

102-01-01

Statement

若 $\log(x-9) + \log(x-5) = \log 4 + \log(25-2x)$ ，則 $x = ?$

- (A) 9
- (B) 10
- (C) 11
- (D) 12
- (E) 13

Solution

$$\log(x-9) + \log(x-5) = \log 4 + \log(25-2x)$$

$$\Rightarrow \log((x-9)(x-5)) = \log(4(25-2x))$$

$$\Rightarrow \log(x^2 - 14x + 45) = \log(100 - 8x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 100 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 55 = 0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x+5) = 0$$

可得 $x = -5$ 或 $x = 11$ 。

驗根，可知當 $x = -5$ 代入 $\log(x-9)$ ，會得到 $\log -14$

\log 的定義域為正整數之集合，故不合。

因此 $x = 11$ ，故選(C)。

102-01-02

Statement

已知 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ 。若 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \beta = \frac{1}{3}$ ，則 $\sin(\alpha + \beta) = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- (B) $\frac{2\sqrt{10}}{10}$
- (C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
- (D) $\frac{\sqrt{15}}{10}$
- (E) $\frac{\sqrt{17}}{10}$

Solution

$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ，因為 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ，則 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ 。

$\tan \beta = \frac{1}{3}$ ，因為 $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，而 $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

因此 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{-9\sqrt{10}}{50} + \frac{4\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，故選(A)。

102-01-03

Statement

已知 \vec{a} 與 \vec{b} 為兩向量， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 且 $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ 。

若 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角為 θ ，則 $\cos \theta = ?$

- (A) $\frac{1}{7}$
- (B) $\frac{1}{6}$
- (C) $\frac{1}{5}$
- (D) $\frac{6}{25}$
- (E) $\frac{7}{25}$

Solution

$$(|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 16$$

$$(|\vec{a} - \vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 9$$

$$\text{因此，} 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 7, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7}{4}$$

$$\text{又} |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{，因此 } 2|\vec{a}|^2 - \frac{7}{2} = 9 \cdot |\vec{a}| = \frac{5}{2}$$

$$\text{已知 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cos \theta = \frac{7}{4} \text{，得到 } \cos \theta = \frac{7}{25} \text{，故選(E)}$$

102-01-04

Statement

若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{3} + 1$ ， $\overline{BC} = 2$ 且 $\angle B = 30^\circ$ ，則 $\angle A = ?$

- (A) 30°
- (B) 45°
- (C) 60°
- (D) 90°
- (E) 120°

Solution

$$\overline{AC}^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (2)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot (2) \cdot \cos \beta$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - (4\sqrt{3} + 4) \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$\text{因此 } \overline{AC} = \sqrt{2}$$

$$\text{已知 } \frac{\overline{AC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} \cdot \text{因此 } \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha} \cdot \text{得到 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{因此 } \alpha = 45^\circ \cdot \text{故選}(B)$$

102-01-05

Statement

下列敘述何者正確？

(A) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的定義域為 $(-1, \infty)$

(B) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的定義域為 $[-1, \infty)$

(C) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的值域為 $[1, \infty)$

(D) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 的定義域為 $[-1, \infty)$

(E) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 的值域為 $[1, \infty)$

Solution

(A) 的定義域為 \mathbb{R}

(B) 的定義域為 \mathbb{R}

(C) 的值域為 $[0, \infty)$

(E) 的值域為 $[0, \infty)$

故選(D)

102-01-06

Statement

$$\text{若 } \frac{16x^3 - 20x^2 + 6x + 3}{(2x-1)^4} = \frac{a}{(2x-1)} + \frac{b}{(2x-1)^2} + \frac{c}{(2x-1)^3} + \frac{d}{(2x-1)^4} \cdot \text{則}$$

$$a - b + c - d = ?$$

(A) -3

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 3

Solution

$$\frac{16x^3 - 20x^2 + 6x + 3}{(2x - 1)^4} = \frac{a}{(2x - 1)} + \frac{b}{(2x - 1)^2} + \frac{c}{(2x - 1)^3} + \frac{d}{(2x - 1)^4}$$

$$\Rightarrow 16x^3 - 20x^2 + 6x + 3 = a(2x - 1)^3 + b(2x - 1)^2 + c(2x - 1) + d$$

