

# 國立台北科技大學 數學入學會考詳解

---

## 作者

---

- 109 資工系 黃漢軒
  - [Instagram](#)
  - [sigtunatw@gmail.com](mailto:sigtunatw@gmail.com)
- 109 化工系 羅昇宇
  - [Instagram](#)
  - [qoo18105@gmail.com](mailto:qoo18105@gmail.com)

感謝北科入學會考出題老師。

所有的解答均為非官方，有任何勘誤上的問題，請聯繫作者。

## 100年第1次北科入學數學會考

---

### 100-01-01

#### Statement

已知 $f(x)$ 為一實系數多項式，且 $f(\frac{3}{2}) = 27$ ， $f(-\frac{5}{3}) = 8$ 。

若 $f(x)$ 除以 $(6x^2 + x - 15)$ 的餘式為 $ax + b$ ，則 $b - a = ?$

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 12
- (D) 16
- (E) 20

#### Solution

可以把式子轉成

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)(6x^2 + x - 15) + ax + b \\ &= g(x)(3x + 5)(2x - 3) + ax + b \end{aligned}$$

$$\text{代入 } x = \frac{3}{2}, \text{ 得到 } 27 = \frac{3}{2}a + b$$

$$\text{代入 } x = -\frac{5}{3}, \text{ 得到 } 8 = -\frac{5}{3}a + b$$

解聯立之後得到 $(a, b) = (6, 18)$

因此 $b - a = 12$ ，故選(C)

## 100-01-02

### Statement

若 $\alpha, \beta$ 為方程式 $x - \frac{3}{x} + 1 = 0$ 的兩根，則 $(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = ?$

- (A) 9
- (B) 15
- (C) 21
- (D) 27
- (E) 33

### Solution

$$(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = \frac{4}{\alpha\beta} + \frac{10(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 25$$

$$x - \frac{3}{x} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

$$\text{利用根與係數，得到 } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\text{因此 } (\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = \frac{4}{-3} + \frac{-10}{-3} + 25 = 27$$

故選(D)

## 100-01-03

### Statement

求 $13^5 - 14 \times 13^4 + 15 \times 13^3 - 25 \times 13^2 - 12 \times 13 + 9 = ?$

- (A) 22
- (B) 25
- (C) 28
- (D) 31
- (E) 34

### Solution

將式子考慮成 $f(x) = x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 25x^2 - 12x + 9$

式子等價於 $f(x)$ 除以 $x - 13$ 的餘數（餘式定理）。

$$\begin{array}{r}
 1-1+2+1+1 \\
 \hline
 1-13 \overline{) 1-14+15-25-12+9} \\
 \underline{1-13} \phantom{+15-12+9} \\
 -1+15 \phantom{-12+9} \\
 \underline{-1+13} \phantom{-12+9} \\
 2-25 \phantom{-12+9} \\
 \underline{2-26} \phantom{-12+9} \\
 1-12 \phantom{-12+9} \\
 \underline{1-13} \phantom{-12+9} \\
 1+9 \phantom{-12+9} \\
 \underline{1-13} \phantom{-12+9} \\
 \hline
 22
 \end{array}$$

故答案選(A)。

100-01-04

Statement

若  $\frac{2x^2 - x + 4}{x^4 + 4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$ ，則  $A + B + C + D = ?$

- (A)  $\frac{1}{2}$
- (B) 2
- (C) 3
- (D)  $\frac{7}{2}$
- (E) 33

Solution

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^4 + 4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

$$2x^2 - x + 4 = A(x^3 + 4x) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2)$$

$$= Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Dx^2$$

$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 4Ax + 4B$$

可知

$$A + C = 0$$

$$B + D = 2$$

$$A = -\frac{1}{4}$$

$$B = 1$$

$$\text{因此 } C = \frac{1}{4} \cdot D = 1 \circ$$

$$\text{因此 } A + B + C + D = 2$$

故選(B)

## 100-01-05

### Statement

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1 \text{ 之解為何?}$$

(A)  $1 \leq x < 2$

(B)  $1 < x \leq 2$

(C)  $1 < x < 2$

(D)  $x \geq 2$  或  $x < 1$

(E)  $x > 2$  或  $x < 1$

### Solution

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-4)(x-3)}{(x-1)(x-2)} \leq -1$$

考慮一些case

上面的分子要變成負的，則  $3 < x < 4$

下面的分母要變成負的，則  $1 < x < 2$

由於小於-1，因此帶值進去後，分子的絕對值要比分母的絕對值還要大

因此我們可以只考慮下面的case

因此答案為  $1 < x < 2$ ，故選(C)

