中国农业大学
China Agricultural University

自动控制理论——最优控制

胡标

目录

Contents

最优控制问题表述

什么是最优控制？一个完整的工程视角

最优控制是自动控制理论的高级分支，它研究如何在满足系统动态和各种约束条件下，寻找使某个性能指标最优的控制策略。让我们通过一个具体的工程问题来理解。

实例：卫星姿态调整的最优时间控制

假设一个卫星需要从初始姿态调整到目标姿态：

系统动态：简化的一维姿态动力学

$$J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = u(t)$$

其中 $J = 100\ kg \cdot m^2$ 是转动惯量，θ 是角度，u(t) 是控制扭矩。

约束条件：

$|u(t)| \leq 50\ N \cdot m$ （推力器最大扭矩）

$$\theta(0) = 0°,\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0\ rad/s$$

$$\theta(T) = 30°,\ \frac{d\theta}{dt}(T) = 0\ rad/s$$

性能指标：最小化调整时间

$$J = T = \int_0^T 1\, dt$$

这个问题就是在推力器能力有限的情况下，找到最快的姿态调整策略。

最优控制问题表述

最优控制问题的标准数学形式

一个连续时间最优控制问题通常包含以下要素:

1. 状态方程（系统动态）：

$dx/dt = f(x(t), u(t), t)$， $x(t_0) = x_0$

其中`$x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制向量。

2. 约束条件:

- 控制约束：$u(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$
- 状态约束：$x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$
- 终端约束：$\psi(x(t_f), t_f) = 0$

3. 性能指标（成本函数）：

Bolza形式:

$$J(u(\cdot)) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\ dt$$

其中:

- φ：终端成本（最终状态惩罚）
- L：运行成本（过程惩罚）

Mayer形式（特殊情形）：

$$J = \varphi(x(t\_f), t\_f)$$

Lagrange形式（特殊情形）：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\ dt$$

最优控制问题表述

考虑一辆汽车的速度控制问题：

$$\frac{dv}{dt} = a(t) - (1/m)(c_1 v(t) + c_2 v^2(t))$$

其中：

- $v(t)$：速度（m/s）
- $a(t) = u(t)/m$：加速度，u(t) 为控制力
- $m = 1500\ kg$：车质量
- $c_1 = 50\ N \cdot s/m$：线性阻力系数
- $c_2 = 0.3\ N \cdot s^2/m^2$：平方阻力系数

约束：

$$0 \le v(t) \le 120\ km/h = 33.33\ m/s$$

$$-0.3g \le a(t) \le 0.3g,\ g = 9.8\ m/s^2$$

性能指标：最小化从0加速到100km/h（27.78 m/s）的时间和能量

$$J = \alpha T + \beta \int_0^T u^2(t)\, dt$$

其中 $\alpha = 1$，$\beta = 0.01$。

目录
Contents

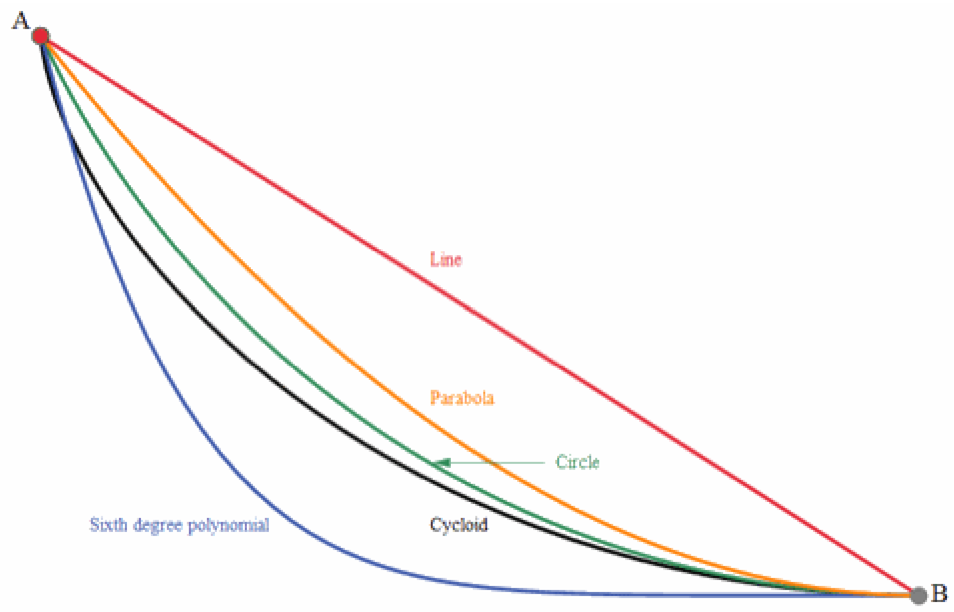
最速下降曲线

■ 背景：一个“显而易见”的错误直觉

- 在17世纪末，人们已经知道两点之间直线距离最短。但如果问题不是“最短路径”，而是“最短时间”呢?

■ 问题描述（最速降线问题）：

- 在垂直平面内，给定一个较高的点A和一个较低的点B。一个质点在重力作用下，从A点由静止开始，沿何种光滑曲线下滑到B点，所需时间最短?



直觉上，很多人（包括当时的许多科学家）会认为这条曲线是直线，因为路径最短。也有人猜想是圆弧，因为下滑似乎更“自然”。然而，答案出乎意料。

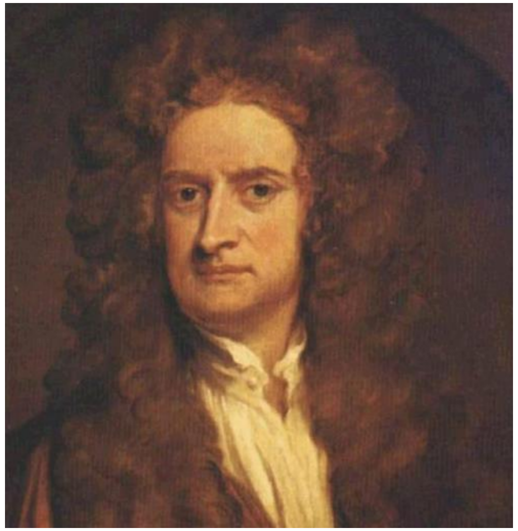
■ 约翰•伯努利的挑战（1696年）

1696年，瑞士数学家约翰·伯努利在《博学通报》上正式以公开信的形式提出了这个问题，并向全欧洲的数学家发起挑战。他写道：

> “我，约翰·伯努利，向世界上最杰出的数学家喊话。对于聪明人来说，没有什么比一个正确且具有挑战性的问题更有吸引力了……如果有人能给出并告知我们这条曲线，我们将公开称赞其才华。”

