УДК 519.8

Методы системного анализа для решения задачи оптимизации направленности фазированных антенных решеток

Тюнин Н.Н.[1[0000-0001-5374-9750]]

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия,
n.n.tyunin@gmail.com

Аннотация Задача оптимизации фазированных антенных решеток коротковолнового диапазона сформулирована как задача системного анализа. Произведен анализ наличия групп непрерывных симметрий поставленной задачи. Представлен способ решения задачи методами дифференциальной эволюции.

Keywords: Квадратичное программирование · дифференциальная эволюция · группы симметрий · вычислительный эксперимент

Введение

В настоящее время разработка и анализ эффективных систем радиосвязи имеет большое значение для народного хозяйства. Одной из актуальных задач в этой области является задача оптимизации направленности фазированных антенных решеток (ФАР), представляющих собой антенные системы, распределение фаз и амплитуд на элементах которых позволяет получать направленное излучение. Будучи собранными в антенную систему и разведенными в пространстве, излучатели формируют диаграмму направленности, которая зависит от расположения и конструкции излучателей, а также выбора фаз и амплитуд сигналов, подаваемых на вход излучателей.

В диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) задачи оптимизации фаз и амплитуд излучателелей, как правило, решаются с использованием некоторых упрощающающих предположений [6,22,21]. Однако, в диапазоне высоких частот (ВЧ) задача оптимизации направленности ФАР оказывается более сложной, и потому менее изучена [20,24]. При ограничении суммарной мощности, подаваемой на антенную систему, задача выбора фаз и амплитуд на излучателях может быть решена аналитически [23]. Однако, при ограничении на мощность по каждому входу антенной системы требуется решение невыпуклых задач квадратичного программирования [4]. Вообще говоря, задачи квадратичного программирования являются NP-трудными [11]. Для решения таких задач могут применяться методы ветвей и границ [17], отсечений [5], DC-программирования [18], полуопределенной релаксации [4], эволюционных вычислений [1,14], локального поиска [16] и др.

Данная работа посвящена исследованию свойств задачи оптимизации направленного излучения ФАР ВЧ диапазона и разработке алгоритмов решения этой задачи с использованием градиентного подъема и эволюционных вычислений.

1 Основные обозначения

Математическая постановка задачи оптимизации направленности ФАР формулируется из физических соображений в виде выпуклого квадратичного функционала при не выпуклых квадратичных ограничениях [23]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{+}\mathbf{A}\mathbf{u} \to \max, \\ 0 \leq \mathbf{u}^{+}\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{u} \leq, \\ ... \\ 0 \leq \mathbf{u}^{+}\mathbf{B}^{(N)}\mathbf{u} \leq 1. \\ \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{N} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь n – количество излучателей в системе. Матрица $\mathbf{A}$ описывает влияние каждого элемента системы на ее излучение вдоль заданного направления. Ограничения, описываемые матрицами $\mathbf{B}_k, k = \overline{1,N}$ накладываются на мощность, которую генератор сигнала способен подать на каждый излучатель. Вектор $\mathbf{u}$ представляет собой вектор-столбец комплексных напряжений. Исследование возможности оптимизация фаз и амплитуд этих величин и является целью данной работы.

Для построения алгоритмов анализа и решение данной задачи был предложен переход от постановки в комплексных числах к постановке в вещественных [19]:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{T}\mathbf{G}\mathbf{x} \to \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^{T}\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{x} \leq 1, \\ ... \\ 0 \leq \mathbf{x}^{T}\mathbf{H}^{(N)}\mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь матрица $\mathbf{G}$ по смыслу и свойствам соответствует матрице $\mathbf{A}$, а матрицы $\mathbf{H}_k, k = \overline{1,N}$ – матрицам $\mathbf{H}_k, k = \overline{1,N}$.

Ранее было показано [19], что задача (1) имеет тривиальную симметрию $\mathbf{u} \to e^{\boldsymbol{j}\phi}\mathbf{u}$, где $\mathbf{j}$ – мнимая единица, ϕ – фазовый сдвиг, одновременно применяемый на все компоненты вектора $\mathbf{u}$. При исследовании структуры локальных оптимумов в указанной работе было отмечено, что, возможно, задача (1) имеет и другие симметрии. В текущей работе ставится задача нахождения всех групп непрерывных симметрий задачи (1).

Также, в работе [19] для отыскания локального оптимума использовался многократный запуск градиентного подъема, что не является достаточно приемлемым подходом для практического применения. Здесь для этих целей предлагается гибридный алгоритм, сочетающий элементы градиентного метода и дифференциальной эволюции.

