

# СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ НУЛЕВОЙ МОЩНОСТИ ЧАСТЬ 3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ КИНЕТИКИ РЕАКТОРА. СЛАБЫЙ ПОСТОРОННИЙ ИСТОЧНИК НЕЙТРОНОВ. АНАЛИЗ МОДЕЛИ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ШУМА РЕАКТИВНОСТИ

**Ю.В. Волков**

*Обнинский институт атомной энергетики НИЯУ МИФИ.  
249033, Обнинск, Калужской обл., Студгородок, 1*



Получены стохастические дифференциальные уравнения точечной кинетики ядерного реактора из условия, что дискретный ветвящийся процесс и его непрерывный аналог должны иметь совпадающие моменты распределения до второго порядка, включительно. Уточнено понятие слабого постороннего источника нейтронов. Проведен сравнительный анализ модели Коэна с моделью шумов реактивности, введенной по аналогии с дробным эффектом.

**Ключевые слова:** стохастические дифференциальные уравнения, моменты распределения, модель, ядерный реактор нулевой мощности, характеристическая функция, распределение, белый шум.

## ВЫВОД СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОЙ КИНЕТИКИ РЕАКТОРА

В работе [1] получено уравнение (8') для характеристической функции  $F(t, z_1, z_2)$  распределения  $P_{\alpha_1, \alpha_2}(t)$  числа  $\alpha_1$  частиц типа  $T_1$  и числа  $\alpha_2$  частиц типа  $T_2$  в момент времени  $t$ , если при  $t = 0$  частиц этих двух типов не было. Очевидно, что кроме точного решения  $F$  уравнения (8') можно получать и приближенные –  $\tilde{F}$ , представляя коэффициенты при  $F$ ,  $\partial F / \partial z_1$ ,  $\partial F / \partial z_2$  в уравнении соответствующими приближенными выражениями. Например, можно разложить эти коэффициенты в ряд Тейлора по степеням  $z_1$  и  $z_2$  и, оставляя нужное число слагаемых в этих рядах (скажем,  $n$ ), получать приближенные решения  $\tilde{F}_n$  для  $F(t, z_1, z_2)$ . Индекс  $n$ , как будет видно из дальнейшего изложения, не только обозначает степень приближения, но и определяет максимальный порядок точно совпадающих начальных моментов распределения  $P_{\alpha_1, \alpha_2}(t)$ , получаемых из точного  $F$  и приближенного  $\tilde{F}_n$  решений уравнения (8').

© Ю.В. Волков, 2014

Из уравнения (8') нетрудно убедиться, что, например, для  $\tilde{F}_2(t, z_1, z_2)$  справедливо уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial z_1} \left\{ jz_1 z_2 \frac{k\beta}{L} \left[ 1 - \frac{\sqrt{v(v-1)}}{\bar{v}} (1-\beta) \right] - z_1 \frac{k(1-\beta)-1}{L} - z_2 \frac{k\beta}{L} - \right. \\ & \left. - \frac{jz_1^2}{2L} \left[ 1 + k(1-\beta) \left( \frac{\sqrt{v(v-1)}}{\bar{v}} (1-\beta) - 1 \right) \right] - jz_2^2 \frac{k\beta}{2L} \left[ \frac{\sqrt{v(v-1)}}{\bar{v}} \beta + 1 \right] \right\} + \\ & + \lambda \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial z_2} \left( jz_1 z_2 - z_1 + z_2 - \frac{1}{2} jz_1^2 - \frac{1}{2} jz_2^2 \right) + S \tilde{F}_2 \left( \frac{1}{2} z_1^2 - jz_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\tilde{F}_2(0, z_1, z_2) = \tilde{F}_2(t, 0, 0) = 1, \quad (2)$$

аналогичными условиям (9 в [1]).

Полученное уравнение для  $\tilde{F}_2(t, z_1, z_2)$  есть уравнение в частных производных первого порядка с коэффициентами, содержащими степени  $z_1$  и  $z_2$ , не превосходящие 2. Следовательно, согласно работе [2], оно вместе с условиями (2) является уравнением для характеристической функции двумерного диффузионного процесса  $y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$ , траектории которого описываются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{k(1-\beta)-1}{L} y_1 + \lambda y_2 + S + g_{11}(y) \xi_1(t) + g_{12}(y) \xi_2(t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{k\beta}{L} y_1 - \lambda y_2 + g_{21}(y) \xi_1(t) + g_{22}(y) \xi_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  – стандартные гауссовские независимые «белые» шумы;  $g_{ij}$  – решения матричного уравнения

