101年第1次北科入學數學會考

101-01-01

Statement

設$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$且$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{-\pi}{2}<\beta<0$，求$\sin(\alpha+\beta)=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad \dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}$

$(C)\quad \dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}$

$(D)\quad \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$

$(E)\quad \dfrac{2-2\sqrt{2}}{3}$

Solution

$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，則$\cos\alpha=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{-\pi}{2}<\beta<0$，則$\sin\beta=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}$

因此$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{-\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}$，故選$(C)$

101-01-02

Statement

$\sin(\dfrac{5\pi}{3})\tan(\dfrac{-\pi}{4})\cos(\dfrac{5\pi}{6})=?$

$(A)\quad \dfrac{-3}{4}$

$(B)\quad \dfrac{-\sqrt{3}}{4}$

$(C)\quad \dfrac{-1}{4}$

$(D)\quad \dfrac{1}{4}$

$(E)\quad \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Solution

$\sin(\frac{5\pi}{3}) = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\tan(\frac{-\pi}{4}) = -\tan 45^\circ = -1$

$\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

因此$\sin(\frac{5\pi}{3})\tan(\frac{-\pi}{4})\cos(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}(-1)\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$，故選$(A)$

101-01-03

Statement

設α, β為方程式$x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$兩負根，且$\alpha^2 + \beta^2 = 24$，則$k =$?

(A) -4
(B) -3
(C) -2
(D) 2
(E) 4

Solution

利用根與係數，得到$\alpha\beta = \frac{k^2 + k}{1} = k^2 + k$，且$\alpha + \beta = -\frac{-2k}{1} = 2k$

且由於是兩負根，所以$\alpha\beta > 0, \alpha + \beta < 0$

故$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 - 2(k^2 + k) = 2k^2 - 2k = 24$

解方程可知$k = 4$或$k = -3$

驗根，若$k = 4$，則$\alpha + \beta = 8 > 0$，故不合。

因此$k = -3$，故選(B)。

101-01-04

Statement

取適當k值，使圓$x^2 + y^2 - 2kx - 4y + 2k^2 = 6k$的面積最大，問此時圓面積為何？

(A) 10π
(B) 11π
(C) 12π
(D) 13π
(E) 14π

Solution

對式子做配方法，可以得到$(x^2-2kx+k^2)+(y^2-4y+4)=6k-2k^2+k^2+4$

因此$(x-k)^2+(y-2)^2=-k^2+6k+4$

若圓半徑越大則面積越大，因此我們考慮$-k^2+6k+4$的極值

因此我們對$(-k^2+6k+4)$做配方法，得到$-(k-3)^2+13$

因此在$k=3$時，有最大圓半徑$\sqrt{13}$，故圓面積為$(\sqrt{13})^2\pi=13\pi$，故選(D)

101-01-05

Statement

設$P(x,y), A(1,-1), B(1,1), C(4,-1)$。滿足$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+2\overline{PC}^2$為最小，則$x+y=?$

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solution

可列式成$(x-1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+2((x-4)^2+(y+1)^2)$

整理成$2(x-1)^2+3(y+1)^2+2(x-4)^2+(y-1)^2$

由於各項數字均一定為正，我們可以分開討論

尋找$2(x-1)^2+2(x-4)^2$與$3(y+1)^2+(y-1)^2$的最小值。

$2(x-1)^2+2(x-4)^2 \Rightarrow 2x^2-4x+2+2x^2-16x+32 \Rightarrow 4x^2-20x+34$

對其做配方法，得到$4(x-\frac{5}{2})^2+9$，可得$x=\frac{5}{2}$有最小值9。

$3(y+1)^2+(y-1)^2 \Rightarrow 3y^2+6y+3+y^2-2y+1 \Rightarrow 4y^2+4y+4$

對其做配方法，得到$4(y+\frac{1}{2})+3$，可得$y=\frac{-1}{2}$有最小值3。

因此$x+y=\frac{5}{2}+\frac{-1}{2}=2$，故選$(B)$

101-01-06

Statement

已知$A(-1,-4), B(3,5)$兩點，又C在直線上$x+y=0$移動，則$\overline{AC}+\overline{BC}$的最小距離為何？

$(A)\quad \sqrt{97}$
$(B)\quad 10$
$(C)\quad 5\sqrt{5}$
$(D)\quad 12$
$(E)\quad 14$

