# 國立台北科技大學　數學入學會考詳解

## 作者


- 109 資工系 黃漢軒
  - Instagram
  - sigtunatw@gmail.com
- 109 化工系 羅昇宇
  - Instagram
  - qoo18105@gmail.com


感謝北科入學會考出題老師。

所有的解答均為非官方，有任何勘誤上的問題，請聯繫作者。

## 100年第1次北科入學數學會考

### 100-01-01

#### Statement

已知$f(x)$為一實系數多項式，且$f(\frac{3}{2}) = 27$，$f(-\frac{5}{3}) = 8$。

若$f(x)$除以$(6x^2+x-15)$的餘式為$ax+b$，則$b-a=?$

$(A)\quad 4$
$(B)\quad 8$
$(C)\quad 12$
$(D)\quad 16$
$(E)\quad 20$

#### Solution

可以把式子轉成

$f(x) = g(x)(6x^2+x-15)+ax+b$

$= g(x)(3x+5)(2x-3)+ax+b$

代入$x=\frac{3}{2}$，得到$\frac{3}{2}a+b=27$

代入$x=\frac{-5}{3}$，得到$\frac{-5}{3}a+b=8$

解聯立之後得到$(a,b)=(6,18)$

因此$b-a=12$，故選$(C)$

# 100-01-02

## Statement

若$\alpha,\beta$為方程式$x-\frac{3}{x}+1=0$的兩根，則$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=?$

$(A)$ 9
$(B)$ 15
$(C)$ 21
$(D)$ 27
$(E)$ 33

## Solution

$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{10(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+25$

$x-\frac{3}{x}+1=0\Rightarrow x^2+x-3=0$

利用根與係數，得到$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3$

因此$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=\frac{4}{-3}+\frac{-10}{-3}+25=27$

故選$(D)$

# 100-01-03

## Statement

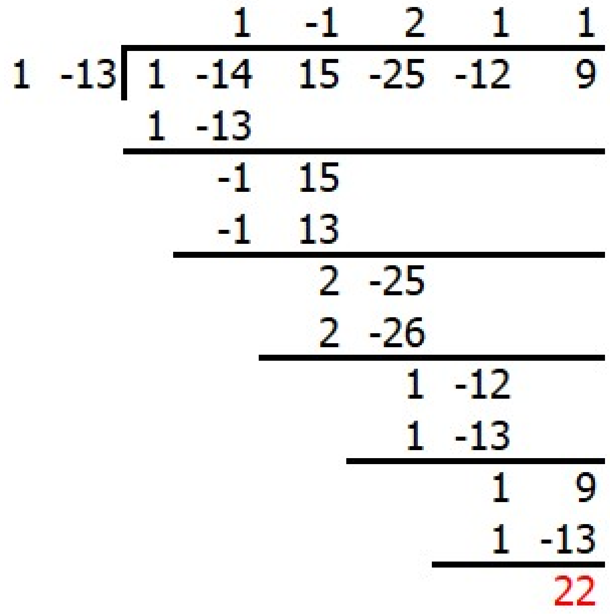
求$13^5-14\times 13^4+15\times 13^3-25\times 13^2-12\times 13+9=?$

$(A)$ 22
$(B)$ 25
$(C)$ 28
$(D)$ 31
$(E)$ 34

## Solution

將式子考慮成$f(x)=x^5-14x^4+15x^3-25x^2-12x+9$

式子等價於$f(x)$除以$x-13$的餘數（餘式定理）。




故答案選$(A)$。

## 100-01-04

### Statement

若$\dfrac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$，則$A+B+C+D=$?

$(A)$ $\frac{1}{2}$
$(B)$ $2$
$(C)$ $3$
$(D)$ $\frac{7}{2}$
$(E)$ $33$

### Solution

$$\frac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$2x^2-x+4=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2)$

$=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$

$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B$

可知

$A+C=0$
$B+D=2$
$A=-\frac{1}{4}$
$B=1$

因此$C=\frac{1}{4}$，$D=1$。

因此$A+B+C+D=2$

故選$(B)$

# 100-01-05

## Statement

$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} \le -1$之解為何？

(A) $1 \le \mathrm{x} < 2$
(B) $1 < \mathrm{x} \le 2$
(C) $1 < \mathrm{x} < 2$
(D) $\mathrm{x} \ge 2$ 或 $\mathrm{x} < 1$
(E) $\mathrm{x} > 2$ 或 $\mathrm{x} < 1$

