

КЛАССИФИКАЦИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ГРАНИЦ В ТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ КСЕНОНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Н.А. Якушкин

*Обнинский государственный технический университет атомной энергетики.
г. Обнинск.*



Исследуются бифуркационные границы в точечной модели ксеноновых колебаний. Цель проводимого исследования – выявление опасных и безопасных бифуркационных границ. Данная классификация позволяет определить те границы изменения управляющих параметров ядерного реактора, выход за которые влечет за собой потерю управляемости реактором. Также следует подчеркнуть, что реальные ксеноновые колебания в ядерных реакторах столь сложны и многообразны, что не укладываются в тесные рамки точечной модели. Однако то, что в данной работе к точечной модели был успешно применен метод классификации бифуркационных границ, основанный на вычислении многомерного шварциана, позволяет предполагать, что данный метод может быть применим к более сложным, и тем самым более адекватным моделям ксеноновых колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

В [1] рассмотрена следующая модель ксеноновых колебаний в ядерном реакторе. Пусть $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – концентрации йода-135 и ксенона-135 (далее йод и ксенон) в ядерном реакторе на момент времени t соответственно. Тогда, с некоторыми допущениями, можно считать, что поведение функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$ описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\beta(1 + \alpha q_1) + \gamma q_2}{\gamma + 1} - q_1(1 + \beta(1 + \alpha q_1)) \\ \frac{dq_2}{dt} = \lambda(\beta(1 + \alpha q_1) - q_2), \end{cases} \quad (1)$$

где α, β – управляющие параметры ядерного реактора, $\gamma \approx 23,6$, $\lambda \approx 1,74$ – коэффициенты, обусловленные свойствами йода и ксенона. Система (1) обладает двумя неподвижными точками:

$$\begin{cases} q_1^{1,2}(\alpha, \beta) = \frac{-(1 + \beta(1 - \alpha)) \pm \sqrt{4\alpha\beta^2 + (1 + \beta(1 - \alpha))^2}}{2\alpha\beta} \\ q_2^{1,2}(\alpha, \beta) = \beta(1 + \alpha q_1^{1,2}(\alpha, \beta)) \end{cases}$$

Следуя [1], рассмотрим неподвижную точку, соответствующую положительным равновесным концентрациям йода и ксенона

$$\begin{cases} q_1^1(\alpha, \beta) = \frac{-(1+\beta(1-\alpha)) + \sqrt{4\alpha\beta^2 + (1+\beta(1-\alpha))^2}}{2\alpha\beta} \\ q_2^1(\alpha, \beta) = \beta(1 + \alpha q_1^1(\alpha, \beta)) \end{cases} \quad (2)$$

Условия устойчивости и некоторые простейшие бифуркации неподвижной точки (2) можно исследовать по линейному приближению системы (1). Исследования, результатом которых является бифуркационная диаграмма, приведены в [1].

Линеаризация системы (1) в неподвижной точке (2) имеет вид:

$$D(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{\alpha}{\gamma+1} - 1 - 2\alpha q_1^1(\alpha, \beta) \right) - 1 & \frac{\gamma}{\gamma+1} \\ \alpha\beta\lambda & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{\alpha}{\gamma+1} - 1 - \frac{\sqrt{4\alpha\beta^2 + (1+\beta(1-\alpha))^2} - (1+\beta(1-\alpha))}{\beta} \right) - 1 & \frac{\gamma}{\gamma+1} \\ \alpha\beta\lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для $D(\alpha, \beta)$

$$\mu^2 - \left(\beta \left(\frac{\alpha}{\gamma+1} - 1 - \frac{\sqrt{4\alpha\beta^2 + (1+\beta(1-\alpha))^2} - (1+\beta(1-\alpha))}{\beta} \right) - 1 - \lambda \right) \mu - \beta\lambda \left(\left(\frac{\alpha}{\gamma+1} - 1 - \frac{\sqrt{4\alpha\beta^2 + (1+\beta(1-\alpha))^2} - (1+\beta(1-\alpha))}{\beta} \right) - 1 \right) - \frac{\alpha\beta\gamma\lambda}{\lambda+1} = 0.$$