$$GG^T = B, \quad (4)$$

где  $B$  – матрица с элементами

$$\begin{aligned} b_{11} &= S + \frac{1}{L} \left\{ 1 + k(1-\beta) \left[ \frac{\sqrt{v(v-1)}}{\bar{v}} (1-\beta) - 1 \right] \right\} y_1 + \lambda y_2, \\ b_{12} &= b_{21} = \frac{k\beta}{L} \left[ \frac{\sqrt{v(v-1)}}{\bar{v}} (1-\beta) - 1 \right] y_1 - \lambda y_2, \\ b_{22} &= \frac{k\beta}{L} \left[ \frac{\sqrt{v(v-1)}}{\bar{v}} \beta + 1 \right] y_1 + \lambda y_2. \end{aligned}$$

Можно записать обобщение на  $m$  групп запаздывающих нейтронов для векторного непрерывного случайного процесса  $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_{m+1}(t)\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{k(1-\beta)-1}{L} y_1 + \sum_{i=2}^{m+1} \lambda_i y_i + S + \sum_{i=1}^{m+1} g_{1i}(y) \xi_i(t), \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{k\beta_i}{L} y_i - \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^{m+1} g_{ij}(y) \xi_j(t), \quad i = 2, m+1, \end{aligned} \quad (3')$$

где  $g_{ij}$  – элементы решения матричного уравнения (4) с элементами матрицы  $(m+1)$ -го порядка  $\mathbf{B}$  следующего вида:

$$\begin{aligned} b_{11} &= S + \frac{1}{L} \left\{ 1 + k(1-\beta) \left[ \frac{v(v-1)}{\bar{v}} (1-\beta) - 1 \right] \right\} y_1 + \sum_{i=2}^{m+1} \lambda_i y_i, \\ b_{1p} &= b_{p1} = \frac{k\beta_n}{L} \left[ \frac{v(v-1)}{\bar{v}} (1-\beta) - 1 \right] y_1 - \lambda_p y_p, \quad p = \overline{2, m+1}, \\ b_{p,l} &= \frac{k\beta_p \beta_l}{L} \frac{v(v-1)}{\bar{v}} y_1, \quad p \neq l, \quad p, l = \overline{2, m+1}, \\ b_{pp} &= \frac{k\beta_p}{L} \left[ \frac{v(v-1)}{\bar{v}} \beta_p + 1 \right] y_1 + \lambda_p y_p, \quad p = \overline{2, m+1}. \end{aligned}$$

Используем соотношение для начальных моментов  $i$ -го порядка  $M_{i-l,l}^{(n)}(t)$  распределения, задаваемого характеристической функцией  $\tilde{F}_n(t, z_1, z_2)$  [3]:

$$M_{i-l,l}^{(n)}(t) = (-1)^i \frac{\partial^i \tilde{F}_n}{\partial z_1^{i-l} \partial z_2^l} \Big|_{z_1=z_2=0}. \quad (5)$$

Ясно, что при  $n \rightarrow \infty$  моменты  $M_{i-l,l}^{(n)}(t)$  становятся моментами точного распределения  $P_{\alpha_1, \alpha_2}(t)$ , задаваемого характеристической функцией  $F(t, z_1, z_2)$ .

Записав из (8') уравнение для  $\tilde{F}_n(t, z_1, z_2)$ , дифференцируя его нужное число раз по  $z_1, z_2$ , и приравняв нулю коэффициенты при слагаемых с равными степенями  $z_1$  и  $z_2$ , можно получить систему уравнений для моментов  $M_{i-l,l}^{(n)}(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{j-l,l}^{(n)}}{dt} &= \frac{1-\pi}{L} \sum_{i=\chi}^j (-1)^{j-i} C_{j-l}^{j-i} M_{i+1-l,l}^{(n)} + \\ &+ \frac{\pi}{L} \sum_{k=0}^u \sum_{p=\max(0, k-j+l)}^{\min(k,j)} \sum_{l=\max(j-n-k, l-p)}^{j-k} (-1)^{j-k-l} C_l^{i+k-l} C_{i+k-l}^{k-p} \gamma_{k-p,p} M_{i+p+1-l, l-p}^{(n)} + \\ &+ \lambda \sum_{i=0}^{u'} \sum_{k=\chi-l+1}^{j-l+1} (-1)^i C_i^{k+i-l-1} M_{k+i-l-1, l+1-i}^{(n)} + \\ &+ S \sum_{i=\chi}^j C_{j-l}^{i-l} M_{i-l,l}^{(n)} - \frac{1}{L} M_{j+1-l,l}^{(n)} - \lambda M_{j-l, l+1}^{(n)} - S M_{j-l,l}^{(n)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\chi = \max(j-n, l)$ ,  $u = \min(n, j)$ ,  $u' = \min(n, l)$ ,  $g_{ij}$  – начальные моменты распределения  $q_{\alpha_1, \alpha_2}$  чисел  $\alpha_1$  – мгновенных нейтронов и  $\alpha_2$  – предшественников запаздывающих нейтронов, рожденных в одном акте деления.

