

**Тюнин Николай Николаевич**

**Анализ и решение задач оптимизации направленности  
фазированных антенных решеток коротковолнового  
диапазона**

Специальность 05.13.01 —  
«Системный анализ, управление и обработка информации»

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук».

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, доцент  
**Еремеев Антон Валентинович**

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В настоящее время разработка и анализ эффективных систем радиосвязи имеет большое значение для народного хозяйства. Одной из актуальных задач в этой области является задача оптимизации направленности фазированных антенных решеток (ФАР), представляющих собой антенные системы, распределение фаз и амплитуд на излучателях которых позволяет получать направленное излучение. Будучи собранными в антенную систему и разведенными в пространстве, излучатели формируют диаграмму направленности, которая зависит от расположения и конструкции излучателей, а также выбора фаз и амплитуд сигналов, подаваемых на вход излучателей.

В диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) задачи оптимизации фаз и амплитуд излучателей, как правило, решаются с использованием некоторых упрощающих предположений<sup>1</sup>. Однако, в диапазоне высоких частот (ВЧ), также называемом коротковолновым, требуется использовать методы электродинамического моделирования для оценки наведенных токов в каждой паре излучателей и учитывать свойства подстилающей поверхности, в результате задача оптимизации направленности ФАР оказывается более сложной, и поэтому менее изучена<sup>2</sup>. При ограничении суммарной мощности, подаваемой на антенную систему, задача выбора фаз и амплитуд на излучателях может быть решена аналитически<sup>3</sup>. Однако, при ограничении на мощность по каждому входу антенной системы требуется решение невыпуклых задач квадратичного программирования<sup>4</sup>. Вообще говоря, задачи квадратичного программирования являются NP-трудными<sup>5</sup>. Для решения таких задач могут применяться методы ветвей и границ, отсечений, DC-программирования, полуопределенной релаксации, эволюционных вычислений, локального поиска и др.<sup>6</sup>. Диссертационная

---

<sup>1</sup>Synthesis of Conical Phased Antenna Arrays Optimization of Amplitude Distribution Parameters [Text] / M. Indenbom [et al.] // IX International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2018). 2018. P. 273—285; Щелкунов С. А., Фрис Г. Антенны: Теория и практика. [Текст]. М.:Советское радио, 1955; Фаняев И. А., Кудин В. П. Синтез амплитудного распределения на входах излучателей фазированной антенной решетки над цилиндрической поверхностью методом роя частиц [Текст] // Доклады БГУИР. 2017. С. 89—96.

<sup>2</sup>Фаняев И. А., Кудин В. П. Фазированная антенная решетка кругового обзора над проводящей цилиндрической поверхностью из излучателей вертикальной поляризации [Текст] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Сер.: Естественные науки. 2014. С. 191—198; Юрков А. С. Максимизация направленности фазированных антенных решеток коротковолнового диапазона [Текст] // Техника радиосвязи. ОНИИП. 2016. № 2. С. 46—53.

<sup>3</sup>Юрков А. С. Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток дециметрового диапазона длин волн [Текст]. ОНИИП, 2014.

<sup>4</sup>Fuchs B. Application of convex relaxation to array synthesis problems [Text] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2014. Vol. 62, no. 2. P. 634—640.

<sup>5</sup>Murty K. Some NP-complete Problems in Quadratic and Nonlinear Programming [Text] // Mathematical Programming. North Holland. 1987. Vol. 39. P. 117—129.

<sup>6</sup>Fuchs B. Application of convex relaxation to array synthesis problems [Text] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2014. Vol. 62, no. 2. P. 634—640; Complexity of buffer capacity allocation problems for production lines with unreliable machines [Text] / A. Dolgui [et al.] // Journal of Mathematical

работа посвящена исследованию свойств задачи оптимизации направленного излучения ФАР ВЧ диапазона и разработке алгоритмов решения этой задачи с использованием градиентного подъема и эволюционных вычислений.

**Целью** данной работы является создание алгоритмов оптимизации направленности излучения ФАР и исследовании области применимости различных методов решения этой задачи.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Изучить структуру множества локальных оптимумов и наличие симметрий в рассматриваемой задаче.
2. Разработать алгоритмы решения задачи и сравнить их с известными методами.
3. Исследовать влияние расположения излучателей, их конструкции и используемой радиочастоты на эффективность оптимизации ФАР.
4. Оценить целесообразность учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона.

### **Научная новизна:**

В отличие от многих работ по оптимизации параметров ФАР в СВЧ диапазоне, где для систем радиолокации требуется аппроксимировать заданную диаграмму направленности, в настоящей работе максимизируется излучение в одном заданном направлении, что в наибольшей степени соответствует системам коротковолновой радиосвязи.

Предложенный вариант алгоритма градиентного подъема содержит процедуру возвращения в допустимую область, применимую к любому решению, в котором превышен предел допустимой мощности сигнала, подводимого к излучателю. Кроме того, наличие симметрии относительно равного сдвига фаз во всех излучателях позволяет зафиксировать фазу и снизить размерность задачи на единицу. Ранее, насколько известно автору, указанные свойства задачи не использовались применительно к методу градиентного подъема.

Впервые на основе экспериментального исследования задачи посредством мультистарта градиентного алгоритма показано наличие кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции, и не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.

---

Modelling and Algorithms in Operations Research. 2013. Vol. 12, no. 2. P. 155—165; *Кочетов Ю. А.* Вычислительные возможности локального поиска в комбинаторной оптимизации [Текст] // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 5. С. 747—763; *Нечаева М. С., Хамисов О. В.* Метод ветвей и границ для задачи минимизации невыпуклой квадратичной функции при выпуклых квадратичных ограничениях [Текст] // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2000. Т. 7, № 2. С. 74—88; *Стрекаловский А. С.* О минимизации разности выпуклых функций на допустимом множестве [Текст] // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43, № 3. С. 399—409; Efficient approach for fast synthesis of phased arrays with the aid of a hybrid genetic algorithm and a smart feed representation [Text] / A. V. Boriskin [et al.] // 2010 IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology. 2010. P. 827—832; *Horst R., Pardalos P. M.* Handbook of global optimization [Text]. Vol. 2. Springer Science & Business Media, 2013; *Rao A., Sarma N.* Synthesis of reconfigurable antenna array using differential evolution algorithm [Текст] // IETE Journal of Research. 2017. Т. 63, № 3. С. 428—434.

