中国农业大学 China Agricultural University

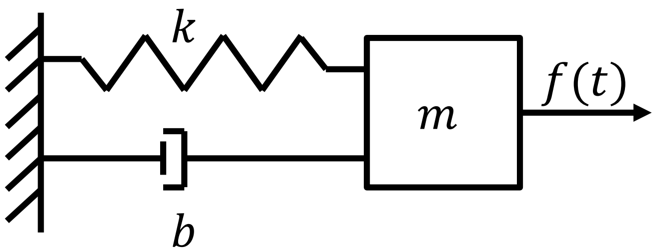
自动控制理论——状态空间

胡标

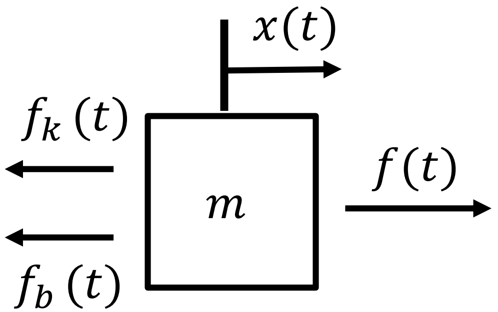
目录

Contents

复习–系统的传递函数



弹簧质量阻尼系统



质量块受力分析

微分方程：$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+kx(t)=f(t)$

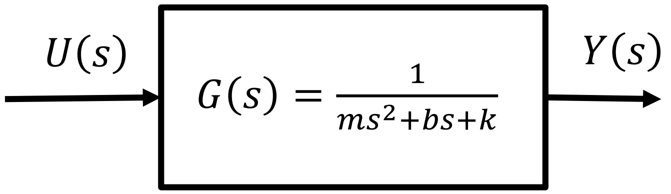
定义：

输入 $u(t)=f(t)$

输出 $y(t)=x(t)$

同时假设零初始条件$x(0)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=0$

传递函数



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{ms^2+bs+k}$$

动态空间方程 – 状态变量

- 状态空间方程（State Space Model）是一个集合，它包含了系统的**输入**、**输出**以及**状态变量**，并把它们用一系列的**一阶微分**方程表达出来。

- 微分方程：$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+kx(t)=f(t)$

  选取两个状态变量：　$z_1(t)=x(t)$

  $$z_2(t)=\frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{m}\left(f(t)-b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-kx(t)\right)$$

$$=\frac{1}{m}u(t)-\frac{b}{m}z_2(t)-\frac{k}{m}z_1(t)$$

写成紧凑的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{m}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}+[0][u(t)]$$

输入 $u(t)=f(t)$
输出 $y(t)=x(t)$

动态空间方程 – 一般形式

- 状态空间方程一般形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt}=\boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{Cz}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

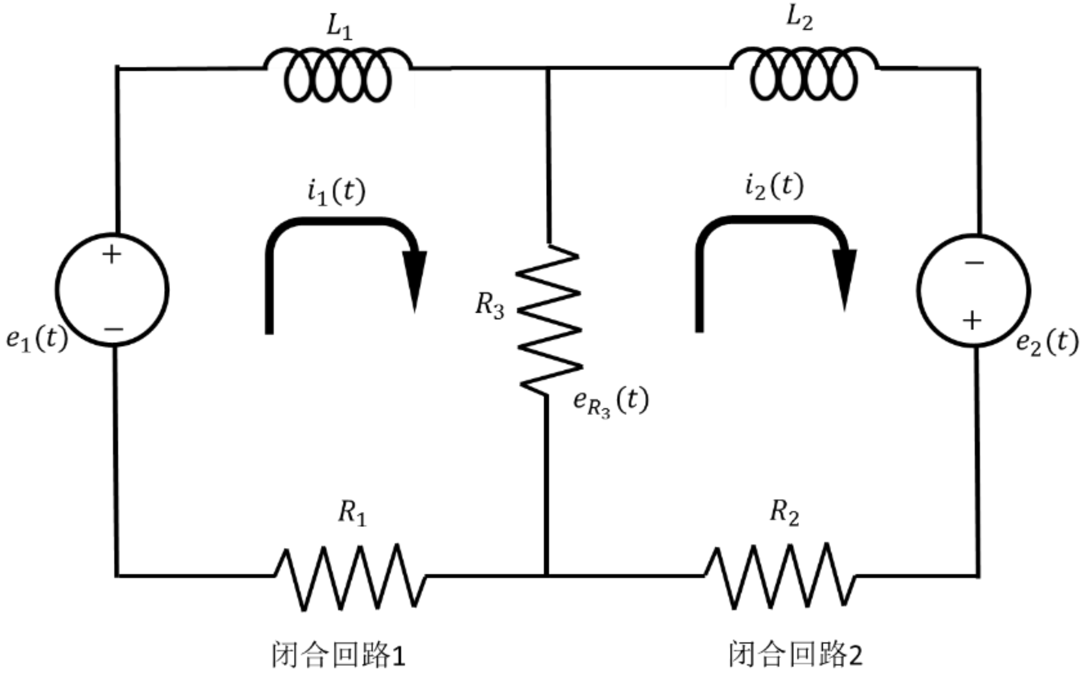
符号	名称	维度
$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$	状态变量	$n\times 1$
$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$	系统输出	$m\times 1$
$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$	系统输入	$p\times 1$
$\boldsymbol{A}$	状态矩阵	$n\times n$
$\boldsymbol{B}$	输入矩阵	$n\times p$
$\boldsymbol{C}$	输出矩阵	$m\times n$
$\boldsymbol{D}$	直接传递矩阵	$m\times p$

- 上一页的例子： $n=2$
  $m=1$
  $p=1$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}):\,2\times 1}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\-\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}:\,2\times 2}\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{m}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}:\,2\times 1}\underbrace{u(t)}_{1\times 1}$$

$$\underbrace{y(t)}_{1\times 1}=\underbrace{[1\quad 0]}_{\boldsymbol{C}:\,1\times 2}\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{[0]}_{\boldsymbol{D}:\,1\times 1}[u(t)]$$

动态空间方程 – 多输入多输出例子



两输入两输出：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = [e_1(t), e_2(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \left[i_1(t), e_{R_3}(t)\right]^{\mathrm{T}}$$

闭环回路1： $L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + i_1(t)R_1 + e_{R_3}(t) = e_1(t)$

闭环回路2： $L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + i_2(t)R_2 - e_{R_3}(t) = e_2(t)$

其中： $e_{R_3}(t) = \big(i_1(t) - i_2(t)\big)R_3$

动态空间方程 – 多输入多输出例子

- 两输入两输出：
  输入：$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = [e_1(t), e_2(t)]^{\mathrm{T}}$
  输出：$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \left[i_1(t), e_{R_3}(t)\right]^{\mathrm{T}}$

