Лабораторна робота №5

з дисципліни "Чисельні методи"

За темою: "Інтерполяція і наближення функцій"

Виконав: студент групи КА-12 Гавлицький Іван

Перевірила: Димитрієва О. А.

Мета роботи: придбання практичних навичок в побудові наближених формул інтерполювання для одновимірних функцій, заданих на відрізку у вигляді таблиці. Визначення похибок інтерполяційних формул. Інтерполяція за допоогою сплайнів. Застосування практичних методів наближення функцій.

Варіант 38

1. Для заданої таблиці значень (n+1 точка) побудувати інтерполяційний багаточлен відповідного типу. Обчислити значення функції у середніх точках кожного відрізку. Об'єднати початкові значення і ті, що були обчислені додатково (2n+1 точка), побудувати інтерполяційний багаточлен більшого ступеня. Навести графіки отриманих функцій і початкові точки.

2. За аналітично заданою функцією сформувати регулярну таблицю вузлів (бажано, щоб амплітуда інтервалу не перевищувала 1),наблизити отримані дані інтерполяційним поліномом. Визначити апріорну і апостеріорну похибки інтерполяції. Навести графіки функцій: початкової, інтерпольованої, розбіжностей.

3. За даними з п.1 (2n+1 точка) виконати сплайн-інтерполяцію. Навести графіки функцій: інтерпольованої відповідним багаточленом, сплайн- інтерполяції, розбіжностей

4. Провести наближення за даними з п.1 (2n+1 точка) методом найменших квадратів. Максимальні ступені наближення обрати самостійно. Навести графіки для порівняння.

38	*Xi* *Yi*	*0.50* *1.00*	*1.50* *2.75*	*2.00* *3.00*	*2.50* *3.50*	*3.00* *3.75*	Ньютона 2-а

38	*3x*lg(2x+.5)-10=0*

In [33]:
```python
import sympy as smp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

pnts1 = np.array([[.5, 1.5, 2, 2.5, 3],
                  [1, 2.75, 3, 3.5, 3.75]])

pnts1
```

Out[33]:
```
array([[0.5 , 1.5 , 2.  , 2.5 , 3.  ],
       [1.  , 2.75, 3.  , 3.5 , 3.75]])
```

Другий інтерполяційний багаточлен Ньютона

In [34]:
```python
def newton_polynomial(pnts, type=1):
    x_smbl = smp.symbols('x')
    diffs = divided_diffs(pnts, type)
```

```
    return smp.expand(num_newton_polynomial(x_smbl, pnts[0], diffs, type))


def num_newton_polynomial(x, nodes, diffs, type=1):
    if type == 2:
        nodes = np.flip(nodes)

    output = 0
    for ii, diff in enumerate(diffs):
        output += np.prod(x - nodes[:ii]) * diff

    return output


def divided_diffs(pnts, type=1):
    if type == 2:
        pnts = np.flip(pnts, axis=1)

    n = pnts.shape[1]
    output = np.zeros((n, n))
    output[0] = pnts[1]

    for ii in range(1, n):
        dx_set = (np.roll(pnts[0], -ii) - pnts[0])
        output[ii] = (np.roll(output[ii - 1], -1) - output[ii - 1]) / dx_set

    return output[:, 0]
```

Побудуємо багаточлен для заданих 5 точок.

In [35]:
```
pol1 = newton_polynomial(pnts1, type=2)
pol1
```

Out[35]: $$-0.533333333333333x^4 + 4.13333333333333x^3 - 11.3666666666667x^2 + 13.7166666666667x - 3.5$$

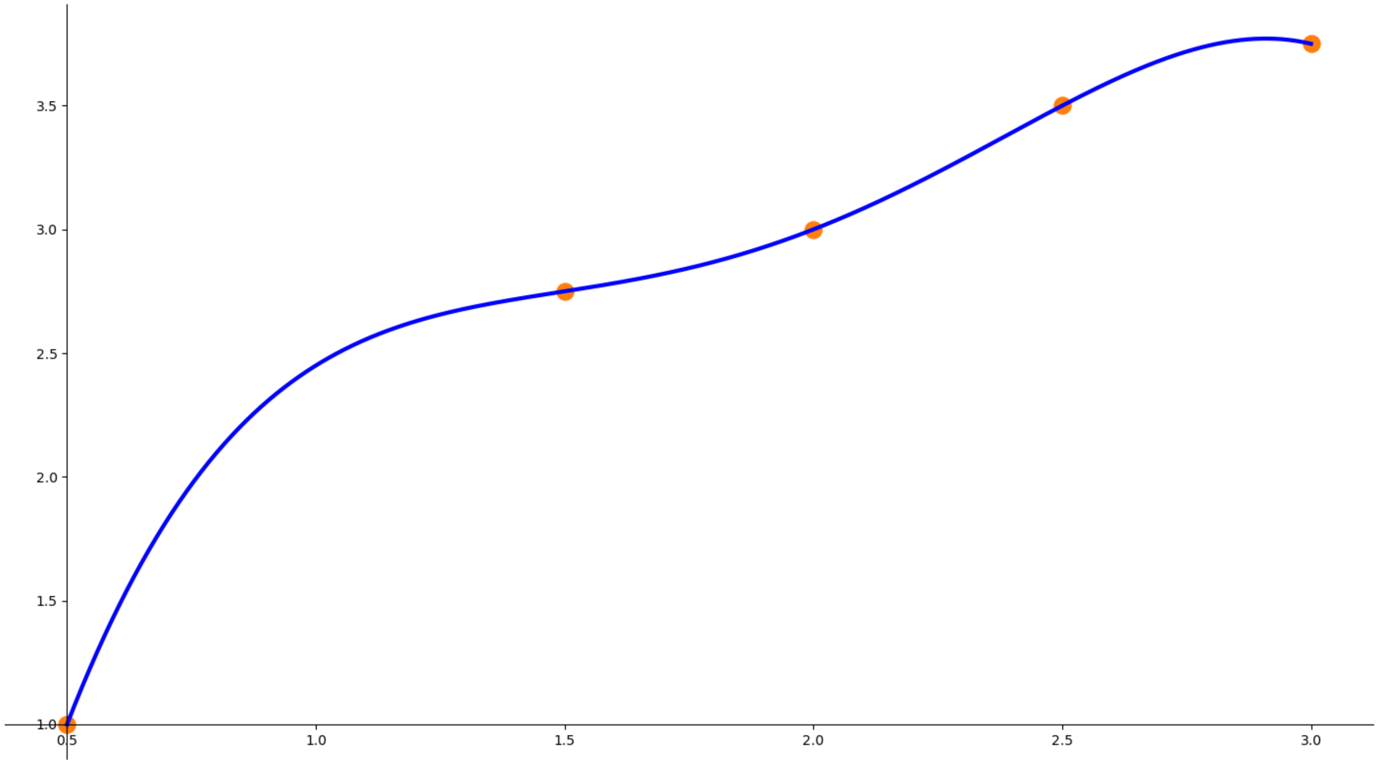
Порівняємо із багаточленом, згенерованим вбудованною функцією.

