

# ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛОСКОГО СЛОЯ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ С ИСТОЧНИКАМИ ОБЪЕМНОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

**Ю.В.Липовцев**

*Обнинский институт атомной энергетики, г.Обнинск*

**Р**

Рассмотрена краевая задача о распределении интенсивности переноса тепла излучением в плоском слое оптически полупрозрачного материала, обладающего свойствами объемного излучения, при таких предпосылках, которые позволили получить аналитическое решение для объемной плотности выходящего излучения. Предполагается, что интенсивность объемного тепловыделения во всех точках одинаковая, одинаковы условия теплообмена на границах плоского слоя, а его оптическая толщина такова, что условия симметрии решения относительно срединной плоскости можно заменить условиями на бесконечности при удалении от границы, рассеяние предполагается изотропным (индикатриса рассеяния равна единице). Полученные результаты представляют практический интерес как тестовый вариант, например, при апробации методов и алгоритмов численного решения данного класса задач для более общих случаев.

Функция распределения интенсивности излучения  $\Phi(x, \mu)$  в плоском слое изотропно-излучающей и рассеивающей среды определяется решением интегродифференциального уравнения

$$\mu \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \alpha \Phi = \frac{\beta}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + b, \quad \alpha = k + \beta, \quad \mu = \cos \theta, \quad (1)$$

где  $k$  - спектральный коэффициент поглощения;  $\beta$  - коэффициент рассеяния;  $\theta$  - угол между направлением излучения и осью  $x$ , направленной по толщине слоя;  $b$  - интенсивность внутренних источников объемного излучения.

Граничные условия

$$\Phi(0, \mu) = 0, \quad \mu \geq 0; \quad \Phi(x, \mu) = \Phi_0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где  $\Phi_0 = b/k$  - частное решение уравнения (1). В соответствии с этим общее решение представим в виде:

$$\Phi(x, \mu) = \Phi_0 + \psi(x, \mu)$$

и для функции  $\psi$  получим однородное интегродифференциальное уравнение

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \psi = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \psi(\xi, \mu') d\mu', \quad (3)$$

где введена безразмерная переменная  $\xi = \alpha x$  и  $\omega = \beta/\alpha$ . Граничные условия для функции  $\psi$  будут

$$\psi(0, \mu) = -\Phi_0, \quad \mu \geq 0; \quad \psi(\xi, \mu) = 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Таким образом, мы получили однородное уравнение переноса, для решения которого воспользуемся методом, развитым в работах К.Кейза [1, 2]. В соответствии с граничными условиями (4) разыскиваются решения, затухающие при удалении от поверхности слоя

$$\psi(\xi, \mu) = \varphi_v(\mu) \cdot e^{-\xi/v}. \quad (5)$$

По аналогии с обычной терминологией функции  $\varphi_v(\mu)$  будем называть собственными функциями, а соответствующие им значения  $v$  собственными значениями. После подстановки (5) в уравнение (3) получим

$$\left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \cdot \varphi_v(\mu) = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\mu') d\mu'. \quad (6)$$

Так как данное уравнение является однородным и линейным, то нормировка функции  $\varphi$  может быть произвольной. Поэтому для удобства примем

$$\int_{-1}^1 \varphi(\mu) d\mu = 1. \quad (7)$$

Уравнение (6) выглядит довольно простым и при условии (7) решение можно записать в виде:

$$\varphi_v(\mu) = \frac{\omega v}{2(v - \mu)}. \quad (8)$$

Если  $v \neq \mu$ , а  $\mu$  принадлежит отрезку  $-1 \leq \mu \leq 1$ , то из уравнения (7) находятся собственные значения  $v$ . Действительно, подставив (8) в уравнение (7), получим уравнение для определения собственных значений  $v$

$$1 - \omega \operatorname{arctg} \frac{1}{v} = 0. \quad (9)$$

Очевидно, что при  $\omega < 1$  оно имеет только два корня  $\pm v_0$ , лежащие на действительной оси и этим корням соответствуют две функции (8). Но поиск решений уравнения (6) на этом не завершается, т.к. при всех значениях  $v$  на отрезке  $-1 \leq v \leq 1$  существует континуум собственных функций вида:

$$\varphi_v(\mu) = \frac{\omega v}{2(v - \mu)} + \lambda(v) \delta(v - \mu), \quad (10)$$

где  $\delta(v - \mu)$  - обобщенные  $\delta$ -функции, а  $\lambda$  находится из условия нормировки (7)

$$\lambda(v) = 1 - \frac{\omega v}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v - \mu}. \quad (11)$$