## 100-01-06

### Statement

$$\text{若 } a, b \text{ 均為實數且 } ax^2 + bx - 10 < 0 \text{ 之解為 } \frac{-5}{2} < x < \frac{4}{3}, \text{ 則 } a + b = ?$$

(A) 5

(B)  $\frac{11}{2}$

(C) 6

(D)  $\frac{13}{2}$

(E) 7

## Solution

可以根據結果列出式子，得：

$$(x + \frac{5}{2})(x - \frac{4}{3}) < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{5x}{2} + \frac{-20}{6} < 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 8x + 15x - 20 < 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 7x - 20 < 0$$

$$\text{兩邊共除2，得} 3x^2 + \frac{7}{2}x - 10 < 0$$

$$a = 3, b = \frac{7}{2}, a + b = \frac{13}{2}$$

## 100-01-07

### Statement

若直線  $12x - 5y = 21$  與兩直線  $x = \frac{23}{39}$ 、 $x = \frac{16}{13}$  分別交於  $A$ 、 $B$  兩點，則線段長  $\overline{AB} = ?$

(A)  $\frac{6}{5}$

(B)  $\frac{5}{4}$

(C)  $\frac{5}{3}$

(D)  $\frac{13}{5}$

(E)  $\frac{25}{7}$

## Solution

已知  $12x - 5y = 21$ ，則斜率為  $\frac{12}{5}$

$$\Delta x = \frac{16}{13} - \frac{23}{39} = \frac{25}{39}$$

$$y = mx + b, \text{ 則 } 0 = \frac{12}{5}(\frac{16}{13} - \frac{23}{39}) + b, \text{ 得到 } b = \frac{60}{39} = \Delta y$$

$$\text{因此距離為 } \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{25}{39})^2 + (\frac{60}{39})^2} = \frac{5}{3}, \text{ 故選 (C)}$$

## 100-01-08

### Statement

設兩向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夾角為  $\theta$ ，且  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ ， $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ ，則  $\cos \theta = ?$

(A)  $\frac{7}{25}$

(B)  $\frac{5}{13}$

(C)  $\frac{3}{5}$

(D)  $\frac{4}{5}$

(E)  $\frac{5}{6}$

### Solution

可以考慮成

$$\cos \theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = -\cos \theta$$

$$\text{因此, } \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = \frac{-|a|^2 - |b|^2 + |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 9 = -|a|^2 - |b|^2 + 16$$

$$\text{設 } x = |a| = |b|, \text{ 故 } 2x^2 - 9 = -2x^2 + 16, \text{ 得到 } x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$$

$$\text{代入 } \cos \theta, \text{ 得到 } \frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 9}{2 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2} - 9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$$

故選(A)

## 100-01-09

### Statement

設兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角為 $\theta$ ，且 $|\vec{a}| = 7$ 、 $|\vec{b}| = 5$ ， $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ ，則 $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = ?$

(A)  $-25$

(B)  $-5$

(C)  $0$

(D)  $44$

(E)  $51$

### Solution

$$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$$

$$\text{已知 } \tan \theta = -\frac{3}{4}, \text{ 則 } \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{因此 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos \theta = 7 \times 5 \times -\frac{4}{5} = -28$$

$$\text{因此 } (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 98 + 28 - 75 = 51$$

故選(E)。

## 100-01-10

### Statement

橢圓以(2, 2)與(6, 2)為兩焦點，且與直線 $x + 1 = 0$ 相切，則橢圓短軸半長為何？

- (A) 4
- (B)  $\sqrt{21}$
- (C)  $\sqrt{23}$
- (D)  $\sqrt{29}$
- (E) 6

### Solution

將題目簡化為求 $b$ 的長度為何

$$\text{橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是 } \left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (4, 2)$$

焦距 $c$ 為焦點與橢圓中點之距離，因此可知 $c = 2$

已知與直線 $x + 1 = 0$ 相切，因此橢圓左右一端會與 $x + 1 = 0$ 相切，因此其中一端為 $(-1, 2)$

故長軸 $a$ 為橢圓長軸端點與中心之距離，可知 $a = 5$

$$\text{因此 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

故選(B)。

## 100-01-11

### Statement

設拋物線 $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$ 的焦點座標為 $(a, b)$ ，則 $ab = ?$

