超限帰納法抜きで選択公理から Zorn の補題を証明してみた

縫田 光司

2011 年 11 月 13 日（初版）、2023 年 5 月 17 日（第 4 版）

概要

このノートでは、超限帰納法を使わずに選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える（なお、このノートの初版での証明のアイデアは [3, Theorem 4.19] と同じであったが、現在の証明は [2] の改良である）。

このノートを通して、$(X, \leq)$ は空でない半順序集合で、どの全順序部分集合も X における上界をもつものとする。**Zorn の補題**とは、このような X が常に極大元をもつという主張である。選択公理から Zorn の補題を（集合論の Zermelo–Fraenkel 公理系の下で）証明する際、「自然な」方針を採ろうとすると通常は超限帰納法のお世話になるのだが、このノートでは超限帰納法を使わない証明を紹介する。

X が極大元をもたないと仮定して矛盾を導く。X の整列部分集合[*1]全体の集合を $\mathcal{W}$ で表す。$C \in \mathcal{W}$ について $U_C := \{x \in X \mid y \in C$ であれば $y < x\}$ と定める。このとき $U_C \cap C = \emptyset$ であり、また、C の上界 $x \in X$ が存在してさらに極大でないことから $\emptyset \neq U_{\{x\}} \subseteq U_C$、したがって $U_C \neq \emptyset$ である。$\mathcal{U} := \{S \subseteq X \mid S = U_C$ を満たす $C \in \mathcal{W}$ が存在する$\}$ は非空集合からなる集合族であり、選択公理によりその選択関数 f が得られる。すなわち $C \in \mathcal{W}$ のとき $f(U_C) \in U_C$ が成り立つ。$\mathcal{W}$ の元 C で条件 (i-C)「$S \subseteq C, U_S \not\subseteq U_C$ のとき $f(U_S) \in C$」を満たすもの全体の集合を $\mathcal{C}_0$ で表す。また、$\mathcal{C}_0$ の元 C で条件 (ii-C)「$C' \in \mathcal{C}_0$ のとき $C \setminus C' \subseteq U_{C'}$」を満たすもの全体の集合を $\mathcal{C}$ で表す。

$C^* := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ と定める。$C' \in \mathcal{C}_0$ のとき $C^* \setminus C' \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \setminus C' \subseteq U_{C'}$（各 $C \in \mathcal{C}$ での (ii-C) より）となり、(ii-C^*) が成り立つ。また、$\emptyset \neq S \subseteq C^*$ とすると、ある $C \in \mathcal{C}$ について $S \cap C \neq \emptyset$ である。すると (ii-C^*) より $S \setminus C \subseteq C^* \setminus C \subseteq U_C$ であるので、$\min(S \cap C)$ が S の最小元である。よって $C^* \in \mathcal{W}$ である。さらに、$S \subseteq C^*$ かつ $U_S \not\subseteq U_{C^*} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} U_C$ のとき、ある $C \in \mathcal{C}$ について $U_S \not\subseteq U_C$ であり、さらにある $x \in U_S$ について $x \notin U_C$ である。すると $y \in S$ について $y < x$ より $y \notin U_C$ である。すなわち $S \cap U_C = \emptyset$ である。(ii-C^*) より $S \setminus C \subseteq C^* \setminus C \subseteq U_C$ であるから、$S \subseteq C$ が成り立つ。よって (i-C) より $f(U_S) \in C \subseteq C^*$ となり、(i-C^*) が成り立つ。よって $C^* \in \mathcal{C}$ である。$u := f(U_{C^*}), C^{**} := C^* \cup \{u\}$ と定める。

$u = \max C^{**}$ と $C^* \in \mathcal{W}$ より $C^{**} \in \mathcal{W}$ である。$S \subseteq C^{**}$ かつ $U_S \not\subseteq U_{C^{**}}$ のとき、$u \notin S$（さもなくば $U_S = U_{\{u\}} = U_{C^{**}}$ である）より $S \subseteq C^*$、したがって $U_{C^*} \subseteq U_S$ である。ここで $U_S \subseteq U_{C^*}$ の場合には $U_S = U_{C^*}$ となり、$f(U_S) = f(U_{C^*}) = u \in C^{**}$ となる。一方 $U_S \not\subseteq U_{C^*}$ の場合には、(i-C^*) より $f(U_S) \in C^* \subseteq C^{**}$ となる。いずれにしても $f(U_S) \in C^{**}$ となるので、$C^{**} \in \mathcal{C}_0$ である。$C^{**} \not\subseteq C^*$ より $C^{**} \notin \mathcal{C}$ であり、したがってある $C' \in \mathcal{C}_0$ について $C^{**} \setminus C' \not\subseteq U_{C'}$ である。(ii-C^*) より $C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ であるので、$u \notin C'$ かつ $u \notin U_{C'}$ である（さもなくば $\emptyset \neq (C^{**} \setminus C') \setminus U_{C'} = (C^* \setminus C') \setminus U_{C'} = \emptyset$ となり矛盾する）。これと $u \in U_{C^*}$ より $U_{C^*} \not\subseteq U_{C'}$ かつ $C^* \cap U_{C'} = \emptyset$、したがって $C^* \subseteq C'$ となる。すると (i-C') を $C^* \subseteq C'$ に適用して、$u \in C'$ となるが、これは矛盾である。以上で Zorn の補題が証明された。

