей степени соответствует системам коротковолновой радиосвязи.

Предложенный вариант алгоритма градиентного подъема содержит процедуру возвращения в допустимую область, применимую к любому решению, в котором превышен предел допустимой мощности сигнала, подводимого к излучателю. Кроме того, наличие симметрии относительно равного сдвига фаз во всех излучателях позволяет зафиксировать фазу и снизить размерность задачи на единицу. Ранее, насколько известно автору, указанные свойства задачи не использовались применительно к методу градиентного подъема.

Впервые на основе экспериментального исследования задачи посредством мультистарта градиентного алгоритма показано наличие кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции, и не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.

На открытый вопрос о целесообразности учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона дан положительный ответ при некоторых конфигурациях антенной системы.

Практическая значимость. Разработанные алгоритмы оптимизации возбуждения ФАР могут применяться в системах связи коротковолнового диапазона для увеличения дальности, снижения энергозатрат или площади, занимаемой антеннами. Созданное программное обеспечение позволяет производить необходимые для этого расчеты. Полученное обоснование необходимости учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР, а также результаты

вычислительных экспериментов для различных вариантов ФАР могут быть полезны при проектировании новых антенных систем.

Методология и методы исследования. В данной работе мы рассматриваем подход к решению задачи максимизации направленности излучения ФАР в заданном направлении при ограничениях, накладываемых на мощность, подаваемую на каждый из излучателей. Такая задача может быть решена только численными методами[6]. Для использования градиентного метода задача сводится к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций. Выбор градиентного алгоритма связан с тем, что отыскание даже локального оптимума в задаче невыпуклого квадратичного программирования может представлять собой NP-трудную задачу, и одним из методов, уместных в таких случаях, является градиентный алгоритм[8]. Согласно[16], использование метода сопряженных градиентов для решения данной задачи не будет приводить к существенным улучшениям по сравнению с простым градиентным подъемом. Данное утверждение нашло согласие с результатами предварительных вычислительных экспериментов, проведенных нами для некоторых из рассматриваемых задач.

Для оценки качества результатов градиентного алгоритма производится их сравнение с решениями, полученными с помощью решателя BARON в пакете GAMS. BARON использует алгоритмы метода ветвей и границ, усиленные различными методами распространения ограничений и двойственности для уменьшения диапазонов переменных в ходе работы алгоритма[17]. Его использование также представляет альтернативный подход к решению данной задачи, но, поскольку BARON является коммерческим решателем, производство расчетов требует приобретения лицензии, что не всегда приемлемо.

Еще одним широко используемым подходом к решению задач оптимизации ФАР являются эволюционные алгоритмы, и, в частности, генетические алгоритмы, роевые алгоритмы, алгоритмы дифференциальной эволюции[1; 3; 15]. Использование эволюционных методов требует больше времени, чем использование градиентного подъема, однако, в отличие от градиентных методов, не требует вычисления производных и не подвержен преждевременному завершению в точках стационарности.

Вообще говоря, при использовании метода градиентного подъема не гарантируется получение глобального оптимума. Приблизиться к глобальному оптимуму позволяет многократный запуск алгоритма из случайным образом сгенерированных точек. Кроме того, многократный запуск позволяет оценить ко-

личество локальных оптимумов, что является некоторым критерием сложности индивидуальной задачи[18]. Анализ структуры локальных оптимумов позволяет также выявить наличие нетривиальных симметрий.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Группа непрерывных симметрий рассматриваемой задачи одномерна и ее элементы соответствуют сдвигу фаз во всех излучателях на равную величину, что позволяет снизить размерность задачи на одну переменную и сократить время счета.
2. Имеется интервал параметров кольцевых ФАР, в котором учет взаимного влияния излучателей ведет к существенному увеличению коэффициента усиления в заданном направлении.
3. Для многих конфигураций ФАР задача имеет несколько кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции, не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.

Достоверность полученных результатов подтверждается согласованностью результатов, полученных предложенными алгоритмами, с результатами коммерческого решателя BARON, а также проведенными исследованиями адекватности модели с точки зрения физических принципов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения» - Омск, июль 2018.
2. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций» - Екатеринбург, июль 2019.
3. V Международной научно-технической конференции «Радиотехника, электроника и связь» - Омск, октябрь 2019.
4. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций» - Иркутск, июль 2021.

Личный вклад. Автор адаптировал метод градиентного подъема и алгоритм дифференциальной эволюции к специфике рассматриваемой задачи, осуществил переход к задаче квадратичного программирования, исходя из постановки в комплексных числах, исследовал наличие непрерывных симметрий, проводил вычислительные эксперименты, исследовал устойчивость решений к возмущению исходных данных.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 1 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 —

в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 3 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 0 приложений. Полный объем диссертации составляет 71 страницу, включая 22 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 48 наименований.

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы. В последующих главах сначала дается обзор литературы по тематике работы, вводятся термины и обозначения, выводится постановка задачи математического программирования из физических соображений, приводятся приемы и техники, способствующие улучшению качества решения и анализу полученных результатов. Затем приводится исследование структуры локальных оптимумов с помощью различных алгоритмов оптимизации. Описываются исследования возможностей ФАР в различных условиях.

Первая глава посвящена обзору имеющейся литературы и постановке задачи математического программирования. Здесь рассматриваются источники, позволяющие сформулировать постановку задачи [6; 19], приводится анализ похожих исследований [20].

Задачей данной работы является максимизация излучения антенной решетки в заданном направлении при ограничениях на мощность, подводимую к каждому излучателю. В терминах комплексных токов, подводимых к излучателям, эта задача сформулирована в работах [5; 6]. Целевая функция задачи оптимизации определяется следующим образом:

$$F = \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i}, \quad (1)$$

где верхний индекс $+$ означает эрмитово сопряжение, $A = (a_{ij})$,

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_i^{(l)} f_j^{(l)}. \quad (2)$$

Здесь $f_i^{(l)}$ - парциальное поле, то есть поле, которое излучается при подаче единичного тока на i -ю точку питания излучающей системы, в то время, как ток в других точках питания равен нулю.

Существуют различные формы ограничений, которые соответствуют различным антенным системам. В данной работе рассматривается случай, когда ограничение на мощность накладывается по каждой точки питания. В этом случае задача формулируется в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \mathbf{i} \in \mathbb{C}^N \end{cases} \quad (3)$$

где \mathbb{C} - поле комплексных чисел, n - число точек питания, на которые накладываются ограничения (в общем случае n может быть не равно N),

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{4P_{max}^{(k)}} (\mathbf{Z}^+ \mathcal{P}^{(k)} + \mathcal{P}^{(k)} \mathbf{Z}), \quad (4)$$

$P_{max}^{(k)}$ - максимально допустимая мощность в k -й точке питания, $\mathcal{P}^{(k)}$ - матрицы-проекторы имеющие единственный ненулевой элемент $\mathcal{P}_{kk}^{(k)} = 1$. Матрицы-проекторы имеют размерность $N \times N$.

Следует отметить, что задача (1.9), сформулированная в комплексных числах, имеет симметрию относительно преобразования $\mathbf{i} \rightarrow e^{j\varphi} \mathbf{i}$ всех комплексных координат (по произвольному углу φ). За j здесь обозначена мнимая единица. Данная симметрия может найти применение для уменьшения размерности области поиска на единицу. Например, фиксируя $Im(y_N) = 0$, что эквивалентно добавлению ограничения $x_{2N} = 0$ к задаче (1.13).

Для разработки алгоритма решения задачи удобно переформулировать ее в вещественных числах. В вещественных числах задача (1.9) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (5)$$

Задача (1.13) имеет целевую функцию, заданную квадратичной формой с положительно полуопределенной матрицей \mathbf{G} . Каждое ограничение формулируется квадратичной формой, определенной симметричной матрицей $\mathbf{H}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$ с двумя парами идентичных собственных значений, два из которых положительны, а другие два отрицательны или равны нулю, все остальные собственные числа равны нулю.

Для данной задачи существует преобразование, позволяющее привести к допустимой области решение \mathbf{x} , которое нарушает только ограничивающие неравенства задачи (1.13) вида $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$:

$$\mathbf{x}' := \alpha(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad (6)$$

где $\alpha(\mathbf{x}) := \max_{k=\overline{1, n}} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}$. Данная процедура применяется для выбора начального решения, а также для масштабирования итогового решения.

В вычислительных экспериментах бывает полезно ограничить множество допустимых решений задачи шаром или параллелепипедом, так как это позволяет более обоснованно выбрать начальное решение для итерационных методов с мультистартом или сократить перебор в методе ветвей и границ. Отметим, что если \mathbf{x} удовлетворяет всем ограничениям задачи (1.13), то

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}. \quad (7)$$

Глобально-оптимальное решение задачи невыпуклого математического программирования вида (1.13) может быть найдено методом ветвей и границ [21; 22] или с использованием методов DC программирования [14; 23]. Локально-оптимальное решение задачи может быть найдено средствами градиентной оптимизации или методом Ньютона [24]. В случае большой размерности могут быть применены различные метаэвристики (см. [25; 26]).

Вторая глава посвящена исследованию структуры локальных оптимумов с помощью различных алгоритмов оптимизации. Процедура решения задачи оптимизации ФАР при ограничении мощности по каждой точке питания состоит в следующем:

1. Для каждого излучателя в решетке рассчитать парциальные компоненты полей $f_i^{(l)}$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, 2}$.
2. Вычислить матрицы \mathbf{G} and $\mathbf{H}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$.
3. Оценить радиус допустимой области.

4. Решить задачу (1.13) с дополнительными ограничениями $x_N = 0, \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$.

Данный подход может гарантировать нахождение как локального, так и глобального оптимума, в зависимости от решателя, используемого на шаге 4. Как один из базовых оптимизационных методов, мы рассматриваем метод градиентной оптимизации (максимизационный вариант) с алгоритмом одномерного поиска Дэвиса, Свенна и Кэмпбелла (ДСК) [24]. Далее целевая функция задачи (1.13) будет обозначаться символом \tilde{F} .

В нашей работе от задачи условной оптимизации мы переходим к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций, а именно - методом внешней точки [27; 28]:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n \left(\min \left(0, \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) + \min \left(0, 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) \right)^4 \rightarrow \max, \quad (8)$$

где r - достаточно большой штрафной параметр. Алгоритм градиентной оптимизации повторяется многократно, при этом используется случайно сгенерированный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ в качестве стартовой точки.

Вычислительный эксперимент был поставлен для задач, построенных на основе четырех типов ФАР: широкополосных вертикальных излучателей, широкополосных вертикальных диполей и симметричных вертикальных диполей. При моделировании полей был использован пакет NEC2, для которого были предоставлены соответствующие геометрические конфигурации антенных систем. В качестве рабочей частоты было выбрано 5 МГц. Рассмотрены квадратные ФАР конфигурации 2x2, 3x3 и 5x5. Заранее отметим, что конфигурация 5x5 была рассмотрена только для решеток СВД, поскольку NEC2 не смог обработать 5x5 ШВИ и 5x5 ШВД из-за высокой сложности этих моделей. В случае с ФАР кольцевой структуры были рассмотрены решетки, состоящие из 8 и 16 излучателей. В качестве направления максимизации излучения выбраны: азимутальный угол 45° , полярный угол 70° .

Здесь сравниваются результаты работы градиентного метода и решателя BARON в его режиме по умолчанию. Во всех экспериментах, описанных ниже, было установлено ограничение по времени 1000с. Все эксперименты проводились на ЭВМ с процессором Intel i7 (тактовая частота: 2.8 ГГц), ОЗУ: 16 Гб. В случае сходимости градиентного метода (завершение по минимально допустимому приращению целевой функции 10^{-4}), алгоритм перезапускается заново до истечения запаса времени.

Во время каждой инициализации градиентного метода стартовая точка \mathbf{x} выбирается независимо с равномерным распределением в кубе $[-5000, 5000]^{2N}$. Такой выбор оказался достаточным для всех задач, кроме СВД 2х2, чтобы получить решение, по целевой функции соответствующее решению, предоставляемому решателем BARON. Лучшее из найденных таким образом решений принимается за конечный результат. Параметр штрафа r в методе градиентной оптимизации установлен равным 10^6 на всех запусках. Такое значение было определено эмпирически. В таблице 3 приводятся результаты вычислительного эксперимента. Значения целевой функции “ \tilde{F} ” точке, полученной алгоритмом градиентного подъема, приводятся после процедуры масштабирования (1.15). Для решателя BARON версии 18.5.8 было выбрано то же самое ограничение сверху на процессорное время, что и для градиентного метода (группа колонок “BARON”), и 50000с. для проверки глобальной оптимальности. Во всех таблицах, колонка “t” содержит время до получения лучшего найденного решения или до установления глобальной оптимальности. Во всех запусках градиентного метода были получены решения, где активными оказались все ограничения вида $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$.

Тип	λ_{min}	$\sqrt{\frac{N}{\lambda_{min}}}$	Град.		BARON	
			\tilde{F}	t, с	\tilde{F}	t, с
ШВИ 2х2	0.0215	13.6	138.2	0.054	139.2	0.12
ШВИ 3х3	0.0177	70	575.7	0.93	580.6	0.34
ШВД 2х2	0.009	21	459.7	0.13	463.6	0.27
ШВД 3х3	0.0013	6767	915	24.4	925	0.34
СВД 2х2	$2 \cdot 10^{-3}$	44	357	1.9	361	0.16
СВД 3х3	$5.6 \cdot 10^{-9}$	$8.4 \cdot 10^5$	1138	25.6	1261	0.38
СВД 5х5	-	-	5318	1000	6716	1000
СВД' 2х2	$7.76 \cdot 10^{-9}$	$22 \cdot 10^3$	233	2.52	253	0.25
СВД' 3х3	0.0008	$1 \cdot 10^4$	664	71	1153	1.48
СВД' 5х5	-	-	1382.7	1000	33.5	217.94
Кольц. 8	$3 \cdot 10^{-3}$	154	217	8.06	218	0.23
Кольц. 16	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^6$	727	90.9	734	1.37

Таблица 1 — Результаты оптимизации, полученные с помощью градиентного подъема и решателя BARON.

Из таблицы 3 видно, что на всех видах решеток, кроме решеток СВД конфигураций 3x3 и 5x5, а также СВД' конфигураций 2x2 и 3x3, разница в значениях целевой функции не превосходит 1%. Для решеток СВД конфигураций 3x3 и 5x5, а также СВД' конфигураций 2x2 и 3x3 градиентный алгоритм существенно уступает по качеству найденного решения. Кроме решеток ШВИ и ШВД конфигурации 2x2 BARON демонстрирует лучшее время счета. Однако, следует отметить, что для обоих алгоритмов время, затраченное на поиск решения, было либо существенно меньше, либо сравнимо со временем, затраченным на построение исходных данных пакетом моделирования NEC, что делает оба подхода равноценными по времени работы с практической точки зрения. Важным результатом, не приведенным в таблице 3, является то, что для ФАР конфигураций ШВИ 2x2, ШВД 2x2 и ШВИ 3x3 была доказана глобальная оптимальность найденного решателем BARON решения.

ФАР	M	M_{ne}	M_f	\mathcal{B}_{M_f}	\mathcal{L}_{M_f}	$M_{y \approx 0}$	$\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$	$\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$
ШВИ 2x2	18368	4	1	1	1	4	4	4
ШВД 2x2	7678	4	1	1	1	4	4	4
СВД 2x2	523	1	1	1	1	1	1	1
СВД 3x3	39	9	2	2	2	5	5	5
СВД' 2x2	396	370	3	3	3	338	1000	1213
СВД' 3x3	14	14	3	3	3	1	1	1
ШВИ 3x3	1070	3	1	1	1	3	3	3
ШВД 3x3	41	4	4	4	4	1	1	1
Кольц. 8	124	9	2	2	2	9	9	9
Кольц. 16	11	6	1	1	1	6	6	6

Таблица 2 — Структура локальных оптимумов.

Для оценки общего числа локальных оптимумов использовался метод переписи Шнабеля. Данный метод имеет применение в экологии и заключается в выводе статистических оценок численности популяции на основе числа особей, помеченных в результате эксперимента, из популяции с неизменным составом, где каждая особь имеет константную вероятность отлова. В [18] предлагается адаптация такого метода для оценки числа локальных оптимумов. В таблице 4 приводится статистика по числу различных точек остановки (в пределах заданной точности) процедуры мултистарта в течение 1000 с. процессорного времени.

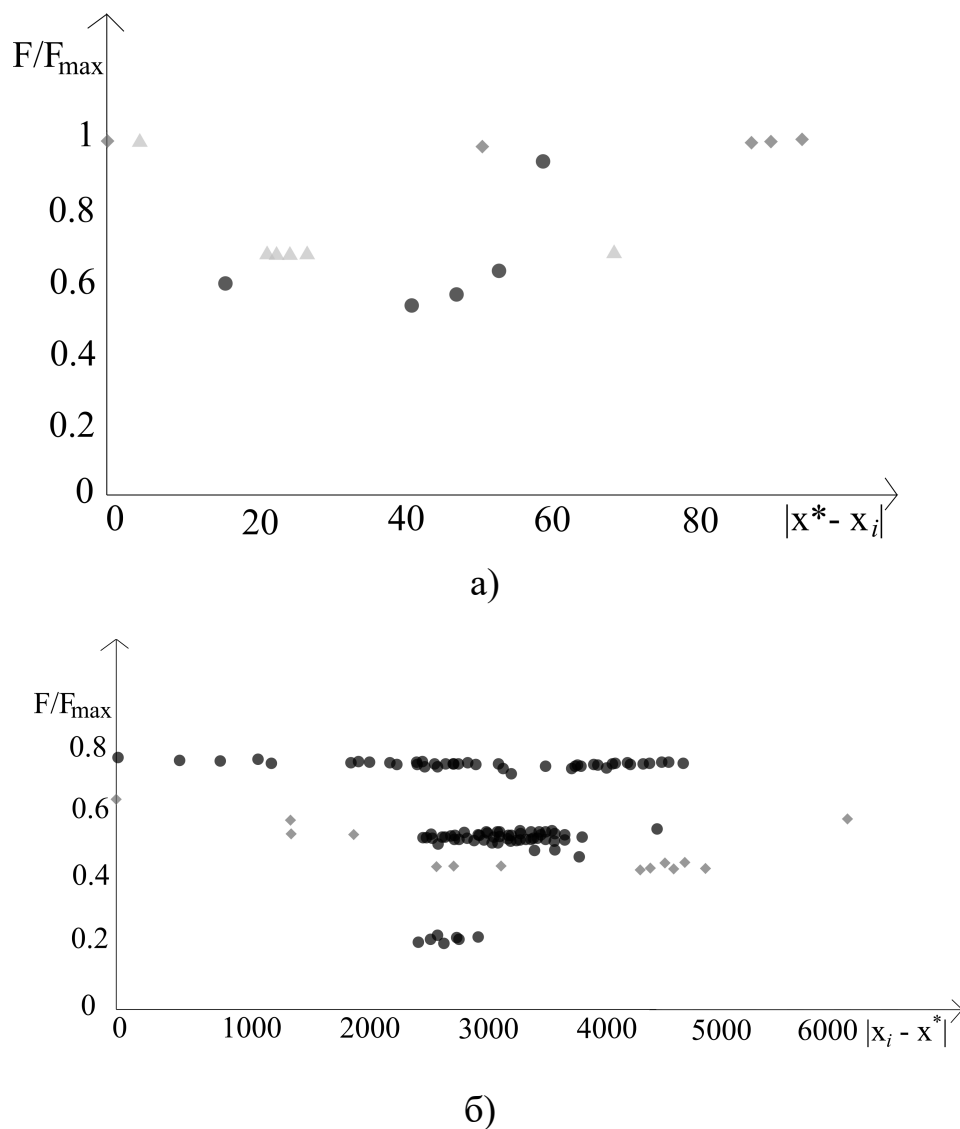


Рисунок 1 — Структура множества найденных решений для задач ШВИ, ШВД, СВД (а) и СВД' (б)

Для каждого решения была применена процедура линеаризации задачи и проверки необходимых условий локальной оптимальности. Приемлемыми считались отличия целевой функции линеаризованной задачи от значения целевой функции, найденного градиентным методом менее чем на 1%. Здесь M - число выполненных запусков за отведенное время, M_{ne} - число групп решений, отличающихся не более чем на 10% по каждой из координат, M_f - число групп значений целевой функции у таких неэквивалентных решений (с точностью до 10%, приведенных в таблице 3). $M_{y \approx 0}$ - число групп решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности. \mathcal{B} и \mathcal{L} - оценка нижней границы и оценка максимального правдоподобия числа локальных оптимумов, рассчитанные по методу переписи Шнабеля. Доверительная вероятность для данного метода была

выбрана равной 95%. Оценки для числа решений с различными значениями целевой функции обозначены \mathcal{B}_{M_f} и \mathcal{L}_{M_f} . Оценки для числа решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, обозначены $\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$ и $\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$.