На открытый вопрос о целесообразности учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона дан положительный ответ при некоторых конфигурациях антенной системы.

**Практическая значимость.** Разработанные алгоритмы оптимизации возбуждения ФАР могут применяться в системах связи коротковолнового диапазона для увеличения дальности, снижения энергозатрат или площади, занимаемой антеннами. Созданное программное обеспечение позволяет производить необходимые для этого расчеты. Полученное обоснование необходимости учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР, а также результаты вычислительных экспериментов для различных вариантов ФАР могут быть полезны при проектировании новых антенных систем.

**Методология и методы исследования.** В данной работе мы рассматриваем подход к решению задачи максимизации направленности излучения ФАР в заданном направлении при ограничениях, накладываемых на мощность, подаваемую на каждый из излучателей. Такая задача может быть решена только численными методами<sup>7</sup>. Для использования градиентного метода задача сводится к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций. Выбор градиентного алгоритма связан с тем, что отыскание даже локального оптимума в задаче невыпуклого квадратичного программирования может представлять собой NP-трудную задачу, и одним из методов, уместных в таких случаях, является градиентный алгоритм<sup>8</sup>. Согласно<sup>9</sup>, использование метода сопряженных градиентов для решения данной задачи не будет приводить к существенным улучшениям по сравнению с простым градиентным подъемом. Данное утверждение нашло согласие с результатами предварительных вычислительных экспериментов, проведенных нами для некоторых из рассматриваемых задач.

Для оценки качества результатов градиентного алгоритма производится их сравнение с решениями, полученными с помощью решателя BARON в пакете GAMS. BARON использует алгоритмы метода ветвей и границ, усиленные различными методами распространения ограничений и двойственности для уменьшения диапазонов переменных в ходе работы алгоритма<sup>10</sup>. Его использование также представляет альтернативный подход к решению данной задачи, но, поскольку BARON является коммерческим решателем, производство расчетов требует приобретения лицензии, что не всегда приемлемо.

Еще одним широко используемым подходом к решению задач оптимизации ФАР являются эволюционные алгоритмы, и, в частности, генетические

---

<sup>7</sup>Юрков А. С. Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток дециметрового диапазона длин волн [Текст]. ОННИИП, 2014.

<sup>8</sup>Murty K. Some NP-complete Problems in Quadratic and Nonlinear Programming [Text] // Mathematical Programming. North Holland. 1987. Vol. 39. P. 117—129.

<sup>9</sup>Нестеров Ю. Е. Введение в выпуклую оптимизацию [Текст]. М:МИЦМО, 2010. 70 с.

<sup>10</sup>Ryoo H. S., Sahinidis N. V. Global Optimization of Nonconvex NLPs and MINLPs with Applications in Process Design [Text] // Computers and Chem. Engng. Pergamon. 1995. Vol. 19, no. 5. P. 551—566.

алгоритмы, роевые алгоритмы, алгоритмы дифференциальной эволюции<sup>11</sup>. Использование эволюционных методов требует больше времени, чем использование градиентного подъема, однако, в отличие от градиентных методов, не требует вычисления производных и не подвержен преждевременному завершению в точках стационарности.

Вообще говоря, при использовании метода градиентного подъема не гарантируется получение глобального оптимума. Приблизиться к глобальному оптимуму позволяет многократный запуск алгоритма из случайным образом сгенерированных точек. Кроме того, многократный запуск позволяет оценить количество локальных оптимумов, что является некоторым критерием сложности индивидуальной задачи<sup>12</sup>. Анализ структуры локальных оптимумов позволяет также выявить наличие нетривиальных симметрий.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Группа непрерывных симметрий рассматриваемой задачи одномерна и ее элементы соответствуют сдвигу фаз во всех излучателях на равную величину, что позволяет снизить размерность задачи на одну переменную и сократить время счета.
2. Имеется интервал параметров кольцевых ФАР, в котором учет взаимного влияния излучателей ведет к существенному увеличению коэффициента усиления в заданном направлении.
3. Для многих конфигураций ФАР задача имеет несколько кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции, не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается согласованностью результатов, полученных предложенными алгоритмами, с результатами коммерческого решателя BARON, а также проведенными исследованиями адекватности модели с точки зрения физических принципов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

1. VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения» - Омск, июль 2018.
2. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций» - Екатеринбург, июль 2019.
3. V Международной научно-технической конференции «Радиотехника, электроника и связь» - Омск, октябрь 2019.
4. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций» - Иркутск, июль 2021.

---

<sup>11</sup>Synthesis of Conical Phased Antenna Arrays Optimization of Amplitude Distribution Parameters [Text] / M. Indenbom [et al.] // IX International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2018). 2018. P. 273—285; *Фаняев И. А., Кудин В. П.* Синтез амплитудного распределения на входах излучателей фазированной антенной решетки над цилиндрической поверхностью методом роя частиц [Текст] // Доклады БГУИР. 2017. С. 89—96; *Rao A., Sarma N.* Synthesis of reconfigurable antenna array using differential evolution algorithm [Text] // IETE Journal of Research. 2017. Т. 63, № 3. С. 428—434.

<sup>12</sup>*Еремеев А. В., Ривс К. Р.* О доверительных интервалах для числа локальных оптимумов [Текст] // Математические структуры и моделирование. 2017. Т. 41. С. 55—74.

**Личный вклад.** Автор адаптировал метод градиентного подъема и алгоритм дифференциальной эволюции к специфике рассматриваемой задачи, осуществил переход к задаче квадратичного программирования, исходя из постановки в комплексных числах, исследовал наличие непрерывных симметрий, проводил вычислительные эксперименты, исследовал устойчивость решений к возмущению исходных данных.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 1 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 3 — в тезисах докладов.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы, приводится структура и содержание.

