國立台北科技大學　數學入學會考詳解

作者

- 109 資工系 黃漢軒
  - Instagram
  - sigtunatw@gmail.com
- 109 化工系 羅昇宇
  - Instagram
  - qoo18105@gmail.com

感謝北科入學會考出題老師。

所有的解答均為非官方，有任何勘誤上的問題，請聯繫作者。

100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知$f(x)$為一實系數多項式，且$f(\frac{3}{2}) = 27$，$f(-\frac{5}{3}) = 8$。

若$f(x)$除以$(6x^2 + x - 15)$的餘式為$ax + b$，則$b - a = ?$

$(A)\quad 4$
$(B)\quad 8$
$(C)\quad 12$
$(D)\quad 16$
$(E)\quad 20$

Solution

可以把式子轉成

$f(x) = g(x)(6x^2 + x - 15) + ax + b$

$= g(x)(3x + 5)(2x - 3) + ax + b$

代入$x = \frac{3}{2}$，得到$\frac{3}{2}a + b = 27$

代入$x = \frac{-5}{3}$，得到$\frac{-5}{3}a + b = 8$

解聯立之後得到$(a, b) = (6, 18)$

因此$b - a = 12$，故選(C)

100-01-02

Statement

若α, β為方程式$x-\dfrac{3}{x}+1=0$的兩根，則$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=?$

(A) 9
(B) 15
(C) 21
(D) 27
(E) 33

Solution

$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=\dfrac{4}{\alpha\beta}+\dfrac{10(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+25$

$x-\dfrac{3}{x}+1=0 \Rightarrow x^2+x-3=0$

利用根與係數，得到$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-1}{1}=-1$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=-3$

因此$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=\dfrac{4}{-3}+\dfrac{-10}{-3}+25=27$

故選(D)

100-01-03

Statement

求$13^5-14\times 13^4+15\times 13^3-25\times 13^2-12\times 13+9=?$

(A) 22
(B) 25
(C) 28
(D) 31
(E) 34

Solution

將式子考慮成$f(x)=x^5-14x^4+15x^3-25x^2-12x+9$

式子等價於$f(x)$除以$x-13$的餘數（餘式定理）。

$$
\begin{array}{rr|rrrrrr}
 & & & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ \cline{3-8}
1 & -13 & 1 & -14 & 15 & -25 & -12 & 9 \\
 & & 1 & -13 & & & & \\ \cline{3-8}
 & & & -1 & 15 & & & \\
 & & & -1 & 13 & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & 2 & -25 & & \\
 & & & & 2 & -26 & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & 1 & -12 & \\
 & & & & & 1 & -13 & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & 1 & 9 \\
 & & & & & & 1 & -13 \\ \cline{7-8}
 & & & & & & & 22
\end{array}
$$

故答案選(A)。

100-01-04

Statement

若$\dfrac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$，則$A+B+C+D=?$

(A) $\frac{1}{2}$
(B) 2
(C) 3
(D) $\frac{7}{2}$
(E) 33

Solution

$$\frac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$2x^2-x+4=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2)$

$=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$

$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B$

可知

$A+C=0$
$B+D=2$
$A=-\frac{1}{4}$
$B=1$

因此$C=\frac{1}{4}$，$D=1$。

因此$A+B+C+D=2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}\leq -1$之解為何？

(A) $1 \leq \mathrm{x} < 2$
(B) $1 < \mathrm{x} \leq 2$
(C) $1 < \mathrm{x} < 2$
(D) $\mathrm{x} \geq 2$ 或 $\mathrm{x} < 1$
(E) $\mathrm{x} > 2$ 或 $\mathrm{x} < 1$

Solution

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}\leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}+1\leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2}\leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2-5x+7)}{(x-1)(x-2)}\leq 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2-10x+14\leq 0 \\ (x-1)(x-2)>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$$

$$\begin{cases} x^2-10x+14\geq 0 \\ (x-1)(x-2)<0 \end{cases} \Rightarrow 1<x<2$$

因此$1<x<2$時，$\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}\leq -1$，故選$(C)$

100-01-06

Statement

若$a,\ b$均為實數且$ax^2+bx-10<0$之解為$\dfrac{-5}{2}<x<\dfrac{4}{3}$，則$a+b=$？

(A) 5
(B) $\dfrac{11}{2}$
(C) 6
(D) $\dfrac{13}{2}$
(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3})<0$
$\Rightarrow x^2-\frac{4x}{3}+\frac{5x}{2}+\frac{-20}{6}<0$
$\Rightarrow 6x^2-8x+15x-20<0$
$\Rightarrow 6x^2+7x-20<0$

兩邊共除2，得$3x^2+\frac{7}{2}x-10<0$

$a=3,\ b=\frac{7}{2},\ a+b=\frac{13}{2}$

100-01-07

Statement

若直線$12x-5y=21$與兩直線$x=\frac{23}{39}$、$x=\frac{16}{13}$分別交於A、B兩點，則線段長$\overline{AB}=?$

(A) $\frac{6}{5}$
(B) $\frac{5}{4}$
(C) $\frac{5}{3}$
(D) $\frac{13}{5}$
(E) $\frac{25}{7}$

Solution

已知$12x-5y=21$，則斜率為$\frac{12}{5}$

$\Delta x=\frac{16}{13}-\frac{23}{39}=\frac{25}{39}$

$y=mx+b$，則$0=\frac{12}{5}(\frac{16}{13}-\frac{23}{39})+b$，得到$b=\frac{60}{39}=\Delta y$

因此距離為$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\frac{25}{39})^2+(\frac{60}{39})^2}=\frac{5}{3}$，故選$(C)$

100-01-08

Statement

設兩向量$\vec{a},\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$，則$\cos\theta=?$

$(A)\quad \frac{7}{25}$
$(B)\quad \frac{5}{13}$
$(C)\quad \frac{3}{5}$
$(D)\quad \frac{4}{5}$
$(E)\quad \frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$\cos\theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$

$\cos(\pi - \theta) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a+b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = -\cos\theta$

因此，$\frac{|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = \frac{-|a|^2 - |b|^2 + |a+b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$

$|a|^2 + |b|^2 - 9 = -|a|^2 - |b|^2 + 16$

設$x = |a| = |b|$，故$2x^2 - 9 = -2x^2 + 16$，得到$x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$

