

FMM - Fizikte Matematiksel Metotlar - Ders 2 (6 Mart 2025)

Hazırlayan; Celal Ekrem Torun

Fizik Bölümü, İstanbul Üniversitesi

Beyazıt, Fatih, İstanbul, Türkiye

Eğrisel Koordinat Sisteminin Taban Vektörleri ve Ölçek Çarpanları (Devam)

Bir önceki bölümde, eğrisel koordinat sistemlerinin temel kavramlarını incelemiştik. Bu bölümde, taban vektörleri ve ölçek çarpanları konusuna devam edeceğiz.

Teğet Vektörleri

Eğrisel koordinat sisteminde, teğet vektörleri, her bir koordinatın değişim yönünü gösterir. Konum vektörü $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ olmak üzere, teğet vektörleri şu şekilde tanımlanır:

$$\vec{t}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \quad (1)$$

$$\vec{t}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \quad (2)$$

$$\vec{t}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \quad (3)$$

Bu vektörler, eğrisel koordinat sisteminin tabanını oluşturur.

Taban Vektörleri

Taban vektörleri, teğet vektörlerinin normalleştirilmesiyle elde edilir. Bu vektörler, birim uzunluğa sahiptir ve koordinat sisteminin yönünü gösterir. Taban vektörleri şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{t}_1}{|\vec{t}_1|} = \frac{1}{h_1} \vec{t}_1 \quad (4)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{t}_2}{|\vec{t}_2|} = \frac{1}{h_2} \vec{t}_2 \quad (5)$$

$$\hat{e}_3 = \frac{\vec{t}_3}{|\vec{t}_3|} = \frac{1}{h_3} \vec{t}_3 \quad (6)$$

Burada h_1 , h_2 ve h_3 , ölçek çarpanlarıdır ve teğet vektörlerinin büyüklüklerine eşittir:

$$\bullet h_1 = |\vec{t}_1| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|$$

$$\bullet h_2 = |\vec{t}_2| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|$$

$$\bullet h_3 = |\vec{t}_3| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right|$$

Geometrik Gösterim

Aşağıdaki şema, taban vektörlerini ve eğrisel koordinatları küçük bir Kartezyen sisteminde göstermektedir:

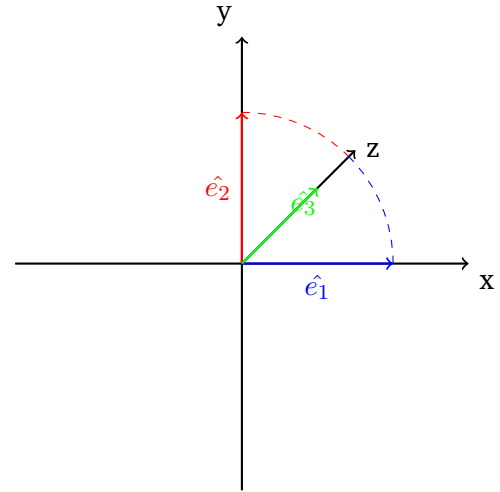


Figure 1: Taban Vektörleri ve Eğrisel Koordinatlar

Bu şemada:

- \hat{e}_1 , \hat{e}_2 ve \hat{e}_3 : Birim taban vektörlerini temsil eder.
- Eğriler: Eğrisel koordinatların değişimini temsil eder.
- $P(u_1, u_2, u_3)$: Eğrisel koordinat sistemindeki bir noktayı temsil eder.

Konum Vektörünün İfadesi

Konum vektörü \vec{r} , Kartezyen koordinatlarda şu şekilde ifade edilir:

$$\vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z \quad (7)$$

Eğrisel koordinatlarda ise, teğet vektörleri kullanılarak ifade edilebilir:



$$\vec{t}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial u_1} \hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u_1} \hat{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u_1} \hat{e}_z \quad (8)$$

Bu ifade, u_1 koordinatındaki değişimin, konum vektörünü nasıl etkilediğini gösterir.