

# 100年第2次北科入學數學會考

## 100-02-01

### Statement

若 $\alpha$ 、 $\beta$ 為方程式 $x^2 + 12x + 9 = 0$ 的兩根，則 $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = ?$

(A)  $-18$

(B)  $-6$

(C)  $6$

(D)  $12$

(E)  $18$

### Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式 $ax^2 + bx + c$ ，存在兩根 $\alpha$ 與 $\beta$ 。

那麼 $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ，且 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$$\sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2$$

$$\Rightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta$$

根據偉達定理我們可以求得

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

注意一下 $\alpha + \beta = -12$ ， $\alpha\beta = 9$

若兩根一正一負那麼 $\alpha\beta < 0$ ，若兩根都是正的那麼 $a + b > 0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ 會存在複數，相乘後可以得到 $-\sqrt{\alpha\beta}$ 。

因此帶回欲求之式子：

$$-12 - 2 \times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$$

## 100-02-02

### Statement

若 $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ 與 $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ 的最高公因式為 $x^2 + bx + c$ ，則 $b + 2c = ?$

- (A)  $-5$   
 (B)  $-3$   
 (C)  $0$   
 (D)  $5$   
 (E)  $7$

### Solution

第一式的因式 $ax + b$ 的 $a$ 一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)。  
 且 $b$ 一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到 $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$   
 接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得到 $(x + 1)(x - 2)(2x + 3)$

可以觀察到最大公因式即為 $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$

比較係數後得到 $b = -1, c = -2$

則 $b + 2c = -1 + 2 \times -2 = -5$ 。

## 100-02-03

### Statement

若 $\frac{8x^3 - 6x + 1}{(2x + 1)^4} = \frac{a}{(2x + 1)} + \frac{b}{(2x + 1)^2} + \frac{c}{(2x + 1)^3} + \frac{d}{(2x + 1)^4}$ ，則 $2a + b - c + d = ?$

- (A)  $-2$   
 (B)  $-1$   
 (C)  $0$   
 (D)  $1$   
 (E)  $2$

### Solution

我們可以使用綜合除法，將 $2x + 1$ 改寫成 $x + \frac{1}{2}$ ，然後再對除出來的係數除以2。

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 8 & 0 & -6 & 1 \\
 -1/2 & & -4 & 2 & 2 \\
 \hline
 & 8 & -4 & -4 & 3 \\
 & 4 & -2 & -2 & \\
 & & -2 & 2 & \\
 \hline
 & 4 & -4 & 0 & \\
 & 2 & -2 & & \\
 & & -1 & & \\
 \hline
 & 2 & -3 & & \\
 & 1 & & & 
 \end{array}$$

A                      B                      C                      D

因此 $a = 1, b = -3, c = 0, d = 3$ 。

$2a + b - c + d = 1 \times 2 + (-3) - 0 + 3 = 2$ 。

## 100-02-04

### Statement

$x^2 - 4x + 2 \leq |x - 2|$  之解為何？

(A)  $1 \leq x \leq 4$

(B)  $2 \leq x \leq 4$

(C)  $0 \leq x \leq 2$

(D)  $0 \leq x \leq 4$

(E)  $0 \leq x \leq 3$

### Solution

1. 考慮  $x^2 - 4x + 2 \leq x - 2$ ：

移項， $x^2 - 4x + 2 - x + 2 \leq 0$

整理， $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

那麼我們可以將其因式分解，得  $(x - 4)(x - 1) \leq 0$ ，並且可以得到  $1 \leq x \leq 4$ 。

2. 考慮  $x^2 - 4x + 2 \leq -x + 2$ ：

移項， $x^2 - 4x + 2 + x - 2 \leq 0$

整理， $x^2 - 3x \leq 0$

那麼我們可以將其因式分解，得  $x(x - 3) \leq 0$ ，並且可以得到  $0 \leq x \leq 3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到  $0 \leq x \leq 4$ 。

