

**Тюнин Николай Николаевич**

**Анализ и решение задач оптимизации направленности  
фазированных антенных решеток коротковолнового  
диапазона**

Специальность 05.13.01 —  
«Системный анализ, управление и обработка информации»

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук».

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, доцент  
**Еремеев Антон Валентинович**

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В настоящее время разработка и анализ эффективных систем радиосвязи имеет большое значение для народного хозяйства. Одной из актуальных задач в этой области является задача оптимизации направленности фазированных антенных решеток (ФАР), представляющих собой антенные системы, распределение фаз и амплитуд на элементах которых позволяет получать направленное излучение. Будучи собранными в антенную систему и разведенными в пространстве, излучатели формируют диаграмму направленности, которая зависит от расположения и конструкции излучателей, а также выбора фаз и амплитуд сигналов, подаваемых на вход излучателей.

В диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) задачи оптимизации фаз и амплитуд излучателей, как правило, решаются с использованием некоторых упрощающих предположений [Indenbom M., Щелкунов С.А., Фаняев И.А.]. Однако, в диапазоне высоких частот (ВЧ) задача оптимизации направленности ФАР оказывается более сложной, и потому менее изучена [Фаняев И.А., Юрков А.С.]. При ограничении суммарной мощности, подаваемой на антенную систему, задача выбора фаз и амплитуд на излучателях может быть решена аналитически [Юрков А.С.]. Однако, при ограничении на мощность по каждому входу антенной системы требуется решение невыпуклых задач квадратичного программирования [Fuchs B.]. Вообще говоря, задачи квадратичного программирования являются NP-трудными [Murty K.]. Для решения таких задач могут применяться методы ветвей и границ [Нечаева М.С.], отсечений [Horst R.], DC-программирования [Стрекаловский А.С.], полуопределенной релаксации [Fuchs B.], эволюционных вычислений [Boriskin A.V., Rao A.], локального поиска [Кочетов Ю.А.] и др. Диссертационная работа посвящена исследованию свойств задачи оптимизации направленного излучения ФАР ВЧ диапазона и разработке алгоритмов решения этой задачи с использованием градиентного подъема и эволюционных вычислений.

**Целью** данной работы является создание алгоритмов оптимизации направленности излучения ФАР и исследовании области применимости различных методов решения этой задачи.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Изучить структуру множества локальных оптимумов и наличие симметрий в рассматриваемой задаче.
2. Адаптировать алгоритмы градиентного подъема и дифференциальной эволюции к рассматриваемой задаче с учетом ее специфики
3. Сравнить предложенные алгоритмы с известными методами.
4. Исследовать влияние расположения излучателей и используемой радиочастоты на эффективность работы алгоритмов оптимизации.
5. Оценить целесообразность учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона.

**Научная новизна:**

В отличие от многих работ по оптимизации параметров ФАР в СВЧ диапазоне, где для систем радиолокации требуется аппроксимировать заданную диаграмму направленности, в настоящей работе максимизируется излучение в одном заданном направлении, что в наибольшей степени соответствует системам коротковолновой радиосвязи.

Предложенный вариант алгоритма градиентного подъема содержит процедуру возвращения в допустимую область, применимую к любому решению, в котором превышены ограничения по мощности сигнала, подводимого к излучателю. Кроме того, наличие симметрии относительно равного сдвига фаз во всех излучателях позволяет зафиксировать фазу и снизить размерность задачи на одну переменную. Ранее, насколько известно автору, указанные свойства задачи не использовались применительно к методу градиентного подъема.

Впервые на основе экспериментального исследования задачи посредством мультистарта градиентного алгоритма показано наличие кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции, и не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.

На открытый вопрос о целесообразности учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР КВ диапазона дан положительный ответ при некоторых конфигурациях антенной системы.

**Практическая значимость.** Разработанные алгоритмы оптимизации возбуждения ФАР могут применяться в системах связи коротковолнового диапазона для увеличения дальности, снижения энергозатрат или площади, занимаемой антеннами. Созданное программное обеспечение позволяет производить необходимые для этого расчеты. Полученное обоснование необходимости учета взаимного влияния излучателей при оптимизации направленности ФАР, а также результаты вычислительных экспериментов для различных вариантов ФАР могут быть полезны при проектировании новых антенных систем.

**Методология и методы исследования.** В данной работе мы рассматриваем подход к решению задачи максимизации направленности излучения ФАР в заданном направлении при ограничениях, накладываемых на мощность, подаваемую на каждый из излучателей. Такая задача может быть решена только численными методами [Юрков А.С.]. Для использования градиентного метода задача сводится к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций.

Вообще говоря, при использовании метода градиентного подъема не гарантируется получение глобального оптимума. Приблизиться к глобальному оптимуму позволяет многократный запуск алгоритма из случайным образом сгенерированных точек. Кроме того, многократный запуск позволяет оценить количество локальных оптимумов, что является некоторым критерием сложности индивидуальной задачи [Еремеев А.В.]. Анализ структуры локальных оптимумов позволяет также выявить наличие нетривиальных симметрий.

Еще одним широко используемым подходом к решению задач оптимизации ФАР являются эволюционные алгоритмы, и, в частности, генетические алгоритмы, роевые алгоритмы, алгоритмы дифференциальной эволюции [Indenbom M., Фаняев И.А., Rao A.]. Использование эволюционных методов требует больше времени, чем использование градиентного подъема, однако, в отличие от градиентных методов, не требует вычисления производных и не подвержен преждевременному завершению в точках стационарности.

