

# ТОЧНЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**В.А. Галкин, М.А. Забудько**

*Обнинский институт атомной энергетики, г. Обнинск*



В статье рассматриваются методы решения нелинейных уравнений теплопроводности и кинетических уравнений, возникающих при моделировании задачи о кристаллизации вещества. Получено точное решение задачи Стефана. Численная регуляризация проводится на основании метода Галеркина. Исследованы вопросы сходимости.

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из проблем, с которыми связано создание и эксплуатация реакторных установок с жидкометаллическим теплоносителем свинец-висмут, является проблема замораживания-размораживания I контура.

При замораживании сплава, его нагреве и охлаждении в твердом состоянии могут возникать значительные механические воздействия на конструкции, обусловленные несогласованностью перемещений объемов сплава с перемещениями конструкций и соизмеримостью механических свойств сплава в твердом состоянии со свойствами конструкционных материалов.

С целью максимального исключения подобных ситуаций в установках предусматривалось постоянное поддержание контура в «горячем» состоянии как теплом реакции деления, так и с помощью системы внешнего обогрева. Однако даже это не исключало вероятность замораживания контура в некоторых ситуациях.

В связи с этим, практически с первых шагов проектирования установок проводились работы по обоснованию режимов замораживания-размораживания. Решение проблемы шло как по пути прямой экспериментальной отработки режимов на моделях, макетах, элементах оборудования и агрегатах в целом, так и по пути изучения характеристик сплава.

Большим стимулом к дальнейшему решению проблемы замораживания-размораживания явились разработки установок новых поколений, для которых ставилась задача - снять многие ограничения, связанные с режимами кристаллизации.

Поэтому чрезвычайно полезным в этой ситуации оказывается математическое моделирование, позволяющее определять и прогнозировать параметры процесса кристаллизации.

Исторически сложилось, что исследования процесса кристаллизации ведутся в двух практически самостоятельных направлениях. Первое ограничивается рассмотрением тепловой стороны процесса, т.к. при выращивании монокристаллов

из расплава важнейшими факторами, определяющими их качество являются температурные условия: градиенты температуры в монокристалле определяют уровень термомеханических напряжений и концентрацию дислокаций; распределение температуры в расплаве определяет интенсивность конвективных течений, уровень пульсаций температур и характер распределения примесей на фронте кристаллизации и т.д. Таким образом, изучается влияние различных условий теплоотвода от фронта кристаллизации на скорость изменения размеров области, занятой твердой фазой. При этом температура на границе раздела фаз считается совпадающей с температурой их равновесия, фронт кристаллизации считается единым и непрерывным, а возможность возникновения кристаллов в объеме расплава не учитывается. В такой постановке вся проблема может трактоваться как задача математической теории теплопроводности (так называемая, задача Стефана [1]-[4]).

Что касается второго направления в теоретических исследованиях кристаллизации, то его представители обычно ограничиваются изучением собственно кинетики процесса. Они исходят из понятий скорости зарождения и скорости роста кристаллов. Соответствующие математические модели описывают процесс образования и роста поликристаллов (т.е. кристаллов, состоящих из множества мелких частиц-кристаллов) в объеме переохлажденного расплава.

Следует заметить, что как аналитическое, так и численное решение этих двух групп задач представляет собой довольно сложную проблему из-за негладкости коэффициентов и нелинейности уравнений. В данной статье предлагаются некоторые новые подходы к их решению основанные на применении метода Галеркина. Кроме того, получено частное точное решение двумерной задачи Стефана.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Пусть требуется найти  $U^1(x,t), U^2(x,t)$ - температуры в различных фазах вещества и поверхность  $S_T$ - фронт раздела фаз. Поверхность  $S_T$  является простой незамкнутой гладкой поверхностью. В качестве области определения независимых переменных  $x=(x_1, x_2, x_3)$  и  $t$  берется область  $D \times [0, T]$ , причем  $U^1, U^2$  и  $S_T$  должны быть найдены из условий:

$$\alpha(U^n)U_t^n - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k(U^n) \frac{\partial U^n}{\partial x_i} \right) = 0, \quad n=1,2; \quad i, j=1,2,3, \quad (1)$$

где  $\alpha(U), k(U)$  - коэффициенты, зависящие от свойств кристаллизующегося вещества. Здесь следует заметить, что данные коэффициенты не являются гладкими в общем случае и могут иметь разрывы первого рода.

