102年第1次北科入學數學會考

102-01-01

Statement

若$\log(x-9)+\log(x-5)=\log 4+\log(25-2x)$，則$x=?$

(A)　9
(B)　10
(C)　11
(D)　12
(E)　13

Solution

$\log(x-9)+\log(x-5)=\log 4+\log(25-2x)$

$\Rightarrow \log((x-9)(x-5))=\log(4(25-2x))$

$\Rightarrow \log(x^2-14x+45)=\log(100-8x)$

$\Rightarrow x^2-14x+45=100-8x$

$\Rightarrow x^2-6x-55=0$

$\Rightarrow (x-11)(x+5)=0$

可得$x=-5$或$x=11$。

驗根，可知當$x=-5$代入$\log(x-9)$，會得到$\log -14$

log的定義域為正整數之集合，故不合。

因此$x=11$，故選(C)。

102-01-02

Statement

已知$\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi, \pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$。若$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}, \tan\beta=\dfrac{1}{3}$，則$\sin(\alpha+\beta)=?$

(A)　$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$
(B)　$\dfrac{2\sqrt{10}}{10}$
(C)　$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
(D)　$\dfrac{\sqrt{15}}{10}$
(E)　$\dfrac{\sqrt{17}}{10}$

Solution

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$，因為$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，則$\cos\alpha = \frac{4}{5}$。

$\tan\beta = \frac{1}{3}$，因為$\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$，則$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，而$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

因此$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{-9\sqrt{10}}{50} + \frac{4\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，故選$(A)$。

102-01-03

Statement

已知$\vec{a}$與$\vec{b}$為兩向量，$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}| = 4$且$|\vec{a}-\vec{b}| = 3$。

若$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為θ，則$\cos\theta = ?$

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{6}{25}$

(E) $\frac{7}{25}$

Solution

$(|\vec{a}+\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 16$

$(|\vec{a}-\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 9$

因此，$4(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 7, \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7}{4}$

又$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，因此$2|\vec{a}|^2 - \frac{7}{2} = 9$，$|\vec{a}| = \frac{5}{2}$

已知$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\cos\theta = \frac{7}{4}$，得到$\cos\theta = \frac{7}{25}$，故選$(E)$

102-01-04

Statement

若ΔABC中，$\overline{AB} = \sqrt{3}+1$，$\overline{BC} = 2$且$\angle B = 30^\circ$，則$\angle A = ?$

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 90°

(E) 120°

Solution

$\overline{AC}^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (2)^2 - 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(2)\cdot\cos\beta$

$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - (4\sqrt{3}+4)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$

因此$\overline{AC} = \sqrt{2}$

已知$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha}$，因此$\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$，得到$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此$\alpha = 45^\circ$，故選$(B)$

102-01-05

Statement

下列敘述何者正確？

(A) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的定義域為$(-1,\infty)$

(B) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的定義域為$[-1,\infty)$

(C) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的值域為$[1,\infty)$

(D) $f(x) = \sqrt{x+1}$的定義域為$[-1,\infty)$

(E) $f(x) = \sqrt{x+1}$的值域為$[1,\infty)$

Solution

(A)的定義域為$\mathbb{R}$

(B)的定義域為$\mathbb{R}$

(C)的值域為$[0,\infty)$

(E)的值域為$[0,\infty)$

故選(D)

102-01-06

Statement

若$\dfrac{16x^3-20x^2+6x+3}{(2x-1)^4}=\dfrac{a}{(2x-1)}+\dfrac{b}{(2x-1)^2}+\dfrac{c}{(2x-1)^3}+\dfrac{d}{(2x-1)^4}$，則
$a-b+c-d=?$