In [36]:
```
x_smbl = smp.symbols('x')
s = smp.functions.special.bsplines.interpolating_spline(4, x_smbl, pnts1[0], pnts1[1])
s
```

Out[36]: $$\begin{cases} -0.533333333333302x^4 + 4.1333333333331x^3 - 11.3666666666661x^2 + 13.7166666666661x \\ - 3.49999999999984 & \text{for } x \end{cases}$$

Побудуємо графік

In [37]:
```
phi1 = np.vectorize(smp.lambdify(x_smbl, pol1))
x_set = np.linspace(pnts1[0, 0], pnts1[0, -1], 1000)

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))

ax.plot(x_set, phi1(x_set), 'b', linewidth=3)
ax.scatter(pnts1[0], pnts1[1], s = 150, c='C1')

ax.spines['left'].set_position(('data', .5))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 1))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Обчислимо значення функції у середніх точках кожного відрізку

In [38]:
```
nodes1_new = (pnts1[0][1:] + pnts1[0][:-1])/2
pnts1_new = np.concatenate((pnts1, [nodes1_new, phi1(nodes1_new)]), axis = 1)
pnts1_new = pnts1_new[:, np.argsort(pnts1_new[0])]
print(pnts1_new)
```

```
[[0.5     1.      1.5     1.75    2.      2.25    2.5     2.75    3.      ]
 [1.      2.45    2.75    2.84375 3.      3.23125 3.5     3.71875 3.75    ]]
```

Згенеруємо багаточлен враховуючи додаткові точки

In [39]:
```
pol1_new = newton_polynomial(pnts1_new, type=2)
pol1_new
```

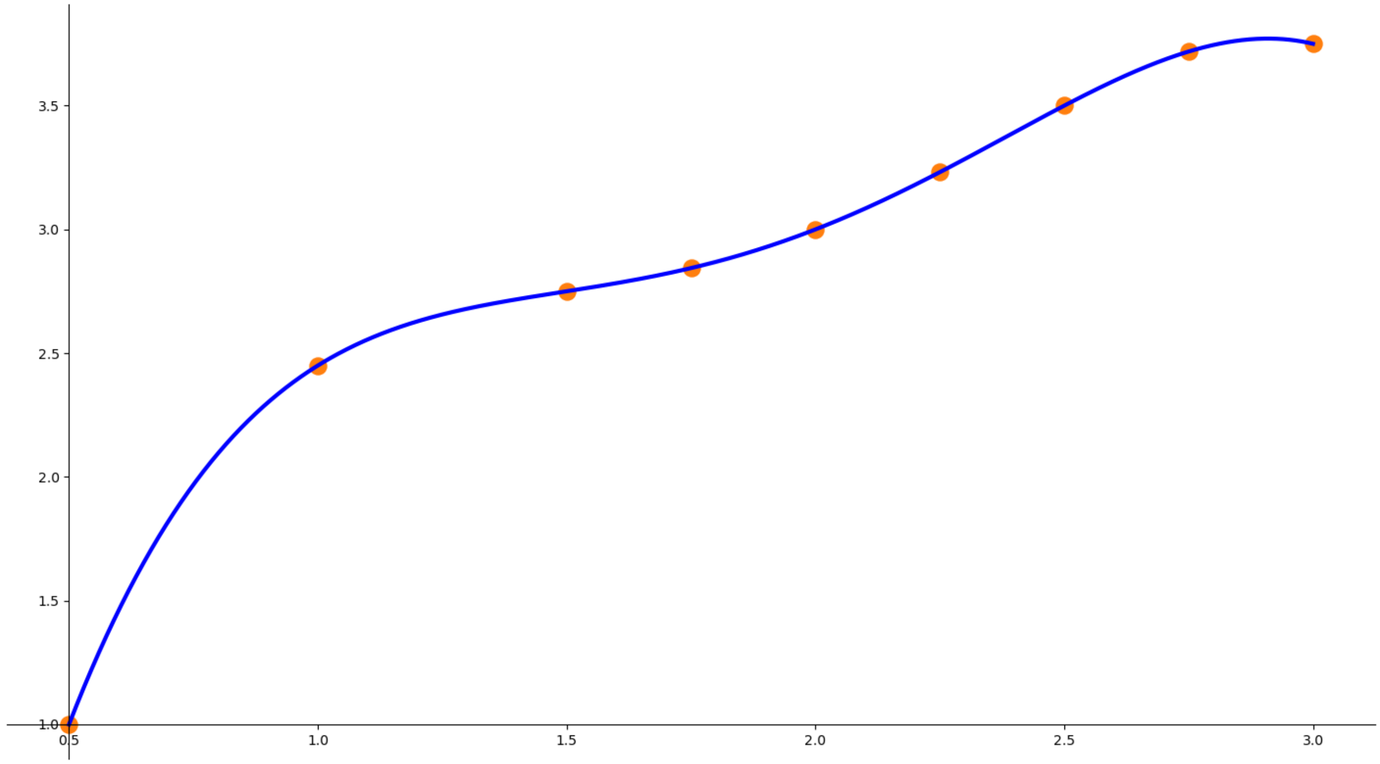
Out[39]:

$$9.99211549480519 \cdot 10^{-12} x^{8} - 1.5002499052587 \cdot 10^{-10} x^{7} + 9.60162066891238 \cdot 10^{-10} x^{6} - 3.40993413616708 \cdot 10^{-9} x^{5} - 0.533333326014665 x^{4} + 4.13333332366765 x^{3} - 11.366666659056 x^{2} + 13.7166666634373 x - 3.4999999994445$$

Бачимо, що багаточлен, не враховуючи похибок, збігається із попереднім.

Побудуємо графік

In [40]:
```
phi1_new = np.vectorize(smp.lambdify(x_smbl, pol1_new))

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))

ax.plot(x_set, phi1_new(x_set), 'b', linewidth=3)
ax.scatter(pnts1_new[0], pnts1_new[1], s = 150, c='C1')

ax.spines['left'].set_position(('data', .5))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 1))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```

