107年第2次北科入學數學會考

107-02-01

Statement

設拋物線$y=ax^2+bx-c$，a、b、c皆為正實數，則下列敘述何者正確？

(A) 開口向下

(B) 與x軸無交點

(C) 交於正y軸

(D) 頂點在第三象限

(E) 準線平行y軸

Solution

$y=ax^2+bx-c$

$\Rightarrow y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})-\frac{b^2}{4a}-c$

$\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})-\frac{b^2}{4a}-c$

因此可知頂點為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2+4ac}{4a})$，必在第三象限，故選$(D)$

107-02-02

Statement

$(150x^5-312x^4+28x^3-13x-9)\div(x-2)$的餘式為何？

(A) -19

(B) -3

(C) -1

(D) 1

(E) 3

Solution

利用綜合除法

```
  150  -312   28  -13   -9 |
        300  -24    8  -10 | 2
--------------------------------
  150   -12    4   -5  -19
```

可得餘式為-19，故選(A)

107-02-03

Statement

設$Q(a,b)$為直線$L:2x-y=4$到$P(1,3)$的最近點，則$a+b=?$

(A)　2

(B)　$\frac{7}{2}$

(C)　5

(D)　$\frac{13}{2}$

(E)　7

Solution

考慮做一直線M垂直直線L，且過點$(1,3)$

因此直線$M:x+2y=d$，代入$(1,3)$得到$d=7$

找直線L與直線M的交點，解聯立方程組$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(3,2)$

因此$Q(a,b)=(3,2)$，$a+b=5$，故選(C)

107-02-04

Statement

設有一橢圓中心在$(1,1)$，其長軸平行x軸且長軸長為短軸長的3倍，並通過$(4,0)$，則短軸長為何？

(A)　$2\sqrt{2}$

(B)　$2\sqrt{3}$

(C)　$2\sqrt{5}$

(D)　$2\sqrt{6}$

(E)　$4\sqrt{2}$

Solution

設$2a = 3 \times 2b = 6b$，因此$a = 3b$

可列式$\dfrac{(x-1)^2}{9b^2} + \dfrac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

代入$(4,0)$可得$b = \sqrt{2}$，因此短軸長$2b = 2\sqrt{2}$，故選(A)

107-02-05

Statement

若直線$3x + 4y + k = 0$與圓$x^2 + y^2 + 8x + 16y - 20 = 0$相切且$k < 0$，則$k = ?$

$(A) \quad -8$

$(B) \quad -6$

$(C) \quad -4$

$(D) \quad -3$

$(E) \quad -2$

Solution

$x^2 + y^2 + 8x + 16y - 20 = 0$

透過配方法後可得$(x+4)^2 + (y+8)^2 = 100$

可得半徑為10且中心為$(-4,-8)$

考慮直線與圓相切，因此直線與中心相隔的距離為10

利用點到直線公式，$\dfrac{|3x + 4y + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 10$

將x, y代入$(-4,-8)$，得到$|-44 + k| = 50$，因此$k = -6$或$k = 94$(不合)，故選(B)

107-02-06

Statement

設$\vec{a} =< 1, t-1 >$、$\vec{b} =< 2t-2, t+2 >$。若$\vec{a} \perp \vec{b}$且$|\vec{b}| > 2$，則$t = ?$

$(A) \quad -4$

$(B) \quad -1$

$(C) \quad 1$

$(D) \quad 2$

$(E)\quad 4$

Solution

已知$\vec{a}\perp\vec{b}$，因此$2t-2+(t+2)(t-1)=t^2+3t-4=(t+4)(t-1)=0$

故$t=-4$或$t=1$

考慮$t=1$，得到$\vec{b}=<0,3>=\sqrt{0^2+3^2}=3$

考慮$t=-4$，得到$\vec{b}=<-10,-2>=\sqrt{10^2+2^2}=\sqrt{104}$

故兩者皆可，故選$(A),(C)$

107-02-07

Statement

設$f(x)=(5^{2x}+5^{-2x})-(5^x+5^{-x})+3$，則$f(x)$的最小值為何？

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

令$t=5^x+5^{-x}$，則$t^2=5^{2x}+5^{-2x}+2$

因此$f(t)=t^2-t+1=(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$

利用算幾不等式，得到$\dfrac{5^x+5^{-x}}{2}\geq\sqrt{1}$，得到$t$的最小值域為$2$，故$t=\dfrac{1}{2}$不在值域內。