## Solution

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} \le -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} + 1 \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2} \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2-5x+7)}{(x-1)(x-2)} \le 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2-10x+14 \le 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} x^2-10x+14 \ge 0 \\ (x-1)(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

因此$1 < x < 2$時，$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} \le -1$，故選$(C)$

# 100-01-06

## Statement

若$a$, $b$均為實數且$ax^2+bx-10<0$之解為$\frac{-5}{2} < x < \frac{4}{3}$，則$a+b=$？

(A) $5$
(B) $\frac{11}{2}$
(C) $6$
(D) $\frac{13}{2}$
(E) $7$

### Solution

可以根據結果列出式子，得：

$(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3})<0$
$\Rightarrow x^2-\frac{4x}{3}+\frac{5x}{2}+\frac{-20}{6}<0$
$\Rightarrow 6x^2-8x+15x-20<0$
$\Rightarrow 6x^2+7x-20<0$

兩邊共除2，得$3x^2+\frac{7}{2}x-10<0$

$a=3,\ b=\frac{7}{2},\ a+b=\frac{13}{2}$

## 100-01-07

### Statement

若直線$12x-5y=21$與兩直線$x=\frac{23}{39}$、$x=\frac{16}{13}$分別交於$A$、$B$兩點，則線段長$\overline{AB}=?$

$(A)\quad \frac{6}{5}$
$(B)\quad \frac{5}{4}$
$(C)\quad \frac{5}{3}$
$(D)\quad \frac{13}{5}$
$(E)\quad \frac{25}{7}$

### Solution

已知$12x-5y=21$，則斜率為$\frac{12}{5}$

$\Delta x=\frac{16}{13}-\frac{23}{39}=\frac{25}{39}$

$y=mx+b$，則$0=\frac{12}{5}(\frac{16}{13}-\frac{23}{39})+b$，得到$b=\frac{60}{39}=\Delta y$

因此距離為$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\frac{25}{39})^2+(\frac{60}{39})^2}=\frac{5}{3}$，故選$(C)$

## 100-01-08

### Statement

設兩向量$\vec{a},\vec{b}$的夾角為$\theta$，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$，則$\cos\theta=?$

$(A)\quad \frac{7}{25}$

$(B)\quad \frac{5}{13}$

$(C)\quad \frac{3}{5}$

$(D)\quad \frac{4}{5}$

$(E)\quad \frac{5}{6}$

### Solution

可以考慮成

$\cos\theta = \dfrac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2\times|a|\times|b|}$

$\cos(\pi-\theta) = \dfrac{|a|^2+|b|^2-|a+b|^2}{2\times|a|\times|b|} = -\cos\theta$

因此，$\dfrac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2\times|a|\times|b|} = \dfrac{-|a|^2-|b|^2+|a+b|^2}{2\times|a|\times|b|}$

$|a|^2+|b|^2-9 = -|a|^2-|b|^2+16$

設$x=|a|=|b|$，故$2x^2-9=-2x^2+16$，得到$x=\dfrac{5}{2}=|a|=|b|$

代入$\cos\theta$，得到$\dfrac{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}-9}{2\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}} = \dfrac{\frac{25}{2}-9}{\frac{25}{2}} = \dfrac{7}{25}$

故選$(A)$

## 100-01-09

### Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為$\theta$，且$|\vec{a}|=7$、$|\vec{b}|=5$，$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$，則$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})=?$

$(A)\quad -25$

$(B)\quad -5$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 44$

$(E)\quad 51$

### Solution

$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2-3(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2$

已知$\tan\theta=\dfrac{-3}{4}$，則$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta=7\times5\times-\frac{4}{5}=-28$

因此$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})=98+28-75=51$

故選$(E)$。

# 100-01-10

## Statement

橢圓以$(2,2)$與$(6,2)$為兩焦點，且與直線$x+1=0$相切，則橢圓短軸半長為何？

$(A)$ $4$
$(B)$ $\sqrt{21}$
$(C)$ $\sqrt{23}$
$(D)$ $\sqrt{29}$
$(E)$ $6$

## Solution

將題目簡化為求$b$的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是$(\frac{2+6}{2},\frac{2+2}{2})=(4,2)$

焦距$c$為焦點與橢圓中點之距離，因此可知$c=2$

已知與直線$x+1=0$相切，因此橢圓左右一端會與$x+1=0$相切，因此其中一端為$(-1,2)$

故長軸$a$為橢圓長軸端點與中心之距離，可知$a=5$

因此$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

故選$(B)$。

# 100-01-11

## Statement

設拋物線$y=2x-\frac{1}{2}x^2$的焦點座標為$(a,b)$，則$ab=$?

