國立台北科技大學　數學入學會考詳解

作者

- 109 資工系 黃漢軒
  - Instagram
  - sigtunatw@gmail.com
- 109 化工系 羅昇宇
  - Instagram
  - qoo18105@gmail.com

感謝北科入學會考出題老師。

所有的解答均為非官方，有任何勘誤上的問題，請聯繫作者。

100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知$f(x)$為一實系數多項式，且$f(\frac{3}{2})=27$，$f(-\frac{5}{3})=8$。

若$f(x)$除以$(6x^2+x-15)$的餘式為$ax+b$，則$b-a=?$

$(A)\quad 4$
$(B)\quad 8$
$(C)\quad 12$
$(D)\quad 16$
$(E)\quad 20$

Solution

可以把式子轉成

$f(x)=g(x)(6x^2+x-15)+ax+b$

$=g(x)(3x+5)(2x-3)+ax+b$

代入$x=\frac{3}{2}$，得到$\frac{3}{2}a+b=27$

代入$x=\frac{-5}{3}$，得到$\frac{-5}{3}a+b=8$

解聯立之後得到$(a,b)=(6,18)$

因此$b-a=12$，故選(C)

100-01-02

Statement

若α, β為方程式$x-\dfrac{3}{x}+1=0$的兩根，則$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=?$

(A) 9
(B) 15
(C) 21
(D) 27
(E) 33

Solution

$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=\dfrac{4}{\alpha\beta}+\dfrac{10(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+25$

$x-\dfrac{3}{x}+1=0 \Rightarrow x^2+x-3=0$

利用根與係數，得到$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-1}{1}=-1$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=-3$

因此$(\dfrac{2}{\alpha}+5)(\dfrac{2}{\beta}+5)=\dfrac{4}{-3}+\dfrac{-10}{-3}+25=27$

故選(D)

100-01-03

Statement

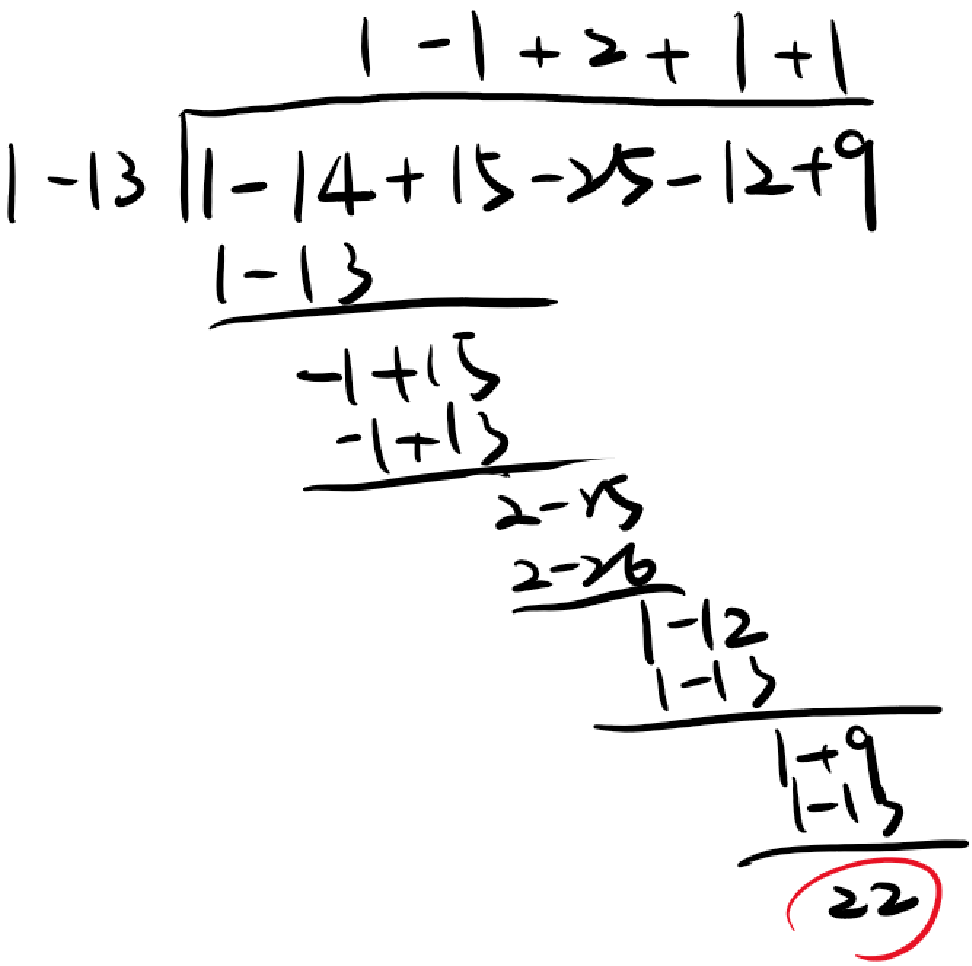
求$13^5-14\times 13^4+15\times 13^3-25\times 13^2-12\times 13+9=?$

(A) 22
(B) 25
(C) 28
(D) 31
(E) 34

Solution

將式子考慮成$f(x)=x^5-14x^4+15x^3-25x^2-12x+9$

式子等價於$f(x)$除以$x-13$的餘數（餘式定理）。



故答案選(A)。

100-01-04

Statement

若$\dfrac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$，則$A+B+C+D=?$

(A) $\frac{1}{2}$
(B) 2
(C) 3
(D) $\frac{7}{2}$
(E) 33

Solution

$$\frac{2x^2-x+4}{x^4+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$2x^2-x+4=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2)$