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad U|_{\partial D} = 0. \quad (2)$$

$$[U]_{S_T} = 0. \quad (3)$$

Условие (3) обозначает равенство температур  $U^1$  и  $U^2$  на линии фронта кристаллизации. Знак  $[ ]$  обозначает скачок ( $[U]=U^1-U^2$ ).

Кроме того, на границе раздела фаз выполнено условие Стефана (4), являющееся следствием закона сохранения энергии.

$$\lambda \rho \frac{\partial x_i}{\partial t} = k_1 \frac{\partial U^1}{\partial x_i} \Big|_{S_T} - k_2 \frac{\partial U^2}{\partial x_i} \Big|_{S_T} = [k U_{x_i}]_{S_T}, \quad (4)$$

где  $\rho$  - плотность вещества;  $\lambda$  - скрытая теплота кристаллизации;  $k_1, k_2$  - коэффициенты теплопроводности в разных фазах вещества.

Было доказано, что данное условие аналогично условию Гюгонио для уравнений газовой динамики. Таким образом, при решении тепловой задачи о кристаллизации вещества учет этого условия не является обязательным.

Для двумерной задачи (1)-(4) при случае сферической геометрии и когда  $k(U^1) = a_1^2, k(U^2) = a_2^2$ , удалось получить точное решение:

$$U^1(r, z, t) = C_1^1 J_0\left(\sqrt{\frac{1}{v^2}} r\right) \exp(a_1^2(\gamma - v)t - \gamma^2 z) + C_2^1,$$

$$U^2(r, z, t) = C_1^2 J_0\left(\sqrt{\frac{1}{v^2}} r\right) \exp(a_2^2(\gamma - v)t - \gamma^2 z) + C_2^2,$$

где  $r, z$  - пространственные переменные,  $t$  - температура,  $U^1(r, z, t), U^2(r, z, t)$  - температуры в разных фазах,  $C_1^1, C_1^2, C_2^1, C_2^2, \gamma, v$  - const.

### ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)-(3)

Задаче Стефана посвящена обширная литература (например, [1] - [4]). Однако вопрос о существовании классического решения задачи Стефана для многомерного случая остается нерешенным до последнего времени. Причина этого, как уже говорилось во введении, это - нелинейность самой задачи и разрывность коэффициентов  $\alpha(U), k(U)$  на границе раздела фаз. Для численного решения задач такого типа очень эффективным оказывается введение понятия обобщенного решения в смысле Филлипова [5].

Пусть  $Q = R^3; \Omega = R^1$ . Рассмотрим:  $\mathcal{B}^k$  - счетную систему борелевых функций;  $\mathcal{B}^\infty$  - бесконечно дифференцируемые функции по переменным  $(x, t) \in R^n \times R^1$ ;  $L(A, q)$  - множество борелевых функций на множестве  $A$ , локально суммируемых по борелевой мере  $v$ , где  $v = dx \otimes dt$ . На множестве функций

$$M = \{U \in L_1(Q, v) : k(U) \in L_1^{loc}(Q, v)\}$$

рассматривается система интегральных уравнений относительно неизвестной переменной  $U \in M$

$$\int_Q [U g_t + \sum_i \tilde{k}(U) g_{x_i x_i}] dx dt + \int_\Omega g(x, 0) \varphi(x) dx = 0 \quad (5)$$

$$\forall g(x, t) \in \mathcal{B}^\infty.$$

Система (5) служит для определения обобщенного решения  $U \in M$  задачи Стефана (1)-(3).

В работах [6], [7] построены разностные методы решения системы (5), которые, однако, обладают рядом недостатков. Во-первых, для расчета по таким методам многомерных задач требуются очень большие аппаратные ресурсы и много времени. Во-вторых, такие методы позволяют рассчитывать либо некоторые интегральные характеристики процесса, например, потенциал теплового поля, либо используют какое-то сглаживание разрывных коэффициентов уравнений. Поэтому они не позволяют вычислить с достаточной точностью положение фронта кристаллизации, что является совершенно необходимым с практической точки зрения.