Solution

若兩點與直線異側，則C的取點即為A與B做一直線與$x+y=0$之交點，最小距離即為A與B的距離。

將A,B代入直線方程式檢驗

$A:\quad -1+-4=-5<0$

$B:\quad 3+5=8>0$

因此最短距離為A與B的距離，也就是$\sqrt{(-1-3)^2+(-4-5)^2}=\sqrt{16+81}=\sqrt{97}$，故選$(A)$

101-01-07

Statement

四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=\overline{CD}=5$，$\overline{BC}=2$，$\overline{BC}<\overline{AD}$且$\angle ABC=\angle ADC=60^\circ$，則$\overline{AD}=?$

$(A)\quad 3$
$(B)\quad 5$
$(C)\quad 6$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 9$

$\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{5^2+2^2-\overline{AC}^2}{2\times5\times2}=\dfrac{1}{2}$，可得$\overline{AC}=\pm\sqrt{19}$ (負不合)

因此，$\cos\angle ADC=\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AD}^2+25-19}{10\overline{AD}}=\dfrac{1}{2}$

可以得到$\overline{AD}=2$或$\overline{AD}=3$

由於$\overline{AD}>\overline{BC}$，因此$\overline{AD}=2$不合，故$\overline{AD}=3$，故選$(A)$

101-01-08

Statement

點$(-3,1)$與拋物線$y^2-2y+5=2x$的最短距離為何？

$(A)\quad 4$
$(B)\quad \sqrt{17}$
$(C)\quad 3\sqrt{2}$
$(D)\quad 5$
$(E)\quad 5\sqrt{5}$

Solution

$y^2 - 2y + 5 = 2x$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 + 5 - 1 = 2x$

$\Rightarrow (y-1)^2 = 2(x-2)$，開口向右。

故頂點$(2,1)$與$(-3,1)$的距離為5，故選(D)

101-01-09

Statement

設橢圓$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$之長軸長為A，短軸長為B，則$A + B = ?$

(A)　$1+\sqrt{3}$
(B)　3
(C)　4
(D)　5
(E)　6

Solution

配方法

$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$

$\Rightarrow (x-1)^2 + 4y^2 = 4$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$

因此長軸$A = \sqrt{4} \times 2 = 4$，短軸長$B = \sqrt{1} \times 2 = 2$

因此$A + B = 4 + 2 = 6$，故選(E)

101-01-10

Statement

若$f(x) = x^3 + ax^2 + 11x + 6$與$g(x) = x^3 + bx^2 + 14x + 8$有二次公因式，則$a + b = ?$

(A)　13
(B)　14
(C)　15
(D)　16
(E)　17

Solution

考慮$f(x)$可能的因式：$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x-6)(x+6)$

考慮$g(x)$可能的因式：$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)(x-8)(x+8)$

可以知道$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$可能共同

因此我們考慮以下四種式子，是否存在兩個相同的a，就能當作$f(x)$的因式。

$$a\begin{cases}(x-1)\Rightarrow 1+a+11+6=0 & a=18\\(x+1)\Rightarrow -1+a-11+6=0 & a=6\\(x-2)\Rightarrow 8+4a+22+6=0 & a=-9\\(x+2)\Rightarrow -8+4a-22+6=0 & a=6\end{cases}$$

因此選$(x+1)(x+2)$，其中$a=6$。

因此$b=(-1)^3+b(-1)^2+14(-1)+8$，得到$b=7$

因此$a+b=6+7=13$，故選(A)

101-01-11

Statement

若$5\cdot 25^x+350\cdot 5^{x-2}=3$，則$x=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 1$
$(E)\quad 2$

Solution

化簡式子，得到$5\cdot 5^{2x}+350\cdot\dfrac{1}{25}5^x=3$

因此$5\cdot 5^{2x}+14\cdot 5^x=3$

令$t=5^x$，則$5t^2+14t=3$，得到$t=\dfrac{1}{5}$或$t=-3$

驗根，$5^x=t=-3$，則x不存在，故$t=-3$不合。

因此$5^x=t=\dfrac{1}{5}$，$x=-1$，故選(B)

