

## О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ К АНАЛИЗУ ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РЕАКТОРНОЙ ДИНАМИКИ

**А.В. Гулевич, О.Ф. Кухарчук**

*ГНЦ РФ-Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского, г. Обнинск*



В данной работе на основе традиционного подхода теории возмущений и аппарата сопряженных функций сформулированы основные соотношения для оценки отклонений линейных функционалов от периодического решения при изменении параметров исходной краевой задачи на периоде. Главное внимание уделено нетривиальному случаю, когда возмущением задачи является изменение самого периода. Рассмотрены численные и аналитические примеры применения соотношений теории возмущений в простейших задачах нейтронной кинетики и нестационарного теплообмена в твэле импульсно-периодического реактора.

### ВВЕДЕНИЕ

Теория возмущений давно и успешно используется при решении различных нейтронно-физических и инженерных задач ядерной техники [1]. Достаточно полно сформулирован математический аппарат сопряженных уравнений [1,2] для основных функционалов, характеризующих нестационарные режимы работы ядерного реактора и элементов его конструкции, и решения обратных задач реакторной динамики. Вместе с тем существует класс задач динамики, для которых указанный математический аппарат практически не используется. Речь идет о задачах динамики импульсно-периодических реакторов или подкритических реакторов, работающих в периодическом режиме. К таким установкам относятся прежде всего существующие импульсные реакторы периодического действия типа ИБР [3]; подкритические мишенно-бланкетные комплексы для ускорительно-управляемых систем, работающие в импульсно-периодическом режиме [10]; реакторно-лазерные системы на основе реактора периодического действия [4] и т.д.

Обычно при численном анализе задач реакторной динамики приходится решать задачу Коши [5], т.е. задачу с начальным условием по времени. Если оператор или источник задачи – периодические, то искомое решение в асимптотике может иметь периодический характер. В случае, когда система уравнений динамики обладает свойством «жесткости» или является сингулярно-возмущенной (при наличии малых параметров при старшей производной), нахождение периодического решения может потребовать слишком больших затрат машинного времени, которые существенно возрастают при необходимости проводить варианты расчетов при различных значениях параметров задачи.

© А.В. Гулевич, О.Ф. Кухарчук, 2009

При анализе динамики реакторных систем, работающих в импульсно-периодических режимах, зачастую удобнее решать не задачу Коши, а задачу с краевым условием на концах периода. Некоторые численные методы для нахождения таких решений предложены в [6].

В работе на основе традиционного подхода теории возмущений и аппарата сопряженных функций сформулированы основные соотношения для оценки отклонений линейных функционалов от решения на периоде при изменении параметров исходной задачи. Главное внимание уделено нетривиальному случаю, когда возмущением задачи является изменение самого периода. Рассмотрены численные и аналитические примеры применения соотношений теории возмущений в простейших задачах нейтронной кинетики и нестационарного теплообмена в твэле импульсно-периодического реактора.

### ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Математическая модель динамики импульсно-периодического реактора можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{\mathbf{Y}}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau) = \hat{\mathbf{L}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau)\bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau) + \bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau) \quad (1)$$

с условием на границе  $S$  области  $V$   $\hat{\Gamma}(\bar{\mathbf{r}}_s, \tau)\bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}_s, \tau) = 0$  и начальным условием

$$\bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}, 0) = 0. \quad (2)$$

При этом уравнения модели (1) могут описывать как нейтронную кинетику, так и тепловую динамику реактора. Для простоты в модели (1) принято, что матричный оператор  $\hat{\mathbf{L}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau)$  не зависит от решения  $\bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau)$ .

Если оператор  $\hat{\mathbf{L}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau)$  и вектор  $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau)$  являются периодическими по временной переменной с периодом  $\tau_p$ , то решение задачи (1) в асимптотике будет приближенно описываться периодической функцией с таким же периодом, т.е. на больших временах должно выполняться условие периодичности

$$\bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}, 0) = \bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau_p). \quad (3)$$

Важно также отметить, что  $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau) \neq 0$ , т.к. в противном случае необходимо применять другие методы анализа периодических решений уравнения (1).

Для нахождения решения внутри периода можно сразу перейти от задачи с начальным условием (1) к краевой задаче с условием (3).

Введем в рассмотрение задачу, сопряженную к (1), (3) [5],

$$-\dot{\bar{\mathbf{Y}}}^+(\bar{\mathbf{r}}, \tau) = \hat{\mathbf{L}}^+(\bar{\mathbf{r}}, \tau)\bar{\mathbf{Y}}^+(\bar{\mathbf{r}}, \tau) + \bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau), \quad (4)$$

решение которой удовлетворяет граничному условию  $\hat{\Gamma}(\bar{\mathbf{r}}_s, \tau)\bar{\mathbf{Y}}^+(\bar{\mathbf{r}}_s, \tau) = 0$  и условию периодичности

$$\bar{\mathbf{Y}}^+(\bar{\mathbf{r}}, 0) = \bar{\mathbf{Y}}^+(\bar{\mathbf{r}}, \tau_p). \quad (5)$$

