УДК 621.534:519.7

МОДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В МНОГОСЛОЙНОМ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОМ УСТРОЙСТВЕ

А.В. Тихоненко
Обнинский государственный технический университет атомной энергетики, г. Обнинск

В работе строятся математические модели теплопроводности в многослойном сферически-симметричном устройстве с тепловыделяющим слоем. Аналитические решения для стационарных температурных полей, полученные в рамках этих моделей, анализируются для различных граничных условий с помощью комплекса программ в среде прикладного математического пакета MAPLE.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет температурных полей представляет важную задачу для систем, содержащих сферические тепловыделяющие элементы, (например, в газоохлаждаемых реакторах [1], в комплексах стационарного хранения устройств [2,3]; подобные задачи встречаются также при построении моделей образования планет и исследованиях их температурного режима [4]).

Температурные распределения в многослойном устройстве с тепловыделяющим слоем зависят от свойств тепловыделяющего вещества, тепловых свойств окружающих его оболочек и тепловых условий на его внешней границе. Оно представляет собой сферически-симметричное образование (рис. 1), состоящее из тепловыделяющего шара I (радиуса r_1) и четырех окружающих его оболочек II, III, IV и V (соответственно радиусов r_2, r_3, r_4, r_5) разного назначения и обладающих разными свойствами теплопроводности. В частности, в устройстве подобной конфигурации [2,3] слои I, II, III и V – металлы с высоким коэффициентом теплопроводности, IV – самый обширный слой – содержит особые химические соединения с низкой теплопроводностью, причем именно теплопроводность этого слоя оказывает существенное влияние на температурное поле всего устройства.

В работе рассматриваются две модели теплопроводности: линейная (с постоянным коэффициентом теплопроводности IV слоя) и нелинейная (предполагающая зависимость коэффициента теплопроводности от температуры в IV слое); и решаются с помощью комплекса программ в среде прикладного пакета MAPLE [5] две краевые задачи (для каждой модели) об определении в устройстве температурного поля (без учета контактных термосопротивлений). Дело в том, что область IV имеет самые большие размеры, основное убывание температуры происходит в этой части, и именно

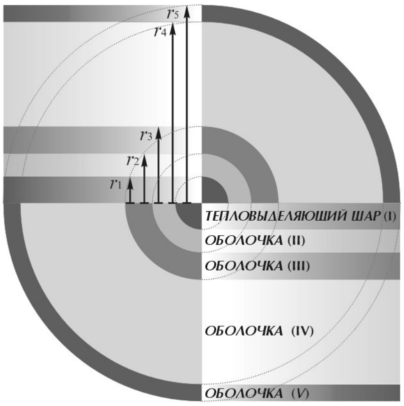

Рис. 1. Схема устройства

поэтому моделируется теплопроводность этого слоя. Полученные решения анализируются с точки зрения учета типов краевых условий и в части использования линейной или нелинейной моделей.

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Общая постановка задачи

Математически задача об определении стационарного температурного поля $u(\mathrm{r}) = u(r, \theta, \varphi)$ представляет собой в линейной модели уравнение второго порядка в частных производных эллиптического типа для кусочно-гладкой сферически-симметричной среды с постоянными коэффициентами теплопроводности. В области I ($0 < r < r_1$) имеется источник тепла в виде тепловыделяющего шара с постоянной объемной тепловой плотностью r, и температурное поле u_1 будет удовлетворять уравнению Пуассона. В областях II ($r_1 < r < r_2$), III ($r_2 < r < r_3$), IV ($r_3 < r < r_4$) и V ($r_4 < r < r_5$) источники тепла отсутствуют; и температурные поля u_i (j = 2, 3, 4, 5) будут удовлетворять уравнениями Лапласа.

Уравнения для сферически-симметричных I и II–V областей запишутся (i = 2, 3, 4, 5) соответственно:

$$k_1 \cdot \left(\frac{\partial^2 u_1(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u_1(r)}{\partial r} \right) + \rho = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_i(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u_i(r)}{\partial r} = 0, \tag{2}$$

где k – коэффициент теплопроводности (в работе используются обозначения, принятые в [6]).

