Лабораторна робота №6

з дисципліни "Чисельні методи"

За темою: "Чисельне диференціювання та інтегрування функцій"

Виконав: студент групи КА-12 Гавлицький Іван

Перевірила: Димитрієва О. А.

Мета роботи: придбання практичних навичок в чисельному диференціюванні за допомогою інтерполяційних формул і різницевих схем, а також в чисельному інтегруванні за допомогою квадратурних і інтерполяційних формул. Практичне використання інтерполяційних формул для обчислення значень похідних функцій 1-го і 2-го порядків з заданою точністю. Оцінювання похибок чисельного диференціювання і інтегрування.

Варіант 38

1. Скласти таблиці скінченних різниць з регулярним кроком, використовуючи значення функцій таблиці. Визначити 1-у і 2-у похідні функції в утворених вузлах, використовуючи для цього несиметричні обернені, прямі чи симетричні різницеві схеми диференціювання, визначаючи доцільність застосування тієї чи іншої схеми розташуванням вузла функції. Визначити і оцінити як величини розбіжностей співвідносяться з порядком точності різницевої схеми.

2. Для визначених в п.1 вузлів записати інтерполяційний поліном, знайти 1-у і 2-у похідні функції у вузлах інтерполяції. Порівняти отримані значення з точними.

3. Для функцій, що задані в таблиці, побудувати графіки і переконатися в додатності функції на визначеному інтервалі, інакше перевизначити інтервали інтегрування або вид початкової функції таким чином, щоб функція була невід'ємною на обраному інтервалі інтегрування.

4. Скласти програми чисельного інтегрування за наступними розрахунковими схемами:
1) метод лівих прямокутників
2) метод правих прямокутників
3) метод середніх прямокутників
4) метод трапецій
5) метод Сімпсона
6) метод Ньютона
7) метод Буля.

5. Обрати крок інтегрування, що забезпечує точність отриманого результату на рівні 0.001.

6. Визначити похибку отриманого результата за залишковим членом, за правилом Рунге і за допомогою екстраполяції Річардсона.

7. Використовуючи рекурентний алгоритм, отримати декілька наближень для заданого інтеграла.

8. Проаналізувати отримані результати за точністю, кількістю ітерацій, кількістю розрахункових точок.

38	$10 x * lg(x)$	1	1.5	2	4, 6

In [86]:
```
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

In [87]:
```
def func(x):
    return 10 * x * sp.log(x, 10)
vec_func = np.vectorize(func)
```

```
a, b = 1, 1.5

x_smbl = sp.Symbol('x')
func_smbl = func(x_smbl)
func_smbl
```

Out[87]:

$$\frac{10x \log(x)}{\log(10)}$$

In [88]:

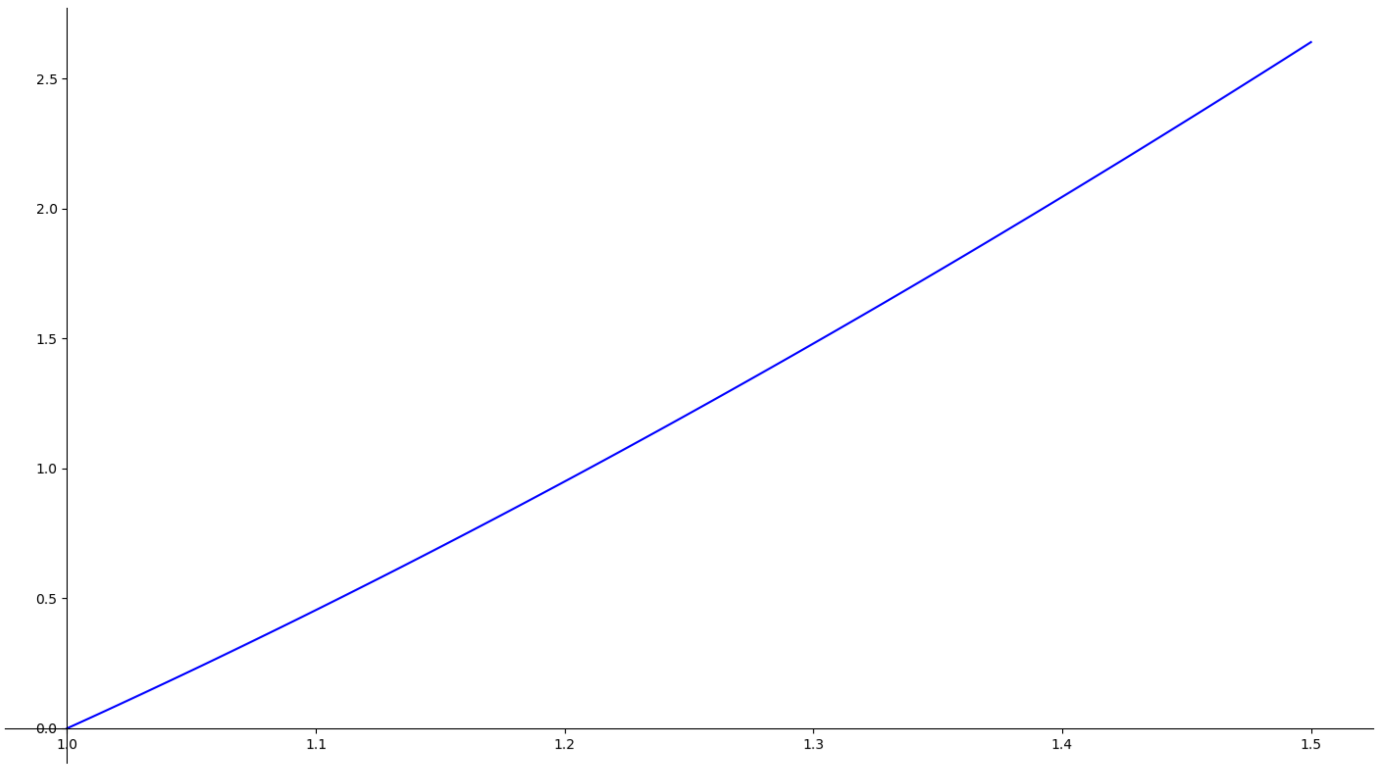
```
x_set = np.linspace(a, b, 100)

graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))

plt.plot(x_set, vec_func(x_set), 'b')

ax.spines['left'].set_position(('data', 1))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Чисельне диференціювання

Обислимо еталон $f'(x)$ та $f''(x)$ для подальшої перевірки результатів

In [89]:

```
func_dx_smbl = sp.diff(func_smbl, x_smbl)
func_dx = sp.lambdify(x_smbl, func_dx_smbl)
vec_func_dx = np.vectorize(func_dx)

print('Перша похідна:')
func_dx_smbl
```

Перша похідна:

Out[89]:

$$\frac{10\log(x)}{\log(10)} + \frac{10}{\log(10)}$$

In [90]:
```
func_d2x_smbl = sp.diff(func_smbl, x_smbl, 2)
func_d2x = sp.lambdify(x_smbl, func_d2x_smbl)
vec_func_d2x = np.vectorize(func_d2x)

print('Друга похідна:')
func_d2x_smbl
```

```
Друга похідна:
```

Out[90]:
$$\frac{10}{x\log(10)}$$

Оберемо вузли на заданному проміжку із регулярним кроком $h = 0.1$

In [91]:
```
h = 0.1
n = math.ceil((b - a) / h)

x_nodes = np.linspace(a, b, n)
y_nodes = np.float32(vec_func(x_nodes))
```

Одержали наступні вузли та значення функції в них

In [92]:
```
np.array((x_nodes, y_nodes))
```

Out[92]:
```
array([[1.        , 1.125     , 1.25      , 1.375     , 1.5       ],
       [0.        , 0.57546586, 1.21137512, 1.90166211, 2.64136887]])
```

Різницеві схеми диференціювання

In [93]:
```
def fdf(y_set, h, diff=1, acc=1): # прямі
    output = np.zeros_like(y_set)

    if diff == 1 and acc == 1:
        temp = y_set[1:] - y_set[:-1]
        output[:-1] = temp / h
    elif diff == 1 and acc == 2:
        temp = -y_set[2:] + 4*y_set[1:-1] - 3*y_set[:-2]
        output[:-2] = temp / (2*h)

    elif diff == 2 and acc == 1:
        temp = y_set[2:] - 2*y_set[1:-1] + y_set[:-2]
        output[:-2] = temp / h**2
    else:
        temp = -y_set[3:] + 4*y_set[2:-1] - 5*y_set[1:-2] + 2*y_set[:-3]
        output[:-3] = temp / h**2

    return output


def bdf(y_set, h, diff=1, acc=1): # зворотні
    output = np.zeros_like(y_set)

    if diff == 1 and acc == 1:
        temp = y_set[1:] - y_set[:-1]
        output[1:] = temp / h
    elif diff == 1 and acc == 2:
        temp = 3*y_set[2:] - 4*y_set[1:-1] + y_set[:-2]
        output[2:] = temp / (2*h)

    elif diff == 2 and acc == 1:
```

```
        temp = y_set[2:] - 2*y_set[1:-1] + y_set[:-2]
        output[2:] = temp / h**2
    else:
        temp = 2*y_set[3:] - 5*y_set[2:-1] + 4*y_set[1:-2] - y_set[:-3]
        output[3:] = temp / h**2

    return output


def cdf(y_set, h, diff=1, acc=1): # симетричні
    output = np.zeros_like(y_set)

    if diff == 1 and acc == 1:
        temp = y_set[2:] - y_set[:-2]
        output[1:-1] = temp / (2*h)
    elif diff == 1 and acc == 2:
        temp = -y_set[4:] + 8*y_set[3:-1] - 8*y_set[1:-3] + y_set[:-4]
        output[2:-2] = temp / (2*h)

    elif diff == 2 and acc == 1:
        temp = y_set[2:] - 2*y_set[1:-1] + y_set[:-2]
        output[1:-1] = temp / h**2
    else:
        temp = -y_set[4:] + 16*y_set[3:-1] -30*y_set[2:-2] + 16*y_set[1:-3] - y_set[:-4]
        output[2:-2] = temp / (12*h**2)

    return output
```