Для оценки качества результатов градиентного алгоритма производится их сравнение с решениями, полученными с помощью решателя BARON в пакете GAMS. BARON использует алгоритмы метода ветвей и границ, усиленные различными методами распространения ограничений и двойственности для уменьшения диапазонов переменных в ходе работы алгоритма [Ryoo H.S.]. Его использование также представляет альтернативный подход к решению данной задачи, но, поскольку BARON является коммерческим решателем, произведение расчетов требует приобретения лицензии, что не всегда приемлемо.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Группа непрерывных симметрий рассматриваемой задачи одномерна и ее элементы соответствуют сдвигу фаз во всех излучателях на равную величину, что позволяет снизить размерность задачи на одну переменную и сократить время счета.
2. Имеется интервал параметров кольцевых ФАР, в котором учет взаимного влияния излучателей ведет к существенному увеличению коэффициента усиления в заданном направлении.
3. Для многих конфигураций ФАР задача имеет несколько кластеров из локальных оптимумов с одинаковым значением целевой функции, не эквивалентных относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.
4. Использование градиентных методов в комбинации с методом ДЭ позволяет достичь конкурентоспособных решений по сравнению с алгоритмом ветвей и границ в задаче оптимизации фаз и амплитуд ФАР.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается согласованностью результатов, полученных предложенными алгоритмами, с результатами коммерческого решателя BARON, а также проведенными исследованиями адекватности модели с точки зрения физических принципов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

1. VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения» - Омск, июль 2018.
2. Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций (МОТОР)» - Екатеринбург, июль 2019, Иркутск, июль 2021, Петрозаводск, июль, 2022.
3. V Международной научно-технической конференции «Радиотехника, электроника и связь» - Омск, октябрь 2019.

**Личный вклад.** Автор адаптировал метод градиентного подъема и алгоритм дифференциальной эволюции к специфике рассматриваемой задачи,

осуществил переход к задаче квадратичного программирования, исходя из постановки в комплексных числах, исследовал наличие непрерывных симметрий, проводил вычислительные эксперименты, исследовал устойчивость решений к возмущению исходных данных.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК или приравненных к ним. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы, приводится структура и содержание.

**Первая глава** посвящена обзору имеющейся литературы и постановке задачи в виде задачи математического программирования. Здесь рассматриваются источники, позволяющие сформулировать постановку задачи [Сазонов Д.М., Юрков А.С.], приводится анализ похожих исследований [Luo Z.]. Также в рамках этого раздела производится сравнение результатов работы различных методов решения поставленной задачи.

Во **второй главе** производится исследование возможности оптимизации поставленной задачи методами дифференциальной эволюции. Для краткости изложения здесь содержание первой и второй главы совмещено.

Задачей данной работы является максимизация излучения антенной решетки в заданном направлении при ограничениях на мощность, подводимую к каждому излучателю. В терминах комплексных токов, подводимых к излучателям, эта задача сформулирована в работах [Юрков А.С.]. Целевая функция задачи оптимизации определяется следующим образом:

$$F = \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i}, \quad (1)$$

где верхний индекс  $+$  означает эрмитово сопряжение,  $A = (a_{ij})$ ,

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_i^{(l)} f_j^{(l)}. \quad (2)$$

Здесь  $f_i^{(l)}$  – парциальное поле, то есть поле, которое излучается при подаче единичного тока на  $i$ -ю точку питания излучающей системы, в то время, как ток в других точках питания равен нулю.

Существуют различные формы ограничений, которые соответствуют различным антенным системам. В данной работе рассматривается случай, когда

ограничение на мощность накладывается по каждой точки питания. В этом случае задача формулируется в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \mathbf{i} \in \mathbb{C}^N \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mathbb{C}$  – поле комплексных чисел,  $n$  – число точек питания, на которые накладываются ограничения (в общем случае  $n$  может быть не равно  $N$ ),

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{4P_{max}^{(k)}} (\mathbf{Z}^+ \mathcal{P}^{(k)} + \mathcal{P}^{(k)} \mathbf{Z}), \quad (4)$$

$P_{max}^{(k)}$  – максимально допустимая мощность в  $k$ -й точке питания,  $\mathcal{P}^{(k)}$  – матрицы-проекторы имеющие единственный ненулевой элемент  $\mathcal{P}_{kk}^{(k)} = 1$ . Матрицы-проекторы имеют размерность  $N \times N$ . Поскольку аргументом целевой функции является вектор комплексных токов, задачу оптимизации направленности ФАР КВ диапазона также можно назвать задачей оптимизации фаз и амплитуд.

Следует отметить, что задача (3), сформулированная в комплексных числах, имеет симметрию относительно преобразования  $\mathbf{i} \rightarrow e^{j\phi} \mathbf{i}$  всех комплексных координат (по произвольному углу  $\phi$ ). За  $j$  здесь обозначена мнимая единица. Данная симметрия может найти применение для уменьшения размерности области поиска на единицу. Например, фиксируя  $Im(y_N) = 0$ , что эквивалентно добавлению ограничения  $x_{2N} = 0$  к задаче (5).

Для разработки алгоритма решения задачи удобно переформулировать ее в вещественных числах. В вещественных числах задача (3) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (5)$$

Задача (5) имеет целевую функцию, заданную квадратичной формой с положительно полуопределенной матрицей  $\mathbf{G}$ . Каждое ограничение формулируется квадратичной формой, определенной симметричной матрицей  $\mathbf{H}^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$  с двумя парами идентичных собственных значений, два из которых положительны, а другие два отрицательны или равны нулю, все остальные собственные числа равны нулю.

