SOAL TES
SELEKSI CALON PESERTA KOMPETISI SAINS NASIONAL 2020
TINGKAT KABUPATEN/KOTA

FISIKA

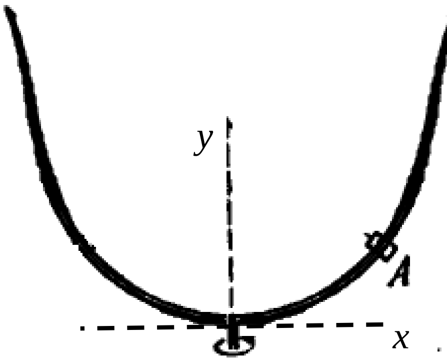
Waktu: 3 jam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PRESTASI NASIONAL
TAHUN 2020

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PRESTASI NASIONAL
SEKOLAH MENENGAH ATAS

Tes Seleksi KSN 2020 Bidang FISIKA
TINGKAT KABUPATEN/KOTA
Waktu: 3 Jam

1- (8 poin) Sebuah benda A dapat bergerak tanpa gesekan sepanjang kawat berbentuk parabola yang memenuhi persamaan $y = ax^2$ dengan x adalah jarak horizontal dari sumbu simetri kawat, dan y adalah tinggi benda dari titik terendah kawat. Jika kawat ini diputar dengan kecepatan sudut ω dengan sumbu y sebagai porosnya, tentukan nilai ω (dalam g dan a) supaya terdapat posisi kesetimbangan stabil!



Jawab:

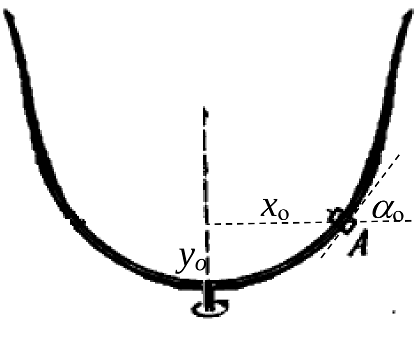
Tinjau titik A(x_o, y_o) adalah titik setimbang

Maka, $y = ax^2$

$$\tan\alpha_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 2ax_0 \qquad (1)$$

$$\sin\alpha_0 = \frac{2ax_0}{\sqrt{1+4a^2x_0^2}} \qquad (2)$$

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x_0^2}} \qquad (3)$$



Misalkan benda A diberi gangguan sedikit dari titik setimbangnya,

$$x(t) = x_0 + \delta x(t) \qquad \text{dan} \qquad y(t) = y_0 + \delta y(t) \qquad (4)$$

dengan $(\delta x(t), \delta y(t))$ adalah simpangan kecil di sekitar titik setimbangnya.

Maka,

$$\tan(\alpha_0 + \delta\alpha) = 2a(x_0 + \delta x)$$

$$\frac{\tan\alpha_0 + \delta\alpha}{1 - \delta\alpha.\tan\alpha_0} = 2ax_0 + 2a\delta x$$

$$\delta\alpha = \frac{2a}{1+4a^2x_0^2}\delta x \tag{5}$$

Percepatan tangensial: $a_T = a_x \cos\alpha + a_y \sin\alpha$ (6)

Karena kita meninjau osilasi kecil, maka

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\delta y}{dt^2} = 2a\delta\dot{x}^2 + 2a\delta x.\delta\ddot{x} = 0 \tag{7}$$

$$a_T = a_x \cos(\alpha_0 + \delta\alpha)$$

Sehingga

$$= \delta\ddot{x}.\cos\alpha_0 = \frac{\delta\ddot{x}}{\sqrt{1+4a^2x_0^2}} \tag{8}$$

Gaya pada arah tangensial:

$$m\omega^2(x_0 + \delta x)\cos(\alpha_0 + \delta\alpha) - mg\sin(\alpha_0 + \delta\alpha) = ma_T \tag{9}$$

$$\delta x\left[\omega^2 - 2ag\right] = \left[1 + 4a^2x_0^2\right]^{3/2} a_T \tag{10}$$

Substitusi (8) ke (10) diperoleh:

$$\delta x\left[\omega^2 - 2ag\right] = \left[1 + 4a^2x_0^2\right]\delta\ddot{x}$$

Jadi, agar stabil (osilasi di sekitar titik (x_o, y_o)), maka $\omega^2 < 2ag$

Cara lain dengan menggunakan Lagrangian:

Energi potential benda *A* adalah

$$V = mgy = mgax^2$$

Energi kinetik benda *A* adalah

$$T = \frac{1}{2}mx^2\omega^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2)$$

dengan

$$L = T - V = \frac{1}{2}mx^2\omega^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2) - mgax^2$$

Persamaan geraknya adalah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\dot{x} + 4a^2x^2\dot{x}) = x\omega^2 + 4a^2x\dot{x}^2 - 2gax$$

$$\ddot{x} + 8a^2x\dot{x}^2 + 4a^2x^2\ddot{x} = x\omega^2 + 4a^2x\dot{x}^2 - 2gax$$

$$(1 + 4a^2x^2)\ddot{x} = (\omega^2 - 8a^2\dot{x}^2 - 2ga)x$$

Setimbang: $\ddot{x} = \dot{x} = 0$,

$$(1 + 4a^2x^2)\ddot{x} = (\omega^2 - 2ga)x$$

Stabil bila $\omega^2 < 2ga$

2- (10 poin) Selama empat hari berturut-turut, seorang anak mulai berangkat dari rumah dengan berjalan kaki menuju sekolah selalu pada waktu keberangkatan yang sama. Bel masuk sekolah juga memang diset untuk berbunyi pada waktu yang selalu sama.

- Pada hari pertama, anak tersebut mulai berjalan dengan kecepatan awal 50 meter per menit dan dipercepat dengan percepatan 2 meter per menit^2. Ternyata dia tiba di sekolah 5 menit setelah bel berbunyi.
- Pada hari kedua, anak tersebut mulai berjalan dengan kecepatan awal 150 meter per menit dan diperlambat dengan perlambatan 2 meter per menit^2. Ternyata dia tiba di sekolah 5 menit sebelum bel berbunyi.
- Pada hari ketiga, ia memutuskan untuk berjalan dengan kecepatan konstan (yang nilainya lebih besar dari 100 meter per menit) hingga tiba di sekolah. Ternyata dia tiba di sekolah tepat saat bel berbunyi.