Как видно из таблицы, во всех экспериментах в некоторых запусках были найдены неразличимые с практической точки зрения решения.

На рис. 2.2 приведены диаграммы локальных оптимумов, где по оси ординат отложены значения целевой функции, а по оси абсцисс - расстояние до лучшего известного решения. В случае а) точками обозначены результаты для кольцевых решеток, состоящих из 8 излучателей, ромбами - для кольцевых решеток, состоящих из 16 излучателей, пятиугольниками - для СВД 3x3. В случае б) точками обозначены результаты для СВД' 2x2, ромбами - для СВД' 3x3. Диаграмма показывает, что значения, соответствующие одному и тому же значению целевой функции, могут находиться достаточно далеко друг от друга, что позволяет сделать предположение о наличии неучтенных симметрий задачи (о множестве линейных симметрий задачи см. в [29]). Наличие большого количества решений, соответствующих одному и тому же значению целевой функции, приводит нас к исследованию групп симметрий. В [29] показано, что любой элемент группы непрерывных симметрий задачи 1.13 может быть описан в виде 2.20.

$$Q = e^{\sum_n a_n G_n}. \quad (9)$$

где a_n - вещественные числа, G_n - генераторы. В качестве генераторов можно выбрать косо-симметричные матрицы, которые содержат над главной диагональю один единичный элемент, симметричный ему противоположный элемент и остальные нули. Введем матрицу: $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$, которая может быть представлена в виде конгруэнтного преобразования диагональной матрицы D :

$$\mathbf{H}_\Sigma = S^T D S,$$

Нахождение непрерывных групп симметрий сводится к решению задачи 2.21.

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_i \left(\sum_n a_n G_n \right) = \left(\sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{H}}_i, \\ \tilde{\mathbf{G}} \left(\sum_n a_n G_n \right) = \left(\sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{G}}. \end{cases} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = (S^{-1})^T \mathbf{A} S^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = (S^{-1})^T \mathbf{B}_i S^{-1}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (11)$$

Вычислительный эксперимент состоит из следующих этапов:

1. Обработка. На этом этапе возможная неточность данных нивелируется усреднением симметричных компонент матриц (матрицы \mathbf{G} и \mathbf{H} должны быть симметричны).
2. Преобразование $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$ к канонической форме используя метод Лагранжа для вычисления матриц S и S^{-1} .
3. Применение метода Гаусса к системе линейных (2.21) для вычисления генераторов \hat{G}_n .

Описанная процедура нахождения непрерывных групп симметрий применяется к примерам, описанным во второй главе. Для всех рассмотренных задач было выявлено только наличие фазовой симметрии. Возможно, множественность решений объясняется наличием дискретных симметрий. Выявление дискретных симметрий является объектом дальнейших исследований.

Как было показано выше, градиентный метод может предоставить решение, не являющийся локальным оптимумом, если целевая функция слабо изменяется в окрестности текущей точки. Алгоритм дифференциальной эволюции не подвержен такому поведению. Эксперименты показывают, что в целом эволюция популяции соответствует динамике случайного облака точек, движущегося как целое вдоль рельефа оптимизируемой функции, повторяя его характерные особенности. В случае попадания в овраг «облако» принимает форму этого оврага и распределение точек становится таким, что математическое ожидание разности двух случайных векторов оказывается направленным вдоль длинной стороны оврага. Это обеспечивает быстрое движение вдоль узких вытянутых оврагов, тогда как для градиентных методов в аналогичных условиях характерно колебательная динамика «от стенки к стенке». Приведенные эвристические соображения иллюстрируют наиболее важную и привлекательную особенность алгоритма ДЭ — способность динамически моделировать особенности рельефа оптимизируемой функции. Именно этим объясняется замечательная способность алгоритма быстро проходить сложные овраги, обеспечивая эффективность даже в случае сложного рельефа.

Кратко опишем идею алгоритма ДЭ. В начале происходит генерация популяции. Если нет дополнительной информации, такая популяция особи популяции генерируются случайным образом с равномерным распределением. Затем, пока

все особи не сойдутся в одной точке, каждая особь подвергается мутации путем присваивания ей признаков другой особи. Процедура, определяющая, в какой степени признаки других особей участвуют в эволюции конкретной особи является параметром алгоритма. Далее происходит сравнение значений целевой функции мутировавшей особи со значением целевой функции исходной особи. Выживает особь с лучшим значением целевой функции.

Данный алгоритм хорошо поддается модификации для запуска в параллельных потоках. В этом случае, на очередной итерации алгоритма выбирается некоторый набор особей, эволюция каждой из которых на данной итерации происходит независимо от эволюции другой. В данной работе был предложен вариант реализации алгоритма дифференциальной эволюции, адаптированный для запуска на графическом устройстве. Использование алгоритма ДЭ позволило достичь решения с целевой функцией $\tilde{F} = 253$ для задачи СВД' 2x2.

Третья глава посвящена исследованию ФАР в различных условиях.

На практике использование высоко симметричных ФАР вызывает особый интерес из следующих соображений: измерение матрицы сопротивлений является тривиальной задачей, в то время как измерение парциальных полей требует большое количество приемников для всех возможных направлений излучения. Использование высокосимметричных ФАР позволяет выполнить расчеты для одного направления и затем легко адаптировать их для других симметричных направлений. Другой особенностью, влияющей на результаты моделирования является наличие потерь в земле (см. [30]). Чтобы ослабить этот эффект, антенные системы с противовесами подняты над землей на 2 м.

В данной главе мы изучаем, как изменяется общий коэффициент усиления с ростом радиочастоты и плотности системы противовесов. Общий коэффициент усиления является суммой частичных коэффициентов усиления в двух ортогональных поляризациях. Плотность системы противовесов определяется числом продольных и поперечных проводов, относящихся к одному и тому же излучателю. Частота изменяется от 5 до 30 МГц. Вычисления производились на решетках ШВИ, состоящих из 8 излучателей. Для расчета матрицы сопротивлений и матрицы излучений использовался пакет моделирования антенных систем NEC2 [31].

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS, поскольку, в основном он деонстрирует лучшие результаты по сравнению с градиентным подъемом. Результаты оптимизации направленности решетки сравниваются с коэффициентом усиления одиночного

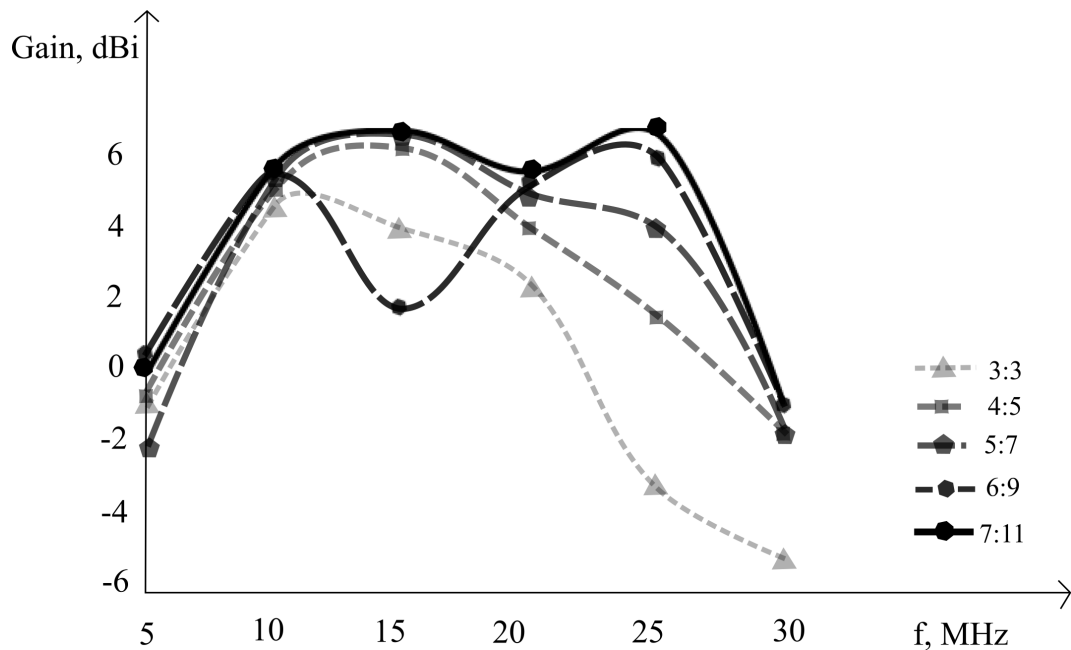


Рисунок 2 — Зависимость от частоты общего коэффициента усиления ФАР при оптимизации в направлении 70:45

излучателя, установленного в центре такой же системы противовесов. Плотность системы противовесов обозначается в формате *long : trans*, где *long* - число продольных проводов, относящихся к одному излучателю, а *trans* - поперечных. Высота каждого ШВИ - 15м. В качестве направления оптимизации выбирается 70° полярного угла и 45° азимутального угла в сферических координатах.

На рис. 3.1 показано, как изменяется коэффициент усиления с ростом радиочастоты. Мы можем наблюдать, что при значениях частоты 5 и 30 МГц решетка оптимизируется довольно плохо. Также можно увидеть, что, в основном, увеличение плотности системы противовесов приводит к росту коэффициента усиления. Единственное исключение - решетка с плотностью системы противовесов 6 : 9 на частоте 15МГц, где наблюдается неожиданное падение коэффициента усиления. Такое поведение может быть объяснено тем, что BARON не достиг глобального оптимума.

На рис. 3.2 показано, как изменяется разница коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя с ростом частоты. Заметным результатом здесь является то, что на частоте 25МГц усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. Объяснение этого эффекта будет приведено далее при сравнении диаграмм направленности. При 5МГц усиление ФАР существенно не превосходит усиление одиночного излучателя, однако, уже на 10МГц разница возрастает

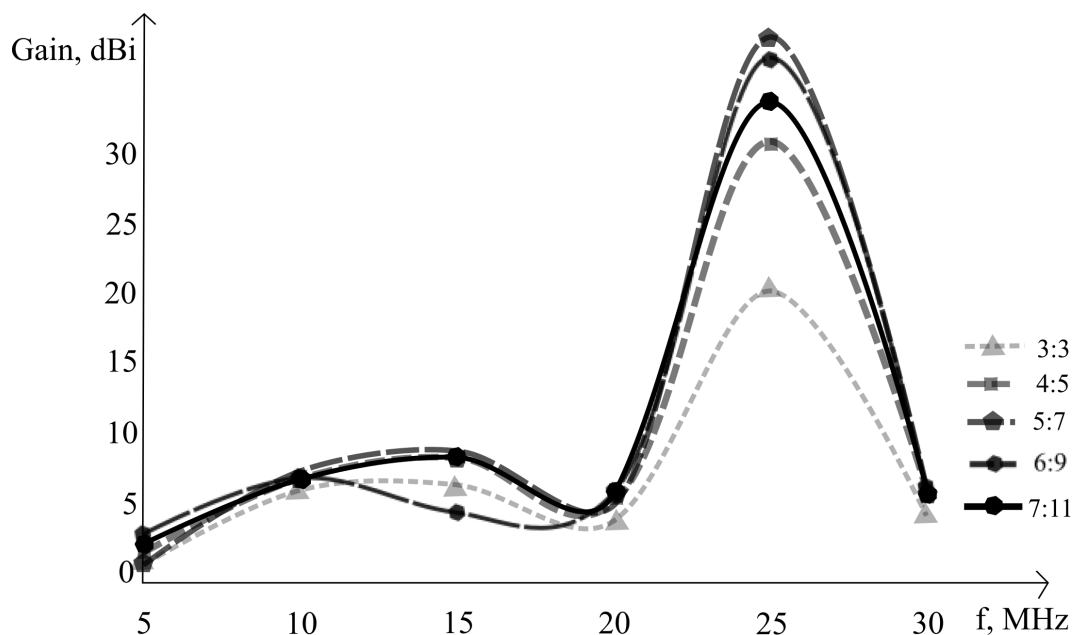


Рисунок 3 — Сравнение коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя

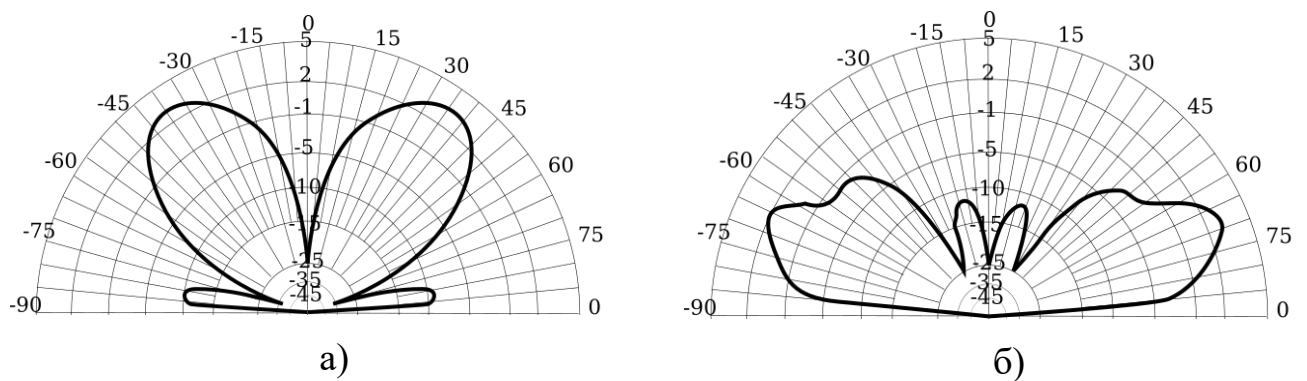


Рисунок 4 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 25МГц

до 7.53дБ. Даже при 30МГц, где ФАР не оптимизируется хорошо, разница с одиночным излучателем составляет 6.63дБ в лучшем случае и 4.84дБ в худшем.

Интересный результат наблюдается при 25МГц (см Рис. 3.6), где усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. Сравнение их диаграмм направленности показывает, что одиночный излучатель довольно плохо излучает в направлении оптимизации, тогда как ФАР имеет максимум излучения в этом направлении. Предположительно, такой эффект был получен вследствие учета взаимного влияния. Согласно (1.5), если пренебречь взаимным влиянием излучателей, плотность мощности F будет максимальна тогда, когда комплексные амплитуды парциальных полей будут синфазны. Для проверки гипотезы о необходимости учета взаимного влияния в данной работе производилось сравнение диаграмм направленности решеток разных конфигураций после математической

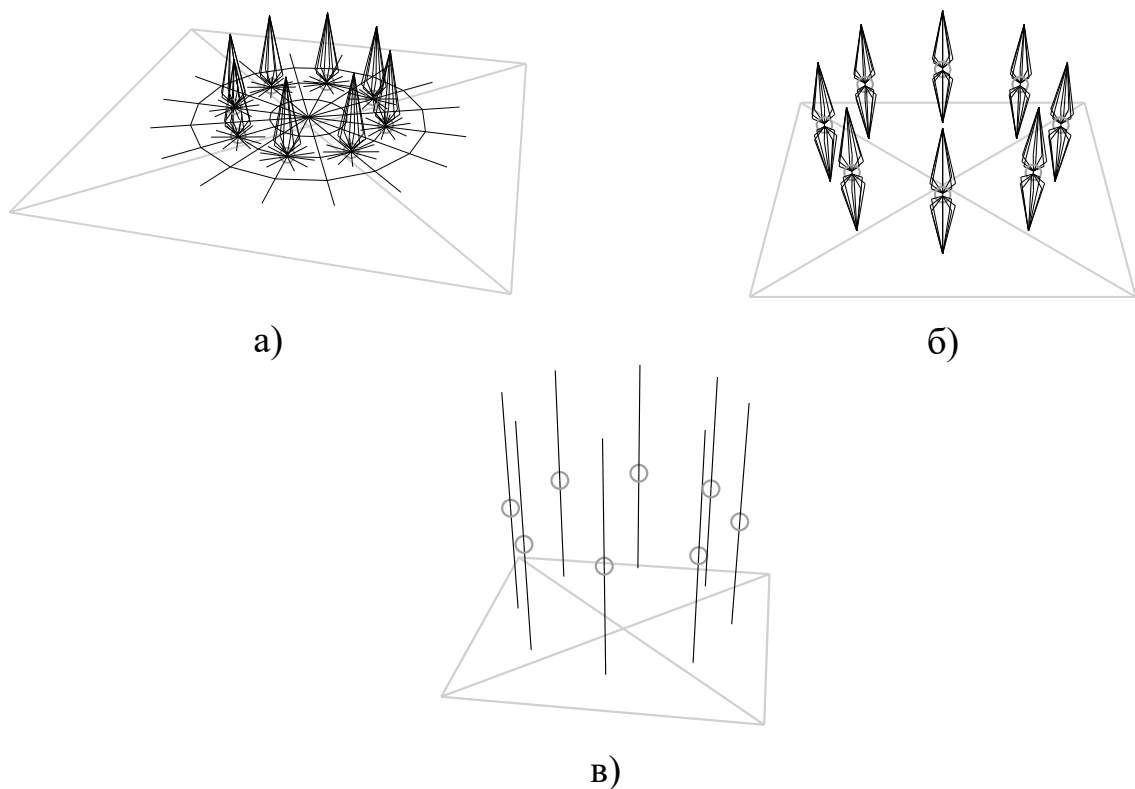


Рисунок 5 — ФАР кольцевой структуры: ШВИ (а) ШВД (б) и СВД (в)

оптимизации их направленности в заданном направлении согласно модели (1.13) с соответствующими диаграммами одиночного излучателя и со случаем фазирования решетки без учета взаимного влияния (далее – простое фазирование).

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS, поскольку, как правило, он обеспечивает бóльшую точность решений по сравнению с градиентным подъемом [A1]. Высота каждого ШВИ равна 15 м. Длина плеча симметричных излучателей также равна 15 м. Направление оптимизации по умолчанию было установлено на 70° полярного угла и 45° азимутального угла в сферических координатах. Для некоторых экспериментов было проведено дополнительное исследование при 85° полярного угла.

Для решеток ШВИ (см. Рис. 5, а.) производилось сравнение диаграмм направленности при варьировании расстояния центра излучателя до центра решетки (от 7 до 80 м.), длины радиальных противовесов (от 3 до 20 м.) и присутствия или отсутствия общей системы противовесов. Диаграммы направленности при этом имели различную форму, однако, качественно различие между коэффициентами усиления всегда сохранялось: результат оптимизации не дает значимого преимущества перед простым фазированием.

