FMM - Fizikte Matematiksel Metotlar - Ders 1 (6 Mart 2025)

Hazırlayan; Celal Ekrem Torun

Fizik Bölümü, İstanbul Üniversitesi
Beyazıt, Fatih, İstanbul, Türkiye

Matematiksel Metotlar

Not: 1 Mart'ta gradyen vektörü işlendi, 6 Mart'ta eğrisel koordinatlara başlanacak.

Gradyen

Tanım: Bir $\phi(x, y, z)$ skaler alanının gradyeni, o alanın en hızlı değişim yönünü ve büyüklüğünü gösteren bir vektör alanıdır.

Kartezyen koordinatlarda gradyen şu şekilde tanımlanır:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e_x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{e_y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e_z}$$

Burada:

- $\nabla\phi$: Gradyen vektörü
- $\phi(x, y, z)$: Skaler alan
- $\hat{e_x}$, $\hat{e_y}$, $\hat{e_z}$: Sırasıyla x, y ve z yönlerindeki birim vektörler

Önemli Not: $\nabla\phi$, $\hat{e_x}$, $\hat{e_y}$ ve $\hat{e_z}$ ile ayrı ayrı skalar çarpılırsa, ϕ fonksiyonunun sınırları ile x, y ve z doğrultusundaki değişimi bulunur.

Bir $P(x, y, z)$ noktasındaki ϕ fonksiyonunun değişim oranı, $\nabla\phi \cdot d\vec{r}$ ile bulunur. Burada $d\vec{r}$, P noktasından küçük bir yer değiştirmeyi temsil eden vektördür. Eğer $\phi = c_1$ yüzeyinden $\phi = c_2$ yüzeyine gidilirse, değişim $d\phi = c_2 - c_1$ olur ve $d\phi \neq 0$ olur.

Eğer $\nabla\phi \cdot d\vec{r} = d\phi = 0$ ise, $\nabla\phi$, $d\vec{r}$ vektörüne diktir. Bu durumda $\nabla\phi$, $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ ile aynı yöndedir.

Doğrultu Türevi

Tanım: Bir $\phi(x, y, z)$ skaler alanının, bir $\vec{u}$ birim vektörü yönündeki doğrultu türevi, ϕ'nin $\vec{u}$ yönündeki değişim oranını verir.

Doğrultu türevi şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \nabla\phi \cdot \hat{u} = |\nabla\phi||\hat{u}|\cos\theta$$

Burada:

- $\frac{\partial\phi}{\partial u}$: Doğrultu türevi
- $\nabla\phi$: Gradyen vektörü
- $\hat{u}$: Birim vektör
- θ: $\nabla\phi$ ve $\hat{u}$ arasındaki açı

$\frac{\partial\phi}{\partial u}$, ϕ'nin bir $P(x, y, z)$ noktasındaki $\vec{u}$ birim vektörü ile belirlenen doğrultudaki doğrultu türevidir.

$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \nabla\phi \cdot \hat{u} = |\nabla\phi|\cos\theta$

Örnek Soru

$\phi(x, y, z) = x^2yz + 4z^2$ fonksiyonunun $P(1, -2, -1)$ noktasındaki $\vec{dr} = (2\hat{e_x} - \hat{e_y} - 2\hat{e_z})$ doğrultusundaki türevini bulun.

Çözüm:

Adım 1: Gradyeni hesaplayalım:

$\nabla\phi = (2xyz)\hat{e_x} + (x^2z)\hat{e_y} + (x^2y + 8z)\hat{e_z}$

Adım 2: P(1, -2, -1) noktasındaki gradyeni hesaplayalım:

$\nabla\phi|_P = (2(1)(-2)(-1))\hat{e_x} + ((1)^2(-1))\hat{e_y} + ((1)^2(-2) + 8(-1))\hat{e_z} = 4\hat{e_x} - \hat{e_y} - 10\hat{e_z}$

Adım 3: $\vec{u}$ birim vektörünü bulalım:

$|\vec{dr}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\hat{u} = \frac{\vec{dr}}{|\vec{dr}|} = \frac{2}{3}\hat{e_x} - \frac{1}{3}\hat{e_y} - \frac{2}{3}\hat{e_z}$

Adım 4: Doğrultu türevini hesaplayalım:

$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \nabla\phi \cdot \hat{u} = (4\hat{e_x} - \hat{e_y} - 10\hat{e_z}) \cdot (\frac{2}{3}\hat{e_x} - \frac{1}{3}\hat{e_y} - \frac{2}{3}\hat{e_z}) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{29}{3} \approx 9.67$

Eğrisel Koordinatlar

Üç boyutlu Öklit uzayında, bir noktanın Kartezyen koordinatları (x, y, z) ile ifade edilir. Şimdi, bu koordinatlara bağlı üç yeni değişken tanımlayalım:

$$u_1 = u_1(x, y, z) \tag{1}$$

$$u_2 = u_2(x, y, z) \tag{2}$$

$$u_3 = u_3(x, y, z) \tag{3}$$

Bu yeni değişkenler, eğrisel koordinatları temsil eder.

u_1, u_2, u_3'ün Bağımsız Fonksiyonlar Olması

Lineer homojen bir sistemin sıfırdan farklı çözüme sahip olabilmesi için, katsayılar determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Şimdi, u_1, u_2, u_3'ün bağımsız fonksiyonlar olmasının ne anlama geldiğini inceleyelim.

