

國立台北科技大學 數學入學會考詳解

作者

- 109 資工系 黃漢軒
 - [Instagram](#)
 - sigtunatw@gmail.com
- 109 化工系 羅昇宇
 - [Instagram](#)
 - qoo18105@gmail.com

感謝北科入學會考出題老師。

所有的解答均為非官方，有任何勘誤上的問題，請聯繫作者。

100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知 $f(x)$ 為一實系數多項式，且 $f(\frac{3}{2}) = 27$ ， $f(-\frac{5}{3}) = 8$ 。

若 $f(x)$ 除以 $(6x^2 + x - 15)$ 的餘式為 $ax + b$ ，則 $b - a = ?$

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 12
- (D) 16
- (E) 20

Solution

可以把式子轉成

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)(6x^2 + x - 15) + ax + b \\ &= g(x)(3x + 5)(2x - 3) + ax + b \end{aligned}$$

代入 $x = \frac{3}{2}$ ，得到 $\frac{3}{2}a + b = 27$

代入 $x = -\frac{5}{3}$ ，得到 $-\frac{5}{3}a + b = 8$

解聯立之後得到 $(a, b) = (6, 18)$

因此 $b - a = 12$ ，故選(C)

100-01-02

Statement

若 α, β 為方程式 $x - \frac{3}{x} + 1 = 0$ 的兩根，則 $(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = ?$

- (A) 9
- (B) 15
- (C) 21
- (D) 27
- (E) 33

Solution

$$(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = \frac{4}{\alpha\beta} + \frac{10(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 25$$

$$x - \frac{3}{x} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

$$\text{利用根與係數，得到 } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\text{因此 } (\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = \frac{4}{-3} + \frac{-10}{-3} + 25 = 27$$

故選(D)

100-01-03

Statement

求 $13^5 - 14 \times 13^4 + 15 \times 13^3 - 25 \times 13^2 - 12 \times 13 + 9 = ?$

- (A) 22
- (B) 25
- (C) 28
- (D) 31
- (E) 34

Solution

將式子考慮成 $f(x) = x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 25x^2 - 12x + 9$

式子等價於 $f(x)$ 除以 $x - 13$ 的餘數（餘式定理）。

因此 $C = \frac{1}{4}$, $D = 1$ 。

因此 $A + B + C + D = 2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$ 之解為何？

(A) $1 \leq x < 2$

(B) $1 < x \leq 2$

(C) $1 < x < 2$

(D) $x \geq 2$ 或 $x < 1$

(E) $x > 2$ 或 $x < 1$

Solution

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 - 5x + 7)}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \leq 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \geq 0 \\ (x-1)(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

因此 $1 < x < 2$ 時， $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$ ，故選(C)

100-01-06

Statement

若 a, b 均為實數且 $ax^2 + bx - 10 < 0$ 之解為 $\frac{-5}{2} < x < \frac{4}{3}$ ，則 $a + b = ?$

(A) 5

(B) $\frac{11}{2}$

(C) 6

(D) $\frac{13}{2}$

(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$$(x + \frac{5}{2})(x - \frac{4}{3}) < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{5x}{2} + \frac{-20}{6} < 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 8x + 15x - 20 < 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 7x - 20 < 0$$

$$\text{兩邊共除2，得 } 3x^2 + \frac{7}{2}x - 10 < 0$$

$$a = 3, b = \frac{7}{2}, a + b = \frac{13}{2}$$

100-01-07

Statement

若直線 $12x - 5y = 21$ 與兩直線 $x = \frac{23}{39}$ 、 $x = \frac{16}{13}$ 分別交於 A 、 B 兩點，則線段長 $\overline{AB} = ?$

