Uygulama Dersi - Hafta 3

Koordinat Sistemleri ve Dönüşümleri

March 15, 2025

Soru 2: Silindirik Koordinat Sisteminin Ortogonalliği

Çözüm

Silindirik koordinat sisteminde üç koordinat vardır: ρ (radyal mesafe), θ (açısal koordinat) ve z (yükseklik). Bu koordinat sisteminin ortogonal olduğunu göstermek için iki yöntem kullanabiliriz:

1. Yöntem: Birim Vektörlerin Skaler Çarpımı

Silindirik koordinat sistemindeki birim vektörler $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$ ve $\vec{e}_z$ olarak gösterilir. Bir koordinat sisteminin ortogonal olması için, bu birim vektörlerin birbirine dik olması gerekir. Matematiksel olarak:

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\theta = 0 \tag{1}$$
$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{2}$$
$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{3}$$

Bu skaler çarpımların sıfır olması, vektörlerin birbirine dik olduğunu gösterir.

2. Yöntem: Metrik Tensör Bileşenleri

Alternatif olarak, koordinat eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki skaler çarpımların sıfır olduğunu gösterebiliriz:

$$\vec{t}_\rho \cdot \vec{t}_\theta = 0 \tag{4}$$
$$\vec{t}_\rho \cdot \vec{t}_z = 0 \tag{5}$$
$$\vec{t}_\theta \cdot \vec{t}_z = 0 \tag{6}$$

Bu iki yöntemden herhangi biri, silindirik koordinat sisteminin ortogonal olduğunu kanıtlar.

Soru 3: Silindirik Koordinatlarda Birim Vektörler ve Dönüşüm Matrisi

Çözüm

Birim Vektörlerin Kartezyen Bileşenleri

Silindirik koordinatlardaki birim vektörleri, kartezyen birim vektörler cinsinden ifade edelim:

$$\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \tag{7}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \tag{8}$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{9}$$

Koordinat Dönüşümleri

Silindirik koordinatlar ile kartezyen koordinatlar arasındaki ilişki:

$$x = \rho\cos\theta \tag{10}$$
$$y = \rho\sin\theta \tag{11}$$
$$z = z \tag{12}$$

Dönüşüm Matrisi

Silindirik birim vektörleri kartezyen birim vektörler cinsinden ifade eden dönüşüm matrisi:

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_\rho\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{bmatrix} \tag{13}$$

Bu matrisin tersi, kartezyen birim vektörleri silindirik birim vektörler cinsinden ifade eder:

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_\rho\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_z\end{bmatrix} \tag{14}$$

Konum Vektörünün İfadesi

Kartezyen koordinatlarda konum vektörü:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{15}$$

Silindirik koordinatlarda konum vektörünü ifade etmek için, kartezyen bileşenleri silindirik koordinatlar cinsinden yazıp, kartezyen birim vektörleri de silindirik birim vektörler cinsinden ifade edelim:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\cos\theta\vec{e}_x + \rho\sin\theta\vec{e}_y + z\vec{e}_z & (16)\\
&= \rho\cos\theta(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_\theta) + \rho\sin\theta(\sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_\theta) + z\vec{e}_z & (17)\\
&= \rho\cos^2\theta\vec{e}_\rho - \rho\cos\theta\sin\theta\vec{e}_\theta + \rho\sin^2\theta\vec{e}_\rho + \rho\sin\theta\cos\theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z & (18)\\
&= \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\vec{e}_\rho + \rho(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z & (19)\\
&= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z & (20)
\end{aligned}$$

Bu, silindirik koordinatlarda konum vektörünün standart ifadesidir.

