106年第2次北科入學數學會考

106-02-01

Statement

方程式$2\sin x = x$有幾個解？

$(A)\quad 2$

$(B)\quad 3$

$(C)\quad 4$

$(D)\quad 5$

$(E)\quad 6$

Solution 1

> 不用微積分的解 by Trava

因為$y = x$與$y = 2\sin x$均通過原點，所有在原點時會有交點

考慮到$y = 2\sin x$與$y = x$為奇函數，所以只要判斷$x > 0$的範圍就可以推得所有交點

由於$2\sin x$的最大值為2，所以只要$x > 2$，$y = x$與$y = 2\sin x$就不可能有交點

令$f(x) = 2\sin x - x$

$f(\frac{\pi}{2}) > 0$，所以可以知道$2\sin x$的遞增速度比x快

在$[\frac{\pi}{2}, 2]$的區間內$2\sin x$為遞減，因為x為嚴格遞增

所以在$[\frac{\pi}{2}, 2]$會有一個交點，然後在$[-\frac{\pi}{2}, -2]$也會有一個

所以總共有3個交點，故選(B)

Solution 2

> 微積分解 by Uriah

$f(x) = 2\sin x - x$，考慮$-\pi < x < \pi$

$\Rightarrow f'(x) = 2\cos x - 1 = 0$，則$\cos x = \dfrac{1}{2}$，極值發生在$\dfrac{\pi}{3}$與$-\dfrac{\pi}{3}$

考慮$-\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3}$，以$x = 0$考慮，則$f'(0) = 1$，遞增

考慮$\dfrac{\pi}{3} < x < \pi$，以$x = \dfrac{\pi}{2}$考慮，則$f'(\dfrac{\pi}{2}) = -1$，遞減

考慮$-\pi < x < -\dfrac{\pi}{3}$，以$x = \dfrac{-\pi}{2}$考慮，則$f'(-\dfrac{\pi}{2}) = -1$，遞減

考慮$f(\dfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3} > 0$，$f(-\dfrac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3} < 0$

根據中間值定理，可知$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$之曲線經過$x$軸，故存在一個解。

由於極值發生在兩個頂點上，因此$x = \frac{\pi}{3}$右邊將會遞減到無限小，且$x = -\frac{\pi}{3}$左邊將會遞增到無限大

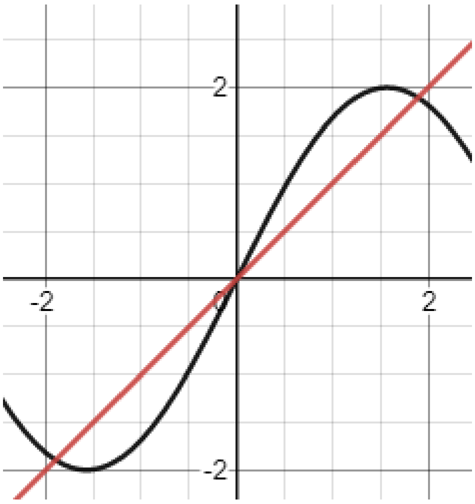
根據中間值定理，都會經過$y = 0$，故存在兩個解。

總共有3個解，故選(B)

Solution 3

> 畫圖解By Uriah

畫出圖



故選(B)

106-02-02

Statement

設x為實數，求滿足兩不等式$x^3 > 12 + 8x - x^2$，$x^2 < 4 + 3x$的解為何？

$(A)\quad x < 2$或$x > 3$

$(B)\quad x > 3$

$(C)\quad 3 < x < 4$

$(D) \quad -2 < x < 4$

$(E) \quad x > 4$

Solution

考慮$x^3 > 12 + 8x - x^2$

整理式子，$x^3 + x^2 - 8x - 12 > 0 \Rightarrow (x+2)^2(x-3) > 0$

考慮式子兩種可能的情況

$$\begin{cases} (x+2)^2 < 0 \\ (x-3) < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ (x-3) > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3$$

兩式取聯集，得到$x > 3$

考慮$x^2 < 4 + 3x$

整理式子，$x^2 - 3x - 4 > 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) > 0 \Rightarrow -1 < x < 4$