闭环回路1： $L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + i_1(t)R_1 + e_{R_3}(t) = e_1(t)$

闭环回路2： $L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + i_2(t)R_2 - e_{R_3}(t) = e_2(t)$

其中： $e_{R_3}(t) = \big(i_1(t) - i_2(t)\big)R_3$

设$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = [z_1(t), z_2(t)]^{\mathrm{T}}$：

$$z_1(t) = i_1(t)$$
$$z_2(t) = i_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dz_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{R_1 + R_3}{L_1}\right) & \dfrac{R_3}{L_1} \\ \dfrac{R_3}{L_2} & -\left(\dfrac{R_2 + R_3}{L_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ e_{R_3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_3 & -R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

单输入单输出系统状态空间方程与传递函数的关系

- 状态空间方程：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Cz}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}t}\right] = \mathcal{L}[\boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})]$$

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})] = \mathcal{L}[\boldsymbol{Cz}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})]$$

- 考虑零初始状态，$z_1(0) = z_2(0) = 0$

$$s\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{AZ}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{BU}(\boldsymbol{s}) \Rightarrow \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s}) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(\boldsymbol{s})$$

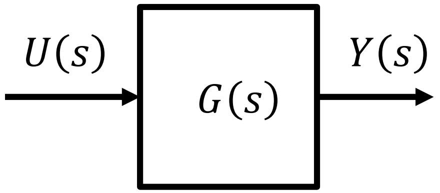
$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{CZ}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{DU}(\boldsymbol{s})$$

$$\boldsymbol{I}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单位矩阵

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s}) = \left(\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})$$

$$G(s) = \frac{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})}{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$



传递函数

状态空间方程的特征值与传递函数的关系

- 传递函数：

$$G(s)=\frac{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})}{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})}=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

- 当$\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$时：

$$G(s)=\frac{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})}{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})}=\frac{\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{B}}{\boxed{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}}$$

$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{*}$是$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$的伴随矩阵

$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$是$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$的**行列式**

- 如果令$G(s)$的分母部分为零，即$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，得出的$s$值有两个含义：

从传递函数的角度考虑，它是传递函数$G(s)$的**极点**

从状态矩阵的角度考虑，它是$\boldsymbol{A}$矩阵的**特征值**

非常重要的关系！

目录
Contents

线性定常系统状态运动分析

线性系统满足**叠加原理**

系统在初始状态及输入向量作用下的运动分解成两个独立的分运动：一个是**无输入作用**，单纯由初始状态引起的系统状态的自由运动，称为**零输入响应**；另外一个是**初始状态为零**的条件下，单纯由输入作用引起的状态强迫运动，称为**零状态响应**。

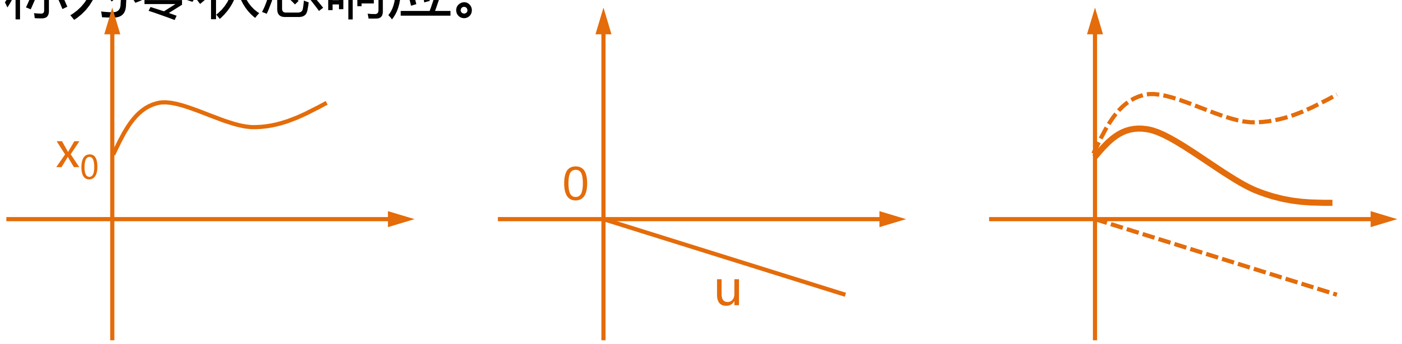
系统由初始状态和输入共同作用而引起的整个响应是二者的叠加，即

系统状态运动 = 零输入响应 + 零状态响应

- **自由运动**(无输入即u=0) 就是系统 $\dot{x}=A(t)x$ 在初始条件x_0下的解，称为**零输入响应**。
- **强迫运动**是系统在初始条件为零的情况下，单纯由输入u作用产生的，即**强迫方程**

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad x(t_0)=0$$

- 的解，称为零状态响应。



- 两种状态运动都是状态的转移，其形态可以通过**状态转移矩阵**来表征，利用状态转移矩阵可以对线性系统的运动规律，包括定常的、时变的、离散的都建立起一个统一的表达形式

线性定常系统状态运动分析

中国农业大学 China Agricultural University

- 在定常系统中，状态转移矩阵完全可以由系统矩阵(A,B,C,D)来确定，线性定常系统的运动规律

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- 初始时刻t_0取为零，则有

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

零输入响应：自由运动　　零状态响应：受迫运动

- 矩阵指数函数的计算方法
- **利用Laplace反变换**
- 对矩阵指数函数 e^{At} 进行Laplace变换

$$L(e^{At}) = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots = (sI - A)^{-1}$$

- 然后再对上式两边求Laplace反变换，可得

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

- 称 $(sI - A)^{-1}$ 为预解矩阵，在频域中起到与矩阵指数函数相同的作用。
- Laplace反变换示例

$$L^{-1}(\frac{s+5}{s^2+5s+6}) = L^{-1}(\frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3}) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

线性定常系统状态运动分析

- 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

- 试求该系统在单位阶跃输入作用下的状态运动轨迹

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+\int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}d\tau$$

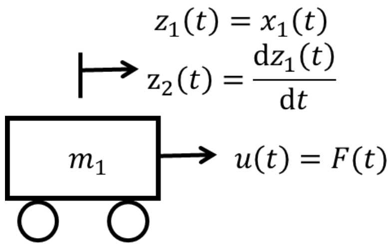
$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-t}+e^{-2t} \end{bmatrix}$$

目录
Contents

系统的能控性直观理解

- 简单例子



$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = F(t)$$

定义状态变量
:

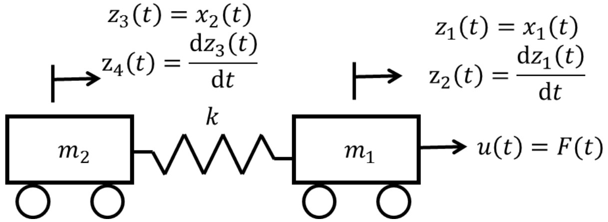
位移：$z_1(t) = x_1(t)$

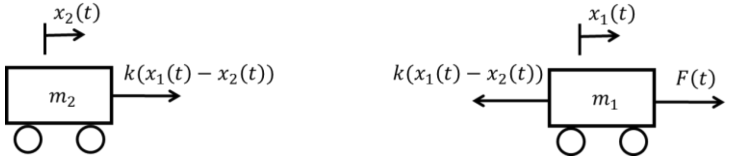
速度：$z_2(t) = \frac{dz_1(t)}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

直觉告诉我们，改变输入$u(t)$，使得状态变量$z_1(t)$（小车的位移）和$z_2(t)$（小车的速度）达到任意给定值。

- 复杂例子





$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = F(t) - k(x_1(t) - x_2(t))$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = k(x_1(t) - x_2(t))$$

考虑：$m_1 = m_2 = 1kg$，$k = 100N/m$

$$\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

思考：能否通过控制作用在第一辆车上的外力同时控制两辆小车的位置和速度？

- 线性时不变系统的状态空间方程一般形式为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt}=\boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{Cz}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

状态能控性(Controllability)定义：如果存在着输入$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$，可以在有限的时间区间$[t_0,t_1]$（其中$t_1$有限）内，将系统的状态变量从初始状态$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0})$转移到终端状态$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_1})$，那么就称状态$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0})$是能控的状态。如果在任意的初始时间$t_0$下的初始状态$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0})$都能控，就称系统的状态是能控的。需要指出，如果系统的状态$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$能控，系统的输出$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$也一定能控。

状态能控性判据：对于n维线性时不变系统而言，它的状态能控的充分必要条件是能控矩阵：

$$\boldsymbol{C_o}=[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}...\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$$

的秩为n，即$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C_o})=n$。

- 判断系统$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt}=\boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$的能控性。其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

  这是一个二维系统，$n=2$。

$$\boldsymbol{C_o}=[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{AB}]=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C_o})=1\neq 2$$

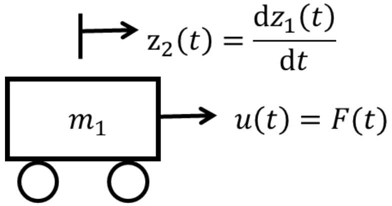
$\Rightarrow$ 不可控

系统能控性的举例与分析

- 单个小车例子

$$z_1(t) = x_1(t)$$

$$z_2(t) = \frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

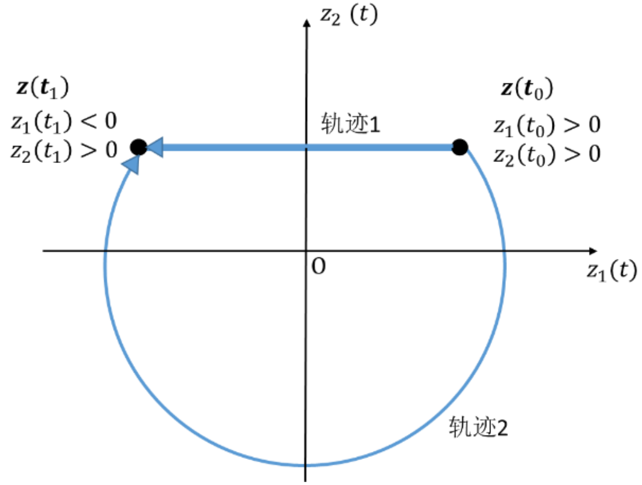


$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boldsymbol{C_o} = [\boldsymbol{B} \;\; \boldsymbol{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Rank}(\boldsymbol{C_o}) = 2$$

系统能控

系统能控只可以保证系统从初始状态$\boldsymbol{z(t_0)}$转移到终端状态$\boldsymbol{z(t_1)}$，但不能保证其移动轨迹。

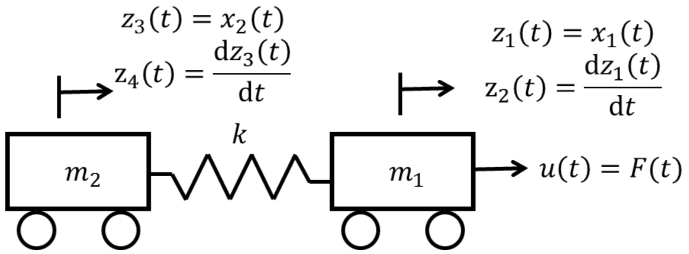


假设在初始状态$\boldsymbol{z(t_0)}$时，位移$z_1(t_0) > 0$且速度$z_2(t_0) > 0$。这说明此时小车在原点的右边并且向右行驶。如果终端状态在$\boldsymbol{z(t_1)}$，即位移$z_1(t_1) < 0$且速度$z_2(t_1) > 0$，这说明它在原点的左边且向右行驶。在外力（输入$\boldsymbol{u(t)}$）的作用下，从初始状态$\boldsymbol{z(t_0)}$到$\boldsymbol{z(t_1)}$的移动是无法通过图中的轨迹1实现的。

相反，它首先要经历一个先向右减速再加速向左的过程，这样才可以向左移动。之后，它需要向左减速，最后向右加速，才可以保证它达到终端状态，即图中轨迹2所示。

系统能控性的举例与分析

- 两个小车例子



选择合适的输入，可以令这两辆小车同时达到目标位置与速度。

$$\frac{d\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t}) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & -100 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C_o} = [\boldsymbol{B} \ \ \boldsymbol{AB} \ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \ \ \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -100 \\ 1 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Rank}(\boldsymbol{C_o}) =$$

系统能控

4

有两点需要说明：第一，能控性是指理论上能控，但具体到实际问题中，要考虑系统的物理限制。比如在本例中，弹簧超过一定长度之后就会发生不可逆的形变。第二，能控性表明系统的状态可以被控制到任意的终端状态，但是不代表系统可以稳定在任意的终端状态。

系统的能观测性

- 如果系统的某些状态变量不可测，如何通过可测量的输出值估计状态值？

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

状态能观测性的定义：在任意给定的输入$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$下，根据有限的时间区间$[t_0,t_1]$（其中$t_1$有限）的输入$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$和输出值$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$，可以唯一确定在初始时间$t_0$下的初始状态$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0})$，则称系统在$t_0$时刻是能观测的，如果在任意初始时间$t_0$下的初始状态$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0})$都能观测，就称系统的状态是能观测的。