За цими схемами обчислимо похідні та визначимо розбіжніть із еталонним значенням

In [94]:
```
df_nodes = vec_func_dx(x_nodes)
d2f_nodes = vec_func_d2x(x_nodes)

def print_derivatives(title, diff_num_set, df_set):
    print(title)
    for ii in range(len(df_set)):
        if diff_num_set[ii] != 0:
            delta = abs((diff_num_set[ii] - df_set[ii])/df_set[ii])
            print(f"x_{ii}: {diff_num_set[ii]}, δ = {delta}")
```

In [95]:
```
diff_schs = [fdf, bdf, cdf]
diff_schs_name = ['FDF', 'BDF', 'CDF']


for sch, sch_name in zip(diff_schs, diff_schs_name):
    for diff_ii in range(1, 3):
        print(f'\n {diff_ii}-а похідна')

        for acc_ii in range(1, 3):
            title = f'{sch_name}({acc_ii}):'
            print_derivatives(title , sch(y_nodes, h, diff_ii, acc_ii), df_nodes)
```

```
 1-а похідна
FDF(1):
x_0: 5.7546586990356445, δ = 0.3250591335667986
x_1: 6.359092712402344, δ = 0.3099458139429039
x_2: 6.902869701385498, δ = 0.29947501715662744
x_3: 7.397067546844482, δ = 0.2918449137221077
FDF(2):
x_0: 5.452441692352295, δ = 0.2554710961229623
x_1: 6.0872039794921875, δ = 0.25393790155010765
x_2: 6.655771732330322, δ = 0.25295847382496156

 2-а похідна
FDF(1):
```

```
x_0: 6.044340133666992, δ = 0.39176074887672563
x_1: 5.437773704528809, δ = 0.12015805140310735
x_2: 4.941976070404053, δ = 0.06966599158217157
FDF(2):
x_0: 6.650900840759277, δ = 0.531426513091388
x_1: 5.933558940887451, δ = 0.22228768283874442

 1-а похідна
BDF(1):
x_1: 5.7546586990356445, δ = 0.185435000620401
x_2: 6.359092712402344, δ = 0.19710822730596075
x_3: 6.902869701385498, δ = 0.20553679648706094
x_4: 7.397067546844482, δ = 0.21186768472400472
BDF(2):
x_2: 6.661308765411377, δ = 0.25400082816008046
x_3: 7.174759864807129, δ = 0.253020467885619 7
x_4: 7.644166469573975, δ = 0.25235010528993945

 2-а похідна
BDF(1):
x_2: 6.044340133666992, δ = 0.1378556076932627
x_3: 5.437773704528809, δ = 0.05033173515306623
x_4: 4.941976070404053, δ = 0.1903519792844324
BDF(2):
x_3: 4.831194877624512, δ = 0.15626638660046546
x_4: 4.446202754974365, δ = 0.2715749309626308

 1-а похідна
CDF(1):
x_1: 6.056875705718994, δ = 0.24769040728165245
x_2: 6.630980968475342, δ = 0.24829157734865825
x_3: 7.14996862411499, δ = 0.24869085510458433
CDF(2):
x_2: 39.84100341796875, δ = 6.500125431849132

 2-а похідна
CDF(1):
x_1: 6.044340133666992, δ = 0.24510813322502903
x_2: 5.437773704528809, δ = 0.02366861662884066
x_3: 4.941976070404053, δ = 0.1369192440305198
CDF(2):
x_2: 5.428528785705566, δ = 0.021928247540889748
```

Диференціювання інтерполяційного багаточлену

За визначеними вузлами знайдемо інтерполяційний багаточлен Лагранжа

In [96]:
```
from scipy.interpolate import lagrange
from numpy.polynomial.polynomial import Polynomial

pol = Polynomial(lagrange(x_nodes, y_nodes).coef[::-1])
pol_smbl = sp.expand(pol(x_smbl))
pol_smbl
```

Out[96]:
$$0.189046223958485x^4 - 1.41557312011855x^3 + 5.27322451273903x^2 - 2.71235179901305x - 1.33434581756546$$

Обчислимо у вузлах $pol'(x)$ та $pol''(x)$

In [97]:
```
pol_dx = sp.diff(pol_smbl, x_smbl)
print('Перша похідна:')
pol_dx
```

Перша похідна:

Out[97]: $0.75618489583394x^3 - 4.24671936035566x^2 + 10.5464490254781x - 2.71235179901305$

In [98]:
```
pol_d2x = sp.diff(pol_smbl, x_smbl, 2)
print('Друга похідна:')
pol_d2x
```

Друга похідна:

