

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ШАРЕ, ПОМЕЩЕННОМ В ХОРОШО ПЕРЕМЕШИВАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

М.В. Кащеев, Ю.И. Загорулько

ГНЦ РФ-Физико-энергетический институт, г. Обнинск



Решена задача определения температуры в шаре, помещенном в жидкость, температура которой не зависит от координаты. В шаре действуют источники тепла, изменяющиеся во времени по произвольному закону. Заданы начальные температуры шара и жидкости. Поставленная задача решена методом интегрального преобразования Лапласа.

Ключевые слова: шар, жидкость, внутренние источники тепла, метод интегрального преобразования Лапласа, характеристическое уравнение, изображение, оригинал, кориум.

Key words: ball, liquid, internal sources of heat, method of integral transformation of Laplace, characteristic equation, image, original, corium.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об остывании тела сферической формы, помещенного в среду с заданной начальной температурой, имеет широкую область приложений – от астрофизики до металлургии.

В частности, она представляет интерес при анализе сценариев постулируемых тяжелых аварий с плавлением активной зоны реактора на энергетических установках, например, на реакторах типа БН с натриевым теплоносителем.

Термическое взаимодействие, развивающееся при контакте расплава топлива и конструкционных материалов активной зоны (кориума) с натрием, реализуется в виде последовательности быстро протекающих стадий: предварительного грубого перемешивания, тонкой фрагментации кориума, испарения натрия и расширения паровой фазы с совершением механической работы против внешних ограничений.

Основной задачей анализа термического взаимодействия кориума с теплоносителем является оценка его энергетического эффекта, определяемого долей тепловой энергии кориума, преобразуемой в механическую работу расширения пара натрия.

При прочих равных условиях интенсивность суммарного теплового потока будет определяться геометрическими характеристиками ансамбля фрагментов кориума, формирующегося на стадии предварительного перемешивания и, в значительной большей степени, на стадии тонкой фрагментации независимо от механизма ее осуществления. Суммарный выход механической энергии контролируется интенсивностью теплообмена между фрагментами кориума и натрием. Таким

образом, решение задачи, составляющей содержание предлагаемой статьи, может быть использовано для получения реалистичных оценок ожидаемых коэффициентов конверсии при развитии тяжелой аварии.

Для консервативных оценок энергетических эффектов термического взаимодействия кориума с натрием были предложены термодинамические модели [1,2], основные допущения которых предполагают исчезающе малые значения длительности процесса перемешивания и размеров частиц кориума. Кроме того, в них не принималось во внимание выделение тепла за счет ядерных реакций деления в кориуме.

Представленная работа имеет непосредственное отношение к развитию термодинамических подходов к оценкам энергетических эффектов термического взаимодействия кориума с натрием с учетом конечных размеров частиц кориума при наличии внутренних источников тепловыделения.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При рассмотрении ансамбля фрагментов кориума принимается их сферическая форма. Индивидуальный фрагмент радиусом R помещен в натрий (далее по тексту – жидкость) с однородным полем температуры. При этом фрагмент (шар) может содержать внутренние источники тепла, интенсивность которых зависит от времени. Начальная температура шара является произвольной функцией координаты, а начальная температура жидкости равна T_0^0 . Требуется определить температурные поля в шаре и жидкости.

В математической постановке задачи принимается:
дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q_v(t)}{c\rho}, \quad 0 < r < R, t > 0; \quad (1)$$

начальные условия

$$T(r, 0) = T^0(r), \quad 0 < r < R, \quad (2)$$

$$T(r, 0) = T_0^0, \quad r > R; \quad (3)$$

граничные условия

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = 0, \quad T(0, t) \neq \infty, t > 0, \quad (4)$$

$$-4\pi R^2 \lambda \frac{\partial T(R, t)}{\partial r} = m_0 c_0 \frac{\partial T(R, t)}{\partial t}, \quad t > 0. \quad (5)$$

