國立台北科技大學　數學入學會考詳解

作者

- 109 資工系 黃漢軒
  - Instagram
  - sigtunatw@gmail.com
- 109 化工系 羅昇宇
  - Instagram
  - qoo18105@gmail.com

感謝北科入學會考出題老師。

所有的解答均為非官方，有任何勘誤上的問題，請聯繫作者。

100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知$f(x)$為一實係數多項式，且$f(\frac{3}{2})=27$，$f(-\frac{5}{3})=8$。

若$f(x)$除以$(6x^2+x-15)$的餘式為$ax+b$，則$b-a=?$

$(A)\quad 4$
$(B)\quad 8$
$(C)\quad 12$
$(D)\quad 16$
$(E)\quad 20$

Solution

可以把式子轉成

$f(x)=g(x)(6x^2+x-15)+ax+b$

$=g(x)(3x+5)(2x-3)+ax+b$

代入$x=\frac{3}{2}$，得到$\frac{3}{2}a+b=27$

代入$x=\frac{-5}{3}$，得到$\frac{-5}{3}a+b=8$

解聯立之後得到$(a,b)=(6,18)$

因此$b-a=12$，故選(C)

100-01-02

Statement

若α,β為方程式$x-\dfrac{3}{x}+1=0$的兩根，則$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=?$

$(A)\quad 9$
$(B)\quad 15$
$(C)\quad 21$
$(D)\quad 27$
$(E)\quad 33$

Solution

$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=\dfrac{4}{\alpha\beta}+\dfrac{10(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+25$

$x-\dfrac{3}{x}+1=0\Rightarrow x^2+x-3=0$

利用根與係數，得到$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-1}{1}=-1$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=-3$

因此$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=\dfrac{4}{-3}+\dfrac{-10}{-3}+25=27$

故選(D)

100-01-03

Statement

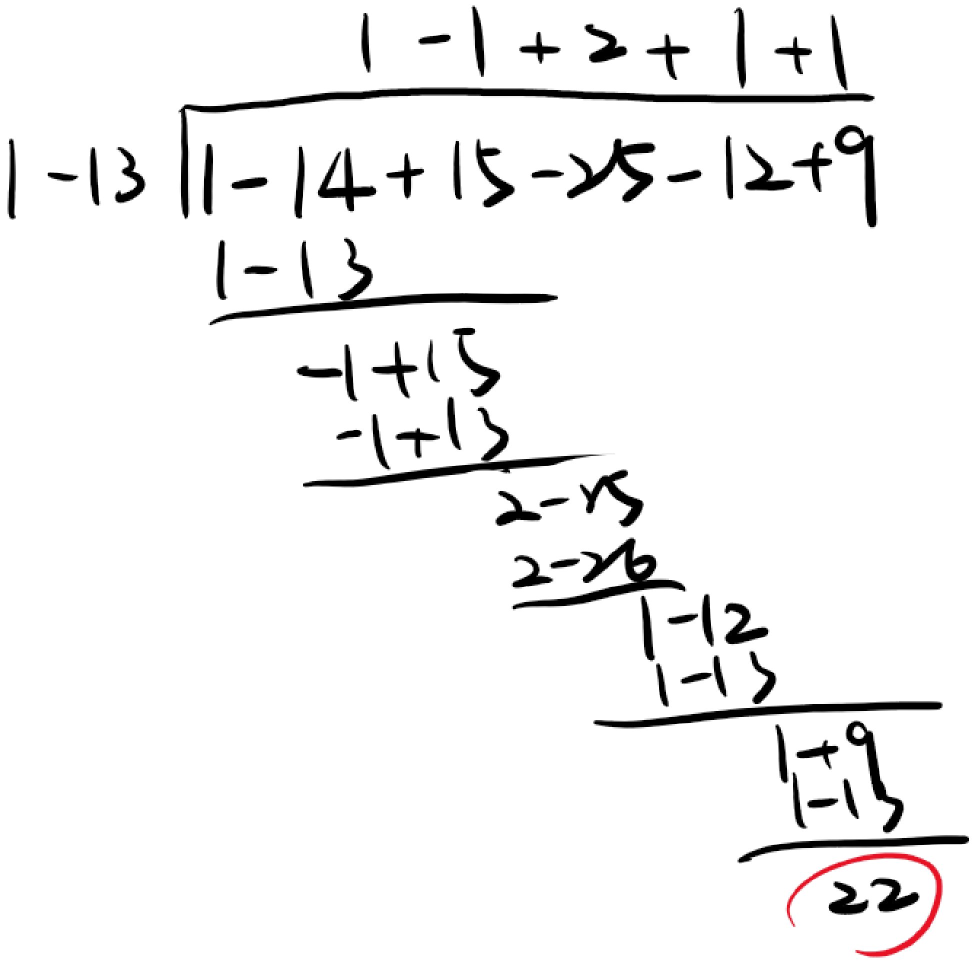
求$13^5-14\times 13^4+15\times 13^3-25\times 13^2-12\times 13+9=?$

