FİZİKTE MATEMATİKSEL METOTLAR
6 MART 2025

Ad Soyad: Celal Ekrem Torun - 0411230037

DERS: Prof. Dr. ERTAN GUDEKLI

Fizik Bölümü, İstanbul Üniversitesi

Beyazıt, Fatih, İstanbul, Türkiye

13 Mart 2025

Temel Kavramlar

- Kısmi türevler genellikle ∂ sembolü ile gösterilir.
- Koordinat sistemlerinde birim vektörler, sistemin geometrisini tanımlamak için önemlidir.
- Silindirik koordinat sistemi (ρ, θ, z) ile tanımlanır.
- Küresel koordinat sistemi (r, θ, ϕ) ile tanımlanır.

Soru 2: Silindirik Koordinat Sisteminin Dikliğinin İspatı

Yöntem 1: Birim Vektörlerin Skaler Çarpımı

Bir koordinat sisteminin dik olması için, sistemin birim vektörlerinin birbirine dik (ortogonal) olması gerekir. Silindirik koordinat sisteminde birim vektörler $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$ ve $\vec{e}_z$'dir.

İki vektörün birbirine dik olması için skaler çarpımlarının sıfır olması gerekir. Bunu şu şekilde kontrol edelim:

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\theta = 0 \tag{1}$$
$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{2}$$
$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{3}$$

Bu skaler çarpımların sıfır olduğunu gösterebiliriz:

1) $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\theta$: $\vec{e}_\rho$ ρ yönündedir ve $\vec{e}_\theta$ teğetsel yöndedir. Geometrik olarak bunlar birbirine diktir, dolayısıyla çarpımları sıfırdır.

2) $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z$: $\vec{e}_\rho$ xy-düzlemindedir, $\vec{e}_z$ ise z-eksenindedir ve bu iki yön birbirine diktir, dolayısıyla çarpımları sıfırdır.

3) $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z$: $\vec{e}_\theta$ xy-düzlemindedir ve dairesel harekete teğettir, $\vec{e}_z$ ise z-eksenindedir. Bu ikisi birbirine diktir, dolayısıyla çarpımları sıfırdır.

Yöntem 2: Teğet Bileşenlerin Kontrolü

Koordinat eğrilerine teğet olan birim vektörler için de benzer bir kontrol yapabiliriz:

$$\vec{t}_\rho \cdot \vec{t}_\theta = 0 \tag{4}$$
$$\vec{t}_\rho \cdot \vec{t}_z = 0 \tag{5}$$
$$\vec{t}_\theta \cdot \vec{t}_z = 0 \tag{6}$$

Burada $\vec{t}_\rho$, $\vec{t}_\theta$ ve $\vec{t}_z$, ilgili koordinat eğrilerine teğet vektörlerdir.

Silindirik koordinat sisteminde:

- $\vec{t}_\rho$ radyal yönde (merkezden dışarıya doğru)
- $\vec{t}_\theta$ açısal yönde (dairesel hareket yönünde)
- $\vec{t}_z$ dikey yönde

Bu üç yön birbirine dik olduğundan, teğet vektörlerin skaler çarpımları sıfırdır. Dolayısıyla silindirik koordinat sistemi diktir.

Soru 3: Silindirik ve Kartezyen Koordinatlar Arasındaki Dönüşüm

Adım 1: Birim Vektörlerin İfadesi

Silindirik koordinatlardaki birim vektörleri Kartezyen birim vektörleri cinsinden ifade edelim:

$$\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \tag{7}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \tag{8}$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{9}$$

Bu ifadeleri geometrik olarak doğrulayabiliriz:

- $\vec{e}_\rho$: Merkezden dışarıya doğru olan birim vektör, x-ekseni ile θ açısı yapıyorsa, x bileşeni $\cos\theta$, y bileşeni $\sin\theta$ olur.
- $\vec{e}_\theta$: $\vec{e}_\rho$'ya dik olan teğet birim vektör, x bileşeni $-\sin\theta$, y bileşeni $\cos\theta$ olur.
- $\vec{e}_z$: Dikey eksen her iki sistemde de aynıdır.

Adım 2: Koordinat Dönüşüm İlişkileri

Silindirik ve Kartezyen koordinatlar arasındaki dönüşüm ilişkileri:

$$x = \rho\cos\theta \tag{10}$$
$$y = \rho\sin\theta \tag{11}$$
$$z = z \tag{12}$$

Tersi:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{13}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{14}$$
$$z = z \tag{15}$$

Adım 3: Dönüşüm Matrisi

Birim vektörler arasındaki ilişkiyi matris formunda yazalım:

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z\end{bmatrix} \tag{16}$$

Bu dönüşüm matrisi A olsun. Matrisin özelliklerini inceleyelim:

- A ortogonal bir matristir: $A^T A = I$
- Ortogonal matris olduğundan $A^{-1} = A^T$
- Determinantı $|A| = 1$ olduğundan, bu dönüşüm uzunlukları ve açıları korur.

