106年第1次北科入學數學會考

106-01-01

Statement

已知點A在圓$x^2+12x+y^2+32=0$上，且點B在圓$x^2+y^2+16y+55=0$，則$\overline{AB}$之長度最小值為何？

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) 9

Solution

用配方法改寫式子

$x^2+12x+y^2+32=0 \Rightarrow (x+6)^2+y^2=4$，圓心為$(-6,0)$且半徑為$2$

$x^2+y^2+16y+55=0 \Rightarrow x^2+(y+8)^2=9$，圓心為$(0,-8)$且半徑為$3$

兩圓心距離為$\sqrt{6^2+8^2}=10$，大於兩半徑和，因此$\overline{AB}>0$

故$\overline{AB}=10-2-3=5$，故選(A)

106-01-02

Statement

若橢圓方程式$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=10$，則橢圓短軸長為何？

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

由方程式可以知道

焦點為$(1,5)$與$(1,-3)$，因此$2c=5-(-3)=8$，$c=4$

長軸長$2a=10$，因此$a=5$

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9}=3$，因此橢圓短軸長為$2b=6$，故選$(E)$

106-01-03

Statement

若直線L與直線$5x+7y=1$垂直，且L通過兩直線$2x-3y+1=0$與$4x+5y-9=0$的交點，則L的方程式為何？

(A)　$5x-7y=-2$

(B)　$5x+7y=12$

(C)　$7x-5y=2$

(D)　$7x+5y=12$

(E)　$7x+5y=20$

Solution

直線L與直線$5x+7y=1$垂直，設$L:7x-5y=d$

且L通過兩直線$2x-3y+1=0$與$4x+5y-9=0$的交點

因此解聯立方程組$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+5y-9=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,1)$

帶入直線L，得到$d=2$，因此$L:7x-5y=2$，故選(D)

106-01-04

Statement

$\log_2 216-\log_4 9-\log_2 9=?$

(A)　2

(B)　3

(C)　4

(D)　5

(E)　6

Solution

$\log_2 216-\log_4 9-\log_2 9$

$=\log_2 216-\log_2 3-\log_2 9=\log_2 8=3$，故選$(B)$

106-01-05

Statement

設α, β為方程式$x^2-2x-1=0$的兩根，則$\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=?$

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -\dfrac{1}{2}$

$(C)\quad -\dfrac{1}{3}$

$(D)\quad \dfrac{1}{6}$

$(E)\quad \dfrac{1}{2}$

Solution

利用根與係數

$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{1}=2$

$\alpha\beta=\dfrac{-1}{1}=-1$

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=4\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=6$

$\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{(-1)(2)}{6}=-\dfrac{1}{3}$，故選$(C)$

106-01-06

Statement

設$\dfrac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$且$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，則$\sqrt{2+2\cos 2\theta}=?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad \dfrac{4}{5}$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad \dfrac{6}{5}$

$(E)\quad \dfrac{8}{5}$

Solution

$\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow \cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

因此$\sqrt{2+2\cos 2\theta} = \sqrt{2+\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$，故選$(E)$

106-01-07

Statement

已知$f(x)$為二次函數且$f(x) > 0$的解為$-1 < x < \frac{1}{2}$，則$f(2x) < 0$的解為何？

(A) $x < -1$或$x > \frac{1}{2}$

(B) $x < -2$或$x > 1$

(C) $-2 < x < 1$

(D) $x < -\frac{1}{2}$或$x > \frac{1}{4}$

(E) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}$

Solution

$\because f(x) > 0$的解為$-1 < x < \frac{1}{2}$

$\therefore f(x) < 0$的解為$x < -1 \cup x > \frac{1}{2}$

$\therefore f(2x) < 0$的解為$x < \frac{-1}{2} \cup x > \frac{1}{4}$，故選$(D)$

106-01-08

Statement

設α, β為方程式$\log_3 x = 5 - \frac{4}{\log_3 x}$之兩根，則$\alpha + \beta =?$

(A) 84

(B) 85

(C) 86

(D) 87

(E) 88

Solution

$\log_3 x = 5 - \dfrac{4}{\log_3 x}$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 5\log_3 x - 4$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0$

$\Rightarrow (\log_3 x - 4)(\log_3 x - 1) = 0$

$\Rightarrow \log_3 x = 4, \log_3 x = 1$

$\Rightarrow x = 81, x = 3$

因此$81 + 3 = 84$，故選(A)