他给出了六个月的期限。当时没有收到令他满意的解答。于是他将期限延长至一年半。

■ 牛顿的“一夜解谜”



传说在1697年1月的一天下午，牛顿在皇家造币厂忙碌了一整天后回家，收到了来自法国的一位朋友寄来的期刊，上面刊登了伯努利的挑战。此时，牛顿已经55岁，正处于其科学事业的后期，且担任造币厂督办，公务繁忙，已多年未专注研究数学物理。

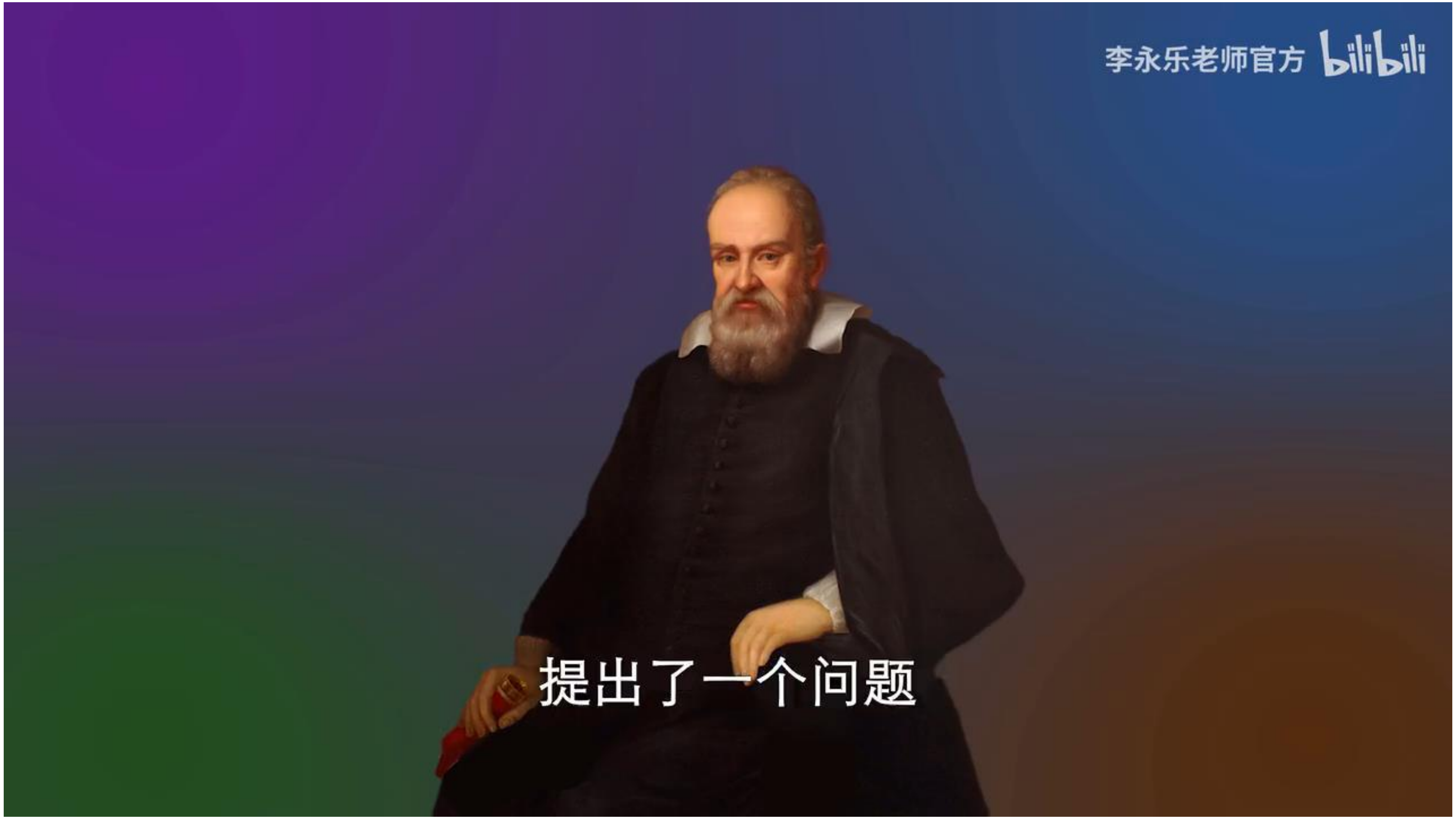
尽管如此，他被问题吸引。据其外甥女凯瑟琳·巴顿的记述，牛顿熬夜到凌晨4点，就解决了这个问题。第二天，他将匿名解答寄给了皇家学会。

他的解答非常简洁，只包含一条曲线和极少的推导，没有名字。但约翰·伯努利看到解答后，立刻说：

“我从爪印认出了狮子。”（“I recognize the lion by his claw.”）

这句名言流传至今，成为了对牛顿天才的至高赞誉。伯努利深知，只有牛顿能有如此深刻而直接的洞察力。

伯努利家族



从函数极值到泛函极值

函数极值:

对于函数 $f(x)$，极值出现在:

$$\frac{df}{dx} = 0$$

泛函极值:

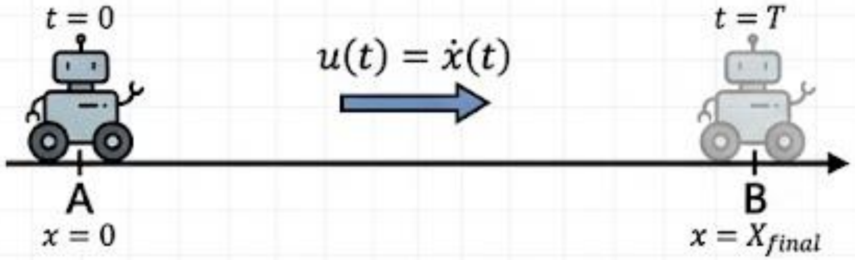
对于泛函 $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\ dx$，其中 $y' = \frac{dy}{dx}$

极值需要满足 **欧拉-拉格朗日方程**:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

最短路径与平滑运动

1. 场景设定



目标：最省力

$E \propto u(t)^2$

机器人从A到B，固定时间T。
状态 x(t)：位置，控制 u(t)：速度。
能量消耗与速度平方成正比。

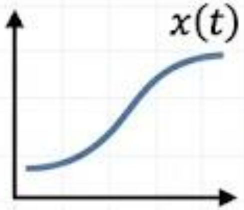
2. 数学建模

状态方程：$\dot{x}(t)=u(t)$

边界条件：$x(0)=0$，$x(T)=X_{final}$

性能指标：$J(x)=\int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}(t))^2dt$

(最小化瞬时能量/努力)



3. 变分法求解

Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

确定 L：$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2$

计算偏导数：$\frac{\partial L}{\partial x}=0$；$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dot{x}$

代入方程：$0-\frac{d}{dt}(\dot{x})=0$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

↓

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dot{x}$$

↓

$$J(x)=\int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}(t))^2dt$$

$$\ddot{x}(t)=0$$

4. 结果分析

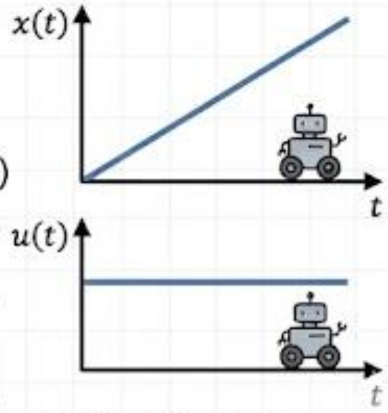
最优控制策略

积分两次：$\dot{x}(t)=C_1$　(速度常数)

$x(t)=C_1t+C_2$ (位置线性)

代入边界条件：$C_2=0$, $C_1=X_{final}/T$

最优控制： $u^*(t)=\frac{X_{final}}{T}$ **(常数)**



直观结论：匀速直线运动是唯一最省力的最优解。

激进的温度控制

最优空调控制问题：快速、经济、精准

1. 场景设定：困境

起始温度：36°C
x(0)=10

目标温度：
26°C
x(T)=0

T:持续时间

状态 $x(t)$：温差（当前 - 目标）
控制 $\dot{x}(t)$：降温速率（功率）

成本函数（痛苦 + 电费）：

$$J(x) = \int_0^T (x(t)^2 + \dot{x}(t)^2)dt$$

舒适度
痛苦 $\propto x^2$

电费成本
$\propto \dot{x}^2$

目标： 找到 $x(t)$ 以最小化总痛苦 + 成本。
与简单案例的区别： 同时惩罚 x^2 和 $\dot{x}^2$。倾向于快速初始降温。

2. 欧拉-拉格朗日求解

拉格朗日量

$$L(t, x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2$$

标准欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

逐步推导：

偏导数：

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$$

代入方程：

$$2x - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0$$

化简（除以2）：

$$x(t) - \ddot{x}(t) = 0$$

$$x(t) - x(t) \implies \ddot{x}(t) = x(t)$$

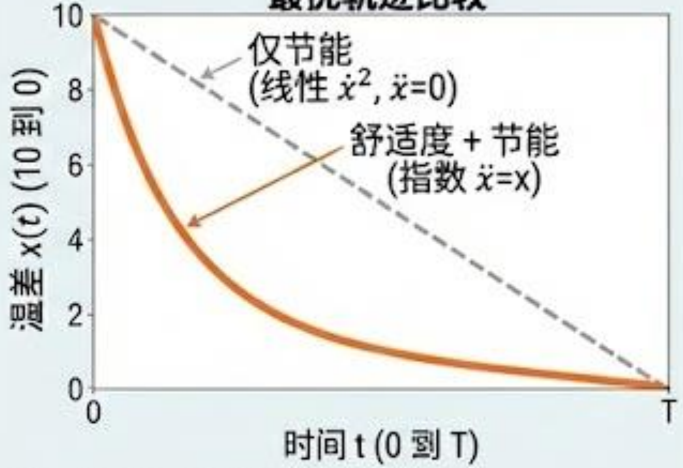
3. 结果分析与直观理解

微分方程： $\ddot{x} = x$
通解（双曲/指数）：

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

边界条件：
x(0)=10, x(T)=0 用于求解 C_1, C_2

最优轨迹比较



直观解释（关键）：
开始 (t=0)： 高 x^2 惩罚 (10^2=100!)。最优策略是快速降温（高 $\dot{x}$），即使成本高，也要迅速降低 x。
随后 (t>0)： 随着 x 减小，x^2 惩罚下降。优先考虑节能，降温速率 $\dot{x}$ 减慢。
结果： 呈现“先急后缓”的特征轨迹。

最速下降曲线

对于最速降线问题：

- 质点从 (0,0) 到 (x_f, y_f)
- 在重力作用下沿曲线 $y(x)$ 下滑
- 求使下滑时间最短的曲线 $y(x)$

下滑时间泛函：

➢ 根据能量守恒：$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$，所以 $v = \sqrt{2gy}$

➢ 弧长微元：$ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx$

➢ 下滑时间：$T[y] = \int_0^{x_f} \frac{ds}{v} = \int_0^{x_f} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx$

被积函数为：

$$F(y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}$$

由于 F 不显含 x，利用贝尔特拉米恒等式（首次积分）：

$$F - y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

最速下降曲线

计算：$\frac{\partial F}{\partial y'} = \left(\frac{1}{\sqrt{2gy}}\right) \cdot \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)$

代入首次积分：$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2gy}}\right) \cdot \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = C$

