107年第2次北科入學數學會考

107-02-01

Statement

設拋物線$y=ax^2+bx-c$，a、b、c皆為正實數，則下列敘述何者正確？

(A) 開口向下

(B) 與x軸無交點

(C) 交於正y軸

(D) 頂點在第三象限

(E) 準線平行y軸

Solution

$y=ax^2+bx-c$

$\Rightarrow y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})-\frac{b^2}{4a}-c$

$\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})-\frac{b^2}{4a}-c$

因此可知頂點為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2+4ac}{4a})$，必在第三象限，故選$(D)$

107-02-02

Statement

$(150x^5-312x^4+28x^3-13x-9)\div(x-2)$的餘式為何？

(A) -19

(B) -3

(C) -1

(D) 1

(E) 3

Solution

利用綜合除法

```
150 -312  28  0 -13 -9 |
     300 -24  8  16  6 | 2
------------------------
150  -12   4  8   3 -3
```

可得餘式為-3，故選(B)

107-02-03

Statement

設$Q(a,b)$為直線$L:2x-y=4$到$P(1,3)$的最近點，則$a+b=$?

(A) 2

(B) $\frac{7}{2}$

(C) 5

(D) $\frac{13}{2}$

(E) 7

Solution

考慮做一直線M垂直直線L，且過點$(1,3)$

因此直線$M:x+2y=d$，代入$(1,3)$得到$d=7$

找直線L與直線M的交點，解聯立方程組$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(3,2)$

因此$Q(a,b)=(3,2)$，$a+b=5$，故選(C)

107-02-04

Statement

設有一橢圓中心在$(1,1)$，其長軸平行x軸且長軸長為短軸長的3倍，並通過$(4,0)$，則短軸長為何？

(A) $2\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{3}$

(C) $2\sqrt{5}$

(D) $2\sqrt{6}$

(E) $4\sqrt{2}$

Solution

設$2a=3\times 2b=6b$，因此$a=3b$

可列式$\dfrac{(x-1)^2}{9b^2}+\dfrac{(y-1)^2}{b^2}=1$

代入$(4,0)$可得$b=\sqrt{2}$，因此短軸長$2b=2\sqrt{2}$，故選(A)

107-02-05

Statement

若直線$3x+4y+k=0$與圓$x^2+y^2+8x+16y-20=0$相切且$k<0$，則$k=?$

$(A)\quad -8$

$(B)\quad -6$

$(C)\quad -4$

$(D)\quad -3$

$(E)\quad -2$

Solution

$x^2+y^2+8x+16y-20=0$

透過配方法後可得$(x+4)^2+(y+8)^2=100$

可得半徑為10且中心為$(-4,-8)$

考慮直線與圓相切，因此直線與中心相隔的距離為10

利用點到直線公式，$\dfrac{|3x+4y+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=10$

將x,y代入$(-4,-8)$，得到$|-44+k|=50$，因此$k=-6$或$k=94$(不合)，故選(B)

107-02-06

Statement

設$\vec{a}=<1,t-1>$、$\vec{b}=<2t-2,t+2>$。若$\vec{a}\perp\vec{b}$且$|\vec{b}|>2$，則$t=?$

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 4$

Solution

已知$\vec{a} \perp \vec{b}$，因此$2t-2+(t+2)(t-1)=t^2+3t-4=(t+4)(t-1)=0$

故$t=-4$或$t=1$

考慮$t=1$，得到$\vec{b}=<0,3>=\sqrt{0^2+3^2}=3$

考慮$t=-4$，得到$\vec{b}=<-10,-2>=\sqrt{10^2+2^2}=\sqrt{104}$

故兩者皆可，故選$(A),(C)$

107-02-07

Statement

設$f(x)=(5^{2x}+5^{-2x})-(5^x+5^{-x})+3$，則$f(x)$的最小值為何？

(A)　1

(B)　2

(C)　3

(D)　4

(E)　5

Solution

令$t=5^x+5^{-x}$，則$t^2=5^{2x}+5^{-2x}+2$

因此$f(t)=t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

利用算幾不等式，得到$\frac{5^x+5^{-x}}{2}\geq\sqrt{1}$，得到$t$的最小值域為$2$，故$t=\frac{1}{2}$不在值域內。

