101年第2次北科入學數學會考

101-02-01

Statement

設$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{-5}{13}$，且$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，則$\sin(\alpha-\beta)=?$

(A) $\frac{-56}{65}$

(B) $\frac{-16}{65}$

(C) $\frac{16}{65}$

(D) $\frac{27}{65}$

(E) $\frac{56}{65}$

Solution

$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\sin\alpha<1,\ 0<\cos\alpha<1$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

$\because \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

$\therefore 0<\sin\beta<1,\ \ -1<\cos\beta<0$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-(\frac{-5}{13})^2}=\frac{12}{13}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{-5}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{-20}{65}-\frac{36}{65}=\frac{-56}{65}$

102-02-02

Statement

方程式$2^{x^2}\cdot 4^x\cdot 16=8^x\cdot 64$之所有解的和為何？

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

將式子改寫。

$2^{x^2}\cdot 4^x=8^x\cdot 64$

$\Rightarrow 2^{x^2}\cdot 2^{2x}=2^{3x}\cdot 2^6$

$\Rightarrow 2^{x^2+2x}=2^{3x+6}$

兩邊同取$\log_2$，得到$x^2+2x=3x+6$

也就得到$x^2-x-6=0$，因式分解得到$(x-3)(x+2)=0$

解根得到$x=3$或$x=-2$，$3+(-2)=1$

101-02-03

Statement

已知Γ表$f(x,y)=0$所對應之圖形，若Γ水平方向拉長2倍，再往右平移1單位，則此新圖形的方程式為何？

$(A)\quad f(\dfrac{x}{2}+1,y)=0$
$(B)\quad f(\dfrac{x-1}{2},y)=0$
$(C)\quad f(\dfrac{x+1}{2},y)=0$
$(D)\quad f(2x+1,y)=0$
$(E)\quad f(2x-1,y)=0$

Solution

考慮拉長兩倍，那麼a要變大兩倍，因此x乘以$\dfrac{1}{2}$

考慮往右平移一單位，那麼座標$x-1$，因此x減1

因此$f=(\dfrac{x-1}{2},y)=0$，故選(B)

101-02-04

Statement

設直線L過點$(-1,1)$且與直線$8x-6y=1$垂直，則此直線方程式為何？

(A) $3x-4y=-1$

(B) $4x+3y=-1$

(C) $4x-3y=-7$

(D) $3x+4y=1$

(E) $\mathrm{x - y = -2}$

Solution

直線$8x-6y=1$的斜率為$\dfrac{-8}{-6}=\dfrac{4}{3}$

因此造一條與其垂直的直線，這條直線的斜率與其斜率乘積必為-1。

$\dfrac{4}{3}\times m=-1, m=\dfrac{-3}{4}$

已知此直線會過點$(-1,1)$，因此$y-1=\dfrac{-3}{4}(x+1)$

$4y-4=-3(x+1),\ 3x+4y=1$

101-02-05

Statement

過點$(2,-3)$與圓$(x-1)^2+(y+1)^2=5$相切的直線方程式為何？

(A) $\mathrm{2x - y = 7}$

(B) $\mathrm{x + 2y = -4}$

(C) $\mathrm{2x - 3y = 13}$

(D) $\mathrm{3x - 2y = 12}$

(E) $\mathrm{x - 2y = 8}$

Solution

從圓的方程式可以知道，圓心為$(1,-1)$且半徑為$\sqrt{5}$。

因此我們可設過點$(2,-3)$的直線方程式，並且距離與圓心剛好為$\sqrt{5}$

可以套用距離公式來得到。

令與圓相切的直線為$y+3=m(x-2)$

整理後得到$mx-y-2m-3=0$

我們可以套用距離公式，得到$\dfrac{|mx-y-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

將圓心帶入距離公式，得到$|m+1-2m-3|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

整理後得到$|-m-2|=\sqrt{5m^2+5}$

兩邊平方後得到$(-m-2)^2=5m^2-5 \Rightarrow m^2+4m+4=5m^2+5$

因此$-4m^2+4m-1$，$m=\dfrac{1}{2}$ (重根)

