SieveMain.java的说明

筛法是研究素数分布的常用工具。

SieveMain.java这个程序，把 $[2, N]$ 的整数用各个素数都筛一遍，从而得到"满足条件"的解。

目前，程序设置了一个开关变量 `flag` ，当 `flag` 是1时，计算的是素数的分布，当 `flag` 是2时，计算的是哥德巴赫猜想的解的分布（即，给定N，求x，使得"x"和"$N-x$"都是素数）。

略加修改，也可以用它来计算孪生素数的分布。
由此也可以看出孪生素数问题和哥德巴赫猜想之间的联系。
举例来说，通过计算机程序，可以计算出，"小于2^{30}孪生素数对的个数"和"2^{30}可以用多少种方式表示为两素数之和"的答案。如下图

```
>>> N=2**30
>>> sum(1 for i in range(1,N) if sympy.isprime(i) and sympy.isprime(i+2))
3650557
>>> sum(1 for i in range(1,N) if sympy.isprime(i) and sympy.isprime(N-i))
3634222
```

可以看到它们十分相近。

算法说明

以 `flag` 等于1时为例，说明算法。

`list` 中最开始是 $[2, N]$ 的整数，在循环中，用不同的素数p去筛选它们（去掉所有的p的倍数）。根据筛法原理，只要把 $[2, \sqrt{N}]$的素数都筛过，剩下的就只可能是素数（注意 $[2, \sqrt{N}]$ 之间的素数被筛掉了）。

在循环的过程中，除了用素数p来筛这些数，也会计算一个 `estimation` ，来估计筛选的结果的数量。在这个过程中，可以对比实际结果和 `estimation` 之间的相对误差。

如何估算

`list` 的当前大小是$size_n$，经过素数p筛过之后的大小是$size_{n+1}$，那么$size_n$和$size_{n+1}$的关系是怎样?

一个简单粗暴的回答是，$size_{n+1} \approx \left(1 - \frac{1}{p}\right) size_n$。这里的"依据"是，一个"随机数"是$p$的倍数的概率应该是$\frac{1}{p}$。

据此，可以用以下公式来估算筛选后结果的数量

$$(N-1)\prod_{p=2}^{\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

误差分析

根据素数定理，$[2,N]$之间的素数数量约为$\int_0^N \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$，或近似表示为$\frac{N}{\log N}$

根据梅滕斯第三定理，

$$\lim_{n\to\infty}\log n\prod_{p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=e^{-\lambda}\approx 0.56145948$$

其中λ是欧拉-马斯克若尼常数，$\lambda\approx 0.57721566$。
因此，

$$(N-1)\prod_{p=2}^{\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{2e^{\lambda}N}{\log N}$$

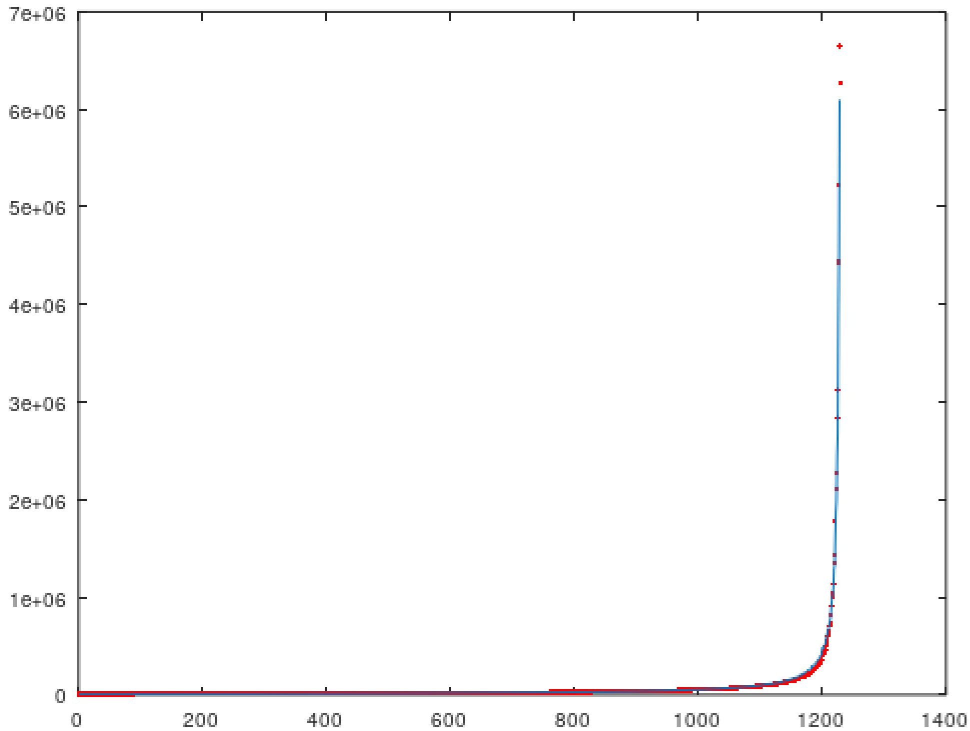
如果我们忽略 $[2,\sqrt{N}]$ 之间的素数对结果数量的影响（当N很大时，它们可以忽略不记），则可以预计，当$N\to\infty$时，相对误差应该是$2e^{-\lambda}-1\approx 12.29\%$。

