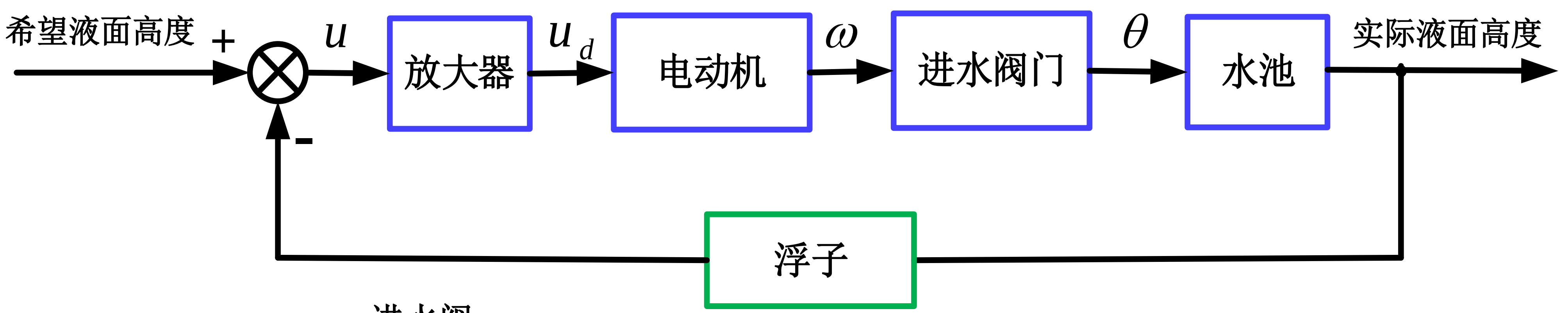
中国农业大学
China Agricultural University

自动控制理论——传递函数

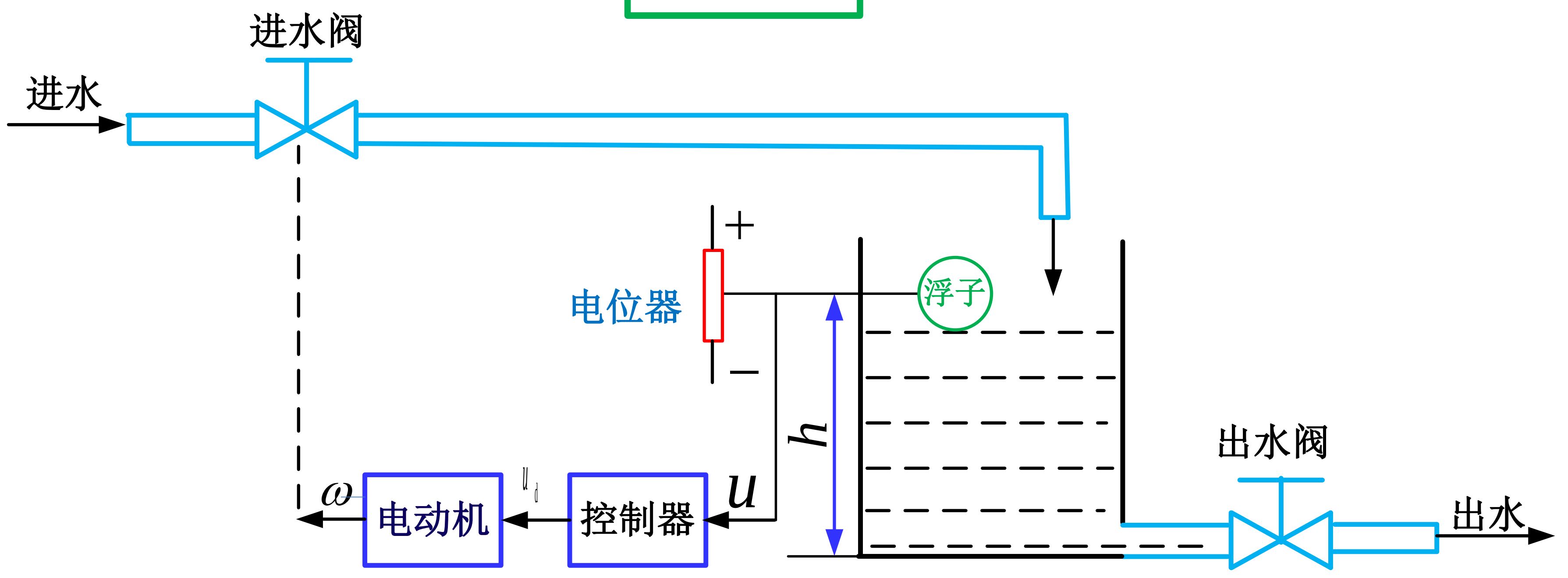
胡标

目录
Contents

液位自动控制系统



希望液面高度
+
-
u
放大器
u_d
电动机
ω
进水阀门
θ
水池
实际液面高度
浮子



进水阀
进水
+
电位器
浮子
−
h
出水阀
ω
电动机
控制器
u
出水

传递函数概述

- 分析和设计任何一个控制系统，首要任务是建立系统的数学模型。
- 系统的数学模型是描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间关系的数学表达式。
- 微分方程是最基本形式，直观易于理解，但是当系统结构或参数发生变化时，需要重新列写，而且高阶微分的求解并不容易。
- 微分方程通过拉氏变换，得到控制系统在复数域中的数学模型——传递函数。
- 传递函数不仅可以表征系统的动态性能，而且可以研究系统的结构或者参数变化对系统性能的影响。

传递函数的定义

输入 → 控制系统 → 输出

典型环节Laplace变换

$$u(t) \to \frac{1}{s} \qquad t \to \frac{1}{s^2} \qquad e^{-at} \to \frac{1}{s+a}$$

$$\sin \omega t \to \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos \omega t \to \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

定义：在外界输入作用前，**输入、输出的初始条件为零时**，线性定常系统、环节或元件的输出 $x_o(t)$ 的Laplace变换 $X_o(s)$ 与输入 $x_i(t)$ 的Laplace变换 $X_i(s)$ 之比，称为该**系统、环节或元件的传递函数**$G(s)$。

传递函数的定义

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s)=\frac{L[x_o(t)]}{L[x_i(t)]}=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\quad (n\geq m)}$$

□ 输入、输出和传递函数之间的关系

$$X_o(s)=G(s)X_i(s)$$

$$\xrightarrow{X_i(s)}\boxed{G(s)}\xrightarrow{X_o(s)}$$

□ 一般外界输入作用前的输出初始条件

$$x_o(0^-)\qquad x_o^{(1)}(0^-)\qquad \cdots \qquad x_o^{(n-1)}(0^-)$$

称为系统的初始状态或初态，在计算时作为输入考虑。

传递函数的特点

- 只描述线性系统，与系统的线性常系数微分方程数学模型一一对应。
- 反映的是线性定常系统本身固有的属性，与输入信号形式无关。
- 传递函数分母中s的阶数n必大于等于分子中s的阶数m，即$n \geq m$，这是因为实际系统总具有惯性，且能量是有限的。
- 传递函数可以有量纲，也可以无量纲，取决于输入输出变量的单位。
- 不同的物理系统，例如机械系统或电路系统，可以具有相同的传递函数形式。

传递函数的形式

传递函数的一般形式

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

传递函数的零点、极点形式

系统的传递函数$G(s)$是以复变函数s作为自变量的函数

$$G(s)=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

K^*为常数

当$s=z_j$时，均能使 $G(s)=0$， z_j称为$G(s)$的零点

当$s=p_i$时，均能使 $G(s)$ 的分母为0，p_i称为$G(s)$ 极点

传递函数的极点就是微分方程的特征根

传递函数的形式

根据微分方程的解可知，瞬态响应由以下形式的分量构成

$$\mathrm{e}^{pt} \qquad \mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t \qquad \mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t$$

式中： p和$\sigma+\mathrm{j}\omega$ 是系统传递函数极点，也是微分方程特征根。

- 假定所有的极点是负数或具有负实部的复数，即$p<0$， $\sigma<0$
- 当$t\to\infty$时，上述分量趋向于零，瞬态响应收敛，因此说系统是稳定的。
- 系统是否稳定由极点性质决定
- 当系统输入信号一定时，零、极点决定着系统的动态性能。
- 零点对系统的稳定性没有影响，但对瞬态响应曲线形状有影响。

□ 传递函数的标准形式及放大系数（常数为1）

$$G(s)=\frac{b_0(b'_m s^{(m)}+b'_{m-1}s^{(m-1)}+\ldots+b'_1 s+1)}{a_0(a'_n s^{(n)}+a'_{n-1}s^{(n-1)}+\ldots+a'_1 s+1)}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}$$

K—系统的放大增益，或称放大系数。

$$K=\frac{b_0}{a_0}$$

$$G(s)=\frac{10(2s+1)}{s(10s+1)(s+1)}$$

$$K=10$$

目录

Contents

列写传递函数的一般方法

（1）列写系统（或元件）的传递函数，目的在于确定系统的输出量与给定输入量或扰动输入量之间的函数关系。

（2）确定系统（或元件）的输入量和输出量

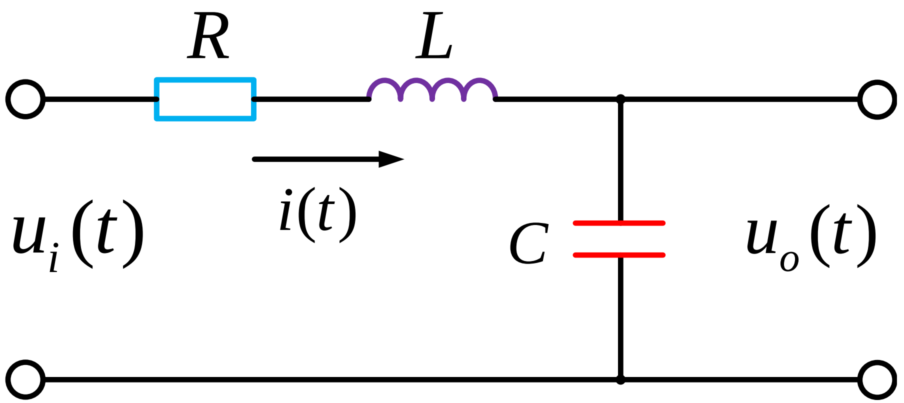
（3）从系统输入端开始，列写各个环节的动态微分方程

（4）将微分方程进行拉氏变换

（5）消除中间变量，整理得出输入输出之间关系的传递函数

RLC电路

解：根据基尔霍夫定律



$$\begin{cases} Ri(t)+L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{o}}(t)=u_{\mathrm{i}}(t) \\ i(t)=c\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Ls+R)I(s)+U_{\mathrm{o}}(s)=U_{\mathrm{i}}(s) \\ I(s)=CsU_{\mathrm{o}}(s) \end{cases}$$

$$Lc\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+Rc\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{o}}(t)=u_{\mathrm{i}}(t)$$

微分方程

$$G(s)=\frac{U_{\mathrm{o}}(s)}{U_{\mathrm{i}}(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

传递函数

线性系统传递函数的建立

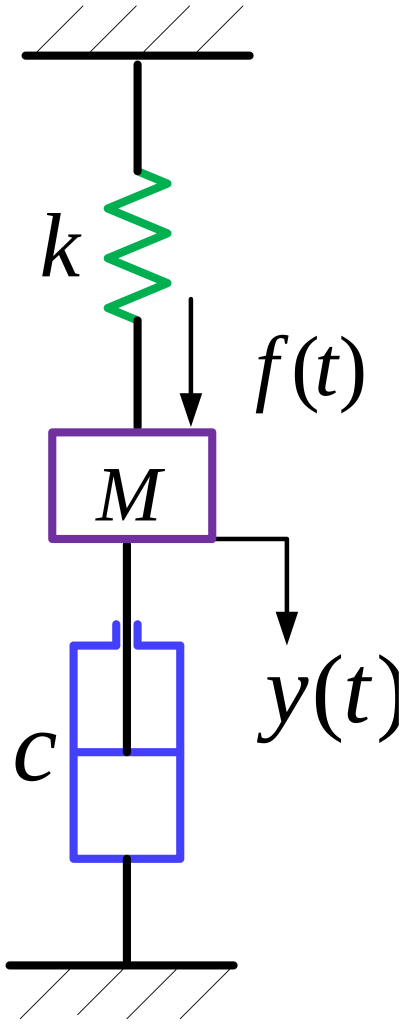
质量-弹簧-阻尼系统

解：由牛顿定律 $\sum F = ma$

$$f(t) - ky(t) - c\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\Rightarrow (ms^2 + cs + k)Y(s) = F(s)$$

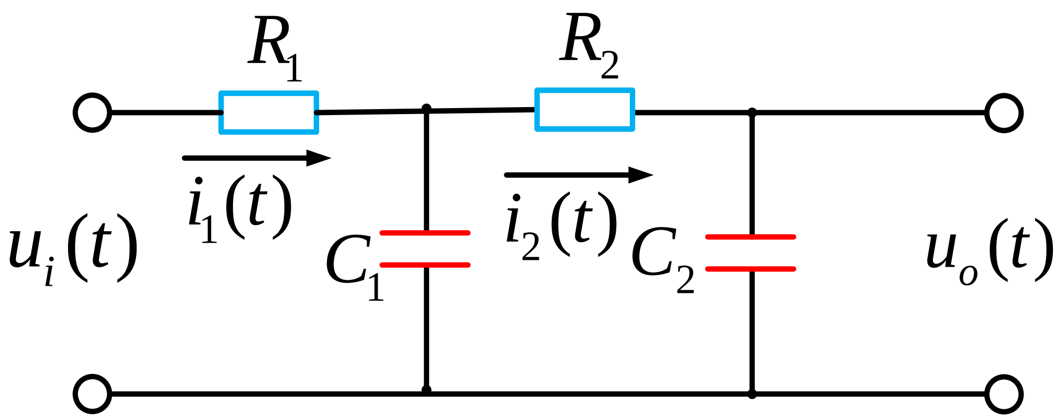
$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$



线性系统传递函数的建立

中国农业大学 China Agricultural University

RLC电路系统



解：根据基尔霍夫定律

$$\begin{cases} i_1(t)R_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1(t)-i_2(t))\,\mathrm{d}\,t = u_\mathrm{i}(t) \\ i_2(t)R_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1(t)-i_2(t))\mathrm{d}t \\ \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2(\mathrm{t})\mathrm{d}t = u_\mathrm{o}(t) \end{cases}$$

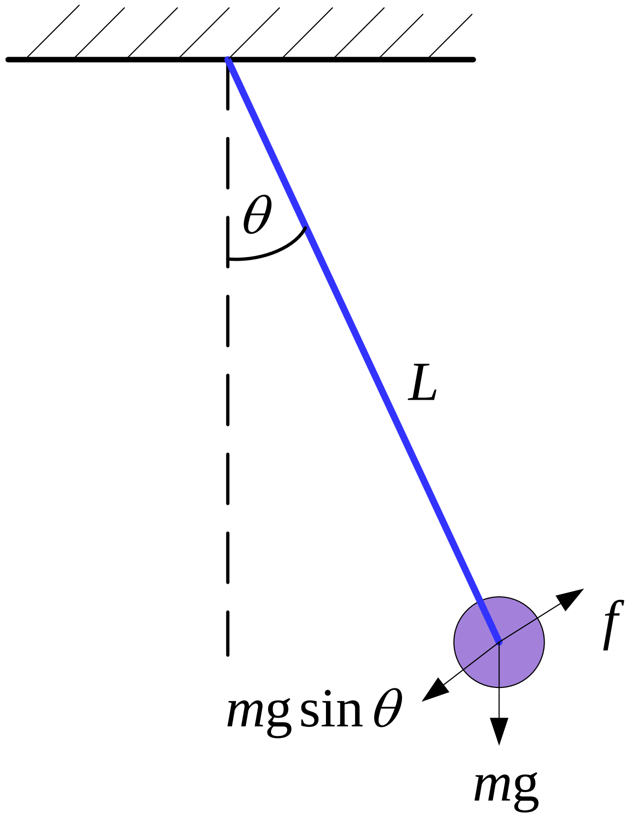
$$\begin{cases} I_1(s)R_1 + \dfrac{1}{C_1 s}(I_1(s)-I_2(s)) = U_\mathrm{i}(s) \\ I_2(s)R_2 + \dfrac{1}{C_2 s}I_2(s) = \dfrac{1}{C_1 s}(I_1(s)-I_2(s)) \\ \dfrac{1}{C_2 s}I_2(s) = U_\mathrm{o}(s) \end{cases}$$

$$R_1C_1R_2C_2\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t^2} + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2$$

传递函数为

$$\frac{U_\mathrm{o}(s)}{U_\mathrm{i}(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1}$$

摆锤质量为m，摆杆长度为L，小球在运动过程中阻尼系数为C，摆角θ作为输出，在平衡位置给小球一个脉冲力$f(t)$使小球摆动，试建立系统的传递函数。

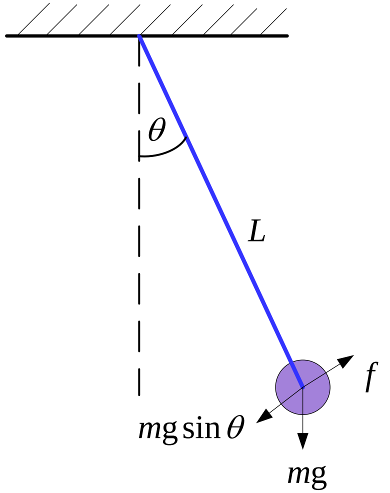


非线性系统传递函数的建立

解：输入量为脉冲力 $f(t)$ 输出量为单摆运动的摆角 θ

根据牛顿第二定律

$$mL\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+mg\sin\theta=f(t)$$



设 $y=\sin\theta$ 在平衡位置 $\theta=\theta_0$ 进行线性化

$$y=\sin\theta=\sin\theta_0+\cos\theta_0\Delta\theta+\frac{1}{2!}(-\sin\theta_0)\Delta\theta^2+\frac{1}{3!}(-\cos\theta_0)\Delta\theta^3+\cdots$$

$\Delta y\approx\Delta\theta$ 或 $y\approx\theta$ 即 $\sin\theta\approx\theta$

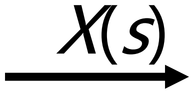
$$mL\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+mg\theta=f(t)$$