Из системы уравнений (6) видно: 1) система линейна; 2) все моменты  $M_{j-l,l}^{(n)}(t)$  в правой ее части имеют порядок не выше  $j$ , т.е. она замкнута; 3) моменты  $M_{j-l,l}^{(n)}(t)$ , полученные из приближенного решения  $\tilde{F}_n(t, z_1, z_2)$  и моменты  $M_{j-l,l}(t)$ , определяемые точным решением  $F(t, z_1, z_2)$  уравнения (8'), для  $j \leq n$  описываются одной и той же системой уравнений. Следовательно, моменты распределения  $P_{\alpha_1, \alpha_2}(t)$ , получаемые из точного  $F(t, z_1, z_2)$  и приближенного  $\tilde{F}_n(t, z_1, z_2)$  решений уравнения (8'), совпадают.

ют до порядка  $n$  включительно.

По числу  $n$  совпадающих моментов можно судить о качестве (точности) выбранного приближения. Кроме того, по системе уравнений (6) всегда можно оценить погрешность в определении моментов более высокого порядка по приближенной модели. Таким образом, непрерывный аналог  $y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$  дискретного случайного процесса  $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\}$ , полученный при  $n = 2$ , имеет вероятностные характеристики, совпадающие с теми же характеристиками дискретного процесса, с точностью до моментов второго порядка, включительно. Следовательно, диффузионный процесс  $y(t)$ , траектории которого описываются системой уравнений (3), имеет математическое ожидание (среднее) и вторые моменты (дисперсию, корреляционные функции), в точности совпадающие с математическим ожиданием и вторыми моментами дискретных чисел мгновенных нейтронов и предшественников.

Запишем в явном виде системы уравнений для математического ожидания  $\bar{y}(t) = \{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)\}$  и вторых центральных моментов  $D_{ij}(t)$  непрерывного случайного процесса  $y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}_1}{dt} &= \frac{k(1-\beta)-1}{L} \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + S, \\ \frac{d\bar{y}_2}{dt} &= \frac{k\beta}{L} \bar{y}_1 - \lambda \bar{y}_2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD_{11}}{dt} &= 2 \frac{k(1-\beta)-1}{L} D_{11} + 2\lambda D_{12} + \frac{1}{L} \left\{ 1 + k(1-\beta) \left[ \frac{v(v-1)}{\bar{v}} (1-\beta) - 1 \right] \right\} \bar{y}_1 + \lambda \bar{y}_2 + \\ \frac{dD_{12}}{dt} &= \left[ \frac{k(1-\beta)-1}{L} - \lambda \right] D_{12} + \frac{k\beta}{L} D_{11} + \lambda D_{22} + \frac{k\beta}{L} \left[ \frac{v(v-1)}{\bar{v}} (1-\beta) - 1 \right] \bar{y}_1 - \lambda \bar{y}_2, \\ \frac{dD_{22}}{dt} &= -2\lambda D_{22} + 2 \frac{k\beta}{L} D_{12} + \frac{k\beta}{L} \left[ \frac{v(v-1)}{\bar{v}} \beta + 1 \right] \bar{y}_1 + \lambda \bar{y}_2, \quad D_{12} = D_{21}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, уравнения для математических ожиданий  $\bar{y}_1(t)$  и  $\bar{y}_2(t)$  полностью совпадают с уравнениями кинетики точечного реактора нулевой мощности при учете только одной группы запаздывающих нейтронов. Уравнения для вторых центральных моментов аналогичны результатам Судэка [4], полученным из непосредственного подсчета вероятностей для дискретного процесса  $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\}$ .

