104年第一次北科入學數學會考

104-01-01

Statement

若$f(x) = 18x^3 - 15x^2 - 4x - 3$，則$f(\frac{2-\sqrt{3}}{3})$ =?

(A) $\quad -3\sqrt{3}$

(B) $\quad -2\sqrt{3}$

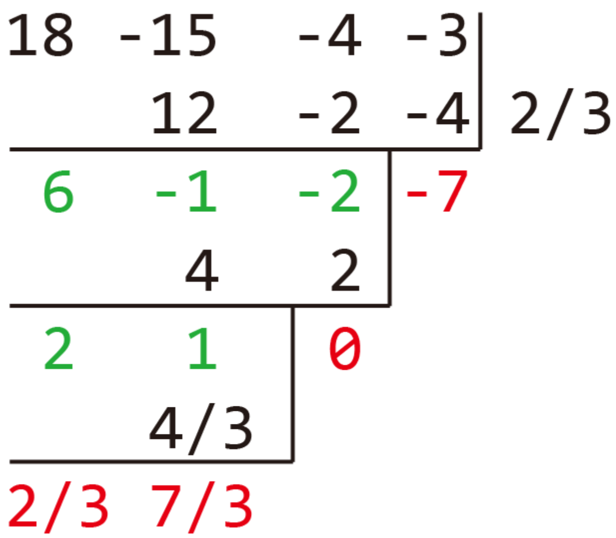
(C) $\quad 2-\sqrt{3}$

(D) $\quad 2+\sqrt{3}$

(E) $\quad 2\sqrt{3}$

Solution

將式子轉成以$(3x-2)$來表達的形式。



得到$f(x) = \frac{2}{3}(3x-2)^3 + \frac{7}{3}(3x-2)^2 - 7$

因此$f(\frac{2-\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{3}(-\sqrt{3})^3 + \frac{7}{3}(-\sqrt{3})^2 - 7 = -2\sqrt{3}$，故選$(B)$

104-01-02

Statement

設α, β為方程式$x^2 - 3x - 1 = 0$之兩根，且$\alpha > \beta$，則$\alpha^2 - \beta^2$ =?

(A) $\quad \sqrt{13}$

(B) $\quad \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$(C)\quad 2\sqrt{13}$

$(D)\quad 3\sqrt{13}$

$(E)\quad 4\sqrt{13}$

Solution

利用根與係數，可知：

$\alpha\beta = \dfrac{-1}{1} = -1$，可知$\alpha = \dfrac{-1}{\beta}$

$\alpha + \beta = -\dfrac{-3}{1} = 3$

因此$\dfrac{-1}{\beta} + \beta = 3 \Rightarrow \beta^2 - 3\beta - 1 = 0$

解方程式可知$\beta = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$，由於$\alpha > \beta$，因此正不合，故$\beta = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$。

可知$\alpha = \dfrac{-2}{3 - \sqrt{13}}$

因此$\alpha^2 - \beta^2 = \dfrac{4}{22 - 6\sqrt{13}} - \dfrac{22 - 6\sqrt{13}}{4} = 3\sqrt{13}$，故選$(D)$

104-01-03

Statement

$2 \cdot 11^5 - 23 \cdot 11^4 + 13 \cdot 11^3 - 25 \cdot 11^2 + 40 \cdot 11 - 56 = ?$

$(A)\quad -77$

$(B)\quad -35$

$(C)\quad 17$

$(D)\quad 21$

$(E)\quad 63$

Solution

將式子轉成$f(x) = 2x^5 - 23x^4 + 13x^3 - 25x^2 + 40x - 56$

且x代入11之結果，等價於$f(x) \div (x - 11)$之餘數（餘式定理）

因此，利用綜合除法來計算。

2	-23	13	-25	40	-56	
	22	-11	22	-33	77	11
2	-1	2	-3	7	21	

因此，$f(11) = 21$，故選(D)

104-01-04

Statement

設$\dfrac{5x^3 - 9x^2 + 9x - 3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$，則$A+B+C+D=?$

(A)　-4

(B)　-1

(C)　4

(D)　6

(E)　8

Solution

$5x^3 - 9x^2 + 9x - 3 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$

將$x=1$代入式子，可得$2 = 2B$，因此$B = 1$

$5x^3 - 10x^2 + 9x - 4 = A(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$