Out[98]: $2.26855468750182x^2 - 8.49343872071131x + 10.5464490254781$

In [99]:
```
vec_pol_dx = np.vectorize(sp.lambdify(x_smbl, pol_dx))
vec_pol_d2x = np.vectorize(sp.lambdify(x_smbl, pol_d2x))

df_pol_nodes = vec_pol_dx(x_nodes)
d2f_pol_nodes = vec_pol_d2x(x_nodes)
```

Визначимо розбіжніть із еталонним значенням

In [100…
```
print_derivatives('1-а похідна', df_pol_nodes, df_nodes)
print_derivatives('2-а похідна', d2f_pol_nodes, d2f_nodes)
```

```
1-а похідна
x_0: 4.343562761943332, δ = 0.00014228661347626012
x_1: 4.85432648658824, δ = 2.957210917016628e-05
x_2: 5.31213410695452, δ = 1.678409017481638e-05
x_3: 5.725847164790228, δ = 2.176676893326775e-05
x_4: 6.1043272018434145, δ = 7.696645294274606e-05
2-а похідна
x_0: 4.32156499226861, δ = 0.004922887039736876
x_1: 3.8624699910473677, δ = 0.0005374051462829237
x_2: 3.4742673238105564, δ = 2.5481389686827985e-05
x_3: 3.156956990558177, δ = 0.0004902104686421337
x_4: 2.9105389912902293, δ = 0.005264554088421362
```

Спостерігаємо незначні похибки

Чисельне інтегрування

In [101…
```
def num_integration(n3):
    def actual_decorator(method):
        def wrapper(vec_func, a, b, h):
            n = math.ceil((b - a) / h)
            if n3:
                n = math.ceil(n/3) * 3

            h = (b - a) / n #оновлюємо значення

            x_set = np.linspace(a, b, n)
            y_set = np.float32(vec_func(x_set))

            return method(y_set, h)
        return wrapper
    return actual_decorator
```

За допомогою вбудованної функції визначимо еталонне значення інтегралу

In [102…
```
J_value = sp.integrate(func_smbl, (x_smbl, a, b)).evalf()
J_value
```

Out[102]: 0.623856408428752

Визначимо способи обчислення та покращення похибок

In [103...
```
def print_errs(method, k, vec_func, a, b, h):
    J_h1, n1 = method(vec_func, a, b, h)
    J_h2, n2 = method(vec_func, a, b, h/2)

    print('Похибка за залишковим членом:')
    print(f'n = {n1}; J = {J_h1}')
    print(f'R = {res(J_h1, J_value)}')
    print('--------------------\n')

    print('Похибка за правилом Рунге:')
    print(f'n = {n1}; J = {J_h1}')
    print(f'n = {n2}; J = {J_h2}')
    print(f'Δ = {runge_err(J_h1, h, J_h2, h/2, k)}')
    print('--------------------\n')

    print('Екстраполяція Річардсона:')
    J = J = richardson_extrap(J_h1, h, J_h2, h/2, k)
    print(f"J = {J}")
    print(f"δ = {relative_err(J, J_value)}")


def res(J, J_value):
    return abs(J - J_value)


def relative_err(J, J_value):
    return abs((J - J_value) / J_value)


def runge_err(J_h1, h1, J_h2, h2, k): # h2<h1
    theta = 1 / ((h1/h2)**k - 1)
    return abs((J_h1 - J_h2) / theta)


def richardson_extrap(J_h1, h1, J_h2, h2, k): #h2<h1
    theta = 1 / ((h1/h2)**k - 1)
    return J_h2 + theta*(J_h2 - J_h1)
```

Метод правих прямокутників $O(h)$ (ручний розрахунок)

In [104...
```
@num_integration(n3=False)
def right_rectangles(y_set, h):
    J = np.sum(y_set[1:] * h)

    return J, y_set.size
```

Визначимо, з яким кроком необхідно вести розрахунки, щоб забезпечити точність $\varepsilon = 0.001$