Здесь оператор  $\hat{\mathbf{L}}^+(\bar{\mathbf{r}}, \tau)$  является сопряженным к  $\hat{\mathbf{L}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau)$  в смысле тождества Лагранжа:

$$\int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau) \hat{\mathbf{L}}^+(\bar{\mathbf{r}}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}^+(\bar{\mathbf{r}}, \tau) d\bar{\mathbf{r}} d\tau = \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{Y}}^+(\bar{\mathbf{r}}, \tau) \hat{\mathbf{L}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau) d\bar{\mathbf{r}} d\tau.$$

Применяя традиционную процедуру теории возмущений [1] к уравнениям (1) и (4) с учетом граничных условий, введем в рассмотрение произвольный линейный функционал от решения  $\bar{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{r}}, \tau)$  по формуле

$$J_p = \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{Y}}(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau = \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{Y}}^+(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Q}}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau. \quad (6)$$

В этом случае формула для оценки изменения  $\delta J_p$  функционала  $J_p$  при изменениях оператора и источника задачи (1) в форме  $\hat{\mathbf{L}}'(\vec{r}, \tau) \rightarrow \hat{\mathbf{L}}(\vec{r}, \tau) + \delta \hat{\mathbf{L}}(\vec{r}, \tau)$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}'(\vec{r}, \tau) \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}(\vec{r}, \tau) + \delta \bar{\mathbf{Q}}(\vec{r}, \tau)$  и  $\bar{\mathbf{P}}'(\vec{r}, \tau) \rightarrow \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau) + \delta \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau)$  имеет вид, близкий к традиционному [1], за исключением того, что интегрирование по времени здесь ведется на периоде от 0 до  $\tau_p$ :

$$\begin{aligned} \delta J_p = & \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{Y}}^+(\vec{r}, \tau) \delta \hat{\mathbf{L}}(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau + \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{Y}}^+(\vec{r}, \tau) \delta \bar{\mathbf{Q}}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau + \\ & + \int_0^{\tau_p} \int_V \delta \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Формула (7) является точной, если известно решение возмущенной задачи  $\bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau)$ . Для оценки малых возмущений функционала можно воспользоваться формулой «малых» возмущений с заменой в (7)  $\bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau)$  на  $\bar{\mathbf{Y}}(\vec{r}, \tau)$ .

Отметим, что формула (7) не позволяет оценить возмущение функционала при изменении периода  $\tau_p$ . Чтобы найти соотношения для оценки этого возмущения воспользуемся двумя методами.

**Метод преобразования координат.** Введем в рассмотрение задачу, «возмущенную» по отношению к исходной задаче (1), предполагая, что изменению подвергается только период  $\tau'_p = \tau_p + \Delta \tau_p$ ,

$$\frac{d\bar{\mathbf{Y}}'}{d\tau}(\vec{r}, \tau) = \hat{\mathbf{L}}(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau) + \bar{\mathbf{Q}}(\vec{r}, \tau) \quad (8)$$

с условием на границе  $S$  области  $V$   $\hat{\Gamma}(\vec{r}_s, \tau) \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau) = 0$  и условием периодичности

$$\bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, 0) = \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau_p + \Delta \tau_p). \quad (9)$$

Идея метода преобразования координат состоит в том, чтобы вместо времени  $\tau$  ввести новую временную координату по формуле  $\tau' = \frac{\tau}{1+\varepsilon}$ , где  $\varepsilon = \frac{\Delta \tau_p}{\tau_p}$ . В новых координатах задача (8), (9) имеет вид

$$\frac{d\bar{\mathbf{Y}}'}{d\tau'}(\vec{r}, \tau') = (1+\varepsilon) \hat{\mathbf{L}}(\vec{r}, \tau') \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau') + (1+\varepsilon) \bar{\mathbf{Q}}(\vec{r}, \tau'); \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, 0) = \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau_p). \quad (11)$$

Таким образом, преобразованием временной координаты мы перенесли «возмущение» условия периодичности в «возмущение» оператора задачи.

Изменение функционала  $\delta J_p$  с учетом того, что  $\bar{\mathbf{P}}'(\vec{r}, \tau) \rightarrow \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau) + \delta \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau)$ , можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \delta J_p = J' - J &= \int_0^{\tau_p + \Delta\tau_p} \int_V \vec{P}'(\vec{r}, \tau) \vec{Y}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau - \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}(\vec{r}, \tau) \vec{Y}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau = \\
 &= (1 + \varepsilon) \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}'(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau' - \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}(\vec{r}, \tau) \vec{Y}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau = \\
 &= \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}'(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau' + \int_0^{\tau_p} \int_V [\vec{P}(\vec{r}, \tau') + \delta\vec{P}(\vec{r}, \tau')] \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau' - \\
 &- \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}(\vec{r}, \tau) \vec{Y}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau = \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}'(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau' + \int_0^{\tau_p} \int_V \delta\vec{P}(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau' + \\
 &+ \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau' - \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}(\vec{r}, \tau) \vec{Y}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau.
 \end{aligned}$$