简化：$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C$

令 $\frac{1}{2gC^2} = k$，得：$y(1 + (y')^2) = k$

解这个微分方程，引入参数 θ：

$$y = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{k}{2}\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{y'}\frac{k}{2}\sin\theta$$

由 $y' = \cot(\theta/2)$，得：$\frac{dx}{d\theta} = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$

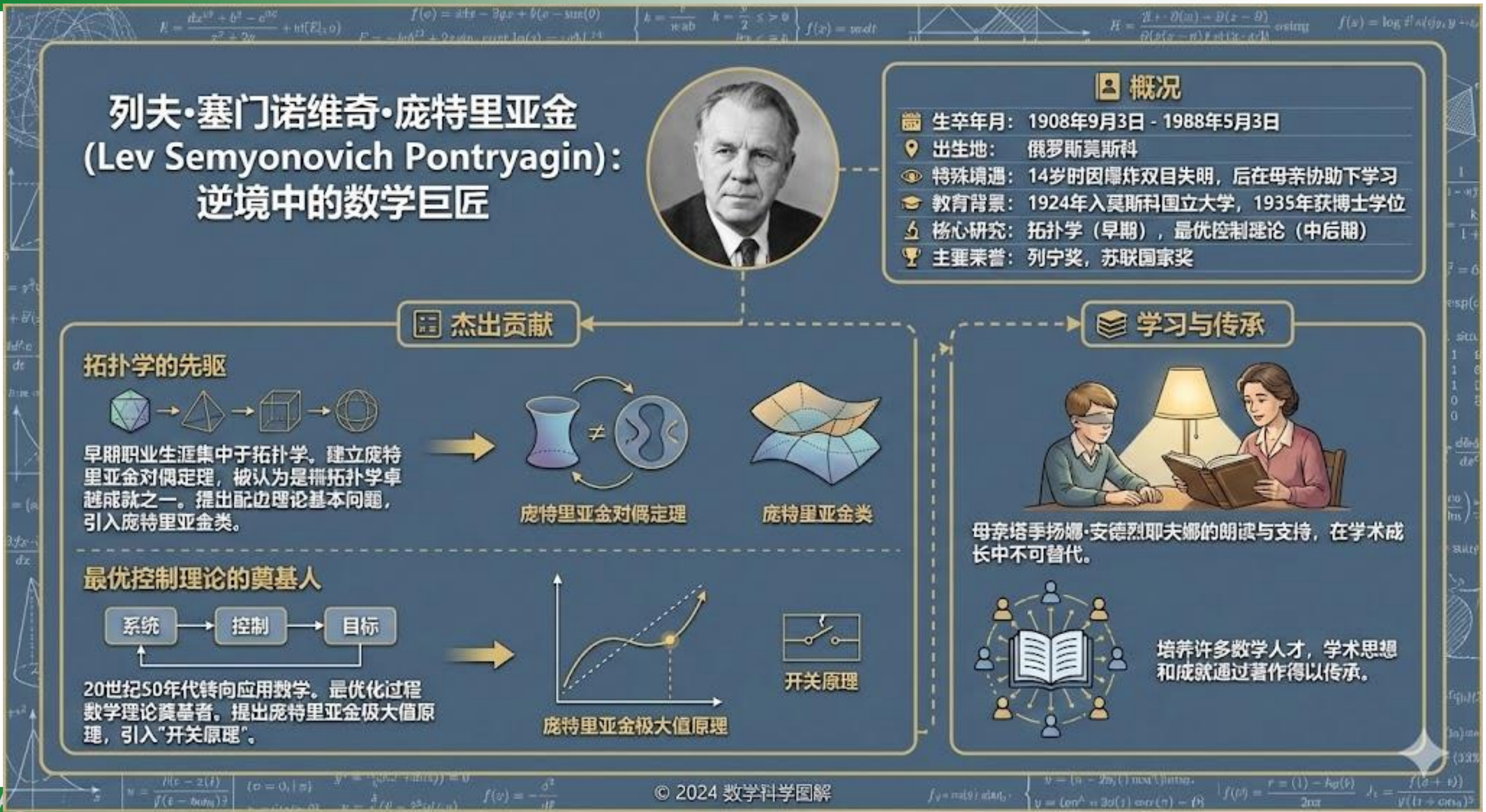
积分得：$x = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)$，$y = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$

目录

Contents

列夫·塞门诺维奇·庞特里亚金

中国农业大学
China Agricultural University



China A

极大值原理的严格表述

考虑一般最优控制问题：

$$\min_{u(\cdot)} J = \varphi\left(x(t_f)\right) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\ dt$$

约束：

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t),\ \ x(t_0) = x_0$$

$$u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$$

$$\psi\left(x(t_f)\right) = 0 \quad \text{(终端约束)}$$

庞特里亚金极大值原理：

定义哈密顿函数：

$$H(x,u,\lambda,\lambda_0,t) = \lambda_0 L(x,u,t) + \lambda^{\mathrm{T}} f(x,u,t)$$

其中 $\lambda_0 \geq 0$ 是常数，$\lambda(t)$ 是协态向量。

如果 $u^*(t)$ 是最优控制，$x^*(t)$ 是对应最优轨迹，则存在非零连续向量函数 $\lambda^*(t)$ 和常数 λ_0^* 使得：

1. **正则方程**：

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x^*(t),u^*(t),t)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_0^* \frac{\partial L}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda^*(t)$$

2. **极大值条件**：

对于几乎所有 $t \in [t_0, t_f]$：

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), \lambda_0^*, t) = \min_{u \in U} H(x^*(t), u, \lambda^*(t), \lambda_0^*, t)$$

（注：原始为最大值，加负号后为最小值）

3. **横截条件**：

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x^*(t_f)\right) + \nu^{\mathrm{T}} \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(x^*(t_f)\right)$$

