

107年第1次北科入學數學會考

107-01-01

Statement

設橢圓 $9x^2 + 16y^2 - 18x - 135 = 0$ 的兩焦點為 F_1, F_2 ，點 P 在橢圓上，若 $\overline{PF_1} = 2$ ，則 $\overline{PF_2} = ?$

(A) 1

(B) 3

(C) 5

(D) 6

(E) 8

Solution

$$9x^2 + 16y^2 - 18x - 135 = 0$$

利用配方法，改寫式子得 $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\text{可得長軸 } 2a = 2\sqrt{16} = 8$$

又因為 $\overline{FP_1} + \overline{FP_2} = 2a$ ，因此 $\overline{PF_2} = 8 - 2 = 6$ ，故選(D)

107-01-02

Statement

若 α, β 為方程式 $x + \frac{2}{x} + 1 = 0$ 的兩根，則 $\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = ?$

(A) -10

(B) -6

(C) -2

(D) 6

(E) 10

Solution

$$x + \frac{2}{x} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$$

利用根與係數，可得 $\alpha + \beta = -1$ ，且 $\alpha\beta = 2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta) = 2(1 - 6) = -10 \cdot \text{故選}(A)$$

107-01-03

Statement

設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 、 c 皆為實數。若不等式 $f(x) < 0$ 之解為 $x < -2$ 且 $f(2) = 0$ ，則 $3a + b + 2c = ?$

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) 9

Solution

考慮 $f(x) = (x + 2)(x - 2)^2$ ，展開後得到 $(x + 2)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

故 $3a + b + 2c = 3 \cdot (-2) - 4 + 2 \cdot 8 = 6$ ，故選(B)

107-01-04

Statement

若 $\triangle ABC$ 中，向量 $\vec{AB} = \langle 3, -2 \rangle$ 、 $\vec{BC} = \langle x, -1 \rangle$ 、 $\vec{CA} = \langle 4, y \rangle$ ，則 $y - x = ?$

(A) -10

(B) -4

(C) 4

(D) 10

(E) 20

Solution

$$\vec{CA} = \langle 4, y \rangle \Rightarrow \vec{AC} = \langle -4, -y \rangle$$

因此 $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ，也就是 $\langle 3 + x, -2 - 1 \rangle = \langle -4, -y \rangle$ ，得到 $x = -7$ 且 $y = 3$

因此 $y - x = 3 - (-7) = 10$ ，故選(D)

107-01-05

Statement

若 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，則 $\sin \theta + \cos \theta$ 可能為下列何者？

(A) -1

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{故} \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\text{因此} \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2 + 4 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{12}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \text{故選(E)}$$

107-01-06

Statement

若拋物線 $y = 2x^2 + bx + c$ 的頂點為 $(1, 4)$ ，則 $2b + c = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$y = 2x^2 + bx + c \Rightarrow y = 2\left(x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{b^2}{2} + c = 2\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2} + c$$

$$\text{可得} \frac{b}{2} = -1 \cdot \text{因此} b = -2 \cdot \text{又} \frac{b^2}{2} + c = 4 \cdot \text{得到} c = 2$$

$$\text{故} 2b + c = -4 + 2 = -2 \cdot \text{故選(A)}$$

107-01-07

Statement

設 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 為鈍角， $|\vec{AB}| = 6$ 、 $|\vec{AC}| = 7$ 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 $7\sqrt{5}$ ，則 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = ?$

(A) -28

(B) -14

(C) -7

(D) 14

(E) 28

Solution

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = 7\sqrt{5} \cdot \text{可得} \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \text{推得} \cos \theta = -\frac{2}{3}$$

$$\text{則} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \theta = 42 \cdot \frac{-2}{3} = -28 \cdot \text{故選}(A)$$

107-01-08

Statement

若 $\cot \frac{5\pi}{8} = k$ ，則 $\csc \frac{\pi}{8} = ?$

(A) $-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(B) $-\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

(C) k

(D) $\frac{k}{1+k^2}$

(E) $\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

Solution

$$\cot\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\tan \frac{\pi}{8} = k$$