$=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$

$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B$

可知

$A + C = 0$
$B + D = 2$
$A = -\frac{1}{4}$
$B = 1$

因此$C = \frac{1}{4}$，$D = 1$。

因此$A + B + C + D = 2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$之解為何？

(A) $1 \leq x < 2$
(B) $1 < x \leq 2$
(C) $1 < x < 2$
(D) $x \geq 2$ 或 $x < 1$
(E) $x > 2$ 或 $x < 1$

Solution

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 - 5x + 7)}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \leq 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \geq 0 \\ (x-1)(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

因此$1 < x < 2$時，$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$，故選$(C)$

100-01-06

Statement

若$a,\ b$均為實數且$ax^2+bx-10<0$之解為$\dfrac{-5}{2}<x<\dfrac{4}{3}$，則$a+b=?$

(A) 5
(B) $\dfrac{11}{2}$
(C) 6
(D) $\dfrac{13}{2}$
(E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$$(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3})<0$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{4x}{3}+\frac{5x}{2}+\frac{-20}{6}<0$$
$$\Rightarrow 6x^2-8x+15x-20<0$$
$$\Rightarrow 6x^2+7x-20<0$$

兩邊共除2，得$3x^2+\dfrac{7}{2}x-10<0$

$a=3,\ b=\dfrac{7}{2},\ a+b=\dfrac{13}{2}$

100-01-07

Statement

若直線$12x-5y=21$與兩直線$x=\dfrac{23}{39}$、$x=\dfrac{16}{13}$分別交於A、B兩點，則線段長$\overline{AB}=?$

(A) $\dfrac{6}{5}$
(B) $\dfrac{5}{4}$
(C) $\dfrac{5}{3}$
(D) $\dfrac{13}{5}$
(E) $\dfrac{25}{7}$

Solution

已知$12x-5y=21$，則斜率為$\dfrac{12}{5}$

$\Delta x=\dfrac{16}{13}-\dfrac{23}{39}=\dfrac{25}{39}$

$y=mx+b$，則$0=\dfrac{12}{5}(\dfrac{16}{13}-\dfrac{23}{39})+b$，得到$b=\dfrac{60}{39}=\Delta y$

因此距離為$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\dfrac{25}{39})^2+(\dfrac{60}{39})^2}=\dfrac{5}{3}$，故選$(C)$

100-01-08

Statement

設兩向量$\vec{a}, \vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}| = 4$，$|\vec{a}-\vec{b}| = 3$，則$\cos\theta =$?

$(A)\quad \frac{7}{25}$
$(B)\quad \frac{5}{13}$
$(C)\quad \frac{3}{5}$
$(D)\quad \frac{4}{5}$
$(E)\quad \frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$\cos\theta = \frac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2\times|a|\times|b|}$

$\cos(\pi-\theta) = \frac{|a|^2+|b|^2-|a+b|^2}{2\times|a|\times|b|} = -\cos\theta$

因此，$\frac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2\times|a|\times|b|} = \frac{-|a|^2-|b|^2+|a+b|^2}{2\times|a|\times|b|}$

$|a|^2+|b|^2-9 = -|a|^2-|b|^2+16$

設$x = |a| = |b|$，故$2x^2-9 = -2x^2+16$，得到$x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$

代入$\cos\theta$，得到$\frac{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}-9}{2\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2}-9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為θ，且$|\vec{a}| = 7$、$|\vec{b}| = 5$，$\tan\theta = -\frac{3}{4}$，則$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) =$?

$(A)\quad -25$
$(B)\quad -5$
$(C)\quad 0$
$(D)\quad 44$
$(E)\quad 51$

Solution

$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a}\cdot\vec{b}) + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$

已知$\tan\theta = \frac{-3}{4}$，則$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

因此$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta = 7\times 5\times -\frac{4}{5} = -28$

因此$(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) = 98+28-75 = 51$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以$(2,2)$與$(6,2)$為兩焦點，且與直線$x+1=0$相切，則橢圓短軸半長為何？

(A) 4
(B) $\sqrt{21}$
(C) $\sqrt{23}$
(D) $\sqrt{29}$
(E) 6

Solution

將題目簡化為求b的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是$(\frac{2+6}{2},\frac{2+2}{2}) = (4,2)$

焦距c為焦點與橢圓中點之距離，因此可知$c=2$

已知與直線$x+1=0$相切，因此橢圓左右一端會與$x+1=0$相切，因此其中一端為$(-1,2)$

故長軸a為橢圓長軸端點與中心之距離，可知$a=5$

因此$b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$的焦點座標為(a,b)，則$ab = ?$

(A) 3
(B) 3.5
(C) 4
(D) 4.5
(E) 5

Solution

$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$\Rightarrow -2(y-2) = (x-2)^2$

因此可以知道頂點座標為$(2,2)$，$c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

因此焦點為$(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$

故$a = 2, b = \frac{3}{2}$，得到$ab = 3$，故選(A)。

100-01-12

Statement

雙曲線$xy - 3x + 4y = 0$兩頂點的距離為何？

(A) $2\sqrt{3}$
(B) 4
(C) $2\sqrt{6}$
(D) $4\sqrt{3}$
(E) $4\sqrt{6}$

Solution

$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x+4)(y-3) = -12$

考慮通過頂點的線為$y = -x + b$，代入必定通過的點$(-4,3)$得到$b = -1$

因此$y = -x - 1$會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$x(-x-1) - 3x + 4(-x-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$

