Computação Gráfica

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

Conteúdo:

- **Transformações geométricas no espaço**

Baseado no material do Prof. Marcelo Gattass

http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass/LivroCG

http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass/LivroCG/06_Transformacoes_Geometricas_e_Quaternios.pdf

Transformações geométricas no espaço: *Introdução*

- As transformações geométricas são operações fundamentais para a modelagem, visualização e interação com objetos gráficos 3D.

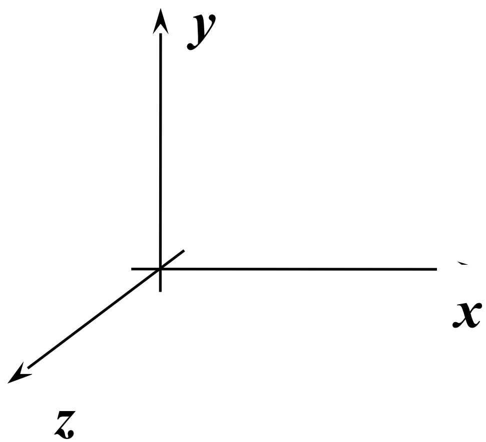
- Descreveremos os seguintes tópicos:
  - Escalas, rotações e translações no espaço.
  - Esquemas para *representação de orientações*.
  - *Composição de transformações*:
    - Instanciação de objetos.
    - Hierarquia.

Transformações geométricas espaço: *Introdução*

- Transformações de escala, rotação e translação são fundamentais para a ***criação de cenas compostas por diversos objetos***.

- As matrizes de translação e escala são de fato uma simples extensão das matrizes de transformação definidas no plano.

Transformações geométricas no espaço: *Translações e escalas*



Translação

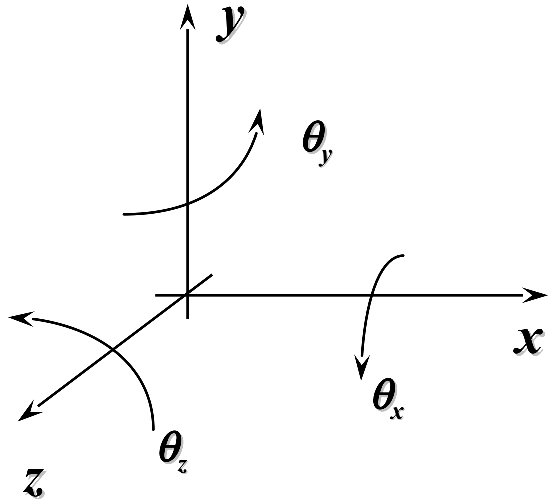
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço: *Rotações*

- As operações de rotação no espaço são mais complexas do que no plano.
- Uma extensão natural é definirmos a rotação de um objeto a partir da *rotação em torno dos eixos cartesianos*.

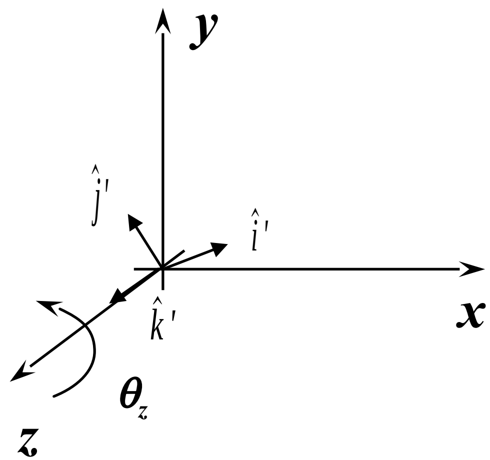


<u>Transformações geométricas no espaço</u>: *Rotações*

- Podemos facilmente definir as matrizes de rotação em cada eixo.

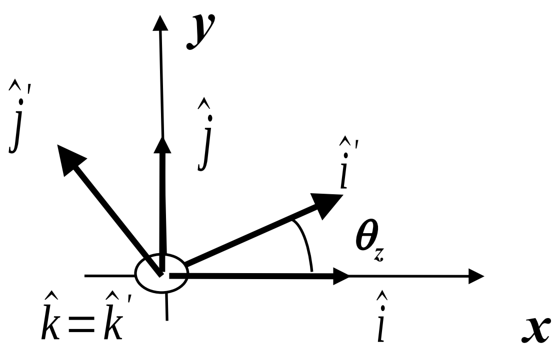
- As *colunas* de uma matriz de rotação em torno de um certo eixo cartesiano são dados pela *transformação dos vetores da base canônica*.

Transformações geométricas no espaço: *Rotações no eixo z*



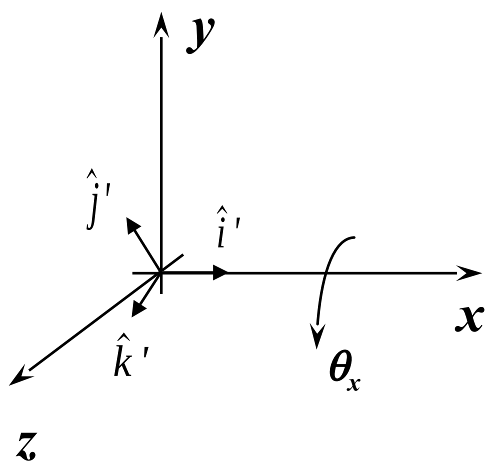
$$\hat{i}' = \begin{bmatrix} \cos\theta_z \\ \sin\theta_z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{j}' = \begin{bmatrix} -\sin\theta_z \\ \cos\theta_z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{k}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

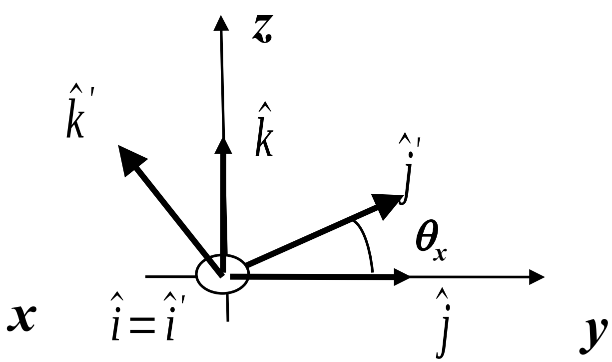
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço:
Rotações no eixo x



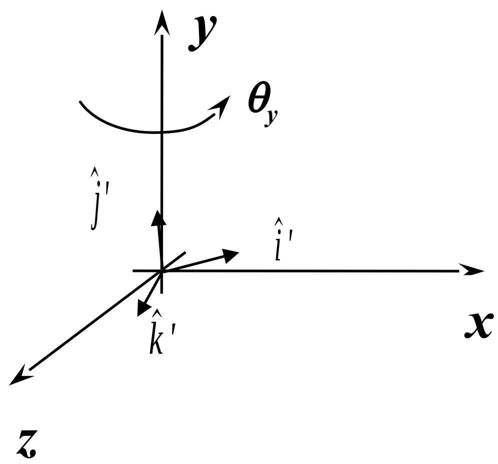


$$\hat{i}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{j}' = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta_x \\ \sin\theta_x \end{bmatrix} \qquad \hat{k}' = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_x \\ \cos\theta_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

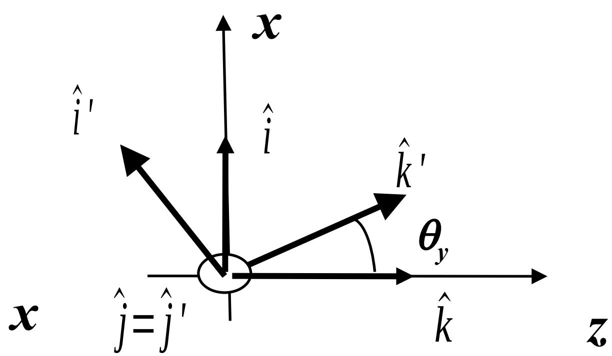
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço: *Rotações no eixo y*



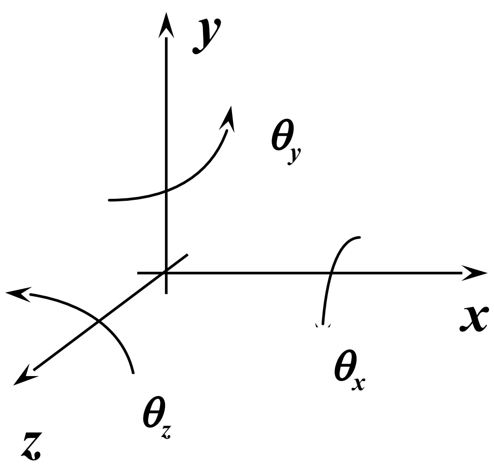
$$i' = \begin{bmatrix} \cos\theta_y \\ 0 \\ -\sin\theta y \end{bmatrix} \qquad \hat{j}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{k}' = \begin{bmatrix} \sin\theta_y \\ 1 \\ \cos\theta y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço:
Rotações nos eixos cartesianos



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço: *matrizes de transformação*

- Em geral, uma ***matriz de transformação em coordenadas homogêneas*** tem a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} M & T \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

- Se a matriz M e o vetor s tem dimensões 2x2 e 1x2, respectivamente, então a transformação ocorre no ***plano homogêneo***.
- Se as dimensões forem 3x3 e 3x1, respectivamente, então a transformação ocorre no ***espaço homogêneo***.

Transformações geométricas no espaço: *matrizes de transformação*

- A forma matricial homogênea pode representar
  a) Transformações lineares.
  b) Translações
  c) Transformações afins.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} M & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (b) (c)

Transformações geométricas no espaço: *matrizes de transformação*

- A matriz que representa uma ***transformação afim*** representa uma transformação linear seguida de uma translação:

$$\begin{bmatrix} I & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Caso invertêssemos a ordem teríamos

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & MT \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço: *matrizes de transformação*

- Como podemos ver, a *ordem influi no resultado*.

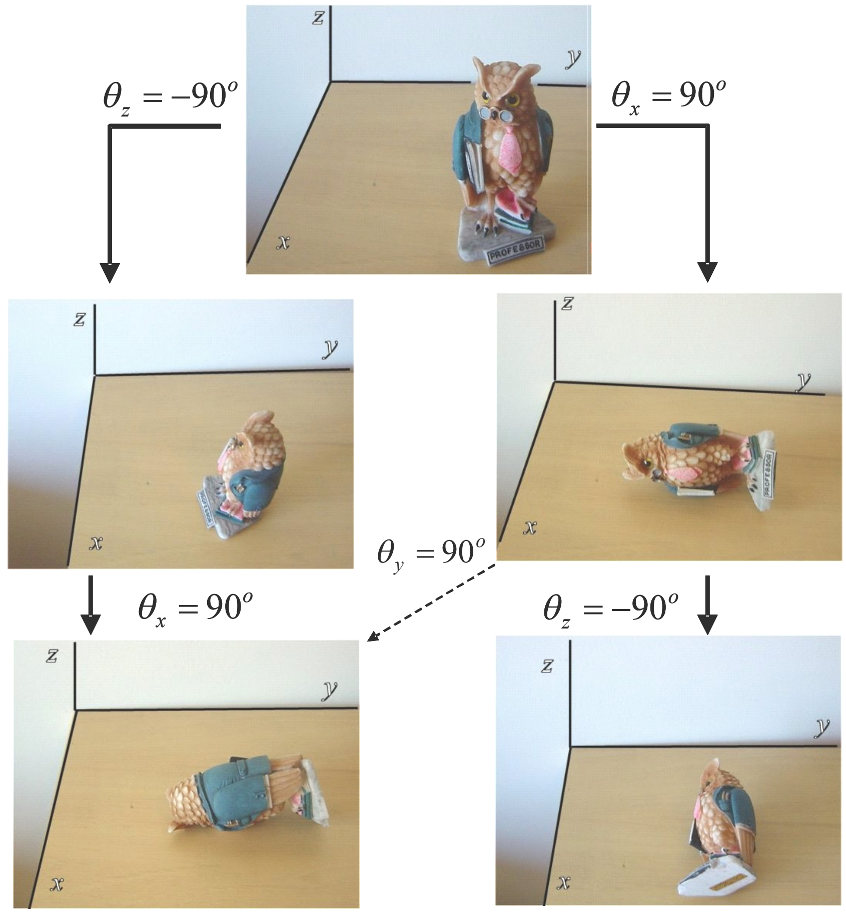
- Na segunda ordem, a translação não pode ser lida diretamente da última coluna última matriz,.