Решения этих уравнений для I–V областей, полученные в MAPLE, имеют вид:

$$\begin{gathered} u_1(r) = C_0 + \frac{C_1}{r} - \frac{\rho}{6 \cdot k_1} \cdot r^2, \; u_2(r) = C_2 + \frac{C_3}{r}, \\ u_3(r) = C_4 + \frac{C_5}{r}, u_4(r) = C_6 + \frac{C_7}{r}, u_5(r) = C_8 + \frac{C_9}{r}. \end{gathered} \tag{3}$$

Сформулируем условия определения постоянных C_i. Функция температурного поля $u(r)$ должна быть регулярна и непрерывна; должна обеспечивать непрерывность радиального теплового потока, что записывается как система соотношений

$$u_j(r)\Big|_{r=r_j} = u_{j+1}(r)\Big|_{r=r_j}, k_j \cdot \frac{\partial u_j(r)}{\partial r}\bigg|_{r=r_j} = k_{j+1} \cdot \frac{\partial u_{j+1}(r)}{\partial r}\bigg|_{r=r_j} \quad (j = 1,2,3,4) \tag{4}$$

и удовлетворять одному из двух типов граничных условий:

1) на границе поддерживается постоянная температура T_{ext} (первая краевая задача):

$$u_5(r)\Big|_{r=r_5} = T_{ext}; \tag{4а}$$

2) на границе происходит теплообмен с внешней средой, температура которой равна T_{ext} (третья краевая задача):

$$\frac{\partial u_5(r)}{\partial r}\bigg|_{r=r_5} = h \cdot \left(T_{ext} - u_5(r)\right)\Big|_{r=r_5}, \tag{4б}$$

где h – коэффициент теплообмена. Необходимое условие существования стационарной температуры для второй краевой задачи (равенство нулю суммарного потока тепла через внешнюю поверхность устройства [6]) здесь не выполняется.

Аналитические решения краевых задач для линейной модели

Из условия регулярности $u(r)$ в нуле следует, что $C_0 = 0$, и условия (4) для краевых задач записываются как система уравнений на постоянные C_l ($l = 1, 2, \ldots, 9$):

$$-\frac{r_1^3}{3\cdot k_1}\cdot\rho + C_1 = C_2 + \frac{C_3}{r_1}, \left[C_l + \frac{C_{l+1}}{r_m} = C_{l+2} + \frac{C_{l+3}}{r_m}\right]_{\substack{l=2,4,6\\ m=2,3,4}},$$

$$\frac{r_1\cdot\rho}{3} = \frac{k_2\cdot C_3}{r_1^2}, \left(\frac{k_m\cdot C_l}{r_m^2} = \frac{k_{m+1}\cdot C_{l+2}}{r_m^2}\right)_{\substack{l=3,5,6\\ m=2,3,4}}, \tag{5}$$

$$C_8 + \frac{C_9}{r_4} = T_{ext}, \tag{5а}$$

$$-\frac{C_9}{r_5^2} = h\cdot\left(T_{ext} - C_8 - \frac{C_9}{r_5}\right), \tag{5б}$$

причем (5а) соответствует первой, а (5б) – третьей краевым задачам.

Решение системы (5) имеет вид:

$$C_1 = C_2 + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2}\right)\cdot r_1^2\cdot\rho, C_2 = \frac{K_1\cdot r_1^3\cdot\rho}{3} + T_{ext}, C_3 = \frac{r_1^3\cdot\rho}{3\cdot k_2}, C_4 = \frac{K_2\cdot r_1^3}{3}\cdot\rho + T_{ext},$$

$$C_5 = \frac{r_1^3\cdot\rho}{3\cdot k_3}, C_6 = \frac{K_3\cdot r_1^3\cdot\rho}{3} + T_{ext}, C_7 = \frac{r_1^3}{3\cdot k_4}\cdot\rho, C_8 = -\frac{r_1^3\cdot\rho}{3\cdot k_5\cdot r_5} + T_{ext}, C_9 = \frac{r_1^3\cdot\rho}{3\cdot k_5} \tag{6а}$$