- (A) 3
- (B) 3.5
- (C) 4
- (D) 4.5
- (E) 5

## Solution

$$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

$$\Rightarrow -2(y - 2) = (x - 2)^2$$

$$\text{因此可以知道頂點座標為}(2, 2) \cdot c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{因此焦點為}(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$$

$$\text{故 } a = 2, b = \frac{3}{2}, \text{ 得到 } ab = 3, \text{ 故選 } (A)。$$

## 100-01-12

### Statement

雙曲線 $xy - 3x + 4y = 0$ 兩頂點的距離為何？

(A)  $2\sqrt{3}$

(B) 4

(C)  $2\sqrt{6}$

(D)  $4\sqrt{3}$

(E)  $4\sqrt{6}$

## Solution

$$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x + 4)(y - 3) = -12$$

考慮通過頂點的線為 $y = -x + b$ ，代入必定通過的點 $(-4, 3)$ 得到 $b = -1$

因此 $y = -x - 1$ 會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$$x(-x - 1) - 3x + 4(-x - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$\text{利用公式解得到 } x \text{ 的點，也就是 } x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{當 } x = -4 + 2\sqrt{3} \text{ 時， } y = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\text{當 } x = -4 - 2\sqrt{3} \text{ 時， } y = -3 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{兩點距離為 } \sqrt{(-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3} - 3 - (-3 - 2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48 + 48} = 4\sqrt{6} \cdot \text{故選 } (E)$$



## 100-01-13

### Statement

若 $\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$ ，則 $x = ?$

(A)  $-3$

(B)  $-3$ 或 $1$

(C)  $1$

(D)  $2$

(E)  $3$

### Solution

$$\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$$

$$\Rightarrow \log_2(3 - x^2) - \log_2 x = 1$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{3 - x^2}{x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3 - x^2}{x} = 2$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = -3$$

驗根可知 $\log_2 x$ 無法放入 $-3$ ，因為 $\log$ 的定義域為正整數之集合，故 $x = -3$ 不合。

因此 $x = 1$ ，故選(C)

## 100-01-14

### Statement

若 $f(x) = \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$ ，且 $f(a) = 3$ ， $f(b) = 5$ ，則 $f(a + b) = ?$

(A)  $\frac{5}{3}$

(B)  $2$

(C)  $6$

(D)  $8$

(E)  $15$

### Solution

$$\text{令 } t = 2^x \text{，則 } f(x) = \frac{1 + t}{1 - t}$$

$$\text{考慮 } f(a) = 3$$

$$\frac{1 + t}{1 - t} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + t = 3 - 3t$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{因此 } 2^a = \frac{1}{2} \cdot \text{得到 } a = -1$$

$$\text{考慮 } f(b) = 5$$

$$\frac{1+t}{1-t} = 5$$

$$\Rightarrow 1+t = 5-5t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$2^b = \frac{2}{3} \cdot \text{則 } b = 1 - \log_2 3$$

$$\text{故 } f(a+b) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 \frac{1}{3}) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{2} = 2 \cdot \text{故選}(B)$$

## 100-01-15

### Statement

$$\text{求 } \log_2(\sqrt{12 + 2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12 - 2^{\frac{7}{2}}}) = ?$$

$$(A) \quad \frac{1}{2}$$

$$(B) \quad \frac{3}{2}$$

$$(C) \quad 2$$

$$(D) \quad \frac{5}{2}$$

$$(E) \quad 4$$

### Solution

$$\begin{aligned} \log_2(\sqrt{12 + 2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12 - 2^{\frac{7}{2}}}) &= \log_2(\sqrt{12 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}) = \log_2(\sqrt{8 + 8\sqrt{2} + 4} + \sqrt{8 - 8\sqrt{2} + 4}) \\ &= \log_2(\sqrt{(2 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2 - 2\sqrt{2})^2}) = \log_2(4\sqrt{2}) = \frac{5}{2} \cdot \text{故選}(D) \end{aligned}$$

## 100-01-16

### Statement

$$\text{設 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \cdot \text{且 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \text{則 } \sin \theta + \cos \theta = ?$$

- (A)  $-1$   
(B)  $-\frac{1}{2}$   
(C)  $\frac{1}{2}$   
(D)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$   
(E)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

### Solution

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{故 } \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \sin \theta + \cos \theta &= \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \text{故選 (E)} \end{aligned}$$

## 100-01-17

### Statement

下列何者錯誤？

- (A) 若  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ，則  $\sin x < \cos x < \cot x$   
(B) 若  $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ，則  $\sec x < \csc x < \cot x$   
(C) 若  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ，則  $\cos x < \sin x < \tan x$   
(D) 若  $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ ，則  $\sin x_1 > \sin x_2$   
(E) 若  $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$ ，則  $\cos x_1 > \cos x_2$

### Solution

$$\text{若 } \pi < x < \frac{5\pi}{4} \text{，則 } \sin \theta < \cos \theta < \tan \theta$$

$$\text{故 } \csc \theta < \sec \theta < \cot \theta \text{，故選 (B)}$$

## 100-01-18

### Statement

若 $mx + 3y + 1 = 0$ 與 $x + (m - 2)y + m = 0$ 之交點在第二象限內，則 $m$ 之範圍為何？

- (A)  $0 < m < 1$
- (B)  $0 < m < 2$
- (C)  $0 < m < 3$
- (D)  $1 < m < 3$
- (E)  $1 < m < 4$