- Como a última linha é o vetor [0..0 1] então ***estas matrizes mantêm os pontos no plano $w = 1$***.

- Nas transformações projetivas, que serão vistas mais tarde, a última linha assume outros valores e os pontos podem ser deslocados do plano $w=1$.

Transformações geométricas no espaço: *rotações e orientações*

-
-



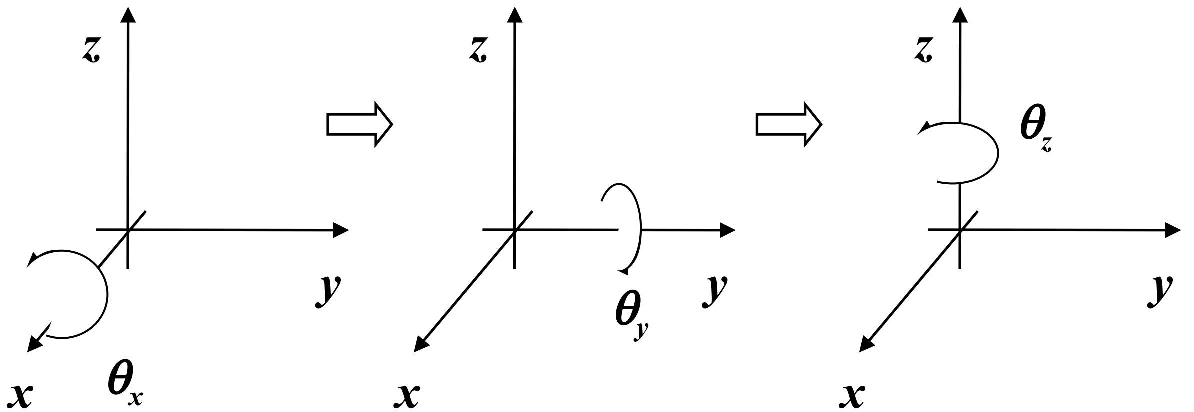
<u>Transformações geométricas no espaço</u>: *Ângulos de Euler*

- Já que as ***rotações não comutam devemos adotar uma ordem específica***.

- Esta forma de representar orientações é denominada ***Ângulos de Euler***.

- Na literatura de aeronáutica estas rotações são chamadas de
  - Roll – giro em torno do eixo longitudinal
  - Pitch – ângulo de ataque.
  - Yaw – giro em torno do eixo vertical.

Transformações geométricas no espaço: *ângulos de Euler*



$$R(\theta_x,\theta_y,\theta_z)=\begin{bmatrix} c_y c_z & c_y s_z & -s_y & 0 \\ s_x s_y c_z - c_x s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & s_x c_y & 0 \\ c_x s_y c_z + s_x s_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$s_x = \sin(\theta_x)$, $s_y = \sin(\theta_y)$, $s_z = \sin(\theta_z)$

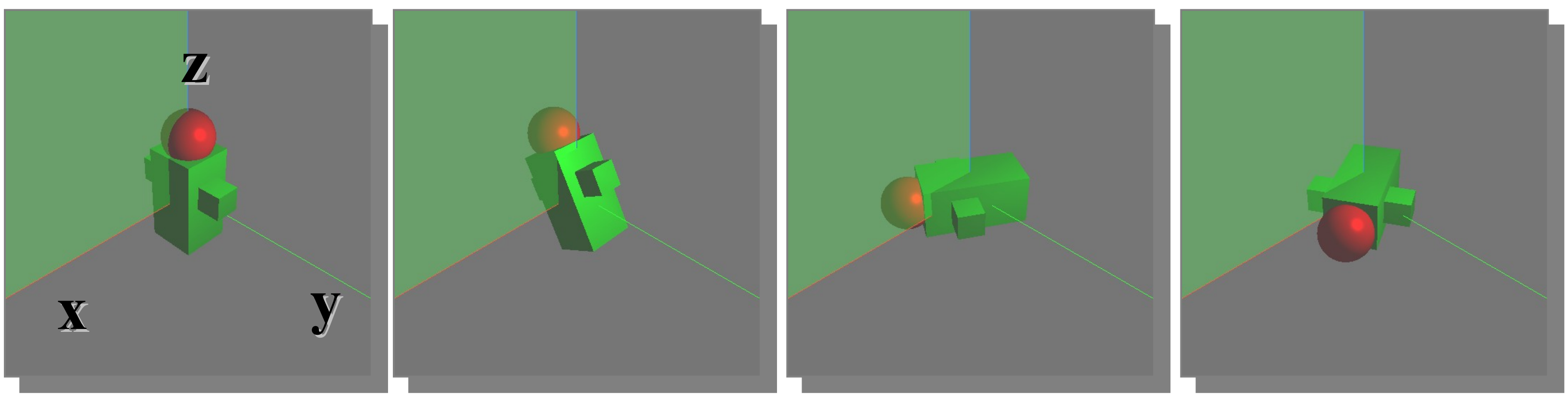
$c_x = \cos(\theta_x)$, $c_y = \cos(\theta_y)$, $c_z = \cos(\theta_z)$

Transformações geométricas no espaço: *Ângulos de Euler*

- Problemas:
  - *Gimbal lock*: perda de graus de liberdade em certas configurações.
  - Não são parâmetros adequados para interpolações.

Transformações geométricas no espaço: *ângulos de Euler – Gimbal Lock*

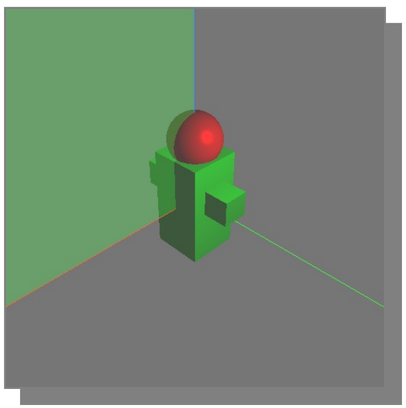
- Animador deseja rodar o boneco de lado (θ_x= 30°) graus, incliná-lo para frente (θ_y= 90°) e levantar seu braço esquerdo.
- A última operação não será possível.



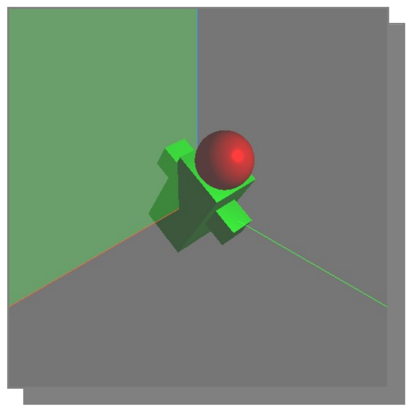
original | θ_x=30° | θ_x=30° θ_y=90° | θ_x=30° θ_y=90° θ_z=60°

Transformações geométricas no espaço: *ângulos de Euler – Gimbal Lock*

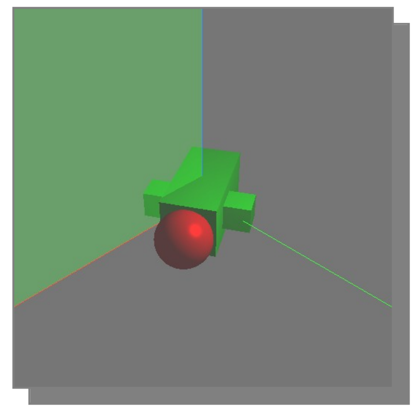
- **Mesmo resultado obtido apenas com rotações no eixo x e y.**



original



$\theta_x = -60°$



$\theta_x = -60°$

$\theta_y = 90°$

Transformações geométricas no espaço: ângulos de Euler

$$R(\theta_x,\theta_y,\theta_z)=\begin{bmatrix} c_y c_z & c_y s_z & -s_y & 0 \\ s_x s_y c_z - c_x s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & s_x c_y & 0 \\ c_x s_y c_z + s_x s_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

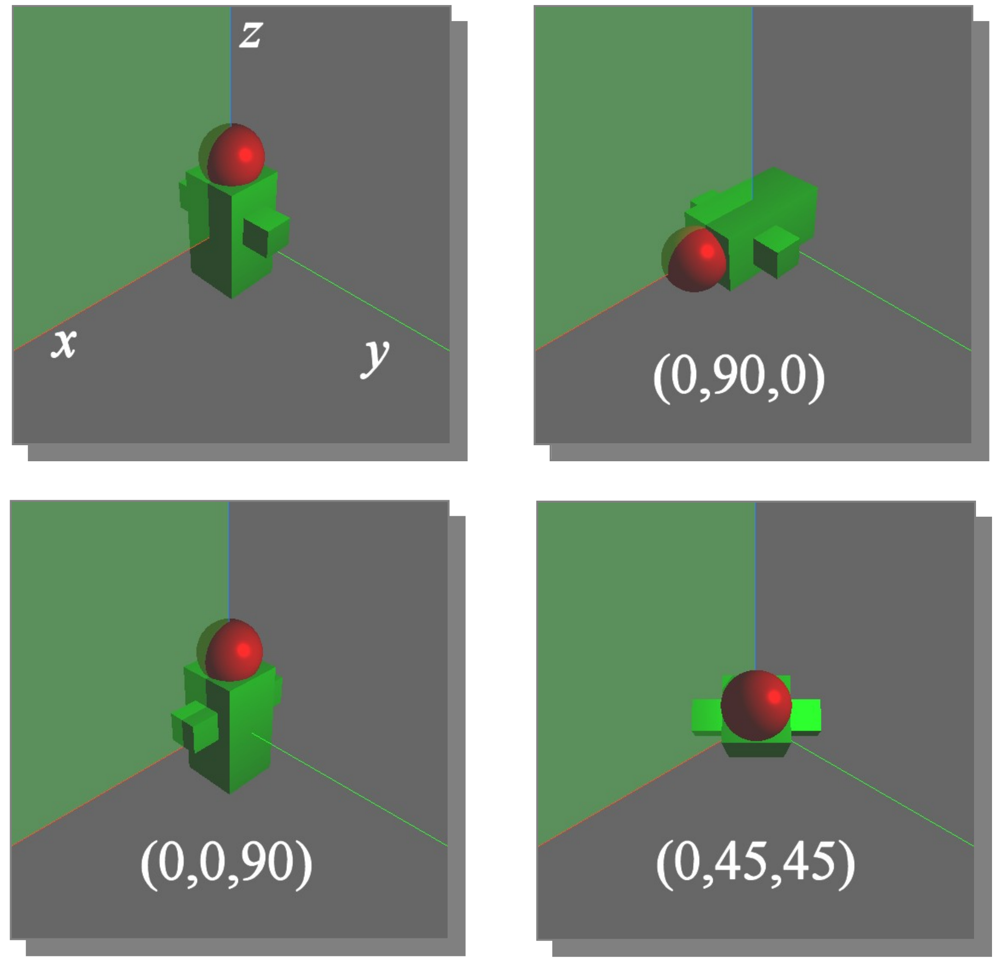
$$R(\theta_x,90^o,\theta_z)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_x c_z - c_x s_z & s_x s_z + c_x c_z & 0 & 0 \\ c_x c_z + s_x s_z & c_x s_z - s_x c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_x-\theta_z) & \cos(\theta_x-\theta_z) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_x-\theta_z) & \sin(\theta_x-\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apesar de especificarmos 2 parâmetros só temos 1 grau de liberdade

<u>Transformações geométricas no espaço</u>: *ângulos de Euler – interpolação*

- Interpolação entre as orientações (0,90,0) e (0,90,0).

