

國立台北科技大學 數學入學會考詳解

作者

- 109 資工系 黃漢軒
 - [Instagram](#)
 - sigtunatw@gmail.com
- 109 化工系 羅昇宇
 - [Instagram](#)
 - qoo18105@gmail.com

感謝北科入學會考出題老師。

所有的解答均為非官方，有任何勘誤上的問題，請聯繫作者。

100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知 $f(x)$ 為一實系數多項式，且 $f(\frac{3}{2}) = 27$ ， $f(-\frac{5}{3}) = 8$ 。

若 $f(x)$ 除以 $(6x^2 + x - 15)$ 的餘式為 $ax + b$ ，則 $b - a = ?$

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 12
- (D) 16
- (E) 20

Solution

可以把式子轉成

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x)(6x^2 + x - 15) + ax + b \\&= g(x)(3x + 5)(2x - 3) + ax + b\end{aligned}$$

代入 $x = \frac{3}{2}$ ，得到 $\frac{3}{2}a + b = 27$

代入 $x = -\frac{5}{3}$ ，得到 $-\frac{5}{3}a + b = 8$

解聯立之後得到 $(a, b) = (6, 18)$

因此 $b - a = 12$ ，故選(C)

100-01-02

Statement

若 α, β 為方程式 $x - \frac{3}{x} + 1 = 0$ 的兩根，則 $(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = ?$

- (A) 9
- (B) 15
- (C) 21
- (D) 27
- (E) 33

Solution

$$(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = \frac{4}{\alpha\beta} + \frac{10(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 25$$

$$x - \frac{3}{x} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

$$\text{利用根與係數，得到 } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\text{因此 } (\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = \frac{4}{-3} + \frac{-10}{-3} + 25 = 27$$

故選(D)

100-01-03

Statement

求 $13^5 - 14 \times 13^4 + 15 \times 13^3 - 25 \times 13^2 - 12 \times 13 + 9 = ?$

- (A) 22
- (B) 25
- (C) 28
- (D) 31
- (E) 34

Solution

將式子考慮成 $f(x) = x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 25x^2 - 12x + 9$

式子等價於 $f(x)$ 除以 $x - 13$ 的餘數（餘式定理）。

因此 $C = \frac{1}{4}$, $D = 1$ 。

因此 $A + B + C + D = 2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$ 之解為何？

(A) $1 \leq x < 2$

(B) $1 < x \leq 2$

(C) $1 < x < 2$

(D) $x \geq 2$ 或 $x < 1$

(E) $x > 2$ 或 $x < 1$

Solution

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 - 5x + 7)}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \leq 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \geq 0 \\ (x-1)(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

因此 $1 < x < 2$ 時， $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$ ，故選(C)

100-01-06

Statement

若 a, b 均為實數且 $ax^2 + bx - 10 < 0$ 之解為 $\frac{-5}{2} < x < \frac{4}{3}$ ，則 $a + b = ?$

(A) 5

(B) $\frac{11}{2}$

(C) 6

(D) $\frac{13}{2}$

(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$$(x + \frac{5}{2})(x - \frac{4}{3}) < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{5x}{2} + \frac{-20}{6} < 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 8x + 15x - 20 < 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 7x - 20 < 0$$

$$\text{兩邊共除2，得 } 3x^2 + \frac{7}{2}x - 10 < 0$$

$$a = 3, b = \frac{7}{2}, a + b = \frac{13}{2}$$

100-01-07

Statement

若直線 $12x - 5y = 21$ 與兩直線 $x = \frac{23}{39}$ 、 $x = \frac{16}{13}$ 分別交於 A 、 B 兩點，則線段長 $\overline{AB} = ?$

(A) $\frac{6}{5}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{13}{5}$

(E) $\frac{25}{7}$

Solution

已知 $12x - 5y = 21$ ，則斜率為 $\frac{12}{5}$

$$\Delta x = \frac{16}{13} - \frac{23}{39} = \frac{25}{39}$$

$$y = mx + b, \text{ 則 } 0 = \frac{12}{5}(\frac{16}{13} - \frac{23}{39}) + b, \text{ 得到 } b = \frac{60}{39} = \Delta y$$

$$\text{因此距離為 } \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{25}{39})^2 + (\frac{60}{39})^2} = \frac{5}{3}, \text{ 故選 (C)}$$

100-01-08

Statement

設兩向量 \vec{a}, \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ ， $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ ，則 $\cos \theta = ?$

(A) $\frac{7}{25}$

(B) $\frac{5}{13}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$$\cos \theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = -\cos \theta$$

$$\text{因此, } \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = \frac{-|a|^2 - |b|^2 + |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 9 = -|a|^2 - |b|^2 + 16$$

$$\text{設 } x = |a| = |b|, \text{ 故 } 2x^2 - 9 = -2x^2 + 16, \text{ 得到 } x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$$

$$\text{代入 } \cos \theta, \text{ 得到 } \frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 9}{2 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2} - 9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = 7$ 、 $|\vec{b}| = 5$ ， $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ ，則 $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = ?$

(A) -25

(B) -5

(C) 0

(D) 44

(E) 51

Solution

$$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$$

$$\text{已知 } \tan \theta = -\frac{3}{4}, \text{ 則 } \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{因此 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos \theta = 7 \times 5 \times -\frac{4}{5} = -28$$

$$\text{因此 } (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 98 + 28 - 75 = 51$$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以(2, 2)與(6, 2)為兩焦點，且與直線 $x + 1 = 0$ 相切，則橢圓短軸半長為何？

- (A) 4
- (B) $\sqrt{21}$
- (C) $\sqrt{23}$
- (D) $\sqrt{29}$
- (E) 6

Solution

將題目簡化為求 b 的長度為何

$$\text{橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是 } \left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (4, 2)$$

焦距 c 為焦點與橢圓中點之距離，因此可知 $c = 2$

已知與直線 $x + 1 = 0$ 相切，因此橢圓左右一端會與 $x + 1 = 0$ 相切，因此其中一端為 $(-1, 2)$

故長軸 a 為橢圓長軸端點與中心之距離，可知 $a = 5$

$$\text{因此 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線 $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$ 的焦點座標為 (a, b) ，則 $ab = ?$

- (A) 3
- (B) 3.5
- (C) 4
- (D) 4.5
- (E) 5

Solution

$$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

$$\Rightarrow -2(y - 2) = (x - 2)^2$$

$$\text{因此可以知道頂點座標為}(2, 2) \cdot c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{因此焦點為}(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$$

$$\text{故 } a = 2, b = \frac{3}{2}, \text{ 得到 } ab = 3, \text{ 故選 } (A)。$$

100-01-12

Statement

雙曲線 $xy - 3x + 4y = 0$ 兩頂點的距離為何？

(A) $2\sqrt{3}$

(B) 4

(C) $2\sqrt{6}$

(D) $4\sqrt{3}$

(E) $4\sqrt{6}$

Solution

$$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x + 4)(y - 3) = -12$$

考慮通過頂點的線為 $y = -x + b$ ，代入必定通過的點 $(-4, 3)$ 得到 $b = -1$

因此 $y = -x - 1$ 會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$$x(-x - 1) - 3x + 4(-x - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$\text{利用公式解得到 } x \text{ 的點，也就是 } x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{當 } x = -4 + 2\sqrt{3} \text{ 時， } y = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\text{當 } x = -4 - 2\sqrt{3} \text{ 時， } y = -3 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{兩點距離為 } \sqrt{(-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3} - 3 - (-3 - 2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48 + 48} = 4\sqrt{6} \cdot \text{ 故選 } (E)$$

100-01-13

Statement

若 $\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$ ，則 $x = ?$

(A) -3

(B) -3 或 1

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

$$\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$$

$$\Rightarrow \log_2(3 - x^2) - \log_2 x = 1$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{3 - x^2}{x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3 - x^2}{x} = 2$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = -3$$

驗根可知 $\log_2 x$ 無法放入 -3 ，因為 \log 的定義域為正整數之集合，故 $x = -3$ 不合。

因此 $x = 1$ ，故選(C)

100-01-14

Statement

若 $f(x) = \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$ ，且 $f(a) = 3$ ， $f(b) = 5$ ，則 $f(a + b) = ?$

(A) $\frac{5}{3}$

(B) 2

(C) 6

(D) 8

(E) 15

Solution

$$\text{令 } t = 2^x \text{，則 } f(x) = \frac{1 + t}{1 - t}$$

$$\text{考慮 } f(a) = 3$$

$$\frac{1 + t}{1 - t} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + t = 3 - 3t$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{因此 } 2^a = \frac{1}{2} \cdot \text{得到 } a = -1$$

$$\text{考慮 } f(b) = 5$$

$$\frac{1+t}{1-t} = 5$$

$$\Rightarrow 1+t = 5-5t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$2^b = \frac{2}{3} \cdot \text{則 } b = 1 - \log_2 3$$

$$\text{故 } f(a+b) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 \frac{1}{3}) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{2} = 2 \cdot \text{故選}(B)$$

100-01-15

Statement

$$\text{求 } \log_2(\sqrt{12 + 2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12 - 2^{\frac{7}{2}}}) = ?$$

$$(A) \quad \frac{1}{2}$$

$$(B) \quad \frac{3}{2}$$

$$(C) \quad 2$$

$$(D) \quad \frac{5}{2}$$

$$(E) \quad 4$$

Solution

$$\begin{aligned} \log_2(\sqrt{12 + 2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12 - 2^{\frac{7}{2}}}) &= \log_2(\sqrt{12 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}) = \log_2(\sqrt{8 + 8\sqrt{2} + 4} + \sqrt{8 - 8\sqrt{2} + 4}) \\ &= \log_2(\sqrt{(2 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2 - 2\sqrt{2})^2}) = \log_2(4\sqrt{2}) = \frac{5}{2} \cdot \text{故選}(D) \end{aligned}$$