状态能观测性判据：对于n维线性时不变系统而言，它的状态能观测的充分必要条件是能观测矩阵：

$$\boldsymbol{O}=[\boldsymbol{C}\ \ \boldsymbol{CA}\ \ \boldsymbol{CA}^2...\boldsymbol{CA}^{n-1}]^T$$

的秩为n，即$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{O})=n$

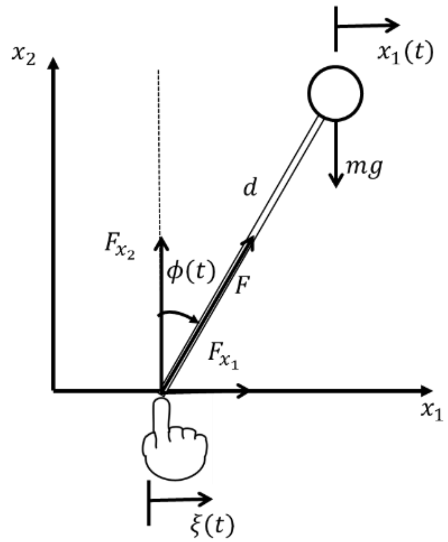
目录
Contents

指尖上的平衡

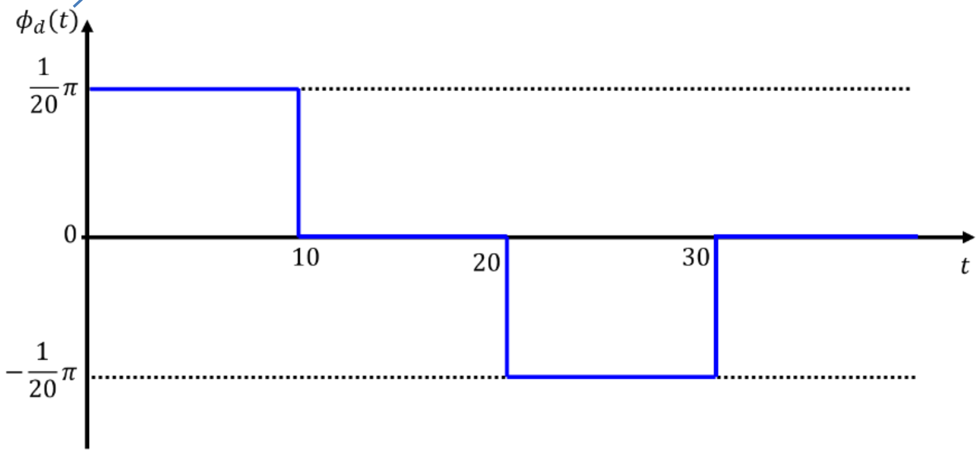
中国农业大学 China Agricultural University

- 问题

非线性系统，需要线性化。当$\phi(t)$很小时：
$\sin\phi(t) \approx \phi(t)$
$\cos\phi(t) \approx 1$



控制目标



$$x_1(t) = \xi(t) + d\sin\phi(t)$$

在x_1方向： $m\frac{\mathrm{d}^2x_1(t)}{\mathrm{d}t^2} = F_{x_1}$ $\quad F_{x_1} = F\sin\phi(t) \approx F\phi(t)$

在x_2方向： $m\frac{\mathrm{d}^2x_2(t)}{\mathrm{d}t^2} = F_{x_2} - mg$

$x_2(t) = d\cos\phi(t) - d \approx 0$ $\quad F_{x_2} = F\cos\phi(t) \approx F$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{g}{d}\phi(t) = -\frac{1}{d}\frac{\mathrm{d}^2\xi(t)}{\mathrm{d}t^2}}$$

- 传递函数

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2}-\frac{g}{d}\phi(t)=-\frac{1}{d}\frac{\mathrm{d}^2\xi(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

输出$y(t)=\phi(t)$

输入$u(t)=\frac{-1}{d}\frac{\mathrm{d}^2\xi(t)}{\mathrm{d}t^2}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}-\frac{g}{d}y(t)=u(t)$$

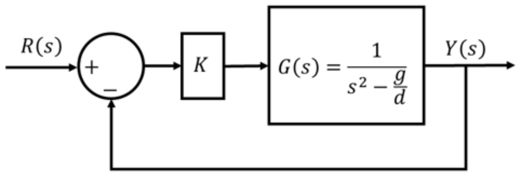
拉普拉斯变换

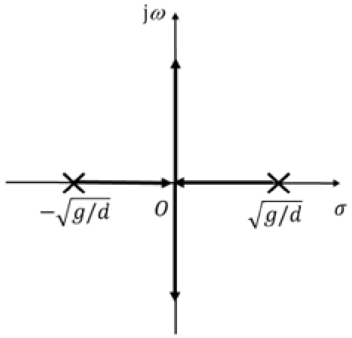
$$\left(s^2-\frac{g}{d}\right)Y(s)=U(s)$$

传递函数：$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2-\frac{g}{d}}$

极点： $\pm\sqrt{g/d}$

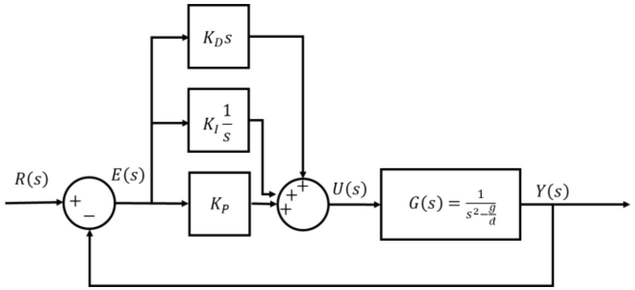
- 使用根轨迹分析





闭环传递函数的极点随着K的增加将沿着实轴相向移动，在虚轴汇合后指向无穷 ➡使用比例控制并增加K无法使系统稳定

- 使用PID控制器：
  - 增加零点将渐近线向左拉，提高系统响应速度
  - 增加极点消除稳态误差



- 参数的调节过程会非常困难
  - 一个正极点$\sqrt{g/d}$需要足够大的增益才可能移动到复平面的左边。
  - 控制量只是误差，$E(s)=Y(s)-R(s)$，的函数，不够灵活。

- 状态空间方程建模

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{g}{d}\phi(t) = -\frac{1}{d}\frac{\mathrm{d}^2\xi(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