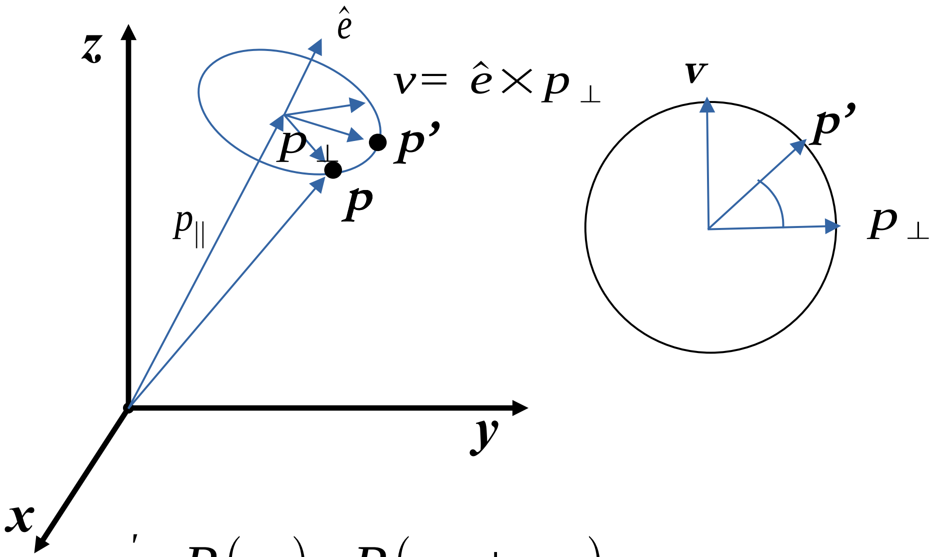
- Note que em uma interpolação mais natural a cabeça não sairia tanto do plano *xz*.



Transformações geométricas no espaço: *outras formas de se expecificar orientações*

- Rotações em torno de um eixo:
  - Euler provou em 1775 que dadas duas posições rotacionadas de um objeto, é sempre possível levar uma posição a outra através de uma ***rotação de um ângulo em torno de um eixo***.
  - Esta rotação tem a mesmo comportamento que a interpolação de duas posições através de um segmento de reta que os une.
  - Sai da primeira posição indo para a segunda sem oscilações.

Transformações geométricas no espaço: *rotação em torno de um eixo ê*



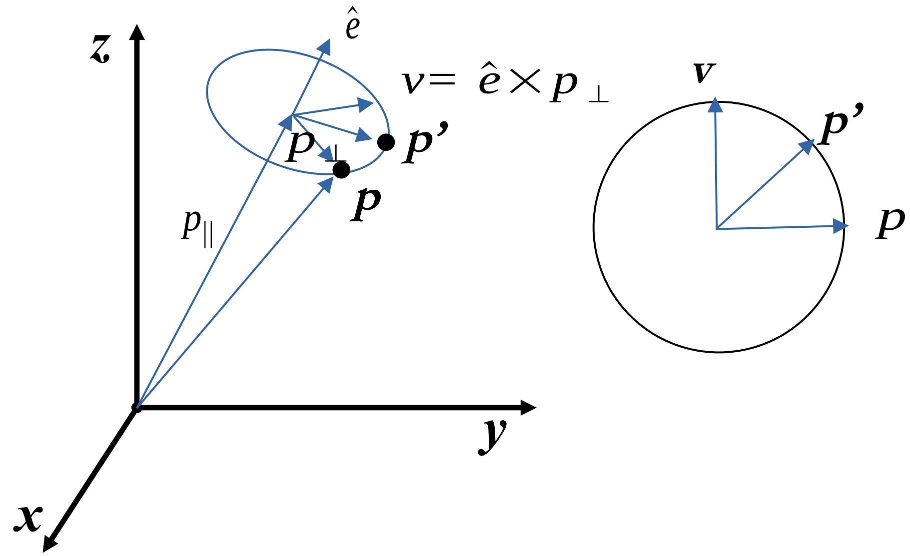
$$p' = R(p) = R(p_{||} + p_{\perp})$$

$$p' = R(p_{||}) + R(p_{\perp})$$

$$p' = p_{||} + (\cos\theta)\, p + (sen\theta)\, v$$

$$p' = (\hat{e} \cdot p)\hat{e} + (\cos\theta)(p - (\hat{e} \cdot p)\hat{e}) + (sen\theta)(\hat{e} \times p)$$

Transformações geométricas no espaço: *rotação em torno de um eixo ê*



$$p' = (\hat{e}\cdot p)\hat{e} + (\cos\theta)(p - (\hat{e}\cdot p)\hat{e}) + (sen\theta)(\hat{e}\times p)$$

$$p' = (\hat{e}\cdot p)\hat{e} + (\cos\theta)p - (\cos\theta)(\hat{e}\cdot p)\hat{e} + (sen\theta)(\hat{e}\times p)$$

$$p' = (\cos\theta)p + (1-\cos\theta)(\hat{e}\cdot p)\hat{e} + (sen\theta)(\hat{e}\times p)$$

Transformações geométricas no espaço: *rotação em torno de um eixo ê*

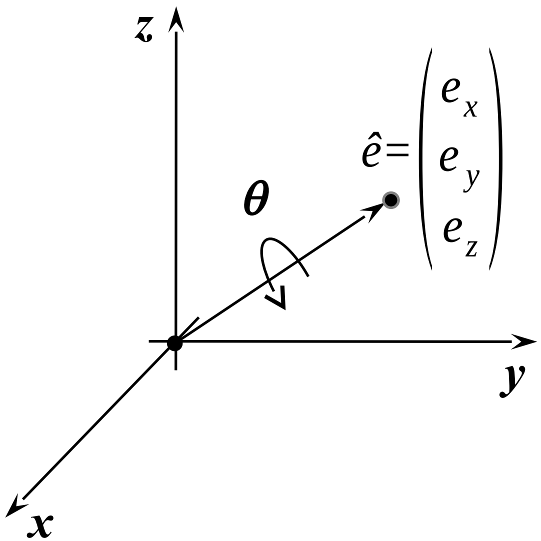
$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\, e_x \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ e_z \\ -e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)\, e_x^2 \\ e_x e_y (1-\cos\theta) + e_z \sin\theta \\ e_x e_z (1-\cos\theta) - e_y \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\, e_y \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} -e_z \\ 0 \\ e_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_y e_x (1-\cos\theta) - e_z \sin\theta \\ \cos\theta + (1-\cos\theta)\, e_y^2 \\ e_y e_z (1-\cos\theta) - e_x \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\, e_z \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} e_y \\ -e_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_z e_x (1-\cos\theta) + e_y \sin\theta \\ e_z e_y (1-\cos\theta) - e_x \sin\theta \\ \cos\theta + (1-\cos\theta)\, e_z^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço: *rotação em torno de um eixo ê*

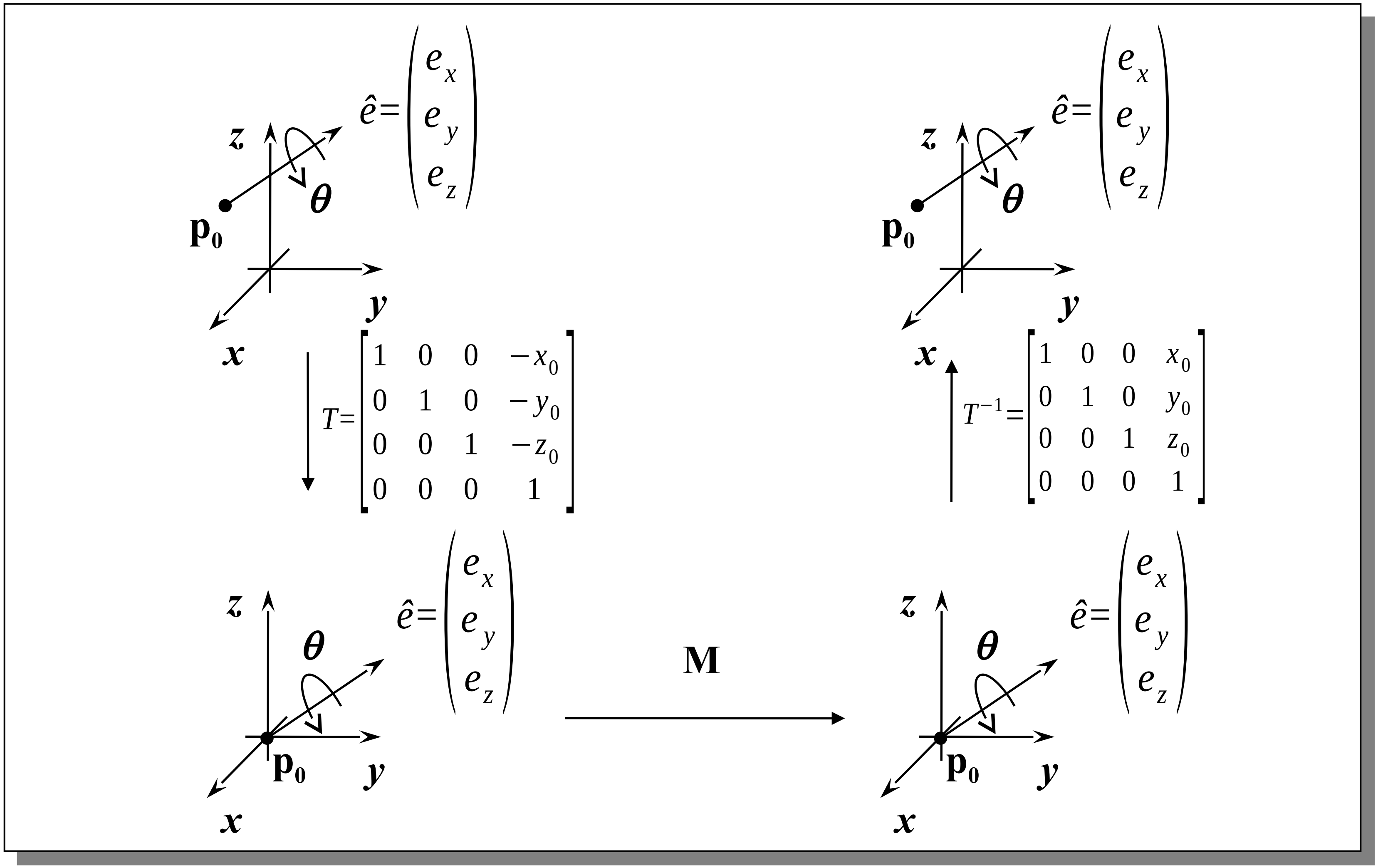


$$\hat{e}=\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix} \cos\theta+(1-\cos\theta)e_x^2 & e_y e_x(1-\cos\theta)-e_z\sin\theta & e_z e_x(1-\cos\theta)+e_y\sin\theta & 0 \\ e_x e_y(1-\cos\theta)+e_z\sin\theta & \cos\theta+(1-\cos\theta)e_y^2 & e_z e_y(1-\cos\theta)-e_x\sin\theta & 0 \\ e_x e_z(1-\cos\theta)-e_y\sin\theta & e_y e_z(1-\cos\theta)-e_x\sin\theta & \cos\theta+(1-\cos\theta)e_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço: *rotação em torno de um eixo ê fora da origem*



Transformações geométricas no espaço: *quaternios*

- A especificação de orientações através de rotações em torno de um eixo ***não fornece uma álgebra simples*** para as diversas operações necessárias para animação.