Для задачи (5) существует преобразование, позволяющее привести к допустимой области решение  $\mathbf{x}$ , которое нарушает только ограничивающие неравенства задачи (5) вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ :

$$\mathbf{x}' := \alpha(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad (6)$$

где  $\alpha(\mathbf{x}) := \max_{k=\overline{1,n}} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}$ . Данная процедура применяется для выбора начального решения, а также для масштабирования итогового решения градиентного подъема и может использоваться в дифференциальной эволюции.

В вычислительных экспериментах бывает полезно ограничить множество допустимых решений задачи шаром или параллелепипедом, так как это позволяет более обоснованно выбрать начальное решение для итерационных методов с мультистартом или сократить перебор в методе ветвей и границ. Отметим, что если вектор  $\mathbf{x}$  удовлетворяет всем ограничениям задачи (5), то

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}. \quad (7)$$

Глобально-оптимальное решение задачи невыпуклого математического программирования вида (5) может быть найдено методом ветвей и границ [Horst R., Tawarmalani M.] или с использованием методов DC программирования [Horst R., Strekalovsky A.C.]. Локально-оптимальное решение задачи может быть найдено средствами градиентной оптимизации или методом Ньютона [Himmelblau D.M.]. В случае большой размерности могут быть применены различные метаэвристики (см. [Eberhart R., Storn R.]).

Процедура решения задачи оптимизации ФАР при ограничении мощности по каждой точке питания состоит в следующем:

1. Для каждого излучателя в решетке рассчитать парциальные компоненты полей  $f_i^{(l)}, i = \overline{1,N}, l = \overline{1,2}$ .
2. Вычислить матрицы  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{H}^{(k)}, k = \overline{1,n}$ .
3. Оценить радиус допустимой области.
4. Решить задачу (5) с дополнительными ограничениями  $x_N = 0, \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$ .

Данный подход может гарантировать нахождение как локального, так и глобального оптимума, в зависимости от решателя, используемого на шаге 4. Как один из базовых оптимизационных методов, в главе 1 мы рассматриваем метод градиентной оптимизации (максимизационный вариант) с алгоритмом одномерного поиска Дэвиса, Свенна и Кэмпби (ДСК) [Himmelblau D.M.]. Далее целевая функция задачи (5) будет обозначаться символом  $\tilde{F}$ .

В нашей работе от задачи условной оптимизации мы переходим к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций, а именно - методом внешней точки<sup>1</sup> Еремин В.В., Aoki M.:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n \left( \min \left( 0, \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) + \min \left( 0, 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) \right)^4 \rightarrow \max, \quad (8)$$

<sup>1</sup>Еремин В. В., Н. А. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования [Текст]. Наука, 1976. 192 с.; Aoki M. Introduction to optimization techniques. Fundamentals and applications of nonlinear programming [Text]. California Univ Los Angeles dept of system science, 1971.



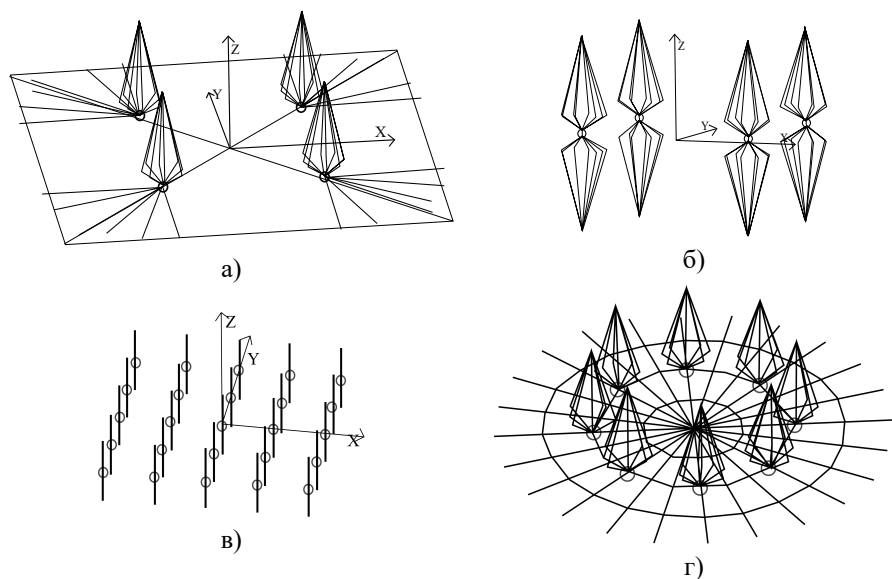


Рис. 1 — ФАР различных конфигураций

где  $r$  - достаточно большой штрафной параметр. Алгоритм градиентной оптимизации повторяется многократно, при этом используется случайно сгенерированный вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$  в качестве стартовой точки.

Вычислительный эксперимент был поставлен для задач, построенных на основе четырех типов ФАР: широкополосных вертикальных излучателей (ШВИ), широкополосных вертикальных диполей (ШВД) и симметричных вертикальных диполей (СВД). При моделировании полей был использован пакет NEC2, для которого были предоставлены соответствующие геометрические конфигурации антенных систем. В качестве рабочей частоты было выбрано 5МГц. Рассмотрены квадратные ФАР конфигурации 2x2, 3x3 и 5x5. Конфигурация 5x5 была рассмотрена только для решеток СВД, поскольку NEC2 не смог обработать 5x5 ШВИ и 5x5 ШВД из-за высокой сложности этих моделей. В случае с ФАР кольцевой структуры были рассмотрены решетки, состоящие из 8 и 16 излучателей. Также в рассмотрение были приняты укороченные СВД с длиной плеча 5м. (СВД'). В качестве направления максимизации излучения выбраны: азимутальный угол  $45^\circ$ , полярный угол  $70^\circ$ .