利用綜合除法

$$\begin{array}{r|rrrr} 16 & -20 & 6 & 3 & \\ & 8 & -6 & 0 & 1/2 \\ \hline & 8 & -6 & 0 & 3 \\ & & 4 & -1 & \\ \hline & 4 & -1 & -1 & \\ & & 2 & & \\ \hline & 2 & 1 & & \end{array}$$

綠色：請注意做這樣的綜合除法時，使用的是 $x - \frac{1}{2}$ ，為了還原成 $2x - 1$ ，因此要把係數除以2。

得到 $a = 2, b = 1, c = -1, d = 3$ ，因此 $a - b + c - d = 2 - 1 + (-1) - 3 = -3$ ，故選(A)

102-01-07

Statement

若橢圓 $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 24 = 0$ 的長、短軸長各為 a 、 b ，則 $a + b = ?$

- (A) $\frac{5}{7}$
- (B) $\frac{10}{7}$
- (C) $\frac{15}{7}$
- (D) $\frac{35}{6}$
- (E) $\frac{35}{3}$

Solution

$$4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y = 24$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 24 + 16 + 9$$

$$\Rightarrow 4(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 2)^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{49}{9}} = 1$$

$$\text{可知長軸} 2a = 2\sqrt{\frac{49}{4}} = 7 \cdot \text{短軸} 2b = 2\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{14}{3}$$

$$7 + \frac{14}{3} = \frac{35}{3} \cdot \text{故選}(E)$$

102-01-08

Statement

下列何者錯誤？

$$(A) \quad \sin \frac{8\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$(B) \quad \cos \frac{17\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{3}$$

$$(C) \quad \tan \frac{11\pi}{3} = \tan \frac{2\pi}{3}$$

$$(D) \quad \sec \frac{15\pi}{4} = -\sec \frac{\pi}{4}$$

$$(E) \quad \csc \frac{7\pi}{6} = -\csc \frac{\pi}{6}$$

Solution

$$\sec \frac{15\pi}{4} = \sec 675^\circ = \sec 45^\circ$$

$$\sec 45^\circ \neq -\sec 45^\circ \cdot \text{故選}(D)$$

102-01-09

Statement

$$\text{若 } f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7 = a(x - 2)^4 + b(x - 2)^3 + c(x - 2)^2 + d(x - 2) + e$$

$$\text{則 } a + b + c = ?$$

- (A) 20
 (B) 21
 (C) 22
 (D) 23
 (E) 24

Solution

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 1 & -2 & 3 & 0 & 7 & 2 \\
 & 2 & 0 & 6 & 12 & \\
 \hline
 1 & 0 & 3 & 6 & & 19 \\
 & 2 & 4 & 14 & & \\
 \hline
 1 & 2 & 7 & & & 20 \\
 & 2 & 8 & & & \\
 \hline
 1 & 4 & & & & 15 \\
 & 2 & & & & \\
 \hline
 1 & 6 & & & &
 \end{array}$$

故 $a = 1, b = 6, c = 15, d = 20, e = 19$

因此 $a + b + c = 22$ ，故選(C)

102-01-10

Statement

若 $L_1 = 2x - y + 7 = 0$ 與 $L_2 = ax + y - 13 = 0$ 的交角為 $\frac{\pi}{4}$ 且 $a > 0$ ，則 $a = ?$

- (A) 6
 (B) 5
 (C) 4
 (D) 3
 (E) 2

Solution

$$m_1 = -\frac{2}{-1} = 2, m_2 = -\frac{a}{1} = -a$$

$$\text{又} \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{2 - (-a)}{1 - 2a} = \frac{2 + a}{1 - 2a}$$

交角可能是 $\tan 45^\circ$ 或 $\tan 135^\circ$ ，因此考慮

若是 $\tan 45^\circ$ ，則 $\frac{2+a}{1-2a} = 1$ ，得到 $a = -\frac{1}{3}$ ，不合。

若是 $\tan 135^\circ$ ，則 $\frac{2+a}{1-2a} = -1$ ，得到 $a = 3$

因此 $a = 3$ ，故選(D)