將2帶入$f(t)$得到$f(2)=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{12}{4}=3$，故選$(C)$

107-02-08

Statement

不等式$x^2-4x+2\geq|x-2|$的解為何？

$(A)\quad (-\infty,0]\cup[1,\infty)$

$(B)\quad (-\infty,0]\cup[2,\infty)$

$(C)\quad (-\infty,0]\cup[4,\infty)$

$(D)\quad (-\infty,1]\cup[2,\infty)$

$(E)\quad(-\infty,1]\cup[4,\infty)$

Solution

考慮$|x-2|=x-2$，則

$x^2-4x+2\geq x-2$

$\Rightarrow x^2-5x+4\geq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 4$或$x\leq 1$

考慮$|x-2|=-x+2$，則

$x^2-4x+2\geq -x+2$

$\Rightarrow x^2-3x\geq 0$

$\Rightarrow x(x-3)\geq 0$

$\Rightarrow x\leq 0$或$x\geq 3$

兩種結果取交集，得到$(-\infty,0]\cup[4,\infty)$，故選$(C)$

107-02-09

Statement

設$a=\log\frac{4}{3}$、$b=\log\frac{2}{3}$，則$\log 24=?$

$(A)\quad 2a-5b$

$(B)\quad 3a-5b$

$(C)\quad 4a-5b$

$(D)\quad 4a-4b$

$(E)\quad 4a-3b$

Solution

$4a-5b=4\log\frac{4}{3}-5\log\frac{2}{3}=\log((\frac{4}{3})^4\cdot(\frac{3}{2})^5)=\log 3\cdot 2^3=\log 24$，故選$(C)$

107-02-10

Statement

設方程式$3^{x^2}\cdot(3^x)^2=27$之所有解為α與β，則$\alpha^2+\beta^2=?$

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

(E) 14

Solution

$3^{x^2}\cdot(3^x)^2=27$

$\Rightarrow 3^{x^2}\cdot 3^{2x}=3^3$

$\Rightarrow 3^{x^2+2x-3}=1$

$\Rightarrow x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow (x+3)(x-1)=0$

可得$x=1$或$x=-3$

因此$\alpha^2+\beta^2=(1)^2+(-3)^2=10$，故選$(A)$

107-02-11

Statement

$\sin(-23^\circ)\sin 367^\circ+\cos 7^\circ\sin(-247^\circ)=?$

(A) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{-1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$\sin(-23^\circ)\sin 367^\circ + \cos 7^\circ \sin(-247^\circ)$

$= -\sin(23^\circ)\sin 7^\circ + \cos 7^\circ \cos(23^\circ)$

$= \cos(30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故選$(E)$

107-02-12

Statement

若$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$，則$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(3x-1)-f(x+1)}{x-1}$ =?

$(A)\quad \sqrt{2}$

$(B)\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(C)\quad \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$(D)\quad \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$

$(E)\quad \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

Solution

令$h = x-1$，則$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(3x-1)-f(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3h+2)-f(h+2)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3h+2)-f(2)-f(h+2)+f(2)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3h+2)-f(2)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+2)-f(2)}{h}$

$= 3\cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3h+2)-f(2)}{3h} - \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+2)-f(2)}{h}$

$= 3\cdot f'(2) - f'(2) = 2f'(2) = 2\cdot -\dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$，故選$(D)$

107-02-13

Statement

若甲乙兩人解方程式$x^2+mx+n=0$，甲看錯m解得兩根為-3、5，乙看錯n解得兩根為-4、2，則原方程式的兩根為何？

$(A)\quad -3$、-4

$(B)\quad -3$、2

(C) -4、5

(D) 2、5

(E) 3、-5

Solution

甲的方程式為$(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$

乙的方程式為$(x+4)(x-2)=x^2+2x-8$

因此可得原方程式為$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$，解為$x=-5$或$x=3$，故選(E)

107-02-14

Statement

設$\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$，則$B=?$

(A) -7

(B) -5

(C) -3

(D) -1

(E) 2

Solution

$$\frac{x^2+x-3}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$\Rightarrow x^2+x-3=A(x^2-x+1)(x-1)+B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x-1)^2$