因此$(x > 3) \cup -1 < x < 4 \Rightarrow 3 < x < 4$，故選$(C)$

106-02-03

Statement

$\cos 127^\circ \cos 23^\circ + \cos 217^\circ \cos 67^\circ \ = ?$

$(A) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(B) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(C) \quad -\frac{1}{2}$

$(D) \quad \frac{1}{2}$

$(E) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$\cos 127^\circ \cos 23^\circ + \cos 217^\circ \cos 67^\circ$

$= -\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 37^\circ \cos 67^\circ$

$= -\sin 37^\circ \sin 67^\circ - \cos 37^\circ \cos 67^\circ$

$= -(\sin 37^\circ \sin 67^\circ + \cos 37^\circ \cos 67^\circ)$

$= -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故選$(A)$

106-02-04

Statement

不等式$\log_2(x-\dfrac{1}{2}) > \log_4(2-x)-1$之解為何？

$(A)\quad \dfrac{1}{2} < x < 2$

$(B)\quad 1 < x < \dfrac{3}{2}$

$(C)\quad \dfrac{3}{2} < x < 2$

$(D)\quad \dfrac{-1}{4} < x < 1$

$(E)\quad 1 < x < 2$

Solution

考慮式子定義域：$\dfrac{1}{2} < x < 2$

$\log_2(x-\dfrac{1}{2}) > \log_4(2-x)-1$

$\Rightarrow \log_2(x-\dfrac{1}{2}) > \dfrac{1}{2}\log_2(2-x)-1$

$\Rightarrow 2\log_2(x-\dfrac{1}{2}) > \log_2(2-x)-2$

$\Rightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}$

$\Rightarrow x^2-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4} > 0$

$\Rightarrow 4x^2-3x-1 > 0$

$\Rightarrow (4x+1)(x-1) > 0$

$\Rightarrow x > 1 \cup \dfrac{-1}{4} < x$

將結果與定義域取交集，得到$1 < x < 2$，故選(E)

106-02-05

Statement

求$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2+x-2} = ?$

$(A)\quad \frac{1}{48}$

$(B)\quad \frac{1}{40}$

$(C)\quad \frac{1}{32}$

$(D)\quad \frac{1}{24}$

$(E)\quad \frac{1}{16}$

Solution 1

令$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，則$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+3)-f(3x+1)}{(x-1)(x+2)}$

令$h=x-1$，則$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+3)-f(3x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(3h+4)}{h(h+3)}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(3h+4)}{h(h+3)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(3h+4)}{h}\cdot\frac{1}{h+3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(4)-f(3h+4)+f(4)}{h}\cdot\frac{1}{h+3}$$

$$=(\lim_{h\to 0}\frac{f(h+4)-f(4)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(3h+4)-f(4)}{h})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+3}$$

$$=(f'(4)-3f'(4))\cdot\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}f'(4)$$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$，$-\frac{2}{3}f'(4)=\frac{1}{24}$，故選$(D)$

Solution 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2+x-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+3)(3x+1)}}}{x^2+x-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{(x^2+x-2)\sqrt{3x^2+10x+3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{3x+1-x-3}{(x^2+x-2)\sqrt{3x^2+10x+3}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{(x^2+x-2)\sqrt{3x^2+10x+3}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2}{(x+2)\sqrt{3x^2+10x+3}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$$

$\frac{2}{3\cdot 4\cdot 4} = \frac{1}{24}$，故選$(D)$

106-02-06

Statement

若$\frac{1}{\alpha}$和$\frac{1}{\beta}$為方程式$x(x-6)=-2$的兩根且$\alpha > \beta$，則$\alpha^2\beta - \alpha\beta^2\ = ?$

$(A)\quad \frac{\sqrt{7}}{2}$

$(B)\quad \frac{\sqrt{7}}{3}$

$(C)\quad \frac{\sqrt{7}}{4}$

$(D)\quad \frac{\sqrt{7}}{5}$

$(E)\quad \frac{\sqrt{7}}{6}$

Solution

$x(x-6)=-2 \Rightarrow x^2-6x+2=0$

利用根與係數，$\frac{1}{\alpha\beta}=2$，$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=6$

