中国农业大学
China Agricultural University

自动控制理论——稳定性分析

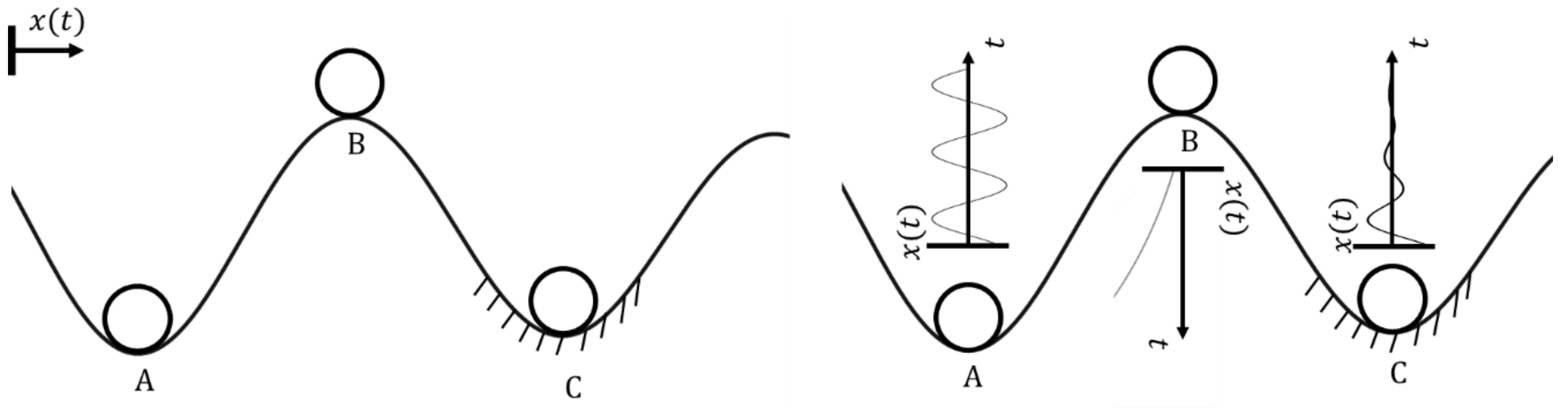
胡标

目录
Contents

系统稳定性的直观定义

- A、B、C这三个位置上分别放置一个小球，它们都是可以保持静止不动的。用数学语言来表示就是

$$\left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0 \Rightarrow$$ A、B、C都是平衡点



- 考虑当小球偏离了平衡点后发生的情况，不严谨的定义：
  1. 平衡点A是临界稳定的。说它稳定，是因为小球在它附近运动时始终有界。说它不稳定，是因为小球一直在运动，而不会停在平衡点A上。
  2. 平衡点B是不稳定的。一旦小球偏离平衡点B后，就不会再回来了。
  3. 平衡点C是稳定的，因为小球随着时间的增加最终会回到平衡点。

系统稳定性的定义

- 考虑一个**无输入**的状态空间方程表达式： $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = f(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}))$ 可以是线性的，也可以是非线性
- 定义$\boldsymbol{z}_f$是系统的平衡点，如果在$t = t_0$时刻状态变量的初始值$\boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{z}_f$，那么：

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{z}_f \text{ , } \forall\, t \geq t_0$$

∀代表“**对于任意，对所有(for all)**”

- 当状态变量位于平衡点时： $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{z}_f$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = 0 \Rightarrow f(\boldsymbol{z}_f) = 0$$

在接下来的分析中，假设系统的平衡点在$\boldsymbol{z}_f = [\mathbf{0}]$位置

两个重要的稳定性概念

- **李雅普诺夫意义下的稳定性（Stability in the Sense of Lyapunov）：**

如果平衡点$\boldsymbol{z_f}=0$满足：

存在　任意给定实数　欧几里得范数：$\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\|=\sqrt{z_1^2(t)+z_2^2(t)+\cdots z_n^2(t)}$

$$\forall t_0,\forall\epsilon>0,\ \exists\delta(t_0,\epsilon):\ \|\boldsymbol{z}(t_0)\|<\delta(t_0,\epsilon)\ \Rightarrow\forall\ t\geq t_0\ ,\quad \|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\|<$$

则它被称为在李雅普诺夫意义下是稳定的

- **渐近稳定（Asymptotic Stability）：**

在李雅普诺夫意义下的稳定的基础上，如果平衡点$\boldsymbol{z_f}=0$满足：

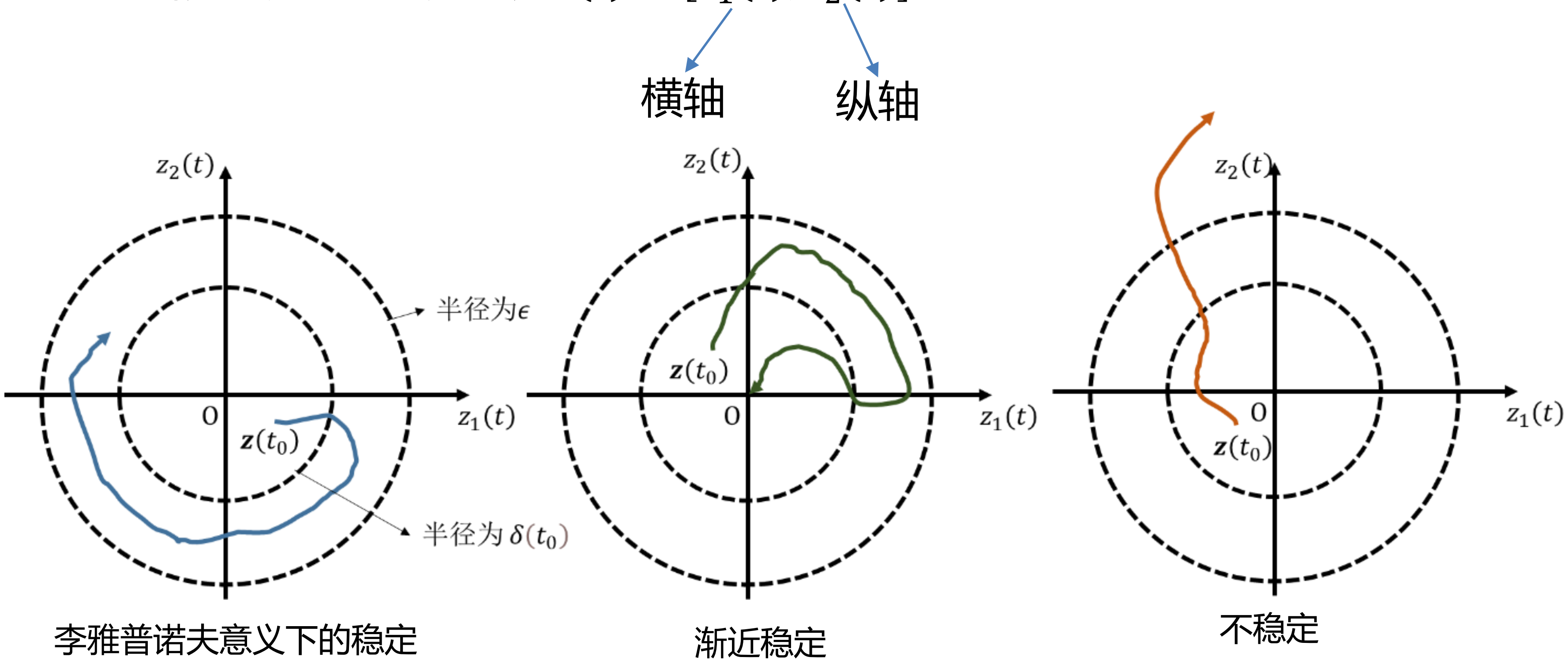
$$\exists\delta(t_0)>0:\ \|\boldsymbol{z}(t_0)\|<\delta(t_0)\ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\|=\boldsymbol{z_f}=0$$