$(A)$ $3$
$(B)$ $3.5$
$(C)$ $4$
$(D)$ $4.5$
$(E)$ $5$

### Solution

$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$\Rightarrow -2(y-2) = (x-2)^2$

因此可以知道頂點座標為$(2,2)$，$c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

因此焦點為$(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$

故$a = 2, b = \frac{3}{2}$，得到$ab = 3$，故選$(A)$。

## 100-01-12

### Statement

雙曲線$xy - 3x + 4y = 0$兩頂點的距離為何？

$(A)\quad 2\sqrt{3}$
$(B)\quad 4$
$(C)\quad 2\sqrt{6}$
$(D)\quad 4\sqrt{3}$
$(E)\quad 4\sqrt{6}$

### Solution

$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x+4)(y-3) = -12$

考慮通過頂點的線為$y = -x + b$，代入必定通過的點$(-4,3)$得到$b = -1$

因此$y = -x - 1$會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$x(-x-1) - 3x + 4(-x-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$

利用公式解得到$x$的點，也就是$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$

當$x = -4 + 2\sqrt{3}$時，$y = 2\sqrt{3} - 3$

當$x = -4 - 2\sqrt{3}$時，$y = -3 - 2\sqrt{3}$

兩點距離為$\sqrt{(-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3} - 3 - (-3 - 2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48 + 48} = 4\sqrt{6}$，故選$(E)$

# 100-01-13

## Statement

若$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$，則$x=?$

$(A)\quad -3$
$(B)\quad -3$或$1$
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 3$

## Solution

$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$

$\Rightarrow \log_2(3-x^2)-\log_2 x=1$

$\Rightarrow \log_2(\dfrac{3-x^2}{x})=1$

$\Rightarrow \dfrac{3-x^2}{x}=2$

$\Rightarrow -x^2-2x+3=0$

$\Rightarrow x=1, x=-3$

驗根可知$\log_2 x$無法放入$-3$，因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-3$不合。

因此$x=1$，故選$(C)$

# 100-01-14

## Statement

若$f(x)=\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$，且$f(a)=3$，$f(b)=5$，則$f(a+b)=?$

$(A)\quad \frac{5}{3}$
$(B)\quad 2$
$(C)\quad 6$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 15$

## Solution

令$t=2^x$，則$f(x)=\dfrac{1+t}{1-t}$

考慮$f(a)=3$

$\dfrac{1+t}{1-t}=3$

$\Rightarrow 1+t=3-3t$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$

因此$2^a = \frac{1}{2}$，得到$a = -1$

考慮$f(b) = 5$

$\frac{1+t}{1-t} = 5$

$\Rightarrow 1 + t = 5 - 5t$

$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$

$2^b = \frac{2}{3}$，則$b = 1 - \log_2 3$

故$f(a+b) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 \frac{1}{3}) = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{2} = 2$，故選$(B)$

## 100-01-15

### Statement

求$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}}) = ?$

$(A)$ $\frac{1}{2}$

$(B)$ $\frac{3}{2}$

$(C)$ $2$

$(D)$ $\frac{5}{2}$

$(E)$ $4$

### Solution

$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}}) = \log_2(\sqrt{12+8\sqrt{2}} + \sqrt{12-8\sqrt{2}}) = \log_2(\sqrt{8+8\sqrt{2}+4} + \sqrt{8-8\sqrt{2}+4})$

$= \log_2(\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2-2\sqrt{2})^2}) = \log_2(4\sqrt{2}) = \frac{5}{2}$，故選$(D)$

## 100-01-16

### Statement

設$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$，則$\sin\theta + \cos\theta = ?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad -\frac{1}{2}$

$(C)\quad \frac{1}{2}$

$(D)\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

$(E)\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

### Solution

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

則$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1+2\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

## 100-01-17

### Statement

下列何者錯誤？

$(A)$ 若$0<x<\frac{\pi}{4}$，則 $\sin x<\cos x<\cot x$

$(B)$ 若$\pi<x<\frac{5\pi}{4}$，則 $\sec x<\csc x<\cot x$

$(C)$ 若$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，則 $\cos x<\sin x<\tan x$