$u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$ ve $u_3(x,y,z)$ fonksiyonları için aşağıdaki ifadeler tanımlanır:

$$u_1 = u_1(x,y,z) \tag{4}$$

$$u_2 = u_2(x,y,z) \tag{5}$$

$$u_3 = u_3(x,y,z) \tag{6}$$

Bu fonksiyonların diferansiyelleri ise şu şekildedir:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}dx + \frac{\partial u_1}{\partial y}dy + \frac{\partial u_1}{\partial z}dz \tag{7}$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x}dx + \frac{\partial u_2}{\partial y}dy + \frac{\partial u_2}{\partial z}dz \tag{8}$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x}dx + \frac{\partial u_3}{\partial y}dy + \frac{\partial u_3}{\partial z}dz \tag{9}$$

Bu denklemleri matris formunda ifade edebiliriz:

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \tag{10}$$

Bu matrisi daha kompakt bir şekilde ifade etmek için, aşağıdaki tanımlamaları yapalım:

$$d\mathbf{u} = \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \tag{11}$$

Bu durumda, yukarıdaki denklem şu şekilde yazılabilir:

$$d\mathbf{u} = A\, d\mathbf{x} \tag{12}$$

dx, dy ve dz'yi du_1, du_2 ve du_3 cinsinden ifade etmek için, A matrisinin tersini almamız gerekir:

$$d\mathbf{x} = A^{-1}\, d\mathbf{u} \tag{13}$$

A^{-1} matrisinin var olabilmesi için, A matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır:

$$J = \det(A) \neq 0 \tag{14}$$

Burada J, Jacobian determinantıdır. A^{-1} matrisi, A'nın ek matrisinin determinantına bölünmesiyle bulunur:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{J} \tag{15}$$

Bu durumda, dx, dy ve dz aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Kartezyen koordinatları eğrisel koordinatlar cinsinden ifade etmek için, aşağıdaki bağıntıları kullanırız:

$$x = x(u_1,u_2,u_3) \tag{17}$$

$$y = y(u_1,u_2,u_3) \tag{18}$$

$$z = z(u_1,u_2,u_3) \tag{19}$$

Bu durumda, konum vektörü $\vec{r}$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\vec{r} = x(u_1,u_2,u_3)\,\hat{e_x} + y(u_1,u_2,u_3)\,\hat{e_y} + z(u_1,u_2,u_3)\,\hat{e_z} \tag{20}$$

Eğrisel Koordinatların Geometrik Gösterimi

Aşağıdaki şemalar, eğrisel koordinatların ve Kartezyen koordinat sisteminin ayrı ayrı gösterimlerini sunmaktadır.

Kartezyen Koordinat Sistemi:

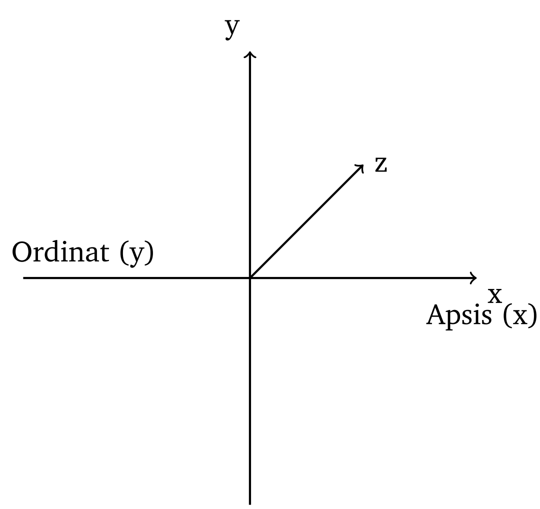

Figure 1: Kartezyen Koordinat Sistemi

Bu şemada:

- *Apsis (x)*: Yatay ekseni temsil eder.
- *Ordinat (y)*: Dikey ekseni temsil eder.
- *Kot (z)*: Derinlik eksenini temsil eder.

