

100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(\frac{3}{2}) = 27$ ， $f(-\frac{5}{3}) = 8$ 。

若 $f(x)$ 除以 $(6x^2 + x - 15)$ 的餘式為 $ax + b$ ，則 $b - a = ?$

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 12
- (D) 16
- (E) 20

Solution

可以把式子轉成

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)(6x^2 + x - 15) + ax + b \\ &= g(x)(3x + 5)(2x - 3) + ax + b \end{aligned}$$

代入 $x = \frac{3}{2}$ ，得到 $\frac{3}{2}a + b = 27$

代入 $x = -\frac{5}{3}$ ，得到 $-\frac{5}{3}a + b = 8$

解聯立之後得到 $(a, b) = (6, 18)$

因此 $b - a = 12$ ，故選(C)

100-01-02

Statement

若 α, β 為方程式 $x - \frac{3}{x} + 1 = 0$ 的兩根，則 $(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = ?$

- (A) 9
- (B) 15
- (C) 21
- (D) 27
- (E) 33

Solution

$$(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = \frac{4}{\alpha\beta} + \frac{10(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 25$$

$$x - \frac{3}{x} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

利用根與係數，得到 $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ ， $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$

因此 $(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = \frac{4}{-3} + \frac{-10}{-3} + 25 = 27$

故選(D)

100-01-03

Statement

求 $13^5 - 14 \times 13^4 + 15 \times 13^3 - 25 \times 13^2 - 12 \times 13 + 9 = ?$

- | | |
|-----|----|
| (A) | 22 |
| (B) | 25 |
| (C) | 28 |
| (D) | 31 |
| (E) | 34 |

Solution

將式子考慮成 $f(x) = x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 25x^2 - 12x + 9$

式子等價於 $f(x)$ 除以 $x - 13$ 的餘數（餘式定理）。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\
 1 & -13 & | & 1 & -14 & 15 & -25 & -12 & 9 \\
 & & 1 & -13 & & & & & \\
 \hline
 & & & -1 & 15 & & & & \\
 & & & -1 & 13 & & & & \\
 \hline
 & & & & 2 & -25 & & & \\
 & & & & 2 & -26 & & & \\
 \hline
 & & & & & 1 & -12 & & \\
 & & & & & 1 & -13 & & \\
 \hline
 & & & & & & 1 & 9 & \\
 & & & & & & 1 & -13 & \\
 \hline
 & & & & & & & & 22
 \end{array}
 \end{array}$$

故答案選(A)。

100-01-04

Statement

若 $\frac{2x^2 - x + 4}{x^4 + 4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$ ，則 $A + B + C + D = ?$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 2

(C) 3

(D) $\frac{7}{2}$

(E) 33

Solution

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^4 + 4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

$$2x^2 - x + 4 = A(x^3 + 4x) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2)$$

$$= Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Dx^2$$

$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 4Ax + 4B$$

可知

$$A + C = 0$$

$$B + D = 2$$

$$A = -\frac{1}{4}$$

$$B = 1$$

$$\text{因此 } C = \frac{1}{4}, D = 1。$$

$$\text{因此 } A + B + C + D = 2$$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$ 之解為何？

(A) $1 \leq x < 2$

(B) $1 < x \leq 2$

(C) $1 < x < 2$

(D) $x \geq 2$ 或 $x < 1$

(E) $x > 2$ 或 $x < 1$

Solution

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 - 5x + 7)}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \leq 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \geq 0 \\ (x-1)(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

因此 $1 < x < 2$ 時， $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$ ，故選(C)

100-01-06

Statement

若 a, b 均為實數且 $ax^2 + bx - 10 < 0$ 之解為 $\frac{-5}{2} < x < \frac{4}{3}$ ，則 $a + b = ?$

(A) 5

(B) $\frac{11}{2}$

(C) 6

(D) $\frac{13}{2}$

(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$$(x + \frac{5}{2})(x - \frac{4}{3}) < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{5x}{2} + \frac{-20}{6} < 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 8x + 15x - 20 < 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 7x - 20 < 0$$

兩邊同除2，得 $3x^2 + \frac{7}{2}x - 10 < 0$

$$a = 3, b = \frac{7}{2}, a + b = \frac{13}{2}$$

100-01-07

Statement

若直線 $12x - 5y = 21$ 與兩直線 $x = \frac{23}{39}$ 、 $x = \frac{16}{13}$ 分別交於 A 、 B 兩點，則線段長 $\overline{AB} = ?$

- (A) $\frac{6}{5}$
- (B) $\frac{5}{4}$
- (C) $\frac{5}{3}$
- (D) $\frac{13}{5}$
- (E) $\frac{25}{7}$