### Solution

由第二式，可以知道 $y = \frac{-x - m}{m - 2} = \frac{1}{2 - m}x + \frac{m}{2 - m}$

令 $x = 0$ ，可以知道通過 $(0, \frac{m}{2 - m})$

令 $y = 0$ ，可以知道通過 $(-m, 0)$

因此可以知道 $x$ 截距為 $-m$ ， $y$ 截距為 $\frac{m}{2 - m}$ 。

由於直線要通過第二象限，因此只考慮以下五種case：截距 $y > 0, x > 0$ 、截距 $x < 0, y > 0$ 與截距 $y < 0, x < 0$ 、水平、垂直線

考慮截距 $y > 0, x > 0$ ，得到 $(0 < m < 2) \cap (m < 0) = \emptyset$

考慮截距 $y < 0, x < 0$ ，得到 $(m < 0 \cup m > 2) \cap (m > 0)$ ，得到 $m > 2$ 。

考慮截距 $x < 0, y > 0$ ，得到 $(m > 0) \cap (0 < m < 2)$ ，得到 $0 < m < 2$ 。

考慮水平線：無法滿足

考慮垂直線： $m = 2$ ，會使直線變為 $x = -2$ ，依然會通過第二象限。

由第一式，可以知道 $y = \frac{-mx - 1}{3} = -\frac{m}{3}x - \frac{1}{3}$

令 $x = 0$ ，可以知道通過 $(0, -\frac{1}{3})$

令 $y = 0$ ，可以知道通過 $(\frac{1}{m}, 0)$

因此可以知道 $x$ 截距為 $\frac{1}{m}$ ， $y$ 截距為 $-\frac{1}{3}$

由於直線要通過第二象限，因此只考慮以下五種case：截距 $y > 0, x > 0$ 、截距 $x < 0, y > 0$ 與水平、垂直線

考慮截距 $y > 0, x > 0$ ，得到 $m > 0$ ，則因第二式之二三結果，可使第二式經過第二象限

考慮截距 $y > 0, x < 0$ ，得到 $m < 0$ ，與第二式之結果沒有匹配，因此無法使第二式經過第二象限。

考慮水平線：無法滿足

考慮垂直線：無法滿足

因此可知使兩條直線都通過第二象限所需條件： $m > 0$ 。

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \frac{2m+2}{(m-3)(m+1)} \\ y = \frac{m^2-1}{(-m+3)(m+1)} \end{cases}$$

考慮到 $y > 0, x < 0$ 的情況

得到 $((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

與使兩條直線都通過第二象限所需條件取交集，得到 $1 < m < 3$ ，故選(D)

## 100-01-19

### Statement

若點 $(a, b)$ 在直線 $2x + 3y = 1$ 上移動，則直線 $ax + by = 3$ 恆過哪一點？

- (A) (3, 4)
- (B) (4, 5)
- (C) (5, 7)
- (D) (5, 8)
- (E) (6, 9)

### Solution

考慮 $x = 5$ 時 $y = -3$

考慮 $x = -4$ 時 $y = 3$

由於 $a, b$ 依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮 $5x - 3y = 3$ 與 $-4x + 3y = 3$ 的交點，得到 $(x, y) = (6, 9)$ ，故選(E)

## 100-01-20

### Statement

已知 $A(3, -5)$ 、 $B(-7, 4)$ ，且點 $P$ 介於 $A$ 、 $B$ 之間，又 $\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4$ ，若 $P$ 之座標為 $(a, b)$ ，則 $7a + 21b = ?$

- (A) -33
- (B) -32
- (C) -31
- (D) -30
- (E) -29

## Solution

$$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$$

利用內分點公式。

$$P = \left( \frac{4 \times 3 + 3 \times (-7)}{7}, \frac{4 \times (-5) + 3 \times 4}{7} \right) = \left( \frac{-9}{7}, \frac{-8}{7} \right)$$

則  $7a + 21b = (-9) + (-8) \times 3 = -33$ ，故選(A)

## 100年第2次北科入學數學會考

### 100-02-01

#### Statement

若  $\alpha, \beta$  為方程式  $x^2 + 12x + 9 = 0$  的兩根，則  $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = ?$

(A)  $-18$

(B)  $-6$

(C)  $6$

(D)  $12$

(E)  $18$

#### Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令二次多項式  $ax^2 + bx + c$ ，存在兩根  $\alpha$  與  $\beta$ 。

$$\text{那麼 } \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \text{ 且 } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$$\begin{aligned} & \sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2 \\ \Rightarrow & \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta \end{aligned}$$