利用公式解得到x的點，也就是$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$

當$x = -4 + 2\sqrt{3}$時，$y = 2\sqrt{3} - 3$

當$x = -4 - 2\sqrt{3}$時，$y = -3 - 2\sqrt{3}$

兩點距離為$\sqrt{(-4+2\sqrt{3} - (-4-2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3} - 3 - (-3-2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48+48} = 4\sqrt{6}$，故選$(E)$

100-01-13

Statement

若$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$，則$x=?$

$(A)\quad -3$
$(B)\quad -3$或1
$(C)\quad 1$
$(D)\quad 2$
$(E)\quad 3$

Solution

$\log_2(3-x^2)=1+\log_2 x$

$\Rightarrow \log_2(3-x^2)-\log_2 x=1$

$\Rightarrow \log_2(\dfrac{3-x^2}{x})=1$

$\Rightarrow \dfrac{3-x^2}{x}=2$

$\Rightarrow -x^2-2x+3=0$

$\Rightarrow x=1, x=-3$

驗根可知$\log_2 x$無法放入-3，因為log的定義域為正整數之集合，故$x=-3$不合。

因此$x=1$，故選(C)

100-01-14

Statement

若$f(x)=\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$，且$f(a)=3$，$f(b)=5$，則$f(a+b)=?$

$(A)\quad \frac{5}{3}$
$(B)\quad 2$
$(C)\quad 6$
$(D)\quad 8$
$(E)\quad 15$

Solution

令$t=2^x$，則$f(x)=\dfrac{1+t}{1-t}$

考慮$f(a)=3$

$\dfrac{1+t}{1-t}=3$

$\Rightarrow 1+t=3-3t$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$

因此$2^a=\frac{1}{2}$，得到$a=-1$

考慮$f(b)=5$

$\frac{1+t}{1-t}=5$

$\Rightarrow 1+t=5-5t$

$\Rightarrow t=\frac{2}{3}$

$2^b=\frac{2}{3}$，則$b=1-\log_2 3$

故$f(a+b)=f(-\log_2 3)=f(\log_2 \frac{1}{3})=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{2}=2$，故選$(B)$

100-01-15

Statement

求$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=?$

$(A)\quad \frac{1}{2}$

$(B)\quad \frac{3}{2}$

$(C)\quad 2$

$(D)\quad \frac{5}{2}$

$(E)\quad 4$

Solution

$\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}}+\sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}})=\log_2(\sqrt{12+8\sqrt{2}}+\sqrt{12-8\sqrt{2}})=\log_2(\sqrt{8+8\sqrt{2}+4}+\sqrt{8-8\sqrt{2}+4})$

$=\log_2(\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(2-2\sqrt{2})^2})=\log_2(4\sqrt{2})=\frac{5}{2}$，故選$(D)$

100-01-16

Statement

設$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，則$\sin\theta+\cos\theta=?$

$(A)\quad -1$

$(B)\quad -\dfrac{1}{2}$

$(C)\quad \dfrac{1}{2}$

$(D)\quad \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$(E)\quad \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

故$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

則$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1+2\dfrac{3}{8}}=\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，故選$(E)$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

$(A)\quad$ 若$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，則 $\sin x<\cos x<\cot x$

$(B)\quad$ 若$\pi<x<\dfrac{5\pi}{4}$，則 $\sec x<\csc x<\cot x$

$(C)\quad$ 若$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$，則 $\cos x<\sin x<\tan x$

$(D)\quad$ 若$\pi<x_1<x_2<\dfrac{3\pi}{2}$，則 $\sin x_1>\sin x_2$

$(E)\quad$ 若$\dfrac{\pi}{2}<x_1<x_2<\pi$，則 $\cos x_1>\cos x_2$

Solution

若$\pi<x<\dfrac{5\pi}{4}$，則 $\sin\theta<\cos\theta<\tan\theta$

故$\csc\theta<\sec\theta<\cot\theta$，故選$(B)$

100-01-18

Statement

若$mx+3y+1=0$與$x+(m-2)y+m=0$之交點在第二象限內，則m之範圍為何？

$(A)\quad 0<m<1$
$(B)\quad 0<m<2$
$(C)\quad 0<m<3$
$(D)\quad 1<m<3$
$(E)\quad 1<m<4$

