Лабораторна робота №7

з дисципліни "Чисельні методи"

За темою: "Чисельні методи розв’язання завдання коші для звичайних диференційних рівнянь"

Виконав: студент групи КА-12 Гавлицький Іван

Перевірила: Димитрієва О. А.

Мета роботи: придбання практичних навичок в чисельному інтегруванні звичайних диференційних рівнянь явними і неявними одно- і багатокроковими методами, дослідження впливу значення кроку обчислень на точність і збіжність розв’язання. Визначення можливості застосування засобів стандартних пакетів для отримання результатів.

Варіант 38

1. У відповідності до свого варіанту завдання спробувати з’ясувати, чи існує аналітичний розв’язок рівняння (табл. 1). В іншому випадку змінити вид функції, інтервал визначення або початкову умову. Внести інформацію про проведені зміни у звіт з лабораторної роботи. Обрати аналітичний розв’язок в якості еталона.

2. Запропонувати розрахункову схему (схеми) розв’язання заданого диференційного рівняння явним однокроковим методом і знайти розв’язання для 10-20 розрахункових точок. У разі нестійкої поведінки розрахункового процесу можна задіяти процедуру зменшення кроку інтегрування або визначити максимально можливу довжину кроку для інтегрування явними методами, яка обумовлюється власними числами матриці Якобі.

3. Виконати розв’язання заданого диференційного рівняння неявним методом типу Рунге-Кутти 2(3).

4. Виконати розв’язання заданого диференційного рівняння неявним методом типу Рунге-Кутти 4(5).

5. Порівняти покрокові похибки числових розв’язків, отриманих в п.2-4.

6. Для кожного рівняння побудувати відповідні залежності аналітичного розв’язання (за наявності) і покрокових результатів за часом на одному графіку. Знайти величини розбіжностей за множиною розрахункових точок.

7. Погодити порядки точності одно- і багатокрокового методів і підготувати множину опорних точок для запуску процесу обчислень багатокроковими методами Мілна за схемою предиктор-коректор.

8. Знайти чисельне розв’язання рівняння (табл. 1) багатокроковими методами Мілна, отримані результати подати у вигляді таблиці значень і за допомогою графіків.

9. Використовуючи багатокрокові методи Адамса провести розрахунки, що дозволять оцінити похибки обчислень. Такі розрахунки можуть бути проведені із різними кроками інтегрування та/або методами з різними порядками.

10. Провести порівняння отриманих розв’язків одно- і багатокроковими методами. Зробити висновки щодо трудомісткості, кількості кроків, точності отриманих розв’язань.

38	$ln(2t+1)sin\frac{(y+2)}{3}$	1	2	1

In [144…

```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

tt = sp.symbols('t')
yy = sp.Function('y')

t0, tk, y0 = 1, 2, 1

def func(t, y):
    return sp.log(2*t + 1)*sp.sin((y+2)/3)
func_vec = np.vectorize(func)

func(tt, yy(tt))
```

Out[1449]:

$$\log(2t+1)\sin\left(\frac{y(t)}{3}+\frac{2}{3}\right)$$

Спробуємо розв'язати дане диф. рівняння аналітично. Для цього скористаємося вбудованою функцією

In [145…

```
eq = sp.Eq(sp.Derivative(yy(tt), tt), func(tt, yy(tt)))
res = sp.dsolve(eq, yy(tt), ics={yy(t0): y0})

res
```