根據偉達定理我們可以求得

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

注意一下  $\alpha + \beta = -12, \alpha\beta = 9$

若兩根一正一負那麼  $\alpha\beta < 0$ ，若兩根都是正的那麼  $\alpha + \beta > 0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$  會存在複數，相乘後可以得到  $-\sqrt{\alpha\beta}$ 。

因此帶回欲求之式子：

$$-12 - 2 \times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$$

## 100-02-02

### Statement

若  $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$  與  $2x^3 + x^2 - 7x - 6$  的最高公因式為  $x^2 + bx + c$ ，則  $b + 2c = ?$

- (A)  $-5$
- (B)  $-3$
- (C)  $0$
- (D)  $5$
- (E)  $7$

### Solution

第一式的因式  $ax + b$  的  $a$  一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)，  
且  $b$  一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到  $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$   
接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得倒  $(x + 1)(x - 2)(2x + 3)$

可以觀察到最大公因式即為  $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$   
比較係數後得到  $b = -1, c = -2$

則  $b + 2c = -1 + 2 \times -2 = -5$ 。

## 100-02-03

### Statement

若  $\frac{8x^3 - 6x + 1}{(2x + 1)^4} = \frac{a}{(2x + 1)} + \frac{b}{(2x + 1)^2} + \frac{c}{(2x + 1)^3} + \frac{d}{(2x + 1)^4}$ ，則  $2a + b - c + d = ?$

- (A)  $-2$
- (B)  $-1$
- (C)  $0$
- (D)  $1$
- (E)  $2$

### Solution

我們可以使用綜合除法，將  $2x + 1$  改寫成  $x + \frac{1}{2}$ ，然後再對除出來的係數除以2。

$$\begin{array}{r|l}
 8 & 0 & -6 & 1 & \frac{1}{2} \\
 4 & 2 & 2 & & \\
 \hline
 \cancel{8} & \cancel{4} & \cancel{-4} & 3 & D \\
 4 & -2 & -2 & & \\
 & -2 & 2 & & \\
 \hline
 \cancel{4} & \cancel{-4} & 0 & c \\
 2 & -2 & & \\
 & -1 & & \\
 \hline
 \cancel{2} & -3 & & B \\
 1 & & & \\
 A & & & 
 \end{array}$$

因此  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = 0$ ,  $d = 3$ 。

$$2a + b - c + d = 1 \times 2 + (-3) - 0 + 3 = 2。$$

## 100-02-04

### Statement

$x^2 - 4x + 2 \leq |x - 2|$  之解為何？

- (A)  $1 \leq x \leq 4$
- (B)  $2 \leq x \leq 4$
- (C)  $0 \leq x \leq 2$
- (D)  $0 \leq x \leq 4$
- (E)  $0 \leq x \leq 3$

### Solution

1. 考慮  $x^2 - 4x + 2 \leq x - 2$ ：

移項， $x^2 - 4x + 2 - x + 2 \leq 0$

整理， $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

那麼我們可以將其因式分解，得  $(x - 4)(x - 1) \leq 0$ ，並且可以得到  $1 \leq x \leq 4$ 。

2. 考慮  $x^2 - 4x + 2 \leq -x + 2$ ：

移項， $x^2 - 4x + 2 + x - 2 \leq 0$

整理， $x^2 - 3x \leq 0$

那麼我們可以將其因式分解，得  $x(x - 3) \leq 0$ ，並且可以得到  $0 \leq x \leq 3$



對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到 $0 \leq x \leq 4$ 。

## 100-02-05

### Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$ 之解為何？

(A)  $x < \frac{-1}{2}$  或  $0 < x < 1$

(B)  $0 < x < \frac{1}{2}$  或  $1 < x < 2$

(C)  $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$  或  $0 < x < 1$

(D)  $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$  或  $1 < x < 2$

(E)  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$  或  $1 < x < 2$

### Solution

$$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{\log 2}{\log x} < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} < 1$$

令 $\log_2 x = t$ ，那麼

$$2t - \frac{1}{t} < 1$$

$$\Rightarrow 2t - \frac{1}{t} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$$

考慮兩種情況。

1. 若 $t > 0$ 且 $2t^2 - t - 1 < 0$

$$2t^2 - t - 1 < 0 = (2t + 1)(t - 1) < 0 = \frac{-1}{2} < t < 1$$

與 $t > 0$ 取交集得到 $0 < t < 1$ 。

2. 若 $t < 0$ 且 $2t^2 - t - 1 > 0$

$$2t^2 - t - 1 > 0 = (2t + 1)(t - 1) > 0 = t < \frac{-1}{2} \text{ 或 } t > 1$$

與 $t < 0$ 取交集得到 $t < \frac{-1}{2}$ 。

對這兩種考慮取聯集，得到 $t < \frac{-1}{2}$ 或 $0 < t < 1$ 。

還原，得到 $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$ 。

## 100-02-06

### Statement

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 37$ ， $\overline{BC} = 53$ ， $\overline{AC} = 89$ ，則下列各內積中，何者為最大？

