105年第2次北科入學數學會考

105-02-01

Statement

若$\dfrac{1}{\alpha}$和$\dfrac{1}{\beta}$為方程式$x+\dfrac{3}{x}=1$的兩根，則$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{9}$

$(B)\quad \dfrac{1}{3}$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 3$

Solution

$x+\dfrac{3}{x}=1$

$\Rightarrow x^2+3=x$

$\Rightarrow x^2-x+3=0$

利用偉達定理

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-(\dfrac{-1}{1})=1=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$\dfrac{1}{\alpha\beta}=3\Rightarrow \alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

$\because \alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{1}{3}$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，故選$(A)$

105-02-02

Statement

下列何者為方程式$4(4^x+4^{-x})-(2^x+2^{-x})-60=0$的解？

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 3$

Solution

$4(4^x+4^{-x})-(2^x+2^{-x})-60=0$

$\Rightarrow 4(2^{2x}+2^{-2x})-(2^x+2^{-x})-60=0$

令$t=(2^x+2^{-x})$，則$t^2=2^{2x}+2^{-2x}+2$

將式子轉成$4t^2-t-68=0$

得到$t=-4$(不合)與$t=\dfrac{17}{4}$

還原t，得到$x=\pm 2$，故選(B)

105-02-03

Statment

若$0\leq\theta\leq 2\pi$，則滿足方程式$\dfrac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta}=0$之$\theta$的個數為何？

$(A)\quad 0$

$(B)\quad 1$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 4$

Solution

$\cos\theta(1+2\sin\theta)=0$

$\cos\theta=0\Rightarrow\theta=90^\circ,270^\circ$

$(1+2\sin\theta)=0\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow\theta=240^\circ,\theta=300^\circ$

考慮$\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta$的定義域，要求$\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta\neq 0$

因此$-2\sin^2\theta-\sin\theta+1\neq 0$

得到$\sin\theta\neq -1,\dfrac{1}{2}$

因此$\sin\theta\neq 270^\circ,60^\circ,120^\circ$

故答案有3個，故選(D)

105-02-04

Statement

已知$f(x)$為二次多項式。若$f(x) < 0$之解為$-3 < x < 2$且$f(1) = -4$，則$f(x) =?$

$(A)\quad x^2 - 3x + 2$

$(B)\quad x^2 - 2x - 3$

$(C)\quad x^2 + x - 6$

$(D)\quad x^2 + 2x - 7$

$(E)\quad x^2 + 3x - 8$

Solution

因為$f(x) < 0$之解為$-3 < x < 2$，因此$f(x)$可以列式成$f(x) = a(x+3)(x-2)$

又$f(1) = -4$，因此$a \times 4 \times -1 = -4$，得到$a = 1$

因此$f(x) = (x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$，故選$(C)$

105-02-05

Statement

已知一正方體所有邊長和為x。若將此正方體的表面積和體積之值加總表示成一多項式，則此多項式包含哪一種因式？

$(A)\quad x + 6$

$(B)\quad x + 12$

$(C)\quad x + 18$

$(D)\quad x + 36$

$(E)\quad x + 72$

Solution

所有邊長和為x，因此一邊長為$\frac{x}{12}$

可知體積為$\frac{x^3}{12^3}$且表面積為$\frac{x^2}{24}$

因此兩個加總得到$\frac{x^3}{1728} + \frac{x^2}{24} = \frac{x^3 + 72x^2}{1728} = \frac{x^2(x+72)}{1728}$，故有因式$x + 72$

105-02-06

Statement

已知向量$\vec{a} =< 5, -12 >$，向量$\vec{b}$與向量$\vec{a}$同向且$|\vec{b}| = 39$，若$\vec{b}$之起點為$(-1, 3)$，則$\vec{b}$之終點為何？

(A) $(14, -33)$

(B) $(-14, 33)$

(C) $(-18, 45)$

(D) $(18, -45)$

(E) $(4, -9)$

Solution

向量$\vec{b}$與向量$\vec{a}$同向，因此$\vec{b} =< 5a, -12a >, a \in \mathbb{R}$

又$|\vec{b}| = 39$，因此$\sqrt{(5a)^2 + (-12a)^2} = 39$，得到$a = 3$

因此$\vec{b} =< 15, -36 >$，又$\vec{b}$之起點為$(-1, 3)$

因此$\vec{b}$之終點為$(-1 + 15, 3 - 36) = (14, -33)$，故選$(A)$

105-02-07

Statement

方程式$\log x + \log(x + 2) = \log(x + 1) + 1$的解為何？

(A) $4 - \sqrt{26}$

(B) $4 - 2\sqrt{3}$

(C) $4 - \sqrt{2}$

(D) $4 + 2\sqrt{3}$

(E) $4 + \sqrt{26}$

Solution

$\log x + \log(x + 2) = \log(x + 1) + 1$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2 + 2x}{10x + 10}) = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{10x + 10} = 1$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 10 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times -10}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{26}}{2} = 4 \pm \sqrt{26}$

