

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук «ОФ ИМ СО РАН»

Представление на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 05.13.01 Системный анализ, управление и обработка информации

Анализ и решение задач оптимизации  
направленности фазированных антенных решеток  
коротковолнового диапазона

*Выступающий:* Н. Н. Тюнин  
*Руководитель:* д.ф.-м.н., доц. А. В. Евемеев

Омск, 2022

В настоящее время разработка и анализ эффективных систем радиосвязи имеет большое значение для народного хозяйства. Одной из актуальных задач в этой области является задача оптимизации направленности фазированных антенных решеток (ФАР), представляющих собой антенные системы, распределение фаз и амплитуд на излучателях которых позволяет получать направленное излучение.

Будучи собранными в антенную систему и разведенными в пространстве, излучатели формируют диаграмму направленности, которая зависит от расположения и конструкции излучателей, а также выбора фаз и амплитуд сигналов, подаваемых на вход излучателей.

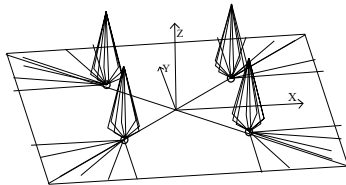
В СВЧ диапазоне задачи оптимизации направленности ФАР решаются с использованием упрощающих предположений (М. Инденбом, В. Ижуткин и др, 2018; С. Щелкунов, Г. Фриис, 1952; И.А. Фаняев, В.П. Кудин, 2017).

В ВЧ диапазоне требуется использовать методы электродинамического моделирования для оценки наведенных токов в каждой паре излучателей и учитывать свойства подстилающей поверхности, в результате задача оптимизации направленности ФАР оказывается более сложной, и потому менее изучена (В.П. Кудин, 2014; А.С. Юрков, 2016).

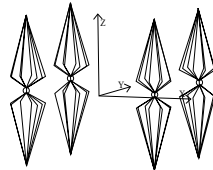
Существует постановка задачи при ограничении суммарной мощности, подаваемой на антенную систему. Такая задача может быть решена аналитически (А.С. Юрков, 2014).

- 1 Оптимизация направленности ФАР: основные понятия, постановка задач, проблемы и методы решения
  - Основные понятия
  - Постановка задачи
  - Вычислительный эксперимент
  - Группы симметрий
- 2 Анализ структуры множества локальных оптимумов
  - Структура множества локальных оптимумов
  - Область притяжения глобального оптимума
- 3 Исследование возможностей ФАР в разных условиях
  - Радиочастотные зависимости эффективности ФАР
  - Взаимное влияния излучателей

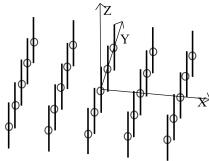
# Оптимизация направленности ФАР: основные понятия, постановка задач, проблемы и методы решения



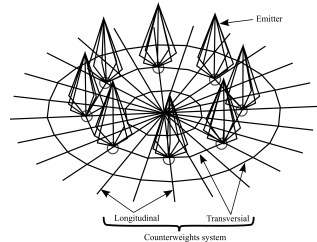
а)



б)



в)



г)

Рис. 1: ФАР различных конфигураций

**Юрков А.С.:** Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн. ОНИИП, Омск (2014)

**Fuchs B.:** Application of convex relaxation to array synthesis problems. IEEE.

- В задаче имеется одномерная непрерывная группа симметрий.
- Имеются конфигурации ФАР, при которых учет взаимного влияния излучателей ведет к существенному увеличению коэффициента усиления в заданном направлении.
- Для многих конфигураций ФАР задача имеет несколько кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции, не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.

$$f_{\Sigma}^{(l)} = \sum_{i=1}^N I_i \tilde{f}_i^{(l)} \quad (1)$$

$$F = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_{\Sigma}^{(l)} f_{\Sigma}^{(l)} \quad (2)$$

$$F = \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max \quad (3)$$

**Юрков А.С.:** Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн // ОНИИП 2014.



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \mathbf{i} \in \mathbb{C}^N \end{array} \right. \quad (4)$$

где  $n$  - число точек питания, на которые накладываются ограничения

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{4P_{max}^{(k)}} (\mathbf{Z}^+ \mathcal{P}^{(k)} + \mathcal{P}^{(k)} \mathbf{Z}), \quad (5)$$

$P_{max}^{(k)}$  - максимально допустимая мощность в  $k$ -й точке питания,  
 $\mathcal{P}^{(k)}$  - матрицы-проекторы имеющие единственный ненулевой элемент  $\mathcal{P}_{kk}^{(k)} = 1$ .

