107年第1次北科入學數學會考

107-01-01

Statement

設橢圓$9x^2+16y^2-18x-135=0$的兩焦點為F_1,F_2，點P在橢圓上，若$\overline{PF_1}=2$，則$\overline{PF_2}=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 6$

$(E)\quad 8$

Solution

$9x^2+16y^2-18x-135=0$

利用配方法，改寫式子得$\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

可得長軸$2a=2\sqrt{16}=8$

又因為$\overline{FP_1}+\overline{FP_2}=2a$，因此$\overline{PF_2}=8-2=6$，故選$(D)$

107-01-02

Statement

若α,β為方程式$x+\dfrac{2}{x}+1=0$的兩根，則$\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=?$

$(A)\quad -10$

$(B)\quad -6$

$(C)\quad -2$

$(D)\quad 6$

$(E)\quad 10$

Solution

$x+\dfrac{2}{x}+1=0$

$\Rightarrow x^2+x+2=0$

利用根與係數，可得$\alpha+\beta=-1$，且$\alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha\beta((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta)=2(1-6)=-10$，故選$(A)$

107-01-03

Statement

設$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中a、b、c皆為實數。若不等式$f(x)<0$之解為$x<-2$且$f(2)=0$，則$3a+b+2c=?$

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) 9

Solution

由題目的條件可以看出$f(x)=(x+2)(x-2)^2$，展開後得到
$(x+2)(x^2-4x+4)=x^3-2x^2-4x+8$

故$3a+b+2c=3\cdot(-2)-4+2\cdot 8=6$，故選$(B)$

107-01-04

Statement

若ΔABC中，向量$\overrightarrow{AB}=<3,-2>$、$\overrightarrow{BC}=<x,-1>$、$\overrightarrow{CA}=<4,y>$，則$y-x=?$

(A) -10

(B) -4

(C) 4

(D) 10

(E) 20

Solution

$\overrightarrow{CA}=<4,y>\Rightarrow\overrightarrow{AC}=<-4,-y>$

因此$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，也就是$<3+x,-2-1>=<-4,-y>$，得到$x=-7$且$y=3$

因此$y-x=3-(-7)=10$，故選(D)

107-01-05

Statement

若$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$，則$\sin\theta + \cos\theta$可能為下列何者？

$(A)\quad -1$

$(B)\quad -\frac{1}{2}$

$(C)\quad \frac{1}{2}$

$(D)\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

$(E)\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

因此$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{(\sin\theta - \cos\theta)^2 + 4\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{12}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

107-01-06

Statement

若拋物線$y = 2x^2 + bx + c$的頂點為$(1,4)$，則$2b + c =?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$y = 2x^2 + bx + c \Rightarrow y = 2(x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4}) + \frac{b^2}{2} + c = 2(x + \frac{b}{2})^2 + \frac{b^2}{2} + c$

可得$\frac{b}{2} = -1$，因此$b = -2$，又$\frac{b^2}{2} + c = 4$，得到$c = 2$

故$2b + c = -4 + 2 = -2$，故選(A)

107-01-07

Statement

設ΔABC中，$\angle BAC$為鈍角，$|\overrightarrow{AB}|=6$、$|\overrightarrow{AC}|=7$。若ΔABC的面積為$7\sqrt{5}$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=?$

$(A)\quad -28$

$(B)\quad -14$

$(C)\quad -7$

$(D)\quad 14$

$(E)\quad 28$

Solution

$\Delta ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=7\sqrt{5}$，可得$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，推得$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta=42\cdot\frac{-2}{3}=-28$，故選$(A)$

107-01-08

Statement

若$\cot\frac{5\pi}{8}=k$，則$\csc\frac{\pi}{8}=?$

$(A)\quad -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

$(B)\quad -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

$(C)\quad k$

$(D)\quad \frac{k}{1+k^2}$

$(E)\quad \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

Solution

$\cot(\frac{5\pi}{8})=-\tan\frac{\pi}{8}=k$

因此$\tan\frac{\pi}{8}=-k$，可得對邊$-k$，鄰邊1，且斜邊$\sqrt{k^2+1}$

因此$\csc\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$。故選$(B)$

107-01-09

Statement

設x、y、z皆為實數，且$xyz \neq 0$。若$8^x = 9^y = 5^z = a$，且$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$，則$a$為何？

