

4

Example-2 : প্রমাণ কর [Prove that] $\text{erf}(x) + \text{erf}_c(x) = 1$
প্রমাণ : আমরা জানি [We know]

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \dots (1)$$

$$\text{এবং } \text{erf}_c(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \dots (2)$$

এখন [Now] (1) + (2) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \text{erf}(x) + \text{erf}_c(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^x e^{-t^2} dt + \int_x^\infty e^{-t^2} dt \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt \dots (3) \end{aligned}$$

ধরি [we put] $t^2 = u$

তবে [then] $2t dt = du$

$$\therefore dt = \frac{du}{2t} = \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} u^{-1/2} du$$

$$\begin{aligned} \therefore (3) \Rightarrow \text{erf}(x) + \text{erf}_c(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{2} u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} u^{1/2-1} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\ &= 1. \text{ Proved} \end{aligned}$$

সীমা অপরিবর্তিত [limit unchanged]

সপ্তম অধ্যায় [CHAPTER-7] ল্যাপলাস রূপান্তর [The Laplace Transform]

7.1 : সূচনা : ল্যাপলাস রূপান্তর একটি অতি গুরুত্বপূর্ণ নতুন ধারণা (topic), যাহা শব্দতের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ, পদার্থবিদ্যা এবং ইঙ্গিনিয়ারিং এ Boundary value problem এর সমাধানে অতীব কার্যকর এক পদ্ধতি।

7.2 : সংজ্ঞা : ল্যাপলাস রূপান্তর [The Laplace transform]

মনেকরি $F(t)$ হইল t এর একটি ফাংশন, যাহা $t > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত, তবে $F(t)$ এর ল্যাপলাস রূপান্তরকে $L(F(t))$, অথবা $f(s)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহা নিচে সংজ্ঞায়িত :

$$L(F(t)) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt. \text{ যখন } s \text{ বাস্তব অথবা জটিল}$$

যদি s এর কতিপয় মানের জন্য $\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ ইন্টিগ্র্যালটি অভিসারী হয়, তবে $L(F(t))$ বিদ্যমান আছে অন্যথার ইহা বিদ্যমান নাই।

Definition : Let $F(t)$ be a function of t defined for $t > 0$ then the Laplace transform of $F(t)$ is denoted by $L(F(t))$, or $f(s)$ and is defined as follows :

$$L(F(t)) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt, \text{ where } s \text{ is real, or complex.}$$

If the integral $\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$, converges for some value of s then $L(F(t))$ is said to exist otherwise it does not exist.

উদাহরণ-1 : নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর :

[Find the Laplace transform of the following functions.]

$$(i). F(t) = 1 \quad (ii). F(t) = t \quad (iii). F(t) = t^n$$

সমাধান-(i) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L(F(t)) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt, s > 0 \dots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = 1$ বসাইয়া পাই [we put $F(t) = 1$ in (1) then we get]

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow L\{1\} = -\frac{1}{s} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{s} (0 - 1)$$

$$\Rightarrow L\{1\} = \frac{1}{s}.$$

সমাধান-(ii) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, s > 0 \dots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = t$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = t$ in (1) then we get]

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = -\frac{1}{s} \left[\frac{t}{e^{-st}} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = -\frac{1}{s} (0) + \frac{1}{s} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow L\{t\} = 0 - \frac{1}{s^2} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{s^2} (0 - 1)$$

$$\Rightarrow L\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

সমাধান-(iii) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে পাই [From the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, s > 0 \dots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = t^n$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = t^n$ in (1) then we get]

$$L\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

The Laplace Transform

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \left[t^n \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - n \int_0^{\infty} t^{n-1} \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = -\frac{1}{s} \left[\frac{t^n}{e^{-st}} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = 0 + \frac{n}{s} \left(\left[t^{n-1} \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - (n-1) \int_0^{\infty} t^{n-2} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt \right)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n}{s} \left(0 + \frac{n-1}{s} \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-st} dt \right)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-st} dt$$

$$L\{t^n\} = \frac{n(n-2+1)}{s^2} \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-st} dt.$$

একইভাবে ইহাকে আরও $n-2$ বার ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [In the same way integrate this more $n-2$ times then we get]

$$L\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-n+1)}{s^n} \int_0^{\infty} t^0 e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{s^n} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n!}{s^n} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = -\frac{n!}{s^{n+1}} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{n!}{s^{n+1}} (0 - 1)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ অথবা } L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

Alternate method by Gamma function :

$$L\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

ধরি $st = u$

$$\text{তবে } t = \frac{u}{s}, dt = \frac{du}{s}$$

সীমা : যদি $t = 0$ হয়, তবে $u = 0$

যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$

$$\begin{aligned}\therefore L\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-ut} \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s} \\ &= \int_0^\infty e^{-ut} \frac{u^n}{s^n} \frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-ut} u^{n+1-1} du \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \\ \therefore L\{t^n\} &= \frac{n!}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

উদাহরণ-2 : নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর [Find the Laplace transform of the following functions]

(i). e^{at} [NUH-2007]

(ii). e^{-at} [DUH-1990]

সমাধান-(i) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt, s > 0 \dots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = e^{at}$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = e^{at}$ in (1) then we get]

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt$$

$$\text{বা } L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt$$

$$\text{বা } L\{e^{at}\} = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty = -\frac{1}{(s-a)} (e^{-\infty} - e^0)$$

$$\text{বা } L\{e^{at}\} = -\frac{1}{s-a} (0-1)$$

$$\therefore L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

সমাধান-(ii) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt, s > 0 \dots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = e^{-at}$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = e^{-at}$ in (1) then we get]

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} dt$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^\infty = -\frac{1}{(s+a)} (e^{-\infty} - e^0)$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = -\frac{1}{(s+a)} (0-1)$$

$$\therefore L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}.$$

উদাহরণ-3 : প্রমাণ কর :

$$(i). L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (ii). L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

সমাধান-(i) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt, s > 0$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \left[\frac{e^{-st} (-s \cos at + a \sin at)}{-s^2 + a^2} \right]_0^\infty$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \frac{1}{(s^2 + a^2)} [0 - e^0(-s \cos 0 + a \sin 0)]; \text{ যেহেতু } e^{-\infty} = 0$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

সমাধান-(ii) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt, s > 0$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \left[\frac{e^{-st} (-s \sin at - a \cos at)}{-s^2 + a^2} \right]_0^\infty$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \frac{1}{(s^2 + a^2)} [0 - e^0(-s \sin 0 - a \cos 0)]; \text{ যেহেতু } e^{-\infty} = 0$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

$$\text{নোট : } \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{at} \sin bt \, dt = \frac{e^{at}(a \sin bt - b \cos bt)}{a^2 + b^2}$$

উদাহরণ-4 : প্রমাণ কর :

$$(i). \quad L[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad [\text{NUH-2005}]$$

$$(ii). \quad L[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

প্রমাণ-(i) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$\begin{aligned} L[\cosh at] &= \int_0^\infty e^{-st} \cosh at \, dt, s > 0 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st}(e^{at} + e^{-at}) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{-(s-a)t} + e^{-(s+a)t}) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} + \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(s-a)} (e^{-\infty} - e^0) - \frac{1}{(s+a)} (e^{-\infty} - e^0) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(s-a)} (0 - 1) - \frac{1}{(s+a)} (0 - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{(s-a)(s+a)} \\ \therefore L[\cosh at] &= \frac{s}{s^2 - a^2}. \end{aligned}$$

প্রমাণ-(ii) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$\begin{aligned} L[\sinh at] &= \int_0^\infty e^{-st} \sinh at \, dt, s > 0 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st}(e^{at} - e^{-at}) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{-(s-a)t} - e^{-(s+a)t}) \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L[\sinh at] &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} - \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(s-a)} (e^{-\infty} - e^0) + \frac{1}{s+a} (e^{-\infty} - e^0) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{s-a} (0 - 1) + \frac{1}{s+a} (0 - a) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{(s-a)(s+a)} \\ \therefore L[\sinh at] &= \frac{a}{s^2 - a^2}. \end{aligned}$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের ক্ষতিগ্রস্ত ধর্ম [Some properties of Laplace transform]

7.3 : বৈধিক ধর্ম [The linearity property]

সংজ্ঞা : ল্যাপলাস রূপান্তর $L[F(t)]$ কে বৈধিক বলা হইবে যদি প্রত্যেক জোড়া ফাংশন $F_1(t)$ এবং $F_2(t)$ এর অন্য নিয়মিতিত শর্তটি সিদ্ধ করে :

$$L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1 L[F_1(t)] + c_2 L[F_2(t)]$$

যখানে c_1 এবং c_2 যে কোন প্রকৃতক।

Definition : A Laplace transform $L[F(t)]$ is said to be linear if for every pair of functions $F_1(t)$ and $F_2(t)$ satisfy the following condition :

$$L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1 L[F_1(t)] + c_2 L[F_2(t)]$$

where c_1 and c_2 are any constants.

উপরান্ত-1 : যদি $L[F_1(t)] = \int_0^\infty e^{-st} F_1(t) \, dt$ এবং

$$L[F_2(t)] = \int_0^\infty e^{-st} F_2(t) \, dt \text{ হয়}$$

তবে $L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1 L[F_1(t)] + c_2 L[F_2(t)]$

যখানে c_1 এবং c_2 যে কোন প্রকৃতক।

প্রমাণ : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে আমরা লিখিতে পারি [By the definition of Laplace transform, we can write]

$$\begin{aligned}
 L\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-st} c_1 F_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} c_2 F_2(t) dt \\
 &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} F_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} F_2(t) dt \\
 &= c_1 L\{F_1(t)\} + c_2 L\{F_2(t)\}.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ-1 : $4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর। [Find the L. T. of $4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t$.]

সমাধান : রৈখিক বৈশিষ্ট প্রয়োগ করিয়া পাই [Applying the linear property, we get]

$$\begin{aligned}
 &L\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t\} \\
 &= 4L\{e^{5t}\} + 6L\{t^3\} - 3L\{\cos 4t\} + 4L\{\sin 5t\} \\
 &= 4\left(\frac{1}{s-5}\right) + 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4^2}\right) + 4\left(\frac{5}{s^2+5^2}\right) \\
 &= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{20}{s^2+25}.
 \end{aligned}$$

7.4. প্রথম স্থানান্তরের ধর্ম : [First translation or Shifting property]

উপপাদ্য-2 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে $L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$

[If $L\{F(t)\} = f(s)$ then $L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$.] [NUH-1994]

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \dots (1)$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

✓ $L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, s > 0$

বা $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \dots (2), (1)$ নং থারা।

আবার ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [Again by the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{e^{at} F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} F(t) dt$$

$$\text{বা } L\{e^{at} F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt$$

বা $L\{e^{at} F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-ut} F(t) dt, \text{ যখন } s-a=u$

বা $L\{e^{at} F(t)\} = f(u), (2)$ নং এর সাহায্যে।

বা $L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a).$

উদাহরণ 3 : $e^{-2t} \cos 3t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর। [Find the Laplace transform of $e^{-2t} \cos 3t$]

সমাধান : আমরা জানি [We know]

$$L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$\therefore L\{e^{-2t} \cos 3t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

$$\Rightarrow L\{e^{-2t} \cos 3t\} = \frac{s+2}{s^2 + 4s + 13}.$$

উদাহরণ 4 : দ্বিতীয় স্থানান্তরের ধর্ম [Second translation or shifting property]

উপপাদ্য-3 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয় এবং $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{যখন } t > a \\ 0 & \text{যখন } t < a \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $L\{G(t)\} = e^{-as} f(s).$

প্রমাণ : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, s > 0$$

বা $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \dots (1),$ যেহেতু $L\{F(t)\} = f(s)$

দেওয়া আছে [Given that] $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{যখন } t > a \\ 0 & \text{যখন } t < a \end{cases} \dots (2)$

আবার ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [Again by the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{G(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t) dt$$

$$\text{বা } L\{G(t)\} = \int_0^a e^{-st} G(t) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} G(t) dt$$

$$\text{বা } L\{G(t)\} = \int_0^a e^{-st} \cdot 0 dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a) dt, \quad (2) \text{ নং হইতে।}$$

$$\text{বা } L\{G(t)\} = 0 + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a) dt \dots (3)$$

ধরি $t-a=u$ তবে $dt=du$ | we put $t-a=u$ then $dt=du$

সীমা : যদি $t=a$ হয় তবে $u=0$

যদি $t=\infty$ হয় তবে $u=\infty$

Limits : If $t=a$ then $u=0$

If $t=\infty$ then $u=\infty$

$$\therefore (3) \Rightarrow L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(a+u)} F(u) du$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = e^{-sa} \int_0^\infty e^{-su} F(u) du$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = e^{-as} f(s), \quad (1) \text{ নং এর সাহায্যে।}$$

উদাহরণ : $F(t)$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর বির্তয় কর যখন [Find the Laplace transform of $F(t)$ where]

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & \text{যখন } t > 2\pi/3 \\ 0 & \text{যখন } t < 2\pi/3 \end{cases}$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & \text{যখন } t > 2\pi/3 \\ 0 & \text{যখন } t < 2\pi/3 \end{cases} \dots (1)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\text{বা } L\{F(t)\} = \int_0^{2\pi/3} e^{-st} F(t) dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\text{বা } L\{F(t)\} = \int_0^{2\pi/3} e^{-st} \cdot 0 dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t - 2\pi/3) dt, \quad (1) \text{ নং হইতে।}$$

$$\text{বা } L\{F(t)\} = 0 + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t - 2\pi/3) dt \dots (2)$$

ধরি $t - 2\pi/3 = u$ | we put $t - 2\pi/3 = u$

$\therefore dt = du$

সীমা : যদি $t = 2\pi/3$ হয়, তবে $u = 0$

যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$

Limits : If $t = 2\pi/3$ then $u = 0$

$\therefore dt = du$

If $t = \infty$ then $\infty - 2\pi/3 = u \Rightarrow u = \infty$

$$\therefore (2) \Rightarrow L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(u+2\pi/3)} \cos u du$$

$$\text{বা } L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3} \int_0^\infty e^{-su} \cos u du$$

$$\text{বা } L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3} \cdot L\{\cos u\}$$

$$\text{বা } L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3} \cdot \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2 + 1}$$

7.6 : কল পরিবর্তনের ধর্ম [Change of scale property]

উপর্যুক্ত-৪ : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right).$$

[NUH-1994, 2000, 2008]

এমাগ : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt.$$

$$\text{বা } f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \dots (1), \text{ যেহেতু } L\{F(t)\} = f(s)$$

$$\text{এবং } L\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(at) dt \dots (2)$$

ধরি $at = u$

$$\text{বা } t = \frac{u}{a} \text{ তবে } dt = \frac{1}{a} du$$

সীমা : যদি $t = 0$ হয়, তবে $u = 0$

যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$

we put $at = u$

$$\text{or } t = \frac{u}{a} \text{ then } dt = \frac{du}{a}$$

Limits : If $t = 0$ then $u = 0$

If $t = \infty$ then $u = \infty$

$$\therefore (2) \Rightarrow L\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-us/a} F(u) \frac{du}{a}$$

$$\text{বা } L\{F(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-us/a} F(u) du$$

$$\text{বা } L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right), \quad (1) \text{ নং এর সাহায্যে।$$

উদাহরণ : $\cos 3t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর [Find the Laplace transform of $\cos 3t$]

$$\text{সমাধান : আমরা জানি [we know] } L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow L\{\cos 3t\} = \frac{1}{3} \frac{s/3}{(s/3)^2 + 1}. \text{ উপরের উপপাদ্যের সাহায্যে।}$$

$$\Rightarrow L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2 + 9}.$$

7.7 : অন্তরীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of derivatives]

উপপাদ্য-5 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0).$$

[DUH-1988]

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \dots (1)$

∴ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t) dt$$

ইনটিগ্রেশনের অংশতন্মের সাহায্যে [Integration by parts]

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = [e^{-st} F(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = 0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\}, \text{ যেহেতু } e^{-\infty} = 0$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = -F(0) + sf(s), (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0). \text{ অমাপিত।}$$

উপপাদ্য-6 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sf(0) - F'(0).$$

[NUH-2005, 2009]