**Первая глава** посвящена обзору имеющейся литературы и постановке задачи математического программирования. Здесь рассматриваются источники, позволяющие сформулировать постановку задачи<sup>13</sup>, приводится анализ похожих исследований<sup>14</sup>.

Задачей данной работы является максимизация излучения антенной решетки в заданном направлении при ограничениях на мощность, подводимую к каждому излучателю. В терминах комплексных токов, подводимых к излучателям, эта задача сформулирована в работах<sup>15</sup>. Целевая функция задачи оптимизации определяется следующим образом:

$$F = \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i}, \quad (1)$$

где верхний индекс  $+$  означает эрмитово сопряжение,  $A = (a_{ij})$ ,

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_i^{(l)} f_j^{(l)}. \quad (2)$$

<sup>13</sup>Юрков А. С. Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн [Текст]. ОНИИП, 2014; Сазонов Д. М. Антенны и устройства СВЧ [Текст]. М:Высш.шк., 1988.

<sup>14</sup>Luo Z., Chang T. SDP relaxation of homogeneous quadratic optimization: approximation bounds and applications [Text] // Convex Optimization in Signal Processing and Communications. 2009. P. 117—165.

<sup>15</sup>Юрков А. С. Максимизация направленности фазированных антенных решеток коротковолнового диапазона [Текст] // Техника радиосвязи. ОНИИП. 2016. № 2. С. 46—53; Юрков А. С. Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решеток декаметрового диапазона длин волн [Текст]. ОНИИП, 2014.

Здесь  $f_i^{(l)}$  - парциальное поле, то есть поле, которое излучается при подаче единичного тока на  $i$ -ю точку питания излучающей системы, в то время, как ток в других точках питания равен нулю.

Существуют различные формы ограничений, которые соответствуют различным антенным системам. В данной работе рассматривается случай, когда ограничение на мощность накладывается по каждой точки питания. В этом случае задача формулируется в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \mathbf{i} \in \mathbb{C}^N \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mathbb{C}$  - поле комплексных чисел,  $n$  - число точек питания, на которые накладываются ограничения (в общем случае  $n$  может быть не равно  $N$ ),

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{4P_{max}^{(k)}} (\mathbf{Z}^+ \mathcal{P}^{(k)} + \mathcal{P}^{(k)} \mathbf{Z}), \quad (4)$$

$P_{max}^{(k)}$  - максимально допустимая мощность в  $k$ -й точке питания,  $\mathcal{P}^{(k)}$  - матрицы-проекторы имеющие единственный ненулевой элемент  $\mathcal{P}_{kk}^{(k)} = 1$ . Матрицы-проекторы имеют размерность  $N \times N$ . Поскольку аргументом целевой функции является вектор комплексных токов, задачу оптимизации направленности ФАР КВ диапазона также можно назвать задачей оптимизации фаз и амплитуд.

Следует отметить, что задача (3), сформулированная в комплексных числах, имеет симметрию относительно преобразования  $\mathbf{i} \rightarrow e^{j\phi} \mathbf{i}$  всех комплексных координат (по произвольному углу  $\phi$ ). За  $j$  здесь обозначена мнимая единица. Данная симметрия может найти применение для уменьшения размерности области поиска на единицу. Например, фиксируя  $Im(y_N) = 0$ , что эквивалентно добавлению ограничения  $x_{2N} = 0$  к задаче (5).

Для разработки алгоритма решения задачи удобно переформулировать ее в вещественных числах. В вещественных числах задача (3) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (5)$$

Задача (5) имеет целевую функцию, заданную квадратичной формой с положительно полуопределенной матрицей  $\mathbf{G}$ . Каждое ограничение формулируется квадратичной формой, определенной симметричной матрицей  $\mathbf{H}^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$



с двумя парами идентичных собственных значений, два из которых положительны, а другие два отрицательны или равны нулю, все остальные собственные числа равны нулю.

Для данной задачи существует преобразование, позволяющее привести к допустимой области решение  $\mathbf{x}$ , которое нарушает только ограничивающие неравенства задачи (5) вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ :

$$\mathbf{x}' := \alpha(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad (6)$$

где  $\alpha(\mathbf{x}) := \max_{k=\overline{1,n}} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}$ . Данная процедура применяется для выбора начального решения, а также для масштабирования итогового решения.

В вычислительных экспериментах бывает полезно ограничить множество допустимых решений задачи шаром или параллелепипедом, так как это позволяет более обоснованно выбрать начальное решение для итерационных методов с мултистартом или сократить перебор в методе ветвей и границ. Отметим, что если  $\mathbf{x}$  удовлетворяет всем ограничениям задачи (5), то

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}. \quad (7)$$

Глобально-оптимальное решение задачи невыпуклого математического программирования вида (5) может быть найдено методом ветвей и границ<sup>16</sup> или с использованием методов ДС программирования<sup>17</sup>. Локально-оптимальное решение задачи может быть найдено средствами градиентной оптимизации или методом Ньютона [0]. В случае большой размерности могут быть применены различные метаэвристики (см.<sup>18</sup>).

**Вторая глава** посвящена исследованию структуры локальных оптимумов с помощью различных алгоритмов оптимизации. Процедура решения задачи оптимизации ФАР при ограничении мощности по каждой точке питания состоит в следующем:

1. Для каждого излучателя в решетке рассчитать парциальные компоненты полей  $f_i^{(l)}, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, 2}$ .
2. Вычислить матрицы  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{H}^{(k)}, k = \overline{1, n}$ .
3. Оценить радиус допустимой области.

<sup>16</sup>Horst R., Tyu H. Global optimization: Deterministic approaches [Text]. Springer Science & Business Media, 2013. P. 551—566; Tawarmalani M., Sahinidis N. V. Global optimization of mixed-integer nonlinear programs: A theoretical and computational study [Text] // Mathematical programming. Springer. 2004. Vol. 99, no. 3. P. 563—591.

<sup>17</sup>Horst R., Pardalos P. M. Handbook of global optimization [Text]. Vol. 2. Springer Science & Business Media, 2013; Strekalovsky A. S. Global optimality conditions in nonconvex optimization [Text] // Journal of Optimization Theory and Applications. Springer. 2007. Vol. 173, no. 3. P. 770—792.

