100-02-01

Statement

若α，β為方程式$x^2+12x+9=0$的兩根，則$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=?$

(A) -18
(B) -6
(C) 6
(D) 12
(E) 18

Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式ax^2+bx+c，存在兩根α與β。

那麼$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$，且$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$\sqrt{\alpha}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2$

$\Rightarrow \alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$

根據偉達定理我們可以求得

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-12}{1}=-12$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{9}{1}=9$$

注意一下$\alpha+\beta=-12$，$\alpha\beta=9$
若兩根一正一負那麼$\alpha\beta<0$，若兩根都是正的那麼$a+b>0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。
$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$會存在複數，相乘後可以得到$-\sqrt{\alpha\beta}$。

因此帶回欲求之式子：

$-12-2\times-\sqrt{9}=-12+6=-6$

100-02-02

Statement

若 $x^4-x^3-x^2-x-2$ 與 $2x^3+x^2-7x-6$ 的最高公因式為 x^2+bx+c，則$b+2c=?$

(A) -5
(B) -3
(C) 0
(D) 5

(E) 7

Solution

第一式的因式$ax+b$的a一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)，
且b一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到$(x+1)(x-2)(x^2+1)$
接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得倒$(x+1)(x-2)(2x+3)$

可以觀察到最大公因式即為$(x+1)(x-2)=x^2-x-2$
比較係數後得到$b=-1, c=-2$

則$b+2c=-1+2\times -2=-5$。

100-02-03

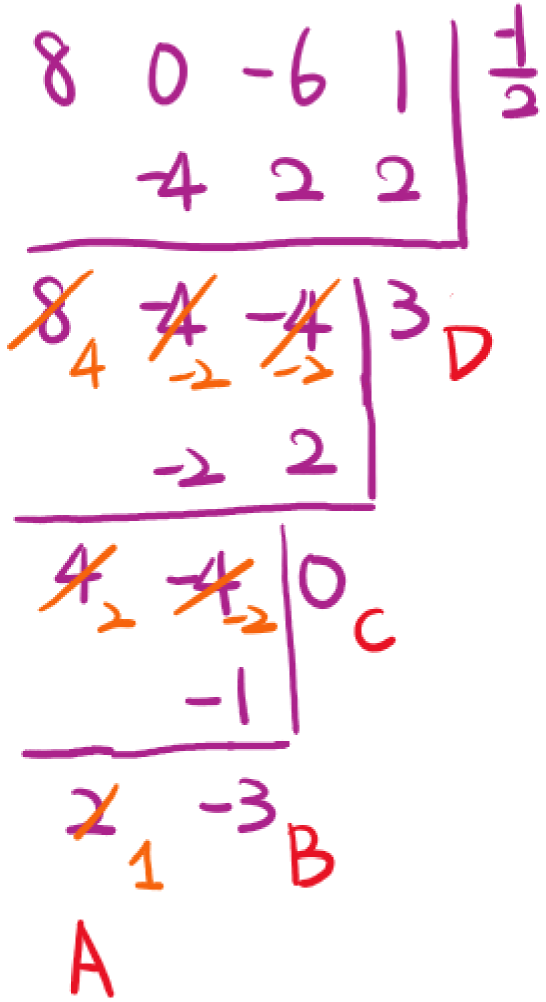
Statement

若$\dfrac{8x^3-6x+1}{(2x+1)^4}=\dfrac{a}{(2x+1)}+\dfrac{b}{(2x+1)^2}+\dfrac{c}{(2x+1)^3}+\dfrac{d}{(2x+1)^4}$，則$2a+b-c+d=?$

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

Solution

我們可以使用綜合除法，將$2x+1$改寫成$x+\dfrac{1}{2}$，然後再對除出來的係數除以2。



因此$a=1,\ b=-3,\ c=0,\ d=3$。

$2a+b-c+d=1\times 2+(-3)-0+3=2$。

100-02-04

Statement

$x^2-4x+2\leq |x-2|$ 之解為何？

(A) $1\leq \mathrm{x}\leq 4$
(B) $2\leq \mathrm{x}\leq 4$
(C) $0\leq \mathrm{x}\leq 2$
(D) $0\leq \mathrm{x}\leq 4$
(E) $0\leq \mathrm{x}\leq 3$