故代$x=1$，得$-1=B$，故選(D)

107-02-15

Statement

設直線L通過$P(1,6)$且與第二象限所圍的三角形面積為4，則直線L的方程式為

(A) $4x-y=2$

(B) $x+4y=5$

(C) $2x-y=-4$

(D) $2x+y=8$

(E) $4x+y=4$

Solution

令$L:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，又已知$ab=-8$，得$a=\frac{-8}{b}$

將L代入$P(1,6)$，$L:\frac{1}{a}+\frac{6}{b}=1$

代入$a=\frac{-8}{b}$，$L:-\frac{b}{8}+\frac{6}{b}=1$

$\Rightarrow \frac{-b^2}{8}+6=b$

$\Rightarrow -b^2-8b+48=0$

$\Rightarrow (b+12)(b-4)=0$

得到$b=4$或$b=-12$(不合，$ab>0$)

因此$a=-2$，代入得$2x-y=-4$，故選(C)

107-02-16

Statement

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 1$

$(C)\quad -1$

$(D)\quad -2$

(E) 不存在

Solution

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}=\frac{2}{-2}=-1$，故選$(C)$

107-02-17

Statement

設$a=\log 2$、$b=\log 3$。若x滿足$5^x-6\cdot 5^{-x}=1$，則$x=$?

$(A)\quad \dfrac{a}{1+b}$

$(B)\quad \dfrac{b}{1+a}$

$(C)\quad \dfrac{b}{a}$

$(D)\quad \dfrac{b}{1-a}$

$(E)\quad \dfrac{a}{1-b}$

Solution

$5^x-6\cdot 5^{-x}=1$

$\Rightarrow 5^{2x}-6=5^x$

$\Rightarrow 5^{2x}-5^x-6=0$

設$t=5^x$，則

$t^2-t-6=0$

$\Rightarrow (t-3)(t+2)=0$

得到$t=-2$(不合)或$t=3$

還原t得到$x=\log_5 3=\dfrac{b}{1-a}$，故選$(D)$

107-02-18

Statement

函數$f(x)=\tan^2 x-\sec x+4$之最小值為何？

$(A)\quad \dfrac{11}{4}$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad \dfrac{13}{4}$

$(D)\quad \dfrac{7}{2}$

$(E)\quad \dfrac{15}{4}$

Solution

$f(x) = \tan^2 x - \sec x + 4$

$= \sec^2 x - 1 - \sec x + 4$

$= \sec^2 x - \sec x + 3$

$= (\sec^2 x - \sec x + \frac{1}{4}) + 3 - \frac{1}{4}$

$= (\sec x - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}$

由於$\sec x$的值域為$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$，因此$\frac{1}{2}$不在$\sec x$的值域內

從值域考慮$\sec x = 1$，得最小值為3，故選(B)

107-02-19

Statement

設$f(x) = \sqrt{5-x}$、$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$，則合成函數$g \circ f$的定義域為何？

$(A) \quad (-4, 5]$

$(B) \quad [-4, 5)$

$(C) \quad [-4, 3)$

$(D) \quad (-4, 3]$

$(E) \quad [3, 5]$

Solution

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - \sqrt{5-x}}}$

考慮$\sqrt{3-\sqrt{5-x}} > 0$，則$3 - \sqrt{5-x} > 0$，得到$x > -4$

考慮$\sqrt{5-x}$裡面的值必須要是非負整數，因此$x \leq 5$

兩者取交集得到$(-4, 5]$，故選(A)

107-02-20

Statement

若$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + (a-3)x - 3a}{x^2 + 3x + 2} = b$，則$ab = ?$

$(A) \quad 2$

$(B) \quad 4$

$(C) \quad 6$

(D) 8

(E) 10

Solution

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + (a-3)x - 3a}{x^2 + 3x + 2} = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + (a-3)x - 3a}{(x+2)(x+1)} = b$$

考慮到極限存在，則分子必須要能被$(x+2)$整除

因此$4 + (-2)(a-3) - 3a = 0$，得到$a = 2$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2} = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = 5$$

故$b = 5$，因此$ab = 10$，故選(E)