因此 $\tan \frac{\pi}{8} = -k$ ，可得對邊 $-k$ ，鄰邊 1 ，且斜邊 $\sqrt{k^2+1}$

因此 $\csc \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ 。故選(B)

107-01-09

Statement

設 x 、 y 、 z 皆為實數，且 $xyz \neq 0$ 。若 $8^x = 9^y = 5^z = a$ ，且 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ ，則 a 為何？

(A) 500

(B) 600

(C) 700

(D) 800

(E) 900

Solution

$$8^x = 9^y = 5^z = a$$

$$\Rightarrow x \log 8 = y \log 9 = z \log 5 = \log a$$

$$\text{可得 } x = \frac{\log a}{\log 8}, y = \frac{\log a}{\log 9}, z = \frac{\log a}{\log 5}$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} = \frac{\log 8}{3 \log a} + \frac{\log 9}{2 \log a} + \frac{\log 5}{\log a} = \frac{2 \log 8 + 3 \log 9 + 6 \log 5}{6 \log a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{因此 } \frac{2}{3} \log 8 + \log 9 + 2 \log 5 = \log a$$

$$\text{可得 } a = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 9 \cdot 25 = 900, \text{ 故選 (E)}$$

107-01-10

Statement

若 $a + 2b = 10$ ，則 $a^2 + b^2$ 的最小值為何？

(A) 10

(B) 15

(C) 20

(D) 25

(E) 30

Solution

$$\text{利用柯西不等式，得到 } (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) \geq (a + 2b)^2$$

$$\text{因此可知 } (a^2 + b^2) \geq 20, a^2 + b^2 \text{ 的最小值為 } 20, \text{ 故選 (C)}$$

107-01-11

Statement

設 $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ，求 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(15) = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(15)$ 可推得規律得 $-\sqrt{1} + \sqrt{16} = 3$ ，故選 (C)

107-01-12

Statement

若 $x^2 - x - 2$ 除 $x^4 + x^3 + ax^2 + x + b$ 的餘式為 $x + 1$ ，則 $a^2 + b^2 = ?$

(A) 145

(B) 146

(C) 147

(D) 148

(E) 149

Solution

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$\text{設 } x^4 + x^3 + ax^2 + x + b = g(x)(x - 2)(x + 1) + (x + 1)$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } 4a + b + 26 = 3$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } a + b - 1 = 0$$

$$\text{解聯立方程組 } \begin{cases} a + b = -23 \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ 可得 } (a, b) = (-8, 9)$$

因此 $a^2 + b^2 = 64 + 81 = 145$ ，故選 (A)

107-01-13

Statement

若 $f(x) = x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 3x + 16$ ，則 $f(5 - 2\sqrt{3}) = ?$

(A) $6 - 4\sqrt{3}$

(B) $8 - 6\sqrt{3}$

(C) $10 - 8\sqrt{3}$

(D) $12 - 10\sqrt{3}$

(E) $14 - 12\sqrt{3}$

Solution

考慮以 $x - 5$ 來表示 $x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 3x + 16$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -9 & 5 & -3 & 16 & \\ & 5 & -20 & -75 & -390 & 5 \\ \hline 1 & -4 & -15 & -78 & -374 & \\ & 5 & 5 & -50 & & \\ \hline 1 & 1 & -10 & -128 & & \\ & 5 & 30 & & & \\ \hline 1 & 6 & 20 & & & \\ & 5 & & & & \\ \hline 1 & 11 & & & & \end{array}$$

可得 $f(x) = (x - 5)^4 + 11(x - 5)^3 + 20(x - 5)^2 - 128(x - 5) - 374$

因此 $f(5 - 2\sqrt{3}) = 144 - 264\sqrt{3} + 240 + 256\sqrt{3} - 374 = 10 - 8\sqrt{3}$ ，故選(C)

107-01-14

Statement

若拋物線 $y = x^2 + kx + 2$ 恆在直線 $x + y - 1 = 0$ 之上方，則 k 的範圍為何？

(A) $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$

(B) $k < -\sqrt{2}$ 或 $k > \sqrt{2}$

(C) $-2 < k < 2$

(D) $-3 < k < 1$

(E) $k < -3$ 或 $k > 1$

Solution

$$x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -x + 1$$

$$\text{因此 } y = x^2 + kx + 2$$

$$\Rightarrow -x + 1 = x^2 + kx + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + (k+1)x + 1 = 0$$