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \dots (1)$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F''(t) dt$$

ইনটিগ্রেশনের অংশতন্মের সাহায্যে [Integration by parts]

$$L\{F''(t)\} = [e^{-st} F'(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} F'(t) dt$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = 0 - e^0 F'(0) + s \left([e^{-st} F(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \right)$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = -F'(0) + s(0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\})$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = -F'(0) - sf(0) + s^2 f(s), (1) \text{ দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sf(0) - F'(0). \text{ অমাপিত।}$$

উপপাদ্য-7 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - sf'(0) - F''(0).$$

[NUH-2001, DUH-1987]

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \dots (1)$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'''(t) dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = [e^{-st} F''(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} F''(t) dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = 0 - e^0 F''(0) + s \left([e^{-st} F'(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} F'(t) dt \right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) + s \left(0 - e^0 F'(0) + s \int_0^\infty e^{-st} F'(t) dt \right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sf'(0) + s^2 \int_0^\infty e^{-st} F'(t) dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sf'(0) + s^2 \left([e^{-st} F(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sf'(0) + s^2 (0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\})$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sf'(0) - s^2 F(0) + s^3 f(s), (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - sf'(0) - F''(0). \text{ অমাপিত।}$$

উপপাদ্য-8 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \dots (1)$

আরোহ পক্ষতি প্রয়োগ করিয়া নিম্নের উপপাদ্যটি প্রমাণ করিব [We shall prove the following theorem by the method of induction]

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0) \dots (2)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t) dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = \left[e^{-st} F(t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = 0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0), \quad (1) \text{ নং ধাৰা।}$$

সূতৰাং (2) নং উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য। [Hence the theorem (2) is true for $n = 1$]

মনেকরি উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য [Let the theorem is true for $n = m$]

$$\text{i. e. } L\{F^m(t)\} = s^m f(s) - s^{m-1} F(0) - s^{m-2} F'(0) \\ - \dots - sF^{m-2}(0) - F^{m-1}(0) \dots (3)$$

আবার (3) নং এর বাস্তবক হইতে পাই [Again from L. H. S. of (3) we get]

$$L\{F^m(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F^m(t) dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = \left[F^m(t) \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty F^{m+1}(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = -\frac{1}{s} \left[e^{-st} F^m(t) \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} F^{m+1}(t) dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = -\frac{1}{s} \{0 - e^0 F^m(0)\} + \frac{1}{s} L\{F^{m+1}(t)\}$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = \frac{1}{s} F^m(0) + \frac{1}{s} L\{F^{m+1}(t)\} \dots (4)$$

এখন (3) নং এবং (4) নং হইতে পাই [Now from (3) and (4), we get]

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} F^m(0) + \frac{1}{s} L\{F^{m+1}(t)\} &= s^m f(s) - s^{m-1} F(0) - s^{m-2} F'(0) - \dots \\ &\quad - sF^{m-2}(0) - F^{m-1}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{বা } F^m(0) + L\{F^{m+1}(t)\} &= s^{m+1} f(s) - s^m F(0) - s^{m-1} F'(0) - \dots \\ &\quad - s^2 F^{m-2}(0) - sF^{m-1}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{বা } L\{F^{m+1}(t)\} &= s^{m+1} f(s) - s^m F(0) - s^{m-1} F'(0) - \dots \\ &\quad - sF^{m-1}(0) - F^m(0) \dots (5) \end{aligned}$$

∴ উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য হইলে $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হইবে।

কিন্তু উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য প্রমাণিত হইয়াছে। অতএব উপপাদ্যটি $n = 1 + 1 = 2, n = 2 + 1 = 3, n = 3 + 1 = 4 \dots$ ইত্যাদির জন্য সত্য। সুতরাং উপপাদ্যটি n এর সকল যোগবোধক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য। অর্থাৎ

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

| ∴ If the theorem is true for $n = m$ then it is true for $n = m + 1$.

But the theorem was proved for $n = 1$. Therefore the theorem is true for $n = 1 + 1 = 2, n = 2 + 1 = 3, n = 3 + 1 = 4 \dots$ etc. Hence the theorem is true for all positive integral n . i.e.

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

উদাহরণ : প্রথম অঙ্গীকৃতের ল্যাপলাস রূপান্তর প্রয়োগ করিয়া দেখাও যে [Applying the Laplace transform of first derivative, show that]

$$(i). \quad L(t) = \frac{1}{s^2}, s > 0 \quad (ii). \quad L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

সমাধান-(i) : আমরা জানি [We know] $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) \dots (1)$

ধরি $F(t) = t$, তাহা হইলে $F'(t) = 1$ এবং $F(0) = 0$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\{1\} = sL\{t\} - 0 \dots (2)$$

আবার (1) নং এ $F(t) = 1$ ধরি [Again we put $F(t) = 1$ in (1)]

$$\therefore F'(t) = 0 \text{ এবং } F(0) = 1$$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\{0\} = sL\{1\} - 1$$

$$\Rightarrow 0 = sL\{1\} - 1, \text{ যেহেতু } L\{0\} = 0$$

$$\Rightarrow sL\{1\} = 1$$

$$\Rightarrow L\{1\} = \frac{1}{s} \dots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং হইতে পাই [From (2) and (3) we get]

$$\frac{1}{s} = sL\{t\} - 0$$

$$\Rightarrow L\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

সমাধান-(ii) : আমরা জানি [We know]

$$L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) \dots (1)$$

ধরি $F(t) = e^{at}$ তবে $F'(t) = ae^{at}$ এবং $F(0) = e^0 = 1$

$$(1) \Rightarrow L\{ae^{at}\} = sL\{e^{at}\} - 1$$

$$\Rightarrow aL\{e^{at}\} = sL\{e^{at}\} - 1$$

$$\Rightarrow 1 = (s - a)L\{e^{at}\}$$

$$\Rightarrow L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

উদাহরণ-2 : বিভীষণ অন্তরীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া গ্ৰহণ কৰা। [Applying the Laplace transform of second derivative, prove that]

$$(i). L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0 \quad (ii). L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|$$

সমাধান-(i) : আমরা জানি [We know]

$$L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \dots (1)$$

ধরি $F(t) = \sin at$, তাহা হইলে

$$F'(t) = a\cos at \text{ এবং } F''(t) = -a^2\sin at$$

$$\therefore F(0) = \sin 0 = 0 \text{ এবং } F'(0) = a\cos 0 = a$$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\{-a^2\sin at\} = s^2 L\{\sin at\} - s.0 - a$$

$$\Rightarrow -a^2 L\{\sin at\} = s^2 L\{\sin at\} - a$$

$$\Rightarrow a = s^2 L\{\sin at\} + a^2 L\{\sin at\}$$

$$\Rightarrow (s^2 + a^2) L\{\sin at\} = a$$

$$\Rightarrow L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

সমাধান-(ii) : আমরা জানি [We know]

$$L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \dots (1)$$

ধরি $F(t) = \cosh at$, তাহা হইলে

$$F'(t) = a\sinh at \text{ এবং } F''(t) = a^2 \cosh at$$

$$\therefore F(0) = \cosh 0 = 1 \text{ এবং } F'(0) = a\sinh 0 = 0$$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\{a^2 \cosh at\} = s^2 L\{\cosh at\} - s.1 - 0$$

$$\Rightarrow a^2 L\{\cosh at\} = s^2 L\{\cosh at\} - s$$

$$\Rightarrow s = (s^2 - a^2) L\{\cosh at\}$$

$$\Rightarrow L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

7.8 : t^n দ্বাৰা গুণিতক ফাংশনের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of a function multiplication by t^n]

উপপাদ্য-9 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \text{ যেখনে } n = 1, 2, 3, \dots$$

[NUH-1993, 2007]

গ্ৰহণ : দেওয়া আছে [Given that]

$$L\{F(t)\} = f(s) \dots (1)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\Rightarrow f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt, \quad (1) \text{ নং দ্বাৰা।}$$

লিবনীজের নিয়মে ইনটিগ্ৰেশন চিহ্নের ভিতৱে s এৰ সাপেক্ষে অন্তৰীকৰণ কৰিয়া পাই [By Leibnitz's rule, differentiating w. r. to s under the sign of integration, we get]

$$\frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-t) F(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = - \int_0^\infty e^{-st} \{tF(t)\} dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = - L\{tF(t)\}$$

$$\Rightarrow L\{tF(t)\} = - \frac{d}{ds} f(s) = - f'(s)$$

$$\Rightarrow L\{tF(t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} f(s) = (-1)^1 f'(s)$$

সুতরাং উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য [Thus the theorem is true for $n = 1$]

উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য গণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যবহার করিব। মনেকরি উপপাদ্যটি $n = k$ এর জন্য সত্য, অর্থাৎ ধরি [To establish the theorem, we use mathematical induction. Let the theorem is true for $n = k$, i.e. assume]

$$L\{t^k F(t)\} = (-1)^k f^k(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} t^k F(t) dt = (-1)^k f^k(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} \{t^k F(t)\} dt = (-1)^k \frac{d}{ds} f^k(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} \{t^k F(t)\} dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} (-t) \{t^k F(t)\} dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\} dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\} dt = (-1)^1 (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\} dt = (-1)^{k+1} f^{k+1}(s)$$

ইহা অনুসরণীয় যে, যদি উপপাদ্যটি $n = k$ এর জন্য সত্য হয়, তবে উপপাদ্যটি $n = k + 1$ এর জন্য সত্য হবে। কিন্তু উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য প্রমাণিত হইয়াছে। সুতরাং উপপাদ্যটি $n = 1 + 1 = 2$ এবং $n = 2 + 1 = 3, \dots$ ইত্যাদির জন্য সত্য। অর্থাৎ উপপাদ্যটি n এর সকল যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যার জন্য সত্য।

$$\text{i.e. } L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s), \text{ যেখানে } f^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} f(s)$$

[It follows that if the theorem is true for $n = k$ then the theorem must be true for $n = k + 1$. But the theorem was proved for $n = 1$. Hence it is true for $n = 1 + 1 = 2$ and $n = 2 + 1 = 3, \dots$ etc and thus for all positive integral values of n . i.e.

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s) \text{ where } f^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} f(s)]$$

উদাহরণ : নির্ণয় কর [Find] (i). $L\{tsinat\}$,

$$(ii). L\{t^2 \cos at\} \quad [\text{NUH-2008}]$$

$$(iii). L\{t^3 e^at\}. \quad [\text{DUH-1989}]$$

সমাধান-(i) : আমরা জানি [We know]

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \dots (1)$$

$$\therefore L\{tsinat\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} f(s)$$

$$= - \frac{d}{ds} \left(\frac{a}{s^2 + a^2} \right). \quad (1) \text{ নং ঘরা :}$$

$$= - \frac{(-a) \cdot 2s}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$= \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

সমাধান-(ii) : আমরা জানি [We know]

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \dots (1)$$

$$\therefore L\{t^2 \cos at\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

$$= \frac{d}{ds} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right). \quad (1) \text{ নং হইতে :}$$

$$= \frac{d}{ds} \left\{ \frac{(s^2 + a^2) \cdot 1 - s \cdot 2s}{(s^2 + a^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{d}{ds} \left\{ \frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{(s^2 + a^2)^2 (-2s) - (a^2 - s^2) \cdot 2(s^2 + a^2) \cdot 2s}{(s^2 + a^2)^4}$$

$$\therefore L\{t^2 \cos at\} = \frac{(s^2 + a^2)(-2s) - (a^2 - s^2)4s}{(s^2 + a^2)^3}$$

$$= \frac{2s^3 - 6a^2s}{(s^2 + a^2)^3}.$$

সমাধান-(iii) : আমরা জানি [We know]

$$L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{1}{s-1} \dots (1)$$

$$\therefore L\{t^3 e^t\} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} f(s)$$

$$= -\frac{d^2}{ds^2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-1} \right), (1) \text{ নং হইতে।}$$

$$= -\frac{d}{ds} \frac{d}{ds} \frac{(-1)}{(s-1)^2}$$

$$= -\frac{d}{ds} \frac{(-1)(-2)}{(s-1)^3}$$

$$= -\frac{(-1)(-2)(-3)}{(s-1)^4}$$

$$= \frac{6}{(s-1)^4}.$$

7.9 : t দ্বারা ভাগ কাণ্ডনের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of a function division by t]

উপর্যুক্ত-10 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) du.$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{F(t)}{t} = G(t) \dots (1)$$

$$\text{তবে } F(t) = tG(t) \dots (2)$$

$$\text{ধরি } L\{G(t)\} = g(s) \dots (3)$$

(2) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করিয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (2) then we get]

$$L\{F(t)\} = L\{tG(t)\}$$

$$\Rightarrow f(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds} g(s), \text{ যেহেতু } L\{t^n G(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} g(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} g(s) = -f(s)$$

উভয় পক্ষকে s এর সাপেক্ষে ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating both sides w.r.t. to s then we get]

$$g(s) = - \int_s^\infty f(u) du$$

$$\Rightarrow g(s) = \int_s^\infty f(u) du$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \int_s^\infty f(u) du, (3) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) du, (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

নোট : শুধু পদকে এমনভাবে নির্বাচন করা হইয়াছে যেন $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$.

উপর্যুক্ত-11 : দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^\infty f(u) du$, যেখানে ইন্টিগ্রালসময় অভিসারী। [Show that $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^\infty f(u) du$, Provided the integrals converge]

সমাধান : t দ্বারা ভাগ কাণ্ডনের ল্যাপলাস রূপান্তর হইল [Laplace transform of a function division by t is]

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) du$$

$$\text{বা } \int_0^\infty e^{-st} \frac{F(t)}{t} dt = \int_s^\infty f(u) du \dots (1)$$

উভয় পক্ষ limit $s \rightarrow 0+$ লইয়া পাই [Taking limit $s \rightarrow 0+$ on both sides, we get]

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \int_0^\infty e^{-st} \frac{F(t)}{t} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^\infty f(u) du$$

$$\text{বা } \int_0^\infty (\lim_{s \rightarrow 0+} e^{-st}) \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^\infty f(u) du$$

$$\text{বা } \int_0^\infty 1 \cdot \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^\infty f(u) du$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^\infty f(u) du.$$

উদাহরণ : প্রমাণ কর [Prove that] $\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \frac{\pi}{2}, a > 0.$ [NUH-2000]

সমাধান : ধরি $F(t) = \sin at$... (1)

$$\Rightarrow L\{F(t)\} = L\{\sin at\}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \dots (2)$$

আমরা জানি [We know]

$$\int_0^{\infty} \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} f(u) du$$

$$\text{বা } \int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{a}{u^2 + a^2} du. \quad (1) \text{ নং এবং } (2) \text{ নং ঘোষণা।}$$

$$= a \cdot \frac{1}{a} \left[\tan^{-1} \frac{u}{a} \right]_0^{\infty}$$

$$= \tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

7.10 : ইনটিগ্রালের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of integrals]

উপর্যুক্ত-12 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that.

$$(i). \quad L\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s}.$$

[NUH-2006, NU(Pass)-2009, DUH-1987, 1988]

$$(ii). \quad L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

[NUH-2003, 2005, 2006, 2008, NU(Pass)-2007, 2009]

প্রমাণ-(i) : ধরি $G(t) = \int_0^t F(u) du \dots (1)$

$$\Rightarrow G(0) = \int_0^0 F(u) du = 0 \dots (2)$$

$$\Rightarrow G'(t) = F(t)$$

$$\Rightarrow L\{G'(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - G(0) = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - 0 = L\{F(t)\}, \quad (2) \text{ নং ঘোষণা।}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \frac{L\{F(t)\}}{s}$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{L\{F(t)\}}{s}, \quad (1) \text{ নং ঘোষণা।}$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s}, \quad \text{যেহেতু } L\{F(t)\} = f(s).$$

প্রমাণ-(ii) : ধরি $F(t) = \sin t \dots (1)$

$$\Rightarrow L\{F(t)\} = L\{\sin t\}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \dots (2)$$

আবর্ত ধরি [Again we put]