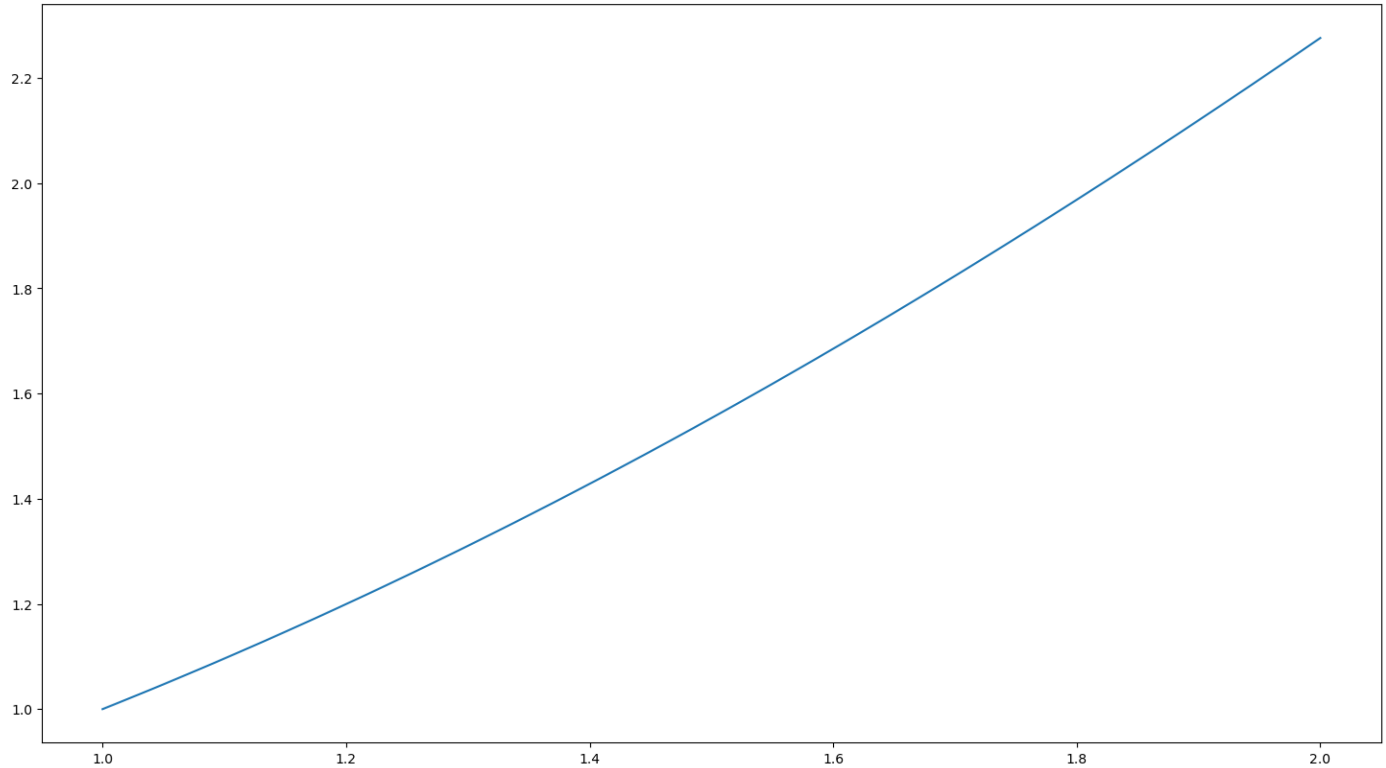
Out[1450]:

$$y(t) = 6\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[6]{2t+1}e^{\frac{1}{3}}e^{\frac{t(\log(2t+1)-1)}{3}}\tan\left(\frac{1}{2}\right)}{3}\right)-2$$

Як бачимо, рівняння розв'язується аналітично і не потребує змін виду функції, інтервалу визначення або початкової умови

In [145…

```
res = sp.lambdify(tt, res.rhs)
y_func = np.vectorize(res)

T_etalon = np.linspace(t0, tk, 100)
y_etalon = y_func(T_etalon)

plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))
plt.plot(T_etalon, y_etalon)
plt.show()
```



In [145…

```
def print_points(t_set, y_set):
    for t, y in zip(t_set, y_set):
        print(f't = {round(t, 1)}, y = {y}')
```