$(A)\quad 22$
$(B)\quad 25$
$(C)\quad 28$
$(D)\quad 31$
$(E)\quad 34$

Solution

將式子考慮成$f(x)=x^5-14x^4+15x^3-25x^2-12x+9$

式子等價於$f(x)$除以$x-13$的餘數（餘式定理）。



故答案選(A)。

100-01-04

Statement

若$\dfrac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$，則$A+B+C+D=?$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 2

(C) 3

(D) $\frac{7}{2}$

(E) 33

Solution

$$\frac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$2x^2-x+4=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2)$

$=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$

$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B$

可知

$A + C = 0$
$B + D = 2$
$A = -\frac{1}{4}$
$B = 1$

因此$C = \frac{1}{4}$，$D = 1$。

因此$A + B + C + D = 2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$之解為何？

(A) $1 \leq \mathrm{x} < 2$
(B) $1 < \mathrm{x} \leq 2$
(C) $1 < \mathrm{x} < 2$
(D) $\mathrm{x} \geq 2$ 或 $\mathrm{x} < 1$
(E) $\mathrm{x} > 2$ 或 $\mathrm{x} < 1$

Solution

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 - 5x + 7)}{(x - 1)(x - 2)} \leq 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \leq 0 \\ (x - 1)(x - 2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \geq 0 \\ (x - 1)(x - 2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

因此$1 < x < 2$時，$\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$，故選$(C)$

100-01-06

Statement

若$a,\ b$均為實數且$ax^2+bx-10<0$之解為$\frac{-5}{2}<x<\frac{4}{3}$，則$a+b=$？

(A) 5
(B) $\frac{11}{2}$
(C) 6
(D) $\frac{13}{2}$
(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3})<0$
$\Rightarrow x^2-\frac{4x}{3}+\frac{5x}{2}+\frac{-20}{6}<0$
$\Rightarrow 6x^2-8x+15x-20<0$
$\Rightarrow 6x^2+7x-20<0$

兩邊共除2，得$3x^2+\frac{7}{2}x-10<0$

$a=3,\ b=\frac{7}{2},\ a+b=\frac{13}{2}$

100-01-07

Statement

若直線$12x-5y=21$與兩直線$x=\frac{23}{39}$、$x=\frac{16}{13}$分別交於A、B兩點，則線段長$\overline{AB}=$?

$(A)\quad \frac{6}{5}$
$(B)\quad \frac{5}{4}$
$(C)\quad \frac{5}{3}$
$(D)\quad \frac{13}{5}$
$(E)\quad \frac{25}{7}$

Solution

已知$12x-5y=21$，則斜率為$\frac{12}{5}$

$\Delta x=\frac{16}{13}-\frac{23}{39}=\frac{25}{39}$

$y=mx+b$，則$0=\frac{12}{5}(\frac{16}{13}-\frac{23}{39})+b$，得到$b=\frac{60}{39}=\Delta y$

因此距離為$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\frac{25}{39})^2+(\frac{60}{39})^2}=\frac{5}{3}$，故選$(C)$

100-01-08

Statement

設兩向量$\vec{a}, \vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，$|\vec{a} + \vec{b}| = 4$，$|\vec{a} - \vec{b}| = 3$，則$\cos\theta = ?$

$(A)\quad \frac{7}{25}$
$(B)\quad \frac{5}{13}$
$(C)\quad \frac{3}{5}$
$(D)\quad \frac{4}{5}$
$(E)\quad \frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$$\cos\theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a+b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = -\cos\theta$$

因此，$\frac{|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = \frac{-|a|^2 - |b|^2 + |a+b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$

$|a|^2 + |b|^2 - 9 = -|a|^2 - |b|^2 + 16$

設$x = |a| = |b|$，故$2x^2 - 9 = -2x^2 + 16$，得到$x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$

代入$\cos\theta$，得到$\frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 9}{2 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2} - 9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}| = 7$、$|\vec{b}| = 5$，$\tan\theta = -\frac{3}{4}$，則$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = ?$

$(A)\quad -25$
$(B)\quad -5$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 44$
$(E)\quad 51$

Solution

$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a}\cdot\vec{b}) + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$

已知$\tan\theta = \dfrac{-3}{4}$，則$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$

因此$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta = 7\times 5\times -\dfrac{4}{5} = -28$

因此$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) = 98+28-75 = 51$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以$(2,2)$與$(6,2)$為兩焦點，且與直線$x+1=0$相切，則橢圓短軸半長為何？

(A) 4
(B) $\sqrt{21}$
(C) $\sqrt{23}$
(D) $\sqrt{29}$
(E) 6

Solution

將題目簡化為求b的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是$(\dfrac{2+6}{2},\dfrac{2+2}{2}) = (4,2)$

