超限帰納法抜きで選択公理から Zorn の補題を証明してみた

縫田 光司

2011 年 11 月 13 日（初版）、2023 年 3 月 30 日（第 3 版）

概要

このノートでは、超限帰納法を使わずに選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える（ただし、悲しいことにノートの初版を書いてから気が付いたのだが、証明の本質的なアイデアは H. Rubin, J. E. Rubin, “Equivalents of the Axiom of Choice, II”, Second Edition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol.116, North-Holland, 1985 の定理 4.19 の証明と同じであった）。

このノートを通して、$(X, \leq)$ は空でない半順序集合で、どの鎖[*1] C も X における上界[*2]をもつものとする。**Zorn の補題**とは、このような X が常に極大元[*3]をもつという主張である。選択公理から Zorn の補題を（集合論の Zermelo–Fraenkel 公理系の下で）証明する際、「自然な」方針を採ろうとすると通常は超限帰納法のお世話になるのだが、このノートでは超限帰納法を使わない証明を紹介する。

背理法の仮定として、X は冒頭に述べた条件を満たす半順序集合であるが、極大元をもたないとする。この仮定から出発して矛盾を導く。

まず定義や用語をいくつか準備しておく。X の鎖 C について、$X \setminus C$ に属する C の上界全体の集合を U_C で表す。また、X の鎖 C と $x \in X$ について、$s_C(x) := \{y \in C \mid y < x\}$ と定める。X の空でない、かつ整列されている[*4]鎖全体の集合を $\mathcal{C}$ で表す。$C \in \mathcal{C}$ のとき、C の空でない部分集合はどれも $\mathcal{C}$ に属することを注意しておく。また以下の性質が成り立つ。

補題 1. $C \in \mathcal{C}$ のとき常に $U_C \neq \emptyset$ が成り立つ。

証明. Zorn の補題の仮定より、C は上界 $x \in X$ をもつ。また、X は極大元をもたないと仮定したので、$x < y$ を満たす $y \in X$ が存在する。この y について、$y \not\leq x$ となるので、x の選び方より $y \notin C$ である。また、x と同様に y も C の上界である。よって $y \in U_C$、したがって $U_C \neq \emptyset$ である。 □

$\mathcal{U} := \{S \subseteq X \mid$ ある $C \in \mathcal{C}$ について $S = U_C\}$ と定める。補題 1 より $\mathcal{U}$ は非空集合からなる集合族であり、選択公理によりその選択関数 f が得られる。すなわち、$C \in \mathcal{C}$ のとき $f(U_C) \in U_C$ が成り立つ。この $f(U_C)$ のことを単に $f(C)$ で表す。

Zorn の補題の仮定より $X \neq \emptyset$ である。$x_0 \in X$ を一つ固定する。ここで以下の定義を導入する。

- 鎖 $C \in \mathcal{C}$ が **f-継続的**であるとは、$x_0 = \min C$ であり、さらに $c \in C \setminus \{x_0\}$ のとき常に $f(s_C(c)) = c$ が成り立つことと定める（このとき $x_0 < c$ より $s_C(c) \neq \emptyset$、したがって $s_C(c) \in \mathcal{C}$ であることを注意しておく）。f-継続的な $\mathcal{C}$ の元全体の集合を $\mathcal{C}_f$ で表す。

[*1] 全順序（もしくは線形順序）部分集合のこと。
[*2] つまり、$x \in X$ であって、どの $c \in C$ についても $c \leq x$ を満たすもの。
[*3] つまり、$x \in X$ であって、$x < y$ となる $y \in X$ が存在しないもの。
[*4] 空でない部分集合が常に最小元をもつ、ということ。

なお、上の定義において、$c = x_0$ のときは $s_C(c) = \emptyset$ である。すると、$f(\emptyset) := x_0$ と定めることで、$C \in \mathcal{C}_f$ のとき、どの $c \in C$ についても $f(s_C(c)) = c$ が成り立つようになる。

$C^* := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_f} C$ と定める。$\{x_0\} \in \mathcal{C}_f$ より C^* は空でなく、$x_0 = \min C^*$ である。

補題 2. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_f$, $x \in C_1$, $y = \min(C_2 \setminus s_{C_1}(x))$ のとき、$y \in C_1$ が成り立つ。