Solution

由第二式，可以知道$y=\dfrac{-x-m}{m-2}=\dfrac{1}{2-m}x+\dfrac{m}{2-m}$

令$x=0$，可以知道通過$(0,\dfrac{m}{2-m})$

令$y=0$，可以知道通過$(-m,0)$

因此可以知道x截距為$-m$，y截距為$\dfrac{m}{2-m}$。

由於直線要通過第二象限，因此只考慮以下五種case：截距$y>0,x>0$、截距$x<0,y>0$與截距$y<0,x<0$，水平、垂直線

考慮截距$y>0,x>0$，得到$(0<m<2)\cap(m<0)=\varnothing$

考慮截距$y<0,x<0$，得到$(m<0\cup m>2)\cap(m>0)$，得到$m>2$。

考慮截距$x<0,y>0$，得到$(m>0)\cap(0<m<2)$，得到$0<m<2$。

考慮水平線：無法滿足

考慮垂直線：$m=2$，會使直線變為$x=-2$，依然會通過第二象限。

由第一式，可以知道$y=\dfrac{-mx-1}{3}=-\dfrac{m}{3}x-\dfrac{1}{3}$

令$x=0$，可以知道通過$(0,-\dfrac{1}{3})$

令$y=0$，可以知道通過$(\dfrac{1}{m},0)$

因此可以知道x截距為$\dfrac{1}{m}$，y截距為$\dfrac{1}{3}$

由於直線要通過第二象限，因此只考慮以下五種case：截距$y>0,x>0$、截距$x<0,y>0$與水平、垂直線

考慮截距$y>0,x>0$，得到$m>0$，則因第二式之二三結果，可使第二式經過第二象限

考慮截距$y>0,x<0$，得到$m<0$，與第二式之結果沒有匹配，因此無法使第二式經過第二象限。

考慮水平線：無法滿足

考慮垂直線：無法滿足

因此可知使兩條直線都通過第二象限所需條件：$m>0$。

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$\left\{\begin{array}\ x = \dfrac{2m+2}{(m-3)(m+1)} \\ y = \dfrac{m^2-1}{(-m+3)(m+1)} \end{array}\right.$

考慮到$y > 0, x < 0$的情況

得到$((m<-1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

與使兩條直線都通過第二象限所需條件取交集，得到$1 < m < 3$，故選(D)

100-01-19

Statement

若點(a, b)在直線$2x+3y=1$上移動，則直線$ax+by=3$恆過哪一點？

$(A)\quad (3, 4)\\ (B)\quad (4,5)\\(C)\quad (5, 7)\\(D)\quad (5, 8)\\\color{red}(E)\quad (6,9)$

Solution

考慮$x=5$時$y=-3$

考慮$x=-4$時$y=3$

由於a, b依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮$5x-3y=3$與$-4x+3y=3$的交點，得到$(x, y) = (6, 9)$，故選(E)

100-01-20

Statement

已知$A(3, -5)$，$B(-7, 4)$，且點P介於A、B之間，又$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4$，若$P$之座標為$(a, b)$，則$7a+21b=?$

$\color{red}(A)\quad -33 \\ (B)\quad -32\\(C)\quad -31\\(D)\quad -30\\(E)\quad -29$

Solution

$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$

利用內分點公式。

$P = (\dfrac{4\times3+3\times(-7)}{7}, \dfrac{4\times(-5)+3\times4}{7}) = (\dfrac{-9}{7}, \dfrac{-8}{7})$

則$7a+21b=(-9)+(-8)\times3 = -33$，故選$(A)$

100年第2次北科入學數學會考

100-02-01

Statement

若α，β為方程式$x^2+12x+9=0$的兩根，則$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=$？

$\rm(A)\ -18$
$\color{red}{\rm(B)\ -6}$
$\rm(C)\ 6$
$\rm(D)\ 12$
$\rm(E)\ 18$

Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式ax^2+bx+c，存在兩根α與β。

那麼$\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$，且$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$\sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2$

$\Rightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta$

根據偉達定理我們可以求得

$\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-12}{1} = -12$

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{9}{1} = 9$

注意一下$\alpha + \beta = -12$，$\alpha \beta = 9$
若兩根一正一負那麼$\alpha\beta<0$，若兩根都是正的那麼$a+b>0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。
$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$會存在複數，相乘後可以得到$-\sqrt{\alpha\beta}$。

因此帶回欲求之式子：

$-12 - 2\times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$

100-02-02

Statement

若 $x^4-x^3-x^2-x-2$ 與 $2x^3+x^2-7x-6$ 的最高公因式為 x^2+bx+c，則$b+2c=$？

$\color{red}{\rm(A)\ -5}$
$\rm(B)\ -3$
$\rm(C)\ 0$
$\rm(D)\ 5$
$\rm(E)\ 7$

Solution

第一式的因式$ax+b$的a一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)，
且b一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到$(x+1)(x-2)(x^2+1)$
接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得倒$(x+1)(x-2)(2x+3)$

可以觀察到最大公因式即為$(x+1)(x-2) = x^2-x-2$
比較係數後得到$b=-1, c = -2$

則$b + 2c = -1 + 2\times -2 = -5$。

100-02-03

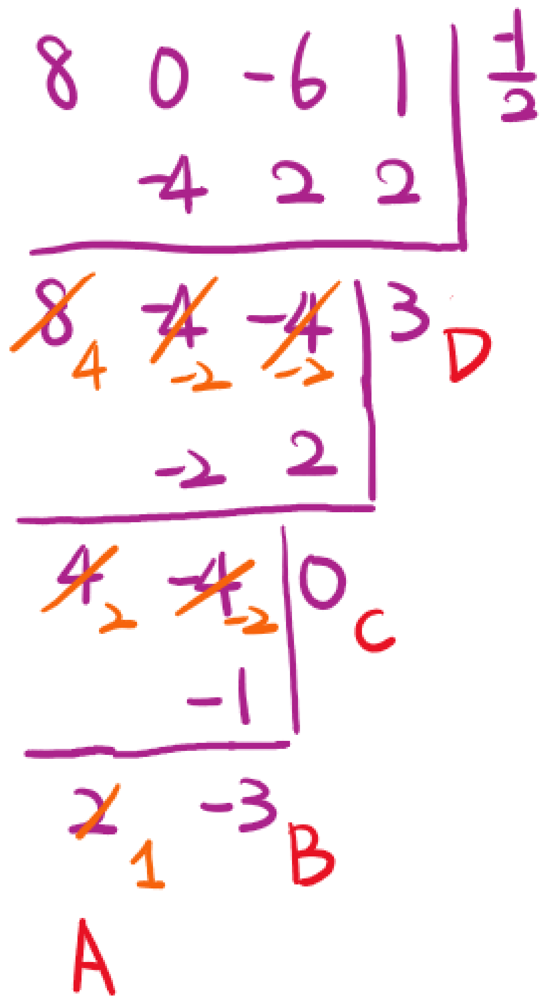
Statement

若$\dfrac{8x^3-6x+1}{(2x+1)^4} = \dfrac{a}{(2x+1)} + \dfrac{b}{(2x+1)^2} + \dfrac{c}{(2x+1)^3} + \dfrac{d}{(2x+1)^4}$，則$2a+b-c+d=$？