则被称为渐近稳定。

如果平衡点不符合上面两种条件的话，则**不稳定。**

稳定性相图解释

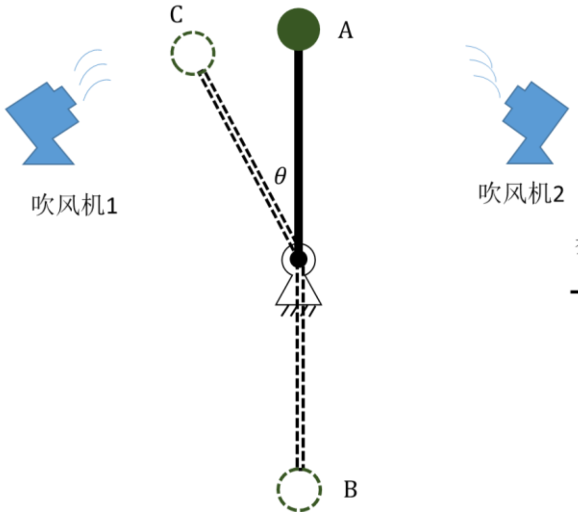
- 二阶系统的状态变量为$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = [z_1(t), z_2(t)]^{\mathrm{T}}$

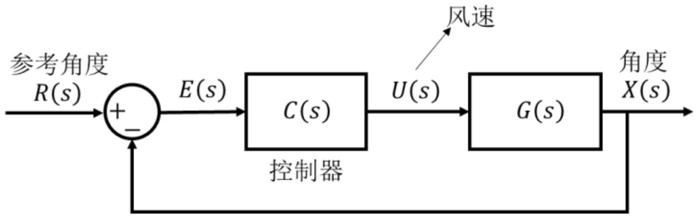


- 参数$\delta(t_0)$和ϵ的物理意义：ϵ是一个稳定性的指标，如果状态变量始终在ϵ以内，那么平衡点就符合李雅普诺夫意义下的稳定。$\delta(t_0)$则是平衡点稳定的前提条件，也可以理解为收敛域。
- 如果$\delta(t_0)$可以任意选择的话（选择无限大），那么就可以推断出平衡点是**全局稳定（Global Stability）**。反之，如果$\delta(t_0)$的选择是有条件的，平衡点则是**局部稳定（Local Stability）**。

稳定性的研究对象

- 在分析系统的稳定性时，要明确分析的对象：**平衡点**
- 一个动态系统的平衡点可能有很多个
- 一个单摆系统在没有外力的作用下有两个平衡点，分别是直上（A点）和直下（B点）：
  - B点是渐近稳定的平衡点
  - A点是不稳定的平衡点
- 如果希望将A点也改变为渐近稳定点的话，就需要引入外力，引入两个吹风机，吹风机的风力强度由小球偏离A点的距离决定：反馈控制系统
- 也可以将C改变为渐近稳定点





中国农业大学
China Agricultural University

目录
Contents

稳定性与传递函数

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow X(s)$$

- 其输入$U(s)$与输出$X(s)$的关系为：$X(s) = U(s)G(s)$
- 在经典控制理论体系中，会通过分析系统的单位冲激响应判来断稳定性：$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

输入不引入零极点，分析传递函数本身的特性

$$\boxed{\begin{aligned} X(s) &= U(s)G(s) = \mathcal{L}[\delta(t)]G(s) = G(s) \\ &= \frac{(s-s_{z1})(s-s_{z2})\ldots(s-s_{zm})}{((s-s_{p1})(s-s_{p2})\ldots(s-s_{pq}))((s-\sigma_1 \pm \mathrm{j}\omega_1)(s-\sigma_2 \pm \mathrm{j}\omega_2)\ldots(s-\sigma_r \pm \mathrm{j}\omega_r))} \end{aligned}}$$

零点：s_{z1}，s_{z2}，…,s_{zm}

实极点：s_{p1}，s_{p2}，…,s_{pq}

共轭复数极点：$\sigma_1 \pm \mathrm{j}\omega_1$，$\sigma_2 \pm \mathrm{j}\omega_2$，…,$\sigma_r \pm \mathrm{j}\omega_r$

拉普拉斯逆变换

$$x(t) = \sum_{i=1}^{q} A_i e^{s_{pi}t} + \sum_{k=1}^{r} B_k e^{\sigma_k t}\sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

