正規分布の期待値（平均)、分散、標準偏差とその導出

統計太郎

2025-10-06

Contents

参考

本ドキュメントは以下の資料を参考に作成している。

- Web サイト: 数学の景色 - 正規分布の期待値 (平均)・分散・標準偏差とその導出証明
- Web サイト: 数学の景色 - 【LaTeX】定理環境 amsthm パッケージの使い方を徹底解説

イントロダクション：正規分布の期待値、分散、標準偏差

本ドキュメントでは、正規分布の定義から期待値、分散、標準偏差を導出する。

まずは正規分布の期待値、分散、標準偏差の定理を確認する。

定理. 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき（$X \sim N(\mu, \sigma^2)$）、X の期待値、分散、標準偏差はそれぞれ次のとおりとなる。

$$E[X] = \mu, \qquad V(X) = \sigma^2, \qquad \sqrt{V(X)} = \sigma.$$

正規分布の定義

まず、正規分布の確率密度関数の定義を確認する。

定義. X を確率変数、$\mu \in \mathbb{R}$、$\sigma > 0$ とする。X の確率密度関数が

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

となるとき、X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$（normal distribution）に従うといい、$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表す。

正規分布の期待値、分散、標準偏差の導出

正規分布の期待値（平均）の導出

定理． $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ に対して期待値は $E[X] = \mu$ である。

証明．正規分布の定義より、確率密度関数は

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

と表される。期待値は定義から

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ((x-\mu)+\mu)p(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)p(x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

正規分布は確率密度関数の積分が 1 であるため、第一項は μ となる。第二項は変数変換 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ を用いると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)p(x)\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

被積分関数 $y \exp(-y^2/2)$ は奇関数であり、積分区間 $(-\infty, \infty)$ は対称であるため、この積分は 0 となる。したがって

$$E[X] = \mu + 0 = \mu$$

が得られる。 $\square$

正規分布の分散の導出

定理. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ に対して分散は $V(X) = \sigma^2$ である。

証明. 分散の定義から

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

となる。期待値の導出と同様に $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ と置くと

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y)^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

ここで積分を評価するために、偶関数性を利用して積分区間を $[0, \infty)$ へ制限し、部分積分を適用する。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y &= 2\int_{0}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y \\ &= 2\left[-y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^{\infty} + 2\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

境界項は 0 に収束するため消える。また、ガウス積分（正規分布の正規化条件）[1]より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}$$

が成り立つので、半区間の積分はその半分であり、$\int_0^{\infty} \exp(-y^2/2)\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}/2$ となる。以上から

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}$$

が得られる。したがって

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = \sigma^2$$

が示された。 □

[1] Web サイト: 数学の景色 - ガウス積分のさまざまな形とその証明 5 つ

正規分布の標準偏差の導出

標準偏差の定義は、分散の平方根 $\sqrt{V(X)}$ である。分散が $V(X) = \sigma^2$ と導出されたことから、

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

が直ちに得られる。