Предлагаемое в работах [8] - [9] расширение понятия решения (функциональное решение) позволяет обосновать сходимость приближенных методов при наличии равномерной по параметру априорной оценки аппроксимаций в пространствах  $L_p^{loc}, 1 \leq p \leq \infty$ .

### ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)-(3)

Обозначим  $\varepsilon$  как векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций

$$F_{g,g_1} = U g_t + \sum_i \tilde{k}(U) g_{x_i x_i} + U g_1$$

с произвольными  $g_1 \in \mathcal{B}$ ,  $g \in \mathcal{B}^\infty$ . Для каждого вектора  $F \in \varepsilon$  определим операторы  $\pi$ ,  $\pi_0$  следующими соотношениями:

$$\pi(F_{g,g_1}) = F_{g,0}, \pi_0(F_{g,g_1}) = F_{0,g}|_{t=0}.$$

Пусть  $\varepsilon^+ = \{l\}$ - алгебраически сопряженное пространство к  $\varepsilon$ . На  $\varepsilon^+$  зададим топологию  $\sigma(\varepsilon^+, \varepsilon)$  посредством системы полунорм  $\{p_F\}_{F \in \varepsilon}$ , где  $p_F(l) = |l(F)|$ ,  $F \in \varepsilon$ ,  $\forall l \in \varepsilon^+$ . Рассмотрим вложение множества  $M$  в  $\varepsilon^+$ , которое определим формулой

$$\forall U \in M: U \alpha \quad l_U \in \varepsilon^+, \quad l_U = \int_Q (F \circ U)(dQ), F \in \varepsilon.$$

В работе [9] доказано, что это вложение мономорфно на классах эквивалентности функций из  $M$ . Обозначим  $[M]$ - замыкание образа вложения множества  $M$  в  $\varepsilon$ . На множестве  $[M]$  рассмотрим индуцированную тихоновскую топологию  $\sigma(\varepsilon^+, \varepsilon)$ .

**Определение 1.** Элемент  $l \in [M]$  назовем функциональным решением уравнения (1), если для каждого элемента  $F \in \varepsilon$  справедливо равенство

$$l(\pi(F)) + l_{U_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (6)$$

**Определение 2.** Приближенный метод **АМ** решения задачи (5) слабо аппроксимирует задачу (6), если можно указать заданную этим методом обобщенную последовательность приближений  $U_{\alpha_n} \in M$ , для которой значения невязки

$$\delta_n(F) = \left| l_{U_{\alpha_n}}(\pi(F)) + l_{U_{\alpha_n}|_{t=0}}(\pi_0(F)) \right| + \left| \left( l_{U_0}^{(0)} - l_{U_{\alpha_n}|_{t=0}}^{(0)} \right) \pi_0(F) \right|, F \in \varepsilon, n \in \mathbb{N}$$

стремятся к нулю при каждом  $F \in \varepsilon$  когда  $n \rightarrow \infty$

**Определение 3.** Приближенный метод **АМ** сходится, если он определяет сходящуюся последовательность  $l_{U_{\alpha_n}}$  в пространстве  $[M]$ , пределом которой является функциональное решение задачи (6).

**Определение 4.** Назовем приближенный метод **АМ** слабо устойчивым, если

$$\sup_{\alpha \in A_K} \int |U_\alpha| v(dQ) < \infty$$

для каждого компакта  $K \subset Q$ .

Эффективность введенных понятий обусловлена их проверяемостью и возможностью доказательства существования в целом функциональных решений, являющихся предельными точками методов со свойствами слабой аппроксимации и слабой устойчивости. В работе [9] была доказана следующая теорема на основании которой ниже будет обоснована применимость метода Галеркина для решения задачи Стефана.

**Теорема 1.** Пусть приближенный метод **АМ** слабо аппроксимирует задачу (6) и является слабо устойчивым. Тогда он сходится к регулярному функциональному решению задачи (6).