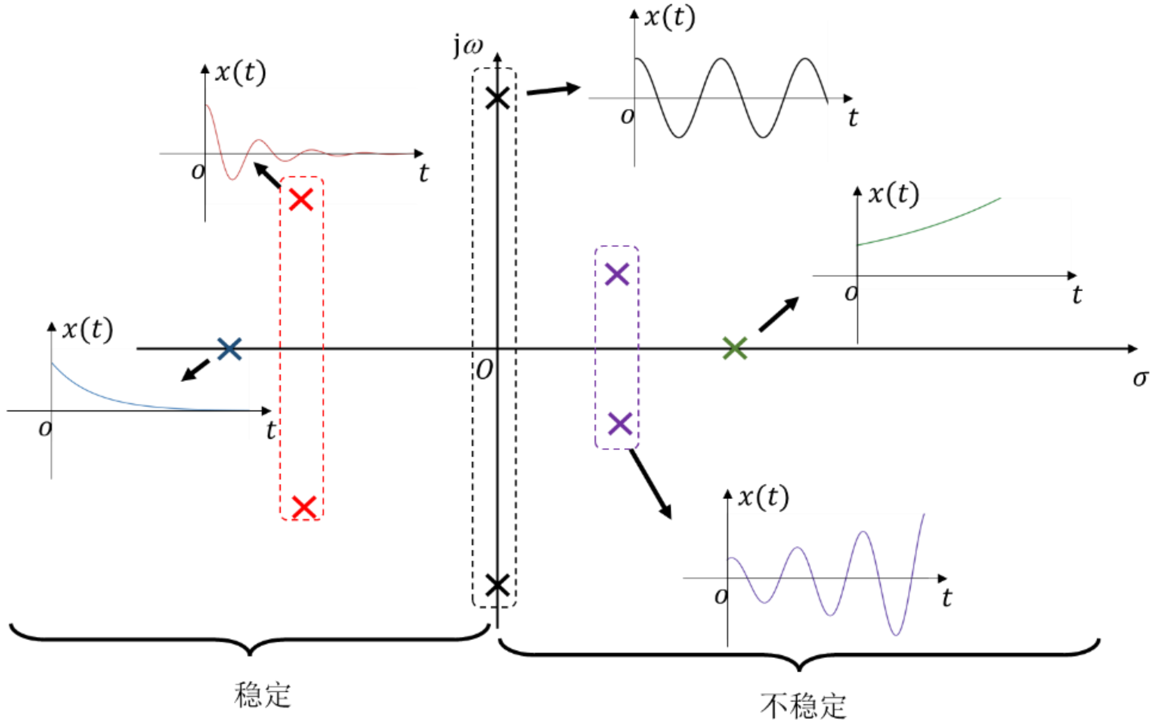
A_i、B_k和φ_k由初始条件来决定

- 传递函数极点的实数部分（s_{pi}与σ_k）将决定系统输出$x(t)$的稳定性：
  - 当所有的$s_{pi} < 0$且所有的$\sigma_k < 0$时，$x(t)$将会随着时间的增加而不断衰减并趋向于0，满足渐近稳定。
  - 如果有任何一个或以上的s_{pi}或σ_k大于0，$x(t)$将会随着时间的增加而发散。因此系统是不稳定的。
  - 如果存在着s_{pi}和σ_k等于0 的情况，$x(t)$会随着时间的增加趋于常数或者是保持在一个范围内振荡（有界）。这种情况下，系统符合李雅普诺夫意义下的稳定。
- 如果传递函数极点存在着虚数部分ω_k，则系统会产生振荡，但并不会影响系统的稳定性。

稳定性与传递函数

- 在经典控制理论当中，稳定特指渐近稳定。李雅普诺夫意义下的稳定（即极点在虚轴上的情况）会被称为**临界稳定**或者不稳定。
- 动态系统稳定的条件：**传递函数的极点均在复平面的左半部分**
- 当系统的单位冲激响应满足渐近稳定条件时，针对每一个有界的输入$u(t)$，系统的输出$x(t)$也都会有界，不会发散到无限大。这种性质被称为**有界输入有界输出稳定（BIBO Stable，Bounded Input Bounded Output Stable）**。

"X"代表极点在复平面中的位置



稳定性与传递函数

- 状态空间方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})}{dt} = \boldsymbol{Az}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Cz}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Du}(\boldsymbol{t})$$

考虑0输入状态，即$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = 0$。

- 相平面与相轨迹与稳定性的关系

$\lambda_{1,2} = \sigma \pm \ \mathrm{j}$	特征值λ_1，λ_2分类与说明		平衡点类型	稳定性分析
特征值为实数 ($\omega = 0$)	$\lambda_1\lambda_2 > 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2 < 0$	λ_1和λ_2都为负数	稳定节点	渐近稳定
	$\lambda_1\lambda_2 < 0$	λ_1和λ_2一正一负	鞍点	不稳定
	$\lambda_1\lambda_2 > 0$ 且$\lambda_1+\lambda_2 > 0$	λ_1和λ_2都为正数	不稳定节点	不稳定
特征值为复数 ($\omega \neq 0$)	$\lambda_{1,2} = \pm\omega \mathrm{j}$	特征值为纯虚数	中心点	李雅普诺夫意义下的稳定
	$\lambda_{1,2} = \sigma \pm \ \mathrm{j}\ (\sigma > 0)$	实部大于0	不稳定焦点	不稳定
	$\lambda_{1,2} = \sigma \pm \ \mathrm{j}\ (\sigma < 0)$	实部小于0	稳定焦点	渐近稳定

- 推广到一般形式：
  - 如果A的特征值的实部部分都不大于0，它的平衡点将符合李雅普诺夫意义下的稳定
  - 如果A的特征值的实部部分都小于0，它的平衡点将符合渐近稳定。

Routh稳定判据的必要条件

中国农业大学 China Agricultural University

特征方程

$$D(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s^1+a_0=0 \Rightarrow s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n}=0$$

特征根形式

$$s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n}=(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)$$

$$\Rightarrow s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n}$$

$$=s^n-(\sum_{i=1}^{n}s_i)s^{n-1}+(\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{n}s_is_j)s^{n-2}-\cdots+(-1)^n\prod_{i=1}^{n}s_i$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=-\sum_{i=1}^{n}s_i$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n}=\sum_{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}^{n}s_is_j$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_0}{a_n}=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}s_i$$

Routh稳定判据的必要条件

要使全部特征根均具有负实部，必须满足两个条件，即必要条件：

（1）特征方程的**各项系数a_i都不为零**。

因为若有一系数为零，则必出现实部为零的特征根或实部有正有负的特征根，此时系统为临界稳定或不稳定。

（2）特征方程的**各项系数a_i的符号都相同**。

说明：

（1）不满足上述条件系统**一定是不稳定的**

（2）满足上述条件系统**不一定是稳定的**

Routh稳定判据的必要条件

设系统的特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s^1 + a_0 = 0$$

式中所有系数 $a_i (i = n, n-1, \cdots, 1, 0)$ 均为正值，即特征方程不缺项，满足稳定性的必要条件。

系统稳定?