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \dots (3)$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f(u) du$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du, \quad (2) \text{ নং ঘোষণা।}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_s^{1/\epsilon} \frac{du}{u^2 + 1}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\tan^{-1} u \right]_s^{1/\epsilon}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\tan^{-1}(1/\epsilon) - \tan^{-1}s)$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{1/\epsilon - s}{1 + (1/\epsilon)s}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{1 - \epsilon s}{\epsilon + s}$$

$$\Rightarrow G(L(t)) = \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow g(s) = \tan^{-1} \frac{1}{s} \dots (4) \quad (\text{ধরি})$$

কিন্তু আমরা জানি [But we know]

$$\begin{aligned} L\left(\int_0^t G(u) du\right) &= \frac{g(s)}{s} \\ \Rightarrow L\left(\int_0^t \frac{F(u)}{u} du\right) &= \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}, \quad (3) \text{ নং এবং } (4) \text{ নং দ্বারা।} \\ \Rightarrow L\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right) &= \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}. \quad (1) \text{ নং দ্বারা।} \end{aligned}$$

প্রমাণিত।

বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর [The Inverse Laplace Transform]

7.11 : সংজ্ঞা : যদি $L(F(t)) = F(s)$ হয়, তবে $F(t)$ কে $f(s)$ এর বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর বলা হয় এবং ইহাকে $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেখানে L^{-1} কে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর অপারেটর বলা হয়।

Definition : If $L(F(t)) = f(s)$ then $F(t)$ is called an inverse Laplace transform of $f(s)$ and it is denoted by $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$.

where L^{-1} is called the **invrese Laplace transformation operator.**

$$\begin{aligned} \text{উদাহরণ : (i). } L\{e^{at}\} &= \frac{1}{s-a} \Rightarrow e^{at} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} \\ \text{(ii). } L\{\cos at\} &= \frac{s}{s^2+a^2} \Rightarrow \cos at = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} \\ \text{(iii). } L\{t^2\} &= \frac{2!}{s^3} \Rightarrow t^2 = L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} \end{aligned}$$

7.12 : বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তরের ক্রিপ্ট ধর্ম [Some properties of inverse Laplace transform]

উপপাদ্য-13 : যদি $L(F_1(t)) = f_1(s)$ এবং $L(F_2(t)) = f_2(s)$ হয় এবং c_1, c_2 সংখ্যা হইলে

$$\begin{aligned} L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} &= c_1 L^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{f_2(s)\} \\ &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t). \end{aligned}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that]

$$L\{F_1(t)\} = f_1(s) \dots (1) \Rightarrow F_1(t) = L^{-1}\{f_1(s)\} \dots (2)$$

$$\text{এবং } L\{F_2(t)\} = f_2(s) \dots (3) \Rightarrow F_2(t) = L^{-1}\{f_2(s)\} \dots (4)$$

এখন $L\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 L\{F_1(t)\} + c_2 L\{F_2(t)\}$. উপপাদ্য-1 র দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s), (1) \text{ নং এবং } (3) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) = L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\}$$

$$\Rightarrow c_1 L^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{f_2(s)\} = L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\}$$

(2) নং এবং (4) নং দ্বারা।

অর্থাৎ $L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{f_2(s)\}$.

$$\text{উদাহরণ : নির্ণয় কর } L^{-1}\left\{\frac{5}{s-3} - \frac{2s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+4} + \frac{1}{s^4}\right\}$$

$$\text{সমাধান : } L^{-1}\left\{\frac{5}{s-3} - \frac{2s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+4} + \frac{1}{s^4}\right\}$$

$$= 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} + \frac{3}{2} L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} + \frac{1}{3!} L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^3+1}\right\}$$

$$= 5e^{3t} - 2\cos 5t + \frac{3}{2} \sin 2t + \frac{1}{6} t^3.$$

7.13 : প্রথম স্থানান্তরের ধর্ম [First translation or shifting property]

উপপাদ্য-14 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে

$$[If L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \text{ then show that}] L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t).$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that]

$$L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow f(s) = L\{F(t)\}$$

$$\text{আমরা জানি [We know] } L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\text{বা } f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \dots (1)$$

(1) নং এ s এর স্থলে $s-a$ স্থাপন করিয়া পাই [Replacing s by $s-a$ in (1)]

তখন we get]

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t) dt$$

$$\text{বা } f(s-a) = \int_0^\infty e^{-st} \{e^{at} F(t)\} dt$$

$$\text{বা } f(s-a) = L\{e^{at} F(t)\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t). \text{ প্রমাণিত।}$$

উদাহরণ : প্রমাণ কর

$$(i). \quad L^{-1} \left\{ \frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20} \right\} = 2e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t).$$

[NU(Pass)-2008, DUS-1989]

$$(ii). \quad L^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2 + 6s + 25} \right\} = e^{-3t} \left[\cos 4t - \frac{1}{2} \sin 4t \right]$$

$$(iii). \quad L^{-1} \left\{ \frac{4s + 12}{s^2 + 8s + 16} \right\} = 4e^{-4t}(1 - t) \quad [\text{NUH-2006}]$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান-(i)} : & L^{-1} \left\{ \frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{6s - 4}{(s - 2)^2 + 4^2} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{6(s - 2) + 8}{(s - 2)^2 + 4^2} \right\} \\ &= 6L^{-1} \left\{ \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 4^2} \right\} + 2L^{-1} \left\{ \frac{4}{(s - 2)^2 + 4^2} \right\} \\ &= 6e^{2t} \cos 4t + 2e^{2t} \sin 4t \\ &= 2e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান-(ii)} : & L^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2 + 6s + 25} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{(s + 3) - 2}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} - \frac{2}{4} L^{-1} \left\{ \frac{4}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} \\ &= e^{-3t} \cos 4t - \frac{1}{2} e^{-3t} \sin 4t \\ &= e^{-3t} \left(\cos 4t - \frac{1}{2} \sin 4t \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান-(iii)} : & L^{-1} \left\{ \frac{4s + 12}{s^2 + 8s + 16} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{4s + 12}{(s + 4)^2} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{4(s + 4) - 4}{(s + 4)^2} \right\} \\ &= 4L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 4} \right\} - 4L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 4)^2} \right\} \\ &= 4e^{-4t} - 4te^{-4t} \\ &= 4e^{-4t}(1 - t). \end{aligned}$$

7.14 : দ্বিতীয় স্থানান্তরের ধর্ম [Second translation or shifting property]

উপপাদ্য-15 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t - a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

প্রমাণ : যদি $e^{-as} f(s) = L[G(t)]$

$$\text{তবে } L^{-1}\{e^{-as} f(t)\} = G(t) = \begin{cases} F(t - a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

$$\text{কাজেই } L[G(t)] = \int_0^\infty e^{-st} G(t) dt$$

$$\text{• বা } L[G(t)] = \int_0^a e^{-st} G(t) dt + \int_a^\infty e^{-st} G(t) dt$$

$$\text{বা } L[G(t)] = \int_0^a e^{-st} 0 dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t - a) dt$$

$$\text{বা } L[G(t)] = 0 + \int_a^\infty e^{-st} F(t - a) dt \dots (1)$$

যদি $t - a = u$ তবে $dt = du$

সীমা : যদি $t = a$ তবে $u = 0$

যদি $t = \infty$ তবে $u = \infty$

we put $t - a = u$ then $dt = du$

Limits : If $t = a$ then $u = 0$

If $t = \infty$ then $u = \infty$

$$\therefore (1) \Rightarrow L[G(t)] = \int_0^\infty e^{-s(a+u)} F(u) du$$

$$\text{বা } L[G(t)] = e^{-sa} \int_0^\infty e^{-su} F(u) du$$

$$\text{বা } L[G(t)] = e^{-as} \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\text{বা } L[G(t)] = e^{-as} L[F(t)]$$

$$\text{বা } L[G(t)] = e^{-as} f(s)$$

$$\text{বা } G(t) = L^{-1}\{e^{-as} f(s)\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = G(t) = \begin{cases} F(t - a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t - a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases} \text{ অসমিত।}$$

উদাহরণ : দেখাও যে [Show that]

$$(i). \quad L^{-1} \left\{ \frac{8e^{-3s}}{s^2 + 4} \right\} = \begin{cases} 4\sin 2(t-3) & , t > 3 \\ 0 & , t < 3 \end{cases}$$

$$(ii). \quad L^{-1} \left\{ \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2 + 9} \right\} = \begin{cases} \cos 3t & , t > 2\pi/3 \\ 0 & , t < 2\pi/3 \end{cases}$$

$$(iii). \quad L^{-1} \left\{ \frac{e^{-5s}}{(s-2)^4} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)} & , t > 5 \\ 0 & , t < 5 \end{cases}$$

সমাধান-(i) : আমরা জানি [We know]

$$L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 2^2} \right\} = \sin 2t$$

$$\text{বা } 4L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 2^2} \right\} = 4\sin 2t$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{8e^{-3s}}{s^2 + 4} \right\} = \begin{cases} 4\sin 2(t-3) & , t > 3 \\ 0 & , t < 3 \end{cases}$$

সমাধান-(ii) : আমরা জানি [We know]

$$L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 3^2} \right\} = \cos 3t$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2 + 9} \right\} = \begin{cases} \cos 3(t - 2\pi/3) & , t > 2\pi/3 \\ 0 & , t < 2\pi/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2 + 9} \right\} = \begin{cases} \cos 3t & , t > 2\pi/3 \\ 0 & , t < 2\pi/3 \end{cases}$$

সমাধান-(iii) : আমরা জানি [We know]

$$L[t^3] = \frac{3!}{s^4}$$

$$\Rightarrow L[e^{2t} t^3] = \frac{6}{(s-2)^4}$$

$$\Rightarrow e^{2t} t^3 = L^{-1} \left\{ \frac{6}{(s-2)^4} \right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^4} \right\} = \frac{1}{6} e^{2t} t^3$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{e^{-5s}}{(s-2)^4} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{2(t-5)} (t-5)^3 & , t > 5 \\ 0 & , t < 5 \end{cases}$$

৭.15 : কেল পরিবর্তনের ধর্ম [Change of scale property]

উপপাদ্য-16 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a} F(t/a).$$

প্রমাণ : আমরা জানি [We know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$\Rightarrow f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

s এর পরিবর্তে as বসাইয়া পাই [Replacing s by as then we get]

$$f(as) = \int_0^\infty e^{-ast} F(t) dt \dots (1)$$

ধরি $at = u$ তাহে $dt = \frac{du}{a}$ | we put $at = u$ then $dt = \frac{du}{a}$

সীমা : যদি $t = 0$ হয়, তবে $u = 0$ | Limits : If $t = 0$ then $u = 0$

যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$ | If $t = \infty$ then $u = \infty$

$$\therefore (1) \Rightarrow f(as) = \int_0^\infty e^{-su} F(u/a) \frac{du}{a}$$

$$\Rightarrow f(as) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-su} F(u/a) du$$

$$\Rightarrow f(as) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-st} F(t/a) dt$$

$$\Rightarrow f(as) = \frac{1}{a} L\{F(t/a)\}$$

$$\Rightarrow f(as) = L\left\{ \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right) \right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right), \text{ প্রমাণিত।}$$

উদাহরণ : প্রমাণ কর

$$(i). \quad L^{-1} \left\{ \frac{4}{4s^2 + 16} \right\} = \frac{1}{2} \sin 2t \quad (ii). \quad L^{-1} \left\{ \frac{as}{a^2 s^2 + b^2} \right\} = \frac{1}{a} \cos \frac{bt}{a}$$

সমাধান-(i) : ধরি $F(t) = \sin 4t \dots (1)$

আমরা জানি [we know]

$$L\{\sin 4t\} = \frac{4}{s^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{4}{s^2 + 16}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 16}\right\}$$

s এর পরিবর্তে 2s বসাইয়া পাই [Replacing s by 2s, we get]

$$L^{-1}\{f(2s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{(2s)^2 + 16}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} F\left(\frac{t}{2}\right) = L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2 + 16}\right\}, \text{কেল পরিবর্তনের ধর্মের দ্বারা।$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{4t}{2}\right) = L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2 + 16}\right\}, (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2 + 16}\right\} = \frac{1}{2} \sin 2t. \text{ প্রমাণিত।}$$

সমাধান-(ii) : ধরি $F(t) = \cos bt \dots (1)$

আমরা জানি [We know]

$$L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + b^2}\right\}$$

s এর পরিবর্তে as বসাইয়া পাই [Replacing s by as, we get]

$$L^{-1}\{f(as)\} = L^{-1}\left\{\frac{as}{(as)^2 + b^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right) = L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2 s^2 + b^2}\right\}, \text{কেল পরিবর্তনের ধর্মের দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cos(bt/a) = L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2 s^2 + b^2}\right\}, (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2 s^2 + b^2}\right\} = \frac{1}{a} \cos(bt/a).$$

7.16 : অন্তরীকরণের বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর [Inverse Laplace transform of derivatives]

উপরান্ত-17 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [$f L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{t^n f(s)\} = (-1)^n t^n F(t).$$

প্রমাণ : আমরা জানি, যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে [we know. if $L\{F(t)\} = f(s)$ then]

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$$

$$\Rightarrow L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^n L\{t^n F(t)\} = (-1)^n (-1)^n f^n(s)$$

$$\Rightarrow L\{(-1)^n t^n F(t)\} = (-1)^{2n} f^n(s)$$

$$\Rightarrow f^n(s) = L\{(-1)^n t^n F(t)\}, \text{ যেহেতু } 2n \text{ জোড়।}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f^n(s)\} = (-1)^n t^n F(t). \text{ প্রমাণিত।}$$

$$\text{উদাহরণ : প্রমাণ কর } L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{ts \sin at}{2a} \quad [\text{NUH-2007, DUS-1986}]$$

$$\text{সমাধান : ধরি } F(t) = \frac{\sin at}{a} \dots (1)$$

আমরা জানি [We know]

$$L\left\{\frac{\sin at}{a}\right\} = \frac{1}{s^2 + a^2} = f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2 + a^2} = f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 + a^2}\right) = \frac{d}{ds} f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{-2s}{(s^2 + a^2)^2} = f'(s)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2} f'(s)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2} L^{-1}\{f'(s)\}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\} = -\frac{1}{2} (-1)^1 t F(t), \text{ যেহেতু } L^{-1} \{t^n(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{\sin at}{a}, (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\} = \frac{ts \sin at}{2a}, \text{ অমিতি।}$$

7.17 : ইনভিয়েলের বিগৃহীত ল্যাপলাস রূপান্তর [Inverse Laplace transform of integrals]

উপপাদ্য-18 : যদি $L^{-1} \{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে

$$[\text{If } L^{-1} \{f(s)\} = F(t) \text{ then show that}] L^{-1} \left\{ \int_s^\infty f(u) du \right\} = \frac{F(t)}{t}.$$

অমাধ্য : আমরা জানি, যদি $L[F(t)] = f(s)$ হয়, তবে [We know, if $L[F(t)] = f(s)$ then]

$$L \left\{ \frac{F(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty f(u) du$$

$$\Rightarrow \frac{F(t)}{t} = L^{-1} \left\{ \int_s^\infty f(u) du \right\}$$

$$\text{i.e. } L^{-1} \left\{ \int_s^\infty f(u) du \right\} = \frac{F(t)}{t}. \text{ অমিতি।}$$

উদাহরণ : দেখাও যে $L^{-1} \left\{ \int_s^\infty \frac{du}{u^2(u^2 + 1)} \right\} = \frac{t - \sin t}{t}$.

$$\text{সমাধান : ধরি } f(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \{f(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} \right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \{f(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} \right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \{f(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \{f(s)\} = t - \sin t = F(t) \dots (1)$$

$$\therefore L^{-1} \left\{ \int_s^\infty \frac{1}{u^2(u^2 + 1)} du \right\} = \frac{F(t)}{t}, \text{ উপপাদ্য 18 এ সাহায্যে।}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \int_s^\infty \frac{du}{u^2(u^2 + 1)} \right\} = \frac{t - \sin t}{t}, (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

7.18 : s^n দ্বারা গুণ [Multiplication by s^n]

