105年第1次北科入學數學會考

105-01-01

Statement

若α,β為方程式$x^2-5x-3=0$之兩根，則$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=?$

$(A)\quad -93$

$(B)\quad -57$

$(C)\quad 53$

$(D)\quad 93$

$(E)\quad 105$

Solution

$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

根據根與係數，可以知道$\alpha\beta=\dfrac{-3}{1}=-3$，且$\alpha+\beta=-\dfrac{-5}{1}=5$

已知$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=25$

可知$\alpha^2+\beta^2=31$

因此$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=(-3)(31)=-93$，故選$(A)$

105-01-02

Statement

已知$(\log 7x)(\log ax)=2$之兩根乘積為$\dfrac{1}{72}$，則$a=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{72}$

$(B)\quad \dfrac{7}{72}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad \dfrac{72}{7}$

$(E)\quad 72$

Solution

$(\log 7x)(\log ax) = 2$

$\Rightarrow (\log 7 + \log x)(\log a + \log x) = 2$

$\Rightarrow \log 7 \log a + \log(x)(\log 7 + \log a) + (\log x)^2 = 2$

$\Rightarrow (\log x)^2 + (\log x)(\log 7 + \log a) + \log 7 \log a = 2$

利用偉達定理

$\log \alpha + \log \beta = -(\log 7 + \log a)$

$\log \alpha\beta = -\log 7a$

$\log \alpha \log \beta = \log 7 \log a - 2$

因此$\log \frac{1}{72} = -\log 7a$，$a = \frac{72}{7}$

105-01-03

Statement

已知橢圓E通過點$(2,3)$且與橢圓$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$有相同焦點，則橢圓$E$的長軸長為何？

(A) $2\sqrt{5}$

(B) 6

(C) 8

(D) 10

(E) $8\sqrt{2}$

Solution

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$。可知原點為$(0,0)$

由焦點可知$c = \sqrt{(\sqrt{9})^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$，又這個橢圓長軸平行$x$軸，因此焦點為$(-2,0)$與$(2,0)$

考慮長軸$2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$，因此若焦點相同且確定過點$P = (2,3)$，

則我們可以知道新的橢圓的長軸為$\sqrt{(2-(-2))^2 + (0-3)^2} + \sqrt{(2-(-2))^2 + (0-3)^2} = 8$

因此長軸為8，故選(C)

105-01-04

Statement

下列何者正確

$(A)\quad \sin(-\theta)=\sin\theta$

$(B)\quad \tan(-\theta)=\tan(\theta)$

$(C)\quad 2\cos^2\theta=1-\cos 2\theta$

$(D)\quad \tan^2\theta-1=\sec^2\theta$

$(E)\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Solution

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，故選$(E)$

101-01-05

Statement

設$\dfrac{x-8}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x-2)}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$，求$3A+2B+C=?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 3$

Solution

$$\frac{x-8}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$\Rightarrow x-8=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$

代入$x=2$，則$-6=3C$，因此$C=-2$

代入$x=-1$，則$-9=9A$，因此$A=-1$

代入$x=0$，則$-8=4A-2B+C$，因此$B=1$

因此$3A+2B+C=-3+2-2=-3$，故選(A)

105-01-06

Statement

已知直線L與$3x+4y=1$垂直與x軸、y軸在第四象限所圍的三角形面積為6，則L的方程式為何？

$(A)\quad 3x-4y=6$

$(B)\quad 3x-4y=12$

$(C)\quad 4x+3y=6$

$(D)\quad 4x-3y=6$

$(E)\quad 4x-3y=12$

Solution

與$3x+4y=1$垂直，可得到$-4x+3y=C$

已知x的截距長度為$|\frac{C}{-4}|=\frac{C}{4}$，又$y$的截距長度為$\frac{C}{3}$

因此$\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{4}\cdot\frac{C}{3}=6$，可得$C=\pm 12$