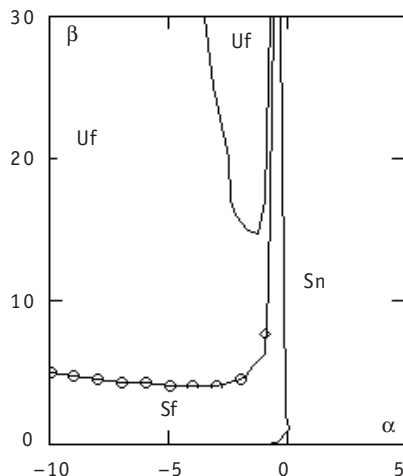


Рис. 1а. Бифуркационная диаграмма:
 Sn — устойчивый узел; Un — неустойчивый узел;
 Sf — устойчивый фокус; Uf — неустойчивый фокус;
 —○— — контрольная точка;
 —◇— — особая контрольная точка

Бифуркационная диаграмма неподвижной точки (2) системы (1) приведена на рис. 1 а.

На рис. 1а изображен прямоугольник, каждой точке которого соответствует пара значений управляющих параметров (α, β) . Прямоугольник разделен на четыре области таких, что принадлежность пары значений управляющих параметров (α, β) к одной из таких областей обозначает определенную качественную картину поведения решений системы (1) вблизи неподвижной точки (2).

На бифуркационной диаграмме есть кривая, являющаяся границей области устойчивости. Если точка (α, β) принадлежит этой кривой, то спектр линейного оператора состоит из пары чисто мнимых, комплексно сопряженных собственных значений. Данная бифуркация рассмотрена в [3, 6]. Приведем краткое изложение данных результатов.

Рассмотрим произвольную систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, \psi, p), \quad \frac{d\psi}{dt} = g(\varphi, \psi, p), \quad \varphi, \psi \in R, \quad \text{где } p \in R. \quad (3)$$

Предположим, что:

1) при $p \in I$, где $I \subset R$ – некоторый интервал, есть неподвижная точка $(\varphi_0(p), \psi_0(p))$ системы (3), при этом существует такое значение $p_0 \in I$ параметра p , что неподвижная точка $(\varphi_0(p), \psi_0(p))$ устойчива при $p < p_0$ и неустойчива при $p > p_0$; в этом случае значение $p = p_0$ называется *бифуркационным*, и при $p = p_0$ происходит *бифуркация потери устойчивости неподвижной точки* $(\varphi_0(p), \psi_0(p))$.

2) бифуркация потери устойчивости обусловлена тем, что спектр линеаризации системы (3)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(\varphi_0(p_0), \psi_0(p_0), p_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(\varphi_0(p_0), \psi_0(p_0), p_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\varphi_0(p_0), \psi_0(p_0), p_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(\varphi_0(p_0), \psi_0(p_0), p_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

состоит из собственных значений вида: $\mu_{1,2} = u \pm iv$, $u, v \in R$, таких, что $\text{sign}(u) = \text{sign}(p - p_0)$;

$$3) \frac{\partial u(p_0)}{\partial p} > 0.$$

Если выполнены условия 1–3, то имеет место *бифуркация Андронова-Хопфа*, состоящая в рождении устойчивого предельного цикла из фокуса (см. рис. 16) [2, 5, 6]. Если неподвижная точка $(\varphi_0(p), \psi_0(p))$ устойчива, то данная бифуркация *мягкая (безопасная)*, если неустойчива, то – *жесткая (опасная)* [2, 6]. Бифуркационные границы, на которых происходит жесткая бифуркация, называются *опасными*, те же, на которых происходит мягкая бифуркация – *безопасными* [2].