Разницу двух последних интегралов легко найти по формуле возмущений (7) с учетом того, что  $\delta\vec{L}(\vec{r}, \tau) = \varepsilon\vec{L}'(\vec{r}, \tau)$ , а  $\delta\vec{Q}(\vec{r}, \tau) = \varepsilon\vec{Q}'(\vec{r}, \tau)$ . Тогда окончательная формула для расчета изменения функционала примет вид

$$\begin{aligned}
 \delta J_p &= \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{Y}^+(\vec{r}, \tau) [\vec{L}'(\vec{r}, \tau) \vec{Y}'(\vec{r}, \tau) + \vec{Q}'(\vec{r}, \tau)] d\vec{r} d\tau + \\
 &+ \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}'(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau' + \int_0^{\tau_p} \int_V \delta\vec{P}(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau'
 \end{aligned} \quad (12)$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned}
 \delta J_p &= \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{Y}^+(\vec{r}, \tau) \dot{\vec{Y}}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau + \\
 &+ \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}'(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau' + \int_0^{\tau_p} \int_V \delta\vec{P}(\vec{r}, \tau') \vec{Y}'(\vec{r}, \tau') d\vec{r} d\tau'.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) являются точными, т.к. они содержат точное решение «возмущенной» задачи (8) и справедливы при любых значениях  $\varepsilon$ . В случае, когда  $\varepsilon \ll 1$ , эти формулы переходят в формулы теории малых возмущений. Соотношению (13), например, будет соответствовать

$$\begin{aligned}
 \delta J_p &= \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{Y}^+(\vec{r}, \tau) \dot{\vec{Y}}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau + \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{P}(\vec{r}, \tau) \vec{Y}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau + \\
 &+ \int_0^{\tau_p} \int_V \delta\vec{P}(\vec{r}, \tau) \vec{Y}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau = \varepsilon J_p + \varepsilon \int_0^{\tau_p} \int_V \vec{Y}^+(\vec{r}, \tau) \dot{\vec{Y}}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau + \\
 &+ \int_0^{\tau_p} \int_V \delta\vec{P}(\vec{r}, \tau) \vec{Y}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau.
 \end{aligned} \quad (14)$$

**Метод разложения граничного условия.** Идея этого метода состоит в том, чтобы разложить «возмущенное» условие периодичности (9) в ряд по малому параметру  $\Delta\tau_p$ , ограничившись первым членом разложения

$$\vec{Y}'(\vec{r}, 0) = \vec{Y}'(\vec{r}, \tau_p + \Delta\tau_p) \approx \vec{Y}'(\vec{r}, \tau_p) + \left. \frac{d\vec{Y}'(\vec{r}, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_p} \cdot \Delta\tau_p. \quad (15)$$

Выражение для оценки произвольного функционала  $\delta J_p$ , с учетом того, что для случая малых возмущений  $\varepsilon = \Delta\tau_p/\tau_p \ll 1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta J_p = J' - J &= \int_0^{\tau_p + \Delta\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}'(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau - \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau = \\ &= \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}'(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau + \int_{\tau_p}^{\tau_p + \Delta\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}'(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}'(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau - \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau) \bar{\mathbf{Y}}(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\tau = \\ &= \int_0^{\tau_p} \int_V (\bar{\mathbf{P}} + \delta\bar{\mathbf{P}})(\bar{\mathbf{Y}} + \delta\bar{\mathbf{Y}}) d\vec{r} d\tau - \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{Y}} d\vec{r} d\tau + \int_{\tau_p}^{\tau_p + \Delta\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}'\bar{\mathbf{Y}}' d\vec{r} d\tau \approx \\ &\approx \int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}\delta\bar{\mathbf{Y}} d\vec{r} d\tau + \int_0^{\tau_p} \int_V \delta\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{Y}} d\vec{r} d\tau + \int_{\tau_p}^{\tau_p + \Delta\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}'\bar{\mathbf{Y}}' d\vec{r} d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Первый интеграл в формуле (16) может быть преобразован с использованием разложения (15) и традиционной процедуры теории возмущений к виду

$$\int_0^{\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}\delta\bar{\mathbf{Y}} d\vec{r} d\tau \approx \Delta\tau_p \int_V \bar{\mathbf{Y}}^+(\vec{r}, \tau_p) \dot{\bar{\mathbf{Y}}}(\vec{r}, \tau_p) d\vec{r}.$$

Последний интеграл в (16) удобно аппроксимировать соотношением

$$\int_{\tau_p}^{\tau_p + \Delta\tau_p} \int_V \bar{\mathbf{P}}'\bar{\mathbf{Y}}' d\vec{r} d\tau \approx \Delta\tau_p \int_V \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau_p) \bar{\mathbf{Y}}(\vec{r}, \tau_p) d\vec{r}.$$

Таким образом, искомое выражение для оценки  $\delta J_p$  имеет вид

$$\delta J_p = \Delta\tau_p \int_V \left( \bar{\mathbf{Y}}^+(\vec{r}, \tau_p) \dot{\bar{\mathbf{Y}}}(\vec{r}, \tau_p) + \bar{\mathbf{P}}(\vec{r}, \tau_p) \bar{\mathbf{Y}}(\vec{r}, \tau_p) \right) d\vec{r} + \int_0^{\tau_p} \int_V \delta\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{Y}} d\vec{r} d\tau. \quad (17)$$

## ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для иллюстрации возможностей разработанного формализма теории возмущений рассмотрим несколько простых примеров, в которых решения невозмущенной и возмущенной задач могут быть найдены аналитически или численно.

