102-01-01

Statement

若$\log(x-9)+\log(x-5)=\log 4+\log(25-2x)$，則$x=?$

$(A)\quad 9$
$(B)\quad 10$
$(C)\quad 11$
$(D)\quad 12$
$(E)\quad 13$

Solution

$\log(x-9)+\log(x-5)=\log 4+\log(25-2x)$

$\Rightarrow \log((x-9)(x-5))=\log(4(25-2x))$

$\Rightarrow \log(x^2-14x+45)=\log(100-8x)$

$\Rightarrow x^2-14x+45=100-8x$

$\Rightarrow x^2-6x-55=0$

$\Rightarrow (x-11)(x+5)=0$

可得$x=-5$或$x=11$。

驗根，可知當$x=-5$代入$\log(x-9)$，會得到$\log -14$

log的定義域為正整數之集合，故不合。

因此$x=11$，故選(C)。

102-01-02

Statement

已知$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi, \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$。若$\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \tan\beta=\frac{1}{3}$，則$\sin(\alpha+\beta)=?$

$(A)\quad \frac{\sqrt{10}}{10}$
$(B)\quad \frac{2\sqrt{10}}{10}$
$(C)\quad \frac{3\sqrt{10}}{10}$
$(D)\quad \frac{\sqrt{15}}{10}$
$(E)\quad \frac{\sqrt{17}}{10}$

Solution

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$，因為$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，則$\cos\alpha = \frac{4}{5}$。

$\tan\beta = \frac{1}{3}$，因為$\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$，則$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，而$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

因此$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{-9\sqrt{10}}{50} + \frac{4\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，故選$(A)$。

102-01-03

Statement

已知$\vec{a}$與$\vec{b}$為兩向量，$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}| = 4$且$|\vec{a}-\vec{b}| = 3$。

若$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為θ，則$\cos\theta = ?$

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{6}{25}$

(E) $\frac{7}{25}$

Solution

$(|\vec{a}+\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 16$

$(|\vec{a}-\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 9$

因此，$4(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 7, \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7}{4}$

又$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，因此$2|\vec{a}|^2 - \frac{7}{2} = 9$，$|\vec{a}| = \frac{5}{2}$

已知$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\cos\theta = \frac{7}{4}$，得到$\cos\theta = \frac{7}{25}$，故選$(E)$

102-01-04

Statement

若ΔABC中，$\overline{AB} = \sqrt{3}+1$，$\overline{BC} = 2$且$\angle B = 30^\circ$，則$\angle A = ?$

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 90°

(E) 120°

Solution

$\overline{AC}^2=(\sqrt{3}+1)^2+(2)^2-2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(2)\cdot\cos\beta$

$=3+2\sqrt{3}+1+4-(4\sqrt{3}+4)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2$

因此$\overline{AC}=\sqrt{2}$

已知$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha}$，因此$\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$，得到$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此$\alpha=45^\circ$，故選$(B)$

102-01-05

Statement

下列敘述何者正確？

$(A)\quad f(x)=\sqrt[3]{x+1}$的定義域為$(-1,\infty)$

$(B)\quad f(x)=\sqrt[3]{x+1}$的定義域為$[-1,\infty)$

$(C)\quad f(x)=\sqrt[3]{x+1}$的值域為$[1,\infty)$

$(D)\quad f(x)=\sqrt{x+1}$的定義域為$[-1,\infty)$

$(E)\quad f(x)=\sqrt{x+1}$的值域為$[1,\infty)$

Solution

(A)的定義域為$\mathbb{R}$

(B)的定義域為$\mathbb{R}$

(C)的值域為$[0,\infty)$

(E)的值域為$[0,\infty)$

故選(D)

102-01-06

Statement

若$\dfrac{16x^3-20x^2+6x+3}{(2x-1)^4}=\dfrac{a}{(2x-1)}+\dfrac{b}{(2x-1)^2}+\dfrac{c}{(2x-1)^3}+\dfrac{d}{(2x-1)^4}$，則$a-b+c-d=?$