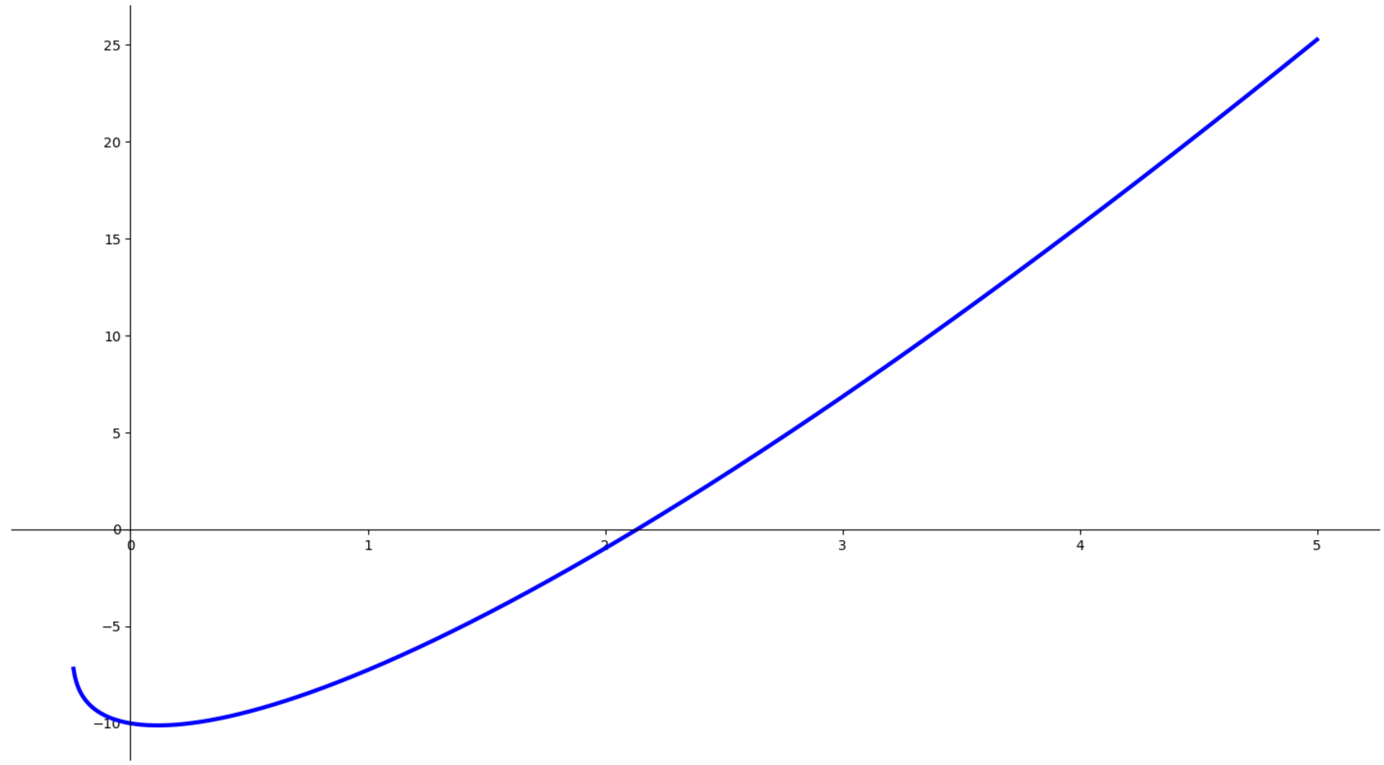


Визначимо похибки інтерполяції для заданної функції $f(x)$

In [41]:
```
def func(x):
    return 3*x * smp.log(2*x + .5) - 10
```

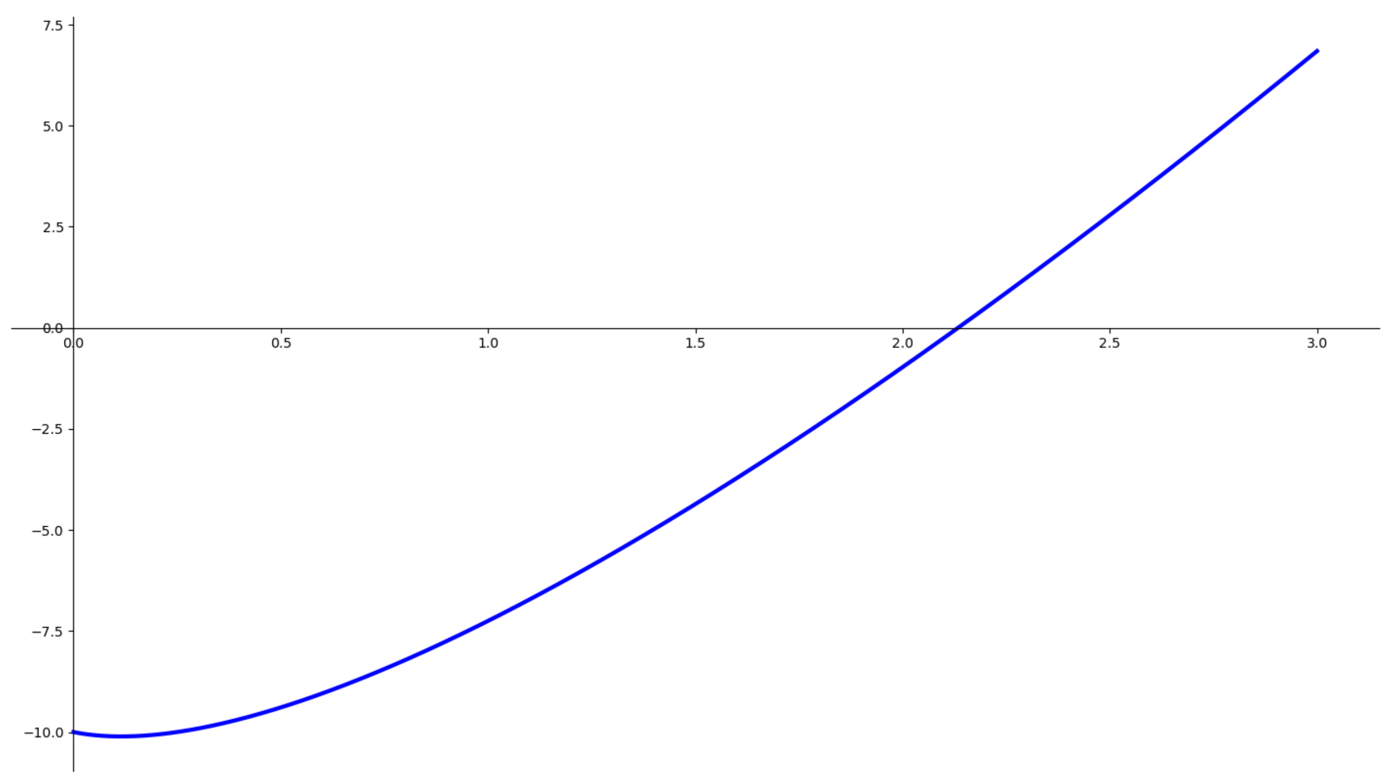
Побудуємо графік аби обрати проміжок для інтерполяції

In [42]:
```
vec_func = np.vectorize(func)
x_set = np.linspace(-.24, 5, 1000)

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))
ax.plot(x_set, vec_func(x_set), 'b', linewidth=3)

ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Нехай проміжок $= [0, 3]$

In [43]:
```
x_set = np.linspace(0, 3, 1000)

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))
ax.plot(x_set, vec_func(x_set), 'b', linewidth=3)

ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Обремо довільним чином вузли

