非官方北科入學數學會考詳解　(Unofficial-NTUT-MEE-Solution)

作者

- 109 資工系 黃漢軒
  - Instagram
  - sigtunatw@gmail.com
- 109 化工系 羅昇宇
  - Instagram
  - qoo18105@gmail.com

感謝北科入學會考出題老師。

所有的解答均為非官方，有任何勘誤上的問題，請聯繫作者。

官解錯誤的題目列表

題目	官解	作者解
107-02-06	A	AC
108-01-18	D	F (new answer)

100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知$f(x)$為一實系數多項式，且$f(\frac{3}{2}) = 27$，$f(-\frac{5}{3}) = 8$。

若$f(x)$除以$(6x^2 + x - 15)$的餘式為$ax + b$，則$b - a = ?$

(A)　4
(B)　8
(C)　12
(D)　16
(E)　20

Solution

可以把式子轉成

$f(x) = g(x)(6x^2 + x - 15) + ax + b$

$= g(x)(3x + 5)(2x - 3) + ax + b$

代入$x = \frac{3}{2}$，得到$\frac{3}{2}a + b = 27$

代入$x = \frac{-5}{3}$，得到$\frac{-5}{3}a + b = 8$

解聯立之後得到$(a, b) = (6, 18)$

因此$b - a = 12$，故選(C)

100-01-02

Statement

若α, β為方程式$x - \frac{3}{x} + 1 = 0$的兩根，則$(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = ?$

(A)　9
(B)　15
(C)　21
(D)　27
(E)　33

Solution

$$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{10(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+25$$

$$x-\frac{3}{x}+1=0\Rightarrow x^2+x-3=0$$

利用根與係數，得到$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3$

因此$(\frac{2}{\alpha}+5)(\frac{2}{\beta}+5)=\frac{4}{-3}+\frac{-10}{-3}+25=27$

故選(D)

100-01-03

Statement

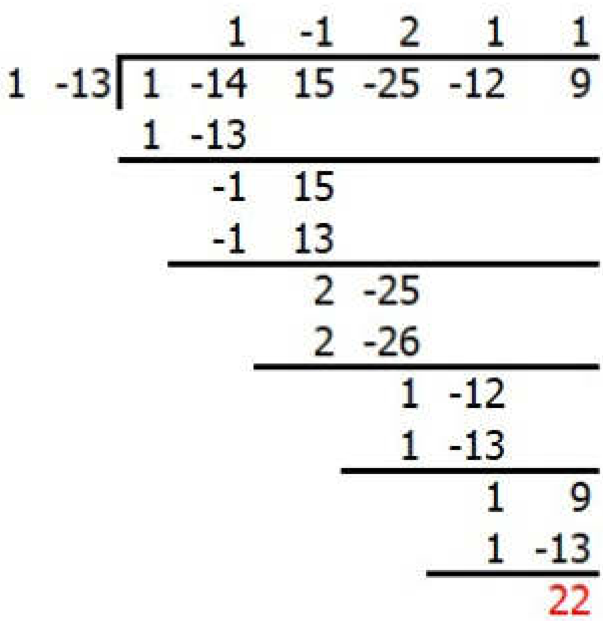
求$13^5-14\times13^4+15\times13^3-25\times13^2-12\times13+9=?$

(A) 22
(B) 25
(C) 28
(D) 31
(E) 34

Solution

將式子考慮成$f(x)=x^5-14x^4+15x^3-25x^2-12x+9$

式子等價於$f(x)$除以$x-13$的餘數（餘式定理）。



故答案選(A)。

100-01-04

Statement

若$\dfrac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$，則$A+B+C+D=?$

(A) $\frac{1}{2}$
(B) 2
(C) 3
(D) $\frac{7}{2}$
(E) 33

Solution

$\dfrac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$

$2x^2-x+4=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2)$

$=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$

$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B$

可知

$A+C=0$
$B+D=2$
$A=-\frac{1}{4}$
$B=1$

因此$C=\frac{1}{4}$，$D=1$。

因此$A+B+C+D=2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}\leq-1$之解為何？

(A) $1\leq x<2$
(B) $1<x\leq 2$
(C) $1<x<2$
(D) $x\geq 2$ 或 $x<1$
(E) $x>2$ 或 $x<1$

Solution

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} \le -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}+1 \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2} \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2-5x+7)}{(x-1)(x-2)} \le 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2-10x+14 \le 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} x^2-10x+14 \ge 0 \\ (x-1)(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

因此$1 < x < 2$時，$\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} \le -1$，故選$(C)$

100-01-06

Statement

若$a,\ b$均為實數且$ax^2+bx-10<0$之解為$\dfrac{-5}{2} < x < \dfrac{4}{3}$，則$a+b=?$

(A) 5
(B) $\dfrac{11}{2}$
(C) 6
(D) $\dfrac{13}{2}$
(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$$(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3})<0$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{4x}{3}+\frac{5x}{2}+\frac{-20}{6}<0$$
$$\Rightarrow 6x^2-8x+15x-20<0$$
$$\Rightarrow 6x^2+7x-20<0$$

兩邊共除2，得$3x^2+\dfrac{7}{2}x-10<0$

$$a=3,\ b=\frac{7}{2},\ a+b=\frac{13}{2}$$

100-01-07

Statement

若直線$12x-5y=21$與兩直線$x=\frac{23}{39}$、$x=\frac{16}{13}$分別交於A、B兩點，則線段長$\overline{AB}=?$

(A) $\frac{6}{5}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{13}{5}$

(E) $\frac{25}{7}$

Solution

已知$12x-5y=21$，則斜率為$\frac{12}{5}$

$\Delta x=\frac{16}{13}-\frac{23}{39}=\frac{25}{39}$

$y=mx+b$，則$0=\frac{12}{5}(\frac{16}{13}-\frac{23}{39})+b$，得到$b=\frac{60}{39}=\Delta y$

因此距離為$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\frac{25}{39})^2+(\frac{60}{39})^2}=\frac{5}{3}$，故選$(C)$

100-01-08

Statement

設兩向量$\vec{a},\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$，則$\cos\theta=?$

(A) $\frac{7}{25}$

(B) $\frac{5}{13}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$$\cos\theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a+b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = -\cos\theta$$

因此，$\frac{|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = \frac{-|a|^2 - |b|^2 + |a+b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$

$|a|^2 + |b|^2 - 9 = -|a|^2 - |b|^2 + 16$

設$x = |a| = |b|$，故$2x^2 - 9 = -2x^2 + 16$，得到$x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$

代入$\cos\theta$，得到$\frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 9}{2 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2} - 9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}| = 7$、$|\vec{b}| = 5$，$\tan\theta = -\frac{3}{4}$，則$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) =?$

(A) $\quad -25$
(B) $\quad -5$
(C) $\quad 0$
(D) $\quad 44$
(E) $\quad 51$

Solution

$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$

已知$\tan\theta = \frac{-3}{4}$，則$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

因此$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|\cos\theta = 7 \times 5 \times -\frac{4}{5} = -28$

因此$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 98 + 28 - 75 = 51$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以$(2,2)$與$(6,2)$為兩焦點，且與直線$x+1=0$相切，則橢圓短軸半長為何？

(A)　4
(B)　$\sqrt{21}$
(C)　$\sqrt{23}$
(D)　$\sqrt{29}$
(E)　6

Solution

將題目簡化為求b的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是$(\frac{2+6}{2},\frac{2+2}{2})=(4,2)$

焦距c為焦點與橢圓中點之距離，因此可知$c=2$

已知與直線$x+1=0$相切，因此橢圓左右一端會與$x+1=0$相切，因此其中一端為$(-1,2)$

故長軸a為橢圓長軸端點與中心之距離，可知$a=5$

因此$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線$y=2x-\frac{1}{2}x^2$的焦點座標為(a,b)，則$ab=?$

(A)　3
(B)　3.5
(C)　4
(D)　4.5
(E)　5

Solution

$y=2x-\frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(4x-x^2)$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(-4+4x-x^2)+2$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

$\Rightarrow -2(y-2)=(x-2)^2$

因此可以知道頂點座標為$(2,2)$，$c=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

因此焦點為$(2,2+\frac{-1}{2})=(2,\frac{3}{2})$

故$a=2,b=\frac{3}{2}$，得到$ab=3$，故選(A)。

100-01-12

Statement

雙曲線$xy-3x+4y=0$兩頂點的距離為何？

$(A)\quad 2\sqrt{3}$
$(B)\quad 4$
$(C)\quad 2\sqrt{6}$
$(D)\quad 4\sqrt{3}$
$(E)\quad 4\sqrt{6}$

Solution

$xy-3x+4y=0\Rightarrow(x+4)(y-3)=-12$

考慮通過頂點的線為$y=-x+b$，代入必定通過的點$(-4,3)$得到$b=-1$

因此$y=-x-1$會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$x(-x-1)-3x+4(-x-1)=0\Rightarrow x^2+8x+4=0$

利用公式解得到x的點，也就是$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\times1\times4}}{2}=-4\pm2\sqrt{3}$

當$x=-4+2\sqrt{3}$時，$y=2\sqrt{3}-3$

當$x=-4-2\sqrt{3}$時，$y=-3-2\sqrt{3}$

兩點距離為$\sqrt{(-4+2\sqrt{3}-(-4-2\sqrt{3}))^2+(2\sqrt{3}-3-(-3-2\sqrt{3}))^2}=\sqrt{48+48}=4\sqrt{6}$，故選$(E)$

100-01-13

Statement

若$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$，則$x=?$

$(A)\quad -3$
$(B)\quad -3$或1
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 3$

Solution

$\log_2(3-x^2) = 1 + \log_2 x$

$\Rightarrow \log_2(3-x^2) - \log_2 x = 1$

$\Rightarrow \log_2(\frac{3-x^2}{x}) = 1$

$\Rightarrow \frac{3-x^2}{x} = 2$

$\Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1, x = -3$

驗根可知$\log_2 x$無法放入-3，因為$\log$的定義域為正整數之集合，故$x = -3$不合。

因此$x = 1$，故選(C)

100-01-14

Statement

若$f(x) = \frac{1+2^x}{1-2^x}$，且$f(a) = 3$，$f(b) = 5$，則$f(a+b) = ?$

(A) $\frac{5}{3}$
(B) 2
(C) 6
(D) 8
(E) 15

Solution

令$t = 2^x$，則$f(x) = \frac{1+t}{1-t}$

考慮$f(a) = 3$

$\frac{1+t}{1-t} = 3$

$\Rightarrow 1 + t = 3 - 3t$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$

因此$2^a = \frac{1}{2}$，得到$a = -1$

考慮$f(b) = 5$

$\frac{1+t}{1-t} = 5$

$\Rightarrow 1 + t = 5 - 5t$

$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$

$2^b = \frac{2}{3}$，則$b = 1 - \log_2 3$

故$f(a+b)=f(-\log_2 3)=f(\log_2\frac{1}{3})=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{2}=2$，故選$(B)$

100-01-15

Statement

求$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=?$

$(A)\quad \frac{1}{2}$

$(B)\quad \frac{3}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad \frac{5}{2}$

$(E)\quad 4$

Solution

$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=\log_2(\sqrt{12+8\sqrt{2}}+\sqrt{12-8\sqrt{2}})=\log_2(\sqrt{8+8\sqrt{2}+4}+\sqrt{8-8\sqrt{2}+4})$

$=\log_2(\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(2-2\sqrt{2})^2})=\log_2(4\sqrt{2})=\frac{5}{2}$，故選$(D)$

100-01-16

Statement

設$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\sin\theta+\cos\theta=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad -\frac{1}{2}$

$(C)\quad \frac{1}{2}$

$(D)\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

$(E)\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

則$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$= \sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{1+2\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

(A) 若$0 < x < \frac{\pi}{4}$，則 $\sin x < \cos x < \cot x$

(B) 若$\pi < x < \frac{5\pi}{4}$，則 $\sec x < \csc x < \cot x$

(C) 若$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$，則 $\cos x < \sin x < \tan x$

(D) 若$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$，則 $\sin x_1 > \sin x_2$

(E) 若$\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$，則 $\cos x_1 > \cos x_2$

Solution

若$\pi < x < \frac{5\pi}{4}$，則 $\sin\theta < \cos\theta < \tan\theta$

故$\csc\theta < \sec\theta < \cot\theta$，故選$(B)$

100-01-18

Statement

若$mx+3y+1=0$與$x+(m-2)y+m=0$之交點在第二象限內，則m之範圍為何？

(A) $0 < m < 1$
(B) $0 < m < 2$
(C) $0 < m < 3$
(D) $1 < m < 3$
(E) $1 < m < 4$

Solution

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \dfrac{2m+2}{(m-3)(m+1)} \\ y = \dfrac{m^2-1}{(-m+3)(m+1)} \end{cases}$$

考慮到$y > 0, x < 0$的情況

得到$((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

得到$1 < m < 3$，故選(D)

100-01-19

Statement

若點(a,b)在直線$2x+3y=1$上移動，則直線$ax+by=3$恆過哪一點？

$(A)\quad(3,4)$
$(B)\quad(4,5)$
$(C)\quad(5,7)$
$(D)\quad(5,8)$
$(E)\quad(6,9)$

Solution

考慮$x=5$時$y=-3$

考慮$x=-4$時$y=3$

由於a,b依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮$5x-3y=3$與$-4x+3y=3$的交點，得到$(x,y)=(6,9)$，故選(E)

100-01-20

Statement

已知$A(3,-5)$，$B(-7,4)$，且點P介於A、B之間，又$\overline{AB}:\overline{BP}=7:4$，若$P$之座標為$(a,b)$，則$7a+21b=?$

$(A)\quad -33$
$(B)\quad -32$
$(C)\quad -31$
$(D)\quad -30$
$(E)\quad -29$

Solution

$\overline{AB}:\overline{BP}=7:4 \Rightarrow \overline{AP}:\overline{BP}=3:4$

利用內分點公式。

$$P=(\frac{4\times3+3\times(-7)}{7},\frac{4\times(-5)+3\times4}{7})=(\frac{-9}{7},\frac{-8}{7})$$

則$7a+21b=(-9)+(-8)\times3=-33$，故選$(A)$

100年第2次北科入學數學會考

100-02-01

Statement

若α，β為方程式$x^2+12x+9=0$的兩根，則$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=?$

(A) -18
(B) -6
(C) 6
(D) 12
(E) 18

Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式ax^2+bx+c，存在兩根α與β。

那麼$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$，且$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$\sqrt{\alpha}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2$

$\Rightarrow\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$

根據偉達定理我們可以求得

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-12}{1}=-12$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{9}{1}=9$$

注意一下$\alpha+\beta=-12$，$\alpha\beta=9$
若兩根一正一負那麼$\alpha\beta<0$，若兩根都是正的那麼$a+b>0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。
$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$會存在複數，相乘後可以得到$-\sqrt{\alpha\beta}$。

因此帶回欲求之式子：

$-12-2\times-\sqrt{9}=-12+6=-6$

100-02-02

Statement

若 $x^4-x^3-x^2-x-2$ 與 $2x^3+x^2-7x-6$ 的最高公因式為 x^2+bx+c，則$b+2c=?$

(A) -5
(B) -3
(C) 0
(D) 5
(E) 7

Solution

第一式的因式$ax+b$的a一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)，
且b一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到$(x+1)(x-2)(x^2+1)$
接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得倒$(x+1)(x-2)(2x+3)$

可以觀察到最大公因式即為$(x+1)(x-2)=x^2-x-2$
比較係數後得到$b=-1, c=-2$

則$b+2c=-1+2\times-2=-5$。

100-02-03

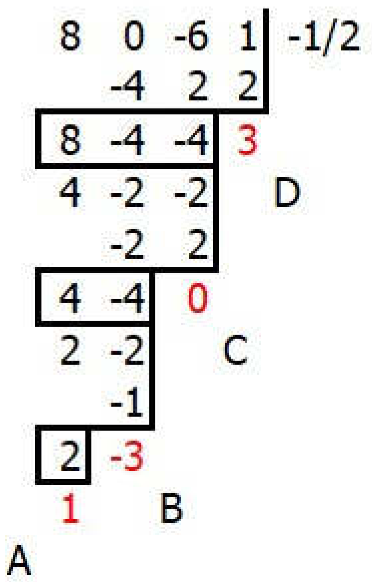
Statement

若$\dfrac{8x^3-6x+1}{(2x+1)^4}=\dfrac{a}{(2x+1)}+\dfrac{b}{(2x+1)^2}+\dfrac{c}{(2x+1)^3}+\dfrac{d}{(2x+1)^4}$，則$2a+b-c+d=?$

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

Solution

我們可以使用綜合除法，將$2x+1$改寫成$x+\frac{1}{2}$，然後再對除出來的係數除以2。



因此$a=1,\ b=-3,\ c=0,\ d=3$。

$2a+b-c+d=1\times2+(-3)-0+3=2$。

100-02-04

Statement

$x^2-4x+2\le|x-2|$ 之解為何？

$(\mathrm{A})\ 1\le\mathrm{x}\le4$
$(\mathrm{B})\ 2\le\mathrm{x}\le4$
$(\mathrm{C})\ 0\le\mathrm{x}\le2$
$(\mathrm{D})\ 0\le\mathrm{x}\le4$
$(\mathrm{E})\ 0\le\mathrm{x}\le3$

Solution

1. 考慮$x^2-4x+2\le x-2$：
   移項，$x^2-4x+2-x+2\le0$
   整理，$x^2-5x+4\le0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$(x-4)(x-1)\le0$，並且可以得到$1\le x\le4$。
2. 考慮$x^2-4x+2\le-x+2$：
   移項，$x^2-4x+2+x-2\le0$
   整理，$x^2-3x\le0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$x(x-3)\le0$，並且可以得到$0\le x\le3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到$0\le x\le4$。

100-02-05

Statement

$2\log_2x-\log_x2<1$之解為何？

$(\mathrm{A})\ \mathrm{x}<\frac{-1}{2}$ 或 $0<\mathrm{x}<1$
$(\mathrm{B})\ 0<\mathrm{x}<\frac{1}{2}$ 或 $1<\mathrm{x}<2$
$(\mathrm{C})\ \mathrm{x}<\frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $0<\mathrm{x}<1$
$(\mathrm{D})\ \mathrm{x}<\frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $1<\mathrm{x}<2$
$(\mathrm{E})\ 0<\mathrm{x}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1<\mathrm{x}<2$

Solution

$2\log_2x-\log_x2<1$

$\Rightarrow 2\log_2x-\frac{\log2}{\log x}<1$

$\Rightarrow 2\log_2x-\frac{1}{\log_2x}<1$

令$\log_2x=t$，那麼

$2t-\frac{1}{t}<1$

$\Rightarrow 2t-\frac{1}{t}-1<0$

$\Rightarrow \frac{2t^2-t-1}{t}<0$

考慮兩種情況。

1. 若$t > 0$且$2t^2 - t - 1 < 0$
   $2t^2 - t - 1 < 0 = (2t+1)(t-1) < 0 = \frac{-1}{2} < t < 1$
   與$t > 0$取交集得到$0 < t < 1$。
2. 若$t < 0$且$2t^2 - t - 1 > 0$
   $2t^2 - t - 1 > 0 = (2t+1)(t-1) > 0 = t < \frac{-1}{2}$ 或 $t > 1$
   與$t < 0$取交集得到$t < \frac{-1}{2}$。

對這兩種考慮取聯集，得到$t < \frac{-1}{2}$或$0 < t < 1$。

還原，得到$x < \frac{1}{\sqrt{2}}$或$1 < x < 2$。

100-02-06

Statement

已知ΔABC 中，$\overline{AB} = 37$，$\overline{BC} = 53$，$\overline{AC} = 89$，則下列各內積中，何者為最大？

$(A) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$(B) \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

$(C) \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$(D) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

$(E) \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$

Solution

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 37 \times 89 \times \frac{37^2 + 89^2 - 53^2}{2 \times 37 \times 89}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 53 \times 37 \times \frac{53^2 + 37^2 - 89^2}{2 \times 53 \times 37}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 89 \times 37 \times \frac{89^2 + 53^2 - 37^2}{2 \times 89 \times 53}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} < 0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$37^2 + 89^2 - 53^2$。

$53^2 + 37^2 - 89^2$

$89^2 + 53^2 - 37^2$

顯然是第三者較大，故選(C)

100-02-07

Statement

已知向量$\overrightarrow{AB} = (-31, 29)$，$\overrightarrow{AC} = (23, -11)$，則下列向量長中，何者為最大？

(A) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$
(B) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$
(C) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}|$
(D) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}|$
(E) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}|$

Solution

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$

$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$
$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$

考慮向量長的公式，當存在一向量$\overrightarrow{L} = (A, B)$，$\overrightarrow{L}$的向量長為$|\overrightarrow{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$
因此若$|A| + |B|$越大，那麼向量長越大。

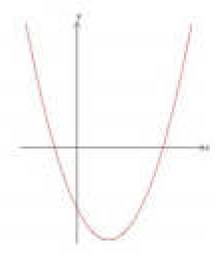
考慮選項A：$|-31| + |29| = 60$
考慮選項B：$|54| + |-40| = 94$
考慮選項C：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$，$|23| + |-11| = 34$
考慮選項D：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$，$|-8| + |18| = 26$
考慮選項E：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$，$|0| + |0| = 0$

因此，故選B。

100-02-08

Statement

設$y = ax^2 + bx + c$的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



(A) abc
(B) $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$
(C) $\mathrm{c}^2 - 4\mathrm{ab}$
(D) $\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$
(E) $\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$

Solution

因為開口向上，所以$a > 0$。
觀察$x = 0$，可以發現對應到的$y < 0$，因此$c < 0$
觀察一下對稱軸，$\frac{-b}{2a} > 0$，因此$b < 0$

因此$abc > 0$，$b^2 - 4ac > 0$因為有實數解。
$c^2 - 4ab > 0$因為$ab < 0$。

而$b + \sqrt{b^2 - 4ac}$必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，
另一根是負數因此$b - \sqrt{b^2 - 4ac}$小於0，故選E。

100-02-09

Statement

已知$4x^2 + y^2 - 4x + 8y = 8$，則x的最大值為何？

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的x了。

$$4x^2 - 4x + y^2 + 8y = 8$$

$$4(x^2 - x) + y^2 + 8y = 8$$

$$4(x^2 - x + \frac{1}{4}) + y^2 + 8y + 16 = 8 + 16 + 1$$

$$4(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y + 4)^2}{25} = 1$$

由此可知這個橢圓的短邊平行x軸

$$a = \sqrt{25} = 5, b = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

中心可從式子得知，$(x, y) = (\frac{1}{2}, -4)$

因此，加上x的部份得到$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

100-02-10

Statement

拋物線$y=4-2x-x^2$與x軸兩交點的距離為何？

(A) 2
(B) 3
(C) $2\sqrt{5}$
(D) 6
(E) 8

Solution

將y等於0，求出x。

$-x^2-2x+4=0$

先確定b^2-4ac是否大於0。

$(-2)^2-4\times(-1)\times4=4+16=20$

因此兩根為$\dfrac{2\pm\sqrt{20}}{-2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{5}}{-2}$

$\dfrac{2+\sqrt{5}}{-2}-\dfrac{2-\sqrt{5}}{-2}=2\sqrt{5}$

100-02-11

Statement

設雙曲線$x^2-y^2=x+2y$兩漸進的夾角為θ，則$\sin\dfrac{\theta}{2}=?$

(A) 0
(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
(E) 1

Solution

配方雙曲線得到標準式。

$x^2-x-y^2-2y=0\Rightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4}-y^2-2y+1=\dfrac{5}{4}$

$(x-\dfrac{1}{2})^2-(y-1)^2=\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{4(x-\dfrac{1}{2})^2}{5}-\dfrac{4(y-1)^2}{5}=1$

求漸進線，令等號右邊為0

$$\frac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5}=\frac{4(y-1)^2}{5}$$

$$(x-\frac{1}{2})^2=(y-1)^2$$

$$(x-\frac{1}{2})^2-(y-1)^2=0$$

$$(x-\frac{1}{2}-(y-1))(x-\frac{1}{2}+(y-1))=0$$

$$(x-y+\frac{1}{2})(x+y+\frac{3}{2})=0$$

第一條線$(x-y+\frac{1}{2})$可求斜率$m=1$

第二條線$(x+y+\frac{3}{2})$可求斜率$m=-1$

因此，這兩條線垂直$(m_1\times m_2=-1)$，夾角為90°

因此$\sin\frac{90^{\circ}}{2}=\sin 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

100-02-12

Statement

不等式$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\leq 2$之解為何？

$(\mathrm{A})\ -1\leq \mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{B})\ 0<\mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{C})\ 1\leq \mathrm{x}\leq 2$

$(\mathrm{D})\ 0<\mathrm{x}\leq 2$

$(E)\ 1\leq x\leq 4$

Solution

將分子分母上下同乘2^x。

$$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\Rightarrow\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}\leq 2$$

移項。

$$\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}-2\leq 0$$

$$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2(2^{2x}-1)}{2^{2x}-1}\leq 0$$

$$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2\cdot 2^{2x}+2}{2^{2x}-1}\leq 0$$

$\frac{2^{2x} - 16}{2^{2x} - 1} \leq 0$

令$t = 2^{2x}$

$\frac{t-16}{t-1} \leq 0$

考慮以下兩點：

1. $t - 16 \geq 0$，$t - 1 < 0$

$t \geq 16,\ t < 1$，這兩個不等式沒有任何交集，因此$t \in \emptyset$

2. $t - 16 \leq 0$，$t - 1 > 0$

$t \leq 16,\ t > 1$，這兩個不等式的交集為$1 < t \leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到$1 < t \leq 16$

還原t得到$1 < 2^{2x} \leq 16$，因此$0 < x \leq 2$

100-02-13

Statement

方程式$10 \cdot x^{2\log x} = x^3$之所有實根的平方和為何？

(A) 100
(B) 101
(C) 110
(D) 111
(E) 121

Solution

等號兩邊同除$x^{2\log x}$

$10 = x^{3-2\log x}$

$1 = (3 - 2\log x) \times \log(|x|)$

因為要求實根，因此可以限定$x > 0$，所以$(3 - 2\log x) \times \log(x)$

令$t = \log x$

$1 = (3 - 2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$

因式分解得到$(-2t+1)(t-1) = 0$

可以解出$t = \frac{1}{2}$或$t = 1$

還原t，可以得到$\log x = \sqrt{10}$ 或 $\log x = 10$

兩根的平方和為$\sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$

100-02-14

Statement

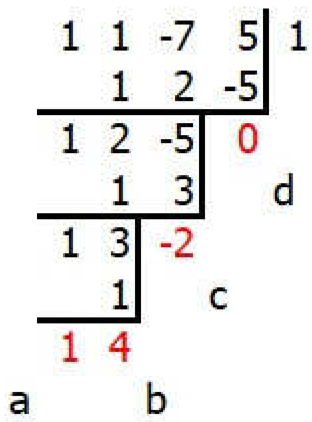
若$f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$，則$f(1+\sqrt{2}) = ?$

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solution

觀察一下，可以嘗試把$x^3 + x^2 - 7x + 5$化簡成$c(x-1)^2 + b(x-1) + a...$

這部分可以用綜合除法做到。



因此可得$(x-1)^3 + 4(x-1)^2 - 2(x-1)$。

把$f(1+\sqrt{2})$帶進去，得：

$\log_2((\sqrt{2})^3 + 4(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})) = \log_2(2\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{2}) = \log_2 8 = 3$

100-02-15

Statement

設$\cos\theta + \cos^2\theta = 1$，則$\sin^2\theta + \sin^4\theta = ?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

$\cos^2\theta = 1 - \cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - (1 - \cos\theta) = \cos\theta$

$\sin^4\theta = (\sin^2\theta)^2 = \cos^2\theta$

$\sin^2\theta + \sin^4\theta = \cos\theta + \cos^2\theta = 1$

100-02-16

Statement

設$\tan 100^\circ = k$，則$\sin 80^\circ = ?$

(A) $\frac{-\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(B) $\frac{\sqrt{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

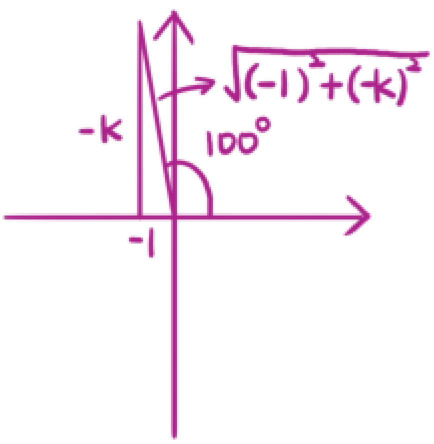
(C) $\frac{-1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(D) $\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

Solution

畫個圖



看圖可以觀察到，$\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

100-02-17

Statement

設$a = \sec 434^\circ$，$b = \sin 100^\circ$，$c = \cos 260^\circ$，$d = \cot 28^\circ$，$e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A) b < c < d < e < a

(B) c < b < d < e < a

(C) c < b < e < d < a

(D) c < b < d < a < e

(E) b < c < a < d < e

Solution

$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$

$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$

$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$

$d = \cot 28^\circ$

$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$

因此$a > e$，$c < b$，故選B。

100-02-18

Statement

平面上有兩點$A(1,2)$，$B(a,b)$，若直線$\overline{AB}$之垂直平分線為$x + 2y - 10 = 0$，則$a - b$ = ？

(A) -1

(B) -2

(C) -3

(D) -4

(E) -5

Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過$\overline{AB}$的中點$(\dfrac{1+a}{2}, \dfrac{2+b}{2})$。

帶入垂直平分線得到$\dfrac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$

$\Rightarrow a + 2b = 15$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到$m = \dfrac{-1}{2}$，因此與其垂直的斜率一定是$m = \dfrac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到$\dfrac{2-b}{1-a} = 2$，整理得到$2 - b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$。

帶回第一式可以得到$5a = 15,\ a = 3,\ b = 6$。

$a - b = 3 - 6 = -3$

100-02-19

Statement

設直線$bx + ay - ab = 0$，$a > 0,\ b < 0$過點$(1, 2)$，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則$a + 2b = ?$

$(\mathrm{A})\ -7 - 3\sqrt{3}$

$(\mathrm{B})\ -6 - 3\sqrt{3}$

$(\mathrm{C})\ -5 - 3\sqrt{3}$

$(\mathrm{D})\ -4 - 3\sqrt{3}$

$(\mathrm{E})\ -3 - 3\sqrt{3}$

Solution

可以推出x, y的通式。

$bx + ay = ab$，求出x, y的截距。

當$y = 0$，那麼$bx = ab$，$x = a$

當$x = 0$，那麼$ay = ab$，$y = b$

已知$a > 0, b < 0$過點$(1, 2)$，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道$\dfrac{1}{2}|a||b| = 2$，可知$ab = -4$或者$ab = 4$，但是$a > 0, b < 0$，因此$ab = 4$不合。

已知過點$(1, 2)$且$ab = -4$，因此可以把點帶入得到$b + 2a = -4$，

又$ab = -4$所以$a = \dfrac{-4}{b}$，所以得到$b + \dfrac{-8}{b} = -4$

同乘以b可以得到$b^2 + 4b - 8$。'

利用公式解可以解出$\dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times -8}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \dfrac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根$-2+2\sqrt{3}$或者$-2-2\sqrt{3}$，其中由於$b<0$，因此$-2+2\sqrt{3}$不合。

帶回求出a得到$a=\dfrac{-4}{-2-2\sqrt{3}}=\dfrac{-4}{-2(1+\sqrt{3})}$

化簡得到$a=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{2(1-\sqrt{3})}{-2}=-1(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$

因此$a+2b=\sqrt{3}-1+-4-4\sqrt{3}=-5-3\sqrt{3}$

100-02-20

Statement

設直線$3x+y=1$與$x+3y=2$之夾角為θ，則$\cos 2\theta=?$

$(\mathrm{A})\ \dfrac{-7}{25}$

$(\mathrm{B})\ \dfrac{-6}{25}$

$(\mathrm{C})\ \dfrac{-1}{5}$

$(\mathrm{D})\ \dfrac{-4}{25}$

$(\mathrm{E})\ \dfrac{-3}{25}$

Solution 1

設兩條直線的法向量為$n_1=<3,1>$，$n_2=<1,3>$

則$\cos\theta=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

因此$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

所以$\cos 2\theta=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=-\dfrac{7}{25}$，故選$(A)$

Solution 2

考慮兩條線的斜率。

$3x+y=1,\ m_1=\dfrac{-3}{1}=-3$

$x+3y=2,\ m_2=\dfrac{-1}{3}$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為tan來考慮。

$$\tan(m_1-m_2)=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-3-\frac{-1}{3}}{1+1}=\frac{\frac{-8}{3}}{2}=\frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個tan夾角是負的，因此這個夾角是大於90°的鈍角。

可以依照$\tan(180^\circ)=0$來求得另一個銳角的夾角。

$\frac{\frac{-4}{3}+\tan\theta}{1-\frac{-4}{3}\tan\theta}$，求得銳角$\tan\theta=\frac{4}{3}$

由於$\tan\theta=\frac{4}{3}$，那麼這個角度會介於$45^\circ\sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於90°

用兩倍角公式求出$\tan 2\theta=\frac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}}=\frac{24}{-7}$

由於這個角度介於$90^\circ\sim 180^\circ$，$y>0$，而$x<0$，也因此$y=24,\ x=-7,\ r=\sqrt{24^2+(-7)^2}=25$

因此$\cos 2\theta=\frac{-7}{25}$，故選$(A)$

101年第1次北科入學數學會考

101-01-01

Statement

設$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$且$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{-\pi}{2}<\beta<0$，求$\sin(\alpha+\beta)=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad \dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}$

$(C)\quad \dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}$

$(D)\quad \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$

$(E)\quad \dfrac{2-2\sqrt{2}}{3}$

Solution

$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，則$\cos\alpha=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{-\pi}{2}<\beta<0$，則$\sin\beta=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}$

因此$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{-\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}$，故選$(C)$

101-01-02

Statement

$\sin(\dfrac{5\pi}{3})\tan(\dfrac{-\pi}{4})\cos(\dfrac{5\pi}{6})=?$

$(A)\quad \dfrac{-3}{4}$

$(B)\quad \dfrac{-\sqrt{3}}{4}$

$(C)\quad \dfrac{-1}{4}$

$(D)\quad \dfrac{1}{4}$

$(E)\quad \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Solution

$\sin(\frac{5\pi}{3}) = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\tan(\frac{-\pi}{4}) = -\tan 45^\circ = -1$

$\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

因此$\sin(\frac{5\pi}{3})\tan(\frac{-\pi}{4})\cos(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}(-1)\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$，故選$(A)$

101-01-03

Statement

設α, β為方程式$x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$兩負根，且$\alpha^2 + \beta^2 = 24$，則$k = ?$

$(A)\quad -4$
$(B)\quad -3$
$(C)\quad -2$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 4$

