Klasik Mekanik

7 Mar Friday

Ad Soyad: Celal Ekrem Torun - 0411230037

DERS: Doç. Dr. Fatma Aydoğmuş Şen

Kütleçekim ve Küresel Simetri

Kütleçekim Kuvveti ve Hareket Denklemleri

Problem Tanımı

M kütleli bir simetrik kürenin uzak bir noktada bulunan m kütleli parçacığa uyguladığı kütleçekim kuvveti, kürenin merkezinde m kütleli bir noktasal parçacık tarafından uygulanan kuvvete eşdeğerdir. Bu durumda, kürenin merkezi O noktası olarak alınır ve kürenin yarıçapı a olarak tanımlanır. Kürenin çevresi üzerine eşit aralıklarla üç nokta kaynak yerleştirilmiştir. Her bir kaynak tarafından m kütleli parçacığa uygulanan kütleçekim kuvveti aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{R}$$

Burada $\mathbf{R}$, kaynaktan çizilen vektördür. m kütleli parçacık, $t = 0$ anında $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ve $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$ başlangıç koşullarıyla verilmiştir.

Koordinat Sistemi ve Kuvvetler

Koordinat sistemini çizerek, herhangi bir zamanda m kütleli parçacığa etki eden kuvveti gösterelim. Kürenin merkezi O noktası olarak alınır ve kürenin çevresi üzerine eşit aralıklarla yerleştirilen üç nokta kaynak $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ ve $\mathbf{r}_3$ vektörleriyle gösterilir. Bu durumda:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$$

m kütleli parçacığa etki eden toplam kuvvet:

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) - k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3)$$

Bu ifadeyi sadeleştirirsek:

$$\mathbf{F} = -3k\mathbf{r} + k(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = -3k\mathbf{r}$$

Hareket Denklemi

Newton'un ikinci yasasına göre:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -3k\mathbf{r}$$

Bu denklem, basit harmonik hareket denklemidir:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{3k}{m}\mathbf{r} = 0$$

Bu denklemin çözümü, karakteristik denklem kullanılarak bulunabilir:

$$\lambda^2 + \frac{3k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Bu durumda, genel çözüm:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\cos(\omega t) + \mathbf{B}\sin(\omega t)$$

Burada $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ olarak tanımlanır. Başlangıç koşullarını kullanarak:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \mathbf{A}\cos(0) + \mathbf{B}\sin(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{r}_0$$

$\dot{\mathbf{r}} FizikBölümü, İstanbulÜniversitesiBeyazıt, Fatih, İstanbul, Tür$

Kütleçekim ve Küresel Simetri

Kütleçekim Kuvveti ve Hareket Denklemleri

Problem Tanımı

M kütleli bir simetrik kürenin uzak bir noktada bulunan m kütleli parçacığa uyguladığı kütleçekim kuvveti, kürenin merkezinde m kütleli bir noktasal parçacık tarafından uygulanan kuvvete eşdeğerdir. Bu durumda, kürenin merkezi O noktası olarak alınır ve kürenin yarıçapı a olarak tanımlanır. Kürenin çevresi üzerine eşit aralıklarla üç nokta kaynak yerleştirilmiştir. Her bir kaynak tarafından m kütleli parçacığa uygulanan kütleçekim kuvveti aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{R}$$

Burada $\mathbf{R}$, kaynaktan çizilen vektördür. m kütleli parçacık, $t = 0$ anında $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ve $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$ başlangıç koşullarıyla verilmiştir.

Koordinat Sistemi ve Kuvvetler

Koordinat sistemini çizerek, herhangi bir zamanda m kütleli parçacığa etki eden kuvveti gösterelim. Kürenin merkezi O noktası olarak alınır ve kürenin çevresi üzerine eşit aralıklarla yerleştirilen üç nokta kaynak $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ ve $\mathbf{r}_3$ vektörleriyle gösterilir. Bu durumda:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$$

m kütleli parçacığa etki eden toplam kuvvet:

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) - k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3)$$

Bu ifadeyi sadeleştirirsek:

$$\mathbf{F} = -3k\mathbf{r} + k(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = -3k\mathbf{r}$$

Hareket Denklemi

Newton'un ikinci yasasına göre:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -3k\mathbf{r}$$

Bu denklem, basit harmonik hareket denklemidir:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{3k}{m}\mathbf{r} = 0$$

Bu denklemin çözümü, karakteristik denklem kullanılarak bulunabilir:

$$\lambda^2 + \frac{3k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Bu durumda, genel çözüm:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\cos(\omega t) + \mathbf{B}\sin(\omega t)$$

Burada $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ olarak tanımlanır. Başlangıç koşullarını kullanarak:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \mathbf{A}\cos(0) + \mathbf{B}\sin(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{r}_0$$

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 = -\mathbf{A}\omega\sin(0) + \mathbf{B}\omega\cos(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}$$

Sonuç olarak, parçacığın konumu zamanla:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0\cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Çembersel Yörünge Koşulları

Çembersel yörünge için, parçacığın başlangıç hızı $\mathbf{v}_0$ ve konumu $\mathbf{r}_0$ arasında belirli bir ilişki olmalıdır. Eğer $\mathbf{v}_0$ ve $\mathbf{r}_0$ birbirine dik ise ve $|\mathbf{v}_0| = \omega|\mathbf{r}_0|$ ise, parçacık çembersel bir yörüngede hareket eder.

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{ve} \quad |\mathbf{v}_0| = \omega|\mathbf{r}_0|$$

Bu koşullar sağlandığında, parçacık çembersel bir yörüngede hareket edecektir.