Для ШВД (см. Рис. 5, б.) производилось исследование диаграмм направленности при варьировании расстояния центра излучателя до центра решетки от 5 до

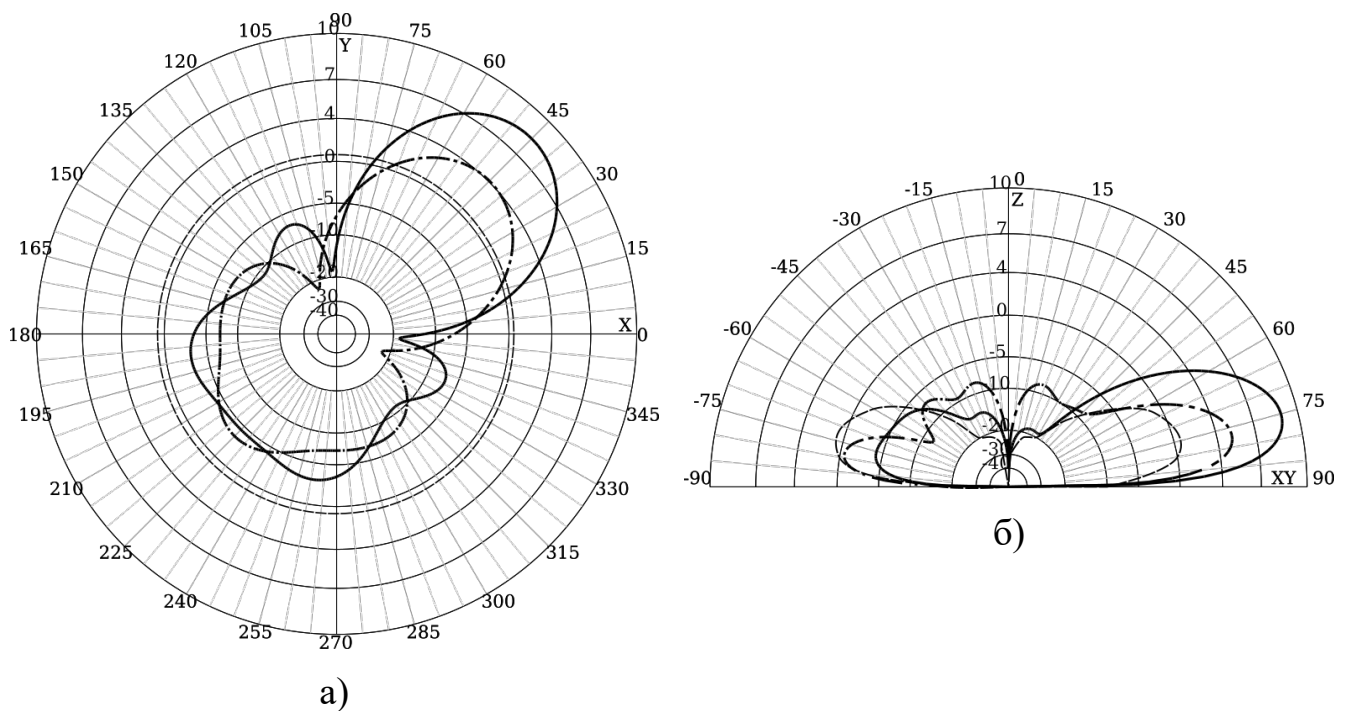


Рисунок 6 — Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 20 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.

50 м. В большинстве случаев, использование решения задачи математического программирования не давало существенного преимущества перед простым фазированием. Тем не менее, при расстоянии между центром излучателя и центром решетки равным 20 м. это различие составило около 4 дБ (см. Рис. 6).

Аналогичные результаты были получены и для решетки (см. Рис. 5, в.). При оптимизации в направлении полярного угла равном 70° при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 35 до 37 м. разница между коэффициентом усиления решения задачи математического программирования и усилением простого фазирования также достигала 4 дБ. При оптимизации в направлении полярного угла равном 85° при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 25 до 29 м. эта разница достигала 5 дБ.

В четвертой главе приведено разработанного программного комплекса. Для проведения вычислительных экспериментов был разработан интерпретатор «Ехрі» и его графическая оболочка «ЕхріІDE».

Формат языка «Ехрі» позволяет в декларативной форме объявлять правила построения моделей и задавать параметры запуска экспериментов. В языке «Ехрі»

предоставлены возможности моделировать конфигурации проводников в зависимости от динамических параметров, объединять их в группы и применять к ним геометрические преобразования. Также имеется возможность экспорта определенных конфигураций в формат NEC. Отдельно следует отметить возможность языка выполнять серии вычислительных экспериментов. В «Ехрі» уже встроен интерфейс для работы с пакетом GAMS, а также имеется возможность интеграции любого пользовательского пакета.

Графическая оболочка «ЕхріIDE» представляет собой файловый инспектор с возможностью редактировать и запускать файлы экспериментов ехр, просматривать и экспортировать диаграммы направленности и геометрию антенных систем.

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Предложена модификация градиентного метода, учитывающая специфику задачи оптимизации фаз и амплитуд ФАР, позволяющая получать решения с практически приемлемыми точностью и временем счета.
2. В рассматриваемых задачах оптимизации фаз и амплитуд ФАР методами линейной алгебры выявлено семейство симметрий, состоящих в равном по величине сдвиге фаз во всех излучателях и позволяющее сократить размерность задач.
3. В ходе вычислительного эксперимента показано, что задача оптимизации фаз и амплитуд фазированной антенной решетки имеет многочисленные локальные оптимумы, большое число из которых совпадают по целевой функции, однако не эквивалентны между собой относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.
4. Выявлены ситуации, в которых коэффициент усиления, соответствующий решению задачи квадратичной оптимизации, имеет существенное преимущество (до 5 дБ) перед коэффициентом усиления, получаемым стандартным методом простого фазирования.

Глава 1. Оптимизация направленности ФАР: основные понятия, постановка задач, проблемы и методы решения

1.1 Основные понятия

Как и в работах [5; 30] мы изучаем антенные решетки КВ диапазона, состоящие из широкополосных вертикальных излучателей (ШВИ) см. Рис. 1.1 а) и широкополосных вертикальных диполей (ШВД), см. Рис. 1.1 б). Кроме того, в рассмотрение включены решетки симметричных вертикальных диполей (СВД), см. Рис. 1.1 в) и решетки ШВИ кольцевой структуры, см. Рис. 1.1 г).

Каждый ШВИ состоит из 8 проводов, которые составляют “каплеобразный” вертикальный излучатель, обеспеченный системой противовесов. Система противовесов каждого излучателя состоит из 6 проводов, расположенных параллельно земле. ШВД спроектирован аналогично ШВИ с той разницей, что вместо системы противовесов подключен другой “каплеобразный” вертикальный излучатель, направленный в противоположную сторону. СВД являются диполями стандартной конфигурации, то есть, представляют собой прямолинейный проводник, длина которого много больше его радиуса, питаемый от генератора посередине. Решетки ШВИ кольцевой структуры представляют собой несколько “каплеобразных” вертикальных излучателей, расположенных по кругу с некоторым фиксированным шагом. Система противовесов для такой решетки состоит из радиальных проводников, причем через каждый излучатель проходит один такой проводник. Кроме того, система противовесов состоит из поперечных проводников, соединяющих соседние излучатели, а также параллельных ему проводников в данном секторе. В принципе, в рассмотрение могут быть включены излучатели, спроектированные любым другим образом, если для них предоставлены соответствующие входные данные задачи оптимизации ФАР. Здесь под входными данными понимаются матрицы компонент полей и матрицы проводимости, которые можно получить с помощью некоторой программы моделирования антенн.

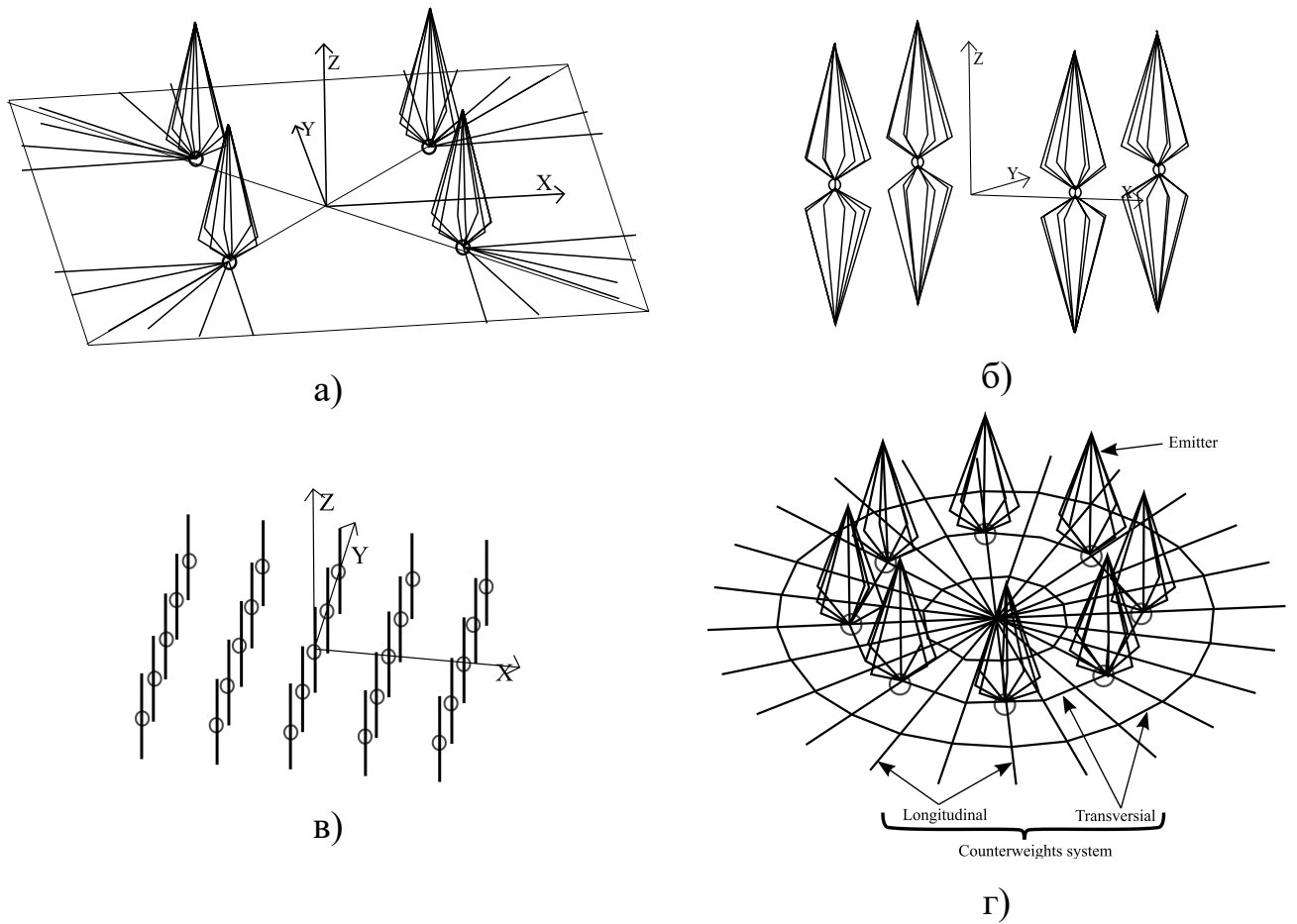


Рисунок 1.1 — ФАР различных конфигураций

1.2 Постановка задачи

Нашей задачей является максимизация излучения антенной решетки в заданном направлении при ограничениях на мощность, подводимую к каждому излучателю. В терминах комплексных токов, подводимых к излучателям, эта задача сформулирована в работах [5; 6]. Пусть l - индекс компоненты вектора направления: $l = 1$ для азимутального и $l = 2$ для полярного угла. Расстояние до приемника принимается во много раз превышающим размеры ФАР, поэтому индекс l итерирует только эти два значения. Суммарное электромагнитное поле $f_{\Sigma}^{(l)}$, выраженное в комплексных единицах, вводится как

$$f_{\Sigma}^{(l)} = \sum_{i=1}^N I_i \tilde{f}_i^{(l)}, \quad (1.1)$$

где N - число точек питания антенной системы, I_i - комплексный ток в i -й точке питания; $\tilde{f}_i^{(l)}$ - парциальное поле, то есть поле, которое излучается при подаче единичного тока на i -ю точку питания излучающей системы, в то время, как ток

в других точках питания равен нулю. В качестве количественной меры оценки электромагнитного поля используется напряженность электрического поля. Отметим, что из определения парциального поля следует, что $\tilde{f}_i^{(l)}$ имеет размерность поля, нормированного к току. Справедливость выражения (1.1) следует из линейности уравнений Максвелла (более подробно см. [6]). Таким образом, суммарное поле $f_\Sigma^{(l)}$ является суперпозицией парциальных полей от каждой точки питания излучающей системы.

Значения $f_i^{(l)}$ и $f_\Sigma^{(l)}$ - функции направления и частоты, которые могут быть вычислены с помощью некоторой программы моделирования антенн (здесь мы используем NEC-2 [31]).

За \bar{f} обозначим комплексное сопряжение к f . Как было упомянуто выше, цель - максимизация направленности излучения. В качестве количественной меры оценки направленности излучения понимается плотность мощности поля в заданном направлении, обозначаемая через F . Через компоненты электромагнитного поля F выражается по формуле (1.2)

$$F = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_\Sigma^{(l)} f_\Sigma^{(l)} \quad (1.2)$$

и является целевой функцией задачи. При максимизации F необходимо учитывать ограничения на активную мощность, которую способны выдавать усилители, питающие антенную систему. В силу закона Ома такие ограничения могут быть выражены в терминах только токов или только напряжений. Чтобы найти мощность i -го источника, мы вводим соответствующие комплексные напряжения U_i следующим образом:

$$U_i = \sum_{j=1}^N z_{ij} I_j, \quad (1.3)$$

где z_{ij} - элементы матрицы сопротивлений $\mathbf{Z} = (z_{ij})$, имеющей размерность $N \times N$.

В некоторых случаях более удобно использовать матричную нотацию. В рамках данной нотации мы вводим вектор-столбец токов \mathbf{i} и вектор-столбец напряжений \mathbf{u} , состоящие из N элементов. Целевая функция в таком случае формулируется следующим образом:

$$F = \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i}, \quad (1.4)$$

где верхний индекс $+$ означает эрмитово сопряжение, $A = (a_{ij})$,

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_i^{(l)} f_j^{(l)}. \quad (1.5)$$

Соответственно, соотношение между токами и напряжениями записывается следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{i}. \quad (1.6)$$

Существуют различные формы ограничений, которые соответствуют различным антенным системам. Например, можно ограничить суммарную мощность P по всем точкам питания. В этом случае задача оптимизации формулируется так:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ \mathbf{i}^+ \mathbf{B} \mathbf{i} = 1, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4P}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^+). \quad (1.8)$$

Такая задача может быть решена аналитически [6].

Задача усложняется, когда ограничение на мощность накладывается по каждой точке питания. В этом случае задача формулируется в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \mathbf{i} \in \mathbb{C}^N \end{cases} \quad (1.9)$$

где \mathbb{C} - поле комплексных чисел, n - число точек питания, на которые накладываются ограничения (в общем случае n может быть не равно N),

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{4P_{max}^{(k)}}(\mathbf{Z}^+ \mathcal{P}^{(k)} + \mathcal{P}^{(k)} \mathbf{Z}), \quad (1.10)$$

$P_{max}^{(k)}$ - максимально допустимая мощность в k -й точке питания, $\mathcal{P}^{(k)}$ - матрицы-проекторы имеющие единственный ненулевой элемент $\mathcal{P}_{kk}^{(k)} = 1$. Матрицы-проекторы имеют размерность $N \times N$.

Доказано [6], что:

1. Все матрицы $\mathbf{B}^{(k)}$ имеют не больше чем два ненулевых собственных значения. Одно из собственных значений положительно, остальные отрицательные или нулевые.
2. Матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{B}^{(k)}$ эрмитово-самосопряженные, то есть $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ для всех $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}$.
3. Матрица \mathbf{A} положительно полуопределена.
4. Кроме того, из физических соображений вытекает, что матрица $\mathbf{B}_\Sigma := \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^{(k)}$ положительно определена, так как суммарная активная мощность, поглощаемая пассивной цепью, не может быть отрицательной либо нулем, поскольку, часть энергии обязательно излучится [6].

1.3 Методы решения

В данной работе мы рассматриваем подход к решению задачи максимизации направленности излучения ФАР в заданном направлении при ограничениях, накладываемых на мощность, подаваемую на каждый из излучателей. Такая задача может быть решена только численными методами [6]. Для использования градиентного метода задача сводится к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций. Выбор градиентного алгоритма связан с тем, что отыскание даже локального оптимума в задаче невыпуклого квадратичного программирования может представлять собой NP-трудную задачу, и одним из методов, уместных в таких случаях, является градиентный алгоритм [8]. Согласно [16], использование метода сопряженных градиентов для решения данной задачи не будет приводить к существенным улучшениям по сравнению с простым градиентным подъемом. Данное утверждение нашло согласие с результатами предварительных вычислительных экспериментов, проведенных нами для некоторых из рассматриваемых задач.

Для оценки качества результатов градиентного алгоритма производится их сравнение с решениями, полученными с помощью решателя BARON в пакете GAMS. BARON использует алгоритмы метода ветвей и границ, усиленные различными методами распространения ограничений и двойственности для уменьшения диапазонов переменных в ходе работы алгоритма [17]. Его использование также представляет альтернативный подход к решению данной задачи,

но, поскольку BARON является коммерческим решателем, произведение расчетов требует приобретения лицензии, что не всегда приемлемо.

Еще одним эффективным подходом к решению невыпуклых задач квадратичного программирования являются генетические алгоритмы, и, в частности, методы дифференциальной эволюции (ДЭ) [26; 32]. Использование методов ДЭ требует больше времени, чем использование градиентного подъема, однако, в отличие от градиентных методов, не требует вычисления производных и не подвержен преждевременному завершению в точках стационарности. Таким образом, методы ДЭ также могут быть применены при исследовании структуры локальных оптимумов задачи невыпуклого квадратичного программирования.

Вообще говоря, при использовании метода градиентного подъема не гарантируется получение глобального оптимума. Приблизиться к глобальному оптимуму позволяет многократный запуск алгоритма из случайным образом сгенерированных точек. Кроме того, многократный запуск позволяет оценить количество локальных оптимумов, что является некоторым критерием сложности индивидуальной задачи [18]. Анализ структуры локальных оптимумов позволяет также выявить наличие нетривиальных симметрий.

1.4 Формулировка задачи в действительных числах

Для разработки алгоритма решения задачи удобно переформулировать ее в вещественных числах. Обозначим соответствующие матрицы: $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$ для целевой функции и $\mathbf{H}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$; $k = \overline{1, n}$ для ограничений. Пусть $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N^2}$, и пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ - вектор, где первые N компонент являются вещественными частями соответствующих компонент вектора \mathbf{y} , в то время, как остальные компоненты соответствуют мнимым, то есть:

$$\mathbf{y}_i \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{N+i}), \quad \mathbf{x}_i = \text{Re}(\mathbf{y}_i), \quad \mathbf{x}_{N+i} = \text{Im}(\mathbf{y}_i) \quad i = \overline{1, N}.$$

Через $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$ обозначим матрицу следующего вида:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{Re}(\mathbf{A}) & -\text{Im}(\mathbf{A}) \\ \hline \text{Im}(\mathbf{A}) & \text{Re}(\mathbf{A}) \end{array} \right). \quad (1.11)$$

Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{A}\mathbf{y}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{A}\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{y}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{y}) \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Из того, что матрица \mathbf{A} эрмитово-самосопряженная, следует, что матрица \mathbf{G} симметричная. Действительно, так как матрица \mathbf{A} эрмитово-самосопряжена, следует симметричность $\operatorname{Re}(\mathbf{A})$ и кососимметричность $\operatorname{Im}(\mathbf{A})$. Это значит, что

$$\mathbf{G}^T = \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Re}(\mathbf{A}) & (\operatorname{Im}(\mathbf{A}))^T \\ \hline (-\operatorname{Im}\mathbf{A})^T & \operatorname{Re}(\mathbf{A}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Re}(\mathbf{A}) & -\operatorname{Im}(\mathbf{A}) \\ \hline \operatorname{Im}(\mathbf{A}) & \operatorname{Re}(\mathbf{A}) \end{array} \right) = \mathbf{G}.$$

Таким образом, \mathbf{G} является симметрической матрицей. То же самое применимо к матрицам ограничений $\mathbf{H}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}; k = \overline{1, n}$. В вещественных числах задача (1.9) эквивалентна следующей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Задача (1.13) имеет целевую функцию, заданную квадратичной формой с положительно полуопределенной матрицей \mathbf{G} . Каждое ограничение формулируется квадратичной формой, определенной симметричной матрицей $\mathbf{H}^{(k)}, k = \overline{1, n}$ с двумя парами идентичных собственных значений, два из которых положительны, а другие два отрицательны или равны нулю, все остальные собственные числа равны нулю.

