103-02-01

Statement

若$f(x)=12x^2-26x+5$，則$f(\frac{3+\sqrt{2}}{2})=?$

$(A)\quad -2+5\sqrt{2}$

$(B)\quad -1+5\sqrt{2}$

$(C)\quad 1+5\sqrt{2}$

$(D)\quad 9$

$(E)\quad 2+5\sqrt{2}$

Solution

利用綜合除法，將式子轉成以$(3x-2)$表示的形式。

12	-26	5	
	18	-12	3/2
6	-4	-7	
	9		
3	5		

綠色字：將$(x-\frac{3}{2})$轉換成$(2x-3)$，因此係數的部分要除以2。

得到$f(x)=3(2x-3)^2+5(2x-3)-7$，因此$f(\frac{3+\sqrt{2}}{2})=6+5\sqrt{2}-7=5\sqrt{2}-1$，故選$(B)$

103-02-02

Statement

若$f(\frac{2+x}{4-x})=x+2$，則$f(a)=?$

$(A)\quad \frac{6a}{1-a}$

$(B)\quad \frac{2+a}{2-a}$

$(C)\quad \frac{4+a}{2-a}$

$(D)\quad \frac{2-a}{2+a}$

(E) $\dfrac{6a}{1+a}$

Solution

$\dfrac{2+x}{4-x}=a$，得到$x=\dfrac{4a-2}{a+1}$

因此$f(a)=\dfrac{4a-2}{a+1}+2=\dfrac{6a}{a+1}$，故選$(E)$

103-02-03

Statement

設ΔABC中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=4$，若D為$\overline{BC}$上一點使$\overline{AD}=4$，則$\overline{BD}=?$

(A) 1

(B) 2

(C) $\dfrac{5}{2}$

(D) 3

(E) 4

Solution

$\cos C=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=\dfrac{1}{8}$

可以推得$\cos C=\cos\angle ACD=\dfrac{4^2+(\overline{CD})^2-4^2}{2\times4\times\overline{CD}}=\dfrac{1}{8}$，可得$\overline{CD}=1$

因此$\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{CD}=5-1=4$，故選$(E)$

103-02-04

Statement

求圓$x^2+y^2-4x+6y-3=0$與直線$3x-4y=-7$的最近距離為何？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

(E) 5

Solution

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

利用配方法，得到$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

因此得到圓心$(2, -3)$，且半徑$r = \sqrt{16} = 4$

考慮圓心與直線的最近距離，利用點到直線距離公式

$$\frac{|3(2) - 4(-3) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$

長度大於半徑，因此與圓的最近距離為$5 - 4 = 1$，故選(B)

103-02-05

Statement

下列何者錯誤？

$(A)\quad \sin(\pi - x) = \sin x$

$(B)\quad \cos(\pi - x) = -\cos x$

$(C)\quad \tan(\pi + x) = \tan x$

$(D)\quad \csc(\frac{\pi}{2} + x) = -\sec x$

$(E)\quad \sec(\frac{3\pi}{2} + x) = \csc x$

Solution

$\csc(\frac{\pi}{2} + x) = \sec(x)$，故選$(D)$

103-02-06

Statement

已知$f(x) = 3x^5 + 19x^4 - 13x^3 + 6x^2 - 6x + 15$，求$f(-7) = ?$

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 5$

$(C)\quad 6$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 8$

Solution

$f(-7)$結果與$f(x) \div (x-7)$的餘數等價（餘式定理）。

因此利用綜合除法來找餘數

3	19	-13	6	-6	15	
	-21	14	-7	7	-7	-7
3	-2	1	-1	1	8	

因此$f(-7)=8$，故選(E)

103-02-07

Statement

設$f(x)=x^2$，若將函數圖形向左平移1個單位，再向上平移k個單位後，所得到的圖形通過點$(-2,4)$，則$k=?$

$(A)\quad -5$

$(B)\quad -3$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

根據函數圖形平移，平移的結果為$y=f(x)=(x+1)^2+k$

帶入點$(-2,4)$求k，得到$4=(-2+1)^2+k$，因此$k=3$，故選(C)

103-02-08

Statement

設雙曲線之方程式為$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，若將此雙曲線之貫軸長放大為2倍，共軛軸與中心點不變，則此雙曲線方程式變為何？