Adım 4: Matris Tersi ile Ters Dönüşüm

Dönüşüm matrisinin tersi:

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{17}$$

Dönüşüm matrislerini kullanarak şu ilişkileri yazabiliriz:

$$\vec{x} = A\vec{y} \tag{18}$$
$$\vec{y} = A^{-1}\vec{x} \tag{19}$$

Burada $\vec{x}$ Kartezyen sistemi, $\vec{y}$ ise silindirik sistemi temsil eder.

Adım 5: Konum Vektörünün İfadesi

Konum vektörü $\vec{r}$'yi her iki koordinat sisteminde de ifade edelim.

Kartezyen koordinatlarda:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{20}$$

Bu ifadeye silindirik koordinatları yerleştirelim:

$$\vec{r} = \rho\cos\theta\vec{e}_x + \rho\sin\theta\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{21}$$

Şimdi Kartezyen birim vektörlerini silindirik birim vektörleri cinsinden yazalım. Dönüşüm matrisinin tersi ile:

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z\end{bmatrix} \tag{22}$$

Yani:

$$\vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_\theta \tag{23}$$
$$\vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_\theta \tag{24}$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{25}$$

Bu ifadeleri konum vektöründe yerine koyalım:

$$\vec{r} = \rho\cos\theta(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_\theta) + \rho\sin\theta(\sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_\theta) + z\vec{e}_z \tag{26}$$

$$= \rho\cos^2\theta\vec{e}_\rho - \rho\cos\theta\sin\theta\vec{e}_\theta + \rho\sin^2\theta\vec{e}_\rho + \rho\sin\theta\cos\theta\vec{e}_\theta + z\vec{e} \tag{27}$$

Terimlerini düzenleyelim:

$$\vec{r} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\vec{e}_\rho + \rho(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z \quad (28)$$
$$= \rho\cdot 1\cdot \vec{e}_\rho + \rho\cdot 0\cdot \vec{e}_\theta + z\vec{e}_z \quad (29)$$
$$= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \quad (30)$$

Bu, silindirik koordinatlarda konum vektörünün beklenen ifadesidir.

Vektör Alanlarının Silindirik Koordinatlara Dönüşümü

Verilen vektör alanları:

$$U_1 = 2xy^2 + x^2 \quad (31)$$
$$U_2 = xy + z \quad (32)$$
$$U_3 = x^2y + z^2y + z \quad (33)$$

Bu alanları silindirik koordinatlara dönüştürmek için, Kartezyen değişkenleri silindirik koordinatlar cinsinden yazalım:
$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$

U_1 Vektör Alanının Dönüşümü

$$U_1 = 2xy^2 + x^2 \quad (34)$$
$$= 2(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 \quad (35)$$
$$= 2\rho^3\cos\theta\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta \quad (36)$$
$$= 2\rho^3\cos\theta\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta \quad (37)$$

U_2 Vektör Alanının Dönüşümü

$$U_2 = xy + z \quad (38)$$
$$= (\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta) + z \quad (39)$$
$$= \rho^2\cos\theta\sin\theta + z \quad (40)$$

U_3 Vektör Alanının Dönüşümü

$$U_3 = x^2y + z^2y + z \quad (41)$$
$$= (\rho\cos\theta)^2(\rho\sin\theta) + z^2(\rho\sin\theta) + z \quad (42)$$
$$= \rho^3\cos^2\theta\sin\theta + \rho z^2\sin\theta + z \quad (43)$$
$$= \rho^3\cos^2\theta\sin\theta + \rho z^2\sin\theta + z \quad (44)$$

Ödev: Küresel Koordinatlara Uygulama

Küresel koordinatlarda benzer dönüşüm işlemlerini uygulayın. Küresel koordinat sistemi (r, θ, ϕ) ile tanımlanır, burada:

- r: Orijinden olan uzaklık
- θ: xy-düzlemindeki açı (enlem açısı)
- ϕ: z-ekseni ile yapılan açı (boylam açısı)

Küresel ve Kartezyen koordinatlar arasındaki dönüşüm ilişkileri:

$$x = r\sin\phi\cos\theta \quad (45)$$
$$y = r\sin\phi\sin\theta \quad (46)$$
$$z = r\cos\phi \quad (47)$$

Tersi:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (48)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (49)$$
$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (50)$$

Ödevinizde, silindirik koordinatlar için yaptığımız işlemlerin benzerini küresel koordinatlar için de yapmanız istenmektedir. Buna şunlar dahildir:

1. Küresel koordinatlardaki birim vektörlerin Kartezyen birim vektörleri cinsinden ifadesi
2. Dönüşüm matrisinin oluşturulması
3. Konum vektörünün küresel koordinatlarda ifade edilmesi
4. Verilen vektör alanlarının küresel koordinatlara dönüştürülmesi