証明. y の最小性より

$$s_{C_2}(y) \subseteq s_{C_1}(x) \tag{1}$$

であり、$x \in C_1 \setminus s_{C_2}(y)$ となる。C_1 は整列されているので、$z := \min(C_1 \setminus s_{C_2}(y))$ が存在し、また $z \leq x$ である。y の定義より $y \notin s_{C_1}(x)$ であるので、$y \in C_2 \setminus s_{C_1}(z)$ となる。C_2 は整列されているので、$w := \min(C_2 \setminus s_{C_1}(z))$ が存在し、また

$$w \leq y \tag{2}$$

である。w の最小性より $s_{C_2}(w) \subseteq s_{C_1}(z)$ である。逆に $u \in s_{C_1}(z)$ のとき、z の最小性より

$$u \in s_{C_2}(y) \tag{3}$$

である。ここで、もし $u \notin s_{C_2}(w)$ であるとすると、C_2 は鎖であるので

$$w \leq u \tag{4}$$

となり、式 (3) より $w \in s_{C_2}(y)$ となる。これと式 (1) より $w \in C_1$ であり、また w の定義より $w \notin s_{C_1}(z)$ である。C_1 は鎖であるので、$z \leq w$ となり、式 (4) より $z \leq u$ となるが、一方で u の選び方より $u \in s_{C_1}(z)$ であり、これは矛盾である。よって $u \in s_{C_2}(w)$ となる。以上より $s_{C_2}(w) = s_{C_1}(z)$ である。C_1 と C_2 はともに f-継続的であるので、

$$w = f(s_{C_2}(w)) = f(s_{C_1}(z)) = z \in C_1 \cap C_2$$

となる。z の定義より $z \notin s_{C_2}(y)$ であり、C_2 は鎖であるので、$y \leq z = w$ となる。これと式 (2) より $y = w \in C_1$ となる。以上より主張が成り立つ。 □

補題 3. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_f$ のとき、$C_2 \setminus C_1 \subseteq U_{C_1}$ である。特に C_1 の元と C_2 の元は常に比較可能である。

証明. $x_2 \in C_2 \setminus C_1$, $x_1 \in C_1$ のとき、$x_2 \in C_2 \setminus s_{C_1}(x_1)$ である。C_2 は整列されているので、$y := \min(C_2 \setminus s_{C_1}(x_1))$ が存在し、また $y \leq x_2$ である。すると補題 2 より $y \in C_1$ である。y の定義より $y \notin s_{C_1}(x_1)$ であり、C_1 は鎖であるから、$x_1 \leq y \leq x_2$ となる。よって主張が成り立つ。 □

補題 3 より C^* は鎖である。

補題 4. $C \in \mathcal{C}_f$, $x \in C$ のとき、$s_{C^*}(x) = s_C(x)$ が成り立つ。

証明. C^* の定義より $C \subseteq C^*$ であるから、$s_{C^*}(x) \subseteq C$ を示せばよい。それには、$y \in s_{C^*}(x) \setminus C$ と仮定して矛盾を導けばよい。C^* の定義より、$y \in C'$ を満たす $C' \in \mathcal{C}_f$ が存在する。すると補題 3 より $y \in U_C$、したがって $x \leq y$ となるが、これは $y \in s_{C^*}(x)$ と矛盾する。以上より主張が成り立つ。 □

C^* が整列されていることを示すために、S を C^* の空でない部分集合とし、S の最小元が存在することを示す。$x \in S$ を一つ固定する。これが S の最小元であれば目的が達成できているので、そうでない場合を考える。すると、C^* は鎖であるから、$y < x$ を満たす $y \in S$ が存在する。つまり $s_{C^*}(x) \cap S \neq \emptyset$ である。補題 4

より、$s_{C^*}(x) \cap S$ はある $C \in \mathcal{C}_f$ の空でない部分集合であり、C が整列されていることから、$s_{C^*}(x) \cap S$ は最小元 y をもつ。ここで $z \in S$ とすると、$z < x$ であれば $z \in s_{C^*}(x) \cap S$ であり、y の選び方より $y \leq z$ となる。一方、$x \leq z$ であれば、y の選び方より $y < x$ であるため、$y < z$ となる。いずれにしても $y \leq z$ となるので、y は S の最小元である。よって C^* は整列されており、$C^* \in \mathcal{C}$ となる。さらに、$x \in C^* \setminus \{x_0\}$ のとき、$x \in C$ を満たす $C \in \mathcal{C}_f$ をとると、補題 4 より $s_{C^*}(x) = s_C(x)$ である。C は f-継続的であるので、$f(s_{C^*}(x)) = f(s_C(x)) = x$ である。よって C^* も f-継続的である。以上より $C^* \in \mathcal{C}_f$ である。すると $f(C^*) \in U_{C^*}$ より $C^{**} := C^* \cup \{f(C^*)\}$ も $\mathcal{C}_f$ の元であり、$f(C^*) \notin C^*$ より $C^{**} \not\subseteq C^*$ であるが、これは C^* の定義と矛盾する。以上で Zorn の補題が証明された。

