

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИКИ

М.В. Кащеев

ГНЦ РФ-Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского, г. Обнинск



Получено точное аналитическое решение уравнений кинетики с учетом одной средневзвешенной группы запаздывающих нейтронов при линейном во времени вводе реактивности.

В ряде работ, посвященных кинетике реактора, например [1–3], приближенно решена система уравнений кинетики с учетом одной средневзвешенной группы запаздывающих нейтронов при линейном во времени вводе реактивности

$$\rho(t) = \rho_0 + \gamma t, \quad \gamma = \text{const}, \quad (1)$$

где ρ – реактивность; ρ_0 – начальная реактивность; γ – скорость линейного ввода реактивности, с^{-1} ; t – время, с .

Система уравнений с отмеченным приближением, если пренебречь источником S , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{\rho - \beta}{l} n + \lambda C, \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{l} n - \lambda C, \end{aligned}$$

где n – безразмерная плотность нейтронов; l – время жизни одного поколения нейтронов, с ; β – доля запаздывающих нейтронов; λ – постоянная радиоактивного распада осколков деления, с^{-1} ; C – безразмерная концентрация ядер-предшественников запаздывающих нейтронов.

После исключения C получим одно дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 n}{dt^2} + \left(\frac{\beta - \rho_0 - \gamma t}{l} + \lambda \right) \frac{dn}{dt} - \frac{1}{l} (\lambda \rho_0 + \gamma(1 + \lambda t)) n = 0. \quad (3)$$

Начальные условия

$$n(0) = 1 \text{ и } \frac{dn(0)}{dt} = 0. \quad (4)$$

В работе [1] Smets после ряда замен сводит уравнение (3) к уравнению первого порядка и для закона (1) получает громоздкое сложное решение, содержащее параболические цилиндрические и гипергеометрические функции. Для практического решения они неприемлемы. Поэтому в работе приведены только предельные случаи: очень малые $\gamma < 0,0006$ и очень большие $\gamma > 0,06$ при $\rho_0 = 0$.

Развитие идей работы [1] содержится в монографии [2], в которой Хетрик после преобразований уравнения (3) принимает допущение

$$\mu = \frac{\beta\lambda}{\gamma} = m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Данное допущение наряду с допущением $\gamma > 0$ общую задачу превращает в частную: решение справедливо только для дискретного положительного ряда скоростей ввода реактивности, определяемых равенством (5).

Приближенное решение, найденное им, имеет вид

$$n(t) = e^{-\lambda t} \frac{d^\mu}{d\tau^\mu} \left[\exp(\tau^2) \left(C_{\mu 1} + C_{\mu 2} \int_0^\tau \exp(-\tau'^2) d\tau' \right) \right], \quad (6)$$

где τ определяется из соотношения $t = \pm \tau \sqrt{\frac{2l}{\gamma}} + \frac{l}{\gamma} \left(\frac{\beta - \rho_0}{l} - \lambda \right)$.

Ниже приведены два громоздких решения, полученных из (6) при $\mu = 0$, $\mu = 1$ и $\rho_0 = 0$.

$$\frac{n}{n_0} = \left[1 + \beta \left(\frac{\pi}{2\gamma l} \right)^{1/2} \left(\exp \frac{\beta^2}{2\gamma l} \left(\operatorname{erf} \frac{\beta}{\sqrt{2\gamma l}} - \operatorname{erf} \frac{\beta - \gamma t}{\sqrt{2\gamma l}} \right) \right) \right] \exp \left(\frac{\gamma}{2l} t^2 - \frac{\beta}{l} t \right) \quad \text{при } \mu = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{n_0} = \frac{\beta^2}{\gamma l} \left\{ \exp(-\lambda t) - \frac{\beta - \lambda l - \gamma t}{\beta} \exp \left(\frac{\gamma}{2l} t^2 - \frac{\beta}{l} t \right) \right\} & \left[1 + \beta \left(\frac{\pi}{2\gamma l} \right)^{1/2} \times \right. \\ & \left. \times \exp \frac{(\beta - \lambda l)^2}{2\gamma l} \left(\operatorname{erf} \frac{\beta - \lambda l}{\sqrt{2\gamma l}} - \operatorname{erf} \frac{\beta - \lambda l - \gamma t}{\sqrt{2\gamma l}} \right) \right] \quad \text{при } \mu = 1. \quad (8) \end{aligned}$$

Решение для $\mu = 0$ соответствует бесконечной скорости ввода реактивности. Поскольку решения выражаются через специальные функции, то выполнение расчетов по ним затруднительно.