Solution

根據根與係數，得到$\alpha\beta = \frac{k^2 + k}{1} = k^2 + k$，且$\alpha + \beta = -\frac{-2k}{1} = 2k$

且由於是兩負根，所以$\alpha\beta > 0, \alpha + \beta < 0$

故$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 - 2(k^2 + k) = 2k^2 - 2k = 24$

解方程可知$k = 4$或$k = -3$

驗根，若$k = 4$，則$\alpha + \beta = 8 > 0$，故不合。

因此$k = -3$，故選(B)。

101-01-04

Statement

取適當k值，使圓$x^2 + y^2 - 2kx - 4y + 2k^2 = 6k$的面積最大，問此時圓面積為何？

$(A)\quad 10\pi$
$(B)\quad 11\pi$
$(C)\quad 12\pi$
$(D)\quad 13\pi$
$(E)\quad 14\pi$

Solution

對式子做配方法，可以得到$(x^2-2kx+k^2)+(y^2-4y+4)=6k-2k^2+k^2+4$

因此$(x-k)^2+(y-2)^2=-k^2+6k+4$

若圓半徑越大則面積越大，因此我們考慮$-k^2+6k+4$的極值

因此我們對$(-k^2+6k+4)$做配方法，得到$-(k-3)^2+13$

因此在$k=3$時，有最大圓半徑$\sqrt{13}$，故圓面積為$(\sqrt{13})^2\pi=13\pi$，故選(D)

101-01-05

Statement

設$P(x,y),A(1,-1),B(1,1),C(4,-1)$。滿足$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+2\overline{PC}^2$為最小，則$x+y=?$

$(A)\quad 1$
$(B)\quad 2$
$(C)\quad 3$
$(D)\quad 4$
$(E)\quad 5$

Solution

可列式成$(x-1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+2((x-4)^2+(y+1)^2)$

整理成$2(x-1)^2+3(y+1)^2+2(x-4)^2+(y-1)^2$

由於各項數字均一定為正，我們可以分開討論

尋找$2(x-1)^2+2(x-4)^2$與$3(y+1)^2+(y-1)^2$的最小值。

$2(x-1)^2+2(x-4)^2\Rightarrow 2x^2-4x+2+2x^2-16x+32\Rightarrow 4x^2-20x+34$

對其做配方法，得到$4(x-\frac{5}{2})^2+9$，可得$x=\frac{5}{2}$有最小值9。

$3(y+1)^2+(y-1)^2\Rightarrow 3y^2+6y+3+y^2-2y+1\Rightarrow 4y^2+4y+4$

對其做配方法，得到$4(y+\frac{1}{2})+3$，可得$y=\frac{-1}{2}$有最小值3。

因此$x+y=\frac{5}{2}+\frac{-1}{2}=2$，故選$(B)$

101-01-06

Statement

已知$A(-1,-4),B(3,5)$兩點，又C在直線上$x+y=0$移動，則$\overline{AC}+\overline{BC}$的最小距離為何？

(A) $\sqrt{97}$
(B) 10
(C) $5\sqrt{5}$
(D) 12
(E) 14

Solution

若兩點與直線異側，則C的取點即為A與B做一直線與$x+y=0$之交點，最小距離即為A與B的距離。

將A, B代入直線方程式檢驗

$A: \quad -1+-4=-5<0$

$B: \quad 3+5=8>0$

因此最短距離為A與B的距離，也就是$\sqrt{(-1-3)^2+(-4-5)^2}=\sqrt{16+81}=\sqrt{97}$，故選$(A)$

101-01-07

Statement

四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=\overline{CD}=5$，$\overline{BC}=2$，$\overline{BC}<\overline{AD}$且$\angle ABC=\angle ADC=60^\circ$，則$\overline{AD}=?$

(A) 3
(B) 5
(C) 6
(D) 8
(E) 9

$\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{5^2+2^2-\overline{AC}^2}{2\times5\times2}=\dfrac{1}{2}$，可得$\overline{AC}=\pm\sqrt{19}$ (負不合)

因此，$\cos\angle ADC=\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AD}^2+25-19}{10\overline{AD}}=\dfrac{1}{2}$

可以得到$\overline{AD}=2$或$\overline{AD}=3$

由於$\overline{AD}>\overline{BC}$，因此$\overline{AD}=2$不合，故$\overline{AD}=3$，故選$(A)$

101-01-08

Statement

點$(-3,1)$與拋物線$y^2-2y+5=2x$的最短距離為何？

(A) 4
(B) $\sqrt{17}$
(C) $3\sqrt{2}$
(D) 5
(E) $5\sqrt{5}$

Solution

$y^2 - 2y + 5 = 2x$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 + 5 - 1 = 2x$

$\Rightarrow (y-1)^2 = 2(x-2)$，開口向右。

故頂點為$(2,1)$，與$(-3,1)$的距離隔5，因此距離為5，故選(D)

101-01-09

Statement

設橢圓$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$之長軸長為A，短軸長為B，則$A+B=?$

(A) $1+\sqrt{3}$
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

Solution

配方法

$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$

$\Rightarrow (x-1)^2 + 4y^2 = 4$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$

因此長軸$A = \sqrt{4} \times 2 = 4$，短軸長$B = \sqrt{1} \times 2 = 2$

因此$A + B = 4 + 2 = 6$，故選(E)

101-01-10

Statement

若$f(x) = x^3 + ax^2 + 11x + 6$與$g(x) = x^3 + bx^2 + 14x + 8$有二次公因式，則$a+b=?$

(A) 13
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 17

Solution

考慮$f(x)$可能的因式：$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x-6)(x+6)$

考慮$g(x)$可能的因式：$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)(x-8)(x+8)$

可以知道$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$可能共同

因此我們考慮以下四種式子，是否存在兩個相同的a，就能當作$f(x)$的因式。

$$a\begin{cases}(x-1)\Rightarrow 1+a+11+6=0 & a=18\\ (x+1)\Rightarrow -1+a-11+6=0 & a=6\\ (x-2)\Rightarrow 8+4a+22+6=0 & a=-9\\ (x+2)\Rightarrow -8+4a-22+6=0 & a=6\end{cases}$$

因此選$(x+1)(x+2)$，其中$a=6$。

因此$b=(-1)^3+b(-1)^2+14(-1)+8$，得到$b=7$

因此$a+b=6+7=13$，故選(A)

101-01-11

Statement

若$5\cdot 25^x+350\cdot 5^{x-2}=3$，則$x=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 1$
$(E)\quad 2$

Solution

化簡式子，得到$5\cdot 5^{2x}+350\cdot\dfrac{1}{25}5^x=3$

因此$5\cdot 5^{2x}+14\cdot 5^x=3$

令$t=5^x$，則$5t^2+14t=3$，得到$t=\dfrac{1}{5}$或$t=-3$

驗根，$5^x=t=-3$，則x不存在，故$t=-3$不合。

因此$5^x=t=\dfrac{1}{5}$，$x=-1$，故選(B)

101-01-12

Statement

若$a=\log 2$，$b=\log 3$，則$\log_{12}180=?$

$(A)\quad 1-a+b$

$(B)\quad \dfrac{1+a^2+b^2}{a^2+b}$

$(C)\quad \dfrac{a+2b+1}{2a+b}$

$(D)\quad \dfrac{2a+2b+1}{2a+b}$

$(E)\quad \dfrac{2a+2b-1}{2a+b}$

Solution

可以考慮成$\dfrac{\log 180}{\log 12}=\dfrac{2b+a+1}{2a+b}$，故選$(C)$

###

101-01-13

Statement

求曲線$y=-\sqrt{12-x(x+4)}$與x軸所圍的面積為何？

$(A)\quad 4\pi$

$(B)\quad 5\pi$

$(C)\quad 6\pi$

$(D)\quad 7\pi$

$(E)\quad 8\pi$

Solution

兩邊平方，得到$y^2=12-x^2-4x$，配方法得$(x+2)^2+y^2=16$，中心位於$(-2,0)$，半徑為4

可知原式原先為一半圓，且在x軸底下。

因此可得面積為$\dfrac{1}{2}(4)^2\pi=8\pi$，故選$(E)$

101-01-14

Statement

方程式$\log(x+1)+\log(x+3)-1=\log(x+2)$的解為何？

$(A)\quad 5-\sqrt{26}$
$(B)\quad 3-\sqrt{26}$
$(C)\quad 1-\sqrt{26}$
$(D)\quad 3+\sqrt{26}$
$(E)\quad 5+\sqrt{26}$

Solution

改寫成$\log(x+1)+\log(x+3)-\log 10=\log(x+2)$

$\Rightarrow \log(\dfrac{(x+1)(x+3)}{10})=\log(x+2)$

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)(x+3)}{10}=x+2$

$\Rightarrow x^2+4x+3=10x+20$

$\Rightarrow x^2-6x-17=0$

公式解，可以得到$\dfrac{6\pm\sqrt{36-4\times 1\times(-17)}}{2}=3\pm\sqrt{26}$

驗根，考慮將x套入$\log(x+1)$上

$3-\sqrt{26}+1=4-\sqrt{26}=\sqrt{16}-\sqrt{26}<0$，不符合log的定義域，故不合。

因此$x=3+\sqrt{26}$，故選(D)

101-01-15

Statement

設$\dfrac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$，則$3A+2B+C=?$

$(A)\quad 3$
$(B)\quad 4$
$(C)\quad 5$
$(D)\quad 6$
$(E)\quad 7$

Solution

$\dfrac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

$\Rightarrow 2x^2-x+4=A(x^2+4)+x(Bx+C)$

$\Rightarrow 2x^2-x+4+(A+B)x^2+Cx+4A$

可得$A+B=2, C=-1, A=1$，因此$B=1$

故$3A+2B+C=3\times 1+2\times 1+(-1)=4$，故選$(B)$

101-01-16

Statement

已知兩平面向量$\vec{u}=<3,4>$與$\vec{v}=<x,y>$，若$\vec{v}$可使與$\vec{u}$與$\vec{v}$的內積值最大，且$|\vec{v}|=2$，則$x=?$

$(A)\quad \frac{2}{5}$
$(B)\quad \frac{3}{5}$
$(C)\quad \frac{4}{5}$
$(D)\quad 1$
$(E)\quad \frac{6}{5}$

Solution

考慮$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$，則要使內積值最大，可使$\cos\theta=1$，也就是$\theta=0^\circ$，兩向量平行。

因此$x:y=3:4$，又$|\vec{v}|=2$，因此$\vec{v}=<2\times\frac{3}{5},2\times\frac{4}{5}>=<\frac{6}{5},\frac{8}{5}>$

因此$x=\frac{6}{5}$，故選(E)

101-01-17

Statement

不等式$\frac{x-7}{(x-1)^2}\leq -1$

$(A)\quad 3\leq x$
$(B)\quad x\leq -2$
$(C)\quad -2\leq x<1$或$1<x\leq 3$
$(D)\quad -2\leq x\leq 3$
$(E)\quad x\leq -2$或$3\leq x$

Solution

$$\frac{x-7}{(x-1)^2}\leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{(x-1)^2}+1\leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-7+(x-1)^2}{(x-1)^2}\leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-6}{(x-1)^2}\leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2}\leq 0$$

定義域$x \neq 1$，分母恆正，考慮分子的情況

$$\begin{cases} x-3 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2, 3]$$

因此兩者取聯集，得到$[-2, 1) \cup (1, 3]$，故選(C)

101-01-18

Statement

設x, y均為正數，且$3x + y = 10$，則x^3y^2的最大值為何？

$(A)\quad 108$
$(B)\quad 116$
$(C)\quad 122$
$\color{red}(D)\quad 128$
$(E)\quad 134$

Solution

利用算幾不等式，可以考慮成$\dfrac{x+x+x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y}{5} \geq \sqrt[5]{x^3 \times \frac{1}{4}y^2}$

$\Rightarrow 2 \geq \sqrt[5]{\frac{1}{4}x^3y^2}$

因此$32 \geq \frac{1}{4}x^3y^2 \Rightarrow 128 \geq x^3y^2$，故$x^3y^2$的最大值為$128$，故選$(D)$

101-01-19

Statement

設$A(x, y), B(-1, 4), C(5, -4)$，且$\Delta ABC$的重心坐標為$(2, -1)$，則$x - y= ?$

$(A)\quad 1\\(B)\quad 2\\(C)\quad 3\\(D)\quad 4\\\color{red}(E)\quad 5$

Solution

使用重心公式

$\dfrac{x+(-1)+5}{3} = 2$，$x = -10$

$\dfrac{y+4+(-4)}{3} = -1$，$y = -3$

因此$x = 2, y = -3, x-y =5$，故選(E)

101-01-20

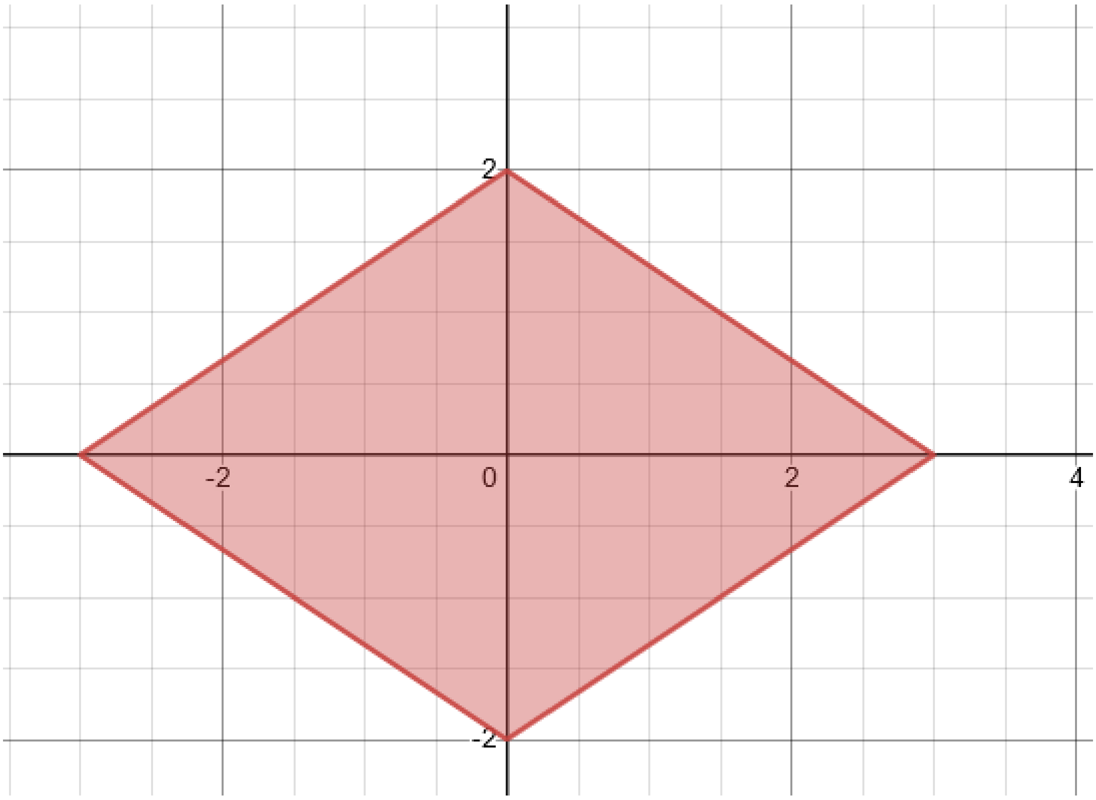
Statement

平面上$2|x|+3|y| \le6$所表示區域的面積為何？

$(A)\quad 4\\(B)\quad 8\\\color{red}(C)\quad 12\\(D)\quad 16\\(E)\quad 32$

Solution

畫出圖



面積為$\dfrac{4\times 6}{2} = 12$，故選$(C)$。

101年第2次北科入學數學會考

101-02-01

Statement

設$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{-5}{13}$，且$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，則$\sin(\alpha-\beta)=?$

(A) $\dfrac{-56}{65}$

(B) $\dfrac{-16}{65}$

(C) $\dfrac{16}{65}$

(D) $\dfrac{27}{65}$

(E) $\dfrac{56}{65}$

Solution

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\sin\alpha<1,\ 0<\cos\alpha<1$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}=\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$

$\because \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$

$\therefore 0<\sin\beta<1,\ \ -1<\cos\beta<0$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-(\dfrac{-5}{13})^2}=\dfrac{12}{13}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{-5}{13}-\dfrac{12}{13}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{-20}{65}-\dfrac{36}{65}=\dfrac{-56}{65}$

102-02-02

Statement

方程式$2^{x^2}\cdot4^x\cdot16=8^x\cdot64$之所有解的和為何？

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

將式子改寫。

$2^{x^2} \cdot 4^x = 8^x \cdot 64$

$\Rightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{2x} = 2^{3x} \cdot 2^6$

$\Rightarrow 2^{x^2+2x} = 2^{3x+6}$

兩邊同取$\log_2$，得到$x^2 + 2x = 3x + 6$

也就得到$x^2 - x - 6 = 0$，因式分解得到$(x-3)(x+2) = 0$

解根得到$x = 3$或$x = -2$，$3 + (-2) = 1$

101-02-03

Statement

已知Γ表$f(x, y) = 0$所對應之圖形，若Γ水平方向拉長2倍，再往右平移1單位，則此新圖形的方程式為何？

$(A) \quad f(\frac{x}{2} + 1, y) = 0$
$(B) \quad f(\frac{x-1}{2}, y) = 0$
$(C) \quad f(\frac{x+1}{2}, y) = 0$
$(D) \quad f(2x + 1, y) = 0$
$(E) \quad f(2x - 1, y) = 0$

Solution

考慮拉長兩倍，那麼a要變大兩倍，因此x乘以$\frac{1}{2}$

考慮往右平移一單位，那麼座標$x - 1$，因此x減1

因此$f = (\frac{x-1}{2}, y) = 0$，故選$(B)$

101-02-04

Statement

設直線L過點$(-1, 1)$且與直線$8x - 6y = 1$垂直，則此直線方程式為何？

$(\text{A})\ 3\text{x} - 4\text{y} = -1$

$(\text{B})\ 4\text{x} + 3\text{y} = -1$

$(\text{C})\ 4\text{x} - 3\text{y} = -7$

$(\text{D})\ 3\text{x} + 4\text{y} = 1$

(E) $\mathrm{x} - \mathrm{y} = -2$

Solution

直線$8x - 6y = 1$的斜率為$\frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

因此造一條與其垂直的直線，這條直線的斜率與其斜率乘積必為-1。

$\frac{4}{3} \times m = -1, m = \frac{-3}{4}$

已知此直線會過點$(-1,1)$，因此$y - 1 = \frac{-3}{4}(x+1)$

$4y - 4 = -3(x+1),\ 3x + 4y = 1$

101-02-05

Statement

過點$(2,-3)$與圓$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$相切的直線方程式為何？

(A) $2\mathrm{x} - \mathrm{y} = 7$

(B) $\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = -4$

(C) $2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = 13$

(D) $3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 12$

(E) $\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 8$

Solution

從圓的方程式可以知道，圓心為$(1,-1)$且半徑為$\sqrt{5}$。

因此我們可以造過點$(2,-3)$的線，並且距離與圓心剛好為$\sqrt{5}$

可以套用距離公式來得到。

令與圓相切的直線為$y + 3 = m(x-2)$

整理後得到$mx - y - 2m - 3 = 0$

我們可以套用距離公式，得到$\frac{|mx - y - 2m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$

將圓心帶入距離公式，得到$|m + 1 - 2m - 3| = \sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

整理後得到$|-m-2| = \sqrt{5m^2+5}$

兩邊平方後得到$(-m-2)^2 = 5m^2 - 5 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 5m^2 + 5$

因此$-4m^2 + 4m - 1$，$m = \frac{1}{2}$ (重根)

$y + 3 = \frac{1}{2}(x-2)$

$\Rightarrow\ 2y + 6 = x - 2$

$\Rightarrow\ x-2y-8=0$

$\Rightarrow x-2y=8$

101-02-06

Statement

以$(1,3+\sqrt{5})$與$(1,3-\sqrt{5})$為兩焦點且短軸長為6之橢圓方程式為何？

(A) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{14}=1$

(B) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{25}=1$

(C) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{14}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{9}=1$

(D) $\frac{(\mathrm{x}-3)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{14}=1$

(E) $\frac{(\mathrm{x}-3)^2}{25}+\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{9}=1$

Solution

兩焦點只有y軸有變動，因此這是一個貫軸平行y軸的橢圓。

中心$(x,y)=(\frac{1+1}{2},\frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2})=(1,3)$

$2c=(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5},\ c=\sqrt{5}$

$2b=6,b=3$

因此$a=\sqrt{3^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9+5}=\sqrt{14}$

依照$\frac{(x-h)}{b}+\frac{(y-k)}{a}=1$列式，得

$\frac{(x-1)}{9}+\frac{(y-3)}{14}=1$

101-02-07

Statement

設$2\log(x-3)-\log 2=\log(x+9)$，則$x^2-10x+12$之值為何？

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$2\log(x-3)-\log 2=\log(x+9)$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2-6x+9}{x+9})=\log(2)$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2-6x+9}{2x+18})=0$

$\Rightarrow \frac{x^2-6x+9}{2x+18}=1$

$\Rightarrow x^2-6x+9=2x+18$

$\Rightarrow x^2-8x-9=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-9)=0$

得到$x=-1, x=9$

驗根，由於$x=-1$帶進去後，$x-3<0$，又因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-1$不合。

因此$x=9$。

$9^2-90+12=81-90+12=3$，故選(C)。

101-02-08

Statement

若$0\leq\theta<2\pi$，則$\cos 2\theta+2\cos^2\frac{\theta}{2}=1$有幾個解？

(A)　0
(B)　1
(C)　2
(D)　3
(E)　4

Solution

利用和角公式，可以知道

$\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}-(1-\cos^2\frac{\theta}{2})=2\cos^2(\frac{\theta}{2})-1=\cos\theta$

因此$\cos\theta+1=2\cos^2(\frac{\theta}{2})$

且$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

$2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1=1$

$2\cos^2\theta+\cos\theta=1$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

令$t=\cos\theta$，則$2t^2+t-1=0$，可得$t=\frac{1}{2}$或$t=-1$

考慮$t=\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{-\pi}{3}$

考慮$t=\cos\theta=-1$，則$\theta=\pi$

因此有三組解，故選(D)

101-02-09

Statement

設a、b、c分別表示ΔABC的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對邊長，若$b^2-(c-a)^2=ca$，則$\angle B=?$

(A) 30°
(B) 45°
(C) 60°
(D) 120°
(E) 135°

Solution

$b^2-(c-a)^2=ca$

$\Rightarrow b^2-(c^2-2ac+a^2)=ca$

$\Rightarrow b^2-c^2+2ac-a^2=ca$

$\Rightarrow b^2-c^2-a^2=-ac$

$\Rightarrow a^2+c^2-b^2=ac$

$\Rightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$

又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$

因此$\angle B=\frac{\pi}{3}=60^\circ$，故選$(C)$。

101-02-10

Statement

方程式$x^{1+\log_2 x}=(2x^3)$之所有解的和為何？

(A) $\frac{15}{2}$
(B) 8
(C) $\frac{17}{2}$
(D) 9
(E) $\frac{19}{2}$

Solution

$x^{1+\log_2 x} = 8x^3$

$\Rightarrow 1 + \log_2 x = \log_x(8x^3)$

$\Rightarrow 1 + \log_2 x = \dfrac{\log_2 8x^3}{\log_2 x}$

$\Rightarrow \log_2 x + \log_2^2 x = \log_2 8x^3$

$\Rightarrow \log_2 x + \log_2^2 x = 3 + 3\log_2 x$

令$t = \log_2 x$，則$t + t^2 = 3 + 3t$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

$\Rightarrow t = 3$或$t = -1$

還原t，得到$\begin{cases} \log_2 x = 3, & x = 8 \\ \log_2 x = -1, & x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

因此$8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$，故選$(C)$

101-02-11

Statement

若$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$，且$(f \circ g)(x) = \dfrac{x}{x+1}$，則$g(0) = ?$

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

Solution

$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$，則$f(g(0)) = \dfrac{x}{x+1} = 0$，因此$\dfrac{x-1}{x} = 1$，因此$g(0) = 1$，故選$(B)$。

101-02-12

Statement

已知平面上兩點$A(-3,1)$，$B(3,5)$，又點$P(a,b)$在直線$2x + y + 1 = 0$且$\overline{PA} = \overline{PB}$，則$a + b = ?$

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

Solution

將A, B兩點帶入直線，確定是否同側或異側。

代入點A：$2 \cdot (-3) + 1 + 1 = -4$

代入點B：$2 \times 3 + 5 + 1 = 12$

因此兩點異側。

$2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1$

由於$\overline{PA} = \overline{PB}$，因此

$\sqrt{(-3-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (5-y)^2}$

$\Rightarrow (-3-x)^2 + (1+2x+1)^2 = (3-x)^2 + (5+2x+1)^2$

$\Rightarrow (-3-x)^2 + (2x+2)^2 = (3-x)^2 + (6+2x)^2$

$\Rightarrow 5x^2 + 14x + 13 = 5x^2 + 18x + 45$

$\Rightarrow -4x = 32$

$\Rightarrow x = -8$

$\Rightarrow y = 15$

因此$a = -8, b = 15, a + b = 7$，故選$(C)$

101-02-13

Statement

設二向量$\vec{a} =< 2, t^2 - 3 >$，$\vec{b} =< t, -1 >$。

若$\vec{a}$和$\vec{b}$的夾角為$\frac{\pi}{2}$，且$\vec{b}$的長度不大於2，則$t = ?$

(A) -2
(B) -1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

Solution

$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，因此$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$，因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2t-t^2+3=(-t+3)(t+1)=0$

得到$t=3$或$t=-1$

長度不大於2，因此我們考慮兩種t套進$\vec{b}$的影響

考慮$t=3$，得到$\sqrt{(3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}>2$，因此$t=3$不合

考慮$t=-1$，得到$\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

因此$t=-1$，故選(B)。

101-02-14

Statement

設$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$為方程式$x^2-6x+5=0$的兩根，且$\alpha<\beta+2$，則$\beta=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

利用根與係數，可以知道

$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=-(\dfrac{-6}{1})=6$

$2\alpha=6$則$\alpha=3$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2=5$，則$\beta=\pm2$

由於要滿足$\alpha<\beta+2$，所以$\beta=-2$不合。

因此$\beta=2$，故選(C)。

101-02-15

Statement

設f為奇函數，g為偶函數，及對所有的x，恆有$f(-x)=-f(x)$且$g(-x)=g(x)$。

如果f和g均為非零函數，則下列何者恆為正確？

$(A)\quad f-g$為奇函數

$(B)\quad f\cdot g$為奇函數

$(C)\quad f^3\cdot g^3$為偶函數

$(D)\quad 2f+3g$為偶函數

$(E)\quad f+g$的函數圖形對稱於y軸

Solution

偶函數只有全部非負整數或全部非正整數兩種情況。

因此乘到奇函數只有全部改變函數上的正負號或不改變兩種情況，函數本身依然是奇函數。

故選(B)。

101-02-16

Statement

下列何者為函數$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}$的定義域？

$(A)\quad \{x|x<-1\}$
$(B)\quad \{x|x>-1\}$
$(C)\quad \{x|-1<x<1\}$
$(D)\quad \{x|-1<x,x\neq 1\}$
$(E)\quad \{x|x>1\}$

Solution

$\sqrt{x^3-x^2-x+1}>0$

$\Rightarrow x^3-x^2-x+1>0$

$\Rightarrow (x-1)^2(x+1)>0$，得到$x\neq 1$且$x\neq -1$

由於$(x-1)^2$恆正，因此我們考慮$(x+1)>0$，得到$x>-1$。

因此$f(x)$的定義域$D(f(x))=\{x|(x>-1),(x\neq 1)\}$，故選$(D)$

101-02-17

Statement

設$\dfrac{x^2-10x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$的部份分式為$\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$，則$a-b-c=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 5$

Solution

$$\frac{x^2-10x+8}{x^3-2x^2-4x+8} \Rightarrow \frac{x^2-10x+8}{(x-2)^2(x+2)}$$

$x^2-10x+8=a(x-2)^2+b(x-2)(x+2)+c(x+2)$

令$x=2$，$4-20+8=4c$，得到$c=-2$

令$x=-2$，$16a=4+20+8=32$，得到$a=2$

令$x=0$，$8=4a-4b+2c=8-4b-4$，得到$b=-1$

$a-b-c=2-(-1)-(-2)=5$，故選(E)。

101-02-18

Statement

設$2x^2+(k-1)x+(k-3)=0$之一根大於2，一根小於1，則k之範圍為何？

$(A)\quad \{k|k<-1\}$
$(B)\quad \{k|1<k<3\}$
$(C)\quad \{k|-1<k<3\}$
$(D)\quad \{k|k>1\}$
$(E)\quad \{k|-\infty<k<\infty\}$

Solution

$$\frac{-(k-1)\pm\sqrt{(k-1)^2-4\times2\times(k-3)}}{2\times2}$$
$$\Rightarrow \frac{-k+1\pm\sqrt{k^2-2k+1-8k+24}}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{-k+1\pm\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$$

一根大於2，因此用$\dfrac{-k+1+\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$考慮

因此$-k+1+\sqrt{k^2-10k+25}>8$，$-k+1+(k-5)>8$，得到$k<-1$

一根小於1，因此用$\dfrac{-k+1-\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$考慮

因此$-k+1-\sqrt{k^2-10k+25}<4$，$-k+1+(k-5)<4$，得到$k\in\mathbb{R}$

取聯集得到$k<-1$，因此k的範圍為$\{k|k<-1\}$，故選(A)

101-02-19

Statement

若$f(x)=\sqrt{3-x}$，$g(x)=\sqrt{x-1}$，則$f\circ g$的定義域為何？

$(A)\quad [1,3]$
$(B)\quad [1,4]$
$(C)\quad [2,4]$
$(D)\quad [3,9]$
$(E)\quad [1,10]$

Solution

$f\circ g=\sqrt{3-\sqrt{x-1}}$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到$3-\sqrt{x-1}\geq 0$，$x\leq 10$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到$x-1\geq 0$，得到$x\geq 1$

取交集後得到$1\leq x\leq 10$，故選(E)。

101-02-20

Statement

若$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$能被x^2+1整除，則$f(x)$除以$x+1$的餘式為何？

$(A)\quad 2$
$(B)\quad 4$
$(C)\quad 6$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 10$

Solution

利用長除法來做$f(x)$除以x^2+1，可以得到商為$(x+a)$且餘數為$(b-1)x+(2-a)$

因為能夠被整除，因此餘數為0，得到$b=1$且$a=2$

因此$f(x)=x^3+2x^2+x+2$

除以$x+1$，利用餘式定理，將x帶-1

因此$f(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+(-1)+2=-1+2+(-1)+2=2$，故選$(A)$

102年第1次北科入學數學會考

102-01-01

Statement

若$\log(x-9)+\log(x-5)=\log 4+\log(25-2x)$，則$x=?$

(A) 　9
(B) 　10
(C) 　11
(D) 　12
(E) 　13

Solution

$\log(x-9)+\log(x-5)=\log 4+\log(25-2x)$

$\Rightarrow \log((x-9)(x-5))=\log(4(25-2x))$

$\Rightarrow \log(x^2-14x+45)=\log(100-8x)$

$\Rightarrow x^2-14x+45=100-8x$

$\Rightarrow x^2-6x-55=0$

$\Rightarrow (x-11)(x+5)=0$

可得$x=-5$或$x=11$。

驗根，可知當$x=-5$代入$\log(x-9)$，會得到$\log -14$

log的定義域為正整數之集合，故不合。

因此$x=11$，故選(C)。

102-01-02

Statement

已知$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi, \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$。若$\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \tan\beta=\frac{1}{3}$，則$\sin(\alpha+\beta)=?$

(A) 　$\frac{\sqrt{10}}{10}$
(B) 　$\frac{2\sqrt{10}}{10}$
(C) 　$\frac{3\sqrt{10}}{10}$
(D) 　$\frac{\sqrt{15}}{10}$
(E) 　$\frac{\sqrt{17}}{10}$

Solution

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$，因為$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，則$\cos\alpha = \frac{4}{5}$。

$\tan\beta = \frac{1}{3}$，因為$\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$，則$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，而$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

因此$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{-9\sqrt{10}}{50} + \frac{4\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，故選$(A)$。

102-01-03

Statement

已知$\vec{a}$與$\vec{b}$為兩向量，$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}| = 4$且$|\vec{a}-\vec{b}| = 3$。

若$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為θ，則$\cos\theta = ?$

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{6}{25}$

(E) $\frac{7}{25}$

Solution

$(|\vec{a}+\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 16$

$(|\vec{a}-\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 9$

因此，$4(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 7, \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7}{4}$

又$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，因此$2|\vec{a}|^2 - \frac{7}{2} = 9$，$|\vec{a}| = \frac{5}{2}$

已知$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\cos\theta = \frac{7}{4}$，得到$\cos\theta = \frac{7}{25}$，故選$(E)$

102-01-04

Statement

若ΔABC中，$\overline{AB} = \sqrt{3}+1$，$\overline{BC} = 2$且$\angle B = 30^\circ$，則$\angle A = ?$

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 90°

(E) 120°

Solution

$\overline{AC}^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (2)^2 - 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(2)\cdot\cos\beta$

$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - (4\sqrt{3}+4)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$

因此$\overline{AC} = \sqrt{2}$

已知$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha}$，因此$\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$，得到$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此$\alpha = 45^\circ$，故選$(B)$

102-01-05

Statement

下列敘述何者正確？

(A) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的定義域為$(-1,\infty)$

(B) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的定義域為$[-1,\infty)$

(C) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的值域為$[1,\infty)$

(D) $f(x) = \sqrt{x+1}$的定義域為$[-1,\infty)$

(E) $f(x) = \sqrt{x+1}$的值域為$[1,\infty)$

Solution

(A)的定義域為$\mathbb{R}$

(B)的定義域為$\mathbb{R}$

(C)的值域為$[0,\infty)$

(E)的值域為$[0,\infty)$

故選(D)

102-01-06

Statement

若$\dfrac{16x^3-20x^2+6x+3}{(2x-1)^4}=\dfrac{a}{(2x-1)}+\dfrac{b}{(2x-1)^2}+\dfrac{c}{(2x-1)^3}+\dfrac{d}{(2x-1)^4}$，則$a-b+c-d=?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

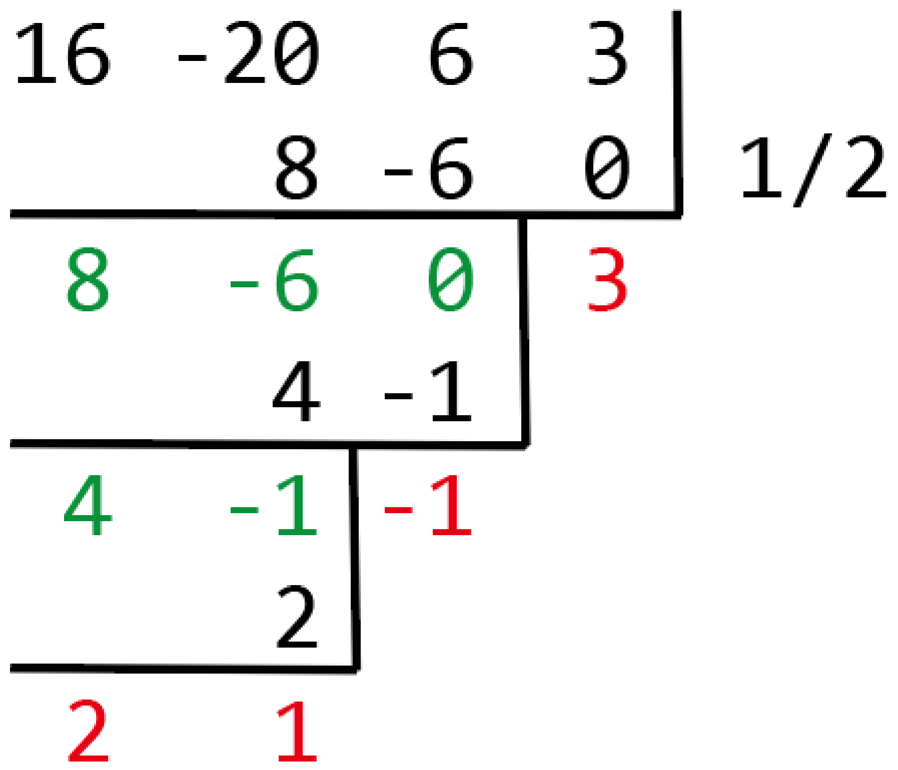
$(E)\quad 3$

Solution

$$\frac{16x^3-20x^2+6x+3}{(2x-1)^4}=\frac{a}{(2x-1)}+\frac{b}{(2x-1)^2}+\frac{c}{(2x-1)^3}+\frac{d}{(2x-1)^4}$$

$\Rightarrow 16x^3-20x^2+6x+3=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$

利用綜合除法



綠色：請注意做這樣的綜合除法時，使用的是$x-\dfrac{1}{2}$，為了還原成$2x-1$，因此要把係數除以2。

得到$a=2, b=1, c=-1, d=3$，因此$a-b+c-d=2-1+(-1)-3=-3$，故選(A)

102-01-07

Statement

若橢圓$4x^2+9y^2+16x-18y-24=0$的長、短軸長各為a、b、則$a+b=$?