(A)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(B)  $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$

(C)  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

(D)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

(E)  $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$

### Solution

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 37 \times 89 \times \frac{37^2 + 89^2 - 53^2}{2 \times 37 \times 89}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 53 \times 37 \times \frac{53^2 + 37^2 - 89^2}{2 \times 53 \times 37}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 89 \times 37 \times \frac{89^2 + 53^2 - 37^2}{2 \times 89 \times 53}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} < 0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$$37^2 + 89^2 - 53^2。$$

$$53^2 + 37^2 - 89^2$$

$$89^2 + 53^2 - 37^2$$

顯然是第三者較大，故選(C)

## 100-02-07

### Statement

已知向量 $\vec{AB} = (-31, 29)$ ， $\vec{AC} = (23, -11)$ ，則下列向量長中，何者為最大？

(A)  $|\vec{AB}|$

(B)  $|\vec{BC}|$

(C)  $|\vec{AB} + \vec{BC}|$

(D)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

(E)  $|\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}|$

## Solution

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$$

$$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$$

$$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$$

考慮向量長的公式，當存在一向量  $\vec{L} = (A, B)$ ， $\vec{L}$  的向量長為  $|\vec{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$

因此若  $|A| + |B|$  越大，那麼向量長越大。

考慮選項A： $|-31| + |29| = 60$

考慮選項B： $|54| + |-40| = 94$

考慮選項C： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$ ， $|23| + |-11| = 34$

考慮選項D： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$ ， $|-8| + |18| = 26$

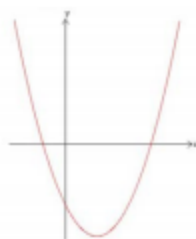
考慮選項E： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$ ， $|0| + |0| = 0$

因此，故選B。

## 100-02-08

### Statement

設  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



(A)  $abc$

(B)  $b^2 - 4ac$

(C)  $c^2 - 4ab$

(D)  $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$

(E)  $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$

## Solution

因為開口向上，所以  $a > 0$ 。

觀察  $x = 0$ ，可以發現對應到的  $y < 0$ ，因此  $c < 0$

觀察一下對稱軸， $\frac{-b}{2a} > 0$ ，因此  $b < 0$

因此  $abc > 0$ ， $b^2 - 4ac > 0$  因為有實數解。

$c^2 - 4ab > 0$  因為  $ab < 0$ 。

而  $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$  必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，

另一根是負數因此  $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$  小於 0，故選 E。

## 100-02-09

### Statement

已知 $4x^2 + y^2 - 4x + 8y = 8$ ，則 $x$ 的最大值為何？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

### Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的 $x$ 了。

$$4x^2 - 4x + y^2 + 8y = 8$$

$$4(x^2 - x) + y^2 + 8y = 8$$

$$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 + 8y + 16 = 8 + 16 + 1$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y + 4)^2}{25}$$

由此可知這個橢圓的短邊平行 $x$ 軸

$$a = \sqrt{25} = 5, b = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

中心可從式子得知， $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

因此，加上 $x$ 的部份得到 $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

## 100-02-10

### Statement

拋物線 $y = 4 - 2x - x^2$ 與 $x$ 軸兩交點的距離為何？

- (A) 2
- (B) 3
- (C)  $2\sqrt{5}$
- (D) 6
- (E) 8

### Solution

將 $y$ 等於0，求出 $x$ 。

$$-x^2 - 2x + 4 = 0$$

先確定 $b^2 - 4ac$ 是否大於0。

$$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20$$

$$\text{因此兩根為 } \frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$$

$$\frac{2 + \sqrt{5}}{-2} - \frac{2 - \sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$$

## 100-02-11

### Statement

設雙曲線  $x^2 - y^2 = x + 2y$  兩漸進的夾角為  $\theta$ ，則  $\sin \frac{\theta}{2} = ?$

(A) 0

(B)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(E) 1

### Solution

配方雙曲線得到標準式。

$$x^2 - x - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4(x - \frac{1}{2})^2}{5} - \frac{4(y - 1)^2}{5} = 1$$

求漸進線，令等號右邊為0

$$\frac{4(x - \frac{1}{2})^2}{5} = \frac{4(y - 1)^2}{5}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = (y - 1)^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - 1)^2 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2} - (y - 1))(x - \frac{1}{2} + (y - 1)) = 0$$

$$(x - y + \frac{1}{2})(x + y + \frac{3}{2}) = 0$$

第一條線  $(x - y + \frac{1}{2})$  可求斜率  $m = 1$

第二條線  $(x + y + \frac{3}{2})$  可求斜率  $m = -1$

因此，這兩條線垂直 ( $m_1 \times m_2 = -1$ )，夾角為  $90^\circ$

因此  $\sin \frac{90^\circ}{2} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