$(D)$ 若$\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}$，則 $\sin x_1>\sin x_2$

$(E)$ 若$\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\pi$，則 $\cos x_1>\cos x_2$

### Solution

若$\pi<x<\frac{5\pi}{4}$，則 $\sin\theta<\cos\theta<\tan\theta$

故$\csc\theta<\sec\theta<\cot\theta$，故選$(B)$

# 100-01-18

## Statement

若$mx+3y+1=0$與$x+(m-2)y+m=0$之交點在第二象限內，則$m$之範圍為何？

$(A)\quad 0<m<1$
$(B)\quad 0<m<2$
$(C)\quad 0<m<3$
$(D)\quad 1<m<3$
$(E)\quad 1<m<4$

## Solution

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x=\dfrac{2m+2}{(m-3)(m+1)} \\ y=\dfrac{m^2-1}{(-m+3)(m+1)} \end{cases}$$

考慮到$y>0, x<0$的情況

得到$((m<-1)\cup(-1<m<3))\cap(1<m<3)\Rightarrow 1<m<3$

得到$1<m<3$，故選$(D)$

# 100-01-19

## Statement

若點$(a,b)$在直線$2x+3y=1$上移動，則直線$ax+by=3$恆過哪一點？

$(A)\quad (3,4)$
$(B)\quad (4,5)$
$(C)\quad (5,7)$
$(D)\quad (5,8)$
$(E)\quad (6,9)$

## Solution

考慮$x=5$時$y=-3$

考慮$x=-4$時$y=3$

由於$a,b$依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮$5x-3y=3$與$-4x+3y=3$的交點，得到$(x,y)=(6,9)$，故選$(E)$

### 100-01-20

#### Statement

已知$A(3,-5)$，$B(-7,4)$，且點$P$介於$A$、$B$之間，又$\overline{AB}:\overline{BP}=7:4$，若$P$之座標為$(a,b)$，則$7a+21b=?$

$(A)\quad -33$
$(B)\quad -32$
$(C)\quad -31$
$(D)\quad -30$
$(E)\quad -29$

#### Solution

$\overline{AB}:\overline{BP}=7:4 \Rightarrow \overline{AP}:\overline{BP}=3:4$

利用內分點公式。

$P=(\frac{4\times 3+3\times(-7)}{7},\frac{4\times(-5)+3\times 4}{7})=(\frac{-9}{7},\frac{-8}{7})$

則$7a+21b=(-9)+(-8)\times 3=-33$，故選$(A)$

## 100年第2次北科入學數學會考

### 100-02-01

#### Statement

若$\alpha$，$\beta$為方程式$x^2+12x+9=0$的兩根，則$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=?$

(A) $-18$
(B) $-6$
(C) 6
(D) 12
(E) 18

#### Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式$ax^2+bx+c$，存在兩根$\alpha$與$\beta$。

那麼$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$，且$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$\sqrt{\alpha}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2$

$\Rightarrow \alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$

根據偉達定理我們可以求得

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-12}{1}=-12$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$

注意一下$\alpha + \beta = -12$，$\alpha\beta = 9$
若兩根一正一負那麼$\alpha\beta < 0$，若兩根都是正的那麼$a + b > 0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。
$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$會存在複數，相乘後可以得到$-\sqrt{\alpha\beta}$。

因此帶回欲求之式子：

$-12 - 2 \times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$

# 100-02-02

## Statement

若 $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ 與 $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ 的最高公因式為 $x^2 + bx + c$，則$b + 2c = ?$

(A) $-5$
(B) $-3$
(C) 0
(D) 5
(E) 7

## Solution

第一式的因式$ax + b$的$a$一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)，
且$b$一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到$(x+1)(x-2)(x^2+1)$
接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得倒$(x+1)(x-2)(2x+3)$

可以觀察到最大公因式即為$(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$
比較係數後得到$b = -1, c = -2$

則$b + 2c = -1 + 2 \times -2 = -5$。

# 100-02-03

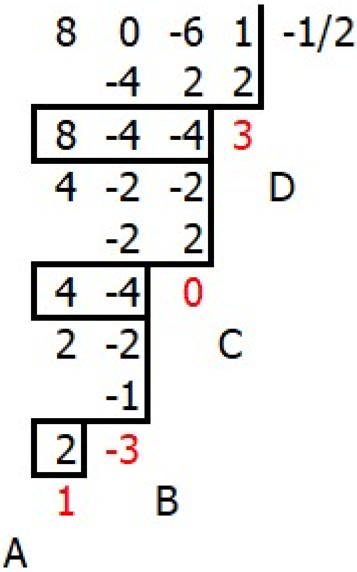
## Statement

若$\frac{8x^3 - 6x + 1}{(2x+1)^4} = \frac{a}{(2x+1)} + \frac{b}{(2x+1)^2} + \frac{c}{(2x+1)^3} + \frac{d}{(2x+1)^4}$，則$2a + b - c + d = ?$