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)-(3)**

Рассмотрим счетную систему борелевых функций  $\{\phi_j\}$ . Определим приближенный метод решения задачи (1)-(3) посредством следующих соотношений:

$$U^m = \sum_{j=1}^m C_j^m(t) \phi_j(x), m \geq 1, \quad (7)$$

$$\int_Q [U^m \phi_k + \sum_i \tilde{k}(U^m) \phi_{k x_i x_i}] dx dt = 0, \quad (8)$$

$$U^m|_{t=0} = U_0^m. \quad (9)$$

Для доказательства сходимости этого метода достаточно проверить свойства слабой аппроксимации и слабой устойчивости. Доказательство того, что невязка метода стремится к нулю аналогично приведенному в книге [10]. Слабая устойчивость метода обосновывается на основании априорных оценок, из которых следует свойство равномерной локальной суммируемости для  $U^m$ . Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Приближенный метод (7)-(9) сходится к регулярному функциональному решению задачи (1)-(3).

**ТОЧНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА**

При помощи метода, описанного в предыдущем пункте, можно приближенно найти значения температур в обеих фазах вещества. Дальнейшее точное восстановление поверхности фазового перехода осуществляется на основании решения следующего дифференциального уравнения:

$$\Phi_t + (k_1 \text{grad} U^1 - k_2 \text{grad} U^2, \text{grad} \Phi) = 0, \quad (10)$$

где  $k_1 = \text{const} > 0$ ,  $k_2 = \text{const} > 0$ ,  $F(x, t) = 0$  - уравнение поверхности фазового перехода.

Уравнение (10) может быть легко получено из классического условия Стефана (4). Как можно видеть уравнение (10) эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V \Phi) = 0, \quad (11)$$

где  $V$  - скорость фронта кристаллизации, причем очевидно, что она не обладает свойством гладкости.

Как видно из (11) расчет поверхности фазового перехода можно вести, зная только скорость кристаллизации. Современные средства ультразвукового зондирования позволяют измерять эту скорость непосредственно во время ростового эксперимента. Таким образом возможно управление параметрами эксперимента на основании данных о положении и форме фронта.

Для приближенного решения уравнения (11) используем метод исчезающей вязкости, на основании решения следующих аппроксимирующих задач:

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V \Phi_\alpha) = \alpha_i \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2}, \Phi|_{t=0} = \Phi_0. \quad (12)$$

Сходимость метода обоснована в работе [9].

**Теорема 3.** Пусть при  $\forall \alpha = \{\alpha_i\}_1^m$  задача (12) имеет гладкое решение, которое удовлетворяет требованию равномерной локальной суммируемости

$$\sup_{\alpha_i} \int_0^T \int_{R^3} \|\Phi_{\alpha}\| dx dt < \infty$$

на каждом компакте  $K \subset R_3 \times R_1^+$ . Тогда для некоторой обобщенной подпоследовательности  $\alpha^{(k)} \rightarrow 0$  приближения  $\Phi_{\alpha}$  сходятся к функциональному решению задачи (12).

Для численного решения уравнения (12) снова используется метод Галеркина, применимость которого для параболического уравнения такого вида обоснована в [11].

## КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ОБЪЕМНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

При полном математическом моделировании процессов тепло- и массопереноса при кристаллизации возникают значительные трудности из-за того, что на течение расплава влияет тонкий слой между твердой и жидкой фазами вещества. Этот слой не является ни жидкостью, ни твердым телом, и поэтому все его физические свойства не определены. Предлагаемая математическая модель описывает поведение такого слоя на основании гипотезы, что он состоит из частичек, зародышей кристаллизации (твердой фазы вещества) и переохлажденного расплава (жидкой фазы).

Рассмотрим в ограниченном объеме механическую смесь частичек и расплава. Частичек достаточно много, и они движутся хаотически. Состояние этой системы в каждый момент времени  $t$  описывается плотностью вероятности распределения частиц  $f(m, t)$  по массам  $m$ . В начальный момент времени состояние системы задается плотностью вероятности распределения  $f_0$ . Новые частицы могут поступать в нашу систему за счет источника, который действует с интенсивностью  $q(m, t)$ . На практике источником может быть, например, неоднородность среды, т.е. мы помещаем в нашу систему ионы какого-либо вещества, на них немедленно конденсируется расплав и образуются новые частицы. Функция  $\Phi$  - это интенсивность столкновений частиц.