উপপাদ্য-19 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ এবং $F(0) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ and $F(0) = 0$ then show that]

$$L^{-1} \{sf(s)\} = F'(t).$$

অমাধ্য : আমরা জানি [We know]

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0)$$

$$\Rightarrow L[F'(t)] = sf(s) - 0$$

$$\Rightarrow [F'(t)] = L^{-1} \{sf(s)\}$$

$$\text{i.e. } L^{-1} \{sf(s)\} = F'(t) = \frac{d}{dt} F(t). \text{ অমিতি।}$$

উদাহরণ : যদি $L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} ts \sin t$ হয়, তবে $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : দেওয়া আছে } L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} ts \sin t$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ s \cdot \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{2} ts \sin t \right), \text{ উপপাদ্য 19 দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{(s^2 + 1) - 1}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (ts \sin t)$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} (1 \cdot \sin t + t \cos t)$$

$$\Rightarrow \sin t - L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} (\sin t + t \cos t),$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \sin t - \frac{1}{2} (\sin t + t \cos t)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t).$$

7.19 : s দ্বারা ভাগ [Division by s]

উপপাদ্য-20 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [$\{f L^{-1}\{f(s)\} = F\}$] then show that]

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u) du.$$

অমাখ : ধরি $G(t) = \int_0^t F(u) du \dots (1)$ তবে

$$\therefore G'(t) = F(t) \text{ এবং } G(0) = \int_0^0 F(u) du = 0$$

$$\Rightarrow L\{G'(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - G(0) = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - 0 = f(s)$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s}$$

$$\Rightarrow G(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\}$$

$$\text{i.e. } L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u) du, (1) \text{ নং দ্বারা। অমাখিত।}$$

উপপাদ্য-21 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [$\{f L^{-1}\{f(s)\} = F\}$] then show that]

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u) du dv.$$

অমাখ : ধরি $G(t) = \int_0^t \int_0^v F(u) du dv \dots (1)$

তাই হইলে $G'(t) = \int_0^t F(u) du \dots (2)$ এবং $G''(t) = F(t) \dots (3)$

$$\text{এবং } G(0) = \int_0^0 \int_0^v F(u) du dv = 0$$

$$G'(0) = \int_0^0 F(u) du = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } G(0) = G'(0) = 0 \dots (4)$$

(3) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (3) then we get]

$$L\{G''(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow s^2 L\{G(t)\} - sG(0) - G'(0) = f(s)$$

$$\Rightarrow s^2 L\{G(t)\} - 0 - 0 = f(s), (4) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s^2}$$

$$\Rightarrow G(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\}$$

$$\text{i.e. } L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u) du dv. (1) \text{ নং দ্বারা। (অমাখিত)}$$

$$\text{নেট-1 : } L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v f(u) du dv \text{ কে নিম্নরূপেও লিখা যায়।}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^t F(t) dt dt$$

$$\text{নেট-2 : } L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n$$

উদাহরণ : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH-2005]

সমাধান : আমরা জানি [We know]

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t.$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \sin t dt dt dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t [-\cos]_0^t dt dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t (1 - \cos t) dt dt$$

$$= \int_0^t [t - \sin t]_0^t dt = \int_0^t (t - \sin t) dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + \cos t \right]_0^t = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

7.20 : কনভলিউশনের ধর্ম [Convolution property] :

উপর্যুক্ত-22 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ হয়, তবে দেখাও (If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ then show that)

$$L^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du.$$

[NUH-2005, 2009]

প্রমাণ : আমরা প্রমাণ করিতে চাই [We want to prove that]

$$L^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du$$

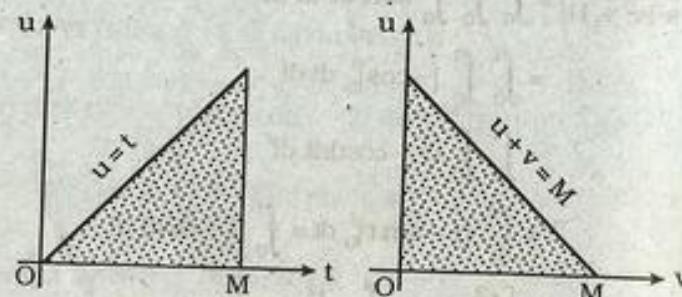
ইহার জন্য আমাদের দেখাইতে হবে [For this we shall have to show that]

$$f(s)g(s) = L\left\{\int_0^t F(u)G(t-u) du\right\}$$

যখন $f(s) = L\{F(t)\}$ এবং $g(s) = L\{G(t)\}$, [where $f(s) = L\{F(t)\}$ and $g(s) = L\{G(t)\}$].

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By definition of Laplace transform, we get]

$$\begin{aligned} L\left\{\int_0^t F(u)G(t-u) du\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \left\{\int_0^t F(u)G(t-u) du\right\} dt \\ &= \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^\infty e^{-st} F(u)G(t-u) du dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{t=0}^M \int_{u=0}^t e^{-st} F(u)G(t-u) du dt \dots (1) \end{aligned}$$



ধরি $t-u=v$, বা $t=u+v \Rightarrow dt=dv$

$$\begin{aligned} \therefore (1) &\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)G(t-u) du\right\} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \int_0^{M-v} e^{-su} F(u)G(v) du dv \\ &\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)G(t-u) du\right\} = \int_0^\infty e^{-su} F(u) du \int_0^\infty e^{-sv} G(v) dv \\ &\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)G(t-u) du\right\} = f(s)g(s) \\ &\Rightarrow \int_0^t F(u)G(t-u) du = L^{-1}\{f(s)g(s)\} \\ \therefore L^{-1}\{f(s)g(s)\} &= \int_0^t F(u)G(t-u) du. \quad (\text{প্রমাণিত}) \\ \text{নেট : } L^{-1}\{f(s)g(s)\} &= \int_0^t G(u)F(t-u) du. \\ \text{উদাহরণ : } L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^3}\right\} &\text{ নির্ণয় কর।} \\ \text{সমাধান : } \text{ধরি } f(s) = \frac{1}{s^2} \text{ এবং } g(s) = \frac{1}{(s+1)^3}. & \\ \therefore F(t) = L^{-1}\{f(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \\ \text{এবং } G(t) = L^{-1}\{g(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = \frac{t^2}{2!} e^{-t} = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \\ \therefore L^{-1}\{f(s)g(s)\} &= \int_0^t G(u)F(t-u) du \\ &\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^3}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2} u^2 e^{-u} (t-u) du \\ &\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^3}\right\} = \frac{1}{2} \int_0^t (u^2 t - u^3) e^{-u} du \\ &= \frac{1}{2} [(u^2 t - u^3)(-e^{-u}) - (2ut - 3u^2)(e^{-u}) + (2t - 6u)(-e^{-u}) - (-6)e^{-u}]_0^t \\ &= \frac{1}{2} [(0 - (-t^2)e^{-t} + (-4t)(-e^{-t}) + 6e^{-t}) - (2t(-1) + 6)] \\ &= \frac{1}{2} (t^2 e^{-t} + 4te^{-t} + 6e^{-t} + 2t - 6) \\ &= \frac{1}{2} t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 3e^{-t} + t - 3. \end{aligned}$$

7.21 : আধিক অন্তরকে ল্যাপলাস রূপান্তরের অয়োগ [Application of Laplace transform in partial derivative] :

যদি অদ্বত ফাংশন $U(x, t)$ সংজ্ঞায়িত হয় $a \leq x \leq b, t > 0$ এর জন্য তবে নির্ণয় কর [If the given function $U(x, t)$ defined for $a \leq x \leq b, t > 0$ then find]

$$(i). L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\}, \quad (ii). L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\}, \quad (iii). L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}, \quad (iv). L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

সমাধান-(i) : ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u \cdots (1)$

$$\begin{aligned} \therefore L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial U}{\partial t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) dt \\ &= \left[e^{-st} U(x, t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} U(x, t) dt \\ &= 0 - U(x, 0) + sL\{U(x, t)\} \\ &= su(x, s) - U(x, 0); \text{ by (1)} \\ &= su - U(x, 0). \end{aligned}$$

সমাধান-(ii) : ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$.

$$\begin{aligned} \therefore L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t) dt \\ \Rightarrow L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} &= \left[e^{-st} \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) dt \\ &= \left[e^{-st} U_t(x, t) \right]_0^\infty + s \left[\left[e^{-st} U(x, t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} U(x, t) dt \right] \\ &= 0 - U_t(x, 0) + s[0 - U(x, 0)] + s^2 L\{U(x, t)\} \\ &= -U_t(x, 0) - sU(x, 0) + s^2 u(x, s) \\ &= s^2 u - sU(x, 0) - U_t(x, 0) \end{aligned}$$

সমাধান-(iii) : ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) dt \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-st} U(x, t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} &= \frac{d}{dx} L\{U(x, t)\} \\ &= \frac{d}{dx} u(x, s) \\ &= \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

সমাধান-(iv) : ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$

$$\begin{aligned} \therefore L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) dt \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-st} U(x, t) dt \\ &= \frac{d^2}{dx^2} L\{U(x, t)\} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} u(x, s) \\ &= \frac{d^2 u}{dx^2}. \end{aligned}$$

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

মাধ্যম-1 : $4e^{2t}, e^{-t}, \sin t, t^2 e^t$ এবং $\cos 2t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয়

[DUS-1992]

সমাধান : সংজ্ঞানুসারে আমরা লিখিতে পারি [By definition we can write]

$$\begin{aligned} (4e^{2t}) &= \int_0^\infty e^{-st} 4e^{2t} dt = 4 \int_0^\infty e^{-(s-2)t} dt \\ &= 4 \left[\frac{e^{-(s-2)t}}{-(s-2)} \right]_0^\infty = \frac{-4}{s-2} (0-1) \\ &= \frac{4}{s-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-t}) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-(s+1)t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{(s+1)} (0-1) \\ &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\{\sin t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t \, dt \\ &= \left[\frac{e^{-st}(-s \sin t - \cos t)}{s^2 + 1} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} [0 - e^0(s \sin 0 - \cos 0)] \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

আমরা জানি $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3}$

$$\Rightarrow L\{e^t t^2\} = \frac{2!}{(s-1)^3}$$

$$\Rightarrow L\{e^t t^2\} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$\begin{aligned} L\{\cos 2t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt \\ &= \left[\frac{e^{-st}(-s \cos 2t + 2 \sin 2t)}{s^2 + 2^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s^2 + 4} [0 - e^0(-s \cos 0 + 2 \sin 0)] \\ &= \frac{s}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

উদাহরণ-2. মান নির্ণয় কর [Find] (i) $L\{t^2 \sin t\}$

[NUH-2008]

(ii). $L\{t^2 \sin 3t\}$. [NUH-2000, 2008]

সমাধান-2(i) : আমরা জানি [We know]

$$\begin{aligned} L\{\sin t\} &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ \Rightarrow f(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \dots (1) \\ \therefore L\{t^2 \sin t\} &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s) \\ &= \frac{d}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right); (1) \text{ নঁ দ্বাৰা } \\ &= \frac{d}{ds} \frac{d}{ds} (s^2 + 1)^{-1} \\ &= \frac{d}{ds} (-1) \cdot (s^2 + 1)^{-2} (2s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\{t^2 \sin t\} &= (-1) \cdot 2 \frac{d}{ds} [s(s^2 + 1)^{-2}] \\ &= (-1) \cdot 2 [(s^2 + 1)^{-2} + s(-2)(s^2 + 1)^{-3} 2s] \\ &= -2 \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} - \frac{4s^2}{(s^2 + 1)^3} \right] \\ &= -2 \left[\frac{s^2 + 1 - 4s^2}{(s^2 + 1)^3} \right] = \frac{-2(-3s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^3} \\ &= \frac{2(3s^2 - 1)}{(s^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

সমাধান-2(ii) : আমরা জানি [We know]

$$L\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2 + 3^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{3}{s^2 + 9} \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \therefore L\{t^2 \sin 3t\} &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s) \\ &= \frac{d}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{s^2 + 9} \right); \text{ by (1)} \\ &= \frac{d}{ds} \frac{d}{ds} [3(s^2 + 9)^{-1}] \\ &= \frac{d}{ds} [3(-1)(s^2 + 9)^{-2} \cdot 2s] \\ &= -6 \frac{d}{ds} [s(s^2 + 9)^{-2}] \\ &= -6[1(s^2 + 9)^{-2} + s(-2)(s^2 + 9)^{-3} 2s] \\ &= -6 \left[\frac{1}{(s^2 + 9)^2} - \frac{4s^2}{(s^2 + 9)^3} \right] \\ &= -6 \left[\frac{s^2 + 9 - 4s^2}{(s^2 + 9)^3} \right] = \frac{-6(-3s^2 + 9)}{(s^2 + 9)^3} \\ &= \frac{18(s^2 - 3)}{(s^2 + 9)^3}. \end{aligned}$$

উদাহরণ-3 : মান নির্ণয় কর :

$$3(i). \quad L^{-1} \left\{ \frac{8}{s^2 - 6s + 25} \right\}$$

$$3(ii). \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 - 1)} \right\}$$

$$3(iii). \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\}$$

[DUH-1987]

[NUH-2008]

[NUH-2002, 2008]

$$3(iv). \quad L^{-1} \left\{ \frac{7s + 12}{s^2 + 9} \right\}$$

[NUH-2002]

$$3(v). \quad L^{-1} \left\{ \frac{2s - 11}{(s+2)(s-3)} \right\}$$

[NUH-2006, 2009]

$$\text{সমাধান-3(i)} : L^{-1} \left\{ \frac{8}{s^2 - 6s + 25} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{8}{(s-3)^2 + 4^2} \right\}$$

$$= 2L^{-1} \left\{ \frac{4}{(s-3)^2 + 4^2} \right\}$$

$$= 2e^{3t} \sin 4t.$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান-3(ii)} : L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 - 1)} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{1}{s} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - 1} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \\ &= \cos ht - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান-3(iii)} : L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} \\ &= 1 - \cos t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান-3(iv)} : L^{-1} \left\{ \frac{7s + 12}{s^2 + 9} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{7s}{s^2 + 9} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{12}{s^2 + 9} \right\} \\ &= 7L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 3^2} \right\} + 4L^{-1} \left\{ \frac{3}{s^2 + 3^2} \right\} \\ &= 7 \cos 3t + 4 \sin 3t \end{aligned}$$

সমাধান-3(v) :

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{2s - 11}{(s+2)(s-3)} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{-4 - 11}{(s+2)(-2-3)} + \frac{6 - 11}{(3+2)(s-3)} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s-3} \right\} \\ &= 3L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} \\ &= 3e^{-2t} - e^{3t}. \end{aligned}$$

$$\text{উদাহরণ-3(vi)} : L^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 6s + 5}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6} \right\} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান} : L^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 6s + 5}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 6s + 5}{s^2(s-1) - 5s(s-1) + 6(s-1)} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 6s + 5}{(s-1)(s^2 - 5s + 6)} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 6s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{2 - 6 + 5}{(s-1)(-1)(-2)} + \frac{8 - 12 + 5}{1(s-2)(-1)} + \frac{18 - 18 + 5}{2.1(s-3)} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{s-2} + \frac{5}{2(s-3)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} + \frac{5}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^t - e^{2t} + \frac{5}{2} e^{3t}. \end{aligned}$$

$$\text{উদাহরণ-3(vii)} : L^{-1} \left\{ \frac{6}{2s-3} - \frac{3+4s}{9s^2-16} + \frac{8-6s}{16s^2+9} \right\} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান} : L^{-1} \left\{ \frac{6}{2s-3} - \frac{3+4s}{9s^2-16} + \frac{8-6s}{16s^2+9} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{6}{2s-3} - \frac{3}{9s^2-16} - \frac{4s}{9s^2-16} + \frac{8}{16s^2+9} - \frac{6s}{16s^2+9} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{6}{2(s-3/2)} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{3}{9(s^2-16/9)} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{4s}{9(s^2-16/9)} \right\} \\ &\quad + L^{-1} \left\{ \frac{8}{16(s^2+9/16)} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{6s}{16(s^2+9/16)} \right\} \\ &= 3L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3/2} \right\} - \frac{1}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2-(4/3)^2} \right\} - \frac{4}{9} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2-(4/3)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+(3/4)^2} \right\} - \frac{3}{8} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+(3/4)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3L^{-1} \left\{ \frac{1}{s - 3/2} \right\} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4/3} L^{-1} \left\{ \frac{4/3}{s^2 - (4/3)^2} \right\} - \frac{4}{9} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - (4/3)^2} \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3/4} L^{-1} \left\{ \frac{3/4}{s^2 + (3/4)^2} \right\} - \frac{3}{8} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + (3/4)^2} \right\} \\
 &= 3e^{3t/2} - \frac{1}{4} \sinh \frac{4t}{3} - \frac{4}{9} \cosh \frac{4t}{3} + \frac{2}{3} \sin \frac{3t}{4} - \frac{3}{8} \cos \frac{3t}{4}.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ-৩(viii) : $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} \right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : আংশিক ভগ্নাংশের কভার আপ নিয়ম অনুসারে পাই [By the rule of cover up partial fraction, we get]