В более поздней работе [3] практически повторяется решение работы [2] с дополнительным загромождением задачи

$$\rho_0 = 0, \quad \rho(t) \ll \beta. \quad (9)$$

Насколько известно автору, указанными выше работами исчерпываются возможности поиска аналитического приближенного или точного решения задачи, необходимого для проведения быстрых оценочных расчетов. Отметим, что для получения приемлемой точности при численном решении уравнений требуется временной шаг порядка 10^{-3} с, причем он тем меньше, чем больше γ .

Что касается приближенных численных методов решения, то они совершенствуются постоянно, о чем свидетельствует работа [4].

Однако можно решить задачу (3), (4) без допущений (5) и (9) при любом постоянном γ . Ниже приводится это решение.

Введем новые переменные

$$n(t) = \eta(\xi) \exp(-\lambda t), \quad \xi(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{l}} \left(t + \frac{\rho_0 + \lambda l - \beta}{\gamma} \right). \quad (10)$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \mp \xi \frac{d\eta}{d\xi} \mp d \cdot \eta = 0, \quad (11)$$

где $d = 1 + \frac{\lambda \beta}{\gamma}$.

Отметим, что здесь и далее следует брать верхний или нижний знак в зависимости от того, будет ли $\gamma > 0$ или $\gamma < 0$.

Начальные условия в новых переменных

$$\eta(\xi_0) = 1, \quad \eta'(\xi_0) = \lambda \sqrt{\left| \frac{l}{\gamma} \right|}, \quad (12)$$

где $\xi_0 = \xi(0)$.

Решим уравнение (11) методом неопределенных коэффициентов. Будем искать решение в виде степенного ряда

$$\eta(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + \dots \quad (13)$$

Считая ряд сходящимся (что будет показано ниже), вычислим первую и вторую производные по ξ ряда (13)

$$\eta'(\xi) = a_1 + 2a_2 \xi + 3a_3 \xi^2 + 4a_4 \xi^3 + 5a_5 \xi^4 + \dots; \quad (14)$$

$$\eta''(\xi) = 2a_2 + 6a_3 \xi + 12a_4 \xi^2 + 20a_5 \xi^3 + \dots$$

Подставим (13), (14) в (11) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа

$$2a_2 + 6a_3 \xi + 12a_4 \xi^2 + 20a_5 \xi^3 + \dots \mp a_1 \xi \mp 2a_2 \xi^2 \mp 3a_3 \xi^3 \mp 4a_4 \xi^4 \mp 5a_5 \xi^5 \mp a_0 d \mp a_1 d \cdot \xi \mp a_2 d \cdot \xi^2 \mp a_3 d \cdot \xi^3 \mp a_4 d \cdot \xi^4 \mp \dots = 0 \quad (15)$$

$$\xi^0: 2a_2 \mp a_0 d = 0$$

$$\xi^1: 6a_3 \mp a_1 \mp a_1 d = 0 \quad (16)$$

$$\xi^2: 12a_4 \mp 2a_2 \mp a_2 d = 0$$

$$\xi^3: 20a_5 \mp 3a_3 \mp a_3 d = 0$$

Учитывая рекуррентность, для коэффициентов a_k получим

$$a_2 = \pm \frac{d}{2!} a_0, \quad a_3 = \pm \frac{d+1}{3!} a_1, \quad a_4 = \frac{d(d+2)}{4!} a_0, \quad a_5 = \frac{(d+1)(d+3)}{5!} a_1, \quad (17)$$

$$a_6 = \pm \frac{d(d+2)(d+4)}{6!} a_0, \quad a_7 = \pm \frac{(d+1)(d+3)(d+5)}{7!} a_1.$$

С учетом (17), ряд (13) примет вид

$$\eta(\xi) = a_0 \left(1 \pm \frac{d}{2!} \xi^2 + \frac{d(d+2)}{4!} \xi^4 \pm \frac{d(d+2)(d+4)}{6!} \xi^6 + \dots \right) + a_1 \left(\xi \pm \frac{d+1}{3!} \xi^3 + \frac{(d+1)(d+3)}{5!} \xi^5 \pm \frac{(d+1)(d+3)(d+5)}{7!} \xi^7 + \dots \right) \quad (18)$$

или, обобщая и суммируя по всем k , решение уравнения (11) получим в виде суммы двух рядов по четным и нечетным степеням ξ

$$\eta(\xi) = C_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{d(d+2) \dots (d+2k-2)}{(2k)!} \xi^{2k} \right) + C_2 \left(\xi + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{(d+1)(d+3) \dots (d+2k-1)}{(2k+1)!} \xi^{2k+1} \right) \quad (19)$$

где $C_1 = a_0$, $C_2 = a_1$.