焦距c為焦點與橢圓中點之距離，因此可知$c=2$

已知與直線$x+1=0$相切，因此橢圓左右一端會與$x+1=0$相切，因此其中一端為$(-1,2)$

故長軸a為橢圓長軸端點與中心之距離，可知$a=5$

因此$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線$y=2x-\dfrac{1}{2}x^2$的焦點座標為(a,b)，則$ab=?$

(A) 3
(B) 3.5
(C) 4
(D) 4.5
(E) 5

Solution

$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$\Rightarrow -2(y-2) = (x-2)^2$

因此可以知道頂點座標為$(2,2)$，$c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

因此焦點為$(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$

故$a = 2, b = \frac{3}{2}$，得到$ab = 3$，故選(A)。

100-01-12

Statement

雙曲線$xy - 3x + 4y = 0$兩頂點的距離為何？

(A) $2\sqrt{3}$
(B) 4
(C) $2\sqrt{6}$
(D) $4\sqrt{3}$
(E) $4\sqrt{6}$

Solution

$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x+4)(y-3) = -12$

考慮通過頂點的線為$y = -x + b$，代入必定通過的點$(-4,3)$得到$b = -1$

因此$y = -x - 1$會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$x(-x-1) - 3x + 4(-x-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$

利用公式解得到x的點，也就是$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$

當$x = -4 + 2\sqrt{3}$時，$y = 2\sqrt{3} - 3$

當$x = -4 - 2\sqrt{3}$時，$y = -3 - 2\sqrt{3}$

兩點距離為$\sqrt{(-4+2\sqrt{3}-(-4-2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3}-3-(-3-2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48+48} = 4\sqrt{6}$，故選$(E)$

100-01-13

Statement

若$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$，則$x=?$

$(A)\quad -3$
$(B)\quad -3$或1
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 3$

Solution

$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$

$\Rightarrow \log_2(3-x^2)-\log_2 x=1$

$\Rightarrow \log_2(\frac{3-x^2}{x})=1$

$\Rightarrow \frac{3-x^2}{x}=2$

$\Rightarrow -x^2-2x+3=0$

$\Rightarrow x=1, x=-3$

驗根可知$\log_2 x$無法放入-3，因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-3$不合。

因此$x=1$，故選(C)

100-01-14

Statement

若$f(x)=\frac{1+2^x}{1-2^x}$，且$f(a)=3$，$f(b)=5$，則$f(a+b)=?$

$(A)\quad \frac{5}{3}$
$(B)\quad 2$
$(C)\quad 6$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 15$

Solution

令$t=2^x$，則$f(x)=\frac{1+t}{1-t}$

考慮$f(a)=3$

$\frac{1+t}{1-t}=3$

$\Rightarrow 1+t=3-3t$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$

因此$2^a=\frac{1}{2}$，得到$a=-1$

考慮$f(b)=5$

$\frac{1+t}{1-t}=5$

$\Rightarrow 1+t=5-5t$

$\Rightarrow t=\frac{2}{3}$

$2^b=\frac{2}{3}$，則$b=1-\log_2 3$

故$f(a+b)=f(-\log_2 3)=f(\log_2\frac{1}{3})=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{2}=2$，故選$(B)$

100-01-15

Statement

求$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=?$

$(A)\quad \frac{1}{2}$
$(B)\quad \frac{3}{2}$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad \frac{5}{2}$
$(E)\quad 4$

Solution

$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=\log_2(\sqrt{12+8\sqrt{2}}+\sqrt{12-8\sqrt{2}})=\log_2(\sqrt{8+8\sqrt{2}+4}+\sqrt{8-8\sqrt{2}+4})$

$=\log_2(\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(2-2\sqrt{2})^2})=\log_2(4\sqrt{2})=\frac{5}{2}$，故選$(D)$

100-01-16

Statement

設$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\sin\theta+\cos\theta=?$

$(A) \quad -1$

$(B) \quad -\dfrac{1}{2}$

$(C) \quad \dfrac{1}{2}$

$(D) \quad \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$(E) \quad \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3}{8}$

則$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{(\sin\theta + \cos\theta)^2} = \sqrt{\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta}$

$= \sqrt{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{1 + 2\dfrac{3}{8}} = \sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

(A) 若$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$，則 $\sin x < \cos x < \cot x$

(B) 若$\pi < x < \dfrac{5\pi}{4}$，則 $\sec x < \csc x < \cot x$

(C) 若$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$，則 $\cos x < \sin x < \tan x$

(D) 若$\pi < x_1 < x_2 < \dfrac{3\pi}{2}$，則 $\sin x_1 > \sin x_2$

(E) 若$\dfrac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$，則 $\cos x_1 > \cos x_2$

