103年第1次北科入學數學會考

103-01-01

Statement

$$\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\ldots+\frac{1}{97\times 99}=?$$

$(A)\quad \frac{16}{99}$

$(B)\quad \frac{17}{99}$

$(C)\quad \frac{32}{99}$

$(D)\quad \frac{34}{99}$

$(E)\quad \frac{36}{99}$

Solution

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{99-3}{297})=\frac{48}{297}=\frac{16}{99}\text{，故選}(A)$$

103-01-02

Statement

若$\sqrt[3]{8\sqrt{16\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^x}$，則$x=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 7$

$(E)\quad 9$

Solution

$\sqrt[3]{8\sqrt{16\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2^3\cdot 2^2\sqrt{\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[3]{\sqrt[4]{4^4}\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[12]{2^9}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow 2\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{2^7}=\sqrt[4]{2^x}$

$\Rightarrow x=7$，故選(D)

103-01-03

Statement

若$f(x)=x^4-4x^3+5x^2-8x+13$，則$f(3+\sqrt{2})=?$

$(A)\quad 37+18\sqrt{2}$

$(B)\quad 47+28\sqrt{2}$

$(C)\quad 57+38\sqrt{2}$

$(D)\quad 67+48\sqrt{2}$

$(E)\quad 77+58\sqrt{2}$

Solution

利用綜合除法，轉換成$x-3$的表示形式

1	-4	5	-8	13
	3	-3	6	-6
1	-1	2	-2	7
	3	6	24	
1	2	8	22	
	3	15		
1	5	23		
	3			
1	8			

得到$f(x)=(x-3)^4+8(x-3)^3+23(x-3)^2+22(x-3)+7$

因此$f(3+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4+8(\sqrt{2})^3+23(\sqrt{2})^2+22(\sqrt{2})+7=38\sqrt{2}+57$，故選$(C)$

103-01-04

Statement

若$f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+a}$滿足$f(f(x))=x$，則$a=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$$f(f(x))=\frac{2\cdot\dfrac{2x+1}{3x+a}+1}{3\cdot\dfrac{2x+1}{3x+a}+a}=\frac{7x+a+2}{(6+3a)x+3+a^2}$$

解聯立方程式$\begin{cases}6+3a=0\\a+2=0\\3+a^2=7\end{cases}$

得到$a=-2$，故選(A)

103-01-05

Statement

設$\dfrac{2x+3}{(x^2+1)(x+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x+1}$，則$A-B+C=?$

$(A)\quad -5$

$(B)\quad -\dfrac{5}{2}$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$2x+3=(x+1)(Ax+B)+C(x^2+1)$

$=(A+C)x^2+(A+B)x+(B+C)$

解聯立方程組，$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=2 \\ B+C=3 \end{cases}$，得到$(A,B,C)=(\frac{-1}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2})$

因此$A-B+C=-3+\frac{1}{2}=\frac{-5}{2}$，故選$(B)$

103-01-06

Statement

ΔABC如下圖，若$c=6$，$\angle A=60^\circ$，$a+b=10$，則$a=?$

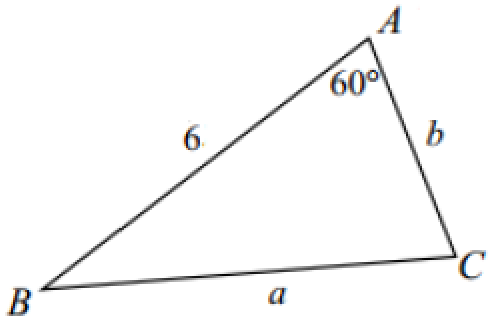
(A) $\frac{29}{7}$

(B) $\frac{32}{7}$

(C) 5

(D) $\frac{38}{7}$

(E) $\frac{41}{7}$



Solution

利用餘弦定理，$a^2=6^2-(10-a)^2-2\times 6\times(10-a)\times\cos 60^\circ$

$\Rightarrow a^2=6^2+(10-a)^2-6(10-a)$

$\Rightarrow a=\frac{38}{7}$，故選$(D)$

103-01-07

Statement

橢圓$3x^2+4y^2-16y=20$兩焦點的距離為何？

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 2

(D) 3

(E) $2\sqrt{3}$

Solution

$3x^2+4y^2-16y=20$

$\Rightarrow 3x^2+4(y-2)^2=36$

$\Rightarrow \frac{x^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

可知$a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，且$b=\sqrt{9}=3$

因此$c=\sqrt{(\sqrt{12})^2-(\sqrt{9})^2}=\sqrt{3}$

$2c=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，故選$(E)$

103-01-08

Statement

設$0<\theta<\frac{\pi}{8}$，則$\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 4\theta}}$可化簡為以下何者？