Здесь сравниваются результаты работы градиентного метода и решателя BARON в его режиме по умолчанию. Во всех экспериментах, описанных ниже, было установлено ограничение по времени 1000с. Все эксперименты проводились на ЭВМ с процессором Intel i7 (тактовая частота: 2.8ГГц), ОЗУ: 16Гб. В случае остановки градиентного метода (завершение по минимально допустимому приращению целевой функции  $10^{-4}$ ), алгоритм перезапускается заново до истечения запаса времени.

Во время каждой инициализации градиентного метода в главе 1 стартовая точка  $\mathbf{x}$  выбирается независимо с равномерным распределением в кубе  $[-5000, 5000]^{2N}$ . Лучшее из найденных таким образом решений принимается за конечный результат. Параметр штрафа  $r$  в методе градиентной оптимизации установлен равным  $10^6$  на всех запусках. Такое значение было определено эмпирически. В таблице 1 приводятся результаты вычислительного эксперимента. Значения целевой функции “ $\tilde{F}$ ” в точке, полученной алгоритмом градиентного подъема, приводятся после процедуры масштабирования (6). Для решателя BARON версии 18.5.8 было выбрано то же самое ограничение сверху на процессорное время, что и для градиентного метода (группа колонок “BARON”). Во всех таблицах, колонка “ $t$ ” содержит время до получения лучшего найденного решения или до установления глобальной оптимальности. Во всех запусках градиентного метода были получены решения, где активными оказались все ограничения вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$  и только они.

Очевидным недостатком градиентного подъема является невозможность выйти из окрестности локального оптимума. Таким образом, данный алгоритм хорошо подходит лишь для работы в режиме множественного запуска или же для уточнения некоторого заданного решения. Такое решение может быть получено алгоритмом дифференциальной эволюции (ДЭ).

Кратко опишем идею алгоритма. В начале происходит генерация популяции. Если нет дополнительной информации, особи популяции генерируются случайным образом с равномерным распределением. Затем, каждая особь подвергается мутации путем присваивания ей признаков другой особи. Для этого случайным образом выбираются неравные друг другу особи  $A, B, C$ . Из них формируется новая особь  $C' = C + f(A - B)$ , где  $f$  – параметр алгоритма. Из исходной особи и особи  $C'$  формируется особь новой популяции. Для этого каждый признак исходной особи с заданной вероятностью  $p$  заменяются на соответствующий признак  $C'$ . Выживает особь с лучшим значением целевой функции.

В данной работе была предложена модификация алгоритма, при которой к особи с лучшим значением целевой функции применяется градиентный алгоритм, если количество итераций алгоритма превышает двухкратного количества итераций, потребовавшегося для получения этого рекорда. По истечении заданного количества итераций к лучшему решению также применяется градиентный подъем.

Из таблицы 1 видно, что на всех видах решеток, кроме решеток СВД конфигураций  $3 \times 3$  и  $5 \times 5$ , а также СВД' конфигураций  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ , разница в значениях целевой функции не превосходит 1%. Для решеток СВД конфигураций  $3 \times 3$  и  $5 \times 5$ , а также СВД' конфигураций  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  градиентный алгоритм существенно уступает по качеству найденного решения. Кроме решеток ШВИ и ШВД конфигурации  $2 \times 2$  BARON демонстрирует лучшее время счета. Кроме того, алгоритм ДЭ сравнивался с решателем BARON на пяти задачах из гл. 4 в тех же условиях, что описаны выше. Алгоритм ДЭ на всех примерах нашел допустимые решения, а решатель BARON – только в четырех примерах. На этих примерах результаты

Таблица 1 — Результаты оптимизации, полученные с помощью градиентного подъема, решателя BARON и ДЭ.

| Тип       | $\sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$ | Град.       |       | BARON       |        | ДЭ          |
|-----------|-----------------------------------|-------------|-------|-------------|--------|-------------|
|           |                                   | $\tilde{F}$ | t, с  | $\tilde{F}$ | t, с   | $\tilde{F}$ |
| ШВИ 2x2   | 13.6                              | 138         | 0.054 | 139         | 0.12   | 139         |
| ШВИ 3x3   | 22.5                              | 576         | 0.93  | 581         | 0.34   | 581         |
| ШВД 2x2   | 21                                | 460         | 0.13  | 464         | 0.27   | 464         |
| ШВД 3x3   | 82.2                              | 915         | 24.4  | 925         | 0.34   | 924         |
| СВД 2x2   | 44.7                              | 357         | 1.9   | 361         | 0.16   | 361         |
| СВД 3x3   | 641.9                             | 1138        | 25.6  | <b>1261</b> | 0.38   | 1163        |
| СВД 5x5   | $1.1 \cdot 10^5$                  | 5318        | 1000  | 6716        | 1000   | <b>7132</b> |
| СВД* 2x2  | $2.3 \cdot 10^4$                  | 233         | 2.52  | <b>253</b>  | 0.25   | 198         |
| СВД* 3x3  | $6 \cdot 10^5$                    | 664         | 71    | <b>1153</b> | 1.48   | 834         |
| СВД* 5x5  | -                                 | 1382        | 1000  | 33.5        | 217.94 | <b>2755</b> |
| Кольц. 8  | 87                                | 217         | 8.06  | 218         | 0.23   | 218         |
| Кольц. 16 | 154                               | 727         | 90.9  | 734         | 1.37   | 732         |

