108年第1次北科入學數學會考

108-01-01

Statement

若$f(x)$與$g(x)$除以$(x-2)$的餘式分別為5、-2，則$(x^2-x+1)f(x)+(x-3)g(x)$除以$(x-2)$的餘式為何？

(A)　11

(B)　13

(C)　15

(D)　17

(E)　19

Solution

利用餘式定理，將$(x^2-x+1)f(x)+(x-3)g(x)$代入2

得到$3\cdot 5+(-1)\cdot(-2)=17$，故選$(D)$

108-01-02

Statement

若a、b均為實數，且$ax^2+bx-5<0$之解為$\frac{-1}{2}<x<\frac{5}{3}$，則$a+b=?$

(A)　-2

(B)　-1

(C)　0

(D)　1

(E)　2

Solution

透過$\frac{-1}{2}<x<\frac{5}{3}$，可知兩根為$\frac{-1}{2}$與$\frac{5}{3}$

$\frac{-5}{a}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{-5}{6}$，得到$a=6$

$-\frac{b}{6}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{7}{6}$，得到$b=-7$

因此$a+b=-1$，故選(B)

108-01-03

Statement

若$\sum_{k=1}^{9} a_k = 7$、$\sum_{k=1}^{11} b_k = 5$，且$a_{10} = 5$、$b_{11} = -3$，則$\sum_{k=1}^{10}(5a_k - 4b_k + 3) = ?$

(A) 56

(B) 57

(C) 58

(D) 59

(E) 60

Solution

$$\sum_{k=1}^{10}(5a_k - 4b_k + 3)$$

$$= 5 \cdot \sum_{k=1}^{10} a_k - 4 \cdot \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 3$$

$$= 5(\sum_{k=1}^{9} a_k + a_{10}) - 4(\sum_{k=1}^{11} b_k - b_{11}) + \sum_{k=1}^{10} 3$$

$= 5 \cdot 12 - 4 \cdot (5 - (-3)) + 30 = 58$，故選$(C)$

108-01-04

Statement

若$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$且$\tan\theta + \sec\theta = \frac{3}{2}$，則$\sin\theta = ?$

(A) $\frac{2}{13}$

(B) $\frac{3}{13}$

(C) $\frac{4}{13}$

(D) $\frac{5}{13}$

(E) $\frac{6}{13}$

Solution

$\tan\theta+\sec\theta=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta+1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin^2\theta+2\sin\theta+1}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta+8\sin\theta+4=9-9\sin^2\theta$

$\Rightarrow 13\sin^2\theta+8\sin\theta-5=0$

$\Rightarrow (13\sin\theta-5)(\sin\theta+1)=0$

得到$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$或$\sin\theta=-1$(不合)，故選(D)

108-01-05

Statement

在座標平面上，由二元一次聯立不等式$\begin{cases} x\geq 0, y\geq -2 \\ x+2y-2\leq 0 \\ x+y-2\leq 0 \end{cases}$所圍成區域的面積為何？

