超限帰納法抜きで選択公理からZornの補題を証明してみた

縫田 光司

平成 23 年 12 月 8 日

概 要

このノートでは、超限帰納法を使わずに選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える（ただし、悲しいことにノートを書いてから気が付いたのだが、証明の本質的なアイデアは H. Rubin, J. E. Rubin, "Equivalents of the Axiom of Choice, II", Second Edition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol.116, North-Holland, 1985 の定理 4.19 の証明と同じであった）。

このノートを通して、$(X, \le)$ は任意の空でない半順序集合であって、どの鎖（全順序部分集合もしくは線形順序部分集合と呼ばれる場合もある）C も（$\le$ に関する）X における上界（つまり、$x \in X$ であって任意の $c \in C$ について $c \le x$ を満たすもの）を持つという性質を持つものとする。このとき Zorn の補題とは、このような X が常に（$\le$ に関する）極大元（つまり、$x \in X$ であって、$x < y$ となる $y \in X$ が存在しないもの）を持つというものである。選択公理から Zorn の補題を（集合論の Zermelo–Fraenkel 公理系の下で）証明する際、「自然な」方針を採ろうとすると通常は超限帰納法のお世話になるのだが、このノートでは超限帰納法を使わない証明を紹介する。

背理法の仮定として、X は冒頭に述べた条件を満たす半順序集合であるけれども、極大元を持たないものとする。この仮定から出発して矛盾を導く。

まず定義や用語をいくつか準備しておく。

- $C \subset Y \subset X$ かつ C が鎖であるときに、C が Y **において有界である**とは、ある元 $x \in Y \setminus C$ が存在して、全ての $c \in C$ について $c < x$ が成り立つことを指すものとする。

- X の鎖 C が**整列されている**とは、C の任意の空でない部分集合が最小元を持つことを指すものとする。

- 鎖 C と元 $c \in C$ について、部分集合 $\{d \in C \mid d < c\}$ を c による C の**始切片**と呼び、$s_C(c)$ と記す。

X の空でない鎖全体の集合を $\mathcal{C}$ と記す。各 $C \in \mathcal{C}$ について、$U_C = \{x \in X \setminus C \mid$ 全ての $c \in C$ について $c < x\}$ と定義する。ここで以下の性質を注意しておく。

補題 1. 全ての $C \in \mathcal{C}$ について $U_C \neq \emptyset$ が成り立つ。

Proof. Zorn の補題の前提より、C は上界 $x \in X$ を持つ。各 $y \in U_{\{x\}}$ について、$c \leq x < y$（従って $c < y$）が全ての $c \in C$ で成り立つことから、$y \notin C$、また $y \in U_C$ となる。よって $U_{\{x\}} \subset U_C$ であるが、一方で X が極大元を持たないという背理法の仮定から $U_{\{x\}} \neq \emptyset$ となるので、結局 $U_C \neq \emptyset$ が成り立つ。 □

集合族 $\{U_C\}_{C\in\mathcal{C}}$ の選択関数 f であって、後の議論に都合の良い性質を備えているものを（選択公理を用いて）構成したい。

各 $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ について、$C_1 \sim_{\mathrm{pre}} C_2$ という関係を、鎖 $C_1 \cap C_2$ が C_1 と C_2 のいずれにおいても有界でないという関係として定義する。このとき $\sim_{\mathrm{pre}}$ は $\mathcal{C}$ 上の対称な関係である。そして、$\mathcal{C}$ 上の同値関係 $\sim$ を $\sim_{\mathrm{pre}}$ の推移閉包として定義する。即ち $C_1 \sim C_2$ は、$\mathcal{C}$ の要素の有限列 $C_1 = C'_0, C'_1, \ldots, C'_n = C_2$（$n \geq 0$）であって、各 $0 \leq i \leq n-1$ について $C'_i \sim_{\mathrm{pre}} C'_{i+1}$ を満たすことと同値である。$C_1 \sim C_2$ かつ C_1 が最大元 c を持つならば、$c \in C_2$ であり c が C_2 の最大元でもあることを注意しておく。ここで以下の補題が成り立つ。

補題 2. もし $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ かつ $C_1 \sim C_2$ であれば、$U_{C_1} = U_{C_2}$ が成り立つ。