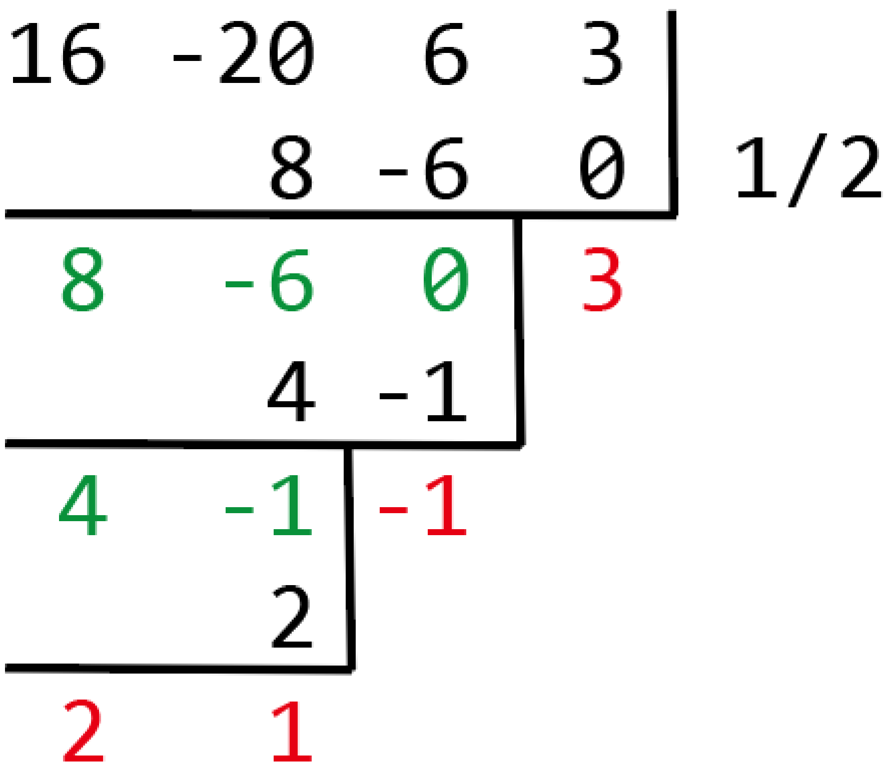
$(A)\quad -3$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 1$
$(E)\quad 3$

Solution

$$\frac{16x^3-20x^2+6x+3}{(2x-1)^4}=\frac{a}{(2x-1)}+\frac{b}{(2x-1)^2}+\frac{c}{(2x-1)^3}+\frac{d}{(2x-1)^4}$$

$$\Rightarrow 16x^3-20x^2+6x+3=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$$

利用綜合除法



綠色：請注意做這樣的綜合除法時，使用的是$x-\frac{1}{2}$，為了還原成$2x-1$，因此要把係數除以2。

得到$a=2, b=1, c=-1, d=3$，因此$a-b+c-d=2-1+(-1)-3=-3$，故選(A)

102-01-07

Statement

若橢圓$4x^2+9y^2+16x-18y-24=0$的長、短軸長各為a、b、則$a+b=?$

$(A)\quad \frac{5}{7}$

$(B)\quad \frac{10}{7}$

$(C)\quad \frac{15}{7}$

$(D)\quad \frac{35}{6}$

$(E)\quad \frac{35}{3}$

Solution

$4x^2+16x+9y^2-18y=24$

$\Rightarrow 4(x^2+4x+4)+9(y^2-2y+1)=24+16+9$

$\Rightarrow 4(x+2)^2+9(y-1)^2=49$

$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{\frac{49}{4}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{49}{9}}=1$

可知長軸為$2\sqrt{\frac{49}{4}}=7$，短軸為$2\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{14}{3}$

$7+\frac{14}{3}=\frac{35}{3}$，故選$(E)$

102-01-08

Statement

下列何者錯誤？

$(A)\quad \sin\frac{8\pi}{3}=\sin\frac{2\pi}{3}$

$(B)\quad \cos\frac{17}{6}=-\sin\frac{\pi}{3}$

$(C)\quad \tan\frac{11\pi}{3}=\tan\frac{2\pi}{3}$

$(D)\quad \sec\frac{15\pi}{4}=-\sec\frac{\pi}{4}$

$(E)\quad \csc\frac{7\pi}{6}=-\csc\frac{\pi}{6}$

Solution

$\sec\dfrac{15\pi}{4}=\sec 675^\circ=\sec 45^\circ$

$\sec 45^\circ\neq-\sec 45^\circ$，故選$(D)$

102-01-09

Statement

若$f(x)=x^4-2x^3+3x^2+7=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$

則$a+b+c=?$

(A) 20
(B) 21
(C) 22
(D) 23
(E) 24

Solution

1	-2	3	0	7	2
	2	0	6	12	
1	0	3	6	19	
	2	4	14		
1	2	7	20		
	2	8			
1	4	15			
	2				
1	6				

故$a=1,b=6,c=15,d=20,e=19$

因此$a+b+c=22$，故選(C)

102-01-10

Statement

若$L_1 = 2x - y + 7 = 0$與$L_2 = ax + y - 13 = 0$的交角為$\frac{\pi}{4}$且$a > 0$，則$a = ?$

$(A)\quad 6$
$(B)\quad 5$
$(C)\quad 4$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 2$