101-01-12

Statement

若$a=\log 2$，$b=\log 3$，則$\log_{12}180=?$

$(A)\quad 1-a+b$

$(B)\quad \dfrac{1+a^2+b^2}{a^2+b}$

$(C)\quad \dfrac{a+2b+1}{2a+b}$

$(D)\quad \dfrac{2a+2b+1}{2a+b}$

$(E)\quad \dfrac{2a+2b-1}{2a+b}$

Solution

可以考慮成$\dfrac{\log 180}{\log 12}=\dfrac{2b+a+1}{2a+b}$，故選$(C)$

101-01-13

Statement

求曲線$y=-\sqrt{12-x(x+4)}$與x軸所圍的面積為何？

$(A)\quad 4\pi$

$(B)\quad 5\pi$

$(C)\quad 6\pi$

$(D)\quad 7\pi$

$(E)\quad 8\pi$

Solution

兩邊平方，得到$y^2=12-x^2-4x$，配方法得$(x+2)^2+y^2=16$，中心位於$(-2,0)$，半徑為4

可知原式原先為一半圓，且在x軸底下。

因此可得面積為$\dfrac{1}{2}(4)^2\pi=8\pi$，故選$(E)$

101-01-14

Statement

方程式$\log(x+1)+\log(x+3)-1=\log(x+2)$的解為何？

$(A)\quad 5-\sqrt{26}$
$(B)\quad 3-\sqrt{26}$
$(C)\quad 1-\sqrt{26}$
$(D)\quad 3+\sqrt{26}$
$(E)\quad 5+\sqrt{26}$

Solution

改寫成$\log(x+1)+\log(x+3)-\log 10=\log(x+2)$

$\Rightarrow \log(\dfrac{(x+1)(x+3)}{10})=\log(x+2)$

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)(x+3)}{10}=x+2$

$\Rightarrow x^2+4x+3=10x+20$

$\Rightarrow x^2-6x-17=0$

公式解，可以得到$\dfrac{6\pm\sqrt{36-4\times 1\times(-17)}}{2}=3\pm\sqrt{26}$

驗根，考慮將x代入$\log(x+1)$上

$3-\sqrt{26}+1=4-\sqrt{26}=\sqrt{16}-\sqrt{26}<0$，不符合log的定義域，故不合。

因此$x=3+\sqrt{26}$，故選(D)

101-01-15

Statement

設$\dfrac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$，則$3A+2B+C=?$

$(A)\quad 3$
$(B)\quad 4$
$(C)\quad 5$
$(D)\quad 6$
$(E)\quad 7$

Solution

$\dfrac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

$\Rightarrow 2x^2-x+4=A(x^2+4)+x(Bx+C)$

$\Rightarrow 2x^2-x+4+(A+B)x^2+Cx+4A$

可得$A+B=2,C=-1,A=1$，因此$B=1$

故$3A+2B+C=3\times 1+2\times 1+(-1)=4$，故選$(B)$

101-01-16

Statement

已知兩平面向量$\vec{u} =< 3, 4 >$與$\vec{v} =< x, y >$，若$\vec{v}$可使與$\vec{u}$與$\vec{v}$的內積值最大，且$|\vec{v}| = 2$，則$x =$?

$(A)\quad \frac{2}{5}$
$(B)\quad \frac{3}{5}$
$(C)\quad \frac{4}{5}$
$(D)\quad 1$
$(E)\quad \frac{6}{5}$

Solution

考慮$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$，則要使內積值最大，可使$\cos\theta = 1$，也就是$\theta = 0^\circ$，兩向量平行。

因此$x : y = 3 : 4$，又$|\vec{v}| = 2$，因此$\vec{v} =< 2 \times \frac{3}{5}, 2 \times \frac{4}{5} >=< \frac{6}{5}, \frac{8}{5} >$

因此$x = \frac{6}{5}$，故選(E)

101-01-17

Statement

不等式$\frac{x-7}{(x-1)^2} \leq -1$

$(A)\quad 3 \leq x$
$(B)\quad x \leq -2$
$(C)\quad -2 \leq x < 1$或$1 < x \leq 3$
$(D)\quad -2 \leq x \leq 3$
$(E)\quad x \leq -2$或$3 \leq x$

Solution

$$\frac{x-7}{(x-1)^2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{(x-1)^2} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-7+(x-1)^2}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-6}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leq 0$$

定義域$x \neq 1$，分母恆正，考慮分子的情況

$$\begin{cases} x-3 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2,3]$$

因此兩者取聯集，得到$[-2,1) \cup (1,3]$，故選(C)