Proof. $C_1 \sim_{\mathrm{pre}} C_2$ のときに $U_{C_1} \subset U_{C_2}$ が成り立つことを示せば充分である。$x \in U_{C_1}$ とする。もし $x \in C_2$ であるとすると、$x \in C_2 \setminus (C_1 \cap C_2)$ であって x は C_1 の、従って $C_1 \cap C_2$ の上界であるため、$C_1 \cap C_2$ が C_2 において有界となり、$C_1 \sim_{\mathrm{pre}} C_2$ という前提に矛盾する。よって $x \notin C_2$ が成り立つ。また、もしある $c \in C_2$ について $c \not< x$ であるとすると、$C_1 \cap C_2$ が C_2 において有界でないという前提から、$c \leq d \not< x$ を満たすような元 $d \in C_1 \cap C_2$ が存在する。特に $d \in C_1$ かつ $d \not< x$ となるが、これは $x \in U_{C_1}$ という x の選び方に矛盾する。以上より全ての $c \in C_2$ について $c < x$ となり、$x \in U_{C_2}$ が成り立つ。 □

同値関係 $\sim$ による同値類 $\mathcal{E}$ の各々について、$U_{\mathcal{E}} \subset X$ を $U_{\mathcal{E}} = U_C$ ただし $C \in \mathcal{E}$、と定義すると、補題 2 より $U_{\mathcal{E}}$ は $C \in \mathcal{E}$ の選び方に依らずきちんと定まる。選択公理を用いて、集合族 $\{U_{\mathcal{E}}\}_{\mathcal{E}\in X/\sim}$ の選択関数 f を得る。さらに、表記の簡略化のため、各 $C \in \mathcal{C}$ について $f(C) = f([C])$（ただし $[C]$ は C の $\sim$-同値類）と記す。すると各 $C \in \mathcal{C}$ について $f(C) \in U_C$ であり、また $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ かつ $C_1 \sim C_2$ であれば $f(C_1) = f(C_2)$ が成り立つ。

以下、元 $x_0 \in X$ を一つ固定する。ここで以下の定義を導入する。

- 鎖 $C \in \mathcal{C}$ が f-**継続的**であるとは、C が整列されており、x_0 が C の最小元であり、さらに全ての $c \in C \setminus \{x_0\}$ について $f(s_C(c)) = c$ が成り立つことを指すものとする。

f-継続的な鎖に関するいくつかの性質を述べる。

補題 3. 鎖 $C \in \mathcal{C}$ が f-継続的であり、C の空でない部分集合 C' が C において有界であるとする。このとき、$C \setminus C'$ に属する C' の上界全体の集合の最小元を d とすると、$f(C') = d$ が成り立つ。

Proof. $C' \in \mathcal{C}$ であることを注意しておく。また、C が整列されており C' が C において有界であることから、主張にあるような元 d は確かに存在することを注意しておく。ここで $s_C(d) \sim C'$ を示すことができれば、f の定義と C が f-継続的であることから $f(C') = f(s_C(d)) = d$ となるため、$s_C(d) \sim C'$ を示せば充分である。まず、$C' \subset s_C(d)$ であるから、$s_C(d) \cap C' = C'$ は C' において有界でない。一方、$x \in s_C(d) \setminus C'$ のとき、d の最小性より x は C' の上界ではあり得ない。よって C' は $s_C(d)$ において有界でない。従って $s_C(d) \sim C'$ が成り立つ。 □

補題 4. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が f-継続的な鎖であるとき、以下の三つの条件のうちちょうど一つが成り立つ。

1. $C_1 = C_2$
2. C_1 は C_2 の始切片である
3. C_2 は C_1 の始切片である

Proof. 二つ以上の条件が同時に成り立たないことは明らかである。

まず、各 $i \in \{1,2\}$ について、$x \in C_1 \cap C_2$ かつ $y \in s_{C_i}(x)$ ならば $y \in C_1 \cap C_2$ が成り立つことを示す。背理法を使うために、このようなある x について反例となる y が存在すると仮定して、最小の反例を y と記す（C_i は整列されているため、そのような y は確かに存在する)。$x_0 \in C_1 \cap C_2$ なので $s_{C_i}(y) \neq \emptyset$ である。y の選び方より、$s_{C_i}(y) \subset C_{3-i}$ かつ $y \notin C_{3-i}$ が成り立つ。C_i は f-継続的なので $f(s_{C_i}(y)) = y$ である。一方、$x \in C_1 \cap C_2$ かつ $y < x$ なので C_{3-i} の部分集合 $s_{C_i}(y)$ は C_{3-i} において有界であり、従って補題 3 より $f(s_{C_i}(y)) \in C_{3-i}$ が成り立つ。しかし、これは性質 $y \notin C_{3-i}$ と矛盾する。従ってこの段落の冒頭の主張が成り立つ。さらに、C_1 と C_2 はともに整列されているため、上の事実は各 $i \in \{1,2\}$ について $C_1 \cap C_2$ が C_i と一致するかもしくは C_i の始切片であることを導く（$C_1 \cap C_2 \neq C_i$ のとき、$C_i \setminus (C_1 \cap C_2)$ の最小元を考えればよい)。