代入$\cos\theta$，得到$\frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 9}{2 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2} - 9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}| = 7$、$|\vec{b}| = 5$，$\tan\theta = -\frac{3}{4}$，則$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = ?$

$(A)\quad -25$
$(B)\quad -5$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 44$
$(E)\quad 51$

Solution

$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$

已知$\tan\theta = \frac{-3}{4}$，則$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta=7\times5\times-\frac{4}{5}=-28$

因此$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})=98+28-75=51$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以$(2,2)$與$(6,2)$為兩焦點，且與直線$x+1=0$相切，則橢圓短軸半長為何？

(A) 4
(B) $\sqrt{21}$
(C) $\sqrt{23}$
(D) $\sqrt{29}$
(E) 6

Solution

將題目簡化為求b的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是$(\frac{2+6}{2},\frac{2+2}{2})=(4,2)$

焦距c為焦點與橢圓中點之距離，因此可知$c=2$

已知與直線$x+1=0$相切，因此橢圓左右一端會與$x+1=0$相切，因此其中一端為$(-1,2)$

故長軸a為橢圓長軸端點與中心之距離，可知$a=5$

因此$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線$y=2x-\frac{1}{2}x^2$的焦點座標為(a,b)，則$ab=?$

(A) 3
(B) 3.5
(C) 4
(D) 4.5
(E) 5

Solution

$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$\Rightarrow -2(y-2) = (x-2)^2$

因此可以知道頂點座標為$(2,2)$，$c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

因此焦點為$(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$

故$a = 2, b = \frac{3}{2}$，得到$ab = 3$，故選(A)。

100-01-12

Statement

雙曲線$xy - 3x + 4y = 0$兩頂點的距離為何？

$(A)\quad 2\sqrt{3}$
$(B)\quad 4$
$(C)\quad 2\sqrt{6}$
$(D)\quad 4\sqrt{3}$
$(E)\quad 4\sqrt{6}$

Solution

$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x+4)(y-3) = -12$

考慮通過頂點的線為$y = -x + b$，代入必定通過的點$(-4, 3)$得到$b = -1$

因此$y = -x - 1$會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$x(-x-1) - 3x + 4(-x-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$

利用公式解得到x的點，也就是$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$

當$x = -4 + 2\sqrt{3}$時，$y = 2\sqrt{3} - 3$

當$x = -4 - 2\sqrt{3}$時，$y = -3 - 2\sqrt{3}$

兩點距離為$\sqrt{(-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3} - 3 - (-3 - 2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48 + 48} = 4\sqrt{6}$，故選$(E)$

100-01-13

Statement

若$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$，則$x=?$

$(A)\quad -3$
$(B)\quad -3$或1
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 3$

Solution

$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$

$\Rightarrow \log_2(3-x^2)-\log_2 x=1$

$\Rightarrow \log_2(\dfrac{3-x^2}{x})=1$

$\Rightarrow \dfrac{3-x^2}{x}=2$

$\Rightarrow -x^2-2x+3=0$

$\Rightarrow x=1, x=-3$

驗根可知$\log_2 x$無法放入-3，因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-3$不合。

因此$x=1$，故選(C)

100-01-14

Statement

若$f(x)=\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$，且$f(a)=3$，$f(b)=5$，則$f(a+b)=?$

$(A)\quad \frac{5}{3}$
$(B)\quad 2$
$(C)\quad 6$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 15$

Solution

令$t=2^x$，則$f(x)=\dfrac{1+t}{1-t}$

考慮$f(a)=3$

$\dfrac{1+t}{1-t}=3$

$\Rightarrow 1+t=3-3t$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$

因此$2^a=\frac{1}{2}$，得到$a=-1$

考慮$f(b)=5$

$\frac{1+t}{1-t}=5$

$\Rightarrow 1+t=5-5t$

$\Rightarrow t=\frac{2}{3}$

$2^b=\frac{2}{3}$，則$b=1-\log_2 3$

故$f(a+b)=f(-\log_2 3)=f(\log_2\frac{1}{3})=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{2}=2$，故選$(B)$

100-01-15

Statement

求$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=?$

$(A)\quad \frac{1}{2}$

$(B)\quad \frac{3}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad \frac{5}{2}$

$(E)\quad 4$

Solution

$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=\log_2(\sqrt{12+8\sqrt{2}}+\sqrt{12-8\sqrt{2}})=\log_2(\sqrt{8+8\sqrt{2}+4}+\sqrt{8-8\sqrt{2}+4})$

$=\log_2(\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(2-2\sqrt{2})^2})=\log_2(4\sqrt{2})=\frac{5}{2}$，故選$(D)$

100-01-16

Statement

設$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\sin\theta+\cos\theta=?$

(A) -1

(B) $-\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{1}{2}$

(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(E) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

則$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1+2\dfrac{3}{8}}=\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

(A) 若$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，則 $\sin x<\cos x<\cot x$

(B) 若$\pi<x<\dfrac{5\pi}{4}$，則 $\sec x<\csc x<\cot x$

(C) 若$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$，則 $\cos x<\sin x<\tan x$

(D) 若$\pi<x_1<x_2<\dfrac{3\pi}{2}$，則 $\sin x_1>\sin x_2$

(E) 若$\dfrac{\pi}{2}<x_1<x_2<\pi$，則 $\cos x_1>\cos x_2$

Solution

若$\pi<x<\dfrac{5\pi}{4}$，則 $\sin\theta<\cos\theta<\tan\theta$

故$\csc\theta<\sec\theta<\cot\theta$，故選$(B)$

100-01-18

Statement

若$mx+3y+1=0$與$x+(m-2)y+m=0$之交點在第二象限內，則m之範圍為何？

$(A)\quad 0<m<1$
$(B)\quad 0<m<2$
$(C)\quad 0<m<3$
$(D)\quad 1<m<3$
$(E)\quad 1<m<4$

Solution

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x=\dfrac{2m+2}{(m-3)(m+1)} \\ y=\dfrac{m^2-1}{(-m+3)(m+1)} \end{cases}$$

考慮到$y>0,x<0$的情況

得到$((m<-1)\cup(-1<m<3))\cap(1<m<3)\Rightarrow 1<m<3$

得到$1<m<3$，故選(D)