102-01-11

Statement

求不等式 $1 + \frac{2x-7}{(x-2)^2} < 0$ 的解為何？

(A) $3 > x$

(B) $x < -1$

(C) $-1 < x < 2$ 或 $2 < x < 3$

(D) $-1 < x < 3$

(E) $x < -1$ 或 $3 < x$

Solution

$$1 + \frac{2x-7}{(x-2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 4} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)^2} < 0$$

考慮定義域，得到條件1： $x \neq 2$

因此考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) > 0 \\ (x-2)^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) < 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3$$

將這兩種情況取聯集，與條件1取交集，得到 $-1 < x < 2$ 或 $2 < x < 3$ ，故選(C)

102-01-12

Statement

若拋物線 $x^2 = y + 3$ 與直線 $5x + y - 3 = 0$ 相交於 $P(a, b)$ 及 $Q(c, d)$ 且 $a > c$ ，則 $b - d = ?$

- (A) -35
- (B) -8
- (C) 31
- (D) 35
- (E) 8

Solution

$$x^2 = y + 3 \Rightarrow y = x^2 - 3$$

$$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -5x + 3$$

$$\text{則 } x^2 - 3 = -5x + 3, \text{ 得到 } x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 1) = 0$$

因此 $x = -6$ 或 $x = 1$

得到 $a = 1$ 且 $c = -6$ ，代入原方程式得到 $b = -2$ 且 $d = 33$

因此 $b - d = -2 - 33 = -35$ ，故選(A)

102-01-13

Statement

若 $P(4, 1)$ 、 $Q(2, 1)$ 、 $R(a, a)$ 且 $\overline{PR} + \overline{QR}$ 的值為最小，則 $a = ?$

- (A) 1
- (B) $\frac{3}{2}$
- (C) $\frac{5}{4}$
- (D) $\frac{7}{4}$
- (E) 2

Solution

考慮 $R(a, a)$ 在 $y = x$ 上，因此我們可以試著確定 P 、 Q 是否在 $y = x$ 不同側上。

判別式為 $y - x$ ，代入 $P(4, 1)$ 得 3 ，代入 $Q(2, 1)$ 得 1 ，因此同側。

因此，我們考慮在 $y = x$ 上做一鏡像 Q' ，求一直線 L 經過 P 與 Q' ，與 $y = x$ 之交集點。

$$\text{可得 } Q' = (1, 2), \text{ 利用點斜式得到直線 } y - 2 = \frac{2 - 1}{1 - 4}(x - 1) \Rightarrow 3y = -x + 7$$

與 $y = x$ 取交集，得到 $x = \frac{7}{4}$ ，因此 $a = \frac{7}{4}$ ，故選(D)

102-01-14

Statement

若雙曲線之漸進線為 x 軸與 y 軸且過點 $(1, -1)$ ，則此雙曲線方程式為何？

(A) $x^2 - (y + 1)^2 = 1$

(B) $xy = -1$

(C) $y^2 - (x - 1)^2 = 1$

(D) $\frac{(x - 1)^2}{4} - (y + 1)^2 = 1$

(E) $\frac{(x + 1)^2}{4} - (y + 1)^2 = -1$

Solution

漸進線為 x 軸與 y 軸，因此雙曲線為直角雙曲線 $xy = c$ 之形式，故選(B)。

102-01-15

Statement

若 $a = \log 2$ 、 $b = \log 3$ ，則 $10^{3a-2b} = ?$

(A) $\frac{8}{9}$

(B) $\frac{11}{10}$

(C) 1

(D) 10

(E) 12

Solution

$$10^{3a-2b} = 10^{3 \log 2 - 2 \log 3} = 10^{\log 8 - \log 9} = 10^{\log \frac{8}{9}} = \frac{8}{9}, \text{ 故選(A)}$$

102-01-16

Statement

若 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ 且 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = ?$

- (A) $\frac{4}{9}$
 (B) $\frac{\sqrt{17}}{9}$
 (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 (D) $\frac{\sqrt{19}}{9}$
 (E) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

Solution

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3} \text{ 且 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ 因此 } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{因此 } -2 \sin \theta \cos \theta = \frac{-8}{9}, \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\text{可知 } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{8}{9}$$

$$\text{則 } \cos 2\theta = \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} = \frac{\sqrt{17}}{9} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\text{由於上述已知 } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ 因此 } \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi, \text{ 所以 } \cos 2\theta = \frac{-\sqrt{17}}{9}$$

$$\text{因此 } \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \frac{\sqrt{17}}{9}, \text{ 故選 (B)}$$