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} &= \frac{1}{(s+2)^2(-2-2)} + \frac{A}{s+2} + \frac{1}{(2+2)^2(s-2)} \\
 \text{বা } \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} &= \frac{1}{-4(s+2)^2} + \frac{A}{s+2} + \frac{1}{16(s-2)} \dots (1)
 \end{aligned}$$

এখন উভয় পক্ষ $s = 0$ বসাইয়া পাই [Now putting $s = 0$ on both sides then we get]

$$\frac{1}{2^2(-2)} = \frac{1}{-4(2)^2} + \frac{A}{2} + \frac{1}{16(-2)}$$

$$\text{বা } \frac{A}{2} = \frac{1}{-8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$\text{বা } \frac{A}{2} = \frac{-4 + 2 + 1}{32}$$

$$\text{বা } \frac{A}{2} = \frac{-1}{32} \Rightarrow A = -\frac{1}{16}$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{-1/4}{(s+2)^2} + \frac{-1/16}{s+2} + \frac{1/16}{s-2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করিয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{-1/4}{(s+2)^2} + \frac{-1/16}{s+2} + \frac{1/16}{s-2} \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} - \frac{1}{16} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + \frac{1}{16} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} - \frac{1}{16} e^{-2t} + \frac{1}{16} e^{2t} \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\text{সমস্যা জানি } L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow L\{te^{-2t}\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+2} \right)$$

$$= L\{te^{-2t}\} = (-1) \frac{(-1)}{(s+2)^2}$$

$$\Rightarrow te^{-2t} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} \dots (3)$$

এখন (2) নং এবং (3) নং হইতে পাই [From (2) and (3), we get]

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} \right\} = -\frac{1}{4} te^{-2t} - \frac{1}{16} e^{-2t} + \frac{1}{16} e^{2t}.$$

উদাহরণ-৪ : $L^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : ধরি } \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \dots (1)$$

$$\text{বা } 3s+1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1) \dots (2)$$

$$\text{বা } 3s+1 = As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C \dots (3)$$

এখন (2) নং এর উভয় পক্ষে $s = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $s = 1$ on both sides of (2), we get]

$$4 = A(2) + 0 \Rightarrow A = 2$$

(3) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এবং s এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই [Equating the coefficient of s^2 , s from both sides of (3), we get]

$$0 = A + B, \text{ বা } 0 = 2 + B \Rightarrow B = -2$$

$$\text{এবং } 3 = -B + C$$

$$\text{বা } 3 = 2 + C \Rightarrow C = 1$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}$$

এখন উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s-1} - \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} - 2L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \\
 &= 2e^t - 2\cos t + \sin t.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ-5 : নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর [Find the following inverse Laplace transforms]:

$$\begin{aligned}
 \text{(i). } L^{-1} \left\{ \frac{(s+1) e^{-as}}{s^2 + s + 1} \right\}, & \quad \text{(ii). } L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}} \right\}. \\
 \text{সমাধান-5(i) : } L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1/2)^2 + 3/4} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{(s+1/2) + 1/2}{(s+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \right\} \\
 &= e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \\
 &= \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \\
 \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{(s+1) e^{-as}}{s^2 + s + 1} \right\} &= \begin{cases} \frac{e^{-(t-a)/2}}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2} + \sin \frac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2} \right), & t > \pi \\ 0, & t < \pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

সমাধান-5(ii) : আমরা জানি [We know]

$$\begin{aligned}
 J_0(at) &= 1 - \frac{a^2 t^2}{2^2} + \frac{a^4 t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{a^6 t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \\
 \Rightarrow L[J_0(at)] &= L \left\{ 1 - \frac{a^2 t^2}{2^2} + \frac{a^4 t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{a^6 t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right\} \\
 \Rightarrow L[J_0(at)] &= L(1) - \frac{a^2}{2^2} L(t^2) + \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} L(t^4) - \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} L(t^6) + \dots \\
 \Rightarrow L[J_0(at)] &= \frac{1}{s} - \frac{a^2}{2^2 \cdot s^3} + \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot s^5} - \dots \\
 \Rightarrow L[J_0(at)] &= \frac{1}{s} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{s^2} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{a^2}{s^2} \right)^2 - \dots \right\} \\
 \Rightarrow L[J_0(at)] &= \frac{1}{s} \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right)^{-1/2} \\
 \Rightarrow L[J_0(at)] &= \frac{1}{s} \left(\frac{s^2}{s^2 + a^2} \right)^{1/2} \\
 \Rightarrow L[J_0(at)] &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}
 \end{aligned}$$

উভয় পক্ষকে a এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating both sides w. r. to a then we get]

$$\begin{aligned}
 L[tJ_0(at)] &= -\frac{1}{2} (s^2 + a^2)^{-3/2} \cdot 2a \\
 \text{বা } L[tJ_0(at)] &= \frac{-a}{(s^2 + a^2)^{3/2}} \\
 \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}} \right\} &= -\frac{t}{a} J_0(at) \\
 \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}} \right\} &= -\frac{t}{a} (-J_1(at)); \quad \text{যেহেতু } J_0(x) = -J_1(x) \\
 \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}} \right\} &= \frac{t J_1(at)}{a}.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ-6(i) : সমাধান কর [Solve] :

$$Y''(t) - 2Y'(t) - 8Y(t) = 0, Y(0) = 3, Y'(0) = 6. \quad [\text{NUH-2000}]$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) - 2Y'(t) - 8Y(t) = 0 \dots (1)$$

$$\text{এবং } Y(0) = 3, Y'(0) = 6 \dots (2)$$

* ধরি $L[Y(t)] = y(s)$, তবে $Y(t) = L^{-1}[y(s)]$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on (1) we get]

$$L[Y''(t)] - 2L[Y'(t)] - 8L[Y(t)] = 0$$

$$\text{বা } s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) - 2[sy(s) - Y(0)] - 8y(s) = 0$$

$$\text{বা } s^2 y(s) - 3s - 6 - 2[sy(s) - 3] - 8y(s) = 0$$

$$\text{বা } (s^2 - 2s - 8) y(s) - 3s - 6 + 6 = 0$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{3s}{(s-4)(s+2)}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{12}{6(s-4)} + \frac{-6}{6(s+2)}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$\begin{aligned} L^{-1}\{y(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}\right\} \\ \text{বা } Y(t) &= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ \text{বা } Y(t) &= 2e^{4t} + e^{-2t}. \end{aligned}$$

উদাহরণ-৮(ii) : সমাধান কর [Solve] :

$$Y''(x) - Y'(x) = x \text{ যখন } Y(0) = 2 \text{ এবং } Y'(0) = -3.$$

[DUS-1990]

সমাধান : অদল সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(x) - Y'(x) = x \dots (1)$$

$$\text{এবং } Y(0) = 2, Y'(0) = -3 \dots (2)$$

$$\text{ধরি } L\{Y(x)\} = y(s), \text{ তবে } Y(x) = L^{-1}\{y(s)\}$$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on (1), we get]

$$L\{Y''(x)\} - L\{Y'(x)\} = L(x)$$

$$\text{বা } s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - [sy(s) - Y(0)] = \frac{1}{s^2}$$

$$\text{বা } s^2y(s) - 2s + 3 - sy(s) + 2 = \frac{1}{s^2}. \quad (2) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } (s^2 - s)y(s) = \frac{1}{s^2} + 2s - 5$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - s)} + \frac{2s}{s^2 - s} - \frac{5}{s^2 - s}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{s^3(s-1)} + \frac{2}{s-1} - \frac{5}{s(s-1)} \dots (2)$$

$$\text{ধরি } \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-1} \dots (3)$$

$$\text{বা } \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{As^2(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s-1) + Ds^3}{s^3(s-1)}$$

$$\text{বা } 1 = As^2(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s-1) + Ds^3 \dots (4)$$

এখন (4) নং এ পর্যায়জন্মে $s = 0$ এবং $s = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $s = 0$ and $s = 1$ successively in (4) then we get]

$$1 = C(0-1) \Rightarrow C = -1$$

$$\text{এবং } 1 = D \cdot 1^3 \Rightarrow D = 1$$

এখন (4) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^3 এবং s^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই [Now equating the coefficients of s^3 and s^2 from both sides of (4) then we get]

$$0 = A + D, \quad \text{বা } A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$\text{এবং } 0 = -A + B, \quad \text{বা } B - (-1) = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$\therefore (3) \Rightarrow \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{-1}{s} + \frac{-1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s-1} \dots (5)$$

$$\text{এবং } \frac{5}{s(s-1)} = \frac{5}{s(0-1)} + \frac{5}{1(s-1)}$$

$$\text{বা } \frac{5}{s(s-1)} = -\frac{5}{s} + \frac{5}{s-1} \dots (6)$$

এখন (5) নং এবং (6) নং এর সাহায্যে (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [By using (5) and (6), (2) can be written as follows] :

$$y(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-1} + \frac{5}{s} - \frac{5}{s-1}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{4}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s-1}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর হইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s-1}\right\}$$

$$\text{বা } Y(x) = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$\text{বা } Y(x) = 4(1) - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - 2e^x, \text{ যেহেতু } L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore Y(x) = 4 - x - \frac{1}{2}x^2 - 2e^x.$$

~~উদাহরণ-6(iii)~~ : সমাধান কর [Solve] $Y''(t) + 9Y(t) = \cos 2t$ যদি $Y(0) = 1$ এবং $Y'(\pi/2) = -1$. [NUH-2000, NU(Pass)-2006, DUH-1993, 1986]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) + 9Y(t) = \cos 2t \dots (1)$$

$$\text{এবং } Y(0) = 1, Y(\pi/2) = -1 \dots (2)$$

$$\text{ধরি } L\{Y(t)\} = y(s), \text{ তবে } Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t)\} + 9L\{Y(t)\} = L\{\cos 2t\}$$

$$\text{বা } s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + 9y(s) = \frac{s}{s^2 + 4^2}$$

$$\text{বা } s^2 y(s) - s - Y'(0) + 9y(s) = \frac{s}{s^2 + 4}, \quad (2) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } (s^2 + 9)y(s) - s - a = \frac{s}{s^2 + 4}, \text{ যখন } a = Y'(0).$$

$$\text{বা } (s^2 + 9)y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + s + a$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} + \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{a}{s^2 + 9}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{5} \left(\frac{s}{s^2 + 4} - \frac{s}{s^2 + 9} \right) + \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{a}{s^2 + 9}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{a}{s^2 + 9}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{a}{s^2 + 9} \right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = \frac{1}{5} L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + 2^2} \right\} + \frac{4}{5} L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + 3^2} \right\} + \frac{a}{3} L^{-1}\left\{ \frac{3}{s^2 + 3^2} \right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{a}{3} \sin 3t \dots (2)$$

এখন (2) নং এ $t = \pi/2$ বসাইয়া পাই [Now putting $t = \pi/2$ in (2) then we get]

$$Y(\pi/2) = \frac{1}{5} \cos \pi + \frac{4}{5} \cos \frac{3\pi}{2} + \frac{a}{3} \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{বা } -1 = -\frac{1}{5} + 0 + \frac{a}{3}(-1). \quad (2) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } 1 = \frac{1}{5} + \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{4}{5}$$

$$\text{বা } (2) \Rightarrow Y(t) = \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{4}{5} \sin 3t.$$

~~উদাহরণ-6(iv)~~ : সমাধান কর [Solve] : $Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) = 4 \sin t$,

$$Y(0) = -2, Y'(0) = 1. \quad [\text{NUH-2001}]$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) = 4 \sin t \dots (1)$$

$$\text{এবং } Y(0) = -2, Y'(0) = 1 \dots (2)$$

$$\text{ধরি } L\{Y(t)\} = y(s) \text{ তবে } Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t)\} = L\{4 \sin t\}$$

$$\text{বা } L\{Y''(t)\} + 2L\{Y'(t)\} + L\{Y(t)\} = 4L\{\sin t\}$$

$$\text{বা } s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + 2[sy(s) - Y(0)] + y(s) = \frac{4}{s^2 + 1}$$

$$\text{বা } s^2 y(s) + 2s - 1 + 2[sy(s) + 2] + y(s) = \frac{4}{s^2 + 1}$$

$$\text{বা } (s^2 + 2s + 1)y(s) = \frac{4}{s^2 + 1} - 2s + 1 - 4$$

$$\text{বা } (s + 1)^2 y(s) = \frac{4}{s^2 + 1} - 2s - 3$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{4}{(s + 1)^2(s^2 + 1)} - \frac{2s + 3}{(s + 1)^2}$$

$$= \frac{4}{(s + 1)^2(s^2 + 1)} - \frac{2(s + 1) + 1}{(s + 1)^2}$$

$$= \frac{4}{(s + 1)^2(s^2 + 1)} - \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{(s + 1)^2}$$

$$\Rightarrow y(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{4-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)} \\ = -\frac{2}{s+1} - \frac{s^2-3}{(s+1)^2(s^2+1)} \dots (3)$$

ধরি $\frac{s^2-3}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \dots (4)$

বা $\frac{s^2-3}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s+1)}{(s+1)^2(s^2+1)}$

বা $s^2-3 = A(s^3+s^2+s+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+2s+1)$

বা $s^2-3 = A(s^3+s^2+s+1) + B(s^2+1) + C(s^3+2s^2+s) + D(s^2+2s+1)$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$$0 = A + C \dots (i), \quad 1 = A + B + 2C + D \dots (ii)$$

$$0 = A + C + 2D \dots (iii) \quad \text{এবং} -3 = A + B + D \dots (iv)$$

$$(iii) - (i) \Rightarrow 2D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$(ii) - (iv) \Rightarrow 1 + 3 = 2C \Rightarrow C = 2$$

$$(iii) \Rightarrow A + 2 + 0 = 0 \Rightarrow A = -2$$

$$(iv) \Rightarrow -2 + B + 0 = -3 \Rightarrow B = -1$$

এখন (4) নং এ $A = -2, B = -1, C = 2$ এবং $D = 0$ হ্রাপন করি [Now putting $A = -2, B = -1, C = 2$ and $D = 0$ in (4)]

$$\frac{s^2-3}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{-2}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{2s+0}{s^2+1}$$

$$\therefore (3) \Rightarrow y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2s}{s^2+1}$$

$$\text{বা } y(s) = -\frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = -2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = -2 \cos t - te^{-t}$$

উদাহরণ-6(v) : সমাধান করু [Solve]

$$Y''(t) + Y(t) = t \cos 2t, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0.$$

[NUH-2004]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) + Y(t) = t \cos 2t \dots (1)$$

$$\text{এবং } Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0 \dots (2)$$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$$L\{Y''(t) + Y(t)\} = L\{t \cos 2t\}$$

$$\text{বা } L\{Y''(t)\} + L\{Y(t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2+4} \right)$$

$$\text{বা } s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = (-1) \left[\frac{1}{s^2+4} - \frac{2s^2}{(s^2+4)^2} \right]$$

$$\text{বা } s^2y(s) - 0 - 0 + y(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

$$\text{বা } (s^2+1)y(s) = \frac{(s^2+4)-8}{(s^2+4)^2}$$

$$\text{বা } (s^2+1)y(s) = \frac{1}{s^2+4} - \frac{8}{(s^2+4)^2}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{8}{(s^2+1)(s^2+4)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4} \right] - \frac{8}{(s^2+1)(s^2+4)^2} \dots (3)$$