In [105...
```
eps = 0.001
```

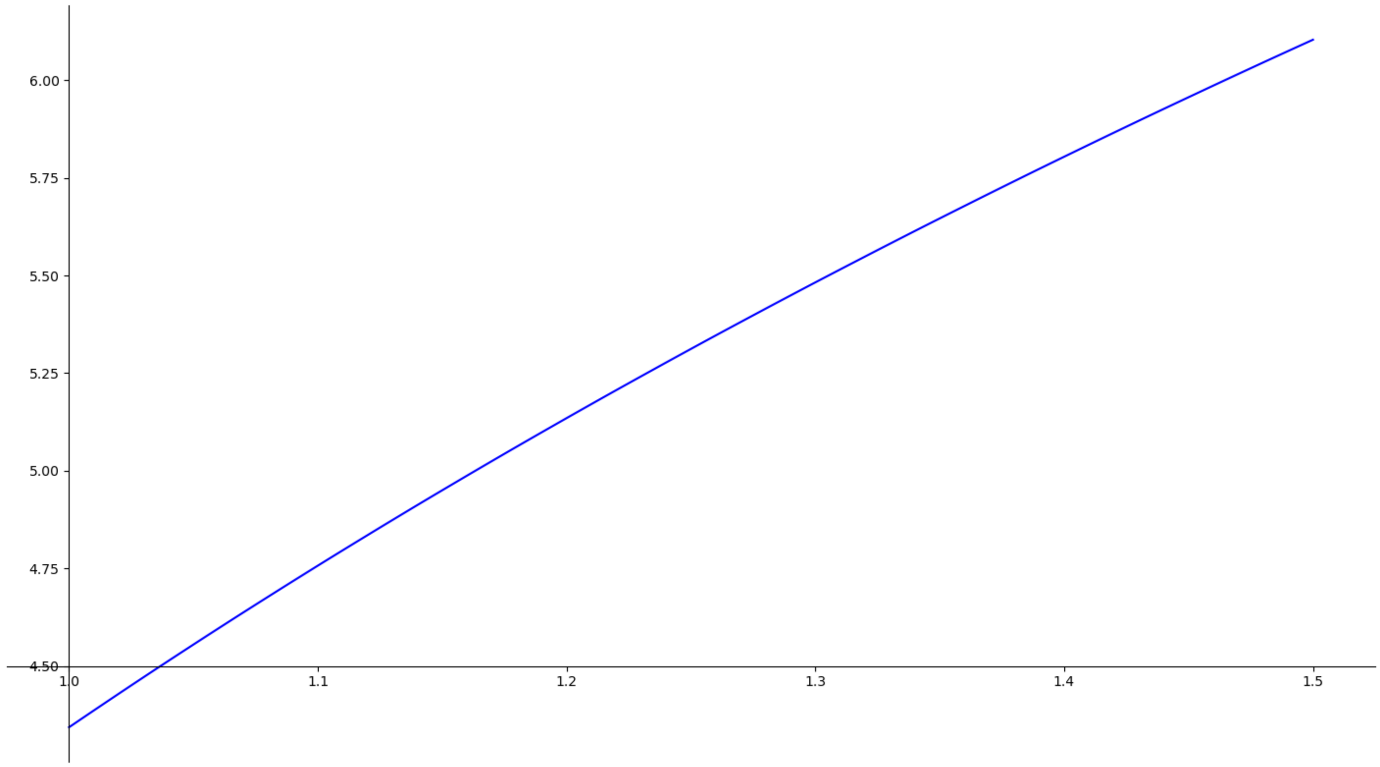
Побудуємо графік $f'(x)$

In [106...
```
graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))

plt.plot(x_set, vec_func_dx(x_set), 'b')
```

```python
ax.spines['left'].set_position(('data', 1))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 4.5))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Максимум досягається в точці $x = 1.5$

In [107…

```python
M_1 = abs(func_dx(1.5))
M_1
```

Out[107]:

```
6.10385740958933
```

In [108…

```python
h = 2*eps/(b-a)/M_1
n = int((b - a) / h)
print(f'h = {h}, n = {n}')
```

```
h = 0.0006553233032141099, n = 762
```

Спостерігаємо дуже грубу оцінку кроку

Визначити похибку отриманого результата за залишковим членом і за правилом Рунге, обчисливши значення із кроком $\frac{1}{2}h$.
Покращимо результат за допомогою екстраполяції Річардсона

In [109…

```python
print_errs(right_rectangles, 1, vec_func, a, b, h)
```

```
Похибка за залишковим членом:
n = 763; J = 0.6239043474197388
R = 0.0000479389909868733
--------------------

Похибка за правилом Рунге:
n = 763; J = 0.6239043474197388
n = 1526; J = 0.6238803267478943
Δ = 2.4020671844482422e-05
--------------------
```

```
Екстраполяція Річардсона:
J = 0.6238563060760498
δ = 1.64064519829756E-7
```

Виконаємо декілька ітерацій послідовно зменшуючи крок вдвічі. Почнемо з $h = 0.1$. Поки не досягнемо відповідної похибки за залишковим членом.

In [110…

```
h = 0.1
J, n = right_rectangles(vec_func, a, b, h)
print(f'n = {n}, J1 = {J}, R = {res(J, J_value)}')

h /= 2
J, n = right_rectangles(vec_func, a, b, h)
print(f'n = {n}, J1 = {J}, R = {res(J, J_value)}')

h /= 2
J, n = right_rectangles(vec_func, a, b, h)
print(f'n = {n}, J1 = {J}, R = {res(J, J_value)}')

h /= 2
J, n = right_rectangles(vec_func, a, b, h)
print(f'n = {n}, J1 = {J}, R = {res(J, J_value)}')
```

```
n = 5, J1 = 0.6329872012138367, R = 0.00913079278508477
n = 10, J1 = 0.6279125809669495, R = 0.00405617253819757
n = 20, J1 = 0.6257772445678711, R = 0.00192083613911920
n = 40, J1 = 0.6247920989990234, R = 0.000935690570271541
```

Знадобилося 4 ітерації. Порівняємо похибку за правилом Рунге з одержаною у попередньому випадку.
Покращимо результат за допомогою екстраполяції Річардсона

In [111…