考慮$C=12$，可知x的截距為$\frac{12}{-4}=-3$，y的截距為$\frac{12}{3}=4$，三角形圍在第二象限，不合。

考慮$C=-12$，可知x的截距為$\frac{-12}{-4}=3$，y的截距為$\frac{-12}{3}=-4$，三角形圍在第四象限

因此$C=-12$，得到$-4x+3y=-12$，故選(E)

105-01-07

Statement

設$3x^3-5x^2+7x+1=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，則$b+c=?$

$(A)\quad 16$

$(B)\quad 26$

$(C)\quad 36$

$(D)\quad 46$

$(E)\quad 56$

Solution

利用綜合除法

$$
\begin{array}{cccc|c}
3 & -5 & 7 & 1 & \\
 & 6 & 2 & 18 & 2 \\
\hline
3 & 1 & 9 & \color{red}{19} & \\
 & 6 & 14 & & \\
\hline
3 & 7 & \color{red}{23} & & \\
 & 6 & & & \\
\hline
\color{red}{3} & \color{red}{13} & & &
\end{array}
$$

可得到$a=3, b=13, c=23, d=19$，因此$b+c=13+23=36$，故選(C)

105-01-08

Statement

已知拋物線的焦點為$(1,1)$，準線為$x+y+2=0$，則此拋物線的頂點坐標為何？

(A) $(2,2)$

(B) $(2,-2)$

(C) $(-1,1)$

(D) $(1,-1)$

(E) $(0,0)$

Solution

考慮做一條線L垂直準線與經過$(1,1)$

因此$L: x-y=C$，代入$(1,1)$得到$C=0$，故$L: x-y=0$

找L與準線的交點P，解聯立方程組$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$，可得$y=-1$且$x=-1$

因此頂點為P與焦點的中點，故$(\frac{-1+1}{2}, \frac{-1+1}{2})=(0,0)$，故選$(E)$

105-01-09

Statement

若$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=4$且$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{37}$，則$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=?$

$(A)\quad -24$

$(B)\quad -12$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 12$

$(E)\quad 24$

Solution

$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=2|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+3(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2$

又$(|\vec{a}+\vec{b}|)^2=|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=37$

故$2(\vec{a}\cdot\vec{b})=12$，因此$(\vec{a}\cdot\vec{b})=6$

因此$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=2\times 3^2+6-3\times 4^2=-24$，故選$(A)$

105-01-10

Statement

若$S=1+3^1+3^2+3^3+....+3^{99}$，則$S$為幾位數？$(\log_2 0.3010, \log_3=0.4771)$

$(A)\quad 45$

$(B)\quad 46$

$(C)\quad 47$

$(D)\quad 48$

$(E)\quad 49$

Solution

$S=\dfrac{1(1-3^{100})}{1-3}=\dfrac{3^{100}-1}{2}$

因此$\log S=\log(\dfrac{3^{100}-1}{2})=\log(3^{100}-1)-\log_2\approx\log(3^{100})-\log 2$

$\approx 100\log(3)-\log 2=47.7-0.301\approx 47.3$

由於有小數點，無條件進位一位變成48，故選(D)

105-01-11

Statement

$\sqrt{x+3} > x-3$之所有解為何？

$(A) \quad -3 \le x < 3$

$(B) \quad -3 \le x < 6$

$(C) \quad 2 \le x < 3$

$(D) \quad -3 \le x < 7$

$(E) \quad x < 6$

Solution

$\sqrt{x+3} > x-3$

考慮定義域，可知$x \ge -3$

令$t = x-3$，則$\sqrt{t+6} > t$

考慮t的所有可能

若$t \ge 0$，則$x \ge 3$

因此$t+6 > t^2$，得到$t^2 - t - 6 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) < 0$

因此$-2 < t < 3$，還原成x得到$1 < x < 6$

與$x \ge 3$取交集，得到$3 \le x < 6$

若$t < 0$，則$x < 3$

但由於$\sqrt{t+6}$在定義域內時恆大於等於0，所以$\sqrt{t+6} > t$，因此$t \in \mathbb{R}$，與$x < 3$求交集得到 $x \in (-\infty, 3)$

因此，兩者種可能得到的結果取聯集得到$x \in (-\infty, 6)$，與定義域取交集得到$x \in [-3, 6)$，故選(B)

105-01-12

Statement

若方程式$\dfrac{x^2}{t^2-4} + \dfrac{y^2}{t^2-9} = 1$的圖形為雙曲線，求實數$t$的範圍

$(A) \quad t < -2$

$(B) \quad t > 3$

$(C) \quad -3 < t < 3$

$(D) \quad -2 < t < 2$

$(E) \quad -3 < t < -2$且$2 < t < 3$

Solution

考慮兩個不等式的結果：$\begin{cases} t^2-4>0 \\ t^2-9<0 \end{cases}$，得到$(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$與$(-3,3)$

這兩個結果取交集，得到$(-3<t<-2)$且$(2<t<3)$，故選(E)

105-01-13

Statement

設$x^4+2x^3+mx^2+nx-3=(x^2+2x-1)(x^2+bx+c)$，則$4m-n+2b+c=$?

(A) $\quad 4$

(B) $\quad 5$

(C) $\quad 6$

(D) $\quad 7$

(E) $\quad 8$

Solution 1

> 長除法 by Trava

```
         1 0 (m+1)
       ┌──────────────────────
1 2 -1 │1 2   m     n       -3
        1 2  -1
        ─────────
            (m+1)   n       -3
            (m+1)(2m+2)(-m-1)
            ──────────────────
               0   n-2m-2  m-2
```

可知$n-2m-2=0$且$m-2=0$，得到$m=2$與$n=6$

由上面係數可以知道$b=0$且$c=3$

因此$4m-n+2b+c=4\cdot 2-6+2\cdot 0+3=8-6+3=5$

Solution 2

> 湊係數解 by Uriah

考慮能夠湊出x^3的方法：$(x^2 \times bx)$、$(2x \times x^2)$

因此$b+2=2$，得到$b=0$

考慮能夠湊出x^2的方法：$(2x \times bx)$、$(x^2 \times c)$、$(-1) \times (x^2)$

因此$m=2b+c-1=c-1$

考慮能夠湊出x的方法：$(-1 \times bx)$、$(2x \times c)$

因此$-b+2c=n$

考慮能夠湊出常數的方法，也就是$(-1 \times c)=-3$，因此$c=3$

由於$c=3$，故$m=2$，$n=6$

因此$m=2, n=6, b=0, c=3$

因此$4m-n+2b+c=4 \cdot 2-6+2 \cdot 0+3=8-6+3=5$，故選$(B)$

105-01-14

Statement

xy平面上，求曲線$y=\sqrt{25-x^2}$與x軸所圍的面積為何？

$(A) \quad \frac{5\pi}{4}$

$(B) \quad 5\pi$

$(C) \quad \frac{25\pi}{4}$

$(D) \quad \frac{25\pi}{2}$

$(E) \quad 25\pi$

Solution 1

> Non-Calculus solution by Uriah

考慮曲線$y=\sqrt{25-x^2}$是一個半徑為5且圓心在原點的半圓，因此其面積為$\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \pi = \frac{25}{2}\pi$，故選$(D)$

Solution 2

> Calculus solution by Uriah

考慮$y=\sqrt{25-x^2}$，令$y=0$得到$x=\pm 5$，因此圖形交於x軸在$x=-5$與$x=5$上。

因此我們考慮$\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}dx$

令$x=5\sin t$，反推$t=\arcsin(\frac{x}{5})$，而$dx=5\cos tdt$

則$\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}dx \Rightarrow \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}5\sqrt{25-25\sin^2 t}\cos tdt=25\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=25\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$=25(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})\Big|_{t=\frac{-\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}}=25(\frac{\pi}{2})=\frac{25\pi}{2}$，故選$(D)$

105-01-15

Statement

多項式$f(x)$以x^2-1、x^2-5x+6除之的餘式分別為$3x+1$、$2x-1$，則以x^2-3x+2的餘式為何？

(A) $-x+5$

(B) $x+2$

(C) $5x+1$

(D) $2x+7$

(E) $-2x+3$

Solution

考慮$x^2-1=(x-1)(x+1)$

考慮$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

考慮$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，且設x^2-3x+2的餘式為$ax+b$

若$x=2$，則結果等價於x^2-5x+6的餘式帶入$x=2$的結果，也就是$4-1=3$

因此$2a+b=3$

若$x=1$，則結果等價於x^2-1的餘式帶入$x=1$的結果，也就是$3+1=4$

因此$a+b=4$

透過$\begin{cases}2a+b=3\\a+b=4\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(-1,5)$，得到$x^2-3x+2$的餘式為$-x+5$，故選$(A)$

105-01-16

Statement

ΔABC中，若$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=7:8:3$，則$\cos A=?$

(A) $\frac{-1}{8}$

(B) $\frac{-1}{7}$

(C) $\frac{1}{8}$

$(D)\quad \frac{1}{7}$

$(E)\quad \frac{1}{3}$

Solution

利用餘弦定理，$\cos A = \frac{7^2+3^2-8^2}{2\times 7\times 3} = \frac{-6}{42} = -\frac{1}{7}$，故選$(B)$

105-01-17

Statement

設向量$\vec{a} =< 1,2 >$，$\vec{b} =< \frac{1}{2} - 4^{x+1}, 7\cdot 2^x >$，若$\vec{a}//\vec{b}$，則$x=?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad \frac{1}{8}$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 3$

Solution

由於$\vec{a}//\vec{b}$，所以$(\frac{1}{2} - 4^{x+1})\times 2 = 7\cdot 2^x$

$\Rightarrow 1 - 8\cdot 4^x = 7\cdot 2^x$

$\Rightarrow -8\cdot 2^{2x} - 7\cdot 2^x + 1 = 0$

令$t = 2^x$，則$-8t^2 - 7t + 1 = 0$，得到$t = \frac{1}{8}$或$t = -1$(不合)

還原t，得到$x = -3$，故選(A)

105-01-18

Statement

設$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，則$\sqrt{1+\sin 2\theta} - \sqrt{1-\sin 2\theta} = ?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad \sin\theta$

$(C)\quad 2\sin\theta$

$(D)\quad \cos\theta$

$(E)\quad 2\cos\theta$

Solution

$\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}-\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=2\cos\theta$，故選$(E)$

105-01-19

Statement

設x為實數，求$f(x)=3(5^x+5^{-x})-2(25^x+25^{-x})+1$之最大值為何

(A)　1

(B)　2

(C)　3

(D)　5

(E)　25

Solution

令$t=5^x+5^{-x}$，則$t^2=25^x+25^{-x}+2$

因此可以把式子轉成$f(t)=-2t^2+3t+5$

利用配方法，可以知道$f(t)=-2t^2+3t+5\Rightarrow f(t)=-2(t-\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{49}{8}$

需要注意，t不能帶$\dfrac{3}{4}$，因為$\dfrac{3}{4}$不在t的值域。

利用算幾不等式，得到$\dfrac{5^x+5^{-x}}{2}\geq\sqrt{1}$

因此$5^x+5^{-x}\geq 2$，得到$t\geq 2$，因此t代2

因此$f(2)=-2(\dfrac{5}{4})^2+\dfrac{49}{8}=3$，故選$(C)$

105-01-20

Statement

設點(a,b)在直線$x-2y=0$上且點(c,d)在直線$2x-4y=1$上，則$(a-c)^2+(b-d)^2$之最小值為何？

(A)　$\dfrac{1}{20}$

(B)　$\dfrac{1}{10}$

(C)　$\dfrac{1}{5}$

$(D) \quad \frac{1}{\sqrt{10}}$

$(E) \quad \frac{1}{\sqrt{20}}$

Solution

兩條線為平行線，因此我們考慮兩條直線的距離

利用兩直線距離公式，得到$\frac{|0-1|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$

因此$(a-c)^2+(b-d)^2 = (\frac{1}{\sqrt{20}})^2 = \frac{1}{20}$，故選$(A)$