## 100-02-12

### Statement

不等式  $\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \leq 2$  之解為何？

(A)  $-1 \leq x \leq 1$

(B)  $0 < x \leq 1$

(C)  $1 \leq x \leq 2$

(D)  $0 < x \leq 2$

(E)  $1 \leq x \leq 4$

### Solution

將分子分母上下同乘  $2^x$ 。

$$\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} \leq 2$$

移項。

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2(2^{2x} - 1)}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2 \cdot 2^{2x} + 2}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{2^{2x} - 16}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

令  $t = 2^{2x}$

$$\frac{t - 16}{t - 1} \leq 0$$

考慮以下兩點：

1.  $t - 16 \geq 0 \cdot t - 1 < 0$

$t \geq 16, t < 1$ ，這兩個不等式沒有任何交集，因此  $t \in \emptyset$

2.  $t - 16 \leq 0 \cdot t - 1 > 0$

$t \leq 16, t > 1$ ，這兩個不等式的交集為  $1 < t \leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到  $1 < t \leq 16$

還原  $t$  得到  $1 < 2^{2x} \leq 16$ ，因此  $0 < x \leq 2$

## 100-02-13

### Statement

方程式  $10 \cdot x^{2 \log x} = x^3$  之所有實根的平方和為何？

- (A) 100
- (B) 101
- (C) 110
- (D) 111
- (E) 121

### Solution

等號兩邊同除  $x^{2 \log x}$

$$10 = x^{3-2 \log x}$$

$$1 = (3 - 2 \log x) \times \log(|x|)$$

因為要求實根，因此可以限定  $x > 0$ ，所以  $(3 - 2 \log x) \times \log(x)$

$$\text{令 } t = \log x$$

$$1 = (3 - 2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\text{因式分解得到 } (-2t + 1)(t - 1) = 0$$

$$\text{可以解出 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = 1$$

還原  $t$ ，可以得到  $\log x = \sqrt{10}$  或  $\log x = 10$

$$\text{兩根的平方和為 } \sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$$

## 100-02-14

### Statement

若  $f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$ ，則  $f(1 + \sqrt{2}) = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

### Solution

觀察一下，可以嘗試把  $x^3 + x^2 - 7x + 5$  化簡成  $c(x-1)^2 + b(x-1) + a \dots$

這部分可以用綜合除法做到。

$$\begin{array}{r|l}
 1 & 1-7+5 \\
 + & 1+2-5 \\
 \hline
 1 & 2-5 \\
 - & 1-3 \\
 \hline
 1 & 3-2 \\
 - & 1-1 \\
 \hline
 & 4 \\
 & \bar{a} \bar{b}
 \end{array}$$

因此可得 $(x-1)^3 + 4(x-1)^2 - 2(x-1)$ 。

把 $f(1+\sqrt{2})$ 帶進去，得：

$$\log_2((\sqrt{2})^3 + 4(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})) = \log_2(2\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{2}) = \log_2 8 = 3$$

## 100-02-15

### Statement

設 $\cos \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，則 $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = ?$

(A)  $\frac{1}{4}$

(B)  $\frac{1}{3}$

(C)  $\frac{1}{2}$

(D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

### Solution

$$\cos^2 \theta = 1 - \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - (1 - \cos \theta) = \cos \theta$$

$$\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$$



## 100-02-16

### Statement

設 $\tan 100^\circ = k$ ，則 $\sin 80^\circ = ?$

(A)  $\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

(B)  $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}$

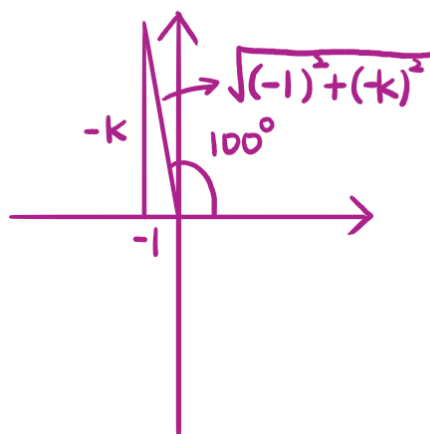
(C)  $\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$

(D)  $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(E)  $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

### Solution

畫個圖



看圖可以觀察到， $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

## 100-02-17

### Statement

設 $a = \sec 434^\circ$ ， $b = \sin 100^\circ$ ， $c = \cos 260^\circ$ ， $d = \cot 28^\circ$ ， $e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A)  $b < c < d < e < a$

