

106年第2次北科入學數學會考

106-02-01

Statement

方程式 $2 \sin x = x$ 有幾個解？

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution 1

不用微積分的解 by Trava

因為 $y = x$ 與 $y = 2 \sin x$ 均通過原點，所有在原點時會有交點

考慮到 $y = 2 \sin x$ 與 $y = x$ 為奇函數，所以只要判斷 $x > 0$ 的範圍就可以推得所有交點

由於 $2 \sin x$ 的最大值為 2，所以只要 $x > 2$ ， $y = x$ 與 $y = 2 \sin x$ 就不可能有交點

令 $f(x) = 2 \sin x - x$

$f(\frac{\pi}{2}) > 0$ ，所以可以知道 $2 \sin x$ 的遞增速度比 x 快

在 $[\frac{\pi}{2}, 2]$ 的區間內 $2 \sin x$ 為遞減，因為 x 為嚴格遞增

所以在 $[\frac{\pi}{2}, 2]$ 會有一個交點，然後在 $[-\frac{\pi}{2}, -2]$ 也會有一個

所以總共有 3 個交點，故選 (B)

Solution 2

微積分解 by Uriah

$f(x) = 2 \sin x - x$ ，考慮 $-\pi < x < \pi$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cos x - 1 = 0$ ，則 $\cos x = \frac{1}{2}$ ，極值發生在 $\frac{\pi}{3}$ 與 $-\frac{\pi}{3}$

考慮 $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ ，以 $x = 0$ 考慮，則 $f'(0) = 1$ ，遞增

考慮 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ ，以 $x = \frac{\pi}{2}$ 考慮，則 $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$ ，遞減

考慮 $-\pi < x < -\frac{\pi}{3}$ ，以 $x = -\frac{\pi}{2}$ 考慮，則 $f'(-\frac{\pi}{2}) = -1$ ，遞減

考慮 $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > 0$ ， $f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} < 0$

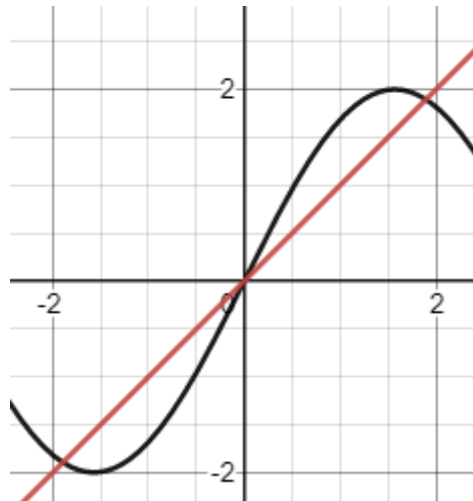
根據中間值定理，可知 $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ 之曲線經過 x 軸，故存在一個解。

總共有3個解，故選(B)

Solution 3

畫圖解By Uriah

畫出圖



故選(B)

106-02-02

Statement

設 x 為實數，求滿足兩不等式 $x^3 > 12 + 8x - x^2$ ， $x^2 < 4 + 3x$ 的解為何？

(A) $x < 2$ 或 $x > 3$

(B) $x > 3$

(C) $3 < x < 4$

(D) $-2 < x < 4$

(E) $x > 4$

Solution

考慮 $x^3 > 12 + 8x - x^2$

整理式子， $x^3 + x^2 - 8x - 12 > 0 \Rightarrow (x+2)^2(x-3) > 0$

考慮式子兩種可能的情况

$$\begin{cases} (x+2)^2 < 0 \\ (x-3) < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ (x-3) > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3$$

兩式取聯集，得到 $x > 3$

考慮 $x^2 < 4 + 3x$

整理式子， $x^2 - 3x - 4 > 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) > 0 \Rightarrow -1 < x < 4$

因此 $(x > 3) \cup -1 < x < 4 \Rightarrow 3 < x < 4$ ，故選 (C)

106-02-03

Statement

$\cos 127^\circ \cos 23^\circ + \cos 217^\circ \cos 67^\circ = ?$

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$$\begin{aligned} & \cos 127^\circ \cos 23^\circ + \cos 217^\circ \cos 67^\circ \\ &= -\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 37^\circ \cos 67^\circ \\ &= -\sin 37^\circ \sin 67^\circ - \cos 37^\circ \cos 67^\circ \\ &= -(\sin 37^\circ \sin 67^\circ + \cos 37^\circ \cos 67^\circ) \\ &= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{，故選 (A)} \end{aligned}$$

