105-01-01

Statement

若α, β為方程式$x^2 - 5x - 3 = 0$之兩根，則$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = ?$

(A) -93

(B) -57

(C) 53

(D) 93

(E) 105

Solution

$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$

根據根與係數，可以知道$\alpha\beta = \frac{-3}{1} = -3$，且$\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5$

已知$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 25$

可知$\alpha^2 + \beta^2 = 31$

因此$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = (-3)(31) = -93$，故選$(A)$

105-01-02

Statement

已知$(\log 7x)(\log ax) = 2$之兩根乘積為$\frac{1}{72}$，則$a = ?$

(A) $\frac{1}{72}$

(B) $\frac{7}{72}$

(C) 2

(D) $\frac{72}{7}$

(E) 72

Solution

$(\log 7x)(\log ax) = 2$

$\Rightarrow (\log 7 + \log x)(\log a + \log x) = 2$

$\Rightarrow \log 7 \log a + \log(x)(\log 7 + \log a) + \log(x)^2 = 2$

$\Rightarrow \log^2 x + (\log x)(\log 7 + \log a) + \log 7 \log a = 2$

因此可知

$\log \alpha + \log \beta = -(\log 7 + \log a)$

可知$\log \alpha\beta = -\log 7a$

$\log \alpha \log \beta = \log 7 \log a - 2$

因此可知$\log \dfrac{1}{72} = -\log 7a$，因此$a = \dfrac{72}{7}$

105-01-03

Statement

已知橢圓E通過點$(2,3)$且與橢圓$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$有相同焦點，則橢圓$E$的長軸長為何？

(A)　$2\sqrt{5}$

(B)　6

(C)　8

(D)　10

(E)　$8\sqrt{2}$

Solution

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$。可知原點為$(0,0)$

由焦點可知$c = \sqrt{(\sqrt{9})^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$，又這個橢圓長軸平行$x$軸，因此焦點為$(-2,0)$與$(2,0)$

考慮長軸$2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$，因此若焦點相同且確定過點$P = (2,3)$，

則我們可以知道新的橢圓的長軸為$\sqrt{(2-(-2))^2 + (0-3)^2} + \sqrt{(2-(-2))^2 + (0-3)^2} = 8$

因此長軸為8，故選(C)

105-01-04

Statement

下列何者正確

(A)　$\sin(-\theta) = \sin\theta$

(B)　$\tan(-\theta) = \tan(\theta)$

(C)　$2\cos^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

(D)　$\tan^2\theta - 1 = \sec^2\theta$

(E) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Solution

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，故選$(E)$

101-01-05

Statement

設$\dfrac{x-8}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x-2)}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$，求$3A+2B+C=?$

(A) -3

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 3

Solution

$$\frac{x-8}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$\Rightarrow x-8=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$

代入$x=2$，則$-6=3C$，因此$C=-2$

代入$x=-1$，則$-9=9A$，因此$A=-1$

代入$x=0$，則$-8=4A-2B+C$，因此$B=1$

因此$3A+2B+C=-3+2-2=-3$，故選(A)

105-01-06

Statement

已知直線L與$3x+4y=1$垂直與x軸、y軸在第四象限所圍的三角形面積為6，則L的方程式為何？

(A) $3x-4y=6$

(B) $3x-4y=12$

(C) $4x+3y=6$

(D) $4x-3y=6$

(E) $4x-3y=12$

Solution

與$3x+4y=1$垂直，可得到$-4x+3y=C$

已知x的截距長度為$|\frac{C}{-4}|=\frac{C}{4}$，又$y$的截距長度為$\frac{C}{3}$

因此$\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{4}\cdot\frac{C}{3}=6$，可得$C=\pm 12$

考慮$C=12$，可知x的截距為$\frac{12}{-4}=-3$，y的截距為$\frac{12}{3}=4$，三角形圍在第二象限，不合。

考慮$C=-12$，可知x的截距為$\frac{-12}{-4}=3$，y的截距為$\frac{-12}{3}=-4$，三角形圍在第四象限

因此$C=-12$，得到$-4x+3y=-12$，故選(E)

105-01-07

Statement

設$3x^3-5x^2+7x+1=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，則$b+c=?$

$(A)\quad 16$

$(B)\quad 26$

$(C)\quad 36$

$(D)\quad 46$

$(E)\quad 56$

Solution

利用綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -5 & 7 & 1 & \\ & 6 & 2 & 18 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 9 & \color{red}{19} & \\ & 6 & 14 & & \\ \hline 3 & 7 & \color{red}{23} & & \\ & 6 & & & \\ \hline \color{red}{3} & \color{red}{13} & & & \end{array}$$

可得到$a=3,b=13,c=23,d=19$，因此$b+c=13+23=36$，故選(C)

105-01-08

Statement

已知拋物線的焦點為$(1,1)$，準線為$x+y+2=0$，則此拋物線的頂點坐標為何？

(A) $(2,2)$

(B) $(2,-2)$

(C) $(-1,1)$

(D) $(1,-1)$

(E) $(0,0)$

Solution

考慮做一條線L垂直準線與經過$(1,1)$

因此$L:x-y=C$，代入$(1,1)$得到$C=0$，故$L:x-y=0$

找L與準線的交點P，解聯立方程組$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$，可得$y=-1$且$x=-1$

因此頂點為P與焦點的中點，故$(\frac{-1+1}{2},\frac{-1+1}{2})=(0,0)$，故選$(E)$

105-01-09

Statement

若$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=4$且$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{37}$，則$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=?$

$(A)\quad -24$

$(B)\quad -12$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 12$

$(E)\quad 24$

Solution

$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=2|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+3(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2$

又$(|\vec{a}+\vec{b}|)^2=|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=37$

故$2(\vec{a}\cdot\vec{b})=12$，因此$(\vec{a}\cdot\vec{b})=6$

因此$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=2\times3^2+6-3\times4^2=-24$，故選$(A)$