Если вести отсчет температуры от T_0^0 и принять масштабы: для линейных размеров – R , температуры – T_0^0 , времени – $\frac{R^2}{a}$, энерговыделения – q_{v0} , то задача (1)–(5) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \text{Po} \varphi(\tau), \quad 0 < \rho < 1, \tau > 0, \quad (6)$$

$$v(\rho, 0) = v^0(\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad (7)$$

$$v(\rho, 0) = 0, \quad \rho > 1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \rho} = 0, \quad v(0, \tau) \neq \infty, \tau > 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v(1, \tau)}{\partial \rho} + \gamma \frac{\partial v(1, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad \tau > 0, \quad (10)$$

где $v = \frac{T - T_0^0}{T_0^0}$; $\rho = \frac{r}{R}$; $\tau = \frac{a \cdot t}{R^2}$; $v^0(\rho) = \frac{T^0(r) - T_0^0}{T_0^0}$; $\gamma = \frac{m_0 c_0}{3mc}$; $\varphi(\tau) = \frac{q_v(t)}{q_{v0}}$; $Po = \frac{q_{v0} R^2}{\lambda T_0^0}$

– критерий Померанцева.

Если ввести новую переменную $u = v\rho$, то уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho Po \varphi(\tau). \quad (11)$$

Классическим методом Фурье (разделения переменных) задачу (11), (7) – (10) решить нельзя, т.к. собственные функции не являются ортогональными из-за необычного граничного условия (10). Впервые аналогичная задача при отсутствии источников тепла поставлена и намечены пути ее решения в работе [3]. В статье [4] получено решение задачи [3] методом Коши контурного интегрирования в комплексной плоскости. Метод слишком громоздок.

Решим поставленную задачу методом интегрального преобразования Лапласа [5], так как собственные функции как таковые в этом методе не применяются.

Применив к задаче преобразование Лапласа по формуле

$$U(\rho, s) = \int_0^\infty u(\rho, \tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

получим задачу для изображения

$$\frac{d^2 U(\rho, s)}{d\rho^2} - sU(\rho, s) = -u^0(\rho) - \Phi_1(s),$$

$$\frac{dU(0, s)}{d\rho} = 0, \quad U(0, s) \neq \infty,$$

$$\frac{dU(1, s)}{d\rho} + \gamma s U(1, s) = 0,$$

где $u^0(\rho) = \rho v^0(\rho)$, $\Phi_1(s) = \rho Po \Phi(s)$, $U(\rho, s) = \frac{U(\rho, s)}{\rho}$.

Используя метод вариации произвольных постоянных [6], получим решение для изображения

$$U(\rho, s) = \frac{Po \Phi(s)}{s} + \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{Po \Phi(s) \operatorname{sh} \sqrt{s} \rho}{\operatorname{sh} \sqrt{s} - \sqrt{s} \operatorname{ch} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s}} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \sqrt{s} - \sqrt{s} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{ch} \sqrt{s}) \operatorname{sh} \sqrt{s} \rho}{\sqrt{s} (\operatorname{sh} \sqrt{s} - \sqrt{s} \operatorname{ch} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s})} \int_0^1 \rho v^0(\rho) \operatorname{sh} \sqrt{s} \rho d\rho. \quad (12)$$

Найдем оригинал изображения (12), т.е. решение задачи:

$$L^{-1} \left[\frac{\Phi(s)}{s} \right] = \int_0^\tau \varphi(\tau') d\tau', \quad (13)$$

$$L^{-1} \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{s} \rho}{\operatorname{sh} \sqrt{s} - \sqrt{s} \operatorname{ch} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s}} \right] = L^{-1} \left[\frac{F(s)}{\Psi(s)} \right] = \sum_{n=1}^\infty e^{s_n \tau} \frac{F(s_n)}{\Psi'(s_n)}, \quad s_n \neq 0, \quad (14)$$

где $F(s)$ и $\Psi(s)$ – обобщенные полиномы [7], получаемые разложением гиперболических функций в ряды, s_n – корни уравнения

$$\operatorname{sh} \sqrt{s} - \sqrt{s} \operatorname{ch} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s} = 0 \text{ или } \operatorname{th} \sqrt{s} = \frac{\sqrt{s}}{1 - \gamma s}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \sqrt{s} &= -i \sin i \sqrt{s}, \\ \operatorname{Ah} \sqrt{s} &= \cos i \sqrt{s}, \\ \operatorname{th} \sqrt{s} &= -i \operatorname{tg} i \sqrt{s} \end{aligned} \quad (15)$$

