Лабораторна робота №3

з дисципліни "Чисельні методи"

За темою: "Обчислення власних значень і власних векторів матриць"

Виконав: студент групи КА-12 Гавлицький Іван

Перевірила: Димитрієва О. А.

Мета роботи: придбання практичних навичок в чисельному визначенні власних значень і власних векторів матриць на підставі використання характеристичних рівнянь і ортогональних перетворень. Визначення можливості застосування засобів стандартних пакетів для отримання результатів.

Варіант 38

Згенерувати матрицю в якості індивідуального варіанту завдання.

$$A = \begin{pmatrix} n & 7 & 2 & 4 & m & -3 \\ 5 & -l & -2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & k & -1 & 2 & -2j \\ 2l & 5 & -1 & -i & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 3 & 1 & j & -2 \\ -1 & -3k & 8 & 2 & -2 & m \end{pmatrix}$$

n – наскрізний номер варіанту у загальному списку академічних груп,

m – друга цифра наскрізного номеру варіанту у загальному списку академічних груп +3 (для одно- або дворозрядних номерів виходити з правила нормування n=001 або n=011),

l – третя цифра наскрізного номеру варіанту у загальному списку академічних груп

k – сума другої і третьої цифр наскрізного номеру варіанту у загальному списку академічних груп,

i – різниця другої і першої цифр номера за переліком варіантів у загальному списку академічних груп + 2,

j – модуль різниці першої і третьої цифр номера за переліком варіантів у загальному списку академічних груп.

In [17]:
```
import numpy as np
from scipy import linalg
import matplotlib.pyplot as plt
```

Згенеруємо матрицю для варіанту 38

In [18]:
```
def get_variant(variant):
    nn = int(variant)
    mm = int(variant[1]) + 3
    ll = int(variant[2])
    kk = int(variant[1]) + int(variant[2])
    ii = int(variant[1]) - int(variant[0]) + 2
    jj = np.abs(int(variant[0]) - int(variant[2]))

    return np.array([
```

```
        [nn, 7, 2, 4, mm, -3],
        [5, -ll, -2, -3, -3, 2],
        [2, -1, kk, -1, 2, -2*jj],
        [2*ll, 5, -1, -ii, 2, -2],
        [-2, -4, 3, 1, jj, -2],
        [-1, -3*kk, 8, 2, -2, mm]])

A = get_variant('038')
print(A)
```

```
[[ 38   7   2   4   6  -3]
 [  5  -8  -2  -3  -3   2]
 [  2  -1  11  -1   2 -16]
 [ 16   5  -1  -5   2  -2]
 [ -2  -4   3   1   8  -2]
 [ -1 -33   8   2  -2   6]]
```

Методи безпосереднього розгортання:

Метод Крилова

In [19]:
```
def krylov_matrix(A, x_0):
    O = np.zeros_like(A)
    n = A.shape[0]

    O[-1] = x_0.copy()

    for ii in range(1, n):
        O[-(ii + 1)] = A.dot(O[-ii])
    x_n = -A.dot(O[0])

    return O.T, x_n
```

Покладемо $x_0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$

In [20]:
```
x_0 = np.zeros(A.shape[0])
x_0[3] = 1
K, x_n = krylov_matrix(A, x_0)

print(K)
print(f'Визначник = {linalg.det(K)}')
print(f'x_n = {x_n}')
```

```
[[7187196  177745    4557     109       4       0]
 [ 487399   19453      54      62      -3       0]
 [ 808421   15804   -1584     -25      -1       0]
 [2600531   69156    1540      73      -5       1]
 [-381628  -14304    -642       0       1       0]
 [-674956  -24769   -1687      87       2       0]]
Визначник = -7489886301675726.0
x_n = [-288279307  -22413325  -30215133 -104207711   13001306   14889413]
```

Отримали невироджену матрицю.