<sup>18</sup>Eberhart R., Kennedy J. Particle swarm optimization [Text] // Proceedings of the IEEE international conference on neural networks. Vol. 4. IEEE, 1995. P. 1942—1948; Storn R., Price K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces [Text] // Journal of global optimization. Springer. 1997. Vol. 11, no. 4. P. 341—359.

4. Решить задачу (5) с дополнительными ограничениями  $x_N = 0, \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$ .

Данный подход может гарантировать нахождение как локального, так и глобального оптимума, в зависимости от решателя, используемого на шаге 4. Как один из базовых оптимизационных методов, мы рассматриваем метод градиентной оптимизации (максимизационный вариант) с алгоритмом одномерного поиска Дэвиса, Свенна и Кэмпби (ДСК)<sup>19</sup>. Далее целевая функция задачи (5) будет обозначаться символом  $\tilde{F}$ .

В нашей работе от задачи условной оптимизации мы переходим к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций, а именно - методом внешней точки<sup>20</sup>:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n \left( \min \left( 0, \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) + \min \left( 0, 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) \right)^4 \rightarrow \max, \quad (8)$$

где  $r$  - достаточно большой штрафной параметр. Алгоритм градиентной оптимизации повторяется многократно, при этом используется случайно сгенерированный вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$  в качестве стартовой точки.

Вычислительный эксперимент был поставлен для задач, построенных на основе четырех типов ФАР: широкополосных вертикальных излучателей, широкополосных вертикальных диполей и симметричных вертикальных диполей. При моделировании полей был использован пакет NEC2, для которого были предоставлены соответствующие геометрические конфигурации антенных систем. В качестве рабочей частоты было выбрано 5МГц. Рассмотрены квадратные ФАР конфигурации 2х2, 3х3 и 5х5. Заранее отметим, что конфигурация 5х5 была рассмотрена только для решеток СВД, поскольку NEC2 не смог обработать 5х5 ШВИ и 5х5 ШВД из-за высокой сложности этих моделей. В случае с ФАР кольцевой структуры были рассмотрены решетки, состоящие из 8 и 16 излучателей. В качестве направления максимизации излучения выбраны: азимутальный угол 45°, полярный угол 70°.

Здесь сравниваются результаты работы градиентного метода и решателя BARON в его режиме по умолчанию. Во всех экспериментах, описанных ниже, было установлено ограничение по времени 1000с. Все эксперименты проводились на ЭВМ с процессором Intel i7 (тактовая частота: 2.8ГГц), ОЗУ: 16Гб. В случае сходимости градиентного метода (завершение по минимально допустимому приращению целевой функции  $10^{-4}$ ), алгоритм перезапускается заново до истечения запаса времени.

Во время каждой инициализации градиентного метода стартовая точка  $\mathbf{x}$  выбирается независимо с равномерным распределением в кубе  $[-5000, 5000]^{2N}$ .

<sup>19</sup>Himmelblau D. M. Applied nonlinear programming [Text]. McGraw-Hill Companies, 1972.

<sup>20</sup>Еремин В. В., Н. А. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования [Текст]. Наука, 1976. 192 с.; Aoki M. Introduction to optimization techniques. Fundamentals and applications of nonlinear programming [Text]. California Univ Los Angeles dept of system science, 1971.

Такой выбор оказался достаточным для всех задач, кроме СВД 2х2, чтобы получить решение, по целевой функции соответствующее решению, предоставляемому решателем BARON. Лучшее из найденных таким образом решений принимается за конечный результат. Параметр штрафа  $r$  в методе градиентной оптимизации установлен равным  $10^6$  на всех запусках. Такое значение было определено эмпирически. В таблице 1 приводятся результаты вычислительного эксперимента. Значения целевой функции “ $\tilde{F}$ ” точке, полученной алгоритмом градиентного подъема, приводятся после процедуры масштабирования (6). Для решателя BARON версии 18.5.8 было выбрано то же самое ограничение сверху на процессорное время, что и для градиентного метода (группа колонок “BARON”), и 50000с. для проверки глобальной оптимальности. Во всех таблицах, колонка “ $t$ ” содержит время до получения лучшего найденного решения или до установления глобальной оптимальности. Во всех запусках градиентного метода были получены решения, где активными оказались все ограничения вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ .

Тип	$\lambda_{min}$	$\sqrt{\frac{N}{\lambda_{min}}}$	Град.		BARON	
			$\tilde{F}$	$t, c$	$\tilde{F}$	$t, c$
ШВИ 2х2	0.0215	13.6	138.2	<b>0.054</b>	<b>139.2</b>	0.12
ШВИ 3х3	0.0177	70	575.7	0.93	<b>580.6</b>	<b>0.34</b>
ШВД 2х2	0.009	21	459.7	<b>0.13</b>	<b>463.6</b>	0.27
ШВД 3х3	0.0013	6767	915	24.4	<b>925</b>	<b>0.34</b>
СВД 2х2	$2 \cdot 10^{-3}$	44	357	1.9	<b>361</b>	<b>0.16</b>
СВД 3х3	$5.6 \cdot 10^{-9}$	$8.4 \cdot 10^5$	1138	25.6	<b>1261</b>	<b>0.38</b>
СВД 5х5	-	-	5318	1000	<b>6716</b>	1000
СВД' 2х2	$7.76 \cdot 10^{-9}$	$22 \cdot 10^3$	233	2.52	<b>253</b>	<b>0.25</b>
СВД' 3х3	0.0008	$1 \cdot 10^4$	664	71	<b>1153</b>	<b>1.48</b>
СВД' 5х5	-	-	<b>1382.7</b>	1000	33.5	<b>217.94</b>
Кольц. 8	$3 \cdot 10^{-3}$	154	217	8.06	<b>218</b>	<b>0.23</b>
Кольц. 16	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^6$	727	90.9	<b>734</b>	<b>1.37</b>

Таблица 1 — Результаты оптимизации, полученные с помощью градиентного подъема и решателя BARON.