Routh稳定判据的充要条件

Routh表

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \cdots \\
s^{n-3} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^2 & D_1 & D_2 & & & \\
s^1 & E_1 & & & & \\
s^0 & F_1 & & & &
\end{array}
$$

$$A_1=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$A_2=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$A_3=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_na_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$B_1=\frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}}{A_1}=\frac{A_1a_{n-3}-a_{n-1}A_2}{A_1}$$

$$B_2=\frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix}}{A_1}=\frac{A_1a_{n-5}-a_{n-1}A_3}{A_1}$$

中国農業大學 China Agricultural University

Routh稳定判据

■系统稳定的充要条件

Routh表中第一列各元素符号均为正，且值不为零。

Routh表中第一列元素符号改变的次数等于特征方程具有正实部特征根的个数

对于三阶系统 $a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$

只要 $a_2a_1>a_3a_0$ 则系统稳定

对于二阶系统 $a_2s^2+a_1s+a_0=0$

所有系数全为正，系统稳定

Routh稳定判据的充要条件

$$D(s)=5s^3+6s^2+3s-5=0$$

一项为负， 不稳定

$$D(s)=5s^3+6s^2+5=0$$

缺项，不稳定

$$D(s)=2s^4+2s^3+8s^2+3s+2=0$$

不满足必要条件，系统一定不稳定；

满足必要条件，系统不一定稳定，需进一步验证。

例1 $$D(s)=s^4+s^3-28s^2+20s+48=0$$

Routh表

s^4	1	–28	48
s^3	1	20	0
s^2	–48	48	0
s^1	21	0	0
s^0	48	0	0

-6.0000
4.0000
2.0000
-1.0000

第一列元素符号有变化，系统不稳定。

例2 $D(s) = 2s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 3s + 2 = 0$

Routh表

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 8 & 2 \\ s^3 & 2 & 3 & 0 \\ s^2 & \dfrac{2\times8-2\times3}{2}=5 & 2 & 0 \\ s^1 & \dfrac{5\times3-2\times2}{5}=\dfrac{11}{5} & 0 & 0 \\ s^0 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

-0.3099 + 1.8387i

-0.3099 - 1.8387i

-0.1901 + 0.5015i

-0.1901 - 0.5015i

第一列元素符号没有变化，系统稳定。

例3 $D(s)=s^4+5s^3+8s^2+16s+20=0$

Routh表

s^4	1	8	20
s^3	5	16	0
s^2	$\dfrac{5\times 8-16}{5}=4.8$	20	0
s^1	$\dfrac{4.8\times 16-5\times 20}{4.8}=-4.83$	0	0
s^0	20	0	0

第一列元素符号改变两次

说明有两个根在右半平面

系统不稳定

-3.5770 + 0.0000i

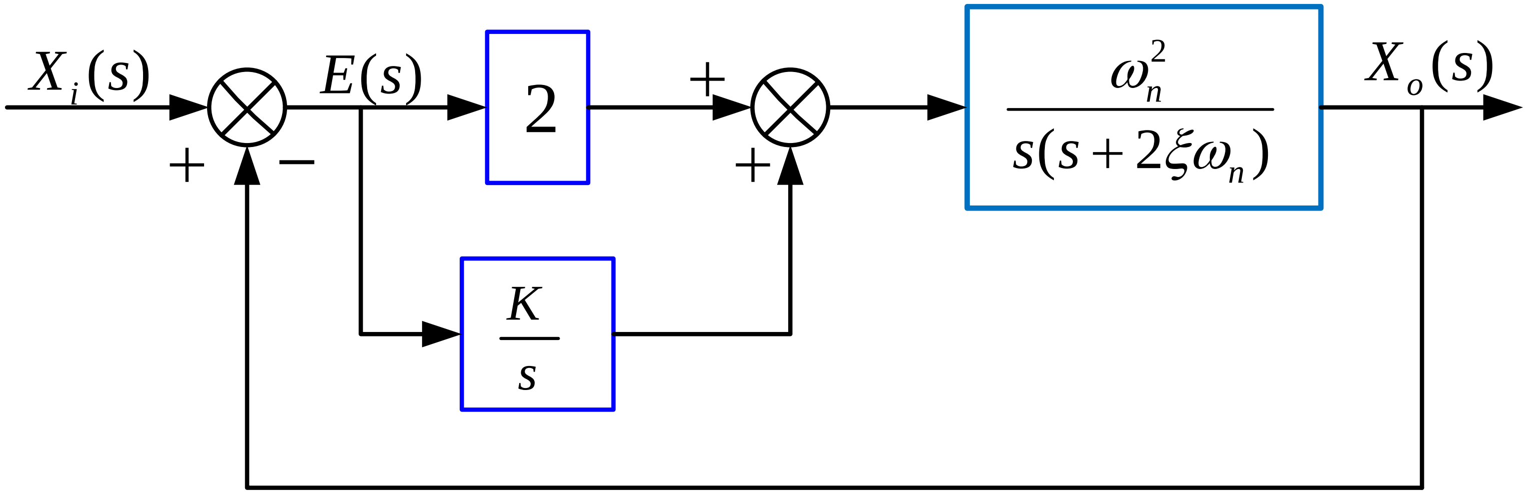
-1.6766 + 0.0000i

0.1268 + 1.8218i

0.1268 - 1.8218i

例4　已知 $\xi = 0.4$ 　　$\omega_n = 80\mathrm{rad/s}$

试确定 K **取何值时，系统方能稳定。**



Routh稳定判据的充要条件

解：系统的开环传递函数

$$G_K(s)=\frac{X_o(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^2(2s+K)}{s^2(s+2\xi\omega_n)}$$

