108年第2次北科入學數學會考

108-02-01

Statement

求不等式$x^2-(\sqrt{x-2})^2<4x-2$的實數解。

$(A)\quad -1<x<4$

$(B)\quad 0<x<4$

$(C)\quad 1<x<4$

$(D)\quad 2\le x<4$

$(E)\quad x<1$或$x>4$

Solution

$x^2-(\sqrt{x-2})^2<4x-2$

$\Rightarrow x^2-(x-2)<4x-2$

$\Rightarrow x^2-x+2<4x-2$

$\Rightarrow x^2-5x+4<0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)<0$

可以得到$1<x<4$

考慮定義域，根號內的數字必須是非負整數，因此$x\ge 2$

取交集得到$2\le x<4$，故選(D)

108-02-02

Statement

設$f(x)$除以$(x-2)$的商為$Q(x)$，餘數為3，且$f(x)$除以$(x-1)$的餘數為1，則$Q(1)=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 3$

Solution

$f(x)=(x-2)Q(x)+3=(x-1)P(x)+1$

代入$f(1)=-1Q(1)=-2$

得到$Q(1)=2$，故選(D)

108-02-03

Statement

設$\frac{1}{\alpha}$和$\frac{1}{\beta}$為方程式x^2-2x+4的兩根，則$\alpha+\beta=?$

$(A)\quad \frac{1}{4}$

$(B)\quad \frac{1}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 8$

Solution

由根與係數可以知道

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{-2}{1}=2$

$\frac{1}{\alpha\beta}=4$，因此$\alpha+\beta=\frac{1}{2}$，故選(B)

108-02-04

Statement

$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+10)=?$

$(A)\quad 180$

$(B)\quad 210$

$(C)\quad 220$

$(D)\quad 240$

$(E)\quad 250$

Solution

$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+10)$

$=10\times 1+9\times 2+8\times 3+\ldots+1\times 10$

$=\sum_{x=1}^{10} n(11-n)=\sum_{x=1}^{10} 11n-n^2=\sum_{x=1}^{10} 11n-\sum_{x=1}^{10} n^2$

$=11\cdot\dfrac{10\times 11}{2}-\dfrac{10\times 11\times 21}{6}=605-385=220$，故選$(C)$

108-02-05

Statement

設$\dfrac{-26x+47}{(x^2+4)(2x-1)^2}=\dfrac{ax+b}{x^2+4}+\dfrac{c}{2x-1}+\dfrac{d}{(2x-1)^2}$，則$d=?$

$(A)\quad -8$

$(B)\quad -4$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 8$

Solution

$-26x+47=(ax+b)(2x-1)^2+c(x^2+4)(2x-1)+d(x^2+4)$

代入$x=\dfrac{1}{2}$，則$34=\dfrac{17}{4}d$，$d=8$，故選(D)

108-02-06

Statement

設$\cos 2\theta=\sin\theta$，$0\leq\theta\leq\pi$，則$\tan^2\theta=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{3}$

$(B)\quad \dfrac{1}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 8$

Solution

$\cos 2\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 1 - 2\sin^2\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$

得$\sin\theta = -1$(不合)且$\sin\theta = \frac{1}{2}$

得$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，因此$\tan^2\theta = \frac{1}{3}$，故選$(A)$

108-02-07

Statement

設ΔABC中，$\tan A = \frac{4}{3}$，$\cos B = \frac{12}{13}$，則$\cos C = ?$

$(A)\quad -\frac{56}{65}$

$(B)\quad -\frac{36}{65}$

$(C)\quad -\frac{16}{65}$

$(D)\quad \frac{16}{65}$

$(E)\quad \frac{56}{65}$

Solution

$\tan A = \frac{4}{3}$，得到$\sin A = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$，且$\cos A = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$

$\cos B = \frac{12}{13}$，得到$\sin B = \frac{\sqrt{13^2-12^2}}{13} = \frac{5}{13}$

$\sin(A+B) = 2\sin A\sin B = \frac{8}{13}$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B = \frac{16}{65}$

$\cos C = \cos(180^\circ - (A+B)) = \cos 180^\circ \cos(A+B) + \sin 180^\circ \sin(A+B) = -\frac{16}{65}$，故選$(C)$

108-02-08

Statement

$\sin 150^\circ - \cos 240^\circ - \tan 315^\circ = ?$

$(A) \quad -2$

$(B) \quad -1$

$(C) \quad 0$

$(D) \quad 1$

$(E) \quad 2$

Solution

$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 315 = -\tan 45^\circ = -1$