100-01-16

Statement

$$\text{設 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \cdot \text{且 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \text{則 } \sin \theta + \cos \theta = ?$$

- (A) -1
(B) $-\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
(E) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{故 } \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \sin \theta + \cos \theta &= \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \text{故選 (E)} \end{aligned}$$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

- (A) 若 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ，則 $\sin x < \cos x < \cot x$
(B) 若 $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ，則 $\sec x < \csc x < \cot x$
(C) 若 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\cos x < \sin x < \tan x$
(D) 若 $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $\sin x_1 > \sin x_2$
(E) 若 $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$ ，則 $\cos x_1 > \cos x_2$

Solution

$$\text{若 } \pi < x < \frac{5\pi}{4} \text{，則 } \sin \theta < \cos \theta < \tan \theta$$

$$\text{故 } \csc \theta < \sec \theta < \cot \theta \text{，故選 (B)}$$

100-01-18

Statement

若 $mx + 3y + 1 = 0$ 與 $x + (m - 2)y + m = 0$ 之交點在第二象限內，則 m 之範圍為何？

- (A) $0 < m < 1$
- (B) $0 < m < 2$
- (C) $0 < m < 3$
- (D) $1 < m < 3$
- (E) $1 < m < 4$

Solution

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \frac{2m + 2}{(m - 3)(m + 1)} \\ y = \frac{m^2 - 1}{(-m + 3)(m + 1)} \end{cases}$$

考慮到 $y > 0, x < 0$ 的情況

得到 $((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

得到 $1 < m < 3$ ，故選(D)

100-01-19

Statement

若點 (a, b) 在直線 $2x + 3y = 1$ 上移動，則直線 $ax + by = 3$ 恆過哪一點？

- (A) $(3, 4)$
- (B) $(4, 5)$
- (C) $(5, 7)$
- (D) $(5, 8)$
- (E) $(6, 9)$

Solution

考慮 $x = 5$ 時 $y = -3$

考慮 $x = -4$ 時 $y = 3$

由於 a, b 依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮 $5x - 3y = 3$ 與 $-4x + 3y = 3$ 的交點，得到 $(x, y) = (6, 9)$ ，故選(E)

100-01-20

Statement

已知 $A(3, -5)$ 、 $B(-7, 4)$ ，且點 P 介於 A 、 B 之間，又 $\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4$ ，若 P 之座標為 (a, b) ，則 $7a + 21b = ?$

(A) -33

(B) -32

(C) -31

(D) -30

(E) -29

Solution

$$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$$

利用內分點公式。

$$P = \left(\frac{4 \times 3 + 3 \times (-7)}{7}, \frac{4 \times (-5) + 3 \times 4}{7} \right) = \left(\frac{-9}{7}, \frac{-8}{7} \right)$$

則 $7a + 21b = (-9) + (-8) \times 3 = -33$ ，故選(A)

100年第2次北科入學數學會考

100-02-01

Statement

若 α 、 β 為方程式 $x^2 + 12x + 9 = 0$ 的兩根，則 $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = ?$

(A) -18

(B) -6

(C) 6

(D) 12

(E) 18

Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式 $ax^2 + bx + c$ ，存在兩根 α 與 β 。

$$\text{那麼 } \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \text{ 且 } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$$\sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2$$

$$\Rightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta$$

根據偉達定理我們可以求得

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

注意一下 $\alpha + \beta = -12$ · $\alpha\beta = 9$

若兩根一正一負那麼 $\alpha\beta < 0$ · 若兩根都是正的那麼 $a + b > 0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ 會存在複數 · 相乘後可以得到 $-\sqrt{\alpha\beta}$ 。

因此帶回欲求之式子：

$$-12 - 2 \times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$$

100-02-02

Statement

若 $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ 與 $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ 的最高公因式為 $x^2 + bx + c$ · 則 $b + 2c = ?$

(A) -5

(B) -3

(C) 0

(D) 5

(E) 7

Solution

第一式的因式 $ax + b$ 的 a 一定會是 1 的因素(因為最大項係數等於 1) ·

且 b 一定會是 2 的因數(因為最小項的係數等於 2) · 第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解 · 得到 $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$

接著我們以相同方式對第二式做因式分解 · 得倒 $(x + 1)(x - 2)(2x + 3)$

可以觀察到最大公因式即為 $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$

比較係數後得到 $b = -1, c = -2$

則 $b + 2c = -1 + 2 \times -2 = -5$ 。

100-02-03

Statement

若 $\frac{8x^3 - 6x + 1}{(2x + 1)^4} = \frac{a}{(2x + 1)} + \frac{b}{(2x + 1)^2} + \frac{c}{(2x + 1)^3} + \frac{d}{(2x + 1)^4}$ · 則 $2a + b - c + d = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

我們可以使用綜合除法，將 $2x + 1$ 改寫成 $x + \frac{1}{2}$ ，然後再對除出來的係數除以2。

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & 0 & -6 & 1 & -1/2 \\ & -4 & 2 & 2 & \\ \hline 8 & -4 & -4 & 3 & \\ & 4 & -2 & -2 & D \\ & & -2 & 2 & \\ \hline 4 & -4 & 0 & & \\ & 2 & -2 & C & \\ & & -1 & & \\ \hline 2 & -3 & & & \\ & 1 & B & & \\ A & & & & \end{array}$$

因此 $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 3$ 。

$$2a + b - c + d = 1 \times 2 + (-3) - 0 + 3 = 2。$$

100-02-04

Statement

$x^2 - 4x + 2 \leq |x - 2|$ 之解為何？

- (A) $1 \leq x \leq 4$
- (B) $2 \leq x \leq 4$
- (C) $0 \leq x \leq 2$
- (D) $0 \leq x \leq 4$**
- (E) $0 \leq x \leq 3$

Solution

1. 考慮 $x^2 - 4x + 2 \leq x - 2$ ：
移項， $x^2 - 4x + 2 - x + 2 \leq 0$
整理， $x^2 - 5x + 4 \leq 0$
那麼我們可以將其因式分解，得 $(x - 4)(x - 1) \leq 0$ ，並且可以得到 $1 \leq x \leq 4$ 。
2. 考慮 $x^2 - 4x + 2 \leq -x + 2$ ：
移項， $x^2 - 4x + 2 + x - 2 \leq 0$
整理， $x^2 - 3x \leq 0$
那麼我們可以將其因式分解，得 $x(x - 3) \leq 0$ ，並且可以得到 $0 \leq x \leq 3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到 $0 \leq x \leq 4$ 。

100-02-05

Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$ 之解為何？

(A) $x < \frac{-1}{2}$ 或 $0 < x < 1$

(B) $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $1 < x < 2$

(C) $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $0 < x < 1$

(D) $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$

(E) $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$

Solution

$$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{\log 2}{\log x} < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} < 1$$

令 $\log_2 x = t$ ，那麼

$$2t - \frac{1}{t} < 1$$

$$\Rightarrow 2t - \frac{1}{t} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$$

考慮兩種情況。

1. 若 $t > 0$ 且 $2t^2 - t - 1 < 0$

$$2t^2 - t - 1 < 0 = (2t + 1)(t - 1) < 0 = \frac{-1}{2} < t < 1$$

與 $t > 0$ 取交集得到 $0 < t < 1$ 。

2. 若 $t < 0$ 且 $2t^2 - t - 1 > 0$

$$2t^2 - t - 1 > 0 = (2t + 1)(t - 1) > 0 = t < \frac{-1}{2} \text{ 或 } t > 1$$

與 $t < 0$ 取交集得到 $t < \frac{-1}{2}$ 。

對這兩種考慮取聯集，得到 $t < \frac{-1}{2}$ 或 $0 < t < 1$ 。

還原，得到 $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$ 。

100-02-06

Statement

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 37$ ， $\overline{BC} = 53$ ， $\overline{AC} = 89$ ，則下列各內積中，何者為最大？

(A) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(B) $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$

(C) $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

(D) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

(E) $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$

Solution

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 37 \times 89 \times \frac{37^2 + 89^2 - 53^2}{2 \times 37 \times 89}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 53 \times 37 \times \frac{53^2 + 37^2 - 89^2}{2 \times 53 \times 37}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 89 \times 37 \times \frac{89^2 + 53^2 - 37^2}{2 \times 89 \times 53}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} < 0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$$37^2 + 89^2 - 53^2。$$

$$53^2 + 37^2 - 89^2$$

$$89^2 + 53^2 - 37^2$$

顯然是第三者較大，故選(C)

100-02-07

Statement

已知向量 $\vec{AB} = (-31, 29)$ ， $\vec{AC} = (23, -11)$ ，則下列向量長中，何者為最大？

(A) $|\vec{AB}|$

(B) $|\vec{BC}|$

(C) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$

(D) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

(E) $|\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}|$

Solution

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$$

$$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$$

$$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$$

考慮向量長的公式，當存在一向量 $\vec{L} = (A, B)$ ， \vec{L} 的向量長為 $|\vec{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$

因此若 $|A| + |B|$ 越大，那麼向量長越大。

考慮選項A： $|-31| + |29| = 60$

考慮選項B： $|54| + |-40| = 94$

考慮選項C： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$ ， $|23| + |-11| = 34$

考慮選項D： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$ ， $|-8| + |18| = 26$

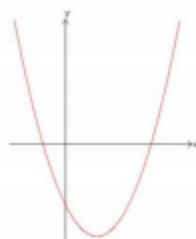
考慮選項E： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$ ， $|0| + |0| = 0$

因此，故選B。

100-02-08

Statement

設 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



(A) abc

(B) $b^2 - 4ac$

(C) $c^2 - 4ab$

(D) $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$

(E) $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$

Solution

因為開口向上，所以 $a > 0$ 。

觀察 $x = 0$ ，可以發現對應到的 $y < 0$ ，因此 $c < 0$

觀察一下對稱軸， $\frac{-b}{2a} > 0$ ，因此 $b < 0$

因此 $abc > 0$ ， $b^2 - 4ac > 0$ 因為有實數解。

$c^2 - 4ab > 0$ 因為 $ab < 0$ 。

而 $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ 必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，