系统的闭环传递函数

$$G_B(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{\omega_n^2(s+K)}{s^3+2\xi\omega_n s^2+2\omega_n^2 s+K\omega_n^2}$$

特征方程 $D(s)=s^3+64s^2+12800s+6400K=0$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^3 & 1 & 12800 & 0 \\
s^2 & 64 & 6400K & 0 \\
s^1 & \dfrac{64\times12800-6400K}{64} & 0 & 0 \\
s^0 & 6400K & &
\end{array}$$

$$\begin{cases} 6400K>0 \\ \dfrac{64\times12800-6400K}{64}>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0<\mathrm{K}<128$$

由稳定的充要条件可知：0 <*K*<128 时系统稳定

Routh稳定判据的充要条件

1. Routh表中第一列元素出现零

如果Routh表中任意一行的第一个元素为零时，而其后各元素均不为零或部分不为零，可以用一个很小正数ε代替第一列等于零的元素，然后计算Routh表其余各元素。

结论：

如果第一列ε上面的元素与下面的元素符号相同，则表示方程中有一对共轭虚根存在；

如果第一列元素中有符号变化，其变化的次数等于该方程在[s]平面右半面上根的数目。

1．Routh表中第一列元素出现零

如果Routh表中任意一行的第一个元素为零时，而其后各元素均不为零或部分不为零，可以用一个很小正数ε代替第一列等于零的元素，然后计算Routh表其余各元素。

结论：

如果第一列ε上面的元素与下面的元素符号相同，则表示方程中有一对共轭虚根存在；

如果第一列元素中有符号变化，其变化的次数等于该方程在[s]平面右半面上根的数目。

Routh判据的特殊情况

例5 $s^5+2s^4+2s^3+4s^2+s+1=0$

S^5	1	2	1
S^4	2	4	1
S^3	0 $\approx \varepsilon$	1/2	
S^2	$4-\frac{1}{\varepsilon}\approx-\frac{1}{\varepsilon}$	1	
S^1	1/2	0	
S^0	1	0	

-1.9571 + 0.0000i
0.0686 + 1.2736i
0.0686 - 1.2736i
-0.0901 + 0.5532i
-0.0901 - 0.5532i

系统不稳定，第一列元素两次变号，有两个正根在右半平面。

2. Routh表中一行元素均为零

如果计算Routh表的任意一行中的所有元素均为零时，可利用该行的上一行的元素构成一个辅助多项式，并用这个多项式方程的导数的系数组成计算Routh表的下一行元素，然后继续计算以后各行元素。

Routh判据的特殊情况

例7 $s^6+2s^5+7s^4+12s^3+14s^2+16s+8=0$

S^6	1	7	14	8
S^5	2	12	16	0
S^4	1	6	8	0
S^3	0 4	0 12	0 0	0 0
S^2	3	8	0	0
S^1	4/3	0	0	0
S^0	8	0	0	0

辅助多项式

$$F(s)=s^4+6s^2+8$$

$$F'(s)=4s^3+12s$$

第一列元素没有变号，而某一行全为零，说明存在对称于原点的根，即共轭虚根，系统临界稳定。 可根据辅助方程求出共轭虚根。

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{2}\mathrm{j} \quad s_{3,4}=\pm 2\mathrm{j}$$

目录
Contents

1892年，俄国数学家李亚普诺夫（Lyapunov）在其发表的论文《运动稳定性的一般问题》(The general problem of motion stability)中提出了两种用于分析由常微分方程描述的系统稳定性的方法：线性化方法和直接法。(linearization method and direct method)

- 线性化方法又称第一方法或间接法，它的基本思路是通过系统状态方程的解来判别系统的稳定性。对于线性定常系统，只需解出特征方程的根即可作出稳定性判别。对于一般非线性系统，则可通过线性化处理，然后再根据线性化方程的特征根来判断系统的稳定性。
- 直接法又称第二方法，它通过构造一个称之为Lyapunov函数的纯量函数来判别系统的稳定性。它是分析线性和非线性、时变和定常动力学系统稳定性的一种普遍方法，而且还可以有效地应用于系统的分析和综合。

- **平衡状态（Equilibrium states）**

定义 动力学系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

的平衡状态是满足 $\dot{\boldsymbol{x}} = 0$ 的那一类状态，用$\boldsymbol{x}_e$表示。即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e) = 0$$

对于线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

如果矩阵A是非奇异的，则系统只存在唯一的一个平衡状态

$\boldsymbol{x}_e = 0$，而当A为奇异时，则存在无穷多个平衡状态。

- 对于非线性系统，通常有一个或多个平衡状态。

- **Lyapunov意义下的稳定性(stability in the sense of Lyapunov or Lyapunov stability)**
- 系统受扰动作用后将偏离其平衡状态，随后系统可能出现下列情况：（1）系统的自由响应有界；（2）系统的自由响应不但有界，而且最终回到平衡状态；（3）系统的自由响应无界。Lyapunov把上述三种情况分别定义为稳定、渐近稳定和不稳定。下面分别给出其定义。
  - **(1) Lyapunov意义下的稳定性**

用下式表示以平衡状态$\boldsymbol{x}_e$为圆心、半径为k的球域：

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\| \le k$$

式中，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\|$ 称为欧几里德范数，在n维状态空间中，有

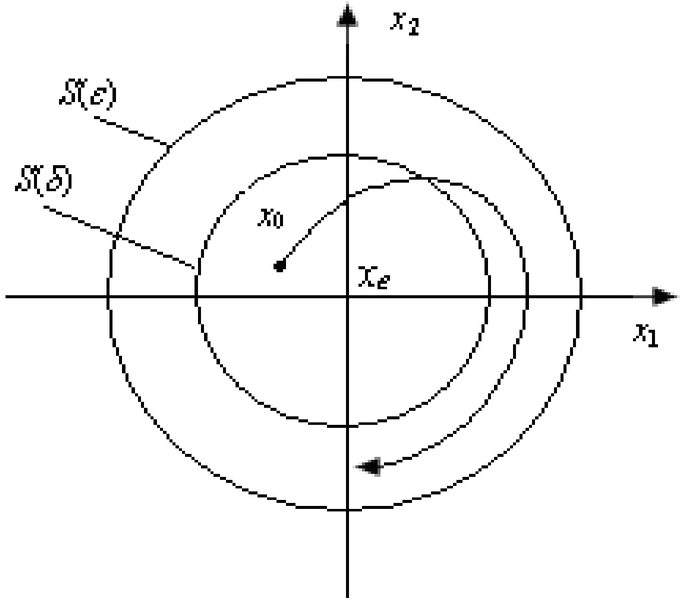
$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\| = \sqrt{(x_1-x_{e1})^2+(x_2-x_{e2})^2+\cdots+(x_n-x_{en})^2}$$