$\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) - (-1) = 1 + 1 = 2$，故選$(E)$

108-02-09

Statement

方程式$100 \cdot x^{3\log x} = x^5$之所有實根的立方和為何？

$(A) \quad 1000$

$(B) \quad 1001$

$(C) \quad 1010$

$(D) \quad 1100$

$(E) \quad 1110$

Solution

$100 \cdot x^{3\log x} = x^5$

$\Rightarrow 3\log x \log x + 2 = 5\log x$

$\Rightarrow 3(\log x)^2 - 5\log x + 2 = 0$

令$t = \log x$，則$3t^2 - 5t + 2 = 0$

$\Rightarrow (t-1)(3t-2) = 0$

得到$t = 1$或$t = \frac{2}{3}$

還原t，得到$x=10$或$x=\sqrt[3]{100}$

則所有實根的立方根為$10^3+(\sqrt[3]{100})^3=1000+100=1100$，故選$(D)$

108-02-10

Statement

求不等式$\dfrac{3\log_3 x+5}{\log_3 x+1}\leq 1$的解。

$(A)\quad \dfrac{1}{27}<x<3$

$(B)\quad \dfrac{1}{27}\leq x<3$

$(C)\quad 3<x<9$

$(D)\quad \dfrac{1}{27}\leq x<9$

$(E)\quad \dfrac{1}{27}<x<9$

Solution

$\dfrac{3\log_3 x+5}{\log_3 x+1}\leq 1$

$\Rightarrow \dfrac{2\log_3 x+6}{\log_3 x-1}\leq 0, x\in(0,3)\cup(3,\infty)$

考慮以下兩種情況

$\begin{cases}2\log_3 x+6\leq 0\\ \log_3 x-1>0\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$

$\begin{cases}2\log_3 x+6\geq 0\\ \log_3 x-1<0\end{cases}\Rightarrow x\in[\dfrac{1}{27},3)$

兩者取聯集，得到$x\in[\dfrac{1}{27},3)$，故選(B)

108-02-11

Statement

已知橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$短軸的兩頂點為另一橢圓$\Gamma$的焦點，且$\Gamma$過點$(7,1)$，則$\Gamma$長軸長為何？

$(A)\quad 6$

$(B)\quad 8$

$(C)\quad 10$

$(D)\quad 12$

(E)　14

Solution

從方程式可知，橢圓的長軸平行於y軸，因此短軸平行於x軸，且中心為$(1,1)$

又可知$b=\sqrt{16}=4$且$a=\sqrt{25}=5$

故短軸頂點為$(-3,1)$或$(5,1)$，為另一橢圓Γ之焦點

又已知$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

$\sqrt{(7-(-3))^2+(1-1)^2}+\sqrt{(7-5)^2+(1-1)^2}=10+2=12=2a$

因此Γ的長軸長為12，故選(D)

108-02-12

Statement

若兩圓$C_1:(x+1)^2+(y-2)^2=16$與$C_2:(x-3)^2+(y+1)^2=k$相切，則k可能為何？

(A)　9

(B)　25

(C)　49

(D)　81

(E)　121

Solution

已知C_1的中心O_1為$(-1,2)$，且C_2的中心O_2為$(3,-1)$

因此$\overline{O_1O_2}=\sqrt{(-1-3)^2+(2-(-1))^2}=5$

又已知C_1的半徑為4，因此C_2的半徑為1或9才能使兩圓相切，故$k=1$或$k=81$，故選(D)

108-02-13

Statement

設$2\cdot 9^{x-1}+5\cdot 3^{x+1}+2=0$的兩根為$\alpha$和$\beta$，則$\alpha+\beta=?$

(A)　2

(B)　3

(C)　4

(D)　5

(E)　6

Solution

$2 \cdot 9^{x-1} + 5 \cdot 3^{x+1} + 2 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{9} \cdot 9^{x} + 15 \cdot 3^{x} + 2 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{9} \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 3^{x} + 2 = 0$

令$t = 3^x$，則$\frac{2}{9}t^2 + 15t + 2 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 135t + 18 = 0$

利用根與係數，可知$3^\alpha \cdot 3^\beta = 3^{\alpha+\beta} = \frac{18}{2} = 9$

故$\alpha + \beta = 2$，故選(A)