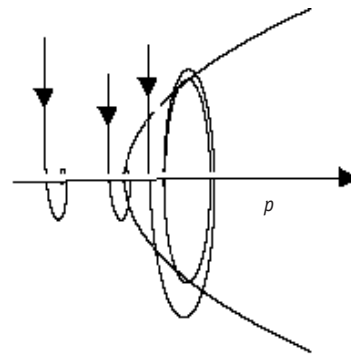


Рис. 16. Бифуркация Андронова-Хопфа

Проблемой устойчивости неподвижной точки при нулевых и отрицательных вещественных частях собственных значений линеаризации соответствующей системы занимался Ляпунов [7].

Он вывел формулы для вычисления так называемых *ляпуновских величин*. Эти формулы содержат производные первого, второго и третьего порядков.

Если вещественная часть ляпуновской величины положительна, бифуркация жесткая, если отрицательна – бифуркация мягкая. Отметим, что ляпуновская величина равна коэффициенту при кубическом члене исследуемой системы, приведенной в окрестности исследуемой неподвижной точки к нормальной форме. В частности, система (3), приведенная в окрестности неподвижной точки $(\varphi_0(p), \psi_0(p))$ к нормальной форме, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \mu z + kz|z|^2 + O(|z|^5), \\ \begin{cases} \text{Re } z = c_{1,1}(\varphi - \varphi_0(p_0)) + c_{1,2}(\psi - \psi_0(p_0)) + \dots \\ \text{Im } z = c_{2,1}(\varphi - \varphi_0(p_0)) + c_{2,2}(\psi - \psi_0(p_0)) + \dots \end{cases} \end{aligned}$$

где $k, \mu, c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,1}, c_{2,2}$ – комплексные числа, причем k – ляпуновская величина [3, 6].

Вычисление ляпуновской величины или соответствующего коэффициента нормальной формы – довольно трудоемкий процесс, включающий в себя приведение исследуемой системы к диагональному виду, что в случае громоздкой системы обременительно. Менее трудоемкий способ определения типа бифуркации, используемый в данной работе, состоит в вычислении, предложенного в [3], *многомерного шварциана*. Отметим, что многомерный шварциан поля, порождающего поток, вычисленный в исследуемой неподвижной точке равен с точностью до некоторого, зависящего от системы координат, положительного множителя соответствующей ляпуновской величине. Таким образом, многомерный шварциан является индикатором типа бифуркации потери устойчивости.

Мягкая бифуркация потери устойчивости характеризуется тем, что при достаточно малом выходе значения параметра за границу области устойчивости, появляется устойчивый предельный цикл, лежащий в малой окрестности бифурцирующей неподвижной точки. Жесткая бифуркация потери устойчивости характеризуется тем, что при достаточно малом выходе значения параметра за границу области устойчивости, появляется ограниченная окрестность неподвижной точки, содержащая эту точку, такая, что траектории, берущие начало вне этой окрестности, впоследствии эту окрестность не пересекают.

Физико-техническая интерпретация опасности и безопасности границ такова. Пусть динамика произвольного управляемого процесса описывается системой (3) и процесс находится в состоянии устойчивого равновесия, соответствующего устойчивой неподвижной точке системы (3). Достаточно малый выход значения управляющего параметра за безопасную бифуркационную границу повлечет переход процесса, описываемого системой (3), в новый, но достаточно близкий к исходному по значениям переменных φ, ψ режим. Например, в режим малых колебаний вблизи неустойчивого состояния равновесия. Достаточно малый выход значения управляющего параметра за опасную границу, обуславливает переход процесса, описываемого системой (3), в новый, непредсказуемый режим. Возможно в режим колебаний с некоторой постоянной или возрастающей амплитудой. Таким образом, когда речь идет об опасных и безопасных границах, подразумевается опасность потери управляемости системы.

КЛАССИФИКАЦИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ГРАНИЦ

Из изложенного следует, для того чтобы отнести границу области устойчивости неподвижной точки к опасным или безопасным, следует показать, что при выходе управляющих параметров системы за данную границу имеет место соответственно жесткая или мягкая бифуркация потери устойчивости. Это, в свою очередь, равносильно положительности или отрицательности вещественной части многомерного шварциана исследуемой системы, вычисленного в неподвижной точке при значениях параметров, лежащих на исследуемой бифуркационной границе. Методика вычисления многомерного шварциана описана в [3, 4].

Приведем краткое описание данной методики. Дадим некоторые необходимые в дальнейшем определения.

Набор $T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m}$ координат, занумерованных индексами $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, определяет в пространстве R^n величину тензорного вида (**в.т.в**). Пусть в некоторой области $D \subset R^n$ введены две произвольные, в общем случае криволинейные системы координат $\theta^1, \dots, \theta^n, \vartheta^1, \dots, \vartheta^n$.

Величина тензорного вида T , координаты которой $\{T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m}\}, \{T_{j'_1 \dots j'_k}^{i'_1 \dots i'_m}\}$ в координ-

натных системах $\theta^1, \dots, \theta^n, \vartheta^1, \dots, \vartheta^n$ соответственно связаны соотношением:

$$T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m} = \frac{\partial \vartheta^{i_1}}{\partial \theta^{j_1}} \dots \frac{\partial \vartheta^{i_m}}{\partial \theta^{j_m}} \cdot \frac{\partial \theta^{j_1}}{\partial \vartheta^{i_1}} \dots \frac{\partial \theta^{j_k}}{\partial \vartheta^{i_k}} T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m}, \quad (*)$$

называется *тензором*. Линейные и квадратичные функционалы, а также векторы и первая производная векторного поля являются частными случаями тензоров. Вторая и третья производные векторного поля тензорами не являются, т.к. соотношение (*) верно для них лишь при линейной замене координат.

Для **в.т.в** определены операции сложения, умножения на число, тензорного произведения и свертки.

Пусть S, T – **в.т.в** типа (m, k) , тогда их сумма определена как

$$(S + T)_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m} = S_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m} + T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m}.$$

Умножение **в.т.в** $T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m}$ типа (m, k) на число a определено как $(aT)_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m} = a(T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m})$.

Если P – **в.т.в** типа (m, k) , а Q – **в.т.в** типа (s, p) , то тензорным произведением этих **в.т.в** будет **в.т.в** типа $(m + s, k + p)$, определяемая равенством

$$(P \otimes Q)_{j_1 \dots j_{k+p}}^{i_1 \dots i_{m+s}} = (P_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m})(Q_{j_{k+1} \dots j_{k+p}}^{i_{m+1} \dots i_{m+s}}).$$

Рассмотрим операцию свертки двух **в.т.в**.

Пусть P, Q – **в.т.в** типа $(m, k), (k, n)$ соответственно. Тогда их сверткой будет **в.т.в** типа (m, n) , определенная как

$$(P * Q)_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = \sum_{s_1 \dots s_k} (P_{s_1 \dots s_k}^{i_1 \dots i_m}) \cdot (Q_{j_1 \dots j_n}^{s_1 \dots s_k}).$$

Перейдем к непосредственному описанию методики вычисления многомерно-го шварциана.

Пусть дана произвольная система

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x^1, \dots, x^n), \quad f(x) = (f^1(x), \dots, f^n(x)) \in R^n,$$

имеющая неподвижную точку x_0 . Определим первую, вторую и третью производные векторного поля $f(x)$, порождающего поток как тензор и **в.т.в**, заданные формулами

$$f'(x) = \{f_{j,i}^i(x)\} = \left\{ \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} \right\}, \quad f''(x) = \{f_{j,k,i}^{ii}(x)\} = \left\{ \frac{\partial^2 f^i(x)}{\partial x^j \partial x^k} \right\},$$

$$f'''(x) = \{f_{j,k,m}^{iii}(x)\} = \left\{ \frac{\partial^3 f^i(x)}{\partial x^j \partial x^k \partial x^m} \right\}.$$

Пусть $u, u_0, w \in R^n$ и определена некоторая функция $g(u)$ такая, что $g(u_0) = 0$.

