

# 105年第1次北科入學數學會考

---

## 105-01-01

### Statement

若 $\alpha, \beta$ 為方程式 $x^2 - 5x - 3 = 0$ 之兩根，則 $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = ?$

(A) **-93**

(B) -57

(C) 53

(D) 93

(E) 105

### Solution

$$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

根據根與係數，可以知道 $\alpha\beta = \frac{-3}{1} = -3$ ，且 $\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5$

$$\text{已知}(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 25$$

$$\text{可知}\alpha^2 + \beta^2 = 31$$

$$\text{因此}\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = (-3)(31) = -93，\text{故選}(A)$$

## 105-01-02

### Statement

已知 $(\log 7x)(\log ax) = 2$ 之兩根乘積為 $\frac{1}{72}$ ，則 $a = ?$

(A)  $\frac{1}{72}$

(B)  $\frac{7}{72}$

(C) 2

(D)  **$\frac{72}{7}$**

(E) 72

## Solution

$$(\log 7x)(\log ax) = 2$$

$$\Rightarrow (\log 7 + \log x)(\log a + \log x) = 2$$

$$\Rightarrow \log 7 \log a + \log(x)(\log 7 + \log a) + \log(x)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \log^2 x + (\log x)(\log 7 + \log a) + \log 7 \log a = 2$$

因此可知

$$\log \alpha + \log \beta = -(\log 7 + \log a)$$

$$\text{可知 } \log \alpha \beta = -\log 7a$$

$$\log \alpha \log \beta = \log 7 \log a - 2$$

$$\text{因此可知 } \log \frac{1}{72} = -\log 7a \cdot \text{因此 } a = \frac{72}{7}$$

## 105-01-03

### Statement

已知橢圓 $E$ 通過點 $(2, 3)$ 且與橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 有相同焦點，則橢圓 $E$ 的長軸長為何？

(A)  $2\sqrt{5}$

(B) 6

(C) 8

(D) 10

(E)  $8\sqrt{2}$

## Solution

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \cdot \text{可知原點為}(0, 0)$$

由焦點可知 $c = \sqrt{(\sqrt{9})^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$ ，又這個橢圓長軸平行 $x$ 軸，因此焦點為 $(-2, 0)$ 與 $(2, 0)$

考慮長軸 $2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ ，因此若焦點相同且確定過點 $P = (2, 3)$ ，

則我們可以知道新的橢圓的長軸為 $\sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - 3)^2} + \sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - 3)^2} = 8$

因此長軸為8，故選(C)

## 105-01-04

### Statement

下列何者正確

(A)  $\sin(-\theta) = \sin \theta$

(B)  $\tan(-\theta) = \tan(\theta)$

(C)  $2 \cos^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$

(D)  $\tan^2 \theta - 1 = \sec^2 \theta$

(E)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

### Solution

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  · 故選(E)

## 101-01-05

### Statement

設  $\frac{x-8}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$  · 求  $3A + 2B + C = ?$

(A)  $-3$

(B)  $-1$

(C)  $0$

(D)  $1$

(E)  $3$

### Solution

$$\frac{x-8}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow x-8 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

代入  $x = 2$  · 則  $-6 = 3C$  · 因此  $C = -2$

代入  $x = -1$  · 則  $-9 = 9A$  · 因此  $A = -1$

代入  $x = 0$  · 則  $-8 = 4A - 2B + C$  · 因此  $B = 1$

因此  $3A + 2B + C = -3 + 2 - 2 = -3$  · 故選(A)

## 105-01-06

### Statement

已知直線 $L$ 與 $3x + 4y = 1$ 垂直與 $x$ 軸、 $y$ 軸在第四象限所圍的三角形面積為6，則 $L$ 的方程式為何？

- (A)  $3x - 4y = 6$
- (B)  $3x - 4y = 12$
- (C)  $4x + 3y = 6$
- (D)  $4x - 3y = 6$
- (E)  $4x - 3y = 12$