另一根是負數因此 $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ 小於 0，故選 E。

100-02-09

Statement

已知 $4x^2 + y^2 - 4x + 8y = 8$ ，則 x 的最大值為何？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的 x 了。

$$4x^2 - 4x + y^2 + 8y = 8$$

$$4(x^2 - x) + y^2 + 8y = 8$$

$$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 + 8y + 16 = 8 + 16 + 1$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y + 4)^2}{25}$$

由此可知這個橢圓的短邊平行 x 軸

$$a = \sqrt{25} = 5, b = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

中心可從式子得知， $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

因此，加上 x 的部份得到 $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

100-02-10

Statement

拋物線 $y = 4 - 2x - x^2$ 與 x 軸兩交點的距離為何？

- (A) 2
- (B) 3
- (C) $2\sqrt{5}$
- (D) 6
- (E) 8

Solution

將 y 等於0，求出 x 。

$$-x^2 - 2x + 4 = 0$$

先確定 $b^2 - 4ac$ 是否大於0。

$$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20$$

$$\text{因此兩根為 } \frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$$

$$\frac{2 + \sqrt{5}}{-2} - \frac{2 - \sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$$

100-02-11

Statement

設雙曲線 $x^2 - y^2 = x + 2y$ 兩漸進的夾角為 θ ，則 $\sin \frac{\theta}{2} = ?$

(A) 0

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(E) 1

Solution

配方雙曲線得到標準式。

$$x^2 - x - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4(x - \frac{1}{2})^2}{5} - \frac{4(y - 1)^2}{5} = 1$$

求漸進線，令等號右邊為0

$$\frac{4(x - \frac{1}{2})^2}{5} = \frac{4(y - 1)^2}{5}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = (y - 1)^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - 1)^2 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2} - (y - 1))(x - \frac{1}{2} + (y - 1)) = 0$$

$$(x - y + \frac{1}{2})(x + y + \frac{3}{2}) = 0$$

第一條線 $(x - y + \frac{1}{2})$ 可求斜率 $m = 1$

第二條線 $(x + y + \frac{3}{2})$ 可求斜率 $m = -1$

因此，這兩條線垂直 ($m_1 \times m_2 = -1$)，夾角為 90°

因此 $\sin \frac{90^\circ}{2} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

100-02-12

Statement

不等式 $\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \leq 2$ 之解為何？

(A) $-1 \leq x \leq 1$

(B) $0 < x \leq 1$

(C) $1 \leq x \leq 2$

(D) $0 < x \leq 2$

(E) $1 \leq x \leq 4$

Solution

將分子分母上下同乘 2^x 。

$$\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} \leq 2$$

移項。

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2(2^{2x} - 1)}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2 \cdot 2^{2x} + 2}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{2^{2x} - 16}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

令 $t = 2^{2x}$

$$\frac{t - 16}{t - 1} \leq 0$$

考慮以下兩點：

1. $t - 16 \geq 0 \cdot t - 1 < 0$

$t \geq 16, t < 1$ ，這兩個不等式沒有任何交集，因此 $t \in \emptyset$

2. $t - 16 \leq 0 \cdot t - 1 > 0$

$t \leq 16, t > 1$ ，這兩個不等式的交集為 $1 < t \leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到 $1 < t \leq 16$

還原 t 得到 $1 < 2^{2x} \leq 16$ ，因此 $0 < x \leq 2$

100-02-13

Statement

方程式 $10 \cdot x^{2 \log x} = x^3$ 之所有實根的平方和為何？

- (A) 100
- (B) 101
- (C) 110
- (D) 111
- (E) 121

Solution

等號兩邊同除 $x^{2 \log x}$

$$10 = x^{3-2 \log x}$$

$$1 = (3 - 2 \log x) \times \log(|x|)$$

因為要求實根，因此可以限定 $x > 0$ ，所以 $(3 - 2 \log x) \times \log(x)$

$$\text{令 } t = \log x$$

$$1 = (3 - 2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\text{因式分解得到 } (-2t + 1)(t - 1) = 0$$

$$\text{可以解出 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = 1$$

$$\text{還原 } t，\text{可以得到 } \log x = \sqrt{10} \text{ 或 } \log x = 10$$

$$\text{兩根的平方和為 } \sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$$

100-02-14

Statement

若 $f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$ ，則 $f(1 + \sqrt{2}) = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

觀察一下，可以嘗試把 $x^3 + x^2 - 7x + 5$ 化簡成 $c(x-1)^2 + b(x-1) + a \dots$

這部分可以用綜合除法做到。

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & -7 & 5 & 1 \\
 & 1 & 2 & -5 & \\ \hline
 1 & 2 & -5 & & 0 \\
 & 1 & 3 & & d \\ \hline
 1 & 3 & & -2 & \\
 & 1 & & & c \\ \hline
 & & 1 & & \\
 & & 1 & 4 & \\
 a & & & b &
 \end{array}$$

因此可得 $(x-1)^3 + 4(x-1)^2 - 2(x-1)$ 。

把 $f(1+\sqrt{2})$ 帶進去，得：

$$\log_2((\sqrt{2})^3 + 4(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})) = \log_2(2\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{2}) = \log_2 8 = 3$$

100-02-15

Statement

設 $\cos \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，則 $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = ?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

$$\cos^2 \theta = 1 - \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - (1 - \cos \theta) = \cos \theta$$

$$\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$$

100-02-16

Statement

設 $\tan 100^\circ = k$ ，則 $\sin 80^\circ = ?$

(A) $\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

(B) $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}$

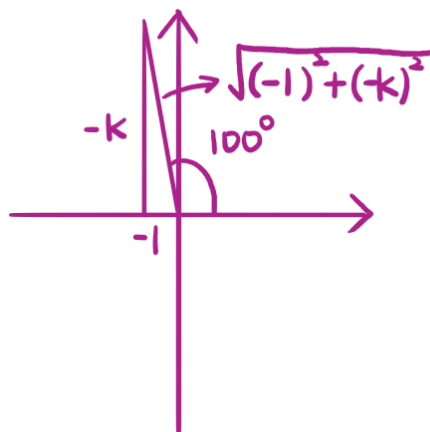
(C) $\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$

(D) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

Solution

畫個圖



看圖可以觀察到， $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

100-02-17

Statement

設 $a = \sec 434^\circ$ ， $b = \sin 100^\circ$ ， $c = \cos 260^\circ$ ， $d = \cot 28^\circ$ ， $e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A) $b < c < d < e < a$

(B) $c < b < d < e < a$

(C) $c < b < e < d < a$

(D) $c < b < d < a < e$

(E) $b < c < a < d < e$

Solution

$$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$$

$$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$$

$$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$$

$$d = \cot 28^\circ$$

$$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$$

因此 $a > e$ ， $c < b$ ，故選B。

100-02-18

Statement

平面上有兩點 $A(1, 2)$ 、 $B(a, b)$ ，若直線 \overline{AB} 之垂直平分線為 $x + 2y - 10 = 0$ ，則 $a - b = ?$

(A) -1

(B) -2

(C) -3

(D) -4

(E) -5

Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過 \overline{AB} 的中點 $(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$ 。

帶入垂直平分線得到 $\frac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$

$$\Rightarrow a + 2b = 15$$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到 $m = \frac{-1}{2}$ ，因此與其垂直的斜率一定是 $m = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到 $\frac{2-b}{1-a} = 2$ ，整理得到 $2 - b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$ 。

帶回第一式可以得到 $5a = 15$ ， $a = 3$ ， $b = 6$ 。

$$a - b = 3 - 6 = -3$$

100-02-19

Statement

設直線 $bx + ay - ab = 0$ ， $a > 0$ ， $b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則 $a + 2b = ?$

(A) $-7 - 3\sqrt{3}$

(B) $-6 - 3\sqrt{3}$

(C) $-5 - 3\sqrt{3}$

(D) $-4 - 3\sqrt{3}$

(E) $-3 - 3\sqrt{3}$

Solution

可以推出 x, y 的通式。

$bx + ay = ab$ ，求出 x, y 的截距。

當 $y = 0$ ，那麼 $bx = ab$ ， $x = a$

當 $x = 0$ ，那麼 $ay = ab$ ， $y = b$

已知 $a > 0, b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道 $\frac{1}{2}|a||b| = 2$ ，可知 $ab = -4$ 或者 $ab = 4$ ，但是 $a > 0, b < 0$ ，因此 $ab = 4$ 不合。

已知過點 $(1, 2)$ 且 $ab = -4$ ，因此可以把點帶入得到 $b + 2a = -4$ 。

又 $ab = -4$ 所以 $a = \frac{-4}{b}$ ，所以得到 $b + \frac{-8}{b} = -4$

同乘以 b 可以得到 $b^2 + 4b - 8 = 0$ 。

利用公式解可以解出 $\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times -8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根 $-2 + 2\sqrt{3}$ 或者 $-2 - 2\sqrt{3}$ ，其中由於 $b < 0$ ，因此 $-2 + 2\sqrt{3}$ 不合。

帶回求出 a 得到 $a = \frac{-4}{-2 - 2\sqrt{3}} = \frac{-4}{-2(1 + \sqrt{3})}$

化簡得到 $a = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = -1(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

因此 $a + 2b = \sqrt{3} - 1 + -4 - 4\sqrt{3} = -5 - 3\sqrt{3}$

100-02-20

Statement

設直線 $3x + y = 1$ 與 $x + 3y = 2$ 之夾角為 θ ，則 $\cos 2\theta = ?$

(A) $\frac{-7}{25}$

(B) $\frac{-6}{25}$

(C) $\frac{-1}{5}$

(D) $\frac{-4}{25}$

(E) $\frac{-3}{25}$

Solution 1

設 $n_1 = \langle 3, 1 \rangle$ ， $n_2 = \langle 1, 3 \rangle$

$$\text{則} \cos \theta = \frac{n_1 n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{因此} \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{所以} \cos 2\theta = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = -\frac{7}{25} \cdot \text{故選}(A)$$