### Кинетика подкритического реактора с внешним источником нейтронов периодического действия

В качестве примера рассмотрим модель кинетики реактора, находящегося в подкритическом состоянии ( $k < 1$ ), на который периодически воздействует внешний источник нейтронов в виде дельта-функции по времени. Уравнения, описывающие кинетику нейтронов такого реактора на периоде от 0 до  $\tau_p$  в простейшем одногрупповом приближении по запаздывающим нейтронам, в обозначениях [7,8] имеют вид

$$\begin{cases} \ell \dot{n}(\tau) = (k(1-\beta) - 1)n(\tau) + \lambda C(\tau) + S(\tau) \\ \dot{C}(\tau) = k\beta n(\tau) - \lambda C(\tau) \\ n(0) = n(\tau_p); \quad C(0) = C(\tau_p), \end{cases} \quad (18)$$

где  $S(t) = s\delta(\tau)$  – интенсивность внешнего источника нейтронов;  $\delta(\tau)$  – дельта-функция Дирака;  $\tau_p$  – период следования нейтронных импульсов.

Отметим, что с использованием определения  $\delta$ -функции система (18) может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \ell \dot{n}(\tau) = (k(1-\beta) - 1)n(\tau) + \lambda C(\tau) \\ \dot{C}(\tau) = k\beta n(\tau) - \lambda C(\tau) \\ n(0) = n(\tau_p) + s / \ell; \quad C(0) = C(\tau_p). \end{cases} \quad (19)$$

При условии, что размножающие свойства реактора за период не изменяются ( $k = \text{const}$ ), аналитическое решение задачи (19) для  $n(\tau)$  имеет вид

$$\begin{aligned} n(\tau) &= \frac{s}{\ell(p_1 - p_2)} \left\{ \frac{\lambda + p_1}{1 - e^{-p_1 \tau_p}} e^{-p_1 \tau} - \frac{\lambda + p_2}{1 - e^{-p_2 \tau_p}} e^{-p_2 \tau} \right\}, \\ C(\tau) &= \frac{sk\beta}{\ell(p_1 - p_2)} \left\{ \frac{e^{-p_1 \tau_p}}{1 - e^{-p_1 \tau_p}} - \frac{e^{-p_2 \tau_p}}{1 - e^{-p_2 \tau_p}} \right\}, \\ p_{1,2} &= \frac{k(1-\beta) - 1 - \ell\lambda}{2\ell} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Delta k \lambda \ell}{(k(1-\beta) - 1 - \ell\lambda)^2}} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Задача, сопряженная к (19), формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} -\dot{n}^+(\tau) = \frac{k(1-\beta) - 1}{\ell} n^+(\tau) + k\beta C^+(\tau) + P(\tau) \\ -\dot{C}^+(\tau) = \frac{\lambda}{\ell} n^+(\tau) - \lambda C^+(\tau) \\ n^+(0) = n^+(\tau_p); \quad C^+(0) = C^+(\tau_p). \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим следующие функционалы от  $n(t)$ :

$$J_1 = n(\tau_0), \quad 0 \leq \tau_0 \leq \tau_p; \quad J_2 = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} n(\tau) d\tau = -\frac{s}{\Delta k \tau_p}; \quad J_3 = \int_0^{\tau_p} n(\tau) d\tau = -\frac{s}{\Delta k}. \quad (22)$$

Этим функционалам соответствуют следующие правые части сопряженного уравнения (21) для  $n^+(\tau)$ :

$$P_1 = \delta(\tau - \tau_0); \quad P_2 = \frac{1}{\tau_p}; \quad P_3 = 1.$$

Сопряженные функции для данных функционалов имеют вид

$$\bar{\mathbf{Y}}_1^+(\tau) = \begin{vmatrix} n_1^+(\tau, \tau_0) \\ C_1^+(\tau, \tau_0) \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} n_1^+(\tau, \tau_0) &= \frac{1}{p_1 - p_2} \begin{cases} \frac{(\lambda + p_1) e^{p_1(\tau_0 - \tau)}}{1 - e^{p_1 \tau_p}} - \frac{(\lambda + p_2) e^{p_2(\tau_0 - \tau)}}{1 - e^{p_2 \tau_p}}, & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ \frac{(\lambda + p_1) e^{p_1(\tau_0 + \tau_p - \tau)}}{1 - e^{p_1 \tau_p}} - \frac{(\lambda + p_2) e^{p_2(\tau_0 + \tau_p - \tau)}}{1 - e^{p_2 \tau_p}}, & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_p; \end{cases} \\ C_1^+(\tau, \tau_0) &= \frac{\lambda}{\ell(p_1 - p_2)} \begin{cases} \frac{e^{p_1(\tau_0 - \tau)}}{1 - e^{p_1 \tau_p}} - \frac{e^{p_2(\tau_0 - \tau)}}{1 - e^{p_2 \tau_p}}, & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ \frac{e^{p_1(\tau_0 + \tau_p - \tau)}}{1 - e^{p_1 \tau_p}} - \frac{e^{p_2(\tau_0 + \tau_p - \tau)}}{1 - e^{p_2 \tau_p}}, & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_p; \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_2^+(\tau) = \left| \frac{n_2^+(\tau, \tau_0)}{C_2^+(\tau, \tau_0)} \right| = -\frac{1}{\Delta k \tau_p} \left| \frac{\ell}{1} \right|; \bar{\mathbf{Y}}_3^+(\tau) = \left| \frac{n_3^+(\tau, \tau_0)}{C_3^+(\tau, \tau_0)} \right| = -\frac{1}{\Delta k} \left| \frac{\ell}{1} \right|.$$