关于稳定性的几个定义

定义 对于任意给定的每个实数$\varepsilon>0$，都对应存在另一实数$\delta(\varepsilon)>0$，使得一切满足不等式$\|x_0-x_e\|\le\delta(\varepsilon)$的任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的系统响应 $\boldsymbol{x}$，在所有时间内都满足$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\|\le\varepsilon$，则称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 在Lyapunov意义下是稳定的。

几何含义：给定以任意正数δ 为半径的球域，

当t无限增大时，从球域内$S(\delta)$ 出发的轨迹总不越出球域 $S(\varepsilon)$，那么平衡状态$\boldsymbol{x}_e$是 Lyapunov 意义下稳定的。以二维空间为例，上述定义几何解释如右图所示。



二维空间中稳定平衡状态示意图

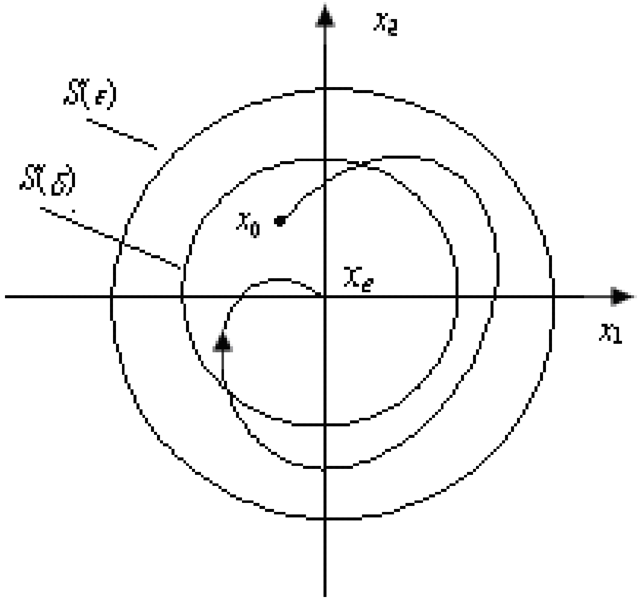
关于稳定性的几个定义

- (2) **渐近稳定**(**asymptotic stability**)

定义 若平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 是Lyapunov意义下稳定的，并且当 t 趋近于无穷大时，$\boldsymbol{x}(t)$ 趋近于$\boldsymbol{x}_e$，

即 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\|=0$，则称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 渐近稳定。

以二维空间为例，上述定义几何解释右图所示。



二维空间中渐近稳定平衡状态示意图

- (3) **大范围渐近稳定**

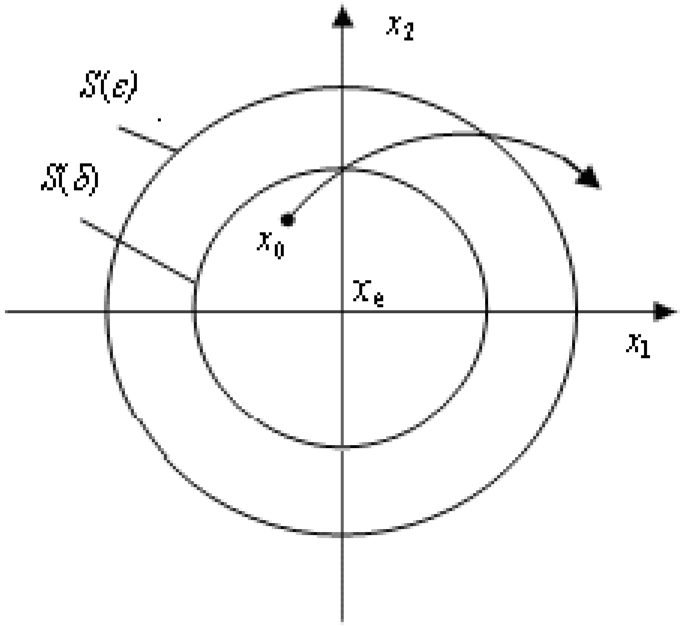
定义 如果平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$是渐近稳定的，且其渐近稳定的最大范围是整个状态空间，那么平衡状态 x_e就称为大范围渐近稳定。(**asymptotic stability in the large**)

关于稳定性的几个定义

- 很明显，大范围渐近稳定的必要条件是整个状态空间中只存在一个平衡状态。
- 对于线性系统，如果其平衡状态是渐近稳定的，那么它一定是大范围渐近稳定的。如果系统不是大范围渐近稳定的，那么就要遇到一个确定渐近稳定的最大范围的问题，这通常非常困难。

- **（4）不稳定（instability）**

定义 如果对于某一实数 $\varepsilon > 0$，不论 取得多么小，在$S(\delta)$内总存在一个初始状态$\boldsymbol{x}_0$，由此出发的轨迹最终越出 δ，即$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\| > \varepsilon$，则称平衡状态 $S(\varepsilon)$ 不稳定。 以二维空间为例，上述定义 $\boldsymbol{x}_e$ 几何解释右图所示。



二维空间中不稳定平衡状态示意图

目录
Contents

Lyapunov第一方法又叫间接法。它的基本思路是解系统方程，然后根据方程的解判别系统的稳定性。

(1) 对于线性定常系统只需求出特征值就可判别其稳定性。

(2) 对于非线性系统，则必须首先将系统的状态方程线性化，然后用线性化方程（即一次近似式）的特征值来判别系统的稳定性。

（1）线性系统稳定性的判别

定理 线性连续定常系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 渐近稳定的充分必要条件是矩阵*A*的所有特征值均具有负实部。

