100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知$f(x)$為一實系數多項式，且$f(\frac{3}{2})=27$，$f(-\frac{5}{3})=8$。

若$f(x)$除以$(6x^2+x-15)$的餘式為$ax+b$，則$b-a=?$

$(A)\quad 4$
$(B)\quad 8$
$(C)\quad 12$
$(D)\quad 16$
$(E)\quad 20$

Solution

可以把式子轉成

$f(x)=g(x)(6x^2+x-15)+ax+b$

$=g(x)(3x+5)(2x-3)+ax+b$

代入$x=\frac{3}{2}$，得到$27=\frac{3}{2}a+b$

代入$x=-\frac{5}{3}$，得到$8=-\frac{5}{3}a+b$

解聯立之後得到$(a,b)=(6,18)$

因此$b-a=12$，故選(C)

100-01-02

Statement

若α,β為方程式$x-\frac{3}{x}+1=0$的兩根，則$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=?$

$(A)\quad 9$
$(B)\quad 15$
$(C)\quad 21$
$(D)\quad 27$
$(E)\quad 33$

Solution

$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{10(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+25$

$x-\frac{3}{x}+1=0 \Rightarrow x^2+x-3=0$

利用根與係數，得到$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3$

因此$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=\frac{4}{-3}+\frac{-10}{-3}+25=27$

故選(D)

100-01-03

Statement

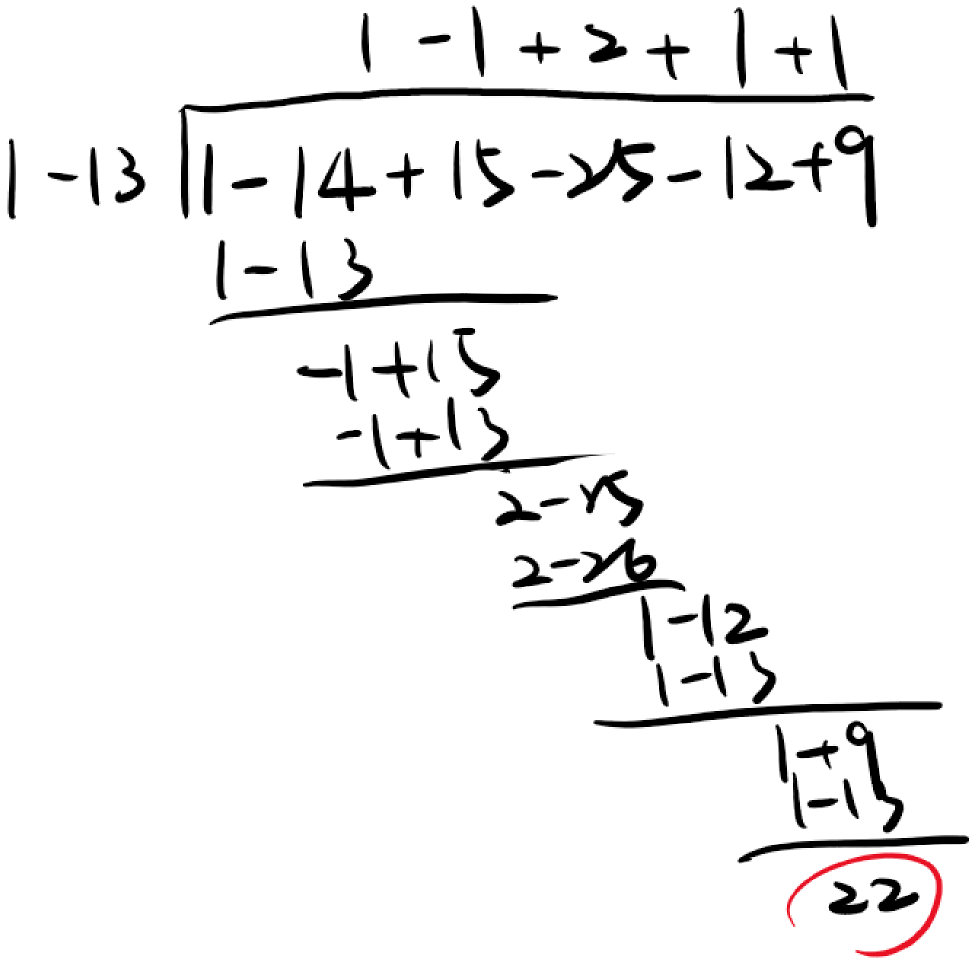
求$13^5-14\times13^4+15\times13^3-25\times13^2-12\times13+9=?$