(A) $-2$
(B) $-1$
(C) 0
(D) 1
(E) 2

### Solution

我們可以使用綜合除法，將$2x+1$改寫成$x+\frac{1}{2}$，然後再對除出來的係數除以2。




因此$a=1,\ b=-3,\ c=0,\ d=3$。

$2a+b-c+d=1\times 2+(-3)-0+3=2$。

## 100-02-04

### Statement

$x^2-4x+2\le|x-2|$ 之解為何？

(A) $1\le \mathrm{x}\le 4$
(B) $2\le \mathrm{x}\le 4$
(C) $0\le \mathrm{x}\le 2$
(D) $0\le \mathrm{x}\le 4$
(E) $0\le \mathrm{x}\le 3$

### Solution

1. 考慮$x^2-4x+2\le x-2$：
   移項，$x^2-4x+2-x+2\le 0$
   整理，$x^2-5x+4\le 0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$(x-4)(x-1)\le 0$，並且可以得到$1\le x\le 4$。
2. 考慮$x^2-4x+2\le -x+2$：
   移項，$x^2-4x+2+x-2\le 0$
   整理，$x^2-3x\le 0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$x(x-3)\le 0$，並且可以得到$0\le x\le 3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到$0\le x\le 4$。

# 100-02-05

## Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$之解為何？

$(\mathrm{A})\ \mathrm{x} < \dfrac{-1}{2}$ 或 $0 < \mathrm{x} < 1$

$(\mathrm{B})\ 0 < \mathrm{x} < \dfrac{1}{2}$ 或 $1 < \mathrm{x} < 2$

$(\mathrm{C})\ \mathrm{x} < \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $0 < \mathrm{x} < 1$

$(\mathrm{D})\ \mathrm{x} < \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < \mathrm{x} < 2$

$(\mathrm{E})\ 0 < \mathrm{x} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < \mathrm{x} < 2$

## Solution

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$

$\Rightarrow 2\log_2 x - \dfrac{\log 2}{\log x} < 1$

$\Rightarrow 2\log_2 x - \dfrac{1}{\log_2 x} < 1$

令$\log_2 x = t$，那麼

$2t - \dfrac{1}{t} < 1$

$\Rightarrow 2t - \dfrac{1}{t} - 1 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$

考慮兩種情況。

1. 若$t > 0$且$2t^2 - t - 1 < 0$
   $2t^2 - t - 1 < 0 = (2t+1)(t-1) < 0 = \dfrac{-1}{2} < t < 1$
   與$t > 0$取交集得到$0 < t < 1$。
2. 若$t < 0$且$2t^2 - t - 1 > 0$
   $2t^2 - t - 1 > 0 = (2t+1)(t-1) > 0 = t < \dfrac{-1}{2}$ 或 $t > 1$
   與$t < 0$取交集得到$t < \dfrac{-1}{2}$。

對這兩種考慮取聯集，得到$t < \dfrac{-1}{2}$或$0 < t < 1$。

還原，得到$x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$或$1 < x < 2$。

# 100-02-06

## Statement

已知$\Delta ABC$中，$\overline{AB}=37$，$\overline{BC}=53$，$\overline{AC}=89$，則下列各內積中，何者為最大？

$(A)\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$(B)\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$

$(C)\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$(D)\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$(E)\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

## Solution

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=37\times 89\times\frac{37^2+89^2-53^2}{2\times 37\times 89}$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=53\times 37\times\frac{53^2+37^2-89^2}{2\times 53\times 37}$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=89\times 37\times\frac{89^2+53^2-37^2}{2\times 89\times 53}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}<0$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}<0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$37^2+89^2-53^2$。

$53^2+37^2-89^2$

$89^2+53^2-37^2$

顯然是第三者較大，故選$(C)$

# 100-02-07

## Statement

已知向量$\overrightarrow{AB}=(-31,29)$，$\overrightarrow{AC}=(23,-11)$，則下列向量長中，何者為最大？

(A) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

(B) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

(C) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

(D) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

(E) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$

### Solution

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$

$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$
$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$