**Юрков А.С.:** Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн // ОНИИП 2014.

- 1 Все матрицы  $\mathbf{B}^{(k)}$  имеют не больше чем два ненулевых собственных значения. Одно из собственных значений положительно, остальные отрицательные или нулевые.
- 2 Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}^{(k)}$  эрмитово-самосопряженные, то есть  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$  для всех  $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}$ .
- 3 Матрица  $\mathbf{A}$  положительно полуопределена.
- 4 Кроме того, из физических соображений вытекает, что матрица  $\mathbf{B}_{\Sigma} := \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^{(k)}$  положительно определена, так как суммарная активная мощность, поглощаемая пассивной цепью, не может быть отрицательной либо нулем, поскольку, часть энергии обязательно излучится.

**Юрков А.С.:** Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн // ОНИИП 2014.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Задача (6) имеет целевую функцию, заданную квадратичной формой с положительно полуопределенной матрицей  $\mathbf{G}$ . Каждое ограничение формулируется квадратичной формой, определенной симметричной матрицей  $\mathbf{H}^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$  с двумя парами идентичных собственных значений, два из которых положительны, а другие два отрицательны или равны нулю, все остальные собственные числа равны нулю.

**Ereemeev A.V., Tynin N.N., Yurkov A.S.:** Non-Convex Quadratic Programming Problems in Short Wave Antenna Array Optimization. // MOTOR 2019 (11584)

# Верхняя оценка нормы допустимых решений

Если  $\mathbf{x}$  удовлетворяет всем ограничениям задачи (6), то

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq N.$$

$$\mathbf{H}_{\text{sum}} := \sum_{k=1}^n \mathbf{H}^{(k)}$$

$$\lambda_{\min} > 0$$

$$\min\{\mathbf{z}^T \mathbf{H}_{\text{sum}} \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N}, \|\mathbf{z}\| = 1\} = \lambda_{\min},$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{H}_{\text{sum}} \mathbf{x} \geq \|\mathbf{x}\|^2 \lambda_{\min}$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}. \quad (7)$$

**Тюнин Н.Н.:** Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решеток //Дискретный анализ и исследование операций, 2021, 28(3)

# Масштабирование решения в допустимую область

Если решение  $\mathbf{x}$  нарушает только ограничивающие неравенства задачи (6) вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ , то:

$$\mathbf{x}' := \mu(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad (8)$$

где  $\mu(\mathbf{x}) := \max_{k=1, n} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}$ .

**Тюнин Н.Н.:** Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решеток // Дискретный анализ и исследование операций, 2021, 28(3)

## Метод штрафных функций

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n \left( \min \left( 0, \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) + \min \left( 0, 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) \right)^\alpha \rightarrow \max \quad (9)$$

## Необходимые условия локальной оптимальности

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0^T \mathbf{G} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{G} \mathbf{y} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{y} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{y} \leq 1, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (10)$$

## Цели эксперимента

- Исследование структуры локальных оптимумов
- Сравнение эффективности работы различных алгоритмов
- Исследование возможностей ФАР в разных условиях

## Исследуемые алгоритмы

- Градиентный подъем
  - Выбор начального значения в пределах оцененной нормы
  - Масштабирование решения в допустимую область
- BARON