利用判別式來考慮交點，也就是

$$(k+1)^2 - 4 \times 1 \times 1 > 0$$

$$\Rightarrow (k+1)^2 > 4$$

$$\Rightarrow -3 < k < 1 \cdot \text{故選}(D)$$

107-01-15

Statement

$$\frac{\log 3 \cdot \log_6 25 \cdot \log_7 8}{\log_7 5 \cdot \log 2 \cdot \log_6 27} = ?$$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$\frac{\log 3 \cdot \log_6 25 \cdot \log_7 8}{\log_7 5 \cdot \log 2 \cdot \log_6 27} = \frac{\log 3 \cdot 2 \log_6 5 \cdot 3 \log_7 2}{\log_7 5 \cdot \log 2 \cdot 3 \log_6 3} = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{2 \log 5}{3 \log 3} \cdot \frac{3 \log 2}{\log 5} = 2 \cdot \text{故選}(B)$$

107-01-16

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$ 。若 $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 2$ ，則 $|3\vec{a} - 4\vec{b}| = ?$

(A) 5

(B) $\sqrt{53}$

(C) 8

(D) $\sqrt{73}$

(E) 9

Solution

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } |3\vec{a} - 4\vec{b}| &= \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 24(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 16|\vec{b}|^2} \\ &= \sqrt{9 \times 9 - 24 \times 3 + 16 \times 4} = \sqrt{81 - 72 + 64} = \sqrt{73} \cdot \text{故選}(D) \end{aligned}$$

107-01-17

Statement

$$\text{若 } \frac{ax^2 + bx + c}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \text{則 } 3a + 2b + c = ?$$

(A) 16

(B) 17

(C) 18

(D) 19

(E) 20

Solution

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= -1(x+1)^2 + 2(x+2)(x+1) + (x+2) \\ &= x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

$$\text{因此 } a = 1, b = 5, c = 5 \cdot 3a + 2b + c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 5 = 18 \cdot \text{故選}(C)$$

107-01-18

Statement

$$\text{若 } \log(1 + \cos \theta) + \log\left(\frac{1}{4} - \cos \theta\right) = \log\left(-\frac{3}{4} \cos \theta\right) \cdot \text{則 } \theta \text{ 可能為下列何者？}$$

(A) $-\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

(E) $\frac{5\pi}{6}$

Solution

$$\log(1 + \cos \theta) + \log\left(\frac{1}{4} - \cos \theta\right) = \log\left(-\frac{3}{4}\cos \theta\right)$$

$$\Rightarrow (1 + \cos \theta)\left(\frac{1}{4} - \cos \theta\right) = -\frac{3}{4}\cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos \theta - \cos^2 \theta = -\frac{3}{4}\cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{2}$$

考慮 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ，會使得 $\frac{1}{4} - \cos \theta < 0$ ，故不合。

因此 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ，得到 $\theta = \frac{4\pi}{3}$ 或 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ，故選(D)

107-01-19

Statement

設 $P(4, 3)$ 、 $Q(4, -2)$ 、 $R(1, 2)$ 為平面上三點，求點 P 到直線 \overleftrightarrow{QR} 的距離

(A) 2

(B) $\sqrt{5}$

(C) 3

(D) 5

(E) $\sqrt{26}$

Solution

$$\Delta PQR = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{15}{2}$$

$$\text{又 } \overline{QR} = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = 5$$

設 \overline{QR} 上有一點 S 使得 $\overline{PS} \perp \overline{QR}$

因此 $\frac{1}{2} \times \overline{PS} \times \overline{QR} = \frac{15}{2}$ ，得到 $\overline{PS} = 3$ ，故選(C)

107-01-20

Statement

若 α 為方程式 $\log_3(x+2) = 2 - \log_3(x-6)$ 之根，則下列何者為 α 之倍數？

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 14

Solution

$$\log_3(x+2) = 2 - \log_3(x-6)$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-6) = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+3) = 0$$

因此 $x = 7$ 或 $x = -3$ (不合) · 故選(E)