

104年第一次北科入學數學會考

104-01-01

Statement

若 $f(x) = 18x^3 - 15x^2 - 4x - 3$ ，則 $f(\frac{2-\sqrt{3}}{3}) = ?$

(A) $-3\sqrt{3}$

(B) $-2\sqrt{3}$

(C) $2 - \sqrt{3}$

(D) $2 + \sqrt{3}$

(E) $2\sqrt{3}$

Solution

將式子轉成以 $(3x - 2)$ 來表達的形式。

$$\begin{array}{r|rrrr} 18 & -15 & -4 & -3 & \\ & 12 & -2 & -4 & 2/3 \\ \hline 6 & -1 & -2 & -7 & \\ & 4 & 2 & & \\ \hline 2 & 1 & 0 & & \\ & 4/3 & & & \\ \hline 2/3 & 7/3 & & & \end{array}$$

得到 $f(x) = \frac{2}{3}(3x - 2)^3 + \frac{7}{3}(3x - 2)^2 - 7$

因此 $f(\frac{2-\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{3}(-\sqrt{3})^3 + \frac{7}{3}(-\sqrt{3})^2 - 7 = -2\sqrt{3}$ ，故選(B)

104-01-02

Statement

設 α, β 為方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 之兩根，且 $\alpha > \beta$ ，則 $\alpha^2 - \beta^2 = ?$

(A) $\sqrt{13}$

(B) $\frac{3}{2}\sqrt{13}$

(C) $2\sqrt{13}$

(D) $3\sqrt{13}$

(E) $4\sqrt{13}$

Solution

利用根與係數，可知：

$$\alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1, \text{ 可知 } \alpha = \frac{-1}{\beta}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3$$

$$\text{因此 } \frac{-1}{\beta} + \beta = 3 \Rightarrow \beta^2 - 3\beta - 1 = 0$$

$$\text{解方程式可知 } \beta = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{ 由於 } \alpha > \beta, \text{ 因此正不合, 故 } \beta = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{可知 } \alpha = \frac{-2}{3 - \sqrt{13}}$$

$$\text{因此 } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{22 - 6\sqrt{13}} - \frac{22 - 6\sqrt{13}}{4} = 3\sqrt{13}, \text{ 故選 (D)}$$

104-01-03

Statement

$$2 \cdot 11^5 - 23 \cdot 11^4 + 13 \cdot 11^3 - 25 \cdot 11^2 + 40 \cdot 11 - 56 = ?$$

(A) -77

(B) -35

(C) 17

(D) 21

(E) 63

Solution

$$\text{將式子轉成 } f(x) = 2x^5 - 23x^4 + 13x^3 - 25x^2 + 40x - 56$$

且 x 代入11之結果，等價於 $f(x) \div (x - 11)$ 之餘數 (餘式定理)

因此，利用綜合除法來計算。

$$\begin{array}{r}
 2 \quad -23 \quad 13 \quad -25 \quad 40 \quad -56 \\
 \quad 22 \quad -11 \quad 22 \quad -33 \quad 77 \\
 \hline
 2 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 7 \quad \color{red}{21}
 \end{array}
 \quad \bigg| \quad 11$$

因此， $f(11) = 21$ ，故選(D)

104-01-04

Statement

設 $\frac{5x^3 - 9x^2 + 9x - 3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ ，則 $A+B+C+D=?$

(A) -4

(B) -1

(C) 4

(D) 6

(E) 8

Solution

$$5x^3 - 9x^2 + 9x - 3 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

將 $x=1$ 代入式子，可得 $2 = 2B$ ，因此 $B=1$

$$5x^3 - 10x^2 + 9x - 4 = A(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = A(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = Ax^2 + A + Cx^2 - Cx + Dx - D$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = (A+C)x^2 + (-C+D)x + (A-D)$$

$$\text{可知} \begin{cases} (A+C) = 5 \\ (-C+D) = -5 \\ (A-D) = 4 \end{cases} \text{，解聯立方程式得到 } (A, C, D) = (2, 3, -2)$$

因此 $A+B+C+D = 2+1+3+(-2) = 4$ ，故選(C)