例4-1 试分析如下系统的稳定性。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

解 矩阵*A*的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda(\lambda+1)-6=(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

矩阵*A*的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-3$，故系统不是渐近稳定的。

- 以上研究的是系统平衡状态的稳定性，也称系统内部的稳定性。但从工程意义上看，往往更重视系统的输入输出稳定性，下面给出输入输出稳定性的定义。
- **定义** 若所有的有界输入引起的零状态响应的输出是有界的，则称系统为有界输入有界输出稳定。（**BIBO**）

有界是指如果一个函数$h(t)$，在时间区间 $[0,\infty)$ 内，它的幅值不会增至无穷大，即存在一个实常数K，使得对于$[0,\infty)$内所有，恒有$|h(t)|\le K<\infty$，则称$\boldsymbol{h(t)}$有界。

- **定理**4–2 线性连续定常系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$是输入输出稳定的充要条件是其传递函数

$G(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 的极点都位于**S**的左半平面内。

中国農業大學 China Agricultural University

- **例**4-2：试分析系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 6\\1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}u \quad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的输入输出稳定性。

解　系统的传递函数为

$$G(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -6\\-1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\frac{s-2}{(s-2)(s+3)}=\frac{1}{s+3}$$

由于系统传递函数的极点位于S的左半平面，故系统是输入输出稳定的。这是因为具有正实部的极点 $s=2$ 被系统的零点对消了，而在系统的输入输出特性中没有表现出来。

- **结论**：若系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$是渐近稳定的，则它也是输入输出稳定的；若系统是输入输出稳定的，且又是能控能观测的，则系统渐近稳定。

中国农业大学 China Agricultural University

- **（2）非线性系统的稳定性分析**

设系统在零输入下的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$f(x)$是与x同维数的向量函数，它对于状态向量x是连续可微的。将非线性向量函数$f(x)$在平衡状态x_e附近展开成泰勒级数，即

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^T}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e) + \Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

雅可比（Jacobian）矩阵。引入偏差向量 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_e$ 即可导出系统的线性化方程，或称一次近似式为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}$$

式中 $\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^T}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e}$

- ①假如矩阵A的所有特征值都具有负实部，则原非线性系统的平衡状态x_e是渐近稳定的，且系统的稳定性与高阶项无关。
- ②如果一次近似式中矩阵A的特征值中至少有一个实部为正的特征值，那么原非线性系统的平衡状态x_e是不稳定的。
- ③如果一次近似式中矩阵A的特征值中虽然没有实部为正的特征值，但有实部为零的特征值，那么原非线性系统的平衡状态x_e的稳定性要由高阶项决定。

李亚普诺夫第一方法

- **例4** 描述振荡器电压产生的Vanderpol方程为

$$\ddot{v}+u(v^2-1)\dot{v}+kv=Q$$

试确定系统渐近稳定Q的取值范围。（$u<0,k>0$）

- **解** ①令 $x_1=v$，$x_2=\dot{v}$，上式可化为

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-u(x_1^2-1)x_2-kx_1+Q$$

显然，这是一个非线性方程，其平衡状态x_e为

$$\boldsymbol{x}_e=\begin{bmatrix}x_{e1}\\x_{e2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{Q}{k}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\0\end{bmatrix}$$

式中$\alpha=\dfrac{Q}{k}$

②将状态方程线性化，有 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}^T}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e}=\begin{bmatrix}0&1\\-k&-u(\alpha^2-1)\end{bmatrix}$

且A的特征方程为 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^2+u(\alpha^2-1)\lambda+k=0$

根据Lyapunov第一方法，若原非线性系统平衡状态 x_e是渐近稳定的，则要求$u(\alpha^2-1)>0$ 和$k>0$ 。由于$u<0$ ，则欲使 $u(\alpha^2-1)>0$ ，必须有$-1<\alpha<1$ 即$-k<Q<k$ 。

目录
Contents

李亚普诺夫第二方法

- Lyapunov第二方法又称直接法。它不必通过对运动方程的求解而直接确定系统平衡状态的稳定性，它是建立在用能量观点分析稳定性的基础上。若系统的平衡状态是渐近稳定的，则系统受激励后其贮存的能量将随着时间推移而衰减，

当趋于平衡状态时，其能量达到最小值。反之，如果系统的平衡状态是不稳定的，则系统将不断地从外界吸收能量，其贮存的能量将越来越大。

Lyapunov第二方法就是用**$V(x)$**和$\dot{V}(x)$的正负来判别系统的稳定性。

对于一个给定系统，只要能找到一个正定的标量函数**$V(x)$**，而$\dot{V}(x)$是半负定的，那么系统就是稳定的，称 **$V(x)$** 为系统的一个Lyapunov函数。

本节介绍Lyapunov关于稳定、渐近稳定以及不稳定的几个定理。在介绍这些定理前先介绍一下有关标量函数$V(x)$的符号性质。

预备知识

(1) 标量函数$V(x)$的符号性质(Scalar function)

设$V(x)$为由n维矢量x所定义的标量函数，$x \in \Omega$ 且在 $x=0$ 处，恒有$V(x)=0$。对所有在域 Ω 中的任何非零矢量 x，

① $V(x) > 0$ ，则称$V(x)$是正定的。(positive definiteness)

② $V(x) \geq 0$ ，则称$V(x)$是半正定的。 (positive semidefiniteness)

③ $V(x) < 0$ ，则称$V(x)$是负定的。 (negative definiteness)

④ $V(x) \leq 0$ ，则称$V(x)$是半负定的。 (negative semidefiniteness)

⑤ $V(x) > 0$ 或$V(x) < 0$ ，则称$V(x)$是不定的。 (indefiniteness)

(2) 二次型标量函数(Quadratic forms)

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$P_{ij} = P_{ji}$$

(3) *P*的各阶主子行列式为(successive principal minors)

$$\Delta_1 = p_{11} \quad , \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \quad ,\ldots, \Delta_n = |\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

例：判断下列二次型是否为负定二次型。

$$Q=-x_1^2-3x_2^2-11x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3-2x_1x_3$$

