104年第2次北科入學數學會考

104-02-01

Statement

已知ΔABC中，$\angle BCA=120^\circ$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=5$且D在$\overline{AB}$上。

若$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，則$\overline{CD}=?$

$(A)\quad \frac{5\sqrt{3}}{14}$

$(B)\quad \frac{15\sqrt{3}}{14}$

$(C)\quad \frac{35\sqrt{3}}{2}$

$(D)\quad \frac{55\sqrt{3}}{2}$

$(E)\quad \frac{75\sqrt{3}}{2}$

Solution

利用餘弦定理求$\overline{AB}$

$\cos 120^\circ=\frac{5^2+3^2-(\overline{AB})^2}{2\times 5\times 3}=-\frac{1}{2}$，可以算出$\overline{AB}=\pm 7$ (負不合)。

利用正弦來算出面積

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times \sin 120^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\times 7\times\overline{CD}$

因此可以求出$\overline{CD}=\frac{15\sqrt{3}}{14}$，故選$(B)$

104-02-02

Statement

設$\frac{7x^2-13x}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$，則$A+B+C=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 6$

$(D)\quad 8$

$(E)\quad 10$

Solution

$$\frac{7x^2-13x}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{7x^2-13x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow 7x^2-13x=A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2$$

代入$x=1$，得$2B=-6$，因此$B=-3$

$7x^2-10x+3=A(x-1)(x+1)+C(x-1)^2$

代入$B=-1$，得$4C=20$，因此$C=5$

$2x^2-2=A(x-1)(x+1)=A(x^2-1)$，可得$A=2$

因此$A+B+C=2-3+5=4$，故選(B)

104-02-03

Statement

若扇形的夾角為θ，弧長為$\frac{\pi}{2}$，面積為$\frac{3}{2}\pi$，則$\theta=?$

(A) $\frac{\pi}{12}$

(B) $\frac{\pi}{10}$

(C) $\frac{\pi}{8}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

(E) $\frac{\pi}{3}$

Solution

由弧長為$\frac{\pi}{2}$可知，$r\theta=\frac{\pi}{2}$

由面積為$\frac{3\pi}{2}$可知，$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{3}{2}\pi$

兩式$\begin{cases} r\theta=\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}r^2\theta=\frac{3}{2}\pi \end{cases}$可知，$r=6$且$\theta=\frac{\pi}{12}$，故選$(A)$

104-02-04

Statement

設P點在圓$x^2+y^2=6x+8y$上，則P與直線$3x+4y+5=0$最大距離為何？

(A) 10

(B) 11

(C) $\frac{56}{5}$

(D) 12

(E) $\frac{66}{5}$

Solution

利用配方法，可以得到圓方程式為$(x-3)^2+(y-4)^2=25$，因此圓心為$(3,4)$，半徑為$\sqrt{25}=5$

利用點到直線距離公式，可以知道$\frac{|3\times 3+4\times 4+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|30|}{5}=6$

因此最大距離為$6+5=11$，故選(B)

104-02-05

Statement

下列各三角等式何者正確？

(A) $\cos(x+y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

(B) $\sin 2x=2\sin x$

(C) $\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x+y)\sin(x-y)$

(D) $\sin(\pi-x)=\cos x$

(E) $\cos 2x=1+2\sin^2 x$

Solution

(A) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

(B) $\sin 2x=2\sin x\cos x$

(D) $\sin(\pi-x)=\sin x$

(E) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

故選(C)

104-02-06

Statement

若多項式$ax^3+8x^2+bx+10$可被$x+1$與$x-2$整除，則$a-b=?$

$(A)\quad -44$

$(B)\quad -22$

$(C)\quad -11$

$(D)\quad 22$

$(E)\quad 44$

Solution

根據餘式定理，可以列出以下兩個式子

$$\begin{cases} -a-b=-18 \\ 8a+2b=-42 \end{cases}$$

解聯立後得到$(a,b)=(-13,31)$，因此$a-b=-44$，故選(A)

104-02-07

Statement

已知兩點$A(3,0)$，$B(1,1)$，若$C(a,b)$為直線$y=-1$上一點使得$\overline{AC}+\overline{BC}$最小，則$3a+b=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad 0$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 6$

Solution

已知A,B兩點皆同側於$y=-1$。

因此我們假設一點$A'(3,-2)$使其與A點映射於$y=-1$，且A'與B異側。

因此$\overline{A'B}$與$y=-1$之交點即為C點。

可知$\overline{A'B}:y-1=\dfrac{-2-1}{3-1}(x-1)\Rightarrow 3x+2y=5$

代入$y=-1$可得$x=\dfrac{7}{3}$，因此$C=(\dfrac{7}{3},-1)$

因此$3a+b=7+(-1)=6$，故選(E)

