Uygulama

Soru

$S_1 : x^2+y^2+z^2 = 9$ ve $S_2 : z = x^2+y^2-3$ yüzeyleri veriliyor. Bu yüzeylerin $P(2,-1,2)$ noktasındaki teğet düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm: İki yüzey arasındaki açı, yüzeylerin normal vektörleri arasındaki açıdır.

Adım 1: Her yüzey için gradyan vektörlerini hesaplayın: $S_1 : f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9 = 0$ $S_2 : g(x,y,z) = x^2+y^2-z-3 = 0$

Gradyanları hesaplayalım:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = (2x)\hat{i} + (2y)\hat{j} + (2z)\hat{k}$$

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k} = (2x)\hat{i} + (2y)\hat{j} + (-1)\hat{k}$$

Adım 2: Gradyanları $P(2,-1,2)$ noktasında değerlendirin:

$$\nabla f(2,-1,2) = (2(2))\hat{i} + (2(-1))\hat{j} + (2(2))\hat{k} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\nabla g(2,-1,2) = (2(2))\hat{i} + (2(-1))\hat{j} + (-1)\hat{k} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

Adım 3: Gradyanların iç çarpımını ve büyüklüklerini hesaplayın:

$$\nabla f \cdot \nabla g = (4)(4) + (-2)(-2) + (4)(-1) = 16 + 4 - 4 = 16$$

$$|\nabla f| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$
$$|\nabla g| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

Adım 4: Açı kosinüsünü hesaplayın:

$$\cos\theta = \frac{|\nabla f \cdot \nabla g|}{|\nabla f||\nabla g|} = \frac{|16|}{6\sqrt{21}} = \frac{8}{3\sqrt{21}}$$

Adım 5: Açıyı bulun:

$$\theta = \arccos\left(\frac{8}{3\sqrt{21}}\right)$$

Sonuç olarak, yüzeyler arasındaki açı $\arccos\left(\frac{8}{3\sqrt{21}}\right)$'dir.

6. Soru

Küresel koordinat sistemi için:

1. Teğet vektörlerini, ölçek çarpanlarını ve birim taban vektörlerini bulunuz.
2. Sistemin ortogonal olduğunu gösteriniz.
3. Taban vektörlerinin dönüşüm formüllerini yazınız.

Koordinatlar: (r, θ, ϕ) Dönüşüm denklemleri:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

Konum vektörü: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Çözüm:

Adım 1: Teğet vektörlerini bulun:

$$\vec{T_r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$

$$\vec{T_\theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi\hat{i} + r\cos\theta\sin\phi\hat{j} - r\sin\theta\hat{k}$$

$$\vec{T_\phi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi\hat{i} + r\sin\theta\cos\phi\hat{j}$$

Adım 2: Ölçek çarpanlarını bulun:

$$h_r = |\vec{T_r}| = \sqrt{(\sin\theta\cos\phi)^2 + (\sin\theta\sin\phi)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$$

$$h_\theta = |\vec{T_\theta}| = \sqrt{(r\cos\theta\cos\phi)^2 + (r\cos\theta\sin\phi)^2 + (-r\sin\theta)^2} =$$

$$h_\phi = |\vec{T_\phi}| = \sqrt{(-r\sin\theta\sin\phi)^2 + (r\sin\theta\cos\phi)^2} = r\sin\theta$$

Adım 3: Birim taban vektörlerini bulun:

$$\hat{e_r} = \frac{\vec{T_r}}{h_r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$

$$\hat{e_\theta} = \frac{\vec{T_\theta}}{h_\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$$

$$\hat{e_\phi} = \frac{\vec{T_\phi}}{h_\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

Adım 4: Sistemin ortogonal olduğunu gösterin: İki vektörün ortogonal olması için iç çarpımlarının sıfır olması gerekir.

$$\hat{e_r} \cdot \hat{e_\theta} = (\sin\theta\cos\phi)(\cos\theta\cos\phi) + (\sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\sin\phi) + (\cos$$

$$\hat{e_r} \cdot \hat{e_\phi} = (\sin\theta\cos\phi)(-\sin\phi) + (\sin\theta\sin\phi)(\cos\phi) = 0$$

$$\hat{e_\theta} \cdot \hat{e_\phi} = (\cos\theta\cos\phi)(-\sin\phi) + (\cos\theta\sin\phi)(\cos\phi) = 0$$

İç çarpımların hepsi sıfır olduğundan, küresel koordinat sistemi ortogonaldir.

Adım 5: Taban vektörlerinin dönüşüm formüllerini yazın:

$$\hat{e_r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$

$$\hat{e_\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$$

$$\hat{e_\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

Hermitsel Operatörler

Hermitsel operatörler, kuantum mekaniğinde önemli bir rol oynar. Bir operatörün hermitsel olması, fiziksel olarak ölçülebilir bir özelliği temsil ettiği anlamına gelir.

Tanım: Bir A operatörü, eğer her ψ ve ϕ dalga fonksiyonları için aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa hermitseldir:

$$\langle \phi | A\psi \rangle = \langle A\phi | \psi \rangle$$

Burada $\langle \phi | \psi \rangle$, ϕ ve ψ dalga fonksiyonlarının iç çarpımını temsil eder.

Başka bir deyişle:

$$\int \phi^*(A\psi) d\tau = \int (A^*\phi^*)\psi d\tau$$

Özellikler:

1. Hermitsel operatörlerin özdeğerleri reel sayılardır.
2. Hermitsel operatörlerin farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri ortogonaldir.

Örnek: Momentum operatörü ($\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$) hermitseldir.