Следует отметить, что задача (1.9), сформулированная в комплексных числах, имеет симметрию относительно преобразования $\mathbf{i} \rightarrow e^{j\varphi} \mathbf{i}$ всех комплексных координат (по произвольному углу φ). За j здесь обозначена мнимая единица. В качестве доказательства рассмотрим некоторую квадратичную форму, определенную матрицей \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}e^{j\varphi})^+ \mathbf{M} (\mathbf{v}e^{j\varphi}) &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N |v_k| |v_l| m_{kl} e^{j(\varphi_l + \varphi - \varphi_k - \varphi)} = \\ &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N |v_k| |v_l| m_{kl} e^{j(\varphi_l - \varphi_k)}. \end{aligned}$$

Глобально-оптимальное решение задачи невыпуклого математического программирования вида (1.13) может быть найдено методом ветвей и границ [21; 22] или с использованием методов ДС программирования [14; 23]. Локально-оптимальное решение задачи может быть найдено средствами градиентной оптимизации или методом Ньютона [24]. В случае большой размерности могут быть применены различные метаэвристики (см. [25; 26]).

1.5 Другие постановки задачи

1.6 Верхняя оценка нормы допустимых решений

В вычислительных экспериментах бывает полезно ограничить множество допустимых решений задачи шаром или параллелепипедом, так как это позволяет более обоснованно выбрать начальное решение для итерационных методов с мультистартом или сократить перебор в методе ветвей и границ.

Отмеченная симметрия может найти применение для уменьшения размерности области поиска на единицу. Например, фиксируя $Im(y_N) = 0$, что эквивалентно добавлению ограничения $x_{2N} = 0$ к задаче (1.13).

Кроме того, можно оценить множество допустимых решений в терминах евклидова расстояния до начала координат. Отметим, что если \mathbf{x} удовлетворяет всем ограничениям задачи (1.13), то

$$\min\{\mathbf{z}^T \mathbf{H}_\Sigma \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N}, \|\mathbf{z}\| = 1\} = \lambda_{\min},$$

(см. например [33], глава 1, § 1.0.2), мы получаем

$$\mathbf{x}^T \mathbf{H}_\Sigma \mathbf{x} \geq \|\mathbf{x}\|^2 \lambda_{\min}$$

и

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}. \quad (1.14)$$

1.7 Масштабирование произвольного решения в допустимую область

Для данной задачи существует преобразование, позволяющее привести к допустимой области решение \mathbf{x} , которое нарушает только ограничивающие неравенства задачи (1.13) вида $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$:

$$\mathbf{x}' := \alpha(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad (1.15)$$

где $\alpha(\mathbf{x}) := \max_{k=1, n} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}$. Поскольку как целевая функция, так и ограничения представлены квадратичными формами, применение такой операции приведет к пропорциональному уменьшению в $\alpha(\mathbf{x})$ раз значений каждой из квадратичных форм. Другими словами, если в некоторой точке \mathbf{x} значения каждой из квадратичных форм, задающих ограничения, больше 0, причем значения некоторых из них больше 1, то по формуле (1.15) можно определить множитель, умножение которого на вектор \mathbf{x} ведет к тому, что наибольшее из значений квадратичных форм, задающих ограничения, будет равно 1. Данная процедура применяется для выбора начального решения, а также для масштабирования итогового решения.

1.8 Проверка необходимых условий локальной оптимальности

Как уже было отмечено, нахождение даже локального оптимума в случае решения задачи невыпуклого квадратичного программирования, вообще говоря, является NP-трудным. В связи с этим, применительно к градиентному подъему, можно ожидать ситуаций, в которых при поиске локального оптимума потребуются чрезмерно большое число итераций или произойдет преждевременная остановка вдалеке от локального оптимума. Из этого следует, что имеет смысл предусмотреть процедуру, позволяющую определить случаи, когда полученное решение не является локальным оптимумом. Для этого была применена процедура проверки необходимых условий локальной оптимальности [8]. Суть данной проверки в том, что мы линеаризуем задачу вблизи точки остановки градиентного алгоритма. Для этого в окрестности решения \mathbf{x}_0 вводим малое приращение \mathbf{y} . При этом, каждая квадратичная форма, представленная симметричной матрицей

\mathbf{M} , преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T \mathbf{M} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}.$$

Учитывая симметричность каждой квадратичной формы и пренебрегая квадратичными по \mathbf{y} слагаемыми, получаем для задачи (1.13):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0^T \mathbf{G} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{G} \mathbf{y} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{y} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{y} \leq 1, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (1.16)$$

В случае локальной оптимальности решения \mathbf{x}_0 модуль $|\mathbf{y}^T \mathbf{G} \mathbf{y}|$ должен быть равен нулю.

Следует отметить, что решение задачи (1.16) не подтверждает локальную оптимальность, а лишь предоставляет вспомогательную процедуру, благодаря которой из всего множества решений, найденных в результате многократного запуска из случайно сгенерированной точки градиентного подъема, можно исключить решения, заведомо не являющиеся локальными оптимумами. Такие решения могут быть получены в результате преждевременного завершения работы градиентного метода по точности, если значения целевой функции слабо меняются за итерацию алгоритма или текущее решение оказалось в стационарной точке, не являющейся локальным оптимумом (последнее случается крайне редко).

Глава 2. Анализ структуры локальных оптимумов

Процедура решения задачи оптимизации ФАР при ограничении мощности по каждой точке питания состоит в следующем:

1. Для каждого излучателя в решетке рассчитать парциальные компоненты полей $f_i^{(l)}$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, 2}$.
2. Вычислить матрицы \mathbf{G} and $\mathbf{H}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, из подраздела 1.4.
3. Оценить радиус допустимой области используя формулы из подраздела 1.6.
4. Решить задачу (1.13) с дополнительными ограничениями $x_N = 0$, $\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$.

Данный подход может гарантировать нахождение как локального, так и глобального оптимума, в зависимости от решателя, используемого на шаге 4. Как один из базовых оптимизационных методов, мы рассматриваем метод градиентной оптимизации (максимизационный вариант) с алгоритмом одномерного поиска Дэвиса, Свенна и Кэмпбелла (ДСК) [24]. Далее целевая функция задачи (1.13) будет обозначаться символом \tilde{F} .

В нашей работе от задачи условной оптимизации мы переходим к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций, а именно - методом внешней точки [27; 28]:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n \left(\min \left(0, \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) + \min \left(0, 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) \right)^4 \rightarrow \max, \quad (2.1)$$

где r - достаточно большой штрафной параметр. Глобально-оптимальное решение для задачи (2.1) может не быть допустимым для изначальной задачи (1.13), но увеличение штрафного параметра r уменьшает нарушение ограничений. Кроме того, имея решение \mathbf{x} , которое нарушает в задаче (1.13) только неравенства вида $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$, мы будем ссылаться на результаты градиентной оптимизации с использованием восстановления допустимости (1.15) после срабатывания критерия остановки. Алгоритм градиентной оптимизации повторяется многократно, при этом используется случайно сгенерированный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ в качестве стартовой точки. Распределение случайной величины \mathbf{x} описано в подразделе 2.2. Для каждого найденного решения выполняется проверка на удовлетворение необходимым условиям локальной оптимальности путем решения задачи (1.16).

Затем, решение линеаризованной задачи, удовлетворяющее необходимым условиям локальной оптимальности, снова подается на вход алгоритма градиентной оптимизации, остальные решения отсеиваются. Последний шаг применяется, поскольку решение задачи (1.16) может оказаться за пределами допустимой области задачи (1.13). В этом случае данный этап показывает, как далеко решение линеаризованной задачи находится от решения, найденного градиентным алгоритмом.

С целью отыскания глобального оптимума задачи (1.13) посредством решателя BARON [22], основанного на методе ветвей и границ с использованием локальной оптимизации для поиска начального приближения, необходимо предоставить ограничивающий параллелепипед или верхнюю оценку евклидовой нормы допустимых решений. Для этого может быть использовано неравенство (1.14). Для всех решаемых в этом эксперименте задач была рассмотрена возможность применения процедуры сужения допустимой области.

2.1 Тестовые примеры

Вычислительный эксперимент был поставлен для задач, построенных на основе четырех типов ФАР: широкополосных вертикальных излучателей, широкополосных вертикальных диполей и симметричных вертикальных диполей. При моделировании полей был использован пакет NEC2, для которого были предоставлены соответствующие геометрические конфигурации антенных систем. В качестве рабочей частоты было выбрано 5 МГц. Рассмотрены квадратные ФАР конфигурации 2x2, 3x3 и 5x5. Заранее отметим, что конфигурация 5x5 была рассмотрена только для решеток СВД, поскольку NEC2 не смог обработать 5x5 ШВИ и 5x5 ШВД из-за высокой сложности этих моделей. В случае с ФАР кольцевой структуры были рассмотрены решетки, состоящие из 8 и 16 излучателей.

Решетки ШВИ смоделированы расположенными на высоте 0.2 метра над поверхностью земли (проводимость земли равна 0.01 См/м, относительная диэлектрическая проницаемость 10). Решетки ШВИ и СВД размещены в свободном пространстве. В случае ШВЕ и ШВД, расстояние между соседними излучателями равно 20 метров. Высота каждого излучателя ШВИ равна 15 метров. Расстояния между концами каждого излучателя ШВД равно 30 метров. В случае СВД, были рассмотрены два типа излучателя: с длинами излучателя 10 и 30 метров и рас-

стояниями между соседними излучателями 5 и 10 метров соответственно. СВД с длиной излучателя равной 10 метрам в исследовании помечены штрихом (СВД'). Система противовесов ФАР кольцевой структуры поднята над землей на 2 м. для того, чтобы ослабить влияние потерь в земле. Расстояние между соседними излучателями в этих ФАР равно 8 м. В качестве направления максимизации излучения выбраны: азимутальный угол 45° , полярный угол 70° .

2.2 Результаты вычислительного эксперимента

В этом разделе мы сравниваем результаты работы градиентного метода и решателя BARON в его режиме по умолчанию. Во всех экспериментах, описанных ниже, было установлено ограничение по времени 1000с. Все эксперименты проводились на ЭВМ с процессором Intel i7 (тактовая частота: 2.8ГГц), ОЗУ: 16Гб. В случае сходимости градиентного метода (завершение по минимально допустимому приращению целевой функции 10^{-4}), алгоритм перезапускается заново до истечения запаса времени.

Для каждой задачи была применена процедура получения верхней оценки нормы допустимых решений (с.м. подраздел 1.6). При выполнении этой процедуры для многих задач получались близкие к нулю (или даже нулевые) собственные числа, что делало невозможным их дальнейшее использование для оценки нормы $\sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$. В таблице 3 такие оценки задачи отмечены прочерком в соответствующем столбце. Так как из физических соображений собственные числа должны быть строго больше 0, проблемы с вычислением верхней оценки нормы допустимых решений свидетельствуют о допущенной погрешности при вычислении матриц, определяющих квадратичные формы задачи (1.13). В частности, одной из таких проблем является несимметричный вид вещественных матриц. В таком случае, их следует привести к симметричному виду путем усреднения симметричных относительно главной диагонали компонент.

Во время каждой инициализации градиентного метода стартовая точка \mathbf{x} выбирается независимо с равномерным распределением в кубе $[-5000, 5000]^{2N}$. Такой выбор оказался достаточным для всех задач, кроме СВД 2x2, чтобы получить решение, по целевой функции соответствующее решению, предоставляемому решателем BARON. Лучшее из найденных таким образом решений

принимается за конечный результат. Параметр штрафа r в методе градиентной оптимизации установлен равным 10^6 на всех запусках. Такое значение было определено эмпирически. В таблице 3 приводятся результаты вычислительного эксперимента. Значения целевой функции “ \tilde{F} ” точке, полученной алгоритмом градиентного подъема, приводятся после процедуры масштабирования (1.15). Для решателя BARON версии 18.5.8 было выбрано то же самое ограничение сверху на процессорное время, что и для градиентного метода (группа колонок “BARON”), и 50000с. для проверки глобальной оптимальности. Во всех таблицах, колонка “ t ” содержит время до получения лучшего найденного решения или до установления глобальной оптимальности. Во всех запусках градиентного метода были получены решения, где активными оказались все ограничения вида $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$.

Тип	λ_{min}	$\sqrt{\frac{N}{\lambda_{min}}}$	Град.		BARON	
			\tilde{F}	t, с	\tilde{F}	t, с
ШВИ 2x2	0.0215	13.6	138.2	0.054	139.2	0.12
ШВИ 3x3	0.0177	70	575.7	0.93	580.6	0.34
ШВД 2x2	0.009	21	459.7	0.13	463.6	0.27
ШВД 3x3	0.0013	6767	915	24.4	925	0.34
СВД 2x2	$2 \cdot 10^{-3}$	44	357	1.9	361	0.16
СВД 3x3	$5.6 \cdot 10^{-9}$	$8.4 \cdot 10^5$	1138	25.6	1261	0.38
СВД 5x5	-	-	5318	1000	6716	1000
СВД' 2x2	$7.76 \cdot 10^{-9}$	$22 \cdot 10^3$	233	2.52	253	0.25
СВД' 3x3	0.0008	$1 \cdot 10^4$	664	71	1153	1.48
СВД' 5x5	-	-	1382.7	1000	33.5	217.94
Кольц. 8	$3 \cdot 10^{-3}$	154	217	8.06	218	0.23
Кольц. 16	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^6$	727	90.9	734	1.37

Таблица 3 — Результаты оптимизации, полученные с помощью градиентного подъема и решателя BARON.

Из таблицы 3 видно, что на всех видах решеток, кроме решеток СВД конфигураций 3x3 и 5x5, а также СВД' конфигураций 2x2 и 3x3, разница в значениях целевой функции не превосходит 1%. Для решеток СВД конфигураций 3x3 и 5x5, а также СВД' конфигураций 2x2 и 3x3 градиентный алгоритм существенно уступает по качеству найденного решения. Более детальное исследование для СВД' конфигураций 2x2 и 3x3 показало, что BARON предоставляет решение с очень

малой областью притяжения. Суть такого исследования заключалась в том, что к решению, полученному с помощью решателя BARON добавлялось некоторое возмущение, после чего модифицированная точка подавалась на вход градиентного алгоритма. Очень малые возмущения (до 0.5% относительно нормы решения) исходной точки не мешали градиентному алгоритму найти точку, лежащую в окрестности решения, найденного с помощью решателя BARON. Однако, принимая на вход возмущенное порядка 0.5% относительно нормы решение решателя BARON, градиентный подъем приводил к решению со значением целевой функции $\tilde{F} = 233$ в случае СВД' 2x2. При этом, используемая нами процедура проверки локальной оптимальности не дала опровержения локальной оптимальности решения со значением целевой функции $\tilde{F} = 253$, предоставленного решателем BARON. Аналогичные результаты были получены как для СВД, так и для СВД' конфигурации 3x3. Особое внимание привлекают решетки СВД и СВД' конфигурации 5x5, поскольку за предоставленный временной промежуток градиентный подъем так и не достиг критерия останова. BARON в случае СВД' 5x5 за это же время достиг решения, значительно хуже по целевой функции. Вероятно, как BARON, так и градиентный подъем сошлись бы к более качественному решению, если бы не были ограничены по времени. Кроме решеток ШВИ и ШВД конфигурации 2x2 BARON демонстрирует лучшее время счета. Однако, следует отметить, что для обоих алгоритмов время, затраченное на поиск решения, было либо существенно меньше, либо сравнимо со временем, затраченным на построение исходных данных пакетом моделирования NEC, что делает оба подхода равноценными по времени работы с практической точки зрения. Важным результатом, не приведенным в таблице 3, является то, что для ФАР конфигураций ШВИ 2x2, ШВД 2x2 и ШВИ 3x3 была доказана глобальная оптимальность найденного решателем BARON решения.

В качестве иллюстрации физических свойств полученных решений, на рис. 2.3 приведен горизонтальный план диаграммы направленности ФАР для решений, найденных с помощью метода градиентной оптимизации. Под диаграммой направленности понимается графическое представление зависимости коэффициента усиления антенны от ее направления в заданной плоскости. Такая диаграмма позволяет наглядно оценить, на какое направление приходится максимум излучения, и провести качественную оценку работы алгоритма. На рис. 2.3 изображена диаграмма направленности для решетки ШВИ размера 2x2 (пунктирная линия) и ШВИ 3x3 (сплошная линия). Для решений, полученных с помощью

решателя BARON для этих задач, диаграммы аналогичны. Еще раз отметим, что при эксперименте направление оптимизации было представлено углами в полярных координатах: азимутальный угол был принят равным 45° , полярный угол - 70° . Как видно из горизонтального плана диаграммы направленности при значении полярного угла 70° , максимальному излучению соответствует направление оптимизации 45° . Сравнение диаграмм показывает, что использование решеток с большим числом излучателей позволяет уменьшить излучение в других направлениях.

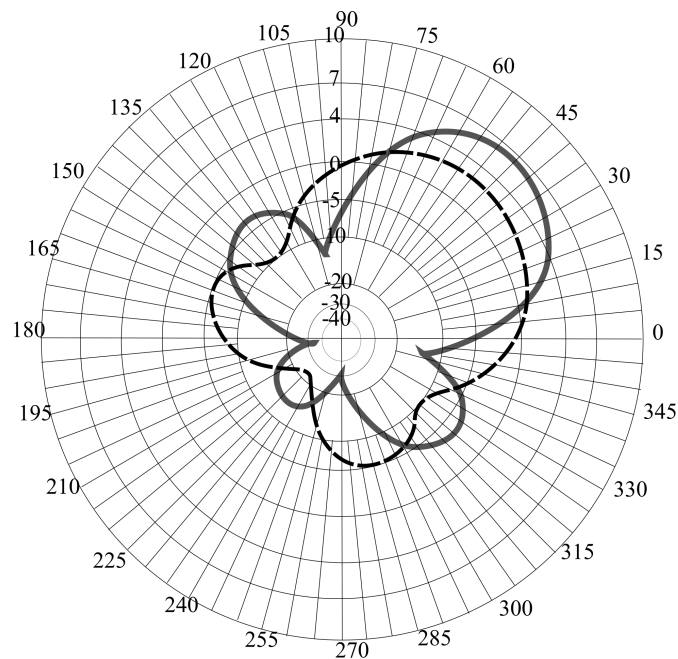


Рисунок 2.1 — Горизонтальный план диаграммы направленности для решетки ШВИ 2x2 (пунктир) и ШВИ 3x3 (сплошная)

2.3 Количество локальных оптимумов и их расположение

Для оценки общего числа локальных оптимумов использовался метод переписи Шнабеля. Данный метод имеет применение в экологии и заключается в выводе статистических оценок численности популяции на основе числа особей, помеченных в результате эксперимента, из популяции с неизменным составом, где каждая особь имеет константную вероятность отлова. В [18] предлагается адаптация такого метода для оценки числа локальных оптимумов. В таблице 4

ФАР	M	M_{ne}	M_f	\mathcal{B}_{M_f}	\mathcal{L}_{M_f}	$M_{y \approx 0}$	$\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$	$\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$
ШВИ 2x2	18368	4	1	1	1	4	4	4
ШВД 2x2	7678	4	1	1	1	4	4	4
СВД 2x2	523	1	1	1	1	1	1	1
СВД 3x3	39	9	2	2	2	5	5	5
СВД' 2x2	396	370	3	3	3	338	1000	1213
СВД' 3x3	14	14	3	3	3	1	1	1
ШВИ 3x3	1070	3	1	1	1	3	3	3
ШВД 3x3	41	4	4	4	4	1	1	1
Кольц. 8	124	9	2	2	2	9	9	9
Кольц. 16	11	6	1	1	1	6	6	6

Таблица 4 — Структура локальных оптимумов.