2 Группы непрерывных симметрий

2.1 Моделирование

Решение и анализ задач математического программирования могут быть упрощены при наличии симметрий этих задач, соответствующих некоторым линейным преобразованиям. В частности, знание таких симметрий может быть использовано для уменьшения размерности задачи, ограничения пространства поиска или получения нового локального оптимума из имеющегося. В настоящей работе исследуется случай непрерывной области решений. В то время как предыдущие исследования симметрии в математическом программировании обычно имели дело с перестановками координат пространства решений [7,8,10], в данной рассматривается большая группа обратимых линейных преобразований. Мы изучаем частный случай задачи квадратичного программирования с квадратичными ограничениями в $\mathbb{R}^N$: целевая функция и ограничения задаются квадратичными формами $\mathbf{G}$, и $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_n$, в виде (2). Следует отметить, что все матрицы $\mathbf{G}$, и $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_n$, симметричны и $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{H}_i$ положительно определена. Без потери общности будем считать, что все ограничение заданы неравенствами $\leq$.

Под симметрией задачи (2) подразумевается набор линейных преобразований

$$\mathbf{x} \to \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}\,, \tag{3}$$

определенный невырожденной матрицей $\mathbf{P}$, такой что задача (2), выраженная в терминах преобразованного пространства (т.е, через вектор-столбец $\mathbf{y}$), совпадает с исходной задачей. Таким образом, в терминах вектора $\mathbf{y}$ задача (2) формулируется в той же форме.

$$\begin{cases} \mathbf{y}^T\mathbf{G}\ \mathbf{y} \to \max\,, \\ \mathbf{y}^T\mathbf{H}_1\mathbf{y} \leq 1\,, \\ \ldots \\ \mathbf{y}^T\mathbf{H}_N\mathbf{y} \leq 1\,, \end{cases} \tag{4}$$

с той же самой матрицей $\mathbf{G}$ и тем же набором матриц $\{\mathbf{H}_k, k = \overline{1,N}\}$.

В [3] показано, что симметричная матрица $\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{H}_k, k = \overline{1,N}$ может быть представлена как конгруэнтное преобразование диагональной матрицы:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}^T\mathbf{D}\mathbf{S}\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{D}$ – диагональная матрица, которая может иметь только “0”, “1”, или “-1” на ее главной диагонали. Матрица $\mathbf{S}$ Может быть получена конструктивно, например, конечным методом Лагранжа ([9], Г. 5).

Матрица $\mathbf{S}$ описывает переход в группу ортогональных преобразований, в которой производится поиск подгрупп непрерывных симметрий. Любой ее элемент такой группы может быть выражен с помощью базисных элементов, называемых генераторами:

$$\mathbf{X} = \sum_k a_k G_k \,, \tag{6}$$

где a_k являются вещественными числами, G_k являются генераторами. Пространство кососимметричных матриц имеет размерность $N(N-1)/2$, а количество коэффициентов a_k будет равно количеству генераторов. В качестве генераторов можно выбрать матрицы, у которых над главной диагональю все элементы равны 0, кроме одного элемента, равного 1. Тогда кососимметрия однозначно определяет остальные матричные элементы этих генераторов. Итак, любой элемент Q из $SO(N)$ можно представить в виде:

$$\mathbf{Q} = e^{\sum_k a_k G_k} \,. \tag{7}$$

Сам поиск осуществляется решением системы линейных уравнений (8):

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_n \left(\sum\limits_k a_k G_k \right) = \left(\sum\limits_k a_k G_k \right) \tilde{\mathbf{H}}_n \,, \\ \tilde{\mathbf{G}} \left(\sum\limits_k a_k G k \right) = \left(\sum\limits_k a_k G_k \right) \tilde{\mathbf{G}} \,. \end{cases} \tag{8}$$

Уравнения (8) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, определяющих параметры a_k. Эта система однородна, поэтому она имеет континуум ненулевых решений или одно тривиальное решение. Тривиальное нулевое решение всегда присутствует и соответствует единичной матрице $\mathbf{Q}$. Некоторые из параметров a_k остаются “свободными” (это будут параметры искомой подгруппы), а остальные из a_k могут быть линейно выражены через “свободные”. Решение этой системы уравнений (8) может быть получено конструктивно методом Гаусса.

Условие инвариантности задачи относительно преобразования $\mathbf{Q}$ превращается в

$$\mathbf{Q} = e^{\sum_k a_k \hat{G}_k} \,, \tag{9}$$

где сумма идет по "свободным"параметрам a_k, а новые генераторы, обозначаемые через $\hat{G}_k$, являются линейными комбинациями прежних генераторов G_k. Множество всех $\mathbf{Q}$-матриц, удовлетворяющих (9), параметризуется конечным набором вещественных параметров a_k.