106-02-04

Statement

不等式 $\log_2(x - \frac{1}{2}) > \log_4(2 - x) - 1$ 之解為何？

(A) $\frac{1}{2} < x < 2$

(B) $1 < x < \frac{3}{2}$

(C) $\frac{3}{2} < x < 2$

(D) $\frac{-1}{4} < x < 1$

(E) $1 < x < 2$

Solution

考慮式子定義域： $\frac{1}{2} < x < 2$

$$\log_2(x - \frac{1}{2}) > \log_4(2 - x) - 1$$

$$\Rightarrow \log_2(x - \frac{1}{2}) > \frac{1}{2}\log_2(2 - x) - 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2(x - \frac{1}{2}) > \log_2(2 - x) - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} > 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (4x + 1)(x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow x > 1 \cup \frac{-1}{4} < x$$

將結果與定義域取交集，得到 $1 < x < 2$ ，故選(E)

106-02-05

Statement

$$\text{求}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2 + x - 2} = ?$$

(A) $\frac{1}{48}$

(B) $\frac{1}{40}$

(C) $\frac{1}{32}$

(D) $\frac{1}{24}$

(E) $\frac{1}{16}$

Solution

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2 + x - 2} \\ & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+3)(3x+1)}}}{x^2 + x - 2} \\ & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{(x^2 + x - 2)\sqrt{3x^2 + 10x + 3}} \\ & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1 - x - 3}{(x^2 + x - 2)\sqrt{3x^2 + 10x + 3}(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})} \\ & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{(x^2 + x - 2)\sqrt{3x^2 + 10x + 3}(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})} \\ & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x+2)\sqrt{3x^2 + 10x + 3}(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})} \\ & \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{24} \cdot \text{故選}(D) \end{aligned}$$

106-02-06

Statement

若 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{\beta}$ 為方程式 $x(x-6) = -2$ 的兩根且 $\alpha > \beta$ ，則 $\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 = ?$

(A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{7}}{5}$

(E) $\frac{\sqrt{7}}{6}$

Solution

$$x(x-6) = -2 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0$$

利用根與係數， $\frac{1}{\alpha\beta} = 2 \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 6$

因此 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = 6$ ，代入 $\frac{1}{\alpha\beta}$ 得 $\alpha+\beta=3$ ，且 $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

$$\alpha - \beta = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}$$

$$\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \text{故選}(A)$$

106-02-07

Statement

已知橢圓方程式為 $\frac{(x-1)^2}{a} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 且其短軸平行 y 軸，若 $P(k, 2)$ 為橢圓上一點且 P 點到點 $(1, 2)$ 的距離不超過3，假設 a 為整數，則 a 有幾種可能？

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Solution

由方程式可知道原點為 $(1, 2)$

從題目上可知道 P 點到原點最長不超過3，因此可以知道 $\sqrt{a} < 3$ ，因此 $a < 9$

又因為方程式是橢圓且短軸平行 y 軸，因此 $a \geq 4$

故 $4 \leq a < 9$ ，共有5種可能，故選(C)

106-02-08

Statement

設直線 L 通過兩點 $(3, 0)$ 、 $(0, -4)$ ，直線 M 為通過點 $(-1, 1)$ 且與 L 垂直之直線，若 M 其方程式為 $ax + by = 1$ ，則 $a + b = ?$

(A) -7

(B) -1

(C) 1

(D) 3

(E) 7

Solution

L 通過兩點，因此可得 $L: y = \frac{0 - (-4)}{3 - 0}(x - 3) \Rightarrow -4x + 3y + 12 = 0$

則 M 垂直於 L ，因此 $M: 3x + 4y = d$ 。代入 $(-1, 1)$ 得到 $d = 1$ 。故 $M: 3x + 4y = 1$

因此 $3 + 4 = 7$ ，故選 (E)

106-02-09

Statement

若 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，且 $\log_a(\sqrt{2} - 1) = 2x$ ，求 $\frac{a^{-3x} - a^{3x}}{a^{-x} + a^x} = ?$

(A) $2 - \sqrt{2}$

(B) $3 - \sqrt{2}$

(C) $1 + \sqrt{2}$

(D) $2 + \sqrt{2}$

(E) $3 + \sqrt{2}$

Solution

$$\log_a(\sqrt{2} - 1) = 2x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} - 1 = a^{2x}$$

$$\frac{a^{-3x} - a^{3x}}{a^{-x} + a^x} = \frac{a^{-2x} - a^{4x}}{1 + a^{2x}} = \frac{1 - a^{6x}}{a^{2x}(1 + a^{2x})} = \frac{1 - (\sqrt{2} - 1)^3}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{(8 - 5\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2} \cdot \text{故選 (B)}$$