$y+3=\dfrac{1}{2}(x-2)$

$\Rightarrow\ 2y+6=x-2$

$\Rightarrow\ x-2y-8=0$

$\Rightarrow x-2y=8$

101-02-06

Statement

以$(1,3+\sqrt{5})$與$(1,3-\sqrt{5})$為兩焦點且短軸長為6之橢圓方程式為何？

$(\mathrm{A})\ \frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{14}=1$

$(\mathrm{B})\ \frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{25}=1$

$(\mathrm{C})\ \frac{(\mathrm{x}-1)^2}{14}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{9}=1$

$(\mathrm{D})\ \frac{(\mathrm{x}-3)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{14}=1$

$(\mathrm{E})\ \frac{(\mathrm{x}-3)^2}{25}+\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{9}=1$

Solution

兩焦點只有y軸有變動，因此這是一個貫軸平行y軸的橢圓。

中心$(x,y)=(\frac{1+1}{2},\frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2})=(1,3)$

$2c=(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5},\ c=\sqrt{5}$

$2b=6,b=3$

因此$a=\sqrt{3^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9+5}=\sqrt{14}$

依照$\frac{(x-h)}{b}+\frac{(y-k)}{a}=1$列式，得

$\frac{(x-1)}{9}+\frac{(y-3)}{14}=1$

101-02-07

Statement

設$2\log(x-3)-\log 2=\log(x+9)$，則$x^2-10x+12$之值為何？

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$2\log(x-3)-\log 2=\log(x+9)$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2-6x+9}{x+9})=\log(2)$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2-6x+9}{2x+18})=0$

$\Rightarrow \frac{x^2-6x+9}{2x+18}=1$

$\Rightarrow x^2-6x+9=2x+18$

$\Rightarrow x^2-8x-9=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-9)=0$

得到$x=-1, x=9$

驗根，由於$x=-1$帶進去後，$x-3<0$，又因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-1$不合。

因此$x=9$。

$9^2-90+12=81-90+12=3$，故選(C)。

101-02-08

Statement

若$0\leq\theta<2\pi$，則$\cos 2\theta+2\cos^2\frac{\theta}{2}=1$有幾個解？

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

Solution

利用和角公式，可以知道

$\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}-(1-\cos^2\frac{\theta}{2})=2\cos^2(\frac{\theta}{2})-1=\cos\theta$

因此$\cos\theta+1=2\cos^2(\frac{\theta}{2})$

且$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

$2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1=1$

$2\cos^2\theta+\cos\theta=1$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

令$t=\cos\theta$，則$2t^2+t-1=0$，可得$t=\frac{1}{2}$或$t=-1$

考慮$t=\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{-\pi}{3}$

考慮$t=\cos\theta=-1$，則$\theta=\pi$

因此有三組解，故選(D)

101-02-09

Statement

設a、b、c分別表示ΔABC的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對邊長，若$b^2-(c-a)^2=ca$，則$\angle B=$?

$(A)\quad 30^\circ$
$(B)\quad 45^\circ$
$(C)\quad 60^\circ$
$(D)\quad 120^\circ$
$(E)\quad 135^\circ$

Solution

$b^2-(c-a)^2=ca$

$\Rightarrow b^2-(c^2-2ac+a^2)=ca$

$\Rightarrow b^2-c^2+2ac-a^2=ca$

$\Rightarrow b^2-c^2-a^2=-ac$

$\Rightarrow a^2+c^2-b^2=ac$

$\Rightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$

又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$

因此$\angle B=\frac{\pi}{3}=60^\circ$，故選$(C)$。

101-02-10

Statement

方程式$x^{1+\log_2 x}=(2x^3)$之所有解的和為何？

$(A)\quad \frac{15}{2}$
$(B)\quad 8$
$(C)\quad \frac{17}{2}$
$(D)\quad 9$
$(E)\quad \frac{19}{2}$