– для первой краевой задачи и

$$C_l' = C_l + \kappa\,(l = 1, 2, 4, 6), C_m' = C_m\,(l = 3, 5, 7, 8), C_8' = C_8 + \kappa + T_{ext} \tag{6б}$$

– для третьей краевой задачи. Здесь обозначено

$$K_1 = K_2 + \frac{1}{k_3\cdot r_2} - \frac{1}{k_2\cdot r_2}, K_2 = K_3 - \frac{1}{k_3\cdot r_3} + \frac{1}{k_4\cdot r_3}, K_3 = -\frac{1}{k_4\cdot r_4} - \frac{1}{k_5\cdot r_5} + \frac{1}{k_5\cdot r_4},$$

$$\kappa = \frac{r_1^3\cdot\rho}{3\cdot h\cdot k_5\cdot r_5^2}. \tag{7}$$

Построенные в линейной модели аналитические решения представляют собой кусочно-гладкие функции, описывающие зависимость температуры от радиальной координаты r вида (3) с коэффициентами, определяемыми формулами (5а) и (5б) для первой и третьей краевых задач соответственно.

Заметим, что в линейной модели решение задачи не представляет особых трудностей и отличается от стандартных постановок [7] большим количеством оболочек с разнородными свойствами. При этом проблемы с очень громоздкими математическими вычислениями успешно разрешаются применением пакета MAPLE. Тем не менее, это решение подробно описывается и анализируется для того, чтобы затем детально сравнить его с соответствующим решением в нелинейной модели, которая представляет собой (в силу нелинейности) гораздо более сложную задачу.

Графики и анализ решений в линейной модели

Проанализируем полученные точные аналитические решения для линейной модели на примере устройства, рассмотренного в [2], с мощностью тепловых источников q =100 *Вт*. Температурные поля $u(r)$ определяются здесь основными характеристиками (табл. 1) и совокупностью параметров: температурой T_{ext}, поддерживаемой на внешней поверхности (в первой краевой задаче); коэффициентом теплообмена h с внешней средой и температурой T_{ext} (используется такое же обозначение, что и для первой краевой задачи) внешней среды, с которой происходит теплообмен (в третьей краевой задаче).

Таблица 1

Геометрические характеристики и коэффициенты теплопроводности

Область	I	II	III	IV	V
Радиус области, *м*	r_1 = 0.06	r_2 = 0.11	r_3 = 0.21	r_4 = 0.64	r_5 = 0.65
Коэффициент теплопроводности, *Вт*/(*м*·*гр*)	k_1 = 20	k_2 = 35	k_3 = 213	k_4 = 0.5	k_5 = 13.6

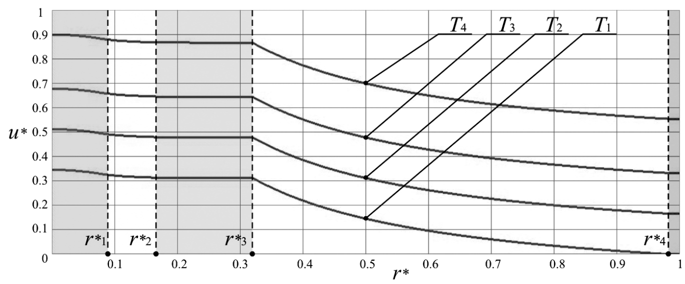

Рис. 2. Температурное поле для набора значений T_{ext} (линейная модель, первая краевая задача)