## 100-02-05

### Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$  之解為何？

(A)  $x < \frac{-1}{2}$  或  $0 < x < 1$

(B)  $0 < x < \frac{1}{2}$  或  $1 < x < 2$

(C)  $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$  或  $0 < x < 1$

(D)  $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$  或  $1 < x < 2$

(E)  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$  或  $1 < x < 2$

### Solution

$$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{\log 2}{\log x} < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} < 1$$

令  $\log_2 x = t$ ，那麼

$$2t - \frac{1}{t} < 1$$

$$\Rightarrow 2t - \frac{1}{t} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$$

考慮兩種情況。

1. 若  $t > 0$  且  $2t^2 - t - 1 < 0$

$$2t^2 - t - 1 < 0 = (2t + 1)(t - 1) < 0 = \frac{-1}{2} < t < 1$$

與  $t > 0$  取交集得到  $0 < t < 1$ 。

2. 若  $t < 0$  且  $2t^2 - t - 1 > 0$

$$2t^2 - t - 1 > 0 = (2t + 1)(t - 1) > 0 = t < \frac{-1}{2} \text{ 或 } t > 1$$

與  $t < 0$  取交集得到  $t < \frac{-1}{2}$ 。

對這兩種考慮取聯集，得到  $t < \frac{-1}{2}$  或  $0 < t < 1$ 。

還原，得到  $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$  或  $1 < x < 2$ 。

## 100-02-06

### Statement

已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 37$ ， $\overline{BC} = 53$ ， $\overline{AC} = 89$ ，則下列各內積中，何者為最大？

(A)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(B)  $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$

(C)  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

(D)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

(E)  $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$

### Solution

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 37 \times 89 \times \frac{37^2 + 89^2 - 53^2}{2 \times 37 \times 89}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 53 \times 37 \times \frac{53^2 + 37^2 - 89^2}{2 \times 53 \times 37}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 89 \times 37 \times \frac{89^2 + 53^2 - 37^2}{2 \times 89 \times 53}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} < 0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$$37^2 + 89^2 - 53^2。$$

$$53^2 + 37^2 - 89^2$$

$$89^2 + 53^2 - 37^2$$

顯然是第三者較大，故選(C)

## 100-02-07

### Statement

已知向量 $\overrightarrow{AB} = (-31, 29)$ ， $\overrightarrow{AC} = (23, -11)$ ，則下列向量長中，何者為最大？

- (A)  $|\overrightarrow{AB}|$
- (B)  $|\overrightarrow{BC}|$
- (C)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$
- (D)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$
- (E)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}|$

### Solution

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$$

$$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$$

$$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$$

考慮向量長的公式，當存在一向量 $\vec{L} = (A, B)$ ， $\vec{L}$ 的向量長為 $|\vec{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$

因此若 $|A| + |B|$ 越大，那麼向量長越大。

$$\text{考慮選項A：} |-31| + |29| = 60$$

$$\text{考慮選項B：} |54| + |-40| = 94$$

$$\text{考慮選項C：} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11) \cdot |23| + |-11| = 34$$

$$\text{考慮選項D：} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18) \cdot |-8| + |18| = 26$$

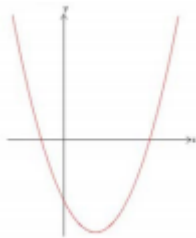
$$\text{考慮選項E：} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0) \cdot |0| + |0| = 0$$

因此，故選B。

## 100-02-08

### Statement

設 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



- (A)  $abc$
- (B)  $b^2 - 4ac$
- (C)  $c^2 - 4ab$
- (D)  $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$
- (E)  $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$

## Solution

因為開口向上，所以 $a > 0$ 。

觀察 $x = 0$ ，可以發現對應到的 $y < 0$ ，因此 $c < 0$

觀察一下對稱軸， $\frac{-b}{2a} > 0$ ，因此 $b < 0$

因此 $abc > 0$ ， $b^2 - 4ac > 0$ 因為有實數解。

$c^2 - 4ab > 0$ 因為 $ab < 0$ 。

而 $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ 必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，  
另一根是負數因此 $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ 小於0，故選E。