Solution

$x^{1+\log_2 x} = 8x^3$

$\Rightarrow 1+\log_2 x = \log_x(8x^3)$

$\Rightarrow 1+\log_2 x = \dfrac{\log_2 8x^3}{\log_2 x}$

$\Rightarrow \log_2 x + (\log_2 x)^2 = \log_2 8x^3$

$\Rightarrow \log_2 x + (\log_2 x)^2 = 3 + 3\log_2 x$

令$t = \log_2 x$，則$t + t^2 = 3 + 3t$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

$\Rightarrow t = 3$或$t = -1$

還原t，得到$\begin{cases} \log_2 x = 3, & x = 8 \\ \log_2 x = -1, & x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

因此$8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$，故選$(C)$

101-02-11

Statement

若$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$，且$(f \circ g)(x) = \dfrac{x}{x+1}$，則$g(0) = ?$

$(A)\quad 0$
$(B)\quad 1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$，則$f(g(0)) = \dfrac{x}{x+1} = 0$，因此$\dfrac{x-1}{x} = 1$，因此$g(0) = 1$，故選$(B)$。

101-02-12

Statement

已知平面上兩點$A(-3,1)$、$B(3,5)$，又點$P(a,b)$在直線$2x+y+1=0$且$\overline{PA} = \overline{PB}$，則$a+b = ?$

$(A)\quad 5$
$(B)\quad 6$
$(C)\quad 7$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 9$

Solution

將A, B兩點帶入直線，確定是否同側或異側。

代入點$A: 2\cdot(-3)+1+1=-4$

代入點$B: 2\times 3+5+1=12$

因此兩點異側。

$2x+y+1=0\Rightarrow y=-2x-1$

由於$\overline{PA}=\overline{PB}$，因此

$\sqrt{(-3-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(5-y)^2}$

$\Rightarrow (-3-x)^2+(1+2x+1)^2=(3-x)^2+(5+2x+1)^2$

$\Rightarrow (-3-x)^2+(2x+2)^2=(3-x)^2+(6+2x)^2$

$\Rightarrow 5x^2+14x+13=5x^2+18x+45$

$\Rightarrow -4x=32$

$\Rightarrow x=-8$

$\Rightarrow y=15$

因此$a=-8, b=15, a+b=7$，故選(C)

101-02-13

Statement

設二向量$\vec{a}=<2,t^2-3>$，$\vec{b}=<t,-1>$。

若$\vec{a}$和$\vec{b}$的夾角為$\frac{\pi}{2}$，且$\vec{b}$的長度不大於2，則$t=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

$\cos\frac{\pi}{2}=0$，因此$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$，因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2t-t^2+3=(-t+3)(t+1)=0$

得到$t=3$或$t=-1$

長度不大於2，因此我們考慮兩種t套進$\vec{b}$的影響

考慮$t=3$，得到$\sqrt{(3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}>2$，因此$t=3$不合

考慮$t=-1$，得到$\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

因此$t=-1$，故選(B)。

101-02-14

Statement

設$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$為方程式$x^2-6x+5=0$的兩根，且$\alpha<\beta+2$，則$\beta=$?

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

利用根與係數，可以知道

$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=-(\frac{-6}{1})=6$

$2\alpha=6$則$\alpha=3$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2=5$，則$\beta=\pm2$

由於要滿足$\alpha<\beta+2$，所以$\beta=-2$不合。

因此$\beta=2$，故選(C)。

101-02-15

Statement

設f為奇函數，g為偶函數，及對所有的x，恆有$f(-x)=-f(x)$且$g(-x)=g(x)$。

如果f和g均為非零函數，則下列何者恆為正確？

$(A)\quad f-g$為奇函數

$(B)\quad f\cdot g$為奇函數

$(C)\quad f^3\cdot g^3$為偶函數

$(D)\quad 2f+3g$為偶函數

$(E)\quad f+g$的函數圖形對稱於y軸

Solution

當一函數符合奇偶性，則多項式的所有變數次方會全是偶數或是奇數。

通常奇偶函數做相加減時，得到的結果不會是奇函數或是偶函數。

奇偶函數做乘除時，就類似數的乘除，例如奇乘偶會得到奇。

故選(B)。

101-02-16

Statement

下列何者為函數$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}$的定義域？

$(A)\quad \{x|x<-1\}$
$(B)\quad \{x|x>-1\}$
$(C)\quad \{x|-1<x<1\}$
$(D)\quad \{x|-1<x, x\neq 1\}$
$(E)\quad \{x|x>1\}$