(A) $\frac{6}{5}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{13}{5}$

(E) $\frac{25}{7}$

Solution

已知 $12x - 5y = 21$ ，則斜率為 $\frac{12}{5}$

$$\Delta x = \frac{16}{13} - \frac{23}{39} = \frac{25}{39}$$

$$y = mx + b, \text{ 則 } 0 = \frac{12}{5}(\frac{16}{13} - \frac{23}{39}) + b, \text{ 得到 } b = \frac{60}{39} = \Delta y$$

$$\text{因此距離為 } \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{25}{39})^2 + (\frac{60}{39})^2} = \frac{5}{3}, \text{ 故選 (C)}$$

100-01-08

Statement

設兩向量 \vec{a}, \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ ， $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ ，則 $\cos \theta = ?$

(A) $\frac{7}{25}$

(B) $\frac{5}{13}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$$\cos \theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = -\cos \theta$$

$$\text{因此, } \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = \frac{-|a|^2 - |b|^2 + |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 9 = -|a|^2 - |b|^2 + 16$$

$$\text{設 } x = |a| = |b|, \text{ 故 } 2x^2 - 9 = -2x^2 + 16, \text{ 得到 } x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$$

$$\text{代入 } \cos \theta, \text{ 得到 } \frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 9}{2 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2} - 9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = 7$ 、 $|\vec{b}| = 5$ ， $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ ，則 $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = ?$

(A) -25

(B) -5

(C) 0

(D) 44

(E) 51

Solution

$$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$$

$$\text{已知 } \tan \theta = -\frac{3}{4}, \text{ 則 } \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

因此 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos \theta = 7 \times 5 \times -\frac{4}{5} = -28$

因此 $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 98 + 28 - 75 = 51$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以(2, 2)與(6, 2)為兩焦點，且與直線 $x + 1 = 0$ 相切，則橢圓短軸半長為何？

- (A) 4
- (B) $\sqrt{21}$
- (C) $\sqrt{23}$
- (D) $\sqrt{29}$
- (E) 6

Solution

將題目簡化為求 b 的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是 $(\frac{2+6}{2}, \frac{2+2}{2}) = (4, 2)$

焦距 c 為焦點與橢圓中點之距離，因此可知 $c = 2$

已知與直線 $x + 1 = 0$ 相切，因此橢圓左右一端會與 $x + 1 = 0$ 相切，因此其中一端為 $(-1, 2)$

故長軸 a 為橢圓長軸端點與中心之距離，可知 $a = 5$

因此 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線 $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$ 的焦點座標為 (a, b) ，則 $ab = ?$

- (A) 3
- (B) 3.5
- (C) 4
- (D) 4.5
- (E) 5

Solution

$$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

$$\Rightarrow -2(y - 2) = (x - 2)^2$$

$$\text{因此可以知道頂點座標為}(2, 2) \cdot c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{因此焦點為}(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$$

$$\text{故 } a = 2, b = \frac{3}{2}, \text{ 得到 } ab = 3, \text{ 故選 } (A)。$$

100-01-12

Statement

雙曲線 $xy - 3x + 4y = 0$ 兩頂點的距離為何？

(A) $2\sqrt{3}$

(B) 4

(C) $2\sqrt{6}$

(D) $4\sqrt{3}$

(E) $4\sqrt{6}$

Solution

$$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x + 4)(y - 3) = -12$$

考慮通過頂點的線為 $y = -x + b$ ，代入必定通過的點 $(-4, 3)$ 得到 $b = -1$

因此 $y = -x - 1$ 會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$$x(-x - 1) - 3x + 4(-x - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$\text{利用公式解得到 } x \text{ 的點，也就是 } x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{當 } x = -4 + 2\sqrt{3} \text{ 時， } y = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\text{當 } x = -4 - 2\sqrt{3} \text{ 時， } y = -3 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{兩點距離為 } \sqrt{(-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3} - 3 - (-3 - 2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48 + 48} = 4\sqrt{6} \cdot \text{故選 } (E)$$

100-01-13

Statement

若 $\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$ ，則 $x = ?$

(A) -3

(B) -3 或 1

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

$$\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$$

$$\Rightarrow \log_2(3 - x^2) - \log_2 x = 1$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{3 - x^2}{x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3 - x^2}{x} = 2$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = -3$$