图形对比

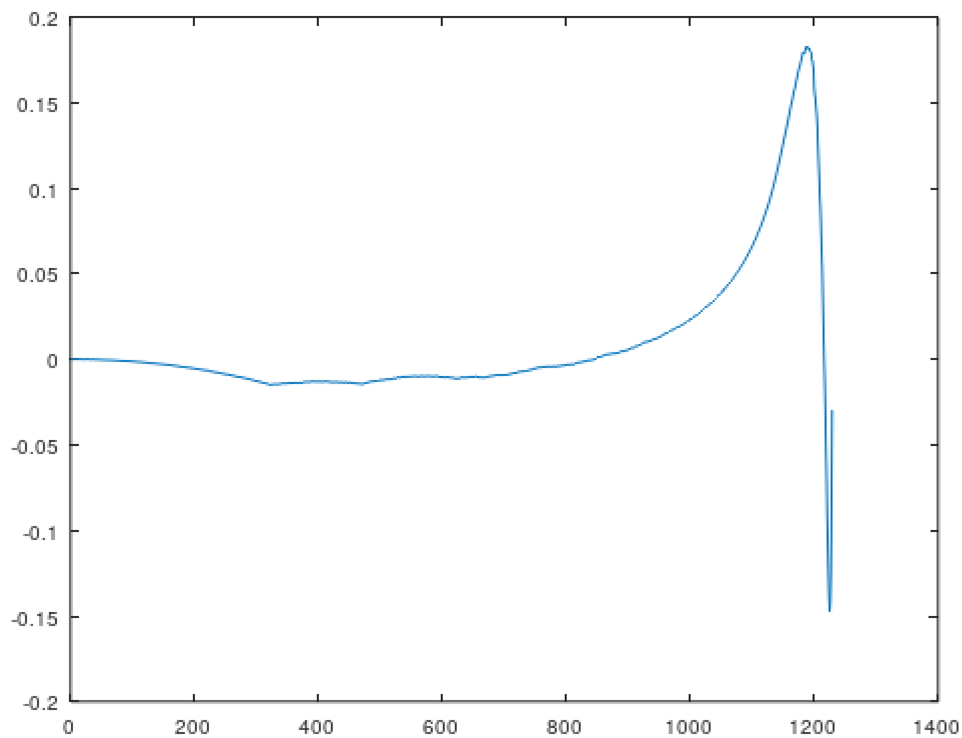
把 $[2,\sqrt{N}]$ 的素数，由大到小排序，然后一个一个用这些素数去筛 $[2,\sqrt{N}]$ 的整数。