Створимо розрахункову схему для розв'язання даного рівняння

In [145…

```
def runge_kutta_4(y0, t_start, t_end, h):
    num_points = int((t_end - t_start) / h) + 1

    T = np.linspace(t_start, t_end, num_points)
    Y = np.zeros(num_points)

    Y[0] = y0

    for ii in range(num_points - 1):
        t = T[ii]
        y = Y[ii]

        k1 = h * func(t, y)
        k2 = h * func(t + h / 2, y + k1 / 2)
        k3 = h * func(t + h / 2, y + k2 / 2)
        k4 = h * func(t + h, y + k3)

        Y[ii + 1] = y + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6

    return T, Y
```

In [145…

```
T_1, Y_1 = runge_kutta_4(y0, t0, tk, 0.1)

print_points(T_1, Y_1)
```

```
t = 1.0, y = 1.0
t = 1.1, y = 1.0961495088017215
t = 1.2, y = 1.1996496934998455
t = 1.3, y = 1.3104106966909461
t = 1.4, y = 1.4283291724182634
t = 1.5, y = 1.5532763587763823
t = 1.6, y = 1.6850871150062623
```

```
t = 1.7, y = 1.8235499537567916
t = 1.8, y = 1.9683982384087433
t = 1.9, y = 2.1193028221700683
t = 2.0, y = 2.275866478080226
```

Знайдемо еталонний розв'язок

In [145…

```python
y_etalon = y_func(T_1)
y_etalon
```

Out[1455]:

```
array([1.        , 1.09614952, 1.19964971, 1.31041072, 1.42832921,
       1.5532764 , 1.68508717, 1.82355002, 1.96839831, 2.1193029 ,
       2.27586657])
```

Отже запропонована метод розв'язує задачу Коші достатньо точно

Розв'яжемо задане диференційне рівняння неявним методом типу Рунге-Кутти 2(3)

In [145…

```python
def runge_kutta(s, y0, t_start, t_end, h):
    c = np.linspace(0, 1, s+2)[1:-1]
    # c = np.array([1/3, 1])

    A, b = get_butcher_matrices(c)

    num_points = int((t_end - t_start) / h) + 1
    T = np.linspace(t_start, t_end, num_points)

    Y = np.zeros(num_points)
    Y[0] = y0

    for ii in range(num_points - 1):
        u = np.full(c.shape, Y[ii])

        F = getF(u, c, A, T[ii], h)
        Y[ii+1] = Y[ii] + h * b.dot(F)

    return T, Y


def getF(u, c, A, t, h):
    for ii in range(c.size):
        F = func_vec(t + c*h, u)
        u = u + h*np.sum(A*F.reshape((F.size, 1)), axis=0)
    return F


def get_butcher_matrices(c):
    s = c.size
    tt = sp.symbols('t')

    A = np.zeros((s, s))
    b = np.zeros(s)

    for jj in range(s):
        l_pol = get_lagrange_pol(tt, c, jj)
        b[jj] = sp.integrate(l_pol, (tt, 0, 1))

        for ii in range(s):
            A[ii, jj] = sp.integrate(l_pol, (tt, 0, c[ii]))

    return A, b
```

```python
def get_lagrange_pol(tt, c, ii):
    temp = [jj for jj in range(c.size) if jj != ii]
    return np.prod((tt - c[temp])/(c[ii] - c[temp]))
```

In [145…

```python
T_2, Y_2 = runge_kutta(2, y0, t0, tk, 0.1)

print_points(T_2, Y_2)
```

```
t = 1.0, y = 1.0
t = 1.1, y = 1.0961266830722827
t = 1.2, y = 1.199598207428188
t = 1.3, y = 1.3103244615358987
t = 1.4, y = 1.428201851768491
t = 1.5, y = 1.5531014008210344
t = 1.6, y = 1.6848578100486606
t = 1.7, y = 1.8232595167535128
t = 1.8, y = 1.9680399160324846
t = 1.9, y = 2.118870023076974
t = 2.0, y = 2.2753529237954235
```

Розв'яжемо задане диференційне рівняння неявним методом типу Рунге - Кутти 4(5)