106-01-09

Statement

求$2 \cdot 9^x - 39 \cdot 3^{x-1} - 45 = 0$，則$x = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$2 \cdot 9^x - 39 \cdot 3^{x-1} - 45 = 0$

$\Rightarrow 2 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 3^x - 45 = 0$

令$t = 3^x$，解$2t^2 - 13t - 45 = (t + \dfrac{5}{2})(t - 9) = 0$，$t = -\dfrac{5}{2}$(不合)，$t = 9$

從$t = 9$還原後，得到$x = 2$，故選(B)

106-01-10

Statement

下列何者正確？

(A) $\sin\dfrac{3\pi}{4} < \cos\dfrac{3\pi}{4}$

(B) $\cos(-\theta) = -\cos\theta$

(C) $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$

(D) $\sec(\dfrac{\pi}{2} + \theta) = -\csc\theta$

(E) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

Solution

$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$

106-01-11

Statement

若$13^5-11\cdot13^4-25\cdot13^3-12\cdot13^2+a\cdot13-13=0$，求$a=?$

(A) -12

(B) -11

(C) 1

(D) 7

(E) 17

Solution

$13^5-11\cdot13^4-25\cdot13^3-12\cdot13^2+a\cdot13-13=0$

等價於$f(x)=x^5-11x^4-25x^3-12x^2+ax-13$能被$x-13$整除

利用綜合除法來找出a

1	-11	-25	-12	a	-13	
	13	26	13	13	13a+169	13
1	2	1	1	(a+13)	13a+156	

考慮$13a+156=0$，得到$a=-12$

106-01-12

Statement

設拋物線方程式為$x=ay^2+b$，其中$a>0$。若此拋物線過$(0,\sqrt{2})$且焦點坐標為$(-\frac{1}{2},0)$，則$a-b=?$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{7}{4}$

(D) 2

$(E)\quad \frac{7}{2}$

Solution

$x=ay^2+b\Rightarrow \frac{1}{a}(x-b)=y^2$

因此頂點為$(b,0)$，且焦距為$\frac{1}{4a}$，雙曲線為左右向

拋物線過$(0,\sqrt{2})$，帶入後$\frac{-b}{a}=2\Rightarrow 2a+b=0$

焦點坐標為$(-\frac{1}{2},0)$，因此$b+\frac{1}{4a}=\frac{-1}{2}\Rightarrow 4ab+2a+1=0$

兩式$\begin{cases}2a+b=0\\4ab+2a+1=0\end{cases}$解聯立，得到$(a,b)=(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$(不合)或$(a,b)=(\frac{1}{2},-1)$

因此$a-b=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$，故選$(B)$

106-01-13

Statement

若$f(x)=x^3-4x^2+2x+k$且$f(1+\sqrt{3})=2$，求$k=?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 6$

Solution 1

> 綜合除法解 by Trava

$f(x)=x^3-4x^2+2x+k=(x-1)^3-(x-1)^2-3(x-1)+k-1$

則$f(1+\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-(\sqrt{3})^2-3\sqrt{3}+k-1=2$

得到$k=6$，故選(E)

Solution 2

> 暴力解 by Uriah

$f(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^3-4(1+\sqrt{3})^2+2(1+\sqrt{3})+k=2$

$=10+6\sqrt{3}-4(4+2\sqrt{3})+2(1+\sqrt{3})+k=2$

$=10-16+2+k=2$，得到$k=6$，故選(E)

106-01-14

Statement

已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$之夾角為θ，若$|\vec{a}| = 2$、$|\vec{b}| = 4$且$(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = -4$，則$\theta =?$

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

Solution

$(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 6|\vec{a}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b}) - 2|\vec{b}|^2 = -4$

得到$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 4$

又$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = 8\cos\theta = 4$

因此$\cos\theta = \frac{1}{2}$，$\theta = \frac{\pi}{3}$，故選(D)

106-01-15

Statement

若雙曲線方程式$x^2 - 2x - 4y^2 - 3 = 0$之兩頂點坐標為(a, b)與(c, d)，則$a + b + c + d =?$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$x^2 - 2x - 4y^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 - 4y^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$

