106年第1次北科入學數學會考

106-01-01

Statement

已知點A在圓$x^2+12x+y^2+32=0$上，且點B在圓$x^2+y^2+16y+55=0$，則$\overline{AB}$之長度最小值為何？

(A)　5

(B)　6

(C)　7

(D)　8

(E)　9

Solution

用配方法改寫式子

$x^2+12x+y^2+32=0 \Rightarrow (x+6)^2+y^2=4$，圓心為$(-6,0)$且半徑為2

$x^2+y^2+16y+55=0 \Rightarrow x^2+(y+8)^2=9$，圓心為$(0,-8)$且半徑為3

兩圓心距離為$\sqrt{6^2+8^2}=10$，大於兩半徑和，因此$\overline{AB}>0$

故$\overline{AB}=10-2-3=5$，故選(A)

106-01-02

Statement

若橢圓方程式$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=10$，則橢圓短軸長為何？

(A)　2

(B)　3

(C)　4

(D)　5

(E)　6

Solution

由方程式可以知道

焦點為$(1,5)$與$(1,-3)$，因此$2c=5-(-3)=8$，$c=4$

長軸長$2a=10$，因此$a=5$

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9}=3$，因此橢圓短軸長為$2b=6$，故選$(E)$

106-01-03

Statement

若直線L與直線$5x+7y=1$垂直，且L通過兩直線$2x-3y+1=0$與$4x+5y-9=0$的交點，則L的方程式為何？

$(A)\quad 5x-7y=-2$

$(B)\quad 5x+7y=12$

$(C)\quad 7x-5y=2$

$(D)\quad 7x+5y=12$

$(E)\quad 7x+5y=20$

Solution

直線L與直線$5x+7y=1$垂直，設$L:7x-5y=d$

且L通過兩直線$2x-3y+1=0$與$4x+5y-9=0$的交點

因此解聯立方程組$\begin{cases}2x-3y+1=0\\4x+5y-9=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(1,1)$

帶入直線L，得到$d=2$，因此$L:7x-5y=2$，故選(D)

106-01-04

Statement

$\log_2 216-\log_4 9-\log_2 9=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 4$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 6$

Solution

$\log_2 216-\log_4 9-\log_2 9$

$=\log_2 216-\log_2 3-\log_2 9=\log_2 8=3$，故選$(B)$

106-01-05

Statement

設α,β為方程式$x^2-2x-1=0$的兩根，則$\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=?$

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -\dfrac{1}{2}$

$(C)\quad -\dfrac{1}{3}$

$(D)\quad \dfrac{1}{6}$

$(E)\quad \dfrac{1}{2}$

Solution

利用根與係數

$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{1}=2$

$\alpha\beta=\dfrac{-1}{1}=-1$

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=4\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=6$

$\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{(-1)(2)}{6}=-\dfrac{1}{3}$，故選$(C)$

106-01-06

Statement

設$\dfrac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$且$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，則$\sqrt{2+2\cos2\theta}=?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad \dfrac{4}{5}$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad \dfrac{6}{5}$

$(E)\quad \dfrac{8}{5}$

Solution

$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{4}{5}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \dfrac{16}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{7}{25}$

因此$\sqrt{2+2\cos 2\theta} = \sqrt{2+\dfrac{14}{25}} = \sqrt{\dfrac{64}{25}} = \dfrac{8}{5}$，故選$(E)$

106-01-07

Statement

已知$f(x)$為二次函數且$f(x) > 0$的解為$-1 < x < \dfrac{1}{2}$，則$f(2x) < 0$的解為何？

(A) $x < -1$或$x > \dfrac{1}{2}$

(B) $x < -2$或$x > 1$

(C) $-2 < x < 1$

(D) $x < -\dfrac{1}{2}$或$x > \dfrac{1}{4}$

(E) $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{4}$

Solution

$\because f(x) > 0$的解為$-1 < x < \dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x) < 0$的解為$x < -1 \cup x > \dfrac{1}{2}$

$\therefore f(2x) < 0$的解為$x < \dfrac{-1}{2} \cup x > \dfrac{1}{4}$，故選$(D)$

106-01-08

Statement

設α, β為方程式$\log_3 x = 5 - \dfrac{4}{\log_3 x}$之兩根，則$\alpha + \beta = ?$

(A) 84

(B) 85

(C) 86

(D) 87

(E) 88

Solution

$\log_3 x = 5 - \dfrac{4}{\log_3 x}$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 5\log_3 x - 4$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0$