```
print_errs(right_rectangles, 1, vec_func, a, b, h)
```

```
Похибка за залишковим членом:
n = 40; J = 0.6247920989990234
R = 0.000935690570271541
--------------------

Похибка за правилом Рунге:
n = 40; J = 0.6247920989990234
n = 80; J = 0.6243182420730591
Δ = 0.00047385692596435547
--------------------

Екстраполяція Річардсона:
J = 0.6238443851470947
δ = 0.0000192725144676346
```

Результат гірше, проте, з огляду на кількість кроків, не кричино.

Метод трапецій $O(h^2)$

In [112…

```
@num_integration(n3=False)
def trapezoid(y_set, h):
    J = h/2 * (y_set[0] + 2*np.sum(y_set[1:-1]) + y_set[-1])

    return J, y_set.size
```

Визначимо, з яким кроком необхідно вести розрахунки, щоб забезпечити точність $\varepsilon = 0.001$

In [113…

```
eps = 0.001
```

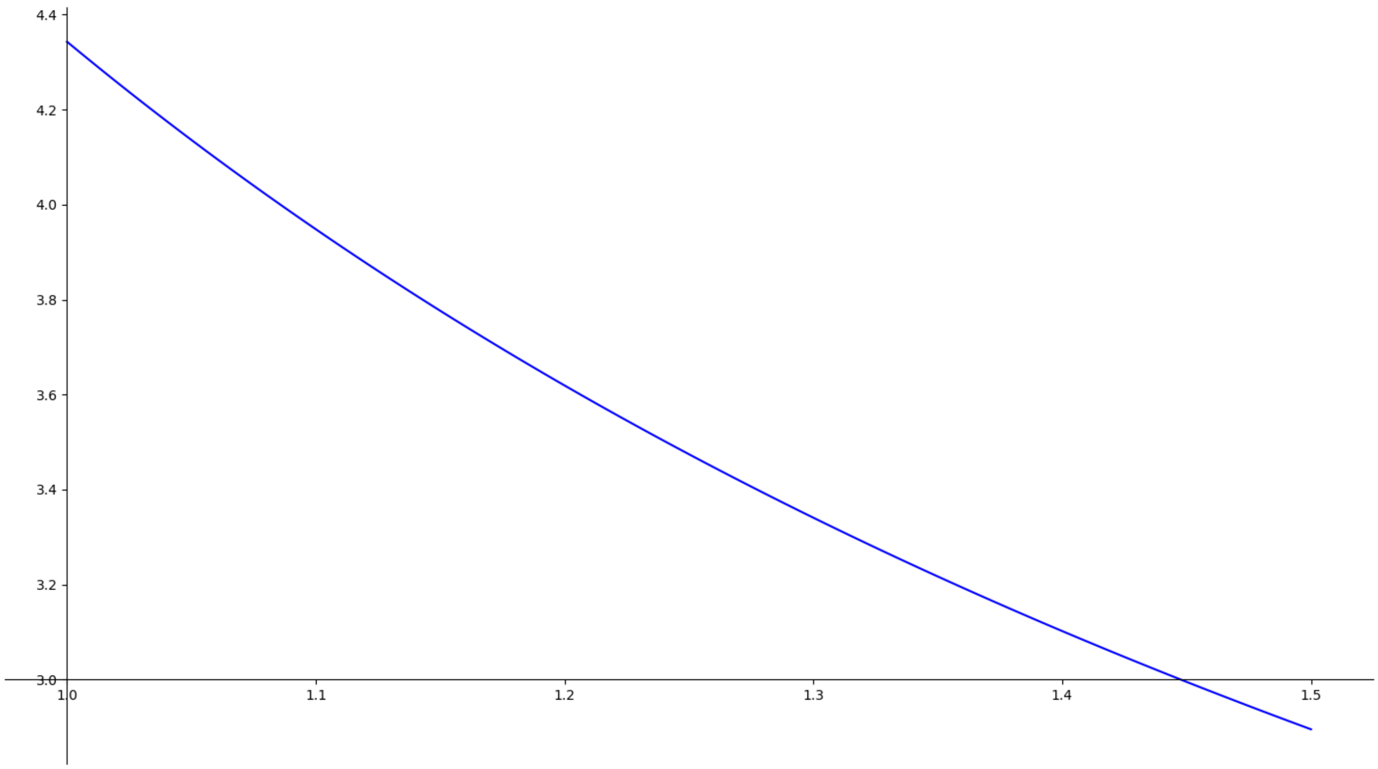
Побудуємо графік $f''(x)$

In [114...
```
graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))

plt.plot(x_set, vec_func_d2x(x_set), 'b')

ax.spines['left'].set_position(('data', 1))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 3))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Максимум досягається в точці $x = 1$

In [115...
```
M_2 = abs(func_d2x(1))
M_2
```

Out[115]:
```
4.3429448190325175
```

In [116...
```
h = math.sqrt(12*eps/(b-a)/M_2)
h
```

Out[116]:
```
0.07433844377699678
```

Бачимо, що оцінка кроку менш радикальна, порівняно з методом правих прямокутників.