Jika pada hari keempat ia berjalan dengan kecepatan konstan 100 meter per menit, berapa menit ia tiba di sekolah setelah bel berbunyi.

Jawab:

Karena anak tersebut berangkat pada waktu yang sama, dan bel sekolah juga berbunyi pada waktu yang sama, maka dimisalkan selang waktu antara waktu berangkat dengan waktu bel berbunyi adalah t (dalam menit). Misalnya jarak antara rumah dan sekolah adalah x.

Pada hari pertama, anak tersebut terlambat 5 menit, maka waktu yang ia butuhkan dari rumah ke sekolah adalah $t + 5$. Untuk gerak lurus berubah beraturan

$$\begin{aligned} x &= v_1(t+5) + \tfrac{1}{2}a_1(t+5)^2 = 50(t+5) + \tfrac{1}{2}(2)(t+5)^2 \\ &= t^2 + 60t + 275 \end{aligned} \qquad (1)$$

Pada hari kedua, anak tersebut tiba 5 menit lebih awal, maka waktu yang ia butuhkan adalah $t - 5$. Maka

$$\begin{aligned} x &= v_2(t-5) + \tfrac{1}{2}a_2(t-5)^2 = 150(t-5) + \tfrac{1}{2}(-2)(t-5)^2 \\ &= -t^2 + 160t - 775 \end{aligned} \qquad (2)$$

Dengan menyamakan persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$t^2 + 60t + 275 = -t^2 + 160t - 775$$

$$2t^2 - 100t + 1050 = 0$$

$$t^2 - 50t + 525 = (t-15)(t-35) = 0$$

$$t = 15 \text{ dan } t = 35 \qquad (3)$$

Untuk t = 15 menit, dengan memasukkan ke dalam persamaan (1) jarak yang ditempuh adalah

$$x = (15)^2 + 60(15) + 275 = 1400 \text{ meter} \qquad (4)$$

Jadi untuk hari ketiga ketika dia bergerak dengan kecepatan konstan, maka kecepatannya adalah

$$v = \frac{x}{t} = \frac{1400}{15} = 93{,}3 \text{ meter per menit} \qquad (5)$$

e5455e5f

yang ternyata nilainya lebih kecil dari 100 meter per menit. Padahal dalam soal untuk hari ketiga diketahui kecepatan anak tersebut lebih besar dari 100 meter per menit. Sehingga waktu t = 15 menit adalah tidak benar, dan jarak rumah ke sekolah tidak sama dengan 1400 meter.

Solusi kedua untuk t adalah t = 35 menit. Dengan memasukkan ke dalam persamaan (1) jarak yang ditempuh adalah

$$x = (35)^2 + 60(35) + 275 = 3600 \text{ meter} \tag{6}$$

Jadi untuk hari ketiga, nilai kecepatan konstannya adalah

$$v = \frac{x}{t} = \frac{3600}{35} = 102,9 \text{ meter per menit} \tag{7}$$

yang nilainya lebih besar dari 100 meter per menit.

Jadi jarak rumah ke sekolah x = 3600 meter

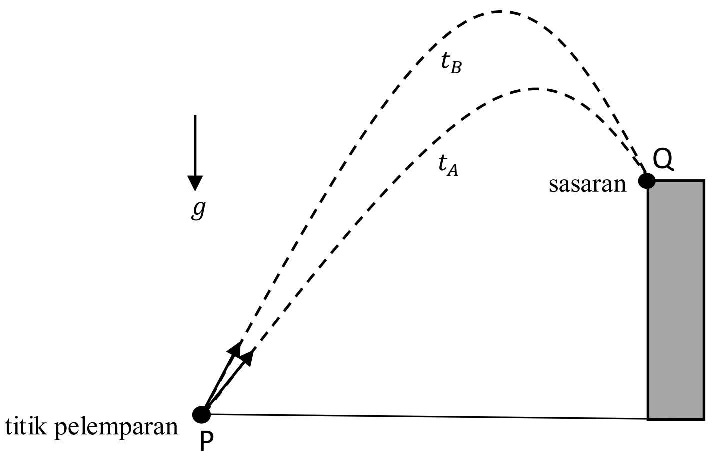
dan selisih waktu antara keberangkatan dengan bel berbunyi t = 35 menit.

Pada hari keempat, jika ia berjalan dengan kecepatan konstan 100 meter per menit,

maka ia membutuhkan waktu t = 3600/100 = 36 menit untuk sampai ke sekolah.

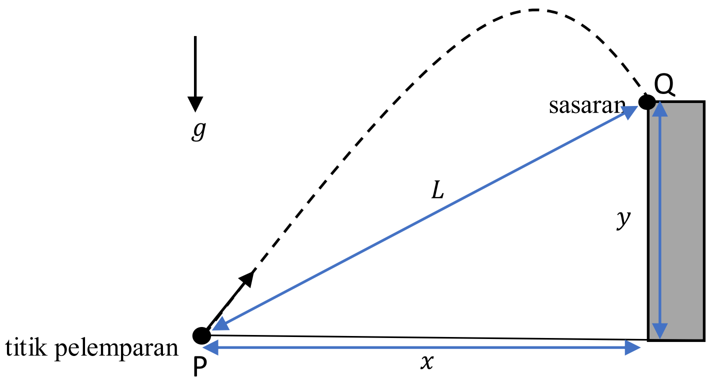
Berarti ia tiba (36 – 35) = 1 menit setelah bel sekolah berbunyi.

3- (10 poin) Dua orang anak ingin melempar bola agar mengenai suatu sasaran di ujung tebing. Mereka berdiri pada titik pelemparan yang berada pada jarak tertentu dari sasaran. Mereka melempar bola dengan kelajuan awal yang sama pada waktu bersamaan, namun dengan sudut elevasi yang berbeda sehingga waktu yang ditempuh bola orang pertama dan kedua untuk mengenai sasaran masing-masing adalah t_A dan t_B. Diketahui percepatan grativasi di tempat itu adalah g. Tentukanlah jarak PQ dari titik pelemparan ke sasaran (dinyatakan dalam t_A dan t_B)!