Solution

若$\pi < x < \dfrac{5\pi}{4}$，則 $\sin\theta < \cos\theta < \tan\theta$

故$\csc\theta < \sec\theta < \cot\theta$，故選$(B)$

100-01-18

Statement

若$mx+3y+1=0$與$x+(m-2)y+m=0$之交點在第二象限內，則m之範圍為何？

$(A)\quad 0<m<1$
$(B)\quad 0<m<2$
$(C)\quad 0<m<3$
$(D)\quad 1<m<3$
$(E)\quad 1<m<4$

Solution

由第二式，可以知道$y=\dfrac{-x-m}{m-2}=\dfrac{1}{2-m}x+\dfrac{m}{2-m}$

令$x=0$，可以知道通過$(0,\dfrac{m}{2-m})$

令$y=0$，可以知道通過$(-m,0)$

因此可以知道x截距為$-m$，y截距為$\dfrac{m}{2-m}$。

由於直線要通過第二象限，因此只考慮以下五種case：截距$y>0,x>0$、截距$x<0,y>0$與截距$y<0,x<0$，水平、垂直線

考慮截距$y>0,x>0$，得到$(0<m<2)\cap(m<0)=\varnothing$

考慮截距$y<0,x<0$，得到$(m<0\cup m>2)\cap(m>0)$，得到$m>2$。

考慮截距$x<0,y>0$，得到$(m>0)\cap(0<m<2)$，得到$0<m<2$。

考慮水平線：無法滿足

考慮垂直線：$m=2$，會使直線變為$x=-2$，依然會通過第二象限。

由第一式，可以知道$y=\dfrac{-mx-1}{3}=-\dfrac{m}{3}x-\dfrac{1}{3}$

令$x=0$，可以知道通過$(0,-\dfrac{1}{3})$

令$y=0$，可以知道通過$(\dfrac{1}{m},0)$

因此可以知道x截距為$\dfrac{1}{m}$，y截距為$\dfrac{1}{3}$

由於直線要通過第二象限，因此只考慮以下五種case：截距$y>0,x>0$、截距$x<0,y>0$與水平、垂直線

考慮截距$y>0,x>0$，得到$m>0$，則因第二式之二三結果，可使第二式經過第二象限

考慮截距$y>0,x<0$，得到$m<0$，與第二式之結果沒有匹配，因此無法使第二式經過第二象限。

考慮水平線：無法滿足

考慮垂直線：無法滿足

因此可知使兩條直線都通過第二象限所需條件：$m>0$。

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \dfrac{2m+2}{(m-3)(m+1)} \\ y = \dfrac{m^2-1}{(-m+3)(m+1)} \end{cases}$$

考慮到$y > 0, x < 0$的情況

得到$((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

與使兩條直線都通過第二象限所需條件取交集，得到$1 < m < 3$，故選(D)

100-01-19

Statement

若點(a, b)在直線$2x + 3y = 1$上移動，則直線$ax + by = 3$恆過哪一點？

$(A)\quad (3, 4)$
$(B)\quad (4, 5)$
$(C)\quad (5, 7)$
$(D)\quad (5, 8)$
$(E)\quad (6, 9)$

Solution

考慮$x = 5$時$y = -3$

考慮$x = -4$時$y = 3$

由於a, b依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮$5x - 3y = 3$與$-4x + 3y = 3$的交點，得到$(x, y) = (6, 9)$，故選(E)

100-01-20

Statement

已知$A(3, -5)$，$B(-7, 4)$，且點P介於A、B之間，又$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4$，若$P$之座標為$(a, b)$，則$7a + 21b = ?$

$(A)\quad -33$
$(B)\quad -32$
$(C)\quad -31$
$(D)\quad -30$
$(E)\quad -29$

Solution

$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$

利用內分點公式。

$P = (\frac{4 \times 3 + 3 \times (-7)}{7}, \frac{4 \times (-5) + 3 \times 4}{7}) = (\frac{-9}{7}, \frac{-8}{7})$

則$7a + 21b = (-9) + (-8) \times 3 = -33$，故選$(A)$

100年第2次北科入學數學會考

100-02-01

Statement

若α，β為方程式$x^2 + 12x + 9 = 0$的兩根，則$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = ?$

(A) -18
(B) -6
(C) 6
(D) 12
(E) 18

Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式$ax^2 + bx + c$，存在兩根α與β。

那麼$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$，且$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$\sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2$

$\Rightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta$

根據偉達定理我們可以求得

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{1} = -12$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$

注意一下$\alpha + \beta = -12$，$\alpha\beta = 9$
若兩根一正一負那麼$\alpha\beta < 0$，若兩根都是正的那麼$a + b > 0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。
$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$會存在複數，相乘後可以得到$-\sqrt{\alpha\beta}$。