Solution

已知 $12x - 5y = 21$ ，則斜率為 $\frac{12}{5}$

$$\Delta x = \frac{16}{13} - \frac{23}{39} = \frac{25}{39}$$

$$y = mx + b, \text{ 則 } 0 = \frac{12}{5} \left(\frac{16}{13} - \frac{23}{39} \right) + b, \text{ 得到 } b = \frac{60}{39} = \Delta y$$

$$\text{因此距離為 } \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{39}\right)^2 + \left(\frac{60}{39}\right)^2} = \frac{5}{3}, \text{ 故選 (C)}$$

100-01-08

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ ， $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ ，則 $\cos \theta = ?$

- (A) $\frac{7}{25}$
- (B) $\frac{5}{13}$
- (C) $\frac{3}{5}$
- (D) $\frac{4}{5}$
- (E) $\frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$$\cos \theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = -\cos \theta$$

$$\text{因此, } \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = \frac{-|a|^2 - |b|^2 + |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 9 = -|a|^2 - |b|^2 + 16$$

$$\text{設 } x = |a| = |b|, \text{ 故 } 2x^2 - 9 = -2x^2 + 16, \text{ 得到 } x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$$

$$\text{代入 } \cos \theta, \text{ 得到 } \frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 9}{2 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2} - 9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = 7$ 、 $|\vec{b}| = 5$ ， $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ ，則 $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = ?$

(A) -25

(B) -5

(C) 0

(D) 44

(E) 51

Solution

$$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$$

$$\text{已知 } \tan \theta = \frac{-3}{4}, \text{ 則 } \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{因此 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos \theta = 7 \times 5 \times -\frac{4}{5} = -28$$

$$\text{因此 } (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 98 + 28 - 75 = 51$$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以 $(2, 2)$ 與 $(6, 2)$ 為兩焦點，且與直線 $x + 1 = 0$ 相切，則橢圓短軸半長為何？

- (A) 4
- (B) $\sqrt{21}$
- (C) $\sqrt{23}$
- (D) $\sqrt{29}$
- (E) 6

Solution

將題目簡化為求 b 的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是 $(\frac{2+6}{2}, \frac{2+2}{2}) = (4, 2)$

焦距 c 為焦點與橢圓中點之距離，因此可知 $c = 2$

已知與直線 $x + 1 = 0$ 相切，因此橢圓左右一端會與 $x + 1 = 0$ 相切，因此其中一端為 $(-1, 2)$

故長軸 a 為橢圓長軸端點與中心之距離，可知 $a = 5$

因此 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線 $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$ 的焦點座標為 (a, b) ，則 $ab = ?$

- (A) 3
- (B) 3.5
- (C) 4
- (D) 4.5
- (E) 5

Solution

$$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

$$\Rightarrow -2(y - 2) = (x - 2)^2$$

因此可以知道頂點座標為 $(2, 2) \cdot c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

因此焦點為 $(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$

故 $a = 2, b = \frac{3}{2}$ ，得到 $ab = 3$ ，故選 (A)。

100-01-12

Statement

雙曲線 $xy - 3x + 4y = 0$ 兩頂點的距離為何？

(A) $2\sqrt{3}$

(B) 4

(C) $2\sqrt{6}$

(D) $4\sqrt{3}$

(E) $4\sqrt{6}$

Solution

$$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x + 4)(y - 3) = -12$$

考慮通過頂點的線為 $y = -x + b$ ，代入必定通過的點 $(-4, 3)$ 得到 $b = -1$

因此 $y = -x - 1$ 會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$$x(-x - 1) - 3x + 4(-x - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$\text{利用公式解得到 } x \text{ 的點，也就是 } x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{當 } x = -4 + 2\sqrt{3} \text{ 時， } y = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\text{當 } x = -4 - 2\sqrt{3} \text{ 時， } y = -3 - 2\sqrt{3}$$

兩點距離為 $\sqrt{(-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3} - 3 - (-3 - 2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48 + 48} = 4\sqrt{6}$ ，故選 (E)

100-01-13

Statement

若 $\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$ ，則 $x = ?$

(A) -3

(B) -3 或 1

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

$$\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$$

$$\Rightarrow \log_2(3 - x^2) - \log_2 x = 1$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{3 - x^2}{x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3 - x^2}{x} = 2$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = -3$$

驗根可知 $\log_2 x$ 無法放入 -3 ，因為 \log 的定義域為正整數之集合，故 $x = -3$ 不合。

因此 $x = 1$ ，故選(C)

100-01-14

Statement

若 $f(x) = \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$ ，且 $f(a) = 3$ ， $f(b) = 5$ ，則 $f(a + b) = ?$