由於$4 < \sqrt{26}$，因此$4 - \sqrt{26} < 0$，不在$\log x$的值域內，因此不合

故$x=4+\sqrt{26}$，故選(E)

105-02-08

Statement

設$\sin 2\theta=\dfrac{4}{5}$，則$\sin^4\theta+\cos^4\theta=?$

$(A)\quad \dfrac{17}{25}$

$(B)\quad \dfrac{18}{25}$

$(C)\quad \dfrac{19}{25}$

$(D)\quad \dfrac{4}{5}$

$(E)\quad \dfrac{21}{25}$

Solution

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2 = \sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta$

$=\sin^4\theta+2(\sin\theta\cos\theta)^2+\cos^4\theta$

$=\sin^4\theta+\dfrac{1}{2}(\sin^2 2\theta)+\cos^4\theta=1$

因此$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-\dfrac{1}{2}(\dfrac{4}{5})^2=\dfrac{17}{25}$，故選$(A)$

105-02-09

Statement

已知θ為平面上兩向量$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角，若$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=5$且$|2\vec{a}+\vec{b}|=7$，則$cos\theta=?$

$(A)\quad \dfrac{-1}{5}$

$(B)\quad \dfrac{-1}{3}$

$(C)\quad \dfrac{1}{5}$

$(D)\quad \dfrac{1}{3}$

$(E)\quad \dfrac{4}{5}$

Solution

$|2\vec{a}+\vec{b}|=7$

$\Rightarrow 4|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=49$

$\Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})=-3$

又$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-3$

因此$\cos\theta=\dfrac{-3}{15}=\dfrac{-1}{5}$，故選$(A)$

105-02-10

Statement

若$\dfrac{x^3-5}{x^2-1}=f(x)+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$，其中$f(x)$為一次式且$a,b$為常數，求$a+b=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad 0$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 3$

Solution

假設$f(x)=cx+d$

$x^3-5=(cx+d)(x^2-1)+a(x+1)+b(x-1)$

$=cx^3-cx+dx^2+ax+a+bx-b$

$=cx^3+dx^2+(a-c+b)x+(a-b)=x^3-5$

因此$c=1,d=0$

$\begin{cases}a+b-1=0\\a-b=-5\end{cases}$，解聯立得$a=-2$且$b=3$

因此$a+b=1$，故選(C)

105-02-11

Statement

若$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{b}}{x-1}=\dfrac{1}{4}$，則$a+b=?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad 1$

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-x+(b-a)}{(ab+bx)(x-1)}=\frac{1}{4}$$

若極限值存在，則$b-a=1$，且$ab+b=4$

因此，$\begin{cases} b-a=1 \\ ab+b=4 \end{cases}$，故得到$(a,b)=(-3,-2)$或$(a,b)=(1,2)$

$a+b=-5$或3，故選(D)

105-02-12

Statement

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+3h)^2-4^2}{\sqrt{4+3h}-2}=?$$

(A) 0

(B) 16

(C) 32

(D) 64

(E) 不存在

Solution

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+3h)^2-4^2}{\sqrt{4+3h}-2}=\lim_{h\to 0}\frac{(4+3h-4)(4+3h+4)}{\sqrt{4+3h}-2}=\lim_{h\to 0}\frac{(4+3h-4)(4+3h+4)(\sqrt{4+3h}+2)}{4+3h-4}$$

$\lim_{h\to 0}(3h+8)(\sqrt{4+3h}+2)=8\times 4=32$，故選$(C)$

105-02-13

Statement

若拋物線$y=x^2-ax+3$與直線$3x+y+1=0$不相交且a為整數，則a有幾種可能？

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D)　6

(E)　7

Solution

已知拋物線的動點為$(x, x^2 - ax + 3)$

因此考慮代入$3x + y + 1$時會大於0

得到$3x + x^2 - ax + 4 > 0 \Rightarrow x^2 + (3-a)x + 4 > 0$

利用判別式：$(3-a)^2 - 16 > 0$確認解與x無交集

得到$-1 < a < 7$，因此a有7種可能，故選(E)

