102-02-01

Statement

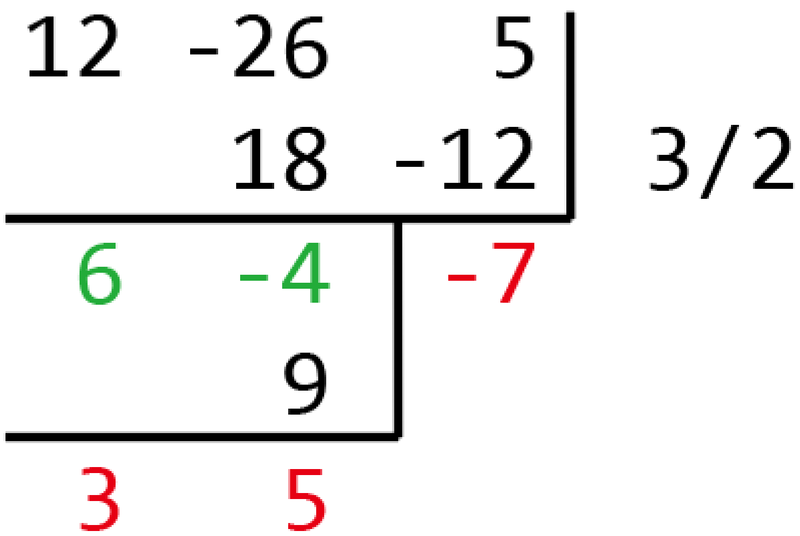
若$\dfrac{12x^2-26x+5}{(2x-3)^3}=\dfrac{a}{2x-3}+\dfrac{b}{(2x-3)^2}+\dfrac{c}{(2x-3)^3}$，則$a+b+2c=?$

$(A)\quad -9$
$(B)\quad -6$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 6$
$(E)\quad 9$

Solution

將式子轉成$12x^2-26x+5=a(2x-3)^2+b(2x-3)+c(2x-3)$

利用綜合除法



綠色字：將式子從$x-\dfrac{3}{2}$轉成$2x-3$，因此要將係數除2，餘數不除。

得到$a=3,b=5,c=-7$，得到$3+5+2\times(-7)=-6$，故選(B)

102-02-02

Statement

若$f(x+2)=\dfrac{2+x}{4-x}$，則$f(a)=?$

$(A)\quad \dfrac{a}{6-a}$

$(B)\quad \dfrac{2+a}{2-a}$

$(C)\quad \dfrac{2+a}{4-a}$

$(D)\quad \dfrac{2-a}{2+a}$

$(E)\quad \dfrac{a}{6+a}$

Solution

$x+2=a, x=a-2$

故$f(a)=\dfrac{2+(a-2)}{4-(a-2)}=\dfrac{a}{6-a}$，故選$(A)$

102-02-03

Statement

設ΔABC中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$，則$\cos^2\dfrac{C}{2}=?$

$(A)\quad \dfrac{1}{7}$

$(B)\quad \dfrac{2}{7}$

$(C)\quad \dfrac{4}{7}$

$(D)\quad \dfrac{5}{7}$

$(E)\quad \dfrac{6}{7}$

Solution

$\cos C=\cos^2\dfrac{C}{2}-\sin^2\dfrac{C}{2}=2\cos^2\dfrac{C}{2}-1$

則$\cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\cos C+1}{2}$

利用餘式定理，$\cos C=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\times 6\times 7}=\dfrac{5}{7}$

因此$\cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\dfrac{5}{7}+1}{2}=\dfrac{6}{7}$，故選$(E)$

102-02-04

Statement

已知圓$x^2+y^2=9$，與直線$x+y=3$相交於兩點，則此兩點距離為何？

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 2\sqrt{2}$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 3\sqrt{2}$

$(E)\quad 4$

Solution

$y=3-x$，則$x^2+(3-x)^2=9$

展開後得到$2x^2-6x=0$，得到$x=0$或$x=3$

代回原式，得到兩點$(0,3)$與$(3,0)$，距離為$\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$，故選$(D)$

102-02-05

Statement

下列何者正確？

$(A)\quad \sin(x-\frac{\pi}{2})=\cos x$

$(B)\quad \cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin x$

$(C)\quad \tan(x+\frac{\pi}{2})=\cot x$

$(D)\quad \sin(x+\pi)=\cos x$

$(E)\quad \csc(x+\frac{\pi}{2})=\sec x$

Solution

$\csc(x+\frac{\pi}{2})=\sec x$，故選$(E)$

102-02-06

Statement

若$x^4-4x^3-14x^2+36x+45=(x-1)^4+a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，則$a+b+c+d=?$