Розглянемо систему лінійних рівнянь для коефіцієнтів характеристичного поліному матриці:

$$\begin{pmatrix} 7187196 & 177745 & 4557 & 109 & 4 & 0 \\ 487399 & 19453 & 54 & 62 & -3 & 0 \\ 808421 & 15804 & -1584 & -25 & -1 & 0 \\ 2600531 & 69156 & 1540 & 73 & -5 & 1 \\ -381628 & -14304 & -642 & 0 & 1 & 0 \\ -674956 & -24769 & -1687 & 87 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_5 \\ b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -288279307 \\ -22413325 \\ -30215133 \\ -104207711 \\ 13001306 \\ 14889413 \end{pmatrix}$$

Розв'яжемо систему, використовуючи вбудовану функцію.

In [21]:
```
b = np.concatenate(([1], linalg.solve(K, x_n)))
print(b)
```

```
[ 1.000000e+00 -5.000000e+01  4.650000e+02 -4.230000e+02 -9.946900e+04
  2.997000e+05  3.072456e+06]
```

Одержали вектор коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Метод Фадєєва–Левер'є

In [22]:
```
def fadeev_leverrier_method(A):
    n = A.shape[0]

    b = np.zeros(n + 1)
    b[0] = 1
    K = np.eye(n)

    for ii in range(1, n + 1):
        b[ii] = -1/ii * A.dot(K).trace()
        K = A.dot(K) + b[ii] * np.eye(n)

    return b
```

In [23]:
```
b = fadeev_leverrier_method(A)
print(b)
```

```
[ 1.000000e+00 -5.000000e+01  4.650000e+02 -4.230000e+02 -9.946900e+04
  2.997000e+05  3.072456e+06]
```

Бачимо, що вектор коефіцієнтів характеристичного рівняння збігається з одержаним методом Крилова.

Таким чином, одержали характеристичне рівняння:

$$\lambda^6 - 50\lambda^5 + 465\lambda^4 - 423\lambda^3 - 99469\lambda^2 + 299700\lambda + 3072456 = 0$$

Обчислимо власні значення

In [24]:
```
eigvls = np.roots(b)
print(eigvls)
```

```
[40.05644901 +0.j          8.23926559+12.9912374j  8.23926559-12.9912374j
  7.50829842 +0.j         -9.49883674 +0.j         -4.54444186 +0.j        ]
```

Порівняємо отриманий результат з з власними значеннями, обчисленими за допомогою вбудованної функції.

In [25]:
```
print(linalg.eig(A)[0])
```

```
[40.05644901 +0.j          8.23926559+12.9912374j  8.23926559-12.9912374j
 -9.49883674 +0.j         -4.54444186 +0.j          7.50829842 +0.j        ]
```

Значення збігаються.