Тогда k – струя функции $g(u)$ в точке $u = u_0$ определяется первыми k членами тэйлоровского разложения $g(u_0)$.

В дальнейшем будем рассматривать только две струи (далее струи). Поясним структуру струи. Для этого рассмотрим разложение

$$g(u_0 + w) = L(w) + \frac{1}{2}B(w, w) + o(\|w\|^3),$$

где $L(w) = \sum_i \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^i} w^i$, $B(w, w) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g(u_0)}{\partial u^i \partial u^j} w^i w^j$ соответственно линейный и квадра-

тичный функционалы, действующие в R^n . Итак, струя определяется парой $J = (L, B)$, где L, B – линейный и квадратичный функционалы, действующие в R^n . Для вычисле-

ния многомерного шварциана необходимо построить *собственную струю* поля, порождающего поток в исследуемой неподвижной точке [3]. Струя $J = (L, B)$ называется собственной струей относительно векторного поля $f(x)$ в точке x_0 , соответствующей собственному значению μ линейного оператора $f'(x_0)$, если верны соотношения: $L^* f'(x_0) = \mu L$, $B^*(f'(x_0) \otimes f'(x_0)) + L^* f''(x_0) = \mu B$.

Отметим, что собственная струя поля, порождающего поток, соответствующая собственному значению μ , необходимая для вычисления многомерного шварциана, строится из (4), (5).

Описание свойств собственной струи приведено в [3].

Заметим, что при переходе от переменных (координат) $x = (x^1, \dots, x^n)$ к переменным $y(x) = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n))$ струи функций и собственные струи относительно векторных полей изменяются [3].

Вычисление шварциана начинают с выбора собственного значения μ линейного оператора $f'(x_0)$, обуславливающего бифуркацию. Если, как в рассматриваемом в данной работе случае, бифуркация обусловлена тем, что при выходе управляющих параметров за границу области устойчивости, вещественные части пары комплексно-сопряженных собственных значений исследуемой линеаризации системы становятся положительными, то выбирают любое из этих значений. Потом вычисляются левый (L) и правый (ν) собственные векторы линейного оператора $f'(x_0)$, соответствующие выбранному собственному значению

$$\mu L = L f'(x_0), \mu \nu = f'(x_0) \nu, (L, \nu) = 1. \quad (4)$$

Затем из системы уравнений

$$\mu B = L^* f''(x_0) + (B^* f'(x_0) + f'(x_0)^* B) \quad (5)$$

вычисляются коэффициенты квадратичной формы B .

Определим для вектора ν и комплексно-сопряженного к нему вектора ν^* **в.т.в** типа (4, 0)

$$T(\nu) = \nu^* \otimes \nu \otimes \nu \otimes \nu + \nu \otimes \nu^* \otimes \nu \otimes \nu + \nu \otimes \nu \otimes \nu^* \otimes \nu + \nu \otimes \nu \otimes \nu \otimes \nu^*.$$

Пусть заданы **в.т.в** типа (0, 4)

$$U = (L \otimes L)^*(f'''(x_0) \otimes \delta),$$

$$V = 3(B \otimes L - L \otimes B)^*(f''(x_0) \otimes \delta \otimes \delta),$$

где δ - символ (тензор) Кронекера. Тогда шварциан имеет вид:

$$Sh(f, x_0, J, \nu) = (U + V)^* T(\nu). \quad (6)$$

В общем случае шварциан зависит от системы координат. Однако, если в спектре линейного оператора $f'(x_0)$ есть собственное значение μ с нулевой вещественной частью, причем вектор ν и собственная струя J вычислены относительно данного собственного значения, то шварциан, вычисленный в точке x_0 относительно струи J и вектора ν , не зависит от системы координат.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ШВАРЦИАНА ДЛЯ МОДЕЛИ КСЕНОНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

В данной работе рассмотрено вычисление шварциана для системы (1).