$\Rightarrow (\log_3 x - 4)(\log_3 x - 1) = 0$

$\Rightarrow \log_3 x = 4, \log_3 x = 1$

$\Rightarrow x = 81, x = 3$

因此$81 + 3 = 84$，故選(A)

106-01-09

Statement

求$2 \cdot 9^x - 39 \cdot 3^{x-1} - 45 = 0$，則$x = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$2 \cdot 9^x - 39 \cdot 3^{x-1} - 45 = 0$

$\Rightarrow 2 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 3^x - 45 = 0$

令$t = 3^x$，解$2t^2 - 13t - 45 = (t + \dfrac{5}{2})(t - 9) = 0$，$t = -\dfrac{5}{2}$(不合)，$t = 9$

從$t = 9$還原後，得到$x = 2$，故選(B)

106-01-10

Statement

下列何者正確？

(A) $\sin\dfrac{3\pi}{4} < \cos\dfrac{3\pi}{4}$

(B) $\cos(-\theta) = -\cos\theta$

(C) $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$

(D) $\sec(\dfrac{\pi}{2} + \theta) = -\csc\theta$

$(E)\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

Solution

$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$

106-01-11

Statement

若$13^5-11\cdot 13^4-25\cdot 13^3-12\cdot 13^2+a\cdot 13-13=0$，求$a=?$

$(A)\quad -12$

$(B)\quad -11$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 17$

Solution

$13^5-11\cdot 13^4-25\cdot 13^3-12\cdot 13^2+a\cdot 13-13=0$

等價於$f(x)=x^5-11x^4-25x^3-12x^2+ax-13$能被$x-13$整除

利用綜合除法來找出a

1	-11	-25	-12	a	-13	
	13	26	13	13	13a+169	13
1	2	1	1	(a+13)	13a+156	

考慮$13a+156=0$，得到$a=-12$

106-01-12

Statement

設拋物線方程式為$x=ay^2+b$，其中$a>0$。若此拋物線過$(0,\sqrt{2})$且焦點坐標為$(-\frac{1}{2},0)$，則$a-b=?$

$(A)\quad \frac{1}{2}$

$(B)\quad \frac{3}{2}$

$(C)\quad \frac{7}{4}$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad \frac{7}{2}$

Solution

$x=ay^2+b\Rightarrow\frac{1}{a}(x-b)=y^2$

因此頂點為$(b,0)$，且焦距為$\frac{1}{4a}$，雙曲線為左右向

拋物線過$(0,\sqrt{2})$，帶入後$\frac{-b}{a}=2\Rightarrow 2a+b=0$

焦點坐標為$(-\frac{1}{2},0)$，因此$b+\frac{1}{4a}=\frac{-1}{2}\Rightarrow 4ab+2a+1=0$

兩式$\begin{cases}2a+b=0\\4ab+2a+1=0\end{cases}$解聯立，得到$(a,b)=(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$(不合)或$(a,b)=(\frac{1}{2},-1)$

因此$a-b=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$，故選$(B)$

106-01-13

Statement

若$f(x)=x^3-4x^2+2x+k$且$f(1+\sqrt{3})=2$，求$k=?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 6$

Solution

$f(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^3-4(1+\sqrt{3})^2+2(1+\sqrt{3})+k=2$

$=10+6\sqrt{3}-4(4+2\sqrt{3})+2(1+\sqrt{3})+k=2$

$=10-16+2+k=2$，得到$k=6$，故選(E)

106-01-14

Statement

已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$之夾角為θ，若$|\vec{a}|=2$、$|\vec{b}|=4$且$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=-4$，則$\theta=?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad \frac{\pi}{6}$

$(C)\quad \frac{\pi}{4}$

$(D)\quad \frac{\pi}{3}$

$(E)\quad \frac{\pi}{2}$

Solution

$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})-2|\vec{b}|^2=-4$

得到$(\vec{a}\cdot\vec{b})=4$

又$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=8\cos\theta=4$

因此$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，故選(D)