Из таблицы 1 видно, что на всех видах решеток, кроме решеток СВД конфигураций 3х3 и 5х5, а также СВД' конфигураций 2х2 и 3х3, разница в значениях целевой функции не превосходит 1%. Для решеток СВД конфигураций 3х3 и 5х5, а также СВД' конфигураций 2х2 и 3х3 градиентный алгоритм существенно уступает по качеству найденного решения. Кроме решеток ШВИ и ШВД конфигурации 2х2 BARON демонстрирует лучшее время счета. Однако, следует отметить, что для обоих алгоритмов время, затраченное на поиск решения, было либо существенно меньше, либо сравнимо со временем, затраченным на построение исходных данных пакетом моделирования NEC, что делает оба подхода равноценными по времени работы с практической точки зрения. Важным

результатом, не приведенным в таблице 1, является то, что для ФАР конфигураций ШВИ 2х2, ШВД 2х2 и ШВИ 3х3 была доказана глобальная оптимальность найденного решателем BARON решения.

ФАР	$M$	$M_{ne}$	$M_f$	$B_{M_f}$	$\mathcal{L}_{M_f}$	$M_{y \approx 0}$	$B_{M_{y \approx 0}}$	$\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$
ШВИ 2х2	18368	4	1	1	1	4	4	4
ШВД 2х2	7678	4	1	1	1	4	4	4
СВД 2х2	523	1	1	1	1	1	1	1
СВД 3х3	39	9	2	2	2	5	5	5
СВД' 2х2	396	370	3	3	3	338	1000	1213
СВД' 3х3	14	14	3	3	3	1	1	1
ШВИ 3х3	1070	3	1	1	1	3	3	3
ШВД 3х3	41	4	4	4	4	1	1	1
Кольц. 8	124	9	2	2	2	9	9	9
Кольц. 16	11	6	1	1	1	6	6	6

Таблица 2 — Структура локальных оптимумов.

Для оценки общего числа локальных оптимумов использовался метод переписи Шнабеля. Данный метод имеет применение в экологии и заключается в выводе статистических оценок численности популяции на основе числа особей, помеченных в результате эксперимента, из популяции с неизменным составом, где каждая особь имеет константную вероятность отлова. В<sup>21</sup> предлагается адаптация такого метода для оценки числа локальных оптимумов. В таблице 2 приводится статистика по числу различных точек остановки (в пределах заданной точности) процедуры мултистарта в течение 1000 с. процессорного времени. Для каждого решения была применена процедура линеаризации задачи и проверки необходимых условий локальной оптимальности. Приемлемыми считались отличия целевой функции линеаризованной задачи от значения целевой функции, найденного градиентным методом менее чем на 1%. Здесь  $M$  - число выполненных запусков за отведенное время,  $M_{ne}$  - число групп решений, отличающихся не более чем на 10% по каждой из координат,  $M_f$  - число групп значений целевой функции у таких неэквивалентных решений (с точностью до 10%, приведенных в таблице 1).  $M_{y \approx 0}$  - число групп решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности.  $B$  и  $\mathcal{L}$  - оценка нижней границы и оценка максимального правдоподобия числа локальных оптимумов, рассчитанные по методу переписи Шнабеля. Доверительная вероятность для данного метода была выбрана равной 95%. Оценки для числа решений с различными значениями целевой функции обозначены  $B_{M_f}$  и  $\mathcal{L}_{M_f}$ . Оценки для числа решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, обозначены  $B_{M_{y \approx 0}}$  и  $\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$ .

<sup>21</sup> Еремеев А. В., Ривс К. Р. О доверительных интервалах для числа локальных оптимумов [Текст] // Математические структуры и моделирование. 2017. Т. 41. С. 55—74.

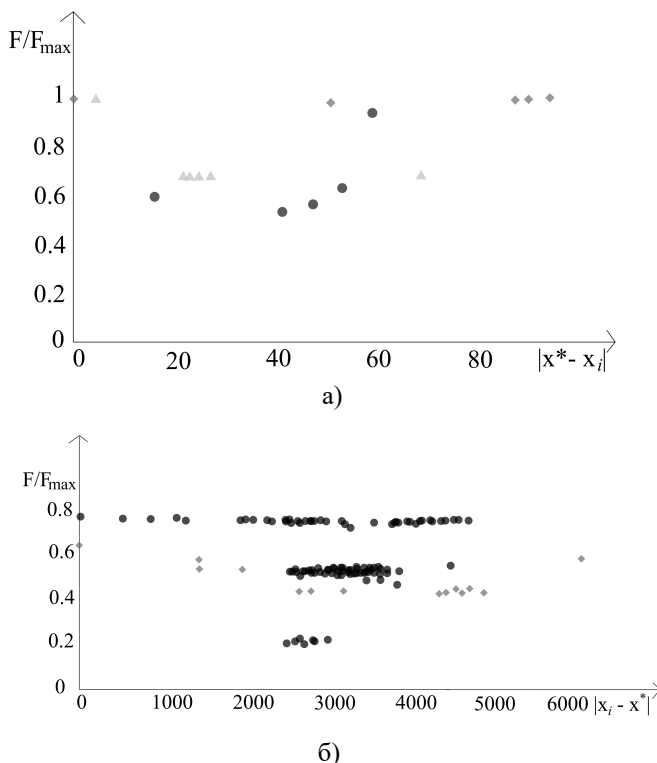


Рис. 1 — Структура множества найденных решений для задач ШВИ, ШВД, СВД (а) и СВД' (б)

Как видно из таблицы, во всех экспериментах в некоторых запусках были найдены неразличимые с практической точки зрения решения.