105-02-14

Statement

直線$ax - y = b$與$x + 2y = 3$垂直且過點$(2, 3)$，則$ab = ?$

(A)　-4

(B)　-2

(C)　0

(D)　2

(E)　4

Solution

由於兩條直線垂直，因此可知$a = 2$

又$2x - y = b$過點$(2, 3)$，代入後可知$b = 1$，因此$ab = 2$，故選(D)

105-02-15

Statement

設$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$，$g(x) = 2 + x - x^2$，則合成函數$f \circ g$的定義域為何？

(A)　$\varnothing$(空集合)

(B)　$0 < x < 1$

(C)　$0 \leq x \leq 1$

(D)　$x < 0$或$x > 1$

(E)　$x \leq 0$或$x \geq 1$

Solution

$f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x}}$

考慮$\sqrt{-x^2+x} \neq 0$，因此$-x^2+x>0$，因此$0<x<1$，故選(B)

105-02-16

Statement

若直線L的斜率為$\dfrac{2}{3}$且與x軸所夾之銳角為θ，則$\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\theta)=?$

$(A)\quad \dfrac{-3}{\sqrt{13}}$

$(B)\quad \dfrac{-2}{\sqrt{13}}$

$(C)\quad \dfrac{-1}{\sqrt{13}}$

$(D)\quad \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$(E)\quad \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

Solution

直線L的斜率為$\dfrac{2}{3}$，因此可知$m=\dfrac{2}{3}$，也就是$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$

透過$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$，可知$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$且$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

因此$\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\theta)=-\sin\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{13}}$，故選$(B)$

105-02-17

Statement

已知$A(3,5),B(-1,2),C(4,7)$為坐標平面上三點，則$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}=?$

$(A)\quad (-4,-3)$

$(B)\quad (-8,-6)$

$(C)\quad (4,3)$

$(D)\quad (8,6)$

$(E)\quad (12,9)$

Solution

$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+2(\overrightarrow{BA})=2\overrightarrow{BA}$

又$\overrightarrow{BA}=<4,3>$，因此$2\overrightarrow{BA}=<8,6>$，故選$(D)$

105-02-18

Statement

若一拋物線通過$(-2,19),(6,16),(1,4)$三點，則此拋物線的頂點坐標為何？

$(A)\quad (2,1)$

$(B)\quad (2,3)$

$(C)\quad (2,5)$

$(D)\quad (2,6)$

$(E)\quad (2,7)$

Solution

由$(-2,19)$與$(6,19)$兩點可知，頂點必為$(2,y)$

因此$y=a(x-2)^2+b$

代入$(1,4)$後得到$4=a+b$

代入$(-2,19)$後得到$19=16a+b$

因此$a=1,b=3$，故頂點為$(2,3)$，故選(B)

105-02-19

Statement

若$f(x)=\log_{\sqrt{5}}(2x^3-5x^2-10x+8)$，則$f(2-\sqrt{3})=?$

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 4$

Solution

利用綜合除法，將$2x^3-5x^2-10x+8$轉換成以$(x-2)$的形式

2	-5	-10	8
	4	-2	-24
2	-1	-12	-16
	4	6	
2	3	-6	
	4		
2	7		

得到$f(x)=\log_{\sqrt{5}}(2(x-2)^3+7(x-2)^2-6(x-2)-16)$

$f(2-\sqrt{3})=\log_{\sqrt{5}}(6\sqrt{3}+21-6\sqrt{3}-16)-\log_{\sqrt{5}}(5)=2$，故選$(D)$

105-02-20

Statement

若一橢圓之焦點為$(1-\sqrt{3},-1)$與$(1+\sqrt{3},-1)$且過$(3,-2)$，則此橢圓長軸之長為何？

$(A)\quad 2\sqrt{3}$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 2\sqrt{5}$

$(D)\quad 2\sqrt{6}$

$(E)\quad 2\sqrt{7}$

Solution

原點$O=(\dfrac{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})}{2},\dfrac{-1-1}{2})=(1,-1)$

$a^2=3+b^2\Rightarrow b^2=a^2-3$

因此可以列式$\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{(y+1)^2}{a^2-3}=1$

得$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{a^2-3}=1$，解方程式得到$a=\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{6}$

因為a^2-3代入$\sqrt{2}$後會小於0，所以橢圓不成立變成雙曲線，因此$\pm\sqrt{2}$不合。

因此長軸為$2a=2\sqrt{6}$，故選(D)