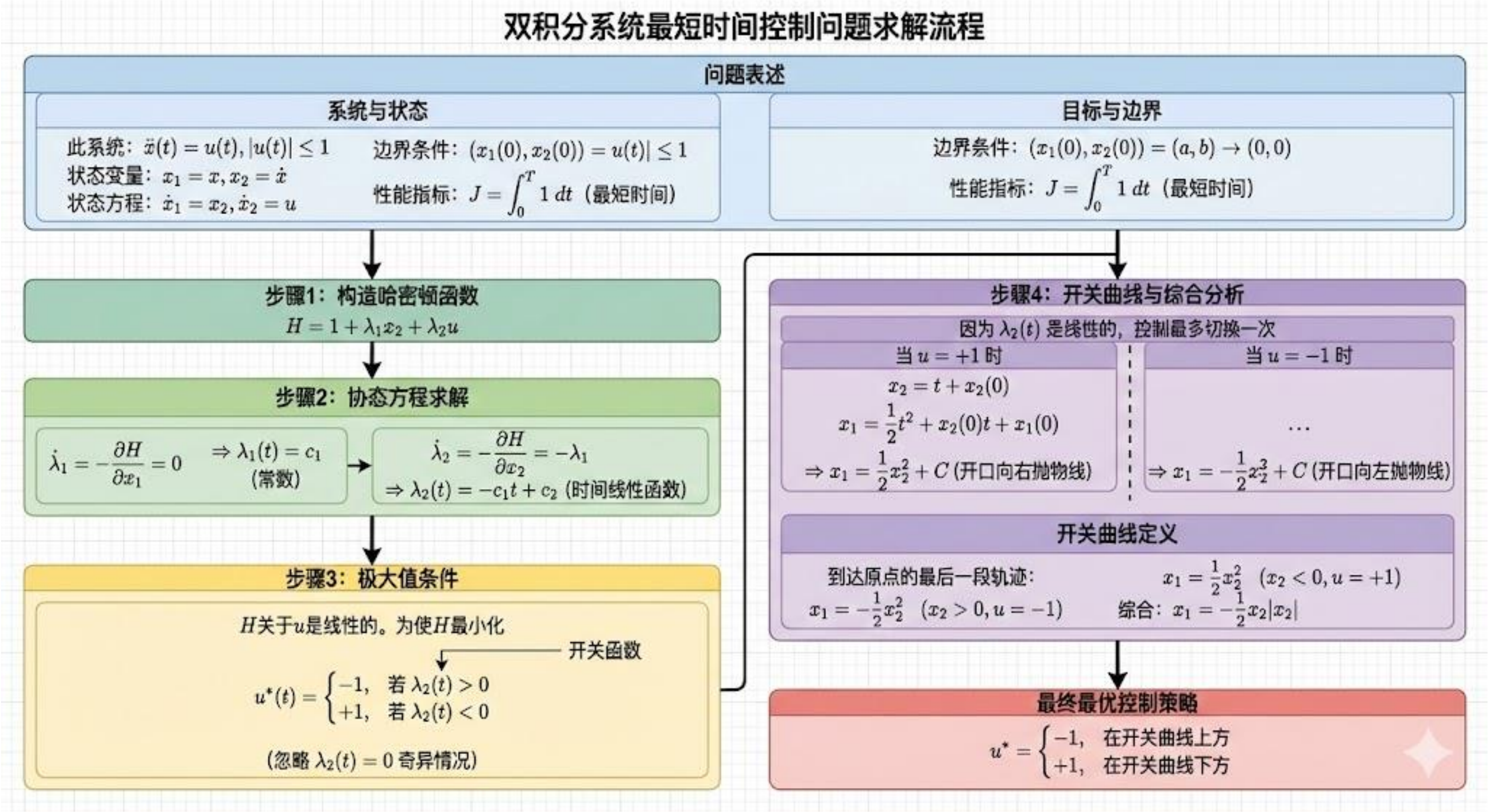
其中 ν 是拉格朗日乘子向量。

4. **哈密顿函数沿最优轨迹的性质**：

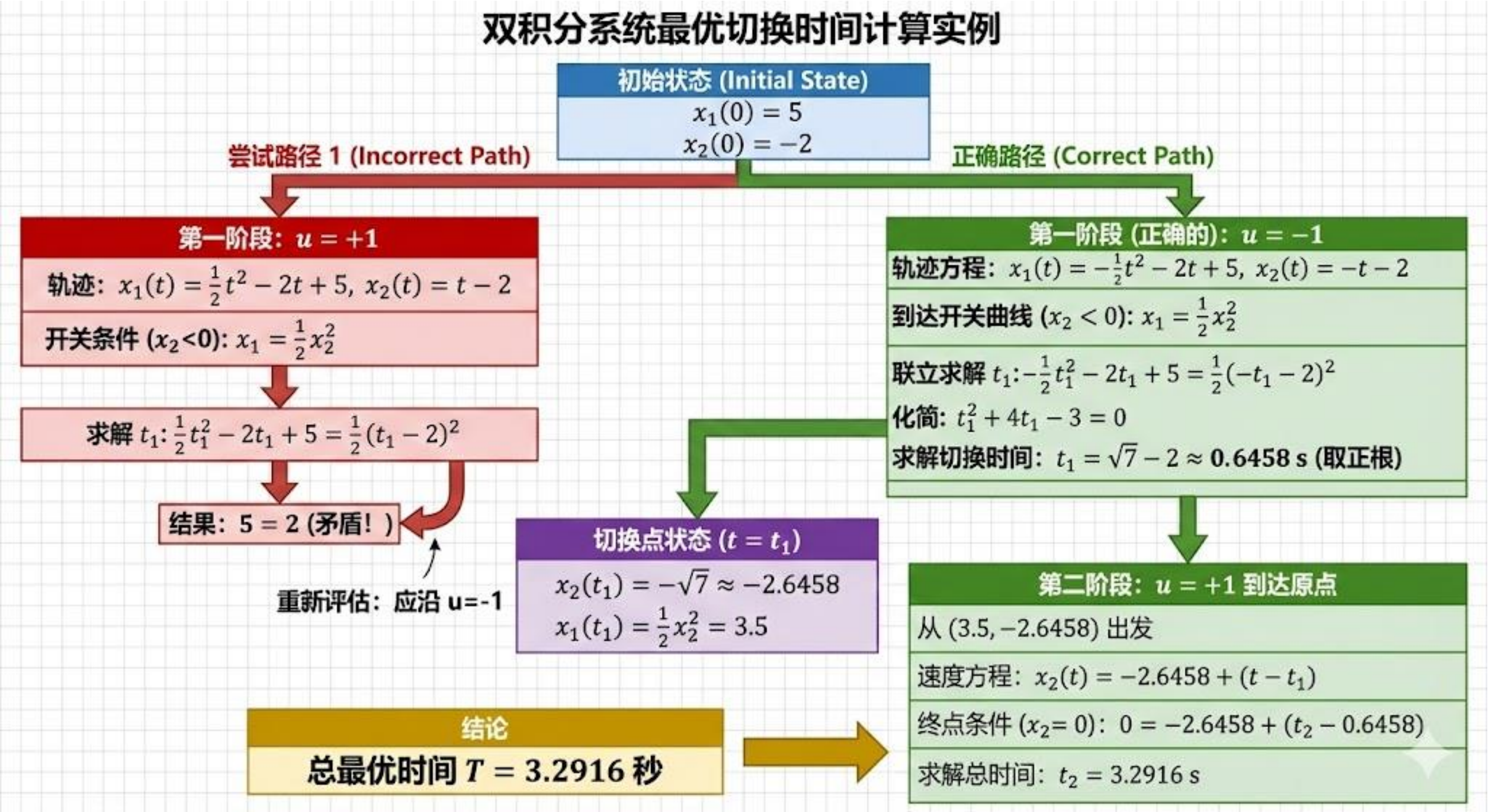
如果 f 和 L 不显含时间 t，则：

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), \lambda_0^*) = 常数$$

详细示例：Bang-Bang控制的完整分析



详细示例：Bang-Bang控制的完整分析



实例：经济生产的最优投资计划

中国農業大學
China Agricultural University

最优工厂生产控制问题与解的推导

1. 问题表述

系统动力学（状态方程）

$$\frac{d}{dt}P(t) = \alpha I(t) - \delta P(t)$$

- $P(t)$: 生产率
- $I(t)$: 投资率（控制变量） $[0 \le I(t) \le I_{\max}]$
- $\alpha = 0.2$（效率系数）
- $\delta = 0.1$（折旧率）

目标函数（最大化利润）

$$J = \int_0^T \left(rP(t) - cI^2(t)\right) dt$$

- $r = 10$（单位产出收益）
- $c = 1$（投资成本系数）

2. 方法论：庞特里亚金极大值原理

定义哈密顿函数 H

$$H = rP - cI^2 + \lambda(\alpha I - \delta P)$$

协态方程（共态动力学）

$$\frac{d}{dt}\lambda = -\frac{\partial H}{\partial P} = -r + \delta\lambda$$

控制方程（最优性条件 - 无约束）

$$\frac{\partial H}{\partial I} = -2cI + \alpha\lambda = 0 \Rightarrow I = \frac{\alpha}{2c}\lambda$$

边界条件

- $P(0) = P_0$（初始状态）
- $\lambda(T) = 0$（横截条件 - 自由终端状态）

3. 解析解推导

求解关于 $\lambda(t)$ 的常微分方程

$$\lambda(t) = \frac{r}{\delta} + \left(\lambda(0) - \frac{r}{\delta}\right)e^{\delta t}$$

代入控制律得到最优 $I(t)$

$$I(t) = \frac{\alpha}{2c}\left[\frac{r}{\delta} + \left(\lambda(0) - \frac{r}{\delta}\right)e^{\delta t}\right]$$

目录

Contents

贝尔曼最优性原理的数学表述

离散时间系统:

状态方程：$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k)$， $k = 0, 1, \dots, N-1$

成本函数：$J = \varphi(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(x_k, u_k, k)$

定义最优成本函数（值函数）：

$$V_k(x) = \min_{u_k,\dots,u_{N-1}} \left[\varphi(x_N) + \sum_{i=k}^{N-1} L(x_i, u_i, i)\right]$$

初始状态：$x_k = x$

贝尔曼最优性原理:

$$V_k(x) = \min_{u \in U}\left[L(x, u, k) + V_{k+1}\big(f(x, u, k)\big)\right]$$

边界条件：$V_N(x) = \varphi(x)$

贝尔曼最优性原理的数学表述

考虑连续系统：