### Solution

與 $3x + 4y = 1$ 垂直，可得到 $-4x + 3y = C$

已知 $x$ 的截距長度為 $|\frac{C}{-4}| = \frac{C}{4}$ ，又 $y$ 的截距長度為 $\frac{C}{3}$

因此 $\frac{1}{2} \cdot \frac{C}{4} \cdot \frac{C}{3} = 6$ ，可得 $C = \pm 12$

考慮 $C = 12$ ，可知 $x$ 的截距為 $\frac{12}{-4} = -3$ ， $y$ 的截距為 $\frac{12}{3} = 4$ ，三角形圍在第二象限，不合。

考慮 $C = -12$ ，可知 $x$ 的截距為 $\frac{-12}{-4} = 3$ ， $y$ 的截距為 $\frac{-12}{3} = -4$ ，三角形圍在第四象限

因此 $C = -12$ ，得到 $-4x + 3y = -12$ ，故選(E)

## 105-01-07

### Statement

設 $3x^3 - 5x^2 + 7x + 1 = a(x - 2)^3 + b(x - 2)^2 + c(x - 2) + d$ ，則 $b + c = ?$

- (A) 16
- (B) 26
- (C) 36
- (D) 46
- (E) 56

### Solution

利用綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|l}
 3 & -5 & 7 & 1 & & \\
 & 6 & 2 & 18 & & 2 \\
 \hline
 3 & 1 & 9 & & 19 & \\
 & 6 & 14 & & & \\
 \hline
 3 & 7 & & & 23 & \\
 & 6 & & & & \\
 \hline
 3 & & & & & 13
 \end{array}$$

可得到 $a = 3, b = 13, c = 23, d = 19$ ，因此 $b + c = 13 + 23 = 36$ ，故選(C)

**105-01-08**

### Statement

已知拋物線的焦點為 $(1, 1)$ ，準線為 $x + y + 2 = 0$ ，則此拋物線的頂點坐標為何？

- (A)  $(2, 2)$
- (B)  $(2, -2)$
- (C)  $(-1, 1)$
- (D)  $(1, -1)$
- (E)  $(0, 0)$

### Solution

考慮做一條線 $L$ 垂直準線與經過 $(1, 1)$

因此 $L: x - y = C$ ，代入 $(1, 1)$ 得到 $C = 0$ ，故 $L: x - y = 0$

找 $L$ 與準線的交點 $P$ ，解聯立方程組 $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ，可得 $y = -1$ 且 $x = -1$

因此頂點為 $P$ 與焦點的中點，故 $(\frac{-1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}) = (0, 0)$ ，故選(E)

## 105-01-09

### Statement

若 $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 4$ 且 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}$ ，則 $(2\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = ?$

(A)  $-24$

(B)  $-12$

(C)  $0$

(D)  $12$

(E)  $24$

### Solution

$$(2\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$$

$$\text{又} (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 37$$

$$\text{故} 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 12 \cdot \text{因此} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 6$$

$$\text{因此} (2\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 2 \times 3^2 + 6 - 3 \times 4^2 = -24 \cdot \text{故選}(A)$$

## 105-01-10

### Statement

若 $S = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{99}$ ，則 $S$ 為幾位數？( $\log_2 0.3010, \log_3 = 0.4771$ )

(A) 45

(B) 46

(C) 47

(D) 48

(E) 49

### Solution

$$S = \frac{1(1 - 3^{100})}{1 - 3} = \frac{3^{100} - 1}{2}$$

$$\text{因此} \log S = \log\left(\frac{3^{100} - 1}{2}\right) = \log(3^{100} - 1) - \log 2 \approx \log(3^{100}) - \log 2$$

$$\approx 100 \log(3) - \log 2 = 47.7 - 0.301 \approx 47.3 \approx 48 \cdot \text{故選}(D)$$

## 105-01-11

### Statement

$\sqrt{x+3} > x-3$  之所有解為何？

(A)  $-3 \leq x < 3$

(B)  $-3 \leq x < 6$

(C)  $2 \leq x < 3$

(D)  $-3 \leq x < 7$

(E)  $x < 6$

### Solution

$$\sqrt{x+3} > x-3$$

考慮定義域，可知  $x \geq -3$

令  $t = x - 3$ ，則  $\sqrt{t+6} > t$

考慮  $t$  的所有可能

若  $t \geq 0$ ，則  $x \geq 3$

因此  $t+6 > t^2$ ，得到  $t^2 - t - 6 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) < 0$