Solution 2

考慮兩條線的斜率。

$$3x + y = 1, m_1 = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x + 3y = 2, m_2 = \frac{-1}{3}$$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為 \tan 來考慮。

$$\tan(m_1 - m_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{-1}{3}}{1 + 1} = \frac{\frac{-8}{3}}{2} = \frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個 \tan 夾角是負的，因此這個夾角是大於 90° 的鈍角。

可以依照 $\tan(180^\circ) = 0$ 來求得另一個銳角的夾角。

$$\frac{\frac{-4}{3} + \tan \theta}{1 - \frac{-4}{3} \tan \theta} \cdot \text{求得銳角} \tan \theta = \frac{4}{3}$$

由於 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ，那麼這個角度會介於 $45^\circ \sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於 90°

$$\text{用兩倍角公式求出} \tan 2\theta = \frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{24}{-7}$$

由於這個角度介於 $90^\circ \sim 180^\circ$ ， $y > 0$ ，而 $x < 0$ ，也因此 $y = 24$ ， $x = -7$ ， $r = \sqrt{24^2 + (-7)^2} = 25$

因此 $\cos 2\theta = \frac{-7}{25}$ ，故選(A)

101年第1次北科入學數學會考

101-01-01

Statement

設 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ， $\cos \beta = \frac{2}{3}$ 且 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ， $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ ，求 $\sin(\alpha + \beta) = ?$

- (A) 1
- (B) $\frac{2 - 2\sqrt{10}}{9}$
- (C) $\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$
- (D) $\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9}$
- (E) $\frac{2 - 2\sqrt{2}}{3}$

Solution

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \text{ 則 } \cos \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2} < \beta < 0, \text{ 則 } \sin \beta = \frac{-\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{因此 } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{-2\sqrt{2}}{3} \times \frac{-\sqrt{5}}{3} = \frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}, \text{ 故選(C)}$$

101-01-02

Statement

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = ?$$

- (A) $\frac{-3}{4}$
(B) $\frac{-\sqrt{3}}{4}$
(C) $\frac{-1}{4}$
(D) $\frac{1}{4}$
(E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Solution

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{因此} \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}(-1)\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4} \cdot \text{故選}(A)$$

101-01-03

Statement

設 α, β 為方程式 $x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$ 兩負根，且 $\alpha^2 + \beta^2 = 24$ ，則 $k = ?$

- (A) -4
(B) -3
(C) -2
(D) 2
(E) 4

Solution

根據根與係數，得到 $\alpha\beta = \frac{k^2 + k}{1} = k^2 + k$ ，且 $\alpha + \beta = -\frac{-2k}{1} = 2k$

且由於是兩負根，所以 $\alpha\beta > 0, \alpha + \beta < 0$

$$\text{故} \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 - 2(k^2 + k) = 2k^2 - 2k = 24$$

解方程可知 $k = 4$ 或 $k = -3$

驗根，若 $k = 4$ ，則 $\alpha + \beta = 8 > 0$ ，故不合。

因此 $k = -3$ ，故選(B)。

101-01-04

Statement

取適當 k 值，使圓 $x^2 + y^2 - 2kx - 4y + 2k^2 = 6k$ 的面積最大，問此時圓面積為何？

- (A) 10π
- (B) 11π
- (C) 12π
- (D) 13π
- (E) 14π

Solution

對式子做配方法，可以得到 $(x^2 - 2kx + k^2) + (y^2 - 4y + 4) = 6k - 2k^2 + k^2 + 4$

因此 $(x - k)^2 + (y - 2)^2 = -k^2 + 6k + 4$

若圓半徑越大則面積越大，因此我們考慮 $-k^2 + 6k + 4$ 的極值

因此我們對 $(-k^2 + 6k + 4)$ 做配方法，得到 $-(k - 3)^2 + 13$

因此在 $k = 3$ 時，有最大圓半徑 $\sqrt{13}$ ，故圓面積為 $(\sqrt{13})^2\pi = 13\pi$ ，故選(D)

101-01-05

Statement

設 $P(x, y), A(1, -1), B(1, 1), C(4, -1)$ 。滿足 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + 2\overline{PC}^2$ 為最小，則 $x + y = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

可列式成 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2((x - 4)^2 + (y + 1)^2)$

整理成 $2(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 2(x - 4)^2 + (y - 1)^2$

由於各項數字均一定為正，我們可以分開討論

尋找 $2(x - 1)^2 + 2(x - 4)^2$ 與 $3(y + 1)^2 + (y - 1)^2$ 的最小值。

$2(x - 1)^2 + 2(x - 4)^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 2x^2 - 16x + 32 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 34$

對其做配方法，得到 $4(x - \frac{5}{2})^2 + 9$ ，可得 $x = \frac{5}{2}$ 有最小值9。

$3(y + 1)^2 + (y - 1)^2 \Rightarrow 3y^2 + 6y + 3 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow 4y^2 + 4y + 4$

對其做配方法，得到 $4(y + \frac{1}{2})^2 + 3$ ，可得 $y = -\frac{1}{2}$ 有最小值3。

因此 $x + y = \frac{5}{2} + \frac{-1}{2} = 2$ ，故選(B)

101-01-06

Statement

已知 $A(-1, -4)$, $B(3, 5)$ 兩點，又 C 在直線上 $x + y = 0$ 移動，則 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 的最小距離為何？

- (A) $\sqrt{97}$
- (B) 10
- (C) $5\sqrt{5}$
- (D) 12
- (E) 14

Solution

若兩點與直線異側，則 C 的取點即為 A 與 B 做一直線與 $x + y = 0$ 之交點，最小距離即為 A 與 B 的距離。

將 A, B 代入直線方程式檢驗

$$A: -1 + (-4) = -5 < 0$$

$$B: 3 + 5 = 8 > 0$$

因此最短距離為 A 與 B 的距離，也就是 $\sqrt{(-1-3)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$ ，故選(A)

101-01-07

Statement

四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{CD} = 5$ ， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{BC} < \overline{AD}$ 且 $\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$ ，則 $\overline{AD} = ?$

- (A) 3
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 8
- (E) 9

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} = \frac{5^2 + 2^2 - \overline{AC}^2}{2 \times 5 \times 2} = \frac{1}{2} \cdot \text{可得 } \overline{AC} = \pm\sqrt{19} \text{ (負不合)}$$

$$\text{因此，} \cos \angle ADC = \cos 60^\circ = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AD} \times \overline{CD}} = \frac{\overline{AD}^2 + 25 - 19}{10\overline{AD}} = \frac{1}{2}$$

可以得到 $\overline{AD} = 2$ 或 $\overline{AD} = 3$

由於 $\overline{AD} > \overline{BC}$ ，因此 $\overline{AD} = 2$ 不合，故 $\overline{AD} = 3$ ，故選(A)

101-01-08

Statement

點 $(-3, 1)$ 與拋物線 $y^2 - 2y + 5 = 2x$ 的最短距離為何？

- (A) 4
- (B) $\sqrt{17}$
- (C) $3\sqrt{2}$
- (D) 5
- (E) $5\sqrt{5}$

Solution

$$y^2 - 2y + 5 = 2x$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 + 5 - 1 = 2x$$

$$\Rightarrow (y - 1)^2 = 2(x - 2) \cdot \text{開口向右。}$$

故頂點為 $(2, 1)$ ，與 $(-3, 1)$ 的距離隔5，因此距離為5，故選(D)

101-01-09

Statement

設橢圓 $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ 之長軸長為 A ，短軸長為 B ，則 $A + B = ?$

- (A) $1 + \sqrt{3}$
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

Solution

配方法

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + 4y^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 1)^2}{4} + y^2 = 1$$

因此長軸 $A = \sqrt{4} \times 2 = 4$ ，短軸長 $B = \sqrt{1} \times 2 = 2$

因此 $A + B = 4 + 2 = 6$ ，故選(E)

101-01-10

Statement

若 $f(x) = x^3 + ax^2 + 11x + 6$ 與 $g(x) = x^3 + bx^2 + 14x + 8$ 有二次公因式，則 $a + b = ?$

- (A) 13
- (B) 14
- (C) 15
- (D) 16
- (E) 17

Solution

考慮 $f(x)$ 可能的因式： $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x-6)(x+6)$

考慮 $g(x)$ 可能的因式： $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)(x-8)(x+8)$

可以知道 $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ 可能共同

因此我們考慮以下四種式子，是否存在兩個相同的 a ，就能當作 $f(x)$ 的因式。

$$a \begin{cases} (x-1) \Rightarrow 1 + a + 11 + 6 = 0 & a = 18 \\ (x+1) \Rightarrow -1 + a - 11 + 6 = 0 & a = 6 \\ (x-2) \Rightarrow 8 + 4a + 22 + 6 = 0 & a = -9 \\ (x+2) \Rightarrow -8 + 4a - 22 + 6 = 0 & a = 6 \end{cases}$$

因此選 $(x+1)(x+2)$ ，其中 $a = 6$ 。

因此 $b = (-1)^3 + b(-1)^2 + 14(-1) + 8$ ，得到 $b = 7$

因此 $a + b = 6 + 7 = 13$ ，故選(A)

101-01-11

Statement

若 $5 \cdot 25^x + 350 \cdot 5^{x-2} = 3$ ，則 $x = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 0
- (D) 1
- (E) 2