In [145…

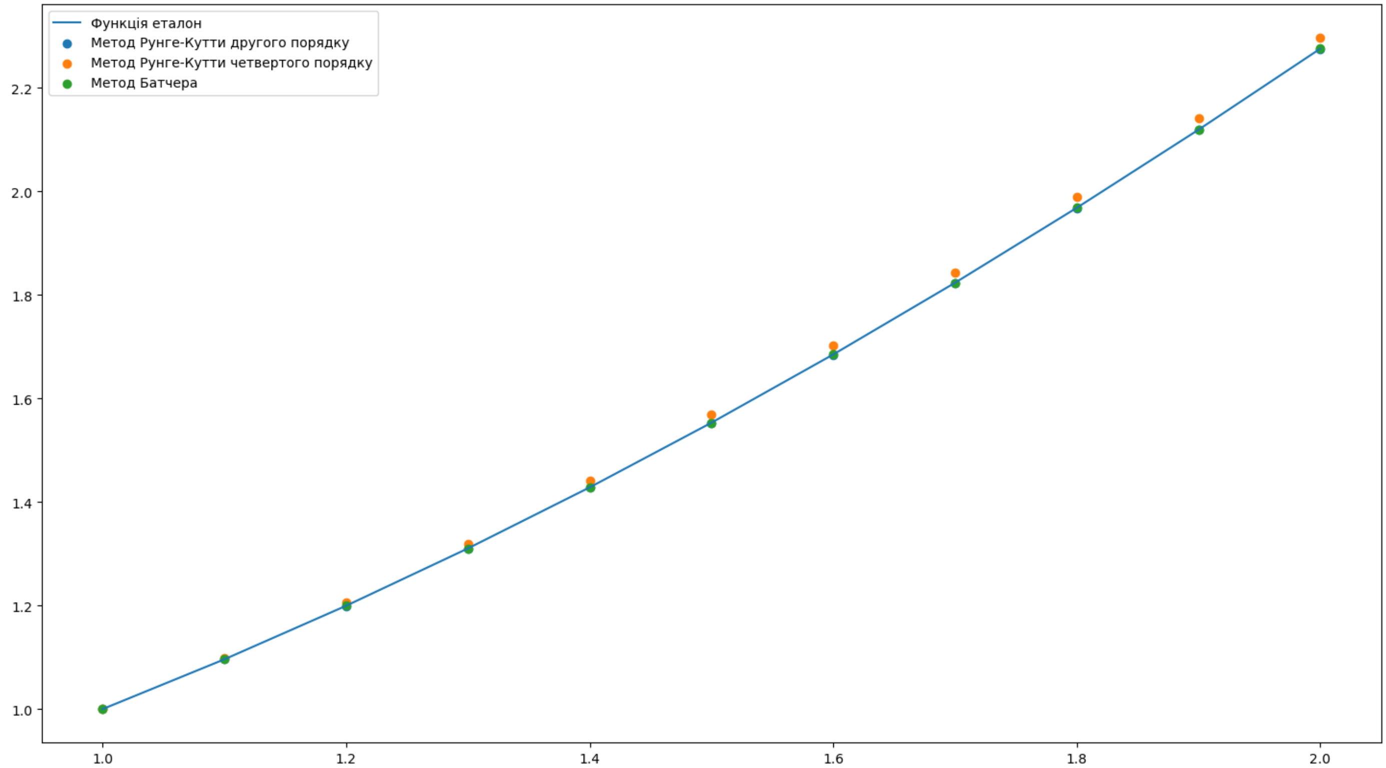
```python
T_3, Y_3 = runge_kutta(4, y0, t0, tk, 0.1)

print_points(T_3, Y_3)
```

```
t = 1.0, y = 1.0
t = 1.1, y = 1.09911480299878
t = 1.2, y = 1.205718878231214
t = 1.3, y = 1.3196230801139213
t = 1.4, y = 1.440606468251628
t = 1.5, y = 1.568405386392698
t = 1.6, y = 1.7027047243868731
t = 1.7, y = 1.84313157891322
t = 1.8, y = 1.9892515607178105
t = 1.9, y = 2.1405679581701635
t = 2.0, y = 2.2965238666992973
```