$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = A(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)$

$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = Ax^2 + A + Cx^2 - Cx + Dx - D$

$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = (A+C)x^2 + (-C+D)x + (A-D)$

可知$\begin{cases} (A+C) = 5 \\ (-C+D) = -5 \\ (A-D) = 4 \end{cases}$，解聯立方程式得到$(A, C, D) = (2, 3, -2)$

因此$A+B+C+D = 2+1+3+(-2) = 4$，故選(C)

104-01-05

Statement

不等式$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\leq 0$之解為何？

$(A)\quad 1\leq x<2$

$(B)\quad 2<x\leq 3$

$(C)\quad 1<x<2$

$(D)\quad x\geq 3$或$x<2$

$(E)\quad 2<x<3$

Solution

令$t=\sqrt[3]{(x-2)}$，則$t^2-\dfrac{1}{t}\leq 0$

得到$\dfrac{t^3-1}{t}\leq 0$，定義域$t\neq 0$

考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} t^3-1\leq 0 \\ t>0 \end{cases}\Rightarrow t\in(0,1]$$

$$\begin{cases} t^3-1\geq 0 \\ t<0 \end{cases}\Rightarrow t\in\varnothing$$

故$0<t\leq 1$時$t^2-\dfrac{1}{t}\leq 0$

還原t，可得$2<t\leq 3$時，$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\leq 0$，故選$(B)$

104-01-06

Statement

設x^2+1為$x^4+2x^3+mx^2+nx+3$的因式，則$m+n=?$

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 5$

$(C)\quad 6$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 8$

Solution

利用直式除法

```
                  1   +   2   +(m-1)
1+0+1 | 1 + 2 +   m   +   n   +   3
        1 + 0 +   1
        ----------
            2 +(m-1)+   n
            2 +   0   +   2
            -----------------
                (m-1)+(n-2)+   3
                (m-1)+   0   +(m-1)
                ---------------------
                      (n-2)+(4-m)
```

可知若要整除，則$(n-2)=0$且$(4-m)=0$，可知$n=2$且$m=4$

$n+m=6$，故選(C)

104-01-07

Statement

若直線L與直線$3x+4y=9$垂直，且通過兩直線$3x-2y+3=0$與$5x+4y-17=0$的交點，則L的方程式為何？

(A)　$3x+4y=15$

(B)　$3x-4y=9$

(C)　$4x-3y=9$

(D)　$4x-3y=-5$

(E)　$4x=3y$

Solution

與直線$3x+4y=9$垂直，可知$L: 4x-3y=C$

求$\begin{cases} 3x-2y+3=0 \\ 5x+4y-17=0 \end{cases}$的交點，解聯立方程組得到$(x,y)=(1,3)$

代入L，得到$C=-5$

因此$L: 4x-3y=-5$，故選(D)

104-01-08

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，$|\vec{a}| = 3$、$|\vec{b}| = 2$且$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{37}$，則$\theta =?$

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

Solution

$|(\vec{a} + 2\vec{b})|^2 = |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = 37$

可知$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

因此$\cos\theta = \frac{1}{2}$，$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}(0 \leq \theta \leq \pi)$，故選$(D)$

104-01-09

Statement

設向量$\vec{a} =< 14, -1 >$，$\vec{b} =< 2^x, 4^{x-1} - 8 >$，且$\vec{a} \perp \vec{b}$，則$x =?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$\vec{a} \perp \vec{b}$，可知$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

因此$14 \cdot 2^x - (4^{x+1} - 8) = 0$

所以$14 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2x} + 8 = 0$

令$t = 2^x$，則$14t - 4t^2 + 8 = 0$，解方程式得到$t = -\frac{1}{2}$(不合)或$t = 4$

因此$2^x = 4$，得$x = 2$，故選(E)