在初始条件为零时，系统的传递函数为

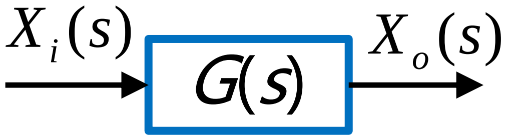
$$\boxed{G(s)=\frac{1}{mLs^2+Cs+mg}}$$

传递函数框图的组成

（1）信号线 带箭头的线段，箭头表示信号的流向

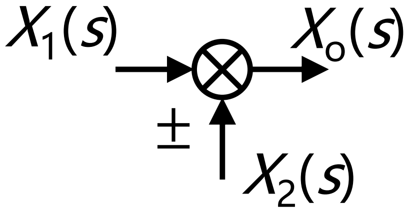


（2）函数方框 传递函数的图解表示

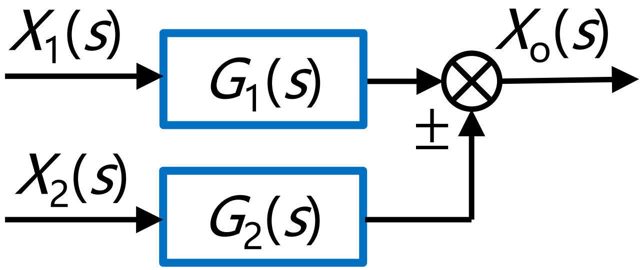


$X_o(s)=G(s)X_i(s)$

（3）相加点 信号之间求和运算的图解表示

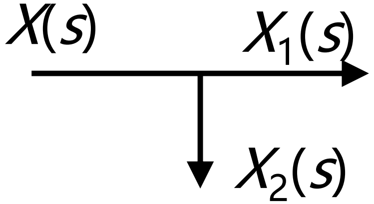


$X_o(s)=X_1(s)\pm X_2(s)$



$X_o(s)=G_1(s)X_1(s)\pm G_2(s)X_2(s)$

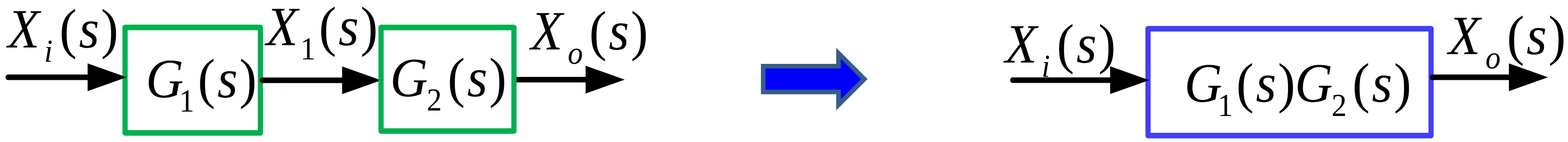
（4）分支点 信号向不同方向传递



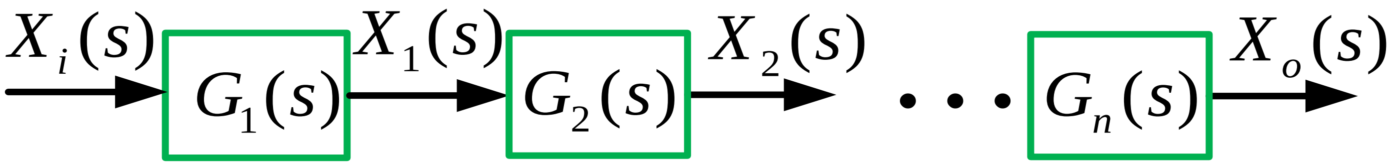
$X(s)=X_1(s)=X_2(s)$

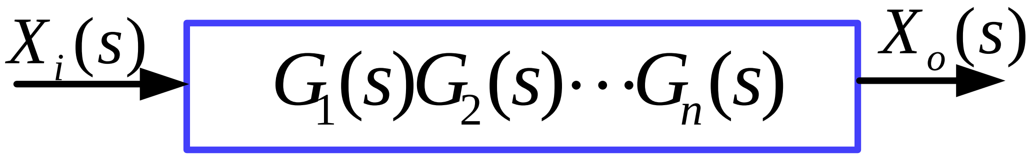
传递函数框图连接形式

（1）串联



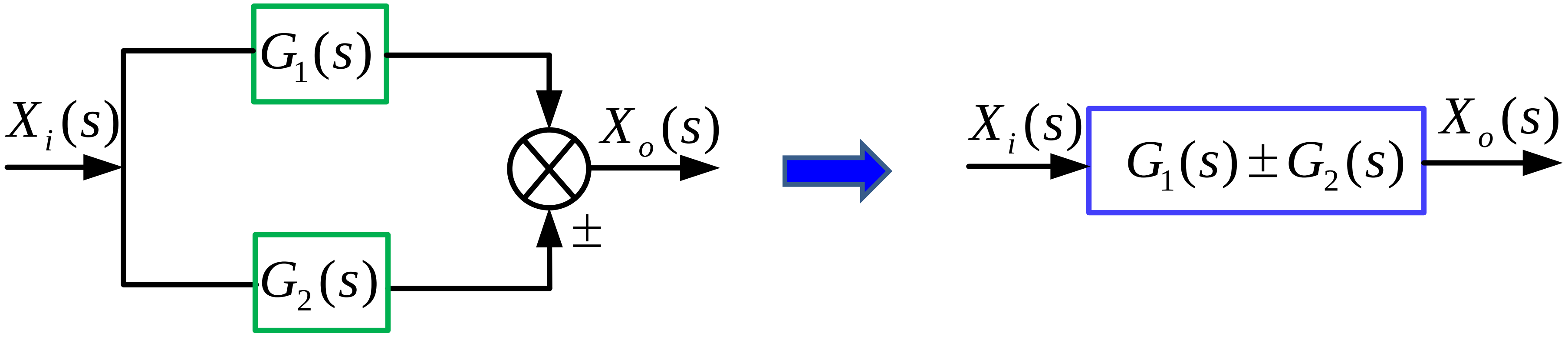
$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{X_o(s)}{X_1(s)}\cdot\frac{X_1(s)}{X_i(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

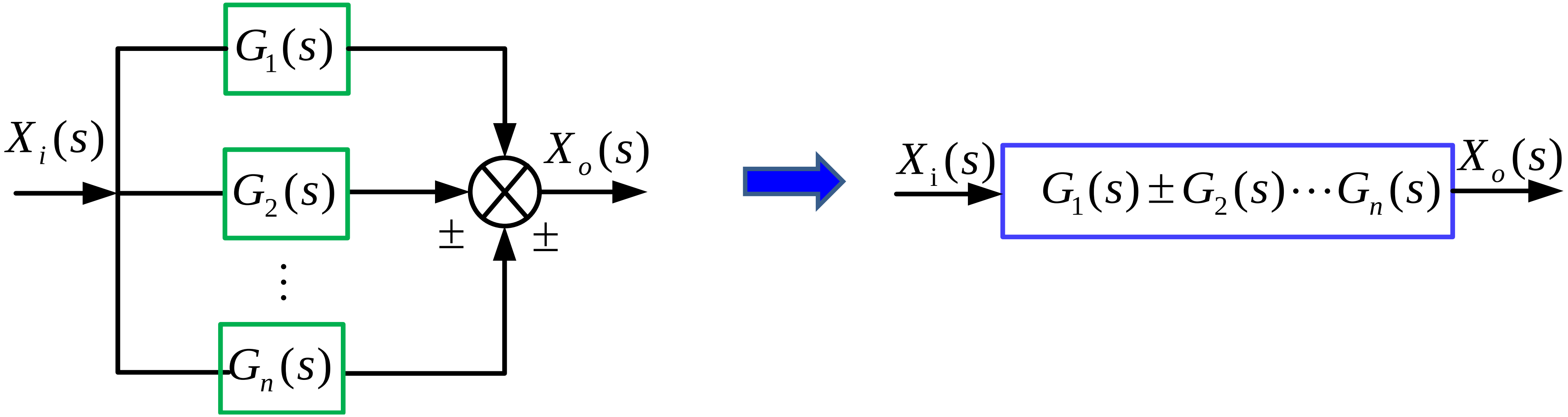




串联环节总传递函数等于各环节传递函数的乘积

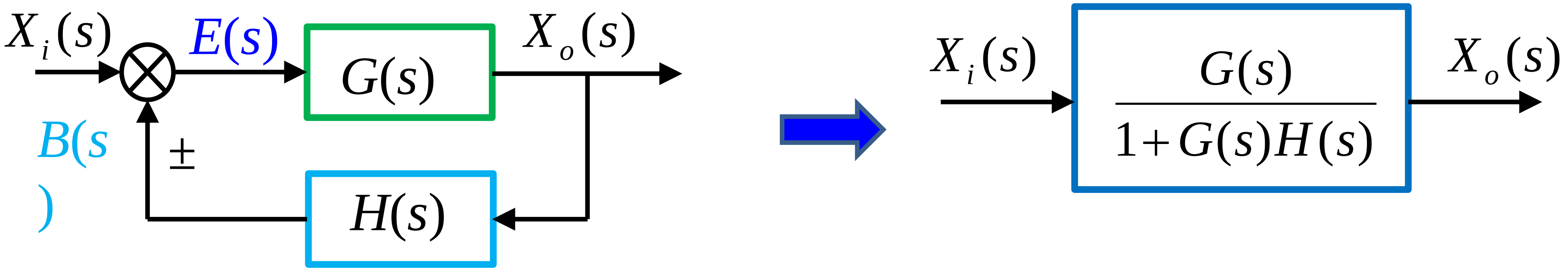
（2）并联





并联环节总传递函数等于各环节传递函数代数和

（3）反馈



$E(s) = X_i(s) \pm B(s)$　　　$B(s) = H(s)X_o(s)$

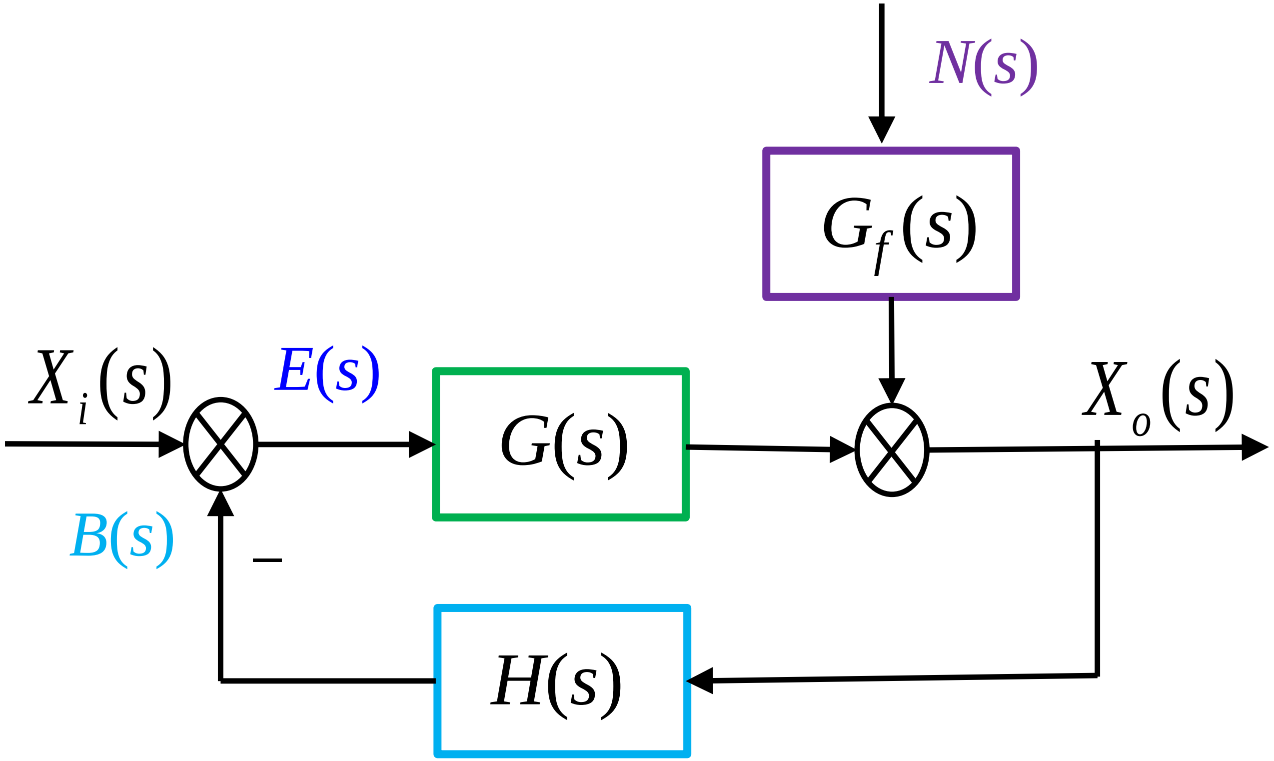
$X_o(s) = G(s)\,E(s) = G(s)[X_i(s) \pm B(s)\,]$

$X_o(s)\ \pm G(s)\,H(s)\,X_o(s) = G(s)X_i(s)$

$$G_B(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

传递函数框图连接形式

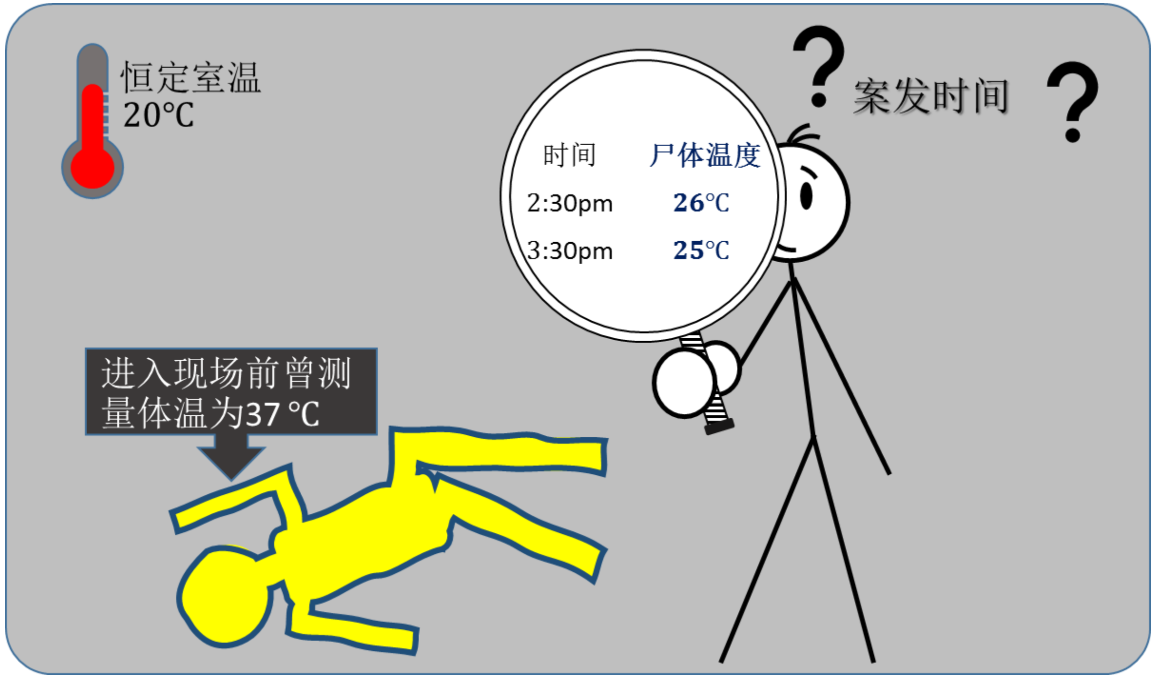
例 求 $\dfrac{X_o(s)}{X_i(s)}$ $\dfrac{X_o(s)}{N(s)}$ $\dfrac{E(s)}{X_i(s)}$ $\dfrac{E(s)}{N(s)}$ $\dfrac{B(s)}{X_i(s)}$ $\dfrac{B(s)}{N(s)}$



目录
Contents

引子 – 案发时间是几点

你是一名侦探，应邀去调查一起密室杀人案件。基于职业习惯，你在进入房间的时候看了一眼手表，记录下此刻的时间是下午2:30。死者正躺在密室的地板上，你拿出温度枪，测得此刻尸体的温度是26℃。你开始对房间展开调查并寻找蛛丝马迹。这是一个密闭的空间，有一套完善的空调系统可以将室温准确地保持在20℃。空调控制器也没有被动过的痕迹，因此可以断定尸体一直保存在20℃的环境下。调查取证用了1个小时的时间，在收集完所有证物之后时钟指向下午3:30。此时再次测量尸体的温度，已经降低到了25℃。你了解到死者进入现场之前曾经测量过体温，是标准的37℃。本案案发时间是?



