

# 哥德巴赫猜想研究

哥德巴赫猜想说，一个足够大的偶数可以表示成两个素数之和。

## 关于素数分布的已知规律

### 素数定理

当 $N$ 趋于无穷时，小于 $N$ 的素数数量，可以近似表示为 $\frac{N}{\log(N)}$ ；对数积分 $\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\log x}$ 是对 $\pi(x)$ 的更好的估计。

或者等价地说， $N$ 附近的素数密度约为 $\frac{1}{\log(N)}$ 。

## 数值结果

任何小于 $4 \times 10^{18}$ 的偶数都经过计算机程序验证符合哥德巴赫猜想。

## 猜测

哈代-李特尔伍德猜测说，大整数 $N$ 可以表示成的2个素数之和的方式可以近似表示为

$$2\Pi_2 \left( \prod_{p|N; p \geq 3} \frac{p-1}{p-2} \right) \frac{N}{(\log(N))^2}$$

其中 $\Pi_2 \approx 0.6601\dots$ 是哈代-李特尔伍德的孪生素数常数。

从直觉上说，对于一个随机数 $x$ ，若 $1 \leq x \leq N$ ，则 $x$ 是素数的概率约为 $\frac{1}{\log(N)}$ ； $N - x$ 是素数的概率同样约为 $\frac{1}{\log(N)}$ ；若把这两个事件近似看作独立事件，则它们同时发生的概率约为 $\frac{1}{(\log(N))^2}$ 。由此得到 $N$ 表示为2个素数之和的方式，应该约等于 $\frac{N}{(\log(N))^2}$ 。这在数量级上，跟哈代-李特尔伍德猜测相吻合。

## 埃拉托斯特尼筛法

埃拉托斯特尼筛法是一种古老的求出 $N$ 以内的所有素数的方法。

它的过程如下

1. 按顺序写下2至 $N$ 的整数
2. 划掉2的倍数（除了2本身）
3. （下一个没有划掉的数是3）划掉3的倍数（除了3本身）
4. （下一个没有划掉的数是5）划掉5的倍数（除了5本身）
5. 重复以上步骤
6. 当进行到 $\sqrt{N}$ 时，剩下的数就已经全都是素数了。

## 埃拉托斯特尼筛法的变形，求哥德巴赫猜想的解的近似数量

1. 写下2至 $N - 2$ 的整数
2. 划掉所有偶数
3. 划掉所有3的倍数；若 $N$ 除以3的余数是 $r$ ，划掉所有 $3k + r$ 形式的数
4. 划掉所有5的倍数；若 $N$ 除以5的余数是 $r$ ，划掉所有 $5k + r$ 形式的数
5. 划掉所有7的倍数；若 $N$ 除以7的余数是 $r$ ，划掉所有 $7k + r$ 形式的数
6. 划掉所有11的倍数；若 $N$ 除以11的余数是 $r$ ，划掉所有 $11k + r$ 形式的数
7. 重复以上步骤
8. 当进行到 $\sqrt{N}$ 时，剩下的数，一定满足哥德巴赫猜想的条件。

### 举例

若 $N = 42$ ,

则经过步骤2，剩下的数为3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39

经过步骤3，剩下的数为5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37

经过步骤4，剩下的数为11, 13, 19, 23, 29, 31

下一个素数已经大于 $\sqrt{N}$ ，停止

因为上述过程筛掉了所有的 $\sqrt{N}$ 内的素数的倍数，剩下的必然都是素数

又因为上述过程的对称性，因此对于每一个剩下的数 $x$ ， $N - x$ 也一定存在其中；

所以剩下的数（如果数量不为0），一定是对于偶数 $N$ 的哥德巴赫猜想的解。

注意，上述过程会筛掉一部分合乎规则的解。比如对于 $N = 42$ ， $N$ 可以表示为 $5 + 37$ ，而这个解被筛掉了。

故上述方式，可能会低估哥德巴赫问题的解的数量。

### 估算数量

以上的每一个步骤，都可以用一个简单的方式来估算筛掉的数的数量

1. 一开始的数的数量是 $N - 3$
2. 划掉所有偶数——划掉的数约为剩下的数的 $\frac{1}{2}$

3. 划掉3的倍数；划掉 $3k + r$ 形式的数——若 $N$ 是3的倍数，划掉的数约为剩下的数的 $\frac{1}{3}$ ；若 $N$ 不是3的倍数，划掉的数约为剩下的数的 $\frac{2}{3}$ 。
4. 划掉5的倍数；划掉 $5k + r$ 形式的数——若 $N$ 是5的倍数，划掉的数约为剩下的数的 $\frac{1}{5}$ ；若 $N$ 不是5的倍数，划掉的数约为剩下的数的 $\frac{4}{5}$ 。
- .....

