

103年第2次北科入學數學會考

103-02-01

Statement

若 $f(x) = 12x^2 - 26x + 5$ ，則 $f(\frac{3+\sqrt{2}}{2}) = ?$

(A) $-2 + 5\sqrt{2}$

(B) $-1 + 5\sqrt{2}$

(C) $1 + 5\sqrt{2}$

(D) 9

(E) $2 + 5\sqrt{2}$

Solution

利用綜合除法，將式子轉成以 $(2x - 3)$ 表示的形式。

$$\begin{array}{r|rr} 12 & -26 & 5 & \\ & 18 & -12 & 3/2 \\ \hline 6 & -4 & -7 & \\ & 9 & & \\ \hline 3 & 5 & & \end{array}$$

綠色字：將 $(x - \frac{3}{2})$ 轉換成 $(2x - 3)$ ，因此係數的部分要除以2。

得到 $f(x) = 3(2x - 3)^2 + 5(2x - 3) - 7$ ，因此 $f(\frac{3+\sqrt{2}}{2}) = 6 + 5\sqrt{2} - 7 = 5\sqrt{2} - 1$ ，故選(B)

103-02-02

Statement

若 $f(\frac{2+x}{4-x}) = x + 2$ ，則 $f(a) = ?$

(A) $\frac{6a}{1-a}$

(B) $\frac{2+a}{2-a}$

(C) $\frac{4+a}{2-a}$

(D) $\frac{2-a}{2+a}$

(E) $\frac{6a}{1+a}$

Solution

$$\frac{2+x}{4-x} = a, \text{ 得到 } x = \frac{4a-2}{a+1}$$

$$\text{因此 } f(a) = \frac{4a-2}{a+1} + 2 = \frac{6a}{a+1}, \text{ 故選 (E)}$$

103-02-03

Statement

設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CA} = 4$ ，若 D 為 \overline{BC} 上一點使 $\overline{AD} = 4$ ，則 $\overline{BD} = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) $\frac{5}{2}$

(D) 3

(E) 4

Solution

$$\cos C = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{可以推得 } \cos C = \cos \angle ACD = \frac{4^2 + (\overline{CD})^2 - 4^2}{2 \times 4 \times \overline{CD}} = \frac{1}{8}, \text{ 可得 } \overline{CD} = 1$$

$$\text{因此 } \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = 5 - 1 = 4, \text{ 故選 (E)}$$

103-02-04

Statement

求圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 與直線 $3x - 4y = -7$ 的最近距離為何？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

(E) 5

Solution

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

利用配方法，得到 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

因此得到圓心 $(2, -3)$ ，且半徑 $r = \sqrt{16} = 4$

考慮圓心與直線的最近距離，利用點到直線距離公式

$$\frac{|3(2) - 4(-3) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$

長度大於半徑，因此與圓的最近距離為 $5 - 4 = 1$ ，故選(B)

103-02-05

Statement

下列何者錯誤？

(A) $\sin(\pi - x) = \sin x$

(B) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

(C) $\tan(\pi + x) = \tan x$

(D) $\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sec x$

(E) $\sec\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \csc x$

Solution

$\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec(x)$ ，故選(D)

103-02-06

Statement

已知 $f(x) = 3x^5 + 19x^4 - 13x^3 + 6x^2 - 6x + 15$ ，求 $f(-7) = ?$

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

(E) 8

Solution

$f(-7)$ 結果與 $f(x) \div (x - 7)$ 的餘數等價 (餘式定理) 。

因此利用綜合除法來找餘數

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 19 & -13 & 6 & -6 & 15 \\ & -21 & 14 & -7 & 7 & -7 \\ \hline 3 & -2 & 1 & -1 & 1 & 8 \end{array} \quad -7$$

因此 $f(-7) = 8$ ，故選 (E)

103-02-07

Statement

設 $f(x) = x^2$ ，若將函數圖形向左平移1個單位，再向上平移 k 個單位後，所得到的圖形通過點 $(-2, 4)$ ，則 $k = ?$

(A) -5

(B) -3

(C) **3**

(D) 4

(E) 5

Solution

根據函數圖形平移，平移的結果為 $y = f(x) = (x + 1)^2 + k$

帶入點 $(-2, 4)$ 求 k ，得到 $4 = (-2 + 1)^2 + k$ ，因此 $k = 3$ ，故選 (C)