Solution

1. 考慮$x^2-4x+2\leq x-2$：
   移項，$x^2-4x+2-x+2\leq 0$
   整理，$x^2-5x+4\leq 0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$(x-4)(x-1)\leq 0$，並且可以得到$1\leq x\leq 4$。
2. 考慮$x^2-4x+2\leq -x+2$：
   移項，$x^2-4x+2+x-2\leq 0$
   整理，$x^2-3x\leq 0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$x(x-3)\leq 0$，並且可以得到$0\leq x\leq 3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到$0 \le x \le 4$。

100-02-05

Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$之解為何？

$\text{(A) x} < \dfrac{-1}{2}$ 或 $0 < \text{x} < 1$

$\text{(B) } 0 < \text{x} < \dfrac{1}{2}$ 或 $1 < \text{x} < 2$

$\text{(C) x} < \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $0 < \text{x} < 1$

$\text{(D) x} < \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < \text{x} < 2$

$\text{(E) } 0 < \text{x} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < \text{x} < 2$

Solution

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$

$\Rightarrow 2\log_2 x - \dfrac{\log 2}{\log x} < 1$

$\Rightarrow 2\log_2 x - \dfrac{1}{\log_2 x} < 1$

令$\log_2 x = t$，那麼

$2t - \dfrac{1}{t} < 1$

$\Rightarrow 2t - \dfrac{1}{t} - 1 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$

考慮兩種情況。

1. 若$t > 0$且$2t^2 - t - 1 < 0$
   $2t^2 - t - 1 < 0 = (2t+1)(t-1) < 0 = \dfrac{-1}{2} < t < 1$
   與$t > 0$取交集得到$0 < t < 1$。
2. 若$t < 0$且$2t^2 - t - 1 > 0$
   $2t^2 - t - 1 > 0 = (2t+1)(t-1) > 0 = t < \dfrac{-1}{2}$ 或 $t > 1$
   與$t < 0$取交集得到$t < \dfrac{-1}{2}$。

對這兩種考慮取聯集，得到$t < \dfrac{-1}{2}$或$0 < t < 1$。

還原，得到$x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$或$1 < x < 2$。

100-02-06

Statement

已知ΔABC 中，$\overline{AB}=37$，$\overline{BC}=53$，$\overline{AC}=89$，則下列各內積中，何者為最大？

$(A)\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$(B)\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$

$(C)\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$(D)\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$(E)\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

Solution

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=37\times 89\times\frac{37^2+89^2-53^2}{2\times 37\times 89}$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=53\times 37\times\frac{53^2+37^2-89^2}{2\times 53\times 37}$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=89\times 37\times\frac{89^2+53^2-37^2}{2\times 89\times 53}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}<0$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}<0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$37^2+89^2-53^2$。

$53^2+37^2-89^2$

$89^2+53^2-37^2$

顯然是第三者較大，故選(C)

100-02-07

Statement

已知向量$\overrightarrow{AB}=(-31,29)$，$\overrightarrow{AC}=(23,-11)$，則下列向量長中，何者為最大？

(A) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

(B) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

(C) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

(D) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

(E) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$

Solution

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$

$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$
$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$

考慮向量長的公式，當存在一向量$\overrightarrow{L} = (A, B)$，$\overrightarrow{L}$的向量長為$|\overrightarrow{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$
因此若$|A| + |B|$越大，那麼向量長越大。

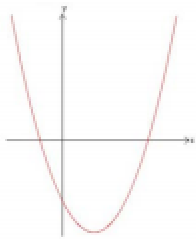
考慮選項A：$|-31| + |29| = 60$
考慮選項B：$|54| + |-40| = 94$
考慮選項C：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$，$|23| + |-11| = 34$
考慮選項D：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$，$|-8| + |18| = 26$
考慮選項E：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$，$|0| + |0| = 0$

因此，故選B。

100-02-08

Statement

設$y = ax^2 + bx + c$的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



(A) abc
(B) $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$
(C) $\mathrm{c}^2 - 4\mathrm{ab}$
(D) $\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$
(E) $\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$