Вычисляя главное значение интеграла, получаем для  $\lambda$  явное выражение

$$\lambda(v) = 1 - \omega v \operatorname{arctg} v. \quad (12)$$

Таким образом, кроме двух дискретных собственных значений  $\pm v_0$  существует континуум всех значений  $v$  на отрезке  $-1 \leq v \leq 1$  и соответствующие им собственные функции (10), которые в совокупности с функциями (8) составляют систему функций, с помощью которой искомое решение можно представить в виде:

$$\Phi(\xi, \mu) = \Phi_0 \left( 1 + a_0 \varphi_0 e^{-\frac{\xi}{v_0}} + \int_0^1 A_v(\mu) e^{-\frac{\xi}{v}} dv \right). \quad (12)$$

Коэффициенты разложения находятся из граничного условия (2) при  $\xi = 0$

$$a_0 \varphi_0 + \int_0^1 A_v \varphi_v(\mu) dv = -1.$$

Интегральные представления этих коэффициентов в общем виде для произвольной функции справа получаются при использовании условий ортогональности собственных функций. В данном случае они принимают вид:

$$a_0 = \frac{4}{\omega^2 v^2 X(v_0)} \int_0^1 W(\mu) \varphi_0(\mu) d\mu, \quad A_v = -\frac{v}{W(v)N(v)} \int_0^1 W(\mu) \varphi_v(\mu) d\mu,$$

где  $W, X, N(v)$  – известные функции, свойства которых приведены в монографии Чандрасекара [3].

На этом изложение метода Кейза решения уравнения переноса, приводящего к полной аналогии с задачами классических дифференциальных уравнений с частными производными и методом Фурье, можно закончить и перейти к результатам, которые удалось получить при определении функции распределения объемного излучения, выходящего из плоского слоя излучающей среды через границу  $x=0$ . Подставив коэффициенты  $a_0, A_v$  в общую формулу (13) и применяя тождество Чандрасекара

$$\Phi(0, \mu) = \Phi_0 \left( 1 - \frac{1}{X(\mu)} \int_0^1 \gamma(\mu') \left( \frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{1}{v_0 - \mu} \right) d\mu' \right), \mu \leq 0.$$

получим выражение для интенсивности выходящего излучения

$$\Phi(0, \mu) = \Phi_0 \left( 1 - \frac{1}{X(\mu)} \int_0^1 \gamma(\mu') \left( \frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{1}{v_0 - \mu} \right) d\mu' \right), \mu \leq 0. \quad (14)$$

Функция  $\gamma$  такова, что

$$\int_0^1 \frac{\gamma(\eta)}{\eta - \mu} d\eta = X(\mu), \quad \int_0^1 \gamma(\eta) d\eta = 1. \quad (15)$$

С учетом этих интегралов выражение (14) принимает вид:

$$\Phi(0, \mu) = \Phi_0 \frac{1}{X(\mu)(v_0 - \mu)}, \mu \leq 0. \quad (16)$$

Для дальнейших преобразований заменим  $\mu$  на  $-\mu$ , считая  $\mu > 0$ , и обозначим через  $\Phi_e(\mu)$  интенсивность выходящего излучения

$$\Phi_e(\mu) = \Phi_0 \frac{1}{X(-\mu)(v_0 + \mu)}, \mu \geq 0. \quad (17)$$

Выразим функцию  $X(-\mu)$  через  $H$ -функцию, которая протабулирована Чандрасекаром. Тогда выражение (17) примет вид:

$$\Phi_e(\mu) = \Phi_0 H(\mu) \sqrt{1 - \omega}, \mu \geq 0. \quad (18)$$

Для функции  $H(x)$  известен интеграл

$$\int_0^1 H(x) dx = \frac{2}{\omega} (1 - \sqrt{1 - \omega}). \quad (19)$$

Это позволяет определить объемную плотность выходящего излучения

$$P_e = \frac{1}{\Phi_0} \int_0^1 \Phi_e(\mu) d\mu = \frac{2(\sqrt{1 - \omega} - 1 + \omega)}{\omega}. \quad (20)$$

На рис.1 приведены графики углового распределения интенсивности выходящего излучения полупространства, полученные по формуле (18), на этом рисунке  $\varphi_e = \Phi_e / \Phi_0$ . На рис.2 представлена зависимость объемного излучения (20) от параметра  $\omega$ , характеризующего соотношение спектрального коэффициента поглощения и рассеяния  $\omega = \beta / (\beta + k)$ ,  $0 \leq \omega \leq 1$ .

Аналогичным образом можно получить аналитические решения для других случаев радиационного теплообмена полупространства с окружающей средой, которые представляют интерес в инженерной практике. Рассмотрим полупространство без внутренних источников объемного излучения под действием внешнего облучения. В этом случае в уравнении (1)  $\beta = 0$ , а граничные условия (2) примут вид:

$$\Phi(0, \mu) = \Phi_0 \lambda(\mu), \quad \mu > 0; \quad \Phi(x, \mu) = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (21)$$

где функция  $\lambda(\mu)$  определяет угловое распределение падающего на поверхность  $x=0$  внешнего излучения.

