101-02-01

Statement

設$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{-5}{13}$，且$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，則$\sin(\alpha-\beta)=?$

(A) $\dfrac{-56}{65}$

(B) $\dfrac{-16}{65}$

(C) $\dfrac{16}{65}$

(D) $\dfrac{27}{65}$

(E) $\dfrac{56}{65}$

Solution

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\sin\alpha<1,\ 0<\cos\alpha<1$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}=\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$

$\because \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$

$\therefore 0<\sin\beta<1,\ -1<\cos\beta<0$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-(\dfrac{-5}{13})^2}=\dfrac{12}{13}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{-5}{13}-\dfrac{12}{13}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{-20}{65}-\dfrac{36}{65}=\dfrac{-56}{65}$

102-02-02

Statement

方程式$2^{x^2}\cdot 4^x\cdot 16=8^x\cdot 64$之所有解的和為何？

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

將式子改寫。

$2^{x^2} \cdot 4^x = 8^x \cdot 64$

$\Rightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{2x} = 2^{3x} \cdot 2^6$

$\Rightarrow 2^{x^2+2x} = 2^{3x+6}$

兩邊同取$\log_2$，得到$x^2 + 2x = 3x + 6$

也就得到$x^2 - x - 6 = 0$，因式分解得到$(x-3)(x+2) = 0$

解根得到$x = 3$或$x = -2$，$3 + (-2) = 1$

101-02-03

Statement

已知Γ表$f(x,y) = 0$所對應之圖形，若Γ水平方向拉長2倍，再往右平移1單位，則此新圖形的方程式為何？

(A) $\mathrm{f}(\frac{\mathrm{x}}{2} + 1, \mathrm{y}) = 0$

Solution

考慮拉長兩倍，那麼a要變大兩倍，因此x乘以$\frac{1}{2}$

考慮往右平移一單位，那麼座標$x-1$，因此x減1

因此$f = (\frac{x-1}{2}, y) = 0$。

101-02-04

Statement

設直線L過點$(-1,1)$且與直線$8x - 6y = 1$垂直，則此直線方程式為何？

(A) $3\mathrm{x} - 4\mathrm{y} = -1$

(B) $4\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = -1$

(C) $4\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = -7$

(D) $3\mathrm{x} + 4\mathrm{y} = 1$

(E) $\mathrm{x} - \mathrm{y} = -2$

Solution

直線$8x-6y=1$的斜率為$\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}$

因此造一條與其垂直的直線，這條直線的斜率與其斜率乘積必為-1。

$\frac{4}{3}\times m=-1, m=\frac{-3}{4}$

已知此直線會過點$(-1,1)$，因此$y-1=\frac{-3}{4}(x+1)$

$4y-4=-3(x+1),\ 3x+4y=1$

101-02-05

Statement

過點$(2,-3)$與圓$(x-1)^2+(y+1)^2=5$相切的直線方程式為何？

$(\mathrm{A})\ 2\mathrm{x}-\mathrm{y}=7$

$(\mathrm{B})\ \mathrm{x}+2\mathrm{y}=-4$

$(\mathrm{C})\ 2\mathrm{x}-3\mathrm{y}=13$

$(\mathrm{D})\ 3\mathrm{x}-2\mathrm{y}=12$

$(\mathrm{E})\ \mathrm{x}-2\mathrm{y}=8$

Solution

從圓的方程式可以知道，圓心為$(1,-1)$且半徑為$\sqrt{5}$。

因此我們可以造過點$(2,-3)$的線，並且距離與圓心剛好為$\sqrt{5}$

可以套用距離公式來得到。

令與圓相切的直線為$y+3=m(x-2)$

整理後得到$mx-y-2m-3=0$

我們可以套用距離公式，得到$\frac{|mx-y-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

將圓心帶入距離公式，得到$|m+1-2m-3|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

整理後得到$|-m-2|=\sqrt{5m^2+5}$

兩邊平方後得到$(-m-2)^2=5m^2-5\Rightarrow m^2+4m+4=5m^2+5$

因此$-4m^2+4m-1$，$m=\frac{1}{2}$ (重根)

$y+3=\frac{1}{2}(x-2)$

$\Rightarrow\ 2y+6=x-2$

$\Rightarrow\ x-2y-8=0$

$\Rightarrow x-2y=8$

101-02-06

Statement

以$(1,3+\sqrt{5})$與$(1,3-\sqrt{5})$為兩焦點且短軸長為6之橢圓方程式為何？

(A) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{14}=1$

(B) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{25}=1$

(C) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{14}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{9}=1$

(D) $\frac{(\mathrm{x}-3)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{14}=1$

(E) $\frac{(\mathrm{x}-3)^2}{25}+\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{9}=1$

Solution

兩焦點只有y軸有變動，因此這是一個貫軸平行y軸的橢圓。

中心$(x,y)=(\frac{1+1}{2},\frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2})=(1,3)$

$2c=(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5},\ c=\sqrt{5}$

$2b=6,b=3$

因此$a=\sqrt{3^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9+5}=\sqrt{14}$

依照$\frac{(x-h)}{b}+\frac{(y-k)}{a}=1$列式，得

$\frac{(x-1)}{9}+\frac{(y-3)}{14}=1$

101-02-07

Statement

設$2\log(x-3)-\log 2=\log(x+9)$，則$x^2-10x+12$之值為何？

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$2\log(x-3)-\log 2=\log(x+9)$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2-6x+9}{x+9})=\log(2)$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2-6x+9}{2x+18})=0$

$\Rightarrow \frac{x^2-6x+9}{2x+18}=1$

$\Rightarrow x^2-6x+9=2x+18$

$\Rightarrow x^2-8x-9=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-9)=0$

