101年第1次北科入學數學會考

101-01-01

Statement

設$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$，$\cos\beta = \dfrac{2}{3}$且$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$\dfrac{-\pi}{2} < \beta < 0$，求$\sin(\alpha+\beta) =?$

(A)　1

(B)　$\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}$

(C)　$\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}$

(D)　$\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$

(E)　$\dfrac{2-2\sqrt{2}}{3}$

Solution

$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，則$\cos\alpha = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\beta = \dfrac{2}{3}$，$\dfrac{-\pi}{2} < \beta < 0$，則$\sin\beta = \dfrac{-\sqrt{5}}{3}$

因此$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{-2\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{-\sqrt{5}}{3} = \dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}$，故選$(C)$

101-01-02

Statement

$\sin(\dfrac{5\pi}{3})\tan(\dfrac{-\pi}{4})\cos(\dfrac{5\pi}{6}) =?$

(A)　$\dfrac{-3}{4}$

(B)　$\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$

(C)　$\dfrac{-1}{4}$

(D)　$\dfrac{1}{4}$

(E)　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Solution

$\sin(\frac{5\pi}{3}) = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\tan(\frac{-\pi}{4}) = -\tan 45^\circ = -1$

$\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

因此$\sin(\frac{5\pi}{3})\tan(\frac{-\pi}{4})\cos(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}(-1)\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$，故選$(A)$

101-01-03

Statement

設α, β為方程式$x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$兩負根，且$\alpha^2 + \beta^2 = 24$，則$k = ?$

(A) -4
(B) -3
(C) -2
(D) 2
(E) 4

Solution

根據根與係數，得到$\alpha\beta = \frac{k^2 + k}{1} = k^2 + k$，且$\alpha + \beta = -\frac{-2k}{1} = 2k$

且由於是兩負根，所以$\alpha\beta > 0, \alpha + \beta < 0$

故$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 - 2(k^2 + k) = 2k^2 - 2k = 24$

解方程可知$k = 4$或$k = -3$

驗根，若$k = 4$，則$\alpha + \beta = 8 > 0$，故不合。

因此$k = -3$，故選(B)。

101-01-04

Statement

取適當k值，使圓$x^2 + y^2 - 2kx - 4y + 2k^2 = 6k$的面積最大，問此時圓面積為何？

(A) 10π
(B) 11π
(C) 12π
(D) 13π
(E) 14π

Solution

對式子做配方法，可以得到$(x^2-2kx+k^2)+(y^2-4y+4)=6k-2k^2+k^2+4$

因此$(x-k)^2+(y-2)^2=-k^2+6k+4$

若圓半徑越大則面積越大，因此我們考慮$-k^2+6k+4$的極值

因此我們對$(-k^2+6k+4)$做配方法，得到$-(k-3)^2+13$

因此在$k=3$時，有最大圓半徑$\sqrt{13}$，故圓面積為$(\sqrt{13})^2\pi=13\pi$，故選(D)

101-01-05

Statement

設$P(x,y),A(1,-1),B(1,1),C(4,-1)$。滿足$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+2\overline{PC}^2$為最小，則$x+y=?$

(A)　1
(B)　2
(C)　3
(D)　4
(E)　5

Solution

可列式成$(x-1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+2((x-4)^2+(y+1)^2)$

整理成$2(x-1)^2+3(y+1)^2+2(x-4)^2+(y-1)^2$

由於各項數字均一定為正，我們可以分開討論

尋找$2(x-1)^2+2(x-4)^2$與$3(y+1)^2+(y-1)^2$的最小值。

$2(x-1)^2+2(x-4)^2\Rightarrow 2x^2-4x+2+2x^2-16x+32\Rightarrow 4x^2-20x+34$

對其做配方法，得到$4(x-\frac{5}{2})^2+9$，可得$x=\frac{5}{2}$有最小值9。

$3(y+1)^2+(y-1)^2\Rightarrow 3y^2+6y+3+y^2-2y+1\Rightarrow 4y^2+4y+4$

對其做配方法，得到$4(y+\frac{1}{2})+3$，可得$y=\frac{-1}{2}$有最小值3。

因此$x+y=\frac{5}{2}+\frac{-1}{2}=2$，故選$(B)$

101-01-06

Statement

已知$A(-1,-4),B(3,5)$兩點，又C在直線上$x+y=0$移動，則$\overline{AC}+\overline{BC}$的最小距離為何？

(A) $\sqrt{97}$
(B) 10
(C) $5\sqrt{5}$
(D) 12
(E) 14

Solution

若兩點與直線異側，則C的取點即為A與B做一直線與$x+y=0$之交點，最小距離即為A與B的距離。

將A, B代入直線方程式檢驗

$A: \quad -1+-4=-5<0$

$B: \quad 3+5=8>0$

因此最短距離為A與B的距離，也就是$\sqrt{(-1-3)^2+(-4-5)^2}=\sqrt{16+81}=\sqrt{97}$，故選$(A)$

101-01-07

Statement

四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=\overline{CD}=5$，$\overline{BC}=2$，$\overline{BC}<\overline{AD}$且$\angle ABC=\angle ADC=60^\circ$，則$\overline{AD}=?$