Jawab:

Tinjau keadaan umum untuk satu bola yang dilempar dengan sudut elevasi α, kecepatan awal v_0, waktu tempuh sampai sasaran t, dan anggap jarak horizontal dan vertikal ke ujung tebing masing-masing adalah x dan y sehingga jarak dari titik pelemparan ke sasaran adalah $L = \sqrt{x^2 + y^2}$. Persamaan gerak bola arah horizontal dan vertikal adalah:



$$x = v \cos \alpha \, t \qquad (1)$$

$$y = v \sin \alpha \, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Subsitusi α dengan cara menjumlahkan kuadrat dari $\cos \alpha$ dan $\sin \alpha$ dari kedua persamaan di atas:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \qquad (3)$$

$$\left(\frac{x}{vt}\right)^2 + \left(\frac{y}{vt} + \frac{gt}{2v}\right)^2 = 1 \qquad (4)$$

$$\frac{x^2}{v^2 t^2} + \frac{y^2}{v^2 t^2} + \frac{yg}{v^2} + \frac{g^2 t^2}{4v^2} = 1 \qquad (5)$$

Subsitusi $x^2 + y^2 = L^2$ ke pers. (5)

$$L^2 + ygt^2 + \tfrac{1}{4} g^2 t^4 = v^2 t^2 \qquad (6)$$

Maka bentuk khusus untuk kasus pelemparan bola pertama dan kedua menjadi:

$$L^2 + ygt_A^2 + \tfrac{1}{4} g^2 t_A^4 = v^2 t_A^2 \qquad (7)$$

$$L^2 + ygt_B^2 + \frac{1}{4}g^2t_B^4 = v^2t_B^2 \qquad (8)$$

Eleminasi y dan v dengan mengalikan kedua persamaan di atas masing-masing dengan t_B^2 dan t_A^2

$$L^2t_B^2 + ygt_A^2t_B^2 + \frac{1}{4}g^2t_A^4t_B^2 = v^2t_A^2t_B^2 \qquad (9)$$
$$L^2t_A^2 + ygt_B^2t_A^2 + \frac{1}{4}g^2t_B^4t_A^2 = v^2t_B^2t_A^2 \qquad (10)$$

Lalu kurangkan kedua persamaan (9) dan (10) sehingga menjadi:

$$L^2(t_B^2 - t_A^2) + \frac{1}{4}g^2t_A^2t_B^2(t_A^2 - t_B^2) = 0 \qquad (11)$$

Maka:

$$\boldsymbol{L = \frac{1}{2}gt_At_B} \qquad (12)$$

Alternatif solusi untuk persamaan (7):

$$\frac{1}{4}g^2t^4 + \left(gy - v^2\right)t^2 + L^2 = 0$$

Jika $t^2 = T$, maka diperoleh persamaan kuadrat dalam T:

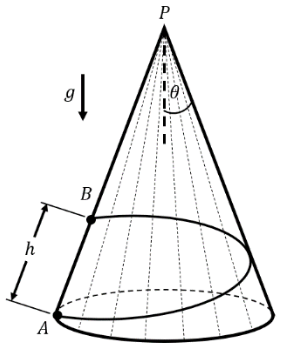
$$\frac{1}{4}g^2T^2 + \left(gy - v^2\right)T + L^2 = 0$$

Maka, $$T_1T_2 = t_1^2t_2^2 = \frac{L^2}{\frac{1}{4}g^2} = \frac{4L^2}{g^2}$$

$$t_1t_2 = t_At_B = \frac{2L}{g}$$

Jadi, $$L = \frac{1}{2}gt_At_B$$

4- (12 poin) Sebuah gunung dimodelkan sebagai kerucut dengan tinggi H dan sudut setengah bukaan θ , dimana $\sin\theta = \frac{1}{4}$. Sebuah lintasan yang mengitari gunung dibuat untuk menghubungkan titik A pada dasar gunung dan titik B pada permukaan gunung, dimana puncak gunung (titik P), titik A, dan titik B terletak pada satu garis lurus. Panjang segmen garis lurus $\overline{AB}$ adalah $h = \frac{H}{\sqrt{15}}$. Lintasan dibuat menggunakan kawat dengan panjang minimum yang mengitari gunung. Sebuah partikel yang dapat bergerak bebas tanpa gesekan sepanjang lintasan kawat ditembakkan dari titik A dan bergerak menuju titik B. Nyatakan semua jawaban dalam H dan percepatan gravitasi g.

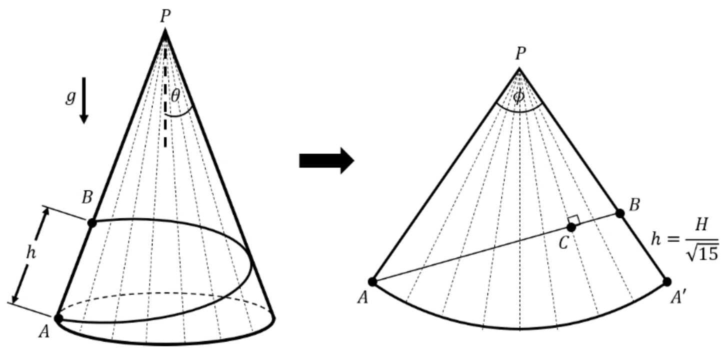


a. Tentukan kelajuan awal minimum partikel di titik A, yakni v, agar dapat mencapai titik B.

b. Jika partikel ditembakkan dari titik A dengan kelajuan v tersebut, hitung kelajuan partikel di titik B yakni v'.

Jawab:

a. Untuk membayangkan lintasan yang ditempuh partikel, kita tinjau jaring-jaring selimut kerucut.