引子 – 案发时间是几点

- 牛顿冷却定律的动态微分方程：

物体温度 $\frac{dT(t)}{dt} = -K\big(T(t) - C(t)\big)$ 环境温度

导热系数

设系统的**输入**$u(t)$为环境温度$u(t) = C(t)$，设系统的**输出**是物体温度，即 $x(t) = T(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = Ku(t) \xrightarrow{\text{拉普拉斯变换}} sX(s) - x(0) + KX(s) = KU(s)$$

初始条件，本例中$x(0) = 37℃$

$$(s + K)X(s) = K\left(\frac{1}{K}x(0) + U(s)\right) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{X(s)}{\frac{1}{K}x(0) + U(s)} = \frac{K}{s + K}}$$

传递函数

定义：$U_1(s) = \frac{1}{K}x(0)$，$U_2(s) = U(s)$

两个输入对应两个输出：$X(s) = X_1(s) + X_2(s)$

冲激响应 阶跃响应

典型一阶系统

- 典型一阶系统的微分方程为：$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+ax(t)=au(t)$

  其中a是一个常数。考虑零初始条件$x(0)=u(0)=0$

$$\Big\Downarrow \text{拉普拉斯变换}$$

$$sX(s)+aX(s)=aU(s)$$

$$\Big\Downarrow$$

$$\boxed{G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{a}{s+a}}$$ 传递函数

$G(s)$的极点是$s_p=-a$

- 单位冲激函数：

$$\begin{cases}\delta(t)=0, \quad t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases}$$

拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_{0}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-s0}=1$$

- 单位阶跃函数：

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$\mathcal{L}[1]=\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-0t}]=\frac{1}{s+0}=\frac{1}{s}$$

一阶系统单位冲激响应 – 传递函数

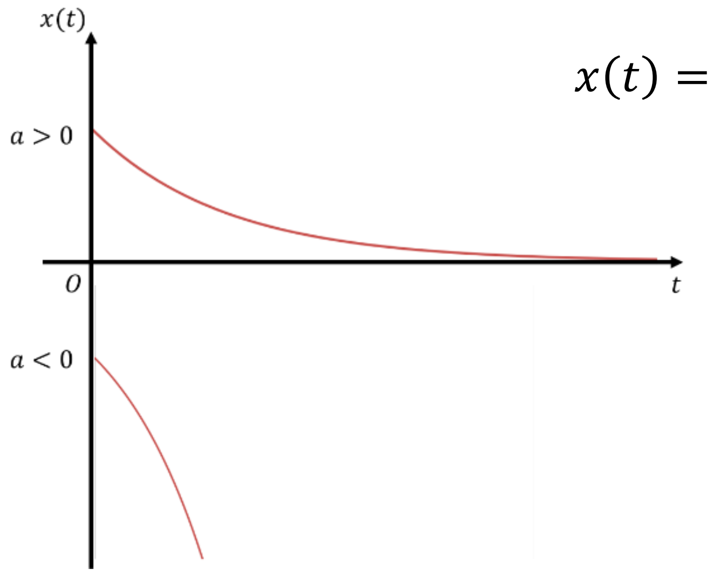
- 典型一阶系统 $G(s) = \dfrac{X(s)}{U(s)} = \dfrac{a}{s+a}$
- 输入为单位冲激函数，$u(t) = \delta(t)$，$U(s) = 1$。

代入

$$X(s) = U(s)G(s) = 1 \times \frac{a}{s+a} = \frac{a}{s+a}$$

拉普拉斯逆变换

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s+a}\right] = a\mathrm{e}^{-at}$$



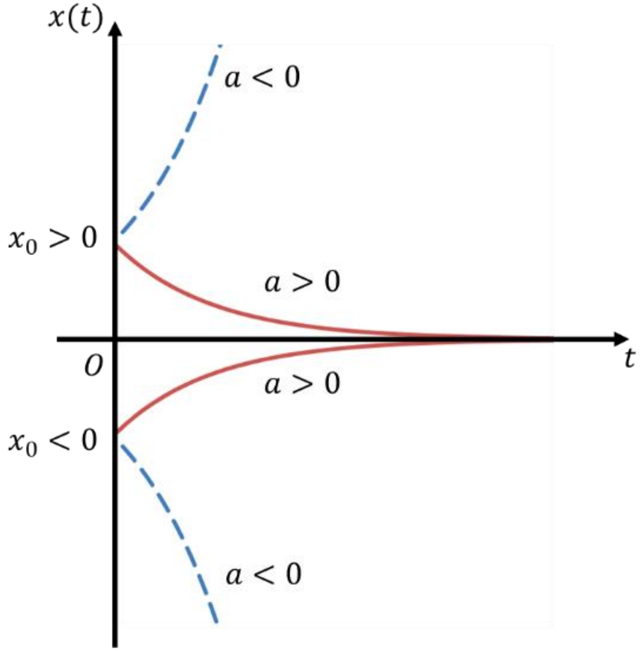
当$a > 0$时，$X(s)$的极点$s_p = -a < 0$，因此$x(t)$将递减并收敛于0。另一方面，当$a < 0$时$X(s)$的极点$s_p = -a > 0$，$x(t)$则会趋于负无穷。同时，因为$X(s)$是单位冲激响应，所以$X(s) = G(s)$，输出的极点也是传递函数的极点。

一阶系统单位冲激响应 – 非零初始状态

- 当输入$u(t)=0$，但是系统的初始条件$x(0)=x_0\neq 0$时，系统输出的拉普拉斯变换为：$X(s)=\frac{x_0}{s+a}$

拉普拉斯逆变换

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x_0}{s+a}\right]=x_0\mathrm{e}^{-at}$$



一阶系统对初始条件的响应就是系统的冲激响应，冲激的强度使得系统的初始输出达到x_0。单位冲激响应发散或是收敛与传递函数的极点相关。

一阶系统单位阶跃响应 – 传递函数

- 典型一阶系统 $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{a}{s+a}$
- 输入为单位阶跃函数，$u(t) = 1$，$U(s) = \frac{1}{s}$。

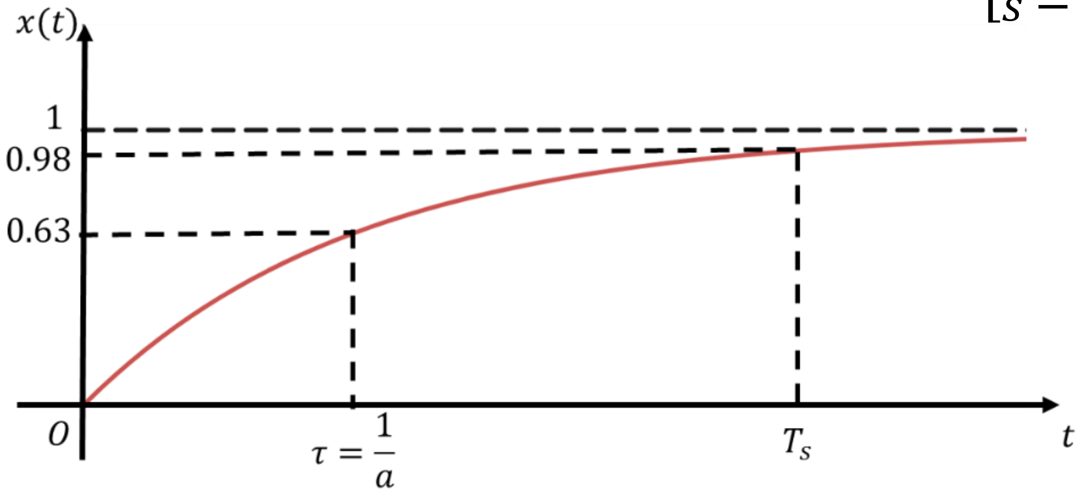
代入 $X(s) = U(s)G(s) = \frac{1}{s} \times \frac{a}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$

拉普拉斯逆变换

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-0} - \frac{1}{s+a}\right] = \mathrm{e}^{0t} - \mathrm{e}^{-at} = 1 - \mathrm{e}^{-at}$$

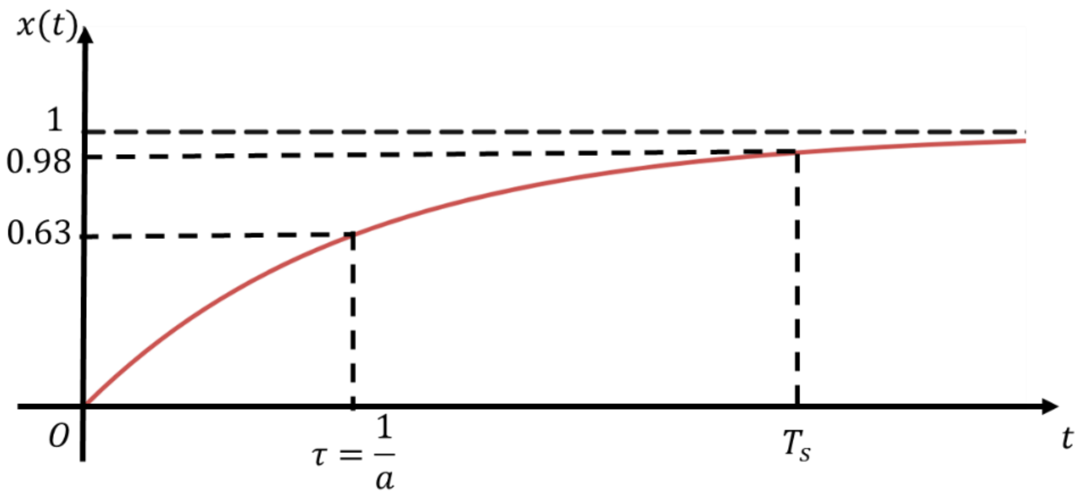
极点$s_{p2} = -a$来自于传递函数

极点$s_{p1} = 0$来自于系统输入$U(s) = \frac{1}{s}$



$a > 0$

一阶系统单位阶跃响应 – 性能指标



- 输入为单位阶跃函数，$u(t)=1$，$U(s)=\frac{1}{s}$。

- **时间常数**（Time Constant）：$\tau=\frac{1}{a}$

$$x(\tau)=1-\mathrm{e}^{-a\frac{1}{a}}=1-\mathrm{e}^{-1}\approx 0.63$$

反映了系统的响应速度。a越大，τ越小，系统的反应速度越快。

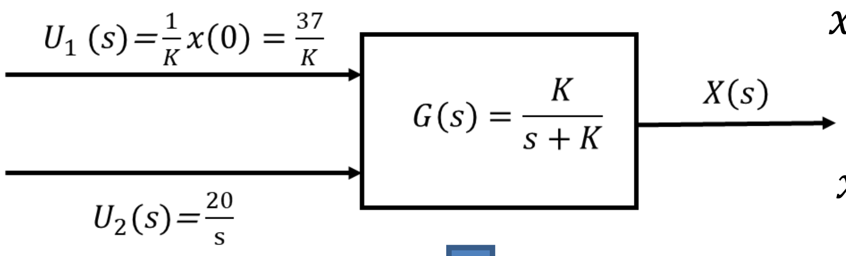
- **调节时间**或者叫**稳定时间**（**Settling Time**）：$T_s=4\tau=\frac{4}{a}$　$x(T_s)\approx 0.98$

工程案例当中，通过实验的方法来确定一阶系统的参数

案发时间揭秘

冲激输入

阶跃输入



$$x_1(t)=x_0\mathrm{e}^{-Kt}=37\mathrm{e}^{-Kt}$$

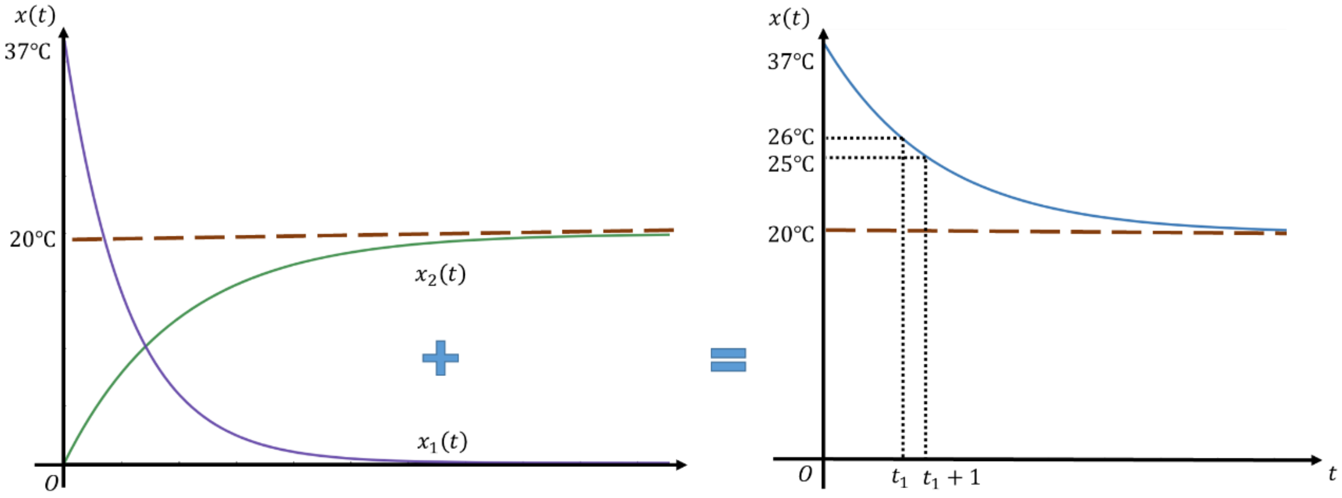
$$x_2(t)=20(1-\mathrm{e}^{-Kt})$$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=37\mathrm{e}^{-Kt}+20(1-\mathrm{e}^{-Kt})=20+17\mathrm{e}^{-Kt}$$

两个已知条件代入（两点半时体温为26℃，三点半时体温为25℃），并设下午2:30时候已经距离死亡时间过去了 t_1 小时，得到：

$$\begin{cases}26=20+17\mathrm{e}^{-Kt_1}\\25=20+17\mathrm{e}^{-K(t_1+1)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}K=0.182\\t_1=5.72\end{cases}$$



说明在下午2:30的时候，距离死亡时间已经过去了5.72小时（5小时43分钟），所以案发时间大概是上午8:47

目录

Contents

二阶系统的一般形式 – 传递函数

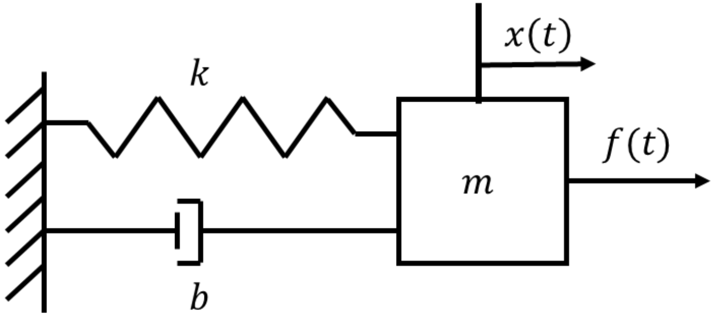
- 弹簧质量阻尼系统
- 微分方程：$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+kx(t)=f(t)$
- 定义：**固有频率**或者**自然频率**（Natural Frequency）：$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

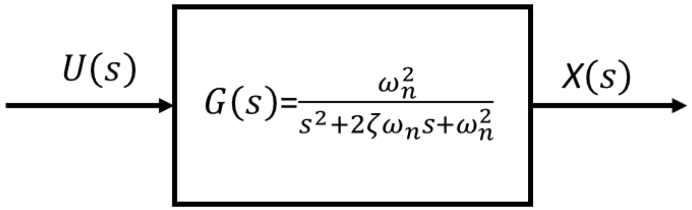
  阻尼比（Damping Ratio）：$\zeta=\frac{b}{2\sqrt{km}}$；

  输入：$u(t)=\frac{f(t)}{m\omega_n^2}$；输出：$x(t)$

考虑$m>0$、$k>0$、$b>0$的情况。因此$\omega_n>0$且$\zeta>0$

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta\omega_n\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_n^2x(t)=\omega_n^2u(t)$$





二阶系统（闭环）传递函数 $G_{B}(s)=\dfrac{X_{o}(s)}{X_{i}(s)}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

ω_n 称为无阻尼固有频率，ξ 称为阻尼比。

它们是二阶系统的特征参数，表明系统本身的固有特性。

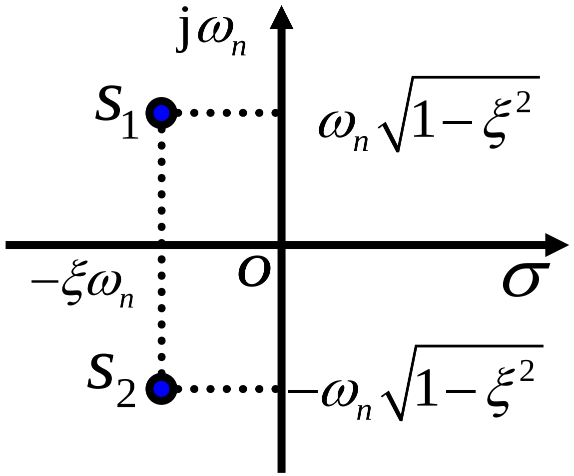
二阶系统的闭环传递函数特征方程 $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$