(A) 5

(B) 7

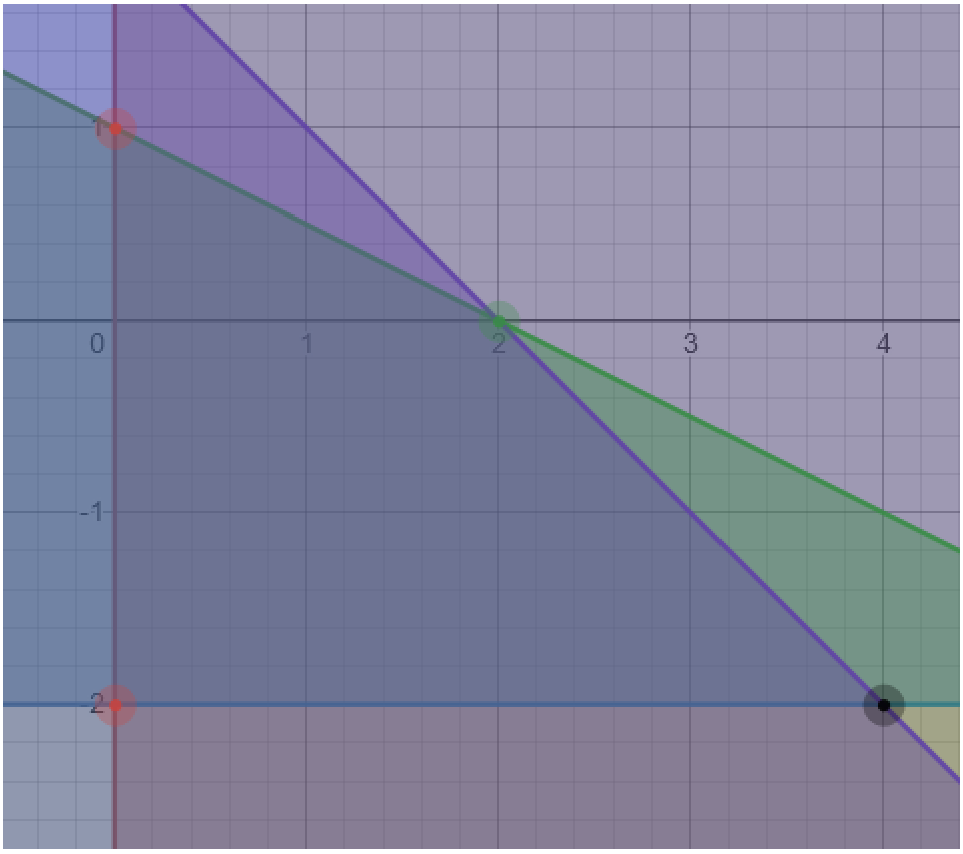
(C) 9

(D) 12

(E) 14

Solution

畫圖



因此面積為$\dfrac{(2+4)\times 2}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=7$，故選$(B)$

108-01-06

Statement

若$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$且$\cos 4\theta=\sin 2\theta$，則$\tan 2\theta=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{2}$

$(B)\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad \sqrt{3}$

$(E)\quad 2$

Solution

$\cos 4\theta=\sin 2\theta$

$\Rightarrow \cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=\sin 2\theta$

$\Rightarrow 1-2\sin^2 2\theta=\sin 2\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2 2\theta+\sin 2\theta-1=0$

$\Rightarrow (2\sin 2\theta-1)(\sin 2\theta+1=0)$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2}$或$\sin 2\theta = -1$(不合)

故$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，因此$\tan 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，故選$(B)$

108-01-07

Statement

若兩圓$C_1 : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$與$C_2 : (x+2)^2 + (y-2)^2 = k$相交，則實數$k$的面積為何？

$(A) \quad 2 \leq k \leq 4$

$(B) \quad 3 \leq k \leq 7$

$(C) \quad 4 \leq k \leq 25$

$(D) \quad 5 \leq k \leq 36$

$(E) \quad 9 \leq k \leq 49$

Solution

由方程式可知道

C_1的圓心為$(2, -1)$，C_2的圓心為$(-2, 2)$

因此兩圓心的距離為$\sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

考慮C_2到C_1的最短距離，也就是$5 - \sqrt{4} = 3$

考慮C_2到C_1的最短距離，也就是$5 + \sqrt{4} = 7$

因此k的範圍為$9 \leq k \leq 49$，故選(E)

108-01-08

Statement

若兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}| = |\vec{b}|$、$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$、$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$，則$\cos\theta = ?$

$(A) \quad \frac{3}{5}$

$(B) \quad \frac{3}{7}$

$(C) \quad \frac{5}{7}$

$(D) \quad \frac{5}{9}$

$(E) \quad \frac{7}{9}$

Solution

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})=7$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})=2$

可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{4}$且$|\vec{a}|^2=\frac{9}{4}$

又$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2\cos\theta=\frac{5}{4}$

可得$\cos\theta=\frac{5}{9}$，故選(D)

108-01-09

Statement

若直線$ax+by-ab=0(a>0、b<0)$過點$(-3,-1)$，且此直線與兩座標軸圍起來的三角形面積為6，則$a=?$

$(A)\quad 2-2\sqrt{2}$

$(B)\quad 2\sqrt{2}-2$

$(C)\quad 2-\sqrt{2}$

$(D)\quad 2+\sqrt{2}$

$(E)\quad 2+2\sqrt{2}$

Solution

$ax+by-ab=0$

$\Rightarrow \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ (截距式)

已知直線與兩座標軸圍起來的三角形面積為6，因此$\frac{-ab}{2}=6$，故$-ab=12$，得$b=\frac{-12}{a}$

代入截距式，得到$-\frac{ax}{12}+\frac{y}{a}=1$

直線過點$(-3,-1)$，得$\frac{3a}{12}-\frac{1}{a}=1$

$\Rightarrow 3a^2-12a-12=0$

$\Rightarrow a^2-4a-4=0$

利用公式解得$a=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{2}=2\pm2\sqrt{2}$(負不合)