При  $k < 1$  и начальных условиях

$$\bar{y}_i(0) = D_{ij}(0) = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

системы уравнений (7), (8) имеют стационарные решения  $\bar{y}_i^0$  и  $D_{ij}^0$ , из которых следует

$$(D_{11}^0 + D_{12}^0) / \bar{y}_1^0 = 1 + k\bar{v}(\bar{v}-1) / [2(1-k)\bar{v}], \quad (9)$$

что является обобщением на случай учета одной группы запаздывающих нейтронов известного [4] соотношения для отношения дисперсии числа нейтронов к среднему, полученного без учета запаздывающих нейтронов.

Нетрудно показать, что  $D_{12}^0 \geq 0$  при  $k < 1$ , поэтому отношение  $D_{11}^0 / \bar{y}_1^0$  меньше, чем при учете только мгновенных нейтронов. Это объясняется тем, что при учете запаздывающих нейтронов степень зашумленности модели увеличивается из-за появле-

ния еще одного канала развития процесса. Оценки показывают, что при  $k = 1 - a\beta$ , где  $a \geq 0$ ,

$$\delta = D_{12}^0 / D_{11}^0 \approx 1 / (a + 1) .$$

Следовательно, приближение мгновенных нейтронов достаточно хорошо описывает нейтронную популяцию при  $k < 1$  только при больших подкритичностях реактора, например, если подкритичность реактора  $\approx 10\beta$  ( $a = 10$ ), то  $\delta \approx 10\%$ . Вблизи критического состояния оценки отношения  $D_{11}^0 / \bar{y}_1^0$  по формуле [4]

$$D_{11}^0 / \bar{y}_1^0 = 1 + k\nu(\nu - 1) / [2(1 - k)\bar{\nu}] \quad (10)$$

должны давать значительные погрешности.

Из систем дифференциальных уравнений (3) и (3') видно, что их регулярная часть полностью совпадает с уравнениями точечной кинетики реактора нулевой мощности. Наличие в правой части «белых» шумов отражает стохастический характер элементарных процессов рождения и гибели нейтронов, характерные времена которых  $\approx 10^{-22}$  с. Поэтому эти уравнения можно назвать *стохастическими дифференциальными уравнениями точечной кинетики реактора*. Они описывают траектории по времени случайного процесса, каковым является нейтронная популяция при достаточно большом числе нейтронов в реакторе. То, что для справедливости описания нейтронной популяции во времени непрерывным аналогом  $y(t)$  требуется большое число нейтронов в реакторе, видно из способа, которым получены уравнения (8') – оставление в уравнении для  $\tilde{F}_n(t, z_1, z_2)$  степеней по  $z_1$  и  $z_2$  не выше второй, т.е. пренебрежение более высокими степенями, автоматически влечет за собой предположение о том, что  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  достаточно велики.

Отметим, что стохастическими дифференциальными уравнениями точечной кинетики реактора (3), (3') для непрерывного аналога  $y(t)$  дискретного процесса  $\alpha(t)$  произведен переход от описания нейтронной популяции в вероятностном пространстве (с помощью распределения вероятностей  $P_{\alpha_1, \alpha_2}(t)$ ) к ее описанию в пространстве траекторий (параметров) с помощью процесса  $y(t)$ . Заметим также, что примененный здесь прием с разложением коэффициентов в уравнении для характеристической функции  $F(t, z_1, z_2)$  в ряды и использованием приближения  $\tilde{F}_n(t, z_1, z_2)$  допускает [2] дальнейшее совершенствование описания нейтронной популяции в пространстве параметров, т.е. введение в правую часть уравнений (3), (3') процесса с независимыми приращениями общего вида.

### **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕЙТРОНОВ В ПОДКРИТИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ СО СЛАБЫМ ПОСТОРОННИМ ИСТОЧНИКОМ НЕЙТРОНОВ. ЧТО ТАКОЕ СЛАБЫЙ ИСТОЧНИК НЕЙТРОНОВ?**

Вопрос, заданный в заголовке этого раздела, – непростой. В работе [5] ответ на него дан в таком виде: если  $SL \ll 1$ , то источник нейтронов слабый. Но тогда возникает следующий вопрос, уже переходящий из теоретической плоскости в практическую: много меньше единицы – это сколько? То есть при заданном времени жизни нейтронов  $L$  (при заданном материальном составе реактора) какова должна быть конкретно мощность постороннего источника нейтронов, чтобы его следовало считать слабым?

Чтобы ответить на последний вопрос, решим задачу о распределении числа нейтронов в стационарном подкритическом реакторе в следующей постановке: 1) реактор снабжен посторонним источником нейтронов интенсивностью  $S$ ; 2) учитываются только мгновенные нейтроны; 3) поведение нейтронной популяции описывается непрерывным аналогом – случайным процессом диффузионного типа.