и обозначая $i \sqrt{s} = \mu$, получим характеристическое уравнение для определения μ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu}{1 + \gamma \mu^2}. \quad (16)$$

Преобразуем выражение (14):

$$\begin{aligned} \frac{F(s_n)}{\Psi'(s_n)} &= \frac{2\sqrt{s_n} \operatorname{sh} \sqrt{s_n} \rho}{-(\sqrt{s_n} \operatorname{sh} \sqrt{s_n} + 2\gamma \sqrt{s_n} \operatorname{sh} \sqrt{s_n} + \gamma s_n \operatorname{ch} \sqrt{s_n})} = \\ &= -\frac{2 \sin \mu_n \rho}{(1 + 2\gamma) \sin \mu_n + \gamma \mu_n \cos \mu_n} = -2A_n \sin \mu_n \rho \end{aligned} \quad (17)$$

С использованием характеристического уравнения (16) для A_n находим

$$A_n = \frac{(\gamma^2 \mu_n^4 + (1 + 2\gamma) \mu_n^2 + 1) \sin \mu_n}{\gamma^2 \mu_n^4 + (1 + 3\gamma) \mu_n^2}. \quad (18)$$

Для корня $s_0 = 0$ имеем

$$L^{-1} \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{s} \rho}{\operatorname{sh} \sqrt{s} - \sqrt{s} \operatorname{ch} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s} \rho}{\operatorname{sh} \sqrt{s} - \sqrt{s} \operatorname{ch} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s}} = -\frac{3\rho}{1 + 3\gamma}. \quad (19)$$

Поскольку произведению изображений в пространстве изображений соответствует свертка функций в пространстве оригиналов, то с учетом (15)–(19) получим

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\Phi(s) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{s} \rho}{\operatorname{sh} \sqrt{s} - \sqrt{s} \operatorname{ch} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s}} \right] &= \\ &= -\frac{3\rho}{1 + 3\gamma} \int_0^\tau \varphi(\tau - \tau') d\tau' - 2 \int_0^\tau \varphi(\tau - \tau') \sum_{n=1}^\infty A_n e^{-\mu_n^2 \tau'} \sin \mu_n \rho d\tau'. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично (17), (19) находим

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{(\operatorname{ch} \sqrt{s} - \sqrt{s} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{ch} \sqrt{s}) \operatorname{sh} \sqrt{s} \rho}{\sqrt{s} (\operatorname{sh} \sqrt{s} - \sqrt{s} \operatorname{ch} \sqrt{s} - \gamma s \cdot \operatorname{sh} \sqrt{s})} \int_0^1 \rho v^0(\rho) \operatorname{sh} \sqrt{s} \rho d\rho \right] &= \\ &= -\frac{3\rho \int_0^1 \rho^2 v^0(\rho) d\rho}{1 + 3\gamma} - 2 \sum_{n=1}^\infty A_{1n} \sin \mu_n \rho e^{-\mu_n^2 \tau} \int_0^1 \rho v^0(\rho) \sin \mu_n \rho d\rho, \end{aligned} \quad (21)$$

где $A_{1n} = \frac{\gamma^2 \mu_n^4 + (1 + 2\gamma) \mu_n^2 + 1}{\gamma^2 \mu_n^4 + (1 + 3\gamma) \mu_n^2}$.