[*1] 空でない部分集合 S が常に最小元 $\min S$ をもつ、ということ。なお、このとき、どの 2 元 $x, y \in S$ についても、x と y のどちらかが $\{x, y\}$ の最小元であることから、$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立ち、したがって S は全順序部分集合でもある。

おまけ：超限帰納法を用いた証明

このおまけでは、比較のために、超限帰納法を用いて選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える。最初に、超限再帰的定義に関する原理を述べておく（例えば [1, 第 I 章定理 9.3] を参照）。

定理 1. $\varphi(x, y)$ を（Zermelo–Fraenkel 集合論における）式で自由変数 x と y をもち、$\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ を満たすものとする。このとき、自由変数 x と y をもつ式 $\Phi(x, y)$ で以下の二つの条件を満たすものが存在する。

1. $\forall x((x \in \mathbf{ON} \to \exists! y \Phi(x, y)) \wedge (\neg x \in \mathbf{ON} \to \neg \exists y \varphi(x, y)))$
2. $\forall x(x \in \mathbf{ON} \to \forall y, z(y = \Phi\restriction_x \wedge \varphi(y, z) \to \Phi(x, z)))$

ただし、「$x \in \mathbf{ON}$」は「x は順序数」の略記とし、「$\Phi\restriction_x$」は集合 $\{\langle a, b\rangle \mid a \in x \wedge \Phi(a, b)\}$（$\langle a, b\rangle$ は a と b の順序対）の略記とする。

この定理の直感的な意味は以下の通りである：順序数全体（これは集合をなさないのであるが）で定義される「関数」Φ を得たいとき、順序数 α における値を α より小さな順序数における値から定める方法を指定すれば、その条件を満たす「関数」Φ が確かに存在する。この定理は ZF 集合論における定理であり、選択公理は用いていないことを注意しておく。

定理 1（と超限帰納法）を用いて、選択公理から Zorn の補題を証明する。$X \neq 0$ $(= \emptyset)$ を、Zorn の補題の主張に現れる半順序集合とする。背理法の仮定として、X は極大元をもたないと仮定する。すると、X の空でない部分集合 C のうち、ある順序数と同型な（特に全順序集合である）ものの各々について、選択公理を用いて C の上界 $b_C \in X \setminus C$ を一つずつ選ぶことができる。

定理 1 を適用すべく、まず X の元 a を一つ固定しておき、式 $\varphi(x, y)$ を以下の要領で定義する。

- $x = 0$ のとき、$\varphi(x, y)$ は $y = a$ を意味するように定める。
- x がある順序数 $\alpha > 0$ から X への関数であって像 $\mathrm{Im}(x)$ への（半順序集合としての）同型写像であるとき、$\varphi(x, y)$ は $y = b_{\mathrm{Im}(x)}$ を意味するように定める（$\mathrm{Im}(x)$ は空でない順序数 α と同型なので、$b_{\mathrm{Im}(x)}$ が確かに定義されることを注意しておく）。
- それ以外のとき、$\varphi(x, y)$ は $y = 0$ を意味するように定める。

この式 $\varphi(x, y)$ は定理 1 の前提を満たすので、定理の主張にあるような式 $\Phi(x, y)$ が存在する。ここで以下の補題が成り立つ。

補題 1. x を順序数とし、x' を $\Phi(x, x')$ が成り立つ唯一の元とする。このとき、

1. $x' \in X$ である。
2. $y < x$ かつ $\Phi(y, y')$ が成り立つならば、X において $y' < x'$ である。

証明. x に関する超限帰納法を用いて証明する。まず、$x = 0$ のときは、φ の定義より $x' = a$ となるので、件の条件が成り立つ。次に $x > 0$ のときを考える。超限帰納法の仮定より、定理 1 の主張に現れる集合 $\Phi\restriction_x$ は x から X のある部分集合 C への同型写像となる（x は全順序集合であることを注意しておく）。このとき Φ と φ の定義より $x' = b_C$ となり、したがって件の条件は x に関しても成り立つ（二つ目の条件については、$b_C \in X \setminus C$ が C の上界であることから導かれる）。以上より主張が成り立つ。 □

補題 1 の二つ目の性質より、各 $v \in X$ について、$\Phi(x, v)$ を満たす順序数 x は高々一つしか存在しない。X の部分集合 X' を、ある（一意に定まる）順序数 x について $\Phi(x, v)$ が成り立つような $v \in X$ 全体の集合として定める。置換公理を集合 X' と式 $\Phi'(x, y) := \Phi(y, x)$ に適用すると、順序数 y のうち、$\Phi(y, y')$ を満たす唯一の y' が X' に属するような y をすべて要素にもつ集合 Y の存在が示される。ここで補題 1 の一つ目の性質より、この集合 Y はすべての順序数を要素にもつことになる。しかし、これは Burali–Forti の逆理（すなわち、すべての順序数を要素にもつ集合は存在しない、という定理）に矛盾する。したがって背理法により、X は極大元をもつ。以上で Zorn の補題が証明された。

参考文献

[1] ケネス・キューネン（著)、藤田博司（訳)、『集合論　独立性証明への案内』、日本評論社、2008 年

[2] J. Lewin, “A Simple Proof of Zorn’s Lemma”, Amer. Math. Monthly **98**(4) (1991), 353–354

[3] H. Rubin, J. E. Rubin, “Equivalents of the Axiom of Choice, II”, Second Edition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol.116, North-Holland, 1985