ДЭ отличались не более чем на 1% по целевой функции от решений BARON. Следует отметить, что для обоих алгоритмов время, затраченное на поиск решения, было либо существенно меньше, либо сравнимо со временем, затраченным на построение исходных данных пакетом моделирования NEC, что делает оба подхода равноценными по времени работы с практической точки зрения. При увеличении времени счета BARON до 50000с. для ФАР конфигураций ШВИ 2x2, ШВД 2x2 и ШВИ 3x3 была доказана глобальная оптимальность найденного решателем BARON решения из таблицы 1. Из проведенных экспериментов можно сделать вывод о том, что разработанный гибридный вариант ДЭ показывает конкурентоспособные результаты в сравнении с коммерческим решателем BARON в режиме его настроек по умолчанию, при этом преимущество ДЭ наблюдается на задачах с наибольшей размерностью. Решатель ANTIGONE также был опробован в режиме его настроек по умолчанию, но в большинстве тестовых примеров возвращал нулевое решение.

**Третья глава** посвящена исследованию структуры локальных оптимумов с помощью различных алгоритмов оптимизации, производится анализ наличия групп непрерывных симметрий.

Для оценки общего числа локальных оптимумов использовался метод переписи Шнабеля. Данный метод имеет применение в экологии и заключается в выводе статистических оценок численности популяции на основе числа особей, помеченных в результате эксперимента, из популяции с неизменным составом. В [Еремеев А.В.] предлагается адаптация такого метода для оценки числа локальных оптимумов. В таблице 2 приводится статистика по числу различных точек остановки (в пределах заданной точности) процедуры мултистарта в течение 1000 с. процессорного времени. Для каждого решения была применена процедура линеаризации задачи и проверки необходимых условий локальной оптимальности. Здесь  $M$  – число выполненных запусков за отведенное время,

Таблица 2 — Структура множества локальных оптимумов.

| ФАР       | $M$   | $M_{ne}$ | $M_f$ | $\mathcal{B}_{M_f}$ | $\mathcal{L}_{M_f}$ | $M_{y \approx 0}$ | $\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$ | $\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$ |
|-----------|-------|----------|-------|---------------------|---------------------|-------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ШВИ 2x2   | 18368 | 4        | 1     | 1                   | 1                   | 4                 | 4                               | 4                               |
| ШВД 2x2   | 7678  | 4        | 1     | 1                   | 1                   | 4                 | 4                               | 4                               |
| СВД 2x2   | 523   | 1        | 1     | 1                   | 1                   | 1                 | 1                               | 1                               |
| СВД 3x3   | 39    | 9        | 2     | 2                   | 2                   | 5                 | 5                               | 5                               |
| СВД' 2x2  | 396   | 370      | 3     | 3                   | 3                   | 338               | 1000                            | 1213                            |
| СВД' 3x3  | 14    | 14       | 3     | 3                   | 3                   | 1                 | 1                               | 1                               |
| ШВИ 3x3   | 1070  | 3        | 1     | 1                   | 1                   | 3                 | 3                               | 3                               |
| ШВД 3x3   | 41    | 4        | 4     | 4                   | 4                   | 1                 | 1                               | 1                               |
| Кольц. 8  | 124   | 9        | 2     | 2                   | 2                   | 9                 | 9                               | 9                               |
| Кольц. 16 | 11    | 6        | 1     | 1                   | 1                   | 6                 | 6                               | 6                               |

$M_{ne}$  – число групп решений, отличающихся не более чем на 10% по каждой из координат,  $M_f$  – число групп значений целевой функции у таких неэквивалентных решений (с точностью до 10%, приведенных в таблице 1).  $M_{y \approx 0}$  – число групп решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности.  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{L}$  – оценка нижней границы и оценка максимального правдоподобия числа локальных оптимумов, рассчитанные по методу переписи Шнабеля. Доверительная вероятность для данного метода была выбрана равной 0.95. Оценки для числа решений с различными значениями целевой функции обозначены  $\mathcal{B}_{M_f}$  и  $\mathcal{L}_{M_f}$ . Оценки для числа решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, обозначены  $\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$  и  $\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$ .

На рис. 2 приведены диаграммы найденных локальных оптимумов, где по оси ординат отложены значения целевой функции, а по оси абсцисс – расстояние до лучшего известного решения. В случае а) точками обозначены результаты для кольцевых решеток, состоящих из 8 излучателей, ромбами – для кольцевых решеток, состоящих из 16 излучателей, пятиугольниками - для СВД 3x3. В случае б) точками обозначены результаты для СВД' 2x2, ромбами – для СВД' 3x3. Диаграмма показывает, что значения, соответствующие одному и тому же значению целевой функции, могут находиться достаточно далеко друг от друга, что позволяет сделать предположение о наличии неучтенных симметрий задачи.