$\rm(A)\ -2$
$\rm(B)\ -1$
$\rm(C)\ 0$
$\rm(D)\ 1$
$\color{red}{\rm(E)\ 2}$

Solution

我們可以使用綜合除法，將$2x+1$改寫成$x+\dfrac{1}{2}$，然後再對除出來的係數除以2。



因此$a = 1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 3$。

$2a + b - c + d = 1\times 2 + (-3) - 0 + 3 = 2$。

100-02-04

Statement

$x^2-4x+2 \le |x-2|$ 之解為何？

$\rm(A)\ 1\le x \le 4$
$\rm(B)\ 2\le x \le 4$
$\rm(C)\ 0\le x \le 2$
$\color{red}{\rm(D)\ 0\le x \le 4}$
$\rm(E)\ 0\le x \le 3$

Solution

1. 考慮$x^2-4x+2 \le x-2$：
   移項，$x^2-4x+2-x+2 \le 0$
   整理，$x^2-5x+4 \le 0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$(x-4)(x-1) \le 0$，並且可以得到$1 \le x \le 4$。
2. 考慮$x^2-4x+2 \le -x+2$：
   移項，$x^2-4x+2+x-2 \le 0$
   整理，$x^2-3x \le 0$
   那麼我們可以將其因式分解，得$x(x-3) \le 0$，並且可以得到$0 \le x \le 3$

對剛剛考慮的兩個東西產生出來的結果取聯集，得到$0 \le x \le 4$。

100-02-05

Statement

$2\log_2x-\log_x2<1$之解為何？

$\rm(A)\ x<\dfrac{-1}{2}\ 或\ 0 < x < 1$
$\rm(B)\ 0<x<\dfrac{1}{2}\ 或\ 1 < x < 2$
$\rm(C)\ x<\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\ 或\ 0 < x < 1$
$\rm(D)\ x<\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\ 或\ 1 < x < 2$
$\color{red}{\rm(E)\ 0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ 或\ 1 < x < 2}$

Solution

$2\log_2x-\log_x2<1$

$\Rightarrow 2\log_2x-\dfrac{\log{2}}{\log{x}} < 1$

$\Rightarrow 2\log_2x-\dfrac{1}{\log_2x} < 1$

令$\log_2x = t$，那麼

$2t - \dfrac{1}{t} < 1$
$\Rightarrow 2t - \dfrac{1}{t} - 1 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{2t^2-t-1}{t} < 0$

考慮兩種情況。

1. 若$t>0$且$2t^2-t-1<0$
   $2t^2-t-1<0 = (2t+1)(t-1)<0 = \dfrac{-1}{2} < t < 1$
   與$t>0$取交集得到$0 < t < 1$。
2. 若$t<0$且$2t^2-t-1>0$
   $2t^2-t-1>0 = (2t+1)(t-1)>0 = t < \dfrac{-1}{2}\ 或\ t > 1$
   與$t<0$取交集得到$t < \dfrac{-1}{2}$。

對這兩種考慮取聯集，得到$t < \dfrac{-1}{2}$或$0 < t < 1$。

還原，得到$x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$或$1 < x < 2$。

100-02-06

Statement

已知$∆ABC$ 中，$\overline{AB} = 37$，$\overline{BC} = 53$，$\overline{AC} = 89$，則下列各內積中，何者為最大？

$(A) \quad \vec{AB}\cdot \vec{AC} \\ (B) \quad \vec{BC}\cdot \vec{BA} \\ \color{red}(C) \quad \vec{CA}\cdot \vec{CB} \\ (D) \quad \vec{AB}\cdot\vec{BC} \\ (E) \quad \vec{BC}\cdot\vec{CA}$

Solution

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 37 \times 89 \times \dfrac{37^2+89^2-53^2}{2\times 37\times 89}$

$\vec{BC}\cdot\vec{BA} = 53\times 37\times \dfrac{53^2+37^2-89^2}{2\times 53\times 37}$

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 89 \times 37 \times \dfrac{89^2+53^2-37^2}{2\times 89\times 53}$

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$

$\vec{BC} \cdot \vec{CA} < 0$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$37^2+89^2-53^2。$

$53^2+37^2-89^2$

$89^2+53^2-37^2$

顯然是第三者較大，故選(C)

100-02-07

Statement

已知向量$\overrightarrow{AB}=(-31, 29)$，$\overrightarrow{AC}=(23, -11)$，則下列向量長中，何者為最大？

$\rm(A)\ |\overrightarrow{AB}|$
$\color{red}{\rm(B)\ |\overrightarrow{BC}|}$
$\rm(C)\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$
$\rm(D)\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$
$\rm(E)\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|$