Отклонения искоемых функционалов при малом возмущении параметра  $\tau'_p = \tau_p + \Delta\tau_p = (1+\varepsilon)\tau_p$ ,  $\varepsilon \ll 1$  оценим по формуле (17):

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= [n_1^+(\tau_p, \tau_0)\dot{n}(\tau_p) + C_1^+(\tau_p, \tau_0)\dot{C}(\tau_p)]\Delta\tau_p = \\ &= \frac{s\Delta\tau_p}{\ell(p_1 - p_2)} \left\{ p_1 \frac{\lambda + p_1}{1 - e^{-p_1\tau_p}} e^{-p_1(\tau_0 + \tau_p)} - p_2 \frac{\lambda + p_2}{1 - e^{-p_2\tau_p}} e^{-p_2(\tau_0 + \tau_p)} \right\}; \\ \delta J_2 &= \left[ n_2^+(\tau_p, \tau_0)\dot{n}(\tau_p) + C_2^+(\tau_p, \tau_0)\dot{C}(\tau_p) + \frac{n(\tau_p)}{\tau_p} \right] \Delta\tau_p - \frac{\Delta\tau_p}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} n(\tau) d\tau = \\ &= -\varepsilon J_2 = \frac{\varepsilon \Delta\tau_p}{\Delta k \tau_p^2}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\delta J_3 = \left[ n_3^+(\tau_p, \tau_0)\dot{n}(\tau_p) + C_3^+(\tau_p, \tau_0)\dot{C}(\tau_p) + \frac{n(\tau_p)}{\tau_p} \right] \Delta\tau_p = 0.$$

Отметим, что при выводе выражений для  $\delta J_2$  и  $\delta J_3$  использовано соотношение  $\ell\dot{n}(\tau_p) + \dot{C}(\tau_p) = \Delta k n(\tau_p)$ , которое следует из исходной системы (19). Очевидно также, что выражения (24) в первом приближении по  $\Delta\tau_p$  совпадают с точными аналитическими соотношениями, которые можно получить из (23).

### Теплообмен в твэле с периодическим источником тепла

Рассмотрим модель теплообмена в твэле импульсного реактора периодического действия типа ИБР[3]. Будем предполагать, что цилиндрический твэл радиусом  $R$  является бесконечно длинным и не имеет оболочки. Теплофизические параметры материала топлива (объемная теплоемкость  $c\gamma$ , теплопроводность  $\lambda$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ ) постоянны. Энерговыделение в таком реакторе осуществляется в виде очень коротких (по сравнению с длительностью периода) импульсов мощности, поэтому по времени его можно аппроксимировать дельта-функциями, следующими с периодичностью  $\tau_p$ . Пространственное распределение энерговыделения в твэле можно считать постоянным по сечению  $q_v = \text{const}$ .

Математическая формулировка задачи (в цилиндрической геометрии) традиционна:

$$\begin{cases} c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = q_v \delta(\tau) \\ \lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} + \alpha T(R, \tau) = 0 \\ \lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \\ T(r, 0) = T(r, \tau_p), \end{cases} \quad (25)$$

за исключением последнего условия – условия периодичности. Аналитическое решение этой задачи на интервале от 0 до  $\tau_p$  существует и имеет вид

$$T(r, t) = 2 \cdot Q \cdot Bi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\xi_k \frac{r}{R}\right) \cdot e^{-a\left(\frac{\xi_k}{R}\right)^2 t}}{J_0(\xi_k)(\xi_k^2 + Bi^2) \cdot \left(1 - e^{-a\left(\frac{\xi_k}{R}\right)^2 \tau_p}\right)}, \quad (26)$$

где  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ ,  $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ ,  $Q = \frac{q_v}{c\gamma}$ , а  $\xi_k$  – корни уравнения  $Bi \cdot J_0(\xi) - \xi J_1(\xi) = 0$ ,  $J_0(\xi)$ ,  $J_1(\xi)$  – функции Бесселя.