В такой постановке уравнение (1) для характеристической функции  $\tilde{F}_2(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{F}_2(t, z)$  стационарного процесса  $y(t)$  принимает вид

$$j \left( j + \frac{z}{2} \chi \right) \frac{d\tilde{F}_2}{dz} + \bar{y} \left( j - \frac{z}{2} \right) \tilde{F}_2 = 0 \quad (11)$$

с начальным условием

$$F(0) = 1, \quad (12)$$

где  $\bar{y} = SL/(1-k)$  – среднее число нейтронов в стационарном подкритическом реакторе;  $\chi = 1 + k \cdot v(v-1)/[(1-k)\bar{v}]$ .

Решение уравнения (11) с начальным условием (12) есть

$$\tilde{F}_2(z) = (1 - j\chi z/2)^{-a} \exp(-j\bar{y}z/\chi).$$

Характеристическая функция и распределение случайной величины связаны между собой фурье-преобразованием [3]. Применение обратного фурье-преобразования к  $\tilde{F}_2(z)$  дает выражение для плотности распределения  $p(y)$

$$p(y) = 2[2(y + \bar{y}/\chi)/\chi]^{a-1} \cdot \exp[-2(y + \bar{y}/\chi)/\chi] / (\chi \Gamma(a)), \quad a = 2\bar{y}(\chi+1)/\chi^2, \quad (13)$$

где  $\Gamma(a)$  – гамма функция. Нетрудно убедиться, что, как и следовало ожидать, первые два момента этого распределения совпадают с теми же моментами распределения дискретного числа нейтронов в стационарном подкритическом реакторе. Распределение (13) относится к классу гамма-распределений ([6]).

Обсудим полученное решение. Функция  $p(y)$  вида (13) может быть распределением, если только  $y \geq -\bar{y}/\chi$ . Это означает, что в этой модели допускаются «нефизические» отрицательные значения  $y$  в интервале  $[-\bar{y}/\chi, 0]$ <sup>1)</sup>. Такое свойство полученного распределения является неизбежным следствием выбранной выше схемы построения непрерывного аналога  $y$ : он является диффузионным процессом, подчиняющимся стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y + S + \sqrt{S + \alpha \chi y} \xi(t), \quad (14)$$

где  $\alpha = (1-k)/L$ ;  $\xi(t)$  – стандартный гауссовский «белый» шум. Нет формальных ограничений на знаки траекторий этого процесса. Разумеется, диффузионный процесс  $y(t)$  управляется уравнением (14) так, что заходы этого процесса в область отрицательных значений крайне маловероятны практически при любых параметрах реактора (рис. 1). Нижняя граница

<sup>1)</sup> Автор крайне отрицательно относится к теоретико-расчетным моделям, допускающим «нефизические» решения. Однако здесь сделано исключение по одной простой причине: эта модель «безвредна» для безопасности ядерных технологий (как увидим, она ужесточает требования на мощность источника нейтронов), никак не способствует безответственности персонала и руководителей, никак не рекомендуется для практических расчетов.

$$-\bar{y} / \chi \approx -SL / [\bar{v}(\bar{v}-1) / \bar{v}]$$

практически не зависит от коэффициента размножения и при  $k \geq 0.9$  по абсолютной величине в десятки-сотни раз меньше среднего числа нейтронов в реакторе. «Отрицательность» (хотя и маловероятная) некоторых траекторий процесса  $y(t)$  – неизбежная плата за возможность определить, к какому классу распределений близко распределение числа нейтронов в подкритическом реакторе со слабым источником, а также за возможность иметь простое (пусть приближенное) аналитическое выражение для этого распределения.