2.2 Эксперимент

Вычислительный эксперимент состоит из следующих этапов:

1. Обработка. На этом этапе возможная неточность данных нивелируется усреднением симметричных компонент матриц (матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ должны быть симметричны).

2. Преобразование $\mathbf{H}_{\Sigma} = \sum_i \mathbf{H}_i$ к канонической форме используя метод Лагранжа для вычисления матриц $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}^{-1}$.

3. Применение метода Гаусса к системе линейных уравнений (8) для вычисления генераторов $\hat{G}_n$.

Следует отметить, что входные данные могут содержать некоторые погрешности, которые приводят к несимметричности матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$, что может существенно повлиять на поиск непрерывных групп симметрий. Таким образом, на этапе 1, мы используем известные свойства задачи чтобы нивелировать влияние погрешности. Также, в методе Гаусса на шаге 3, любые значения принимаются за 0 если их абсолютное значение меньше определенного порогового значения Δ, который является параметром алгоритма. Причина в том, что последовательное исключение переменных из уравнений, выполняемое методом Лагранжа с представлением вещественных чисел с плавающей запятой, не может гарантировать идеальную точность. В результате некоторые линейно зависимые строки матрицы не могут быть исключены, что может привести к неверному результату. Большое значение порога Δ может привести к вырожденности задачи, тогда как слишком малое значение Δ не позволит выявить линейные зависимости.

В данном эксперименте, Δ изменялось от 10^{-4} до 10^{-12}. В данном диапазоне для каждого рассмотренного частного случая задачи, не было получено различий в полученных решениях.

Описанная процедура нахождения непрерывных групп симметрий применяется к примерам, описанным в [19]. Для всех рассмотренных задач было выявлено только наличие фазовой симметрии. Возможно, множественность решений объясняется наличием дискретных симметрий. Выявление дискретных симметрий является объектом дальнейших исследований.

В результате работы алгоритма было выявлено, что все генераторы могут быть выражены через один новый генератор вида

$$G = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

который соответствует фазовой симметрии. Для данного генератора при $a = 1$

$$e^{aG} = \begin{pmatrix} 0.5403 & 0 & 0 & 0 & -0.8415 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5403 & 0 & 0 & 0 & -0.8415 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5403 & 0 & 0 & 0 & -0.8415 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5403 & 0 & 0 & 0 & -0.8415 \\ 0.8415 & 0 & 0 & 0 & 0.5403 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8415 & 0 & 0 & 0 & 0.5403 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8415 & 0 & 0 & 0 & 0.5403 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8415 & 0 & 0 & 0 & 0.5403 \end{pmatrix}.$$

3 Дифференциальная эволюция

3.1 Моделирование

Эволюционные алгоритмы (ЭА) — один из наиболее широко используемых методов решения сложных задач оптимизации. Несколько вариантов этих стратегий были разработаны и применены во многих областях, таких как наука, экономика и инженерия. Среди них дифференциальная эволюция (ДЭ) [15] — одна из наиболее эффективных стратегий непрерывной оптимизации. Более того, ДЭ была признана стратегией-победителем нескольких конкурсов по оптимизации [2]. Подобно другим EA, DE вдохновлен естественным процессом эволюции и включает в себя применение мутаций, рекомбинаций и селекции. Основная особенность метода de заключается в том, что он учитывает различия среди векторов, присутствующих в популяции, для изучения пространства поиска. В этом смысле он похож на оптимизаторы Nelder-Mead [12] и Controlled Random Search (CRS) [13].

ДЭ – стохастический алгоритм на основе популяции, поэтому он итеративно выводит несколько наборов решений-кандидатов. В ДЭ такие решения-кандидаты обычно называются векторами. В базовом варианте ДЭ для каждого члена популяции (их называют целевыми векторами) создается новый мутантный вектор. Затем мутантный вектор комбинируют с целевым вектором для создания пробного вектора. Наконец, применяется фаза селекции для выбора выживших. Таким образом, несколько поколений эволюционируют, пока не будет достигнут критерий остановки. В поколении G i-й вектор популяции обозначается как $\mathbf{X}_{i,G} = [x_{1,i,G}, x_{2,i,G}, ..., x_{D,i,G}]$. Ниже приведены более подробные сведения о каждой фазе ДЭ.