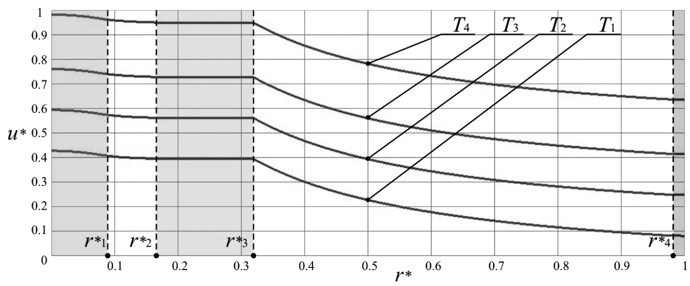

Рис. 3. Температурное поле для набора значений T_{ext} и h_3 (линейная модель, третья краевая задача)

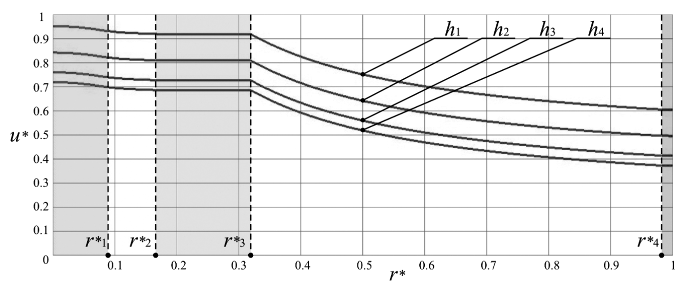

Рис. 4. Температурное поле для набора значений h и T_3 (линейная модель, третья краевая задача)

Для наглядности анализа построим графики температурного поля $u(r)$ для разных условий (табл. 2): графики на рис. 3–4 построены в безразмерных переменных $u^*(r^*)$, где $r^* = r/r_5$ и $u^* = u/180\,^{\circ}$C.

1. Первая краевая задача: температурное поле определяется значением T_{ext} на его внешней поверхности. На рис. 2 представлено поле $u(r)$ для четырех значений T_{ext}.

2. Третья краевая задача: температурное поле определяется значением T_{ext} внешней среды и коэффициентом теплообмена h. На рис. 3–4 представлено поле $u(r)$ для наборов значений T_{ext} и h.

3. Первая и третья краевые задачи: решения для температурных полей зависят от типа граничных условий, что видно из сравнения графиков на рис. 3–4.

Таблица 2

Набор значений T_{ext} и h

Номер значения параметра	1	2	3	4
Температура T_{ext}, °C	$T_1 = 0$	$T_2 = 30$	$T_3 = 60$	$T_4 = 100$
Коэффициент теплообмена h, $Вт/(м^2 \cdot гр)$	$h_1 = 0.03$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.1$	$h_4 = 0.2$

Анализируя поведение решений для температурных полей в рамках линейной модели, сделаем следующие выводы:

1. Решения первой краевой задачи соответствуют результатам работы [2] для температурного поля.

2. Результаты решения третьей краевой задачи показывают, что при теплообмене на внешней поверхности устройства (при одинаковых остальных условиях) получаются более высокие значения температурного поля (в зависимости от значения коэффициента теплообмена h).

3. Во всех областях происходит уменьшение температурного поля, но в областях I, II, III, и V температура убывает незначительно (в пределах нескольких градусов). Материалы в этих областях имеют высокие значения коэффициента теплопроводности, которые мало меняются при таких изменениях температуры. В самой широкой области IV температура убывает больше всего, причем температуры на границах этой области могут отличаться на сотни градусов. Поэтому в этой области может оказаться очень существенным учет зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Общая постановка задачи

Как видно из анализа решений в рамках линейной модели, в области IV температура убывает очень сильно, и, следовательно, для этой области необходимо использовать модель, которая учитывала бы зависимость коэффициента теплопроводности k_4 от температуры.

В этом случае модель становится нелинейной и для области IV математически задача об определении температурного поля в устройстве представляет собой нелинейное уравнение второго порядка в частных производных эллиптического типа для кусочно-гладкой сферически-симметричной среды.

В рамках нелинейной модели в областях I ($0 < r < r_1$), II ($r_1 < r < r_2$), III ($r_2 < r < r_3$) и V ($r_4 < r < r_5$) коэффициенты теплопроводности k_j ($j = 1, 2, 3, 5$) принимаются постоянными; температурное поле u_1 удовлетворяет неоднородному уравнению (3), а температурные поля u_j ($j = 2, 3, 5$) удовлетворяют однородным уравнениям (4). В результате решения уравнений для I, II, III и V областей будут такими же, как в линейной модели.