因此帶回欲求之式子：

$-12 - 2 \times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$

100-02-02

Statement

若 $x^4-x^3-x^2-x-2$ 與 $2x^3+x^2-7x-6$ 的最高公因式為 x^2+bx+c，則$b+2c=?$

(A) -5
(B) -3
(C) 0
(D) 5
(E) 7

Solution

第一式的因式$ax+b$的a一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)，
且b一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到$(x+1)(x-2)(x^2+1)$
接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得倒$(x+1)(x-2)(2x+3)$

可以觀察到最大公因式即為$(x+1)(x-2)=x^2-x-2$
比較係數後得到$b=-1,c=-2$

則$b+2c=-1+2\times-2=-5$。

100-02-03

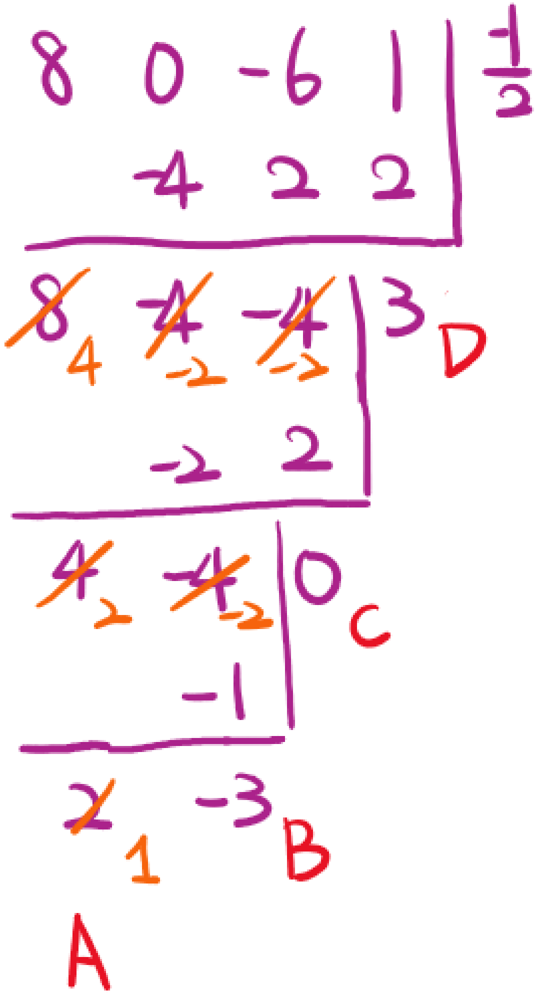
Statement

若$\dfrac{8x^3-6x+1}{(2x+1)^4}=\dfrac{a}{(2x+1)}+\dfrac{b}{(2x+1)^2}+\dfrac{c}{(2x+1)^3}+\dfrac{d}{(2x+1)^4}$，則$2a+b-c+d=?$

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

Solution

我們可以使用綜合除法，將$2x+1$改寫成$x+\dfrac{1}{2}$，然後再對除出來的係數除以2。



因此$a=1,\ b=-3,\ c=0,\ d=3$。

$2a+b-c+d=1\times2+(-3)-0+3=2$。

100-02-04

Statement

$x^2-4x+2\leq|x-2|$ 之解為何？

(A) $1\leq \mathrm{x}\leq 4$
(B) $2\leq \mathrm{x}\leq 4$
(C) $0\leq \mathrm{x}\leq 2$
(D) $0\leq \mathrm{x}\leq 4$
(E) $0\leq \mathrm{x}\leq 3$

Solution

1. 考慮$x^2-4x+2\leq x-2$：
   移項，$x^2-4x+2-x+2\leq0$
   整理，$x^2-5x+4\leq0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$(x-4)(x-1)\leq0$，並且可以得到$1\leq x\leq4$。
2. 考慮$x^2-4x+2\leq -x+2$：
   移項，$x^2-4x+2+x-2\leq0$
   整理，$x^2-3x\leq0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$x(x-3)\leq0$，並且可以得到$0\leq x\leq3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到$0 \leq x \leq 4$。

100-02-05

Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$之解為何？

(A) $\mathrm{x} < \frac{-1}{2}$ 或 $0 < \mathrm{x} < 1$
(B) $0 < \mathrm{x} < \frac{1}{2}$ 或 $1 < \mathrm{x} < 2$
(C) $\mathrm{x} < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $0 < \mathrm{x} < 1$
(D) $\mathrm{x} < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < \mathrm{x} < 2$
(E) $0 < \mathrm{x} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < \mathrm{x} < 2$

Solution

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$

$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{\log 2}{\log x} < 1$

$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} < 1$

令$\log_2 x = t$，那麼

$2t - \frac{1}{t} < 1$
$\Rightarrow 2t - \frac{1}{t} - 1 < 0$

$\Rightarrow \frac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$

考慮兩種情況。

1. 若$t > 0$且$2t^2 - t - 1 < 0$
   $2t^2 - t - 1 < 0 = (2t+1)(t-1) < 0 = \frac{-1}{2} < t < 1$
   與$t > 0$取交集得到$0 < t < 1$。
2. 若$t < 0$且$2t^2 - t - 1 > 0$
   $2t^2 - t - 1 > 0 = (2t+1)(t-1) > 0 = t < \frac{-1}{2}$ 或 $t > 1$
   與$t < 0$取交集得到$t < \frac{-1}{2}$。