Solution

因為開口向上，所以$a > 0$。
觀察$x = 0$，可以發現對應到的$y < 0$，因此$c < 0$
觀察一下對稱軸，$\frac{-b}{2a} > 0$，因此$b < 0$

因此$abc > 0$，$b^2 - 4ac > 0$因為有實數解。
$c^2 - 4ab > 0$因為$ab < 0$。

而$b + \sqrt{b^2 - 4ac}$必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，
另一根是負數因此$b - \sqrt{b^2 - 4ac}$小於0，故選E。

100-02-09

Statement

已知$4x^2+y^2-4x+8y=8$，則x的最大值為何？

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的x了。

$4x^2-4x+y^2+8y=8$

$4(x^2-x)+y^2+8y=8$

$4(x^2-x+\frac{1}{4})+y^2+8y+16=8+16+1$

$4(x-\frac{1}{2})^2+(y+4)^2=25$

$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y+4)^2}{25}$

由此可知這個橢圓的短邊平行x軸

$a=\sqrt{25}=5, b=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

中心可從式子得知，$(x,y)=(\frac{1}{2},-4)$

因此，加上x的部份得到$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

100-02-10

Statement

拋物線$y=4-2x-x^2$與x軸兩交點的距離為何？

(A) 2
(B) 3
(C) $2\sqrt{5}$
(D) 6
(E) 8

Solution

將y等於0，求出x。

$-x^2-2x+4=0$

先確定b^2-4ac是否大於0。

$(-2)^2-4\times(-1)\times 4=4+16=20$

因此兩根為$\dfrac{2\pm\sqrt{20}}{-2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{5}}{-2}$

$\dfrac{2+\sqrt{5}}{-2}-\dfrac{2-\sqrt{5}}{-2}=2\sqrt{5}$

100-02-11

Statement

設雙曲線$x^2-y^2=x+2y$兩漸進的夾角為θ，則$\sin\dfrac{\theta}{2}=?$

(A) 0
(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
(E) 1

Solution

配方雙曲線得到標準式。

$x^2-x-y^2-2y=0\Rightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4}-y^2-2y+1=\dfrac{5}{4}$

$(x-\dfrac{1}{2})^2-(y-1)^2=\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5}-\dfrac{4(y-1)^2}{5}=1$

求漸進線，令等號右邊為0

$\dfrac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5}=\dfrac{4(y-1)^2}{5}$

$(x-\dfrac{1}{2})^2=(y-1)^2$

$(x-\dfrac{1}{2})^2-(y-1)^2=0$

$(x-\dfrac{1}{2}-(y-1))(x-\dfrac{1}{2}+(y-1))=0$

$(x-y+\dfrac{1}{2})(x+y+\dfrac{3}{2})=0$

第一條線$(x-y+\dfrac{1}{2})$可求斜率$m=1$

第二條線$(x+y+\dfrac{3}{2})$可求斜率$m=-1$

因此，這兩條線垂直$(m_1\times m_2=-1)$，夾角為90°

因此$\sin\frac{90^\circ}{2}=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

100-02-12

Statement

不等式$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\leq 2$之解為何？

$(\mathrm{A})\ -1\leq \mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{B})\ 0<\mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{C})\ 1\leq \mathrm{x}\leq 2$

$(\mathrm{D})\ 0<\mathrm{x}\leq 2$

$(E)\ 1\leq x\leq 4$

Solution

將分子分母上下同乘2^x。

$$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\Rightarrow\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}\leq 2$$

移項。

$$\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}-2\leq 0$$

$$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2(2^{2x}-1)}{2^{2x}-1}\leq 0$$

$$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2\cdot 2^{2x}+2}{2^{2x}-1}\leq 0$$

$$\frac{2^{2x}-16}{2^{2x}-1}\leq 0$$

令$t=2^{2x}$

$$\frac{t-16}{t-1}\leq 0$$

考慮以下兩點：

1. $t-16\geq 0$，$t-1<0$

$t\geq 16,\ t<1$，這兩個不等式沒有任何交集，因此$t\in\emptyset$

2. $t-16\leq 0$，$t-1>0$

$t\leq 16,\ t>1$，這兩個不等式的交集為$1<t\leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到$1<t\leq 16$

