积分表

基本形 公式

椭圆：

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中离心率$e=\frac{c}{a}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$;焦点参数$p=\frac{b^2}{a}$

椭圆上(x, y)点处的曲率半径为 $R=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$，其中$r_1$和$r_2$分别为(x, y)与两焦点$F_1$和$F_2$的距离。设点 A 和点 M 的坐标分别为(a, 0)和(x, y)，则 AM 的弧长为

$$L_{AM}=a\int_0^{\arccos\frac{x}{a}}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt=a\int_{\arccos\frac{x}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$$

椭圆的周长为 $L=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt=4aE(e,\frac{\pi}{2})$ ，其中

$$E\left(e,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2e^2-\left(\frac{1*3}{2*4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1*3*5}{2*4*6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\cdots$$

设椭圆上点 M(x, y), N(x, -y), x, y>0, A(a, 0), 原点 O(0, 0)。

扇形 OAM 的面积 $S_{OAM}=\frac{1}{2}ab\arccos\frac{x}{a}$　弓形 MAN 的面积$S_{MAN}=ab\arccos\frac{x}{a}-xy$

方程，5 个点确定一个圆锥曲线。

θ 为(x, y)点关于椭圆中心的极角，r 为(x, y)到椭圆中心的距离，椭圆极坐标方程:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta \text{，其中} r^2=\frac{b^2a^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$$

抛物线

标准方程　$y^2=2px$　　曲率半径　$R=((p+2x)^{\wedge}(\mathbf{3/2}))/\boldsymbol{sqrt(p)}$

弧长：设 M(x, y)是抛物线上一点，则 $L_{OM}=\frac{p}{2}[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)}+ln(\sqrt{\frac{2x}{p}}+\sqrt{1+\frac{2x}{p}})]$

弓形面积：设M，D是抛物线上两点，且分居一、四象限。作一条平行于MD且与抛物线相切的直线L。若M到L的距离为h。则有 $S_{MOD}=\frac{2}{3}MD\cdot h$

重心

半径为 r、圆心角为θ的扇形的重心与圆心的距离为(4rsin (θ/2))/3θ

半径为 r、圆心角为θ的圆弧的重心与圆心的距离为(4rsin^3 (θ/2))/(3(θ − sinθ))

椭圆上半部分的重心与圆心的距离为 (4/3π) b

抛物线中弓形 MOD 的重心满足 CQ = (2/5) PQ， P 是直线 L 与抛物线的切点，Q 在 MD 上且 PQ 平行 x 轴。C 是重心。

内心　r = 三角形面积/(p = 1/2(a + b + c))　I = (aA + bB + cC)/(a + b + c)

三重积公式　$a\times(b\times c)=b(a\cdot c)-c(a\cdot b)$

额外的公式

四边形: D1, D2 为对角线, M 对角线中点连线, A 为对角线夹角

1. a^2+b^2+c^2+d^2=D1^2+D2^2+4M^2　　2. S=D1D2sin(A)/2

(以下对圆的内接四边形)

3. ac+bd=D1D2　　4.S=sqrt((P-a)(P-b)(P-c)(P-d)),P 为半周长

正 n 边形:R 为外接圆半径,r 为内切圆半径

1. 中心角 A=2PI/n　　　2. 内角 C=(n-2)PI/n
3. 边长 a=2sqrt(R^2-r^2)=2Rsin(A/2)=2rtan(A/2)
4. 面积 S=nar/2=nr^2tan(A/2)=nR^2sin(A)/2=na^2/(4tan(A/2))

圆: 1. 弧长 l=rA　　2. 弦长 a=2sqrt(2hr-h^2)=2rsin(A/2)

3. 弓形高 h=r-sqrt(r^2-a^2/4)=r(1-cos(A/2))=atan(A/4)/2
4.扇形面积 S1=rl/2=r^2A/2
5.弓形面积 S2=(rl-a(r-h))/2=r^2(A-sin(A))/2

棱柱: 1. 体积 V=Ah,A 为底面积,h 为高

2. 侧面积 S=lp,l 为棱长,p 为直截面周长　　　3. 全面积 T=S+2A

棱锥: 1.体积 V=Ah/3,A 为底面积,h 为高　　（以下对正棱锥）

2. 侧面积 S=lp/2,l 为斜高,p 为底面周长　　　3. 全面积 T=S+A

棱台:1. 体积 V=(A1+A2+sqrt(A1A2))h/3,A1.A2 为上下底面积,h 为高

（以下为正棱台）

2. 侧面积 S=(p1+p2)l/2,p1.p2 为上下底面周长,l 为斜高
3. 全面积 T=S+A1+A2

算法

平方剩余求解

给定 a 和素数 p，求所有的$0 \le x < p$,满足 $x^2 = a(mod\ p)$.