输入$u(t) = \frac{-1}{d}\frac{\mathrm{d}^2\xi(t)}{\mathrm{d}t^2}$

定义状态变量：

$$z_1(t) = \phi(t)$$

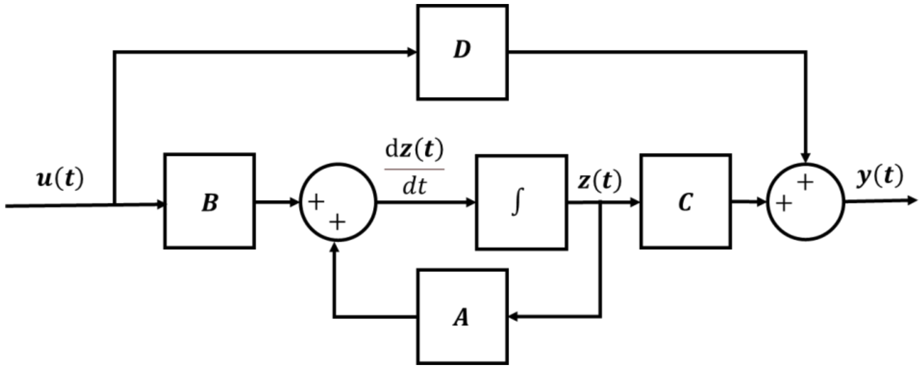
$$z_2(t) = \frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})}$$

其中：$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{y(t) = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})}$$

其中：$\boldsymbol{C} = [1 \quad 0]$，$\boldsymbol{D} = [0]$



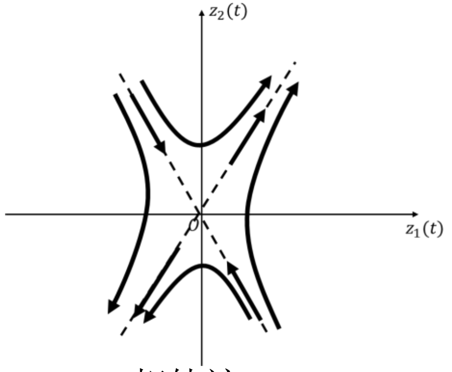
线性状态反馈控制器

- 指尖平衡的例子 – 目标：将系统稳定在平衡点$\boldsymbol{z_f(t)} = [0,0]^{\mathrm{T}}$

$$\frac{\mathbf{dz}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}u(t)，其中：\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix}，\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}u(t)，其中：\boldsymbol{C} = [1 \quad 0]，\quad \boldsymbol{D} = [0]$$

  - 分析无输入的系统，即$u(t) = 0$的情况。此时$\frac{\mathbf{dz}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t})$ ⇨ 平衡点：$\begin{cases} 0 = z_{2f} \\ 0 = \frac{g}{d} z_{1f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{1f} = 0 \\ z_{2f} = 0 \end{cases}$



相轨迹

求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，令$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ ⇨ $\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\frac{g}{d}} < 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{\frac{g}{d}} > 0 \end{cases}$ 一正一负 ⇨ 平衡点$\boldsymbol{z_f(t)} = [0,0]^{\mathrm{T}}$是鞍点，不稳定

- 只是用比例控制$u(t) = -k\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$，代入可得：

$$\frac{\mathbf{dz}(\boldsymbol{t})}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}\left(-k\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(-k)[1 \quad 0]\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} - k & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$$

⇨ 特征值为：$\pm\sqrt{\frac{g}{d} - k}$

- 当$\frac{g}{d} > k$时，特征值是一正一负
- 当$\frac{g}{d} < k$时，特征值为两个纯虚数

此结论与根轨迹所得的结论一致 ⇦ 仅仅通过输出$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$的比例反馈是无法使系统稳定

- 全状态反馈控制

输入与所有状态都相关

令$u(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$；其中$\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2]$

闭环状态变量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}_{cl}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{A}_{cl} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} - k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

目标：将平衡点变为渐进稳定

$\lambda_{1,2}$的实部部分都小于0

可以令：$\lambda_{1,2} = -1 < 0$

求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，令$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda^2 + k_2\lambda - \left(\frac{g}{d} - k_1\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} k_1 = 1 + \frac{g}{d} \\ k_2 = 2 \end{cases}$

代入可得：

$$u(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = [-k_1 \quad -k_2]\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \left[-1 - \frac{g}{d} \quad -2\right]\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$$

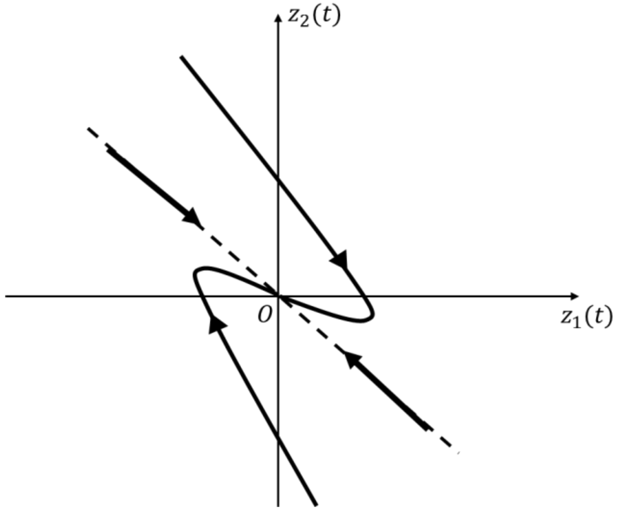
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{A}_{cl}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$$

- 全状态反馈控制

$$u(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = [-k_1 \quad -k_2]\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \left[-1-\frac{g}{d} \quad -2\right]\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$$

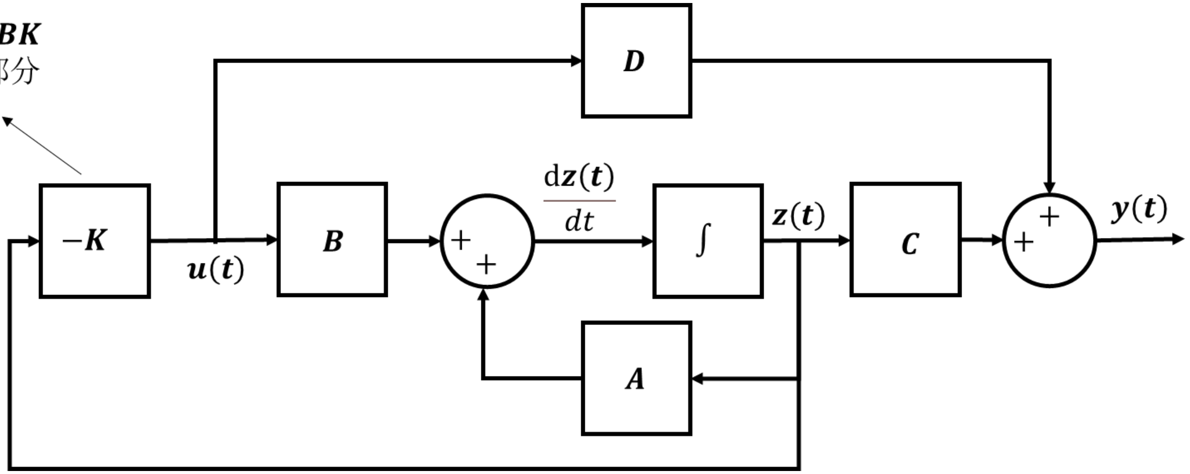
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{A}_{cl}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$$