Примем, что в области IV ($r_3 < r < r_4$) коэффициент теплопроводности k_4 материала зависит от температуры u_4 по закону:

$$k_4 = a \cdot u_4(r) + b, \tag{8}$$

где a и b – постоянные коэффициенты. Тогда температурное поле u_4, будет удовлетворять нелинейному уравнению второго порядка:

$$\operatorname{div}\big(k_4\left(u_4(r,\theta,\varphi)\right) \cdot \operatorname{grad} u_4(r,\theta,\varphi)\big) = 0, \tag{9}$$

которое для сферически-симметричного случая и с учетом (8) запишется

$$\left(a \cdot u_4(r) + b\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u_4(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u_4(r)}{\partial r}\right) + a \cdot \left(\frac{\partial u_4(r)}{\partial r}\right)^2 = 0. \tag{10}$$

Аналитическое решение этого уравнения имеет вид:

$$u_4(r) = -\frac{b}{a} + \frac{1}{a \cdot r} \cdot \sqrt{b^2 \cdot r^2 - 2 \cdot a \cdot r \cdot \_C1 + 2 \cdot a \cdot r^2 \cdot \_C2}, \tag{11}$$

_C1 и *_C2* – некоторые постоянные. Заметим, что программа, написанная в MAPLE для решения этого нелинейного уравнения, дает три аналитических решения, однако физическим условиям отвечает только решение (11).

Переопределяя постоянные, получим совокупность решений в виде (3) с другой функцией $u_4(r)$:

$$u_4(r) = -\frac{b}{a} + \frac{1}{a \cdot r} \cdot \sqrt{b^2 \cdot r^2 - 2 \cdot a \cdot r \cdot C_6 + 2 \cdot a \cdot r^2 \cdot C_7}. \tag{12}$$

Функция температурного поля $u(r)$ должна в этом случае удовлетворять граничным условиям, рассмотренным ранее: это первая (4а) и третья (4б) краевые задачи. Из условия регулярности $u(r)$ в нуле следует, что $C_0 = 0$.

Аналитическое решение первой краевой задачи

Условия (4) и (4а) для первой краевой задачи записываются как система уравнений на постоянные C_j (j = 1, 2, …, 9) вида (5) с заменой уравнений, в которые входят совокупности (C_4, C_5, C_6, C_7) и (C_6, C_7, C_8, C_9) на уравнения

$$C_4 + \frac{C_5}{r_3} = -\frac{b}{a} + \frac{k_4(r_3)}{a \cdot r_3}, -\frac{b}{a} + \frac{k_4(r_4)}{a \cdot r_4} = C_8 + \frac{C_9}{r_4}, \tag{13}$$

$$C_8 + \frac{C_9}{r_5} = T_{ext}. \tag{14}$$

Получаемая система уравнений на коэффициенты C_j является нелинейной, а ввиду многослойности устройства еще и громоздкой. Средствами пакета MAPLE эту систему удается решить и получить аналитические выражения для постоянных C_i:

$$\begin{gathered}
C_1 = C_4 + \left(H_7 \cdot \frac{r_1}{r_2} + H_8\right) \cdot r_1^2 \cdot \rho, C_2 = C_4 + H_7 \cdot \frac{r_1^3}{r_2} \cdot \rho, C_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{r_1^3}{k_2} \cdot \rho, \\
C_4 = -\frac{b}{a} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r_1^3}{k_3 \cdot r_3} \cdot \rho + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{H_0}}{a \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5}, C_5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{r_1^3}{k_3} \cdot \rho, C_6 = -\frac{1}{3} \cdot r_1^3 \cdot \rho, \\
C_7 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot T_{ext}^2 + \left(b + a \cdot P_1 \cdot r_1^3 \cdot \rho\right) \cdot T_{ext} + a \cdot P_2 \cdot r_1^6 \cdot \rho^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{r_1^3}{k_4} \cdot \rho + b \cdot P_1 \cdot r_1^3 \cdot \rho, \\
C_8 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{r_1^3}{k_5 \cdot r_5} \cdot \rho + T_{ext}, C_9 = \frac{1}{3} \cdot \frac{r_1^3}{k_5} \cdot \rho,
\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}
H_1 = (r_5 - r_4)^2 \cdot a^2 \cdot k_3^2 \cdot r_3^2 \cdot r_5^2, H_2 = (r_5 - r_4) \cdot a^2 \cdot k_3^2 \cdot k_5 \cdot r_3^2 \cdot r_4 \cdot r_5, \\
H_3 = a \cdot \left(k_5^2 \cdot r_4^2 \cdot r_5^2 + \left((r_5 - r_4) \cdot b \cdot k_5 \cdot r_4 \cdot r_5 - k_5^2 \cdot r_4 \cdot r_5^2\right) \cdot r_3\right) \cdot k_3^2 \cdot r_3, \\
H_0 = H_1 \cdot r_1^6 \cdot \rho^2 + 6 \cdot (H_2 \cdot T_{ext} + H_3) \cdot r_1^3 \cdot \rho + 9 \cdot H_4 + 18 \cdot H_5 \cdot T_{ext} + 9 \cdot H_6 \cdot T_{ext}^2, \\
H_7 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2}\right), H_8 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2}\right), P_1 = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{k_5 \cdot r_5} - \frac{1}{k_5 \cdot r_4}\right), P_2 = \frac{1}{18 \cdot k_5^2} \cdot \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_5}\right)^2.
\end{gathered} \tag{16}$$

Заметим, что программа, написанная в MAPLE для решения нелинейной системы, не дает явных выражений и требуется дополнительное символьное программирование для преобразования результата, и затем выбора физически приемлемого из набора решений, выдаваемых программой.

Аналитическое решение третьей краевой задачи

Условия (4) и (4б) для третьей краевой задачи записываются как система уравнений (5) и (13), и уравнение

$$-\frac{C_9}{r_5^2}=h\cdot\left(T_{ext}-C_8-\frac{C_9}{r_5}\right). \tag{17}$$

Решая эту систему уравнений средствами MAPLE, находим аналитические выражения для постоянных C_i:

$$C_1=C_2+H_8\cdot r_1^2\cdot\rho,\ C_2=C_4+H_9\cdot\frac{r_1^3}{r_2}\cdot\rho,\quad C_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{r_1^3}{k_2}\cdot\rho,$$

$$C_4=-\frac{b}{a}+\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{H_0}}{a\cdot k_5\cdot h\cdot r_3\cdot r_4\cdot r_5^3},\quad C_5=\frac{1}{3}\cdot\frac{r_1^3}{k_3}\cdot\rho,\quad C_6=-\frac{1}{3}\cdot r_1^3\cdot\rho, \tag{18}$$

$$C_7=\frac{1}{18}\cdot\frac{Y_1\cdot r_1^6\cdot\rho^2+6\cdot Y_2\cdot r_1^3\cdot\rho+9\cdot Y_3\cdot r_5^4\cdot k_5^2}{h^2\cdot k_5^2\cdot r_4^2\cdot r_5^4},C_8=\frac{1}{3}\cdot\frac{(1-h\cdot r_5)\cdot r_1^3}{h\cdot k_5\cdot r_5^2}\cdot\rho+T_{ext},C_9=\frac{1}{3}\cdot\frac{r_1^3}{k_5}\cdot\rho,$$