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

成本函数：

$$J(x(t), t) = \varphi\left(x(t_f)\right) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau)\ d\tau$$

定义值函数：

$$V(x, t) = \min_{u(\tau), \tau \in [t, t_f]} J(x, t)$$

根据贝尔曼最优性原理，考虑时间间隔 $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\Delta t}]$：

$$V(x(t), t) = \min_{u(\tau)}\left[\int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau)\ d\tau + V(x(t + \Delta t), t + \Delta t)\right]$$

对于小 $\boldsymbol{\Delta t}$，假设控制 $\boldsymbol{u(\tau)}$ 在 $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\Delta t}]$ 上近似为常数 $\boldsymbol{u}$：

$$\int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau)\ d\tau \approx L(x(t), u, t)\,\Delta t$$

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + f(x(t), u, t)\,\Delta t$$

贝尔曼最优性原理的数学表述

对 $V(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ 进行泰勒展开：

$$V(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = V(x,t) + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x,u,t)\,\Delta t + o(\Delta t)$$

代入得：

$$V(x,t) = \min_u \left[L(x,u,t)\Delta t + V(x,t) + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x,u,t)\Delta t + o(\Delta t) \right]$$

两边消去 $V(x,t)$，除以 Δt，令 $\Delta t \to 0$：

$$-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{t}} = \min_{\boldsymbol{u}} \left[\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}) + \frac{\partial \boldsymbol{V}^T}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}) \right]$$

这就是 **HJB方程**，边界条件：$V(x,t_f) = \varphi(x)$

离散系统

1. 问题设定（Problem Setup）

系统方程：$x_{k+1} = x_k + u_k$

初始状态：$x_0 = 2$

总步数：$N = 2 \ (k = 0, 1, 2)$

性能指标：

$$J = \sum_{k=0}^{1}(x_k^2 + u_k^2) + x_2^2$$

状态偏差 x_k^2 控制能量 u_k^2 终端惩罚 x_2^2

2. 逆向归纳（Backward Induction）- 求解最优值函数 $V_k(x_k)$

步骤 2 (终端 k=2)