Perhatikan bahwa jaring-jaring selimut kerucut merupakan juring lingkaran dgn sudut bukaan ϕ. Dengan menyamakan keliling alas kerucut dan panjang busur juring dan menggunakan

$$\overline{AP} = H\sec\theta \quad \text{dimana} \quad \sin\theta = \frac{1}{4}, \quad \text{diperoleh:}$$

$$2\pi H \tan\theta = \phi\overline{AP}$$

$$\phi = 2\pi\sin\theta$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

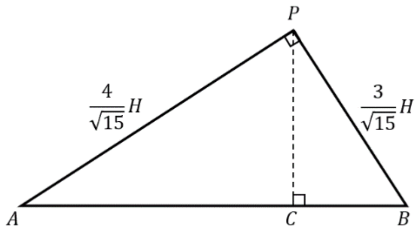
Lintasan dengan panjang minimum yang mengitari selimut kerucut akan membentuk garis lurus pada jaring-jaring selimut sehingga terbentuk segitiga APB.

Dari perhitungan diatas, ΔAPB merupakan segitiga siku-siku, dengan sudut siku-siku di P.

Perlu disadari bahwa lintasan ACB terdiri atas bagian menanjak dan menurun, dimana terdapat titik pada lintasan partikel yang sesaat mendatar (titik puncak), sebut titik C.

Agar sampai di titik B, partikel perlu ditembakkan dengan kelajuan awal tertentu sehingga setidaknya mencapai titik C tersebut. Maka kondisi kelajuan awal minimum diperoleh ketika

kelajuan di titik C nol (karena ia titik puncak). Untuk itu, bila diketahui ketinggian titik C, misal z_{max}, maka dari kekekalan energi kita dapatkan $v = \sqrt{2gz_{max}}$.
Perhatikan bahwa pada titik C dimana lintasan mendatar (sejajar permukaan tanah), garis yang melewati titik P dan C akan tegak lurus lintasan. Berdasarkan pengamatan tersebut serta menggunakan $cos\,\theta = \sqrt{1 - sin^2\,\theta} = \frac{1}{4}\sqrt{15}$, dapat dikonstruksi segitiga APB sebagai berikut.



Menggunakan Teorema Pythagoras, dapat diperoleh $\overline{AB} = \frac{5H}{\sqrt{15}}$. Luas segitiga tersebut dapat dinyatakan sebagai $\frac{1}{2}(\overline{AB})(\overline{CP})$ maupun $\frac{1}{2}(\overline{AP})(\overline{BP})$. Maka agar kedua ekspresi luas konsisten, harus berlaku:

$$(\overline{AB})(\overline{CP}) = (\overline{AP})(\overline{BP})$$
$$\frac{5H}{\sqrt{15}}\overline{CP} = \frac{12}{15}H^2$$
$$\overline{CP} = \frac{12H}{5\sqrt{15}}$$

Sehingga ketinggian maksimum partikel, yakni ketinggian titik C adalah,

$$z_{max} = H - \overline{CP}\,cos\,\theta = H - \left(\frac{12H}{5\sqrt{15}}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = H - \frac{3}{5}H = \frac{2}{5}H$$

Sehingga diperoleh kelajuan minimum yang harus diberikan di titik A adalah $v = \sqrt{\frac{4}{5}gH}$.

b. Menggunakan kekekalan energi pada titik A dan B,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh\cos\theta + \frac{1}{2}mv'^2$$
$$v^2 = 2g\left(\frac{H}{\sqrt{15}}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + v'^2$$
$$v'^2 = \frac{4}{5}gH - \frac{1}{2}gH$$
$$v' = \sqrt{\frac{3}{10}gH}$$

5- (15 poin) Dua benda bermassa m_1 dan m_2 ($m_1 > m_2$) berada segaris dan di atas bidang datar kasar dengan koefisien gesek statis dan kinetik bernilai sama yaitu μ. Awalnya benda 1 berada di sebelah kiri benda 2, yang diam, sejauh L dan diberi kecepatan sebesar v_1 ke kanan.

a. Tentukan syarat yang diperlukan agar benda pertama menumbuk benda kedua. Apabila syarat tersebut terpenuhi maka benda 1 akan menumbuk benda 2. Anggap tumbukan terjadi secara singkat sehingga bersifat lenting sempurna.
b. Tentukan dimanakah posisi akhir benda 1 dengan menganggap posisi tumbukan adalah pusat koordinat!
c. Tentukan dimanakah posisi akhir benda 2 dengan menganggap posisi tumbukan adalah pusat koordinat!
d. Berapakah jarak keduanya saat keduanya diam?
Asumsikan volume kedua benda jauh lebih kecil dari jarak yang mereka tempuh.

Jawab:

Pada benda m_1 bekerja gaya gesek sebesar $f = N_1\mu = m_1 g\mu$ sehingga dengan menggunakan hukum kedua Newton didapat percepatan m_1 adalah $a = -g\mu$.

a. Syarat agar benda pertama bisa menumbuk benda dua adalah lajunya setelah bergerak sejauh L masih lebih dari nol

$$v_1{}^2 + 2aL = v_1{}^2 - 2g\mu L > 0$$
$$v_1 > \sqrt{2g\mu L}$$

b. Anggap $v_1{}'$ sebagai kecepatan m_1 setelah bergerak sejauh L. Hukum kekekalan momentumnya dapat dituliskan sebagai

$$m_1 v_1' = m_1 v_1'' + m_2 v_2''$$

Dan kekekalan energi

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1''^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2''^2$$

Dari kedua persamaan di atas didapatkan kecepatan massa pertama setelah tumbukan

$$v_1'' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{v_1{}^2 - 2g\mu L}$$

Karena percepatan yang dialami adalah $a = -g\mu$, maka saat berhenti berlaku

$$v_1''^2 - 2g\mu x_1 = 0$$
$$x_1 = \frac{v_1''^2}{2g\mu} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \left(\frac{v_1{}^2}{2g\mu} - L\right)$$

Karena $m_1 > m_2$ maka x_1 berada di sebelah kanan pusat koordinat.

c. Dari persamaan kekekalan momentum dan kekekalan energi pada bagian b. didapat kecepatan massa kedua setelah tumbukan adalah

$$v_2'' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{v_1{}^2 - 2g\mu L}$$