приводится статистика по числу различных точек останковки (в пределах заданной точности) процедуры мультистарта в течение 1000 с. процессорного времени. Для каждого решения была применена процедура линеаризации задачи и проверки необходимых условий локальной оптимальности, описанная в разделе (1.8). Приемлемыми считались отличия целевой функции линеаризованной задачи от значения целевой функции, найденного градиентным методом менее чем на 1%. Здесь M - число выполненных запусков за отведенное время, M_{ne} - число групп решений, отличающихся не более чем на 10% по каждой из координат, M_f - число групп значений целевой функции у таких неэквивалентных решений (с точностью до 10%, приведенных в таблице 3). $M_{y \approx 0}$ - число групп решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности. \mathcal{B} и \mathcal{L} - оценка нижней границы и оценка максимального правдоподобия числа локальных оптимумов, рассчитанные по методу переписи Шнабеля. Доверительная вероятность для данного метода была выбрана равной 95%. Оценки для числа решений с различными значениями целевой функции обозначены \mathcal{B}_{M_f} и \mathcal{L}_{M_f} . Оценки для числа решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, обозначены $\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$ и $\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$. В случае СВД и СВД' конфигурации 5x5 в течение 1000 с градиентный метод не достиг решения, удовлетворяющего условию останковки, поэтому данный результат не включен в таблицу 4.

Как видно из таблицы, во всех экспериментах в некоторых запусках были найдены неразличимые с практической точки зрения решения. Для квадратных решеток ШВИ и ШВД было найдено по одному такому решению. Решетки коль-

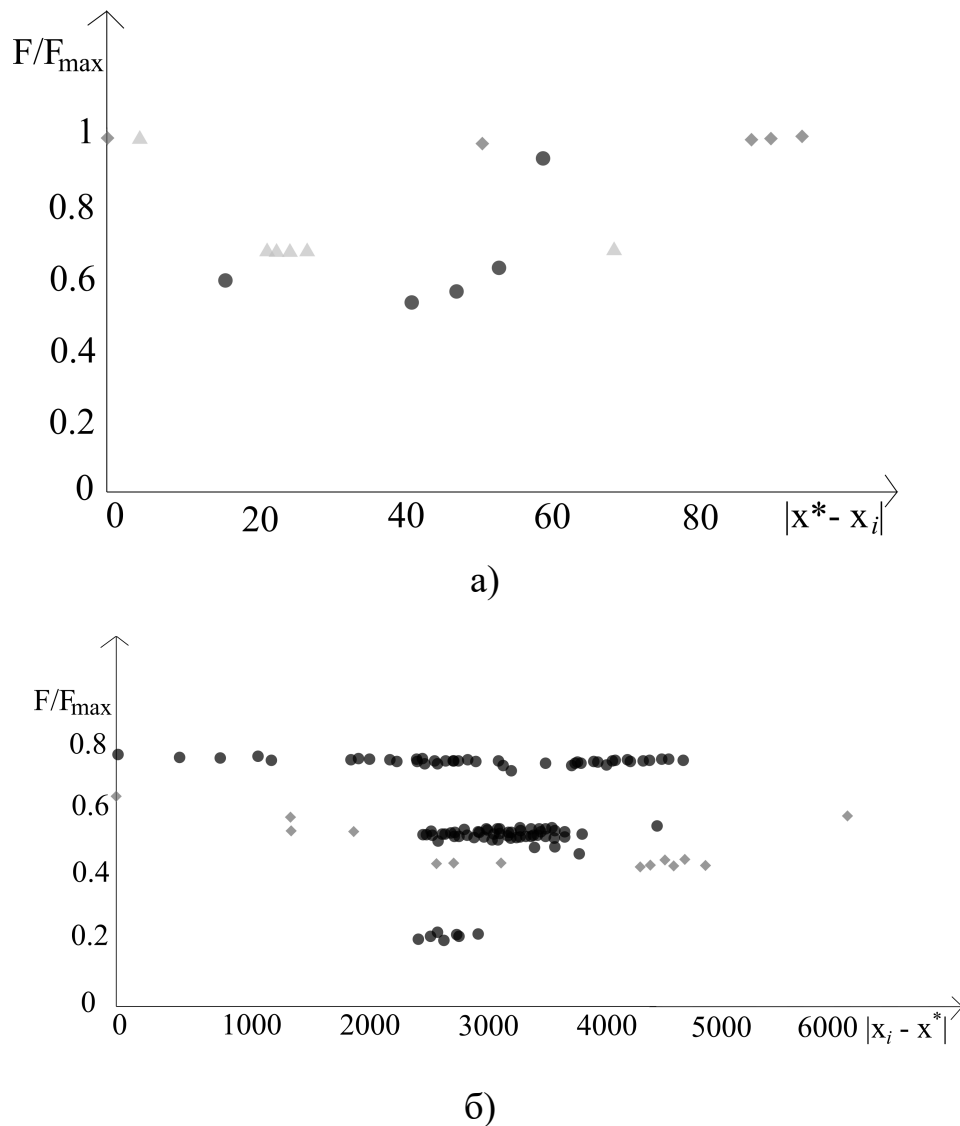


Рисунок 2.2 — Структура множества найденных решений для задач ШВИ, ШВД, СВД (а) и СВД' (б)

цевой структуры и СВД' 2×2 имеют значительное разнообразие как по найденным векторам решений, так и по значениям целевой функции. Относительно решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, можно сказать, что с большой вероятностью для задачи СВД' 2×2 , были найдены далеко не все возможные решения. О решетке СВД' 3×3 известно, что градиентный подъем был остановлен в точке, не лежащей в окрестности решения, предоставляемого решателем BARON.

На рис. 2.2 приведены диаграммы локальных оптимумов, где по оси ординат отложены значения целевой функции, а по оси абсцисс - расстояние до лучшего известного решения. В случае а) точками обозначены результаты для кольцевых решеток, состоящих из 8 излучателей, ромбами - для кольцевых ре-

шеток, состоящих из 16 излучателей, пятиугольниками - для СВД 3x3. В случае б) точками обозначены результаты для СВД' 2x2, ромбами - для СВД' 3x3. Диаграмма показывает, что значения, соответствующие одному и тому же значению целевой функции, могут находиться достаточно далеко друг от друга, что позволяет сделать предположение о наличии неучтенных симметрий задачи (о множестве линейных симметрий задачи см. в [29]).

2.4 Экспериментальная проверка устойчивости решений

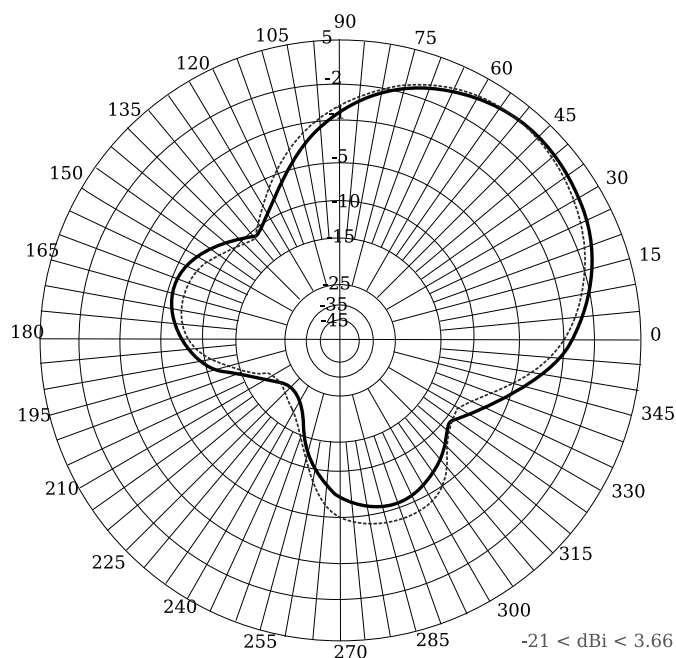


Рисунок 2.3 — Диаграммы направленности для ШВИ 2x2 при оптимизации в направлении 70:45 (сплошная линия) и 70:50 (пунктир)

При анализе структуры локальных оптимумов может возникнуть вопрос об устойчивости решения по аргументу. В данной работе было проведено исследование изменения значения целевой функции при изменении оптимизируемого направления на малый угол. В рассмотрение принималось также изменение значения целевой функции при подстановки в исходную задачу решения, найденного для нового направления (для удобства вывода результата такая подстановка обозначена за P1), и наоборот - при подстановке в задачу для измененного направления решения, полученного для исходного направления (обозначается P2).

Исследование проводилось на квадратных решетках, состоящих из 4-х и 9-и излучателей. Азимутальный и полярный угол менялись на 5° . Результаты приведены в таблице 5

ФАР	Подстановка	70:45	75:45	65:45	70:50	75:40	65:50
ШВИ 2x2	-		125	138	137	137	125
	P1	138	138	138	137	137	137
	P2		125	138	136	136	123
ШВИ 3x3	-		532	565	574	533	564
	P1	575	574	572	560	558	557
	P2		530	562	559	517	546
ШВД 2x2	-		518	454	454	512	389
	P1	459	458	459	457	456	389
	P2		518	392	452	510	386
ШВД 3x3	-		1817	872	1015	1196	1198
	P1	1501	1506	1047	1000	1004	1448
	P2		1774	1203	1450	1713	1162
СВД 2x2	-		417	315	365	412	312
	P1	369	368	369	367	366	367
	P2		417	315	363	410	310
СВД 3x3	-		1789	1176	1459	1162	1753
	P1	1484	1475	1472	1446	1428	1444
	P2		1782	1164	1427	1120	1713

Таблица 5 — Значения целевой функции при изменении оптимизируемого направления на малый угол.

Результаты исследования показывают, что изменение направления оптимизации на малый угол соответствуют повороту исходной диаграммы направленности на этот угол.

2.5 Исследование непрерывных симметрий

2.5.1 Общие положения

Решение и анализ задач математического программирования может быть упрощен при наличии симметрий этих задач, соответствующих некоторым линейным преобразованиям. В частности, знание таких симметрий может быть использовано для уменьшения размерности задачи, ограничения пространства поиска или получения нового локального оптимума из имеющегося. Эти методы применимы в случае непрерывной области решений [34—36], а также в целочисленном программировании [37—41] и смешанном целочисленном программировании [42; 43]. Хотя, в большинстве случаев, применение симметрий направлено на ускорение работы алгоритмов точной оптимизации, в некоторых случаях знание симметрий может оказаться полезным и при разработке и анализе эвристик, в частности, эволюционных алгоритмов [44; 45].

В настоящей работе исследуется случай непрерывной области решений. В то время как предыдущие исследования симметрии в математическом программировании обычно имели дело с перестановками координат пространства решений [36; 39; 42], в данной рассматривается большая группа обратимых линейных преобразований. Мы изучаем частный случай задачи квадратичного программирования с квадратичными ограничениями в \mathbb{R}^N : целевая функция и ограничения задаются квадратичными формами \mathbf{G} , и $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$, в виде (1.13). Следует еще раз отметить, что все матрицы \mathbf{G} , и $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$, симметричны и $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i$ положительно определена. Без потери общности будем считать, что все ограничение заданы неравенствами \leq . Известная задача о максимальном разрезе (которая является NP-трудной) также может быть сведена к задаче квадратичного программирования с такими свойствами [46].

Под симметрией задачи (1.13) подразумевается набор линейных преобразований

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

определенный невырожденной матрицей \mathbf{P} , такой что задача (1.13), выраженная в терминах преобразованного пространства (т.е, через вектор-столбец \mathbf{y}), совпадает с исходной задачей. Таким образом, в терминах вектора \mathbf{y} задача (1.13)

формулируется в той же форме.

$$\begin{cases} \mathbf{y}^T \mathbf{G} \mathbf{y} \rightarrow \max, \\ \mathbf{y}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{y} \leq 1, \\ \dots \\ \mathbf{y}^T \mathbf{H}_n \mathbf{y} \leq 1, \end{cases} \quad (2.3)$$

с той же самой матрицей \mathbf{G} и тем же набором матриц $\{\mathbf{H}_i : i = 1, \dots, n\}$. Подчеркнем, что, поскольку перестановка ограничений не меняет задачи, матрицы \mathbf{H}_i также могут быть пронумерованы произвольно.

Преобразования, заданные матрицами \mathbf{P} , составляют группу обратимых линейных симметрий, которую мы обозначаем через \mathcal{G} . Цель статьи – проанализировать группу \mathcal{G} и предложить методы нахождения этой группы в некоторых частных случаях. Частичное решение этой проблемы, т.е. нахождение хотя бы подгруппы в \mathcal{G} , также может иметь смысл для практических целей, если полученные симметрии позволяют упростить данную оптимизационную задачу.

В некоторых случаях также может потребоваться найти группу симметрии только набора ограничений. Обозначим эту группу через \mathcal{G}' . Очевидно, это мало чем отличается от поиска группы симметрии \mathcal{G} задачи; нужно просто исключить из рассмотрения матрицу \mathbf{G} (формально можно считать, что \mathbf{G} в этом случае нулевая матрица). Обратите внимание, что \mathcal{G} является подгруппой в \mathcal{G}' . Кроме того, набор симметрий ограничений тесно связан, но не обязательно идентичен набору тех обратимых линейных преобразований, которые биективно отображают область допустимости задачи $\mathcal{D} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x}^T B_i \mathbf{x} \leq 1, i = 1, \dots, M\}$ на себя. Группа симметрии множества ограничений \mathcal{G}' может быть подгруппой в группе симметрии обратимых линейных преобразований области \mathcal{D} . Это происходит, например, если имеется несколько “неактивных” ограничений, каждое из которых определяет такое множество точек, внутри которого содержится \mathcal{D} . Тогда требование, чтобы набор матриц этих “неактивных” ограничений оставался в (2.3), является избыточным относительно группы преобразований области \mathcal{D} . В качестве простого примера рассмотрим случай $n = N + 1$, $\mathbf{G} = \text{diag}(1, \dots, 1)$, $\mathbf{H}_1 = \text{diag}(1, 0, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{H}_N = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1)$, $\mathbf{H}_{N+1} = \text{diag}(1, \dots, 1)$. Ясно, что здесь $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_N$ определяют “неактивные” ограничения, группа обратимых линейных преобразований области \mathcal{D} состоит из всех ортогональных преобразований в \mathbb{R}^N , а группа \mathcal{G} — конечная группа линейных симметрий N -мерного гиперкуба.

Авторы [35] объединяют последнее определение симметрии области допустимости с инвариантностью целевой функции для изучения геометрических, алгебраических и вычислительных свойств, подразумеваемых такими (дискретными) симметриями в полуопределенных программах. В этом случае с помощью симметрий получается эквивалентная задача выпуклой оптимизации с меньшим числом переменных и тем же оптимальным решением.

В [42] группа формулировок задачи математической оптимизации была определена как множество перестановок индексов переменных, для которых целевая функция и ограничения остаются неизменными. Ясно, что эта группа является подгруппой в \mathcal{G} . На основе подхода из [42], в [36] был разработан алгоритм обнаружения симметрии для задач квадратичного программирования. Этот алгоритм можно использовать для нахождения группы формулировок в нашем случае, однако мы стремимся найти всю группу \mathcal{G} , если это возможно.

Обозначим множество матриц $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$ через \mathcal{H} .

Определение 1. \mathcal{H} называется конгруэнтным инвариантом (или просто инвариантом, для краткости) относительно преобразования

$$\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{P} \quad (2.4)$$

с невырожденной матрицей \mathbf{P} , если $\{\mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{P} : \mathbf{H} \in \mathcal{H}\} = \{\mathcal{H}\}$.

Множество всех матриц \mathbf{P} , для которых множество \mathcal{H} является инвариантом, образует группу. Здесь эта группа называется *группа симметрий множества матриц* и обозначается $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$. Ясно, что относительно преобразования $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{P}$, некоторые матрицы из \mathcal{H} могут сводиться к другим, однако, не все возможные комбинации могут быть получены этим способом.

Заметим, что одним из инвариантов преобразования (2.4) является *инерция* матрицы \mathbf{H} , определяется как упорядоченная тройка: (i) количество положительных собственных значений \mathbf{H} , (ii) количество отрицательных собственных значений \mathbf{H} и (iii) количество нулевых собственных значений \mathbf{H} (см., например, [HJ], § 4.5). Таким образом, можно переставлять только матрицы с одинаковой инерцией, а все множество \mathcal{H} разбивается на классы эквивалентности матриц с одинаковой инерцией. Это отражено в следующем определении.

Определение 2. \mathcal{I} -класс является максимальным по включению подмножеством \mathcal{H} , состоящим из матриц с равной инерцией.

Предполагается, что все I-классы \mathcal{H} пронумерованы целым числом k и обозначены \mathcal{H}_k^I . Обозначим

$$\mathcal{H} = \bigcup_k \mathcal{H}_k^I. \quad (2.5)$$

Кроме того, сумма всех матриц, принадлежащих некоторому I-классу, является инвариантом любого преобразования (2.4) из $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$

Заметим, что это не все инвариантные суммы, поскольку любая сумма нескольких классов инерции также является инвариантом. Таким образом, по множеству \mathcal{H} можно явно построить набор матриц, инвариантных относительно всех преобразований (2.4), перебирая все комбинации I-классов и суммируя их элементы.

Определение 3. *Любая матрица, являющаяся суммой всех матриц, принадлежащих одному или нескольким I-классам, называется матрицей инвариантности I-типа.*

Могут существовать и другие матрицы инвариантности, но остаются загадкой не только способы их нахождения, но и определение их существования.

В [29] показано, что можно упростить анализ группы \mathcal{G}_B , если хотя бы одна из матриц инвариантности I-типа положительно определена, так как в этом случае мы сможем использовать известные факты о группе ортогональных преобразований $O(N)$ (см., например, [47]).

Можно сказать, что

Условие I выполняется, если по меньшей мере одна инвариантная матрица H^I I-типа положительно определена.

Следует обратить внимание, что симметричная матрица \mathbf{H} может быть представлена как конгруэнтное преобразование диагональной матрицы:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S}, \quad (2.6)$$

где \mathbf{D} – диагональная матрица, которая может иметь только “0”, “1”, или “-1” на ее главной диагонали. Матрица \mathbf{S} может быть получена конструктивно, например, конечным методом Лагранжа ([48], Г. 5).

В тех случаях, когда \mathbf{H} положительно определена, матрица \mathbf{D} будет являться единичной матрицей и может быть опущена в (2.6).

Утверждение 1. Если условие I выполняется, тогда группа \mathcal{G}_n является изоморфизмом некоторой подгруппы группы ортогональных преобразований, и этот изоморфизм определяется отображением

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1}, \quad (2.7)$$

Где матрица \mathbf{S} такова, что $\mathbf{H}^I = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$.

Доказательство. Если матрица \mathbf{H}^I положительно определена, тогда условие инвариантности (2.4) для \mathbf{H}^I обращается в уравнение

$$\mathbf{P}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{P} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (2.8)$$

или

$$(\mathbf{S} \mathbf{P}^{-1})^T (\mathbf{S} \mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица. Это значит, что матрица

$$\mathbf{Q} := \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} \quad (2.10)$$

является группой ортогональных преобразований в $O(N)$ □

Инвариантность задачи (1.13) относительно преобразования \mathbf{P} подразумевает, что

$$\mathbf{P}^T \mathbf{G} \mathbf{P} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{P}^T \mathbf{H}_i \mathbf{P} = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{ij} \mathbf{P}_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

где \mathbf{L}_{ij} элементы матрицы перестановок, т.е. матрица $\mathbf{L} = (\mathbf{L}_{ij})$ имеет одну единицу в каждом столбце и в каждой строке, остальные элементы \mathbf{L} равны нулю.

Утверждение 1 может быть применено для анализа симметрий задачи (1.13), если известны некоторые матрицы инвариантности I-типа \mathbf{H}^I для множества матриц $\mathcal{H} = \{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n\}$, подразумевая, что

$$\mathbf{P}^T \mathbf{H}^I \mathbf{P} = \mathbf{H}^I, \quad (2.12)$$

и \mathbf{H}^I положительно определена.

В задаче оптимизации направленности ФАР матрица $\mathbf{H}_\Sigma := \sum_i \mathbf{H}_i$ положительно определена. Если выполняется (2.11), тогда $\mathbf{H}^I = \mathbf{H}_\Sigma$ является матрицей инвариантности I-типа для множества матриц $\mathcal{H} = \{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n\}$.