## 100-02-09

### Statement

已知 $4x^2 + y^2 - 4x + 8y = 8$ ，則 $x$ 的最大值為何？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

### Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的 $x$ 了。

$$4x^2 - 4x + y^2 + 8y = 8$$

$$4(x^2 - x) + y^2 + 8y = 8$$

$$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 + 8y + 16 = 8 + 16 + 1$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y + 4)^2}{25} = 1$$

由此可知這個橢圓的短邊平行 $x$ 軸

$$a = \sqrt{25} = 5, b = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

中心可從式子得知， $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

因此，加上 $x$ 的部份得到 $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

## 100-02-10

### Statement

拋物線  $y = 4 - 2x - x^2$  與  $x$  軸兩交點的距離為何？

- (A) 2
- (B) 3
- (C)  $2\sqrt{5}$
- (D) 6
- (E) 8

### Solution

將  $y$  等於 0，求出  $x$ 。

$$-x^2 - 2x + 4 = 0$$

先確定  $b^2 - 4ac$  是否大於 0。

$$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20$$

$$\text{因此兩根為 } \frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$$

$$\frac{2 + \sqrt{5}}{-2} - \frac{2 - \sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$$

## 100-02-11

### Statement

設雙曲線  $x^2 - y^2 = x + 2y$  兩漸進的夾角為  $\theta$ ，則  $\sin \frac{\theta}{2} = ?$

- (A) 0
- (B)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$
- (E) 1

### Solution

配方雙曲線得到標準式。

$$x^2 - x - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y + 1)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4(x - \frac{1}{2})^2}{5} - \frac{4(y + 1)^2}{5} = 1$$

求漸進線，令等號右邊為 0

$$\frac{4(x - \frac{1}{2})^2}{5} = \frac{4(y - 1)^2}{5}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = (y - 1)^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - 1)^2 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2} - (y - 1))(x - \frac{1}{2} + (y - 1)) = 0$$

$$(x - y + \frac{1}{2})(x + y + \frac{3}{2}) = 0$$

第一條線 $(x - y + \frac{1}{2})$ 可求斜率 $m = 1$

第二條線 $(x + y + \frac{3}{2})$ 可求斜率 $m = -1$

因此，這兩條線垂直( $m_1 \times m_2 = -1$ )，夾角為 $90^\circ$

$$\text{因此} \sin \frac{90^\circ}{2} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## 100-02-12

### Statement

不等式 $\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \leq 2$ 之解為何？

(A)  $-1 \leq x \leq 1$

(B)  $0 < x \leq 1$

(C)  $1 \leq x \leq 2$

(D)  $0 < x \leq 2$

(E)  $1 \leq x \leq 4$

### Solution

將分子分母上下同乘 $2^x$ 。

$$\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} \leq 2$$

移項。

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2(2^{2x} - 1)}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2 \cdot 2^{2x} + 2}{2^{2x} - 1} \leq 0$$



$$\frac{2^{2x} - 16}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\text{令 } t = 2^{2x}$$

$$\frac{t - 16}{t - 1} \leq 0$$

考慮以下兩點：

$$1. t - 16 \geq 0 \cdot t - 1 < 0$$

$t \geq 16, t < 1$ ，這兩個不等式沒有任何交集，因此  $t \in \emptyset$

$$2. t - 16 \leq 0 \cdot t - 1 > 0$$

$t \leq 16, t > 1$ ，這兩個不等式的交集為  $1 < t \leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到  $1 < t \leq 16$