$n(t)$ определяется первой формулой (10).

Используя признак Даламбера, легко показать, что область сходимости рядов $\xi \in R$.
Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим с использованием начальных условий (12).

$$C_1 A_1 + C_2 A_2 = 1; C_1 B_1 + C_2 B_2 = \lambda \sqrt{\left| \frac{l}{\gamma} \right|}. \quad (20)$$

Решая систему (20) относительно C_1 и C_2 , получим

$$C_1 = \frac{B_2 - A_2 \lambda \sqrt{\left| \frac{l}{\gamma} \right|}}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, C_2 = -\frac{A_1 \lambda \sqrt{\left| \frac{l}{\gamma} \right|} - B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad (21)$$

где

$$A_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{d(d+2) \dots (d+2k-2)}{(2k)!} \xi_0^{2k},$$

$$A_2 = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{(d+1)(d+3) \dots (d+2k-1)}{(2k+1)!} \xi_0^{2k+1}$$

$$B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{d(d+2) \dots (d+2k-2)}{(2k-1)!} \xi_0^{2k-1}, B_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{(d+1)(d+3) \dots (d+2k-1)}{(2k)!} \xi_0^{2k}$$

Степенные ряды можно легко вычислить с любой степенью точности.

Следует отметить, что в монографии [1] с помощью преобразования Лапласа получено интегральное представление для решения задачи (3), (4) без ограничений:

$$n(t) = C_1 \int_{-\infty}^{-\lambda} (s + \lambda)^{\frac{\lambda \beta}{\gamma}} \exp \left[-ls^2 / 2\gamma - \left(\frac{\beta - \rho_0}{\gamma} - t \right) s \right] ds + \\ + C_2 \int_{-\lambda}^{-\infty} (s + \lambda)^{\frac{\lambda \beta}{\gamma}} \exp \left[-ls^2 / 2\gamma - \left(\frac{\beta - \rho_0}{\gamma} - t \right) s \right] ds, \quad (22)$$

но оно имеет только теоретическое значение: практически воспользоваться им невозможно, т.к. аналитически интегралы не берутся.

Результаты расчета по формуле (19) автора и формулам (7), (8) [2] при $\mu = 0$, $\mu = 1$ и $\rho_0 = 0$ практически совпадают, но заметно отличаются от решения работы [3]. Это иллюстрируется кривыми рис. 1.

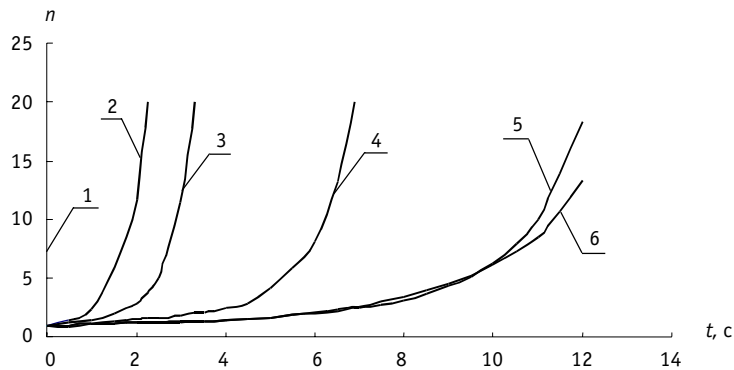


Рис. 1. Изменение плотности нейтронов в зависимости от времени при $\rho_0 = 0$; $l = 10^{-3}$ с: 1, 2, 3, 4, 5 – точные решения уравнений кинетики при 1 – $\mu = 0$; 2 – $\mu = 0,1$; 3 – $\mu = 0,2$; 4 – $\mu = 0,5$; 5 – $\mu = 1$ и 6 – приближенное решение уравнений кинетики [3] при $\mu = 1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые получено точное аналитическое решение уравнений кинетики с учетом одной средневзвешенной группы запаздывающих нейтронов при линейном во времени вводе реактивности. Работа имеет теоретическое, практическое и методическое значение. Она показывает, как подходящей заменой переменных можно обойти трудности, с которыми столкнулись авторы приближенных решений [1–3].