考慮向量長的公式，當存在一向量$\overrightarrow{L} = (A, B)$，$\overrightarrow{L}$的向量長為$|\overrightarrow{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$
因此若$|A| + |B|$越大，那麼向量長越大。

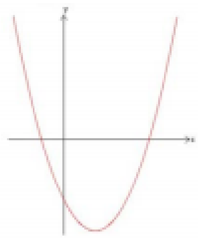
考慮選項A：$|-31| + |29| = 60$
考慮選項B：$|54| + |-40| = 94$
考慮選項C：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$，$|23| + |-11| = 34$
考慮選項D：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$，$|-8| + |18| = 26$
考慮選項E：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$，$|0| + |0| = 0$

因此，故選B。

## 100-02-08

### Statement

設$y = ax^2 + bx + c$的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



(A) $\mathrm{abc}$
(B) $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$
(C) $\mathrm{c}^2 - 4\mathrm{ab}$
(D) $\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$
(E) $\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$

### Solution

因為開口向上，所以$a > 0$。
觀察$x = 0$，可以發現對應到的$y < 0$，因此$c < 0$
觀察一下對稱軸，$\frac{-b}{2a} > 0$，因此$b < 0$

因此$abc > 0$，$b^2 - 4ac > 0$因為有實數解。
$c^2 - 4ab > 0$因為$ab < 0$。

而$b + \sqrt{b^2 - 4ac}$必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，
另一根是負數因此$b - \sqrt{b^2 - 4ac}$小於0，故選E。

# 100-02-09

## Statement

已知$4x^2+y^2-4x+8y=8$，則$x$的最大值為何？

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

## Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的$x$了。

$4x^2-4x+y^2+8y=8$

$4(x^2-x)+y^2+8y=8$

$4(x^2-x+\frac{1}{4})+y^2+8y+16=8+16+1$

$4(x-\frac{1}{2})^2+(y+4)^2=25$

$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y+4)^2}{25}$

由此可知這個橢圓的短邊平行$x$軸

$a=\sqrt{25}=5, b=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

中心可從式子得知，$(x,y)=(\frac{1}{2},-4)$

因此，加上$x$的部份得到$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

# 100-02-10

## Statement

拋物線$y=4-2x-x^2$與$x$軸兩交點的距離為何？

(A) 2
(B) 3
(C) $2\sqrt{5}$
(D) 6
(E) 8

## Solution

將y等於0，求出$x$。

$-x^2-2x+4=0$

先確定$b^2-4ac$是否大於0。

$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20$

因此兩根為$\frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$

$\frac{2+\sqrt{5}}{-2} - \frac{2-\sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$

## 100-02-11

### Statement

設雙曲線$x^2 - y^2 = x + 2y$兩漸進的夾角為$\theta$，則$\sin\frac{\theta}{2} = ?$

(A) $0$
(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
(E) $1$

### Solution

配方雙曲線得到標準式。

$x^2 - x - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$

$(x - \frac{1}{2})^2 - (y-1)^2 = \frac{5}{4}$

$\frac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5} - \frac{4(y-1)^2}{5} = 1$

求漸進線，令等號右邊為0

$\frac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5} = \frac{4(y-1)^2}{5}$

$(x - \frac{1}{2})^2 = (y-1)^2$

$(x - \frac{1}{2})^2 - (y-1)^2 = 0$

$(x - \frac{1}{2} - (y-1))(x - \frac{1}{2} + (y-1)) = 0$

$(x - y + \frac{1}{2})(x + y + \frac{3}{2}) = 0$

第一條線$(x - y + \frac{1}{2})$可求斜率$m = 1$

第二條線$(x + y + \frac{3}{2})$可求斜率$m = -1$

因此，這兩條線垂直$(m_1 \times m_2 = -1)$，夾角為$90^\circ$

因此$\sin\frac{90^\circ}{2}=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

## 100-02-12

### Statement

不等式$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\leq 2$之解為何？

$(\mathrm{A})\ -1\leq \mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{B})\ 0<\mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{C})\ 1\leq \mathrm{x}\leq 2$

$(\mathrm{D})\ 0<\mathrm{x}\leq 2$

$(E)\ 1\leq x\leq 4$

### Solution

將分子分母上下同乘$2^x$。

$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\Rightarrow\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}\leq 2$