এখন $\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)^2}$ এর আঙশিক ভগ্নাংশ নির্ণয় করিব।

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)^2} = \frac{1}{(k+1)(k+4)^2} \text{ যখন } s^2 = k,$$

আঙশিক ভগ্নাংশের কভার আপ নিয়ম অনুসারে পাই

$$\frac{1}{(k+4)^2(k+1)} = \frac{1}{(k+4)^2(-4+1)} + \frac{A}{k+4} + \frac{1}{(-1+4)^2(k+1)}$$

$$\text{বা } \frac{1}{(k+4)^2(k+1)} = -\frac{1}{3(k+4)^2} + \frac{A}{k+4} + \frac{1}{9(k+1)} \dots (4)$$

উভয় পক্ষে $k = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $k = 0$ on both sides we get]

$$\frac{1}{16(1)} = \frac{1}{-3(16)} + \frac{A}{4} + \frac{1}{9}$$

$$\text{বা } \frac{A}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{3(16)} - \frac{1}{9} = \frac{9+3-16}{144} = \frac{-4}{9(16)}$$

$$\text{বা } A = \frac{-16}{9(16)} \Rightarrow A = -\frac{1}{9}$$

$$(4) \Rightarrow \frac{1}{(k+4)^2(k+1)} = -\frac{1}{3(k+4)^2} - \frac{1}{9(k+4)} + \frac{1}{9(k+1)}$$

$$\text{বা } \frac{1}{(s^2+4)^2(s^2+1)} = -\frac{1}{3(s^2+4)^2} - \frac{1}{9(s^2+4)} + \frac{1}{9(s^2+1)}$$

$$\therefore (3) \Rightarrow y(s) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4} \right] - 8 \left[-\frac{1}{3(s^2+4)^2} - \frac{1}{9(s^2+4)} + \frac{1}{9(s^2+1)} \right]$$

$$\text{বা } y(s) = \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{9} \right) \frac{1}{s^2+1} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{8}{9} \right) \frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3(s^2+4)^2}.$$

$$y(s) = \frac{-5}{9} \cdot \frac{1}{s^2+1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{(s^2+4)^2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{-5}{9} \cdot \frac{1}{s^2+1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{(s^2+4)^2} \right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = \frac{-5}{9} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+2^2} \right\} + \frac{8}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+2^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{-5}{9} \sin t + \frac{5}{18} \sin 2t + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{16} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$$

$$= -\frac{5}{9} \sin t + \left(\frac{5}{18} + \frac{1}{6} \right) \sin 2t - \frac{t \cos 2t}{3}$$

$$= -\frac{5}{9} \sin t + \frac{4}{9} \sin 2t - \frac{t \cos 2t}{3}.$$

উদাহরণ-6(vi) : সমাধান কর [Solve] :

$$X''(t) - X(t) = 6 \cos 2t, X(0) = 3, X'(0) = 1.$$

[NUH-2006]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$X''(t) - X(t) = 6 \cos 2t \dots (1)$$

$$\text{এবং } X(0) = 3, X'(0) = 1 \dots (2)$$

এবং $L[X(t)] = x(s)$ তবে $X(t) = L^{-1}[x(s)]$

এবন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$$L[X''(t) - X(t)] = L[6 \cos 2t]$$

$$\text{বা } L[X''(t)] - L[X(t)] = 6 L[\cos 2t]$$

$$\text{বা } s^2 x(s) - sX(0) - X'(0) - x(s) = 6 \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\text{বা } s^2 x(s) - 3s - 1 - x(s) = \frac{6s}{s^2 + 4}$$

$$\text{বা } (s^2 - 1) x(s) = 3s + 1 + \frac{6s}{s^2 + 4}$$

$$\text{বা } x(s) = \frac{3s + 1}{s^2 - 1} + \frac{6s}{(s^2 + 4)(s^2 - 1)}$$

$$\text{বা } x(s) = \frac{3s}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2 - 1} + \frac{6}{5} \left[\frac{s}{s^2 - 1} - \frac{s}{s^2 + 4} \right]$$

$$\text{বা } x(s) = \left(3 + \frac{6}{5} \right) \frac{s}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{6}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides we get]

$$L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{21}{5} \cdot \frac{s}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{6}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \right\}$$

$$\text{বা } X(t) = \frac{21}{5} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - 1} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - 1} \right\} - \frac{6}{5} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 2^2} \right\}$$

$$\text{বা } X(t) = \frac{21}{5} \cdot \cosh t + \sinh t - \frac{6}{5} \cos 2t.$$

উদাহরণ-6(vii) : সমাধান কর [Solve] :

$$Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t) = t^2 e^{3t}, Y(0) = 2, Y'(0) = 6.$$

[NUH-2002]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t) = t^2 e^{3t} \dots (1)$$

$$\text{এবং } Y(0) = 2, Y'(0) = 6 \dots (2)$$

$$\text{এবং } L[Y(t)] = y(s) \text{ তবে } Y(t) = L^{-1}[y(s)]$$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$$L[Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t)] = L[t^2 e^{3t}]$$

$$\text{বা } L[Y''(t)] - 6L[Y'(t)] + 9L[Y(t)] = L[t^2 e^{3t}]$$

$$\text{বা } s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - 6[sy(s) - Y(0)] + 9y(s) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s-3} \right)$$

$$\text{বা } s^2y(s) - 2s - 6 - 6sy(s) + 12 + 9y(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{(-1)}{(s-3)^2} \right)$$

$$\text{বা } (s^2 - 6s + 9)y(s) = 2s - 6 + \frac{(-1)(-2)}{(s-3)^3}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{2(s-3)}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}[y(s)] = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5} \right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = 2e^{3t} + 2 \frac{t^4 e^{3t}}{4!}$$

$$\text{বা } Y(t) = 2e^{3t} + \frac{t^4 e^{3t}}{12}.$$

উদাহরণ-6(viii) : সমাধান কর [Solve] $Y''(t) + a^2Y(t) = F(t)$

যখন $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -2$.

[NU(Pass)-2007, DUH-1996]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equations are]

$$Y''(t) + a^2Y(t) = F(t) \dots (1)$$

$$\text{এবং } Y(0) = 1, Y'(0) = -2 \dots (2)$$

ধরি $L[F(t)] = f(s)$, $L[Y(t)] = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}[y(s)]$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L[Y''(t)] + a^2 L[Y(t)] = L[F(t)]$$

$$\text{বা } s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + a^2y(s) = f(s)$$

$$\text{বা } s^2y(s) - s + 2 + a^2y(s) = f(s). \quad (2) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } (s^2 + a^2)y(s) = s - 2 + f(s)$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{2}{s^2 + a^2} + \frac{f(s)}{s^2 + a^2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}[y(s)] = L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{2}{s^2 + a^2} + \frac{f(s)}{s^2 + a^2} \right\}$$

$$L^{-1}[y(s)] = L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} - \frac{2}{a} L^{-1} \left\{ \frac{a}{s^2 + a^2} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s^2 + a^2} \right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = \cos at - \frac{2}{a} \sin at + \frac{1}{a} L^{-1} \left\{ f(s) \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} \right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = \cos at - \frac{2}{a} \sin at + \frac{1}{a} \int_0^t F(u) \sin a(t-u) du$$

[কম্পিউটেশন উপপাদ্যের সাহায্যে]

উদাহরণ-6(ix) : সমাধান কর $Y'' - a^2Y = F(t)$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$Y''(t) - a^2Y(t) = F(t) \dots (1)$$

$$\text{ধরি } Y(0) = b \text{ এবং } Y'(0) = c \dots (2)$$

$$\text{ধরি } L[F(t)] = f(s), L[Y(t)] = y(s) \text{ তবে } Y(t) = L^{-1}[y(s)]$$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L[Y''(t)] - a^2 L[Y(t)] = L[F(t)]$$

$$\text{বা } s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - a^2y(s) = f(s)$$

$$\text{বা } s^2y(s) - bs - c - a^2y(s) = f(s). \quad (2) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } (s^2 - a^2)y(s) = bs + c + f(s)$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{bs}{s^2 - a^2} + \frac{c}{s^2 - a^2} + \frac{f(s)}{s^2 - a^2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{bs}{s^2 - a^2} + \frac{c}{s^2 - a^2} + \frac{f(s)}{s^2 - a^2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = bL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - a^2}\right\} + \frac{c}{a} L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 - a^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2 - a^2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = b \cosh at + \frac{c}{a} \sinh at + \frac{1}{a} L^{-1}\left\{f(s) \cdot \frac{a}{s^2 - a^2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = b \cosh at + \frac{c}{a} \sinh at + \frac{1}{a} \int_0^t F(u) \sinha(t-u) du$$

[By convolution theorem]

উদাহরণ-7(i) : ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{dx}{dt} - y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} + x = \sin t, \text{ with } x(0) = 1, y(0) = 0$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{dx}{dt} - y = e^t \dots (1)$$

$$\frac{dy}{dt} + x = \sin t \dots (2)$$

$$x(0) = 1 \dots (3) \text{ এবং } y(0) = 0 \dots (4)$$

$$\text{ধরি } L[x] = X \Rightarrow x = L^{-1}[X] \text{ এবং } L[y] = Y \Rightarrow y = L^{-1}[Y]$$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লই [Taking Laplace transform on both sides of (1)]

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} - L[y] = L[e^t]$$

$$\text{বা } sX - x(0) - Y = \frac{1}{s-1}$$

$$\text{বা } sX - 1 - Y = \frac{1}{s-1}; \quad (3) \text{ নং ধরা।}$$

$$\text{বা } sX - Y = 1 + \frac{1}{s-1}$$

$$\text{বা } sX - Y = \frac{s}{s-1} \dots (5)$$

এখন (2) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর এন্থ করি [Now taking Laplace transform on both sides of (2)]

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + L[x] = L[\sin t]$$

$$\text{বা } sY - y(0) + X = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\text{বা } X + sY = \frac{1}{s^2 + 1} \dots (6), \quad \text{যদিও } y(0) = 0$$

$$(5) s + (6) \Rightarrow (s^2 + 1) X = \frac{s^2}{s-1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\text{বা } X = \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \dots (7)$$

$$\text{ধরি } \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \dots (8)$$

$$\text{বা } s^2 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1) \dots (9)$$

$$\text{বা } s^2 = As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C \dots (10)$$

এখন (9) নং $s = 1$ হাপন করি [Putting $s = 1$ in (9)]

$$1 = A(2) + 0 \Rightarrow A = 1/2$$

(10) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এর সহগ এবং প্রমিসংখ্যা সমীকৃত করি [Equating the coefficient of s^2 and constant terms from both sides of (10)]

$$1 = A + B, \quad \text{বা } 1 = \frac{1}{2} + B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\text{এবং } 0 = A - C, \quad \text{বা } 0 = \frac{1}{2} - C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (8) \Rightarrow \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s+1}{2(s^2+1)}$$

$$\therefore (7) \Rightarrow X = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s+1}{2(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$\text{বা } X = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{(s^2+1)^2} \right]$$

$$\text{বা } X = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{s^2+1+2}{(s^2+1)^2} \right]$$

$$\text{বা } X = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{(1-s^2)+(2+2s^2)}{(s^2+1)^2} \right]$$

$$\text{বা } X = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{s^2+1} \right]$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$$L^{-1}\{X\} = \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2} [e^t + \cos t + 2 \sin t - t \cos t]$$

$$\therefore (6) \Rightarrow sY = \frac{1}{s^2+1} - X$$

$$\text{বা } sY = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} : \text{ by (7)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{1}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{s^2+1-1}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{s^2}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} \dots (11)$$

$$\text{ধরি } \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{D}{s-1} + \frac{Es+F}{s^2+1} \dots (12)$$

$$\text{বা } s = D(s^2+1) + (Es+F)(s-1) \dots (13)$$

(13) নং এ $s = 1$ বসাই [Putting $s = 1$ in (13)]

$$1 = D(2) + 0 \Rightarrow D = 1/2$$

(13) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এবং s এর সহগ সমীকৃত করি [Equating the coefficients of s^2 and s from both sides of (13)]

$$0 = D + E, \text{ বা } 0 = \frac{1}{2} + E \Rightarrow E = -\frac{1}{2}$$

$$\text{এবং } 1 = -E + F, \text{ বা } 1 = \frac{1}{2} + F \Rightarrow F = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (12) \Rightarrow \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{s-1}{2(s^2+1)}$$

$$\therefore (11) \Rightarrow Y = \frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s-1}{2(s^2+1)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{1}{2} \left[\frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{Y\} = \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \right\}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} [t \sin t - e^t + \cos t - \sin t]$$

নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$x = \frac{1}{2} [e^t + \cos t + 2 \sin t - t \cos t]$$

$$y = \frac{1}{2} [t \sin t - e^t + \cos t - \sin t]$$

উদাহরণ-7(ii) : ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$(D^2 + 2)x - Dy = 1$$

$$Dx + (D^2 + 2)y = 0$$

with $t > 0$; $x = 0$, $Dx = Dy = y = 0$ when $t = 0$.

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণসমূহকে নিম্নরূপে লিখা যায় [Given equations can be written as follows]

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2x = 1 \dots (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2y = 0 \dots (2)$$

$$x(0) = 0 \dots (3), x'(0) = y'(0) = y(0) = 0 \dots (4)$$

$$\text{ধরি } L\{x\} = X \Rightarrow x = L^{-1}\{X\} \text{ এবং } L\{y\} = Y \Rightarrow y = L^{-1}\{Y\}$$

(1) নং এবং (2) নং এর উভয় পক্ষে পর্যায়করে ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking Laplace transform on both sides of (1) and (2) successively]

$$L\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] - L\left[\frac{dy}{dt}\right] + 2L\{x\} = L\{1\}$$

$$\text{বা } s^2X - sx(0) - x'(0) - [sY - y(0)] + 2X = \frac{1}{s}$$

$$\text{বা } s^2X - 0 - 0 - sY + 0 + 2X = \frac{1}{s} : \text{ by (3) and (4)}$$

$$\text{বা } (s^2+2)X - sY = \frac{1}{s} \dots (5)$$

$$\text{এবং } L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + L\left[\frac{dx}{dt}\right] + 2L\{y\} = 0$$

$$\text{বা } s^2Y - sy(0) - y'(0) + sX - x(0) + 2Y = 0$$

$$\text{বা } s^2Y - 0 - 0 + sX - 0 + 2Y = 0; \quad (3) \text{ নং এবং (4) নং দ্বারা } \\ \text{বা } sX + (s^2+2)Y = 0 \dots (6)$$

$$\text{এখন } (5) s - (6) (s^2 + 2) \Rightarrow -s^2 Y - (s^2 + 2)^2 Y = 1$$

$$\text{বা } [(s^2 + 2)^2 + s^2]Y = -1$$

$$\text{বা } [s^4 + 5s^2 + 4]Y = -1$$

$$\text{বা } (s^2 + 4)(s^2 + 1)Y = -1$$

$$\text{বা } Y = \frac{-1}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{-1}{3} \left[\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 4} \right] \dots (7)$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$$L^{-1}\{Y\} = -\frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 4}\right\}$$

$$\text{বা } L^{-1}\{Y\} = -\frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 2^2}\right\}$$

$$\text{বা } y = -\frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{6} \sin 2t$$

$$\therefore (6) \Rightarrow sX = -(s^2 + 2)Y$$

$$\text{বা } sX = \frac{1}{3}(s^2 + 2) \cdot \left[\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 4} \right]; \text{ by (7)}$$

$$\text{বা } sX = \frac{1}{3} \left[\frac{(s^2 + 1) + 1}{s^2 + 1} - \frac{(s^2 + 4) - 2}{s^2 + 4} \right]$$

$$\text{বা } sX = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{s^2 + 1} - 1 + \frac{2}{s^2 + 4} \right]$$

$$\text{বা } X = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} + \frac{2}{s(s^2 + 4)} \right]$$

$$\text{বা } X = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right) \right]$$

$$\text{বা } X = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{2s} - \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \right]$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$$L^{-1}\{X\} = \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 2^2}\right\}$$

$$\text{বা } x = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} \cdot 1 - \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t \right]$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{6} \cos 2t$$