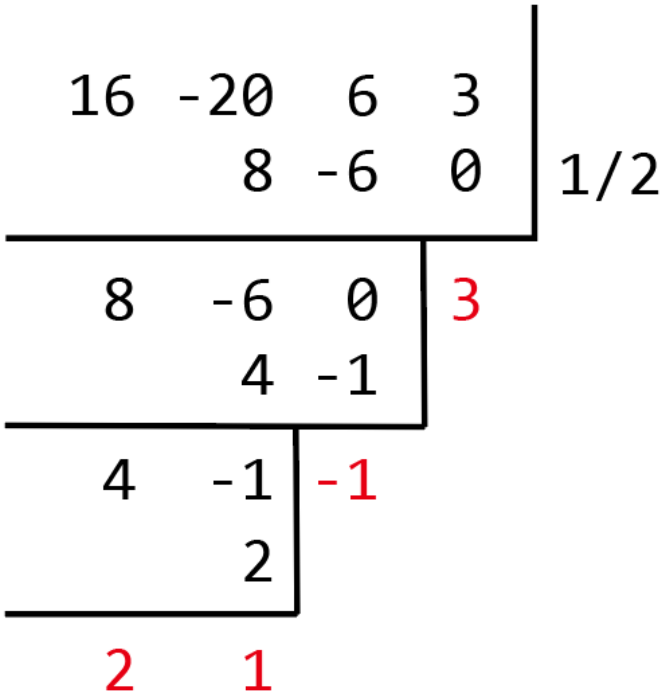
$(A)\quad -3$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 1$
$(E)\quad 3$

Solution

$$\frac{16x^3-20x^2+6x+3}{(2x-1)^4}=\frac{a}{(2x-1)}+\frac{b}{(2x-1)^2}+\frac{c}{(2x-1)^3}+\frac{d}{(2x-1)^4}$$

$\Rightarrow 16x^3-20x^2+6x+3=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$

利用綜合除法



得到$a=2,b=1,c=-1,d=3$，因此$a-b+c-d=2-1+(-1)-3=-3$，故選(A)

102-01-07

Statement

若橢圓$4x^2+9y^2+16x-18y-24=0$的長、短軸長各為a、b、則$a+b=?$

(A) $\frac{5}{7}$

(B) $\frac{10}{7}$

(C) $\frac{15}{7}$

(D) $\frac{35}{6}$

(E) $\frac{35}{3}$

Solution

$4x^2+16x+9y^2-18y=24$

$\Rightarrow 4(x^2+4x+4)+9(y^2-2y+1)=24+16+9$

$\Rightarrow 4(x+2)^2+9(y-1)^2=49$

$\Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{\frac{49}{4}}+\dfrac{(y-1)^2}{\frac{49}{9}}=1$

可知長軸$2a=2\sqrt{\dfrac{49}{4}}=7$，短軸$2b=2\sqrt{\dfrac{49}{9}}=\dfrac{14}{3}$

$7+\dfrac{14}{3}=\dfrac{35}{3}$，故選$(E)$

102-01-08

Statement

下列何者錯誤？

$(A)\quad \sin\dfrac{8\pi}{3}=\sin\dfrac{2\pi}{3}$
$(B)\quad \cos\dfrac{17}{6}=-\sin\dfrac{\pi}{3}$
$(C)\quad \tan\dfrac{11\pi}{3}=\tan\dfrac{2\pi}{3}$
$(D)\quad \sec\dfrac{15\pi}{4}=-\sec\dfrac{\pi}{4}$
$(E)\quad \csc\dfrac{7\pi}{6}=-\csc\dfrac{\pi}{6}$

Solution

$\sec\dfrac{15\pi}{4}=\sec 675^\circ=\sec 45^\circ$

$\sec 45^\circ\neq-\sec 45^\circ$，故選$(D)$

102-01-09

Statement

若$f(x)=x^4-2x^3+3x^2+7=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$

則$a+b+c=?$

$(A)\quad 20$
$(B)\quad 21$
$(C)\quad 22$
$(D)\quad 23$
$(E)\quad 24$

Solution

1	-2	3	0	7	2
	2	0	6	12	
1	0	3	6	19	
	2	4	14		
1	2	7	20		
	2	8			
1	4	15			
	2				
1	6				

故$a=1, b=6, c=15, d=20, e=19$

因此$a+b+c=22$，故選(C)

102-01-10

Statement

若$L_1=2x-y+7=0$與$L_2=ax+y-13=0$的交角為$\dfrac{\pi}{4}$且$a>0$，則$a=?$

$(A)\quad 6$
$(B)\quad 5$
$(C)\quad 4$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 2$