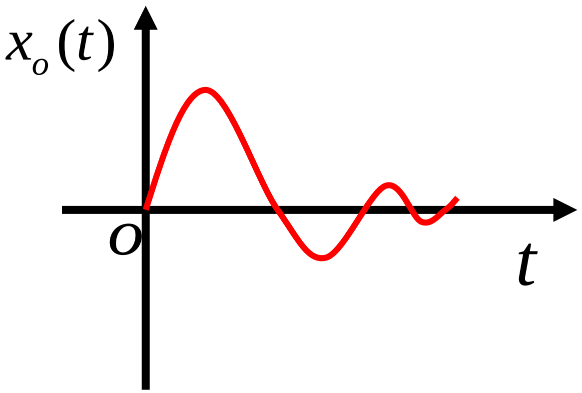
此方程的两个特征根 $s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

s_1 s_2 完全取决于 ω_n ，ξ 两个参数。

（1）当 $0<\xi<1$ 时，两特征根为共轭复数

$$s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

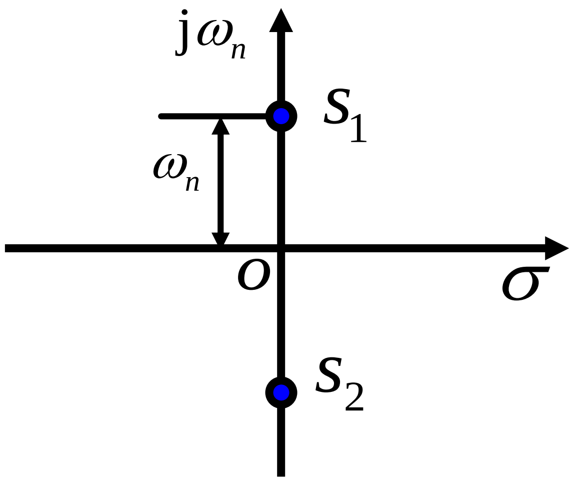


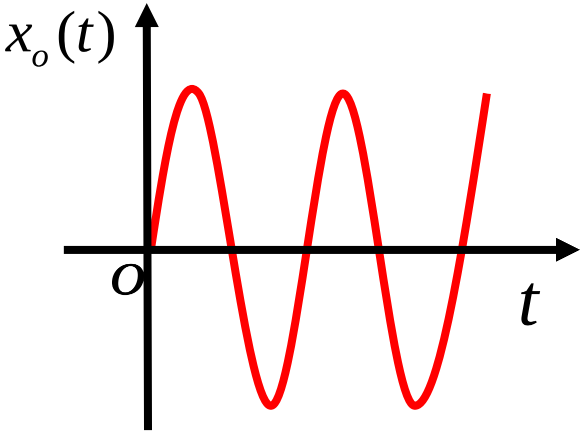


系统称为欠阻尼系统，是衰减振荡系统。

（2）当 $\xi=0$ 时，两特征根为共轭纯虚根

$$s_{1,2}=\pm \mathrm{j}\omega_n$$

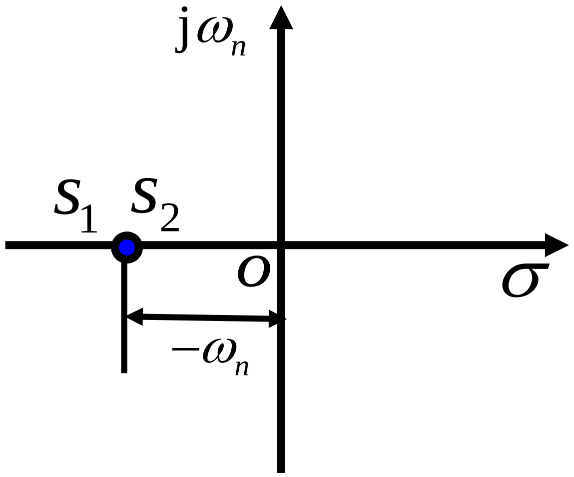


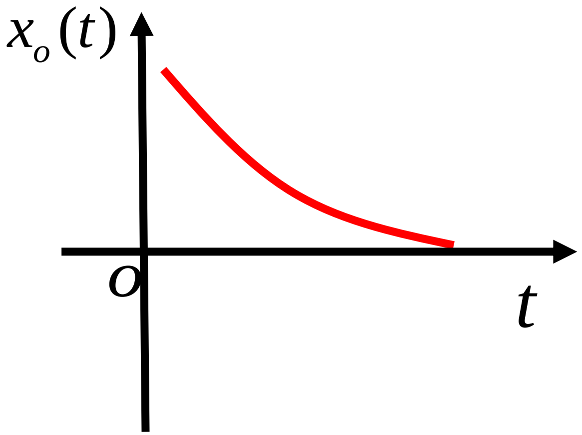


系统称为无阻尼系统，是等幅振荡系统。

（3）当 $\xi=1$ 时，两个相等的负实根

$$s_{1,2}=-\omega_n$$

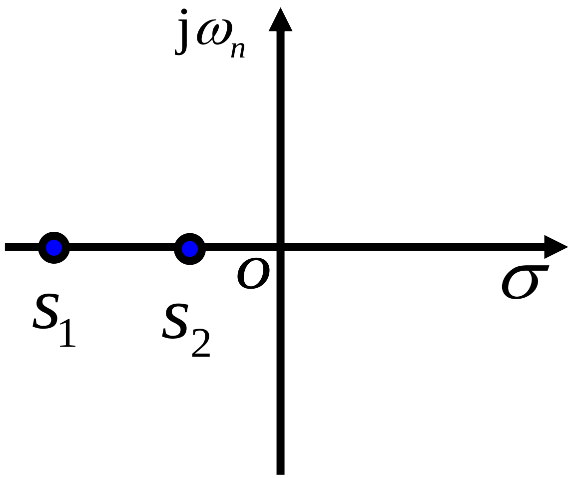


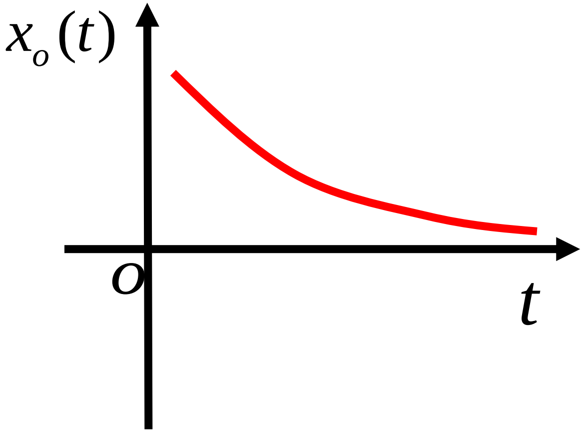


系统称为临界阻尼系统，是无振荡系统。

（4）当 $\xi > 1$ 时，两个不等的负实根

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$





系统称为过阻尼系统，是无振荡系统。

1．二阶系统的单位脉冲响应

$$X_{\mathrm{i}}(s)=L[\delta(t)]=1 \qquad W(s)=X_{\mathrm{o}}(s)=G_{\mathrm{B}}(s)X_{\mathrm{i}}(s)$$

$$W(s)=G_{\mathrm{B}}(s)$$

$$w(t)=L^{-1}[G_{\mathrm{B}}(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}]$$

$$=L^{-1}[\frac{\omega_n^2}{(s+\xi\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}]$$

（1）当 $\xi > 1$系统过阻尼时

$$w(t)=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}\right]\right\}$$

$$=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[\mathrm{e}^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}-\mathrm{e}^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}\right]$$

$$\frac{1}{s+a}\leftrightarrow \mathrm{e}^{-at}$$

（2）当 $\xi = 1$ 系统临界阻尼时

$$w(t)=L^{-1}\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}=\omega_n^2 t\mathrm{e}^{-\omega_n t} \qquad t\geq 0$$

$$\frac{1}{(s+a)^2}\leftrightarrow t\ \mathrm{e}^{-at}$$

中国農業大學 China Agricultural University

（3）当 $\xi=0$ 系统无阻尼时

$$w(t)=L^{-1}[\omega_n\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}]=\omega_n\sin\omega_n t \qquad t\ge 0$$

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\leftrightarrow\sin\omega t$$

（4）当 $0<\xi<1$ 系统欠阻尼时

$$w(t)=L^{-1}[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}]$$

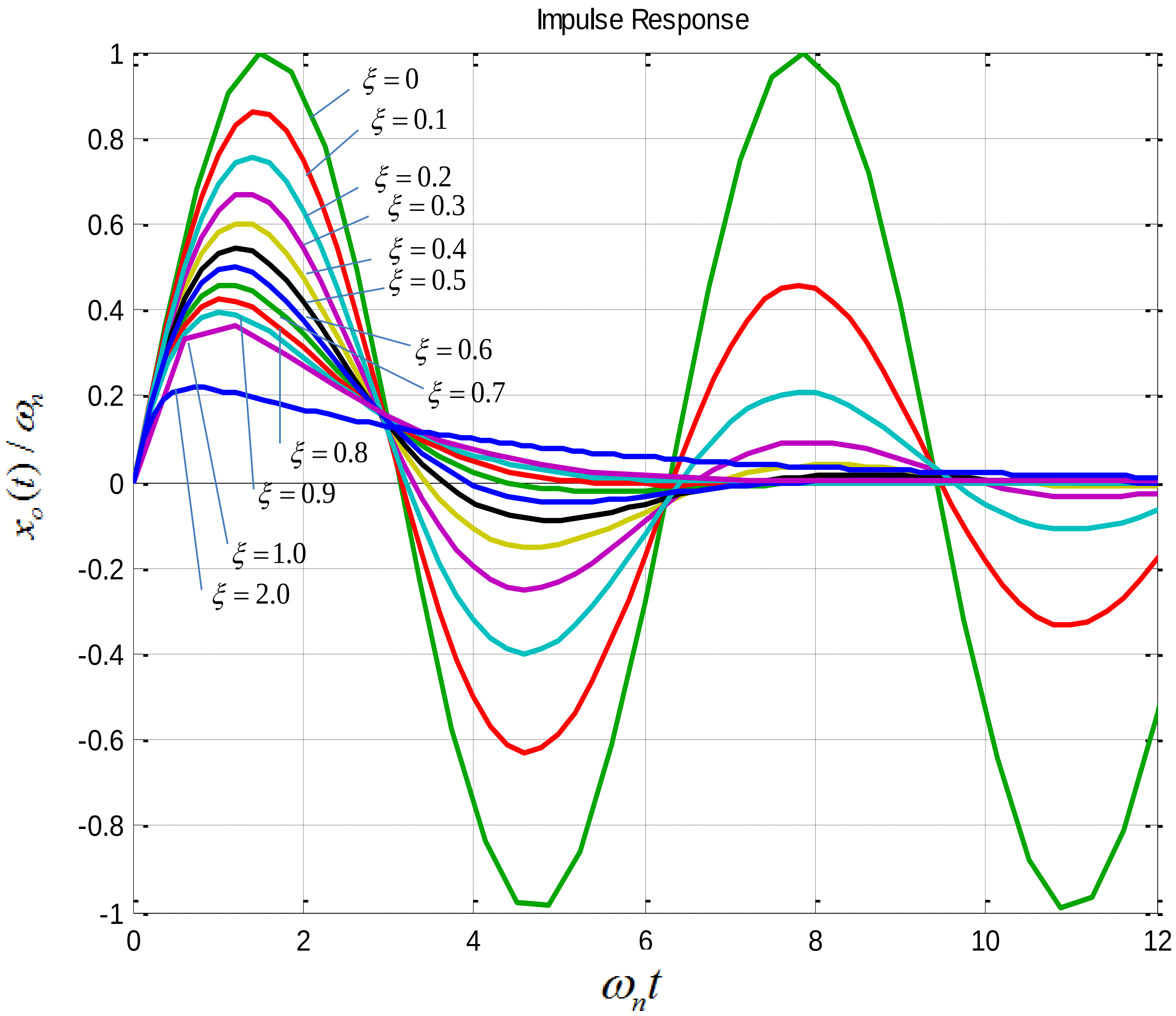
$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\leftrightarrow e^{-at}\sin\omega t$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t \qquad t\ge 0$$

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ 有阻尼固有频率

欠阻尼系统称为二阶振荡系统，其幅值衰减快慢取决于 $\xi\omega_n$

二阶系统时间响应



Impulse Response
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
2
4
6
8
10
12
$x_o(t)/\omega_n$
$\omega_n t$
$\xi = 0$
$\xi = 0.1$
$\xi = 0.2$
$\xi = 0.3$
$\xi = 0.4$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.6$
$\xi = 0.7$
$\xi = 0.8$
$\xi = 0.9$
$\xi = 1.0$
$\xi = 2.0$

2. 二阶系统的单位阶跃响应

$$X_{\mathrm{o}}(s)=G_{\mathrm{B}}(s)X_{\mathrm{i}}(s) \qquad X_{\mathrm{i}}(s)=L[u(t)]=\frac{1}{s}$$

$$X_{\mathrm{o}}(s)=G_{\mathrm{B}}(s)X_{\mathrm{i}}(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{\mathrm{o}}(t)&=L^{-1}[X_{\mathrm{o}}(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}] \\ &=L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}] \end{aligned}}$$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

（1）当 $\xi > 1$ 系统过阻尼时

$$x_o(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \mathrm{e}^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \mathrm{e}^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}]$$

$$= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{\mathrm{e}^{s_1 t}}{-s_1} - \frac{\mathrm{e}^{s_2 t}}{-s_2} \right) \qquad t \geq 0$$

二阶系统在过阻尼时单位阶跃响应曲线：无振荡和超调

稳态值：1

（2）当$\xi=1$系统临界阻尼时

$$\boxed{x_o(t)=1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t} \qquad t\geq 0}$$

二阶系统在临界阻尼时单位阶跃响应曲线：无振荡和超调

稳态值：1

系统的响应速度：比$\xi>1$ 时要快

（3）当 $\xi=0$ 系统无阻尼时

$$\boxed{x_{o}(t)=1-\cos\omega_{n}t \qquad t\geq 0}$$

$$\frac{s}{s^{2}+\omega^{2}}\leftrightarrow\cos\omega t$$

二阶系统在无阻尼时单位阶跃响应：等幅振荡曲线

（4）当 $0<\xi<1$ 系统欠阻尼时

$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \leftrightarrow e^{-at}\sin\omega t$$

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \leftrightarrow e^{-at}\cos\omega t$$