На рис. 1 приведены диаграммы локальных оптимумов, где по оси ординат отложены значения целевой функции, а по оси абсцисс - расстояние до лучшего известного решения. В случае а) точками обозначены результаты для кольцевых решеток, состоящих из 8 излучателей, ромбами - для кольцевых решеток, состоящих из 16 излучателей, пятиугольниками - для СВД 3x3. В случае б) точками обозначены результаты для СВД' 2x2, ромбами - для СВД' 3x3. Диаграмма показывает, что значения, соответствующие одному и тому же значению целевой функции, могут находиться достаточно далеко друг от друга, что позволяет сделать предположение о наличии неучтенных симметрий задачи. Наличие большого количества решений, соответствующих одному и тому же значению

целевой функции, приводит нас к исследованию групп симметрий. В<sup>22</sup> показано, что любой элемент группы непрерывных симметрий задачи 5 может быть описан в виде 9.

$$Q = e^{\sum_n a_n G_n}. \quad (9)$$

где  $a_n$  - вещественные числа,  $G_n$  - генераторы. В качестве генераторов можно выбрать косо-симметричные матрицы, которые содержат над главной диагональю один единичный элемент, симметричный ему противоположный элемент и остальные нули. Введем матрицу:  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$ , которая может быть представлена в виде конгруэнтного преобразования диагональной матрицы  $D$ :

$$\mathbf{H}_\Sigma = S^T D S,$$

Нахождение непрерывных групп симметрий сводится к решению задачи 10.

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_i \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{H}}_i, \\ \tilde{\mathbf{G}} \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{G}}. \end{cases} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = (S^{-1})^T \mathbf{A} S^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = (S^{-1})^T \mathbf{B}_i S^{-1}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (11)$$

Вычислительный эксперимент состоит из следующих этапов:

1. Обработка. На этом этапе возможная неточность данных нивелируется усреднением симметричных компонент матриц (матрицы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  должны быть симметричны).
2. Преобразование  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$  к канонической форме используя метод Лагранжа для вычисления матриц  $S$  и  $S^{-1}$ .
3. Применение метода Гаусса к системе линейных (10) для вычисления генераторов  $\hat{G}_n$ .

Описанная процедура нахождения непрерывных групп симметрий применяется к примерам, описанным во второй главе. Для всех рассмотренных задач было выявлено только наличие фазовой симметрии. Возможно, множественность решений объясняется наличием дискретных симметрий. Выявление дискретных симметрий является объектом дальнейших исследований.

Очевидным недостатком градиентного подъема является невозможность выйти из окрестности определенного локального оптимума. Таким образом, данный алгоритм хорошо подходит лишь для работы в режиме множественного

<sup>22</sup>Eremeev A. V., S. Y. A. On Symmetry Groups of Some Quadratic Programming Problems [Text] // MOTOR 2020. Shpringer. 2020. Vol. 12095.

запуска или же для уточнения некоторого заданного решения. Такое решение может быть получено алгоритмом дифференциальной эволюции (ДЭ). Кратко опишем идею алгоритма. В начале происходит генерация популяции. Если нет дополнительной информации, такая популяция особи популяции генерируются случайным образом с равномерным распределением. Затем, пока все особи не сойдутся в одной точке, каждая особь подвергается мутации путем присваивания ей признаков другой особи. Процедура, определяющая, в какой степени признаки других особей участвуют в эволюции конкретной особи является параметром алгоритма. Далее происходит сравнение значений целевой функции мутировавшей особи со значением целевой функции исходной особи. Выживает особь с лучшим значением целевой функции.

Данный алгоритм хорошо поддается модификации для запуска в параллельных потоках. В этом случае, на очередной итерации алгоритма выбирается некоторый набор особей, эволюция каждой из которых на данной итерации происходит независимо от эволюции другой. Эксперименты показывают, что сам по себе алгоритм ДЕ показывает худшее время и качество решения. Поэтому, в данной работе была предложена модификация алгоритма, при которой к особи с лучшим значением целевой функции применяется градиентный алгоритм, если количество итераций алгоритма превышает двух кратного количества итераций, потребовавшегося для получения этого рекорда. По истечении заданного количества итераций к лучшему решению также применяется градиентный подъем. При таком подходе выбор начального решения градиентного алгоритма строго обоснован. Кроме того, гарантируется сходимость алгоритма к локальному оптимуму, что может не произойти в реализации алгоритма ДЕ по умолчанию.

**Третья глава** посвящена исследованию ФАР в различных условиях.

На практике использование высоко симметричных ФАР вызывает особый интерес из следующих соображений: измерение матрицы сопротивлений является тривиальной задачей, в то время как измерение парциальных полей требует большое количество приемников для всех возможных направлений излучения. Использование высокосимметричных ФАР позволяет выполнить расчеты для одного направления и затем легко адаптировать их для других симметричных направлений. Другой особенностью, влияющей на результаты моделирования является наличие потерь в земле<sup>23</sup>. Чтобы ослабить этот эффект, антенные системы с противовесами подняты над землей на 2 м.

В данной главе мы изучаем, как изменяется общий коэффициент усиления с ростом радиочастоты и плотности системы противовесов. Общий коэффициент усиления является суммой частичных коэффициентов усиления в двух ортогональных поляризациях. Плотность системы противовесов определяется числом продольных и поперечных проводов, относящихся к одному и тому же излучателю. Частота изменяется от 5 до 30 МГц. Вычисления производились на решетках

---

<sup>23</sup>Юрков А. С. О влиянии потерь в земле на работу четырехэлементной ФАР КВ диапазона [Текст] // Техника радиосвязи. ОНИИП. 2014. № 1. С. 78—81.

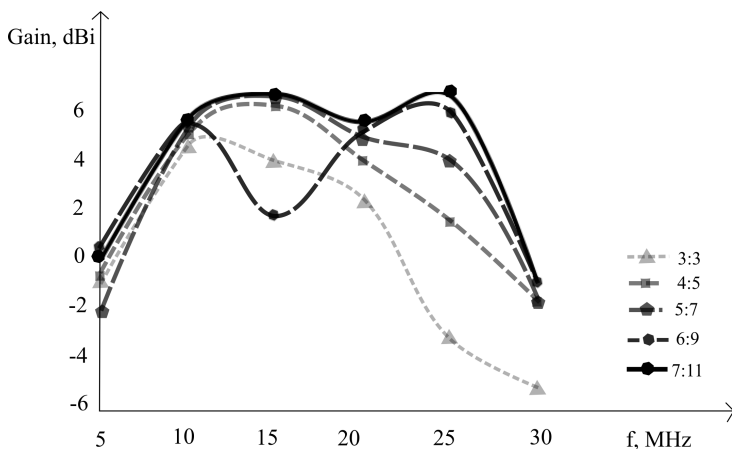


Рис. 2 — Зависимость от частоты общего коэффициента усиления ФАР при оптимизации в направлении 70:45

ШВИ, состоящих из 8 излучателей. Для расчета матрицы сопротивлений и матрицы излучений использовался пакет моделирования антенных систем NEC2.