Legendre 符号：$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & n\text{为模 p 的二次剩余} \\ -1, & n\text{ 为模 p 的二次非剩余} \end{cases}$

Legendre 符号是积性函数，即 $\left(\frac{mn}{p}\right) = (\frac{m}{p})(\frac{n}{p})$ ，若 p 为奇素数，$\left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

即当且仅当 $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$时， 2 为模 p 的二次剩余。

若 p 为奇素数，则 $(2/p) = (-1)\hat{}((1/8)(p\hat{}2 - 1))$ 即当且仅当 $p \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\ 8)$时，2 为模 p 的二次剩余。

若 pq 为奇素数，且 $p \ne q$，则 $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$。

引理 [1,p-1]区间中最多有两个根x_1和x_2,且满足 $x_1 + x_2 = p$

求解步骤如下：

1.　若 p=2, 则 x=a；否则，转 2.
2.　若$a\hat{}((p-1)/2)\ \equiv 1$ 则转 3；否则，无解。
3.　若 $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$,则 $x \equiv a\hat{}((p+1)/4)$；否则，转 4

4.1 找一个最小的 $b \ge 1$使得 $b\hat{}((p-1)/2) \equiv 1$。
4.2 令 $i = (p-1)/2\ , k = 0.$
4.3 反复做 4.3.A 和 4.3.B，直到 i 为奇数。
4.3.A　　$i \leftarrow i/2$ 且 $k \leftarrow k/2$ 。
4.3.B　　若 $a\hat{}i\ b\hat{}k + 1 \equiv 0$,则 $k \leftarrow k + (p-1)/2$。
4.4　　　最后 $x \equiv a\hat{}((i+1)/2)\ b\hat{}(k/2)$ 。

树的计数

有根树的计数

令 $S_{n,j} = \sum_{1\le i\le n/j} a_{n+1-ij} = S_{n-j,j} + a_{n+1-j}$

于是，n+1 个结点的有根树的总数为 $a_{n+1} = \frac{\sum_{1\le j\le n} j a_j S_{n,j}}{n}$

附：$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 9, a_6 = 20, a_9 = 286, a_{11} = 1842$

无根树的计数

当 n 是奇数时，则有 $a_n - \sum_{1\le i\le n/2} a_i a_{n-i}$ 种不同的无根树。

当 n 是偶数时，则有这么多种不同的无根树。

$$a_n - \sum_{1\le i\le \frac{n}{2}} a_i a_{n-i} + \frac{1}{2} a_{n/2}(a_{n/2} + 1)$$

生成树的计数

完全图的生成树个数 n^{n-2}

任意图的生成树个数： 生成树计数行列式tab[i][i] = Di，Di为i的度数tab[i][j] = -k, k为i和j之间的边数。任去一行一列之后的行列式。

代数

Burnside引理 $\text{ans} = \frac{(\sum \text{每种置换下的不变的元素个数})}{\text{置换群中置换的个数}}$

三次方程求根公式 $x^3 + px + q = 0$

$$x_j = \omega^j \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^{2j} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

其中 j=0, 1, 2, $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$

当求解$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$时， 令 $x = y - b/3a$ 再求解y，即转化成 $x^3 + px + q = 0$的形式

组合公式

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$ $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

错排：$D_n = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = (n-1)(D_{n-2} - D_{n-1})$

三角公式

$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha\ cos\beta \pm \cos\alpha\ sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha\ cos\beta \mp sin\alpha\ sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)} \qquad \tan(\alpha) \pm \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\ cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} \qquad \sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\ sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$\cos(\alpha) + cos(\beta) = 2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\ cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} \qquad \cos(\alpha) - cos(\beta) = -2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\ sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$$\sin(\mathrm{n}\alpha) = ncos^{n-1}\alpha\ sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{\mathrm{n}-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{\mathrm{n}-5}\alpha\sin^5\alpha - \cdots$$

$$\cos(\mathrm{n}\alpha) = cos^n\alpha\ - \binom{n}{2}\cos^{\mathrm{n}-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{\mathrm{n}-4}\alpha\sin^4\alpha - \cdots$$