Solution

$\sqrt{x^3-x^2-x+1}>0$

$\Rightarrow x^3-x^2-x+1>0$

$\Rightarrow (x-1)^2(x+1)>0$，得到$x\neq 1$且$x\neq -1$

由於$(x-1)^2$恆正，因此我們考慮$(x+1)>0$，得到$x>-1$。

因此$f(x)$的定義域$D(f(x))=\{x|(x>-1),(x\neq 1)\}$，故選$(D)$

101-02-17

Statement

設$\dfrac{x^2-10x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$的部份分式為$\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$，則$a-b-c=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 5$

Solution

$$\frac{x^2-10x+8}{x^3-2x^2-4x+8} \Rightarrow \frac{x^2-10x+8}{(x-2)^2(x+2)}$$

$x^2-10x+8=a(x-2)^2+b(x-2)(x+2)+c(x+2)$

令$x=2$，$4-20+8=4c$，得到$c=-2$

令$x=-2$，$16a=4+20+8=32$，得到$a=2$

令$x=0$，$8=4a-4b+2c=8-4b-4$，得到$b=-1$

$a-b-c=2-(-1)-(-2)=5$，故選(E)。

101-02-18

Statement

設$2x^2+(k-1)x+(k-3)=0$之一根大於2，一根小於1，則k之範圍為何？

$(A)\quad \{k|k<-1\}$
$(B)\quad \{k|1<k<3\}$
$(C)\quad \{k|-1<k<3\}$
$(D)\quad \{k|k>1\}$
$(E)\quad \{k|-\infty<k<\infty\}$

Solution

$$\frac{-(k-1)\pm\sqrt{(k-1)^2-4\times 2\times(k-3)}}{2\times 2}$$
$$\Rightarrow \frac{-k+1\pm\sqrt{k^2-2k+1-8k+24}}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{-k+1\pm\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$$

一根大於2，因此用$\dfrac{-k+1+\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$考慮

因此$-k+1+\sqrt{k^2-10k+25}>8$，$-k+1+(k-5)>8$，得到$k<-1$

一根小於1，因此用$\dfrac{-k+1-\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$考慮

因此$-k+1-\sqrt{k^2-10k+25}<4$，$-k+1+(k-5)<4$，得到$k\in\mathbb{R}$

取聯集得到$k<-1$，因此k的範圍為$\{k|k<-1\}$，故選(A)

101-02-19

Statement

若$f(x) = \sqrt{3-x}$，$g(x) = \sqrt{x-1}$，則$f \circ g$的定義域為何？

(A) $[1, 3]$
(B) $[1, 4]$
(C) $[2, 4]$
(D) $[3, 9]$
(E) $[1, 10]$

Solution

$f \circ g = \sqrt{3 - \sqrt{x-1}}$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到$3 - \sqrt{x-1} \geq 0$，$x \leq 10$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到$x - 1 \geq 0$，得到$x \geq 1$

取交集後得到$1 \leq x \leq 10$，故選(E)。

101-02-20

Statement

若$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$能被$x^2 + 1$整除，則$f(x)$除以$x+1$的餘式為何？

(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8
(E) 10

Solution

利用長除法來做$f(x)$除以x^2+1，可以得到商為$(x+a)$且餘數為$(b-1)x + (2-a)$

因為能夠被整除，因此餘數為0，得到$b = 1$且$a = 2$

因此$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

除以$x+1$，利用餘式定理，將x帶-1

因此$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 2 = -1 + 2 + (-1) + 2 = 2$，故選$(A)$