102年第2次北科入學數學會考

102-02-01

Statement

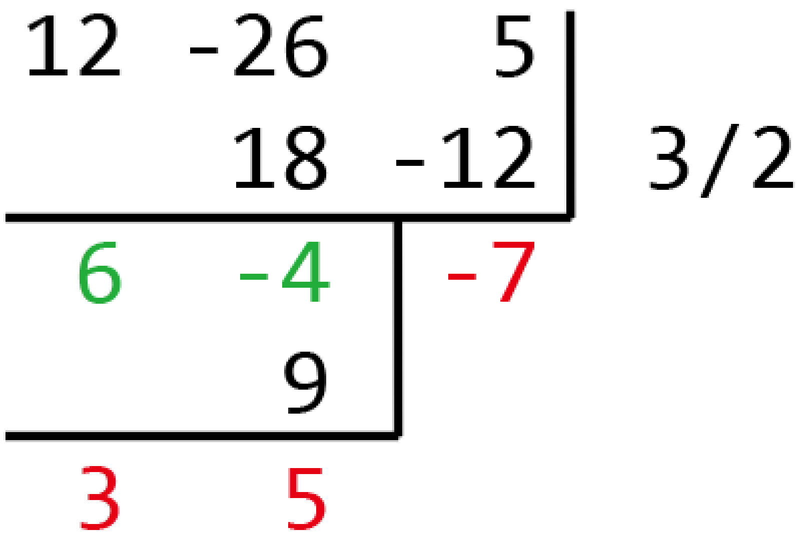
若$\dfrac{12x^2-26x+5}{(2x-3)^3}=\dfrac{a}{2x-3}+\dfrac{b}{(2x-3)^2}+\dfrac{c}{(2x-3)^3}$，則$a+b+2c=?$

$(A)\quad -9$
$(B)\quad -6$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 6$
$(E)\quad 9$

Solution

將式子轉成$12x^2-26x+5=a(2x-3)^2+b(2x-3)+c(2x-3)$

利用綜合除法



綠色字：將式子從$x-\dfrac{3}{2}$轉成$2x-3$，因此要將係數除2，餘數不除。

得到$a=3,b=5,c=-7$，得到$3+5+2\times(-7)=-6$，故選(B)

102-02-02

Statement

若$f(x+2)=\dfrac{2+x}{4-x}$，則$f(a)=?$

$(A)\quad \dfrac{a}{6-a}$

$(B)\quad \dfrac{2+a}{2-a}$

$(C)\quad \dfrac{2+a}{4-a}$

$(D)\quad \dfrac{2-a}{2+a}$

$(E)\quad \dfrac{a}{6+a}$

Solution

$x+2=a, x=a-2$

故$f(a)=\dfrac{2+(a-2)}{4-(a-2)}=\dfrac{a}{6-a}$，故選$(A)$

102-02-03

Statement

設ΔABC中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$，則$\cos^2\dfrac{C}{2}=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{7}$

$(B)\quad \dfrac{2}{7}$

$(C)\quad \dfrac{4}{7}$

$(D)\quad \dfrac{5}{7}$

$(E)\quad \dfrac{6}{7}$

Solution

$\cos C=\cos^2\dfrac{C}{2}-\sin^2\dfrac{C}{2}=2\cos^2\dfrac{C}{2}-1$

則$\cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\cos C+1}{2}$

利用餘式定理，$\cos C=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\times 6\times 7}=\dfrac{5}{7}$

因此$\cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\frac{5}{7}+1}{2}=\dfrac{6}{7}$，故選$(E)$

102-02-04

Statement

已知圓$x^2+y^2=9$，與直線$x+y=3$相交於兩點，則此兩點距離為何？

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 2\sqrt{2}$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 3\sqrt{2}$

$(E)\quad 4$

Solution

$y=3-x$，則$x^2+(3-x)^2=9$

展開後得到$2x^2-6x=0$，得到$x=0$或$x=3$

代回原式，得到兩點$(0,3)$與$(3,0)$，距離為$\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$，故選$(D)$

102-02-05

Statement

下列何者正確？

$(A)\quad \sin(x-\frac{\pi}{2})=\cos x$

$(B)\quad \cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin x$

$(C)\quad \tan(x+\frac{\pi}{2})=\cot x$

$(D)\quad \sin(x+\pi)=\cos x$

$(E)\quad \csc(x+\frac{\pi}{2})=\sec x$

Solution

$\csc(x+\frac{\pi}{2})=\sec x$，故選$(E)$

102-02-06

Statement

若$x^4-4x^3-14x^2+36x+45=(x-1)^4+a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，則$a+b+c+d=?$