$$x_o(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t)$$

$$=1-e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}) \qquad t\geq 0$$

二阶系统在欠阻尼时单位阶跃响应为衰减振荡曲线：必然产生超调

稳态值：1

在欠阻尼系统中，当 $\xi=0.4\sim0.8$ 时

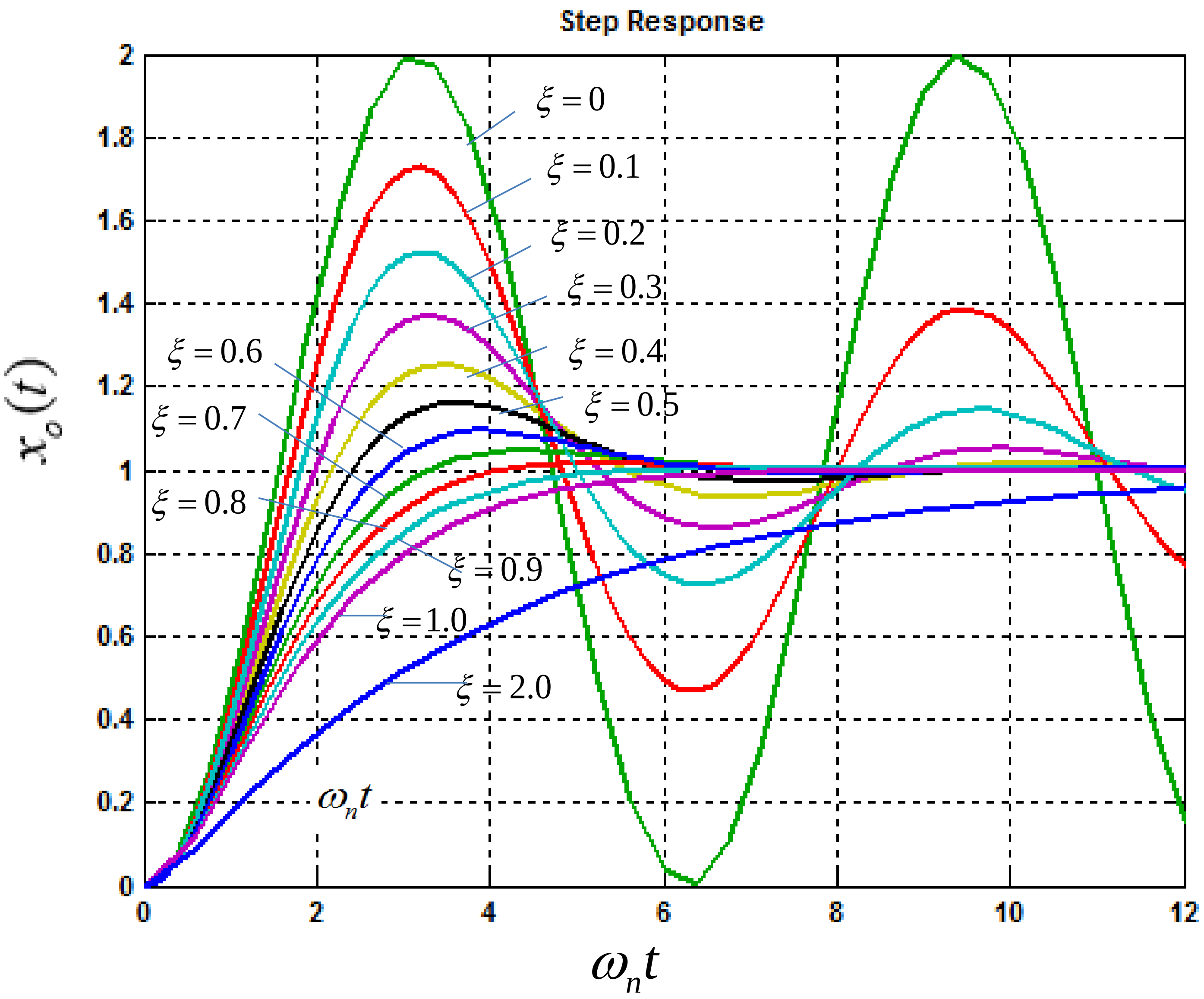
不仅其过渡过程时间比 $\xi>1$时更短而且振荡也不太严重。

开环传递函数I型

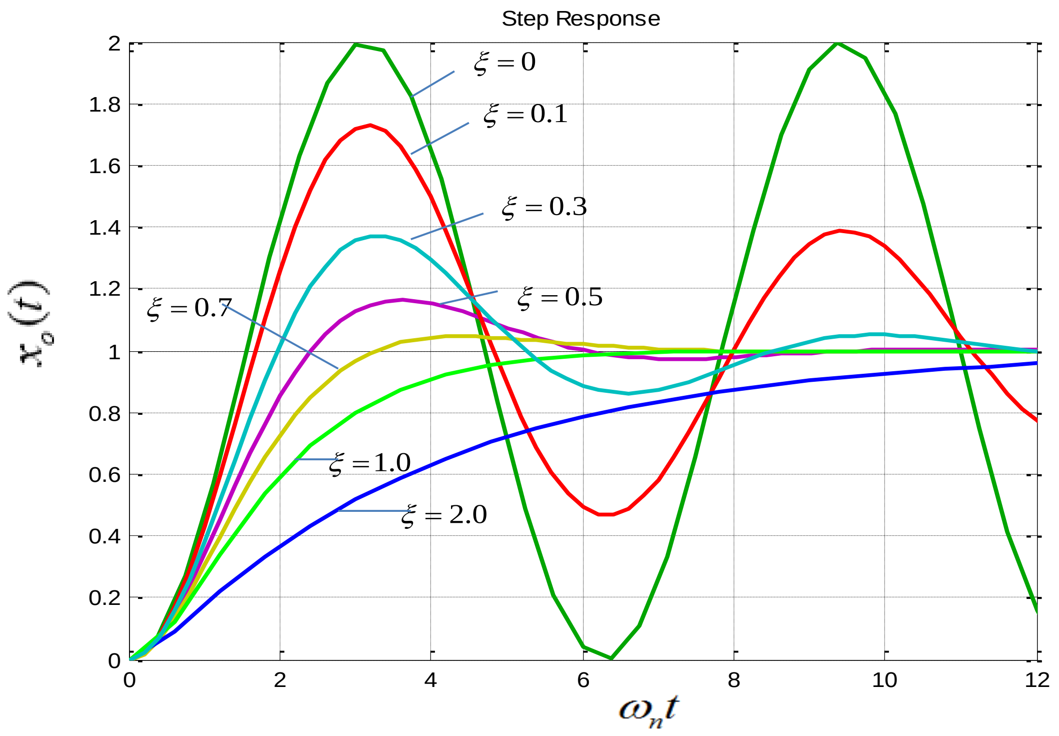
对于阶跃输入

稳态误差和

稳态偏差都是0



二阶系统时间响应



结论

（1）ξ 越小，振荡越严重，当 ξ 增大到 1 以后，曲线变为单调上升。

（2）$\xi=0.4\sim0.8$ 之间时，欠阻尼系统比过阻尼系统更快达到稳态值。

（3）在无振荡时，临界阻尼 $\xi=1$ 系统具有最快的响应。

（4）实际系统常采用 $\xi=0.707$ 作为最佳阻尼比

◆特征参量 ω_n 和 ξ 对系统的响应具有决定性的影响

◆当阻尼比在 $0<\xi<1$ 范围内，讨论动态响应指标与特征参量的关系。

欠阻尼二阶系统性能指标

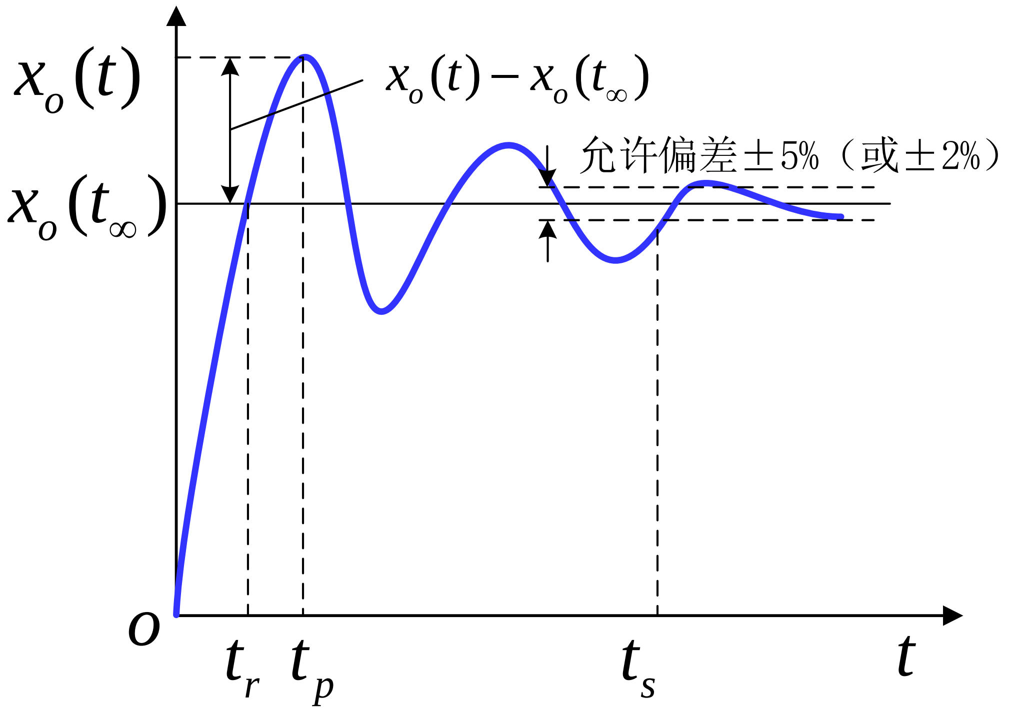
上升时间 t_r

峰值时间 t_p

最大超调量 $\sigma=\dfrac{x_o(t_p)-x_o(t_\infty)}{x_o(t_\infty)}\times100\%$

调节时间 t_s

振荡次数 N



二阶系统时间响应动态性能指标

1. 上升时间 t_r

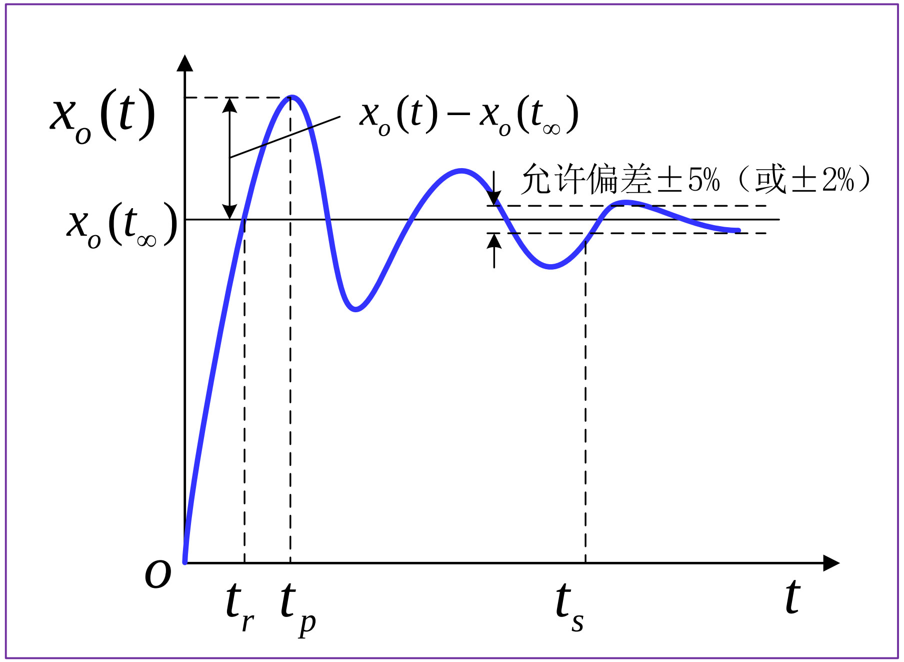
$$x_o(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right)$$

当 $t = t_r$ 时， $x_o(t_r) = 1$

$$1 = 1 - e^{-\xi\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_r\right)$$

$$e^{-\xi\omega_n t_r} \neq 0 \Rightarrow \cos\omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_r = 0$$

$$\tan\omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$



令 $\beta = \arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

$$\omega_d t_r = \pi - \beta, 2\pi - \beta \cdots$$

$$\omega_d t_r + \beta = \pi$$

$$\boxed{t_{\mathrm{r}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}}$$

由 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ 和 $t_r = \dfrac{\pi-\beta}{\omega_d}$ 可知

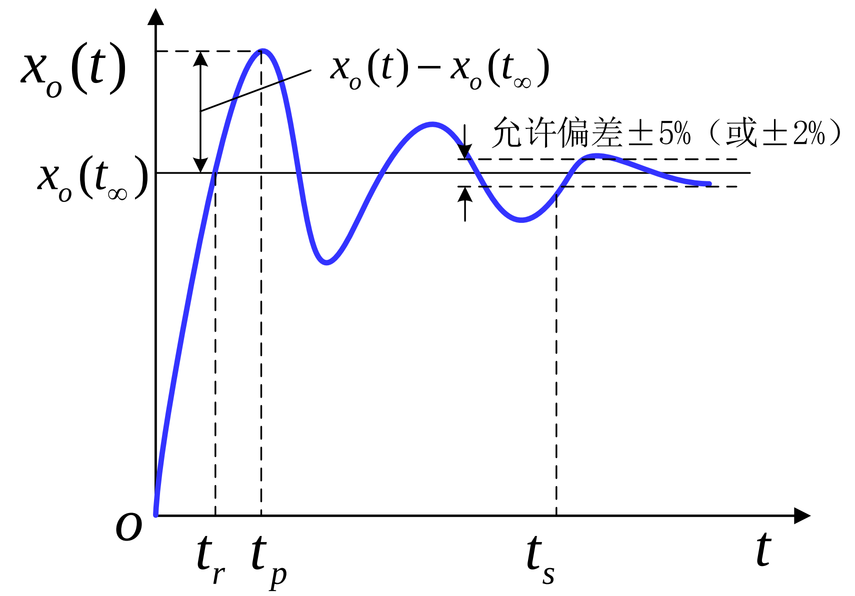
ξ一定时，ω_n增大，t_r减小；

ω_n一定时，ξ增大，t_r增大。

2. 峰值时间 t_p

由峰值时间定义，将输出$x_o(t)$ 对时间 t求导，并令其为零

即 $$\left.\frac{dx_o(t)}{dt}\right|_{t=t_p}=0$$



系统输出

$$x_o(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$$

对输出求导

$$\frac{-\omega_n e^{-\xi\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\sqrt{1-\xi^2}\cos(\omega_d t_p+\beta)-\xi\sin(\omega_d t_p+\beta)\right]=0 \qquad \beta=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

化简后 $\tan(\omega_d t_p+\beta)=\tan\beta$

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

$$\omega_d t_p = \pi$$

$$\boxed{t_{\mathrm{p}} = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

由 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ 和 $t_{\mathrm{p}} = \dfrac{\pi}{\omega_d}$ 可知

ξ 一定时，ω_n 增大，t_p 减小；

ω_n 一定时，ξ 增大，t_p 增大。

3. 最大超调量 σ

$$\sigma = \frac{x_o(t_p) - x_o(t_\infty)}{x_o(t_\infty)} \times 100\%$$

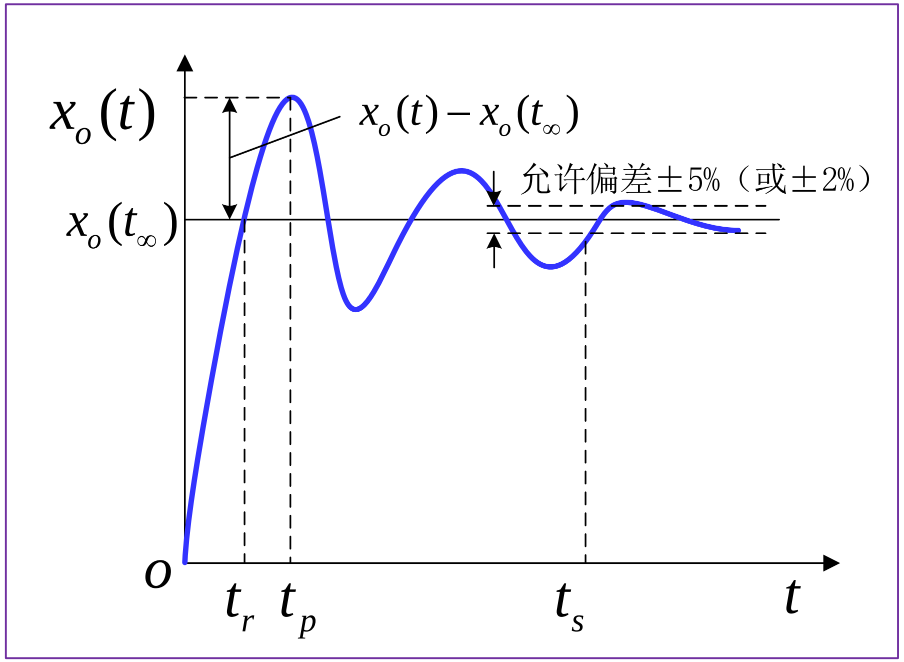
$$x_o(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$x_o(\infty) = 1 \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\sigma = e^{-\xi\omega_n\pi/\omega_d}\left(\cos\pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\pi\right)\times 100\%$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\boxed{\sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%}$$



二阶系统时间响应动态性能指标

$$\sigma = \mathrm{e}^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$$

超调量σ只与阻尼比ξ有关，

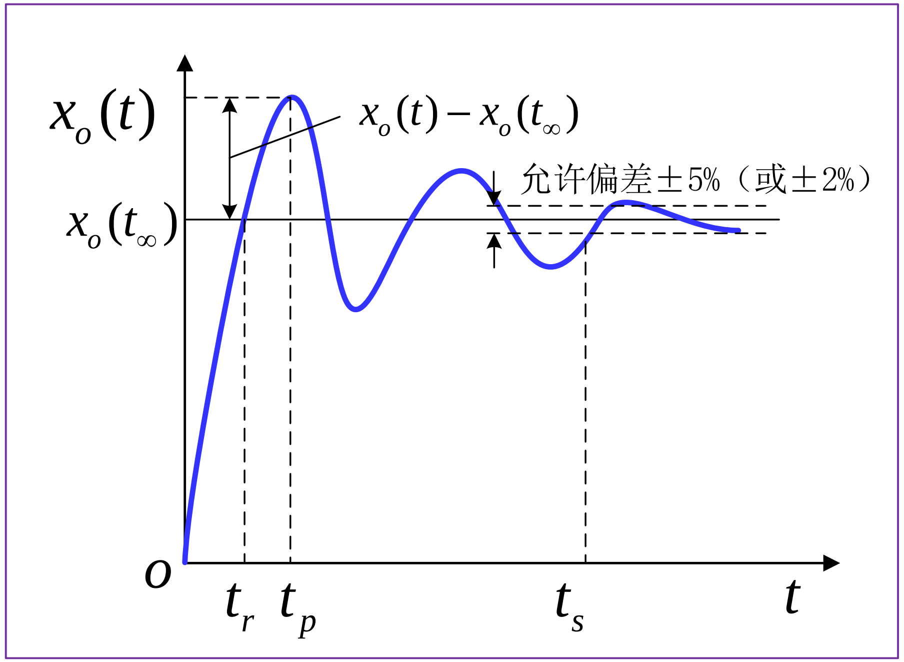
而与无阻尼固有频率ω_n无关。

当$\xi = 0.4$～0.8时，相应超调量为25.4%～1.52%。

阻尼比 ξ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
最大超调量 σ%	72.9	52.68	37.25	25.4	16.32	9.49	4.61	1.52	0.15

二阶系统时间响应动态性能指标

4. 调节(响应)时间 t_s



根据调节（响应）时间 定义可知

$$\left|x_o(t)-x_o(t_\infty)\right| \le \Delta \cdot x_o(t_\infty)$$

$$\Delta = 0.02 \sim 0.05$$

$$x_o(t_\infty)=1$$

$$\left|x_o(t)-1\right| \le \Delta$$

系统输出

$$x_o(t)=1-\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$$

二阶系统时间响应动态性能指标

$$|\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t_s}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t_s+\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})|\le\Delta$$

$$|\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t_s}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}|\le\Delta \quad\Rightarrow\quad t_s\ge\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\xi^2}}$$

当$0<\xi<0.8$时，近似得到

$\Delta=0.02$，$t_s\approx\dfrac{4}{\xi\omega_n}$

$\Delta=0.05$，$t_s\approx\dfrac{3}{\xi\omega_n}$

当$\Delta=0.02$，$\xi=0.76$时，t_s为最小

当$\Delta=0.05$，$\xi=0.68$时，t_s为最小

所以$\xi=0.707$可作为最佳阻尼比

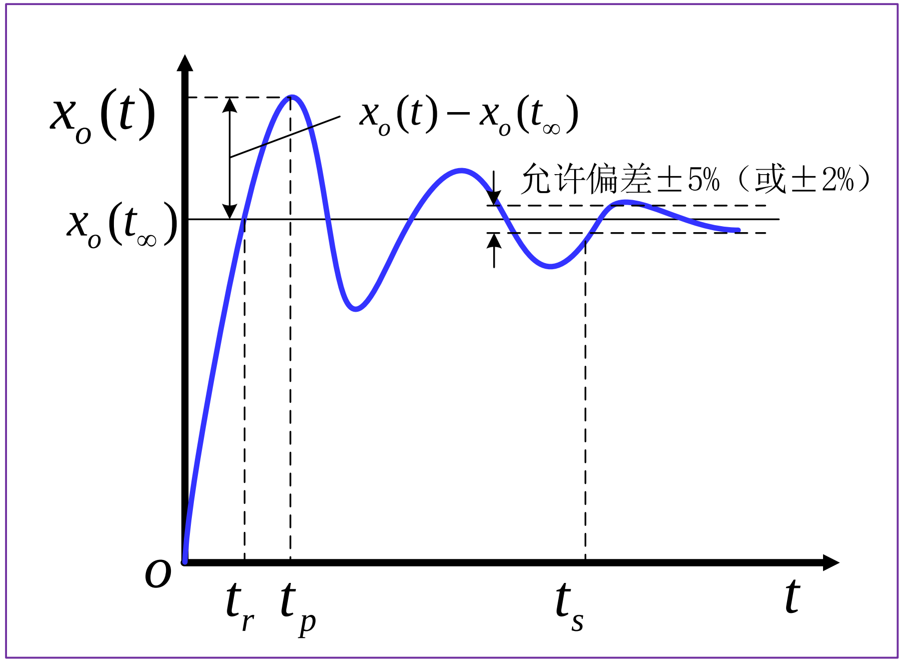
5. 振荡次数N

在过渡过程时间 $0<t<t_s$ 内，$x_o(t)$ 穿越其稳态值 $x_o(\infty)$ 的次数的一半定义为振荡次数。

$$N=\frac{t_s}{2\pi/\omega_d}$$

当$0<\xi<0.9,\Delta=0.02$时，$t_s\approx\frac{4}{\xi\omega_n}$，得$N=\frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi}$

当$0<\xi<0.9,\Delta=0.05$时，$t_s\approx\frac{3}{\xi\omega_n}$，得$N=\frac{1.5\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi}$



N 只与阻尼比 ξ 有关，而与而与无阻尼固有频率 ω_n 无关

ξ 越大 ，N 越小，故N 直接反映系统的阻尼特性

二阶系统时间响应动态性能指标

- 上升时间 t_r、峰值时间 t_p、调节时间 t_s都是反映系统快速性的指标。
- t_r t_p 反映输入初始时系统反应的快速性，t_r，t_p值小，表明系统在信号输入初始时响应快。
- t_s反映系统整体上对输入信号的快速性，t_s 值小，表明动态过程短，系统反应快。
- 最大超调量 σ和振荡次数 N表明系统的阻尼特性，是表示系统稳定性的指标。