Для того чтобы вычислить шварциан, в нашем случае необходимо

1) выбрать любое собственное значение μ линейного оператора $D(\alpha_0, \beta_0)$, где (α_0, β_0) – исследуемая точка на границе области устойчивости неподвижной точки (2);

2) вычислить соответствующие этому собственному значению собственные левый L и правый ν векторы линейного оператора $D(\alpha_0, \beta_0)$ и нормировать их

так, что $(L, v) = 1$;

3) вычислить коэффициенты квадратичной формы B из системы уравнений, являющейся конкретизацией (5) для системы (1)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2D(\alpha_0, \beta_0)_{1,1} - \mu & 2D(\alpha_0, \beta_0)_{2,1} & 0 \\ D(\alpha_0, \beta_0)_{1,1} & D(\alpha_0, \beta_0)_{1,1} + D(\alpha_0, \beta_0)_{2,1} - \mu & D(\alpha_0, \beta_0)_{2,1} \\ 0 & 2D(\alpha_0, \beta_0)_{1,2} & 2D(\alpha_0, \beta_0)_{2,2} - \mu \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$M_1 \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ B_{1,2} \\ B_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha\beta q_1^1(\alpha_0, \beta_0)L_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

4) для вектора v и комплексно-сопряженного к нему вектора $v^* = \bar{v}$ определим **В.Т.В**

$$R(v) = \{R^{i,j}(v)\} = 2(\omega^1)v^1v^jv^i + (v^1)^2\omega^jv^i + (v^1)^2v^j\omega^i;$$

5) пусть $P = \{P_{i,j}\} = -6\alpha q_1^1(\alpha_0, \beta_0)(B_{1,i}L_j - L_1B_{i,j})$, тогда шварциан имеет вид:

$$S = P^*R(v). \quad (8)$$

Выполненное исследование состояло в вычислении многомерного шварциана на границе области устойчивости неподвижной точки (2). Для этого на данной границе выбиралось 100 равноотстоящих друг от друга точек, и в этих точках вычислялся многомерный шварциан. Всюду вещественная часть многомерного шварциана оказывалась отрицательной. Следовательно, исследуемая **граница** области устойчивости **безопасная**.

В таблице приведены значения вещественной части многомерного шварциана в 11 контрольных точках, отмеченных на рис. 1а.

α	β	$\text{Im}(\mu)$	$\text{Re}(\text{Sh})$
-10	4.98	8.954	-0.099
-9	4.708	8.22	-0.111
-8	4.472	7.529	-0.122
-7	4.278	6.853	-0.159
-6	4.127	6.1891	-0.2
-5	4.024	5.528	-0.21
-4	3.99	4.859	-0.364
-3	4.091	4.178	-0.549
-2	4.562	3.491	-0.938
-1	7.687	3.131	-1.519
-0.6	30	2.9865	-0.866

Пример вычисления многомерного шварциана в особой контрольной точке границы области устойчивости $\alpha_0 = -1$, $\beta_0 \approx 7,687$ (см. рис.1а). Данным значениям параметров соответствует неподвижная точка $q_1^1(\alpha_0, \beta_0) \approx 0.7$, $q_2^1(\alpha_0, \beta_0) \approx 2.317$. Линеаризация системы (1) в данной неподвижной точке имеет собственные зна-

чения $\mu_1 = \mu_2^* \approx 3.131i$, выбираем $\mu \approx 3.131i$. Этому собственному значению соответствуют левый $L \approx (-0.741 - 1.126i, 0.17i)$ и правый $v \approx (0.2, -0.374 - 0.64i)^T$ собственные векторы.