Визначити похибку отриманого результата за залишковим членом і за правилом Рунге, обчисливши значення із кроком $\frac{1}{2}h$.
Покращимо результат за допомогою екстраполяції Річардсона

In [117...
```
print_errs(trapezoid, 2, vec_func, a, b, h)
```

```
Похибка за залишковим членом:
n = 7; J = 0.5356073720114571
R = 0.0882490364172948
--------------------
```

```
Похибка за правилом Рунге:
n = 7; J = 0.5356073720114571
n = 14; J = 0.5794967583247593
Δ = 0.13166815893990658
--------------------

Екстраполяція Річардсона:
J = 0.5941265537625268
δ = 0.0476549639701593
```

Метод Ньютона $O(h^4)$

In [118…

```
@num_integration(n3=True)
def newton(y_set, h):
    ii = [ii for ii in range(y_set.size) if ii%3 != 0]
    print(ii)
    J = 3/8*h*(y_set[0] + y_set[-1] + 2*np.sum(y_set[3:-1:3]) + 3*np.sum(y_set[ii]))

    return J, y_set.size
```

Визначимо, з яким кроком необхідно вести розрахунки, щоб забезпечити точність $\varepsilon = 0.001$

In [119…

```
eps = 0.001
```

Обчислимо $f^{(4)}(x)$

In [120…

```
func_d4x_smbl = sp.diff(func_smbl, x_smbl, 4)
func_d4x = sp.lambdify(x_smbl, func_d4x_smbl)
vec_func_d4x = np.vectorize(func_d4x)

func_d4x_smbl
```

Out[120]:

$$\frac{20}{x^3 \log{(10)}}$$

Побудуємо графік

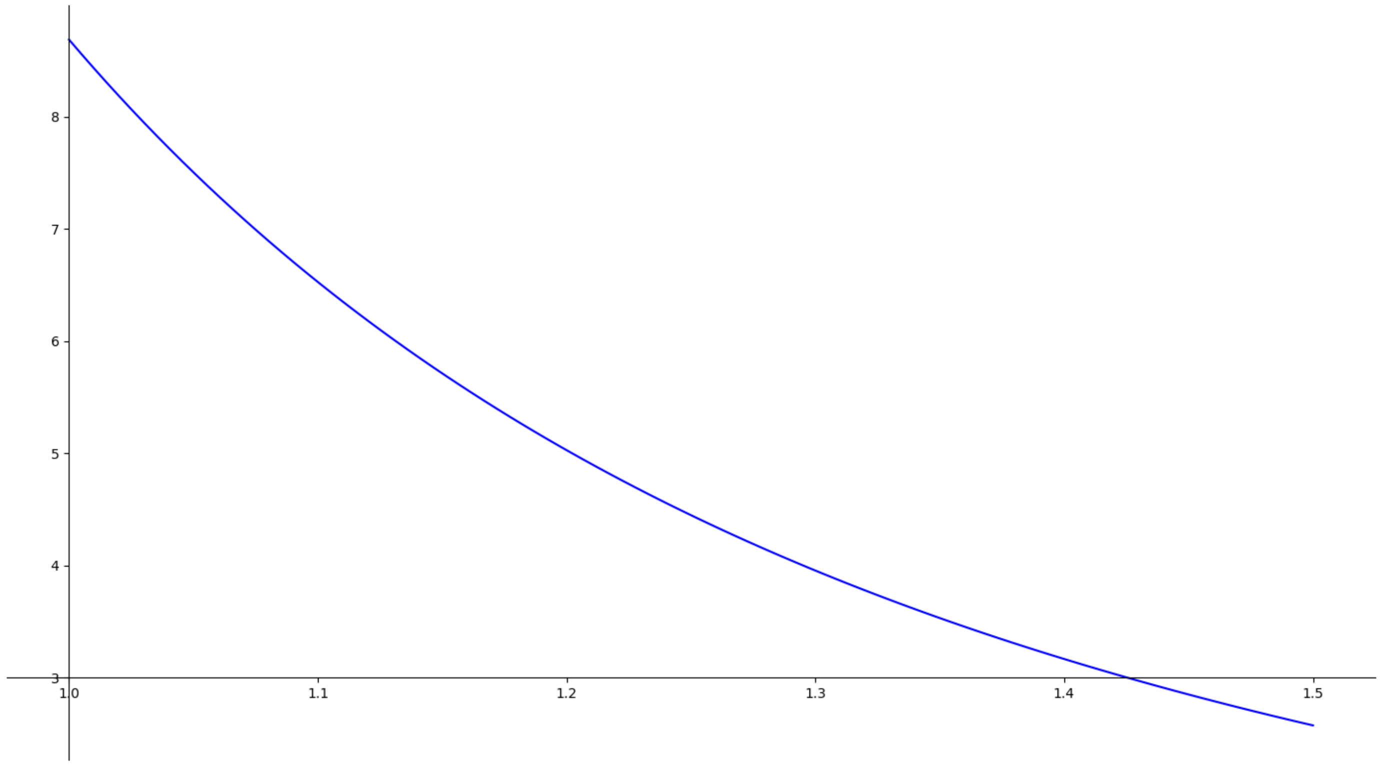
In [121…

```
graph, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (18, 10))

plt.plot(x_set, vec_func_d4x(x_set), 'b')

ax.spines['left'].set_position(('data', 1))
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 3))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.show()
```