Eğrisel Koordinat Sistemi Gösterimi:

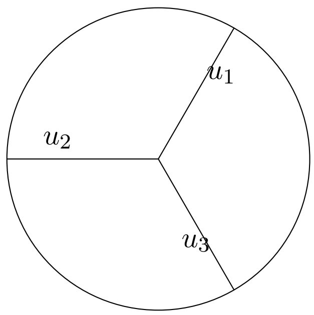

Figure 2: Eğrisel Koordinat Sistemi

Bu şema, eğrisel koordinatları (u_1, u_2, u_3) temsil eden bir dairesel gösterim sunar. Bu gösterim, eğrisel koordinatların Kartezyen koordinat sistemi ile ilişkisini anlamak için kullanılabilir.

Eğrisel koordinatlar, belirli bir probleme daha uygun bir koordinat sistemi seçme esnekliği sağlar. Örneğin, silindirik veya küresel koordinatlar, belirli simetrilere sahip problemleri çözmek için daha uygun olabilir.

Eğrisel Koordinat Örnekleri

Silindirik Koordinatlar (ρ, ϕ, z)

Silindirik koordinatlar, üç boyutlu uzayı tanımlamak için kullanılan bir koordinat sistemidir. Bu sistemde, bir noktanın konumu, bir eksene olan uzaklığı (ρ), bu eksen etrafındaki açısı (ϕ) ve eksen üzerindeki yüksekliği (z) ile belirlenir.

Tanımlar:

- ρ *(rho)*: xy düzlemindeki orijinden olan uzaklık.
- ϕ *(phi)*: x ekseni ile ρ arasındaki açı (azimut açısı).
- z: z ekseni üzerindeki yükseklik.

Kartezyen ve Silindirik Koordinatlar Arasındaki İlişki:

Kartezyen koordinatlardaki (x, y, z) noktası ile silindirik koordinatlardaki (ρ, ϕ, z) noktası arasındaki dönüşüm aşağıdaki gibidir:

- $x = \rho \cos \phi$
- $y = \rho \sin \phi$
- $z = z$

Dönüşümün Tersi:

- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
- $z = z$

Geometrik Gösterim:

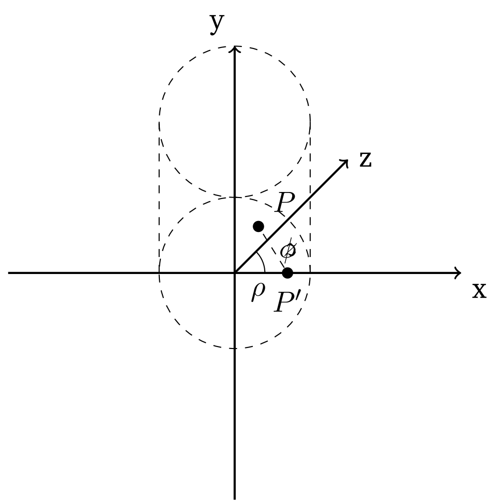

Figure 3: Silindirik Koordinat Sistemi

Bu şemada:

- P: Uzaydaki bir noktayı temsil eder.
- P': P noktasının xy düzlemindeki izdüşümüdür.
- ρ: P' noktasının orijine olan uzaklığıdır.
- ϕ: x ekseni ile OP' arasındaki açıdır (azimut açısı).
- z: P noktasının z ekseni üzerindeki yüksekliğidir.

Jacobian Dönüşümü:

Silindirik koordinatlardaki (ρ, ϕ, z) ile Kartezyen koordinatlardaki (x, y, z) arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

- $x = \rho \cos \phi$
- $y = \rho \sin \phi$
- $z = z$

Burada ϕ, azimut açısını temsil etmektedir.

Bu dönüşümü ifade etmek için Jacobian matrisini kullanabiliriz. Jacobian matrisi, koordinat dönüşümünün kısmi türevlerini içerir:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Bu matrisin elemanlarını hesaplarsak:

- $\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\phi$
- $\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi$
- $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$
- $\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\phi$
- $\frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho\cos\phi$
- $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$
- $\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$
- $\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$
- $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$

Bu değerleri Jacobian matrisine yerleştirdiğimizde:

$$J = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Jacobian determinantı ise şu şekilde hesaplanır:

$$\det(J) = \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \rho \tag{23}$$

Burada $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\rho \neq 0$ olmalıdır.

Ayrıca, $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ifadesi kullanılır.

$z = z$ olduğundan, z için türev dönüşümleri basittir.

Bu Jacobian determinantı, hacim elemanının dönüşümünde kullanılır:

$$dV = dx\,dy\,dz = |J|\,d\rho\,d\phi\,dz = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz \tag{24}$$

Bu dönüşümler, koordinatları bir sistemden diğerine dönüştürmek için kullanılır. Jacobian determinantı, dönüşümün hacim elemanını nasıl etkilediğini gösterir.