Solution

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BA} = (31, -29)$

$\overrightarrow{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$
$\overrightarrow{CA} = (-23, 11)$

考慮向量長的公式，當存在一向量$\overrightarrow{L} = (A,B)$，$\overrightarrow{L}$的向量長為$|\overrightarrow{L}| = \sqrt{A^2+B^2}$
因此若$|A|+|B|$越大，那麼向量長越大。

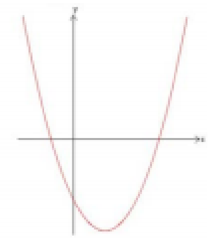
考慮選項A：$|-31|+|29| = 60$
考慮選項B：$|54|+|-40| = 94$
考慮選項C：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$，$|23|+|-11|=34$
考慮選項D：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$，$|-8|+|18|=26$
考慮選項E：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$，$|0|+|0| = 0$

因此，故選B。

100-02-08

Statement

設$y=ax^2+bx+c$的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



$\rm(A)\ abc$
$\rm(B)\ b^2-4ac$
$\rm(C)\ c^2-4ab$
$\rm(D)\ b+\sqrt{b^2-4ac}$
$\color{red} \rm(E)\ b-\sqrt{b^2-4ac}$

Solution

因為開口向上，所以$a>0$。
觀察$x=0$，可以發現對應到的$y<0$，因此$c<0$
觀察一下對稱軸，$\dfrac{-b}{2a} > 0$，因此$b<0$

因此$abc > 0$，$b^2-4ac>0$因為有實數解。
$c^2-4ab > 0$因為$ab<0$。

而$b+\sqrt{b^2-4ac}$必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，
另一根是負數因此$b-\sqrt{b^2-4ac}$小於0，故選E。

100-02-09

Statement

已知$4x^2+y^2-4x+8y=8$，則x的最大值為何？

$\rm (A)\ 1$
$\rm (B)\ 2$
$\color{red}{\rm (C)\ 3}$
$\rm (D)\ 4$
$\rm (E)\ 5$

Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的x了。

$4x^2-4x+y^2+8y=8$

$4(x^2-x)+y^2+8y=8$

$4(x^2-x+\dfrac{1}{4})+y^2+8y+16=8+16+1$

$4(x-\dfrac{1}{2})^2+(y+4)^2=25$

$\dfrac{(x-\dfrac{1}{2})^2}{\dfrac{25}{4}}+\dfrac{(y+4)^2}{25}$

由此可知這個橢圓的短邊平行x軸

$a = \sqrt{25} = 5, b = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$

中心可從式子得知，$(x,y) = (\dfrac{1}{2}, -4)$

因此，加上x的部份得到$\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2} = 3$

100-02-10

Statement

拋物線$y=4-2x-x^2$與x軸兩交點的距離為何？

$\rm (A)\ 2$
$\rm (B)\ 3$
$\color{red}{\rm (C)\ 2\sqrt{5}}$
$\rm (D)\ 6$
$\rm (E)\ 8$

Solution

將y等於0，求出x。

$-x^2-2x+4=0$

先確定b^2-4ac是否大於0。

$(-2)^2-4\times(-1)\times4 = 4+16 = 20$

因此兩根為$\dfrac{2\pm\sqrt{20}}{-2} = \dfrac{2\pm2\sqrt{5}}{-2}$

$\dfrac{2+\sqrt{5}}{-2} - \dfrac{2-\sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$

100-02-11

Statement

設雙曲線$x^2-y^2=x+2y$兩漸進的夾角為θ，則$\sin\dfrac{\theta}{2}=$？

$\rm (A)\ 0$
$\color{red}{\rm (B)\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$
$\rm (C)\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\rm (D)\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\rm (E)\ 1$

Solution

配方雙曲線得到標準式。

$x^2-x-y^2-2y=0 \Rightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4}-y^2-2y+1 = \dfrac{5}{4}$

$(x-\dfrac{1}{2})^2-(y-1)^2=\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{4(x-\dfrac{1}{2})^2}{5} - \dfrac{4(y-1)^2}{5} = 1$

求漸進線，令等號右邊為0

$\dfrac{4(x-\dfrac{1}{2})^2}{5} = \dfrac{4(y-1)^2}{5}$

$(x-\dfrac{1}{2})^2 = (y-1)^2$

$(x-\dfrac{1}{2})^2-(y-1)^2 = 0$

$(x-\dfrac{1}{2}-(y-1))(x-\dfrac{1}{2}+(y-1)) = 0$

$(x-y+\dfrac{1}{2})(x+y+\dfrac{3}{2}) = 0$

第一條線$(x-y+\dfrac{1}{2})$可求斜率$m=1$

第二條線$(x+y+\dfrac{3}{2})$可求斜率$m=-1$

因此，這兩條線垂直$(m_1 \times m_2 = -1)$，夾角為90°

因此$\sin\dfrac{90^{\circ}}{2} = \sin45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

100-02-12

Statement

不等式$\dfrac{3\cdot2^x-18\cdot2^{-x}}{2^x-2^{-x}} \le 2$之解為何？

$\rm(A)\ -1\le x \le 1$

$\rm(B)\ 0 < x \le 1$

$\rm(C)\ 1 \le x \le 2$

$\color{red}{\rm (D)\ 0 < x \le 2}$

$(E)\ 1 \le x \le 4$

Solution

將分子分母上下同乘2^x。

$\dfrac{3\cdot2^x-18\cdot2^{-x}}{2^x-2^{-x}} \Rightarrow \dfrac{3\cdot2^{2x} - 18}{2^{2x}-1} \le 2$