Сформулируем задачу, сопряженную к (25):

$$\begin{cases} -c\gamma \frac{\partial T^+}{\partial \tau} - \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T^+}{\partial r} \right) = P(r, \tau) \\ \lambda \frac{\partial T^+(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} + \alpha T^+(R, \tau) = 0, \lambda \frac{\partial T^+(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, T^+(r, 0) = T^+(r, \tau_p). \end{cases} \quad (27)$$

Здесь параметр  $P(r, \tau)$  определяет линейный функционал от решения  $T(r, \tau)$  по формуле

$$J_p = \int_0^{\tau_p} \int_0^R T(r, \tau) P(r, \tau) r dr d\tau = \int_0^{\tau_p} \int_0^R T^+(r, \tau) q_v \delta(\tau) r dr d\tau = q_v \int_0^R T^+(r, 0) r dr. \quad (28)$$

Если в качестве правой части уравнения (27) принять  $P_1(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \delta(\tau - \tau_0)$ , то функционалом будет средняя по объему твэла температура в момент  $\tau_0$  –  $J_1 = \bar{T}(\tau_0) = \frac{2}{R^2} \int_0^R T(r, \tau_0) r dr$ . При  $P_2(r, \tau) = \frac{2}{\tau_p R^2}$  функционалом будет средняя по вре-

мени и объему температура  $J_2 = \frac{2}{\tau_p R^2} \int_0^{\tau_p} \int_0^R T(r, \tau) r dr d\tau$ .

Сопряженные функции, соответствующие этим функционалам, могут быть выражены формулами

$$T_1^+(r, \tau, \tau_0) = \begin{cases} \frac{4}{R^2} \cdot Bi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_k r / R) \cdot e^{a(\xi_k / R)^2 (\tau - \tau_0)}}{J_0(\xi_k)(\xi_k^2 + Bi^2) \cdot \left(1 - e^{-a(\xi_k / R)^2 \tau_p}\right)}, & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ \frac{4}{R^2} \cdot Bi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_k r / R) \cdot e^{a(\xi_k / R)^2 (\tau - \tau_0 - \tau_p)}}{J_0(\xi_k)(\xi_k^2 + Bi^2) \cdot \left(1 - e^{-a(\xi_k / R)^2 \tau_p}\right)}, & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_p; \end{cases}$$

$$T_2^+(r, \tau) = \frac{1}{2\lambda\tau_p} \left(1 - r^2 / R^2\right) + \frac{1}{\alpha R \tau_p}.$$

В расчетах (численные расчеты выполнены Кочубеем К.В.) принимались значения параметров, близкие к параметрам, характерным для реактора типа ИБР-2:  $\tau_p = 0.2$  с;  $\lambda = 6.3$  Вт/м·К;  $c = 251$  Дж/кг·К;  $\gamma = 10200$  кг/м<sup>3</sup>;  $R = 3.85$  мм;  $\alpha = 150$  Вт/м<sup>2</sup>·К;  $q_v = 10^8$  Вт/м<sup>3</sup>.



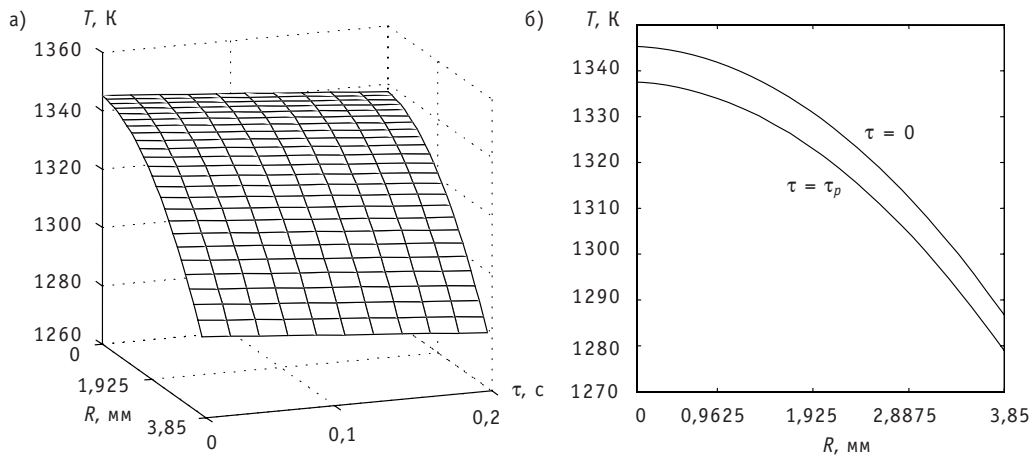


Рис. 1. Пространственное распределение температуры в твэле подкритического реактора на периоде (а) и радиальное распределение температуры в твэле в моменты времени  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_p$  (б)

Аналитическое решение задачи (25) показано на рис. 1.