Solution

化簡式子，得到 $5 \cdot 5^{2x} + 350 \cdot \frac{1}{25}5^x = 3$

因此 $5 \cdot 5^{2x} + 14 \cdot 5^x = 3$

令 $t = 5^x$ ，則 $5t^2 + 14t = 3$ ，得到 $t = \frac{1}{5}$ 或 $t = -3$

驗根， $5^x = t = -3$ ，則 x 不存在，故 $t = -3$ 不合。

因此 $5^x = t = \frac{1}{5}$ ， $x = -1$ ，故選(B)

101-01-12

Statement

若 $a = \log 2$ ， $b = \log 3$ ，則 $\log_{12} 180 = ?$

(A) $1 - a + b$

(B) $\frac{1 + a^2 + b^2}{a^2 + b}$

(C) $\frac{a + 2b + 1}{2a + b}$

(D) $\frac{2a + 2b + 1}{2a + b}$

(E) $\frac{2a + 2b - 1}{2a + b}$

Solution

可以考慮成 $\frac{\log 180}{\log 12} = \frac{2b + a + 1}{2a + b}$ ，故選(C)

###

101-01-13

Statement

求曲線 $y = -\sqrt{12 - x(x + 4)}$ 與 x 軸所圍的面積為何？

(A) 4π

(B) 5π

(C) 6π

(D) 7π

(E) 8π

Solution

兩邊平方，得到 $y^2 = 12 - x^2 - 4x$ ，配方法得 $(x + 2)^2 + y^2 = 16$ ，中心位於 $(-2, 0)$ ，半徑為4

可知原式原先為一半圓，且在 x 軸底下。

因此可得面積為 $\frac{1}{2}(4)^2\pi = 8\pi$ ，故選(E)

101-01-14

Statement

方程式 $\log(x + 1) + \log(x + 3) - 1 = \log(x + 2)$ 的解為何？

- (A) $5 - \sqrt{26}$
- (B) $3 - \sqrt{26}$
- (C) $1 - \sqrt{26}$
- (D) $3 + \sqrt{26}$
- (E) $5 + \sqrt{26}$

Solution

改寫成 $\log(x + 1) + \log(x + 3) - \log 10 = \log(x + 2)$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{(x + 1)(x + 3)}{10}\right) = \log(x + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 1)(x + 3)}{10} = x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 10x + 20$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 17 = 0$$

$$\text{公式解，可以得到 } \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times (-17)}}{2} = 3 \pm \sqrt{26}$$

驗根，考慮將 x 套入 $\log(x + 1)$ 上

$3 - \sqrt{26} + 1 = 4 - \sqrt{26} = \sqrt{16} - \sqrt{26} < 0$ ，不符合 \log 的定義域，故不合。

因此 $x = 3 + \sqrt{26}$ ，故選(D)

101-01-15

Statement

設 $\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$ ，則 $3A + 2B + C = ?$

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6
- (E) 7

Solution

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + x(Bx + C)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 4 + (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

可得 $A + B = 2, C = -1, A = 1$ 。因此 $B = 1$

故 $3A + 2B + C = 3 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) = 4$ 。故選(B)

101-01-16

Statement

已知兩平面向量 $\vec{u} = \langle 3, 4 \rangle$ 與 $\vec{v} = \langle x, y \rangle$ 。若 \vec{v} 可使與 \vec{u} 與 \vec{v} 的內積值最大，且 $|\vec{v}| = 2$ ，則 $x = ?$

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{4}{5}$

(D) 1

(E) $\frac{6}{5}$

Solution

考慮 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ ，則要使內積值最大，可使 $\cos \theta = 1$ ，也就是 $\theta = 0^\circ$ ，兩向量平行。

因此 $x : y = 3 : 4$ ，又 $|\vec{v}| = 2$ ，因此 $\vec{v} = \langle 2 \times \frac{3}{5}, 2 \times \frac{4}{5} \rangle = \langle \frac{6}{5}, \frac{8}{5} \rangle$

因此 $x = \frac{6}{5}$ ，故選(E)

101-01-17

Statement

不等式 $\frac{x-7}{(x-1)^2} \leq -1$

(A) $3 \leq x$

(B) $x \leq -2$

(C) $-2 \leq x < 1$ 或 $1 < x \leq 3$

(D) $-2 \leq x \leq 3$

(E) $x \leq -2$ 或 $3 \leq x$

Solution

$$\frac{x-7}{(x-1)^2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{(x-1)^2} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-7+(x-1)^2}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-6}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leq 0$$

定義域 $x \neq 1$ ，分母恆正，考慮分子的情況

$$\begin{cases} x-3 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2, 3]$$

因此兩者取聯集，得到 $[-2, 1) \cup (1, 3]$ ，故選 (C)

101-01-18

Statement

設 x, y 均為正數，且 $3x + y = 10$ ，則 $x^3 y^2$ 的最大值為何？

(A) 108

(B) 116

(C) 122

(D) 128

(E) 134

Solution

利用算幾不等式，可以考慮成 $\frac{x+x+x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y}{5} \geq \sqrt[5]{x^3 \times \frac{1}{4}y^2}$

$$\Rightarrow 2 \geq \sqrt[5]{\frac{1}{4}x^3 y^2}$$

因此 $32 \geq \frac{1}{4}x^3 y^2 \Rightarrow 128 \geq x^3 y^2$ ，故 $x^3 y^2$ 的最大值為 128，故選 (D)

101-01-19

Statement

設 $A(x, y)$, $B(-1, 4)$, $C(5, -4)$ · 且 $\triangle ABC$ 的重心坐標為 $(2, -1)$ · 則 $x - y = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

使用重心公式

$$\frac{x + (-1) + 5}{3} = 2 \cdot x = -10$$

$$\frac{y + 4 + (-4)}{3} = -1 \cdot y = -3$$

因此 $x = 2, y = -3, x - y = 5$ · 故選(E)

101-01-20

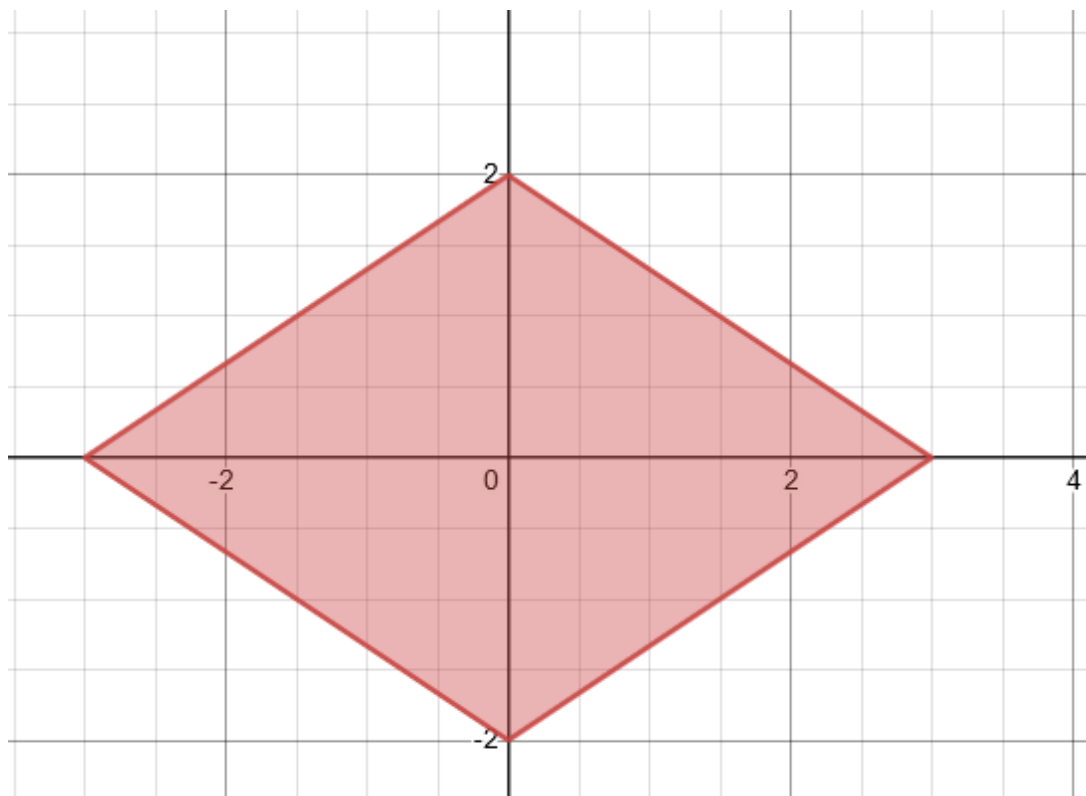
Statement

平面上 $2|x| + 3|y| \leq 6$ 所表示區域的面積為何？

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 12
- (D) 16
- (E) 32

Solution

畫出圖



面積為 $\frac{4 \times 6}{2} = 12$ ，故選(C)。

101年第2次北科入學數學會考

101-02-01

Statement

設 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{-5}{13}$ ，且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ，則 $\sin(\alpha - \beta) = ?$

(A) $\frac{-56}{65}$

(B) $\frac{-16}{65}$

(C) $\frac{16}{65}$

(D) $\frac{27}{65}$

(E) $\frac{56}{65}$

Solution

$$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 0 < \sin \alpha < 1, 0 < \cos \alpha < 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\therefore 0 < \sin \beta < 1, \quad -1 < \cos \beta < 0$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{13} - \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{-20}{65} - \frac{36}{65} = \frac{-56}{65}$$