104-01-10

Statement

若橢圓以$(-3,1)$與$(5,1)$兩焦點，且通點$(1,-3)$，則橢圓長軸為何？

(A)　10

(B)　$8\sqrt{2}$

(C)　$10\sqrt{2}$

(D)　16

(E)　20

Solution

$|\overline{PF_1}|+|\overline{PF_2}|=2a$

因此$\sqrt{(-3-1)^2+(1-(-3))^2}+\sqrt{(5-1)^2+(1-(-3))^2}=2a$

可知$4\sqrt{2}+4\sqrt{2}=2a$，因此$2a=8\sqrt{2}$，可知長軸為$8\sqrt{2}$

104-01-11

Statement

若拋物線方程式為$y=\dfrac{1}{8}x^2+1$，且其焦點坐標為(a,b)，則$a+b=?$

(A)　-2

(B)　-1

(C)　2

(D)　3

(E)　5

Solution

轉換成拋物線的表達式，得到$x^2=8(y-1)$

因此可知$4c=8$，得到$c=2$

可以從表達式中可以知道頂點為$(0,1)$，拋物線為開口向上之拋物線

因此焦點坐標為$(0,1+2)=(0,3)$

可知$a=0$，$b=3$，因此$a+b=3$，故選(D)

104-01-12

Statement

若雙曲線方程式為$2xy-6x+4y=13$，則其中心點坐標為何？

$(A)\quad(-4,2)$

$(B)\quad(-2,3)$

$(C)\quad(1,-2)$

$(D)\quad(3,-2)$

$(E)\quad(2,1)$

Solution

$2xy-6x+4y=13$

$\Rightarrow 2(xy-3x+2y)=13$

$\Rightarrow 2((x+2)(y-3))=1$

因此中心坐標$(x,y)=(-2,3)$，故選(B)

104-01-13

Statement

若$\log_2 x=\log_x 16$，且其解為$x=a$或$x=b$，則$a+b=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad \frac{3}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad \frac{17}{4}$

Solution

$\frac{\log_2 x}{\log_2 2}=\frac{\log_2 16}{\log_2 x}$，可以得到$\log_2^2 x=4$，可以得到$\log_2 x=\pm 2$

可以得到$\log_2 x=2$，$\log_2 x=-2$

得到$x=4$或$x=\frac{1}{4}$，因此$a+b=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

104-01-14

Statement

若$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$且$f(a)=2$、$f(b)=3$，則$f(a+b)=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{4}$

$(B)\quad \dfrac{7}{5}$

$(C)\quad \dfrac{5}{2}$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 12$

Solution

$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}$

因此$f(a+b)=\dfrac{2^{a+b}+2^{-(a+b)}}{2^{a+b}-2^{-(a+b)}}=\dfrac{2^a2^b+\dfrac{1}{2^a2^b}}{2^a2^b-\dfrac{1}{2^a2^b}}=\dfrac{4^a4^b+1}{4^a4^b-1}$

$\dfrac{4^a+1}{4^a-1}=2$，可以得到$4^a=3$

$\dfrac{4^b+1}{4^b-1}=3$，可以得到$4^b=2$

因此$f(a+b)=\dfrac{6+1}{6-1}=\dfrac{7}{5}$，故選$(B)$

104-01-15

Statement

$\log_2\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\log_4 12=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{2}$

$(B)\quad \dfrac{3}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad \dfrac{5}{2}$

$(E)\quad 3$

Solution

$\log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_4 12$

$= \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\log_2 12$

$= \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_2 \sqrt{12}$

$= \log_2 \frac{4 \cdot 6}{3} = \log_2 8 = 3$，故選$(E)$

104-01-16

Statement

設$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，且$\sin\theta + \cos\theta = \frac{-1}{5}$，則$\tan\theta =?$

$(A) \quad -\frac{12}{5}$

$(B) \quad -\frac{4}{3}$

$(C) \quad -1$

$(D) \quad -\frac{3}{4}$

$(E) \quad -\frac{5}{12}$

Solution

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{25}$

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 2 - \frac{1}{25} = \frac{49}{25}$

$(\sin\theta - \cos\theta) = \pm\frac{7}{5}$ (負不合)

解聯立方程式，可以知道$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{-1}{5} \\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{7}{5} \end{cases}$，可以得到$(\sin\theta, \cos\theta) = (\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$。

因為$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，所以$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4}$，故選$(D)$

104-01-17

Statement

設$t=\tan\frac{\theta}{2}$，則$\dfrac{1}{2-\cos\theta}$ =?