100-01-19

Statement

若點(a,b)在直線$2x+3y=1$上移動，則直線$ax+by=3$恆過哪一點？

$(A)\quad (3,4)$
$(B)\quad (4,5)$
$(C)\quad (5,7)$
$(D)\quad (5,8)$
$(E)\quad (6,9)$

Solution

考慮$x=5$時$y=-3$

考慮$x=-4$時$y=3$

由於a,b依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮$5x-3y=3$與$-4x+3y=3$的交點，得到$(x,y)=(6,9)$，故選(E)

100-01-20

Statement

已知$A(3,-5)$，$B(-7,4)$，且點P介於A、B之間，又$\overline{AB}:\overline{BP}=7:4$，若$P$之座標為$(a,b)$，則$7a+21b=?$

$(A)\quad -33$
$(B)\quad -32$
$(C)\quad -31$
$(D)\quad -30$
$(E)\quad -29$

Solution

$\overline{AB}:\overline{BP}=7:4 \Rightarrow \overline{AP}:\overline{BP}=3:4$

利用內分點公式。

$P=(\frac{4\times 3+3\times(-7)}{7},\frac{4\times(-5)+3\times 4}{7})=(\frac{-9}{7},\frac{-8}{7})$

則$7a+21b=(-9)+(-8)\times 3=-33$，故選$(A)$

100年第2次北科入學數學會考

100-02-01

Statement

若α，β為方程式$x^2+12x+9=0$的兩根，則$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=?$

(A) -18
(B) -6
(C) 6
(D) 12
(E) 18

Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式ax^2+bx+c，存在兩根α與β。

那麼$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$，且$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$\sqrt{\alpha}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2$

$\Rightarrow \alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$

根據偉達定理我們可以求得

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-12}{1}=-12$

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{9}{1} = 9$

注意一下$\alpha + \beta = -12$，$\alpha\beta = 9$
若兩根一正一負那麼$\alpha\beta < 0$，若兩根都是正的那麼$a + b > 0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。
$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$會存在複數，相乘後可以得到$-\sqrt{\alpha\beta}$。

因此帶回欲求之式子：

$-12 - 2 \times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$

100-02-02

Statement

若 $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ 與 $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ 的最高公因式為 $x^2 + bx + c$，則$b + 2c = ?$

(A) -5
(B) -3
(C) 0
(D) 5
(E) 7

Solution

第一式的因式$ax + b$的a一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)，
且b一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到$(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$
接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得倒$(x + 1)(x - 2)(2x + 3)$

可以觀察到最大公因式即為$(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$
比較係數後得到$b = -1, c = -2$

則$b + 2c = -1 + 2 \times -2 = -5$。

100-02-03

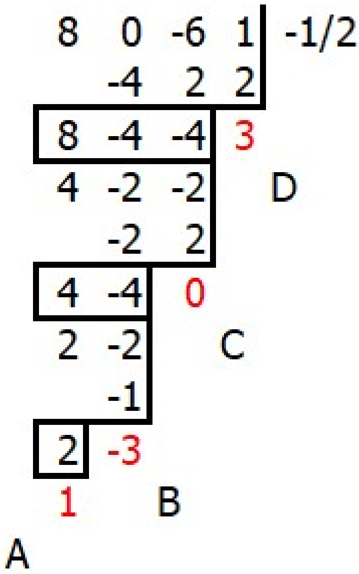
Statement

若$\dfrac{8x^3 - 6x + 1}{(2x + 1)^4} = \dfrac{a}{(2x + 1)} + \dfrac{b}{(2x + 1)^2} + \dfrac{c}{(2x + 1)^3} + \dfrac{d}{(2x + 1)^4}$，則$2a + b - c + d = ?$

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

Solution

我們可以使用綜合除法，將$2x+1$改寫成$x+\frac{1}{2}$，然後再對除出來的係數除以2。



因此$a=1,\ b=-3,\ c=0,\ d=3$。

$2a+b-c+d=1\times 2+(-3)-0+3=2$。

100-02-04

Statement

$x^2-4x+2\leq |x-2|$ 之解為何？

(A) $1\leq \mathrm{x}\leq 4$
(B) $2\leq \mathrm{x}\leq 4$
(C) $0\leq \mathrm{x}\leq 2$
(D) $0\leq \mathrm{x}\leq 4$
(E) $0\leq \mathrm{x}\leq 3$

Solution

1. 考慮$x^2-4x+2\leq x-2$：
   移項，$x^2-4x+2-x+2\leq 0$
   整理，$x^2-5x+4\leq 0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$(x-4)(x-1)\leq 0$，並且可以得到$1\leq x\leq 4$。
2. 考慮$x^2-4x+2\leq -x+2$：
   移項，$x^2-4x+2+x-2\leq 0$
   整理，$x^2-3x\leq 0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$x(x-3)\leq 0$，並且可以得到$0\leq x\leq 3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到$0\leq x\leq 4$。

100-02-05

Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$之解為何？

$(\text{A})\ \text{x} < \dfrac{-1}{2}$ 或 $0 < \text{x} < 1$

$(\text{B})\ 0 < \text{x} < \dfrac{1}{2}$ 或 $1 < \text{x} < 2$

$(\text{C})\ \text{x} < \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $0 < \text{x} < 1$

$(\text{D})\ \text{x} < \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < \text{x} < 2$

$(\text{E})\ 0 < \text{x} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < \text{x} < 2$

Solution

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$

$\Rightarrow 2\log_2 x - \dfrac{\log 2}{\log x} < 1$

$\Rightarrow 2\log_2 x - \dfrac{1}{\log_2 x} < 1$

令$\log_2 x = t$，那麼

$2t - \dfrac{1}{t} < 1$

$\Rightarrow 2t - \dfrac{1}{t} - 1 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$

考慮兩種情況。

1. 若$t > 0$且$2t^2 - t - 1 < 0$
   $2t^2 - t - 1 < 0 = (2t+1)(t-1) < 0 = \dfrac{-1}{2} < t < 1$
   與$t > 0$取交集得到$0 < t < 1$。
2. 若$t < 0$且$2t^2 - t - 1 > 0$
   $2t^2 - t - 1 > 0 = (2t+1)(t-1) > 0 = t < \dfrac{-1}{2}$ 或 $t > 1$
   與$t < 0$取交集得到$t < \dfrac{-1}{2}$。