Таким образом, объединяя результаты (13), (14), (17)–(21) с учетом (12), получим решение задачи

$$v(\rho, \tau) = \frac{3 \int_0^1 \rho^2 v^0(\rho) d\rho}{1 + 3\gamma} + Po \left(\int_0^\tau \varphi(\tau') d\tau' - \frac{3\gamma}{1 + 3\gamma} \int_0^\tau \varphi(\tau - \tau') d\tau' - \frac{2\gamma}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \mu_n \rho \int_0^\tau \varphi(\tau - \tau') e^{-\mu_n^2 \tau'} d\tau' \right) + \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \sin \mu_n \rho e^{-\mu_n^2 \tau} \int_0^1 \rho v^0(\rho) \sin \mu_n \rho d\rho. \quad (22)$$

Температура жидкости зависит только от времени и при $\rho = 1$ равна

$$v(1, \tau) = \frac{3 \int_0^1 \rho^2 v^0(\rho) d\rho}{1 + 3\gamma} + Po \left(\int_0^\tau \varphi(\tau') d\tau' - \frac{3\gamma}{1 + 3\gamma} \int_0^\tau \varphi(\tau - \tau') d\tau' - 2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \int_0^\tau \varphi(\tau - \tau') e^{-\mu_n^2 \tau'} d\tau' \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\mu_n^2 \tau} \int_0^1 \rho v^0(\rho) \sin \mu_n \rho d\rho, \quad (23)$$

где $A_{2n} = A_n \sin \mu_n = \frac{1}{\gamma^2 \mu_n^2 + 3\gamma + 1}$.

При $Po = 0$ решения (22), (23) совпадают с решениями в работах [3, 4]. Применение интегрального метода решения для рассматриваемой задачи позволило избежать трудностей, возникших перед авторами работ [3, 4].

Решение задачи, в принципе, можно использовать при анализе поведения ансамбля частиц кориума с известным законом их распределения в теплоносителе.

Если объемная концентрация кориума в натрии равна α , то параметр γ вычисляется по формуле

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{\rho_0 c_0}{\rho c} \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (24)$$

Найдем конкретное решение задачи для кориума. Если остаточное энерговыделение в кориуме аппроксимировать выражением

$$\varphi(\tau) = e^{-\omega \tau},$$

а за начальную температуру принять параболическое стационарное распределе-

ние $v^0(\rho) = v^0(0) - \frac{Po \rho^2}{6}$, то из решений (22) и (23) можно получить

$$v(\rho, \tau) = \frac{v^0(0) - 0,1 Po}{1 + 3\gamma} + Po \left(\frac{1}{\omega} (1 - e^{-\omega \tau}) \frac{1}{1 + 3\gamma} - \frac{2\gamma}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega - \mu_n^2} A_n (e^{-\mu_n^2 \tau} - e^{-\omega \tau}) \sin \mu_n \rho \right) + \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} A_{3n} e^{-\mu_n^2 \tau} \sin \mu_n \rho,$$

$$\text{где } A_{3n} = -A_n \left(\gamma v^0(0) + \frac{Po}{6\mu_n^2} (2 + \gamma(6 - \mu_n^2)) \right).$$

$$v(1, \tau) = \frac{v^0(0) - 0,1Po}{1 + 3\gamma} + Po \left(\frac{1}{\omega} (1 - e^{-\omega\tau}) \frac{1}{1 + 3\gamma} - 2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega - \mu_n^2} A_{2n} (e^{-\mu_n^2\tau} - e^{-\omega\tau}) \right) + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{3n} e^{-\mu_n^2\tau} \sin \mu_n.$$

Установившаяся температура при $\tau \rightarrow \infty$ равна

$$v(\rho) = v(1) = \frac{1}{1 + 3\gamma} \left(v^0(0) + Po \left(\frac{1}{\omega} - 0,1 \right) \right).$$

Отметим, что для решения трансцендентного уравнения (16) целесообразно использовать метод Вегстейна [8].