(B)  $c < b < d < e < a$

(C)  $c < b < e < d < a$

(D)  $c < b < d < a < e$

(E)  $b < c < a < d < e$

## Solution

$$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$$

$$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$$

$$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$$

$$d = \cot 28^\circ$$

$$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$$

因此  $a > e$ ， $c < b$ ，故選B。

## 100-02-18

### Statement

平面上有兩點  $A(1, 2)$ 、 $B(a, b)$ ，若直線  $\overline{AB}$  之垂直平分線為  $x + 2y - 10 = 0$ ，則  $a - b = ?$

(A)  $-1$

(B)  $-2$

(C)  $-3$

(D)  $-4$

(E)  $-5$

## Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過  $\overline{AB}$  的中點  $(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$ 。

帶入垂直平分線得到  $\frac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$

$$\Rightarrow a + 2b = 15$$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到  $m = \frac{-1}{2}$ ，因此與其垂直的斜率一定是  $m = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到  $\frac{2-b}{1-a} = 2$ ，整理得到  $2 - b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$ 。

帶回第一式可以得到  $5a = 15$ ， $a = 3$ ， $b = 6$ 。

$$a - b = 3 - 6 = -3$$

100-02-19

### Statement

設直線 $bx + ay - ab = 0$ ， $a > 0$ ， $b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則 $a + 2b = ?$

(A)  $-7 - 3\sqrt{3}$

(B)  $-6 - 3\sqrt{3}$

(C)  $-5 - 3\sqrt{3}$

(D)  $-4 - 3\sqrt{3}$

(E)  $-3 - 3\sqrt{3}$

### Solution

可以推出 $x, y$ 的通式。

$bx + ay = ab$ ，求出 $x, y$ 的截距。

當 $y = 0$ ，那麼 $bx = ab$ ， $x = a$

當 $x = 0$ ，那麼 $ay = ab$ ， $y = b$

已知 $a > 0, b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道 $\frac{1}{2}|a||b| = 2$ ，可知 $ab = -4$ 或者 $ab = 4$ ，但是 $a > 0, b < 0$ ，因此 $ab = 4$ 不合。

已知過點 $(1, 2)$ 且 $ab = -4$ ，因此可以把點帶入得到 $b + 2a = -4$ 。

又 $ab = -4$ 所以 $a = \frac{-4}{b}$ ，所以得到 $b + \frac{-8}{b} = -4$

同乘以 $b$ 可以得到 $b^2 + 4b - 8 = 0$ 。

利用公式解可以解出 $\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times -8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根 $-2 + 2\sqrt{3}$ 或者 $-2 - 2\sqrt{3}$ ，其中由於 $b < 0$ ，因此 $-2 + 2\sqrt{3}$ 不合。

帶回求出 $a$ 得到 $a = \frac{-4}{-2 - 2\sqrt{3}} = \frac{-4}{-2(1 + \sqrt{3})}$

化簡得到 $a = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = -1(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

因此 $a + 2b = \sqrt{3} - 1 + -4 - 4\sqrt{3} = -5 - 3\sqrt{3}$

100-02-20

### Statement

設直線 $3x + y = 1$ 與 $x + 3y = 2$ 之夾角為 $\theta$ ，則 $\cos 2\theta = ?$

(A)  $\frac{-7}{25}$

(B)  $\frac{-6}{25}$

(C)  $\frac{-1}{5}$

(D)  $\frac{-4}{25}$

(E)  $\frac{-3}{25}$

### Solution

考慮兩條線的斜率。

$$3x + y = 1, m_1 = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x + 3y = 2, m_2 = \frac{-1}{3}$$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為 $\tan$ 來考慮。

$$\tan(m_1 - m_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{-1}{3}}{1 + 1} = \frac{\frac{-8}{3}}{2} = \frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個 $\tan$ 夾角是負的，因此這個夾角是大於 $90^\circ$ 的鈍角。

可以依照 $\tan(180^\circ) = 0$ 來求得另一個銳角的夾角。

$$\frac{\frac{-4}{3} + \tan \theta}{1 - \frac{-4}{3} \tan \theta}, \text{ 求得銳角 } \tan \theta = \frac{4}{3}$$

由於 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ，那麼這個角度會介於 $45^\circ \sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於 $90^\circ$

$$\text{用兩倍角公式求出 } \tan 2\theta = \frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{24}{-7}$$

由於這個角度介於 $90^\circ \sim 180^\circ$ ， $y > 0$ ，而 $x < 0$ ，也因此 $y = 24$ ， $x = -7$ ， $r = \sqrt{24^2 + (-7)^2} = 25$

因此 $\cos 2\theta = \frac{-7}{25}$ ，故選(A)