Eğrisel Koordinat Sisteminin Taban Vektörleri ve Ölçek Çarpanları

Eğrisel koordinat sistemlerinde, taban vektörleri ve ölçek çarpanları, koordinat sisteminin geometrik özelliklerini anlamak için önemlidir. Bu bölümde, bu kavramları detaylı bir şekilde inceleyeceğiz.

1. Taban Vektörlerinin Tanımı:

Eğrisel koordinatlarda, taban vektörleri, her bir koordinatın değişim yönünü gösterir. Örneğin, (u_1, u_2, u_3) eğrisel koordinat sisteminde, taban vektörleri şu şekilde tanımlanır:

- $\vec{e_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$: u_1 koordinatının değişim yönündeki taban vektörü.
- $\vec{e_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}$: u_2 koordinatının değişim yönündeki taban vektörü.
- $\vec{e_3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$: u_3 koordinatının değişim yönündeki taban vektörü.

Burada $\vec{r}$, konum vektörünü temsil eder.

2. Geometrik Gösterim:

Aşağıdaki şema, u_1, u_2 ve u_3 koordinatlarını düzlemsel olarak göstermektedir. Bu gösterimde, her bir koordinat, eski Windows logosuna benzer şekilde, farklı düzlemleri temsil etmektedir.

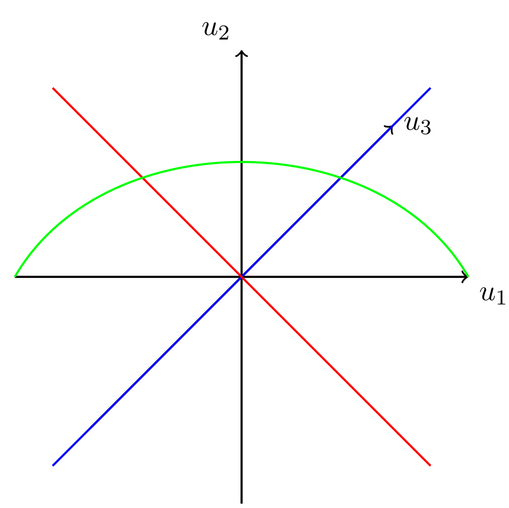

Figure 4: Eğrisel Koordinat Sistemi Taban Vektörleri

Bu şemada, u_1, u_2 ve u_3 koordinatları, farklı düzlemleri temsil etmektedir. Bu düzlemlerin kesişimi, uzaydaki bir noktayı tanımlar.

3. Taylor Serisi Açılımı:

Şimdi, u_2 ve u_3 koordinatlarını sabit tutup, u_1 koordinatına du_1 artışı verelim. Bu durumda, yeni noktamız $P_1(u_1 + du_1, u_2, u_3)$ olacaktır. $P(u_1, u_2, u_3)$ noktasından P_1 noktasına olan vektör:

$$d\vec{r_1} = \vec{r}(u_1 + du_1, u_2, u_3) - \vec{r}(u_1, u_2, u_3) \tag{25}$$

Bu ifadeyi Taylor serisine açarsak:

$$\vec{r}(u_1 + du_1, u_2, u_3) = \vec{r}(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + O(du_1^2) \tag{26}$$

Burada $O(du_1^2)$, du_1'in ikinci ve daha yüksek dereceli terimlerini temsil eder. Bu terimleri ihmal edersek:

$$d\vec{r_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 = \vec{e_1} du_1 \tag{27}$$

Benzer şekilde, diğer koordinatlar için de aynı işlemi yapabiliriz:

- $d\vec{r_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 = \vec{e_2} du_2$
- $d\vec{r_3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = \vec{e_3} du_3$

Bu durumda, $d\vec{r}$ vektörü:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = \vec{e_1} du_1 + \vec{e_2} du_2 + \vec{e_3} du_3 \tag{28}$$

4. Ölçek Çarpanları:

Ölçek çarpanları, her bir koordinatın değişiminin, uzunluk birimindeki değişime nasıl dönüştüğünü gösterir. Ölçek çarpanları şu şekilde tanımlanır:

- $h_1 = |\vec{e_1}| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|$
- $h_2 = |\vec{e_2}| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|$
- $h_3 = |\vec{e_3}| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right|$

Bu durumda, $d\vec{r}$ vektörünün uzunluğu:

$$ds^2 = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \tag{29}$$

Bu ifade, eğrisel koordinatlardaki uzunluk elemanını temsil eder.

5. Özet:

Bu bölümde, eğrisel koordinat sistemlerinin taban vektörlerini, ölçek çarpanlarını ve uzunluk elemanını nasıl hesaplayacağımızı öğrendik. Bu kavramlar, eğrisel koordinat sistemlerindeki geometrik hesaplamalar için önemlidir.