(A) 500

(B) 600

(C) 700

(D) 800

(E) 900

Solution

$8^x = 9^y = 5^z = a$

$\Rightarrow x\log 8 = y\log 9 = z\log 5 = \log a$

可得$x = \frac{\log a}{\log 8}$，$y = \frac{\log a}{\log 9}$，$z = \frac{\log a}{\log 5}$

$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} = \frac{\log 8}{3\log a} + \frac{\log 9}{2\log a} + \frac{\log 5}{\log a} = \frac{2\log 8 + 3\log 9 + 6\log 5}{6\log a} = \frac{1}{2}$

因此$\frac{2}{3}\log 8 + \log 9 + 2\log 5 = \log a$

可得$a = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 9 \cdot 25 = 900$，故選$(E)$

107-01-10

Statement

若$a + 2b = 10$，則$a^2 + b^2$的最小值為何？

(A) 10

(B) 15

(C) 20

(D) 25

(E) 30

Solution

利用柯西不等式，得到$(1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) \geq (a + 2b)^2$

因此可知$(a^2 + b^2) \geq 20$，$a^2 + b^2$的最小值為20，故選(C)

107-01-11

Statement

設$f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，求$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(15)=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(15)$可推得規律得$-\sqrt{1}+\sqrt{16}=3$，故選(C)

107-01-12

Statement

若x^2-x-2除$x^4+x^3+ax^2+x+b$的餘式為$x+1$，則$a^2+b^2\ =?$

$(A)\quad 145$

$(B)\quad 146$

$(C)\quad 147$

$(D)\quad 148$

$(E)\quad 149$

Solution

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

設$x^4+x^3+ax^2+x+b=g(x)(x-2)(x+1)+(x+1)$

令$x=2$，得$4a+b+26=3$

令$x=-1$，得$a+b-1=0$

解聯立方程組$\begin{cases} a+b=-23 \\ a+b=1 \end{cases}$可得$(a,b)=(-8,9)$

因此$a^2+b^2\ =64+81=145$，故選(A)

107-01-13

Statement

若$f(x)=x^4-9x^3+5x^2-3x+16$，則$f(5-2\sqrt{3})$ =?

(A)　$6-4\sqrt{3}$

(B)　$8-6\sqrt{3}$

(C)　$10-8\sqrt{3}$

(D)　$12-10\sqrt{3}$

(E)　$14-12\sqrt{3}$

Solution

考慮以$x-5$來表示$x^4-9x^3+5x^2-3x+16$

```
1   -9    5    -3    16 |
     5  -20   -75  -390 | 5
--------------------------
1   -4  -15   -78 | -374
     5    5   -50 |
--------------------
1    1  -10 | -128
     5   30 |
--------------
1    6 | 20
     5 |
---------
1   11
```

可得$f(x)=(x-5)^4+11(x-5)^3+20(x-5)^2-128(x-5)-374$

因此$f(5-2\sqrt{3})=144-264\sqrt{3}+240+256\sqrt{3}-374=10-8\sqrt{3}$，故選$(C)$

107-01-14

Statement

若拋物線$y=x^2+kx+2$恆在直線$x+y-1=0$之上方，則k的範圍為何？

(A)　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

(B)　$k<-\sqrt{2}$或$k>\sqrt{2}$

(C)　$-2<k<2$

(D)　$-3<k<1$

(E)　$k<-3$或$k>1$

Solution

$x+y-1=0 \Rightarrow y=-x+1$

因此$y=x^2+kx+2$

$\Rightarrow -x+1=x^2+kx+2$

$\Rightarrow x^2+(k+1)x+1=0$

利用判別式來考慮交點，也就是

$(k+1)^2-4\times1\times1<0$

$\Rightarrow (k+1)^2<4$

$\Rightarrow -3<k<1$，故選(D)