103-02-08

Statement

設雙曲線之方程式為 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，若將此雙曲線之實軸長放大為2倍，共軛軸與中心點不變，則此雙曲線方程式變為何？

(A) $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$

(B) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$

$$(C) \quad \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$$

$$(D) \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{2} = 1$$

$$(E) \quad \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Solution

已知實軸長原先為 $2a = 2\sqrt{4} = 4$ ，放大為兩倍後得到 $2a = 8$ ，因此 $a = 4$ ，所以 $a^2 = 16$

又共軛軸與中心點不變，則此方程式變為 $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ ，故選(C)

103-02-09

Statement

不等式 $\frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 1$ 之解為何？

$$(A) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$(B) \quad \frac{1}{2} \leq x < 2$$

$$(C) \quad \frac{1}{4} \leq x \leq 2$$

$$(D) \quad \frac{1}{4} \leq x < 2$$

$$(E) \quad 1 \leq x < 2$$

Solution

$$\frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 + \log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 0$$

因此我們考慮以下兩種情況取聯集

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \leq 0 \\ -1 + \log_2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \leq 0 \\ -1 + \log_2 x < 0 \end{cases} \Rightarrow [\frac{1}{4}, 2)$$

兩種情況取聯集，得到 $\frac{1}{4} \leq x < 2$ ，故選(D)

103-02-10

Statement

設 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，求 $\cos 4\theta$

(A) $\frac{-1}{4}$

(B) $\frac{-1}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

展開 $\cos 4\theta$ 的式子

$$\cos 4\theta = \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta$$

$$= \cos^2 2\theta - (2 \sin \theta \cos \theta)^2$$

將 $\sin \theta - \cos \theta$ 平方，得到

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

求 $\sin^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

求 $\cos^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1, \quad \cos^2 2\theta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

計算 $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta$

$$\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \frac{7}{16} - \frac{9}{16} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}$$

因此 $\cos 4\theta = \frac{-1}{8}$ ，故選(B)

103-02-11

Statement

若直線通過點 $P(3, 4)$ 且與兩座標軸在第一象限圍成三角形，則此三角形面積最小值為何？

(A) 10

(B) 12

(C) 14

(D) 20

(E) 24

Solution

設直線截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，三角形面積為 $\frac{ab}{2}$

因為與第一象限圍成區域面積，所以 $a, b > 0$

代入點 $P(3, 4)$ 得到 $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1$

利用算幾不等式， $\frac{\frac{3}{a} + \frac{4}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{12}{ab}}$ ，解得 ab 最小值為48

因此 $\frac{48}{2} = 24$ ，故選(E)

103-02-12

Statement

已知兩圓 $x^2 + y^2 = 10$ 與 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ 有兩交點，則此兩交點的距離為何？

(A) 3

(B) 4

(C) $\sqrt{26}$

(D) $\sqrt{35}$

(E) $5\sqrt{2}$

Solution

利用配方法，可知 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$

設圓心 $O_1 = (0, 0)$ ， $O_2 = (1, -2)$ ，且兩圓交於 A, B ，其中 $\overline{O_1A} = \overline{O_1B} = \overline{O_2A} = \overline{O_2B} = \sqrt{10}$

已知 $\angle AO_1B + \angle O_1AO_2 = 180^\circ$

因此 $\cos(\angle O_1AO_2) = \cos(\pi - \angle AO_1B) = -\cos(\angle AO_1B)$

因此 $\frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (\overline{AB})^2}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}} = -\frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}}$

可知 $\overline{AB} = \pm\sqrt{35}$ (負不合) · 故選(D)

103-02-13

Statement

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 25 \times 26 = ?$$

(A) 5125

(B) 5850

(C) 6500

(D) 6975

(E) 7200

Solution

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 25 \times 26$$

$$= \sum_{x=1}^{25} x(x+1) = \sum_{x=1}^{25} (x^2 + x) = \sum_{x=1}^{25} x^2 + \sum_{x=1}^{25} x$$

$$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6} + \frac{25 \times 26}{2}$$

$$= 25 \times 13 \times 17 + 25 \times 13$$

$$= 5525 + 325 = 5850 \cdot \text{故選(B)}$$

103-02-14

Statement

設曲線 $y = \log_3 x$ 與 x 軸、直線 $x = 9$ 的交點分別為 A 、 B ，且直線 $x = 9$ 與 x 軸的交點為 C ，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？