Гипотеза, на основе которой написано уравнение (13), предполагает коагуляционный характер кристаллизации. Для пояснения рассмотрим пробную частицу, которая проходит через расплав. Во время этого прохождения масса частицы увеличивается за счет ее движения в спектре. Это отражает второе слагаемое в левой части нашего уравнения (13), т.е. второе слагаемое - это эволюция в фазовом пространстве за счет «поедания» других частиц. Это слагаемое отражает власовский подход в нашем уравнении, но в отличие от модели Власова, где нет соударений, у нас соударения есть. Следовательно, в процессе движения пробная частица при столкновении может либо погибнуть, либо поглотить частицу, с которой она столкнулась. Интенсивность гибели частиц спектра отражает первое слагаемое в правой части уравнения (13). И, наконец, первое слагаемое в левой части отражает изменение спектра.

Таким образом, наша модель кристаллизации описывается уравнением (13), которое есть уравнение Лиувилля для системы частиц, где учитывается их гибель, т.е. изменение фазового пространства.

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} + \frac{\partial m f(m, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} f(m, t) \int_0^{\infty} \Phi(m, y) f(y, t) dy + q(m, t), t > 0. \quad (13)$$

Начальное условие:

$$f|_{t=0} = f_0 \geq 0. \quad (14)$$

Считаем, что интенсивность столкновений частичек  $F(m, t)$  является гладкой функцией и  $0 \leq \Phi(m, y) = \Phi(y, m) < \infty$ . Функция  $q(m, t)$  также является ограниченной.

Вдоль характеристик уравнения (13) имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\gamma f + q, \quad (15)$$

где

$$\gamma(f) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial m} \int_0^\infty \Phi(m, y) f(y, t) y dy + \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi(m, y) f(y, t) dy,$$

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi(m, y) f(y, t) y dy.$$

Отсюда легко видно, что задача Коши (15), (14) имеет следующее решение:

$$f = f_0 \exp \left[ - \int_0^t \gamma(f) d\tau \right] + \int_0^t \exp \left[ - \int_\tau^t \gamma(f) ds \right] q(\tau) d\tau. \quad (16)$$

На основании ряда априорных оценок для (16) можно доказать следующую теорему.

**Теорема 4.** Пусть  $f_0, q \in C$ , ограничены при  $0 \leq t \leq T$ . Тогда существует единственное решение задачи (13), (14) при  $0 \leq t \leq T$ .

Из уравнения (16) видно, что неотрицательным начальным данным соответствует неотрицательное, ограниченное локальное решение. Следовательно, это решение может быть продолжено на все неотрицательные времена.

**Теорема 5 (продолжение локального решения).** Для условий теоремы 4 решение задачи (13), (14) существует и единственно при  $t \geq 0$ .

Построим приближенный метод решения задачи (13), (14), взяв за основу метод Галеркина. Рассмотрим систему финитных функций  $\{\phi_i\} \in W_2^1$ . Приближенное решение ищем в виде:

$$f^n(m, t) = \sum_{i=0}^n \xi_i(t) \phi_i(m). \quad (17)$$

Коэффициенты определяются из следующей системы:

$$\iint \left[ f^n \frac{\partial \Phi}{\partial t} + m f^n \frac{\partial \Phi}{\partial m} + \sigma(f^n) \Phi - q \Phi \right] dm dt, \quad (18)$$

где

$$\sigma(f^n) = \frac{1}{2} f^n(m, t) \int_0^\infty \Phi(m, y) f^n(y, t) dy.$$

Воспользовавшись законами диссипации, выполненными для нашего уравнения (13), и свойством неотрицательности решения  $f^n$  можно получить следующую оценку:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\infty |f^n| dm \leq TQ, \text{ где } Q = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\infty q(m, t) dm. \quad (19)$$

Оценка (19) означает слабую устойчивость приближенного метода (17)-(18). Поэтому легко убедиться в справедливости следующей теоремы.