驗根可知 $\log_2 x$ 無法放入 -3 ，因為 \log 的定義域為正整數之集合，故 $x = -3$ 不合。

因此 $x = 1$ ，故選(C)

100-01-14

Statement

若 $f(x) = \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$ ，且 $f(a) = 3$ ， $f(b) = 5$ ，則 $f(a + b) = ?$

(A) $\frac{5}{3}$

(B) 2

(C) 6

(D) 8

(E) 15

Solution

$$\text{令 } t = 2^x \text{，則 } f(x) = \frac{1 + t}{1 - t}$$

$$\text{考慮 } f(a) = 3$$

$$\frac{1 + t}{1 - t} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + t = 3 - 3t$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{因此 } 2^a = \frac{1}{2} \cdot \text{得到 } a = -1$$

$$\text{考慮 } f(b) = 5$$

$$\frac{1+t}{1-t} = 5$$

$$\Rightarrow 1+t = 5-5t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$2^b = \frac{2}{3} \cdot \text{則 } b = 1 - \log_2 3$$

$$\text{故 } f(a+b) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 \frac{1}{3}) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{2} = 2 \cdot \text{故選}(B)$$

100-01-15

Statement

$$\text{求 } \log_2(\sqrt{12 + 2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12 - 2^{\frac{7}{2}}}) = ?$$

$$(A) \quad \frac{1}{2}$$

$$(B) \quad \frac{3}{2}$$

$$(C) \quad 2$$

$$(D) \quad \frac{5}{2}$$

$$(E) \quad 4$$

Solution

$$\begin{aligned} \log_2(\sqrt{12 + 2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12 - 2^{\frac{7}{2}}}) &= \log_2(\sqrt{12 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}) = \log_2(\sqrt{8 + 8\sqrt{2} + 4} + \sqrt{8 - 8\sqrt{2} + 4}) \\ &= \log_2(\sqrt{(2 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2 - 2\sqrt{2})^2}) = \log_2(4\sqrt{2}) = \frac{5}{2} \cdot \text{故選}(D) \end{aligned}$$

100-01-16

Statement

$$\text{設 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \cdot \text{且 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \text{則 } \sin \theta + \cos \theta = ?$$

- (A) -1
(B) $-\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
(E) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{故 } \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \sin \theta + \cos \theta &= \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \text{故選 (E)} \end{aligned}$$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

- (A) 若 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ，則 $\sin x < \cos x < \cot x$
(B) 若 $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ，則 $\sec x < \csc x < \cot x$
(C) 若 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\cos x < \sin x < \tan x$
(D) 若 $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $\sin x_1 > \sin x_2$
(E) 若 $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$ ，則 $\cos x_1 > \cos x_2$

Solution

$$\text{若 } \pi < x < \frac{5\pi}{4} \text{，則 } \sin \theta < \cos \theta < \tan \theta$$

$$\text{故 } \csc \theta < \sec \theta < \cot \theta \text{，故選 (B)}$$

100-01-18

Statement

若 $mx + 3y + 1 = 0$ 與 $x + (m - 2)y + m = 0$ 之交點在第二象限內，則 m 之範圍為何？

- (A) $0 < m < 1$
- (B) $0 < m < 2$
- (C) $0 < m < 3$
- (D) $1 < m < 3$
- (E) $1 < m < 4$

Solution

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \frac{2m + 2}{(m - 3)(m + 1)} \\ y = \frac{m^2 - 1}{(-m + 3)(m + 1)} \end{cases}$$

考慮到 $y > 0, x < 0$ 的情況

得到 $((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

得到 $1 < m < 3$ ，故選(D)