从本质上说，这依然是比例控制，但相较于传统方法（只反馈位移信息），所有的状态信息（包括位移和速度）都被用作反馈，因此有两个比例增益k_1和k_2。状态矩阵的特征值对应于传递函数的极点。所以这种设计思路也被称为**极点配置**（Pole Placement）。



原动态系统不稳定的平衡点变成了稳定的节点

设计$\boldsymbol{K}$使得$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$的特征值实部部分都为负数



- 全状态反馈控制

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}_{cl}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$$

前面选择了$\lambda_{1,2} = -1$，但应该如何选择合适的特征值？

引入**代价函数（Cost Function）**：

$$J = \int_0^{\infty} \boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{t})\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{Q}_{n\times n} = \begin{pmatrix} q_1 & & \cdots & & 0 \\ & q_2 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \cdots & q_{n-1} & \\ 0 & & \cdots & & q_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{R}_{p\times p} = \begin{pmatrix} r_1 & & \cdots & & 0 \\ & r_2 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \cdots & r_{p-1} & \\ 0 & & \cdots & & r_p \end{pmatrix}$$

对角线元素都为正数

控制器设计的目标是选择合适的$\boldsymbol{K}$从而得到$J_{\min}$

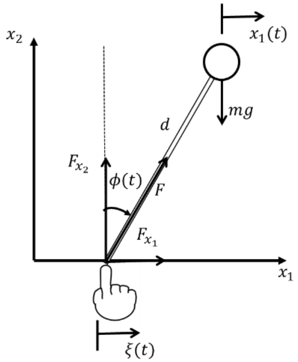
考虑例子：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}u(t)$，　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$J = \int_0^{\infty} [z_1(t) \quad z_2(t)] \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + u(t) r u(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} q_1 z_1^2(t) + q_2 z_2^2(t) + r u^2(t)\,\mathrm{d}t$$

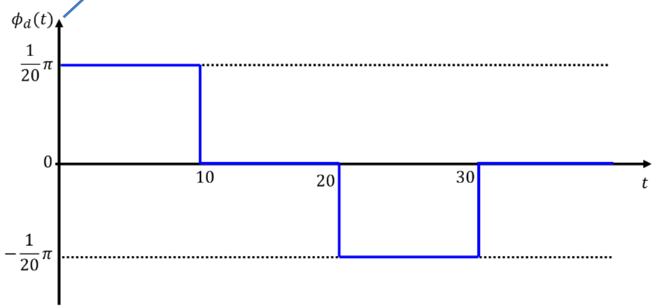
选择合适的参数改变系统的表现

线性状态反馈控制器 – 轨迹追踪

- 轨迹追踪，使状态变量$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$追随$\boldsymbol{z_d}$



控制目标不再是在平衡点上



要求控制量$u(t)$（即动态系统的输入）承担两个功能：

- 改变系统的平衡点位置到$\boldsymbol{z_d}$。
- 令$\boldsymbol{z_d}$成为一个稳定的平衡点。

首先引入误差，令：

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{z_d} - \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} z_{1d} - z_1(t) \\ z_{2d} - z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

设计目标：1. 令$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t})$的平衡点为$\boldsymbol{e_f} = [0,0]$；2. $\boldsymbol{e_f} = [0,0]$是稳定的平衡点。

假设目标值z_{1d}和z_{2d}都是常数（或者变化缓慢），因此$\frac{\mathrm{d}z_{1d}}{dt} = \frac{\mathrm{d}z_{2d}}{dt} = 0$。可以得到 $\frac{\mathbf{de}(\boldsymbol{t})}{dt} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{z_d}}{dt} - \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = -\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = -\boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{B}u(t)$

:

$$\frac{\mathbf{de}(\boldsymbol{t})}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1d} \\ z_{2d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}e_1(t)}{dt} = e_2(t) - z_{2d}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_2(t)}{dt} = \frac{g}{d}e_1(t) - \frac{g}{d}z_{1d} - u(t)$$

$u(t)$无法改变e_2的平衡点，$e_{2f} \equiv z_{2d}$，因此，$z_{2d} = 0$是唯一个可行平衡点

这是由系统本身的物理限制决定的，虽然原系统是能控的，状态变量$z_2(t)$可以达到任意值，但并不意味着它可以被稳定在任意值。本例中的$z_2(t)$代表了角速度，如果它不为0的话，连杆小球就一定还在运动过程当中，自然无法稳定。

线性状态反馈控制器 – 轨迹追踪

- 令$u(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t})$

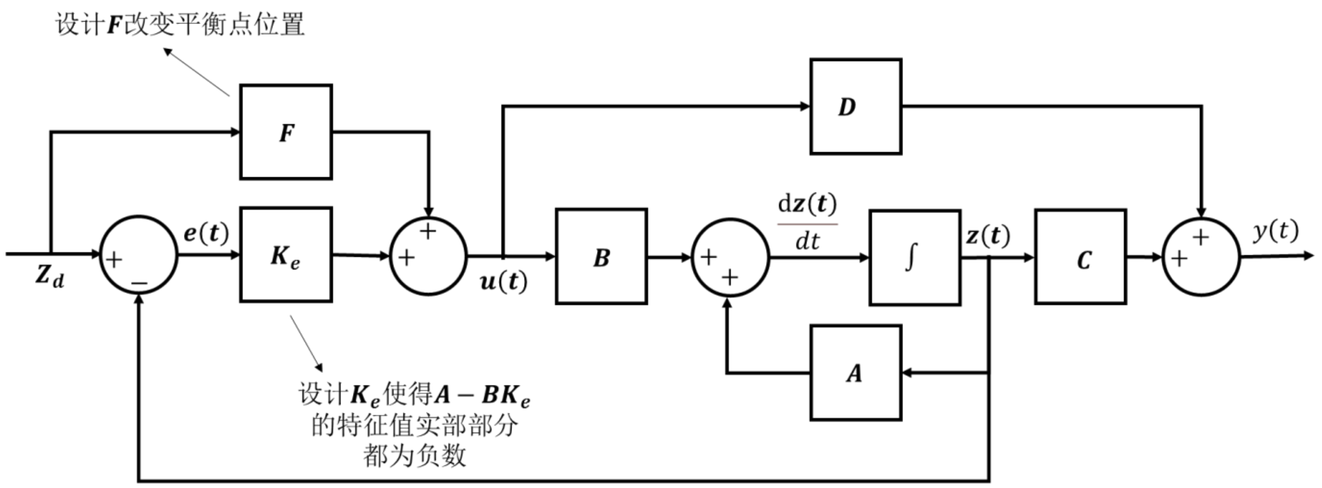
  前馈（Feedforward）：将平衡点移动到z_{1d}

  对于本例：

$$u(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} -\frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1d} \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t})$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t})}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} - k_{e1} & -k_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