(A) 3
(B) 5
(C) 6
(D) 8
(E) 9

$\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{5^2+2^2-\overline{AC}^2}{2\times5\times2}=\dfrac{1}{2}$，可得$\overline{AC}=\pm\sqrt{19}$ (負不合)

因此，$\cos\angle ADC=\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AD}^2+25-19}{10\overline{AD}}=\dfrac{1}{2}$

可以得到$\overline{AD}=2$或$\overline{AD}=3$

由於$\overline{AD}>\overline{BC}$，因此$\overline{AD}=2$不合，故$\overline{AD}=3$，故選$(A)$

101-01-08

Statement

點$(-3,1)$與拋物線$y^2-2y+5=2x$的最短距離為何？

(A) 4
(B) $\sqrt{17}$
(C) $3\sqrt{2}$
(D) 5
(E) $5\sqrt{5}$

Solution

$y^2 - 2y + 5 = 2x$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 + 5 - 1 = 2x$

$\Rightarrow (y-1)^2 = 2(x-2)$，開口向右。

故頂點為$(2,1)$，與$(-3,1)$的距離隔5，因此距離為5，故選(D)

101-01-09

Statement

設橢圓$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$之長軸長為A，短軸長為B，則$A+B=?$

(A) $1+\sqrt{3}$
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

Solution

配方法

$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$

$\Rightarrow (x-1)^2 + 4y^2 = 4$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$

因此長軸$A = \sqrt{4} \times 2 = 4$，短軸長$B = \sqrt{1} \times 2 = 2$

因此$A + B = 4 + 2 = 6$，故選(E)

101-01-10

Statement

若$f(x) = x^3 + ax^2 + 11x + 6$與$g(x) = x^3 + bx^2 + 14x + 8$有二次公因式，則$a+b=?$

(A) 13
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 17

Solution

考慮$f(x)$可能的因式：$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x-6)(x+6)$

考慮$g(x)$可能的因式：$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)(x-8)(x+8)$

可以知道$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$可能共同

因此我們考慮以下四種式子，是否存在兩個相同的a，就能當作$f(x)$的因式。

$a\left\{\begin{array}\ (x-1)\Rightarrow 1+a+11+6 = 0 & a = 18 \\ (x+1) \Rightarrow -1+a-11+6 = 0 & a = 6 \\ (x-2)\Rightarrow 8+4a+22+6=0 & a = -9\\ (x+2) \Rightarrow -8+4a-22+6=0 & a = 6\end{array} \right.$

因此選$(x+1)(x+2)$，其中$a = 6$。

因此$b = (-1)^3+b(-1)^2+14(-1)+8$，得到$b = 7$

因此$a+b=6+7=13$，故選(A)

101-01-11

Statement

若$5\cdot 25^x + 350\cdot 5^{x-2} = 3$，則$x = ?$

$(A)\quad -2\\\color{red}(B)\quad -1\\(C)\quad 0\\(D)\quad 1\\(E)\quad 2$

Solution

化簡式子，得到$5\cdot 5^{2x} + 350 \cdot \dfrac{1}{25} 5^x = 3$

因此$5\cdot5^{2x} + 14 \cdot 5^{x} =3 $

令$t = 5^x$，則$5t^2 + 14t = 3$，得到$t = \dfrac{1}{5}$或$t=-3$

驗根，$5^x = t =-3$，則x不存在，故$t=-3$不合。

因此$5^x = t = \dfrac{1}{5}$，$x = -1$，故選(B)

101-01-12

Statement

若$a = \log 2$，$b = \log 3$，則$\log_{12} 180 = ?$

$(A)\quad 1-a+b\\(B)\quad \dfrac{1+a^2+b^2}{a^2+b}\\\color{red}(C)\quad \dfrac{a+2b+1}{2a+b}\\(D)\quad \dfrac{2a+2b+1}{2a+b}\\(E)\quad \dfrac{2a+2b-1}{2a+b}$