In [44]:
```
nodes = np.array([0, .8, 1.5, 2.2, 3])
```

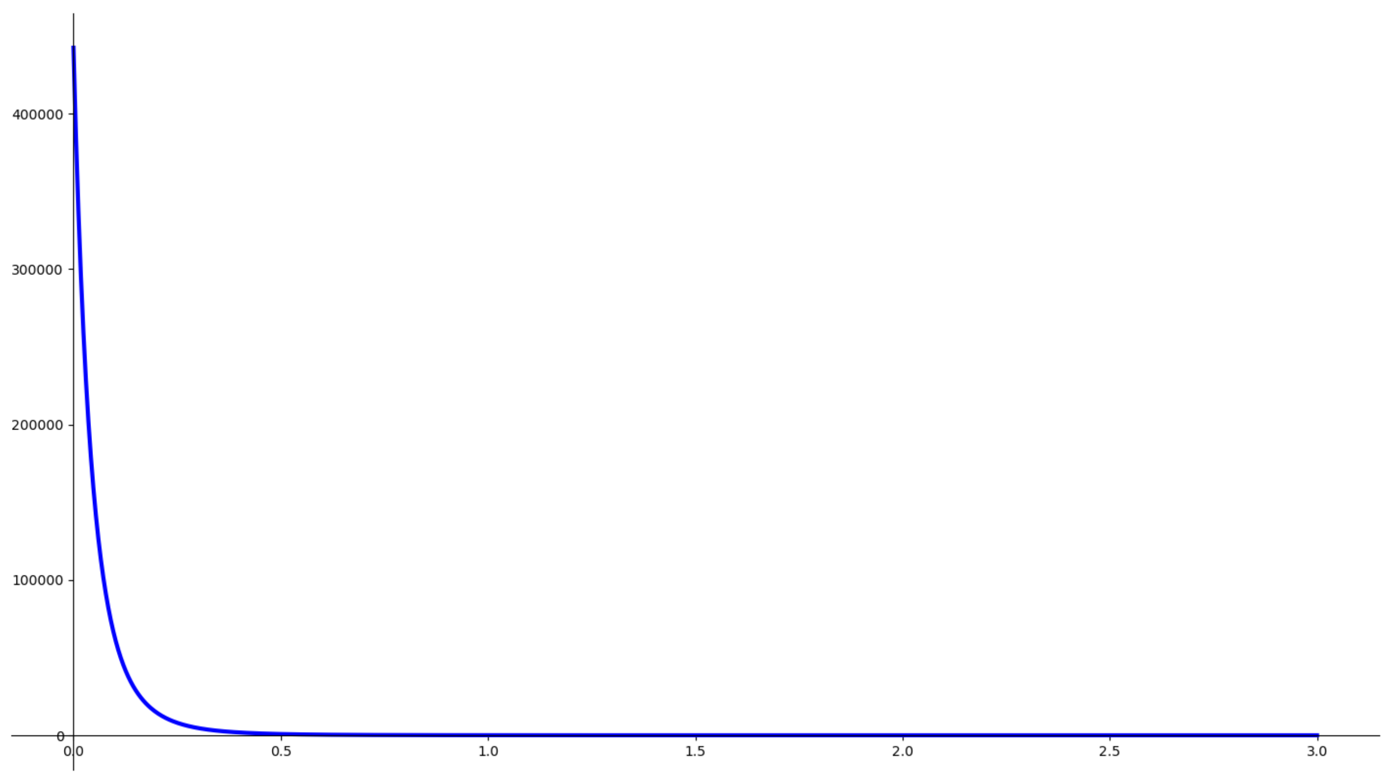
Визначимо апріорну похибку інтерполяції. Для цього обчислимо $n+1=6$ похідну функції $f(x)$

In [45]:
```
func_smbl = func(x_smbl)

d6f_smbl = smp.simplify(smp.diff(func_smbl, x_smbl, 6))
d6f_smbl
```

Out[45]:
$$\frac{72x + 108.0}{(x+0.25)^6}$$

Побудуємо графік похідної для знаходження значення $\max\limits_{x\in[0,3]}|f^{(n+1)}(x)|$

In [46]:
```
d6f = smp.lambdify(x_smbl, d6f_smbl)
vec_d6f = np.vectorize(d6f)
y_set = vec_d6f(x_set)

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))
ax.plot(x_set, y_set, 'b', linewidth=3)

ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



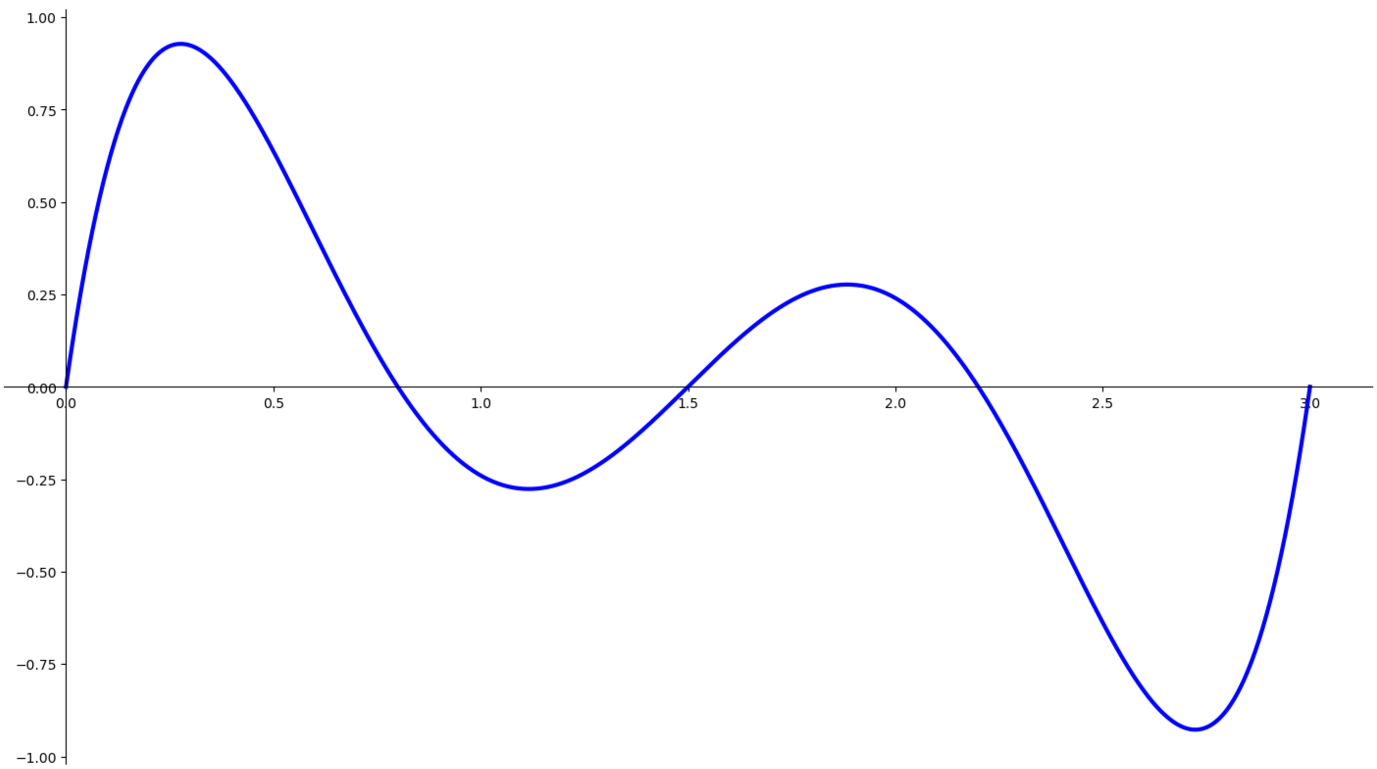
Максимум відхилення досягається в точці $x=0$ і дорівнює

In [47]:
```
d6f_max = np.max(np.abs(y_set))
d6f_max
```

Out[47]:
```
442368.0
```

Знайдемо максимум абсолютної величини відхилення функції $w(x)$

In [48]:
```
def om(x):
    return np.prod(x - nodes)

vec_om = np.vectorize(om)
y_set = vec_om(x_set)

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))
ax.plot(x_set, y_set, 'b', linewidth=3)

ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Визначимо максимум модуля цієї функції

In [49]:
```
om_max = np.max(np.abs(y_set))
om_max
```

Out[49]:
```
0.9277585702547528
```

Таким чином, апріорна похибка інтерполяції на обраній сутці складає

In [50]:
```
r_apri = d6f_max * om_max / math.factorial(6)
r_apri
```

Out[50]:
```
570.0148655645202
```

Одержали доволі грубу оцінку.