$(A)\quad 24$

$(B)\quad 34$

(C) 44

(D) 54

(E) 64

Solution

利用綜合除法

```
1 -4   -14  36  45 |
     1   -3 -17  19 | 1
1 -3   -17  19 | 64
     1   -2 -19 |
1 -2   -19 | 0
     1   -1 |
1 -1 | -20
     1 |
1  0
```

因此$a=0, b=-20, c=0, d=64$，故$a+b+c+d=44$，故選(C)

102-02-07

Statement

設O為原點，$A(a,0), B(0,b)$, 且$\overline{AB}=5$，則ΔOAB最大面積為何？

(A) 6

(B) $\frac{25}{4}$

(C) $\frac{13}{2}$

(D) 7

(E) 8

Solution 1

> By Trava with non-calculus solution

$a^2, b^2 > 0$

利用算幾不等式，$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$

$\dfrac{25}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$

$\dfrac{25}{2} \geq |ab|$

$\dfrac{25}{4} \geq \dfrac{|ab|}{2}$，故選$(B)$

Solution 2

> By Uriah with calculus solution

$a^2+b^2=25$，求$\frac{ab}{2}$的最大值

可知$a^2=25-b^2$，$a=\sqrt{25-b^2}$

因此$f(b)=\frac{b\sqrt{25-b^2}}{2}$，找極值。

微分後得到$f'(b)=\frac{25-2b^2}{2\sqrt{25-b^2}}$，令$f'(b)=0$，得到$b=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

因此$f(b)$的極值發生在$b=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$上

$b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，代入後得$f(\frac{5\sqrt{2}}{2})=\frac{25}{4}$

$b=\frac{-5\sqrt{2}}{2}$，代入後得$f(\frac{-5\sqrt{2}}{2})=\frac{-25}{4}$，因為面積為非負整數所以為$\frac{25}{4}$

因此最大值為$\frac{25}{4}$，故選(B)

102-02-08

Statement

設雙曲線之漸進線為x軸與y軸，且過點$(-1,1)$，則此雙曲線貫軸長為何？

(A)　2

(B)　$\sqrt{5}$

(C)　$2\sqrt{2}$

(D)　4

(E)　5

Solution

由於漸進線為x軸與y軸，可知此雙曲線的頂點會通過$y=x$或$y=-x$，中心為$(0,0)$

因此可以列出雙曲線方程式$xy=c$，代入$(-1,1)$得到$c=-1$

因此雙曲線方程式為$xy=-1$

求雙曲線頂點，令$y=-x$，得到$-x^2=-1$，得到$x=\pm1$

因此頂點為$(1,-1)$與$(-1,1)$

a為頂點與原點之距離，因此貫軸長$2a=2\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2}$，故選$(C)$

102-02-09

Statement

設$\log_2 x^2 + \log_x 2 = 3$的兩根為$\alpha$和$\beta$，則$\alpha\beta = ?$

$(A) \quad -\frac{3}{2}$

$(B) \quad \frac{1}{2}$

$(C) \quad \frac{3}{2}$

$(D) \quad \sqrt{2}$

$(E) \quad 2\sqrt{2}$

Solution

$\log_2 x^2 + \log_x 2 = 3$

$\Rightarrow 2\log_2 x + \log_x 2 = 3$

$\Rightarrow 2\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 3$

$\Rightarrow 2\log_2^2 x + 1 = 3\log_2 x$

令$t = \log_2 x$，則

$2t^2 + 1 = 3t$

$\Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$，得到$t = \frac{1}{2}$或$t = 1$

分別還原得到$x = \sqrt{2}$或$x = 2$，因此$\alpha = \sqrt{2}$，$\beta = 2$

因此$\alpha\beta = 2\sqrt{2}$，故選(E)

102-02-10

Statement

設$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，則$\sin^3\theta + \cos^3\theta = ?$

$(A) \quad \frac{4}{9}$

$(B) \quad \frac{\sqrt{2}}{3}$

$(C) \quad \frac{\sqrt{19}}{9}$

$(D) \quad \frac{2\sqrt{5}}{9}$

$(E) \quad \frac{5\sqrt{7}}{16}$

Solution

$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

又$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

因此$-2\sin\theta\cos\theta = \frac{-3}{4}$，得到$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}$

因此$(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{\sqrt{7}}{2}$

代入原式，得到$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}(1 - \frac{3}{8}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$，故選$(E)$

102-02-11

Statement

若直線通過點$P(3,4)$且兩軸截距均為整數，則滿足條件的直線共有幾條?