(A) $\sqrt{2}\sin\theta$

(B) $2\sin\theta$

(C) $\sqrt{2}\cos\theta$

(D) $2\cos\theta$

(E) $\sin 2\theta$

Solution

$\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 4\theta}}=\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2(2\theta)}}=\sqrt{2-2\cos(2\theta)}$

$=\sqrt{4\sin^2\theta}=2\sin\theta$，故選$(B)$

103-01-09

Statement

已知$f(x)=2x^4-9x^3-23x^2+81x+45=2(x-3)(x-a)(x-b)(x-c)$，則$a^2+b^2+c^2=?$

$(A)\quad \dfrac{65}{4}$

$(B)\quad \dfrac{67}{4}$

$(C)\quad \dfrac{137}{4}$

$(D)\quad 35$

$(E)\quad \dfrac{145}{4}$

Solution

$2x^4-9x^3-23x^2+81x+45=2(x-3)(x-a)(x-b)(x-c)$

$2x^3-3x^2-32x-15=2(x-a)(x-b)(x-c)$

利用偉達定理

$a+b+c=\dfrac{3}{2}$

$ab+bc+ac=\dfrac{-32}{2}=-16$

$abc=\dfrac{15}{2}$

因此$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$\dfrac{9}{4}=a^2+b^2+c^2+2(-16)$

$a^2+b^2+c^2=\dfrac{9}{4}+32=\dfrac{137}{4}$，故選$(C)$

103-01-10

Statement

若$L_1:x-2y+7=0$與$L_2:ax+y+c=0$相互垂直，且$(-3,1)$在L_2上，則$c=?$

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 4$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 6$

Solution

$$\begin{matrix} L_1 : x - 2y + 7 = 0 \\ L_2 : ax + y + c = 0 \end{matrix}, L_1 \perp L_2$$

$m_1 = -\frac{-2}{1} = 2$，$m_1 \cdot m_2 = -1$，得到$m_2 = -\frac{1}{2}$

因此$a = 2$

將$(-3, 1)$代入L_2，得$(-6) + 1 + c = 0$，得到$c = 5$，故選(D)。

103-01-11

Statement

不等式$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} \geq 1$的解為何？

$(A) \quad -2 \leq x < 1$或$1 < x$

$(B) \quad x \leq -2$或$0 \leq x < 1$

$(C) \quad 0 < x < 1$或$1 < x$

$(D) \quad x \leq 0$或$1 < x$

$(E) \quad 0 \leq x < 1$

Solution

定義域$x \neq 1$

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x - 1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+2)^2}{x - 1} \geq 0$$

考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} x(x+2)^2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, \infty)$$

$$\begin{cases} x(x+2)^2 \leq 0 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

兩者與定義域取交集，得到$x \leq 0$或$x > 1$，故選(D)

103-01-12

Statement

設拋物線$y^2=2x+6$與直線$x-y-1=0$，相交於$P(a,b)$及$Q(c,d)$，其中$a>c$，則$b-d=?$

$(A)\quad -6$

$(B)\quad -3$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 3$

$(E)\quad 6$

Solution

$x-y-1=0\Rightarrow y=x-1$

$(x-1)^2=2x+6$

$\Rightarrow x^2-4x-5=0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)=0$

得到$x=-1$或$x=5$

因此$a=5,c=-1$

分別代入，得到$b=4$，$d=-2$，因此$b-d=4-(-2)=6$，故選(E)

103-01-13

Statement

求點$P(0,2)$到拋物線$y=x^2$的最短距離為何？

$(A)\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

$(B)\quad \sqrt{2}$

$(C)\quad \sqrt{3}$

$(D)\quad \frac{7}{4}$

$(E)\quad 2$

Solution

設有一動點$Q(x,x^2)$

則$d=\sqrt{(x-0)^2+(x^2-2)^2}$

$=\sqrt{x^4-3x^2+4}$

$= \sqrt{(x^2 - \frac{3}{2})^2 + 4 - \frac{9}{4}}$

$= \sqrt{(x^2 - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}}$

當$x^2 = \frac{3}{2}$，$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$，則有最小值$\sqrt{\frac{7}{4}}$，故最短距離為$\frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(A)$