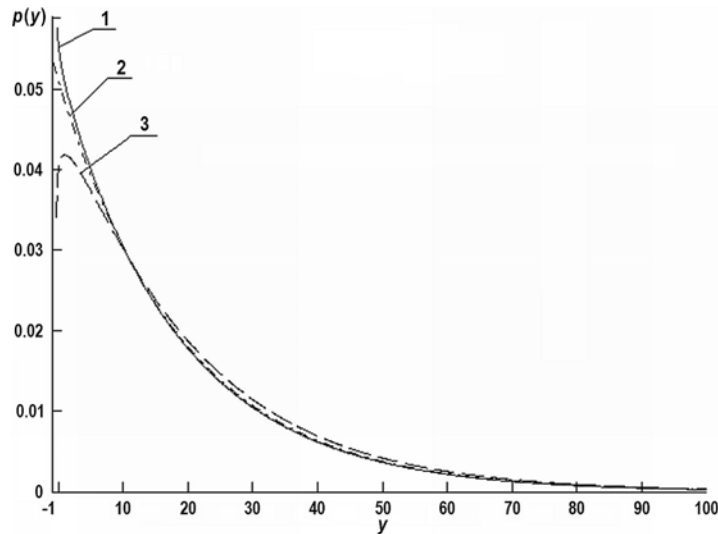


Рис. 1. Плотность распределения  $p(y)$  непрерывного аналога дискретного числа нейтронов в подкритическом реакторе: 1 – интенсивность источника  $S = 0.9145 \cdot 10^3$  н/с; 2 – параметр  $a = 1$ ,  $S = 1 \cdot 10^3$  н/с; 3 – интенсивность источника  $S = 1.1 \cdot 10^3$  н/с

Вид полученного распределения  $p(y)$  существенно зависит от величины его параметра  $a$ . Как видно из формулы (13),  $a \sim SL$ . Характерным является значение  $a = 1$ . В этом случае распределение становится экспоненциальным. Если  $a > 1$ , то распределение  $p(y)$  равно нулю при  $y = -\bar{y} / \chi$  и имеет единственный максимум в точке  $y_m = (a-1)\chi / 2 - \bar{y} / \chi < \bar{y}$ . При  $a < 1$  плотность распределения  $p(y)$  имеет бесконечную ординату в точке  $y = -\bar{y} / \chi$ . Последнее означает, что при очень малых мощностях источника для подкритического реактора наиболее вероятным является состояние отсутствия нейтронов в нем (если, конечно, отбросить «нефизическую» часть решения). Оценки показывают, что  $a \approx 1$ , когда

$$SL \approx \bar{v}(\bar{v}-1) / (2\bar{v}) \approx 1, \quad (15)$$

т.е. распределение числа нейтронов в подкритическом реакторе близко к экспоненциальному, когда мощность источника такова, что за время жизни нейтрона в реакторе появляется в среднем приблизительно один нейтрон источника.

На рисунке 1 приведены распределения  $p(y)$  для различных мощностей источника нейтронов в реакторе с U-235 при  $k = 0.95$ ,  $L = 10^{-3}$  с, откуда видно, что

- распределение  $p(y)$  при низких мощностях постороннего источника нейтронов сильно скошено в сторону малых значений числа нейтронов, т.е. координата максимума распределения меньше среднего значения числа нейтронов в реакторе;



- вблизи характерного значения параметра  $\alpha = 1$  небольшие вариации величины  $S$  приводят к существенному изменению вида распределения (можно сравнить, например, кривые при  $S = 0.9145 \cdot 10^3$  1/с и  $S \geq 1 \cdot 10^3$  1/с);

- с ростом мощности источника  $S$  асимметрия уменьшается и распределение числа нейтронов становится близким к симметричному относительно среднего, что является следствием действия закона больших чисел, когда при достаточно больших  $S$ , а значит, и  $\alpha$  гамма-распределение становится близким к гауссовскому [6].

Таким образом, получен результат, **уточняющий** понятие *слабого постороннего источника нейтронов* [5] и ужесточающий требования [7] на мощность постороннего источника с точки зрения ядерной безопасности. Полученная граница  $SL \approx 1$  перехода реактора из состояния  $SL < 1$ , когда в нем наиболее вероятно не будет ни одного нейтрона, к состоянию  $SL > 1$ , когда в нем наиболее вероятно будет какое-то ненулевое количество нейтронов, может служить более четким критерием слабости источника нейтронов (уже при  $S \leq 1/L$  источник следует считать *слабым*), чем «размытое» неравенство  $SL \ll 1$ .

### АНАЛИЗ МОДЕЛИ КОЗНА

В модели Козна [8], по аналогии с дробовым эффектом, в правую часть обычных уравнений кинетики реактора вводится эквивалентный шум реактивности. Как мы выше убедились, уравнения точечной кинетики описывают нейтронную популяцию в среднем, т.е. им подчиняются детерминированные функции времени – математические ожидания. Кроме того, коэффициент размножения и, соответственно, реактивность – детерминированные характеристики реактора. Поэтому введение эквивалентного шума реактивности – искусственная операция, и требуется оценка точности такой модели.