$(A)\quad \frac{x^2}{8}-y^2=1$

$(B)\quad \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$

$(C)\quad \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

$(D)\quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{2} = 1$

$(E)\quad \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

Solution

已知貫軸長原先為$2a = 2\sqrt{4} = 4$，放大為兩倍後得到$2a = 8$，因此$a = 4$，所以$a^2 = 16$

又共軛軸與中心點不變，則此方程式變為$\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$，故選(C)

103-02-09

Statement

不等式$\frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 1$之解為何？

$(A)\quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

$(B)\quad \frac{1}{2} \leq x < 2$

$(C)\quad \frac{1}{4} \leq x \leq 2$

$(D)\quad \frac{1}{4} \leq x < 2$

$(E)\quad 1 \leq x < 2$

Solution

$$\frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 + \log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 0$$

因此我們考慮以下兩種情況取聯集

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \leq 0 \\ -1 + \log_2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \leq 0 \\ -1 + \log_2 x < 0 \end{cases} \Rightarrow [\frac{1}{4}, 2)$$

兩種情況取聯集，得到$\frac{1}{4} \leq x < 2$，故選(D)

103-02-10

Statement

設$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，求$\cos 4\theta$

(A) $\frac{-1}{4}$

(B) $\frac{-1}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

展開$\cos 4\theta$的式子

$$\cos 4\theta=\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta$$

$$=\cos^2 2\theta-(2\sin\theta\cos\theta)^2$$

將$\sin\theta-\cos\theta$平方，得到

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$$

求$\sin^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta=(\frac{6}{8})^2=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$$

求$\cos^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1,\ \ \cos^2 2\theta=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

計算$\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta$

$$\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=\frac{7}{16}-\frac{9}{16}=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{8}$$

因此$\cos 4\theta=\frac{-1}{8}$，故選$(B)$

103-02-11

Statement

若直線通過點$P(3,4)$且與兩座標軸在第一象限圍成三角形，則此三角形面積最小值為何？

(A) 10

(B) 12

(C) 14

(D) 20

(E) 24

Solution

設直線截距式$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，三角形面積為$\frac{ab}{2}$

因為與第一象限圍成區域面積，所以$a,b>0$

代入點$P(3,4)$得到$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$

利用算幾不等式，$\frac{\frac{3}{a}+\frac{4}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{12}{ab}}$，解得$ab$最小值為$48$

因此$\frac{48}{2}=24$，故選(E)

103-02-12

Statement

已知兩圓$x^2+y^2=10$與$x^2+y^2-2x+4y=5$有兩交點，則此兩交點的距離為何？

(A) 3

(B) 4

(C) $\sqrt{26}$

(D) $\sqrt{35}$

(E) $5\sqrt{2}$

Solution

利用配方法，可知$x^2+y^2-2x+4y=5\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=10$

設圓心$O_1=(0,0)$，$O_2=(1,-2)$，且兩圓交於A,B，其中$\overline{O_1A}=\overline{O_1B}=\overline{O_2A}=\overline{O_2B}=\sqrt{10}$

已知$\angle AO_1B+\angle O_1AO_2=180^\circ$

因此$\cos(\angle O_1AO_2)=\cos(\pi-\angle AO_1B)=-\cos(\angle AO_1B)$

因此$\dfrac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-(\overline{AB})^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$

可知$\overline{AB}=\pm\sqrt{35}$ (負不合)，故選(D)

103-02-13

Statement

$1\times2+2\times3+3\times4+...+25\times26=?$

(A) 5125

(B) 5850

(C) 6500

(D) 6975

(E) 7200

Solution

$1\times2+2\times3+3\times4+...+25\times26$

$=\sum_{x=1}^{25}x(x+1)=\sum_{x=1}^{25}(x^2+x)=\sum_{x=1}^{25}x^2+\sum_{x=1}^{25}x$

$=\dfrac{25(25+1)(50+1)}{6}+\dfrac{25\times26}{2}$

$=25\times13\times17+25\times13$

$=5525+325=5850$，故選(B)

103-02-14

Statement

設曲線$y=\log_3 x$與x軸、直線$x=9$的交點分別為A、B，且直線$x=9$與x軸的交點為C，則ΔABC的面積為何？

(A) 8

(B) 12

(C) 16

(D) 18

(E) 24

Solution

設$y=0$，則$y=\log_3 x$可知$x=1$，因此$A=(1,0)$

設$x=9$，則$y=\log_3 x$可知$y=2$，因此$B=(9,2)$

$x=9$與x軸的交點為$(9,0)$

因此可知底為$(9-1)=8$，高為$2-0=2$，因此面積為$\dfrac{2\times 8}{2}=8$，故選(A)