$(A)\quad \frac{5}{7}$

$(B)\quad \frac{10}{7}$

$(C)\quad \frac{15}{7}$

$(D)\quad \frac{35}{6}$

$(E)\quad \frac{35}{3}$

Solution

$4x^2+16x+9y^2-18y=24$

$\Rightarrow 4(x^2+4x+4)+9(y^2-2y+1)=24+16+9$

$\Rightarrow 4(x+2)^2+9(y-1)^2=49$

$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{\frac{49}{4}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{49}{9}}=1$

可知長軸為$2\sqrt{\frac{49}{4}}=7$，短軸為$2\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{14}{3}$

$7+\frac{14}{3}=\frac{35}{3}$，故選$(E)$

102-01-08

Statement

下列何者錯誤？

$(A)\quad \sin\frac{8\pi}{3}=\sin\frac{2\pi}{3}$

$(B)\quad \cos\frac{17}{6}=-\sin\frac{\pi}{3}$

$(C)\quad \tan\frac{11\pi}{3}=\tan\frac{2\pi}{3}$

$(D)\quad \sec\frac{15\pi}{4}=-\sec\frac{\pi}{4}$

$(E)\quad \csc\frac{7\pi}{6}=-\csc\frac{\pi}{6}$

Solution

$\sec\dfrac{15\pi}{4}=\sec 675^\circ=\sec 45^\circ$

$\sec 45^\circ\neq-\sec 45^\circ$，故選$(D)$

102-01-09

Statement

若$f(x)=x^4-2x^3+3x^2+7=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$

則$a+b+c=?$

(A)　20
(B)　21
(C)　22
(D)　23
(E)　24

Solution

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 3 & 0 & 7 & 2 \\
 & 2 & 0 & 6 & 12 & \\
\hline
1 & 0 & 3 & 6 & 19 & \\
 & 2 & 4 & 14 & & \\
\hline
1 & 2 & 7 & 20 & & \\
 & 2 & 8 & & & \\
\hline
1 & 4 & 15 & & & \\
 & 2 & & & & \\
\hline
1 & 6 & & & &
\end{array}
$$

故$a=1,b=6,c=15,d=20,e=19$

因此$a+b+c=22$，故選(C)

102-01-10

Statement

若$L_1 = 2x - y + 7 = 0$與$L_2 = ax + y - 13 = 0$的交角為$\dfrac{\pi}{4}$且$a > 0$，則$a = ?$

$(A)\quad 6$
$(B)\quad 5$
$(C)\quad 4$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 2$

Solution

$m_1 = -\dfrac{2}{-1} = 2$，$m_2 = -\dfrac{a}{1} = -a$

又$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \dfrac{2 - (-a)}{1 - 2a} = \dfrac{2 + a}{1 - 2a}$

交角可能是$\tan 45^\circ$或$\tan 135^\circ$，因此考慮

若是$\tan 45^\circ$，則$\dfrac{2 + a}{1 - 2a} = 1$，得到$a = -\dfrac{1}{3}$，不合。

若是$\tan 135^\circ$，則$\dfrac{2 + a}{1 - 2a} = -1$，得到$a = 3$

因此$a = 3$，故選(D)

102-01-11

Statement

求不等式$1 + \dfrac{2x - 7}{(x - 2)^2} < 0$的解為何？

$(A)\quad 3 > x$
$(B)\quad x < -1$
$(C)\quad -1 < x < 2$或$2 < x < 3$
$(D)\quad -1 < x < 3$
$(E)\quad x < -1$或$3 < x$

Solution

$$1 + \frac{2x - 7}{(x - 2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 4} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 2)^2} < 0$$

考慮定義域，得到條件1：$x \neq 2$

因此考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) > 0 \\ (x-2)^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) < 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3$$

將這兩種情況取聯集，與條件1取交集，得到$-1 < x < 2$或$2 < x < 3$，故選(C)

102-01-12

Statement

若拋物線$x^2 = y + 3$與直線$5x + y - 3 = 0$相交於$P(a, b)$及$Q(c, d)$且$a > c$，則$b - d =?$

$(A)\quad -35$
$(B)\quad -8$
$(C)\quad 31$
$(D)\quad 35$
$(E)\quad 8$

Solution

$x^2 = y + 3 \Rightarrow y = x^2 - 3$

$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -5x + 3$

則$x^2 - 3 = -5x + 3$，得到$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-1) = 0$

因此$x = -6$或$x = 1$

得到$a = 1$且$c = -6$，代入原方程式得到$b = -2$且$d = 33$

因此$b - d = -2 - 33 = -35$，故選(A)

102-01-13

Statement

若$P(4, 1)$、$Q(2, 1)$、$R(a, a)$且$\overline{PR} + \overline{QR}$的值為最小，則$a =?$

$(A)\quad 1$
$(B)\quad \frac{3}{2}$
$(C)\quad \frac{5}{4}$
$(D)\quad \frac{7}{4}$
$(E)\quad 2$

Solution

考慮$R(a,a)$在$y=x$上，因此我們可以試著確定P，Q是否在$y=x$不同側上。

判別式為$y-x$，代入$P(4,1)$得3，代入$Q(2,1)$得1，因此同側。

因此，我們考慮在$y=x$上做一鏡像Q'，求一直線L經過P與Q'，與$y=x$之交集點。

可得$Q'=(1,2)$，利用點斜式得到直線$y-2=\dfrac{2-1}{1-4}(x-1)\Rightarrow 3y=-x+7$

與$y=x$取交集，得到$x=\dfrac{7}{4}$，因此$a=\dfrac{7}{4}$，故選(D)

102-01-14

Statement

若雙曲線之漸進線為x軸與y軸且過點$(1,-1)$，則此雙曲線方程式為何？

(A) $x^2-(y+1)^2=1$
(B) $xy=-1$
(C) $y^2-(x-1)^2=1$
(D) $\dfrac{(x-1)^2}{4}-(y+1)^2=1$
(E) $\dfrac{(x+1)^2}{4}-(y+1)^2=-1$

Solution

漸進線為x軸與y軸，因此雙曲線為直角雙曲線$xy=c$之形式，故選(B)。

102-01-15

Statement

若$a=\log 2$、$b=\log 3$，則$10^{3a-2b}=?$

(A) $\dfrac{8}{9}$
(B) $\dfrac{11}{10}$
(C) 1
(D) 10
(E) 12

Solution

$10^{3a-2b}=10^{3\log 2-2\log 3}=10^{\log 8-\log 9}=10^{\log\frac{8}{9}}=\frac{8}{9}$，故選$(A)$

102-01-16

Statement

若$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$且$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則$\sin^2\theta-\cos^2\theta=?$

$(A)\quad \frac{4}{9}$

$(B)\quad \frac{\sqrt{17}}{9}$

$(C)\quad \frac{\sqrt{2}}{3}$

$(D)\quad \frac{\sqrt{19}}{9}$

$(E)\quad \frac{2\sqrt{5}}{9}$

Solution

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$且$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，因此$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

因此$-2\sin\theta\cos\theta=\frac{-8}{9}$，$\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

可知$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{9}$

則$\cos 2\theta=\sqrt{1-\sin 2\theta}=\frac{\sqrt{17}}{9}=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

由於上述已知$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，因此$\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$，所以$\cos 2\theta=\frac{-\sqrt{17}}{9}$

因此$\sin^2\theta-\cos^2\theta=\sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{\sqrt{17}}{9}$，故選$(B)$

102-01-17

Statement

若直線通過點$(3,4)$\$且在第一象限與兩軸所圍三角形面積最小，則此直線的兩截距和為何？

$(A)\quad 12$
$(B)\quad 13$
$(C)\quad 14$
$(D)\quad 15$
$(E)\quad 16$

Solution 1

> by Trava

設直線截距式$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，三角形面積為$\frac{ab}{2}$，也就是當$ab$最小時，求$a+b$

因為與第一象限圍成區域面積，所以$a,b>0$

代入點$(3,4)$得等式$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$

利用算幾不等式$\frac{\frac{3}{a}+\frac{4}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{12}{ab}}$，解得$ab$最小值為$48$

ab反帶回去算幾不等式，$\frac{\frac{3}{a}+\frac{4}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{12}{48}}$，得到$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}\geq 1$

當等號成立$\frac{3}{a}=\frac{4}{b}$，帶回$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$

解得$a=6,b=8$，因此$a+b=14$，故選(C)

Solution 2

> by Uriah with Calculus

列出直線式子：$y-4=m(x-3)$

求得x,y的截距：
令$x=0,\ y=-3m+4$
令$y=0,\ x=\frac{-4}{m}+3$

因此$xy=(-3m+4)(\frac{-4}{m}+3)=12-9m-\frac{16}{m}+12=-9m-\frac{16}{m}+24$

利用微分解出極值，因此零次項捨去不用：

$\because f'(m)=\frac{d}{dm}(f+g)=\frac{d}{dm}(f)+\frac{d}{dm}(g)$

$\therefore f'(m)=\frac{d}{dm}(-9m)+\frac{d}{dm}(-\frac{16}{m})$

$f'(m)=-9+\frac{16}{m^2}=0$

$9m^2=16, m=\sqrt{\frac{16}{9}}=\pm\frac{4}{3}$ (正不合)

帶回截距，得$y=\frac{-4}{3}\times -3+4=8,\ x=\frac{-4}{\frac{-4}{3}}+3=6$

$x+y=14$，故選(C)

102-01-18

Statement

已知圓$x^2+y^2=10$與$x^2+y^2-2x+4y=5$有兩交點，求此兩交點的距離為何？

$(A)\quad \sqrt{33}$
$(B)\quad \sqrt{35}$
$(C)\quad \sqrt{37}$
$(D)\quad \sqrt{39}$
$(E)\quad 2\sqrt{10}$

Solution

$x^2+y^2-2x+4y=5$

$\Rightarrow 10-2x+4y=5$

$\Rightarrow 4y=-5+2x$

$\Rightarrow y=\frac{-5+2x}{4}$

$x^2+\frac{25-20x+4x^2}{16}=10$

$\Rightarrow 16x^2+25-20x+4x^2=160$

$\Rightarrow 20x^2-20x-135=0$

$\Rightarrow 4x^2-4x-27=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{7}$

考慮$x=\frac{1}{2}+\sqrt{7}$，則$y=-1+\frac{1}{2}\sqrt{7}$

考慮$x=\frac{1}{2}-\sqrt{7}$，則$y=-1-\frac{1}{2}\sqrt{7}$

因此兩點距離為$\sqrt{((\frac{1}{2}+\sqrt{7})-(\frac{1}{2}-\sqrt{7}))^2+((-1+\frac{1}{2}\sqrt{7})-(-1-\frac{1}{2}\sqrt{7}))^2}=\sqrt{35}$，故選$(B)$

102-01-19

Statement

若數列的一般項為$a_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$，則$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{22} = ?$

(A) $\dfrac{276}{600}$
(B) $\dfrac{451}{600}$
(C) $\dfrac{476}{600}$
(D) $\dfrac{500}{600}$
(E) 1

Solution

$a_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3}$

推得規律，得到$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{22} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{25} = \dfrac{451}{600}$，故選$(B)$

102-01-20

Statement

若方程式$4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0$，則$x = ?$

(A) -3
(B) -2
(C) 1
(D) 2
(E) 3

Solution

令$t = 2^x$，則$t^2 - 6t - 16 = 0$，得到$t = 8$或$t = -2$(不合)

還原t，得到$x = 3$，故選(E)

102年第2次北科入學數學會考

102-02-01

Statement

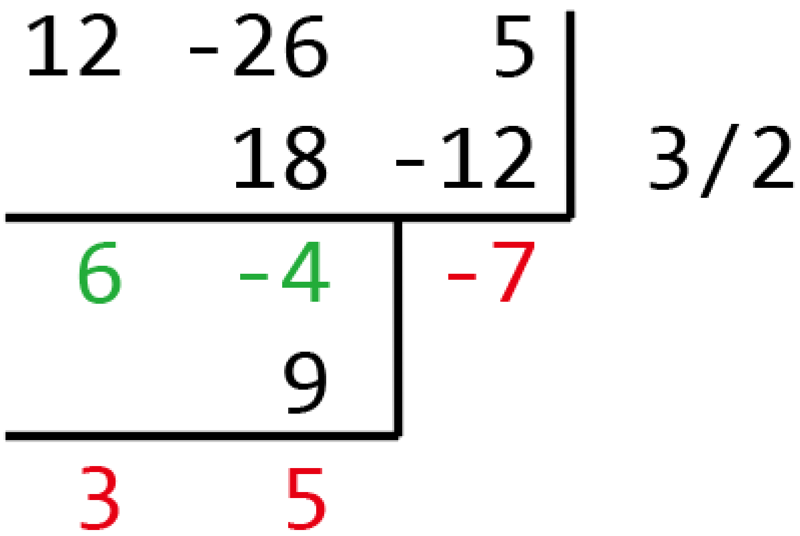
若$\dfrac{12x^2-26x+5}{(2x-3)^3}=\dfrac{a}{2x-3}+\dfrac{b}{(2x-3)^2}+\dfrac{c}{(2x-3)^3}$，則$a+b+2c=?$

$(A)\quad -9$
$(B)\quad -6$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 6$
$(E)\quad 9$

Solution

將式子轉成$12x^2-26x+5=a(2x-3)^2+b(2x-3)+c(2x-3)$

利用綜合除法



綠色字：將式子從$x-\dfrac{3}{2}$轉成$2x-3$，因此要將係數除2，餘數不除。

得到$a=3,b=5,c=-7$，得到$3+5+2\times(-7)=-6$，故選(B)

102-02-02

Statement

若$f(x+2)=\dfrac{2+x}{4-x}$，則$f(a)=?$

$(A)\quad \frac{a}{6-a}$

$(B)\quad \frac{2+a}{2-a}$

$(C)\quad \frac{2+a}{4-a}$

$(D)\quad \frac{2-a}{2+a}$

$(E)\quad \frac{a}{6+a}$

Solution

$x+2=a, x=a-2$

故$f(a)=\frac{2+(a-2)}{4-(a-2)}=\frac{a}{6-a}$，故選$(A)$

102-02-03

Statement

設ΔABC中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$，則$\cos^2\frac{C}{2}=$?

$(A)\quad \frac{1}{7}$

$(B)\quad \frac{2}{7}$

$(C)\quad \frac{4}{7}$

$(D)\quad \frac{5}{7}$

$(E)\quad \frac{6}{7}$

Solution

$\cos C=\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=2\cos^2\frac{C}{2}-1$

則$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{\cos C+1}{2}$

利用餘式定理，$\cos C=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\times6\times7}=\frac{5}{7}$

因此$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{\frac{5}{7}+1}{2}=\frac{6}{7}$，故選$(E)$

102-02-04

Statement

已知圓$x^2+y^2=9$，與直線$x+y=3$相交於兩點，則此兩點距離為何？

(A) 2

(B) $2\sqrt{2}$

(C) 3

(D) $3\sqrt{2}$

(E) 4

Solution

$y=3-x$，則$x^2+(3-x)^2=9$

展開後得到$2x^2-6x=0$，得到$x=0$或$x=3$

代回原式，得到兩點$(0,3)$與$(3,0)$，距離為$\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$，故選$(D)$

102-02-05

Statement

下列何者正確？

(A) $\sin(x-\frac{\pi}{2})=\cos x$

(B) $\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin x$

(C) $\tan(x+\frac{\pi}{2})=\cot x$

(D) $\sin(x+\pi)=\cos x$

(E) $\csc(x+\frac{\pi}{2})=\sec x$

Solution

$\csc(x+\frac{\pi}{2})=\sec x$，故選$(E)$

102-02-06

Statement

若$x^4-4x^3-14x^2+36x+45=(x-1)^4+a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，則$a+b+c+d=?$

(A) 24

(B) 34

(C) 44

(D) 54

(E) 64

Solution

利用綜合除法

```
1 -4   -14   36   45 |
     1    -3  -17   19 |  1
1 -3   -17   19 | 64
     1    -2  -19 |
1 -2   -19 |  0
     1    -1 |
1 -1 | -20
     1 |
1   0
```

因此$a=0,b=-20,c=0,d=64$，故$a+b+c+d=44$，故選(C)

102-02-07

Statement

設O為原點，$A(a,0), B(0,b)$, 且$\overline{AB}=5$，則ΔOAB最大面積為何？

(A) 6

(B) $\frac{25}{4}$

(C) $\frac{13}{2}$

(D) 7

(E) 8

Solution 1

> By Trava with non-calculus solution

$a^2, b^2 > 0$

利用算幾不等式，$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$

$\frac{25}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$

$\frac{25}{2} \geq |ab|$

$\frac{25}{4} \geq \frac{|ab|}{2}$，故選$(B)$

Solution 2

> By Uriah with calculus solution

$a^2+b^2=25$，求$\frac{ab}{2}$的最大值

可知$a^2=25-b^2$，$a=\sqrt{25-b^2}$

因此$f(b)=\frac{b\sqrt{25-b^2}}{2}$，找極值。

微分後得到$f'(b)=\frac{25-2b^2}{2\sqrt{25-b^2}}$，令$f'(b)=0$，得到$b=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

因此$f(b)$的極值發生在$b=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$上

$b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，代入後得$f(\frac{5\sqrt{2}}{2})=\frac{25}{4}$

$b=\frac{-5\sqrt{2}}{2}$，代入後得$f(\frac{-5\sqrt{2}}{2})=\frac{-25}{4}$，因為面積為非負整數所以為$\frac{25}{4}$

因此最大值為$\frac{25}{4}$，故選(B)

102-02-08

Statement

設雙曲線之漸進線為x軸與y軸，且過點$(-1,1)$，則此雙曲線貫軸長為何？

$(A)\quad 2$

$(B)\quad \sqrt{5}$

$(C)\quad 2\sqrt{2}$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

由於漸進線為x軸與y軸，可知此雙曲線的頂點會通過$y=x$或$y=-x$，中心為$(0,0)$

因此可以列出雙曲線方程式$xy=c$，代入$(-1,1)$得到$c=-1$

因此雙曲線方程式為$xy=-1$

求雙曲線頂點，令$y=-x$，得到$-x^2=-1$，得到$x=\pm1$

因此頂點為$(1,-1)$與$(-1,1)$

a為頂點與原點之距離，因此貫軸長$2a=2\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2}$，故選$(C)$

102-02-09

Statement

設$\log_2 x^2+\log_x 2=3$的兩根為α和β，則$\alpha\beta=?$

$(A)\quad -\dfrac{3}{2}$

$(B)\quad \dfrac{1}{2}$

$(C)\quad \dfrac{3}{2}$

$(D)\quad \sqrt{2}$

$(E)\quad 2\sqrt{2}$

Solution

$\log_2 x^2+\log_x 2=3$

$\Rightarrow 2\log_2 x+\log_x 2=3$

$\Rightarrow 2\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}=3$

$\Rightarrow 2\log_2^2 x+1=3\log_2 x$

令$t=\log_2 x$，則

$2t^2+1=3t$

$\Rightarrow 2t^2-3t+1=0$，得到$t=\dfrac{1}{2}$或$t=1$

分別還原得到$x=\sqrt{2}$或$x=2$，因此$\alpha=\sqrt{2}$，$\beta=2$

因此$\alpha\beta=2\sqrt{2}$，故選(E)

102-02-10

Statement

設$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，則$\sin^3\theta+\cos^3\theta=?$

$(A)\quad \dfrac{4}{9}$

$(B)\quad \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$(C)\quad \dfrac{\sqrt{19}}{9}$

$(D)\quad \dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

$(E)\quad \dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

Solution

$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

又$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

因此$-2\sin\theta\cos\theta = \frac{-3}{4}$，得到$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}$

因此$(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{\sqrt{7}}{2}$

代入原式，得到$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}(1 - \frac{3}{8}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$，故選$(E)$

102-02-11

Statement

若直線通過點$P(3,4)$且兩軸截距均為整數，則滿足條件的直線共有幾條?

(A) 3

(B) 6

(C) 9

(D) 12

(E) 15

Solution

利用點斜式，$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

整理方程式，得到$xb + ay = ab$

帶入點$(3,4)$，得到$3b + 4a = ab \Rightarrow 3b + 4a - ab = 0 \Rightarrow ab - 3b - 4a = 0$

將$ab - 3a - 4a = 0$寫成$(b-4)(a-3) = 12$

令$u = (b-4), v = (a-3)$，那麼$uv = 12$

因為$a, b \in \mathbb{Z}$，因此$u, v \in \mathbb{Z}$

窮舉uv的u為整數的所有可能，可以知道一定會是12的因數。

因此考慮所有可以整除12的整數，得到$[-1, -2, -3, -4, -6, -12, 1, 2, 3, 4, 6, 12]$

代換回去後可得到b，因此答案為12個，故選(D)

102-02-12

Statement

已知圓$x^2+y^2=10$與圓$x^2+y^2-2x+4y=5$有兩交點，則以此兩交點與兩圓心為頂點所連接成的四邊形的面積為何？

$(A)\quad 4\sqrt{2}$

$(B)\quad 6$

$(C)\quad 2\sqrt{10}$

$(D)\quad \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

$(E)\quad 3\sqrt{5}$

Solution 1

> Trava的精簡解

設$O_1=(0,0)$，$O_2=(1,-2)$

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{(0-1)^2+(0-(-2))^2}=\sqrt{5}$

設兩交點A,B，則四邊形O_1AO_2B可知$\overline{O_1A}=\overline{AO_2}=\overline{O_2B}=\overline{BO_1}=\sqrt{10}$

利用餘弦定理

$5=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\times 10\times\cos\angle O_1AO_2$

因此$\cos\angle O_1AO_2=\dfrac{3}{4}$，而$\sin\angle O_1AO_2=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

因此面積為$2\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$，故選$(D)$

Solution 2

> Uriah的行列式解

已知圓$x^2+y^2=10$的圓心為$(0,0)$

圓$x^2+y^2-2x+4y=5$透過配方法可得$(x-1)^2+(y+2)^2=10$，圓心為$(1,-2)$

對兩式解聯立

可得$10-2x+4y=5$，也就是$2x-4y=5$

因此可得$x=\dfrac{5+4y}{2}=2y+\dfrac{5}{2}$

$(2y+\dfrac{5}{2})^2+y^2=10$

$\Rightarrow 4y^2+10y+\dfrac{25}{4}+y^2=10$

$\Rightarrow 5y^2+10y-\dfrac{15}{4}=0$

$\Rightarrow 20y^2+40y-15=0$

因此得到$y=-1\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$x=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{7}$

得到兩交點$(\dfrac{1}{2}+\sqrt{7},-1+\dfrac{\sqrt{7}}{2})$與$(\dfrac{1}{2}-\sqrt{7},-1-\dfrac{\sqrt{7}}{2})$

利用行列式求面積，$\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}\ \dfrac{1}{2}-\sqrt{7} & 0 & \dfrac{1}{2}+\sqrt{7} & 1 & \dfrac{1}{2}-\sqrt{7} \\ -1-\dfrac{\sqrt{7}}{2} & 0 & -1+\dfrac{\sqrt{7}}{2} & -2 & -1-\dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{array}\right| = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$，故選$(D)$

102-02-13

Statement

若一數列前n項的和為$a_1+a_2+...+a_n = n^2+5$，則$a_5+a_{10}+a_{15}+...+a_{50} = ?$

$(A)\quad 175\\(B)\quad 250\\(C)\quad 320\\(D)\quad 450\\\color{red}(E)\quad 540$

Solution

設$S_n = a_1+a_2+...+a_n = n^2+5$

觀察一下通式，可知若$a_i - a_j$，其中$i \neq j$，則$a_i-a_j = (i^2-j^2) = (i-j)(i+j)$

又因若要求得a_5，則可用$(a_1+a_2+...+a_5) - (a_1+a_2+...+a_4)$

因此$a_5 = S_5-S_4 = (5-4)(5+4) = (5+4)$

因此$a_5 + a_{10} + a_{15} + ... + a_{50} = (5+4)+(10+9)+(15+14)...+(50+49)$

也就是首項為9，公差為10，末項99的等差數列和

因此$a_5+a_{10}+a_{15} + ... + a_{50} = \dfrac{(9+99)(\dfrac{99-9}{10}+1)}{2} = 540$，故選$(E)$

102-02-14

Statement

不等式$4^{x+\frac{1}{2}} - 8\cdot2^{x+1} \le 2^x-8$，共有幾個整數解？

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 4$

$\color{red}(D)\quad 5$

$(E)\quad 6$

Solution

$4^{x+\frac{1}{2}} - 8\cdot2^{x+1} \le 2^x-8$

$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2x}-16\cdot2^{x} \le 2^x-8$

令$t = 2^x$，則

$2t^2-16t\le t-8$

$\Rightarrow 2t^2-17t+8\le 0$

$\Rightarrow (2t-1)(t-8)\le0$

得到$\dfrac{1}{2} \le t \le 8$

還原t，得到$-1 \le x \le 3$

故共有5個整數解，故選(D)

102-02-15

Statement

若$f(x) = \sqrt{2-x}$，$g(x) = \sqrt{3-x}$，則g與f的合成函數$g \circ f$的定義域為何？

$(A)\quad [2,3]$

$(B)\quad (2, 3)$

$\color{red}(C)\quad [-7, 2]$

$(D)\quad [2, 7]$

$(E)\quad (2, 7)$

Solution

$g(f(x)) = \sqrt{3-\sqrt{2-x}}$，可知$2-x\ge 0$，因此$x \le 2$

又因$3-\sqrt{2-x} > 0$，因此$\sqrt{2-x} < 3$，$x \ge -7$

因此得到$x \in [-7, 2]$，故選(C)

102-02-16

Statement

在向量ΔABC中，向量$\vec{ab} = <1, 2>$，$\vec{ac} = <-x , 2x>$，$x > 0$

若ΔABC之周長為$6\sqrt{5}$，則$x=?$

$(A)\quad \dfrac{10}{11}$

$(B)\quad \dfrac{20}{11}$

$\color{red}(C)\quad \dfrac{30}{11}$

$(D)\quad \dfrac{40}{11}$

$(E)\quad \dfrac{50}{11}$

Solution

$\vec{ac} = <-x , 2x>$，可知$\vec{ca}=<x, -2x>$

因此$\vec{bc} = <-x-1, 2x-2>$

長度$\sqrt{1^2+2^2}+\sqrt{(-x)^2+(2x)^2} + \sqrt{(-x-1)^2+(2x-2)^2} = 6\sqrt5$

$\Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{5x^2} + \sqrt{5x^2-6x+5} = 6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{5}x + \sqrt{5x^2-6x+5} = 6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5x^2-6x+5} = 5\sqrt{5}-\sqrt{5}x$

$\Rightarrow 5x^2-6x+5 = 125-50x+5x^2$

$\Rightarrow 44x = 120$

$x = \dfrac{30}{11}$

因此$x = \dfrac{30}{11}$，故選(C)

102-02-17

Statement

若$f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$，$g(x) = \dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}$，則$f(g(x)) = ?$

$(A)\quad \dfrac{1}{f(x)}$

$(B)\quad f^2(x)$

$(C)\quad 2f(x)$

$\color{red}(D)\quad 3f(x)$

$(E)\quad 4f(x)$

Solution

$f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$

$f(g(x)) = \log(\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{1+3x^2}) - \log(\dfrac{1+3x^2-3x-x^3}{1+3x^2})$

$= \log(\dfrac{(x+1)^3}{1+3x^2}) - \log(\dfrac{-(x-1)^3}{1+3x^2})$

$= \log(\dfrac{x+1}{-(x-1)})^3$

$= 3\log(\dfrac{1+x}{1-x}) = 3f(x)$，故選$(D)$

102-02-18

Statement

若$\displaystyle \lim_{x\rightarrow 1} \dfrac{x^2+ax+b}{\sqrt{x+3}-2} = 12$，則$ab=?$

$\color{red}(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$\displaystyle \lim_{x\rightarrow 1} \dfrac{x^2+ax+b}{\sqrt{x+3}-2} = 12$

$\Rightarrow \displaystyle \lim_{x\rightarrow 1} \dfrac{(x^2+ax+b)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = 12$

極限有值，因此(x^2+ax+b)應可被$(x-1)$整除

因此$a+b=-1$，$(x^2+ax+b)\div(x-1)=x+(a+1)$

$\displaystyle \lim_{x\rightarrow 1} (x+(a+1))(\sqrt{x+3}+2) = 12$

$\Rightarrow (2+a)(4) = 12$

$\Rightarrow a = 1$

帶回$a+b=-1$，得$b = -2$

因此$ab=-2$，故選(A)

102-02-19

Statement

設$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$，則$\displaystyle \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h^2+2h} = ?$

$(A)\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(B)\quad \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$(C)\quad \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

$(D)\quad \dfrac{-1}{4\sqrt{2}}$

$\color{red}(E)\quad \dfrac{-1}{8\sqrt{2}}$

Solution 1

> Trava的精簡解

$\displaystyle \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h^2+2h}$

$= \displaystyle \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$= \displaystyle \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} \cdot \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{1}{h+2}$

$= f'(2) \cdot \displaystyle \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{1}{h+2}$

$= \dfrac{-1}{4\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{8\sqrt{2}}$，故選$(E)$

Solution 2

> Uriah的暴力解

$\displaystyle \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h^2+2h} = \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{h^2+2h}$

$= \displaystyle \lim_{h\rightarrow0} \dfrac{(\sqrt2 - \sqrt{2+h})}{(h^2+2h)(\sqrt{4+2h})} = \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{2-h})(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2+2h)}$

$=\displaystyle \lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{(2-2-h)(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2+2h)(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})}$

$=\displaystyle\lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{(-h)(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2+2h)(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})}$

$=\displaystyle\lim_{h\rightarrow 0} \dfrac{-(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h+2)(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})}$

$=\dfrac{-1}{8\sqrt{2}}$，故選(E)

102-02-20

Statement

已知Γ表$y=x^2$之圖形，若將Γ水平方向拉長2倍，往右平移1單位，再對x軸反射，得一個新的圖形，則此新圖形之表示式為何？

$(A)\quad y = -(\dfrac{x}{2}+1)^2\\(B)\quad y = -\dfrac{(x+1)^2}{2}\\(C)\quad y = -\dfrac{(x-1)^2}{2}\\\color{red}(D)\quad y = -(\dfrac{x-1}{2})^2 \\(E)\quad y = \dfrac{(1-x)^2}{2}$

Solution

因為往右平移1單位，所以x改寫成$x-1$

然後x擴增兩倍，所以改寫成$\dfrac{x-1}{2}$

對x軸反射→加上一個負號，所以$y = -(\dfrac{x-1}{2})^2$，故選(D)

103年第1次北科入學數學會考

103-01-01

Statement

$\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\ldots+\frac{1}{97\times 99}=?$

$(A)\quad \frac{16}{99}$

$(B)\quad \frac{17}{99}$

$(C)\quad \frac{32}{99}$

$(D)\quad \frac{34}{99}$

$(E)\quad \frac{36}{99}$

Solution

$\frac{1}{(x+2)(x+4)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99})$

$=\frac{1}{2}(\frac{99-3}{297})=\frac{48}{297}=\frac{16}{99}$，故選$(A)$

103-01-02

Statement

若$\sqrt[3]{8\sqrt{16\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^x}$，則$x=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 9$

Solution

$\sqrt[3]{8\sqrt{16\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[3]{\sqrt[4]{4^4}\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[12]{2^9} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow x = 7$，故選(D)

103-01-03

Statement

若$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 13$，則$f(3+\sqrt{2}) =?$

$(A)\quad 37 + 18\sqrt{2}$

$(B)\quad 47 + 28\sqrt{2}$

$(C)\quad 57 + 38\sqrt{2}$

$(D)\quad 67 + 48\sqrt{2}$

$(E)\quad 77 + 58\sqrt{2}$

Solution

利用綜合除法，轉換成$x-3$的表示形式

1	-4	5	-8	13	
	3	-3	6	-6	
1	-1	2	-2	7	
	3	6	24		
1	2	8	22		
	3	15			
1	5	23			
	3				
1	8				

得到$f(x) = (x-3)^4 + 8(x-3)^3 + 23(x-3)^2 + 22(x-3) + 7$

因此$f(3+\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 + 8(\sqrt{2})^3 + 23(\sqrt{2})^2 + 22(\sqrt{2}) + 7 = 38\sqrt{2} + 57$，故選$(C)$