因此  $-2 < t < 3$ ，還原成  $x$  得到  $1 < x < 6$

與  $x \geq 3$  取交集，得到  $3 \leq x < 6$

若  $t < 0$ ，則  $x < 3$

但由於  $\sqrt{t+6}$  在定義域內時恆大於等於 0，所以  $\sqrt{t+6} > t$ ，因此  $t \in \mathbb{R}$ ，與  $x < 3$  求交集得到  $x \in (-\infty, 3)$

因此，兩者種可能得到的結果取聯集得到  $x \in (-\infty, 6)$ ，與定義域取交集得到  $x \in [-3, 6)$ ，故選 (B)

## 105-01-12

### Statement

若方程式  $\frac{x^2}{t^2-4} + \frac{y^2}{t^2-9} = 1$  的圖形為雙曲線，求實數  $t$  的範圍

(A)  $t < -2$

(B)  $t > 3$

(C)  $-3 < t < 3$

(D)  $-2 < t < 2$

(E)  $-3 < t < -2$  且  $2 < t < 3$

## Solution

考慮兩個不等式的結果： $\begin{cases} t^2 - 4 > 0 \\ t^2 - 9 < 0 \end{cases}$ ，得到 $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ 與 $(-3, 3)$

這兩個結果取交集，得到 $(-3 < t < -2)$ 且 $(2 < t < 3)$ ，故選(E)

## 105-01-13

### Statement

設 $x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx - 3 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + bx + c)$ ，則 $4m - n + 2b + c = ?$

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

(E) 8

## Solution

考慮能夠湊出 $x^3$ 的方法： $(x^2 \times bx) \div (2x \times x^2)$

因此 $b + 2 = 2$ ，得到 $b = 0$

考慮能夠湊出 $x^2$ 的方法： $(2x \times bx) \div (x^2 \times c) \div (-1) \times (x^2)$

因此 $m = 2b + c - 1 = c - 1$

考慮能夠湊出 $x$ 的方法： $(-1 \times bx) \div (2x \times c)$

因此 $-b + 2c = n$

考慮能夠湊出常數的方法，也就是 $(-1 \times c) = -3$ ，因此 $c = 3$

由於 $c = 3$ ，故 $m = 2$ ， $n = 6$

因此 $m = 2, n = 6, b = 0, c = 3$

因此 $4m - n + 2b + c = 4 \cdot 2 - 6 + 2 \cdot 0 + 3 = 8 - 6 + 3 = 5$ ，故選(B)

## 105-01-14

### Statement

$xy$ 平面上，求曲線 $y = \sqrt{25 - x^2}$ 與 $x$ 軸所圍的面積為何？

(A)  $\frac{5\pi}{4}$

(B)  $5\pi$

(C)  $\frac{25\pi}{4}$



(D)  $\frac{25\pi}{2}$

(E)  $25\pi$

### Solution 1

考慮曲線  $y = \sqrt{25 - x^2}$  是一個半徑為 5 的半圓，因此其面積為  $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \pi = \frac{25}{2}\pi$ ，故選 (D)

### Solution 2

考慮  $y = \sqrt{25 - x^2}$ ，令  $y = 0$  得到  $x = \pm 5$ ，因此圖形交於  $x$  軸在  $x = -5$  與  $x = 5$  上。

因此我們考慮  $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$

令  $x = 5 \sin t$ ，反推  $t = \arcsin(\frac{x}{5})$ ，而  $dx = 5 \cos t dt$

$$\begin{aligned} \text{則 } \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx &\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5 \sqrt{25 - 25 \sin^2 t} \cos t dt = 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= 25 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = 25 \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{25\pi}{2} \quad \text{故選 (D)} \end{aligned}$$

## 105-01-15

### Statement

多項式  $f(x)$  以  $x^2 - 1$ 、 $x^2 - 5x + 6$  除之的餘式分別為  $3x + 1$ 、 $2x - 1$ ，則以  $x^2 - 3x + 2$  的餘式為何？