103-02-15

Statement

若$g(x)=\sqrt[3]{x^2-6x+8}$，則$g(x)$的值域為何？

$(A)\quad [2,4]$

$(B)\quad [2,\infty)$

$(C)\quad [-1,\infty)$

$(D)\quad (-\infty,\infty)$

$(E)\quad (-\infty,2]\cup[4,\infty)$

Solution

$x^2-6x+8\Rightarrow(x-3)^2-1$，可知$x=3$時有最小值$-1$

又$\sqrt[3]{-1}=-1$，因此$g(x)$的值域為$[-1,\infty)$，故選(C)

103-02-16

Statement

設$10<x<100$，且$\log x$與$\log\dfrac{1}{x}$的尾數相同，則$x=?$

$(A)\quad 10\sqrt{2}$

$(B)\quad 20$

$(C)\quad 10\sqrt{6}$

$(D)\quad 10\sqrt{8}$

$(E)\quad 10\sqrt{10}$

Solution

$\log\dfrac{1}{x}=-\log x$，兩式要尾數要相同的情況下為尾數為0或尾數為0.5

考慮五個選項，可知$10\sqrt{10}=10^{\frac{3}{2}}$

$\log 10^{\frac{3}{2}} = 1.5$，又$-\log 10^{\frac{3}{2}} = -1.5$

因此尾數為0.5，故選(E)

103-02-17

Statement

ΔABC中，若$\overline{AB} = 4$，$\overline{BC} = 5$，$\cos\angle B = -\frac{5}{13}$，令$S$為$\Delta ABC$的面積，則下列何者正確？

(A)　$S < 8$

(B)　$8 \le S < 9$

(C)　$9 \le S < 10$

(D)　$10 \le S < 11$

(E)　$11 \le S$

Solution

$\cos\angle B = -\frac{5}{13}$可知$\sin\angle B = \frac{12}{13}$

$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{12}{13} = \frac{120}{13}$

因此$9 \le S < 10$，故選(C)

103-02-18

Statement

設$\vec{a} =< \cos\alpha, \sin\alpha >$，$\vec{b} =< \cos\beta, \sin\beta >$，且$0 < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \pi$，$\alpha \ne \beta$，則兩向量$\vec{a} + \vec{b}$與$\vec{a} - \vec{b}$的夾角為何？

(A)　0

(B)　$\frac{\pi}{4}$

(C)　$\frac{\pi}{3}$

(D)　$\frac{\pi}{2}$

(E)　π

Solution

由題目可知，兩向量是以原點為起點，單位圓上為終點做兩向量。

若任意取圓上兩點B, C，則向量$\vec{a}$為原點至點B的向量，且向量$\vec{b}$為原點至點C的向量。

因此根據向量平行四邊形，可知$\vec{a} + \vec{b}$為$\angle CAB$的角平分向量，且$\vec{a} - \vec{b}$為$\overrightarrow{CB}$

由三角形的角平分線性質可知$\overline{CB}$會被分成兩段

再由圓性質，過圓心的一射線能將圓上任意兩點等分，則射線跟線段一定為直角，故選(D)

103-02-19

Statement

求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{3x-1}{2x+1}-\dfrac{2}{3}}{x-1}=?$

$(A)\quad \frac{1}{9}$

$(B)\quad \frac{2}{9}$

$(C)\quad \frac{1}{3}$

$(D)\quad \frac{4}{9}$

$(E)\quad \frac{5}{9}$

Solution

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{3x-1}{2x+1}-\dfrac{2}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5x-5}{6x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{6x+3}=\dfrac{5}{9}$，故選$(E)$

103-02-20

Statement

若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\dfrac{-1}{4}$，求$a+b=?$

$(A)\quad 3$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 6$

$(E)\quad 7$

Solution

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}$

若極限存在，則$b-4=0$，因此$b=4$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{(\sqrt{ax+4}+2)}=\frac{-1}{4}$$

得到$\frac{a}{4}=\frac{-1}{4}$，因此$a=-1$

因此$a+b=4-1=3$，故選(A)