將2帶入$f(t)$得到$f(2)=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3$，故選$(C)$

107-02-08

Statement

不等式$x^2-4x+2\geq|x-2|$的解為何？

(A)　$(-\infty,0]\cup[1,\infty)$

(B)　$(-\infty,0]\cup[2,\infty)$

(C)　$(-\infty,0]\cup[4,\infty)$

(D)　$(-\infty,1]\cup[2,\infty)$

(E)　$(-\infty,1]\cup[4,\infty)$

Solution

考慮$|x-2|=x-2$，則

$x^2-4x+2\geq x-2$

$\Rightarrow x^2-5x+4\geq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 4$或$x\leq 1$

考慮$|x-2|=-x+2$，則

$x^2-4x+2\geq -x+2$

$\Rightarrow x^2-3x\geq 0$

$\Rightarrow x(x-3)\geq 0$

$\Rightarrow x\leq 0$或$x\geq 3$

兩種結果取交集，得到$(-\infty,0]\cup[4,\infty)$，故選$(C)$

107-02-09

Statement

設$a=\log\frac{4}{3}$、$b=\log\frac{2}{3}$，則$\log 24=?$

$(A)\quad 2a-5b$

$(B)\quad 3a-5b$

$(C)\quad 4a-5b$

$(D)\quad 4a-4b$

$(E)\quad 4a-3b$

Solution

$4a-5b=4\log\frac{4}{3}-5\log\frac{2}{3}=\log((\frac{4}{3})^4\cdot(\frac{3}{2})^5)=\log 3\cdot 2^3=\log 24$，故選$(C)$

107-02-10

Statement

設方程式$3^{x^2}\cdot(3^x)^2=27$之所有解為α與β，則$\alpha^2+\beta^2=?$

$(A)\quad 10$

$(B)\quad 11$

(C) 12

(D) 13

(E) 14

Solution

$3^{x^2} \cdot (3^x)^2 = 27$

$\Rightarrow 3^{x^2} \cdot 3^{2x} = 3^3$

$\Rightarrow 3^{x^2+2x-3} = 1$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$

可得$x = 1$或$x = -3$

因此$\alpha^2 + \beta^2 = (1)^2 + (-3)^2 = 10$，故選$(A)$

107-02-11

Statement

$\sin(-23^\circ)\sin 367^\circ + \cos 7^\circ \sin(-247^\circ) =?$

(A) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

(B) $\dfrac{-1}{2}$

(C) $\dfrac{1}{2}$

(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$\sin(-23^\circ)\sin 367^\circ + \cos 7^\circ \sin(-247^\circ)$

$= -\sin(23^\circ)\sin 7^\circ + \cos 7^\circ \cos(23^\circ)$

$= \cos(30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故選$(E)$

107-02-12

Statement

若$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，則$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(3x-1)-f(x+1)}{x-1}=?$

$(A)\quad \sqrt{2}$

$(B)\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(C)\quad \frac{\sqrt{2}}{4}$

$(D)\quad \frac{-\sqrt{2}}{4}$

$(E)\quad \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Solution

令$h=x-1$，則$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(3x-1)-f(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3h+2)-f(h+2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3h+2)-f(2)-f(h+2)+f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3h+2)-f(2)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}$

$=3\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3h+2)-f(2)}{3h}-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}$

$=3\cdot f'(2)-f'(2)=2f'(2)=2\cdot -\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{4}$，故選$(D)$

107-02-13

Statement

若甲乙兩人解方程式$x^2+mx+n=0$，甲看錯m解得兩根為-3、5，乙看錯n解得兩根為-4、2，則原方程式的兩根為何？

$(A)\quad -3$、-4

$(B)\quad -3$、2

$(C)\quad -4$、5

$(D)\quad 2$、5

$(E)\quad 3$、-5

Solution

甲的方程式為$(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$

乙的方程式為$(x+4)(x-2)=x^2+2x-8$

因此可得原方程式為$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$，解為$x=-5$或$x=3$，故選(E)