107-01-15

Statement

$\dfrac{\log 3\cdot\log_6 25\cdot\log_7 8}{\log_7 5\cdot\log 2\cdot\log_6 27}=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$\dfrac{\log 3\cdot\log_6 25\cdot\log_7 8}{\log_7 5\cdot\log 2\cdot\log_6 27}=\dfrac{\log 3\cdot 2\log_6 5\cdot 3\log_7 2}{\log_7 5\cdot\log 2\cdot 3\log_6 3}=\dfrac{\log 3}{\log 2}\cdot\dfrac{2\log 5}{3\log 3}\cdot\dfrac{3\log 2}{\log 5}=2$，故選$(B)$

107-01-16

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為$\dfrac{\pi}{3}$。若$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=2$，則$|3\vec{a}-4\vec{b}|=?$

$(A)\quad 5$

$(B)\quad \sqrt{53}$

$(C)\quad 8$

$(D)\quad \sqrt{73}$

$(E)\quad 9$

Solution

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

因此$|3\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 24(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 16|\vec{b}|^2}$

$= \sqrt{9 \times 9 - 24 \times 3 + 16 \times 4} = \sqrt{81 - 72 + 64} = \sqrt{73}$，故選$(D)$

107-01-17

Statement

若$\frac{ax^2 + bx + c}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$，則$3a + 2b + c = ?$

(A) $\quad 16$

(B) $\quad 17$

(C) $\quad 18$

(D) $\quad 19$

(E) $\quad 20$

Solution

$ax^2 + bx + c = -1(x+1)^2 + 2(x+2)(x+1) + (x+2)$

$= x^2 + 5x + 5$

因此$a = 1, b = 5, c = 5$，$3a + 2b + c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 5 = 18$，故選$(C)$

107-01-18

Statement

若$\log(1 + \cos\theta) + \log(\frac{1}{4} - \cos\theta) = \log(-\frac{3}{4}\cos\theta)$，則$\theta$可能為下列何者？

(A) $\quad -\frac{\pi}{6}$

(B) $\quad \frac{\pi}{6}$

(C) $\quad \frac{\pi}{3}$

(D) $\quad \frac{2\pi}{3}$

(E) $\quad \frac{5\pi}{6}$

Solution

$\log(1+\cos\theta)+\log(\frac{1}{4}-\cos\theta)=\log(-\frac{3}{4}\cos\theta)$

$\Rightarrow (1+\cos\theta)(\frac{1}{4}-\cos\theta)=-\frac{3}{4}\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cos\theta-\cos^2\theta=-\frac{3}{4}\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{1}{2}$

考慮$\cos\theta=\frac{1}{2}$，會使得$\frac{1}{4}-\cos\theta<0$，故不合。

因此$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，得到$\theta=\frac{4\pi}{3}$或$\theta=\frac{2\pi}{3}$，故選(D)

107-01-19

Statement

設$P(4,3)$、$Q(4,-2)$、$R(1,2)$為平面上三點，求點P到直線$\overleftrightarrow{QR}$的距離

(A) 2

(B) $\sqrt{5}$

(C) 3

(D) 5

(E) $\sqrt{26}$

Solution

$\Delta PQR=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}4 & 4 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 2 & 3\end{vmatrix}|=\frac{15}{2}$

又$\overline{QR}=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=5$

設$\overline{QR}$上有一點S使得$\overline{PS}\perp\overline{QR}$

因此$\frac{1}{2}\times\overline{PS}\times\overline{QR}=\frac{15}{2}$，得到$\overline{PS}=3$，故選$(C)$

107-01-20

Statement

若α為方程式$\log_3(x+2)=2-\log_3(x-6)$之根，則下列何者為$\alpha$之倍數？

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 14

Solution

$\log_3(x+2) = 2 - \log_3(x-6)$

$\Rightarrow (x+2)(x-6) = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 9$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Rightarrow (x-7)(x+3) = 0$

因此$x = 7$或$x = -3$(不合)，故選(E)