Следует также отметить, что полученное точное решение позволяет приближенно рассчитать плотность нейтронов при любом законе ввода реактивности, если кривую вводимой реактивности заменить ломаной линией.

Литература

1. *Smets H. B.* Reactor dynamics at low power. – In: «Proc. Geneva Conf.», 1958. – V. 11. – P. 237.
2. *Хетрик Д.* Динамика ядерных реакторов (пер. с англ.). – М.: Атомиздат, 1975.
3. *Дементьев Б. А.* Кинетика и регулирование ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1986.
4. *Гулевич А. В., Дьяченко П. П., Зродников А. В., Кухарчук О. Ф.* Связанные реакторные системы импульсного действия. – М.: Энергоатомиздат, 2003.

Поступила в редакцию 1.03.2005

of fuel subassemblies; decontamination of reactor production rooms and equipment; $\bar{D} \sim 13$; 8 mSv.
1972–1986, 1989–1997, 2000–2002 – normal operation of reactor; $\bar{D} \sim 5$ mSv.

УДК 621.039.514

About One Exact Solution of Kinetics Equation \M.V. Kaschev; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of High Schools. Nuclear Power Engineering). – Obninsk, 2005. – 5 pages, 1 illustration. – References, 4 titles.

Exact analytical solution of kinetics equation taking into account one weighted average delayed neutron group under line reactivity introduction was got.

УДК 621.039.5

A Study of Physical Characteristics of Light-Water Reactor Loaded with (Th-U-Pu) Oxide Fuel \G.G. Kulikov, V.V. Artisyuk, A.N. Shmelev, V.A. Apse; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of High Schools. Nuclear Power Engineering). – Obninsk, 2005. – 9 pages, 3 illustrations, 6 tables. – References, 12 titles.

The paper is devoted to analysis of weapon-grade plutonium utilization by its introduction into homogenous uranium and neptunium dioxides and irradiation in LWR. Main attention is given to proliferation protection of uranium-233, which is produced in neutron irradiation of thorium and may be used in multi-cycle LWR operation regime. Coolant temperature reactivity coefficients are determined for the established and non-established fuel cycles.

УДК 621.039.516

About the Resonance Self-Shielding for Radioactive and Fission Capture of Uranium-235 \O.N. Pavlova, V.A. Doulin; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of High Schools. Nuclear Power Engineering). – Obninsk, 2005. – 10 pages, 8 illustrations, 3 tables. – References, 10 titles.

Unexpected dependence of reactivity of uranium-235 samples on size of fast critical assembly BFS-79-5 whose softened spectrum was discovered in case uranium-235 samples enriched up to 90%. For small sample sizes its reactivities are negative. The analysis of this dependence has shown that values listed in ABBN – 93 can be predicted by calculations under following conditions:

- the effects of resonance self-shielding for radiative capture must be much lower for low values σ_0 ;
- in accordance with the last microscopic experiments, group neutron cross-section of radiative capture must be larger in the resonance energy region.

УДК 621.039.54

The Comparing Analysis of Different High Burnup Achievement Modes in Reactor Systems without Additional Absorbers \V.I. Savander, M.A. Uvakin; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of High Schools. Nuclear Power Engineering). – Obninsk, 2005. – 6 pages, 1 illustration, 1 table. – References, 5 titles.

This work deals with comparing analysis of two different excess reactivity compensation modes in reactors without additional absorbers: uninterrupted reloads of nuclear fuel and operating neutron spectrum. This task was solved by preparing simple model of nuclear fuel burning process in heavy-water reactor with adjusted critically conditions. Such model allows calculating achievable burnup of nuclear fuel. This work contains the description of model, calculating scheme, and comparing analysis of obtained results.

УДК 628.4.047

Handling of Spent Fuel of the First NPP \D.P. Masalov; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of High Schools. Nuclear Power Engineering). – Obninsk, 2005. – 4 pages, 4 illustrations, 1 table.

For cutting of spent fuel subassemblies in «hot» cell radioactive graphite and steel wastes are formed. By the end of 2005 graphite wastes (24,5 t, 1,26 TBk) and steel wastes (8,2 t, 262 TBk) will be