106-02-10

Statement

若拋物線 $x = \frac{1}{64}y^2$ 與直線 $x - \frac{1}{k}y + 1 = 0$ 有交點且 k 為整數，則 k 有幾種可能？

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 8

(E) 9

Solution

$$x + 1 = \frac{1}{k}y$$

$$k(x + 1) = y$$

考慮直線與拋物線只有一個交點

$$x = \frac{1}{64}(k(x + 1))^2$$

$$x = \frac{1}{64}k^2(x^2 + 2x + 1)$$

$$64x = k^2x^2 + 2k^2x + k^2$$

$$k^2x^2 + (2k^2 - 64)x + k^2 = 0$$

則利用判別式，考慮 $b^2 - 4ac = 0$

$$(2k^2 - 64)^2 - 4 \times k^2 \times k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4k^4 - 256k^2 + 4096 - 4k^4 = 0$$

$$\Rightarrow -256k^2 = -4096$$

$$\Rightarrow k^2 = 16 \cdot \text{得到 } k = \pm 4$$

因此只要 k 落在 $-4 \leq k \leq 4$ 的區間，且 $k \neq 0$ ，與拋物線均有交點，故答案為8，故選(D)

106-02-11

Statement

已知向量 $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$ 、 $\vec{b} = \langle 2, 4 \rangle$ 。若 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 之最小值為何？

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 2

(D) $\sqrt{5}$

(E) $\sqrt{6}$

Solution

$$\vec{a} + t\vec{b} = \langle 3 + 2t, 1 + 4t \rangle$$

因此考慮

$$|\vec{a} + t\vec{b}| = \sqrt{(3 + 2t)^2 + (1 + 4t)^2} = \sqrt{9 + 12t + 4t^2 + 1 + 8t + 16t^2} = \sqrt{20t^2 + 20t + 10}$$

$$\text{對根號內的式子配方法，得到 } \sqrt{20(t^2 + t + \frac{1}{4}) - 5 + 10} = \sqrt{20(t + \frac{1}{2})^2 + 5}$$

因此在 $t = -\frac{1}{2}$ 時，有最小值為 $\sqrt{5}$ ，故選(D)

106-02-12

Statement

若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{3x+a}-b}{x} \right) = \frac{3}{4}$ ，求 $a+b=?$

(A) 6

(B) 9

(C) 12

(D) 15

(E) 18

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{3x+a}-b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x+a-b^2}{(\sqrt{3x+a}+b)x} \right) = \frac{3}{4}$$

極限存在必要條件： $a-b^2=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{(\sqrt{3x+a}+b)} \right) = \frac{3}{\sqrt{a}+b} = \frac{3}{4}$$

得到 $\sqrt{a}+b=4$

兩式 $\begin{cases} a-b^2=0 \\ \sqrt{a}+b=4 \end{cases}$ 解聯立，得到 $(a,b)=(4,2)$

故 $a+b=6$ ，故選(A)

106-02-13

Statement

若 $\frac{x^4+2x^3+2x+2}{x^3-1} = f(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ ，其中 $f(x)$ 為一次式且 a, b 為常數，則 $a+b=?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$\text{設 } f(x) = dx + e$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 2x + 2}{x^3 - 1} = f(x) + \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 2x + 2 = (dx + e)(x^3 - 1) + a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 2x + 2 = dx^4 - dx + ex^3 - e + ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 2x + 2 = dx^4 + ex^3 + (a + b)x^2 + (-d + a - b + c)x + (-e + a - c)$$

比較係數 · $d = 1, e = 2$ · 且 $a + b = 0$ · $-1 + a - b + c = 2$ · $(-2 + a - c) = 2$ · 故選(C)

106-02-14

Statement

已知向量 $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $|\vec{c}| = 2$ 且 $|\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}| = 0$ · 則 $|\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}| = ?$

(A) $\sqrt{\frac{21}{2}}$

(B) $\sqrt{\frac{23}{2}}$

(C) $\sqrt{\frac{24}{2}}$

(D) $\sqrt{\frac{26}{2}}$

(E) $\sqrt{\frac{27}{2}}$

Solution

$$\text{已知 } |\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}| = 0$$

$$\text{因此 } \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{c}$$

$$\text{則 } |\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}| = |\vec{b} + 3\vec{c}|$$

$$\text{又 } \vec{b} + 2\vec{c} = -\vec{a}$$

$$|\vec{b}|^2 + 4(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 4|\vec{c}|^2 = |-\vec{a}|^2 \Rightarrow (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{-21}{4}$$

$$|\vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{|\vec{b}|^2 + 6(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 9|\vec{c}|^2} = \sqrt{9 + \frac{-126}{4} + 36} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \sqrt{\frac{27}{2}} \cdot \text{故選(E)}$$