對這兩種考慮取聯集，得到$t < \frac{-1}{2}$或$0 < t < 1$。

還原，得到$x < \frac{1}{\sqrt{2}}$或$1 < x < 2$。

100-02-06

Statement

已知ΔABC 中，$\overline{AB}=37$，$\overline{BC}=53$，$\overline{AC}=89$，則下列各內積中，何者為最大？

$(A)\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$(B)\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$

$(C)\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$(D)\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$(E)\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

Solution

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=37\times 89\times\frac{37^2+89^2-53^2}{2\times 37\times 89}$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=53\times 37\times\frac{53^2+37^2-89^2}{2\times 53\times 37}$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=89\times 37\times\frac{89^2+53^2-37^2}{2\times 89\times 53}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}<0$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}<0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$37^2+89^2-53^2$。

$53^2+37^2-89^2$

$89^2+53^2-37^2$

顯然是第三者較大，故選(C)

100-02-07

Statement

已知向量$\overrightarrow{AB}=(-31,29)$，$\overrightarrow{AC}=(23,-11)$，則下列向量長中，何者為最大？

(A) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$
(B) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$
(C) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$
(D) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$
(E) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$

Solution

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$

$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$
$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$

考慮向量長的公式，當存在一向量$\overrightarrow{L} = (A, B)$，$\overrightarrow{L}$的向量長為$|\overrightarrow{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$
因此若$|A| + |B|$越大，那麼向量長越大。

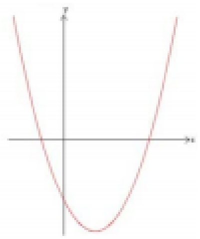
考慮選項A：$|-31| + |29| = 60$
考慮選項B：$|54| + |-40| = 94$
考慮選項C：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$，$|23| + |-11| = 34$
考慮選項D：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$，$|-8| + |18| = 26$
考慮選項E：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$，$|0| + |0| = 0$

因此，故選B。

100-02-08

Statement

設$y = ax^2 + bx + c$的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



(A) abc
(B) $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$
(C) $\mathrm{c}^2 - 4\mathrm{ab}$
(D) $\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$
(E) $\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$

Solution

因為開口向上，所以$a > 0$。
觀察$x = 0$，可以發現對應到的$y < 0$，因此$c < 0$
觀察一下對稱軸，$\dfrac{-b}{2a} > 0$，因此$b < 0$

因此$abc > 0$，$b^2 - 4ac > 0$因為有實數解。
$c^2 - 4ab > 0$因為$ab < 0$。

而$b + \sqrt{b^2 - 4ac}$必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，
另一根是負數因此$b - \sqrt{b^2 - 4ac}$小於0，故選E。

100-02-09

Statement

已知$4x^2+y^2-4x+8y=8$，則x的最大值為何？

$(A)\ 1$
$(B)\ 2$
$(C)\ 3$
$(D)\ 4$
$(E)\ 5$

Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的x了。

$$4x^2-4x+y^2+8y=8$$

$$4(x^2-x)+y^2+8y=8$$

$$4(x^2-x+\frac{1}{4})+y^2+8y+16=8+16+1$$

$$4(x-\frac{1}{2})^2+(y+4)^2=25$$

$$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y+4)^2}{25}$$

由此可知這個橢圓的短邊平行x軸

$$a=\sqrt{25}=5, b=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

中心可從式子得知，$(x,y)=(\frac{1}{2},-4)$

因此，加上x的部份得到$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

100-02-10

Statement

拋物線$y=4-2x-x^2$與x軸兩交點的距離為何？

$(A)\ 2$
$(B)\ 3$
$(C)\ 2\sqrt{5}$
$(D)\ 6$
$(E)\ 8$

Solution

將y等於0，求出x。

$$-x^2-2x+4=0$$

先確定b^2-4ac是否大於0。

$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20$

因此兩根為$\dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{-2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$

$\dfrac{2+\sqrt{5}}{-2} - \dfrac{2-\sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$

100-02-11

Statement

設雙曲線$x^2 - y^2 = x + 2y$兩漸進的夾角為θ，則$\sin\dfrac{\theta}{2} = ?$

(A) 0
(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
(E) 1

Solution

配方雙曲線得到標準式。

$x^2 - x - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} - y^2 - 2y + 1 = \dfrac{5}{4}$

$(x - \dfrac{1}{2})^2 - (y-1)^2 = \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5} - \dfrac{4(y-1)^2}{5} = 1$

求漸進線，令等號右邊為0

$\dfrac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5} = \dfrac{4(y-1)^2}{5}$