积分表

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$a\^x \to a\^x/lna$	$sinx \to -cosx$	$\cos x \to \sin x$
$tanx \to -lncosx$	$\sec x \to \ln\tan(x/2+\pi/4)$	$\tan^2 x \to tanx - x$
$cscx \to lntan\frac{x}{2}$	$\sin^2 x \to \frac{x}{2} - \frac{1}{2}sinxcosx$	$\cos^2 x \to \frac{x}{2} + \frac{1}{2}sinxcosx$
$\sec^2 x \to tanx$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \to \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$csc^2x \to -cotx$
$\frac{1}{a^2-x^2}(\lvert x\rvert < \lvert a\rvert) \to \frac{1}{2a}\ln\frac{(a+x)}{a-x}$	$\frac{1}{x^2-a^2}(\lvert x\rvert > \lvert a\rvert) \to \frac{1}{2a}\ln\frac{(x-a)}{x+a}$	
$\sqrt{a^2-x^2} \to \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \to \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$	
$\sqrt{a^2+x^2} \to \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \to \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$	
$\sqrt{x^2-a^2} \to \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$	$\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} \to -\frac{1}{a}ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$	
$\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} \to \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}$	$\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}} \to -\frac{1}{a}ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$	
$\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}} \to \arccos(1-\frac{x}{a})$	$\frac{x}{ax+b} \to \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b)$	
$\sqrt{2ax-x^2} \to \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{a}-1)$		
$\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}(b<0) \to \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}$	$x\sqrt{ax+b} \to \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$	
$\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}(b>0) \to \frac{1}{\sqrt{-b}}ln\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}$	$\frac{x}{\sqrt{ax+b}} \to \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$	

$\frac{1}{x^2\sqrt{ax+b}} \to -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$	$\frac{\sqrt{ax+b}}{x} \to 2\sqrt{ax+b} + \mathrm{b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$	
$\frac{1}{\sqrt{(ax+b)^n}}(n>2) \to \frac{-2}{a(n-2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(ax+b)^{n-2}}}$		
$\frac{1}{ax^2+c}(a>0, c>0) \to \frac{1}{\sqrt{ac}}\arctan(x\sqrt{\frac{a}{c}})$	$\frac{x}{ax^2+c} \to \frac{1}{2a}\ln(ax^2+c)$	
$\frac{1}{ax^2+c}(a+, c-) \to \frac{1}{2\sqrt{-ac}} ln \frac{x\sqrt{a}-\sqrt{-c}}{x\sqrt{a}+\sqrt{-c}}$	$\frac{1}{x(ax^2+c)} \to \frac{1}{2c}\ln\frac{x^2}{ax^2+c}$	
$\frac{1}{ax^2+c}(a-, c+) \to \frac{1}{2\sqrt{-ac}} ln \frac{\sqrt{c}+x\sqrt{-a}}{\sqrt{c}-x\sqrt{-a}}$	$x\sqrt{ax^2+c} \to \frac{1}{3a}\sqrt{(ax^2+c)^3}$	
$\frac{1}{(ax^2+c)^n}(n>1) \to \frac{x}{2c(n-1)(ax^2+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2c(n-1)}\int \frac{dx}{(ax^2+c)^{n-1}}$		
$\frac{x^n}{ax^2+c}(n \neq 1) \to \frac{x^{n-1}}{a(n-1)} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{n-2}}{ax^2+c}dx$	$\frac{1}{x^2(ax^2+c)} \to \frac{-1}{cx} - \frac{a}{c}\int \frac{dx}{ax^2+c}$	
$\frac{1}{x^2(ax^2+c)^n}(n \geq 2) \to \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x^2(ax^2+c)^{n-1}} - \frac{a}{c}\int \frac{\mathrm{dx}}{(ax^2+c)^n}$		
$\sqrt{ax^2+c}(a>0) \to \frac{x}{2}\sqrt{ax^2+c} + \frac{\mathrm{c}}{2\sqrt{a}}\ln\left(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c}\right)$		
$\sqrt{ax^2+c}(a<0) \to \frac{x}{2}\sqrt{ax^2+c} + \frac{\mathrm{c}}{2\sqrt{-a}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{ax^2+c}}(a<0)$	
$\frac{1}{\sqrt{ax^2+c}}(a>0) \to \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c}\right)$	$\to \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{a}{c}}\right)$	
$\sin^2 ax \to \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin 2ax$	$\cos^2 ax \to \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin 2ax$	$\frac{1}{\sin ax} \to \frac{1}{a}\ln\tan\frac{ax}{2}$
$\frac{1}{\cos^2 ax} \to \frac{1}{a}\tan ax$	$\frac{1}{\cos ax} \to \frac{1}{a}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$	$\ln(ax) \to x ln(ax) - x$
$\sin^3 ax \to \frac{-1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax$	$\cos^3 ax \to \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax$	
$\frac{1}{\sin^2 ax} \to -\frac{1}{a}\cot ax$	$x ln(ax) \to \frac{x^2}{2}\ln(ax) - \frac{x^2}{4}$	$\cos ax \to \frac{1}{a}\sin ax$
$x^2 e^{ax} \to \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$	$(\ln(ax))^2 \to x(\ln(ax))^2 - 2x ln(ax) + 2x$	
$x^2\ln(ax) \to \frac{x^3}{3}\ln(ax) - \frac{x^3}{9}$	$x^n\ln(ax) \to \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1}}{n+1}\ln(ax) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$	
$\sin(\ln ax) \to \frac{x}{2}[\sin(\ln ax) - \cos(\ln ax)]$	$\cos(\ln ax) \to \frac{x}{2}[\sin(\ln ax) + \cos(\ln ax)]$	