Ограничимся учетом одной эффективной группы запаздывающих нейтронов. По модели Козна нейтронная популяция в реакторе описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{k(1-\beta)-1}{L} y_1 + \lambda y_2 + S + \frac{1-\beta}{L} \bar{y}_1 \delta k(t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{k\beta}{L} y_1 - \lambda y_2 + \frac{\beta}{L} \bar{y}_1 \delta k(t), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\delta k(t)$  – эквивалентный шум реактивности. Из аналогии с дробовым эффектом Козном получено, что  $\delta k(t)$  – «белый» шум со спектральной плотностью

$$S_{\delta k}^{(k)} = \overline{v(v-1)} / (\bar{y}_1 \bar{v}). \quad (17)$$

Для анализа модели Козна применим следующий прием. Будем сравнивать спектральные плотности непрерывных случайных процессов, траектории которых описываются уравнениями (3) и (16). Если эти процессы эквивалентны по своему поведению во времени и пространстве параметров, то их спектральные плотности должны быть равны. Так как спектральные плотности связаны с корреляционными функциями взаимнооднозначным фурье-преобразованием, то должны быть равны и корреляционные функции (вторые центральные моменты специального вида). У диффузионного процесса  $y(t)$  (если шумовая часть в его описании выбрана правильно) и дискретного  $\alpha(t)$  вторые моменты должны быть равны. Для процесса, описываемого системой уравнений (3), это справедливо. Поэтому, не делая никаких предположений относительно вида спектральной плотности  $S_{\delta k}(\omega)$  эквивалентного шума реактивности, найдем ее из отношения спектральной плотности



$$S_1(\omega) = \frac{\left[ \omega^2 \frac{(1-\beta)^2}{L^2} + \frac{\lambda^2}{L^2} \right] \bar{y}_1^2 S_{\delta k}(\omega)}{\omega^4 + \omega^2 \left[ \frac{(1-k(1-\beta))^2}{L^2} + \lambda^2 + 2\lambda \frac{k\beta}{L} \right] + \lambda^2 \frac{(1-k)^2}{L^2}}$$

процесса  $y_1(t)$ , полученной по системе уравнений (16), к спектральной плотности

$$S_1(\omega) = \frac{b_{11}\omega^2 + \lambda^2(b_{11} + b_{22} + 2b_{12})}{\omega^4 + \omega^2 \left[ \frac{(1-k(1-\beta))^2}{L^2} + \lambda^2 + 2\lambda \frac{k\beta}{L} \right] + \lambda^2 \frac{(1-k)^2}{L^2}}$$

этого процесса, полученной по системе уравнений (3):

$$S_{\delta k}(\omega) = [b_{11}\omega^2 + \lambda(b_{11} + b_{22} + 2b_{12})] / [(\omega^2(1-\beta)^2 + \lambda^2)\bar{y}_1^2]. \quad (18)$$

Отсюда следует, что для совпадения первых двух моментов распределения значений процесса  $y_1(t)$  необходимо чтобы у эквивалентного шума реактивности  $S_{\delta k}(\omega) \neq \text{const}$ . Как видно из формулы (18), в модели Козна это не так. Однако оценки показывают, что зависимость  $S_{\delta k}$  от  $\omega$  незначительна, например, при  $k = 1$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} S_{\delta k}(\omega) = L \sqrt{v(v-1)} / (\bar{y}_1 \bar{v}),$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} S_{\delta k}(\omega) = L [v(v-1)(1-\beta)^2 / \bar{v} + \beta] / \bar{y}_1.$$

С изменением величины  $k \leq 1$  величина  $S_{\delta k}(\omega)$  изменяется очень слабо.

Таким образом, оценка  $S_{\delta k}^{(k)}$  Козна (17) очень близка к полученной из построенной здесь общей модели спектральной плотности  $S_{\delta k}(\omega)$  эквивалентного шума реактивности. Это дает уверенность в том, что модель Козна с хорошей точностью применима для практических приложений при оценках первых двух моментов распределения числа нейтронов. Однако следует помнить, что причина этому – не природа процесса размножения и гибели нейтронов, а **замечательное** (очень малое) значение  $\beta$  (эффективной доли запаздывающих нейтронов) для всех известных делящихся нуклидов. Моделирование же траекторий случайного процесса  $y(t)$  предпочтительнее проводить по полученной системе уравнений (3), нежели по системе уравнений (16), т.к. эта система вытекает непосредственно из общей модели ветвящегося процесса (не использовано никаких физических аналогий) и поэтому должна правильнее отражать детальную структуру изменений нейтронной популяции во времени.