(A) 8

(B) 12

(C) 16

(D) 18

(E) 24

Solution

設 $y = 0$ ，則 $y = \log_3 x$ 可知 $x = 1$ ，因此 $A = (1, 0)$

設 $x = 9$ ，則 $y = \log_3 x$ 可知 $y = 2$ ，因此 $B = (9, 2)$

$x = 9$ 與 x 軸的交點為 $(9, 0)$

因此可知底為 $(9 - 1) = 8$ ，高為 $2 - 0 = 2$ ，因此面積為 $\frac{2 \times 8}{2} = 8$ ，故選(A)

103-02-15

Statement

若 $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 8}$ ，則 $g(x)$ 的值域為何？

(A) $[2, 4]$

(B) $[2, \infty)$

(C) $[-1, \infty)$

(D) $(-\infty, \infty)$

(E) $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$

Solution

$x^2 - 6x + 8 \Rightarrow (x - 3)^2 - 1$ ，可知 $x = 3$ 時有最小值 -1

又 $\sqrt[3]{-1} = -1$ ，因此 $g(x)$ 的值域為 $[-1, \infty)$ ，故選(C)

103-02-16

Statement

設 $10 < x < 100$ ，且 $\log x$ 與 $\log \frac{1}{x}$ 的尾數相同，則 $x = ?$

(A) $10\sqrt{2}$

(B) 20

(C) $10\sqrt{6}$

(D) $10\sqrt{8}$

(E) $10\sqrt{10}$

Solution

$\log \frac{1}{x} = -\log x$ ，兩式要尾數要相同的情況下為尾數為0或尾數為0.5

考慮五個選項，可知 $10\sqrt{10} = 10^{\frac{3}{2}}$

$$\log 10^{\frac{3}{2}} = 1.5 \cdot \text{又} -\log 10^{\frac{3}{2}} = -1.5$$

因此尾數為0.5，故選(E)

103-02-17

Statement

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\cos \angle B = -\frac{5}{13}$ ，令 S 為 $\triangle ABC$ 的面積，則下列何者正確？

(A) $S < 8$

(B) $8 \leq S < 9$

(C) $9 \leq S < 10$

(D) $10 \leq S < 11$

(E) $11 \leq S$

Solution

$$\cos \angle B = -\frac{5}{13} \text{ 可知 } \sin \angle B = \frac{12}{13}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{12}{13} = \frac{120}{13}$$

因此 $9 \leq S < 10$ ，故選(C)

103-02-18

Statement

設 $\vec{a} = \langle \cos \alpha, \sin \alpha \rangle$ ， $\vec{b} = \langle \cos \beta, \sin \beta \rangle$ ，且 $0 < \alpha < \pi$ ， $0 < \beta < \pi$ ， $\alpha \neq \beta$ ，則兩向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夾角為何？

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

(E) π

Solution

由題目可知，兩向量是以原點為起點，單位圓上為終點做兩向量。

若任意取圓上兩點 B, C ，則向量 \vec{a} 為原點至點 B 的向量，且向量 \vec{b} 為原點至點 C 的向量。

因此根據向量平行四邊形，可知 $\vec{a} + \vec{b}$ 為 $\angle CAB$ 的角平分向量，且 $\vec{a} - \vec{b}$ 為 \vec{CB}

由三角形的角平分線性質可知 \overline{CB} 會被分成兩段

再由圓性質，過圓心的一射線能將圓上任意兩點等分，則射線跟線段一定為直角，故選(D)

103-02-19

Statement

$$\text{求}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3x-1}{2x+1} - \frac{2}{3}}{x-1} = ?$$

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{2}{9}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{4}{9}$

(E) $\frac{5}{9}$

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3x-1}{2x+1} - \frac{2}{3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5x-5}{6x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{6x+3} = \frac{5}{9} \cdot \text{故選(E)}$$

103-02-20

Statement

$$\text{若}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \frac{-1}{4} \cdot \text{求} a+b = ?$$

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}$$

若極限存在，則 $b-4=0$ ，因此 $b=4$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{(\sqrt{ax+4}+2)} = \frac{-1}{4}$$

得到 $\frac{a}{4} = \frac{-1}{4}$, 因此 $a = -1$

因此 $a + b = 4 - 1 = 3$, 故選(A)