Общее решение теперь принимает вид:

$$\Phi(\xi, \mu) = \Phi_0 \left( a_0 \varphi_0 e^{-\frac{\xi}{v_0}} + \int_0^1 A_v \varphi_v(\mu) e^{-\frac{\xi}{v}} dv \right). \quad (22)$$

Коэффициенты  $a_0, A_v$  находятся из первого граничного условия

$$\lambda(\mu) = a_0 \varphi_0 + \int_0^1 A_v \varphi_v(\mu) dv.$$

Как и в методе Фурье они являются коэффициентами разложения функции  $\lambda(\mu)$ , заданной на границе. В данном случае для них получаем следующие выражения:

$$a_0 = \frac{-4}{(\omega v_0)^2 X(v_0)} \int_0^1 \lambda(\eta) W(\eta) \varphi_0(\eta) d\eta, \quad A_\mu = \frac{v}{N(v) W(v)} \int_0^1 \lambda(\eta) W(\eta) \varphi_v(\eta) d\eta.$$

Для функции углового распределения интенсивности выходящего излучения теперь получим

$$\Phi(0, \mu) = \Phi_0 \frac{1}{\chi(\mu)} \int_0^1 \lambda(\eta) \chi(\eta) \left( \frac{1}{\eta - \mu} - \frac{1}{v_0 - \mu} \right) d\eta, \quad \mu < 0.$$

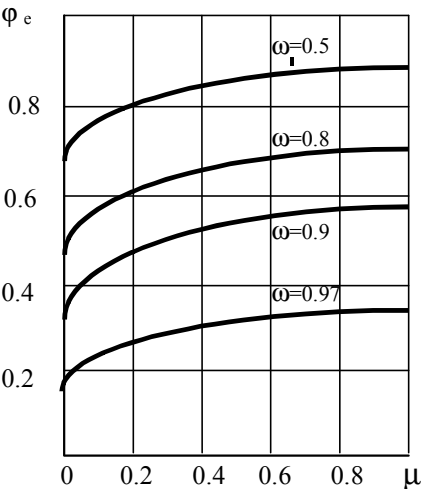


Рис. 1. Графики углового распределения интенсивности выходящего излучения

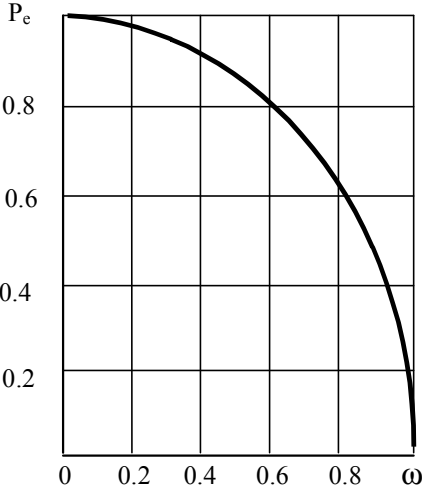


Рис.2. Зависимость объемного излучения от коэффициентов поглощения и рассеяния

В случае диффузного облучения поверхности полупространства интеграл можно выразить через известные функции, как и в предыдущем случае, и интенсивность обратного излучения будет равна

$$\Phi_e(\mu) = \Phi_0(1 - H(\mu)\sqrt{1-\omega}), \quad \mu > 0. \quad (23)$$

Аналогично предыдущему находим и объемную плотность обратного излучения

$$P_e = 1 - \frac{2(\sqrt{1-\omega} + \omega - 1)}{\omega}. \quad (24)$$

В заключение отметим, что функция  $H(x)$ , вошедшая в выражения окончательных результатов рассмотренных задач, определяется решением нелинейного интегрального уравнения

$$H(x) = 1 + \frac{x H(x) \omega}{2} \int_0^1 \frac{H(t)}{t+x} dt. \quad (24)$$

Решение этого уравнения представляет практический интерес по двум аспектам. Во-первых, оно нелинейное, и, кроме того, подынтегральная функция имеет особенность при  $x = t = 0$ . Особенность эта, конечно, устранимая, но при численном решении задачи необходимо предусмотреть процедуру вычисления пределов интегральных сумм, исключаящую вычисление подынтегральной функции непосредственно в точке  $x = 0$ . Для получения результатов, приведенных на рисунках функция  $H(x)$  вычислялась методом простой итерации. При этом установлено, что сходимость итераций имеет место для двух очевидных алгоритмов:

$$H^{N+1}(x) = 1 + \frac{\omega x H^N(x)}{2} \int_0^1 \frac{H^N(t)}{t+x} dt, \quad H^{N+1}(x) = \frac{1}{1 - \frac{\omega x}{2} \int_0^1 \frac{H^N(t)}{t+x} dt}, \quad N=0,1,2,3,\dots, \quad (25)$$