## Детали эксперимента

- Антенный моделировщик NEC2
- Направление оптимизации  $70^\circ : 45^\circ$

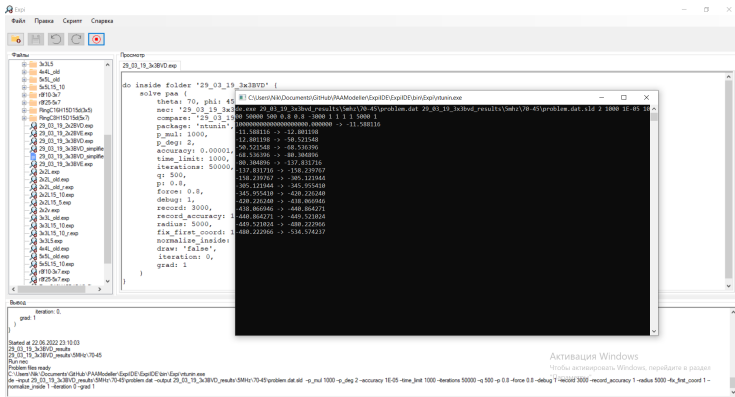


Рис. 2: Графический интерфейс программного комплекса



# Сравнение результатов оптимизации градиентного подъема и решателя BARON

ФАР	$\lambda_{min}$	$\sqrt{\frac{N}{\lambda_{min}}}$	Град.		BARON	
			F	t, c	F	t, c
ШВИ 2x2	0.0215	13.6	138.2	<b>0.054</b>	<b>139.2</b>	0.12
ШВИ 3x3	0.0177	70	575.7	0.93	<b>580.6</b>	<b>0.34</b>
ШВД 2x2	0.009	21	459.7	<b>0.13</b>	<b>463.6</b>	0.27
ШВД 3x3	0.0013	6767	915	24.4	<b>925</b>	<b>0.34</b>
СВД 2x2	$2 \cdot 10^{-3}$	44	357	1.9	<b>361</b>	<b>0.16</b>
СВД' 3x3	0.0008	$1 \cdot 10^4$	664	71	<b>1153</b>	<b>1.48</b>
СВД' 5x5	-	-	<b>1382.7</b>	1000	33.5	<b>217.94</b>
Кольц. 8	$3 \cdot 10^{-3}$	154	217	8.06	<b>218</b>	<b>0.23</b>
Кольц. 16	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^6$	727	90.9	<b>734</b>	<b>1.37</b>

$\sqrt{\frac{N}{\lambda_{min}}}$  - оценка сверху евклидовой нормы.

# Экспериментальная проверка устойчивости решений

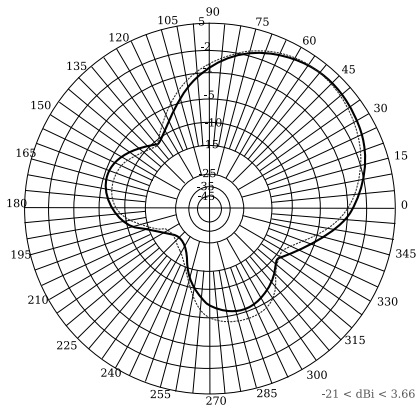


Рис. 3: Диаграммы направленности для ШВИ 2x2 при оптимизации в направлении 70:45 (сплошная линия) и 70:50 (пунктир)

Под линейной симметрией задачи будем понимать линейное преобразование  $P$  пространства поиска, имеющее вид (11), заданное невырожденной матрицей  $P$ , такое что при подстановке новых координат  $y$  задача совпадает с исходной.

$$x \rightarrow y = Px \quad (11)$$

$$H_{\Sigma} = \sum_{j=1}^M H_j \quad (12)$$

$$H_{\Sigma} = S^T D S \quad (13)$$

Далее считаем, что  $H_{\Sigma}$  диагональна.

$$P = e^{\sum_n a_n G_n} = e^{\sum_m a_m \hat{G}_m} \quad (14)$$

**Еремеев А.В., Юрков А.С.:** On Symmetry Groups of Some Quadratic Programming Problems // MOTOR 2020. Shpringer, 2020. Vol. 12095.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_i \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \mathbf{H}_i, \\ \mathbf{G} \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \mathbf{G}. \end{array} \right. \quad (15)$$

**Еремеев А.В., Юрков А.С.:** On Symmetry Groups of Some Quadratic Programming Problems // MOTOR 2020. Shpringer, 2020. Vol. 12095.