$(x - \dfrac{1}{2})^2 = (y-1)^2$

$(x - \dfrac{1}{2})^2 - (y-1)^2 = 0$

$(x - \dfrac{1}{2} - (y-1))(x - \dfrac{1}{2} + (y-1)) = 0$

$(x - y + \dfrac{1}{2})(x + y + \dfrac{3}{2}) = 0$

第一條線$(x - y + \dfrac{1}{2})$可求斜率$m = 1$

第二條線$(x + y + \dfrac{3}{2})$可求斜率$m = -1$

因此，這兩條線垂直$(m_1 \times m_2 = -1)$，夾角為90°

因此$\sin\frac{90^\circ}{2}=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

100-02-12

Statement

不等式$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\leq 2$之解為何？

$(\mathrm{A})\ -1\leq \mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{B})\ 0<\mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{C})\ 1\leq \mathrm{x}\leq 2$

$(\mathrm{D})\ 0<\mathrm{x}\leq 2$

$(E)\ 1\leq x\leq 4$

Solution

將分子分母上下同乘2^x。

$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\Rightarrow\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}\leq 2$

移項。

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}-2\leq 0$

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2(2^{2x}-1)}{2^{2x}-1}\leq 0$

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2\cdot 2^{2x}+2}{2^{2x}-1}\leq 0$

$\frac{2^{2x}-16}{2^{2x}-1}\leq 0$

令$t=2^{2x}$

$\frac{t-16}{t-1}\leq 0$

考慮以下兩點：

1. $t-16\geq 0$，$t-1<0$

$t\geq 16,\ t<1$，這兩個不等式沒有任何交集，因此$t\in\emptyset$

2. $t-16\leq 0$，$t-1>0$

$t\leq 16,\ t>1$，這兩個不等式的交集為$1<t\leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到$1<t\leq 16$

還原t得到$1<2^{2x}\leq 16$，因此$0<x\leq 2$

100-02-13

Statement

方程式$10 \cdot x^{2\log x} = x^3$之所有實根的平方和為何？

(A) 100
(B) 101
(C) 110
(D) 111
(E) 121

Solution

等號兩邊同除$x^{2\log x}$

$10 = x^{3-2\log x}$

$1 = (3-2\log x) \times \log(|x|)$

因為要求實根，因此可以限定$x > 0$，所以$(3-2\log x) \times \log(x)$

令$t = \log x$

$1 = (3-2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$

因式分解得到$(-2t+1)(t-1) = 0$

可以解出$t = \dfrac{1}{2}$或$t = 1$

還原t，可以得到$\log x = \sqrt{10}$ 或 $\log x = 10$

兩根的平方和為$\sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$

100-02-14

Statement

若$f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$，則$f(1+\sqrt{2}) = ?$

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solution

觀察一下，可以嘗試把$x^3 + x^2 - 7x + 5$化簡成$c(x-1)^2 + b(x-1) + a...$

這部分可以用綜合除法做到。

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & +1 & -7 & +5 & 1 \\
 & +1 & +2 & -5 & \\
\hline
1 & 2 & -5 & \underline{0} & \\
 & 1 & 3 & d & \\
\hline
1 & 3 & \underline{-2} & & \\
 & 1 & c & & \\
\hline
\underline{1} & \underline{4} & & & \\
a & b & & &
\end{array}
$$

因此可得$(x-1)^3+4(x-1)^2-2(x-1)$。

把$f(1+\sqrt{2})$帶進去，得：

$\log_2((\sqrt{2})^3+4(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}))=\log_2(2\sqrt{2}+8-2\sqrt{2})=\log_2 8=3$

100-02-15

Statement

設$\cos\theta+\cos^2\theta=1$，則$\sin^2\theta+\sin^4\theta=?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

$\cos^2\theta=1-\cos\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(1-\cos\theta)=\cos\theta$

$\sin^4=(\sin^2)^2=\cos^2\theta$

$\sin^2\theta+\sin^4\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=1$

100-02-16

Statement

設$\tan 100^\circ = k$，則$\sin 80^\circ = ?$

(A) $\frac{-\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(B) $\frac{\sqrt{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

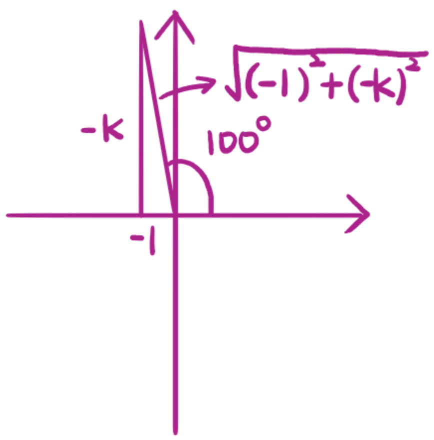
(C) $\frac{-1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(D) $\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