102-02-02

Statement

方程式 $2^{x^2} \cdot 4^x \cdot 16 = 8^x \cdot 64$ 之所有解的和為何？

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

將式子改寫。

$$2^{x^2} \cdot 4^x = 8^x \cdot 64$$

$$\Rightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{2x} = 2^{3x} \cdot 2^6$$

$$\Rightarrow 2^{x^2+2x} = 2^{3x+6}$$

兩邊同取 \log_2 ，得到 $x^2 + 2x = 3x + 6$

也就得到 $x^2 - x - 6 = 0$ ，因式分解得到 $(x - 3)(x + 2) = 0$

解根得到 $x = 3$ 或 $x = -2$ ， $3 + (-2) = 1$

101-02-03

Statement

已知 Γ 表 $f(x, y) = 0$ 所對應之圖形，若 Γ 水平方向拉長 2 倍，再往右平移 1 單位，則此新圖形的方程式為何？

(A) $f\left(\frac{x}{2} + 1, y\right) = 0$

(B) $f\left(\frac{x-1}{2}, y\right) = 0$

(C) $f\left(\frac{x+1}{2}, y\right) = 0$

(D) $f(2x + 1, y) = 0$

(E) $f(2x - 1, y) = 0$

Solution

考慮拉長兩倍，那麼 a 要變大兩倍，因此 x 乘以 $\frac{1}{2}$

考慮往右平移一單位，那麼座標 $x - 1$ ，因此 x 減1

因此 $f = (\frac{x-1}{2}, y) = 0$ ，故選(B)

101-02-04

Statement

設直線 L 過點 $(-1, 1)$ 且與直線 $8x - 6y = 1$ 垂直，則此直線方程式為何？

(A) $3x - 4y = -1$

(B) $4x + 3y = -1$

(C) $4x - 3y = -7$

(D) $3x + 4y = 1$

(E) $x - y = -2$

Solution

直線 $8x - 6y = 1$ 的斜率為 $\frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

因此造一條與其垂直的直線，這條直線的斜率與其斜率乘積必為 -1 。

$$\frac{4}{3} \times m = -1, m = \frac{-3}{4}$$

已知此直線會過點 $(-1, 1)$ ，因此 $y - 1 = \frac{-3}{4}(x + 1)$

$$4y - 4 = -3(x + 1), 3x + 4y = 1$$

101-02-05

Statement

過點 $(2, -3)$ 與圓 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$ 相切的直線方程式為何？

(A) $2x - y = 7$

(B) $x + 2y = -4$

(C) $2x - 3y = 13$

(D) $3x - 2y = 12$

(E) $x - 2y = 8$

Solution

從圓的方程式可以知道，圓心為 $(1, -1)$ 且半徑為 $\sqrt{5}$ 。

因此我們可以造過點 $(2, -3)$ 的線，並且距離與圓心剛好為 $\sqrt{5}$

可以套用距離公式來得到。

令與圓相切的直線為 $y + 3 = m(x - 2)$

整理後得到 $mx - y - 2m - 3 = 0$

我們可以套用距離公式，得到 $\frac{|mx - y - 2m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$

將圓心帶入距離公式，得到 $|m + 1 - 2m - 3| = \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$

整理後得到 $|-m - 2| = \sqrt{5m^2 + 5}$

兩邊平方後得到 $(-m - 2)^2 = 5m^2 - 5 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 5m^2 + 5$

因此 $-4m^2 + 4m - 1 \cdot m = \frac{1}{2}$ (重根)

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 2y + 6 = x - 2$$

$$\Rightarrow x - 2y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y = 8$$

101-02-06

Statement

以 $(1, 3 + \sqrt{5})$ 與 $(1, 3 - \sqrt{5})$ 為兩焦點且短軸長為6之橢圓方程式為何？

(A) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{14} = 1$

(B) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

(C) $\frac{(x-1)^2}{14} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

(D) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{14} = 1$

(E) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

Solution

兩焦點只有 y 軸有變動，因此這是一個實軸平行 y 軸的橢圓。

$$\text{中心}(x, y) = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2} \right) = (1, 3)$$

$$2c = (3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}, c = \sqrt{5}$$

$$2b = 6, b = 3$$

$$\text{因此 } a = \sqrt{3^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9+5} = \sqrt{14}$$

$$\text{依照 } \frac{(x-h)}{b} + \frac{(y-k)}{a} = 1 \text{ 列式，得}$$

$$\frac{(x-1)}{9} + \frac{(y-3)}{14} = 1$$

101-02-07

Statement

設 $2\log(x-3) - \log 2 = \log(x+9)$ ，則 $x^2 - 10x + 12$ 之值為何？

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$2\log(x-3) - \log 2 = \log(x+9)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 6x + 9}{x+9}\right) = \log(2)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 6x + 9}{2x + 18}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{2x + 18} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x + 18$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-9) = 0$$

$$\text{得到 } x = -1, x = 9$$

驗根，由於 $x = -1$ 帶進去後， $x - 3 < 0$ ，又因為 \log 的定義域為正整數之集合，故 $x = -1$ 不合。

因此 $x = 9$ 。

$$9^2 - 90 + 12 = 81 - 90 + 12 = 3，\text{故選}(C)。$$

101-02-08

Statement

若 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，則 $\cos 2\theta + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$ 有幾個解？

- (A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

Solution

利用和角公式，可以知道

$$\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} - (1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = \cos \theta$$

$$\text{因此 } \cos \theta + 1 = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{且 } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$2 \cos^2 \theta - 1 + \cos \theta + 1 = 1$$

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1$$

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{令 } t = \cos \theta, \text{ 則 } 2t^2 + t - 1 = 0, \text{ 可得 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = -1$$

$$\text{考慮 } t = \cos \theta = \frac{1}{2}, \text{ 則 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \theta = \frac{-\pi}{3}$$

$$\text{考慮 } t = \cos \theta = -1, \text{ 則 } \theta = \pi$$

因此有三組解，故選(D)

101-02-09

Statement

設 a 、 b 、 c 分別表示 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對邊長，若 $b^2 - (c - a)^2 = ca$ ，則 $\angle B = ?$

- (A) 30°
(B) 45°
(C) 60°
(D) 120°
(E) 135°

Solution

$$b^2 - (c - a)^2 = ca$$

$$\Rightarrow b^2 - (c^2 - 2ac + a^2) = ca$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 + 2ac - a^2 = ca$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 - a^2 = -ac$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又} \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

因此 $\angle B = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ ，故選(C)。

101-02-10

Statement

方程式 $x^{1+\log_2 x} = (2x^3)$ 之所有解的和為何？

(A) $\frac{15}{2}$

(B) 8

(C) $\frac{17}{2}$

(D) 9

(E) $\frac{19}{2}$

Solution

$$x^{1+\log_2 x} = 8x^3$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2 x = \log_x (8x^3)$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2 x = \frac{\log_2 8x^3}{\log_2 x}$$

$$\Rightarrow \log_2 x + \log_2^2 x = \log_2 8x^3$$

$$\Rightarrow \log_2 x + \log_2^2 x = 3 + 3\log_2 x$$

$$\text{令 } t = \log_2 x, \text{ 則 } t + t^2 = 3 + 3t$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = 3 \text{ 或 } t = -1$$

$$\text{還原 } t, \text{ 得到 } \begin{cases} \log_2 x = 3, & x = 8 \\ \log_2 x = -1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{因此 } 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}, \text{ 故選(C)}$$

101-02-11

Statement

若 $f(x) = \frac{x-1}{x}$ ，且 $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x+1}$ ，則 $g(0) = ?$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

Solution

$f(x) = \frac{x-1}{x}$ ，則 $f(g(0)) = \frac{g(0)-1}{g(0)} = 0$ ，因此 $\frac{g(0)-1}{g(0)} = 0$ ，因此 $g(0) = 1$ ，故選(B)。

101-02-12

Statement

已知平面上兩點 $A(-3, 1)$ 、 $B(3, 5)$ ，又點 $P(a, b)$ 在直線 $2x + y + 1 = 0$ 且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，則 $a + b = ?$

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8
- (E) 9

Solution

將 A, B 兩點帶入直線，確定是否同側或異側。

代入點 A ： $2 \cdot (-3) + 1 + 1 = -4$

代入點 B ： $2 \times 3 + 5 + 1 = 12$

因此兩點異側。

$$2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1$$

由於 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，因此

$$\sqrt{(-3-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (5-y)^2}$$

$$\Rightarrow (-3-x)^2 + (1+2x+1)^2 = (3-x)^2 + (5+2x+1)^2$$

$$\Rightarrow (-3-x)^2 + (2x+2)^2 = (3-x)^2 + (6+2x)^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 14x + 13 = 5x^2 + 18x + 45$$

$$\Rightarrow -4x = 32$$

$$\Rightarrow x = -8$$

$$\Rightarrow y = 15$$

因此 $a = -8, b = 15, a + b = 7$ ，故選(C)

101-02-13

Statement

設二向量 $\vec{a} = \langle 2, t^2 - 3 \rangle$ ， $\vec{b} = \langle t, -1 \rangle$ 。

若 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角為 $\frac{\pi}{2}$ ，且 \vec{b} 的長度不大於 2，則 $t = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，因此 $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 0$ ，因此 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2t - t^2 + 3 = (-t + 3)(t + 1) = 0$$

得到 $t = 3$ 或 $t = -1$

長度不大於 2，因此我們考慮兩種 t 套進 \vec{b} 的影響

考慮 $t = 3$ ，得到 $\sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} > 2$ ，因此 $t = 3$ 不合

考慮 $t = -1$ ，得到 $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

因此 $t = -1$ ，故選 (B)。

101-02-14

Statement

設 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha - \beta$ 為方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的兩根，且 $\alpha < \beta + 2$ ，則 $\beta = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

利用根與係數，可以知道

$$(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = -\left(\frac{-6}{1}\right) = 6$$

$$2\alpha = 6 \text{ 則 } \alpha = 3$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2 = 5 \text{，則 } \beta = \pm 2$$