**Теорема 6.** Приближенный метод (17)-(19) сходится к регулярному функциональному решению задачи (13)-(14).

Для задачи Коши (13)-(14) были получены некоторые точные решения.

Рассмотрим уравнение (13). Возьмем  $\Phi \equiv 0; q \equiv 0$ . Используя метод характеристик, получим:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2}fN(t); \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}M(0),$$

где  $N(t)$  – число частиц системы в момент времени  $t$ ,  $N(t) = \int_0^{\infty} f(x,t)dx$ ;  $M(t)$  – пол-

ная масса частиц системы в момент времени  $t$ ,  $M(t) = \int_0^{\infty} xf(x,t)dx$ .

Легко найти, что

$$x(t) = \frac{1}{2}M(0)t + x(0).$$

Используя уравнение (13) и свойство финитности функции  $f$ , можно получить следующее соотношение:

$$N(t) = \frac{2N(0)}{2+t}.$$

Таким образом получаем искомое точное решение

$$f(x,t) = f_0\left(x - \frac{1}{2}M(0)t\right) \frac{2N(0)}{2+t}.$$

На рис. 1-4 представлены точные решения и моменты  $N(t)$ ,  $M(t)$ , а также решения и моменты, найденные приближенно с помощью метода (17)-(19).

Рассмотрим теперь уравнение (13) с ядром  $\Phi \equiv 0$  и источником  $q(x) = A\delta_{x_0}(dx)$ .

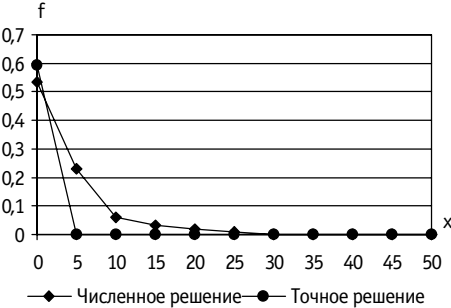


Рис.1. Функция  $f$  в момент времени  $t=1,4$

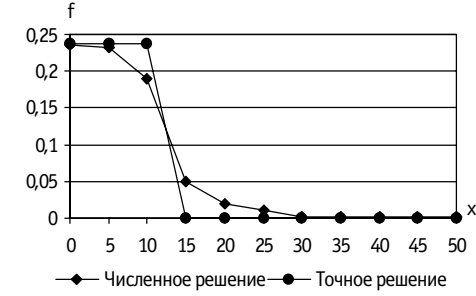


Рис.2. Функция  $f$  в момент времени  $t=6,4$

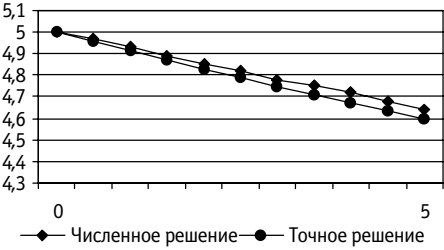


Рис.3. Функция  $N(t)$

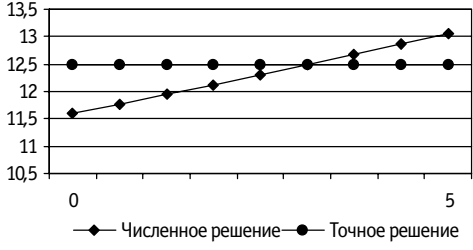


Рис.4. Функция  $M(t)$



Метод характеристик дает:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2}fN(t) + q(x(t)); \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}M(t),$$

где  $N(t)$  – число частиц системы в момент времени  $t$ ,  $M(t)$  – полная масса частиц системы в момент времени  $t$ .

Используя уравнение (13) и свойство финитности функции  $f$ , можно получить следующие соотношения:

$$\dot{N}(t) = -\frac{1}{2}N^2(t) + A, \quad \dot{M}(t) = Ax_0.$$

Таким образом находим:

$$N(t) = \frac{\sqrt{2A}(e^{\sqrt{2A}t} + C + 1)}{(e^{\sqrt{2A}t} + C - 1)}, \quad M(t) = Ax_0t + M(0),$$

где  $C = \frac{2\sqrt{2A}}{N(0) - \sqrt{2A}}$ .