Порівняємо розв'язки з пунктів 2-4 з еталонним

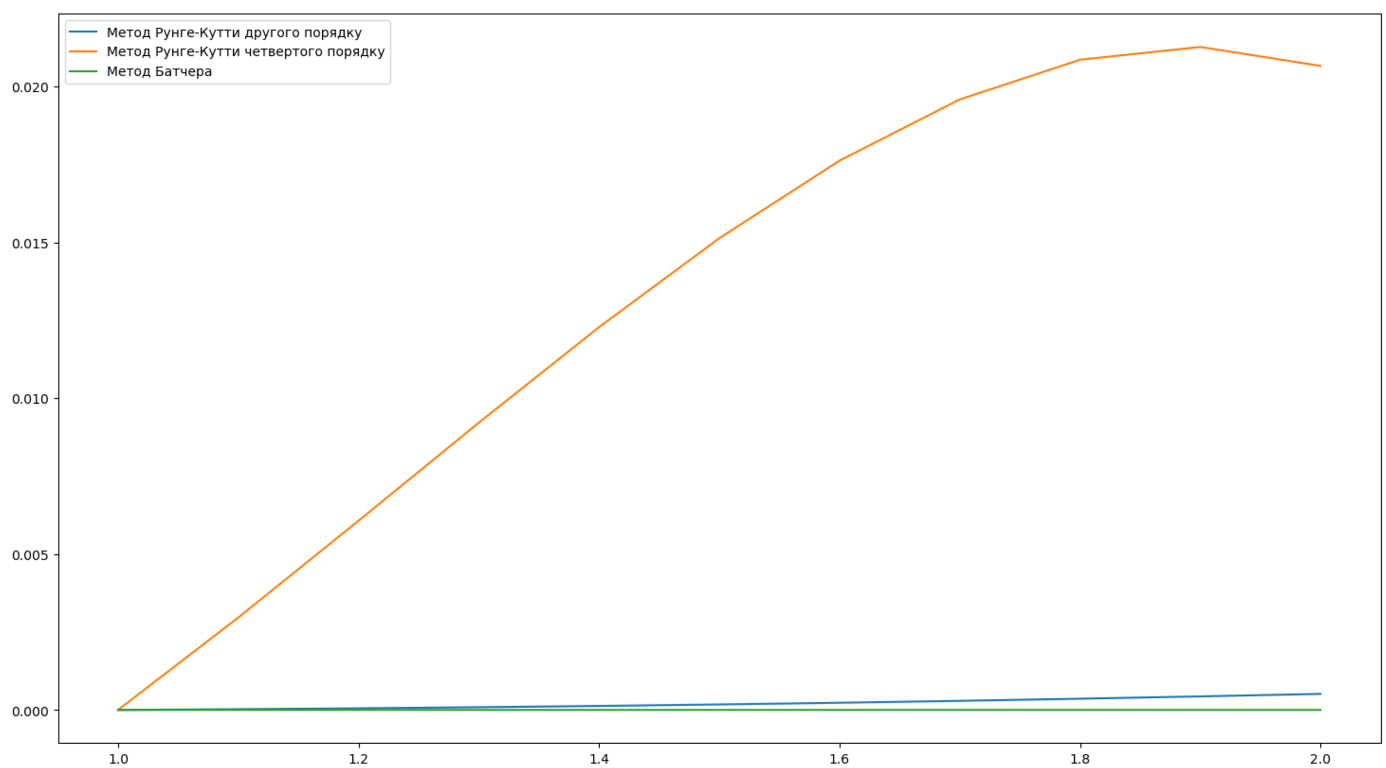
In [145…

```python
plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))
plt.plot(T_1, y_etalon, label = 'Функція еталон')
plt.scatter(T_2, Y_2, label = 'Метод Рунге-Кутти другого порядку')
plt.scatter(T_3, Y_3, label = 'Метод Рунге-Кутти четвертого порядку')
plt.scatter(T_1, Y_1, label = 'Метод Батчера')
plt.legend()
plt.show()
```