- Para isso existe uma estrutura matemática mais adequada denominada ***quatérnios***.

- No século 18, W. R. Hamilton propôs os *quatérnios* como uma extensão em quatro dimensões para os números complexos.

Transformações geométricas no espaço: *quaternios*

- *Quatérnios* podem representar rotações e orientações no espaço tridimensional.

- Existem diferentes notações para *quatérnios*

- Uma possível forma é representá-los conforme abaixo:

  - $q = (q_v,q_w) = iq_x+jq_y+kq_z+q_w = q_v+q_w$
  - $q_v= iq_x+jq_y+kq_z=(q_x,q_y,q_z)$
  - $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ and $ij = -ji= k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = -j$

Transformações geométricas no espaço: *quaternions – operações fundamentais*

- Adição: $q + r = (q_v,q_w)+(r_v,r_w)$

  Multiplicação: $qr = (q_v \times r_v + r_w q_v + q_w r_v,\ q_w r_w - q_v.r_v)$, onde "." indica produto escalar e "x" produto vetorial); Obs.: $qr \neq rq$

- Conjugado: $q^* = (q_v,q_w)^* = (-q_v,q_w)$
-

  Norma: $n(q)^2 = qq^* = q^*q = q_v \,.\, q_v + q_w^2 = qx^2 + qy^2 + qz^2 + qw^2$

- Inverso: $q^{-1} = q^* / N(q)^2$

  Identidade:
  - (0,0,0,1) - multiplicação
  - (0,0,0,0) – adição
- Outras operações podem ser derivadas das operações básicas.

Transformações geométricas no espaço: *quaternios unitários*

- Um quatérnio $q = (q_v, q_w)$ é *unitário* se $n(q) = 1$.

- Pode-se escrever um quatérnio unitário como

$$q = (\sin\phi u_q, \cos\phi) = \sin\phi u_q + \cos\phi$$

- onde u_q é um vetor 3d tal que $||u_q||=1$

- *Quatérnios unitários* são perfeitamente apropriados para representar rotações e orientações.

Transformações geométricas no espaço: *quaternions e rotações*

- Pode ser provado que a rotação de um vetor v por um *quatérnio unitário* e´ dado por:

  $$p' = q\ p\ q^* = q\ p\ q^{-1}, \text{ onde } p = (p_x\ p_y\ p_z\ p_w)^T$$

- Dados dois quatérnios unitários q e r. A concatenação da aplicação de q sobre p seguida de r é dada por:

  $$r\ (q\ p\ q^*)\ r^* = (r\ q)\ p\ (rq)^* = c\ p\ c^*$$

Transformações geométricas no espaço: *quaternions e API's gráficas*

- O modo *retained* do Direct3D e o XNA suportam *quatérnio*.

- WebGL não fornece suporte direto a *quatérnio*.

- Como resultado é necessário converter orientações em *quatérnio* para outra forma de representação.

Transformações geométricas no espaço: *quaternions e WebGL*

- A forma típica em *WebGL* para se expressar orientações, em particular na construção de um modelo de câmeras é via matrizes

- Logo, a conversão *quatérnio-matriz* é necessária

- A biblioteca gl-matrix fornece várias operações para criação de quatérnios e conversão matrizes-quatérnios

Transformações geométricas no espaço: conversão *ângulo e eixo-quatérnio*

- A conversão da forma *ângulo* e *eixo* para quatérnio é simples.

- Utiliza duas operações trigonométricas e operações de divisão e multiplicação.

$$q = [\cos(Q/2), \sin(Q/2)v] ,$$

- onde Q um ângulo e v um eixo.

Transformações geométricas no espaço: conversão *ângulos de Euler - quaternion*

- A conversão de ângulos de Euler para quatérnio segue um padrão similar.
- É necessário apenas ficar atento quanto a ordem.
- Supondo a forma *yaw*, *pitch* e *roll* temos a seqüência de *quaternios*:

  – $q = q_{yaw}\ qp_{itch}\ q_{roll}$ onde:

    - q_{pitch} = [cos (y/2), (sin(y/2), 0, 0)]
    - q_{yaw} = [cos (q/2), (0, sin(q/2), 0)]
    - q_{roll} = [cos(f/2), (0, 0, sin(f/2)]

Transformações geométricas no espaço: conversão *quaternio - matriz*

- Um quatérnio q pode ser convertido em uma matriz Mq conforme a expressão abaixo:

$$M^q=\begin{pmatrix} 1-s(q_{y^2}+q_{z^2}) & s(q_x q_y - q_w q_z) & s(q_x q_z + q_w q_y) & 0 \\ s(q_x q_y + q_w q_z) & 1-s(q_{x^2}+q_z{}^2) & s(q_y q_z - q_w q_x) & 0 \\ s(q_x q_z - q_w q_y) & s(q_y q_z + q_w q_x) & 1-s(q_{x^2}+q_{y^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Onde s = 2n(q). Para q unitário M^q reduz-se a

$$M^q=\begin{pmatrix} 1-2(q_{y^2}+q_{z^2}) & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) & 0 \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & 1-2(q_{x^2}+q_z{}^2) & 2(q_y q_z - q_w q_x) & 0 \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & 1-2(q_{x^2}+q_{y^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço: *conversão matriz -quaternio*

- A conversão matriz-quatérnio requer um conjunto de passos.
- A chave para a conversão surge das diferenças entre elementos da matriz anterior:

$$M^q = \begin{pmatrix} 1-2\left(q_{y^2}+q_{z^2}\right) & 2\left(q_x q_y - q_w q_z\right) & 2\left(q_x q_z + q_w q_y\right) & 0 \\ 2\left(q_x q_y + q_w q_z\right) & 1-2\left(q_{x^2}+q_z^{\,2}\right) & 2\left(q_y q_z - q_w q_x\right) & 0 \\ 2\left(q_x q_z - q_w q_y\right) & 2\left(q_y q_z + q_w q_x\right) & 1-2\left(q_{x^2}+q_{y^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{21}^q - m_{12}^q = 4\,q_w\,q_x$$
$$m_{02}^q - m_{20}^q = 4\,q_w\,q_y$$
$$m_{10}^q - m_{01}^q = 4\,q_w\,q_z$$

- Conhecendo-se q_w, é possível determinar o quatérnio $q = (q_x, q_y, q_z, q_w)$

Transformações geométricas no espaço: *conversão matriz -quatérnio*

- O traço de M^q é dado pela soma dos elementos da diagonal:

$$tr(M^q)=4-2s(q_x^2+q_y^2+q_z^2)=4\left(1-\frac{q_x^2+q_y^2+q_z^2}{q_x^2+q_y^2+q_z^2+q_w^2}\right)=\frac{4q_w^2}{n(\hat{q})}$$

- Com efeito, a conversão para um quatérnio unitário é dada por:

$$q_w=\frac{1}{2}\sqrt{tr(M^q)} \qquad q_x=\frac{m_{21}^q-m_{12}^q}{4q_w} \qquad q_y=\frac{m_{02}^q-m_{20}^q}{4q_w} \qquad q_z=\frac{m_{10}^q-m_{01}^q}{4q_w}$$

Transformações geométricas no espaço: *interpolação de quaternios*

- A interpolação linear esférica entre dois quatérnios q e r, dado um parâmetro $t \in [0,1]$, calcula a interpolação entre dois quatérnios através da seguinte expressão:
  - $s(q,r,t)=(rq^{-1})^t q$
- Implementações em software utilizam a seguinte fórmula:
  - s(q,r,t)=slerp(q,r,t) = $\dfrac{\sin\left(\varphi\left(1-t\right)\right)}{\sin\varphi}\hat{q}+\dfrac{\sin\left(\varphi t\right)}{\sin\varphi}\hat{r}$

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

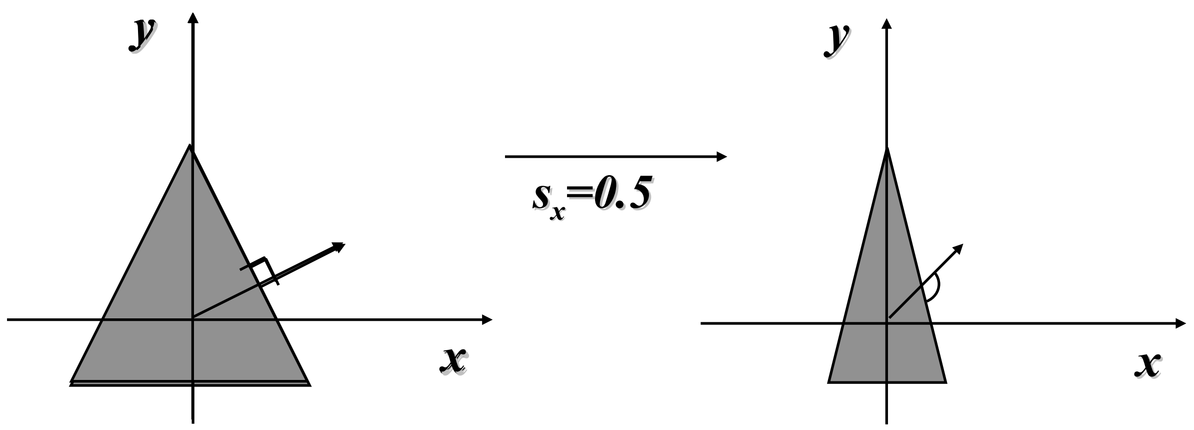
- Normalmente, as operações geométricas em WebGL são representadas por matrizes (tipicamente 4x4) enviadas ao *shader*

- É possível também enviar quatérnios ao *shader* e efetuar as operaçõs manualmente

- Ver código First3d.html disponibilizado na plataforma

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

- Para transformarmos um certo objeto poligonal basta aplicar a matriz de transformação em cada um dos seus vértices.
- Por outro lado, no caso geral, ***as normais destes objetos não seguem a mesma transformação***.
- Exemplo:



Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

- Considere o plano com equação

$$n^T p = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Se incluirmos a matriz identidade $I = M^{-1}M$ não alteramos a equação abaixo:

$$n^T p = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} M^{-1} M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

- A equação do plano transformado $n'.p'=0$ é

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Logo, temos que a normal transformada é

$$n' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} = M^{-T} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = M^{-T} n$$