104-02-08

Statement

已知雙曲線方程式為$2xy - 4x + 3y = 5$，則雙曲線中心點坐標為何？

(A)　$(-2, 3)$

(B)　$(-\frac{3}{2}, 2)$

(C)　$(2, -\frac{3}{2})$

(D)　$(2, -3)$

(E)　$(4, -3)$

Solution

$2xy - 4x + 3y = 5$

透過配方法，可得到$2((x + \frac{3}{2})(y - 2)) = -1$

因此中心點坐標為$(-\frac{3}{2}, 2)$，故選(B)

104-02-09

Statement

方程式$x + |\log_2 x| = 1$有幾個實數解？

(A)　0

(B)　1

(C)　2

(D)　3

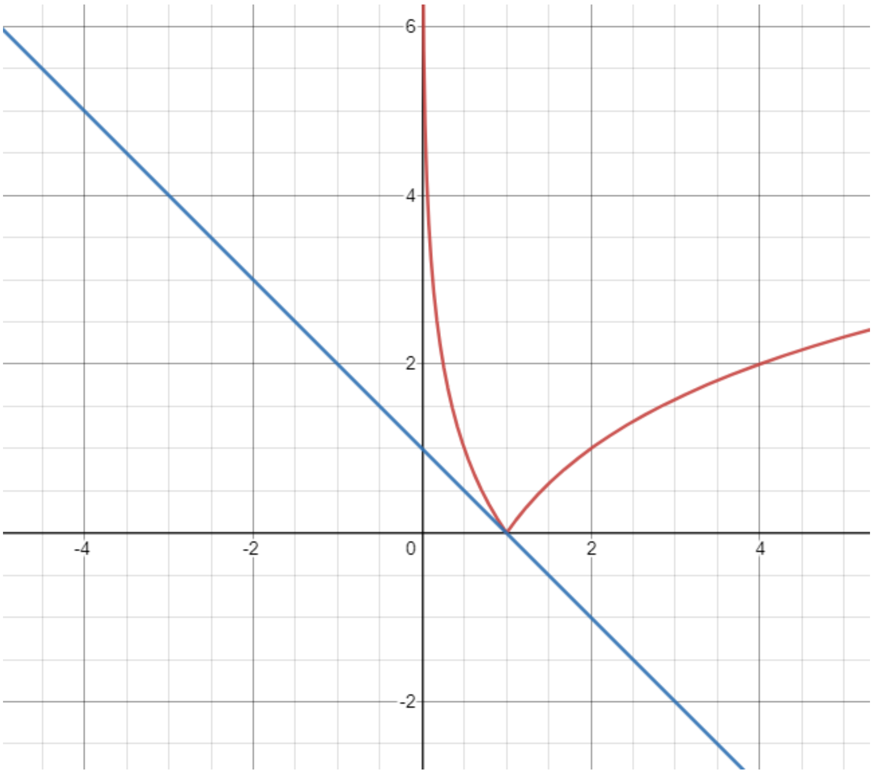
(E)　4

Solution

方程式$x + |\log_2 x| = 1$有幾個實數解？

$x + |\log_2 x| = 1 \Rightarrow |\log_2 x| = 1 - x$

畫出圖



可以知道有一個交點，故選(B)。

104-02-10

Statement

設$\sin x-2\cos x=\sqrt{5}$，則$\sin x+2\cos x=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad \frac{-3}{\sqrt{5}}$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad \frac{3}{\sqrt{5}}$

$(E)\quad 1$

Solution

$\sin x-\sqrt{5}=2\cos x$

$\Rightarrow \sin x-\sqrt{5}=2\sqrt{1-\sin^2 x}$

$\Rightarrow \sin^2 x-2\sqrt{5}\sin x+5=4(1-\sin^2 x)$

$\Rightarrow 5\sin^2 x-2\sqrt{5}\sin x+1=0$

$\Rightarrow (\sqrt{5}\sin x-1)^2=0$

$\Rightarrow \sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$(負不合)

$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$(正不合)

因此$\sin x + 2\cos x = \frac{-3}{\sqrt{5}}$，故選$(B)$

104-02-11

Statement

設x, y均為小於100的正整數，且$3x + 2y = 100$，則(x, y)有幾組解？

(A)　11

(B)　16

(C)　33

(D)　40

(E)　50

Solution

考慮x必定為偶數，又x之上限為32

考慮$x = 2$，則$y = 47 < 100$，合理

考慮$x = 32$，則$y = 2 < 100$，合理

因此共有16組解，故選(B)

104-02-12

Statement

若兩圓$x^2 + y^2 - 8x + 4y = k$與$x^2 + y^2 = 2y$所圍重疊區域面積最大，則k的最小值為何？

(A)　15

(B)　16

(C)　17

(D)　18

(E)　19

Solution

透過配方法，可以知道

圓1為$(x-4)^2 + (y+2)^2 = k + 20$

圓2為$x^2 + (y+1)^2 = 1$

因此$O_1 = (4, -2)$且$O_2 = (0, 1)$，$\overline{O_1O_2} = \sqrt{16+9} = 5$

所圍重疊面積最大，因此考慮圓1能夠完全覆蓋圓2之最小半徑

也就是$r = 5 + 1 = 6$

因此$r^2 = 36 = k + 20$，因此得到$k = 16$，故選(B)