103-01-04

Statement

若$f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+a}$滿足$f(f(x))=x$，則$a=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$$f(f(x))=\frac{2\cdot\dfrac{2x+1}{3x+a}+1}{3\cdot\dfrac{2x+1}{3x+a}+a}=\frac{7x+a+2}{(6+3a)x+3+a^2}$$

解聯立方程式$\begin{cases}6+3a=0\\a+2=0\\3+a^2=7\end{cases}$

得到$a=-2$，故選(A)

103-01-05

Statement

設$\dfrac{2x+3}{(x^2+1)(x+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x+1}$，則$A-B+C=?$

$(A)\quad -5$

$(B)\quad -\dfrac{5}{2}$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$2x+3=(x+1)(Ax+B)+C(x^2+1)$

$=(A+C)x^2+(A+B)x+(B+C)$

解聯立方程組，$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=2 \\ B+C=3 \end{cases}$，得到$(A,B,C)=(\frac{-1}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2})$

因此$A-B+C=-3+\frac{1}{2}=\frac{-5}{2}$，故選$(B)$

103-01-06

Statement

ΔABC如下圖，若$c=6$，$\angle A=60^\circ$，$a+b=10$，則$a=?$

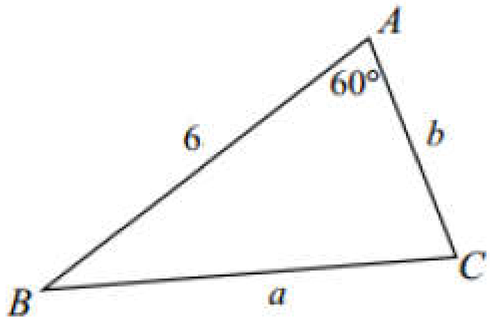
(A) $\frac{29}{7}$

(B) $\frac{32}{7}$

(C) 5

(D) $\frac{38}{7}$

(E) $\frac{41}{7}$



Solution

利用餘弦定理，$a^2=6^2-(10-a)^2-2\times 6\times(10-a)\times\cos 60^\circ$

$\Rightarrow a^2=6^2+(10-a)^2-6(10-a)$

$\Rightarrow a=\frac{38}{7}$，故選$(D)$

103-01-07

Statement

橢圓$3x^2+4y^2-16y=20$兩焦點的距離為何？

$(A)\quad \dfrac{3}{2}$

$(B)\quad \sqrt{3}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 2\sqrt{3}$

Solution

$3x^2+4y^2-16y=20$

$\Rightarrow 3x^2+4(y-2)^2=36$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

可知$a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，且$b=\sqrt{9}=3$

因此$c=\sqrt{(\sqrt{12})^2-(\sqrt{9})^2}=\sqrt{3}$

$2c=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，故選$(E)$

103-01-08

Statement

設$0<\theta<\dfrac{\pi}{8}$，則$\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 4\theta}}$可化簡為以下何者？

$(A)\quad \sqrt{2}\sin\theta$

$(B)\quad 2\sin\theta$

$(C)\quad \sqrt{2}\cos\theta$

$(D)\quad 2\cos\theta$

$(E)\quad \sin 2\theta$

Solution

$\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 4\theta}}=\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2(2\theta)}}=\sqrt{2-2\cos(2\theta)}$

$=\sqrt{4\sin^2\theta}=2\sin\theta$，故選$(B)$

103-01-09

Statement

已知$f(x)=2x^4-9x^3-23x^2+81x+45=2(x-3)(x-a)(x-b)(x-c)$，則$a^2+b^2+c^2=?$

(A) $\dfrac{65}{4}$

(B) $\dfrac{67}{4}$

(C) $\dfrac{137}{4}$

(D) 35

(E) $\dfrac{145}{4}$

Solution

$2x^4-9x^3-23x^2+81x+45=2(x-3)(x-a)(x-b)(x-c)$

$2x^3-3x^2-32x-15=2(x-a)(x-b)(x-c)$

利用偉達定理

$a+b+c=\dfrac{3}{2}$

$ab+bc+ac=\dfrac{-32}{2}=-16$

$abc=\dfrac{15}{2}$

因此$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$\dfrac{9}{4}=a^2+b^2+c^2+2(-16)$

$a^2+b^2+c^2=\dfrac{9}{4}+32=\dfrac{137}{4}$，故選$(C)$

103-01-10

Statement

若$L_1: x-2y+7=0$與$L_2: ax+y+c=0$相互垂直，且$(-3,1)$在L_2上，則$c=?$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$$\begin{matrix} L_1 : x - 2y + 7 = 0 \\ L_2 : ax + y + c = 0 \end{matrix}, L_1 \perp L_2$$

$m_1 = -\dfrac{-2}{1} = 2$，$m_1 \cdot m_2 = -1$，得到$m_2 = -\dfrac{1}{2}$

因此$a = 2$

將$(-3, 1)$代入L_2，得$(-6) + 1 + c = 0$，得到$c = 5$，故選(D)。

103-01-11

Statement

不等式$\dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} \geq 1$的解為何？

(A) $\quad -2 \leq x < 1$或$1 < x$

(B) $\quad x \leq -2$或$0 \leq x < 1$

(C) $\quad 0 < x < 1$或$1 < x$

(D) $\quad x \leq 0$或$1 < x$

(E) $\quad 0 \leq x < 1$

Solution

定義域$x \neq 1$

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x - 1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+2)^2}{x - 1} \geq 0$$

考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} x(x+2)^2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, \infty)$$

$$\begin{cases} x(x+2)^2 \leq 0 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

兩者與定義域取交集，得到$x \leq 0$或$x > 1$，故選(D)

103-01-12

Statement

設拋物線$y^2=2x+6$與直線$x-y-1=0$，相交於$P(a,b)$及$Q(c,d)$，其中$a>c$，則$b-d=$?

$(A)\quad -6$

$(B)\quad -3$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 6$

Solution

$x-y-1=0 \Rightarrow y=x-1$

$(x-1)^2=2x+6$

$\Rightarrow x^2-4x-5=0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)=0$

得到$x=-1$或$x=5$

因此$a=5, c=-1$

分別代入，得到$b=4$，$d=-2$，因此$b-d=4-(-2)=6$，故選(E)

103-01-13

Statement

求點$P(0,2)$到拋物線$y=x^2$的最短距離為何？

$(A)\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

$(B)\quad \sqrt{2}$

$(C)\quad \sqrt{3}$

$(D)\quad \frac{7}{4}$

$(E)\quad 2$

Solution

設有一動點$Q(x,x^2)$

則$d=\sqrt{(x-0)^2+(x^2-2)^2}$

$=\sqrt{x^4-3x^2+4}$

$= \sqrt{(x^2 - \frac{3}{2})^2 + 4 - \frac{9}{4}}$

$= \sqrt{(x^2 - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}}$

當$x^2 = \frac{3}{2}$，$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$，則有最小值$\sqrt{\frac{7}{4}}$，故最短距離為$\frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(A)$

103-01-14

Statement

設$2^a = 3$、$3^b = 2$，則$(7^a)^b = ?$

(A)　6

(B)　7

(C)　8

(D)　9

(E)　10

Solution

$2^a = 3$，則$a = \log_2 3 = \frac{\log 2}{\log 3}$

$3^b = 2$，則$b = \log_3 2 = \frac{\log 3}{\log 2}$

因此$(7^a)^b = 7^{ab} = 7^{(\frac{\log 2}{\log 3}\frac{\log 3}{\log 2})} = 7^1 = 7$，故選$(B)$

103-01-15

Statement

設$\sin\theta - 2\cos\theta = 1$，$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$，則$2\sin\theta + \cos\theta = ?$

(A)　-3

(B)　-2

(C)　-1

(D)　1

(E)　2

Solution

$\sin\theta - 2\cos\theta = 1$

$(\sin\theta - 2\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 1$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 3\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 1$

$= 3\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 0$

設$2\sin\theta + \cos\theta = A$，則$4\sin\theta + \cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta = A^2$

因此$3\sin^2\theta + 1 = A^2 - 4\sin\theta\cos\theta$

所以$3\sin^2\theta + 3\cos^2\theta + 1 = A^2 - 4\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta$

因為$3\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 0$

所以$3(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1 = A^2$

也就是$A^2 = 4$，得到$A = \pm 2$

已知$\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$，所以$\sin\theta < 0$且$\cos\theta < 0$

故$A = 2$不合，因此$A = -2$，故選(B)

103-01-16

Statement

直線$3x - 4y = 12$，$4x - 3y + 12 = 0$與x軸所圍三角形的面積為何？

(A)　21

(B)　42

(C)　60

(D)　63

(E)　84

Solution

找兩直線與x軸個別的交點，令$y = 0$，$\begin{cases} 3x = 12 & x = 4 \\ 4x + 12 = 0 & x = -3 \end{cases}$

找兩直線交點，$\begin{cases} x - 4y = 12 \\ 4x - 3y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-12, -12)$

可知底為$|4 - (-3)| = 7$，高為12，因此$\dfrac{7 \times 12}{2} = 42$，故選$(B)$

103-01-17

Statement

設圓$x^2+y^2-2x+4y=3$與x軸交於A,B兩點，且圓心為C，則$\cos(\angle ACB)=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad -\dfrac{1}{2}$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad \dfrac{1}{2}$

$(E)\quad 1$

Solution

$x^2+y^2-2x+4y=3$

利用配方法，得$(x-1)^2+(y+2)^2=8$，因此圓心為$(1,-2)$，半徑為$\sqrt{8}$

考慮圓與x軸的交點，令$y=0$，則$x^2-2x=3$，也就是$(x-3)(x+1)=0$，因此得到$x=-1$與$x=3$

利用餘弦定理，可知$\cos(\angle ACB)=\dfrac{(\sqrt{8})^2+(\sqrt{8})^2-4^2}{2\times\sqrt{8}\times\sqrt{8}}=0$，故選$(C)$

103-01-18

Statement

設$\vec{a}=<1,1>$，$\vec{b}=<2,6>$。

若$|t\vec{a}+\vec{b}|$為最小時，$t=?$

$(A)\quad -10$

$(B)\quad -8$

$(C)\quad -6$

$(D)\quad -4$

$(E)\quad -2$

Solution

$t\vec{a}+\vec{b}=<t,t>+<2,6>=<2+t,6+t>$

因此$\sqrt{(2+t)^2+(6+t)^2}=\sqrt{4+4t+t^2+36+12t+t^2}=\sqrt{2t^2+16t+40}=\sqrt{2(t+4)^2+8}$

故當$t=-4$時，有最小值8，故選(D)

103-01-19

Statement

若$\log_5(5^x-125)=\frac{x}{2}+1+\log_5 4$，則$x=?$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$\log_5(5^x-125)=\frac{x}{2}+1+\log_5 4$

$\Rightarrow \log_5(5^x-125)-\log_5 4-\log_5 5=\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \log_5(\frac{5^x-125}{20})=\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \frac{5^x-125}{20}=5^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow 5^x-125=20\times 5^{\frac{x}{2}}$

令$t=5^{\frac{x}{2}}$，則$t^2-125=20t$

解方程式得到$t=-5$(不合)或$t=25$

$5^{\frac{x}{2}}=25$，得到$x=4$，故選(C)

103-01-20

Statement

若α,β為$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$之兩根，則$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=?$

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{7}{4}$

(D) $\frac{9}{4}$

(E) $\frac{11}{4}$

Solution

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$或$x = \dfrac{\pi}{2}$

因此$\cos^2 \dfrac{\pi}{6} + \cos^2 \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3}{4} + 0 = \dfrac{3}{4}$，故選$(A)$

103年第2次北科入學數學會考

103-02-01

Statement

若$f(x)=12x^2-26x+5$，則$f(\frac{3+\sqrt{2}}{2})=?$

$(A)\quad -2+5\sqrt{2}$

$(B)\quad -1+5\sqrt{2}$

$(C)\quad 1+5\sqrt{2}$

$(D)\quad 9$

$(E)\quad 2+5\sqrt{2}$

Solution

利用綜合除法，將式子轉成以$(2x-3)$表示的形式。

$$\begin{array}{ccc|c}
12 & -26 & 5 & \\
 & 18 & -12 & 3/2 \\
\hline
6 & -4 & -7 & \\
 & 9 & & \\
\hline
3 & 5 & &
\end{array}$$

綠色字：將$(x-\frac{3}{2})$轉換成$(2x-3)$，因此係數的部分要除以2。

得到$f(x)=3(2x-3)^2+5(2x-3)-7$，因此$f(\frac{3+\sqrt{2}}{2})=6+5\sqrt{2}-7=5\sqrt{2}-1$，故選$(B)$

103-02-02

Statement

若$f(\frac{2+x}{4-x})=x+2$，則$f(a)=?$

$(A)\quad \frac{6a}{1-a}$

$(B)\quad \frac{2+a}{2-a}$

$(C)\quad \frac{4+a}{2-a}$

$(D)\quad \dfrac{2-a}{2+a}$

$(E)\quad \dfrac{6a}{1+a}$

Solution

$\dfrac{2+x}{4-x}=a$，得到$x=\dfrac{4a-2}{a+1}$

因此$f(a)=\dfrac{4a-2}{a+1}+2=\dfrac{6a}{a+1}$，故選$(E)$

103-02-03

Statement

設ΔABC中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=4$，若D為$\overline{BC}$上一點使$\overline{AD}=4$，則$\overline{BD}=$?

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad \dfrac{5}{2}$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 4$

Solution

$\cos C=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\times 5\times 4}=\dfrac{1}{8}$

可以推得$\cos C=\cos\angle ACD=\dfrac{4^2+(\overline{CD})^2-4^2}{2\times 4\times \overline{CD}}=\dfrac{1}{8}$，可得$\overline{CD}=1$

因此$\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{CD}=5-1=4$，故選$(E)$

103-02-04

Statement

求圓$x^2+y^2-4x+6y-3=0$與直線$3x-4y=-7$的最近距離為何？

$(A)\quad 0$

$(B)\quad 1$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$

利用配方法，得到$(x-2)^2+(y+3)^2=16$

因此得到圓心$(2,-3)$，且半徑$r=\sqrt{16}=4$

考慮圓心與直線的最近距離，利用點到直線距離公式

$$\frac{|3(2)-4(-3)+7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|25|}{5}=5$$

長度大於半徑，因此與圓的最近距離為$5-4=1$，故選(B)

103-02-05

Statement

下列何者錯誤？

$(A)\quad \sin(\pi-x)=\sin x$

$(B)\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$

$(C)\quad \tan(\pi+x)=\tan x$

$(D)\quad \csc(\frac{\pi}{2}+x)=-\sec x$

$(E)\quad \sec(\frac{3\pi}{2}+x)=\csc x$

Solution

$\csc(\frac{\pi}{2}+x)=\sec(x)$，故選$(D)$

103-02-06

Statement

已知$f(x)=3x^5+19x^4-13x^3+6x^2-6x+15$，求$f(-7)=?$

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 5$

$(C)\quad 6$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 8$

Solution

$f(-7)$結果與$f(x) \div (x-7)$的餘數等價（餘式定理）。

因此利用綜合除法來找餘數

$$
\begin{array}{cccccc|c}
3 & 19 & -13 & 6 & -6 & 15 & \\
 & -21 & 14 & -7 & 7 & -7 & -7 \\
\hline
3 & -2 & 1 & -1 & 1 & \color{red}{8} &
\end{array}
$$

因此$f(-7) = 8$，故選(E)

103-02-07

Statement

設$f(x) = x^2$，若將函數圖形向左平移1個單位，再向上平移k個單位後，所得到的圖形通過點$(-2, 4)$，則$k = ?$

$(A) \quad -5$

$(B) \quad -3$

$(C) \quad 3$

$(D) \quad 4$

$(E) \quad 5$

Solution

根據函數圖形平移，平移的結果為$y = f(x) = (x+1)^2 + k$

帶入點$(-2, 4)$求k，得到$4 = (-2+1)^2 + k$，因此$k = 3$，故選(C)

103-02-08

Statement

設雙曲線之方程式為$\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$，若將此雙曲線之貫軸長放大為2倍，共軛軸與中心點不變，則此雙曲線方程式變為何？

$(A) \quad \dfrac{x^2}{8} - y^2 = 1$

$(B) \quad \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{2} = 1$

$(C)\quad \dfrac{x^2}{16}-y^2=1$

$(D)\quad \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{2}=1$

$(E)\quad \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$

Solution

已知貫軸長原先為$2a=2\sqrt{4}=4$，放大為兩倍後得到$2a=8$，因此$a=4$，所以$a^2=16$

又共軛軸與中心點不變，則此方程式變為$\dfrac{x^2}{16}-y^2=1$，故選(C)

103-02-09

Statement

不等式$\dfrac{1+2\log_2 x}{-1+\log_2 x}\leq 1$之解為何？

$(A)\quad \dfrac{1}{2}\leq x\leq 2$

$(B)\quad \dfrac{1}{2}\leq x<2$

$(C)\quad \dfrac{1}{4}\leq x\leq 2$

$(D)\quad \dfrac{1}{4}\leq x<2$

$(E)\quad 1\leq x<2$

Solution

$$\dfrac{1+2\log_2 x}{-1+\log_2 x}\leq 1$$

$$\Rightarrow \dfrac{1+2\log_2 x}{-1+\log_2 x}-1\leq 0$$

$$\Rightarrow \dfrac{2+\log_2 x}{-1+\log_2 x}\leq 0$$

因此我們考慮以下兩種情況取聯集

$$\begin{cases}2+\log_2 x\leq 0\\ -1+\log_2 x>0\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

$$\begin{cases}2+\log_2 x\leq 0\\ -1+\log_2 x<0\end{cases}\Rightarrow [\dfrac{1}{4},2)$$

兩種情況取聯集，得到$\dfrac{1}{4}\leq x<2$，故選(D)

103-02-10

Statement

設$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，求$\cos 4\theta$

(A) $\frac{-1}{4}$

(B) $\frac{-1}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

展開$\cos 4\theta$的式子

$$\cos 4\theta=\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta$$

$$=\cos^2 2\theta-(2\sin\theta\cos\theta)^2$$

將$\sin\theta-\cos\theta$平方，得到

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$$

求$\sin^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta=(\frac{6}{8})^2=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$$

求$\cos^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1,\ \ \cos^2 2\theta=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

計算$\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta$

$$\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=\frac{7}{16}-\frac{9}{16}=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{8}$$

因此$\cos 4\theta=\frac{-1}{8}$，故選$(B)$

103-02-11

Statement

若直線通過點$P(3,4)$且與兩座標軸在第一象限圍成三角形，則此三角形面積最小值為何？

(A) 10

(B) 12

(C) 14

(D) 20

(E) 24

Solution

設直線截距式$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，三角形面積為$\frac{ab}{2}$

因為與第一象限圍成區域面積，所以$a,b>0$

代入點$P(3,4)$得到$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$

利用算幾不等式，$\frac{\frac{3}{a}+\frac{4}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{12}{ab}}$，解得$ab$最小值為$48$

因此$\frac{48}{2}=24$，故選(E)

103-02-12

Statement

已知兩圓$x^2+y^2=10$與$x^2+y^2-2x+4y=5$有兩交點，則此兩交點的距離為何？

(A) 3

(B) 4

(C) $\sqrt{26}$

(D) $\sqrt{35}$

(E) $5\sqrt{2}$

Solution

利用配方法，可知$x^2+y^2-2x+4y=5\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=10$

設圓心$O_1=(0,0)$，$O_2=(1,-2)$，且兩圓交於A,B，其中$\overline{O_1A}=\overline{O_1B}=\overline{O_2A}=\overline{O_2B}=\sqrt{10}$

已知$\angle AO_1B+\angle O_1AO_2=180^\circ$

因此$\cos(\angle O_1AO_2)=\cos(\pi-\angle AO_1B)=-\cos(\angle AO_1B)$

因此$\dfrac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-(\overline{AB})^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$

可知$\overline{AB}=\pm\sqrt{35}$ (負不合)，故選(D)

103-02-13

Statement

$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+25\times 26=?$

(A)　5125

(B)　5850

(C)　6500

(D)　6975

(E)　7200

Solution

$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+25\times 26$

$=\sum\limits_{x=1}^{25}x(x+1)=\sum\limits_{x=1}^{25}(x^2+x)=\sum\limits_{x=1}^{25}x^2+\sum\limits_{x=1}^{25}x$

$=\dfrac{25(25+1)(50+1)}{6}+\dfrac{25\times 26}{2}$

$=25\times 13\times 17+25\times 13$

$=5525+325=5850$，故選(B)

103-02-14

Statement

設曲線$y=\log_3 x$與x軸、直線$x=9$的交點分別為A、B，且直線$x=9$與x軸的交點為C，則ΔABC的面積為何？

(A)　8

(B)　12

(C)　16

(D)　18

(E)　24

Solution

設$y=0$，則$y=\log_3 x$可知$x=1$，因此$A=(1,0)$

設$x=9$，則$y=\log_3 x$可知$y=2$，因此$B=(9,2)$

$x=9$與x軸的交點為$(9,0)$

因此可知底為$(9-1)=8$，高為$2-0=2$，因此面積為$\dfrac{2\times 8}{2}=8$，故選(A)

103-02-15

Statement

若$g(x)=\sqrt[3]{x^2-6x+8}$，則$g(x)$的值域為何？

$(A)\quad [2,4]$

$(B)\quad [2,\infty)$

$(C)\quad [-1,\infty)$

$(D)\quad (-\infty,\infty)$

$(E)\quad (-\infty,2]\cup[4,\infty)$

Solution

$x^2-6x+8\Rightarrow(x-3)^2-1$，可知$x=3$時有最小值$-1$

又$\sqrt[3]{-1}=-1$，因此$g(x)$的值域為$[-1,\infty)$，故選(C)

103-02-16

Statement

設$10<x<100$，且$\log x$與$\log\dfrac{1}{x}$的尾數相同，則$x=?$

$(A)\quad 10\sqrt{2}$

$(B)\quad 20$

$(C)\quad 10\sqrt{6}$

$(D)\quad 10\sqrt{8}$

$(E)\quad 10\sqrt{10}$

Solution

$\log\dfrac{1}{x}=-\log x$，兩式要尾數要相同的情況下為尾數為0或尾數為0.5

考慮五個選項，可知$10\sqrt{10}=10^{\frac{3}{2}}$

$\log 10^{\frac{3}{2}} = 1.5$，又$-\log 10^{\frac{3}{2}} = -1.5$

因此尾數為0.5，故選(E)

103-02-17

Statement

ΔABC中，若$\overline{AB} = 4$，$\overline{BC} = 5$，$\cos\angle B = -\dfrac{5}{13}$，令$S$為$\Delta ABC$的面積，則下列何者正確？

(A)　$S < 8$

(B)　$8 \leq S < 9$

(C)　$9 \leq S < 10$

(D)　$10 \leq S < 11$

(E)　$11 \leq S$

Solution

$\cos\angle B = -\dfrac{5}{13}$可知$\sin\angle B = \dfrac{12}{13}$

$S = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \dfrac{12}{13} = \dfrac{120}{13}$

因此$9 \leq S < 10$，故選(C)

103-02-18

Statement

設$\vec{a} =< \cos\alpha, \sin\alpha >$，$\vec{b} =< \cos\beta, \sin\beta >$，且$0 < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \pi$，$\alpha \neq \beta$，則兩向量$\vec{a} + \vec{b}$與$\vec{a} - \vec{b}$的夾角為何？

(A)　0

(B)　$\dfrac{\pi}{4}$

(C)　$\dfrac{\pi}{3}$

(D)　$\dfrac{\pi}{2}$

(E)　π

Solution

由題目可知，兩向量是以原點為起點，單位圓上為終點做兩向量。

若任意取圓上兩點B, C，則向量$\vec{a}$為原點至點B的向量，且向量$\vec{b}$為原點至點C的向量。

因此根據向量平行四邊形，可知$\vec{a} + \vec{b}$為$\angle CAB$的角平分向量，且$\vec{a} - \vec{b}$為$\overrightarrow{CB}$

由三角形的角平分線性質可知$\overline{CB}$會被分成兩段

再由圓性質，過圓心的一射線能將圓上任意兩點等分，則射線跟線段一定為直角，故選(D)

103-02-19

Statement

求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{3x-1}{2x+1}-\dfrac{2}{3}}{x-1}=?$

$(A)\quad \frac{1}{9}$

$(B)\quad \frac{2}{9}$

$(C)\quad \frac{1}{3}$

$(D)\quad \frac{4}{9}$

$(E)\quad \frac{5}{9}$

Solution

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{3x-1}{2x+1}-\dfrac{2}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5x-5}{6x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{6x+3}=\dfrac{5}{9}$，故選$(E)$

103-02-20

Statement

若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\dfrac{-1}{4}$，求$a+b=?$

$(A)\quad 3$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 6$

$(E)\quad 7$

Solution

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}$

若極限存在，則$b-4=0$，因此$b=4$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{(\sqrt{ax+4}+2)}=\frac{-1}{4}$$

得到$\frac{a}{4}=\frac{-1}{4}$，因此$a=-1$

因此$a+b=4-1=3$，故選(A)

104年第1次北科入學數學會考

104-01-01

Statement

若$f(x)=18x^3-15x^2-4x-3$，則$f(\frac{2-\sqrt{3}}{3})=?$

$(A)\quad -3\sqrt{3}$

$(B)\quad -2\sqrt{3}$

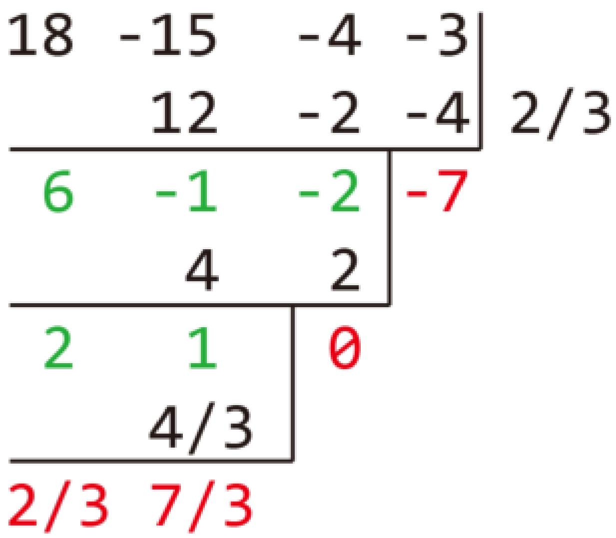
$(C)\quad 2-\sqrt{3}$

$(D)\quad 2+\sqrt{3}$

$(E)\quad 2\sqrt{3}$

Solution

將式子轉成以$(3x-2)$來表達的形式。



得到$f(x)=\frac{2}{3}(3x-2)^3+\frac{7}{3}(3x-2)^2-7$

因此$f(\frac{2-\sqrt{3}}{3})=\frac{2}{3}(-\sqrt{3})^3+\frac{7}{3}(-\sqrt{3})^2-7=-2\sqrt{3}$，故選$(B)$

104-01-02

Statement

設α,β為方程式$x^2-3x-1=0$之兩根，且$\alpha>\beta$，則$\alpha^2-\beta^2=?$

$(A)\quad \sqrt{13}$

$(B)\quad \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$(C)\quad 2\sqrt{13}$

$(D)\quad 3\sqrt{13}$

$(E)\quad 4\sqrt{13}$

Solution

利用根與係數，可知：

$\alpha\beta=\dfrac{-1}{1}=-1$，可知$\alpha=\dfrac{-1}{\beta}$

$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{1}=3$

因此$\dfrac{-1}{\beta}+\beta=3\Rightarrow\beta^2-3\beta-1=0$

解方程式可知$\beta=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$，由於$\alpha>\beta$，因此正不合，故$\beta=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$。

可知$\alpha=\dfrac{-2}{3-\sqrt{13}}$

因此$\alpha^2-\beta^2=\dfrac{4}{22-6\sqrt{13}}-\dfrac{22-6\sqrt{13}}{4}=3\sqrt{13}$，故選$(D)$

104-01-03

Statement

$2\cdot 11^5-23\cdot 11^4+13\cdot 11^3-25\cdot 11^2+40\cdot 11-56=?$

$(A)\quad -77$

$(B)\quad -35$

$(C)\quad 17$

$(D)\quad 21$

$(E)\quad 63$

Solution

將式子轉成$f(x)=2x^5-23x^4+13x^3-25x^2+40x-56$

且x代入11之結果，等價於$f(x)\div(x-11)$之餘數（餘式定理）

因此，利用綜合除法來計算。

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
2 & -23 & 13 & -25 & 40 & -56 & \\
 & 22 & -11 & 22 & -33 & 77 & 11 \\
\hline
2 & -1 & 2 & -3 & 7 & 21 &
\end{array}
$$

因此，$f(11)=21$，故選(D)

104-01-04

Statement

設$\dfrac{5x^3-9x^2+9x-3}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$，則$A+B+C+D=?$

(A) $\quad -4$

(B) $\quad -1$

(C) $\quad 4$

(D) $\quad 6$

(E) $\quad 8$

Solution

$5x^3-9x^2+9x-3=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2$

將$x=1$代入式子，可得$2=2B$，因此$B=1$

$5x^3-10x^2+9x-4=A(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2$

$\Rightarrow 5x^2-5x+4=A(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)$

$\Rightarrow 5x^2-5x+4=Ax^2+A+Cx^2-Cx+Dx-D$

$\Rightarrow 5x^2-5x+4=(A+C)x^2+(-C+D)x+(A-D)$

可知$\begin{cases}(A+C)=5\\(-C+D)=-5\\(A-D)=4\end{cases}$，解聯立方程式得到$(A,C,D)=(2,3,-2)$

因此$A+B+C+D=2+1+3+(-2)=4$，故選(C)

104-01-05

Statement

不等式$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\leq 0$之解為何？

$(A)\quad 1\leq x<2$

$(B)\quad 2<x\leq 3$

$(C)\quad 1<x<2$

$(D)\quad x\geq 3$或$x<2$

$(E)\quad 2<x<3$

Solution

令$t=\sqrt[3]{(x-2)}$，則$t^2-\dfrac{1}{t}\leq 0$

得到$\dfrac{t^3-1}{t}\leq 0$，定義域$t\neq 0$

考慮以下兩種情況

$\begin{cases} t^3-1\leq 0 \\ t>0 \end{cases}\Rightarrow t\in(0,1]$

$\begin{cases} t^3-1\geq 0 \\ t<0 \end{cases}\Rightarrow t\in\varnothing$

故$0<t\leq 1$時$t^2-\dfrac{1}{t}\leq 0$

還原t，可得$2<t\leq 3$時，$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\leq 0$，故選$(B)$

104-01-06

Statement

設x^2+1為$x^4+2x^3+mx^2+nx+3$的因式，則$m+n=?$

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 5$

$(C)\quad 6$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 8$

Solution

利用直式除法

```
                    1   +   2   +(m-1)
      ┌─────────────────────────────────
1+0+1 │ 1 + 2 +   m   +   n   +   3
        1 + 0 +   1
      ────────────
              2 +(m-1)+   n
              2 +   0   +   2
            ──────────────
                  (m-1)+(n-2)+   3
                  (m-1)+   0   +(m-1)
                  ────────────────────
                        (n-2)+(4-m)
```

可知若要整除，則$(n-2)=0$且$(4-m)=0$，可知$n=2$且$m=4$

$n+m=6$，故選(C)

104-01-07

Statement

若直線L與直線$3x+4y=9$垂直，且通過兩直線$3x-2y+3=0$與$5x+4y-17=0$的交點，則L的方程式為何？

(A)　$3x+4y=15$

(B)　$3x-4y=9$

(C)　$4x-3y=9$

(D)　$4x-3y=-5$

(E)　$4x=3y$

Solution

與直線$3x+4y=9$垂直，可知$L:4x-3y=C$

求$\begin{cases}3x-2y+3=0\\5x+4y-17=0\end{cases}$的交點，解聯立方程組得到$(x,y)=(1,3)$

代入L，得到$C=-5$

因此$L:4x-3y=-5$，故選(D)

104-01-08

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，$|\vec{a}| = 3$、$|\vec{b}| = 2$且$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{37}$，則$\theta =$?

$(A)\quad 0$

$(B)\quad \frac{\pi}{6}$

$(C)\quad \frac{\pi}{4}$

$(D)\quad \frac{\pi}{3}$

$(E)\quad \frac{\pi}{2}$

Solution

$|(\vec{a} + 2\vec{b})|^2 = |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = 37$

可知$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

因此$\cos\theta = \frac{1}{2}$，$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}(0 \leq \theta \leq \pi)$，故選$(D)$

104-01-09

Statement

設向量$\vec{a} =< 14, -1 >$，$\vec{b} =< 2^x, 4^{x-1} - 8 >$，且$\vec{a} \perp \vec{b}$，則$x =$?