得到$x=-1, x=9$

驗根，由於$x=-1$帶進去後，$x-3<0$，又因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-1$不合。

因此$x=9$。

$9^2-90+12=81-90+12=3$，故選(C)。

101-02-08

Statement

若$0\leq\theta<2\pi$，則$\cos 2\theta+2\cos^2\frac{\theta}{2}=1$有幾個解？

$(A)\quad 0$
$(B)\quad 1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

利用和角公式，可以知道

$\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}-(1-\cos^2\frac{\theta}{2})=2\cos^2(\frac{\theta}{2})-1=\cos\theta$

因此$\cos\theta+1=2\cos^2(\frac{\theta}{2})$

且$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

$2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1=1$

$2\cos^2\theta+\cos\theta=1$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

令$t=\cos\theta$，則$2t^2+t-1=0$，可得$t=\dfrac{1}{2}$或$t=-1$

考慮$t=\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，則$\theta=\dfrac{\pi}{3}$或$\theta=\dfrac{-\pi}{3}$

考慮$t=\cos\theta=-1$，則$\theta=\pi$

因此有三組解，故選(D)

101-02-09

Statement

設a、b、c分別表示ΔABC的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對邊長，若$b^2-(c-a)^2=ca$，則$\angle B=?$

$(A)\quad 30^\circ$
$(B)\quad 45^\circ$
$(C)\quad 60^\circ$
$(D)\quad 120^\circ$
$(E)\quad 135^\circ$

Solution

$b^2-(c-a)^2=ca$

$\Rightarrow b^2-(c^2-2ac+a^2)=ca$

$\Rightarrow b^2-c^2+2ac-a^2=ca$

$\Rightarrow b^2-c^2-a^2=-ac$

$\Rightarrow a^2+c^2-b^2=ac$

$\Rightarrow \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$

又$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$

因此$\angle B=\dfrac{\pi}{3}=60^\circ$，故選$(C)$。

101-02-10

Statement

方程式$x^{1+\log_2 x}=(2x^3)$之所有解的和為何？

$(A)\quad \frac{15}{2}$
$(B)\quad 8$
$(C)\quad \frac{17}{2}$
$(D)\quad 9$
$(E)\quad \frac{19}{2}$

Solution

$x^{1+\log_2 x} = 8x^3$

$\Rightarrow 1+\log_2 x = \log_x(8x^3)$

$\Rightarrow 1+\log_2 x = \dfrac{\log_2 8x^3}{\log_2 x}$

$\Rightarrow \log_2 x + \log_2^2 x = \log_2 8x^3$

$\Rightarrow \log_2 x + \log_2^2 x = 3 + 3\log_2 x$

令$t = \log_2 x$，則$t + t^2 = 3 + 3t$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

$\Rightarrow t = 3$或$t = -1$

還原t，得到$\begin{cases} \log_2 x = 3, & x = 8 \\ \log_2 x = -1, & x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

因此$8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$，故選$(C)$

101-02-11

Statement

若$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$，且$(f \circ g)(x) = \dfrac{x}{x+1}$，則$g(0) = ?$

$(A)\quad 0$
$(B)\quad 1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$，則$f(g(0)) = \dfrac{x}{x+1} = 0$，因此$\dfrac{x-1}{x} = 1$，因此$g(0) = 1$，故選$(B)$。

101-02-12

Statement

已知平面上兩點$A(-3,1)$，$B(3,5)$，又點$P(a,b)$在直線$2x+y+1=0$且$\overline{PA}=\overline{PB}$，則$a+b=?$

$(A)\quad 5$
$(B)\quad 6$
$(C)\quad 7$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 9$

Solution

將A,B兩點帶入直線，確定是否同側或異側。

代入點$A: 2\cdot(-3)+1+1=-4$

代入點$B: 2\times 3+5+1=12$

因此兩點異側。

$2x+y+1=0 \Rightarrow y=-2x-1$

由於$\overline{PA}=\overline{PB}$，因此

$\sqrt{(-3-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(5-y)^2}$

$\Rightarrow (-3-x)^2+(1+2x+1)^2=(3-x)^2+(5+2x+1)^2$

$\Rightarrow (-3-x)^2+(2x+2)^2=(3-x)^2+(6+2x)^2$

$\Rightarrow 5x^2+14x+13=5x^2+18x+45$

$\Rightarrow -4x=32$

$\Rightarrow x=-8$

$\Rightarrow y=15$

因此$a=-8, b=15, a+b=7$，故選(C)

101-02-13

Statement

設二向量$\vec{a}=<2,t^2-3>$，$\vec{b}=<t,-1>$。

若$\vec{a}$和$\vec{b}$的夾角為$\frac{\pi}{2}$，且$\vec{b}$的長度不大於2，則$t=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

$\cos\frac{\pi}{2}=0$，因此$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$，因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2t-t^2+3=(-t+3)(t+1)=0$

得到$t=3$或$t=-1$

長度不大於2，因此我們考慮兩種t套進$\vec{b}$的影響

考慮$t=3$，得到$\sqrt{(3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}>2$，因此$t=3$不合

考慮$t=-1$，得到$\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

因此$t=-1$，故選(B)。

101-02-14

Statement

設$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$為方程式$x^2-6x+5=0$的兩根，且$\alpha<\beta+2$，則$\beta=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

利用根與係數，可以知道

$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=-(\frac{-6}{1})=6$

$2\alpha=6$則$\alpha=3$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2=5$，則$\beta=\pm2$

由於要滿足$\alpha<\beta+2$，所以$\beta=-2$不合。

因此$\beta=2$，故選(C)。