Графік розбіжностей

In [146…
```
plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))
plt.plot(T_2, abs(Y_2 - y_etalon), label = 'Метод Рунге-Кутти другого порядку')
plt.plot(T_3, abs(Y_3 - y_etalon), label = 'Метод Рунге-Кутти четвертого порядку')
plt.plot(T_1, abs(Y_1 - y_etalon), label = 'Метод Батчера')
plt.legend()
plt.show()
```



Реалізуємо багатокроковий метод Мілна за схемою предиктор-коректор

In [146…
```
def milne_method(y0, t_start, t_end, h):
```

```python
    num_points = int((t_end - t_start) / h) + 1
    T = np.linspace(t_start, t_end, num_points)
    Y = np.zeros(num_points)

    Y[0:4] = y_etalon[0:4]

    for ii in range(3, num_points-1):
        temp = 2*func(T[ii-2], Y[ii-2]) - func(T[ii-1], Y[ii-1]) + 2*func(T[ii], Y[ii])
        y_pred = Y[ii-3] + 4/3*h*temp

        temp = func(T[ii-1], Y[ii-1]) - 4*func(T[ii], Y[ii]) + func(T[ii+1], y_pred)
        y_corr = Y[ii-2] + h/3*temp

        Y[ii+1] = y_pred

    return T, Y
```

In [146…

```python
T_5, Y_5 = milne_method(y0, t0, tk, 0.1)

print_points(T_5, Y_5)

print(y_etalon)
```

```
t = 1.0, y = 1.0
t = 1.1, y = 1.0961495177963267
t = 1.2, y = 1.1996497113645805
t = 1.3, y = 1.3104107234471059
t = 1.4, y = 1.4283330767098865
t = 1.5, y = 1.5532801519361983
t = 1.6, y = 1.6850905101344293
t = 1.7, y = 1.823553197269086
t = 1.8, y = 1.9684049376162849
t = 1.9, y = 2.119308988150593
t = 2.0, y = 2.2758715053094236
[1.         1.09614952 1.19964971 1.31041072 1.42832921 1.5532764
 1.68508717 1.82355002 1.96839831 2.1193029  2.27586657]
```

Реалізуємо багатокроковий метод Адамса

In [146…

```python
def adams_method(y0, t_start, t_end, h):
    num_points = int((t_end - t_start) / h) + 1
    T = np.linspace(t_start, t_end, num_points)
    Y = np.zeros(num_points)

    Y[0:4] = y_etalon[0:4]

    for ii in range(2, num_points):
        y_pred = Y[ii - 1] + h / 2 * (3*func(T[ii - 1], Y[ii - 1]) - func(T[ii - 2], Y[i

        y_corr = Y[ii - 1] + h / 2 * (func(T[ii], y_pred) + func(T[ii - 1], Y[ii - 1]))

        Y[ii] = y_corr

    return T, Y
```