∴ নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{6} \cos 2t \\ Y &= -\frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{6} \sin 2t \end{aligned} \right\}$$

উদাহরণ-7(iii) : ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1 - 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + x = 0$$

$$\text{যখন } x(0) = 0, y(0) = 0, x'(0) = 0$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1 - 2t \dots (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + x = 0 \dots (2)$$

$$\text{যখন [when] } x(0) = 0 \dots (3), y(0) = 0 \dots (4) \text{ এবং } x'(0) = 0 \dots (5)$$

$$\text{ধরি } L[x] = X \text{ তবে } x = L^{-1}\{X\} \text{ এবং } L[y] = Y \text{ তবে } y = L^{-1}\{Y\}$$

(1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking Laplace transform in (1)]

$$\text{i.e. } L\left\{\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y\right\} = L[1 - 2t]$$

$$\text{বা } sX - x(0) - sY + y(0) - 2X + 2Y = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}$$

$$\text{বা } sX - 0 - sY + 0 - 2X + 2Y = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}; \text{ by (3), (4)}$$

$$\text{বা } (s - 2)X - (s - 2)Y = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} \dots (6)$$

এখন (2) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ কর [Now taking Laplace transform in (2)]

$$\text{i.e. } L\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + x\right\} = 0$$

$$\text{বা } s^2X - sx(0) - x'(0) + 2sY - 2y(0) + X = 0$$

$$\text{বা } s^2X - 0 - 0 + 2sY - 0 + X = 0$$

$$\text{বা } (s^2 + 1)X + 2sY = 0 \dots (7)$$

(6) নং এবং (7) নং এ আছে [We have in (6) and (7)]

$$(s-2)X - (s-2)Y - \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}\right) = 0$$

$$(s^2 + 1)X + 2sY - 0 = 0$$

$$\therefore \frac{X}{0+2-4/s} = \frac{Y}{-(s^2+1)\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}\right) - 0} = \frac{1}{2s(s-2) + (s^2+1)(s-2)}$$

$$\Rightarrow X = \frac{2-4/s}{(s-2)(s^2+2s+1)} \text{ এবং } Y = \frac{(s^2+1)(2/s^2 - 1/s)}{(s-2)(2s+s^2+1)}$$

$$\text{বা } X = \frac{2(s-2)}{s(s-2)(s+1)^2} = \frac{2}{s(s+1)^2} \dots (8)$$

$$\text{ধরি } \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{2}{s(0+1)^2} + \frac{2}{1(s+1)^2} + \frac{A}{s+1}$$

$$\text{বা } \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{A}{s+1} \dots (9)$$

(9) নং এ $s = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $s = 1$ in (9) we get]

$$\frac{2}{1(4)} = \frac{2}{1} - \frac{2}{4} + \frac{A}{2}.$$

$$\text{বা } \frac{A}{2} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - 2, \text{ বা } \frac{A}{2} = -1 \Rightarrow A = -2.$$

$$(9) \Rightarrow \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}$$

$$\Rightarrow X = \frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}; \text{ by (8)}$$

$$\Rightarrow L^{-1}[X] = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}\right\}$$

$$\Rightarrow x = 2 - 2te^{-t} - 2e^{-t}$$

$$\therefore x = 2(1 - te^{-t} - e^{-t})$$

$$\text{এবং } Y = \frac{(s^2+1)(2-s)}{s^2(s-2)(s+1)^2}$$

$$= \frac{-(s-2)(s^2+1)}{s^2(s-2)(s+1)^2} = \frac{-(s^2+1)}{s^2(s+1)^2} \dots (10)$$

$$\text{ধরি } \frac{s^2+1}{s^2(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2} \dots (11)$$

$$\text{বা } s^2 + 1 = As(s+1)^2 + B(s+1)^2 + Cs^2(s+1) + Ds^2 \dots (12)$$

(12) নং এ পর্যন্তভূমে $s = 0$ এবং $s = -1$ বসাই

$$1 = B(1) \Rightarrow B = 1, \text{ এবং } 2 = D(1) \Rightarrow D = 2$$

উভয় পক্ষ হইতে s এবং s^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই

$$0 = A + 2B, \text{ বা } A = -2B \Rightarrow A = -2$$

$$\text{এবং } 1 = 2A + B + C + D, \text{ বা } 1 = -4 + 1 + C + 2 \Rightarrow C = 2$$

$$(11) \Rightarrow \frac{s^2+1}{s^2(s+1)^2} = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}; \text{ by (10)}$$

$$\Rightarrow L^{-1}[Y] = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow y = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}$$

$$= -t(1 + 2e^{-t}) + 2(1 - e^{-t})$$

∴ নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$\begin{cases} x = 2(1 - te^{-t} - e^{-t}) \\ y = -t(1 + 2e^{-t}) + 2(1 - e^{-t}). \end{cases}$$

উদাহরণ-8(i) : ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(0, t) = 0, U(5, t) = 0$$

$$U(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x.$$

[NUH-2006]

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \dots (1), U(0, t) = 0 \dots (2)$$

$$U(5, t) = 0 \dots (3) \text{ এবং } U(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x \dots (4)$$

$$\text{ধরি } L[U(x, t)] = u(x, s) = u \text{ তবে } U(x, t) = L^{-1}[u(x, s)] = L^{-1}[u]$$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1) we get]

$$L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = L\left\{2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

$$\text{বা } su - U(x, 0) = 2L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

$$\text{বা } su - (10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x) = 2 \frac{d^2 u}{dx^2}; \quad (4) \text{ নং থাবা।}$$

$$\text{বা } \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{s}{2} u = \frac{1}{2} (5 \sin 6\pi x - 10 \sin 4\pi x)$$

$$\text{বা } \left(D^2 - \frac{s}{2}\right) u = \frac{1}{2} (5 \sin 6\pi x - 10 \sin 4\pi x) \dots (5), \text{ যখন } D = \frac{d}{dx}$$

$$\text{সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]} D^2 - \frac{s}{2} = 0 \quad \text{বা} \quad D^2 = \frac{s}{2} \Rightarrow D = \pm \sqrt{s/2}$$

$$\therefore u_c = c_1 e^{\sqrt{s/2}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}x}$$

∴ বিশেষ ইন্টিগ্র্যাল [Particular integral is]

$$u_p = \frac{1}{D^2 - s/2} \cdot \frac{1}{2} (5 \sin 6\pi x - 10 \sin 4\pi x)$$

$$\begin{aligned} \text{বা } u_p &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{D^2 - s/2} \sin 6\pi x - 5 \cdot \frac{1}{D^2 - s/2} \sin 4\pi x \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{36\pi^2 - s/2} \sin 6\pi x - 5 \cdot \frac{1}{16\pi^2 - s/2} \sin 4\pi x \\ &= -\frac{5}{2} \cdot \frac{2 \sin 6\pi x}{72\pi^2 + s} + \frac{5(2 \sin 4\pi x)}{32\pi^2 + s} \\ &= \frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5 \sin 6\pi x}{s + 72\pi^2} \end{aligned}$$

∴ (5) নং এর সাধারণ সমাধান [General solution of (5) is]

$$u = u_c + u_p$$

$$\text{বা } u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/2}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}x} + \frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5 \sin 6\pi x}{s + 72\pi^2} \dots (6)$$

এখন (2) নং এবং (3) নং সীমা শর্তে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on the boundary conditions (2) and (3), we get]

$$L\{u(0, t)\} = u(0, s) = 0 \dots (7)$$

$$\text{এবং } L\{u(5, t)\} = u(5, s) = 0 \dots (8)$$

(6) নং এ পর্যায়ত্বে $x = 0$ এবং $x = 5$ হাপন করিয়া পাই [Putting $x = 0$ and $x = 5$ in (6) successively, we get]

$$u(0, s) = c_1 + c_2 + 0$$

$$\text{বা } 0 = c_1 + c_2. \quad (7) \text{ নং দ্বারা,}$$

$$\Rightarrow c_1 = -c_2 \dots (9)$$

$$\text{এবং } u(5, s) = c_1 e^{5\sqrt{s/2}} + c_2 e^{-5\sqrt{s/2}} + 0; \text{ যেহেতু } \sin 20\pi = 0, \sin 30\pi = 0$$

$$\text{বা } 0 = -c_2 e^{5\sqrt{s/2}} + c_2 e^{-5\sqrt{s/2}}, \text{ by (8) and (9)}$$

$$\text{বা } c_2(e^{-5\sqrt{s/2}} - e^{5\sqrt{s/2}}) = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = 0, \text{ যেহেতু [since] } e^{-5\sqrt{s/2}} - e^{5\sqrt{s/2}} \neq 0$$

$$\therefore (9) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\therefore (6) \Rightarrow u(x, s) = \frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5 \sin 6\pi x}{s + 72\pi^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{u(x, s)\} = L^{-1}\left\{\frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5 \sin 6\pi x}{s + 72\pi^2}\right\}$$

$$\Rightarrow U(x, t) = 10 \sin 4\pi x L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 32\pi^2}\right\} - 5 \sin 6\pi x L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 72\pi^2}\right\}$$

$$\Rightarrow U(x, t) = 10 \sin 4\pi x \cdot e^{-32\pi^2 t} - 5 \sin 6\pi x \cdot e^{-72\pi^2 t}$$

$$\therefore U(x, t) = 10e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 5e^{-72\pi^2 t} \sin 6\pi x$$

হচ্ছে নির্ণেয় সমাধান [Which is the required solution]

উদাহরণ-8(ii) : ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, y(0, t) = 0, y(2, t) = 0, y_t(x, 0) = 0$$

$$y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x.$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots (1), y(0, t) = 0 \dots (2), y(2, t) = 0 \dots (3)$$

$$y_t(x, 0) = 0 \dots (4), y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x \dots (5)$$

$$\text{ধরি } L\{y(x, t)\} = Y(x, s) = Y \text{ তবে } y(x, t) = L^{-1}\{Y(x, s)\} = L^{-1}\{Y\}$$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1), we get]

$$L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} = L\left\{9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}$$

$$\text{বা } s^2 Y - s y(x, 0) - y_t(x, 0) = 9L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}$$

$$\text{বা } s^2 Y - s(20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x) - 0 = 9 \frac{d^2 Y}{dx^2}; \text{ by (4) \& (5)}$$

$$\text{বা } \frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{s^2}{9} Y = -\frac{20}{9} s \sin 2\pi x + \frac{10}{9} s \sin 5\pi x$$

$$\text{বা } \left(D^2 - \frac{s^2}{9}\right) Y = -\frac{20}{9} s \sin 2\pi x + \frac{10}{9} s \sin 5\pi x \dots (6)$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation is]

$$D^2 - \frac{s^2}{9} = 0, \text{ বা } D^2 = \frac{s^2}{9} \Rightarrow D = \pm \frac{s}{3}$$

$$Y_c = c_1 e^{(s/3)x} + c_2 e^{-(s/3)x}$$

বিশেষ ইনটিগ্রাল [Particular integral is]

$$\begin{aligned} Y_p &= \frac{1}{D^2 - (s/3)^2} \left[-\frac{20}{9} s \sin 2\pi x + \frac{10s}{9} \sin 5\pi x \right] \\ &= \frac{-20s}{9} \cdot \frac{1}{D^2 - s^2/9} \sin 2\pi x + \frac{10s}{9} \cdot \frac{1}{D^2 - s^2/9} \sin 5\pi x \\ &= \frac{-20s}{9} \cdot \frac{\sin 2\pi x}{-4\pi^2 - s^2/9} + \frac{10s}{9} \cdot \frac{\sin 5\pi x}{-25\pi^2 - s^2/9} \\ &= \frac{-20s}{9} \cdot \frac{(-9 \sin 2\pi x)}{36\pi^2 + s^2} - \frac{10s}{9} \cdot \frac{9 \sin 5\pi x}{225\pi^2 + s^2} \\ &= \frac{20s}{s^2 + 36\pi^2} \sin 2\pi x - \frac{10s}{s^2 + 225\pi^2} \sin 5\pi x \end{aligned}$$

∴ (6) নং এর সাধারণ সমাধান [General solution of (6) is]

$$Y = Y_c + Y_p$$

$$\text{যা } Y(x, s) = c_1 e^{is/3x} + c_2 e^{-is/3x} + \frac{20s \sin 2\pi x}{s^2 + 36\pi^2} - \frac{10s \sin 5\pi x}{s^2 + 225\pi^2} \dots (7)$$

এখন (2) নং এবং (3) নং সীমা শর্তে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on the boundary conditions (2) and (3), we get]

$$L\{y(0, t)\} = Y(0, s) = 0 \dots (8)$$

$$\text{এবং } L\{y(2, t)\} = Y(2, s) = 0 \dots (9)$$

(7) নং এ $x = 0$ স্থাপন করি [Putting $x = 0$ in (7)]

$$Y(0, s) = c_1 + c_2 + 0$$

$$\text{যা } 0 = c_1 + c_2; \quad (8) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow c_1 = -c_2 \dots (10)$$

আবার (7) নং এ $x = 2$ স্থাপন করি [Again putting $x = 2$ in (7)]

$$Y(2, s) = c_1 e^{is/3 \cdot 2} + c_2 e^{-is/3 \cdot 2} + 0$$

$$\text{যা } 0 = -c_2 e^{is/3 \cdot 2} + c_2 e^{-is/3 \cdot 2}; \quad \text{by (9)}$$

$$\text{যা } c_2 (e^{is/3 \cdot 2} - e^{-is/3 \cdot 2}) = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = 0, \text{ যেহেতু } e^{is/3 \cdot 2} - e^{-is/3 \cdot 2} \neq 0$$

$$\therefore (10) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (7) \Rightarrow Y(x, s) &= \frac{20s}{s^2 + 36\pi^2} \sin 2\pi x - \frac{10s}{s^2 + 225\pi^2} \sin 5\pi x \\ \Rightarrow L^{-1}\{Y(x, s)\} &= L^{-1}\left[\frac{20s \cdot \sin 2\pi x}{s^2 + 36\pi^2} - \frac{10s \cdot \sin 5\pi x}{s^2 + 225\pi^2}\right] \\ \Rightarrow L^{-1}\{Y(x, s)\} &= 20 \cdot \sin 2\pi x L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + (6\pi)^2}\right\} \\ &\quad - 10 \cdot \sin 5\pi x L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + (15\pi)^2}\right\} \\ \Rightarrow y(x, t) &= 20 \sin 2\pi x \cdot \cos 6\pi t - 10 \sin 5\pi x \cdot \cos 15\pi t. \end{aligned}$$

উদাহরণ-8(iii) : ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U_x(0, t) = 0, \quad U(\pi/2, t) = 0$$

$$U(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x.$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \dots (1), \quad U_x(0, t) = 0 \dots (2)$$

$$U(\pi/2, t) = 0 \dots (3) \text{ এবং } U(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x \dots (4)$$

ধরি $L[U(x, t)] = u(x, s) = u$ তবে $U(x, t) = L^{-1}[u(x, s)] = L^{-1}[u]$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1), we get]

$$L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = L\left\{3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

$$\text{যা } su - U(x, 0) = 3L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

$$\text{যা } su - (20 \cos 3x - 5 \cos 9x) = 3 \frac{d^2 u}{dx^2}; \quad (4) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\text{যা } \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{s}{3} u = -\frac{1}{3} (20 \cos 3x - 5 \cos 9x)$$

$$\text{যা } \left(D^2 - \frac{s}{3}\right) u = \frac{1}{3} (5 \cos 9x - 20 \cos 3x) \dots (5)$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation is]

$$D^2 - \frac{s}{3} = 0, \quad \text{যা } D^2 = \frac{s}{3} \Rightarrow D = \pm \sqrt{s/3}$$

$$\therefore u_c = c_1 e^{\sqrt{s/3} x} + c_2 e^{-\sqrt{s/3} x}$$

(v). $L^{-1} \left\{ \frac{3s - 8}{s^2 + 4} - \frac{4s - 24}{s^2 - 16} \right\}$

3. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর :

(i). $L^{-1} \left\{ \frac{2s - 1}{(s + 2)(s - 3)} \right\}$

[NUH-2006, 2009]

(ii). $L^{-1} \left\{ \frac{2s + 16}{(s - 3)(s + 2)} \right\}$

(iii). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 1)(s - 2)} \right\}$

(iv). $L^{-1} \left\{ \frac{3s + 7}{(s - 3)(s + 1)} \right\}$

(v). $L^{-1} \left\{ \frac{2s - 1}{s(s - 1)(s + 1)} \right\}$

(vi). $L^{-1} \left\{ \frac{19s + 37}{(s - 2)(s + 1)(s + 3)} \right\}$ (vii). $L^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 4}{(s + 1)(s - 2)(s - 3)} \right\}$

(viii). $L^{-1} \left\{ \frac{11s^2 - 2s + 5}{(s - 2)(2s - 1)(s + 1)} \right\}$ (ix). $L^{-1} \left\{ \frac{8s + 20}{s^2 - 12s + 32} \right\}$

(x). $L^{-1} \left\{ \frac{5s^2 - 15s - 11}{(s + 1)(s - 2)^3} \right\}$

(xi). $L^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} \right\}$ [NUH-2003]

(xii). $L^{-1} \left\{ \frac{s^2 - 2s + 3}{(s - 1)^2(s + 1)} \right\}$

(xiii). $L^{-1} \left\{ \frac{s + 2}{s^2(s + 3)} \right\}$

4. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর :

(i). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 1)(s^2 + 1)} \right\}$ (ii). $L^{-1} \left\{ \frac{4s}{(s - 2)(s^2 + 4)} \right\}$

(iii). $L^{-1} \left\{ \frac{27 - 12s}{(s + 4)(s^2 + 9)} \right\}$

5. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর :

a(i). $L^{-1} \left\{ \frac{2(s - a)}{(s - a)^2 + b^2} + \frac{8 - 6s}{16s^2 + 9} + \frac{24 - 30\sqrt{s}}{s^4} \right\}$

(ii). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2s + 5}} \right\}$

(iii). $L^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2 + 6s + 25} \right\}$

(i). $L^{-1} \left\{ \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} \right\}$ [DUH-1990]

(ii). $L^{-1} \left\{ \frac{se^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} \right\}$ [DUH-1990]

(iii). $L^{-1} \left\{ \frac{e^{4-3s}}{(s + 4)^{5/2}} \right\}$ [DUH-1990]

(iv). $L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\}$ [NUH-2004, 2005, 2008]

(v). $L^{-1} \left\{ \frac{s^2}{(s^2 + 4)^2} \right\}$ (vi). $L^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{(s^2 + 2s + 1)^2} \right\}$ [DUH-1990]

(vii). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + 1)^3} \right\}$ (viii). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s + 1)^2} \right\}$ [DUH-1990]

(ix). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2 + 1)^2} \right\}$ (x). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3(s + 1)} \right\}$ [DUH-1990]

(xi). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - 1)^5(s + 2)} \right\}$ [DUH-1990]

(xii). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^3} \right\}$ (xiii). $L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 4)^3} \right\}$ [NUH-2007]

(xiv). $L^{-1} \left\{ \ln \frac{s + 2}{s + 1} \right\}$ (xv). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \ln \frac{s + 2}{s + 1} \right\}$ [DUH-1990]

(xvi). $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \ln \left(1 + \frac{1}{s^2} \right) \right\}$ [DUH-1990]

৬. ল্যাপলাস রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত ডিফারিনিশিয়াল সমীকরণ সমূহ সমাধান কর :

(i). $Y''(x) + Y(x) = x$ যখন $Y(0) = 0$, $Y'(0) = -3$ [DUH-1990]

(ii). $Y''(t) + Y(t) = 0$ যখন $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$ [DUH-1990]

(iii). $Y'' - Y' - 2Y = t^2$ যখন $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 3$ [DUH-1989]

(iv). $Y''(t) + 9Y(t) = \cos t$ যদি $Y(0) = 1$, $Y(\pi/2) = -1$ [DUH-1987]

(v). $Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t} \sin t$ যদি $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$ [NUH-2000, 2003, NU(Pass)-2009]

- (vi). $Y''(t) + Y(t) = 1$ যখন $Y(0) = 2, Y'(0) = 0$
- (vii). $Y''(t) + Y(t) = t$ যখন $Y(0) = 1, Y'(0) = -2$ [DUH-1991]
- (viii). $Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t}$ যদি $Y(0) = -3, Y'(0) = 5$ [NU(Pass)-2000]
- (ix). $Y'' + 2Y' + Y = 3te^{-t}$ যদি $Y(0) = 4, Y'(0) = 2$
- (x). $Y''(t) + Y(t) = t$ যদি $Y(0) = 0, Y'(0) = 2$
- (xi). $Y''(t) + 4Y(t) = 9t$ যদি $Y(0) = 0, Y'(0) = 7$
- (xii). $Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}$ যদি $Y(0) = 6, Y'(0) = -1$
- (xiii). $Y''(t) + 2Y'(t) + 5Y(t) = e^{-t} \sin t$
- (xiv). $Y''(t) - 4Y'(t) + 5Y(t) = 125t^2$ যদি $Y(0) = Y'(0) = 0$
- (xv). $Y''(t) + Y(t) = 8\cos t$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = -1$
- (xvi). $Y'' + 9Y = 18t$ যদি $Y(0) = 0, Y(\pi/2) = 0$
- (xvii). $Y''(t) + tY'(t) - Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 0, Y'(0) = 1$ [NUH-2007]
- (xviii). $tY''(t) + (1+2t)Y'(t) - 2Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = 2$ [DUH-1993]
- (xix). $tY''(t) + 2Y'(t) + tY(t) = 0$ যদি $Y(0) = 1, Y(\pi) = 0$
- (xx). $tY''(t) + Y'(t) + 4tY(t) = 0$ যদি $Y(0) = 3, Y'(0) = 0$
- (xxi). $Y''(t) - tY'(t) + Y(t) = 1$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = 2$
- (xxii). $tY''(t) + (t-1)Y'(t) - Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 5, Y(\infty) = 0$
- (xxiii). $Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2 e^t$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = 0, Y''(0) = -2$ [NUH-2005, 2000]
- (xxiv). $Y'' + k^2 Y = F(t)$ যদি $Y(0) = A, Y'(0) = B$
- (xxv). $Y'' - 4Y' + 3Y = F(t)$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = 0$
- (xxvi). $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t, x(0) = 2, x'(0) = -1.$

জ্যাপলাস রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ জোট সমাধান কর [Solve the following simultaneous differential equation by the Laplace transform] :

- (i). $(D - 2)x + 3y = 0$ (ii). $(D - 2)x - (D + 1)y = 6e^{3t}$
 $2x + (D - 1)y = 0$ $(2D - 3)x + (D - 3)y = 6e^{3t}$
- যখন [when] $x(0) = 8, y(0) = 3.$ যখন $x(0) = 3, y(0) = 0.$
- (iii). $\frac{dx}{dt} + y = \sin t$
 $\frac{dy}{dt} + x = \cos t$
- যখন $x(0) = 2, y(0) = 0.$

জ্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

- (i). $\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(0, t) = 0, U(5, t) = 0$ এবং $U(x, 0) = 10 \sin 4\pi x.$
- (ii). $\frac{\partial U}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U_x(0, t) = 0, U(\pi/2, t) = 0$ এবং $U(x, 0) = 30 \cos 5x.$
- (iii). $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U, U(0, t) = 0, U(\pi, t) = 0$
 এবং $U(x, 0) = 6 \sin x - 4 \sin 2x$
- (iv). $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(0, t) = 0, U(1, t) = 0$
 $U(x, 0) = 3 \sin 2\pi x$ যখন $0 < x < 1, t > 0$
- (v). $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, Y(0, t) = 0, Y(2, t) = 0$
 এবং $Y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x$
- (vi). $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, Y_x(0, t) = 0, Y(3/2, t) = 0$
 $Y(x, 0) = 0$ এবং $Y_t(x, 0) = 12 \cos \pi x + 16 \cos 3\pi x - 8 \cos 5\pi x.$

উত্তরসমালী [ANSWERS]-7

1(i). $L[a] = \frac{s}{a}; L[t^{-1/2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

(ii). $\frac{6s^4 - 18s^3 + 126s^2 - 162s + 432}{(s^2 + 9)^3}$

(iii). $\frac{6(s^4 - 6s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^4}$

(v). $\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$

(vii). $\frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

2(i). $\frac{\cos 2t}{2}$

(iii). $e^{2t} (3\cos 2t + \sin 2t)$

(v). $3\cos 2t - 4\sin 2t - 4\cosh 4t + 6\sinh 4t$

3(i). $e^{-2t} + e^{3t}$ (ii). $2(11e^{3t} - 6e^{-2t})/5$

(iii). $(e^{2t} - e^{-t})/3$

(v). $(2 + e^t - 3e^{-t})/2$

(vii). $(21e^{3t} - 8e^{2t} - e^{-t})/6$

(ix). $21e^{8t} - 13e^{4t}$

(xi). $e^{-t}(\sin t + \sin 2t)/3$

(xiii). $(6t + 1 - e^{-3t})/9$

(ii). $e^{2t} - \cos 2t + \sin 2t$

5a(i). $2e^{at} \cos bt + \frac{2}{3} \sin \frac{3t}{4} - \frac{3}{8} \cos \frac{3t}{4} + 4t^3 - \frac{16t^{5/2}}{\sqrt{\pi}}$

(ii). $\frac{t^{-1/2} e^{-5t/2}}{\sqrt{2\pi}}$ (iii). $\frac{e^{-3t}(2\cos 4t - \sin 4t)}{2}$

(iv). $4e^{3t} - e^{-t}$ b(i). $2e^{-2t} - e^{-t}$

(ii). $\begin{cases} 4(t-3)^{3/2} e^{-4(t-4)}, & t > 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases}$

(iii). $\begin{cases} \frac{e^{-(t-\pi)/2}}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2} + \sin \frac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2} \right\}, & t > \pi \\ 0, & t < \pi \end{cases}$

c(i). $\frac{ts \sin at}{2a}$ (ii). $\frac{2t \cos 2t + \sin 2t}{4}$

(iii). $\frac{te^t \sin t}{2}$ d(i). $-\frac{e^{-t}(t^2 + 2t + 2)}{2} + 1$

(ii). $te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2$ (iii). $(2t - 3\sin t + t\cos t)/2$

(iv). $\frac{t^2}{2} - e^{-t} - t + 1$

(v). $\frac{et}{72} \left(t^4 - \frac{4t^3}{3} + \frac{4t^2}{3} - \frac{8t}{9} + \frac{8}{27} \right) - \frac{e^{-2t}}{243}$

e(i). $(3 - t^2) \sin t - 3t \cos t)/8$

(ii). $t(\sin 2t - 2t \cos 2t)/64$

(iii). $\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ (iv). $\int_0^t \frac{(e^{-u} - e^{-2u})}{u} du$

(v). $2 \int_0^t \frac{(1 - \cos u)}{u} du$ (vi). $\frac{t J_1(at)}{a}$

6(i). $Y(x) = x - 4 \sin x$ (ii). $Y(t) = \sin t$

(iii). $Y(t) = -\frac{3}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{17e^{2t}}{12} + \frac{e^{-t}}{3}$

(iv). $Y(t) = \frac{\sin t}{8} + \frac{9 \sin 3t}{8} + \cos 3t$

(v). $Y(t) = e^{-t}(\sin t + 2\sin 2t)/3$

(vi). $Y(t) = 1 + \cos t$

(vii). $Y(t) = t - 3\sin t + \cos t$

(viii). $Y(t) = 4e^{2t} - 7e^t + 4te^{2t}$

(ix). $Y(t) = (4 + 6t + t^3/2)e^{-t}$

(x). $Y(t) = t + \sin t$

(xi). $Y(t) = \frac{9t}{4} + \frac{19 \sin 2t}{8}$

(xii). $Y(t) = 3 + 2t + 3e^t - 2e^{2t} + 2e^{-t}$

- (xiii). $Y(t) = \frac{e^{-t} \sin t}{3} - \frac{e^{-t} \sin 2t}{6} + ae^{-t} \cos 2t + (a+b)e^{-t} \sin 2t$
- (xiv). $Y(t) = 22 + 40t + 25t^2 - 22e^{2t} \cos t + 4e^{2t} \sin t$
- (xv). $Y(t) = \cos t - \sin t + 4t \sin t$
- (xvi). $Y(t) = 2t + \pi \sin 3t$
- (xvii). $Y(t) = t$
- (xviii). $Y(t) = e^{2t}$
- (xix). $Y(t) = \frac{\sin t}{t}$
- (xx). $Y(t) = 3J_0(2t)$
- (xxi). $Y(t) = 1 + 2t$
- (xxii). $Y(t) = 5e^{-t}$
- (xxiii). $Y(t) = e^t - te^t - \frac{t^2 e^t}{2} + \frac{t^5 e^t}{60}$
- (xxiv). $Y(t) = A \cos kt + \frac{B}{k} \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t F(u) \sin k(t-u) du$
- (xxv). $T(t) = \frac{3e^t}{2} - \frac{e^{3t}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t (e^{3u} - e^u) F(t-u) du$
- 7(i). $x = 5e^{-t} + 3e^{4t}$
 $y = 5e^{-t} - 2e^{4t}$
- (ii). $x = (1+2t)e^t + 2e^{3t}$
 $y = (1-t)e^t - e^{3t}$
- (iii). $x = e^t + e^{-t}$
 $y = e^{-t} - e^t + \sin t$
- 8(i). $U(x, t) = 10e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x$
- (ii). $U(x, t) = 30e^{-75t} \cos 5x$
- (iii). $U(x, t) = 6e^{-5t} \sin x - 4e^{-8t} \sin 2x$
- (iv). $U(x, t) = 3e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$
- (v). $Y(x, t) = 20 \sin 2\pi x \cos 6\pi t - 10 \sin 5\pi x \cos 15\pi t$
- (vi). $Y(x, t) = \frac{3}{\pi} \cos \pi x \cdot \sin 4\pi t + \frac{4}{3\pi} \cos 3\pi x \cdot \sin 12\pi t - \frac{2}{5\pi} \cos 5\pi x \sin 20\pi t$

অষ্টম অধ্যায় [CHAPTER-8]

প্রথম পরিচেদ [SECTION-1]

ফূরিয়ার ধারা

[Fourier Series]

8-1.1 : ত্রিকোনমিতিক ধারা : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

বকারের অসীম ধারাকে ত্রিকোনমিতিক ধারা বলা হয়, যেখানে a_0, a_n এবং b_n প্রকসংখ্যা।

Trigonometric series : The infinite series of the form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

is called Trigonometric series where a_0, a_n and b_n are constants.

8-1.2 : পর্যায়বৃত্ত ফাংশন : যদি $f(x+T) = f(x)$ হয়, তবে $f(x)$ কে পর্যায়বৃত্ত ফাংশন বলা হয় এবং T কে পর্যায় কাল বলা হয়। [NUH-2006]

উদাহরণ : যেহেতু $\sin(2\pi + x) = \sin x$, কাজেই $\sin x$ পর্যায়বৃত্ত ফাংশন এবং তার পর্যায়কাল 2π .

Periodic function : If $f(x+T) = f(x)$ then $f(x)$ is called periodic function and T is called its period.

Example : Since $\tan(\pi + x) = \tan x$, so $\tan x$ is a periodic function and its period is π .

8-1.3 : ফূরিয়ার ধারা :

[NUH-2005]

যদি $f(x)$ ফাংশনকে $(-\pi, \pi)$ ব্যবধিতে 2π পর্যায় কালে সংজ্ঞায়িত করা হয় এবং তার ত্রিকোনমিতিক ধারার বিস্তার করা হয়,

$$\text{পর্যায় } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \dots (1)$$

তাহে (1) নং কে ফূরিয়ার ধারা বলা হয় যেখানে

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \text{ এবং}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

যেখানে a_0, a_n এবং b_n কে ফূরিয়ার সহগ বলা হয়।