解：给定的二次型 Q 可表示为

$$Q=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

应用西尔维斯特准则

$$-1<0,\quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{vmatrix}<0$$

该二次型为负定二次型。

Lyapunov函数

设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x)$$

x是系统的状态变量，若标量函数$V(x)$可微，则它对时间t的导数为

$$\dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}f(x)$$

定义：如果在一个球域内，函数$V(x)$正定且具有连续的偏导数，它沿着系统(4.1)的解对时间的导数是半负定的，即

$$\dot{V}(x) \le 0$$

则称$V(x)$是系统(4.1)的一个Lyapunov函数。

- **Lyapunov第二方法的几个定理**

定理 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x)$$

$x_e = 0$是系统唯一的平衡状态。如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数$V(x)$，并且满足下列条件：

① $V(x) > 0$； ② $\dot{V}(x) < 0$ ，

则平衡状态x_e渐近稳定。

③如果随着 $\|x\| \to \infty$ ，有 $V(x) \to \infty$ ，则平衡状态 x_e 大范围渐近稳定。(径向无界 radially unbounded)

- **例** 非线性系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

x_e=0是其唯一的平衡状态，试判别平衡状态x_e的稳定性。

解 取标量函数为 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

显然 **$V(x)$** 是正定的。**$V(x)$** 对时间的导数为 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$

将状态方程代入上式，得$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$，显然$\dot{V}(\boldsymbol{x})$是负定的，函数**$V(x)$**满足定理4-3的条件①和②，则系统的平衡状态是渐近稳定的，**$V(x)$** 是系统的一个Lyapunov函数。

由于当$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$，有$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，满足定理4-3的条件③，所以系统的平衡状态是大范围渐近稳定的。

- **例** 设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

试确定系统平衡状态的稳定性。

解 令 $\dot{x}_1 = 0$ ，$\dot{x}_2 = 0$ ，求得原点(0,0) 为给定系统的唯一平衡状态。若仍取标量函数为 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

则 $$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2$$

当 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ 时，$\dot{V}(x) = 0$ ，因此 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$不是负定的，而是半负定的，因此所选 $V(x)$不满足定理4-3的条件。

现另选取 $V(\boldsymbol{x}) = [(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2]/2$

显然 $V(x)$是正定的。可得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - x_2^2$ ，它是负定的，所以该 $V(x)$ 是系统的一个Lyapunov函数。系统在原点处的平衡状态是渐近稳定的。又因为$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ ，有$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$ ，故系统的平衡状态是大范围渐近稳定的。

定理应用需要注意两点：

1. **Lyapunov**稳定性定理只是判断系统平衡状态稳定性的充分条件，而不是充要条件。即如果所选取的正定函数的导数不是负定的，并不能断言该系统不稳定，因为很可能还没有找到合适的函数。

2. 寻找 Lyapunov函数的困难在于它的导数必须是负定的，而这个条件是相当苛刻的。能否把为负定的这个条件用半负定来代替呢?

- **定理** 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x)$$

x_e =0是系统唯一的平衡状态。若存在 **V(x)** 满足下列条件

① $V(x) > 0$;　　② $\dot{V}(x) \le 0$,

则称系统在原点处的平衡状态是稳定的。

③ 对于任意初始状态 $x_0 \neq 0$，除当 x=0 时，$\dot{V}(x) = 0$ 外

对 $x \neq 0$，$\dot{V}(x)$不恒等于零。则系统的平衡状态渐近稳定。

若当$\|x\| \to \infty$，有 $V(x) \to \infty$ ，则平衡状态大范围渐近稳定。

- **定理** 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x)$$

x_e =0是系统平衡状态。如果存在一个标量函数**V(x)**，它具有连续的一阶偏导数且满足下列条件：

① $V(x)$ 在原点的某一邻域内是正定的；

② $\dot{V}(x)$ 在同样的邻域内也是正定的。

那么系统的平衡状态是不稳定的。

■ **例** 设系统的状态方程为 $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$

试确定系统平衡状态的稳定性。

解 原点$x_e = 0$为给定系统的唯一平衡状态。若选取二次型标量函数为Lyapunov函数，即 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

则 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2$

当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时, $\dot{V}(x) = 0$ ；当 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ 时 $\dot{V}(x) = 0$ ，因此 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为半负定的，故系统的平衡状态是Lyapunov意义下稳定的。那么能否是渐近稳定的呢？为此，还需要进一步分析当 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ 时，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是否恒为零。

如果假设$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2x_2^2$ 恒等于零，必然要求 x_2在 $t > t_0$ 时恒等于零；而 x_2 恒等于零又要求$\dot{x}_2$ 恒等于零。但从状态方程 $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$ 可知，在 $t > t_0$ 时，若要求$\dot{x}_2 = 0$ 和$x_2 = 0$ ，必须满足$x_1 = 0$ 的条件。这就表明在 $x \neq 0$ 时，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 不恒等于零，所以系统的平衡状态渐近稳定。又因为 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ ，有$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$ ，故系统的平衡状态大范围渐近稳定。

- **例** 设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

试确定系统平衡状态的稳定性。

解 显然$x_1 = 0, x_2 = 0$，即原点为平衡状态。选取正定的标量函数 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$，则

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(x_1 + x_2) + 2x_2(-x_1 + x_2) \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2\end{aligned}$$

***V*(*x*)**为正定的，又$\dot{V}(x)$也为正定的，故定理4-5的条件均满足，因此系统的平衡状态是不稳定的。

- **几点说明**

　　应用Lyapunov第二方法分析系统稳定性的关键在于如何找到Lyapunov函数$V(x)$，然而Lyapunov稳定性理论本身并没有提供构造Lyapunov函数的一般方法。下面简略概括一下Lyapunov函数的属性。

① Lyapunov函数是一个标量函数。

② 对于给定系统，如果存在Lyapunov函数，它不是唯一的。

③ Lyapunov函数最简单的形式是二次型函数，即$V(x) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$。其中***P***为实对称正定阵。

　　对于一般情况而言，Lyapunov函数不一定都是简单的二次型函数。但对线性系统而言，其Lyapunov函数一定可以用二次型函数来构造。

谢谢