

102年第2次北科入學數學會考

102-02-01

Statement

若 $\frac{12x^2 - 26x + 5}{(2x - 3)^3} = \frac{a}{2x - 3} + \frac{b}{(2x - 3)^2} + \frac{c}{(2x - 3)^3}$ ，則 $a + b + 2c = ?$

(A) -9

(B) -6

(C) 0

(D) 6

(E) 9

Solution

將式子轉成 $12x^2 - 26x + 5 = a(2x - 3)^2 + b(2x - 3) + c(2x - 3)$

利用綜合除法

$$\begin{array}{r|rr} 12 & -26 & 5 \\ & 18 & -12 \\ \hline 6 & -4 & -7 \\ & 9 & \\ \hline 3 & 5 & \end{array} \quad 3/2$$

綠色字：將式子從 $x - \frac{3}{2}$ 轉成 $2x - 3$ ，因此要將係數除2，但餘數不變。

得到 $a = 3, b = 5, c = -7$ ，得到 $3 + 5 + 2 \times (-7) = -6$ ，故選(B)

102-02-02

Statement

若 $f(x + 2) = \frac{2 + x}{4 - x}$ ，則 $f(a) = ?$

(A) $\frac{a}{6-a}$

(B) $\frac{2+a}{2-a}$

(C) $\frac{2+a}{4-a}$

(D) $\frac{2-a}{2+a}$

(E) $\frac{a}{6+a}$

Solution

$$x+2=a, x=a-2$$

$$\text{故 } f(a) = \frac{2+(a-2)}{4-(a-2)} = \frac{a}{6-a}, \text{ 故選(A)}$$

102-02-03

Statement

設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{CA}=7$ ，則 $\cos^2 \frac{C}{2} = ?$

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{2}{7}$

(C) $\frac{4}{7}$

(D) $\frac{5}{7}$

(E) $\frac{6}{7}$

Solution

$$\cos C = \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1$$

$$\text{則 } \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{\cos C + 1}{2}$$

$$\text{利用餘式定理，} \cos C = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{5}{7}$$

$$\text{因此 } \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{\frac{5}{7} + 1}{2} = \frac{6}{7}, \text{ 故選(E)}$$

102-02-04

Statement

已知圓 $x^2 + y^2 = 9$ ，與直線 $x + y = 3$ 相交於兩點，則此兩點距離為何？

- (A) 2
- (B) $2\sqrt{2}$
- (C) 3
- (D) $3\sqrt{2}$
- (E) 4

Solution

$$y = 3 - x \cdot \text{則 } x^2 + (3 - x)^2 = 9$$

展開後得到 $2x^2 - 6x = 0$ ，得到 $x = 0$ 或 $x = 3$

代回原式，得到兩點 $(0, 3)$ 與 $(3, 0)$ ，距離為 $\sqrt{(0 - 3)^2 + (3 - 0)^2} = 3\sqrt{2}$ ，故選(D)

102-02-05

Statement

下列何者正確？

- (A) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$
- (B) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x$
- (C) $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = \cot x$
- (D) $\sin(x + \pi) = \cos x$
- (E) $\csc(x + \frac{\pi}{2}) = \sec x$

Solution

$$\csc(x + \frac{\pi}{2}) = \sec x \cdot \text{故選(E)}$$

102-02-06

Statement

若 $x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 36x + 45 = (x - 1)^4 + a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$ ，則 $a + b + c + d = ?$

- (A) 24
- (B) 34

(C) 44

(D) 54

(E) 64

Solution

利用綜合除法

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -4 & -14 & 36 & 45 & \\ & 1 & -3 & -17 & 19 & 1 \\ \hline 1 & -3 & -17 & 19 & 64 & \\ & 1 & -2 & -19 & & \\ \hline 1 & -2 & -19 & 0 & & \\ & 1 & -1 & & & \\ \hline 1 & -1 & -20 & & & \\ & 1 & & & & \\ \hline 1 & 0 & & & & \end{array}$$

因此 $a = 0, b = -20, c = 0, d = 64$ ，故 $a + b + c + d = 44$ ，故選(C)

102-02-07

Statement

設 O 為原點， $A(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ，且 $\overline{AB} = 5$ ，則 $\triangle OAB$ 最大面積為何？