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$\vec{a} \perp \vec{b}$，可知$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

因此$14 \cdot 2^x - (4^{x+1} - 8) = 0$

所以$14 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2x} + 8 = 0$

令$t = 2^x$，則$14t - 4t^2 + 8 = 0$，解方程式得到$t = -\frac{1}{2}$(不合)或$t = 4$

因此$2^x = 4$，得$x = 2$，故選(E)

104-01-10

Statement

若橢圓以$(-3,1)$與$(5,1)$兩焦點，且通點$(1,-3)$，則橢圓長軸為何？

(A)　10

(B)　$8\sqrt{2}$

(C)　$10\sqrt{2}$

(D)　16

(E)　20

Solution

$|\overline{PF_1}|+|\overline{PF_2}|=2a$

因此$\sqrt{(-3-1)^2+(1-(-3))^2}+\sqrt{(5-1)^2+(1-(-3))^2}=2a$

可知$4\sqrt{2}+4\sqrt{2}=2a$，因此$2a=8\sqrt{2}$，可知長軸為$8\sqrt{2}$

104-01-11

Statement

若拋物線方程式為$y=\dfrac{1}{8}x^2+1$，且其焦點坐標為(a,b)，則$a+b=?$

(A)　-2

(B)　-1

(C)　2

(D)　3

(E)　5

Solution

轉換成拋物線的表達式，得到$x^2=8(y-1)$

因此可知$4c=8$，得到$c=2$

可以從表達式中可以知道頂點為$(0,1)$，拋物線為開口向上之拋物線

因此焦點坐標為$(0,1+2)=(0,3)$

可知$a=0$，$b=3$，因此$a+b=3$，故選(D)

104-01-12

Statement

若雙曲線方程式為$2xy-6x+4y=13$，則其中心點坐標為何？

$(A)\quad(-4,2)$

$(B)\quad(-2,3)$

$(C)\quad(1,-2)$

$(D)\quad(3,-2)$

$(E)\quad(2,1)$

Solution

$2xy-6x+4y=13$

$\Rightarrow 2(xy-3x+2y)=13$

$\Rightarrow 2((x+2)(y-3))=1$

因此中心坐標$(x,y)=(-2,3)$，故選(B)

104-01-13

Statement

若$\log_2 x=\log_x 16$，且其解為$x=a$或$x=b$，則$a+b=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad \dfrac{3}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad \dfrac{17}{4}$

Solution

$\dfrac{\log_2 x}{\log_2 2}=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 x}$，可以得到$(\log_2 x)^2=4$，可以得到$\log_2 x=\pm 2$

可以得到$\log_2 x=2$，$\log_2 x=-2$

得到$x=4$或$x=\dfrac{1}{4}$，因此$a+b=4+\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{4}$

104-01-14

Statement

若$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$且$f(a)=2$、$f(b)=3$，則$f(a+b)=?$

$(A)\quad \frac{1}{4}$

$(B)\quad \frac{7}{5}$

$(C)\quad \frac{5}{2}$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 12$

Solution

$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}$

因此$f(a+b)=\dfrac{2^{a+b}+2^{-(a+b)}}{2^{a+b}-2^{-(a+b)}}=\dfrac{2^a2^b+\dfrac{1}{2^a2^b}}{2^a2^b-\dfrac{1}{2^a2^b}}=\dfrac{4^a4^b+1}{4^a4^b-1}$

$\dfrac{4^a+1}{4^a-1}=2$，可以得到$4^a=3$

$\dfrac{4^b+1}{4^b-1}=3$，可以得到$4^b=2$

因此$f(a+b)=\dfrac{6+1}{6-1}=\dfrac{7}{5}$，故選$(B)$

104-01-15

Statement

$\log_2\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\log_4 12=?$

$(A)\quad \frac{1}{2}$

$(B)\quad \frac{3}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad \frac{5}{2}$

$(E)\quad 3$

Solution

$\log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_4 12$

$= \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\log_2 12$

$= \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_2 \sqrt{12}$

$= \log_2 \frac{4 \cdot 6}{3} = \log_2 8 = 3$，故選$(E)$

104-01-16

Statement

設$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，且$\sin\theta + \cos\theta = \frac{-1}{5}$，則$\tan\theta =?$

$(A) \quad -\frac{12}{5}$

$(B) \quad -\frac{4}{3}$

$(C) \quad -1$

$(D) \quad -\frac{3}{4}$

$(E) \quad -\frac{5}{12}$

Solution

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{25}$

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 2 - \frac{1}{25} = \frac{49}{25}$

$(\sin\theta - \cos\theta) = \pm\frac{7}{5}$ (負不合)

解聯立方程式，可以知道$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{-1}{5} \\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{7}{5} \end{cases}$，可以得到$(\sin\theta, \cos\theta) = (\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$。

因為$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，所以$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4}$，故選$(D)$

104-01-17

Statement

設$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$，則$\dfrac{1}{2-\cos\theta}$ =?

(A) $\dfrac{t^2-1}{3t^2-1}$

(B) $\dfrac{t^2+1}{3t^2+1}$

(C) $\dfrac{3t^2-1}{t^2+1}$

(D) $\dfrac{t}{2t^2+2}$

(E) $\dfrac{t+1}{2t^2+2}$

Solution

因為$\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

所以$\dfrac{1}{2-\cos\theta}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{1+3t^2}$，故選$(B)$

104-01-18

Statement

在xy平面上，曲線$3|x-2|+|2y+1|=6$所圍區域的面積為何？

(A) 12

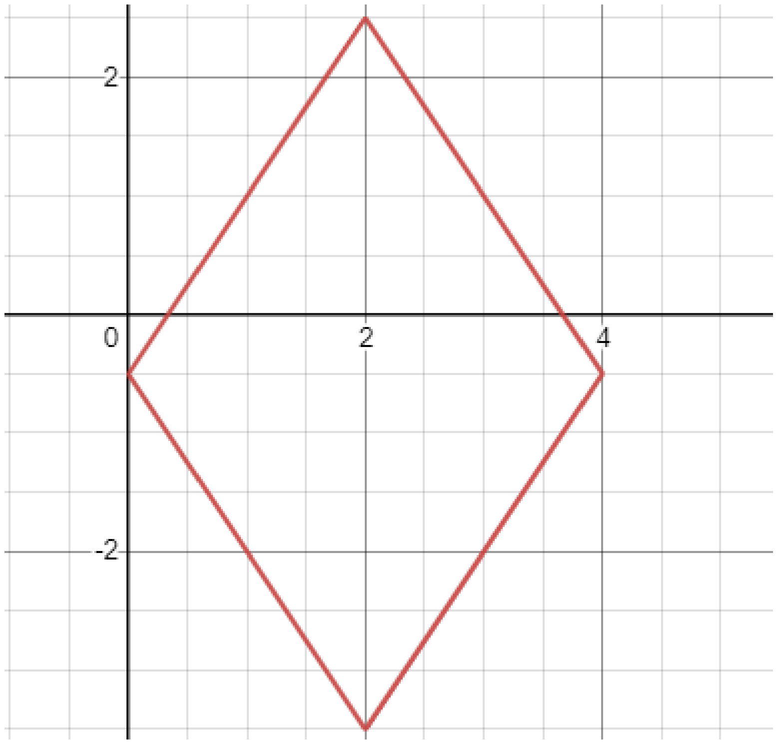
(B) 13

(C) 14

(D) 15

(E) 16

Solution



令$2y+1=0$，$y=\dfrac{-1}{2}$，可以得到$3|x-2|=6$，可以得到$x=4$或$x=0$，得到$\Delta_x=4$

令$x-2=0$，$x=2$，可以得到$|2y+1|=6$，可以得到$y=-\dfrac{7}{2}$或$y=\dfrac{5}{2}$，得到$\Delta_y=6$

因此$\dfrac{4\times 6}{2}=12$，故選(A)

104-01-19

Statement

若(a,b)滿足$2x+3y=1$，則a^2+b^2的最小值為何？

(A) $\dfrac{1}{13}$

(B) $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(D) $\dfrac{1}{2}$

(E) 1

Solution

$2a+3b=1$

利用柯西不等式$(2^2+3^2)(a^2+b^2)\geq(2a+3b)^2$

可知$13(a^2+b^2)\geq 1^2$，可知$(a^2+b^2)\geq\dfrac{1}{13}$，故選$(A)$

104-01-20

Statement

若點A在圓$x^2+y^2=8y$上，且點B在圓$y^2=x(6-x)$上，則$\overline{AB}$長度的最大值為何？

(A)　10

(B)　11

(C)　12

(D)　13

(E)　14

Solution

點A在$x^2+(y-4)^2=4^2$，圓心$(0,4)$

點B在$(x-3)^2+y^2=3^2$，圓心$(3,0)$

兩圓圓心距離$\sqrt{3^2+4^2}=5$，則兩圓相交。

因此$\overline{AB}$最大值為$3+5+4=12$，故選(C)

104年第2次北科入學數學會考

104-02-01

Statement

已知ΔABC中，$\angle BCA = 120^\circ$，$\overline{AC} = 3$，$\overline{BC} = 5$且D在$\overline{AB}$上。

若$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，則$\overline{CD}$ =?

(A) $\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

(B) $\dfrac{15\sqrt{3}}{14}$

(C) $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}$

(D) $\dfrac{55\sqrt{3}}{2}$

(E) $\dfrac{75\sqrt{3}}{2}$

Solution

利用餘弦定理求$\overline{AB}$

$\cos 120^\circ = \dfrac{5^2 + 3^2 - (\overline{AB})^2}{2 \times 5 \times 3} = -\dfrac{1}{2}$，可以算出$\overline{AB} = \pm 7$ (負不合)。

利用正弦來算出面積

$\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 120^\circ = \dfrac{15\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2} \times 7 \times \overline{CD}$

因此可以求出$\overline{CD} = \dfrac{15\sqrt{3}}{14}$，故選$(B)$

104-02-02

Statement

設$\dfrac{7x^2 - 13x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x+1}$，則$A + B + C$ =?

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

(E) 10

Solution

$$\frac{7x^2-13x}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{7x^2-13x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow 7x^2-13x=A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2$$

代入$x=1$，得$2B=-6$，因此$B=-3$

$7x^2-10x+3=A(x-1)(x+1)+C(x-1)^2$

代入$B=-1$，得$4C=20$，因此$C=5$

$2x^2-2=A(x-1)(x+1)=A(x^2-1)$，可得$A=2$

因此$A+B+C=2-3+5=4$，故選(B)

104-02-03

Statement

若扇形的夾角為θ，弧長為$\frac{\pi}{2}$，面積為$\frac{3}{2}\pi$，則$\theta=?$

$(A)\quad \frac{\pi}{12}$

$(B)\quad \frac{\pi}{10}$

$(C)\quad \frac{\pi}{8}$

$(D)\quad \frac{\pi}{6}$

$(E)\quad \frac{\pi}{3}$

Solution

由弧長為$\frac{\pi}{2}$可知，$r\theta=\frac{\pi}{2}$

由面積為$\frac{3\pi}{2}$可知，$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{3}{2}\pi$

兩式$\begin{cases} r\theta=\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}r^2\theta=\frac{3}{2}\pi \end{cases}$可知，$r=6$且$\theta=\frac{\pi}{12}$，故選$(A)$

104-02-04

Statement

設P點在圓$x^2+y^2=6x+8y$上，則P與直線$3x+4y+5=0$最大距離為何？

(A) 10

(B) 11

(C) $\frac{56}{5}$

(D) 12

(E) $\frac{66}{5}$

Solution

利用配方法，可以得到圓方程式為$(x-3)^2+(y-4)^2=25$，因此圓心為$(3,4)$，半徑為$\sqrt{25}=5$

利用點到直線距離公式，可以知道$\frac{|3\times 3+4\times 4+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|30|}{5}=6$

因此最大距離為$6+5=11$，故選(B)

104-02-05

Statement

下列各三角等式何者正確？

(A) $\cos(x+y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

(B) $\sin 2x=2\sin x$

(C) $\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x+y)\sin(x-y)$

(D) $\sin(\pi-x)=\cos x$

(E) $\cos 2x=1+2\sin^2 x$

Solution

(A) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

(B) $\sin 2x=2\sin x\cos x$

(D) $\sin(\pi-x)=\sin x$

(E) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

故選(C)

104-02-06

Statement

若多項式$ax^3+8x^2+bx+10$可被$x+1$與$x-2$整除，則$a-b=?$

$(A)\quad -44$

$(B)\quad -22$

$(C)\quad -11$

$(D)\quad 22$

$(E)\quad 44$

Solution

根據餘式定理，可以列出以下兩個式子

$$\begin{cases} -a-b=-18 \\ 8a+2b=-42 \end{cases}$$

解聯立後得到$(a,b)=(-13,31)$，因此$a-b=-44$，故選(A)

104-02-07

Statement

已知兩點$A(3,0)$，$B(1,1)$，若$C(a,b)$為直線$y=-1$上一點使得$\overline{AC}+\overline{BC}$最小，則$3a+b=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad 0$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 6$

Solution

已知A,B兩點皆同側於$y=-1$。

因此我們假設一點$A'(3,-2)$使其與A點映射於$y=-1$，且A'與B異側。

因此$\overline{A'B}$與$y=-1$之交點即為C點。

可知$\overline{A'B}:y-1=\dfrac{-2-1}{3-1}(x-1)\Rightarrow 3x+2y=5$

代入$y=-1$可得$x=\dfrac{7}{3}$，因此$C=(\dfrac{7}{3},-1)$

因此$3a+b=7+(-1)=6$，故選(E)

104-02-08

Statement

已知雙曲線方程式為$2xy-4x+3y=5$，則雙曲線中心點坐標為何？

(A) $(-2,3)$

(B) $(-\frac{3}{2},2)$

(C) $(2,-\frac{3}{2})$

(D) $(2,-3)$

(E) $(4,-3)$

Solution

$2xy-4x+3y=5$

透過配方法，可得到$2((x+\frac{3}{2})(y-2))=-1$

因此中心點坐標為$(-\frac{3}{2},2)$，故選(B)

104-02-09

Statement

方程式$x+|\log_2 x|=1$有幾個實數解？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

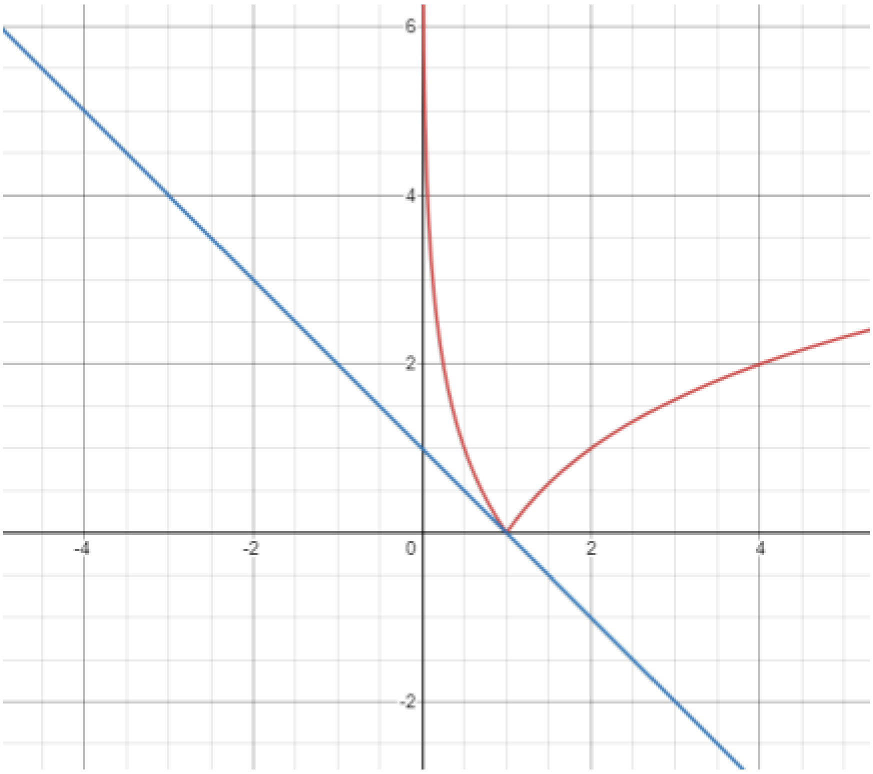
(E) 4

Solution

方程式$x+|\log_2 x|=1$有幾個實數解？

$x+|\log_2 x|=1 \Rightarrow |\log_2 x|=1-x$

畫出圖



可以知道有一個交點，故選(B)。

104-02-10

Statement

設$\sin x - 2\cos x = \sqrt{5}$，則$\sin x + 2\cos x = ?$

(A) $\quad -1$

(B) $\quad \dfrac{-3}{\sqrt{5}}$

(C) $\quad 0$

(D) $\quad \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

(E) $\quad 1$

Solution

$\sin x - \sqrt{5} = 2\cos x$

$\Rightarrow \sin x - \sqrt{5} = 2\sqrt{1 - \sin^2 x}$

$\Rightarrow \sin^2 x - 2\sqrt{5}\sin x + 5 = 4(1 - \sin^2 x)$

$\Rightarrow 5\sin^2 x - 2\sqrt{5}\sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{5}\sin x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \sin x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$(負不合)

$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$(正不合)

因此$\sin x + 2\cos x = \frac{-3}{\sqrt{5}}$，故選$(B)$

104-02-11

Statement

設x, y均為小於100的正整數，且$3x + 2y = 100$，則(x, y)有幾組解？

(A)　11

(B)　16

(C)　33

(D)　40

(E)　50

Solution

考慮x必定為偶數，又x之上限為32

考慮$x = 2$，則$y = 47 < 100$，合理

考慮$x = 32$，則$y = 2 < 100$，合理

因此共有16組解，故選(B)

104-02-12

Statement

若兩圓$x^2 + y^2 - 8x + 4y = k$與$x^2 + y^2 = 2y$所圍重疊區域面積最大，則k的最小值為何？

(A)　15

(B)　16

(C)　17

(D)　18

(E)　19

Solution

透過配方法，可以知道

圓1為$(x-4)^2 + (y+2)^2 = k + 20$

圓2為$x^2 + (y+1)^2 = 1$

因此$O_1 = (4, -2)$且$O_2 = (0, 1)$，$\overline{O_1O_2} = \sqrt{16+9} = 5$

所圍重疊面積最大，因此考慮圓1能夠完全覆蓋圓2之最小半徑

也就是$r = 5 + 1 = 6$

因此$r^2 = 36 = k + 20$，因此得到$k = 16$，故選(B)

104-02-13

Statement

若$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{99} < x_{100} = 10$且$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{100} - x_{99}$，則$x_{50} = ?$

(A) 3.5

(B) 4

(C) 4.5

(D) 5

(E) 5.5

Solution

由此可知，此數列為一等差數列

因此$x_0 = 1, x_{100} = 10$且項數為101，可求得公差為0.09

因此$x_{50} = x_1 + (51 - 1)(0.09) = 1 + 4.5 = 5.5$，故選$(E)$

104-02-14

Statement

不等式$2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$的解集合為何？

(A) $(-\infty, -1]$

(B) $(-1, 2]$

(C) $[-1, 2]$

(D) $[-1, 2)$

(E) $[2, \infty)$

Solution

$2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$

$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$

令$t = 2^x$，則$2t^2 - 7t - 4 \geq 0$

因此$(2t+1)(t-4)\geq 0$，得到$(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[4,\infty)$

由於2^x的域值為正整數，因此$(-\infty,-\frac{1}{2}]$不合，考慮$[4,\infty)$

可知$t\geq 4$，還原後得到$x\geq 2$，故選(E)

104-02-15

Statement

若$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$，$g(x)=\sqrt{x-3}$，則$f$與$g$的合成函數$f\circ g$的定義域為何？

$(A)\quad(3,4)$

$(B)\quad[3,4]$

$(C)\quad(3,19)$

$(D)\quad[3,19)$

$(E)\quad(3,19]$

Solution

$f(g(x))=\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{x-3}}}$

考慮$\sqrt{4-\sqrt{x-3}}\neq 0$，則$x\neq 19$

考慮$4-\sqrt{x-3}>0$，則$x<19$

考慮$\sqrt{x-3}\geq 0$，則$x\geq 3$

三者取交集，得到$[3,19)$，故選(D)

104-02-16

Statement

在ΔABC中，向量$\overrightarrow{AB}=<1,2>$，$\overrightarrow{AC}=<x-1,x>$，$x>0$，若$\Delta ABC$之面積為$\frac{5}{2}$，則$x=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 7$

Solution 1

> 速解 by Trava

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = \frac{5}{2}$

因此$5 = |x - 2x + 2|$

$\Rightarrow 5 = |-x + 2|$

由於$x > 0$，所以$-5 = -x + 2$，得到$x = 7$，故選(E)

Solution 2

> 很仔細的解 by Uriah

考慮到以$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$所建立的平行四邊形，其面積為$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$

又$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$，因此$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

可得三角形的面積為$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} = \frac{5}{2}$

也就是$\sqrt{5(2x^2-2x+1)-(9x^2-6x+1)} = 5$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 25$，得到$x = -3$(不合)或$x = 7$，故選$(E)$

104-02-17

Statement

若$f(x) = 2x + 1$且$f(g(x)) = 6x + 9$，則$g(x) = ?$

$(A)\quad 3x - 4$

$(B)\quad 3x + 4$

$(C)\quad 4x - 3$

$(D)\quad 4x + 3$

$(E)\quad 8x + 10$

Solution

設$g(x) = ax + b$，則$f(g(x)) = 2(ax + b) + 1$

得到$2ax + 2b + 1 = 6x + 9$

可得$a = 3$與$b = 4$

因此$g(x) = 3x + 4$，故選(B)

104-02-18

Statement

若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=\dfrac{-1}{6}$，則$ab=?$

$(A)\quad -9$

$(B)\quad -3$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 9$

Solution

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b-9}{x(\sqrt{ax+b}+3)}$$

如果極限存在，則$b-9$必須要等於0，因此$b=9$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{(\sqrt{ax+9}+3)}=\dfrac{-1}{6}$

得到$a=-1$，此$ab=(-1)\cdot 9=-9$，故選(A)

104-02-19

Statement

設$f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$，則$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad \dfrac{-1}{2}$

$(D)\quad \dfrac{1}{2}$

$(E)\quad 1$

Solution

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}=2f'(1)$$

$f'(x)=-\dfrac{1}{(2x-1)^2}$，則$2f'(1)=-2$，故選$(A)$

104-02-20

Statement

將平面曲線$y = f(x)$向右平移1單位，再以y軸為中心放大為兩倍，則所得曲線的方程式為何？

$(A) \quad y = f(\frac{x-1}{2})$

$(B) \quad y = f(\frac{x}{2} - 1)$

$(C) \quad y = f(2x - 1)$

$(D) \quad y = f(\frac{x+1}{2})$

$(E) \quad y = f(2x + 1)$

Solution

向右平移一單位，因此x改寫為$(x-1)$

放大為兩倍，因此$(x-1)$改寫為$\frac{x}{2} - 1$

因此曲線方程式為$f(\frac{x}{2} - 1)$，故選(B)

105年第1次北科入學數學會考

105-01-01

Statement

若α,β為方程式$x^2-5x-3=0$之兩根，則$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=?$

$(A)\quad -93$

$(B)\quad -57$

$(C)\quad 53$

$(D)\quad 93$

$(E)\quad 105$

Solution

$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

根據根與係數，可以知道$\alpha\beta=\dfrac{-3}{1}=-3$，且$\alpha+\beta=-\dfrac{-5}{1}=5$

已知$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=25$

可知$\alpha^2+\beta^2=31$

因此$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=(-3)(31)=-93$，故選$(A)$

105-01-02

Statement

已知$(\log 7x)(\log ax)=2$之兩根乘積為$\dfrac{1}{72}$，則$a=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{72}$

$(B)\quad \dfrac{7}{72}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad \dfrac{72}{7}$

$(E)\quad 72$

Solution

$(\log 7x)(\log ax) = 2$

$\Rightarrow (\log 7 + \log x)(\log a + \log x) = 2$

$\Rightarrow \log 7 \log a + \log(x)(\log 7 + \log a) + (\log x)^2 = 2$

$\Rightarrow (\log x)^2 + (\log x)(\log 7 + \log a) + \log 7 \log a = 2$

利用偉達定理

$\log \alpha + \log \beta = -(\log 7 + \log a)$

$\log \alpha\beta = -\log 7a$

$\log \alpha \log \beta = \log 7 \log a - 2$

因此$\log \frac{1}{72} = -\log 7a$，$a = \frac{72}{7}$

105-01-03

Statement

已知橢圓E通過點$(2,3)$且與橢圓$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$有相同焦點，則橢圓$E$的長軸長為何？

$(A) \quad 2\sqrt{5}$

$(B) \quad 6$

$(C) \quad 8$

$(D) \quad 10$

$(E) \quad 8\sqrt{2}$

Solution

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$。可知原點為$(0,0)$

由焦點可知$c = \sqrt{(\sqrt{9})^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$，又這個橢圓長軸平行$x$軸，因此焦點為$(-2,0)$與$(2,0)$

考慮長軸$2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$，因此若焦點相同且確定過點$P = (2,3)$，

則我們可以知道新的橢圓的長軸為$\sqrt{(2-(-2))^2 + (0-3)^2} + \sqrt{(2-(-2))^2 + (0-3)^2} = 8$

因此長軸為8，故選(C)

105-01-04

Statement

下列何者正確

$(A)\quad \sin(-\theta)=\sin\theta$

$(B)\quad \tan(-\theta)=\tan(\theta)$

$(C)\quad 2\cos^2\theta=1-\cos 2\theta$

$(D)\quad \tan^2\theta-1=\sec^2\theta$

$(E)\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Solution

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，故選$(E)$

101-01-05

Statement

設$\dfrac{x-8}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x-2)}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$，求$3A+2B+C=?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 3$

Solution

$$\frac{x-8}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$\Rightarrow x-8=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$

代入$x=2$，則$-6=3C$，因此$C=-2$

代入$x=-1$，則$-9=9A$，因此$A=-1$

代入$x=0$，則$-8=4A-2B+C$，因此$B=1$

因此$3A+2B+C=-3+2-2=-3$，故選(A)

105-01-06

Statement

已知直線L與$3x+4y=1$垂直與x軸、y軸在第四象限所圍的三角形面積為6，則L的方程式為何？

$(A)\quad 3x-4y=6$

$(B)\quad 3x-4y=12$

$(C)\quad 4x+3y=6$

$(D)\quad 4x-3y=6$

$(E)\quad 4x-3y=12$

Solution

與$3x+4y=1$垂直，可得到$-4x+3y=C$

已知x的截距長度為$|\frac{C}{-4}|=\frac{C}{4}$，又$y$的截距長度為$\frac{C}{3}$

因此$\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{4}\cdot\frac{C}{3}=6$，可得$C=\pm 12$

考慮$C=12$，可知x的截距為$\frac{12}{-4}=-3$，y的截距為$\frac{12}{3}=4$，三角形圍在第二象限，不合。

考慮$C=-12$，可知x的截距為$\frac{-12}{-4}=3$，y的截距為$\frac{-12}{3}=-4$，三角形圍在第四象限

因此$C=-12$，得到$-4x+3y=-12$，故選(E)

105-01-07

Statement

設$3x^3-5x^2+7x+1=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，則$b+c=?$

$(A)\quad 16$

$(B)\quad 26$

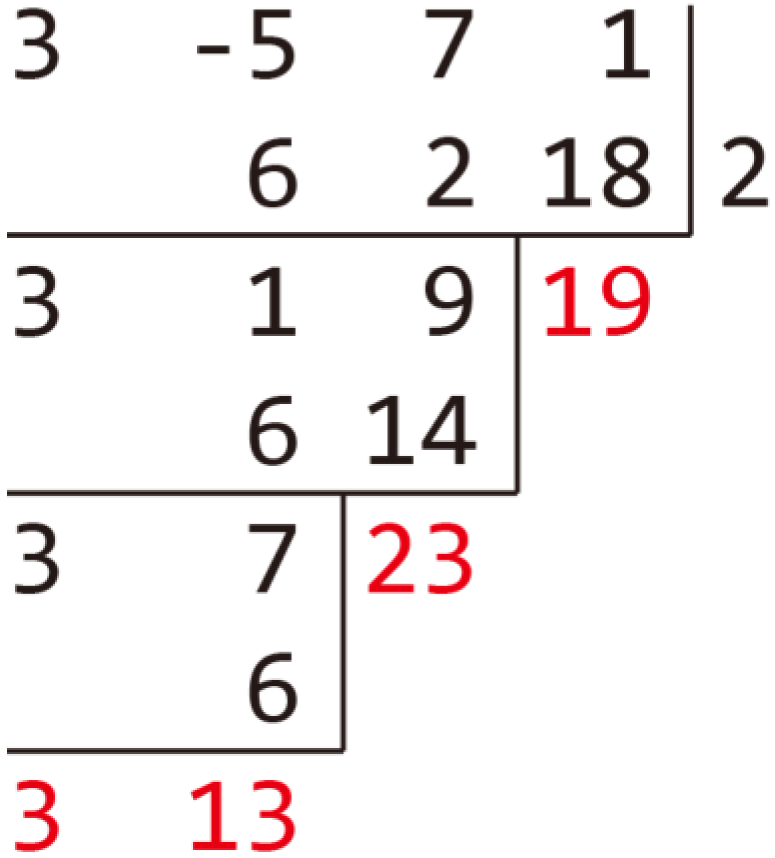
$(C)\quad 36$

$(D)\quad 46$

$(E)\quad 56$

Solution

利用綜合除法



可得到$a=3, b=13, c=23, d=19$，因此$b+c=13+23=36$，故選(C)

105-01-08

Statement

已知拋物線的焦點為$(1,1)$，準線為$x+y+2=0$，則此拋物線的頂點坐標為何？

(A)　$(2,2)$

(B)　$(2,-2)$

(C)　$(-1,1)$

(D)　$(1,-1)$

(E)　$(0,0)$

Solution

考慮做一條線L垂直準線與經過$(1,1)$

因此$L: x-y=C$，代入$(1,1)$得到$C=0$，故$L: x-y=0$

找L與準線的交點P，解聯立方程組$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$，可得$y=-1$且$x=-1$

因此頂點為P與焦點的中點，故$(\frac{-1+1}{2}, \frac{-1+1}{2})=(0,0)$，故選$(E)$

105-01-09

Statement

若$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=4$且$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{37}$，則$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=$?

$(A)\quad -24$

$(B)\quad -12$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 12$

$(E)\quad 24$

Solution

$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=2|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+3(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2$

又$(|\vec{a}+\vec{b}|)^2=|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=37$

故$2(\vec{a}\cdot\vec{b})=12$，因此$(\vec{a}\cdot\vec{b})=6$

因此$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=2\times 3^2+6-3\times 4^2=-24$，故選$(A)$

105-01-10

Statement

若$S=1+3^1+3^2+3^3+....+3^{99}$，則$S$為幾位數？$(\log_2 0.3010, \log_3=0.4771)$

$(A)\quad 45$

$(B)\quad 46$

$(C)\quad 47$

$(D)\quad 48$

$(E)\quad 49$

Solution

$S=\dfrac{1(1-3^{100})}{1-3}=\dfrac{3^{100}-1}{2}$

因此$\log S=\log(\dfrac{3^{100}-1}{2})=\log(3^{100}-1)-\log_2\approx\log(3^{100})-\log 2$

$\approx 100\log(3)-\log 2=47.7-0.301\approx 47.3$

由於有小數點，無條件進位一位變成48，故選(D)

105-01-11

Statement

$\sqrt{x+3} > x-3$之所有解為何？

$(A)\quad -3 \leq x < 3$

$(B)\quad -3 \leq x < 6$

$(C)\quad 2 \leq x < 3$

$(D)\quad -3 \leq x < 7$

$(E)\quad x < 6$

Solution

$\sqrt{x+3} > x-3$

考慮定義域，可知$x \geq -3$

令$t = x-3$，則$\sqrt{t+6} > t$

考慮t的所有可能

若$t \geq 0$，則$x \geq 3$

因此$t+6 > t^2$，得到$t^2 - t - 6 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) < 0$

因此$-2 < t < 3$，還原成x得到$1 < x < 6$

與$x \geq 3$取交集，得到$3 \leq x < 6$

若$t < 0$，則$x < 3$

但由於$\sqrt{t+6}$在定義域內時恆大於等於0，所以$\sqrt{t+6} > t$，因此$t \in \mathbb{R}$，與$x < 3$求交集得到$x \in (-\infty, 3)$

因此，兩者種可能得到的結果取聯集得到$x \in (-\infty, 6)$，與定義域取交集得到$x \in [-3, 6)$，故選(B)

105-01-12

Statement

若方程式$\dfrac{x^2}{t^2-4} + \dfrac{y^2}{t^2-9} = 1$的圖形為雙曲線，求實數$t$的範圍

$(A)\quad t < -2$

$(B)\quad t > 3$

$(C)\quad -3 < t < 3$

$(D)\quad -2 < t < 2$

$(E)\quad -3 < t < -2$且$2 < t < 3$

Solution

考慮兩個不等式的結果：$\begin{cases} t^2-4>0 \\ t^2-9<0 \end{cases}$，得到$(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$與$(-3,3)$

這兩個結果取交集，得到$(-3<t<-2)$且$(2<t<3)$，故選(E)

105-01-13

Statement

設$x^4+2x^3+mx^2+nx-3=(x^2+2x-1)(x^2+bx+c)$，則$4m-n+2b+c=?$

(A)　4

(B)　5

(C)　6

(D)　7

(E)　8

Solution 1

> 長除法 by Trava

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 1 & 0 & (m+1) & & \\
\hline
1\ 2\ {-1} & 1 & 2 & m & n & -3 \\
 & 1 & 2 & -1 & & \\
\hline
 & & & (m+1) & n & -3 \\
 & & & (m+1) & (2m+2) & (-m-1) \\
\hline
 & & & 0 & n-2m-2 & m-2
\end{array}
$$

可知$n-2m-2=0$且$m-2=0$，得到$m=2$與$n=6$

由上面係數可以知道$b=0$且$c=3$

因此$4m-n+2b+c=4\cdot 2-6+2\cdot 0+3=8-6+3=5$

Solution 2

> 湊係數解 by Uriah

考慮能夠湊出x^3的方法：$(x^2 \times bx)$、$(2x \times x^2)$

因此$b+2=2$，得到$b=0$

考慮能夠湊出x^2的方法：$(2x \times bx)$、$(x^2 \times c)$、$(-1) \times (x^2)$

因此$m=2b+c-1=c-1$

考慮能夠湊出x的方法：$(-1 \times bx)$、$(2x \times c)$

因此$-b+2c=n$

考慮能夠湊出常數的方法，也就是$(-1 \times c)=-3$，因此$c=3$

由於$c=3$，故$m=2$，$n=6$

因此$m=2, n=6, b=0, c=3$

因此$4m-n+2b+c=4 \cdot 2-6+2 \cdot 0+3=8-6+3=5$，故選$(B)$

105-01-14

Statement

xy平面上，求曲線$y=\sqrt{25-x^2}$與x軸所圍的面積為何？

(A) $\dfrac{5\pi}{4}$

(B) 5π

(C) $\dfrac{25\pi}{4}$

(D) $\dfrac{25\pi}{2}$

(E) 25π

Solution 1

> Non-Calculus solution by Uriah

考慮曲線$y=\sqrt{25-x^2}$是一個半徑為5且圓心在原點的半圓，因此其面積為$\dfrac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \pi = \dfrac{25}{2}\pi$，故選$(D)$

Solution 2

> Calculus solution by Uriah

考慮$y=\sqrt{25-x^2}$，令$y=0$得到$x=\pm 5$，因此圖形交於x軸在$x=-5$與$x=5$上。

因此我們考慮$\displaystyle\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

令$x=5\sin t$，反推$t=\arcsin(\frac{x}{5})$，而$dx=5\cos tdt$

則$\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}dx\Rightarrow\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}5\sqrt{25-25\sin^2 t}\cos tdt=25\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=25\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$=25(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})\Big|_{t=\frac{-\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}}=25(\frac{\pi}{2})=\frac{25\pi}{2}$，故選$(D)$

105-01-15

Statement

多項式$f(x)$以x^2-1、x^2-5x+6除之的餘式分別為$3x+1$、$2x-1$，則以x^2-3x+2的餘式為何？

$(A)\quad -x+5$

$(B)\quad x+2$

$(C)\quad 5x+1$

$(D)\quad 2x+7$

$(E)\quad -2x+3$

Solution

考慮$x^2-1=(x-1)(x+1)$

考慮$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

考慮$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，且設x^2-3x+2的餘式為$ax+b$

若$x=2$，則結果等價於x^2-5x+6的餘式帶入$x=2$的結果，也就是$4-1=3$

因此$2a+b=3$

若$x=1$，則結果等價於x^2-1的餘式帶入$x=1$的結果，也就是$3+1=4$

因此$a+b=4$

透過$\begin{cases}2a+b=3\\a+b=4\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(-1,5)$，得到$x^2-3x+2$的餘式為$-x+5$，故選$(A)$