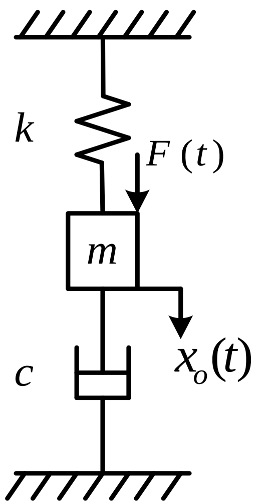
二阶系统时间响应动态性能指标

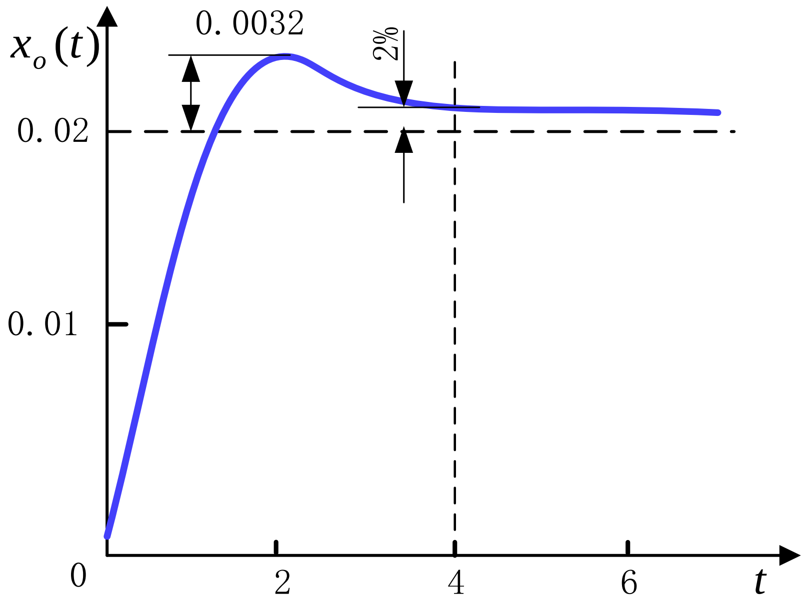
- 阻尼比ξ 和无阻尼固有频率ω_n 是影响系统动态性能的系统参数。
- σ 和N 只与阻尼比ξ 有关
- t_r、t_p 和t_s 与ω_n 和ξ 两者都有关
- 系统性能对系统结构和参数的要求往往是相互制约的。
- 加大ω_n，可提高系统的响应速度，但同时减小了阻尼，而阻尼程度减小，系统的稳定性就会变差。
- 一般将ξ=0.707 称为最佳阻尼比，系统不仅响应速度快，而且超调量较小。

二阶系统的结构参数确定

系统辨识：根据系统结构，输入及时间响应性能指标，确定系统的结构参数。

例2 如图在质量块*m*上施加8N阶跃力结构及时间响应曲线，求系统的结构参数*m*，*k*和*c*值。





解：

由输出曲线可知

$$x_o(\infty) = 0.02\mathrm{m}$$

$$x_o(t_p) - x_o(\infty) = 0.0032\mathrm{m}$$

$$t_s = 2\mathrm{s}$$

由结构图可知

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$$X_i(s) = \frac{8}{s}$$

$$\sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$$

$$\sigma = \frac{x_o(t_p) - x_o(\infty)}{x_o(\infty)} \times 100\% = \frac{0.0032}{0.02} \times 100\% = 16.3\% \Rightarrow \xi = 0.5$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4\mathrm{s} \Rightarrow \omega_n = 2\mathrm{rad/s}$$

$$x_{\mathrm{o}}(\infty) = 0.02\mathrm{m}$$

$$x_{\mathrm{o}}(\infty) = \lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{o}}(t) = \lim_{s\to 0} sX_{\mathrm{o}}(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{ms^2+cs+k}\cdot\frac{8}{s} = \frac{8}{k}$$

$$\Rightarrow k = 400\mathrm{N/m}$$

$$\omega_n^2 = k/m \Rightarrow m = 100\mathrm{kg}$$

$$2\xi\omega_n = c/m \Rightarrow c = 200\mathrm{Ns/m}$$

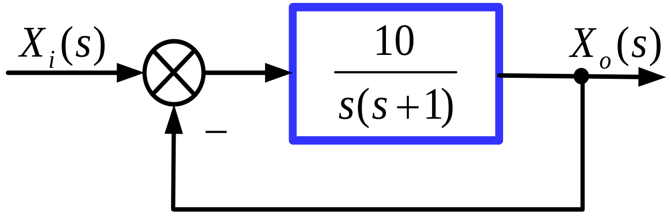
3. 二阶系统性能提高方法

（1）增加微分反馈环节提高系统性能

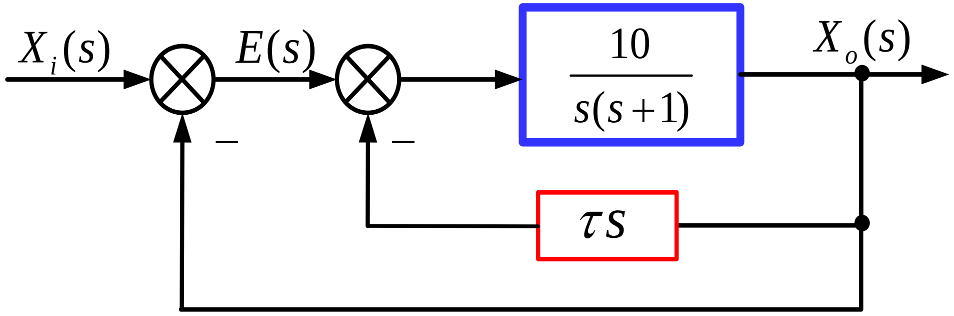
例3 图（a）控制系统，当输入阶跃信号时，要求 $\sigma \le 16.3\%$

1）试问：校核原系统是否满足超调量的要求？

2）若在原系统中增加微分反馈控制，求满足要求时微分反馈的 τ 值。



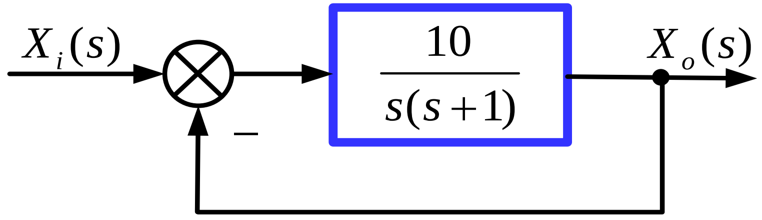
（a）原控制系统



（b）增加微分反馈控制的控制系统

解：1）系统的闭环传递函数

$$G_B(s)=\frac{10}{s^2+s+10}$$



系统的特征参数

$$\omega_n=\sqrt{10}=3.16$$

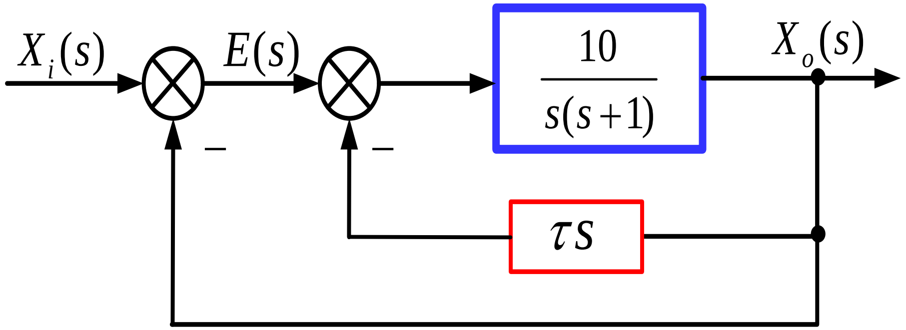
$$2\xi\omega_n=1 \qquad \xi=0.16$$

系统的性能参数

$$\sigma=e^{-0.16\pi/\sqrt{1-0.16^2}}\times100\%=60.4\%$$

$$t_r=0.55s \qquad t_p=1.01s \qquad t_s=7s$$

2）原系统加入微分反馈控制后



闭环传递函数

$$G_B(s)=\frac{10}{s^2+(1+10\tau)s+10}$$

系统的特征参数

$$\sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%$$

$$\sigma \le 16.3\% \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.5$$

$$2\xi\omega_n = 1+10\tau$$

$$\omega_n = 3.16 \quad \Rightarrow \quad \tau=0.22$$

系统的性能参数 $t_r = 0.77\text{s}$ $t_p = 1.15\text{s}$ $t_s = 2.22\text{s}$

二阶系统性能分析

	ω_n / rad/s	ξ	$\sigma\%$	t_r / s	t_p / s	t_s / s
原系统	3.16	0.16	60.4	0.55	1.01	7
增加比例微分	3.16	0.5	16.3	0.78	1.15	2.22

加入微分反馈控制后，系统固有频率没有变化，阻尼比增加。

综合效果调节（响应）时间大幅度减少，超调量大幅下降，因此动态性能得到改善。

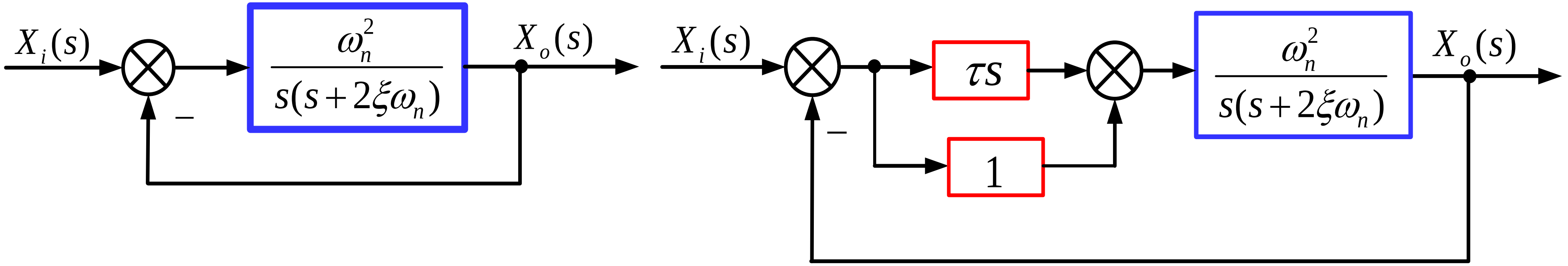
（2）前向通道增加比例微分环节

例4　已知控制系统 $\omega_n = 3\text{rad/s}$　$\xi = 1/6$

1）计算系统的性能指标 t_r　t_s　σ

2）在原系统中增加比例微分控制，其中 τ=0.2s 。

求此时系统的阻尼比 ξ 和固有频率 ω_n ，性能指标 t_r　t_s　σ



（a）原控制系统　　（b）增加比例-微分控制的控制系统

解：1）原系统的开环传递函数

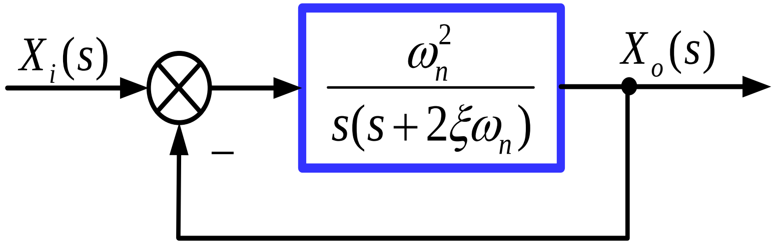
$$G_K(s)=\frac{9}{s(s+1)}$$

原系统的闭环传递函数

$$G_B(s)=\frac{9}{s^2+s+9}$$

开环增益：9

系统的特征与性能参数



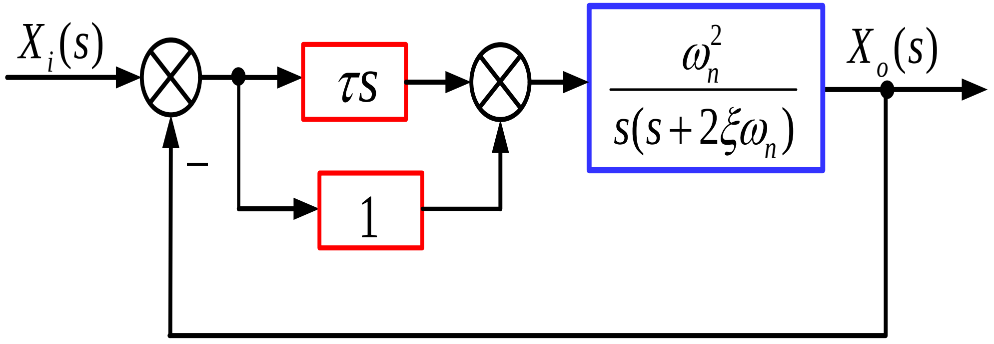
$\xi=1/6$ 系统是一个二阶欠阻尼系统

$$\sigma=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%=59\%$$

$$\omega_n=3\text{rad/s} \Longrightarrow \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=2.958$$

$$\beta=\arctan\left(\frac{\omega_d}{\xi\omega_n}\right)=1.403 \qquad t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=0.588\text{ s} \qquad t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}=6\text{ s} \quad (\Delta=\pm5\%)$$

2）增加比例微分控制后



系统的开环传递函数

$$G_K(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$$=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{2\xi\omega_n s(s/2\xi\omega_n+1)}=\frac{K(\tau s+1)}{s(s/2\xi\omega_n+1)}$$

开环增益 $K=\omega_n/2\xi=9$

闭环传递函数 $G_B(s)=\frac{\omega_n^2}{5}\left(\frac{s+5}{s^2+2\xi_d\omega_n s+\omega_n^2}\right)$

$$\xi_d=\xi+\frac{\omega_n}{10}=\frac{1}{6}+\frac{3}{10}=0.47$$

二阶系统性能分析

$$\xi_d = 0.47 \Rightarrow \sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 18.8\%$$

$$\omega_n = 3\text{rad/s} \Rightarrow \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2.648$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\xi\omega_n}\right) = 1.082$$

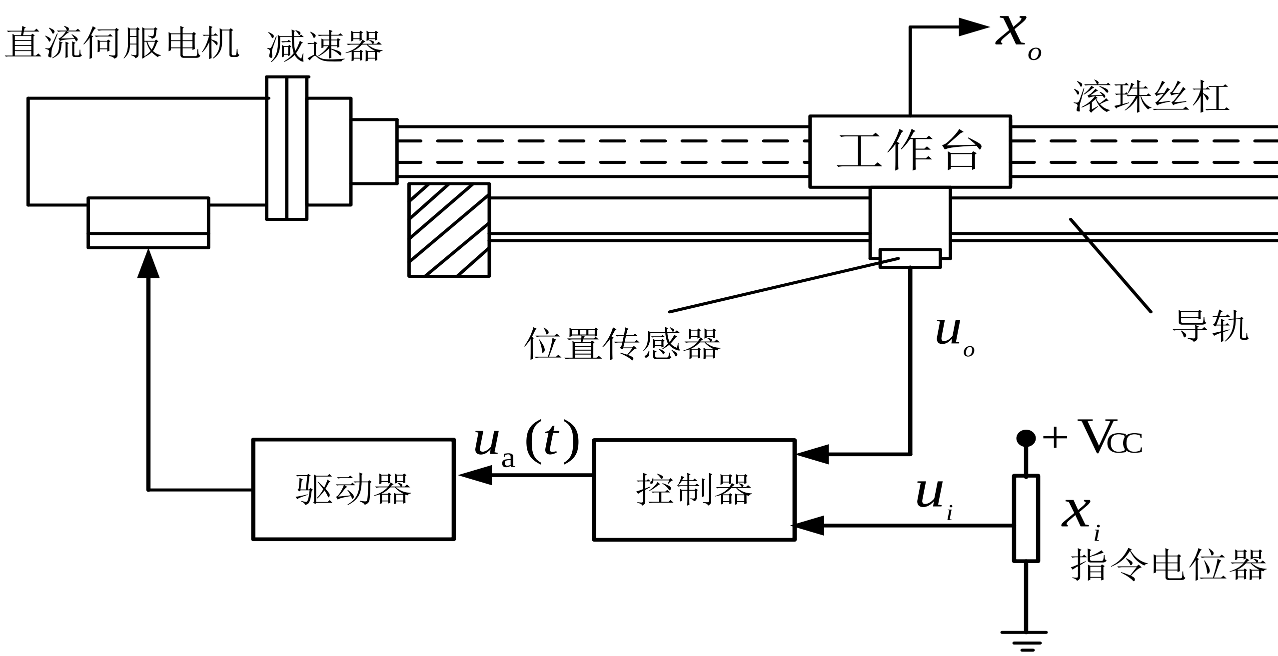
$$t_\mathrm{r} = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = 0.777\text{s}$$