(A) $\frac{5}{3}$

(B) 2

(C) 6

(D) 8

(E) 15

Solution

$$\text{令 } t = 2^x, \text{ 則 } f(x) = \frac{1 + t}{1 - t}$$

$$\text{考慮 } f(a) = 3$$

$$\frac{1 + t}{1 - t} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + t = 3 - 3t$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{因此 } 2^a = \frac{1}{2}, \text{ 得到 } a = -1$$

$$\text{考慮 } f(b) = 5$$

$$\frac{1 + t}{1 - t} = 5$$

$$\Rightarrow 1 + t = 5 - 5t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$2^b = \frac{2}{3}, \text{ 則 } b = 1 - \log_2 3$$

$$\text{故 } f(a+b) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 \frac{1}{3}) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{2} = 2 \cdot \text{故選}(B)$$

100-01-15

Statement

$$\text{求 } \log_2(\sqrt{12 + 2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12 - 2^{\frac{7}{2}}}) = ?$$

$$(A) \quad \frac{1}{2}$$

$$(B) \quad \frac{3}{2}$$

$$(C) \quad 2$$

$$(D) \quad \frac{5}{2}$$

$$(E) \quad 4$$

Solution

$$\begin{aligned} \log_2(\sqrt{12 + 2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12 - 2^{\frac{7}{2}}}) &= \log_2(\sqrt{12 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}) = \log_2(\sqrt{8 + 8\sqrt{2} + 4} + \sqrt{8 - 8\sqrt{2} + 4}) \\ &= \log_2(\sqrt{(2 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2 - 2\sqrt{2})^2}) = \log_2(4\sqrt{2}) = \frac{5}{2} \cdot \text{故選}(D) \end{aligned}$$

100-01-16

Statement

$$\text{設 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \cdot \text{且 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \text{則 } \sin \theta + \cos \theta = ?$$

$$(A) \quad -1$$

$$(B) \quad -\frac{1}{2}$$

$$(C) \quad \frac{1}{2}$$

$$(D) \quad \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(E) \quad \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Solution

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{故 } \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\text{則 } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{1 + 2 \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \text{故選}(E)$$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

- (A) 若 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ，則 $\sin x < \cos x < \cot x$
- (B) 若 $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ，則 $\sec x < \csc x < \cot x$
- (C) 若 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\cos x < \sin x < \tan x$
- (D) 若 $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $\sin x_1 > \sin x_2$
- (E) 若 $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$ ，則 $\cos x_1 > \cos x_2$

Solution

若 $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ，則 $\sin \theta < \cos \theta < \tan \theta$

故 $\csc \theta < \sec \theta < \cot \theta$ ，故選(B)

100-01-18

Statement

若 $mx + 3y + 1 = 0$ 與 $x + (m - 2)y + m = 0$ 之交點在第二象限內，則 m 之範圍為何？

- (A) $0 < m < 1$
- (B) $0 < m < 2$
- (C) $0 < m < 3$
- (D) $1 < m < 3$
- (E) $1 < m < 4$

Solution

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \frac{2m + 2}{(m - 3)(m + 1)} \\ y = \frac{m^2 - 1}{(-m + 3)(m + 1)} \end{cases}$$

考慮到 $y > 0, x < 0$ 的情況

得到 $((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

得到 $1 < m < 3$ ，故選(D)

100-01-19

Statement

若點 (a, b) 在直線 $2x + 3y = 1$ 上移動，則直線 $ax + by = 3$ 恆過哪一點？

- (A) $(3, 4)$
- (B) $(4, 5)$
- (C) $(5, 7)$
- (D) $(5, 8)$
- (E) $(6, 9)$

Solution

考慮 $x = 5$ 時 $y = -3$

考慮 $x = -4$ 時 $y = 3$

由於 a, b 依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮 $5x - 3y = 3$ 與 $-4x + 3y = 3$ 的交點，得到 $(x, y) = (6, 9)$ ，故選(E)

100-01-20

Statement

已知 $A(3, -5)$ ， $B(-7, 4)$ ，且點 P 介於 A 、 B 之間，又 $\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4$ ，若 P 之座標為 (a, b) ，則 $7a + 21b = ?$

- (A) -33
- (B) -32
- (C) -31
- (D) -30
- (E) -29

Solution

$$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$$

利用內分點公式。

$$P = \left(\frac{4 \times 3 + 3 \times (-7)}{7}, \frac{4 \times (-5) + 3 \times 4}{7} \right) = \left(\frac{-9}{7}, \frac{-8}{7} \right)$$

則 $7a + 21b = (-9) + (-8) \times 3 = -33$ ，故選(A)