還原  $t$  得到  $1 < 2^{2x} \leq 16$ ，因此  $0 < x \leq 2$

## 100-02-13

### Statement

方程式  $10 \cdot x^{2 \log x} = x^3$  之所有實根的平方和為何？

(A) 100

(B) 101

(C) 110

(D) 111

(E) 121

### Solution

等號兩邊同除  $x^{2 \log x}$

$$10 = x^{3-2 \log x}$$

$$1 = (3 - 2 \log x) \times \log(|x|)$$

因為要求實根，因此可以限定  $x > 0$ ，所以  $(3 - 2 \log x) \times \log(x)$

$$\text{令 } t = \log x$$

$$1 = (3 - 2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\text{因式分解得到 } (-2t + 1)(t - 1) = 0$$

$$\text{可以解出 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = 1$$

還原  $t$ ，可以得到  $\log x = \sqrt{10}$  或  $\log x = 10$

兩根的平方和為  $\sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$

## 100-02-14

### Statement

若 $f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$ ，則 $f(1 + \sqrt{2}) = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

### Solution

觀察一下，可以嘗試把 $x^3 + x^2 - 7x + 5$ 化簡成 $c(x-1)^2 + b(x-1) + a \dots$

這部分可以用綜合除法做到。

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -7 & 5 & 1 \\ & & 1 & 2 & -5 & \\ \hline & 1 & 2 & -5 & 0 & \\ & & 1 & 3 & & d \\ \hline & 1 & 3 & -2 & & \\ & & 1 & & & c \\ \hline & & & 1 & 4 & \\ a & & & & b & \end{array}$$

因此可得 $(x-1)^3 + 4(x-1)^2 - 2(x-1)$ 。

把 $f(1 + \sqrt{2})$ 帶進去，得：

$$\log_2((\sqrt{2})^3 + 4(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})) = \log_2(2\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{2}) = \log_2 8 = 3$$

## 100-02-15

### Statement

設 $\cos \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，則 $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = ?$

- (A)  $\frac{1}{4}$
- (B)  $\frac{1}{3}$
- (C)  $\frac{1}{2}$
- (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

### Solution

$$\cos^2 \theta = 1 - \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - (1 - \cos \theta) = \cos \theta$$

$$\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$$

## 100-02-16

### Statement

設  $\tan 100^\circ = k$ ，則  $\sin 80^\circ = ?$

(A)  $\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

(B)  $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}$

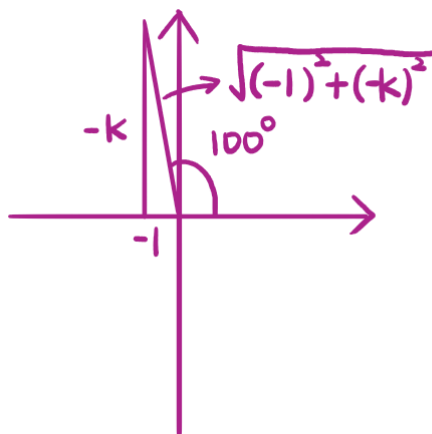
(C)  $\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$

(D)  $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(E)  $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

### Solution

畫個圖



看圖可以觀察到， $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

## 100-02-17

### Statement

設  $a = \sec 434^\circ$ ， $b = \sin 100^\circ$ ， $c = \cos 260^\circ$ ， $d = \cot 28^\circ$ ， $e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A)  $b < c < d < e < a$

(B)  $c < b < d < e < a$

(C)  $c < b < e < d < a$

(D)  $c < b < d < a < e$

(E)  $b < c < a < d < e$

### Solution

$$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$$

$$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$$

$$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$$

$$d = \cot 28^\circ$$

$$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$$

因此  $a > e$ ， $c < b$ ，故選B。

## 100-02-18

### Statement

平面上有兩點  $A(1, 2)$ ， $B(a, b)$ ，若直線  $\overline{AB}$  之垂直平分線為  $x + 2y - 10 = 0$ ，則  $a - b = ?$

(A)  $-1$

(B)  $-2$

(C)  $-3$

(D)  $-4$

(E)  $-5$

### Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過  $\overline{AB}$  的中點  $(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$ 。

$$\text{帶入垂直平分線得到 } \frac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$$

$$\Rightarrow a + 2b = 15$$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到 $m = \frac{-1}{2}$ ，因此與其垂直的斜率一定是 $m = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到 $\frac{2-b}{1-a} = 2$ ，整理得到 $2-b = 2-2a \Rightarrow 2a = b$ 。