$$t_\mathrm{s} = \frac{3}{\xi\omega_n} = 2.13\ \text{s} \quad (\Delta = 5\%)$$

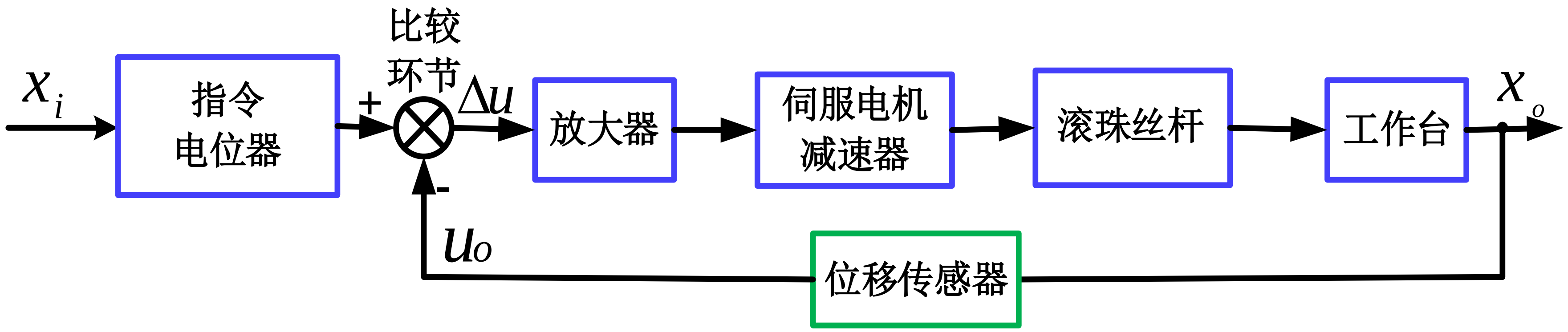
目录

Contents

工作机构位置控制系统

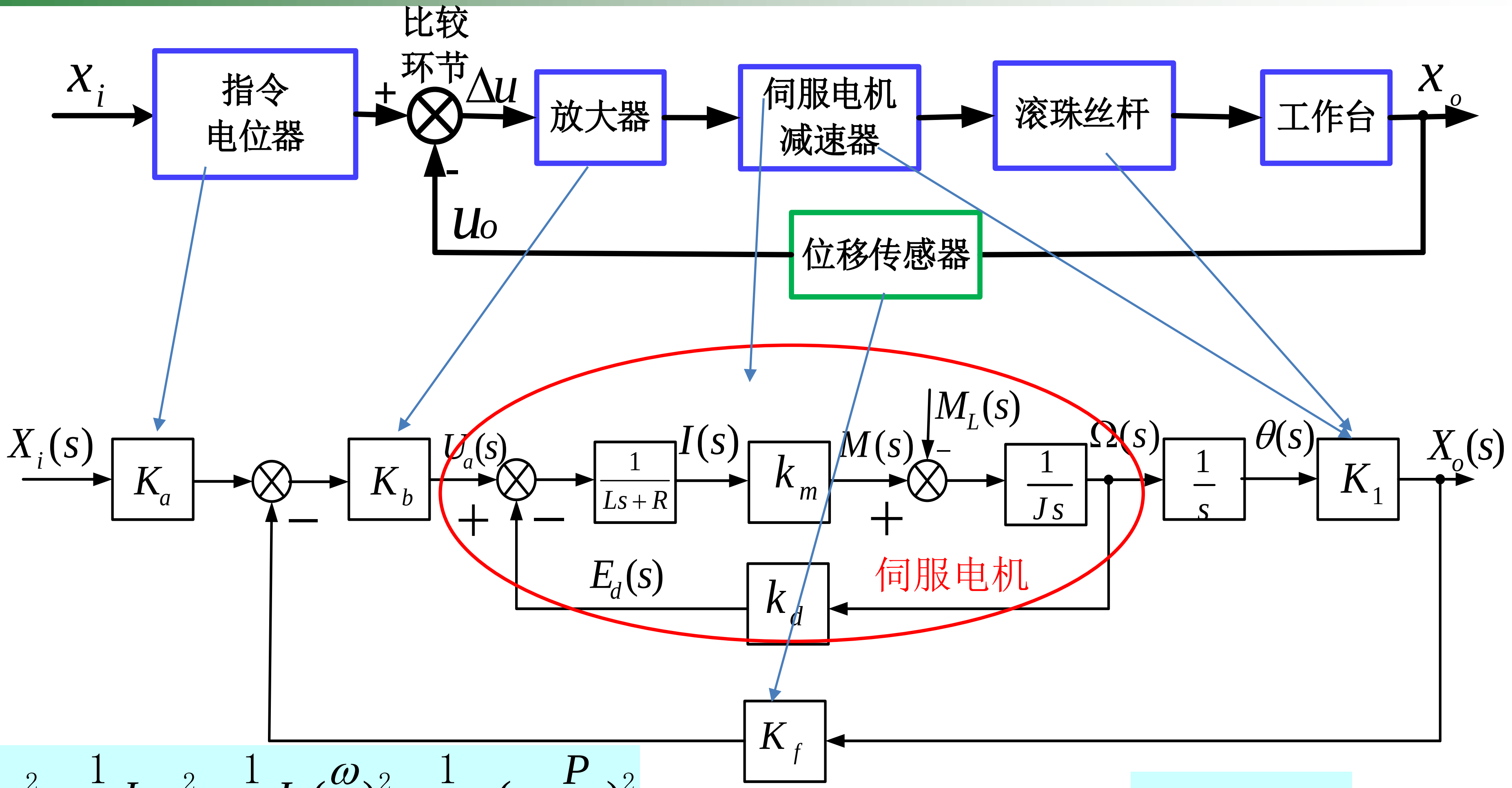


直流伺服电机
减速器
x_o
滚珠丝杠
工作台
位置传感器
u_o
导轨
$u_a(t)$
驱动器
控制器
+ Vcc
u_i
x_i
指令电位器



x_i
指令
电位器
比较
环节
+
Δu
-
放大器
伺服电机
减速器
滚珠丝杆
工作台
x_o
u_o
位移传感器

工作机构位置控制系统



$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J_1\omega^2 + \frac{1}{2}J_2(\frac{\omega}{i})^2 + \frac{1}{2}m(\omega\frac{P}{2\pi i})^2$$

$$J = J_1 + \frac{J_2}{i^2} + (\omega\frac{P}{2\pi i})^2 m$$

电机转动惯量

减速器转动惯量

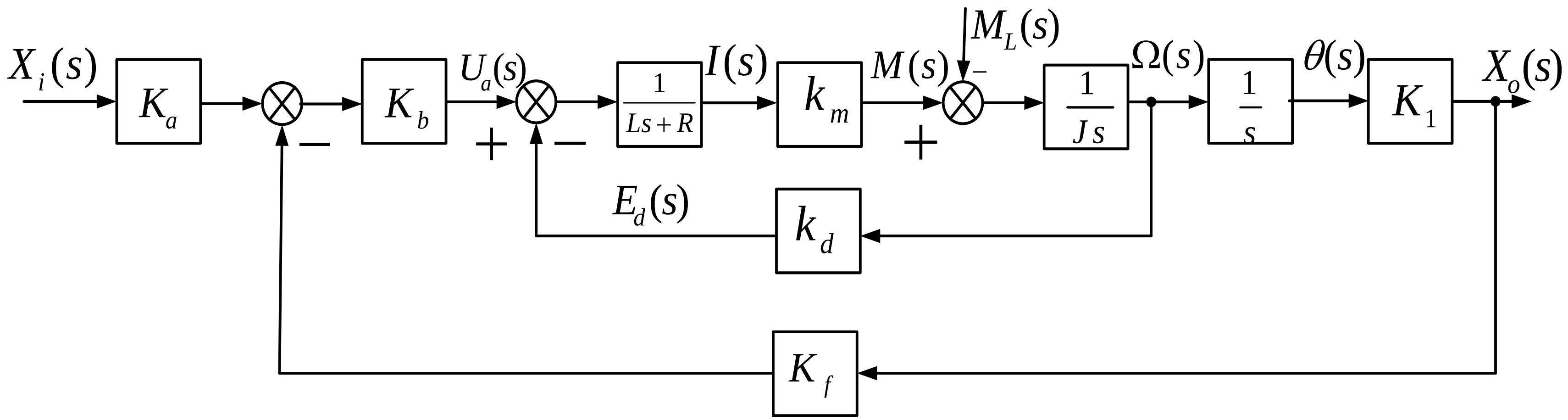
工作台质量

$$K_1 = \frac{P}{2\pi i}$$

螺距

减速比

工作机构位置控制系统

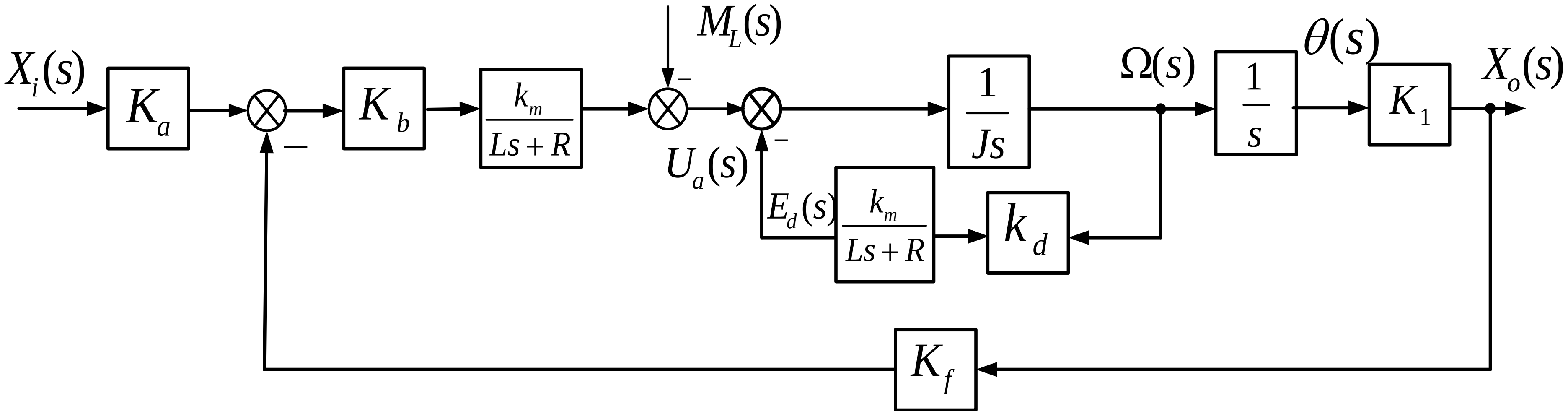


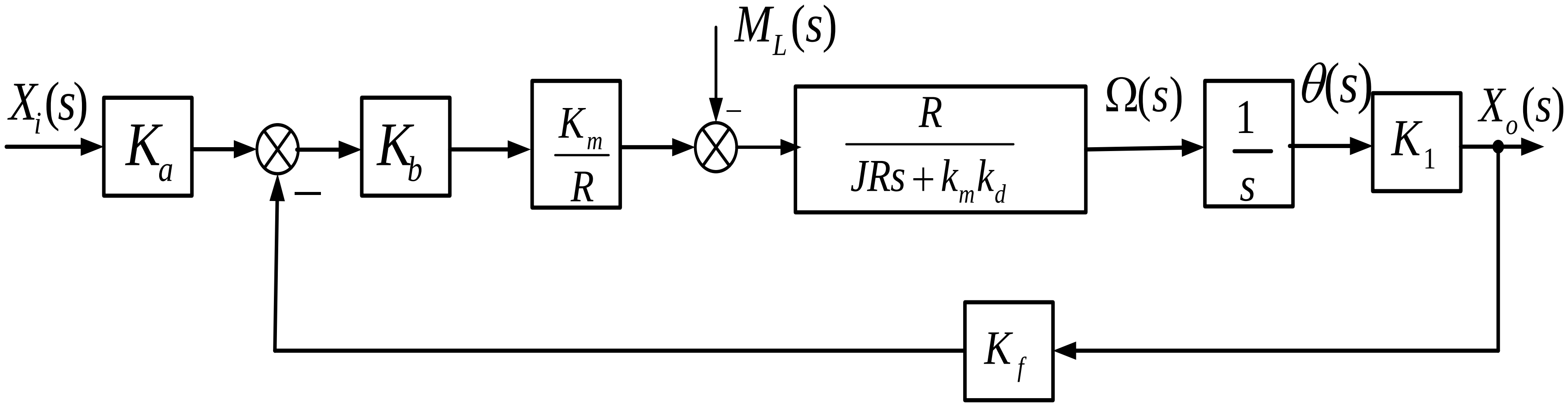
当负载转矩$M_L(s)=0$，系统在输入作用下的传递函数

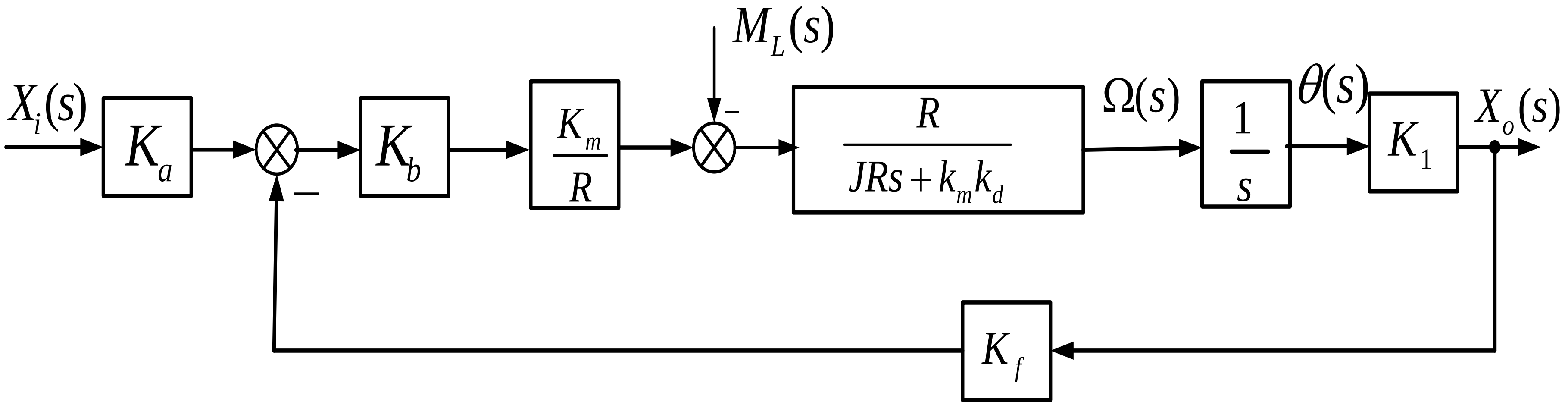
$$G_{x_i}(s)=\frac{K_aK_bk_mK_1\dfrac{1}{Js^2(Ls+R)}}{1+\dfrac{k_mk_d}{Js(Ls+R)}+K_bk_mK_1K_f\dfrac{1}{Js^2(Ls+R)}}$$

$$G_{x_i}(s)=\frac{K_aK_bk_mK_1}{JLs^3+JRs^2+k_mk_ds+K_bk_mK_1K_f}$$

当给定输入 $X_i(s)=0$ ，系统在干扰输入作用下的传递函数





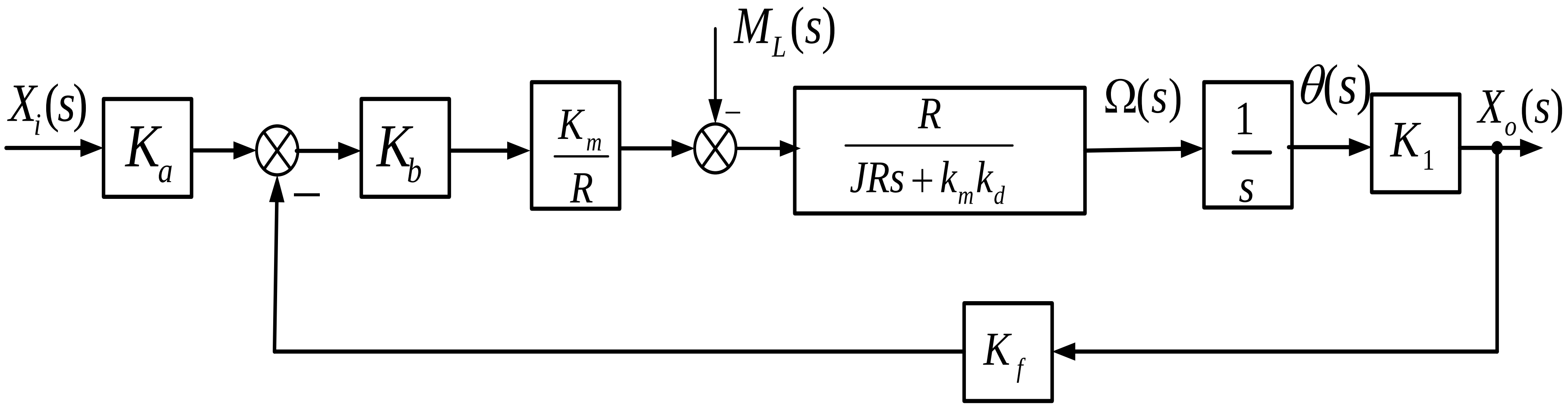


$$G_{M_L}(s)=\frac{-K_1\dfrac{Ls+R}{s(JLs^2+JRs+k_mk_d)}}{1+K_fK_bK_1\dfrac{k_m}{Ls+R}\dfrac{Ls+R}{s(JLs^2+JRs+k_mk_d)}}$$

$$G_{M_L}(s)=\frac{-K_1(Ls+R)}{JLs^3+JRs^2+k_mk_ds+K_bk_mK_1K_f}$$

工作机构位置控制系统

忽略电机电枢的电感，取 $K_a = K_f$　　给定输入的传递函数



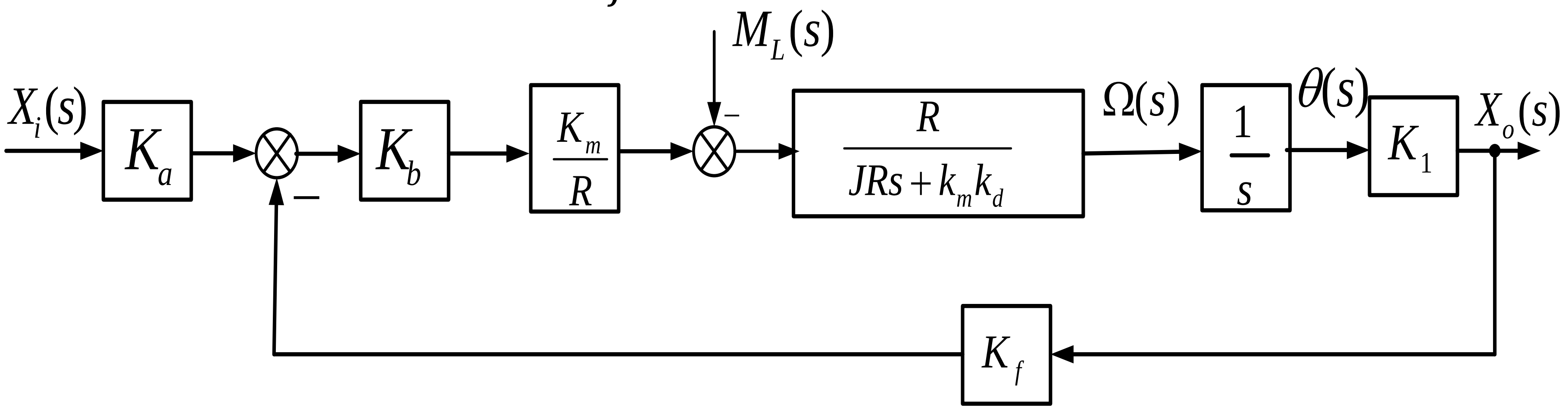
$$G_{x_i}(s)=\frac{K_aK_bk_mK_1}{JLs^3+JRs^2+k_mk_ds+K_bk_mK_1K_f}=\frac{K_aK_bk_mK_1}{JRs^2+k_mk_ds+K_bk_mK_1K_f}$$

$$G_{x_i}(s)=\frac{\dfrac{K_aK_bk_mK_1}{JR}}{s^2+\dfrac{k_mk_d}{JR}s+\dfrac{K_bk_mK_1K_f}{JR}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_mK_1K_bK_f}{JR}}$$

$$\xi=\frac{k_d}{2}\sqrt{\frac{k_m}{JRK_1K_bK_f}}$$

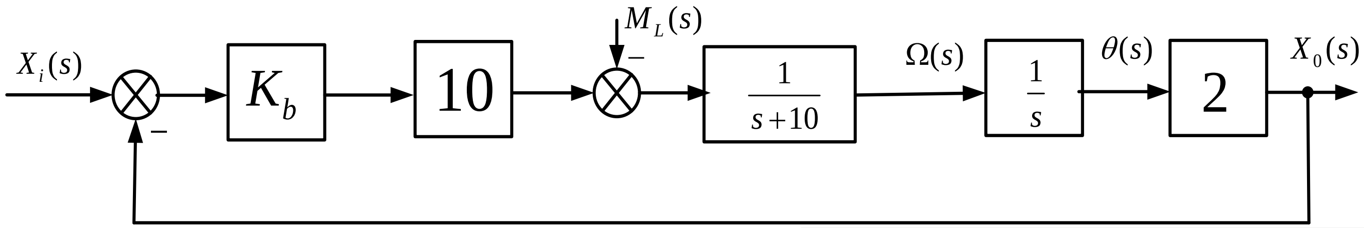
忽略电机电枢的电感，取$K_a = K_f$　　干扰作用下的传递函数



$$G_{M_L}(s)=\frac{-K_1(Ls+R)}{JLs^3+JRs^2+k_m k_d s+K_b k_m K_1 K_f}=\frac{-K_1 R}{JRs^2+k_m k_d s+K_b k_m K_1 K_f}$$

