FMM - Fizikte Matematiksel Metotlar

Hazırlayan; Celal Ekrem Torun *Fizik Bölümü, İstanbul Üniversitesi*

Beyazıt, Fatih, İstanbul, Türkiye

Ders Notları

1. Soru

İki düzlem denklemi verilmiştir:

$$x - 2y + 3z = 0$$
$$2x + y - z = 5$$

Bu düzlemlerin arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm:

Düzlemlerin normal vektörleri sırasıyla $\vec{n}_1 = (1, -2, 3)$ ve $\vec{n}_2 = (2, 1, -1)$'dir. İki düzlem arasındaki açı, normal vektörleri arasındaki açıyla aynıdır. Bu açının kosinüsü, normal vektörlerin iç çarpımı ve büyüklükleri kullanılarak bulunur:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Öncelikle, iç çarpımı hesaplayalım:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1)(2) + (-2)(1) + (3)(-1) = 2 - 2 - 3 = -3$$

Şimdi, vektörlerin büyüklüklerini hesaplayalım:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

Buna göre, kosinüs değeri:

$$\cos\alpha = \frac{|-3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{\sqrt{4 \cdot 21}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

Yani, düzlemler arasındaki açının kosinüsü $\frac{3}{2\sqrt{21}}$'dir.

2. Soru

$\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ ve $\vec{B} = 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ vektörleri veriliyor. $\vec{A}$'nın $\vec{B}$ üzerindeki izdüşümünü bulunuz.

Çözüm:

$\vec{A}$'nın $\vec{B}$ üzerindeki izdüşümü ($\vec{A}_{\text{proj } B}$), aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$\vec{A}_{\text{proj } B} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2}\vec{B}$$

İlk olarak, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'nin iç çarpımını hesaplayalım:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(0) + (-3)(3) + (1)(-4) = 0 - 9 - 4 = -13$$

Şimdi, $\vec{B}$'nin büyüklüğünün karesini hesaplayalım:

$$|\vec{B}|^2 = 0^2 + 3^2 + (-4)^2 = 0 + 9 + 16 = 25$$

İzdüşümü hesaplayalım:

$$\vec{A}_{\text{proj } B} = \frac{-13}{25}(3\hat{\jmath} - 4\hat{k}) = -\frac{39}{25}\hat{\jmath} + \frac{52}{25}\hat{k}$$

$\vec{A}$'nın $\vec{B}$ üzerindeki izdüşümü $-\frac{39}{25}\hat{\jmath} + \frac{52}{25}\hat{k}$'dir.
İzdüşümün büyüklüğü:

$$|\vec{A}_{\text{proj } B}| = \frac{|\vec{A}\cdot\vec{B}|}{|\vec{B}|} = \frac{|-13|}{5} = \frac{13}{5}$$

3. Soru

$\phi = x^2y + xz$ fonksiyonunun $(1, 2, -1)$ noktasında $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ doğrultusundaki doğrultu türevini bulunuz.

Çözüm:

Doğrultu türevi, bir skaler alanın belirli bir yöndeki değişim oranını ifade eder. Bu, gradyan vektörü ile birim vektörün iç çarpımı alınarak bulunur.

Adım 1: $\vec{A}$'yı birim vektöre dönüştürün:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\hat{A} = \frac{2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{\imath} - \frac{2}{3}\hat{\jmath} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

Adım 2: ϕ'nin gradyanını hesaplayın:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

Kısmi türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + z$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = x$$

Gradyan vektörü:

$$\nabla\phi = (2xy + z)\hat{\imath} + (x^2)\hat{\jmath} + (x)\hat{k}$$

Adım 3: Gradyanı $(1, 2, -1)$ noktasında değerlendirin:

$$\nabla\phi(1,2,-1) = (2(1)(2) + (-1))\hat{\imath} + (1^2)\hat{\jmath} + (1)\hat{k} = (4-1)\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

Adım 4: Doğrultu türevini hesaplayın:
Doğrultu türevi, gradyan ile birim vektörün iç çarpımıdır:

$$D_{\hat{A}}\phi = \nabla\phi\cdot\hat{A} = (3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})\cdot\left(\frac{2}{3}\hat{\imath} - \frac{2}{3}\hat{\jmath} + \frac{1}{3}\hat{k}\right)$$

$$D_{\hat{A}}\phi = (3)\left(\frac{2}{3}\right) + (1)\left(-\frac{2}{3}\right) + (1)\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$$

Sonuç olarak, ϕ'nin $(1, 2, -1)$ noktasındaki $\vec{A}$ doğrultusundaki doğrultu türevi $\frac{5}{3}$'tür.