100-01-19

Statement

若點 (a, b) 在直線 $2x + 3y = 1$ 上移動，則直線 $ax + by = 3$ 恆過哪一點？

- (A) $(3, 4)$
- (B) $(4, 5)$
- (C) $(5, 7)$
- (D) $(5, 8)$
- (E) $(6, 9)$

Solution

考慮 $x = 5$ 時 $y = -3$

考慮 $x = -4$ 時 $y = 3$

由於 a, b 依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮 $5x - 3y = 3$ 與 $-4x + 3y = 3$ 的交點，得到 $(x, y) = (6, 9)$ ，故選(E)

100-01-20

Statement

已知 $A(3, -5)$ 、 $B(-7, 4)$ ，且點 P 介於 A 、 B 之間，又 $\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4$ ，若 P 之座標為 (a, b) ，則 $7a + 21b = ?$

(A) -33

(B) -32

(C) -31

(D) -30

(E) -29

Solution

$$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$$

利用內分點公式。

$$P = \left(\frac{4 \times 3 + 3 \times (-7)}{7}, \frac{4 \times (-5) + 3 \times 4}{7} \right) = \left(\frac{-9}{7}, \frac{-8}{7} \right)$$

則 $7a + 21b = (-9) + (-8) \times 3 = -33$ ，故選(A)

100年第2次北科入學數學會考

100-02-01

Statement

若 α 、 β 為方程式 $x^2 + 12x + 9 = 0$ 的兩根，則 $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = ?$

(A) -18

(B) -6

(C) 6

(D) 12

(E) 18

Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式 $ax^2 + bx + c$ ，存在兩根 α 與 β 。

$$\text{那麼 } \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \text{ 且 } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$$\sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2$$

$$\Rightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta$$

根據偉達定理我們可以求得

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

注意一下 $\alpha + \beta = -12$ · $\alpha\beta = 9$

若兩根一正一負那麼 $\alpha\beta < 0$ · 若兩根都是正的那麼 $a + b > 0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ 會存在複數 · 相乘後可以得到 $-\sqrt{\alpha\beta}$ 。

因此帶回欲求之式子：

$$-12 - 2 \times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$$

100-02-02

Statement

若 $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ 與 $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ 的最高公因式為 $x^2 + bx + c$ · 則 $b + 2c = ?$

(A) -5

(B) -3

(C) 0

(D) 5

(E) 7

Solution

第一式的因式 $ax + b$ 的 a 一定會是 1 的因素(因為最大項係數等於 1) ·

且 b 一定會是 2 的因數(因為最小項的係數等於 2) · 第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解 · 得到 $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$

接著我們以相同方式對第二式做因式分解 · 得倒 $(x + 1)(x - 2)(2x + 3)$

可以觀察到最大公因式即為 $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$

比較係數後得到 $b = -1, c = -2$

則 $b + 2c = -1 + 2 \times -2 = -5$ 。

100-02-03

Statement

若 $\frac{8x^3 - 6x + 1}{(2x + 1)^4} = \frac{a}{(2x + 1)} + \frac{b}{(2x + 1)^2} + \frac{c}{(2x + 1)^3} + \frac{d}{(2x + 1)^4}$ · 則 $2a + b - c + d = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

我們可以使用綜合除法，將 $2x + 1$ 改寫成 $x + \frac{1}{2}$ ，然後再對除出來的係數除以2。

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & 0 & -6 & 1 & -1/2 \\ & -4 & 2 & 2 & \\ \hline 8 & -4 & -4 & 3 & \\ & 4 & -2 & -2 & D \\ & & -2 & 2 & \\ \hline 4 & -4 & 0 & & \\ & 2 & -2 & C & \\ & & -1 & & \\ \hline 2 & -3 & & & \\ & 1 & B & & \\ A & & & & \end{array}$$

因此 $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 3$ 。

$$2a + b - c + d = 1 \times 2 + (-3) - 0 + 3 = 2。$$

100-02-04

Statement

$x^2 - 4x + 2 \leq |x - 2|$ 之解為何？

- (A) $1 \leq x \leq 4$
(B) $2 \leq x \leq 4$
(C) $0 \leq x \leq 2$
(D) $0 \leq x \leq 4$
(E) $0 \leq x \leq 3$