由此可以得到一个估算公式

$$\left( \prod_{p \leq \sqrt{N}} \left( 1 - \frac{F(p, N)}{p} \right) \right) (N - 3)$$

其中， $F(p, N)$ 的定义为，“若 $p \mid N$ ，则 $F(p, N) = 1$ ；否则 $F(p, N) = 0$ ”。

比如，当 $N$ 是42时，上述公式给出的估计是7.8（上述过程的结果是6，真实的解数量为8）

当 $N$ 是 $10^6$ 时，上述公式给出的估计是11541.7（上述过程的结果是10764，真实的解数量为10804）

当 $N$ 是奇数时，上述公式给出的估计是0。

## 估算素数数量

上面的逻辑，也可以用来估算 $\pi(N)$ 。

$$\pi(N) \approx \left( \prod_{p \leq \sqrt{N}} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right) N + \pi(\sqrt{N})$$

当用每一个素数 $p$ 去筛剩余的数时，可以预计剩下的数近似变为 $1 - \frac{1}{p}$ 。这个连乘去掉了所有小于 $\sqrt{N}$ 的素数，所以最后加上 $\pi(\sqrt{N})$ 。

比如，当 $N = 100$ 时，上述公式给出的结果是26.86，而 $\pi(100) = 25$ 。

当 $N = 10^6$ 时，上述公式给出的结果是81133.26，而 $\pi(10^6) = 78498$ 。

当 $N = 10^8$ 时，上述公式给出的结果是6089698.25，而 $\pi(10^8) = 5761455$ 。

当 $N = 10^{10}$ 时，上述公式给出的结果是487538770.51，而 $\pi(10^{10}) = 455052511$ 。

## 上述估算公式的误差分析

### 素数个数

上述公式估算素数数量时，隐含用到一个假设，“ $x$ 是 $p_1$ 的倍数’、‘ $x$ 是 $p_2$ 的倍数’.....是独立事件”。若这些事件相互之间并不独立，则计算数量时，不能直接用比例相乘。事实上，它们确实不是独立事件。因此上述公式有误差是可以预计的。

通过数值方法，可以直接计算出误差的量级。

$N$	$\pi(N)$	估算结果	相对误差
$10^2$	25	26.86	−6.9%
$10^3$	168	163.85	2.5%
$10^4$	1229	1228.17	−0.067%
$10^5$	9592	9716.94	−1.29%
$10^6$	78498	81133.26	−3.25%
$10^7$	664579	696459.96	−4.58%
$10^8$	5761455	6089698.25	−5.39%
$10^9$	50847534	54170223.35	−6.13%
$10^{10}$	455052511	487538770.51	−6.66%
$10^{11}$	4118054813	4433073529.48	−7.11%
$10^{12}$	37607912018	40638288669.65	−7.46%

### 哥德巴赫猜想解的个数

通过数值方法，也可以得出哥德巴赫猜想的解的个数

$N$	筛得的结果个数	估算结果	相对误差	比例
$10^2$	10	9.24	8.25%	-1.20
$10^3$	48	41.27	16.31%	6.52
$10^4$	250	255.24	-2.05%	30.50
$10^5$	1600	1640.72	-2.48%	1.92
$10^6$	10764	11541.72	-6.74%	2.07
$10^7$	77526	85284.53	-9.10%	1.99
$10^8$	582562	652588.80	-10.73%	1.99
$10^9$	4547836	5165199.09	-11.95%	1.95
$10^{10}$	36399500	41842797.05	-13.01%	1.95

上表添加了“比例”这一列，用于比较这两种公式的相对误差。

可以看到，当 $N$ 的值很大时，估算素数个数的公式和估算哥德巴赫猜想的解的个数的公式，都倾向于多估；

并且这两者的相对误差的比例，慢慢稳定在2附近。

## 梅滕斯定理

梅滕斯第三定理说，当 $N$ 很大时， $\prod_{p \leq N} (1 - \frac{1}{p})$ 近似为 $\frac{e^{-\gamma}}{\log N}$ ，其中 $\gamma$ 是欧拉-马斯刻若尼常数。

将其应用于 $\left(\prod_{p \leq \sqrt{N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) N$ ，得到一个估算公式

$$\left(\prod_{p \leq \sqrt{N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) N \approx \frac{2e^{-\gamma} N}{\log N}$$

其中， $2e^{-\gamma} \approx 1.122918967$

但是根据素数定理，更准确的估算公式应该是 $\frac{N}{\log N}$

比较这两个公式，可以预计，当 $N$ 趋于正无穷时，上述公式的“相对误差”应该是 $\frac{1}{2e^{-\gamma}} - 1 \approx 10.946\%$