105-01-16

Statement

ΔABC中，若$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=7:8:3$，則$\cos A=?$

$(A)\quad \frac{-1}{8}$

$(B)\quad \frac{-1}{7}$

$(C)\quad \frac{1}{8}$

$(D)\quad \frac{1}{7}$

$(E)\quad \frac{1}{3}$

Solution

利用餘弦定理，$\cos A=\frac{7^2+3^2-8^2}{2\times7\times3}=\frac{-6}{42}=-\frac{1}{7}$，故選$(B)$

105-01-17

Statement

設向量$\vec{a}=<1,2>$，$\vec{b}=<\frac{1}{2}-4^{x+1},7\cdot2^x>$，若$\vec{a}//\vec{b}$，則$x=?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad \frac{1}{8}$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 3$

Solution

由於$\vec{a}//\vec{b}$，所以$(\frac{1}{2}-4^{x+1})\times2=7\cdot2^x$

$\Rightarrow 1-8\cdot4^x=7\cdot2^x$

$\Rightarrow -8\cdot2^{2x}-7\cdot2^x+1=0$

令$t=2^x$，則$-8t^2-7t+1=0$，得到$t=\frac{1}{8}$或$t=-1$(不合)

還原t，得到$x=-3$，故選(A)

105-01-18

Statement

設$\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，則$\sqrt{1+\sin2\theta}-\sqrt{1-\sin2\theta}=?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad \sin\theta$

$(C)\quad 2\sin\theta$

$(D)\quad \cos\theta$

$(E)\quad 2\cos\theta$

Solution

$\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}-\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=2\cos\theta$，故選$(E)$

105-01-19

Statement

設x為實數，求$f(x)=3(5^x+5^{-x})-2(25^x+25^{-x})+1$之最大值為何

(A)　1

(B)　2

(C)　3

(D)　5

(E)　25

Solution

令$t=5^x+5^{-x}$，則$t^2=25^x+25^{-x}+2$

因此可以把式子轉成$f(t)=-2t^2+3t+5$

利用配方法，可以知道$f(t)=-2t^2+3t+5 \Rightarrow f(t)=-2(t-\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{49}{8}$

需要注意，t不能帶$\dfrac{3}{4}$，因為$\dfrac{3}{4}$不在t的值域。

利用算幾不等式，得到$\dfrac{5^x+5^{-x}}{2}\geq\sqrt{1}$

因此$5^x+5^{-x}\geq 2$，得到$t\geq 2$，因此t代2

因此$f(2)=-2(\dfrac{5}{4})^2+\dfrac{49}{8}=3$，故選$(C)$

105-01-20

Statement

設點(a,b)在直線$x-2y=0$上且點(c,d)在直線$2x-4y=1$上，則$(a-c)^2+(b-d)^2$之最小值為何？

(A)　$\dfrac{1}{20}$

(B)　$\dfrac{1}{10}$

(C)　$\dfrac{1}{5}$

$(D) \quad \frac{1}{\sqrt{10}}$

$(E) \quad \frac{1}{\sqrt{20}}$

Solution

兩條線為平行線，因此我們考慮兩條直線的距離

利用兩直線距離公式，得到$\frac{|0-1|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$

因此$(a-c)^2+(b-d)^2 = (\frac{1}{\sqrt{20}})^2 = \frac{1}{20}$，故選$(A)$

105年第2次北科入學數學會考

105-02-01

Statement

若$\dfrac{1}{\alpha}$和$\dfrac{1}{\beta}$為方程式$x+\dfrac{3}{x}=1$的兩根，則$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{9}$

$(B)\quad \dfrac{1}{3}$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 3$

Solution

$x+\dfrac{3}{x}=1$

$\Rightarrow x^2+3=x$

$\Rightarrow x^2-x+3=0$

利用偉達定理

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-(\dfrac{-1}{1})=1=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$\dfrac{1}{\alpha\beta}=3\Rightarrow\alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

$\because \alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{1}{3}$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，故選$(A)$

105-02-02

Statement

下列何者為方程式$4(4^x+4^{-x})-(2^x+2^{-x})-60=0$的解？

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad 0$

(D) 1

(E) 3

Solution

$4(4^x+4^{-x})-(2^x+2^{-x})-60=0$

$\Rightarrow 4(2^{2x}+2^{-2x})-(2^x+2^{-x})-60=0$

令$t=(2^x+2^{-x})$，則$t^2=2^{2x}+2^{-2x}+2$

將式子轉成$4t^2-t-68=0$

得到$t=-4$(不合)與$t=\dfrac{17}{4}$

還原t，得到$x=\pm 2$，故選(B)

105-02-03

Statment

若$0\leq\theta\leq 2\pi$，則滿足方程式$\dfrac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta}=0$之$\theta$的個數為何？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$\cos\theta(1+2\sin\theta)=0$

$\cos\theta=0\Rightarrow\theta=90^\circ,270^\circ$

$(1+2\sin\theta)=0\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow\theta=240^\circ,\theta=300^\circ$

考慮$\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta$的定義域，要求$\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta\neq 0$

因此$-2\sin^2\theta-\sin\theta+1\neq 0$

得到$\sin\theta\neq -1,\dfrac{1}{2}$

因此$\sin\theta\neq 270^\circ,60^\circ,120^\circ$

故答案有3個，故選(D)

105-02-04

Statement

已知$f(x)$為二次多項式。若$f(x) < 0$之解為$-3 < x < 2$且$f(1) = -4$，則$f(x) =$?

(A) $x^2 - 3x + 2$

(B) $x^2 - 2x - 3$

(C) $x^2 + x - 6$

(D) $x^2 + 2x - 7$

(E) $x^2 + 3x - 8$

Solution

因為$f(x) < 0$之解為$-3 < x < 2$，因此$f(x)$可以列式成$f(x) = a(x+3)(x-2)$

又$f(1) = -4$，因此$a \times 4 \times -1 = -4$，得到$a = 1$

因此$f(x) = (x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$，故選$(C)$

105-02-05

Statement

已知一正方體所有邊長和為x。若將此正方體的表面積和體積之值加總表示成一多項式，則此多項式包含哪一種因式？

(A) $x + 6$

(B) $x + 12$

(C) $x + 18$

(D) $x + 36$

(E) $x + 72$

Solution

所有邊長和為x，因此一邊長為$\frac{x}{12}$

可知體積為$\frac{x^3}{12^3}$且表面積為$\frac{x^2}{24}$

因此兩個加總得到$\frac{x^3}{1728} + \frac{x^2}{24} = \frac{x^3 + 72x^2}{1728} = \frac{x^2(x+72)}{1728}$，故有因式$x + 72$

105-02-06

Statement

已知向量$\vec{a}=<5,-12>$，向量$\vec{b}$與向量$\vec{a}$同向且$|\vec{b}|=39$，若$\vec{b}$之起點為$(-1,3)$，則$\vec{b}$之終點為何？

$(A)\quad (14,-33)$

$(B)\quad (-14,33)$

$(C)\quad (-18,45)$

$(D)\quad (18,-45)$

$(E)\quad (4,-9)$

Solution

向量$\vec{b}$與向量$\vec{a}$同向，因此$\vec{b}=<5a,-12a>, a\in\mathbb{R}$

又$|\vec{b}|=39$，因此$\sqrt{(5a)^2+(-12a)^2}=39$，得到$a=3$

因此$\vec{b}=<15,-36>$，又$\vec{b}$之起點為$(-1,3)$

因此$\vec{b}$之終點為$(-1+15,3-36)=(14,-33)$，故選(A)

105-02-07

Statement

方程式$\log x+\log(x+2)=\log(x+1)+1$的解為何？

$(A)\quad 4-\sqrt{26}$

$(B)\quad 4-2\sqrt{3}$

$(C)\quad 4-\sqrt{2}$

$(D)\quad 4+2\sqrt{3}$

$(E)\quad 4+\sqrt{26}$

Solution

$\log x+\log(x+2)=\log(x+1)+1$

$\Rightarrow \log(\dfrac{x^2+2x}{10x+10})=0$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+2x}{10x+10}=1$

$\Rightarrow x^2-8x-10=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\times1\times-10}}{2}=\dfrac{8\pm2\sqrt{26}}{2}=4\pm\sqrt{26}$

由於$4<\sqrt{26}$，因此$4-\sqrt{26}<0$，不在$\log x$的值域內，因此不合

故$x=4+\sqrt{26}$，故選(E)

105-02-08

Statement

設$\sin 2\theta=\dfrac{4}{5}$，則$\sin^4\theta+\cos^4\theta=?$

$(A)\quad \dfrac{17}{25}$

$(B)\quad \dfrac{18}{25}$

$(C)\quad \dfrac{19}{25}$

$(D)\quad \dfrac{4}{5}$

$(E)\quad \dfrac{21}{25}$

Solution

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta$

$=\sin^4\theta+2(\sin\theta\cos\theta)^2+\cos^4\theta$

$=\sin^4\theta+\dfrac{1}{2}(\sin^2 2\theta)+\cos^4\theta=1$

因此$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-\dfrac{1}{2}(\dfrac{4}{5})^2=\dfrac{17}{25}$，故選$(A)$

105-02-09

Statement

已知θ為平面上兩向量$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角，若$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=5$且$|2\vec{a}+\vec{b}|=7$，則$cos\theta=?$

$(A)\quad \dfrac{-1}{5}$

$(B)\quad \dfrac{-1}{3}$

$(C)\quad \dfrac{1}{5}$

$(D)\quad \dfrac{1}{3}$

$(E)\quad \dfrac{4}{5}$

Solution

$|2\vec{a}+\vec{b}|=7$

$\Rightarrow 4|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=49$

$\Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})=-3$

又$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-3$

因此$\cos\theta=\dfrac{-3}{15}=\dfrac{-1}{5}$，故選$(A)$

105-02-10

Statement

若$\dfrac{x^3-5}{x^2-1}=f(x)+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$，其中$f(x)$為一次式且$a,b$為常數，求$a+b=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad 0$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 3$

Solution

假設$f(x)=cx+d$

$x^3-5=(cx+d)(x^2-1)+a(x+1)+b(x-1)$

$=cx^3-cx+dx^2+ax+a+bx-b$

$=cx^3+dx^2+(a-c+b)x+(a-b)=x^3-5$

因此$c=1,d=0$

$\begin{cases} a+b-1=0 \\ a-b=-5 \end{cases}$，解聯立得$a=-2$且$b=3$

因此$a+b=1$，故選(C)

105-02-11

Statement

若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{b}}{x-1}=\dfrac{1}{4}$，則$a+b=?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad 1$

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{b}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-x+(b-a)}{(ab+bx)(x-1)}=\frac{1}{4}$$

若極限值存在，則$b-a=1$，且$ab+b=4$

因此，$\begin{cases} b-a=1 \\ ab+b=4 \end{cases}$，故得到$(a,b)=(-3,-2)$或$(a,b)=(1,2)$

$a+b=-5$或3，故選(D)

105-02-12

Statement

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+3h)^2-4^2}{\sqrt{4+3h}-2}=?$$

(A) 0

(B) 16

(C) 32

(D) 64

(E) 不存在

Solution

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+3h)^2-4^2}{\sqrt{4+3h}-2}=\lim_{h\to 0}\frac{(4+3h-4)(4+3h+4)}{\sqrt{4+3h}-2}=\lim_{h\to 0}\frac{(4+3h-4)(4+3h+4)(\sqrt{4+3h}+2)}{4+3h-4}$$

$\lim\limits_{h\to 0}(3h+8)(\sqrt{4+3h}+2)=8\times 4=32$，故選$(C)$

105-02-13

Statement

若拋物線$y=x^2-ax+3$與直線$3x+y+1=0$不相交且a為整數，則a有幾種可能？

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Solution

已知拋物線的動點為$(x, x^2 - ax + 3)$

因此考慮代入$3x + y + 1$時會大於0

得到$3x + x^2 - ax + 4 > 0 \Rightarrow x^2 + (3 - a)x + 4 > 0$

利用判別式：$(3 - a)^2 - 16 > 0$確認解與x無交集

得到$-1 < a < 7$，因此a有7種可能，故選(E)

105-02-14

Statement

直線$ax - y = b$與$x + 2y = 3$垂直且過點$(2, 3)$，則$ab =$?

(A) -4

(B) -2

(C) 0

(D) 2

(E) 4

Solution

由於兩條直線垂直，因此可知$a = 2$

又$2x - y = b$過點$(2, 3)$，代入後可知$b = 1$，因此$ab = 2$，故選(D)

105-02-15

Statement

設$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$，$g(x) = 2 + x - x^2$，則合成函數$f \circ g$的定義域為何？

(A) $\varnothing$(空集合)

(B) $0 < x < 1$

(C) $0 \leq x \leq 1$

(D) $x < 0$或$x > 1$

(E) $x \leq 0$或$x \geq 1$

Solution

$f(g(x))=\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{-x^2+x}}$

考慮$\sqrt{-x^2+x}\neq 0$，因此$-x^2+x>0$，因此$0<x<1$，故選(B)

105-02-16

Statement

若直線L的斜率為$\frac{2}{3}$且與x軸所夾之銳角為θ，則$\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=?$

(A) $\frac{-3}{\sqrt{13}}$

(B) $\frac{-2}{\sqrt{13}}$

(C) $\frac{-1}{\sqrt{13}}$

(D) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

(E) $\frac{3}{\sqrt{13}}$

Solution

直線L的斜率為$\frac{2}{3}$，因此可知$m=\frac{2}{3}$，也就是$\tan\theta=\frac{2}{3}$

透過$\tan\theta=\frac{2}{3}$，可知$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$且$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$

因此$\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\sin\theta=\frac{-2}{\sqrt{13}}$，故選$(B)$

105-02-17

Statement

已知$A(3,5),B(-1,2),C(4,7)$為坐標平面上三點，則$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}=?$

(A) $(-4,-3)$

(B) $(-8,-6)$

(C) $(4,3)$

(D) $(8,6)$

(E) $(12,9)$

Solution

$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+2(\overrightarrow{BA})=2\overrightarrow{BA}$

又$\overrightarrow{BA}=<4,3>$，因此$2\overrightarrow{BA}=<8,6>$，故選$(D)$

105-02-18

Statement

若一拋物線通過$(-2,19),(6,16),(1,4)$三點，則此拋物線的頂點坐標為何？

$(A)\quad(2,1)$

$(B)\quad(2,3)$

$(C)\quad(2,5)$

$(D)\quad(2,6)$

$(E)\quad(2,7)$

Solution

由$(-2,19)$與$(6,19)$兩點可知，頂點必為$(2,y)$

因此$y=a(x-2)^2+b$

代入$(1,4)$後得到$4=a+b$

代入$(-2,19)$後得到$19=16a+b$

因此$a=1,b=3$，故頂點為$(2,3)$，故選(B)

105-02-19

Statement

若$f(x)=\log_{\sqrt{5}}(2x^3-5x^2-10x+8)$，則$f(2-\sqrt{3})=?$

$(A)\quad-4$

$(B)\quad-2$

$(C)\quad1$

$(D)\quad2$

$(E)\quad4$

Solution

利用綜合除法，將$2x^3-5x^2-10x+8$轉換成以$(x-2)$的形式

$$
\begin{array}{rrrr|}
2 & -5 & -10 & 8 \\
  & 4 & -2 & -24 \\
\hline
2 & -1 & -12 & \multicolumn{1}{|r}{-16} \\
  & 4 & 6 & \\
\cline{1-3}
2 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{-6} & \\
  & 4 & & \\
\cline{1-2}
2 & 7 & &
\end{array}
$$

得到$f(x)=\log_{\sqrt{5}}(2(x-2)^3+7(x-2)^2-6(x-2)-16)$

$f(2-\sqrt{3})=\log_{\sqrt{5}}(6\sqrt{3}+21-6\sqrt{3}-16)-\log_{\sqrt{5}}(5)=2$，故選$(D)$

105-02-20

Statement

若一橢圓之焦點為$(1-\sqrt{3},-1)$與$(1+\sqrt{3},-1)$且過$(3,-2)$，則此橢圓長軸之長為何？

$(A)\quad 2\sqrt{3}$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 2\sqrt{5}$

$(D)\quad 2\sqrt{6}$

$(E)\quad 2\sqrt{7}$

Solution

原點$O=(\frac{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})}{2},\frac{-1-1}{2})=(1,-1)$

$a^2=3+b^2\Rightarrow b^2=a^2-3$

因此可以列式$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y+1)^2}{a^2-3}=1$

得$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{a^2-3}=1$，解方程式得到$a=\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{6}$

因為a^2-3代入$\sqrt{2}$後會小於0，所以橢圓不成立變成雙曲線，因此$\pm\sqrt{2}$不合。

因此長軸為$2a=2\sqrt{6}$，故選(D)

106年第1次北科入學數學會考

106-01-01

Statement

已知點A在圓$x^2+12x+y^2+32=0$上，且點B在圓$x^2+y^2+16y+55=0$，則$\overline{AB}$之長度最小值為何？

$(A)\quad 5$

$(B)\quad 6$

$(C)\quad 7$

$(D)\quad 8$

$(E)\quad 9$

Solution

用配方法改寫式子

$x^2+12x+y^2+32=0 \Rightarrow (x+6)^2+y^2=4$，圓心為$(-6,0)$且半徑為$2$

$x^2+y^2+16y+55=0 \Rightarrow x^2+(y+8)^2=9$，圓心為$(0,-8)$且半徑為$3$

兩圓心距離為$\sqrt{6^2+8^2}=10$，大於兩半徑和，因此$\overline{AB}>0$

故$\overline{AB}=10-2-3=5$，故選(A)

106-01-02

Statement

若橢圓方程式$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=10$，則橢圓短軸長為何？

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 4$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 6$

Solution

由方程式可以知道

焦點為$(1,5)$與$(1,-3)$，因此$2c=5-(-3)=8$，$c=4$

長軸長$2a=10$，因此$a=5$

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9}=3$，因此橢圓短軸長為$2b=6$，故選$(E)$

106-01-03

Statement

若直線L與直線$5x+7y=1$垂直，且L通過兩直線$2x-3y+1=0$與$4x+5y-9=0$的交點，則L的方程式為何？

$(A)\quad 5x-7y=-2$

$(B)\quad 5x+7y=12$

$(C)\quad 7x-5y=2$

$(D)\quad 7x+5y=12$

$(E)\quad 7x+5y=20$

Solution

直線L與直線$5x+7y=1$垂直，設$L:7x-5y=d$

且L通過兩直線$2x-3y+1=0$與$4x+5y-9=0$的交點

因此解聯立方程組$\begin{cases}2x-3y+1=0\\4x+5y-9=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(1,1)$

帶入直線L，得到$d=2$，因此$L:7x-5y=2$，故選(D)

106-01-04

Statement

$\log_2 216-\log_4 9-\log_2 9=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 4$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 6$

Solution

$\log_2 216-\log_4 9-\log_2 9$

$=\log_2 216-\log_2 3-\log_2 9=\log_2 8=3$，故選$(B)$

106-01-05

Statement

設α,β為方程式$x^2-2x-1=0$的兩根，則$\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=?$

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -\dfrac{1}{2}$

$(C)\quad -\dfrac{1}{3}$

$(D)\quad \dfrac{1}{6}$

$(E)\quad \dfrac{1}{2}$

Solution

利用根與係數

$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{1}=2$

$\alpha\beta=\dfrac{-1}{1}=-1$

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=4\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=6$

$\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{(-1)(2)}{6}=-\dfrac{1}{3}$，故選$(C)$

106-01-06

Statement

設$\dfrac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$且$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，則$\sqrt{2+2\cos 2\theta}=?$

$(A)\quad 0$

$(B)\quad \dfrac{4}{5}$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad \dfrac{6}{5}$

$(E)\quad \dfrac{8}{5}$

Solution

$\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \Rightarrow \cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

因此$\sqrt{2+2\cos 2\theta} = \sqrt{2+\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$，故選$(E)$

106-01-07

Statement

已知$f(x)$為二次函數且$f(x) > 0$的解為$-1 < x < \frac{1}{2}$，則$f(2x) < 0$的解為何？

(A) $x < -1$或$x > \frac{1}{2}$

(B) $x < -2$或$x > 1$

(C) $-2 < x < 1$

(D) $x < -\frac{1}{2}$或$x > \frac{1}{4}$

(E) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}$

Solution

$\because f(x) > 0$的解為$-1 < x < \frac{1}{2}$

$\therefore f(x) < 0$的解為$x < -1 \cup x > \frac{1}{2}$

$\therefore f(2x) < 0$的解為$x < \frac{-1}{2} \cup x > \frac{1}{4}$，故選$(D)$

106-01-08

Statement

設α, β為方程式$\log_3 x = 5 - \frac{4}{\log_3 x}$之兩根，則$\alpha + \beta = ?$

(A) 84

(B) 85

(C) 86

(D) 87

(E) 88

Solution

$\log_3 x = 5 - \dfrac{4}{\log_3 x}$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 5\log_3 x - 4$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0$

$\Rightarrow (\log_3 x - 4)(\log_3 x - 1) = 0$

$\Rightarrow \log_3 x = 4, \log_3 x = 1$

$\Rightarrow x = 81, x = 3$

因此$81 + 3 = 84$，故選(A)

106-01-09

Statement

求$2 \cdot 9^x - 39 \cdot 3^{x-1} - 45 = 0$，則$x =?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$2 \cdot 9^x - 39 \cdot 3^{x-1} - 45 = 0$

$\Rightarrow 2 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 3^x - 45 = 0$

令$t = 3^x$，解$2t^2 - 13t - 45 = (t + \dfrac{5}{2})(t - 9) = 0$，$t = -\dfrac{5}{2}$(不合)，$t = 9$

從$t = 9$還原後，得到$x = 2$，故選(B)

106-01-10

Statement

下列何者正確？

$(A)\quad \sin\dfrac{3\pi}{4} < \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$(B)\quad \cos(-\theta) = -\cos\theta$

$(C)\quad 1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$

$(D)\quad \sec(\dfrac{\pi}{2} + \theta) = -\csc\theta$

$(E)\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

Solution

$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$

106-01-11

Statement

若$13^5-11\cdot 13^4-25\cdot 13^3-12\cdot 13^2+a\cdot 13-13=0$，求$a=?$

$(A)\quad -12$

$(B)\quad -11$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 17$

Solution

$13^5-11\cdot 13^4-25\cdot 13^3-12\cdot 13^2+a\cdot 13-13=0$

等價於$f(x)=x^5-11x^4-25x^3-12x^2+ax-13$能被$x-13$整除

利用綜合除法來找出a

1	-11	-25	-12	a	-13	
	13	26	13	13	13a+169	13
1	2	1	1	(a+13)	13a+156	

考慮$13a+156=0$，得到$a=-12$

106-01-12

Statement

設拋物線方程式為$x=ay^2+b$，其中$a>0$。若此拋物線過$(0,\sqrt{2})$且焦點坐標為$(-\frac{1}{2},0)$，則$a-b=?$

$(A)\quad \frac{1}{2}$

$(B)\quad \frac{3}{2}$

$(C)\quad \frac{7}{4}$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad \frac{7}{2}$

Solution

$x=ay^2+b \Rightarrow \frac{1}{a}(x-b)=y^2$

因此頂點為$(b,0)$，且焦距為$\frac{1}{4a}$，雙曲線為左右向

拋物線過$(0,\sqrt{2})$，帶入後$\frac{-b}{a}=2 \Rightarrow 2a+b=0$

焦點坐標為$(-\frac{1}{2},0)$，因此$b+\frac{1}{4a}=\frac{-1}{2} \Rightarrow 4ab+2a+1=0$

兩式$\begin{cases}2a+b=0\\4ab+2a+1=0\end{cases}$解聯立，得到$(a,b)=(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$(不合)或$(a,b)=(\frac{1}{2},-1)$

因此$a-b=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$，故選$(B)$

106-01-13

Statement

若$f(x)=x^3-4x^2+2x+k$且$f(1+\sqrt{3})=2$，求$k=?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 6$

Solution 1

> 綜合除法解 by Trava

$f(x)=x^3-4x^2+2x+k=(x-1)^3-(x-1)^2-3(x-1)+k-1$

則$f(1+\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-(\sqrt{3})^2-3\sqrt{3}+k-1=2$

得到$k=6$，故選(E)

Solution 2

> 暴力解 by Uriah

$f(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^3-4(1+\sqrt{3})^2+2(1+\sqrt{3})+k=2$

$=10+6\sqrt{3}-4(4+2\sqrt{3})+2(1+\sqrt{3})+k=2$

$=10-16+2+k=2$，得到$k=6$，故選(E)

106-01-14

Statement

已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$之夾角為θ，若$|\vec{a}|=2$、$|\vec{b}|=4$且$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=-4$，則$\theta=?$

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

Solution

$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})-2|\vec{b}|^2=-4$

得到$(\vec{a}\cdot\vec{b})=4$

又$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=8\cos\theta=4$

因此$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，故選(D)

106-01-15

Statement

若雙曲線方程式$x^2-2x-4y^2-3=0$之兩頂點坐標為(a,b)與(c,d)，則$a+b+c+d=?$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$x^2-2x-4y^2-3=0$

$\Rightarrow (x-1)^2-4y^2=4$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}-y^2=1$

得到中心為$(x,y)=(1,0)$，因此頂點過$y=0$

帶入$y=0$後得到$x=-1$或$x=3$

因此頂點為$(-1,0)$與$(3,0)$

$a+b+c+d=(-1)+0+3+0=2$，故選(C)

106-01-16

Statement

設(a,b)滿足$3x+4y=12$，則$(a-4)^2+(b-5)^2$最小值為何？

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 8$

$(C)\quad 12$

$(D)\quad 16$

$(E)\quad 20$

Solution 1

> 柯西不等式解 by Trava

已知$3a+4b=12$

則$((a-4)^2+(b-5)^2)(3^2+4^2)\geq(3a+4b-12-20)^2$

$\Rightarrow((a-4)^2+(b-5)^2)(25)\geq(-20)^2$

$\Rightarrow((a-4)^2+(b-5)^2)\geq 16$，故選$(D)$

Solution 2

> 點到直線距離解 by Trava

$d^2=(\dfrac{|12+20-12|}{\sqrt{3^2+4^2}})^2=16$

Solution 3

> 配方法解 by Uriah

動點$P=(\dfrac{12-4b}{3},b)$在$3x+4y=12$上

帶入P至$(a-4)^2+(b-5)^2$內，得到$(\dfrac{-4b}{3})^2+(b-5)^2$

配方法後得到$\dfrac{25}{9}(b+\dfrac{9}{5})^2+16$

因此在$b=-\dfrac{9}{5}$時有最小值16，故選(D)

106-01-17

Statement

已知x^2-3x+2除$f(x)$的餘式為$2x+5$且x^2+2x-3除$g(x)$的餘式為$3x-1$，則$x-1$除$[f(x)+g(x)]$的餘式為何？

$(A)\quad -2$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 9$

Solution

設$h(x), v(x)$分別為$f(x)$除x^2-3x+2與$g(x)$除x^2+2x-3的餘式

$f(x)=(x^2-3x+2)h(x)+2x+5=(x-2)(x-1)h(x)+2x+5$

$g(x)=(x^2+2x-3)v(x)+3x-1=(x+3)(x-1)v(x)+3x-1$

因此$x-1$除$[f(x)+g(x)]$的餘式為$2\cdot 1+5+3\cdot 1-1=9$，故選(E)

106-01-18

Statement

設$\pi<\theta\leq\frac{3\pi}{2}$且$18\sin^2\theta+9\cos\theta-13=0$，則$\tan\theta=?$

$(A)\quad \frac{\sqrt{2}}{4}$

$(B)\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(C)\quad \sqrt{2}$

$(D)\quad 2\sqrt{2}$

$(E)\quad 3\sqrt{2}$

Solution

$18\sin^2\theta+9\cos\theta-13=0$

$\Rightarrow -18\cos^2\theta+9\cos\theta+5=0$

$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{3}$或$\cos\theta=\frac{5}{6}$(不合)

因此$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=2\sqrt{2}$，故選$(D)$

106-01-19

Statement

令向量$\vec{a} =< 1, 1 >$、$\vec{b} =< 2-x, y-1 >$。若$y > 0$、$2|\vec{a}| = |\vec{b}|$且$\vec{a} \perp \vec{b}$，則$(x, y) =?$

$(A)\quad(-1,-2)$

$(B)\quad(3,2)$

$(C)\quad(4,3)$

$(D)\quad(5,4)$

$(E)\quad(6,5)$

Solution

$\because \vec{a} \perp \vec{b}$

$\therefore (2-x)+(y-1)=0 \Rightarrow -x+y+1=0$

又$\sqrt{(2-x)^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{2}$

得到$x^2+y^2-2y-4x+5=(x-2)^2+(y-1)^2=8$

將$x=y+1$代入，得到$2(y-1)^2=8$，因此$y=-1$(不合)或$y=3$

將$y=3$代入$-x+y+1=0$，得到$x=4$

因此$(x,y)=(4,3)$，故選(C)

109-01-20

Statement

$\dfrac{-7x+22}{(x+4)(x-1)^2} = \dfrac{A}{x+4} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$，求$A+B+C=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 4$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 6$

Solution

$-7x+22 = A(x-1)^2 + B(x+4)(x-1) + C(x+4)$

將$x=1$代入，得到$15=5C$，因此$C=3$

將$x=-4$代入，得到$25A=50$，因此$A=2$

將$x=0$代入，得到$22=2-4B+12$，因此$B=-2$

因此$A+B+C=\mathbf{3}$，故選(B)

106年第2次北科入學數學會考

106-02-01

Statement

方程式$2\sin x = x$有幾個解？

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 4$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 6$

Solution 1

> 不用微積分的解 by Trava

因為$y = x$與$y = 2\sin x$均通過原點，所有在原點時會有交點

考慮到$y = 2\sin x$與$y = x$為奇函數，所以只要判斷$x > 0$的範圍就可以推得所有交點

由於$2\sin x$的最大值為2，所以只要$x > 2$，$y = x$與$y = 2\sin x$就不可能有交點

令$f(x) = 2\sin x - x$

$f(\frac{\pi}{2}) > 0$，所以可以知道$2\sin x$的遞增速度比x快

在$[\frac{\pi}{2}, 2]$的區間內$2\sin x$為遞減，因為x為嚴格遞增

所以在$[\frac{\pi}{2}, 2]$會有一個交點，然後在$[-\frac{\pi}{2}, -2]$也會有一個

所以總共有3個交點，故選(B)

Solution 2

> 微積分解 by Uriah

$f(x) = 2\sin x - x$，考慮$-\pi < x < \pi$

$\Rightarrow f'(x) = 2\cos x - 1 = 0$，則$\cos x = \dfrac{1}{2}$，極值發生在$\dfrac{\pi}{3}$與$-\dfrac{\pi}{3}$

考慮$-\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3}$，以$x = 0$考慮，則$f'(0) = 1$，遞增

考慮$\dfrac{\pi}{3} < x < \pi$，以$x = \dfrac{\pi}{2}$考慮，則$f'(\dfrac{\pi}{2}) = -1$，遞減

考慮$-\pi < x < -\dfrac{\pi}{3}$，以$x = \dfrac{-\pi}{2}$考慮，則$f'(-\dfrac{\pi}{2}) = -1$，遞減

考慮$f(\dfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3} > 0$，$f(-\dfrac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3} < 0$

根據中間值定理，可知$-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$之曲線經過$x$軸，故存在一個解。

由於極值發生在兩個頂點上，因此$x=\frac{\pi}{3}$右邊將會遞減到負無限大，且$x=-\frac{\pi}{3}$左邊將會遞增到無限大

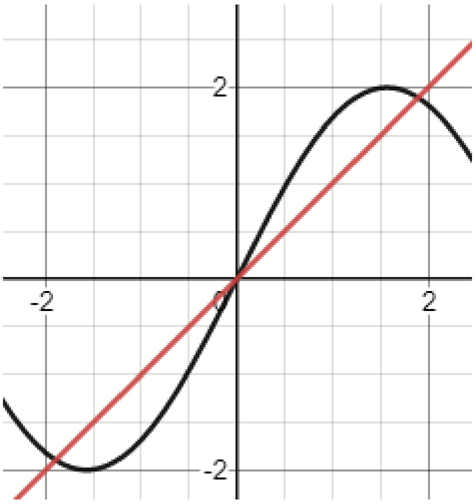
根據中間值定理，都會經過$y=0$，故存在兩個解。

總共有3個解，故選(B)

Solution 3

> 畫圖解By Uriah

畫出圖



故選(B)

106-02-02

Statement

設x為實數，求滿足兩不等式$x^3>12+8x-x^2$，$x^2<4+3x$的解為何？

$(A)\quad x<2$或$x>3$

$(B)\quad x>3$

$(C)\quad 3<x<4$

$(D)\quad -2<x<4$

$(E)\quad x>4$

Solution

考慮$x^3>12+8x-x^2$

整理式子，$x^3+x^2-8x-12>0 \Rightarrow (x+2)^2(x-3)>0$

考慮式子兩種可能的情況

$$\begin{cases}(x+2)^2<0\\(x-3)<0\end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$$

$$\begin{cases}(x+2)^2>0\\(x-3)>0\end{cases} \Rightarrow x>3$$

兩式取聯集，得到$x>3$

考慮$x^2<4+3x$

整理式子，$x^2-3x-4>0 \Rightarrow (x-4)(x+1)>0 \Rightarrow -1<x<4$

因此$(x>3)\cup -1<x<4 \Rightarrow 3<x<4$，故選$(C)$

106-02-03

Statement

$\cos 127^\circ \cos 23^\circ + \cos 217^\circ \cos 67^\circ = ?$

$(A)\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(B)\quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(C)\quad -\dfrac{1}{2}$

$(D)\quad \dfrac{1}{2}$

$(E)\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$\cos 127^\circ \cos 23^\circ + \cos 217^\circ \cos 67^\circ$

$=-\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 37^\circ \cos 67^\circ$

$=-\sin 37^\circ \sin 67^\circ - \cos 37^\circ \cos 67^\circ$

$=-(\sin 37^\circ \sin 67^\circ + \cos 37^\circ \cos 67^\circ)$

$= -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故選$(A)$

106-02-04

Statement

不等式$\log_2(x-\dfrac{1}{2}) > \log_4(2-x)-1$之解為何？

$(A)\quad \dfrac{1}{2} < x < 2$

$(B)\quad 1 < x < \dfrac{3}{2}$

$(C)\quad \dfrac{3}{2} < x < 2$

$(D)\quad \dfrac{-1}{4} < x < 1$

$(E)\quad 1 < x < 2$

Solution

考慮式子定義域：$\dfrac{1}{2} < x < 2$

$\log_2(x-\dfrac{1}{2}) > \log_4(2-x)-1$

$\Rightarrow \log_2(x-\dfrac{1}{2}) > \dfrac{1}{2}\log_2(2-x)-1$

$\Rightarrow 2\log_2(x-\dfrac{1}{2}) > \log_2(2-x)-2$

$\Rightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}$

$\Rightarrow x^2-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4} > 0$

$\Rightarrow 4x^2-3x-1 > 0$

$\Rightarrow (4x+1)(x-1) > 0$

$\Rightarrow x > 1 \cup \dfrac{-1}{4} < x$

將結果與定義域取交集，得到$1 < x < 2$，故選(E)