對這兩種考慮取聯集，得到$t < \dfrac{-1}{2}$或$0 < t < 1$。

還原，得到$x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$或$1 < x < 2$。

100-02-06

Statement

已知ΔABC 中，$\overline{AB}=37$，$\overline{BC}=53$，$\overline{AC}=89$，則下列各內積中，何者為最大？

$(A)\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$(B)\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$

$(C)\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$(D)\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$(E)\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

Solution

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=37\times 89\times\frac{37^2+89^2-53^2}{2\times 37\times 89}$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=53\times 37\times\frac{53^2+37^2-89^2}{2\times 53\times 37}$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=89\times 37\times\frac{89^2+53^2-37^2}{2\times 89\times 53}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}<0$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}<0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$37^2+89^2-53^2$。

$53^2+37^2-89^2$

$89^2+53^2-37^2$

顯然是第三者較大，故選(C)

100-02-07

Statement

已知向量$\overrightarrow{AB}=(-31,29)$，$\overrightarrow{AC}=(23,-11)$，則下列向量長中，何者為最大？

(A) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

(B) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

(C) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

(D) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

(E) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$

Solution

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$

$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$
$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$

考慮向量長的公式，當存在一向量$\overrightarrow{L} = (A, B)$，$\overrightarrow{L}$的向量長為$|\overrightarrow{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$
因此若$|A| + |B|$越大，那麼向量長越大。

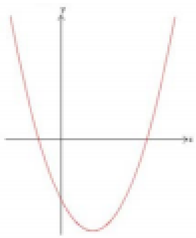
考慮選項A：$|-31| + |29| = 60$
考慮選項B：$|54| + |-40| = 94$
考慮選項C：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$，$|23| + |-11| = 34$
考慮選項D：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$，$|-8| + |18| = 26$
考慮選項E：$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$，$|0| + |0| = 0$

因此，故選B。

100-02-08

Statement

設$y = ax^2 + bx + c$的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



(A) abc
(B) $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$
(C) $\mathrm{c}^2 - 4\mathrm{ab}$
(D) $\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$
(E) $\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}$

Solution

因為開口向上，所以$a > 0$。
觀察$x = 0$，可以發現對應到的$y < 0$，因此$c < 0$
觀察一下對稱軸，$\dfrac{-b}{2a} > 0$，因此$b < 0$

因此$abc > 0$，$b^2 - 4ac > 0$因為有實數解。
$c^2 - 4ab > 0$因為$ab < 0$。

而$b + \sqrt{b^2 - 4ac}$必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，
另一根是負數因此$b - \sqrt{b^2 - 4ac}$小於0，故選E。

100-02-09

Statement

已知$4x^2+y^2-4x+8y=8$，則x的最大值為何？

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的x了。

$4x^2-4x+y^2+8y=8$

$4(x^2-x)+y^2+8y=8$

$4(x^2-x+\frac{1}{4})+y^2+8y+16=8+16+1$

$4(x-\frac{1}{2})^2+(y+4)^2=25$

$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y+4)^2}{25}$

由此可知這個橢圓的短邊平行x軸

$a=\sqrt{25}=5, b=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

中心可從式子得知，$(x,y)=(\frac{1}{2},-4)$

因此，加上x的部份得到$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

100-02-10

Statement

拋物線$y=4-2x-x^2$與x軸兩交點的距離為何？

(A) 2
(B) 3
(C) $2\sqrt{5}$
(D) 6
(E) 8

Solution

將y等於0，求出x。

$-x^2-2x+4=0$

先確定b^2-4ac是否大於0。

$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20$

因此兩根為$\dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{-2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$

$\dfrac{2+\sqrt{5}}{-2} - \dfrac{2-\sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$

100-02-11

Statement

設雙曲線$x^2 - y^2 = x + 2y$兩漸進的夾角為θ，則$\sin\dfrac{\theta}{2} = ?$

(A) 0
(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
(E) 1

Solution

配方雙曲線得到標準式。

$x^2 - x - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} - y^2 - 2y + 1 = \dfrac{5}{4}$

$(x - \dfrac{1}{2})^2 - (y-1)^2 = \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5} - \dfrac{4(y-1)^2}{5} = 1$

求漸進線，令等號右邊為0

$\dfrac{4(x-\frac{1}{2})^2}{5} = \dfrac{4(y-1)^2}{5}$

$(x - \dfrac{1}{2})^2 = (y-1)^2$

$(x - \dfrac{1}{2})^2 - (y-1)^2 = 0$

$(x - \dfrac{1}{2} - (y-1))(x - \dfrac{1}{2} + (y-1)) = 0$

$(x - y + \dfrac{1}{2})(x + y + \dfrac{3}{2}) = 0$

第一條線$(x - y + \dfrac{1}{2})$可求斜率$m = 1$

第二條線$(x + y + \dfrac{3}{2})$可求斜率$m = -1$

因此，這兩條線垂直$(m_1 \times m_2 = -1)$，夾角為90°

因此$\sin\frac{90^\circ}{2}=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

100-02-12

Statement

不等式$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\leq 2$之解為何？

$(\mathrm{A})\ -1\leq \mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{B})\ 0<\mathrm{x}\leq 1$

$(\mathrm{C})\ 1\leq \mathrm{x}\leq 2$

$(\mathrm{D})\ 0<\mathrm{x}\leq 2$

$(E)\ 1\leq x\leq 4$

Solution

將分子分母上下同乘2^x。

$\frac{3\cdot 2^x-18\cdot 2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\Rightarrow\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}\leq 2$

移項。

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18}{2^{2x}-1}-2\leq 0$

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2(2^{2x}-1)}{2^{2x}-1}\leq 0$

$\frac{3\cdot 2^{2x}-18-2\cdot 2^{2x}+2}{2^{2x}-1}\leq 0$

$\frac{2^{2x}-16}{2^{2x}-1}\leq 0$

令$t=2^{2x}$

$\frac{t-16}{t-1}\leq 0$

考慮以下兩點：

1. $t-16\geq 0$，$t-1<0$

$t\geq 16,\ t<1$，這兩個不等式沒有任何交集，因此$t\in\emptyset$

2. $t-16\leq 0$，$t-1>0$

$t\leq 16,\ t>1$，這兩個不等式的交集為$1<t\leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到$1<t\leq 16$