移項。

$\dfrac{3\cdot2^{2x} - 18}{2^{2x}-1} -2 \le 0$

$\dfrac{3\cdot 2^{2x} - 18 - 2(2^{2x}-1)}{2^{2x}-1} \le 0$

$\dfrac{3\cdot 2^{2x} - 18 - 2\cdot 2^{2x} + 2}{2^{2x} - 1} \le 0$

$\dfrac{2^{2x} - 16}{2^{2x} - 1} \le 0$

令$t = 2^{2x}$

$\dfrac{t-16}{t-1} \le 0$

考慮以下兩點：

1. $t - 16 \ge 0$，$t - 1 < 0$

$t \ge 16,\ t < 1$，這兩個不等式沒有任何交集，因此$t \in \emptyset$

2. $t - 16 \le 0$，$t - 1 > 0$

$t \le 16,\ t > 1$，這兩個不等式的交集為$1 < t \le 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到$1 < t \le 16$

還原t得到$1 < 2^{2x} \le 16$，因此$0 < x \le 2$

100-02-13

Statement

方程式$10\cdot x^{2\log x} = x^3$之所有實根的平方和為何？

$\rm (A)\ 100$
$\rm (B)\ 101$
$\color{red}{\rm (C)\ 110}$
$\rm (D)\ 111$
$\rm (E)\ 121$

Solution

等號兩邊同除$x^{2\log x}$

$10 = x^{3 - 2\log x}$

$1 = (3-2\log x) \times \log(|x|)$

因為要求實根，因此可以限定$x > 0$，所以$(3 - 2\log x)\times \log(x)$

令$t = \log x$

$1 = (3 - 2t)\times t \Rightarrow -2t^2+3t-1 = 0$

因式分解得到$(-2t+1)(t-1) = 0$

可以解出$t = \dfrac{1}{2}$或$t = 1$

還原t，可以得到$\log x = \sqrt{10}$ 或 $\log x = 10$

兩根的平方和為$\sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$

100-02-14

Statement

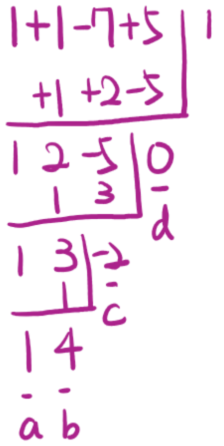
若$f(x) = \log_2(x^3+x^2-7x+5)$，則$f(1+\sqrt{2})=$？

$\rm (A)\ 1$
$\rm (B)\ 2$
$\color{red}{\rm (C)\ 3}$
$\rm (D)\ 4$
$\rm (E)\ 5$

Solution

觀察一下，可以嘗試把x^3+x^2-7x+5化簡成$c(x-1)^2+b(x-1)+a...$

這部分可以用綜合除法做到。



因此可得$(x-1)^3 + 4(x-1)^2 -2(x-1)$。

把$f(1 + \sqrt{2})$帶進去，得：

$\log_2((\sqrt{2})^3+4(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2})) = \log_2({2\sqrt{2}+8-2\sqrt{2}}) = \log_28 = 3$

100-02-15

Statement

設$\cos\theta+\cos^2\theta = 1$，則$\sin^2\theta + \sin^4\theta = $？

$\rm (A)\ \dfrac{1}{4}$

$\rm (B)\ \dfrac{1}{3}$

$\rm (C)\ \dfrac{1}{2}$

$\rm (D)\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\color{red}{\rm (E)\ 1}$

Solution

$\cos^2\theta = 1 - \cos\theta$

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - (1 - \cos\theta) = \cos\theta$

$\sin^4 = (\sin^2)^2 = \cos^2\theta$

$\sin^2\theta + \sin^4\theta = \cos\theta + \cos^2\theta = 1$

100-02-16

Statement

設$\tan100^{\circ}=k$，則$\sin 80^{\circ} = $？

$\color{red}{\rm (A)\ \dfrac{-k}{\sqrt{1+k^2}}}$

$\rm (B)\ \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}$

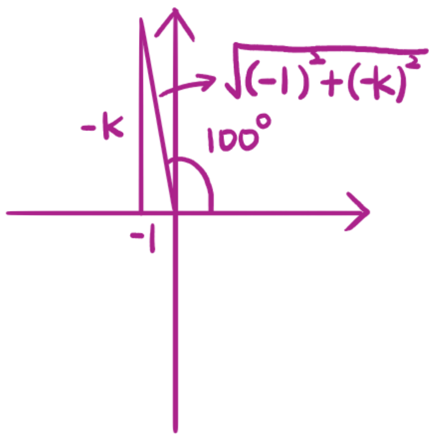
$\rm (C)\ \dfrac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$

$\rm (D)\ \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

$\rm (E)\ \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

Solution

畫個圖



看圖可以觀察到，$\sin100^{\circ} = \sin80^{\circ} = \dfrac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

100-02-17

Statement

設$a = \sec434^{\circ}$，$b = \sin 100^{\circ}$，$c = \cos 260^{\circ}$，$d = \cot 28^{\circ}$，$e = \csc 155^{\circ}$