$N=10^8$ 时的情形

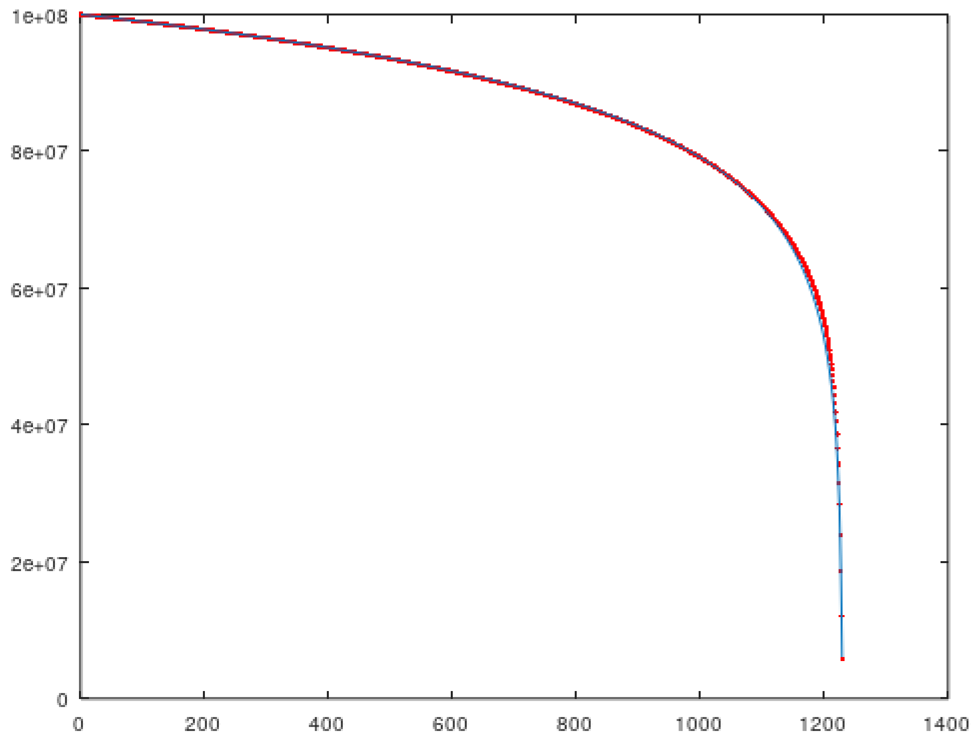
实际每次筛去的数量，对比预测的数量：



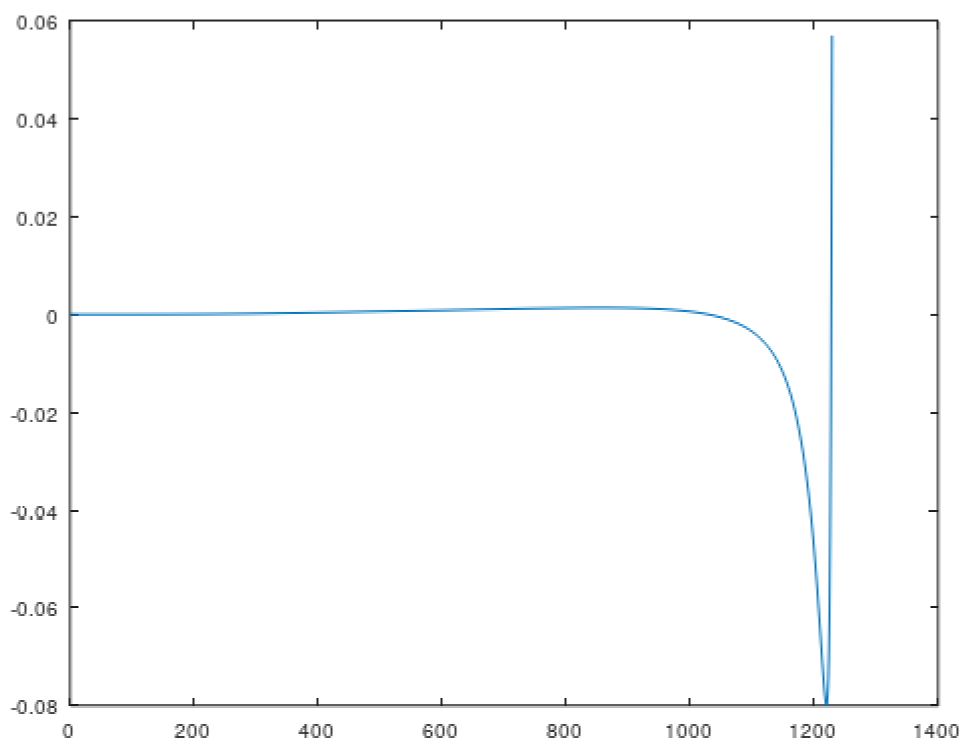