因此$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$，代入$\frac{1}{\alpha\beta}$得$\alpha+\beta=3$，且$\alpha\beta=\frac{1}{2}$

$\alpha-\beta=\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$

$\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(A)$

106-02-07

Statement

已知橢圓方程式為$\frac{(x-1)^2}{a}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$且其短軸平行$y$軸，若$P(k,2)$為橢圓上一點且$P$點到點$(1,2)$的距離不超過$3$，假設$a$為整數，則$a$有幾種可能？

$(A)\quad 3$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

(D) 6

(E) 7

Solution

由方程式可知道原點為$(1,2)$

從題目上可知道P點到原點最長不超過3，因此可以知道$\sqrt{a}<3$，因此$a<9$

又因為方程式是橢圓且短軸平行y軸，因此$a\geq 4$

故$4\leq a<9$，共有5種可能，故選(C)

106-02-08

Statement

設直線L通過兩點$(3,0)$、$(0,-4)$，直線M為通過點$(-1,1)$且與L垂直之直線，若M其方程式為$ax+by=1$，則$a+b=?$

(A) -7

(B) -1

(C) 1

(D) 3

(E) 7

Solution

L通過兩點，因此可得$L: y=\dfrac{0-(-4)}{3-0}(x-3)\Rightarrow -4x+3y+12=0$

則M垂直於L，因此$M:3x+4y=d$，代入$(-1,1)$得到$d=1$，故$M:3x+4y=1$

因此$3+4=7$，故選(E)

106-02-09

Statement

若$a>0$，$a\neq 1$，且$\log_a(\sqrt{2}-1)=2x$，求$\dfrac{a^{-3x}-a^{3x}}{a^{-x}+a^{x}}=?$

(A) $2-\sqrt{2}$

(B) $3-\sqrt{2}$

(C) $1+\sqrt{2}$

(D) $2+\sqrt{2}$

(E) $3+\sqrt{2}$

Solution

$\log_a(\sqrt{2}-1)=2x$

$\Rightarrow \sqrt{2}-1=a^{2x}$

$\dfrac{a^{-3x}-a^{3x}}{a^{-x}+a^{x}}=\dfrac{a^{-2x}-a^{4x}}{1+a^{2x}}=\dfrac{1-a^{6x}}{a^{2x}(1+a^{2x})}=\dfrac{1-(\sqrt{2}-1)^3}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(8-5\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\dfrac{6-2\sqrt{2}}{2}=3-\sqrt{2}$，故選$(B)$

106-02-10

Statement

若拋物線$x=\dfrac{1}{64}y^2$與直線$x-\dfrac{1}{k}y+1=0$有交點且k為整數，則k有幾種可能？

$(A)\quad 3$

$(B)\quad 4$

$(C)\quad 5$

$(D)\quad 8$

$(E)\quad 9$

Solution

$x+1=\dfrac{1}{k}y$

$k(x+1)=y$

考慮直線與拋物線只有一個交點

$x=\dfrac{1}{64}(k(x+1))^2$

$x=\dfrac{1}{64}k^2(x^2+2x+1)$

$64x=k^2x^2+2k^2x+k^2$

$k^2x^2+(2k^2-64)x+k^2=0$

則利用判別式，考慮$b^2-4ac=0$

$(2k^2-64)^2-4\times k^2\times k^2=0$

$\Rightarrow 4k^4-256k^2+4096-4k^4=0$

$\Rightarrow -256k^2=-4096$

$\Rightarrow k^2=16$，得到$k=\pm 4$

因此只要k落在$-4\le k\le 4$的區間，且$k\ne 0$，與拋物線均有交點，故答案為8，故選(D)

106-02-11

Statement

已知向量$\vec{a}=<3,1>$、$\vec{b}=<2,4>$。若$|\vec{a}+t\vec{b}|$之最小值為何？

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 2

(D) $\sqrt{5}$

(E) $\sqrt{6}$

Solution

$\vec{a}+t\vec{b}=<3+2t,1+4t>$

因此考慮

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(3+2t)^2+(1+4t)^2}=\sqrt{9+12t+4t^2+1+8t+16t^2}=\sqrt{20t^2+20t+10}$