則下列何者正確？

$\rm (A)\ b < c < d < e < a$

$\color{red}{\rm(B)\ c < b < d < e < a}$

$\rm(C)\ c < b < e < d < a$

$\rm(D)\ c < b < d < a < e$

$\rm(E)\ b < c < a < d < e$

Solution

$a = \sec 434^{\circ} = \sec 74^{\circ} = \csc 16^{\circ}$

$b = \sin100^{\circ} = \sin80^{\circ}$

$c = \cos 260^{\circ} = -\cos80^{\circ}$

$d = \cot28^{\circ}$

$e = \csc155^{\circ} = \csc25^{\circ}$

因此$a > e$，$c < b$，故選B。

100-02-18

Statement

平面上有兩點$A (1, 2)$，$B(a,b)$，若直線$\overline{AB}$之垂直平分線為$x + 2y - 10 = 0$，則$a - b$ = ？

$\rm (A)\ -1$

$\rm (B)\ -2$

$\color{red}{\rm (C)\ -3}$

$\rm (D)\ -4$

$\rm (E)\ -5$

Solution

垂直平分線，因此垂直平分線通過$\overline{AB}$的中點$(\dfrac{1+a}{2}, \dfrac{2+b}{2})$。

帶入垂直平分線得到$\dfrac{1+a}{2} + 2+b - 10 = 0 \Rightarrow 1+a+4+2b-20=0$

$\Rightarrow a+2b=15$

而我們可以求得垂直平分線的斜率，得到$m = \dfrac{-1}{2}$，因此與其垂直的斜率一定是$m = \dfrac{-1}{\dfrac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義，可以得到$\dfrac{2-b}{1-a} = 2$，整理得到$2- b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$。

帶回第一式可以得到$5a = 15,\ a =3,\ b = 6$。

$a - b = 3 - 6 = -3$

100-02-19

Statement

設直線$bx+ay-ab=0$，$a > 0,\ b < 0$過點$(1, 2)$，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形，則$a+2b=$？

$\rm (A)\ -7-3\sqrt{3}$

$\rm (B)\ -6-3\sqrt{3}$

$\color{red}{\rm (C)\ -5-3\sqrt{3}}$

$\rm (D)\ -4-3\sqrt{3}$

$\rm (E)\ -3-3\sqrt{3}$

Solution

可以推出x, y的通式。

$bx + ay = ab$，求出x,y的截距。

當$y = 0$，那麼$bx = ab$，$x = a$

當$x = 0$，那麼$ay = ab$，$y = b$

已知$a > 0, b < 0$過點$(1, 2)$，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為2的三角形。

因此可以知道$\dfrac{1}{2}|a||b| = 2$，可知$ab = -4$或者$ab = 4$，但是$a > 0, b < 0$，因此$ab = 4$不合。

已知過點$(1, 2)$且$ab = -4$，因此可以把點帶入得到$b + 2a = -4$，

又$ab = -4$所以$a = \dfrac{-4}{b}$，所以得到$b + \dfrac{-8}{b} = -4$

同乘以b可以得到b^2+4b-8。'

利用公式解可以解出$\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4\times 1\times -8}}{2} = \dfrac{-4\pm\sqrt{48}}{2} = \dfrac{-4\pm4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根$-2+2\sqrt{3}$或者$-2-2\sqrt{3}$，其中由於$b<0$，因此$-2+2\sqrt{3}$不合。

帶回求出a得到$a = \dfrac{-4}{-2-2\sqrt{3}} = \dfrac{-4}{-2(1+\sqrt{3})}$

化簡得到$a = \dfrac{2}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{2(1-\sqrt{3})}{-2} = -1(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$

因此$a + 2b = \sqrt{3}-1 + -4 -4\sqrt{3} = -5-3\sqrt{3}$

100-02-20

Statement

設直線$3x+y=1$與$x+3y=2$之夾角為θ，則$\cos2\theta=$？

$\color{red}{\rm (A)\ \dfrac{-7}{25}}$

$\rm (B)\ \dfrac{-6}{25}$

$\rm (C)\ \dfrac{-1}{5}$

$\rm (D)\ \dfrac{-4}{25}$

$\rm (E)\ \dfrac{-3}{25}$

Solution

考慮兩條線的斜率。

$3x + y = 1,\ m_1 = \dfrac{-3}{1} = -3$

$x + 3y = 2,\ m_2 = \dfrac{-1}{3}$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為$\tan$來考慮。

$\tan(m_1 - m_2) = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \dfrac{-3 - \dfrac{-1}{3}}{1 + 1} = \dfrac{\dfrac{-8}{3}}{2} = \dfrac{-4}{3}$

觀察到求出的這個$\tan$夾角是負的，因此這個夾角是大於90°的鈍角。

可以依照$\tan(180^{\circ}) = 0$來求得另一個銳角的夾角。

$\dfrac{\dfrac{-4}{3} + \tan\theta}{1-\dfrac{-4}{3}\tan\theta}$，求得銳角$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

由於$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$，那麼這個角度會介於$45^{\circ} \sim 90^{\circ}$

因此乘以兩倍後就會大於90°

用兩倍角公式求出$\tan2\theta = \dfrac{\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3}}{1 - \dfrac{4}{3}\times\dfrac{4}{3}} = \dfrac{\dfrac{8}{3}}{\dfrac{-7}{9}} = \dfrac{24}{-7}$

由於這個角度介於$90^{\circ} \sim 180^{\circ}$，$y>0$，而$x < 0$，也因此$y = 24,\ x = -7,\ r = \sqrt{24^2+(-7)^2} = 25$

因此$\cos2\theta = \dfrac{-7}{25}$，故選$(A)$