還原t得到$1<2^{2x}\leq 16$，因此$0<x\leq 2$

100-02-13

Statement

方程式$10\cdot x^{2\log x}=x^3$之所有實根的平方和為何？

(A) 100
(B) 101
(C) 110
(D) 111
(E) 121

Solution

等號兩邊同除$x^{2\log x}$

$10=x^{3-2\log x}$

$1=(3-2\log x)\times\log(|x|)$

因為要求實根，因此可以限定$x>0$，所以$(3-2\log x)\times\log(x)$

令$t=\log x$

$1=(3-2t)\times t\Rightarrow -2t^2+3t-1=0$

因式分解得到$(-2t+1)(t-1)=0$

可以解出$t=\dfrac{1}{2}$或$t=1$

還原t，可以得到$\log x=\sqrt{10}$ 或 $\log x=10$

兩根的平方和為$\sqrt{10}^2+10^2=110$

100-02-14

Statement

若$f(x)=\log_2(x^3+x^2-7x+5)$，則$f(1+\sqrt{2})=?$

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solution

觀察一下，可以嘗試把x^3+x^2-7x+5化簡成$c(x-1)^2+b(x-1)+a...$

這部分可以用綜合除法做到。

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +1 & -7 & +5 & 1 \\ & +1 & +2 & -5 & \\ \hline 1 & 2 & -5 & \underline{0} & \\ & 1 & 3 & d & \\ \hline 1 & 3 & \underline{-2} & & \\ & 1 & c & & \\ \hline \underline{1} & \underline{4} & & & \\ a & b & & & \end{array}$$

因此可得$(x-1)^3+4(x-1)^2-2(x-1)$。

把$f(1+\sqrt{2})$帶進去，得：

$\log_2((\sqrt{2})^3+4(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}))=\log_2(2\sqrt{2}+8-2\sqrt{2})=\log_2 8=3$

100-02-15

Statement

設$\cos\theta+\cos^2\theta=1$，則$\sin^2\theta+\sin^4\theta=?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

$\cos^2\theta=1-\cos\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(1-\cos\theta)=\cos\theta$

$\sin^4=(\sin^2)^2=\cos^2\theta$

$\sin^2\theta+\sin^4\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=1$

100-02-16

Statement

設$\tan 100^\circ = k$，則$\sin 80^\circ = ?$

(A) $\frac{-\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(B) $\frac{\sqrt{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

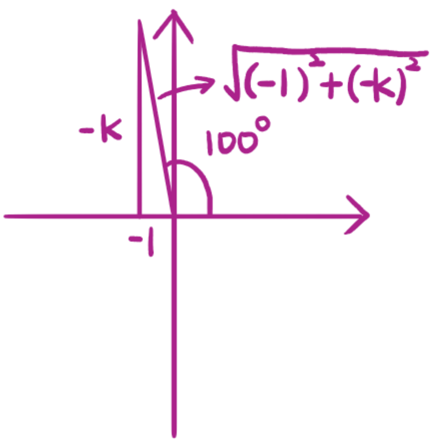
(C) $\frac{-1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(D) $\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

Solution

畫個圖



看圖可以觀察到，$\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

100-02-17

Statement

設$a = \sec 434^\circ$，$b = \sin 100^\circ$，$c = \cos 260^\circ$，$d = \cot 28^\circ$，$e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A) $\mathrm{b} < \mathrm{c} < \mathrm{d} < \mathrm{e} < \mathrm{a}$

(B) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{d} < \mathrm{e} < \mathrm{a}$

(C) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{e} < \mathrm{d} < \mathrm{a}$

(D) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{d} < \mathrm{a} < \mathrm{e}$