Solution

$m_1 = -\frac{2}{-1} = 2$，$m_2 = -\frac{a}{1} = -a$

又$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{2 - (-a)}{1 - 2a} = \frac{2 + a}{1 - 2a}$

交角可能是$\tan 45^\circ$或$\tan 135^\circ$，因此考慮

若是$\tan 45^\circ$，則$\frac{2 + a}{1 - 2a} = 1$，得到$a = -\frac{1}{3}$，不合。

若是$\tan 135^\circ$，則$\frac{2 + a}{1 - 2a} = -1$，得到$a = 3$

因此$a = 3$，故選(D)

102-01-11

Statement

求不等式$1 + \frac{2x - 7}{(x - 2)^2} < 0$的解為何？

$(A)\quad 3 > x$
$(B)\quad x < -1$
$(C)\quad -1 < x < 2$或$2 < x < 3$
$(D)\quad -1 < x < 3$
$(E)\quad x < -1$或$3 < x$

Solution

$$1 + \frac{2x - 7}{(x - 2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 4} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 2)^2} < 0$$

考慮定義域，得到條件1：$x \neq 2$

因此考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) > 0 \\ (x-2)^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) < 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3$$

將這兩種情況取聯集，與條件1取交集，得到$-1 < x < 2$或$2 < x < 3$，故選(C)

102-01-12

Statement

若拋物線$x^2 = y + 3$與直線$5x + y - 3 = 0$相交於$P(a, b)$及$Q(c, d)$且$a > c$，則$b - d =$?

$(A) \quad -35$
$(B) \quad -8$
$(C) \quad 31$
$(D) \quad 35$
$(E) \quad 8$

Solution

$x^2 = y + 3 \Rightarrow y = x^2 - 3$

$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -5x + 3$

則$x^2 - 3 = -5x + 3$，得到$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-1) = 0$

因此$x = -6$或$x = 1$

得到$a = 1$且$c = -6$，代入原方程式得到$b = -2$且$d = 33$

因此$b - d = -2 - 33 = -35$，故選(A)

102-01-13

Statement

若$P(4, 1)$、$Q(2, 1)$、$R(a, a)$且$\overline{PR} + \overline{QR}$的值為最小，則$a =$?

$(A) \quad 1$
$(B) \quad \frac{3}{2}$
$(C) \quad \frac{5}{4}$
$(D) \quad \frac{7}{4}$
$(E) \quad 2$

Solution

考慮$R(a,a)$在$y=x$上，因此我們可以試著確定P，Q是否在$y=x$不同側上。

判別式為$y-x$，代入$P(4,1)$得3，代入$Q(2,1)$得1，因此同側。

因此，我們考慮在$y=x$上做一鏡像Q'，求一直線L經過P與Q'，與$y=x$之交集點。

可得$Q'=(1,2)$，利用點斜式得到直線$y-2=\dfrac{2-1}{1-4}(x-1)\Rightarrow 3y=-x+7$

與$y=x$取交集，得到$x=\dfrac{7}{4}$，因此$a=\dfrac{7}{4}$，故選(D)

102-01-14

Statement

若雙曲線之漸進線為x軸與y軸且過點$(1,-1)$，則此雙曲線方程式為何？

(A) $x^2-(y+1)^2=1$
(B) $xy=-1$
(C) $y^2-(x-1)^2=1$
(D) $\dfrac{(x-1)^2}{4}-(y+1)^2=1$
(E) $\dfrac{(x+1)^2}{4}-(y+1)^2=-1$

Solution

漸進線為x軸與y軸，因此雙曲線為直角雙曲線$xy=c$之形式，故選(B)。

102-01-15

Statement

若$a=\log 2$、$b=\log 3$，則$10^{3a-2b}=?$

(A) $\dfrac{8}{9}$
(B) $\dfrac{11}{10}$
(C) 1
(D) 10
(E) 12

Solution

$10^{3a-2b} = 10^{3\log 2 - 2\log 3} = 10^{\log 8 - \log 9} = 10^{\log \frac{8}{9}} = \frac{8}{9}$，故選$(A)$

102-01-16

Statement

若$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$且$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，則$\sin^2\theta - \cos^2\theta =$?