$(A)\quad 24$

$(B)\quad 34$

(C) 44

(D) 54

(E) 64

Solution

利用綜合除法

1	-4	-14	36	45
	1	-3	-17	19
1	-3	-17	19	64
	1	-2	-19	
1	-2	-19	0	
	1	-1		
1	-1	-20		
	1			
1	0			

因此$a=0, b=-20, c=0, d=64$，故$a+b+c+d=44$，故選(C)

102-02-07

Statement

設O為原點，$A(a,0)$, $B(0,b)$, 且$\overline{AB}=5$，則ΔOAB最大面積為何？

(A) 6

(B) $\frac{25}{4}$

(C) $\frac{13}{2}$

(D) 7

(E) 8

Solution

$a^2+b^2=25$，求$\frac{ab}{2}$的最大值

可知$a^2=25-b^2$，$a=\sqrt{25-b^2}$

因此$f(b)=\frac{b\sqrt{25-b^2}}{2}$，找極值。

微分後得到$f'(b)=\dfrac{25-2b^2}{2\sqrt{25-b^2}}$，令$f'(b)=0$，得到$b=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

因此$f(b)$的極值發生在$b=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$上

設$b=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，代入後得$f(\dfrac{5\sqrt{2}}{2})=\dfrac{25}{4}$，故選$(B)$

102-02-08

Statement

設雙曲線之漸進線為x軸與y軸，且過點$(-1,1)$，則此雙曲線貫軸長為何？

$(A)\quad 2$

$(B)\quad \sqrt{5}$

$(C)\quad 2\sqrt{2}$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

由於漸進線為x軸與y軸，可知此雙曲線的頂點會通過$y=x$或$y=-x$，中心為$(0,0)$

因此可以列出雙曲線方程式$xy=c$，代入$(-1,1)$得到$c=-1$

因此雙曲線方程式為$xy=-1$

求雙曲線頂點，令$y=-x$，得到$-x^2=-1$，得到$x=\pm 1$

因此頂點為$(1,-1)$與$(-1,1)$

a為頂點與原點之距離，因此貫軸長$2a=2\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2}$，故選$(C)$

102-02-09

Statement

設$\log_2 x^2+\log_x 2=3$的兩根為α和β，則$\alpha\beta=?$

$(A)\quad -\dfrac{3}{2}$

$(B)\quad \dfrac{1}{2}$

$(C)\quad \dfrac{3}{2}$

$(D)\quad \sqrt{2}$

$(E)\quad 2\sqrt{2}$

Solution

$\log_2 x^2 + \log_x 2 = 3$

$\Rightarrow 2\log_2 x + \log_x 2 = 3$

$\Rightarrow 2\log_2 x + \dfrac{1}{\log_2 x} = 3$

$\Rightarrow 2\log_2^2 x + 1 = 3\log_2 x$

令$t = \log_2 x$，則

$2t^2 + 1 = 3t$

$\Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$，得到$t = \dfrac{1}{2}$或$t = 1$

分別還原得到$x = \sqrt{2}$或$x = 2$，因此$\alpha = \sqrt{2}$，$\beta = 2$

因此$\alpha\beta = 2\sqrt{2}$，故選(E)

102-02-10

Statement

設$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，則$\sin^3\theta + \cos^3\theta = ?$

$(A)\quad \dfrac{4}{9}$

$(B)\quad \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$(C)\quad \dfrac{\sqrt{19}}{9}$

$(D)\quad \dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

$(E)\quad \dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

Solution

$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

又$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{1}{4}$

因此$-2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{-3}{4}$，得到$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3}{8}$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + 2 \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{4}$

因此$(\sin\theta + \cos\theta) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

代入原式，得到$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{2}(1 - \dfrac{3}{8}) = \dfrac{5\sqrt{7}}{16}$，故選$(E)$

102-02-11

Statement

若直線通過點$P(3,4)$且兩軸截距均為整數，則滿足條件的直線共有幾條?

(A) 3

(B) 6

(C) 9

(D) 12

(E) 15

Solution

1. 利用點斜式，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
2. 整理方程式，得到$xb+ay=ab$
3. 帶入點$(3,4)$，得到$3b+4a=ab \Rightarrow 3b+4a-ab=0 \Rightarrow ab-3b-4a=0$
4. 將$ab-3a-4a$寫成$(b-4)(a-3)=12$
5. 令$u=(b-4), v=(a-3)$，那麼$uv=12$

因為$a,b \in \mathbb{R}$，因此$u,v \in \mathbb{R}$

6. 窮舉uv的u為整數的所有可能，可以知道一定會是12的因數。

因此考慮所有可以整除12的整數，得到$[-1,-2,-3,-4,-6,-12,1,2,3,4,6,12]$

代換回去後可得到b，因此答案為12個，故選(D)