  - 此时误差状态变量的平衡点为$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}} = [0,0]^{\mathrm{T}}$
  - 设计合适的k_{e1}，k_{e2}使平衡点稳定即可



对比PID控制，可以看出PID控制只使用输出的误差信号$\boldsymbol{e}(t)$来设计控制器。而线性状态反馈控制器的设计则需要用到所有的状态变量$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$。正是因为更多的系统信息被用来设计控制器，所以状态反馈控制器的灵活度更大，有更多可调节的参数，也就更有可能达到满意的表现。

目录
Contents

线性观测器设计

- 对于线性系统：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Cz}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

最直接，最简单的状态观测器：核心理念是“**猜**”

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$$

与系统的状态空间方程一致，如果运气够好，在$t=0$时刻“猜”的状态变量的值是准确的，即$\hat{\boldsymbol{z}}(0)=\boldsymbol{z}(0)$，那么后续的估计结果就会是准确的。但如果初始估计不准确，未来的结果就会有很大偏差。

利用可以测量的系统输出，增加一个反馈，来判断估计值是否准确

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{L}\big(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) - \hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})\big)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

龙伯格观测器（Luenberger Observer）

根据估计的状态变量计算出的估计系统输出

线性观测器设计

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{dt} = Az(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cz(t) + Du(t)$$

代入

$$\frac{\mathrm{d}\hat{z}(t)}{dt} = A\hat{z}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - \hat{y}(t)\big)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{z}(t) + Du(t)$$

已知　可测

$$\frac{\mathrm{d}\hat{z}(t)}{dt} = A\hat{z}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - C\hat{z}(t) - Du(t)\big) = (A - LC)\hat{z}(t) + (B - LD)u(t) + Ly(t)$$

减去 $\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = Az(t) + Bu(t)$

$$\frac{\mathrm{d}\big(z(t) - \hat{z}(t)\big)}{dt} = Az(t) + Bu(t) - (A - LC)\hat{z}(t) - (B - LD)u(t) - L\big(Cz(t) + Du(t)\big) = (A - LC)(z(t) - \hat{z}(t))$$

令$\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}(t)}{dt} = (A - LC)\tilde{z}(t)$$

观测误差$\tilde{z}(t)$的平衡点是$[0]$

目标

若$(A - LC)$的特征值实部为负数，平衡点是稳定的，随着时间的增加，$\tilde{z}(t) \to 0$，即$\hat{z}(t) \to z(t)$

线性观测器设计

- 系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$$

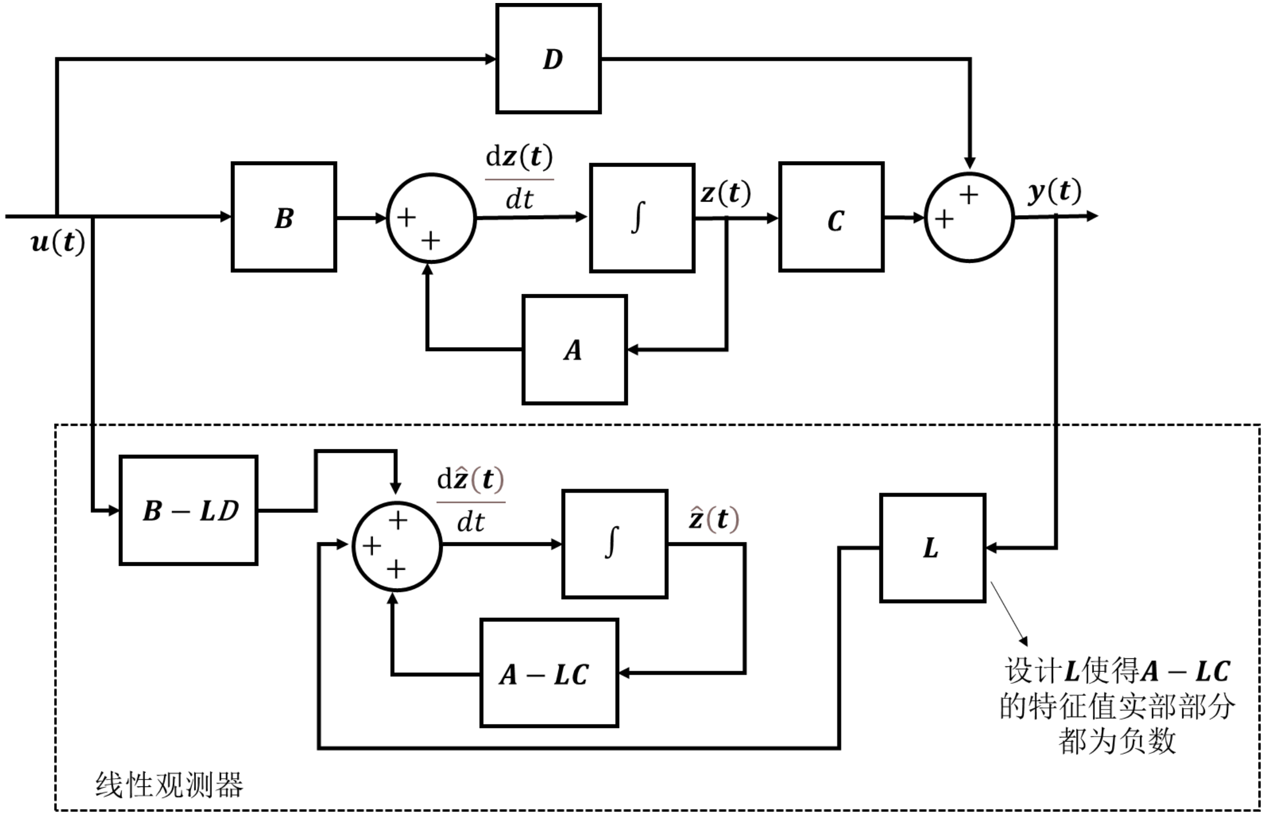
$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Cz}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