帶回第一式可以得到 $5a = 15$ ,  $a = 3$ ,  $b = 6$ 。

$$a - b = 3 - 6 = -3$$

## 100-02-19

### Statement

設直線 $bx + ay - ab = 0$ ， $a > 0$ ， $b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則 $a + 2b = ?$

(A)  $-7 - 3\sqrt{3}$

(B)  $-6 - 3\sqrt{3}$

(C)  $-5 - 3\sqrt{3}$

(D)  $-4 - 3\sqrt{3}$

(E)  $-3 - 3\sqrt{3}$

### Solution

可以推出 $x, y$ 的通式。

$bx + ay = ab$ ，求出 $x, y$ 的截距。

當 $y = 0$ ，那麼 $bx = ab$ ， $x = a$

當 $x = 0$ ，那麼 $ay = ab$ ， $y = b$

已知 $a > 0, b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道 $\frac{1}{2}|a||b| = 2$ ，可知 $ab = -4$ 或者 $ab = 4$ ，但是 $a > 0, b < 0$ ，因此 $ab = 4$ 不合。

已知過點 $(1, 2)$ 且 $ab = -4$ ，因此可以把點帶入得到 $b + 2a = -4$ 。

又 $ab = -4$ 所以 $a = \frac{-4}{b}$ ，所以得到 $b + \frac{-8}{b} = -4$

同乘以 $b$ 可以得到 $b^2 + 4b - 8 = 0$ 。

利用公式解可以解出 $\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times -8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根 $-2 + 2\sqrt{3}$ 或者 $-2 - 2\sqrt{3}$ ，其中由於 $b < 0$ ，因此 $-2 + 2\sqrt{3}$ 不合。

$$\text{帶回求出 } a \text{ 得到 } a = \frac{-4}{-2 - 2\sqrt{3}} = \frac{-4}{-2(1 + \sqrt{3})}$$

$$\text{化簡得到 } a = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = -1(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{因此 } a + 2b = \sqrt{3} - 1 + -4 - 4\sqrt{3} = -5 - 3\sqrt{3}$$

## 100-02-20

### Statement

設直線 $3x + y = 1$ 與 $x + 3y = 2$ 之夾角為 $\theta$ ，則 $\cos 2\theta = ?$

(A)  $\frac{-7}{25}$

(B)  $\frac{-6}{25}$

(C)  $\frac{-1}{5}$

(D)  $\frac{-4}{25}$

(E)  $\frac{-3}{25}$

### Solution 1

設兩條直線的法向量為 $n_1 = \langle 3, 1 \rangle$ ， $n_2 = \langle 1, 3 \rangle$

$$\text{則 } \cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{因此 } \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{所以 } \cos 2\theta = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = -\frac{7}{25} \text{，故選(A)}$$

### Solution 2

考慮兩條線的斜率。

$$3x + y = 1, m_1 = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x + 3y = 2, m_2 = \frac{-1}{3}$$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為 $\tan$ 來考慮。

$$\tan(m_1 - m_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{-1}{3}}{1 + 1} = \frac{\frac{-8}{3}}{2} = \frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個 $\tan$ 夾角是負的，因此這個夾角是大於 $90^\circ$ 的鈍角。

可以依照 $\tan(180^\circ) = 0$ 來求得另一個銳角的夾角。

$$\frac{\frac{-4}{3} + \tan \theta}{1 - \frac{-4}{3} \tan \theta}, \text{ 求得銳角 } \tan \theta = \frac{4}{3}$$

由於 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ，那麼這個角度會介於 $45^\circ \sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於 $90^\circ$

$$\text{用兩倍角公式求出 } \tan 2\theta = \frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{24}{-7}$$

由於這個角度介於 $90^\circ \sim 180^\circ$ ， $y > 0$ ，而 $x < 0$ ，也因此 $y = 24$ ， $x = -7$ ， $r = \sqrt{24^2 + (-7)^2} = 25$

因此 $\cos 2\theta = \frac{-7}{25}$ ，故選(A)