106-02-15

Statement

假設 $P(2, 0)$ 、 $Q(0, 2)$ 和 R 為圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上三點，則三角形 PQR 最大面積為何？

(A) 4

(B) $2 + 2\sqrt{2}$

(C) $4 + \sqrt{2}$

(D) $4\sqrt{2}$

(E) $4 + 4\sqrt{2}$

Solution 1

畫出圖可知，要使得最大面積， R 點一定在 PQ 線段中垂過圓心交於圓上的一點，得到等腰三角形 RPQ 。

$$\text{因此面積為 } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2\sqrt{2}$$

Solution 2

$$\text{令 } R = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

$$\text{則面積為 } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \cos \theta & 0 \\ 2 & 0 & 2 \sin \theta & 2 \end{vmatrix} = |2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2|$$

找出 $|2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2|$ 的最大值

$$-2\sqrt{2} \leq 2 \sin \theta + 2 \cos \theta \leq 2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} - 2 \leq 2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2 \leq 2\sqrt{2} - 2$$

$$0 \leq |2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2| \leq 2\sqrt{2} + 2$$

所以面積最大值為 $2\sqrt{2} + 2$

106-02-16

Statement

下列哪一條直線為兩直線 $4x - 3y = 2$ 、 $3x - 4y = -7$ 的交角平分線方程式？

(A) $x - y = -9$

(B) $x - y = 9$

(C) $x + y = -9$

(D) $x + y = 9$

(E) $7x - 7y = 5$

Solution

考慮一條線與兩直線等距，故

$$\frac{|4x - 3y - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x - 4y + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$4x - 3y - 2 = \pm(3x - 4y + 7)$$

得到直線為 $x + y - 9 = 0$ (鈍角)或 $7x - 7y + 5 = 0$ (銳角)，故選(D)

106-02-17

Statement

若 $f(x) = \log_{27} \sqrt[3]{g(x)}$ ，其中 $g(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x - 1$ ，則 $f(\sqrt{3} - 1) = ?$

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) 1

(E) $\sqrt{3}$

Solution

利用綜合除法，將 $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x - 1$ 以 $(x + 1)$ 的形式表現

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 5 & 6 & 1 & -1 & \\ & -1 & -4 & -2 & 1 & \\ \hline 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & \\ & -1 & -3 & 1 & & \\ \hline 1 & 3 & -1 & 0 & & \\ & -1 & -2 & & & \\ \hline 1 & 2 & -3 & & & \\ & -1 & & & & \\ \hline 1 & 1 & & & & \end{array}$$

得到 $g(x) = (x + 1)^4 + (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2$

因此 $g(\sqrt{3} - 1) = 9 + 3\sqrt{3} - 9 = 3\sqrt{3}$

$$f(\sqrt{3}-1) = \log_{27} \sqrt[3]{g(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{9} \log_3 3\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot \text{故選}(A)$$

106-02-18

Statement

函數 $f(x) = \sin^2 x - \cos x + 1$ 的最大值為何？

(A) $\frac{5}{4}$

(B) $\frac{7}{4}$

(C) 2

(D) $\frac{9}{4}$

(E) 3

Solution

$$f(x) = \sin^2 x - \cos x + 1 = -\cos^2 x - \cos x + 2$$

$$\text{令 } t = \cos x \cdot \text{則 } f(t) = -t^2 - t + 2 = -(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$$

考慮 $t = \frac{1}{2}$ 在 $\cos x$ 的值域內，因此最大值為 $\frac{9}{4}$ ，故選(D)

106-02-19

Statement

若 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 且 $f(g(x)) = \frac{x+1}{2x+1}$ ，求 $g(1) = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$\text{已知 } f(1) = 0 \cdot \text{且 } f(g(1)) = \frac{2}{3}$$

$$\text{考慮 } \frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{3} \cdot \text{得到 } x = 5$$

因此 $g(1) = 5$ ，故選(E)

106-02-20

Statement

設 $4^{x+1} - 15 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0$ 的兩根為 α 和 β ，則 $\alpha + \beta = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$4^{x+1} - 15 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 4^x - 30 \cdot 2^x + 32 = 0$$

$$\text{令 } t = 2^x, \text{ 則 } 4t^2 - 30t + 32 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 15t + 16 = 0$$

$$\text{得到 } 2^\alpha + 2^\beta = \frac{15}{2} \text{ 且 } 2^{\alpha+\beta} = 8$$

因此 $\alpha + \beta = 3$ ，故選(C)