100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知$f(x)$為一實系數多項式，且$f(\frac{3}{2})=27$，$f(-\frac{5}{3})=8$。

若$f(x)$除以$(6x^2+x-15)$的餘式為$ax+b$，則$b-a=?$

(A)　4
(B)　8
(C)　12
(D)　16
(E)　20

Solution

可以把式子轉成

$f(x)=g(x)(6x^2+x-15)+ax+b$

$=g(x)(3x+5)(2x-3)+ax+b$

代入$x=\frac{3}{2}$，得到$\frac{3}{2}a+b=27$

代入$x=\frac{-5}{3}$，得到$\frac{-5}{3}a+b=8$

解聯立之後得到$(a,b)=(6,18)$

因此$b-a=12$，故選(C)

100-01-02

Statement

若α,β為方程式$x-\frac{3}{x}+1=0$的兩根，則$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=?$

(A)　9
(B)　15
(C)　21
(D)　27
(E)　33

Solution

$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{10(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+25$

$x-\frac{3}{x}+1=0 \Rightarrow x^2+x-3=0$

利用根與係數，得到$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3$

因此$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=\frac{4}{-3}+\frac{-10}{-3}+25=27$

故選(D)

100-01-03

Statement

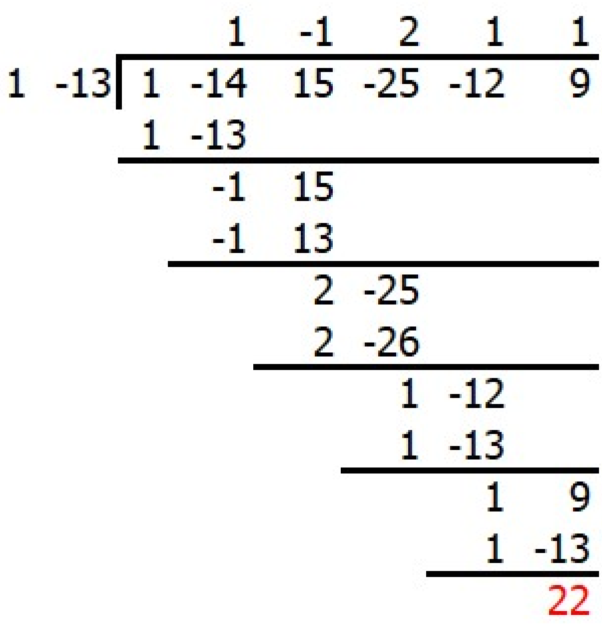
求$13^5-14\times 13^4+15\times 13^3-25\times 13^2-12\times 13+9=?$

(A) 22
(B) 25
(C) 28
(D) 31
(E) 34

Solution

將式子考慮成$f(x)=x^5-14x^4+15x^3-25x^2-12x+9$

式子等價於$f(x)$除以$x-13$的餘數（餘式定理）。



故答案選(A)。

100-01-04

Statement

若$\dfrac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$，則$A+B+C+D=?$

(A)　$\frac{1}{2}$
(B)　2
(C)　3
(D)　$\frac{7}{2}$
(E)　33

Solution

$\dfrac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$

$2x^2-x+4=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2)$

$=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$

$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B$

可知

$A+C=0$
$B+D=2$
$A=-\frac{1}{4}$
$B=1$

因此$C=\frac{1}{4}$，$D=1$。

因此$A+B+C+D=2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}\leq -1$之解為何？

(A) $1\leq x<2$
(B) $1<x\leq 2$
(C) $1<x<2$
(D) $x\geq 2$ 或 $x<1$
(E) $x>2$ 或 $x<1$

Solution

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}\le -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}+1\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2}\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2-5x+7)}{(x-1)(x-2)}\le 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2-10x+14\le 0 \\ (x-1)(x-2)>0 \end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

$$\begin{cases} x^2-10x+14\ge 0 \\ (x-1)(x-2)<0 \end{cases}\Rightarrow 1<x<2$$

因此$1<x<2$時，$\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}\le -1$，故選$(C)$

100-01-06

Statement

若$a,\ b$均為實數且$ax^2+bx-10<0$之解為$\dfrac{-5}{2}<x<\dfrac{4}{3}$，則$a+b=?$

(A) 5
(B) $\dfrac{11}{2}$
(C) 6
(D) $\dfrac{13}{2}$
(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$$(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3})<0$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{4x}{3}+\frac{5x}{2}+\frac{-20}{6}<0$$
$$\Rightarrow 6x^2-8x+15x-20<0$$
$$\Rightarrow 6x^2+7x-20<0$$