後は $C_1 \cap C_2$ が C_1 または C_2 と一致することを示せば充分である。そうでないと仮定して矛盾を導く。このとき $C_1 \cap C_2$ は C_1 と C_2 両方の始切片であり、C_1 と C_2 は f-継続的なので、$f(C_1 \cap C_2) \in C_1 \cap C_2$ が成り立つ。しかし、一方で f の定義より $f(C_1 \cap C_2) \notin C_1 \cap C_2$ なので、矛盾である。以上より主張が成り立つ。 □

f-継続的な鎖全ての和集合を C_0 と記す（$\{x_0\} \in \mathcal{C}$ が f-継続的なので、f-継続的な鎖が少なくとも一つ存在することを注意しておく)。このとき補題 4

より $C_0 \in \mathcal{C}$ が成り立つ（$x, y \in C_0$ のとき、f-継続的な鎖 C と C' でそれぞれ x と y を含むものが存在し、件の補題より $x \in C \subset C'$ もしくは $y \in C' \subset C$ である）。ここで以下の補題を準備しておく。

補題 5. 各 $c \in C_0$ について、C が c を含む f-継続的な鎖ならば $s_{C_0}(c) = s_C(c)$ が成り立つ。

Proof. まず、C_0 の定義より $C \subset C_0$ なので $s_C(c) \subset s_{C_0}(c)$ であることを注意しておく。後は各 $d \in s_{C_0}(c)$ について $d \in C$ となることを示せばよい。C_0 の定義より、$d \in C'$ となる f-継続的な鎖 C' が存在する。ここで、$C' = C'$ もしくは C' が C の始切片である場合には $d \in C' \subset C$ が成り立つ。また、C が C' の始切片である場合には、$c \in C$、$d \in C'$ かつ $d < c$ なので、やはり $d \in C$ が成り立つ。従って補題 4 より $d \in C$ が成り立つ。 □

以下、C_0 自体が f-継続的であることを証明していく。x_0 が C_0 の最小元であることは明らかである。

補題 6. C_0 は整列されている。

Proof. A を C_0 の空でない任意の部分集合とする。$a \in A$ を一つ選んでおき、a を含む f-継続的な鎖 C を取る（これは C_0 の定義より存在する）。C は整列されているため、$A \cap C$ は最小元を持つ。それを a_0 と記す。このとき、もし $a' \in A$ かつ $a' < a_0$ であるとすると、補題 5 より $a' \in s_{C_0}(a_0) = s_C(a_0)$ が成り立ち、即ち $a' \in A \cap C$ かつ $a' < a_0$ となるが、これは a_0 の選び方に矛盾する。従って全ての $a' \in A$ について $a' \geq a_0$ となり、a_0 は A の最小元である。 □

補題 7. 全ての $c \in C_0 \setminus \{x_0\}$ について $f(s_{C_0}(c)) = c$ が成り立つ。

Proof. c を含む f-継続的な鎖 C を取る（これは C_0 の定義より存在する）。このとき補題 5 より $s_{C_0}(c) = s_C(c)$ が成り立つ。C は f-継続的なので、$f(s_{C_0}(c)) = f(s_C(c)) = c$ となる。 □

補題 6 と補題 7 より、C_0 は確かに f-継続的である。さて、このとき $C_0 \cup \{f(C_0)\}$ もまた f-継続的な鎖となるが、これは C_0 の部分集合ではないため、C_0 の定義と矛盾する。従って背理法により、X は極大元を持つ。以上で Zorn の補題が証明された。

おまけ：超限帰納法を用いた証明

このおまけでは、比較参考として、超限帰納法を用いて選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える。最初に、超限再帰的定義に関する原理を述べておく（例えばケネス・キューネン著、藤田博司訳『集合論　独立性証明への

案内』（日本評論社、2008 年、原題：SET THEORY, An Introduction to Independence Proofs）第 I 章定理 9.3 を参照）。