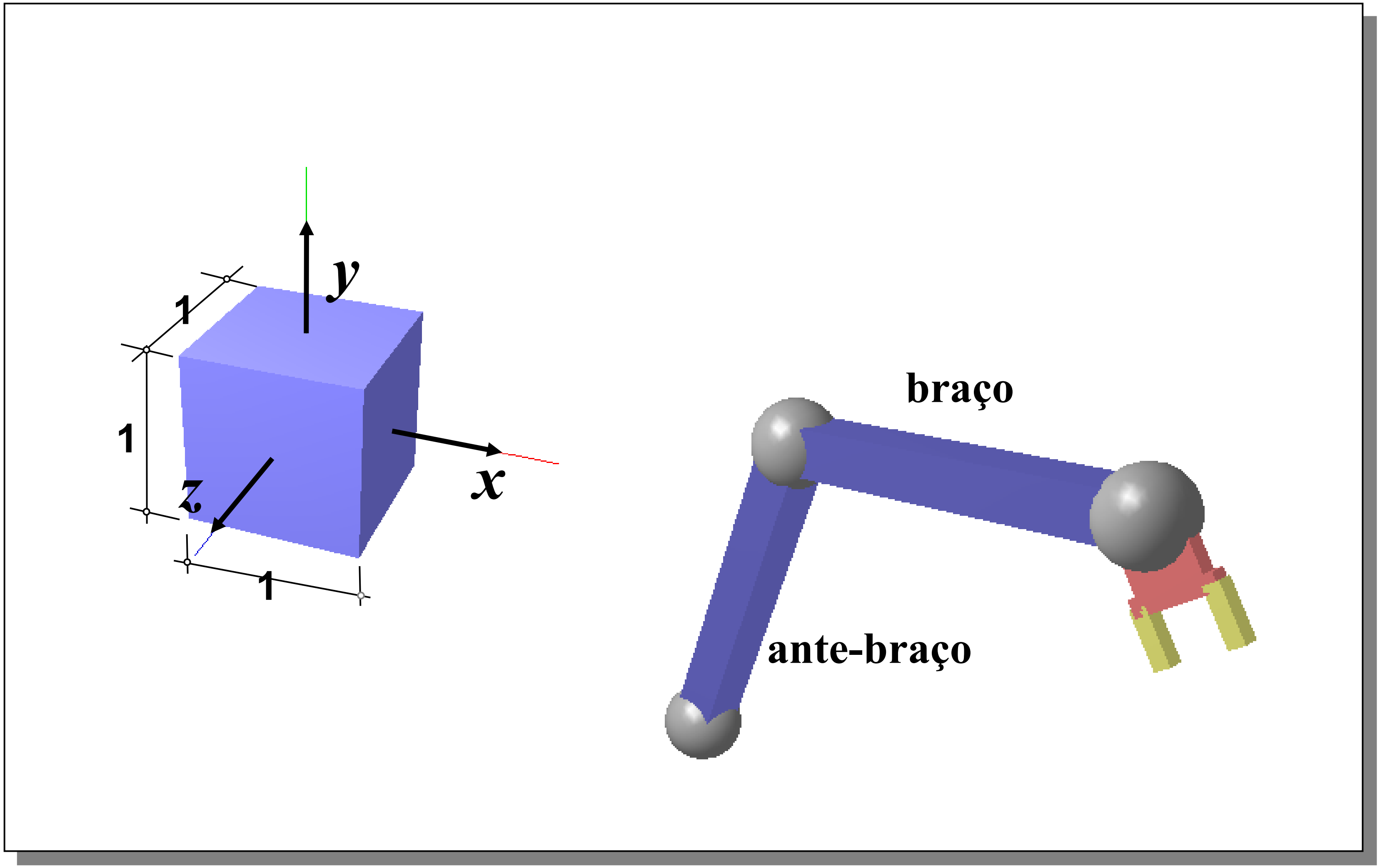
Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

- O processo de instanciação de objeto permite a *especificação de modelos complexos através de modelos padrão simples e transformações geométricas*.

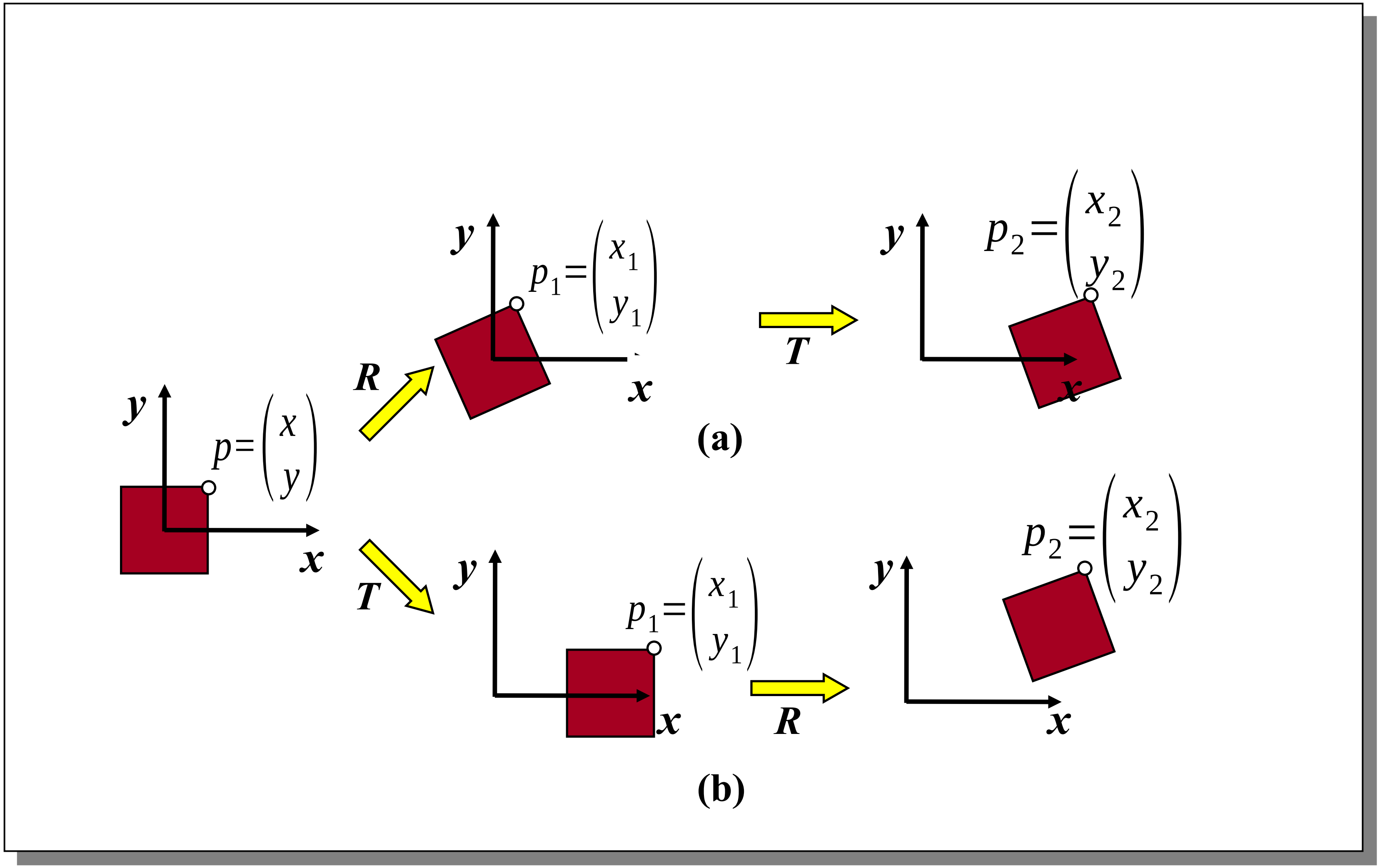
- É fundamental para a descrição de *objetos compostos de várias partes*, principalmente quando há *vínculo* entre as mesmas.

- Devemos primeiramente esclarecer a questão de ordem e interpretação das transformações geométricas compostas.

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



<u>Transformações geométricas no espaço</u>: Transformações em *WebGL*

- Às vezes é difícil especificar transformações geométricas nos casos em que a existe ***dependência*** entre a posição das partes de um objeto composto.

- Nestas situações é conveniente adotar uma outra interpretação geométrica para as transformações compostas.

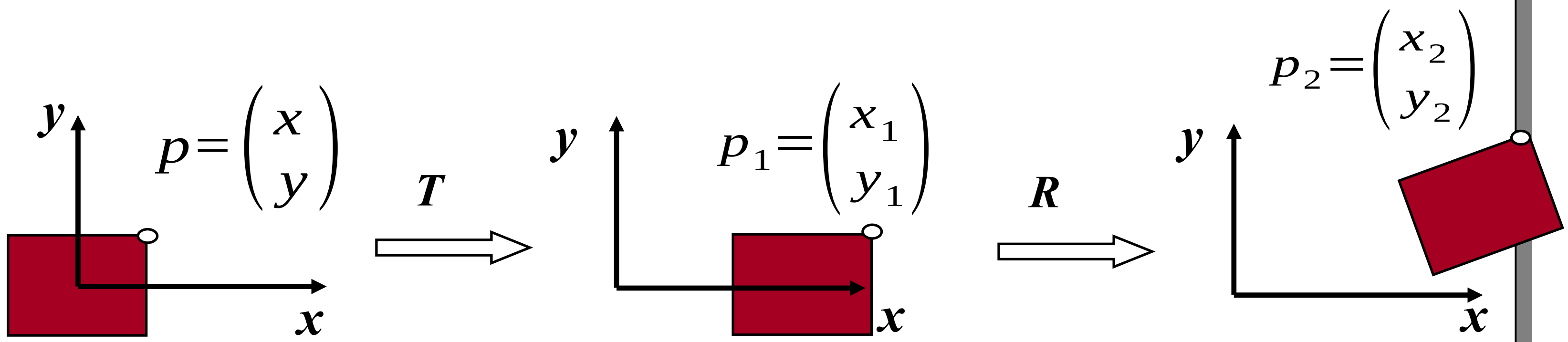
<u>Transformações geométricas no espaço</u>: Transformações em *WebGL*

- Ao invés de considerarmos que as transformações ocorrem nos objetos, ***consideramos que elas ocorrem em um sistema de eixos locais*** que rodam e transladam.

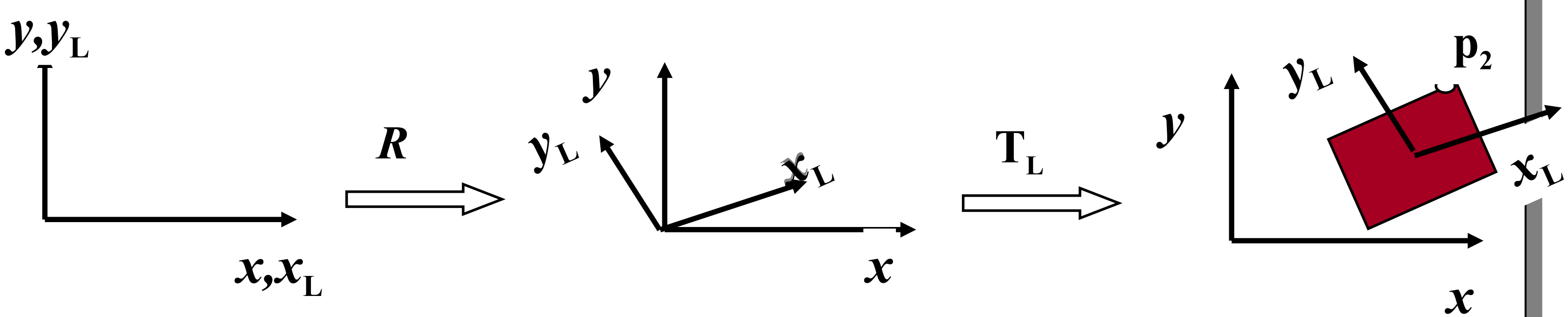
- A idéia é que os eixos locais inicialmente coincidem com o sistema de referência global.

- A cada rotação e translação, ***um dado eixo local muda de posição e/ou orientação***.