(E) $\mathrm{b} < \mathrm{c} < \mathrm{a} < \mathrm{d} < \mathrm{e}$

Solution

$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$

$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$

$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$

$d = \cot 28^\circ$

$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$

因此$a > e$，$c < b$，故選B。

100-02-18

Statement

平面上有兩點$A(1,2)$，$B(a,b)$，若直線$\overline{AB}$之垂直平分線為$x+2y-10=0$，則$a-b$＝？

(A) -1

(B) -2

(C) -3

(D) -4

(E) -5

Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過$\overline{AB}$的中點$(\dfrac{1+a}{2}, \dfrac{2+b}{2})$。

帶入垂直平分線得到$\dfrac{1+a}{2}+2+b-10=0 \Rightarrow 1+a+4+2b-20=0$

$\Rightarrow a+2b=15$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到$m=\dfrac{-1}{2}$，因此與其垂直的斜率一定是$m=\dfrac{-1}{\frac{-1}{2}}=2$

因此按照斜率定義，可以得到$\dfrac{2-b}{1-a}=2$，整理得到$2-b=2-2a \Rightarrow 2a=b$。

帶回第一式可以得到$5a=15,\ a=3,\ b=6$。

$a-b=3-6=-3$

100-02-19

Statement

設直線$bx + ay - ab = 0$，$a > 0,\ b < 0$過點$(1, 2)$，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則$a + 2b = ?$

(A) $-7 - 3\sqrt{3}$

(B) $-6 - 3\sqrt{3}$

(C) $-5 - 3\sqrt{3}$

(D) $-4 - 3\sqrt{3}$

(E) $-3 - 3\sqrt{3}$

Solution

可以推出x, y的通式。

$bx + ay = ab$，求出x, y的截距。

當$y = 0$，那麼$bx = ab$，$x = a$

當$x = 0$，那麼$ay = ab$，$y = b$

已知$a > 0, b < 0$過點$(1, 2)$，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道$\frac{1}{2}|a||b| = 2$，可知$ab = -4$或者$ab = 4$，但是$a > 0, b < 0$，因此$ab = 4$不合。

已知過點$(1, 2)$且$ab = -4$，因此可以把點帶入得到$b + 2a = -4$，

又$ab = -4$所以$a = \frac{-4}{b}$，所以得到$b + \frac{-8}{b} = -4$

同乘以b可以得到$b^2 + 4b - 8$。'

利用公式解可以解出$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times -8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根$-2 + 2\sqrt{3}$或者$-2 - 2\sqrt{3}$，其中由於$b < 0$，因此$-2 + 2\sqrt{3}$不合。

帶回求出a得到$a = \frac{-4}{-2 - 2\sqrt{3}} = \frac{-4}{-2(1 + \sqrt{3})}$

化簡得到$a = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = -1(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

因此$a + 2b = \sqrt{3} - 1 + -4 - 4\sqrt{3} = -5 - 3\sqrt{3}$

100-02-20

Statement

設直線$3x+y=1$與$x+3y=2$之夾角為θ，則$\cos 2\theta=?$

(A) $\dfrac{-7}{25}$

(B) $\dfrac{-6}{25}$

(C) $\dfrac{-1}{5}$

(D) $\dfrac{-4}{25}$

(E) $\dfrac{-3}{25}$

Solution

考慮兩條線的斜率。

$$3x+y=1,\ m_1=\frac{-3}{1}=-3$$

$$x+3y=2,\ m_2=\frac{-1}{3}$$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為tan來考慮。

$$\tan(m_1-m_2)=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-3-\frac{-1}{3}}{1+1}=\frac{\frac{-8}{3}}{2}=\frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個tan夾角是負的，因此這個夾角是大於90°的鈍角。

可以依照$\tan(180^\circ)=0$來求得另一個銳角的夾角。

$\dfrac{\frac{-4}{3}+\tan\theta}{1-\frac{-4}{3}\tan\theta}$，求得銳角$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

由於$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，那麼這個角度會介於$45^\circ\sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於90°

用兩倍角公式求出$\tan 2\theta=\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}}=\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}}=\dfrac{24}{-7}$

由於這個角度介於$90^\circ\sim 180^\circ$，$y>0$，而$x<0$，也因此$y=24,\ x=-7,\ r=\sqrt{24^2+(-7)^2}=25$

因此$\cos 2\theta=\dfrac{-7}{25}$