(A) 22
(B) 25
(C) 28
(D) 31
(E) 34

Solution

將式子考慮成$f(x)=x^5-14x^4+15x^3-25x^2-12x+9$

式子等價於$f(x)$除以$x-13$的餘數（餘式定理）。



故答案選(A)。

100-01-04

Statement

若$\frac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$，則$A+B+C+D=?$

(A) $\frac{1}{2}$
(B) 2
(C) 3
(D) $\frac{7}{2}$
(E) 33

Solution

$$\frac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$2x^2-x+4=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2)$

$=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$

$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B$

可知

$A+C=0$
$B+D=2$
$A=-\frac{1}{4}$
$B=1$

因此$C=\frac{1}{4}$，$D=1$。

因此$A+B+C+D=2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}\le -1$之解為何？

(A) $1\le \mathrm{x}<2$
(B) $1<\mathrm{x}\le 2$
(C) $1<\mathrm{x}<2$
(D) $\mathrm{x}\ge 2$ 或 $\mathrm{x}<1$
(E) $\mathrm{x}>2$ 或 $\mathrm{x}<1$

Solution

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}=\frac{(x-4)(x-3)}{(x-1)(x-2)}\le -1$$

考慮一些case

上面的分子要變成負的，則$3<x<4$

下面的分母要變成負的，則$1<x<2$

由於小於-1，因此帶值進去後，分子的絕對值要比分母的絕對值還要大

因此我們可以只考慮下面的case

因此答案為$1<x<2$，故選(C)

100-01-06

Statement

若$a,\ b$均為實數且$ax^2+bx-10<0$之解為$\frac{-5}{2}<x<\frac{4}{3}$，則$a+b=?$

(A) 5
(B) $\frac{11}{2}$
(C) 6
(D) $\frac{13}{2}$

(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3})<0$

$\Rightarrow x^2-\frac{4x}{3}+\frac{5x}{2}+\frac{-20}{6}<0$

$\Rightarrow 6x^2-8x+15x-20<0$

$\Rightarrow 6x^2+7x-20<0$

兩邊共除2，得$3x^2+\frac{7}{2}x-10<0$

$a=3,\ b=\frac{7}{2},\ a+b=\frac{13}{2}$

100-01-07

Statement

若直線$12x-5y=21$與兩直線$x=\frac{23}{39}$、$x=\frac{16}{13}$分別交於A、B兩點，則線段長$\overline{AB}=$?

$(A)\quad \frac{6}{5}$

$(B)\quad \frac{5}{4}$

$(C)\quad \frac{5}{3}$

$(D)\quad \frac{13}{5}$

$(E)\quad \frac{25}{7}$

Solution

已知$12x-5y=21$，則斜率為$\frac{12}{5}$

$\Delta x=\frac{16}{13}-\frac{23}{39}=\frac{25}{39}$

$y=mx+b$，則$0=\frac{12}{5}(\frac{16}{13}-\frac{23}{39})+b$，得到$b=\frac{60}{39}=\Delta y$

因此距離為$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\frac{25}{39})^2+(\frac{60}{39})^2}=\frac{5}{3}$，故選$(C)$

100-01-08

Statement

設兩向量$\vec{a},\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$，則$\cos\theta=?$

$(A)\quad \frac{7}{25}$
$(B)\quad \frac{5}{13}$
$(C)\quad \frac{3}{5}$
$(D)\quad \frac{4}{5}$
$(E)\quad \frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$$\cos\theta=\frac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2\times|a|\times|b|}$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{|a|^2+|b|^2-|a+b|^2}{2\times|a|\times|b|}=-\cos\theta$$

因此，$\frac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2\times|a|\times|b|}=\frac{-|a|^2-|b|^2+|a+b|^2}{2\times|a|\times|b|}$

$|a|^2+|b|^2-9=-|a|^2-|b|^2+16$

設$x=|a|=|b|$，故$2x^2-9=-2x^2+16$，得到$x=\frac{5}{2}=|a|=|b|$

代入$\cos\theta$，得到$\frac{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}-9}{2\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}}=\frac{\frac{25}{2}-9}{\frac{25}{2}}=\frac{7}{25}$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}|=7$、$|\vec{b}|=5$，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$，則$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})=?$

$(A)\quad -25$
$(B)\quad -5$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 44$
$(E)\quad 51$

Solution

$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})=2|\vec{a}|^2-3(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2$

已知$\tan\theta=\frac{-3}{4}$，則$\cos\theta=-\frac{4}{5}$

因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta=7\times5\times-\frac{4}{5}=-28$

因此$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})=98+28-75=51$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以$(2,2)$與$(6,2)$為兩焦點，且與直線$x+1=0$相切，則橢圓短軸半長為何？