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

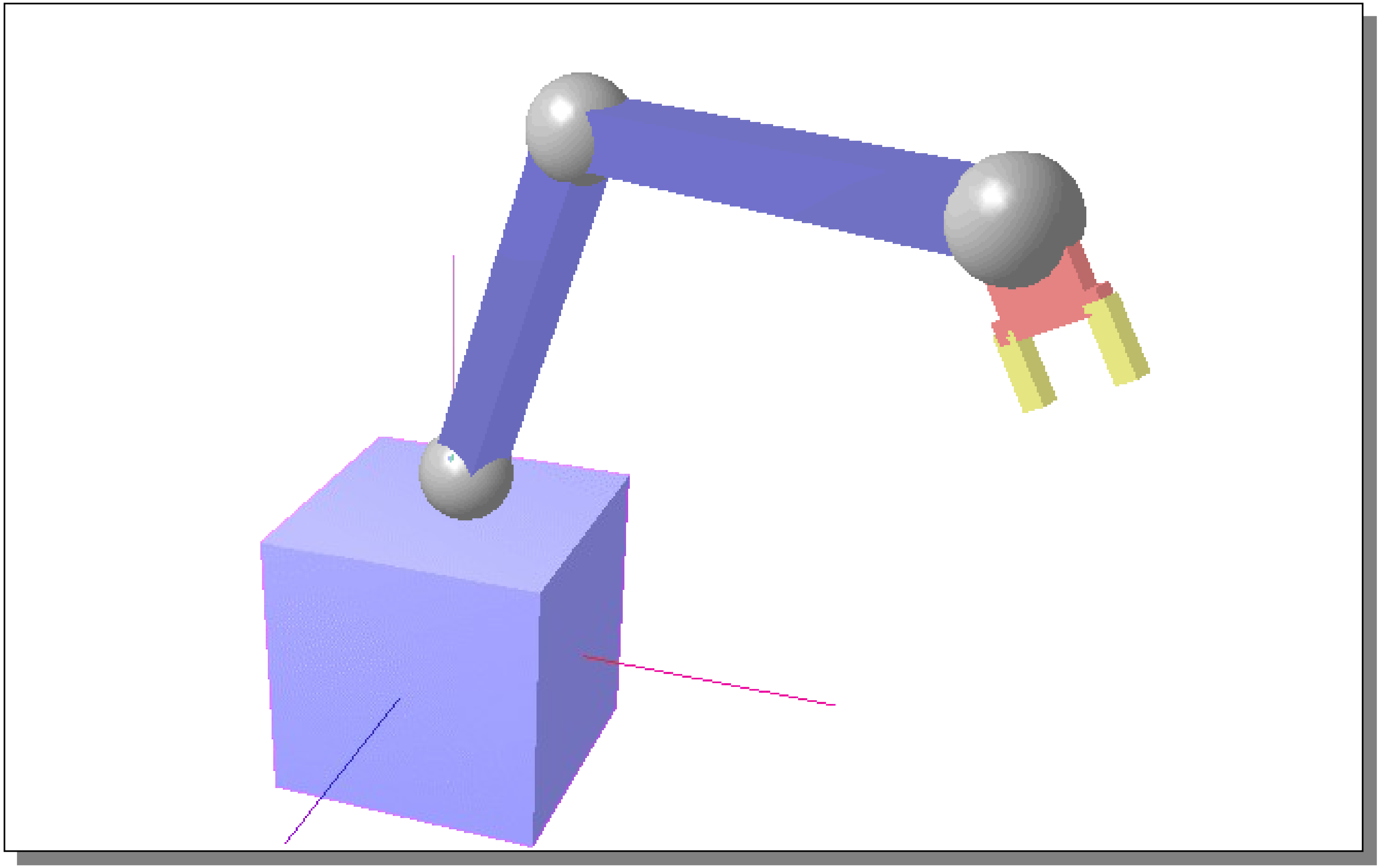


$p_1 = T\,p$ e $p_2 = R\,p_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 = R\,T\,p$

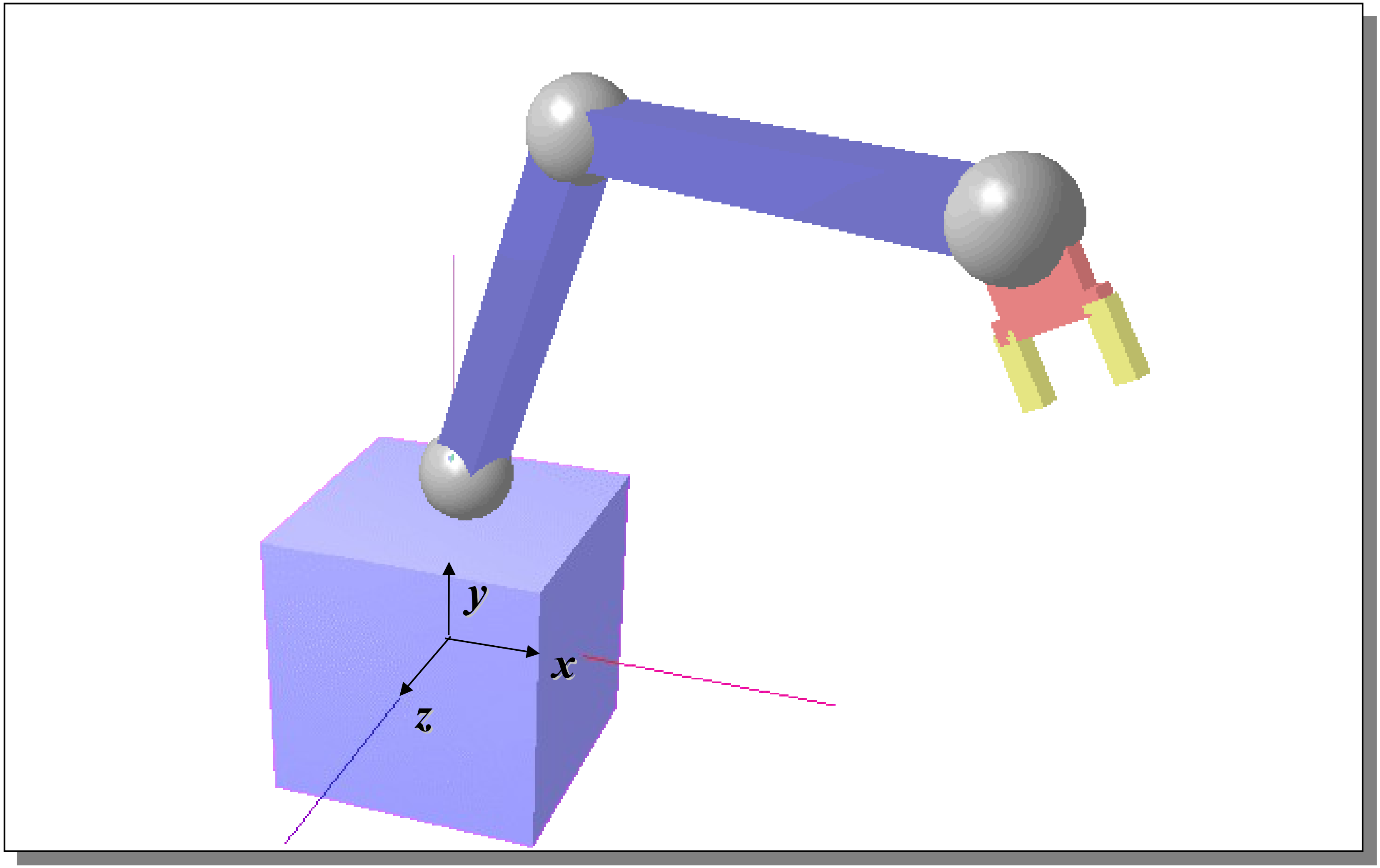


$p_2 = T_L R\,p$, $T_L = R T R^{-1} \Rightarrow p_2 = R\,T\,R^{-1} R\,p$ ou $p_2 = R\,T\,p$

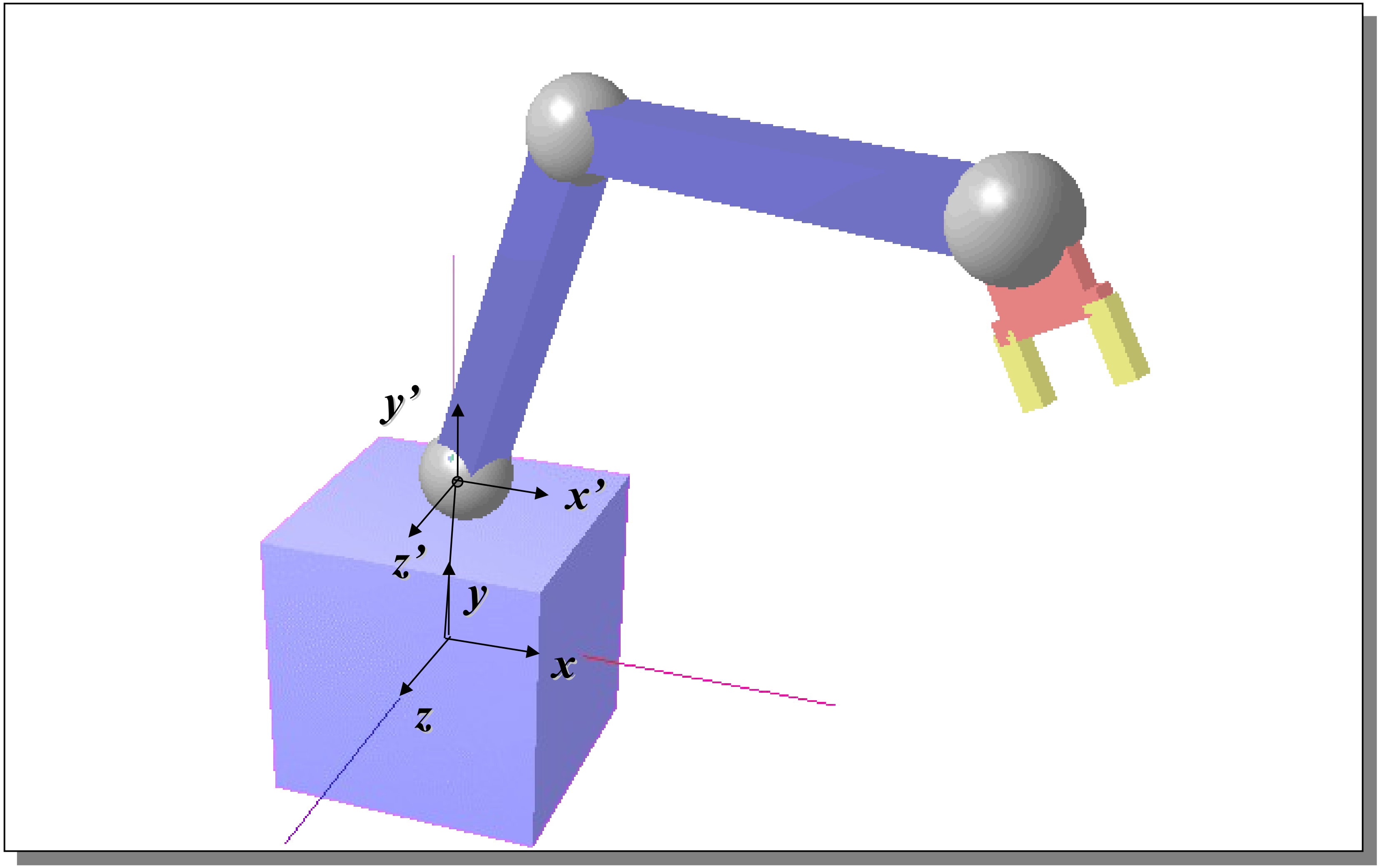
Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



