102-01-01

Statement

若$\log(x-9)+\log(x-5)=\log 4+\log(25-2x)$，則$x=?$

(A) 9
(B) 10
(C) 11
(D) 12
(E) 13

Solution

$\log(x-9)+\log(x-5)=\log 4+\log(25-2x)$

$\Rightarrow \log((x-9)(x-5))=\log(4(25-2x))$

$\Rightarrow \log(x^2-14x+45)=\log(100-8x)$

$\Rightarrow x^2-14x+45=100-8x$

$\Rightarrow x^2-6x-55=0$

$\Rightarrow (x-11)(x+5)=0$

可得$x=-5$或$x=11$。

驗根，可知當$x=-5$代入$\log(x-9)$，會得到$\log -14$

log的定義域為正整數之集合，故不合。

因此$x=11$，故選(C)。

102-01-02

Statement

已知$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi, \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$。若$\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \tan\beta=\frac{1}{3}$，則$\sin(\alpha+\beta)=?$

(A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
(B) $\frac{2\sqrt{10}}{10}$
(C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
(D) $\frac{\sqrt{15}}{10}$
(E) $\frac{\sqrt{17}}{10}$

Solution

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$，因為$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，則$\cos\alpha = \frac{4}{5}$。

$\tan\beta = \frac{1}{3}$，因為$\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$，則$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，而$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

因此$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{-9\sqrt{10}}{50} + \frac{4\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，故選$(A)$。

102-01-03

Statement

已知$\vec{a}$與$\vec{b}$為兩向量，$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}| = 4$且$|\vec{a}-\vec{b}| = 3$。

若$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為θ，則$\cos\theta = ?$

(A) $\frac{1}{7}$
(B) $\frac{1}{6}$
(C) $\frac{1}{5}$
(D) $\frac{6}{25}$
(E) $\frac{7}{25}$

Solution

$(|\vec{a}+\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 16$

$(|\vec{a}-\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 9$

因此，$4(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 7, \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7}{4}$

又$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，因此$2|\vec{a}|^2 - \frac{7}{2} = 9$，$|\vec{a}| = \frac{5}{2}$

已知$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\cos\theta = \frac{7}{4}$，得到$\cos\theta = \frac{7}{25}$，故選$(E)$

102-01-04

Statement

若ΔABC中，$\overline{AB} = \sqrt{3}+1$，$\overline{BC} = 2$且$\angle B = 30^\circ$，則$\angle A = ?$

(A) 30°
(B) 45°
(C) 60°
(D) 90°
(E) 120°

Solution

$\overline{AC}^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (2)^2 - 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(2)\cdot\cos\beta$

$= 3+2\sqrt{3}+1+4-(4\sqrt{3}+4)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$

因此$\overline{AC} = \sqrt{2}$

已知$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha}$，因此$\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$，得到$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此$\alpha = 45^\circ$，故選$(B)$

102-01-05

Statement

下列敘述何者正確？

$(A)\quad f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的定義域為$(-1,\infty)$

$(B)\quad f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的定義域為$[-1,\infty)$

$(C)\quad f(x) = \sqrt[3]{x+1}$的值域為$[1,\infty)$

$(D)\quad f(x) = \sqrt{x+1}$的定義域為$[-1,\infty)$

$(E)\quad f(x) = \sqrt{x+1}$的值域為$[1,\infty)$

Solution

(A)的定義域為$\mathbb{R}$

(B)的定義域為$\mathbb{R}$

(C)的值域為$[0,\infty)$

(E)的值域為$[0,\infty)$

故選(D)

102-01-06

Statement

若$\dfrac{16x^3-20x^2+6x+3}{(2x-1)^4} = \dfrac{a}{(2x-1)} + \dfrac{b}{(2x-1)^2} + \dfrac{c}{(2x-1)^3} + \dfrac{d}{(2x-1)^4}$，則
$a-b+c-d=?$

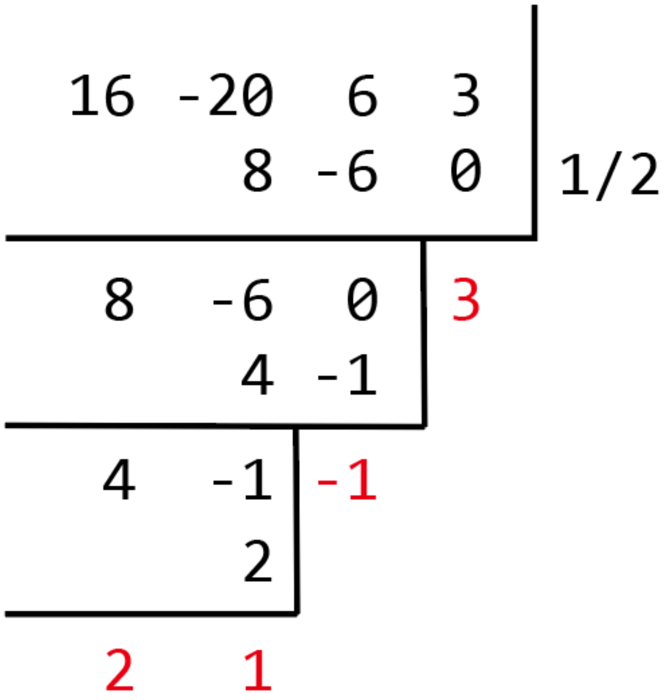
$(A)\quad -3$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 1$
$(E)\quad 3$

Solution

$$\frac{16x^3-20x^2+6x+3}{(2x-1)^4}=\frac{a}{(2x-1)}+\frac{b}{(2x-1)^2}+\frac{c}{(2x-1)^3}+\frac{d}{(2x-1)^4}$$

$\Rightarrow 16x^3-20x^2+6x+3=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$

利用綜合除法



得到$a=2, b=1, c=-1, d=3$，因此$a-b+c-d=2-1+(-1)-3=-3$，故選(A)

102-01-17

Statement

若直線通過點$(3, 4)\$$且在第一象限與兩軸所圍三角形面積最小，則此直線的兩截距和為何？

(A) 12
(B) 13
(C) 14
(D) 15
(E) 16

Solution

列出直線式子：$y-4=m(x-3)$

求得x,y的截距：
令$x=0,\ y=-3m+4$
令$y=0,\ x=\dfrac{-4}{m}+3$

因此$xy=(-3m+4)(\dfrac{-4}{m}+3)=12-9m-\dfrac{16}{m}+12=-9m-\dfrac{16}{m}+24$

利用微分解出極值，因此零次項捨去不用：

$\because f'(m)=\dfrac{d}{dm}(f+g)=\dfrac{d}{dm}(f)+\dfrac{d}{dm}(g)$

$\therefore f'(m)=\dfrac{d}{dm}(-9m)+\dfrac{d}{dm}(-\dfrac{16}{m})$

$f'(m)=-9+\dfrac{16}{m^2}=0$

$9m^2=16, m=\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\pm\dfrac{4}{3}$ (正不合)

帶回截距，得$y=\dfrac{-4}{3}\times -3+4=8,\ x=\dfrac{-4}{\frac{-4}{3}}+3=6$

$x+y=14$