где

$$Y_1=\left((r_5-r_4)^2\cdot h^2\cdot r_5^2+2\cdot(r_5-r_4)\cdot h\cdot r_4\cdot r_5+r_4^2\right)\cdot a,$$

$$Y_2=\left[\left((r_5-r_4)\cdot h\cdot r_5+r_4\right)\cdot(b+a\cdot T_{ext})-h\cdot k_5\cdot r_5^2\right]\cdot h\cdot k_5\cdot r_4\cdot r_5^2,$$

$$Y_3=a^2\cdot(2\cdot b+a\cdot T_{ext})\cdot r_4^2\cdot T_{ext},$$

$$H_1=a^2\cdot(r_5-r_4)^2\cdot r_3^2\cdot r_5^2,H_2=a^2\cdot(r_5-r_4)\cdot r_3^2\cdot r_4\cdot r_5,$$

$$H_3=a^2\cdot r_1^6\cdot r_3^2\cdot r_4^2,H_4=(r_5-r_4)\cdot k_5\cdot r_3^2\cdot r_4\cdot r_5^3, \tag{19}$$

$$H_5=\left[\left((r_5-r_4)\cdot k_5+b\cdot r_3\right)-b\cdot r_3\cdot r_4\cdot r_5\right]\cdot k_5\cdot r_3\cdot r_4\cdot r_5^2,$$

$$H_6=a\cdot(b+a\cdot T_{ext})\cdot k_5\cdot r_3^2\cdot r_4^2,H_7=(b+a\cdot T_{ext})^2\cdot k_5^2\cdot r_3^2\cdot r_4^2$$

$$H_0=3\cdot\left(H_1\cdot h^2\cdot r_1^6+2\cdot H_2\cdot h\cdot r_1^6+H_3\right)\cdot\rho^2+$$

$$+18\cdot\left(h\cdot(H_4\cdot a\cdot T_{ext}+H_5)\cdot a+H_6\cdot r_5^3\right)\cdot h\cdot r_1^3\cdot\rho+27\cdot H_7\cdot h^2\cdot k_5^4,$$

$$H_8=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{k_1}+\frac{2}{k_2}\right),H_9=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{k_3}-\frac{1}{k_2}\right).$$

Графики и анализ решений в нелинейной модели

В результате для температурного поля в нелинейной модели получаем аналитические решения, представляющие собой кусочно-гладкие функции, описывающие зависимость температуры от радиальной координаты r вида (12) с коэффициентами, определяемыми формулами (15) и (19) для первой и третьей краевых задач соответственно.

Проанализируем полученные точные аналитические решения для нелинейной модели для тех же условий, что и в линейной модели, и построим графики (рис. 5–6) температурного поля в безразмерных переменных, определенных ранее. Модельную

Таблица 3

Набор значений параметров *a* и *b*

Номер значения параметра	1	2	3	4
Параметр *a*, *Вт*/(*м·гр*^{2})	a_1 = –0.005	a_2 = –0.0025	a_3 = 0.005	a_4 = 0.0025
Параметр *b*, *Вт*/(*м·гр*)	b_1 = 0.5890	b_2 = 0.6895	b_3 = 0.3895	b_4 = 0.2895

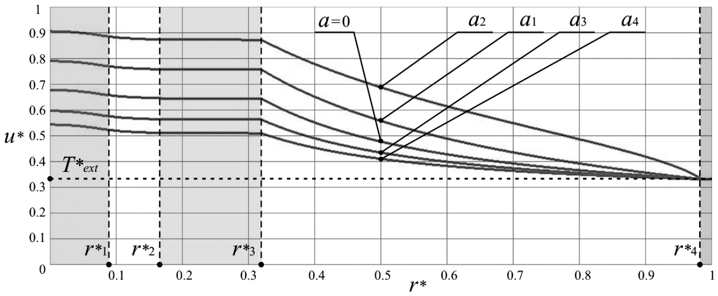

Рис. 5. Температурное поле для разных модельных зависимостей k_4 от температуры (нелинейная модель, первая краевая задача)