對根號內的式子配方法，得到$\sqrt{20(t^2+t+\frac{1}{4})-5+10}=\sqrt{20(t+\frac{1}{2})^2+5}$

因此在$t=-\frac{1}{2}$時，有最小值為$\sqrt{5}$，故選(D)

106-02-12

Statement

若$\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{\sqrt{3x+a}-b}{x})=\frac{3}{4}$，求$a+b=?$

(A) 6

(B) 9

(C) 12

(D) 15

(E) 18

Solution

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{\sqrt{3x+a}-b}{x})=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{3x+a-b^2}{(\sqrt{3x+a}+b)x})=\frac{3}{4}$

極限存在必要條件：$a-b^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{3}{(\sqrt{3x+a}+b)})=\frac{3}{\sqrt{a}+b}=\frac{3}{4}$

得到$\sqrt{a}+b=4$

兩式$\begin{cases} a-b^2 & =0 \\ \sqrt{a}+b=4 \end{cases}$解聯立，得到$(a,b)=(4,2)$

故$a+b=6$，故選(A)

106-02-13

Statement

若$\dfrac{x^4+2x^3+2x+2}{x^3-1}=f(x)+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$，其中$f(x)$為一次式且$a$、$b$為常數，則$a+b=?$

$(A)\quad -2$

$(B)\quad -1$

$(C)\quad 0$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad 2$

Solution

設$f(x)=dx+e$

$\dfrac{x^4+2x^3+2x+2}{x^3-1}=f(x)+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

$\Rightarrow x^4+2x^3+2x+2=(dx+e)(x^3-1)+a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$

$\Rightarrow x^4+2x^3+2x+2=dx^4-dx+ex^3-e+ax^2+ax+a+bx^2-bx+cx-c$

$\Rightarrow x^4+2x^3+2x+2=dx^4+ex^3+(a+b)x^2+(-d+a-b+c)x+(-e+a-c)$

比較係數，$d=1,e=2$，且$a+b=0$，$-1+a-b+c=2$，$(-2+a-c)=2$，故選(C)

106-02-14

Statement

已知向量$|\vec{a}|=2$、$|\vec{b}|=3$、$|\vec{c}|=2$且$|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|=0$，則$|\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}|=?$

$(A)\quad \sqrt{\dfrac{21}{2}}$

$(B)\quad \sqrt{\dfrac{23}{2}}$

$(C)\quad \sqrt{\dfrac{24}{2}}$

$(D)\quad \sqrt{\dfrac{26}{2}}$

$(E)\quad \sqrt{\frac{27}{2}}$

Solution

已知$|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|=0$

因此$\vec{a}+\vec{b}=-2\vec{c}$

則$|\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}|=|\vec{b}+3\vec{c}|$

又$\vec{b}+2\vec{c}=-\vec{a}$

$|\vec{b}|^2+4(\vec{b}\cdot\vec{c})+4|\vec{c}|^2=|-\vec{a}|^2 \Rightarrow (\vec{b}\cdot\vec{c})=\frac{-21}{4}$

$|\vec{b}+3\vec{c}|=\sqrt{|\vec{b}|^2+6(\vec{b}\cdot\vec{c})+9|\vec{c}|^2}=\sqrt{9+\frac{-126}{4}+36}=\sqrt{\frac{54}{4}}=\sqrt{\frac{27}{2}}$，故選$(E)$

106-02-15

Statement

假設$P(2,0)$、$Q(0,2)$和R為圓$x^2+y^2=4$上三點，則三角形PQR最大面積為何？

$(A)\quad 4$

$(B)\quad 2+2\sqrt{2}$

$(C)\quad 4+\sqrt{2}$

$(D)\quad 4\sqrt{2}$

$(E)\quad 4+4\sqrt{2}$

Solution 1

畫出圖可知，要使得最大面積，R點一定在PQ線段中垂過圓心交於圓上的一點，得到等腰三角形RPQ。

因此面積為$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix}\right|=2+2\sqrt{2}$