$(A)\quad \dfrac{t^2-1}{3t^2-1}$

$(B)\quad \dfrac{t^2+1}{3t^2+1}$

$(C)\quad \dfrac{3t^2-1}{t^2+1}$

$(D)\quad \dfrac{t}{2t^2+2}$

$(E)\quad \dfrac{t+1}{2t^2+2}$

Solution

因為$\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

所以$\dfrac{1}{2-\cos\theta}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{1+3t^2}$，故選$(B)$

104-01-18

Statement

在xy平面上，曲線$3|x-2|+|2y+1|=6$所圍區域的面積為何？

$(A)\quad 12$

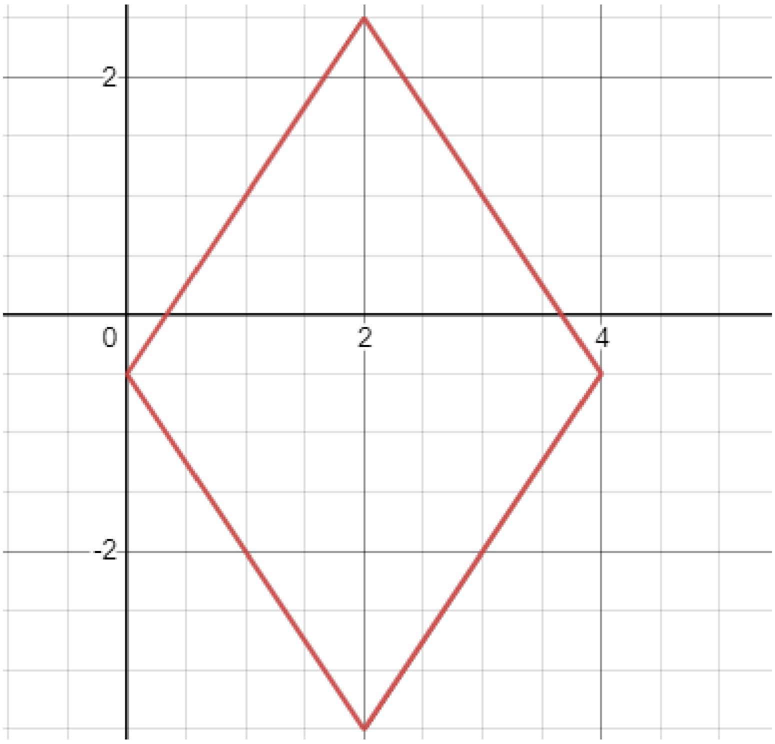
$(B)\quad 13$

$(C)\quad 14$

$(D)\quad 15$

$(E)\quad 16$

Solution



令$2y+1=0$，$y=\frac{-1}{2}$，可以得到$3|x-2|=6$，可以得到$x=4$或$x=0$，得到$\Delta_x=4$

令$x-2=0$，$x=2$，可以得到$|2y+1|=6$，可以得到$y=-\frac{7}{2}$或$y=\frac{5}{2}$，得到$\Delta_y=6$

因此$\frac{4\times 6}{2}=12$，故選(A)

104-01-19

Statement

若(a,b)滿足$2x+3y=1$，則a^2+b^2的最小值為何？

(A) $\frac{1}{13}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{13}}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

Solution

$2a+3b=1$

利用柯西不等式$(2^2+3^2)(a^2+b^2)\geq(2a+3b)^2$

可知$13(a^2+b^2)\geq 1^2$，可知$(a^2+b^2)\geq\frac{1}{13}$，故選$(A)$

104-01-20

Statement

若點A在圓$x^2+y^2=8y$上，且點B在圓$y^2=x(6-x)$上，則$\overline{AB}$長度的最大值為何？

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

(E) 14

Solution

點A在$x^2+(y-4)^2=4^2$，圓心$(0,4)$

點B在$(x-3)^2+y^2=3^2$，圓心$(3,0)$

兩圓圓心距離$\sqrt{3^2+4^2}=5$，則兩圓相交。

因此$\overline{AB}$最大值為$3+5+4=12$，故選(C)