Karena percepatan yang dialami adalah $a = -g\mu$ juga, maka saat berhenti berlaku:

$$v_2''^2 - 2g\mu x_2 = 0$$
$$x_2 = \frac{v_2''^2}{2g\mu} = \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \left(\frac{{v_1}^2}{2g\mu} - L\right)$$

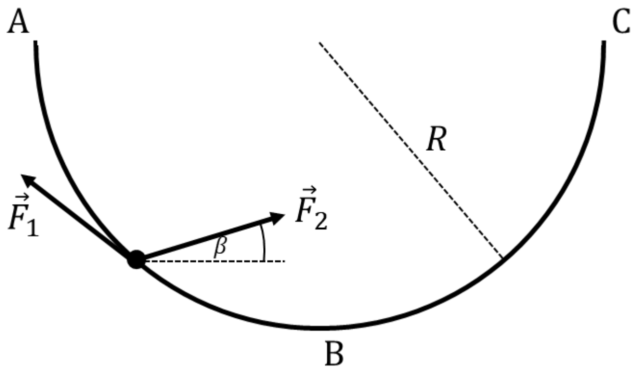
d. Jarak kedua massa adalah

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \left[\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2 - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2\right]\left(\frac{{v_1}^2}{2g\mu} - L\right)$$

$$\Delta x = \frac{3\eta^2 + 2\eta - 1}{\eta^2 + 2\eta + 1}\left(\frac{{v_1}^2}{2g\mu} - L\right)$$

dengan $\eta = \frac{m_1}{m_2}$

6- (15 poin) Sebuah partikel bermassa m meluncur di atas sebuah lengkungan logam licin ABC (titik B adalah titik terendah lintasan) yang berbentuk setengah lingkaran dengan jari-jari R (lihat gambar). Selama partikel meluncur pada lengkungan, dua buah gaya $\vec{F}_1$ dan $\vec{F}_2$ bekerja pada partikel. Diketahui besar kedua gaya konstan, arah $\vec{F}_1$ selalu menyinggung lengkungan, sedangkan arah $\vec{F}_2$ konstan membentuk sudut β terhadap garis horizontal. Jika partikel dilepaskan di titik A, dan percepatan gravitasi adalah g, tentukan:

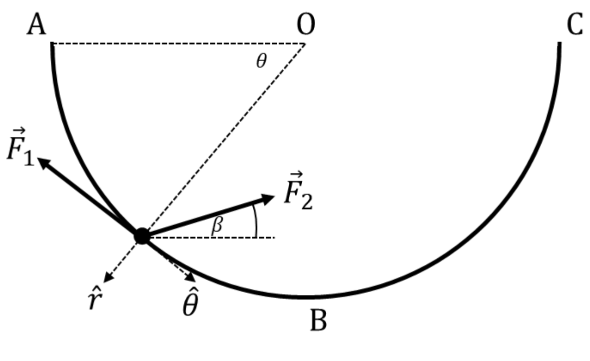


a. usaha total oleh gaya $\vec{F}_1$ dan $\vec{F}_2$ ketika partikel sampai ke titik B. Nyatakan jawaban Anda dalam F_1, F_2, R dan β.
b. besar gaya kontak antara massa m dengan lengkungan di titik B. Nyatakan jawaban Anda dalam F_1, F_2, R, m, g dan β.
c. besar gaya $\vec{F}_2$ jika laju partikel titik C sama dengan nol. Nyatakan jawaban Anda dalam F_1 dan β.

Petunjuk: $\int \sin x \; \mathrm{d}x = -\cos x + C$ dan $\int \cos x \; \mathrm{d}x = \sin x + C$

Jawab:

a. Tinjau diagram berikut,



Misalkan partikel berada pada sudut θ terhadap horizontal. Gunakan sistem koordinat polar $(\hat{r}, \hat{\theta})$, dimana $\hat{r}$ menyatakan arah radial dan $\hat{\theta}$ menyatakan arah singgung. Dalam sistem koordinat ini, gaya $\vec{F}_1$ dan $\vec{F}_2$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$\vec{F}_1 = -F_1 \,\hat{r}$$
$$\vec{F}_2 = -F_2 \cos(\theta - \beta) \; \hat{r} + F_2 \sin(\theta - \beta) \; \hat{\theta}$$

Usaha oleh gaya $\vec{F}_1$ dan $\vec{F}_2$ adalah

$$W = \int \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

dengan $\mathrm{d}\vec{r} = R \; \mathrm{d}\theta$. Sehingga,

$$W = R\int_0^\theta [-F_1 + F_2\sin(\theta-\beta)]\ \mathrm{d}\theta$$
$$= R[-\theta F_1 + F_2(\cos\beta - \cos(\theta-\beta))]$$

Ketika sampai ke titik B, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, maka

$$W_{AB} = R\left[-\frac{\pi}{2}F_1 + F_2(\cos\beta - \sin\beta)\right]$$

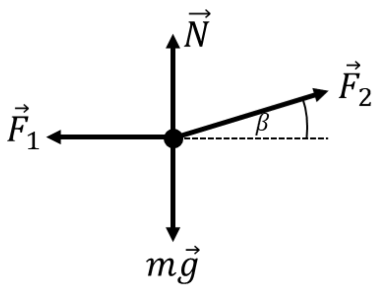
b. Tinjau gerak dari A ke B,

$$\Delta K + \Delta U = W_{AB}$$
$$\frac{1}{2}mv_B^2 - mgR = W_{AB}$$

sehingga didapatkan

$$v_B^2 = \frac{2R}{m}\left[mg - \frac{\pi}{2}F_1 + F_2(\cos\beta - \sin\beta)\right]$$