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS, поскольку, в основном он деонстрирует лучшие результаты по сравнению с градиентным подъемом. Результаты оптимизации направленности решетки сравниваются с коэффициентом усиления одиночного излучателя, установленного в центре такой же системы противовесов. Плотность системы противовесов обозначается в формате *long : trans*, где *long* - число продольных проводов, относящихся к одному излучателю, а *trans* - поперечных. Высота каждого ШВИ - 15м. В качестве направления оптимизации выбирается 70° полярного угла и 45° азимутального угла в сферических координатах.

На рис. 2 показано, как изменяется коэффициент усиления с ростом радиочастоты. Мы можем наблюдать, что при значениях частоты 5 и 30 МГц решетка оптимизируется довольно плохо. Также можно увидеть, что, в основном, увеличение плотности системы противовесов приводит к росту коэффициента усиления. Единственное исключение - решетка с плотностью системы противовесов 6 : 9 на частоте 15МГц, где наблюдается неожиданное падение коэффициента усиления. Такое поведение может быть объяснено тем, что BARON не достиг глобального оптимума.

На рис. 3 показано, как изменяется разница коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя с ростом частоты. Заметным результатом здесь является то, что на частоте 25МГц усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. Объяснение этого эффекта будет приведено далее при сравнении диаграмм направленности. При 5МГц усиление ФАР существенно не превосходит усиление одиночного излучателя, однако, уже на 10МГц разница



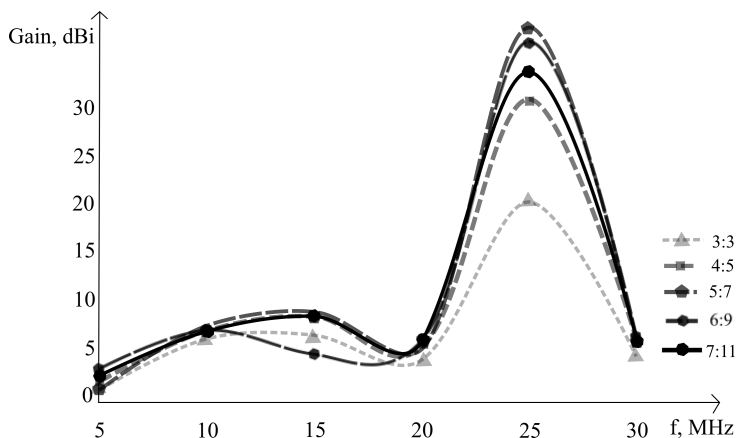


Рис. 3 — Сравнение коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя

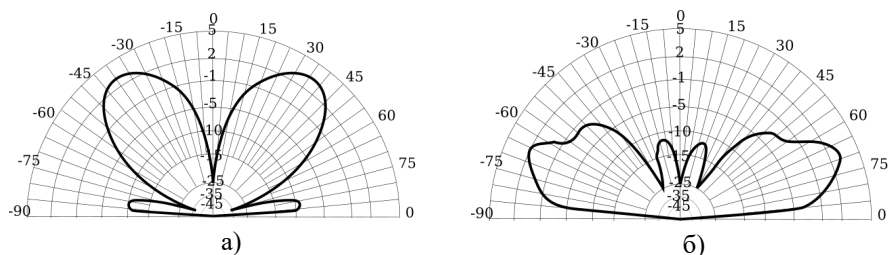


Рис. 4 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 25МГц

возрастает до 7.53дБ. Даже при 30МГц, где ФАР не оптимизируется хорошо, разница с одиночным излучателем составляет 6.63дБ в лучшем случае и 4.84дБ в худшем.

Интересный результат наблюдается при 25МГц (см Рис. 4), где усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. Сравнение их диаграмм направленности показывает, что одиночный излучатель довольно плохо излучает в направлении оптимизации, тогда как ФАР имеет максимум излучения в этом направлении. Предположительно, такой эффект был получен вследствие учета взаимного влияния. Согласно (2), если пренебречь взаимным влиянием излучателей, плотность мощности  $F$  будет максимальна тогда, когда комплексные амплитуды парциальных полей будут синфазны. Для проверки гипотезы о необходимости учета взаимного влияния в данной работе производилось сравнение диаграмм направленности решеток разных конфигураций после математической оптимизации их направленности в заданном направлении согласно модели (5) с соответствующими диаграммами одиночного излучателя и со случаем фазирования решетки без учета взаимного влияния (далее – простое фазирование).

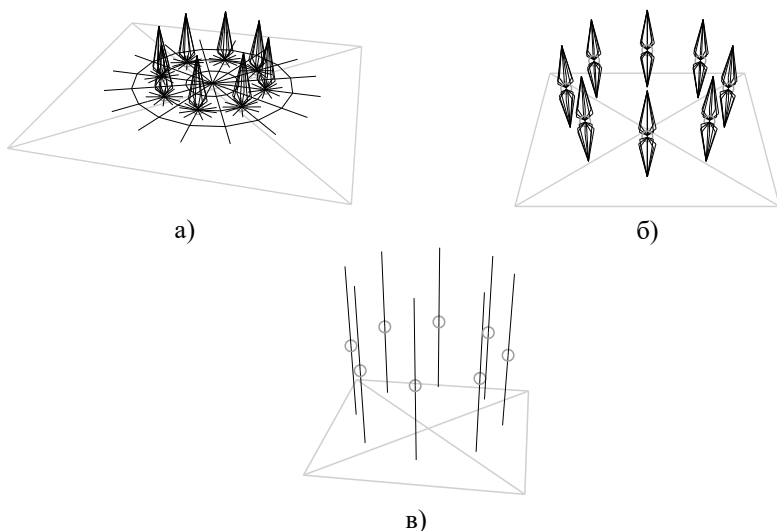


Рис. 5 — ФАР кольцевой структуры: ШВИ (а) ШВД (б) и СВД (в)

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS, поскольку, как правило, он обеспечивает большую точность решений по сравнению с градиентным подъемом [A1]. Высота каждого ШВИ равна 15 м. Длина плеча симметричных излучателей также равна 15 м. Направление оптимизации по умолчанию было установлено на  $70^\circ$  полярного угла и  $45^\circ$  азимутального угла в сферических координатах. Для некоторых экспериментов было проведено дополнительное исследование при  $85^\circ$  полярного угла.