定理 1. $\varphi(x,y)$ を（Zermelo–Fraenkel 集合論における）式で自由変数 x と y を持ち、$\forall x \exists ! y \varphi(x,y)$ を満たすものとする。このとき、自由変数 x と y を持つ式 $\Phi(x,y)$ で以下の二つの条件を満たすものが存在する。

1. $\forall x((x \in \mathbf{ON} \to \exists ! y \Phi(x,y)) \wedge (\neg x \in \mathbf{ON} \to \neg \exists y \varphi(x,y)))$
2. $\forall x(x \in \mathbf{ON} \to \forall y,z(y = \Phi\restriction_x \wedge \varphi(y,z) \to \Phi(x,z)))$

ただし、「$x \in \mathbf{ON}$」は「x は順序数」の略記とし、「$\Phi\restriction_x$」は集合 $\{\langle a,b\rangle \mid a \in x \wedge \Phi(a,b)\}$（$\langle a,b\rangle$ は a と b の順序対）の略記とする。

この定理の直感的な意味は以下の通りである。即ち、順序数全体（これは集合をなさないのであるが）で定義される「関数」Φ を定義したいとき、順序数 α における値を α より小さな順序数における値から定める方法を指定すれば、その条件を満たす「関数」Φ が確かに存在する。この定理は ZF 集合論における定理であり、選択公理は用いていないことを注意しておく。

定理 1（と超限帰納法）を用いて、選択公理から Zorn の補題を証明する。$X \neq 0$ を、Zorn の補題の主張に現れる半順序集合とする。背理法の仮定として、X は極大元を持たないと仮定する。すると、X の空でない部分集合 C であってある順序数と同型（特に全順序集合）なものの各々について、選択公理を用いてC の上界 $b_C \in X \setminus C$ を一つずつ選ぶことができる。

定理 1 を適用すべく、まず X の元 a を一つ固定しておき、式 $\varphi(x,y)$ を以下の要領で定義する。

- $x = 0$（$= \emptyset$）のとき、$\varphi(x,y)$ は $y = a$ を意味するように定める。
- x がある順序数 $\alpha > 0$ から X への関数であって像 $\mathrm{Im}(x)$ への（半順序集合としての）同型写像であるとき、$\varphi(x,y)$ は $y = b_{\mathrm{Im}(x)}$ を意味するように定める（$\mathrm{Im}(x)$ は空でない順序数 α と同型なので、$b_{\mathrm{Im}(x)}$ が確かに定義されることに注意）。
- それ以外のとき、$\varphi(x,y)$ は $y = 0$ を意味するように定める。

この式 $\varphi(x,y)$ は定理 1 の前提を満たすので、定理の主張にあるような式 $\Phi(x,y)$ が存在する。ここで以下の補題が成り立つ。

補題 8. x を順序数とし、x' を $\Phi(x,x')$ が成り立つ唯一の元とする。

1. このとき $x' \in X$ が成り立つ。
2. このとき、$y < x$ かつ $\Phi(y,y')$ が成り立つならば X において $y' < x'$ である。

Proof. x に関する超限帰納法を用いて証明する。まず、$x = 0$ のときは、φ の定義より $x' = a$ となるので、件の条件が成り立つ。次に $x > 0$ のときを考える。超限帰納法の仮定より、定理 1 の主張に現れる集合 $\Phi\restriction_x$ は x から X のある部分集合 C への同型写像となる（x は全順序集合であることに注意）。このとき Φ と φ の定義より $x' = b_C$ となり、従って件の条件は x に関しても成り立つ（二つ目の条件については、$b_C \in X \setminus C$ が C の上界であることから導かれる）。以上より主張が成り立つ。 $\square$

補題 8 の二つ目の性質より、各 $v \in X$ について、$\Phi(x, v)$ を満たす順序数 x は高々一つしか存在しない。X の部分集合 X' を、ある（一意に定まる）順序数 x について $\Phi(x, v)$ が成り立つような $v \in X$ 全体の集合として定める。置換公理を集合 X' と式 $\Phi'(x, y) := \Phi(y, x)$ に適用すると、順序数 y のうち、$\Phi(y, y')$ を満たす唯一の y' が X' に属するような y を全て要素に持つ集合 Y の存在が示される。ここで補題 8 の一つ目の性質より、この集合 Y は全ての順序数を要素に持つことになる。しかし、これは Burali–Forti の逆理（即ち、全ての順序数を要素に持つ集合は存在しないという定理）に矛盾する。従って背理法により、X は極大元を持つ。以上で Zorn の補題が証明された。