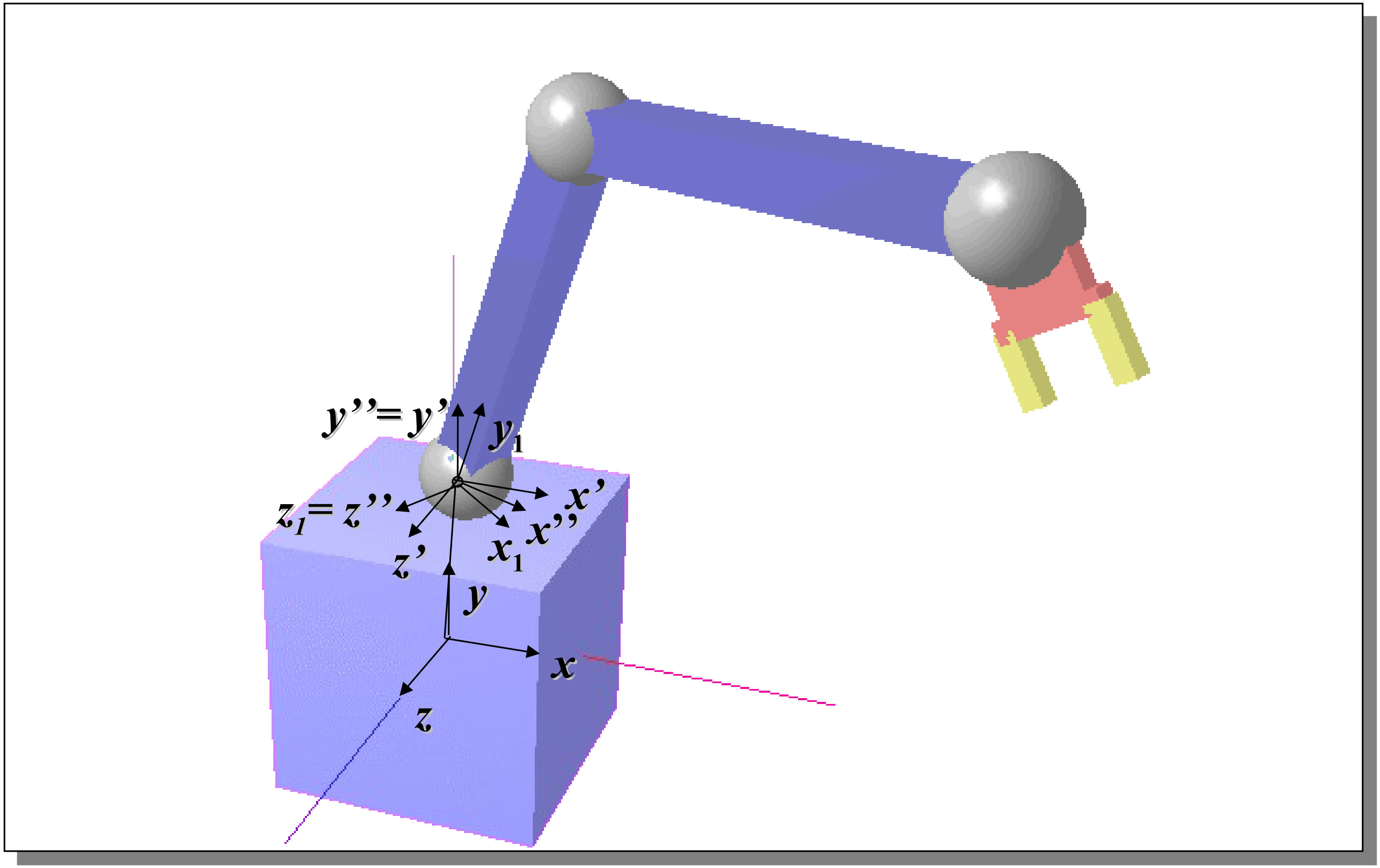
Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



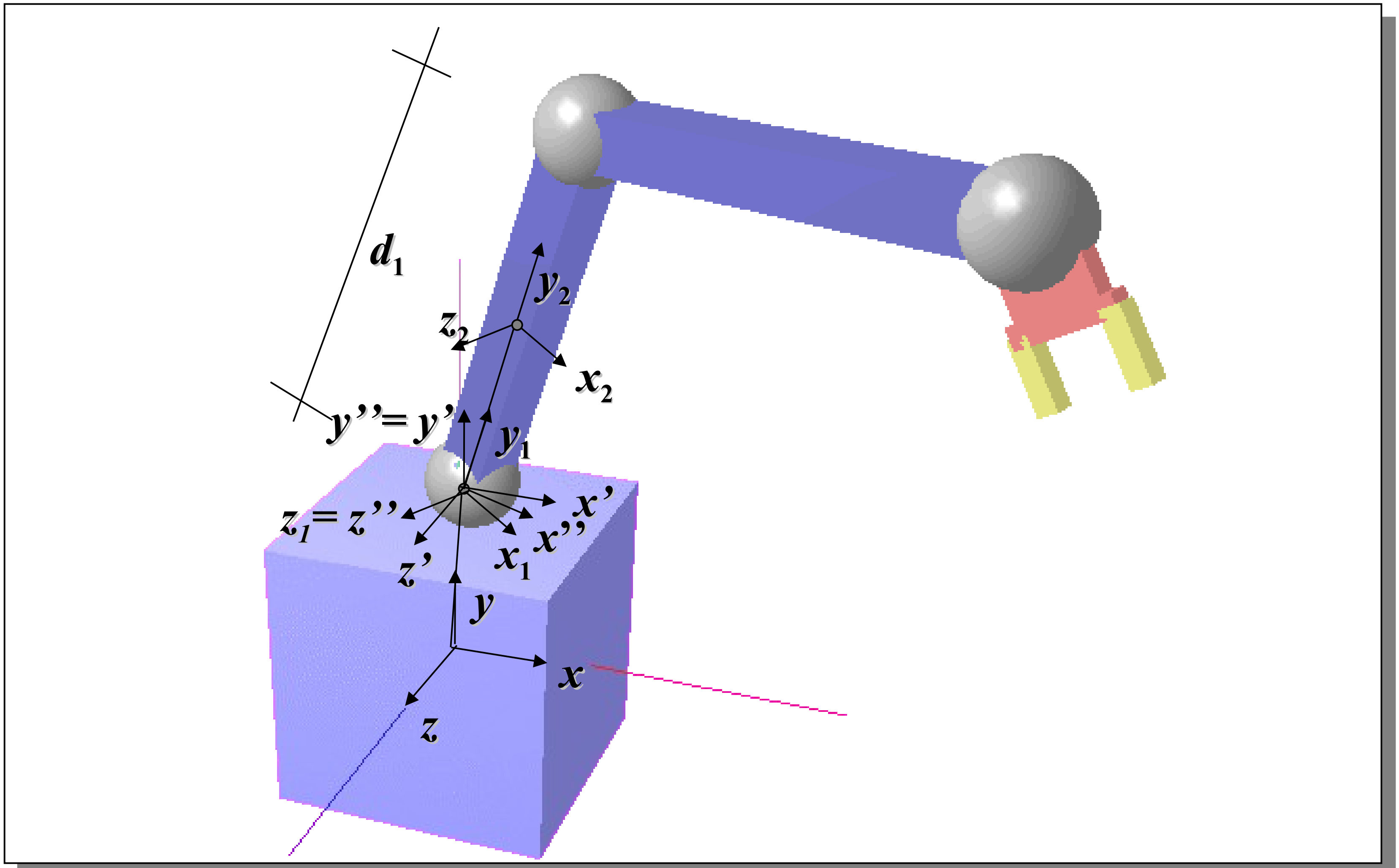
Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



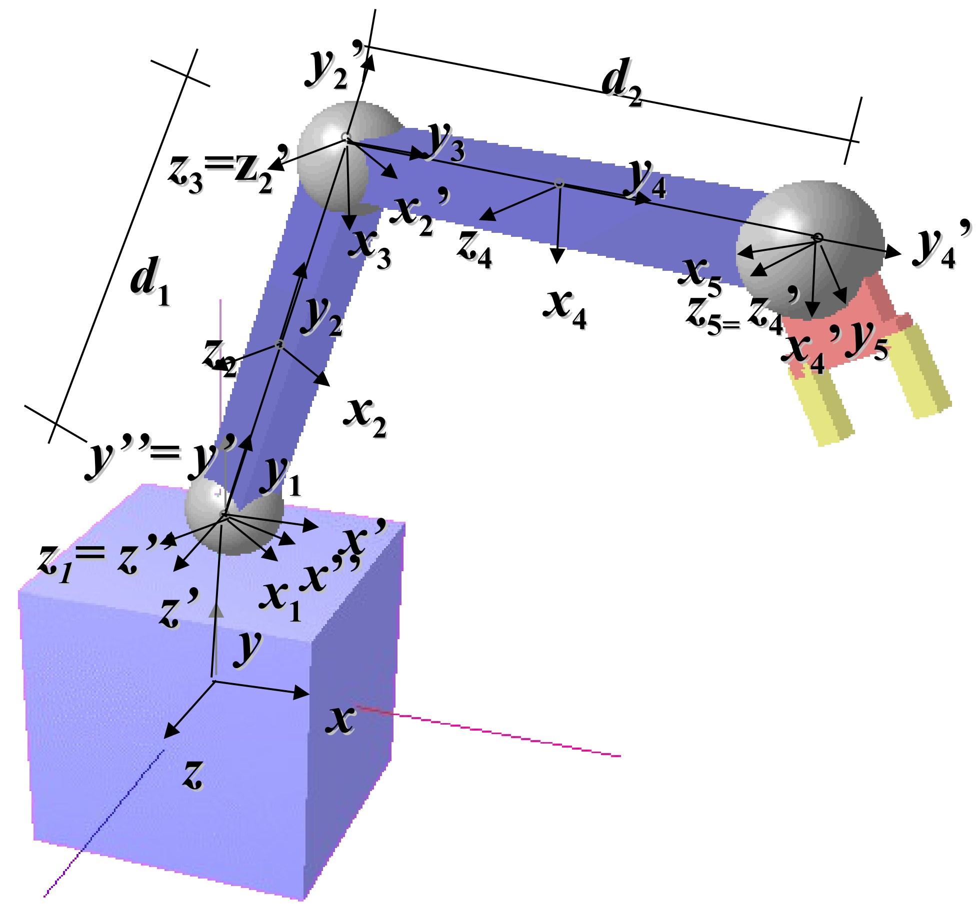
Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

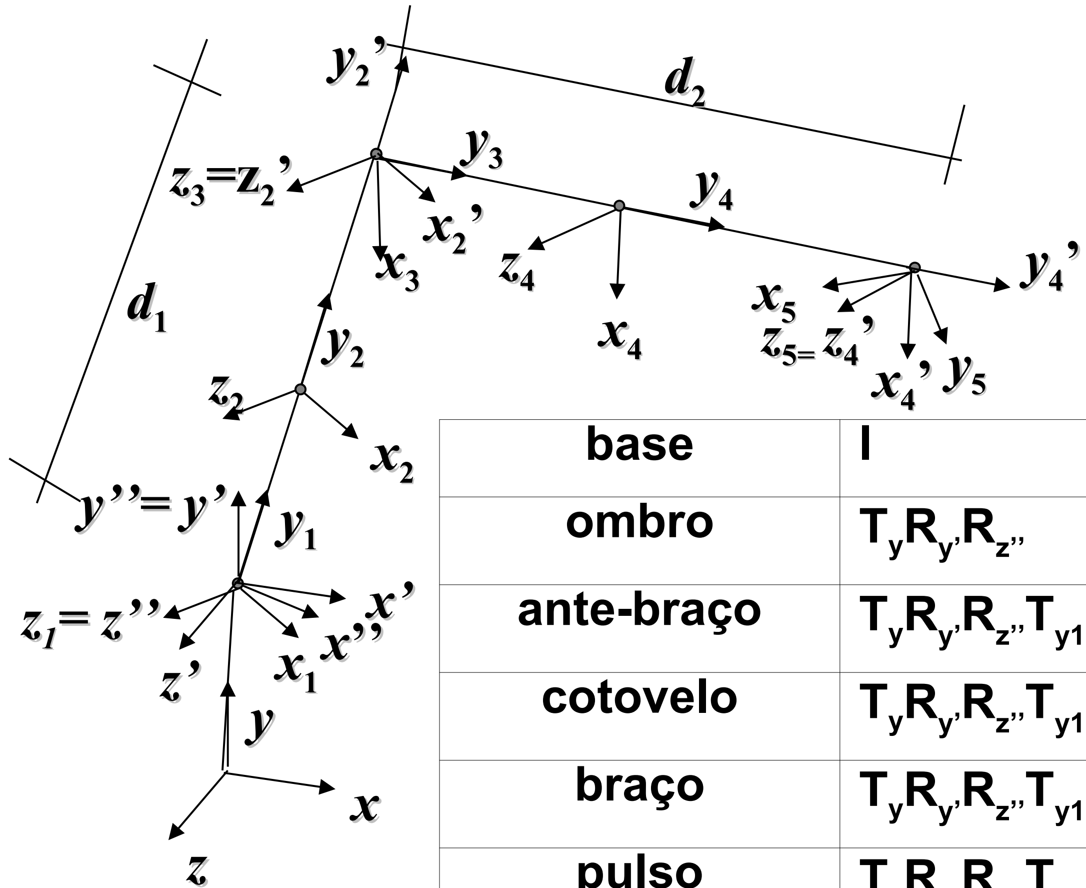


Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



Desenha a base (em xyz);
Translada em y;
Roda em y';
Roda em z'';
Desenha o ombro (em $x_1y_1z_1$)
Translada em y_1 de $d_1/2$;
Desenha o ante-braço (em $x_2y_2z_2$);
Translada em y_2 de $d_1/2$;
Roda em z_2'
Desenha o cotovelo (em $x_3y_3z_3$);
Translada em y_3 de $d_2/2$;
Desenha o braço (em $x_4y_4z_4$);
Translada em y_4 de $d_2/2$;
Roda em z_4';
Desenha o pulso (em $x_5y_5z_5$);
Translada em y_5
Desenha a mão (em $x_6y_6z_6$);