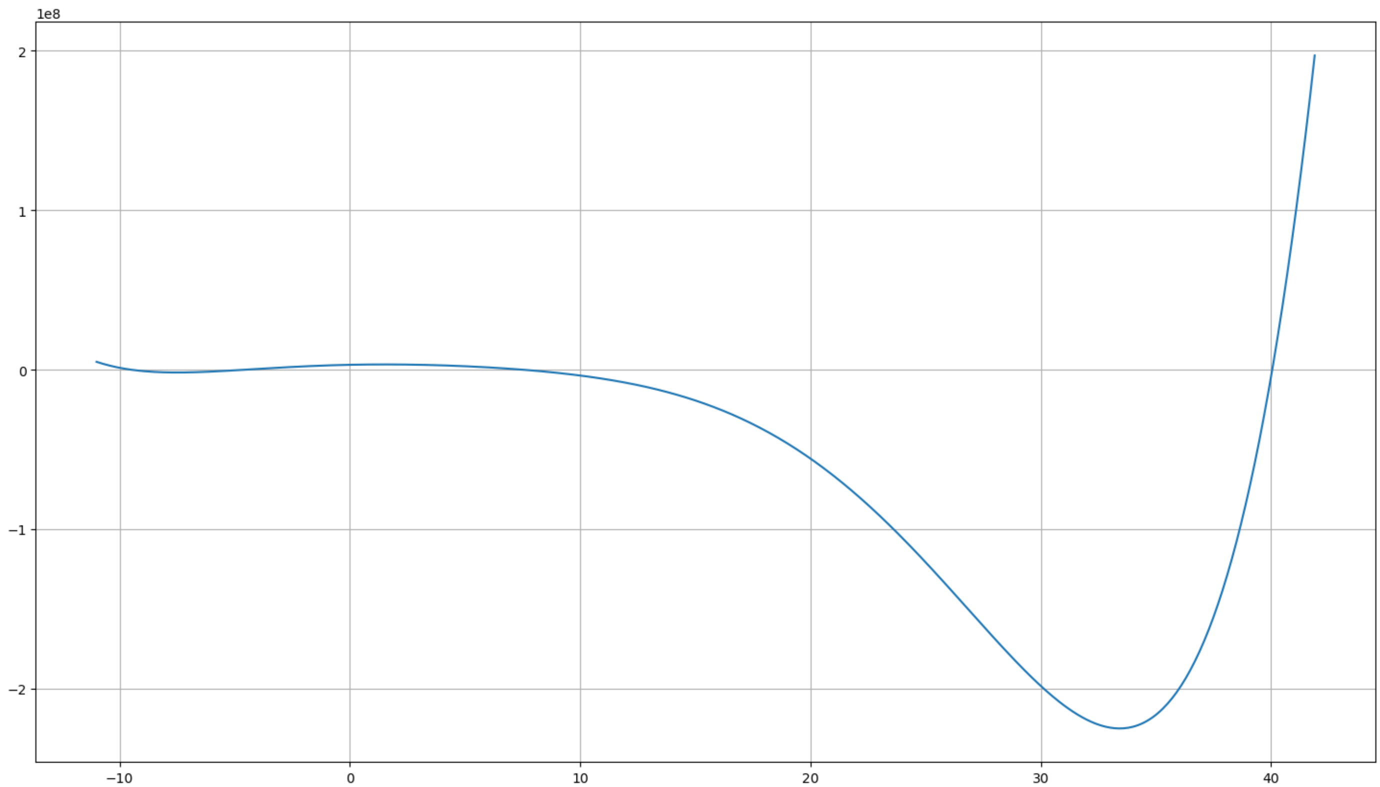
Побудуємо графік характеристичного рівняння

In [26]:
```
def characteristic_polynomial(x, b):
    output = 0
    for ii in range(len(b)):
        output += b[-(ii + 1)] * x**ii

    return output
```

In [27]:
```
real_eigvls = np.real(eigvls[np.isreal(eigvls)])
fig, axs = plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))

X = np.arange(-11, 42, 0.1)
Y = np.array([characteristic_polynomial(x, b) for x in X])
axs.plot(X, Y)
axs.grid()
```