$(A) \quad \frac{4}{9}$

$(B) \quad \frac{\sqrt{17}}{9}$

$(C) \quad \frac{\sqrt{2}}{3}$

$(D) \quad \frac{\sqrt{19}}{9}$

$(E) \quad \frac{2\sqrt{5}}{9}$

Solution

$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$且$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，因此$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9}$

因此$-2\sin\theta\cos\theta = \frac{-8}{9}$，$\sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9}$

可知$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{8}{9}$

則$\cos 2\theta = \sqrt{1 - \sin 2\theta} = \frac{\sqrt{17}}{9} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

由於上述已知$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$，因此$\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$，所以$\cos 2\theta = \frac{-\sqrt{17}}{9}$

因此$\sin^2\theta - \cos^2\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta = \frac{\sqrt{17}}{9}$，故選$(B)$

102-01-17

Statement

若直線通過點$(3, 4)$且在第一象限與兩軸所圍三角形面積最小，則此直線的兩截距和為何？

$(A)\quad 12$
$(B)\quad 13$
$(C)\quad 14$
$(D)\quad 15$
$(E)\quad 16$

Solution 1

> by Trava

設直線截距式$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，三角形面積為$\frac{ab}{2}$，也就是當$ab$最小時，求$a+b$

因為與第一象限圍成區域面積，所以$a,b>0$

代入點$(3,4)$得等式$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$

利用算幾不等式$\frac{\frac{3}{a}+\frac{4}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{12}{ab}}$，解得$ab$最小值為$48$

ab反帶回去算幾不等式，$\frac{\frac{3}{a}+\frac{4}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{12}{48}}$，得到$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}\geq 1$

當等號成立$\frac{3}{a}=\frac{4}{b}$，帶回$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$

解得$a=6,b=8$，因此$a+b=14$，故選(C)

Solution 2

> by Uriah with Calculus

列出直線式子：$y-4=m(x-3)$

求得x,y的截距：
令$x=0,\ y=-3m+4$
令$y=0,\ x=\frac{-4}{m}+3$

因此$xy=(-3m+4)(\frac{-4}{m}+3)=12-9m-\frac{16}{m}+12=-9m-\frac{16}{m}+24$

利用微分解出極值，因此零次項捨去不用：

$\because f'(m)=\frac{d}{dm}(f+g)=\frac{d}{dm}(f)+\frac{d}{dm}(g)$

$\therefore f'(m)=\frac{d}{dm}(-9m)+\frac{d}{dm}(-\frac{16}{m})$

$f'(m)=-9+\frac{16}{m^2}=0$

$9m^2=16, m=\sqrt{\frac{16}{9}}=\pm\frac{4}{3}$ (正不合)

帶回截距，得$y=\dfrac{-4}{3}\times -3+4=8,\ x=\dfrac{-4}{\frac{-4}{3}}+3=6$

$x+y=14$，故選(C)

102-01-18

Statement

已知圓$x^2+y^2=10$與$x^2+y^2-2x+4y=5$有兩交點，求此兩交點的距離為何？

$(A)\quad \sqrt{33}$
$(B)\quad \sqrt{35}$
$(C)\quad \sqrt{37}$
$(D)\quad \sqrt{39}$
$(E)\quad 2\sqrt{10}$

Solution

$x^2+y^2-2x+4y=5$

$\Rightarrow 10-2x+4y=5$

$\Rightarrow 4y=-5+2x$

$\Rightarrow y=\dfrac{-5+2x}{4}$

$x^2+\dfrac{25-20x+4x^2}{16}=10$

$\Rightarrow 16x^2+25-20x+4x^2=160$

$\Rightarrow 20x^2-20x-135=0$

$\Rightarrow 4x^2-4x-27=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{7}$

考慮$x=\dfrac{1}{2}+\sqrt{7}$，則$y=-1+\dfrac{1}{2}\sqrt{7}$

考慮$x=\dfrac{1}{2}-\sqrt{7}$，則$y=-1-\dfrac{1}{2}\sqrt{7}$

因此兩點距離為$\sqrt{((\frac{1}{2}+\sqrt{7})-(\frac{1}{2}-\sqrt{7}))^2+((-1+\frac{1}{2}\sqrt{7})-(-1-\frac{1}{2}\sqrt{7}))^2}=\sqrt{35}$，故選$(B)$

102-01-19

Statement

若數列的一般項為$a_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$，則$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{22} = ?$

(A) $\dfrac{276}{600}$
(B) $\dfrac{451}{600}$
(C) $\dfrac{476}{600}$
(D) $\dfrac{500}{600}$
(E) 1

Solution

$$a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

推得規律，得到$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{22} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{25} = \dfrac{451}{600}$，故選$(B)$

102-01-20

Statement

若方程式$4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0$，則$x = ?$

(A) -3
(B) -2
(C) 1
(D) 2
(E) 3

Solution

令$t = 2^x$，則$t^2 - 6t - 16 = 0$，得到$t = 8$或$t = -2$(不合)

還原t，得到$x = 3$，故選(E)