108-02-14

Statement

設拋物線$y = ax^2 + bx + c$之圖形如下所示，則下列何者正確？

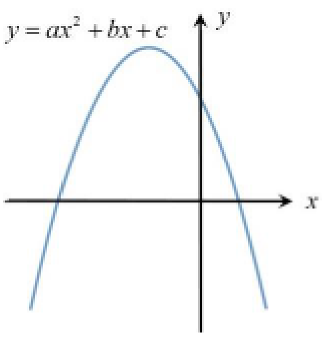
(A) $b^2 - 4ac \leq 0$

(B) $c < 0$

(C) $ab < 0$

(D) 對稱軸$x = \frac{b}{2a}$

(E) $b < 0$



Solution

考慮拋物線的頂點為$(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a})$

又已知頂點$\frac{-b}{2a} < 0$，又已知$a < 0$(開口向下)，故$b < 0$，故選(E)

108-02-15

Statement

已知ΔABC中，$\overrightarrow{AB} =< -8, 6 >$，$\overrightarrow{AC} =< -3, 4 >$，則$\Delta ABC$之面積為何？

(A) 6

(B) $\frac{13}{2}$

(C) 7

(D) $\frac{15}{2}$

(E) 8

Solution

已知$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-8) \cdot (-3) + 6 \cdot 4 = 48$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = 10$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

又$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos\theta$

因此$\cos\theta = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$，得$\sin\theta = \frac{7}{25}$

可知$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \times \frac{7}{25} = 7$，故選$(C)$

108-02-16

Statement

設$\vec{a} =< 3, 1 >, \vec{b} =< x, y >$為平面上兩向量，且$x^2 + y^2 = 20$，則$\vec{a} \cdot \vec{b}$的最大值為何？

(A) $5\sqrt{2}$

(B) $10\sqrt{2}$

(C) $15\sqrt{2}$

(D) $20\sqrt{2}$

(E) $25\sqrt{2}$

Solution

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3x + y$

利用科西不等式求最大值，則

$(3^2 + 1^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + y)^2$

又已知$x^2+y^2=20$，因此$200 \geq (3x+y)^2$，故$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值為$10\sqrt{2}$，故選(B)

108-02-17

Statement

若a、b皆為實數，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-3}{x^2-1}=b$，則$a+b=?$

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

(E) 8

Solution

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-3}{x^2-1}=b$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-3}{(x+1)(x-1)}=b$$

可知分母必須要能被$x-1$整除，極限才會存在值。

故$1+a-3=0$得到$a=2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)(x-1)}=b$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)}{(x+1)}=\frac{4}{2}=2$$，因此$b=2$

故$a+b=2+2=4$，故選(A)

108-02-18

Statement

設a為實數，$f(x)=2x+a$，$g(x)=3x+1$。若$f\circ g=g\circ f$，則$a=?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

(E) 2

Solution

$f \circ g = f(g(x)) = 2(3x+1)+a = 6x+2+a$

$g \circ f = g(f(x)) = 3(2x+a)+1 = 6x+3a+1$

又$f \circ g = g \circ f$，得到$2+a=3a+1$，因此$a=\dfrac{1}{2}$，故選(C)

108-02-19

Statement

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2h}-1}{h} = ?$

$(A) \quad -2$

$(B) \quad -1$

$(C) \quad 1$

$(D) \quad 2$

$(E) \quad 3$

Solution

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2h}-1}{h}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1-2h-1}{h(\sqrt{1-2h}+1)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h(\sqrt{1-2h}+1)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2}{(\sqrt{1-2h}+1)} = \dfrac{-2}{2} = -1$，故選$(B)$

108-02-20

Statement

下列何者為函數$f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{2x-x^2}-1}$的定義域？

$(A) \quad [0,1)$

$(B) \quad (1,2]$

$(C) \quad [0,2]$

$(D) \quad (2,\infty)$

$(E) \quad [0,1) \cup (1,2]$

Solution

分子為奇次方根，因此定義域為$x \in \mathbb{R}$

分母$\sqrt{2x-x^2}-1 \neq 0$，因此$\sqrt{2x-x^2} \neq 1$，故$2x-x^2 \neq 1$，$-x^2+2x-1 \neq 0$，因此$x \neq 1$

又考慮根號內必須要是非負整數，因此$2x-x^2 \geq 0$，得到$0 \leq x \leq 2$

對三者取交集，得到$[0,1) \cup (1,2]$，故選(E)