Известно [Юрков А.С.], что любой элемент группы непрерывных симметрий задачи (5) может быть описан в виде (9).

$$Q = e^{\sum_n a_n G_n}. \quad (9)$$

где  $a_n$  – вещественные числа,  $G_n$  – генераторы в теоретико-групповом смысле. В качестве генераторов  $G_n$  можно выбрать косо-симметричные матрицы, которые содержат над главной диагональю один единичный элемент, симметричный ему противоположный элемент и остальные нули. Введем матрицу:  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$ ,

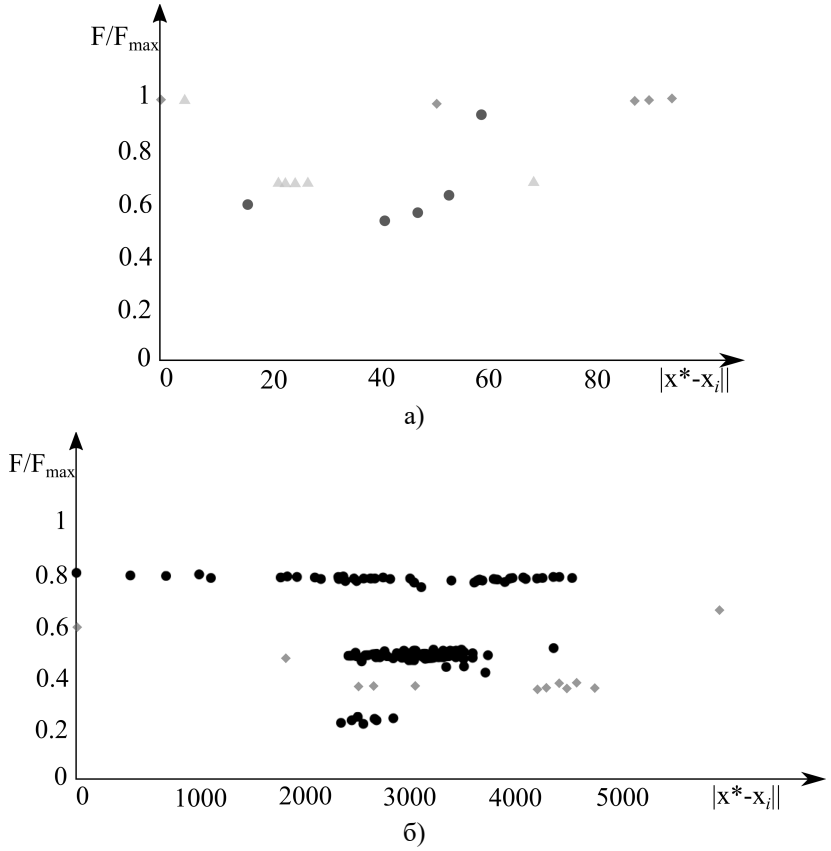


Рис. 2 — Структура множества найденных решений для задач ШВИ, ШВД, СВД (а) и СВД\* (б)

которая может быть представлена в виде конгруэнтного преобразования диагональной матрицы  $D$ :

$$\mathbf{H}_\Sigma = S^T D S,$$

при некоторой матрице  $S$ . Нахождение непрерывных групп симметрий сводится к решению задачи (10).

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{H}}_i \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{H}}_i, \\ \tilde{\mathbf{G}} \left( \sum_n a_n G_n \right) = \left( \sum_n a_n G_n \right) \tilde{\mathbf{G}}. \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{B}_i \mathbf{S}^{-1}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (11)$$

Вычислительный эксперимент по поиску группы непрерывных симметрий состоит из следующих этапов:

1. Предварительная обработка. Возможная неточность данных нивелируется усреднением симметричных компонент матриц (матрицы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  должны быть симметричны).
2. Преобразование  $\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i \mathbf{H}_i$  к канонической форме используя метод Лагранжа для вычисления матриц  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}^{-1}$ .
3. Применение метода Гаусса к системе линейных уравнений (10) для вычисления генераторов  $\hat{G}_n$ .

Описанная процедура нахождения непрерывных групп симметрий применяется к примерам, описанным в главе 1. Для всех рассмотренных задач было выявлено только наличие фазовой симметрии. Предположительно, множественность решений объясняется наличием дискретных симметрий. Выявление дискретных симметрий является объектом дальнейших исследований.

**Четвертая глава** посвящена исследованию возможности оптимизации возбуждения ФАР в различных условиях.

На практике использование высокосимметричных ФАР вызывает особый интерес, так как позволяет выполнить расчеты для одного направления и затем легко адаптировать их для других симметричных направлений. Другой особенностью, влияющей на результаты моделирования является наличие потерь в земле [Юрков А.С.]. Чтобы ослабить этот эффект, антенные системы с противовесами подняты над землей на 2 м.

В данной главе мы изучаем, как изменяется общий коэффициент усиления кольцевой ФАР с ростом радиочастоты и плотности системы противовесов. Общий коэффициент усиления является суммой частичных коэффициентов усиления в двух ортогональных поляризациях. Плотность системы противовесов определяется числом продольных и поперечных проводов, относящихся к одному и тому же излучателю. Частота изменяется от 5 до 30 МГц. Вычисления производились на решетках ШВИ, состоящих из 8 излучателей. Для расчета матрицы сопротивлений и матрицы излучений использовался пакет моделирования антенных систем NEC2.

Для проведения вычислительного эксперимента использовался решатель BARON в пакете GAMS. Результаты оптимизации направленности решетки сравниваются с коэффициентом усиления одиночного излучателя, установленного в центре такой же системы противовесов. Плотность системы противовесов обозначается в формате *long : trans*, где *long* – число продольных проводов, относящихся к одному излучателю, а *trans* – поперечных. Высота каждого ШВИ – 15 м. В качестве направления оптимизации выбирается 70° полярного угла и 45° азимутального угла в сферических координатах.