Solution

1. 考慮 $x^2 - 4x + 2 \leq x - 2$ ：

移項， $x^2 - 4x + 2 - x + 2 \leq 0$

整理， $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

那麼我們可以將其因式分解，得 $(x - 4)(x - 1) \leq 0$ ，並且可以得到 $1 \leq x \leq 4$ 。

2. 考慮 $x^2 - 4x + 2 \leq -x + 2$ ：

移項， $x^2 - 4x + 2 + x - 2 \leq 0$

整理， $x^2 - 3x \leq 0$

那麼我們可以將其因式分解，得 $x(x - 3) \leq 0$ ，並且可以得到 $0 \leq x \leq 3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到 $0 \leq x \leq 4$ 。

100-02-05

Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$ 之解為何？

(A) $x < \frac{-1}{2}$ 或 $0 < x < 1$

(B) $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $1 < x < 2$

(C) $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $0 < x < 1$

(D) $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$

(E) $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$

Solution

$$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{\log 2}{\log x} < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} < 1$$

令 $\log_2 x = t$ ，那麼

$$2t - \frac{1}{t} < 1$$

$$\Rightarrow 2t - \frac{1}{t} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$$

考慮兩種情況。

1. 若 $t > 0$ 且 $2t^2 - t - 1 < 0$

$$2t^2 - t - 1 < 0 = (2t + 1)(t - 1) < 0 = \frac{-1}{2} < t < 1$$

與 $t > 0$ 取交集得到 $0 < t < 1$ 。

2. 若 $t < 0$ 且 $2t^2 - t - 1 > 0$

$$2t^2 - t - 1 > 0 = (2t + 1)(t - 1) > 0 = t < \frac{-1}{2} \text{ 或 } t > 1$$

與 $t < 0$ 取交集得到 $t < \frac{-1}{2}$ 。

對這兩種考慮取聯集，得到 $t < \frac{-1}{2}$ 或 $0 < t < 1$ 。

還原，得到 $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$ 。

100-02-06

Statement

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 37$ ， $\overline{BC} = 53$ ， $\overline{AC} = 89$ ，則下列各內積中，何者為最大？

(A) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(B) $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$

(C) $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

(D) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

(E) $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$

Solution

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 37 \times 89 \times \frac{37^2 + 89^2 - 53^2}{2 \times 37 \times 89}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 53 \times 37 \times \frac{53^2 + 37^2 - 89^2}{2 \times 53 \times 37}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 89 \times 37 \times \frac{89^2 + 53^2 - 37^2}{2 \times 89 \times 53}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} < 0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$$37^2 + 89^2 - 53^2。$$

$$53^2 + 37^2 - 89^2$$

$$89^2 + 53^2 - 37^2$$

顯然是第三者較大，故選(C)

100-02-07

Statement

已知向量 $\vec{AB} = (-31, 29)$ ， $\vec{AC} = (23, -11)$ ，則下列向量長中，何者為最大？

(A) $|\vec{AB}|$

(B) $|\vec{BC}|$

(C) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$

(D) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

(E) $|\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}|$

Solution

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$$

$$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$$

$$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$$

考慮向量長的公式，當存在一向量 $\vec{L} = (A, B)$ ， \vec{L} 的向量長為 $|\vec{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$

因此若 $|A| + |B|$ 越大，那麼向量長越大。

考慮選項A： $|-31| + |29| = 60$

考慮選項B： $|54| + |-40| = 94$

考慮選項C： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$ ， $|23| + |-11| = 34$

考慮選項D： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$ ， $|-8| + |18| = 26$

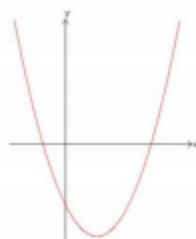
考慮選項E： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$ ， $|0| + |0| = 0$