Solution

可以考慮成$\dfrac{\log 180}{\log 12} = \dfrac{2b+a+1}{2a +b}$，故選$(C)$

###

101-01-13

Statement

求曲線$y=-\sqrt{12-x(x+4)}$與x軸所圍的面積為何？

$(A)\quad 4\pi\\(B)\quad 5\pi\\(C)\quad 6\pi\\(D)\quad 7\pi\\\color{red}(E)\quad 8\pi$

Solution

兩邊平方，得到$y^2 = 12-x^2-4x$，配方法得$(x+2)^2+y^2=16$，中心位於$(-2, 0)$，半徑為4

可知原式原先為一半圓，且在x軸底下。

因此可得面積為$\dfrac{1}{2}(4)^2\pi = 8\pi$，故選$(E)$

101-01-14

Statement

方程式$\log(x+1)+\log(x+3)-1=\log(x+2)$的解為何？

$(A)\quad 5-\sqrt{26}\\(B)\quad 3-\sqrt{26}\\(C)\quad 1-\sqrt{26}\\\color{red}(D)\quad 3+\sqrt{26}\\(E)\quad 5+\sqrt{26}$

Solution

改寫成$\log(x+1)+\log(x+3)-\log 10=\log(x+2)$

$\Rightarrow \log(\dfrac{(x+1)(x+3)}{10}) = \log(x+2)$

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)(x+3)}{10} = x+2$

$\Rightarrow x^2+4x+3 = 10x+20$

$\Rightarrow x^2-6x-17 = 0$

公式解，可以得到$\dfrac{6\pm\sqrt{36-4\times1\times (-17)}}{2} = 3\pm \sqrt{26}$

驗根，考慮將x套入$\log(x+1)$上

$3-\sqrt{26} + 1 = 4-\sqrt{26} = \sqrt{16}-\sqrt{26} < 0$，不符合$\log$的定義域，故不合。

因此$x = 3+\sqrt{26}$，故選(D)

101-01-15

Statement

設$\dfrac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$，則$3A+2B+C = ?$

$(A)\quad 3\\\color{red}(B)\quad 4\\(C)\quad 5\\(D)\quad 6\\(E)\quad 7$

Solution

$\dfrac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

$\Rightarrow 2x^2-x+4 = A(x^2+4) + x(Bx+C)$

$\Rightarrow 2x^2-x+4 + (A+B)x^2+cx+4A$

可得$A+B=2, C = -1, A = 1$，因此$B = 1$

故$3A+2B+C = 3\times 1 + 2\times 1 + (-1) = 4$，故選$(B)$

101-01-16

Statement

已知兩平面向量$\vec{u} = <3, 4>$與$\vec{v} = <x, y>$，若$\vec{v}$可使與$\vec{u}$與$\vec{v}$的內積值最大，且$|\vec{v}| = 2$，則$x = ?$

$(A)\quad \dfrac{2}{5}\\(B)\quad \dfrac{3}{5}\\(C)\quad \dfrac{4}{5}\\(D)\quad 1\\\color{red}(E)\quad \dfrac{6}{5}$

Solution

考慮$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$，則要使內積值最大，可使$\cos\theta = 1$，也就是$\theta = 0^{\circ}$，兩向量平行。

因此$x : y = 3 : 4$，又$|\vec{v}| = 2$，因此$\vec{v} = < 2\times \dfrac{3}{5}, 2\times \dfrac{4}{5}> = <\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5}>$

因此$x=\dfrac{6}{5}$，故選(E)

101-01-17

Statement

不等式$\dfrac{x-7}{(x-1)^2} \le -1$

$(A)\quad 3\le x\\(B)\quad x\le -2 \\\color{red}(C)\quad -2 \le x < 1 或 1 < x \le 3 \\(D)\quad -2\le x\le 3\\(E)\quad x\le-2 或 3 \le x$

Solution

$\dfrac{x-7}{(x-1)^2} \le -1$

$\Rightarrow \dfrac{x-7}{(x-1)^2} +1 \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{x-7 + (x-1)^2}{(x-1)^2} \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{x^2-x-6}{(x-1)^2} \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \le 0$

定義域$x \neq 1$，分母恆正，考慮分子的情況

$\left\{\begin{array}\ x-3 \le 0 \\ x+2 \ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow x \in \varnothing$

$\left\{\begin{array}\ x-3 \ge 0 \\ x+2 \le 0 \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-2, 3]$

因此兩者取聯集，得到$[-2, 1) \cup (1, 3]$，故選(C)