Задача с возмущенным параметром  $\tau'_p = \tau_p + \Delta\tau_p$  имеет вид

$$\begin{aligned} c\gamma \frac{\partial T'}{\partial \tau} - \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T'}{\partial r} \right) &= q_v(r, \tau) \\ \lambda \frac{\partial T'(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} + \alpha T'(R, \tau) &= 0, \quad \lambda \frac{\partial T'(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \\ T'(r, 0) &= T'(r, \tau_p) \\ T'(r, 0) = T'(r, \tau_p + \Delta\tau_p) &\approx T'(r, \tau_p) + \frac{dT'}{d\tau}(r, \tau) \Big|_{\tau=\tau_p} \Delta\tau_p. \end{aligned} \quad (29)$$

Применяя традиционный подход теории возмущений к (27) и (29), с учетом краевых условий и разложения получаем

$$\begin{aligned} \int_0^R T' T^+ \Big|_0^{\tau_p} r dr &= \int_0^{\tau_p} \int_0^R Q T^+ r dr d\tau - \int_0^{\tau_p} \int_0^R P T' r dr d\tau = J - J' = -\delta J; \\ \int_0^R T' T^+ \Big|_0^{\tau_p} r dr &= \int_0^R [T'(\tau_p) T^+(\tau_p) - T'(0) T^+(0)] r dr \approx -\Delta\tau_p \cdot \int_0^R \left[ T^+(r, \tau_p) \frac{\partial T'(r, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_p} \right] r dr, \end{aligned}$$

откуда следует соотношение

$$\delta J \approx \Delta\tau_p \cdot \int_0^R \left[ T^+(r, \tau_p) \frac{\partial T'(r, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_p} \right] r dr. \quad (30)$$

В последующих расчетах полагалось, что  $\tau_p = 0,2$  с, а значение  $\Delta\tau_p$  варьировалось от  $-0.04$  до  $0.04$  с.

В качестве примера рассмотрим функционал – среднюю по объему твэла температуру в момент  $\tau_0$ , где положим  $\tau_0 = \tau_p/2$ . На рисунке 2 приведены в сравнении зависимости  $J_1'(\Delta\tau_p) = J_1(0) + \delta J_1$  и  $\delta J_1/J_1(0)$  ( $J_1(0)$  – невозмущенное значение функционала) от изменения периода  $\Delta\tau_p$ , рассчитанные по формулам (26) и (30).

Из рисунков видно, что результаты расчетов изменения функционала (и его относительного изменения), полученные с использованием методов теории возмущений, удовлетворительно согласуются с данными расчета по аналитической

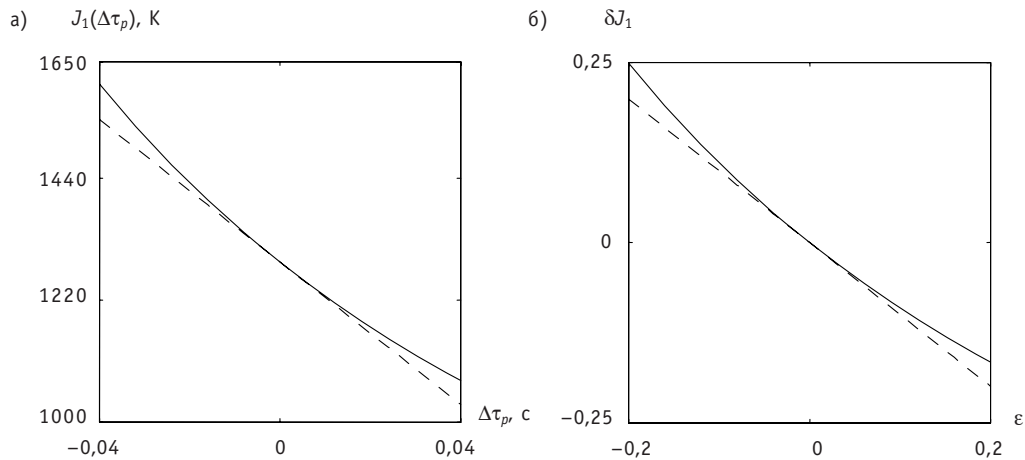


Рис. 2. Зависимости функционалов  $J_1$  (а) и  $\delta J_1/J_1(0)$  (б) от  $\Delta\tau_p$ : — расчет по формуле (26); - - - - - расчет по формуле (30)

формуле (26) при относительном изменении периода задачи не более, чем на 15–20%. Следует также заметить, что использование теории возмущений избавляет от необходимости каждый раз заново находить решение возмущенной задачи (29), что существенно сокращает затраты компьютерного времени.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулированы основные соотношения теории возмущений и аппарата сопряженных функций для линейных функционалов от периодических решений в задачах тепловой динамики и нейтронной кинетики связанных реакторов. Рассмотрен важный для практики случай, когда возмущением является изменение периода задачи. Для учета этого типа возмущений сформулированы два подхода, первый из которых базируется на методе преобразования координат, а второй на методе разложения граничного условия в ряд по малому параметру. Приведены примеры применения формул теории возмущений при решении модельных задач кинетики подкритического реактора, работающего в режиме повторяющихся импульсов, и тепловой динамики твэла импульсно-периодического реактора.