因此，故選B。

100-02-08

Statement

設 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



(A) abc

(B) $b^2 - 4ac$

(C) $c^2 - 4ab$

(D) $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$

(E) $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$

Solution

因為開口向上，所以 $a > 0$ 。

觀察 $x = 0$ ，可以發現對應到的 $y < 0$ ，因此 $c < 0$

觀察一下對稱軸， $\frac{-b}{2a} > 0$ ，因此 $b < 0$

因此 $abc > 0$ ， $b^2 - 4ac > 0$ 因為有實數解。

$c^2 - 4ab > 0$ 因為 $ab < 0$ 。

而 $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ 必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，

另一根是負數因此 $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ 小於 0，故選 E。

100-02-09

Statement

已知 $4x^2 + y^2 - 4x + 8y = 8$ ，則 x 的最大值為何？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的 x 了。

$$4x^2 - 4x + y^2 + 8y = 8$$

$$4(x^2 - x) + y^2 + 8y = 8$$

$$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 + 8y + 16 = 8 + 16 + 1$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y + 4)^2}{25}$$

由此可知這個橢圓的短邊平行 x 軸

$$a = \sqrt{25} = 5, b = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

中心可從式子得知， $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

因此，加上 x 的部份得到 $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

100-02-10

Statement

拋物線 $y = 4 - 2x - x^2$ 與 x 軸兩交點的距離為何？

- (A) 2
- (B) 3
- (C) $2\sqrt{5}$
- (D) 6
- (E) 8

Solution

將 y 等於0，求出 x 。

$$-x^2 - 2x + 4 = 0$$

先確定 $b^2 - 4ac$ 是否大於0。

$$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20$$

$$\text{因此兩根為 } \frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$$

$$\frac{2 + \sqrt{5}}{-2} - \frac{2 - \sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$$

100-02-11

Statement

設雙曲線 $x^2 - y^2 = x + 2y$ 兩漸進的夾角為 θ ，則 $\sin \frac{\theta}{2} = ?$

(A) 0

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(E) 1

Solution

配方雙曲線得到標準式。

$$x^2 - x - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4(x - \frac{1}{2})^2}{5} - \frac{4(y - 1)^2}{5} = 1$$

求漸進線，令等號右邊為0

$$\frac{4(x - \frac{1}{2})^2}{5} = \frac{4(y - 1)^2}{5}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = (y - 1)^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - 1)^2 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2} - (y - 1))(x - \frac{1}{2} + (y - 1)) = 0$$

$$(x - y + \frac{1}{2})(x + y + \frac{3}{2}) = 0$$

第一條線 $(x - y + \frac{1}{2})$ 可求斜率 $m = 1$

第二條線 $(x + y + \frac{3}{2})$ 可求斜率 $m = -1$

因此，這兩條線垂直 ($m_1 \times m_2 = -1$)，夾角為 90°

因此 $\sin \frac{90^\circ}{2} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

100-02-12

Statement

不等式 $\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \leq 2$ 之解為何？

(A) $-1 \leq x \leq 1$

(B) $0 < x \leq 1$

(C) $1 \leq x \leq 2$

(D) $0 < x \leq 2$

(E) $1 \leq x \leq 4$

Solution

將分子分母上下同乘 2^x 。

$$\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} \leq 2$$

移項。

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2(2^{2x} - 1)}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2 \cdot 2^{2x} + 2}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{2^{2x} - 16}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

令 $t = 2^{2x}$

$$\frac{t - 16}{t - 1} \leq 0$$

考慮以下兩點：

1. $t - 16 \geq 0 \cdot t - 1 < 0$

$t \geq 16, t < 1$ ，這兩個不等式沒有任何交集，因此 $t \in \emptyset$

2. $t - 16 \leq 0 \cdot t - 1 > 0$

$t \leq 16, t > 1$ ，這兩個不等式的交集為 $1 < t \leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到 $1 < t \leq 16$