因此$a=2+2\sqrt{2}$，故選(E)

108-01-10

Statement

若a、b、c皆為整數，且$x^3-x^2-3x+2=(x+a)(x^2+bx+c)$，則$a-b+c=?$

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 4$

Solution

$x^3-x^2-3x+2=(x+a)(x^2+bx+c)$

考慮以下所有有可能為x^3-x^2-3x+2的因式

若因式為$x+1$，則$-1-1+3+2\neq 0$

若因式為$x-1$，則$1-1-3+2\neq 0$

若因式為$x+2$，則$-8-4+6+2\neq 0$

若因式為$x-2$，則$8-4-6+2=0$，故$x-2$為x^3-x^2-3x+2的因式

因此$a=-2$

$x^3-x^2-3x+2=(x-2)(x^2+bx+c)$

$\Rightarrow x^2+x-1=x^2+bx+c$

故$b=1$且$c=-1$

得到$a-b+c=-2-1+(-1)=-4$，故選(A)

108-01-11

Statement

若$2^x-2^{-x}=2$，則$x=?$

$(A)\quad \log_2(1+\sqrt{2})$

$(B)\quad \log_2(2+\sqrt{2})$

$(C)\quad \log_2(1+2\sqrt{2})$

$(D)\quad \log_2(2+2\sqrt{2})$

$(E)\quad \log_2(3+2\sqrt{2})$

Solution

$2^x - 2^{-x} = 2$

$\Rightarrow 2^{2x} - 1 = 2^{1+x}$

令$t = 2^x$，則

$\Rightarrow t^2 - 1 = 2t$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

利用公式解，得到$t = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

考慮到$\sqrt{2} > 1$，因此$1 - \sqrt{2} < 0$不在t的值域內，故不合。

還原t得到$\log_2(1+\sqrt{2})$，故選(A)

108-01-12

Statement

若$(\log \dfrac{x}{a})(\log \dfrac{x}{3}) = 2$之兩根乘積為61，則$a =?$

$(A)\quad \dfrac{3}{61}$

$(B)\quad \dfrac{4}{61}$

$(C)\quad \dfrac{61}{4}$

$(D)\quad \dfrac{61}{3}$

$(E)\quad \dfrac{61}{2}$

Solution

$(\log \dfrac{x}{a})(\log \dfrac{x}{3}) = 2$

$\Rightarrow (\log x - \log a)(\log x - \log 3) = 2$

$\Rightarrow (\log x)^2 - (\log 3 + \log a)(\log x) + \log 3 \log a = 2$

$\Rightarrow (\log x)^2 - (\log 3a)(\log x) + \log 3 \log a - 2 = 0$

設α, β為式子的兩根，利用根與係數，得到$\log \alpha + \log \beta = \log 3a$

因此$\log \alpha\beta = \log 3a = \log 61$

故$a = \dfrac{61}{3}$，故選(D)

108-01-13

Statement

設$b>0$。若兩直線$L_1:3x-4y+2=0$與$L_2:8x+ay+b=0$相互垂直，且點$(4,-2)$到直線L_2的距離為3，則$a-b=?$

$(A)\quad -6$

$(B)\quad -4$

$(C)\quad -2$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 4$

Solution

$L_1:3x-4y+2=0\Rightarrow 6x-8y+4=0$

已知$L_1\perp L_2$，因此可知$L_2=8x+6y+b=0$，故$a=6$

利用點到直線公式，$\dfrac{|8\cdot 4+6\cdot(-2)+b|}{\sqrt{8^2+6^2}}=3$，得到$b=10$或$b=-50$(不合)

因此$a-b=6-10=-4$，故選(B)

108-01-14

Statement

點$P(1,-6)$到曲線$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=10$的最短距離為何？

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

從式子可以看出，這是一個橢圓曲線，有兩焦點$(4,0)$與$(-2,0)$，且長軸平行x軸

因此可知中心為$(\dfrac{4+(-2)}{2},\dfrac{0+0}{2})=(1,0)$，且$c=3$

又因為$\overline{FP_1}+\overline{FP_2}=2a$，可知$a=5$，$b=\sqrt{5^2-3^2}=4$

因此橢圓的短軸頂點為$(1,4)$與$(1,-4)$，$(1,-6)$距離橢圓的距離為2，故選(B)