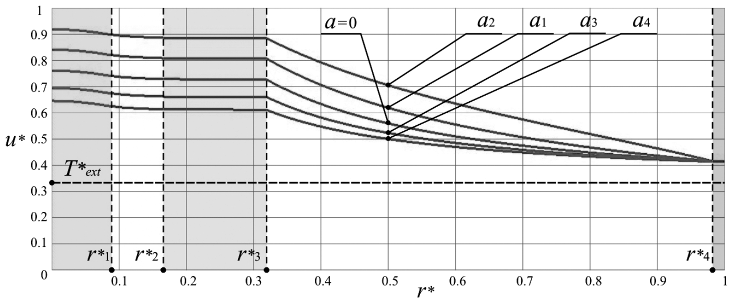

Рис. 6. Температурное поле для разных модельных зависимостей k_4 от температуры (нелинейная модель, третья краевая задача)

зависимость коэффициента теплопроводности k_4 от температуры рассмотрим для набора значений параметров *a* и *b* (табл. 3).

Значения *a* и *b* подбирались так, чтобы значение k_4 в середине температурного диапазона соответствовало значению, использованному в [2] и линейной модели.

1. Первая краевая задача. Температурное поле определяется значением T_{ext} на его вне-шней поверхности. На рис. 5 представлено поле $u(r)$ для четырех значений параметров *a* и *b* (на графиках отмечены только

a) при T_{ext} = 60°C (центральные линии на графиках соответствует линейной модели, $T^*_{ext} = T_{ext}/180$ °C).

2. Третья краевая задача. Температурное поле определяется значением T_{ext} внешней среды и коэффициентом теплообмена *h*. На рис. 6 представлено поле $u(r)$ для четырех значений параметров *a* и *b* (на графиках отмечены только *a*) при T_{ext} = 60°C.

Анализируя поведение решений для температурных полей в рамках нелинейной модели, сделаем следующие выводы:

1. Результаты решения первой и третьей краевых задач в нелинейной модели показывают, что учет зависимости коэффициента теплопроводности k_4 от температуры значительно изменяет температурное поле устройства: увеличивает при убывании коэффициента теплопроводности с ростом температуры (отрицательные значения параметра *a*) и уменьшает при возрастании коэффициента теплопроводности с ростом температуры (положительные значения параметра *a*).

2. Этот эффект имеет место в нелинейной модели и для первой, и для третьей краевых задач.

3. Наличие этого эффекта (в частности, при возрастании коэффициента теплопроводности с ростом температуры) означает необходимость изменения температурных условий содержания такого объекта в стационарных условиях. Особенно сильно проявление такого эффекта для состояний, при которых перепады температуры в IV области достигают сотен градусов.

В заключение отметим, что результаты представленного в работе модельного анализа температурных распределений (особенно при реализации условий теплообмена на его внешней поверхности) показывают, что следовало бы учесть изменения коэффициентов теплопроводности и для остальных областей, поскольку для всех материалов, из которых оно состоит, коэффициенты теплопроводности растут с увеличением температуры. Отчасти полученные точные решения позволяют это учесть (соответствующим выбором значений), если размеры этих областей невелики; в противном случае необходимо рассматривать более сложные модели, учитывающие все особенности процесса теплопроводности во всех оболочках.

Для получения аналитических решений и их графической визуализации был написан комплекс программ в среде прикладного математического пакета MAPLE.

Автор выражает благодарность д.т.н. В.В. Артисюку за обсуждения результатов и д.т.н. Ю.С. Юрьеву за полезные замечания.

Литература

1. *Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П.* Справочник по теплогидравлическим расчетам. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 360 с.

2. *Kessler G. et al.* Direct Disposal Versus Multiple Recycling of Plutonium/in Proceedings of the International Conference and Technology Exposition on Future Nuclear Systems: Emerging Fuel Cycles and Waste Disposal Options: Global'93, Seattle, Washington, 1993. - P. 277 & 280.

3. *Kessler G.* Analysis for a Future Proliferation Resistant Plutonium, Atomwirtschaft, 2006, 51.

4. Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика. – Фрязино: Век-2, 2006. – 496 с.

5. *Тихоненко А.В.* Векторный анализ в прикладных математических пакетах. – Обнинск: ИАТЭ, 2006. – 80 с.

6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.

7. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 593 с.

Поступила в редакцию 5.02.2007