Solution

畫個圖



看圖可以觀察到，$\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

100-02-17

Statement

設$a = \sec 434^\circ$，$b = \sin 100^\circ$，$c = \cos 260^\circ$，$d = \cot 28^\circ$，$e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A) $\mathrm{b} < \mathrm{c} < \mathrm{d} < \mathrm{e} < \mathrm{a}$

(B) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{d} < \mathrm{e} < \mathrm{a}$

(C) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{e} < \mathrm{d} < \mathrm{a}$

(D) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{d} < \mathrm{a} < \mathrm{e}$

(E) $\mathrm{b} < \mathrm{c} < \mathrm{a} < \mathrm{d} < \mathrm{e}$

Solution

$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$

$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$

$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$

$d = \cot 28^\circ$

$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$

因此$a > e$，$c < b$，故選B。

100-02-18

Statement

平面上有兩點$A(1,2)$，$B(a,b)$，若直線$\overline{AB}$之垂直平分線為$x+2y-10=0$，則$a-b$= ?

(A) -1

(B) -2

(C) -3

(D) -4

(E) -5

Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過$\overline{AB}$的中點$(\dfrac{1+a}{2}, \dfrac{2+b}{2})$。

帶入垂直平分線得到$\dfrac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$

$\Rightarrow a + 2b = 15$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到$m = \dfrac{-1}{2}$，因此與其垂直的斜率一定是$m = \dfrac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到$\dfrac{2-b}{1-a} = 2$，整理得到$2 - b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$。

帶回第一式可以得到$5a = 15,\ a = 3,\ b = 6$。

$a - b = 3 - 6 = -3$

100-02-19

Statement

設直線$bx+ay-ab=0$，$a>0,\ b<0$過點$(1,2)$，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則$a+2b=?$

$(\mathrm{A})\ -7-3\sqrt{3}$

$(\mathrm{B})\ -6-3\sqrt{3}$

$(\mathrm{C})\ -5-3\sqrt{3}$

$(\mathrm{D})\ -4-3\sqrt{3}$

$(\mathrm{E})\ -3-3\sqrt{3}$

Solution

可以推出x,y的通式。

$bx+ay=ab$，求出x,y的截距。

當$y=0$，那麼$bx=ab$，$x=a$

當$x=0$，那麼$ay=ab$，$y=b$

已知$a>0,b<0$過點$(1,2)$，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道$\frac{1}{2}|a||b|=2$，可知$ab=-4$或者$ab=4$，但是$a>0,b<0$，因此$ab=4$不合。

已知過點$(1,2)$且$ab=-4$，因此可以把點帶入得到$b+2a=-4$，

又$ab=-4$所以$a=\frac{-4}{b}$，所以得到$b+\frac{-8}{b}=-4$

同乘以b可以得到b^2+4b-8。'

利用公式解可以解出$\frac{-4\pm\sqrt{16-4\times 1\times -8}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{-4\pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根$-2+2\sqrt{3}$或者$-2-2\sqrt{3}$，其中由於$b<0$，因此$-2+2\sqrt{3}$不合。

帶回求出a得到$a=\frac{-4}{-2-2\sqrt{3}}=\frac{-4}{-2(1+\sqrt{3})}$

化簡得到$a=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{-2}=-1(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$

因此$a+2b=\sqrt{3}-1+-4-4\sqrt{3}=-5-3\sqrt{3}$

100-02-20

Statement

設直線$3x+y=1$與$x+3y=2$之夾角為θ，則$\cos 2\theta=?$

$\color{red}{(A)\ \frac{-7}{25}}$

$(B)\ \frac{-6}{25}$

$(C)\ \frac{-1}{5}$

$(D)\ \frac{-4}{25}$

$(E)\ \frac{-3}{25}$

Solution

考慮兩條線的斜率。

$3x+y=1,\ m_1=\frac{-3}{1}=-3$

$x+3y=2,\ m_2=\frac{-1}{3}$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為$\tan$來考慮。

$$\tan(m_1-m_2)=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-3-\frac{-1}{3}}{1+1}=\frac{\frac{-8}{3}}{2}=\frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個$\tan$夾角是負的，因此這個夾角是大於90°的鈍角。

可以依照$\tan(180^\circ)=0$來求得另一個銳角的夾角。

$\frac{\frac{-4}{3}+\tan\theta}{1-\frac{-4}{3}\tan\theta}$，求得銳角$\tan\theta=\frac{4}{3}$

由於$\tan\theta=\frac{4}{3}$，那麼這個角度會介於$45^\circ\sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於90°

用兩倍角公式求出$\tan 2\theta=\frac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}}=\frac{24}{-7}$

由於這個角度介於$90^\circ\sim 180^\circ$，$y>0$，而$x<0$，也因此$y=24,\ x=-7,\ r=\sqrt{24^2+(-7)^2}=25$

因此$\cos 2\theta=\frac{-7}{25}$，故選$(A)$