得到中心為$(x, y) = (1, 0)$，因此頂點過$y = 0$

帶入$y = 0$後得到$x = -1$或$x = 3$

因此頂點為$(-1,0)$與$(3,0)$

$a+b+c+d=(-1)+0+3+0=2$，故選(C)

106-01-16

Statement

設(a,b)滿足$3x+4y=12$，則$(a-4)^2+(b-5)^2$最小值為何？

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 8$

$(C)\quad 12$

$(D)\quad 16$

$(E)\quad 20$

Solution 1

> 柯西不等式解 by Trava

已知$3a+4b=12$

則$((a-4)^2+(b-5)^2)(3^2+4^2)\geq(3a+4b-12-20)^2$

$\Rightarrow((a-4)^2+(b-5)^2)(25)\geq(-20)^2$

$\Rightarrow((a-4)^2+(b-5)^2)\geq 16$，故選$(D)$

Solution 2

> 點到直線距離解 by Trava

$d^2=(\frac{|12+20-12|}{\sqrt{3^2+4^2}})^2=16$

Solution 3

> 配方法解 by Uriah

動點$P=(\frac{12-4b}{3},b)$在$3x+4y=12$上

帶入P至$(a-4)^2+(b-5)^2$內，得到$(\frac{-4b}{3})^2+(b-5)^2$

配方法後得到$\frac{25}{9}(b+\frac{9}{5})^2+16$

因此在$b=-\frac{9}{5}$時有最小值16，故選(D)

106-01-17

Statement

已知x^2-3x+2除$f(x)$的餘式為$2x+5$且x^2+2x-3除$g(x)$的餘式為$3x-1$，則$x-1$除$[f(x)+g(x)]$的餘式為何？

$(A)\quad -2$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 9$

Solution

設$h(x), v(x)$分別為$f(x)$除x^2-3x+2與$g(x)$除x^2+2x-3的餘式

$f(x)=(x^2-3x+2)h(x)+2x+5=(x-2)(x-1)h(x)+2x+5$

$g(x)=(x^2+2x-3)v(x)+3x-1=(x+3)(x-1)v(x)+3x-1$

因此$x-1$除$[f(x)+g(x)]$的餘式為$2\cdot 1+5+3\cdot 1-1=9$，故選(E)

106-01-18

Statement

設$\pi<\theta\leq\frac{3\pi}{2}$且$18\sin^2\theta+9\cos\theta-13=0$，則$\tan\theta=?$

$(A)\quad \frac{\sqrt{2}}{4}$

$(B)\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(C)\quad \sqrt{2}$

$(D)\quad 2\sqrt{2}$

$(E)\quad 3\sqrt{2}$

Solution

$18\sin^2\theta+9\cos\theta-13=0$

$\Rightarrow -18\cos^2\theta+9\cos\theta+5=0$

$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{3}$或$\cos\theta=\frac{5}{6}$(不合)

因此$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=2\sqrt{2}$，故選$(D)$

106-01-19

Statement

令向量$\vec{a} =< 1,1 >$、$\vec{b} =< 2-x, y-1 >$。若$y > 0$、$2|\vec{a}| = |\vec{b}|$且$\vec{a} \perp \vec{b}$，則$(x, y) =?$

(A) $(-1,-2)$

(B) $(3,2)$

(C) $(4,3)$

(D) $(5,4)$

(E) $(6,5)$

Solution

$\because \vec{a} \perp \vec{b}$

$\therefore (2-x)+(y-1)=0 \Rightarrow -x+y+1=0$

又$\sqrt{(2-x)^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{2}$

得到$x^2+y^2-2y-4x+5 = (x-2)^2+(y-1)^2 = 8$

將$x = y+1$代入，得到$2(y-1)^2 = 8$，因此$y = -1$(不合)或$y = 3$

將$y = 3$代入$-x+y+1 = 0$，得到$x = 4$

因此$(x, y) = (4,3)$，故選(C)

109-01-20

Statement

$\dfrac{-7x+22}{(x+4)(x-1)^2} = \dfrac{A}{x+4} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$，求$A+B+C =?$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$-7x+22 = A(x-1)^2 + B(x+4)(x-1) + C(x+4)$

將$x = 1$代入，得到$15 = 5C$，因此$C = 3$

將$x = -4$代入，得到$25A = 50$，因此$A = 2$

將$x = 0$代入，得到$22 = 2-4B+12$，因此$B = -2$

因此$A+B+C=3$，故選(B)