(A)  $-x + 5$

(B)  $x + 2$

(C)  $5x + 1$

(D)  $2x + 7$

(E)  $-2x + 3$

### Solution

考慮  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

考慮  $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

考慮  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ ，且設  $x^2 - 3x + 2$  的餘式為  $ax + b$

若  $x = 2$ ，則結果等價於  $x^2 - 5x + 6$  的餘式帶入  $x = 2$  的結果，也就是  $4 - 1 = 3$

因此  $2a + b = 3$

若  $x = 1$ ，則結果等價於  $x^2 - 1$  的餘式帶入  $x = 1$  的結果，也就是  $3 + 1 = 4$

因此 $a + b = 4$

透過 $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (-1, 5)$ ，得到 $x^2 - 3x + 2$ 的餘式為 $-x + 5$ ，故選(A)

## 105-01-16

### Statement

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 7 : 8 : 3$ ，則 $\cos A = ?$

(A)  $\frac{-1}{8}$

(B)  $\frac{-1}{7}$

(C)  $\frac{1}{8}$

(D)  $\frac{1}{7}$

(E)  $\frac{1}{3}$

### Solution

利用餘弦定理， $\cos A = \frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{-6}{42} = -\frac{1}{7}$ ，故選(B)

## 105-01-17

### Statement

設向量 $\vec{a} = \langle 1, 2 \rangle$ ， $\vec{b} = \langle \frac{1}{2} - 4^{x+1}, 7 \cdot 2^x \rangle$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，則 $x = ?$

(A)  $-3$

(B)  $-2$

(C)  $\frac{1}{8}$

(D)  $2$

(E)  $3$

### Solution

由於 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，所以 $(\frac{1}{2} - 4^{x+1}) \times 2 = 7 \cdot 2^x$

$$\Rightarrow 1 - 8 \cdot 4^x = 7 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow -8 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 1 = 0$$

令  $t = 2^x$ ，則  $-8t^2 - 7t + 1 = 0$ ，得到  $t = \frac{1}{8}$  或  $t = -1$  (不合)

還原  $t$ ，得到  $x = -3$ ，故選 (A)

## 105-01-18

### Statement

設  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則  $\sqrt{1 + \sin 2\theta} - \sqrt{1 - \sin 2\theta} = ?$

(A) 0

(B)  $\sin \theta$

(C)  $2 \sin \theta$

(D)  $\cos \theta$

(E)  $2 \cos \theta$

### Solution

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sin 2\theta} - \sqrt{1 - \sin 2\theta} &= \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} - \sqrt{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} = 2 \cos \theta \cdot \text{故選 (E)}\end{aligned}$$

## 105-01-19

### Statement

設  $x$  為實數，求  $f(x) = 3(5^x + 5^{-x}) - 2(25^x + 25^{-x}) + 1$  之最大值為何

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 5

(E) 25

### Solution

令  $t = 5^x + 5^{-x}$ ，則  $t^2 = 25^x + 25^{-x} + 2$

因此可以把式子轉成  $f(t) = -2t^2 + 3t + 5$

利用配方法，可以知道  $f(t) = -2t^2 + 3t + 5 \Rightarrow f(t) = -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$

利用幾何不等式，得到  $\frac{5^x + 5^{-x}}{2} \geq \sqrt{1}$

因此  $5^x + 5^{-x} \geq 2$ ，得到  $t \geq 2$ ，因此  $t$  代 2

因此  $f(2) = -2\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8} = 3$  · 故選(C)

## 105-01-20

### Statement

設點  $(a, b)$  在直線  $x - 2y = 0$  上且點  $(c, d)$  在直線  $2x - 4y = 1$  上 · 則  $(a - c)^2 + (b - d)^2$  之最小值為何？

(A)  $\frac{1}{20}$

(B)  $\frac{1}{10}$

(C)  $\frac{1}{5}$

(D)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(E)  $\frac{1}{\sqrt{20}}$

### Solution

兩條線為平行線 · 因此我們考慮兩條直線的距離

利用兩直線距離公式 · 得到  $\frac{|0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$

因此  $(a - c)^2 + (b - d)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{1}{20}$  · 故選(A)