- 观测器

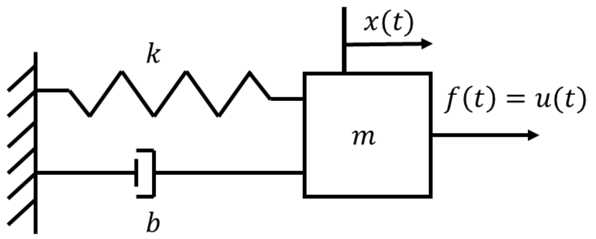
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{L}\big(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) - \hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})\big)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

在“后台”同步运行另一套动态系统，而这个动态系统可以根据系统的输入$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$和输出$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$估计系统的状态值$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$



线性观测器设计举例



$m = 1\text{kg}$

$k = 1\,\text{N/m}$

$b = 0.5\text{N s/m}$

系统输出是位移 $y(t)=x(t)$，输入是外力$u(t)=f(t)$。

状态变量：$z_1(t)=x(t)$代表位移， $z_2(t)=\dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{B}u(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}u(t)$$

其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=[1\quad 0]$，$\boldsymbol{D}=[0]$

- 假设在此系统中可以使用一个传感器实时测量质量块的位移，即系统的输出$y(t)$，同时也是状态变量之一$z_1(t)$。但是无法测量另一个状态变量$z_2(t)$，即质量块的速度。
- 设计观测器来估计$z_2(t)$

线性观测器设计举例

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{B}u(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}u(t)$$

其中$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D} = [0]$

令：$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -1 - l_2 & -0.5 \end{bmatrix}$

求特征值：$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda^2 + (0.5 + l_1)\lambda + 0.5 l_1 + 1 + l_2 = 0$

令$\lambda_{1,2} = -1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} l_1 = 1.5 \\ l_2 = -0.75 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})}{dt} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{LD})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Ly}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) + \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.75 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$$

观测器与控制器的结合

- 系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Cz}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

- 观测器

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})}{dt} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})$$

- 输入

$$u(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})$$

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{BK}\big(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) - \tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})\big) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})\\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}) & 0\\ \boldsymbol{BK} & (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})\\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\end{bmatrix}$$

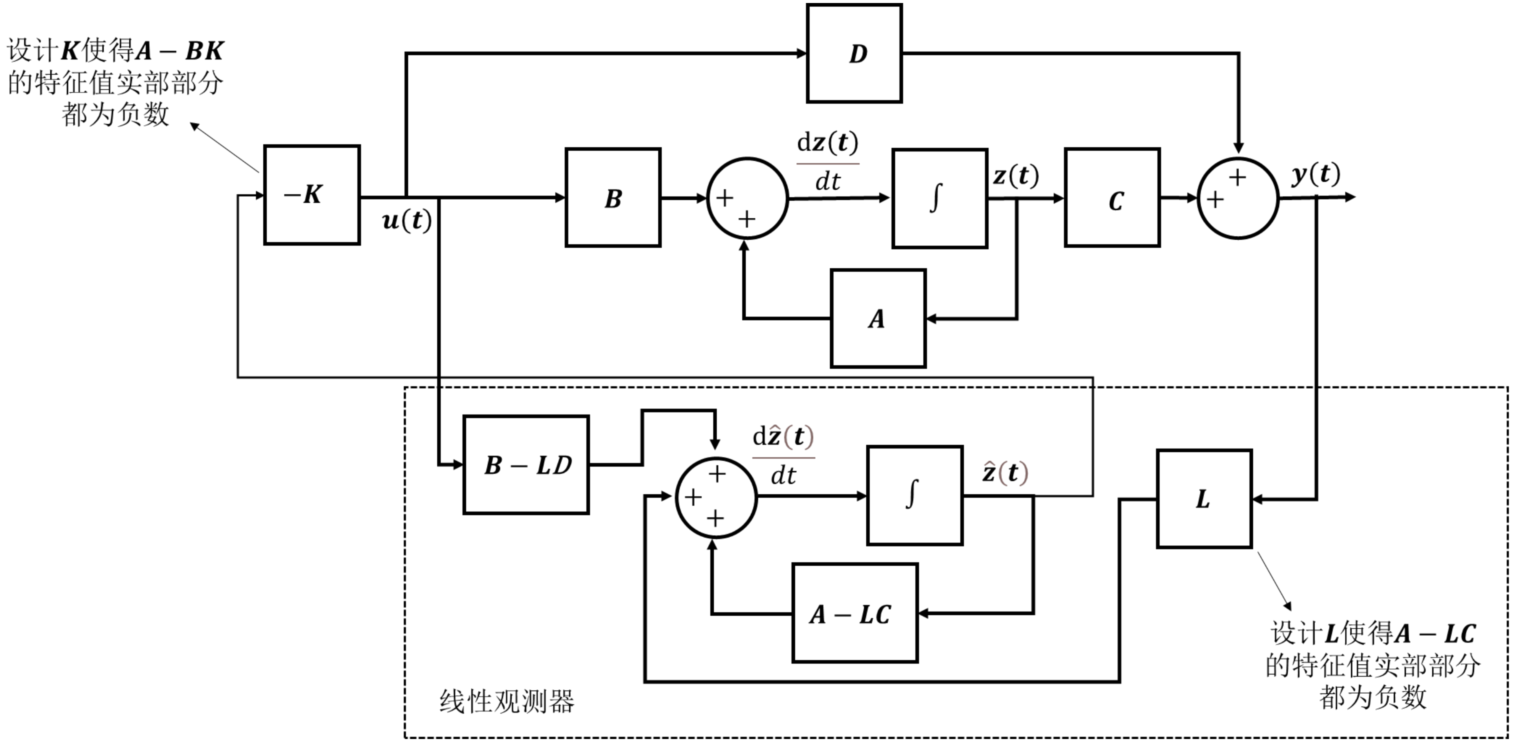
矩阵$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{BK} & (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\end{bmatrix}$特征值的实部部分都为负数的时候，$\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})\\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\end{bmatrix}$将趋向于平衡点$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$

三角矩阵，因此其特征值就是对角线上两个矩阵$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})$和$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})$的特征值。这被称为**分离原理**（**Separation Principle**）。

观测器与控制器的结合

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})\\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}) & 0\\ \boldsymbol{BK} & (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})\\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\end{bmatrix}$$

在选取$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})$和$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})$的特征值的时候，观测器的收敛速度应该快于控制器的收敛速度（一般要求快2到5倍）



谢谢