自动控制理论——最优控制

Python 综合应用与仿真考察

说明：本测试旨在考察将 PPT 中的最优控制理论（变分法、极大值原理、动态规划、LQR）转化为 Python 计算代码和解决复杂工程问题的能力。请结合理论知识及 Python 编程完成以下开放性题目。

题目 1：变分法与数值计算——带阻力的最速降线求解

题目背景：标准的“最速降线”问题假设无摩擦。现在考虑工程实际，假设质点在下滑过程中受到与速度成正比的空气阻力 $f = -kv$（$k > 0$）。

1. **理论推导：**请重新推导带阻力情况下的欧拉-拉格朗日方程。
   - 提示：此时系统机械能不守恒，你需要通过牛顿第二定律建立 v 与 y 的关系，或者引入广义功的概念来建立泛函。
2. **Python 求解：**
   - 设起点 $(0, 0)$，终点 $(10, -5)$，重力 $g = 9.8$，阻力系数 $k = 0.5$，质量 $m = 1$。
   - 由于解析解极其复杂，请将推导出的欧拉-拉格朗日方程转化为一组一阶微分方程组。
   - 利用 scipy.integrate.solve_bvp 数值求解该两点边值问题 (BVP)。
3. **对比分析：**在同一张图上绘制 $k = 0$（标准摆线）和 $k = 0.5$ 的轨迹，并计算两者的时间差。解释阻力如何改变了最优路径的几何形状（是变得更陡还是更平缓？为什么?）。

题目 2：极大值原理——登月着陆器的燃油最优控制

题目背景：考虑一个垂直下降的登月着陆器，其动力学方程为：

$$\dot{h} = v, \quad \dot{v} = -g + \frac{u}{m(t)}, \quad \dot{m} = -\frac{u}{I_{sp} g_0}$$

约束条件：$0 \le u(t) \le u_{max}$（推力约束），$m(t_f) \ge m_{dry}$（干重约束）。目标：从高度 H 悬停状态下降到 $h = 0, v = 0$，使得燃油消耗最小（即最大化剩余质量 $m(t_f)$）。

1. **理论分析：**写出该问题的哈密顿函数 H 和协态方程。根据极大值原理，分析最优控制 $u^*(t)$ 的结构（它是连续变化的还是开关式的？是否存在 Singular Arc?）。

2. **数值实现：**
   - 由于协态初值未知，这是一个困难的“打靶问题”。建议采用**直接法 (Direct Collocation)**。
   - 将时间 $t \in [0, t_f]$ 离散化为 $N = 50$ 个点。将每个时间步的控制量 u_k 和总时间 t_f 作为优化变量。
   - 使用 scipy.optimize.minimize (SLSQP 方法) 编写程序，寻找最优的推力序列。

3. **验证与可视化：**
   - 参数：$H = 1000m, v_0 = 0, m_0 = 1000kg, u_{max} = 3000N, I_{sp} = 300s$。
   - 绘制高度、速度、质量和**控制量**随时间变化的曲线，验证你的理论分析（控制量是否呈现 Bang-Bang 或 Bang-Off-Bang 特性）。

题目 3：动态规划——强风场下的无人船全局路径规划

题目背景：一艘无人船需要在 100×100 的海域中从 $(0, 0)$ 航行到 $(90, 90)$。

- **运动学：** $\dot{x} = v\cos(\theta) + W_x(x, y), \quad \dot{y} = v\sin(\theta) + W_y(x, y)$。
- **干扰：**海域中存在非均匀的强洋流（风场），$W_x = -2\sin(y/10), W_y = 2\cos(x/10)$。
- **控制：**船速恒定 $v = 5$，只能控制航向 $\theta \in [0, 2\pi)$。
- **目标：**最小化航行时间 T。

1. **算法设计：**这实际上是 Zermelo 导航问题的数值解。请使用**值迭代 (Value Iteration)** 算法。

2. **Python 实现：**
   - 将空间离散化为网格。在每个网格点，动作空间离散化为 8 或 16 个航向角。
   - 计算状态转移时，需考虑洋流导致的位移偏移。若偏移出网格中心，需使用插值法估算 Value。

3. **结果分析：**
   - 绘制 Value Function 的热力图，并利用梯度下降或贪心策略在流场图上画出最优航行轨迹。
   - 观察轨迹，无人船是“顺流而下”还是“顶流而上”？解释最优策略如何利用环境能量。

题目 4：LQR 与黎卡提微分方程——时变系统（导弹拦截）控制

题目背景：标准的 lqr() 函数仅适用于无限时间（$t_f \to \infty$）的时不变系统。但在导弹拦截末制导阶段，时间极短且系统参数剧烈变化（质量减小、气动系数变化）。考虑简化的时变线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)u$：

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m(t) \end{bmatrix}, \quad m(t) = 100 - 5t$$

1. **求解器编写：**不能使用 Matlab/Scipy 的现成 lqr 命令。请编写 Python 程序，**逆向求解**矩阵黎卡提微分方程 (Matrix Differential Riccati Equation)：

   $$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

   边界条件 $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}_f$。

2. **仿真验证：**

   - 设定 $t \in [0, 10]$，$\mathbf{Q} = \mathbf{I}, R = 0.1, \mathbf{S}_f = 1000\mathbf{I}$（终端惩罚很重，要求精确命中）。
   - 得到 $\mathbf{P}(t)$ 轨迹后，计算时变增益 $\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$。
   - 将 $\mathbf{K}(t)$ 代入系统进行正向仿真。

3. **结果分析：**观察增益 $\mathbf{K}(t)$ 在接近终点 t_f 时的变化趋势。为什么在接近拦截时刻，增益通常会急剧增加？

题目 5：综合应用——倒立摆的 LQR 镇定与吸引域估算

题目背景： LQR 是基于线性化模型设计的，因此只能保证在平衡点附近的局部稳定性。对于倒立摆这种非线性系统，当初始偏角过大时，LQR 控制器将失效。我们称能够收敛到平衡点的初始状态集合为**吸引域 (Region of Attraction, RoA)**。

1. **控制器设计：**针对倒立摆建立线性化模型，设计一个 LQR 控制器 $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$。

2. **非线性验证：**使用 Python 编写倒立摆的**完整非线性动力学**仿真函数（包含 $\sin(\theta), \cos(\theta)$ 项，不能近似为 θ）。

3. **探索吸引域：**

   - 编写一个脚本，在相平面 $(\theta, \dot{\theta})$ 上网格化选取初始状态（例如 $\theta \in [-\pi, \pi]$）。
   - 对每个初始点进行仿真，判断系统是否收敛到竖直平衡点（定义收敛标准：5 秒内状态模长小于某阈值）。
   - 绘制出 LQR 控制器的“吸引域”图像。

4. **开放性优化：**

- 引入输入饱和限制：$|u| \leq 10N$。重新绘制吸引域，你会发现它极大地缩小了。
- **思考与实现：** 请提出一种策略（如增益调度 LQR 或能量摆起控制 +LQR 切换），用 Python 实现并演示它能扩大吸引域。