兩邊共除2，得$3x^2+\dfrac{7}{2}x-10<0$

$$a=3,\ b=\frac{7}{2},\ a+b=\frac{13}{2}$$

100-01-07

Statement

若直線$12x-5y=21$與兩直線$x=\frac{23}{39}$、$x=\frac{16}{13}$分別交於A、B兩點，則線段長$\overline{AB}=?$

(A) $\frac{6}{5}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{13}{5}$

(E) $\frac{25}{7}$

Solution

已知$12x-5y=21$，則斜率為$\frac{12}{5}$

$\Delta x=\frac{16}{13}-\frac{23}{39}=\frac{25}{39}$

$y=mx+b$，則$0=\frac{12}{5}(\frac{16}{13}-\frac{23}{39})+b$，得到$b=\frac{60}{39}=\Delta y$

因此距離為$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\frac{25}{39})^2+(\frac{60}{39})^2}=\frac{5}{3}$，故選$(C)$

100-01-08

Statement

設兩向量$\vec{a},\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$，則$\cos\theta=?$

(A) $\frac{7}{25}$

(B) $\frac{5}{13}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$$\cos\theta = \frac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2\times|a|\times|b|}$$

$$\cos(\pi-\theta) = \frac{|a|^2+|b|^2-|a+b|^2}{2\times|a|\times|b|} = -\cos\theta$$

因此，$\dfrac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2\times|a|\times|b|} = \dfrac{-|a|^2-|b|^2+|a+b|^2}{2\times|a|\times|b|}$

$|a|^2+|b|^2-9 = -|a|^2-|b|^2+16$

設$x=|a|=|b|$，故$2x^2-9=-2x^2+16$，得到$x=\dfrac{5}{2}=|a|=|b|$

代入$\cos\theta$，得到$\dfrac{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}-9}{2\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}} = \dfrac{\frac{25}{2}-9}{\frac{25}{2}} = \dfrac{7}{25}$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}|=7$、$|\vec{b}|=5$，$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$，則$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})=?$

$(A)\quad -25$
$(B)\quad -5$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 44$
$(E)\quad 51$

Solution

$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2-3(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2$

已知$\tan\theta=\dfrac{-3}{4}$，則$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta=7\times5\times-\dfrac{4}{5}=-28$

因此$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})=98+28-75=51$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以$(2,2)$與$(6,2)$為兩焦點，且與直線$x+1=0$相切，則橢圓短軸半長為何？

(A) 4
(B) $\sqrt{21}$
(C) $\sqrt{23}$
(D) $\sqrt{29}$
(E) 6

Solution

將題目簡化為求b的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是$(\dfrac{2+6}{2},\dfrac{2+2}{2})=(4,2)$

焦距c為焦點與橢圓中點之距離，因此可知$c=2$

已知與直線$x+1=0$相切，因此橢圓左右一端會與$x+1=0$相切，因此其中一端為$(-1,2)$

故長軸a為橢圓長軸端點與中心之距離，可知$a=5$

因此$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線$y=2x-\dfrac{1}{2}x^2$的焦點座標為(a,b)，則$ab=?$

(A) 3
(B) 3.5
(C) 4
(D) 4.5
(E) 5

Solution

$y=2x-\dfrac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}(4x-x^2)$

$\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}(-4+4x-x^2)+2$

$\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2$

$\Rightarrow -2(y-2)=(x-2)^2$

因此可以知道頂點座標為$(2,2)$，$c=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

因此焦點為$(2,2+\frac{-1}{2})=(2,\frac{3}{2})$

故$a=2,b=\frac{3}{2}$，得到$ab=3$，故選(A)。

100-01-12

Statement

雙曲線$xy-3x+4y=0$兩頂點的距離為何？

$(A)\quad 2\sqrt{3}$
$(B)\quad 4$
$(C)\quad 2\sqrt{6}$
$(D)\quad 4\sqrt{3}$
$(E)\quad 4\sqrt{6}$

Solution

$xy-3x+4y=0\Rightarrow(x+4)(y-3)=-12$

考慮通過頂點的線為$y=-x+b$，代入必定通過的點$(-4,3)$得到$b=-1$

因此$y=-x-1$會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$x(-x-1)-3x+4(-x-1)=0\Rightarrow x^2+8x+4=0$

利用公式解得到x的點，也就是$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\times1\times4}}{2}=-4\pm2\sqrt{3}$

當$x=-4+2\sqrt{3}$時，$y=2\sqrt{3}-3$

當$x=-4-2\sqrt{3}$時，$y=-3-2\sqrt{3}$

兩點距離為$\sqrt{(-4+2\sqrt{3}-(-4-2\sqrt{3}))^2+(2\sqrt{3}-3-(-3-2\sqrt{3}))^2}=\sqrt{48+48}=4\sqrt{6}$，故選$(E)$

100-01-13

Statement

若$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$，則$x=?$

$(A)\quad -3$
$(B)\quad -3$或1
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 3$