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



base	I
ombro	$T_y R_{y'} R_{z''}$
ante-braço	$T_y R_{y'} R_{z''} T_{y1}$
cotovelo	$T_y R_{y'} R_{z''} T_{y1} T_{y2} R_{z2'}$
braço	$T_y R_{y'} R_{z''} T_{y1} T_{y2} R_{z2'} T_{y3}$
pulso	$T_y R_{y'} R_{z''} T_{y1} T_{y2} R_{z2'} T_{y3} T_{y4} R_{z4'}$
mão	$T_y R_{y'} R_{z''} T_{y1} T_{y2} R_{z2'} T_{y3} T_{y4} R_{z4'} T_{y5}$

<u>Transformações geométricas no espaço</u>: Transformações em *WebGL*

- Sistemas como o WebGL utilizam o conceito de ***matriz corrente***.

- Desta forma, apenas uma matriz é responsável por realizar as transformações geométricas.

- Esta matriz é denominada ***matriz de modelagem e visualização*** (***model view matrix***).

<u>Transformações geométricas no espaço</u>: Transformações em *WebGL*

- Quando fornecemos uma nova matriz M, ela é multiplicada pela esquerda pela matriz corrente C. Isto é $C_{nova} = CM$.

- Geometricamente isto significa que *a transformação descrita por M ocorrerá primeiro que a transformação dada por C*.

- Isto é bastante conveniente para o esquema de interpretação do processo de instanciação baseado em *eixos locais*.

<u>Transformações geométricas no espaço</u>: Transformações em *WebGL*

- Existem situações em que o processo de instanciação não é descrito por uma seqüência de transformações com estrutura linear.

- É comum por exemplo, encontrarmos objetos que são descritos por *seqüências de transformação estruturadas em forma de árvore*.

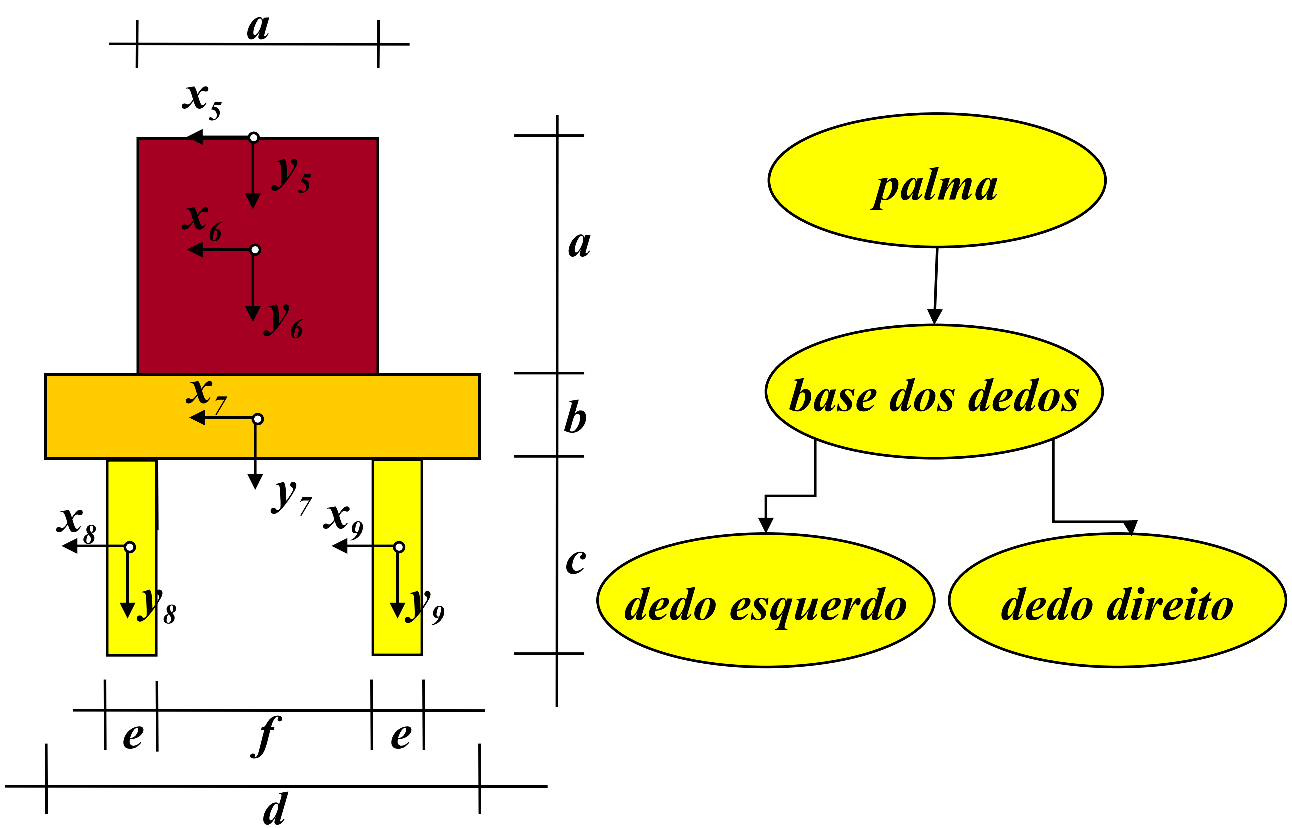
- Nestes casos é definida uma *hierarquia* sobre o conjunto de transformações e partes do objeto que especificam o modelo.

<u>Transformações geométricas no espaço</u>: Transformações em *WebGL*

- Nestes casos, ao término do percorrimento de um dos ramos, é necessário ***recuperar a matriz*** do nó quando primeiro chegamos a ele.

- Por exemplo, podemos definir os dedos direito e esquerdo da mão de um robô a partir da base da mão.

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*



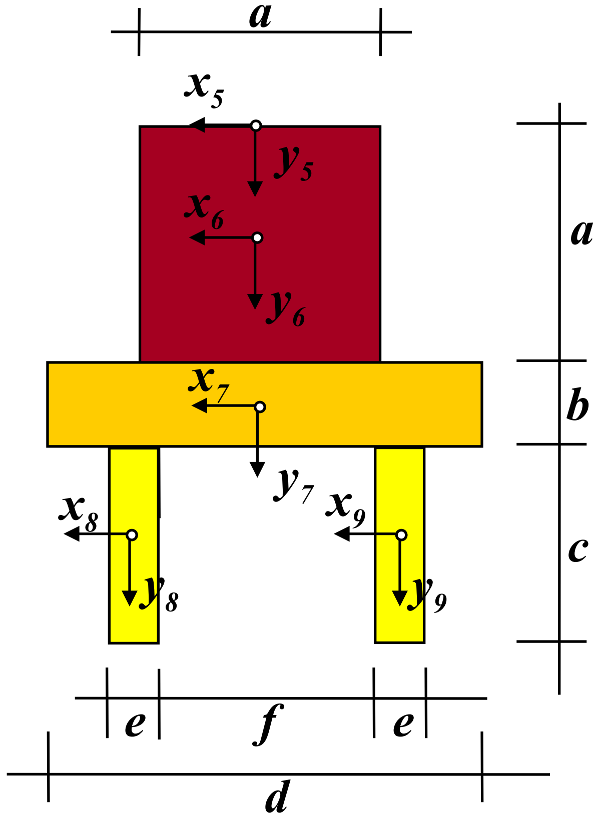
Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

- Sistemas como o WebGL implementam uma *estrutura de pilha para matrizes de transformação*.

- Desta forma, é possível percorrer a árvore saltando e recuperando as matrizes dos nós pai através de instruções *pop* e *push*.

- Com o mecanismo de pilha, podemos garantir que uma função retorna sem alterar o estado corrente das transformações.

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *OpenGL* <3.0

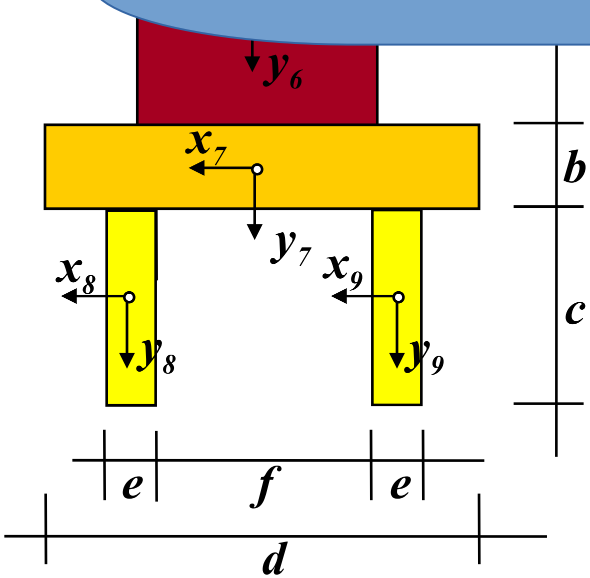



```
void desenhaDedos(float b,float c, float f, float f )
{
  /* dedo esquerdo */

  glPushMatrix();      /* Salva matriz corrente C0 */
    glTranslatef((f+e)/2,(b+c)/2,0.);  /* C=CTesq   */
    glScalef(e,c,e);                   /* C=CS      */
    glutSolidCube(1.0);
  glPopMatrix();        /* Recupera da pilha C=C0   */

  /* dedo direito */

  glPushMatrix();      /* Salva matriz corrente C0 */
    glTranslatef((f+e)/2,(b+c)/2,0.);  /* C=CTdir   */
    glScalef(e,c,e);                   /* C=CS      */
    glutSolidCube(1.0);
  glPopMatrix();        /* Recupera da pilha C=C0   */

}
```

Transformações geométricas no espaço: Transformações em *WebGL*

Observação: está era a forma utilizada na programação usando o pipeline fixo (pré-OpenGL 3.0).

Para ver como expressar as mesmas ideias em WebGL, Ver o código disponível na plataforma




```
  glutSolidCube(1.0);
glPopMatrix();                                  C=C0   */

/* dedo direito */

glPushMatrix();                     atriz corrente C0 */
  glTranslatef((f+e)          /2,0.);   /* C=CTdir  */
  glScalef(e,c,e);                       /* C=CS     */
  glutSolidCube(1.0
glPopMatrix();        /* Recupera da pilha C=C0   */

}
```

<u>Transformações geométricas no espaço</u>:
Transformações em WebGL - *exemplo*