终端代价：$V_2(x_2) = x_2^2$

步骤 1 (k=1)

代价函数：$J_1 = x_1^2 + u_1^2 + V_2(x_1 + u_1) = x_1^2 + u_1^2 + (x_1 + u_1)^2$

求导极值：$\dfrac{\partial J_1}{\partial u_1} = 4u_1 + 2x_1 = 0 \ \Rightarrow \ u_1^* = -0.5x_1$

最优值函数：$V_1(x_1) = x_1^2 + (-0.5x_1)^2 + (0.5x_1)^2 = \mathbf{1.5\,x_1^2}$

步骤 0 (k=0)

代价函数：$J_0 = x_0^2 + u_0^2 + V_1(x_0 + u_0) = x_0^2 + u_0^2 + 1.5(x_0 + u_0)^2$

求导极值：$\dfrac{\partial J_0}{\partial u_0} = 2u_0 + 3(x_0 + u_0) = 0 \ \Rightarrow \ u_0^* = -0.6\,x_0$

3. 正向仿真（Forward Simulation）- 代入数值

k=0

当前状态：$x_0 = \mathbf{2}$

计算控制：$u_0^* = -0.6 \times 2 = \mathbf{-1.2}$

$x_1 = x_0 + u_0$

k=1

当前状态：$x_1 = 2 - 1.2 = \mathbf{0.8}$

计算控制：$u_1^* = -0.5 \times 0.8 = \mathbf{-0.4}$

$x_2 = x_1 + u_1$

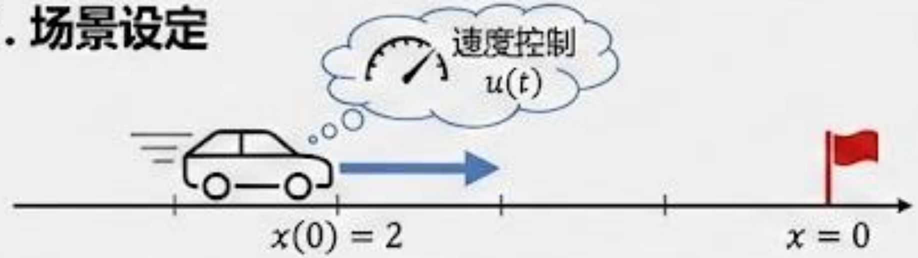
k=2 (结束 End)

最终状态：$x_2 = 0.8 - 0.4 = \mathbf{0.4}$

结果分析： 系统从 $x_0 = 2$ 移动到 $x_2 = 0.4$，动态规划实现了状态偏差与控制能量的最优平衡。

连续系统

1. 场景设定



系统方程:

$\dot{x}(t) = u(t)$

(速度由控制量决定)

性能指标 (Cost Function):

$J = \int_0^{\infty} (x(t)^2 + u(t)^2)\, dt$

(目标：尽快归零且省油，无限时间视界)

2. 核心逻辑：HJB 方程

HJB 方程通式: $0 = \min\limits_u \left[\underbrace{L(x,u)}_{\text{当前瞬间代价}} + \underbrace{\frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x,u)}_{\text{未来代价的变化率}} \right]$

直白翻译：瞬间消耗代价 + 剩余总代价减少速度 = 0 (Balance of instant cost and future cost reduction rate)

3. 求解过程

第一步：找到最优控制 u^*

代入具体问题

$0 = \min\limits_u [x^2 + u^2 + V'(x) \cdot u]$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \xrightarrow{\text{求导令为0}} 2u + V'(x) = 0$

最优控制律

$u^* = -\frac{1}{2} V'(x)$

第二步：解偏微分方程（PDE）

将 u^* 代回 HJB: $x^2 + \left(-\frac{1}{2}V'\right)^2 + V'\left(-\frac{1}{2}V'\right) = 0$

化简: $x^2 - \frac{1}{4}(V'(x))^2 = 0 \Rightarrow (V'(x))^2 = 4x^2$

猜解（Ansatz）：设 $V(x) = Px^2$

代入求解 P: $(2Px)^2 = 4x^2 \Rightarrow 4P^2 = 4 \Rightarrow P = 1 (P > 0)$

第三步：得出最终结论

✔ **最优值函数**

$V(x) = x^2$

(例如：x=2 时，总代价为 4)

✔ **最优控制律**

$u^*(t) = -\frac{1}{2}(2x) = -x(t)$

(结论：速度等于位置的相反数)

目录

Contents

中国农业大学 China Agricultural University

问题描述：

线性系统：$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

二次型性能指标：

$$J = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]\, dt$$

其中 $Q(t) \geq 0$，$R(t) > 0$，$S_f \geq 0$

最优控制：

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t) = -K(t)x(t)$$

其中 $K(t) = R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)$

LQR问题的详细推导

对于时不变系统 $\dot{x} = Ax + Bu$，当 $t_f \to \infty$ 且 Q, R 为常数矩阵时，

$P(t)$ 趋于常数矩阵 P，满足 **代数黎卡提方程（ARE）**：

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0$$

闭环系统：$\dot{x} = (A - BK)x$，其中 $K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$

稳定性条件:

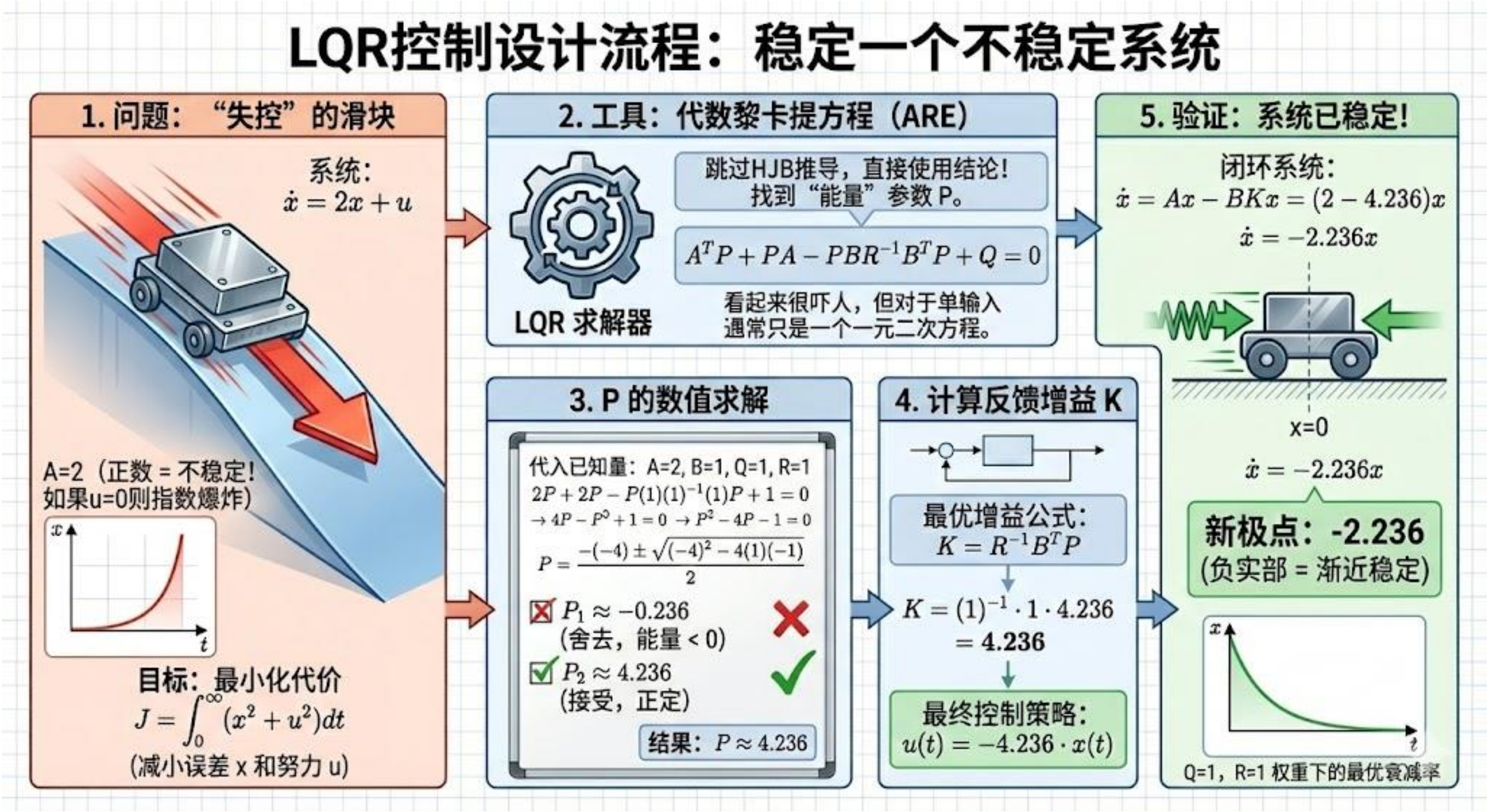
如果 (A, B) 可控，$(A, \sqrt{Q})$ 可观，则:

1. ARE有唯一正定解 P

2. 闭环系统 $A - BK$ 渐近稳定

3. 最优成本：$J^* = (1/2){x_0}^{\mathrm{T}}Px_0$

一个简单的例子


LQR控制设计流程：稳定一个不稳定系统
1. 问题：“失控”的滑块
系统：
$\dot{x} = 2x + u$
A=2（正数 = 不稳定！
如果u=0则指数爆炸）
x
t
目标：最小化代价
$J = \int_0^\infty (x^2 + u^2)dt$
(减小误差 x 和努力 u)
2. 工具：代数黎卡提方程（ARE）
跳过HJB推导，直接使用结论！
找到“能量”参数 P。
$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$
LQR 求解器
看起来很吓人，但对于单输入
通常只是一个一元二次方程。
3. P 的数值求解
代入已知量：A=2, B=1, Q=1, R=1
$2P + 2P - P(1)(1)^{-1}(1)P + 1 = 0$
$\rightarrow 4P - P^2 + 1 = 0 \rightarrow P^2 - 4P - 1 = 0$
$P = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-1)}}{2}$
$P_1 \approx -0.236$
(舍去，能量 < 0)
$P_2 \approx 4.236$
(接受，正定)
结果：$P \approx 4.236$
4. 计算反馈增益 K
最优增益公式：
$K = R^{-1}B^T P$
$K = (1)^{-1} \cdot 1 \cdot 4.236$
$= 4.236$
最终控制策略：
$u(t) = -4.236 \cdot x(t)$
5. 验证：系统已稳定！
闭环系统：
$\dot{x} = Ax - BKx = (2 - 4.236)x$
$\dot{x} = -2.236x$
x=0
$\dot{x} = -2.236x$
新极点：-2.236
(负实部 = 渐近稳定)
x
t
Q=1，R=1 权重下的最优衰减率

方法适应性对比

特性	变分法	极大值原理	动态规划	LQR
适用系统	无约束或简单约束	有约束（闭集）	任意（离散化）	线性 $Ax + Bu$
性能指标	连续可微	一般连续	任意	二次型 $x'Qx + u'Ru$
解的形式	开环（时间函数）$u(t)$	开环 $u(t)$	闭环（状态反馈）$u = -Kx$	闭环（状态反馈）$u = -Kx$
计算复杂性	解析或两点边值问题 $x \Rightarrow$	两点边值问题	维数灾难	求解黎卡提方程 $a(x) = \frac{Riccati}{a^2}$
全局最优性	局部最优	必要非充分 ✓ ?	全局最优 ★	全局最优 ★
实际应用	简单解析问题	航空航天轨迹优化	小规模路径规划、强化学习 RL	工业控制器设计

实际工程问题的方法选择

中國農業大學
China Agricultural University

谢谢