還原t得到$1<2^{2x}\leq 16$，因此$0<x\leq 2$

100-02-13

Statement

方程式$10 \cdot x^{2\log x} = x^3$之所有實根的平方和為何？

(A) 100
(B) 101
(C) 110
(D) 111
(E) 121

Solution

等號兩邊同除$x^{2\log x}$

$10 = x^{3-2\log x}$

$1 = (3 - 2\log x) \times \log(|x|)$

因為要求實根，因此可以限定$x > 0$，所以$(3 - 2\log x) \times \log(x)$

令$t = \log x$

$1 = (3 - 2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$

因式分解得到$(-2t + 1)(t - 1) = 0$

可以解出$t = \frac{1}{2}$或$t = 1$

還原t，可以得到$\log x = \sqrt{10}$ 或 $\log x = 10$

兩根的平方和為$\sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$

100-02-14

Statement

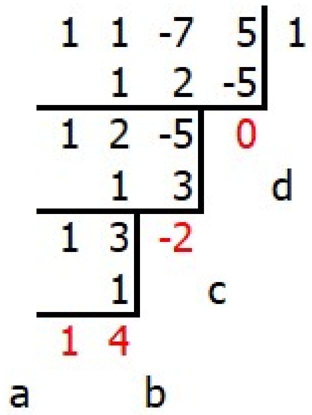
若$f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$，則$f(1 + \sqrt{2}) = ?$

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solution

觀察一下，可以嘗試把$x^3 + x^2 - 7x + 5$化簡成$c(x-1)^2 + b(x-1) + a...$

這部分可以用綜合除法做到。



因此可得$(x-1)^3+4(x-1)^2-2(x-1)$。

把$f(1+\sqrt{2})$帶進去，得：

$\log_2((\sqrt{2})^3+4(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}))=\log_2(2\sqrt{2}+8-2\sqrt{2})=\log_2 8=3$

100-02-15

Statement

設$\cos\theta+\cos^2\theta=1$，則$\sin^2\theta+\sin^4\theta=?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

$\cos^2\theta=1-\cos\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(1-\cos\theta)=\cos\theta$

$\sin^4\theta=(\sin^2\theta)^2=\cos^2\theta$

$\sin^2\theta+\sin^4\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=1$

100-02-16

Statement

設$\tan 100^{\circ} = k$，則$\sin 80^{\circ} = ?$

(A) $\frac{-\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(B) $\frac{\sqrt{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

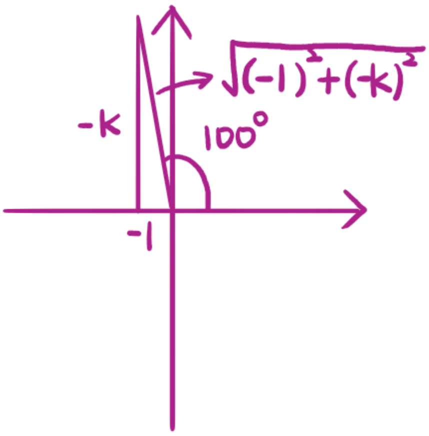
(C) $\frac{-1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(D) $\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{k}^2}}$

Solution

畫個圖



看圖可以觀察到，$\sin 100^{\circ} = \sin 80^{\circ} = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

100-02-17

Statement

設$a = \sec 434^{\circ}$，$b = \sin 100^{\circ}$，$c = \cos 260^{\circ}$，$d = \cot 28^{\circ}$，$e = \csc 155^{\circ}$

則下列何者正確？

(A) $\mathrm{b} < \mathrm{c} < \mathrm{d} < \mathrm{e} < \mathrm{a}$

(B) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{d} < \mathrm{e} < \mathrm{a}$

(C) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{e} < \mathrm{d} < \mathrm{a}$

(D) $\mathrm{c} < \mathrm{b} < \mathrm{d} < \mathrm{a} < \mathrm{e}$

(E) $\mathrm{b} < \mathrm{c} < \mathrm{a} < \mathrm{d} < \mathrm{e}$

Solution

$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$

$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$

$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$

$d = \cot 28^\circ$

$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$

因此$a > e$，$c < b$，故選B。

100-02-18

Statement

平面上有兩點$A(1,2)$，$B(a,b)$，若直線$\overline{AB}$之垂直平分線為$x+2y-10=0$，則$a-b$= ？

(A) -1

(B) -2

(C) -3

(D) -4

(E) -5

Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過$\overline{AB}$的中點$(\dfrac{1+a}{2}, \dfrac{2+b}{2})$。

帶入垂直平分線得到$\dfrac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$

$\Rightarrow a + 2b = 15$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到$m = \dfrac{-1}{2}$，因此與其垂直的斜率一定是$m = \dfrac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到$\dfrac{2-b}{1-a} = 2$，整理得到$2 - b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$。

帶回第一式可以得到$5a = 15,\ a = 3,\ b = 6$。

$a - b = 3 - 6 = -3$

100-02-19

Statement

設直線$bx + ay - ab = 0$，$a > 0,\ b < 0$過點$(1, 2)$，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則$a + 2b = ?$

$(\mathrm{A})\ -7 - 3\sqrt{3}$

$(\mathrm{B})\ -6 - 3\sqrt{3}$

$(\mathrm{C})\ -5 - 3\sqrt{3}$

$(\mathrm{D})\ -4 - 3\sqrt{3}$

$(\mathrm{E})\ -3 - 3\sqrt{3}$

Solution

可以推出x, y的通式。

$bx + ay = ab$，求出x, y的截距。

當$y = 0$，那麼$bx = ab$，$x = a$

當$x = 0$，那麼$ay = ab$，$y = b$

已知$a > 0, b < 0$過點$(1, 2)$，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道$\frac{1}{2}|a||b| = 2$，可知$ab = -4$或者$ab = 4$，但是$a > 0, b < 0$，因此$ab = 4$不合。

已知過點$(1, 2)$且$ab = -4$，因此可以把點帶入得到$b + 2a = -4$，

又$ab = -4$所以$a = \frac{-4}{b}$，所以得到$b + \frac{-8}{b} = -4$

同乘以b可以得到$b^2 + 4b - 8$。'