(A) 3

(B) 6

(C) 9

(D) 12

(E) 15

Solution

利用點斜式，$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

整理方程式，得到$xb + ay = ab$

帶入點$(3,4)$，得到$3b + 4a = ab \Rightarrow 3b + 4a - ab = 0 \Rightarrow ab - 3b - 4a = 0$

將$ab - 3a - 4a = 0$寫成$(b-4)(a-3) = 12$

令$u = (b-4), v = (a-3)$，那麼$uv = 12$

因為$a, b \in \mathbb{Z}$，因此$u, v \in \mathbb{Z}$

窮舉uv的u為整數的所有可能，可以知道一定會是12的因數。

因此考慮所有可以整除12的整數，得到$[-1,-2,-3,-4,-6,-12,1,2,3,4,6,12]$

代換回去後可得到b，因此答案為12個，故選(D)

102-02-12

Statement

已知圓$x^2+y^2=10$與圓$x^2+y^2-2x+4y=5$有兩交點，則以此兩交點與兩圓心為頂點所連接成的四邊形的面積為何？

$(A)\quad 4\sqrt{2}$

$(B)\quad 6$

$(C)\quad 2\sqrt{10}$

$(D)\quad \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

$(E)\quad 3\sqrt{5}$

Solution 1

> Trava的精簡解

設$O_1=(0,0)$，$O_2=(1,-2)$

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{(0-1)^2+(0-(-2))^2}=\sqrt{5}$

設兩交點A,B，則四邊形O_1AO_2B可知$\overline{O_1A}=\overline{AO_2}=\overline{O_2B}=\overline{BO_1}=\sqrt{10}$

利用餘弦定理

$5=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\times 10\times\cos O_1AO_2$

因此$\cos O_1AO_2=\dfrac{3}{4}$，而$\sin O_1AO_2=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

因此面積為$2\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$，故選$(D)$

Solution 2

> Uriah的行列式解

已知圓$x^2+y^2=10$的圓心為$(0,0)$

圓$x^2+y^2-2x+4y=5$透過配方法可得$(x-1)^2+(y+2)^2=10$，圓心為$(1,-2)$

對兩式解聯立

可得$10-2x+4y=5$，也就是$2x-4y=5$

因此可得$x=\dfrac{5+4y}{2}=2y+\dfrac{5}{2}$

$(2y+\dfrac{5}{2})^2+y^2=10$

$\Rightarrow 4y^2+10y+\dfrac{25}{4}+y^2=10$

$\Rightarrow 5y^2+10y-\dfrac{15}{4}=0$

$\Rightarrow 20y^2 + 40y - 15 = 0$

因此得到$y = -1 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$，$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{7}$

得到兩交點$(\frac{1}{2} + \sqrt{7}, -1 + \frac{\sqrt{7}}{2})$與$(\frac{1}{2} - \sqrt{7}, -1 - \frac{\sqrt{7}}{2})$

利用行列式求面積，$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{7} & 0 & \frac{1}{2} + \sqrt{7} & 1 & \frac{1}{2} - \sqrt{7} \\ -1 - \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & -1 + \frac{\sqrt{7}}{2} & -2 & -1 - \frac{\sqrt{7}}{2} \end{vmatrix} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$，故選$(D)$

102-02-13

Statement

若一數列前n項的和為$a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 + 5$，則$a_5 + a_{10} + a_{15} + ... + a_{50} = ?$

(A) 175
(B) 250
(C) 320
(D) 450
(E) 540

Solution

設$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 + 5$

觀察一下通式，可知若$a_i - a_j$，其中$i \neq j$，則$a_i - a_j = (i^2 - j^2) = (i - j)(i + j)$

又因若要求得a_5，則可用$(a_1 + a_2 + ... + a_5) - (a_1 + a_2 + ... + a_4)$

因此$a_5 = S_5 - S_4 = (5 - 4)(5 + 4) = (5 + 4)$

因此$a_5 + a_{10} + a_{15} + ... + a_{50} = (5 + 4) + (10 + 9) + (15 + 14) ... + (50 + 49)$

也就是首項為9，公差為10，末項99的等差數列和

因此$a_5 + a_{10} + a_{15} + ... + a_{50} = \frac{(9 + 99)(\frac{99 - 9}{10} + 1)}{2} = 540$，故選$(E)$

102-02-14

Statement

不等式$4^{x + \frac{1}{2}} - 8 \cdot 2^{x+1} \leq 2^x - 8$，共有幾個整數解？

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$4^{x+\frac{1}{2}} - 8 \cdot 2^{x+1} \leq 2^x - 8$

$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 16 \cdot 2^x \leq 2^x - 8$

令$t = 2^x$，則

$2t^2 - 16t \leq t - 8$

$\Rightarrow 2t^2 - 17t + 8 \leq 0$

$\Rightarrow (2t-1)(t-8) \leq 0$

得到$\frac{1}{2} \leq t \leq 8$

還原t，得到$-1 \leq x \leq 3$

故共有5個整數解，故選(D)