106-01-15

Statement

若雙曲線方程式$x^2-2x-4y^2-3=0$之兩頂點坐標為(a,b)與(c,d)，則$a+b+c+d=?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad 1$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 4$

Solution

$x^2-2x-4y^2-3=0$

$\Rightarrow (x-1)^2-4y^2=4$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}-y^2=1$

得到中心為$(x,y)=(1,0)$，因此頂點過$y=0$

帶入$y=0$後得到$x=-1$或$x=3$

因此頂點為$(-1,0)$與$(3,0)$

$a+b+c+d=(-1)+0+3+0=2$，故選(C)

106-01-16

Statement

設(a,b)滿足$3x+4y=12$，則$(a-4)^2+(b-5)^2$最小值為何？

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 8$

$(C)\quad 12$

$(D)\quad 16$

$(E)\quad 20$

Solution

動點$P=(\dfrac{12-4b}{3},b)$在$3x+4y=12$上

帶入P至$(a-4)^2+(b-5)^2$內，得到$(\dfrac{-4b}{3})^2+(b-5)^2$

配方法後得到$\dfrac{25}{9}(b+\dfrac{9}{5})^2+16$

因此在$b=-\dfrac{9}{5}$時有最小值16，故選(D)

106-01-17

Statement

已知x^2-3x+2除$f(x)$的餘式為$2x+5$且x^2+2x-3除$g(x)$的餘式為$3x-1$，則$x-1$除$[f(x)+g(x)]$的餘式為何？

$(A)\quad -2$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 9$

Solution

設$h(x),v(x)$分別為$f(x)$除x^2-3x+2與$g(x)$除x^2+2x-3的餘式

$f(x)=(x^2-3x+2)h(x)+2x+5=(x-2)(x-1)h(x)+2x+5$

$g(x)=(x^2+2x-3)v(x)+3x-1=(x+3)(x-1)v(x)+3x-1$

因此$x-1$除$[f(x)+g(x)]$的餘式為$2\cdot 1+5+3\cdot 1-1=9$，故選(E)

106-01-18

Statement

設$\pi < \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$且$18\sin^2\theta + 9\cos\theta - 13 = 0$，則$\tan\theta = ?$

$(A)\quad \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$(B)\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(C)\quad \sqrt{2}$

$(D)\quad 2\sqrt{2}$

$(E)\quad 3\sqrt{2}$

Solution

$18\sin^2\theta + 9\cos\theta - 13 = 0$

$\Rightarrow -18\cos^2\theta + 9\cos\theta + 5 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{1}{3}$或$\cos\theta = \dfrac{5}{6}$(不合)

因此$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = 2\sqrt{2}$，故選$(D)$

106-01-19

Statement

令向量$\vec{a} =< 1, 1 >$、$\vec{b} =< 2 - x, y - 1 >$。若$y > 0$、$2|\vec{a}| = |\vec{b}|$且$\vec{a} \perp \vec{b}$，則$(x, y) = ?$

$(A)\quad (-1, -2)$

$(B)\quad (3, 2)$

$(C)\quad (4, 3)$

$(D)\quad (5, 4)$

$(E)\quad (6, 5)$

Solution

$\because \vec{a} \perp \vec{b}$

$\therefore (2 - x) + (y - 1) = 0 \Rightarrow -x + y + 1 = 0$

又$\sqrt{(2 - x)^2 + (y - 1)^2} = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$

得到$x^2 + y^2 - 2y - 4x + 5 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$

將$x = y + 1$代入，得到$2(y - 1)^2 = 8$，因此$y = -1$(不合)或$y = 3$

將$y=3$代入$-x+y+1=0$，得到$x=4$

因此$(x,y)=(4,3)$，故選(C)

109-01-20

Statement

$\dfrac{-7x+22}{(x+4)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x+4}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$，求$A+B+C=?$

(A)　2

(B)　3

(C)　4

(D)　5

(E)　6

Solution

$-7x+22=A(x-1)^2+B(x+4)(x-1)+C(x+4)$

將$x=1$代入，得到$15=5C$，因此$C=3$

將$x=-4$代入，得到$25A=50$，因此$A=2$

將$x=0$代入，得到$22=2-4B+12$，因此$B=-2$

因此$A+B+C=3$，故選(B)