由於要滿足 $\alpha < \beta + 2$ ，所以 $\beta = -2$ 不合。

因此 $\beta = 2$ ，故選(C)。

101-02-15

Statement

設 f 為奇函數， g 為偶函數，及對所有的 x ，恆有 $f(-x) = -f(x)$ 且 $g(-x) = g(x)$ 。

如果 f 和 g 均為非零函數，則下列何者恆為正確？

(A) $f - g$ 為奇函數

(B) $f \cdot g$ 為奇函數

(C) $f^3 \cdot g^3$ 為偶函數

(D) $2f + 3g$ 為偶函數

(E) $f + g$ 的函數圖形對稱於 y 軸

Solution

偶函數只有全部非負整數或全部非正整數兩種情況。

因此乘到奇函數只有全部改變函數上的正負號或不改變兩種情況，函數本身依然是奇函數。

故選(B)。

101-02-16

Statement

下列何者為函數 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}}$ 的定義域？

(A) $\{x|x < -1\}$

(B) $\{x|x > -1\}$

(C) $\{x|-1 < x < 1\}$

(D) $\{x|-1 < x, x \neq 1\}$

(E) $\{x|x > 1\}$

Solution

$$\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} > 0$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+1) > 0 \cdot \text{得到 } x \neq 1 \text{ 且 } x \neq -1$$

由於 $(x-1)^2$ 恆正，因此我們考慮 $(x+1) > 0$ ，得到 $x > -1$ 。

因此 $f(x)$ 的定義域 $D(f(x)) = \{x|(x > -1), (x \neq 1)\}$ ，故選(D)

101-02-17

Statement

設 $\frac{x^2 - 10x + 8}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ 的部份分式為 $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$ ，則 $a - b - c = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 3

(E) 5

Solution

$$\frac{x^2 - 10x + 8}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \Rightarrow \frac{x^2 - 10x + 8}{(x-2)^2(x+2)}$$

$$x^2 - 10x + 8 = a(x-2)^2 + b(x-2)(x+2) + c(x+2)$$

$$\text{令 } x = 2 \cdot 4 - 20 + 8 = 4c \cdot \text{得到 } c = -2$$

$$\text{令 } x = -2 \cdot 16a = 4 + 20 + 8 = 32 \cdot \text{得到 } a = 2$$

$$\text{令 } x = 0 \cdot 8 = 4a - 4b + 2c = 8 - 4b - 4 \cdot \text{得到 } b = -1$$

$$a - b - c = 2 - (-1) - (-2) = 5 \cdot \text{故選(E)}。$$

101-02-18

Statement

設 $2x^2 + (k-1)x + (k-3) = 0$ 之一根大於2，一根小於1，則 k 之範圍為何？

(A) $\{k | k < -1\}$

(B) $\{k | 1 < k < 3\}$

(C) $\{k | -1 < k < 3\}$

(D) $\{k | k > 1\}$

(E) $\{k | -\infty < k < \infty\}$

Solution

$$\frac{-(k-1) \pm \sqrt{(k-1)^2 - 4 \times 2 \times (k-3)}}{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow \frac{-k+1 \pm \sqrt{k^2 - 2k + 1 - 8k + 24}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-k+1 \pm \sqrt{k^2 - 10k + 25}}{4}$$

一根大於2，因此用 $\frac{-k+1+\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$ 考慮

因此 $-k+1+\sqrt{k^2-10k+25}>8$ ， $-k+1+(k-5)>8$ ，得到 $k<-1$

一根小於1，因此用 $\frac{-k+1-\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$ 考慮

因此 $-k+1-\sqrt{k^2-10k+25}<4$ ， $-k+1+(k-5)<4$ ，得到 $k\in\mathbb{R}$

取聯集得到 $k<-1$ ，因此 k 的範圍為 $\{k|k<-1\}$ ，故選(A)

101-02-19

Statement

若 $f(x)=\sqrt{3-x}$ ， $g(x)=\sqrt{x-1}$ ，則 $f\circ g$ 的定義域為何？

(A) $[1, 3]$

(B) $[1, 4]$

(C) $[2, 4]$

(D) $[3, 9]$

(E) $[1, 10]$

Solution

$$f\circ g=\sqrt{3-\sqrt{x-1}}$$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到 $3-\sqrt{x-1}\geq 0$ ， $x\leq 10$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到 $x-1\geq 0$ ，得到 $x\geq 1$

取交集後得到 $1\leq x\leq 10$ ，故選(E)。

101-02-20

Statement

若 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 能被 x^2+1 整除，則 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為何？

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

(E) 10

Solution

利用長除法來做 $f(x)$ 除以 x^2+1 ，可以得到商為 $(x+a)$ 且餘數為 $(b-1)x+(2-a)$

因為能夠被整除，因此餘數為0，得到 $b=1$ 且 $a=2$

因此 $f(x)=x^3+2x^2+x+2$

除以 $x + 1$ ，利用餘式定理，將 x 帶 -1

因此 $f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 2 = -1 + 2 + (-1) + 2 = 2$ ，故選(A)

102年第1次北科入學數學會考

102-01-01

Statement

若 $\log(x - 9) + \log(x - 5) = \log 4 + \log(25 - 2x)$ ，則 $x = ?$

- (A) 9
- (B) 10
- (C) 11
- (D) 12
- (E) 13

Solution

$$\log(x - 9) + \log(x - 5) = \log 4 + \log(25 - 2x)$$

$$\Rightarrow \log((x - 9)(x - 5)) = \log(4(25 - 2x))$$

$$\Rightarrow \log(x^2 - 14x + 45) = \log(100 - 8x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 100 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 55 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 11)(x + 5) = 0$$

可得 $x = -5$ 或 $x = 11$ 。

驗根，可知當 $x = -5$ 代入 $\log(x - 9)$ ，會得到 $\log -14$

\log 的定義域為正整數之集合，故不合。

因此 $x = 11$ ，故選(C)。

102-01-02

Statement

已知 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ 。若 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \beta = \frac{1}{3}$ ，則 $\sin(\alpha + \beta) = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
 (B) $\frac{2\sqrt{10}}{10}$
 (C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
 (D) $\frac{\sqrt{15}}{10}$
 (E) $\frac{\sqrt{17}}{10}$

Solution

$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ，因為 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ，則 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ 。

$\tan \beta = \frac{1}{3}$ ，因為 $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，而 $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

因此 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{-9\sqrt{10}}{50} + \frac{4\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，故選(A)。

102-01-03

Statement

已知 \vec{a} 與 \vec{b} 為兩向量， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 且 $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ 。

若 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角為 θ ，則 $\cos \theta = ?$

- (A) $\frac{1}{7}$
 (B) $\frac{1}{6}$
 (C) $\frac{1}{5}$
 (D) $\frac{6}{25}$
 (E) $\frac{7}{25}$

Solution

$$(|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 16$$

$$(|\vec{a} - \vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 9$$

$$\text{因此，} 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 7, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7}{4}$$

$$\text{又} |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{，因此 } 2|\vec{a}|^2 - \frac{7}{2} = 9 \text{，} |\vec{a}| = \frac{5}{2}$$

$$\text{已知 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cos \theta = \frac{7}{4} \text{，得到 } \cos \theta = \frac{7}{25} \text{，故選(E)}$$

102-01-04

Statement

若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{3} + 1$ ， $\overline{BC} = 2$ 且 $\angle B = 30^\circ$ ，則 $\angle A = ?$

- (A) 30°
- (B) 45°
- (C) 60°
- (D) 90°
- (E) 120°

Solution

$$\overline{AC}^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (2)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot (2) \cdot \cos \beta$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - (4\sqrt{3} + 4) \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$\text{因此 } \overline{AC} = \sqrt{2}$$

已知 $\frac{\overline{AC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{\sin \alpha}$ ，因此 $\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}$ ，得到 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因此 $\alpha = 45^\circ$ ，故選(B)

102-01-05

Statement

下列敘述何者正確？

- (A) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的定義域為 $(-1, \infty)$
- (B) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的定義域為 $[-1, \infty)$
- (C) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的值域為 $[1, \infty)$
- (D) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 的定義域為 $[-1, \infty)$
- (E) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 的值域為 $[1, \infty)$

Solution

(A) 的定義域為 \mathbb{R}

(B) 的定義域為 \mathbb{R}

(C) 的值域為 $[0, \infty)$

(E) 的值域為 $[0, \infty)$

故選(D)

102-01-06

Statement

若 $\frac{16x^3 - 20x^2 + 6x + 3}{(2x - 1)^4} = \frac{a}{(2x - 1)} + \frac{b}{(2x - 1)^2} + \frac{c}{(2x - 1)^3} + \frac{d}{(2x - 1)^4}$ ，則

$a - b + c - d = ?$

(A) -3

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 3

Solution

$$\frac{16x^3 - 20x^2 + 6x + 3}{(2x - 1)^4} = \frac{a}{(2x - 1)} + \frac{b}{(2x - 1)^2} + \frac{c}{(2x - 1)^3} + \frac{d}{(2x - 1)^4}$$

$$\Rightarrow 16x^3 - 20x^2 + 6x + 3 = a(2x - 1)^3 + b(2x - 1)^2 + c(2x - 1) + d$$

利用綜合除法

16	-20	6	3	1/2
	8	-6	0	
8				3
	-6	0		
	4	-1		
4				-1
	-1			
	2			
2				1

得到 $a = 2, b = 1, c = -1, d = 3$ 。因此 $a - b + c - d = 2 - 1 + (-1) - 3 = -3$ 。故選(A)

102-01-07

Statement

若橢圓 $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 24 = 0$ 的長、短軸長各為 a 、 b ，則 $a + b = ?$

- (A) $\frac{5}{7}$
 (B) $\frac{10}{7}$
 (C) $\frac{15}{7}$
 (D) $\frac{35}{6}$
 (E) $\frac{35}{3}$