106-02-05

Statement

求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2+x-2}=?$

$(A)\quad \frac{1}{48}$

$(B)\quad \frac{1}{40}$

$(C)\quad \frac{1}{32}$

$(D)\quad \frac{1}{24}$

$(E)\quad \frac{1}{16}$

Solution 1

令$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，則$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+3)-f(3x+1)}{(x-1)(x+2)}$

令$h=x-1$，則$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+3)-f(3x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(3h+4)}{h(h+3)}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(3h+4)}{h(h+3)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(3h+4)}{h}\cdot\frac{1}{h+3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(4)-f(3h+4)+f(4)}{h}\cdot\frac{1}{h+3}$$

$$=(\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(4)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(3h+4)-f(4)}{h})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+3}$$

$$=(f'(4)-3f'(4))\cdot\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}f'(4)$$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$，$-\frac{2}{3}f'(4)=\frac{1}{24}$，故選$(D)$

Solution 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2+x-2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+3)(3x+1)}}}{x^2+x-2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{(x^2+x-2)\sqrt{3x^2+10x+3}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{3x+1-x-3}{(x^2+x-2)\sqrt{3x^2+10x+3}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{(x^2+x-2)\sqrt{3x^2+10x+3}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2}{(x+2)\sqrt{3x^2+10x+3}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$$

$\dfrac{2}{3\cdot 4\cdot 4}=\dfrac{1}{24}$，故選$(D)$

106-02-06

Statement

若$\dfrac{1}{\alpha}$和$\dfrac{1}{\beta}$為方程式$x(x-6)=-2$的兩根且$\alpha>\beta$，則$\alpha^2\beta-\alpha\beta^2\ =?$

$(A)\quad \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$(B)\quad \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$(C)\quad \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$(D)\quad \dfrac{\sqrt{7}}{5}$

$(E)\quad \dfrac{\sqrt{7}}{6}$

Solution

$x(x-6)=-2\Rightarrow x^2-6x+2=0$

利用根與係數，$\dfrac{1}{\alpha\beta}=2$，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=6$

因此$\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$，代入$\dfrac{1}{\alpha\beta}$得$\alpha+\beta=3$，且$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

$\alpha-\beta=\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$

$\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(A)$

106-02-07

Statement

已知橢圓方程式為$\dfrac{(x-1)^2}{a}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$且其短軸平行$y$軸，若$P(k,2)$為橢圓上一點且$P$點到點$(1,2)$的距離不超過3，假設$a$為整數，則$a$有幾種可能？

$(A)\quad 3$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

(D) 6

(E) 7

Solution

由方程式可知道原點為$(1,2)$

從題目上可知道P點到原點最長不超過3，因此可以知道$\sqrt{a}<3$，因此$a<9$

又因為方程式是橢圓且短軸平行y軸，因此$a\geq 4$

故$4\leq a<9$，共有5種可能，故選(C)

106-02-08

Statement

設直線L通過兩點$(3,0)$、$(0,-4)$，直線M為通過點$(-1,1)$且與L垂直之直線，若M其方程式為$ax+by=1$，則$a+b=?$

(A) -7

(B) -1

(C) 1

(D) 3

(E) 7

Solution

L通過兩點，因此可得$L: y=\dfrac{0-(-4)}{3-0}(x-3)\Rightarrow -4x+3y+12=0$

則M垂直於L，因此$M: 3x+4y=d$，代入$(-1,1)$得到$d=1$，故$M: 3x+4y=1$

因此$3+4=7$，故選(E)

106-02-09

Statement

若$a>0$，$a\neq 1$，且$\log_a(\sqrt{2}-1)=2x$，求$\dfrac{a^{-3x}-a^{3x}}{a^{-x}+a^{x}}=?$

(A) $2-\sqrt{2}$

(B) $3-\sqrt{2}$

(C) $1+\sqrt{2}$

(D) $2+\sqrt{2}$

(E) $3+\sqrt{2}$

Solution

$\log_a(\sqrt{2}-1)=2x$

$\Rightarrow \sqrt{2}-1=a^{2x}$

$\dfrac{a^{-3x}-a^{3x}}{a^{-x}+a^{x}}=\dfrac{a^{-2x}-a^{4x}}{1+a^{2x}}=\dfrac{1-a^{6x}}{a^{2x}(1+a^{2x})}=\dfrac{1-(\sqrt{2}-1)^3}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(8-5\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\dfrac{6-2\sqrt{2}}{2}=3-\sqrt{2}$，故選$(B)$

106-02-10

Statement

若拋物線$x=\dfrac{1}{64}y^2$與直線$x-\dfrac{1}{k}y+1=0$有交點且k為整數，則k有幾種可能？

$(A)\quad 3$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 8$

$(E)\quad 9$

Solution

$x+1=\dfrac{1}{k}y$

$k(x+1)=y$

考慮直線與拋物線只有一個交點

$x=\dfrac{1}{64}(k(x+1))^2$

$x=\dfrac{1}{64}k^2(x^2+2x+1)$

$64x=k^2x^2+2k^2x+k^2$

$k^2x^2+(2k^2-64)x+k^2=0$

則利用判別式，考慮$b^2-4ac=0$

$(2k^2-64)^2-4\times k^2\times k^2=0$

$\Rightarrow 4k^4-256k^2+4096-4k^4=0$

$\Rightarrow -256k^2=-4096$

$\Rightarrow k^2=16$，得到$k=\pm 4$

因此只要k落在$-4\le k\le 4$的區間，且$k\neq 0$，與拋物線均有交點，故答案為8，故選(D)

106-02-11

Statement

已知向量$\vec{a} =< 3, 1 >$、$\vec{b} =< 2, 4 >$。若$|\vec{a} + t\vec{b}|$之最小值為何？

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 2

(D) $\sqrt{5}$

(E) $\sqrt{6}$

Solution

$\vec{a} + t\vec{b} =< 3 + 2t, 1 + 4t >$

因此考慮
$|\vec{a} + t\vec{b}| = \sqrt{(3 + 2t)^2 + (1 + 4t)^2} = \sqrt{9 + 12t + 4t^2 + 1 + 8t + 16t^2} = \sqrt{20t^2 + 20t + 10}$

對根號內的式子配方法，得到$\sqrt{20(t^2 + t + \frac{1}{4}) - 5 + 10} = \sqrt{20(t + \frac{1}{2})^2 + 5}$

因此在$t = -\frac{1}{2}$時，有最小值為$\sqrt{5}$，故選(D)

106-02-12

Statement

若$\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{\sqrt{3x + a} - b}{x}) = \frac{3}{4}$，求$a + b =?$

(A) 6

(B) 9

(C) 12

(D) 15

(E) 18

Solution

$$\lim_{x \to 0^+} (\frac{\sqrt{3x + a} - b}{x}) = \lim_{x \to 0^+} (\frac{3x + a - b^2}{(\sqrt{3x + a} + b)x}) = \frac{3}{4}$$

極限存在必要條件：$a - b^2 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} (\frac{3}{(\sqrt{3x + a} + b)}) = \frac{3}{\sqrt{a} + b} = \frac{3}{4}$$

得到$\sqrt{a}+b=4$

兩式$\begin{cases} a-b^2 &= 0 \\ \sqrt{a}+b=4 \end{cases}$解聯立，得到$(a,b)=(4,2)$

故$a+b=6$，故選(A)

106-02-13

Statement

若$\dfrac{x^4+2x^3+2x+2}{x^3-1}=f(x)+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$，其中$f(x)$為一次式且$a$、$b$為常數，則$a+b=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

設$f(x)=dx+e$

$\dfrac{x^4+2x^3+2x+2}{x^3-1}=f(x)+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

$\Rightarrow x^4+2x^3+2x+2=(dx+e)(x^3-1)+a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$

$\Rightarrow x^4+2x^3+2x+2=dx^4-dx+ex^3-e+ax^2+ax+a+bx^2-bx+cx-c$

$\Rightarrow x^4+2x^3+2x+2=dx^4+ex^3+(a+b)x^2+(-d+a-b+c)x+(-e+a-c)$

比較係數，$d=1,e=2$，且$a+b=0$，$-1+a-b+c=2$，$(-2+a-c)=2$，故選(C)

106-02-14

Statement

已知向量$|\vec{a}|=2$、$|\vec{b}|=3$、$|\vec{c}|=2$且$|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|=0$，則$|\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}|=?$

$(A)\quad \sqrt{\dfrac{21}{2}}$

$(B)\quad \sqrt{\dfrac{23}{2}}$

$(C)\quad \sqrt{\dfrac{24}{2}}$

$(D)\quad \sqrt{\dfrac{26}{2}}$

$(E) \quad \sqrt{\frac{27}{2}}$

Solution

已知$|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|=0$

因此$\vec{a}+\vec{b}=-2\vec{c}$

則$|\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}|=|\vec{b}+3\vec{c}|$

又$\vec{b}+2\vec{c}=-\vec{a}$

$|\vec{b}|^2+4(\vec{b}\cdot\vec{c})+4|\vec{c}|^2=|-\vec{a}|^2 \Rightarrow (\vec{b}\cdot\vec{c})=\frac{-21}{4}$

$|\vec{b}+3\vec{c}|=\sqrt{|\vec{b}|^2+6(\vec{b}\cdot\vec{c})+9|\vec{c}|^2}=\sqrt{9+\frac{-126}{4}+36}=\sqrt{\frac{54}{4}}=\sqrt{\frac{27}{2}}$，故選$(E)$

106-02-15

Statement

假設$P(2,0)$、$Q(0,2)$和R為圓$x^2+y^2=4$上三點，則三角形PQR最大面積為何？

$(A) \quad 4$

$(B) \quad 2+2\sqrt{2}$

$(C) \quad 4+\sqrt{2}$

$(D) \quad 4\sqrt{2}$

$(E) \quad 4+4\sqrt{2}$

Solution 1

畫出圖可知，要使得最大面積，R點一定在PQ線段中垂過圓心交於圓上的一點，得到等腰三角形RPQ。

因此面積為$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix}\right|=2+2\sqrt{2}$

Solution 2

令$R=(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

則面積為$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\cos\theta & 0 \\ 2 & 0 & 2\sin\theta & 2 \end{vmatrix}\right|=|2\sin\theta+2\cos\theta-2|$

找出$|2\sin\theta+2\cos\theta-2|$的最大值

$-2\sqrt{2}\leq 2\sin\theta+2\cos\theta\leq 2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}-2\leq 2\sin\theta+2\cos\theta-2\leq 2\sqrt{2}-2$

$0 \leq |2\sin\theta + 2\cos\theta - 2| \leq 2\sqrt{2} + 2$

所以面積最大值為$2\sqrt{2} + 2$

106-02-16

Statement

下列哪一條直線為兩直線$4x - 3y = 2$、$3x - 4y = -7$的交角平分線方程式？

(A)　$x - y = -9$

(B)　$x - y = 9$

(C)　$x + y = -9$

(D)　$x + y = 9$

(E)　$7x - 7y = 5$

Solution

考慮一條線與兩直線等距，故

$$\frac{|4x - 3y - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x - 4y + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$4x - 3y - 2 = \pm(3x - 4y + 7)$

得到直線為$x + y - 9 = 0$(鈍角)或$7x - 7y + 5 = 0$(銳角)，故選(D)

106-02-17

Statement

若$f(x) = \log_{27} \sqrt[3]{g(x)}$，其中$g(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x - 1$，則$f(\sqrt{3} - 1) =$?

(A)　$\frac{1}{6}$

(B)　$\frac{1}{3}$

(C)　$\frac{5}{6}$

(D)　1

(E)　$\sqrt{3}$

Solution

利用綜合除法，將$x^4+5x^3+6x^2+x-1$以$(x+1)$的形式表現

$$
\begin{array}{rrrrrl}
1 & 5 & 6 & 1 & -1 & \\
 & -1 & -4 & -2 & 1 & \big| -1 \\
\hline
1 & 4 & 2 & -1 & \color{red}{0} & \\
 & -1 & -3 & 1 & & \\
\hline
1 & 3 & -1 & \color{red}{0} & & \\
 & -1 & -2 & & & \\
\hline
1 & 2 & \color{red}{-3} & & & \\
 & -1 & & & & \\
\hline
\color{red}{1} & \color{red}{1} & & & &
\end{array}
$$

得到$g(x)=(x+1)^4+(x+1)^3-3(x+1)^2$

因此$g(\sqrt{3}-1)=9+3\sqrt{3}-9=3\sqrt{3}$

$f(\sqrt{3}-1)=\log_{27}\sqrt[3]{g(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{9}\log_3 3\sqrt{3}=\frac{1}{6}$，故選$(A)$

106-02-18

Statement

函數$f(x)=\sin^2 x-\cos x+1$的最大值為何？

$(A)\quad \frac{5}{4}$

$(B)\quad \frac{7}{4}$

$(C)\quad 2$

$\color{red}{(D)\quad \frac{9}{4}}$

$(E)\quad 3$

Solution

$f(x)=\sin^2 x-\cos x+1=-\cos^2 x-\cos x+2$

令$t=\cos x$，則$f(t)=-t^2-t+2=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$

考慮$t=\frac{1}{2}$在$\cos x$的值域內，因此最大值為$\frac{9}{4}$，故選(D)

106-02-19

Statement

若$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$且$f(g(x))=\dfrac{x+1}{2x+1}$，求$g(1)=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

已知$f(1)=0$，且$f(g(1))=\dfrac{2}{3}$

考慮$\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2}{3}$，得到$x=5$

因此$g(1)=5$，故選(E)

106-02-20

Statement

設$4^{x+1}-15\cdot 2^{x+1}+32=0$的兩根為$\alpha$和$\beta$，則$\alpha+\beta=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$4^{x+1}-15\cdot 2^{x+1}+32=0$

$\Rightarrow 4\cdot 4^x-30\cdot 2^x+32=0$

令$t=2^x$，則$4t^2-30t+32=0\Rightarrow 2t^2-15t+16=0$

得到$2^\alpha+2^\beta=\dfrac{15}{2}$且$2^{\alpha+\beta}=8$

因此$\alpha+\beta=3$，故選(C)

107年第1次北科入學數學會考

107-01-01

Statement

設橢圓$9x^2+16y^2-18x-135=0$的兩焦點為F_1,F_2，點P在橢圓上，若$\overline{PF_1}=2$，則$\overline{PF_2}=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 6$

$(E)\quad 8$

Solution

$9x^2+16y^2-18x-135=0$

利用配方法，改寫式子得$\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

可得長軸$2a=2\sqrt{16}=8$

又因為$\overline{FP_1}+\overline{FP_2}=2a$，因此$\overline{PF_2}=8-2=6$，故選$(D)$

107-01-02

Statement

若α,β為方程式$x+\dfrac{2}{x}+1=0$的兩根，則$\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=?$

$(A)\quad -10$

$(B)\quad -6$

$(C)\quad -2$

$(D)\quad 6$

$(E)\quad 10$

Solution

$x+\dfrac{2}{x}+1=0$

$\Rightarrow x^2+x+2=0$

利用根與係數，可得$\alpha+\beta=-1$，且$\alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha\beta((\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta) = 2(1-6) = -10$，故選$(A)$

107-01-03

Statement

設$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$，其中$a$、$b$、$c$皆為實數。若不等式$f(x) < 0$之解為$x < -2$且$f(2) = 0$，則$3a + b + 2c = ?$

$(A)\quad 5$

$(B)\quad 6$

$(C)\quad 7$

$(D)\quad 8$

$(E)\quad 9$

Solution

考慮$f(x) = (x+2)(x-2)^2$，展開後得到$(x+2)(x^2-4x+4) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

故$3a + b + 2c = 3\cdot(-2) - 4 + 2\cdot 8 = 6$，故選$(B)$

107-01-04

Statement

若ΔABC中，向量$\overrightarrow{AB} =< 3, -2 >$、$\overrightarrow{BC} =< x, -1 >$、$\overrightarrow{CA} =< 4, y >$，則$y - x = ?$

$(A)\quad -10$

$(B)\quad -4$

$(C)\quad 4$

$(D)\quad 10$

$(E)\quad 20$

Solution

$\overrightarrow{CA} =< 4, y > \Rightarrow \overrightarrow{AC} =< -4, -y >$

因此$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$，也就是$< 3 + x, -2 - 1 > = < -4, -y >$，得到$x = -7$且$y = 3$

因此$y - x = 3 - (-7) = 10$，故選(D)

107-01-05

Statement

若$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\sin\theta+\cos\theta$可能為下列何者？

$(A)\quad -1$

$(B)\quad -\frac{1}{2}$

$(C)\quad \frac{1}{2}$

$(D)\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

$(E)\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

因此$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2+4\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{12}{8}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

107-01-06

Statement

若拋物線$y=2x^2+bx+c$的頂點為$(1,4)$，則$2b+c=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$y=2x^2+bx+c\Rightarrow y=2(x^2+\frac{b}{2}x+\frac{b^2}{4})+\frac{b^2}{2}+c=2(x+\frac{b}{2})^2+\frac{b^2}{2}+c$

可得$\frac{b}{2}=-1$，因此$b=-2$，又$\frac{b^2}{2}+c=4$，得到$c=2$

故$2b+c=-4+2=-2$，故選(A)

107-01-07

Statement

設ΔABC中，$\angle BAC$為鈍角，$|\overrightarrow{AB}|=6$、$|\overrightarrow{AC}|=7$。若ΔABC的面積為$7\sqrt{5}$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$?

$(A)\quad -28$

$(B)\quad -14$

$(C)\quad -7$

$(D)\quad 14$

$(E)\quad 28$

Solution

$\Delta ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=7\sqrt{5}$，可得$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，推得$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta=42\cdot\frac{-2}{3}=-28$，故選$(A)$

107-01-08

Statement

若$\cot\frac{5\pi}{8}=k$，則$\csc\frac{\pi}{8}=$?

$(A)\quad -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

$(B)\quad -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

$(C)\quad k$

$(D)\quad \frac{k}{1+k^2}$

$(E)\quad \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

Solution

$\cot(\frac{5\pi}{8})=-\tan\frac{\pi}{8}=k$

因此$\tan\frac{\pi}{8}=-k$，可得對邊$-k$，鄰邊1，且斜邊$\sqrt{k^2+1}$

因此$\csc\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$。故選$(B)$

107-01-09

Statement

設x、y、z皆為實數，且$xyz \neq 0$。若$8^x = 9^y = 5^z = a$，且$\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$，則$a$為何？

(A)　500

(B)　600

(C)　700

(D)　800

(E)　900

Solution

$8^x = 9^y = 5^z = a$

$\Rightarrow x\log 8 = y\log 9 = z\log 5 = \log a$

可得$x = \dfrac{\log a}{\log 8}$，$y = \dfrac{\log a}{\log 9}$，$z = \dfrac{\log a}{\log 5}$

$\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{\log 8}{3\log a} + \dfrac{\log 9}{2\log a} + \dfrac{\log 5}{\log a} = \dfrac{2\log 8 + 3\log 9 + 6\log 5}{6\log a} = \dfrac{1}{2}$

因此$\dfrac{2}{3}\log 8 + \log 9 + 2\log 5 = \log a$

可得$a = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 9 \cdot 25 = 900$，故選$(E)$

107-01-10

Statement

若$a + 2b = 10$，則$a^2 + b^2$的最小值為何？

(A)　10

(B)　15

(C)　20

(D)　25

(E)　30

Solution

利用柯西不等式，得到$(1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) \geq (a + 2b)^2$

因此可知$(a^2 + b^2) \geq 20$，$a^2 + b^2$的最小值為20，故選(C)

107-01-11

Statement

設$f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，求$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(15)=?$

(A)　1

(B)　2

(C)　3

(D)　4

(E)　5

Solution

$f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(15)$可推得規律得$-\sqrt{1}+\sqrt{16}=3$，故選(C)

107-01-12

Statement

若x^2-x-2除$x^4+x^3+ax^2+x+b$的餘式為$x+1$，則$a^2+b^2=?$

(A)　145

(B)　146

(C)　147

(D)　148

(E)　149

Solution

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

設$x^4+x^3+ax^2+x+b=g(x)(x-2)(x+1)+(x+1)$

令$x=2$，得$4a+b+26=3$

令$x=-1$，得$a+b-1=0$

解聯立方程組$\begin{cases} a+b=-23 \\ a+b=1 \end{cases}$可得$(a,b)=(-8,9)$

因此$a^2+b^2=64+81=145$，故選(A)

107-01-13

Statement

若$f(x)=x^4-9x^3+5x^2-3x+16$，則$f(5-2\sqrt{3})$ =?

(A) $6-4\sqrt{3}$

(B) $8-6\sqrt{3}$

(C) $10-8\sqrt{3}$

(D) $12-10\sqrt{3}$

(E) $14-12\sqrt{3}$

Solution

考慮以$x-5$來表示$x^4-9x^3+5x^2-3x+16$

1	-9	5	-3	16	
	5	-20	-75	-390	5
1	-4	-15	-78	-374	
	5	5	-50		
1	1	-10	-128		
	5	30			
1	6	20			
	5				
1	11				

可得$f(x)=(x-5)^4+11(x-5)^3+20(x-5)^2-128(x-5)-374$

因此$f(5-2\sqrt{3})=144-264\sqrt{3}+240+256\sqrt{3}-374=10-8\sqrt{3}$，故選$(C)$

107-01-14

Statement

若拋物線$y=x^2+kx+2$恆在直線$x+y-1=0$之上方，則k的範圍為何？

(A) $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

(B) $k<-\sqrt{2}$或$k>\sqrt{2}$

(C) $-2<k<2$

(D) $-3<k<1$

(E) $k<-3$或$k>1$

Solution

$x+y-1=0 \Rightarrow y=-x+1$

因此$y=x^2+kx+2$

$\Rightarrow -x+1=x^2+kx+2$

$\Rightarrow x^2+(k+1)x+1=0$

利用判別式來考慮交點，也就是

$(k+1)^2-4\times 1\times 1>0$

$\Rightarrow (k+1)^2>4$

$\Rightarrow -3<k<1$，故選(D)

107-01-15

Statement

$\frac{\log 3\cdot\log_6 25\cdot\log_7 8}{\log_7 5\cdot\log 2\cdot\log_6 27}=?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$\frac{\log 3\cdot\log_6 25\cdot\log_7 8}{\log_7 5\cdot\log 2\cdot\log_6 27}=\frac{\log 3\cdot 2\log_6 5\cdot 3\log_7 2}{\log_7 5\cdot\log 2\cdot 3\log_6 3}=\frac{\log 3}{\log 2}\cdot\frac{2\log 5}{3\log 3}\cdot\frac{3\log 2}{\log 5}=2$，故選$(B)$

107-01-16

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為$\frac{\pi}{3}$。若$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=2$，則$|3\vec{a}-4\vec{b}|=?$

(A) 5

(B) $\sqrt{53}$

(C) 8

(D) $\sqrt{73}$

(E) 9

Solution

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$

因此$|3\vec{a}-4\vec{b}|=\sqrt{(3\vec{a}-4\vec{b})^2}=\sqrt{9|\vec{a}|^2-24(\vec{a}\cdot\vec{b})+16|\vec{b}|^2}$

$=\sqrt{9\times 9-24\times 3+16\times 4}=\sqrt{81-72+64}=\sqrt{73}$，故選$(D)$

107-01-17

Statement

若$\dfrac{ax^2+bx+c}{(x+2)(x+1)^2}=\dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$，則$3a+2b+c=?$

(A) 16

(B) 17

(C) 18

(D) 19

(E) 20

Solution

$ax^2+bx+c=-1(x+1)^2+2(x+2)(x+1)+(x+2)$

$=x^2+5x+5$

因此$a=1,b=5,c=5$，$3a+2b+c=3\cdot 1+2\cdot 5+5=18$，故選$(C)$

107-01-18

Statement

若$\log(1+\cos\theta)+\log(\dfrac{1}{4}-\cos\theta)=\log(-\dfrac{3}{4}\cos\theta)$，則$\theta$可能為下列何者？

(A) $-\dfrac{\pi}{6}$

(B) $\dfrac{\pi}{6}$

(C) $\dfrac{\pi}{3}$

(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

(E) $\dfrac{5\pi}{6}$

Solution

$\log(1+\cos\theta)+\log(\frac{1}{4}-\cos\theta)=\log(-\frac{3}{4}\cos\theta)$

$\Rightarrow (1+\cos\theta)(\frac{1}{4}-\cos\theta)=-\frac{3}{4}\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cos\theta-\cos^2\theta=-\frac{3}{4}\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{1}{2}$

考慮$\cos\theta=\frac{1}{2}$，會使得$\frac{1}{4}-\cos\theta<0$，故不合。

因此$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，得到$\theta=\frac{4\pi}{3}$或$\theta=\frac{2\pi}{3}$，故選(D)

107-01-19

Statement

設$P(4,3)$、$Q(4,-2)$、$R(1,2)$為平面上三點，求點P到直線$\overleftrightarrow{QR}$的距離

(A) 2

(B) $\sqrt{5}$

(C) 3

(D) 5

(E) $\sqrt{26}$

Solution

$\Delta PQR=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}4 & 4 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 2 & 3\end{vmatrix}|=\frac{15}{2}$

又$\overline{QR}=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=5$

設$\overline{QR}$上有一點S使得$\overline{PS}\perp\overline{QR}$

因此$\frac{1}{2}\times\overline{PS}\times\overline{QR}=\frac{15}{2}$，得到$\overline{PS}=3$，故選$(C)$

107-01-20

Statement

若α為方程式$\log_3(x+2)=2-\log_3(x-6)$之根，則下列何者為$\alpha$之倍數？

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 14

Solution

$\log_3(x+2) = 2 - \log_3(x-6)$

$\Rightarrow (x+2)(x-6) = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 9$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Rightarrow (x-7)(x+3) = 0$

因此$x = 7$或$x = -3$(不合)，故選(E)

107年第2次北科入學數學會考

107-02-01

Statement

設拋物線$y=ax^2+bx-c$，a、b、c皆為正實數，則下列敘述何者正確？

(A) 開口向下

(B) 與x軸無交點

(C) 交於正y軸

(D) 頂點在第三象限

(E) 準線平行y軸

Solution

$y=ax^2+bx-c$

$\Rightarrow y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})-\frac{b^2}{4a}-c$

$\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})-\frac{b^2}{4a}-c$

因此可知頂點為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2+4ac}{4a})$，必在第三象限，故選$(D)$

107-02-02

Statement

$(150x^5-312x^4+28x^3-13x-9)\div(x-2)$的餘式為何？

(A) -19

(B) -3

(C) -1

(D) 1

(E) 3

Solution

利用綜合除法

150	-312	28	0	-13	-9	
	300	-24	8	16	6	2
150	-12	4	8	3	-3	

可得餘式為-3，故選(B)

107-02-03

Statement

設$Q(a,b)$為直線$L:2x-y=4$到$P(1,3)$的最近點，則$a+b=?$

(A)　2

(B)　$\frac{7}{2}$

(C)　5

(D)　$\frac{13}{2}$

(E)　7

Solution

考慮做一直線M垂直直線L，且過點$(1,3)$

因此直線$M:x+2y=d$，代入$(1,3)$得到$d=7$

找直線L與直線M的交點，解聯立方程組$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(3,2)$

因此$Q(a,b)=(3,2)$，$a+b=5$，故選(C)

107-02-04

Statement

設有一橢圓中心在$(1,1)$，其長軸平行x軸且長軸長為短軸長的3倍，並通過$(4,0)$，則短軸長為何？

(A)　$2\sqrt{2}$

(B)　$2\sqrt{3}$

(C)　$2\sqrt{5}$

(D)　$2\sqrt{6}$

(E)　$4\sqrt{2}$

Solution

設$2a = 3 \times 2b = 6b$，因此$a = 3b$

可列式$\dfrac{(x-1)^2}{9b^2} + \dfrac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

代入$(4,0)$可得$b = \sqrt{2}$，因此短軸長$2b = 2\sqrt{2}$，故選(A)

107-02-05

Statement

若直線$3x + 4y + k = 0$與圓$x^2 + y^2 + 8x + 16y - 20 = 0$相切且$k < 0$，則$k = ?$

$(A)\quad -8$

$(B)\quad -6$

$(C)\quad -4$

$(D)\quad -3$

$(E)\quad -2$

Solution

$x^2 + y^2 + 8x + 16y - 20 = 0$

透過配方法後可得$(x+4)^2 + (y+8)^2 = 100$

可得半徑為10且中心為$(-4,-8)$

考慮直線與圓相切，因此直線與中心相隔的距離為10

利用點到直線公式，$\dfrac{|3x+4y+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 10$

將x, y代入$(-4,-8)$，得到$|-44+k| = 50$，因此$k = -6$或$k = 94$(不合)，故選(B)

107-02-06

Statement

設$\vec{a} =< 1, t-1 >$、$\vec{b} =< 2t-2, t+2 >$。若$\vec{a} \perp \vec{b}$且$|\vec{b}| > 2$，則$t = ?$

$(A)\quad -4$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 4$

Solution

已知$\vec{a} \perp \vec{b}$，因此$2t-2+(t+2)(t-1)=t^2+3t-4=(t+4)(t-1)=0$

故$t=-4$或$t=1$

考慮$t=1$，得到$\vec{b}=<0,3>=\sqrt{0^2+3^2}=3$

考慮$t=-4$，得到$\vec{b}=<-10,-2>=\sqrt{10^2+2^2}=\sqrt{104}$

故兩者皆可，故選$(A),(C)$

107-02-07

Statement

設$f(x)=(5^{2x}+5^{-2x})-(5^x+5^{-x})+3$，則$f(x)$的最小值為何？

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

令$t=5^x+5^{-x}$，則$t^2=5^{2x}+5^{-2x}+2$

因此$f(t)=t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

利用算幾不等式，得到$\frac{5^x+5^{-x}}{2} \geq \sqrt{1}$，得到$t$的最小值域為$2$，故$t=\frac{1}{2}$不在值域內。

將2帶入$f(t)$得到$f(2)=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3$，故選$(C)$

107-02-08

Statement

不等式$x^2-4x+2 \geq |x-2|$的解為何？

$(A)\quad (-\infty,0] \cup [1,\infty)$

$(B)\quad (-\infty,0] \cup [2,\infty)$

$(C)\quad (-\infty,0] \cup [4,\infty)$

$(D)\quad (-\infty,1] \cup [2,\infty)$

$(E)\quad (-\infty,1] \cup [4,\infty)$

Solution

考慮$|x-2|=x-2$，則

$x^2-4x+2\geq x-2$

$\Rightarrow x^2-5x+4\geq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 4$或$x\leq 1$

考慮$|x-2|=-x+2$，則

$x^2-4x+2\geq -x+2$

$\Rightarrow x^2-3x\geq 0$

$\Rightarrow x(x-3)\geq 0$

$\Rightarrow x\leq 0$或$x\geq 3$

兩種結果取交集，得到$(-\infty,0]\cup[4,\infty)$，故選$(C)$

107-02-09

Statement

設$a=\log\dfrac{4}{3}$、$b=\log\dfrac{2}{3}$，則$\log 24=?$

$(A)\quad 2a-5b$

$(B)\quad 3a-5b$

$(C)\quad 4a-5b$

$(D)\quad 4a-4b$

$(E)\quad 4a-3b$

Solution

$4a-5b=4\log\dfrac{4}{3}-5\log\dfrac{2}{3}=\log((\dfrac{4}{3})^4\cdot(\dfrac{3}{2})^5)=\log 3\cdot 2^3=\log 24$，故選$(C)$

107-02-10

Statement

設方程式$3^{x^2}\cdot(3^x)^2=27$之所有解為α與β，則$\alpha^2+\beta^2=?$

$(A)\quad 10$

$(B)\quad 11$

$(C)\quad 12$

$(D)\quad 13$

$(E)\quad 14$

Solution

$3^{x^2}\cdot(3^x)^2=27$

$\Rightarrow 3^{x^2}\cdot 3^{2x}=3^3$

$\Rightarrow 3^{x^2+2x-3}=1$

$\Rightarrow x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow (x+3)(x-1)=0$

可得$x=1$或$x=-3$

因此$\alpha^2+\beta^2=(1)^2+(-3)^2=10$，故選$(A)$

107-02-11

Statement

$\sin(-23^\circ)\sin 367^\circ+\cos 7^\circ\sin(-247^\circ)=?$

$(A)\quad \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$(B)\quad \frac{-1}{2}$

$(C)\quad \frac{1}{2}$

$(D)\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(E)\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$\sin(-23^\circ)\sin 367^\circ+\cos 7^\circ\sin(-247^\circ)$

$=-\sin(23^\circ)\sin 7^\circ+\cos 7^\circ\cos(23^\circ)$

$=\cos(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故選$(E)$

107-02-12

Statement

若$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，則$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(3x-1)-f(x+1)}{x-1}=?$

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(D) $\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$

(E) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

Solution

令$h=x-1$，則$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(3x-1)-f(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3h+2)-f(h+2)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3h+2)-f(2)-f(h+2)+f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3h+2)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}$$

$$=3\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(3h+2)-f(2)}{3h}-\lim_{h\to0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}$$

$=3\cdot f'(2)-f'(2)=2f'(2)=2\cdot-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$，故選$(D)$

107-02-13

Statement

若甲乙兩人解方程式$x^2+mx+n=0$，甲看錯m解得兩根為-3、5，乙看錯n解得兩根為-4、2，則原方程式的兩根為何？

(A) -3、-4

(B) -3、2

(C) -4、5

(D) 2、5

(E) 3、-5

Solution

甲的方程式為$(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$

乙的方程式為$(x+4)(x-2)=x^2+2x-8$

因此可得原方程式為$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$，解為$x=-5$或$x=3$，故選(E)

107-02-14

Statement

設$\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$，則$B=?$

$(A)\quad -7$

$(B)\quad -5$

$(C)\quad -3$

$(D)\quad -1$

$(E)\quad 2$

Solution

$$\frac{x^2+x-3}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$\Rightarrow x^2+x-3=A(x^2-x+1)(x-1)+B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x-1)^2$

故代$x=1$，得$-1=B$，故選(D)

107-02-15

Statement

設直線L通過$P(1,6)$且與第二象限所圍的三角形面積為4，則直線L的方程式為

$(A)\quad 4x-y=2$

$(B)\quad x+4y=5$

$(C)\quad 2x-y=-4$

$(D)\quad 2x+y=8$

$(E)\quad 4x+y=4$

Solution

令$L:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，又已知$ab=-8$，得$a=\dfrac{-8}{b}$