Solution

$\log_2(3-x^2) = 1+\log_2 x$

$\Rightarrow \log_2(3-x^2) - \log_2 x = 1$

$\Rightarrow \log_2(\dfrac{3-x^2}{x}) = 1$

$\Rightarrow \dfrac{3-x^2}{x} = 2$

$\Rightarrow -x^2-2x+3=0$

$\Rightarrow x=1, x=-3$

驗根可知$\log_2 x$無法放入-3，因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-3$不合。

因此$x=1$，故選(C)

100-01-14

Statement

若$f(x)=\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$，且$f(a)=3$，$f(b)=5$，則$f(a+b)=?$

(A) $\frac{5}{3}$
(B) 2
(C) 6
(D) 8
(E) 15

Solution

令$t=2^x$，則$f(x)=\dfrac{1+t}{1-t}$

考慮$f(a)=3$

$\dfrac{1+t}{1-t}=3$

$\Rightarrow 1+t=3-3t$

$\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$

因此$2^a=\dfrac{1}{2}$，得到$a=-1$

考慮$f(b)=5$

$\dfrac{1+t}{1-t}=5$

$\Rightarrow 1+t=5-5t$

$\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}$

$2^b=\dfrac{2}{3}$，則$b=1-\log_2 3$

故$f(a+b)=f(-\log_2 3)=f(\log_2 \frac{1}{3})=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{2}=2$，故選$(B)$

100-01-15

Statement

求$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=?$

$(A)\quad \frac{1}{2}$
$(B)\quad \frac{3}{2}$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad \frac{5}{2}$
$(E)\quad 4$

Solution

$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=\log_2(\sqrt{12+8\sqrt{2}}+\sqrt{12-8\sqrt{2}})=\log_2(\sqrt{8+8\sqrt{2}+4}+\sqrt{8-8\sqrt{2}+4})$

$=\log_2(\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(2-2\sqrt{2})^2})=\log_2(4\sqrt{2})=\frac{5}{2}$，故選$(D)$

100-01-16

Statement

設$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\sin\theta+\cos\theta=?$

$(A)\quad -1$
$(B)\quad -\frac{1}{2}$
$(C)\quad \frac{1}{2}$
$(D)\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$
$(E)\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

則$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$= \sqrt{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{1 + 2\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

(A)　若$0 < x < \frac{\pi}{4}$，則 $\sin x < \cos x < \cot x$

(B)　若$\pi < x < \frac{5\pi}{4}$，則 $\sec x < \csc x < \cot x$

(C)　若$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$，則 $\cos x < \sin x < \tan x$

(D)　若$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$，則 $\sin x_1 > \sin x_2$

(E)　若$\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$，則 $\cos x_1 > \cos x_2$

Solution

若$\pi < x < \frac{5\pi}{4}$，則 $\sin\theta < \cos\theta < \tan\theta$

故$\csc\theta < \sec\theta < \cot\theta$，故選$(B)$

100-01-18

Statement

若$mx + 3y + 1 = 0$與$x + (m-2)y + m = 0$之交點在第二象限內，則m之範圍為何？

(A)　$0 < m < 1$
(B)　$0 < m < 2$
(C)　$0 < m < 3$
(D)　$1 < m < 3$
(E)　$1 < m < 4$

Solution

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \dfrac{2m+2}{(m-3)(m+1)} \\ y = \dfrac{m^2-1}{(-m+3)(m+1)} \end{cases}$$

考慮到$y > 0, x < 0$的情況

得到$((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

得到$1 < m < 3$，故選(D)

100-01-19

Statement

若點(a,b)在直線$2x+3y=1$上移動，則直線$ax+by=3$恆過哪一點？

(A) $(3,4)$
(B) $(4,5)$
(C) $(5,7)$
(D) $(5,8)$
(E) $(6,9)$

Solution

考慮$x=5$時$y=-3$

考慮$x=-4$時$y=3$

由於a,b依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮$5x-3y=3$與$-4x+3y=3$的交點，得到$(x,y)=(6,9)$，故選(E)

100-01-20

Statement

已知$A(3,-5)$，$B(-7,4)$，且點P介於A、B之間，又$\overline{AB}:\overline{BP}=7:4$，若$P$之座標為$(a,b)$，則$7a+21b=?$

(A) -33
(B) -32
(C) -31
(D) -30
(E) -29

Solution

$\overline{AB}:\overline{BP}=7:4 \Rightarrow \overline{AP}:\overline{BP}=3:4$

利用內分點公式。

$P=(\frac{4\times 3+3\times(-7)}{7},\frac{4\times(-5)+3\times 4}{7})=(\frac{-9}{7},\frac{-8}{7})$

則$7a+21b=(-9)+(-8)\times 3=-33$，故選$(A)$