利用公式解可以解出$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times -8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根$-2 + 2\sqrt{3}$或者$-2 - 2\sqrt{3}$，其中由於$b < 0$，因此$-2 + 2\sqrt{3}$不合。

帶回求出a得到$a = \frac{-4}{-2 - 2\sqrt{3}} = \frac{-4}{-2(1 + \sqrt{3})}$

化簡得到$a = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = -1(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

因此$a + 2b = \sqrt{3} - 1 + -4 - 4\sqrt{3} = -5 - 3\sqrt{3}$

100-02-20

Statement

設直線$3x+y=1$與$x+3y=2$之夾角為θ，則$\cos 2\theta=?$

$\color{red}{(\mathrm{A})\ \frac{-7}{25}}$

$(\mathrm{B})\ \frac{-6}{25}$

$(\mathrm{C})\ \frac{-1}{5}$

$(\mathrm{D})\ \frac{-4}{25}$

$(\mathrm{E})\ \frac{-3}{25}$

Solution 1

設$n_1=<3,1>$，$n_2=<1,3>$

則$\cos\theta=\frac{n_1n_2}{|n_1||n_2|}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

因此$\sin\theta=\frac{4}{5}$

所以$\cos 2\theta=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=-\frac{7}{25}$，故選$(A)$

Solution 2

考慮兩條線的斜率。

$3x+y=1,\ m_1=\frac{-3}{1}=-3$

$x+3y=2,\ m_2=\frac{-1}{3}$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為tan來考慮。

$\tan(m_1-m_2)=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-3-\frac{-1}{3}}{1+1}=\frac{\frac{-8}{3}}{2}=\frac{-4}{3}$

觀察到求出的這個tan夾角是負的，因此這個夾角是大於90°的鈍角。

可以依照$\tan(180^\circ)=0$來求得另一個銳角的夾角。

$\frac{\frac{-4}{3}+\tan\theta}{1-\frac{-4}{3}\tan\theta}$，求得銳角$\tan\theta=\frac{4}{3}$

由於$\tan\theta = \frac{4}{3}$，那麼這個角度會介於$45^\circ \sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於90°

用兩倍角公式求出$\tan 2\theta = \frac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{24}{-7}$

由於這個角度介於$90^\circ \sim 180^\circ$，$y > 0$，而$x < 0$，也因此$y = 24,\ x = -7,\ r = \sqrt{24^2 + (-7)^2} = 25$

因此$\cos 2\theta = \frac{-7}{25}$，故選$(A)$

101年第2次北科入學數學會考

101-02-01

Statement

設$\sin\alpha = \frac{4}{5}$，$\cos\beta = \frac{-5}{13}$，且$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$，則$\sin(\alpha - \beta) = ?$

(A) $\frac{-56}{65}$

(B) $\frac{-16}{65}$

(C) $\frac{16}{65}$

(D) $\frac{27}{65}$

(E) $\frac{56}{65}$

Solution

$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\therefore 0 < \sin\alpha < 1,\ 0 < \cos\alpha < 1$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

$\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

$\therefore 0 < \sin\beta < 1,\ \ -1 < \cos\beta < 0$

$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{-5}{13})^2} = \frac{12}{13}$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \frac{4}{5}\times\frac{-5}{13} - \frac{12}{13}\times\frac{3}{5} = \frac{-20}{65} - \frac{36}{65} = \frac{-56}{65}$

102-02-02

Statement

方程式$2^{x^2}\cdot 4^x\cdot 16=8^x\cdot 64$之所有解的和為何？

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

將式子改寫。

$2^{x^2}\cdot 4^x=8^x\cdot 64$

$\Rightarrow 2^{x^2}\cdot 2^{2x}=2^{3x}\cdot 2^6$

$\Rightarrow 2^{x^2+2x}=2^{3x+6}$

兩邊同取$\log_2$，得到$x^2+2x=3x+6$

也就得到$x^2-x-6=0$，因式分解得到$(x-3)(x+2)=0$

解根得到$x=3$或$x=-2$，$3+(-2)=1$

101-02-03

Statement

已知Γ表$f(x,y)=0$所對應之圖形，若Γ水平方向拉長2倍，再往右平移1單位，則此新圖形的方程式為何？

$(A)\quad f(\frac{x}{2}+1,y)=0$

$(B)\quad f(\frac{x-1}{2},y)=0$

$(C)\quad f(\frac{x+1}{2},y)=0$

$(D)\quad f(2x+1,y)=0$

$(E)\quad f(2x-1,y)=0$

Solution

考慮拉長兩倍，那麼a要變大兩倍，因此x乘以$\frac{1}{2}$

考慮往右平移一單位，那麼座標$x-1$，因此x減1

因此$f=(\frac{x-1}{2},y)=0$，故選(B)

101-02-04

Statement

設直線L過點$(-1,1)$且與直線$8x-6y=1$垂直，則此直線方程式為何？

$(\mathrm{A})\ 3\mathrm{x}-4\mathrm{y}=-1$

$(\mathrm{B})\ 4\mathrm{x}+3\mathrm{y}=-1$

$(\mathrm{C})\ 4\mathrm{x}-3\mathrm{y}=-7$

$(\mathrm{D})\ 3\mathrm{x}+4\mathrm{y}=1$

$(\mathrm{E})\ \mathrm{x}-\mathrm{y}=-2$

Solution

直線$8x-6y=1$的斜率為$\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}$

因此造一條與其垂直的直線，這條直線的斜率與其斜率乘積必為-1。

$\frac{4}{3}\times m=-1, m=\frac{-3}{4}$

已知此直線會過點$(-1,1)$，因此$y-1=\frac{-3}{4}(x+1)$

$4y-4=-3(x+1),\ 3x+4y=1$

101-02-05

Statement

過點$(2,-3)$與圓$(x-1)^2+(y+1)^2=5$相切的直線方程式為何？

$(\mathrm{A})\ 2\mathrm{x}-\mathrm{y}=7$

$(\mathrm{B})\ \mathrm{x}+2\mathrm{y}=-4$

$(\mathrm{C})\ 2\mathrm{x}-3\mathrm{y}=13$

$(\mathrm{D})\ 3\mathrm{x}-2\mathrm{y}=12$

$(\mathrm{E})\ \mathrm{x}-2\mathrm{y}=8$

Solution

從圓的方程式可以知道，圓心為$(1,-1)$且半徑為$\sqrt{5}$。

因此我們可以造過點$(2,-3)$的線，並且距離與圓心剛好為$\sqrt{5}$

可以套用距離公式來得到。

令與圓相切的直線為$y+3=m(x-2)$

整理後得到$mx-y-2m-3=0$

我們可以套用距離公式，得到$\frac{|mx-y-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

將圓心帶入距離公式，得到$|m+1-2m-3|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

整理後得到$|-m-2|=\sqrt{5m^2+5}$

兩邊平方後得到$(-m-2)^2=5m^2-5 \Rightarrow m^2+4m+4=5m^2+5$

因此$-4m^2+4m-1$，$m=\frac{1}{2}$ (重根)