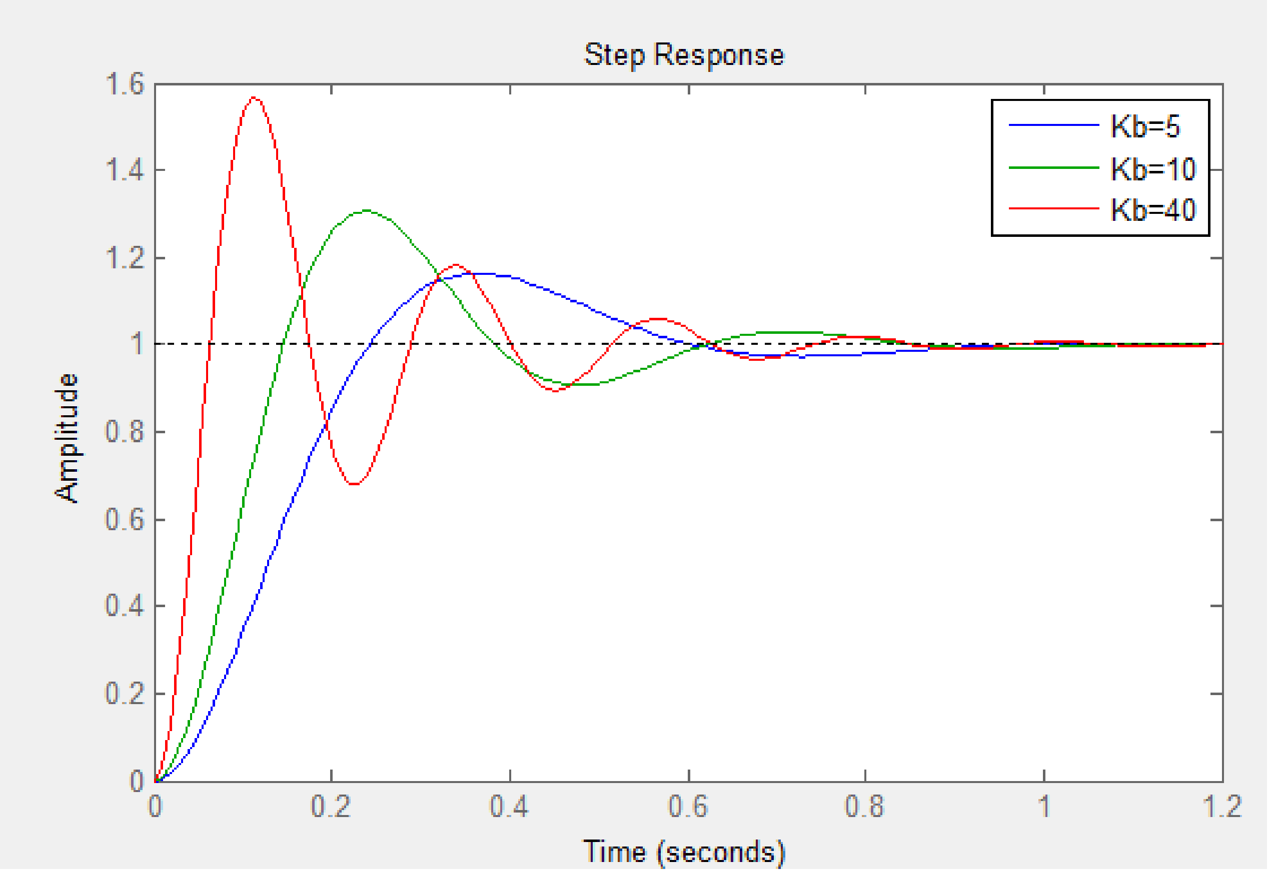
$$G_{M_L}(s)=\frac{-\frac{K_1 R}{JR}}{s^2+\frac{k_m k_d}{JR}s+\frac{K_b k_m K_1 K_f}{JR}}=\frac{R}{k_m K_b K_f}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega_n^2}$$

工作机构位置控制系统



对给定输入的闭环传递函数

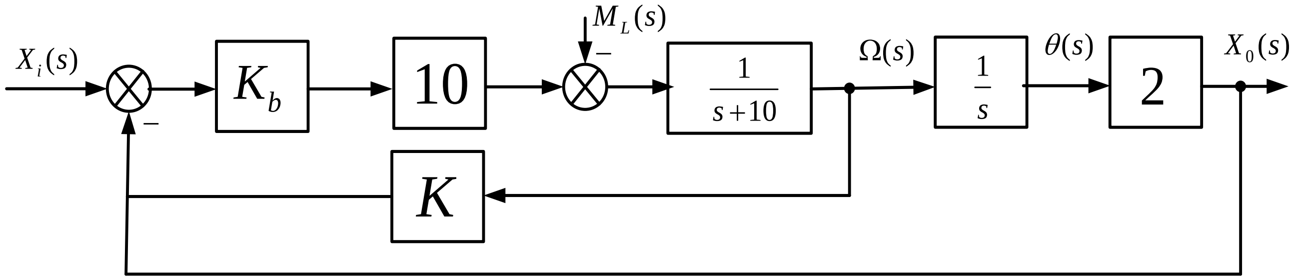
$$G_{x_i}(s)=\frac{20K_\text{b}}{s^2+10s+20K_\text{b}}$$



不同K_b值单位阶跃时间响应不同

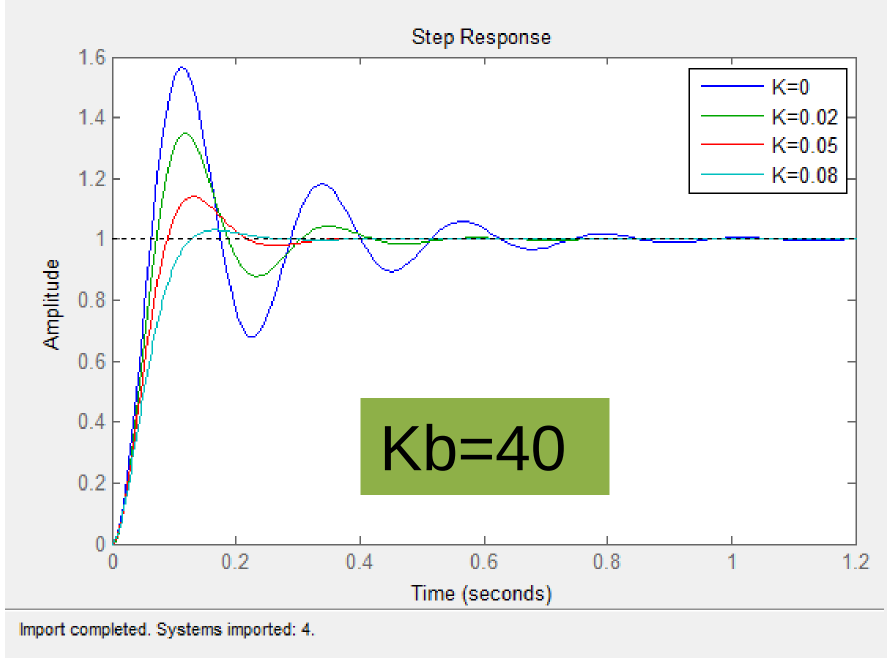
K_b越大，超调量越大，上升时间短

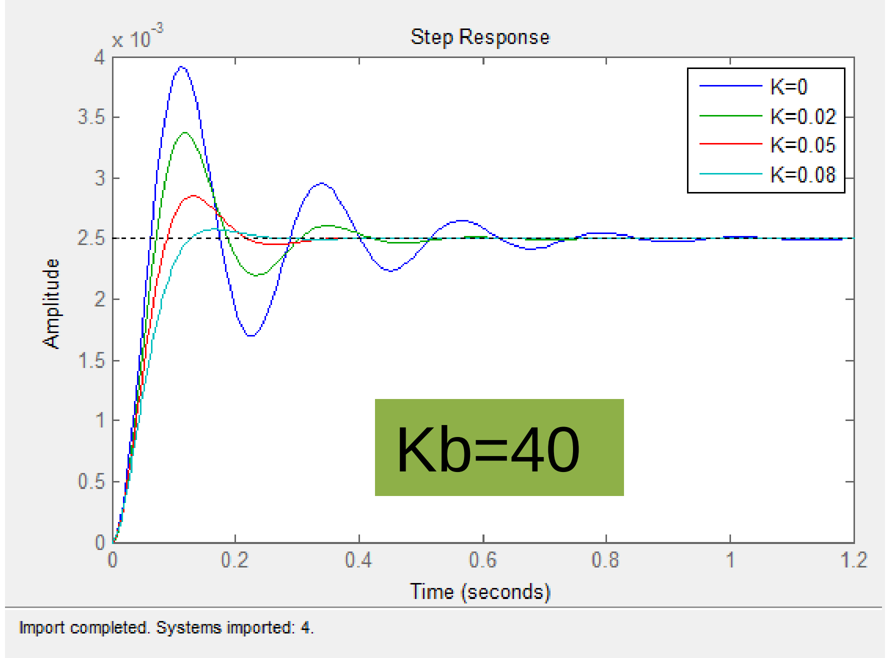
增加电机速度反馈后



$$G_{x_i}(s)=\frac{20K_b}{s^2+10(1+K_bK)s+20K_b}$$

$$G_{M_L}(s)=\frac{2}{s^2+10(1+K_bK)s+20K_b}$$



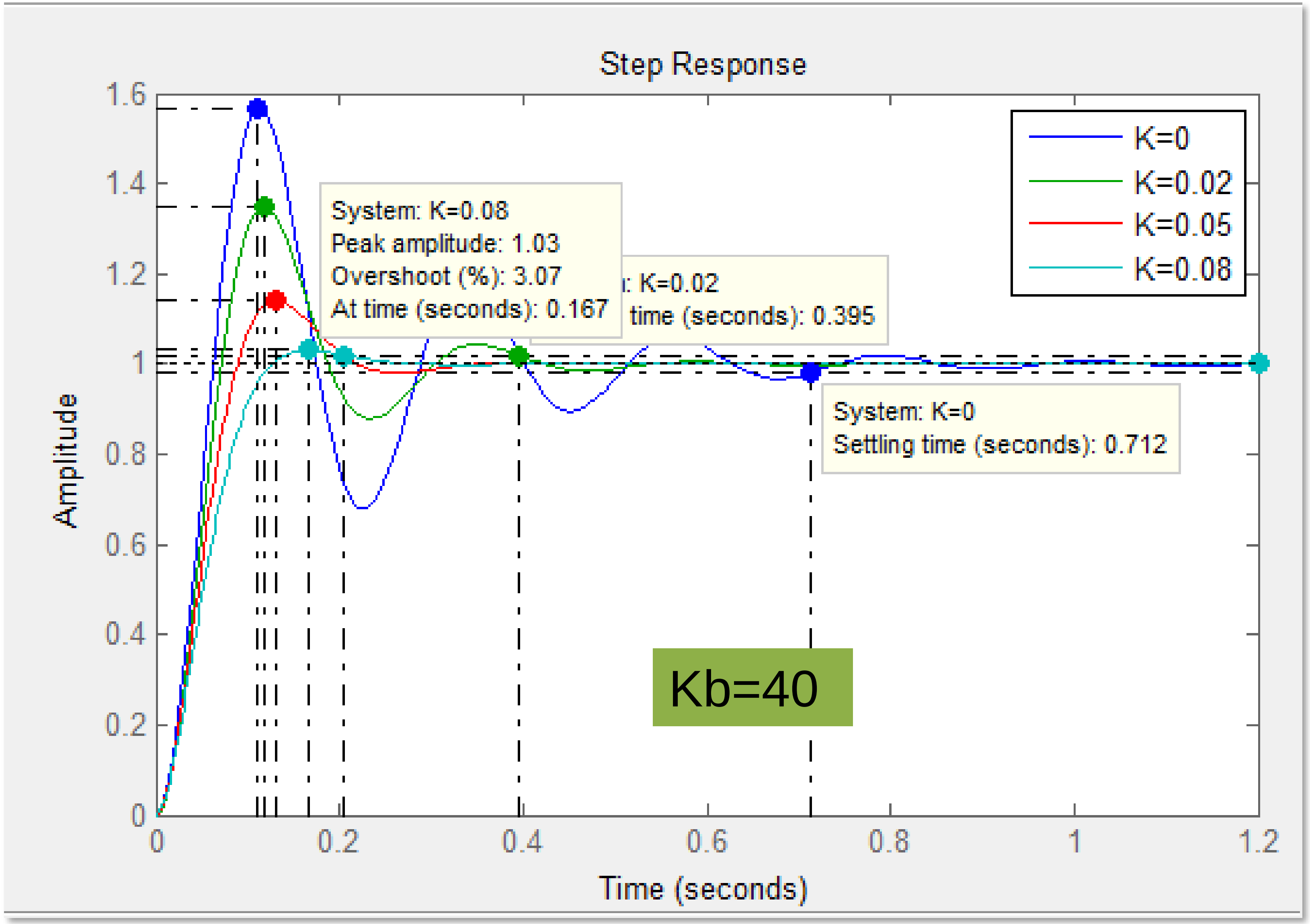


工作机构位置控制系统

不同反馈系数*K*值

*K*越大，超调量越小，

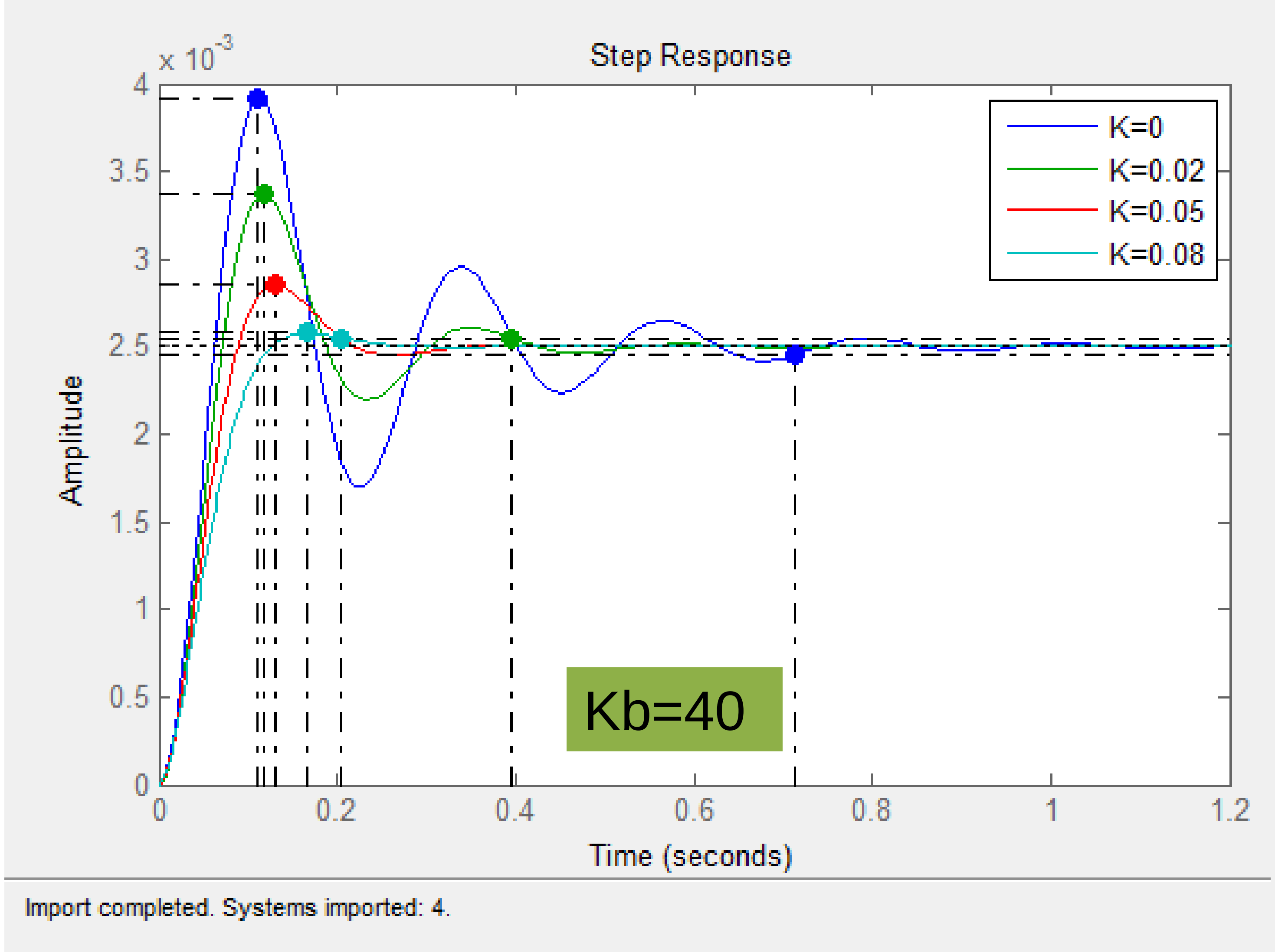
响应时间余越短



不同*K*值对单位阶跃干扰时

*K*越大，输出越小，

即影响越小



谢谢