Эксперименты показывают, что в целом эволюция популяции соответствует динамике случайного облака точек, движущегося как целое вдоль рельефа оптимизируемой функции, повторяя его характерные особенности. В случае попадания в овраг «облако» принимает форму этого оврага и распределение точек становится таким, что математическое ожидание разности двух случайных векторов оказывается направленным вдоль длинной стороны оврага. Это обеспечивает быстрое движение вдоль узких вытянутых оврагов, тогда как для градиентных методов в аналогичных условиях характерно колебательная динамика «от стенки к стенке». Приведенные эвристические соображения иллюстрируют наиболее важную и привлекательную особенность алгоритма ДЭ – способность динамически моделировать особенности рельефа оптимизируемой функции. Именно этим объясняется замечательная способность алгоритма быстро проходить сложные овраги, обеспечивая эффективность даже в случае сложного рельефа.

Инициализация. ДЭ обычно начинает процесс оптимизации со случайно инициированной популяции, состоящей из D векторов. Поскольку информация о производительности различных регионов обычно отсутствует, обычно применяются однородные генераторы случайных чисел. Следовательно, j-я компонента i-го вектора инициализируется как $x_{j,i,0} = a_j + rand_{i,j}[0,1](b_j - a_j)$, где $rand_{i,j}[0,1]$ – равномерно распределенное случайное число, лежащее между 0 и 1.

Мутация. Для каждого целевого вектора создается мутантный вектор. В настоящее время известно несколько способов выполнения этого процесса. В классическом варианте ДЭ применяется стратегия $rand/1$. В этом случае мутантный вектор $\mathbf{V}_{i,G}$ создается следующим образом:

$$\mathbf{V}_{i,G} = \mathbf{X}_{r1,G} + F \times (\mathbf{X}_{r2,G} - \mathbf{X}_{r3,G}) r1 \neq r2 \neq r3 \tag{10}$$

Индексы $r1, r2, r3 \in [1, D]$ – различные целые числа, случайно выбранные из диапазона [1, D]. Кроме того, все они отличаются от индекса i. Важно учитывать, что разница между векторами масштабируется числом F, которое называется силой мутации и обычно определяется в интервале [0.4, 1].

Рекомбинация. Для объединения информации о различных решениях-кандидатах и с целью увеличения разнообразия применяется оператор кроссинговера. В частности, каждый целевой вектор $\mathbf{X}_{i,G}$ смешивается с соответствующим ему мутантным вектором $\mathbf{V}_{i,G}$ для создания пробного вектора $\mathbf{U}_{i,G} = [u_{1,i,G}, u_{2,i,G}, ..., u_{D,i,G}]$. Наиболее типичным кроссовером является биномиальный, который работает следующим образом:

$$\mathbf{U}_{j,i,G} = \begin{cases} v_{j,i,G}, & \text{если} rand_{i,j}[0,1] \leq CR \text{или} j = j_{rand} \\ x_{j,i,G}, & \text{иначе} \end{cases}, \tag{11}$$

где $rand_{i,j}[0,1]$ – равномерно распределенное случайное число, j_{rand} – случайно выбранный индекс, который гарантирует, что $\mathbf{U}_{i,G}$ наследует хотя бы одну компоненту от $\mathbf{V}_{i,G}$, $CR \in [0,1]$ – скорость кроссовера.

Селекция. Наконец, выполняется жадный отбор для определения оставшихся в живых следующего поколения. Каждый пробный вектор сравнивается с соответствующим ему целевым вектором, и выживает лучший из них:

$$\mathbf{X}_{i,G+1} = \begin{cases} \mathbf{U}_{i,G}, & \text{если} \tilde{F}(\mathbf{U}_{i,G}) \leq \tilde{F}(\mathbf{X}_{i,G}) \\ \mathbf{X}_{i,G}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{12}$$

Следовательно, каждый член популяции либо становится лучше, либо остается с одной и той же объективной ценностью в каждом поколении.

3.2 Эксперимент

Таблица 1: Результаты оптимизации, полученные с помощью ДЭ и коммерческих решателей

