



## FMM - Fizikte Matematiksel Metotlar

Hazrlayan; Celal Ekrem Torun

Fizik Blm, stanbul niversitesi

Beyazt, Fatih, stanbul, Trkiye

### Ders Notlar

#### 1. Soru

ki dzlem denklemleri verilmitir:

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$2x + y - z = 5$$

Bu dzlemlerin arasndaki ann kosinsn bulunuz.

**zm:** Dzlemlerin normal vektreleri srasya  $\vec{n}_1 = (1, -2, 3)$  ve  $\vec{n}_2 = (2, 1, -1)$ 'dir. ki dzlem arasndaki a, normal vektreleri arasndaki ayla ayndr. Bu ann kosins, normal vektrelere i arpm ve byklklere kullanılarak bulunur:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

ncelikte, i arpm hesaplayalm:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1)(2) + (-2)(1) + (3)(-1) = 2 - 2 - 3 = -3$$

imdi, vektrelere byklklere hesaplayalm:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

Buna gre, kosins deeri:

$$\cos \alpha = \frac{|-3|}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

Yani, dzlemler arasndaki ann kosins  $\frac{3}{2\sqrt{21}}$ 'dir.

#### 2. Soru

$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$  ve  $\vec{B} = 3\hat{j} - 4\hat{k}$  vektreleri veriliyor.  $\vec{A}$ 'nn  $\vec{B}$  zerindeki izdmn bulunuz.

**zm:**  $\vec{A}$ 'nn  $\vec{B}$  zerindeki izdm ( $\vec{A}_{\text{proj } B}$ ), aadaki formlele hesaplanr:

$$\vec{A}_{\text{proj } B} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \vec{B}$$

lk olarak,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$ 'nin i arpmn hesaplayalm:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(0) + (-3)(3) + (1)(-4) = 0 - 9 - 4 = -13$$

imdi,  $\vec{B}$ 'nin byklkn karesini hesaplayalm:

$$|\vec{B}|^2 = 0^2 + 3^2 + (-4)^2 = 0 + 9 + 16 = 25$$

zdm hesaplayalm:

$$\vec{A}_{\text{proj } B} = \frac{-13}{25} (3\hat{j} - 4\hat{k}) = -\frac{39}{25}\hat{j} + \frac{52}{25}\hat{k}$$

$\vec{A}$ 'nn  $\vec{B}$  zerindeki izdm  $-\frac{39}{25}\hat{j} + \frac{52}{25}\hat{k}$ 'dir.

zdmn bykl:

$$|\vec{A}_{\text{proj } B}| = \frac{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}{|\vec{B}|} = \frac{|-13|}{5} = \frac{13}{5}$$

#### 3. Soru

$\phi = x^2y + xz$  fonksiyonunun  $(1, 2, -1)$  noktasnda  $\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  dorultusundaki dorultu trevini bulunuz.

**zm:** Dorultu trevi, bir skaler alann belirli bir yndeki deiim orann ifade eder. Bu, gradyan vektrelere i arpm alnarak bulunur.

Adm 1:  $\vec{A}$ 'y birim vektrelere dntrn:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\hat{A} = \frac{2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

Adm 2:  $\phi$ 'nin gradyan hesaplayalm:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

Ksmi trevleri hesaplayalm:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + z$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = x$$

Gradyan vektrelere:

$$\nabla \phi = (2xy + z)\hat{i} + (x^2)\hat{j} + (x)\hat{k}$$



Adm 3: Gradyan  $(1, 2, -1)$  noktasnda deerlendirin:

$$\nabla\phi(1, 2, -1) = (2(1)(2)+(-1))\hat{i}+(1^2)\hat{j}+(1)\hat{k} = (4-1)\hat{i}+\hat{j}+\hat{k} = 3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$$

Adm 4: Dorultu trevini hesaplayn: Dorultu trevi, gradyan ile birim vektren i arpmdr:

$$D_{\hat{A}}\phi = \nabla\phi \cdot \hat{A} = (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}\right)$$

$$D_{\hat{A}}\phi = (3)\left(\frac{2}{3}\right) + (1)\left(-\frac{2}{3}\right) + (1)\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Sonu olarak,  $\phi$ 'nin  $(1, 2, -1)$  noktasndaki  $\vec{A}$  dorultusundaki dorultu trevi  $\frac{5}{3}$ 'tr.

#### 4. Soru

$x^2y + 2xz = 4$  yzeyinin  $P(2, -2, 3)$  noktasndaki birim normal vektren bulunuz.

**zm:** Yzeyin birim normal vekt, gradyan vektrenn yzeyin o noktasndaki deerinin, gradyan vektrenn bykline blnmesiyle bulunur.

Adm 1:  $f(x, y, z) = x^2y + 2xz - 4 = 0$  olarak tanmlayn.

Adm 2: Gradyan vektren hesaplayn:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Ksmi trevleri hesaplayalm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x$$

Gradyan vekt:

$$\nabla f = (2xy + 2z)\hat{i} + (x^2)\hat{j} + (2x)\hat{k}$$

Adm 3: Gradyan  $P(2, -2, 3)$  noktasnda deerlendirin:

$$\nabla f(2, -2, 3) = (2(2)(-2)+2(3))\hat{i}+(2^2)\hat{j}+(2(2))\hat{k} = (-8+6)\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k} = -2\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$$

Adm 4: Gradyann bykln  $P$  noktasnda hesaplayn:

$$|\nabla f(2, -2, 3)| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Adm 5: Birim normal vektren hesaplayn:

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}}{6} = -\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

Sonu olarak, yzeyin  $P(2, -2, 3)$  noktasndaki birim normal vekt  $-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$ 'dir.