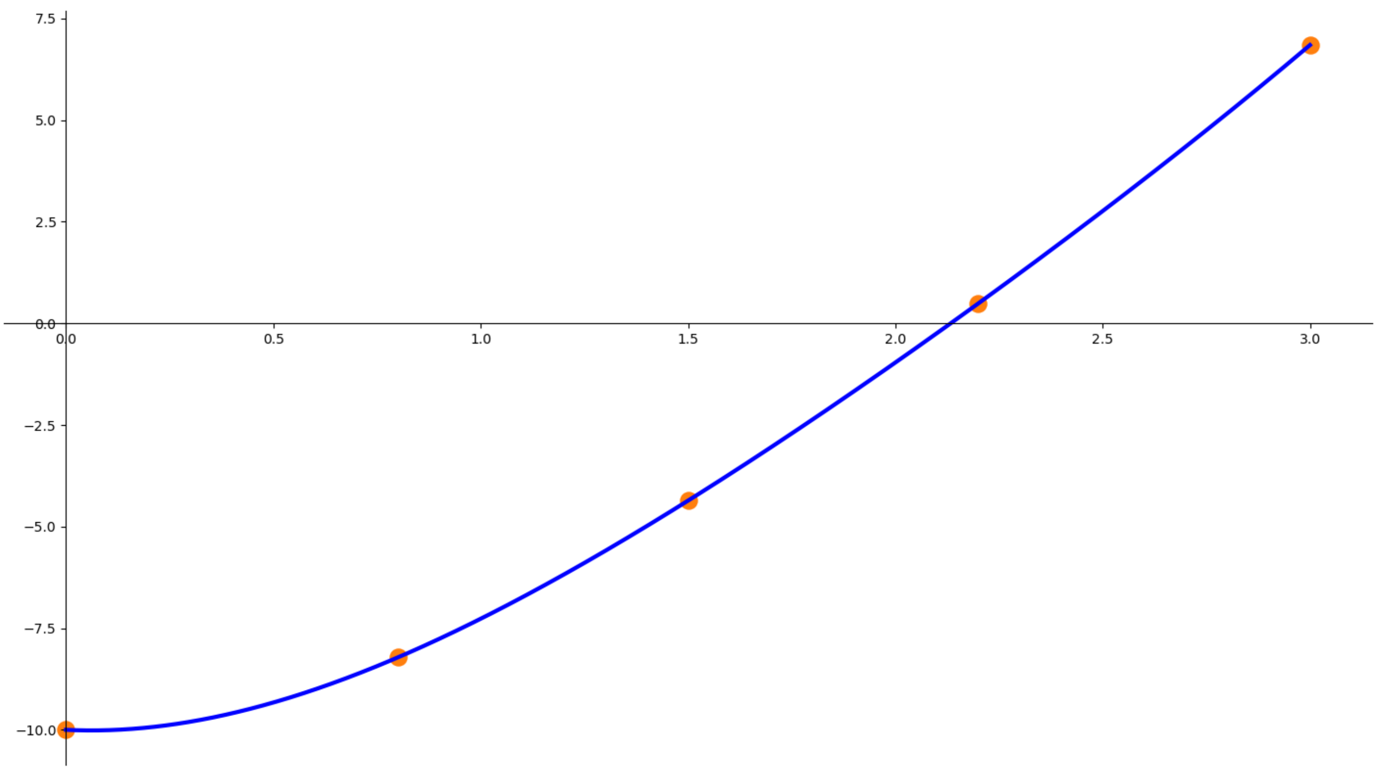
Виконаємо інтерполяцію отриманих за відомою функцією сіткових значень з використанням другого багаточлена Ньютона.

In [51]:
```
pnts2 = np.array([nodes, vec_func(nodes)])

pol2 = newton_polynomial(pnts2, type=2)
pol2
```

Out[51]: $0.126728654809004x^4 - 1.10401380524698x^3 + 4.21016422718204x^2 - 0.500635583461644x - 10.0$

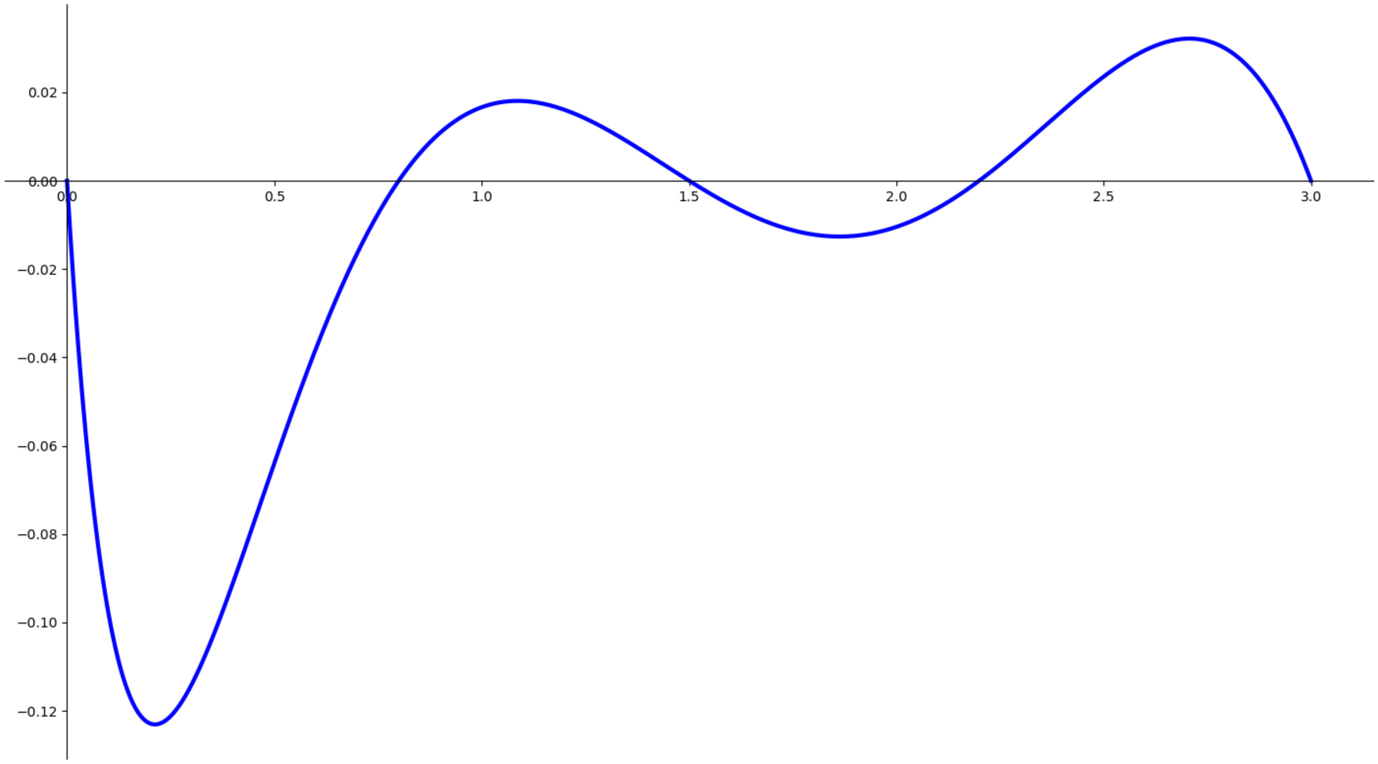
Побудуємо графік

In [52]:
```
phi2 = np.vectorize(smp.lambdify(x_smbl, pol2))

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))

ax.plot(x_set, phi2(x_set), 'b', linewidth=3)
ax.scatter(pnts2[0], pnts2[1], s = 150, c='C1')

ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Знайдемо похибку інтерполяції та побудуємо її графік

In [53]:
```
r_apost = smp.lambdify(x_smbl, func_smbl - pol2)
r_apost_vec = np.vectorize(r_apost)
y_set = r_apost_vec(x_set)

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))

ax.plot(x_set, y_set, 'b', linewidth=3)

ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Максимальне значення апостеріорної оцінки не перевищує апріорну

In [54]:
```
r_apost_max = np.max(np.abs(y_set))
r_apost_max
```

Out[54]:
```
0.12309417258887267
```

Сплайн-інтерполяція

Нехай, маємо n вузлів. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь відносно коефіцієнтів багаточленів:

$$S_i(x) := a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$
$$i = 0, \dots, n-1$$

$$\begin{cases} S_i(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n-1 \\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = 0, \dots, n-1 \\ S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), i = 0, \dots, n-2 \\ S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), i = 0, \dots, n-2 \end{cases}$$

Отримали 4n - 2 рівняння. Оскільки про поведінку функції на кінцях інтервалу немає інформації, додамо у систему наступні рівняння:

$$\begin{cases} S_0''(x_0) = 0 \\ S_{n-1}''(x_n) = 0 \end{cases}$$

Позначимо відстані між сусідніми вузлами як

$$h_i := x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, n-1$$

Тоді, скориставшись виведенням що було на лекції, переходимо до системи рівнянь:

$$a_i = y_i, i = 0, \dots, n-1$$

$$\begin{cases} b_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{1}{3}h_i(c_{i+1}+2c_i), i = 0, \dots, n-2 \\ b_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{1}{3}2c_{n-1}h_{n-1} \\ \\ d_i = \frac{c_{i+1}-2c_i}{6h_i}, i = 0, \dots, n-2 \\ d_{n-1} = -\frac{c_{n-1}}{3h_{n-1}} \\ \\ c_0 = 0 \\ h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3(\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}), i = 0, \dots, n-2 \\ c_n = 0 \end{cases}$$

In [55]:

```python
def calc_aset(pnts):
    return pnts[1][:-1]


def calc_bset(pnts, c_set):
    h_set = pnts[0][1:] - pnts[0][:-1]
    hy_set = pnts[1][1:] - pnts[1][:-1]

    b_i = hy_set[:-1]/h_set[:-1] - h_set[:-1]*(c_set[1:] + 2*c_set[:-1])/3
    b_n_1 = hy_set[-1]/h_set[-1] - 2/3*c_set[-1]*h_set[-1]

    return np.append(b_i, b_n_1)


def calc_dset(pnts, c_set):
    h_set = pnts[0][1:] - pnts[0][:-1]

    d_i = (c_set[1:] - c_set[:-1]) / (3*h_set[:-1])
    d_n_1 = -c_set[-1] / (3*h_set[-1])

    return np.append(d_i, d_n_1)
```

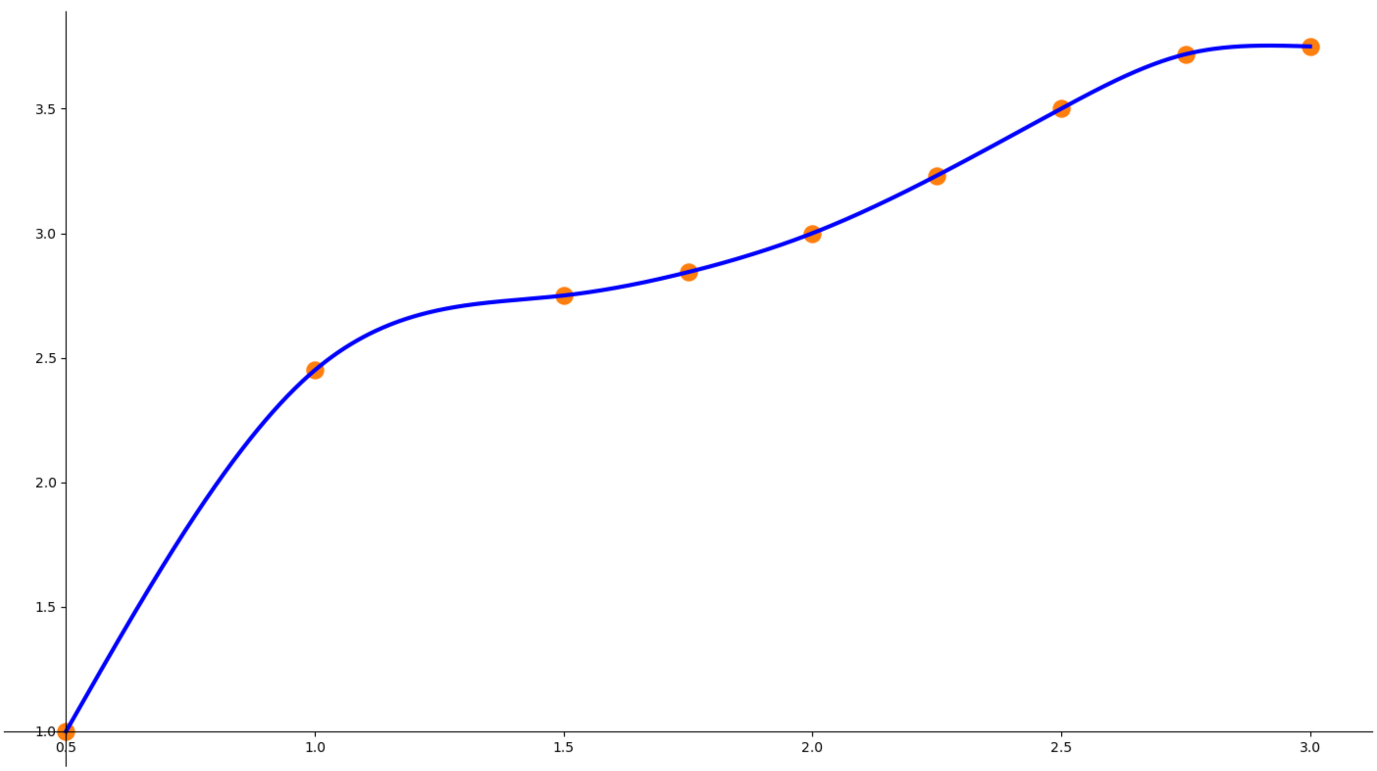
In [56]:

```python
def calc_cset(pnts):
    h_set = pnts[0][1:] - pnts[0][:-1]
    hy_set = pnts[1][1:] - pnts[1][:-1]

    A, b = create_cset_matrices(h_set, hy_set)
    c = np.linalg.solve(A, b)
    return c[:-1]


# A*c[1:] = b
def create_cset_matrices(h_set, hy_set):
    b = 3*(hy_set[1:]/h_set[1:] - hy_set[:-1]/h_set[:-1])

    A = np.zeros((b.size, b.size + 2))
    for ii in range(b.size):
        temp = np.array([h_set[ii], 2*(h_set[ii+1] + h_set[ii]), h_set[ii+1]])
        A[ii, (ii, ii+1, ii+2)] = temp

    # c_0 = 0, c_{n+1} = 0
    b = np.hstack((0, b, 0))
    A = np.vstack((np.zeros(b.size), A, np.zeros(b.size)))
    A[(0, -1), (0, -1)] = 1

    return A, b
```

In [57]:
```
def spline_interpolation(pnts):
    a_set = calc_aset(pnts)
    c_set = calc_cset(pnts)
    b_set = calc_bset(pnts, c_set)
    d_set = calc_dset(pnts, c_set)

    def pol(x):
        ii = pnts[0][:-1].searchsorted(x, 'right') - 1
        h = x - pnts[0][ii]
        return a_set[ii] + b_set[ii]*h + c_set[ii]*h**2 + d_set[ii]*h**3

    return np.vectorize(pol)
```

Виконаємо сплайн-інтерполяцію за даними з п.1 ($2n+1$ точка)

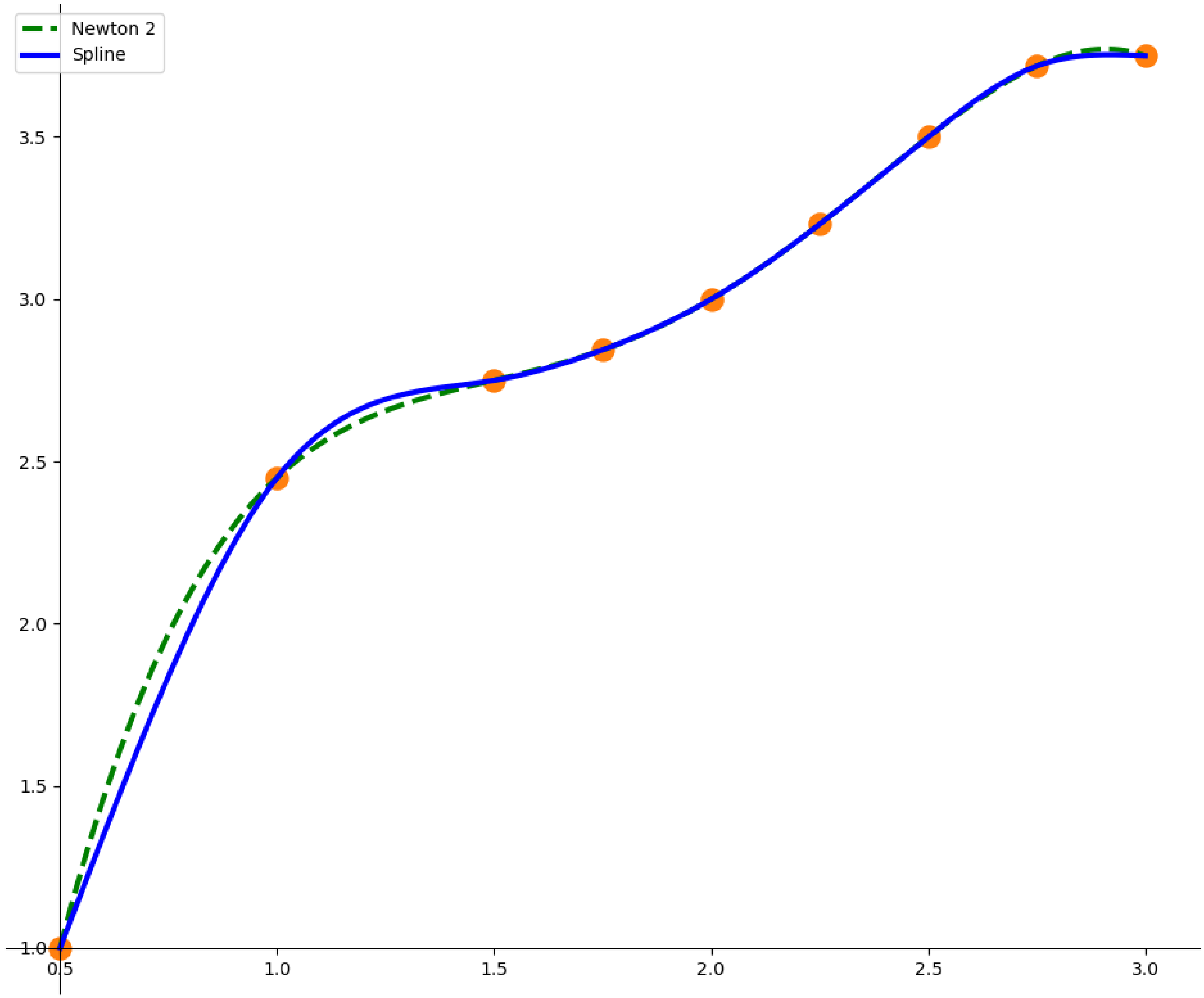
In [58]:
```
phi_spline = spline_interpolation(pnts1_new)

x_set = np.linspace(pnts1[0, 0], pnts1[0, -1], 1000)

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))

ax.plot(x_set, phi_spline(x_set), 'b', linewidth=3)
ax.scatter(pnts1_new[0], pnts1_new[1], s = 150, c='C1')

ax.spines['left'].set_position(('data', .5))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 1))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Порівняємо із багаточленом отриманим у п.1 $pol(x)$

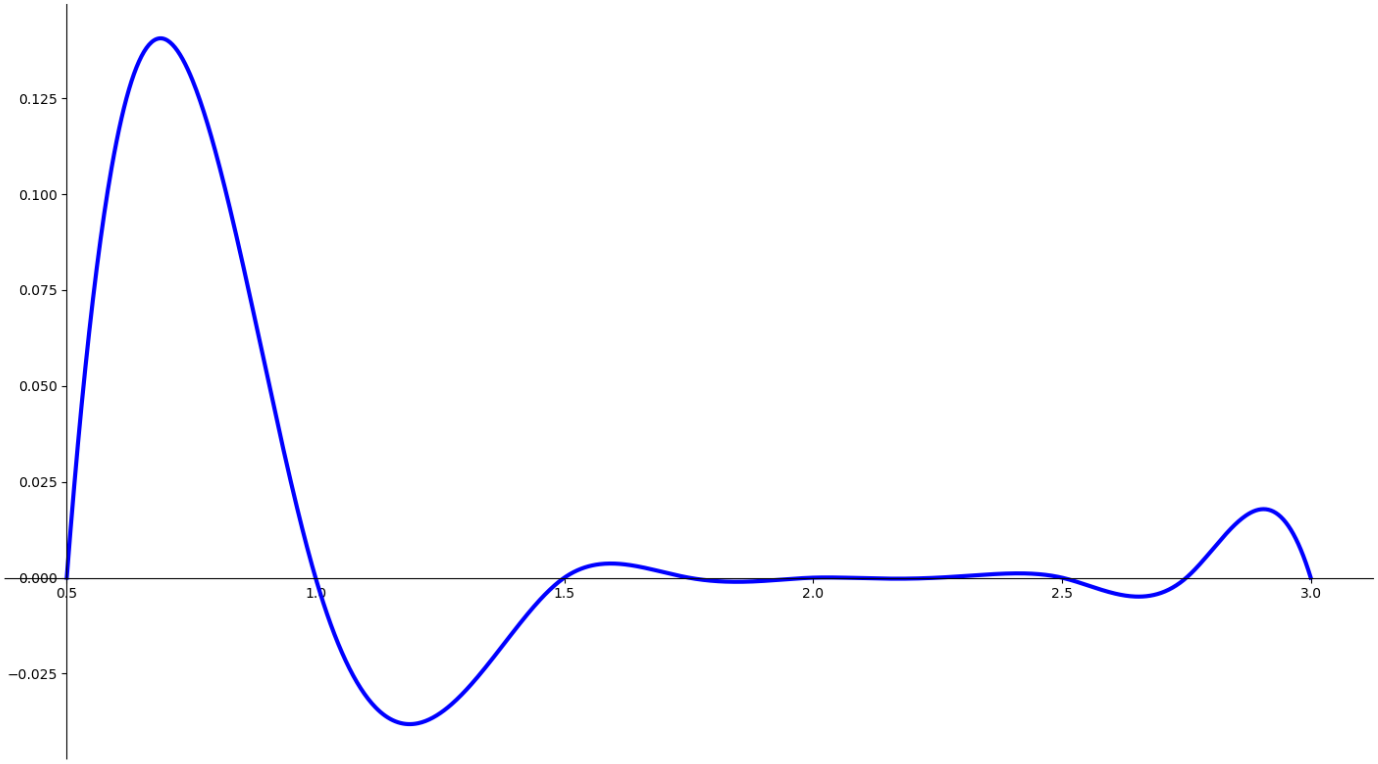
In [59]:
```
graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (12, 10))

ax.plot(x_set, phi1_new(x_set), 'g', linewidth=3, ls="--")
ax.plot(x_set, phi_spline(x_set), 'b', linewidth=3)
ax.scatter(pnts1_new[0], pnts1_new[1], s = 150, c='C1')
```

```
ax.spines['left'].set_position(('data', .5))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 1))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

ax.legend(['Newton 2', 'Spline'])

plt.show()
```



Побудуємо функцію розбіжностей $r(x) = pol(x) - S(x)$

In [60]:
```
graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize  = (18, 10))

ax.plot(x_set, phi1_new(x_set) - phi_spline(x_set), 'b', linewidth=3)

ax.spines['left'].set_position(('data', .5))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Спостерігаємо незначні розбіжності, особливо на найдовшому інтервалі.

Метод найменших квадратів

Проблему пошуку многочлена степеня m як наближення до функції $f(x)$ за заданими значеннями $f(x_i), i = 1, \dots, n$ методом найменших квадратів можна звести до роз'язання СЛАР:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 s_1 + \dots + c_m s_m = b_0 \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \dots + c_m s_{m+1} = b_1 \\ \dots \\ c_0 s_m + c_1 s_{m+1} + \dots + c_m s_{2m} = b_m \end{cases}$$

де

$$s_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i$$

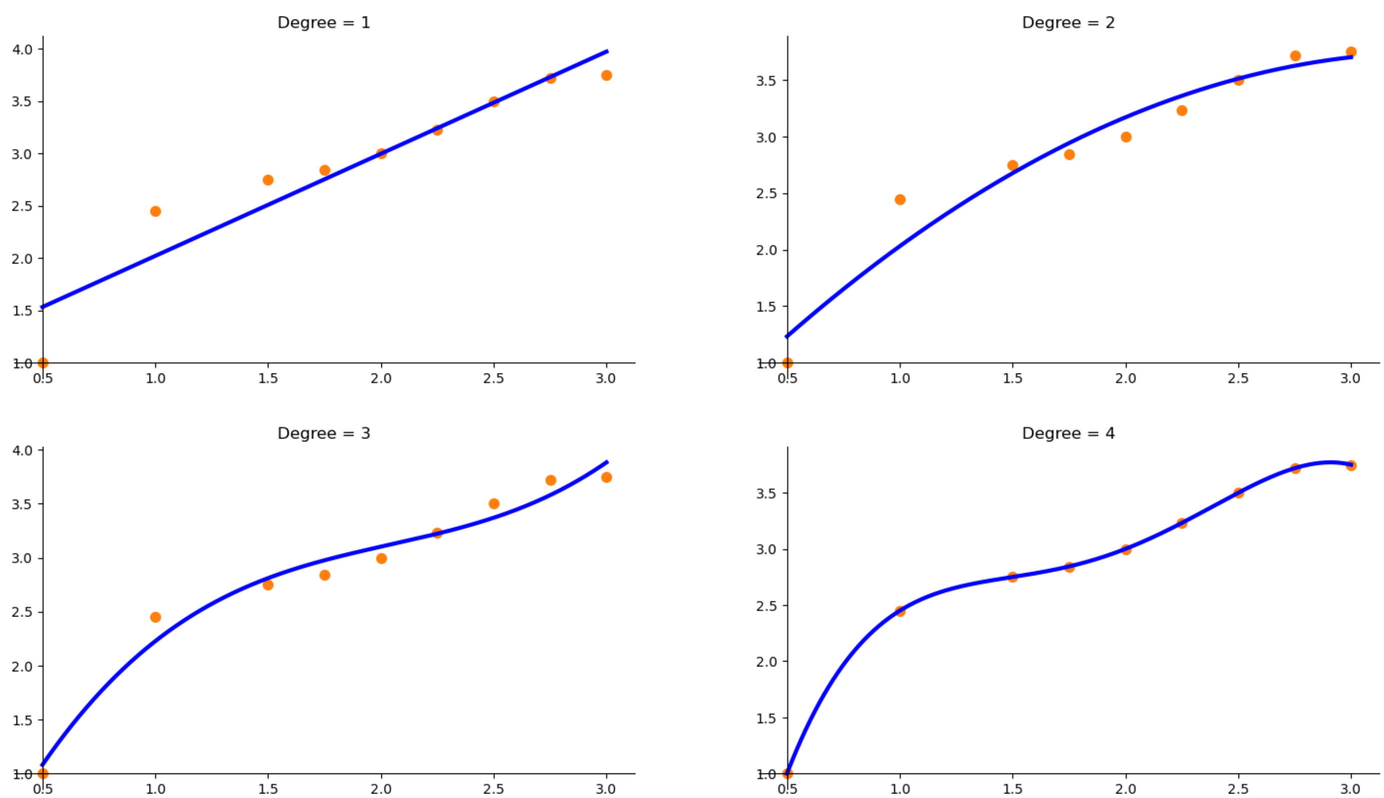
In [61]:

```
def least_squares(pnts, degree):
    A, b = least_squares_get_matrices(pnts, degree)
    c = np.linalg.solve(A, b)

    def pol(x):
        x_pow = np.array([x**k for k in range(degree + 1)])
        return np.sum(c * x_pow)

    return np.vectorize(pol)


def least_squares_get_matrices(pnts, degree):
    m = degree + 1
    b = np.array([np.mean(pnts[0]**k * pnts[1]) for k in range(m)])

    A = np.zeros((m, m))
    for ii in range(m):
```

```
        A[ii] = np.array([np.mean(pnts[0]**k) for k in range(ii, ii+m)])

    return A, b
```

Проведемо наближення за даними з п.1 (2n+1 точка). Побудуємо многочлени 1 — 4 ступенів.

In [62]:
```
phi_lsm = [least_squares(pnts1_new, m + 1) for m in range(4)]

x_set = np.linspace(pnts1[0, 0], pnts1[0, -1], 1000)

graph, axs = plt.subplots(2, 2, figsize  = (18, 10))
axs = axs.flatten()

for ii in range(4):
    axs[ii].plot(x_set, phi_lsm[ii](x_set), 'b', linewidth=3)

    axs[ii].set_title(f'Degree = {ii + 1}')
    axs[ii].scatter(pnts1_new[0], pnts1_new[1], s = 50, c='C1')

    axs[ii].spines['left'].set_position(('data', .5))
    axs[ii].spines['bottom'].set_position(('data', 1))
    axs[ii].spines['right'].set_color('none')
    axs[ii].spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Можна побачити, що многочлен 4 степеня є розв'язком завдання інтерполяції. Воно й не дивно, другий інтерполяційний багаточлен Ньютона, побудованний за 9 точками в п.1, також був 4 степіня.

Висновки

Під час виконання роботи я придбав практичні навички в побудові наближених формул інтерполювання для одновимірних функцій, заданих на відрізку у вигляді таблиці. Визначенні похибок інтерполяційних формул. Інтерполяції за допоогою сплайнів. Застосуванні практичних методів наближення функцій.