移項。

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}-2\leq 0$

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2(2^{2x}-1)}{2^{2x}-1}\leq 0$

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2\cdot 2^{2x}+2}{2^{2x}-1}\leq 0$

$\frac{2^{2x}-16}{2^{2x}-1}\leq 0$

令$t=2^{2x}$

$\frac{t-16}{t-1}\leq 0$

考慮以下兩點：

1. $t-16\geq 0$，$t-1<0$

$t\geq 16,\ t<1$，這兩個不等式沒有任何交集，因此$t\in\emptyset$

2. $t-16\leq 0$，$t-1>0$

$t\leq 16,\ t>1$，這兩個不等式的交集為$1<t\leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到$1<t\leq 16$

還原$t$得到$1<2^{2x}\leq 16$，因此$0<x\leq 2$

# 100-02-13

## Statement

方程式$10 \cdot x^{2\log x} = x^3$之所有實根的平方和為何？

(A) 100
(B) 101
(C) 110
(D) 111
(E) 121

## Solution

等號兩邊同除$x^{2\log x}$

$10 = x^{3-2\log x}$

$1 = (3 - 2\log x) \times \log(|x|)$

因為要求實根，因此可以限定$x > 0$，所以$(3 - 2\log x) \times \log(x)$

令$t = \log x$

$1 = (3 - 2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$

因式分解得到$(-2t + 1)(t - 1) = 0$

可以解出$t = \dfrac{1}{2}$或$t = 1$

還原$t$，可以得到$\log x = \sqrt{10}$ 或 $\log x = 10$

兩根的平方和為$\sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$

# 100-02-14

## Statement

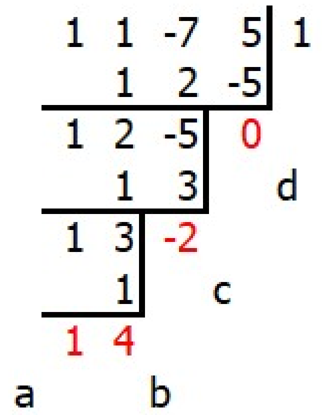
若$f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$，則$f(1 + \sqrt{2}) = ?$

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

## Solution

觀察一下，可以嘗試把$x^3 + x^2 - 7x + 5$化簡成$c(x-1)^2 + b(x-1) + a\ldots$

這部分可以用綜合除法做到。




因此可得$(x-1)^3+4(x-1)^2-2(x-1)$。

把$f(1+\sqrt{2})$帶進去，得：

$\log_2((\sqrt{2})^3+4(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}))=\log_2(2\sqrt{2}+8-2\sqrt{2})=\log_2 8=3$

## 100-02-15

### Statement

設$\cos\theta+\cos^2\theta=1$，則$\sin^2\theta+\sin^4\theta=?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

### Solution

$\cos^2\theta=1-\cos\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(1-\cos\theta)=\cos\theta$

$\sin^4=(\sin^2)^2=\cos^2\theta$

$\sin^2\theta+\sin^4\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=1$

## 100-02-16

### Statement

設$\tan 100^\circ = k$，則$\sin 80^\circ = ?$

(A) $\frac{-\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(B) $\frac{\sqrt{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

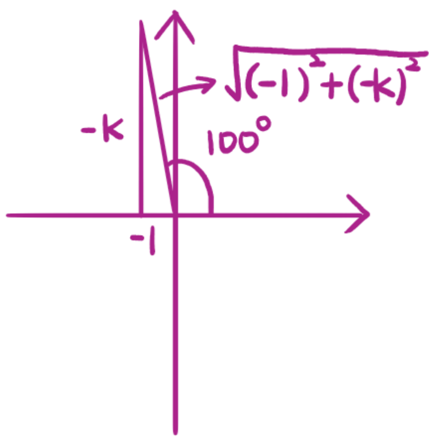
(C) $\frac{-1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(D) $\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

### Solution

畫個圖




看圖可以觀察到，$\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

## 100-02-17

### Statement

設$a = \sec 434^\circ$，$b = \sin 100^\circ$，$c = \cos 260^\circ$，$d = \cot 28^\circ$，$e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A) $\mathrm{b} < \mathrm{c} < \mathrm{d} < \mathrm{e} < \mathrm{a}$

(B) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{d} < \mathrm{e} < \mathrm{a}$

(C) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{e} < \mathrm{d} < \mathrm{a}$

(D) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{d} < \mathrm{a} < \mathrm{e}$

(E) $\mathrm{b} < \mathrm{c} < \mathrm{a} < \mathrm{d} < \mathrm{e}$

### Solution

$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$

$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$

$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$

$d = \cot 28^\circ$

$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$

因此$a > e$，$c < b$，故選B。

## 100-02-18

### Statement

平面上有兩點$A(1,2)$，$B(a,b)$，若直線$\overline{AB}$之垂直平分線為$x+2y-10=0$，則$a-b$= ?