Solution

$$4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y = 24$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 24 + 16 + 9$$

$$\Rightarrow 4(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 2)^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{49}{9}} = 1$$

$$\text{可知長軸 } 2a = 2\sqrt{\frac{49}{4}} = 7, \text{ 短軸 } 2b = 2\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{14}{3}$$

$$7 + \frac{14}{3} = \frac{35}{3}, \text{ 故選 (E)}$$

102-01-08

Statement

下列何者錯誤？

- (A) $\sin \frac{8\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3}$
 (B) $\cos \frac{17\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{3}$
 (C) $\tan \frac{11\pi}{3} = \tan \frac{2\pi}{3}$
 (D) $\sec \frac{15\pi}{4} = -\sec \frac{\pi}{4}$
 (E) $\csc \frac{7\pi}{6} = -\csc \frac{\pi}{6}$

Solution

$$\sec \frac{15\pi}{4} = \sec 675^\circ = \sec 45^\circ$$

$$\sec 45^\circ \neq -\sec 45^\circ, \text{ 故選 (D)}$$

102-01-09

Statement

若 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7 = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + e$

則 $a + b + c = ?$

(A) 20

(B) 21

(C) 22

(D) 23

(E) 24

Solution

1	-2	3	0	7		2
	2	0	6	12		
1	0	3	6			19
	2	4	14			
1	2	7				20
	2	8				
1	4					15
	2					
1						6
1						

故 $a = 1, b = 6, c = 15, d = 20, e = 19$

因此 $a + b + c = 22$ ，故選(C)

102-01-10

Statement

若 $L_1 = 2x - y + 7 = 0$ 與 $L_2 = ax + y - 13 = 0$ 的交角為 $\frac{\pi}{4}$ 且 $a > 0$ ，則 $a = ?$

- (A) 6
- (B) 5
- (C) 4
- (D) 3
- (E) 2

Solution

$$m_1 = -\frac{2}{-1} = 2, m_2 = -\frac{a}{1} = -a$$

$$\text{又} \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{2 - (-a)}{1 - 2a} = \frac{2 + a}{1 - 2a}$$

交角可能是 $\tan 45^\circ$ 或 $\tan 135^\circ$ ，因此考慮

若是 $\tan 45^\circ$ ，則 $\frac{2 + a}{1 - 2a} = 1$ ，得到 $a = -\frac{1}{3}$ ，不合。

若是 $\tan 135^\circ$ ，則 $\frac{2 + a}{1 - 2a} = -1$ ，得到 $a = 3$

因此 $a = 3$ ，故選(D)

102-01-11

Statement

求不等式 $1 + \frac{2x - 7}{(x - 2)^2} < 0$ 的解為何？

- (A) $3 > x$
- (B) $x < -1$
- (C) $-1 < x < 2$ 或 $2 < x < 3$
- (D) $-1 < x < 3$
- (E) $x < -1$ 或 $3 < x$

Solution

$$1 + \frac{2x - 7}{(x - 2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 4} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 2)^2} < 0$$

考慮定義域，得到條件1： $x \neq 2$

因此考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) > 0 \\ (x-2)^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) < 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3$$

將這兩種情況取聯集，與條件1取交集，得到 $-1 < x < 2$ 或 $2 < x < 3$ ，故選(C)

102-01-12

Statement

若拋物線 $x^2 = y + 3$ 與直線 $5x + y - 3 = 0$ 相交於 $P(a, b)$ 及 $Q(c, d)$ 且 $a > c$ ，則 $b - d = ?$

(A) -35

(B) -8

(C) 31

(D) 35

(E) 8

Solution

$$x^2 = y + 3 \Rightarrow y = x^2 - 3$$

$$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -5x + 3$$

$$\text{則 } x^2 - 3 = -5x + 3, \text{ 得到 } x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-1) = 0$$

$$\text{因此 } x = -6 \text{ 或 } x = 1$$

$$\text{得到 } a = 1 \text{ 且 } c = -6, \text{ 代入原方程式得到 } b = -2 \text{ 且 } d = 33$$

$$\text{因此 } b - d = -2 - 33 = -35, \text{ 故選(A)}$$

102-01-13

Statement

若 $P(4, 1)$ 、 $Q(2, 1)$ 、 $R(a, a)$ 且 $\overline{PR} + \overline{QR}$ 的值為最小，則 $a = ?$

(A) 1

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{7}{4}$

(E) 2

Solution

考慮 $R(a, a)$ 在 $y = x$ 上，因此我們可以試著確定 P, Q 是否在 $y = x$ 不同側上。

判別式為 $y - x$ ，代入 $P(4, 1)$ 得3，代入 $Q(2, 1)$ 得1，因此同側。

因此，我們考慮在 $y = x$ 上做一鏡像 Q' ，求一直線 L 經過 P 與 Q' ，與 $y = x$ 之交集點。

可得 $Q' = (1, 2)$ ，利用點斜式得到直線 $y - 2 = \frac{2 - 1}{1 - 4}(x - 1) \Rightarrow 3y = -x + 7$

與 $y = x$ 取交集，得到 $x = \frac{7}{4}$ ，因此 $a = \frac{7}{4}$ ，故選(D)

102-01-14

Statement

若雙曲線之漸進線為 x 軸與 y 軸且過點 $(1, -1)$ ，則此雙曲線方程式為何？

(A) $x^2 - (y + 1)^2 = 1$

(B) $xy = -1$

(C) $y^2 - (x - 1)^2 = 1$

(D) $\frac{(x - 1)^2}{4} - (y + 1)^2 = 1$

(E) $\frac{(x + 1)^2}{4} - (y + 1)^2 = -1$

Solution

漸進線為 x 軸與 y 軸，因此雙曲線為垂直雙曲線 $xy = c$ 之形式，故選(B)。

102-01-15

Statement

若 $a = \log 2$ 、 $b = \log 3$ ，則 $10^{3a-2b} = ?$

(A) $\frac{8}{9}$

(B) $\frac{11}{10}$

(C) 1

(D) 10

(E) 12

Solution

$$10^{3a-2b} = 10^{3 \log 2 - 2 \log 3} = 10^{\log 8 - \log 9} = 10^{\log \frac{8}{9}} = \frac{8}{9} \cdot \text{故選}(A)$$

102-01-16

Statement

若 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ 且 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = ?$

- (A) $\frac{4}{9}$
(B) $\frac{\sqrt{17}}{9}$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(D) $\frac{\sqrt{19}}{9}$
(E) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

Solution

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3} \text{ 且 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \cdot \text{ 因此 } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{因此 } -2 \sin \theta \cos \theta = \frac{-8}{9} \cdot \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\text{可知 } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{8}{9}$$

$$\text{則 } \cos 2\theta = \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} = \frac{\sqrt{17}}{9} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\text{由於上述已知 } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \cdot \text{ 因此 } \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi \cdot \text{ 所以 } \cos 2\theta = \frac{-\sqrt{17}}{9}$$

$$\text{因此 } \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \frac{\sqrt{17}}{9} \cdot \text{ 故選}(B)$$

102-01-17

Statement

若直線通過點 $(3, 4)$ 且在第一象限與兩軸所圍三角形面積最小，則此直線的兩截距和為何？

- (A) 12
(B) 13
(C) 14
(D) 15
(E) 16

Solution

列出直線式子： $y - 4 = m(x - 3)$

求得 x, y 的截距：

$$\text{令 } x = 0, y = -3m + 4$$

$$\text{令 } y = 0, x = \frac{-4}{m} + 3$$

$$\text{因此 } xy = (-3m + 4)\left(\frac{-4}{m} + 3\right) = 12 - 9m - \frac{16}{m} + 12 = -9m - \frac{16}{m} + 24$$

利用微分解出極值，因此零次項捨去不用：

$$\therefore f'(m) = \frac{d}{dm}(f + g) = \frac{d}{dm}(f) + \frac{d}{dm}(g)$$

$$\therefore f'(m) = \frac{d}{dm}(-9m) + \frac{d}{dm}\left(-\frac{16}{m}\right)$$

$$f'(m) = -9 + \frac{16}{m^2} = 0$$

$$9m^2 = 16, m = \sqrt{\frac{16}{9}} = \pm \frac{4}{3} \text{ (正不合)}$$

$$\text{帶回截距，得 } y = \frac{-4}{3} \times -3 + 4 = 8, x = \frac{-4}{\frac{-4}{3}} + 3 = 6$$

$$x + y = 14 \cdot \text{故選}(C)$$

102-01-18

Statement

已知圓 $x^2 + y^2 = 10$ 與 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ 有兩交點，求此兩交點的距離為何？

- (A) $\sqrt{33}$
(B) $\sqrt{35}$
(C) $\sqrt{37}$
(D) $\sqrt{39}$
(E) $2\sqrt{10}$

Solution

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$$

$$\Rightarrow 10 - 2x + 4y = 5$$

$$\Rightarrow 4y = -5 + 2x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-5 + 2x}{4}$$

$$x^2 + \frac{25 - 20x + 4x^2}{16} = 10$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 25 - 20x + 4x^2 = 160$$

$$\Rightarrow 20x^2 - 20x - 135 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{7}$$

$$\text{考慮 } x = \frac{1}{2} + \sqrt{7}, \text{ 則 } y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$\text{考慮 } x = \frac{1}{2} - \sqrt{7}, \text{ 則 } y = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$\text{因此兩點距離為 } \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} + \sqrt{7}\right) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{7}\right)\right)^2 + \left(\left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\right)^2} = \sqrt{35}, \text{ 故選}(B)$$

102-01-19

Statement

若數列的一般項為 $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = ?$

(A) $\frac{276}{600}$

(B) $\frac{451}{600}$

(C) $\frac{476}{600}$

(D) $\frac{500}{600}$

(E) 1

Solution

$$a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$\text{推得規律，得到 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{25} = \frac{451}{600}, \text{ 故選}(B)$$

102-01-20

Statement

若方程式 $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0$ ，則 $x = ?$

(A) -3

(B) -2

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

令 $t = 2^x$ ，則 $t^2 - 6t - 16 = 0$ ，得到 $t = 8$ 或 $t = -2$ (不合)

還原 t ，得到 $x = 3$ ，故選 (E)