Solution

$m_1 = -\dfrac{2}{-1} = 2$，$m_2 = -\dfrac{a}{1} = -a$

又$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \dfrac{2-(-a)}{1-2a} = \dfrac{2+a}{1-2a}$

交角可能是$\tan 45^\circ$或$\tan 135^\circ$，因此考慮

若是$\tan 45^\circ$，則$\dfrac{2+a}{1-2a} = 1$，得到$a = -\dfrac{1}{3}$，不合。

若是$\tan 135^\circ$，則$\dfrac{2+a}{1-2a} = -1$，得到$a = 3$

因此$a = 3$，故選(D)

102-01-11

Statement

求不等式$1 + \dfrac{2x-7}{(x-2)^2} < 0$的解為何？

$(A)\quad 3 > x$
$(B)\quad x < -1$
$(C)\quad -1 < x < 2$或$2 < x < 3$
$(D)\quad -1 < x < 3$
$(E)\quad x < -1$或$3 < x$

Solution

$$1 + \frac{2x-7}{(x-2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+4} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)^2} < 0$$

考慮定義域，得到條件1：$x \neq 2$

因此考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) > 0 \\ (x-2)^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) < 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3$$

將這兩種情況取聯集，與條件1取交集，得到$-1 < x < 2$或$2 < x < 3$，故選(C)

102-01-12

Statement

若拋物線$x^2 = y + 3$與直線$5x + y - 3 = 0$相交於$P(a, b)$及$Q(c, d)$且$a > c$，則$b - d = ?$

(A) $\quad -35$
(B) $\quad -8$
(C) $\quad 31$
(D) $\quad 35$
(E) $\quad 8$

Solution

$x^2 = y + 3 \Rightarrow y = x^2 - 3$

$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -5x + 3$

則$x^2 - 3 = -5x + 3$，得到$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 1) = 0$

因此$x = -6$或$x = 1$

得到$a = 1$且$c = -6$，代入原方程式得到$b = -2$且$d = 33$

因此$b - d = -2 - 33 = -35$，故選(A)

102-01-13

Statement

若$P(4, 1)$、$Q(2, 1)$、$R(a, a)$且$\overline{PR} + \overline{QR}$的值為最小，則$a = ?$

(A) $\quad 1$
(B) $\quad \frac{3}{2}$
(C) $\quad \frac{5}{4}$
(D) $\quad \frac{7}{4}$
(E) $\quad 2$

Solution

考慮$R(a, a)$在$y = x$上，因此我們可以試著確定P，Q是否在$y = x$不同側上。

判別式為$y - x$，代入$P(4, 1)$得3，代入$Q(2, 1)$得1，因此同側。

因此，我們考慮在$y = x$上做一鏡像Q'，求一直線L經過P與Q'，與$y = x$之交集點。

可得$Q' = (1, 2)$，利用點斜式得到直線$y - 2 = \frac{2 - 1}{1 - 4}(x - 1) \Rightarrow 3y = -x + 7$

與$y = x$取交集，得到$x = \frac{7}{4}$，因此$a = \frac{7}{4}$，故選(D)

102-01-14

Statement

若雙曲線之漸進線為x軸與y軸且過點$(1, -1)$，則此雙曲線方程式為何？

(A) $x^2 - (y+1)^2 = 1$
(B) $xy = -1$
(C) $y^2 - (x-1)^2 = 1$
(D) $\dfrac{(x-1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1$
(E) $\dfrac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = -1$

Solution

漸進線為x軸與y軸，因此雙曲線為垂直雙曲線$xy = c$之形式，故選(B)。

102-01-15

Statement

若$a = \log 2$、$b = \log 3$，則$10^{3a-2b} = ?$

(A) $\dfrac{8}{9}$
(B) $\dfrac{11}{10}$
(C) 1
(D) 10
(E) 12

Solution

$10^{3a-2b} = 10^{3\log 2 - 2\log 3} = 10^{\log 8 - \log 9} = 10^{\log \frac{8}{9}} = \dfrac{8}{9}$，故選$(A)$

102-01-16

Statement

若$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{3}$且$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，則$\sin^2\theta - \cos^2\theta = ?$