## Литература

1. Пупко В.Я., Зродников А.В., Лихачев Ю.И. Метод сопряженных функций в инженерно-физических исследованиях. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Гулевич А.В., Зродников А.В., Пупко В.Я., Шиманский А.А. Применение теории возмущений в инженерных задачах ядерной энергетики. – М.: Энергоатомиздат, 1993.
3. Шабалин Е.П. Импульсные реакторы на быстрых нейтронах. – М.: Атомиздат, 1976.
4. Гулевич А.В., Качанов Б.В., Кухарчук О.Ф. Модели и программы расчета динамических характеристик реакторно-лазерных систем/Препринт ФЭИ-2454. – Обнинск, 1995.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., Наука, 1967.
6. Гулевич А.В., Дьяченко П.П., Зродников А.В., Кухарчук О.Ф. Связанные реакторные системы импульсного действия. – М.: Энергоатомиздат, 2003.
7. Кипин Дж.Р. Физические основы кинетики ядерных реакторов. – М.: Атомиздат 1967.
8. Хетрик Д. Динамика ядерных реакторов/Пер. с англ. – М.: Атомиздат, 1975.
9. Барзилов А.П., Гулевич А.В., Кухарчук О.Ф., Пашин Е.А. Подкритическая реакторная система с каскадным умножением нейтронов//Известия вузов. Ядерная энергетика. – 1997. – №2.

10. *Rubbia C.* CERN-group conceptual design of a fast neutron operated power energy amplifier. Accelerator driven systems: Energy Generation and Transmutation of Nuclear Waste//Status Report. IAEA-TECDOC-985, November 1997. – P. 187.

Поступила в редакцию 5.11.2008

equipment of the Smolensk NPP's first power unit were used.

#### **УДК 621.791.16: 621.791.05**

*Ultrasonic Method of Removal of Residual Pressure in Welded Connections of Circulating Pipelines and the Atomic Power Station Equipment* \ A.I. Trofimov, S.I. Minin, V.N. Dementev, M.A. Trofimov, A.I. Osipov; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2009. – 6 pages, 1 table, 4 illustrations. – References, 5 titles.

The analysis of a condition of works on decrease in residual pressure in welded connections of the equipment of the atomic power station is carried out. Results theoretical and experimental researches of an ultrasonic method of removal of residual pressure in welded connections in the course of welding of circulating pipelines of the atomic power station are resulted.

#### **УДК 504.5: 621.039**

*Use of Allium-test for Toxicity Assessment of Water and Soil Sampled from Radioactively Contaminated Sites* \ S.V. Pyatkova, S.A. Geraskin, A.N. Vasileva, G.V. Kozmin, N.N. Lyannoy; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2009. 8 pages, 2 tables, 3 illustrations. – References, 20 titles.

The presented results of the estimation to toxicity sample water and soil from Semipalatinsk Experimental Test Site with use Allium-test. The factors of cyto- and genotoxicity natural sample from area STE, contrasting on level and spectrum radioactive contamination were compared. It is shown need of the modification of the biotesting for account of the external gamma-irradiations in region of the selection of the tests sample.

#### **УДК 628.31**

*The Sorption Properties of the Thermal Resistant Amorphous Alum Silicate Adsorbent* \ A.S. Shilina, V.K. Milunchuk; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2009. – 8 pages, 2 tables, 4 illustrations. – References, 8 titles.

The structure formula of new type alum silicate adsorbent was determined. The sorption properties of the thermal modified amorphous alum silicate adsorbent are present. After heating at 600°C the static sorption capacity adsorbent (mg/g) is increasing at 1.5 time and is equal for the nickel cations 220 and for the lead cations 660. Alum silicate adsorbent effective removes these cations from the boiling water solutions. It is testify about the perspective of the adsorbent for the water cleaning at high temperature.

#### **УДК 621.039.51**

*Information Interactive System for Preparation and Verification Nuclear Data in the High-Energy Range* \ A.A. Angrianov, Yu.A. Korovin, I.S. Kuptsov, A.Yu. Konobeev, A.Yu. Stankovskiy; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2009. – 11 pages, 1 table, 6 illustrations. – References, 11 titles.

The article concerns the developing of information interactive system code for the preparation, verification and validation nuclear data in the high range. This complex enables users without special skills, produce activation nuclear-physical data, statistically assess them on existing experiments, verify the high energy reactions models using a flexible parameters selection system and visualize the results.

#### **УДК 621.039.512**

*On Use of Perturbation Theory for Analysis of Periodic Pulsed Solutions in Problems of Reactor Dynamics* \ A.V. Gulevich, O.F. Kukharchuk; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2009. – 11 pages, 2 illustrations. – References, 10 titles.

Principal relationships for estimation of linear functionals due to the changes in parameters of the initial boundary-value problem on the period have been formulated based on the traditional approach of perturbation theory and the adjoint function apparatus. The emphasis has been upon the case when the problem perturbation is the change of the period itself. Numerical and analytical examples of the use of perturbation theory relationships in the simplest problems of neutronic kinetics and non-stationary heat exchange in fuel element of periodic pulsed reactor have been considered.

#### **УДК 621.039**

*Calculation Study of Neutron-Physics Material Characteristics for Therapy Beams Forming* \ A.V. Korobeynikov, V.P. Ginkin; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2009. – 9 pages, 1 table, 7 illustrations. – References, 14 titles.