4. Soru

$x^2y + 2xz = 4$ yüzeyinin $P(2, -2, 3)$ noktasındaki birim normal vektörünü bulunuz.

Çözüm:

Yüzeyin birim normal vektörü, gradyan vektörünün yüzeyin o noktasındaki değerinin, gradyan vektörünün büyüklüğüne bölünmesiyle bulunur.

Adım 1: $f(x, y, z) = x^2y + 2xz - 4 = 0$ olarak tanımlayın.

Adım 2: Gradyan vektörünü hesaplayın:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Kısmi türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x$$

Gradyan vektörü:

$$\nabla f = (2xy + 2z)\hat{\imath} + (x^2)\hat{\jmath} + (2x)\hat{k}$$

Adım 3: Gradyanı $P(2, -2, 3)$ noktasında değerlendirin:

$$\nabla f(2, -2, 3) = (2(2)(-2) + 2(3))\hat{\imath} + (2^2)\hat{\jmath} + (2(2))\hat{k} = (-8 + 6)\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

Adım 4: Gradyanın büyüklüğünü P noktasında hesaplayın:

$$|\nabla f(2, -2, 3)| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Adım 5: Birim normal vektörünü hesaplayın:

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}}{6} = -\frac{1}{3}\hat{\imath} + \frac{2}{3}\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

Sonuç olarak, yüzeyin $P(2, -2, 3)$ noktasındaki birim normal vektörü $-\frac{1}{3}\hat{\imath} + \frac{2}{3}\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\hat{k}$'dir.

5. Soru

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ve $S_2 : z = x^2 + y^2 - 3$ yüzeyleri veriliyor. Bu yüzeylerin $P(2, -1, 2)$ noktasındaki teğet düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

İki yüzey arasındaki açı, yüzeylerin normal vektörleri arasındaki açıdır.

Adım 1: Her yüzey için gradyan vektörlerini hesaplayın:

$S_1 : f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

$S_2 : g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 3 = 0$

Gradyanları hesaplayalım:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = (2x)\hat{\imath} + (2y)\hat{\jmath} + (2z)\hat{k}$$

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k} = (2x)\hat{\imath} + (2y)\hat{\jmath} + (-1)\hat{k}$$

Adım 2: Gradyanları $P(2, -1, 2)$ noktasında değerlendirin:

$$\nabla f(2, -1, 2) = (2(2))\hat{\imath} + (2(-1))\hat{\jmath} + (2(2))\hat{k} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

$$\nabla g(2,-1,2) = (2(2))\hat{\imath} + (2(-1))\hat{\jmath} + (-1)\hat{k} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

Adım 3: Gradyanların iç çarpımını ve büyüklüklerini hesaplayın:

$$\nabla f \cdot \nabla g = (4)(4) + (-2)(-2) + (4)(-1) = 16 + 4 - 4 = 16$$

$$|\nabla f| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\nabla g| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

Adım 4: Açı kosinüsünü hesaplayın:

$$\cos\theta = \frac{\nabla f \cdot \nabla g}{|\nabla f| \cdot |\nabla g|} = \frac{16}{6 \cdot \sqrt{21}} = \frac{16}{6\sqrt{21}} = \frac{8}{3\sqrt{21}}$$

Adım 5: Açıyı bulun:

$$\theta = \arccos\left(\frac{8}{3\sqrt{21}}\right)$$

Sonuç olarak, yüzeyler arasındaki açı $\arccos\left(\frac{8}{3\sqrt{21}}\right)$'dir.