Solution 2

令$R=(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

則面積為$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\cos\theta & 0 \\ 2 & 0 & 2\sin\theta & 2 \end{vmatrix}\right|=|2\sin\theta+2\cos\theta-2|$

找出$|2\sin\theta+2\cos\theta-2|$的最大值

$-2\sqrt{2}\le 2\sin\theta+2\cos\theta\le 2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}-2\le 2\sin\theta+2\cos\theta-2\le 2\sqrt{2}-2$

$0 \le |2\sin\theta + 2\cos\theta - 2| \le 2\sqrt{2} + 2$

所以面積最大值為$2\sqrt{2} + 2$

106-02-16

Statement

下列哪一條直線為兩直線$4x - 3y = 2$、$3x - 4y = -7$的交角平分線方程式？

$(A)\quad x - y = -9$

$(B)\quad x - y = 9$

$(C)\quad x + y = -9$

$(D)\quad x + y = 9$

$(E)\quad 7x - 7y = 5$

Solution

考慮一條線與兩直線等距，故

$$\frac{|4x - 3y - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x - 4y + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$4x - 3y - 2 = \pm(3x - 4y + 7)$

得到直線為$x + y - 9 = 0$(鈍角)或$7x - 7y + 5 = 0$(銳角)，故選(D)

106-02-17

Statement

若$f(x) = \log_{27} \sqrt[3]{g(x)}$，其中$g(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x - 1$，則$f(\sqrt{3} - 1) =?$

$(A)\quad \frac{1}{6}$

$(B)\quad \frac{1}{3}$

$(C)\quad \frac{5}{6}$

$(D)\quad 1$

$(E)\quad \sqrt{3}$

Solution

利用綜合除法，將$x^4+5x^3+6x^2+x-1$以$(x+1)$的形式表現

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 5 & 6 & 1 & -1 & \\
 & -1 & -4 & -2 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 4 & 2 & -1 & 0 & \\
 & -1 & -3 & 1 & & \\
\hline
1 & 3 & -1 & 0 & & \\
 & -1 & -2 & & & \\
\hline
1 & 2 & -3 & & & \\
 & -1 & & & & \\
\hline
1 & 1 & & & &
\end{array}
$$

得到$g(x)=(x+1)^4+(x+1)^3-3(x+1)^2$

因此$g(\sqrt{3}-1)=9+3\sqrt{3}-9=3\sqrt{3}$

$f(\sqrt{3}-1)=\log_{27}\sqrt[3]{g(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{9}\log_3 3\sqrt{3}=\frac{1}{6}$，故選$(A)$

106-02-18

Statement

函數$f(x)=\sin^2 x-\cos x+1$的最大值為何？

(A) $\frac{5}{4}$

(B) $\frac{7}{4}$

(C) 2

(D) $\frac{9}{4}$

(E) 3

Solution

$f(x)=\sin^2 x-\cos x+1=-\cos^2 x-\cos x+2$

令$t=\cos x$，則$f(t)=-t^2-t+2=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$

考慮$t=\frac{1}{2}$在$\cos x$的值域內，因此最大值為$\frac{9}{4}$，故選(D)

106-02-19

Statement

若$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$且$f(g(x))=\dfrac{x+1}{2x+1}$，求$g(1)=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

已知$f(1)=0$，且$f(g(1))=\dfrac{2}{3}$

考慮$\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2}{3}$，得到$x=5$

因此$g(1)=5$，故選(E)

106-02-20

Statement

設$4^{x+1}-15\cdot 2^{x+1}+32=0$的兩根為$\alpha$和$\beta$，則$\alpha+\beta=?$

$(A)\quad 1$

$(B)\quad 2$

$(C)\quad 3$

$(D)\quad 4$

$(E)\quad 5$

Solution

$4^{x+1}-15\cdot 2^{x+1}+32=0$

$\Rightarrow 4\cdot 4^x-30\cdot 2^x+32=0$

令$t=2^x$，則$4t^2-30t+32=0\Rightarrow 2t^2-15t+16=0$

得到$2^\alpha+2^\beta=\dfrac{15}{2}$且$2^{\alpha+\beta}=8$

因此$\alpha+\beta=3$，故選(C)