104-02-13

Statement

若$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{99} < x_{100} = 10$且$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{100} - x_{99}$，則$x_{50} = ?$

(A) 3.5

(B) 4

(C) 4.5

(D) 5

(E) 5.5

Solution

由此可知，此數列為一等差數列

因此$x_0 = 1, x_{100} = 10$且項數為101，可求得公差為0.09

因此$x_{50} = x_1 + (51 - 1)(0.09) = 1 + 4.5 = 5.5$，故選$(E)$

104-02-14

Statement

不等式$2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$的解集合為何？

(A) $(-\infty, -1]$

(B) $(-1, 2]$

(C) $[-1, 2]$

(D) $[-1, 2)$

(E) $[2, \infty)$

Solution

$2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$

$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$

令$t = 2^x$，則$2t^2 - 7t - 4 \geq 0$

因此$(2t+1)(t-4) \geq 0$，得到$(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [4, \infty)$

由於2^x的域值為正整數，因此$(-\infty, -\frac{1}{2}]$不合，考慮$[4, \infty)$

可知$t \geq 4$，還原後得到$x \geq 2$，故選(E)

104-02-15

Statement

若$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$，$g(x) = \sqrt{x-3}$，則$f$與$g$的合成函數$f \circ g$的定義域為何？

(A)　$(3, 4)$

(B)　$[3, 4]$

(C)　$(3, 19)$

(D)　$[3, 19)$

(E)　$(3, 19]$

Solution

$f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{4-\sqrt{x-3}}}$

考慮$\sqrt{4-\sqrt{x-3}} \neq 0$，則$x \neq 19$

考慮$4-\sqrt{x-3} > 0$，則$x < 19$

考慮$\sqrt{x-3} \geq 0$，則$x \geq 3$

三者取交集，得到$[3, 19)$，故選(D)

104-02-16

Statement

在ΔABC中，向量$\overrightarrow{AB} =< 1, 2 >$，$\overrightarrow{AC} =< x-1, x >$，$x > 0$，若$\Delta ABC$之面積為$\frac{5}{2}$，則$x =?$

(A)　1

(B)　2

(C)　3

(D)　5

(E)　7

Solution 1

> 速解 by Trava

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = \frac{5}{2}$

因此$5 = |x - 2x + 2|$

$\Rightarrow 5 = |-x+2|$

由於$x > 0$，所以$-5 = -x + 2$，得到$x = 7$，故選(E)

Solution 2

> 很仔細的解 by Uriah

考慮到以$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$所建立的平行四邊形，其面積為$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$

又$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$，因此$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

可得三角形的面積為$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} = \frac{5}{2}$

也就是$\sqrt{5(2x^2-2x+1)-(9x^2-6x+1)} = 5$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 25$，得到$x = -3$(不合)或$x = 7$，故選$(E)$

104-02-17

Statement

若$f(x) = 2x + 1$且$f(g(x)) = 6x + 9$，則$g(x) = ?$

$(A)\quad 3x-4$

$(B)\quad 3x+4$

$(C)\quad 4x-3$

$(D)\quad 4x+3$

$(E)\quad 8x+10$

Solution

設$g(x) = ax + b$，則$f(g(x)) = 2(ax+b)+1$

得到$2ax + 2b + 1 = 6x + 9$

可得$a = 3$與$b = 4$

因此$g(x) = 3x + 4$，故選(B)

104-02-18

Statement

若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=\dfrac{-1}{6}$，則$ab=?$

$(A)\quad -9$

$(B)\quad -3$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 9$

Solution

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b-9}{x(\sqrt{ax+b}+3)}$$

如果極限存在，則$b-9$必須要等於0，因此$b=9$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{(\sqrt{ax+9}+3)}=\dfrac{-1}{6}$

得到$a=-1$，此$ab=(-1)\cdot 9=-9$，故選(A)

104-02-19

Statement

設$f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$，則$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad \dfrac{-1}{2}$

$(D)\quad \dfrac{1}{2}$

$(E)\quad 1$

Solution

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}=2f'(1)$$

$f'(x)=-\dfrac{1}{(2x-1)^2}$，則$2f'(1)=-2$，故選$(A)$

104-02-20

Statement

將平面曲線$y = f(x)$向右平移1單位，再以y軸為中心放大為兩倍，則所得曲線的方程式為何？

$(A) \quad y = f(\frac{x-1}{2})$

$(B) \quad y = f(\frac{x}{2} - 1)$

$(C) \quad y = f(2x - 1)$

$(D) \quad y = f(\frac{x+1}{2})$

$(E) \quad y = f(2x + 1)$

Solution

向右平移一單位，因此x改寫為$(x - 1)$

放大為兩倍，因此$(x - 1)$改寫為$\frac{x}{2} - 1$

因此曲線方程式為$f(\frac{x}{2} - 1)$，故選(B)