102-02-15

Statement

若$f(x) = \sqrt{2-x}$，$g(x) = \sqrt{3-x}$，則g與f的合成函數$g \circ f$的定義域為何？

$(A) \quad [2, 3]$

$(B) \quad (2, 3)$

$(C) \quad [-7, 2]$

$(D) \quad [2, 7]$

$(E) \quad (2, 7)$

Solution

$g(f(x)) = \sqrt{3 - \sqrt{2-x}}$，可知$2 - x \geq 0$，因此$x \leq 2$

又因$3 - \sqrt{2-x} > 0$，因此$\sqrt{2-x} < 3$，$x \geq -7$

因此得到$x \in [-7, 2]$，故選(C)

102-02-16

Statement

在向量ΔABC中，向量$\overrightarrow{ab} =< 1, 2 >$，$\overrightarrow{ac} =< -x, 2x >$，$x > 0$

若ΔABC之周長為$6\sqrt{5}$，則$x = ?$

$(A) \quad \frac{10}{11}$

$(B)\quad \frac{20}{11}$

$(C)\quad \frac{30}{11}$

$(D)\quad \frac{40}{11}$

$(E)\quad \frac{50}{11}$

Solution

$\overrightarrow{ac} =< -x, 2x >$，可知$\overrightarrow{ca} =< x, -2x >$

因此$\overrightarrow{bc} =< -x-1, 2x-2 >$

長度$\sqrt{1^2+2^2}+\sqrt{(-x)^2+(2x)^2}+\sqrt{(-x-1)^2+(2x-2)^2}=6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5}+\sqrt{5x^2}+\sqrt{5x^2-6x+5}=6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5}+\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2-6x+5}=6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5x^2-6x+5}=5\sqrt{5}-\sqrt{5}x$

$\Rightarrow 5x^2-6x+5=125-50x+5x^2$

$\Rightarrow 44x=120$

$x=\frac{30}{11}$

因此$x=\frac{30}{11}$，故選(C)

102-02-17

Statement

若$f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$，$g(x)=\frac{3x+x^3}{1+3x^2}$，則$f(g(x))=?$

$(A)\quad \frac{1}{f(x)}$

$(B)\quad f^2(x)$

$(C)\quad 2f(x)$

$(D)\quad 3f(x)$

$(E)\quad 4f(x)$

Solution

$f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$

$f(g(x)) = \log(\frac{x^3+3x^2+3x+1}{1+3x^2}) - \log(\frac{1+3x^2-3x-x^3}{1+3x^2})$

$= \log(\frac{(x+1)^3}{1+3x^2}) - \log(\frac{-(x-1)^3}{1+3x^2})$

$= \log(\frac{x+1}{-(x-1)})^3$

$= 3\log(\frac{1+x}{1-x}) = 3f(x)$，故選$(D)$

102-02-18

Statement

若$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x+3}-2} = 12$，則$ab = ?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x+3}-2} = 12$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+ax+b)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = 12$

極限有值，因此(x^2+ax+b)應可被$(x-1)$整除

因此$a+b=-1$，$(x^2+ax+b)\div(x-1) = x+(a+1)$

$\lim\limits_{x\to1}(x+(a+1))(\sqrt{x+3}+2) = 12$

$\Rightarrow (2+a)(4) = 12$

$\Rightarrow a = 1$

帶回$a+b=-1$，得$b=-2$

因此$ab=-2$，故選(A)

102-02-19

Statement

設$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，則$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h^2+2h}=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(B)\quad \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$(C)\quad \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

$(D)\quad \dfrac{-1}{4\sqrt{2}}$

$(E)\quad \dfrac{-1}{8\sqrt{2}}$

Solution 1

> Trava的精簡解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h^2+2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+2}$$

$$=f'(2)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+2}$$

$=\dfrac{-1}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{8\sqrt{2}}$，故選$(E)$

Solution 2

> Uriah的暴力解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h^2+2h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{2+h}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{h^2+2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2+h})}{(h^2+2h)(\sqrt{4+2h})}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2-h})(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2+2h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2-2-h)(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2+2h)(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-h)(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2+2h)(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h+2)(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})}$$

$= \dfrac{-1}{8\sqrt{2}}$，故選(E)

102-02-20

Statement

已知Γ表$y = x^2$之圖形，若將Γ水平方向拉長2倍，往右平移1單位，再對x軸反射，得一個新的圖形，則此新圖形之表示式為何？

$(A)\quad y = -(\frac{x}{2}+1)^2$

$(B)\quad y = -\frac{(x+1)^2}{2}$

$(C)\quad y = -\frac{(x-1)^2}{2}$

$(D)\quad y = -(\frac{x-1}{2})^2$

$(E)\quad y = \frac{(1-x)^2}{2}$

Solution

因為往右平移1單位，所以x改寫成$x-1$

然後x擴增兩倍，所以改寫成$\dfrac{x-1}{2}$

對x軸反射→加上一個負號，所以$y = -(\dfrac{x-1}{2})^2$，故選(D)