- Обработка. На этом этапе возможная неточность данных нивелируется усреднением симметричных компонент матриц (матрицы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  должны быть симметричны).
- Преобразование  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$  к канонической форме используя метод Лагранжа для вычисления матриц  $S$  и  $S^{-1}$ .
- Применение метода Гаусса к системе линейных уравнений (15) для вычисления генераторов  $\hat{G}_n$ .

$$\mathbf{i} \rightarrow e^{j\phi} \mathbf{i}$$

$$\hat{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & -1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & -1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & -1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

- Было выявлено, что в примерах, составленных на моделях, имеющих практическую значимость (ШВИ и ШВД различных конфигураций), разница в качестве найденных решений не превосходит 1%.
- На задачах малой размерности градиентный подъем показывает лучшее время.
- На задачах средней размерности BARON показывает лучшие результаты.
- На задачах большой размерности оба подхода могут не достичь приемлемого решения.
- Для всех рассмотренных задач было выявлено наличие только одномерной (фазовой) непрерывной симметрии.
- С учетом одномерной симметрии размерность задачи снижается на одну переменную.

# Анализ структуры множества локальных оптимумов



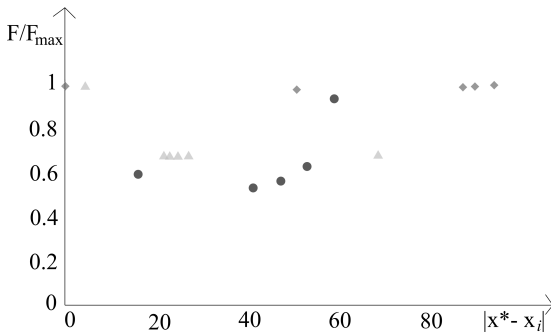
# Структура множества локальных оптимумов

<b>ФАР</b>	$M$	$M_{ne}$	$M_f$	$M_{y \approx 0}$
ШВИ 2x2	18368	4	1	4
ШВД 2x2	7678	4	1	4
СВД 2x2	523	1	1	1
СВД' 3x3	14	14	3	1
ШВИ 3x3	1070	3	1	3
ШВД 3x3	41	4	4	1
Кольц. 8	124	9	2	9
Кольц. 16	11	6	1	6

Метод переписи Шнабеля заключается в выводе статистических оценок численности популяции на основе числа особей, помеченных в результате эксперимента, из популяции с неизменным составом, где каждая особь имеет константную вероятность отлова.

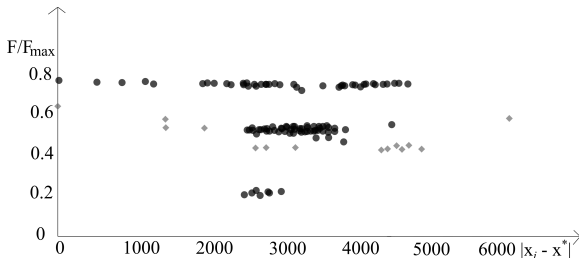
**Еремеев А.В., Ривс К.Р.:** О доверительных интервалах для числа локальных оптимумов // Математические структуры и моделирование 2017.

<b>ФАР</b>	$M$	$M_{ne}$	$M_f$	$\mathcal{B}_{M_f}$	$\mathcal{L}_{M_f}$	$M_{y \approx 0}$	$\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$	$\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$
ШВИ 2x2	18368	4	1	1	1	4	4	4
ШВД 2x2	7678	4	1	1	1	4	4	4
СВД 2x2	523	1	1	1	1	1	1	1
СВД 3x3	39	9	2	2	2	5	5	5
СВД' 2x2	396	370	3	3	3	338	1000	1213
СВД' 3x3	14	14	3	3	3	1	1	1
ШВИ 3x3	1070	3	1	1	1	3	3	3
ШВД 3x3	41	4	4	4	4	1	1	1
Кольц. 8	124	9	2	2	2	9	9	9
Кольц. 16	11	6	1	1	1	6	6	6



**Рис. 4:** Зависимость качества локальных оптимумов от расстояния до глобального. Точками обозначены результаты для кольцевых решеток, состоящих из 8 излучателей, ромбами - для кольцевых решеток, состоящих из 16 излучателей, пятиугольниками - для СВД 3x3.

# Область притяжения глобального оптимума



**Рис. 5:** Зависимость качества локальных оптимумов от расстояния до глобального. Точками обозначены результаты для СВД' 2x2, ромбами - для СВД' 3x3.

Принимая на вход возмущенное порядка 0.5% относительно нормы решение решателя BARON, градиентный подъем приводил к худшему решению.