Естественно, в общем случае, инвариантность матрицы \mathbf{H}^I не обязательно подразумевает выполнение (2.11), но, по крайней мере, можно говорить, что группа \mathcal{G}' является подгруппой \mathcal{G}_B , которая, в свою очередь, является подгруппой в $O(N)$ по утверждению 1. Следовательно \mathcal{G} также является подгруппой $O(N)$.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что существует положительно определенная инвариантная матрица \mathbf{H}^I I-типа для множества матриц $\mathcal{H} = \{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n\}$, т.е. Условие I выполнено, и \mathbf{Q} всегда будет обозначать образ \mathbf{P} при изоморфизме (2.7).

Поскольку $\mathbf{P} = S^{-1}\mathbf{Q}S$ по определению \mathbf{Q} , применение (2.11) дает

$$(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}S)^T \mathbf{G} (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}S) = \mathbf{G}, \quad (2.13)$$

$$(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}S)^T \mathbf{H}_i (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}S) = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{ij} \mathbf{H}_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

и, после простого преобразования, получается

$$\mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{G}}, \quad \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{H}}_i \mathbf{Q} = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{G} S^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_i = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{H}_i S^{-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Таким образом, используя изоморфизм (2.10), мы можем заменить уравнения (2.11) аналогичными уравнениями (2.14), но с заменой матриц

$$\mathbf{G} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}, \quad \mathbf{H}_i \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

и заменив \mathbf{P} ортогональной матрицей \mathbf{Q} . Эти уравнения значительно проще, так как в этом случае условие (2.14) можно сформулировать линейно в \mathbf{Q} :

$$\tilde{\mathbf{G}} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{G}}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_i \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Если найти все подходящие ортогональные отображения \mathbf{Q} , то будет легко восстановить соответствующие матрицы \mathbf{P} . В дальнейшем группу таких подходящих матриц \mathbf{Q} мы также будем обозначать через \mathcal{G} , поскольку матрицы \mathbf{P} и \mathbf{Q} просто дают разные точные представления одной и той же абстрактной группы.

Известно, что ортогональная группа $O(N)$ состоит из двух компонент связности, для одной из которых определитель матрицы равен 1, для другой равен -1

(см., например, [47]). Первая компонента — это подгруппа в $O(N)$, обозначаемая $SO(N)$ и также называемая *группой вращений* из-за того, что в размерностях 2 и 3 ее элементами являются обычные вращения вокруг точки или линии соответственно. Вторая компонента не образует подгруппу в $O(N)$, так как не содержит единичного элемента. Матрицы из второго компонента могут быть представлены, например, в виде: $\text{diag}\{-1, 1 \dots 1\} \mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q} \in SO(N)$, поэтому между этими компонентами имеется взаимно однозначное соответствие (которое не является изоморфизмом в теоретико-групповом смысле, так как не сохраняет групповые операции). Искомые матрицы \mathbf{Q} могут принадлежать как первой компоненте, так и второй.

Из стандартных фактов теории топологических групп (см., например, [47], Г. 1) вытекают следующие свойства группы симметрии \mathcal{G} , наделенной стандартной топологией \mathbb{R}^{N^2} , применительно к пространству $(N \times N)$ -матриц. Как всякая топологическая группа, \mathcal{G} состоит из компонент связности (в топологическом смысле), только одна из которых, далее обозначаемая как \mathcal{G}_1 , содержит единичный элемент. Эта \mathcal{G}_1 является подгруппой инвариантности группы \mathcal{G} , см. теорему 1 в [47] и в дальнейшем называется *непрерывной подгруппой симметрий*. Остальные компоненты связности (не являющиеся подгруппами) можно рассматривать как произведения элементов группы вне \mathcal{G}_1 на элементы группы \mathcal{G}_1 , т.е. смежные классы группы \mathcal{G}_1 . Эти смежные классы можно идентифицировать, указав одного (любого) представителя смежного класса.

2.5.2 Нахождение групп непрерывных симметрий

Рассмотрим более подробно случай непрерывной подгруппы симметрий \mathcal{G}_1 . Нетривиальные перестановки матриц $\tilde{\mathbf{H}}_i$, если они все разные, не могут быть результатом преобразований, принадлежащих \mathcal{G}_1 , так как невозможно непрерывно двигаться от тождественного преобразования (из чего следует, что матрицы $\tilde{\mathbf{H}}_i$ не переставляются) любому преобразованию \mathbf{Q} , дающему нетривиальную перестановку матриц $\tilde{\mathbf{H}}_i$. Заметим, что любая такая \mathbf{Q} имеет окрестность преобразований, не дающих тривиальной перестановки матриц $\tilde{\mathbf{H}}_i$. Поэтому, условие инвариант-

ности (2.17) подразумевает коммутативность:

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{G}}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_i\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{H}}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Следующее утверждение является ”фольклорным” фактом матричного анализа (доказательство можно найти в [29]):

Утверждение 2. *Любая матрица $\mathbf{Q} \in SO(N)$ может быть представлена как матричная экспоненциальная функция кососимметричной матрицы. Верно и обратное: экспоненциальная функция любой кососимметричной матрицы является ортогональной матрицей.*

Итак, с некоторой кососимметричной матрицей \mathbf{X} имеем $\mathbf{Q} = e^{\mathbf{X}}$. Набор кососимметрических матриц \mathbf{X} составляет алгебру Ли, соответствующую этой группе Ли [47]. Алгебра Ли, соответствующая $SO(N)$, обычно обозначается $so(N)$. Любая алгебра Ли также является линейным пространством, любой ее элемент может быть выражен с помощью базисных элементов, называемых образующими. Таким образом, любой элемент алгебры Ли можно представить в виде:

$$\mathbf{X} = \sum_n a_n G_n, \quad (2.19)$$

где a_n являются вещественными числами, G_n являются генераторами. Пространство кососимметричных матриц имеет размерность $N(N - 1)/2$, а количество коэффициентов a_n будет равно количеству образующих. В качестве образующих можно выбрать матрицы, у которых над главной диагональю все элементы равны 0, кроме одного элемента, равного 1. Тогда кососимметрия однозначно определяет остальные матричные элементы этих генераторов. Итак, любой элемент \mathbf{Q} из $SO(N)$ можно представить в виде:

$$\mathbf{Q} = e^{\sum_n a_n G_n}. \quad (2.20)$$

Поскольку искомая непрерывная подгруппа симметрии \mathcal{G}_1 является подгруппой в $SO(N)$, то для нее также справедливо представление (2.20), но, вообще говоря, параметры a_n теперь не являются независимыми. Таким образом, поиск этой подгруппы по существу сводится к нахождению ограничений на параметры a_n .

Совершенно очевидно, что для выполнения условий коммутативности (2.18) достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_i \left(\sum_n a_n G_n \right) = \left(\sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{H}}_i, \\ \tilde{\mathbf{G}} \left(\sum_n a_n G_n \right) = \left(\sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{G}}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Заметим, что согласно (2.21), если матрица \mathbf{X} коммутирует со всеми матрицами $\tilde{\mathbf{H}}_i$ и с матрицей $\tilde{\mathbf{G}}$, то \mathbf{X} лежит в алгебре Ли \mathcal{G}_1 . Действительно, разлагая показательную функцию в степенной ряд, мы видим, что если матрицы $\tilde{\mathbf{G}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}_i$ коммутируют с аргументом этой функции, то они коммутируют и с самой показательной функцией.

Условие (2.21) не обязательно влечет (2.18), однако непрерывная подгруппа симметрий является связной группой Ли, поэтому она полностью определяется своей алгеброй Ли, который полностью определяется ограничительными соотношениями (2.21) на его элементах. Таким образом, при поиске непрерывной подгруппы симметрии (2.18) можно заменить на (2.21).

Уравнения (2.21) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, определяющих параметры a_n . Эта система однородна, поэтому она имеет континуум ненулевых решений или одно тривиальное решение. Тривиальное нулевое решение всегда присутствует и соответствует единичной матрице \mathbf{Q} . Некоторые из параметров a_n остаются “свободными” (это будут параметры искомой подгруппы), а остальные из a_n могут быть линейно выражены через “свободные”. Решение этой системы уравнений (2.21) может быть получено конструктивно методом Гаусса.

Условие инвариантности задачи относительно преобразования \mathbf{Q} превращается в

$$\mathbf{Q} = e^{\sum_n a_n \hat{G}_n}, \quad (2.22)$$

где сумма идет по “свободным” параметрам a_n , а новые генераторы, обозначаемые через \hat{G}_n , являются линейными комбинациями прежних генераторов G_n . Множество всех \mathbf{Q} -матриц, удовлетворяющих (2.22), параметризуется конечным набором вещественных параметров a_n . Заметим, однако, что этот набор матриц не обязательно изоморфен евклидову пространству, поскольку одному и тому же \mathbf{Q} может соответствовать более одного набора параметров a_n .

2.5.3 Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент состоит из следующих этапов:

1. Обработка. На этом этапе возможная неточность данных нивелируется усреднением симметричных компонент матриц (матрицы \mathbf{G} и \mathbf{H} должны быть симметричны).
2. Преобразование $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$ к канонической форме используя метод Лагранжа для вычисления матриц \mathbf{S} и \mathbf{S}^{-1} .
3. Применение метода Гаусса к системе линейных уравнений (2.21) для вычисления генераторов \hat{G}_n .

Следует отметить, что входные данные могут содержать некоторые погрешности, которые приводят к несимметричности матриц \mathbf{G} и \mathbf{H} , что может существенно повлиять на поиск непрерывных групп симметрий. Таким образом, на этапе 1, мы используем известные свойства задачи чтобы нивелировать влияние погрешности. Также, в методе Гаусса на шаге 3, любые значения принимаются за 0 если их абсолютное значение меньше определенного порогового значения Δ , который является параметром алгоритма. Причина в том, что последовательное исключение переменных из уравнений, выполняемое методом Лагранжа с представлением вещественных чисел с плавающей запятой, не может гарантировать идеальную точность. В результате некоторые линейно зависимые строки матрицы не могут быть исключены, что может привести к неверному результату. Большое значение порога Δ может привести к вырожденности задачи, тогда как слишком малое значение Δ не позволит выявить линейные зависимости.

TODO: таблица В данном эксперименте, Δ изменялось от 10^{-4} до 10^{-12} . В данном диапазоне для каждого рассмотренного частного случая задачи, не было получено различий в полученных решениях.

Описанная процедура нахождения непрерывных групп симметрий применяется к примерам, описанным в разделе 2.1. Для всех рассмотренных задач было выявлено только наличие фазовой симметрии. Возможно, множественность решений объясняется наличием дискретных симметрий. Выявление дискретных симметрий является объектом дальнейших исследований.

Глава 3. Исследование возможностей ФАР в разных условиях

3.1 Исследование радиочастотных зависимостей

На практике использование высоко симметричных ФАР вызывает особый интерес из следующих соображений: измерение матрицы сопротивлений является тривиальной задачей, в то время как измерение парциальных полей требует большое количество приемников для всех возможных направлений излучения. Использование высокосимметричных ФАР позволяет выполнить расчеты для одного направления и затем легко адаптировать их для других симметричных направлений. Другой особенностью, влияющей на результаты моделирования является наличие потерь в земле (см. [30]). Чтобы ослабить этот эффект, антенные системы с противовесами подняты над землей на 2 м.

В данной главе мы изучаем, как изменяется общий коэффициент усиления с ростом радиочастоты и плотности системы противовесов. Общий коэффициент усиления является суммой частичных коэффициентов усиления в двух ортогональных поляризациях. Плотность системы противовесов определяется числом продольных и поперечных проводов, относящихся к одному и тому же излучателю. Частота изменяется от 5 до 30 МГц. Вычисления производились на решетках ШВИ, состоящих из 8 излучателей. Для расчета матрицы сопротивлений и матрицы излучений использовался пакет моделирования антенных систем NEC2 [31].

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS, поскольку, в основном он демонстрирует лучшие результаты по сравнению с градиентным подъемом. Результаты оптимизации направленности решетки сравниваются с коэффициентом усиления одиночного излучателя, установленного в центре такой же системы противовесов. Плотность системы противовесов обозначается в формате *long : trans*, где *long* - число продольных проводов, относящихся к одному излучателю, а *trans* - поперечных. Высота каждого ШВИ - 15м. В качестве направления оптимизации выбирается 70° полярного угла и 45° азимутального угла в сферических координатах.

На рис. 3.1 показано, как изменяется коэффициент усиления с ростом радиочастоты. Мы можем наблюдать, что при значениях частоты 5 и 30 МГц решетка оптимизируется довольно плохо. Также можно увидеть, что, в основном, увеличе-

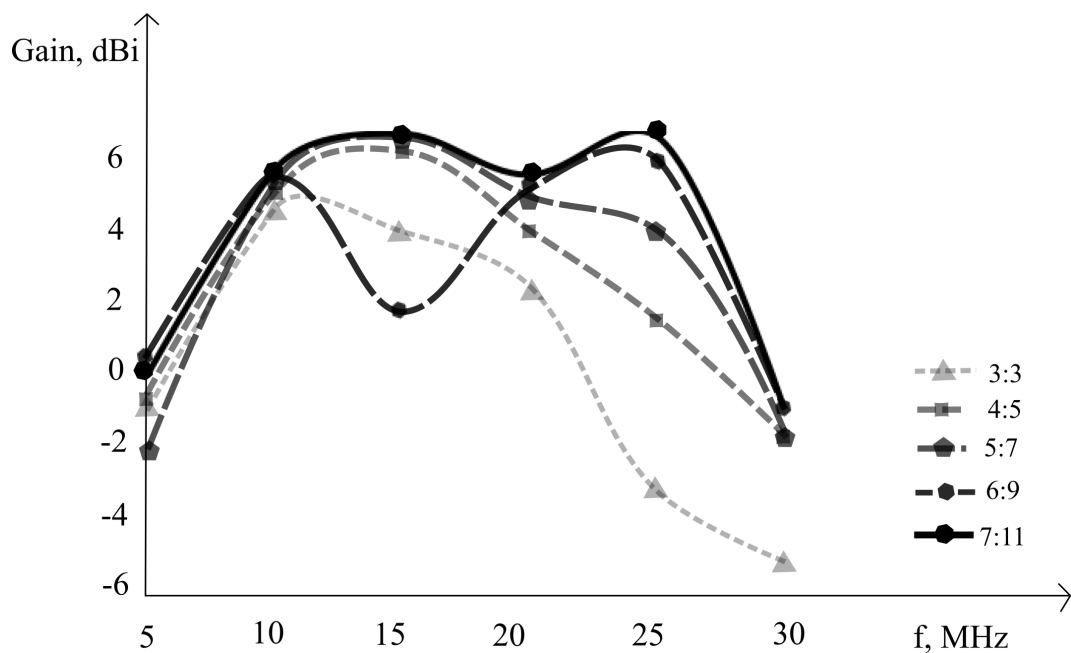


Рисунок 3.1 — Зависимость от частоты общего коэффициента усиления ФАР при оптимизации в направлении 70:45

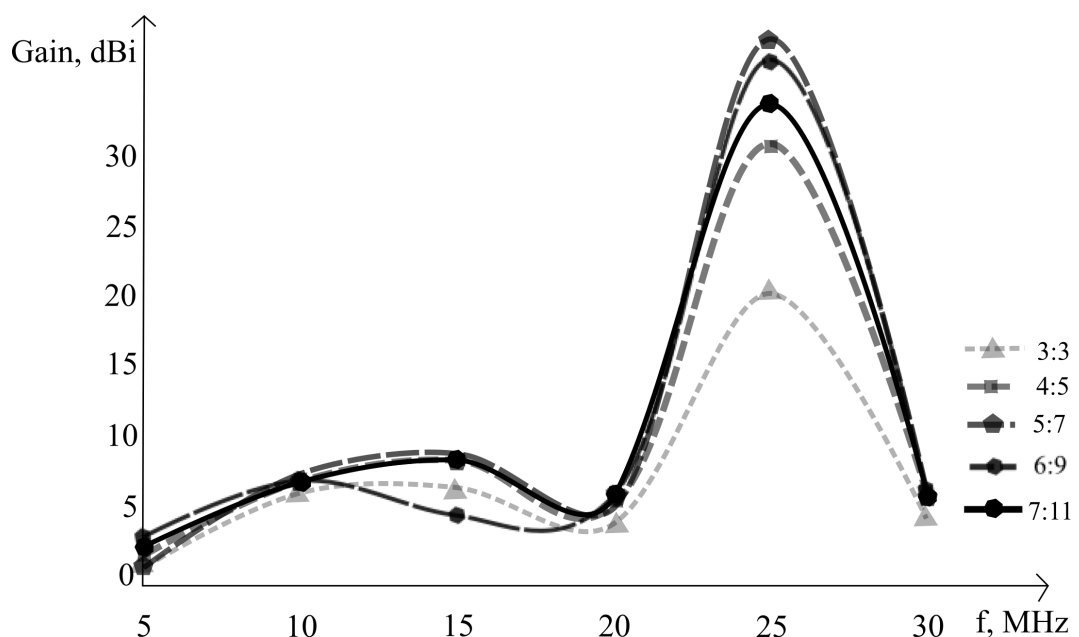


Рисунок 3.2 — Сравнение коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя

ние плотности системы противовесов приводит к росту коэффициента усиления. Единственное исключение - решетка с плотностью системы противовесов 6 : 9 на частоте 15МГц, где наблюдается неожиданное падение коэффициента усиления. Такое поведение может быть объяснено тем, что BARON не достиг глобального оптимума.

На рис. 3.2 показано, как изменяется разница коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя с ростом частоты. Заметным результатом здесь является то, что на частоте 25МГц усиление ФАР существенно больше усиления одиночно-

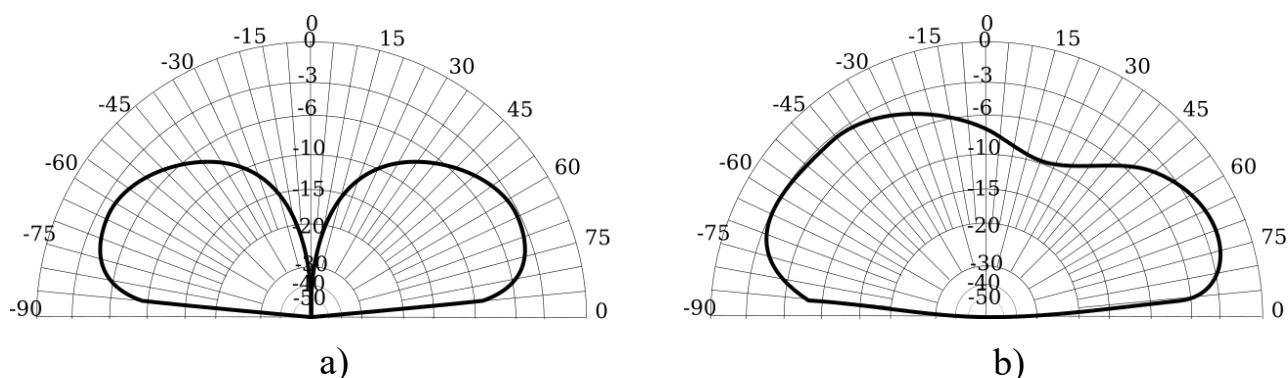


Рисунок 3.3 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (a) и ФАР 5:7 (b) при 5МГц

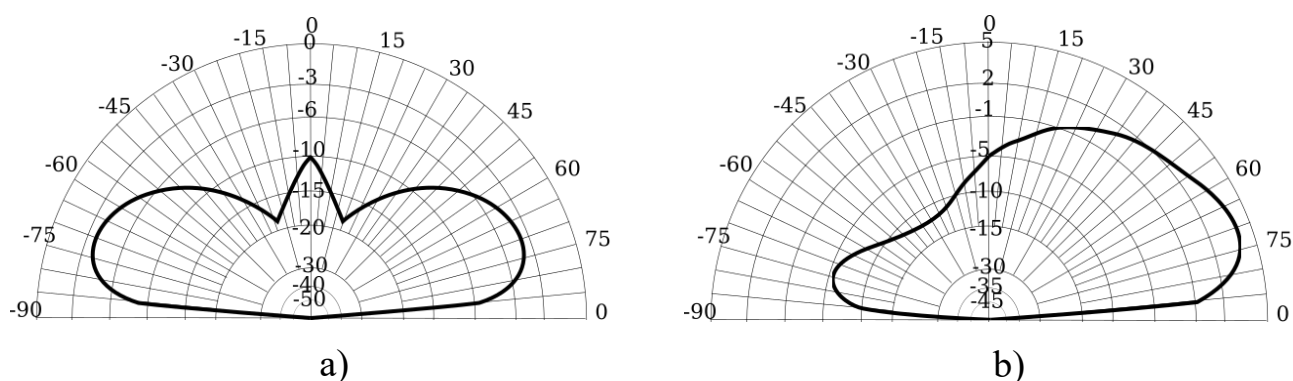


Рисунок 3.4 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (a) и ФАР 5:7 (b) при 10МГц

го излучателя. Объяснение этого эффекта будет приведено далее при сравнении диаграмм направленности. При 5МГц усиление ФАР существенно не превосходит усиление одиночного излучателя, однако, уже на 10МГц разница возрастает до 7.53дБ. Даже при 30МГц, где ФАР не оптимизируется хорошо, разница с одиночным излучателем составляет 6.63дБ в лучшем случае и 4.84дБ в худшем.