In [146…

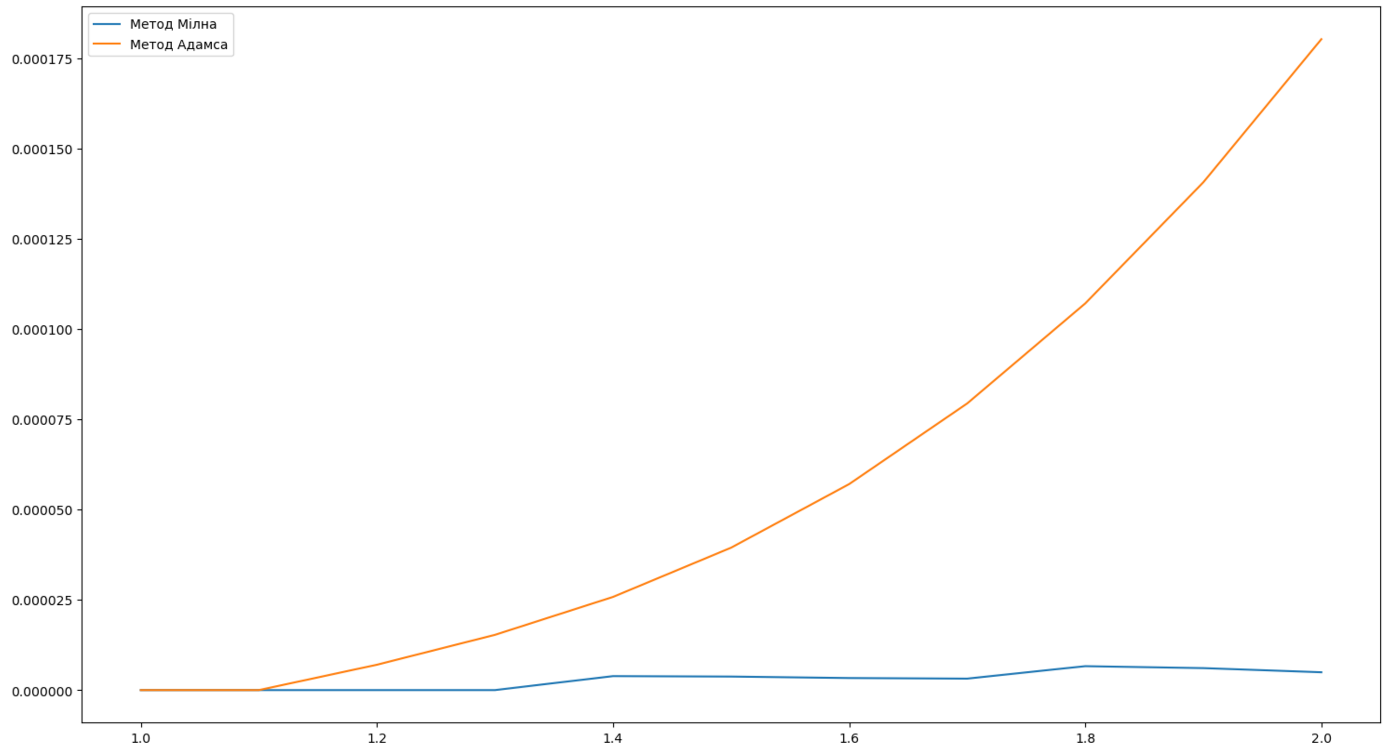
```python
T_6, Y_6 = adams_method(y0, t0, tk, 0.1)

print_points(T_6, Y_6)
```

```
t = 1.0, y = 1.0
t = 1.1, y = 1.0961495177963267
t = 1.2, y = 1.199642689147546
t = 1.3, y = 1.310395422269916
t = 1.4, y = 1.428303405155701
```

```
t = 1.5, y = 1.5532369672663684
t = 1.6, y = 1.685030124888794
t = 1.7, y = 1.8234706351096568
t = 1.8, y = 1.9682912265131884
t = 1.9, y = 2.1191622804100385
t = 2.0, y = 2.275686307930878
```

In [146…

```
plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))
plt.plot(T_5, abs(Y_5 - y_etalon), label = 'Метод Мілна')
plt.plot(T_6, abs(Y_6 - y_etalon), label = 'Метод Адамса')
plt.legend()
plt.show()
```



Висновки

Багатокрокові методи можуть бути трохи більш трудомісткими, вимагати зберігання попередніх значень та додаткових обчислень для прогнозування та виправлення. Кількість кроків у багатокрокових методах може залежати від умови зупинки, що може впливати на швидкість обчислень. Багатокрокові методи зазвичай мають більшу точність порівняно з однокроковими методами, але точність залежить від розрядності методу та характеристик задачі. Оптимальний вибір методу залежить від балансу між цими факторами та вимогами задачі.

Під час виконання лабороторної роботи я придбав практичні навички в чисельному інтегруванні звичайних диференційних рівнянь явними і неявними одно- і багатокроковими методами, дослідив вплив значення кроку обчислень на точність і збіжність розв'язання.