# Исследование возможностей ФАР в разных условиях

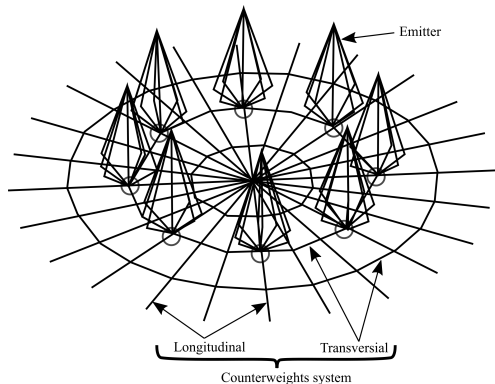


Рис. 6: ФАР кольцевой структуры

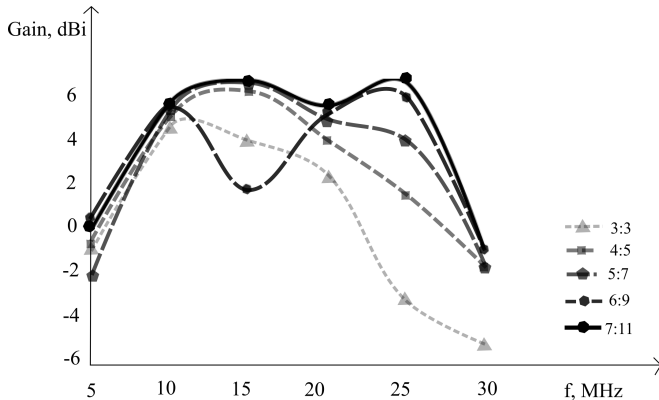


Рис. 7: Зависимость коэффициента усиления ФАР от частоты при оптимизации в направлении 70:45



# Радиочастотные зависимости эффективности ФАР

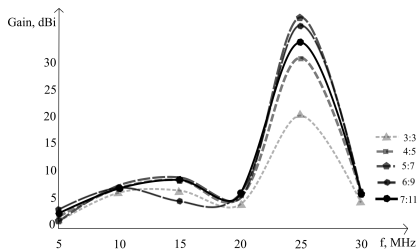
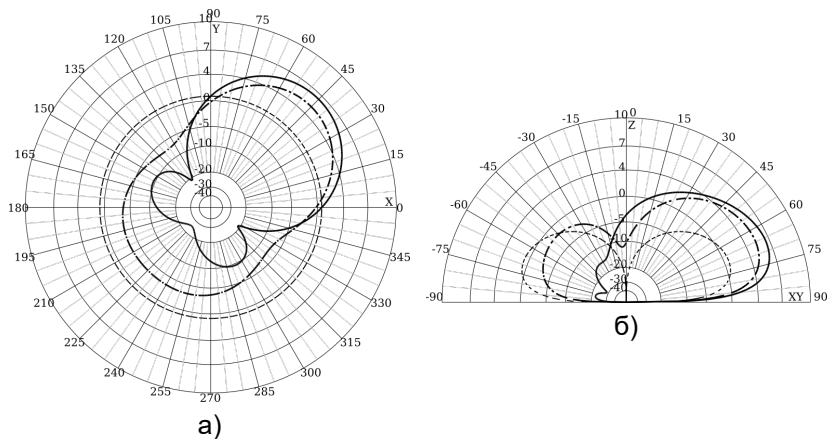


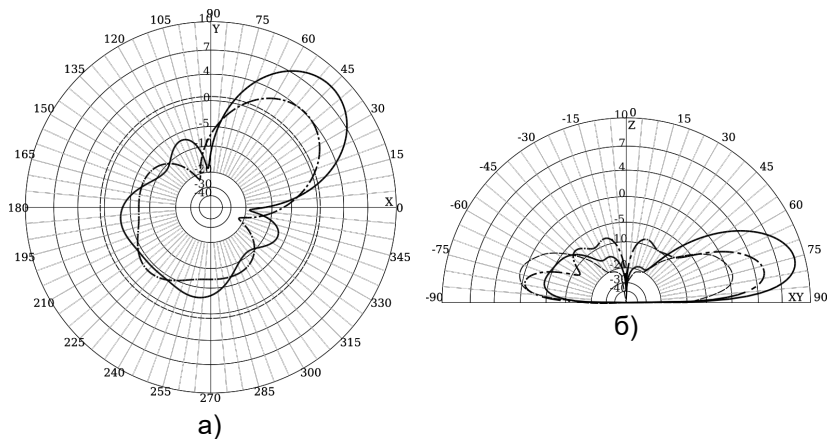
Рис. 8: Сравнение усиления ФАР и одиночного излучателя на различных частотах.