102-01-17

Statement

若直線通過點 $(3, 4)$ 且在第一象限與兩軸所圍三角形面積最小，則此直線的兩截距和為何？

- (A) 12
 (B) 13
 (C) 14
 (D) 15
 (E) 16

Solution 1

by Trava

設直線截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，三角形面積為 $\frac{ab}{2}$ ，也就是當 ab 最小時，求 $a + b$

因為與第一象限圍成區域面積，所以 $a, b > 0$

$$\text{代入點}(3, 4)\text{得等式}\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1$$

利用算幾不等式 $\frac{\frac{3}{a} + \frac{4}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{12}{ab}}$ ，解得 ab 最小值為 48

ab 反帶回去算幾不等式， $\frac{\frac{3}{a} + \frac{4}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{12}{48}}$ ，得到 $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} \geq 1$

當等號成立 $\frac{3}{a} = \frac{4}{b}$ ，帶回 $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1$

解得 $a = 6, b = 8$ ，因此 $a + b = 14$ ，故選 (C)

Solution 2

by Uriah with Calculus

列出直線式子： $y - 4 = m(x - 3)$

求得 x, y 的截距：

令 $x = 0, y = -3m + 4$

令 $y = 0, x = \frac{-4}{m} + 3$

因此 $xy = (-3m + 4)(\frac{-4}{m} + 3) = 12 - 9m - \frac{16}{m} + 12 = -9m - \frac{16}{m} + 24$

利用微分解出極值，因此零次項捨去不用：

$$\therefore f'(m) = \frac{d}{dm}(f + g) = \frac{d}{dm}(f) + \frac{d}{dm}(g)$$

$$\therefore f'(m) = \frac{d}{dm}(-9m) + \frac{d}{dm}(-\frac{16}{m})$$

$$f'(m) = -9 + \frac{16}{m^2} = 0$$

$$9m^2 = 16, m = \sqrt{\frac{16}{9}} = \pm \frac{4}{3} \text{ (正不合)}$$

$$\text{帶回截距，得 } y = \frac{-4}{3} \times -3 + 4 = 8, x = \frac{-4}{\frac{-4}{3}} + 3 = 6$$

$x + y = 14$ ，故選 (C)

102-01-18

Statement

已知圓 $x^2 + y^2 = 10$ 與 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ 有兩交點，求此兩交點的距離為何？

(A) $\sqrt{33}$

(B) $\sqrt{35}$

(C) $\sqrt{37}$

(D) $\sqrt{39}$

(E) $2\sqrt{10}$

Solution

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$$

$$\Rightarrow 10 - 2x + 4y = 5$$

$$\Rightarrow 4y = -5 + 2x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-5 + 2x}{4}$$

$$x^2 + \frac{25 - 20x + 4x^2}{16} = 10$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 25 - 20x + 4x^2 = 160$$

$$\Rightarrow 20x^2 - 20x - 135 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{7}$$

$$\text{考慮 } x = \frac{1}{2} + \sqrt{7}, \text{ 則 } y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$\text{考慮 } x = \frac{1}{2} - \sqrt{7}, \text{ 則 } y = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$\text{因此兩點距離為 } \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} + \sqrt{7}\right) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{7}\right)\right)^2 + \left(\left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\right)^2} = \sqrt{35}, \text{ 故選(B)}$$

102-01-19

Statement

若數列的一般項為 $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = ?$

(A) $\frac{276}{600}$

(B) $\frac{451}{600}$

(C) $\frac{476}{600}$

(D) $\frac{500}{600}$

(E) 1

Solution

$$a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$\text{推得規律，得到 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{25} = \frac{451}{600}, \text{ 故選(B)}$$

102-01-20

Statement

若方程式 $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0$ ，則 $x = ?$

(A) -3

(B) -2

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

令 $t = 2^x$ ，則 $t^2 - 6t - 16 = 0$ ，得到 $t = 8$ 或 $t = -2$ (不合)

還原 t ，得到 $x = 3$ ，故選 (E)