確率論まとめ

2024 年 7 月 15 日

1　確率空間

1.1　標本空間と事象

1.1.1　導入

はじめに言葉を定義する。ある試行を行ったときの事象を標本点と呼ぶ。標本点全体を標本空間と呼ぶ。ここで標本空間を Ω で示す。試行を行った時の発生する事象を A で表す。A は標本空間の部分集合であり、$A = \Omega$ の時 A を全事象、A が標本点を持たないとき A は空事象と呼ばれる。なお空事象は $\emptyset$ で表される。事象 A が起きない事象を補事象と呼び、A^C で表される。

さらに 2 つ以上の事象を考えてみる。2 つの事象 A と B において少なくとも一方が起きるという事象を A と B の和事象と呼ばれる。これは $A \cup B$ で表される。また A、B の両方が起こる事象について積事象と呼び、$A \cap B$ で表される。A、B が同時に起こりえないことを排反と呼ぶ。

実例を示してみよう。サイコロを 1 回振ったときに結果は 1,2,3,4,5,6 のいずれかである。このときの結果 1 つ 1 つが標本点である。標本空間は

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{1,1}$$

サイコロを振った時に 6 以下の自然数が出るという事象は Ω のため全事象、7 以上の自然数が出るという事象は空事象となる。サイコロを振った時に奇数が出る事象を A とすると、補事象 A^C は偶数が出る事象となる。サイコロを振った時に 3 以下が出る事象を B とすると、A と B の和事象は $\{1, 2, 3, 5\}$, 積事象は $\{1, 3\}$ となる。サイコロを振った時に 5 が出る事象を C とすると、A と C は排反である。

1.1.2　ド・モルガンの法則

和事象と積事象の補集合に関する法則である。具体的には次式で表される。

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \tag{1,2}$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \tag{1,3}$$

ここで導入のサイコロの例をもとに実例を挙げてみよう。A はサイコロを振った時に奇数が出る事象、B はサイコロを振った時に 3 以下が出る事象である。

$$(A \cup B)^C = \{1, 2, 3, 5\}^C = \{4, 6\} \tag{1,4}$$

$$A^C \cap B^C = \{1, 3, 5\}^C \cap \{1, 2, 3\}^C = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\} \tag{1,5}$$

$$(A \cap B)^C = \{1, 3\}^C = \{2, 4, 5, 6\} \tag{1,6}$$

$$A^C \cup B^C = \{1, 3, 5\}^C \cap \{1, 2, 3\}^C = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\} \tag{1,7}$$

1.1.3 結合法則及び分配法則

確率の事象にも結合法則及び分配法則が適応可能。具体的には次式で表される。

$$(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \tag{1,8}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \tag{1,9}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1,10}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{1,11}$$

1.2 確率の定義

確率とは事象の起きやすさを表す量である。事象 A が起きる確率を $P(A)$ と表す。具体的には以下に示す確率の公理を満たす写像 $P(A)$ を確立と呼ぶ。

- 事象 A に対して $P(A)$ は実数である。そして $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- 互いに排反な事象 $A_1, \cdots, A_n$ に対して、$P(A_1 \cup \cdots \cup A_N) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$

1.3 確率の性質

確率の公理より簡単に導くことができる性質を以下に示す。

$$P(\emptyset) = 0 \tag{1,12}$$

$$P(A^C) = 1 - P(A) \tag{1,13}$$

$$A \subset B => P(A) \leq P(B) \tag{1,14}$$

1.3.1 加法定理

さらに確率の公理より次の等式が成立する。

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B) \tag{1,15}$$

$$P(A) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) \tag{1,16}$$

$$P(A) = P(A^C \cap B) + P(A \cap B) \tag{1,17}$$

これら 3 式を足すことで加法定理が得られる。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1,18}$$

1.4 条件付確率

2 つの事象 A と B に対して、事象 A が起きたという条件の下で事象 B が起きるといった確率を条件付確率と呼び $P(B|A)$ と表す。条件付確率は次式で求めることができる。

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1,19}$$

また次式を変形すると

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \tag{1,20}$$

なおこの式を乗法定理と呼ぶ。

具体例を考えてみる。袋 X が 1 つと袋 Y が 2 つ存在し、袋 X には赤玉 3 個白玉 1 個、袋 Y には赤玉 2 個白玉 1 個あるとする。袋を 1 つ選びその中から 1 つ球をとるということを考える。袋 X を引いたときに白玉を引く確率を考える。袋 X を引く事象を A、白玉を引く事象を B とする。$P(A) = \frac{1}{3}$ であり、$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ よって条件付確率 $P(B|A) = \frac{1}{4}$ である。

また袋 Y を引く事象を C、赤玉を引く事象を D とすると、$P(C) = \frac{2}{3}$、$P(D|C) = \frac{1}{2}$ のため、乗法定理より $P(C \cap D) = \frac{1}{3}$ となる。もしこの具体例がわからない場合は図示して考えてみるとよい。

1.5 独立性

2 つの事象 A と B に対して、$P(B|A) = P(B)$ となるとき、事象 A と事象 B は独立という。独立である条件は A が B に依存しないことである。このとき乗法定理は次のように変形できる。

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{1,21}$$

実例としてサイコロを 2 回振った時の出目の組み合わせを考えてみる。1 回目に振り奇数が出る事象を A、2 回目に振り奇数が出る事象を B とすると、A と B はお互い依存していない。よって $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ となる。

1.6 ベイズの定理

事象 A が事象 $B_1, \cdots, B_k$ の事象が発生したときのみに起こりうるということを考える。そして $B_1, \cdots, B_k$ 以外の事象が発生したときに A は起こらないこととする。つまり事象 B_i が発生し、事象 A が起こるような条件を考える。このとき事象 A が起きたときにそれが B_i という事象であったという条件付確率を求める。この時求める確率は $P(B_i|A)$ となる。(1,19) 式より、

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} \tag{1,22}$$

ここで A というのは条件 $B, \cdots, B_k$ が起こった上で発生するため、

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j) \tag{1,23}$$

よって次式が成立する。

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)} \tag{1,23}$$

なおこの式をベイズの定理と呼ぶ。

やはり式だけ見てもわかりずらいため実例を出してみる。袋 B_1 に赤玉 3 つ白玉 1 つ、袋 B_2 に赤玉 2 つ白玉 2 つ、袋 B_3 に赤玉 3 つ白玉 2 つあるとする。この時袋 B_i を選ぶ事象を B_i とし、白玉を選ぶ事象を A とする。ここで白玉を引いたときにそれが袋 B_2 から引いたものである確率をベイズの定理を用いて計算する。まず B_i だが 3 種類の袋を偏りなく選ぶため確率は $\frac{1}{3}$。ここで $P(A|B_1) = \frac{1}{3}$,$P(A|B_2) = \frac{1}{2}$,$P(A|B_3) = \frac{2}{5}$ よってベイズの定理より、

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{10}{23} \tag{1,24}$$

2　確率変数と確率分布