104-01-05

Statement

不等式 $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \leq 0$ 之解為何？

(A) $1 \leq x < 2$

(B) $2 < x \leq 3$

(C) $1 < x < 2$

(D) $x \geq 3$ 或 $x < 2$

(E) $2 < x < 3$

Solution

令 $t = \sqrt[3]{x-2}$ ，則 $t^2 - \frac{1}{t} \leq 0$

得到 $\frac{t^3 - 1}{t} \leq 0$ ，定義域 $t \neq 0$

考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} t^3 - 1 \leq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (0, 1]$$

$$\begin{cases} t^3 - 1 \geq 0 \\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow t \in \emptyset$$

故 $0 < t \leq 1$ 時 $t^2 - \frac{1}{t} \leq 0$

還原 t ，可得 $2 < t \leq 3$ 時， $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \leq 0$ ，故選(B)

104-01-06

Statement

設 $x^2 + 1$ 為 $x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 3$ 的因式，則 $m + n = ?$

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

(E) 8

利用直式除法

$$\begin{array}{r}
 1 + 0 + 1 \quad \left[\begin{array}{r}
 1 + 2 + (m-1) \\
 1 + 2 + m + n + 3 \\
 1 + 0 + 1 \\
 \hline
 2 + (m-1) + n \\
 2 + 0 + 2 \\
 \hline
 (m-1) + (n-2) + 3 \\
 (m-1) + 0 + (m-1) \\
 \hline
 (n-2) + (4-m)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

可知若要整除，則 $(n-2)=0$ 且 $(4-m)=0$ ，可知 $n=2$ 且 $m=4$

$n + m = 6$ ，故選(C)

Statement

若直線 L 與直線 $3x + 4y = 9$ 垂直，且通過兩直線 $3x - 2y + 3 = 0$ 與 $5x + 4y - 17 = 0$ 的交點，則 L 的方程式為何？

- $$\begin{array}{ll} (A) & 3x + 4y = 15 \\ (B) & 3x - 4y = 9 \\ (C) & 4x - 3y = 9 \\ (D) & 4x - 3y = -5 \\ (E) & 4x = 3y \end{array}$$

與直線 $3x + 4y = 9$ 垂直，可知 $L: 4x - 3y = C$

求 $\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0 \\ 5x + 4y - 17 = 0 \end{cases}$ 的交點，解聯立方程組得到 $(x, y) = (1, 3)$

代入 L ，得到 $C = -5$

因此 $L: 4x - 3y = -5$ ，故選(D)

104-01-08

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ， $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 2$ 且 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{37}$ ，則 $\theta = ?$

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

Solution

$$|(\vec{a} + 2\vec{b})|^2 = |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = 37$$

$$\text{可知}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$

$$\text{因此} \cos \theta = \frac{1}{2}, \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} (0 \leq \theta \leq \pi), \text{故選}(D)$$

104-01-09

Statement

設向量 $\vec{a} = \langle 14, -1 \rangle$ ， $\vec{b} = \langle 2^x, 4^{x-1} - 8 \rangle$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，則 $x = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \text{可知} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{因此} 14 \cdot 2^x - (4^{x+1} - 8) = 0$$

$$\text{所以} 14 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2x} + 8 = 0$$

$$\text{令} t = 2^x, \text{則} 14t - 4t^2 + 8 = 0, \text{解方程式得到} t = -\frac{1}{2} (\text{不合}) \text{或} t = 4$$

$$\text{因此} 2^x = 4, \text{得} x = 2, \text{故選}(E)$$

104-01-10

Statement

若橢圓以 $(-3, 1)$ 與 $(5, 1)$ 兩焦點，且通點 $(1, -3)$ ，則橢圓長軸為何？

- (A) 10
- (B) $8\sqrt{2}$
- (C) $10\sqrt{2}$
- (D) 16
- (E) 20

Solution

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$

$$\text{因此 } \sqrt{(-3-1)^2 + (1-(-3))^2} + \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-3))^2} = 2a$$

可知 $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 2a$ ，因此 $2a = 8\sqrt{2}$ ，可知長軸為 $8\sqrt{2}$

104-01-11

Statement

若拋物線方程式為 $y = \frac{1}{8}x^2 + 1$ ，且其焦點坐標為 (a, b) ，則 $a + b = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 5