103-01-14

Statement

設$2^a = 3$、$3^b = 2$，則$(7^a)^b = ?$

$(A)\quad 6$

$(B)\quad 7$

$(C)\quad 8$

$(D)\quad 9$

$(E)\quad 10$

Solution

$2^a = 3$，則$a = \log_2 3 = \frac{\log 2}{\log 3}$

$3^b = 2$，則$b = \log_3 2 = \frac{\log 3}{\log 2}$

因此$(7^a)^b = 7^{ab} = 7^{(\frac{\log 2}{\log 3}\frac{\log 3}{\log 2})} = 7^1 = 7$，故選$(B)$

103-01-15

Statement

設$\sin\theta - 2\cos\theta = 1$，$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$，則$2\sin\theta + \cos\theta = ?$

$(A)\quad -3$

$(B)\quad -2$

$(C)\quad -1$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

$\sin\theta - 2\cos\theta = 1$

$(\sin\theta - 2\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 1$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 3\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 1$

$= 3\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 0$

設$2\sin\theta + \cos\theta = A$，則$4\sin\theta + \cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta = A^2$

因此$3\sin^2\theta + 1 = A^2 - 4\sin\theta\cos\theta$

所以$3\sin^2\theta + 3\cos^2\theta + 1 = A^2 - 4\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta$

因為$3\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 0$

所以$3(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1 = A^2$

也就是$A^2 = 4$，得到$A = \pm 2$

已知$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$，所以$\sin\theta < 0$且$\cos\theta < 0$

故$A = 2$不合，因此$A = -2$，故選(B)

103-01-16

Statement

直線$3x - 4y = 12$，$4x - 3y + 12 = 0$與x軸所圍三角形的面積為何？

(A) 21

(B) 42

(C) 60

(D) 63

(E) 84

Solution

找兩直線與x軸個別的交點，令$y = 0$，$\begin{cases} 3x = 12 & x = 4 \\ 4x + 12 = 0 & x = -3 \end{cases}$

找兩直線交點，$\begin{cases} x - 4y = 12 \\ 4x - 3y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-12, -12)$

可知底為$|4 - (-3)| = 7$，高為12，因此$\frac{7 \times 12}{2} = 42$，故選$(B)$

103-01-17

Statement

設圓$x^2+y^2-2x+4y=3$與x軸交於A,B兩點，且圓心為C，則$\cos(\angle ACB)=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad -\frac{1}{2}$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad \frac{1}{2}$

$(E)\quad 1$

Solution

$x^2+y^2-2x+4y=3$

利用配方法，得$(x-1)^2+(y+2)^2=8$，因此圓心為$(1,-2)$，半徑為$\sqrt{8}$

考慮圓與x軸的交點，令$y=0$，則$x^2-2x=3$，也就是$(x-3)(x+1)=0$，因此得到$x=-1$與$x=3$

利用餘弦定理，可知$\cos(\angle ACB)=\dfrac{(\sqrt{8})^2+(\sqrt{8})^2-4^2}{2\times\sqrt{8}\times\sqrt{8}}=0$，故選$(C)$

103-01-18

Statement

設$\vec{a}=<1,1>$，$\vec{b}=<2,6>$。

若$|t\vec{a}+\vec{b}|$為最小時，$t=?$

$(A)\quad -10$

$(B)\quad -8$

$(C)\quad -6$

$(D)\quad -4$

$(E)\quad -2$

Solution

$t\vec{a}+\vec{b}=<t,t>+<2,6>=<2+t,6+t>$

因此$\sqrt{(2+t)^2+(6+t)^2}=\sqrt{4+4t+t^2+36+12t+t^2}=\sqrt{2t^2+16t+40}=\sqrt{2(t+4)^2+8}$

故當$t=-4$時，有最小值8，故選(D)

103-01-19

Statement

若$\log_5(5^x-125)=\frac{x}{2}+1+\log_5 4$，則$x=?$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$\log_5(5^x-125)=\frac{x}{2}+1+\log_5 4$

$\Rightarrow \log_5(5^x-125)-\log_5 4-\log_5 5=\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \log_5(\frac{5^x-125}{20})=\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \frac{5^x-125}{20}=5^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow 5^x-125=20\times 5^{\frac{x}{2}}$

令$t=5^{\frac{x}{2}}$，則$t^2-125=20t$

解方程式得到$t=-5$(不合)或$t=25$

$5^{\frac{x}{2}}=25$，得到$x=4$，故選(C)

103-01-20

Statement

若α,β為$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$之兩根，則$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=?$

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{7}{4}$

(D) $\frac{9}{4}$

(E) $\frac{11}{4}$

Solution

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$或$x = \frac{\pi}{2}$

因此$\cos^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}$，故選$(A)$