相对误差：



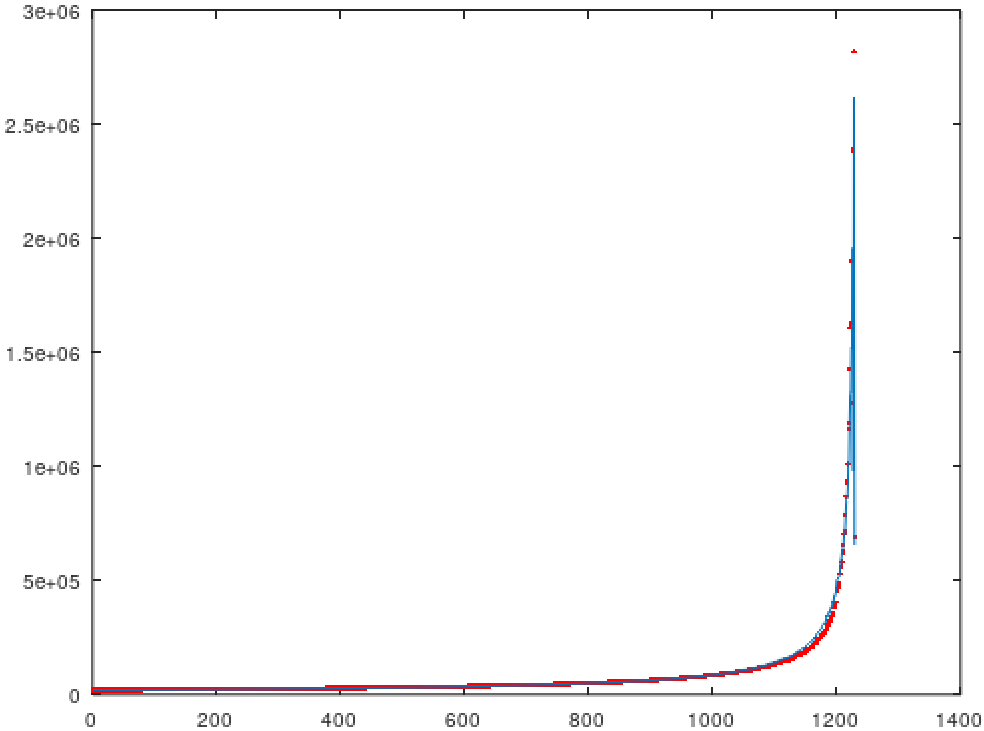
实际每次筛后剩下的数量，对比预测的数量：



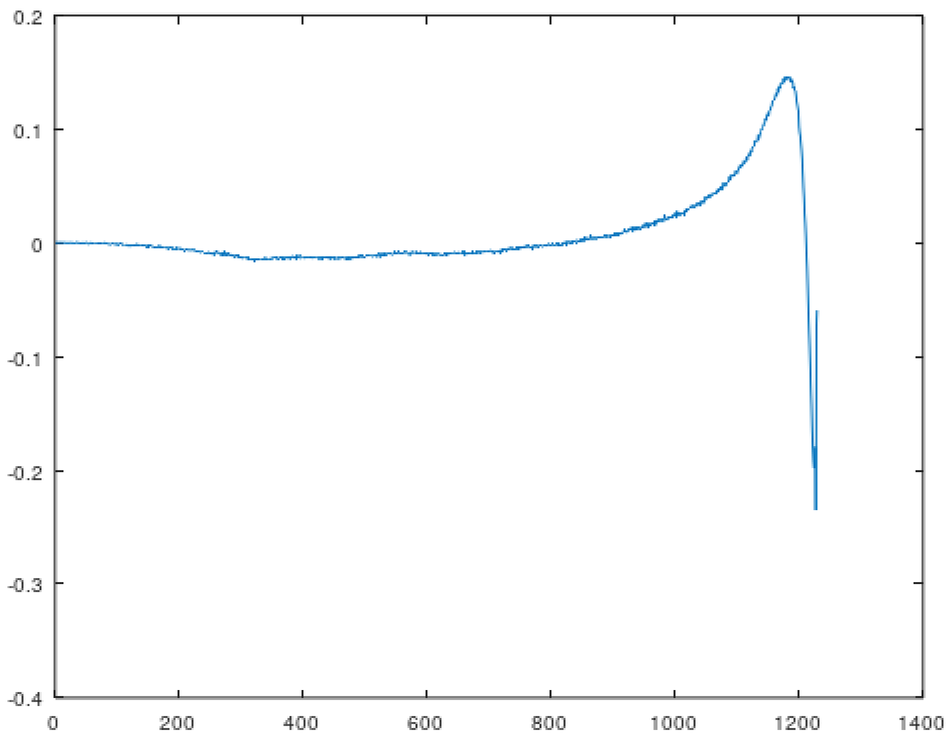
相对误差:



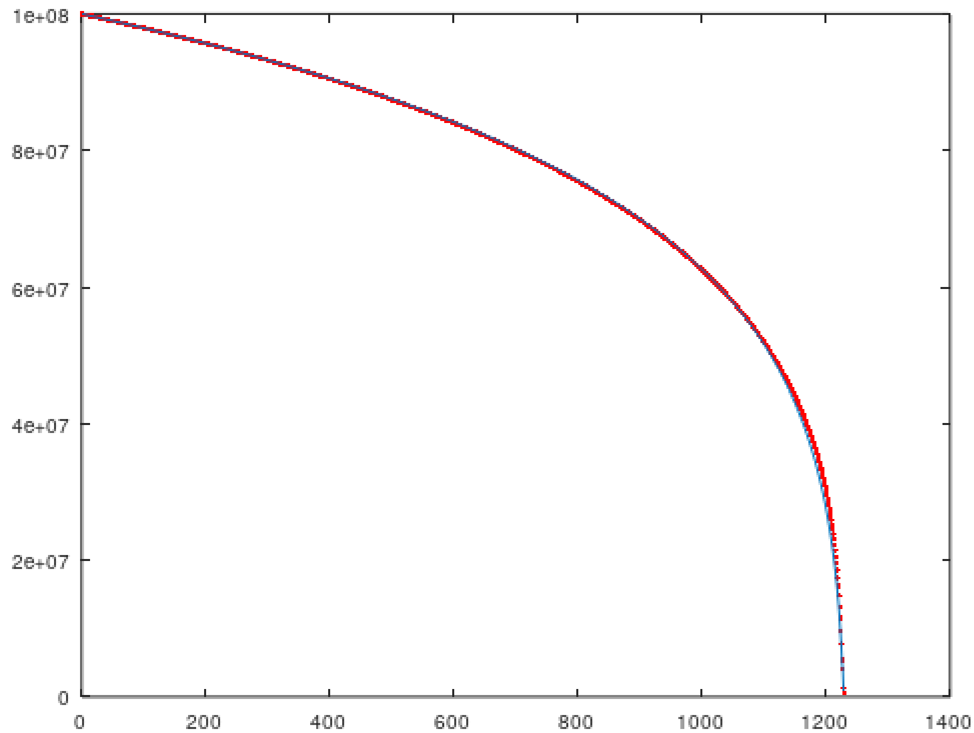
以下是 `flag == 2` 时的图形



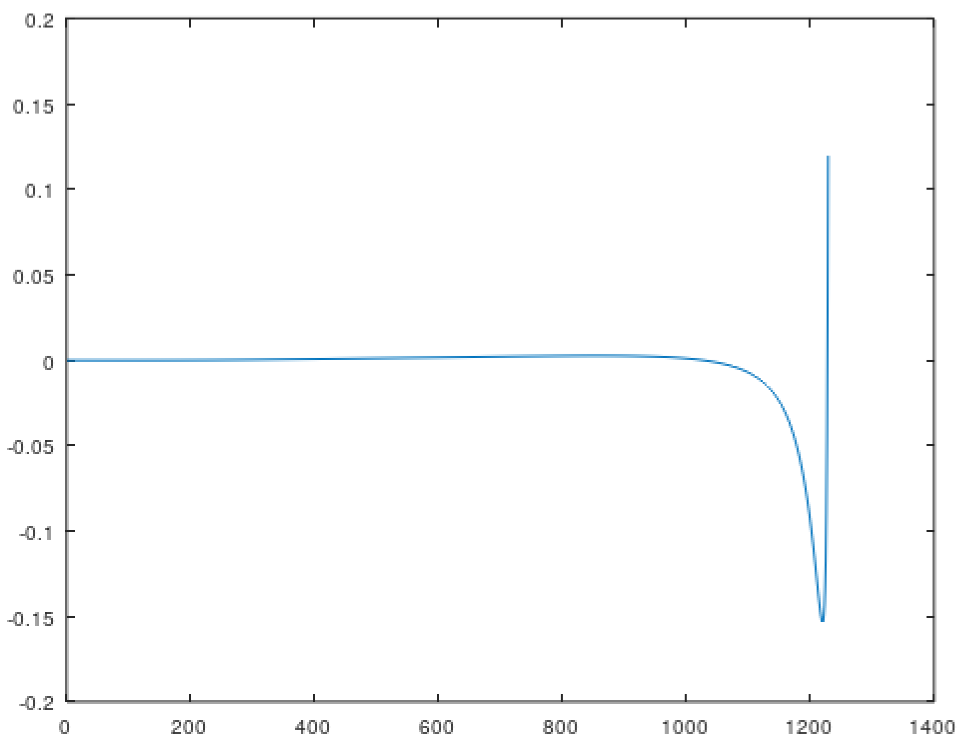
相对误差：



实际每次筛后剩下的数量，对比预测的数量：

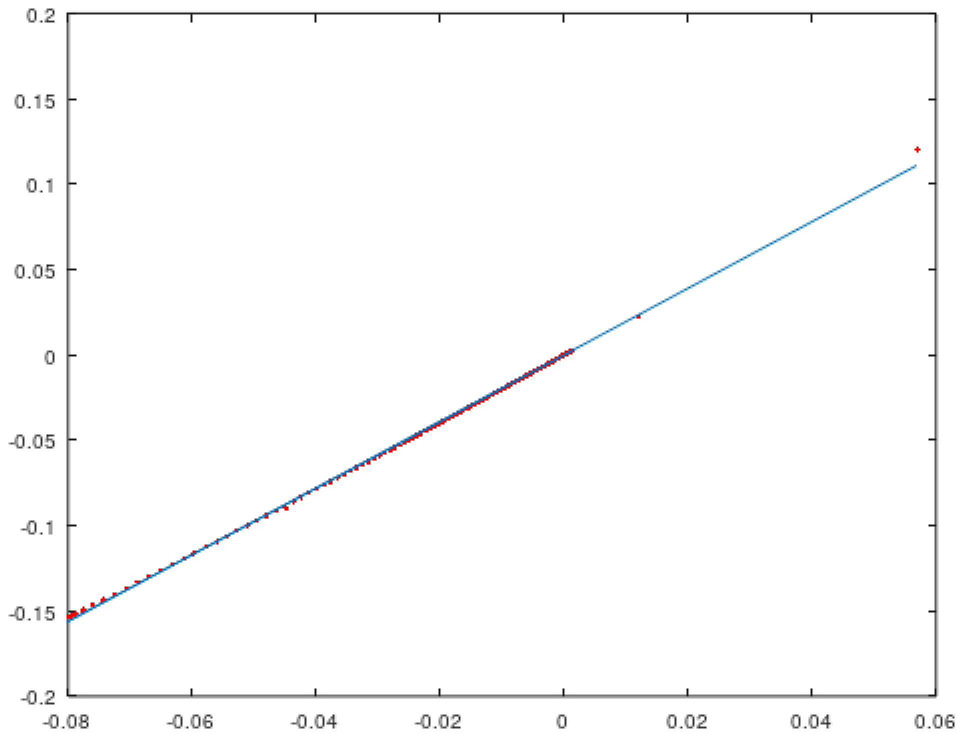


相对误差：



这些图形之间，有着明显的规律。比如“剩余数量的相对误差”图形，形状几乎一模一样。

下面画出“相对误差的X-Y图”（横轴是 `flag == 1` 的情况，纵轴是 `flag == 2` 的情况）



上图中的蓝线是线性回归得到的结果，$y = k\ x + b$，其中$k \approx 1.95068$，$b \approx -1.584 \times 10^{-5}$，相关系数$r \approx 0.99985$。