$(A)\quad 4$
$(B)\quad \sqrt{21}$
$(C)\quad \sqrt{23}$
$(D)\quad \sqrt{29}$
$(E)\quad 6$

Solution

將題目簡化為求b的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是$(\frac{2+6}{2},\frac{2+2}{2})=(4,2)$

焦距c為焦點與橢圓中點之距離，因此可知$c=2$

已知與直線$x+1=0$相切，因此橢圓左右一端會與$x+1=0$相切，因此其中一端為$(-1,2)$

故長軸a為橢圓長軸端點與中心之距離，可知$a=5$

因此$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線$y=2x-\frac{1}{2}x^2$的焦點座標為(a,b)，則$ab=?$

$(A)\quad 3$
$(B)\quad 3.5$
$(C)\quad 4$
$(D)\quad 4.5$
$(E)\quad 5$

Solution

$y=2x-\frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(4x-x^2)$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(-4+4x-x^2)+2$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

$\Rightarrow -2(y-2)=(x-2)^2$

因此可以知道頂點座標為$(2,2)$，$c=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

因此焦點為$(2,2+\frac{-1}{2})=(2,\frac{3}{2})$

故$a=2,b=\frac{3}{2}$，得到$ab=3$，故選(A)。

100-01-12

Statement

雙曲線$xy-3x+4y=0$兩頂點的距離為何？

$(A)\quad 2\sqrt{3}$
$(B)\quad 4$
$(C)\quad 2\sqrt{6}$
$(D)\quad 4\sqrt{3}$
$(E)\quad 4\sqrt{6}$

Solution

$xy-3x+4y=0\Rightarrow(x+4)(y-3)=-12$

考慮通過頂點的線為$y=-x+b$，代入必定通過的點$(-4,3)$得到$b=-1$

因此$y=-x-1$會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$x(-x-1)-3x+4(-x-1)=0\Rightarrow x^2+8x+4=0$

利用公式解得到x的點，也就是$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\times1\times4}}{2}=-4\pm2\sqrt{3}$

當$x=-4+2\sqrt{3}$時，$y=2\sqrt{3}-3$

當$x=-4-2\sqrt{3}$時，$y=-3-2\sqrt{3}$

兩點距離為$\sqrt{(-4+2\sqrt{3}-(-4-2\sqrt{3}))^2+(2\sqrt{3}-3-(-3-2\sqrt{3}))^2}=\sqrt{48+48}=4\sqrt{6}$，故選$(E)$

100-01-13

Statement

若$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$，則$x=?$

$(A)\quad -3$
$(B)\quad -3$或1
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 3$

Solution

$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$

$\Rightarrow \log_2(3-x^2)-\log_2 x=1$

$\Rightarrow \log_2(\frac{3-x^2}{x})=1$

$\Rightarrow \frac{3-x^2}{x}=2$

$\Rightarrow -x^2-2x+3=0$

$\Rightarrow x=1, x=-3$

驗根可知$\log_2 x$無法放入-3，因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-3$不合。

因此$x=1$，故選(C)

100-01-14

Statement

若$f(x)=\frac{1+2^x}{1-2^x}$，且$f(a)=3$，$f(b)=5$，則$f(a+b)=?$

$(A)\quad \frac{5}{3}$
$(B)\quad 2$
$(C)\quad 6$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 15$

Solution

令$t=2^x$，則$f(x)=\frac{1+t}{1-t}$

考慮$f(a)=3$

$$\frac{1+t}{1-t}=3$$

$$\Rightarrow 1+t=3-3t$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

因此$2^a=\frac{1}{2}$，得到$a=-1$

考慮$f(b)=5$

$$\frac{1+t}{1-t}=5$$

$$\Rightarrow 1+t=5-5t$$

$$\Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

$2^b=\frac{2}{3}$，則$b=1-\log_2 3$

故$f(a+b)=f(-\log_2 3)=f(\log_2\frac{1}{3})=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{2}=2$，故選$(B)$

100-01-15

Statement

求$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=?$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 2

(D) $\frac{5}{2}$

(E) 4

Solution

$$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=\log_2(\sqrt{12+8\sqrt{2}}+\sqrt{12-8\sqrt{2}})=\log_2(\sqrt{8+8\sqrt{2}+4}+\sqrt{8-8\sqrt{2}+4})$$

$=\log_2(\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(2-2\sqrt{2})^2})=\log_2(4\sqrt{2})=\frac{5}{2}$，故選$(D)$

100-01-16

Statement

設$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$，則$\sin\theta + \cos\theta = ?$