還原 t 得到 $1 < 2^{2x} \leq 16$ ，因此 $0 < x \leq 2$

100-02-13

Statement

方程式 $10 \cdot x^{2 \log x} = x^3$ 之所有實根的平方和為何？

- (A) 100
- (B) 101
- (C) 110
- (D) 111
- (E) 121

Solution

等號兩邊同除 $x^{2 \log x}$

$$10 = x^{3-2 \log x}$$

$$1 = (3 - 2 \log x) \times \log(|x|)$$

因為要求實根，因此可以限定 $x > 0$ ，所以 $(3 - 2 \log x) \times \log(x)$

$$\text{令 } t = \log x$$

$$1 = (3 - 2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\text{因式分解得到 } (-2t + 1)(t - 1) = 0$$

$$\text{可以解出 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = 1$$

$$\text{還原 } t，\text{可以得到 } \log x = \sqrt{10} \text{ 或 } \log x = 10$$

$$\text{兩根的平方和為 } \sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$$

100-02-14

Statement

若 $f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$ ，則 $f(1 + \sqrt{2}) = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

觀察一下，可以嘗試把 $x^3 + x^2 - 7x + 5$ 化簡成 $c(x-1)^2 + b(x-1) + a \dots$

這部分可以用綜合除法做到。

$$\begin{array}{r|l}
 1 & 1-7+5 \\
 + & 1+2-5 \\
 \hline
 1 & 2-5 \\
 - & 1-3 \\
 \hline
 1 & 3-2 \\
 - & 1-1 \\
 \hline
 & 4 \\
 \hline
 & \bar{a} \bar{b}
 \end{array}$$

因此可得 $(x-1)^3 + 4(x-1)^2 - 2(x-1)$ 。

把 $f(1+\sqrt{2})$ 帶進去，得：

$$\log_2((\sqrt{2})^3 + 4(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})) = \log_2(2\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{2}) = \log_2 8 = 3$$

100-02-15

Statement

設 $\cos \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，則 $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = ?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

$$\cos^2 \theta = 1 - \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - (1 - \cos \theta) = \cos \theta$$

$$\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$$

100-02-16

Statement

設 $\tan 100^\circ = k$ ，則 $\sin 80^\circ = ?$

(A) $\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

(B) $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}$

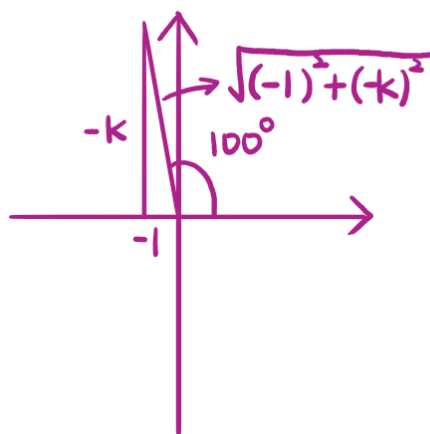
(C) $\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$

(D) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

Solution

畫個圖



看圖可以觀察到， $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

100-02-17

Statement

設 $a = \sec 434^\circ$ ， $b = \sin 100^\circ$ ， $c = \cos 260^\circ$ ， $d = \cot 28^\circ$ ， $e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A) $b < c < d < e < a$

(B) $c < b < d < e < a$

(C) $c < b < e < d < a$

(D) $c < b < d < a < e$

(E) $b < c < a < d < e$

Solution

$$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$$

$$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$$

$$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$$

$$d = \cot 28^\circ$$

$$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$$

因此 $a > e$ ， $c < b$ ，故選B。

100-02-18

Statement

平面上有兩點 $A(1, 2)$ 、 $B(a, b)$ ，若直線 \overline{AB} 之垂直平分線為 $x + 2y - 10 = 0$ ，則 $a - b = ?$

(A) -1

(B) -2

(C) -3

(D) -4

(E) -5

Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過 \overline{AB} 的中點 $(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$ 。