$(A)\quad \frac{4}{9}$

$(B)\quad \frac{\sqrt{17}}{9}$

$(C)\quad \frac{\sqrt{2}}{3}$

$(D)\quad \frac{\sqrt{19}}{9}$

$(E)\quad \frac{2\sqrt{5}}{9}$

Solution

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$且$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，因此$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

因此$-2\sin\theta\cos\theta=\frac{-8}{9}$，$\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

可知$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{9}$

則$\cos 2\theta=\sqrt{1-\sin 2\theta}=\frac{\sqrt{17}}{9}=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

由於上述已知$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，因此$\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$，所以$\cos 2\theta=\frac{-\sqrt{17}}{9}$

因此$\sin^2\theta-\cos^2\theta=\sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{\sqrt{17}}{9}$，故選$(B)$

102-01-17

Statement

若直線通過點$(3,4)$\$且在第一象限與兩軸所圍三角形面積最小，則此直線的兩截距和為何？

$(A)\quad 12$
$(B)\quad 13$
$(C)\quad 14$
$(D)\quad 15$
$(E)\quad 16$

Solution

列出直線式子：$y-4=m(x-3)$

求得x,y的截距：
令$x=0,\ y=-3m+4$
令$y=0,\ x=\frac{-4}{m}+3$

因此$xy = (-3m+4)(\frac{-4}{m}+3) = 12 - 9m - \frac{16}{m} + 12 = -9m - \frac{16}{m} + 24$

利用微分解出極值，因此零次項捨去不用：

$\because f'(m) = \frac{d}{dm}(f+g) = \frac{d}{dm}(f) + \frac{d}{dm}(g)$

$\therefore f'(m) = \frac{d}{dm}(-9m) + \frac{d}{dm}(-\frac{16}{m})$

$f'(m) = -9 + \frac{16}{m^2} = 0$

$9m^2 = 16, m = \sqrt{\frac{16}{9}} = \pm\frac{4}{3}$ (正不合)

帶回截距，得$y = \frac{-4}{3} \times -3 + 4 = 8,\ x = \frac{-4}{\frac{-4}{3}} + 3 = 6$

$x + y = 14$，故選(C)

102-01-18

Statement

已知圓$x^2+y^2=10$與$x^2+y^2-2x+4y=5$有兩交點，求此兩交點的距離為何？

(A) $\sqrt{33}$
(B) $\sqrt{35}$
(C) $\sqrt{37}$
(D) $\sqrt{39}$
(E) $2\sqrt{10}$

Solution

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$

$\Rightarrow 10 - 2x + 4y = 5$

$\Rightarrow 4y = -5 + 2x$

$\Rightarrow y = \frac{-5+2x}{4}$

$x^2 + \frac{25 - 20x + 4x^2}{16} = 10$

$\Rightarrow 16x^2 + 25 - 20x + 4x^2 = 160$

$\Rightarrow 20x^2 - 20x - 135 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 27 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{7}$

考慮$x=\frac{1}{2}+\sqrt{7}$，則$y=-1+\frac{1}{2}\sqrt{7}$

考慮$x=\frac{1}{2}-\sqrt{7}$，則$y=-1-\frac{1}{2}\sqrt{7}$

因此兩點距離為$\sqrt{((\frac{1}{2}+\sqrt{7})-(\frac{1}{2}-\sqrt{7}))^2+((-1+\frac{1}{2}\sqrt{7})-(-1-\frac{1}{2}\sqrt{7}))^2}=\sqrt{35}$，故選$(B)$

102-01-19

Statement

若數列的一般項為$a_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}$，則$a_1+a_2+a_3+...+a_{22}=?$

$(A)\quad \frac{276}{600}$
$(B)\quad \frac{451}{600}$
$(C)\quad \frac{476}{600}$
$(D)\quad \frac{500}{600}$
$(E)\quad 1$

Solution

$a_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$

推得規律，得到$a_1+a_2+a_3+...+a_{22}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{24}-\frac{1}{25}=\frac{451}{600}$，故選$(B)$

102-01-20

Statement

若方程式$4^x-3\cdot 2^{x+1}-16=0$，則$x=?$

$(A)\quad -3$
$(B)\quad -2$
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 3$

Solution

令$t=2^x$，則$t^2-6t-16=0$，得到$t=8$或$t=-2$(不合)

還原t，得到$x=3$，故選(E)