### Литература

1. Волков Ю.В. Стохастическая теория ядерных реакторов нулевой мощности. Часть 1. Физическая и математическая модели // Известия вузов. Ядерная энергетика. №4, 2013. – С. 127-134.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977.
3. Королюк В.С., Портенко П.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1986.
4. Судэк Г. Проблемы кинетики реактора. В сб. «Теория ядерных реакторов». – М.: Госатомиздат, 1963.

5. Hansen G.E. Assembly of Fissionable Material in the Presence of a Weak Neutron Source // Nucl.Sci. Eng. 1960. Vol. 8, PP. 709-719.
6. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. – М: Советское радио, 1967.
7. Hankins D.E. Effect of Reactivity Addition Rate and of Weak Neutron Source on the Fission Yield of Uranium Solutions // Nucl. Sci. Eng. 1966. Vol. 26, PP. 110-116.
8. Уриг Р. Статистические методы в физике ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1974.

Поступила в редакцию 24.09.2013 г.

#### Автор

Волков Юрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор  
E-mail: volkov@iate.obninsk.ru

UDC 621.039.516

### **STOCHASTIC THEORY OF ZERO POWER NUCLEAR REACTORS PART 3. STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ZERO-DIMENSIONAL REACTOR KINETICS. WEAK EXTERNAL NEUTRON SOURCE. ANALYSIS OF THE EQUIVALENT REACTIVITY NOISE MODEL**

Volkov Yu. V.

Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, National Nuclear Research University  
«MEPhI». 1 Studgorodok, Obninsk, Kaluga reg., 249040 Russia

#### ABSTRACT

Stochastic differential equations of zero-dimensional reactor kinetics have been derived assuming that the discrete-time and continuous-time branching processes should have moments of distribution which converge up to the second order, inclusive. The regular part of the equations derived is similar to that of the zero-dimensional reactor kinetics equations. The regular part is influenced by the totality of the Gaussian white noise inputs with appropriate coefficients.

An approximated distribution of the continuous-time branching process values has been derived by using a prompt neutron approximation from the one-dimensional equation for the characteristic function. Although this distribution may not have much physical significance, it allowed the concept of the weak external neutron source to be clarified more precisely.

An analysis has been made of the well-known Cohn's stochastic model, with reactivity noise introduced by analogy with the Schottky effect. It has been shown that the model works well due to a very small fraction of delayed neutrons emitted by all the fissionable isotopes.

**Key words:** stochastic differential equations, moments of distribution, model, zero power nuclear reactor, characteristic function, distribution, white noise.

#### REFERENCES

1. Volkov Yu.V. *Stokhasticheskaya teoriya yadernyh reaktorov nulevoj moschnosti. Chast' 1. Fizicheskaya i matematicheskaya modeli.* [Stochastic Theory of Zero Power Nuclear Reactors. Part 1. Physical and Mathematical Models]. *Izvestiya vuzov. Yadernaya energetika.* 2013, no. 4, pp. 127-134.
2. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie processy* [Markov Processes]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1977 (in Russian).

3. Korolyuk V.S., Portenko P.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. *Spravochnik po teorii veroyatnostej i matematicheskoy statistike* [Probability Theory and Mathematical Statistics. Handbook]. Moscow, Nauka Publ., 1986 (in Russian).
4. Sudek G. *Problemy kinetiki reaktora. V sb. Teoriya yadernyh reaktorov* [Aspekts of Reactor Kinetics. In Reactor Theory]. Moscow, Gosatomizdat Publ., 1963 (in Russian).
5. Hansen G.E. Assembly of Fissionable Material in the Presence of a Weak Neutron Source. *Nucl. Sci. Eng.* 1960, v. 8, pp. 709-719.
6. Koks D.R., Smit V.L. *Teoriya vosstanovleniya* [Recovering Theory]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1967 (in Russian).
7. Hankins D.E. Effect of Reactivity Addition Rate and of Weak Neutron Source on the Fission Yield of Uranium Solutions. *Nucl. Sci. Eng.* 1966, v. 26, pp. 110-116.
8. Urig R. *Statisticheskie metody v fizike yadernyh reaktorov* [Statistical Methods in Reactor Physics]. Moscow, Atomizdat Publ., 1974 (in Russian).

**Author**

Volkov Yuriy Vasil'evich, Professor, Dr. Sci. (Engineering)

E-mail: volkov@iate.obninsk.ru