Далее будут рассмотрены диаграммы направленности ФАР с плотностью противовесов 5 : 7 как один из наиболее типичных результатов.

При частоте 5МГц (см Рис. 3.3) мы можем наблюдать, что максимум усиления в случае ФАР приходится на 70° и превосходит соответствующее значение одиночного излучателя на 1.33 дБ. Использование ФАР с плотностью системы противовесов 6:9 позволяет увеличить этот параметр до 3.14 дБ.

Результат оптимизации более заметен при частоте 10МГц (см Рис. 3.4): задний лепесток существенно меньше и разница усиления к одиночному излучателю достигает примерно 8 дБ. Похожие результаты наблюдаются при частоте 15МГц.

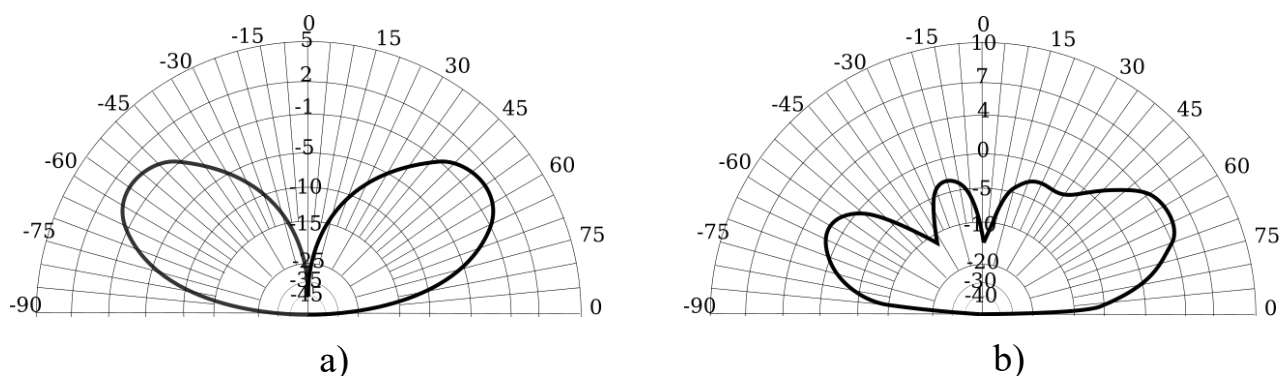


Рисунок 3.5 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (a) и ФАР 5:7 (b) при 20МГц

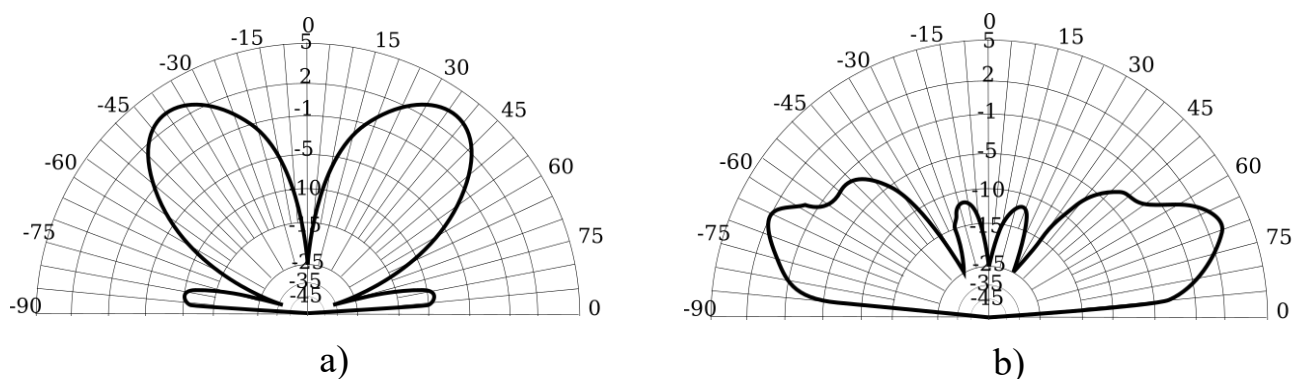


Рисунок 3.6 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (a) и ФАР 5:7 (b) при 25МГц

При 20МГц мы можем наблюдать, что как в случае одиночного излучателя, так и в случае ФАР, коэффициент усиления падает по отношению к результату при 15МГц (см Рис. 3.1). Диаграмма направленности изображена на рис. 3.5.

Интересный результат наблюдается при 25МГц (см Рис. 3.6), где усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. Сравнение их диаграмм направленности показывает, что одиночный излучатель довольно плохо излучает в направлении оптимизации, тогда как ФАР имеет максимум излучения в этом направлении. Невозможно было бы достигнуть такого явления без учета взаимного влияния. Отсюда следует, что при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона не следует пренебрегать взаимным влиянием, поскольку это может существенно изменить вид диаграммы направленности.

Далее рассмотрим как горизонтальный план диаграммы направленности меняется с ростом частоты (см. рис. 3.7). Направление оптимизации - 45° . Здесь мы можем наблюдать, что при частоте, равной 5МГц, диаграмма направленности представляется почти овальной формой. Дальнейшее увеличение частоты до 15МГц приводит диаграмму направленности к очень направленной форме. Затем

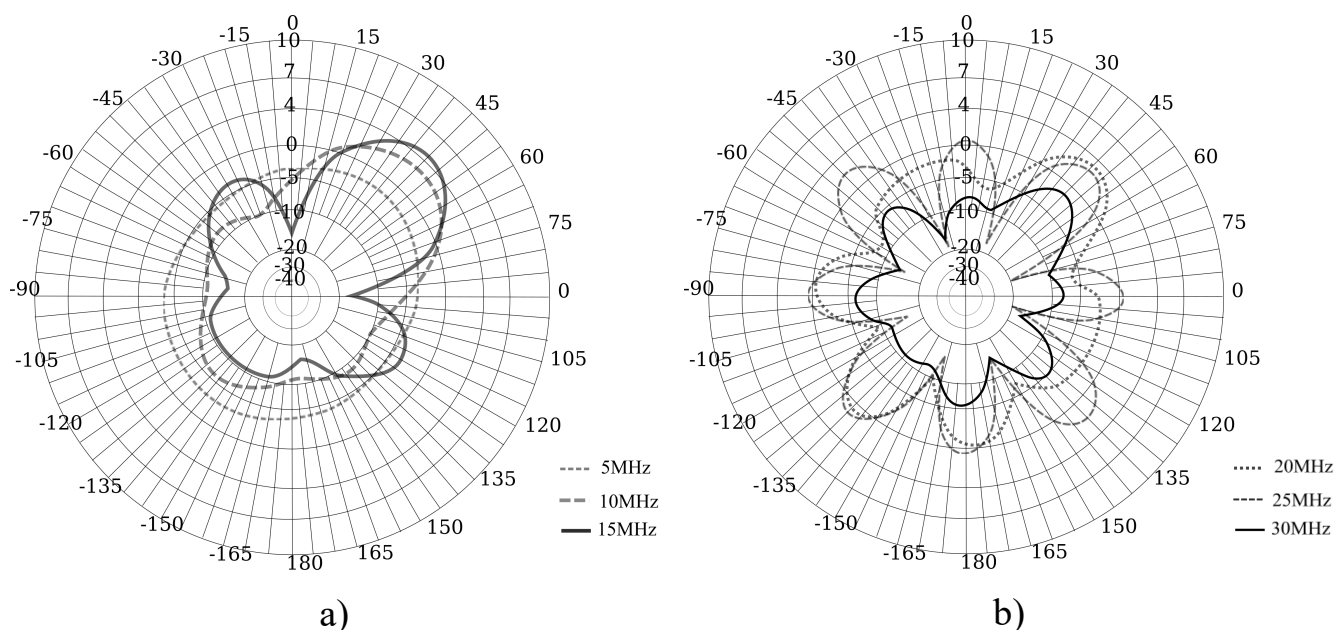


Рисунок 3.7 — Горизонтальный план диаграммы направленности для ФАР 5:7 5-15 МГц (a) и 20-30 МГц (b)

увеличение частоты ведет к довольно сложной форме, при которой максимум излучения становится менее выражен.

3.2 Исследование взаимного влияния излучателей

Все эксперименты проводились при реальной земле, рассчитанной по методу Зоммерфельда-Нортон пакетом NEC-2. Для проведения эксперимента было выбрано несколько частот в рабочем диапазоне, однако, все приведенные в данной статье результаты приходятся на 5 МГц, поскольку именно эти результаты носят наиболее иллюстративный характер. Рассмотрим случай фазирования решетки без учета взаимного влияния ее элементов. Для этого обратимся к формуле (1.5). Если пренебречь взаимным влиянием излучателей, плотность мощности F будет максимальна тогда, когда комплексные амплитуды парциальных полей будут синфазны. В данной работе производилось сравнение диаграмм направленности решеток разных конфигураций после математической оптимизации их направленности в заданном направлении согласно модели (1.13) с соответствующими диаграммами одиночного излучателя и со случаем фазирования решетки без учета взаимного влияния (далее – простое фазирование). Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS,

поскольку, как правило, он обеспечивает бóльшую точность решений по сравнению с градиентным подъемом. Высота каждого ШВИ равна 15 м. Длина плеча симметричных излучателей также равна 15 м. Каждая кольцевая решетка состоит из восьми излучателей. Направление оптимизации по умолчанию было установлено на 70° полярного угла и 45° азимутального угла в сферических координатах. Для некоторых экспериментов было проведено дополнительное исследование при 85° полярного угла.

3.2.1 Широкополосные вертикальные излучатели

В рамках данного эксперимента производилось сравнение диаграмм направленности при варьировании расстояния центра излучателя до центра решетки (от 7 до 80 м.), длины радиальных противовесов (от 3 до 20 м.) и присутствия или отсутствия общей системы противовесов. Диаграммы направленности при этом имели различную форму, однако, качественно различие между коэффициентами усиления всегда сохранялось (см. рис. 3.12): результат оптимизации не дает значимого преимущества перед простым фазированием. Модули диагональных и недиагональных элементов матрицы проводимостей в указанном примере не превосходили 0.002 и 0.0003 См соответственно.

3.2.2 Симметричные излучатели

Для ШВД производилось исследование диаграмм направленности при варьировании расстояния центра излучателя до центра решетки от 5 до 50 м. В большинстве случаев, использование решения задачи математического программирования не давало существенного преимущества перед простым фазированием (см. рис. 4). Модули диагонального и недиагонального элементов матрицы проводимостей в приведенном примере не превосходили 0.016 и 0.006 См соответственно. Тем не менее, при расстоянии между центром излучателя и центром решетки равным 20 м. это различие составило около 4 дБ (см. рис. 5). Здесь модули диаго-

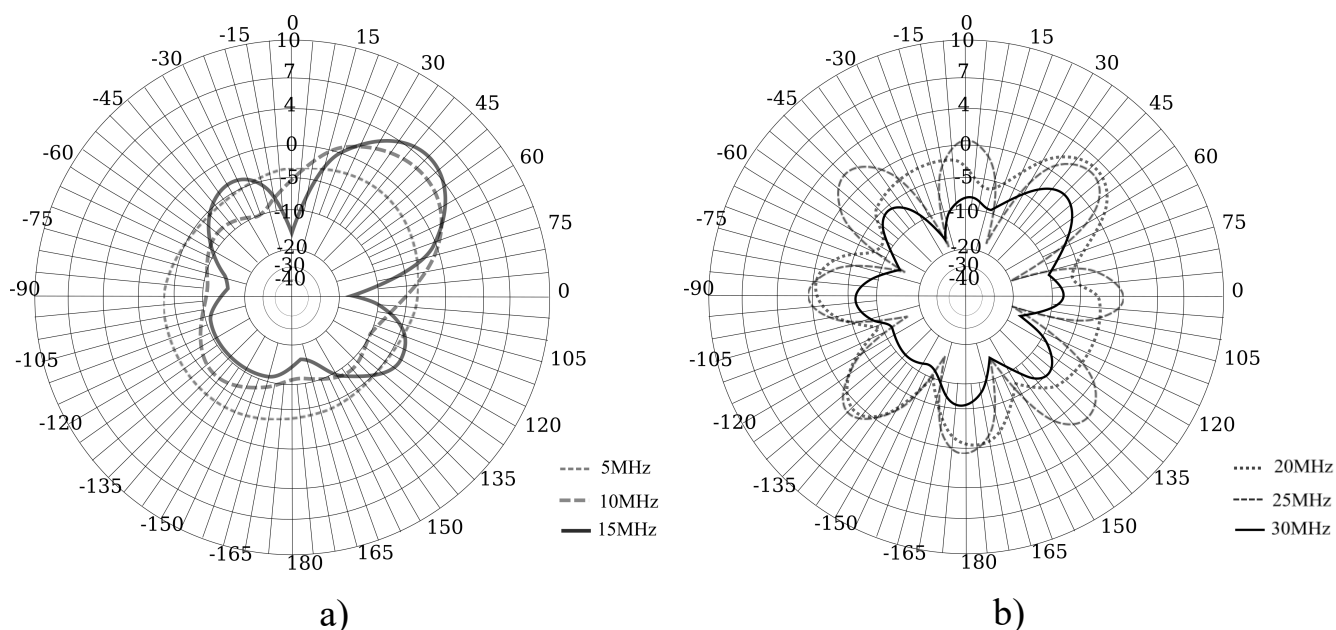


Рисунок 3.8 — Горизонтальная (а) и вертикальная (б) плоскость диаграммы направленности ШВИ при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 15 м. и длиной радиальных противовесов 5 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной—простое фазирование, сплошной—решение задачи мат. программирования.

нальных и недиагональных элементов матрицы проводимостей не превосходили 0.013 и 0.008 См соответственно.

Аналогичные результаты были получены и для решетки СВД (см. рис. 5). При оптимизации в направлении полярного угла равном 70° при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 35 до 37 м. разница между коэффициентом усиления решения задачи математического программирования и усилением простого фазирования также достигала 4 дБ. При этом модули диагональных и недиагональных элементов матрицы проводимостей не превосходили 0.033 и 0.021 См соответственно. При оптимизации в направлении полярного угла равном 85° при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 25 до 29 м. эта разница достигала 5 дБ. (см. рис. 6). Здесь модули диагональных и недиагональных элементов матрицы проводимостей примере не превосходили 0.015 и 0.009 См соответственно.

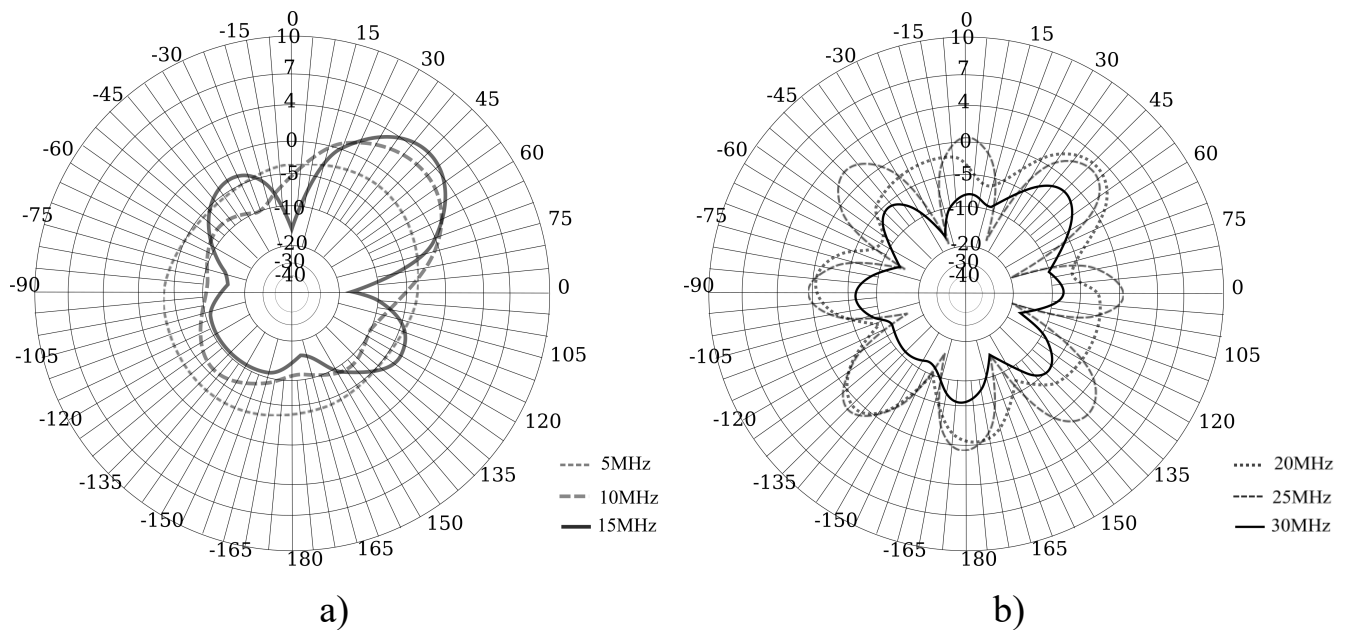


Рисунок 3.9 — Горизонтальная (а) и вертикальная (б) плоскость диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 30 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной—простое фазирование, сплошной—решение задачи мат. программирования.

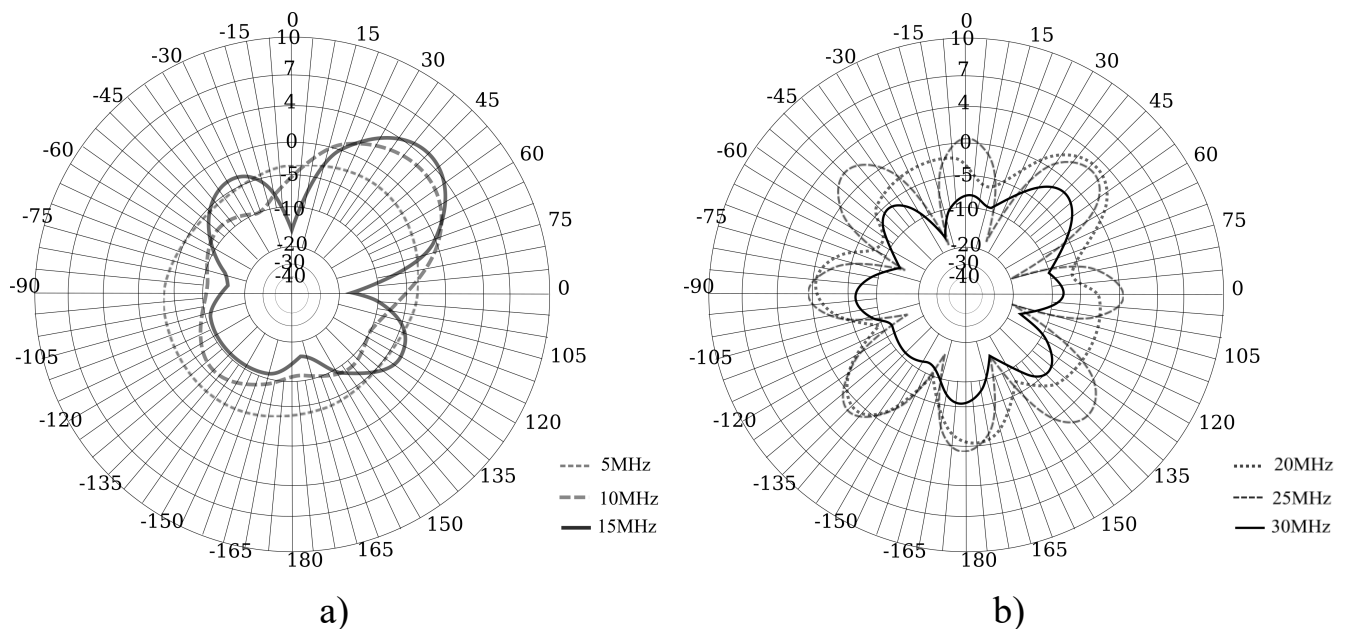


Рисунок 3.10 — Горизонтальная (а) и вертикальная (б) плоскость диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 20 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной—простое фазирование, сплошной—решение задачи мат. программирования.