Характеристики выглядят следующим образом:  $x(t) = x(0) + \frac{1}{4}Ax_0t^2 + \frac{1}{2}M(0)t$ .

Выражение для точного решения вдоль характеристик можно записать в виде:

$$f(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t N(\tau)d\tau\right) \cdot \int_0^t f_0(x(0)) + \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t N(\tau)d\tau\right) q(x(s))ds.$$

Окончательно получаем:

$$f(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t N(\tau)d\tau\right) \cdot \left[ f_0\left(x - \frac{A}{4}x_0t^2 - \frac{M(0)}{2}t\right) + \right.$$

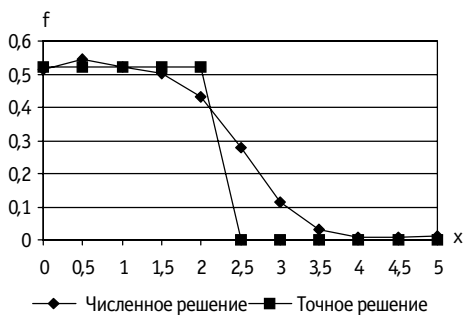


Рис.5. Функция  $f$  в момент времени  $t=0,48$

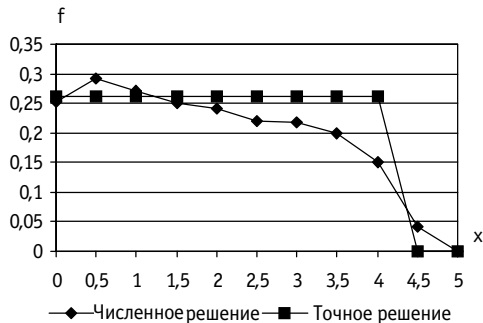


Рис.6. Функция  $f$  в момент времени  $t=1,44$

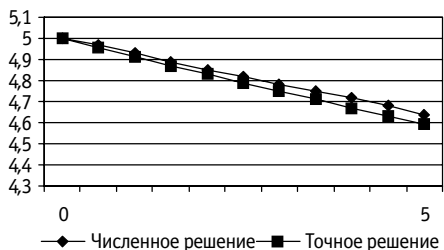


Рис.7. Функция  $N(t)$

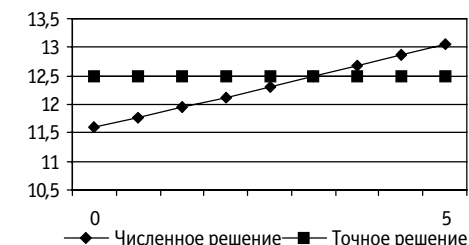


Рис.8. Функция  $M(t)$

$$+ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}(x,t)} N(\tau) d\tau \right) \int_0^t \left( x_0 - \frac{A}{4} x_0 t^2 - \frac{M(0)}{2} t + \frac{A}{4} x_0 s^2 + \frac{M(0)}{2} s \right) ds,$$

где  $\bar{t}(x,t)$  находится из вида характеристик для данного уравнения

$$\bar{t}(x,t) = \frac{-M(0) + M^2(0)/2 + Ax_0 t}{Ax_0}.$$

На рис. 5-8 представлены точные решения и моменты  $N(t)$ ,  $M(t)$ , а также решения и моменты, найденные приближенно с помощью метода (17)-(19) для уравнения (13) с ядром  $\Phi \equiv 0$  и источником  $q(x) = A\delta_{x_0}(dx)$ .