將L代入$P(1,6)$，$L:\dfrac{1}{a}+\dfrac{6}{b}=1$

代入$a=\dfrac{-8}{b}$，$L:-\dfrac{b}{8}+\dfrac{6}{b}=1$

$\Rightarrow \dfrac{-b^2}{8}+6=b$

$\Rightarrow -b^2-8b+48=0$

$\Rightarrow (b+12)(b-4)=0$

得到$b=4$或$b=-12$(不合，$ab>0$)

因此$a=-2$，代入得$2x-y=-4$，故選(C)

107-02-16

Statement

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 1$

$(C)\quad -1$

$(D)\quad -2$

(E) 不存在

Solution

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1}=\dfrac{2}{-2}=-1$，故選$(C)$

107-02-17

Statement

設$a=\log 2$、$b=\log 3$。若x滿足$5^x-6\cdot 5^{-x}=1$，則$x=?$

$(A)\quad \dfrac{a}{1+b}$

$(B)\quad \dfrac{b}{1+a}$

$(C)\quad \dfrac{b}{a}$

$(D)\quad \dfrac{b}{1-a}$

$(E)\quad \dfrac{a}{1-b}$

Solution

$5^x-6\cdot 5^{-x}=1$

$\Rightarrow 5^{2x}-6=5^x$

$\Rightarrow 5^{2x}-5^x-6=0$

設$t=5^x$，則

$t^2-t-6=0$

$\Rightarrow (t-3)(t+2)=0$

得到$t=-2$(不合)或$t=3$

還原t得到$x=\log_5 3=\dfrac{b}{1-a}$，故選$(D)$

107-02-18

Statement

函數$f(x)=\tan^2 x-\sec x+4$之最小值為何？

$(A)\quad \dfrac{11}{4}$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad \dfrac{13}{4}$

$(D)\quad \dfrac{7}{2}$

$(E)\quad \dfrac{15}{4}$

Solution

$f(x) = \tan^2 x - \sec x + 4$

$= \sec^2 x - 1 - \sec x + 4$

$= \sec^2 x - \sec x + 3$

$= (\sec^2 x - \sec x + \frac{1}{4}) + 3 - \frac{1}{4}$

$= (\sec x - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}$

由於$\sec x$的值域為$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$，因此$\frac{1}{2}$不在$\sec x$的值域內

從值域考慮$\sec x = 1$，得最小值為3，故選(B)

107-02-19

Statement

設$f(x) = \sqrt{5-x}$、$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$，則合成函數$g \circ f$的定義域為何？

$(A)\quad (-4, 5]$

$(B)\quad [-4, 5)$

$(C)\quad [-4, 3)$

$(D)\quad (-4, 3]$

$(E)\quad [3, 5]$

Solution

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5-x}}}$

考慮$\sqrt{3-\sqrt{5-x}} > 0$，則$3-\sqrt{5-x} > 0$，得到$x > -4$

考慮$\sqrt{5-x}$裡面的值必須要是非負整數，因此$x \leq 5$

兩者取交集得到$(-4, 5]$，故選(A)

107-02-20

Statement

若$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + (a-3)x - 3a}{x^2 + 3x + 2} = b$，則$ab =?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 6$

(D) 8

(E) 10

Solution

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + (a-3)x - 3a}{x^2 + 3x + 2} = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + (a-3)x - 3a}{(x+2)(x+1)} = b$$

考慮到極限存在，則分子必須要能被$(x+2)$整除

因此$4 + (-2)(a-3) - 3a = 0$，得到$a = 2$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2} = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = 5$$

故$b = 5$，因此$ab = 10$，故選(E)

108年第1次北科入學數學會考

108-01-01

Statement

若$f(x)$與$g(x)$除以$(x-2)$的餘式分別為5、-2，則$(x^2-x+1)f(x)+(x-3)g(x)$除以$(x-2)$的餘式為何？

(A) 11

(B) 13

(C) 15

(D) 17

(E) 19

Solution

利用餘式定理，將$(x^2-x+1)f(x)+(x-3)g(x)$代入2

得到$3\cdot 5+(-1)\cdot(-2)=17$，故選$(D)$

108-01-02

Statement

若a、b均為實數，且$ax^2+bx-5<0$之解為$\frac{-1}{2}<x<\frac{5}{3}$，則$a+b=?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

透過$\frac{-1}{2}<x<\frac{5}{3}$，可知兩根為$\frac{-1}{2}$與$\frac{5}{3}$

利用根與係數

$\frac{-5}{a}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{-5}{6}$，得到$a=6$

$-\frac{b}{6}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{7}{6}$，得到$b=-7$

因此$a+b=-1$，故選(B)

108-01-03

Statement

若$\sum\limits_{k=1}^{9} a_k = 7$、$\sum\limits_{k=1}^{11} b_k = 5$，且$a_{10} = 5$、$b_{11} = -3$，則$\sum\limits_{k=1}^{10}(5a_k - 4b_k + 3) = ?$

(A)　56

(B)　57

(C)　58

(D)　59

(E)　60

Solution

$$\sum_{k=1}^{10}(5a_k - 4b_k + 3)$$

$$= 5 \cdot \sum_{k=1}^{10} a_k - 4 \cdot \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 3$$

$$= 5(\sum_{k=1}^{9} a_k + a_{10}) - 4(\sum_{k=1}^{11} b_k - b_{11}) + \sum_{k=1}^{10} 3$$

$= 5 \cdot 12 - 4 \cdot (5 - (-3)) + 30 = 58$，故選$(C)$

108-01-04

Statement

若$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$且$\tan\theta + \sec\theta = \frac{3}{2}$，則$\sin\theta = ?$

(A)　$\frac{2}{13}$

(B)　$\frac{3}{13}$

(C)　$\frac{4}{13}$

(D)　$\frac{5}{13}$

(E)　$\frac{6}{13}$

Solution

$\tan\theta+\sec\theta=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta+1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin^2\theta+2\sin\theta+1}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta+8\sin\theta+4=9-9\sin^2\theta$

$\Rightarrow 13\sin^2\theta+8\sin\theta-5=0$

$\Rightarrow (13\sin\theta-5)(\sin\theta+1)=0$

得到$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$或$\sin\theta=-1$(不合)，故選(D)

108-01-05

Statement

在座標平面上，由二元一次聯立不等式$\begin{cases}x\geq 0, y\geq -2\\ x+2y-2\leq 0\\ x+y-2\leq 0\end{cases}$所圍成區域的面積為何？

(A)　5

(B)　7

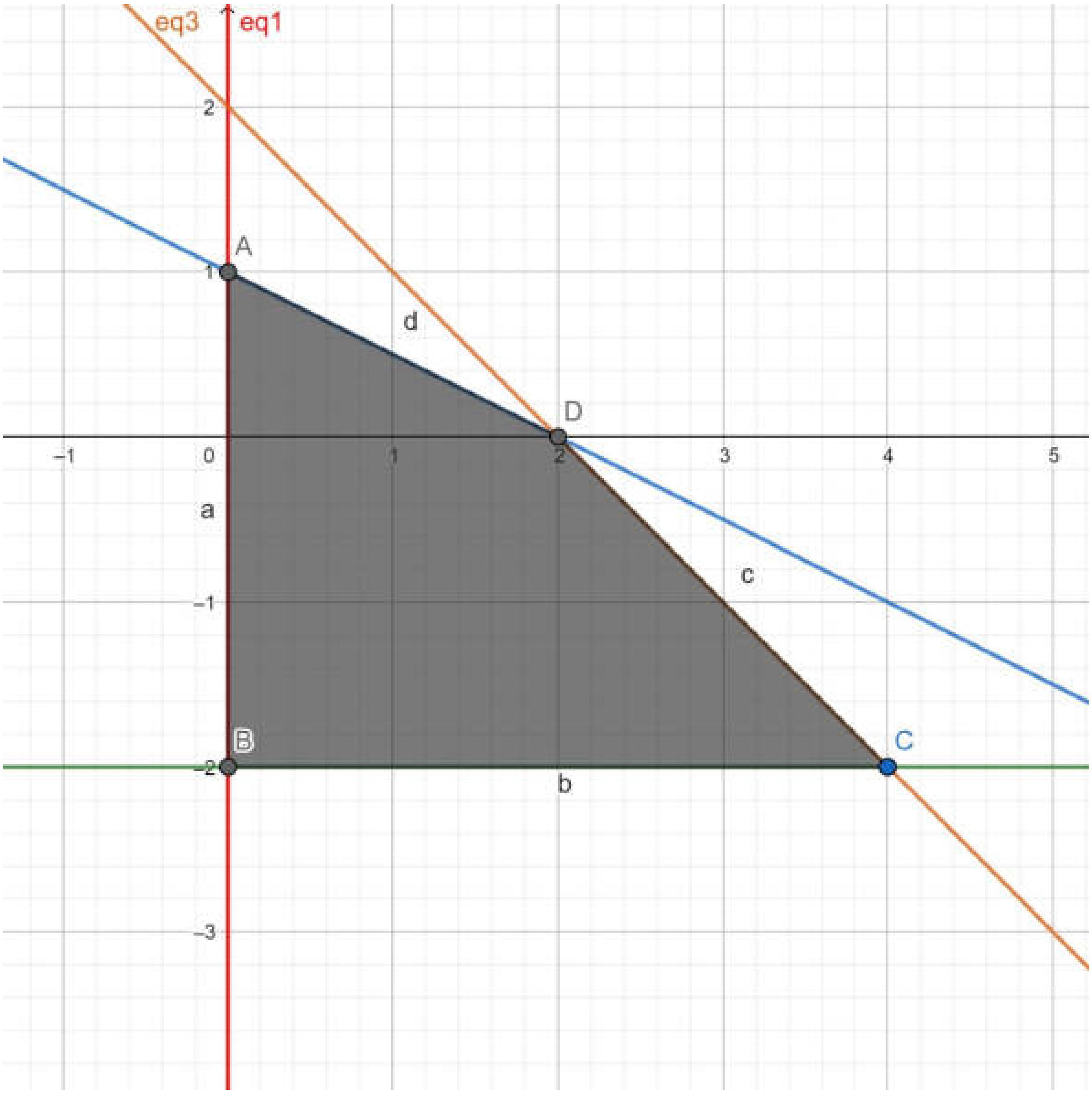
(C)　9

(D)　12

(E)　14

Solution

畫圖



因此面積為$\dfrac{(2+4)\times 2}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=7$，故選$(B)$

108-01-06

Statement

若$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$且$\cos 4\theta=\sin 2\theta$，則$\tan 2\theta=?$

(A) $\dfrac{1}{2}$

(B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(C) 1

(D) $\sqrt{3}$

(E) 2

Solution

$\cos 4\theta = \sin 2\theta$

$\Rightarrow \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \sin 2\theta$

$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 2\theta = \sin 2\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2 2\theta + \sin 2\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin 2\theta - 1)(\sin 2\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \dfrac{1}{2}$或$\sin 2\theta = -1$(不合)

故$\cos 2\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此$\tan 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，故選$(B)$

108-01-07

Statement

若兩圓$C_1 : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$與$C_2 : (x+2)^2 + (y-2)^2 = k$相交，則實數$k$的面積為何？

$(A)\quad 2 \le k \le 4$

$(B)\quad 3 \le k \le 7$

$(C)\quad 4 \le k \le 25$

$(D)\quad 5 \le k \le 36$

$(E)\quad 9 \le k \le 49$

Solution

由方程式可知道

C_1的圓心為$(2,-1)$，C_2的圓心為$(-2,2)$

因此兩圓心的距離為$\sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

考慮C_2到C_1的最短距離，也就是$5 - \sqrt{4} = 3$

考慮C_2到C_1的最短距離，也就是$5 + \sqrt{4} = 7$

因此k的範圍為$9 \le k \le 49$，故選(E)

108-01-08

Statement

若兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}| = |\vec{b}|$、$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{7}$、$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{2}$，則$\cos\theta = ?$

$(A)\quad \dfrac{3}{5}$

$(B)\quad \dfrac{3}{7}$

$(C)\quad \frac{5}{7}$

$(D)\quad \frac{5}{9}$

$(E)\quad \frac{7}{9}$

Solution

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})=7$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})=2$

可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{4}$且$|\vec{a}|^2=\frac{9}{4}$

又$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2\cos\theta=\frac{5}{4}$

可得$\cos\theta=\frac{5}{9}$，故選(D)

108-01-09

Statement

若直線$ax+by-ab=0(a>0、b<0)$過點$(-3,-1)$，且此直線與兩座標軸圍起來的三角形面積為6，則$a=?$

$(A)\quad 2-2\sqrt{2}$

$(B)\quad 2\sqrt{2}-2$

$(C)\quad 2-\sqrt{2}$

$(D)\quad 2+\sqrt{2}$

$(E)\quad 2+2\sqrt{2}$

Solution

$ax+by-ab=0$

$\Rightarrow \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ (截距式)

已知直線與兩座標軸圍起來的三角形面積為6，因此$\frac{-ab}{2}=6$，故$-ab=12$，得$b=\frac{-12}{a}$

代入截距式，得到$-\frac{ax}{12}+\frac{y}{a}=1$

直線過點$(-3,-1)$，得$\frac{3a}{12}-\frac{1}{a}=1$

$\Rightarrow 3a^2-12a-12=0$

$\Rightarrow a^2 - 4a - 4 = 0$

利用公式解得$a = \dfrac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$(負不合)

因此$a = 2 + 2\sqrt{2}$，故選(E)

108-01-10

Statement

若a、b、c皆為整數，且$x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x+a)(x^2+bx+c)$，則$a - b + c = ?$

$(A) \quad -4$

$(B) \quad -2$

$(C) \quad 0$

$(D) \quad 2$

$(E) \quad 4$

Solution

$x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x+a)(x^2+bx+c)$

考慮以下所有有可能為$x^3 - x^2 - 3x + 2$的因式

若因式為$x+1$，則$-1-1+3+2 \neq 0$

若因式為$x-1$，則$1-1-3+2 \neq 0$

若因式為$x+2$，則$-8-4+6+2 \neq 0$

若因式為$x-2$，則$8-4-6+2=0$，故$x-2$為$x^3 - x^2 - 3x + 2$的因式

因此$a = -2$

$x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x^2+bx+c)$

$\Rightarrow x^2 + x - 1 = x^2 + bx + c$

故$b = 1$且$c = -1$

得到$a - b + c = -2 - 1 + (-1) = -4$，故選$(A)$

108-01-11

Statement

若$2^x - 2^{-x} = 2$，則$x = ?$

$(A) \quad \log_2(1+\sqrt{2})$

$(B) \quad \log_2(2+\sqrt{2})$

$(C) \quad \log_2(1+2\sqrt{2})$

$(D)\quad \log_2(2+2\sqrt{2})$

$(E)\quad \log_2(3+2\sqrt{2})$

Solution

$2^x - 2^{-x} = 2$

$\Rightarrow 2^{2x} - 1 = 2^{1+x}$

令$t = 2^x$，則

$\Rightarrow t^2 - 1 = 2t$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

利用公式解，得到$t = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

考慮到$\sqrt{2} > 1$，因此$1 - \sqrt{2} < 0$不在t的值域內，故不合。

還原t得到$\log_2(1+\sqrt{2})$，故選(A)

108-01-12

Statement

若$(\log \dfrac{x}{a})(\log \dfrac{x}{3}) = 2$之兩根乘積為$61$，則$a = ?$

$(A)\quad \dfrac{3}{61}$

$(B)\quad \dfrac{4}{61}$

$(C)\quad \dfrac{61}{4}$

$(D)\quad \dfrac{61}{3}$

$(E)\quad \dfrac{61}{2}$

Solution

$(\log \dfrac{x}{a})(\log \dfrac{x}{3}) = 2$

$\Rightarrow (\log x - \log a)(\log x - \log 3) = 2$

$\Rightarrow (\log x)^2 - (\log 3 + \log a)(\log x) + \log 3 \log a = 2$

$\Rightarrow (\log x)^2 - (\log 3a)(\log x) + \log 3 \log a - 2 = 0$

設α, β為式子的兩根，利用根與係數，得到$\log \alpha + \log \beta = \log 3a$

因此$\log \alpha\beta = \log 3a = \log 61$

故$a = \dfrac{61}{3}$，故選(D)

108-01-13

Statement

設$b > 0$。若兩直線$L_1: 3x - 4y + 2 = 0$與$L_2: 8x + ay + b = 0$相互垂直，且點$(4, -2)$到直線L_2的距離為3，則$a - b = ?$

$(A) \quad -6$

$(B) \quad -4$

$(C) \quad -2$

$(D) \quad 2$

$(E) \quad 4$

Solution

$L_1: 3x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow 6x - 8y + 4 = 0$

已知$L_1 \perp L_2$，因此可知$L_2 = 8x + 6y + b = 0$，故$a = 6$

利用點到直線公式，$\dfrac{|8 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) + b|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 3$，得到$b = 10$或$b = -50$(不合)

因此$a - b = 6 - 10 = -4$，故選(B)

108-01-14

Statement

點$P(1, -6)$到曲線$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 10$的最短距離為何？

$(A) \quad 1$

$(B) \quad 2$

$(C) \quad 3$

$(D) \quad 4$

$(E) \quad 5$

Solution

從式子可以看出，這是一個橢圓曲線，有兩焦點$(4, 0)$與$(-2, 0)$，且長軸平行x軸

因此可知中心為$(\dfrac{4 + (-2)}{2}, \dfrac{0 + 0}{2}) = (1, 0)$，且$c = 3$

又因為$\overline{FP_1} + \overline{FP_2} = 2a$，可知$a = 5$，$b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

因此橢圓的短軸頂點為$(1, 4)$與$(1, -4)$，$(1, -6)$距離橢圓的距離為2，故選(B)

108-01-15

Statement

點$P(0,2)$到曲線$x^2-y^2=1$的最短距離為何？

$(A)\quad 1$

$(B)\quad \sqrt{2}$

$(C)\quad \sqrt{3}$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad \sqrt{5}$

Solution

令$x=\sqrt{y^2+1}$，則

$d=\sqrt{(\sqrt{y^2+1})^2+(y-2)^2}$

$=\sqrt{y^2+1+y^2-4y+4}$

$=\sqrt{2y^2-4y+5}$

$=\sqrt{2(y-1)^2+3}$

當$y=1$時有最小值$\sqrt{3}$，故選(C)

108-01-16

Statement

下列何者正確？

$(A)\quad 0<\theta<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos\theta<\sin\theta$

$(B)\quad \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\theta<\sin\theta$

$(C)\quad \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\Rightarrow\sin\theta<\cos\theta$

$(D)\quad \frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\theta<\sin\theta$

$(E)\quad \frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\Rightarrow\tan\theta<\sin\theta$

Solution

已知當$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則$\tan\theta>\sin\theta$

那麼當$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$時，則$\tan\theta<\sin\theta$，故選$(E)$

108-01-17

Statement

設多項式$f(x)$除以$x+1$、x^2-3x+1的餘式分別為4、$2x+11$。若$f(x)$除以$(x+1)(x^2-3x+1)$的餘式為ax^2+bx+c，則$a+b+c=?$

$(A)\quad -14$

$(B)\quad -13$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 13$

$(E)\quad 14$

Solution

令$f(x)=g(x)(x+1)+4$

$=h(x)(x^2-3x+1)+2x+11$

$=p(x)(x+1)(x^2-3x+1)+ax^2+bx+c$

令$x=-1$，得$a-b+c=4$

令$x^2=(3x-1)$，則$2x+11=3ax+bx+(c-a)$

因此我們可以解聯立方程組$\begin{cases}3a+b=2\\ c-a=11\\ a-b+c=4\end{cases}$，得到$(a,b,c)=(-1,5,10)$

因此$a+b+c=-1+5+10=14$，故選(E)

108-01-18

Statement

不等式$\log_2 x+6\log_x 2<5$之解為何？

$(A)\quad 2<x<3$

$(B)\quad 1<x<4$

$(C)\quad x<1$或$2<x<3$

$(D)\quad x<1$或$4<x<8$

$(E)\quad x>8$

$(F)\quad 0<x<1$或$4<x<8$

Solution

$\log_2 x + 6\log_x 2 < 5$

$\Rightarrow \log_2 x + 6\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x} < 5$

$\Rightarrow \log_2 x + \dfrac{6}{\log_2 x} < 5$

令$t = \log_2 x$

$t + \dfrac{6}{t} < 5$

$\Rightarrow t + \dfrac{6}{t} - 5 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t} < 0$

考慮兩種情況

$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 > 0 \\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (-\infty, 0)$

$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 < 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (2, 3)$

還原t與考慮定義域，得到$0 < x < 1$或$4 < x < 8$，故選(F)

108-01-19

Statement

若x, y, z為實數，且$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$，則$x^2 + 2y^2 + z^2$的最小值為何？

$(A)\quad \dfrac{1}{3}$

$(B)\quad \dfrac{2}{3}$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad \dfrac{4}{3}$

$(E)\quad \dfrac{5}{3}$

Solution

令$t = \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$

則$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}$

因此$x^2 + 2y^2 + z^2 = (2t+1)^2 + 2(-t-1)^2 + (3t+2)^2 = 15t^2 + 20t + 7$

利用配方法，可以得到$15(t+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}$

當$t=\frac{-2}{3}$，則有最小值$\frac{1}{3}$

108-01-20

Statement

若點P介於$A(1,1)$、$B(-5,4)$之間且$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則點$P$到直線$4x-3y=1$之距離為何？

$(A)\quad 4$

$(B)\quad \frac{21}{5}$

$(C)\quad \frac{22}{5}$

$(D)\quad \frac{24}{5}$

$(E)\quad 5$

Solution

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1\Rightarrow\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$

利用內分點公式，可以知道$(\frac{1\times1+(-5)\times2}{1+2},\frac{1\times1+4\times2}{1+2})=(-3,3)$

利用點到直線距離公式，$\frac{|4\times(-3)-3\times3-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{22}{5}$，故選$(C)$

108年第2次北科入學數學會考

108-02-01

Statement

求不等式$x^2-(\sqrt{x-2})^2<4x-2$的實數解。

$(A)\quad -1<x<4$

$(B)\quad 0<x<4$

$(C)\quad 1<x<4$

$(D)\quad 2\leq x<4$

$(E)\quad x<1$或$x>4$

Solution

$x^2-(\sqrt{x-2})^2<4x-2$

$\Rightarrow x^2-(x-2)<4x-2$

$\Rightarrow x^2-x+2<4x-2$

$\Rightarrow x^2-5x+4<0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)<0$

可以得到$1<x<4$

考慮定義域，根號內的數字必須是非負整數，因此$x\geq 2$

取交集得到$2\leq x<4$，故選(D)

108-02-02

Statement

設$f(x)$除以$(x-2)$的商為$Q(x)$，餘數為3，且$f(x)$除以$(x-1)$的餘數為1，則$Q(1)=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 1$

$(D)\quad 2$

$(E)\quad 3$

Solution

$f(x)=(x-2)Q(x)+3=(x-1)P(x)+1$

代入$f(1)=-1Q(1)=-2$

得到$Q(1)=2$，故選(D)

108-02-03

Statement

設$\dfrac{1}{\alpha}$和$\dfrac{1}{\beta}$為方程式x^2-2x+4的兩根，則$\alpha+\beta=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{4}$

$(B)\quad \dfrac{1}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 8$

Solution

由根與係數可以知道

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{-2}{1}=2$

$\dfrac{1}{\alpha\beta}=4$，因此$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$，故選$(B)$

108-02-04

Statement

$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+10)=?$

$(A)\quad 180$

$(B)\quad 210$

$(C)\quad 220$

$(D)\quad 240$

$(E)\quad 250$

Solution

$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+10)$

$=10\times1+9\times2+8\times3+...+1\times10$

$=\sum_{x=1}^{10}n(11-n)=\sum_{x=1}^{10}11n-n^2=\sum_{x=1}^{10}11n-\sum_{x=1}^{10}n^2$

$=11\cdot\dfrac{10\times11}{2}-\dfrac{10\times11\times21}{6}=605-385=220$，故選$(C)$

108-02-05

Statement

設$\dfrac{-26x+47}{(x^2+4)(2x-1)^2}=\dfrac{ax+b}{x^2+4}+\dfrac{c}{2x-1}+\dfrac{d}{(2x-1)^2}$，則$d=?$

$(A)\quad -8$

$(B)\quad -4$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 8$

Solution

$-26x+47=(ax+b)(2x-1)^2+c(x^2+4)(2x-1)+d(x^2+4)$

代入$x=\dfrac{1}{2}$，則$34=\dfrac{17}{4}d$

$d=8$，故選(D)

108-02-06

Statement

設$\cos2\theta=\sin\theta$，$0\le\theta\le\pi$，則$\tan^2\theta=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{3}$

$(B)\quad \dfrac{1}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 8$

Solution

$\cos 2\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 1 - 2\sin^2\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$

得$\sin\theta = -1$(不合)且$\sin\theta = \frac{1}{2}$

得$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，因此$\tan^2\theta = \frac{1}{3}$，故選$(A)$

108-02-07

Statement

設ΔABC中，$\tan A = \frac{4}{3}$，$\cos B = \frac{12}{13}$，則$\cos C = ?$

$(A)\quad -\frac{56}{65}$

$(B)\quad -\frac{36}{65}$

$(C)\quad -\frac{16}{65}$

$(D)\quad \frac{16}{65}$

$(E)\quad \frac{56}{65}$

Solution

$\tan A = \frac{4}{3}$，得到$\sin A = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$，且$\cos A = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$

$\cos B = \frac{12}{13}$，得到$\sin B = \frac{\sqrt{13^2-12^2}}{13} = \frac{5}{13}$

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{63}{65}$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B = \frac{16}{65}$

$\cos C = \cos(180^\circ - (A+B)) = \cos 180^\circ\cos(A+B) + \sin 180^\circ\sin(A+B) = -\frac{16}{65}$，故選$(C)$

108-02-08

Statement

$\sin 150^\circ - \cos 240^\circ - \tan 315^\circ = ?$

$(A) \quad -2$

$(B) \quad -1$

$(C) \quad 0$

$(D) \quad 1$

$(E) \quad 2$

Solution

$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 315 = -\tan 45^\circ = -1$

$\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) - (-1) = 1 + 1 = 2$，故選$(E)$

108-02-09

Statement

方程式$100 \cdot x^{3\log x} = x^5$之所有實根的立方和為何？

$(A) \quad 1000$

$(B) \quad 1001$

$(C) \quad 1010$

$(D) \quad 1100$

$(E) \quad 1110$

Solution

$100 \cdot x^{3\log x} = x^5$

$\Rightarrow 3\log x \log x + 2 = 5\log x$

$\Rightarrow 3(\log x)^2 - 5\log x + 2 = 0$

令$t = \log x$，則$3t^2 - 5t + 2 = 0$

$\Rightarrow (t-1)(3t-2) = 0$

得到$t = 1$或$t = \frac{2}{3}$

還原t，得到$x=10$或$x=\sqrt[3]{100}$

則所有實根的立方根為$10^3+(\sqrt[3]{100})^3=1000+100=1100$，故選$(D)$

108-02-10

Statement

求不等式$\dfrac{3\log_3 x+5}{\log_3 x+1}\leq 1$的解。

$(A)\quad \dfrac{1}{27}<x<3$

$(B)\quad \dfrac{1}{27}\leq x<3$

$(C)\quad 3<x<9$

$(D)\quad \dfrac{1}{27}\leq x<9$

$(E)\quad \dfrac{1}{27}<x<9$

Solution

$$\frac{3\log_3 x+5}{\log_3 x+1}\leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2\log_3 x+6}{\log_3 x-1}\leq 0, x\in(0,3)\cup(3,\infty)$$

考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} 2\log_3 x+6\leq 0 \\ \log_3 x-1>0 \end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

$$\begin{cases} 2\log_3 x+6\geq 0 \\ \log_3 x-1<0 \end{cases}\Rightarrow x\in[\frac{1}{27},3)$$

兩者取聯集，得到$x\in[\dfrac{1}{27},3)$，故選(B)

108-02-11

Statement

已知橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$短軸的兩頂點為另一橢圓$\Gamma$的焦點，且$\Gamma$過點$(7,1)$，則$\Gamma$長軸長為何？

$(A)\quad 6$

$(B)\quad 8$

$(C)\quad 10$

$(D)\quad 12$

(E) 14

Solution

從方程式可知，橢圓的長軸平行於y軸，因此短軸平行於x軸，且中心為$(1,1)$

又可知$b=\sqrt{16}=4$且$a=\sqrt{25}=5$

故短軸頂點為$(-3,1)$或$(5,1)$，為另一橢圓Γ之焦點

又已知$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

$\sqrt{(7-(-3))^2+(1-1)^2}+\sqrt{(7-5)^2+(1-1)^2}=10+2=12=2a$

因此Γ的長軸長為12，故選(D)

108-02-12

Statement

若兩圓$C_1:(x+1)^2+(y-2)^2=16$與$C_2:(x-3)^2+(y+1)^2=k$相切，則k可能為何？

(A) 9

(B) 25

(C) 49

(D) 81

(E) 121

Solution

已知C_1的中心O_1為$(-1,2)$，且C_2的中心O_2為$(3,-1)$

因此$\overline{O_1O_2}=\sqrt{(-1-3)^2+(2-(-1))^2}=5$

又已知C_1的半徑為4，因此C_2的半徑為1或9才能使兩圓相切，故$k=1$或$k=81$，故選(D)

108-02-13

Statement

設$2\cdot 9^{x-1}+5\cdot 3^{x+1}+2=0$的兩根為$\alpha$和$\beta$，則$\alpha+\beta=?$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$2 \cdot 9^{x-1} + 5 \cdot 3^{x+1} + 2 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{9} \cdot 9^x + 15 \cdot 3^x + 2 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{9} \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 3^x + 2 = 0$

令$t = 3^x$，則$\frac{2}{9}t^2 + 15t + 2 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 135t + 18 = 0$

利用根與係數，可知$3^\alpha \cdot 3^\beta = 3^{\alpha+\beta} = \frac{18}{2} = 9$

故$\alpha + \beta = 2$，故選(A)

108-02-14

Statement

設拋物線$y = ax^2 + bx + c$之圖形如下所示，則下列何者正確？

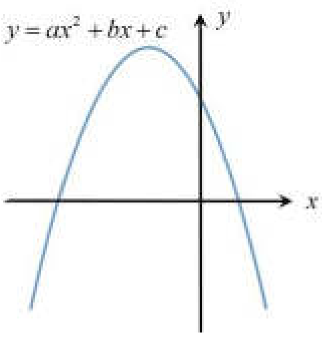
(A)　$b^2 - 4ac \leq 0$

(B)　$c < 0$

(C)　$ab < 0$

(D)　對稱軸$x = \frac{b}{2a}$

(E)　$b < 0$



Solution

考慮拋物線的頂點為$(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a})$

又已知頂點$\frac{-b}{2a} < 0$，又已知$a < 0$(開口向下)，故$b < 0$，故選(E)

108-02-15

Statement

已知ΔABC中，$\overrightarrow{AB} =< -8, 6 >$，$\overrightarrow{AC} =< -3, 4 >$，則$\Delta ABC$之面積為何？

$(A)\quad 6$

$(B)\quad \dfrac{13}{2}$

$(C)\quad 7$

$(D)\quad \dfrac{15}{2}$

$(E)\quad 8$

Solution

已知$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-8) \cdot (-3) + 6 \cdot 4 = 48$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = 10$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

又$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos\theta$

因此$\cos\theta = \dfrac{48}{50} = \dfrac{24}{25}$，得$\sin\theta = \dfrac{7}{25}$

可知$\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 5 \times \dfrac{7}{25} = 7$，故選$(C)$

108-02-16

Statement

設$\vec{a} =< 3, 1 >, \vec{b} =< x, y >$為平面上兩向量，且$x^2 + y^2 = 20$，則$\vec{a} \cdot \vec{b}$的最大值為何？

$(A)\quad 5\sqrt{2}$

$(B)\quad 10\sqrt{2}$

$(C)\quad 15\sqrt{2}$

$(D)\quad 20\sqrt{2}$

$(E)\quad 25\sqrt{2}$

Solution

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3x + y$

利用柯西不等式求最大值，則

$(3^2 + 1^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + y)^2$

又已知$x^2+y^2=20$，因此$200 \geq (3x+y)^2$，故$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值為$10\sqrt{2}$，故選(B)

108-02-17

Statement

若a、b皆為實數，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-3}{x^2-1}=b$，則$a+b=?$

(A)　4

(B)　5

(C)　6

(D)　7

(E)　8

Solution

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-3}{x^2-1}=b$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-3}{(x+1)(x-1)}=b$

可知分母必須要能被$x-1$整除，極限才會存在。

故$1+a-3=0$得到$a=2$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)(x-1)}=b$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)}{(x+1)}=\dfrac{4}{2}=2$，因此$b=2$

故$a+b=2+2=4$，故選(A)

108-02-18

Statement

設a為實數，$f(x)=2x+a$，$g(x)=3x+1$。若$f\circ g=g\circ f$，則$a=?$

(A)　$\dfrac{1}{4}$

(B)　$\dfrac{1}{3}$

(C)　$\dfrac{1}{2}$

(D)　1

(E)　2

Solution

$f \circ g = f(g(x)) = 2(3x+1)+a = 6x+2+a$

$g \circ f = g(f(x)) = 3(2x+a)+1 = 6x+3a+1$

又$f \circ g = g \circ f$，得到$2+a=3a+1$，因此$a=\dfrac{1}{2}$，故選(C)

108-02-19

Statement

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2h}-1}{h} = ?$

$(A) \quad -2$

$(B) \quad -1$

$(C) \quad 1$

$(D) \quad 2$

$(E) \quad 3$

Solution

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2h}-1}{h}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1-2h-1}{h(\sqrt{1-2h}+1)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h(\sqrt{1-2h}+1)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2}{(\sqrt{1-2h}+1)} = \dfrac{-2}{2} = -1$，故選$(B)$

108-02-20

Statement

下列何者為函數$f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{2x-x^2}-1}$的定義域？

$(A) \quad [0,1)$

$(B) \quad (1,2]$

$(C) \quad [0,2]$

$(D) \quad (2,\infty)$

$(E) \quad [0,1) \cup (1,2]$

Solution

分子為奇次方根，因此定義域為$x \in \mathbb{R}$

分母$\sqrt{2x-x^2}-1 \neq 0$，因此$\sqrt{2x-x^2} \neq 1$，故$2x-x^2 \neq 1$，$-x^2+2x-1 \neq 0$，因此$x \neq 1$

又考慮根號內必須要是非負整數，因此$2x-x^2 \geq 0$，得到$0 \leq x \leq 2$

對三者取交集，得到$[0,1) \cup (1,2]$，故選(E)