Skaler Alanların Dönüşümü

Aşağıdaki skaler alanların silindirik koordinatlardaki ifadelerini bulalım:

$u_1 = 2xy^2 + x^2$

Kartezyen koordinatlardan silindirik koordinatlara dönüşüm formüllerini kullanarak:

$$x = \rho\cos\theta \tag{21}$$
$$y = \rho\sin\theta \tag{22}$$

u_1 ifadesini silindirik koordinatlarda yazalım:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2xy^2 + x^2 & (23)\\
&= 2(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 & (24)\\
&= 2\rho^3\cos\theta\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta & (25)\\
&= \rho^2(2\rho\cos\theta\sin^2\theta + \cos^2\theta) & (26)
\end{aligned}$$

$u_2 = xy + z$
Benzer şekilde:

$$u_2 = xy + z \tag{27}$$
$$= (\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta) + z \tag{28}$$
$$= \rho^2\cos\theta\sin\theta + z \tag{29}$$

$u_3 = x^2y + z^2y + z$
Ve son olarak:

$$u_3 = x^2y + z^2y + z \tag{30}$$
$$= (\rho\cos\theta)^2(\rho\sin\theta) + z^2(\rho\sin\theta) + z \tag{31}$$
$$= \rho^3\cos^2\theta\sin\theta + \rho z^2\sin\theta + z \tag{32}$$

Ödev: Küresel Koordinatlara Uygulama

Soru 3'teki işlemleri küresel koordinatlara uygulayalım.

Küresel Koordinatlarda Birim Vektörler

Küresel koordinatlarda birim vektörleri kartezyen birim vektörler cinsinden ifade edelim:

$$\vec{e}_r = \sin\phi\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\phi\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\phi\,\vec{e}_z \tag{33}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \tag{34}$$
$$\vec{e}_\phi = \cos\phi\cos\theta\,\vec{e}_x + \cos\phi\sin\theta\,\vec{e}_y - \sin\phi\,\vec{e}_z \tag{35}$$

Burada r radyal mesafe, θ azimut açısı (xy-düzlemindeki açı) ve ϕ polar açıdır (z-ekseni ile yapılan açı).

Koordinat Dönüşümleri

Küresel koordinatlar ile kartezyen koordinatlar arasındaki ilişki:

$$x = r\sin\phi\cos\theta \tag{36}$$
$$y = r\sin\phi\sin\theta \tag{37}$$
$$z = r\cos\phi \tag{38}$$

Dönüşüm Matrisi

Küresel birim vektörleri kartezyen birim vektörler cinsinden ifade eden dönüşüm matrisi:

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{bmatrix} \tag{39}$$

Konum Vektörünün İfadesi

Küresel koordinatlarda konum vektörü:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \tag{40}$$

Bu ifade, küresel koordinatlarda konum vektörünün sadece radyal bileşene sahip olduğunu gösterir.

Skaler Alanların Dönüşümü

Aynı skaler alanları küresel koordinatlarda ifade edelim:

$u_1 = 2xy^2 + x^2$

Küresel koordinatlarda:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2xy^2 + x^2 && (41)\\
&= 2(r\sin\phi\cos\theta)(r\sin\phi\sin\theta)^2 + (r\sin\phi\cos\theta)^2 && (42)\\
&= 2r^3\sin^3\phi\cos\theta\sin^2\theta + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta && (43)\\
&= r^2\sin^2\phi(2r\sin\phi\cos\theta\sin^2\theta + \cos^2\theta) && (44)
\end{aligned}$$

$u_2 = xy + z$

Küresel koordinatlarda:

$$\begin{aligned}
u_2 &= xy + z && (45)\\
&= (r\sin\phi\cos\theta)(r\sin\phi\sin\theta) + r\cos\phi && (46)\\
&= r^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta + r\cos\phi && (47)
\end{aligned}$$

$u_3 = x^2y + z^2y + z$

Küresel koordinatlarda:

$$\begin{aligned}
u_3 &= x^2y + z^2y + z && (48)\\
&= (r\sin\phi\cos\theta)^2(r\sin\phi\sin\theta) + (r\cos\phi)^2(r\sin\phi\sin\theta) + r\cos\phi && (49)\\
&= r^3\sin^3\phi\cos^2\theta\sin\theta + r^3\cos^2\phi\sin\phi\sin\theta + r\cos\phi && (50)
\end{aligned}$$