Таким образом, в данной работе решена задача определения температуры в шаре, помещенном в жидкость, температура которой не зависит от координаты, но изменяется во времени. В шаре действуют источники тепла, изменяющиеся во времени по произвольному закону. Полученное решение предполагается использовать при разработке новой модели термического взаимодействия, которое развивается при контакте кориума с натрием. Данная модель предназначена для получения оценок энергетических эффектов термического взаимодействия кориума с натрием и может использоваться при анализе сценариев постулируемых тяжелых аварий с плавлением активной зоны реактора типа БН с натриевым теплоносителем. Она призвана преодолеть основные допущения термодинамических моделей термического взаимодействия кориума с натрием, разработанных ранее.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

a – коэффициент температуропроводности, m^2c^{-1} ; c и c_0 – удельные теплоемкости материала шара и теплоносителя соответственно, Дж/(кг·К); q_v – мощность источников тепла, Вт/м³; m и m_0 – массы шара и теплоносителя соответственно, кг; r – координата, м; s – параметр преобразования Лапласа, c^{-1} ; T – температура, К; T^0 – начальная температура, К; t – время, с; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); ρ – безразмерная координата и плотность в формуле (24); τ – безразмерное время; v – безразмерная температура.

Литература

1. Hicks E.P., Menzies D.C. Theoretical Studies on the Fast Reactor Maximum Accident/Proc. of the Conf. on Safety, Fuels and Core Design in Large Fast Power Reactors, ANL-7120, 1965.
2. Hall A.N. Outline of a new thermodynamic model of energetic fuel-coolant interactions// Nuclear Engineering and Design. – 1988. – V.109. – P. 407-415.
3. Peddie W. Note on the Cooling of a Sphere in a mass of well-stirred Liquid//Proc. Edin. Math. Soc. – 1901. – V. 19. – P. 34-35.
4. Dougall M.A. Note on the application of complex integration to the equation of Conduction of Heat, with special reference to Dr Peddie's problem//Proc. Edin. Math. Soc. – 1901. – V. 19. – P. 50-56.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1950. – 468 с.
7. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
8. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 208 с.

Поступила в редакцию 6.12.2011

УДК 621.039.548.5

Revealing of Factors of the Accelerated Accumulation of Damages in Fuel Pin Cladding Irradiated in Reactor BN-600 a Nondestructive Quality Monitoring \V.V. Chuev, K.V. Mityurev, I.I. Kononov; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2011. – 10 pages, 4 tables, 7 illustrations. – References, 7 titles.

This work presents the results of the analysis of the experimental studies related to fuel pins, irradiated in reactor BN-600 core up to a damaging dose of ~ 90 dpa. Studies had made by methods of profilometry, gamma spectroscopy and pulse whirlcurrent defectoscopy in a «hot» cell BN-600, lead to determine factors accelerated accumulation damages that cause cladding depressurization.

УДК 621.039:37

Professionally-Oriented ESL Instruction for Nuclear Engineering Students at INPE NNRU MPhI \E.A. Avramova; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2011. – 7 pages. – References, 5 titles.

The paper discusses some issues of teaching English as a Second Language (ESL) to nuclear engineering students at INPE NNRU MPhI. Description is given of the ESL teaching package designed by the author and her colleagues for INPE NNRU MPhI students. The sequence of presenting the course materials to be acquired by learners is discussed. Special emphasis is given to building communicative, information and socio-cultural skills required for effective communication in English in a professional context.

УДК 621.039:37

State-of-the-Art Computer Technologies Used to Train Nuclear Specialists and to Conduct Research \Ju.A. Korovin, A.V. Tikhonenko; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2011. – 6 pages. – References, 10 titles.

The paper discusses innovative methods used in the process of training nuclear specialists and conducting research which are based on state-of-the-art computer technologies. The approach proposed makes wide use of mathematical modeling and state-of-the-art programming techniques. It is based on the development, improvement and application of problem-oriented computer codes to support the teaching process and to solve fundamental and applied problems of nuclear physics and nuclear engineering.

УДК 621.039.586

Temperature Distribution in a Ball Placed in Well Mixed Liquid \M.V. Kascheev, Yu.I. Zagorulko; Editorial board of journal «Izvestia visshikh uchebnikh zavedeniy. Yadernaya energetika» (Communications of Higher Schools. Nuclear Power Engineering) – Obninsk, 2011. – 6 pages. – References, 8 titles.

The task of determination of temperature in a ball placed in a liquid the temperature of which does not depend on a co-ordinate is solved. In a ball sources of heat changing in time under any law operate. The initial temperatures of ball and liquid are set. The task is solved by the method of integral transformation of Laplace.