Рис. 9: Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 25 МГц



**Рис. 10:** Горизонтальный и вертикальный план диаграммы направленности ШВИ при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 15 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.



**Рис. 11:** Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 20 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.

- Показаны конфигурации ФАР, при которых учет взаимного влияния дает существенные преимущества перед простым фазированием.

**Tiunin N.:** On mutual influence of emitters in directivity optimization of shortwave phased antenna arrays // Journal of Physics: Conference Series 2021,.

**Еремеев А.В., Тюнин Н.Н., Юрков А.С.:** Об оптимизации направленности коротковолновых фазированных антенных решеток кольцевой структуры // Техника радиосвязи, 2022 (На рецензии).

- В настоящей работе максимизируется излучение в одном заданном направлении, что в наибольшей степени соответствует системам коротковолновой радиосвязи.
- Разработаны реализации алгоритмов с процедурой возвращения в допустимую область.
- Обоснован подход к снижению размерности задачи фиксированием значения переменной.
- Впервые показано наличие кластеров из локальных оптимумов.
- На открытый вопрос о целесообразности учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона дан положительный ответ.

- Разработанные алгоритмы оптимизации возбуждения ФАР могут применяться в системах связи коротковолнового диапазона для увеличения дальности, снижения энергозатрат или площади, занимаемой антеннами. Созданное программное обеспечение позволяет производить необходимые для этого расчеты.
- Полученное обоснование необходимости учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР, а также результаты вычислительных экспериментов для различных вариантов ФАР могут быть полезны при проектировании новых антенных систем.

1. *Тюнин Н. Н.* — Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решеток. — // Дискретный анализ и исследование операций. — 2021.
2. *Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С.* — Об оптимизации направленности коротковолновых фазированных антенных решеток кольцевой структуры. — 2022.
3. *Tyunin N. N.* — On mutual influence of emitters in directivity optimization of shortwave phased antenna arrays. — // Journal of Physics: Conference Series. — 2021.
4. *Eremeev A. V., Tyunin N. N., Yurkov A. S.* — Non-Convex Quadratic Programming Problems in Short Wave Antenna Array Optimization. — // Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019. Lecture Notes in Computer Science. — 2019.

- VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения» - Омск, июль 2018.
- Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций» - Екатеринбург, июль 2019, Иркутск; июль 2021.
- V Международной научно-технической конференции «Радиотехника, электроника и связь» - Омск, октябрь 2019.
- Математическое моделирование и дискретная оптимизация (ОФИМ СО РАН им. С.Л. Соболева, ОмГУ им. Ф.М. Достоевского).
- Перспективы развития радиосвязи и приборостроения (АО «ОНИИП»).
- Современные проблемы радиофизики и радиотехники (АО «ОНИИП», ОмГУ им. Ф.М. Достоевского).



- 1 Предложена модификация градиентного метода, учитывающая специфику задачи оптимизации фаз и амплитуд ФАР, позволяющая получать решения с практически приемлемыми точностью и временем счета.
- 2 В рассматриваемых задачах оптимизации фаз и амплитуд ФАР методами линейной алгебры выявлено семейство симметрий, состоящих в равном по величине сдвиге фаз во всех излучателях и позволяющее сократить размерность задач.
- 3 В ходе вычислительного эксперимента показано, что задача оптимизации фаз и амплитуд фазированной антенной решетки имеет многочисленные локальные оптимумы, большое число из которых совпадают по целевой функции, однако не эквивалентны между собой относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.
- 4 Выявлены ситуации, в которых коэффициент усиления, соответствующий решению задачи квадратичной оптимизации, имеет существенное преимущество перед коэффициентом усиления, получаемым стандартным методом простого фазирования.

**Спасибо за внимание!**