107-02-14

Statement

設$\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$，則$B=?$

$(A)\quad -7$

$(B)\quad -5$

$(C)\quad -3$

$(D)\quad -1$

$(E)\quad 2$

Solution

$$\frac{x^2+x-3}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$\Rightarrow x^2+x-3=A(x^2-x+1)(x-1)+B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x-1)^2$

故代$x=1$，得$-1=B$，故選(D)

107-02-15

Statement

設直線L通過$P(1,6)$且與第二象限所圍的三角形面積為4，則直線L的方程式為

$(A)\quad 4x-y=2$

$(B)\quad x+4y=5$

$(C)\quad 2x-y=-4$

$(D)\quad 2x+y=8$

$(E)\quad 4x+y=4$

Solution

令$L:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，又已知$ab=-8$，得$a=\frac{-8}{b}$

將L代入$P(1,6)$，$L:\frac{1}{a}+\frac{6}{b}=1$

代入$a=\frac{-8}{b}$，$L:-\frac{b}{8}+\frac{6}{b}=1$

$\Rightarrow \frac{-b^2}{8}+6=b$

$\Rightarrow -b^2-8b+48=0$

$\Rightarrow (b+12)(b-4)=0$

得到$b=4$或$b=-12$(不合，$ab>0$)

因此$a=-2$，代入得$2x-y=-4$，故選(C)

107-02-16

Statement

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 1$

$(C)\quad -1$

$(D)\quad -2$

(E) 不存在

Solution

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}=\frac{2}{-2}=-1$$，故選(C)

107-02-17

Statement

設$a=\log 2$、$b=\log 3$。若x滿足$5^x-6\cdot 5^{-x}=1$，則$x=?$

$(A)\quad \dfrac{a}{1+b}$

$(B)\quad \dfrac{b}{1+a}$

$(C)\quad \dfrac{b}{a}$

$(D)\quad \dfrac{b}{1-a}$

$(E)\quad \dfrac{a}{1-b}$

Solution

$5^x-6\cdot 5^{-x}=1$

$\Rightarrow 5^{2x}-6=5^x$

$\Rightarrow 5^{2x}-5^x-6=0$

設$t=5^x$，則

$t^2-t-6=0$

$\Rightarrow (t-3)(t+2)=0$

得到$t=-2$(不合)或$t=3$

還原t得到$x=\log_5 3=\dfrac{b}{1-a}$，故選$(D)$

107-02-18

Statement

函數$f(x)=\tan^2 x-\sec x+4$之最小值為何？

$(A)\quad \dfrac{11}{4}$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad \dfrac{13}{4}$

$(D)\quad \dfrac{7}{2}$

$(E)\quad \dfrac{15}{4}$

Solution

$f(x)=\tan^2 x-\sec x+4$

$=\sec^2 x-1-\sec x+4$

$=\sec^2 x-\sec x+3$

$=(\sec^2 x-\sec x+\frac{1}{4})+3-\frac{1}{4}$

$=(\sec x-\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}$

由於$\sec x$的值域為$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$，因此$\frac{1}{2}$不在$\sec x$的值域內

從值域考慮$\sec x=1$，得最小值為3，故選(B)

107-02-19

Statement

設$f(x)=\sqrt{5-x}$、$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$，則合成函數$g\circ f$的定義域為何？

$(A)\quad(-4,5]$

$(B)\quad[-4,5)$

$(C)\quad[-4,3)$

$(D)\quad(-4,3]$

$(E)\quad[3,5]$

Solution

$(g\circ f)(x)=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5-x}}}$

考慮$\sqrt{3-\sqrt{5-x}}>0$，則$3-\sqrt{5-x}>0$，得到$x>-4$

考慮$\sqrt{5-x}$裡面的值必須要是非負整數，因此$x\leq 5$

兩者取交集得到$(-4,5]$，故選(A)

107-02-20

Statement

若$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+(a-3)x-3a}{x^2+3x+2}=b$，則$ab=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 6$

(D) 8

(E) 10

Solution

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+(a-3)x-3a}{x^2+3x+2}=b$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^2+(a-3)x-3a}{(x+2)(x+1)}=b$$

考慮到極限存在，則分子必須要能被$(x+2)$整除

因此$4+(-2)(a-3)-3a=0$，得到$a=2$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}=b$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+1)}=5$$

故$b=5$，因此$ab=10$，故選(E)