Tinjau diagram benda bebas di titik B,



Gaya arah radial

$$N + F_2\sin\beta - mg = \frac{mv_B^2}{R}$$

Jadi didapatkan gaya kontak di titik B adalah,

$$N = 3mg - \pi F_1 + F_2(2\cos\beta - 3\sin\beta)$$

c. Ketika sampai ke titik C, $\theta = \pi$ rad. Agar laju di titik C sama dengan nol, maka $W_{AC} = 0$, sehingga

$$-\pi F_1 + 2F_2\cos\beta = 0$$

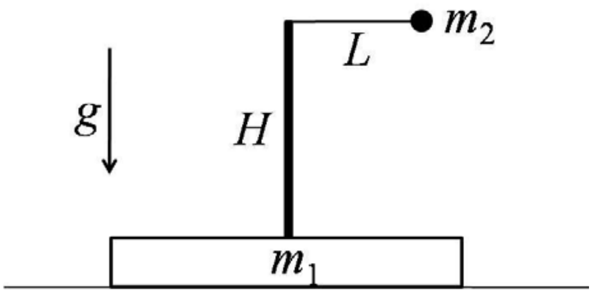
Jadi didapatkan

$$F_2 = \frac{\pi F_1}{2\cos\beta}$$

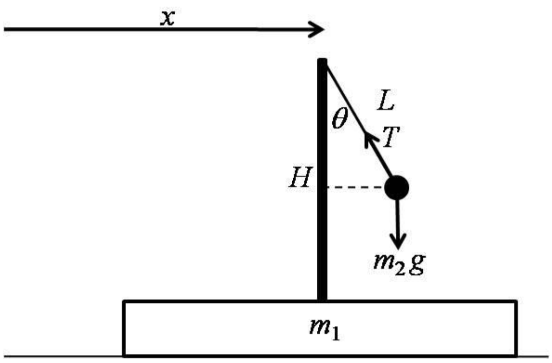
7- (15 poin) Sebuah balok bermassa m_1 berada di atas permukaan lantai yang licin. Pada balok terdapat tiang kokoh setinggi H yang massanya dapat diabaikan. Terdapat sistem bandul yang terdiri dari bola kecil bermassa m_2 yang tergantung pada tali kokoh tak bermassa dengan panjang L ($< H$). Bandul tersebut dapat berayun bebas tanpa gesekan pada ujung atas tiang. Mula-mula posisi tali sejajar dengan horisontal, kemudian seluruh sistem bergerak tanpa kecepatan awal. Percepatan gravitasi g ke bawah. Tentukan:

a. tegangan tali sebagai fungsi θ yaitu sudut antara tali dan tiang;

b. nilai tegangan tali maksimum serta kecepatan balok saat itu.



Jawab:



Misalnya posisi, kecepatan dan percepatan balok m_1 dalam dua dimensi (x, y) adalah sebagai berikut:

$$r_1 = (x, 0) \quad (1)$$

$$v_1 = (\dot{x}, 0) \quad (2)$$

$$a_1 = (\ddot{x}, 0) \quad (3)$$

Adapun untuk bola m_2 adalah sebagai berikut:

$$r_2 = (x + L\sin\theta, H - L\cos\theta) \quad (4)$$

$$v_2 = (\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta, L\dot{\theta}\sin\theta) \quad (5)$$

$$a_2 = (\ddot{x} + L[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta], L[\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta]) \quad (6)$$

Gaya pada m_2 adalah:

$$F_2 = (-T\sin\theta, T\cos\theta - m_2 g) \quad (7)$$

Persamaan gaya untuk m_2 adalah:

$$m_2(\ddot{x} + L[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta]) = -T\sin\theta \tag{8}$$

$$m_2 L[\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta] = T\cos\theta - m_2 g \tag{9}$$

Jika persamaan (8) × $-\sin\theta$ ditambah dengan persamaan (9) × $\cos\theta$ maka:

$$m_2(-\ddot{x}\sin\theta + L\dot{\theta}^2) = T - m_2 g\cos\theta \tag{10}$$

Persamaan kelestarian momentum pada sumbu *x* menghasilkan:

$$m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta) = 0 \tag{11}$$

yang dapat dituliskan menjadi

$$L\dot{\theta}\cos\theta = -\frac{(m_1 + m_2)\dot{x}}{m_2} \quad \text{atau} \quad \dot{x} = -\frac{m_2 L\dot{\theta}\cos\theta}{m_1 + m_2} \tag{12}$$

Jika persamaan (11) diturunkan ke *t* dan digabungkan dengan persamaan (8) menghasilkan

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} + L[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta]) = m_1\ddot{x} - T\sin\theta = 0 \tag{13}$$

sehingga

$$\ddot{x} = \frac{T\sin\theta}{m_1} \tag{14}$$

Dengan menggunakan persamaan (14), persamaan (10) menjadi

$$m_2\left(-\frac{T\sin^2\theta}{m_1} + L\dot{\theta}^2\right) = T - m_2 g\cos\theta$$

yang setelah disederhanakan menjadi

$$T\left[\frac{m_1 + m_2\sin^2\theta}{m_1}\right] = m_2(L\dot{\theta}^2 + g\cos\theta) \tag{15}$$

Untuk memperoleh bentuk $L\dot{\theta}^2$ maka digunakan persamaan kelestarian energi mekanik. Saat awal:

$$EK_1 = 0\,,\ EP_1 = 0\,,\ EK_2 = 0\,,\ EP_2 = m_2 gH \tag{16}$$

Sedangkan pada keadaan sudut θ maka

$$EK_1 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 \quad , \quad EP_1 = 0 \quad , \quad EK_2 = \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta) \quad ,$$

$$EP_2 = m_2 g y_2 = m_2 g(H - L\cos\theta) \tag{17}$$

Dengan menggunakan persamaan (15) dan (16), kekekalan energi mekanik adalah:

$$\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta) + m_2 g(H - L\cos\theta) = m_2 gH$$

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 L^2\dot{\theta}^2 + m_2\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta = m_2 gL\cos\theta \tag{18}$$

Dengan memasukkan persamaan (12) ke dalam (18) diperoleh

$$\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}m_2L^2\dot{\theta}^2-(m_1+m_2)\dot{x}^2=m_2gL\cos\theta$$

$$\tfrac{1}{2}m_2L^2\dot{\theta}^2-\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2=m_2gL\cos\theta$$

$$\tfrac{1}{2}m_2L^2\dot{\theta}^2-\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\left(-\frac{m_2L\dot{\theta}\cos\theta}{m_1+m_2}\right)^2=m_2gL\cos\theta$$

$$\tfrac{1}{2}m_2L^2\dot{\theta}^2\left[1-\frac{m_2\cos^2\theta}{m_1+m_2}\right]=m_2gL\cos\theta$$

$$L\dot{\theta}^2\left[\frac{m_1+m_2\sin^2\theta}{m_1+m_2}\right]=2g\cos\theta$$

$$L\dot{\theta}^2=\frac{2(m_1+m_2)g\cos\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta} \tag{19}$$