Solution

轉換成拋物線的表達式，得到 $x^2 = 8(y - 1)$

因此可知 $4c = 8$ ，得到 $c = 2$

可以從表達式中可以知道頂點為 $(0, 1)$ ，拋物線為開口向上之拋物線

因此焦點坐標為 $(0, 1 + 2) = (0, 3)$

可知 $a = 0$ ， $b = 3$ ，因此 $a + b = 3$ ，故選(D)

104-01-12

Statement

若雙曲線方程式為 $2xy - 6x + 4y = 13$ ，則其中心點坐標為何？

(A) $(-4, 2)$

(B) $(-2, 3)$

(C) $(1, -2)$

(D) $(3, -2)$

(E) $(2, 1)$

Solution

$$2xy - 6x + 4y = 13$$

$$\Rightarrow 2(xy - 3x + 2y) = 13$$

$$\Rightarrow 2((x + 2)(y - 3)) = 13$$

因此中心坐標 $(x, y) = (-2, 3)$ ，故選(B)

104-01-13

Statement

若 $\log_2 x = \log_x 16$ ，且其解為 $x = a$ 或 $x = b$ ，則 $a + b = ?$

(A) -1

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 2

(D) 3

(E) $\frac{17}{4}$

Solution

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 2} = \frac{\log_2 16}{\log_2 x}, \text{ 可以得到 } (\log_2 x)^2 = 4, \text{ 可以得到 } \log_2 x = \pm 2$$

$$\text{可以得到 } \log_2 x = 2 \cdot \log_2 x = -2$$

$$\text{得到 } x = 4 \text{ 或 } x = \frac{1}{4}, \text{ 因此 } a + b = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

104-01-14

Statement

若 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ 且 $f(a) = 2$ 、 $f(b) = 3$ ，則 $f(a+b) = ?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{7}{5}$

(C) $\frac{5}{2}$

(D) 5

(E) 12

Solution

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{2^{2x} + 1}{2^{2x} - 1}$$

$$\text{因此 } f(a+b) = \frac{2^{a+b} + 2^{-(a+b)}}{2^{a+b} - 2^{-(a+b)}} = \frac{2^a 2^b + \frac{1}{2^a 2^b}}{2^a 2^b - \frac{1}{2^a 2^b}} = \frac{4^a 4^b + 1}{4^a 4^b - 1}$$

$$\frac{4^a + 1}{4^a - 1} = 2, \text{ 可以得到 } 4^a = 3$$

$$\frac{4^b + 1}{4^b - 1} = 3, \text{ 可以得到 } 4^b = 2$$

$$\text{因此 } f(a+b) = \frac{6+1}{6-1} = \frac{7}{5}, \text{ 故選 (B)}$$

104-01-15

Statement

$$\log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_4 12 = ?$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 2

(D) $\frac{5}{2}$

(E) 3

Solution

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_4 12 \\ &= \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \log_2 12 \\ &= \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_2 \sqrt{12} \\ &= \log_2 \frac{4 \cdot 6}{3} = \log_2 8 = 3 \cdot \text{故選}(E) \end{aligned}$$

104-01-16

Statement

設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{-1}{5}$ ，則 $\tan \theta = ?$

(A) $-\frac{12}{5}$

(B) $-\frac{4}{3}$

(C) -1

(D) $-\frac{3}{4}$

(E) $-\frac{5}{12}$

Solution

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 2 - \frac{1}{25} = \frac{49}{25}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta) = \pm \frac{7}{5} \text{ (負不合)}$$

$$\text{解聯立方程式，可以知道} \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{-1}{5} \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5} \end{cases} \cdot \text{可以得到} (\sin \theta, \cos \theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)。$$

$$\text{因為} \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \text{ 所以} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4}, \text{ 故選}(D)$$

104-01-17

Statement

設 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ ，則 $\frac{1}{2 - \cos \theta} = ?$