101-01-18

Statement

設x, y均為正數，且$3x+y=10$，則x^3y^2的最大值為何？

(A)　108
(B)　116
(C)　122
(D)　128
(E)　134

Solution

利用算幾不等式，可以考慮成$\dfrac{x+x+x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y}{5} \geq \sqrt[5]{x^3 \times \frac{1}{4}y^2}$

$\Rightarrow 2 \geq \sqrt[5]{\frac{1}{4}x^3y^2}$

因此$32 \geq \frac{1}{4}x^3y^2 \Rightarrow 128 \geq x^3y^2$，故$x^3y^2$的最大值為$128$，故選$(D)$

101-01-19

Statement

設$A(x,y), B(-1,4), C(5,-4)$，且ΔABC的重心坐標為$(2,-1)$，則$x-y=?$

(A)　1
(B)　2
(C)　3
(D)　4
(E)　5

Solution

使用重心公式

$\dfrac{x+(-1)+5}{3} = 2$，$x=-10$

$$\frac{y+4+(-4)}{3}=-1 \text{,} y=-3$$

因此$x=2, y=-3, x-y=5$，故選(E)

101-01-20

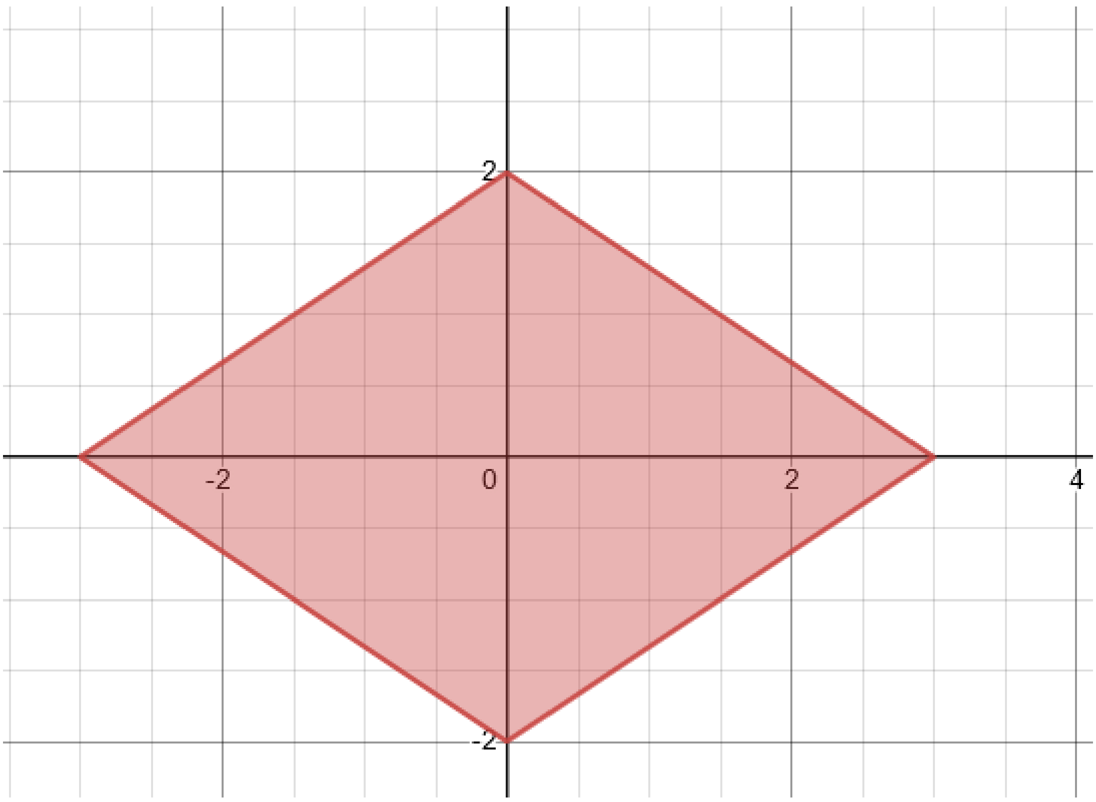
Statement

平面上$2|x|+3|y| \leq 6$所表示區域的面積為何？

(A) 4
(B) 8
(C) 12
(D) 16
(E) 32

Solution

畫出圖



面積為$\frac{4 \times 6}{2}=12$，故選(C)。