Максимум досягається в точці $x = 1$

In [122…
```
M_4 = abs(func_d4x(1))
M_4
```
Out[122]:
```
8.685889638065035
```

In [123…
```
h = math.pow(80*eps/(b-a)/M_4, 1/4)
h
```
Out[123]:
```
0.3684057660899219
```

Порівнюючи із попередніми методами, одержали доволі великий крок

Визначити похибку отриманого результата за залишковим членом і за правилом Рунге, обчисливши значення із кроком $\frac{1}{2}h$.
Покращимо результат за допомогою екстраполяції Річардсона

In [124…
```
print_errs(newton, 4, vec_func, a, b, h/3)
```
```
[1, 2, 4, 5]
[1, 2, 4, 5, 7, 8]
Похибка за залишковим членом:
n = 6; J = 0.7463082671165466
R = 0.122451858687795
--------------------

Похибка за правилом Рунге:
n = 6; J = 0.7463082671165466
n = 9; J = 0.7039188742637634
Δ = 0.635840892791748
--------------------

Екстраполяція Річардсона:
J = 0.7010929147402446
δ = 0.123804941758987
```

Спираючись на метод трапецій використаємо рекурентні формули трапецій та Сімпсона

проведемо експерименти для деяких значень точності

In [125…
```
def recurrent_trapezoid(vec_func, a, b, eps):
    n, delta = 1, 1
    J, _ = trapezoid(vec_func, a, b, b - a)

    while delta > eps:
        n = 2*n
        x_set = np.linspace(a, b, n)
        y_set = vec_func(x_set)

        J_pre = J
        J = 1/2*J + (b-a)/n * np.sum(y_set[1::2])

        delta = runge_err(J_pre, (b - a)/n, J, 2*(b - a)/n, 2)

    return float(J), int(math.log(n, 2)), float(delta)
```

$\varepsilon = 0.01$

In [126…
```
J, n, eps = recurrent_trapezoid(vec_func, a, b, 0.01)
print(f'n = {n}; J = {J}')
print(f'\nПохибка за правилом Рунге: \nΔ = {eps}')
```

```
n = 7; J = 0.6423728536055762

Похибка за правилом Рунге:
Δ = 0.009772540651267491
```

$\varepsilon = 0.001$

In [127…
```
J, n, eps = recurrent_trapezoid(vec_func, a, b, 0.001)
print(f'n = {n}; J = {J}')
print(f'\nПохибка за правилом Рунге: \nΔ = {eps}')
```

```
n = 12; J = 0.6248609962491101

Похибка за правилом Рунге:
Δ = 0.0006258170058413462
```

Спостерігаємо некритичне збільшення ітерацій.

Проведемо відповідні експерименти для формули Сімпсона

In [128…
```
def recurrent_simpson(vec_func, a, b, eps):
    n, delta = 1, 1
    T, _ = trapezoid(vec_func, a, b, b - a)
    S = 0

    while delta > eps:
        n = 2*n
        x_set = np.linspace(a, b, n)
        y_set = vec_func(x_set)

        T_pre = T
        T = 1/2*T + (b-a)/n * np.sum(y_set[1::2])

        S_pre = S
        S = 4/3*T - 1/3*T_pre

        delta = runge_err(S_pre, (b - a)/n, S, 2*(b - a)/n, 4)

    return float(S), int(math.log(n, 2)), float(delta)
```

$\varepsilon = 0.01$

In [129…

```
J, n, eps = recurrent_simpson(vec_func, a, b, 0.01)
print(f'n = {n}; J = {J}')
print(f'\nПохибка за правилом Рунге: \nΔ = {eps}')
```

```
n = 7; J = 0.6380295022050129

Похибка за правилом Рунге:
Δ = 0.0098852157479925
```

$\varepsilon = 0.001$

In [130…

```
J, n, eps = recurrent_simpson(vec_func, a, b, 0.001)
print(f'n = {n}; J = {J}')
print(f'\nПохибка за правилом Рунге: \nΔ = {eps}')
```

```
n = 12; J = 0.624582855357625

Похибка за правилом Рунге:
Δ = 0.0005747164884610012
```

Кількість ітерацій збігається з одержаною звичайним алгоритмом трапеціїй.

Висновок

Під час виконання роботи я придбав практичні навички в чисельному диференціюванні за допомогою інтерполяційних формул і різницевих схем, а також в чисельному інтегруванні за допомогою квадратурних і інтерполяційних формул. Практичному використанні інтерполяційних формул для обчислення значень похідних функцій 1-го і 2-го порядків з заданою точністю. Оцінюванні похибок чисельного диференціювання і інтегрування.