(A) $\frac{t^2 - 1}{3t^2 - 1}$

(B) $\frac{t^2 + 1}{3t^2 + 1}$

(C) $\frac{3t^2 - 1}{t^2 + 1}$

(D) $\frac{t}{2t^2 + 2}$

(E) $\frac{t + 1}{2t^2 + 2}$

Solution

因為 $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

所以 $\frac{1}{2 - \cos \theta} = \frac{1}{2 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \frac{1 + t^2}{1 + 3t^2}$ ，故選 (B)

104-01-18

Statement

在 xy 平面上，曲線 $3|x - 2| + |2y + 1| = 6$ 所圍區域的面積為何？

(A) 12

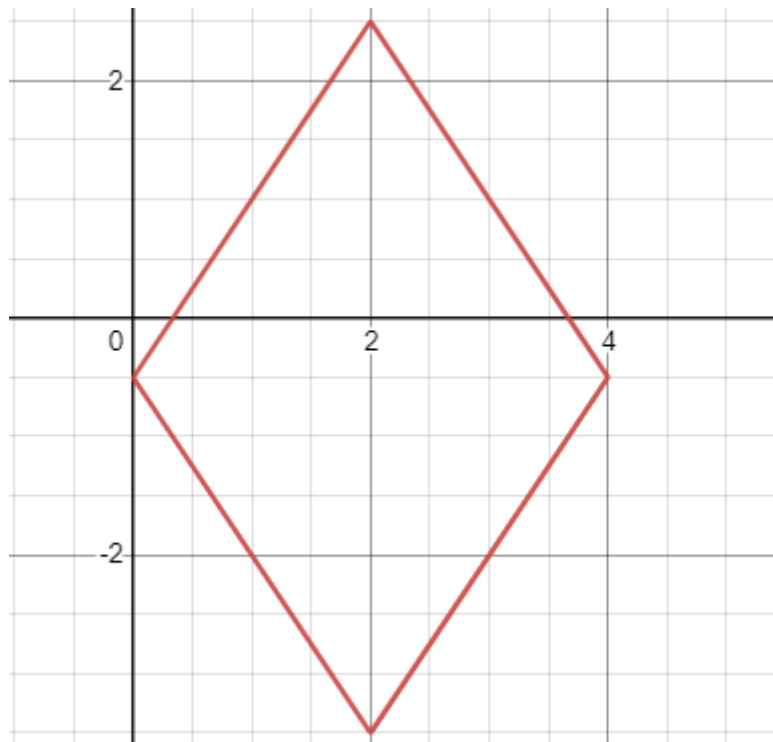
(B) 13

(C) 14

(D) 15

(E) 16

Solution



令 $2y + 1 = 0$ ， $y = -\frac{1}{2}$ ，可以得到 $3|x - 2| = 6$ ，可以得到 $x = 4$ 或 $x = 0$ ，得到 $\Delta_x = 4$

令 $x - 2 = 0$ ， $x = 2$ ，可以得到 $|2y + 1| = 6$ ，可以得到 $y = -\frac{7}{2}$ 或 $y = \frac{5}{2}$ ，得到 $\Delta_y = 6$

因此 $\frac{4 \times 6}{2} = 12$ ，故選(A)

104-01-19

Statement

若 (a, b) 滿足 $2x + 3y = 1$ ，則 $a^2 + b^2$ 的最小值為何？

- (A) $\frac{1}{13}$
- (B) $\frac{1}{\sqrt{13}}$
- (C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- (D) $\frac{1}{2}$
- (E) 1

Solution

$$2a + 3b = 1$$

利用柯西不等式 $(2^2 + 3^2)(a^2 + b^2) \geq (2a + 3b)^2$

可知 $13(a^2 + b^2) \geq 1^2$ ，可知 $(a^2 + b^2) \geq \frac{1}{13}$ ，故選(A)

104-01-20

Statement

若點 A 在圓 $x^2 + y^2 = 8y$ 上，且點 B 在圓 $y^2 = x(6 - x)$ 上，則 \overline{AB} 長度的最大值為何？

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

(E) 14

Solution

點 A 在 $x^2 + (y - 4)^2 = 4^2$ ，圓心 $(0, 4)$

點 B 在 $(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$ ，圓心 $(3, 0)$

兩圓圓心距離 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，則兩圓相交。

因此 \overline{AB} 最大值為 $3 + 5 + 4 = 12$ ，故選(C)