(A) 6

(B) $\frac{25}{4}$

(C) $\frac{13}{2}$

(D) 7

(E) 8

Solution 1

By Trava with non-calculus solution

$$a^2, b^2 > 0$$

利用算幾不等式， $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$

$$\frac{25}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$$

$$\frac{25}{2} \geq |ab|$$

$$\frac{25}{4} \geq \frac{|ab|}{2} \text{，故選(B)}$$

Solution 2

By Uriah with calculus solution

$a^2 + b^2 = 25$ ，求 $\frac{ab}{2}$ 的最大值

可知 $a^2 = 25 - b^2$ ， $a = \sqrt{25 - b^2}$

因此 $f(b) = \frac{b\sqrt{25 - b^2}}{2}$ ，找極值。

微分後得到 $f'(b) = \frac{25 - 2b^2}{2\sqrt{25 - b^2}}$ ，令 $f'(b) = 0$ ，得到 $b = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$

因此 $f(b)$ 的極值發生在 $b = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 上

$b = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ，代入後得 $f(\frac{5\sqrt{2}}{2}) = \frac{25}{4}$

$b = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ，代入後得 $f(-\frac{5\sqrt{2}}{2}) = -\frac{25}{4}$ ，因為面積為非負整數所以為 $\frac{25}{4}$

因此最大值為 $\frac{25}{4}$ ，故選 (B)

102-02-08

Statement

設雙曲線之漸進線為 x 軸與 y 軸，且過點 $(-1, 1)$ ，則此雙曲線實軸長為何？

(A) 2

(B) $\sqrt{5}$

(C) $2\sqrt{2}$

(D) 4

(E) 5

Solution

由於漸進線為 x 軸與 y 軸，可知此雙曲線的頂點會通過 $y = x$ 或 $y = -x$ ，中心為 $(0, 0)$

因此可以列出雙曲線方程式 $xy = c$ ，代入 $(-1, 1)$ 得到 $c = -1$

因此雙曲線方程式為 $xy = -1$

求雙曲線頂點，令 $y = -x$ ，得到 $-x^2 = -1$ ，得到 $x = \pm 1$

因此頂點為 $(1, -1)$ 與 $(-1, 1)$

a 為頂點與原點之距離，因此實軸長 $2a = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，故選 (C)

102-02-09

Statement

設 $\log_2 x^2 + \log_x 2 = 3$ 的兩根為 α 和 β ，則 $\alpha\beta = ?$

(A) $-\frac{3}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\sqrt{2}$

(E) $2\sqrt{2}$

Solution

$$\log_2 x^2 + \log_x 2 = 3$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x + \log_x 2 = 3$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 3$$

$$\Rightarrow 2(\log_2 x)^2 + 1 = 3\log_2 x$$

令 $t = \log_2 x$ ，則

$$2t^2 + 1 = 3t$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \cdot \text{得到 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = 1$$

分別還原得到 $x = \sqrt{2}$ 或 $x = 2$ ，因此 $\alpha = \sqrt{2}$ ， $\beta = 2$

因此 $\alpha\beta = 2\sqrt{2}$ ，故選(E)

102-02-10

Statement

設 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = ?$

(A) $\frac{4}{9}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{19}}{9}$

(D) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

(E) $\frac{5\sqrt{7}}{16}$

Solution

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$\text{又} (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{因此} -2 \sin \theta \cos \theta = \frac{-3}{4}, \text{ 得到} \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\text{因此} (\sin \theta + \cos \theta) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{代入原式, 得到} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{\sqrt{7}}{2} \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{16}, \text{ 故選}(E)$$

102-02-11

Statement

若直線通過點 $P(3, 4)$ 且兩軸截距均為整數，則滿足條件的直線共有幾條？

(A) 3

(B) 6

(C) 9

(D) 12

(E) 15

Solution

$$\text{利用點斜式, } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\text{整理方程式, 得到} xb + ay = ab$$

$$\text{帶入點}(3, 4), \text{ 得到} 3b + 4a = ab \Rightarrow 3b + 4a - ab = 0 \Rightarrow ab - 3b - 4a = 0$$

$$\text{將} ab - 3a - 4a = 0 \text{寫成} (b - 4)(a - 3) = 12$$

$$\text{令} u = (b - 4), v = (a - 3), \text{ 那麼} uv = 12$$

$$\text{因為} a, b \in \mathbb{Z}, \text{ 因此} u, v \in \mathbb{Z}$$

窮舉 uv 的 u 為整數的所有可能，可以知道一定會是12的因數。

因此考慮所有可以整除12的整數，得到 $[-1, -2, -3, -4, -6, -12, 1, 2, 3, 4, 6, 12]$

代換回去後可得到 b ，因此答案為12個，故選(D)

102-02-12

Statement

已知圓 $x^2 + y^2 = 10$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ 有兩交點，則以此兩交點與兩圓心為頂點所連接成的四邊形的面積為何？