Для решеток ШВИ (см. Рис. 5, а.) производилось сравнение диаграмм направленности при варьировании расстояния центра излучателя до центра решетки (от 7 до 80 м.), длины радиальных противовесов (от 3 до 20 м.) и присутствия или отсутствия общей системы противовесов. Диаграммы направленности при этом имели различную форму, однако, качественно различие между коэффициентами усиления всегда сохранялось: результат оптимизации не дает значимого преимущества перед простым фазированием.

Для ШВД (см. Рис. 5, б.) производилось исследование диаграмм направленности при варьировании расстояния центра излучателя до центра решетки от 5 до 50 м. В большинстве случаев, использование решения задачи математического программирования не давало существенного преимущества перед простым фазированием. Тем не менее, при расстоянии между центром излучателя и центром решетки равным 20 м. это различие составило около 4 дБ (см. Рис. 6).

Аналогичные результаты были получены и для решетки (см. Рис. 5, в.). При оптимизации в направлении полярного угла равном  $70^\circ$  при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 35 до 37 м. разница между коэффициентом усиления решения задачи математического программирования

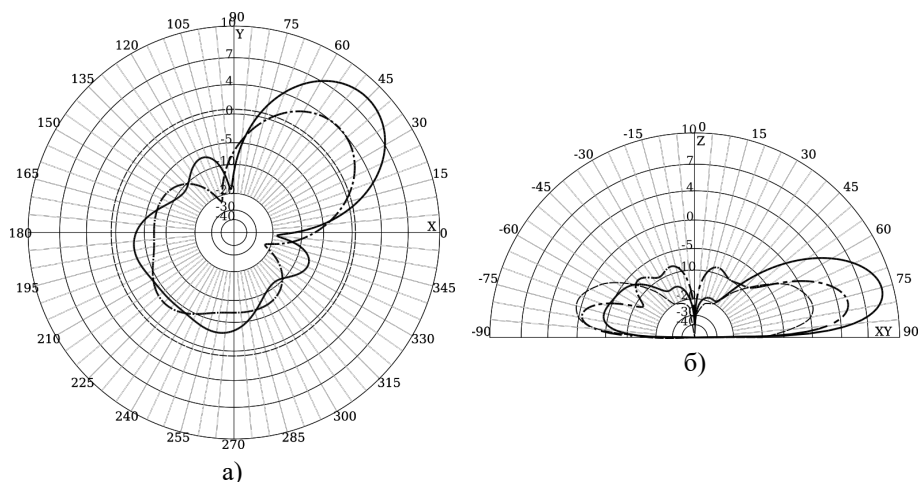


Рис. 6 — Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 20 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.

и усилением простого фазирования также достигала 4 дБ. При оптимизации в направлении полярного угла равном  $85^\circ$  при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 25 до 29 м. эта разница достигала 5 дБ.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Предложена модификация градиентного метода, учитывающая специфику задачи оптимизации фаз и амплитуд ФАР, позволяющая получать решения с практически приемлемыми точностью и временем счета.
2. В рассматриваемых задачах оптимизации фаз и амплитуд ФАР методами линейной алгебры выявлено семейство симметрий, состоящих в равном по величине сдвиге фаз во всех излучателях и позволяющее сократить размерность задач.
3. В ходе вычислительного эксперимента показано, что задача оптимизации фаз и амплитуд фазированной антенной решетки имеет многочисленные локальные оптимумы, большое число из которых совпадают по целевой функции, однако не эквивалентны между собой относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.
4. Выявлены ситуации, в которых коэффициент усиления, соответствующий решению задачи квадратичной оптимизации, имеет существенное преимущество (до 5 дБ) перед коэффициентом усиления, получаемым стандартным методом простого фазирования.

В приложениях приводятся формальные описания использованных алгоритмов, а так же дается описание разработанного программного комплекса для решения произвольных задач оптимизации ФАР КВ диапазона.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Тюнин Н. Н. Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решеток [Текст] // Дискретный анализ и исследование операций. — 2021. — Т. 28, № 3. — С. 20—44. — (BAK, Scopus, WoS).
2. Tyunin N. N. On mutual influence of emitters in directivity optimization of short-wave phased antenna arrays [Text] // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1901, no. 012053. — P. 1—8. — (BAK, Scopus, WoS).
3. Ereemeev A. V., Tyunin N. N., Yurkov A. S. Non-Convex Quadratic Programming Problems in Short Wave Antenna Array Optimization [Text] // Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019. Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — P. 34—45.
4. Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С. О структуре множества локальных оптимумов задачи оптимизации фазированных антенных решеток [Текст] // Сборник тезисов VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения». — 2018.
5. Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С. Исследование одной задачи квадратичного программирования в оптимизации коротковолновых антенных решеток [Текст] // Радиотехника, электроника и связь. Сборник докладов V Международной научно-технической конференции. — 2019. — С. 171—174.
6. Тюнин Н. Н. Невыпуклые задачи квадратичного программирования в оптимизации коротковолновых антенных решеток [Текст] // ФМХ ОмГУ - 2019. Сборник статей VII Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике, математике и химии. — 2020. — С. 48—52.

*Тюнин Николай Николаевич*

Анализ и решение задач оптимизации направленности фазированных антенных решеток  
коротковолнового диапазона

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук