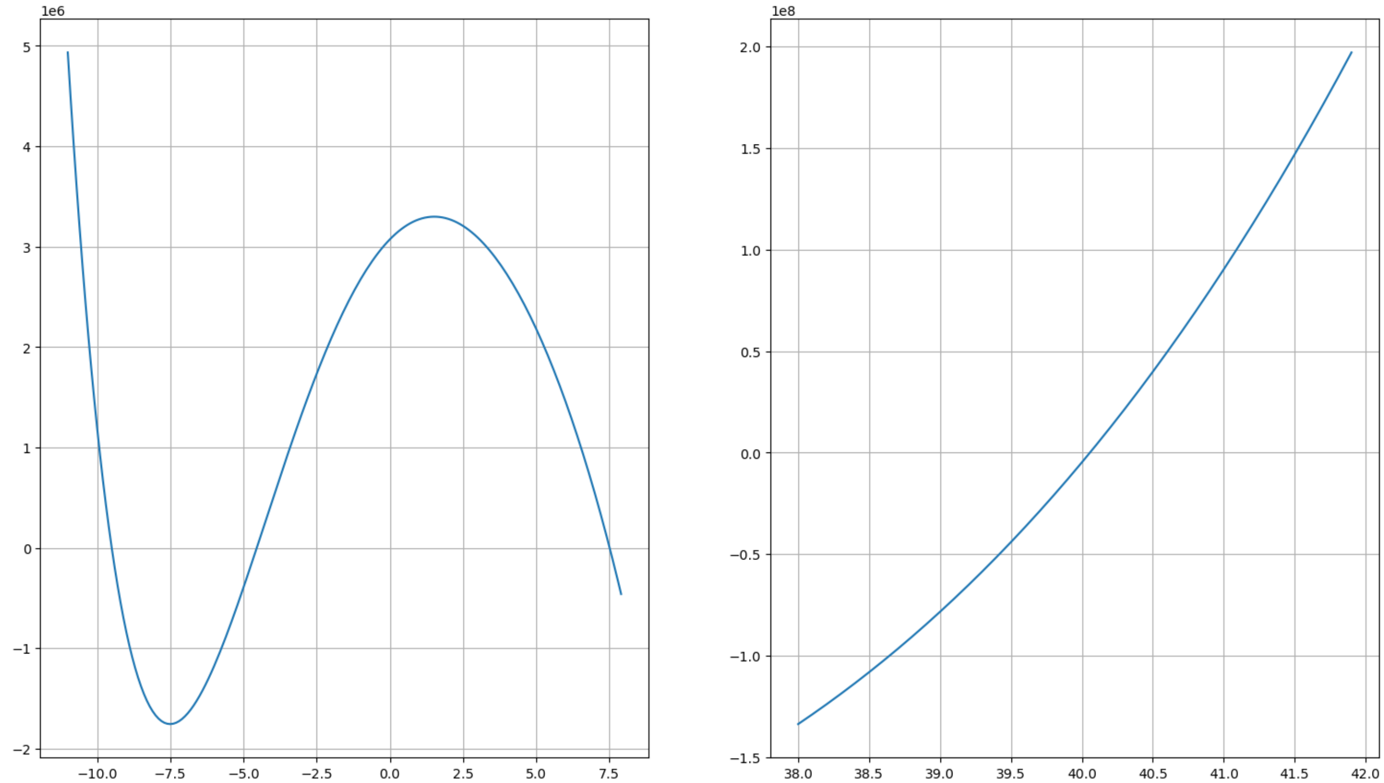


In [28]:
```
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize = (18, 10))
fig.suptitle('Околи дійсних коренів', fontsize=30)

X1 = np.arange(-11, 8, 0.1)
Y1 = np.array([characteristic_polynomial(x, b) for x in X1])
axs[0].plot(X1, Y1)
axs[0].grid()

X2 = np.arange(38, 42, 0.1)
Y2 = np.array([characteristic_polynomial(x, b) for x in X2])
axs[1].plot(X2, Y2)
axs[1].grid()
```

Околи дійсних коренів



Ітераційний метод:

QR–алгоритм

In [29]:
```
def qr_method(A, eps):
    for k, A_k in enumerate(qr_sequence(A)):
        print(f'Ітерація: {k}')
        print(A_k.round(3))

        cond, ii = tril_les(A_k, eps)

        if cond:
            return np.delete(np.diag(A_k), [ii, ii+1]), k


def qr_sequence(A):
    while True:
        Q, R = linalg.qr(A)
        A = R.dot(Q)
        yield A


def tril_les(A, eps):
    """
    Значення нижче діагоналі по модулю менше eps?
    Оскільки ми знаємо, що в нашому випадку 2 комплексних власних числа
    ропускаю перевірку одного діагонального блоку 2x2.
    Повертає булеве значення та індекс блоку в -1 діагоналі.
    """
    temp = np.abs(np.diag(A, k=-1))
    ii = np.argmax(temp)
    temp = np.delete(temp, ii)

    return np.all(np.abs(linalg.tril(A, k=-2)) < eps) and np.all(temp < eps), ii
```

Покладемо значення $\varepsilon = 0.05$ для значення елементів, що знаходяться нижче головної діагоналі.

Враховуючи особливості методу, не будемо звертати уваги на блоки, що відповідають $\lambda_k \notin \mathbb{R}$.

In [30]:
```python
eigvls, k = qr_method(A, 0.05)
print(f'\nДійсні власні числа:\n {eigvls} \nКількість ітерацій: {k}')
```

```
Ітерація: 0
[[ 39.359  -0.467   1.193 -11.608   3.784  12.439]
 [ -3.194  -3.714  19.384 -11.799  -0.603 -27.111]
 [  1.148 -13.794  10.828   5.064   3.048   7.097]
 [ -2.528  -4.134   0.104  -4.735  -3.465   4.232]
 [ -0.386   1.248   1.501  -0.784   7.369   1.55 ]
 [  0.079  -3.149  -0.112   0.247   0.2     0.893]]
Ітерація: 1
[[ 4.0019e+01  1.3200e-01 -2.6520e+00 -3.0240e+00  5.4200e+00 -1.5776e+01]
 [ 1.6150e+00  9.5390e+00  1.6213e+01 -8.1710e+00  3.4420e+00  2.9240e+00]
 [-1.1650e+00 -6.6880e+00  5.3600e+00  2.1930e+01  3.7670e+00 -2.3282e+01]
 [ 6.3300e-01 -2.9010e+00 -2.0200e+00 -8.3490e+00 -6.2710e+00 -8.3000e-02]
 [-5.8000e-02  5.0700e-01 -1.5400e-01  3.4500e-01  7.6740e+00 -4.1430e+00]
 [ 9.0000e-03  9.4700e-01  8.3500e-01  9.4300e-01  7.4600e-01 -4.2440e+00]]
Ітерація: 2
[[ 4.0033e+01  9.0000e-03 -1.8160e+00 -2.6440e+00  6.0650e+00  1.5181e+01]
 [-7.9000e-02  8.9590e+00  1.4776e+01 -1.8012e+01 -3.4100e-01 -1.1958e+01]
 [-2.0900e-01 -1.1811e+01  1.1426e+01  1.1702e+01  7.8250e+00  1.3727e+01]
 [-2.0200e-01  3.4650e+00 -2.3000e-01 -1.2961e+01 -9.1520e+00 -3.2100e+00]
 [-1.1000e-02 -6.1000e-02 -3.1000e-01 -7.6000e-02  7.3400e+00  3.9850e+00]
 [ 1.0000e-03  3.8500e-01  3.0000e-03 -8.0600e-01 -4.3100e-01 -4.7970e+00]]
Ітерація: 3
[[ 4.0055e+01  1.1940e+00 -9.9900e-01 -2.0260e+00  6.1190e+00 -1.5200e+01]
 [ 8.7000e-02  3.5400e+00  1.2384e+01 -2.4843e+01 -7.2790e+00  1.7998e+01]
 [-6.3000e-02 -1.6170e+01  1.1247e+01 -3.3680e+00  4.6880e+00  7.2800e-01]
 [ 4.3000e-02 -1.7910e+00  2.0200e-01 -8.1180e+00 -6.8260e+00 -1.3540e+00]
 [-2.0000e-03  6.7000e-02 -1.2600e-01  3.8000e-01  7.6230e+00 -3.8750e+00]
 [ 0.0000e+00  1.1000e-01  2.0000e-03  1.2300e-01 -1.1000e-02 -4.3480e+00]]
Ітерація: 4
[[ 4.0056e+01  1.2960e+00  9.1000e-01 -1.7260e+00  6.3340e+00  1.5103e+01]
 [ 4.8000e-02  1.1731e+01  1.4509e+01  8.8300e-01 -5.3380e+00 -3.0330e+00]
 [-4.9000e-02 -1.1363e+01  4.4510e+00 -2.6042e+01 -6.6790e+00 -1.7113e+01]
 [-1.0000e-02  9.8900e-01  5.0200e-01 -9.2180e+00 -8.1410e+00  3.2400e-01]
 [-0.0000e+00  6.0000e-03 -6.2000e-02 -9.0000e-02  7.4890e+00  3.5520e+00]
 [ 0.0000e+00  3.0000e-02  1.8000e-02 -1.0800e-01 -8.7000e-02 -4.5080e+00]]
Ітерація: 5
[[ 4.0057e+01  1.6800e-01  1.5510e+00 -1.3870e+00  6.4170e+00 -1.5121e+01]
 [ 6.0000e-03  7.7480e+00  1.6734e+01  1.7785e+01  9.8000e-02 -9.4430e+00]
 [-1.2000e-02 -1.0357e+01  9.5070e+00 -1.7924e+01 -8.2570e+00  1.4147e+01]
 [ 3.0000e-03 -6.2400e-01 -7.0000e-03 -1.0384e+01 -7.8160e+00  3.3000e-02]
 [-0.0000e+00  9.0000e-03 -3.5000e-02  1.8200e-01  7.6000e+00 -3.4470e+00]
 [ 0.0000e+00  8.0000e-03  1.0000e-03  6.0000e-02  1.3000e-02 -4.5280e+00]]
Ітерація: 6
[[ 4.0057e+01 -1.0890e+00  1.0480e+00 -1.4890e+00  6.4500e+00  1.5109e+01]
 [ 3.0000e-03  4.5880e+00  1.1945e+01  2.5604e+01  7.6020e+00  1.6821e+01]
 [-5.0000e-03 -1.5441e+01  1.1463e+01  2.7320e+00 -4.8450e+00 -9.1900e-01]
 [-1.0000e-03  4.3700e-01 -3.8000e-02 -9.0310e+00 -7.7650e+00  7.7500e-01]
 [-0.0000e+00  3.0000e-03 -1.4000e-02 -1.2200e-01  7.4570e+00  3.4030e+00]
 [ 0.0000e+00  3.0000e-03 -0.0000e+00 -2.1000e-02 -1.7000e-02 -4.5340e+00]]
Ітерація: 7
[[ 4.0056e+01 -1.3560e+00 -7.6500e-01 -1.3340e+00  6.4700e+00 -1.5112e+01]
 [ 2.0000e-03  1.1978e+01  1.3327e+01  4.0390e+00  6.5660e+00 -5.6740e+00]
 [-2.0000e-03 -1.3414e+01  4.4800e+00  2.5641e+01  5.5460e+00 -1.5798e+01]
 [ 0.0000e+00 -2.5700e-01 -1.0100e-01 -9.5220e+00 -7.8320e+00 -4.9200e-01]
 [-0.0000e+00  2.0000e-03 -6.0000e-03  8.9000e-02  7.5470e+00 -3.4080e+00]
 [ 0.0000e+00  1.0000e-03  0.0000e+00  1.2000e-02  1.0000e-03 -4.5380e+00]]
Ітерація: 8
[[ 4.0056e+01 -3.1500e-01 -1.5210e+00 -1.3910e+00  6.4730e+00  1.5106e+01]
```

```
 [ 1.0000e-03  8.0820e+00  1.7129e+01 -1.6169e+01  1.7700e-01 -7.9910e+00]
 [-1.0000e-03 -9.9270e+00  8.5710e+00  1.9908e+01  8.8330e+00  1.4715e+01]
 [-0.0000e+00  1.3800e-01  2.0000e-02 -9.6390e+00 -7.9940e+00  3.8200e-01]
 [-0.0000e+00  1.0000e-03 -4.0000e-03 -7.4000e-02  7.4730e+00  3.4070e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00 -6.0000e-03 -5.0000e-03 -4.5430e+00]]
Ітерація: 9
[[ 4.0056e+01  9.6500e-01 -1.2040e+00 -1.3450e+00  6.4810e+00 -1.5107e+01]
 [ 0.0000e+00  4.5710e+00  1.2596e+01 -2.5845e+01 -6.6180e+00  1.6438e+01]
 [-0.0000e+00 -1.4496e+01  1.1802e+01  2.6100e-01  5.7250e+00 -3.0930e+00]
 [ 0.0000e+00 -1.0200e-01  1.4000e-02 -9.4220e+00 -7.7820e+00 -5.9200e-01]
 [-0.0000e+00  0.0000e+00 -2.0000e-03  6.0000e-02  7.5350e+00 -3.4050e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00 -0.0000e+00  3.0000e-03 -1.0000e-03 -4.5430e+00]]
Ітерація: 10
[[ 4.0056e+01  1.4480e+00  5.6100e-01 -1.3700e+00  6.4780e+00  1.5105e+01]
 [ 0.0000e+00  1.1746e+01  1.2269e+01 -7.8090e+00 -7.4480e+00 -7.8930e+00]
 [-0.0000e+00 -1.4677e+01  4.7370e+00 -2.4612e+01 -4.7280e+00 -1.4740e+01]
 [-0.0000e+00  6.3000e-02  2.3000e-02 -9.4830e+00 -7.9460e+00  4.8900e-01]
 [-0.0000e+00  0.0000e+00 -1.0000e-03 -4.5000e-02  7.4880e+00  3.4030e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00 -1.0000e-03 -2.0000e-03 -4.5440e+00]]
Ітерація: 11
[[ 4.0056e+01  4.6200e-01  1.4790e+00 -1.3390e+00  6.4840e+00 -1.5105e+01]
 [ 0.0000e+00  8.6960e+00  1.7167e+01  1.4259e+01 -1.0570e+00 -6.5770e+00]
 [-0.0000e+00 -9.8630e+00  7.8200e+00 -2.1500e+01 -8.6690e+00  1.5370e+01]
 [ 0.0000e+00 -3.2000e-02 -7.0000e-03 -9.5540e+00 -7.8530e+00 -4.9500e-01]
 [-0.0000e+00  0.0000e+00 -0.0000e+00  3.7000e-02  7.5250e+00 -3.4000e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  1.0000e-03 -0.0000e+00 -4.5440e+00]]

Дійсні власні числа:
 [40.05645082 -9.55359354  7.52541832 -4.54401492]
Кількість ітерацій: 11
```

$\lambda_k \in \mathbb{R}$ збігаються з одержанним точними методами.

Визначимо кількість ітерацій, необхідних для досягнення розбіжності між точними і отриманими значеннями на рівні 0.01.

In [31]:

```python
def qr_iter_number(A, eigvls, eps):
    eigvls = np.sort(eigvls)

    for k, A_k in enumerate(qr_sequence(A)):
        eigvls_k = np.diag(A_k)
        print(f'{k}. {eigvls_k}')

        if compare_real(eigvls, eigvls_k, eps):
            return k


def compare_real(a, b, eps):
    a = a[np.isreal(a)]
    compare = np.abs(a - b.reshape(6, 1)) < eps

    return np.all(np.any(compare, axis=0))
```

In [32]:

```python
print(f'Точне значення: \n{linalg.eig(A)[0]}')

print('QR-метод:')
print(f'Кількість ітерацій: {qr_iter_number(A, linalg.eig(A)[0], 0.01)}')
```

```
Точне значення:
[40.05644901 +0.j          8.23926559+12.9912374j  8.23926559-12.9912374j
 -9.49883674 +0.j         -4.54444186 +0.j          7.50829842 +0.j        ]
QR-метод:
0. [39.35928489 -3.71417734 10.82777452 -4.73503831  7.36935654  0.89279969]
1. [40.01898392  9.53910312  5.36043001 -8.3485503   7.67421827 -4.24418503]
2. [ 40.03299229   8.95870348  11.42636571 -12.96137169   7.33987256
```

```
  -4.79656234]
3. [40.05472247  3.54041089 11.24674235 -8.11767313  7.62342768 -4.34763026]
4. [40.05634282 11.73084703  4.45082979 -9.21828566  7.48866409 -4.50839808]
5. [ 40.05717205   7.74782817   9.50668909 -10.38356816   7.60033647
  -4.52845762]
6. [40.05664745  4.58845734 11.46283216 -9.03144901  7.45734124 -4.53382917]
7. [40.05644678 11.97770979  4.47987749 -9.52249472  7.54683281 -4.53837214]
8. [40.05641371  8.08249319  8.57064965 -9.63913577  7.47267282 -4.5430936 ]
9. [40.05643602  4.57131834 11.80173047 -9.42171435  7.53500221 -4.54277269]
10. [40.05644859 11.74554364  4.737254   -9.48276547  7.48771995 -4.54420071]
11. [40.05645082  8.6961605   7.81957881 -9.55359354  7.52541832 -4.54401492]
12. [40.0564498   4.51725286 11.93474173 -9.45904997  7.49502877 -4.54442318]
13. [40.05644907 11.21736241  5.26440929 -9.5126775   7.51877598 -4.54431925]
14. [40.05644892  9.36454439  7.1219496  -9.49840367  7.49991343 -4.54445268]
Кількість ітерацій: 14
```

Бачимо, що $\lambda_k \in \mathbb{R}$ збігаються із точністю 0.01 вже на 14 ітерації.

Висновки

Під час виконання роботи я придбав практичні навички в чисельному визначенні власних значень і власних векторів матриць на підставі використання характеристичних рівнянь і ортогональних перетворень. Визначив можливості застосування засобів стандартних пакетів для отримання результатів.