Dengan memasukkan persamaan (19) ke dalam persamaan (15) diperoleh

$$T\left[\frac{m_1+m_2\sin^2\theta}{m_1}\right]=m_2\left[\frac{2(m_1+m_2)g\cos\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta}+g\cos\theta\right]$$

yang jika disederhanakan diperoleh tegangan tali sebagai fungsi θ

$$T(\theta)=\frac{m_1m_2g\cos\theta\left[3(m_1+m_2)-m_2\cos^2\theta\right]}{(m_1+m_2\sin^2\theta)^2} \tag{20}$$

Tegangan tali akan bernilai maksimum jika $dT/d\theta=0$. Bisa juga tegangan tali bernilai maksimum jika pembilang bernilai maksimum dan penyebut bernilai minimum. Ini diperoleh jika sekaligus berlaku $\cos\theta=1$ dan $\sin\theta=0$ yaitu ketika $\theta=0$ dimana bandul mengarah vertikal dan bola berada pada titik terendah.

Nilai tegangan tali maksimum adalah

$$T_{\max}=\frac{m_2\left[3m_1+2m_2\right]}{m_1}g \tag{21}$$

Kecepatan balok diperoleh dengan menggabungkan persamaan (12) dan (19)

$$\dot{x}=-\frac{m_2L\cos\theta}{m_1+m_2}\dot{\theta}=\pm\frac{m_2L\cos\theta}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)g\cos\theta}{\left(m_1+m_2\sin^2\theta\right)L}} \tag{22}$$

Disini tanda $\pm$ diperoleh karena mengambil akar dari $\dot{\theta}^2$, dimana tanda + ketika balok bergerak ke kanan dan tanda minus ketika bergerak ke kiri.

Saat $\theta=0$ maka kecepatan balok adalah

$$v_1=\pm\sqrt{\frac{2m_2^2}{m_1(m_1+m_2)}gL} \tag{23}$$

Tambahan:

Jika sejak awal sudah diambil asumsi bahwa tegangan tali maksimum ketika bandul mengarah vertikal, maka kecepatan balok dan tegangan tali maksimum dapat dihitung dengan cara yang lebih sederhana. Misalnya relatif terhadap lantai, kecepatan horisontal m_2 saat berada di titik terendah adalah v_2 dan kecepatan balok saat itu adalah v_1. Persamaan kelestarian momentum pada sumbu *x* adalah

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \qquad \text{sehingga } v_2 = -m_1 v_1 / m_2 \tag{24}$$

Saat bandul m_2 di titik terendah:

$$EK_1 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2,\ EP_1 = 0,\ EK_2 = \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1^2 v_1^2 / m_2,\ EP_2 = m_2 g(H - L) \tag{25}$$

Persamaan kelestarian energi antara ketika saat awal (persamaan (16)) dengan saat di titik terendah (persamaan (25)) adalah

$$m_2 gH = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_1^2 v_1^2 / m_2 + m_2 g(H - L)$$

$$\tfrac{1}{2} v_1^2 (m_1 + m_1^2 / m_2) = m_2 gL$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2^2}{m_1(m_1 + m_2)} gL} \tag{26}$$

yang sama dengan persamaan (23). Selanjutnya kecepatan m_2 relatif terhadap m_1 adalah

$$v_{2rel} = v_2 - v_1 = -\frac{m_1 v_1}{m_2} - v_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}\sqrt{\frac{2m_2^2}{m_1(m_1 + m_2)} gL} = -\sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)}{m_1} gL} \tag{27}$$

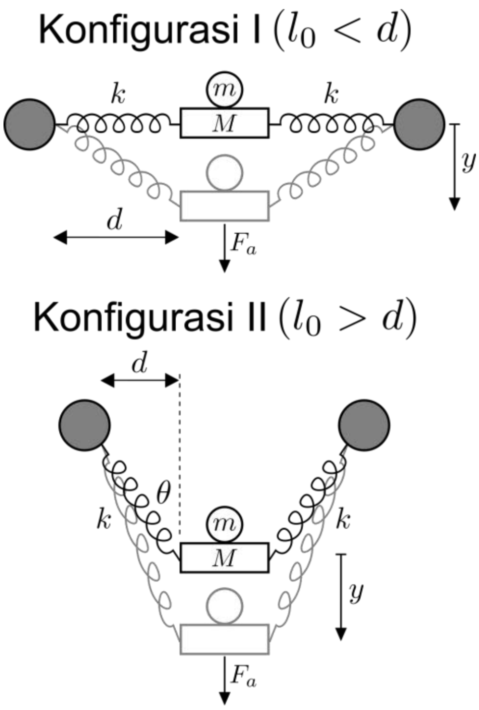
Persamaan gaya saat m_2 berada pada titik terendah adalah

$$T - m_2 g = m_2 \frac{v_{2rel}^2}{L} \tag{28}$$

$$T = m_2 g + m_2 \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1} g = \frac{m_2(3m_1 + 2m_2)}{m_1} g \tag{29}$$

yang sama dengan persamaan (21). Hanya saja metode ini tidak dapat menentukan tegangan tali sebagai fungsi θ.

8- (15 poin) Katapel (plinteng) adalah mainan anak-anak untuk melontarkan batu kecil. Biasanya katapel terbuat dari gagang bercabang dua yang kedua ujungnya diikatkan oleh karet (pegas). Dalam merancang suatu katapel, terdapat dua konfigurasi (lihat gambar). Pada konfigurasi I, panjang natural pegas lebih kecil dari jarak cabang ke bantalan ($l_0 < d$). Pada konfigurasi II, panjang natural pegas lebih besar dari jarak horizontal cabang ke bantalan ($l_0 > d$). Untuk melontarkan batu bermassa m , seorang anak menarik bantalan batu bermassa M sejauh y dengan gaya F_a, dan melepaskannya. Anggap karet tersebut memiliki koefisien pegas k dan memenuhi hukum Hooke.



a. Carilah kecepatan lontaran batu v untuk kasus ekstrem pada konfigurasi I ($l_0 \ll d$) dan konfigurasi II ($l_0 \gg d$) !

