FMM - Fizikte Matematiksel Metotlar - Uygulama Devam

Hazırlayan; Celal Ekrem Torun *Fizik Bölümü, İstanbul Üniversitesi*

Beyazıt, Fatih, İstanbul, Türkiye

Uygulama

Soru 5

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ve $S_2 : z = x^2 + y^2 - 3$ yüzeyleri veriliyor. Bu yüzeylerin $P(2, -1, 2)$ noktasındaki teğet düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

İki yüzey arasındaki açı, yüzeylerin normal vektörleri arasındaki açıdır.

Adım 1: Her yüzey için gradyan vektörlerini hesaplayalım:
$S_1 : f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$
$S_2 : g(x, y, z) = z - x^2 - y^2 + 3 = 0$
Gradyanları hesaplayalım:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$
$$= 2x\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} g = \frac{\partial g}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \tag{3}$$
$$= -2x\hat{\mathbf{i}} - 2y\hat{\mathbf{j}} + 1\hat{\mathbf{k}} \tag{4}$$

Adım 2: Gradyanları $P(2, -1, 2)$ noktasında değerlendirelim:

$$\vec{\nabla} f(2, -1, 2) = 2(2)\hat{\mathbf{i}} + 2(-1)\hat{\mathbf{j}} + 2(2)\hat{\mathbf{k}} \tag{5}$$
$$= 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}} \tag{6}$$

$$\vec{\nabla} g(2, -1, 2) = -2(2)\hat{\mathbf{i}} - 2(-1)\hat{\mathbf{j}} + 1\hat{\mathbf{k}} \tag{7}$$
$$= -4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 1\hat{\mathbf{k}} \tag{8}$$

Adım 3: Normal vektörler arasındaki açıyı hesaplayalım. İki vektör arasındaki açı şu formülle bulunur:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} f||\vec{\nabla} g|} \tag{9}$$

Önce iç çarpımı hesaplayalım:

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g = (4)(-4) + (-2)(2) + (4)(1) \tag{10}$$
$$= -16 - 4 + 4 \tag{11}$$
$$= -16 \tag{12}$$

Vektörlerin büyüklüklerini hesaplayalım:

$$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} \tag{13}$$
$$= \sqrt{16 + 4 + 16} \tag{14}$$
$$= \sqrt{36} \tag{15}$$
$$= 6 \tag{16}$$

$$|\vec{\nabla} g| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 1^2} \tag{17}$$
$$= \sqrt{16 + 4 + 1} \tag{18}$$
$$= \sqrt{21} \tag{19}$$

Adım 4: Açı kosinüsünü hesaplayalım:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} f||\vec{\nabla} g|} \tag{20}$$
$$= \frac{-16}{6 \cdot \sqrt{21}} \tag{21}$$
$$= -\frac{16}{6\sqrt{21}} \tag{22}$$
$$= -\frac{8}{3\sqrt{21}} \tag{23}$$

Adım 5: Açıyı bulalım:

$$\theta = \arccos\left(-\frac{8}{3\sqrt{21}}\right) \tag{24}$$

Sonuç olarak, yüzeyler arasındaki açı $\theta = \arccos\left(-\frac{8}{3\sqrt{21}}\right)$ radyandır.

Sayısal değer olarak hesaplarsak:

$$\frac{8}{3\sqrt{21}} \approx \frac{8}{3 \cdot 4.583} \tag{25}$$
$$\approx \frac{8}{13.749} \tag{26}$$
$$\approx 0.582 \tag{27}$$

Dolayısıyla $\theta \approx \arccos(-0.582) \approx 125.5°$ olarak bulunur.