$y+3=\frac{1}{2}(x-2)$

$\Rightarrow\ 2y+6=x-2$

$\Rightarrow\ x-2y-8=0$

$\Rightarrow x-2y=8$

101-02-06

Statement

以$(1,3+\sqrt{5})$與$(1,3-\sqrt{5})$為兩焦點且短軸長為6之橢圓方程式為何？

(A) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{14}=1$

(B) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{25}=1$

(C) $\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{14}+\frac{(\mathrm{y}-3)^2}{9}=1$

(D) $\frac{(\mathrm{x}-3)^2}{9}+\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{14}=1$

(E) $\frac{(\mathrm{x}-3)^2}{25}+\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{9}=1$

Solution

兩焦點只有y軸有變動，因此這是一個貫軸平行y軸的橢圓。

中心$(x,y)=(\frac{1+1}{2},\frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2})=(1,3)$

$2c=(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5},\ c=\sqrt{5}$

$2b=6,b=3$

因此$a=\sqrt{3^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9+5}=\sqrt{14}$

依照$\frac{(x-h)}{b}+\frac{(y-k)}{a}=1$列式，得

$\frac{(x-1)}{9}+\frac{(y-3)}{14}=1$

101-02-07

Statement

設$2\log(x-3)-\log 2=\log(x+9)$，則$x^2-10x+12$之值為何？

$(A)\quad 1$
$(B)\quad 2$
$(C)\quad 3$
$(D)\quad 4$
$(E)\quad 5$

Solution

$2\log(x-3)-\log 2=\log(x+9)$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2-6x+9}{x+9})=\log(2)$

$\Rightarrow \log(\frac{x^2-6x+9}{2x+18})=0$

$\Rightarrow \frac{x^2-6x+9}{2x+18}=1$

$\Rightarrow x^2-6x+9=2x+18$

$\Rightarrow x^2-8x-9=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-9)=0$

得到$x=-1, x=9$

驗根，由於$x=-1$帶進去後，$x-3<0$，又因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-1$不合。

因此$x=9$。

$9^2-90+12=81-90+12=3$，故選(C)。

101-02-08

Statement

若$0\leq\theta<2\pi$，則$\cos 2\theta+2\cos^2\frac{\theta}{2}=1$有幾個解？

$(A)\quad 0$
$(B)\quad 1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

利用和角公式，可以知道

$\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}-(1-\cos^2\frac{\theta}{2})=2\cos^2(\frac{\theta}{2})-1=\cos\theta$

因此$\cos\theta+1=2\cos^2(\frac{\theta}{2})$

且$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

$2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1=1$

$2\cos^2\theta+\cos\theta=1$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

令$t=\cos\theta$，則$2t^2+t-1=0$，可得$t=\frac{1}{2}$或$t=-1$

考慮$t=\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{-\pi}{3}$

考慮$t=\cos\theta=-1$，則$\theta=\pi$

因此有三組解，故選(D)

101-02-09

Statement

設a、b、c分別表示ΔABC的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對邊長，若$b^2-(c-a)^2=ca$，則$\angle B=?$

$(A)\quad 30^\circ$
$(B)\quad 45^\circ$
$(C)\quad 60^\circ$
$(D)\quad 120^\circ$
$(E)\quad 135^\circ$

Solution

$b^2-(c-a)^2=ca$

$\Rightarrow b^2-(c^2-2ac+a^2)=ca$

$\Rightarrow b^2-c^2+2ac-a^2=ca$

$\Rightarrow b^2-c^2-a^2=-ac$

$\Rightarrow a^2+c^2-b^2=ac$

$\Rightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$

又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$

因此$\angle B=\frac{\pi}{3}=60^\circ$，故選$(C)$。

101-02-10

Statement

方程式$x^{1+\log_2 x} = (2x^3)$之所有解的和為何？

(A) $\dfrac{15}{2}$
(B) 8
(C) $\dfrac{17}{2}$
(D) 9
(E) $\dfrac{19}{2}$

Solution

$x^{1+\log_2 x} = 8x^3$

$\Rightarrow 1+\log_2 x = \log_x(8x^3)$

$\Rightarrow 1+\log_2 x = \dfrac{\log_2 8x^3}{\log_2 x}$

$\Rightarrow \log_2 x + \log_2^2 x = \log_2 8x^3$

$\Rightarrow \log_2 x + \log_2^2 x = 3 + 3\log_2 x$

令$t = \log_2 x$，則$t + t^2 = 3 + 3t$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

$\Rightarrow t = 3$或$t = -1$

還原t，得到$\begin{cases} \log_2 x = 3, & x = 8 \\ \log_2 x = -1, & x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

因此$8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$，故選$(C)$

101-02-11

Statement

若$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$，且$(f \circ g)(x) = \dfrac{x}{x+1}$，則$g(0) = ?$

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

Solution

$f(x)=\dfrac{x-1}{x}$，則$f(g(0))=\dfrac{x}{x+1}=0$，因此$\dfrac{x-1}{x}=1$，因此$g(0)=1$，故選(B)。

101-02-12

Statement

已知平面上兩點$A(-3,1)$，$B(3,5)$，又點$P(a,b)$在直線$2x+y+1=0$且$\overline{PA}=\overline{PB}$，則$a+b=?$