(A) $4\sqrt{2}$

(B) 6

(C) $2\sqrt{10}$

(D) $\frac{5\sqrt{7}}{2}$

(E) $3\sqrt{5}$

Solution 1

Trava的精簡解

設 $O_1 = (0, 0)$ ， $O_2 = (1, -2)$

$$\overline{O_1 O_2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{5}$$

設兩交點 A, B ，則四邊形 $O_1 A O_2 B$ 可知 $\overline{O_1 A} = \overline{A O_2} = \overline{O_2 B} = \overline{B O_1} = \sqrt{10}$

利用餘弦定理

$$5 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \times 10 \times \cos \angle O_1 A O_2$$

因此 $\cos \angle O_1 A O_2 = \frac{3}{4}$ ，而 $\sin \angle O_1 A O_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}$

因此面積為 $2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$ ，故選(D)

Solution 2

Uriah的行列式解

已知圓 $x^2 + y^2 = 10$ 的圓心為 $(0, 0)$

圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ 透過配方法可得 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$ ，圓心為 $(1, -2)$

對兩式解聯立

可得 $10 - 2x + 4y = 5$ ，也就是 $2x - 4y = 5$

因此可得 $x = \frac{5+4y}{2} = 2y + \frac{5}{2}$

$$(2y + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 10$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 10y + \frac{25}{4} + y^2 = 10$$

$$\Rightarrow 5y^2 + 10y - \frac{15}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 20y^2 + 40y - 15 = 0$$

$$\text{因此得到 } y = -1 \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{7}$$

$$\text{得到兩交點 } (\frac{1}{2} + \sqrt{7}, -1 + \frac{\sqrt{7}}{2}) \text{ 與 } (\frac{1}{2} - \sqrt{7}, -1 - \frac{\sqrt{7}}{2})$$

$$\text{利用行列式求面積} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{7} & 0 & \frac{1}{2} + \sqrt{7} & 1 & \frac{1}{2} - \sqrt{7} \\ -1 - \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & -1 + \frac{\sqrt{7}}{2} & -2 & -1 - \frac{\sqrt{7}}{2} \end{vmatrix} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \cdot \text{故選}(D)$$

102-02-13

Statement

若一數列前 n 項的和為 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + 5$ ，則 $a_5 + a_{10} + a_{15} + \dots + a_{50} = ?$

- (A) 175
- (B) 250
- (C) 320
- (D) 450
- (E) 540

Solution

$$\text{設 } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + 5$$

觀察一下通式，可知若 $a_i - a_j$ ，其中 $i \neq j$ ，則 $a_i - a_j = (i^2 - j^2) = (i - j)(i + j)$

又因若要求得 a_5 ，則可用 $(a_1 + a_2 + \dots + a_5) - (a_1 + a_2 + \dots + a_4)$

$$\text{因此 } a_5 = S_5 - S_4 = (5 - 4)(5 + 4) = (5 + 4)$$

$$\text{因此 } a_5 + a_{10} + a_{15} + \dots + a_{50} = (5 + 4) + (10 + 9) + (15 + 14) \dots + (50 + 49)$$

也就是首項為9，公差為10，末項99的等差數列和

$$\text{因此 } a_5 + a_{10} + a_{15} + \dots + a_{50} = \frac{(9 + 99)(\frac{99 - 9}{10} + 1)}{2} = 540 \cdot \text{故選}(E)$$

102-02-14

Statement

不等式 $4^{x+\frac{1}{2}} - 8 \cdot 2^{x+1} \leq 2^x - 8$ ，共有幾個整數解？

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

Solution

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 8 \cdot 2^{x+1} \leq 2^x - 8$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 16 \cdot 2^x \leq 2^x - 8$$

令 $t = 2^x$ ，則

$$2t^2 - 16t \leq t - 8$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 17t + 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow (2t - 1)(t - 8) \leq 0$$

$$\text{得到 } \frac{1}{2} \leq t \leq 8$$

還原 t ，得到 $-1 \leq x \leq 3$

故共有5個整數解，故選(D)

102-02-15

Statement

若 $f(x) = \sqrt{2-x}$ ， $g(x) = \sqrt{3-x}$ ，則 g 與 f 的合成函數 $g \circ f$ 的定義域為何？

(A) $[2, 3]$

(B) $(2, 3)$

(C) $[-7, 2]$

(D) $[2, 7]$

(E) $(2, 7)$

Solution

$g(f(x)) = \sqrt{3 - \sqrt{2-x}}$ ，可知 $2-x \geq 0$ ，因此 $x \leq 2$

又因 $3 - \sqrt{2-x} > 0$ ，因此 $\sqrt{2-x} < 3$ ， $x \geq -7$

因此得到 $x \in [-7, 2]$ ，故選(C)