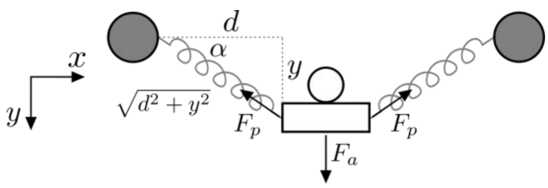
Nyatakan jawaban Anda – suku terpenting saja – dalam variabel-variabel F_a, k, m, dan M!

Hint: Jika diperlukan, gunakan $\sin\theta \approx \theta$ dan $\cos\theta \approx 1$.

b. Koefisien pegas karet katapel dapat juga dinyatakan dengan persamaan $k = EA/L$, di mana E adalah koefisien yang bergantung pada material karet (modulus Young), A adalah luas penampang karet, dan L adalah panjang "potongan" karet. Apabila si anak menggunakan bahan karet yang sama dengan luas penampang yang sama, tentukan apakah lebih baik jika anak tersebut memotong karet tersebut seperti pada konfigurasi I atau konfigurasi II!

Jawab:

a- Konfigurasi ekstrem I ($l_0 \ll d$):



Tinjau gaya arah y saat bantalan ditarik dengan gaya F_a:

$$\sum F_y = 0$$
$$F_a = 2F_p \sin\alpha$$

di mana $\sin\alpha = y/\sqrt{d^2+y^2}$, dan

$$F_p = k(\sqrt{d^2+y^2} - l_0) \approx k\sqrt{d^2+y^2} \text{ karena } l_0 \ll \sqrt{d^2+y^2}.$$

Substitusi $\sin\alpha$ dan F_p pada persamaan di atas:

$$F_a \approx 2k\sqrt{d^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{d^2+y^2}} = 2ky$$

Tinjau perubahan energi mekanik sistem:

$$\Delta EK = -\Delta EP$$
$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = 2\cdot\frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2+y^2} - l_0\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}k(d-l_0)^2$$
$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 \approx k(d^2+y^2) - kd^2$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 \approx ky^2$$

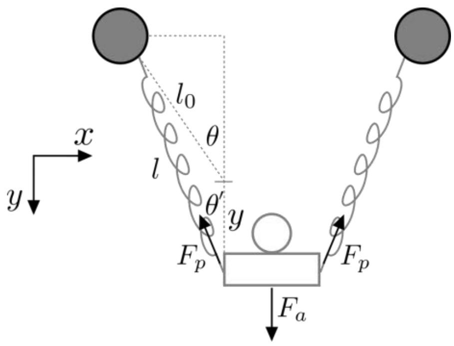
Substitusi $F_a \approx\ 2ky$ pada persamaan ini:

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 \approx \frac{{F_a}^2}{4k}$$

$$v \approx \sqrt{\frac{{F_a}^2}{2k(M+m)}}$$

Konfigurasi ekstrem II ($\boldsymbol{l_0 \gg d}$):

Tinjau gaya arah *y* saat bantalan ditarik dengan gaya F_a:



$$\sum F_y = 0$$

$$F_a = 2F_p \cos\theta'$$

di mana untuk kasus ekstrem ini $\cos\theta' \approx 1$.

Tinjau proyeksi panjang pegas l dan l_0 pada sumbu y:

$$l_0 \cos\theta + y = l\cos\theta'$$

$$l_0 + y \approx l$$

sehingga $F_p = k(l - l_0)\ \approx ky$

Substitusi $\cos\theta'$ dan F_p persamaan di atas:

$$F_a \approx\ 2ky$$

Tinjau perubahan energi mekanik sistem:

$$\Delta EK = -\Delta EP$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = 2\cdot\frac{1}{2}k(l-l_0)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}k(l_0-l_0)^2$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 \approx ky^2 - 0$$

Dengan substitusi $F_a \approx\ 2ky$ pada persamaan ini:

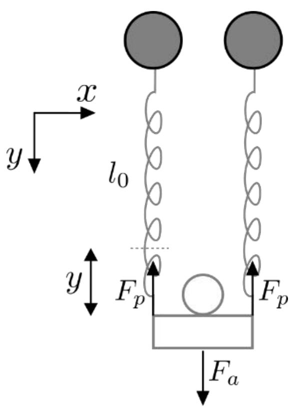
$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 \approx \frac{{F_a}^2}{4k}$$

$$v \approx \sqrt{\frac{{F_a}^2}{2k(M+m)}}$$

Dari kedua hasil di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa kecepatan lontaran batu sama untuk kedua konfigurasi ekstrem di atas.

Tambahan: cara cerdik untuk konfigurasi ekstrem II:

Kita dapat menggambar konfigurasi tersebut lebih ekstrem lagi, sehingga kedua pegas tersebut hampir sejajar



Tinjau gaya arah y saat bantalan ditarik dengan gaya F_a:

$$\sum F_y = 0$$

$$F_a = 2F_p$$

di mana $F_p = k(l - l_0) = ky$, sehingga:

$$F_a =\ 2ky$$

Setelah ini, penyelesaian dilanjutkan seperti pada cara di atas.

b- Kecepatan lontaran sama untuk kedua konfigurasi ekstrem di atas:

$$v \approx \sqrt{\frac{{F_a}^2}{2k(M+m)}}$$

Dengan substitusi $k = EA/L$ dan mengingat bahwa panjang potongan adalah panjang natural pegas:

$$v \approx \sqrt{\frac{{F_a}^2}{2(M+m)}\frac{l_0}{EA}}$$

Pegas pada konfigurasi II tentunya memiliki panjang natural (panjang potongan) yang lebih besar daripada pegas pada konfigurasi I, sehingga dapat kita simpulkan bahwa:

$$v_{II} > v_I$$

Konfigurasi II menghasilkan kecepatan lontaran yang lebih tinggi dari konfigurasi I.
Oleh karena itu, lebih baik jika kita memotong karet seperti konfigurasi II.