(A) $-1$

(B) $-2$

(C) $-3$

(D) $-4$

(E) $-5$

### Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過$\overline{AB}$的中點$(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$。

帶入垂直平分線得到$\frac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$

$\Rightarrow a + 2b = 15$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到$m = \frac{-1}{2}$，因此與其垂直的斜率一定是$m = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到$\frac{2-b}{1-a} = 2$，整理得到$2 - b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$。

帶回第一式可以得到$5a = 15,\ a = 3,\ b = 6$。

$a - b = 3 - 6 = -3$

# 100-02-19

## Statement

設直線$bx+ay-ab=0$，$a>0,\ b<0$過點$(1,2)$，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則$a+2b=?$

$(\mathrm{A})\ -7-3\sqrt{3}$

$(\mathrm{B})\ -6-3\sqrt{3}$

$(\mathrm{C})\ -5-3\sqrt{3}$

$(\mathrm{D})\ -4-3\sqrt{3}$

$(\mathrm{E})\ -3-3\sqrt{3}$

## Solution

可以推出$x,y$的通式。

$bx+ay=ab$，求出$x,y$的截距。

當$y=0$，那麼$bx=ab$，$x=a$

當$x=0$，那麼$ay=ab$，$y=b$

已知$a>0,b<0$過點$(1,2)$，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道$\frac{1}{2}|a||b|=2$，可知$ab=-4$或者$ab=4$，但是$a>0,b<0$，因此$ab=4$不合。

已知過點$(1,2)$且$ab=-4$，因此可以把點帶入得到$b+2a=-4$，

又$ab=-4$所以$a=\frac{-4}{b}$，所以得到$b+\frac{-8}{b}=-4$

同乘以$b$可以得到$b^2+4b-8$。'

利用公式解可以解出$\frac{-4\pm\sqrt{16-4\times 1\times -8}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{-4\pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根$-2+2\sqrt{3}$或者$-2-2\sqrt{3}$，其中由於$b<0$，因此$-2+2\sqrt{3}$不合。

帶回求出$a$得到$a=\frac{-4}{-2-2\sqrt{3}}=\frac{-4}{-2(1+\sqrt{3})}$

化簡得到$a=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{-2}=-1(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$

因此$a+2b=\sqrt{3}-1+-4-4\sqrt{3}=-5-3\sqrt{3}$

# 100-02-20

## Statement

設直線$3x+y=1$與$x+3y=2$之夾角為$\theta$，則$\cos 2\theta=?$

(A) $\frac{-7}{25}$

(B) $\frac{-6}{25}$

(C) $\frac{-1}{5}$

(D) $\frac{-4}{25}$

(E) $\frac{-3}{25}$

## Solution

考慮兩條線的斜率。

$$3x+y=1,\ m_1=\frac{-3}{1}=-3$$

$$x+3y=2,\ m_2=\frac{-1}{3}$$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為$\tan$來考慮。

$$\tan(m_1-m_2)=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-3-\frac{-1}{3}}{1+1}=\frac{\frac{-8}{3}}{2}=\frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個$\tan$夾角是負的，因此這個夾角是大於$90^\circ$的鈍角。

可以依照$\tan(180^\circ)=0$來求得另一個銳角的夾角。

$\dfrac{\frac{-4}{3}+\tan\theta}{1-\frac{-4}{3}\tan\theta}$，求得銳角$\tan\theta=\frac{4}{3}$

由於$\tan\theta=\frac{4}{3}$，那麼這個角度會介於$45^\circ\sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於$90^\circ$

用兩倍角公式求出$\tan 2\theta=\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}}=\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}}=\dfrac{24}{-7}$

由於這個角度介於$90^\circ\sim 180^\circ$，$y>0$，而$x<0$，也因此$y=24,\ x=-7,\ r=\sqrt{24^2+(-7)^2}=25$

因此$\cos 2\theta=\frac{-7}{25}$，故選$(A)$