哥德巴赫猜想研究

哥德巴赫猜想说，一个足够大的偶数可以表示成两个素数之和。

关于素数分布的已知规律

素数定理

当N趋于无穷时，小于N的素数数量，可以近似表示为$\frac{N}{\log(N)}$；对数积分$\mathrm{li}(x)$是对$\pi(x)$的更好的估计。

或者等价地说，N附近的素数密度约为$\frac{1}{\log(N)}$。

数值结果

任何小于4×10^{18}的偶数都经过计算机程序验证符合哥德巴赫猜想。

猜测

哈代-李特尔伍德猜测说，大整数N可以表示成的2个素数之和的方式可以近似表示为

$$2\Pi_2 \left(\prod_{p|N; p\geq 3} \frac{p-1}{p-2} \right) \frac{N}{\left(\log(N)\right)^2}$$

其中$\Pi_2 \approx 0.6601\ldots$是哈代-李特尔伍德的孪生素数常数。

从直觉上说，对于一个随机数x，若$1 \leq x \leq N$，则x是素数的概率约为$\frac{1}{\log(N)}$；$N-x$是素数的概率同样约为$\frac{1}{\log(N)}$；若把这两个事件近似看作独立事件，则它们同时发生的概率约为$\frac{1}{(\log(N))^2}$。由此得到N表示为2个素数之和的方式，应该约等于$\frac{N}{(\log(N))^2}$。这在数量级上，跟哈代-李特尔伍德猜测相吻合。

埃拉托斯特尼筛法

埃拉托斯特尼筛法是一种古老的求出N以内的所有素数的方法。

它的过程如下

1. 按顺序写下2至N的整数
2. 划掉2的倍数（除了2本身）
3. （下一个没有划掉的数是3）划掉3的倍数（除了3本身）
4. （下一个没有划掉的数是5）划掉5的倍数（除了5本身）
5. 重复以上步骤
6. 当进行到$\sqrt{N}$时，剩下的数就已经全都是素数了。

埃拉托斯特尼筛法的变形，求哥德巴赫猜想的解的近似数量

1. 写下2至$N-2$的整数
2. 划掉所有偶数
3. 划掉所有3的倍数；若N除以3的余数是r，划掉所有$3k+r$形式的数
4. 划掉所有5的倍数；若N除以5的余数是r，划掉所有$5k+r$形式的数
5. 划掉所有7的倍数；若N除以7的余数是r，划掉所有$7k+r$形式的数
6. 划掉所有11的倍数；若N除以11的余数是r，划掉所有$11k+r$形式的数
7. 重复以上步骤
8. 当进行到$\sqrt{N}$时，剩下的数，一定满足哥德巴赫猜想的条件。

举例

若$N=42$,
则经过步骤2，剩下的数为$3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39$
经过步骤3，剩下的数为$5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37$
经过步骤4，剩下的数为$11,13,19,23,29,31$
下一个素数已经大于$\sqrt{N}$，停止

因为上述过程筛掉了所有的$\sqrt{N}$内的素数的倍数，剩下的必然都是素数
又因为上述过程的对称性，因此对于每一个剩下的数x，$N-x$也一定存在其中；

所以剩下的数（如果数量不为0），一定是对于偶数N的哥德巴赫猜想的解。

注意，上述过程会筛掉一部分合乎规则的解。比如对于$N=42$，N可以表示为$5+37$，而这个解被筛掉了。
故上述方式，可能会低估哥德巴赫问题的解的数量。

估算数量

以上的每一个步骤，都可以用一个简单的方式来估算筛掉的数的数量

1. 一开始的数的数量是$N-3$
2. 划掉所有偶数——划掉的数约为剩下的数的$\frac{1}{2}$

3. 划掉3的倍数；划掉$3k+r$形式的数——若N是3的倍数，划掉的数约为剩下的数的$\frac{1}{3}$；若N不是3的倍数，划掉的数约为剩下的数的$\frac{2}{3}$。
4. 划掉5的倍数；划掉$5k+r$形式的数——若N是5的倍数，划掉的数约为剩下的数的$\frac{1}{5}$；若N不是5的倍数，划掉的数约为剩下的数的$\frac{2}{5}$。

   …………

由此可以得到一个估算公式

$$\left(\prod_{p\le\sqrt{N}}(1-\frac{F(p,N)}{p})\right)(N-3)$$

其中，$F(p,N)$的定义为，若$p\mid N$，则$F(p,N)=1$；否则$F(p,N)=2$。

当N是奇数时，上述公式给出的估计是0。