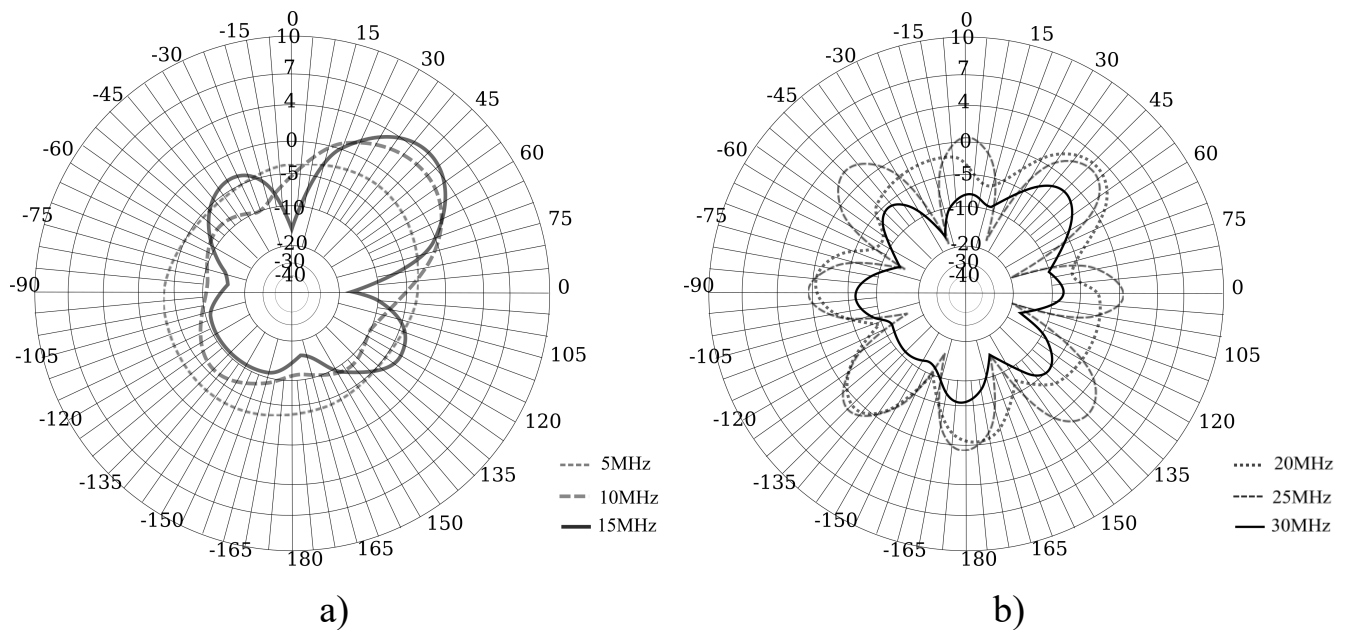


Рисунок 3.11 — Горизонтальная (а) и вертикальная (б) плоскость диаграммы направленности СВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 37 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной—простое фазирование, сплошной—решение задачи мат. программирования.

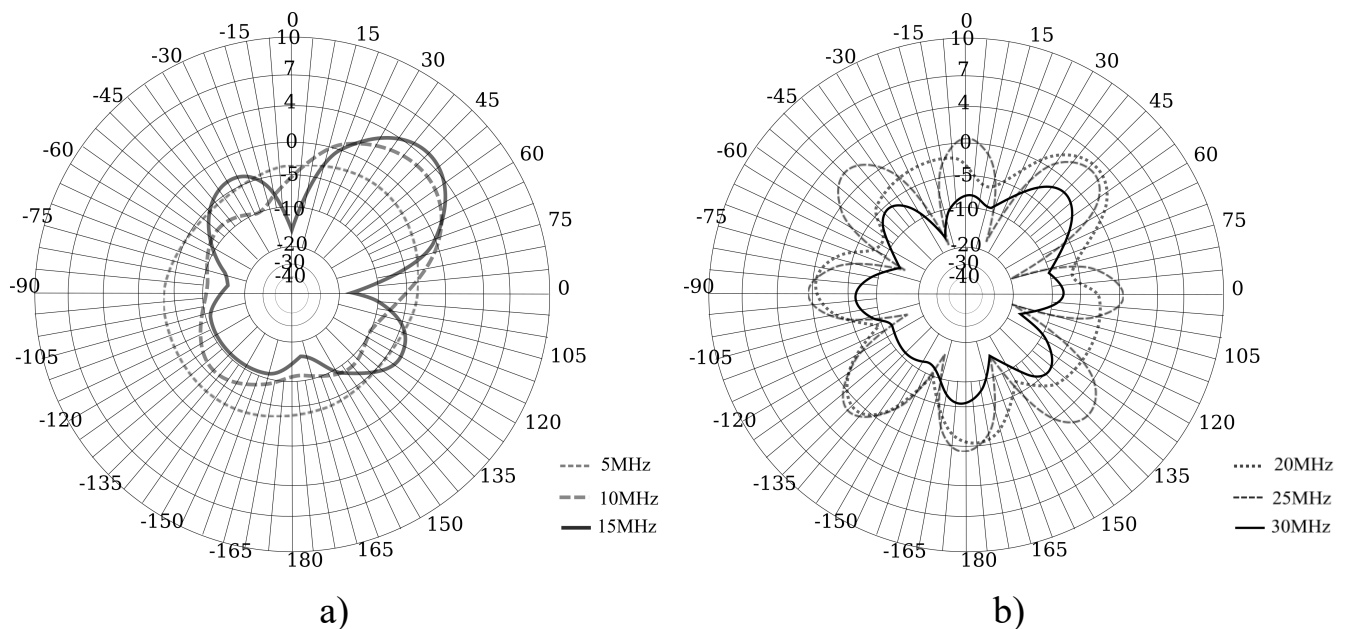


Рисунок 3.12 — Горизонтальная (а) и вертикальная (б) плоскость диаграммы направленности СВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 25 м, полученные для 85° полярного угла. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной—простое фазирование, сплошной — решение задачи мат. программирования.

3.2.3 Интерпретация результатов экспериментов по исследованию взаимного влияния излучателей

В рамках данного исследования было выявлено наличие ситуаций, в которых коэффициент усиления, соответствующий решению задачи математического программирования, имеет существенное преимущество перед коэффициентом усиления простого фазирования. Например, при оптимизации в направлении $(70^\circ, 45^\circ)$ в случае ШВД при расстоянии излучателя до центра решетки равном 20 м. и СВД при расстоянии излучателя до центра решетки равном 37 м. разница составляет порядка 4 дБ. При оптимизации в направлении $(85^\circ, 45^\circ)$ в случае СВД при расстоянии излучателя до центра решетки равном 25 м. эта разница достигает 5 дБ. Следовательно, при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона целесообразны расчеты с учетом взаимного влияния излучателей. В то же время, отмечены случаи, когда результат решения задачи математического программирования не дает существенного прироста усиления по сравнению с фазированием без учета взаимного влияния. Использование ШВИ в качестве излучателей ФАР КВ диапазона выглядит малоприменимым, поскольку требуют чрезмерно сложной системы противовесов.

Глава 4. Дифференциальная эволюция

// TODO: Подробнее о дифф. эволюции Как было показано выше, градиентный метод может предоставить решение, не являющийся локальным оптимумом, если целевая функция слабо изменяется в окрестности текущей точки. Алгоритм дифференциальной эволюции не подвержен такому поведению. Эксперименты показывают, что в целом эволюция популяции соответствует динамике случайного облака точек, движущегося как целое вдоль рельефа оптимизируемой функции, повторяя его характерные особенности. В случае попадания в овраг «облако» принимает форму этого оврага и распределение точек становится таким, что математическое ожидание разности двух случайных векторов оказывается направленным вдоль длинной стороны оврага. Это обеспечивает быстрое движение вдоль узких вытянутых оврагов, тогда как для градиентных методов в аналогичных условиях характерно колебательная динамика «от стенки к стенке». Приведенные эвристические соображения иллюстрируют наиболее важную и привлекательную особенность алгоритма ДЭ — способность динамически моделировать особенности рельефа оптимизируемой функции. Именно этим объясняется замечательная способность алгоритма быстро проходить сложные овраги, обеспечивая эффективность даже в случае сложного рельефа.

Кратко опишем идею алгоритма ДЭ. В начале происходит генерация популяции. Если нет дополнительной информации, такая популяция особи популяции генерируются случайным образом с равномерным распределением. Затем, пока все особи не сойдутся в одной точке, каждая особь подвергается мутации путем присваивания ей признаков другой особи. Процедура, определяющая, в какой степени признаки других особей участвуют в эволюции конкретной особи является параметром алгоритма. Далее происходит сравнение значений целевой функции мутировавшей особи со значением целевой функции исходной особи. Выживает особь с лучшим значением целевой функции.

Данный алгоритм хорошо поддается модификации для запуска в параллельных потоках. В этом случае, на очередной итерации алгоритма выбирается некоторый набор особей, эволюция каждой из которых на данной итерации происходит независимо от эволюции другой. В данной работе был предложен вариант реализации алгоритма дифференциальной эволюции, адаптированный для запус-

ка на графическом устройстве. Использование алгоритма ДЭ позволило достичь решения с целевой функцией $\tilde{F} = 253$ для задачи СВД' 2x2.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Предложена модификация градиентного метода, учитывающая специфику задачи оптимизации фаз и амплитуд ФАР, позволяющая получать решения с практически приемлемыми точностью и временем счета.
2. В рассматриваемых задачах оптимизации фаз и амплитуд ФАР методами линейной алгебры выявлено семейство симметрий, состоящих в равном по величине сдвиге фаз во всех излучателях и позволяющее сократить размерность задач.
3. В ходе вычислительного эксперимента показано, что задача оптимизации фаз и амплитуд фазированной антенной решетки имеет многочисленные локальные оптимумы, большое число из которых совпадают по целевой функции, однако не эквивалентны между собой относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.
4. Выявлены ситуации, в которых коэффициент усиления, соответствующий решению задачи квадратичной оптимизации, имеет существенное преимущество (до 5 дБ) перед коэффициентом усиления, получаемым стандартным методом простого фазирования.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Еремееву А.В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Особую благодарность автор выражает Юркову А.С. за консультации по радиотехническим аспектам работы, помощь в организации вычислительных экспериментов и интерпретации полученных результатов. Также автор благодарит авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–37–90066/19)

Словарь терминов

Фазированная антенная решетка (ФАР) : антенная система, представляющая собой регулярную решетку излучателей, соединенных со специальными устройствами, обеспечивающими распределение фаз и амплитуд в излучателях для получения направленного излучения

ВЧ (КВ) диапазон : диапазон радиоволн с частотой от 3 МГц (длина волны 100 м) до 30 МГц (длина волны 10 м) **СВЧ (УКВ) диапазон** : диапазон радиоволн с частотой от 30 МГц (длина волны 10 м) до 3000 ГГц (длина волны 0.1 мм)

Список литературы

1. Synthesis of Conical Phased Antenna Arrays Optimization of Amplitude Distribution Parameters [Text] / M. Indenbom [et al.] // IX International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2018). — 2018. — P. 273—285.
2. Щелкунов С. А., Фрис Г. Антенны: Теория и практика. [Текст]. — М:Советское радио, 1955.
3. Фаняев И. А., Кудин В. П. Синтез амплитудного распределения на входах излучателей фазированной антенной решетки над цилиндрической поверхностью методом роя частиц [Текст] // Доклады БГУИР. — 2017. — С. 89—96.
4. Фаняев И. А., Кудин В. П. Фазированная антенная решетка кругового обзора над проводящей цилиндрической поверхностью из излучателей вертикальной поляризации [Текст] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Сер.: Естественные науки. — 2014. — С. 191—198.
5. Юрков А. С. Максимизация направленности фазированных антенных решеток коротковолнового диапазона [Текст] // Техника радиосвязи. ОНИИП. — 2016. — № 2. — С. 46—53.
6. Юрков А. С. Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн [Текст]. — ОНИИП, 2014.
7. Fuchs B. Application of convex relaxation to array synthesis problems [Text] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2014. — Vol. 62, no. 2. — P. 634—640.
8. Murty K. Some NP-complete Problems in Quadratic and Nonlinear Programming [Text] // Mathematical Programming. North Holand. — 1987. — Vol. 39. — P. 117—129.
9. Complexity of buffer capacity allocation problems for production lines with unreliable machines [Text] / A. Dolgui [et al.] // Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research. — 2013. — Vol. 12, no. 2. — P. 155—165.
10. Кочетов Ю. А. Вычислительные возможности локального поиска в комбинаторной оптимизации [Текст] // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — Т. 48, № 5. — С. 747—763.
11. Нечаева М. С., Хамисов О. В. Метод ветвей и границ для задачи минимизации невыпуклой квадратичной функции при выпуклых квадратичных

- ограничениях [Текст] // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2000. — Т. 7, № 2. — С. 74—88.
12. *Стрекаловский А. С.* О минимизации разности выпуклых функций на допустимом множестве [Текст] // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2003. — Т. 43, № 3. — С. 399—409.
 13. Efficient approach for fast synthesis of phased arrays with the aid of a hybrid genetic algorithm and a smart feed representation [Text] / A. V. Boriskin [et al.] // 2010 IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology. — 2010. — P. 827—832.
 14. *Horst R., Pardalos P. M.* Handbook of global optimization [Text]. Vol. 2. — Springer Science & Business Media, 2013.
 15. *Rao A., Sarma N.* Synthesis of reconfigurable antenna array using differential evolution algorithm [Текст] // IETE Journal of Research. — 2017. — Т. 63, № 3. — С. 428—434.
 16. *Нестеров Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию [Текст]. — М:МЦНМО, 2010. — 70 с.
 17. *Ryoo H. S., Sahinidis N. V.* Global Optimization of Nonconvex NLPs and MINLPs with Applications in Process Design [Text] // Computers and Chem. Engng. Pergamon. — 1995. — Vol. 19, no. 5. — P. 551—566.
 18. *Еремеев А. В., Ривс К. Р.* О доверительных интервалах для числа локальных оптимумов [Текст] // Математические структуры и моделирование. — 2017. — Т. 41. — С. 55—74.
 19. *Сазонов Д. М.* Антенны и устройства СВЧ [Текст]. — М:Высш.шк., 1988.
 20. *Luo Z., Chang T.* SDP relaxation of homogeneous quadratic optimization: approximation bounds and applications [Text] // Convex Optimization in Signal Processing and Communications. — 2009. — P. 117—165.
 21. *Horst R., Tyu H.* Global optimization: Deterministic approaches [Text]. — Springer Science & Business Media, 2013. — P. 551—566.
 22. *Tawarmalani M., Sahinidis N. V.* Global optimization of mixed-integer nonlinear programs: A theoretical and computational study [Text] // Mathematical programming. Springer. — 2004. — Vol. 99, no. 3. — P. 563—591.

23. *Strekalovsky A. S.* Global optimality conditions in nonconvex optimization [Text] // Journal of Optimization Theory and Applications. Springer. — 2007. — Vol. 173, no. 3. — P. 770—792.
24. *Himmelblau D. M.* Applied nonlinear programming [Text]. — McGraw-Hill Companies, 1972.
25. *Eberhart R., Kennedy J.* Particle swarm optimization [Text] // Proceedings of the IEEE international conference on neural networks. Vol. 4. — IEEE, 1995. — P. 1942—1948.
26. *Storn R., Price K.* Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces [Text] // Journal of global optimization. Springer. — 1997. — Vol. 11, no. 4. — P. 341—359.
27. *Еремин В. В., Н. А. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования [Текст]. — Наука, 1976. — 192 с.
28. *Aoki M.* Introduction to optimization techniques. Fundamentals and applications of nonlinear programming [Text]. — California Univ Los Angeles dept of system science, 1971.
29. *Eremeev A. V., S. Y. A.* On Symmetry Groups of Some Quadratic Programming Problems [Text] // MOTOR 2020. Shpringer. — 2020. — Vol. 12095.
30. *Юрков А. С.* О влиянии потерь в земле на работу четырехэлементной ФАР КВ диапазона [Текст] // Техника радиосвязи. ОНИИП. — 2014. — № 1. — С. 78—81.
31. Numerical electromagnetic code (NEC) [Text] / G. J. Burke [et al.] // 1979 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility. — IEEE. 1979. — P. 1—3.
32. *Noguchi H., Tomohiro H., Thawonmas R.* Parallel Differential Evolution Applied to Interleaving Generation with Precedence Evaluation of Tentative Solutions [Text] // 2021 Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO '21). — 2021.
33. *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix analysis [Text]. — Cambridge University Press, 1990.
34. *Costa A., Hansen P., Liberti L.* On the impact of symmetry-breaking constraints on spatial Branch-and-Bound for circle packing in a square [Text] // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 161, no. 1. — P. 96—106.

35. *Gatermann K., Parrilo P. A.* Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares [Text] // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2004. — Vol. 192, no. 1. — P. 95—128.
36. *Kouyialis G., Wang X., Misener R.* Symmetry Detection for Quadratic Optimization Using Binary Layered Graphs [Text] // Processes. — 2019. — Vol. 7, no. 11.
37. *Bödi R., Herr K., Joswig M.* Algorithms for highly symmetric linear and integer programs [Text] // Math. Program. — 2013. — Vol. 137. — P. 65—90. — (A).
38. *Chervyakov O.* Affine symmetries of the polyhedron of independence system with unit shift [Текст] // Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operacii. — 1999. — T. 2, № 2. — С. 82—96. — (2-я сер.) — in Russian.
39. *Kolokolov A. A., Orlovskaya T. G., Rybalka M. F.* Analysis of integer programming algorithms with L-partition and unimodular transformations [Text] // Automation and Remote Control. — 2012. — Vol. 73, no. 2. — P. 369—380.
40. *Margot F.* Symmetry in Integer Linear Programming [Text] // 50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the-Art / ed. by M. Jünger [et al.]. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. — P. 647—686.
41. *Simanchev R.* Linear symmetries of matchings polyhedron and graph automorphisms [Текст] // Vestnik Omskogo Universiteta. — 1996. — T. 1. — С. 18—20. — in Russian.
42. *Liberti L.* Reformulations in mathematical programming: automatic symmetry detection and exploitation [Text] // Mathematical Programming. — 2012. — Vol. 131, issue 1/2.
43. *Pfetsch M., Rehn T.* A computational comparison of symmetry handling methods for mixed integer programs [Text] // Math. Progr. Comput. — 2019. — Vol. 11. — P. 37—93.
44. *Doerr B.* Runtime analysis of evolutionary algorithms via symmetry arguments [Text] // Inf. Process. Lett. — 2021. — Vol. 166. — P. 106064.
45. *Prugel-Bennett A.* Symmetry Breaking in Population-Based Optimization [Text] // Trans. Evol. Comp. — 2004. — Feb. — Vol. 8, no. 1. — P. 63—79.
46. *Shor N. Z.* Semidefinite Programming Bounds for Extremal Graph Problems [Text] // Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. — Boston, MA : Springer US, 1998. — P. 265—298.

47. *Zhelobenko D. P.* Compact Lie Groups and their Representations [Text]. Vol. 40. — Providence, AMS, 1973. — (Translations of mathematical monographs).
48. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The Theory of Matrices [Text]. — Academic Press, 1985.