108-01-15

Statement

點$P(0,2)$到曲線$x^2-y^2=1$的最短距離為何？

(A) 1

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) 2

(E) $\sqrt{5}$

Solution

令$x=\sqrt{y^2+1}$，則

$d=\sqrt{(\sqrt{y^2+1})^2+(y-2)^2}$

$=\sqrt{y^2+1+y^2-4y+4}$

$=\sqrt{2y^2-4y+5}$

$=\sqrt{2(y-1)^2+3}$

當$y=1$時有最小值$\sqrt{3}$，故選(C)

108-01-16

Statement

下列何者正確？

(A) $0<\theta<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos\theta<\sin\theta$

(B) $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\theta<\sin\theta$

(C) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\Rightarrow\sin\theta<\cos\theta$

(D) $\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\theta<\sin\theta$

(E) $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\Rightarrow\tan\theta<\sin\theta$

Solution

已知當$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則$\tan\theta>\sin\theta$

那麼當$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$時，則$\tan\theta<\sin\theta$，故選$(E)$

108-01-17

Statement

設多項式$f(x)$除以$x+1$、x^2-3x+1的餘式分別為4、$2x+11$。若$f(x)$除以$(x+1)(x^2-3x+1)$的餘式為ax^2+bx+c，則$a+b+c=?$

$(A)\quad -14$

$(B)\quad -13$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 13$

$(E)\quad 14$

Solution

令$f(x)=g(x)(x+1)+4$

$=h(x)(x^2-3x+1)+2x+11$

$=p(x)(x+1)(x^2-3x+1)+ax^2+bx+c$

令$x=-1$，得$a-b+c=4$

令$x^2=(3x-1)$，則$2x+11=3ax+bx+(c-a)$

因此我們可以解聯立方程組$\begin{cases}3a+b=2\\c-a=11\\a-b+c=4\end{cases}$，得到$(a,b,c)=(-1,5,10)$

因此$a+b+c=-1+5+10=14$，故選(E)

108-01-18

Statement

不等式$\log_2 x+6\log_x 2<5$之解為何？

$(A)\quad 2<x<3$

$(B)\quad 1<x<4$

$(C)\quad x<1$或$2<x<3$

$(D)\quad x<1$或$4<x<8$

$(E)\quad x>8$

$(F)\quad 0<x<1$或$4<x<8$

Solution

$\log_2 x + 6\log_x 2 < 5$

$\Rightarrow \log_2 x + 6\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x} < 5$

$\Rightarrow \log_2 x + \dfrac{6}{\log_2 x} < 5$

令$t = \log_2 x$

$t + \dfrac{6}{t} < 5$

$\Rightarrow t + \dfrac{6}{t} - 5 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t} < 0$

考慮兩種情況

$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 > 0 \\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (-\infty, 0)$

$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 < 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (2, 3)$

還原t與考慮定義域，得到$0 < x < 1$或$4 < x < 8$，故選(F)

108-01-19

Statement

若x, y, z為實數，且$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$，則$x^2 + 2y^2 + z^2$的最小值為何？

(A) $\dfrac{1}{3}$

(B) $\dfrac{2}{3}$

(C) 1

(D) $\dfrac{4}{3}$

(E) $\dfrac{5}{3}$

Solution

令$t = \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$

則$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}$

因此$x^2 + 2y^2 + z^2 = (2t+1)^2 + 2(-t-1)^2 + (3t+2)^2 = 15t^2 + 20t + 7$

利用配方法，可以得到$15(t+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}$

當$t=\frac{-2}{3}$，則有最小值$\frac{1}{3}$

108-01-20

Statement

若點P介於$A(1,1)$、$B(-5,4)$之間且$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則點$P$到直線$4x-3y=1$之距離為何？

$(A)\quad 4$

$(B)\quad \frac{21}{5}$

$(C)\quad \frac{22}{5}$

$(D)\quad \frac{24}{5}$

$(E)\quad 5$

Solution

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1 \Rightarrow \overline{AP}:\overline{PB}=2:1$

利用內分點公式，可以知道$(\frac{1\times 1+(-5)\times 2}{1+2},\frac{1\times 1+4\times 2}{1+2})=(-3,3)$

利用點到直線距離公式，$\frac{|4\times(-3)-3\times 3-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{22}{5}$，故選$(C)$