На рис. 3 показано, как изменяется коэффициент усиления с ростом радиочастоты. Мы можем наблюдать, что при значениях частоты 5 и 30 МГц решетка

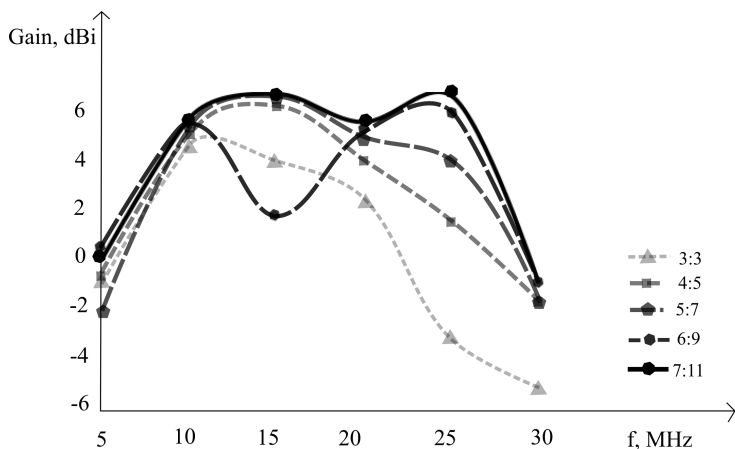


Рис. 3 — Зависимость от частоты общего коэффициента усиления ФАР при оптимизации в направлении 70:45

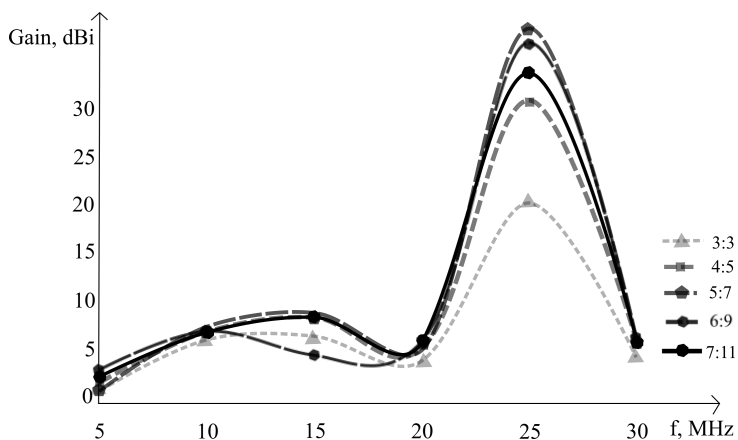


Рис. 4 — Сравнение коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя

оптимизируется малоэффективно. Также можно увидеть, что, в основном, увеличение плотности системы противовесов приводит к росту коэффициента усиления.

На рис. 4 показано, как изменяется соотношение коэффициентов усиления ФАР и одиночного излучателя с ростом частоты. Заметным результатом здесь является то, что на частоте 25 МГц усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. Объяснение этого эффекта будет приведено далее при сравнении диаграмм направленности.

На частоте 25 МГц (см Рис. 5), где усиление ФАР существенно больше усиления одиночного излучателя. Одиночный излучатель довольно мало излучает в

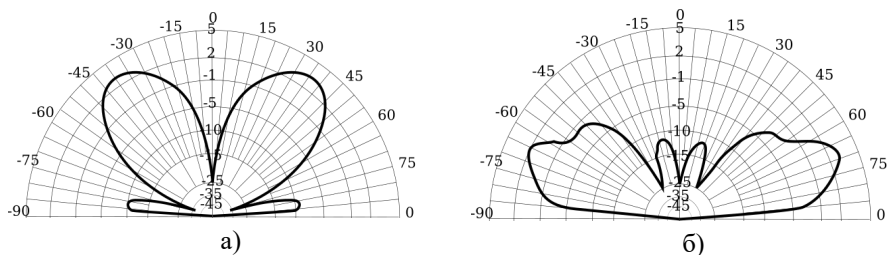


Рис. 5 — Вертикальный план диаграммы направленности одиночного излучателя (а) и ФАР 5:7 (б) при 25МГц

направлении оптимизации, тогда как ФАР имеет максимум излучения в этом направлении. Было предположено, что такой эффект был получен вследствие учета взаимного влияния. Согласно (2), если пренебречь взаимным влиянием излучателей, плотность мощности  $F$  будет максимальна, когда поля будут синфазны. Для проверки гипотезы о необходимости учета взаимного влияния произведено сравнение диаграмм направленности решеток разных конфигураций после математической оптимизации их направленности в заданном направлении согласно модели (5) с соответствующими диаграммами одиночного излучателя и со случаем фазирования решетки без учета взаимного влияния (далее – простое фазирование).

Высота каждого ШВИ равна 15 м. Длина плеча симметричных излучателей также равна 15 м. Направление оптимизации по умолчанию было установлено на  $70^\circ$  полярного угла и  $45^\circ$  азимутального угла в сферических координатах. Для некоторых экспериментов было проведено дополнительное исследование при  $85^\circ$  полярного угла.

Для ШВД производилось исследование диаграмм направленности при варьировании расстояния центров излучателей до центра решетки от 5 до 50 м. В большинстве случаев, использование решения задачи математического программирования не давало существенного преимущества перед простым фазированием. Тем не менее, при расстоянии между центром излучателя и центром решетки равным 20 м. это различие составило около 4 дБ (см. Рис. 6).