帶入垂直平分線得到 $\frac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$

$$\Rightarrow a + 2b = 15$$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到 $m = \frac{-1}{2}$ ，因此與其垂直的斜率一定是 $m = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到 $\frac{2-b}{1-a} = 2$ ，整理得到 $2 - b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$ 。

帶回第一式可以得到 $5a = 15$ ， $a = 3$ ， $b = 6$ 。

$$a - b = 3 - 6 = -3$$

Statement

設直線 $bx + ay - ab = 0$ ， $a > 0$ ， $b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為 2 的三角形，則 $a + 2b = ?$

(A) $-7 - 3\sqrt{3}$

(B) $-6 - 3\sqrt{3}$

(C) $-5 - 3\sqrt{3}$

(D) $-4 - 3\sqrt{3}$

(E) $-3 - 3\sqrt{3}$

Solution

可以推出 x, y 的通式。

$bx + ay = ab$ ，求出 x, y 的截距。

當 $y = 0$ ，那麼 $bx = ab$ ， $x = a$

當 $x = 0$ ，那麼 $ay = ab$ ， $y = b$

已知 $a > 0, b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為 2 的三角形。

因此可以知道 $\frac{1}{2}|a||b| = 2$ ，可知 $ab = -4$ 或者 $ab = 4$ ，但是 $a > 0, b < 0$ ，因此 $ab = 4$ 不合。

已知過點 $(1, 2)$ 且 $ab = -4$ ，因此可以把點帶入得到 $b + 2a = -4$ 。

又 $ab = -4$ 所以 $a = \frac{-4}{b}$ ，所以得到 $b + \frac{-8}{b} = -4$

同乘以 b 可以得到 $b^2 + 4b - 8 = 0$ 。

利用公式解可以解出 $\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times -8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根 $-2 + 2\sqrt{3}$ 或者 $-2 - 2\sqrt{3}$ ，其中由於 $b < 0$ ，因此 $-2 + 2\sqrt{3}$ 不合。

帶回求出 a 得到 $a = \frac{-4}{-2 - 2\sqrt{3}} = \frac{-4}{-2(1 + \sqrt{3})}$

化簡得到 $a = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = -1(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

因此 $a + 2b = \sqrt{3} - 1 + -4 - 4\sqrt{3} = -5 - 3\sqrt{3}$

100-02-20

Statement

設直線 $3x + y = 1$ 與 $x + 3y = 2$ 之夾角為 θ ，則 $\cos 2\theta = ?$

(A) $\frac{-7}{25}$

(B) $\frac{-6}{25}$

(C) $\frac{-1}{5}$

(D) $\frac{-4}{25}$

(E) $\frac{-3}{25}$

Solution

考慮兩條線的斜率。

$$3x + y = 1, m_1 = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x + 3y = 2, m_2 = \frac{-1}{3}$$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為 \tan 來考慮。

$$\tan(m_1 - m_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{-1}{3}}{1 + 1} = \frac{\frac{-8}{3}}{2} = \frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個 \tan 夾角是負的，因此這個夾角是大於 90° 的鈍角。

可以依照 $\tan(180^\circ) = 0$ 來求得另一個銳角的夾角。

$$\frac{\frac{-4}{3} + \tan \theta}{1 - \frac{-4}{3} \tan \theta}, \text{ 求得銳角 } \tan \theta = \frac{4}{3}$$

由於 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ，那麼這個角度會介於 $45^\circ \sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於 90°

$$\text{用兩倍角公式求出 } \tan 2\theta = \frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{24}{-7}$$

由於這個角度介於 $90^\circ \sim 180^\circ$ ， $y > 0$ ，而 $x < 0$ ，也因此 $y = 24$ ， $x = -7$ ， $r = \sqrt{24^2 + (-7)^2} = 25$

因此 $\cos 2\theta = \frac{-7}{25}$ ，故選(A)