(A) $\quad -1$

(B) $\quad -\frac{1}{2}$

(C) $\quad \frac{1}{2}$

(D) $\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

(E) $\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

則$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{(\sin\theta + \cos\theta)^2} = \sqrt{\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta}$

$= \sqrt{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{1 + 2\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

(A) $\quad$ 若$0 < x < \frac{\pi}{4}$，則 $\sin x < \cos x < \cot x$

(B) $\quad$ 若$\pi < x < \frac{5\pi}{4}$，則 $\sec x < \csc x < \cot x$

(C) $\quad$ 若$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$，則 $\cos x < \sin x < \tan x$

(D) $\quad$ 若$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$，則 $\sin x_1 > \sin x_2$

(E) $\quad$ 若$\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$，則 $\cos x_1 > \cos x_2$

Solution

若$\pi < x < \frac{5\pi}{4}$，則 $\sin\theta < \cos\theta < \tan\theta$

故$\csc\theta < \sec\theta < \cot\theta$，故選$(B)$

100-01-18

Statement

若$mx+3y+1=0$與$x+(m-2)y+m=0$之交點在第二象限內，則m之範圍為何？

$(A)\quad 0<m<1$
$(B)\quad 0<m<2$
$(C)\quad 0<m<3$
$(D)\quad 1<m<3$
$(E)\quad 1<m<4$

Solution

由第二式，可以知道$y=\dfrac{-x-m}{m-2}=\dfrac{1}{2-m}x+\dfrac{m}{2-m}$

令$x=0$，可以知道通過$(0,\dfrac{m}{2-m})$

令$y=0$，可以知道通過$(-m,0)$

因此可以知道x截距為$-m$，y截距為$\dfrac{m}{2-m}$。

由於直線要通過第二象限，因此只考慮以下五種case：截距$y>0,x>0$、截距$x<0,y>0$與截距$y<0,x<0$，水平、垂直線

考慮截距$y>0,x>0$，得到$(0<m<2)\cap(m<0)=\varnothing$

考慮截距$y<0,x<0$，得到$(m<0\cup m>2)\cap(m>0)$，得到$m>2$。

考慮截距$x<0,y>0$，得到$(m>0)\cap(0<m<2)$，得到$0<m<2$。

考慮水平線：無法滿足

考慮垂直線：$m=2$，會使直線變為$x=-2$，依然會通過第二象限。

由第一式，可以知道$y=\dfrac{-mx-1}{3}=-\dfrac{m}{3}x-\dfrac{1}{3}$

令$x=0$，可以知道通過$(0,-\dfrac{1}{3})$

令$y=0$，可以知道通過$(\dfrac{1}{m},0)$

因此可以知道x截距為$\dfrac{1}{m}$，y截距為$\dfrac{1}{3}$

由於直線要通過第二象限，因此只考慮以下五種case：截距$y>0,x>0$、截距$x<0,y>0$與水平、垂直線

考慮截距$y>0,x>0$，得到$m>0$，則因第二式之二三結果，可使第二式經過第二象限

考慮截距$y>0,x<0$，得到$m<0$，與第二式之結果沒有匹配，因此無法使第二式經過第二象限。

考慮水平線：無法滿足

考慮垂直線：無法滿足

因此可知使兩條直線都通過第二象限所需條件：$m>0$。

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \dfrac{2m+2}{(m-3)(m+1)} \\ y = \dfrac{m^2-1}{(-m+3)(m+1)} \end{cases}$$

考慮到$y > 0, x < 0$的情況

得到$((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

與使兩條直線都通過第二象限所需條件取交集，得到$1 < m < 3$，故選(D)

100-01-19

Statement

若點(a, b)在直線$2x + 3y = 1$上移動，則直線$ax + by = 3$恆過哪一點？

(A) $(3, 4)$
(B) $(4, 5)$
(C) $(5, 7)$
(D) $(5, 8)$
(E) $(6, 9)$

Solution

考慮$x = 5$時$y = -3$

考慮$x = -4$時$y = 3$

由於a, b依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮$5x - 3y = 3$與$-4x + 3y = 3$的交點，得到$(x, y) = (6, 9)$，故選(E)

100-01-20

Statement

已知$A(3, -5)$，$B(-7, 4)$，且點P介於A、B之間，又$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4$，若$P$之座標為$(a, b)$，則$7a + 21b = ?$

(A) -33
(B) -32
(C) -31
(D) -30
(E) -29

Solution

$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$

利用內分點公式。

$$P = (\frac{4 \times 3 + 3 \times (-7)}{7}, \frac{4 \times (-5) + 3 \times 4}{7}) = (\frac{-9}{7}, \frac{-8}{7})$$

則$7a + 21b = (-9) + (-8) \times 3 = -33$，故選$(A)$