おまけ：超限帰納法を用いた証明

このおまけでは、比較のために、超限帰納法を用いて選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える。最初に、超限再帰的定義に関する原理を述べておく（例えばケネス・キューネン著、藤田博司訳『集合論　独立性証明への案内』（日本評論社、2008 年、原題：SET THEORY, An Introduction to Independence Proofs）第 I 章定理 9.3 を参照)。

定理 1. $\varphi(x,y)$ を（Zermelo–Fraenkel 集合論における）式で自由変数 x と y をもち、$\forall x \exists ! y \varphi(x,y)$ を満たすものとする。このとき、自由変数 x と y をもつ式 $\Phi(x,y)$ で以下の二つの条件を満たすものが存在する。

1. $\forall x((x \in \mathbf{ON} \to \exists ! y \Phi(x,y)) \land (\neg x \in \mathbf{ON} \to \neg \exists y \varphi(x,y)))$
2. $\forall x(x \in \mathbf{ON} \to \forall y, z(y = \Phi\restriction_x \land \varphi(y,z) \to \Phi(x,z)))$

ただし、「$x \in \mathbf{ON}$」は「x は順序数」の略記とし、「$\Phi\restriction_x$」は集合 $\{\langle a,b \rangle \mid a \in x \land \Phi(a,b)\}$（$\langle a,b \rangle$ は a と b の順序対）の略記とする。

この定理の直感的な意味は以下の通りである：順序数全体（これは集合をなさないのであるが）で定義される「関数」Φ を得たいとき、順序数 α における値を α より小さな順序数における値から定める方法を指定すれば、その条件を満たす「関数」Φ が確かに存在する。この定理は ZF 集合論における定理であり、選択公理は用いていないことを注意しておく。

定理 1（と超限帰納法）を用いて、選択公理から Zorn の補題を証明する。$X \neq 0$ $(= \emptyset)$ を、Zorn の補題の主張に現れる半順序集合とする。背理法の仮定として、X は極大元をもたないと仮定する。すると、X の空でない部分集合 C のうち、ある順序数と同型な（特に全順序集合である）ものの各々について、<u>選択公理を用いて</u>C の上界 $b_C \in X \setminus C$ を一つずつ選ぶことができる。

定理 1 を適用すべく、まず X の元 a を一つ固定しておき、式 $\varphi(x,y)$ を以下の要領で定義する。

- $x = 0$ のとき、$\varphi(x,y)$ は $y = a$ を意味するように定める。
- x がある順序数 $\alpha > 0$ から X への関数であって像 $\mathrm{Im}(x)$ への（半順序集合としての）同型写像であるとき、$\varphi(x,y)$ は $y = b_{\mathrm{Im}(x)}$ を意味するように定める（$\mathrm{Im}(x)$ は空でない順序数 α と同型なので、$b_{\mathrm{Im}(x)}$ が確かに定義されることを注意しておく)。
- それ以外のとき、$\varphi(x,y)$ は $y = 0$ を意味するように定める。

この式 $\varphi(x,y)$ は定理 1 の前提を満たすので、定理の主張にあるような式 $\Phi(x,y)$ が存在する。ここで以下の補題が成り立つ。

補題 5. x を順序数とし、x' を $\Phi(x, x')$ が成り立つ唯一の元とする。このとき、

1. $x' \in X$ である。
2. $y < x$ かつ $\Phi(y, y')$ が成り立つならば、X において $y' < x'$ である。

証明. x に関する超限帰納法を用いて証明する。まず、$x = 0$ のときは、φ の定義より $x' = a$ となるので、件の条件が成り立つ。次に $x > 0$ のときを考える。超限帰納法の仮定より、定理 1 の主張に現れる集合 $\Phi\restriction_x$ は x から X のある部分集合 C への同型写像となる（x は全順序集合であることを注意しておく）。このとき Φ と φ の定義より $x' = b_C$ となり、したがって件の条件は x に関しても成り立つ（二つ目の条件については、$b_C \in X \setminus C$ が C の上界であることから導かれる）。以上より主張が成り立つ。 $\square$

補題 5 の二つ目の性質より、各 $v \in X$ について、$\Phi(x, v)$ を満たす順序数 x は高々一つしか存在しない。X の部分集合 X' を、ある（一意に定まる）順序数 x について $\Phi(x, v)$ が成り立つような $v \in X$ 全体の集合として定める。置換公理を集合 X' と式 $\Phi'(x, y) := \Phi(y, x)$ に適用すると、順序数 y のうち、$\Phi(y, y')$ を満たす唯一の y' が X' に属するような y をすべて要素にもつ集合 Y の存在が示される。ここで補題 5 の一つ目の性質より、この集合 Y はすべての順序数を要素にもつことになる。しかし、これは Burali–Forti の逆理（すなわち、すべての順序数を要素にもつ集合は存在しない、という定理）に矛盾する。したがって背理法により、X は極大元をもつ。以上で Zorn の補題が証明された。