### Список литературы

1. Любов Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах. - М.: Наука, 1975.
2. Будак Б.М., Москал М.Б. О классическом решении I-ой краевой задачи Стефана для многомерного уравнения теплопроводности в координатном параллелепипеде: Труды вычислительного центра. - М.: МГУ, 1971. - С.87-114.
3. Будак Б.М., Гапоненко Ю.Л. О решении задачи Стефана для квазилинейного параболического уравнения с квазилинейными граничными условиями: Труды вычислительного центра. - М.: МГУ, 1971. - С.235-284.
4. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1965. - Т. 5. - № 5. С. 816-827.
5. Филипов А. Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями // Математический сборник. - 1960. - Т.51. - №4. - С.101-128.
6. Бородин М.А. Двухфазная контактная задача Стефана // Укр. мат. журн. - 1995. - Т.47. - №2. - С. 158-167.
7. Марченко М.П., Фрязинов И.В. Комплекс программ Карма 1 решения нестационарных задач выращивания монокристаллов в ампулах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1997. - Т.37. - №8. - С. 988-998.
8. Галкин В.А. Методы решения задач физической кинетики. - Обнинск: ИАТЭ, 1995. - 171 с.
9. Galkin V. A. Global correctness of Cauchy problem for nonlinear conservation laws systems and one example for the gas dynamics // International series of numerical mathematics. - 1999. - V. 129. - P. 361-367.
10. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.
11. Ладыженская О.А., Солонилов В.В., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 28.01.2000.

## ABSTRACTS OF THE PAPERS

### УДК 621.311.25:621.039(571.16)

*Nuclear Power Engineering in the Power Supply System of Tomsk* \V.N. Mescheryakov, V.I. Boiko, F.P. Koshelev; Editorial board of journal "Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika" (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2000. – 6 pages. – References, 7 titles.

A comparison of ecological and economical aspects of coal and nuclear energy usage in the power supply system of Tomsk is made.

Ecological and economical consequences of hypothetical situation when NPP-1 and NPP-2 of Siberian chemical plant would be replaced by heat-power plants working on coal are surveyed.

### УДК 621.039.586

*The Analysis of Conditions of Transient Process for the De-energization of the Power Unit* \A.Yu. Prohodtsev, N.L. Sal'nikov; Editorial board of journal "Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika" (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2000. – 7 pages, 1 illustration, 2 tables. – References, 7 titles.

Forming of initial and boundary conditions for usage of the RELAP5 code for an analysis of the transient process under de-energization of the VVER-1000 unit is considered. It is shown that the worst conditions as to the safety in design accidents under de-energization of the unit are formed in the case fast reduction device failure.

### УДК 539.17.013

*Exact and Numerical Solutions of Nonlinear Thermal Conductivity and Kinetic Equations* \V.A. Galkin, M.A. Zaboudko; Editorial board of journal "Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika" (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2000. – 10 pages, 8 illustrations. – References, 11 titles.

The methods of solution of nonlinear thermal conductivity and kinetic equations are considered in this paper. Some exact solutions for Stefan problem are received. Numerical regularization is made on the base of the Galerkin method. Convergence problems are investigated.

### УДК 621.039.524.7:621.039.574.5

*Heavy-Water Installations in Russia* \O.V. Shvedov, A.S. Gerasimov, G.V. Kiselev, V.V. Seliverstov, V.V. Petrunin, V.V. Shidlovsky; Editorial board of journal "Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika" (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2000. – 11 pages. – References, 4 titles.

The review of work of the State Scientific Center of Russian Federation-Institute of Theoretical and Experimental Physics - scientific leader in the heavy-water reactors design is represented in this paper. Results of exploitation of the industrial heavy-water reactor L-2, working in isotopic mode are described. It is informed about the conceptual propositions on the development of new isotopic heavy-water reactor for providing of requirement in radionuclides. The results of examination of subcritical systems for extermination of long-lived radioactive wastage and production of energy are stated.

### УДК 519.6, 539.1

*Atomic Dynamics of Liquid Potassium and Potassium-oxygen Melt from Data of the Molecular-dynamics Simulation and Inelastic Neutron Scattering Experiments* \I.Yu. Shimkevich, M.V. Zaezjev, V.V. Kuzin, A.G. Novikov, V.V. Savostin, A.L. Shimkevich; Editorial board of journal "Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika" (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2000. – 9 pages, 5 illustrations. – References, 36 titles.

An algorithm and procedure for the molecular-dynamics (MD) simulation of liquid potassium and the potassium-oxygen melts are presented. The results of MD-calculation are compared with experimental data on the inelastic neutron scattering. Such approach is the most effective method for studying structural and dynamical properties of condensed matter on the microscopic level.