Тип	**ДЭ**		**BARON**		**ANTIGONE**		**GUROBI**	
	$\tilde{F}$	**t, c**	$\tilde{F}$	**t, c**	$\tilde{F}$	**t, c**	$\tilde{F}$	**t, c**
ШВИ 2x2	138.2	**0.054**	**139.2**	0.12	-	-	-	-
ШВИ 3x3	575.7	0.93	**580.6**	**0.34**	-	-	-	-
ШВД 2x2	459.7	**0.13**	**463.6**	0.27	-	-	-	-
ШВД 3x3	915	24.4	**925**	**0.34**	-	-	-	-
СВД 2x2	357	1.9	**361**	**0.16**	-	-	-	-
СВД 3x3	1138	25.6	**1261**	**0.38**	-	-	-	-
СВД 5x5	5318	1000	**6716**	1000	-	-	-	-
СВД' 2x2	233	2.52	**253**	**0.25**	-	-	-	-
СВД' 3x3	664	71	**1153**	**1.48**	-	-	-	-
СВД' 5x5	**1382.7**	1000	33.5	**217.94**	-	-	-	-
Кольц. 8	217	8.06	218	**0.23**	-	-	-	-
Кольц. 16	727	90.9	**734**	-	-	-	-	

// TODO: Results

4 Заключение

Список литературы

1. Boriskin, A. V.., Balaban, M. V.., Galan, O. Yu.., Sauleau, R..: Efficient approach for fast synthesis of phased arrays with the aid of a hybrid genetic algorithm and a smart feed representation. 2010 IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology pp. 827–832 (2010)
2. Das, S.., Suganthan, P.N..: Differential evolution: A survey of the state-of-the-ar. IEEE transactions on evolutionary computation 15(1), 4–31 (2011)
3. Eremeev, A. V.., S., Yurkov A..: On symmetry groups of some quadratic programming problems. MOTOR 2020. Shpringer 12095 (2020)
4. Fuchs, B..: Application of convex relaxation to array synthesis problems. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 62(2), 634–640 (2014)
5. Horst, R.., Pardalos, P. M..: Handbook of global optimization, vol. 2. Springer Science & Business Media (2013)
6. Indenbom, M.., Izhutkin, V.., Sharapov, A.., Zonov, A..: Synthesis of conical phased antenna arrays optimization of amplitude distribution parameters. IX International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2018) pp. 273–285 (2018)

7. Kolokolov, A. A.., Orlovskaya, T. G.., Rybalka, M. F..: Analysis of integer programming algorithms with l-partition and unimodular transformations. Automation and Remote Control 73(2), 369–380 (2012)
8. Kouyialis, Georgia., Wang, Xiaoyu., Misener, Ruth.: Symmetry detection for quadratic optimization using binary layered graphs. Processes 7(11) (2019)
9. Lancaster, Peter., Tismenetsky, Miron.: The Theory of Matrices. Academic Press (1985)
10. Liberti, Leo.: Reformulations in mathematical programming: automatic symmetry detection and exploitation. Mathematical Programming 131 (2012)
11. Murty, K..: Some np-complete problems in quadratic and nonlinear programming. Mathematical Programming. North Holand 39, 117–129 (1987)
12. Nelder, J.A.., Mead, R..: A simplex method for function minimization. The computer journal 7(4), 308–311 (1965)
13. Price, W..: Journal of optimization theory and applications. The computer journal 40(3), 333–348 (1983)
14. Rao, A.., Sarma, N..: Synthesis of reconfigurable antenna array using differential evolution algorithm. IETE Journal of Research 63(3), 428–434 (2017)
15. Storn, R.., Price, K..: Differential evolution–a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. Journal of global optimization. Springer 11(4), 341–359 (1997)
16. Кочетов, Ю. А..: Вычислительные возможности локального поиска в комбинаторной оптимизации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 48(5), 747–763 (2008)
17. Нечаева, М. С.., Хамисов, О. В..: Метод ветвей и границ для задачи минимизации невыпуклой квадратичной функции при выпуклых квадратичных ограничениях. Дискретн. анализ и исслед. опер. 7(2), 74–88 (2000)
18. Стрекаловский, А. С..: О минимизации разности выпуклых функций на допустимом множестве. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 43(3), 399–409 (2003)
19. Тюнин, Н.Н..: Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решёток. ДАИО 28(3), 65–89 (2021)
20. Фаняев, И. А.., Кудин, В. П..: Фазированная антенная решетка кругового обзора над проводящей цилиндрической поверхностью из излучателей вертикальной поляризации. Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Сер.: Естественные науки. pp. 191–198 (2014)
21. Фаняев, И. А.., Кудин, В. П..: Синтез амплитудного распределения на входах излучателей фазированной антенной решетки над цилиндрической поверхностью методом роя частиц. Доклады БГУИР pp. 89–96 (2017)
22. Щелкунов, С. А.., Фрис, Г..: Антенны: Теория и практика. М:Советское радио (1955)
23. Юрков, А. С..: Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн. ОНИИП (2014)
24. Юрков, А. С..: Максимизация направленности фазированных антенных решеток коротковолнового диапазона. Техника радиосвязи. ОНИИП (2), 46–53 (2016)