Аналогичные результаты были получены и для решеток СВД. При оптимизации в направлении полярного угла равном  $70^\circ$  при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 35 до 37 м. различие между коэффициентом усиления решения задачи математического программирования и усилением простого фазирования также достигало 4 дБ. При оптимизации в направлении полярного угла равном  $85^\circ$  при варьировании расстояния от центра излучателя до центра решетки от 25 до 29 м. эта разница достигала 5 дБ.



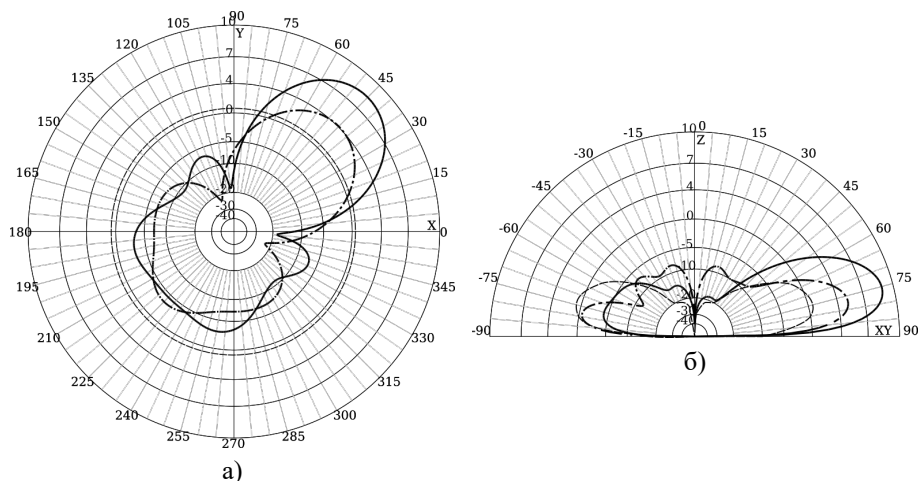


Рис. 6 — Горизонтальный (а) и вертикальный (б) план диаграммы направленности ШВД при расстоянии от центра излучателя до центра решетки 20 м. Пунктирной линией обозначено усиление одиночного излучателя, штрихпунктирной – простое фазирование, сплошной – решение задачи мат. программирования.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Предложена модификация алгоритма дифференциальной эволюции в комбинации с градиентным алгоритмом, учитывающая специфику задачи оптимизации фаз и амплитуд ФАР, показавшая преимущество в сравнении с коммерческим решателем BARON на задачах большой размерности.
2. В рассматриваемых задачах оптимизации фаз и амплитуд ФАР методами линейной алгебры выявлено семейство симметрий, состоящих в равном по величине сдвиге фаз во всех излучателях и позволяющее сократить размерность задач.
3. В ходе вычислительного эксперимента показано, что задача оптимизации фаз и амплитуд фазированной антенной решетки имеет многочисленные локальные оптимумы, большое число из которых совпадают по целевой функции, однако не эквивалентны между собой относительно равного сдвига фаз во всех излучателях.
4. Выявлены ситуации, в которых коэффициент усиления, соответствующий решению задачи квадратичной оптимизации, имеет существенное преимущество (до 5 дБ) перед коэффициентом усиления, получаемым стандартным методом простого фазирования.

В приложениях приводятся формальные описания использованных алгоритмов, а также дается описание разработанного программного комплекса для решения произвольных задач оптимизации ФАР КВ диапазона.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Тюнин Н. Н. Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решеток [Текст] // Дискретный анализ и исследование операций. — 2021. — Т. 28, № 3. — С. 20—44. — (БАК).
2. Tyunin N. N. On mutual influence of emitters in directivity optimization of short-wave phased antenna arrays [Text] // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1901, no. 012053. — P. 1—8. — (БАК).
3. Ereemeev A. V., Tyunin N. N., Yurkov A. S. Non-Convex Quadratic Programming Problems in Short Wave Antenna Array Optimization [Text] // Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019. Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — P. 34—45. — (БАК).
4. Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С. Об оптимизации направленности коротковолновых фазированных антенных решеток кольцевой структуры [Текст] // Научно-технический сборник «Техника радиосвязи». — 2022. — Принята в печать.
5. Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С. О структуре множества локальных оптимумов задачи оптимизации фазированных антенных решеток [Текст] // Сборник тезисов VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения». — 2018.
6. Еремеев А. В., Тюнин Н. Н., Юрков А. С. Исследование одной задачи квадратичного программирования в оптимизации коротковолновых антенных решеток [Текст] // Радиотехника, электроника и связь. Сборник докладов V Международной научно-технической конференции. — 2019. — С. 171—174.
7. Тюнин Н. Н. Невыпуклые задачи квадратичного программирования в оптимизации коротковолновых антенных решеток [Текст] // ФМХ ОмГУ - 2019. Сборник статей VII Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике, математике и химии. — 2020. — С. 48—52.
8. Еремеев А. В., Тюнин Н. Н. Алгоритм дифференциальной эволюции для оптимизации направленности фазированных антенных решеток [Текст] // PREPRINTS.RU. — 2022. — URL: <https://doi.org/10.24108/preprints-3112476>. — (accessed: 29.08.2022).

*Тюнин Николай Николаевич*

Анализ и решение задач оптимизации направленности фазированных антенных решеток  
коротковолнового диапазона

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук

