# 103-02-01

## Statement

若$f(x)=12x^2-26x+5$，則$f(\frac{3+\sqrt{2}}{2})=?$

$(A)\quad -2+5\sqrt{2}$

$(B)\quad -1+5\sqrt{2}$

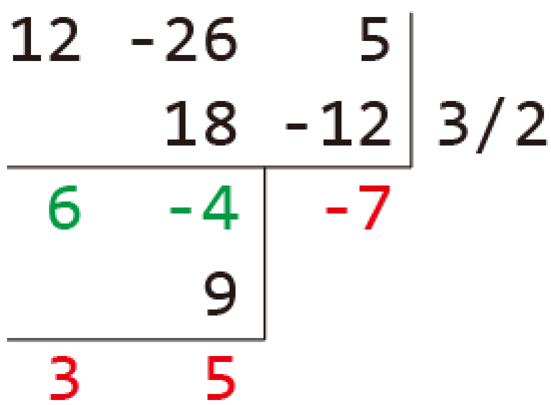
$(C)\quad 1+5\sqrt{2}$

$(D)\quad 9$

$(E)\quad 2+5\sqrt{2}$

## Solution

利用綜合除法，將式子轉成以$(3x-2)$表示的形式。




綠色字：將$(x-\frac{3}{2})$轉換成$(2x-3)$，因此係數的部分要除以2。

得到$f(x)=3(2x-3)^2+5(2x-3)-7$，因此$f(\frac{3+\sqrt{2}}{2})=6+5\sqrt{2}-7=5\sqrt{2}-1$，故選$(B)$

# 103-02-02

## Statement

若$f(\frac{2+x}{4-x})=x+2$，則$f(a)=?$

$(A)\quad \frac{6a}{1-a}$

$(B)\quad \frac{2+a}{2-a}$

$(C)\quad \frac{4+a}{2-a}$

$(D)\quad \frac{2-a}{2+a}$

$(E) \quad \frac{6a}{1+a}$

### Solution

$\frac{2+x}{4-x} = a$，得到$x = \frac{4a-2}{a+1}$

因此$f(a) = \frac{4a-2}{a+1} + 2 = \frac{6a}{a+1}$，故選$(E)$

## 103-02-03

### Statement

設$\Delta ABC$中，$\overline{AB} = 6$，$\overline{BC} = 5$，$\overline{CA} = 4$，若$D$為$\overline{BC}$上一點使$\overline{AD} = 4$，則$\overline{BD} =?$

$(A) \quad 1$

$(B) \quad 2$

$(C) \quad \frac{5}{2}$

$(D) \quad 3$

$(E) \quad 4$

### Solution

$\cos C = \frac{5^2+4^2-6^2}{2\times 5\times 4} = \frac{1}{8}$

可以推得$\cos C = \cos\angle ACD = \frac{4^2+(\overline{CD})^2-4^2}{2\times 4\times \overline{CD}} = \frac{1}{8}$，可得$\overline{CD} = 1$

因此$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = 5-1 = 4$，故選$(E)$

## 103-02-04

### Statement

求圓$x^2+y^2-4x+6y-3=0$與直線$3x-4y=-7$的最近距離為何？

$(A) \quad 0$

$(B) \quad 1$

$(C) \quad 2$

$(D) \quad 4$

$(E) \quad 5$

### Solution

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

利用配方法，得到$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

因此得到圓心$(2, -3)$，且半徑$r = \sqrt{16} = 4$

考慮圓心與直線的最近距離，利用點到直線距離公式

$$\frac{|3(2) - 4(-3) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$

長度大於半徑，因此與圓的最近距離為$5 - 4 = 1$，故選$(B)$

## 103-02-05

### Statement

下列何者錯誤？

$(A)\quad \sin(\pi - x) = \sin x$

$(B)\quad \cos(\pi - x) = -\cos x$

$(C)\quad \tan(\pi + x) = \tan x$

$(D)\quad \csc(\frac{\pi}{2} + x) = -\sec x$

$(E)\quad \sec(\frac{3\pi}{2} + x) = \csc x$

### Solution

$\csc(\frac{\pi}{2} + x) = \sec(x)$，故選$(D)$

## 103-02-06

### Statement

已知$f(x) = 3x^5 + 19x^4 - 13x^3 + 6x^2 - 6x + 15$，求$f(-7) =?$

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 5$

$(C)\quad 6$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 8$

### Solution

$f(-7)$結果與$f(x) \div (x-7)$的餘數等價（餘式定理）。

因此利用綜合除法來找餘數

$$\begin{array}{cccccc|c} 3 & 19 & -13 & 6 & -6 & 15 & \\ & -21 & 14 & -7 & 7 & -7 & -7 \\ \hline 3 & -2 & 1 & -1 & 1 & 8 & \end{array}$$

因此$f(-7)=8$，故選$(E)$

## 103-02-07

### Statement

設$f(x)=x^2$，若將函數圖形向左平移1個單位，再向上平移$k$個單位後，所得到的圖形通過點$(-2,4)$，則$k=?$

$(A)\quad -5$

$(B)\quad -3$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

### Solution

根據函數圖形平移，平移的結果為$y=f(x)=(x+1)^2+k$

帶入點$(-2,4)$求$k$，得到$4=(-2+1)^2+k$，因此$k=3$，故選$(C)$

## 103-02-08

### Statement

設雙曲線之方程式為$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，若將此雙曲線之貫軸長放大為2倍，共軛軸與中心點不變，則此雙曲線方程式變為何？

$(A)\quad \dfrac{x^2}{8}-y^2=1$

$(B)\quad \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=1$

$(C)\quad \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

$(D)\quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{2} = 1$

$(E)\quad \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

### Solution

已知貫軸長原先為$2a = 2\sqrt{4} = 4$，放大為兩倍後得到$2a = 8$，因此$a = 4$，所以$a^2 = 16$

又共軛軸與中心點不變，則此方程式變為$\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$，故選$(C)$

## 103-02-09

### Statement

不等式$\frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 1$之解為何？

$(A)\quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

$(B)\quad \frac{1}{2} \leq x < 2$

$(C)\quad \frac{1}{4} \leq x \leq 2$

$(D)\quad \frac{1}{4} \leq x < 2$

$(E)\quad 1 \leq x < 2$

### Solution

$$\frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 + \log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 0$$

因此我們考慮以下兩種情況取聯集

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \leq 0 \\ -1 + \log_2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \leq 0 \\ -1 + \log_2 x < 0 \end{cases} \Rightarrow [\frac{1}{4}, 2)$$

兩種情況取聯集，得到$\frac{1}{4} \leq x < 2$，故選$(D)$

# 103-02-10

## Statement

設$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，求$\cos 4\theta$

(A) $\frac{-1}{4}$

(B) $\frac{-1}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

## Solution

展開$\cos 4\theta$的式子

$$\cos 4\theta=\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta$$

$$=\cos^2 2\theta-(2\sin\theta\cos\theta)^2$$

將$\sin\theta-\cos\theta$平方，得到

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$$

求$\sin^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta=(\frac{6}{8})^2=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$$

求$\cos^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1,\ \cos^2 2\theta=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

計算$\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta$

$$\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=\frac{7}{16}-\frac{9}{16}=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{8}$$

因此$\cos 4\theta=\frac{-1}{8}$，故選$(B)$