где  $N$  – номер итерации. Отметим также, что интеграл вычислялся по простейшей формуле прямоугольников следующего вида:

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^m \Delta t \cdot f\left(\frac{\Delta t}{2} + \Delta t \cdot (i-1)\right), \quad (26)$$

где  $m$  – число частичных отрезков, на которые делится весь отрезок интегрирования, а подынтегральная функция вычисляется в средних точках. По своей точности эта формула не уступает формуле трапеций, функция  $H(x)$  вычисляется в промежуточных точках  $x_i = (i-1)\Delta x + \Delta x/2$ ;  $i=1,2,3,\dots,m$ ;  $\Delta x = 1/m$  и вычисление подынтегральной функции при  $x=0$  исключено. При этом наблюдается быстрая сходимость результатов, хотя сейчас скорость сходимости не имеет принципиального значения. В качестве начального приближения можно брать константу

$$H^0(\mu) = \frac{2}{\omega}(1 - \sqrt{1-\omega}), \quad (27)$$

которая согласно формуле (19), является средним значением функции  $H(x)$  на отрезке  $[0,1]$ . Путем сравнения с этой константой среднего значения вычисленной функции можно оценить точность итераций в этом интегральном смысле. В приведенной ниже табл.1 по строкам показаны последовательные итерации функции  $H(\mu)$  при  $\omega = 0.5$ , которые получены с шагом интегрирования  $\Delta t = 0.05$ , но в строках приведены значения не для всех узловых точек.

Таблица 1

**Последовательные итерации функции  $H(m)$  при  $\omega = 0.5$ , полученные с шагом интегрирования  $\Delta t = 0.05$**

$N \backslash \mu$	0.025	0.225	0.425	0.625	0.825	0.975
0	1.171573	1.171573	1.171573	1.171573	1.171573	1.171573
1	1.030863	1.130684	1.176363	1.204876	1.224730	1.236139
2	1.025754	1.123012	1.174017	1.207854	1.232312	1.246701
3	1.025522	1.121889	1.173364	1.208071	1.233471	1.248543
4	1.025517	1.121734	1.173230	1.208071	1.233655	1.248876
5	1.025512	1.121713	1.173205	1.208066	1.233685	1.248937
6	1.025511	1.121719	1.173200	1.208064	1.233690	1.248949
7	1.025510	1.121709	1.173200	1.208064	1.233691	1.248951
8	1.025510	1.121709	1.173199	1.208064	1.233691	1.248952

Как видим, уже после третьей итерации результаты не меняются в четвертом знаке после запятой, при этом итерационный процесс устойчив при любом числе итераций.

### **Список литературы**

1. Case K.M. Elementary solutions of the transport equation.//Ann. phys., 1960, 9,1
2. Case K.M. Recent development in neutron transport theory. University of Michigan Memorial Phoenix Project Report, 1961.
3. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. –М.: ИЛ, 1953. - 421с.

Поступила в редакцию 15.02.99.

A possible mechanism is studied as to formation of periodic structures in a defect spectrum due to influence of stationary spatially homogeneous source effect and the fusion of defects.

**УДК 517.911.5:621.039.58**

*Numerical Solution of Vlasov Equation with Noncontinuous Coefficients Applied to NPP Simulation \ M.G.Tkachenko, V.A.Galkin; Editorial board of journal "Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika" (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) - Obninsk, 1999. - 10 pages. - References, 6 titles.*

This paper is devoted to analytical and numerical simulation of the Vlasov-Liouville equation. This equation appears in the models of heat and mass transfer related to the laser fusion problem. Exact solutions are constructed and peculiarities of their applications are discussed.

**УДК 536.423**

*Analytical Estimation of the Efficiency of Steam Flow Transpiration Cooling \ V.T.Buglaev, A.S.Strebkov; Editorial board of journal "Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika" (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) - Obninsk, 1999. - 6 pages, 1 table, 4 illustrations. - References, 5 titles.*

The results of simulation of the process of transpiration cooling of steam flow by dispersed liquid depending on the initial mode parameters of steam-drop mixture are analyzed. The estimations are made of the length of cooler evaporation zone and of the extent of steam cooling under different pressures of two-phase flow. The data on the dynamics of evaporating drops for one of the fractions of cooler poly-disperse spray are given.

**УДК 536.33**

*Radiation from a Flat Layer of Scattering Medium with Volume Sources of Heat Generation \ Yu.V. Lipovtsev; Editorial board of journal "Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika" (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) - Obninsk, 1999. - 6 pages, 1 table, 2 illustrations. - References, 3 titles.*

Consideration is made of boundary-value problem on the intensity distribution of radiative heat transfer in flat layer of a semitransparent material with volume sources of heat generation. An analytical solution for the space density of radiation from the layer was obtained which can be used in various problems of this type.