FİZİKTE MATEMATİKSEL METOTLAR
13 MART 2025 Eğrisel Koordinatlar ve Diferansiyel Elemanlar

Ad Soyad: Celal Ekrem Torun - 0411230037

DERS: Prof. Dr. ERTAN GUDEKLI

Fizik Bölümü, İstanbul Üniversitesi
Beyazıt, Fatih, İstanbul, Türkiye
13 Mart 2025

Yay Uzunluğu Elemanı (ds^2)

Ortogonal (Dik) Koordinat Sistemlerinde Yay Uzunluğu

Bir koordinat sistemi ortogonal (dik) ise, yay uzunluğu elemanı şu şekilde yazılır:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2 + g_{33}(du^3)^2 \quad (1)$$

Bu ifadede:

- g_{11}, g_{22}, g_{33}: Metrik tensörün diyagonal elemanları
- du^1, du^2, du^3: Koordinat diferansiyelleri

Yay Uzunluğunun Genel İfadesi

Yay uzunluğu elemanı genel olarak şu şekilde yazılır:

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j \quad (2)$$

Bu ifade, Einstein toplam gösterimi kullanılarak yazılmıştır ve tekrarlanan indisler üzerinden toplam alınacağını gösterir. Açık şekilde yazarsak:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}du^i du^j \quad (3)$$

Tanjant Vektörleri ve Metrik Bağıntısı

Tanjant vektörleri ($\vec{T}_i$) kullanarak yay uzunluğunu şöyle ifade ederiz:

$$ds^2 = \vec{T}_i \cdot \vec{T}_j \, du^i du^j \quad (4)$$

Burada $\vec{T}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$ ifadesi, konum vektörünün ($\vec{r}$) koordinatlara göre kısmi türevlerini temsil eder.

Ayrıca, tanjant vektörleri şu şekilde de yazılabilir:

$$\vec{T}_i = h_i \vec{e}_i \quad (5)$$

Burada:

- h_i: Ölçek faktörü (veya Lamé katsayısı)
- $\vec{e}_i$: Lokal birim vektör

Bu durumda yay uzunluğu elemanı:

$$ds^2 = h_i\vec{e}_i \cdot h_j\vec{e}_j \, du^i du^j = h_i h_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \, du^i du^j \quad (6)$$

Ortogonal sistemlerde, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (Kronecker delta) olduğundan:

$$ds^2 = h_i^2 (du^i)^2 \quad \text{(i için toplam gösterimi)} \quad (7)$$

Bu, şu anlama gelir:

- Eğer $i = j$ ise, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1$
- Eğer $i \neq j$ ise, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$

Metrik Tensör ve Ölçek Faktörleri Arasındaki İlişki

Metrik tensör elemanları ile ölçek faktörleri arasında şu ilişkiler vardır:

1. Diyagonal elemanlar (i = j):

$$g_{ii} = h_i \cdot h_i = h_i^2 \quad (8)$$

2. Diyagonal olmayan elemanlar (i $\neq$ j) (ortogonal sistemlerde):

$$g_{ij} = h_i h_j \cdot 0 = 0 \tag{9}$$

3. Ölçek faktörleri:

$$h_i = \pm\sqrt{g_{ii}} \tag{10}$$

Not: Fiziksel nedenlerden dolayı genellikle pozitif değer alınır.

Silindirik Koordinatlarda Metrik

Silindirik koordinat sistemi (ρ, θ, z) için metrik elemanları:

$$g_{\rho\rho} = h_\rho^2 = 1 \tag{11}$$

$$g_{\theta\theta} = h_\theta^2 = \rho^2 \tag{12}$$

$$g_{zz} = h_z^2 = 1 \tag{13}$$

Diğer tüm $g_{ij} = 0$ (i $\neq$ j için, çünkü sistem ortogonaldir)

Ölçek faktörleri:

- $h_\rho = 1$
- $h_\theta = \rho$
- $h_z = 1$

Cartesian koordinatlardan silindirik koordinatlara dönüşüm:

- $x = \rho\cos\theta$
- $y = \rho\sin\theta$
- $z = z$

Metrik Tensörü Doğrudan Hesaplama

Metrik tensör elemanları, konum vektörünün koordinatlara göre türevleri kullanılarak doğrudan hesaplanabilir:

$$g_{kl} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^l} \tag{14}$$

Konum vektörü Cartesian koordinatlarda:

$$\vec{r} = x^i\vec{e}_i = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{15}$$

Bu durumda metrik tensör:

$$g_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial x^j}{\partial u^l}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial x^i}{\partial u^l} \tag{16}$$

Daha açık bir gösterimle:

$$g_{kl} = \frac{\partial x}{\partial u^k}\frac{\partial x}{\partial u^l} + \frac{\partial y}{\partial u^k}\frac{\partial y}{\partial u^l} + \frac{\partial z}{\partial u^k}\frac{\partial z}{\partial u^l} \tag{17}$$

Silindirik Koordinatlarda Metrik Tensörün Hesaplanması

Silindirik koordinatlarda metrik tensörü hesaplayalım:

1. Kısmi türevleri bulalım:

$$\frac{\partial x}{\partial\rho} = \cos\theta \tag{18}$$
$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -\rho\sin\theta \tag{19}$$
$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0 \tag{20}$$
$$\frac{\partial y}{\partial\rho} = \sin\theta \tag{21}$$
$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = \rho\cos\theta \tag{22}$$
$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 \tag{23}$$
$$\frac{\partial z}{\partial\rho} = 0 \tag{24}$$
$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = 0 \tag{25}$$
$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1 \tag{26}$$

2. Metrik elemanlarını hesaplayalım:

$$g_{\rho\rho} = \frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho} + \frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho} \tag{27}$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0 = 1 \tag{28}$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \theta} \tag{29}$$

$$= (-\rho\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 + 0 = \rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2 \tag{30}$$

$$g_{zz} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z} \tag{31}$$

$$= 0 + 0 + 1 = 1 \tag{32}$$

$$g_{\rho\theta} = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \theta} \tag{33}$$

$$= \cos\theta\cdot(-\rho\sin\theta) + \sin\theta\cdot(\rho\cos\theta) + 0 \tag{34}$$

$$= -\rho\sin\theta\cos\theta + \rho\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{35}$$

Benzer şekilde, $g_{\rho z} = 0$ ve $g_{\theta z} = 0$ olduğunu gösterebiliriz.

Hacim Elemanı (dV)

Genel Hacim Elemanı Formülü

Üç boyutlu uzayda hacim elemanı, üç diferansiyel konum vektörünün karma çarpımının mutlak değeri olarak ifade edilir:

$$dV = |\vec{dr}_1\cdot(\vec{dr}_2\times\vec{dr}_3)| \tag{36}$$

Burada $\vec{dr}_i = \vec{T}_i du^i$ (toplamı yok) vektörleridir.

Bu ifade, Jacobian determinantı kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$dV = \left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2,u^3)}\right)\right| du^1du^2du^3 \tag{37}$$

Açık şekilde yazarsak:

$$dV = \left\|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u^3} \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^3} \\ \frac{\partial z}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix}\right\| du^1du^2du^3 \tag{38}$$

Tanjant Vektörleriyle Hacim Elemanı

Tanjant vektörleri kullanarak hacim elemanı şu şekilde yazılabilir:

$$dV = |\vec{T}_1\cdot(\vec{T}_2\times\vec{T}_3)|du^1du^2du^3 \tag{39}$$

Ölçek faktörleri kullanılarak:

$$dV = |h_1\vec{e}_1\cdot(h_2\vec{e}_2\times h_3\vec{e}_3)|du^1du^2du^3 \tag{40}$$

$$= h_1h_2h_3|\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)|du^1du^2du^3 \tag{41}$$

Ortogonal koordinat sistemlerinde $|\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)| = 1$ olduğundan:

$$dV = h_1h_2h_3\,du^1du^2du^3 = \sqrt{g}\,du^1du^2du^3 \tag{42}$$

Burada $g = \det(g_{ij}) = h_1^2h_2^2h_3^2$ metrik tensörün determinantıdır.

Silindirik Koordinatlarda Hacim Elemanı

Silindirik koordinatlarda (ρ,θ,z) hacim elemanı:

$$dV = h_\rho h_\theta h_z\,d\rho\,d\theta\,dz = 1\cdot\rho\cdot1\,d\rho\,d\theta\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz \tag{43}$$

Alan Elemanı (dS)

İki Boyutlu Alan Elemanı

İki koordinatın $(u^1,\ u^2)$ oluşturduğu yüzeydeki alan elemanı, tanjant vektörlerinin vektörel çarpımı olarak ifade edilir:

$$d\vec{S} = \frac{\partial\vec{F}}{\partial u^1}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial u^2}du^1du^2 \tag{44}$$

Alan elemanının büyüklüğü:

$$dS = \left|\frac{\partial\vec{F}}{\partial u^1}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial u^2}\right|du^1du^2 \tag{45}$$

Bu, determinant formunda yazılabilir:

$$dS = \left\|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \end{vmatrix}\right\| du^1du^2 \tag{46}$$

Genel olarak, ortogonal koordinatlarda:

$$dS = h_i h_j \, du^i du^j \quad \text{(i ve j sabit, k hariç)} \tag{47}$$

Burada i, j ve k birbirinden farklı indislerdir.

Silindirik Koordinatlarda Alan Elemanı

Silindirik koordinatlarda (ρ, θ) düzleminde alan elemanı:

$$dS_{\rho\theta} = \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \right\| d\rho \, d\theta \tag{48}$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \right\| d\rho \, d\theta \tag{49}$$

$$= |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| \, d\rho \, d\theta = \rho \, d\rho \, d\theta \tag{50}$$

Uygulama Örneği

Bir integral hesaplama örneği:

$$A = \iint \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \tag{51}$$

Bu integrali kutupsal koordinatlarda hesaplayalım:

- $x = \rho\cos\theta$
- $y = \rho\sin\theta$
- $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$
- $dx \, dy = \rho \, d\rho \, d\theta$ (Jacobian)

İntegral dönüşümü:

$$A = \iint \rho \cdot \rho \, d\rho \, d\theta = \iint \rho^2 \, d\rho \, d\theta \tag{52}$$

İntegrasyon sınırları belirlenerek:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^2 \, d\rho \tag{53}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{2\pi r^3}{3} \tag{54}$$

Bu örnekte, Cartesian koordinatlardan kutupsal koordinatlara geçiş yaparak hesaplama kolaylaştırılmıştır.