102-02-16

Statement

在向量 $\triangle ABC$ 中，向量 $\vec{ab} = \langle 1, 2 \rangle$ ， $\vec{ac} = \langle -x, 2x \rangle$ ， $x > 0$

若 $\triangle ABC$ 之周長為 $6\sqrt{5}$ ，則 $x = ?$

(A) $\frac{10}{11}$

(B) $\frac{20}{11}$

(C) $\frac{30}{11}$

(D) $\frac{40}{11}$

(E) $\frac{50}{11}$

Solution

$\vec{ac} = \langle -x, 2x \rangle$. 可知 $\vec{ca} = \langle x, -2x \rangle$

因此 $\vec{bc} = \langle -x-1, 2x-2 \rangle$

長度 $\sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{(-x)^2 + (2x)^2} + \sqrt{(-x-1)^2 + (2x-2)^2} = 6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{5x^2} + \sqrt{5x^2 - 6x + 5} = 6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 - 6x + 5} = 6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5x^2 - 6x + 5} = 5\sqrt{5} - \sqrt{5}x$

$\Rightarrow 5x^2 - 6x + 5 = 125 - 50x + 5x^2$

$\Rightarrow 44x = 120$

$x = \frac{30}{11}$

因此 $x = \frac{30}{11}$. 故選(C)

102-02-17

Statement

若 $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \frac{3x+x^3}{1+3x^2}$. 則 $f(g(x)) = ?$

(A) $\frac{1}{f(x)}$

(B) $f^2(x)$

(C) $2f(x)$

(D) $3f(x)$

(E) $4f(x)$

Solution

$$f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$f(g(x)) = \log\left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{1 + 3x^2}\right) - \log\left(\frac{1 + 3x^2 - 3x - x^3}{1 + 3x^2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{(x+1)^3}{1 + 3x^2}\right) - \log\left(\frac{-(x-1)^3}{1 + 3x^2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{x+1}{-(x-1)}\right)^3$$

$$= 3\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 3f(x) \cdot \text{故選}(D)$$

102-02-18

Statement

若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\sqrt{x+3} - 2} = 12$ ，則 $ab = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\sqrt{x+3} - 2} = 12$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + ax + b)(\sqrt{x+3} + 2)}{x - 1} = 12$$

極限有值，因此 $(x^2 + ax + b)$ 應可被 $(x - 1)$ 整除

$$\text{因此 } a + b = -1 \cdot (x^2 + ax + b) \div (x - 1) = x + (a + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + (a + 1))(\sqrt{x+3} + 2) = 12$$

$$\Rightarrow (2 + a)(4) = 12$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\text{帶回 } a + b = -1, \text{ 得 } b = -2$$

因此 $ab = -2$ ，故選(A)

102-02-19

Statement

設 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h^2 + 2h} = ?$

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

(C) $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

(D) $\frac{-1}{4\sqrt{2}}$

(E) $\frac{-1}{8\sqrt{2}}$

Solution 1

Trava的精簡解

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h^2 + 2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+2} \\ &= f'(2) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+2} \\ &= \frac{-1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1}{8\sqrt{2}} \cdot \text{故選(E)} \end{aligned}$$

Solution 2

Uriah的暴力解

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h^2 + 2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2+h}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{h^2 + 2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2+h})}{(h^2 + 2h)(\sqrt{4+2h})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2+h})(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2 + 2h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 - 2 - h)(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2 + 2h)(\sqrt{2} + \sqrt{2+h})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-h)(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2 + 2h)(\sqrt{2} + \sqrt{2+h})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h+2)(\sqrt{2} + \sqrt{2+h})} \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{8\sqrt{2}}, \text{ 故選 } (E)$$

102-02-20

Statement

已知 Γ 表 $y = x^2$ 之圖形，若將 Γ 水平方向拉長2倍，往右平移1單位，再對 x 軸反射，得一個新的圖形，則此新圖形之表示式為何？

(A) $y = -\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

(B) $y = -\frac{(x+1)^2}{2}$

(C) $y = -\frac{(x-1)^2}{2}$

(D) $y = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$

(E) $y = \frac{(1-x)^2}{2}$

Solution

因為往右平移1單位，所以 x 改寫成 $x - 1$

然後 x 擴增兩倍，所以改寫成 $\frac{x-1}{2}$

對 x 軸反射→加上一個負號，所以 $y = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ ，故選(D)