101-01-18

Statement

設x, y均為正數，且$3x+y=10$，則x^3y^2的最大值為何？

$(A)\quad 108\\(B)\quad 116\\(C)\quad 122\\\color{red}(D)\quad 128\\(E)\quad 134$

Solution

利用算幾不等式，可以考慮成$\dfrac{x+x+x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}y}{5} = \sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{4}y^2}$

$\Rightarrow 2 = \sqrt[5]{\dfrac{1}{4}x^3y^2}$

因此$32 = \dfrac{1}{4}x^3y^2 \Rightarrow 128 = x^3y^2$，故$x^3y^2$的最大值為$128$，故選$(D)$

101-01-19

Statement

設$A(x, y), B(-1, 4), C(5, -4)$，且$\Delta ABC$的重心坐標為$(2, -1)$，則$x - y= ?$

$(A)\quad 1\\(B)\quad 2\\(C)\quad 3\\(D)\quad 4\\\color{red}(E)\quad 5$

Solution

使用重心公式

$\dfrac{x+(-1)+5}{3} = 2$，$x = -10$

$\dfrac{y+4+(-4)}{3} = -1$，$y = -3$

因此$x = 2, y = -3, x-y =5$，故選(E)

101-01-20

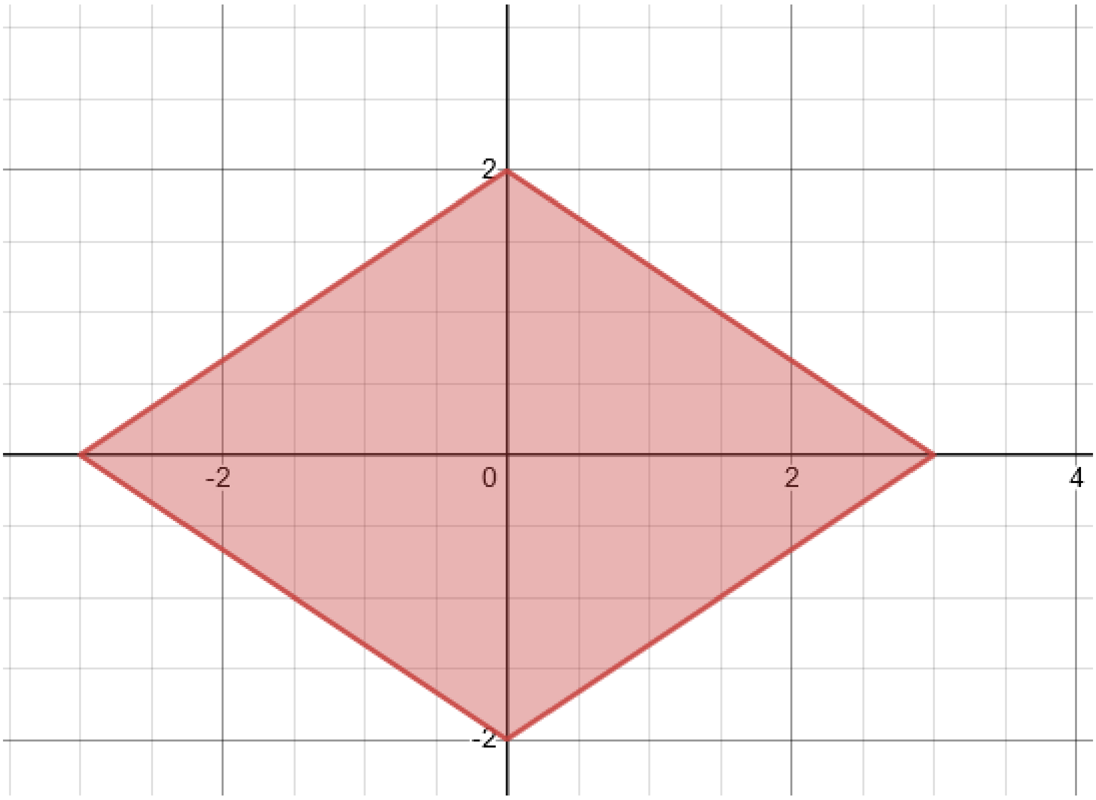
Statement

平面上$2|x|+3|y| \le6$所表示區域的面積為何？

$(A)\quad 4\\(B)\quad 8\\\color{red}(C)\quad 12\\(D)\quad 16\\(E)\quad 32$

Solution

畫出圖



面積為$\dfrac{4\times 6}{2} = 12$，故選$(C)$。