Из системы уравнений (7) находим коэффициенты квадратичной формы B :

$$B_{1,1} \approx 0.77 + 4.7372i, \quad B_{1,2} \approx 0.067 + 0.526i, \quad B_{2,2} \approx 0.165 + 0.142i.$$

Вычисляем многомерный шварццан по формуле (8), его вещественная часть равна -1.519 .

Основным результатом данной работы является вывод о том, что в рассмотренной модели происходят только мягкие бифуркации потери устойчивости неподвижной точки.

Искренне благодарю проф. Е.А. Сатаева за постановку задачи, ставшей основой для данной работы. Выражаю признательность В.П. Гинкину, Ю.Н. Корниенко, В.Н. Манохину, В.М. Рябому, А.Г. Костромину за конструктивную критику.

Литература

1. Рябов Н.А., Семенов А.А. Исследование точечной модели ксеноновых колебаний // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2006. – № 2. – С. 66–73.
2. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука, 1982.
3. Сатаев Е.А. Производная Шварца для многомерных отображений и потоков // Математический сборник-1999. – Т. 190. – № 11. – С. 139–160.
4. Якушкин Н.А. Шварццан для многомерных диффеоморфизмов, потоков и циклов // Материалы Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов 2005» (Секция «Вычислительная математика и кибернетика»). – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ. – 2005. – С. 77.
5. Каток А.Б., Хасселлблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. – М.: «Факториал», 1999.
6. Марсден Д., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1982.
7. Ляпунов А.А. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л. Собр. соч., 1956.
8. <http://fizmatlit.narod.ru/index.htm>. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций).
9. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильашенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций / Итоги науки и техники. Динамические системы-5. – М.: ВИНТИ, 1986.

Поступила в редакцию 4.09.2006

coefficient, visualize results and define physical parameters with functional algorithms in MAPLE.

УДК 621.039.51

Uncertainties Estimation Reducing when Interval Analysis Method Is Used for Isotope Kinetics Problem \ D.V. Hitrick, V.V. Kolesov, D.A. Kamaev, V.F. Ukraintsev; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher School. Nuclear Power Engineering). – Obninsk, 2007. – 7 pages, 6 tables. – References – 2 titles.

We suggest several ways of uncertainties estimation reducing when interval analysis is used for isotope kinetics problem. We also compare our results with linear perturbation theory (sensitivity analysis). It was found that for certain cases linear perturbation theory gives us essentially underestimated values of nuclide concentrations uncertainties.

УДК 539.1

Modeling of the Interaction Dynamics for the Nuclear Reaction with Charged Particles in the Final State \ V.L. Shablov, I.A. Tyras; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher School. Nuclear Power Engineering). – Obninsk, 2007. – 5 pages, 3 illustrations. – References – 11 titles.

The method previously developed for the description of the post-collision Coulomb interaction in the reaction final state is generalized to the case of the resonance near threshold formation. Modeling of the Coulomb interaction has shown a good agreement with the experimental data for the reaction $d(^7\text{Li}, \alpha)\alpha n$ with $E_d = 6.8$ MeV. In this case, the resonance of ^5He ($E^* = 16.76$ MeV) was created.

УДК 621.039.51

The Classification of the Bifurcation Borders in the Point Model of the Xenon Oscillations \ N.A. Yakushkin; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher School. Nuclear Power Engineering). – Obninsk, 2007. – 8 pages, 1 table, 2 illustrations. – References – 9 titles.

The present work deals with bifurcation borders in the point model of xenon oscillations. The general goal of the undertaken research is to determine safe and unsafe bifurcation borders. Such classification allows determining the range of a nuclear reactor control parameters, within which the reactor remains controllable. It should be mentioned, that xenon oscillations in nuclear reactors are so complex and diverse, that they cannot be correctly described in the point model. However, the fact that the method of bifurcation borders classification based on finding the multidimensional Schwartz derivative was successfully applied to the point model gives hope, that it can be also applied to more complex and thus more adequate xenon oscillations models.