(A)　5
(B)　6
(C)　7
(D)　8
(E)　9

Solution

將A,B兩點帶入直線，確定是否同側或異側。

代入點A：$2\cdot(-3)+1+1=-4$

代入點B：$2\times 3+5+1=12$

因此兩點異側。

$2x+y+1=0\Rightarrow y=-2x-1$

由於$\overline{PA}=\overline{PB}$，因此

$\sqrt{(-3-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(5-y)^2}$

$\Rightarrow (-3-x)^2+(1+2x+1)^2=(3-x)^2+(5+2x+1)^2$

$\Rightarrow (-3-x)^2+(2x+2)^2=(3-x)^2+(6+2x)^2$

$\Rightarrow 5x^2+14x+13=5x^2+18x+45$

$\Rightarrow -4x=32$

$\Rightarrow x=-8$

$\Rightarrow y=15$

因此$a=-8,b=15,a+b=7$，故選(C)

101-02-13

Statement

設二向量$\vec{a}=<2,t^2-3>$，$\vec{b}=<t,-1>$。

若$\vec{a}$和$\vec{b}$的夾角為$\dfrac{\pi}{2}$，且$\vec{b}$的長度不大於2，則$t=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，因此$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$，因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2t-t^2+3=(-t+3)(t+1)=0$

得到$t=3$或$t=-1$

長度不大於2，因此我們考慮兩種t套進$\vec{b}$的影響

考慮$t=3$，得到$\sqrt{(3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}>2$，因此$t=3$不合

考慮$t=-1$，得到$\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

因此$t=-1$，故選(B)。

101-02-14

Statement

設$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$為方程式$x^2-6x+5=0$的兩根，且$\alpha<\beta+2$，則$\beta=?$

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 2$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 4$

Solution

利用根與係數，可以知道

$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=-(\dfrac{-6}{1})=6$

$2\alpha=6$則$\alpha=3$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2=5$，則$\beta=\pm 2$

由於要滿足$\alpha<\beta+2$，所以$\beta=-2$不合。

因此$\beta=2$，故選(C)。

101-02-15

Statement

設f為奇函數，g為偶函數，及對所有的x，恆有$f(-x) = -f(x)$且$g(-x) = g(x)$。

如果f和g均為非零函數，則下列何者恆為正確？

(A)　$f - g$為奇函數

(B)　$f \cdot g$為奇函數

(C)　$f^3 \cdot g^3$為偶函數

(D)　$2f + 3g$為偶函數

(E)　$f + g$的函數圖形對稱於y軸

Solution

偶函數只有全部非負整數或全部非正整數兩種情況。

因此乘到奇函數只有全部改變函數上的正負號或不改變兩種情況，函數本身依然是奇函數。

故選(B)。

101-02-16

Statement

下列何者為函數$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}}$的定義域？

(A)　$\{x|x < -1\}$
(B)　$\{x|x > -1\}$
(C)　$\{x| -1 < x < 1\}$
(D)　$\{x| -1 < x, x \neq 1\}$
(E)　$\{x|x > 1\}$

Solution

$\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} > 0$

$\Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

$\Rightarrow (x-1)^2(x+1) > 0$，得到$x \neq 1$且$x \neq -1$

由於$(x-1)^2$恆正，因此我們考慮$(x+1) > 0$，得到$x > -1$。

因此$f(x)$的定義域$D(f(x)) = \{x|(x > -1), (x \neq 1)\}$，故選$(D)$

101-02-17

Statement

設$\dfrac{x^2-10x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$的部份分式為$\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$，則$a-b-c=$?

$(A)\quad -2$
$(B)\quad -1$
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 3$
$(E)\quad 5$

Solution

$$\frac{x^2-10x+8}{x^3-2x^2-4x+8} \Rightarrow \frac{x^2-10x+8}{(x-2)^2(x+2)}$$

$x^2-10x+8=a(x-2)^2+b(x-2)(x+2)+c(x+2)$

令$x=2$，$4-20+8=4c$，得到$c=-2$

令$x=-2$，$16a=4+20+8=32$，得到$a=2$

令$x=0$，$8=4a-4b+2c=8-4b-4$，得到$b=-1$

$a-b-c=2-(-1)-(-2)=5$，故選(E)。

101-02-18

Statement

設$2x^2+(k-1)x+(k-3)=0$之一根大於2，一根小於1，則k之範圍為何？

$(A)\quad \{k|k<-1\}$
$(B)\quad \{k|1<k<3\}$
$(C)\quad \{k|-1<k<3\}$
$(D)\quad \{k|k>1\}$
$(E)\quad \{k|-\infty<k<\infty\}$

Solution

$$\frac{-(k-1)\pm\sqrt{(k-1)^2-4\times 2\times(k-3)}}{2\times 2}$$

$$\Rightarrow \frac{-k+1\pm\sqrt{k^2-2k+1-8k+24}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-k+1\pm\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$$

一根大於2，因此用$\dfrac{-k+1+\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$考慮

因此$-k+1+\sqrt{k^2-10k+25}>8$，$-k+1+(k-5)>8$，得到$k<-1$

一根小於1，因此用$\dfrac{-k+1-\sqrt{k^2-10k+25}}{4}$考慮

因此$-k+1-\sqrt{k^2-10k+25}<4$，$-k+1+(k-5)<4$，得到$k\in\mathbb{R}$

取聯集得到$k<-1$，因此k的範圍為$\{k|k<-1\}$，故選(A)

101-02-19

Statement

若$f(x)=\sqrt{3-x}$，$g(x)=\sqrt{x-1}$，則$f\circ g$的定義域為何？

(A) $[1,3]$
(B) $[1,4]$
(C) $[2,4]$
(D) $[3,9]$
(E) $[1,10]$

Solution

$f\circ g=\sqrt{3-\sqrt{x-1}}$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到$3-\sqrt{x-1}\geq 0$，$x\leq 10$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到$x-1\geq 0$，得到$x\geq 1$

取交集後得到$1\leq x\leq 10$，故選(E)。

101-02-20

Statement

若$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$能被x^2+1整除，則$f(x)$除以$x+1$的餘式為何？

(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8
(E) 10

Solution

利用長除法來做$f(x)$除以x^2+1，可以得到商為$(x+a)$且餘數為$(b-1)x+(2-a)$

因為能夠被整除，因此餘數為0，得到$b=1$且$a=2$

因此$f(x)=x^3+2x^2+x+2$

除以$x+1$，利用餘式定理，將x帶-1

因此$f(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+(-1)+2=-1+2+(-1)+2=2$，故選$(A)$